

**POLITECNICO DI TORINO**

**Corso di Laurea Magistrale**

**In Ingegneria Civile**

Tesi di Laurea Magistrale

**“Metodologie innovative per il monitoraggio  
strutturale dei ponti”**



**Relatori:**

Prof. Ing. Maurizio Taliano

Dott. Ing. Matteo Guiglia

**Candidato:**

Ten. Antonio Palermo

A.A. 2017/2018

*a Oronzina e Sara*

# SOMMARIO

<b>INTRODUZIONE .....</b>	<b>V</b>
<b>STRUCTURAL HEALTH MONITORING.....</b>	<b>1</b>
<b>1.1 Il monitoraggio strutturale .....</b>	<b>1</b>
1.1.1 Evoluzione storica del monitoraggio delle strutture.....	2
1.1.2 Obiettivi del monitoraggio strutturale .....	2
1.1.3 L'architettura del monitoraggio strutturale .....	4
<b>1.2 Il modello agli elementi finiti .....</b>	<b>4</b>
1.2.1 Modello "spine beam" e "hybrid beam" .....	5
1.2.2 Il Problema diretto e il problema inverso.....	5
1.2.2.1 Il modello finale .....	6
<b>1.3 Principi base del SHM.....</b>	<b>8</b>
<b>1.4 Il sistema di rilevamento: i sensori.....</b>	<b>9</b>
1.4.1 Carichi naturali e artificiali .....	10
1.4.1.1 Anemometri e termometri .....	11
1.4.1.2 Sismometri.....	11
1.4.1.3 Stazioni Weigh-in-motion (WIM).....	11
1.4.2 Risposta strutturale.....	11
1.4.2.1 Estensimetri .....	11
1.4.2.1.1 Estensimetro resistivo.....	12
1.4.2.1.2 Sensori a fibra ottica: il SOFO.....	13
1.4.2.2 Inclinometri .....	14
1.4.2.3 LVDT: Linear Variable Differential Transformer.....	15
<b>1.5 La salute di una struttura: analisi delle condizioni statiche.....</b>	<b>15</b>
1.5.1 L'ispezione strutturale.....	17
1.5.2 L'ispezione negli Eurocodici e nelle "Norme tecniche per le costruzioni".....	19
1.5.2.1 Tecniche non distruttive .....	19
1.5.2.1.1 L'ispezione visiva.....	19
1.5.2.1.2 Emissioni acustiche .....	19
1.5.2.1.3 Vibration Based Inspection.....	19
1.5.2.2 Tecniche distruttive .....	20
1.5.2.2.1 Pull-Out .....	20
1.5.2.2.2 Prova penetrometrica: la sonda Windsor .....	21
1.5.2.2.3 Pull Off (Bond test) .....	21

1.5.2.2.4	Carotaggi .....	21
<b>1.6</b>	<b>Valutare la sicurezza strutturale.....</b>	<b>22</b>
1.6.1	Carico limite.....	22
<b>1.7</b>	<b>La previsione di collasso.....</b>	<b>23</b>
<b>1.8</b>	<b>Le prove di carico .....</b>	<b>25</b>
1.8.1	Ponti stradali .....	25
1.8.2	Ponti ferroviari .....	25
<b>I MODELLI TEORICI.....</b>		<b>27</b>
<b>1.9</b>	<b>Metodo del diagramma momento – curvatura .....</b>	<b>27</b>
1.9.1	La curvatura di una sezione .....	27
1.9.1.1	Il modulo di elasticità del calcestruzzo.....	28
1.9.1.2	Il momento d’inerzia della sezione trasversale.....	30
1.9.1.3	La curvatura media e il momento d’inerzia medio .....	31
1.9.1.3.1	CEB-FIP Model Code 1990.....	32
1.9.1.3.2	Eurocode 2.....	34
1.9.1.3.3	ACI Committee 435R-95 (metodo Branson).....	34
1.9.1.4	Strutture staticamente indeterminate .....	36
1.9.1.4.1	First stage.....	36
1.9.1.4.2	Second stage .....	37
1.9.2	Il diagramma momento – curvatura .....	37
1.9.2.1	Modello CEB.....	37
1.9.2.2	Modello ACI.....	38
1.9.3	Il calcolo delle inflessioni .....	38
1.9.3.1	Teorema dei lavori virtuali .....	39
1.9.4	La deformata di una struttura .....	43
1.9.4.1	Il diagramma M-C sperimentale.....	43
1.9.4.2	“Link” del diagramma M-C.....	45
1.9.4.3	Selezione del modello teorico attraverso il confronto del diagramma M-C teorico con il diagramma M-C sperimentale.....	46
1.9.4.4	Aggiornamento dei parametri fondamentali .....	46
1.9.5	Casi studio: travi in cemento armato semplicemente appoggiate.....	47
1.9.5.1	Trave 3: trave semplicemente appoggiata con forza concentrata in mezzzeria .....	49
1.9.5.2	Trave 1: trave semplicemente appoggiata con due forze concentrate applicate .....	59
1.9.5.3	Trave 2: trave semplicemente appoggiata con due forze concentrate applicate .....	68
<b>1.10</b>	<b>Metodo polinomiale .....</b>	<b>77</b>
1.10.1	Applicazione del metodo polinomiale a delle travi di laboratorio.....	80

1.10.1.1	Trave 1: trave semplicemente appoggiata con due forze concentrate applicate .....	81
1.10.1.2	Trave 2: trave semplicemente appoggiata con due forze concentrate applicate .....	83
1.10.1.3	Trave 3: trave semplicemente appoggiata con forza concentrata in mezzeria .....	85
1.10.1.4	Trave 5: trave semplicemente appoggiata con forza concentrata in un punto arbitrario .....	88
1.10.1.5	Trave 6: trave semplicemente appoggiata con forza concentrata in un punto arbitrario .....	90
<b>1.11</b>	<b>Metodo dello sviluppo in serie di Fourier .....</b>	<b>93</b>
1.11.1	Travi in semplice appoggio .....	96
1.11.1.1	Trattazione teorica .....	96
1.11.1.1.1	Carico uniformemente distribuito .....	97
1.11.1.1.2	Forza concentrata in mezzeria .....	98
1.11.1.1.3	Forze concentrate simmetricamente disposte rispetto alla mezzeria .....	100
1.11.1.1.4	Forza concentrata disposta in un punto generico .....	101
1.11.1.1.5	Carico uniformemente distribuito e forza concentrata pari ad un decimo della sua risultante in mezzeria .....	103
1.11.1.2	Trattazione sperimentale .....	104
1.11.1.2.1	Applicazione pratica (ignorando il contributo del taglio) .....	105
1.11.1.2.1.1	Trave 1 .....	105
1.11.1.2.1.2	Trave 2 .....	107
1.11.1.2.1.3	Trave 3 .....	109
1.11.1.2.1.4	Trave 5 .....	111
1.11.1.2.1.5	Trave 6 .....	113
1.11.1.2.2	Considerazioni sull'applicazione pratica .....	115
1.11.1.2.3	Applicazione pratica (considerando il contributo del taglio) .....	116
1.11.1.2.3.1	Trave 1 .....	119
1.11.1.2.3.2	Trave 2 .....	121
1.11.1.2.3.3	Trave 3 .....	123
1.11.1.2.3.4	Trave 5 .....	125
1.11.1.2.3.5	Trave 6 .....	127
1.11.1.2.4	Considerazioni sull'applicazione pratica considerando il contributo del taglio .....	128
1.11.2	Trave doppiamente incastrata .....	129
1.11.2.1	Trattazione teorica .....	129
1.11.2.1.1	Forza concentrata in mezzeria .....	130
1.11.2.2	Annotazioni sul metodo dello sviluppo in serie applicato alla trave in semplice appoggio e alla trave doppiamente incastrata .....	131
1.11.3	Trave incastrata ad un'estremità e libera all'altra estremità (mensola) .....	132
1.11.3.1	Trattazione teorica .....	132
1.11.3.1.1	Forza concentrata all'estremità libera .....	133
1.11.3.1.1.1	Funzione di forma "A" .....	134
1.11.3.1.1.2	Funzione di forma "B" .....	135
1.11.3.2	Annotazioni sul metodo dello sviluppo in serie applicato alla mensola .....	135

1.11.4	Posizionamento ottimale dei sensori .....	136
1.11.4.1	Trattazione teorica .....	136
1.11.4.2	Trattazione sperimentale .....	137
<b>I NUOVI SENSORI DI RILEVAMENTO: INTRODUZIONE E PROVA DI</b>		
<b>LABORATORIO .....</b>		<b>138</b>
<b>1.12</b>	<b>SHBox .....</b>	<b>138</b>
1.12.1	I nodi multi – sensore .....	139
1.12.1.1	Nodi multi – sensore di spostamento.....	140
1.12.1.2	Nodi multi – sensore di deformazione.....	140
1.12.1.3	Nodi multi – sensore del potenziale galvanico .....	141
1.12.1.4	La procedura di installazione.....	141
1.12.2	La piattaforma software .....	141
1.12.3	L’infrastruttura di rete e il protocollo LoRa .....	142
<b>1.13</b>	<b>La prova di laboratorio .....</b>	<b>143</b>
<b>1.14</b>	<b>L’applicazione sul campo: il sistema di monitoraggio permanente su ponti e viadotti .....</b>	<b>144</b>
<b>1.15</b>	<b>Potenzialità di applicazione.....</b>	<b>146</b>
<b>CONCLUSIONI .....</b>		<b>147</b>
<b>BIBLIOGRAFIA.....</b>		<b>149</b>
<b>INDICE DELLE FIGURE E DELLE TABELLE .....</b>		<b>152</b>
<b>RINGRAZIAMENTI</b>		

## Introduzione

Il monitoraggio strutturale è attualmente uno dei più importanti campi ingegneristici in cui la ricerca teorica incontra lo sviluppo di nuove tecnologie.

Le tristi e disastrose catastrofi che hanno colpito numerose aree geografiche del pianeta, ed in particolar modo l'Italia, spingono l'opinione pubblica a volgere l'attenzione verso il delicato concetto di salute strutturale.

La presente tesi introduce, in maniera generale, la storia ed i concetti principali dello *Structural Health Monitoring* (SHM), ovvero del monitoraggio strutturale, approfondendo con una particolare chiave di lettura il problema del monitoraggio della salute di un generico ponte.

Sebbene nel campo dell'ingegneria meccanica ed aerospaziale lo studio sul monitoraggio abbia raggiunto risultati sorprendenti e incoraggianti, nel settore dell'ingegneria civile non si possono ancora individuare soluzioni affidabili ed economicamente sostenibili. La complessità tecnica legata al comportamento di un'opera infrastrutturale richiede una conoscenza approfondita ed in costante aggiornamento, al fine di elaborare dei modelli predittivi sufficientemente realistici. Proprio per questo, il risultato più convincente del monitoraggio appare quello dell'individuazione di anomalie strutturali tra quanto registrato e quanto "previsto" da un ingegnere in fase di progetto. Uno degli elementi più comunemente utilizzati a tal fine è il valore dell'inflessione di un punto della struttura.

Il primo capitolo è dedicato alle definizioni e all'introduzione degli elementi base del monitoraggio, configurandosi come un passaggio propedeutico alla migliore assimilazione dei concetti sviluppati successivamente.

Il secondo capitolo, nucleo di questa tesi, è costituito dallo studio dei principali modelli teorici esistenti in letteratura, che permettono il calcolo dell'inflessione di un punto di una struttura, isostatica o iperstatica, partendo dai valori (misurati sperimentalmente) di curvatura e/o inclinazione di una sezione trasversale. I risultati sono commentati e confrontati valutandone l'accuratezza in funzione del costo delle informazioni necessarie per il calcolo.

Si propongono inoltre due approcci metodologici alternativi. Il primo fa uso del diagramma momento – curvatura per ottenere, con l'applicazione del teorema dei lavori virtuali, la freccia nella mezzeria di una struttura isostatica. Il secondo permette di esprimere, attraverso uno sviluppo in serie di Fourier, lo spostamento di un punto della struttura in funzione delle

curvature. I risultati teorici sono confrontati con i dati provenienti da prove sperimentali effettuate in laboratorio.

L'ultima parte della tesi ha infine analizzato come caso-studio il sistema proposto da una start up del Politecnico di Torino. Coniugando un sistema di rilevamento multi – sensore a basso costo con le metodologie di calcolo elaborate, introdotte precedentemente, si considera possibile implementare un'infrastruttura di monitoraggio, in maniera massiva e capillare, che permetta di migliorare il livello di sicurezza nella gestione delle infrastrutture presenti sul territorio nazionale.

# Structural Health Monitoring

## 1.1 Il monitoraggio strutturale

Il monitoraggio strutturale, noto anche come *structural health monitoring* (SHM), è uno dei più recenti e interessanti campi di studio dell'ingegneria strutturale. Esso rende possibile, sfruttando il continuo sviluppo tecnologico di strumenti di rilevazione ed elaborazione dati, valutare con sempre maggior chiarezza le caratteristiche strutturali e il livello di danneggiamento di una qualunque opera, consentendo al professionista di predirne l'andamento nel tempo<sup>1</sup>.

Il monitoraggio strutturale può rivestire un ruolo fondamentale nello scenario infrastrutturale italiano, ricco di un patrimonio immobiliare articolato e vasto, in un'epoca caratterizzata da una maggiore sensibilizzazione dell'opinione pubblica nei confronti della sicurezza strutturale, causata dalle numerose e tristi catastrofi che hanno colpito profondamente il cuore sociale ed economico del Paese. Monitorare lo stato di salute di una struttura significa aumentarne il livello di sicurezza nelle sue diverse fasi di vita, dalla realizzazione all'abbattimento. Implementare un sistema di monitoraggio ad esempio rende possibile, alle autorità competenti, l'individuazione delle criticità e una loro categorizzazione. La realizzazione di un archivio, continuamente aggiornato con i dati rilevati, permette infine di ottimizzare l'impiego delle risorse e migliorare la qualità degli interventi da programmare.

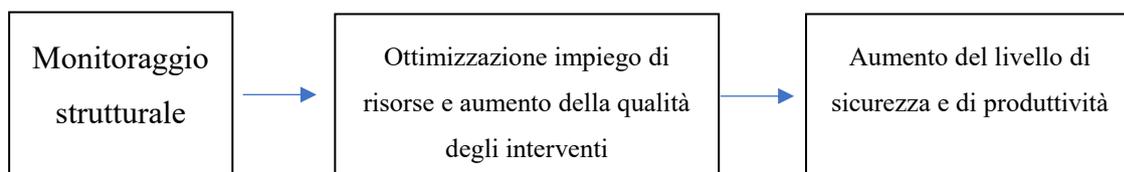


Figura 1: Vantaggi del monitoraggio strutturale

Il monitoraggio strutturale si basa sull'interazione di tecniche di rilevamento e modelli matematici. Le ipotesi alla base dei modelli matematici sono quelle che costituiscono la spina dorsale della scienza delle costruzioni e vantano, per tanto, una traduzione letteraria ampia e variegata. In questa sede si richiameranno esclusivamente le ipotesi utilizzate dalle teorie che verranno introdotte nei prossimi paragrafi. La continuità nel tempo del monitoraggio è infine la caratteristica peculiare che differenzia questa disciplina da una sporadica misurazione di dati, rendendo possibile la registrazione delle variazioni dei principali fattori d'interesse.

---

<sup>1</sup> HUSTON D., 2011

### 1.1.1 Evoluzione storica del monitoraggio delle strutture

La disciplina del monitoraggio strutturale ha avuto un notevole successo nel campo dell'ingegneria aerospaziale e meccanica. Per quanto riguarda l'ingegneria civile si è sviluppata principalmente su opere infrastrutturali d'importanza strategica come i ponti, le dighe e le piattaforme off-shore. Solo negli ultimi anni l'SHM ha registrato un aumento di applicazioni nel campo delle costruzioni ad uso residenziale o commerciale<sup>2</sup>. La pratica di monitorare un ponte per analizzarne il suo stato di salute trova le sue radici a San Francisco, in California (USA), quando negli anni Trenta del secolo scorso furono realizzati il famoso Golden Gate Bridge (1933 – 1937) e il Bay Bridge (1933 – 1936)<sup>3</sup>.

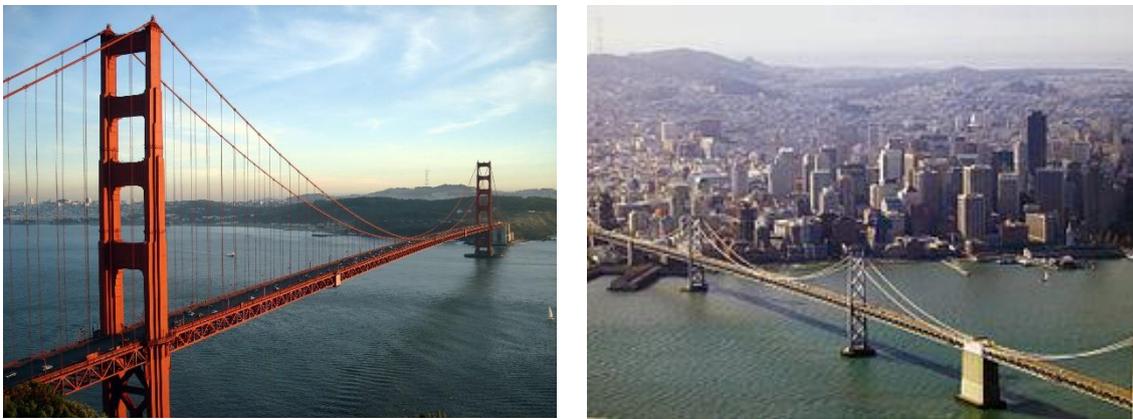


Figura 2: Golden Gate Bridge (sx, Rich Niewiroski Jr.) e Bay Bridge (dx, Samuel Wantman) a San Francisco, California, USA, Wikipedia

Un massiccio impiego di questa pratica ingegneristica ha avuto inizio solo dopo alcuni tragici eventi, come il crollo del Tacoma Narrows Bridge nel 1940 (Washington, USA) o quello del ponte a Point Pleasant nel 1967 (West Virginia, USA)<sup>4</sup>. È però dagli anni Novanta del secolo scorso che si è registrato un aumento dell'installazione dei sistemi di monitoraggio a lungo termine nei principali scenari mondiali<sup>5</sup>.

### 1.1.2 Obiettivi del monitoraggio strutturale

Spesso si parla dei ponti, delle dighe, delle autostrade e dei tunnel come di infrastrutture di importanza strategica. Questa particolare associazione differenzia queste opere dell'ingegneria civile dalle più comuni costruzioni ad uso abitativo. Ma tanto per le prime quanto per le seconde il livello di sicurezza da garantire prima, durante e dopo la loro realizzazione non può scendere

---

<sup>2</sup> DOEBLING S.W., FARRAR C.R., PRIME M.B., SHEVITZ D.W., 1996

<sup>3</sup> Xu Y.L., Xia Y., 2012

<sup>4</sup> DOEBLING S.W., FARRAR C.R., PRIME M.B., SHEVITZ D.W., 1996

<sup>5</sup> Xu Y.L., Xia Y., 2012, p.4

## Il monitoraggio strutturale

al di sotto di una determinata soglia. Si pensi che le attuali normative nazionali, sfruttando il metodo semi probabilistico, riducono la probabilità di raggiungimento dello stato limite ultimo di una struttura ad un valore compreso tra  $1:10^6$  e  $1:10^7$ . È però evidente che il collasso di un ponte o di una diga, a differenza di una palazzina abitativa, non comporta solo la tragica ed intollerabile perdita di vite umane, ma ha anche pesanti conseguenze da un punto di vista economico, sociale e addirittura psicologico sulla popolazione. A questo si aggiunge la presa di coscienza che gran parte delle opere civili attualmente dislocate su tutto il territorio nazionale ha non solo raggiunto la fase finale della propria vita utile, ma è addirittura stressata da sollecitazioni molte volte maggiori di quelle con cui è stata progettata. Bisogna anche rilevare che in Italia, il patrimonio immobiliare caratterizzato da una rilevante importanza storico-culturale occupa gran parte di tutte le costruzioni esistenti. Gli ingegneri quindi si trovano a gestire un patrimonio strutturale realizzato non solo con differenti materiali (cemento armato, acciaio, muratura, compositi), ma anche con diverse tecniche costruttive e in momenti storici di realizzazione molto differenti. L'ingegneria della sicurezza strutturale infatti potrà intervenire tanto sul "Pantheon" a Roma, quanto sul grattacielo "San Paolo" a Torino. Infine, si fa notare come il cemento armato, materiale ampiamente utilizzato nell'odierna tecnica delle costruzioni, inizialmente ritenuto eterno da un punto di vista temporale, manifesti sempre più palesemente le sue deficienze in termini di durabilità. È proprio in uno scenario delicato come questo che si possono apprezzare maggiormente i benefici e le potenzialità di un monitoraggio strutturale continuo ed efficiente nel tempo. Si riporta pertanto una lista dei principali obiettivi che questa ormai fondamentale pratica ingegneristica si pone di perseguire<sup>6</sup>:

- Monitorare le condizioni di carico di una struttura;
- Valutare il comportamento strutturale in diverse condizioni di carico;
- Verificare e aggiornare i criteri usati in fase di progetto;
- Individuare il danneggiamento;
- Guidare all'ispezione e alla manutenzione;

Il monitoraggio strutturale è inoltre uno dei principali strumenti che permettono all'ingegnere strutturale di assicurare un accettabile livello di sicurezza durante le fasi di adeguamento e consolidamento di un'opera<sup>7</sup>.

---

<sup>6</sup> XU Y.L., XIA Y., 2012, pp. 1-3

<sup>7</sup> ROSSI P.P., 1995, p. 261

### 1.1.3 L'architettura del monitoraggio strutturale

L'SHM è una complessa pratica ingegneristica generata dall'unione di diversi strumenti tecnologici. Un sistema di monitoraggio è costituito in generale dai seguenti sistemi<sup>8</sup>:

- Sistema di sensori: misurano le grandezze d'interesse;
- Sistema di acquisizione e trasmissione dati: dispositivi che ricevono i segnali generati dai sensori, li convertono e li trasmettono ai computers per l'elaborazione;
- Sistema di controllo ed elaborazione dati: controllano le operazioni del sistema di acquisizione ed elaborano i dati ricevuti;
- Sistema di gestione e archivio dati: archiviano i risultati dell'elaborazione per consentire analisi successive;
- Sistema di valutazione strutturale;

I primi due sistemi sono generalmente installati sulla struttura, gli altri invece sono dislocati all'interno degli uffici di controllo del gestore dell'infrastruttura<sup>9</sup>. Tutti questi sistemi permettono all'ingegnere strutturale di inquadrare lo stato di integrità di una struttura.

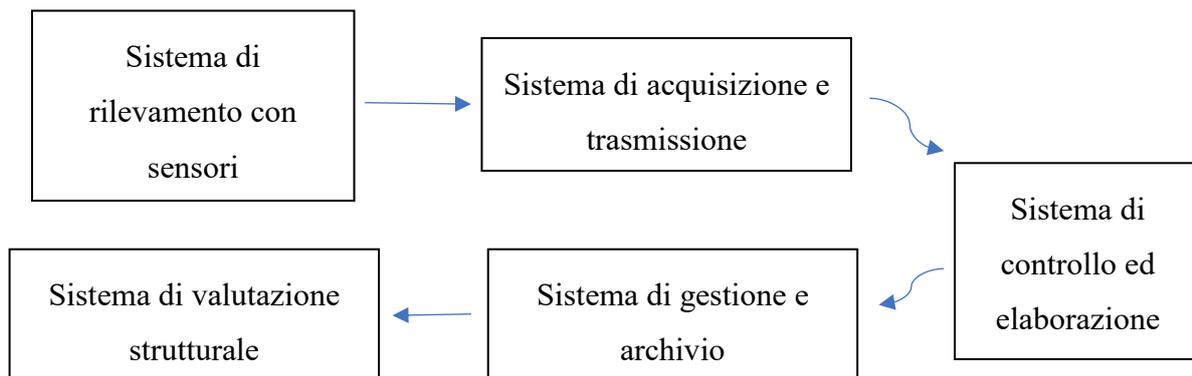


Figura 3: Architettura del SHM

## 1.2 Il modello agli elementi finiti

La modellazione agli elementi finiti ha ormai guadagnato un ruolo fondamentale in diversi settori del mondo scientifico. Software agli elementi finiti sono utilizzati ampiamente, solo per citarne alcuni, da fisici, ingegneri meccanici, aerospaziali e civili. Lo sviluppo tecnologico, l'incremento della potenza dei calcolatori o della capacità di memoria, ha di fatto ampliato esponenzialmente le possibili applicazioni e il grado di precisione dei modelli. Per quanto riguarda il *design* delle strutture in campo civile, il FEM (*Finite Element Method*, Metodo agli

<sup>8</sup> XU Y.L., XIA Y., 2012, p. 39

<sup>9</sup> XU Y.L., XIA Y., 2012, p. 39

## Il modello agli elementi finiti

elementi finiti) è uno dei principali strumenti a disposizione del progettista. Quest'ultimo ha però il dovere, etico e legale (come introdotto dalle più recenti normative nazionali<sup>10</sup>), di validare il risultato della modellazione. È necessario dunque conoscere le caratteristiche e i limiti del metodo. Sono presentati, in maniera sommaria, le principali tecniche di modellazione agli elementi finiti dei ponti.

### 1.2.1 Modello “spine beam” e “hybrid beam”

Il ponte viene modellato utilizzando elementi monodimensionali come travi, bielle e collegamenti rigidi (*rigid links*), dalle proprietà sezionali equivalenti a quelle degli elementi reali. L'estrema semplificazione introdotta ha come risultato una notevole diminuzione dell'onere computazionale e della memoria necessaria per la gestione dei dati. Evidentemente un modello di questo tipo può fornire solo alcune informazioni sul comportamento globale della struttura, utili in fase di progettazione preliminare<sup>11</sup>. Per analizzare localmente gli elementi più importanti dell'opera sarà necessario utilizzare una modellazione più completa. Per effettuare delle analisi locali più approfondite negli elementi strutturali di maggior interesse vengono realizzati dei modelli più raffinati. L'aumento della discretizzazione migliora l'accuratezza dei risultati finali ma aumenta l'onere computazionale, e quindi i tempi di elaborazione. Questi saranno proporzionali alle potenzialità dei calcolatori utilizzati, e quindi, sono funzione delle risorse impiegabili.

### 1.2.2 Il Problema diretto e il problema inverso

Il monitoraggio strutturale di opere esistenti è una pratica ingegneristica che, dal punto di vista teorico, riscopre i ruoli ricoperti dalle informazioni utilizzate in fase di progettazione. Durante il progetto di una costruzione sono note le azioni sollecitanti (statiche o dinamiche) e si possiede il modello strutturale, queste conoscenze vengono combinate per ottenere la previsione della risposta strutturale nelle varie condizioni d'interesse (stato limite di servizio e stato limite ultimo). Nel monitoraggio di un'opera esistente vengono effettuati dei rilievi e delle prove (in situ o in laboratorio) che forniscono la risposta strutturale a determinate sollecitazioni. In questo caso quindi si è a conoscenza della risposta e delle azioni, mentre ciò che si vuole determinare è il modello. Si potrebbe dire che nel primo caso si gestisce un problema diretto, mentre nel secondo si affronta il problema inverso.

---

<sup>10</sup> NTC18

<sup>11</sup> XU Y.L., XIA Y., 2012, p. 78

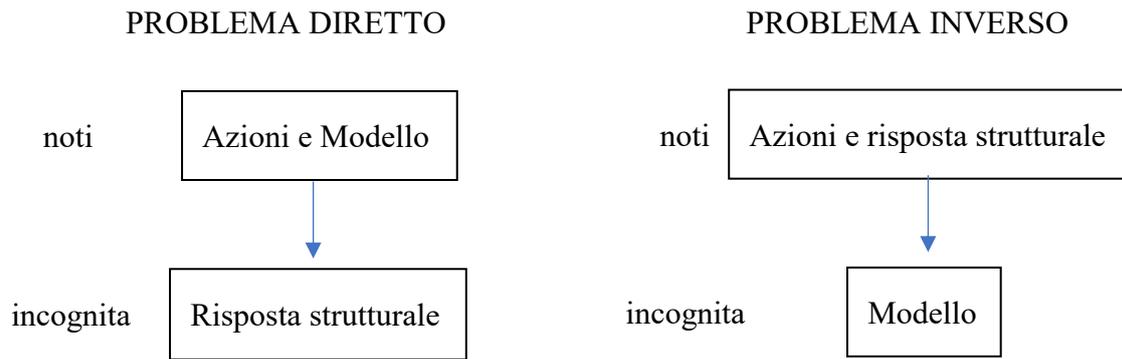


Tabella 1: Schema logico del problema diretto e del problema inverso

### 1.2.2.1 Il modello finale

Come anticipato nel precedente paragrafo, il monitoraggio strutturale prevede la risoluzione del cosiddetto problema inverso. L'obiettivo principale del monitoraggio è infatti quello di realizzare un modello finale utilizzabile ad esempio per analizzare il comportamento di una costruzione al variare dei carichi applicati.

Realizzare il modello di una struttura esistente è una delle principali *skills* dell'ingegnere strutturale. Riuscire ad approssimare la realtà della configurazione geometrica di un'opera, quasi sempre complessa ed articolata, richiede approfondite competenze e conoscenze tecniche. Il problema principale è riuscire a coniugare le informazioni note a priori (del monitoraggio) con quelle che si ricavano sperimentalmente durante le ispezioni e le prove sui materiali. Il primo modello è costruito sulla base dei disegni di progetto e presenta inevitabilmente degli errori, le cui principali incertezze sono legate ai seguenti parametri<sup>12</sup>:

1. Discretizzazione;
2. Condizioni al contorno;
3. Parametri caratteristici dei materiali;

L'amplificazione dell'errore dovuta a queste incertezze, è valutabile confrontando i valori desunti dalle prove sul campo, con quelli ricavabili dalle previsioni del modello agli elementi finiti. I parametri utilizzati per effettuare il confronto sono sovente quelli legati alle caratteristiche dinamiche della struttura, come le frequenze proprie o le forme modali di vibrazione.

---

<sup>12</sup> XU Y.L., XIA Y., 2012, p. 82

## Il modello agli elementi finiti

Diversi esperti<sup>13</sup> hanno dimostrato che la differenza tra la frequenza modale numerica e quella sperimentale di un ponte strallato supera il 10 % per molti modelli, e per alcuni può addirittura raggiungere il 40 %. Altri studiosi<sup>14</sup> hanno invece registrato delle frequenze naturali, per dei ponti pedonali, diverse circa il 29.8 % da quelle ricavate tramite un modello agli elementi finiti (prima del suo aggiornamento).

Si rende dunque necessario aggiornare il modello primario sulla base dei dati raccolti durante le prove, in situ ed in laboratorio. Così facendo è possibile ottenere un modello che approssimi più fedelmente la situazione reale. In letteratura sono presenti numerose formulazioni che consentono di tener debitamente conto dei dati sperimentali. Queste procedure, chiamate a scatola nera<sup>15</sup> (*black boxes*), restituiscono delle modellazioni che si adattano molto bene alle informazioni sperimentali estrapolate sul campo, ma non assicurano una fedele corrispondenza al comportamento reale della struttura. Una delle soluzioni proposte per risolvere questo problema è quella di realizzare il cosiddetto modello virtuale<sup>16</sup>. Quest'ultimo nasce dall'unione dei dati ricavati con un rilievo architettonico e di quelli desunti da analisi storiche. È molto utile, ai fini di una corretta approssimazione della realtà, recuperare gli elaborati riguardanti la realizzazione dell'opera da modellare, o i documenti riguardanti le caratteristiche meccaniche dei materiali impiegati durante la sua costruzione. Queste ultime informazioni sono definite "a priori" e saranno tenute in conto nell'individuazione del modello finale. In fase di aggiornamento ad esempio, avranno un peso maggiore i dati relativi alle frequenze proprie misurate, ed uno minore quelli legati alle forme modali ricavate sperimentalmente, visto il minor grado di accuratezza di quest'ultime. Deve essere posta inoltre particolare attenzione a vincolare i parametri in aggiornamento, attraverso dei limiti numerici. Così facendo si garantisce che i parametri in questione assumano dei valori reali.

È stato dimostrato statisticamente<sup>17</sup> che l'approccio del modello virtuale, riportato nel seguito, consente di incrementare l'affidabilità del primo modello realizzato. Dopo aver estrapolato le risposte strutturali dal "virtuale", si effettua un confronto con i dati sperimentali raccolti durante il monitoraggio, e si individua uno scarto<sup>18</sup>, quest'ultimo viene utilizzato per aggiornare (fase chiamata "stima") la modellazione iniziale e pervenire a quella finale.

---

<sup>13</sup> BROWNJOHN J.M.W., XIA P.Q., 2000, pp. 252-260

<sup>14</sup> ZIVANOVIC S., PAVIC A., REYNOLDS P., 2007, pp. 126-145

<sup>15</sup> CHIARUGI A., FORABOSCHI P., 1995

<sup>16</sup> CHIARUGI A., FORABOSCHI P., 1995

<sup>17</sup> CHIARUGI A., FORABOSCHI P., 1995

<sup>18</sup> CHIARUGI A., FORABOSCHI P., 1995

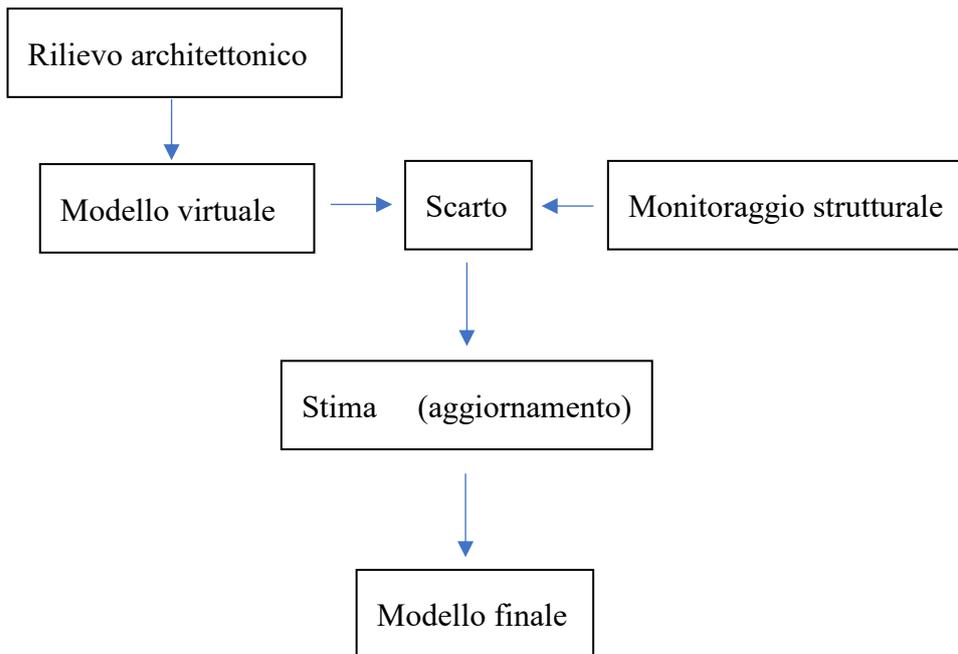


Tabella 2: Schema logico dell'approccio "virtuale"

È possibile inoltre eseguire la validazione del modello matematico effettuando un confronto tra le sollecitazioni desunte tramite un software agli elementi finiti e quelle ricavate durante le prove in situ. Si cita come esempio il caso del monitoraggio strutturale della Basilica di San Marco a Venezia, dove su alcuni elementi murari è stata eseguita la prova del martinetto piatto<sup>19</sup>, confrontando i valori ricavati sperimentalmente con quelli restituiti dal modello.

### 1.3 Principi base del SHM

Il SHM è strettamente correlato al campo della statistica e a quello della scienza dei materiali. È possibile individuare nei seguenti principi, come suggerito recentemente<sup>20</sup>, i concetti cardine di questo settore:

1. tutti i materiali possiedono difetti al livello atomico microstrutturale, ad esempio inclusioni e impurità;
2. per identificare un'anomalia è necessario effettuare una comparazione tra due stati del sistema, chiamati *baseline case* e *nonconforming case*, ovvero stato di riferimento e stato non conforme;

<sup>19</sup> ROSSI P.P., 1995, p. 259

<sup>20</sup> NEVES C., 2017

## Il sistema di rilevamento: i sensori

3. ricerca e localizzazione del danno possono essere eseguite attraverso procedure non supervisionate, mentre identificazione de tipo e quantificazione della severità del danno richiedono l'intervento del professionista;
4.
  - a. il danno non può essere misurato direttamente;
  - b. quanto più una misura è sensibile al danno, tanto più sarà influenzata dal cambiamento delle modalità operative o delle condizioni ambientali;
5. la previsione dello sviluppo temporale del danneggiamento indica quale sia il migliore sistema di monitoraggio (hardware) da utilizzare;
6. esiste un compromesso tra sensibilità di misurazione e capacità di filtrare il rumore esterno;
7. la dimensione del danno che può essere individuata dai cambiamenti nella dinamica del sistema è inversamente proporzionale al range di frequenze di eccitazione;
8. Il danno aumenta la complessità di una struttura, indirizzandola verso un comportamento non lineare

Saper distinguere una configurazione strutturale compromessa da una in buona salute richiede la conoscenza delle caratteristiche strutturali nelle diverse fasi di vita dell'opera. La mole dei dati da processare può spesso causare un allungamento dei tempi di analisi, per questo è necessario individuare le caratteristiche strutturali maggiormente influenzate dalla presenza del danneggiamento. L'identificazione di queste caratteristiche è eseguita attraverso l'implementazione di modelli analitici e sperimentali, come ad esempio un modello agli elementi finiti. Si sottolinea come sia l'acquisizione dei dati che la successiva analisi, debbano essere in grado di distinguere la risposta strutturale indotta da un eventuale danneggiamento, da quella causato dal cambiamento delle condizioni ambientali o delle modalità operative di rilevamento.

### **1.4 Il sistema di rilevamento: i sensori**

Il sistema di rilevazione sensoriale è il primo e uno dei più importanti elementi costituenti l'architettura del monitoraggio strutturale. Per poter modellare analiticamente e gestire numericamente il comportamento strutturale di un manufatto è necessario effettuare delle rilevazioni. Le rilevazioni hanno il compito di misurare delle grandezze fisiche, che nel caso

del monitoraggio strutturale (e per le teorie che verranno riproposte) si traducono principalmente in tre tipologie di parametri<sup>21</sup>:

1. Sorgenti di carico: ambientali (vento, azione sismica) o artificiali (traffico);
2. Risposte strutturali: spostamenti, deformazioni, accelerazioni e inclinazioni;
3. Effetti ambientali: temperatura, precipitazioni atmosferiche, umidità, particelle inquinanti presenti nell'aria;

L'accuratezza e la precisione delle previsioni formulate attraverso il monitoraggio strutturale sono inevitabilmente correlate all'accuratezza e alla precisione degli strumenti di rilevazione. L'importanza che la qualità del dato fornito dalle misurazioni assume è pari a quella dell'intero modello matematico utilizzato nell'elaborazione dei dati. È evidente quindi che strumenti di misura, caratterizzati da elevata accuratezza e precisione nell'acquisizione dei parametri d'interesse, predispongono ad una migliore interpretazione della risposta strutturale. I sensori, che per definizione costituiscono solo una componente dei più complessi trasduttori, traducono una grandezza in ingresso in un'altra grandezza in uscita. Progettare il miglior sistema di monitoraggio per una determinata struttura richiede diversi passaggi<sup>22</sup>. È necessario innanzitutto stabilire quali siano i parametri che si vogliono utilizzare nell'analisi della risposta strutturale. A questa fase segue quella della scelta dei sensori, fatta sulla base della grandezza e della complessità dell'opera da monitorare. Le caratteristiche qualitative intrinseche di ciascun sensore, nonché le differenti tipologie, suggeriscono agli ingegneri quali siano i dispositivi più adatti all'impiego a seconda degli obiettivi che si vogliono raggiungere. Alcuni esperti hanno individuato nei seguenti parametri le principali caratteristiche degli strumenti di misurazione<sup>23</sup>: range di misura, sensibilità di misura, risoluzione, linearità, stabilità, accuratezza, risposta di frequenza e durabilità. Nel seguito saranno citati i principali dispositivi di misurazione utilizzati nel campo dell'ingegneria civile.

### 1.4.1 Carichi naturali e artificiali

Può risultare utile la misurazione dei parametri ambientali di temperatura, umidità, pressione, e radiazione solare. L'intensità di quest'ultima, insieme alla temperatura dell'aria e alle azioni del vento sono gli elementi principali per affrontare lo studio della distribuzione di temperatura all'interno delle strutture.

---

<sup>21</sup> XU Y.L., XIA Y., 2012, p. 41

<sup>22</sup> XU Y.L., XIA Y., 2012, p. 41

<sup>23</sup> XU Y.L., XIA Y., 2012, p. 41

Il sistema di rilevamento: i sensori

#### **1.4.1.1 Anemometri e termometri**

Gli anemometri misurano la direzione e la velocità del vento, mentre i termometri misurano la temperatura della struttura e quella dell'aria. In strutture particolarmente sviluppate in senso verticale e orizzontale, l'influenza della pressione del vento è notevole, così come lo sono le deformazioni indotte dalle variazioni termiche.



Figura 4: Anemometro (sx, da NTNU/Knut Andreas Kvåle) e Termometro (dx, da Evolution Measurement)

#### **1.4.1.2 Sismometri**

I sismometri sono gli strumenti che misurano il moto del terreno. I dispositivi attualmente disponibili sul mercato si differenziano in funzione della lunghezza del periodo di misurazione. Generalmente questi strumenti misurano l'accelerazione attraverso la quale, per integrazione, si possono ottenere velocità e spostamenti. I dati estrapolati dalle misurazioni possono essere usati in fase di progetto o per analisi successive ad un determinato evento sismico.

#### **1.4.1.3 Stazioni Weigh-in-motion (WIM)**

I dispositivi WIM misurano il peso dei veicoli in movimento, ma anche la loro velocità e la distanza tra gli assali<sup>24</sup>. Sono utilizzabili per quantificare il carico del traffico (*traffic load*) senza generare lo stop veicolare, aumentando l'efficienza del sistema. Anche per questa tipologia di rilevazioni sono disponibili una vasta gamma di dispositivi, che utilizzano ad esempio *strain gauges* (estensimetri) o sensori piezoelettrici per effettuare le misurazioni.

### **1.4.2 Risposta strutturale**

#### **1.4.2.1 Estensimetri**

L'estensimetro (in inglese, *strain gauge*) è lo strumento utilizzato per misurare la deformazione, intesa come la variazione di lunghezza nell'intorno di un punto, di un elemento tridimensionale.

---

<sup>24</sup> XU Y.L., XIA Y., 2012, p. 43

Si riporta un elenco dei principali estensimetri utilizzati fino ad oggi, e una sommaria descrizione:

- **estensimetro induttivo:** utilizza un trasduttore di spostamenti induttivo per leggere i piccoli spostamenti;
- **estensimetro capacitivo:** la variazione della distanza tra le armature attive di un condensatore viene tradotta in deformazione;
- **estensimetro a filo vibrante:** la variazione di lunghezza di un filo teso alle due estremità si traduce in una variazione della tensione a cui è soggetto e questa è responsabile della variazione delle frequenze proprie di vibrazione;
- **estensimetro ottico:** un sistema di prismi e specchi proiettava un raggio luminoso con angolazione variabile all'aumentare della deformazione registrata;
- **estensimetro ottico laser:** utilizza i principi dell'interferometria ottica;
- **estensimetro resistivo:** uno dei più comuni, descritto successivamente;
- **estensimetro a fibre ottiche:** uno dei sistemi più utilizzati negli ultimi anni, descritto successivamente.

### 1.4.2.1.1 Estensimetro resistivo

La deformazione elastica viene calcolata attraverso la variazione della resistenza elettrica dello strumento, misurata in Ohm. La lunghezza dello strumento varia da pochi millimetri a pochi centimetri. Non sono indicati per applicazioni in ambienti rigidi, in cui la presenza di umidità può generare errori nella misurazione<sup>25</sup>.

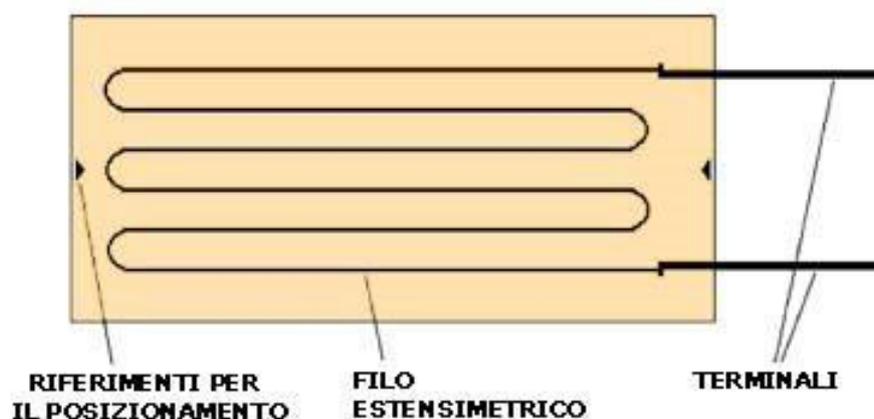


Figura 5: Estensimetro resistivo, Wikipedia

<sup>25</sup> XU Y.L., XIA Y., 2012, p. 44

Il sistema di rilevamento: i sensori

È una delle tipologie di estensimetri più comunemente utilizzata in diversi settori ingegneristici. Lo strumento viene incollato sulla superficie dell'elemento. Il filo estensimetrico metallico visibile nella figura in alto, essendo solidale all'elemento seguirà le sue deformazioni, allungandosi o accorciandosi. Questa variazione di lunghezza è responsabile della variazione della resistenza elettrica.

#### 1.4.2.1.2 Sensori a fibra ottica: il SOFO

Deformazioni, temperatura e pressioni sono solo alcune delle grandezze che è possibile misurare attraverso le fibre ottiche. Il principio di funzionamento sfrutta la variazione delle caratteristiche dell'onda luminosa per l'acquisizione del dato. I sensori modificano una fibra in modo che la grandezza d'interesse moduli la fase, la lunghezza d'onda o la polarizzazione della luce<sup>26</sup>.

Il sistema Sofo, acronimo di *Surveillance d'Ouvrages par Fibres Optiques*, ovvero monitoraggio strutturale attraverso fibre ottiche, è un sistema di misura delle deformazioni nato alla fine del secolo scorso dall'esigenza di individuare un sistema di rilevamento caratterizzato da elevata accuratezza e stabilità nel tempo, in grado di fornire dati di deformazione sia a breve che a lungo termine, in condizioni statiche e dinamiche. Le fibre ottiche, la cui lunghezza per queste applicazioni può variare da 1 a 10 metri, sono facili da installare e non risentono della presenza di campi elettromagnetici, a differenza di quanto succede per gli estensimetri resistivi. Il sistema è costituito da due fibre accoppiate, chiamate rispettivamente fibra di misurazione e fibra di riferimento, la prima è in contatto con la struttura mentre la seconda è posizionata in prossimità della prima. Quando una struttura viene sollecitata si deforma, generando un allungamento o un accorciamento delle due fibre accoppiate. La variazione di lunghezza tra le due fibre traduce il valore della deformazione<sup>27</sup>. I dati vengono infine raccolti da una *reading unit*, ovvero un'unità di lettura dati, a cui è possibile collegare un personal computer per procedere con le analisi. Nella figura sottostante è riportato uno schema esemplificativo.

---

<sup>26</sup> XU Y.L., XIA Y., 2012, p. 47

<sup>27</sup> INAUDI D., CASANOVA N., VURPILLOT S., KRONENBERG P., MARTINOLA G., STEINMANN G., MATHIER J., 1999

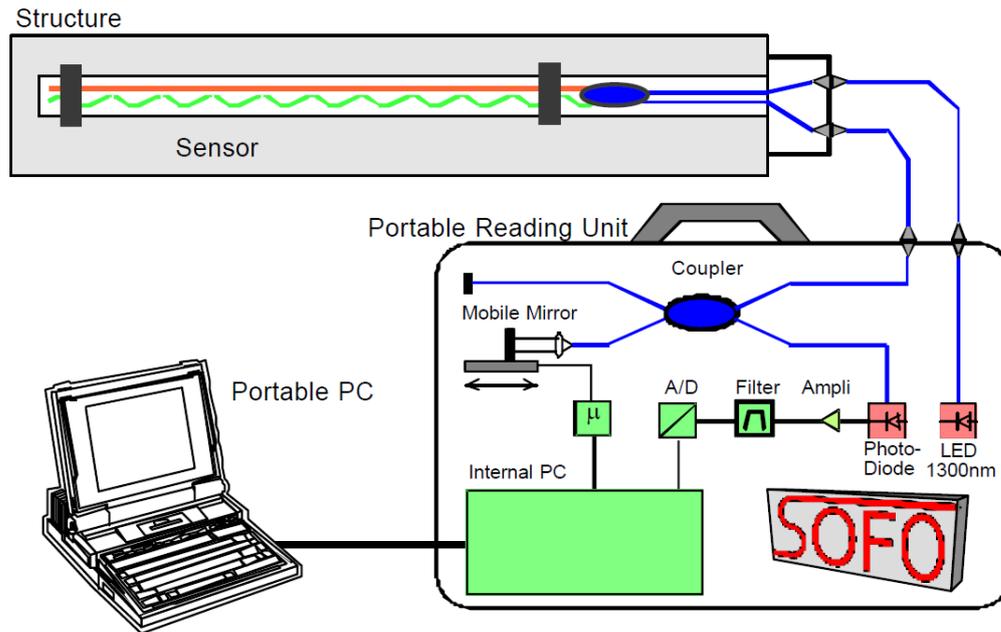


Figura 6: Schema di un sistema di monitoraggio SOFO, INAUDI D., CASANOVA N., VURPILOT S., KRONENBERG P., MARTINOLA G., STEINMANN G., MATHIER J., *Sofo: structural monitoring with fiber optic sensor*, in *Fib "Monitoring and Safety Evaluation of Existing Concrete Structures"*, 12-13.2.1999, Vienna, Austria, p.3

Tra i primi a testare questa tecnologia per il monitoraggio strutturale figurano un gruppo di professionisti<sup>28</sup>, che alla fine del secolo scorso hanno effettuato analisi approfondite su opere infrastrutturali di rilievo come il ponte Versoix, la diga del Luzzone e il tunnel del Monte Terri in Svizzera. Dalle conclusioni del loro studio si evince come i sensori a fibra ottica costituiscano un valido strumento per la misurazione delle deformazioni. Il costo di questi strumenti rimane ancora decisamente elevato. Inoltre è necessario prestare la massima attenzione in fase di installazione dal momento che le fibre sono particolarmente fragili.

### 1.4.2.2 Inclinometri

Gli inclinometri sono strumenti che consentono di misurare il grado di inclinazione. Nell'ingegneria civile restituiscono il valore della variazione angolare tra la posizione iniziale e finale dell'elemento su cui è stato installato il sensore. Le tecniche di misurazione dell'inclinazione variano ampiamente, dai goniometri meccanici a pendolo e dai livelli a bolla fino ai trasduttori interferometrici ottici e ai sensori elettrolitici<sup>29</sup>. Questi ultimi, tra i più diffusi, sono anche quelli più sensibili alle interferenze elettromagnetiche. È stato questo uno dei motivi per cui le fibre ottiche hanno riscontrato grande successo tra i sensori di misurazione: la loro "immunità" ai campi elettromagnetici.

<sup>28</sup> INAUDI D., CASANOVA N., VURPILOT S., KRONENBERG P., MARTINOLA G., STEINMANN G., MATHIER J., 1999

<sup>29</sup> KULCHIN Y.N., VITRIK O.B., DYSHLYUK A.V., 2007

### 1.4.2.3 LVDT: Linear Variable Differential Transformer

L'LVDT è uno dei più comuni dispositivi utilizzati nel settore edile per la misurazione di spostamenti relativi. Il suo principio di funzionamento è quello di mutua induttanza. Un tubo metallico cavo contiene delle bobine al suo interno e un nucleo ferromagnetico. Le bobine producono un segnale elettrico in funzione della posizione del nucleo mobile all'interno<sup>30</sup>.

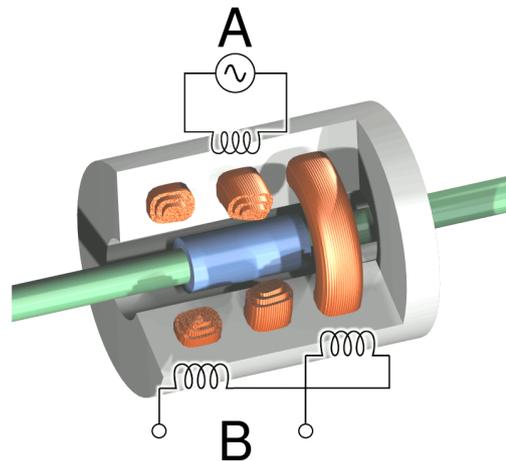


Figura 7: Sezione di un LVDT, La tensione è applicata all'avvolgimento primario A, causando una corrente indotta nell'avvolgimento secondario B, Wikipedia

## 1.5 La salute di una struttura: analisi delle condizioni statiche

Nel 2011 un professore dell'università del Vermont (Burlington, USA), approcciando il problema del monitoraggio strutturale, ha paragonato la salute di una struttura a quella di un essere umano<sup>31</sup>. In questo studio l'autore ha sottolineato le somiglianze che legano i due soggetti, mettendone in luce complessità ed unicità. Patologie cliniche e danni strutturali possono manifestare sintomi comuni, ma soluzioni differenti, rendendo di fatto estremamente difficile non solo l'individuazione ma anche l'interpretazione di un'anomalia. L'identificazione precoce di un problema, garantita da controlli regolari e frequenti, permette di evitare pericolose complicazioni che minano la buona riuscita di un trattamento terapeutico. Monitorare e manutenzionare un edificio diventa quindi garanzia di efficienza e sicurezza a lungo termine.

Il professionista del monitoraggio strutturale possiede dunque peculiarità comuni a quelle di un tecnico del settore sanitario ma differisce da quest'ultimo per un aspetto decisamente importante, chiarito egregiamente da Huston D. (2011), il quale afferma che «Forse la più

<sup>30</sup> XU Y.L., XIA Y., 2012, p. 45

<sup>31</sup> HUSTON D., 2011

grande differenza tra pratica medica e ingegneria della salute strutturale è che i sistemi biologici possono curarsi da soli».

Nel suo complesso il problema della comprensione dello stato di salute di una struttura può essere affrontato per livelli. Un valido approccio schematico è quello ripreso da Rytter<sup>32</sup>, il quale distingue 4 livelli:

1. determinare se è presente il danno;
2. localizzare il danno;
3. stimare l'entità del danno;
4. valutare la sicurezza della struttura;

Una variante più recente propone invece la suddivisione in 5 livelli<sup>33</sup>, inserendo tra il livello 3 e 4, la stima dell'evoluzione temporale del danneggiamento.

Il vero sviluppo esponenziale di ispezioni sistematiche di manutenzione ha avuto inizio alla fine degli anni '70<sup>34</sup>, con l'applicazione della tecnologia moderna per la progettazione delle opere di ingegneria civile. Oggi gran parte delle strutture presenti in Italia ha raggiunto il termine della vita utile e viene utilizzata per carichi decisamente superiori a quelli per i quali le opere sono state progettate. Il monitoraggio di questi manufatti permette di evitarne l'abbattimento e di predisporre gli interventi di ripristino.

Un aspetto importante è quello relativo a come esprimere la salute di una struttura. Questa infatti potrebbe essere, ad esempio: buona, eccellente, mediocre, scarsa ecc. Usare degli aggettivi per descrivere questo parametro, anche se di facile comprensione, non fornisce informazioni sufficientemente dettagliate, e suggerisce quindi l'applicazione di un approccio numerico. Tra questi compare la classificazione AASHTO 0-9 per i ponti, dove a valori maggiori corrispondono condizioni migliori, o la "*Pontis Bridge deck evaluation 1-5*", dove con 1 si indica la situazione migliore e con 5 la peggiore.<sup>35</sup>

L'attenzione del professionista è inoltre focalizzata su come calcolare lo stato di salute e quindi, su quante e quali siano le fasi da sviluppare per arrivare a formulare una descrizione dettagliata del livello di danneggiamento. Note queste informazioni sarà possibile ipotizzare l'evoluzione temporale del problema e prevedere gli interventi di ripristino o, se necessario, di abbattimento.

---

<sup>32</sup> RYTTER A., 1993

<sup>33</sup> HUSTON D., 2011

<sup>34</sup> RYTTER A., 1993

<sup>35</sup> HUSTON D., 2011, p.421

La salute di una struttura si determina in primo luogo con l'analisi delle condizioni statiche di un manufatto. Appare chiaro che la disciplina del monitoraggio strutturale, innovativa e in continuo aggiornamento, necessita un'organizzazione operativa chiara ed esaustiva; è auspicabile che possa essere in qualche modo standardizzata per poter elaborare un protocollo automatico di monitoraggio, che assicuri elevati livelli di sicurezza. Dalla letteratura, numerosa e variegata su questo argomento, si traggono importanti indicazioni sui diversi *steps* del controllo. Il confronto tra alcuni dei principali testi sul monitoraggio permette di definire a grandi linee come si configuri l'analisi delle condizioni statiche di una struttura, si riporta ad esempio la procedura suggerita da Rossi P.P. (1995):

1. Rilievo architettonico, geometrico, fotogrammetrico: ultimamente sta ricevendo diversi plausi dal mondo scientifico la tecnica del laser scanner, con la quale si è in grado di modellare la realtà circostante con un elevato livello di precisione e accuratezza, in un breve lasso di tempo;
2. Rilievo del quadro fessurativo e dei danneggiamenti;
3. Analisi della storia della costruzione e del suo utilizzo;
4. Indagini specialistiche: necessarie per ricavare i parametri con cui effettuare la modellazione;

### **1.5.1 L'ispezione strutturale**

Sono disponibili in letteratura diverse linee guida che indirizzano il professionista verso la migliore strategia di monitoraggio<sup>36</sup>. Molti autori, tra cui Huston D. (2011), propongono di eseguire in primo luogo un'ispezione visiva che possa, anche grossolanamente, aiutare ad inquadrare correttamente il problema. L'esperienza di un professionista qualificato è sicuramente un elemento indispensabile per la circoscrizione della problematica ma, ovviamente, non è sufficiente. Il sopralluogo infatti può sicuramente suggerire ai tecnici impegnati nell'ispezione quale sia la migliore strategia da seguire per valutare e, se possibile, superare le eventuali criticità, ma ad esso deve seguire un'attenta e approfondita campagna di rilevamento dati che permetta di costruire i modelli digitali. Naturalmente ci sono dei fattori che possono influenzare, anche notevolmente, la qualità o addirittura la correttezza delle valutazioni effettuate: le capacità visive, l'età, la possibilità di accesso al sito d'interesse, la preparazione professionale e così via<sup>37</sup>.

---

<sup>36</sup> ASCE, 2000

<sup>37</sup> HUSTON D., 2011

L'ispezione può ovviamente essere sviluppata secondo diverse modalità operative, così come è intuibile che il livello di dettaglio dei dati ricavati muti al variare degli strumenti utilizzati. Ispezioni di routine saranno chiaramente meno approfondite, e più economiche, di quelle effettuate dopo un determinato evento che possa aver in qualche modo minato la salute di un'opera, come un terremoto.

Un altro importante aspetto è quello relativo al tempo che intercorre tra un controllo e l'altro. Stabilire dopo quanto tempo sia necessario effettuare nuovamente un controllo strutturale è chiaramente funzione dello stato di salute e del livello di sicurezza richiesto. In Danimarca ad esempio, dopo aver ispezionato visivamente tutti i ponti di proprietà della *Danish state railways*, una delle più importanti compagnie di trasporto passeggeri del paese, è stato assegnato a ciascuno di essi un valore compreso tra 0 a 5, crescente all'aumentare dei danni rilevati. Sulla base dell'esperienza degli ingegneri strutturali, sono state realizzate delle tabelle per associare ad ogni grado di danneggiamento il tempo limite per il successivo monitoraggio. Da questo schema si evince come nella più favorevole delle situazioni, quella cioè in cui un ponte goda di buona salute, non debbano passare più di 8 anni tra un'ispezione e l'altra<sup>38</sup>. Oggi però gli intervalli temporali indicano che il controllo dei ponti viene fatto ogni due anni, principalmente utilizzando tecniche d'ispezione visiva o altre metodologie non distruttive di cui si parlerà successivamente<sup>39</sup>.

Sono riportati di seguito alcuni dei metodi d'ispezione più comunemente utilizzati nell'ingegneria civile. Al semplice controllo visivo seguiranno delle tecniche più raffinate che hanno avuto nel tempo numerose applicazioni. Queste possono essere in prima battuta suddivise in tecniche distruttive e tecniche non distruttive. Si citano inoltre alcune delle tecniche che non verranno approfondite nel seguito, ma di cui si trova ugualmente traccia in letteratura<sup>40</sup>:

- le tecniche ultrasoniche: un trasmettitore ed un ricevitore gestiscono segnali ad elevata frequenza, la cui velocità, caratteristica del mezzo attraversato, potrà segnalare eventuali discontinuità presenti nel materiale;
- l'ispezione per particelle magnetiche: il campo magnetico generato dall'operatore, visibile attraverso l'uso di particelle magnetiche, manifesterà dei disturbi che segnaleranno la presenza di difetti;

---

<sup>38</sup> RYTTER A., 1993

<sup>39</sup> XU Y.L., XIA Y., 2012, p.4

<sup>40</sup> RYTTER A., 1993

La salute di una struttura: analisi delle condizioni statiche

- la radiografia: colpendo l'elemento da ispezionare con raggi X e raggi gamma, si evidenzieranno cavità e difetti interni del materiale.

## **1.5.2 L'ispezione negli Eurocodici e nelle “Norme tecniche per le costruzioni”**

### *1.5.2.1 Tecniche non distruttive*

#### *1.5.2.1.1 L'ispezione visiva*

Effettuare un controllo visivo preliminare è probabilmente una delle pratiche ingegneristiche più antiche e consolidate della storia. Un primo approccio ispettivo, condotto senza l'uso di alcun equipaggiamento particolare, o con l'aiuto di semplici strumenti (torce, martelletti, lenti d'ingrandimento), è auspicabile ogni volta che sia necessario stabilire le condizioni di salute di un ponte, quindi sia per controlli programmati che per ispezioni straordinarie. L'ingegnere strutturale è chiamato a prendere decisioni di particolare rilievo. Tramite l'ispezione visiva potrà determinare l'esigenza di un controllo più approfondito e stabilirne le modalità operative.

L'ispezione avrà come risultato una relazione, corredata da immagini e disegni, che dia un primo grado di valutazione della sicurezza, e le informazioni utili alla programmazione degli interventi successivi.

