

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica

Tesi di Laurea Magistrale

**Modello unidimensionale e simulazione della
pressatura della carta umida per mezzo di
una pressa a scarpa**



Relatore

prof. Carlo Camporeale

Correlatore

ing. Alberto Brandol

Candidato

Emanuele Sardo

11 dicembre 2018

A mia mamma

Indice

| | |
|--|----|
| Elenco delle figure | VI |
| 1 Introduzione | 1 |
| 1.1 La carta | 1 |
| 1.2 Processo di produzione della carta | 3 |
| 2 La pressa a scarpa | 5 |
| 3 Modello matematico | 7 |
| 3.1 Problema generale | 7 |
| 3.2 Carta | 7 |
| 3.2.1 Modello euleriano | 8 |
| 3.2.2 Modello lagrangiano | 10 |
| 3.2.3 Condizioni al contorno | 12 |
| 3.3 Feltro | 13 |
| 3.3.1 Feltro completamente bagnato | 13 |
| 3.3.2 Feltro completamente asciutto | 14 |
| 3.3.3 Feltro parzialmente bagnato | 14 |
| 3.4 Carta e feltro | 14 |
| 3.4.1 Carta e feltro saturi | 15 |
| 3.5 Equazioni costitutive | 18 |
| 4 Risultati e discussione | 20 |
| 4.1 Considerazioni generali | 20 |
| 4.1.1 Precisione del modello | 20 |
| 4.1.2 Stima delle equazioni costitutive | 20 |
| 4.1.3 Profilo di tensione | 23 |
| 4.2 Risultati per la carta | 24 |
| 4.2.1 Esempi di risultati e discussione | 24 |
| 4.3 Risultati per il caso completo: carta-feltro | 29 |
| 4.3.1 Riumidificazione | 30 |
| 4.3.2 Condizione al contorno di velocità | 33 |
| 4.3.3 Considerazioni finali | 35 |

| | | |
|----------|-------------------------|----|
| 5 | Conclusioni | 37 |
| A | Analisi di scala | 38 |
| | Bibliografia | 41 |

Elenco delle figure

| | | |
|------|--|----|
| 1.1 | Schema delle zone di eliminazione dell'acqua di una macchina per la carta | 3 |
| 2.1 | Schema di una pressa a scarpa a doppio feltro | 6 |
| 4.1 | Funzioni $\phi(\sigma)$ originale e modificata per una polpa meccanica | 21 |
| 4.2 | Funzioni $K(\sigma)$ originale e modificata per una polpa meccanica | 22 |
| 4.3 | Diffusività $D(\sigma)$ per una polpa meccanica e per il feltro | 23 |
| 4.4 | Profili di tensione tipici per la pressa a scarpa: (a) rettangolare, (b) trapezoidale | 24 |
| 4.5 | Evoluzione della tensione $\sigma(X, t)$ per una polpa meccanica. Velocità di lavorazione $u = 1500$ m/min. Grammatatura $w = 83$ g/m ² | 25 |
| 4.6 | Evoluzione del grado di secco SC per una polpa meccanica. Velocità di lavorazione $u = 1500$ m/min. Grammatatura $w = 83$ g/m ² . Modello simmetrico. | 26 |
| 4.7 | Grado di secco all'uscita della pressa per un foglio di grammatura $w = 110$ g/m ² costituito da una polpa meccanica, lavorato a diverse velocità. | 27 |
| 4.8 | Evoluzione del grado di secco SC per una polpa meccanica. Velocità di lavorazione $u = 1000$ m/min. Grammatatura $w = 110$ g/m ² . Dominio euleriano. | 28 |
| 4.9 | Evoluzione della tensione σ per il caso completo con feltro. La carta è una polpa meccanica. Velocità di lavorazione $u = 1500$ m/min. Grammatatura $w = 83$ g/m ² | 29 |
| 4.10 | Confronto del grado di secco SC all'uscita della scarpa, ottenuto con il modello semplificato e con il modello completo, per una polpa meccanica. Velocità di lavorazione $u = 1500$ m/min. Grammatatura $w = 83$ g/m ² | 30 |
| 4.11 | Evoluzione della tensione σ per una polpa chimica. Velocità di lavorazione $u = 1500$ m/min. Grammatatura $w = 147$ g/m ² | 31 |
| 4.12 | Evoluzione del grado di secco per una polpa chimica, ottenuta con il modello carta-feltro e dominio simmetrico ($X = 4$ mm interfaccia carta-feltro). Velocità di lavorazione $u = 1500$ m/min. Grammatatura $w = 147$ g/m ² | 32 |
| 4.13 | Ampiezza del nip ottenuta con il relativo profilo di carico. La carta è una polpa chimica sottoposta a battitura. Velocità di lavorazione $u = 1500$ m/min. Grammatatura $w = 147$ g/m ² | 33 |
| 4.14 | Velocità del feltro al contorno per lavorare per una polpa chimica. Velocità di lavorazione $u = 1500$ m/min. Grammatatura $w = 147$ g/m ² | 34 |

| | | |
|------|--|----|
| 4.15 | Evoluzione della tensione nel dominio euleriano e tensione al bordo, ottenuti con una condizione al contorno di velocità. La carta è una polpa chimica sottoposta a battitura. Velocità di lavorazione $u = 1500$ m/min. Grammatura $w = 147$ g/m ² | 35 |
| 4.16 | Evoluzione del grado di secco in coordinate euleriane per una polpa chimica. Velocità di lavorazione $u = 1500$ m/min. Grammatura $w = 147$ g/m ² | 36 |

Capitolo 1

Introduzione

La carta. Oggi, nel pieno dell'era digitale, i primi pensieri che nascono pensando alla carta molto probabilmente sono legati al passato, quando si leggevano libri di carta, riviste e giornali. In realtà a pensarci bene la carta è tutt'altro che sparita. È vera la crisi dell'editoria cartacea, ma rimane comunque un materiale onnipresente, sulle scrivanie ancora sommerse di documenti, come appunti degli studenti, probabilmente una copia di questa tesi, agli imballaggi di carta e cartone, sempre più utilizzati a discapito della tanto "odiata" plastica. In questa sezione verranno quindi delineati i tratti fondamentali della carta e del metodo industriale per produrla, in modo da aver chiaro ciò su cui verterà la modellizzazione matematica.

1.1 La carta

Nonostante la sua comune presenza nella vita quotidiana, la carta è un materiale tutt'altro che comune dal punto di vista delle proprietà. Deve infatti essere leggera, flessibile, brillante, resistente, liscia oltre a mille altre caratteristiche in base all'utilizzo; risulta quindi complicata una definizione dettagliata dal punto di vista fisico. Sicuramente la caratteristica tipica della carta è l'essere un materiale costituito da un elevato numero di fibre legate tra loro mediante legami ad idrogeno.

Come ben si sa, sono fibre di origine vegetale, costituite essenzialmente di cellulosa. Le proprietà finali del prodotto sono innanzitutto dovute all'origine delle fibre ed al loro metodo di estrazione. Le fibre possono quindi essere:

- vergini;
- riciclate.

Le fibre riciclate provengono dal riutilizzo di scarti industriali e dalla raccolta differenziata dei rifiuti, hanno una qualità generalmente inferiore rispetto alle fibre vergini, ma permettono di risparmiare il patrimonio forestale. Le fibre vergini utilizzate per la stragrande maggioranza della carta provengono essenzialmente dal legname; invece per carte speciali,

di nicchia rispetto alla produzione totale come le banconote, si utilizza ad esempio il cotone, poiché si tratta di cellulosa molto pura e pregiata. Focalizzandosi sulle fibre di ampio utilizzo, esse vengono suddivise in due grandi categorie; ovvero se sono ricavate da:

- legnami duri;
- legnami morbidi.

I primi derivano dalle angiosperme[1], le tipiche caducifoglie, costituite da fibre di struttura molto complessa e lunghezza tipica di $0,9 \div 1,5$ mm; conducono ad una carta liscia, ma di modesta resistenza. Vengono invece chiamati legnami morbidi le gimnosperme (conifere), la loro struttura è meno complessa rispetto alle angiosperme e le fibre hanno una lunghezza maggiore, tipicamente intorno a 3 mm. La maggior lunghezza delle fibre permette di ottenere generalmente una carta di maggior resistenza.

Le fibre sono essenzialmente costituite di cellulosa e lignina e devono essere estratte dal legname per poter essere utilizzate; l'estrazione può essere svolta con un metodo chimico, uno meccanico oppure una loro combinazione. L'estrazione meccanica è la più economica, il legno viene sminuzzato finemente e lavato, si ottiene così una polpa costituita da fibre di modesta qualità in quanto formate da cellulosa e lignina. Viene comunemente denominata *polpa o pasta meccanica*, utilizzata per produrre carte poco pregiate e di bassa resistenza, come i giornali, in quanto la lignina ostacola la formazione dei legami ad idrogeno tra le fibre; inoltre la lignina se esposta alla luce ed all'aria ingiallisce. I metodi chimici hanno un costo maggiore rispetto al metodo meccanico, l'idea alla loro base è di sciogliere la lignina in modo da avere una fibra finale costituita unicamente di cellulosa. Esistono vari metodi per ottenere tale risultato, differiscono per il processo chimico impiegato, il quale può portare ad un solvente per la lignina di tipo acido oppure basico. Il metodo maggiormente diffuso è denominato *metodo Kraft*¹, utilizza solfato di sodio per ottenere l'idrossido di sodio come solvente, è quindi un metodo basico. Il risultato finale è quindi, come abbiamo detto, una fibra di cellulosa sostanzialmente pura; si ottengono così le *polpe chimiche*, di migliore qualità rispetto a quelle meccaniche. Per ottenere fibre con caratteristiche intermedie tra quelle illustrate, vengono utilizzati metodi facenti uso sia di energia meccanica che di processi chimici. Un'altra soluzione tipicamente adottata per ottenere un buon compromesso costo-qualità della carta, è la miscelazione di paste chimiche e meccaniche.

Le fibre ottenute, sia con metodi meccanici che chimici, sono essenzialmente assimilabili a tubicini cilindrici aventi un diametro nell'ordine di $10 \mu\text{m}$ e lunghezza simile alle fibre del legname da cui sono state ricavate, in particolare le fibre ottenute con un processo meccanico possono incorrere in tagli e rotture, risultando così più corte. In ogni caso la singola fibra possiede una elevata resistenza meccanica, ma la resistenza della carta sarà proporzionale al numero di legami ad idrogeno tra le fibre, da cui si comprende l'influenza della lignina. Per questo motivo le fibre possono essere sottoposte a raffinazione, detta

¹ Il metodo Kraft è stato inventato nel 1879 dal chimico tedesco Carl F. Dahl. Rispetto ad altri metodi è più veloce e porta ad una polpa di migliore qualità, da cui il nome; infatti kraft in tedesco significa *efficace, forte*.

anche *battitura*, in modo da migliorare le caratteristiche del prodotto finale, tra cui appunto la resistenza della carta. La battitura è infatti un processo meccanico che va ad indebolire ed eventualmente tagliare la singola fibra, ma causa la fibrillazione della stessa, ovvero la formazione di rami secondari che permettono di avere un numero maggiore di legami ad idrogeno. La polpa può ancora essere sbiancata ed additivata per ottenere le caratteristiche estetiche volute.

1.2 Processo di produzione della carta

La materia prima per la produzione della carta è la polpa di fibre, che sia prodotta in loco o da esterni, la quale attraversa una serie di macchinari per ottenere il prodotto finito. L'insieme di questi macchinari è comunemente detto *macchina della carta*, avente dimensioni ragguardevoli, spesso oltre il centinaio di metri di sviluppo e la decina di metri in larghezza.

La formazione della carta deve avvenire in presenza di molta acqua, in quanto essa facilita notevolmente la costituzione dei legami ad idrogeno tra le fibre e permette di ottenere un prodotto di caratteristiche omogenee. Però se da un lato l'acqua permette la formazione della carta, lo sforzo da compiere per rimuoverla ed ottenere un foglio asciutto costituisce essenzialmente la totalità del costo di produzione. Accettato questo paradosso, la struttura tipica delle macchine della carta è consolidata da anni. Le fibre vengono fortemente diluite in modo da ottenere una sospensione fibrosa, costituita da circa lo 0,5% di solido e raccolta nella *cassa di afflusso*. L'acqua viene quindi eliminata per via meccanica e termica, il foglio così ottenuto è completamente formato ed asciutto, può essere sottoposto a calandratura ed infine arrotolato. L'eliminazione dell'acqua è concettualmente suddivisa in tre parti, figura 1.1, ovvero:

- la zona di formazione del foglio;
- zona di pressatura;
- seccheria.

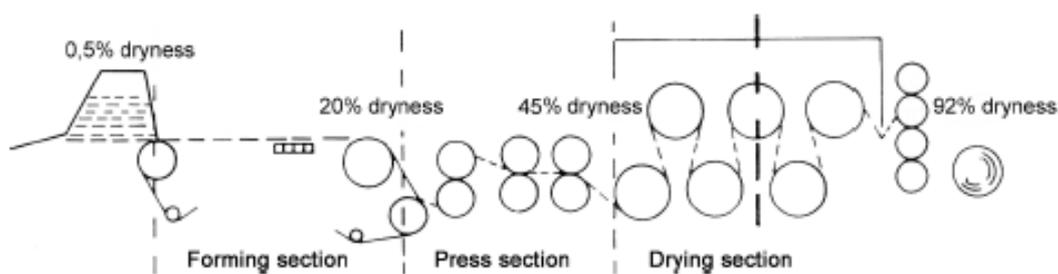


Figura 1.1: Schema delle zone di eliminazione dell'acqua di una macchina per la carta

Nella prima zona, la sospensione viene espulsa dalla cassa d'afflusso con un forte getto sulla tela formatrice, ovvero un nastro altamente permeabile, tradizionalmente costituito

da una maglia metallica, oggigiorno sempre più spesso in polimero. Le caratteristiche del getto permettono di avere una distribuzione uniforme delle fibre sulla tela formatrice. Questa fase è molto importante in quanto avviene la formazione del foglio di carta, tramite l'instaurazione della maggioranza dei legami tra le fibre; il foglio può quindi sostenere degli sforzi meccanici, a differenza della sospensione. È questa la fase in cui viene persa la maggioranza dell'acqua; infatti al distacco dalla tela formatrice il foglio è costituito tipicamente da circa il 20% di solido.

Il foglio può ora sostenere il proprio peso ed entra nella zona di pressatura. In questa fase il foglio di carta è sostenuto da uno o due feltri che lo conducono alle presse. Le presse fanno parte di due grandi famiglie, ovvero le *presse a rulli contrapposti* e le *presse a scarpa*; tradizionalmente la zona di pressatura era costituita da tre o quattro presse a rulli, ad oggi sostituite da una o due presse a scarpa od eventualmente adottando una combinazione di presse di entrambe le tipologie. L'acqua viene in ogni caso espulsa per via meccanica, attraverso la compressione del foglio stesso, ed accolta dai feltri. In base al numero ed alla combinazione di presse utilizzate, alla tipologia di fibre, alla velocità di lavorazione, il foglio di carta può lasciare questa zona con un tenore di solido, detto anche *grado di secco*, tipico intorno al 50%.

L'acqua rimanente, ovvero poche unità percentuali dell'acqua presente nella sospensione iniziale, viene eliminata in seccheria per via termica; infatti il foglio passa attraverso una serie di rulli e getti di vapore, in modo da scaldare e far evaporare l'acqua contenuta nel foglio stesso. In realtà non viene completamente eliminata, il tenore di solido finale si aggira intorno al 95%, valore tipico della carta in equilibrio con l'umidità presente nell'aria.

