

# POLITECNICO DI TORINO

**Corso di Laurea Magistrale  
in Ingegneria Aerospaziale**

Tesi di Laurea Magistrale

## **TEORIA DELLE RETI COMPLESSE APPLICATA AL FLUSSO TURBOLENTO IN UN CANALE PIANO: EFFETTI DEL NUMERO DI REYNOLDS**



### **Relatori**

Prof. Stefania Scarsoglio

Prof. Luca Ridolfi

Ing. Giovanni Iacobello

**Candidato**

*Federico Dallari*

**DICEMBRE 2018**



# Indice

<b>1</b>	<b>Turbolenza di parete</b>	<b>5</b>
1.1	Descrizione statistica della turbolenza . . . . .	5
1.2	Flusso turbolento di canale . . . . .	9
1.2.1	Equazioni di bilancio delle grandezze medie . . . . .	10
1.2.2	Sforzi, profili di velocità e coefficiente d'attrito . . . . .	11
1.3	Strutture turbolente . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Reti complesse</b>	<b>19</b>
2.1	Teoria dei grafi . . . . .	20
2.2	Metriche . . . . .	22
2.3	Analisi di serie temporali . . . . .	25
2.4	<i>Teleconnection</i> . . . . .	27
2.5	Applicazioni . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Descrizione dei dati e pre-processing</b>	<b>31</b>
3.1	Descrizione DNS . . . . .	31
3.2	Costruzione della reti . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Risultati delle analisi di flussi turbolenti in un canale piano tramite la teoria delle reti complesse: confronto reti <math>Re_\tau = 180</math> e <math>Re_\tau = 590</math></b>	<b>35</b>
4.1	Analisi globale . . . . .	37
4.2	Analisi di mesoscala . . . . .	40
4.2.1	Analisi lungo la direzione $y^+$ . . . . .	40
4.2.2	Analisi dei nodi più centrali . . . . .	45
4.3	Analisi locale . . . . .	57
4.3.1	Analisi vicinati successivi . . . . .	57
4.3.2	Analisi degli shortest path . . . . .	61
<b>5</b>	<b>Analisi parametrica</b>	<b>67</b>
5.1	Sensibilità alla finestra temporale . . . . .	67
5.1.1	Analisi globale . . . . .	68
5.1.2	Analisi di mesoscala . . . . .	71
5.2	Sensibilità alla soglia $\tau$ . . . . .	80
5.2.1	Analisi globale . . . . .	80
5.2.2	Analisi di mesoscala . . . . .	81
<b>6</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>85</b>



## Introduzione

La dinamica turbolenta è un ramo di ricerca interdisciplinare, con ampi settori di interesse, che spaziano dalle applicazioni aerospaziali, alla dinamica atmosferica, dalla dispersione di inquinanti a processi di reazione e combustione. I flussi turbolenti sono caratterizzati da campi spazio-temporali complessi, con molte scale che interagiscono, mostrando la loro intrinseca natura caotica. Tra i flussi turbolenti è sempre stata data grande importanza alla turbolenza di parete, soprattutto per l'importanza dell'interazione tra fluido e parete e le relative perdite d'energia. Alcuni degli argomenti più importanti della turbolenza di parete sono: l'analisi delle strutture normali alla parete; la distribuzione della velocità media e delle fluttuazioni; la caratterizzazione delle strutture coerenti; le interazioni tra differenti scale turbolente.

Nonostante questi temi siano stati ampiamente analizzati, alcune questioni rimangono ancora aperte, come l'identificazione e la caratterizzazione di strutture coerenti, richiedendo dunque approcci più innovativi, come quello che verrà in seguito sviluppato attraverso la teoria delle reti complesse. L'approccio tramite reti complesse permette di investigare la dinamica turbolenta preservando l'informazione spaziale e sfruttando la topologia delle interazioni tra le componenti. Infatti altre tecniche [1] perdono la collocazione spaziale a causa delle operazioni di pre e post-processing, invece con questa tecnica il risultato delle analisi può essere facilmente localizzato nel dominio fisico e conservare l'informazione su più punti dei link diretti/indiretti in tutte le direzioni. L'applicazione di questo approccio all'analisi della turbolenza è piuttosto recente. Alcuni lavori che sono stati eseguiti in questo ambito riguardano lo studio di getti turbolenti [2], flussi a due fasi [3], turbolenza pienamente sviluppata [4], flussi reattivi [5], turbolenza isotropa [6] e flussi biomedicali [7].

In particolare, con questo lavoro di tesi si vuole estendere questa tecnica, già precedentemente impiegata in [8] su una rete ad un certo numero di Reynolds, ad altre reti a un numero di Reynolds maggiore in modo da valutarne l'effetto e verificare che certi risultati ottenuti ad un numero di Reynolds inferiore siano presenti anche a Reynolds più elevato. Dato che i risultati sono ottenuti con script e funzioni Matlab create *ad hoc*, per poterli validare uno dei flussi analizzati è il flusso noto in [8], di cui si avevano a disposizione sia i dati che i risultati. I dati derivano dalla soluzione numerica diretta (DNS) di due flussi turbolenti di canale piano a due diversi numeri di Reynolds, di cui era stato calcolato il campo di velocità in ogni punto. Si costruiscono dunque due reti differenti sui coefficienti di correlazione di questi valori di velocità (anche questi già disponibili come input per il mio lavoro di tesi). Ai nodi della rete viene associato il volume della griglia spaziale delle simulazioni, costruendo quindi una rete spaziale con i nodi che rappresentano porzioni di dominio fisico. Per ogni rete vengono attivati link tra i nodi se i coefficienti di correlazione lineare delle corrispondenti velocità sono superiori ad una determinata soglia. Nonostante la presenza di altre metriche che possono includere non linearità, la scelta fatta a monte di questo lavoro di tesi del coefficiente di correlazione è stata preferita in virtù della sua semplicità e per il suo largo uso in letteratura [9,10]. Dopo aver

costruito la rete sulla componente di velocità longitudinale, per caratterizzare il campo di moto vengono impiegate alcune metriche tipiche della teoria delle reti complesse (quali la degree centrality), con eventuali adattamenti, mentre altre metriche sono state introdotte per poter descrivere al meglio i risultati.

Le analisi vengono svolte su tre diversi livelli di scala: scala globale, meso-scala e scala locale, a seconda del numero di nodi coinvolto nell'analisi (rispettivamente: tutti i nodi; nodi che appartengono a piani a coordinata normale dalla parete costante; nodi scelti singolarmente). Tra i risultati vi sono anche quelli dell'analisi di sensitività di due parametri fondamentali: finestra temporale e soglia dei coefficienti di correlazione oltre la quale vengono attivati i link.

La tesi è organizzata in sei capitoli: nel primo capitolo si tratta la turbolenza di parete, descrivendone le equazioni e le grandezze fisiche più rilevanti, preceduta da un'introduzione sulla descrizione statistica della turbolenza e le variabili statistiche che vengono generalmente impiegate per la sua descrizione. Nel secondo capitolo vengono introdotte le reti complesse, in modo particolare viene richiamata dapprima la teoria dei grafi, successivamente vengono riportate e introdotte le principali metriche che sono state usate, nel paragrafo seguente le tecniche per passare da serie temporali a rete, seguite da un accenno sul concetto di teleconnection e da esempi di applicazione. Nel terzo capitolo vengono descritti i dati e il pre-processing. Nel quarto capitolo sono presentati i risultati del confronto tra le due reti. Nel quinto capitolo sono invece riportati i risultati delle analisi di sensitività alla variazione dei parametri elencati in precedenza. Infine, nell'ultimo capitolo sono presenti le conclusioni di questo lavoro di tesi.

# 1 Turbolenza di parete

## 1.1 Descrizione statistica della turbolenza

**Natura random della turbolenza** In un flusso turbolento il campo di velocità  $U(x, t)$  è random. Questo significa che se si ripete lo stesso esperimento alle stesse condizioni, il valore di  $U$  sarà differente per ogni diverso esperimento. Il fatto che le equazioni del moto (equazioni di Navier-Stokes (N.-S.)) siano deterministiche, mentre le soluzioni sono random è dovuto alla presenza, in ogni flusso turbolento, di perturbazioni delle condizioni iniziali e al contorno, e al fatto che i flussi turbolenti siano estremamente sensibili a queste perturbazioni, che di per sé si potrebbero trovare anche in flussi laminari. Quindi, al contrario dei flussi laminari, in cui la  $U$  calcolata con equazioni di N.-S. è molto simile a quella fornita da misure sperimentali, nei flussi turbolenti, essendo  $U$  una variabile random, essa ha un valore imprevedibile. Tuttavia le proprietà statistiche in un flusso turbolento sono riproducibili, quindi come approccio è utile determinare la probabilità di avere un certo valore di  $U$ , piuttosto che ricercare il valore esatto in ogni punto e in ogni istante (cfr. [11]).

**Variabili statistiche che descrivono la turbolenza** In questa sezione vengono descritte quelle variabili statistiche che riguardano sia singole variabili che campi, e che verranno poi impiegate nella descrizione teorica della turbolenza del canale piano o nelle analisi per ottenere i risultati di questa tesi, senza tralasciare qualche variabile non impiegata in questo lavoro, ma comunque rilevante nell'analisi statistica della turbolenza. Per le definizioni in questa sezione cfr. [11].

Come prima variabile si introduce la *probability density function* (PDF). La PDF di una variabile random  $U$  è definita come la derivata della CDF (funzione distribuzione cumulativa, che dà la probabilità di un evento qualsiasi):

$$f(V) = \frac{dF(V)}{dV} \quad (1.1)$$

con  $V$  campo di velocità indipendente,  $F(V) = P\{U < V\}$  è la CDF,  $P\{\}$  la probabilità che si verifichi un certo evento. La CDF ha tre proprietà:  $F(-\infty) = 0$ , dato che  $\{U < -\infty\}$  è impossibile,  $F(\infty) = 1$ , dato che  $\{U < \infty\}$  è certo, e che  $F(V_b) > F(V_a)$  se  $V_b > V_a$ . Ne segue che la PDF è sempre non negativa  $f(V) \geq 0$ , soddisfa la condizione di normalizzazione:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(V)dv = 1 \quad (1.2)$$

e che  $f(-\infty) = f(\infty) = 0$ .

Quindi la probabilità di una variabile random di avere un valore all'interno di un intervallo infinitesimo è:

$$P\{V \leq U < V + dV\} = F(V + dv) - F(V) = f(V)dv \quad (1.3)$$

La PDF è la probabilità per unità di distanza nello spazio di campionamento, motivo per cui è chiamata funzione densità di probabilità, ed ha come dimensione l'inverso di  $U$ . Se due variabili hanno la stessa PDF si dice che sono distribuite identicamente o statisticamente identiche.

