

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea in Ingegneria Civile

Tesi di Laurea

**Modellazione numerica e
stocastica del comportamento a
lungo termine di fiumi
meandriiformi**



Relatore

Prof. Carlo Vincenzo Camporeale

Candidata

Francesca Bassani

ANNO ACCADEMICO 2017/2018

A mio padre

Abstract

Nonostante le numerose ricerche condotte negli ultimi decenni siano state foriere di interessanti risultati, la dinamica a lungo termine dei fiumi meandriformi rimane tutt'ora una questione aperta, in particolar modo per quanto riguarda l'esistenza di un possibile stato stazionario su scale temporali lunghe e l'interazione tra l'azione dei *cutoffs* e l'allungamento del fiume.

Per esplorare dettagliatamente tali dinamiche è stato impiegato un codice numerico che utilizza il noto modello di Ikeda, Parker e Sawai del 1981. Tale modello è stato riesaminato con l'approccio fisico in cui è presente l'equazione del moto esplicita, già ampiamente discusso nello studio di Edwards e Smith del 2002.

In particolare tutte le variabili in gioco sono state rese adimensionali attraverso due scale fondamentali: una per lo spazio e l'altra per il tempo.

Dopo aver correlato i due parametri idraulici di input, tensione τ_0 e scabrezza relativa d_0 , al rapporto di forma $\beta_0 = \text{semilarghezza}/\text{tirante}$ mediante l'impiego di alcune relazioni idro-geomorfologiche presenti in letteratura, è stato possibile scegliere diverse triplette fondamentali da cui si sono ricavati tutti gli altri parametri morfodinamici necessari per il codice.

I risultati derivanti dalle dodici simulazioni così ottenute sono stati poi analizzati ed elaborati, studiando le funzioni di distribuzione di probabilità di sinuosità e lunghezza curvilinea, necessarie per la formulazione di un modello stocastico del fenomeno.

Infine è stata studiata la possibilità, nell'ottica di sviluppi futuri, di integrare il modello numerico con un modello per tenere in conto la presenza della vegetazione e come la sua crescita possa incidere sulle dinamiche di meandriizzazione del fiume. In questo caso le scale temporali da utilizzare sono decisamente inferiori rispetto alla dinamica in assenza di sponde vegetate.

Indice

Elenco delle figure	7
Elenco delle tabelle	9
Introduzione	11
I Modello Numerico	15
1 Modelli matematici per i processi morfodinamici	16
1.1 Ipotesi alla base dei modelli	17
1.2 Modello di Zolezzi e Seminara (2001)	18
1.3 Modello di Johannesson e Parker (1989)	19
1.4 Modello di Ikeda, Parker e Sawai (1981)	19
2 Descrizione del codice utilizzato	22
2.1 Adimensionalizzazione delle grandezze	26
2.2 Parametri idraulici	29
2.3 Algoritmo numerico	33
3 Analisi dei risultati	40
3.1 Planimetrie	41
3.2 Sinuosità	43
3.3 Distribuzione di probabilità delle Curvature	48
3.4 Tempi di accadimento tra <i>cutoffs</i>	49
3.5 Lunghezze dei tratti di fiume tagliati in seguito ai <i>cutoffs</i>	52
3.6 Relazioni empiriche tra velocità di migrazione e sinuosità	54
3.7 Distribuzione planimetrica delle larghezze raggiunte dal fiume	58

II	Modello Stocastico	61
4	Sistemi dinamici e rumore	62
4.1	White shot noise	64
4.2	Sistemi dinamici forzati dal white shot noise	66
5	Descrizione del processo stocastico	68
5.1	Confronto tra modello numerico e modello stocastico	74
5.2	Adattamento del modello stocastico ai risultati numerici	77
III	Sviluppi futuri	79
6	Test di un modello bio-morfodinamico	80
6.1	Limiti del modello	87
	Conclusioni	88
	Bibliografia	90
	Ringraziamenti	95

Elenco delle figure

1.1	Schema delle variabili geometriche.	18
2.1	Profili delle velocità nei fiumi meandriformi.	24
2.2	Schema geometrico per l'equazione del moto della curva parametrizzata.	25
2.3	Schema geometrico per l'infittimento dei punti della curva.	34
2.4	Risultati ottenuti nel 2005 da Camporeale et al.	35
3.1	Planimetrie ai tempi $t = 2,15,20,7$ per sim. n° 1,2,3,4.	41
3.2	Planimetrie a metà evoluzione, $t = 50$ per sim. n° 5,6,7,8.	42
3.3	Planimetria a fine evoluzione, $t = 150$ per sim. n° 11.	42
3.4	Planimetrie a fine evoluzione, $t = 100$ per sim. n° 9,10.	43
3.5	Planimetria a fine evoluzione, $t = 150$ per sim. n° 12.	43
3.6	Andamento della Sinuosità S nel tempo.	44
3.7	Pdf della Sinuosità S	45
3.8	Andamento di \dot{S} in funzione di S	46
3.9	Valori di $\langle \hat{\rho} \rangle$ in funzione di P	47
3.10	Pdf della Curvatura C	48
3.11	Pdf degli intertempi tra <i>cutoffs</i> dt	50
3.12	Andamento di $\hat{\lambda}$ in funzione di P	51
3.13	Pdf delle lunghezze ΔL in seguito ai <i>cutoffs</i>	52
3.14	Andamento di α/\bar{L} in funzione di P	54
3.15	Andamento di \bar{V} nel tempo per le sim. n° 11 e 12.	55
3.16	Andamento di $\bar{V}(s)$ in funzione di S per sim. n° 11.	57
3.17	Andamento di $\bar{V}(s)$ in funzione di S per sim. n° 12.	57
3.18	Schema per il calcolo della distribuzione planimetrica.	58
3.19	Pdf della distribuzione delle larghezze B	59
3.20	Andamento di B_{80} in funzione di P	60
4.1	Esempio di realizzazione del <i>white shot noise</i> e del processo di Poisson.	65
5.1	Decrescita di S durante gli intervalli dt di accadimento dei <i>cutoffs</i>	69

5.2	Andamento della $p(S)$ in funzione di S in seguito alla modellazione stocastica.	73
5.3	Pdf della Sinuosità S in seguito alla modellazione numerica e curve normali teoriche.	74
5.4	$p(S)$ numeriche e stocastiche per le simulazioni n° 1-6.	76
5.5	$p(S)$ numeriche e stocastiche per le simulazioni n° 7-12.	77
6.1	Planimetria scelta per testare il modello bio-morfodinamico.	81
6.2	Evoluzione della planimetria nel test del modello bio-morfodinamico.	84
6.3	Meandri considerati per testare il modello bio-morfodinamico.	84
6.4	Andamento della curvatura e variazioni di larghezza.	85
6.5	Rappresentazione del fondo per tre sezioni trasversali significative.	86
6.6	Grafico 2D per l'elevazione del fondo.	87

Elenco delle tabelle

2.1	Parametri morfodinamici utilizzati nelle simulazioni.	33
2.2	Tempi e intervalli temporali impiegati nelle simulazioni.	37
3.1	Valori di \bar{S} , \bar{L} e σ_S^2	45
3.2	Valori di $\langle \hat{\rho} \rangle$ e ρ per tutte le simulazioni.	46
3.3	Valori di $\hat{\lambda}$ in funzione di P	51
3.4	Valori di α in funzione di P	53
3.5	Valori di \bar{V} e di \bar{S} per sim. n° 11 e 12.	55
3.6	Valori di \bar{V} e di $(d\bar{A}/dt)/L_0$ dimensionali.	56
3.7	Valori della B_{80} in funzione di P	59
5.1	Valori di L_0 , α , $\hat{\lambda}$, ρ e $\hat{\rho}$	73
5.2	Confronto dei risultati tra modello numerico e modello stocastico. . .	75
5.3	Confronto dei risultati tra modello stocastico prima e dopo l'adattamento ai risultati reali.	78

Introduzione

Il presente lavoro riguarda lo studio dell'evoluzione a lungo termine dei fiumi meandriformi.

Per fiume meandriforme si intende un fiume che nel corso della sua evoluzione abbia sviluppato un andamento sinuoso con conseguente sviluppo di meandri. L'aspetto interessante, che è stato parte fondamentale dello studio di questa tesi, sta nel fatto che il fiume, mano a mano che cresce di sinuosità, si auto-taglia generando quello che in letteratura viene definito *cutoff*: bypass di un anello di meandro in favore di un percorso più breve, con conseguente formazione di un tratto abbandonato, definito *oxbow lake*. Se il taglio ha luogo per evitare l'auto-intersecazione di due tratti che vengono a contatto, questo è chiamato *neck cutoff*; altrimenti il *cutoff* è noto come *chute* [9]. Quindi quanto più il meandro cresce, maggiore sarà la probabilità che a un certo punto esso vada a richiudersi su se stesso, auto confinandosi e provocando un bypassamento del fiume.

Se per esempio si osservano fiumi dell'Amazzonia o dell'Alaska si può notare una grande capacità di meandrizzazione, derivante dal fatto che tali zone sono poco antropizzate e quindi la natura dei fiumi si è conservata.

Nonostante i notevoli progressi in materia ottenuti negli ultimi anni dalla comunità scientifica, l'argomento suscita ancora parecchio interesse in quanto foriero di interessanti risultati in termini di meccanica dei fluidi e morfodinamica (*Ikeda and Parker, 1989* [30]; *Seminara, 1998, 2006* [59], [58]), geomorfologia (*Allen, 1984* [2]), ingegneria fluviale (*Jansen et al., 1979* [32]; *Elliott, 1984* [19]), ricerca petrolifera, *carbon sequestration* (*Swanson, 1993* [64]), ecologia fluviale e gestione sostenibile dell'ecosistema (*Salo et al., 1986* [57]).

Studiando l'andamento a lungo termine di questi fiumi e in particolare la larghezza della *meander belt*, si è scoperto che lì dove il fiume ha divagato nel corso del tempo si trovano oggi giacimenti petroliferi.

Altro aspetto di notevole interesse riguarda quei meccanismi che portano al trattamento da parte di qualsiasi corpo di anidride carbonica (CO_2) dall'atmosfera: il fenomeno, definito in letteratura *carbon sequestration*, interessa un corso d'acqua in quanto un fiume evolve nel tempo interagendo con la vegetazione.

In particolare all'estradosso si verifica un'erosione: la flora coinvolta in tale meccanismo viene distrutta o trascinata dalla corrente; qui subirà dei fenomeni di decomposizione con conseguente dissoluzione nell'acqua del carbonio contenuto nella vegetazione. Da questo processo ne deriva che l'area erosa viene liberata dalla vegetazione, che risulterà dunque sequestrata.

Al contrario, la sponda interna del fiume è interessata da fenomeni di deposito: nell'intradosso si andrà a formare altra vegetazione con conseguente nuovo stoccaggio di CO_2 sotto forma di biomassa; un esempio comune si trova nelle barre fluviali.

Se tutto ciò non avvenisse, la vegetazione crescerebbe liberamente fino al suo massimo, per poi morire su scale temporali fisiologiche.

In presenza di un corso d'acqua la dinamica è diversa: infatti si parla di effetto catalizzatore del fiume, cioè viene liberato spazio che nuovamente è disponibile per sequestrare CO_2 dall'atmosfera e fissarla in termini di biomassa.

Un altro meccanismo che giustifica lo studio di questi fenomeni riguarda la *carbon sequestration* sotto forma del cosiddetto *weathering*, dilavamento. Considerando le reazioni chimiche di formazione di CO_2 da rocce carbonatiche o silicatiche sotto l'azione dell'acqua, il dilavamento genera un sequestro di carbonio dall'atmosfera maggiore di quanto gli venga restituito, costituendo tali rocce più del 90% della crosta terrestre. E' ciò che avviene quando un corso d'acqua evolvendo, viene a contatto con un substrato silicatico in presenza di vegetazione: quest'ultima rilascia degli acidi carbonici per decomposizione che aumentano quindi la CO_2 dell'acqua.

Lo studio della presente tesi è incentrato sulla capacità dei fiumi meandriformi di raggiungere dopo un certo lasso di tempo una condizione *steady-state* e sul ruolo che i *cutoffs* hanno nella selezione dei processi morfodinamici importanti nell'evoluzione a lungo termine.

È stato utilizzato un modello implementato su MATLAB, in cui attraverso una serie di simulazioni fisicamente basate si è analizzata l'evoluzione a lungo termine di questi fiumi. I dati ottenuti sono stati successivamente elaborati in maniera estensiva col fine di ottenere una serie di statistiche, su come cresce ad esempio la lunghezza d'onda media dei meandri o la sinuosità, in base ai differenti parametri idraulici inseriti come configurazioni iniziali.

Lo studio riprende i concetti di simulazioni numeriche sviluppate in passato [10], considerando diversi parametri idraulici di input e prendendo vantaggio dal fatto che i tempi computazionali dei computer sono molto migliorati rispetto ad allora. Tutte le simulazioni partono da un tratto rettilineo – una linea su un piano – che viene perturbato con un rumore bianco e automaticamente, con lo scorrere degli istanti temporali, il fiume così rappresentato selezionerà una lunghezza d’onda che poi crescerà ed evolverà. Il tutto viene riportato nella Parte I del lavoro.

A seguito delle simulazioni, nella Parte II se ne è studiata la modellazione stocastica. Dopo aver analizzato i risultati numerici e ricavato le funzioni di densità di probabilità (pdf) delle variabili di stato lunghezza curvilinea L e sinuosità S , è stato possibile risolvere l’equazione stocastica associata al modello.

Infine, la Parte III si concentra sulla possibilità futura di estendere il modello numerico al caso in cui le sponde siano vegetate. Per fare ciò è stato testato un modello bio-morfodinamico alla scala della sezione trasversale del meandro. Infatti, oltre alla migrazione laterale studiata nella prima parte come risultato della forzante imposta dalla curvatura che provoca erosione all’estradosso, le sponde esterne sono interessate anche da una migrazione dovuta all’interazione reciproca che esiste tra il flusso d’acqua, i sedimenti e la flora fluviale, in particolare all’interfaccia tra il canale permanentemente in stato bagnato e la pianura alluvionale che avanza.

Il modello studiato in questo contesto presenta comunque dei limiti, costituendo soltanto il primo passo verso futuri sviluppi in grado di coinvolgere la bio-morfodinamica fluviale e l’evoluzione a lungo termine dei fiumi meandriformi.

Parte I

Modello Numerico

Capitolo 1

Modelli matematici per i processi morfodinamici

Gli studi presenti in letteratura riguardanti i fiumi meandriiformi possono essere suddivisi in due grandi blocchi distinti dalla tipologia di approccio seguita.

Da una parte si trova l'approccio geomorfologico, fondato principalmente su indagini di campo (per esempio *Kinoshita, 1961*, [35]) ed esperimenti di laboratorio (come *Whiting and Dietrich, 1993a, 1993b* [67], [68]); dall'altra quello basato sulla meccanica dei fluidi, cioè sulla modellazione matematica dei meccanismi fisici che governano le meccaniche di meandriizzazione.

Focalizzandosi su quest'ultimo aspetto, il lavoro di *Camporeale et al. (2007)* va a comparare alcuni modelli lineari esistenti, illustrando come essi siano gerarchicamente derivabili da una comune struttura matematica [9].

In particolare l'attenzione viene posta su tre modelli chiave per la comprensione e la modellazione della dinamica delle curve di un fiume, cioè dei meandri: il modello di Zolezzi e Seminara (sinteticamente indicato con **ZS**) del 2001 [70], il modello di Johannesson e Parker (**JP**) del 1989 [33] ed il modello di Ikeda, Parker e Sawai (**IPS**) del 1981 [31].

1.1 Ipotesi alla base dei modelli

Prima di procedere con la descrizione dei tre modelli è doveroso sottolineare che qualsiasi modellazione matematica richiede, per la sua risoluzione, la formulazione di alcune ipotesi di base.

- Il fluido viene considerato incomprimibile, la condizione di moto è quella di turbolento completamente sviluppato, si trascura la coesione del letto del fiume e la larghezza viene mantenuta costante durante il processo di migrazione laterale [23].
- Si trascura inoltre la componente verticale della velocità, dal momento che la scala caratteristica della profondità è per i fiumi molto minore rispetto a quella orizzontale; si adotta dunque una distribuzione idrostatica delle pressioni. Il tutto rientra nell'approssimazione *shallow water*, cioè nell'ipotesi di "acque basse" [38]. E' evidente come tale condizione venga violata vicino alla sponda, pertanto il modello che verrà sviluppato potrà valere solo nella parte centrale del canale.
- Il processo viene considerato quasi-stazionario, cioè si considera che il flusso e la topografia del letto si adattino istantaneamente alle variazioni planimetriche, con conseguente possibilità di trascurare la dipendenza dal tempo delle equazioni [14].
- Viene assunta una relazione lineare tra il tasso di erosione alla sponda ed il rapporto tra lo sforzo di taglio vicino alla sponda e lo sforzo medio [45], [46], cioè è lineare la relazione che lega l'erosione alla sponda e l'*excess near-bank velocity perturbation* [28], in italiano l'eccesso di velocità presente nella sponda esterna.

Tutte le formule riportate di seguito fanno riferimento alla Figura 1.1.

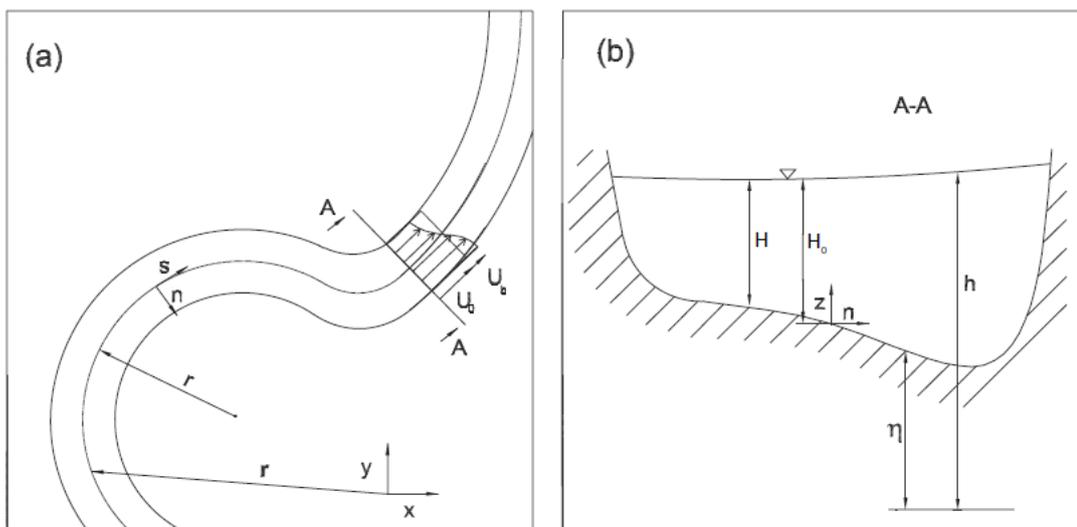


Figura 1.1. Schema delle variabili geometriche: (a) in planimetria e (b) in sezione.

1.2 Modello di Zolezzi e Seminara (2001)

È il modello lineare più completo proposto in letteratura.

Esso si focalizza sull'influenza della propagazione che avviene a monte, considerando il *profilo di Dean (1974)* [15] per la viscosità turbolenta (o eddy viscosity) ν_T e la variazione spaziale sia del coefficiente di attrito C_f che del trasporto solido. Tale modello prevede un sistema lineare di quattro equazioni che, risolto inserendo le due condizioni al contorno ed utilizzando una discretizzazione di Fourier nella direzione trasversale del fiume n (v. Figura 1.1), porta a una soluzione in termini di equazione differenziale ordinaria del quarto ordine:

$$\frac{d^4 u_m}{ds^4} + \sigma_3 \frac{d^3 u_m}{ds^3} + \sigma_2 \frac{d^2 u_m}{ds^2} + \sigma_1 \frac{du_m}{ds} + \sigma_0 u_m = A_m \sum_{j=0}^6 \rho_{j+1} \frac{d^j C}{ds^j} \quad (1.1)$$

In cui s rappresenta la coordinata longitudinale che corre lungo l'asse del canale, u_m è l' m -esimo modo di Fourier, $C = C(s)$ la curvatura e $A_m = 8(-1)^m [(2m + 1)\pi]^{-2}$. Per quanto riguarda i coefficienti σ_{0-3} e ρ_{1-7} si rimanda al paper completo di *Zolezzi e Seminara (2001)* [70].

La soluzione dell'Equazione (1.1) per tutti i modi permette di ricavare il valore di $u_b(s) = u(s, n = 1)$, velocità alla sponda, elemento necessario per simulare l'evoluzione di un meandro.

La completezza del modello giace nel fatto che il campo di moto e di conseguenza l'evoluzione della planimetria del fiume, sono regolate da: un effetto locale, l'influenza delle propagazioni a monte e a valle, un effetto di monte delle condizioni al contorno di valle e un effetto di valle delle condizioni al contorno di monte.

1.3 Modello di Johannesson e Parker (1989)

Tale modello è ottenuto considerando le seguenti semplificazioni:

- (a) un profilo verticale uniforme della eddy viscosity ν_T ;
- (b) il coefficiente di attrito C_f indipendente sia dal tirante D , sia dal vettore τ della tensione sul letto del fiume;
- (c) il carico di trasporto solido indipendente dal tirante D .

In questa maniera il sistema lineare delle quattro equazioni di ZS si riduce a tre, la cui soluzione è un'equazione differenziale del secondo ordine:

$$\frac{d^2 u_m}{ds^2} + \sigma_1 \frac{du_m}{ds} + \sigma_0 u_m = A_m \sum_{j=0}^3 \rho_{j+1} \frac{d^j C}{ds^j} \quad (1.2)$$

Un esempio di adozione del modello JP è presente nella simulazione dei fiumi meandriformi per questioni geomorfologiche di *Howard (1992)*: nel suo lavoro egli dimostra come il modello in questione possa dare buone predizioni sulla topografia del letto e sulle caratteristiche del flusso, considerando canali con larghezze non grandi, sponde verticali e sedimenti mobili al fondo. Inoltre il modello JP, quando viene combinato con l'assunzione che i tassi di erosione siano proporzionali alla velocità vicino alla sponda, fornisce stime accurate degli stessi.

Tuttavia il modello risulta incapace di fornire soluzioni numeriche stabili per canali con forme dei meandri in condizioni prossime alla risonanza, pertanto si adatta bene ai soli canali in cui non avviene risonanza e in cui le barre alternate, se presenti, migrano più rapidamente lungo il canale rispetto ai tassi di erosione della sponda [28].

1.4 Modello di Ikeda, Parker e Sawai (1981)

Nonostante tra la seconda metà degli anni '40 e la fine degli anni '70 i primi lavori, in materia di modellazione matematica dei meccanismi fisici che governano la dinamica della meandrizzazione dei fiumi, furono quelli di *Van Bendegom* del 1947 [65] e di *Engelund* del 1974 [20], Ikeda, Parker e Sawai proposero nel 1981 il primo vero modello sull'evoluzione dei meandri, collegando il campo di flusso ed il tasso di erosione. Tuttavia, seguendo la gerarchia suggerita da *Camporeale et al.*

(2007) [9], esso può essere ottenuto quando, in aggiunta alle ipotesi utilizzate per ottenere il modello del secondo ordine di JP, venga trascurata la risposta libera dei sedimenti del fondo, così che il letto del fiume mantenga una pendenza laterale costante che sia sempre in fase con la curvatura. In altre parole l'equazione di continuità per il materiale solido (sedimenti) non è più accoppiata con le equazioni *shallow water* [29], [40].

Un'ipotesi così semplificativa implica che il trasporto solido di fondo (per unità di larghezza) in direzione trasversale sia nullo ($q_n = 0$), con conseguente riduzione dell'equazione di Exner a: $\eta_{,nn} = (F_0^2 h - d)_{,nn}$. Questo a sua volta sta a significare che $(F_0^2 h - d)_{,nn} = A$, dove A è il fattore di pendenza costante.

Tali semplificazioni portano a un modello che non include nè la risonanza nè l'influenza di propagazione a monte.

In aggiunta si considera che l'unica azione svolta dalle correnti secondarie sia quella di stabilizzare la pendenza laterale del fondo, senza dunque avere alcun effetto diretto sul campo di moto.

Con le precedenti semplificazioni, le due equazioni di partenza [9] mediate sulla verticale del modello *shallow water 2-D*:

$$NUU_{,s} + VU_{,n} + NCU(V + 2\varphi) + NH_{,s} + \beta \frac{\tau_s}{D} + \frac{1}{D}(UD\varphi)_{,n} = 0 \quad (1.3)$$

$$NUV_{,s} + VV_{,n} + H_{,n} + \beta \frac{\tau_n}{D} + \frac{N}{D}(UD\varphi)_{,s} + \frac{2}{D}(VD\varphi)_{,n} + \frac{1}{D}(\varphi_1 D)_{,n} + NC\varphi_2 = 0 \quad (1.4)$$

vengono modificate inserendo in (1.3) $\varphi = 0$ — con φ termine di redistribuzione del momento dovuto all'interazione tra le correnti secondarie e il flusso principale — e riducendo la (1.4) all'equazione di Eulero, la quale, dopo essere mediata sulla profondità e linearizzata, diventa $h^* = h_0 = \nu_0 F_0^2 C n$.

In questo modo il sistema di quattro equazioni lineari di ZS, già ridotte alle tre di JP, viene ulteriormente ridotto alle sole due equazioni seguenti:

$$u_{,s} + a_1 u + a_2 d = nb_1 C - nC_{,s} \quad (1.5)$$

$$d_{,n} = b_4 C \quad (1.6)$$

Con le seguenti condizioni al contorno:

$$d_{,nn} = 0 \quad (n = \pm 0) \quad (1.7)$$

$$v = 0 \quad (n = \pm 1) \quad (1.8)$$

La soluzione espressa in termini di equazione differenziale del primo ordine è:

$$\frac{du}{ds} + a_1 u = (b_1 - a_2 b_4) C - \frac{dC}{ds} \quad (1.9)$$

Anche in questo caso per la notazione specifica dei vari termini si rimanda al paper di *Camporeale et al. (2007)* [9].

Nonostante le ipotesi semplificative, il modello di Ikeda, Parker e Sawai, da ora in avanti chiamato IPS, riesce a cogliere alcune fondamentali caratteristiche, come ad esempio l'ingrossamento (in letteratura *fattening*) e l'irripidimento o inclinazione (*skewing*) della dinamica del processo di meandrazione.

Ciò, in aggiunta alla semplicità intrinseca del modello rispetto allo ZS e al JP, giustifica il suo impiego sia in questa tesi, sia in parecchi lavori teorici e numerici, come ad esempio *Parker et al. (1983)* [43], *Beck (1984)* [3], *Parker and Andrews (1986)* [42], *Sun et al. (1996)* [63].

Infatti la semplice forma dell'equazione (1.9) permette una chiara interpretazione dei processi base della dinamica di meandrazione di un fiume.

Per quanto riguarda il primo termine, $\frac{du}{ds}$, questo esprime il ritardo di fase tra u e la curvatura che si verifica su cambiamenti planimetrici di fiumi lunghi, causando così l'asimmetria (*skewness*) nell'evoluzione del meandro così come la propagazione del fenomeno verso valle.

Il secondo termine, $a_1 u$, indica che la risposta libera della velocità del flusso dipende unicamente da $a_1 = 2\chi_1 = 2\beta C_f$.