Sebbene soltanto la minima parte dell'acqua venga eliminata termicamente, la maggioranza della spesa energetica per la produzione della carta è dovuta proprio a questa fase, da cui il "dogma" di entrare in seccheria con il grado di secco più alto possibile. Con i livelli di produzione attuali, una differenza all'uscita dalle presse anche di pochi punti percentuale si traduce in perdite o risparmi notevoli (anche di milioni di euro per le grandi cartiere). Si comprende quindi l'importanza della ricerca e della progettazione di presse sempre più performanti. Questa tesi si focalizzerà sulle presse a scarpa, in particolare sulla sua modellizzazione matematica, al fine di poter simulare il processo di compressione del foglio al suo interno.

Capitolo 2

La pressa a scarpa

Le prime presse a scarpa furono utilizzate negli anni settanta del secolo scorso e furono presentate come *extended nip press*, ovvero presse a nip esteso. Nel gergo dell'industria cartaria il *nip* identifica la zona della pressa in cui avviene effettivamente la compressione, il termine è stato dapprima utilizzato per le presse a rulli, in seguito anche per le presse a scarpa¹. Come è intuibile le presse a scarpa hanno un nip molto più esteso rispetto a quello ottenibile nelle presse a rulli, infatti la caratteristica che le differenzia da queste ultime è la sostituzione di un rullo con un profilo opportunamente sagomato, chiamato scarpa, caratterizzato da una curvatura opposta rispetto al rullo concettualmente sostituito, figura 2.1. Si passa così da un nip di pochi millimetri per le presse a rulli, ad un'estensione tipica di 250 mm per le presse a scarpa. Avere un nip esteso si traduce in un maggior tempo a disposizione per l'espulsione dell'acqua, inoltre sagomando opportunamente il profilo della scarpa è possibile ottenere dei diagrammi di pressione senza picchi, che possono risultare deleteri per la qualità finale del prodotto. L'effetto concomitante di questi fattori permette di ottenere gradi di secco all'uscita delle presse anche decisamente maggiori del 55%, con un notevole risparmio economico.

Costruttivamente la scarpa non è a diretto contatto con il feltro, ma vi è interposta una manica in polimero (*blanket*), costituente un anello chiuso. Detta manica scivola sul profilo sagomato opportunamente lubrificato, idrodinamicamente o idrostaticamente in base alla soluzione costruttiva adottata, in modo da ridurre notevolmente l'attrito. Dall'altro lato della pressa vi è il rullo, che può essere a diretto contatto con il foglio di carta oppure con un secondo feltro.

Nella prossima sezione sarà quindi modellizzata la zona di compressione, ovvero il nip. In particolare saranno presentate le equazioni che governano la dinamica della carta e dei feltri all'interno del nip, trascurando quindi la manica in polimero, ovvero l'interfaccia tra il feltro e la manica sarà spesso confusa con il profilo della scarpa.

¹La traduzione letterale di nip è *pizzico*, ma poiché "suona" male viene usata la dicitura anglofona anche in italiano.

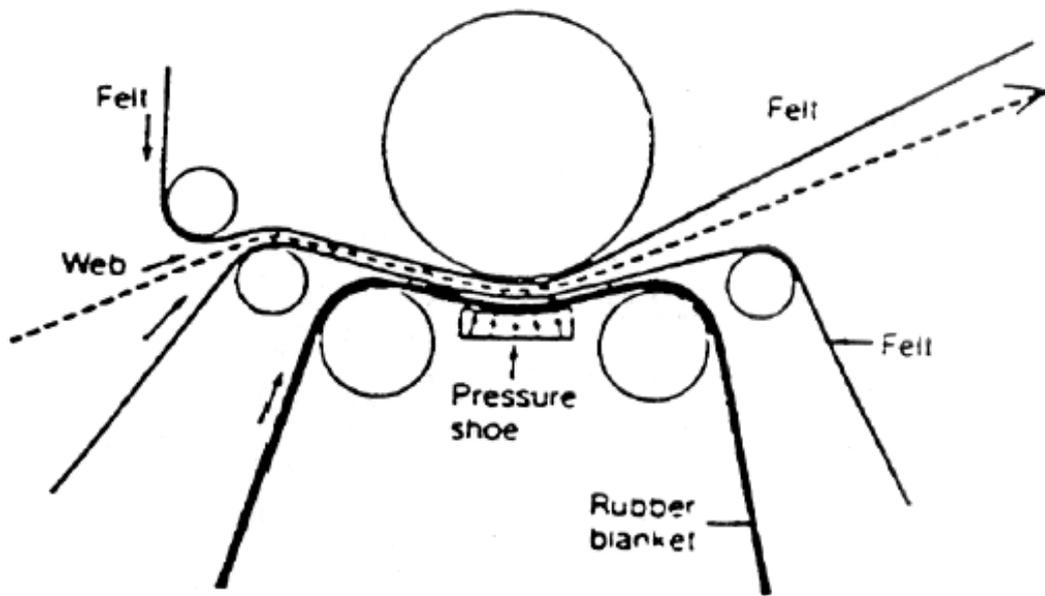


Figura 2.1: Schema di una pressa a scarpa a doppio feltro

Capitolo 3

Modello matematico

3.1 Problema generale

L'asciugatura meccanica della carta può essere studiata e modellizzata riferendosi alla *mixture theory*, più specificatamente alla teoria che studia i flussi in mezzi porosi deformabili. Nel nostro caso i mezzi porosi sono la carta ed il feltro, attraversati da un flusso di acqua ed eventualmente aria. La suddetta teoria permette di studiare la dinamica del sistema considerandolo composto da un miscuglio di più fasi. Le fasi, a loro volta, sono considerate dei mezzi continui interagenti a livello microscopico.

Nel caso isoteramico e in assenza di cambiamenti di fase e reazioni chimiche, le equazioni che nascono dalla teoria sono la conservazione della massa e della quantità di moto per ogni fase coinvolta. In generale il problema è complesso da trattare, ma con le dovute ipotesi semplificative può essere reso maneggiabile.

Nelle sezioni seguenti saranno esposte in dettaglio le equazioni per la carta ed il feltro; seguendo prima il formalismo euleriano e poi quello lagrangiano.

3.2 Carta

Si sviluppano in questa sezione le equazioni relative alla carta, introducendo innanzitutto alcune ipotesi semplificative. Si assume che:

1. la carta sia satura di acqua;
2. le fasi abbiano massa volumica costante;
3. le forze di massa siano trascurabili;
4. le forze capillari siano trascurabili;
5. il flusso sia caratterizzato da un basso numero di Reynolds.

3.2.1 Modello euleriano

Con la prima assunzione si va ad escludere la presenza dell'aria, si ha pertanto un sistema bifasico carta-acqua. A seguito delle altre ipotesi le equazioni di bilancio della massa e della quantità di moto, scritte da un punto di vista euleriano, sono le seguenti.

CONSERVAZIONE DELLA MASSA PER LA FASE SOLIDA

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \vec{v}_s) = 0 \quad (3.1)$$

dove ϕ è la frazione volumica di solido e \vec{v}_s è la velocità del solido.

CONSERVAZIONE DELLA MASSA PER IL LIQUIDO

$$-\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot [(1 - \phi) \vec{v}_l] = 0 \quad (3.2)$$

dove \vec{v}_l è la velocità del fluido e dove, a seguito dell'ipotesi di saturazione, la frazione volumica del fluido è $(1 - \phi)$, talvolta chiamata porosità.

CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO PER LA MISCELA

$$\nabla \cdot (p\mathbf{I} + \mathbf{T}') = 0 \quad (3.3)$$

dove $(p\mathbf{I} + \mathbf{T}')$ è il tensore delle tensioni del miscuglio (positivo in compressione); p è la pressione del liquido e \mathbf{T}' è la cosiddetta tensione in eccesso, che in questo caso corrisponde al tensore delle tensioni del solido.

LEGGE DI DARCY

$$\vec{v}_l - \vec{v}_s = -\frac{\mathbf{K}(\mathbf{F})}{\mu(1 - \phi)} \nabla p \quad (3.4)$$

dove μ è la viscosità del liquido, assunta costante; \mathbf{K} è il tensore della permeabilità che si assume dipenda da \mathbf{F} , che è il gradiente di deformazione del solido

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad (3.5)$$

in cui \vec{x} sono le coordinate attuali (euleriane) e \vec{X} sono le coordinate nella configurazione di riferimento (lagrangiane).

È da notare che le equazioni di conservazione della quantità di moto per le due fasi non sono scritte esplicitamente, ma sono combinate nella legge di Darcy e nella (3.3). In particolare la legge di Darcy lega il moto del fluido alla presenza di un mezzo poroso, mentre la (3.3) rappresenta l'equilibrio delle tensioni.

Per chiudere il problema devono chiaramente essere note le equazioni costitutive del solido, che permettono di definire i tensori \mathbf{K} e \mathbf{T}' .

Sommando la (3.1) e la (3.2) si ottiene

$$\nabla \cdot \vec{v}_c = 0 \quad (3.6)$$

dove $\vec{v}_c = (1 - \phi)\vec{v}_l + \phi\vec{v}_s$ è solitamente chiamata velocità composta. Tale velocità non è una nuova variabile del sistema, ma è un vincolo che il sistema deve soddisfare. Può inoltre essere scritta come

$$\vec{v}_c = (1 - \phi)(\vec{v}_l - \vec{v}_s) + \vec{v}_s \quad (3.7)$$

che insieme alla legge di Darcy fornisce

$$\vec{v}_c - \vec{v}_s = (1 - \phi)(\vec{v}_l - \vec{v}_s) = -\frac{\mathbf{K}(\mathbf{F})}{\mu} \nabla p \quad (3.8)$$

Moltiplicando per ϕ e facendo la divergenza si ha

$$\nabla \cdot (\phi \vec{v}_s) = \nabla \cdot \left(\phi \frac{\mathbf{K}(\mathbf{F})}{\mu} \nabla p \right) + \vec{v}_c \nabla \phi \quad (3.9)$$

Sostituendo nella (3.1) si ottiene

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\phi \frac{\mathbf{K}(\mathbf{F})}{\mu} \nabla p \right) + \vec{v}_c \nabla \phi = 0 \quad (3.10)$$

Facendo uso della (3.3), scritta nella forma

$$\nabla p = -\nabla \cdot \mathbf{T}' \quad (3.11)$$

si ha infine

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\phi \frac{\mathbf{K}(\mathbf{F})}{\mu} \nabla \cdot \mathbf{T}' \right) - \vec{v}_c \nabla \phi \quad (3.12)$$

In ottica di usare le coordinate lagrangiane si può scrivere la (3.1) nel modo seguente

$$\left(\frac{D\phi}{Dt} \right)_s + \phi \nabla \cdot \vec{v}_s = 0 \quad (3.13)$$

dove $\left(\frac{D\phi}{Dt} \right)_s$ è la derivata materiale rispetto al solido. Sostituendo la divergenza della (3.8) e tenendo conto della (3.3), si giunge a

$$\left(\frac{D\phi}{Dt} \right)_s - \phi \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{K}(\mathbf{F})}{\mu} \nabla \cdot \mathbf{T}' \right) = 0 \quad (3.14)$$

Le equazioni equivalenti, (3.14) e (3.12), sono generali e possono essere usate per studiare un sistema bidimensionale o tridimensionale. Un tale problema è però solitamente molto complicato da trattare, anche per via delle equazioni al contorno da fornire e delle equazioni costitutive del materiale.

Nel caso della pressa a scarpa però, le dimensioni caratteristiche del problema vengono in aiuto; infatti gli spessori del foglio di carta sono nell'ordine di 10^{-4} m, nella direzione di lavorazione le dimensioni sono nell'ordine di 10^0 m e la larghezza di lavorazione è dell'ordine di 10^1 m. Pertanto la direzione principale, al fine della dinamica del sistema, è quella radiale, cioè lungo lo spessore. Grazie a questa osservazione è possibile studiare il problema con un modello unidimensionale, quindi di più facile trattazione; per un'analisi dettagliata si rimanda all'appendice A.

L'analogo unidimensionale della (3.14) è quindi

$$\left(\frac{D\phi}{Dt}\right)_s - \phi \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{K}{\mu} \frac{\partial \sigma}{\partial r}\right) = 0 \quad (3.15)$$

dove K e σ sono rispettivamente le componenti (r, r) dei tensori \mathbf{K} e \mathbf{T}' .

È da osservare che, nel caso stazionario (come il nostro), la derivata materiale è ancora "bidimensionale", ovvero

$$\left(\frac{D\phi}{Dt}\right)_s = u_r \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \quad (3.16)$$

Assumendo non vi siano strisciamenti e lacerazioni all'interno del foglio (auspicabile anche per la qualità del foglio stesso), la velocità tangenziale è $u_\theta = \omega r$, con ω velocità angolare del rullo (quindi costante). Di conseguenza la (3.15) equivale a studiare il problema unidimensionale in un sistema di riferimento rotante solidale con il rullo.

La (3.15) in questo sistema di coordinate risulta

$$\left(\frac{D\phi}{Dt}\right)_{s,\theta} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_\theta + u_r \frac{\partial \phi}{\partial r} = \phi \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{K}{\mu} \frac{\partial \sigma}{\partial r}\right) \quad (3.17)$$

dove si ha

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_\theta = \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \quad (3.18)$$

La (3.17) può essere anche scritta nella forma

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_\theta = \frac{\partial}{\partial r} \left(\phi \frac{K}{\mu} \frac{\partial \sigma}{\partial r}\right) - v_c \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (3.19)$$

Quest'ultima equazione è formalmente analoga ad un'altra equazione, a cui si può pervenire studiando il modello uniassiale di un mezzo poroso saturo di fluido, compresso tra due pareti permeabili al fluido stesso; ricordando che nel caso monodimensionale si ha $\frac{\partial v_c}{\partial r} = 0$. Questo è un problema non lineare definito su un dominio spaziale variabile nel tempo (la distanza tra le due pareti), oltre ad avere la presenza della velocità composta.

Si vuole porre l'attenzione sul fatto che entambe le pareti devono essere permeabili, in modo che la v_c non sia conosciuta a priori; infatti se una parete è impermeabile, la velocità del fluido e del solido (in corrispondenza della parete stessa) sono uguali alla velocità della parete; si ha quindi $v_c = v_p$.

3.2.2 Modello lagrangiano

Per lo studio del sistema dal punto di vista lagrangiano si fa direttamente riferimento al caso monodimensionale.

Siano quindi X le variabili indipendenti che identificano le particelle solide e $r = r(X, t)$ le loro coordinate al tempo t . Si considera come condizione di riferimento quella al tempo

$t = 0$, per cui si assume che la frazione volumica di solido sia costante. Si ha quindi $r(X,0) = X$, $0 \leq X \leq R^*$ e $\phi(X,0) = \phi^*$.