Queste definizioni per una singola variabile random possono essere estese a due o più variabili, ad esempio le tre componenti di velocità  $(U_1, U_2, U_3)$ . A tale scopo è stata definita la CDF joint di variabili random  $(U_1, U_2)$  come:

$$F_{1,2}(V_1, V_2) \equiv P\{U_1 < V_1, U_2 < V_2\} \quad (1.4)$$

che è la probabilità che un punto di campionamento  $(V_1, V_2) = (U_1, U_2)$  giaccia nell'area delimitata dalla condizione  $U_1 < V_1, U_2 < V_2$ , nel piano con asse delle ascisse  $V_1$  ed asse delle ordinate  $V_2$ . La joint PDF di  $U_1$  e  $U_2$  è definita analogamente al caso precedente come derivata della CFD joint:

$$f_{1,2}(V_1, V_2) = \frac{\partial^2}{\partial V_1 \partial V_2} F_{12}(V_1, V_2) \quad (1.5)$$

Anche le proprietà sono le stesse del caso precedente, ma estese a due variabili.

Se invece si volesse caratterizzare ad ogni istante di tempo il fenomeno random  $U(t)$ , essa sarebbe definita dalla sua CDF a punto singolo:

$$F(V, t) \equiv P\{U(t) < V\} \quad (1.6)$$

o dalla sua PDF a punto singolo, ma queste grandezze non contengono informazioni su  $U(t)$  a due o più tempi diversi. Dunque per caratterizzare completamente un fenomeno random sarebbe necessario conoscere la joint PDF in ogni istante di tempo, che è impossibile da ottenere, a meno di grandi semplificazioni come nel caso di fenomeno statisticamente stazionario, quando tutte le variabili statistiche a punti multipli non variano muovendosi nel tempo di una certa quantità  $T$ . In un flusso turbolento infatti, dopo un periodo di transitorio, anche se le variabili del flusso variano nel tempo, le variabili statistiche sono indipendenti dal tempo, quindi molto spesso un flusso turbolento si può considerare statisticamente stazionario.

In realtà in un flusso turbolento la velocità  $U(x, t)$  è un campo vettoriale che dipende dal tempo, ma si possono estendere le considerazioni precedenti anche al campo random. Inoltre il campo può essere non solo statisticamente stazionario (per cui vale la spiegazione precedente di fenomeno), ma anche statisticamente omogeneo se tutte le variabili statistiche non cambiano con uno spostamento nello spazio.

Di seguito vengono riportate definizioni e proprietà di altre grandezze che permettono di descrivere variabili random. La *media d'insieme* di una variabile random  $U$  è:

$$\langle U \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} V f(V) dV \quad (1.7)$$

La media della media è ancora la media:

$$\langle \langle U \rangle \rangle = \langle U \rangle \quad (1.8)$$

La fluttuazione di  $U$  è definita come:

$$u = U - \langle U \rangle \quad (1.9)$$

La *varianza* è la media del quadrato della fluttuazione:

$$\langle u^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (V - \langle U \rangle)^2 f(V) dV \quad (1.10)$$

La radice quadrata della varianza è la *deviazione standard*, scritta anche come  $\sigma_u$  o come *root mean square* (r.m.s) di  $U$ .

Si definisce *momento centrale n-esimo*

$$\mu_n \equiv \langle u^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (V - \langle U \rangle)^n f(V) dV \quad (1.11)$$

Si ha dunque che  $\mu_0 = 1$ ,  $\mu_1 = 0$  e  $\mu_2 = \sigma_u^2$ . Spesso però le variabili random sono espresse in termini di variabili standardizzate, che variano nell'intervallo  $[0,1]$ . I momenti di standardizzati sono  $\hat{\mu}_n = \frac{\mu_n}{\sigma_u^n}$ . Tra questi sono rilevanti i momenti  $\hat{\mu}_3$  (*skewness*) e  $\hat{\mu}_4$  (*flatness* o *kurtosis*) in quanto danno informazioni sulla simmetria e l'ampiezza delle code.

Per quanto riguarda le variabili bidimensionali sono importanti la covarianza di  $U_1$  e  $U_2$ , che è il secondo momento misto:

$$\langle u_1 u_2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (V_1 - \langle U_1 \rangle)(V_2 - \langle U_2 \rangle) f_{12}(V_1, V_2) dV_1 dV_2 \quad (1.12)$$

e il coefficiente di correlazione, che è definito come:

$$\rho_{12} = \langle u_1 u_2 \rangle / \sqrt{\langle u_1^2 \rangle \langle u_2^2 \rangle} \quad (1.13)$$

Si ha un coefficiente di correlazione positivo quando scostamenti dal valore medio di una variabile random sono essenzialmente associati a scostamenti positivi anche dell'altra variabile, altrimenti il coefficiente di correlazione è negativo.

In generale si ha  $-1 \leq \rho_{12} \leq 1$ . Se il coefficiente di correlazione è nullo allora le variabili  $U_1, U_2$  sono scorrelate. Se  $\rho_{12} = 1$  le due variabili sono perfettamente correlate, se  $\rho_{12} = -1$  allora le due variabili sono perfettamente anticorrelate.

Per un fenomeno statisticamente stazionario, si considera l'autocovarianza  $R(s) \equiv \langle u(t)u(t+s) \rangle$  o in forma normalizzata, la funzione di autocorrelazione:

$$\rho(s) \equiv \langle u(t)u(t+s) \rangle / \langle u(t)^2 \rangle \quad (1.14)$$

con  $u(t) = U(t) - \langle U \rangle$  fluttuazione. Di solito  $\rho(s)$  decresce in modo sufficientemente rapido che l'integrale

$$\bar{\tau} = \int_0^{\infty} \rho(s) ds \quad (1.15)$$

converge: allora  $\bar{\tau}$  è la scala temporale integrale del fenomeno. L'autocovarianza  $R(s)$  e il doppio dello spettro di frequenze  $E(\omega)$  formano una coppia di trasformazioni di Fourier:

$$E(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R(s) \cos(\omega s) ds \quad (1.16)$$

$$R(s) = \int_0^{\infty} E(\omega) \cos(\omega s) ds \quad (1.17)$$

Sia lo spettro, che l'autocovarianza contengono la stessa informazione, ma in forma diversa. La fluttuazione di velocità  $u(t)$  ha una rappresentazione spettrale come somma pesata di modi di Fourier di diversa frequenza  $\omega$ . La proprietà fondamentale dello spettro di frequenze è che, per  $(\omega_a < \omega_b)$ , l'integrale

$$\int_{\omega_a}^{\omega_b} E(\omega) d\omega \quad (1.18)$$

è il contributo alla varianza  $\langle u(t)^2 \rangle$  di tutti i modi nel range di frequenze tra  $\omega_a$  e  $\omega_b$ . Nella pratica la funzione di autocorrelazione o lo spettro è l'unica quantità usata per caratterizzare le proprietà a punti multipli di un fenomeno random, anche se comunque né la PDF a punto singolo né la funzione di autocorrelazione caratterizzano completamente un fenomeno random.

Infine si riporta la variabile statistica più semplice, ma significativa, che contiene informazioni sulla struttura spaziale di un campo random è l'autocovarianza a due punti, definita correlazione a due punti e che può essere sfruttata per definire delle scale di lunghezza integrali:

$$R_{ij}(r, x, t) = \langle u_i(x, t) u_j(x+r, t) \rangle \quad (1.19)$$

## 1.2 Flusso turbolento di canale

La maggior parte dei flussi turbolenti hanno almeno un bordo costituito da una o più superfici solide e tra questi si hanno sia flussi interni, come quello attraverso un condotto, sia flussi esterni, come quelli attorno ad un aeromobile, quelli ambientali, come lo strato limite atmosferico e i flussi dei fiumi. Tra i flussi di parete ci sono 3 casi semplici che hanno una buona rilevanza pratica e sono: il flusso di canale (fig. 1.1), il flusso attraverso un condotto e il flusso su una lamina piana. Tutti questi flussi hanno il vettore di velocità medio parallelo alla parete, ed anche i comportamenti vicino a parete sono simili. I problemi principali di questi flussi sono la determinazione del profilo medio di velocità e degli sforzi d'attrito a parete esercitati dal fluido. In questo lavoro di tesi ci si è concentrati sullo studio di un flusso di canale piano, pertanto verrà fornita una descrizione dettagliata soltanto di questo tipo di flusso (per le definizioni in questa sezione, comprese le sottosezioni cfr. [11]). In seguito si considera dunque il flusso attraverso un condotto rettangolare, di altezza  $h = 2\delta$ , larghezza  $b$  e lunghezza  $L$ . Il condotto è lungo ( $L/\delta \gg 1$ ) ed ha un aspect ratio tale che  $(b/\delta) \gg 1$ , affinché il flusso sia statisticamente indipendente da  $z$  lontano dalle pareti, poste a  $y = 0$ , per quella inferiore e a  $y = 2\delta$  per quella superiore, con il piano di mezzeria a  $y = \delta$ .

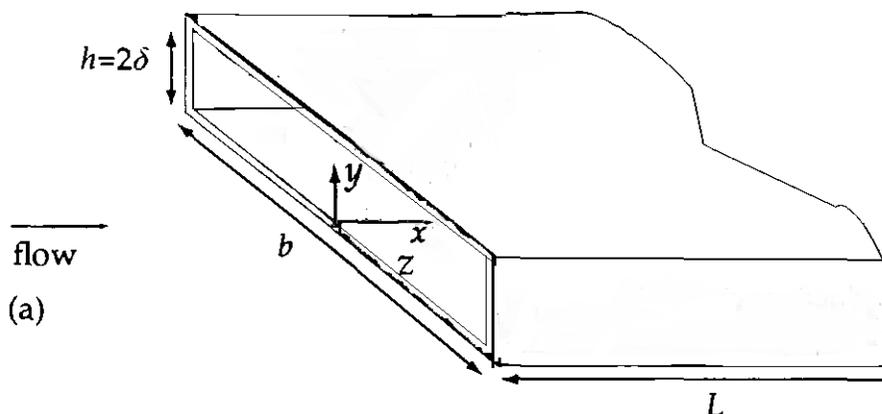


Fig.1.1 Schema di un flusso di canale [11]

Il vettore velocità del flusso è costituito da 3 componenti nelle 3 direzioni  $x, y, z$  che sono rispettivamente  $U, V, W$ , con fluttuazioni  $u, v, w$ . Il flusso medio è prevalentemente in direzione assiale  $x$ , quindi la velocità media in direzione  $z$   $\langle W \rangle$  è pari a 0 (si ricorda che con  $\langle \rangle$  è indicata la media d'insieme). All'imbocco ad  $x = 0$  c'è una regione in cui sviluppa il flusso, ma che non verrà considerata, in quanto ci si concentra sulla regione pienamente sviluppata, nella quale le statistiche sulla velocità non variano più lungo  $x$ . Ne consegue che il

canale turbolento pienamente sviluppato può essere considerato statisticamente stazionario ed unidimensionale, con le variabili statistiche sulla velocità che variano solo lungo  $y$ . Per caratterizzare il flusso si usano due diversi numeri di Reynolds:  $Re = (2\delta)\bar{U}/\nu$  e  $Re_0 = U_0\delta/\nu$ , con  $U_0 = \langle U \rangle_{y=\delta}$  velocità di mezzera e  $\bar{U}$  velocità mediata su  $\delta$ , definita come:

$$\bar{U} = \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} \langle U \rangle dy \quad (1.20)$$

### 1.2.1 Equazioni di bilancio delle grandezze medie

Come prima cosa è opportuno introdurre le equazioni di bilancio delle grandezze medie.