#### *1.5.2.1.2 Emissioni acustiche*

Per quanto riguarda questa tipologia ispettiva si richiamerà solo il principio di funzionamento e le caratteristiche principali. Quando un materiale si fessura, o quando ad esempio avviene lo snervamento delle barre di acciaio all'interno di un elemento in cemento armato, vengono generate delle onde elastiche. Attraverso un sistema di sensori posizionati sull'elemento da monitorare, è possibile registrare le onde emesse e localizzare il punto in cui vengono generate attraverso una semplice triangolazione. Il danneggiamento viene rilevato solo se avviene durante la misurazione e non si può dire nulla circa la sua entità<sup>41</sup>.

#### *1.5.2.1.3 Vibration Based Inspection*

Il principio della *Vibration Based Inspection (VBI)*, letteralmente ispezione basata sulle vibrazioni, merita sicuramente una menzione particolare, dal momento che ha trovato realizzazione in numerosi settori dell'ingegneria e dell'industria, come quello meccanico e aerospaziale. Per quanto riguarda l'ingegneria civile, esso si traduce nella misurazione delle caratteristiche dinamiche dell'opera durante la sua intera vita di servizio, al fine di consentire

---

<sup>41</sup> RYTTER A.,1993

l'identificazione di un'anomalia<sup>42</sup>. Un'idea questa utilizzata da tantissimo tempo in altri campi del settore della produzione, come quello della ceramica. Un ispettore esperto infatti, colpendo con un martelletto un manufatto, generava delle vibrazioni che si traducevano in onde sonore: una differenza di suono indicava la presenza di un difetto. Ma anche il settore dei trasporti, come quello delle ferrovie, vanta degli esempi di applicazione del VBI. Fino a qualche anno fa non era raro vedere degli ispettori qualificati che colpivano le ruote del treno per ricercare la presenza di un eventuale danno. La tecnologia ha consentito di raggiungere dei risultati sempre più accurati anche in questo ambito, trasformando l'orecchio umano in un microfono digitale.

Il VIB ha avuto un grande successo nel monitoraggio di opere complesse ed importanti, come i ponti o le piattaforme off-shore, principalmente per due ragioni<sup>43</sup>:

1. l'applicabilità di questo metodo non dipende dal materiale di cui è composto l'opera da monitorare;
2. è possibile individuare la presenza di un danno anche nei punti in cui non si effettuano direttamente le misurazioni;

### ***1.5.2.2 Tecniche distruttive***

Le tecniche distruttive rappresentano quel complesso di prove ed esami che, attraverso prelievi di campioni e prova a rottura, forniscono informazioni utili per la caratterizzazione delle proprietà dei materiali di cui la struttura è costituita.

Tecniche distruttive e non distruttive, se abbinate in maniera complementare, permettono di aumentare il livello di conoscenza della struttura necessario per affrontare analisi strutturali di dettaglio.

#### ***1.5.2.2.1 Pull-Out***

Una barra metallica, ancorata con un tassello metallico, viene inserita in un elemento strutturale dopo il getto. L'estrazione della barra avviene insieme ad un cono di calcestruzzo, mettendo in risalto che il raggiungimento del collasso è avvenuto per superamento della resistenza a trazione sulla superficie laterale del cono. Si ottiene pertanto una misura diretta della resistenza a trazione del calcestruzzo da cui, attraverso relazioni empiriche, si ricava quella a compressione.

---

<sup>42</sup> RYTTER A., 1993

<sup>43</sup> RYTTER A., 1993

La salute di una struttura: analisi delle condizioni statiche

I risultati della prova possono essere influenzati da diversi parametri, come la presenza di barre di armatura, e pertanto le informazioni che se ne ricavano potrebbero essere non del tutto veritiere.

#### *1.5.2.2.2 Prova penetrometrica: la sonda Windsor*

Viene sparata una sonda metallica, con energia nota, in direzione ortogonale alla superficie del calcestruzzo. L'energia cinetica trasmessa alla sonda viene convertita in energia di deformazione del calcestruzzo. In funzione della profondità di penetrazione della sonda, mediate su almeno 3 prove, si stima la resistenza del calcestruzzo.

Anche questa tipologia d'ispezione è affetta da errori, dovuti ad esempio alla non ortogonalità delle sonde, o all'imprecisione nella rilevazione della profondità di penetrazione causata dalla presenza di materiale disgregato nell'intorno della sonda.

#### *1.5.2.2.3 Pull Off (Bond test)*

È di fatto una prova di trazione monoassiale. Viene eseguito un taglio ad una profondità di 5 cm, con una corona diamantata raffreddata ad acqua. Se ne ricava pertanto un cilindro, sulla cui base superiore viene incollato con resine epossidiche un disco in alluminio. Una volta avvenuta la "presa" della resina, si collega un'attrezzatura analoga a quella del pull-out che, con un martinetto idraulico, applica una trazione fino al distacco del cilindro dalla struttura sottostante. Si ottiene quindi una misura diretta della resistenza a trazione del materiale e da questa, in maniera empirica, si risale al valore della resistenza a compressione.

#### *1.5.2.2.4 Carotaggi*

I carotaggi sono utili ai fini della caratterizzazione del materiale in laboratorio. Viene perforato un elemento strutturale con un tubo, dotato di corona diamantata, che permette di estrarre un campione cilindrico. Il numero dei carotaggi non deve essere inferiore a tre. Sul cilindro di calcestruzzo sarà quindi possibile eseguire una prova di compressione per ricavarne la resistenza.

Uno dei problemi più comuni di queste prove è la determinazione della zona su cui eseguire il prelievo. Viene suggerito di effettuare l'estrazione nei punti in cui il calcestruzzo è meno sollecitato. Ovviamente il numero di carotaggi deve essere attentamente pianificato per assicurare che il danno indotto nella struttura sia sempre limitato.

## 1.6 Valutare la sicurezza strutturale

Esistono dei riferimenti normativi che regolamentano le procedure di valutazione della condizione strutturale. Procedendo ad esempio come suggerito dai protocolli AASHTO, il risultato di un'ispezione conduce ad una *valutazione di condizione* o una *valutazione di carico*<sup>44</sup>: con la prima si esprime la condizione di una struttura assegnandole un valore compreso tra 0 e 9, dove ai valori maggiori corrispondo condizioni strutturali migliori, con la seconda si individua invece il valore del carico variabile che la struttura è in grado di sopportare senza collassare. Nello stesso lavoro pubblicato da Huston D. (2011) si afferma che i primi elementi che dovrebbero essere controllati, attraverso un'ispezione visiva, sono quelli soggetti maggiormente a fatica e quelli sollecitati prevalentemente a trazione, in particolar modo quando quest'ultimi non possono essere rimpiazzati da nessun altro elemento in caso di collasso (insufficiente ridondanza strutturale).

L'aggiornamento delle norme tecniche per le costruzioni, approvato con decreto ministeriale 17 gennaio 2018, e nel seguito indicato con la sigla NTC18, affronta al capitolo 8 il delicato tema delle costruzioni esistenti. Il paragrafo 8.3 è infatti dedicato alla valutazione della sicurezza. Quest'ultima è definita come «un procedimento quantitativo volto a determinare l'entità delle azioni che la struttura è in grado di sostenere con il livello di sicurezza minimo richiesto dalla presente normativa»<sup>45</sup>. La normativa esplicita quando debba essere effettuata una valutazione della sicurezza e cosa quest'ultima debba permettere di stabilire. Ad esempio, in seguito a provati gravi errori di progetto o di costruzione è necessario concludere se l'uso della costruzione possa continuare senza interventi o se debba essere modificato.

### 1.6.1 Carico limite

Per eseguire la valutazione del carico limite le procedure più comunemente utilizzate in passato sono state quelle delle tensioni ammissibili e del fattore di carico<sup>46</sup>. Nel primo caso, sotto l'ipotesi di comportamento elastico e lineare, si individua il carico limite che induce il raggiungimento della tensione massima tollerata da un elemento strutturale, e lo si divide per un fattore di sicurezza. L'approccio del fattore di carico invece prevede di applicare un coefficiente moltiplicativo ai carichi applicati alla struttura, che rispecchi il grado di incertezza legato alla loro intensità.

---

<sup>44</sup> HUSTON D., 2011, p. 420

<sup>45</sup> NTC18

<sup>46</sup> HUSTON D., 2011, p.428

## La previsione di collasso

Negli ultimi anni invece sono stati utilizzati i criteri del metodo semiprobabilistico agli stati limite basato sull'impiego dei coefficienti parziali, applicabili ai valori delle azioni, ai parametri fisico-meccanici dei materiali o dei terreni, alle resistenze di calcolo.

Huston D. (2011) ha citato diversi autori per sottolineare uno degli aspetti più interessanti che l'applicazione del monitoraggio strutturale può avere sulle infrastrutture: valutare se un ponte è in grado o meno di sopportare un carico decisamente superiore a quello limite. In questo caso la risposta strutturale assume quasi sicuramente un andamento non lineare e quindi di difficile modellazione. Una delle soluzioni proposte è stata quella di effettuare delle prove di carico con mezzi pesanti, che si avvicinino al carico limite del ponte, e utilizzare i dati estrapolati dal monitoraggio per creare un modello. Quest'ultimo tiene maggiormente conto degli effetti non lineari e può essere usato per stabilire se la struttura è in grado o meno di sopportare quel carico. I risultati delle prove con mezzi pesanti hanno sottolineato in più casi<sup>47</sup> come spesso il comportamento meccanico di un ponte, anche nei casi più semplici, non sia perfettamente compreso. In più strutture infatti la rigidità registrata sperimentalmente si è rivelata maggiore anche di due volte rispetto a quella prevista dai modelli meccanici più semplici. Probabilmente perché questi ultimi non tengono conto delle strutture secondarie presenti sul ponte che aumentano e aumentano la rigidità. Nella stessa opera, infine, l'autore ha anche sottolineato uno degli aspetti che favoriscono l'integrazione delle prove dinamiche a quelle statiche, ovvero la possibilità di non dover misurare gli spostamenti riferendoli ad un sistema di riferimento fisso.

### 1.7 La previsione di collasso

Uno degli aspetti principali correlati al monitoraggio strutturale è quello della previsione del collasso. L'ingegnere strutturale sfrutta i dati estrapolati dalle ispezioni per elaborare un modello, al fine di predire lo sviluppo temporale del danneggiamento (se presente) e l'eventuale collasso. L'ingente numeri di variabili in gioco, illustrati nell'immagine sottostante, rende estremamente complicato predire con esattezza l'andamento delle condizioni strutturali nel tempo. Proprio per questo una delle maggiori esigenze è quello di ridurre la variabilità della "prognosi strutturale". Per farlo Huston D. (2011) indica due approcci: il primo è detto di riduzione (*reductionist*) e si focalizza sull'aumento del livello di conoscenza; il secondo invece è quello di cambiare il progetto per rendere più facili ed efficienti le procedure di ispezione e monitoraggio (*structural redesign*). Questo significa identificare i dettagli strutturali più critici

---

<sup>47</sup> HUSTON D., 2011, p.427

e modificarli per rendere più convenienti le ispezioni sul campo. Nel paragrafo 5.2.1.1 delle NTC 18 si parla proprio di questo. Un banale esempio è quello della pittura delle scale: si consiglia di non eseguirla perché potrebbe nascondere all'occhio umano eventuali difetti, e creare così un pericolo per la sicurezza. In questo settore Huston D. (2011) ha notato anche una certa analogia con il campo della fluidodinamica: in quest'ultimo si cerca di trasformare i flussi turbolenti in laminari o completamente turbolenti, in modo da facilitarne lo studio e la comprensione.

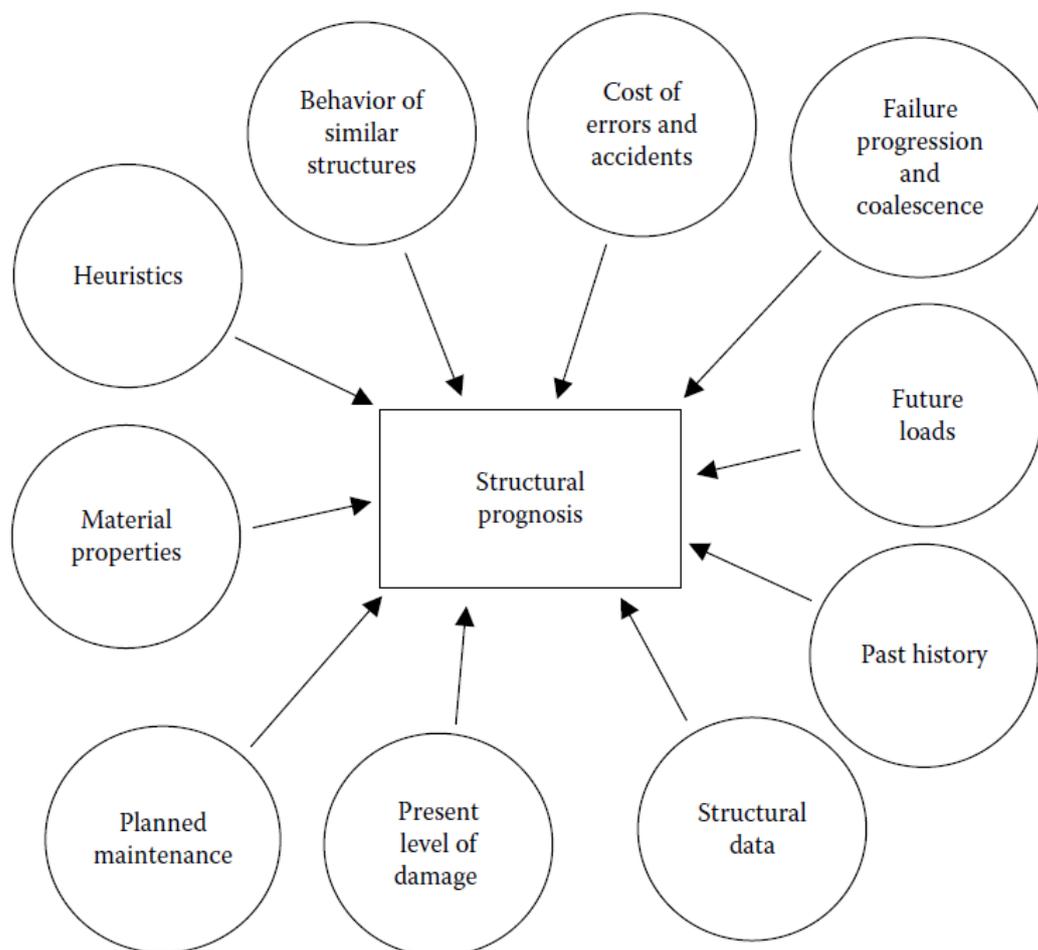


Figura 8: Fattori che influenzano la prognosi strutturale, HUSTON D., *Structural Sensing, Health Monitoring and Performance Evaluation*, 1 ed., United States of America, CRC Press, 2011, p. 31

Entrambi gli approcci, *reductionist* e *structural redesign*, condividono un esito paradossale. Una volta che i modi di collasso di una struttura diventano prevedibili, possono essere anche preventivabili. Cambiando le scelte progettuali dunque, sarà necessario ricercare nuovamente i possibili punti critici e i diversi cinematismi di collasso, in un ciclo che sembrerebbe non avere fine.

## 1.8 Le prove di carico

Come indicato al paragrafo 9.2 delle NTC18 *«Le prove di carico, ... , dovranno identificare la corrispondenza del comportamento teorico con quello sperimentale»*. Ma la normativa esplica anche sulla base di quali elementi le prove debbano essere valutate<sup>48</sup>: deformazioni crescenti proporzionalmente ai carichi, assenza di fessurazioni fratture o dissesti, comportamento tendenzialmente elastico della struttura, deformazione elastica non superiore a quella preventivata.

### 1.8.1 Ponti stradali

Si riporta un estratto del paragrafo 9.2.2 delle NTC18, dove è specificato che per i ponti stradali *«...si dovrà controllare che le deformazioni sotto i carichi di prova, in termini di abbassamenti, rotazioni ecc, siano comparabili con quelle previste in progetto e che le eventuali deformazioni residue dopo il primo ciclo di carico, determinate come indicato più sopra, non risultino superiori al 15% di quelle massime misurate, ovvero successive prove di carico dimostrino che le deformazioni residue tendano ad esaurirsi. Per i ponti a campata multipla, la prova di carico deve essere eseguita su almeno un quinto delle campate...»*.

Inoltre viene anche precisato che *«Per le opere di significativa rilevanza, le prove statiche andranno completate da prove dinamiche, che misurino la rispondenza del ponte all'eccitazione dinamica, controllando che il periodo fondamentale sperimentale sia confrontabile con quello previsto in progetto. »*

Le *“deformazioni sotto i carichi di prova, in termini di abbassamenti, rotazioni ecc.”* potranno essere, in fase di monitoraggio, calcolate con le metodologie proposte in questa tesi.

### 1.8.2 Ponti ferroviari

Per i ponti ferroviari le NTC18 riportano che *«...le prove di carico dovranno essere effettuate adottando carichi che inducano, di norma, le sollecitazioni di progetto dovute ai carichi mobili verticali nello stato limite di esercizio, in considerazione della disponibilità di mezzi ferroviari ordinari e/o speciali. Le deformazioni residue dopo il primo ciclo di carico, determinate come indicato più sopra, non devono risultare superiori al 15% di quelle massime misurate, ovvero successive prove di carico devono dimostrare che le deformazioni residue tendano ad esaurirsi.*

---

<sup>48</sup> NTC18

## Structural Health Monitoring

*Per i ponti a campata multipla, la prova di carico deve essere eseguita su almeno un quinto delle campate...».*

Anche in questo caso è possibile calcolare le deformazioni, in termini di abbassamenti e rotazioni, con le metodologie proposte nel capitolo successivo.

## **I modelli teorici**

Il risultato più convincente del monitoraggio appare quello dell'individuazione di anomalie strutturali tra quanto registrato sperimentalmente e quanto "previsto" da un ingegnere in fase di progetto. Uno degli elementi più comunemente utilizzati a tal fine è il valore dell'inflessione di un punto della struttura.

Tale valore è ricavabile attraverso l'applicazione di modelli teorici, e metodologie di calcolo, che permettono di esprimere lo spostamento di un punto noto di una struttura in funzione di molteplici parametri: proprietà geometriche degli elementi, caratteristiche meccaniche dei materiali, condizioni vincolari, condizioni di carico, ecc.

In questo capitolo vengono proposte due metodologie procedurali che suggeriscono in maniera innovativa, attraverso l'applicazione di alcuni concetti base dell'ingegneria civile, un approccio alternativo per il calcolo della freccia di una trave isostatica o iperstatica, ai fini del monitoraggio strutturale: il metodo del diagramma momento – curvatura e il metodo dello sviluppo in serie di Fourier. Entrambi, partendo dai valori reali di curvatura o di rotazione in una o più sezioni, permettono di ricavare lo spostamento di un punto della struttura.

Verrà inoltre presentato il metodo polinomiale. Esso ha visto negli ultimi anni un consolidamento progressivo, affermandosi come uno dei modelli matematici più utilizzati nel monitoraggio strutturale.

L'analisi dei risultati teorici ed il confronto con i dati reali, ricavati da alcune prove di laboratorio, hanno consentito di valutare la precisione e l'affidabilità dei modelli proposti, suggerendo, infine, il posizionamento ottimale degli strumenti di rilevamento (estensimetri).

### **1.9 Metodo del diagramma momento – curvatura**

Il metodo introdotto in questo capitolo si pone l'obiettivo di ricostruire la deformata di una struttura reale, partendo da misure di curvatura di una o più sezioni, attraverso l'utilizzo del diagramma Momento – Curvatura (diagramma M-C nel seguito).

#### **1.9.1 La curvatura di una sezione**

La curvatura di una sezione in cemento armato, nell'ipotesi di conservazione delle sezioni piane e di aderenza tra calcestruzzo e barre di acciaio sia per le zone fessurate che non fessurate, è stata definita dal CEB Bulletin d'information n°158 con la seguente relazione:

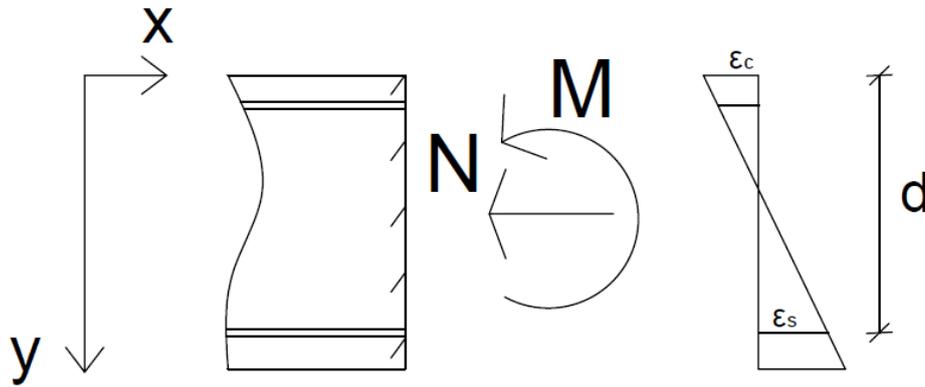


Figura 9: Curvatura di una sezione

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{EI} = \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_c}{d} \quad (2.1)$$

dove i parametri nell'equazione hanno i seguenti significati:

M : momento flettente agente sulla sezione

EI : Rigidezza flessionale della sezione

E: modulo elastico del calcestruzzo

I: momento d'inerzia della sezione trasversale

$\varepsilon_s$ : deformazione della fibra tesa all'intradosso

$\varepsilon_c$ : deformazione della fibra di calcestruzzo compresso all'estradosso

### 1.9.1.1 Il modulo di elasticità del calcestruzzo

Le incertezze legate al calcolo della curvatura sono dovute agli errori di valutazione del modulo di elasticità E e del momento d'inerzia della sezione trasversale. Il modulo di elasticità, in assenza di prove sperimentali più precise, viene ricavato a partire dal valore di resistenza a compressione caratteristica del calcestruzzo, indicato con il parametro  $f_{ck}$ . Sono riportate di seguito alcune formule empiriche presenti nei codici in letteratura.

Per le NTC18 e l'Eurocode 2, come indicato al par. 11.2.10.3 (NTC18) o in tabella 3.1 (EC2), in sede di progettazione si può assumere il valore:

$$E_{cm} = 22000 \cdot [f_{cm}/10]^{0.3} \text{ [N/mm}^2\text{]} \quad (2.2)$$

con

$$f_{cm} = f_{ck} + 8 \text{ [N/mm}^2\text{]} \quad (2.3)$$

avendo indicato con  $f_{cm}$  il valore medio della resistenza cilindrica del calcestruzzo e con  $f_{ck}$  la resistenza caratteristica a compressione in MPa del calcestruzzo.

## Metodo del diagramma momento – curvatura

Secondo la pubblicazione ACI 318M-11 (ripresa dalla pubblicazione ACI 435R-95), per calcestruzzi normali e per valori caratteristici di resistenza  $f_{ck}$  inferiori a 42 MPa, il valore è:

$$E_c = 4700 \cdot \sqrt{f'_c} \text{ [MPa]} \quad (2.4)$$

Mentre per valori caratteristici di resistenza  $f_{ck}$  superiori a 42 MPa, il valore è:

$$E_c = (3.32 \cdot \sqrt{f'_c} + 6895) \cdot \left(\frac{w_c}{2320}\right)^{1.5} \text{ [MPa]} \quad (2.5)$$

avendo indicato con  $f'_c$  la resistenza specifica a compressione del calcestruzzo, misurata in MPa, e con  $w_c$  la densità specifica del calcestruzzo, misurata in Kg/m<sup>3</sup>.

Infine, secondo il Model Code 2010 il valore è:

$$E_{ci} = E_{c0} \cdot \alpha_e \cdot \left(\frac{f_{ck} + \Delta f}{10}\right)^{1/3} \quad (2.6)$$

in cui i parametri utilizzati assumono il seguente significato:

$E_{ci}$  : è il modulo di elasticità in MPa dopo una maturazione di 28 giorni del calcestruzzo

$f_{ck}$ : è la resistenza caratteristica a compressione in MPa del calcestruzzo

$\Delta f$ : uguale a 8 MPa

$E_{c0}$ : uguale a  $21.5 \cdot 10^3$  MPa

$\alpha_e$ : è un coefficiente correttivo pari a 1.0 per aggregati di quarzite, per altri tipi di aggregati i valori del coefficiente  $\alpha_e$  sono indicati nella tabella 5.1 – 6 del Model Code 2010

Quando sono sviluppate solo analisi elastiche il Model Code 2010 suggerisce di utilizzare un modulo di elasticità  $E_c$  che tenga conto delle deformazioni plastiche iniziali del calcestruzzo con la seguente formula:

$$E_{ci} = \alpha_i \cdot E_{ci} \quad (2.7)$$

con

$$\alpha_i = 0.8 + 0.2 \cdot \frac{f_{cm}}{88} \leq 1.0 \quad (2.8)$$

Per comprendere quindi la variabilità del modulo di elasticità prendiamo ad esempio un calcestruzzo con una resistenza caratteristica pari a  $f_{ck} = 25$  MPa e confrontiamo i risultati dei vari codici:

Codice	Modulo di elasticità E [MPa]
NTC18/EC2	31475.8 ( $f_{ck} = 25$ MPa)
ACI 318M-11	23500 ( $f_{ck} = 25$ MPa)

Model Code 2010

32009.3 ( $f_{ck} = 25 \text{ MPa}$ )

Tabella 3: variazione del modulo elastico secondo i diversi riferimenti tecnici

Come si può vedere dalla tabella precedente il Model Code 2010 e l'Eurocode 2 (a cui si rifanno le NTC18 italiane) forniscono valori simili, completamente differente è invece il dato ricavato secondo la formula dell'ACI 318M-11.

### 1.9.1.2 Il momento d'inerzia della sezione trasversale

Il valore del momento d'inerzia della sezione trasversale "I" può assumere 4 differenti definizioni<sup>49</sup>:

1.  $I_g$  : momento d'inerzia dell'intera sezione, trascurando la presenza dell'armatura;
2.  $I_1$  : momento d'inerzia della sezione in stadio 1, ovvero sezione non fessurata, considerando la presenza dell'armatura opportunamente omogeneizzata, che caratterizza la geometria della sezione quando il momento flettente che agisce su essa è inferiore al momento critico di fessurazione;
3.  $I_2$  : momento d'inerzia della sezione in stadio 2, ovvero sezione fessurata, che caratterizza la geometria della sezione quando quest'ultima è parzializzata, calcolata considerando il calcestruzzo teso non reagente;
4.  $I_m$  : momento d'inerzia intermedio tra quello in stadio 1 e quello in stadio 2, introdotto da alcuni codici (ACI 435R-95) per caratterizzare il comportamento medio delle sezioni trasversali contenute all'interno delle parti dell'elemento strutturale che hanno superato il momento critico di fessurazione.

Cosenza e Greco (1991) hanno calcolato i valori dei momenti d'inerzia introdotti precedentemente per una sezione rettangolare di una trave in cemento armato, armata simmetricamente con  $\mu = \mu' = 0.05$ . I parametri  $\mu$  e  $\mu'$  indicano rispettivamente la percentuale geometrica di armatura in zona tesa e in zona compressa. Utilizzando un valore del coefficiente di omogeneizzazione  $n$ , uguale al rapporto tra modulo di elasticità dell'acciaio (200 GPa) e modulo di elasticità del calcestruzzo, pari a 8 e il valore del copriferro adimensionalizzato (rapporto tra copriferro e altezza utile della sezione) pari a 0.05 si è dimostrato che  $I_1 = 1.3 I_g$  e  $I_2 = 0.3 I_g$ . Assumendo per il calcolo delle deformazioni il valore di rigidezza flessionale della sezione di solo calcestruzzo si avrebbe il 75% del valore della sezione omogeneizzata in stadio 1 e il 330% del valore della sezione omogeneizzata in stadio 2. È quindi evidente che la scelta del corretto momento d'inerzia influenzi notevolmente il valore della deformazione calcolata.

<sup>49</sup> COSENZA E., GRECO C., 1991

### 1.9.1.3 La curvatura media e il momento d'inerzia medio

Individuare il legame tra azioni, tensioni e deformazioni (quindi curvatura) è una procedura non del tutto priva di complicazioni. Occorre considerare infatti l'interazione dei vari parametri come il creep, il ritiro del calcestruzzo, il rilassamento dell'acciaio precompresso, la variabilità della resistenza a trazione e del modulo elastico dei materiali (come visto ai paragrafi 3.3.1.1 e 3.3.1.2).

Per tener conto degli effetti dipendenti dal tempo è possibile utilizzare il metodo A.A.E.M. (*Age Adjusted Effective Modulus*) o l'approccio semplificato EM (*Effective Modulus*). In ogni caso assume importanza preponderante l'effetto del *tension stiffening*. Nelle zone in cui il momento flettente sollecitante ha superato il limite di prima fessurazione, quindi negli elementi fessurati, anche se l'effetto delle azioni è costante (ad esempio momento flettente costante), la curvatura varia per ogni sezione compresa tra due fessure. Questo è dovuto alla distribuzione delle tensioni di aderenza tra il calcestruzzo e le armature ordinarie, che producono una variazione dell'asse neutro lungo lo sviluppo dell'elemento. Le sezioni trasversali comprese tra due fessure saranno, quindi, caratterizzate da un momento d'inerzia compreso tra quello in stadio 1 e quello in stadio 2. In queste zone il calcestruzzo teso è ancora reagente e fornisce un contributo nell'analisi delle deformazioni e delle tensioni della sezione. Questo fenomeno prende il nome di *tension stiffening*, dal momento che comporta un aumento della rigidezza flessionale.

In letteratura sono stati formulati diversi modelli che consentano di tener debitamente conto del *tension stiffening*. Il problema è stato trattato in maniera differente dai codici: con il CEB-FIP Model Code 1990 e l'Eurocode 2 si è introdotto il concetto di curvatura media, mentre con l'ACI Committee 435R-95 si è fatto uso del momento d'inerzia medio. Alla luce di quanto appena espresso si deduce che l'andamento della curvatura media, sia essa dedotta da ragionamenti sulle curvature in stadio 1 e 2 o dallo studio del momento d'inerzia medio, è funzione di:

- Momento d'inerzia della sezione omogeneizzata in stadio 1;
- Momento d'inerzia della sezione omogeneizzata in stadio 2;
- Momento critico di fessurazione (quindi resistenza a trazione del calcestruzzo);
- Qualità dell'aderenza tra acciaio e calcestruzzo;
- Durata nel tempo o ciclicità dei carichi applicati;
- Modellazione del *tension stiffening*;

1.9.1.3.1 CEB-FIP Model Code 1990

Come riportato nel CEB Bulletin n°235, per elementi non fessurati, l'aderenza tra calcestruzzo e acciaio è perfetta, quindi tutte le sezioni soggette alle stesse sollecitazioni hanno le medesime deformazioni e tensioni. Per queste zone la curvatura media coincide con quella della sezione omogeneizzata in stadio 1:

$$\frac{1}{r_m} = \left(\frac{1}{r}\right)_{om,1} \quad (2.9)$$

Per gli elementi fessurati invece, la variazione delle tensioni nel calcestruzzo e nelle armature ordinarie tra due fessure adiacenti, produce una variazione dell'asse neutro della sezione. È utile quindi utilizzare un valore medio così definito:

$$\frac{1}{r_m} = \left(\frac{\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}}{d}\right) \quad (2.10)$$

con

$\varepsilon_{sm}$ : deformazione media dell'armatura tesa (tra due fessure contigue)

$\varepsilon_{cm}$ : deformazione media nella fibra estrema di calcestruzzo compresso (tra due fessure contigue)

$d$ : la distanza tra le due fibre

Il metodo utilizzato per calcolare la curvatura media è quello sviluppato da Favre et al., che definisce questo valore come la somma tra il valore di curvatura iniziale e l'aumento indotto dagli effetti dipendenti dal tempo (creep e ritiro del calcestruzzo, rilassamento dell'acciaio da precompressione)<sup>50</sup>. La formula è la seguente:

$$\frac{1}{r_m} = \frac{1}{r_2} - \left(\frac{1}{r_{2r}} - \frac{1}{r_{1r}}\right) \cdot \beta_b \cdot \left(\frac{M_r}{M}\right) \quad (2.11)$$

La curvatura media al tempo  $t$  è:

$$\frac{1}{r_m}(t) = \frac{1}{r_m}(t_0) + \Delta\left(\frac{1}{r_m}\right) \quad (2.12)$$

---

<sup>50</sup> CEB BULLETIN D'INFORMATION N°235

$$\Delta\left(\frac{1}{r_m}\right) = \left(\frac{1}{r_m}\right)_\varphi + \left(\frac{1}{r_m}\right)_{cs} \quad (2.13)$$

La (2.12) si valuta utilizzando la (2.11), in cui ogni termine è valutato come indicato da Favre et al paragrafo 3.1.2.3 del CEB Bulletin d'information n°235, partendo dalla rigidezza flessionale della sezione di solo calcestruzzo  $EI_c$  e applicando dei coefficienti, indicati in letteratura<sup>51</sup>, che permettono di tener conto dell'effetto dell'armatura ordinaria, del creep e del ritiro.

Per la flessione semplice, siccome  $\frac{1}{r_{1r}}(t) = \frac{1}{r_1}(t) \cdot \left(\frac{M_r}{M}\right)$  e  $\frac{1}{r_{2r}}(t) = \frac{1}{r_2}(t) \cdot \left(\frac{M_r}{M}\right)$  la (2.11) diventa:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_m}(t) &= \frac{1}{r_2}(t) - \left(\frac{1}{r_2}(t) - \frac{1}{r_1}(t)\right) \cdot \beta_b \cdot \left(\frac{M_r}{M}\right)^2 \\ &= \zeta \cdot \frac{1}{r_2}(t) + (1 - \zeta) \cdot \frac{1}{r_1}(t) \end{aligned} \quad (2.14)$$

con

$$\zeta = 1 - \beta_b \cdot \left(\frac{M_r}{M}\right)^2 \quad (2.15)$$

e

$\frac{1}{r_2}$ : curvatura in stadio 2 della sezione omogeneizzata

$\frac{1}{r_{2r}}$ : curvatura in stadio 2 per  $M = M_r$  (sezione omogeneizzata completamente fessurata)

$\frac{1}{r_1}$ : curvatura in stadio 1 della sezione omogeneizzata

$\frac{1}{r_{1r}}$ : curvatura in stadio 1 per  $M = M_r$  (sezione omogeneizzata non fessurata)

$\beta_b = \beta_1 \cdot \beta_2$  con  $\beta_1 = 1$  o  $0.5$  (rispettivamente per carichi di breve e lunga durata) e  $\beta_2 = 0.8$  o  $0.5$  (rispettivamente per barre ad aderenza migliorata e barre lisce)

$M_{fessurazione}$ : momento di fessurazione

<sup>51</sup> CEB BULLETIN D'INFORMATION N°158

I modelli teorici

$M_r$ : momento di fessurazione ridotto pari a  $M_r = \sqrt{\beta_b} \cdot M_{fessurazione}$ , introdotto per tener conto degli effetti del ritiro, della temperatura, del caricamento e scaricamento dei carichi variabili

#### 1.9.1.3.2 Eurocode 2

Si assume una relazione:

$$\frac{1}{r_m} = \left( \frac{\varepsilon_{sm} - \varepsilon_c}{d} \right) \quad (2.16)$$

che si ricava dalla (2.10) avendo introdotto la semplificazione che  $\varepsilon_{cm} \cong \varepsilon_c$ , ovvero che la deformazione media nella fibra estrema del calcestruzzo compresso  $\varepsilon_{cm}$  (tra due fessure contigue) sia la stessa di quella osservata nella fibra estrema della sezione completamente fessurata,  $\varepsilon_c$ . In questo modo la curvatura media è leggermente sovrastimata. La deformazione media nel corrente compresso è determinata, tenendo conto del *tension stiffening*, con la formula seguente:

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{smr} + \frac{\sigma_s}{E_s} \cdot \left[ 1 - \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \left( \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \right)^2 \right] \quad (2.17)$$

con

$\varepsilon_{smr}$ : la deformazione dell'acciaio calcolata sulla sezione non fessurata in corrispondenza del carico di fessurazione

$\beta_1$ : pari a 1 per barre ad aderenza migliorata e 0.5 per barre lisce

$\beta_2$ : pari a 1 per carichi a breve termine e 0.5 per carichi a lungo termine o ciclici

Il CEB Bulletin d'information n°235 specifica che la relazione precedente rimane valida fintanto che il carico è compreso tra quello di fessurazione e quello a cui corrisponde lo snervamento dell'acciaio.

#### 1.9.1.3.3 ACI Committee 435R-95 (metodo Branson)

I codici americani modellano l'effetto del *tension stiffening* non attraverso la curvatura media, come fanno i codici CEB e l'Eurocode 2, ma attraverso il momento d'inerzia medio o effettivo. Il concetto di momento d'inerzia effettivo è stato introdotto da Branson Dan. E. a partire 1963.

Metodo del diagramma momento – curvatura

I numerosi ed approfonditi studi condotti da Branson<sup>52</sup>, hanno permesso la formulazione di una relazione empirica utile per il calcolo del momento d'inerzia effettivo:

$$I_{eff} = \left(\frac{M_{cr}}{M}\right)^4 \cdot I_g + \left[1 - \left(\frac{M_{cr}}{M}\right)^4\right] \cdot I_{cr} \quad (2.18)$$

e

$$I_{eff} = \left(\frac{M_{cr}}{M_{max}}\right)^3 \cdot I_g + \left[1 - \left(\frac{M_{cr}}{M_{max}}\right)^3\right] \cdot I_{cr} \quad (2.19)$$

Con

$$M_{cr} = \frac{f_r \cdot I_g}{y_t} \quad (2.20)$$

e per calcestruzzi di densità (normale) compresa tra i 2325 e 2400 Kg/m<sup>3</sup>

$$f_r = 0.623 \cdot \sqrt{f'_c} \quad (2.21)$$

in cui i parametri utilizzati assumono il seguente significato:

$f_r$ : modulo di rottura del calcestruzzo;

$f'_c$ : resistenza specifica a compressione del calcestruzzo;

$I_g$ : momento d'inerzia della sezione trasversale di solo calcestruzzo trascurando la presenza delle armature di acciaio;

$y_t$ : distanza dall'asse neutro della fibra estrema tesa del calcestruzzo;

$I_{cr}$ : momento d'inerzia della sezione fessurata omogeneizzata (stadio 2);

$M$ : momento flettente agente sulla sezione trasversale;

$M_{cr}$ : momento critico di fessurazione;

$M_{max}$ : massimo momento flettente agente nella fase in cui vogliono essere calcolati gli abbassamenti;

---

<sup>52</sup> BRANSON D. E., 1977,1982,1985

Secondo Branson<sup>53</sup>, la (18) produce il momento d'inerzia effettivo di una determinata sezione trasversale come funzione del momento flettente agente, e la potenza 4 a cui sono elevati i rapporti tra parentesi è stata ricavata da un'analisi numerica su un consistente numero di risultati che includevano travi rettangolari e a T. Mentre la (19) restituisce il valore medio del momento d'inerzia effettivo per l'intera lunghezza di una trave semplicemente appoggiata, uniformemente caricata, a sezione rettangolare o a T.

#### **1.9.1.4 Strutture staticamente indeterminate**

In questa sezione si accenna al comportamento delle strutture staticamente indeterminate per mettere in luce le complicazioni di calcolo che sopraggiungono nella determinazione dei diagrammi momento – curvatura.

Nelle strutture isostatiche gli effetti delle azioni sollecitanti sono ricavabili esclusivamente grazie a equazioni di equilibrio. Per le strutture iperstatiche invece è necessario tener conto della differente deformabilità degli elementi strutturali. I fenomeni reologici (creep e ritiro del calcestruzzo, rilassamento dell'acciaio precompresso) e di fessurazione si sviluppano nel tempo generando un continuo cambiamento dello stato tensionale e deformativo. Il calcolo di questi ultimi viene quindi affrontato attraverso procedure di analisi iterative, come suggerito in letteratura<sup>54</sup>.

È necessario tener conto di due differenti fasi:

- *First stage*: applicazione dei carichi al tempo iniziale  $t_0$ ;
- *Second stage*: Effetti ritardati al tempo finale  $t_1$ ;

##### *1.9.1.4.1 First stage*

La procedura iterativa per la determinazione del legame carichi – effetti comincia dalla soluzione elastica ottenuta per la struttura non fessurata. Per ogni sezione in cui è stata suddivisa la struttura si calcolano il momento flettente e lo sforzo assiale, e si ricavano i valori di curvatura media e, quindi, quello di rigidezza media secante. Quindi si assegna ad ogni sezione il valore appena determinato e si ripete il calcolo. Questa procedura è reiterata fino alla convergenza della soluzione, ottenuta quando la variazione tra uno step e l'altro è sufficientemente piccola. A questo punto si è calcolato il legame carichi – effetti all'istante iniziale di applicazione dei carichi permanenti.

---

<sup>53</sup> BRANSON D.E., 1963

<sup>54</sup> CEB BULLETIN N°235, par. 3.4

#### 1.9.1.4.2 *Second stage*

Si parte dai valori ottenuti nella fase precedente. Un primo approccio è quello di suddividere l'intervallo temporale  $t_0 - t_1$  in intervalli discreti, in ognuno dei quali il legame carichi esterni – effetti è considerato costante e uguale a quello ricavato all'istante iniziale. Successivamente si applica la variazione del momento flettente e dello sforzo assiale in modo da ristabilire la congruenza e la compatibilità con i vincoli esterni.

In alternativa è possibile applicare il metodo AAEM.

### 1.9.2 Il diagramma momento – curvatura

Il diagramma momento – curvatura è la rappresentazione del legame fra il momento flettente agente su una sezione trasversale e la rispettiva curvatura. Può essere ricavato sperimentalmente o costruito attraverso le indicazioni presenti nei riferimenti tecnici. Alla luce di quanto trattato nei paragrafi precedenti circa la curvatura media nelle zone fessurate, è possibile costruire diversi diagrammi momento – curvatura, dovuti alla differente modellazione del *tension stiffening*. Cosenza e Greco (1991) hanno riportato 4 modelli, tra quelli presenti in letteratura, che approssimano l'andamento del *tension stiffening* al variare del momento flettente:

- ***Tension stiffening* costante:** per momenti flettenti superiori a quello critico di fessurazione, il *tension stiffening* è modellato con un andamento costante;
- ***Tension stiffening* lineare:** il contributo del *tension stiffening* varia linearmente all'aumentare del momento flettente sollecitante, una volta che quest'ultimo ha superato il valore critico di fessurazione;
- ***Tension stiffening* iperbolico:** l'andamento iperbolico è dettato da una combinazione convessa delle curvature in stadio 1 e stadio 2 (Modello CEB) o dei momenti d'inerzia in stadio 1 e in stadio 2 (Modello ACI);

I due modelli proposti nel seguito, i quali presentano una modellazione del *tension stiffening* ad andamento iperbolico, differiscono principalmente per valori del momento prossimi a quello di fessurazione.

#### 1.9.2.1 *Modello CEB*

Per un elemento inflesso sono valide le relazioni (2.9) e (2.14). In tutte le sezioni in cui il momento flettente non ha superato il valore critico di fessurazione la curvatura sarà quella dedotta in stadio 1 attraverso l'omogeneizzazione della sezione. La curvatura media introdotta precedentemente sarà utilizzata solo dopo che il momento flettente avrà superato il valore

critico e, come si può vedere dal grafico sottostante, l'andamento della curva sarà più vicino a quello di una sezione completamente fessurata all'aumentare del momento flettente sollecitante e al diminuire del valore del parametro  $\beta$  introdotto precedentemente.

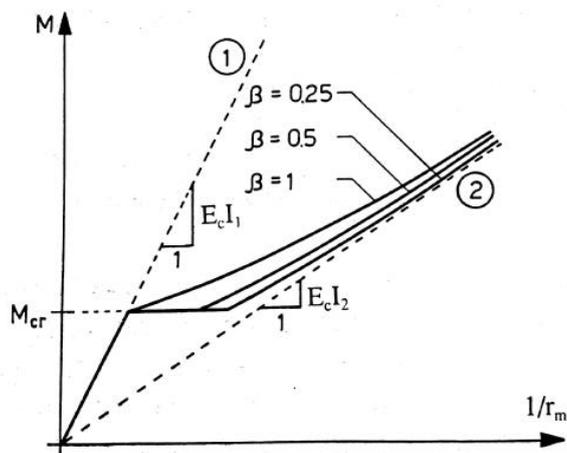


Figura 10: Diagramma momento - curvatura media secondo il CEB Bulletin d'information n°235, COSENZA E. E GRECO C., *Il calcolo delle deformazioni nelle strutture in cemento armato*, 1991, pag. 30

### 1.9.2.2 Modello ACI

Per un elemento inflesso è suggerito l'uso della (2.18) per il calcolo della curvatura media in ogni sezione in cui il momento flettente ha superato il limite critico di fessurazione. Per le sezioni in cui tale limite non è stato superato si prenderà il valore di curvatura corrispondente a quello di una sezione omogeneizzata in stadio 1. Nel caso in cui lo schema statico sia quello di trave semplicemente appoggiata, il carico sia uniforme, e la sezione trasversale della trave sia rettangolare o a T, è possibile utilizzare il valore medio proposto con la (2.19) per il calcolo delle inflessioni.

### 1.9.3 Il calcolo delle inflessioni

Il CEB Bulletin d'information n°235 evidenzia come, in linea generale, gli spostamenti possano essere determinati attraverso l'integrazione delle curvature. In un elemento strutturale caratterizzato da zone fessurate e non fessurate si deve procedere nel modo seguente:

1. Per le zone non fessurate si integra la curvatura della sezione;
2. Per le zone fessurate si integra la curvatura media della sezione così come calcolata al paragrafo 2.1.1.3;

In letteratura sono spesso indicati due metodi principali per il calcolo degli spostamenti: elastic weights method e virtual work method. Ai fini della successiva trattazione si approfondisce solo l'ultimo dei due metodi proposti.

### 1.9.3.1 Teorema dei lavori virtuali

La risoluzione del problema elastico richiede, oltre alla congruenza e all'equilibrio, la conoscenza delle relazioni tra le componenti di deformazione e quelle di tensione, cioè il legame costitutivo. È possibile pervenire ad una relazione di grande utilità, nota in letteratura come equazione dei lavori virtuali o teorema dei lavori virtuali, la quale costituisce uno strumento di calcolo estremamente potente per risolvere problemi strutturali<sup>55</sup>. La relazione è la seguente:

$$L_{ve} = L_{vi} \quad (2.22A)$$

dove

$$L_{ve} = \int_V (b'_x \cdot u + b'_y \cdot v + b'_z \cdot w) dV + \int_{\partial V} (p'_x \cdot u + p'_y \cdot v + p'_z \cdot w) dA \quad (2.22B)$$

$$L_{vi} = \int_V (\sigma'_x \cdot \varepsilon_x + \sigma'_y \cdot \varepsilon_y + \sigma'_z \cdot \varepsilon_z + \tau'_{xy} \cdot \gamma_{xy} + \tau'_{xz} \cdot \gamma_{xz} + \tau'_{yz} \cdot \gamma_{yz}) dV \quad (2.22C)$$

È necessario sottolineare che non esiste nessuna correlazione tra il sistema di spostamenti-deformazioni e quello delle forze-tensioni, evidenziato attraverso l'uso di un apice. La relazione (2.22A) non ha un contenuto concettuale, né tantomeno un significato fisico-meccanico. Non si deve immaginare che gli spostamenti siano conseguenti alle forze applicate. Viene solamente richiesto che il sistema di spostamenti-deformazioni sia congruente (cinematicamente ammissibile) e che quello delle forze-tensioni sia in equilibrio (staticamente ammissibile)<sup>56</sup>. Impiegando il teorema appena richiamato nella forma delle forze virtuali, è possibile risolvere strutture iperstatiche o calcolare spostamenti e rotazioni in strutture isostatiche. La relazione è infatti valutata con riferimento ad un sistema virtuale di forze esterne ed interne in equilibrio, e al sistema effettivo di spostamenti e deformazioni congruenti. Si può quindi riscrivere il primo membro della (2.22A) nel seguente modo:

---

<sup>55</sup> TARANTINO A.M., 2009

<sup>56</sup> TARANTINO A.M., 2009

$$L_{ve} = \sum_i F'_i \cdot \delta_{F,i} + \sum_i M'_i \cdot \varphi_{M,i} + \sum_i R'_i \cdot \delta_{R,i} + \sum_i m'_i \cdot \varphi_{m,i} \quad (2.22D)$$

con:

$F'_i$  e  $M'_i$ : forze e momenti esterni del sistema fittizio in equilibrio;

$R'_i$  e  $m'_i$ : forze e momenti reattivi del sistema fittizio in equilibrio;

$\delta_{F,i}$ : spostamenti effettivi dei punti di applicazione delle forze esterne nella direzione delle forze stesse;

$\varphi_{M,i}$ : rotazioni effettive delle sezioni in cui sono applicati i momenti esterni;

$\delta_{R,i}$ : spostamenti effettivi dei punti di applicazione delle reazioni vincolari nella direzione delle forze stesse;

$\varphi_{m,i}$ : rotazioni effettive delle sezioni in cui sono applicati i momenti reattivi;

Mentre il lavoro virtuale interno (21C) può essere espresso sommando i lavori elementari compiuti dalle caratteristiche della sollecitazione interna virtuale per i corrispondenti spostamenti effettivi elencati di seguito:

$dw = \frac{N}{EA} dz$ : variazione di lunghezza dell'elemento  $dz$ ;

$d\varphi_x \frac{M_x}{EI_x} dz$ : rotazione relativa attorno all'asse x delle sezioni rette che delimitano l'elemento  $dz$ ;

$d\varphi_y \frac{M_y}{EI_y} dz$ : rotazione relativa attorno all'asse y delle sezioni rette che delimitano l'elemento  $dz$ ;

$du = \chi_x \cdot \frac{T_x}{GA} dz$ : spostamento relativo nella direzione dell'asse x delle sezioni rette che delimitano l'elemento  $dz$ ,  $\chi_x$  è il fattore di taglio;

$dv = \chi_y \cdot \frac{T_y}{GA} dz$ : spostamento relativo nella direzione dell'asse y delle sezioni rette che delimitano l'elemento  $dz$ ,  $\chi_y$  è il fattore di taglio;

$d\varphi_z = \frac{M_t}{GI_t} dz$ : rotazione relativa attorno all'asse z delle sezioni rette che delimitano l'elemento  $dz$ ,  $I_t$  è il modulo di torsione;

$$L_{vi} = \int_S N' \cdot \frac{N}{EA} dz + \int_S T'_x \cdot \chi_x \cdot \frac{T_x}{GA} dz + \int_S T'_y \cdot \chi_y \cdot \frac{T_y}{GA} dz + \quad (21C)$$

Metodo del diagramma momento – curvatura

$$\int_S M'_x \cdot \frac{M_x}{EI_x} dz + \int_S M'_y \cdot \frac{M_y}{EI_y} dz + \int_S M'_t \cdot \frac{M_t}{GI_t} dz +$$

$$\int_S N' \cdot (\alpha \Delta T_0) dz + \int_S M'_x \cdot \frac{\alpha \Delta T_t}{h} dz$$

dove tutti gli integrali sono estesi all'intera struttura S, avendo considerato anche l'effetto di una variazione termica uniforme  $\Delta T_0$  lungo l'altezza della trave (asse y), tale da produrre una variazione di lunghezza dell'elemento di trave dz pari a  $(\alpha \Delta T_0) dz$ , con  $\alpha$  coefficiente di dilatazione termica, e una variazione lineare lungo l'altezza della trave (variazione “a farfalla”) che produce una rotazione elementare attorno all'asse x pari a  $\frac{\alpha \Delta T_t}{h} dz$ , con  $\Delta T_t = \Delta T_i - \Delta T_s$  e h è l'altezza della trave. La (2.22A) assume quindi la forma seguente:

$$\sum_i F'_i \cdot \delta_{F,i} + \sum_i M'_i \cdot \varphi_{M,i} + \sum_i R'_i \cdot \delta_{R,i} + \sum_i m'_i \cdot \varphi_{m,i} = \tag{2.22E}$$

$$\int_S N' \cdot \frac{N}{EA} dz + \int_S T'_x \cdot \chi_x \cdot \frac{T_x}{GA} dz + \int_S T'_y \cdot \chi_y \cdot \frac{T_y}{GA} dz +$$

$$\int_S M'_x \cdot \frac{M_x}{EI_x} dz + \int_S M'_y \cdot \frac{M_y}{EI_y} dz + \int_S M'_t \cdot \frac{M_t}{GI_t} dz +$$

$$\int_S N' \cdot (\alpha \Delta T_0) dz + \int_S M'_x \cdot \frac{\alpha \Delta T_t}{h} dz$$

Nel caso in cui si richiede lo spostamento  $\delta_s$  (nella direzione s) di un punto dell'asse di una trave appartenente ad una struttura isostatica, è sufficiente applicare una forza unitaria nello stesso punto (con direzione s) e applicare il PLV considerando questa particolare condizione di carico come sollecitazione virtuale, la (2.22E) diventa:

(2.22F)

$$\begin{aligned}
& 1 \cdot \delta_s + \sum_i R'_i \cdot \delta_{R,i} + \sum_i m'_i \cdot \varphi_{m,i} = \\
& \int_S N' \cdot \frac{N}{EA} dz + \int_S T'_x \cdot \chi_x \cdot \frac{T_x}{GA} dz + \int_S T'_y \cdot \chi_y \cdot \frac{T_y}{GA} dz + \\
& \int_S M'_x \cdot \frac{M_x}{EI_x} dz + \int_S M'_y \cdot \frac{M_y}{EI_y} dz + \int_S M'_t \cdot \frac{M_t}{GI_t} dz + \\
& \int_S N' \cdot (\alpha \Delta T_0) dz + \int_S M'_x \cdot \frac{\alpha \Delta T_t}{h} dz
\end{aligned}$$

Nel caso in cui i vincoli non subiscano cedimenti elastici o anelastici, e quindi nel caso di vincoli perfetti,  $\delta_{R,i} = \varphi_{m,i} = 0$ . Sarà quindi diretto il calcolo di  $\delta_s$ .

Il CEB Bulletin d'information n°235 addita il teorema dei lavori virtuali come uno dei più diffusi metodi per il calcolo degli spostamenti. Nel seguito il calcolo viene sviluppato trascurando il contributo tagliante e quindi considerando esclusivamente il quarto elemento del secondo membro della (2.22F), ovvero  $\int_S M'_x \cdot \frac{M_x}{EI_x} dz$ .

Il diagramma della curvatura media dovuta all'effetto delle azioni che agiscono sulla struttura (sia essa staticamente determinata o indeterminata) è messo in relazione con quello del momento flettente indotto da un sistema equilibrato di forze fittizie. Quest'ultimo sistema deve essere in grado di produrre lavoro con gli spostamenti che vengono ricercati: questo significa applicare una forza unitaria in mezzzeria, nel caso in cui se ne ricerchi lo spostamento, o una coppia unitaria, se invece si vuole ottenere la rotazione in corrispondenza del medesimo punto di applicazione. Questo sistema di forze deve essere applicato alla struttura staticamente determinata, quindi è possibile applicarlo ad una struttura iperstatica solo dopo aver individuato ogni incognita iperstatica. L'abbassamento, o la rotazione, è quindi calcolato con la formula seguente:

$$a = \int M' \cdot \left( \frac{1}{r_m} \right) dz \quad (2.23)$$

avendo indicato con  $M'$  il momento flettente generato dal sistema di forze fittizie. L'integrale è esteso a tutta la lunghezza della struttura. Nel caso in cui quest'ultima venga discretizzata in un numero finito di sezioni, l'integrale diventerà una sommatoria, che può facilmente essere calcolata come l'area della funzione  $M' \cdot (1/r_m)$ . Sono presenti in letteratura delle formule

analitiche derivate dalla risoluzione dell'integrale in forma chiusa, per schemi statici e configurazioni di carico usali.

## 1.9.4 La deformata di una struttura

Come introdotto all'inizio di questo capitolo, il metodo proposto vuole ricostruire con la miglior precisione possibile la deformata reale di una struttura isostatica. I paragrafi precedenti sono stati necessari per definire tutti gli elementi concettuali che saranno utilizzati nel seguito per descrivere le varie fasi del calcolo.

### 1.9.4.1 Il diagramma M-C sperimentale

Si supponga che una struttura isostatica, come una trave semplicemente appoggiata, sia caricata con una o più forze concentrate in diversi punti del suo asse longitudinale. In alcune sezioni della struttura sono installati dei sensori di rilevamento delle deformazioni longitudinali, detti estensimetri, di cui si è parlato nelle parti iniziali di questo studio. Gli estensimetri sono installati in coppia, ovvero ogni sezione avrà un estensimetro sul lembo compresso ed un estensimetro sul lembo teso. In questo modo, con una semplice formula, è possibile calcolare la curvatura delle sezioni equipaggiate con i sensori. Infatti, nota la deformazione dell'estensimetro superiore e di quello inferiore, e nota anche la distanza che intercorre fra i due, la curvatura sarà data da:

$$\chi_i = \frac{\varepsilon_{sup,i} - \varepsilon_{inf,i}}{d_i} \quad (2.24)$$

dove i parametri utilizzati hanno il seguente significato:

$\varepsilon_{sup,i}$ : deformazione dell'estensimetro superiore installato sull'i-esima sezione ;

$\varepsilon_{inf}$ : deformazione dell'estensimetro inferiore installato sull'i-esima sezione;

$d_i$ : distanza verticale che intercorre tra i due estensimetri dell'i-esima sezione.

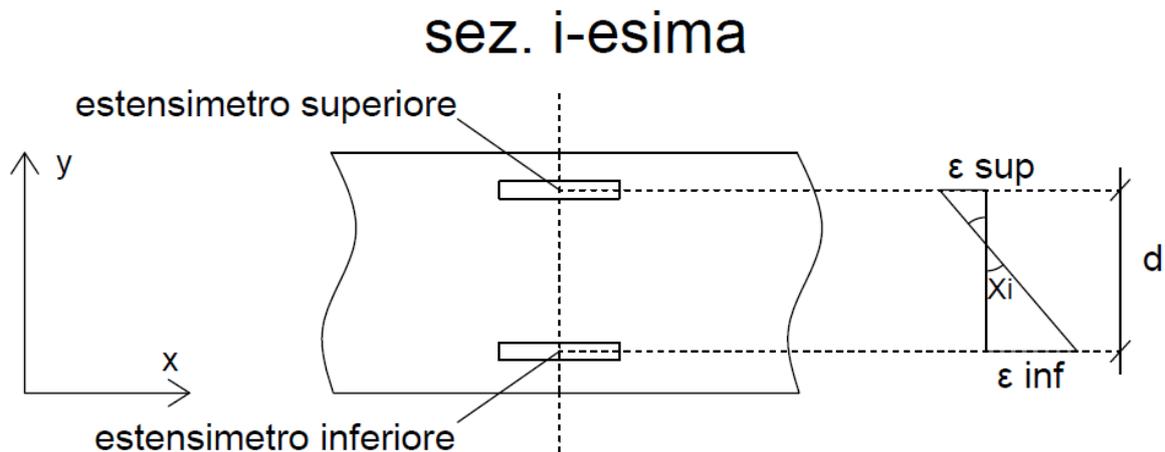


Figura 11: Curvatura di una sezione trasversale ricavata tramite misure estensimetriche

Nell'espressione precedente si è fatto uso del pedice "i" per indicare ogni sezione sui cui è possibile calcolare sperimentalmente la curvatura.

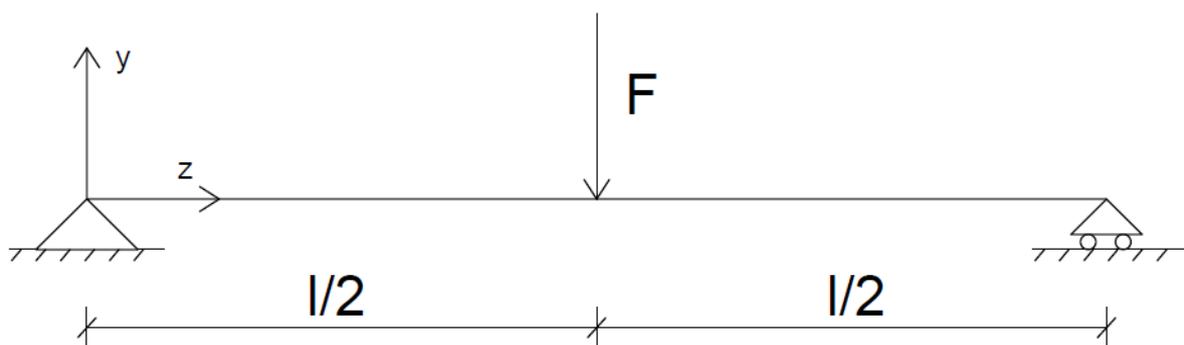


Figura 12: Trave semplicemente appoggiata con forza concentrata in mezzeria

Dal momento che la struttura è isostatica, il momento flettente sollecitante che agisce sulla  $i$ -esima sezione è facilmente deducibile con semplici equazioni di equilibrio. Si immagini di aumentare gradualmente, *step by step*, il valore delle forze concentrate applicate sulla trave. Per ogni step di carico si riportino le misurazioni di deformazione registrate da ogni coppia di estensimetri. Quindi, per la sezione  $i$ -esima, è possibile associare ad ogni valore di  $F$  (forza concentrata) un valore del momento flettente e un valore della curvatura. Mettendo in relazione questi ultimi due si costruisce sperimentalmente il diagramma M-C della sezione  $i$ -esima. Si fa subito notare che, se gli estensimetri vengono installati e cominciano a registrare i dati di deformazione prima che la trave sia disarmata, cioè prima che subisca l'effetto del peso proprio, il diagramma che se ne ricaverà avrà origine nel punto  $(0;0)$ . Qualora invece gli estensimetri vengano installati dopo il disarmo della trave, le curvature registrate non terranno conto dell'effetto del peso proprio o di qualunque altra sollecitazione preesistente, e pertanto il

diagramma che se ne ricaverà sarà centrato in un punto diverso dall'origine. Nell'ultimo caso è necessario effettuare il *link*, ovvero il collegamento con l'origine, con la procedura illustrata nel paragrafo successivo.

#### 1.9.4.2 “Link” del diagramma M-C

Come anticipato nel paragrafo precedente, il *link* del diagramma M-C sperimentale è necessario ogni qual volta gli estensimetri vengano installati sulla struttura in un momento successivo al suo disarmo. La figura sottostante evidenzia il disallineamento del diagramma M-C sperimentale rispetto all'origine (0;0).