Si ricorda inoltre che

$$\left(\frac{D\phi}{Dt} \right)_{s,\theta} = \frac{\partial\phi}{\partial t} \quad (3.20)$$

e che nel caso monodimensionale il gradiente di deformazione risulta

$$\frac{\partial r}{\partial X} = \frac{\phi^*}{\phi} \quad (3.21)$$

da cui per la regola della catena si ha

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial r} = \frac{\partial X}{\partial r} \frac{\partial(\cdot)}{\partial X} = \frac{\phi}{\phi^*} \frac{\partial(\cdot)}{\partial X} \quad (3.22)$$

La (3.15) scritta secondo la formulazione lagrangiana è quindi

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{\phi^2}{\phi^{*2}} \frac{\partial}{\partial X} \left(\phi \frac{K}{\mu} \frac{\partial\sigma}{\partial X} \right) \quad (3.23)$$

È utile usare il grado di vuoto e invece della frazione volumica ϕ

$$e = \frac{1 - \phi}{\phi} \quad (3.24)$$

$$\phi = \frac{1}{1 + e} \quad (3.25)$$

dove il vuoto va inteso come il complemento all'unità della frazione di solido. Ricordando che

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{e + 1} \right) = - \frac{1}{(e + 1)^2} \frac{\partial e}{\partial t} \quad (3.26)$$

la (3.23) risulta

$$\frac{\partial e}{\partial t} = - \frac{(1 + e^*)^2}{\mu} \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{K(e)}{1 + e} \frac{\partial\sigma}{\partial X} \right) \quad (3.27)$$

Si introduce ora l'ipotesi che la tensione dipenda dal gradiente di deformazione, cioè sia una funzione del grado di vuoto, $\sigma = \sigma(e)$. Derivando rispetto ad e si ha infine

$$\frac{\partial e}{\partial t} = - \frac{(1 + e^*)^2}{\mu} \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{K(e)}{1 + e} \frac{\partial\sigma}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial X} \right) \quad (3.28)$$

Questa equazione è ancora del secondo ordine, non lineare, di tipo parabolico, ma con questo approccio non vi è più la presenza della velocità composta, inoltre il dominio spaziale è fisso nel tempo, $0 \leq X \leq R^*$ per $t \geq 0$. Per risolvere il problema è necessario esplicitare le equazioni costitutive, fornire la condizione iniziale e le condizioni al contorno.

3.2.3 Condizioni al contorno

Immaginando nuovamente il modello di compressione uniassiale, si nota che il contorno è definito dalle pareti, le quali abbiamo detto genericamente essere mobili e permeabili al fluido. Supponiamo ora che la permeabilità della parete sia molto maggiore di quella della carta, al limite infinita, ciò significa che la pressione del fluido al contorno è pari alla pressione dell'ambiente con cui comunica.

La mobilità delle pareti (una o entrambe) implica invece, che la velocità del solido a contatto con la parete sia la medesima della parete stessa, chiaramente assumendo che la parete sia impermeabile al solido. Per muovere la parete è necessario vincere la resistenza del sistema applicando un certo sforzo, oppure una tensione σ ragionando per unità di superficie. Tali condizioni però devono rispettare la conservazione dello sforzo (3.3), cioè $p + \sigma = \text{costante}$. Riassumendo si può quindi avere:

- controllo della tensione con $\sigma(0, t) \neq \sigma(R^*, t)$;
- controllo della tensione con $\sigma(0, t) = \sigma(R^*, t)$;
- controllo della velocità con $v(0, t) \neq v(R^*, t)$;
- controllo della velocità con $v(0, t) = v(R^*, t)$.

Le condizioni date controllando la velocità saranno utilizzate in dettaglio nel modello comprendente il feltro, qui si asserisce solamente al fatto che velocità e pressioni sono legate (attraverso la legge di Darcy).

Il caso di tensioni asimmetriche viene qui accennato in quanto è possibile ottenerlo fisicamente mettendo in comunicazione una parete con un ambiente a pressione controllata; ciò è talvolta praticato nell'industria cartaria utilizzando dei rulli aspiranti, si ha quindi un ambiente in depressione. Si nota comunque che anche nel caso ideale di vuoto assoluto, l'asimmetria non è eclatante, in quanto le tensioni tipiche sono nell'ordine delle decine di bar.

Infine il caso con tensioni simmetriche è il più frequente, sia dal punto di vista degli esperimenti che della pratica industriale. Questo caso è molto interessante se il sistema è simmetrico anche dal punto di vista geometrico, non nel senso stretto del termine: nel dominio euleriano infatti non si ha simmetria, ma se i feltri hanno il medesimo spessore e sono costituiti dal medesimo materiale, si otterrà una vera simmetria spaziale nel dominio lagrangiano. In questa maniera è quindi possibile considerare solamente metà dominio spaziale, con una parete e la condizione di simmetria. Questa semplificazione può essere conveniente in ottica della risoluzione numerica.

Condizione alla parete

$$\sigma(0, t) = \sigma_p(t) \tag{3.29}$$

assumendo che $\sigma = \sigma(e)$ sia invertibile, indicando con σ^{-1} la sua inversa si ha

$$e(0, t) = \sigma^{-1}(\sigma_p(t)) \tag{3.30}$$

che è una condizione di Dirichlet tempovariante.

Condizione di simmetria

La simmetria implica che

$$\frac{\partial p}{\partial X}(R^*/2) = \frac{\partial \sigma}{\partial X}(R^*/2) = 0 \quad (3.31)$$

sviluppando ulteriormente e assumendo (in accordo con i dati sperimentali) che $\frac{\partial \sigma}{\partial e} > 0$ si ha

$$\frac{\partial \sigma}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial X} = 0 \Rightarrow \frac{\partial e}{\partial X} = 0 \quad (3.32)$$

che è la classica condizione di Neumann omogenea.

Si osserva che la condizione di Neumann si ritrova per un modello di compressione uniassiale con, in questo caso, una parete impermeabile sia al fluido che al solido. È utile notare questa analogia in quanto, quest'ultimo modello è spesso utilizzato sia da un punto di vista sperimentale che teorico [2, 3].

3.3 Feltro

La funzione del feltro nell'industria cartaria, in particolare nella zona di pressatura, è quella di comprimere il foglio di carta con una opportuna tensione ed accogliere quindi l'acqua espulsa dal foglio stesso. Al pari della carta è considerato un mezzo poroso deformabile attraversato da un fluido, pertanto la teoria utilizzata è quella esposta nella sezione precedente, facendo nuovamente riferimento al caso monodimensionale.

Il feltro prima di entrare nella pressa viene comunemente lavato e parzialmente asciugato, quindi a differenza della carta non è saturo di acqua, o almeno non lo è nella zona di entrata. Significa che in linea di principio è necessario considerare anche la saturazione come incognita, oltre la presenza dell'aria. Il feltro può quindi essere considerato:

- completamente bagnato;
- completamente asciutto;
- parzialmente bagnato.

3.3.1 Feltro completamente bagnato

Il feltro è quindi saturo di acqua, le equazioni del problema sono le medesime della carta (3.1),(3.2),(3.3) e (3.4). Vengono riscritte qui per chiarezza nella loro forma unidimensionale

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial(\phi v_s)}{\partial r} = 0 \quad (3.33)$$

$$-\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial(\phi v_l)}{\partial r} = 0 \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial \sigma}{\partial r} = 0 \quad (3.35)$$

$$v_l - v_s = -\frac{K}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (3.36)$$

Combinandole come svolto per la carta e utilizzando la formulazione lagrangiana si perviene nuovamente alla (3.28); definita chiaramente nel dominio relativo al feltro e con le sue equazioni costitutive.

3.3.2 Feltro completamente asciutto

Si considera in questo caso il feltro saturo di aria e valgono perciò le equazioni del caso precedente. Chiaramente le grandezze relative all'acqua sono ora relative all'aria; in particolare la viscosità nella legge di Darcy (3.36) è quella dell'aria. A tal proposito, considerando che l'aria è decisamente meno viscosa dell'acqua (di due ordini di grandezza), si può assumere che l'interazione dell'aria con il feltro sia trascurabile. Ciò equivale a dire che la pressione dell'aria all'interno del feltro è quella atmosferica, ovvero che il gradiente di pressione è nullo. Di conseguenza la (3.35) diviene

$$\frac{\partial \sigma}{\partial r} = 0 \quad (3.37)$$

Assumendo che la tensione sia una funzione del grado di vuoto, $\sigma = \sigma(e)$, con $\frac{\partial \sigma}{\partial e} > 0$ si ha

$$\frac{\partial \sigma}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial r} = \frac{\partial \sigma}{\partial r} = 0 = \frac{\partial e}{\partial r} \quad (3.38)$$

La (3.37) e la (3.38) semplificano notevolmente il sistema, in quanto indicano che i valori di σ ed e in tutto il dominio del feltro sono i medesimi che si hanno al contorno.

3.3.3 Feltro parzialmente bagnato

Questo è il caso intermedio ai precedenti; è sicuramente più complicato in quanto è necessario considerare la saturazione. La saturazione è definita come la frazione in volume del liquido rispetto al vuoto (liquido più aria)

$$S = \frac{\phi_l}{\phi_l + \phi_a} \quad (3.39)$$

Un approccio per lo studio del problema può essere quello delle permeabilità relative [4], ma non sarà trattato in questa sede.

3.4 Carta e feltro

Un modello che consideri sia il feltro che la carta è sicuramente più simile alla realtà rispetto ai precedenti. L'analisi è nuovamente svolta per il caso monodimensionale e la carta è sempre considerata satura.

Il feltro, come già detto, è a contatto con la carta, deve trasmettere un certa tensione in modo da comprimerla e, in conseguenza della compressione, deve essere in grado di accettare l'acqua espulsa dal foglio di carta.

Il feltro può essere trattato nei modi seguenti:

- trascurato;
- considerato saturo;
- inizialmente asciutto;
- parzialmente bagnato.

La prima opzione è giustificata poiché tipicamente il feltro è molto più permeabile della carta (almeno due ordini di grandezza) ed anche più rigido. L'elevata permeabilità, secondo la legge di Darcy, implica che il gradiente di pressione sia basso, al limite tendente a zero. Questo fatto, ricordando l'analisi del feltro asciutto svolta in precedenza, comporta una pressione all'interfaccia carta-feltro pari alla pressione atmosferica e, conseguentemente una tensione pari alla tensione presente al contorno (rullo o scarpa). Questa condizione all'interfaccia equivale a considerare solamente la carta (per quel che riguarda pressioni e tensioni). Si ha pertanto un modello notevolmente semplificato.

Il feltro saturo è sicuramente un caso limite, utile per effettuare eventualmente delle analisi critiche di modelli più sofisticati.

Il feltro può essere considerato inizialmente asciutto, anche così è un caso ideale, difficilmente riscontrabile in pratica. Dopo l'istante iniziale il feltro inizia ad accogliere l'acqua espulsa dalla carta; una parte di feltro risulta quindi bagnata e idealmente satura. Il dominio è quindi diviso in una parte satura, comprendente la carta ed una porzione di feltro e una parte di feltro asciutta. La parte asciutta viene trattata semplicemente come spiegato in precedenza; la parte satura può essere trattata con la solita teoria, ma in questo caso il dominio è libero, anche in coordinate lagrangiane, quindi anche l'evoluzione delle interfacce è un'incognita. È un esempio di infiltrazione in un mezzo poroso deformabile [5].

Infine il caso maggiormente simile alla realtà considera il feltro parzialmente bagnato. Anche in questo caso una parte del dominio sarà satura ed una parte no. È certamente un modello sofisticato e di complessità maggiore in quanto anche la saturazione è un'incognita, oltre al fatto di considerare la presenza dell'aria, ipotizzandola comprimibile o meno [4, 6].

Nell'ottica di sviluppare un modello esaustivo, ma il più semplice possibile saranno analizzati e confrontati i casi limite ovvero, il feltro asciutto ed il feltro saturo, in modo da trarre eventualmente delle ipotesi ragionevoli per i casi intermedi.

3.4.1 Carta e feltro saturi

L'analisi di questo caso è effettuata adottando le ipotesi già utilizzate per il feltro e la carta considerati singolarmente; pertanto il sistema è studiato in una dimensione e dal punto di vista lagrangiano. Si perviene quindi alla solita equazione parabolica, riscritta qui per chiarezza

$$\frac{\partial e}{\partial t} = - \frac{(1 + e^*)^2}{\mu} \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{K(e)}{1 + e} \frac{\partial \sigma}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial X} \right) \quad (3.40)$$

È valida in tutto il dominio $\Omega = \Omega_{f,s} \cup \Omega_c \cup \Omega_{f,r}$, dove $\Omega_{f,s} = [0, R_{f,s}]$ è il dominio relativo al feltro lato scarpa, $\Omega_{f,r} = [R_{f,r}, R^*]$ è il dominio relativo al feltro lato rullo e

$\Omega_c = (R_{f,s}, R_{f,r})$ è il dominio della carta. Le interfacce tra i feltri e la carta si hanno in $R_{f,s}$ ed $R_{f,r}$.

Chiaramente le equazioni costitutive sono diverse per il feltro e la carta, nondimeno il grado di vuoto. Pertanto in corrispondenza delle interfacce le funzioni $e, K, \frac{\partial \sigma}{\partial e}$ saranno discontinue. Poiché è discontinua anche l'incognita e , il metodo di risoluzione risulta laborioso in quanto oltre alle condizioni al contorno è necessario esprimere la condizione all'interfaccia, ovvero la continuità di σ in termini di e . Questo metodo è stato utilizzato in [7], per il caso con un feltro singolo, dove è dimostrata l'esistenza di una soluzione unica.

Con l'obiettivo di avere un modello meno laborioso da risolvere per via numerica, ho preferito seguire la "via delle tensioni". Ovvero:

1. si assume la continuità della pressione e della tensione in tutto il dominio;
2. si scrive tutto in funzione della tensione;
3. si ricava l'equazione per la tensione;
4. si risolve numericamente.

La prima assunzione viene sempre effettuata, ma solitamente è implicita nella continuità di e in ogni sottodominio, mentre viene esplicitata ai bordi ed alle interfacce.

Come già svolto per la condizione al contorno della carta, si assume che $\sigma = \sigma(e)$ sia invertibile, si ha $e = \sigma^{-1}(\sigma)$, ovvero scritto in maniera più chiara

$$e = e(\sigma). \quad (3.41)$$

Si può quindi scrivere

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{\partial e}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad (3.42)$$

$$K = K(e(\sigma)) = K(\sigma) \quad (3.43)$$

Sostituendo nella (3.27) la (3.42) e la (3.43), si ottiene infine

$$\frac{\partial e}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t} = - \frac{(1 + e^*)^2}{\mu} \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{K(\sigma)}{1 + e(\sigma)} \frac{\partial \sigma}{\partial X} \right) \quad (3.44)$$

È sempre un'equazione alle derivate parziali, non lineare e di tipo parabolico; le funzioni $\frac{\partial e}{\partial \sigma}, K, e, e^*$ sono ancora discontinue, ma poiché la soluzione σ è continua in tutto il dominio, non è più necessario porre condizioni alle interfacce. La risoluzione numerica risulta quindi più semplice, ad esempio con un comune metodo delle linee, con l'accortezza di porre un nodo della discretizzazione in corrispondenza delle interfacce[8].

Condizioni al contorno

Al contorno ovvero, per $X = 0$ ed $X = R^*$, il feltro si muoverà con una certa velocità e sarà sottoposto ad una certa tensione, dipendenti l'una dalle altre. Come al solito si assume che le pareti siano infinitamente permeabili, di conseguenza la pressione è pari a quella ambiente. Quindi assumendo che la suddetta pressione sia conosciuta, la condizione al contorno può essere definita in termini di tensione oppure di velocità.

Condizione di tensione. Questo tipo di condizione è molto semplice da scrivere in quanto, per la continuità della pressione, la tensione sul feltro è pari alla tensione sulla parete. Supponendo di conoscere la tensione "lato scarpa", $\sigma_s(t) = \sigma(0, t)$, per la conservazione dello sforzo si ha

$$\sigma_s(t) + p_{amb,s} = \sigma_r(t) + p_{amb,r} \quad (3.45)$$

Ovvero

$$\sigma_r(t) = \sigma(R^*, t) = \sigma_s(t) + p_{amb,s} - p_{amb,r} \quad (3.46)$$

Se le pressioni nei due ambienti sono le medesime, lo saranno anche le tensioni, ed assumendo che i feltri abbiano la stessa geometria e si comportino in maniera uguale da entrambi i lati, il problema risulta simmetrico (in coordinate lagrangiane). Pertanto come già spiegato per la carta è possibile studiare metà dominio spaziale ponendo una condizione di Neumann in mezzeria,

$$\frac{\partial \sigma}{\partial X} \left(\frac{R^*}{2} \right) = 0 \quad (3.47)$$

Analogamente a quanto detto per la carta, il modello simmetrico corrisponde ad un modello con un solo feltro, un estremo della carta a contatto con una parete impermeabile e velocità composta pari alla velocità della parete medesima.