L'equazione di continuità mediata si riduce a  $\frac{d\langle V \rangle}{dy} = 0$ , dal momento che  $\langle W \rangle$  è nulla e  $\langle U \rangle$  non dipende da  $x$ . Con la condizione al contorno  $\langle V \rangle_{y=0} = 0$  ottengo che  $\langle V \rangle = 0$  per ogni  $y$ . Per il tipo di flusso analizzato non c'è accelerazione, quindi le equazioni di bilancio di quantità di moto diventano equazioni di bilancio di forze.

Il bilancio di quantità di moto in direzione  $y$  è:

$$\frac{d}{dy} \langle v^2 \rangle + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial y} = 0 \quad (1.21)$$

Imponendo la condizione al contorno  $\langle v^2 \rangle_{y=0} = 0$  e integrando l'equazione si ottiene che il gradiente medio della pressione assiale è uniforme attraverso il flusso:

$$\frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x} = \frac{dp_w}{dx} \quad (1.22)$$

con  $p_w = \langle p(x, 0, 0) \rangle$  pressione media alla parete inferiore.

Il bilancio di quantità di moto in direzione  $x$  è:

$$\frac{d}{dy} \langle uv \rangle + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x} - \nu \frac{d^2 \langle U \rangle}{dy^2} = 0 \quad (1.23)$$

Può essere riscritta come  $\frac{d\tau}{dy} = \frac{dp_w}{dx}$ , con  $\tau(y)$  vettore degli sforzi di taglio, che si può scrivere come  $\tau = \rho\nu \frac{d\langle U \rangle}{dy} - \rho \langle uv \rangle$ , ed è la somma di un contributo viscoso  $\rho\nu \frac{d\langle U \rangle}{dy}$  e degli sforzi di Reynolds  $-\rho \langle uv \rangle$ . Si può quindi sostenere che nella regione pienamente sviluppata c'è un gradiente di pressione media negativo costante, che è bilanciato dal gradiente di sforzo tangenziale. Infatti sia  $\frac{d\tau}{dy}$  che  $\frac{dp_w}{dx}$  sono costanti, visto che  $\tau$  è funzione solo di  $y$  e  $p_w$  solo di  $x$ .

Le soluzioni per  $\tau(y)$  e  $\frac{dp_w}{dx}$  si possono scrivere esplicitamente in funzione dello sforzo di attrito a parete  $\tau_w = \tau(0)$ , fornendo il profilo, lineare, degli sforzi tangenziali, indipendentemente dalle proprietà del fluido e dallo stato di moto del fluido:

$$\tau(y) = \tau_w \left(1 - \frac{y}{\delta}\right) \quad (1.24)$$

Un'altra importante equazione di bilancio è quella dell'energia cinetica turbolenta, che per un flusso di canale pienamente sviluppato è:

$$0 = P - \tilde{\varepsilon} + \nu \frac{d^2 k}{dy^2} - \frac{d}{dy} \left\langle \frac{1}{2} v \bar{u} \cdot \bar{u} \right\rangle - \frac{1}{\rho} \frac{d}{dy} \langle v p' \rangle \quad (1.25)$$

Con  $P$  termine di produzione e  $\varepsilon$  termine di dissipazione,  $k$  energia cinetica turbolenta.

### 1.2.2 Sforzi, profili di velocità e coefficiente d'attrito

A parete, la condizione  $U(x, t) = 0$  dice che gli sforzi di Reynolds sono nulli, quindi negli sforzi d'attrito a parete compare solo il contributo viscoso, quindi  $\tau_w = \rho \nu \left(\frac{dU}{dy}\right)_{y=0}$ . (Fig. 1.2)

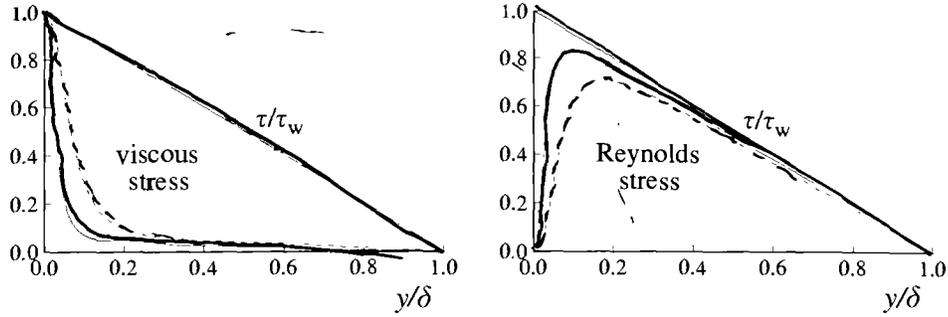


Fig.1.2 Esempio di profili degli sforzi viscosi e di Reynolds [11]

Gli sforzi viscosi dominano a parete e dunque la viscosità cinematica  $\nu$  e gli sforzi d'attrito a parete  $\tau_w$  sono parametri importanti e da queste quantità si definiscono le scale viscosi, che sono le scale appropriate di velocità e di lunghezza vicino a parete.

Si definisce la velocità d'attrito come  $u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$ , mentre la scala di lunghezza viscosa è:

$$\delta_v = \nu \sqrt{\frac{\rho}{\tau_w}} = \frac{\nu}{u_\tau} \quad (1.26)$$

Il numero di Reynolds basato sulla scala viscosa è identicamente unitario ( $\frac{u_\tau \delta_v}{\nu} = 1$ ), quindi si definisce un numero di Reynolds viscoso:

$$Re_\tau = \frac{u_\tau \delta}{\nu} = \frac{\delta}{\delta_v} \quad (1.27)$$

La distanza da parete, misurata con le lunghezze viscose, dette unità di parete, è:

$$y^+ = \frac{y}{\delta_v} = \frac{u_\tau y}{\nu} \quad (1.28)$$

Questa grandezza è simile ad un Reynolds locale, quindi il suo valore può essere interpretato come espressione dell'importanza delle forze viscose nella turbolenza.

Inoltre si definisce la seguente velocità in unità viscose:

$$u^+ = \frac{\langle U \rangle}{u_\tau} \quad (1.29)$$

In base alla  $y^+$  si vanno a definire delle regioni e degli strati.

Per  $y^+ < 50$  si ha la regione viscosa, in cui è presente un effetto diretto della viscosità molecolare sugli sforzi di taglio, mentre nella regione esterna per  $y^+ > 50$  l'effetto diretto della viscosità è trascurabile. Aumentando il numero di Reynolds, la regione viscosa occupa una frazione del canale sempre più ristretta, in quanto  $\frac{\delta}{\delta_v}$  varia con l'inverso di  $Re_\tau$ . Si definisce lo strato interno come lo strato in cui  $\frac{y}{\delta} < 1$ . Ad alto numero di Reynolds, vicino a parete, quindi per  $\frac{y}{\delta_v} \ll 1$ , c'è uno strato interno nel quale il profilo di velocità media è determinato interamente dalla scala viscosa. In questo strato, definito sottostrato viscoso, che si estende fino a  $y^+ = 5$ , la  $u^+$  dipende soltanto da  $y^+$ . In realtà le non linearità sono trascurabili fino a  $y^+ = 12$ , ma solo nel sottostrato viscoso risulta valida la relazione  $u^+ = y^+$ .

Ad alto numero di Reynolds la viscosità può essere trascurata anche nella parte più esterna dello strato interno. In questa regione, integrando il gradiente di velocità media si ottiene la legge logaritmica:

$$u^+ = \frac{1}{k} \ln(y^+) + B \quad (1.30)$$

con B costante pari a 5.2 e  $k = 0.41$  costante di Von Karman.

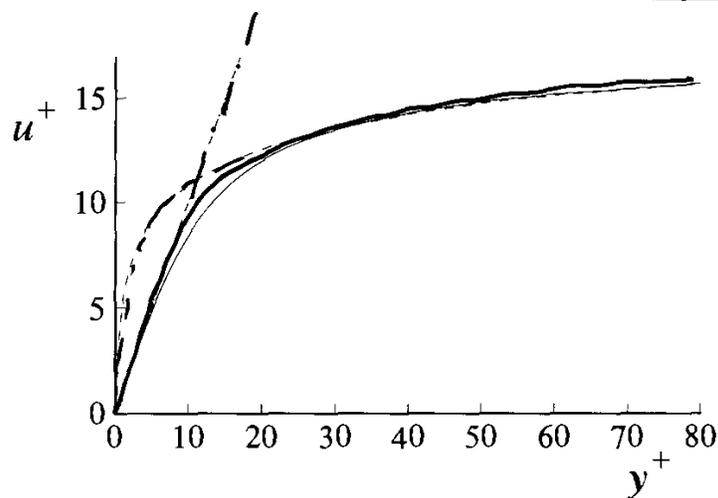


Fig.1.3 Andamenti dei profili di velocità vicino a parete: linea tratteggiata legge logaritmica; linea trattino-punti  $u^+ = y^+$ ; linea continua DNS [11]

Come riportato in figura 1.3, a legge logaritmica descrive bene il comportamento del flusso a partire da  $y^+ > 30$  e si può riscontrare solamente con flussi che abbiano un numero di Reynolds  $Re \geq 3000$ . La regione tra il sottostato viscoso e la regione logaritmica ( $5 < y^+ < 30$ ) è chiamata *buffer layer*. In quest'ultima regione si ha la transizione tra la zona dominata dalla viscosità e quella dominata dalla turbolenza. Nello strato esterno, l'ipotesi che il profilo di velocità sia indipendente da  $\nu$  implica un difetto di velocità, ovvero una differenza tra la velocità media e il valore in mezzeria (qui normalizzato con la velocità d'attrito):

$$\frac{U_0 - \langle U \rangle}{u_\tau} = F_D\left(\frac{y}{\delta}\right) \quad (1.31)$$

con  $F_D$  funzione che dipende dal tipo di flusso. Ad un numero di Reynolds sufficientemente elevato c'è una regione di sovrapposizione tra lo strato interno e quello esterno nella quale sono valide entrambe le leggi, che si possono quindi eguagliare. Se in questa regione la legge logaritmica non descrive bene il flusso nella mezzeria, ma la differenza rimane piuttosto contenuta, attorno all'1% di  $U_0$ , negli strati più esterni dello strato limite, la deviazione dalla legge logaritmica è decisamente maggiore.