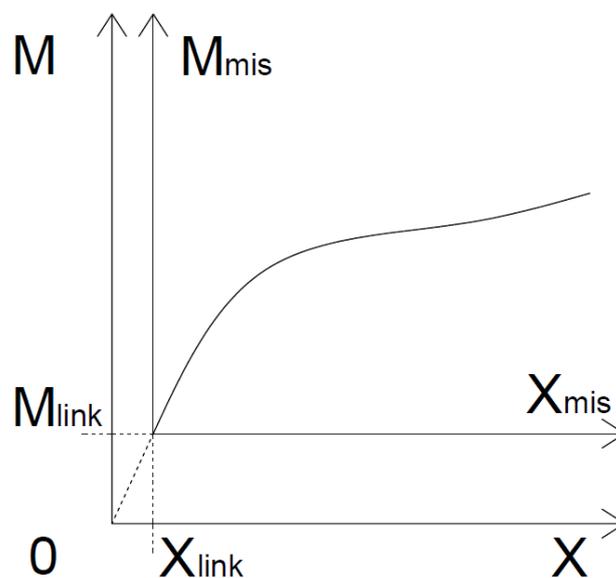


Figura 13: Disallineamento dall'origine del diagramma Momento - Curvatura misurato

Individuare i valori  $M_{link}$  e  $C_{link}$  è evidentemente un'operazione non banale dal punto di vista teorico, dal momento che sarebbe necessario conoscere non solo la completa storia di carico della struttura, ma anche l'intera storia deformativa della stessa. È proprio in questa fase che si annidano le principali problematiche del metodo proposto, soprattutto se quest'ultimo si pensa applicato alla pratica del monitoraggio strutturale delle strutture reali esistenti. In questo caso infatti le incognite del problema sono legate ad un ampio spettro di parametri, in primis le caratteristiche proprie dei materiali, come le resistenze caratteristiche e i moduli elastici. Inoltre, se da un lato è non banale quantificare il reale valore dei carichi e delle forze che insistono su di una struttura, dall'altro diventa molto difficile valutare con estrema correttezza i loro effetti, dal momento che diventano non trascurabili, per elementi in cemento armato e in cemento armato precompresso, i fenomeni di creep, ritiro e rilassamento delle armature di acciaio. Al professionista che gestisce tale problema rimane dunque solo la possibilità di effettuare delle

ipotesi. Naturalmente l'esperienza professionale e la documentazione reperibile sulla struttura, non solo tecnica ma anche storica, forniscono un potenziale aiuto alla validazione delle ipotesi proposte. Un'estrema semplificazione potrebbe essere quella di trascurare gli effetti differiti nel tempo (creep, ritiro, rilassamento delle armature) e immaginare la struttura soggetta esclusivamente all'azione del peso proprio. A questo punto si può ricavare, sia per strutture isostatiche che per strutture iperstatiche, il momento flettente  $M_{link}$  agente in ogni sezione, in particolar modo in ogni  $i$ -esima sezione equipaggiata con i sensori di deformazione. Ipotizzando infine se la struttura abbia sviluppato, per tali sollecitazioni, un comportamento elastico-lineare (stadio 1), e/o non lineare (post-fessurazione), si procede al calcolo della curvatura  $C_{link}$ .

### ***1.9.4.3 Selezione del modello teorico attraverso il confronto del diagramma M-C teorico con il diagramma M-C sperimentale***

Nei paragrafi precedenti sono state illustrate le procedure per ricavare il diagramma M-C sperimentale, per l' $i$ -esima sezione, dai dati di deformazione longitudinale forniti da ogni  $i$ -esima coppia di estensimetri installati su una trave. È stata inoltre introdotta la procedura del *link* con cui è possibile collegare i dati misurati all'origine del diagramma M-C.

Questa fase del metodo, introdotto nel presente capitolo, mira ad individuare quale sia il modello teorico che approssima con la miglior precisione l'andamento sperimentale ricostruito con le misure degli estensimetri. La selezione sarà effettuata individuando tra il Modello CEB e il Modello ACI, di cui si è parlato nei paragrafi precedenti, quello che presenta la minor dispersione d'errore. Per ogni momento flettente sarà calcolata la curvatura teorica e l'errore tra quest'ultima e la curvatura ricavata sperimentalmente. Al termine di questa fase si sarà dunque individuato il modello migliore per procedere al calcolo delle inflessioni, aumentando il livello di accuratezza finale.

### ***1.9.4.4 Aggiornamento dei parametri fondamentali***

Dopo aver individuato il modello teorico più adatto a descrivere il comportamento reale, con la procedura descritta nel precedente paragrafo, si è in grado di effettuare il calcolo delle inflessioni della trave. A tal fine è stato utilizzato il metodo dei lavori virtuali. Al termine della procedura appena illustrata è possibile confrontare la freccia calcolata teoricamente con quella ricavata sperimentalmente attraverso i flessimetri durante il test in laboratorio. Le possibili differenze nel valore di abbassamento sono dovute alle incertezze legate ad ogni fase dell'analisi e alle esemplificazioni eseguite durante i calcoli. Una di queste esemplificazioni è quella di aver trascurato il contributo della sollecitazione tagliante nel calcolo

dell'abbassamento. Come ampiamente illustrato in letteratura, è noto che lo sforzo tagliante sviluppa un contributo tanto maggiore quanto minore è il rapporto luce/altezza della trave. Per elementi molto snelli, ed in particolar modo per rapporti luce/altezza maggiori di un determinato valore, è prassi comune non considerare questo contributo. Per valori minori del rapporto  $l/d$  (dove “ $l$ ” è la lunghezza dell'elemento e “ $d$ ” l'altezza utile della sezione) invece l'abbassamento causato dal taglio assume un valore che varia tra il 25% e il 50% dell'abbassamento causato dalla sollecitazione flessionale. Si capisce dunque come in fase di monitoraggio, come anche nel progetto, non sia cautelativo trascurare lo studio di questo particolare fenomeno. Nei paragrafi successivi si fornirà un resoconto di uno dei più recenti lavori pubblicati in letteratura a tal proposito. In ogni caso, a prescindere dalle ipotesi ed esemplificazioni introdotte nei calcoli, il metodo del diagramma M-C propone una soluzione alternativa per aumentare la precisione della stima dell'abbassamento.

Dai diagrammi M-C costruiti sperimentalmente, per ogni  $i$ -esima sezione su cui sono stati installati i sensori di deformazione, è possibile estrapolare il valore della rigidità flessionale sperimentale sia prima che dopo la parzializzazione della sezione. Questi valori, indicati con  $EI_{1,sp}$  e  $EI_{2,sp}$  andranno ad aggiornare i parametri del modello teorico per consentire un nuovo calcolo delle inflessioni.

Il risultato di questa procedura è quello di aver migliorato notevolmente la precisione della stima, pur avendo trascurato il contributo dello sforzo tagliante.

### **1.9.5 Casi studio: travi in cemento armato semplicemente appoggiate**

Al fine di esplicitare le procedure esposte nei paragrafi precedenti, si propone l'applicazione in ogni sua fase del metodo del diagramma Momento – Curvatura, proposto in questo capitolo, su alcune travi testate in laboratorio presso il laboratorio di Ingegneria Strutturale del Politecnico di Torino, dal Prof. P.G. Debernardi e dal Prof. M. Taliano nel 2006<sup>57</sup>. Le strutture in questione sono 6 travi in cemento armato di diversa lunghezza, semplicemente appoggiate, con la medesima sezione trasversale a “I” ma differente armatura longitudinale. L'armatura trasversale (a taglio) è invece la medesima per ogni trave, ed è costituita da due barre di 8 mm di diametro con 200 mm di passo. Su ogni trave sono state applicate delle forze concentrate e ne è stata misurata la freccia in mezzera attraverso dei flessimetri. La sperimentazione aveva l'obiettivo di valutare il contributo della sollecitazione tagliante nel calcolo delle deformazioni per strutture con rapporto lunghezza/altezza uguale a 12. Di seguito sono riportati gli schemi

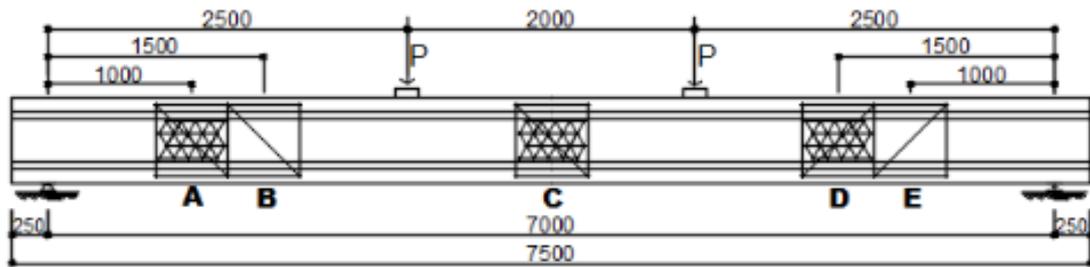
---

<sup>57</sup> DEBERNARDI P.G., TALIANO M., 2006

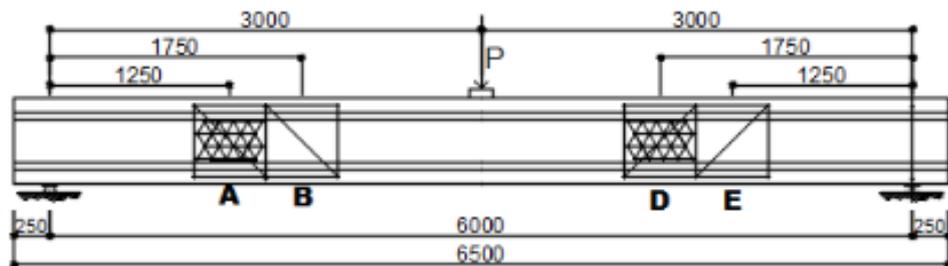
## I modelli teorici

statici delle travi, la sezione trasversale, e una tabella con le caratteristiche meccaniche dei materiali impiegati. Le misure indicate nelle immagini sono espresse in millimetri. Le lettere in stampatello indicano le sezioni equipaggiate con coppie di estensimetri per le quali è stato possibile ricavare la curvatura sperimentale.

### Travi 1 e 2



### Travi 3 e 4



### Travi 5 e 6

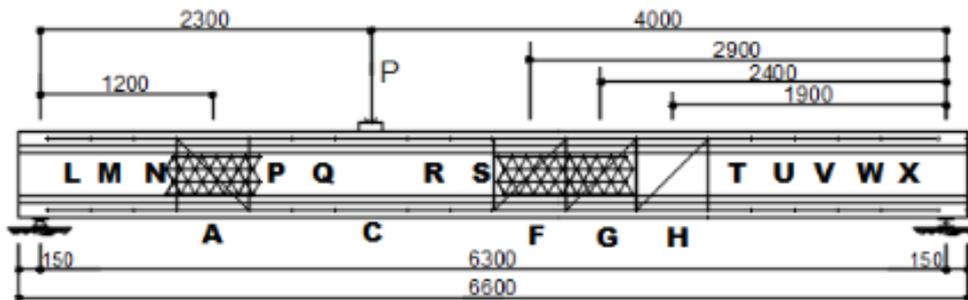


Figura 14: Travi testate in laboratorio, Taliano M. e Debernardi P.G., *Shear deformation in reinforced concrete beams with thin web*, 2006

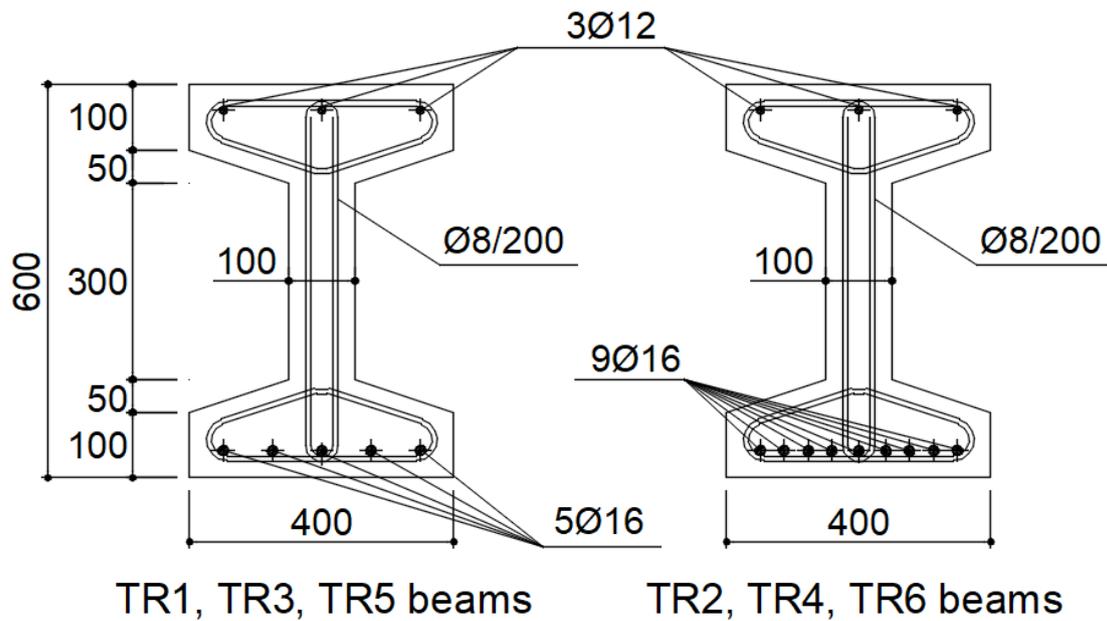


Figura 15: Sezioni trasversali delle travi testate in laboratorio, Taliano M. e Debernardi P.G., *Shear deformation in reinforced concrete beams with thin web*, 2006

Barre di acciaio	$f_y$
Barre da 16 mm di diametro (longitudinali)	540 Mpa
Barre da 8 mm di diametro (trasversali)	570 Mpa

Tabella 4: Caratteristiche meccaniche dell'armatura ordinaria delle travi testate in laboratorio, Taliano M. e Debernardi P.G., *Shear deformation in reinforced concrete beams with thin web*, 2006

### 1.9.5.1 Trave 3: trave semplicemente appoggiata con forza concentrata in mezzeria

Si prenda come esempio di applicazione la trave 3, rappresentata in fig. 16, con sezione trasversale ad I, armata con staffe e armatura longitudinale come mostrato in fig. 15.

Trave 3

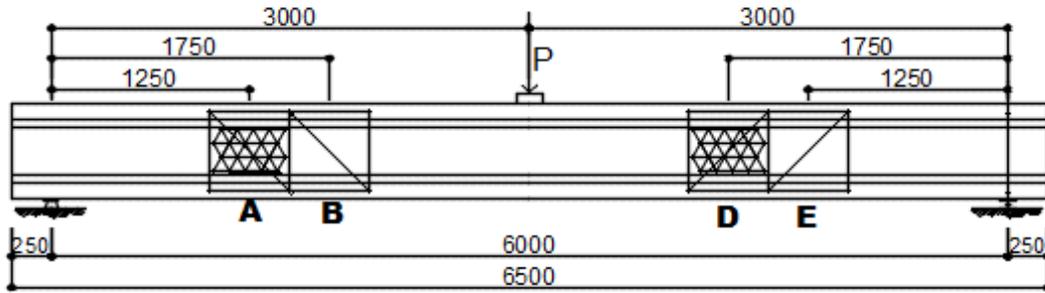


Figura 16: Rappresentazione della trave 3

Il carico per metro lineare corrispondente al peso proprio della trave è ottenibile moltiplicando l'area della sezione per la densità del cemento armato pari a  $25 \text{ KN/m}^3$ . L'area della sezione è pari a  $135000 \text{ mm}^2$ , cioè  $0.135 \text{ m}^2$ . Il carico per metro lineare relativo al peso proprio della trave è quindi  $q_{pp}=25 \cdot 0.135 \text{ KN/m} = 3.375 \text{ KN/m}$ . Lo schema statico è quello di una trave semplicemente appoggiata, di conseguenza è immediato il calcolo del momento flettente nelle diverse sezioni trasversali.

Parametro	Valore
Modulo di elasticità E	30303.38 Mpa
Momento d'inerzia della sezione omogeneizzata in stadio 1	$6.6 \cdot 10^9 \text{ mm}^4$
Momento d'inerzia della sezione omogeneizzata in stadio 2	$1.527 \cdot 10^9 \text{ mm}^4$

Tabella 5: Valori dei parametri fondamentali della sezione trasversale della trave 3

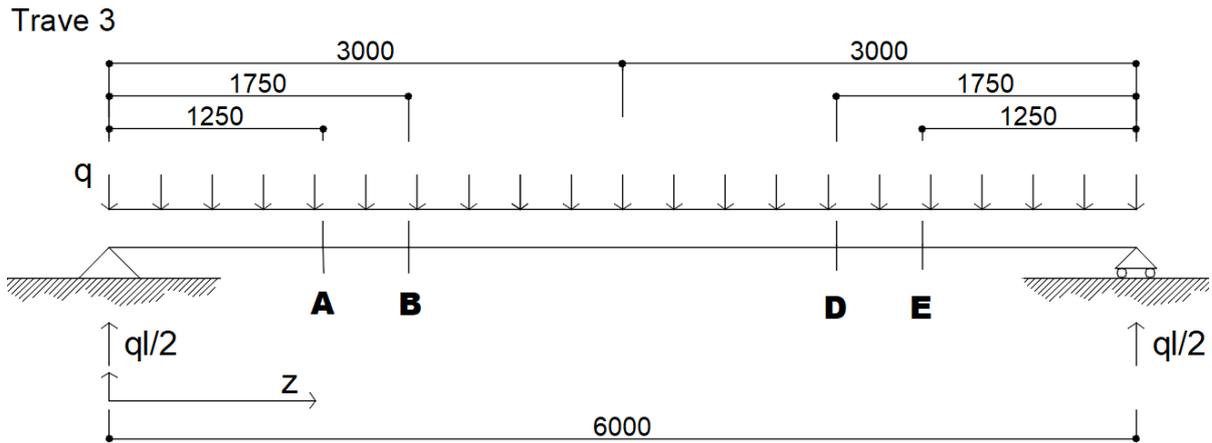


Figura 17: Trave 3 soggetta al carico uniformemente distribuito dato dal peso proprio

Ad esempio, nella sezione contraddistinta dalla lettera “B”, il momento flettente e la curvatura corrispondenti sono ricavabili come segue:

$$M_{Bpp}(z = 1.75) = \frac{ql}{2} \cdot (1.75) - \frac{q \cdot (1.75)^2}{2} = 12.55 \text{ KNm} \quad (2.25)$$

$$\chi_{Bpp} = \frac{M_{Bpp}}{EI_{om,1}} = 6.27 \cdot 10^{-8} \text{ mm}^{-1} \quad (2.26)$$

È stata dunque individuata la coppia  $(M_{link}, X_{link})$  grazie alla quale sarà possibile collegare il diagramma M-C ricavato sperimentalmente, per la sezione B della trave 3, all’origine 0. Si può procedere analogamente per la sezione D della trave ed ottenere gli stessi risultati, a causa della

## I modelli teorici

simmetria strutturale e della condizione di carico. Le figure sottostanti mostrano il diagramma M-C sperimentale prima e dopo la procedura di *link*, rispettivamente per le sezioni B e D.

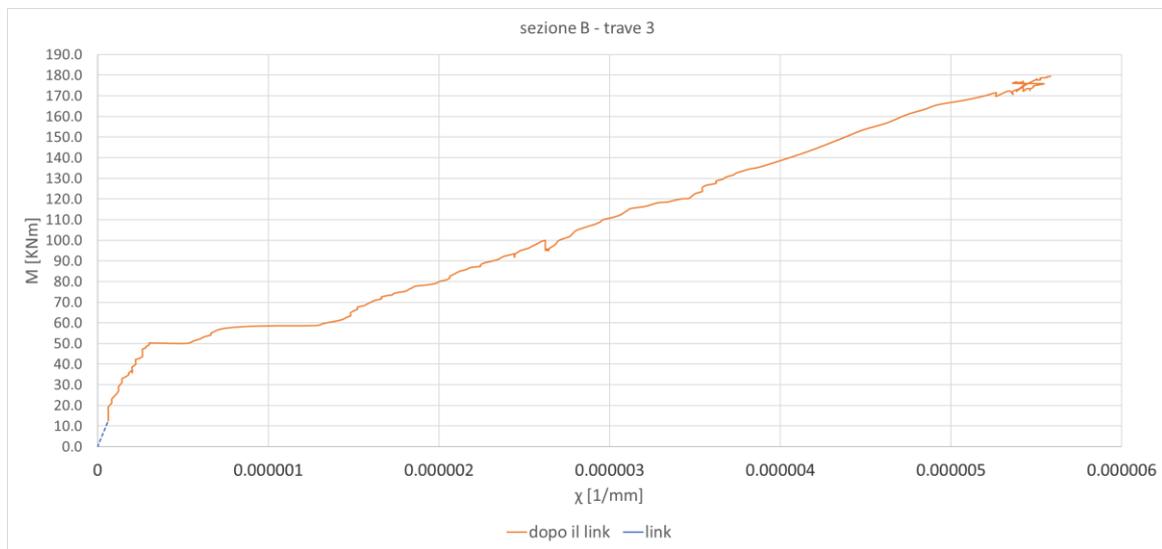


Figura 18: Diagramma momento - curvatura per la sezione "B" della trave 3, dopo aver effettuati il "link"

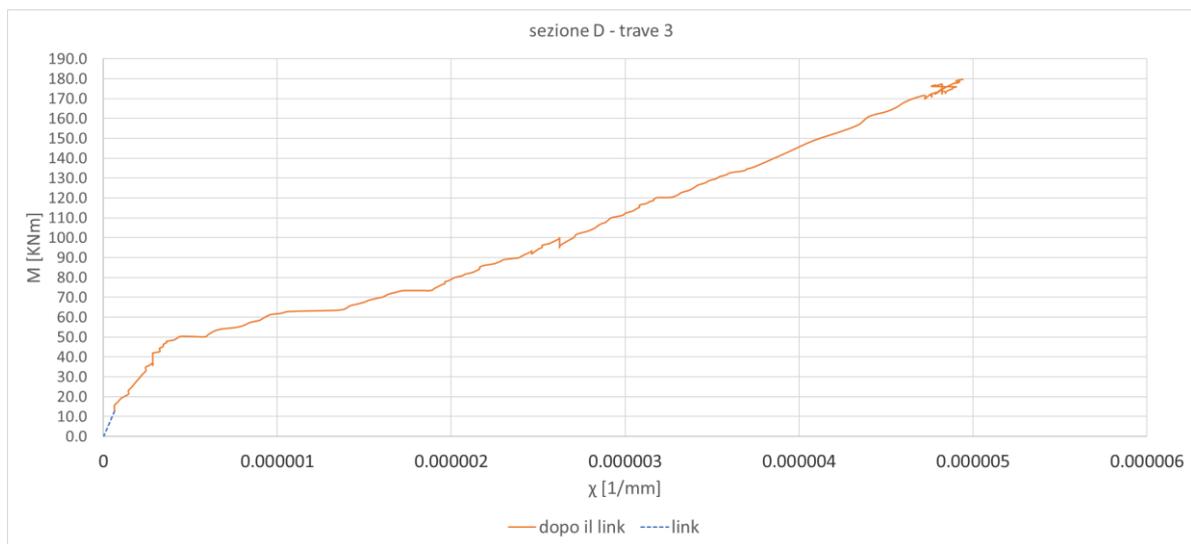


Figura 19: Diagramma momento - curvatura per la sezione "D" della trave 3, dopo aver effettuato il "link"

A questo punto vengono realizzati i modelli teorici secondo quanto indicato nei paragrafi precedenti, per il Modello CEB e il Modello ACI. Si procede quindi al confronto con i valori sperimentali e alla selezione del modello migliore per procedere nei calcoli. Nel presente caso studio è stato notato che il Modello CEB rispecchia maggiormente l'andamento reale del diagramma. In particolar modo l'errore viene ridotto drasticamente considerando un valore del parametro  $\beta = \beta_1 \cdot \beta_2 = 0$  come si può vedere dalla figura 18. Si nota infine che il valore della

## Metodo del diagramma momento – curvatura

rigidezza flessione post-fessurazione del calcestruzzo, calcolata utilizzando la curvatura media proposta dal Metodo CEB (combinazione convessa delle curvature in stadio 1 e stadio 2) risulti maggiore di quella deducibile sperimentalmente. Procedendo nei calcoli con la rigidezza teorica si otterrebbero dei valori di abbassamento inferiori a quelli che sono stati misurati sperimentalmente dai flessimetri.

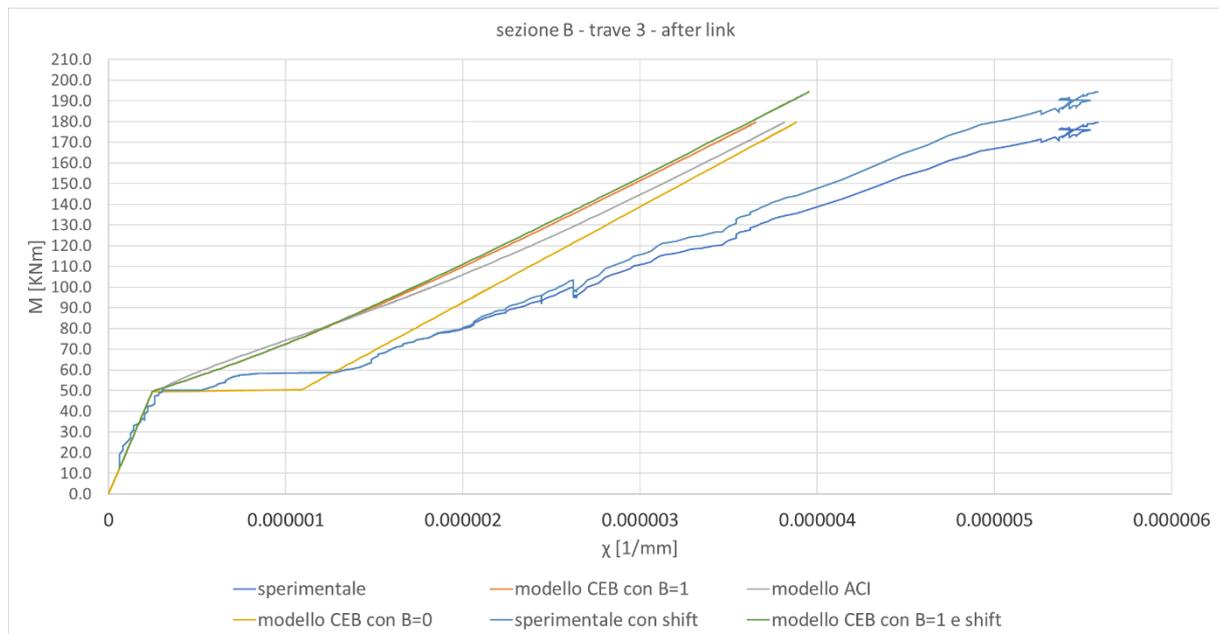


Figura 20: Diagramma M-C per la sezione B della trave 3 con sovrapposizione dei valori sperimentali, del modello CEB e del modello ACI

Per comparare i risultati si procede in modo parallelo sfruttando i dati provenienti dalla sezione D della stessa trave.

## I modelli teorici

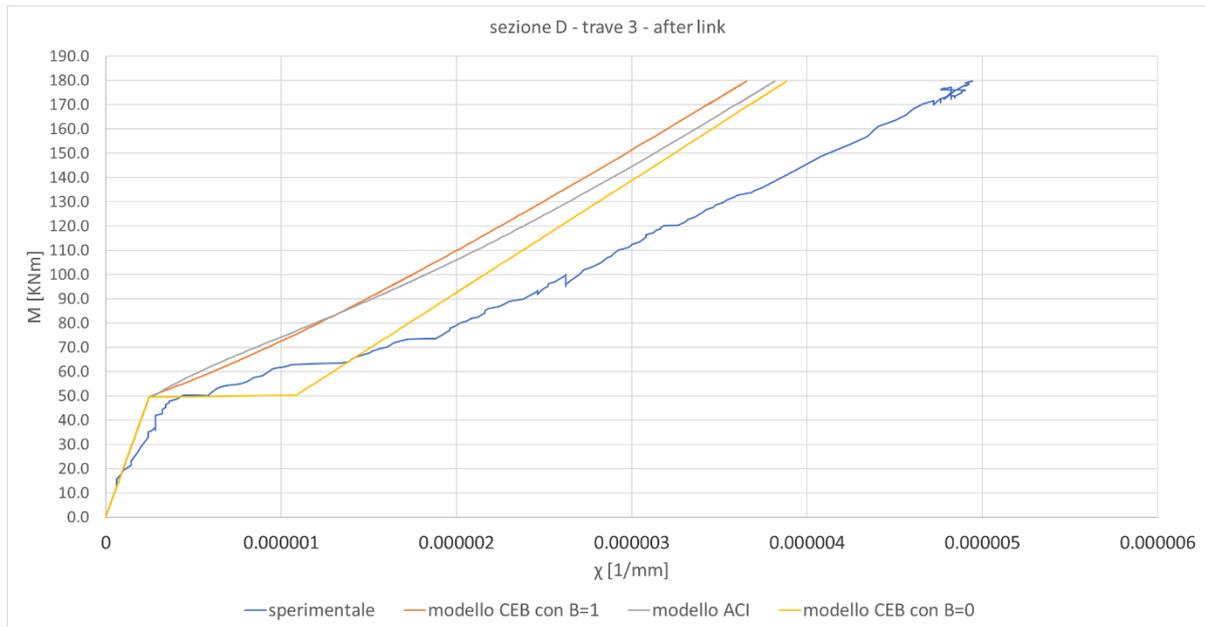


Figura 21: Diagramma M-C per la sezione D della trave 3 con sovrapposizione dei valori sperimentali, del modello CEB e del modello ACI

A questo punto si applica il teorema dei lavori virtuali per ricavare la freccia in mezzeria.

Trave 3  
sistema reale

0)

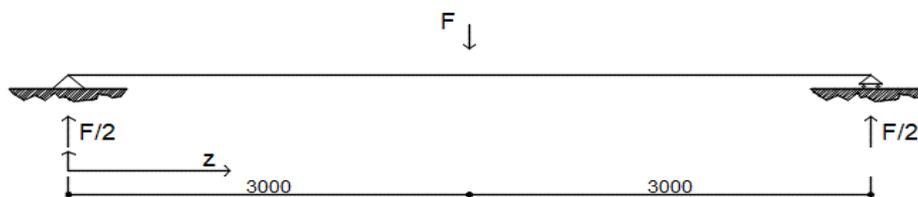


Figura 22: Sistema reale trave 3

Trave 3  
sistema fittizio

1)

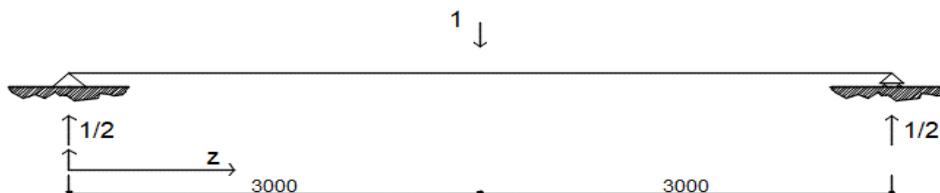


Figura 23: Sistema fittizio trave 3

## Metodo del diagramma momento – curvatura

Sistema reale: 0) 
$$M(z) = \frac{F}{2} \cdot z \text{ per } 0 < z \leq \frac{l}{2} \quad (2.27A)$$

Sistema fittizio: 1) 
$$M'(z) = \frac{z}{2} \text{ per } 0 < z \leq \frac{l}{2} \quad (2.27B)$$

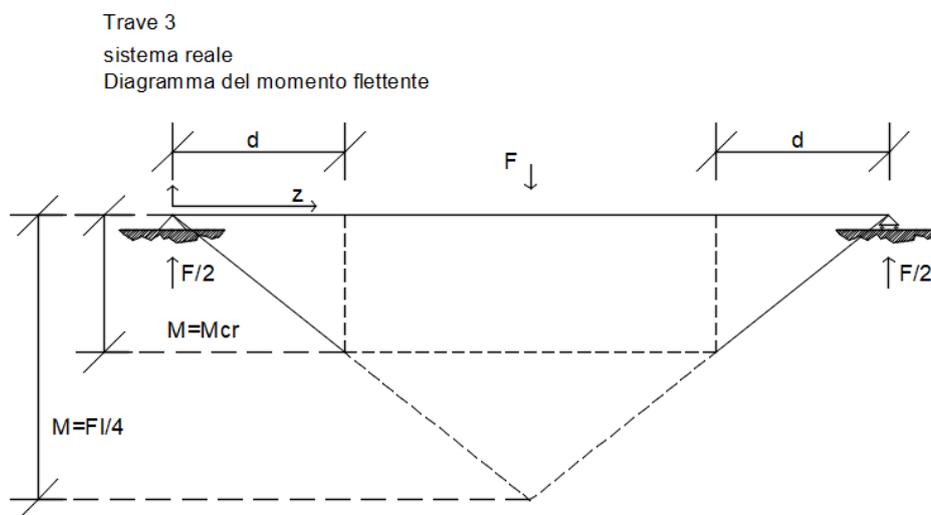


Figura 24: Momento flettente per la trave 3 nel sistema reale

La simmetria della struttura e della condizione di carico ci permette di semplificare il calcolo studiando solo metà della struttura. Si dovrà porre particolare attenzione a quanto specificato di seguito. Per le sezioni in cui il momento flettente non ha superato il valore critico di fessurazione, la rigidezza flessionale sarà quella ricavabile attraverso il momento d'inerzia della sezione omogeneizzata in stadio 1. Per tutte le sezioni in cui invece tale limite è stato superato, ovvero per  $M > M_{cr}$  si utilizzerà nei calcoli il valore di curvatura media. All'aumentare del valore della forza concentrata aumenterà il numero di sezioni parzializzate fino alla completa fessurazione dell'intero elemento strutturale. Quanto appena spiegato è espresso nella formula seguente:

$$\begin{aligned}
 f &= \int_{s_1} \frac{M \cdot M'}{E_c \cdot I_1} dz + \int_{s_2} \frac{M \cdot M'}{E_c \cdot I_m} dz & (2.28) \\
 &= 2 \cdot \int_0^d \frac{M \cdot M'}{E_c \cdot I_1} dz + 2 \cdot \int_d^{l/2} \frac{M \cdot M'}{E_c \cdot I_m} dz \\
 &= \frac{2}{E_c \cdot I_1} \cdot \left| \frac{F \cdot z^3}{12} \right|_0^d + \frac{F}{2} \int_d^{l/2} \frac{z^2}{E_c \cdot I_m} dz \\
 f &= \frac{F \cdot d^3}{6 \cdot E_c \cdot I_1} + \frac{F}{2} \left\{ \frac{1}{E_c \cdot I_1} \left( \frac{l^3}{24} - \frac{d^3}{3} \right) + \left( \frac{1}{E_c \cdot I_2} - \frac{1}{E_c \cdot I_1} \right) \right. \\
 &\quad \left. \cdot \left[ \left( \frac{l^3}{24} - \frac{d^3}{3} \right) - 4 \cdot \beta \cdot \frac{M_{cr}^2}{F^2} \cdot \left( \frac{l}{2} - d \right) \right] \right\};
 \end{aligned}$$

con

$M$ : momento flettente generato dal sistema di forze reali;

$M'$ : momento flettente generato dal sistema di forze fittizie;

$E_c$ : modulo di elasticità del calcestruzzo;

$I_1$ : momento d'inerzia della sezione omogeneizzata in stadio 1;

$I_m$ : momento d'inerzia medio della sezione omogeneizzata dopo la fessurazione;

In cui l'integrazione è stata suddivisa nei due contributi:  $s_1$  è la parte della struttura in stadio 1, e  $s_2$  la parte della struttura in cui le sezioni si sono parzializzate.

All'aumentare del carico quindi  $s_2$  diventerà maggiore rispetto a  $s_1$ , e pertanto l'integrazione delle zone fessurate assumerà un peso crescente. L'ultima fase del metodo prevede l'individuazione dei parametri di rigidezza flessionale direttamente dal diagramma momento – curvatura sperimentale (fig.17) per effettuare l'aggiornamento del modello di calcolo scelto. Sono state tracciate due linee di tendenza sul grafico Excel: una per lo stadio 1 ed una per lo stadio post-fessurazione fino al raggiungimento dello snervamento delle barre di acciaio. L'andamento è stato assunto lineare ed il programma ha calcolato l'equazione di ogni retta. Dall'equazione si estrapola il coefficiente angolare, che corrisponde alla rigidezza flessionale rispettivamente in stadio 1 e dopo la fessurazione. Occorre prestare molta attenzione alle unità di misura del grafico ed operare le opportune conversioni per garantire la compatibilità dimensionale.

## Metodo del diagramma momento – curvatura

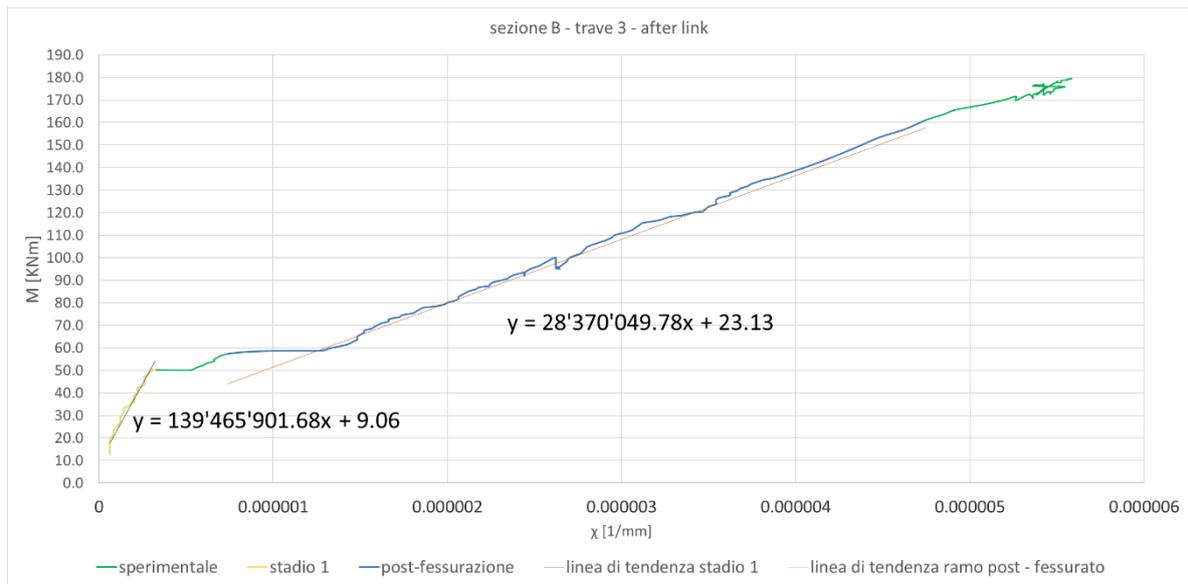


Figura 25: Estrapolazione dati dal diagramma momento - curvatura per la sezione B della trave 3

In questo caso le rigidezze calcolate sperimentalmente sono:

$(E_c \cdot I_{om,1})_{\text{misurato, sezione B}}$	139465901 [KNm·mm]
$(E_c \cdot I_{om,m})_{\text{misurato, sezione B}}$	28370049 [KNm·mm]

Tabella 6: Rigidezze flessionali sperimentali sezione B della trave 3

Estrapolando invece i dati dalla sezione D:

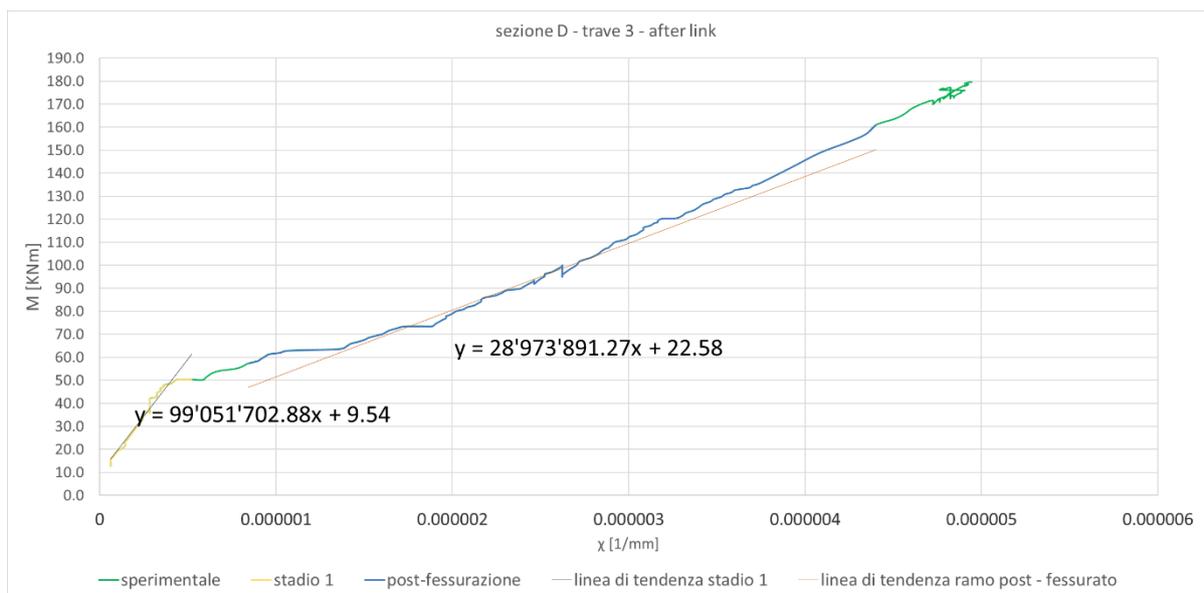


Figura 26: Estrapolazione dati dal diagramma momento - curvatura per la sezione D della trave 3

In questo caso invece le rigidezze calcolate sperimentalmente sono:

## I modelli teorici

$(E_c \cdot I_{om,1})_{\text{misurato, sezione D}}$	99051702 [KNm·mm]
$(E_c \cdot I_{om,m})_{\text{misurato, sezione D}}$	28973891 [KNm·mm]

Tabella 7: Rigidezze flessionali sperimentali sezione D della trave 3

Per ottenere una stima del miglioramento introdotto nella predizione degli abbassamenti si confronti il diagramma forza concentrata – freccia. Nel diagramma sono evidenziati contemporaneamente l'andamento misurato sperimentalmente (linea blu), quello teorico previsto (linea verde) ed infine l'andamento teorico aggiornato con il metodo del diagramma momento – curvatura (linea rossa). Come si può vedere, il metodo del diagramma momento – curvatura migliora notevolmente l'accuratezza della misurazione. Un dato importante che viene sottolineato è il seguente: prima che venisse effettuato l'aggiornamento dei parametri, solo il 2,0 % dei valori predetti aveva un errore inferiore al 20% del valore reale misurato, dopo l'aggiornamento l'88.8% dei valori predetti ha un errore inferiore al 20% del valore misurato e il 64.7% dei valori predetti un errore inferiore al 10%. Allo stesso modo, aggiornando le previsioni con i dati di curvatura della sezione D, l'87.6% delle previsioni ha un errore inferiore al 20% e il 66.7% un valore inferiore al 10%. Inoltre, si noti che la stima dell'abbassamento è maggiore di quella reale, pertanto il metodo restituisce dei valori cautelativi, a differenza del calcolo teorico iniziale per il quale la freccia veniva pesantemente sottostimata.

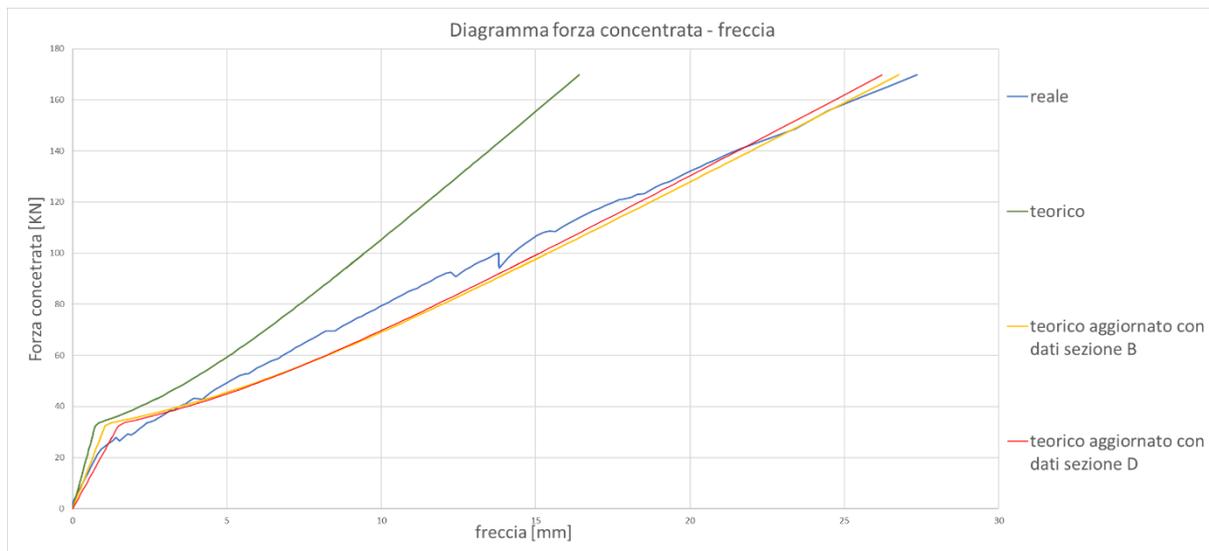


Figura 27: Diagramma forza concentrata - freccia per la trave 3

Di seguito si riporta una tabella riassuntiva con i risultati sopra richiamati:

<b>Modello applicato</b>	<b>Percentuale di previsioni con un errore inferiore al 20%</b>	<b>Percentuale di previsioni con un errore inferiore al 10%</b>
Teorico	2,01%	1,61%
Metodo diagramma M-C con i dati estrapolati dalla sezione B	88,8%	64,7%
Metodo diagramma M-C con i dati estrapolati dalla sezione D	87,6%	66,7%

Tabella 8: Risultati dell'applicazione del metodo del diagramma M-C per la trave 3

### 1.9.5.2 Trave 1: trave semplicemente appoggiata con due forze concentrate applicate

Analogamente a quanto fatto per il caso illustrato nel precedente paragrafo, si applica il metodo del diagramma M-C alla trave 1, semplicemente appoggiata, su cui sono state applicate due forze concentrate in maniera simmetrica rispetto all'asse passante per la mezzzeria della struttura.

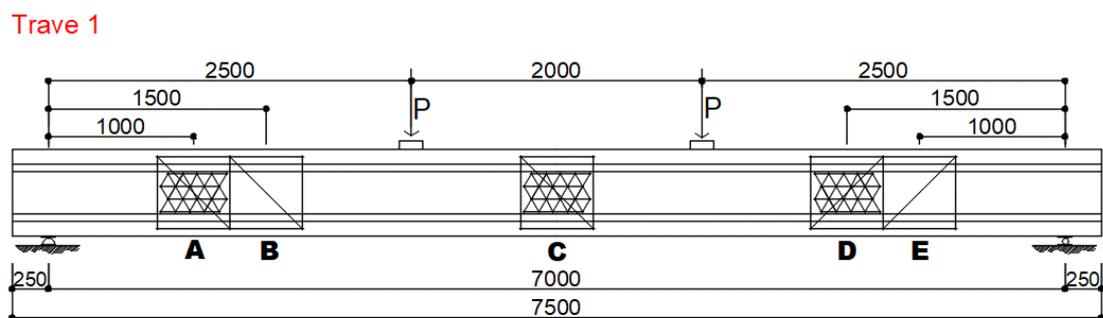


Figura 28: Rappresentazione della trave 1

<b>Parametro</b>	<b>Valore</b>
Modulo di elasticità E	31008.37 Mpa
Momento d'inerzia della sezione omogeneizzata in stadio 1	$6.585 \cdot 10^9 \text{ mm}^4$

## I modelli teorici

Momento d'inerzia della sezione  
omogeneizzata in stadio 2

$$1.493 \cdot 10^9 \text{ mm}^4$$

Tabella 9: Valori dei parametri fondamentali della sezione trasversale della trave 1

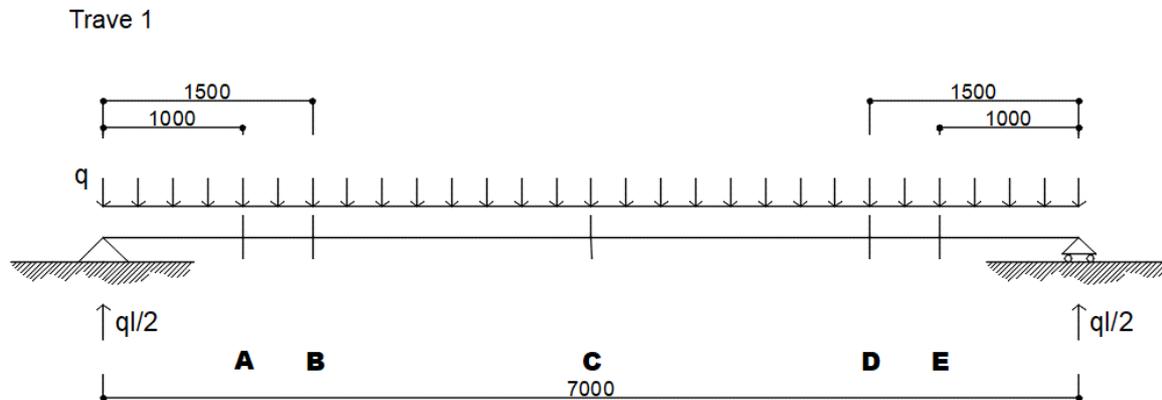


Figura 29: Trave 1 soggetta al carico uniformemente distribuito dato dal peso proprio

Quindi, nella sezione contraddistinta dalla lettera “B”, il momento flettente e la curvatura corrispondenti sono ricavabili come segue:

$$M_{B_{pp}}(z = 1.5) = \frac{ql}{2} \cdot (1.5) - \frac{q \cdot (1.5)^2}{2} = 13.92 \text{ KNm} \quad (2.29)$$

$$\chi_{B_{pp}} = \frac{M_{B_{pp}}}{EI_{om,1}} = 6.833 \cdot 10^{-8} \text{ mm}^{-1} \quad (2.30)$$

Gli stessi valori possono essere utilizzati per il link del diagramma momento – curvatura della sezione D della trave, grazie alla simmetria della configurazione strutturale e di carico. I risultati sono riportati nelle figure sottostanti.

## Metodo del diagramma momento – curvatura

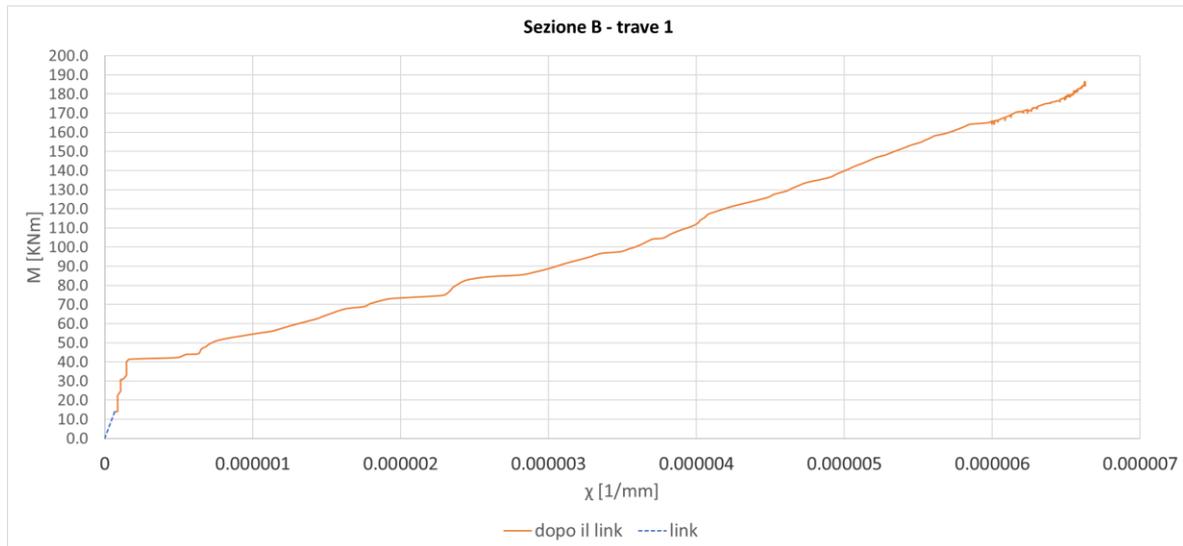


Figura 30: Diagramma momento - curvatura per la sezione "B" della trave 1, dopo aver effettuato il "link"

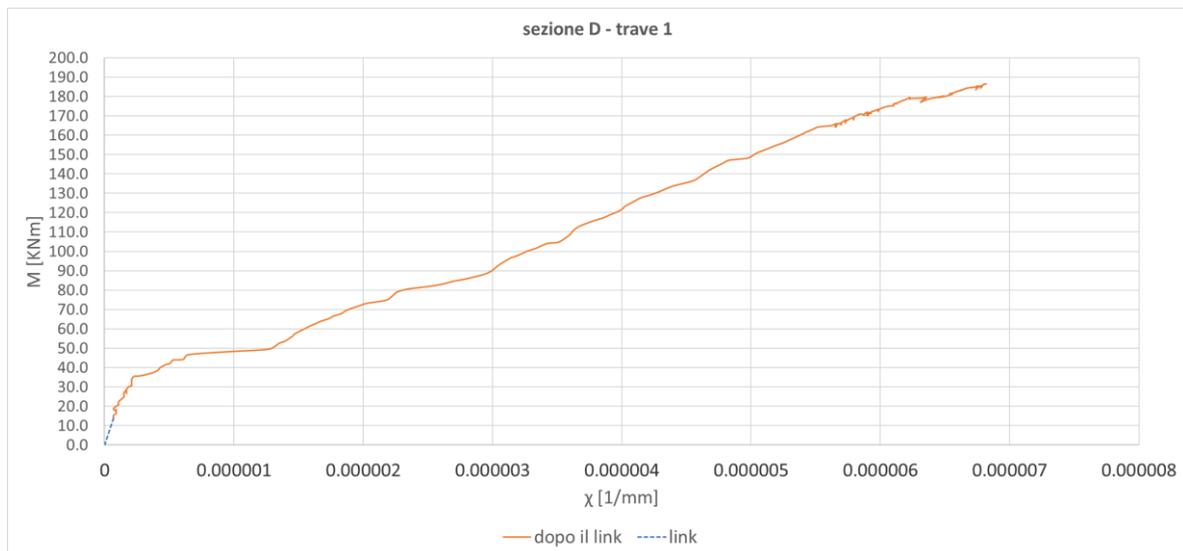


Figura 31: Diagramma momento - curvatura per la sezione "D" della trave 1, dopo aver effettuato il "link"

Dal grafico si evince che la fessurazione della sezione è avvenuta per un momento flettente sollecitante compreso tra 40 e 50 KN·m, ben inferiore a quello previsto in linea teorica di circa 57 KN·m. Si terrà conto di questo nel calcolo dell'abbassamento della trave. A questo punto si effettua la selezione del modello teorico migliore, per avanzare nell'analisi, tra quelli proposti da CEB ed ACI.

## I modelli teorici

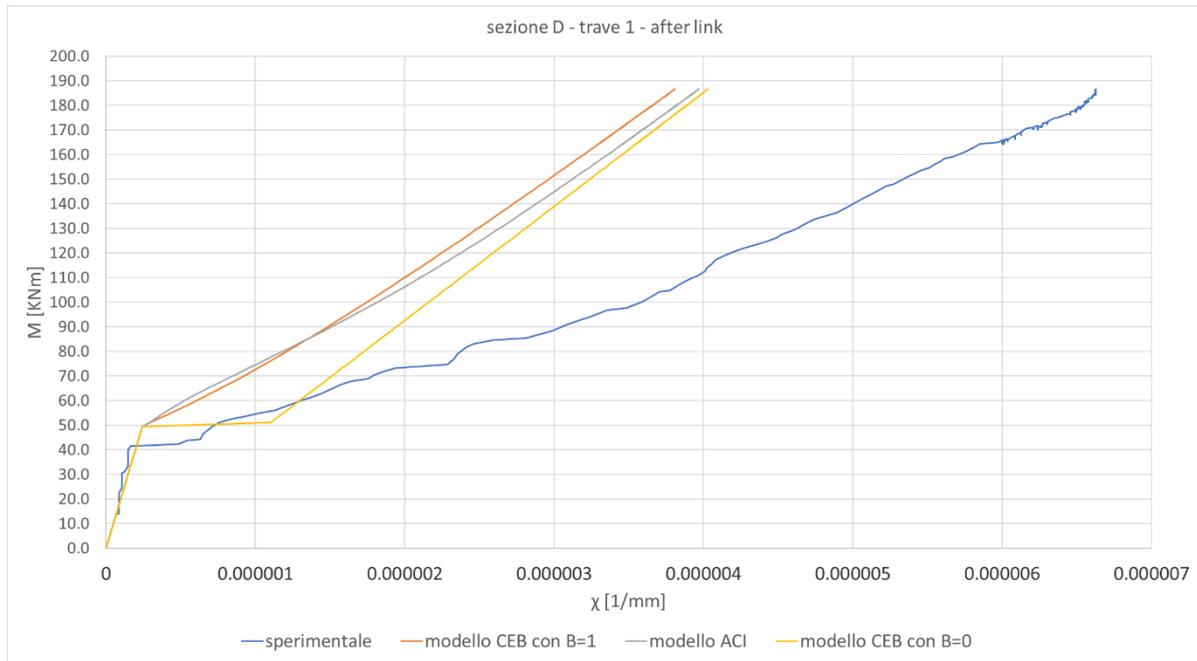


Figura 32: Diagramma M-C per la sezione "B" della trave 1 con sovrapposizione dei valori sperimentali, del modello CEB e del modello ACI

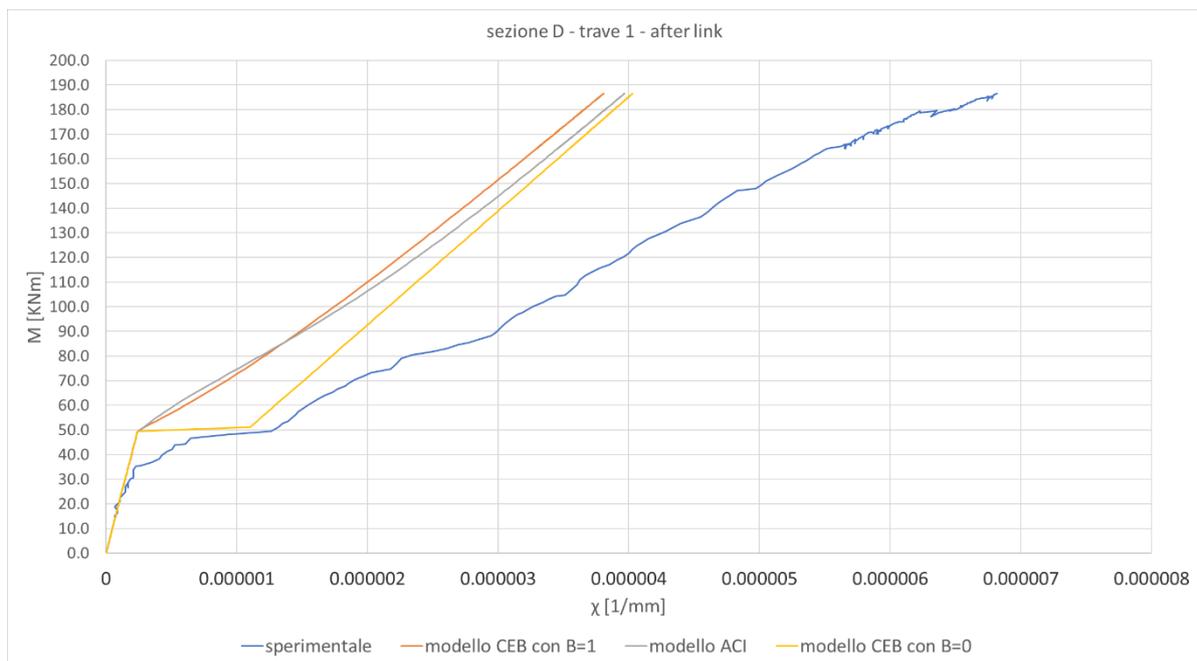


Figura 33: Diagramma M-C per la sezione "D" della trave 1 con sovrapposizione dei valori sperimentali, del modello CEB e del modello ACI

In questo caso si nota che nessun modello teorico coglie con buona approssimazione l'andamento sperimentale. A questo punto si applica il principio dei lavori virtuali per ricavare le inflessioni. Di seguito sono riportati lo schema reale e lo schema fittizio della trave e le espressioni riguardanti la freccia ricavate analiticamente.