Al secondo membro dell'equazione, i termini tra parentesi (positivi) contribuiscono alla traslazione verso l'esterno della velocità di valle; in particolare il coefficiente b_1 rappresenta la riduzione della convezione longitudinale associata alla diminuzione verso l'esterno della pendenza longitudinale del letto, mentre b_4 deriva da due risposte alle correnti indotte in maniera centrifuga, cioè dalla pendenza topografica del letto e dalla pendenza opposta del pelo libero [9].

Capitolo 2

Descrizione del codice utilizzato

La scelta di utilizzare il modello per fiumi meandriformi di Ikeda, Parker e Sawai (IPS) giace nel fatto che questo, pur mantenendo una maggiore semplicità operativa rispetto ai modelli JP e ZS, riesca a tenere in conto quantitativamente delle principali caratteristiche che si vogliono indagare sui fiumi meandriformi, quali la crescita e la migrazione verso valle dei meandri aventi un'elevata lunghezza d'onda.

Inoltre la capacità del modello di descrivere interamente le proprietà stazionarie di questi fenomeni, permette l'utilizzo degli stessi parametri adimensionali proposti da *Edwards and Smith (2002)* [17] per le dinamiche di breve termine, anche nel caso in esame di dinamiche a lungo termine in grado di includere i cutoffs.

Innanzitutto gli elementi chiave necessari da considerare per poter descrivere la dinamica dei fiumi meandriformi sono la curvatura dell'asse del canale, $C = C(s)$ e l'erosività del letto e delle sponde.

La curvatura longitudinale induce sia uno sforzo di taglio aggiuntivo al flusso, sia direziona le correnti secondarie, che a loro volta, causando un campo di moto trasversale, producono sforzi interni sul letto del fiume e la redistribuzione del momento di valle. Quest'ultimo è proprio il "motore" che provoca una traslazione della massa del fluido verso la sponda esterna [34].

Per quanto riguarda l'erosività delle sponde, lo sforzo interno sul letto del fiume causa un trasporto trasversale di sedimenti verso l'interno, che provoca la formazione delle barre puntuali ed il corrispondente incremento della profondità del fondo dalla parte della sponda esterna. Anche questo fenomeno fa traslare il flusso verso l'esterno, solitamente in maniera più significativa rispetto alle summenzionate correnti secondarie indotte dalla curvatura. In tutto questo discorso

rientra chiaramente anche l'erodibilità del letto del fiume, che risulta essenziale nelle interazioni tra morfodinamica e idrodinamica [5]: un fiume curvilineo infatti necessita senza dubbio di una certa pendenza del fondo, diversa da quella di un fiume rettilineo, per muovere la stessa quantità di trasporto solido di fondo [60].

Tali aspetti giustificano anche l'ipotesi secondo cui la larghezza del fiume, d'ora in avanti indicata con $2b$, rimanga costante durante il processo di migrazione. In sintesi infatti, i fenomeni di lenta migrazione laterale dei fiumi meandriformi dipendono essenzialmente dai gradienti trasversali della velocità verso valle: in particolare le elevate velocità del fluido in prossimità della sponda tendono ad aumentare lo sforzo di taglio, con conseguente aumento dell'erosione della stessa, mentre basse velocità portano ad un aumento del deposito nella parte interna, o intradosso. Mediante proprio un continuo bilanciamento di erosione sulla sponda esterna e deposito su quella interna, il fiume tende a mantenere una larghezza costante.

Andando ad inquadrare quanto appena descritto nell'approccio fisico della meccanica dei fluidi, si definisce una componente diretta verso l'esterno del gradiente di pressione idrostatica, ∇P , che fornisce la forza centripeta $\mathbf{f} = -\nabla P/\rho$, (con ρ densità del fluido), necessaria per accelerare gli elementi fluidi attorno alla curva (meandro) [17].

Di conseguenza secondo la legge di Bernoulli, le velocità di valle degli elementi fluidi che entrano nella regione a bassa pressione, vicina alla sponda interna, devono aumentare e viceversa per quelli che entrano nella zona a pressione più alta, vicino alla sponda esterna (v. Figura 2.1(a)).

Un flusso secondario [26], ortogonale alla direzione longitudinale del flusso, trasporta poi convettivamente il momento di valle verso la sponda esterna e in corrispondenza di quest'ultima provoca un aumento della profondità del fondo, come rappresentato in Figura 2.1(b).

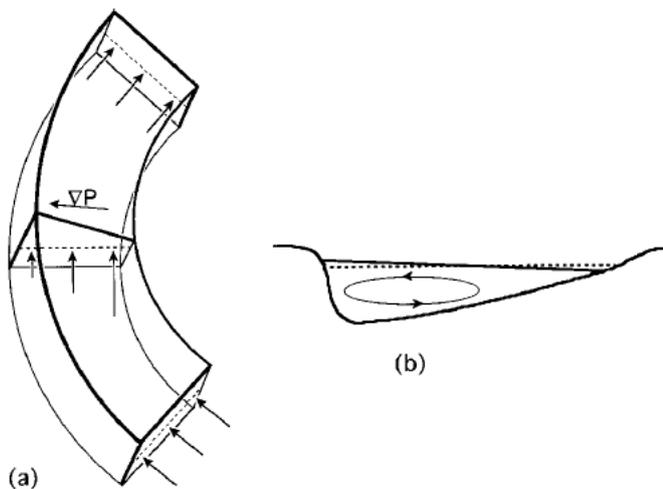


Figura 2.1. Profili delle velocità nei fiumi meandriiformi. (a) Schema 3D di un meandro. Le frecce indicano le velocità longitudinali che vanno verso valle. Non appena gli elementi fluidi vicini alla sponda interna (a destra) entrano nella zona a bassa pressione all’apice della curva, la loro velocità aumenta secondo la legge di Bernoulli. (b) Schema sezione trasversale, andamento antiorario delle correnti secondarie e profondità maggiore verso la sponda esterna (per un osservatore che si trovi sulla riva osservando il fiume da valle). Le correnti secondarie trasportano il momento di valle in maniera convettiva verso la sponda esterna, portando il meandro a migrare lateralmente verso valle.

Fatte queste considerazioni, assumere che la larghezza del fiume resti costante durante la sua migrazione, implica che è sufficiente studiare la curva descritta dall’asse della curva per seguire l’evoluzione della planimetria del fiume.

Per dedurre le equazioni che regolano le dinamiche della curva si è seguito l’approccio di *Nakayama et al. (1992)* [39] e *Brower et al. (1984)* [8].

Le coordinate orizzontali della linea centrale passante per il letto del fiume vengono parametrizzate attraverso un curva $\mathbf{r}(\alpha, t)$ che si muove lungo il versore normale \mathbf{n} (v. Figura 2.2). Si ha dunque $\partial\mathbf{r}(\alpha, t)/\partial t = \mathbf{n}V$, in cui t rappresenta il tempo, V la velocità normale locale e α un parametro descrittivo che non dipende dal tempo, in modo tale che $\partial_{t\alpha} = \partial_{\alpha t}$.

Introducendo poi la coordinata $s(\alpha, t) = \int_0^\alpha \sqrt{g} d\alpha'$, in cui $g(\alpha, t)$ rappresenta il coefficiente metrico $|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\alpha} \cdot \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\alpha}|$, e definendo la curvatura come $C = |\partial^2\mathbf{r}/\partial s^2|$, risulta [8]:

$$\frac{\partial}{\partial t \partial s} - \frac{\partial}{\partial s \partial t} = -CV \frac{\partial}{\partial s} \quad [8] \quad (2.1)$$

Tale equazione (2.1) insieme alle equazioni differenziali di Frenet-Serret (*Do Carmo, 1976*) [16], fornisce il tasso di variazione temporale della coordinata curvilinea s :

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \int_0^\alpha \frac{\partial g}{\partial t} \frac{1}{2\sqrt{g}} d\alpha' = \int_0^\alpha \frac{gCV}{\sqrt{g}} d\alpha' = \int_0^s CV ds' \quad (2.2)$$

che fornisce:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{n}V - \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \int_0^s CV ds' \quad [39] \quad (2.3)$$

La (2.3), indipendentemente dall'espressione di V , è un'equazione non lineare. Quindi, data la velocità normale $V(s, t)$, le espressioni precedenti sono in grado di descrivere univocamente la dinamica della curva.

Per il codice utilizzato in questa tesi V è stata modellata, come già anticipato nelle ipotesi dei modelli matematici, seguendo l'idea originale di *Ikeda et al. (1981)*, cioè considerando una relazione lineare tra il tasso di erosione normale e la velocità longitudinale "in eccesso" alla sponda (*excess bank velocity*), $u_b = u(s, n = b)$:

$$V = E \cdot u_b \quad (2.4)$$

In cui $u(s, n)$ rappresenta la perturbazione al campo di moto longitudinale rispetto alla velocità media, n è la coordinata trasversale (v. Figura 1.1), b è la semi larghezza del fiume ed E è il coefficiente di erodibilità.

Tale assunzione è stata comprovata anche da indagini di campo [50].

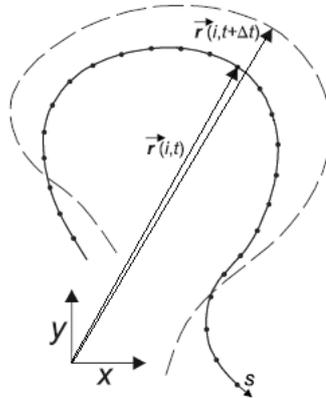


Figura 2.2. Schema geometrico per descrivere l'equazione del moto della curva parametrizzata $\mathbf{r}(\alpha, t)$.

2.1 Adimensionalizzazione delle grandezze

L'approccio fisico utilizzato nella scelta delle scale fondamentali per adimensionalizzare le grandezze è lo stesso proposto, per le dinamiche di breve termine, da *Edwards and Smith (2002)* [17], esteso per il caso in esame anche alle dinamiche a lungo termine in grado di includere i cutoffs.

Nel suddetto paper, gli autori attribuiscono il decadimento delle curve del meandro di piccola lunghezza d'onda allo sforzo di Bernoulli causato dal gradiente di elevazione della superficie del flusso trasversale. Inoltre la stabilità neutrale di meandrazione trae origine dalla competizione tra lo sforzo di Bernoulli ed il flusso secondario nel piano perpendicolare alla direzione della corrente.

Fondamentale in questa competizione è la lunghezza di decadimento D , cioè la lunghezza a valle richiesta dallo sforzo tangenziale nella velocità di valle per recuperare dai cambiamenti nella curvatura del canale:

$$D = \frac{H}{2C_f} \quad (2.5)$$

in cui compaiono il tirante H e il coefficiente di attrito C_f , calcolato come

$$C_f = \frac{1}{[6 + 2.5 \ln(\frac{1}{2.5d})]^2} \quad (2.6)$$

in cui a sua volta $d = d_{50}/H$ rappresenta la scabrezza relativa.

Lo sforzo di Bernoulli predomina nel caso in cui le lunghezze d'onda siano piccole rispetto a D , mentre a dominare sono le correnti secondarie se avviene il viceversa. Dunque D fissa la scala base per le lunghezze d'onda della meandrazione.

L'altra scala fondamentale è quella temporale, rappresentata da T :

$$T = \frac{D^2}{bEU} \quad (2.7)$$

in cui U è la velocità media della corrente.

Gli autori [17] suggeriscono anche che tali scale sono responsabili della proporzionalità tra la lunghezza d'onda del meandro e la larghezza del fiume, questione valida sia per un'ampia gamma di larghezze dei fiumi — dai 10 cm di fiumi di laboratorio all'oltre 1 km del Mississippi — sia per fiumi alluvionali, incisi o originati da ghiacciai disgelati [37]. Inoltre una proporzionalità simile esiste tra il periodo con cui si sviluppano i meandri e T , anche se essa è sicuramente meno osservabile lungo l'arco di vita umana, dal momento che si parla di scale temporali di centinaia o migliaia di anni.

Questi due gruppi di grandezze adimensionali sono ottenibili partendo dalla soluzione formale del modello IPS [63]:

$$u_b = -bUC + \frac{UbC_f}{H}[F^2 + A + 1] \int_{-\infty}^s e^{-\frac{2C_f}{H}(s-z)} C(z) dz \quad (2.8)$$

Nell'equazione (2.8), l'ultimo termine rappresenta l'integrale di convoluzione derivante dalla soluzione fornita da *Zolezzi and Seminara (2001)* [70], che controlla l'influenza a valle della curvatura sugli spostamenti locali del fiume, $F = U/\sqrt{gH}$ è il numero di Froude e A è il fattore di pendenza laterale del fondo, necessario anche per il calcolo del numero di Parker P .

In particolare, come riportato da *Engelund (1974)* [20] e da *Johannesson and Parker (1989b)* [34]:

$$A = \frac{1}{0.005929 \cdot (0.55/\sqrt{\tau_0})} \cdot \frac{2}{45} \cdot \frac{\chi + (2/7)}{\chi + (1/3)} - 1 \quad \text{con} \quad \chi = \frac{0.077}{\sqrt{C_f}} - \frac{1}{3} \quad (2.9)$$

$$P = \frac{F^2 + A}{2} \quad (2.10)$$

Applicando un'analisi dimensionale alle equazioni (2.3) e (2.8), i parametri geometrici ed idraulici possono essere impiegati proprio per ottenere la scala spaziale D e quella temporale T . Mentre il ruolo di T è evidente nel transitorio iniziale, D va ad impattare sulle proprietà statistiche dello stato stazionario, attraverso la sua influenza nel cuore dell'integrale di convoluzione [10].

E' inoltre possibile scalare la velocità di migrazione verso valle attraverso DT^{-1} , dal momento che questo termine ha proprio le dimensioni di una velocità [ms^{-1}]. In questo modo il tasso di erosione alla sponda (v. eq.(2.4)) adimensionale è:

$$\tilde{V} = \frac{u_b ET}{D} \quad (2.11)$$

A questo punto è possibile procedere con l'adimensionalizzazione totale della soluzione del modello IPS fornita nel 2002 da *Edwards and Smith* [17], la quale già coinvolge le scale precedentemente introdotte D e T :

$$\frac{\partial V}{\partial s} + \frac{V}{D} = bEU \left(-\frac{\partial C}{\partial s} + \frac{PC}{D} \right) \quad (2.12)$$

Tale equazione, che lega $V(s, t)$ e $C(s, t)$, possiede tuttavia una naturale dipendenza dalla sinuosità S .

Prima di esplicitarne la dipendenza, è necessario innanzitutto sottolineare che l'elevazione del fondo del fiume z (v. Figura 1.1), a una certa distanza s misurata a valle lungo l'asse del canale, può essere scritta come

$$z(s) = z_0 - Is \quad (2.13)$$

dove $z_0 = z(0)$ e $z_L = z(L)$ sono rispettivamente le elevazioni del fondo a monte e a valle di un fiume che abbia come punti iniziale e finale 0 e L , mentre I , assunta essere indipendente dalla coordinata s , è la pendenza del fondo.

E' conveniente identificare un fiume attraverso z_0 e z_L dal momento che tutti i punti compresi tra queste due elevazioni possono potenzialmente migrare lateralmente secondo il processo di meandricizzazione. Quindi la pendenza del fondo I – anche se uniforme lungo s – e la lunghezza L sono costrette a variare nel tempo seguendo la migrazione del fiume, mentre a rimanere costante è il dislivello $z_0 - z_L = I \cdot L = I_0 \cdot L_0$, avendo indicato con I_0 e L_0 la pendenza e la lunghezza della valle (lunghezza in linea d'aria) misurate lungo una linea dritta che collega il punto iniziale e quello finale.

Introducendo dunque la variabile sinuosità

$$S = \frac{L}{L_0} \quad (2.14)$$

che chiaramente dipende dal tempo come L , ne deriva altresì che:

$$I(S) = \frac{I_0}{S} \quad (2.15)$$

Quindi, dal momento che $I = I(S)$, anche la velocità media U ed il tirante H dovranno dipendere da S , attraverso la relazione di velocità media (di moto uniforme):

$$U = \left(\frac{gHI}{C_f} \right)^{1/2} \quad (2.16)$$

La portata del fiume $Q = 2bHU$ risulta invece indipendente da S , poiché dipende dalle precipitazioni a monte. Di conseguenza la profondità H_0 e la velocità $U_0 = (gH_0I_0/C_f)^{1/2}$, di un fiume "raddrizzato" – che scorre in una linea dritta tra i punti iniziale e finale – avente la stessa larghezza $2b$, devono per continuità obbedire alla seguente relazione: $HU = H_0U_0$.

Sostituendovi poi le espressioni per U [eq. (2.16)] e la corrispettiva per U_0 , insieme all'espressione (2.15), si ricavano prima H e conseguentemente U :

$$H = H_0 \cdot S^{1/3} \quad (2.17)$$

$$U = U_0 \cdot S^{-1/3} \quad (2.18)$$

per un fiume sinuoso [31].

Tornando dunque all'adimensionalizzazione dell'equazione (2.12), è ormai chiaro il motivo per cui le scale D e T dipendono da S :

$$D = \frac{H}{2C_f} = D_0 \cdot S^{1/3} \quad (2.19)$$

$$T = \frac{D^2}{bEU} = T_0 \cdot S \quad (2.20)$$

in cui $D_0 = H_0/(2C_f)$ e $T_0 = D_0^2/(bEU_0)$ sono le corrispondenti scale fondamentali per il fiume "raddrizzato"; la loro non dipendenza da S le rende più convenienti da utilizzare per rendere adimensionale il problema.

La soluzione del modello IPS adimensionale (come rappresentato dalla *tilde*) sarà dunque [17]:

$$S^{1/3} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{s}} + \tilde{V} = - \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tilde{s}} + \frac{P}{S^{1/3}} \tilde{C} \quad (2.21)$$

Secondo la seguente notazione:

- $s = D_0 \tilde{s}$
- $t = T_0 \tilde{t}$
- $V(s, t) = D_0 T_0^{-1} \tilde{V}(\tilde{s}, \tilde{t})$
- $C(s, t) = D_0^{-1} \tilde{C}(\tilde{s}, \tilde{t})$

2.2 Parametri idraulici

La scelta dei parametri idraulici di input con cui lanciare le simulazioni è stato un passo fondamentale in vista dei risultati da ottenere.

Le variabili di cui tenere conto necessarie ad implementare il codice adimensionalizzato nella maniera di cui al precedente paragrafo sono:

- il tirante H_0 ;
- la semi larghezza del canale b ;
- la velocità media di moto uniforme U_0 ;
- la pendenza del fondo I_0 ;
- il coefficiente di attrito C_f ;
- la scabrezza relativa $d_0 = d_{50}/H_0$;
- il rapporto di forma $\beta_0 = b/H_0$;
- la tensione di Shields $\tau_0 = H_0 I_0 / (\Delta d_{50})$;
- il numero di Froude $F_0 = U_0 / \sqrt{g H_0}$;

La cui combinazione fornisce le scale fondamentali D_0 [metri] e T_0 [secondi].

E' chiaro che la scelta dei parametri da cui partire debba seguire una certa logica, in quanto non si tratta di variabili tra loro indipendenti. Giusto a titolo di esempio, se la pendenza del canale I_0 fosse molto bassa, di conseguenza la scabrezza relativa d_0 non potrebbe avere valori troppo elevati.

Grazie all'esistenza di formule empiriche idro-geomorfologiche presenti in letteratura, come ad esempio *Lee and Julien (2006)* [36] e *Bray (1975)* [7], che legano tirante, larghezza e velocità media della sezione alla portata, è stato possibile procedere con un'analisi di sensitività per cercare di esprimere alcuni parametri in funzione di altri, potendo così limitare il numero di input necessari.

Dopo aver effettuato alcuni tentativi con le formule proposte dagli autori sopramenzionati ([7], [36]), si è trovato più conveniente l'utilizzo delle formule empiriche proposte da *Parker (2004)* [41] per *gravel bed rivers*:

$$\hat{B} = 4.87 \cdot \hat{Q}^{0.461} \quad (2.22)$$

$$\hat{H} = 0.386 \cdot \hat{Q}^{0.405} \quad (2.23)$$

La notazione che l'autore utilizza indica che le grandezze sono adimensionalizzate come segue:

$$\hat{Q} = \frac{Q}{\sqrt{g d_{50}} \cdot d_{50}^2}, \quad \hat{H} = \frac{H}{d_{50}}, \quad \hat{B} = \frac{B}{d_{50}} \quad (2.24)$$

in cui B rappresenta la larghezza del fiume a fondo ghiaioso.

Dopo aver verificato che la continuità fosse soddisfatta, l'analisi è proceduta secondo i seguenti step:

- (1) Si adimensionalizza la $U = U_0 = \left(\frac{gH_0I_0}{C_f}\right)^{1/2}$ utilizzata nel codice, (2.16), dividendola per $\sqrt{gd_{50}}$, ottenendo $\hat{U} = \sqrt{\frac{I_0}{C_f d_0}}$
- (2) Nell'equazione di continuità: $\hat{Q} = \hat{B}\hat{H}\hat{U}$ si sostituiscono la (2.22) per \hat{B} , la (2.23) per \hat{H} e la \hat{U} trovata al passo (1), ottenendo:

$$\hat{Q} = 4.87\hat{Q}^{0.461} \cdot 0.386\hat{Q}^{0.405} \cdot \sqrt{\frac{I_0}{C_f d_0}} = \mathbf{a} \cdot \left(\frac{I_0}{C_f d_0}\right)^b \quad (2.25)$$

- (3) Si scrive β_0 in funzione di \hat{B} e \hat{H} , ricordando che *Parker* in queste relazioni empiriche considera \hat{B} come larghezza e non semi larghezza; pertanto si ottiene: $\beta_0 = \frac{\hat{B}}{2\hat{H}}$
- (4) Sostituendo le relazioni empiriche (2.22) e (2.23) nell'espressione del passo (3), si arriva a:

$$\beta_0 = \frac{4.87\hat{Q}^{0.461}}{2 \cdot 0.386\hat{Q}^{0.405}} = \mathbf{c} \cdot \left(\frac{I_0}{C_f d_0}\right)^d \quad (2.26)$$

- (5) Dal momento che *Parker* adimensionalizza il tirante con il d_{50} e che, secondo la definizione di scabrezza relativa $d_{50} = d_0 \cdot H_0$, deve risultare che $\hat{H} = \frac{H_0}{d_{50}} = \frac{1}{d_0}$, si è imposto che $\hat{H} = 0.386 \cdot \left[\mathbf{a} \cdot \left(\frac{I_0}{C_f d_0}\right)^b\right]^{0.405} = \frac{1}{d_0}$.

Dall'uguaglianza degli ultimi due termini di quest'equazione è stato poi ricavato il valore del $C_f = \mathbf{e} \cdot I_0 \cdot (d_0)^f$.

Tali considerazioni evidenziano che calcolare il coefficiente di attrito C_f come nell'equazione (2.6), è corretto effettivamente solo localmente, per il calcolo della tensione τ_0 .

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= 111.0820; & \mathbf{b} &= 3.7313; & \mathbf{c} &= 8.2123; \\ \mathbf{d} &= 0.2089; & \mathbf{e} &= 1.8822; & \mathbf{f} &= -0.3382. \end{aligned}$$

In definitiva dunque, attraverso questa analisi è possibile partire da solamente *due* parametri idraulici di input per ciascuna simulazione e da essi ricavare tutti gli altri.

In particolare, fissando $\boldsymbol{\tau}_0$ e \mathbf{d}_0 si ha:

$$I_0 = \boldsymbol{\tau}_0 \cdot \Delta \cdot \mathbf{d}_0 \quad , \quad \text{con} \quad \Delta = \frac{\rho_s - \rho}{\rho} = 1.65; \quad (2.27)$$

$$C_f = e \cdot I_0 \cdot (\mathbf{d}_0)^f; \quad (2.28)$$

$$\beta_0 = c \cdot \left(\frac{I_0}{C_f \mathbf{d}_0} \right)^d; \quad (2.29)$$

$$F_0 = \sqrt{\frac{I_0}{C_f}}; \quad (2.30)$$

Inoltre, come si evince dall'equazione (2.25), noti ormai \mathbf{d}_0 , I_0 e C_f , è possibile ricavare \hat{Q} , da cui a loro volta \hat{H} e \hat{B} utilizzando le relazioni di *Parker* di partenza [eq. (2.22) e (2.23)] e \hat{U} per continuità.

Noti quindi anche tirante e larghezza (adimensionalizzati secondo *Parker*), si giunge alla determinazione delle scale fondamentali D_0 [-] e T_0 [-], anch'esse adimensionali:

$$D_0 = \frac{\hat{H}}{2C_f}; \quad (2.31)$$

$$T_0 = \frac{\hat{H}^2}{(\hat{B}/2)E\hat{U}}; \quad (2.32)$$

E' chiaro che per ottenere le scale dimensionali basterà utilizzare il d_{50} .

Assegnata una lunghezza iniziale del fiume L_0 , tutti i parametri così ottenuti per le dodici simulazioni lanciate sono sintetizzati nella Tabella 2.1.

Tabella 2.1. Parametri morfodinamici utilizzati nelle simulazioni.

Simulazione n°	L_0	τ_0	d_0	I_0	C_f	β_0	F_0	$D_0[-]$	$T_0[-]$	P
1	800	0.2	0.1	0.0033	0.135	9.9	0.494	37	9E+07	1.98
2	700	0.3	0.01	0.0050	0.044	13.6	0.335	1130	3E+09	2.8
3	600	0.3	0.003	0.0015	0.020	16.1	0.373	8357	3E+10	2.94
4	800	0.3	0.05	0.0248	0.128	10.9	0.439	78	1E+08	2.5
5	800	0.4	0.01	0.0066	0.059	13.6	0.335	848	2E+09	3.22
6	800	0.4	0.001	0.0007	0.013	18.7	0.227	38900	1E+11	3.53
7	800	0.6	0.0005	0.0005	0.012	20.6	0.202	82051	2E+11	4.44
8	800	0.6	0.01	0.0099	0.089	13.6	0.335	565	7E+08	3.86
9	800	0.6	0.005	0.0050	0.056	15.0	0.298	1788	3E+09	4.05
10	1000	0.7	0.0001	0.0001	0.005	25.7	0.154	1020083	3E+12	4.97
11	1000	0.3	0.01	0.0050	0.044	13.6	0.335	1130	3E+09	2.8
12	1600	0.6	0.0005	0.0005	0.012	20.6	0.202	82051	2E+11	4.44

2.3 Algoritmo numerico

Per ogni simulazione si è partiti da una linea rettilinea di dimensioni $1xL_0$, avente coordinata $X = [0,1,2, \dots, L_0]$, alla quale sono state associate delle perturbazioni random, sotto forma di rumore bianco per innescare l’instabilità, così che le coordinate risultassero:

$$(X; Y) = ([0,1,2, \dots, L_0]; [\text{rumore di piccola ampiezza} = 0.1]).$$

L’asse del fiume è così rappresentato mediante una sequenza di punti $i = 1,2, \dots, N$. Si procede con il calcolo della coordinata curvilinea del fiume s :

$$\Delta s_{(i)} = \sqrt{(X_{(i)} - X_{(i-1)})^2 + (Y_{(i)} - Y_{(i-1)})^2} \quad (2.33)$$

$$s_{(i)} = s_{(i-1)} + \Delta s_{(i)} \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (2.34)$$

e con un primo infittimento mediante un’interpolazione del tipo *spline* cubica, in cui i punti vengono spazati di una quantità costante definita

$$\tilde{d}s = \frac{b}{D_0} = \frac{b}{H_0/(2C_f)} = 2\beta_0 C_f \quad (2.35)$$

come illustrato in Figura 2.3.