Condizione di velocità. Le condizioni al contorno in termini di velocità sono legate alla velocità composta; pertanto sono facilmente ottenibili per il caso simmetrico, dove come già spiegato, essa è pari alla velocità della parete impermeabile del modello analogo.

Consideriamo ad esempio la parte di dominio "lato scarpa", $\Omega = [0, R_m]$, dove la mezzeria è indicata con $R_m = R^*/2$, in cui si ha la condizione di Neumann. È possibile fare l'analogia con un modello in cui la parete impermeabile, R_m è immobile; di conseguenza la velocità composta è nulla, $v_c = 0$. In $R = 0$ invece, la velocità del solido è pari alla velocità della parete permeabile, $v(0, t) = v_p(t)$.

Combinando la legge di Darcy, nella forma (3.8), tenendo in conto la conservazione dello sforzo e usando la formulazione lagrangiana si ottiene

$$v_c - v_s(0, t) = -v_p(t) = \frac{K}{\mu} \frac{e^* + 1}{e + 1} \frac{\partial \sigma}{\partial X}(0, t) \quad (3.48)$$

che rappresenta già la condizione al contorno, ma può essere riscritta in una maniera più utile come

$$v_p(t) + \frac{1}{e^* + 1} \frac{K}{\mu} \frac{(e^* + 1)^2}{e + 1} \frac{\partial \sigma}{\partial X}(0, t) \quad (3.49)$$

Se invece si vuole considerare il sistema completo, oppure ancora una sola metà, ma con la parete impermeabile mobile, si avrà una condizione analoga con la velocità alla parete cambiata di segno. Ad esempio per il sistema completo si ha

$$v_p(t) + \frac{1}{e^* + 1} \frac{K}{\mu} \frac{(e^* + 1)^2}{e + 1} \frac{\partial \sigma}{\partial X}(0, t) \quad (3.50)$$

$$-v_p(t) + \frac{1}{e^* + 1} \frac{K}{\mu} \frac{(e^* + 1)^2}{e + 1} \frac{\partial \sigma}{\partial X}(R^*, t) \quad (3.51)$$

È interessante notare che la simmetria delle tensioni si traduce, nel modello lagrangiano, nella simmetria delle velocità. Chiaramente non lo è dal punto di vista euleriano, cioè il nostro punto di vista da osservatori.

3.5 Equazioni costitutive

Per poter risolvere i vari modelli è necessario fornire le equazioni costitutive dei materiali, assunte essere funzione solamente del gradiente di deformazione, oppure le loro inverse, $K(\phi)$, $K(\sigma)$, $\phi(\sigma)$, $\sigma(\phi)$ conseguentemente al modello adottato. In letteratura è possibile trovare questa tipologia di equazioni per i feltri e per la carta [3, 9]. È bene comunque sottolineare fin da subito che si tratta di leggi empiriche, ricavate da dati sperimentali, che offrono una visione molto semplificata dei fenomeni in gioco, cercando di condensare molti aspetti in pochi parametri. Questo discorso è particolarmente importante per la carta, il cui comportamento è caratterizzato da un numero elevato di fattori, tra cui:

- fibre vergini o riciclate;
- provenienza del legno;
- metodo di produzione delle fibre;
- effetti di scala;
- storia della lavorazione.

Al riguardo è possibile portare l'esempio della permeabilità della carta, la quale può assumere valori in un intervallo di due ordini di grandezza, in funzione di un singolo fattore tra quelli citati.

Per quanto riguarda la tensione, i valori sono contenuti in un intervallo limitato, ma è necessario distinguere la fase di compressione da quella di espansione, in quanto la carta presenta una notevole plasticità, oltre che presentare un comportomanto dipendente dalla storia dei carichi precedenti [10]. Tipicamente i dati vengono misurati nella sola fase di compressione.

Si accenna anche all'esistenza di equazioni che descrivono un comportamento *rate dependent*, di tipo visco-elastico od anche visco-plastico [3, 10], usate principalmente per descrivere i casi in cui le equazioni più semplici non si accordano con i dati sperimentali; tipicamente si tratta di condizioni con tensioni o velocità elevate e per fogli di spessore e grammatura ridotte, al di fuori dei valori tipici riscontrabili in una pressa a scarpa.

I feltri possono essere prodotti in una vasta gamma di configurazioni e caratteristiche, in modo da adattarsi al meglio al tipo di carta da produrre. Tipicamente sono costituiti da diversi strati con differenti caratteristiche, accomunati dal fatto di essere molto più permeabili della carta (almeno due ordini di grandezza) e di essere anche più rigidi; in linea di principio ogni strato andrebbe modellizzato con equazioni diverse. Sono progettati per essere elastici, in quanto devono avere le stesse caratteristiche per ogni ciclo di lavoro. Questo comportamento si può assumere veritiero nel breve periodo, ma non nel lungo periodo (settimane), in quanto le caratteristiche si modificano nel tempo a causa

delle ripetute sollecitazioni; si assiste ad esempio ad un assottigliamento con conseguente aumento della rigidità e diminuzione della permeabilità, la quale rimane comunque molto maggiore rispetto a quella della carta.

Oltre alla difficoltà di caratterizzazione dei materiali coinvolti, di cui è appena stata data una visione generale, ritengo utile accennare alla critica di alcuni autori all'ipotesi di omogeneità della carta, del feltro e del loro contatto. Chiaramente questa ipotesi è alla base del modello illustrato nelle sezioni precedenti, il quale andrebbe pertanto modificato o non utilizzato. In particolare la critica è rivolta all'utilizzo della permeabilità e della legge di Darcy per la stima del flusso di fluido. Critica assolutamente ragionevole per carte a bassa e bassissima grammatura (nell'ordine di $20 \div 30 \text{ g/m}^2$), dove si hanno poche unità di fibre lungo lo spessore del foglio, variazioni locali della tensione e la creazione di canali preferenziali per il deflusso del fluido. Infatti a tal riguardo si osserva una scarsa riproducibilità dei dati di permeabilità, nonché una sua dipendenza dalla grammatura del foglio e dal tipo di feltro (o altro materiale) con cui la carta è a contatto. In ogni caso si può assumere che la legge di Darcy sia una buona approssimazione da utilizzare per il modello della pressa a scarpa in quanto la larghezza notevole del foglio permette di avere una buona media del flusso per unità di larghezza, con la consapevolezza di dover eventualmente utilizzare un fattore di permeabilità dipendente dalla grammatura del foglio di carta e dalla coppia feltro-carta in esame[11].

Capitolo 4

Risultati e discussione

4.1 Considerazioni generali

Nelle sezioni seguenti saranno analizzati i risultati forniti dalla risoluzione numerica dei modelli sviluppati per la carta ed il feltro, in particolare sono state risolte con il metodo delle linee le equazioni (3.44) e (3.28). Benché siano equazioni fortemente non lineari sono facilmente discretizzabili e risolvibili con un'ottima precisione in un tempo ridotto; pochi secondi con un normale calcolatore.

4.1.1 Precisione del modello

Si vuole sottolineare che un modello numerico efficiente non è garanzia di risultati altrettanto efficienti. In particolare la bontà dei risultati è fortemente legata alla bontà dei dati di input del modello, principalmente le equazioni costitutive. Ad esempio il modello numerico può calcolare con precisione anche le frazioni di pascal, mentre gli strumenti di misura hanno risoluzioni dell'ordine di 10 kPa o anche maggiore. Al riguardo in [9], è indicata un'incertezza per valori bassi di tensione anche del 20%, per la permeabilità di circa il 15% e per la frazione volumica di solido tra il 5% ed il 15%.

I risultati vanno quindi analizzati con occhio critico, avendo sempre in mente il problema appena esposto.

4.1.2 Stima delle equazioni costitutive

Le osservazioni svolte in precedenza non pongono dubbi al fatto che le equazioni costitutive siano una componente critica del modello. Il loro uso richiede quindi particolare attenzione.

Oltre all'incertezza dei dati, più o meno ampia, essi vengono solitamente esposti da chi li ha misurati in maniera grafica, uniti all'equazione usata per approssimarli. Tipicamente tale equazione li rappresenta molto bene, ma può essere inutilizzabile al di fuori dell'intervallo di valori da cui è stata ricavata. Ad esempio è molto facile trovare dei dati rappresentati con una legge di potenza, come $\phi = A\sigma^F$, dalla quale risulta $\phi(0) = 0$; incompatibile quindi con la condizione iniziale $\phi(0) \neq 0$. Questo inconveniente è spesso

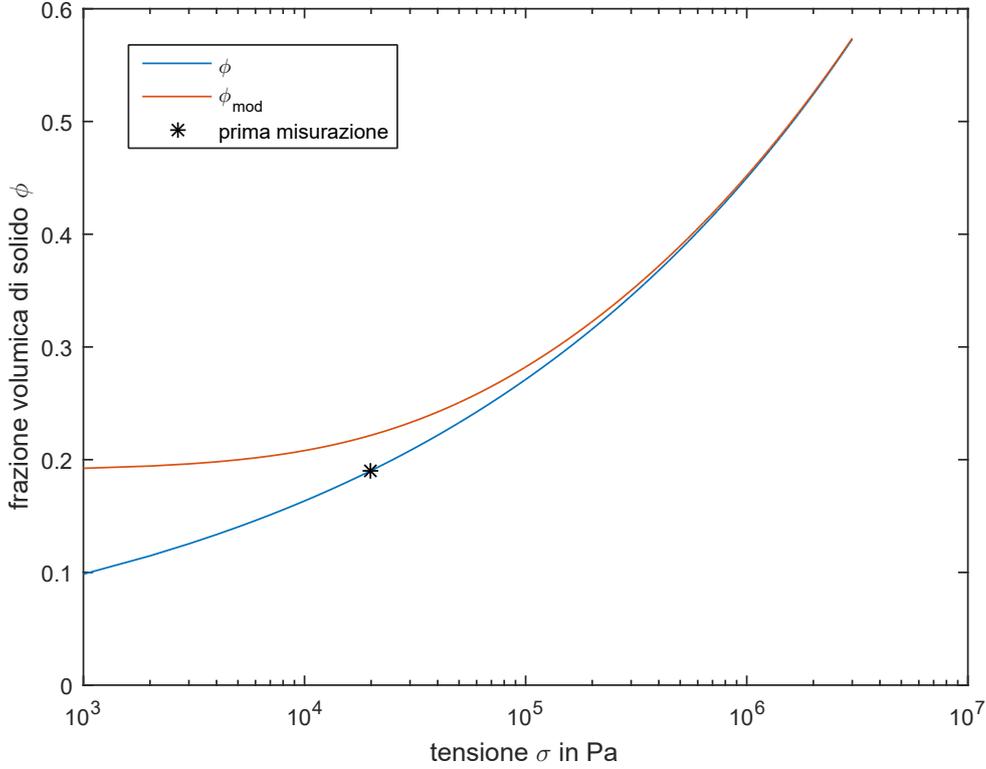


Figura 4.1: Funzioni $\phi(\sigma)$ originale e modificata per una polpa meccanica

dovuto al fatto che la prima coppia di dati accettabili si ha per $\sigma \gg 0$ e durante la regressione non si considera una possibile intercetta. Pertanto se non si hanno a disposizione i dati sperimentali è necessario modificare opportunamente l'equazione fornita.

Si riportano come esempio le equazioni presenti in [9] relative ad una *polpa meccanica*

$$\phi = 0,45 (\sigma \times 10^{-6})^{0,22} \quad (4.1)$$

$$K = 17 \times 10^{-17} (\sigma \times 10^{-6})^{-0,87} \quad (4.2)$$

dove σ è in *Pa*. Assumendo che la prima misurazione sia stata effettuata per una tensione $\sigma_0 = 0,02$ MPa, si possono modificare le equazioni come segue

$$\phi_{mod} = 0,45 (\sigma \times 10^{-6} + \sigma_0)^{0,22} \quad (4.3)$$

$$K_{mod} = 17 \times 10^{-17} (\sigma \times 10^{-6} + \sigma_0)^{-0,87} \quad (4.4)$$

Si può notare che con la nuova equazione la condizione iniziale è plausibile, si ha infatti $\phi(0) = 0,19$, figura 4.1. Si nota anche che la discrepanza tra le due equazioni è notevole proprio all'esterno dell'intervallo su cui l'equazione iniziale è stata ricavata, per poi diventare trascurabile per alti valori di tensione. L'effetto risulta ancora più marcato per la permeabilità, dove la differenza è di ordini di grandezza, figura 4.2.

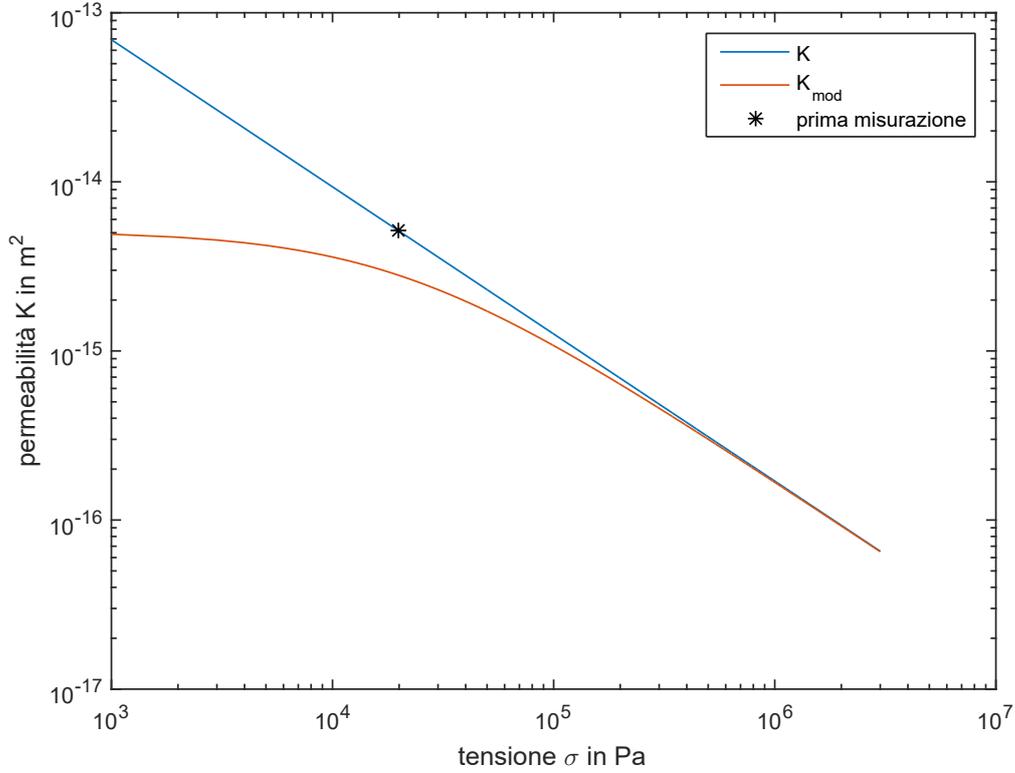


Figura 4.2: Funzioni $K(\sigma)$ originale e modificata per una polpa meccanica

Considerazioni analoghe valgono anche per il feltro. Si presentano ora le equazioni adattate di un feltro usato in una macchina pilota e misurato in [9]

$$\phi_f = 0,7 (\sigma \times 10^{-6} + \sigma_0)^{0,06} \quad (4.5)$$

$$K_f = 49240 \times 10^{-17} (\sigma \times 10^{-6} + \sigma_0)^{-0,4} \quad (4.6)$$

È sufficiente guardare i coefficienti delle equazioni per capire la notevole differenza tra carta e feltro. Per avere una visione generale è possibile però caratterizzare il materiale tramite un'unica equazione costitutiva; a tal proposito, studiando il secondo membro della (3.44), si definisce la diffusività come

$$D(\sigma) = \frac{K(\sigma)}{1 + e(\sigma)} \quad (4.7)$$

In figura 4.3 sono diagrammate le diffusività per la polpa meccanica e per il feltro di cui sono state fornite le equazioni costitutive. Si nota la notevole differenza tra i due materiali, i cui valori di diffusività differiscono di tre ordini di grandezza. In particolare per alti valori di diffusività ci si aspetta una risposta del sistema veloce in confronto ad un materiale con bassa diffusività, quindi è ragionevole pensare che il gradiente di tensione nella carta sarà maggiore di quello relativo al feltro. Le simulazioni confermeranno questa ipotesi.