Metodo del diagramma momento – curvatura

Trave 1  
 Sistema reale  
 0)

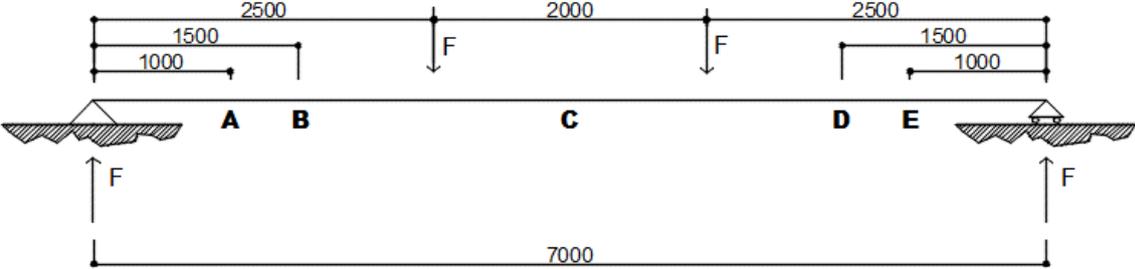


Figura 34: Sistema reale trave 1

Trave 1  
 Sistema fittizio  
 1)

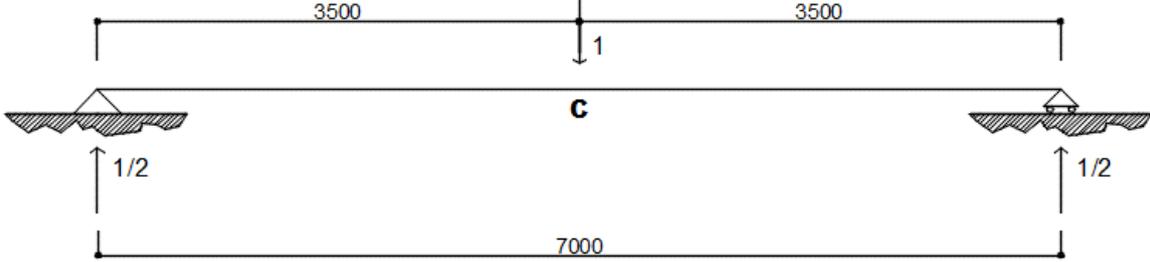


Figura 35: Sistema fittizio trave 1

## I modelli teorici

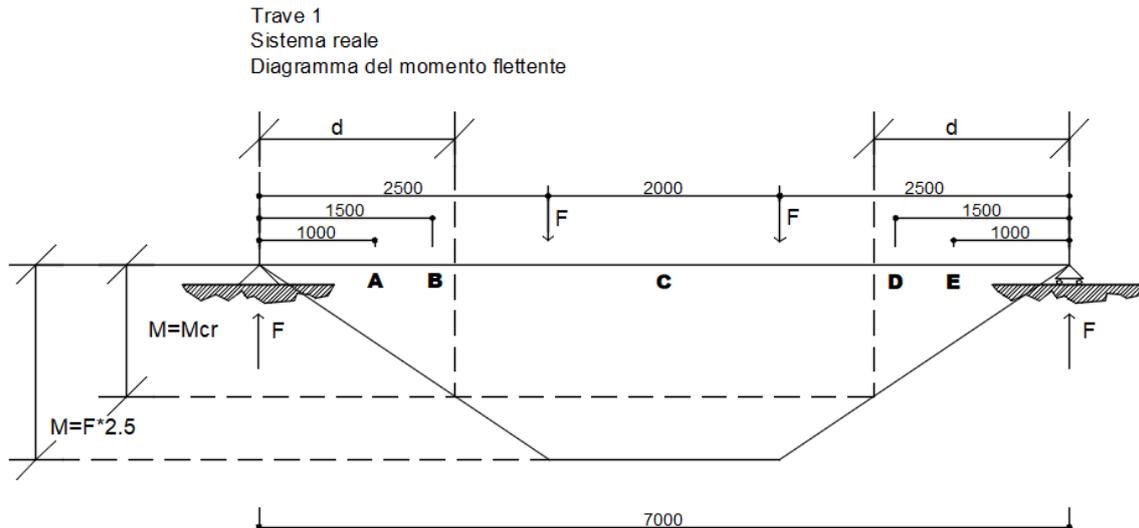


Figura 36: Diagramma del momento flettente del sistema reale della trave 1

Sistema reale:

$$M(z) = F \cdot z \text{ per } 0 < z \leq 2.5 \text{ m} \quad (2.31)$$

0)

$$M(z) = F \cdot 2.5 \text{ per } 2.5 \text{ m} < z \leq 3.5 \text{ m}$$

Sistema fittizio:

$$M'(z) = \frac{z}{2} \text{ per } 0 < z \leq \frac{l}{2} \quad (2.32)$$

1)

$$\begin{aligned} f &= \int_{s_1} \frac{M \cdot M'}{E_c \cdot I_1} dz + \int_{s_2} \frac{M \cdot M'}{E_c \cdot I_m} dz \\ &= 2 \cdot \int_0^d \frac{M \cdot M'}{E_c \cdot I_1} dz + 2 \cdot \int_d^{l/2} \frac{M \cdot M'}{E_c \cdot I_m} dz \end{aligned}$$

Se nessuna sezione della trave si è ancora parzializzata e cioè se vale:

$$d = \frac{M_{cr}}{F} > \frac{l}{2}$$

Allora la freccia in mezzeria avrà il seguente valore:

$$\begin{aligned} f &= \int_{s_1} \frac{M \cdot M'}{E_c \cdot I_1} dz = \frac{2F}{E_c \cdot I_1} \cdot \left\{ \left| \frac{z^3}{6} \right|_0^{2.5} + \left| \frac{1.25 \cdot z^2}{2} \right|_{2.5}^{3.5} \right\} \\ &= \frac{2F}{E_c \cdot I_1} \cdot \left[ \frac{2.5^3}{6} + \frac{1.25 \cdot (3.5^2 - 2.5^2)}{2} \right] \quad (2.33) \end{aligned}$$

$$= \frac{F}{E_c \cdot I_1} \cdot \left[ \frac{2.5^3}{3} + 1.25 \cdot (3.5^2 - 2.5^2) \right]$$

$$= \frac{305}{24} \frac{F}{E_c \cdot I_1};$$

quando invece parte della struttura ha superato il momento critico limite e si è fessurata, mentre la parte compresa tra l'appoggio e il valore  $d$  è ancora in stadio 1, la freccia in mezzzeria varrà:

$$f = \int_{s_1} \frac{M \cdot M'}{E_c \cdot I_1} dz + \int_{s_2} \frac{M \cdot M'}{E_c \cdot I_m} dz$$

$$= 2 \cdot \int_0^d \frac{M \cdot M'}{E_c \cdot I_1} dz + 2 \cdot \int_d^{\frac{l}{2}} \frac{M \cdot M'}{E_c \cdot I_m} dz$$

$$= \frac{2F}{E_c \cdot I_1} \cdot \int_0^d \frac{z^2}{2} dz + 2 \cdot \int_d^{3.5} \frac{M \cdot M'}{E_c \cdot I_1} dz + 2 \cdot \left( \frac{1}{E_c \cdot I_2} - \frac{1}{E_c \cdot I_1} \right)$$

$$\cdot \left[ \int_d^{\frac{l}{2}} M \cdot M' dz - \beta M_{cr}^2 \cdot \int_d^{\frac{l}{2}} \frac{M'}{M} dz \right] =$$

$$= \frac{2F}{E_c \cdot I_1} \cdot \left| \frac{z^3}{6} \right|_0^d + \frac{2}{E_c \cdot I_1} \cdot \left( \int_d^{2.5} F \cdot \frac{z^2}{2} dz + \int_{2.5}^{3.5} F \cdot z \cdot 1.25 dz \right) +$$

$$2 \cdot \left( \frac{1}{E_c \cdot I_2} - \frac{1}{E_c \cdot I_1} \right)$$

$$\cdot \left\{ \int_d^{2.5} F \cdot \frac{z^2}{2} dz + \int_{2.5}^{3.5} F \cdot z \cdot 1.25 dz - \beta M_{cr}^2 \right.$$

$$\cdot \left[ \int_d^{2.5} \frac{1}{2F} dz + \int_{2.5}^{3.5} \frac{z}{5F} dz \right] \left. \right\} =$$

$$= \frac{F}{E_c \cdot I_1} \cdot \frac{d^3}{3} + \frac{2}{E_c \cdot I_1} \cdot \left[ \frac{F}{6} \cdot (2.5^3 - d^3) + F \cdot 1.25 \cdot \left( \frac{3.5^2}{2} - \frac{2.5^2}{2} \right) \right] +$$

$$2 \cdot \left( \frac{1}{E_c \cdot I_2} - \frac{1}{E_c \cdot I_1} \right)$$

## I modelli teorici

$$\cdot \left\{ \frac{F}{6} \cdot (2.5^3 - d^3) + F \cdot 1.25 \cdot \left( \frac{3.5^2}{2} - \frac{2.5^2}{2} \right) - \beta M_{cr}^2 \right. \\ \left. \cdot \left[ \frac{1}{2F} \cdot (2.5 - d) + \frac{1}{5F} \cdot \left( \frac{3.5^2}{2} - \frac{2.5^2}{2} \right) \right] \right\};$$

Si estrapolano dai diagrammi seguenti le informazioni relative alle rigidezze calcolate sperimentalmente dai diagrammi momento-curvatura:

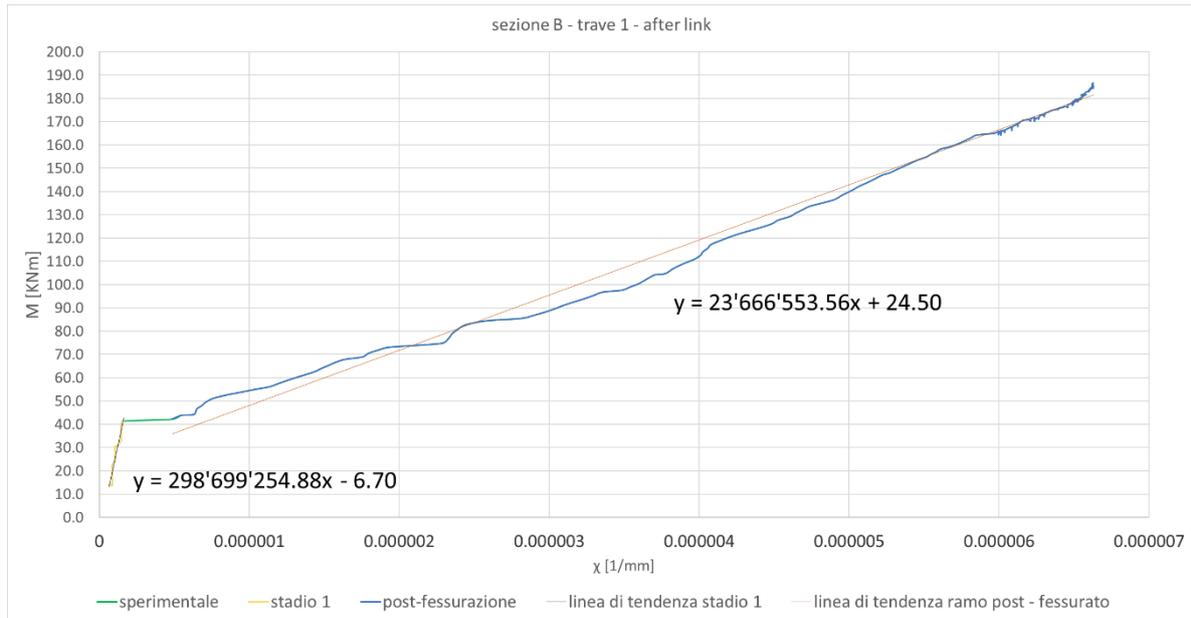


Figura 37: Estrapolazione dati dal diagramma momento - curvatura per la sezione B della trave 1

In questo caso le rigidezze calcolate sperimentalmente sono:

$(E_c \cdot I_{om,1})_{misurato, sezione B}$	298699254 [KNm·mm]
$(E_c \cdot I_{om,m})_{misurato, sezione B}$	23666553 [KNm·mm]

## Metodo del diagramma momento – curvatura

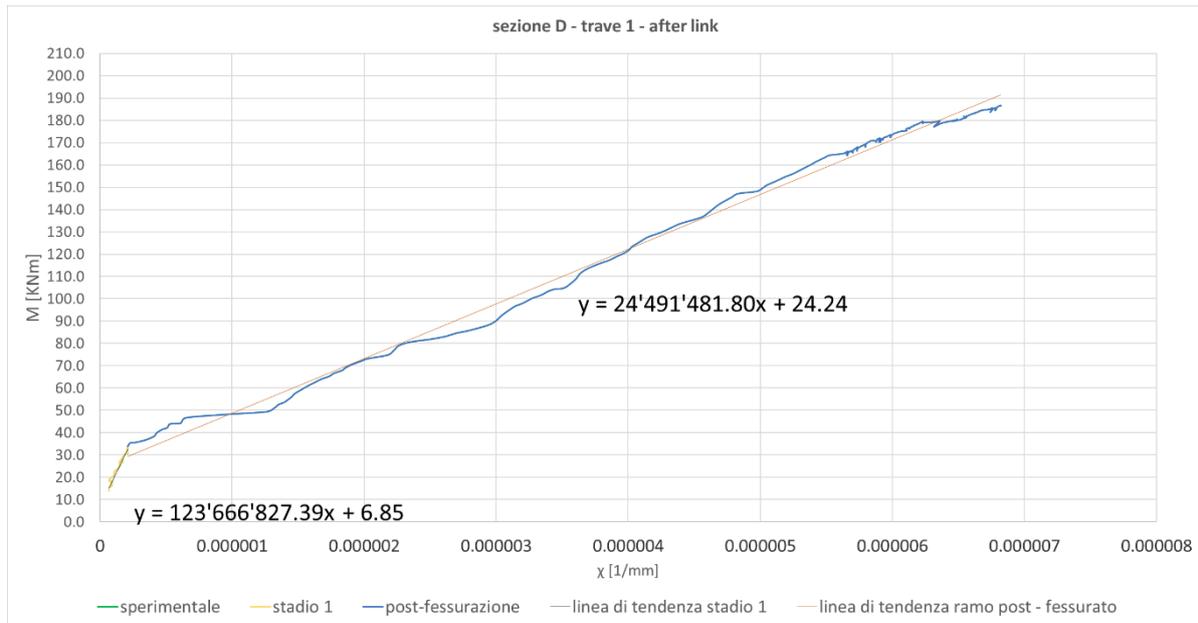


Figura 38: Estrapolazione dati dal diagramma momento - curvatura per la sezione D della trave 1

In questo caso le rigidezze calcolate sperimentalmente sono:

$(E_c \cdot I_{om,1})_{misurato,sezione D}$	123666827 [KNm·mm]
$(E_c \cdot I_{om,m})_{misurato,sezione D}$	24491481 [KNm·mm]

Di seguito è riportato il diagramma carico-freccia ottenuto utilizzando i dati sperimentali, quelli provenienti dal calcolo teorico, e infine i risultati del metodo sopra esposto:

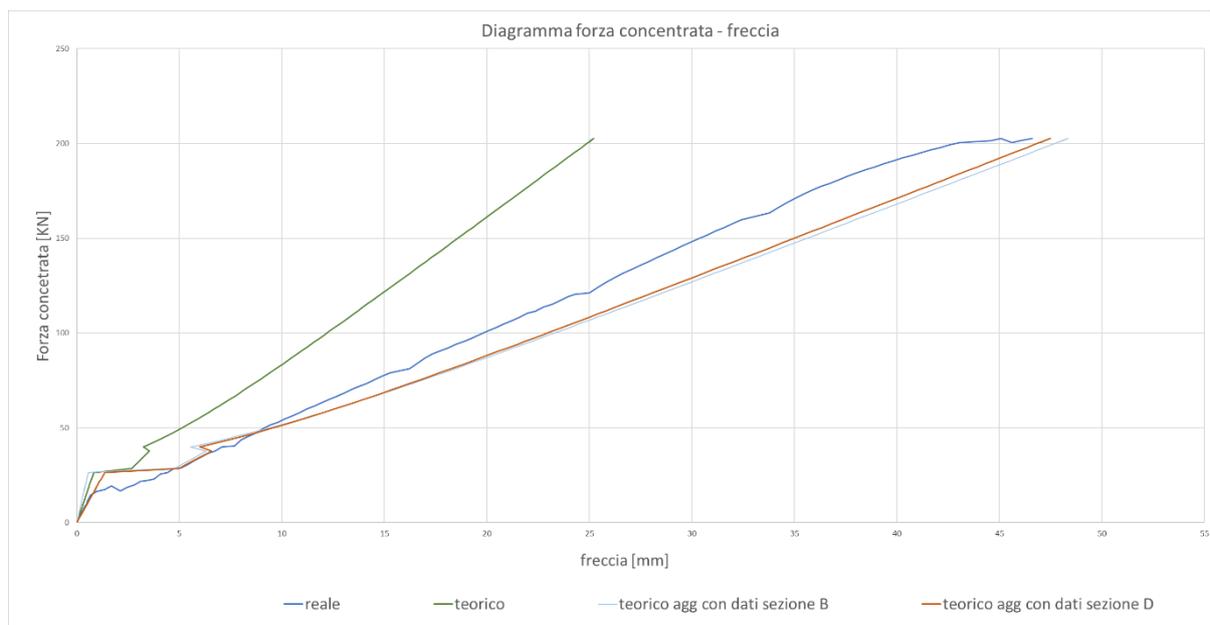


Figura 39: Diagramma forza concentrata - freccia per la trave 1

## I modelli teorici

Si riporta una tabella riassuntiva con i risultati ottenuti per la trave 1:

<b>Modello applicato</b>	<b>Percentuale di previsioni con un errore inferiore al 20%</b>	<b>Percentuale di previsioni con un errore inferiore al 10%</b>
Teorico	0.83%	0.83%
Metodo diagramma M-C con i dati estrapolati dalla sezione B	80.0%	28.3%
Metodo diagramma M-C con i dati estrapolati dalla sezione D	89.2%	30.8%

Anche per la trave 1 il metodo del diagramma Momento – Curvatura fornisce stime cautelative e decisamente più precise rispetto ai calcoli teorici iniziali.

### 1.9.5.3 Trave 2: trave semplicemente appoggiata con due forze concentrate applicate

Analogamente a quanto fatto per il caso illustrato nel precedente paragrafo, si applica il metodo del diagramma M-C alla trave 2, semplicemente appoggiata, su cui sono state applicate due forze concentrate in maniera simmetrica rispetto all'asse passante per la mezzzeria della struttura.

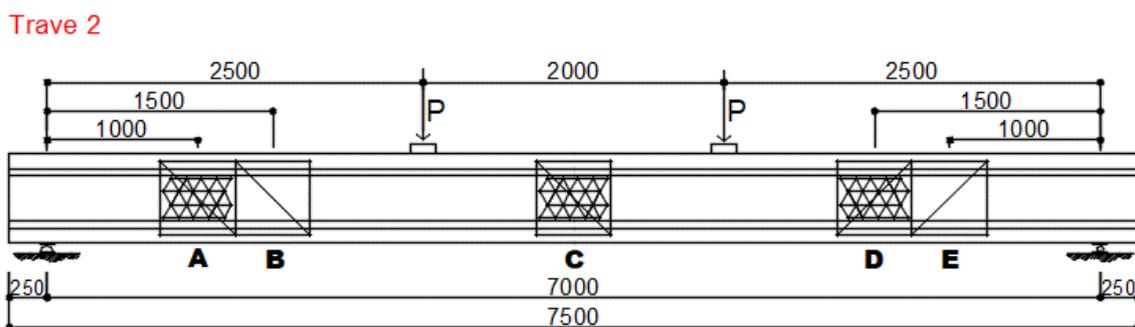


Figura 40: Rappresentazione della trave 2

<b>Parametro</b>	<b>Valore</b>
Modulo di elasticità E	31008 MPa

## Metodo del diagramma momento – curvatura

Momento d'inerzia della sezione omogeneizzata in stadio 1	$6.95 \cdot 10^9 \text{ mm}^4$
Momento d'inerzia della sezione omogeneizzata in stadio 2	$2.793 \cdot 10^9 \text{ mm}^4$

Tabella 10: Valori dei parametri fondamentali della sezione trasversale della trave 2

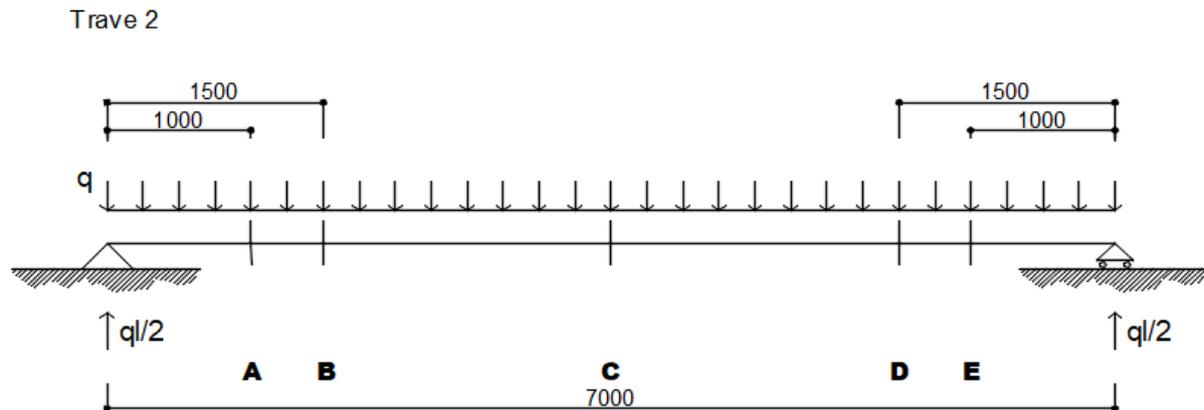


Figura 41: Trave 2 soggetta al carico uniformemente distribuito dato dal peso proprio

Quindi, nella sezione contraddistinta dalla lettera “B”, il momento flettente e la curvatura corrispondenti sono ricavabili come segue:

$$M_{B_{pp}}(z = 1.5) = \frac{ql}{2} \cdot (1.5) - \frac{q \cdot (1.5)^2}{2} = 13.92 \text{ KNm} \quad (2.35)$$

$$\chi_{B_{pp}} = \frac{M_{B_{pp}}}{EI_{om,1}} = 6.833 \cdot 10^{-8} \text{ mm}^{-1} \quad (2.36)$$

Gli stessi valori possono essere utilizzati per il link del diagramma momento – curvatura della sezione D della trave, grazie alla simmetria della configurazione strutturale e di carico. I risultati sono riportati nelle figure sottostanti.

## I modelli teorici

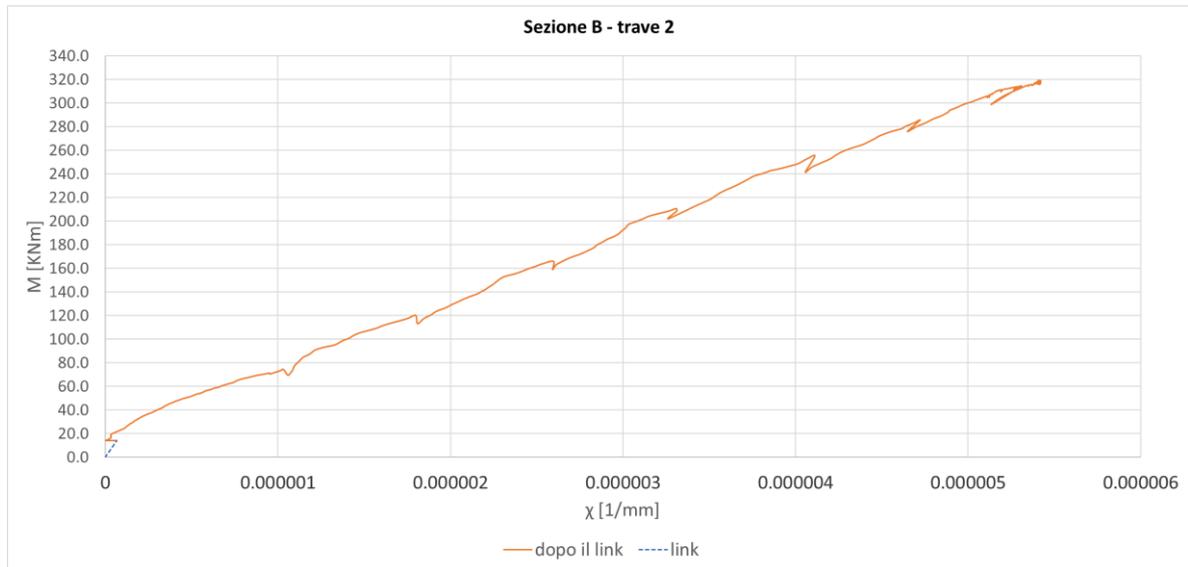


Figura 42: Diagramma momento - curvatura per la sezione "B" della trave 2, dopo aver effettuato il "link"

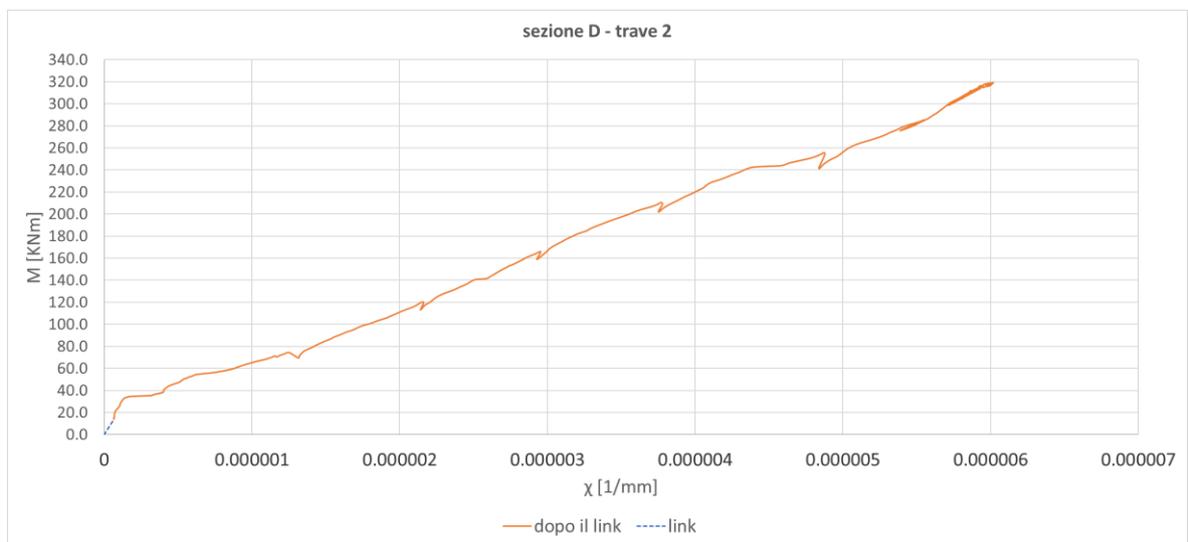


Figura 43: Diagramma momento - curvatura per la sezione "D" della trave 2, dopo aver effettuato il "link"

Dal grafico si evince che la fessurazione della sezione è avvenuta per un momento flettente sollecitante inferiore a 40 KN·m, ben inferiore a quello previsto in linea teorica di circa 57 KN·m. Si terrà conto di questo nel calcolo dell'abbassamento della trave. A questo punto si effettua la selezione del modello teorico migliore, per avanzare nell'analisi, tra quelli proposti da CEB ed ACI.

## Metodo del diagramma momento – curvatura

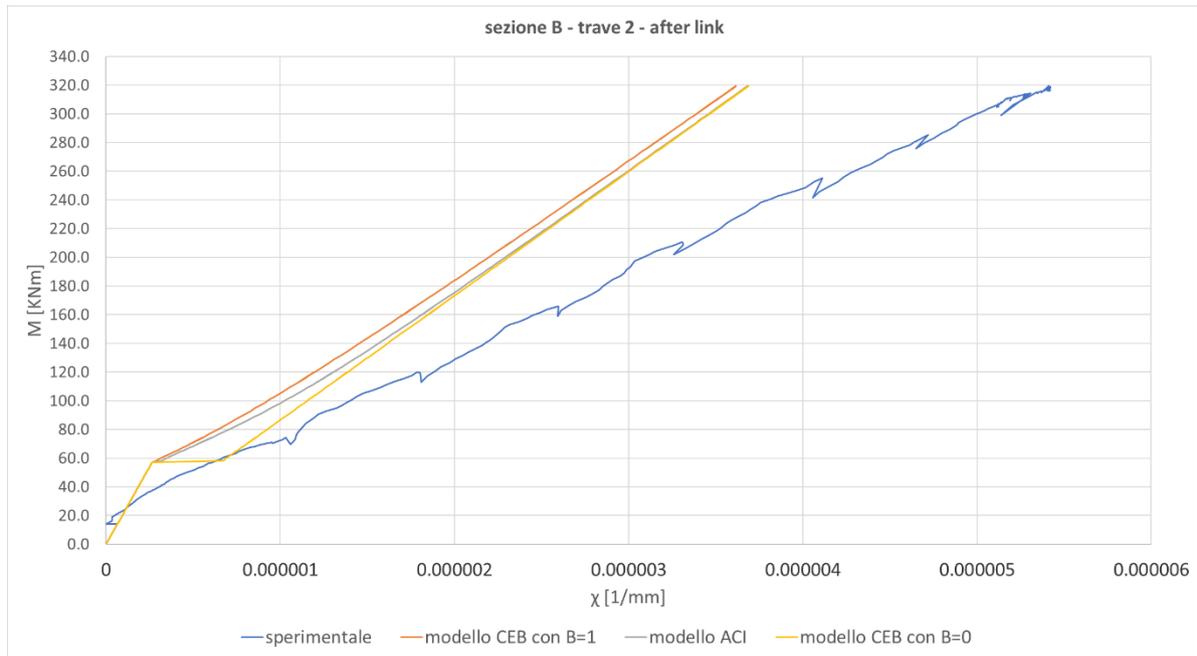


Figura 44: Diagramma M-C per la sezione "B" della trave 2 con sovrapposizione dei valori sperimentali, del modello CEB e del modello ACI

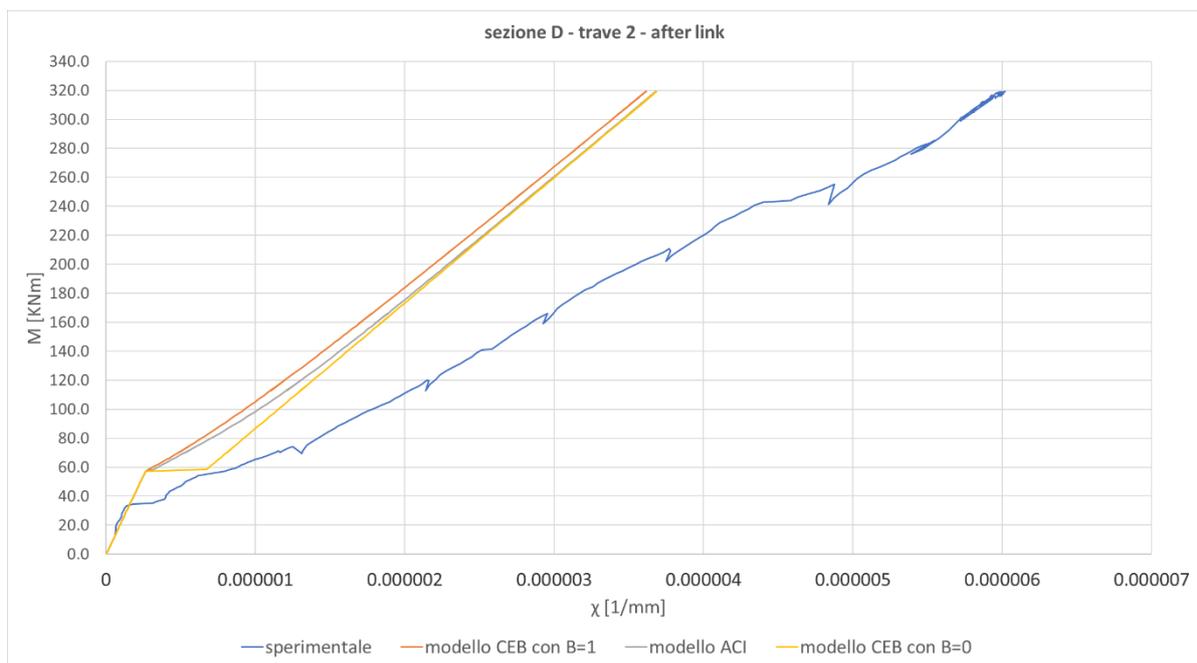


Figura 45: Diagramma M-C per la sezione "D" della trave 2 con sovrapposizione dei valori sperimentali, del modello CEB e del modello ACI

In questo caso si nota che nessun modello teorico coglie con buona approssimazione l'andamento sperimentale. A questo punto si applica il principio dei lavori virtuali per ricavare le inflessioni. Di seguito sono riportati lo schema reale e lo schema fittizio della trave e le espressioni riguardanti la freccia ricavate analiticamente.

# I modelli teorici

Trave 2  
Sistema reale  
0)

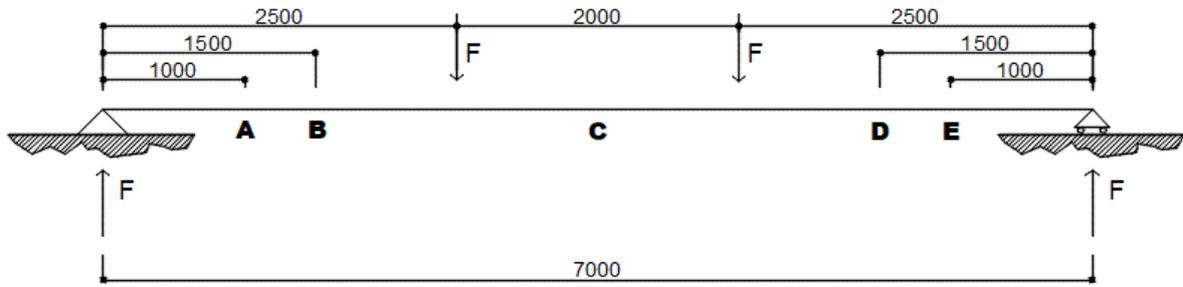


Figura 46: Sistema reale trave 2

Trave 2  
Sistema fittizio  
1)

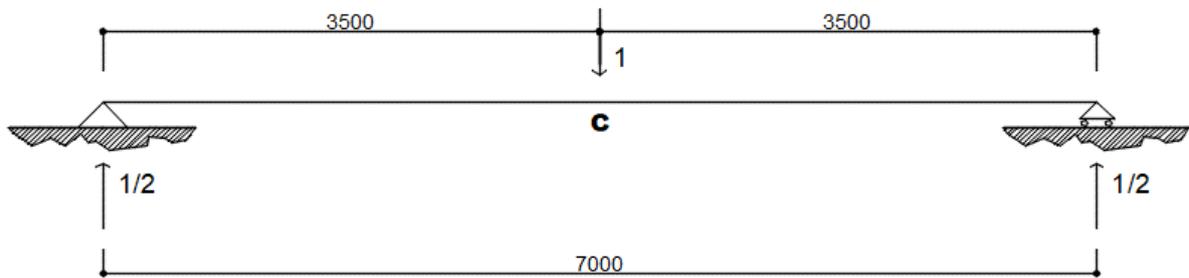


Figura 47: Sistema fittizio trave 2

## Metodo del diagramma momento – curvatura

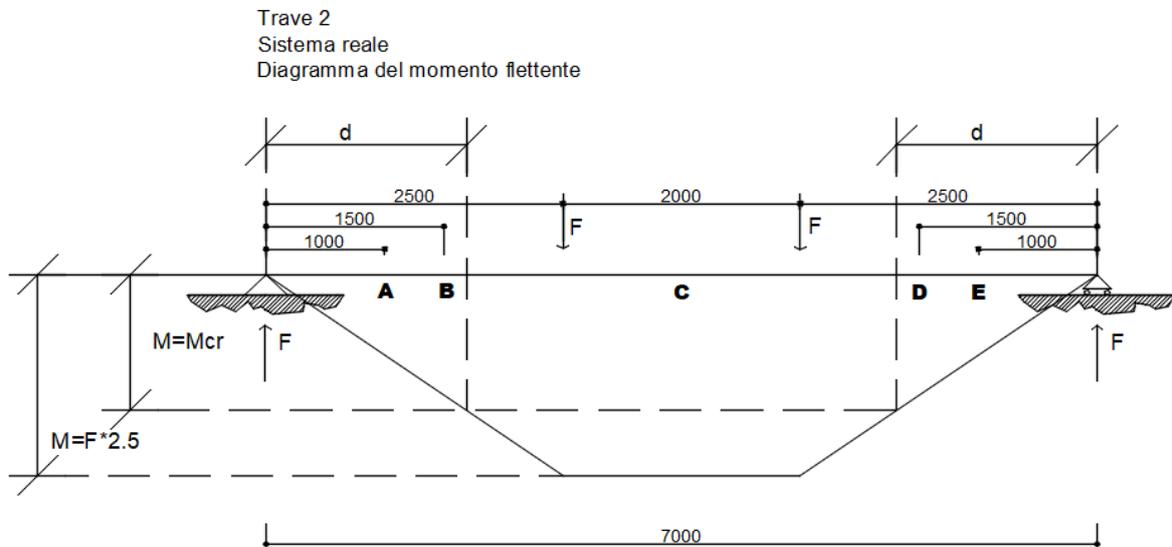


Figura 48: Diagramma del momento flettente del sistema reale della trave 2

Sistema reale:

$$M(z) = F \cdot z \text{ per } 0 < z \leq 2.5 \text{ m} \quad (2.37)$$

0)

$$M(z) = F \cdot 2.5 \text{ per } 2.5 \text{ m} < z \leq 3.5 \text{ m}$$

Sistema fittizio:

$$M'(z) = \frac{z}{2} \text{ per } 0 < z \leq \frac{l}{2} \quad (2.38)$$

1)

$$f = \int_{s_1} \frac{M \cdot M'}{E_c \cdot I_1} dz + \int_{s_2} \frac{M \cdot M'}{E_c \cdot I_m} dz \quad (2.39)$$

$$= 2 \cdot \int_0^d \frac{M \cdot M'}{E_c \cdot I_1} dz + 2 \cdot \int_d^{l/2} \frac{M \cdot M'}{E_c \cdot I_m} dz$$

Se nessuna sezione della trave si è ancora parzializzata e cioè se vale:

$$d = \frac{M_{cr}}{F} > \frac{l}{2}$$

Allora la freccia in mezzeria avrà il seguente valore:

$$\begin{aligned} f &= \int_{s_1} \frac{M \cdot M'}{E_c \cdot I_1} dz = \frac{2F}{E_c \cdot I_1} \cdot \left\{ \left| \frac{z^3}{6} \right|_0^{2.5} + \left| \frac{1.25 \cdot z^2}{2} \right|_{2.5}^{3.5} \right\} \\ &= \frac{2F}{E_c \cdot I_1} \cdot \left[ \frac{2.5^3}{6} + \frac{1.25 \cdot (3.5^2 - 2.5^2)}{2} \right] \\ &= \frac{F}{E_c \cdot I_1} \cdot \left[ \frac{2.5^3}{3} + 1.25 \cdot (3.5^2 - 2.5^2) \right] \\ &= \frac{305}{24} \frac{F}{E_c \cdot I_1}; \end{aligned} \quad (2.40)$$

quando invece parte della struttura ha superato il momento critico limite e si è fessurata, mentre la parte compresa tra l'appoggio e il valore d è ancora in stadio 1, la freccia in mezzeria varrà:

$$\begin{aligned} f &= \int_{s_1} \frac{M \cdot M'}{E_c \cdot I_1} dz + \int_{s_2} \frac{M \cdot M'}{E_c \cdot I_m} dz \\ &= 2 \cdot \int_0^d \frac{M \cdot M'}{E_c \cdot I_1} dz + 2 \cdot \int_d^{\frac{l}{2}} \frac{M \cdot M'}{E_c \cdot I_m} dz \\ &= \frac{2F}{E_c \cdot I_1} \cdot \int_0^d \frac{z^2}{2} dz + 2 \cdot \int_d^{3.5} \frac{M \cdot M'}{E_c \cdot I_1} dz + 2 \cdot \left( \frac{1}{E_c \cdot I_2} - \frac{1}{E_c \cdot I_1} \right) \\ &\quad \cdot \left[ \int_d^{\frac{l}{2}} M \cdot M' dz - \beta M_{cr}^2 \cdot \int_d^{\frac{l}{2}} \frac{M'}{M} dz \right] = \\ &= \frac{2F}{E_c \cdot I_1} \cdot \left| \frac{z^3}{6} \right|_0^d + \frac{2}{E_c \cdot I_1} \cdot \left( \int_d^{2.5} F \cdot \frac{z^2}{2} dz + \int_{2.5}^{3.5} F \cdot z \cdot 1.25 dz \right) + \\ &\quad 2 \cdot \left( \frac{1}{E_c \cdot I_2} - \frac{1}{E_c \cdot I_1} \right) \end{aligned} \quad (2.41)$$

## Metodo del diagramma momento – curvatura

$$\begin{aligned}
 & \cdot \left\{ \int_d^{2.5} F \cdot \frac{z^2}{2} dz + \int_{2.5}^{3.5} F \cdot z \cdot 1.25 dz - \beta M_{cr}^2 \right. \\
 & \quad \left. \cdot \left[ \int_d^{2.5} \frac{1}{2F} dz + \int_{2.5}^{3.5} \frac{z}{5F} dz \right] \right\} = \\
 & = \frac{F}{E_c \cdot I_1} \cdot \frac{d^3}{3} + \frac{2}{E_c \cdot I_1} \cdot \left[ \frac{F}{6} \cdot (2.5^3 - d^3) + F \cdot 1.25 \cdot \left( \frac{3.5^2}{2} - \frac{2.5^2}{2} \right) \right] + \\
 & \quad 2 \cdot \left( \frac{1}{E_c \cdot I_2} - \frac{1}{E_c \cdot I_1} \right) \\
 & \cdot \left\{ \frac{F}{6} \cdot (2.5^3 - d^3) + F \cdot 1.25 \cdot \left( \frac{3.5^2}{2} - \frac{2.5^2}{2} \right) - \beta M_{cr}^2 \right. \\
 & \quad \left. \cdot \left[ \frac{1}{2F} \cdot (2.5 - d) + \frac{1}{5F} \cdot \left( \frac{3.5^2}{2} - \frac{2.5^2}{2} \right) \right] \right\};
 \end{aligned}$$

Si estrapolano dai diagrammi seguenti le informazioni relative alle rigidezze calcolate sperimentalmente dai diagrammi momento-curvatura:

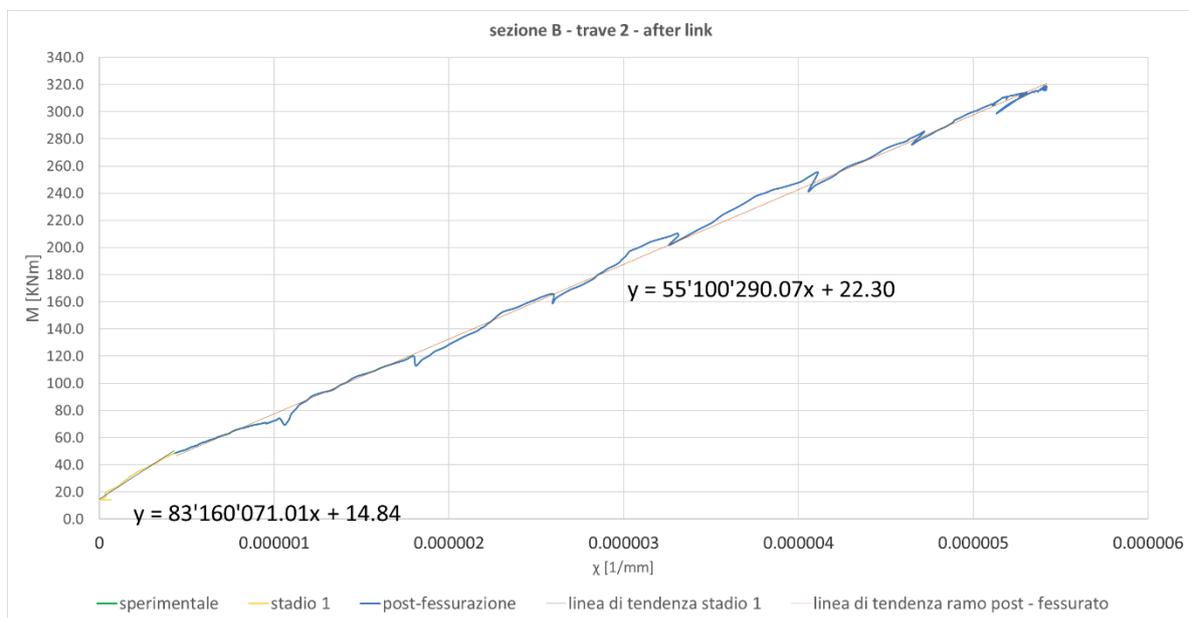


Figura 49: Estrapolazione dati dal diagramma momento - curvatura per la sezione B della trave 2

In questo caso le rigidezze calcolate sperimentalmente sono:

$$(E_c \cdot I_{om,1})_{misurato, sezione B}$$

$$83160071 \text{ [KNm}\cdot\text{mm]}$$

## I modelli teorici

$$(E_c \cdot I_{om,m})_{\text{misurato, sezione B}}$$

$$55100290 \text{ [KNm}\cdot\text{mm]}$$

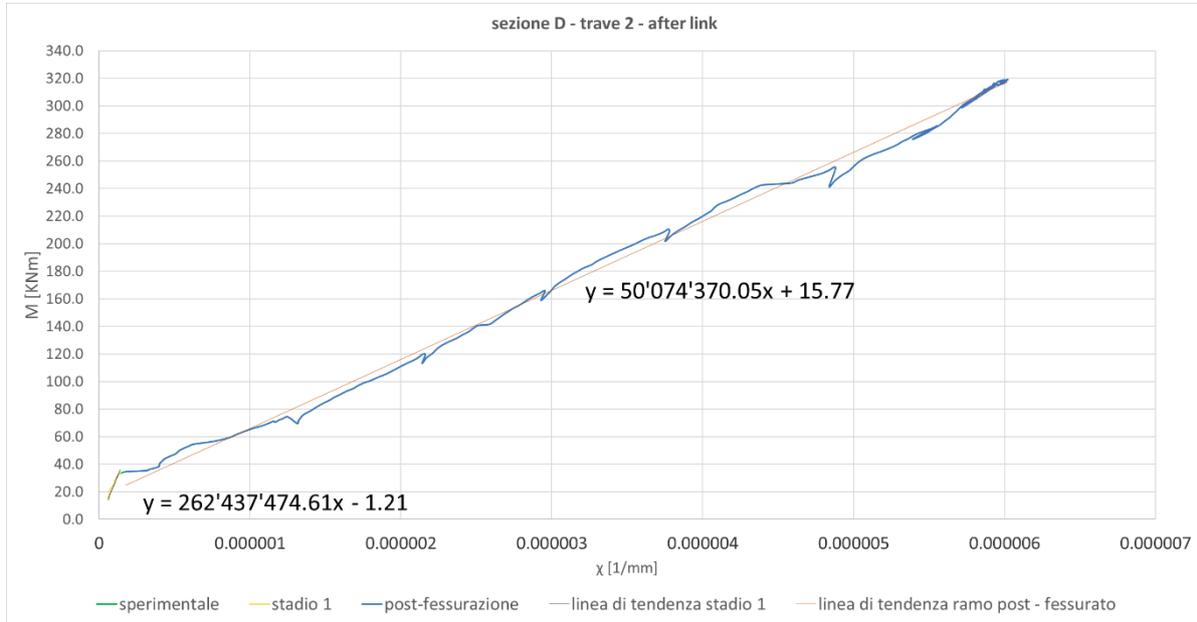


Figura 50: Estrapolazione dati dal diagramma momento - curvatura per la sezione D della trave 2

In questo caso le rigidezze calcolate sperimentalmente sono:

$(E_c \cdot I_{om,1})_{\text{misurato, sezione D}}$	262437474 [KNm·mm]
$(E_c \cdot I_{om,m})_{\text{misurato, sezione D}}$	50074370 [KNm·mm]

Di seguito è riportato il diagramma carico-freccia ottenuto utilizzando i dati sperimentali, quelli provenienti dal calcolo teorico, e infine i risultati del metodo sopra esposto:

## Metodo polinomiale

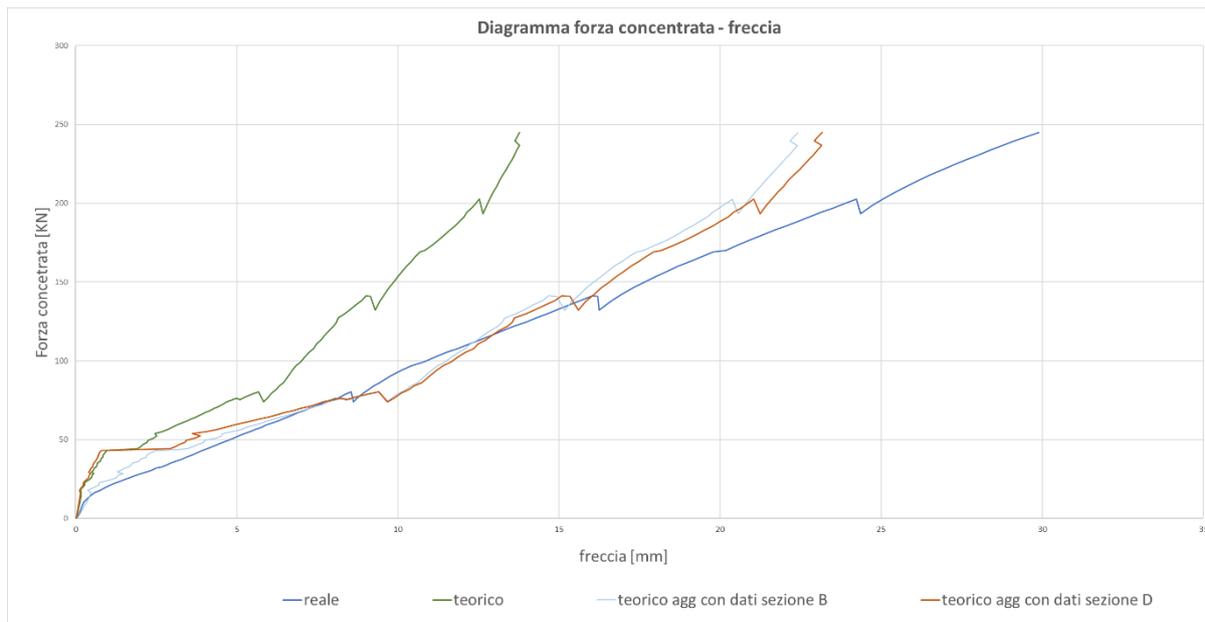


Figura 51: Diagramma forza concentrata - freccia per la trave 2

Si riporta una tabella riassuntiva con i risultati ottenuti per la trave 2:

<b>Modello applicato</b>	<b>Percentuale di previsioni con un errore inferiore al 20%</b>	<b>Percentuale di previsioni con un errore inferiore al 10%</b>
Teorico	0.0%	0.0%
Metodo diagramma M-C con i dati estrapolati dalla sezione B	71.5%	38.2%
Metodo diagramma M-C con i dati estrapolati dalla sezione D	65.9%	37.4%

Anche per la trave 2 il metodo del diagramma Momento – Curvatura fornisce stime più precise rispetto ai calcoli teorici iniziali.

### 1.10 Metodo polinomiale

Negli ultimi venti anni il monitoraggio strutturale ha esplorato soluzioni innovative che hanno permesso di migliorare la precisione delle osservazioni ottimizzandone i costi. Lo sviluppo tecnologico ha incontrato il miglioramento della qualità dei materiali, incentivando la ricerca teorica di nuovi modelli matematici. Tra i primi studi che hanno valutato le potenzialità della

fibra ottica nel settore dell'ingegneria civile, compare il lavoro di Vurpillot<sup>58</sup>, risalente agli ultimi anni del secolo scorso. Lo studio in questione ha valutato e dimostrato le potenzialità di un modello matematico, in grado di calcolare l'abbassamento in ogni punto del ponte, partendo da misure di deformazione longitudinale in determinati punti di ogni tratto di trave caratterizzato da: inerzia costante, carico uniformemente distribuito e forze concentrate alle estremità. Il modello si basa sull'ipotesi di conservazione delle sezioni piane: ipotizzando che la curvatura sia approssimabile da un polinomio di secondo grado, è possibile ricavare gli spostamenti attraverso un'integrazione doppia. Applicando le condizioni al contorno, e quindi imponendo la continuità degli spostamenti e delle rotazioni alle estremità comuni di ogni tratto di trave, e i valori di curvatura misurati sperimentalmente, si ricavano le costanti di integrazione e quindi si può scrivere il polinomio che approssima lo spostamento.

Circa quindici anni più tardi un altro interessante lavoro è stato pubblicato da Sousa<sup>59</sup>, riguardo il calcolo dell'abbassamento di un ponte usando misure acquisite di deformazione e rotazione in alcuni punti della struttura. Quanto segue riassume i risultati dello studio appena citato.

Implementare un sistema di osservazione diretta e continua degli spostamenti verticali non è semplice. Estensimetri e inclinometri sono facili da installare ma forniscono misure indirette della freccia. Scopo dell'articolo è dimostrare l'applicabilità dell'approccio polinomiale per valutare l'abbassamento di un ponte, focalizzandosi sulle condizioni al contorno e sull'effetto che l'ordine delle funzioni polinomiali ha sulla precisione. È stato creato un database con misure sperimentali di deformazioni e rotazioni delle sezioni trasversali più critiche, dall'istante  $t$  iniziale a  $t$  finale. Gli autori si aspettano, durante la fase di esercizio, un comportamento elastico lineare. Nell'ipotesi di campata ad inerzia costante, caricata uniformemente e soggetta a forze concentrate alle estremità, applicando l'ipotesi di Bernoulli – Navier di conservazione delle sezioni piane, l'inflessione può essere espressa come una funzione polinomiale di quarto grado. Ma per ponti reali, le proprietà dei materiali possono cambiare sezione per sezione, così come l'ipotesi di Bernoulli – Navier può non essere valida né sugli appoggi né dove ci sono delle forze concentrate. L'abbassamento in realtà è espresso da una funzione razionale, ma gli spostamenti sono talmente piccoli (se comparati con la lunghezza del ponte), che l'utilizzo di una funzione polinomiale è ragionevole.

---

<sup>58</sup> VURPILLOT A., KRUEGER G., BENOUAICH D., CLEMENT D., INAUDI D., 1998

<sup>59</sup> SOUSA H., CAVADAS F., HENRIQUES A., BENTO J., FIGUEIRAS J., 2013

## Metodo polinomiale

Quanto appena descritto può essere riportato matematicamente nel modo seguente. Indicando la curvatura di una sezione con  $k(x)$ , essa può essere espressa come:

$$k(x) = \frac{\frac{d^2\delta(x)}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{d\delta(x)}{dx^2}\right)^2\right]^{3/2}} \quad (2.42)$$

$$k(x) \approx \frac{d^2\delta(x)}{dx^2} \text{ per } \left(\frac{d\delta(x)}{dx^2}\right)^2 \approx 0, \text{ per piccoli spostamenti}$$

Nel caso in cui la trave non sia vincolata a flessione, la curvatura può essere calcolata basandosi sulle deformazioni su due differenti fibre, applicando due estensimetri, rispettivamente sul corrente compresso e teso. In questo caso la curvatura diventa:

$$k(x) = \frac{\varepsilon_{sup}(x) - \varepsilon_{inf}(x)}{H(x)} \quad (2.43)$$

Avendo indicato con:

$\varepsilon_{sup}(x)$ : la deformazione registrata dall'estensimetro posto sul corrente superiore;

$\varepsilon_{inf}(x)$ : la deformazione registrata dall'estensimetro posto sul corrente inferiore;

$H(x)$ : la distanza tra le due fibre munite di estensimetri.

Mettendo insieme le precedenti equazioni si ha:

$$\frac{d^2\delta(x)}{dx^2} = \frac{\varepsilon_{sup}(x) - \varepsilon_{inf}(x)}{H(x)} \quad (2.44)$$

A questo punto si consideri una funzione polinomiale per ogni campata del ponte. Questo significa individuare  $m$  funzioni polinomiali per le  $m$  campate totali della struttura. In questo modo si può impostare il calcolo su una sola campata e ripeterlo poi per le  $m-1$  restanti. Il grado della funzione polinomiale dipende dal numero di informazioni in possesso. Le informazioni sono rappresentate dalle condizioni al contorno che è possibile imporre per ogni campata del ponte. Aumentando il numero delle condizioni al contorno, aumenta il grado della funzione polinomiale interpolante. Non sempre però questo migliora la precisione dei risultati, come si vedrà nel seguito. Se per una campata sono note “ $n+1$ ” condizioni al contorno, si può ricavare un polinomio interpolante di grado “ $n$ ”. L'abbassamento è quindi espresso attraverso un

I modelli teorici

polinomio, i cui coefficienti sono a priori incogniti. Le condizioni al contorno che permettono di ricavare i coefficienti del polinomio possono essere le seguenti:

- Continuità degli spostamenti e delle rotazioni nei punti in comune della struttura;
- Valori degli spostamenti e delle rotazioni in funzione dello schema statico della struttura;
- Valori delle curvature misurate sperimentalmente attraverso coppie di estensimetri;
- Valori delle rotazioni misurate sperimentalmente attraverso degli inclinometri;

Si avrà uno spostamento  $\delta(x)$  espresso come:

$$\delta(x) \cong P_j^n(x) = \sum_{p=0}^n c_{j,p} \cdot x^p, \text{ per la campata } j - \text{esima} \quad (2.45)$$

L'applicazione delle condizioni al contorno si traduce nella generazione di un sistema di equazioni lineari che viene espresso in notazione matriciale come:

$$[A]_j \cdot \{c\}_j = \{b\}_j \quad (2.46)$$

La matrice  $[A]$  dipende dalla geometria (non solo la luce) della campata, dalla posizione in cui sono stati applicati gli strumenti di rilevamento. Il vettore  $\{c\}_j$  contiene le incognite.

Assumendo condizioni al contorno linearmente indipendenti il problema è risolvibile e la soluzione sarà:

$$\{c\}_j = [A]_j^{-1} \cdot \{b\}_j \quad (2.47)$$

Quanto appena esposto prende il nome di “*polynomial fitting*”.

Noti i coefficienti sarà possibile esprimere l'abbassamento, la rotazione (derivata prima dell'abbassamento), o la curvatura (derivata seconda dell'abbassamento), in qualunque punto della struttura. Informazioni che saranno utilizzate per il monitoraggio strutturale. Nel seguito la procedura del “*polynomial fitting*” è stata eseguita utilizzando il programma Office Excel.

### **1.10.1 Applicazione del metodo polinomiale a delle travi di laboratorio**

Si procede ad applicare il metodo polinomiale per ricostruire la deformata di alcune travi testate in laboratorio presso il Politecnico di Torino<sup>60</sup>. Le strutture in questione sono 6 travi in cemento

---

<sup>60</sup> DEBERNARDI P. G., TALIANO M., 2006

## Metodo polinomiale

armato di diversa lunghezza, semplicemente appoggiate, con la medesima sezione trasversale a “I” ma differente armatura longitudinale. L’armatura trasversale (a taglio) è invece la medesima per ogni trave, ed è costituita da staffe a due bracci di diametro 8 mm e passo 200 mm. Su ogni trave sono state applicate delle forze concentrate e ne è stata misurata la freccia in mezzeria attraverso dei flessimetri. La sperimentazione aveva l’obiettivo di valutare il contributo della sollecitazione tagliante nel calcolo delle deformazioni per strutture con rapporto lunghezza/altezza uguale a 12. Gli schemi statici delle travi, la sezione trasversale, e una tabella con le caratteristiche meccaniche dei materiali impiegati sono stati introdotti nei paragrafi precedenti (figg. 14 e 15 e tabella 4). Le misure indicate nelle immagini sono espresse in millimetri. Le lettere in stampatello indicano le sezioni equipaggiate con coppie di estensimetri per le quali è stato possibile ricavare la curvatura sperimentale.

### 1.10.1.1 Trave 1: trave semplicemente appoggiata con due forze concentrate applicate

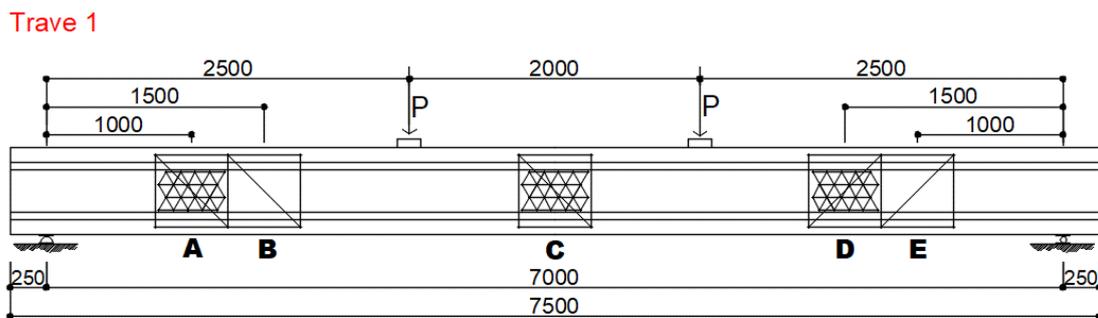


Figura 52: Rappresentazione della trave 1

È stato affrontato il problema della ricostruzione della deformata utilizzando un diverso numero delle condizioni al contorno, e quindi un diverso grado del polinomio approssimante. Di conseguenza è stata valutata la convenienza dell’applicazione di uno o più sensori per la struttura ai fini del monitoraggio strutturale.

Le tre diverse configurazioni di monitoraggio sono:

- 1 coppia di estensimetri in mezzeria (sezione C);
- 2 coppie di estensimetri: 1 in mezzeria (sezione C) e 1 nella sezione B
- 3 coppie di estensimetri: 1 in mezzeria (sezione C), 1 nella sezione B, e 1 nella sezione C;

Il calcolo è stato ripetuto per 6 diversi valori del carico applicato. I risultati sono stati confrontati con l’abbassamento reale misurato da un flessimetro posizionato in mezzeria.