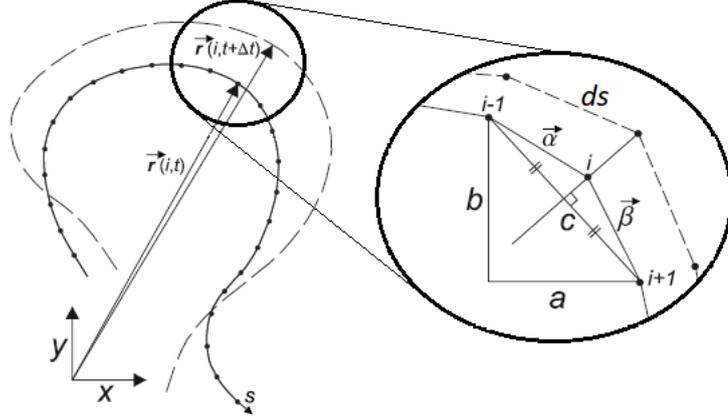


Figura 2.3. Schema geometrico per l'infittimento dei punti della curva.

Successivamente, dopo aver imposto per fini numerici che la curvatura dei punti iniziale $C(1)$ e finale $C(N)$ fosse nulla, in ciascun punto intermedio viene calcolata la curvatura locale secondo la formula:

$$C_{(i)} = -\frac{\partial\phi}{\partial s} \simeq -\frac{\arcsin\left(\frac{\vec{\alpha}\wedge\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\ |\vec{\beta}|}\right)}{\Delta s} = -\frac{\arcsin\left(\frac{\vec{\alpha}\wedge\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\ |\vec{\beta}|}\right)}{s_{(i)} - s_{(i-1)}} \quad (2.36)$$

In cui ϕ è l'angolo tra la tangente locale all'asse del fiume e la coordinata X , $\vec{\alpha} = (\alpha_X, \alpha_Y)$ e $\vec{\beta} = (\beta_X, \beta_Y)$ sono i vettori illustrati nell'ingradimento di destra della Figura 2.3 [10].

In particolare:

$$\frac{\vec{\alpha}\wedge\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\ |\vec{\beta}|} = \frac{[(Y_{(i)} - Y_{(i-1)}) \cdot (X_{(i+1)} - X_{(i)})] - [(X_{(i)} - X_{(i-1)}) \cdot (Y_{(i+1)} - Y_{(i)})]}{\sqrt{(X_{(i)} - X_{(i-1)})^2 + (Y_{(i)} - Y_{(i-1)})^2} \cdot \sqrt{(X_{(i+1)} - X_{(i)})^2 + (Y_{(i+1)} - Y_{(i)})^2}} \quad (2.37)$$

A questo punto ha inizio il ciclo temporale. Riferendosi alle simulazioni fatte in passato da *Camporeale et al. (2005)* [10] e in particolare alla *Figura 4(c)* del suddetto paper (riportata in Fig. 2.4), si osserva che nella gran parte dei casi la stazionarietà si raggiunge intorno a $t = 30 T_0$, avendo simulato il processo con un intervallo temporale Δt dell'ordine di qualche giorno.

Nel caso in esame, volendo come obiettivo principale replicare tali simulazioni al fine di ottenere statistiche più attendibili fatte quindi su simulazioni più lunghe,

grazie ai maggiori poteri computazionali dei computer di oggi rispetto ad allora, il tempo totale di simulazione sarà ben più elevato rispetto all'ordine dei 500-1000 anni, impostato dagli autori del paper.

Tuttavia è bene ricordare che nel caso in esame si stanno considerando delle scale D_0 e T_0 adimensionalizzate rispetto al d_{50} , pertanto i valori scelti non possono essere direttamente confrontati con quelli utilizzati in [10], a meno della definizione del diametro medio dei sedimenti.

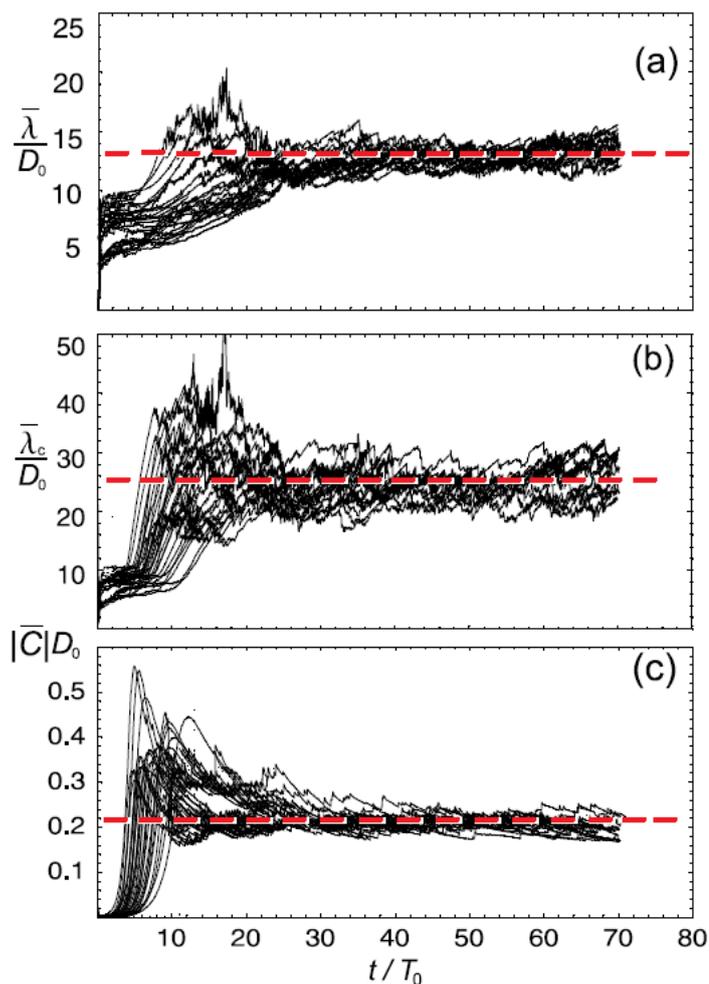


Figura 2.4. Evoluzione di (a) lunghezza d'onda media del fiume, (b) lunghezza d'onda curvilinea media, e (c) valore assoluto della curvatura media adimensionalizzate con le scale fondamentali D_0 e T_0 , da *Camporeale et al. (2005)* [10].

Considerando comunque come punto di partenza i risultati sulla stazionarietà di Figura 2.4, la scelta del tempo totale delle simulazioni, che a questo punto sarà un unico valore adimensionale valido per tutte, è partita proprio dalla volontà di ottenere statistiche più attendibili, portando quindi il valore di t da $30 T_0$ a $100 T_0$.

Per quanto riguarda l'intervallo temporale Δt , questo è stato scelto sulla base di alcune prove iniziali sulla simulazione di un fiume già evoluto. Si è osservato che, per ogni Δt adimensionale, gli spostamenti anch'essi adimensionali (meglio descritti più avanti in questo stesso paragrafo) dei punti che descrivono l'asse del fiume, sono dell'ordine di 10^{-4} . Questo assicura che la curva risulti sufficientemente regolare, senza cuspidi tra un punto ed il successivo e dunque senza creare irregolarità numeriche, come sottolineato da *Seminara et al. (2001)* [61]. Tuttavia, dal momento che un Δt molto piccolo tende ad aumentare notevolmente i tempi computazionali, si è osservato che scegliere un $\Delta t = 10^{-3}$ soddisfa comunque tale requisito.

In particolare si è fissato $\Delta t = 0.002$, sulla base anche di un ragionamento fatto sulla lunghezza d'onda curvilinea dei meandri. Infatti, con riferimento alla Figura 2.4(b), si può osservare che $\bar{\lambda}_c/D_0$ si attesta, per lunghi tempi, su un valore pari a 25. Ciò sta a significare che due meandri hanno in media una lunghezza curvilinea pari a $25 \cdot D_0$. Dal momento che $\tilde{d}s$, eq. (2.35), è dell'ordine del $(1 \div 2) \cdot 10^{-1}$ per tutte le simulazioni, si può calcolare che un singolo meandro sarà (in media) discretizzato da $[(\bar{\lambda}_c/D_0)/2]/\tilde{d}s = (25/2)/10^{-1} \simeq 125$ punti, che rappresenta un valore sufficientemente alto.

Tale $\Delta t = 0.002$ è stato utilizzato per undici simulazioni su dodici; infatti per la sola simulazione n° 11 si è scelto di adottare un intervallo temporale dimezzato, pari cioè a $\Delta t = 0.001$. Inoltre per le simulazioni n° 11 e n° 12 si è impostato un tempo totale $t = 150$, aumentato di 50 unità rispetto al $t = 100$ considerato in tutte le altre dieci. Nonostante dunque il Δt dimezzato abbia rallentato non di poco il tempo computazionale impiegato da MATLAB per terminare la simulazione 11 (quasi due giorni in totale), questa scelta ha permesso di confrontare l'effetto che la discretizzazione più precisa, cioè $\Delta t = 0.001$, ha sull'analisi dei risultati rispetto al Δt standard adottato per le altre.

Nella Tabella 2.2 è riportata una sintesi dei tempi impiegati in tutte le dodici simulazioni.

Per rendersi meglio conto delle grandezze, a titolo di esempio si può ipotizzare di avere per una simulazione media, come potrebbe essere la n°3, un $d_{50} = 0.01 m$, che è un valore ragionevole per un fiume a fondo ghiaioso, considerando $\tau_0 = 0.3$ e $d_0 = 0.003$.

Con tali valori si ottengono: $D_0 = 83.6 m$ e $T_0 = 8 \cdot 10^8 s$.

In questo caso quindi il tempo totale della simulazione sarà $t = 100 \cdot T_0 = 8 \cdot 10^{10} s$, cioè circa 2650 anni, mentre $\Delta t = 0.02 \cdot T_0 = 2 \cdot 10^7 s$, ovvero circa metà anno.

Tabella 2.2. Riepilogo dei tempi totali e degli intervalli temporali utilizzati nelle simulazioni.

Simulazione n°	Δt	t
1 - 10	0.002	100
11	0.001	150
12	0.002	150

Una volta iniziato il ciclo temporale il codice procede con il calcolo del campo di moto u_b attraverso il modello IPS, secondo l'adimensionalizzazione descritta in precedenza, facendo attenzione ad aggiornare le grandezze, rispetto a quelle iniziali con pedice "0", mediante la sinuosità S : $d = d_0/S^{1/3}$, $\tau = \tau_0/S^{2/3}$, $F = F_0/S^{1/2}$ e avendo imposto una tensione critica di mobilitazione del fondo $\tau_c = 0.03$. Se infatti $\tau < \tau_c$, non si ha mobilitazione del fondo e dunque $u_b = 0$.

Con i parametri elencati è possibile calcolare il numero di Parker P come indicato dall'equazione (2.10).

Riprendendo quindi l'equazione (2.21) e ricordando che $\tilde{V} = u_b E$

$$S^{1/3} \frac{\partial u_b}{\partial \tilde{s}} + u_b = -\frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tilde{s}} + \frac{P}{S^{1/3}} \tilde{C} \quad (2.38)$$

si riconosce che tale espressione rappresenta un'equazione differenziale lineare del primo ordine non omogenea. In particolare, riscrivendola nella forma

$$\frac{\partial u_b}{\partial \tilde{s}} + u_b S^{-1/3} = -\frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tilde{s}} S^{-1/3} + P \tilde{C} S^{-2/3} \quad (2.39)$$

e chiamando $S^{-1/3} = p_0$, essa è del tipo

$$y'(x) + p_0(x) y(x) = f(x) \quad (2.40)$$

In questo caso tuttavia p_0 non dipende dalla variabile x , cioè da \tilde{s} .

Secondo l'analisi matematica, un'equazione del tipo (2.40), è risolvibile in quanto è

sempre possibile trovare un fattore di integrazione $I(x) = e^{\int^x p_0(t) dt}$, funzione della sola variabile x [4]. Moltiplicando per $I(x)$ si ottiene:
 $I(x)y'(x) + p_0(x)y(x)I(x) = (d/dx)[I(x)y(x)] = f(x)I(x)$, quindi la soluzione della (2.40) risulta:

$$y(x) = \frac{c_1}{I(x)} + \frac{1}{I(x)} \int^x f(t)I(t) dt. \quad (2.41)$$

In particolare, nel caso in esame $c_1 = 0$, $I = e^{p_0 \int^{\tilde{s}} dt} = e^{p_0 \tilde{s}}$ e $f(t) = -p_0 \tilde{C}' + p_0^2 P \tilde{C}$.

La soluzione della (2.39) risulterà quindi:

$$u_b(\tilde{s}) = e^{-p_0 \tilde{s}} \cdot \int_0^{\tilde{s}} [-p_0 \tilde{C}' + p_0^2 P \tilde{C}] \cdot e^{p_0 t} dt = e^{-p_0 \tilde{s}} \cdot \left(\int_0^{\tilde{s}} -p_0 \tilde{C} e^{p_0 t} dt + p_0^2 P \cdot \int_0^{\tilde{s}} \tilde{C} e^{p_0 t} dt \right) \quad (2.42)$$

Si è risolto il primo integrale della (2.42) mediante integrazione per parti, ottenendo la seguente soluzione finale:

$$u_b(\tilde{s}) = -p_0 \tilde{C}(\tilde{s}) + p_0^2 (P + 1) \cdot \int_0^{\tilde{s}} \tilde{C}(t) e^{-p_0(\tilde{s}-t)} dt \quad (2.43)$$

Per implementare la soluzione così ottenuta su MATLAB, gli integrali sono stati troncati fino a 200 punti di discretizzazione attraverso un ciclo *parfor* che li risolvesse in parallelo.

Note le velocità $u_b(\tilde{s})$, i punti dell'asse del canale sono stati spostati in direzione normale alla tangente locale, come schematizzato in Figura 2.3 e secondo quanto descritto dall'equazione (2.3). Dal momento che la distanza tra i punti è stata fissata pari alla quantità costante Δs , è stato possibile determinare le coordinate dell' i -esimo punto della curva $X_{(i)}$ e $Y_{(i)}$ a ogni step temporale Δt attraverso il seguente metodo geometrico:

$$X_{(i)}(t + \Delta t) = X_{(i)}(t) - Eu_b \Delta t \frac{b}{c} \quad (2.44)$$

$$Y_{(i)}(t + \Delta t) = Y_{(i)}(t) + Eu_b \Delta t \frac{a}{c} \quad (2.45)$$

In cui si ha: $Eu_b = \tilde{V}$ e $\tilde{V} \Delta t = \zeta$, cioè spostamento normale;
 $a = X_{(i+1)}(t) - X_{(i-1)}(t)$, $b = Y_{(i+1)}(t) - Y_{(i-1)}(t)$ e $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

A questo punto, dopo un nuovo infittimento tra i punti (laddove necessario) ed un calcolo della nuova curvatura locale, il codice procede con la ricerca di eventuali eventi che possano aver determinato i *cutoffs* durante l'evoluzione. Dal momento che nello studio della presente tesi si sono considerati solo i *neck cutoffs* (v. *Introduzione*) e che seguendo l'evoluzione dell'asse del canale questi *cutoffs* avvengono quando due punti della curva vengono a contatto, è stato considerato un valore di soglia leggermente maggiore rispetto alla semi larghezza b [28]. In particolare la soglia è stata imposta a $threshold = 3b/\sqrt{2}$.

Per identificare i punti più vicini a tale valore è stato utilizzato un algoritmo matriciale ideato da *Camporeale et al. (2005)*, molto più efficiente rispetto a quelli utilizzati in passato da *Sun et al. (1996)* [63] o da *Stølum (1997)* [62] e soprattutto utile per le simulazioni a lungo termine.

Nel suddetto paper [10] gli autori spiegano tale algoritmo nell'Appendice C.

Una volta che l'algoritmo ha trovato punti più vicini della soglia imposta, il fiume abbandona il meandro, si genera quello che in letteratura viene definito *oxbow lake* ed i punti appartenenti alla curva prima del *cutoff* vengono eliminati, sotto l'assunzione che essi non entrino più nelle dinamiche successive. Quando ciò accade, una nuova curvatura viene ricalcolata ed il codice procede nella sua iterazione per lo step temporale successivo, fino al raggiungimento del tempo finale di simulazione t .

Capitolo 3

Analisi dei risultati

Di tutte le simulazioni effettuate sono stati salvati come file *.mat* i parametri più significativi per ogni istante temporale Δt :

- coordinate cartesiane X e Y e curvilinee s della planimetria;
- Sinuosità S ;
- Curvatura $C(s)$;
- istanti temporali esatti in cui sono avvenuti i *cutoffs*;
- coordinate cartesiane X_c e Y_c , curvilinee s_c e Curvatura $C_c(s)$ dei punti della planimetria tagliati in seguito ai *cutoffs* (pedice "c");
- lunghezze curvilinee ΔL dei tratti tagliati in seguito ai *cutoffs*.

Inoltre per le simulazioni n° 11 e 12, in aggiunta ai salvataggi appena elencati, si è tenuta memoria anche della velocità di migrazione media \bar{V} :

$$V(s) = \sqrt{[X_s(s) - X(s)]^2 + [Y_s(s) - Y(s)]^2} \quad (3.1)$$

$$\bar{V}(s) = \frac{\langle V(s) \rangle}{\Delta t}, \quad (3.2)$$

in cui i pedici "s" nella (3.1) indicano le coordinate del punto spostato secondo le equazioni (2.44) e (2.45).

3.1 Planimetrie

Come prima cosa vengono riportate alcune delle immagini più significative delle simulazioni effettuate, in cui si può osservare chiaramente come a partire dalla configurazione iniziale, lievemente perturbata da un piccolo rumore, si giunga nel corso del tempo t a configurazioni completamente sviluppate.

Puramente per scopi grafici e di immediatezza nella lettura, si è scelto di illustrare i primi tempi di evoluzione per le simulazioni "prime", cioè le n° 1-4, i tempi a metà evoluzione per le n° 5-8 e i tempi finali per le n° 9-12.

In particolare nelle figure a seguire vengono riportate le planimetrie:

- ai tempi $t = 2, 15, 20, 7$ dell'evoluzione nella Figura 3.1;
- a metà evoluzione, per $t = 50$ nella Figura 3.2;
- al tempo finale delle simulazioni nelle Figure 3.3, 3.4 e 3.5;

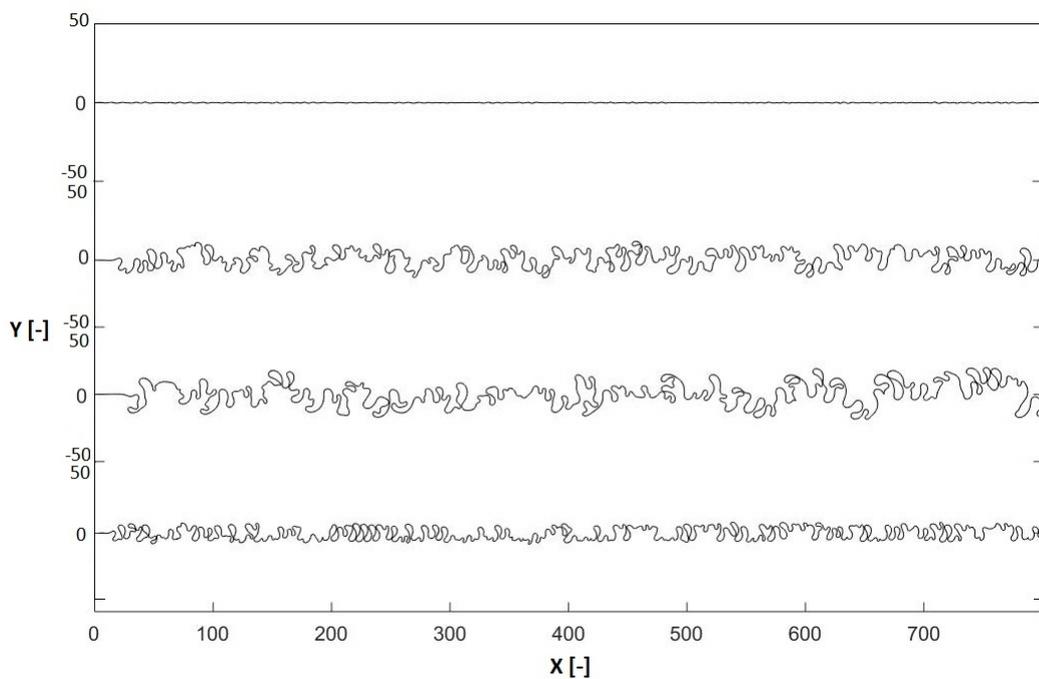


Figura 3.1. Partendo dall'alto, planimetrie: al tempo $t = 2$ per la simulazione n° 1, a $t = 15$ per la n° 2, a $t = 20$ per la n° 3, $t = 7$ per la n° 4.

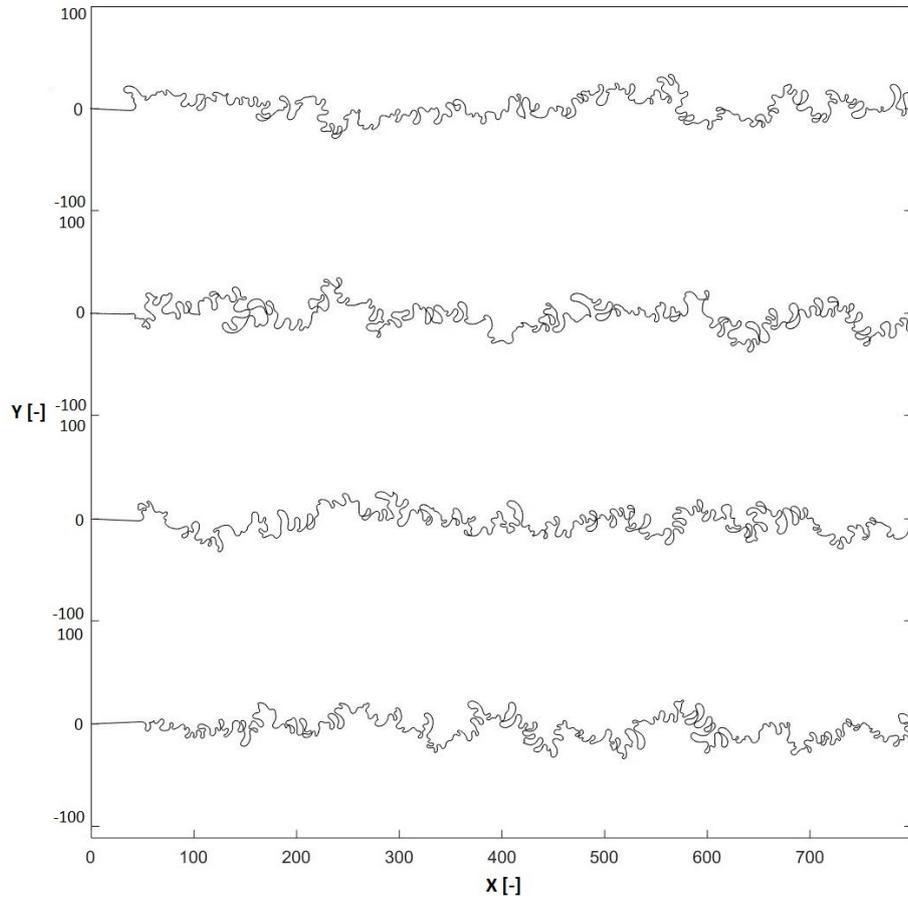


Figura 3.2. Planimetrie a metà evoluzione, per $t = 50$; partendo dall'alto: per la simulazione n° 5, per la n° 6, per la n° 7 ed infine per la n° 8.

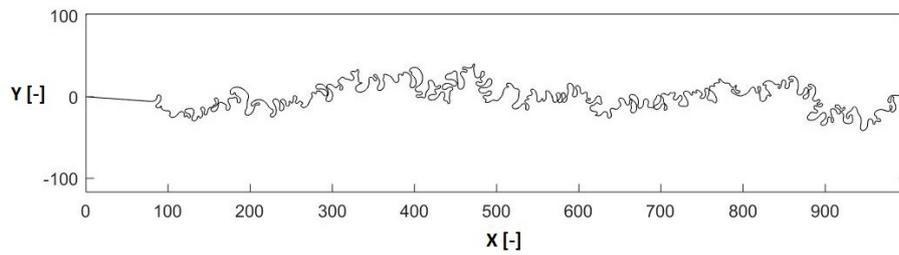


Figura 3.3. Planimetria a fine evoluzione, per $t = 150$ per la simulazione n° 11.

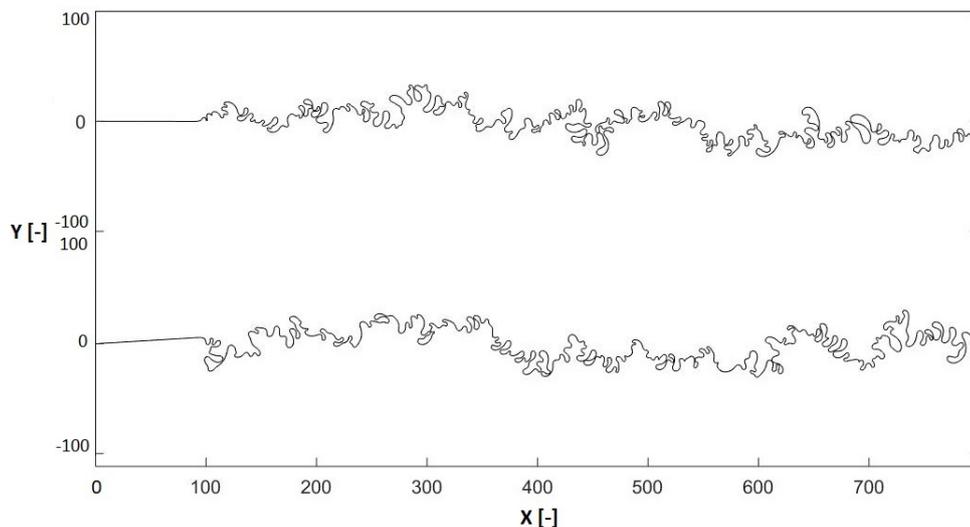


Figura 3.4. Planimetrie a fine evoluzione, per $t = 100$; in alto per la simulazione n° 9 e in basso per la n° 10.

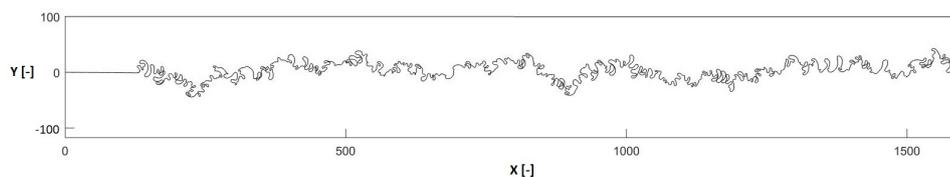


Figura 3.5. Planimetria a fine evoluzione, per $t = 150$ per la simulazione n° 12.

3.2 Sinuosità

Concentrandosi sull'evoluzione temporale della Sinuosità, si sono rappresentate in un unico grafico le S registrate a ogni Δt per tutte le simulazioni.

Dalla Figura 3.6 si evince che, dopo un breve transitorio iniziale assunto tra il tempo iniziale $t = 0$ ed un tempo convenzionale $t = 10$, si raggiunge un'evidente stazionarietà.

In particolare S , definita come il rapporto tra la lunghezza all'istante t e la lunghezza in linea d'aria tra i punti iniziali e finali del fiume, si attesta intorno a valori compresi tra 3.5 e 4, anche per le ultime due simulazioni, n°11 e 12, il cui tempo totale di evoluzione risulta più grande di 50 unità rispetto alle restanti dieci.