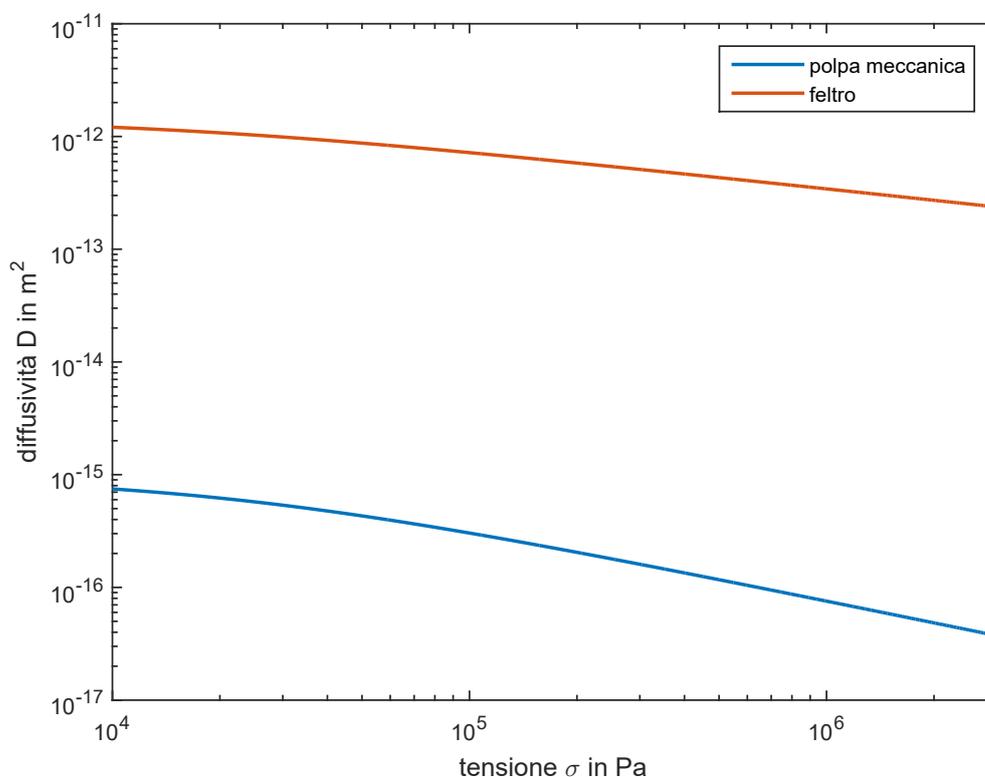


Figura 4.3: Diffusività $D(\sigma)$ per una polpa meccanica e per il feltro

Si vuole ribadire la criticità dell'estendere le equazioni all'infuori dell'intervallo in cui sono state calcolate. Con le equazioni modificate, assumendo ragionevolmente che siano plausibili, è quindi possibile risolvere il modello.

4.1.3 Profilo di tensione

I profili di pressione generalmente considerati tipici per una pressa a scarpa sono piatti o crescenti con continuità, talvolta chiamati rispettivamente rettangolari e trapezoidali, figura 4.4. Si osserva che le tensioni massime sono inferiori a quelle registrate nelle presse a rulli ($> 6 \div 7$ MPa); in questo modo la carta risulta meno sollecitata e generalmente si ottiene un prodotto di migliore qualità.

Talvolta viene comunque praticato un picco di tensione, dell'ordine di 6 MPa nella parte finale del nip. In questo modo si ottiene un miglior grado di secco all'uscita, in quanto il picco di tensione va a limitare la successiva riuniformazione del foglio di carta.

I diagrammi rappresentano la tensione in funzione di L , coordinata longitudinale del nip (in coordinate polari si ha $L = r\theta$). Il modello proposto invece utilizza la coordinata temporale, la quale può essere ricavata conoscendo la velocità di lavorazione del foglio di

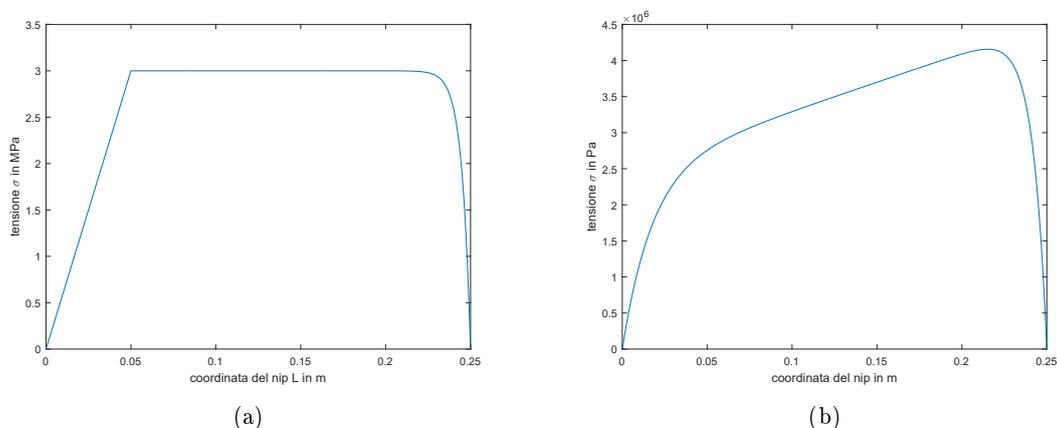


Figura 4.4: Profili di tensione tipici per la pressa a scarpa: (a) rettangolare, (b) trapezoidale

carta, u . Si ha quindi

$$t = \frac{L}{u} \quad (4.8)$$

Si osserva che il processo è molto breve, infatti le velocità tipiche sono dell'ordine di 1000 m/min, a cui corrisponde un tempo $t = 15$ ms per una lunghezza del nip pari a $L = 250$ mm.

4.2 Risultati per la carta

Si considera in questa sezione solamente la carta, cioè si trascura la presenza del feltro, ipotizzando che la sua influenza sia minima poiché è molto più permeabile della carta; la validità o meno di questa ipotesi dovrà essere discussa in base ai risultati del modello completo. Lo studio della sola carta è molto utile innanzitutto per testare il funzionamento del modello stesso, infatti poiché non si hanno interfacce è possibile risolvere entrambe le equazioni differenziali (3.28) e (3.44), ricavate dalla teoria. Come era auspicabile, dette equazioni forniscono i medesimi risultati, pertanto si ha la sicurezza di poter utilizzare la (3.44) per il modello comprendente il feltro.

Oltre a queste considerazioni preliminari, il modello parziale permette già di avere una buona visione della dinamica del sistema, con il vantaggio di avere a disposizione i risultati in un tempo ridotto ($1 \div 2$ s).

In questa fase si analizza puramente la compressione, ovvero la tensione al contorno non è mai decrescente, quindi la tensione massima si avrà all'uscita del nip. Chiaramente in questo modo, idealmente non si avrà la riuniformazione del foglio.

4.2.1 Esempi di risultati e discussione

L'output del modello numerico è il valore dell'incognita: la tensione σ od il grado di vuoto e , in base all'equazione di partenza che verrà risolta. L'incognita sarà calcolata in un certo

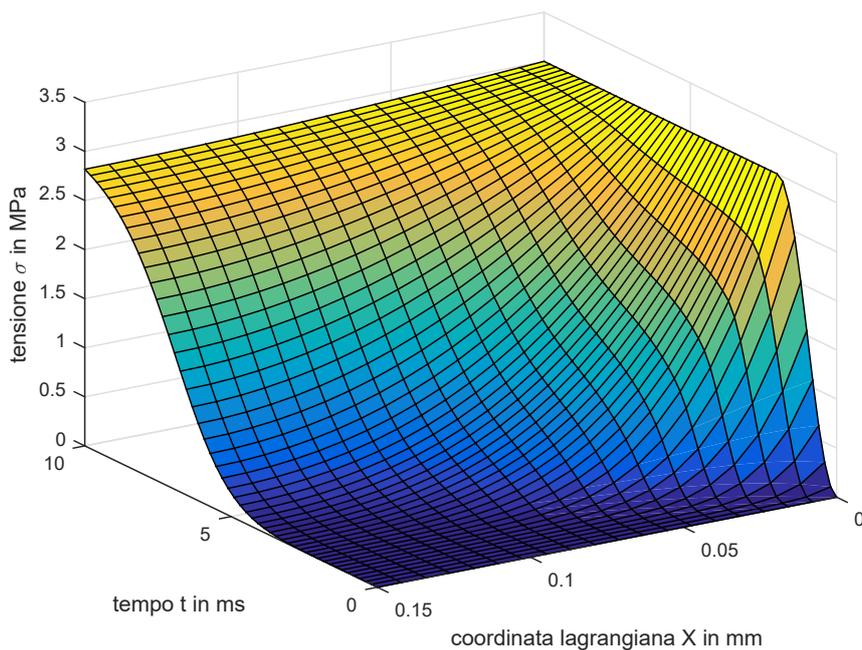


Figura 4.5: Evoluzione della tensione $\sigma(X, t)$ per una polpa meccanica. Velocità di lavorazione $u = 1500$ m/min. Grammatura $w = 83$ g/m².

numero di punti, costituenti il dominio in coordinate lagrangiane. In figura 4.5 è rappresentata l'evoluzione della tensione σ nel dominio lagrangiano, per una polpa meccanica, definita dalle equazioni costitutive (4.3) e (4.4). La velocità di lavorazione è piuttosto elevata, $u = 1500$ m/min; per una lunghezza del nip pari a $L = 250$ mm, da cui si ha un tempo di lavorazione $t_f = 10$ ms. Il profilo di carico, quindi la condizione al contorno, è costante dopo un transitorio iniziale pari a 2 ms, corrispondente ai 50 mm iniziali del nip. Lo spessore iniziale del foglio (pari alla coordinata lagrangiana) è $R^* = 0,3$ mm, che assumendo una densità per la fase solida $\rho_s = 1450$ kg/m³, corrisponde ad un foglio di grammatura $w = 83$ g/m².¹

Si nota immediatamente che la condizione di simmetria è posta in $X = 0,15$ mm, infatti la tensione cresce in ritardo rispetto al contorno drenante $X = 0$. Questo ritardo crea un notevole gradiente di tensione nella prima fase, ma se la velocità di lavorazione non è eccessiva, nella fase finale si può raggiungere una buona omogeneità. Tipicamente sono molto più significativi i risultati espressi secondo il grado di vuoto $e = e(\sigma)$ oppure dal grado di secco, molto usato nell'industria della carta. Il grado di secco, SC , dall'inglese

¹Il valore $\rho = 1450$ kg/m³ è adottato coerentemente per una pasta meccanica da [9]. Tipicamente la densità della cellulosa è assunta pari a 1550 kg/m³ e quindi anche per le paste chimiche, poiché sono praticamente pure. Le paste meccaniche invece possono contenere lignina ed altri composti che ne abbassano la densità complessiva.

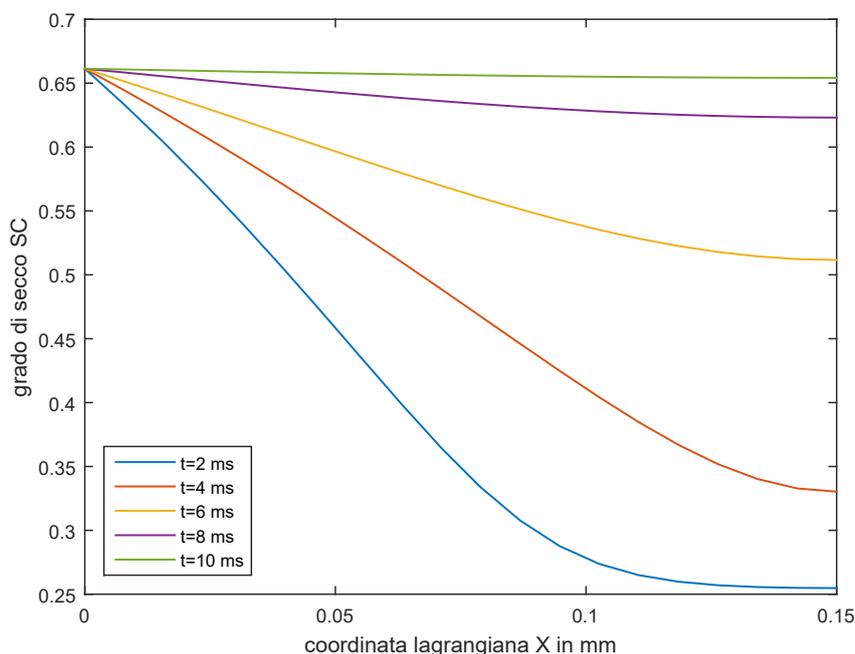


Figura 4.6: Evoluzione del grado di secco SC per una polpa meccanica. Velocità di lavorazione $u = 1500$ m/min. Grammatura $w = 83$ g/m². Modello simmetrico.

solid content, è la frazione in massa di solido, legata al grado di vuoto secondo la formula

$$SC = \frac{1}{\frac{\rho_l}{\rho_s} e + 1} \quad (4.9)$$

dove $\rho_l = 1000$ kg/m³ è la densità dell'acqua e $\rho_s = 1450$ kg/m³ è la densità del solido. Dall'analisi del grado di secco è possibile effettuare considerazioni analoghe a quelle svolte per la tensione. In figura 4.6 è diagrammato l'andamento del grado di secco per diversi istanti temporali; la carta considerata deriva dalla polpa meccanica già descritta in precedenza, il foglio ha grammatura $w = 83$ g/m² ed è lavorato ad una velocità $u = 1500$ m/min; il modello adottato è simmetrico, quindi i risultati sono illustrati solamente in un semidominio. Dall'analisi della figura si nota una marcata stratificazione iniziale che va via via diminuendo fino ad un valore omogeneo finale. L'omogeneità del grado di secco risulta più marcata rispetto a quella delle tensioni; questo effetto è spiegabile pensando all'equazione costitutiva $\phi = \phi(\sigma)$, che essendo monotona e crescente, presenta una derivata $\frac{d\phi}{d\sigma} > 0$ via via maggiore.