## I modelli teorici

Le condizioni al contorno sono le seguenti:

$$\left\{ \begin{array}{l} y(0) = a = 0 \\ y(l) = a + b \cdot l + c \cdot l^2 + d \cdot l^3 + e \cdot l^4 + f \cdot l^5 = 0 \\ y''(0) = 2 \cdot c = 0 \\ y''(l) = 2c + d \cdot l + 12e \cdot l^2 + 20f \cdot l^3 = 0 \\ y''(C) = y''\left(\frac{l}{2}\right) = 2c + 6d \cdot \frac{l}{2} + 12e \cdot \frac{l^2}{4} + 20f \cdot \frac{l^3}{8} = -\chi\left(\frac{l}{2}\right) \\ y''(B) = y''\left(\frac{3}{14}l\right) = 2c + 6d \cdot \frac{3l}{14} + 12e \cdot \frac{9l^2}{196} + 20f \cdot \frac{27l^3}{2744} = -\chi\left(\frac{3l}{14}\right) \end{array} \right.$$

Mentre se si vogliono considerare 3 misure di curvature:

$$\left\{ \begin{array}{l} y(0) = a = 0 \\ y(l) = a + b \cdot l + c \cdot l^2 + d \cdot l^3 + e \cdot l^4 + f \cdot l^5 + g \cdot l^6 = 0 \\ y''(0) = 2 \cdot c = 0 \\ y''(l) = 2c + d \cdot l + 12e \cdot l^2 + 20f \cdot l^3 + 30g \cdot l^4 = 0 \\ y''(C) = y''\left(\frac{l}{2}\right) = 2c + 6d \cdot \frac{l}{2} + 12e \cdot \frac{l^2}{4} + 20f \cdot \frac{l^3}{8} + \frac{30}{16}g \cdot l^4 = -\chi\left(\frac{l}{2}\right) \\ y''(B) = y''\left(\frac{3}{14}l\right) = 2c + 6d \cdot \frac{3l}{14} + 12e \cdot \frac{9l^2}{196} + 20f \cdot \frac{27l^3}{2744} + \frac{30 \cdot 81}{38416}g \cdot l^4 = -\chi\left(\frac{3l}{14}\right) \\ y''(D) = y''\left(\frac{11}{14}l\right) = 2c + 6d \cdot \frac{11l}{14} + 12e \cdot \frac{121l^2}{196} + 20f \cdot \frac{1331l^3}{2744} + \frac{30 \cdot 11^4}{14^4}g \cdot l^4 = -\chi\left(\frac{3l}{14}\right) \end{array} \right.$$

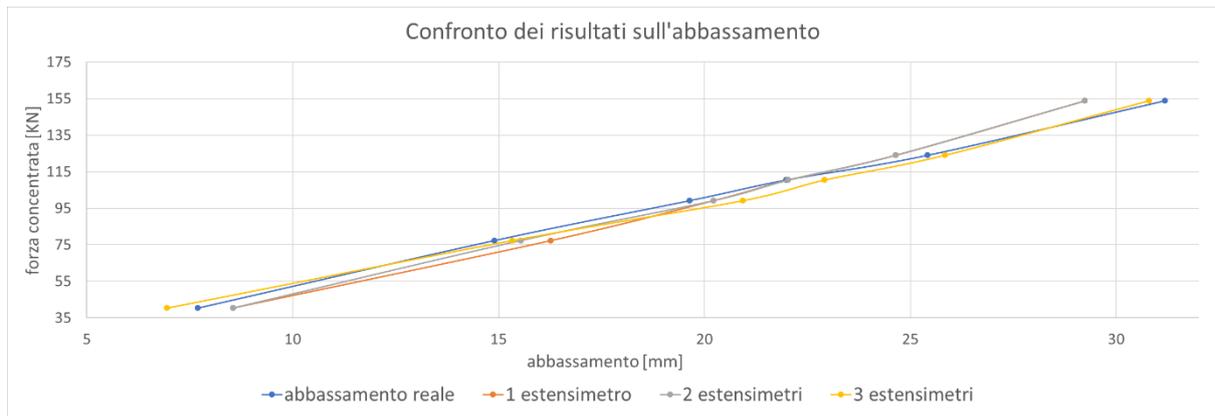


Figura 53: Stime dell'abbassamento per la trave 1 in funzione del numero di sensori di deformazione considerati

## Metodo polinomiale

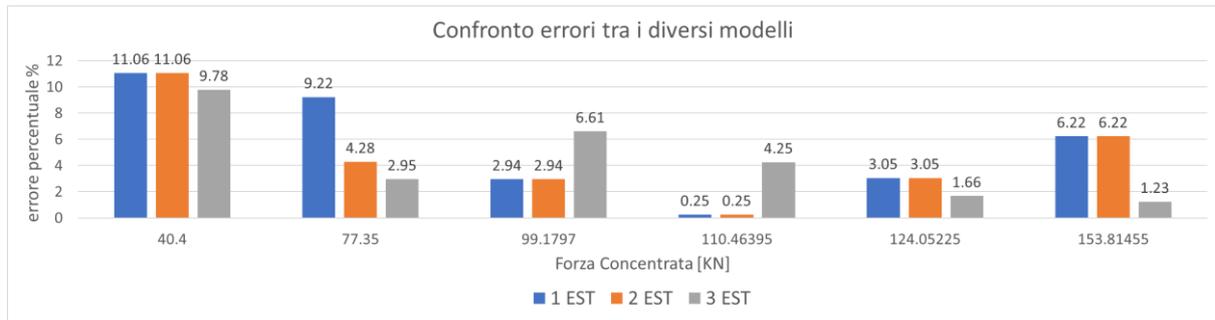


Figura 54: Errori corrispondenti ai diversi valori del carico in funzione delle diverse configurazioni di posizionamento dei sensori di deformazione, trave 1

Per la struttura in questione si è dedotto che è sufficiente un estensimetro in mezzeria per approssimare la deformata con un range di errore rispetto al valore reale misurato, compreso tra un minimo dello 0.2 % ed un massimo del 11 %.

### 1.10.1.2 Trave 2: trave semplicemente appoggiata con due forze concentrate applicate

#### Trave 2

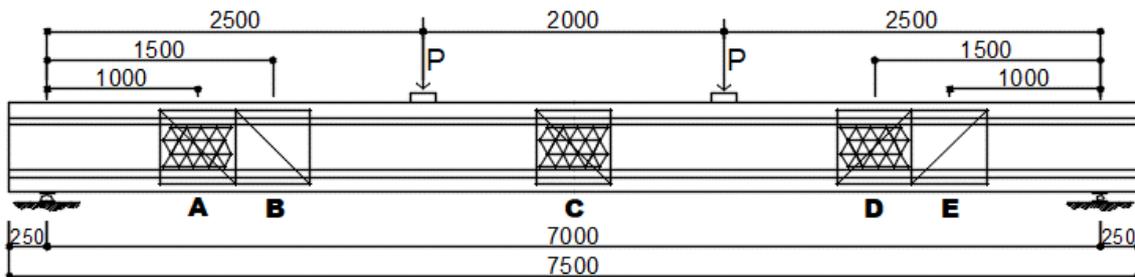


Figura 55: Rappresentazione della trave 2

È stato affrontato il problema della ricostruzione della deformata utilizzando un diverso numero delle condizioni al contorno, e quindi un diverso grado del polinomio approssimante. Di conseguenza è stata valutata la convenienza dell'applicazione di uno o più sensori per la struttura ai fini del monitoraggio strutturale.

Le tre diverse configurazioni di monitoraggio sono:

- 1 coppia di estensimetri in mezzeria (sezione C);
- 2 coppie di estensimetri: 1 in mezzeria (sezione C) e 1 nella sezione B
- 3 coppie di estensimetri: 1 in mezzeria (sezione C), 1 nella sezione B, e 1 nella sezione C;

Il calcolo è stato ripetuto per 6 diversi valori del carico applicato. I risultati sono stati confrontati con l'abbassamento reale misurato da un flessimetro posizionato in mezzeria.

## I modelli teorici

Le condizioni al contorno sono le seguenti:

$$\left\{ \begin{array}{l} y(0) = a = 0 \\ y(l) = a + b \cdot l + c \cdot l^2 + d \cdot l^3 + e \cdot l^4 + f \cdot l^5 = 0 \\ y''(0) = 2 \cdot c = 0 \\ y''(l) = 2c + d \cdot l + 12e \cdot l^2 + 20f \cdot l^3 = 0 \\ y''(C) = y''\left(\frac{l}{2}\right) = 2c + 6d \cdot \frac{l}{2} + 12e \cdot \frac{l^2}{4} + 20f \cdot \frac{l^3}{8} = -\chi\left(\frac{l}{2}\right) \\ y''(B) = y''\left(\frac{3}{14}l\right) = 2c + 6d \cdot \frac{3l}{14} + 12e \cdot \frac{9l^2}{196} + 20f \cdot \frac{27l^3}{2744} = -\chi\left(\frac{3l}{14}\right) \end{array} \right.$$

Mentre se si vogliono considerare 3 misure di curvature:

$$\left\{ \begin{array}{l} y(0) = a = 0 \\ y(l) = a + b \cdot l + c \cdot l^2 + d \cdot l^3 + e \cdot l^4 + f \cdot l^5 + g \cdot l^6 = 0 \\ y''(0) = 2 \cdot c = 0 \\ y''(l) = 2c + d \cdot l + 12e \cdot l^2 + 20f \cdot l^3 + 30g \cdot l^4 = 0 \\ y''(C) = y''\left(\frac{l}{2}\right) = 2c + 6d \cdot \frac{l}{2} + 12e \cdot \frac{l^2}{4} + 20f \cdot \frac{l^3}{8} + \frac{30}{16}g \cdot l^4 = -\chi\left(\frac{l}{2}\right) \\ y''(B) = y''\left(\frac{3}{14}l\right) = 2c + 6d \cdot \frac{3l}{14} + 12e \cdot \frac{9l^2}{196} + 20f \cdot \frac{27l^3}{2744} + \frac{30 \cdot 81}{38416}g \cdot l^4 = -\chi\left(\frac{3l}{14}\right) \\ y''(D) = y''\left(\frac{11}{14}l\right) = 2c + 6d \cdot \frac{11l}{14} + 12e \cdot \frac{121l^2}{196} + 20f \cdot \frac{1331l^3}{2744} + \frac{30 \cdot 11^4}{14^4}g \cdot l^4 = -\chi\left(\frac{3l}{14}\right) \end{array} \right.$$

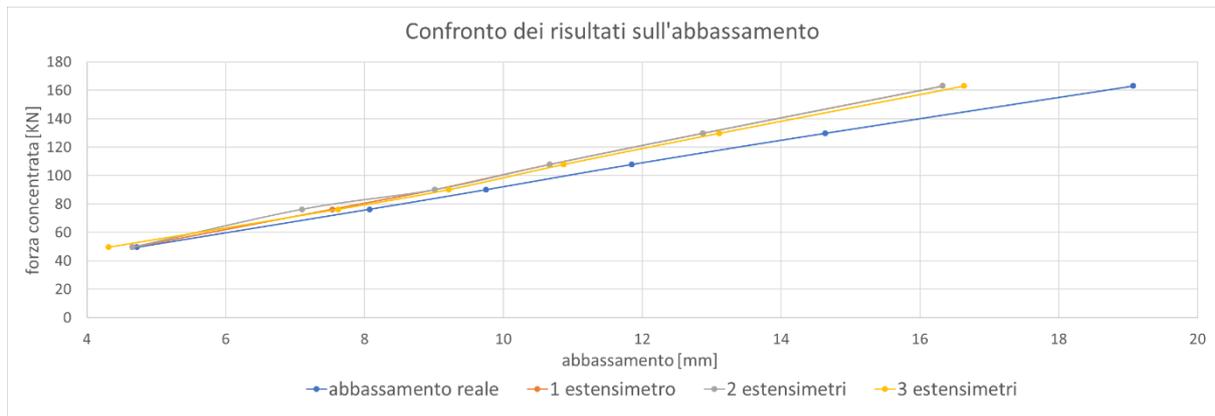


Figura 56: Stime dell'abbassamento per la trave 2 in funzione del numero di sensori di deformazione considerati

## Metodo polinomiale

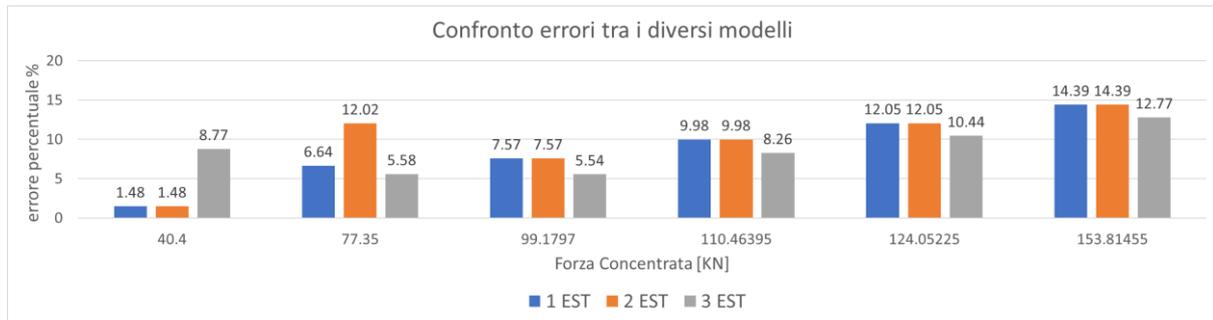


Figura 57: Errori corrispondenti ai diversi valori del carico in funzione delle diverse configurazioni di posizionamento dei sensori di deformazione, trave 2

Per la struttura in questione si è dedotto che è sufficiente un estensimetro in mezzeria per approssimare la deformata con un range di errore rispetto al valore reale misurato, compreso tra un minimo dello 1.5 % ed un massimo del 15 %.

### 1.10.1.3 Trave 3: trave semplicemente appoggiata con forza concentrata in mezzeria

#### Trave 3

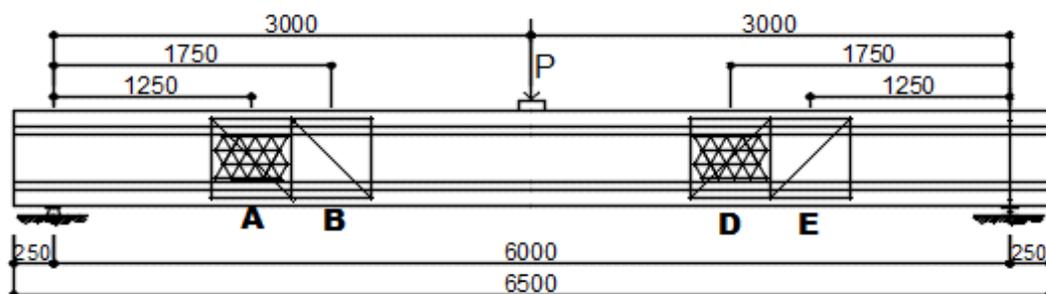


Figura 58: Rappresentazione della trave 3

È stato affrontato il problema della ricostruzione della deformata utilizzando un diverso numero delle condizioni al contorno, e quindi un diverso grado del polinomio approssimante. Di conseguenza è stata valutata la convenienza dell'applicazione di uno o più sensori per la struttura ai fini del monitoraggio strutturale.

Le tre diverse configurazioni di monitoraggio sono:

- 1 coppia di estensimetri nella sezione A;
- 2 coppie di estensimetri: 1 nella sezione A e 1 nella sezione B
- 3 coppie di estensimetri: 1 nella sezione A, 1 nella sezione B, e 1 nella sezione C;

Il calcolo è stato ripetuto per 6 diversi valori del carico applicato. I risultati sono stati confrontati con l'abbassamento reale misurato da un flessimetro posizionato in mezzeria.

## I modelli teorici

Le condizioni al contorno sono le seguenti:

$$\left\{ \begin{array}{l} y(0) = a = 0 \\ y(l) = a + b \cdot l + c \cdot l^2 + d \cdot l^3 + e \cdot l^4 + f \cdot l^5 = 0 \\ y''(0) = 2 \cdot c = 0 \\ y''(l) = 2c + d \cdot l + 12e \cdot l^2 + 20f \cdot l^3 = 0 \\ y''(A) = y''\left(\frac{5l}{24}\right) = 2c + 6d \cdot \frac{5l}{24} + 12e \cdot \frac{5^2 l^2}{24^2} + 20f \cdot \frac{5^3 l^3}{24^3} = -\chi\left(\frac{5l}{24}\right) \\ y''(B) = y''\left(\frac{7l}{24}\right) = 2c + 6d \cdot \frac{7l}{24} + 12e \cdot \frac{7^2 l^2}{24^2} + 20f \cdot \frac{7^3 l^3}{24^3} = -\chi\left(\frac{7l}{24}\right) \end{array} \right.$$

Mentre se si vogliono considerare 3 misure di curvatures:

$$\left\{ \begin{array}{l} y(0) = a = 0 \\ y(l) = a + b \cdot l + c \cdot l^2 + d \cdot l^3 + e \cdot l^4 + f \cdot l^5 + g \cdot l^6 = 0 \\ y''(0) = 2 \cdot c = 0 \\ y''(l) = 2c + d \cdot l + 12e \cdot l^2 + 20f \cdot l^3 + 30g \cdot l^4 = 0 \\ y''(A) = y''\left(\frac{5l}{24}\right) = 2c + 6d \cdot \frac{5l}{24} + 12e \cdot \frac{5^2 l^2}{24^2} + 20f \cdot \frac{5^3 l^3}{24^3} + 30g \cdot \frac{5^4 l^4}{24^4} = -\chi\left(\frac{5l}{24}\right) \\ y''(B) = y''\left(\frac{7l}{24}\right) = 2c + 6d \cdot \frac{7l}{24} + 12e \cdot \frac{7^2 l^2}{24^2} + 20f \cdot \frac{7^3 l^3}{24^3} + 30g \cdot \frac{7^4 l^4}{24^4} = -\chi\left(\frac{7l}{24}\right) \\ y''(D) = y''\left(\frac{17l}{24}\right) = 2c + 6d \cdot \frac{17l}{24} + 12e \cdot \frac{17^2 l^2}{24^2} + 20f \cdot \frac{17^3 l^3}{24^3} + 30g \cdot \frac{17^4 l^4}{24^4} = -\chi\left(\frac{17l}{24}\right) \end{array} \right.$$

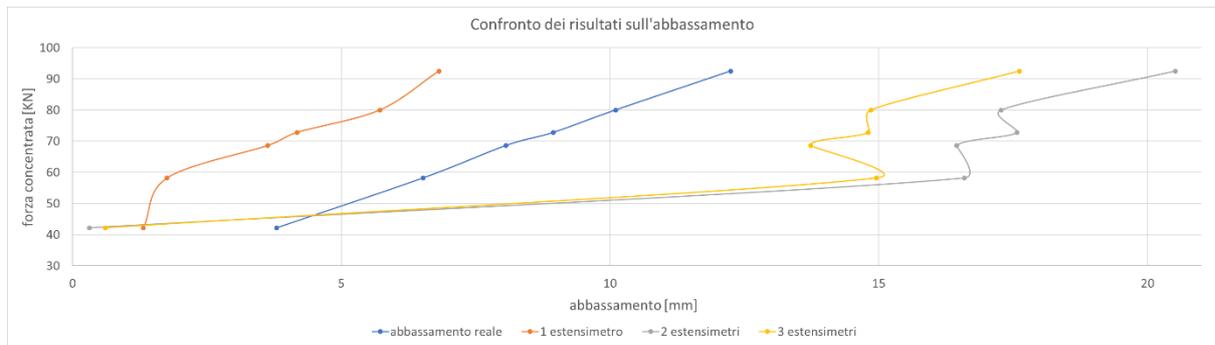


Figura 59: Stime dell'abbassamento per la trave 3 in funzione del numero di sensori di deformazione considerati

## Metodo polinomiale

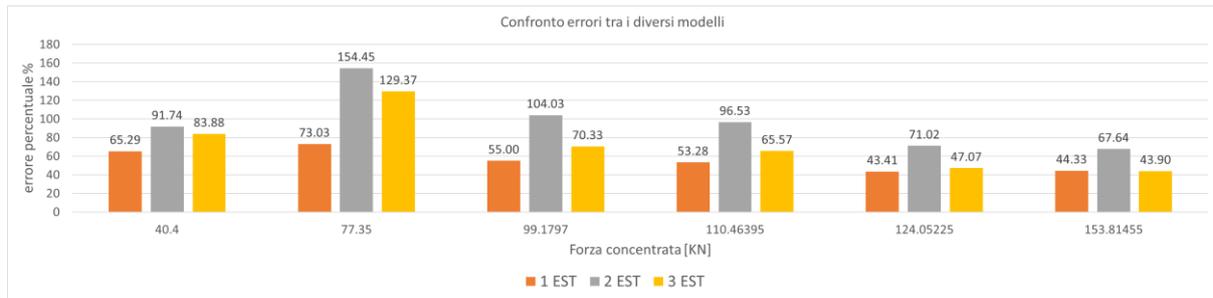


Figura 60: Errori corrispondenti ai diversi valori del carico in funzione delle diverse configurazioni di posizionamento dei sensori di deformazione, trave 3

Per la struttura in questione si è dedotto che una sola coppia di estensimetri, rispetto alla configurazione con 2 e 3 coppie, approssimi in maniera migliore la deformata, ma il range di errore rimane comunque elevato, compreso tra un minimo del 40 % ed un massimo del 73 %. Questo deriva dalla natura numerica dei parametri utilizzati per il calcolo della freccia, ovvero le curvature sperimentali. Il polinomio approssimante infatti viene vincolato, attraverso le condizioni al contorno, ad assumere determinati valori sperimentali in alcune sezioni e, pur di soddisfare tali vincoli, potrebbe sviluppare un andamento che descrive poco realisticamente la deformata di una struttura, generando pertanto degli errori notevoli.

Al fine di supportare le conclusioni che verranno esposte al termine del paragrafo si propone di ripetere il calcolo dell'abbassamento scegliendo una più opportuna configurazione delle coppie di estensimetri disposte sulla trave. In particolar modo si considerano solo le curvature delle sezioni in B e D. Di seguito si riportano i risultati. Le condizioni al contorno sono le seguenti:

$$\left\{ \begin{array}{l} y(0) = a = 0 \\ y(l) = a + b \cdot l + c \cdot l^2 + d \cdot l^3 + e \cdot l^4 + f \cdot l^5 = 0 \\ y''(0) = 2 \cdot c = 0 \\ y''(l) = 2c + d \cdot l + 12e \cdot l^2 + 20f \cdot l^3 = 0 \\ y''(B) = y''\left(\frac{7l}{24}\right) = 2c + 6d \cdot \frac{7l}{24} + 12e \cdot \frac{7^2 l^2}{24^2} + 20f \cdot \frac{7^3 l^3}{24^3} = -\chi\left(\frac{7l}{24}\right) \\ y''(D) = y''\left(\frac{17l}{24}\right) = 2c + 6d \cdot \frac{17l}{24} + 12e \cdot \frac{17^2 l^2}{24^2} + 20f \cdot \frac{17^3 l^3}{24^3} = -\chi\left(\frac{17l}{24}\right) \end{array} \right.$$

## I modelli teorici

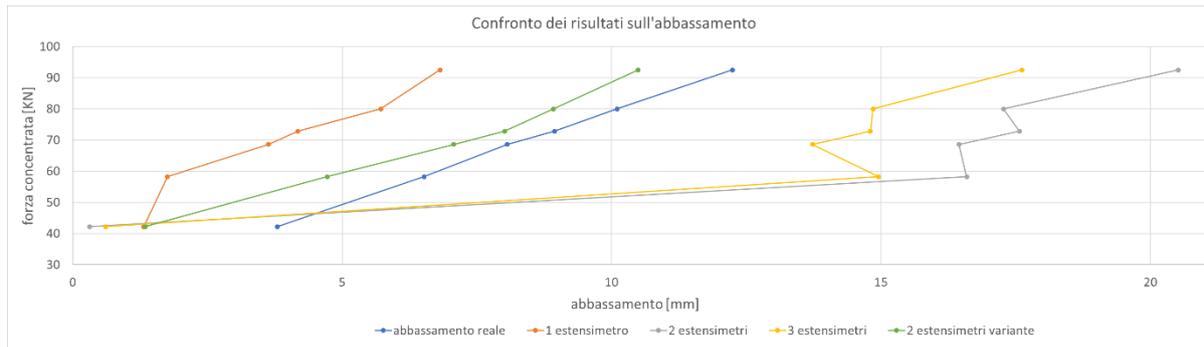


Figura 61: Stime aggiornate dell'abbassamento per la trave 3 in funzione del numero di sensori di deformazione considerati

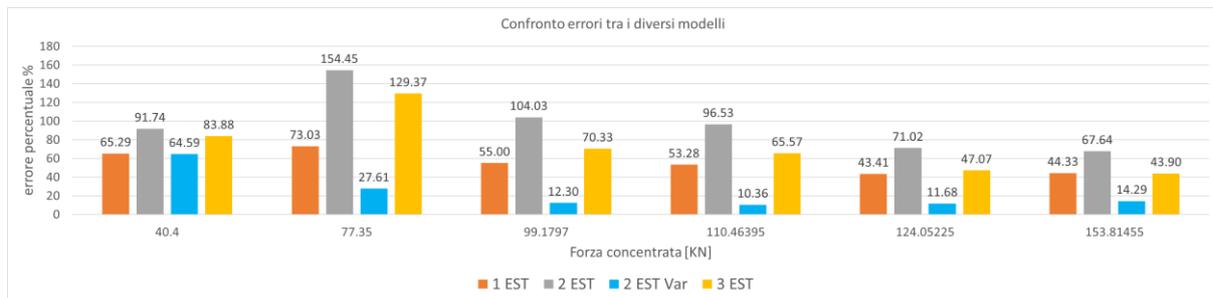


Figura 62: Errori aggiornati corrispondenti ai diversi valori del carico in funzione delle diverse configurazioni di posizionamento dei sensori di deformazione, trave 3

### 1.10.1.4 Trave 5: trave semplicemente appoggiata con forza concentrata in un punto arbitrario

#### Trave 5

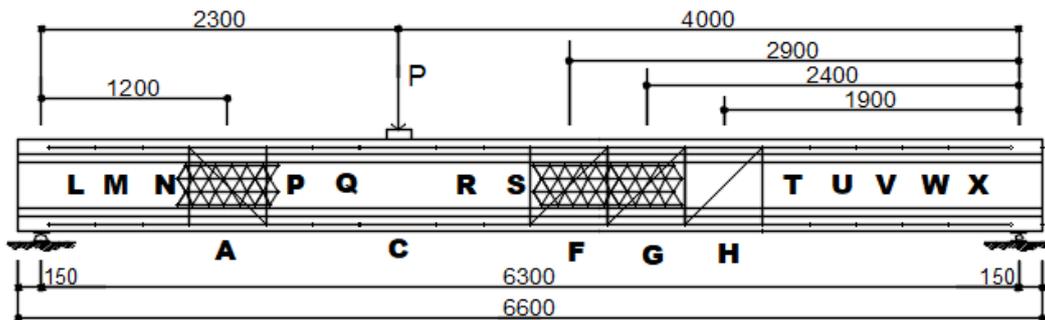


Figura 63: Rappresentazione della trave 5

È stato affrontato il problema della ricostruzione della deformata utilizzando un diverso numero delle condizioni al contorno, e quindi un diverso grado del polinomio approssimante. Di conseguenza è stata valutata la convenienza dell'applicazione di uno o più sensori per la struttura ai fini del monitoraggio strutturale.

## Metodo polinomiale

Le tre diverse configurazioni di monitoraggio sono:

- 1 coppia di estensimetri nella sezione C;
- 2 coppie di estensimetri: 1 nella sezione C e 1 nella sezione A
- 3 coppie di estensimetri: 1 nella sezione C, 1 nella sezione A, e 1 nella sezione H;

Il calcolo è stato ripetuto per 6 diversi valori del carico applicato. I risultati sono stati confrontati con l'abbassamento reale misurato da un flessimetro posizionato in mezzeria.

Le condizioni al contorno sono le seguenti:

$$\left\{ \begin{array}{l} y(0) = a = 0 \\ y(l) = a + b \cdot l + c \cdot l^2 + d \cdot l^3 + e \cdot l^4 + f \cdot l^5 = 0 \\ y''(0) = 2 \cdot c = 0 \\ y''(l) = 2c + d \cdot l + 12e \cdot l^2 + 20f \cdot l^3 = 0 \\ y''(C) = y''\left(\frac{23l}{63}\right) = 2c + 6d \cdot \frac{23l}{63} + 12e \cdot \frac{23^2 l^2}{63^2} + 20f \cdot \frac{23^3 l^3}{63^3} = -\chi\left(\frac{23l}{63}\right) \\ y''(A) = y''\left(\frac{4l}{21}\right) = 2c + 6d \cdot \frac{4l}{21} + 12e \cdot \frac{4^2 l^2}{21^2} + 20f \cdot \frac{4^3 l^3}{21^3} = -\chi\left(\frac{4l}{21}\right) \end{array} \right.$$

Mentre se si vogliono considerare 3 misure di curvature:

$$\left\{ \begin{array}{l} y(0) = a = 0 \\ y(l) = a + b \cdot l + c \cdot l^2 + d \cdot l^3 + e \cdot l^4 + f \cdot l^5 + g \cdot l^6 = 0 \\ y''(0) = 2 \cdot c = 0 \\ y''(l) = 2c + d \cdot l + 12e \cdot l^2 + 20f \cdot l^3 + 30g \cdot l^4 = 0 \\ y''(C) = y''\left(\frac{23l}{63}\right) = 2c + 6d \cdot \frac{23l}{63} + 12e \cdot \frac{23^2 l^2}{63^2} + 20f \cdot \frac{23^3 l^3}{63^3} + 30g \cdot \frac{23^4 l^4}{63^4} = -\chi\left(\frac{5l}{24}\right) \\ y''(A) = y''\left(\frac{4l}{21}\right) = 2c + 6d \cdot \frac{4l}{21} + 12e \cdot \frac{4^2 l^2}{21^2} + 20f \cdot \frac{4^3 l^3}{21^3} + 30g \cdot \frac{4^4 l^4}{21^4} = -\chi\left(\frac{4l}{21}\right) \\ y''(H) = y''\left(\frac{44l}{63}\right) = 2c + 6d \cdot \frac{44l}{63} + 12e \cdot \frac{44^2 l^2}{63^2} + 20f \cdot \frac{44^3 l^3}{63^3} + 30g \cdot \frac{44^4 l^4}{63^4} = -\chi\left(\frac{44l}{63}\right) \end{array} \right.$$

## I modelli teorici

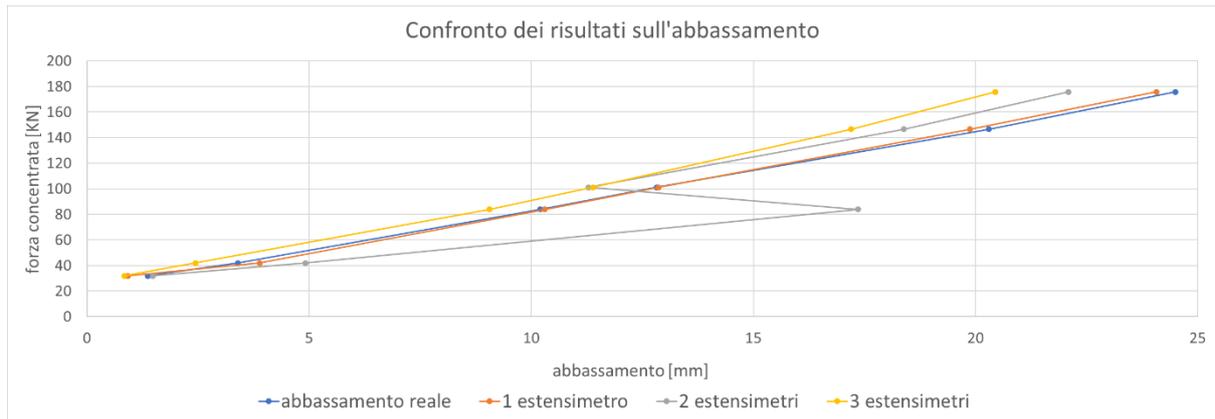


Figura 64: Stime dell'abbassamento per la trave 5 in funzione del numero di sensori di deformazione considerati

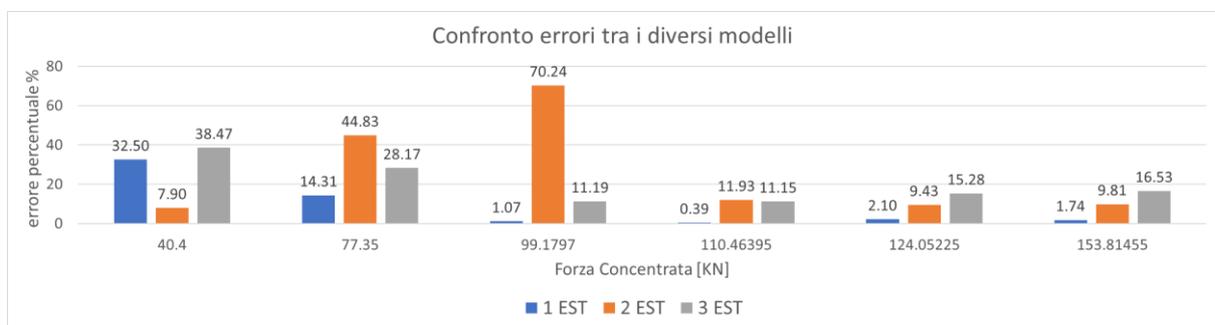


Figura 65: Errori corrispondenti ai diversi valori del carico in funzione delle diverse configurazioni di posizionamento dei sensori di deformazione, trave 5

Per la struttura in questione si è dedotto che una sola coppia di estensimetri (posizionata in corrispondenza del punto di applicazione della forza), rispetto alla configurazione con 2 e 3 coppie, approssimi in maniera migliore la deformata. Il range di errore è compreso tra un minimo dello 0.4 % ed un massimo del 32 %.

Aumentando il numero delle condizioni al contorno, imponendo i valori numerici delle curvature misurate sperimentalmente, si vincola il polinomio in determinati punti. Questo potrebbe far assumere al polinomio un andamento poco realistico, incrementando l'errore dei risultati.

### 1.10.1.5 Trave 6: trave semplicemente appoggiata con forza concentrata in un punto arbitrario

Trave 6

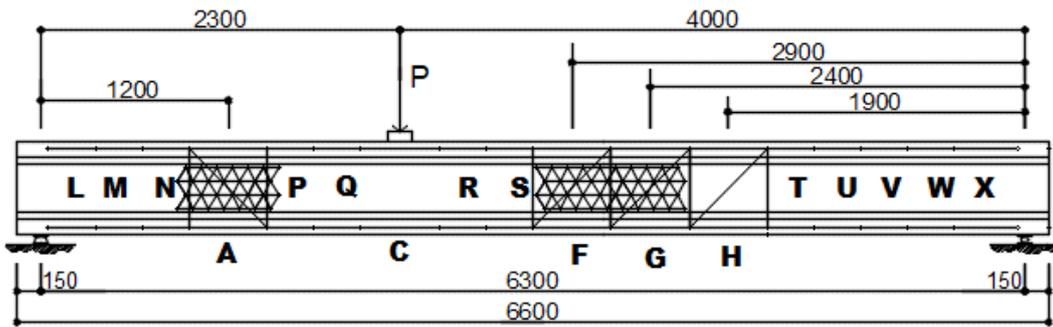


Figura 66: Rappresentazione della trave 6

È stato affrontato il problema della ricostruzione della deformata utilizzando un diverso numero delle condizioni al contorno, e quindi un diverso grado del polinomio approssimante. Di conseguenza è stata valutata la convenienza dell'applicazione di uno o più sensori per la struttura ai fini del monitoraggio strutturale.

Le tre diverse configurazioni di monitoraggio sono:

- 1 coppia di estensimetri nella sezione C;
- 2 coppie di estensimetri: 1 nella sezione C e 1 nella sezione A
- 3 coppie di estensimetri: 1 nella sezione C, 1 nella sezione A, e 1 nella sezione H;

Il calcolo è stato ripetuto per 6 diversi valori del carico applicato. I risultati sono stati confrontati con l'abbassamento reale misurato da un flessimetro posizionato in mezzeria.

Le condizioni al contorno sono le seguenti:

$$\left\{ \begin{array}{l} y(0) = a = 0 \\ y(l) = a + b \cdot l + c \cdot l^2 + d \cdot l^3 + e \cdot l^4 + f \cdot l^5 = 0 \\ y''(0) = 2 \cdot c = 0 \\ y''(l) = 2c + d \cdot l + 12e \cdot l^2 + 20f \cdot l^3 = 0 \\ y''(C) = y''\left(\frac{23l}{63}\right) = 2c + 6d \cdot \frac{23l}{63} + 12e \cdot \frac{23^2 l^2}{63^2} + 20f \cdot \frac{23^3 l^3}{63^3} = -\chi\left(\frac{23l}{63}\right) \\ y''(A) = y''\left(\frac{4l}{21}\right) = 2c + 6d \cdot \frac{4l}{21} + 12e \cdot \frac{4^2 l^2}{21^2} + 20f \cdot \frac{4^3 l^3}{21^3} = -\chi\left(\frac{4l}{21}\right) \end{array} \right.$$

Mentre se si vogliono considerare 3 misure di curvature:

## I modelli teorici

$$\left\{ \begin{array}{l} y(0) = a = 0 \\ y(l) = a + b \cdot l + c \cdot l^2 + d \cdot l^3 + e \cdot l^4 + f \cdot l^5 + g \cdot l^6 = 0 \\ y''(0) = 2 \cdot c = 0 \\ y''(l) = 2c + d \cdot l + 12e \cdot l^2 + 20f \cdot l^3 + 30g \cdot l^4 = 0 \\ y''(C) = y''\left(\frac{23l}{63}\right) = 2c + 6d \cdot \frac{23l}{63} + 12e \cdot \frac{23^2 l^2}{63^2} + 20f \cdot \frac{23^3 l^3}{63^3} + 30g \cdot \frac{23^4 l^4}{63^4} = -\chi\left(\frac{5l}{24}\right) \\ y''(A) = y''\left(\frac{4l}{21}\right) = 2c + 6d \cdot \frac{4l}{21} + 12e \cdot \frac{4^2 l^2}{21^2} + 20f \cdot \frac{4^3 l^3}{21^3} + 30g \cdot \frac{4^4 l^4}{21^4} = -\chi\left(\frac{4l}{21}\right) \\ y''(H) = y''\left(\frac{44l}{63}\right) = 2c + 6d \cdot \frac{44l}{63} + 12e \cdot \frac{44^2 l^2}{63^2} + 20f \cdot \frac{44^3 l^3}{63^3} + 30g \cdot \frac{44^4 l^4}{63^4} = -\chi\left(\frac{44l}{63}\right) \end{array} \right.$$

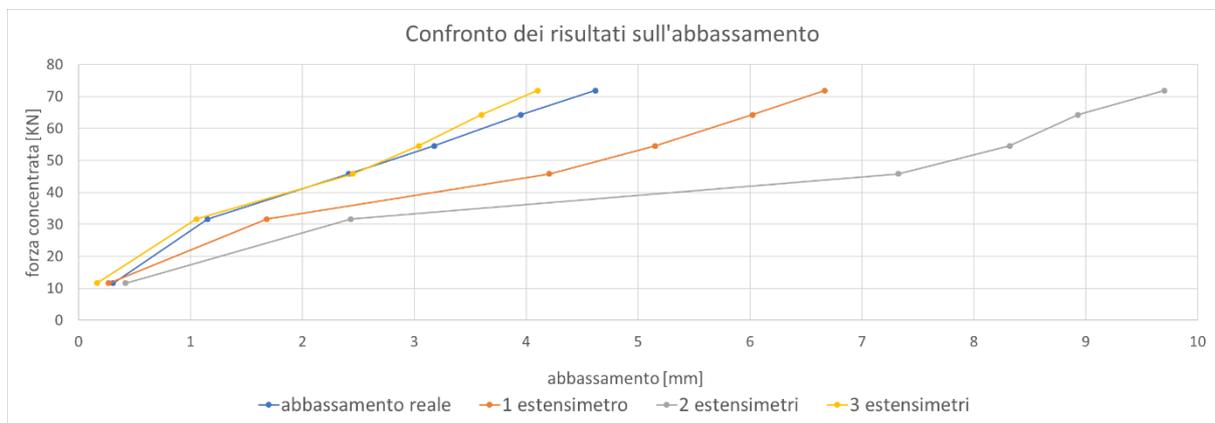


Figura 67: Stime dell'abbassamento per la trave 6 in funzione del numero di sensori di deformazione considerati

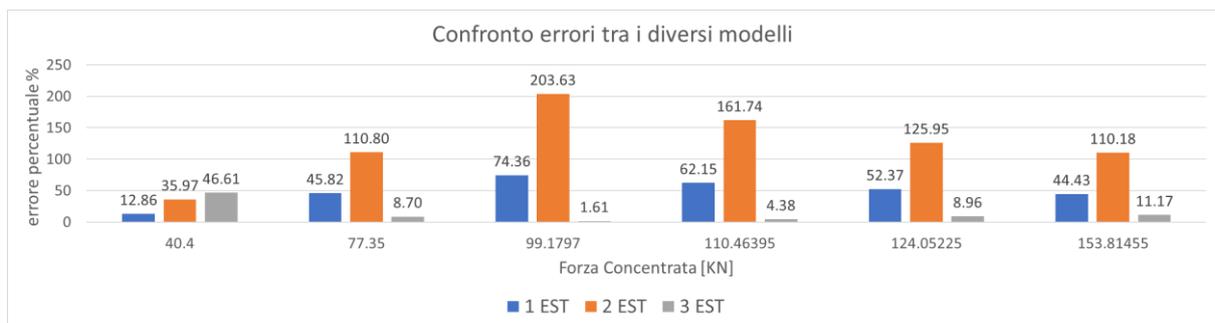


Figura 68: Errori corrispondenti ai diversi valori del carico in funzione delle diverse configurazioni di posizionamento dei sensori di deformazione, trave 6

Per la struttura in questione si è dedotto che la configurazione con 3 coppie di estensimetri approssima in maniera migliore la deformata. Il range di errore rispetto al valore reale misurato è compreso tra un minimo dello 1.6 % ed un massimo del 46 %.

## 1.11 Metodo dello sviluppo in serie di Fourier

Si ipotizza che la funzione abbassamento  $w(x)$  di una struttura sollecitata da azioni esterne possa essere espressa attraverso uno sviluppo in serie di Fourier così come indicato:

$$w(x) = \sum_{m=1}^r \delta_m \cdot f(x) \quad (2.48)$$

dove  $f(x)$  è una funzione scelta in modo da garantire che le condizioni al contorno (abbassamenti, rotazioni e caratteristiche proprie della sollecitazione) sui vincoli esterni della struttura siano implicitamente rispettate.

Di seguito sono riportate le funzioni analitiche disponibili in letteratura per gli schemi statici su cui è stato sviluppato il metodo in oggetto<sup>61</sup>.

1. Trave in semplice appoggio:

$$f(x) = \sin \frac{\mu_m x}{l} \quad (2.49)$$

Con

$$\mu_m = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots, m\pi$$

2. Trave doppiamente incastrata:

$$f(x) = \sin \left( \frac{\mu_m x}{l} \right) - \sinh \left( \frac{\mu_m x}{l} \right) - \alpha_m \cdot \left[ \cos \left( \frac{\mu_m x}{l} \right) - \cosh \left( \frac{\mu_m x}{l} \right) \right] \quad (2.50)$$

Con

$$\alpha_m = \frac{\sin \mu_m - \sinh \mu_m}{\cos \mu_m - \cosh \mu_m}$$

$$\mu_m = 4.73, 7.8532, 10.9960, \dots, \frac{2m+1}{2} \pi$$

3. Trave incastrata ad una estremità e libera all'altra estremità (mensola):

$$f(x) = \sin \left( \frac{\mu_m x}{l} \right) + \sinh \left( \frac{\mu_m x}{l} \right) - \alpha_m \cdot \left[ \cos \left( \frac{\mu_m x}{l} \right) - \cosh \left( \frac{\mu_m x}{l} \right) \right] \quad (2.51A)$$

Con

---

<sup>61</sup> CHEUNG Y.K., 1976

$$\alpha_m = \frac{\sin \mu_m + \sinh \mu_m}{\cos \mu_m + \cosh \mu_m}$$

$$\mu_m = 1.875, 4.694, \dots \frac{2m-1}{2} \pi$$

4. Trave incastrata ad un'estremità e libera all'altra estremità (variante per mensola):

$$f(x) = 1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2l}\right) \quad (2.51B)$$

Le incognite del problema sono rappresentate dai coefficienti della serie con cui si vuole esprimere l'abbassamento.

Per ricavare i coefficienti della serie è sufficiente imporre le condizioni al contorno.

Questo studio di tesi sta valutando l'utilizzo dei valori di curvatura e rotazione di una sezione trasversale di una struttura, come dati di partenza per lo sviluppo di modelli di calcolo utili al monitoraggio strutturale. Proprio per questo si è deciso di utilizzare le curvature, dedotte sperimentalmente usando una coppia di estensimetri installati sulla struttura, come condizioni al contorno del problema.

La derivata seconda dell'abbassamento  $w(x)$ , opportunamente cambiata di segno, corrisponde proprio alla curvatura misurata sperimentalmente nella stessa sezione, cioè  $\chi(x)$ .

Conoscendo un solo valore di curvatura "sperimentalmente rilevato" si potrà imporre un'unica condizione al contorno e quindi ricavare un unico coefficiente della serie.

Aumentando il numero di curvature note si aumenteranno le condizioni al contorno imponibili e quindi i coefficienti della serie.

$$\left\{ \begin{array}{l} -w''(x_1) = -\sum_{m=1}^r \delta_m \cdot f''(x_1) = \chi_{mis}(x_1) \\ -w''(x_2) = -\sum_{m=1}^r \delta_m \cdot f''(x_2) = \chi_{mis}(x_2) \\ \vdots \\ -w''(x_m) = -\sum_{m=1}^r \delta_m \cdot f''(x_m) = \chi_{mis}(x_m) \end{array} \right. \quad (2.53)$$

## Metodo dello sviluppo in serie di Fourier

Il risultato, come si può vedere, sarà quello di avere un sistema di equazioni linearmente indipendenti che può essere espresso in forma matriciale nel seguente modo:

$$[A] \cdot [x] = [d] \quad (2.54)$$

dove il vettore “x” contiene le m incognite del problema (gli m coefficienti della serie), il vettore “d” i valori delle curvature misurate sperimentalmente, mentre la matrice “A” è la matrice dei coefficienti.

Per ottenere i valori delle incognite sarà sufficiente invertire la matrice “A” e moltiplicarla per il vettore delle incognite, ovvero:

$$[x] = [A]^{-1} \cdot [d] \quad (2.55)$$

L'applicazione del presente metodo è stata valutata per 3 schemi statici distinti:

- trave in semplice appoggio;
- trave doppiamente incastrata;
- trave incastrata ad un'estremità e libera all'altra estremità (mensola);

Sono state inoltre considerate le seguenti condizioni di carico:

- carico uniformemente distribuito;
- coppia di forze concentrate disposte simmetricamente rispetto alla mezzeria;
- forza concentrata disposta in maniera asimmetrica;
- forza concentrata in mezzeria o in punta (per la mensola);

Le potenzialità del metodo sono state esplorate dapprima in maniera teorica, in modo da svincolare i risultati dagli errori strumentali, e successivamente in maniera sperimentale, utilizzando i dati di una serie di test di laboratorio effettuati presso il Politecnico di Torino.

Inoltre, è stato considerato separatamente il caso in cui si abbia a disposizione un solo valore di curvatura, in differenti sezioni della struttura, e quello in cui siano contemporaneamente presenti 3 valori di curvatura.

Il parametro utilizzato per valutare la precisione del metodo in oggetto è la freccia nella mezzeria della struttura calcolata in modo teorico, nel caso in cui nessuna zona dell'elemento sia fessurata.

I modelli teorici

Dato uno schema statico isostatico o iperstatico (riducibile ad uno isostatico risolvendone le iperstaticità) ed una condizione di carico definita, la freccia nella mezzera della struttura si calcola attraverso l'applicazione del principio dei lavori virtuali (PLV).

### 1.11.1 Travi in semplice appoggio

Oggetto del presente paragrafo è lo studio dapprima teorico, e successivamente sperimentale, atto a valutare la precisione del metodo dello sviluppo in serie di Fourier per il calcolo la freccia in mezzera di una trave semplicemente appoggiata caricata da una o più forze concentrate, in punti differenti della struttura.

#### 1.11.1.1 Trattazione teorica

I paragrafi successivi mostreranno lo schema statico considerato, la condizione di carico e la posizione delle sezioni per l'applicazione del metodo in oggetto.

Considerando una sola sezione alla volta per calcolare il coefficiente  $\delta_1$  della serie, si ottiene:

$$\delta_1(x_1) = \chi_{mis}(x_1) \cdot \frac{l^2}{\pi^2} * \frac{1}{\sin \frac{\pi x_1}{l}} \quad (2.56)$$

A questo punto si esprime l'abbassamento in mezzera (2.57) con lo sviluppo in serie che, nel caso in cui si faccia uso della curvatura di una sola sezione, sarà costituito da un unico elemento:

$$w\left(\frac{l}{2}\right) = \sum_{m=1}^r \delta_m \cdot f\left(\frac{l}{2}\right) = \delta_1 \cdot f\left(\frac{l}{2}\right) = \delta_1 \cdot \sin \frac{\pi l}{2l} = \delta_1 \quad (2.57)$$

Il calcolo sarà ripetuto utilizzando 5 differenti curvature, estrapolate dalle sezioni A, B, C, D, E. Quest'ultime sono state individuate nella prima metà della trave, dal momento che si sarebbero ottenuti gli stessi risultati, in linea teorica, utilizzando dati provenienti da sezioni simmetricamente disposte rispetto alla mezzera (visto la simmetria strutturale e delle condizioni di carico).

Una prima valutazione del metodo ipotizza l'assenza dell'errore strumentale, le curvature utilizzate nel procedimento non saranno pertanto quelle sperimentali, ma saranno quelle calcolate teoricamente dividendo il momento flettente agente sulla rispettiva sezione per la rigidezza flessionale (in stadio 1).

Il valore della freccia così calcolato sarà confrontato con quello ricavato teoricamente attraverso il principio dei lavori virtuali.

## Metodo dello sviluppo in serie di Fourier

Si considera che nessuna sezione della trave sia fessurata e, sotto questa ipotesi, si ricavano le formule analitiche della freccia in mezzeria in funzione del carico, o della forza, applicati.

### 1.11.1.1.1 Carico uniformemente distribuito

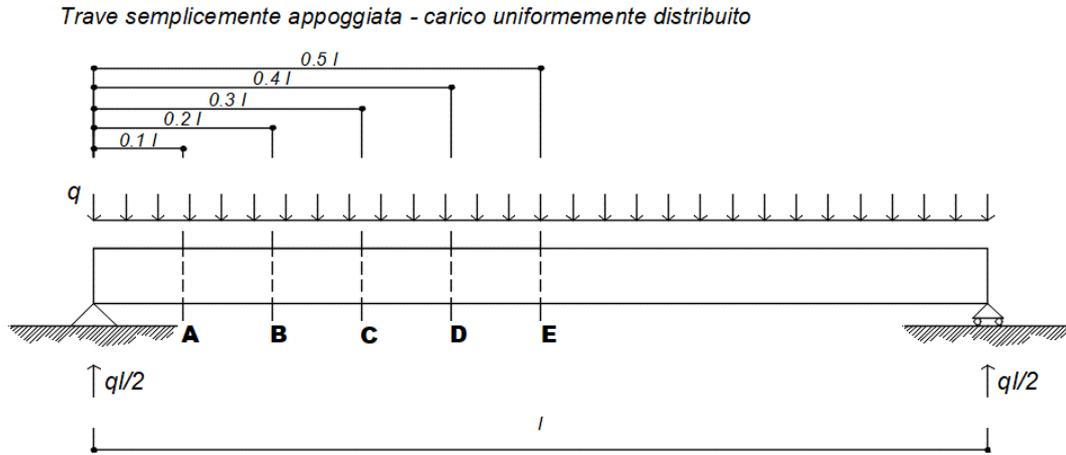


Figura 69: Trave semplicemente appoggiata sollecitata da un carico uniformemente distribuito

L'applicazione del principio dei lavori virtuali per lo schema statico considerato e la condizione di carico applicata (carico uniformemente distribuito) fornisce la seguente freccia in mezzeria:

$$f = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI_1} \quad (2.58)$$

Applicando il metodo dello sviluppo in serie di Fourier si ottengono i seguenti risultati.

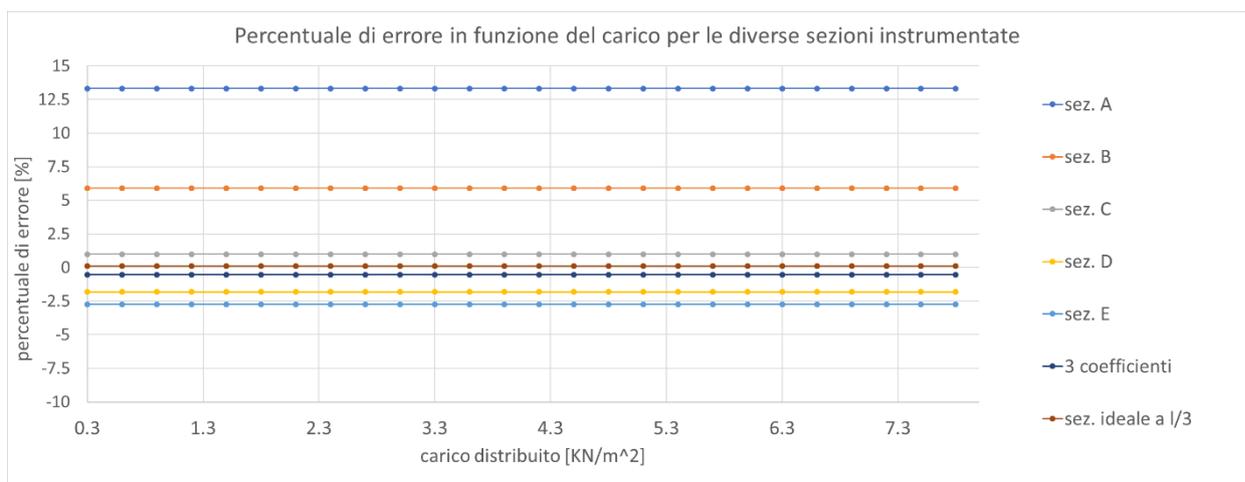


Figura 70: Errori del metodo dello sviluppo in serie di Fourier per una trave semplicemente appoggiata sollecitata da un carico uniformemente distribuito

## I modelli teorici

La freccia con i 3 coefficienti è stata calcolata, come descritto al paragrafo introduttivo, risolvendo un sistema di equazioni linearmente indipendenti, considerando le curvature estrapolate dalle sezioni B, C, D.

Si nota che l'errore dei risultati ottenuti con il metodo dello sviluppo in serie è sempre inferiore al 15%, e, per le sezioni C, D e il caso dei 3 coefficienti, sempre inferiore al 2.5%.

I risultati migliori si otterrebbero estrapolando la curvatura "sperimentale" da una sezione posizionata ad  $l/3$  dall'appoggio di sinistra: in questo caso infatti l'errore rispetto al valore teorico è inferiore allo 0.1 %.

### 1.11.1.1.2 Forza concentrata in mezzeria

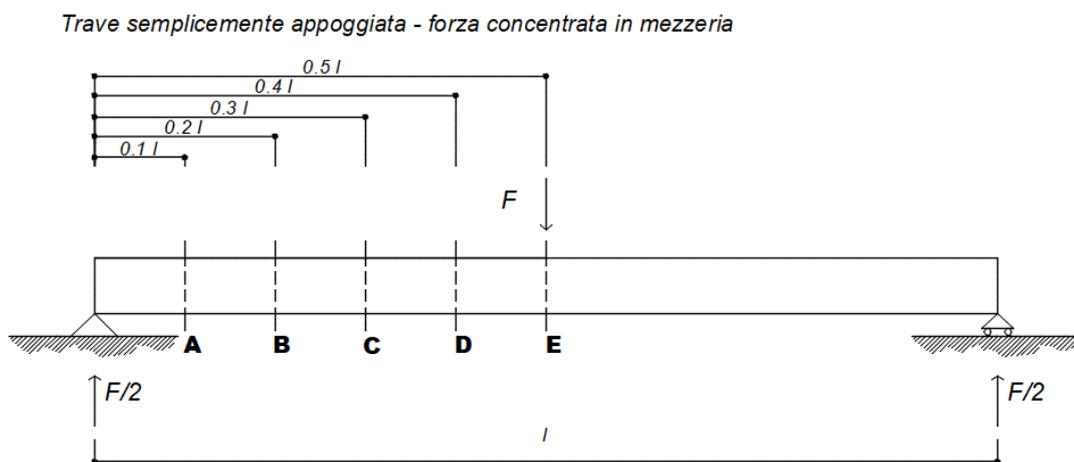


Figura 71: Trave semplicemente appoggiata sollecitata da una forza concentrata in mezzeria

L'applicazione del principio dei lavori virtuali per lo schema statico considerato e la condizione di carico applicata (forza concentrata in mezzeria) fornisce la seguente freccia in mezzeria:

$$f = \frac{Fl^3}{48 EI_1} \quad (2.59)$$

Applicando il metodo dello sviluppo in serie di Fourier si ottengono i seguenti risultati.

## Metodo dello sviluppo in serie di Fourier

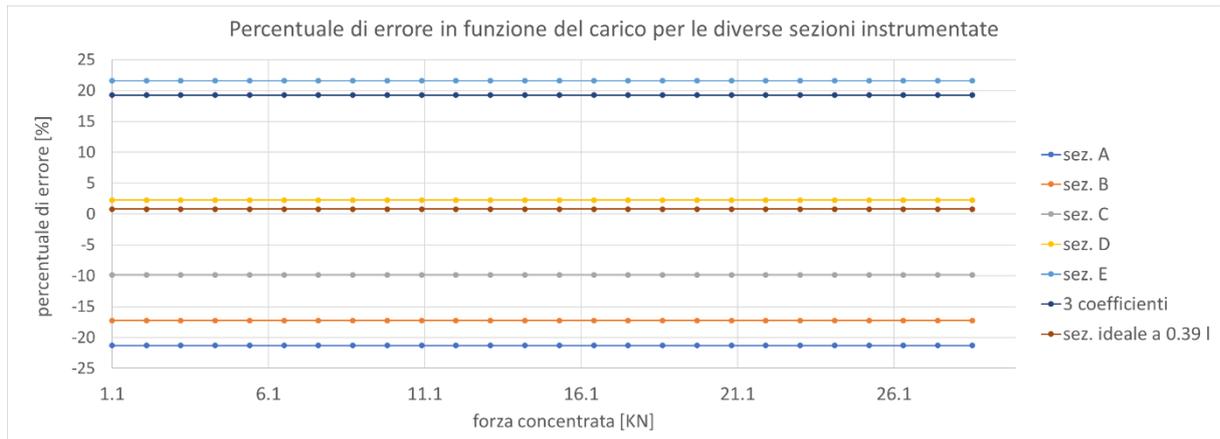


Figura 72: Errori del metodo dello sviluppo in serie di Fourier per una trave semplicemente appoggiata sollecitata da una forza concentrata applicata in mezzaria

La freccia con i 3 coefficienti è stata calcolata, come descritto al paragrafo introduttivo, risolvendo un sistema di equazioni linearmente indipendenti, considerando le curvature estrapolate dalle sezioni B, C, D. In questo caso utilizzare 3 curvature non ha prodotto un risultato soddisfacente.

Si nota che l'errore dei risultati ottenuti con il metodo dello sviluppo in serie è sempre inferiore al 22.5% e, per la sezione D, sempre inferiore al 2.5%.

I risultati migliori si otterrebbero estrapolando la curvatura "sperimentale" da una sezione posizionata ad 0.39 l dall'appoggio di sinistra: in questo caso infatti l'errore rispetto al valore teorico è inferiore allo 0.8 %.

## I modelli teorici

### 1.11.1.1.3 Forze concentrate simmetricamente disposte rispetto alla mezzeria

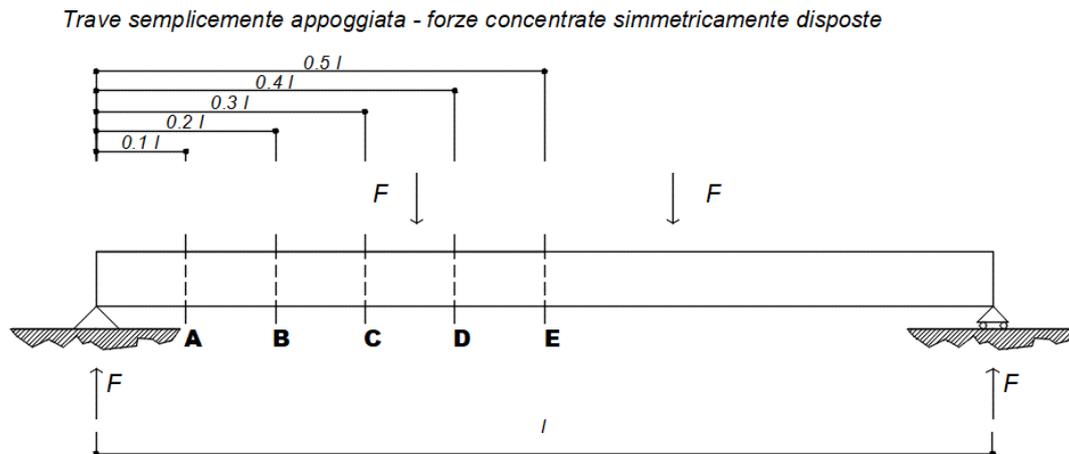


Figura 73: Trave semplicemente appoggiata sollecitata da due forze concentrate simmetricamente disposte

L'applicazione del principio dei lavori virtuali per lo schema statico considerato e la condizione di carico applicata (forze concentrate simmetricamente disposte rispetto alla mezzeria, a  $5/14 l$  dall'appoggio di sinistra) fornisce la seguente freccia in mezzeria:

$$f = \frac{305 Fl^3}{8232 EI_1} \quad (2.60)$$

Applicando il metodo dello sviluppo in serie di Fourier si ottengono i seguenti risultati.

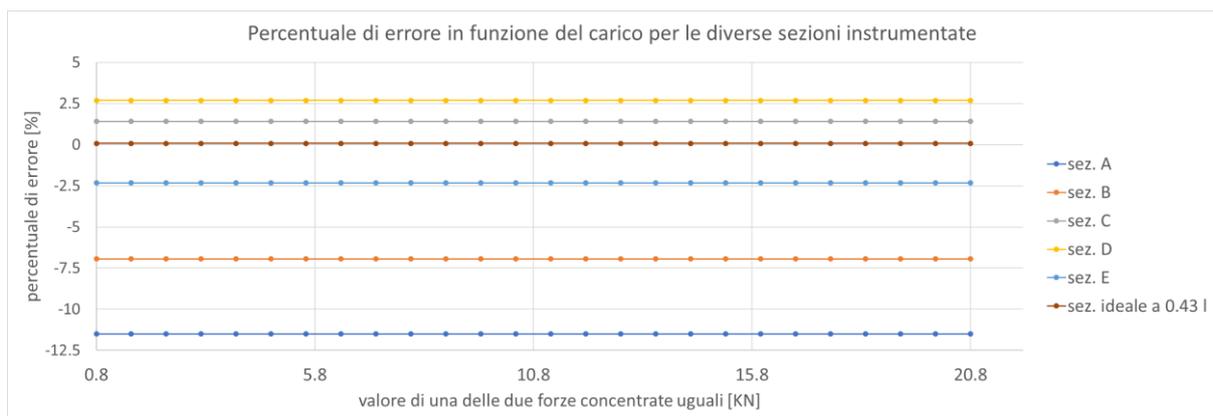


Figura 74: Errori del metodo dello sviluppo in serie di Fourier per una trave semplicemente appoggiata sollecitata da due forze concentrate simmetricamente disposte

La freccia con i 3 coefficienti è stata calcolata, come descritto al paragrafo introduttivo, risolvendo un sistema di equazioni linearmente indipendenti, considerando le curvature

## Metodo dello sviluppo in serie di Fourier

estrapolate dalle sezioni B, C, D. In questo caso utilizzare 3 curvatures non ha prodotto un risultato soddisfacente.

Si nota che l'errore dei risultati ottenuti con il metodo dello sviluppo in serie è sempre inferiore al 12.5%, e, per le sezioni C ed E, sempre inferiore al 2.5%.

I risultati migliori si otterrebbero estrapolando la curvatura "sperimentale" da una sezione posizionata a  $0.43 l$  dall'appoggio di sinistra: in questo caso infatti l'errore rispetto al valore teorico è inferiore allo 0.1 %.