L'andamento caratteristico assunto dalla variabile in esame è il seguente: S cresce

e aumenta fintantoché non avviene il primo *cutoff*, che la abbassa di alcuni valori; infatti quando un tratto di fiume viene abbandonato, la linea d'asse acquisisce una curvatura molto minore rispetto a quella immediatamente precedente al *cutoff*. Il fiume continuerà poi ad evolvere, i meandri cresceranno nuovamente e con essi la sinuosità, fino all'arrivo del *cutoff* successivo.

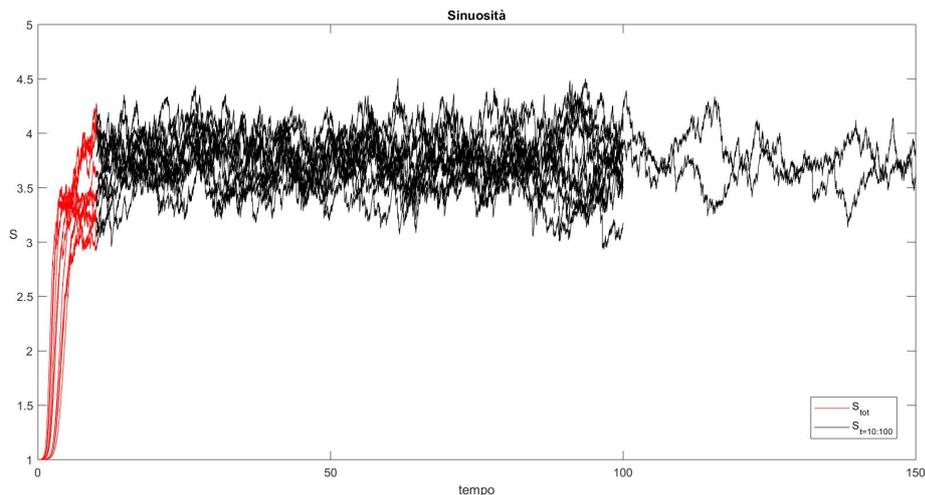


Figura 3.6. Andamento della Sinuosità S nel tempo per tutte le simulazioni. Il transitorio iniziale, assunto tra $t = 0$ e $t = 10$ ed evidenziato in rosso nella figura, è stato trascurato per evidenziare la stazionarietà del pattern.

Tale risultato certifica dunque che la Sinuosità non dipende in alcun modo dalla configurazione idraulica di input.

Le informazioni relative alla sinuosità hanno permesso di ottenere un altro importante parametro: la lunghezza curvilinea del fiume, L . Infatti, partendo dalla relazione

$$S = \frac{L}{L_0}, \quad (3.3)$$

ed utilizzando i dati relativi alla sinuosità media \bar{S} , è possibile determinare la lunghezza media \bar{L} del fiume.

I suddetti risultati sono riportati nella Tabella 3.1, in cui vengono indicati in aggiunta i valori della deviazione standard σ_S^2 della sinuosità.

Tabella 3.1. Valori della Sinuosità media \bar{S} , relativa deviazione standard σ_S^2 e lunghezza curvilinea media \bar{L} per tutte le simulazioni.

Simulazione n°	L_0	\bar{S}	σ_S^2	\bar{L}
1	800	3.85	0.214	3079
2	700	3.85	0.236	2694
3	600	3.85	0.234	2309
4	800	3.66	0.242	2925
5	800	3.59	0.165	2870
6	800	3.87	0.193	3096
7	800	3.85	0.229	3081
8	800	3.80	0.215	3043
9	800	3.75	0.230	2999
10	800	3.88	0.218	3101
11	1000	3.68	0.206	3676
12	1600	3.85	0.161	6158
media		3.79	0.212	3253

Inoltre nella Figura 3.7 è stato rappresentato l'andamento della funzione di distribuzione di probabilità della sinuosità S , che ben evidenzia come gran parte dei valori ricadano all'interno di $S = 3.5 \div 4$.

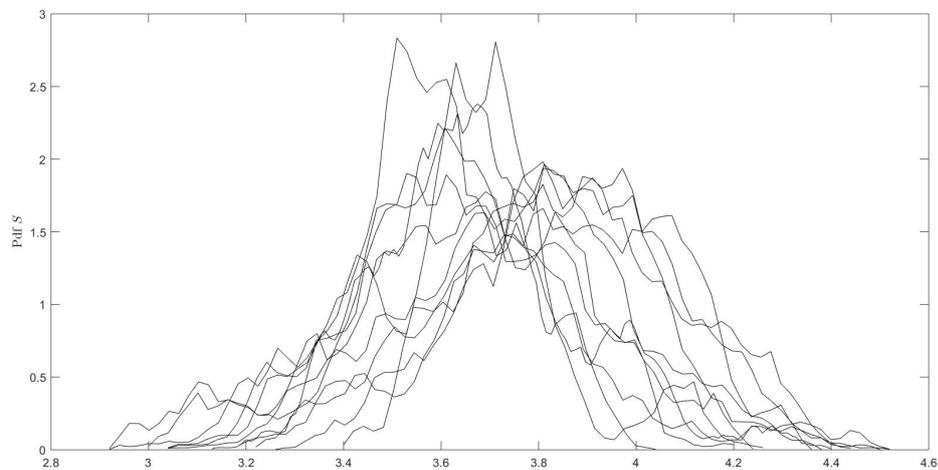


Figura 3.7. Andamento della funzione di distribuzione di probabilità (Pdf) per la Sinuosità S .

Un altro risultato interessante utile ai fini della modellazione stocastica sviluppata nella Parte II, riguarda l'andamento di $\dot{S} = \frac{dS}{dt}$ in funzione di S . Avendo definito la sinuosità come $S = L/L_0$, ne deriva che:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{L_0} \frac{dL}{dt} = \frac{\rho}{L_0}, \quad (3.4)$$

in cui $\rho = dL/dt$. Definendo allora la variabile $\hat{\rho} = \rho/L_0$, per tutte le simulazioni sono stati ottenuti i risultati riportati in Figura 3.8.

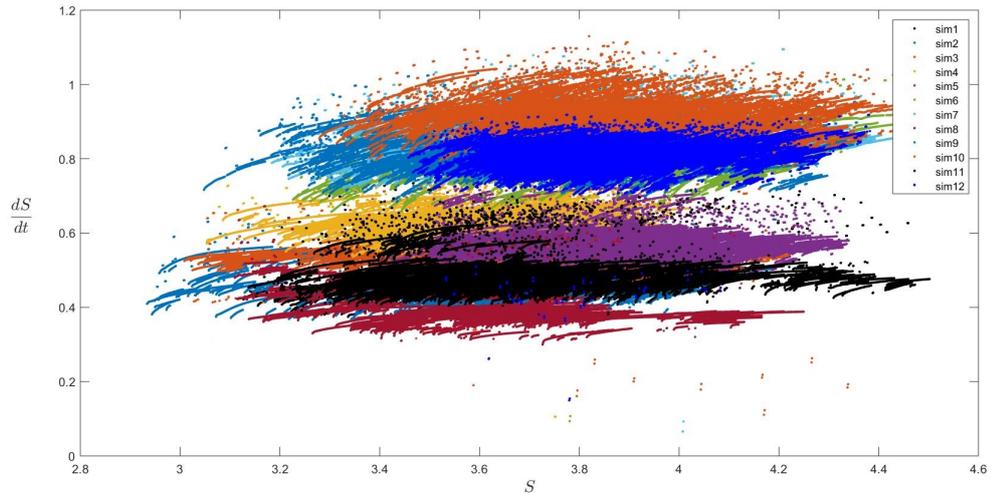


Figura 3.8. Andamento della derivata nel tempo della sinuosità dS/dt in funzione della sinuosità stessa. Per ottenerla sono state derivate le sinuosità relative al solo tratto da $t = 10$ in poi, tralasciando cioè la fase di transitorio iniziale. Le diverse nuvole di punti indicanti $\hat{\rho}$ per ciascuna simulazione, presentano alcuni valori *outlayers* dovuti semplicemente al calcolo numerico delle derivate. Tuttavia è possibile calcolare un valore medio di $\hat{\rho}$ relativo ad ogni simulazione.

I valori medi $\langle \hat{\rho} \rangle$, uno per ciascuna simulazione, sono riassunti nella Tabella 3.2.

Tabella 3.2. Valori medi della derivata nel tempo della sinuosità dS/dt , relativi a tutte le simulazioni effettuate.

Sim. n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	1.98	2.8	2.94	2.5	3.22	3.53	4.44	3.86	4.05	4.97	2.8	4.44
L_0	800	700	600	800	800	800	800	800	800	800	1000	1600
$\langle \hat{\rho} \rangle$	0.38	0.47	0.47	0.55	0.64	0.58	0.84	0.88	0.83	0.92	0.48	0.81
$\langle \rho \rangle$	307.8	329.0	282.0	443.0	509.8	463.2	672.0	704.0	660.0	736.0	476.3	1298.9

Tali valori di $\langle \hat{\rho} \rangle$ sono stati poi correlati al numero di Parker P , dal momento che esso rappresenta senza dubbio uno dei parametri chiave nella differenza tra le varie simulazioni: ne è derivata un'interpolazione lineare, in cui la retta ha equazione:

$$\hat{\rho} = 0.195 P - 0.020. \quad (3.5)$$

Tale espressione indica che \dot{S} cresce linearmente con il numero di Parker, cioè la variazione della Sinuosità nel tempo è tanto maggiore quanto più è grande il parametro che influenza il calcolo di $u_b(s)$ (v. eq. (2.43)).

Come si osserva dalla Figura 3.9, il fitting è risultato molto buono, infatti il valore del coefficiente di determinazione è: $R^2 = 0.8595$. Essendo molto prossimo all'unità ciò sta ad indicare che il modello interpolante utilizzato, cioè la retta di regressione, ben si adatta alla variabilità dei dati ottenuti numericamente.

Una relazione di questo tipo permette di poter formulare un modello stocastico in funzione del numero di Parker, aspetto trattato più approfonditamente nel Capitolo 5 (Parte II).

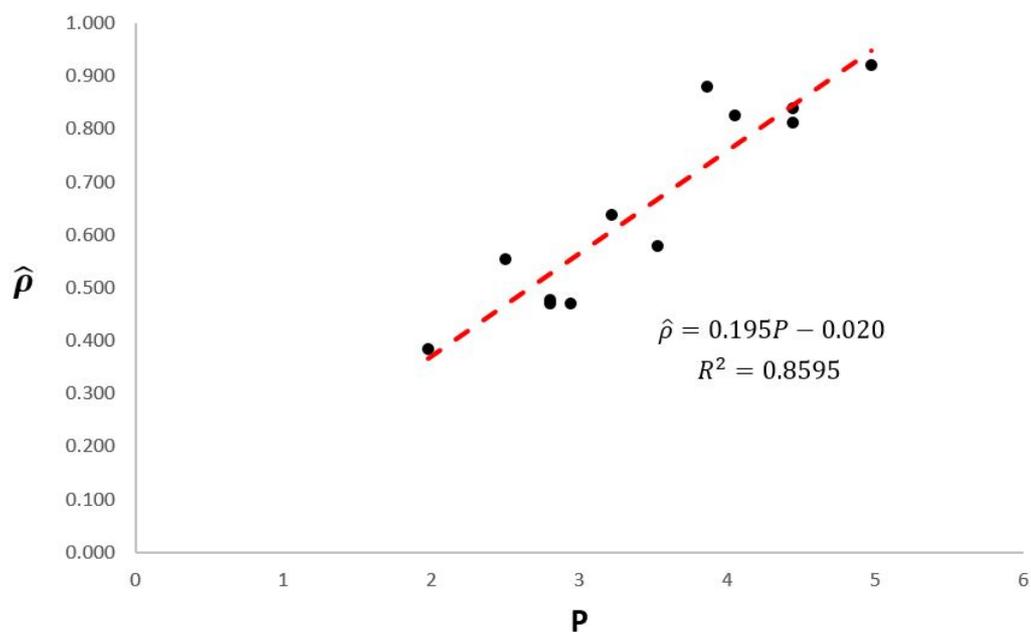


Figura 3.9. Valori medi della derivata nel tempo della sinuosità $dS/dt = \langle \hat{\rho} \rangle$ in funzione del numero di Parker P , relativi a tutte le simulazioni effettuate. In rosso è rappresentata la retta di regressione lineare che fitta i dati con un coefficiente di correlazione prossimo all'unità.

3.3 Distribuzione di probabilità delle Curvature

Un altro risultato elaborato dai salvataggi effettuati riguarda la distribuzione di probabilità delle curvature (Figura 3.10).

A tal fine sono state considerate le $C(s)$ di ciascun punto per ogni istante temporale e per tutte le simulazioni effettuate. La Pdf mostra un picco centrale in corrispondenza dello zero, dal momento che ogni volta che un'evoluzione richiede un nuovo calcolo della curvatura, essa viene imposta pari a zero nei punti iniziale e finale per fini numerici e anche perché $C = 0$ nei punti di flesso.

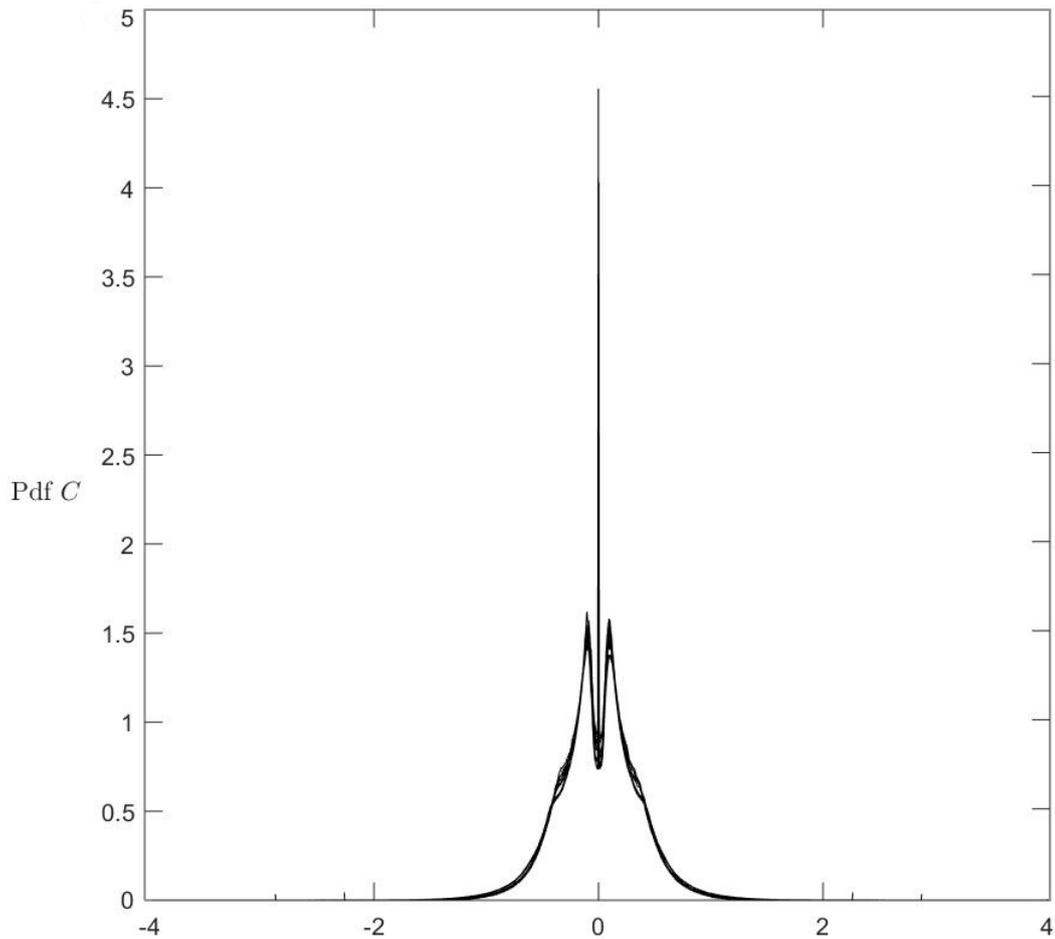


Figura 3.10. Andamento della funzione di distribuzione di probabilità (Pdf) per la Curvatura C .

3.4 Tempi di accadimento tra *cutoffs*

Dopo aver elaborato i dati relativi alla sinuosità e alla curvatura si è proceduto con le statistiche relative ai tempi di accadimento tra *cutoffs*. Questi valori sono stati calcolati come segue, considerando esattamente i tempi relativi al decadimento di S nella sua parte di stazionarietà, cioè dopo $t = 10$:

$$\hat{dt} = t_{cutoff}(i+1) - t_{cutoff}(i) \quad (3.6)$$

Tali intertempi sono stati poi normalizzati con la lunghezza curvilinea L precedentemente calcolata, ottenendo i dt illustrati in Figura 3.11.

L'andamento decrescente che caratterizza tutte le simulazioni è stato identificato mediante una funzione esponenziale decrescente del tipo:

$$p_{dt} = \lambda \cdot e^{-t\lambda}, \quad (3.7)$$

in cui λ rappresenta una frequenza di accadimento, calcolata come il reciproco degli intertempi medi: $\lambda = 1/\bar{dt}$.

Tale espressione risulta adattarsi perfettamente all'analisi dei dati, come ha dimostrato il Test del χ^2 , verificato per tutte le simulazioni per un livello di significatività del 5%. In altre parole il test ha prodotto un esito positivo nel 95% dei casi.

Successivamente si è studiata la dipendenza della frequenza $\lambda = 1/\bar{dt}$ con il numero di Parker P . Volendo ottenere risultati in termini di $\hat{\lambda} = 1/\langle dt \cdot L \rangle$, dopo aver moltiplicato i \bar{dt} per \bar{L} , ottenendo \hat{dt} , e averne fatto il reciproco, (λ^*), tale risultato è stato nuovamente normalizzato alla \bar{L} , ottenendo così $\hat{\lambda}$. I risultati sono riportati in Tabella 3.3.

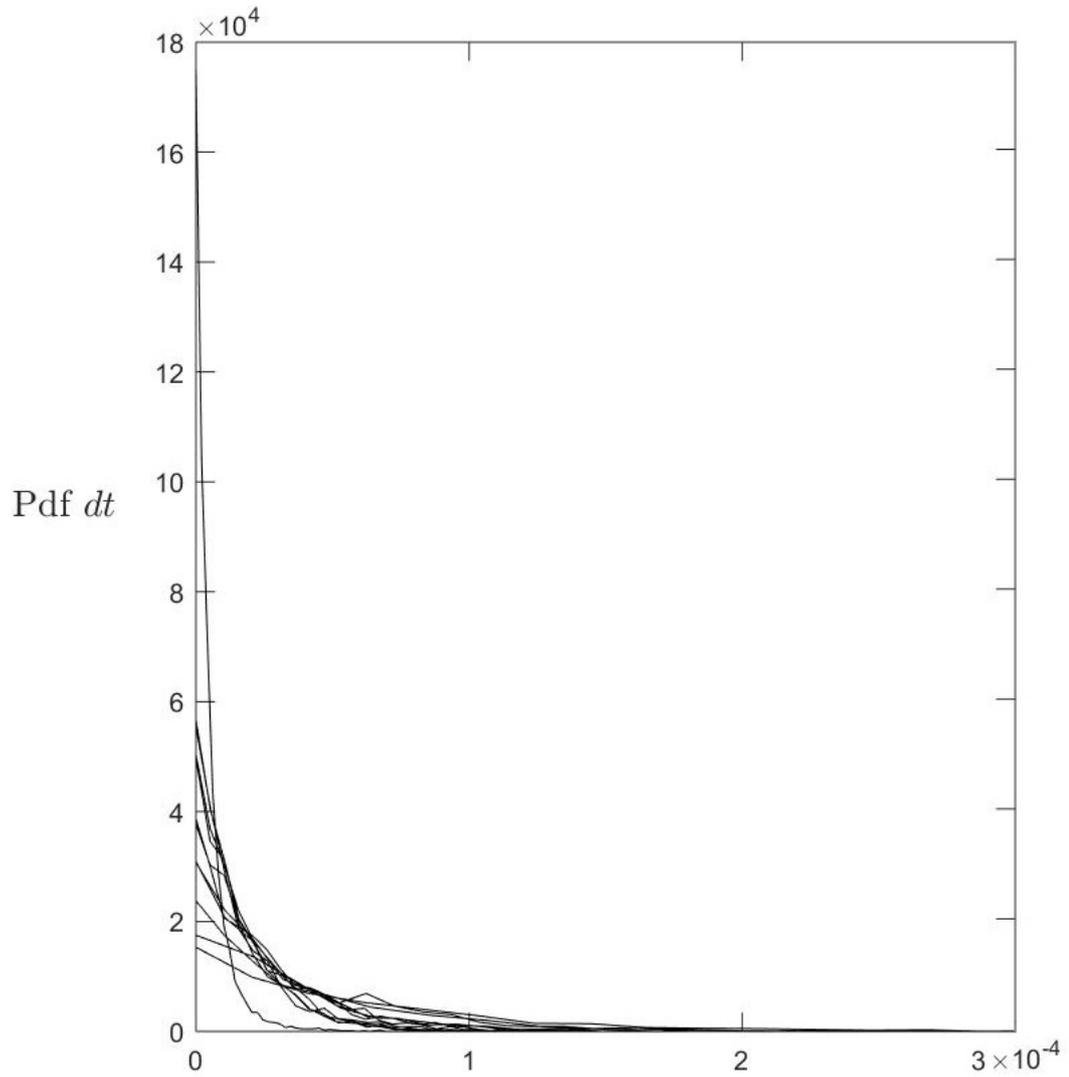


Figura 3.11. Andamento della funzione di distribuzione di probabilità (Pdf) per gli intertempi tra *cutoffs* dt normalizzati alla lunghezza curvilinea L , per tutte le simulazioni.

Tabella 3.3. Valori della frequenza $\hat{\lambda}$ in funzione di P per tutte le simulazioni effettuate.

Simulazione n°	\bar{L}	\hat{dt}	λ^*	$\hat{\lambda} = 1/\langle dt \cdot L \rangle$	P
1	2895	0.11	8.77	0.0030	1.98
2	2556	0.11	9.29	0.0036	2.80
3	2170	0.12	8.06	0.0037	2.94
4	2925	0.08	12.84	0.0044	2.50
5	3043	0.07	14.54	0.0048	3.22
6	3096	0.08	12.78	0.0041	3.53
7	3081	0.05	19.40	0.0063	4.44
8	2870	0.04	22.51	0.0078	3.86
9	2999	0.05	19.45	0.0065	4.05
10	3101	0.05	21.80	0.0070	4.97
11	3676	0.09	11.26	0.0031	2.80
12	6158	0.02	40.06	0.0065	4.44

Andando poi a rappresentare in un grafico i risultati ottenuti in funzione del numero di Parker (v. Figura 3.12) è interessante osservare come la dipendenza di $\hat{\lambda}$ sia linearmente crescente con P , che in sostanza sta a significare che al crescere del numero di Parker aumenta il tasso di accadimento dei *cutoffs*.

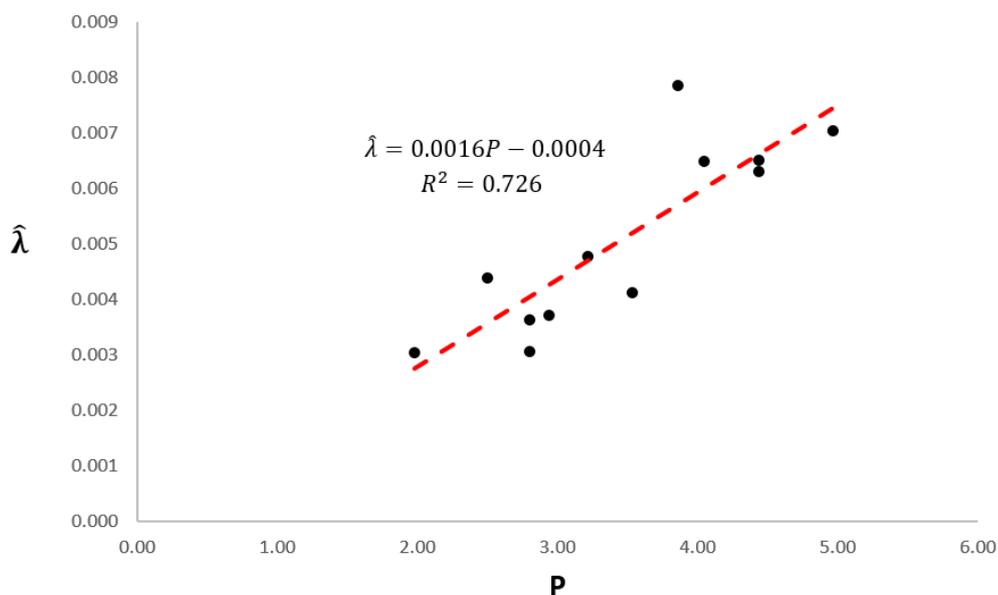


Figura 3.12. Andamento della frequenza $\hat{\lambda} = 1/\langle dt \cdot L \rangle$ in funzione del numero di Parker P . In rosso è rappresentata la retta che, secondo un'interpolazione lineare, fitta perfettamente i dati; è inoltre riportata l'equazione della retta e il coefficiente di determinazione R^2 .

Inoltre i dati analitici possono essere interpolati linearmente mediante una retta di equazione $\hat{\lambda} = 0.0016 P - 0.0004$.

Il coefficiente di determinazione R^2 , rappresentando la proporzione che esiste tra la variabilità dei dati e la correttezza del modello statistico utilizzato per interpolarli, risulta prossimo all'unità confermando dunque la correttezza dell'interpolazione lineare effettuata [21].

3.5 Lunghezze dei tratti di fiume tagliati in seguito ai *cutoffs*

Anche nel caso delle variabili salvate relativamente ai *cutoffs*, si è ricercata la distribuzione di probabilità; in particolare si è esaminata la lunghezza curvilinea dei tratti del fiume tagliati ΔL in seguito all'arrivo di un *cutoff* (v. Figura 3.13). Essi sono stati calcolati come:

$$\Delta L_{(i)} = (s_{c(i)} - 1) * \Delta s_{(i)}, \text{ per } i = 1, \dots, N \quad (3.8)$$

Nell'equazione (3.8) il termine "-1" sta ad indicare che si considerano gli $N - 1$ intervalli compresi tra N punti considerati.

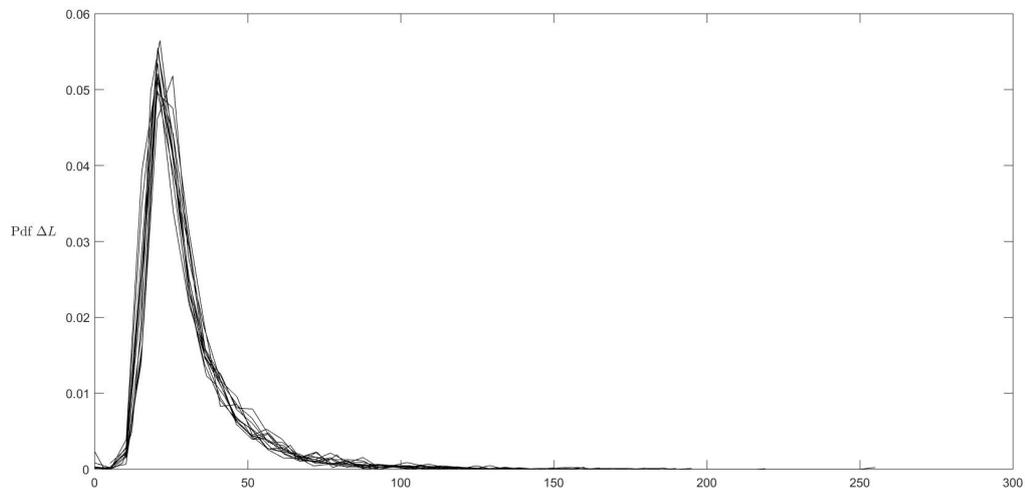


Figura 3.13. Andamento della funzione di distribuzione di probabilità (Pdf) delle lunghezze curvilinee ΔL dei tratti di fiume tagliati in seguito ai *cutoffs*.