Un parametro molto importante per la produzione della carta è la velocità di lavorazione. Per valutare il suo effetto sono riportati in figura 4.7 i valori del grado di secco all'uscita della pressa, per diversi valori della velocità di lavorazione. La carta è costituita dalla polpa meccanica già analizzata, ma il foglio considerato ha uno spessore maggiore;

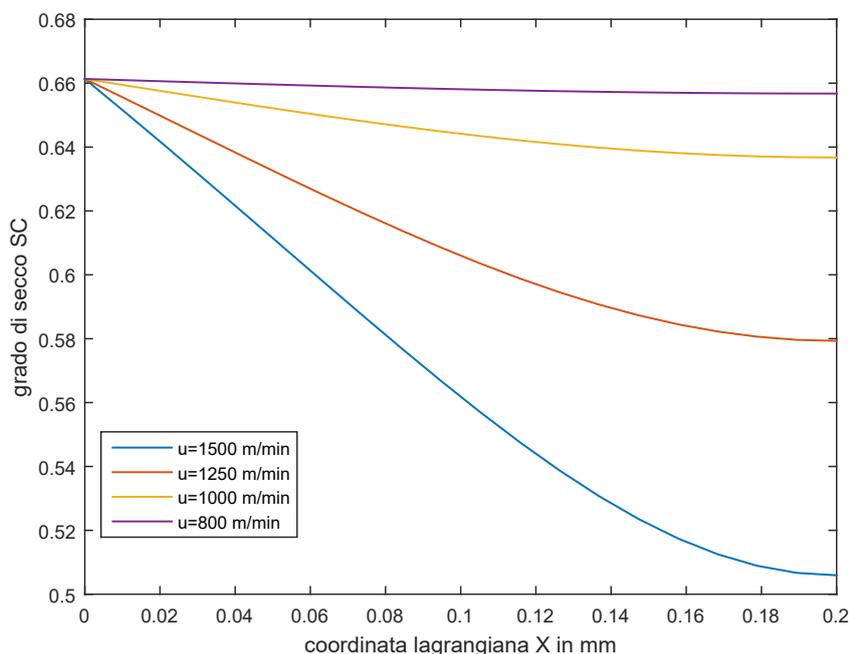


Figura 4.7: Grado di secco all’uscita della pressa per un foglio di grammatura $w = 110 \text{ g/m}^2$ costituito da una polpa meccanica, lavorato a diverse velocità.

in particolare all’istante iniziale, lo spessore è pari a $R^* = 0,4 \text{ mm}$, a cui corrisponde una grammatura di circa $w = 110 \text{ g/m}^2$. Il modello utilizzato è sempre simmetrico.

Si nota immediatamente che aumentando la grammatura del foglio e mantenendo la velocità del caso precedente ($u = 1000 \text{ m/min}$), non è possibile ottenere un grado di secco omogeneo all’uscita. Per ottenere valori all’uscita analoghi al caso precedente si può agire sulla velocità della macchina, riducendola, in quanto un foglio più spesso necessita di un tempo maggiore per raggiungere condizioni omogenee. Questa operazione può non essere sempre accettabile da un punto di vista produttivo.

Si nota in ogni caso, anche nelle condizioni non ottimali, che il grado di secco all’uscita è elevato, maggiore dei valori tipici ottenuti in pratica. Questa sovrastima si suppone sia dovuta principalmente all’aver imposto la compressione fino all’uscita, assumendo implicitamente che i feltri si distacchino immediatamente dalla carta. In questo modo idealmente si evita la riuniformazione del foglio. Nella realtà invece, si ha sempre una fase di decremento delle tensioni con feltri e carta a contatto, che seppur breve non è istantanea.

I risultati riportati finora, sono diagrammati secondo le coordinate lagrangiane. Per una più immediata comprensione è possibile tornare al dominio euleriano; questa operazione va svolta ricordando che le coordinate lagrangiane sono legate alle coordinate euleriane tramite il gradiente di deformazione del solido. In particolare integrando la (3.21) si ha

$$r(t) = \int_0^r dr = \phi^* \int_0^X \frac{1}{\phi(t)} dX \quad (4.10)$$

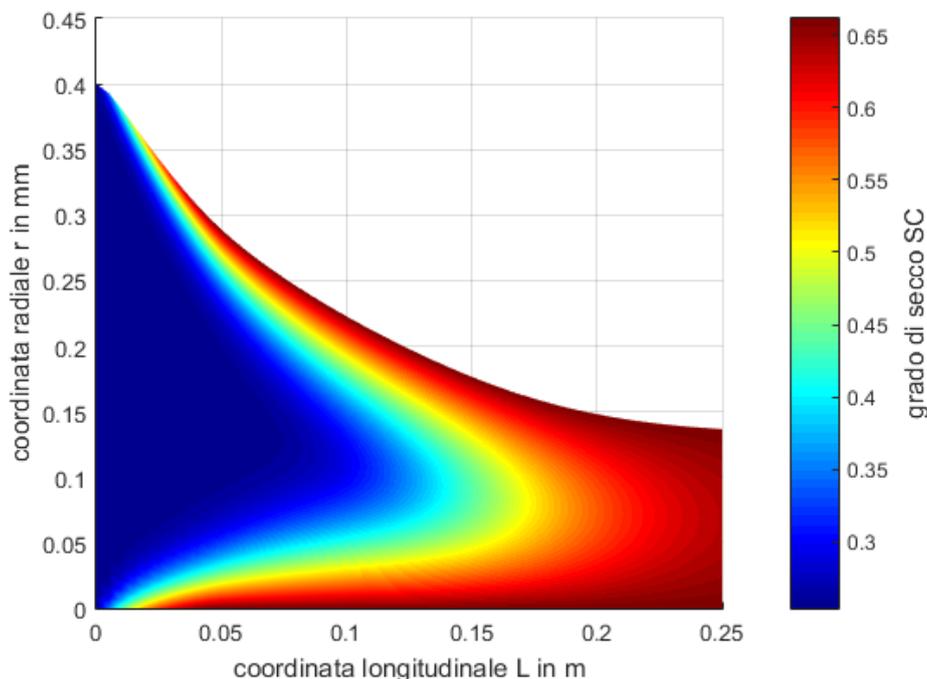


Figura 4.8: Evoluzione del grado di secco SC per una polpa meccanica. Velocità di lavorazione $u = 1000$ m/min. Grammatura $w = 110$ g/m². Dominio euleriano.

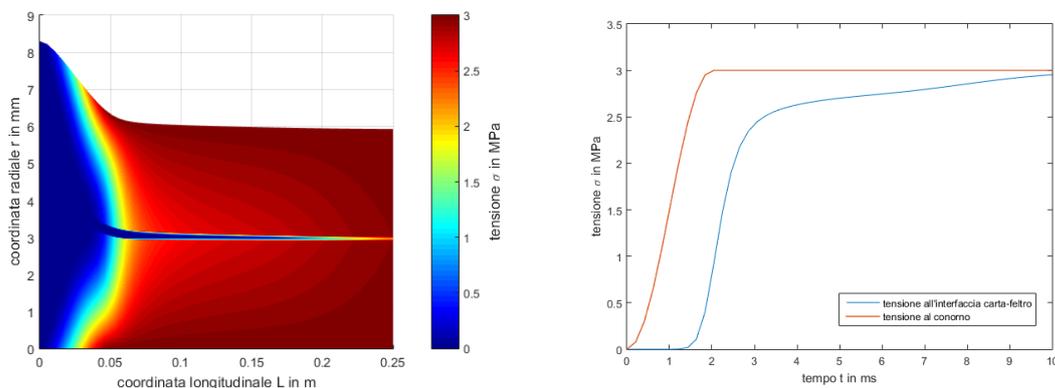
dove $r(t)$ è la coordinata radiale di una particella di solido che si sposta secondo la velocità u . Poiché il problema è stazionario, è possibile studiare solamente le particelle che nell'istante di riferimento si trovano all'ingresso della pressa ed esprimere il tempo secondo la coordinata longitudinale del nip L , ovvero

$$t = L/u \quad (4.11)$$

potendo quindi scrivere la coordinata radiale come $r = r(L)$.

Con le coordinate euleriane si ottiene in primo luogo l'andamento dello spessore del foglio di carta; in secondo luogo, come accennato, è possibile rappresentare i risultati ottenuti dal modello lagrangiano nel dominio euleriano. Ad esempio in figura 4.8 è rappresentata l'evoluzione del grado di secco per un foglio di grammatura pari a $w = 110$ g/m², costituito dalla solita pasta meccanica. La velocità di lavorazione è $u = 1000$ m/min; benché i risultati sono stati ottenuti con il modello simmetrico, essi sono rappresentati nel dominio completo. In questo modo si nota la grande differenza tra il dominio lagrangiano e quello euleriano: il primo è appunto simmetrico (se, come spiegato in precedenza, le tensioni sono simmetriche), il secondo no.

Da questa prima modellizzazione del processo, nella quale si considera solamente il foglio di carta, si osserva che se i parametri di lavorazione sono scelti opportunamente, in base al foglio di carta lavorato, è possibile ottenere un grado di secco omogeneo, quindi un foglio di carta poco stratificato; in buono accordo quindi con l'esperienza dei tecnici della



(a) Andamento della tensione nel dominio euleriano (b) confronto tra la tensione all'interfaccia ed al contorno

Figura 4.9: Evoluzione della tensione σ per il caso completo con feltro. La carta è una polpa meccanica. Velocità di lavorazione $u = 1500$ m/min. Grammatura $w = 83$ g/m².

carta, i quali indicano come punto di forza della pressa a scarpa, un foglio con proprietà omogenee e quindi di qualità.

4.3 Risultati per il caso completo: carta-feltro

Il modello completo è caratterizzato dalla presenza di due materiali, carta e feltro, a contatto tra loro. Con le ipotesi adottate di continuità e monodimensionalità l'interfaccia risulta netta, definita da un'unica coordinata, fissa nel tempo se si utilizzano le coordinate lagrangiane. Pertanto il problema sarà analizzato risolvendo numericamente l'equazione (3.44).

L'influenza del feltro può essere valutata confrontando i risultati ottenuti per la sola carta con quelli del caso completo. Si riportano in particolare i risultati di un foglio di grammatura $w = 83$ g/m², lavorato ad una velocità $u = 1500$ m/min e costituito dalla solita pasta meccanica. Il feltro è definito dalle equazioni costitutive (4.5) e (4.6) e si considera uno spessore iniziale di 4 mm. In figura 4.9a sono mostrate le tensioni nel dominio euleriano; si nota come previsto una grande differenza di comportamento dei due materiali: fatta eccezione per il transitorio iniziale, il gradiente di tensione sul feltro è esiguo in confronto alla carta. Questa differenza si deve alla diffusività del feltro, molto più elevata rispetto alla diffusività della carta. Di conseguenza la tensione all'interfaccia, $X = 4$ mm, e la tensione sul contorno, $X = 0$, mostrano un andamento simile; seppur la prima si presenta in ritardo e di intensità ridotta rispetto alla seconda, figura 4.9b. Chiaramente per la carta si traduce in una riduzione della fase di compressione; si percepisce quindi l'importanza di avere un transitorio iniziale il più breve possibile, in modo da compensare questo fenomeno di ritardo.

L'evoluzione delle tensioni per la carta del modello completo, dopo il ritardo iniziale, è

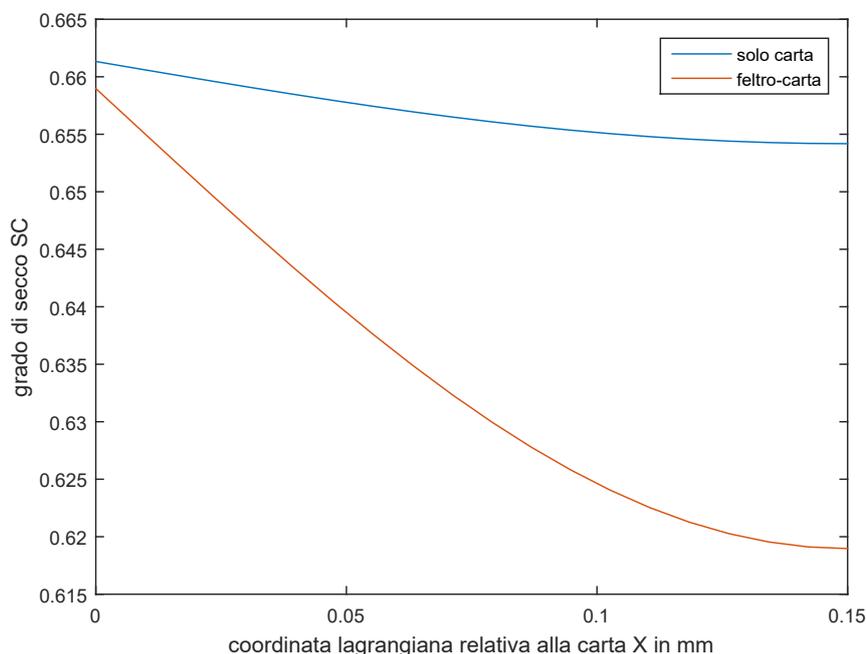


Figura 4.10: Confronto del grado di secco SC all’uscita della scarpa, ottenuto con il modello semplificato e con il modello completo, per una polpa meccanica. Velocità di lavorazione $u = 1500$ m/min. Grammatura $w = 83$ g/m².

qualitativamente molto simile all’evoluzione ottenuta con il modello semplificato. In particolare se la velocità di lavorazione non è troppo elevata l’effetto del ritardo può essere contenuto, ed i valori all’uscita risultano accettabili. Ad esempio con i parametri di lavorazione utilizzati, si ha una differenza del grado di secco all’uscita massima pari a circa 3,5 punti percentuale. È una differenza ridotta numericamente, ma non dal punto di vista industriale. Va comunque ricordato che si sta sempre considerando il caso ideale, in cui all’uscita non si ha riumidificazione.

4.3.1 Riumidificazione

Il fenomeno della riumidificazione del foglio di carta nella fase di uscita dalla pressa a scarpa è molto complesso e necessita di un modello adeguato per coglierne i dettagli. Il modello proposto non ha questa pretesa, ma permette comunque di fare delle utili considerazioni. Nelle sezioni precedenti questo fenomeno non è stato considerato e si è visto come l’introduzione del feltro generi un certo ritardo, il quale provoca una riduzione del grado di secco all’uscita. Se invece si considera una tensione al contorno decrescente nella fase finale, con conseguente riumidificazione, il ritardo dovuto al feltro può essere utile per ridurne l’intensità. Infatti se la fase di decrescita è sufficientemente rapida, all’interfaccia la tensione sarà maggiore rispetto alla tensione al contorno. Inoltre, come è stato accennato

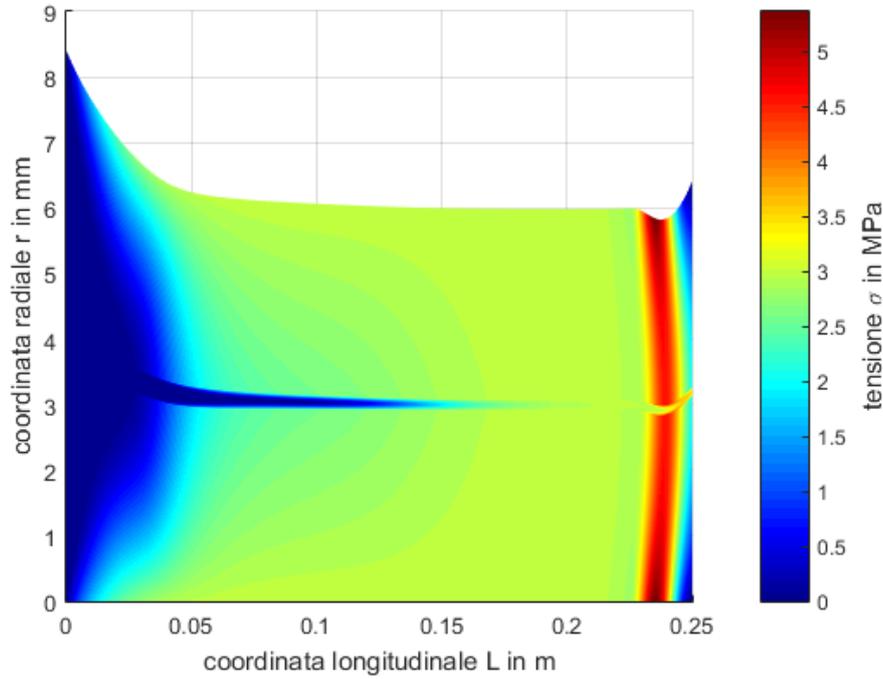


Figura 4.11: Evoluzione della tensione σ per una polpa chimica. Velocità di lavorazione $u = 1500$ m/min. Grammatura $w = 147$ g/m².

in precedenza, può essere anche utile avere un picco di tensione prima della fase di decrescita [12]. In figura 4.11 è rappresentata l'evoluzione della tensione per una polpa chimica, ottenuta con il modello completo, profilo di tensione con picco e decrescita, diagrammato in figura 4.13b. Focalizzandosi sulla fase finale, è possibile notare l'effetto benefico del picco di tensione, in quanto esso limita la successiva decrescita. Inoltre all'interfaccia, si ha come ultimo valore una tensione superiore a 2 MPa, quando al contorno la tensione è già nulla. Anche questo effetto è benefico ed è dovuto al concetto di ritardo spiegato precedentemente. Chiaramente la tensione in seguito dovrà annullarsi in tutto il foglio. L'espansione della carta potrà essere più o meno pronunciata in base alla sua componente elastica, ma l'espansione avverrà in presenza di aria, assumendo che all'uscita dalla pressa il feltro si distacchi immediatamente dalla carta; il foglio quindi, non sarà più saturo ed il grado di secco medio sarà pari a quello all'uscita.