### 1.11.1.1.4 Forza concentrata disposta in un punto generico

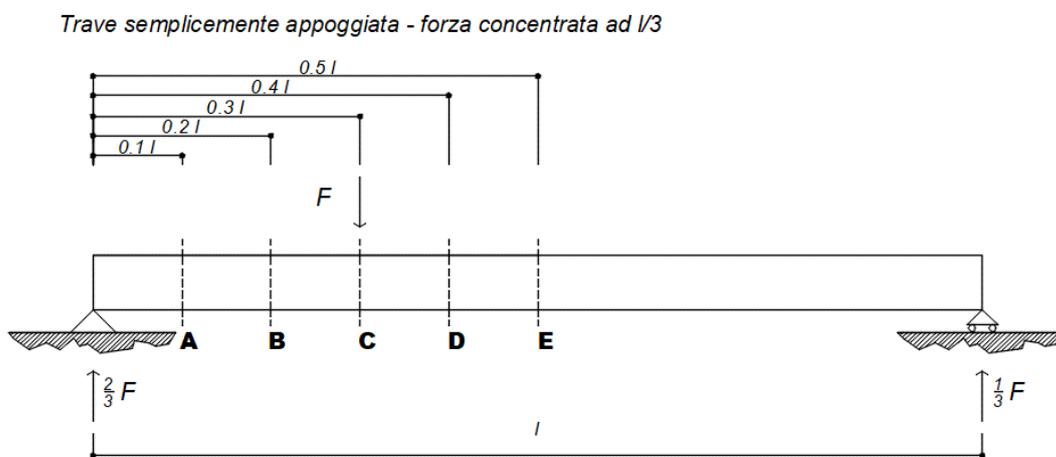


Figura 75: Trave semplicemente appoggiata con forza concentrata disposta in un punto generico

L'applicazione del principio dei lavori virtuali per lo schema statico considerato e la condizione di carico applicata (forza concentrata disposta in un punto generico, a  $l/3$  dall'appoggio di sinistra) fornisce la seguente freccia in mezzeria:

$$f = \frac{25 Fl^3}{648 EI_1} \quad (2.61)$$

Applicando il metodo dello sviluppo in serie di Fourier si ottengono i seguenti risultati.

## I modelli teorici

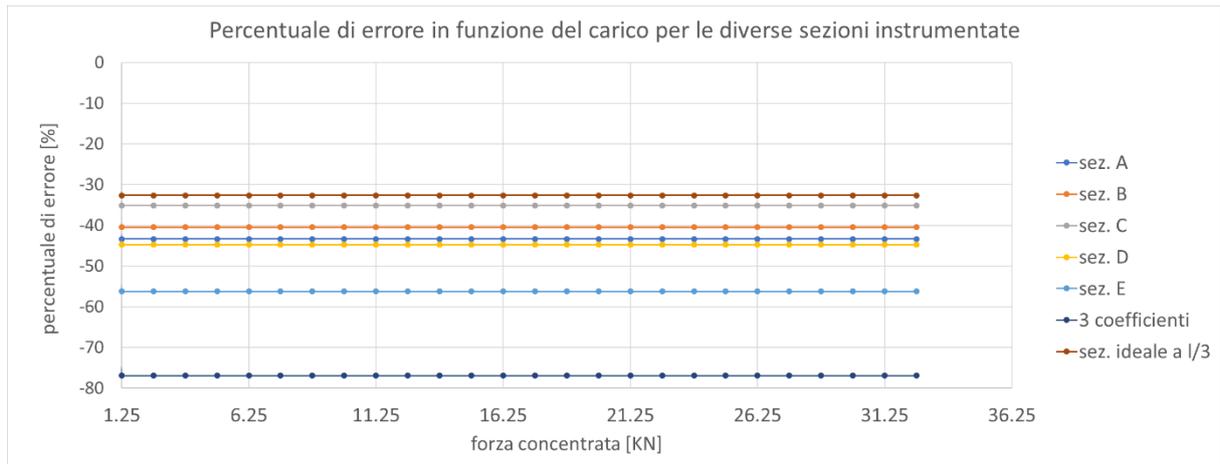


Figura 76: Errori del metodo dello sviluppo in serie di Fourier per una trave semplicemente appoggiata sollecitata da una forza concentrata disposta in maniera asimmetrica

La freccia con i 3 coefficienti è stata calcolata, come descritto al paragrafo introduttivo, risolvendo un sistema di equazioni linearmente indipendenti, considerando le curvature estrapolate dalle sezioni B, C, D. In questo caso utilizzare 3 curvature non ha prodotto un risultato soddisfacente.

Si nota che l'errore dei risultati ottenuti con il metodo dello sviluppo in serie è sempre superiore al 30%, pertanto sembrerebbe che il metodo in oggetto non riesca a fornire risultati soddisfacenti in una condizione di carico asimmetrica.

I risultati migliori si otterrebbero estrapolando la curvatura "sperimentale" da una sezione posizionata a  $l/3$  dall'appoggio di sinistra, ovvero esattamente nello stesso punto di applicazione della forza concentrata: in questo caso infatti l'errore rispetto al valore teorico è in ogni caso elevato e pari al 32.6 %.

## Metodo dello sviluppo in serie di Fourier

### 1.11.1.1.5 Carico uniformemente distribuito e forza concentrata pari ad un decimo della sua risultante in mezzeria

Trave semplicemente appoggiata - carico uniformemente distribuito e forza concentrata in mezzeria

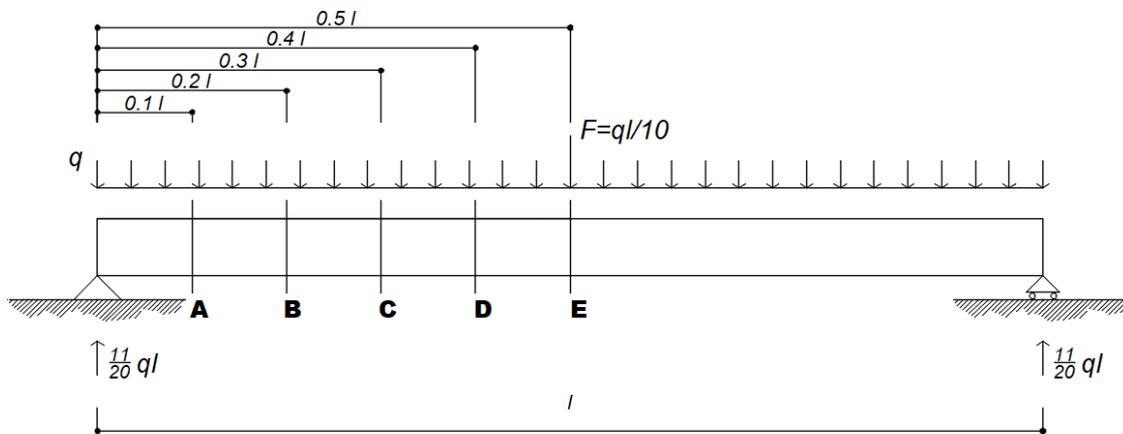


Figura 77: Trave semplicemente appoggiata con carico distribuito e forza concentrata in mezzeria

L'applicazione del principio dei lavori virtuali per lo schema statico considerato e la condizione di carico applicata (forza concentrata disposta in un punto generico, a  $l/3$  dall'appoggio di sinistra) fornisce la seguente freccia in mezzeria:

$$f = \frac{29}{1920} \frac{ql^4}{EI_1} \quad (2.62)$$

Applicando il metodo dello sviluppo in serie di Fourier si ottengono i seguenti risultati.

## I modelli teorici

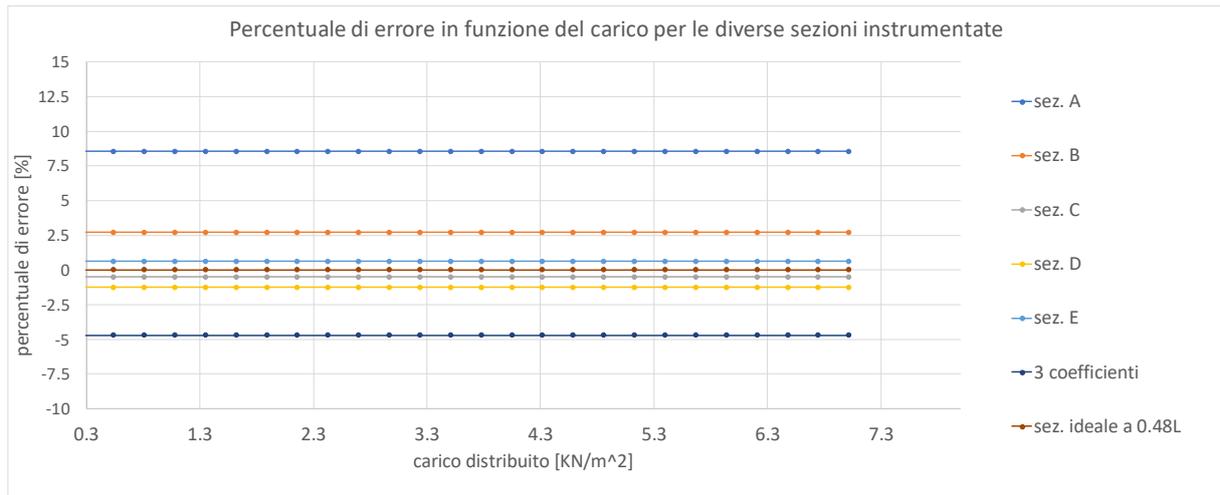


Figura 78: Errori del metodo dello sviluppo in serie di Fourier per una trave semplicemente appoggiata sollecitata da un carico uniformemente distribuito e una forza concentrata in mezzzeria

La freccia con i 3 coefficienti è stata calcolata, come descritto al paragrafo introduttivo, risolvendo un sistema di equazioni linearmente indipendenti, considerando le curvature estrapolate dalle sezioni B, C, D. In questo caso utilizzare 3 curvature ha prodotto un risultato soddisfacente, l'errore è infatti inferiore al 5%.

Si nota che l'errore dei risultati ottenuti con il metodo dello sviluppo in serie è sempre inferiore al 10%, e, per le sezioni C, D ed E, sempre inferiore al 1.5%.

I risultati migliori si otterrebbero estrapolando la curvatura "sperimentale" da una sezione posizionata ad  $0.48L$  dall'appoggio di sinistra: in questo caso infatti l'errore rispetto al valore teorico è inferiore allo 0.01 %.

### 1.11.1.2 Trattazione sperimentale

Sono state effettuate nel 2006 alcune prove sperimentali presso il laboratorio del DISEG (Dipartimento di Ingegneria strutturale, edile e geotecnica) del Politecnico di Torino<sup>62</sup>.

Travi in semplice appoggio (6 travi), di diversa lunghezza, sono state sollecitate con condizioni di carico differenti e ne è stata misurata la freccia in mezzzeria.

Le caratteristiche geometriche delle travi e le proprietà meccaniche dei materiali utilizzati sono state introdotte nei paragrafi precedenti, sia per il metodo del diagramma Momento – Curvatura, sia per il metodo polinomiale.

<sup>62</sup> DEBERNARDI P.G., TALIANO M., 2006

## Metodo dello sviluppo in serie di Fourier

Sulle travi erano state installate, in più sezioni, delle coppie di estensimetri (sul lembo compresso e su quello teso) le quali, misurando la deformazione relativa, hanno permesso di ricostruire il valore della curvatura media per una sezione. Questo valore di curvatura viene definito “sperimentale”, ed è il dato di partenza per l’applicazione del metodo dello sviluppo in serie di Fourier.

Oggetto dei paragrafi successivi è l’applicazione del metodo presentato, facendo uso dei dati reali provenienti dalle prove di laboratorio appena richiamate, allo scopo di valutarne affidabilità e precisione.

### 1.11.1.2.1 Applicazione pratica (ignorando il contributo del taglio)

Sono riportati i risultati del metodo per le travi 1,2,3,5 e 6 ignorando il contributo deformativo dato dalla sollecitazione tagliante. Le misure indicate nelle immagini seguenti sono espresse in mm.

#### 1.11.1.2.1.1 Trave 1

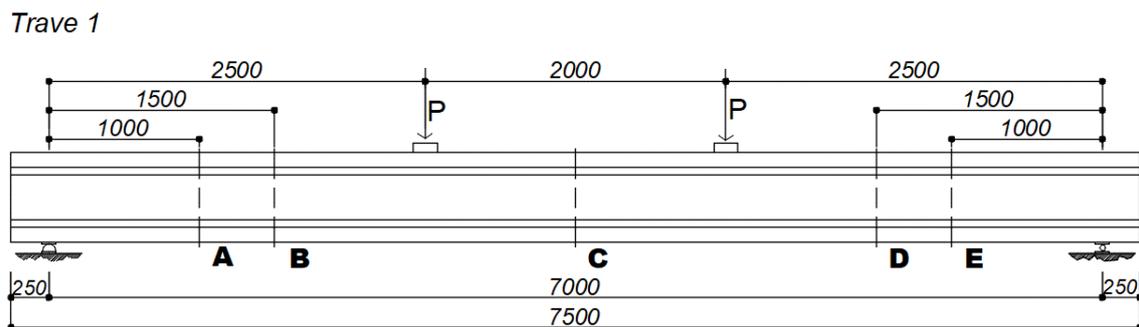


Figura 79: Trave 1

L’applicazione dello sviluppo in serie di Fourier, utilizzando 3 coefficienti, è stata fatta imponendo 3 condizioni al contorno nelle sezioni B, C ed E.

## I modelli teorici

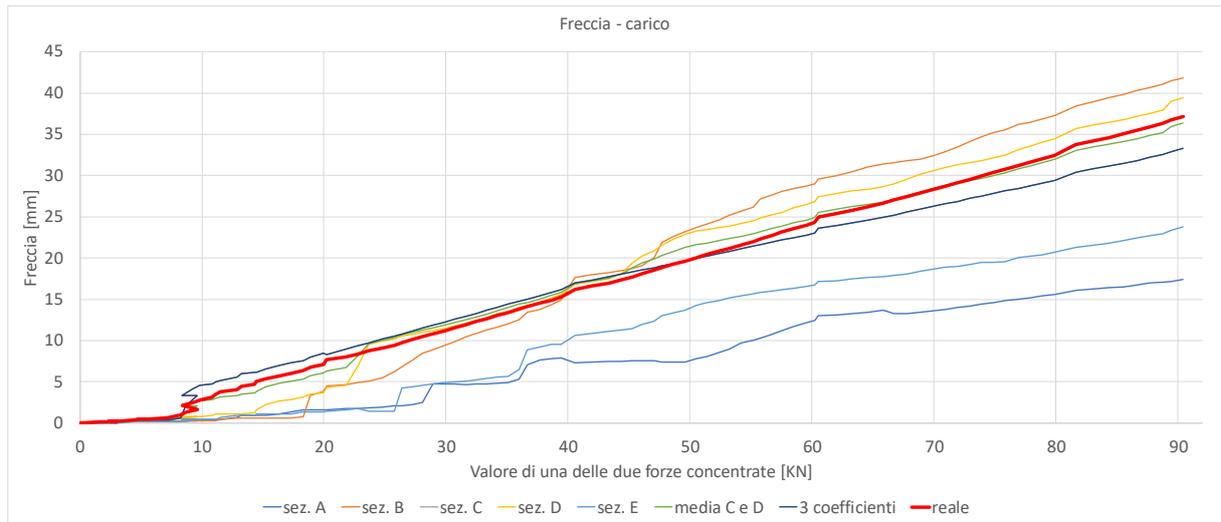


Figura 80: Diagramma freccia - carico, Trave 1

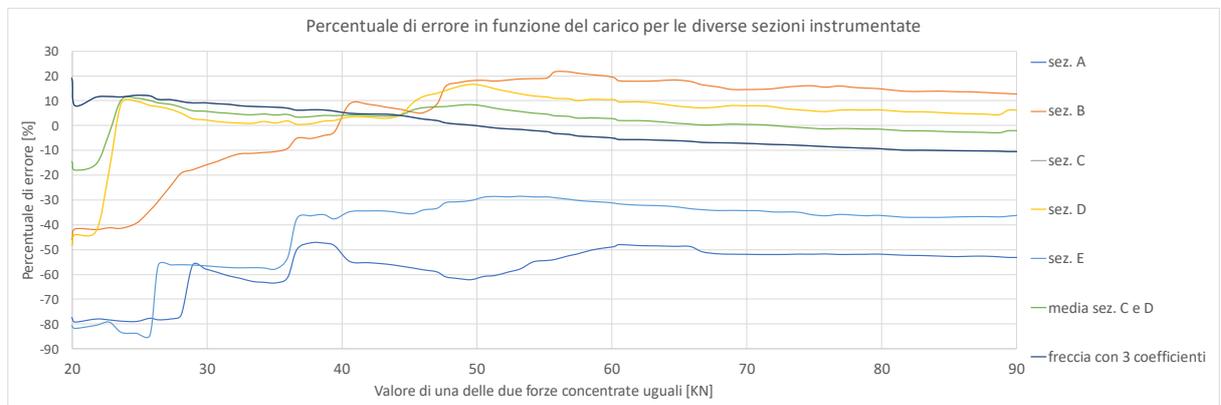


Figura 81: Diagramma errore della previsione - carico applicato, Trave 1

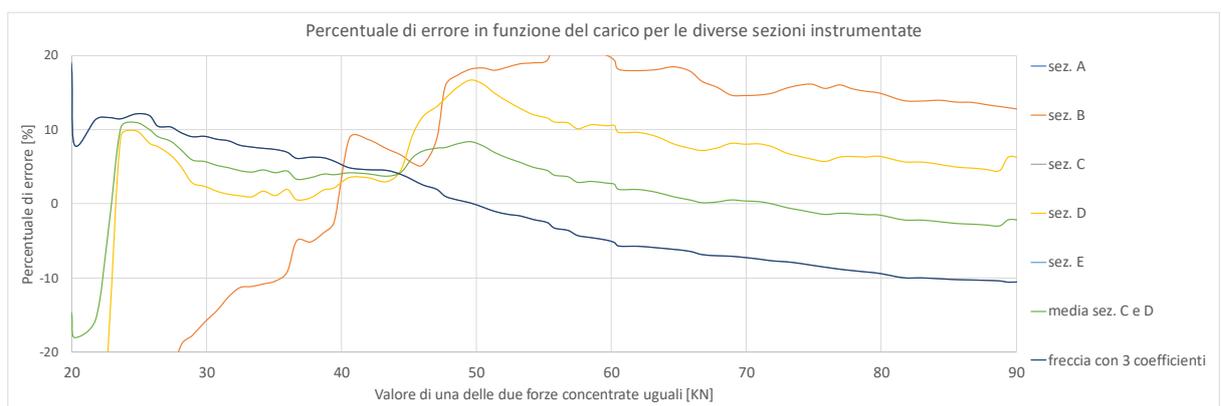


Figura 82: Diagramma errore della previsione - carico applicato, range +20%/-20%, Trave 1

## Metodo dello sviluppo in serie di Fourier

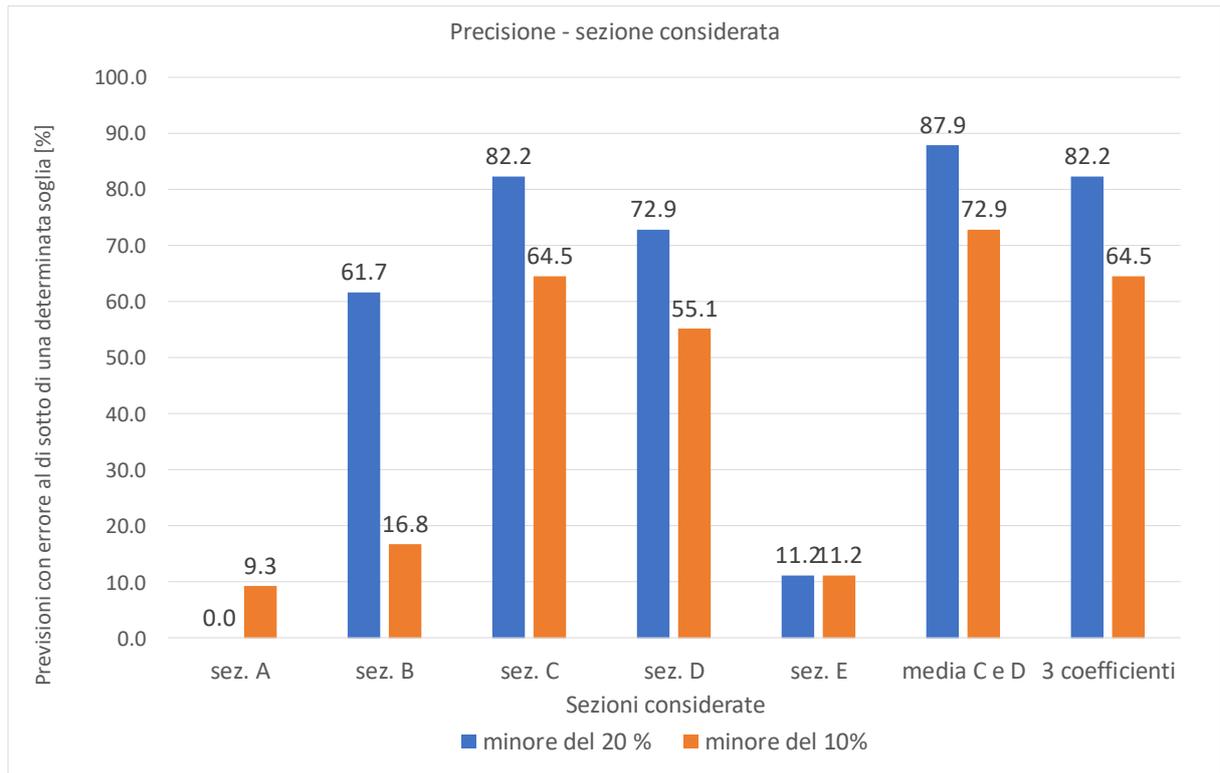


Figura 83: Diagramma precisione previsione - sezione considerata, Trave 1

### 1.11.1.2.1.2 Trave 2

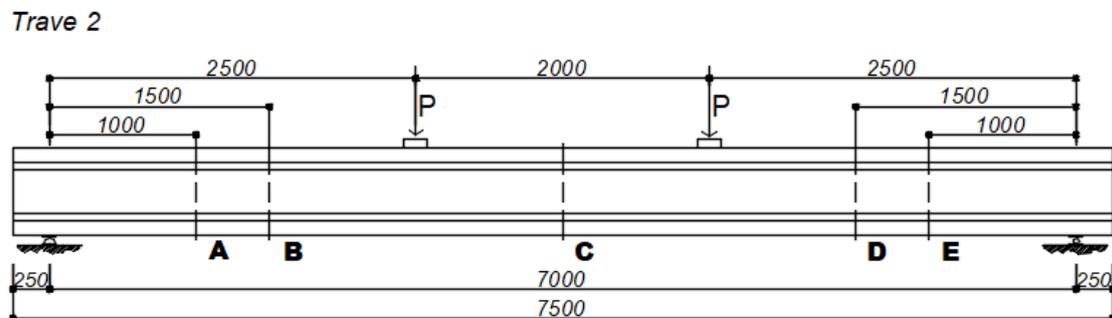


Figura 84: Trave 2

L'applicazione dello sviluppo in serie di Fourier, utilizzando 3 coefficienti, è stata fatta imponendo 3 condizioni al contorno nelle sezioni B, C ed E.

## I modelli teorici

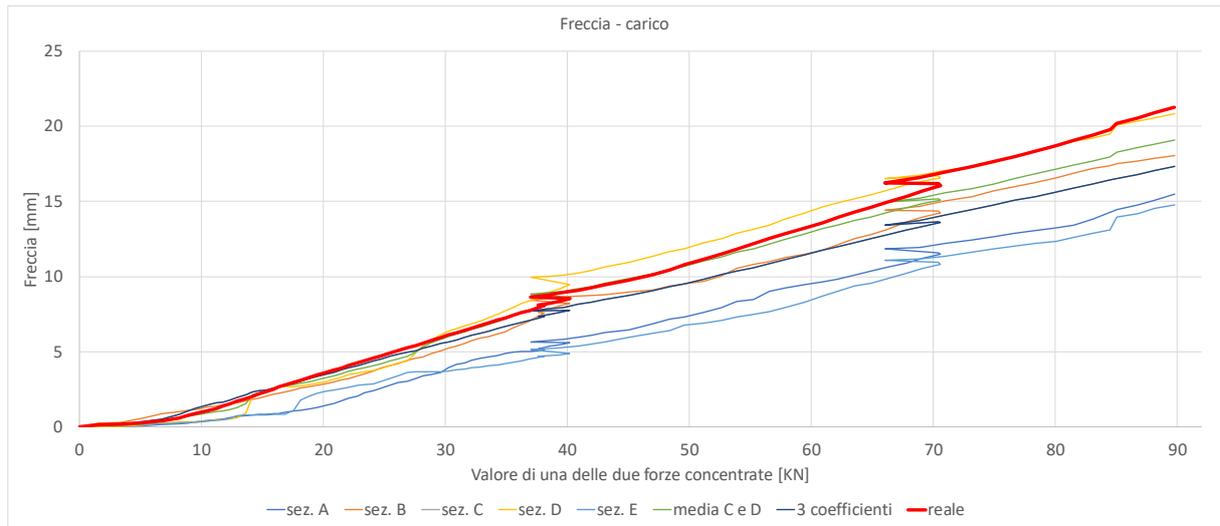


Figura 85: Diagramma freccia - carico, Trave 2

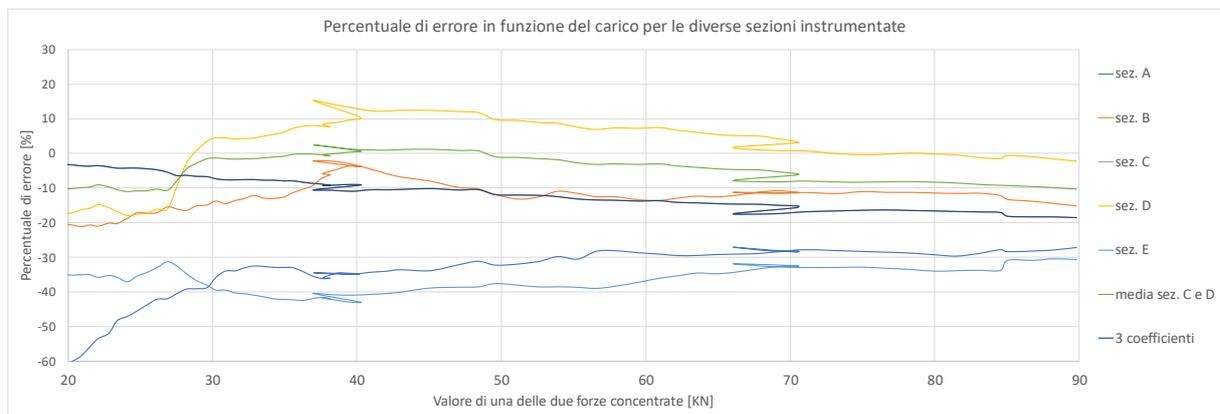


Figura 86: Diagramma errore previsione - carico applicato, Trave 2

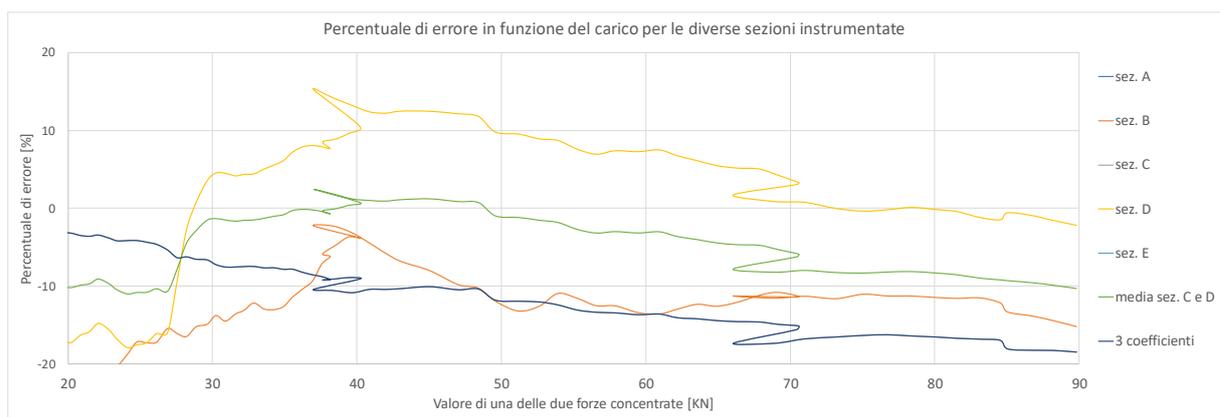


Figura 87: Diagramma errore della previsione - carico applicato, range +20%/-20%, Trave 2

## Metodo dello sviluppo in serie di Fourier

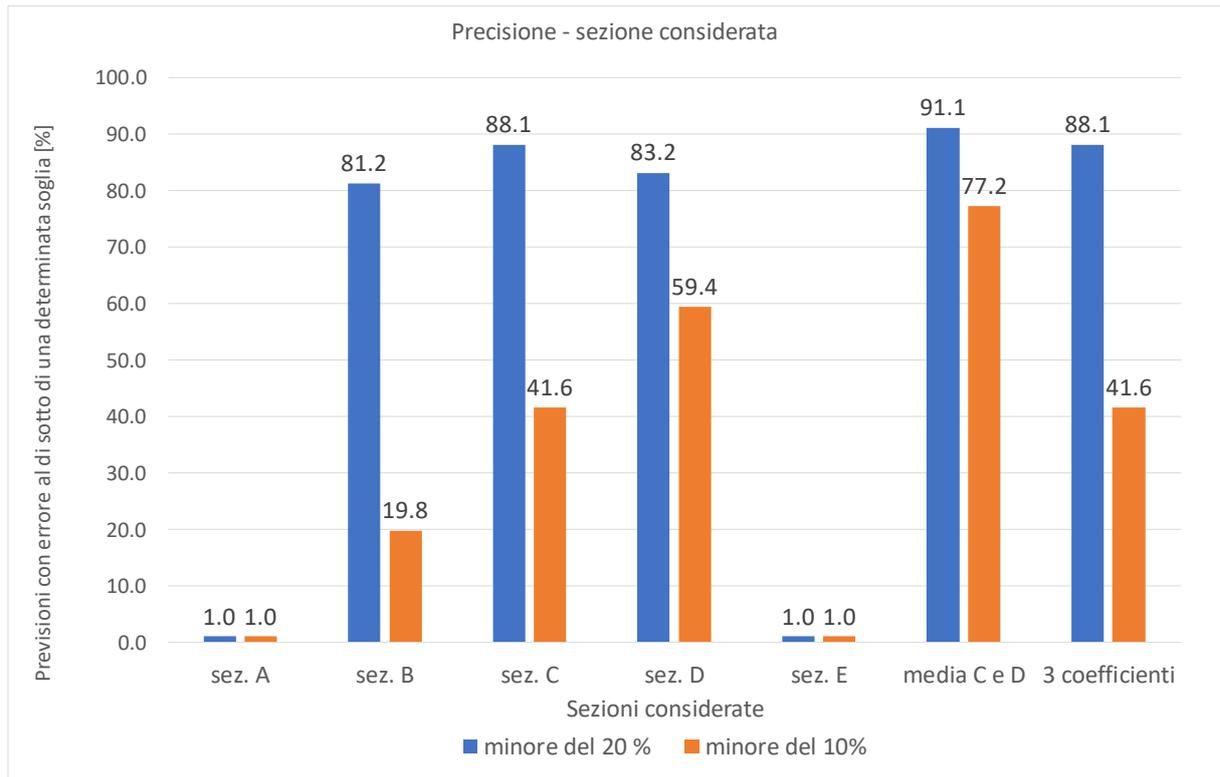


Figura 88: Diagramma precisione della previsione - sezione considerata, Trave 2

### 1.11.1.2.1.3 Trave 3

#### Trave 3

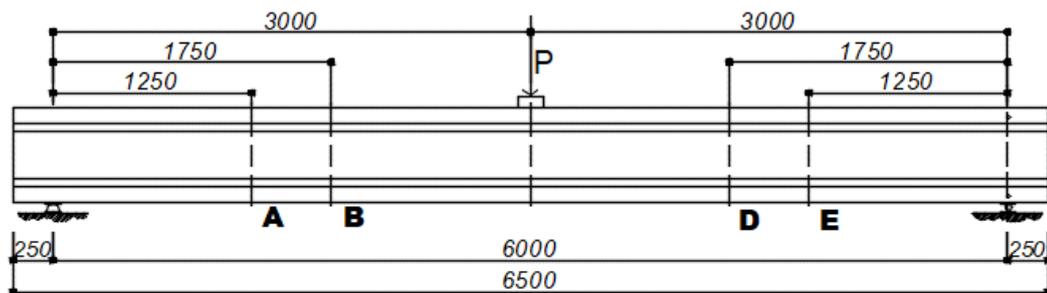


Figura 89: Trave 3

L'applicazione dello sviluppo in serie di Fourier, utilizzando 3 coefficienti, è stata fatta imponendo 3 condizioni al contorno nelle sezioni A, B e D.

## I modelli teorici

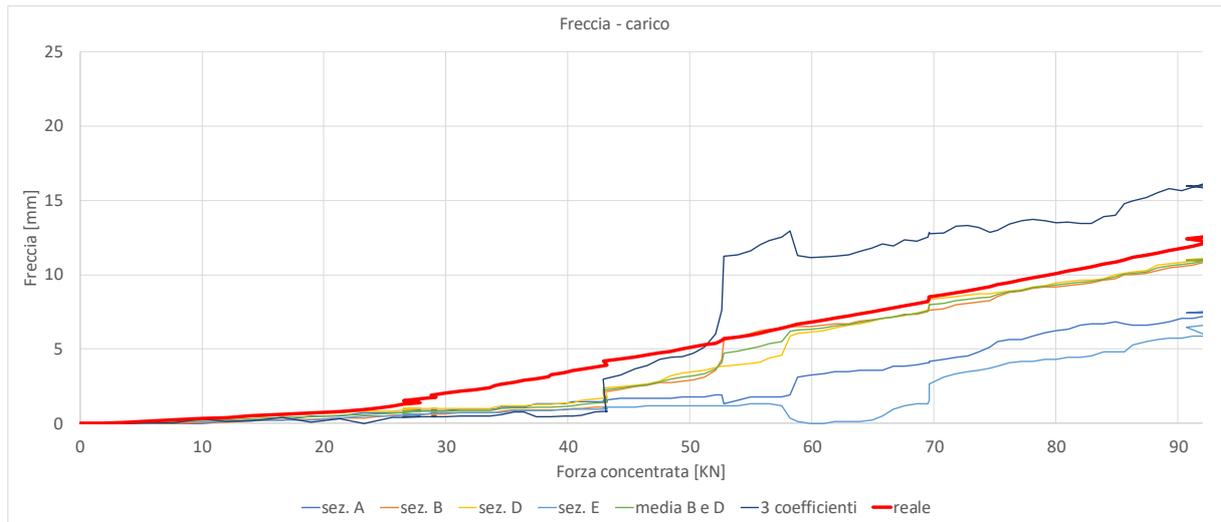


Figura 90: Diagramma freccia - carico, Trave 3

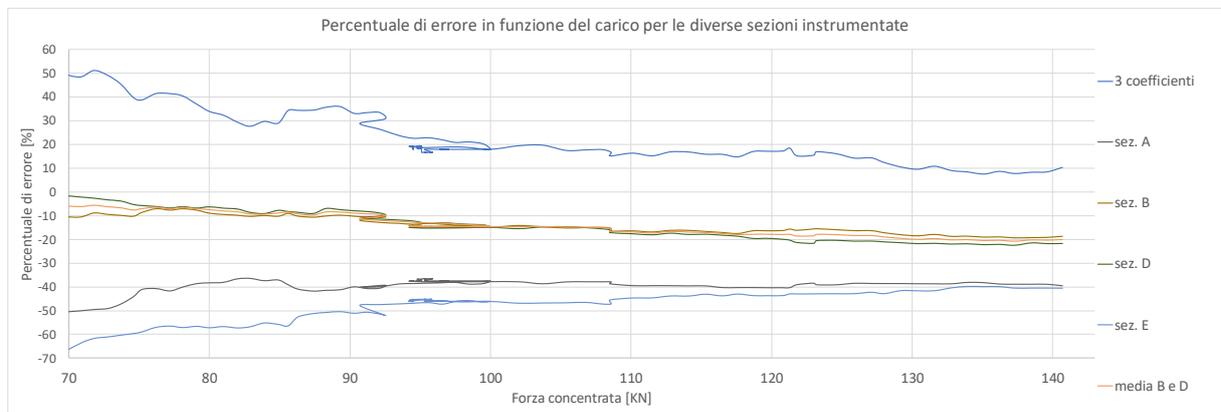


Figura 91: Diagramma errore della previsione - carico applicato, Trave 3

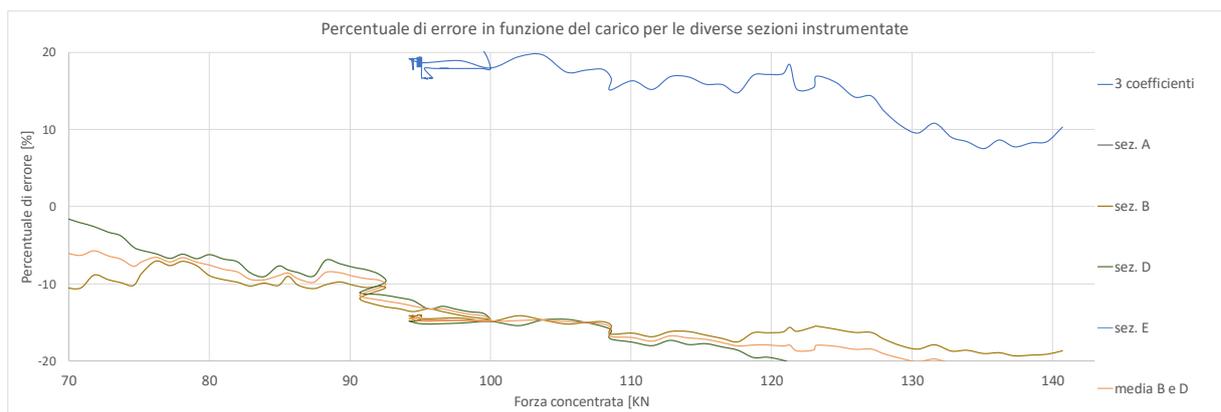


Figura 92: Diagramma errore della previsione - carico applicato, range +20%/-20%, Trave 3

## Metodo dello sviluppo in serie di Fourier

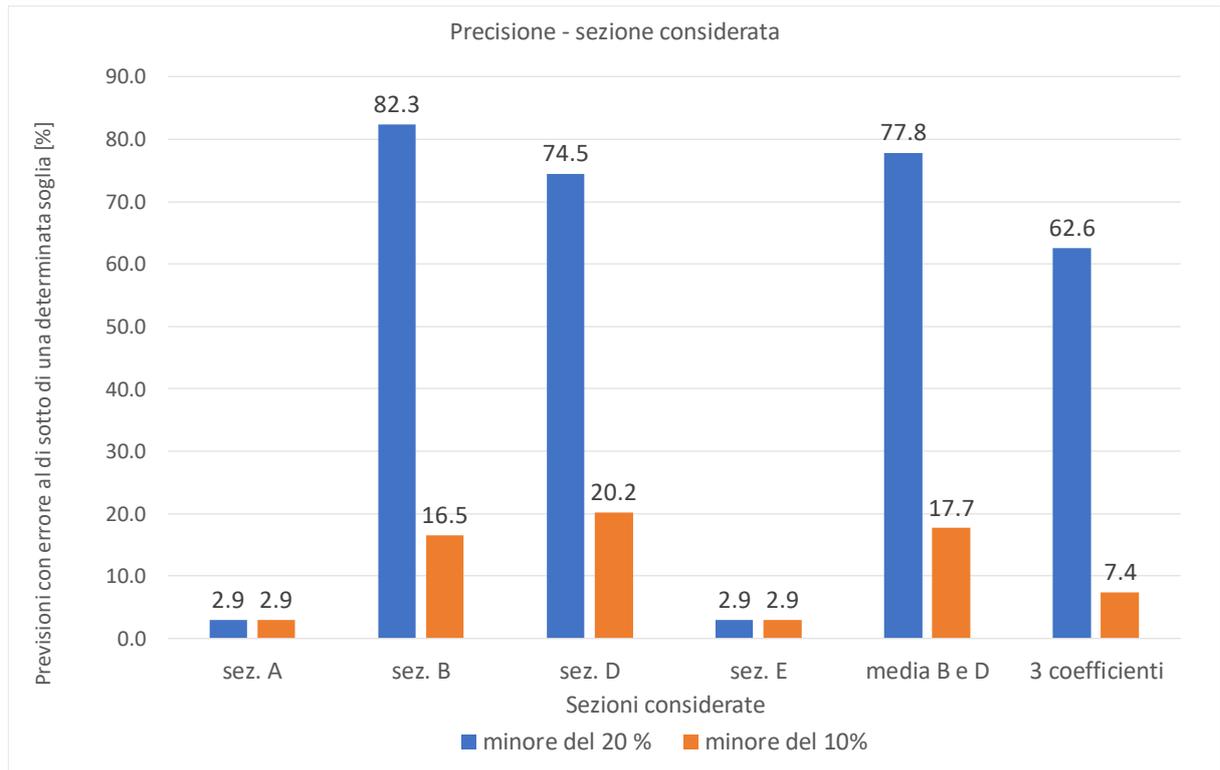


Figura 93: Diagramma precisione della previsione - sezione considerata, Trave 3

### 1.11.1.2.1.4 Trave 5

#### Trave 5

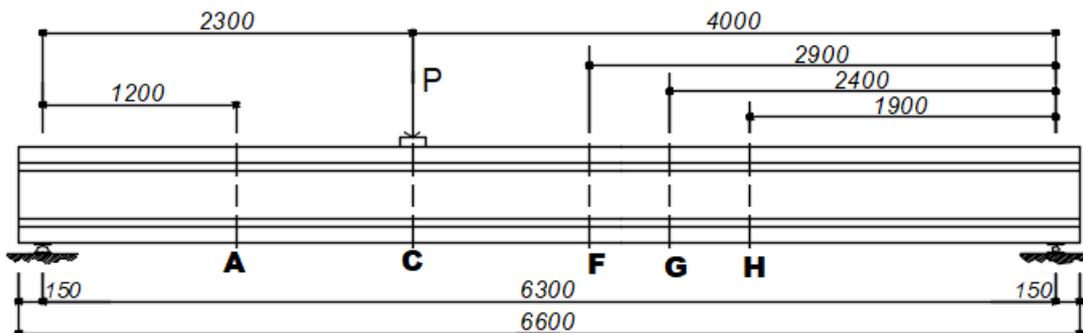


Figura 94: Trave 5

L'applicazione dello sviluppo in serie di Fourier, utilizzando 3 coefficienti, è stata fatta imponendo 3 condizioni al contorno nelle sezioni A, C e G.

## I modelli teorici

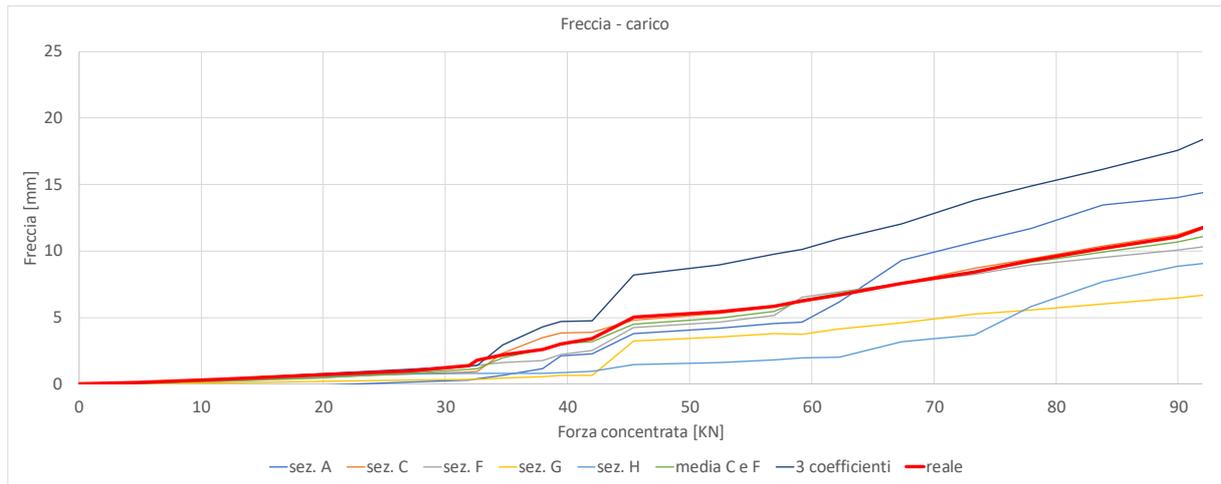


Figura 95: Diagramma freccia - carico, Trave 5

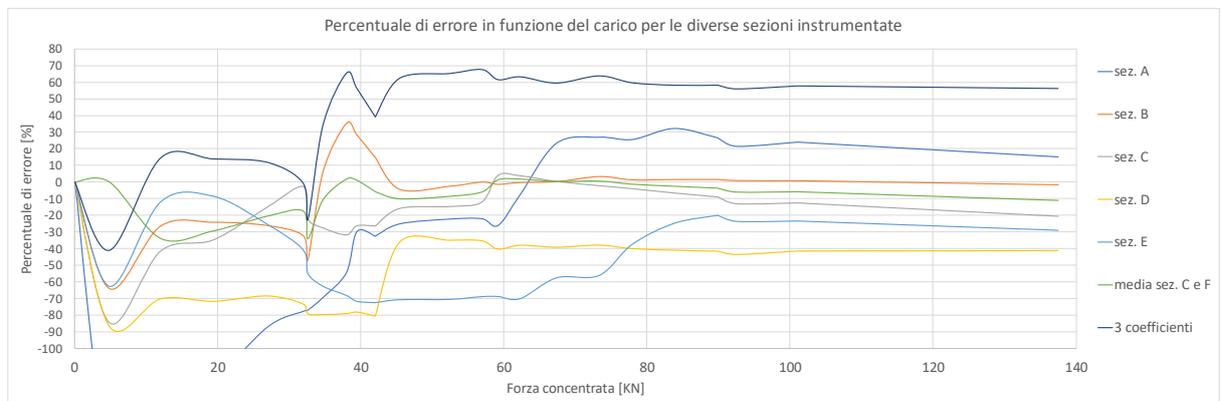


Figura 96: Diagramma errore della previsione - carico applicato, Trave 5

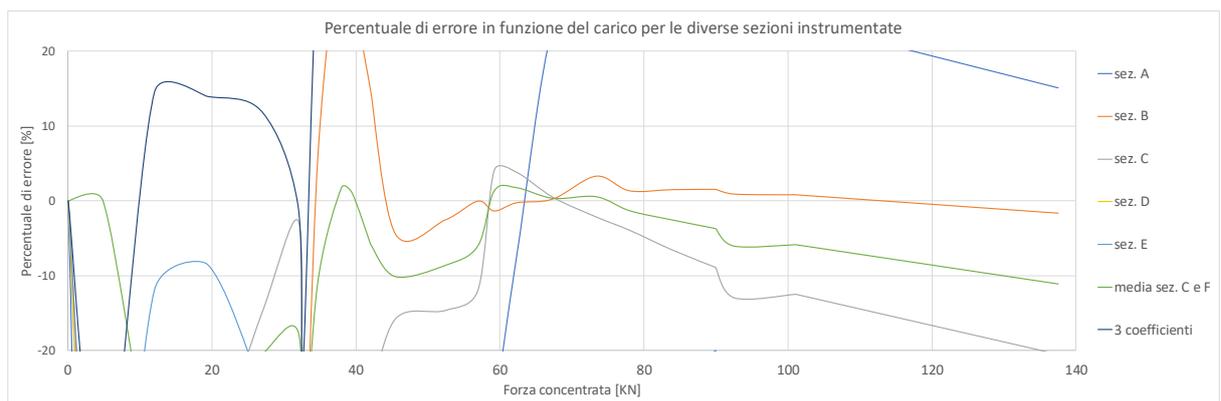


Figura 97: Diagramma errore della previsione - carico applicato, range +20%/-20%, Trave 5

## Metodo dello sviluppo in serie di Fourier

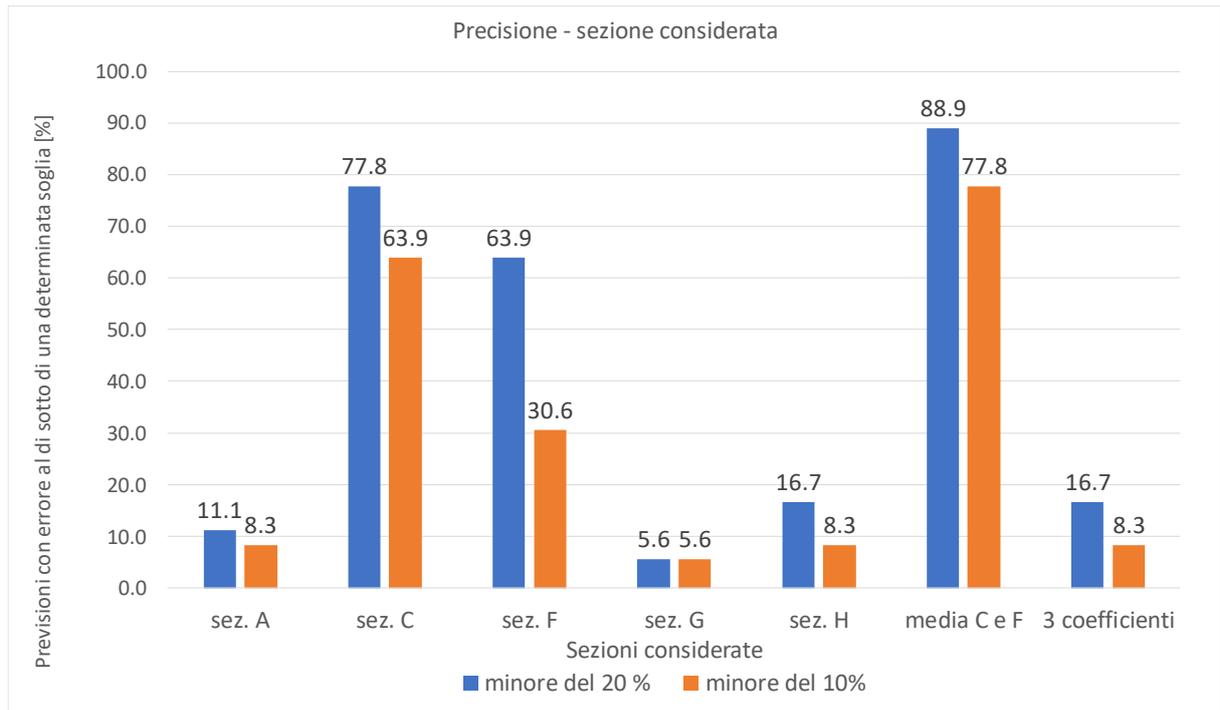


Figura 98: Diagramma precisione della previsione - sezione considerata, Trave 5

### 1.11.1.2.1.5 Trave 6

#### Trave 6

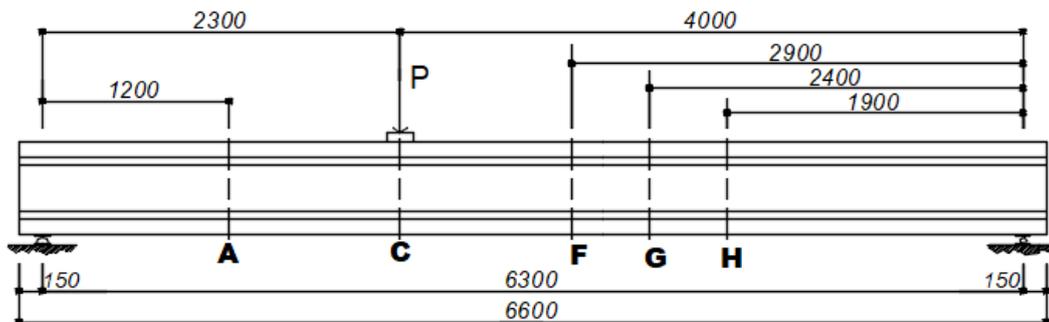


Figura 99: Trave 6

L'applicazione dello sviluppo in serie di Fourier, utilizzando 3 coefficienti, è stata fatta imponendo 3 condizioni al contorno nelle sezioni A, C e G.

## I modelli teorici

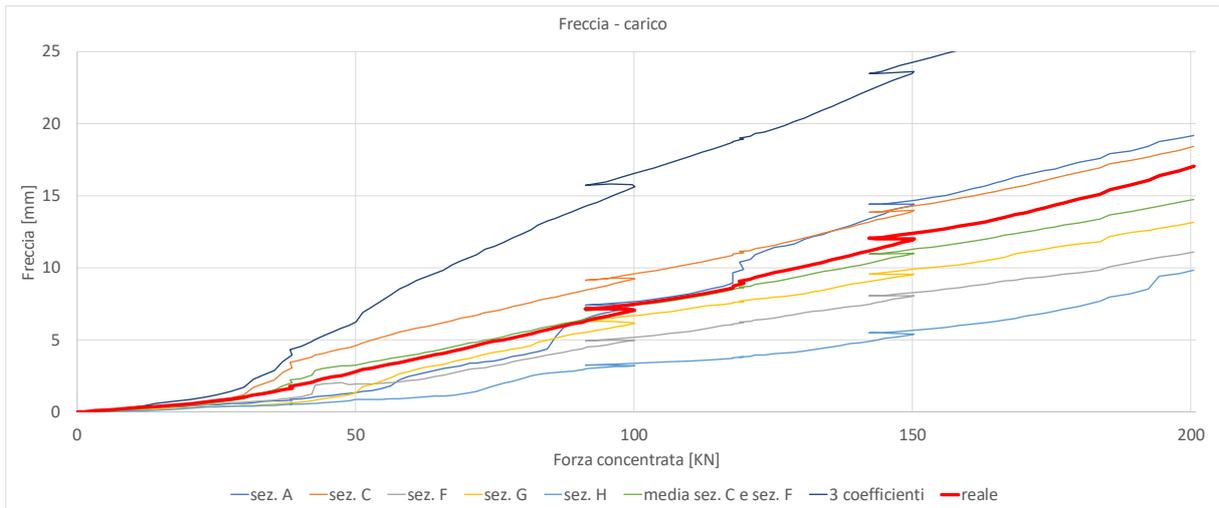


Figura 100: Diagramma freccia - carico, Trave 6

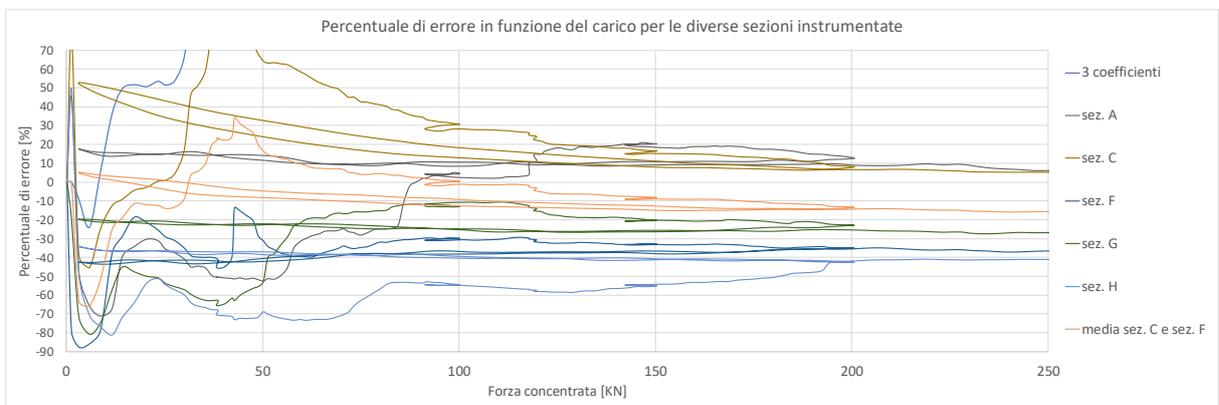


Figura 101: Diagramma errore della previsione - carico applicato, Trave 6

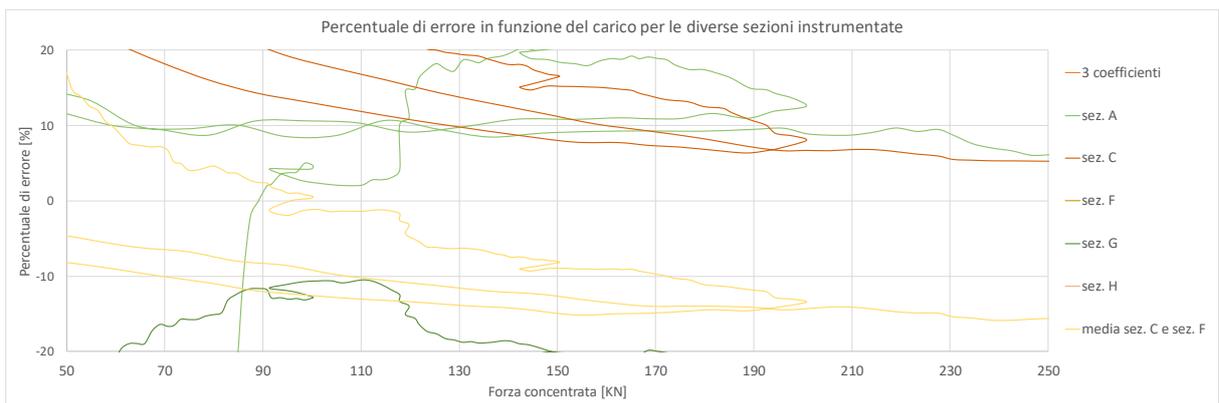


Figura 102: Diagramma errore della previsione - carico applicato, range +20%/-20%, Trave 6

## Metodo dello sviluppo in serie di Fourier

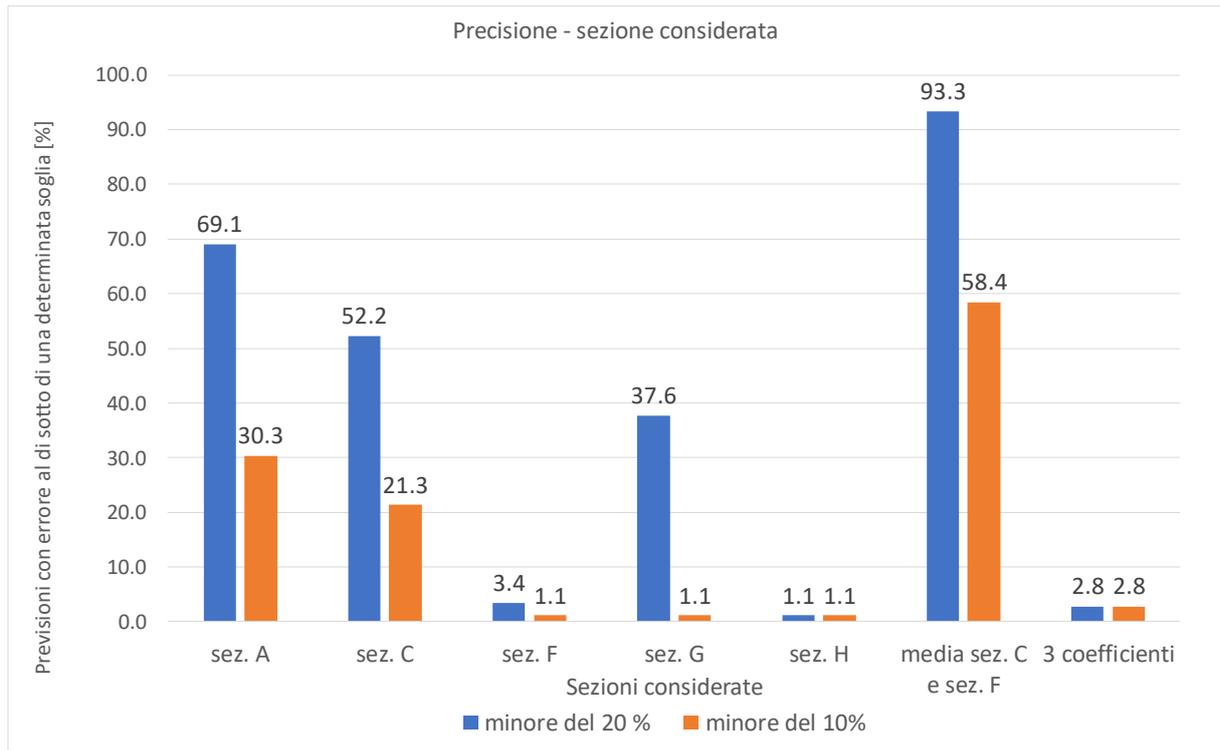


Figura 103: Diagramma precisione della previsione - sezione considerata, Trave 6

### 1.11.1.2.2 Considerazioni sull'applicazione pratica

L'applicazione del metodo dello sviluppo in serie di Fourier, utilizzando i dati reali, ha fornito dei buoni risultati. È sufficiente infatti conoscere un solo valore di curvatura sperimentale per calcolare, con buona approssimazione ed affidabilità, la freccia in un punto notevole della trave. In particolar modo per le condizioni di carico simmetriche è stato notato che i risultati migliori si ottengono utilizzando la sezione di mezzeria, o quella ad un quarto del suo sviluppo. In alcuni valori di carico la media ha fornito risultati con errori inferiori al 10 % nel 90% dei casi.

Utilizzare 3 coefficienti, e quindi 3 curvature, sembra incrementare l'affidabilità delle previsioni, ma bisogna assicurare un corretto distanziamento tra i sensori. La situazione ottimale è stata individuata nel posizionamento di un sensore nella mezzeria, e due sensori rispettivamente a  $\frac{1}{4} L$  e a  $\frac{3}{4} L$ .

Per le condizioni di carico non simmetriche il risultato migliore è stato ottenuto posizionando una coppia di sensori in corrispondenza del punto di applicazione del carico ed un'altra coppia in prossimità della mezzeria.

Viene riportata una tabella riassuntiva delle considerazioni appena svolte.

<b>Numero delle curvature sperimentali disponibili</b>	<b>Condizioni di carico simmetriche</b>	<b>Condizioni di carico non simmetriche</b>
1	$\frac{1}{2} l$ o $\frac{1}{4} l$	In corrispondenza del punto di applicazione della forza
2	$\frac{1}{2} l$ e $\frac{1}{4} l$	In corrispondenza del punto di applicazione della forza e in mezzeria
3	$\frac{1}{4} l$ , $\frac{1}{2} l$ , $\frac{3}{4} l$	$\frac{1}{4} l$ , $\frac{1}{2} l$ , $\frac{3}{4} l$

Tabella 11: Posizionamento ottimale dei sensori in funzione delle condizioni di carico e del numero degli strumenti disponibili

#### 1.11.1.2.3 Applicazione pratica (considerando il contributo del taglio)

La deformazione di una trave è in parte dovuta alla sollecitazione flettente ed in parte a quella tagliante. La deformazione indotta dal taglio è quasi sempre trascurata in fase di progettazione, dal momento che costituisce una percentuale ridotta rispetto a quella generata dal momento flettente. Un approccio di questo tipo è tollerabile per rapporti luce/altezza superiori a 12, mentre per valori inferiori diventa non del tutto cautelativo. In letteratura sono disponibili diversi studi sull'argomento, anche se pochi sembrerebbero individuare una metodologia unica e semplice, applicabile alla progettazione quotidiana. Recentemente è stato proposto un modello che consente di ottenere il rapporto (in percentuale) tra la freccia indotta dal taglio e quella indotta dal momento flettente<sup>63</sup>.