Dal momento che i ΔL possono essere considerati come la perdita di sinuosità S nel tempo (Fig. 3.6), la distribuzione di probabilità dei tratti tagliati prevede una maggiore concentrazione dei dati ottenuti intorno a valori bassi sull'asse delle ascisse. In altre parole, come era prevedibile, i *cutoffs* più grandi sono sicuramente meno probabili rispetto a quelli di entità minore.

Dopo aver verificato che il pattern ottenuto non corrispondesse né ad una distribuzione esponenziale, come invece accade per gli intertempi tra *cutoff*, né ad una Gamma, si è cercata una certa dipendenza della media α di tali lunghezze ΔL con il numero di Parker P ; da tale analisi non è risultato alcun legame significativo.

Si è quindi ricercata una relazione che interessasse il rapporto tra la media $\alpha = \langle \Delta L \rangle$ e la lunghezza curvilinea media \bar{L} del fiume e P (v. Tabella 3.4).

Tale risultato, seppur evidenzi una maggiore correlazione rispetto al caso di $(\alpha; P)$, è comunque di difficile interpolazione: nella Figura 3.14 infatti il valore di R^2 risulta molto lontano dall'unità a causa di tre dati *outlayers* rispetto al pattern medio, che si attesta su valori di α/\bar{L} poco lontani dallo 0.011.

Tabella 3.4. Valori della media $\alpha = \langle \Delta L \rangle$, della deviazione standard $\sigma_{\Delta L}^s$ e del rapporto α/\bar{L} in funzione di P per tutte le simulazioni effettuate.

Simulazione n°	\bar{L}	α	$\sigma_{\Delta L}^s$	α/\bar{L}	P
1	2895	32.3	15.0	0.011	1.98
2	2556	33.1	15.0	0.013	2.80
3	2170	32.6	14.9	0.015	2.94
4	2925	31.0	14.1	0.011	2.50
5	3043	30.0	14.9	0.010	3.22
6	3096	33.1	15.9	0.011	3.53
7	3081	31.1	15.5	0.010	4.44
8	2870	30.5	13.9	0.011	3.86
9	2999	30.8	16.7	0.010	4.05
10	3101	30.7	15.6	0.010	4.97
11	3676	32.4	16.4	0.009	2.80
12	6158	30.6	15.7	0.005	4.44

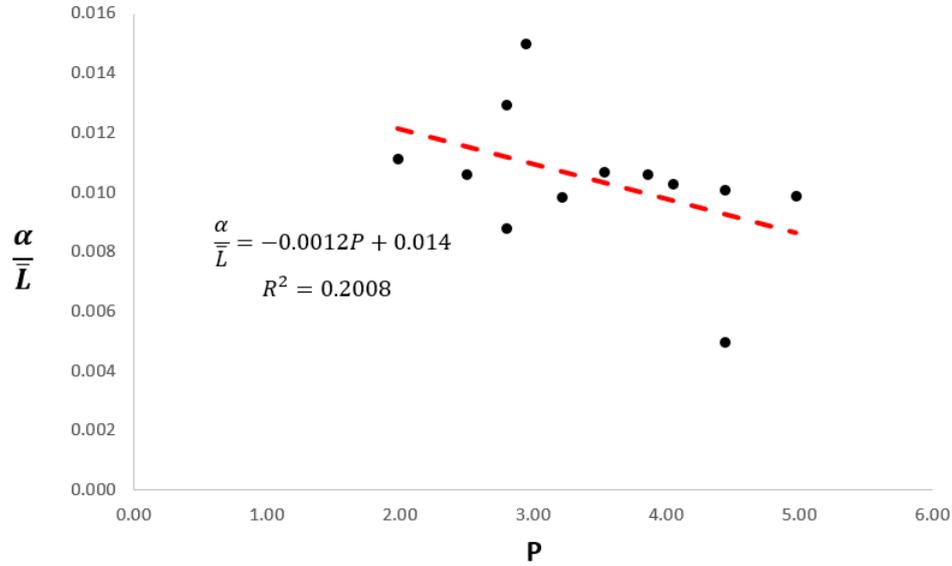


Figura 3.14. Andamento del rapporto α/\bar{L} in funzione del numero di Parker P . In rosso è rappresentata la linea di tendenza secondo un'interpolazione lineare.

3.6 Relazioni empiriche tra velocità di migrazione e sinuosità

Per le sole simulazioni più lunghe sia nello spazio che nel tempo, cioè la n° 11 e la n° 12, sono state salvate le velocità di migrazione medie, calcolate secondo l'equazione (3.2): il loro andamento nel tempo è illustrato in Figura 3.15.

Come già osservato per la sinuosità, trascurando la breve fase di transitorio iniziale anche in questo caso assunta a partire da $t = 10$ in poi, le velocità si attestano attorno ai loro valori medi, pari a:

$$\bar{V} = 0.490 \quad (3.9)$$

$$\bar{V} = 0.722 \quad (3.10)$$

rispettivamente per la simulazione n° 11 e per la n° 12.

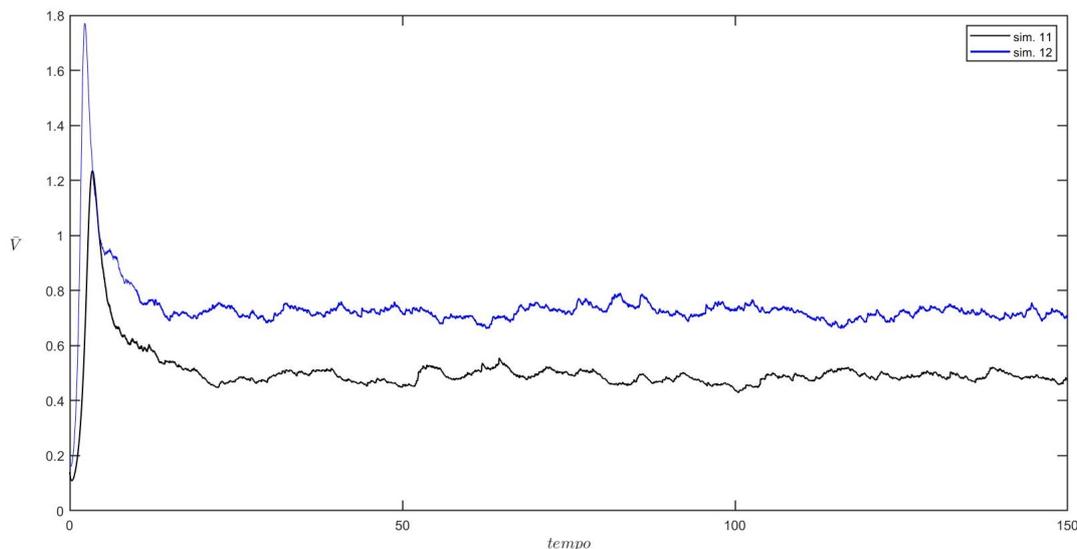


Figura 3.15. Andamento delle velocità di migrazione medie \bar{V} nel tempo per la simulazione n° 11 (in nero) e per la n° 12 (in blu).

Tali quantità, adimensionali come tutti gli altri salvataggi, hanno permesso di ricercare una relazione empirica che le correlasse alla sinuosità del fiume. I valori mediati sulle intere simulazioni sono riportati in Tabella 3.5, in aggiunta al valore di lunghezza iniziale del fiume L_0 .

Tabella 3.5. Valori della lunghezza iniziale del fiume L_0 , della velocità media di migrazione \bar{V} e della sinuosità media \bar{S} per le simulazioni n° 11 e 12.

Simulazione n°	L_0	$\bar{V}[-]$	\bar{S}
11	1000	0.490	3.68
12	1600	0.722	3.85

L'analisi di questi valori permette di ricavare un dato utile ai fini di sviluppi futuri in termini di *carbon sequestration*: moltiplicando la lunghezza iniziale del fiume L_0 per la sinuosità S , ottenendo cioè la lunghezza curvilinea, e moltiplicandola a sua volta per la migrazione media $\bar{V} = E \cdot u_b$ (espressione equivalente all'eq. (3.2)), si ottiene un'informazione relativa al tasso di perdita di area per unità di tempo.

Un tasso di perdita medio $d\bar{A}/dt$ può essere calcolato utilizzando i valori medi di S e \bar{V} (v. tab. 3.5):

$$\frac{d\bar{A}}{dt} = L_0 \bar{S} \cdot \bar{V} = \begin{cases} 1803 & \text{per sim. n}^\circ 11 \\ 4448 & \text{per sim. n}^\circ 12 \end{cases} \quad (3.11)$$

Tale risultato, adimensionale a meno dell’inserimento di parametri fisici dimensionali (ad esempio il d_{50}), se moltiplicato per la densità di biomassa areale presente in una determinata zona, permetterebbe di ottenere interessanti stime sulla quantità di carbonio totale prelevata dal fiume, ritornando quindi a giustificare la ricerca del lavoro in esame.

A titolo di esempio, ipotizzando un $d_{50} = 0.03 m$, si riportano in Tabella 3.6 i valori della velocità media di migrazione in $[m/anno]$, ottenuti moltiplicando \bar{V} per la scala D_0/T_0 , e i tassi di perdita areale medi per unità di lunghezza in linea d’aria del fiume in $[km^2/anno/km]$.

Tabella 3.6. Valori della velocità media di migrazione \bar{V} in $[m/anno]$ e del tasso di perdita areale medio per unità di lunghezza in linea d’aria del fiume $(d\bar{A}/dt)/L_0$ in $[km^2/anno/km]$ per le simulazioni n° 11 e 12, avendo ipotizzato un diametro medio dei sedimenti pari a $d_{50} = 0.03 m$.

Simulazione n°	D_0 [km]	T_0 [anni]	\bar{V} [m/anno]	L_0 [km]	$(d\bar{A}/dt)/L_0$ [km ² /anno/km]
11	0.034	5	0.0034	34	0.366
12	2.462	318	0.0056	3938	0.009

Lavorando invece sui dati registrati per ogni punto e per ogni istante di tempo, è stato costruito un grafico per simulazione (rispettivamente Figura 3.16 per sim. n° 11 e Figura 3.17 per sim. n° 12), in cui in ascissa ci sono i valori della sinuosità S e in ordinata quelli di \bar{V} . E’ immediato notare che nonostante i dati siano distribuiti in maniera apparentemente non correlata secondo una nuvola di punti abbastanza ampia nel piano cartesiano, essi possano comunque essere interpolati linearmente nella zona di maggior densità.

I valori del coefficiente di correlazione R^2 sono infatti superiori allo 0.5, ad indicare la bontà del fitting lineare.

Le relazioni empiriche trovate per la simulazione 11 e la 12 sono rispettivamente:

$$\bar{V}(S) = -0.0897 \cdot S + 0.8202 \quad (3.12)$$

$$\bar{V}(S) = -0.1019 \cdot S + 1.1143 \quad (3.13)$$

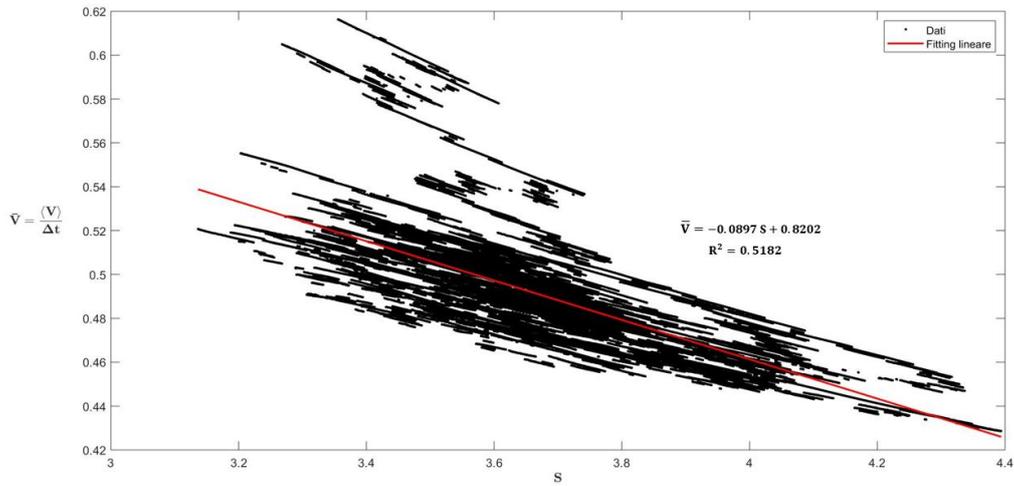


Figura 3.16. Andamento della velocità media di migrazione $\bar{V}(s)$ in funzione della sinuosità S , registrate per ogni punto e per tutti gli istanti temporali della simulazione n° 11. In rosso è rappresentata la linea di tendenza secondo un'interpolazione lineare.

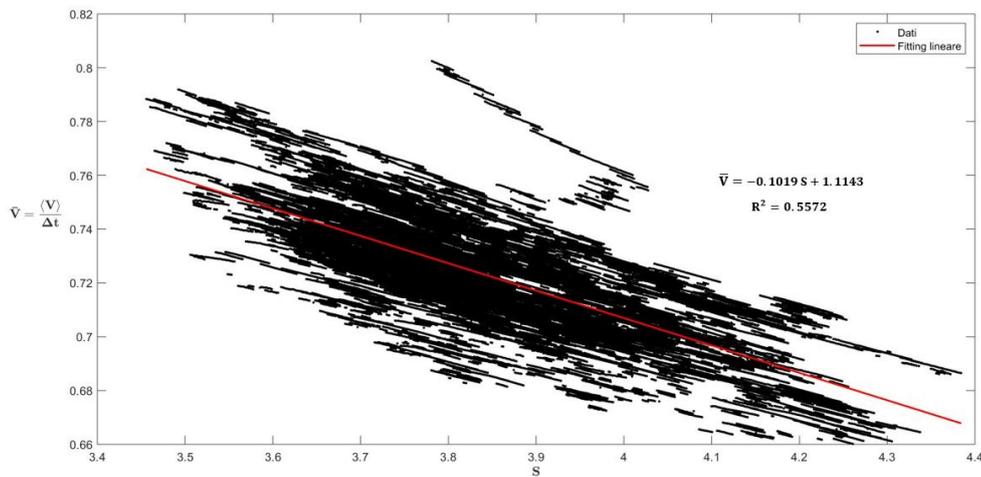


Figura 3.17. Andamento della velocità media di migrazione $\bar{V}(s)$ in funzione della sinuosità S , registrate per ogni punto e per tutti gli istanti temporali della simulazione n° 12. In rosso è rappresentata la linea di tendenza secondo un'interpolazione lineare.

3.7 Distribuzione planimetrica delle larghezze raggiunte dal fiume

Si è poi studiato l'andamento della distribuzione di probabilità della larghezza planimetrica $B = 2b$ occupata dal fiume durante la sua evoluzione, definita in letteratura *meander belt*.

Salvate le coordinate X e Y per ogni simulazione, è bastato ricercare una pdf per tutti i punti e per ogni istante temporale dell'ordinata, calcolando cioè la probabilità che Y ricadesse all'interno di fasce (*belts*) di ampiezza normalizzata, come schematizzato in Figura 3.18.

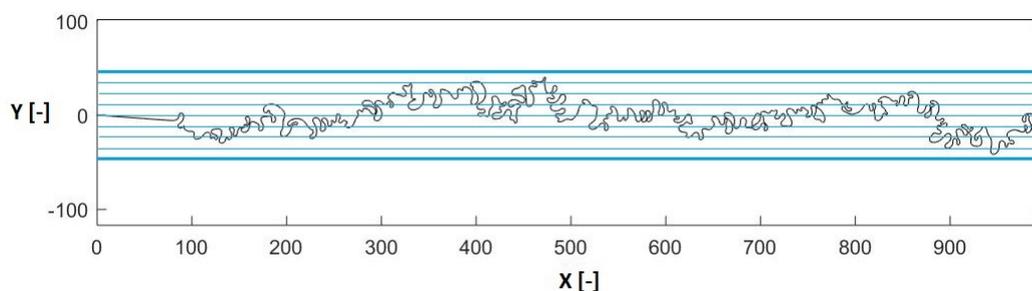


Figura 3.18. Schema esemplificativo per il calcolo della distribuzione planimetrica dei fiumi.

Il risultato di tale analisi, effettuata considerando tutti gli istanti temporali di evoluzione e sovrapponendo i risultati derivanti da tutte le simulazioni, è riportato in Figura 3.19.

Come già osservato nel caso della Pdf delle curvature (v. Fig. 3.10), la concentrazione di molti dati sul valore B nullo è giustificata dall'aver forzato i punti iniziale e finale dell'asse del canale a zero per motivazioni numeriche. Il pattern generale mostra comunque una distribuzione abbastanza omogenea, che decresce gradualmente fino a valori più elevati di B . Ne risulta che per gran parte della loro evoluzione i fiumi restano confinati all'interno di una fascia avente dimensione media $\bar{B} \simeq 40$; mano a mano che i meandri crescono, la fascia che comprende al suo interno il fiume si allarga, fino all'arrivo di un *cutoff* che bypassando un tratto del corso d'acqua riporterà la configurazione ad avere una larghezza inferiore rispetto all'istante precedente. Di conseguenza la probabilità di trovare il fiume in una zona più ampia è bassa così come lo è la probabilità di avere *cutoffs* di maggiore entità.

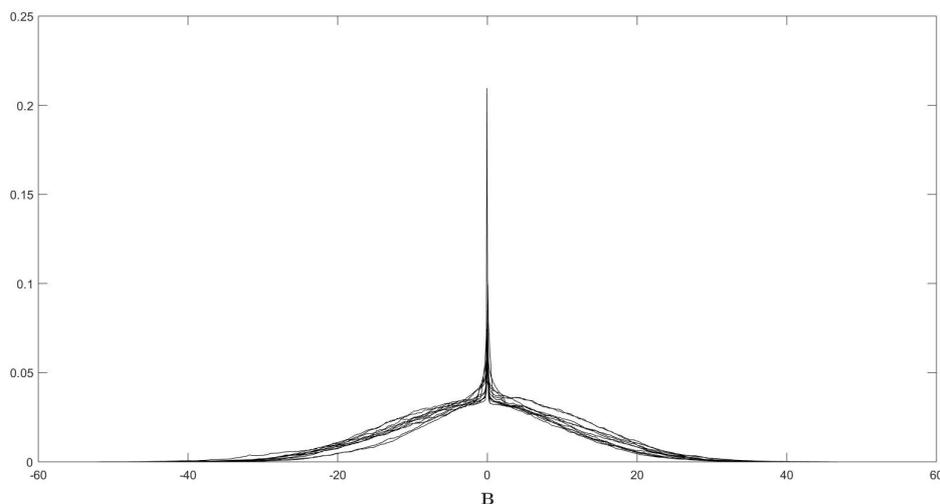


Figura 3.19. Andamento della funzione di distribuzione di probabilità (Pdf) delle larghezze B dei fiumi di tutte le simulazioni, raggiunte durante il processo evolutivo e definite in letteratura *meander belts*. Sull'asse delle ascisse la \mathbf{B} indica la larghezza del fiume, adimensionalizzata rispetto alla scala spaziale D_0 .

Anche nel caso della distribuzione in esame si è ricercata una certa dipendenza dei risultati dal numero di Parker P . In particolare, assunta l'80% come percentuale significativa, si è calcolata la B_{80} , cioè la larghezza corrispondente all'80% della Pdf (v. Tabella 3.7).

Tabella 3.7. Valori della larghezza corrispondente all'80% della Pdf (B_{80}) in funzione del numero di Parker P per tutte le simulazioni effettuate.

Sim. n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	1.98	2.8	2.94	2.5	3.22	3.53	4.44	3.86	4.05	4.97	2.8	4.44
B_{80}	60.48	62.88	63.52	68.16	59.04	72.16	72.88	63.28	66.88	68.80	77.76	77.76

Nella Figura 3.20 la dipendenza di B_{80} da P è evidenziata scomponendo i risultati: da una parte vi è l'andamento generale, in rosso, comprensivo di tutte le dodici simulazioni; dall'altra sono state messe in relazione con P soltanto le prime dieci, in verde.

Si è scelto di mantenere i due risultati separati principalmente per sottolineare come i valori maggiori di B_{80} siano stati ottenuti proprio nelle due simulazioni più lunghe, la n° 11 e la n° 12, sia spazialmente che temporalmente.

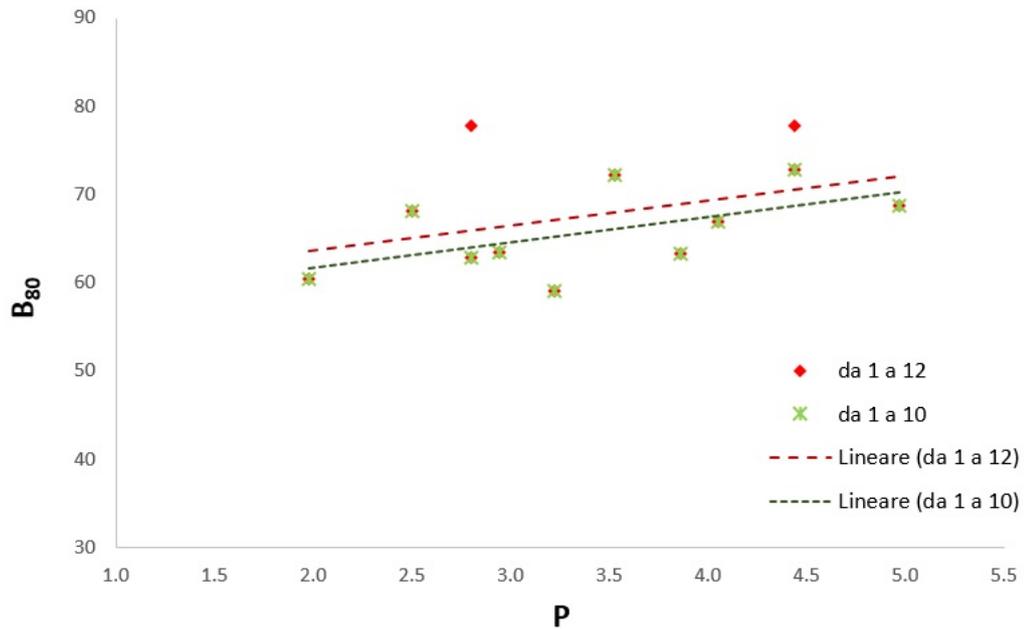


Figura 3.20. Andamento della larghezza B_{80} in funzione del numero di Parker P . In dati in rosso rappresentano i valori ottenuti per tutte le simulazioni effettuate; in rosso più scuro e tratteggiata è riportata la corrispondente retta interpolante, di equazione: $B_{80} = 2.847 P + 57.95$ e $R^2 = 0.167$. I dati in verde sono invece i valori delle sole sim. n° 1-10, avendo cioè escluso dall'analisi le simulazioni più lunghe nello spazio e nel tempo; in questo caso la relazione che lega i dati (in verde scuro dal tratteggio più ravvicinato) è: $B_{80} = 2.872 P + 55.96$. Il valore di $R^2 = 0.314$, più alto rispetto al caso totale, denota un fitting migliore, anche se entrambi risultano lontani dall'unità e quindi dall'indicazione di una buona interpolazione.

Parte II

Modello Stocastico

Capitolo 4

Sistemi dinamici e rumore

Dopo aver condotto l'analisi numerica del processo di meandrizzazione dei fiumi, si è proceduto con la modellazione stocastica dello stesso, sulla base dei risultati ottenuti. La trattazione seguente fa riferimento al capitolo 2 del libro di *Ridolfi et al. (2011)* [52].

E' noto infatti come molte dinamiche naturali siano guidate da diversi fattori random (casuali), che risultano a loro volta dall'incertezza inerente la variabilità spaziale e/o temporale dei processi stessi. Volendo approfondire la dinamica a lungo termine dei fiumi meandriformi per esempio, è subito intuibile come la loro evoluzione nello spazio e nel tempo ed i relativi fenomeni di allungamento/accorciamento siano strettamente correlati al tasso di accadimento dei *cutoffs*. Per i fenomeni naturali in generale è quindi possibile definire una certa casualità ambientale, chiamata in letteratura *environmental randomness*, che esprime appunto l'incertezza alla base dei sistemi dinamici; per questo motivo da ora in avanti la "casualità" sarà indicata come **rumore** o **noise**.

Nonostante la presenza di un rumore casuale che, pilotando la dinamica di questi sistemi, potrebbe far pensare che essi esibiranno dei cambiamenti di stato "disorganizzati" rispetto alla condizione di stabilità, nella letteratura fisica – (per esempio *Horsthemke and Lefever (1984)* [27]; *Cross and Hohemberg (1993)* [13]; *Sagues et al. (2007)* [56]) – è stato riportato che il *noise* può anche indurre una nuova condizione di ordine che altrimenti non esisterebbe.

Tale effetto benefico del rumore è stato ampiamente investigato dagli autori [52], che hanno così fornito delle relazioni matematiche in grado di descriverlo. In particolare le dinamiche investigate includono quattro componenti fondamentali:

1. il sistema dinamico deterministico;
2. l'ambiente esterno;

3. la forzante stocastica;
4. possibili retroazioni tra lo stato del sistema ed il suo ambiente o i *drivers* stocastici.

Il primo elemento generalmente coinvolge un numero limitato di variabili fisiche ed è separato rispetto all'ambiente esterno (2), che a sua volta è molto più complesso. In particolare è possibile esprimere semplicemente la variazione di una variabile di stato, cioè l'unica variabile fisica che rappresenta lo stato del sistema. Ci si concentra su un'unica variabile principalmente per procedere con semplicità concettuale e perché ciò permette lo studio attraverso modelli matematici analitici. La variazione viene quindi definita mediante un'equazione differenziale del primo ordine:

$$\frac{d\phi}{dt} = f(\phi) \quad (4.1)$$

in cui $\phi(t)$ è la variabile di stato caratterizzante lo stato del sistema, t è il tempo e $f(\phi)$ è una funzione algebrica deterministica.

Per rappresentare l'azione del secondo elemento sul primo, che come già accennato rappresenta un' "entità" più complessa e ampia rispetto al sistema dinamico in sé e non modellabile deterministicamente, si utilizza quindi un processo stocastico. La variabilità delle condizioni dell'ambiente esterno viene dunque considerata attraverso una forzante stocastica modellata come un rumore $\xi(t)$:

$$\frac{d\phi}{dt} = f(\phi) + g(\phi) \cdot \xi(t) \quad (4.2)$$

in cui $g(\phi)$, che può essere lineare o non lineare, è la funzione algebrica dipendente dalla variabile di stato ϕ e può essere vista come il peso del rumore $\xi(t)$ sul sistema. Dal momento che il sistema dinamico è molto minore rispetto all'ambiente esterno, solitamente non è in grado di incidere sui *drivers* dell'ambiente. Tuttavia, qualora un sistema influenzi il suo ambiente, si parla della retroazione, o *feedback*, tra lo stato del sistema ed il suo ambiente; tale aspetto non è stato indagato nello studio di questa tesi.

Per modellare la forzante stocastica casuale, che evidentemente rappresenta l'aspetto cruciale di un processo stocastico, è necessario introdurre due scale temporali: τ_s del sistema dinamico deterministico, che descrive la risposta nel tempo del sistema in seguito ad uno spostamento rispetto al suo stato stazionario – cioè la scala di risposta del sistema alla forzante – e τ_n della forzante stessa.