Per quanto riguarda gli andamenti degli sforzi di Reynolds e dei termini di produzione e dissipazione dell'energia cinetica turbolenta si rimanda alle seguenti figure 1.4 e 1.5.

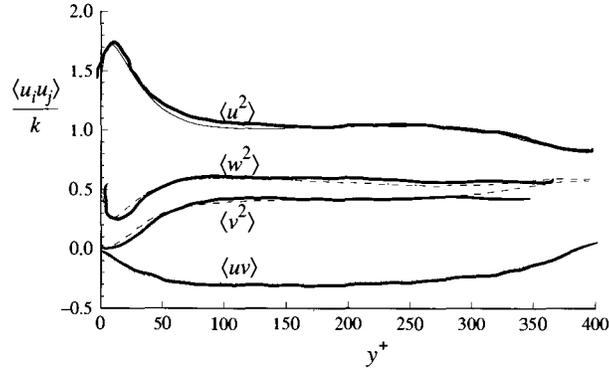


Fig.1.4 Profili degli sforzi di Reynolds normalizzati rispetto all'energia cinetica turbolenta [11]

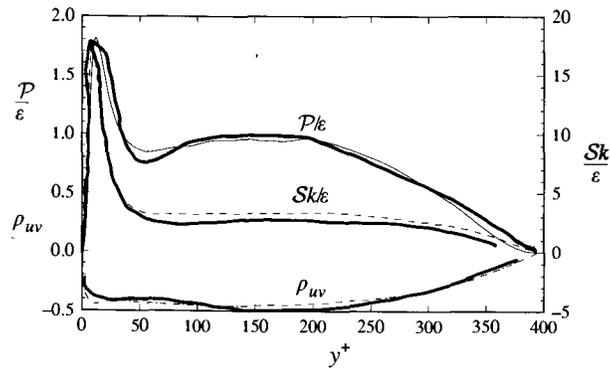


Fig.1.5 Profili del (dall'alto): rapporto di dissipazione, rapporto di taglio medio normalizzato, coefficiente di correlazione degli sforzi di taglio [11]

A parete gli sforzi di Reynolds sono trascurabili rispetto agli sforzi viscosi ed è proprio a parete, dove l'energia cinetica è zero, che c'è il picco di dissipazione di energia. La zona viscosa comunque è quella in cui l'attività turbolenta è più intensa, dato che si possono trovare i picchi di produzione e di energia cinetica turbolenta a  $y^+ < 20$ , oltre che quello già riportato della dissipazione. Infatti è nel buffer layer che il termine di produzione dell'energia cinetica turbolenta  $P$  ha picco a  $y^+ \approx 12$ , ed avviene esattamente dove gli sforzi di Reynolds sono uguali agli sforzi viscosi. Nell'intorno di questo picco la produzione supera la dissipazione ( $\frac{P}{\epsilon} \approx 1.8$ ) e l'eccesso di energia prodotta viene trasportata via. Il trasporto di pressione è piccolo, mentre la convezione turbolenta trasporta l'energia sia verso parete sia nella regione logaritmica. Il trasporto viscoso invece trasporta l'energia cinetica tutta verso parete. Nella regione logaritmica invece gli sforzi di Reynolds sono essenzialmente uniformi, come il rapporto produzione-dissipazione di energia cinetica turbolenta  $\frac{P}{\epsilon}$ , che rimangono dunque in bilancio, per cui il trasporto viscoso e turbolento sono molto piccoli a

confronto di essi. Sulla mezzeria si annullano sia il gradiente di velocità media che gli sforzi d'attrito, quindi anche il termine di produzione  $P = 0$ , indicando che sulla mezzeria gli sforzi di Reynolds sono anisotropi, ma comunque molto meno che nella regione logaritmica.

Un'altra interessante relazione in un flusso di canale è la dipendenza dal numero di Reynolds dal coefficiente d'attrito. Il coefficiente d'attrito si ottiene normalizzando lo sforzo d'attrito a parete con una velocità di riferimento

$$cf = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U_0^2} \quad Cf = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho(\bar{U})^2} \quad (1.32)$$

A tal scopo si deve stabilire una relazione tra  $U_0, \bar{U}, u_\tau$ . Per stimare  $\bar{U}$  si sfrutta la legge logaritmica, per approssimare  $\langle U \rangle$  su tutto il canale. Di seguito a sinistra è riprodotta la legge logaritmica per lo strato interno, a destra per lo strato esterno:

$$\frac{\langle U \rangle}{u_\tau} = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{y}{\delta_v}\right) + B \quad \frac{U_0 - \langle U \rangle}{u_\tau} = -\frac{1}{k} \ln\left(\frac{y}{\delta}\right) + B_1 \quad (1.33)$$

Sommando sparisce la dipendenza dalla  $y$  e si ha

$$\frac{U_0}{u_\tau} = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{\delta}{\delta_v}\right) + B + B_1 = \frac{1}{k} \ln(Re_0 \frac{u_\tau}{U_0}) + B + B_1 \quad (1.34)$$

L'equazione può essere risolta per una dato  $Re_0$  con incognita  $\frac{U_0}{u_\tau}$ , permettendo dunque di trovare il coefficiente d'attrito  $cf = 2(u_\tau/U_0)^2$  (in fig. 1.5). Con la precedente approssimazione si può trovare anche  $Cf = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho(\bar{U})^2}$  in quanto  $Re = \frac{2\bar{U}\delta}{\nu}$ .

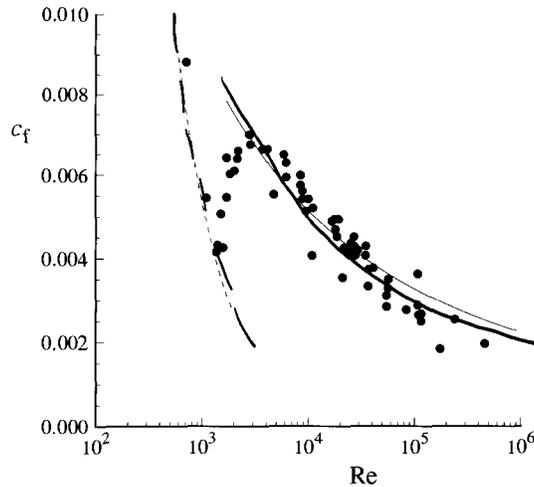


Fig.1.6 Coefficiente d'attrito in funzione di  $Re$  [11]. La linea più a sinistra indica l'andamento teorico laminare, quella più a destra quello teorico turbolento. I puntini mostrano un comportamento reale

In conclusione di questa sezione in fig. 1.7 si riporta il diagramma dei profili di  $u$  e  $v$  r.m.s misurati a vari Reynolds in modo da mostrare come i picchi di  $\frac{u'}{u_\tau}, \frac{v'}{u_\tau}$  sono indipendenti dal numero di Reynolds. Infatti per un flusso pienamente turbolento le grandezze statistiche impiegate, normalizzate con la scala viscosa, hanno solo una debole dipendenza dal Reynolds nello strato interno.

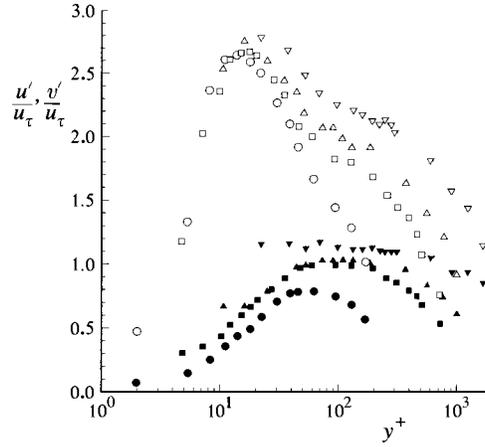


Fig.1.7 Profili velocità in un flusso di canale a vari Reynolds (misurato da Wei e Wilmarth (1989)) [11]  $\circ Re_0 \approx 3000$   $\square Re_0 \approx 15000$   $\triangle Re_0 \approx 23000$   
 $\nabla Re_0 \approx 40000$

### 1.3 Strutture turbolente

Un importante tema di studio sui flussi di parete, come per i flussi liberi, è lo studio delle strutture turbolente, tipicamente trattate con tecniche sperimentali o con altre metodologie di identificazione e quantificazione, tra cui la Proper Orthogonal Decomposition (POD) e l'utilizzo di modelli dinamici. L'oggetto di studio è l'identificazione di regioni spaziali e temporali nelle quali il campo del flusso ha un caratteristico tracciato coerente. Infatti anche se è lecito aspettarsi strutture differenti in posizioni spaziali e temporali diverse, si vuole cercare qualche forma di ordine laddove in apparenza il comportamento sembri caotico, oltre che spiegare i tracciati che si possono vedere nelle visualizzazioni dei flussi, spiegare importanti meccanismi nel flusso in termini di strutture elementari e identificare importanti strutture in modo da poterle modificare per scopi ingegneristici, quali riduzione della resistenza e aumento del trasferimento di calore (cfr. [11]). Alcuni studi, tra cui quello svolto in [12], hanno portato ad alcuni risultati rilevanti, ma ancora non hanno raggiunto i loro obiettivi. Infatti sono state identificate otto categorie di strutture quasi-coerenti nei flussi di canale, così come negli strati limite: strisce a bassa velocità nella regione  $0 < y^+ < 10$ ; espulsioni di fluido a bassa velocità dalla parete; portata di fluido ad alta velocità verso parete; strutture vorticosi di diverse forme; shear layer interni forti nella zona di parete  $y^+ \leq 80$ ; cavità vicino a parete, aree in cui il fluido è assente; *back*: superficie attraverso la quale la velocità in direzione della corrente varia bruscamente; moti di larga scala negli strati esterni.

Più recentemente [13] si identificano quattro elementi principali tra le strutture turbolente. Due di questi sono conosciuti da molto tempo e sono le strisce vicino a parete, di dimensione di circa  $100\nu/u_\tau$ , e i vortici a ferro di cavallo, con un range di scale che parte da  $100\nu/u_\tau$ , mentre gli altri due più recenti sono i moti di larga scala (LSM) e i VLSM (moti di scala molto larga).