Il parametro  $f_{\text{shear}}/f_{\text{bending}}$  è ottenibile attraverso tabelle e grafici, in funzione di:

- Condizione vincolare (trave in semplice appoggio, doppiamente incastrata, ecc.);
- Resistenza caratteristica del calcestruzzo,  $f_{ck}$ ;
- Percentuale geometrica di armatura;
- Rapporto luce/altezza;
- Rapporto base maggiore/spessore dell'anima della sezione.

Le figure seguenti mostrano l'extrapolazione del valore  $f_{\text{shear}}/f_{\text{bending}}$  rispettivamente per le travi testate in laboratorio.

<sup>63</sup> DEBERNARDI P.G., TALIANO M., GUIGLIA M., 2011

## Metodo dello sviluppo in serie di Fourier

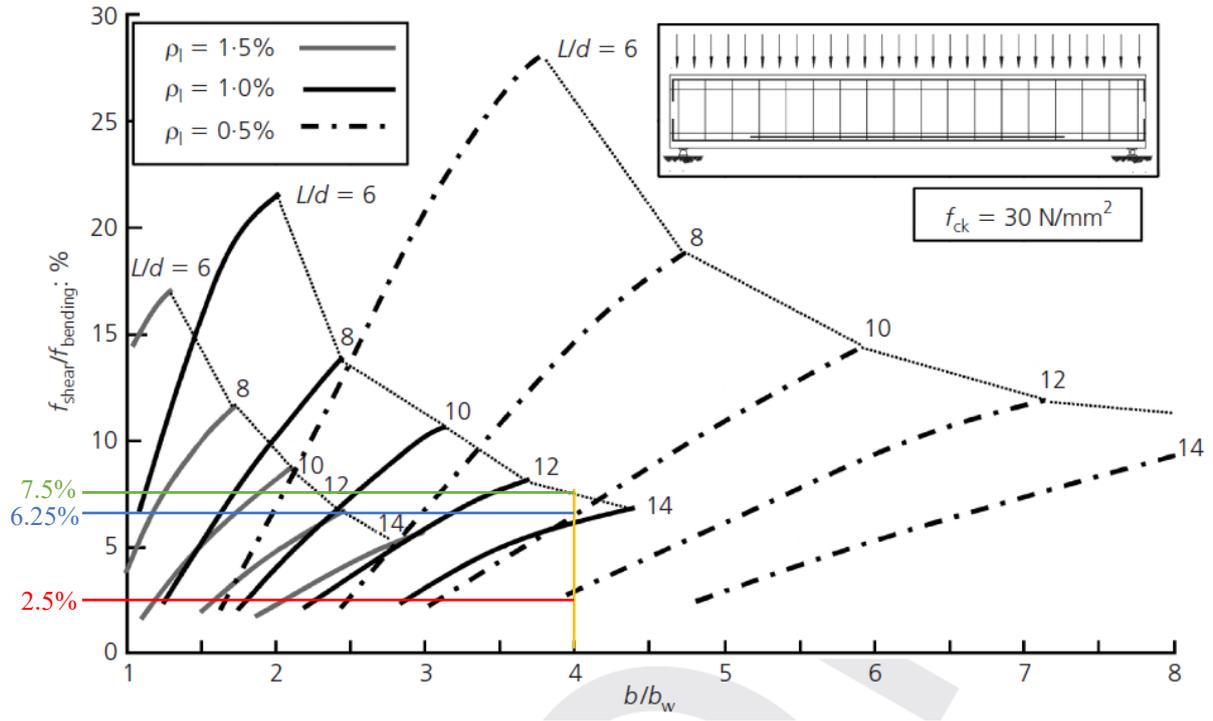


Figura 104: Estrapolazione del valore  $f_{shear}/f_{bending}$  per le travi 1, 2 e 3 (rosso, verde, blu)

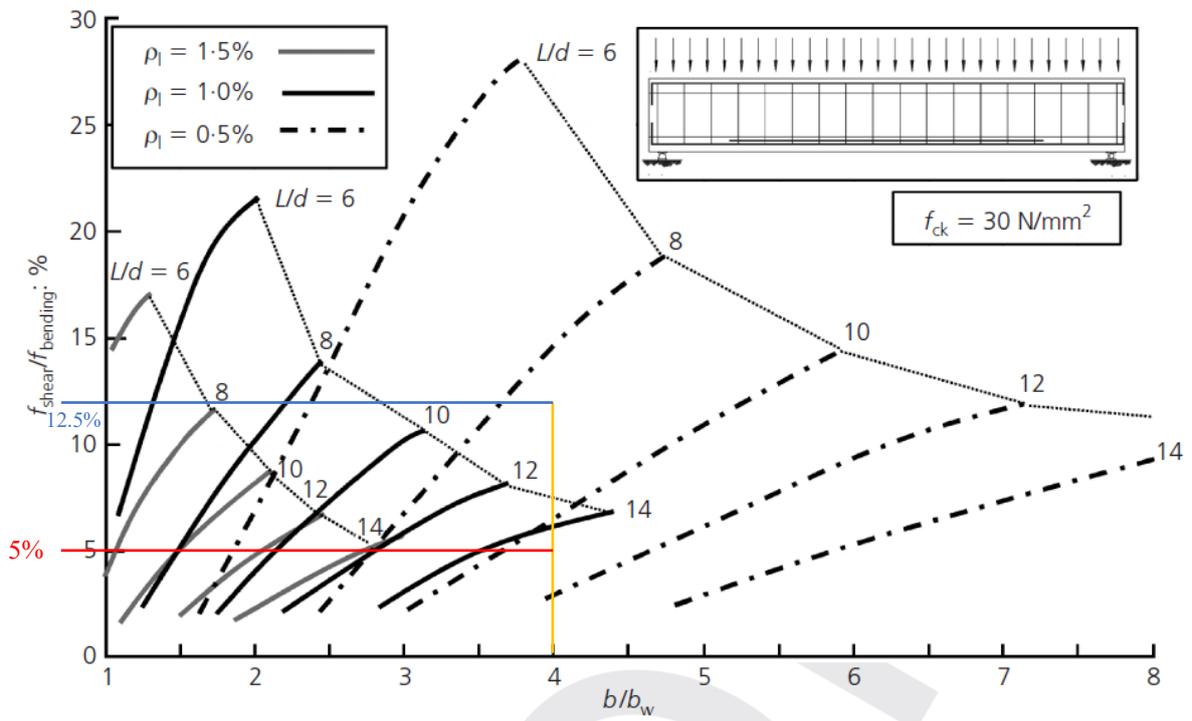


Figura 105: Estrapolazione del valore  $f_{shear}/f_{bending}$  per le travi 5 e 6 (rosso e blu)

La tabella seguente riassume i valori appena estrapolati.

## I modelli teorici

	$b/b_w$	$\rho_l$	L/d	$f_{\text{shear}}/f_{\text{bending}}$
Trave 1	4	0.45%	12.5	2.5%
Trave 2	4	0.80%	12.5	7.5%
Trave 3	4	0.45%	10.7	6.25%
Trave 5	4	0.45%	11.25	5.0%
Trave 6	4	0.80%	11.25	12.5%

Tabella 12: Valori  $f_{\text{shear}}/f_{\text{bending}}$  per le travi testate in laboratorio

Calcolando rispettivamente per ogni trave il rapporto  $f_{\text{shear}}/f_{\text{bending}}$ , si è proceduto a sommare alla freccia calcolata con il metodo dello sviluppo in serie di Fourier, la percentuale dovuta al taglio. La somma è stata eseguita solo quando la sollecitazione tagliante presente in almeno una sezione della trave avesse superato il valore critico secondo cui avviene la fessurazione per taglio. Questo valore, come suggerito da alcuni autori<sup>64</sup>, può essere espresso nel seguente modo:

$$V_{cr} = 0.15 \cdot \left(\frac{3 \cdot d}{M/V}\right)^{1/3} \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{200}{d}}\right) \cdot \left(\frac{100 \cdot A_{st}}{b_w \cdot d} \cdot f_{ck}\right)^{1/3} \cdot b_w \cdot d \quad (2.63)$$

dove i parametri indicati hanno il seguente significato:

d: altezza utile della sezione in mm;

$M/V$ : *shear length*, ovvero rapporto tra momento flettente e taglio;

$A_{st}$ : area dell'armatura longitudinale;

$b_w$ : spessore dell'anima della sezione;

$f_{ck}$ : resistenza caratteristica a compressione del calcestruzzo.

Sono riportati i risultati del metodo per le travi 1,2,3,5 e 6 considerando il contributo deformativo dato dalla sollecitazione tagliante.

<sup>64</sup> DEBERNARDI P.G., TALIANO M., GUIGLIA M., 2011

# Metodo dello sviluppo in serie di Fourier

## 1.11.1.2.3.1 Trave 1

Trave 1

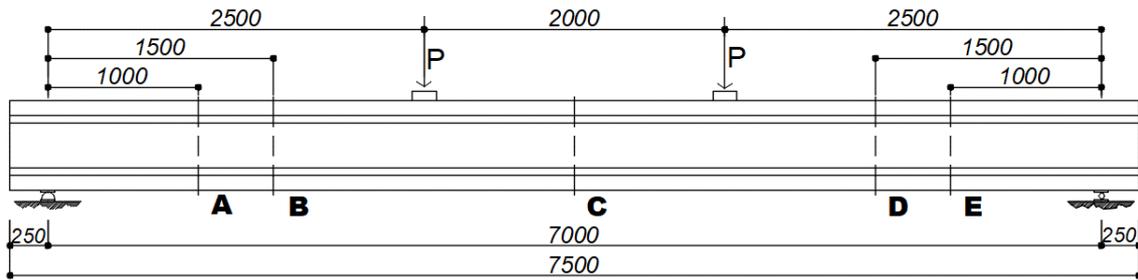


Figura 106: Trave 1

L'applicazione dello sviluppo in serie di Fourier, utilizzando 3 coefficienti, è stata fatta imponendo 3 condizioni al contorno nelle sezioni B, C e D.

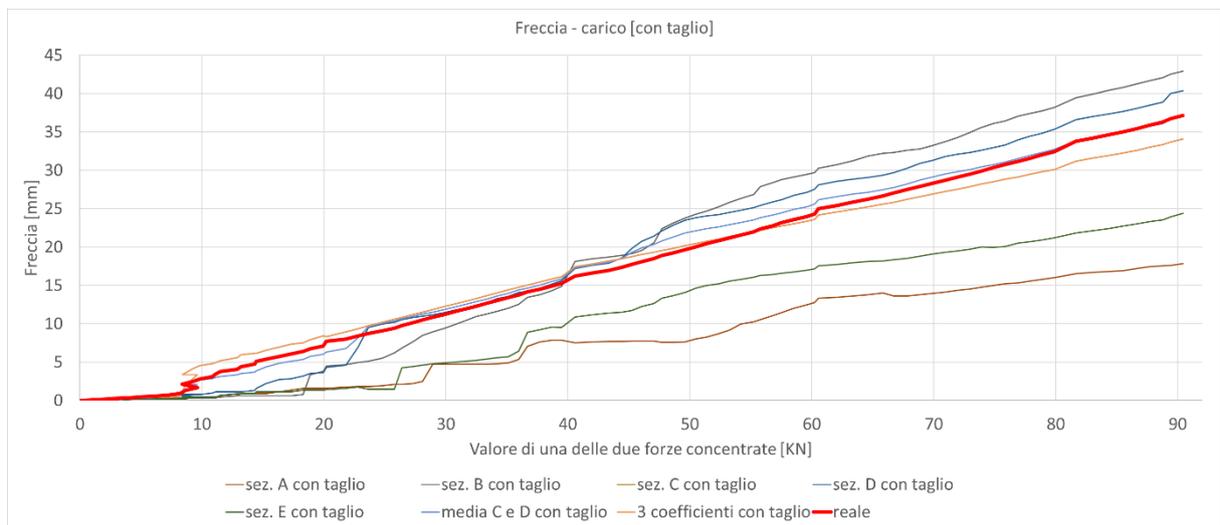


Figura 107: Diagramma freccia - carico, Trave 1, con taglio

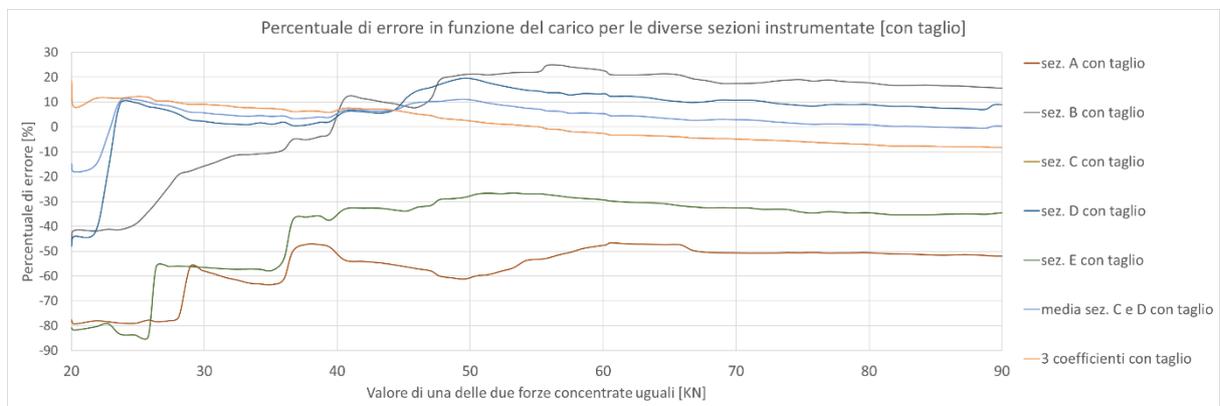


Figura 108: Diagramma errore della previsione - carico applicato, Trave 1, con taglio

## I modelli teorici

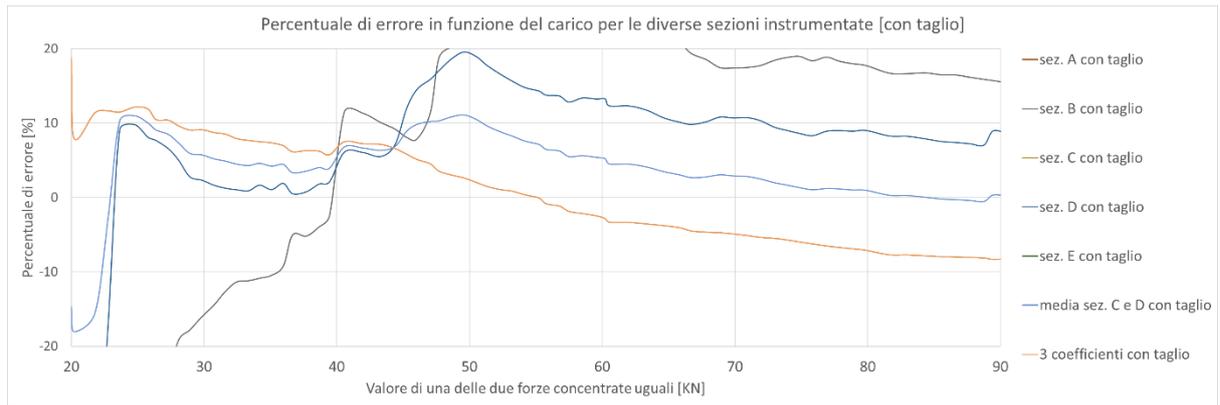


Figura 109: Diagramma errore della previsione - carico applicato, range +20%/-20%, Trave 1, con taglio

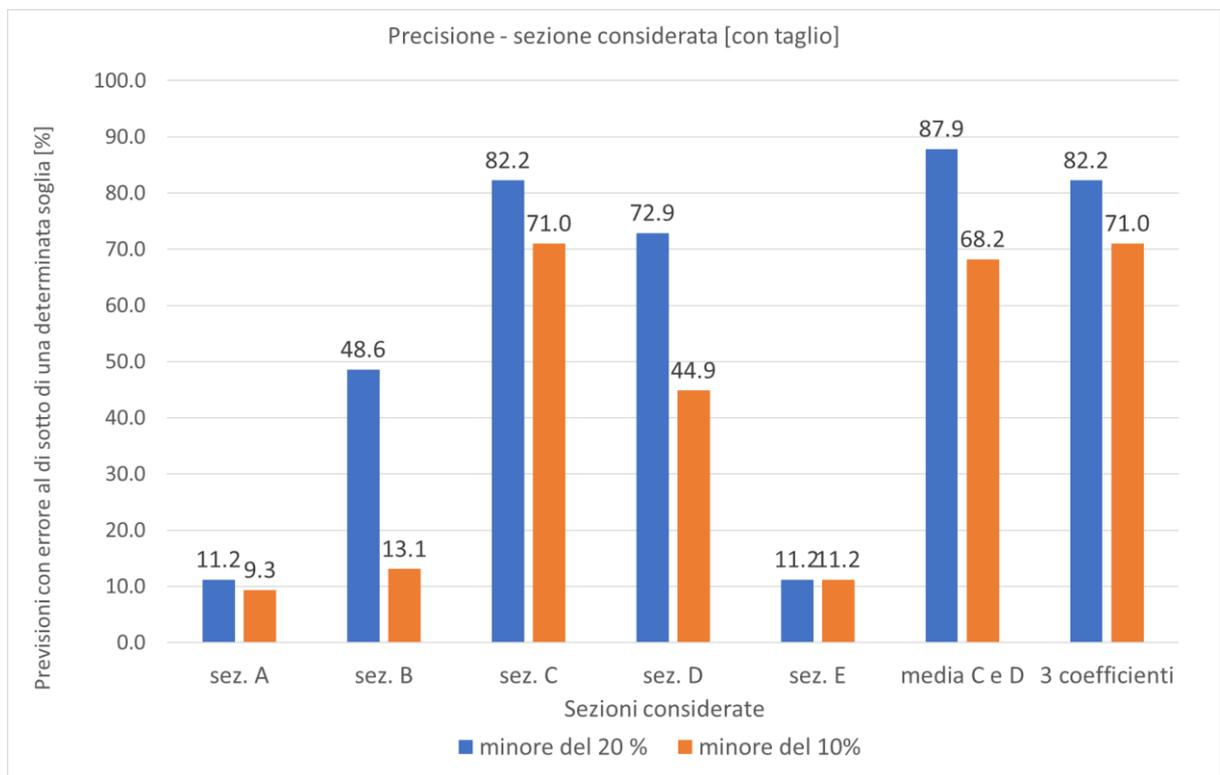


Figura 110: Diagramma precisione previsione - sezione considerata, Trave 1, con taglio

# Metodo dello sviluppo in serie di Fourier

## 1.11.1.2.3.2 Trave 2

Trave 2

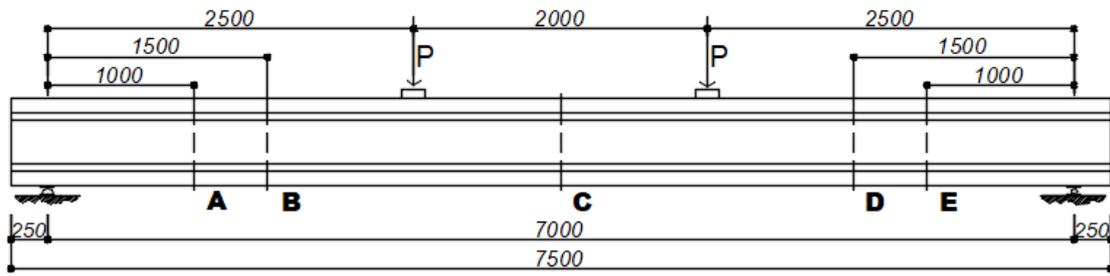


Figura 111: Trave 2

L'applicazione dello sviluppo in serie di Fourier, utilizzando 3 coefficienti, è stata fatta imponendo 3 condizioni al contorno nelle sezioni B, C e D.

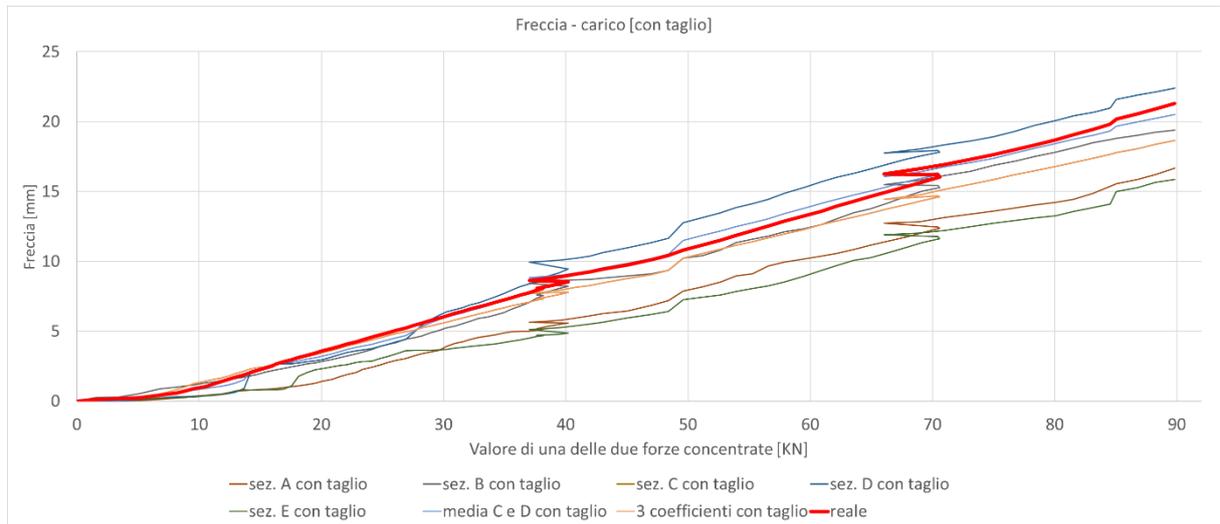


Figura 112: Diagramma freccia - carico, Trave 2, con taglio

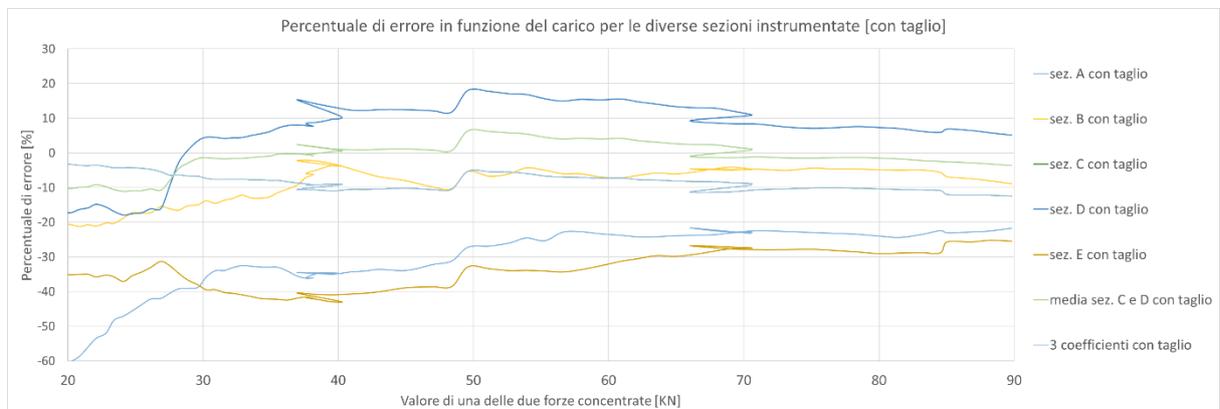


Figura 113: Diagramma errore previsione - carico applicato, Trave 2, con taglio

## I modelli teorici

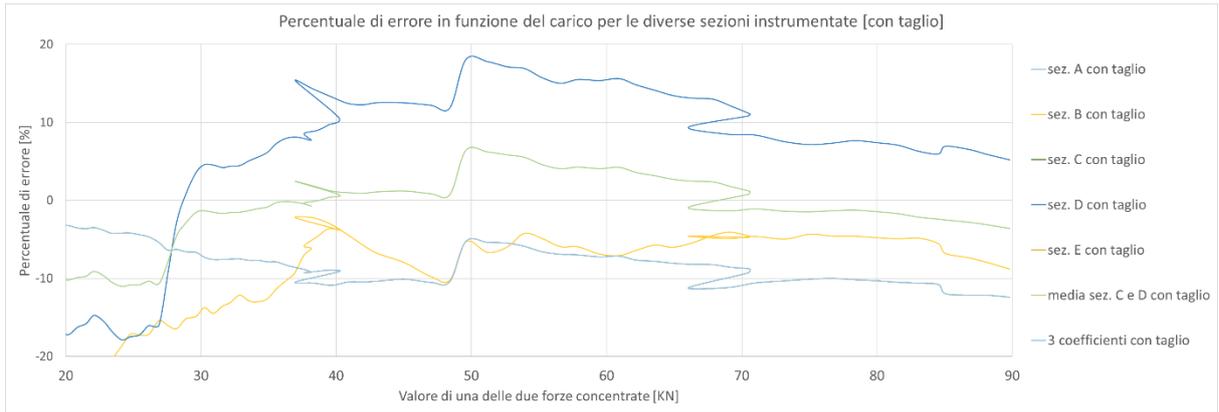


Figura 114: Diagramma errore della previsione - carico applicato, range +20%/-20%, Trave 2, con taglio

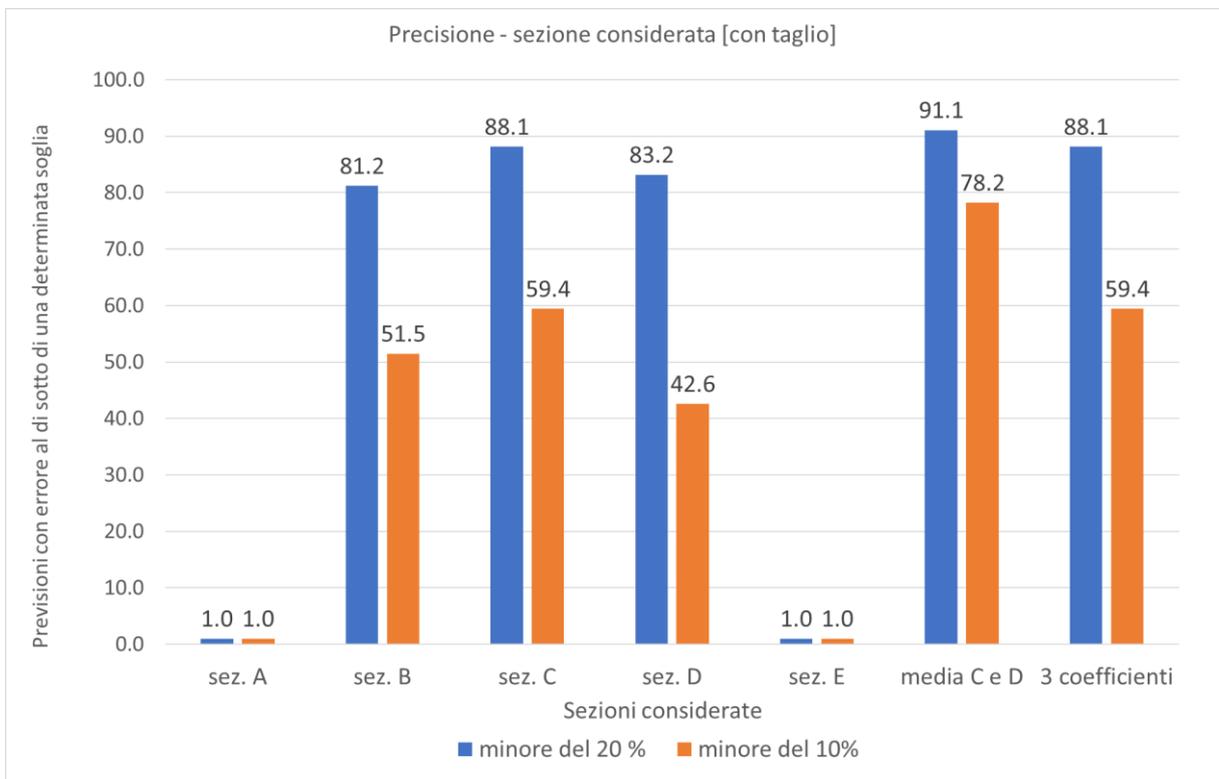


Figura 115: Diagramma precisione della previsione - sezione considerata, Trave 2, con taglio

# Metodo dello sviluppo in serie di Fourier

## 1.11.1.2.3.3 Trave 3

Trave 3

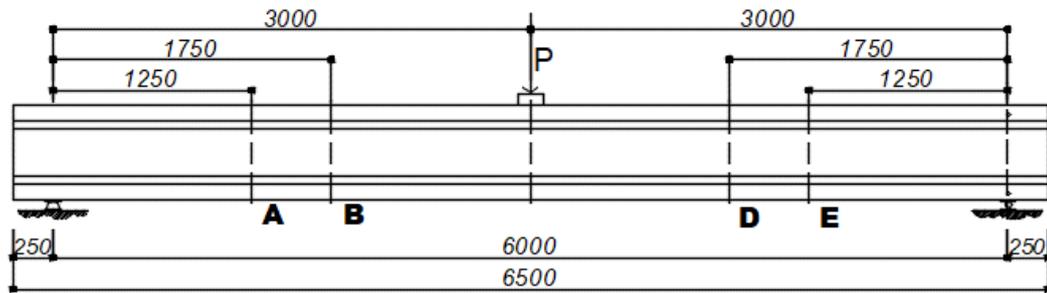


Figura 116: Trave 3

L'applicazione dello sviluppo in serie di Fourier, utilizzando 3 coefficienti, è stata fatta imponendo 3 condizioni al contorno nelle sezioni A, B ed E.

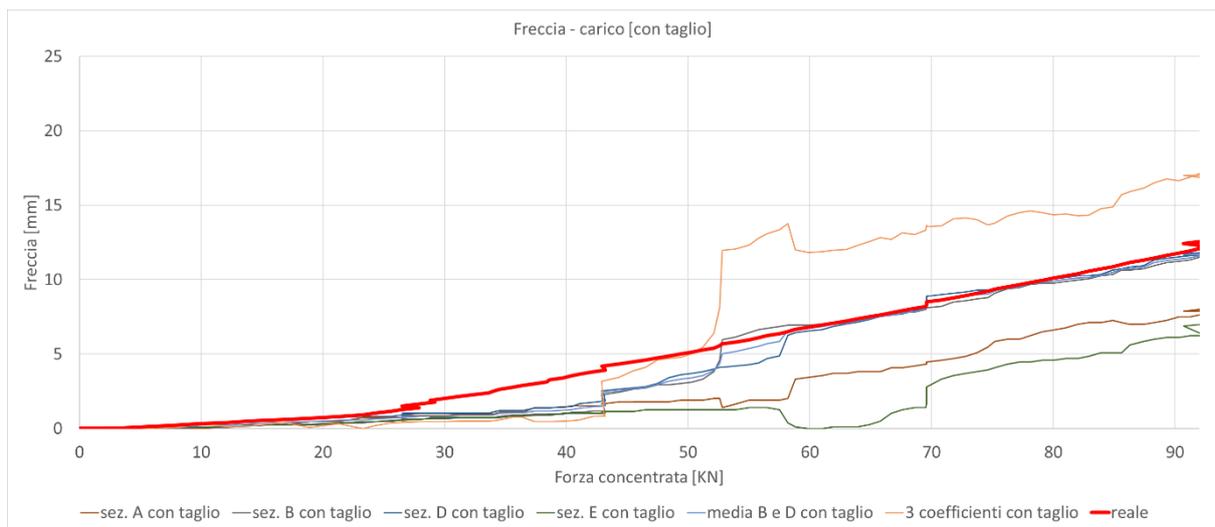


Figura 117: Diagramma freccia - carico, Trave 3, con taglio

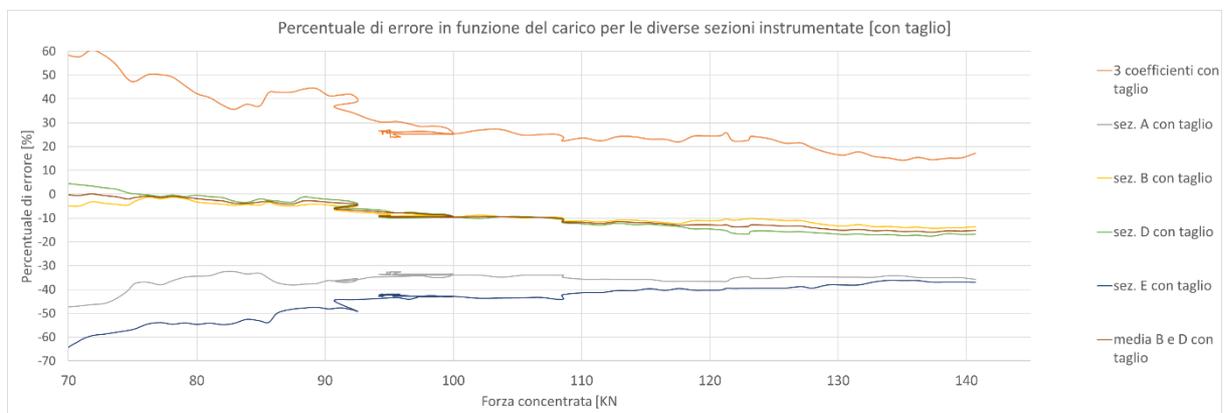


Figura 118: Diagramma errore della previsione - carico applicato, Trave 3, con taglio

## I modelli teorici

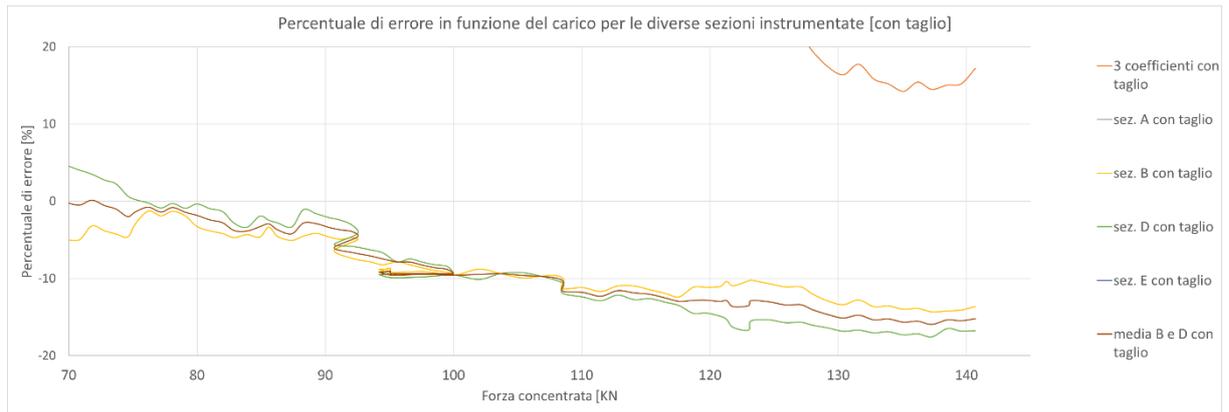


Figura 119: Diagramma errore della previsione - carico applicato, range +20%/-20%, Trave 3, con taglio

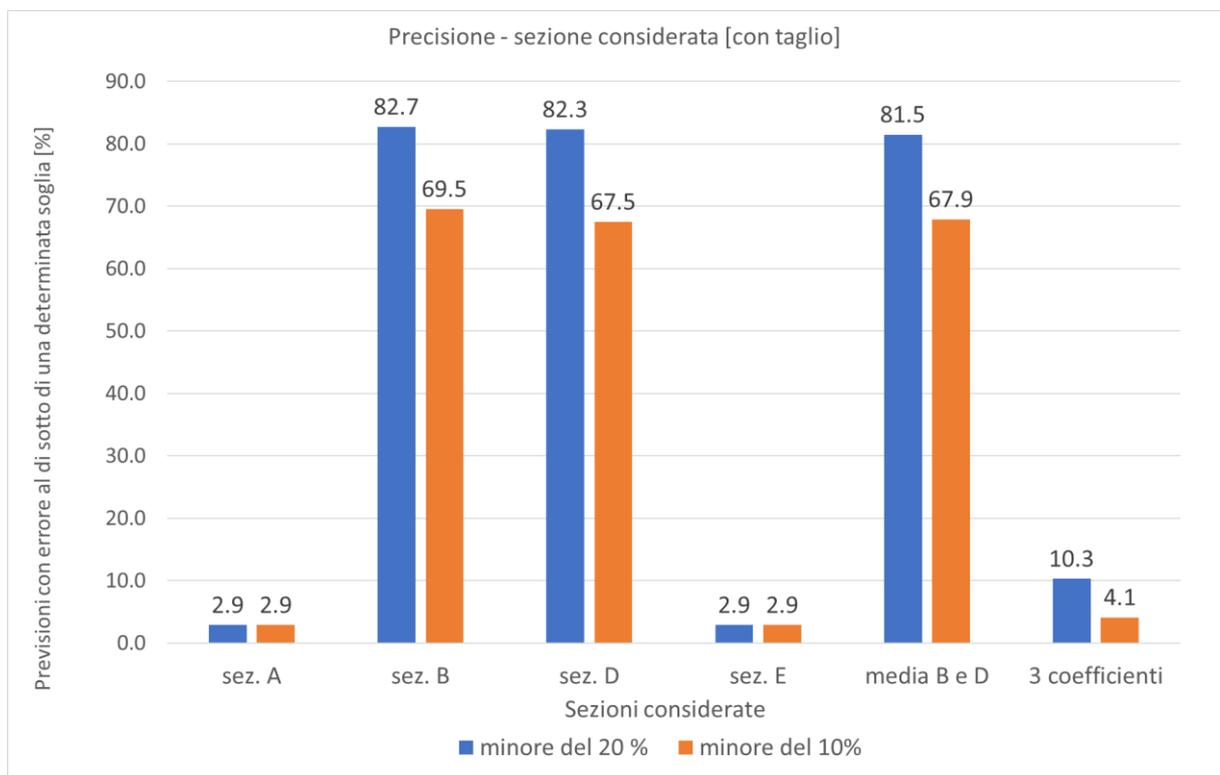


Figura 120: Diagramma precisione della previsione - sezione considerata, Trave 3, con taglio

# Metodo dello sviluppo in serie di Fourier

## 1.11.1.2.3.4 Trave 5

### Trave 5

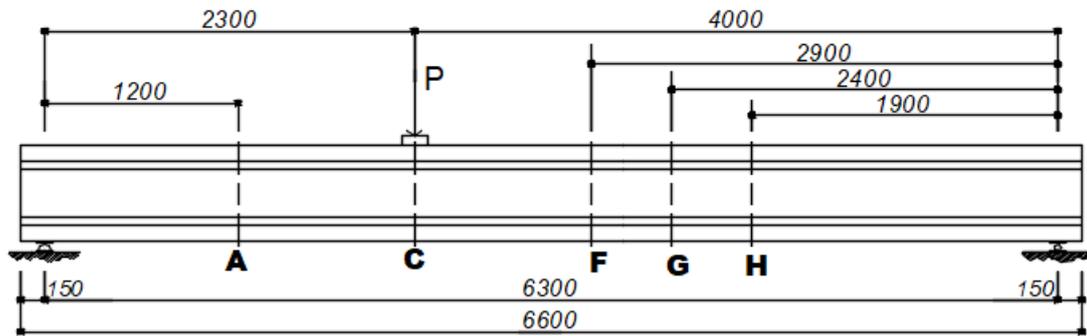


Figura 121: Trave 5

L'applicazione dello sviluppo in serie di Fourier, utilizzando 3 coefficienti, è stata fatta imponendo 3 condizioni al contorno nelle sezioni A, C e G.

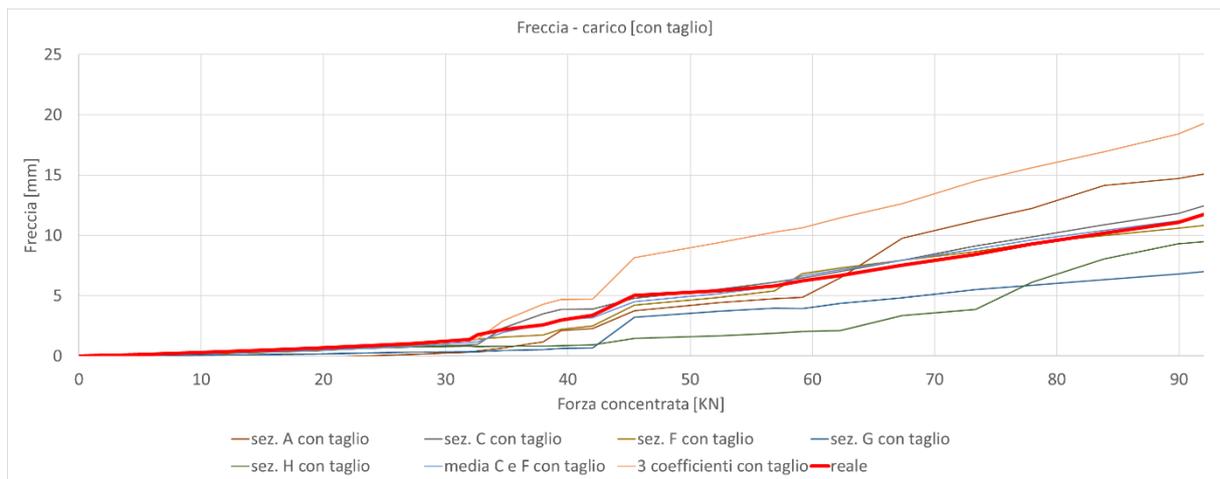


Figura 122: Diagramma freccia - carico, Trave 5, con taglio

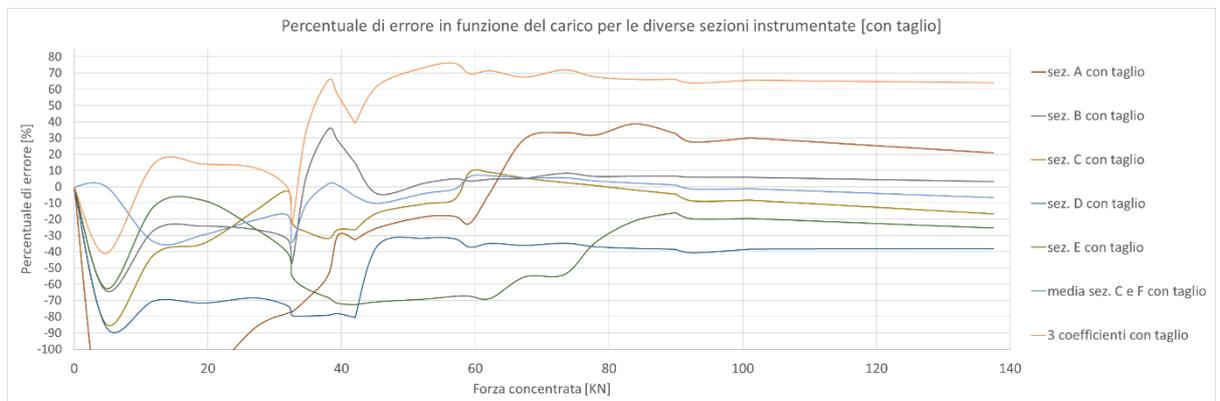


Figura 123: Diagramma errore della previsione - carico applicato, Trave 5, con taglio

## I modelli teorici

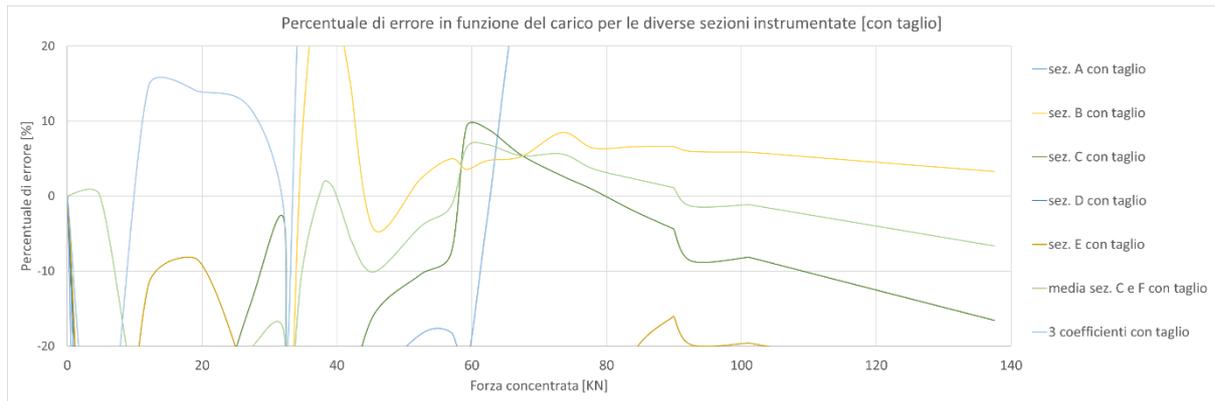


Figura 124: Diagramma errore della previsione - carico applicato, range +20%/-20%, Trave 5, con taglio

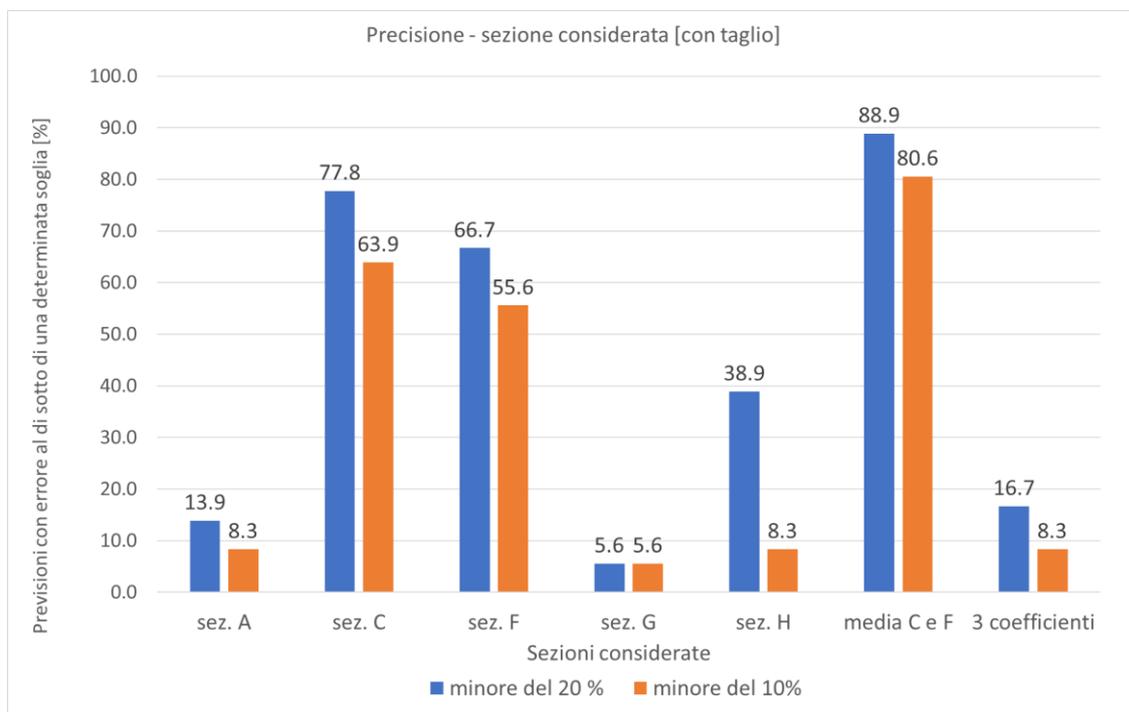


Figura 125: Diagramma precisione della previsione - sezione considerata, Trave 5, con taglio

# Metodo dello sviluppo in serie di Fourier

## 1.11.1.2.3.5 Trave 6

Trave 6

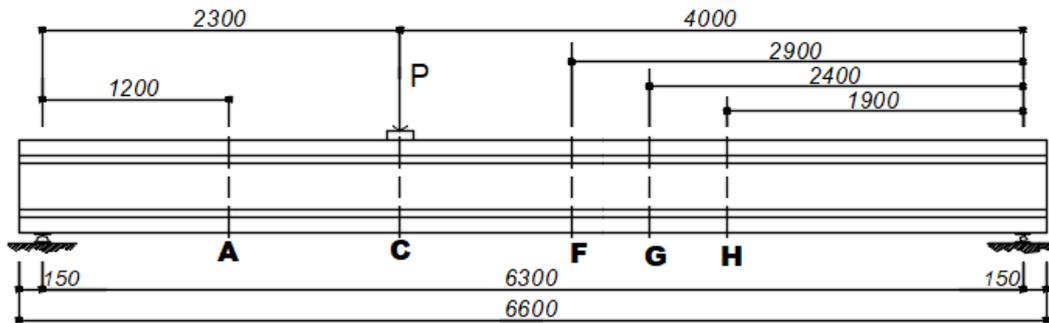


Figura 126: Trave 6

L'applicazione dello sviluppo in serie di Fourier, utilizzando 3 coefficienti, è stata fatta imponendo 3 condizioni al contorno nelle sezioni A, C e G.

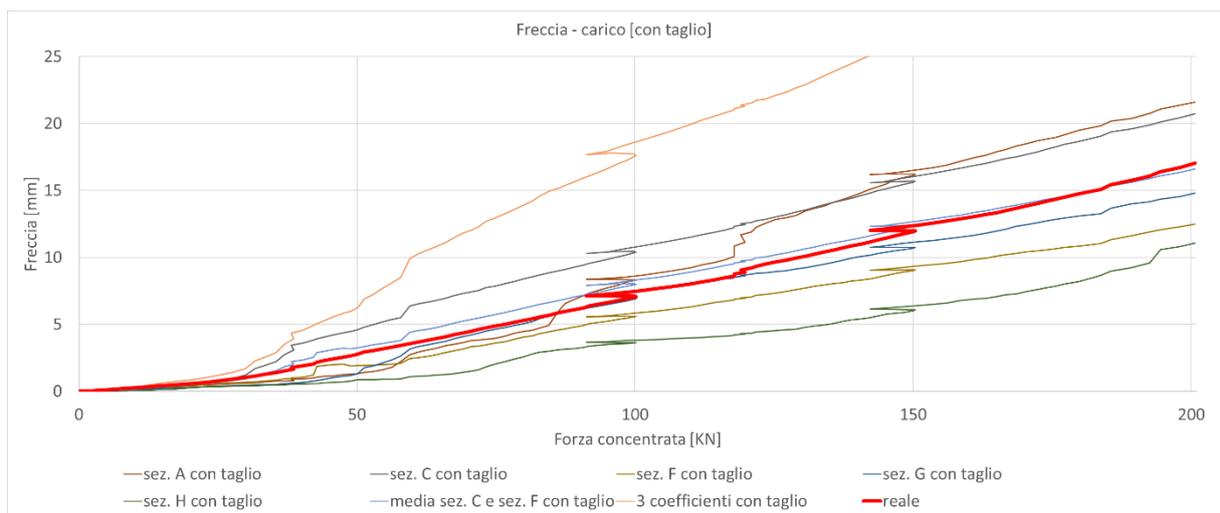


Figura 127: Diagramma freccia - carico, Trave 6, con taglio

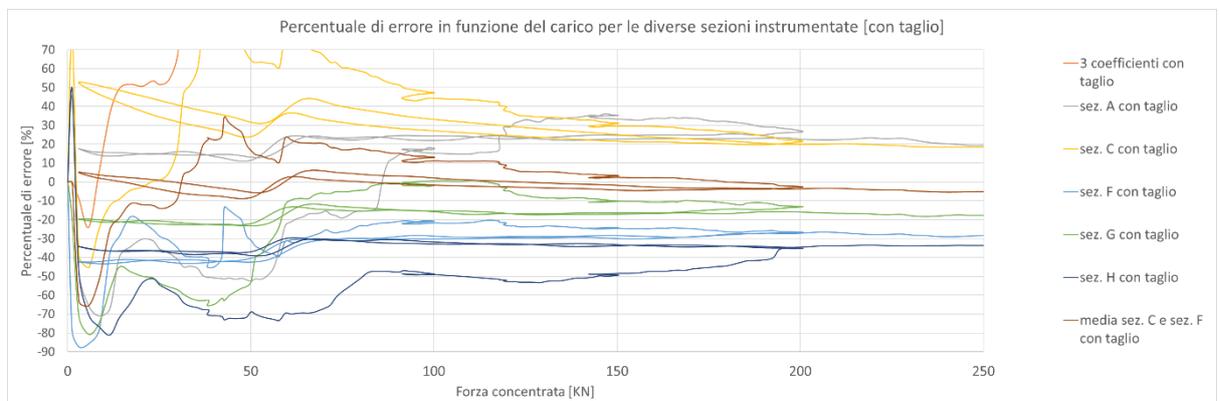


Figura 128: Diagramma errore della previsione - carico applicato, Trave 6, con taglio

## I modelli teorici

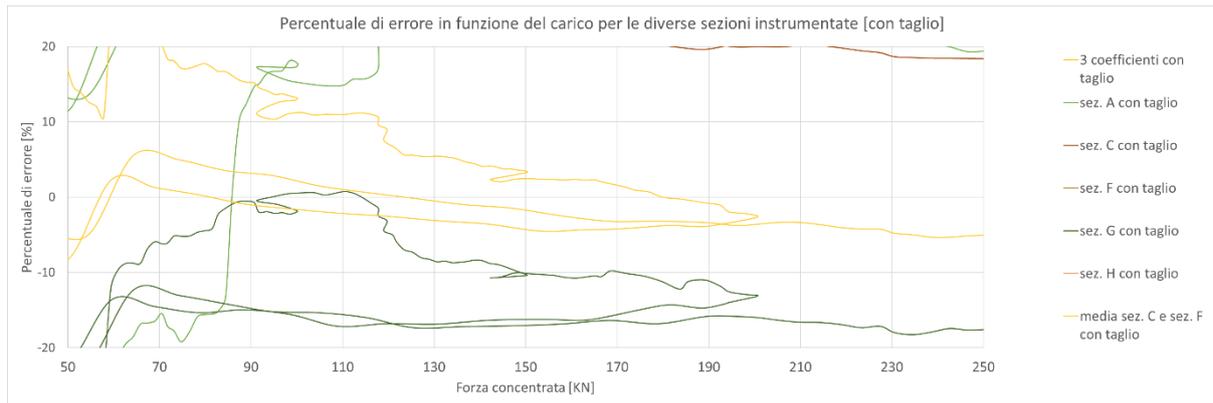


Figura 129: Diagramma errore della previsione - carico applicato, range +20%/-20%, Trave 6, con taglio

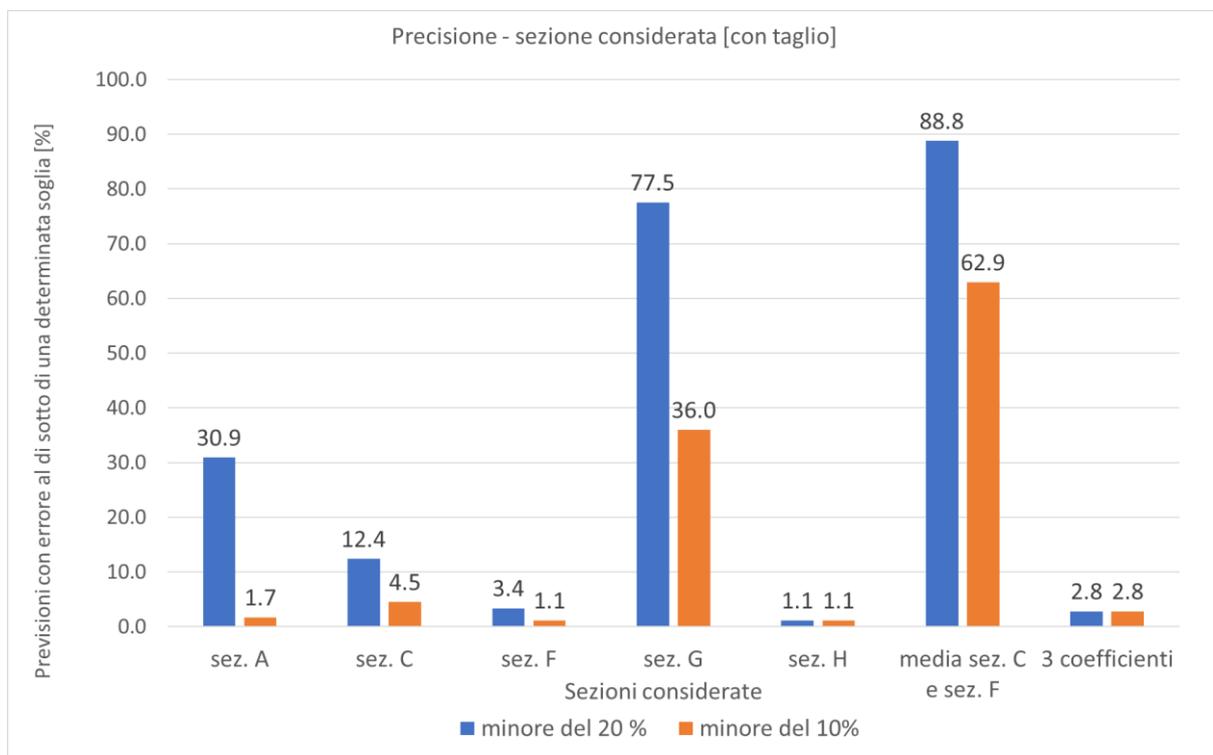


Figura 130: Diagramma precisione della previsione - sezione considerata, Trave 6, con taglio

### 1.11.1.2.4 Considerazioni sull'applicazione pratica considerando il contributo del taglio

Valgono le stesse considerazioni fatte circa i risultati del metodo e il posizionamento dei sensori per l'applicazione pratica fatta ignorando il contributo del taglio.

Tener conto della deformazione indotta dal taglio ha permesso di migliorare il livello di precisione del metodo, soprattutto nelle zone in cui il carico applicato generava una sollecitazione tagliante tale da indurre la fessurazione da taglio.

### 1.11.2 Trave doppiamente incastrata

Oggetto del presente paragrafo è lo studio teorico atto a valutare la precisione del metodo dello sviluppo in serie di Fourier, per il calcolo della freccia in mezzeria, su una trave doppiamente incastrata caricata da una forza concentrata posizionata al centro della struttura.

#### 1.11.2.1 Trattazione teorica

Considerando una sola sezione alla volta per calcolare il coefficiente  $\delta_1$  della serie, si ottiene:

$$\delta_1(x_1) = -\frac{\chi_{mis}(x_1)}{f''(x_1)} \quad (2.64)$$

Con

$$f(x) = \sin\left(\frac{\mu_m x}{l}\right) - \sinh\left(\frac{\mu_m x}{l}\right) - \alpha_m \cdot \left[\cos\left(\frac{\mu_m x}{l}\right) - \cosh\left(\frac{\mu_m x}{l}\right)\right]$$

$$\alpha_m = \frac{\sin \mu_m - \sinh \mu_m}{\cos \mu_m - \cosh \mu_m}$$

$$\mu_m = 4.73, 7.8532, 10.9960, \dots, \frac{2m+1}{2}\pi$$

A questo punto si esprime l'abbassamento in mezzeria con lo sviluppo in serie che, nel caso in cui si faccia uso della curvatura di una sola sezione, sarà costituito da un unico elemento:

$$w\left(\frac{l}{2}\right) = \sum_{m=1}^r \delta_m \cdot f\left(\frac{l}{2}\right) = \delta_1 \cdot f\left(\frac{l}{2}\right) \quad (2.65)$$

Il calcolo sarà ripetuto utilizzando 5 differenti curvature, estrapolate dalle sezioni A, B, C, D, E. Quest'ultime sono state individuate nella prima metà della trave, dal momento che si sarebbero ottenuti gli stessi risultati, in linea teorica, utilizzando dati provenienti da sezioni simmetricamente disposte rispetto alla mezzeria (visto la simmetria strutturale e delle condizioni di carico).

Una prima valutazione del metodo ipotizza l'assenza dell'errore strumentale, le curvature utilizzate nel procedimento non saranno pertanto quelle sperimentali, ma saranno quelle calcolate teoricamente dividendo il momento flettente agente sulla rispettiva sezione per la rigidezza flessionale (in stadio 1).

Il valore della freccia così calcolato sarà confrontato con quello ricavato teoricamente attraverso il principio dei lavori virtuali.

## I modelli teorici

Si considera che nessuna sezione della trave sia fessurata e, sotto questa ipotesi, si ricava la formula analitica della freccia in mezzeria in funzione della forza applicata.

### 1.11.2.1.1 Forza concentrata in mezzeria

Trave doppiamente incastrata - forza concentrata in mezzeria

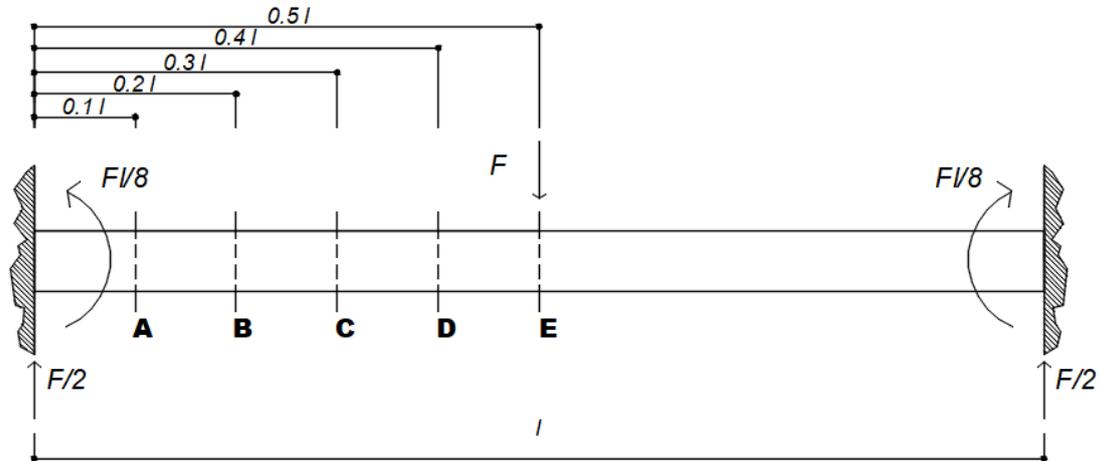


Figura 131: Trave doppiamente incastrata sollecitata da una forza concentrata in mezzeria

L'applicazione del principio dei lavori virtuali per lo schema statico considerato e la condizione di carico applicata (forza concentrata in mezzeria) fornisce la seguente freccia in mezzeria:

$$f = \frac{Fl^3}{192 EI_1} \quad (2.66)$$

Applicando il metodo dello sviluppo in serie di Fourier si ottengono i seguenti risultati.