La pasta chimica di cui sono presentati i risultati è caratterizzata da un elevato grado di battitura, è stata misurata in [9] e le equazioni costitutive opportunamente modificate risultano

$$\phi_{mod} = 0,48 (\sigma \times 10^{-6} + \sigma_0)^{0,18} \quad (4.12)$$

$$K_{mod} = 55 \times 10^{-17} (\sigma \times 10^{-6} + \sigma_0)^{-0,71} \quad (4.13)$$

con $\sigma_0 = 0,02$ MPa.

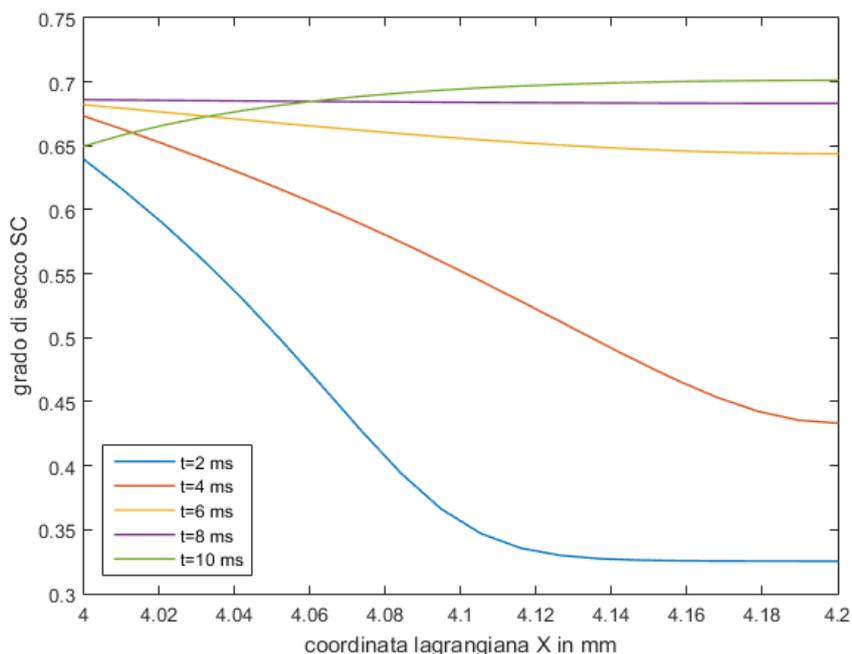


Figura 4.12: Evoluzione del grado di secco per una polpa chimica, ottenuta con il modello carta-feltro e dominio simmetrico ($X = 4$ mm interfaccia carta-feltro). Velocità di lavorazione $u = 1500$ m/min. Grammatura $w = 147$ g/m².

In confronto alla polpa meccanica delle sezioni precedenti, la pasta chimica analizzata ha una permeabilità maggiore, di conseguenza è possibile lavorare un foglio di maggior spessore a parità di velocità. In particolare i risultati mostrati sono ottenuti con una velocità di lavorazione $u = 1500$ m/min ed uno spessore iniziale della carta di 0,4 mm, a cui corrisponde una grammatura di circa $w = 147$ g/m², avendo considerato la densità del solido pari a $\rho_s = 1550$ kg/m³. In figura 4.12 è riportato il grado di secco per le condizioni dette, a diversi istanti temporali e diagrammati nel semidominio; si nota in particolare che considerando la riumidificazione del foglio, il valore massimo all'uscita della pressa, non si ha più all'interfaccia, ma in corrispondenza della mezzeria.

Ribadendo che il modello di riumidificazione proposto non è esaustivo, si ritiene che le stime effettuate siano accettabili se, come ipotizzato, la fase di uscita e distacco del feltro avvenga rapidamente; in questo modo, come si è visto, la tensione nella carta rimane comunque alta, pertanto il suo effetto è ancora preponderante rispetto alle forze d'inerzia e capillari. L'altro aspetto critico è l'aver considerato la carta perfettamente elastica; questa assunzione può essere molto penalizzante nel caso in cui la tensione si riduca notevolmente, ma sempre grazie alle ipotesi adottate la tensione si riduce maggiormente in prossimità dell'interfaccia, rimanendo comunque su valori elevati ($\sigma > 2$ MPa), figura 4.11.

Lo spessore totale del dominio carta-feltro (nip), può essere ricavato agevolmente a

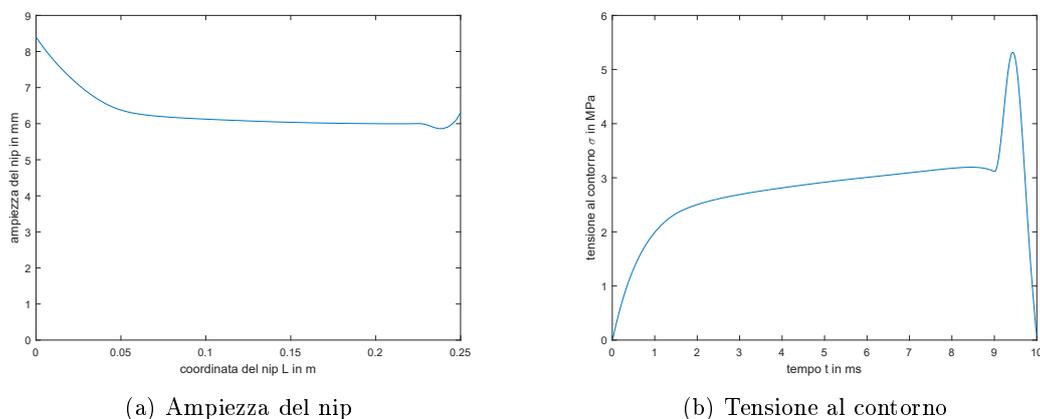


Figura 4.13: Ampiezza del nip ottenuta con il relativo profilo di carico. La carta è una polpa chimica sottoposta a battitura. Velocità di lavorazione $u = 1500$ m/min. Grammatura $w = 147$ g/m².

partire dalla velocità del feltro al contorno; quest'ultima viene calcolata tramite l'equazione (3.48) ed integrata fornisce l'ampiezza del nip. In particolare si ha

$$R_s = R^* + 2 \int_0^t v_p dt \quad (4.14)$$

dove il fattore 2 è stato introdotto in quanto si sta utilizzando il modello simmetrico. Chiaramente l'integrale va svolto numericamente, in quanto la velocità della parete è nota per punti.

Per il caso appena analizzato si ottiene il profilo di figura 4.13a. È interessante notare che nella fase iniziale, ad un aumento di tensione di circa 3 MPa corrisponde una diminuzione dello spessore del nip di circa 2 mm; nella fase finale invece, quando carta e feltro sono già compatti, all'aumento di tensione di circa 2 MPa dovuto al picco, corrisponde una variazione del nip di pochi decimi di millimetro.

4.3.2 Condizione al contorno di velocità

Nella sezione precedente si è visto che è possibile ricavare l'ampiezza del nip a partire dalla velocità al contorno. Talvolta può essere anche utile il processo inverso, ovvero avendo a disposizione il profilo della pressa e derivando la funzione che lo descrive si ottiene la velocità del feltro al contorno². Tale velocità può essere quindi usata come condizione al bordo per il modello, ad esempio usando l'equazione (3.49). Questo processo va svolto con maggior riguardo rispetto all'imporre la condizione di tensione in quanto, come si è visto, la dinamica del sistema è molto più sensibile ad una variazione dell'ampiezza del nip

²Solitamente è una funzione nota per punti, quindi è necessaria una derivazione numerica

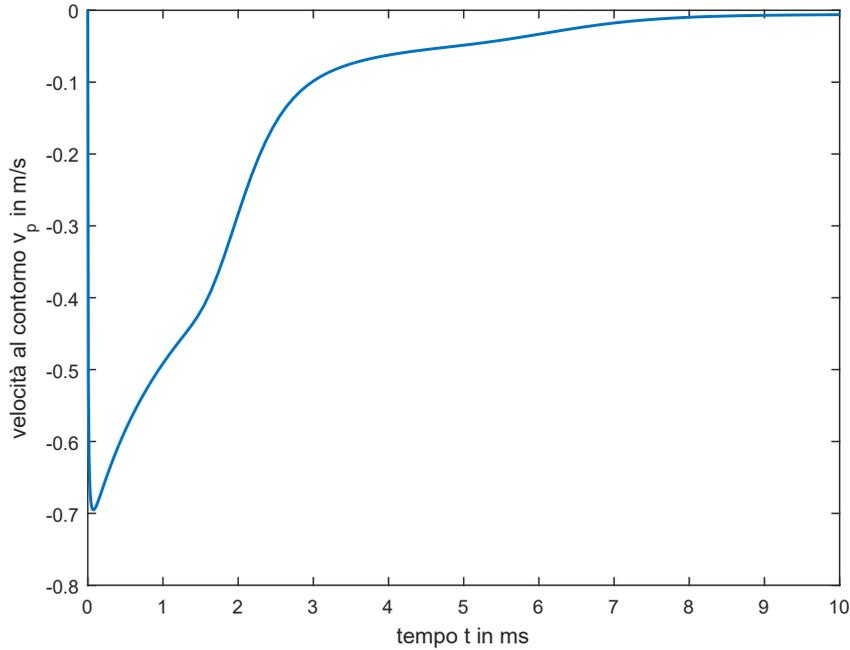


Figura 4.14: Velocità del feltro al contorno per lavorare per una polpa chimica. Velocità di lavorazione $u = 1500$ m/min. Grammatura $w = 147$ g/m².

e quindi alla velocità, rispetto ad una variazione di tensione. Questo concetto può essere spiegato euristicamente pensando all'equazione (3.44) che governa la dinamica del sistema; in particolare riscrivendola nella forma

$$-\frac{(1+e^*)^2}{\mu} \frac{\partial e}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t} = D(\sigma) \frac{\partial^2 \sigma}{\partial X^2} + \frac{\partial D}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial X} \right)^2 \quad (4.15)$$

dove è stata utilizzata la diffusività $D(\sigma)$, si nota che la condizione al contorno di velocità incide sul termine non lineare al contrario della condizione di tensione. Per evitare quindi di incorrere in errori grossolani può rendersi necessario infittire la griglia computazionale del modello numerico.

In figura 4.14 è diagrammata la velocità al contorno utilizzata per lavorare un foglio di grammatura $w = 147$ g/m², costituito dalla polpa chimica già analizzata e con una velocità di lavorazione $u = 1500$ m/min. Si nota che la fase iniziale presenta un picco molto pronunciato, per un tempo brevissimo; per questa fase è necessario quindi un passo di discretizzazione temporale molto ridotto, in modo da cogliere correttamente la forma del picco ed ottenere dei risultati sensati. L'esempio appena riportato è un caso particolare; infatti osservando i risultati ottenuti con tale velocità al contorno, mostrati in figura 4.15, si nota che la corrispondente tensione al bordo ha forma trapezoidale ed in particolare una fase iniziale con derivata non nulla nell'origine, da cui si comprende il picco in termini

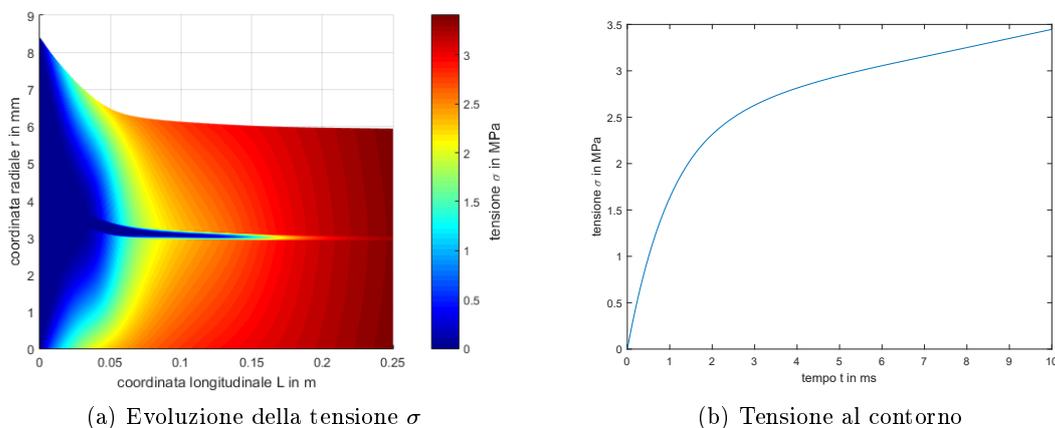


Figura 4.15: Evoluzione della tensione nel dominio euleriano e tensione al bordo, ottenuti con una condizione al contorno di velocità. La carta è una polpa chimica sottoposta a battitura. Velocità di lavorazione $u = 1500$ m/min. Grammatura $w = 147$ g/m².

di velocità. Pur essendo un caso limite può comunque verificarsi in realtà, o almeno tendervi, se l'ingresso del feltro nella pressa non è opportunamente progettato; infatti questa situazione corrisponde sostanzialmente ad un impatto del feltro con la scarpa (a rigore con la manica in polimero). Plausibilmente il feltro si deformerà anche prima dell'ingresso riducendo la "spigolosità" dell'impatto, ma comunque si possono presentare fenomeni locali negativi, ad esempio di usura eccessiva.

Riferendosi alla figura 4.16 si nota che l'evoluzione del grado di secco ottenuto è in linea con i risultati precedenti, ribadendo l'accortezza di effettuare una discretizzazione più fitta per la risoluzione numerica.