A seconda che il rapporto τ_s/τ_n assuma valori maggiori, minori o uguali a 1, si modella $\xi(t)$.

Se $\tau_s/\tau_n \ll 1$ significa che il sistema risponde molto rapidamente alla forzante, auto-aggiustandosi quasi istantaneamente al rumore che altera il sistema e di conseguenza ϕ risulta sempre in equilibrio con ξ .

Se invece $\tau_s/\tau_n \simeq 1$ i due tempi sono comparabili, e ciò implica che le dinamiche del sistema sono lente a sufficienza da risultare sensibili all'autocorrelazione della forzante casuale.

Infine se $\tau_s/\tau_n \gg 1$ il sistema dinamico ha un tempo molto più lento rispetto alla forzante, cioè non è in grado di percepire l'auto-correlazione della forzante random, motivo per cui questa può essere trascurata. In questo caso, in cui si ricade per il lavoro in esame, la forzante può essere modellata utilizzando un rumore bianco, cioè un rumore non correlato appunto. Tale modellazione porta ad un vantaggio notevole: permette di non analizzare le dinamiche della variabile di stato $\phi(t)$ alla scala τ_n , ma semplicemente sulla scala τ_s del sistema deterministico.

4.1 White shot noise

Per risolvere l'equazione differenziale

$$\frac{d\phi}{dt} = f(\phi) + g(\phi) \cdot \xi(t) \quad (4.3)$$

che descrive i sistemi dinamici forzati dal rumore $\xi(t)$, è necessario modellare quest'ultimo termine. Nel processo stocastico studiato nella tesi in esame, il *noise* è stato rappresentato con il *white shot noise*. Esso, anche chiamato rumore bianco Poissoniano, è un processo stocastico descritto dalla variabile di stato $\xi_{sn}(t)$ ed è definito da una sequenza di impulsi di durata infinitesima e ampiezza random infinita $h_i\delta(0)$, con $\delta(\cdot)$ pari alla funzione di Dirac. Gli impulsi avvengono casualmente ai tempi τ_i e formano una sequenza Poissoniana di passo λ ; ciò implica che la distribuzione di probabilità degli intervalli temporali $t_i = \tau_i - \tau_{i-1}$ è pari a $p_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ [54]. Inoltre la pdf (distribuzione di probabilità) delle altezze random, divise per $\delta(0)$, risulta esponenziale: $p_H(h) = \frac{1}{\alpha} e^{-h/\alpha}$, con media α . Pertanto la formulazione matematica per il processo stocastico a rumore *white shot* è:

$$\xi_{sn}(t) = \sum_i h_i \delta(t - \tau_i) \quad (4.4)$$

Come illustrato da *Ridolfi et al.(2011)* [52], in Figura 4.1 viene riportato un esempio di *white shot noise*.

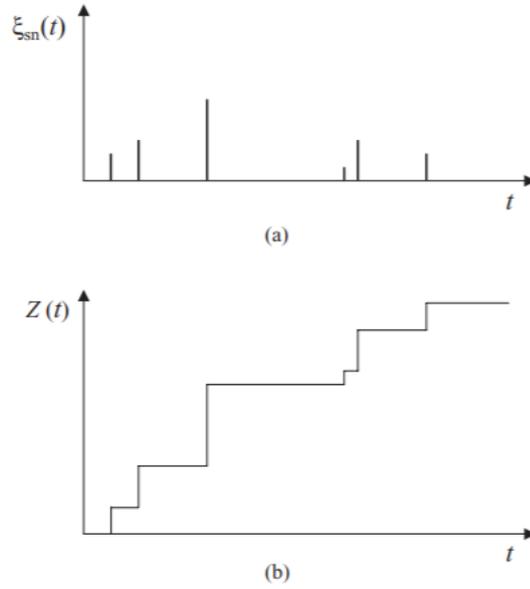


Figura 4.1. (a) Esempio di realizzazione del *white shot noise* $\xi_{sn}(t)$ e (b) del processo di Poisson $Z(t)$ omogeneo. I picchi nella (a) sono stati rappresentati come barre di base unitaria. Da *Ridolfi et al. (2011)* [52].

La $Z(t)$ riportata nella Figura 4.1(b) è la derivata formale del processo Poissoniano omogeneo composito:

$$Z(t) = \int_0^t \xi_{sn}(t') dt' = \sum_i h_i \Theta(t - \tau_i) \quad (4.5)$$

con $\Theta(\cdot)$ funzione di passo unitario. La media e la covarianza di tale processo [47] sono rispettivamente:

$$\langle Z(t) \rangle = \lambda \alpha t \quad (4.6)$$

$$\langle Z(t)Z(t') \rangle = 2\lambda\alpha^2 \min(t, t') \quad (4.7)$$

La funzione di covarianza e i momenti del *white shot noise* possono dunque essere ottenuti considerando che tale rumore bianco sia la derivata formale del processo Poissoniano composito; secondo *VanMarcke (1983)* [66] la media risulta,

$$\langle \xi_{sn}(t) \rangle = \frac{\partial \langle Z(t) \rangle}{\partial t} = \lambda \alpha \quad (4.8)$$

e la covarianza,

$$\langle \xi_{sn}(t)\xi_{sn}(t') \rangle = -\frac{\partial^2 \langle Z(t)Z(t') \rangle}{\partial(t-t')^2} = 2\lambda\alpha^2 \delta(t-t') \quad (4.9)$$

4.2 Sistemi dinamici forzati dal white shot noise

Riscrivendo l'equazione stocastica (4.3) con un *white shot noise* a media $\langle \xi_{sn} \rangle = \lambda \alpha$ si ottiene:

$$\frac{d\phi}{dt} = f(\phi) + g(\phi) \cdot \xi_{sn}(t) \quad (4.10)$$

Tale espressione evidenzia che ogni impulso in $\xi_{sn}(t)$ provoca un impulso in $d\phi/dt$ e di conseguenza un salto su ϕ , il cui valore risulta quindi incognito.

Per derivare direttamente l'equazione (4.10) gli autori [52] hanno utilizzato l'approccio di *Cox and Miller (1965)* [12].

Come prima cosa la generica equazione stocastica moltiplicativa (4.10) viene trasformata in una additiva, mediante l'introduzione delle variabili $z = \int_{\phi} 1/g(\phi') d\phi'$, $\rho(z) = f[\phi(z)]/g[\phi(z)]$. In questa maniera la (4.10) diventa:

$$\frac{dz}{dt} = \rho(z) + \xi_{sn} \quad (4.11)$$

Definendo poi la probabilità di non avere salti nell'intervallo infinitesimo dt come $(1 - \lambda dt) + o(dt)$, ed introducendo

$$\Delta z = \int_t^{t+dt} \rho(z(\tau)) d\tau = \rho(z(\tau))dt + o(dt), \quad (4.12)$$

al tempo $(z + dt)$ la z assume il seguente valore:

$$z(t + dt) = z(t) + \Delta z \quad (4.13)$$

Invece la probabilità di avere un salto nello stesso intervallo dt è $\lambda dt + o(dt)$; analogamente al caso precedente si ha:

$$z(t + dt) = z(t) + h + \Delta z \quad (4.14)$$

in cui h rappresenta il salto distribuito secondo $p_H(h)$.

Con tali notazioni è possibile esprimere la probabilità che il processo assuma valori in $[z, z + dz]$ al tempo $t + dt$:

$$p(z, t + dt)dz = (1 - \lambda dt)p(z + \Delta z, t)d(z + \Delta z) + \lambda dt \int_0^z p(z' + \Delta z', t)p_H(z - z')d(z' + \Delta z')dz \quad (4.15)$$

in cui il secondo termine nella parte destra dell'espressione (4.15) tiene in conto del caso in cui il processo raggiunge il livello z a causa di un salto indotto dal rumore.

Sostituendo ora la (4.12) nella (4.15) e trascurando tutti i termini di ordine $\circ(dt)$, si ottiene:

$$\begin{aligned}
 p(z, t + dt)dz &= (1 - \lambda dt)p(z - \rho(z)dt, t)d(z - \rho(z)dt) \\
 &\quad + \lambda dt \int_0^z p(z' - \rho(z')dt, t)p_H(z - z')d(z' - \rho(z')dt)dz \\
 &= (1 - \lambda dt) \left(p(z, t) - \rho(z)dt \frac{\partial}{\partial z} p(z, t) \right) \left(1 - \frac{\partial}{\partial z} \rho(z)dt \right) \\
 &\quad + \lambda dt dz \int_0^z p(z', t)p_H(z - z') dz'
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Infine dividendo per dz , sottraendo $p(z, t)$ a entrambi i membri, dividendo per dt e considerando il limite per $dt \rightarrow 0$, si ottiene l'equazione finale (*Rodriguez-Iturbe et al. (1999)*, [53]):

$$\frac{\partial p(z, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z} [p(z, t)\rho(z)] - \lambda p(z, t) + \lambda \int_0^z p(z', t)p_H(z - z') dz'. \tag{4.17}$$

In particolare è possibile ottenere una soluzione di stato stazionario (*steady-state*) per la (4.17) nel caso in cui la distribuzione dei salti $p_H(h)$ sia esponenziale con media α :

$$p(z) = C \frac{1}{\rho(z)} \exp \left[-\frac{z}{\alpha} - \lambda \int_z \frac{1}{\rho(z')} dz' \right], \tag{4.18}$$

con C costante d'integrazione.

E' inoltre possibile generalizzare tale risultato al caso in cui i processi siano guidati da un *white shot noise* con tasso $\lambda = \lambda(\phi)$, cioè dipendente dallo stato del sistema. Eseguendo gli stessi passaggi, come riportato da *Porporato and D'Odorico (2004)* [51], si ottiene la pdf di ϕ :

$$p(z) = C \frac{1}{\rho(z)} \exp \left[-\frac{z}{\alpha} - \int_z \frac{\lambda(z')}{\rho(z')} dz' \right]. \tag{4.19}$$

Capitolo 5

Descrizione del processo stocastico

La volontà di formulare un modello stocastico per l'evoluzione a lungo termine dei fiumi meandriformi è ben giustificata dal fatto che, qualora si riuscisse a trovare un modello in grado di fornire risultati quanto più simili a quelli forniti dalle simulazioni numeriche, sarebbe dunque ridondante aspettare i tempi computazionali richiesti da un qualsiasi codice di calcolo.

Nel caso in esame si è ricercata una relazione stocastica in grado di descrivere la distribuzione di probabilità della Sinuosità in funzione del tasso di accadimento dei *cutoffs*.

Infatti, come evidenziato precedentemente nella Figura 3.6 e ora ingrandito nella Figura 5.1, l'andamento di S cresce nel tempo fintantoché non sopraggiunge un *cutoff*, che ne provoca una decrescita lineare negli intervalli di tempo dt di accadimento dei *cutoffs*.

Modellare il processo stocastico direttamente sulla sinuosità porterebbe al grande vantaggio di poter ricavare il valore del tasso di perdita areale per unità di tempo dA/dt , noti i dati sulla velocità di migrazione media (v. cap. 3.6). Essendo poi S una quantità sempre maggiore di 1, farne il reciproco significa in sostanza ottenere in maniera immediata una probabilità p . Quindi, richiamando il concetto fisico secondo la definizione data da *Boltzmann*, (1896-98) [6], è possibile associare al logaritmo della sinuosità l'entropia.

L'entropia di un sistema macroscopico in un macro-stato M rappresenta il logaritmo del volume dello spazio di stato (numero di micro-stati) corrispondenti a M [25]; in sostanza dunque lo stato macroscopico di un sistema è descrivibile dalla distribuzione di una serie di micro-stati.

L'equazione che descrive questo fenomeno, associata al caso in esame, è:

$$E = -k_B \ln(S), \quad (5.1)$$

in cui E rappresenta appunto l'entropia, $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} J/K$ la costante che prende il nome dallo stesso Ludwig Boltzmann e S , cioè la sinuosità, rappresenta il numero dei possibili stati che il sistema può assumere ($S = 1/p$): essendo $S > 1$, si ha che la probabilità $p = 1/S$ risulterà sempre < 1 .

In altre parole questo concetto denota che l'entropia del sistema "fiume" è tanto maggiore quanto più esso divaga nello spazio circostante, cioè quando aumenta la sua sinuosità. Vedendolo in termini matematici infatti, se S cresce, $p = 1/S$ diminuisce, quindi la E aumenta e viceversa.

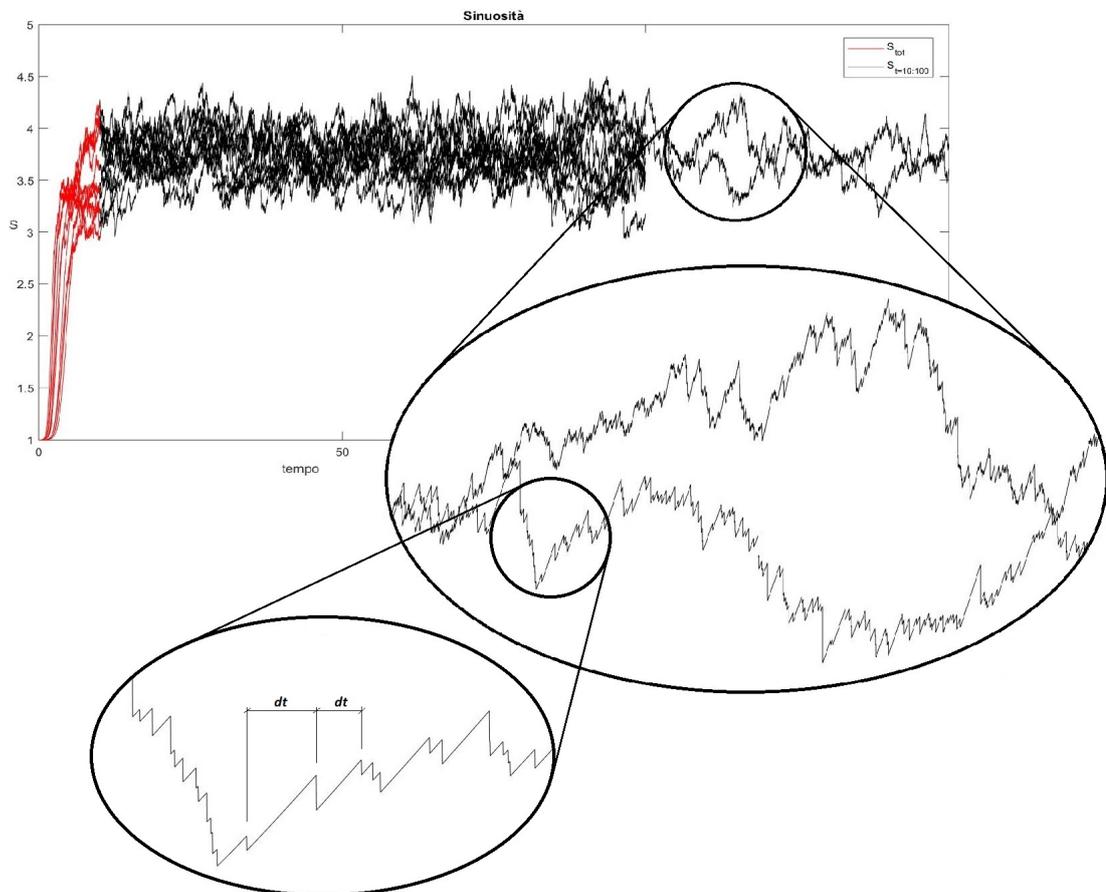


Figura 5.1. Andamento della Sinuosità S nel tempo per tutte le simulazioni e ingrandimento in corrispondenza di parte del tratto *steady-state*: sono ben evidenti le decrescite lineari che la S subisce durante gli intervalli dt di accadimento dei *cutoffs*.

Considerando dunque l'equazione stocastica additiva (v. eq. (4.11)) in grado di descrivere l'evoluzione della sinuosità sotto la forzante di uno *white shot noise* corrispondente al tasso di accadimento dei *cutoffs*, si ha:

$$\frac{dS}{dt} = \rho(S) - \eta_{sn}(t) \quad (5.2)$$

Si noti come a differenza dell'equazione (4.11), nel caso in esame il termine del rumore sia negativo.

Infatti in *Ridolfi et al. (2011)* [52], gli autori fanno riferimento al caso generale diametralmente opposto alla crescita della sinuosità interrotta dai *cutoffs*. Un esempio citato nello stesso libro [52], riguarda l'andamento di una sequenza di precipitazioni.

Tornando al processo stocastico in oggetto, nonostante tutti i vantaggi definiti precedentemente, prima di modellarlo direttamente sulla sinuosità è necessaria una breve discussione sui parametri che entrano in gioco.

Innanzitutto per caratterizzare il rumore η_{sn} si ha bisogno della lunghezza del fiume. Per lunghezze infinite, il tasso di accadimento dei *cutoffs* tenderebbe a zero, cioè l'effetto che loro hanno sulla caduta della sinuosità si ridurrebbe di molto fino ad annullarsi. Questo perché $\hat{\lambda} = 1/(dt \cdot L)$ (v. sezione 3.4).

Per lunghezze finite invece risulta più conveniente concentrarsi non sulla sinuosità, bensì sulla lunghezza curvilinea del fiume L . I due parametri sono comunque collegati tra loro mediante la relazione:

$$L = L_0 \cdot S, \quad (5.3)$$

avendo definito L_0 come lunghezza in linea d'aria tra i punti iniziale e finale del fiume.

Inoltre si ha che la lunghezza L del fiume tende a crescere continuamente, finché anche in questo caso non interviene un *cutoff* che ne interrompe l'andamento. Di conseguenza il numero di *cutoffs* che avvengono per unità di tempo, $\hat{\lambda}$, dipende intrinsecamente da L stessa: al crescere della lunghezza infatti, aumenta anche la probabilità di accadimento di un *cutoff*.

Infine, dall'elaborazione dei risultati ottenuti (v. Cap. 3), si ha che studiando il processo della sinuosità, $\alpha = \langle \Delta L \rangle$ dipenderebbe sia dalla lunghezza L che dal numero di Parker P , mentre considerando la modellazione per L , la dimensione media dei salti dipende a limite soltanto dal numero di Parker.

Quindi trovando più conveniente modellare in prima battuta un processo stocastico per L , per poi passare a quello per S attraverso la relazione fondamentale

descritta dall'equazione (5.3), a seguito delle considerazioni fatte si è ricercata la soluzione analitica di un processo del tipo *state-dependent*.

Infatti, utilizzando come parametro $\lambda = \hat{\lambda} \cdot L$, per cui dipendente dalla variabile di stato L , l'equazione stocastica di partenza diventa:

$$\frac{dL}{dt} = \rho(L) - \xi_{sn}(t), \quad (5.4)$$

in cui la funzione di crescita è stata considerata come una costante: $\rho(L) = \rho = \hat{\rho} \cdot L_0$, come definito nel Cap. 3.2, in particolare nell'equazione (3.4); inoltre il *noise* avrà una media negativa, pari cioè a $\langle \xi_{sn} \rangle = \hat{\lambda} \cdot (-\alpha)$

Dal momento che la distribuzione dei salti (cioè dei *cutoffs*) segue un andamento esponenziale (v. Fig. 3.11), è quindi possibile utilizzare la soluzione generale (4.19), che nel caso in esame diventa:

$$\begin{aligned} p(L) &= C \frac{1}{\rho} \exp \left[-\frac{L}{(-\alpha)} - \frac{1}{\rho} \int_L \lambda(L') dL' \right] \\ &= C \frac{1}{\rho} \exp \left[\frac{L}{\alpha} - \frac{\hat{\lambda}}{\rho} \int_L L' dL' \right] \end{aligned} \quad (5.5)$$

Volendo però ottenere un processo stocastico in termini di sinuosità S come variabile di stato, è stata effettuata una *derived distribution* del tipo:

$$p(L) \cdot dL = p(S) \cdot dS, \quad (5.6)$$

in cui sostituendo per $dS = \frac{dL}{L_0}$, secondo l'eq. (5.3), si ottiene la soluzione analitica finale:

$$\begin{aligned} p(S) &= p(L) \cdot \frac{dL}{dS} = p(L) \cdot L_0 \\ &= C \frac{1}{\rho} \exp \left[\frac{SL_0}{\alpha} - \frac{\hat{\lambda}}{\rho} \frac{S^2 L_0^2}{2} \right] \cdot L_0 \end{aligned} \quad (5.7)$$

La costante d'integrazione C si ottiene imponendo:

$$\int_{S=1}^{\infty} p(S) dS = 1 \quad (5.8)$$

e considerando $S = 1$ il minimo valore che la sinuosità può assumere.

Dalla condizione di normalizzazione (5.8), dopo alcuni passaggi si ottiene:

$$C = \frac{e^{-\frac{\rho}{2\alpha^2\hat{\lambda}}} L_0 \sqrt{\frac{2\hat{\lambda}}{\pi}} \rho}{\sqrt{\rho} - \sqrt{\rho} \cdot \text{Erf} \left[\frac{L_0 \alpha \hat{\lambda} + \rho}{\sqrt{2\alpha} \sqrt{\hat{\lambda}\rho}} \right]} \quad (5.9)$$

in cui la funzione Erf rappresenta la funzione degli errori di Gauss (intera), definita $\text{Erf}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x e^{-t^2} dt$ e valida per ogni numero reale x [1].

La soluzione analitica finale normalizzata risulterà quindi:

$$p(S) = \frac{e^{-\frac{(L_0 S \alpha \hat{\lambda} + \rho)^2}{2\alpha^2 \hat{\lambda} \rho}} L_0^2 \sqrt{\frac{2\hat{\lambda}}{\pi}}}{\sqrt{\rho} - \sqrt{\rho} \cdot \text{Erf} \left[\frac{L_0 \alpha \hat{\lambda} + \rho}{\sqrt{2\alpha} \sqrt{\hat{\lambda}\rho}} \right]} = k \cdot e^{-\frac{(L_0 S \alpha \hat{\lambda} + \rho)^2}{2\alpha^2 \hat{\lambda} \rho}} \quad (5.10)$$

avendo indicato $k = L_0^2 \sqrt{\frac{2\hat{\lambda}}{\pi}} / \left(\sqrt{\rho} - \sqrt{\rho} \cdot \text{Erf} \left[\frac{L_0 \alpha \hat{\lambda} + \rho}{\sqrt{2\alpha} \sqrt{\hat{\lambda}\rho}} \right] \right)$.

La media μ_S e la varianza σ_S^2 della *pdf* così ottenuta possono poi essere ricavate attraverso le seguenti espressioni:

$$\mu_S = \int_{S=1}^{\infty} p(S) \cdot S \, dS \quad (5.11)$$

$$\sigma_S^2 = \int_{S=1}^{\infty} p(S) \cdot (S - \mu_S)^2 \, dS \quad (5.12)$$

Tuttavia si è osservato che se si riscrive la (5.10) raccogliendo il termine $(L_0 \alpha \hat{\lambda})^2$, la $p(S)$ ha l'andamento di una distribuzione Gaussiana:

$$p(S) = k \cdot e^{-\left(S + \frac{\rho}{L_0 \alpha \hat{\lambda}}\right)^2 / \left[2 \frac{\alpha^2 \hat{\lambda} \rho}{(L_0 \alpha \hat{\lambda})^2}\right]} = k \cdot e^{-\frac{(S - \mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (5.13)$$

Di conseguenza la media e la deviazione standard sono facilmente calcolabili come:

$$\mu_S = -\frac{\rho}{L_0 \alpha \hat{\lambda}} = -\frac{\hat{\rho}}{\alpha \hat{\lambda}} \quad (5.14)$$

$$\sigma_S = \sqrt{\sigma_S^2} = \sqrt{\frac{\rho}{L_0^2 \hat{\lambda}}} = \sqrt{\frac{\hat{\rho}}{L_0 \hat{\lambda}}} \quad (5.15)$$

Inserendo le diverse condizioni per tutte le simulazioni effettuate (Tabella 5.1), si ottengono le $p(S)$ del processo stocastico in funzione del parametro di stato S , il cui andamento è mostrato in Figura 5.2.

Tabella 5.1. Valori dei parametri necessari per il calcolo della $p(S)$ del processo stocastico, per tutte le simulazioni: L_0 , α , $\hat{\lambda}$, ρ e $\hat{\rho}$.

Simulazione n°	L_0	α	$\hat{\lambda}$	ρ	$\hat{\rho}$
1	800	-32.3	0.0030	307.8	0.38
2	700	-33.1	0.0036	329.0	0.47
3	600	-32.6	0.0037	282.0	0.47
4	800	-31.0	0.0044	443.0	0.55
5	800	-30.0	0.0048	509.8	0.64
6	800	-33.1	0.0041	463.2	0.58
7	800	-31.1	0.0063	672.0	0.84
8	800	-30.5	0.0078	704.0	0.88
9	800	-30.8	0.0065	660.0	0.83
10	800	-30.7	0.0070	736.0	0.92
11	1000	-32.4	0.0031	476.3	0.48
12	1600	-30.6	0.0065	1298.9	0.81

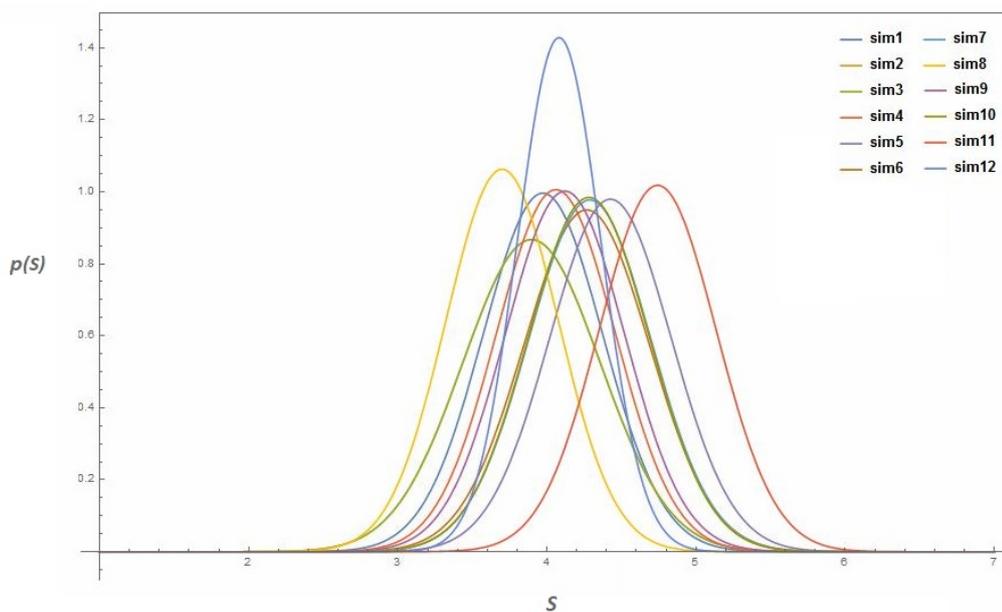


Figura 5.2. Andamento della funzione di distribuzione di probabilità $p(S)$ in funzione della sinuosità S , come risultato della modellazione stocastica. I diversi colori delle curve ben evidenziano che la differenza tra i parametri caratterizzanti le dodici simulazioni numeriche, influenza principalmente la posizione della curva gaussiana sul piano cartesiano: le curve cioè non hanno la stessa media.

5.1 Confronto tra modello numerico e modello stocastico

La previsione teorica fornita dal modello stocastico ha prodotto risultati in accordo con quelli ottenuti in seguito alle simulazioni numeriche.