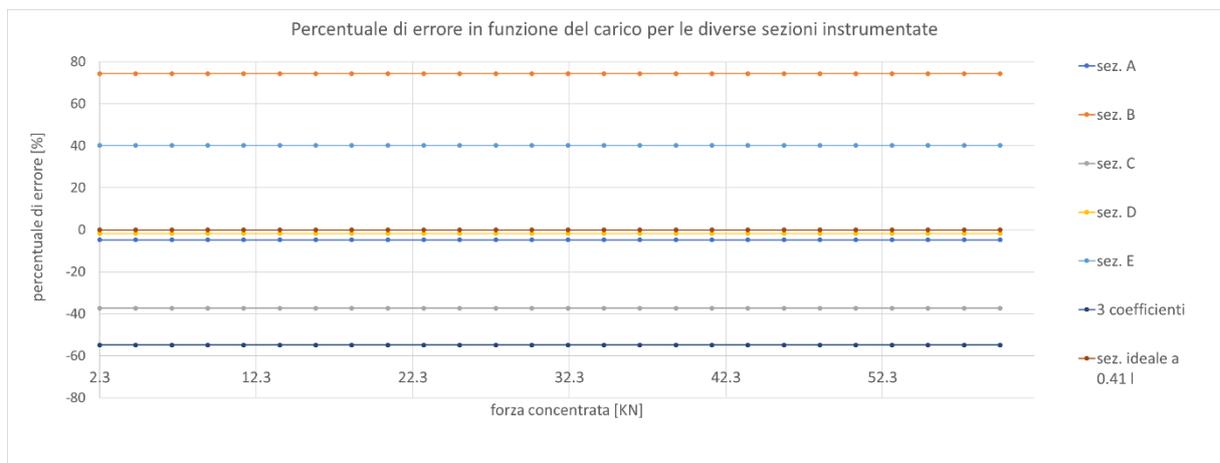


Figura 132: Errori del metodo dello sviluppo in serie di Fourier per una trave doppiamente incastrata sollecitata da una forza concentrata in mezzeria

## Metodo dello sviluppo in serie di Fourier

La freccia con i 3 coefficienti è stata calcolata, come descritto al paragrafo introduttivo, risolvendo un sistema di equazioni linearmente indipendenti, considerando le curvature estrapolate dalle sezioni B, C, D. In questo caso utilizzare 3 curvature non ha prodotto un risultato soddisfacente. Disponendo i 3 sensori in maniera simmetrica rispetto alla mezzeria, e garantendo un corretto distanziamento tra essi, ad esempio  $0.2L$ ,  $0.5L$  e  $0.8L$ , si sarebbero ottenuti risultati migliori. Infatti, l'errore passa dal 50% al 30%.

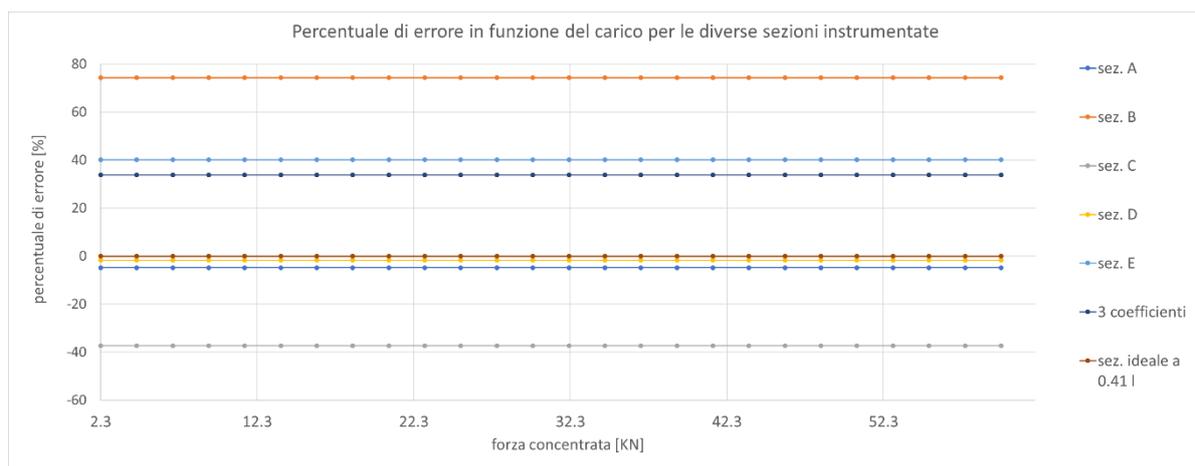


Figura 133: Errori del metodo dello sviluppo in serie di Fourier per una trave doppiamente incastrata sollecitata da una forza concentrata in mezzeria, con disposizione differente dei sensori nel caso dei “3 coefficienti”

Si nota che l'errore dei risultati ottenuti con il metodo dello sviluppo in serie, per la sezione A è sempre inferiore al 5% e, per la sezione D, sempre inferiore al 1.9%.

I risultati migliori si otterrebbero estrapolando la curvatura “sperimentale” da una sezione posizionata a  $0.41 l$  dall'incastro, ottenendo un errore inferiore allo 0.1 %.

### ***1.11.2.2 Annotazioni sul metodo dello sviluppo in serie applicato alla trave in semplice appoggio e alla trave doppiamente incastrata***

Lo studio appena sviluppato ha messo in luce come la precisione del metodo sia principalmente funzione della posizione della sezione trasversale, lungo lo sviluppo longitudinale della trave, da cui si estrapola la curvatura “sperimentale”.

È stato notato che le precisioni dei risultati non vengono influenzate dalle caratteristiche geometriche della struttura o dalle proprietà meccaniche dei materiali di cui è composta. Una variazione della resistenza a compressione del calcestruzzo, e quindi una variazione del modulo elastico della sezione, così come una differente forma geometrica, e quindi una diversa inerzia, non influenzano gli errori legati al modello.

I modelli teorici

I fattori appena citati ( $f_{ck}$ ,  $E$ ,  $I$ ) influenzeranno ovviamente il valore assoluto del parametro di controllo, la freccia in mezzzeria, ma non condizioneranno gli errori legati alle previsioni effettuate con il metodo dello sviluppo in serie.

Lo studio appena effettuato può quindi essere considerato di validità generale, e suggerire la posizione ottimale dove posizionare la coppia di estensimetri per procedere al monitoraggio con la tecnica appena presentata.

### 1.11.3 Trave incastrata ad un'estremità e libera all'altra estremità (mensola)

Oggetto del presente paragrafo è lo studio teorico atto a valutare la precisione del metodo dello sviluppo in serie di Fourier, per il calcolo della freccia in punta, su una trave incastrata ad un'estremità e libera all'altra estremità (mensola) caricata da una forza concentrata in punta.

#### 1.11.3.1 Trattazione teorica

Considerando una sola sezione alla volta per calcolare il coefficiente  $\delta_1$  della serie, si ottiene:

$$\delta_1(x_1) = -\frac{\chi_{mis}(x_1)}{f''(x_1)} \quad (2.67)$$

dove  $f(x)$  può essere espresso attraverso due differenti funzioni di forma, introdotte all'inizio della trattazione, chiamate rispettivamente "A" e "B":

$$\text{A. } f(x) = \sin\left(\frac{\mu_m x}{l}\right) + \sinh\left(\frac{\mu_m x}{l}\right) - \alpha_m \cdot \left[\cos\left(\frac{\mu_m x}{l}\right) - \cosh\left(\frac{\mu_m x}{l}\right)\right]$$

con

$$\alpha_m = \frac{\sin \mu_m + \sinh \mu_m}{\cos \mu_m + \cosh \mu_m}$$

$$\mu_m = 1.875, 4.694, \dots, \frac{2m-1}{2} \pi$$

$$\text{B. } f(x) = 1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2l}\right)$$

A questo punto si esprime l'abbassamento in mezzzeria con lo sviluppo in serie che, nel caso in cui si faccia uso della curvatura di una sola sezione, sarà costituito da un unico elemento:

$$w(l) = \sum_{m=1}^r \delta_m \cdot f(l) = \delta_1 \cdot f(l) \quad (2.68)$$

## Metodo dello sviluppo in serie di Fourier

Il calcolo sarà ripetuto utilizzando 5 differenti curvature, estrapolate dalle sezioni A, B, C, D, E.

Una prima valutazione del metodo ipotizza l'assenza dell'errore strumentale, le curvature utilizzate nel procedimento non saranno pertanto quelle sperimentali, ma saranno quelle calcolate teoricamente dividendo il momento flettente agente sulla rispettiva sezione per la rigidezza flessionale (in stadio 1).

Il valore della freccia così calcolato sarà confrontato con quello ricavato teoricamente attraverso il principio dei lavori virtuali.

Si considera che nessuna sezione della trave sia fessurata e, sotto questa ipotesi, si ricava la formula analitica della freccia in punta in funzione della forza applicata.

### 1.11.3.1.1 Forza concentrata all'estremità libera

Trave incastrata con forza concentrata all'estremità libera

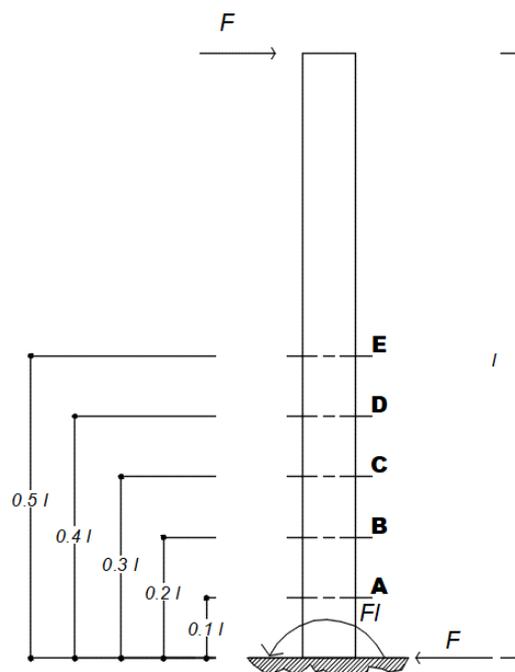


Figura 134: Mensola sollecitata da una forza concentrata all'estremità libera

L'applicazione del principio dei lavori virtuali per lo schema statico considerato e la condizione di carico applicata (forza concentrata in punta) fornisce la seguente freccia in mezzzeria:

$$f = \frac{Fl^3}{3EI_1} \quad (2.69)$$

Si mette in evidenza a questo punto la differenza dei risultati ottenuti per la funzione di forma “A” e la funzione di forma “B”.

### 1.11.3.1.1.1 Funzione di forma “A”

Applicando il metodo dello sviluppo in serie di Fourier si ottengono i seguenti risultati.

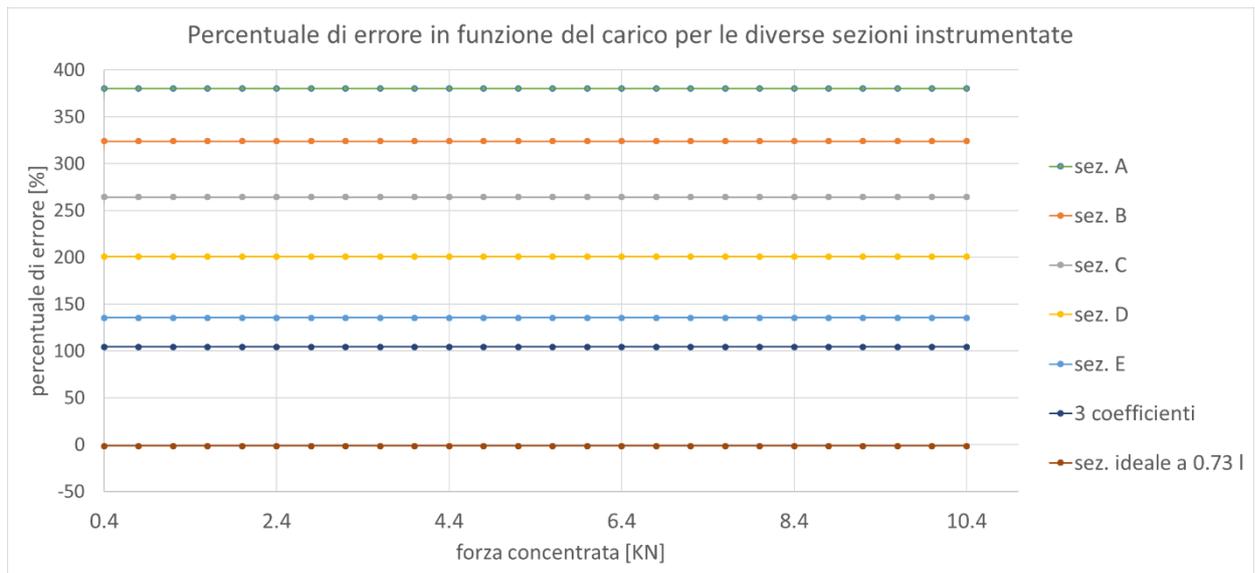


Figura 135: Errori del metodo dello sviluppo in serie di Fourier per una mensola sollecitata da una forza concentrata all'estremità libera – funzione di forma “A”

La freccia con i 3 coefficienti è stata calcolata, come descritto al paragrafo introduttivo, risolvendo un sistema di equazioni linearmente indipendenti, considerando inizialmente le curvature estrapolate dalle sezioni B, C, D. I risultati però non sono stati soddisfacenti. Si è deciso quindi di considerare 3 sezioni rispettivamente a 0.2L, 0.5L e 0.8L. L'errore è diminuito ma è rimasto comunque alto.

Si nota che l'errore dei risultati ottenuti con il metodo dello sviluppo in serie è elevato per ogni sezione.

I risultati migliori si otterrebbero estrapolando la curvatura “sperimentale” da una sezione posizionata a 0.73 l dall'incastro, ottenendo un errore inferiore allo 1.4 %.

## Metodo dello sviluppo in serie di Fourier

### 1.11.3.1.1.2 Funzione di forma "B"

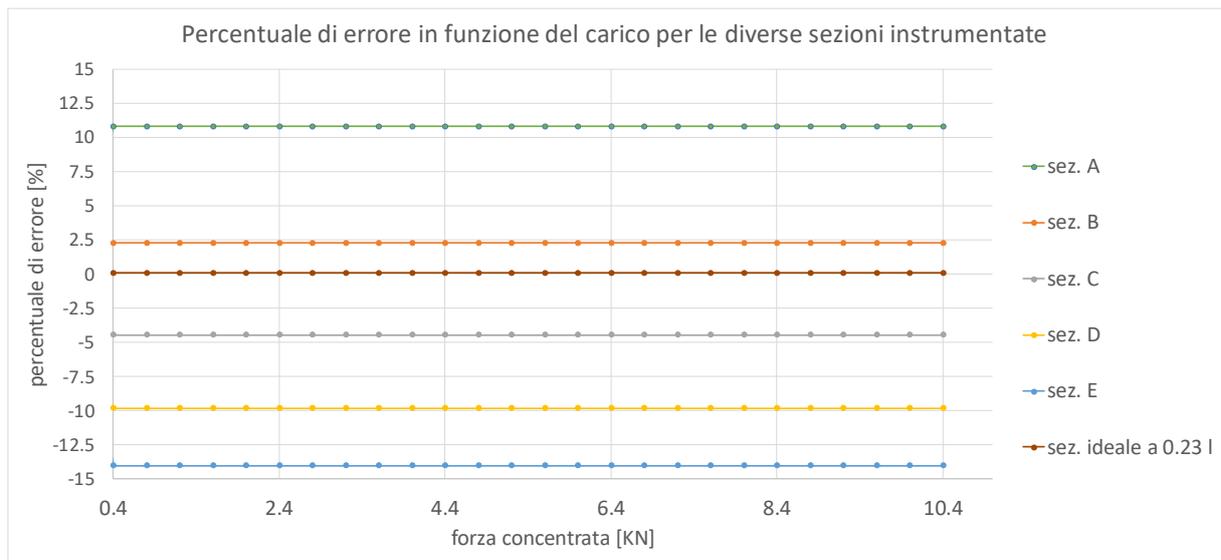


Figura 136: Errori del metodo dello sviluppo in serie di Fourier per una mensola sollecitata da una forza concentrata all'estremità libera – funzione di forma "B"

L'errore ottenuto è estremamente basso per ognuna delle 5 sezioni considerate, rimanendo sempre inferiore al 15%, e assestandosi su valori inferiori al 5% per le sezioni B e C, rispettivamente a  $0.2L$  e a  $0.3L$  dall'incastro. Applicando il metodo dello sviluppo in serie utilizzando la sezione d'incastro si otterrebbero errori del 20%. Il posizionamento ottimale della sezione da attrezzare con i sensori di deformazione è ad una distanza di  $0.23L$  dall'incastro.

### 1.11.3.2 Annotazioni sul metodo dello sviluppo in serie applicato alla mensola

Per quanto riguarda la mensola, i risultati dello studio teorico suggeriscono le medesime considerazioni fatte per la trave in semplice appoggio e per la trave doppiamente incastrata. Lo studio appena sviluppato ha messo in luce come la precisione del metodo sia principalmente funzione della posizione della sezione trasversale, lungo lo sviluppo longitudinale della trave, da cui si estrapola la curvatura "sperimentale". È stato notato che le precisioni dei risultati non vengono influenzate dalle caratteristiche geometriche della struttura o dalle proprietà meccaniche dei materiali di cui è composta. Una variazione della resistenza a compressione del calcestruzzo, e quindi una variazione del modulo elastico della sezione, così come una differente forma geometrica, e quindi una diversa inerzia, non influenzano gli errori legati al modello. I fattori appena citati ( $f_{ck}$ ,  $E$ ,  $I$ ) influenzeranno ovviamente il valore assoluto del parametro di controllo, l'abbassamento dell'estremità libera, ma non condizioneranno gli errori legati alle previsioni effettuate con il metodo dello sviluppo in serie.

Alla luce dei risultati ottenuti appare evidente il miglioramento della precisione ottenuto utilizzando la funzione di forma “B”. In questo caso il posizionamento ottimale appare essere a  $0.23L$  dalla sezione d’incastro. I dati sperimentali tuttavia suggeriscono un approccio di questo tipo: nel caso in cui si abbiano a disposizione 3 coppie di sensori di deformazione da poter installare sulla struttura, appare conveniente posizionarle in maniera simmetrica rispetto alla mezzeria, assicurando un corretto distanziamento, ad esempio  $0.2L$ ,  $0.5L$ ,  $0.8L$ .

### 1.11.4 Posizionamento ottimale dei sensori

I risultati delle trattazioni teoriche e sperimentali, effettuate per valutare l’efficacia del metodo dello sviluppo in serie di Fourier, sono stati riassunti nelle tabelle seguenti.

#### 1.11.4.1 Trattazione teorica

Il posizionamento ottimale dei sensori è funzione dello schema statico e del carico agente.

	<b>trave in semplice appoggio</b>	<b>Trave doppiamente incastrata</b>	<b>mensola</b>
<b>Carico uniformemente distribuito</b>	$\frac{1}{3} L$	-	-
<b>Forza concentrata in mezzeria</b>	$\frac{4}{10} L$	$\frac{4}{10} L$	-
<b>Forze concentrate simmetricamente disposte rispetto alla mezzeria</b>	$\frac{4}{10} L$	-	-
<b>Forza concentrata in un punto generico</b>	$\frac{1}{2} L$	-	-
<b>Carico uniformemente distribuito e forza concentrata in mezzeria</b>	$\frac{1}{2} L$	-	-
<b>Forza concentrata in punta</b>	-	-	$\frac{1}{4} L$

Figura 137: Posizionamento ottimale dei sensori di deformazione per il metodo dello sviluppo in serie di Fourier, funzione di schema statico e carico agente

**1.11.4.2 Trattazione sperimentale**

Si riporta la tabella 11 in cui sono riassunti i risultati della trattazione sperimentale effettuata applicando il metodo dello sviluppo in serie di Fourier alle travi semplicemente appoggiate testate presso il laboratorio del Politecnico di Torino.

<b>Numero delle curvature sperimentali disponibili</b>	<b>Condizioni di carico simmetriche</b>	<b>Condizioni di carico non simmetriche</b>
<b>1</b>	$\frac{1}{2} l$ o $\frac{1}{4} l$	In corrispondenza del punto di applicazione della forza
<b>2</b>	$\frac{1}{2} l$ e $\frac{1}{4} l$	In corrispondenza del punto di applicazione della forza e in mezzeria
<b>3</b>	$\frac{1}{4} l, \frac{1}{2} l, \frac{3}{4} l$	$\frac{1}{4} l, \frac{1}{2} l, \frac{3}{4} l$

*Tabella 131: Posizionamento ottimale dei sensori in funzione delle condizioni di carico e del numero degli strumenti disponibili*

## **I nuovi sensori di rilevamento: introduzione e prova di laboratorio**

Il monitoraggio strutturale, come descritto nel primo capitolo, è una pratica piuttosto complicata e sicuramente di non facile applicazione. L'invecchiamento delle infrastrutture è un problema conclamato. Il monitoraggio di una struttura, inteso nella sua espressione tradizionale, è limitato alle opere più importanti a causa della complessità e dei costi di installazione.

Le principali problematiche che impediscono la realizzazione di un sistema di monitoraggio per tutte le strutture presenti sul territorio sono:

- Complessità e difficoltà di installazione degli strumenti di rilievo;
- Complessità tecnica di progetto e lettura dei dati del monitoraggio;
- Costo degli strumenti, dell'installazione e di ogni altro sistema (umano o automatizzato) legato al monitoraggio strutturale;

Monitorare la salute di una struttura, come un viadotto o un edificio, non è solo difficile da un punto di vista tecnico, ma richiede, al giorno d'oggi, notevoli risorse a disposizione. L'ingegneria dello *SHM* ha quindi focalizzato la propria attenzione sulla ricerca e lo sviluppo di soluzioni innovative che coniugassero la facilità di installazione, al basso costo e alla semplicità di utilizzo. È proprio in questa direzione che i principali motori di studio dell'industria hanno investito le maggiori risorse.

Questo studio di tesi ha valutato le potenzialità di una delle soluzioni tecnologicamente più avanzate attualmente disponibili in commercio, l'*SHBox*.

### **1.12 SHBox**

Lo strumento in oggetto è una delle soluzioni più recenti nell'industria degli strumenti del monitoraggio strutturale. Il sistema *SHBox*, attraverso l'applicazione del paradigma IoT (Internet of Things) e l'analisi statistica dei dati ricavati, apre una nuova strada per l'applicazione massiva del monitoraggio e del rilevamento delle anomalie.

Può essere immaginato come una vera e propria scatola nera delle infrastrutture. È inoltre un sistema che, sfruttando i nodi multi-sensore wireless e un'infrastruttura di rete basata sul protocollo LoRaWAN, trova applicazione in una moltitudine di opere civili, dalle gallerie, agli edifici, e ai ponti. *SHBox* consente una valutazione a distanza dello stato di salute di una struttura e offre la possibilità di ricostruire nel tempo la storia dell'opera monitorata.

Di seguito viene proposto uno schema organizzativo del sistema *SHBox*.

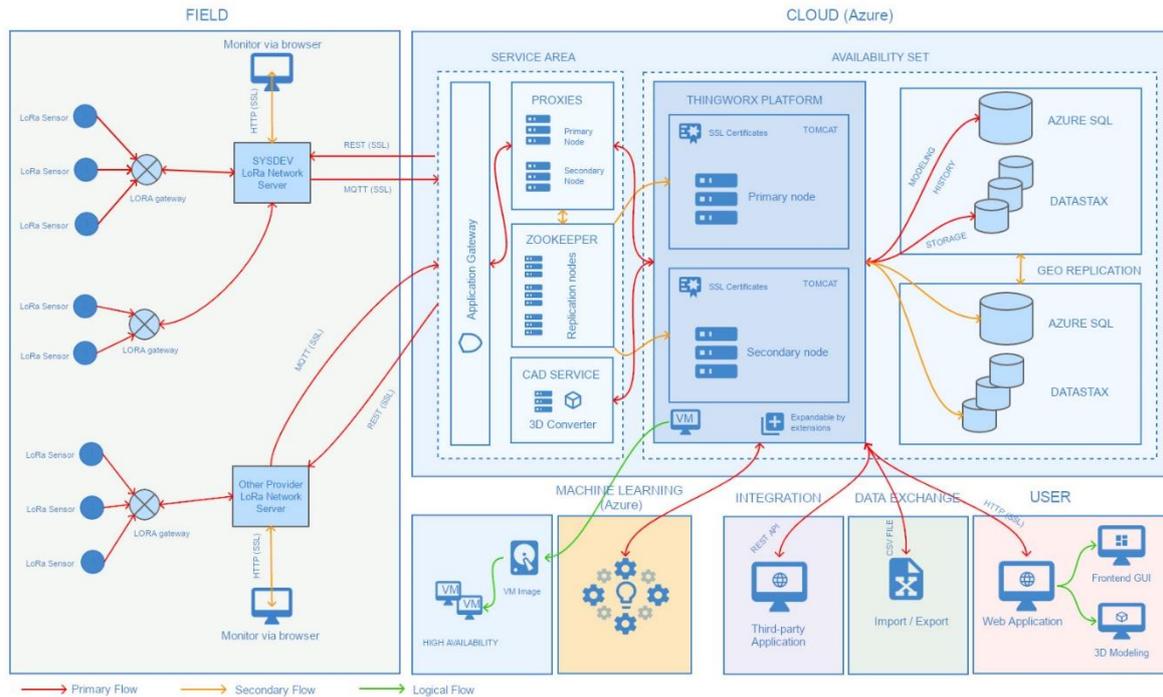


Figura 138: Schema organizzativo del sistema SHBox

La figura sovrastante mostra l'organizzazione del sistema SHBox. Come si può vedere i sistemi di misurazione e registrazione dei dati sono collegati ai gateway LoRa. Questi ultimi si interfacciano con i server disponibili e trasferiscono i dati ad un'area di servizio dove vengono decodificati ed elaborati. A questo punto è possibile intervenire sui dati attraverso integrazioni con sistemi BIM per fornire all'utente un dato completo e di facile comprensione. Il sistema SHBox è pertanto costituito dai seguenti elementi:

1. Nodi multi – sensore: basati su protocollo LoRaWAN;
2. Infrastruttura di rete: per la raccolta dei dati trasmessi dai nodi multi – sensore e per l'invio su server centrale;
3. Piattaforma software: per l'elaborazione, archiviazione e visualizzazione dei dati.

### 1.12.1 I nodi multi – sensore

I nodi multi – sensore rappresentano gli elementi atomici del sistema assimilabili ad una “nuvola di punti” del rilievo digitale, con la differenza che si tratta di punti dinamici, cioè che aggiornano costantemente il modello digitale strutturale su di essi costruito e interpolato. Tale logica di posizionamento è possibile solo grazie alle caratteristiche peculiari dei nodi multi – sensore (basso costo, semplicità di installazione, assenza di cablaggio, garanzia di trasmissione dei dati). Ciò consente una visione complessiva ad elevata granularità e definizione in linea

I nuovi sensori di rilevamento: introduzione e prova di laboratorio

generale eliminando la necessità di analisi a posteriori che richiedono modelli strutturali dinamici estremamente interpretativi delle misure sperimentali. Un singolo nodo è in grado di rilevare una moltitudine di parametri. I principali sono:

- Deformazione;
- Spostamento;
- Potenziale galvanico;
- Temperatura;
- Inclinazione;
- Evento sismico.

Le informazioni recepite vengono quindi trasferite ad una piattaforma software per l'analisi. I nodi sono assimilabili ad una nuvola di punti di misura dinamici che aggiornano costantemente il modello digitale strutturale su di essi costruito e interpolato. Si possono pertanto dividere i nodi multi – sensore in tre classi: nodi multi – sensore di spostamento, di deformazione e del potenziale galvanico. Ogni nodo viene opportunamente disposto secondo un “piano di dispiegamento” redatto da un professionista competente. I sensori vengono installati mediante incollaggio nella struttura attraverso adesivo strutturale acrilico. Segue una serie di informazioni legate ad ogni classe di nodi multi - sensore

#### ***1.12.1.1 Nodi multi – sensore di spostamento***

I nodi multi – sensore di spostamento misurano nello stesso momento e nello stesso punto spostamenti, inclinazioni, accelerazioni, eventi sismici e temperatura. Risoluzione e accuratezza dello spostamento sono di +/- 0.05 mm.

#### ***1.12.1.2 Nodi multi – sensore di deformazione***

I nodi multi – sensore di deformazione misurano nello stesso momento e nello stesso punto deformazioni, inclinazioni, accelerazioni, eventi sismici e temperatura. La risoluzione è di 10 microstrain mentre l'accuratezza è di +/- 10 microstrain +/- 1% della misura.



Figura 139: Nodo multi - sensore di deformazione

### ***1.12.1.3 Nodi multi – sensore del potenziale galvanico***

I nodi multi – sensore del potenziale galvanico misurano nello stesso momento e nello stesso punto il potenziale galvanico dell'armatura rispetto ad un elettrodo di riferimento Ag/AgCl (Argento/Cloruro di Argento), inclinazioni, accelerazioni, eventi sismici e temperatura.

#### ***1.12.1.4 La procedura di installazione***

I sensori vengono installati tramite incollaggio nella struttura attraverso adesivo strutturale acrilico. La procedura di installazione varia tra i 15 minuti (per sensori di spostamento e deformazione) e i 40 minuti (per sensori di misura del potenziale galvanico). Si distinguono 4 differenti fasi:

1. Fase 1: preparazione del substrato;
2. Fase 2 (solo per nodi di misura del potenziale galvanico): saldatura del cavo elettrico alle armature. Creazione foro per alloggiamento elettrodo di riferimento, tamponamento elettrodo nel foro con malta per anodi;
3. Fase 3: inserimento batteria nel sensore;
4. Fase 4: incollaggio sensore con adesivo strutturale acrilico.

### **1.12.2 La piattaforma software**

La piattaforma software riceve le informazioni registrate dai nodi multi – sensore e procede con l'analisi. Questa piattaforma è il luogo dove viene generato il modello digitale della realtà fisica misurata dai nodi multi – sensore. I dati dei singoli nodi possono essere valutati singolarmente o riaggregati dinamicamente tramite modelli fisici e statistici interpretativi. È quindi possibile

I nuovi sensori di rilevamento: introduzione e prova di laboratorio

ricostruire l'andamento strutturale dell'opera nel tempo e ridurre il numero di ispezioni visive limitandole ai casi più critici segnalati dal sistema.

Nella piattaforma software viene generato il modello digitale della realtà fisica misurata dai nodi multi – sensore. La piattaforma è anche il controllore centrale della rete LoRa di raccolta dati. È possibile sia verificare e cambiare i parametri operativi dei singoli settori di rete (serviti dal gateway) sia interagire direttamente con il singolo nodo. L'utente finale, attraverso questa piattaforma, può accedere ai dati e alle relative elaborazioni semplicemente da browser con qualunque dispositivo. I dati dei singoli nodi multi – sensore, non solo vengono valutati singolarmente, ma possono essere riaggregati dinamicamente tramite modelli fisici interpretativi.

La piattaforma implementa la visualizzazione e navigazione tridimensionale della struttura in modo tale da offrire un approccio visivo globale equivalente a quello di una visita diretta sul campo. La navigazione virtuale consente inoltre di visualizzare ad occhio, attraverso un colore diverso, eventuali elementi strutturali che hanno superato un determinato valore soglia impostato dal tecnico competente.

Si può inoltre interagire con i sistemi BIM (Buildin Information Model) sia in fase di stesura del piano di dispiegamento dei nodi multi – sensore sia per le analisi successive.

### **1.12.3 L'infrastruttura di rete e il protocollo LoRa**

L'infrastruttura di rete rappresenta il canale di comunicazione tra i nodi multi – sensore e la piattaforma software ed è costituita da gateway (access point di rete) di nuova generazione. I gateway comunicano con i nodi attraverso lo standard LoRa e con la piattaforma software via 3G/4G, rete ETHERNET fisica, ma possono essere collegati anche a dorsali in fibra ottica se disponibili localmente. I gateway sono alimentati da rete elettrica o in assenza da fonte solare.



*Figura 140: Vista del gateway equipaggiato con pannello solare (sx) e dettaglio del dispositivo (dx)*

LoRa è il sistema dati wireless di riferimento per le applicazioni IoT (Internet of Things). Le unità LoRa sono in grado di ricevere messaggi fino a 20dB al di sotto della soglia del rumore. Il raggio operativo è di al massimo 2 Km in ambiente urbano e di 15 Km in area aperta. I gateway Lora coesistono senza problemi con ripetitori di telefonia cellulare e trasmettono con una potenza molto bassa (25mW), 4 volte inferiore a quella di un ACCESS POINT Wi-Fi; non creano quindi alcun problema in termini di inquinamento elettromagnetico. Un singolo gateway LoRa può gestire fino a 65000 sensori.

### **1.13 La prova di laboratorio**

Sono state eseguite delle prove presso il laboratorio del DISEG del Politecnico di Torino, al fine di confrontare la prestazione di un nodo multi – sensore di deformazione con gli strumenti preesistenti dello stesso tipo. La prova è stata eseguita applicando una trazione su due elementi di cemento armato, con una barra di acciaio in corrispondenza del baricentro, e su due lastre di alluminio. Le prove sono state eseguite in controllo di carico. Si riportano per chiarezza alcune immagini.



Figura 141: Tirante in cemento armato(sx) e lastra di alluminio(dx) testati presso il laboratorio del DISEG del Politecnico di Torino

## 1.14 L'applicazione sul campo: il sistema di monitoraggio permanente su ponti e viadotti

Nel seguito è schematicamente riportata a titolo di esempio una delle disposizioni proposte per il sistema di monitoraggio, riferita a un ponte a campata continua.

Nello schema proposto è stata prevista l'installazione di nodi multi-sensore ai lati delle pile sul livello di base e sul livello di sommità, per misurare le deformazioni sui lembi esterni della pila determinandone anche in tali sezioni le curvature medie; in tal modo è possibile comunque determinare in tali livelli le inclinazioni (la cui integrazione consente di stimare la deformazione trasversale complessiva sui vari assi) nonché avere una ulteriore indicazione sullo sviluppo della deformazione lungo l'altezza.

Si prevedono poi nodi multi-sensore accoppiati ai due lembi delle travi principali dell'impalcato per calcolarne le curvature e registrarne le inclinazioni ed effetti dinamici. Tali informazioni



La decisione sul posizionamento dei nodi multi-sensore deriva direttamente dall'individuazione degli elementi più significativi sotto il profilo dell'analisi strutturale o della disamina specifica dell'opera; lo schema proposto, da intendersi preliminare, ha lo scopo prevalente di illustrare una possibile metodologia e chiarire i vantaggi dell'estensione e capillarità della proposta effettuata.

Con riferimento ad un determinato evento sismico sarà possibile ricavare informazioni specifiche sull'impulso sismico effettivo verificatosi, sulla risposta dinamica della struttura reale, sugli effetti e sulle deformazioni generatesi, sulla presenza di significativo danneggiamento a seguito dell'evento. I nodi multi-sensore consentono infatti di registrare accelerazioni, deformazioni ed inclinazioni cui sono soggetti gli elementi strutturali (o porzioni di essi) su cui sono installati, così da consentire la stima delle azioni sismiche agenti e stati deformativi residui da esse generati.

### **1.15 Potenzialità di applicazione**

La soluzione proposta consente una riduzione del numero di ispezioni visive limitandole ai casi più critici segnalati dal sistema. La ridondanza di nodi multi – sensore non costituisce una duplicazione, ma un aumento della risoluzione e dell'informazione. La modalità operativa proposta è quella dell'aggregazione crescente delle informazioni, al fine di costruire il modello digitale dinamico. Il sistema di monitoraggio è a basso consumo energetico, i nodi multi – sensore sono alimentati con batterie a durata pluriennale. Risulta perciò molto semplice installarli (nessuna linea di alimentazione richiesta) e mantenerli (cambio batteria a intervalli di anni). I nodi sono auto-allineanti, cioè non è necessario applicarli esattamente allineati con la verticale terrestre, come richiesto dai convenzionali inclinometri, né azzerare il ponte di misura dell'estensimetro, come richiesto dai convenzionali sensori di deformazione). La procedura di installazione dei nodi richiede non più di 15 minuti. Per i sensori di misura del potenziale galvanico, circa 40 minuti.

## Conclusioni

Il monitoraggio strutturale è uno dei principali campi di studio e ricerca dell'ingegneria civile.

La sicurezza di una struttura influenza lo sviluppo di diversi settori della società, da quello economico, a quello ambientale, ed è pertanto di vitale importanza garantirne la continuità nel tempo.

Il patrimonio immobiliare ed infrastrutturale italiano è variegato e unico nel suo genere, e costituisce, di fatto, un importante archivio storico di valore plurimillenario. La naturale complessità legata alle differenti tecniche costruttive e ai diversi materiali utilizzati, che si sono susseguiti nel corso dei secoli, rende necessario lo sviluppo di metodologie innovative in grado di fornire risultati soddisfacenti a costi contenuti.

La presente tesi ha introdotto la storia ed i concetti principali dello *Structural Health Monitoring* (SHM), ovvero del monitoraggio strutturale, approfondendo con una particolare chiave di lettura il problema del monitoraggio dei ponti.

Nel campo dell'ingegneria civile permangono complessità tecniche tali da non considerare consolidata un'unica metodologia, o sistema di monitoraggio, efficiente ed a basso costo. Il risultato più convincente appare comunque quello dell'individuazione di anomalie strutturali tra quanto registrato e quanto "previsto" in fase di progetto/controllo. Uno degli elementi più comunemente utilizzati a tal fine è il valore dello spostamento di un punto della struttura.

Il cuore della tesi ha riguardato lo sviluppo di modelli teorici in grado di ricostruire, sulla base di misure sperimentali di curvatura, la deformata reale di una struttura.

Le metodologie elaborate nel corso di questo studio sono state applicate sia a valori puramente teorici sia a valori sperimentali ottenuti in laboratorio.

I risultati hanno portato lo scrivente alle seguenti conclusioni: per strutture isostatiche e iperstatiche (travi continue su più appoggi), di cui si conoscono poche informazioni caratteristiche (proprietà geometriche e meccaniche dei materiali), il metodo polinomiale e il metodo dello sviluppo in serie di Fourier garantiscono la ricostruzione della deformata con un errore inferiore al 20%, ma quasi sempre compreso tra il 5% e il 15%.

Lo studio del posizionamento ottimale degli estensimetri, per la determinazione del valore sperimentale di curvatura, suggerisce di collocare i sensori, per travi in semplice appoggio o

doppiamente incastrate, nella mezzeria delle travi e, quando possibile, in corrispondenza del primo (o ultimo) quarto del loro sviluppo longitudinale.

Per i casi in cui siano installate contemporaneamente 3 coppie di estensimetri in un'unica campata, occorrerà assicurare un congruo distanziamento tra le sezioni, al fine di non derivare, a causa della natura numerica dei parametri utilizzati, funzioni polinomiali (metodo polinomiale) o coefficienti numerici (metodo dello sviluppo in serie di Fourier) che generino risultati poco accurati.

Nel caso di mensole, questo studio di tesi suggerisce di applicare lo sviluppo in serie di Fourier installando i sensori di deformazione a  $0.23L$  dalla sezione di incastro.

Qualora il livello di conoscenza della struttura sia elevato, ovvero si abbiano a disposizione informazioni inerenti alla storia di carico e ai principali interventi di manutenzione eseguiti, o quando ancora si abbia la possibilità di chiudere al traffico la circolazione per eseguire delle prove di carico statiche, oltre alle metodologie precedentemente nominate, risulta conveniente l'applicazione del metodo del diagramma momento – curvatura. Esso consente di calcolare le rigidezze flessionali reali della struttura, tenendo conto dell'effetto del taglio sulla curvatura. In quest'ultimo caso, acquisendo un unico valore sperimentale di curvatura per campata, è stato calcolato un errore massimo (cautelativo) compreso tra il 10% e il 20%. La ridondanza dei sensori di rilevamento aumenta la precisione e l'affidabilità dei risultati.

L'effetto del taglio sulla freccia, per tutti i metodi trattati, può essere preso in conto tramite un metodo semplificato che consente di incrementare l'abbassamento indotto dall'azione flettente di una quantità percentuale, secondo gli schemi presenti in letteratura.

Infine, è stata analizzata come caso studio una soluzione low-cost e tecnicamente avanzata proposta da una start up del Politecnico di Torino. Coniugando un sistema di rilevamento multi – sensore a basso costo con le metodologie di calcolo introdotte, si considera possibile implementare un'infrastruttura di monitoraggio, in maniera massiva e capillare, che permetta di migliorare il livello di conoscenza e di sicurezza nell'ambito della gestione e dell'uso delle infrastrutture.

## **Bibliografia**

- AASHTO**, *AASHTO Manual for Condition Evaluation of Bridges*, 1994, 2nd Ed., with revisions through 2002. Amer Assoc State Highway and Trans Officials, Washington, DC, 2003.
- ACI 318M -11**, *Building Code Requirements for structural Concrete and Commentary*, ACI Committee 318, 2011.
- ACI 435R-95**, *Control of Deflection in Concrete Structures*, ACI Committee 435, reapproved 2000, appendix B added 2003.
- ASCE**, *Guideline for Structural Condition Assessment of Existing Buildings*, SEI/ASCE 11-99, Reston, 2000.
- BRANSON D. E.**, *Instantaneous and Time-Dependent Deflections of Simple and Continuous Reinforced Concrete Beams*, Report No. 7, Alabama Highway Research Report, Bureau of Public Roads, 1963.
- BRANSON D.E.**, *Deformation of Concrete Structures*, McGraw Hill Book Co., Advanced Book Program, New York, p. 546, 1977.
- BRANSON D.E.**, *Handbook of Concrete Engineering*, Chapter 2- Deflections, Second Edition, Van Nortrand Reinhold Co., New York Editor, M. Fintel, pp. 53-78, 1985.
- BRANSON D.E., TROST H.**, *Unified Procedures for Predicting the Deflection and Centroidal Axis Location of Partially Cracked Non-Prestressed Members*, ACI JOURNAL, Proceedings, V. 79, No. 2, Mar-Apr, pp.119-130, 1982.
- BROWNJOHN J.M.V., XIA P.Q.**, *Dynamic assessment of curved cable-stayed bridge by model updating*, in Journal of Structural Engineering, Vol. 126 (2), 2000.
- CEB BULLETIN D'INFORMATION N°158**, *Cracking and deformations*, Comité Euro – International du Béton, 1985.
- CEB BULLETIN D'INFORMATION N°235**, *Serviceability Models*, Behaviour and modelling in serviceability limit states including repeated and sustained loads, Comité Euro – International du Béton, 1997.
- CHEUNG Y.K.**, *Finite strip method in structural analysis*, 2<sup>nd</sup> edition, Pergamon Press, 1976.
- CHIARUGI A., FORABOSCHI P.**, *Monitoraggio ed identificazione strutturale*, Università degli studi di Firenze, in *Monitoraggio delle strutture dell'Ingegneria Civile*, Collana di

Ingegneria Strutturale, vol. no.9, Udine, International Centre for Mechanical Sciences, 1995.

**D.M. 17 GENNAIO 2018, AGGIORNAMENTO DELLE NORME TECNICHE SULLE COSTRUZIONI (NTC18)**

**DEBERNARDI P. G., TALIANO M.,** *Shear deformation in reinforced concrete beams with thin web*, in Magazine of Concrete Research, 58, No. 3, Aprile, pp. 157-171, 2006.

**DEBERNARDI P.G., GUIGLIA M., TALIANO M.,** *Shear strain in B-regions of beams in Service*, Engineering Structures 33, pp.368-379, 2011.

**DEBERNARDI P.G., TALIANO M., GUIGLIA M.,** *Parametric analysis of the influence of shear on the deflection of RC beams in service*, in Magazine of Concrete Research, Volume 63 Issue 1, Paper 1100013, 2011.

**DOEBLING S.W., FARRAR C.R., PRIME M.B., SHEVITZ D.W.,** *Damage identification and health monitoring of structural and mechanical systems from changes in their vibration characteristics: a literature review*, Los Alamos National Laboratory, 1996.

**FIB MODEL CODE 2010**, Volume 1, International Federation for Structural Concrete (*fib*), Document Competence Center Siegmund Kastl e K., Germany, Marzo 2012.

**HUSTON D.,** *Structural Sensing, Health Monitoring and Performance Evaluation*, 1 ed., United States of America, CRC Press, 2011.

**INAUDI D., CASANOVA N., VURPILLOT S., KRONENBERG P., MARTINOLA G., STEINMANN G., MATHIER J.,** *Sofa: structural monitoring with fiber optic sensor*, in fib “Monitoring and Safety Evaluation of Existing Concrete Structures”, 12-13.2.1999, Vienna, Austria.

**KULCHIN Y.N., VITRIK O.B., DYSHLYUK A.V.,** *Fiber-optic inclinometer for structural health monitoring*, Institute for Automation and Control Processes, 2007.

**NEVES C.,** *Structural Health Monitoring of Bridges, Model-free damage detection method using machine learning*, KTH Royal Institute of technology, 2017, Stoccolma, Svezia.

**ROSSI P.P.,** *Analisi delle condizioni statiche delle strutture murarie, Indagini conoscitive e monitoraggio*, Bergamo, in *Monitoraggio delle strutture dell’Ingegneria Civile*, Collana di Ingegneria Strutturale, vol. no.9, Udine, International Centre for Mechanical Sciences, 1995.

- RYTTER A.**, *Vibration Based Inspection of Civil Engineering Structures*, Aalborg University, Denmark: PhD Thesis, 1993.
- SOUSA H., CAVADAS F., HENRIQUES A., BENTO J., FIGUEIRAS J.**, *Bridge deflection evaluation using strain and rotation measurements*, in *Smart structures & Systems*, Volume 11, pp. 365-386, Aprile 2013.
- TARANTINO A.M.**, *Introduzione alla meccanica delle strutture*, Pitagora Editrice Bologna, 2009.
- Task Group 5.1**, *Monitoring and safety evaluation of existing concrete structures*, in *fib Bulletin 22*, Marzo 2003.
- VURPILLOT A., KRUEGER G., BENOUAICH D., CLEMENT D., INAUDI D.**, *Vertical deflection of a pre-stressed concrete bridge obtained using deformation sensors and inclinometer measurements*, *Aci structural journal*, Settembre 1998.
- XU Y.L., XIA Y.**, *Structural health monitoring of long-span suspension bridges*, United States of America, Spon Press, 2012.
- ZIVANOVIC S., PAVIC A., REYNOLDS P.**, *Finite element modeling and updating of a lively footbridge: the complete process*, in *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 301 (1-2), 2007.

## Indice delle figure e delle tabelle

### Figure

Figura 1: Vantaggi del monitoraggio strutturale .....	1
Figura 2: Golden Gate Bridge (sx, Rich Niewiroski Jr.) e Bay Bridge (dx, Samuel Wantman) a San Francisco, California, USA, Wikipedia.....	2
Figura 3: Architettura del SHM .....	4
Figura 4: Anemometro (sx, da NTNU/Knut Andreas Kvåle) e Termometro (dx, da Evolution Measurement).....	11
Figura 5: Estensimetro resistivo, Wikipedia .....	12
Figura 6: Schema di un sistema di monitoraggio SOFO, INAUDI D., CASANOVA N., VURPILLOT S., KRONENBERG P., MARTINOLA G., STEINMANN G., MATHIER J., Sofo: structural monitoring with fiber optic sensor, in Fib “Monitoring and Safety Evaluation of Existing Concrete Structures”, 12-13.2.1999, Vienna, Austria, p.3.....	14
Figura 7: Sezione di un LVDT, La tensione è applicata all'avvolgimento primario A, causando una corrente indotta nell'avvolgimento secondario B, Wikipedia.....	15
Figura 8: Fattori che influenzano la prognosi strutturale, HUSTON D., Structural Sensing, Health Monitoring and Performance Evaluation, 1 ed., United States of America, CRC Press, 2011, p. 31.....	24
Figura 9: Curvatura di una sezione .....	28
Figura 10: Diagramma momento - curvatura media secondo il CEB Bulletin d’information n°235, COSENZA E. E GRECO C., Il calcolo delle deformazioni nelle strutture in cemento armato, 1991, pag. 30.....	38
Figura 11: Curvatura di una sezione trasversale ricavata tramite misure estensimetriche.....	44
Figura 12: Trave semplicemente appoggiata con forza concentrata in mezzzeria .....	44
Figura 13: Disallineamento dall'origine del diagramma Momento - Curvatura misurato .....	45
Figura 14: Travi testate in laboratorio, Taliano M. e Debernardi P.G., Shear deformation in reinforced concrete beams with thin web, 2006.....	48
Figura 15: Sezioni trasversali delle travi testate in laboratorio, Taliano M. e Debernardi P.G., Shear deformation in reinforced concrete beams with thin web, 2006 .....	49

Figura 16: Rappresentazione della trave 3 .....	50
Figura 17: Trave 3 soggetta al carico uniformemente distribuito dato dal peso proprio .....	51
Figura 18: Diagramma momento - curvatura per la sezione "B" della trave 3, dopo aver effettuato il "link" .....	52
Figura 19: Diagramma momento - curvatura per la sezione "D" della trave 3, dopo aver effettuato il "link" .....	52
Figura 20: Diagramma M-C per la sezione B della trave 3 con sovrapposizione dei valori sperimentali, del modello CEB e del modello ACI.....	53
Figura 21: Diagramma M-C per la sezione D della trave 3 con sovrapposizione dei valori sperimentali, del modello CEB e del modello ACI.....	54
Figura 22: Sistema reale trave 3 .....	54
Figura 23: Sistema fittizio trave 3 .....	54
Figura 24: Momento flettente per la trave 3 nel sistema reale .....	55
Figura 25: Estrapolazione dati dal diagramma momento - curvatura per la sezione B della trave 3 .....	57
Figura 26: Estrapolazione dati dal diagramma momento - curvatura per la sezione D della trave 3 .....	57
Figura 27: Diagramma forza concentrata - freccia per la trave 3.....	58
Figura 28: Rappresentazione della trave 1 .....	59
Figura 29: Trave 1 soggetta al carico uniformemente distribuito dato dal peso proprio .....	60
Figura 30: Diagramma momento - curvatura per la sezione "B" della trave 1, dopo aver effettuato il "link" .....	61
Figura 31: Diagramma momento - curvatura per la sezione "D" della trave 1, dopo aver effettuato il "link" .....	61
Figura 32: Diagramma M-C per la sezione "B" della trave 1 con sovrapposizione dei valori sperimentali, del modello CEB e del modello ACI.....	62
Figura 33: Diagramma M-C per la sezione "D" della trave 1 con sovrapposizione dei valori sperimentali, del modello CEB e del modello ACI.....	62

Figura 34: Sistema reale trave 1 .....	63
Figura 35: Sistema fittizio trave 1 .....	63
Figura 36: Diagramma del momento flettente del sistema reale della trave 1 .....	64
Figura 37: Estrapolazione dati dal diagramma momento - curvatura per la sezione B della trave 1 .....	66
Figura 38: Estrapolazione dati dal diagramma momento - curvatura per la sezione D della trave 1 .....	67
Figura 39: Diagramma forza concentrata - freccia per la trave 1.....	67
Figura 40: Rappresentazione della trave 2 .....	68
Figura 41: Trave 2 soggetta al carico uniformemente distribuito dato dal peso proprio .....	69
Figura 42: Diagramma momento - curvatura per la sezione "B" della trave 2, dopo aver effettuato il "link" .....	70
Figura 43: Diagramma momento - curvatura per la sezione "D" della trave 2, dopo aver effettuato il "link" .....	70
Figura 44: Diagramma M-C per la sezione "B" della trave 2 con sovrapposizione dei valori sperimentali, del modello CEB e del modello ACI.....	71
Figura 45: Diagramma M-C per la sezione "D" della trave 2 con sovrapposizione dei valori sperimentali, del modello CEB e del modello ACI.....	71
Figura 46: Sistema reale trave 2 .....	72
Figura 47: Sistema fittizio trave 2 .....	72
Figura 48: Diagramma del momento flettente del sistema reale della trave 2 .....	73
Figura 49: Estrapolazione dati dal diagramma momento - curvatura per la sezione B della trave 2 .....	75
Figura 50: Estrapolazione dati dal diagramma momento - curvatura per la sezione D della trave 2 .....	76
Figura 51: Diagramma forza concentrata - freccia per la trave 2.....	77
Figura 52: Rappresentazione della trave 1 .....	81

Figura 53: Stime dell'abbassamento per la trave 1 in funzione del numero di sensori di deformazione considerati .....	82
Figura 54: Errori corrispondenti ai diversi valori del carico in funzione delle diverse configurazioni di posizionamento dei sensori di deformazione, trave 1 .....	83
Figura 55: Rappresentazione della trave 2 .....	83
Figura 56: Stime dell'abbassamento per la trave 2 in funzione del numero di sensori di deformazione considerati .....	84
Figura 57: Errori corrispondenti ai diversi valori del carico in funzione delle diverse configurazioni di posizionamento dei sensori di deformazione, trave 2 .....	85
Figura 58: Rappresentazione della trave 3 .....	85
Figura 59: Stime dell'abbassamento per la trave 3 in funzione del numero di sensori di deformazione considerati .....	86
Figura 60: Errori corrispondenti ai diversi valori del carico in funzione delle diverse configurazioni di posizionamento dei sensori di deformazione, trave 3 .....	87
Figura 61: Stime aggiornate dell'abbassamento per la trave 3 in funzione del numero di sensori di deformazione considerati .....	88
Figura 62: Errori aggiornati corrispondenti ai diversi valori del carico in funzione delle diverse configurazioni di posizionamento dei sensori di deformazione, trave 3 ..	88
Figura 63: Rappresentazione della trave 5 .....	88
Figura 64: Stime dell'abbassamento per la trave 5 in funzione del numero di sensori di deformazione considerati .....	90
Figura 65: Errori corrispondenti ai diversi valori del carico in funzione delle diverse configurazioni di posizionamento dei sensori di deformazione, trave 5 .....	90
Figura 66: Rappresentazione della trave 6 .....	91
Figura 67: Stime dell'abbassamento per la trave 6 in funzione del numero di sensori di deformazione considerati .....	92
Figura 68: Errori corrispondenti ai diversi valori del carico in funzione delle diverse configurazioni di posizionamento dei sensori di deformazione, trave 6 .....	92

Figura 69: Trave semplicemente appoggiata sollecitata da un carico uniformemente distribuito.....	97
Figura 70: Errori del metodo dello sviluppo in serie di Fourier per una trave semplicemente appoggiata sollecitata da un carico uniformemente distribuito.....	97
Figura 71: Trave semplicemente appoggiata sollecitata da una forza concentrata in mezzzeria.....	98
Figura 72: Errori del metodo dello sviluppo in serie di Fourier per una trave semplicemente appoggiata sollecitata da una forza concentrata applicata in mezzzeria.....	99
Figura 73: Trave semplicemente appoggiata sollecitata da due forze concentrate simmetricamente disposte .....	100
Figura 74: Errori del metodo dello sviluppo in serie di Fourier per una trave semplicemente appoggiata sollecitata da due forze concentrate simmetricamente disposte .....	100
Figura 75: Trave semplicemente appoggiata con forza concentrata disposta in un punto generico .....	101
Figura 76: Errori del metodo dello sviluppo in serie di Fourier per una trave semplicemente appoggiata sollecitata da una forza concentrata disposta in maniera asimmetrica .....	102
Figura 77: Trave semplicemente appoggiata con carico distribuito e forza concentrata in mezzzeria.....	103
Figura 78: Errori del metodo dello sviluppo in serie di Fourier per una trave semplicemente appoggiata sollecitata da un carico uniformemente distribuito e una forza concentrata in mezzzeria .....	104
Figura 79: Trave 1 .....	105
Figura 80: Diagramma freccia - carico, Trave 1 .....	106
Figura 81: Diagramma errore della previsione - carico applicato, Trave 1 .....	106
Figura 82: Diagramma errore della previsione - carico applicato, range +20%/-20%, Trave 1.....	106
Figura 83: Diagramma precisione previsione - sezione considerata, Trave 1 .....	107
Figura 84: Trave 2.....	107

Figura 85: Diagramma freccia - carico, Trave 2 .....	108
Figura 86: Diagramma errore previsione - carico applicato, Trave 2 .....	108
Figura 87: Diagramma errore della previsione - carico applicato, range +20%/-20%, Trave 2.....	108
Figura 88: Diagramma precisione della previsione - sezione considerata, Trave 2.....	109
Figura 89: Trave 3 .....	109
Figura 90: Diagramma freccia - carico, Trave 3 .....	110
Figura 91: Diagramma errore della previsione - carico applicato, Trave 3 .....	110
Figura 92: Diagramma errore della previsione - carico applicato, range +20%/-20%, Trave 3.....	110
Figura 93: Diagramma precisione della previsione - sezione considerata, Trave 3.....	111
Figura 94: Trave 5 .....	111
Figura 95: Diagramma freccia - carico, Trave 5 .....	112
Figura 96: Diagramma errore della previsione - carico applicato, Trave 5 .....	112
Figura 97: Diagramma errore della previsione - carico applicato, range +20%/-20%, Trave 5.....	112
Figura 98: Diagramma precisione della previsione - sezione considerata, Trave 5.....	113
Figura 99: Trave 6 .....	113
Figura 100: Diagramma freccia - carico, Trave 6 .....	114
Figura 101: Diagramma errore della previsione - carico applicato, Trave 6 .....	114
Figura 102: Diagramma errore della previsione - carico applicato, range +20%/-20%, Trave 6.....	114
Figura 103: Diagramma precisione della previsione - sezione considerata, Trave 6.....	115
Figura 104: Estrapolazione del valore fshear/fbending per le travi 1,2 e 3 (rosso, verde, blu).....	117
Figura 105: Estrapolazione del valore fshear/fbending per le travi 5 e 6 (rosso e blu) .....	117
Figura 106: Trave 1 .....	119

Figura 107: Diagramma freccia - carico, Trave 1, con taglio .....	119
Figura 108: Diagramma errore della previsione - carico applicato, Trave 1, con taglio .....	119
Figura 109: Diagramma errore della previsione - carico applicato, range +20%/-20%, Trave 1, con taglio .....	120
Figura 110: Diagramma precisione previsione - sezione considerata, Trave 1, con taglio....	120
Figura 111: Trave 2 .....	121
Figura 112: Diagramma freccia - carico, Trave 2, con taglio .....	121
Figura 113: Diagramma errore previsione - carico applicato, Trave 2, con taglio .....	121
Figura 114: Diagramma errore della previsione - carico applicato, range +20%/-20%, Trave 2, con taglio .....	122
Figura 115: Diagramma precisione della previsione - sezione considerata, Trave 2, con taglio .....	122
Figura 116: Trave 3 .....	123
Figura 117: Diagramma freccia - carico, Trave 3, con taglio .....	123
Figura 118: Diagramma errore della previsione - carico applicato, Trave 3, con taglio .....	123
Figura 119: Diagramma errore della previsione - carico applicato, range +20%/-20%, Trave 3, con taglio .....	124
Figura 120: Diagramma precisione della previsione - sezione considerata, Trave 3, con taglio .....	124
Figura 121: Trave 5 .....	125
Figura 122: Diagramma freccia - carico, Trave 5, con taglio .....	125
Figura 123: Diagramma errore della previsione - carico applicato, Trave 5, con taglio .....	125
Figura 124: Diagramma errore della previsione - carico applicato, range +20%/-20%, Trave 5, con taglio .....	126
Figura 125: Diagramma precisione della previsione - sezione considerata, Trave 5, con taglio .....	126
Figura 126: Trave 6 .....	127
Figura 127: Diagramma freccia - carico, Trave 6, con taglio .....	127

Figura 128: Diagramma errore della previsione - carico applicato, Trave 6, con taglio .....	127
Figura 129: Diagramma errore della previsione - carico applicato, range +20%/-20%, Trave 6, con taglio .....	128
Figura 130: Diagramma precisione della previsione - sezione considerata, Trave 6, con taglio .....	128
Figura 131: Trave doppiamente incastrata sollecitata da una forza concentrata in mezzzeria	130
Figura 132: Errori del metodo dello sviluppo in serie di Fourier per una trave doppiamente incastrata sollecitata da una forza concentrata in mezzzeria.....	130
Figura 133: Errori del metodo dello sviluppo in serie di Fourier per una trave doppiamente incastrata sollecitata da una forza concentrata in mezzzeria, con disposizione differente dei sensori nel caso dei “3 coefficienti”.....	131
Figura 134: Mensola sollecitata da una forza concentrata all'estremità libera .....	133
Figura 135: Errori del metodo dello sviluppo in serie di Fourier per una mensola sollecitata da una forza concentrata all'estremità libera – funzione di forma “A” .....	134
Figura 136: Errori del metodo dello sviluppo in serie di Fourier per una mensola sollecitata da una forza concentrata all'estremità libera – funzione di forma “B” .....	135
Figura 137: Posizionamento ottimale dei sensori di deformazione per il metodo dello sviluppo in serie di Fourier, funzione di schema statico e carico agente .....	136
Figura 138: Schema organizzativo del sistema SHBox .....	139
Figura 139: Nodo multi - sensore di deformazione.....	141
Figura 140: Vista del gateway equipaggiato con pannello solare (sx) e dettaglio del dispositivo (dx).....	143
Figura 141: Tirante in cemento armato(sx) e lastra di alluminio(dx) testati presso il laboratorio del DISEG del Politecnico di Torino .....	144
Figura 142: Sezione spalla A-A del ponte su cui sono stati installati i sensori.....	145
Figura 143: Sezione Pila B-B su cui sono stati installati i sensori.....	145

## **Tabelle**

Tabella 1: Schema logico del problema diretto e del problema inverso .....	6
Tabella 2: Schema logico dell'approccio "virtuale" .....	8
Tabella 3: variazione del modulo elastico secondo i diversi riferimenti tecnici .....	30
Tabella 4: Caratteristiche meccaniche dell'armatura ordinaria delle travi testate in laboratorio, Taliano M. e Debernardi P.G., Shear deformation in reinforced concrete beams with thin web, 2006 .....	49
Tabella 5: Valori dei parametri fondamentali della sezione trasversale della trave 3.....	50
Tabella 6: Rigidezze flessionali sperimentali sezione B della trave 3 .....	57
Tabella 7: Rigidezze flessionali sperimentali sezione D della trave 3 .....	58
Tabella 8: Risultati dell'applicazione del metodo del diagramma M-C per la trave 3 .....	59
Tabella 9: Valori dei parametri fondamentali della sezione trasversale della trave 1 .....	60
Tabella 10: Valori dei parametri fondamentali della sezione trasversale della trave 2.....	69
Tabella 11: Posizionamento ottimale dei sensori in funzione delle condizioni di carico e del numero degli strumenti disponibili.....	116
Tabella 12: Valori $f_{shear}/f_{bending}$ per le travi testate in laboratorio .....	118
Tabella 131: Posizionamento ottimale dei sensori in funzione delle condizioni di carico e del numero degli strumenti disponibili.....	137

## **Ringraziamenti**

Desidero ringraziare chi ha contribuito alla stesura della tesi attraverso osservazioni, critiche e spunti di riflessione.

Ringrazio il mio relatore, Prof. Maurizio Taliano, e il mio correlatore, Dott. Matteo Guiglia, per la disponibilità e la professionalità mostrate durante gli ultimi mesi.

Un ringraziamento particolare va alle due persone che mi sono state vicino negli ultimi 24 anni, Sara e Oronzina.