4.3.3 Considerazioni finali

In questa sezione sono stati analizzati i risultati ottenuti modellizzando solamente il foglio di carta e poi introducendo il feltro. In particolare l'introduzione di quest'ultimo, considerandolo saturo, non stravolge i risultati del caso semplificato, anzi le differenze sono piuttosto contenute. Chiaramente, come è stato spiegato, in realtà il feltro non è saturo, ma vi è la presenza di aria. Tipicamente la presenza dell'aria va a ridurre la resistenza totale del flusso d'acqua, pertanto è ragionevole pensare che i risultati siano intermedi a quelli dei due casi estremi analizzati. Quindi considerare il feltro saturo non crea problemi per la risoluzione del modello, ma può essere un grosso problema da un punto di vista pratico. Infatti le pareti a contatto con i feltri, nel modello sono considerate infinitamente permeabili; quest'assunzione può essere una buona approssimazione della realtà se il rullo è forato, rigato od aspirante e la manica in polimero rigata, in modo che l'acqua espulsa venga accolta dalle rispettive cavità. Sono però comuni anche dispositivi lisci, in questi casi la saturazione non deve assolutamente essere raggiunta, in quanto l'impatto del fluido contro una parete impermeabile produce delle pressioni elevate, con conseguente bassa

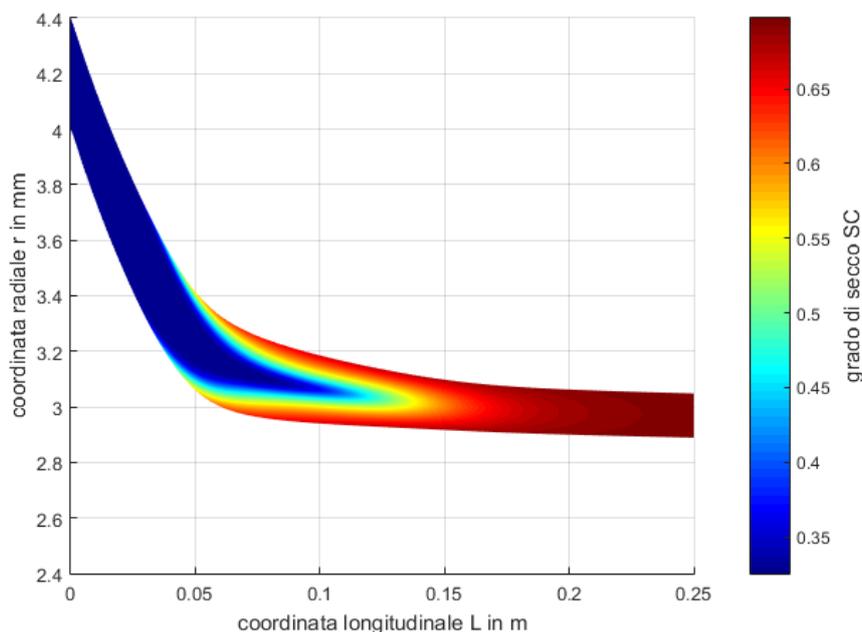


Figura 4.16: Evoluzione del grado di secco in coordinate euleriane per una polpa chimica. Velocità di lavorazione $u = 1500$ m/min. Grammatura $w = 147$ g/m².

qualità del prodotto lavorato. Un discorso analogo può essere svolto anche per l'aria, se non ha la possibilità di fluire all'esterno o se non ha sufficiente spazio a disposizione, in modo da non comprimersi eccessivamente.

In ogni caso si è visto che scegliendo opportunamente i parametri di lavorazione, in particolare la velocità del foglio di carta, i risultati ottenuti sono ottimi ed in linea con l'analisi sperimentale di chi ha caratterizzato i materiali. Infatti, a parte i casi in cui si è simulato un picco di tensione, i valori massimi di tensione sono stati al limite leggermente superiori a quelli utilizzati per ricavare le equazioni costitutive del materiale, evitando così di commettere errori grossolani, causati appunto dall'ignoranza delle equazioni al di fuori dell'intervallo sperimentale su cui sono state calcolate.

Un discorso diverso va effettuato in rapporto all'applicazione industriale. Si è visto appunto che i risultati sono ottimi per determinati parametri di lavorazione, in pratica si può tendere a quei risultati se la pressa è progettata ad hoc per un certo tipo di carta e per una data grammatura del foglio, ciò si traduce in una bassissima flessibilità della macchina stessa. Infatti tipicamente in una pressa è possibile controllare la posizione della scarpa rispetto al rullo e la velocità di lavorazione, ciò equivale ad avere una condizione al contorno in termini di velocità, per cui si è vista un'elevata sensibilità del modello. Sarebbero quindi necessarie diverse tipologie di scarpa per ogni tipo di coppia feltro-carta, chiaramente ciò non è possibile per motivi economici. Pertanto una macchina ben progettata dovrebbe garantire dei risultati buoni anche per situazioni "fuori progetto", posizionando correttamente la scarpa ed eventualmente scegliendo un feltro opportuno.

Capitolo 5

Conclusioni

In questa tesi è stato proposto un approccio alla modellizzazione della pressatura della carta, per mezzo di una pressa a scarpa, basato sulla teoria dei flussi in mezzi porosi deformabili. Innanzitutto la teoria è stata sviluppata per un generale modello tridimensionale, descritto secondo il formalismo euleriano, per poi passare ad un modello unidimensionale, attraverso un'analisi di scala svolta in base alle dimensioni tipiche di una pressa a scarpa. Il modello così ottenuto è sicuramente meno complesso, ma ancora difficile da trattare, per la presenza della velocità composta e a causa di un dominio non fisso. Per ovviare a questo problema si è passati alla descrizione secondo un punto di vista lagrangiano, in particolare attraverso un sistema di coordinate materiali fisse sul solido, giungendo così ad un'unica equazione che descrive la dinamica del sistema. In particolare si ha un'equazione differenziale alle derivate parziali di diffusione non lineare, ovvero del secondo ordine di tipo parabolico. Tale equazione può essere scritta secondo l'incognita e , grado di vuoto, o molto più utile, secondo la tensione σ . In quest'ultima forma è particolarmente adatta per modelli in cui vi sono interfacce tra materiali solidi (feltro e carta), in quanto la tensione all'interfaccia è continua ed è direttamente calcolata, senza ricorrere ad ulteriori condizioni poste sull'interfaccia stessa; il tutto è risolto numericamente con un metodo delle linee, avendo l'accortezza di porre un nodo della discretizzazione spaziale in corrispondenza delle interfacce.

Tipicamente si è visto che il modello risulta simmetrico, pertanto è stato analizzato solamente metà dominio spaziale; in questa maniera viene alleggerita la risoluzione al calcolatore. Inoltre il modello è stato risolto adottando delle condizioni al contorno sia in termini di tensione che di velocità .

La soluzione di tensione ottenuta è stata quindi manipolata per avere altre grandezze utili, al fine di comprendere la bontà del processo; a tal proposito si è fatto ampio uso del grado di secco e non meno importante, è stato ricavato il profilo del nip.

Per concludere, il modello presentato è utile per ottenere rapidamente una stima delle grandezze tipiche del processo di pressatura della carta, in base ai dati di input forniti, quali ad esempio la velocità di lavorazione, lo spessore del foglio, la tipologia di carta; avendo sempre chiaro che la bontà dei risultati è fortemente legata alla bontà dei dati in ingresso. Al riguardo, si è visto essere particolarmente critico l'uso delle equazioni costitutive del materiale.

Appendice A

Analisi di scala

Tramite l'analisi teorica si è giunti alla descrizione di un generico problema tridimensionale per mezzo della seguente equazione

$$\left(\frac{D\phi}{Dt}\right)_s - \phi \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{K}(\mathbf{F})}{\mu} \nabla \cdot \mathbf{T}'\right) = 0 \quad (\text{A.1})$$

Per ridurre drasticamente la complessità del problema, è possibile ricondursi ad un'analogia equazione descrivente un problema unidimensionale, svolgendo un'analisi di scala sulle grandezze in gioco, in modo da trascurare i termini meno influenti. In particolare si nota che l'equazione (A.1) è un'equazione scalare, definita da grandezze tensoriali; è quindi necessario scegliere un sistema di riferimento in modo da sviluppare i singoli termini.

Osservando la geometria della pressa a scarpa può essere conveniente adottare un sistema di coordinate cilindriche, con l'origine posta nel centro di rotazione del rullo. Le direzioni principali sono quindi:

- direzione radiale r ;
- direzione circonferenziale θ ;
- profondità z .

Assumendo che le direzioni principali di deformazione coincidano con le direzioni principali del sistema di riferimento è possibile scrivere i tensori della permeabilità e della tensione come matrici diagonali

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_r & 0 & 0 \\ 0 & k_\theta & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

$$\mathbf{T}' = \begin{bmatrix} \sigma_r & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\theta & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

Sviluppando tutti i termini si ottiene

$$\frac{\mu}{\phi} \left(\frac{D\phi}{Dt}\right)_s = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(k_r r \frac{\partial \sigma_r}{\partial r}\right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{k_\theta}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}\right) \quad (\text{A.4})$$

Per valutare l'influenza degli addendi al secondo membro è necessario adimensionalizzare alcune grandezze secondo le scale tipiche del problema, ovvero

$$r = sR \tag{A.5}$$

$$\theta = \frac{L}{sR} \Theta \tag{A.6}$$

$$z = PZ \tag{A.7}$$

Dove s è la scala dello spessore del nip, ovvero 10 mm; L è la lunghezza tipica del nip, 250 mm; P è la larghezza tipica del foglio di carta, nell'ordine di 10 m. Le coordinate adimensionali sono chiaramente R, Θ, Z . Sostituendo nella (A.4) e moltiplicando per s^2 , si ottiene

$$s^2 \frac{\mu}{\phi} \left(\frac{D\phi}{Dt} \right)_s = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(k_r R \frac{\partial \sigma_r}{\partial R} \right) + \frac{s^2}{RL^2} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(k_\theta \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \Theta} \right) + \frac{s^2}{P^2} \frac{\partial}{\partial Z} \left(k_z \frac{\partial \sigma_z}{\partial Z} \right) \tag{A.8}$$

Osservando il processo di lavorazione si nota che il foglio viene deformato unicamente lungo la direzione radiale, è quindi lecito assumere $\sigma_r > \sigma_\theta \sim \sigma_z$, ma cautelativamente si adotta

$$\sigma \sim \sigma_r \sim \sigma_\theta \sim \sigma_z \tag{A.9}$$

Per quanto riguarda la permeabilità, analisi sperimentali hanno dimostrato che la permeabilità trasversale di un foglio di carta può essere da due a quaranta volte inferiore alla permeabilità planare [13], possiamo quindi scrivere

$$k = k_r = \frac{k_\theta}{\alpha} = \frac{k_z}{\alpha} \tag{A.10}$$

con $\alpha = 2 \div 40$. Sostituendo nella (A.8) si ha

$$s^2 \frac{\mu}{\phi} \left(\frac{D\phi}{Dt} \right)_s = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(Rk \frac{\partial \sigma}{\partial R} \right) + \frac{\alpha s^2}{RL^2} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(k \frac{\partial \sigma}{\partial \Theta} \right) + \frac{\alpha s^2}{P^2} \frac{\partial}{\partial Z} \left(k \frac{\partial \sigma}{\partial Z} \right) \tag{A.11}$$

Utilizzando i valori tipici proposti si ha

$$1 \gg \frac{\alpha s^2}{L^2} \gg \frac{\alpha s^2}{P^2} \tag{A.12}$$

in particolare, nel caso peggiore considerando $\alpha = 40$, si ha

$$1 > 64 \times 10^{-3} > 4 \times 10^{-5} \tag{A.13}$$

Di conseguenza l'addendo preponderante al secondo membro dell'equazione (A.11) è il primo, il secondo ed il terzo possono essere trascurati. Ritornando alle coordinate dimensionali si ha

$$\left(\frac{D\phi}{Dt} \right)_s = \frac{\phi}{\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(rk \frac{\partial \sigma}{\partial r} \right) \tag{A.14}$$

Scrivendo la coordinata radiale come $r = \hat{r} + \hat{R}$, dove \hat{R} è il raggio del rullo, notando che $dr = d\hat{r}$ si ottiene

$$\left(\frac{D\phi}{Dt}\right)_s = \frac{\phi}{\mu} \frac{1}{\hat{r} + \hat{R}} \frac{\partial}{\partial \hat{r}} \left((\hat{r} + \hat{R}) k \frac{\partial \sigma}{\partial \hat{r}} \right) \quad (\text{A.15})$$

Considerando che il raggio del rullo è molto maggiore dello spessore del nip, ovvero che il raggio di curvatura del dominio spaziale considerato è molto maggiore della sua dimensione radiale, si ha che

$$\hat{r} + \hat{R} \sim \hat{R} = \text{costante} \quad (\text{A.16})$$

di conseguenza, nell'equazione (A.15) è possibile portare fuori dall'operazione di derivazione al secondo membro tale costante e semplificarla, ottenendo quindi

$$\left(\frac{D\phi}{Dt}\right)_s = \frac{\phi}{\mu} \frac{\partial}{\partial r} \left(k \frac{\partial \sigma}{\partial r} \right) \quad (\text{A.17})$$

Il secondo membro dell'equazione (A.17) non è ulteriormente semplificabile, è necessario ora trattare il primo membro. Sviluppandolo si ha

$$\left(\frac{D\phi}{Dt}\right)_s = \frac{\partial \phi}{\partial t} + u_r \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (\text{A.18})$$

Assumendo il processo di lavorazione stazionario si ha $\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$; il foglio non si muove lateralmente, perciò si assume $u_z \sim 0$, trascurando eventuali discrepanze ai bordi; indicando con ω , la velocità angolare del rullo si assume $\frac{u_\theta}{r} = \omega$. Con queste ultime assunzioni si può scrivere l'equazione finale dal punto di vista euleriano, ovvero

$$\left(\frac{D\phi}{Dt}\right)_s = u_r \frac{\partial \phi}{\partial r} + \omega \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{\phi}{\mu} \frac{\partial}{\partial r} \left(k \frac{\partial \sigma}{\partial r} \right) \quad (\text{A.19})$$

Bibliografia

- [1] Christopher J. Biermann. *Handbook of pulp and papermaking*. Academic Press, 1996.
- [2] A. Farina, P. Cocito, and G. Boretto. Flow in deformable porous media: modelling and simulations of compression moulding processes. *Math. Comput. Model.*, 26(11):1–15, 1997.
- [3] Duncan R. Hewitt, Daniel T. Paterson, et al. Dewatering of fibre suspensions by pressure filtration. *Physics of Fluids.*, 28(06), 2016.
- [4] D. Bežanović, C.J. van Duijn, and E.F. Kaasschieter. Analysis of wet pressing of paper: the three-phase model. Part I: constant air density. *Transport in Porous Media.*, 67(1):93–113, 2007.
- [5] L. Billi and A. Farina. Unidirectional infiltration in deformable porous media: mathematical modeling and self-similar solution. *Quart. of Appl. Math.*, 58(1):85–101, 2000.
- [6] D. Bežanović, C.J. van Duijn, and E.F. Kaasschieter. Analysis of wet pressing of paper: the three-phase model. Part II: compressible air case. *Transport in Porous Media.*, 67(2):171–187, 2007.
- [7] D. Bežanović, C.J. van Duijn, and E.F. Kaasschieter. Analysis of paper pressing: the saturated one-dimensional case. *ZAMM.*, 86(1):18–36, 2006.
- [8] R. D. Skeel and M. Berzins. A method for the spatial discretization of parabolic equations in one space variable,. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing.*, 11:1–32, 1990.
- [9] Marko Rasi. *PERMEABILITY PROPERTIES OF PAPER MATERIALS*. PhD thesis, University of Jyväskylä., 2013.
- [10] Vinicious. Lobosco. *On the modelling of mechanical dewatering in papermaking*. PhD thesis, KTH Royal Institute of Technology, 2004.
- [11] M. van Lieshout. *The effect of wet pressing on paper quality*. PhD thesis, University of Groningen, 2006.
- [12] Collin Hii et al. The web structure in relation to the furnish composition and shoe press pulse profiles during wet pressing. *Nordic Pulp and Paper Research Journal*, 27(4), 2012.
- [13] J. D. Lindsay and P. H. Brady. Studies of anisotropic permeability with applications to water removal in fibrous webs - part 2. *Tappi Journal*, 76(11):167–174, 1993.