Come prima cosa è evidente che anche l'andamento delle sinuosità per tutte le simulazioni, come illustrato nella sezione 3.2 (Fig. 3.7), segue il profilo di una Gaussiana. Nella Figura 5.3 sono infatti rappresentate le tipiche forme a campana delle distribuzioni Normali teoriche calcolate interpolando i dati derivanti dalle simulazioni numeriche.

Per ottenere tali curve si è utilizzato il fitting 'Normal' di MATLAB, in cui la distribuzione di Gauss è caratterizzata dalla funzione di densità di probabilità:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{con } x \in \mathbb{R}, \quad (5.16)$$

con μ valore atteso e σ^2 varianza [55].

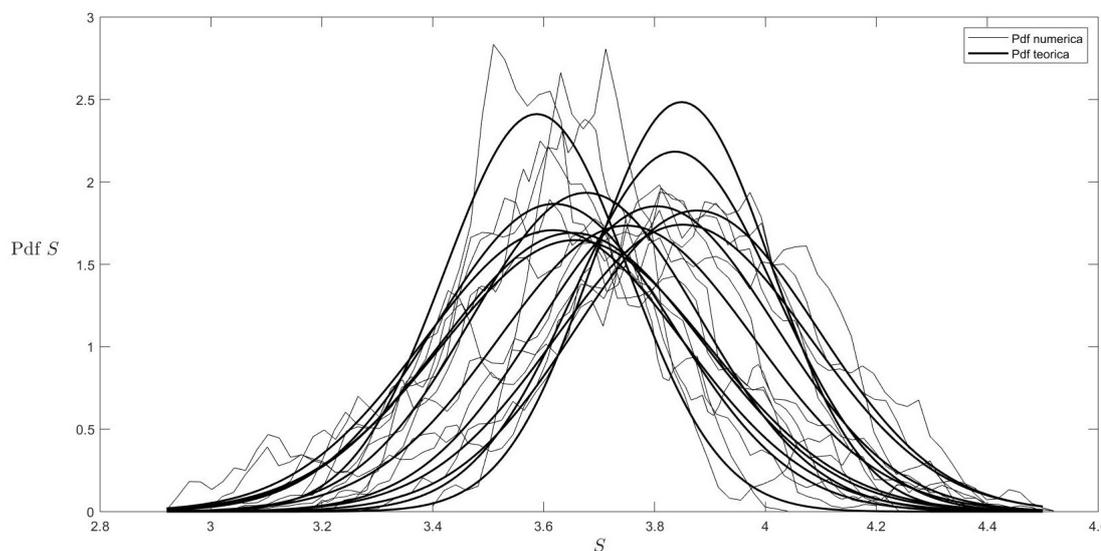


Figura 5.3. Andamento della funzione di distribuzione di probabilità (Pdf) per la Sinuosità S , come risultato della modellazione numerica (linea sottile). Le curve teoriche, rappresentate da un tratto nero più spesso, indicano le distribuzioni Normali che interpolano i dati provenienti da tutte le simulazioni effettuate.

Sia nella Figura 5.2 che nella 5.3 la *pdf* assume valori maggiori in corrispondenza delle simulazioni n° 8 e 12 (rispettivamente in giallo e in blu nella Fig. 5.2).

In particolare la simulazione n° 8 presenta il valore di $\hat{\lambda}$ maggiore rispetto a tutti gli altri: ciò significa che la frequenza di accadimento dei *cutoffs* è più alta, con conseguente caduta della sinuosità. Questo aspetto è particolarmente evidente nella posizione che la curva gialla assume nella Figura 5.2: il valore medio assunto dalla $p(S)$ si colloca più a sinistra nel piano cartesiano.

La simulazione n° 12 è invece caratterizzata dalla minore deviazione standard – e quindi minor varianza – rispetto a tutti gli altri casi esaminati. Ciò accade perché il parametro di lunghezza $L_0 = 1600$ è il più elevato: in presenza di un fiume più corto infatti, la variazione spaziale della sinuosità influisce maggiormente sulle statistiche di lungo termine, viceversa all’aumentare della lunghezza iniziale il fiume è libero di spaziare nel tempo risentendo meno degli effetti della diminuzione della sinuosità.

Andando a confrontare i valori di sinuosità media e varianza ottenuti dalle simulazioni numeriche e dal modello stocastico, si evince che la previsione teorica fornita da quest’ultimo si discosta di poco rispetto ai dati reali (v. Tabella 5.2).

Tabella 5.2. Confronto dei risultati tra modello numerico e modello stocastico in termini di Sinuosità media \bar{S} e relativa deviazione standard σ_S .

Simulazione n°	NUMERICO		STOCASTICO	
	\bar{S}	σ_S	\bar{S}	σ_S
1	3.85	0.214	3.93	0.398
2	3.85	0.236	3.91	0.430
3	3.85	0.234	3.88	0.459
4	3.66	0.242	4.07	0.397
5	3.59	0.165	4.45	0.408
6	3.87	0.193	4.24	0.419
7	3.85	0.229	4.28	0.408
8	3.80	0.215	3.68	0.374
9	3.75	0.230	4.13	0.399
10	3.88	0.218	4.26	0.404
11	3.68	0.206	4.80	0.394
12	3.85	0.161	4.08	0.279

La previsione teorica del modello stocastico fornisce dei valori di \bar{S} maggiori di quelli derivanti dalle simulazioni numeriche del 9.5% in media e valori di σ_S mediamente minori di circa il 46%. Sebbene infatti la distribuzione dei salti o *cutoffs* sia esponenziale con tasso $\hat{\lambda}$, il processo stocastico è stato modellato con altri due parametri, α e $\hat{\rho}$ che possono rappresentare elementi di errore.

La principale fonte di errore sta nell'aver considerato un valore di $\hat{\rho} = \frac{1}{L_0} \frac{dL}{dt}$ costante. Richiamando infatti la Figura 3.8, è evidente come tale parametro, nonostante si attesti attorno al valor medio considerato nell'analisi stocastica, nella realtà presenti comunque una certa variabilità in funzione di S .

Tali differenze in termini di media e varianza sono osservabili anche nelle Figure 5.4 e 5.5, in cui si riporta il confronto tra le $p(S)$ numeriche e quelle teoriche della modellazione stocastica rispettivamente per le simulazioni n° 1-6 e n° 7-12, divise in due grafici per una migliore visibilità.

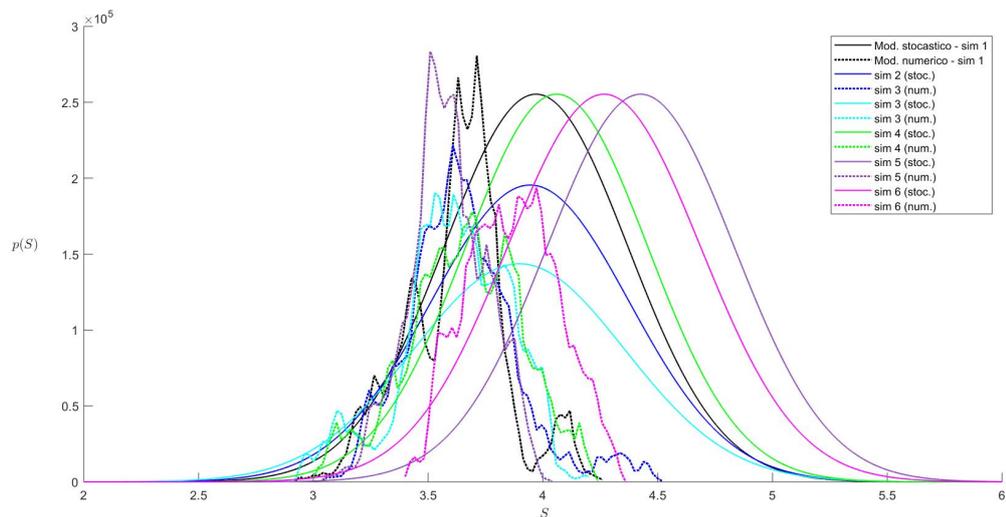


Figura 5.4. Andamento delle $p(S)$ derivanti dalla modellazione numerica (linea puntinata) e dalla modellazione stocastica (tratto continuo) per le simulazioni n° 1-6.

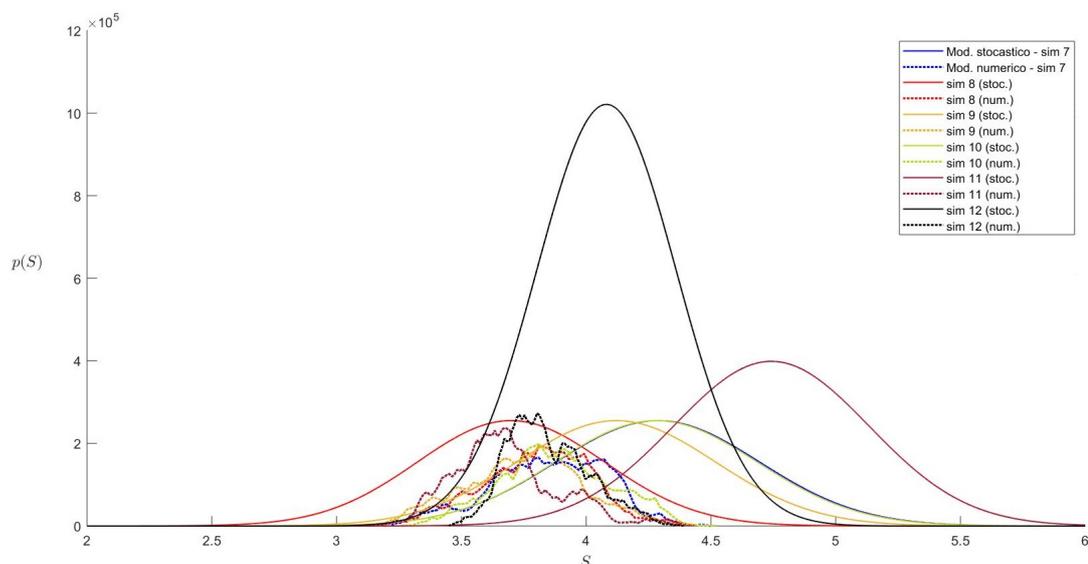


Figura 5.5. Andamento delle $p(S)$ derivanti dalla modellazione numerica (linea puntinata) e dalla modellazione stocastica (tratto continuo) per le simulazioni n° 7-12.

5.2 Adattamento del modello stocastico ai risultati numerici

Al fine di ottenere un modello stocastico in grado di fornire risultati in termini di sinuosità media \bar{S} e relativa varianza σ_S uguali a quelli ottenuti dalla modellazione numerica, in seguito alle considerazioni espone nel paragrafo precedente si è scelto di modificare il parametro $\hat{\rho}$.

Per fare ciò è stata implementata un'analisi di simulazione su EXCEL: in particolare facendo variare $\hat{\rho}$ all'interno dell'espressione:

$$\bar{S} = -\frac{\hat{\rho}}{\alpha\hat{\lambda}}, \quad (5.17)$$

si è imposta la seguente condizione per ogni simulazione:

$$\bar{S}_{\text{NUMERICA}} = \bar{S}_{\text{STOCASTICA}} \quad (5.18)$$

I risultati ottenuti (v. Tabella 5.3) dimostrano che il parametro che maggiormente

influenza la posizione delle gaussiane nel piano cartesiano – quindi la sinuosità media \bar{S} – è $\hat{\rho}$: tali valori, adattati per far coincidere le medie dei processi numerico e stocastico, si discostano infatti solo dell'8% dai valori di partenza.

Tuttavia adattare $\hat{\rho}$ non è sufficiente per ottenere una significativa variazione anche della varianza σ_S .

Per eventuali sviluppi futuri sarà quindi necessaria una modellazione della parte deterministica dell'equazione stocastica tale da essere dipendente dal parametro di stato in esame, cioè $\hat{\rho} = \hat{\rho}(S)$ e non più una costante.

Tabella 5.3. Confronto dei risultati tra modello stocastico prima e dopo l'adattamento ai risultati reali: dopo aver imposto che la Sinuosità media \bar{S} del modello numerico fosse uguale a quella del modello stocastico, sono stati calcolati i nuovi parametri $\hat{\rho}$ e σ_S .

Simulazione n°	\bar{S}	Mod. Stoc. <i>iniziale</i>		Mod. Stoc. <i>adattato</i>	
		$\hat{\rho}$	σ_S	$\hat{\rho}$	σ_S
1	3.85	0.385	0.398	0.377	0.394
2	3.85	0.470	0.430	0.463	0.427
3	3.85	0.470	0.459	0.466	0.457
4	3.66	0.554	0.397	0.499	0.377
5	3.59	0.637	0.408	0.515	0.367
6	3.87	0.579	0.419	0.529	0.400
7	3.85	0.840	0.408	0.755	0.387
8	3.80	0.880	0.374	0.910	0.381
9	3.75	0.825	0.399	0.750	0.380
10	3.88	0.920	0.404	0.838	0.386
11	3.68	0.476	0.394	0.365	0.345
12	3.85	0.812	0.279	0.767	0.271

Parte III

Sviluppi futuri

Capitolo 6

Test di un modello bio-morfodinamico

Oltre alla migrazione laterale dei meandri come risultato della forzante imposta dalla curvatura, la comunità scientifica (es. *Corenblit et al.(2009)* [11]) riconosce ormai come i fiumi meandriiformi siano interessati anche da una migrazione dovuta all'interazione reciproca che esiste tra il flusso d'acqua, i sedimenti e la vegetazione fluviale presente sulle sponde.

In particolare la vegetazione guida l'evoluzione delle sponde attraverso la selezione della larghezza di equilibrio del fiume.

Inoltre, come riportato da *Friedman et al.(1996)* [24], la vegetazione che cresce nell'intervallo di tempo compreso tra due eventi di piena, è in grado di stabilizzare i sedimenti, favorendo così la migrazione laterale della sponda esterna ed il restringimento del canale. In questo modo viene incrementata l'erosione alla sponda esterna, provocando ciò che in letteratura viene definito *bar push*. Il nuovo allargamento della sezione permetterà poi l'esposizione di altri sedimenti, portando al fenomeno chiamato *bank pull*.

In passato *Perucca et al.(2006), (2007)* [48], [49] nel loro studio hanno inserito le dinamiche della vegetazione utilizzando i campi di moto provenienti da modelli morfodinamici semplificati (es. *Ikeda et al.(1981)* [31], *Seminara (2006)* [58]).

Inoltre, in modelli sviluppati da *Parker et al.(2011)* [44], *Eke et al.(2014)* [18] ad esempio, lo studio dello squilibrio tra i tassi di avanzamento e di ritiro delle sponde ha permesso di esplorare l'effetto delle variazioni temporali della larghezza del canale.

Seguendo questi approcci innovativi, il modello bio-morfodinamico sviluppato da *Zen et al.(2016)* [69] introduce relazioni di chiusura separate per la migrazione delle sponde che avanzano e retrocedono.

Tale modello è stato adattato per aggiungere la componente bio-morfodinamica al modello numerico studiato nella presente tesi, ai fini di testare gli effetti dell'evoluzione a breve termine in presenza di sponde vegetate.

Il codice è stato così implementato in MATLAB, ottenendo infine un modello il cui funzionamento è elencato negli step seguenti.

- (1) La configurazione iniziale scelta è un breve tratto della planimetria ottenuta dalla simulazione n° 3, di parametri idraulici $\tau_0 = 0.3$, $d_0 = 0.003$, $I_0 = 0.0015$, $\beta_0 = 16.1$, $d_{50} = 0.003 \text{ m}$, $C_f = 0.0035$, $E_0 = 10^{-7}$, $Q = 27.5 \text{ m}^3/\text{s}$ e semi larghezza $\frac{B}{2} = 16 \text{ m}$, evoluta fino a qualche istante precedente al primo *cutoff* (v. Figura 6.1).

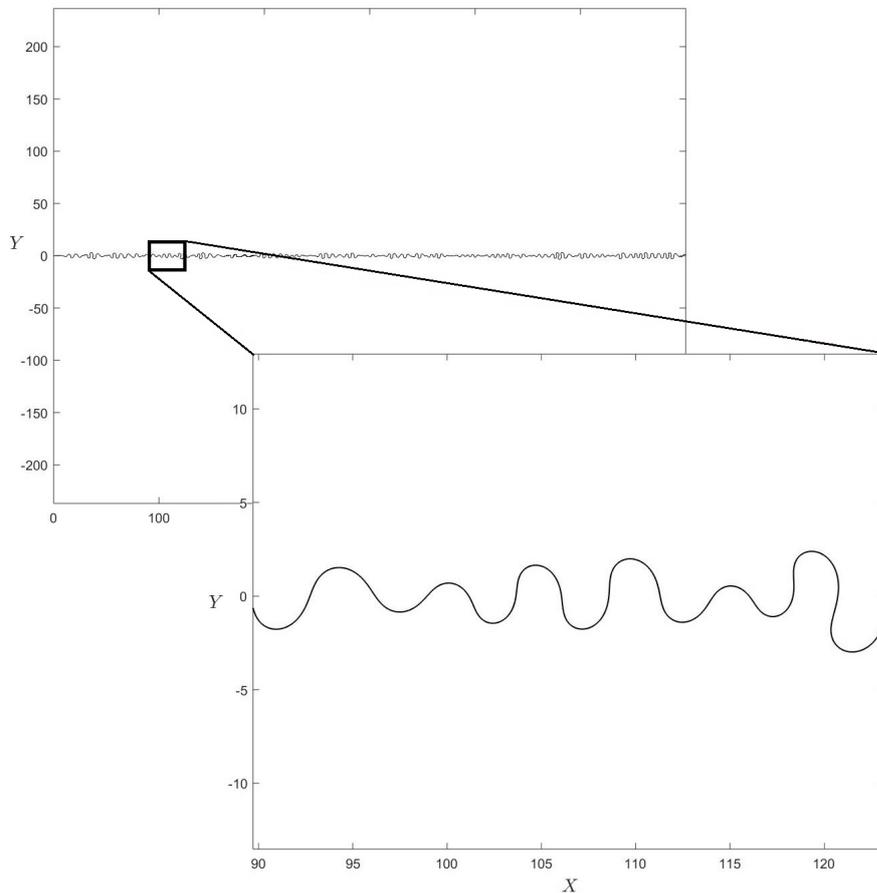


Figura 6.1. Tratto di planimetria scelto per testare il modello bio-morfodinamico ottenuto dalla sim. n° 3, precedente al primo *cutoff*.

- (2) Nonostante il modello richiedesse un idrogramma variabile nel tempo, le cui oscillazioni di portata determinano la crescita della vegetazione nell'intervallo che intercorre tra due eventi di piena consecutivi, il test è stato effettuato nel caso più semplice di portata costante.

Per questo motivo non si è osservata alcuna crescita di biomassa lungo la sponda interna, che avrebbe permesso la stabilizzazione dei sedimenti fluviali nelle zone di deposito (intradosso) e la conseguente determinazione della larghezza del canale in corrispondenza della "sezione attiva", cioè della porzione di canale interessata dai processi morfodinamici [69].

- (3) Il ciclo temporale avrà una durata totale inferiore rispetto a quella del modello studiato nella Parte I, poiché le dinamiche della vegetazione risultano visibili anche su scale di breve termine.

In particolare il tempo scelto per testare il modello è $t = 5 [-]$, suddiviso in $\Delta t = t/1000 = 0.005 [-]$.

Anche in questo caso tutte le grandezze in gioco sono state rese adimensionali mediante le scale fondamentali calcolate attraverso le equazioni (2.31) e (2.32).

Con i parametri di input definiti al punto (1) si ottiene:

$$D_0 = \frac{H_0}{2C_f} \simeq 94 \text{ m} \quad (6.1)$$

$$T_0 = \frac{D_0^2}{(B/2)E_0U_0} \simeq 6 \cdot 10^9 \text{ s} \quad (6.2)$$

Si osservi che avendo selezionato una planimetria già evoluta secondo il modello IPS (cfr. Parte I), il tirante H_0 e la velocità U_0 sono stati calcolati considerando la portata di *bankfull* $Q = 27.5 \text{ m}^3/\text{s}$.

- (4) L'algoritmo procede esattamente come già descritto nel paragrafo 2.3, fino ad arrivare al calcolo del campo di moto: qui è stato introdotto il modello bio-morfodinamico [69] adattato al caso in esame, di cui si descrivono di seguito i passaggi fondamentali.

- I. Per ogni punto che descrive l'asse del fiume, al primo istante $t_{(i=1)}$ viene assegnata una sezione rettangolare di riferimento, a cui corrisponde una larghezza iniziale pari a $B = 16 \text{ m}$.
- II. Assegnati i parametri idrodinamici, attraverso il modello sviluppato da *Seminara e Solari (1998)* [60], che ha come input la larghezza B del punto I e la curvatura C nello stesso istante temporale, si ottengono: la geometria del fondo ed il campo di moto locale.
- III. La velocità trovata al punto II viene utilizzata per calcolare la migrazione della sponda esterna, che a sua volta determina un allargamento della

sezione rispetto alla larghezza iniziale. Sulla base del nuovo tirante si effettua poi un controllo per verificare la nuova larghezza attiva, cioè dove la tensione supera la tensione critica, fissata a $\tau_c = 0.03$.

- IV. Fornendo come input la nuova larghezza B' al modello di *Seminara e Solari (1998)* – d'ora in avanti indicato brevemente con S&S – si ottiene la nuova geometria del fondo, calcolata in questo passaggio tenendo in considerazione l'allargamento della sezione dovuto all'erosione.
- V. Il fondo così ottenuto, avente geometria non lineare, permette di determinare l'effettiva larghezza attiva B'' di ogni sezione. Ora, partendo da B'' e C , si utilizza il modello di *Frascati e Lanzoni (2013)* [22] per calcolare il campo di moto completo (3D).
- VI. A questo punto la velocità di output ottenuta dal punto V è impiegata per far migrare l'asse del canale, con la stessa legge utilizzata per la migrazione della sponda esterna nel modello sulla sezione S&S (punto III), ma utilizzando il campo di moto completo che prevede l'integrale di convoluzione.
- VII. Alla fine del primo Δt la planimetria del fiume risulterà dunque evoluta rispetto a quella iniziale e ad ogni sezione sarà associata una larghezza B'' .
- VIII. Infine il primo istante temporale si conclude calcolando la nuova curvatura C per ogni punto dell'asse del canale. Viene inoltre verificato che non sia avvenuto alcun *cutoff*: il modello è stato infatti testato per un'evoluzione a breve termine, lasciando la possibilità a sviluppi futuri di includere tali dinamiche.
- IX. L'iterazione procede per $t_{(i+1)} = t_{(i)} + \Delta t$: il codice numerico riparte dal punto II, considerando come sezione iniziale di ogni punto quella trovata nel passo VII all'istante $t_{(i)}$.

In questa tesi il codice appena descritto è stato testato numericamente, ponendo le basi per interessanti sviluppi futuri.

Dopo alcuni istanti temporali di simulazione, è possibile osservare la migrazione della planimetria rispetto alla sua configurazione iniziale, come riportato in Figura 6.2.

Nonostante siano state analizzate le variazioni di larghezza soltanto di due meandri centrali del tratto planimetrico considerato (Figura 6.3), l'evoluzione interessa tutti i punti dell'asse del canale, in quanto anche il modello originario – sviluppato nella Parte I del lavoro – prevedeva un tasso di erosione alla sponda.

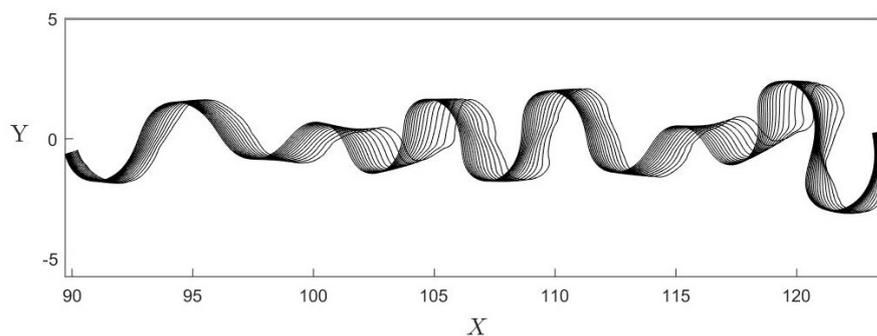


Figura 6.2. Evoluzione della planimetria dopo alcuni istanti temporali di simulazione, per testare il modello bio-morfodinamico.

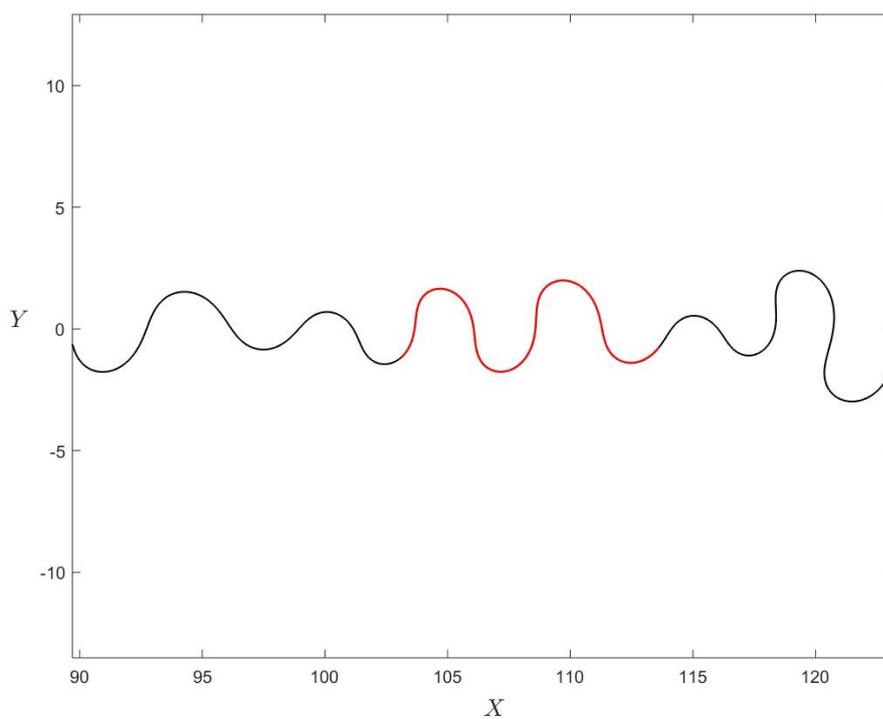


Figura 6.3. Meandri considerati per testare il modello bio-morfodinamico: il tratto evidenziato in rosso include 200 sezioni.

Sovrapponendo le variazioni di larghezza, associate alle 200 sezioni studiate, al grafico dell'andamento della curvatura C in funzione della coordinata curvilinea s , si può osservare che il canale ha subito un allargamento maggiore in corrispondenza dei valori più elevati della curvatura.

Questo risultato presenta tuttavia delle modeste variazioni di B , dovute a due fattori: come prima cosa, quanto illustrato in Figura 6.4 fa riferimento ad una breve simulazione lanciata col solo fine di testare il modello; inoltre si ricorda che il tutto è stato sviluppato nel caso più semplice di portata costante, pertanto si potranno ottenere dei cambiamenti significativi di larghezza in presenza di una portata variabile nel tempo, in grado di evidenziare l'importante ruolo svolto dalla vegetazione.

La Figura 6.4 evidenzia anche che nonostante il filtro Savitzky-Golay permetta di evitare problemi numerici nel calcolo delle derivate [22], le estremità della planimetria presentano comunque forti discontinuità di C . E' anche per questo motivo che il test del modello è stato effettuato nei due meandri che, essendo centrali, non risentono delle brusche variazioni della curvatura.