Gli LSM sono creati da pacchetti di vortici che si formano quando molti vortici a ferro di cavallo viaggiano alla stessa velocità di convezione, con la loro testa lungo una linea inclinata  $20^\circ$  rispetto la parete. I vortici a ferro di cavallo all'interno del pacchetto si allineano in direzione della corrente e inducono regioni di bassa quantità di moto in direzione della corrente tra le loro gambe. Gli LSM hanno una scala in direzione trasversale di circa  $2-3\delta$  e sono associati alla presenza di rigonfiamenti di fluido turbolento al limite dello strato di parete. Nei flussi interni ci sono anche i VLSM, le cui origini sono incerte, con lunghezza che può arrivare fino a 30 volte la semi-altezza del canale. Per geometrie interne i VLSM non sono solo nella regione logaritmica, ma persistono anche nello strato esterno. Con analisi spettrali si potrebbe osservare come VLSM e LSM portino un grande contributo all'energia cinetica turbolenta e alla produzione degli sforzi di Reynolds (cfr. [13]).



## 2 Reti complesse

### Introduzione

Storicamente le reti sono state l'oggetto di studio della teoria dei grafi e nel corso degli anni la loro applicazione è stata impiegata per la risoluzione di un numero sempre più grande di problemi pratici, che verranno presentati nella sezione 2.5.

Negli ultimi vent'anni si è assistito ad un notevole sviluppo d'interesse e di ricerca per quanto riguarda le reti complesse, ovvero le reti che hanno una struttura irregolare, complessa e che evolve dinamicamente nel tempo, con dimensioni che possono arrivare a milioni di nodi. Questo interesse è senza dubbio da correlare con la potenza di calcolo disponibile, notevolmente aumentata rispetto agli anni precedenti, insieme all'accessibilità a grandi database di reti reali [cfr. 14].



Fig.2.1 Rappresentazione grafica della rete internet [15]

## 2.1 Teoria dei grafi

Ha importanza dedicare una sezione alla teoria dei grafi perché permette di trattare matematicamente in modo esatto le reti complesse, che infatti possono essere rappresentate come dei grafi (fig. 2.2).

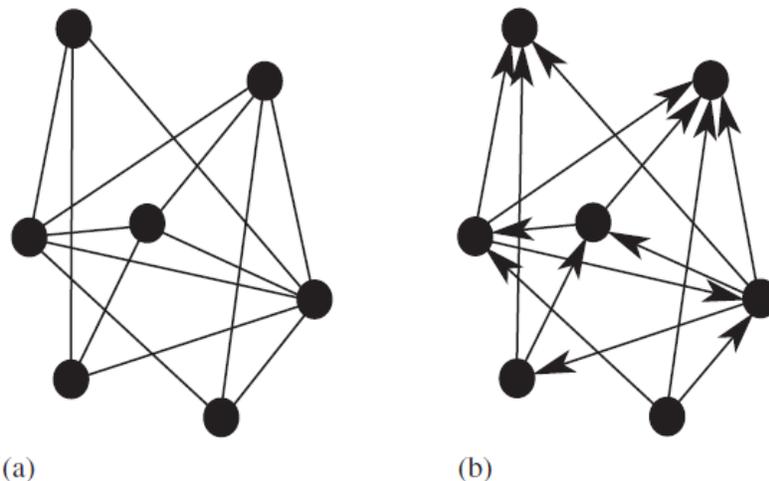


Fig.2.2 Rappresentazione di un grafo indiretto (a sinistra) e diretto (a destra) [14]

Qui di seguito verranno dunque riportate alcune delle definizioni e delle caratteristiche della teoria dei grafi, che verranno sfruttate nelle analisi svolte per questa tesi (per le definizioni di questa sezione cfr. [14]).

Un grafo  $G = (N, L)$  è costituito da due insiemi  $N$  ed  $L$  tali che  $N \neq \emptyset$  ed  $L$  è un insieme di coppie di elementi di  $N$ . Se le coppie sono ordinate il grafo si definisce diretto, se invece non sono ordinate il grafo è indiretto (fig. 2.2). Gli elementi di  $N \equiv \{n_1, n_2, \dots, n_N\}$  sono i nodi (o vertici o punti) del grafo  $G$ , mentre gli elementi di  $L \equiv \{l_1, l_2, \dots, l_N\}$  sono i link (o linee o bordi) del grafo. Con  $N_v$  e con  $K$  si indicano rispettivamente i numeri di elementi in  $N$  e  $L$ . In genere ci si riferisce ad un nodo attraverso il suo ordine  $i$  nell'insieme  $N$ . In un grafo indiretto, ogni link è definito dalla coppia di nodi  $i$  e  $j$  e viene indicato come  $(i, j)$  o  $l_{i,j}$  se il link congiunge i due nodi. I due nodi  $i$  e  $j$  sono gli *end - node* del link  $(i, j)$  e sono detti adiacenti o vicini. Nei grafi diretti è importante l'ordine dei due nodi, per cui  $l_{i,j} \neq l_{j,i}$ , ma non verranno trattati. Altre proprietà interessanti dei grafi sono che per un grafo  $G$  di dimensione  $N_v$ , il numero di link  $K$  è minimo 0 e al massimo  $\frac{N_v \cdot (N_v - 1)}{2}$ , quando tutti i nodi sono adiacenti a coppie e che il grafo  $G$  è definito sparso se  $K \ll N_v^2$ , denso se  $K = O(N_v^2)$ , completo se  $K = \binom{N_v}{2} = N_v \cdot (N_v - 1) / 2$ .

Un'ulteriore definizione che è necessario fornire è quella di sottografo, ovvero di grafi i cui insiemi di link e nodi sono inclusi nei rispettivi insieme del grafo

di partenza. Infatti nel capitolo delle analisi vengono introdotti i sottografi dei vicini di un dato nodo  $i$ , scritto come  $G_i$ . Questo viene definito come gli insiemi di nodi adiacenti a  $i$ , quindi  $G_i = G[N_i]$ .

Un altro concetto importante della teoria dei grafi è la raggiungibilità di due differenti nodi di un grafo, poiché infatti due nodi che non sono adiacenti possono comunque essere raggiunti l'uno dall'altro. Per studiare la raggiungibilità è necessario introdurre qualche definizione pertinente: il cammino dal nodo  $i$  al nodo  $j$  è una sequenza di nodi e link, che inizia da  $i$  e finisce in  $j$  e la sua lunghezza è il numero di link del cammino stesso. Un particolare tipo di cammino, che verrà usato nell'analisi locale delle reti oggetto della tesi, è il *path*, nel quale i nodi non vengono visitati più di una volta. Di particolare interesse è il cammino di lunghezza minima tra due nodi (*shortest path*). Esistono anche altre tipologie di cammini, che però non vengono considerati in questa tesi, come i cicli, che sono cammini chiusi, quindi con almeno 3 nodi, nel quale nessun bordo viene ripetuto. Inoltre la presenza o meno di un cammino per ogni coppia di nodi distinti fornisce informazioni su un'altra proprietà dei grafi, ovvero se il grafo è, rispettivamente, connesso o disconnesso.

Nei dati usati per le analisi di questa tesi i grafi sono rappresentati tramite matrici, che hanno il nome di matrice di adiacenza (o connettività) indicate con la lettera  $A$ . Sono matrici quadrate  $N_v \cdot N_v$ , con elementi  $a_{i,j} = (i, j = 1, \dots, N_v)$  uguali ad 1 quando il link  $l_{i,j}$  esiste, altrimenti vale 0. Queste matrici sono costruite in modo che la diagonale contenga solo zeri. Visto che i grafi che verranno trattati sono indiretti è bene evidenziare che in tal caso le matrici di adiacenza sono simmetriche.

In conclusione di questa sezione si definisce che la topologia della rete non è altro che le interazioni tra i nodi e che se queste interazioni non sono banali, allora si ha a che fare con una rete complessa.

## 2.2 Metriche

In quest'altra sezione vengono definite le metriche, ovvero quelle grandezze espresse con il formalismo delle reti complesse che permettono di avere informazioni utili sull'oggetto di studio, nel caso di questa tesi il flusso turbolento di canale piano. Data la recente applicazione in questo ambito molte di queste metriche sono state pensate per il caso di studio in [8], mentre altre derivano da quelle che si possono considerare come «standard» nel formalismo delle reti.

Proprio in quest'ultimo caso ricade la degree o connettività  $k_i$  di un nodo  $i$ , che rileva il numero di collegamenti incidenti con quel nodo. In termini di matrice di adiacenza  $A$  come [14]:

$$k_i = \sum_{j \in N} a_{ij} \quad (2.1)$$

Pertanto questa metrica è indice della cardinalità dell'insieme di nodi connessi ad un nodo  $i$ , che viene definito *primo vicinato*  $\Gamma_i^1$ . L' $N$ -esimo vicinato  $\Gamma_i^N$  di un nodo  $i$  è l'insieme di nodi tali per cui il numero minimo di diversi link che connettono  $i$  ai nodi di  $\Gamma_i^N$  è uguale a  $N \geq 0$ . Per definizione  $\Gamma_i^0 = i$ .  $N$  dunque indica la distanza topologica del cammino più breve tra un nodo  $i$  e  $i$  nodi in  $\Gamma_i^N$ . L' $N$ -esimo vicinato cumulativo  $\Gamma_i^{N,c}$  di un nodo  $i$  è invece l'unione dei suoi primi  $N$  vicini (incluso  $i$ ) (cfr. [8]).

Nelle reti create in questo lavoro di tesi i nodi corrispondono a posizioni spaziali fissate nel dominio computazionale. Dato che il dominio fisico non è uniforme si assegna ad ogni nodo un peso che indica l'estensione spaziale di quel nodo. In tutti i casi analizzati l'inomogeneità del dominio è nella direzione  $y^+$ , quindi ai nodi a diversa  $y^+$  è stato assegnato un peso diverso. Questo approccio è comune nelle reti climatiche [16], in cui i nodi rappresentano regioni di area diversa sulla superficie terrestre in funzione della latitudine. Ad ogni nodo  $i = 1, \dots, N_v$  si assegna un peso  $V_i(y^+) = (\Delta x \Delta y_i(y^+) \Delta z)$  che è il volume del nodo. Con  $N_v$  si è indicato il numero di nodi,  $\Delta x$ ,  $\Delta z$  è distanza tra due nodi nella spaziatura uniforme del dominio nelle rispettive direzioni e  $\Delta y_i(y^+)$  è la spaziatura non omogenea in direzione normale alla parete dipende da  $y^+$ .  $\Delta y_i(y^+)$  viene calcolato come semi-differenza tra la spaziatura di griglia successiva e quella precedente:  $\Delta y_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2}$ . A questo punto si può definire [8] la connettività di un nodo  $i$  pesata sul volume:

$$VWC(i) = \frac{1}{V_{tot}} \sum_{j=1}^{N_v} A_{ij}^+ V_j \quad (2.2)$$

dove  $V_{tot}$  è il volume totale nel dominio fisico e  $A_{ij}^+ = A_{ij} + \delta_{i,j}$  è la matrice di adiacenza estesa, con  $\delta_{i,j}$  delta di Kronecker. La matrice estesa assicura che  $VWC(i)$  si estenda da 0 a 1. La  $VWC(i)$  rappresenta il grado pesato di un nodo  $i$  e corrisponde alla frazione di volume con cui il nodo è connesso, pertanto è indicatore dei nodi più importanti della rete, così come la degree (eq. 2.1). Per valutare la frazione di nodi che ha un certo valore di  $VWC$  si ricorre alla *distribuzione* di  $VWC$ ,  $p(VWC)$ , e rappresenta la probabilità che un nodo

scelto a caso abbia un certo valore di  $VWC$ . Per limare le fluttuazioni statistiche presenti nelle code di  $p(VWC)$  si definisce la *distribuzione cumulativa* di  $VWC$  come [14]:

$$P(VWC) = 1 - \sum_{VWC'=0}^{VWC} p(VWC') \quad (2.3)$$

che è la probabilità di trovare un nodo con una connettività pesata maggiore di  $VWC$ . Si può definire anche la media pesata delle  $VWC$  del primo vicinato di  $i$  come  $VWC$  media dei vicini prossimi [17]:

$$VWC_{nn}(i) = \frac{1}{VWC(i)} \sum_{j \in \Gamma_i^1} \frac{V_j}{V_{tot}} VWC(j) \quad (2.4)$$

Con la  $VWC(i)$  e la  $VWC_{nn}(i)$  si può valutare l'assortatività della rete, ovvero se c'è correlazione tra le due grandezze. Dunque se una rete è assortativa o disassortativa allora la  $VWC_{nn}(i)$  è una funzione rispettivamente crescente o decrescente di  $VWC(i)$ . Quindi nelle reti assortative definite con queste variabili, i nodi tendono a legarsi a nodi con simile  $VWC$ .

Al fine di raggruppare nodi spazialmente vicini si dice che un insieme di nodi forma una regione spazialmente connessa  $R$ , se ogni nodo di  $R$  ha una distanza massima unitaria, in unità di griglia, da un altro nodo dell'insieme [18]. Il volume occupato da una regione  $R$  è  $V_R = \sum_i V_i$  con  $i \in R$ . C'è da sottolineare come queste regioni soddisfano solamente un vincolo geometrico, quindi non è detto che i nodi all'interno della stessa regione siano collegati. Seguendo questa logica è possibile raggruppare l' $N$ -esimo vicinato di un nodo  $i$  in un numero  $N(\Gamma_i^N)$  regioni spazialmente connesse. Allora un nodo  $j$  si definisce vicino di corto raggio di  $i$  se sia  $i$  che  $j$  appartengono alla stessa regione, che viene indicata nel modo seguente  $R_S$  (regione short), mentre se  $i$  e  $j$  non appartengono alla stessa regione allora  $j$  è un vicino di lungo raggio di  $i$ . L'insieme delle regioni dei vicini di lungo raggio è  $R_L$  (regioni long). Ne segue che ogni nodo della rete avrà un numero di regioni short  $N(R_S) = 1$  e un numero di regioni long  $N(\Gamma^1) = N(R_S) + N(R_L)$ , quindi si hanno regioni di vicini di lungo raggio solo se  $N(\Gamma^1) > 1$ . In accordo con quanto scritto fin'ora i collegamenti di corto raggio sono quelli che collegano coppie di nodi che sono vicini di corto raggio e i collegamenti di lungo raggio sono quelli che collegano coppie di nodi che sono vicini di lungo raggio.

Inoltre si definisce la distanza fisica pesata  $d_{w,\alpha}(i, j)$ , nella direzione cartesiana  $\alpha \in \{x, y, z\}$  e tra il nodo  $i$  e il suo primo vicino  $j$  come:  $d_{w,\alpha}(i, j) = |\alpha_i - \alpha_j| V_j / V_{tot}$  con  $j \in \Gamma_i^1$ . La distanza fisica pesata media tra un nodo  $i$  e i suoi primi vicini nella regione  $R$  è dunque calcolata come:

$$\langle d_{w,\alpha} \rangle = \frac{1}{V_R} \sum_{j \in R} d_{w,\alpha}(i, j) \quad (2.5)$$

con  $V_R = \sum_{j \in R} V_j / V_{tot}$  ed  $R \subseteq \Gamma_i^1$ .

Come ultima metrica si trattano gli *shortest path*, che sono i percorsi di minimo costo tra due nodi, dove si considera costo la distanza dello short path. Assegnando un peso ad ogni link la distanza di short path corrisponde al valore minimo della somma dei pesi del link tra due nodi. La metrica impiegata per assegnare un peso ai link e per valutare gli shortest path è la distanza  $D_{i,j} = \sqrt{2(1 - |C_{i,j}|)}$ , che evidenzia i cammini con alti valore di correlazione (in modulo)  $C_{i,j}$ . Nel caso in cui non si tiene conto della direzione dei link, la distanza di shortest path tra un nodo  $i$  e un nodo  $j$  è la stessa che tra il nodo  $j$  e il nodo  $i$ .

### 2.3 Analisi di serie temporali

In questa sezione vengono mostrati brevemente alcuni approcci per l'analisi delle serie temporali di sistemi complessi e la costruzione di reti da queste serie temporali.

Per lo studio di sistemi complessi con estensioni spaziali storicamente si sono impiegati concetti della dinamica non lineare, quali esponenti di Lyapunov e dimensione di correlazione, per descrivere quantitativamente lo spazio delle fasi della topologia e le proprietà dinamiche risultanti. Questi sistemi però si possono studiare anche usando proprietà frattali oppure tramite l'approccio con reti complesse o sfruttando il fenomeno della ricorrenza (cfr. [19]).

Per trasformare le serie temporali in reti complesse ci sono vari metodi che possono essere raggruppati in 3 classi: *proximity network*, che si basano sulla mutua prossimità di diversi segmenti di una serie temporale; *visibility graph*, che si basano sulla convessità di osservazioni successive; *transition network*, che si basano sulle probabilità di transizione tra stati discreti. Tra le tre classi di metodi il gruppo più grande è quello delle *proximity network*, dove la vicinanza reciproca o la similarità di segmenti di traiettoria può essere caratterizzata in modi diversi, comportando a sua volta la presenza di diversi tipi di reti: reti cicliche, reti di correlazione e reti di ricorrenza. Nonostante le differenze che verranno trattate in seguito, tutti questi metodi hanno comunque due proprietà generali comuni, cioè che la rete risultante non dipende dal nome che hanno i vertici nella matrice di adiacenza e che le reti spaziali non sono altro che delle particolari reti di prossimità. Da queste due caratteristiche risulta evidente che il concetto di cammino della teoria delle reti per un dato grafo è diverso dal concetto di traiettoria che registra l'evoluzione dinamica casuale di un sistema (cfr. [19]).

**Reti cicliche** Le reti cicliche vengono impiegate se un sistema dinamico ha delle oscillazioni pronunciate e si identificano i cicli singoli contenuti in una serie temporali del sistema con i vertici di una rete indiretta. I collegamenti tra coppie di vertici vengono attivati se i corrispondenti segmenti della traiettoria si comportano in modo simile. Per quantificare la prossimità dei cicli nello spazio delle fasi si generalizzano dei coefficienti di correlazione in modo da applicarli a cicli di diversa lunghezza. Il vantaggio delle reti cicliche è che si evita l'integrazione esplicita del tempo di ritardo, oltre al fatto che è il metodo più robusto contro il rumore aggiuntivo e che le reti cicliche non cambiano variando l'ordine dei cicli. Se si costruiscono con questo metodo reti da sistemi lineari e periodici si ottengono reti cicliche che sembrano random, mentre sistemi non lineari e caotici generano delle reti altamente strutturate, quindi si possono usare le proprietà dei vertici e dei collegamenti per distinguere tra le varie classi di sistemi dinamici (cfr. [19]).

**Reti di correlazione** In questo tipo di rete viene effettuata una trasformazione delle serie temporali in uno spazio delle fasi e vengono considerati come vertici della rete i singoli vettori di stato  $x_i$  nello spazio delle fasi m-dimensionale delle

variabili trasformate. Per attivare il link si sfrutta il coefficiente di correlazione di Pearson tra due nodi  $i$  e  $j$   $C_{i,j} = \langle x_i, x_j \rangle$ . Infatti solo se il coefficiente di correlazione è maggiore di una soglia data  $\tau$  i vertici  $i$  e  $j$  possono essere considerati connessi e la matrice di adiacenza ha la seguente forma:  $A_{i,j} = \Theta(\tau - C_{i,j}) - \delta_{i,j}$ , con  $\Theta$  funzione di Heaviside. Il vantaggio di queste reti è che si può osservare una maggiore connettività in intervalli di tempo di diversi, in cui la traiettoria è catturata in due posizioni differenti. Come svantaggi si ha che, poiché che si considerano coefficienti di correlazione tra spazi delle fasi, è richiesta una dimensione sufficientemente grande in modo da stimare correttamente  $C_{i,j}$ , quindi l'informazione sulla dinamica di breve raggio può andare persa oltre al fatto che c'è da considerare anche che nella trasformazione si introducono delle correlazioni spurie (cfr. [19]).

**Reti di ricorrenza** Sono reti complesse la cui matrice di adiacenza è data dalla matrice di ricorrenza delle serie temporali, senza la diagonale dell'identità:  $A_{i,j} = R_{i,j} - \delta_{i,j}$ . Dato che per queste reti l'informazione temporale dell'osservazione considerato, le proprietà topologiche del grafo risultante riflettono solamente le proprietà che non variano nel tempo, associate allo specifico sistema dinamico. La matrice di ricorrenza può essere definita in vari modi, quindi ci sono diversi sottotipi di reti a ricorrenza, con diverse proprietà strutturali (cfr. [19]).