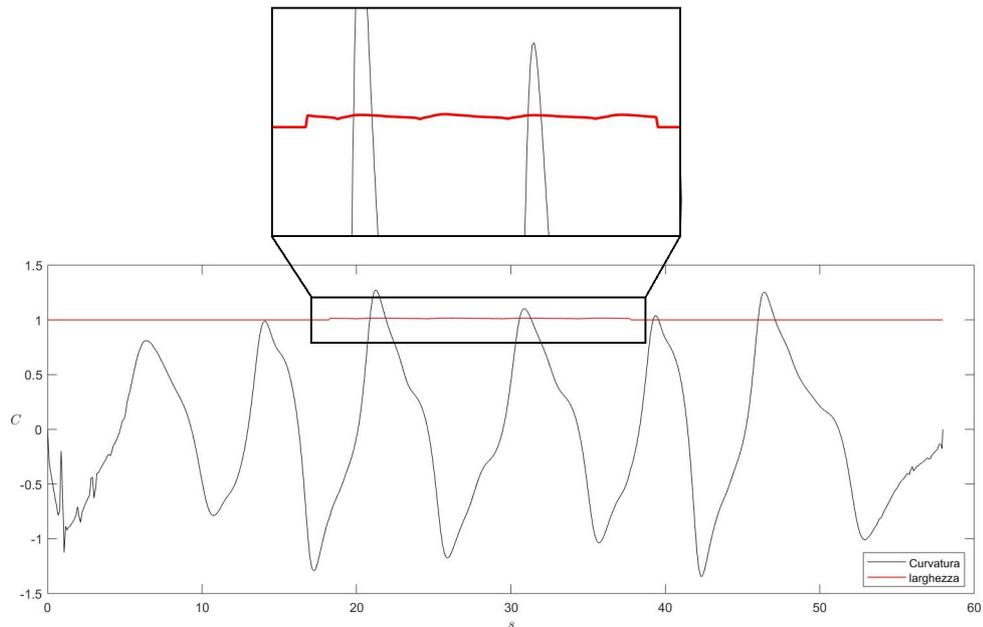


Figura 6.4. Andamento della curvatura C in funzione della coordinata curvilinea s ; la linea rossa rappresenta l'andamento della larghezza B associata ad ogni sezione sui due meandri studiati.

Per una migliore leggibilità del grafico la B è stata normalizzata alla larghezza iniziale, così da evidenziarne le variazioni nell'intorno dell'unità. Le discontinuità presenti all'inizio e alla fine del tratto evidenziato in rosso nell'ingrandimento, derivano dalla scelta di aver considerato nel test soltanto i due meandri centrali e non tutta la planimetria.

La Figura 6.5 mostra invece la rappresentazione di tre sezioni trasversali significative, in cui è evidente la geometria non lineare del fondo che il modello è in grado di fornire.

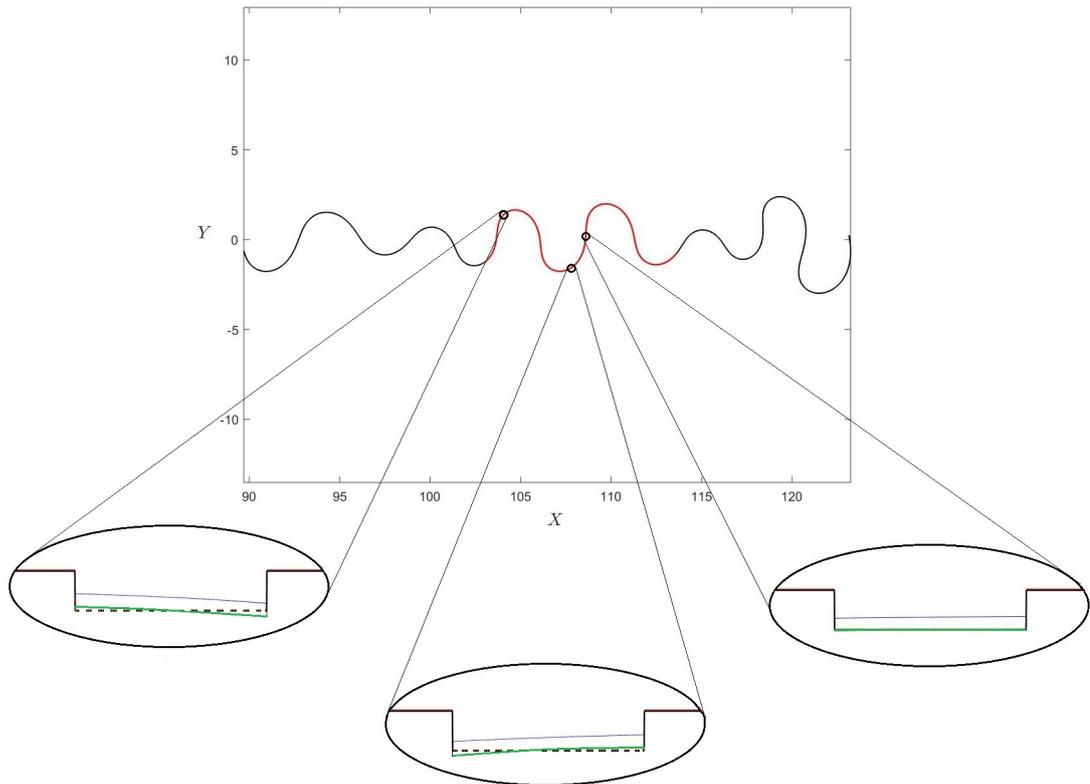


Figura 6.5. Rappresentazione del fondo per tre sezioni trasversali significative (in verde). Da sinistra verso destra: curvatura $C > 0$, $C < 0$ e punto di flesso in cui $C = 0$ e conseguente appiattimento del fondo. La linea tratteggiata nera negli ingrandimenti sinistro e centrale indica la sezione rettangolare prima del calcolo della nuova geometria.

Infine nella Figura 6.6 il grafico bidimensionale fornisce una correlazione immediata tra l'evoluzione della planimetria e l'andamento dell'elevazione del fondo. Osservando l'andamento generale dei meandri nel grafico 2D si riconosce una condizione di sub-risonanza [70]: nonostante i meandri mostrino una debole tendenza verso monte, la migrazione in direzione di valle è dominante.

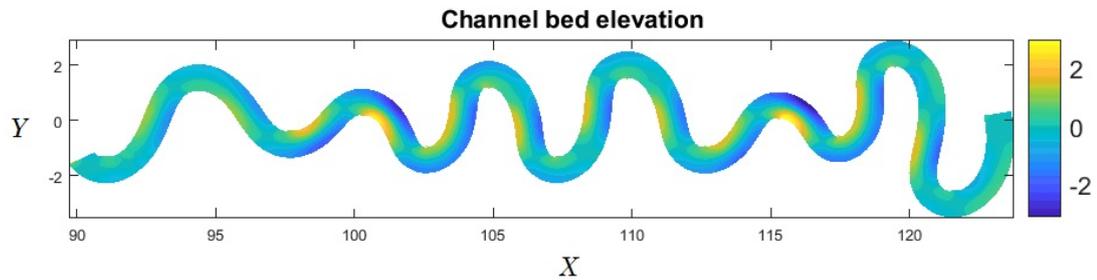


Figura 6.6. Rappresentazione bidimensionale dell'elevazione del fondo del canale: il colore giallo indica una quota del letto maggiore, cioè un maggior deposito; viceversa per quanto riguarda il colore blu.

6.1 Limiti del modello

Il modello numerico in esame rappresenta senza dubbio un'interessante novità per ricerche future, dal momento che l'interazione tra la vegetazione ed i processi morfodinamici risulta una questione finora poco compresa dalla comunità scientifica. Tuttavia al fine di ottenere risultati fisicamente basati e quanto più realistici possibile, potrebbe essere necessario apportare delle modifiche alla sua struttura.

Per esempio il campo di moto calcolato inizialmente mediante il modello di *Seminara e Solari (1998)* ipotizza che l'asse del canale sia un'elica circolare caratterizzata da un valore costante del raggio di curvatura [60].

In aggiunta si ricorda che la planimetria iniziale scelta, cioè quella proveniente dalla simulazione n° 3 analizzata nella Parte I di questo lavoro, rappresenta una configurazione evoluta con il modello IPS. Il campo di moto così calcolato era dunque riferito ad una sezione trapezoidale, mentre al primo istante temporale i punti del canale vengono associati ad una geometria rettangolare.

Un altro aspetto da valutare attentamente sta nel fatto che il modello di S&S non include l'integrale di convoluzione nel calcolo del campo di moto: utilizzare quindi questa velocità per la migrazione iniziale della sponda esterna potrebbe risultare una semplificazione eccessiva.

Un'idea per superare tali limiti concettuali potrebbe essere quella di utilizzare fin dal passo iniziale il modello di *Frascati e Lanzoni (2013)* per spostare la sponda esterna; successivamente impiegare *Seminara e Solari (1998)* soltanto per calcolare la geometria del nuovo fondo. La sponda interna verrebbe infine spostata per effetto della vegetazione in presenza di portate variabili.

Conclusioni

Le simulazioni numeriche effettuate nella Parte I del presente lavoro e basate sul modello sviluppato da Ikeda, Parker e Sawai nel 1981, hanno permesso di ottenere interessanti risultati sul ruolo svolto dai *cutoffs* nelle dinamiche di lungo termine dei fiumi meandriformi.

Per ottenere dei parametri morfodinamici fisicamente basati da inserire come input nel codice numerico, sono state impiegate alcune relazioni empiriche presenti in letteratura; inoltre tutte le grandezze in gioco sono state adimensionalizzate attraverso le due scale fondamentali, spaziale D_0 e temporale T_0 .

Ciò ha permesso di ottenere risultati adimensionali, utili per futuri confronti con dati provenienti da fiumi reali.

Dall'analisi dell'andamento della sinuosità S nel tempo è emerso che tutte le simulazioni raggiungono una condizione di stazionarietà nel lungo termine, effetto evidenziato trascurando nell'analisi la parte di transitorio iniziale. Durante l'evoluzione temporale, la sinuosità cresce fino all'arrivo del primo *cutoff*, che ne provoca una decrescita lineare, per poi risalire fin all'arrivo dell'evento successivo.

Un altro risultato interessante riguarda proprio gli intervalli temporali tra *cutoffs*: le statistiche ottenute da tutte le simulazioni evidenziano che essi sono distribuiti secondo un esponenziale decrescente. Ricercando poi una relazione tra la frequenza di accadimento degli eventi, definita come il reciproco degli intertempi, ed il numero di Parker, si è scoperto che queste due variabili sono linearmente dipendenti l'una dall'altra e in particolare al crescere di P aumenta il tasso di accadimento dei *cutoffs*.

Inoltre lo studio della lunghezza curvilinea dei tratti di fiume tagliati dimostra che l'entità del taglio è tanto più grande al diminuire della probabilità che esso avvenga.

Successivamente, l'analisi dei tassi di perdita di area per unità di tempo, ha fornito dati utili ai fini di ricerche future in termini di *carbon sequestration*.

Dopo aver analizzato anche la distribuzione di probabilità della cosiddetta *meander belt*, è stato poi possibile correlare la larghezza raggiunta dai fiumi simulati con il numero di Parker.

Lo studio delle distribuzioni di probabilità delle variabili di stato sinuosità S e lunghezza curvilinea L ha rappresentato il punto di partenza per ottenere, nella Parte II, la modellazione stocastica dell'evoluzione a lungo termine dei fiumi meandriiformi, sotto l'effetto di un *white shot noise* rappresentante la perdita della sinuosità dovuta ai *cutoffs*.

In particolare, mediante una *derived distribution* si è passati dalla soluzione dell'equazione stocastica per L a quella per S .

Confrontando la soluzione così ottenuta con il modello numerico, ne sono derivati risultati concordanti.

Tuttavia una modellazione più accurata, che consideri il termine deterministico dell'equazione dS/dt dipendente dalla variabile di stato, permetterebbe di ottenere una sovrapposizione ancora più esatta tra i due modelli.

Infine nella Parte III della tesi si è testato un codice numerico in grado di aggiungere la componente bio-morfodinamica al modello numerico iniziale. La simulazione ha fornito risultati interessanti in termini di variazioni di larghezza in ogni sezione, tuttavia rappresenta soltanto un punto di partenza innovativo per lo studio dell'interazione tra vegetazione e processi morfodinamici.

Bibliografia

- [1] M. Abramowitz, I.A. Stegun (1972), *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Dover, Ch. 7.
- [2] J.R.L. Allen (1984), *Sedimentary Structures: Their Character and Physical Basis*, Elsevier, New York.
- [3] S. Beck, D.A. Melfi, and K. Yalamanchili (1984), Lateral migration of the Genesee River, New York, in *River Meandering*, edited by C.M. Elliott, pp. 510-517, Am. Soc. of Civ. Eng., Reston, Va.
- [4] C.M. Bender, and S.A. Orszag (1999), Ordinary Differential Equations, p. 14. In: *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers I*. Springer, New York, NY
- [5] P. Blondeaux, and G. Seminara (1985), A unified bar-bend theory of river meanders, *J. Fluid Mech.*, *157*, 449-470.
- [6] L. Boltzmann, *Vorlesungen über Gastheorie*, 2 vols. Leipzig: Barth, 1896, 1898. This book has been translated into English by S.G. Brush, *Lectures on Gas Theory*, (Cambridge University Press, London, 1964, reprinted Dover, 1995).
- [7] D.I. Bray (1975), Representative discharges for gravel-bed rivers in Alberta, Canada, *Journal of Hydrology*, *27*, 143-153.
- [8] R.C. Brower, D.A. Kessler, J. Koplik, and H. Levine (1984), Geometrical models of interface evolution, *Phys. Rev. A*, *29* 1335-1342.
- [9] C. Camporeale, P. Perona, A. Porporato, and L. Ridolfi (2007), Hierarchy of models for meandering rivers and related morphodynamic processes, *Reviews of Geophysics*, *45*, RG1001, doi:10.1029/2005RG000185.
- [10] C. Camporeale, P. Perona, A. Porporato, and L. Ridolfi (2005), On the long-term behavior of meandering rivers, *Water Resources Research*, *41*, W12403, doi:10.1029/2005WR004109.
- [11] D. Corenblit, J. Steiger, A.M. Gurnell, R. Naiman (2009), Plants intertwine fluvial landform dynamics with ecological succession and natural selection: a niche construction perspective for riparian systems, *Global Ecol. Biogeogr.*, *18*(4):507-20, doi: <http://dx.doi.org/10.1111/j.1466-8238.2009.00461.x>.
- [12] D.R. Cox, and H.D. Miller (1965), *The theory of stochastic processes*, Methuen, London.

-
- [13] M.C. Cross, and P.C. Høhemberg (1993), Pattern formation outside of equilibrium, *Rev. Mod. Phys.*, 65(3):851-1112.
- [14] M. De Vries (1965), Considerations about non-steady bed-load transport in open channels, paper presented at 11th Congress, Int. Assoc. for Hydraul. Res., Leningrad, Russia.
- [15] R.B. Dean (1974), Reynolds number dependence on skin friction in two dimensional rectangular duct flow and a discussion on the 'law of the wake', *Aero. Rep. 74-11*, Imperial Coll., London.
- [16] M. Do Carmo (1976), *Differential Geometry of Curves and Surface*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, N. J.
- [17] B.F. Edwards, and D.H. Smith (2002), River meandering dynamics, *Physical Review E.*, 65, 046303, doi:10.1103/PhysRevE.65.046303.
- [18] E. Eke, G. Parker, and Y. Shimizu (2014), Numerical modeling of erosional and depositional bank processes in migrating river bends with self-formed width: Morphodynamics of bar push and bank pull, *J. Geophys. Res. Earth Surf.*, 119, 1455-1483, doi: 10.1002/2013JF003020.
- [19] C.M. Elliott (Ed.) (1984), *River Meandering*, American Society of Civil Engineers, Reston, Va.
- [20] F. Engelund (1974), Flow and topography in channel bends, *J. Hydraul. Eng. Div. Am. Soc. Civ. Eng.*, 11 1631-1648.
- [21] L. Fabbri, *Statistica multivariata (analisi esplorativa dei dati)*, 1997, McGrawHill, ISBN 88-386-0765-6.
- [22] A. Frascati, and S. Lanzoni (2013), A mathematical model for meandering rivers with varying width, *J. Geophys. Res. Earth Surf.*, 118, 1641-1657, doi:10.1002/jgrf.20084.
- [23] J.F. Friedkin (1945), A laboratory study of the meandering of alluvial rivers, report, Miss. River Comm., U.S. Army Corps of Eng., Vicksburg, Miss.
- [24] J.M. Friedman, W.R. Osterkamp, W.M. Lewis Jr. (1996), The role of vegetation and bed-level fluctuations in the process of channel narrowing, *Geomorphology*, 14, 341-351, doi: [https://doi.org/10.1016/0169-555X\(95\)00047-9](https://doi.org/10.1016/0169-555X(95)00047-9).
- [25] S. Goldstein, and J.L. Lebowitz (2004), On the (Boltzmann) Entropy of non-equilibrium Systems, *Physica D-Nonlinear phenomena*, 193, 53-66, doi:10.1016/j.physd.2004.01.008.
- [26] F.M. Henderson, *Open Channel Flow* (1966), MacMillan, New York, Ch. 7.
- [27] W. Horsthemke, and R. Lefever (1984), *Noise-Induced Transitions: Theory and Applications in Physics, Chemistry and Biology*, Springer, Berlin, 322 pp.
- [28] A.D. Howard (1992), Modeling channel migration and floodplain sedimentation in meandering streams, in *Lowland Floodplain Rivers: Geomorphological Perspectives*, edited by P.A. Carling and G.E. Petts, pp. 1-41, John Wiley, Hoboken, N. J.

- [29] A.D. Howard (1984), Simulation model of meandering, in *River Meandering*, edited by C.M. Elliott, pp. 952-963, Am. Soc. of Civ. Eng., Reston, Va.
- [30] S. Ikeda, and G. Parker (Eds.) (1989), River Meandering, *Water Resources Monograph*, 12, AGU, Washington, D. C.
- [31] S.G. Ikeda, G. Parker, and K. Sawai (1981), Bend theory of river meanders: 1. Linear development, *J. Fluid Mech.*, 112, 363-377.
- [32] P. Jansen, L. Van Bendegom, J. Van De Berg, M. de Vries, and A. Zanen (1979), Principles of River Engineering: The Non-Tidal Alluvial River, Pitman, London.
- [33] H. Johannesson, and G. Parker (1989a), Linear theory of river meanders, in *River Meandering, Water Resour. Monogr.*, vol. 12, edited by S. Ikeda and G. Parker, pp. 181-214, AGU, Washington, D. C.
- [34] H. Johannesson, and G. Parker (1989b), Velocity redistribution in meandering rivers, *J. Hydraul. Eng.*, 115, 1019-1037.
- [35] R. Kinoshita (1961), Investigation of channel deformation in Ishikari River, *Tech. Rep.*, 13, 174 pp., Dep. Sci. and Tech., Bur. of Resour., Tokyo, Japan.
- [36] J-S. Lee, and P.Y. Julien (2006), Downstream hydraulic geometry of alluvial channels, *Journal of Hydraulic Engineering*, 132(12), doi:10.1061/(ASCE)0733-9429(2006)132:12(1347).
- [37] L.B. Leopold, and M.G. Wolman (1960), River meanders, *Bull. Geol. Soc. Am.*, 71, 769-794.
- [38] J.A. Liggett (1994), *Fluid Mechanics*, McGraw-Hill, New York.
- [39] K. Nakayama, H. Segur, and M. Wadati (1992), Integrability and the motion of curves, *Phys. Rev. Lett.*, 69(18), 2603-2606.
- [40] A.J. Odgaard (1986), Meander flow model. I: Development, *J. Hydraul. Eng.*, 112, 1117-1136.
- [41] G. Parker (2004), *1D Sediment transport morphodynamics with applications to rivers and turbidity currents*, Ch. 3. <http://www.iahrmedialibrary.net/1d-sediment-transport-morphodynamics-with-applications-to-rivers-and-turbidity-currents/>.
- [42] G. Parker, and E.D. Andrews (1986), On the time development of meanders bends, *J. Fluid Mech.*, 162, 139-156.
- [43] G. Parker, P. Diplas, and J. Akiyama (1983), Meander bends of high amplitude, *J. Hydraul. Eng.*, 109, 1323-1337.
- [44] G. Parker, Y. Shimizu, G.V. Wilkerson, E.C. Eke, J.D. Abad, J.W. Lauer, C. Paola, W.E. Dietrich, and V.R. Voller (2011), A new framework for modeling the migration of meandering rivers, *Earth Surf. Processes and Landform*, 36, 70-86, doi: <https://doi.org/10.1002/esp.2113>.
- [45] E. Partheniades (1965), Erosion and deposition of cohesive soils, *J. Hydraul. Div. Am. Soc. Civ. Eng.*, 91, 105-139.

- [46] E. Partheniades, and R.R. Paaswell (1970), Erodibility of channels with cohesive boundaries, *J. Hydraul. Div. Am. Soc. Civ. Eng.*, *96*, 755-771.
- [47] E. Parzen (1967), *Stochastic Processes*, Holden-Day, San Francisco, US, p. 130.
- [48] E. Perucca, C. Camporeale, and L. Ridolfi (2006), Influence of river meandering dynamics on riparian vegetation pattern formation, *J. Geophys. Res.*, *111*, G01001, doi: 10.1029/2005JG000073.
- [49] E. Perucca, C. Camporeale, and L. Ridolfi (2007), Significance of the riparian vegetation dynamics on meandering river morphodynamics, *Water Resour. Res.*, *43*, W03430, doi: 10.1029/2006WR005234.
- [50] J. Pizzuto, and T. Meckelnburg (1989), Evaluation of a linear bank erosion equation, *Water Resour. Res.*, *25*, 1005-1013.
- [51] A. Porporato, and P. D'Odorico (2004), Phase transitions driven by state-dependent Poisson noise, *Phys. Rev. Lett.*, *92*(11):110601.
- [52] L. Ridolfi, P. D'Odorico, and F. Laio (2011), *Noise-Induced Phenomena in the Environmental Sciences*. Cambridge: Cambridge University Press. doi:10.1017/CBO9780511984730.
- [53] I. Rodriguez-Iturbe, A. Porporato, L. Ridolfi, V. Isham, and D.R. Cox, (1999), Probabilistic modelling of water balance at a point: the role of climate, soil and vegetation, *Proc. R. Soc. Lond. A*, 455:3789-3805.
- [54] S.M. Ross (1996), *Stochastic processes*, Wiley, New York.
- [55] S.M. Ross, *Probabilità e statistica per l'ingegneria e le scienze*, Trento, Apogeo, 2003, ISBN 88-7303-897-2.
- [56] F. Sagues, J.M. Sancho, and J. Garca-Ojalvo (2007), Spatio-temporal order out of noise, *Rev. of Mod. Phys.*, *79*(3):829-882.
- [57] J. Salo, R. Kalliola, I. Hakkinen, Y. Makinen, P. Niemela, M. Puhakka, and P. Coley (1986), River dynamics and the diversity of Amazon lowland forest, *Nature*, *322*, 254-258.
- [58] G. Seminara (2006), Meanders, *Journal of Fluid Mechanics*, *554*, 271-297.
- [59] G. Seminara (1998), Stability and morphodynamics, *Meccanica*, *33*, 59-99.
- [60] G. Seminara, and L. Solari (1998), Finite amplitude bed deformations in totally and partially transporting wide channel, *Water Resour. Res.*, *34*, 1585-1594.
- [61] G. Seminara, G. Zolezzi, M. Tubino, and D. Zardi (2001), Downstream and upstream influence in river meandering, part 2. Planimetric development, *J. Fluid Mech.*, *438*, 213-30.
- [62] H.H. Stølum (1997), Fluctuations at the self-organized critical state, *Phys. Rev. E.*, *56*, 6710-6718.
- [63] T. Sun, T. Jøssang, P. Meakin, and K. Schwarz (1996), A simulation model for meandering rivers, *Water Resour. Res.*, *32*, 2937-2954.

- [64] D.C. Swanson (1993), The importance of fluvial processes and related reservoir deposits, *Journal of Petroleum Technology*, 45(4), 368-377.
- [65] L. Van Bendegom (1974), Some consideration on river morphology and river improvement (in Dutch), *Ingenieur*, 59(4), B1-B11.
- [66] E. VanMarcke (1983), *Random Fields: Analysis and Synthesis*, MIT press, Cambridge, pp. 110-11.
- [67] P.J. Whiting, and W.E. Dietrich (1993a), Experimental studies of bed topography and flow patterns in large-amplitude meanders: 1. Observations, *Water Resour. Res.*, 29, 3605-3614.
- [68] P.J. Whiting, and W.E. Dietrich (1993b), Experimental studies of bed topography and flow patterns in large-amplitude meanders: 2. Mechanisms, *Water Resour. Res.*, 29, 3615-3622.
- [69] S. Zen, G. Zolezzi, M. Toffolon, and A.M. Gurnell (2016), Biomorphodynamic modelling of inner bank advance in migrating meander bends, *Adv. Water Resour.*, 93, 166-181, doi: 10.1016/j.advwatres.2015.11.017.
- [70] G. Zolezzi, and G. Seminara (2001), Downstream and upstream influence in river meandering. Part 1. General theory and application to overdeeping, *J. Fluid Mech.*, 438, 183-211.

Ringraziamenti

Desidero ringraziare tutti coloro che hanno contribuito alla stesura di questa tesi con suggerimenti, pareri, critiche ed osservazioni.

Primo tra tutti il mio relatore, il Professor Carlo Vincenzo Camporeale, non soltanto per avermi coinvolto in una tesi di ricerca così interessante, ma anche e soprattutto perché è grazie alla sua estrema disponibilità, attenzione e meticolosità nel seguirmi e nel fornirmi indicazioni preziose, se sono riuscita ad apprendere nozioni di cui non mi reputavo all'altezza fino a qualche mese fa.

Ringrazio moltissimo anche la *School of Engineering at the University of Edinburgh, UK*, dove ho trascorso gli ultimi due mesi di tesi. Qui ho avuto l'onore di lavorare con persone che meritano la mia più sincera gratitudine: il Prof. Paolo Perona per i consigli utilissimi e per avermi fornito l'incredibile opportunità di concludere, ma soprattutto di arricchire questa ricerca presso il prestigioso *Institute of Infrastructure and Environment (IIE)*, poi la pazienza e la disponibilità infinite del Dr. Simone Zen, il quale mi ha coordinata egregiamente durante tutto il periodo trascorso in Scozia.

Grazie per tutto (lui sa) a colui che mi è accanto, ma sopra ogni cosa per aver sempre saputo fermamente che ce l'avrei fatta.

Grazie alle fantastiche persone incontrate durante questi ultimi due anni: non avrei mai immaginato di stringere rapporti così profondi anche a Torino. Dico "anche a Torino" perché le bolognesi sanno benissimo di essere nella mia "lista ristretta": un ringraziamento particolare va a voi e alle amicizie vere, da quelle conosciute ben 21 anni fa a quelle arrivate nella mia vita un po' più tardi, ma pur sempre eccezionali. Siamo tutte sparpagliate per l'Italia e per il mondo, ma non vi ho mai sentito così vicine.

Sembrerà banale, ma loro sanno... grazie alla mia splendida famiglia, perché dopo tutto e oltre tutto, siamo una forza della natura.

A lui ho già dedicato l'intera tesi, non c'è bisogno di aggiungere altro.

Grazie a voi tutti con il cuore, senza il vostro sostegno questa tesi non esisterebbe.

Francesca