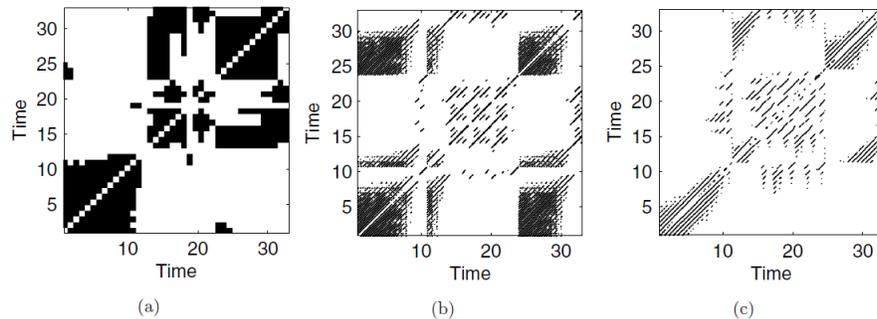


Fig.2.4 Diversi tipi di matrici di adiacenza corrispondenti a tre diversi modi di costruire la rete: (a) Rete ciclica, (b) Rete di correlazione, (c) Rete di ricorrenza [19]

## 2.4 Teleconnection

In questa sezione è introdotto il concetto di teleconnection perché, sebbene le teleconnection siano definite come relazioni persistenti tra anomalie climatiche di regioni sperate dal punto di vista geografico [20], anche nei risultati di questa tesi si ricerca la presenza di legami di lungo raggio che possono essere messi in analogia con le teleconnection. Le teleconnection, atmosferiche o oceaniche, hanno ricevuto una grossa attenzione dato che riflettono il trasporto di energia e la dinamica climatica su scala globale, tipicamente di migliaia di chilometri, e perché probabilmente hanno un importante ruolo nel cambiamento climatico e la sua variabilità a differenti scale spaziali e temporali. I tracciati delle teleconnection rappresentano diversi modi di variabilità di grande scala e possono essere catturati con diversi metodi, come le mappe delle teleconnection basate sulla correlazione di Pearson (lineare) o informazioni reciproche (non lineare) [cfr. 20].

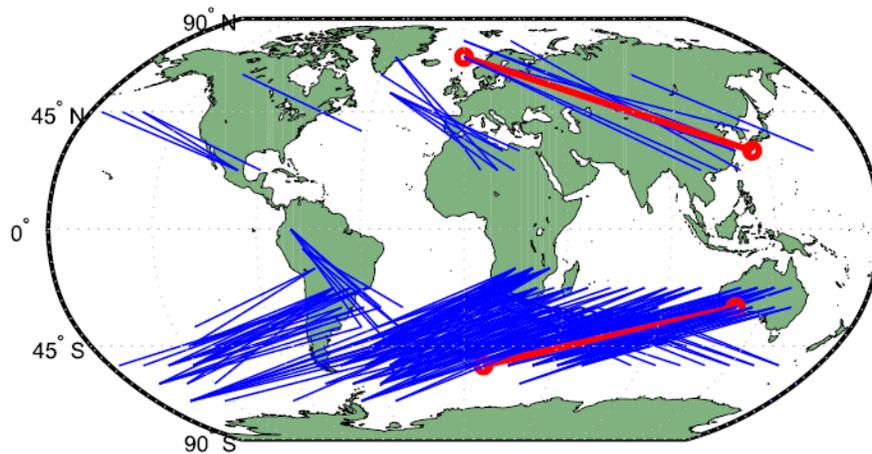


Fig.2.5 Esempio di link forti e a lunga distanza sulla superficie terrestre [20]

Sebbene la maggior parte delle teleconnection sono causate dal trasporto di energia e dalla propagazione ondosa, il meccanismo della singola teleconnection non è completamente compreso, in quanto i tracciati noti descrivono la fase matura della variabilità invece che la fase di sviluppo. Nonostante l'impiego di metodi basati sulle reti climatiche, in cui i nodi rappresentano luoghi geografici e i link sono generati usando correlazioni o informazioni reciproche tra le serie temporali di due nodi, possa permettere una buona descrizione di alcune interazioni climatiche, per le teleconnection lo studio è molto più complesso perché molti link nella rete sono presenti a causa di interazioni indirette tra due nodi tramite nodi intermedi, per cui sarebbero più opportuni altri approcci, tra cui

correlazioni parziali, informazioni reciproche condizionate o casualità condizionale di Granger (cfr. [20]). Quindi non è ovvio poter individuare tali tipologie di relazioni a lunga distanza tramite su una rete basata sulle correlazioni, come quelle presentate in questa tesi.

## 2.5 Applicazioni

Alcune applicazioni della teoria delle reti, oltre a quello trattato in questo lavoro dei flussi turbolenti, sono le reti sociali, internet e il World Wide Web, le reti genetiche, proteiche e metaboliche o le reti cerebrali.

Molti dei concetti e degli strumenti fondamentali presentati in precedenza, su cui si basano anche gli studi fisici, derivano proprio dalla sociometria, come ad esempio quantificare l'importanza di un individuo all'interno della rete, o quantificare la similarità tra gli individui [14].

Internet è una rete i cui nodi sono gli host e i link e connessioni fisiche tra gli host [21].

Il World Wide Web è una rete formata dagli hyperlink tra diverse pagine Web. Vi sono  $10^8$  nodi ed è la più grande rete mai mappata e, al contrario di internet, è una rete diretta [14]: ogni nodo (pagina web) ha dei link in ingresso che sono diversi dai link in uscita che puntano ad altre pagine Web. Basandosi su queste reti si sono poi costruite anche altre reti, quali quelle P2P per la condivisione di file tra utenti.

Dagli anni 2000 la biologia non si sente solo il compito di spiegare la funzione di componenti cellulari singole, ma anche come queste componenti siano interconnesse attraverso una fitta rete di iterazioni che portano alle funzioni di una cellula vivente [22].

Le reti locali di neuroni sono largamente distribuite e collegate in modo da creare una struttura del cervello simile a quella del Web, in grado di coordinare e integrare le attività cerebrali in un processo neurale unificato [23]. Il numero di neuroni (nodi) è molto elevato  $\sim 10^{11}$ , così come le interconnessioni (sinapsi)  $\sim 10^{14}$ , ma la rete è organizzata in modo ottimizzare l'allocazione di risorse e minimizzare i costi delle interconnessioni [24]. Questa rete è molto dinamica sia perché i neuroni cambiano nel tempo a causa di fattori esterni, sia perché in base all'azione desiderata si possono creare/rompere dei legami.



## 3 Descrizione dei dati e pre-processing

### 3.1 Descrizione DNS

In questa sezione si riporta una breve descrizione del metodo usato nella simulazione numerica diretta, dai cui risultati è iniziato questo lavoro di tesi. (Per le definizioni e la descrizione della DNS cfr. [8]).

Sono state risolte le equazioni di Navier-Stokes per flussi incomprimibili (continuità e bilancio quantità di moto).

$$\nabla \cdot u = 0 \quad \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \omega u + \nabla P = \rho \nu \Delta u + \rho a \quad (3.1)$$

Con  $u$  velocità del fluido,  $\omega = \nabla \wedge u$  vorticità e  $P = p + \frac{1}{2}\rho v^2$ ,  $p$  pressione statica,  $\nu$  viscosità cinematica del fluido e  $\rho$  densità del fluido.  $\rho a$  è il gradiente medio di pressione, è uniforme nello spazio e in direzione della corrente, si può scegliere costante nel tempo in modo da avere un  $Re_\tau$  costante.

Nelle due direzioni periodiche (asse  $x$  e  $z$ ) è stato usato un approccio di Fourier-Galerkin, mentre nella direzione normale a parete un metodo Chebyshev-tau. Per soddisfare automaticamente la condizione di incompressibilità (la prima equazione), come variabili dipendenti sono state prese la componente normale a parete della vorticità e il Laplaciano della componente normale a parete della velocità. La seconda equazione viene calcolata in uno spazio fisico tramite una FFT (Fast Fourier Transform), applicando la legge dei 3/2 in entrambe le direzioni periodiche. Viene impiegata una combinazione di un metodo di Runge-Kutta di secondo ordine a 3 stage e un metodo implicito Crank-Nicolson, valido per il range di  $Re_\tau$  tra 150 e 950.

Per quanto riguarda la simulazione a  $Re_\tau = 180$  il dominio ha una lunghezza pari a  $4\pi H$  nella direzione longitudinale  $x$ ,  $2H$  nella direzione normale a parete  $y$  e  $\frac{4}{3}\pi H$  nella direzione trasversale  $z$ , con  $H$  semi-altezza del canale, pari a 180. Il numero di modi di Fourier nelle direzioni  $x$  e  $z$  sono rispettivamente 384 e 192 e ci sono 193 punti di griglia nella direzione normale a parete. Questo implica che nello spazio fisico il numero dei punti di griglia è  $576 \cdot 193 \cdot 288$ . Lo step temporale  $\Delta t$  usato è pari a  $2.5 \cdot 10^{-4} H/u_\tau$ , che implica un  $\Delta t^+ = \Delta t u_\tau^2 / \nu = 0.045$  in unità viscosi, con  $u_\tau$  velocità d'attrito. Il tempo totale è dato dal prodotto dei  $\Delta t$  per la durata della finestra temporale  $T$ , inizialmente pari a 5000, a cui corrisponde un tempo pari a  $T u_\tau / H = 1.25$  o  $T^+ = 225$ . Per quanto riguarda invece la simulazione a  $Re_\tau = 590$  il dominio in unità viscosi ha una lunghezza pari a  $8\pi H$  nella direzione longitudinale  $x$ ,  $2H$  nella direzione normale a parete  $y$ , con  $H = 590$  e  $\pi H$  in direzione trasversale  $z$ . Anche in questo caso il dominio è periodico in direzione  $x$  e  $z$ . Si hanno 5017 step temporali, con  $\Delta t^+ = 0.07375$ , per cui si ha un tempo  $T^+ \approx 370$ . Questo tempo è preso proporzionalmente alla massima scala temporale integrale di autocorrelazione.

### 3.2 Costruzione della reti

In questa sezione viene riportata la procedura seguita nella costruzione delle reti.

Il primo passo nella costruzione della reti è quello di assegnare un nodo ad ogni punto della griglia computazionale delle due DNS. Tuttavia, data l'estensione non indifferente del dominio geometrico delle DNS si è deciso, per entrambe le reti, di ridurre il dominio computazionale in direzione longitudinale e trasversale, in modo da avere una rete con cui si possa lavorare anche con un buon portatile domestico. Questa operazione non dovrebbe alterare i risultati finali perché ci si aspetta che il loro comportamento dipenda principalmente dalla coordinata in direzione normale alla parete che non viene modificata. Ne segue che a  $Re_\tau = 180$  del dominio descritto in sez. 3.1, in direzione  $x$  si è preso solo un punto ogni quattro, avendo così 144 punti totali, in direzione  $z$  si sono considerati solo i primi 150 punti consecutivi, ottenendo come dimensione del dominio in direzione  $z$   $L'_z = \frac{25}{36}\pi H$  ed infine in direzione normale vengono rimossi i 2 nodi che corrispondono alle due pareti ( $y^+ = 0$  e  $y^+ = 360$ ), pertanto si hanno 191 punti in direzione normale. Al termine di queste operazioni il dominio rimane periodico solo in direzione  $x$  e la discretizzazione spaziale finale risulta essere (144,191,150), quindi con un numero totale di nodi della rete  $N_v = 144 \cdot 191 \cdot 150 = 4125600$ . La decisione di prendere il dominio intero nella direzione della corrente  $x$ , anche se con un numero ridotto di punti rispetto alla DNS, è dettata dalla necessità di dover catturare le strutture turbolente come le strisce, che hanno un'estensione dell'ordine di grandezza della lunghezza del canale. Anche a  $Re_\tau = 590$  il dominio viene ridotto, anche se in modo differente rispetto al caso precedente: lungo la direzione longitudinale  $x$  è ridotto ad una lunghezza pari a  $2\pi H$ , con 192 punti di griglia consecutivi, nella direzione normale alla parete  $y$  rimane  $2H$  con 255 punti di griglia, mentre in direzione trasversale  $z$  è lungo  $1.088H$  con 133 punti di griglia consecutivi. Quindi la discretizzazione spaziale finale risulta essere (192,255,133), per cui con un numero totale di nodi della rete  $N_v = 192 \cdot 255 \cdot 133 = 6511680$ , e a differenza del caso precedente, il dominio non è più periodico in nessuna direzione.

Il secondo ed ultimo passo per la costruzione della rete è quello di attivare i link tra i nodi. Nella sezione 2.3 sono stati discussi diversi metodi con cui è possibile costruire reti a partire dalle serie temporali. Per le reti costruite in questa tesi è stato scelto il criterio della correlazione, ovvero per ogni coppia di nodi sono stati calcolati i coefficienti di correlazione basati sulle serie temporali delle componenti di velocità in direzione longitudinale  $u(x, y, z, t)$  e il link tra due nodi viene attivato solamente se il valore assoluto del coefficiente di correlazione di Pearson, lineare, tra quei due nodi è maggiore di un certo valore di soglia  $\tau$ , che nelle analisi successive sarà posto pari a 0.85. Questo valore elevato permette di evidenziare solamente le correlazioni più forti, eliminando dunque quelle che hanno poco valore statistico, e al tempo stesso ridurre la pesantezza computazionale della rete. La scelta della componente in direzione della corrente  $u$  è giustificata dal fatto che è quella che contiene la maggior parte dell'energia turbolenta, anche se nulla vieta di usare altre grandezze caratteristiche dei flussi

turbolenti. Il numero di collegamenti attivi per il valore di soglia selezionato è  $N_e = 857693107$  per  $Re_\tau = 180$ ,  $N_e = 940782112$  per  $Re_\tau = 590$ . Considerando che il numero totale di collegamenti possibile è  $N_{e,tot} = N_v(N_v - 1)/2$ , la densità risulta essere  $\rho_e = N_e/N_{e,tot} \approx 10^{-4}$  nel primo caso,  $\rho_e \approx 10^{-5}$  nel secondo, mostrando come entrambe le reti siano estremamente sparse.



## 4 Risultati delle analisi di flussi turbolenti in un canale piano tramite la teoria delle reti complesse: confronto reti $Re_\tau = 180$ e $Re_\tau = 590$

In questo capitolo vengono riportati i risultati ottenuti dall'analisi di un flusso di canale turbolento basata sulle reti complesse.

Pertanto si è considerata come rete principale proprio quella a  $Re_\tau = 180$ , di cui si avevano già alcuni risultati, in modo da validare i programmi Matlab impiegati per le analisi, che successivamente sono state estese per altre reti.

Per questa rete a  $Re_\tau = 180$  infatti verranno riportate tutti i tipi di analisi parametriche svolte, che invece non sono disponibili per tutte le altre reti analizzate, anche perché a  $Re_\tau$  superiore è richiesto un maggior onere computazionale, non sempre sostenibile da parte di un normale computer.

Verrà proposto essenzialmente un confronto tra due reti costruite da DNS a due numeri di Reynolds differenti, che sono  $Re_\tau = [180; 590]$ . Le reti principali sono costruite impostando lo stesso valore di soglia  $\tau = 0.85$ , in modo da mettere in evidenza solamente le più alte correlazioni, infatti questo valore è stato selezionato nel range  $[0.85 \ 0.95]$ . Questo è il minimo valore assoluto dei coefficienti di correlazione delle velocità  $u$  in direzione x tra i nodi della griglia computazionale della DNS usati per la costruzione della rete.

Come primo confronto si riportano in Fig. 4.1 le funzioni densità di probabilità dei coefficienti di correlazione per le due reti. Da notare che alcuni valori sono nulli, pertanto non sono definiti nel grafico con scala logaritmica in Fig. 4.2.

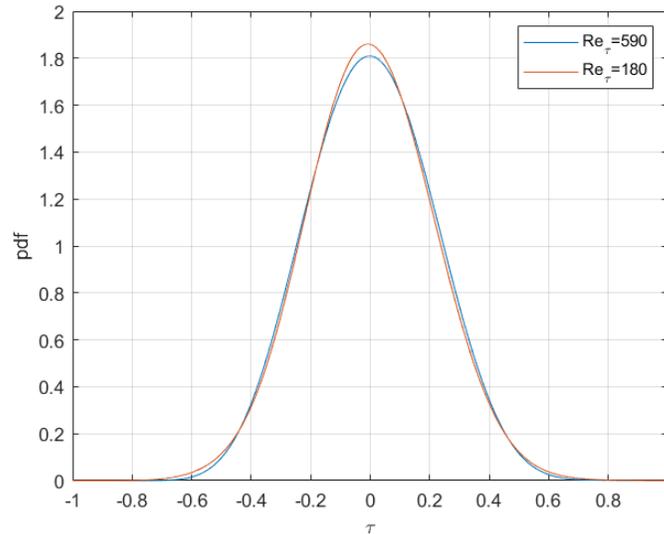


Fig.4.1 Confronto PDF dei coefficienti di correlazione per  $Re_\tau = 180$  e  $Re_\tau = 590$

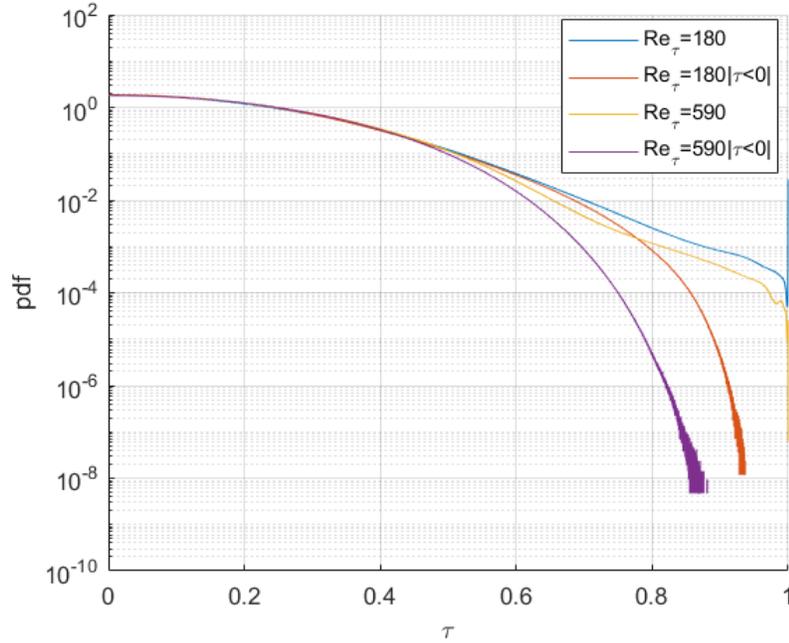


Fig.4.2 Confronto PDF dei coefficienti di correlazione per  $Re_\tau = 180$  e  $Re_\tau = 590$  con scala logaritmica, considerando il valore assoluto di  $\tau$

Per  $Re_\tau = 180$  l'area considerata applicando il valore di soglia  $\tau$  è di  $1.3 \cdot 10^{-3}$ , mentre per  $Re_\tau = 590$  è di  $4.43 \cdot 10^{-4}$ , mostrando come si prenda in considerazione un numero basso di correlazioni.

Le analisi svolte sono state eseguite su tre differenti scale, in modo da mettere in evidenza diverse peculiarità della rete:

- **Scala globale**, in cui si considerano tutti i nodi indistintamente, pertanto si valutano proprietà globali, quali la centralità e la similitudine dei nodi;
- **Mesoscala**, per cui si forniscono proprietà di gruppi di nodi, in particolare, quelli situati alla stessa  $y^+$  e quelli più centrali;
- **Scala locale**, basata sull'analisi di singoli nodi, incentrata sull'analisi dei vicini cumulativi e gli shortest path.

## 4.1 Analisi globale

Per quanto riguarda l'analisi globale il parametro più importante è la  $VWC$ , che è la frazione di volume cinematicamente connessa al nodo e che pertanto è indice della centralità dei nodi della rete.

Per capire se i nodi tendono a collegarsi con nodi che hanno un valore simile di  $VWC$  si deve valutare l'assortatività della rete. Questo si traduce nell'osservare nelle figure seguenti (fig. 4.3 e 4.4) se la  $VWC_{nn}$  (la  $VWC$  dei primi vicini) sia una funzione crescente di  $VWC$ .

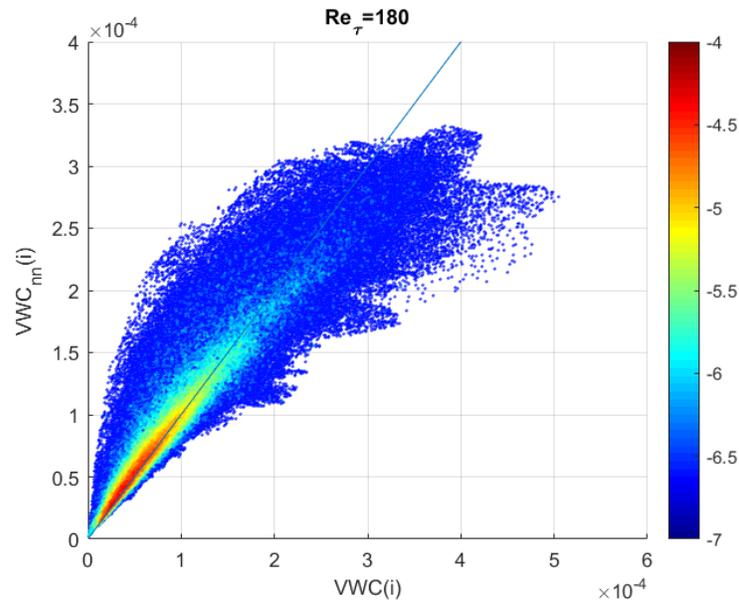


Fig.4.3  $VWC_{nn}(i)$  in funzione di  $VWC(i)$  per la rete a  $Re_{\tau} = 180$ . I colori rappresentano la joint PDF, quindi la probabilità che un nodo con una certa  $VWC(i)$  sia connesso ad un nodo con un certo valore di  $VWC_{nn}(i)$ . La linea continua rappresenta la bisettrice

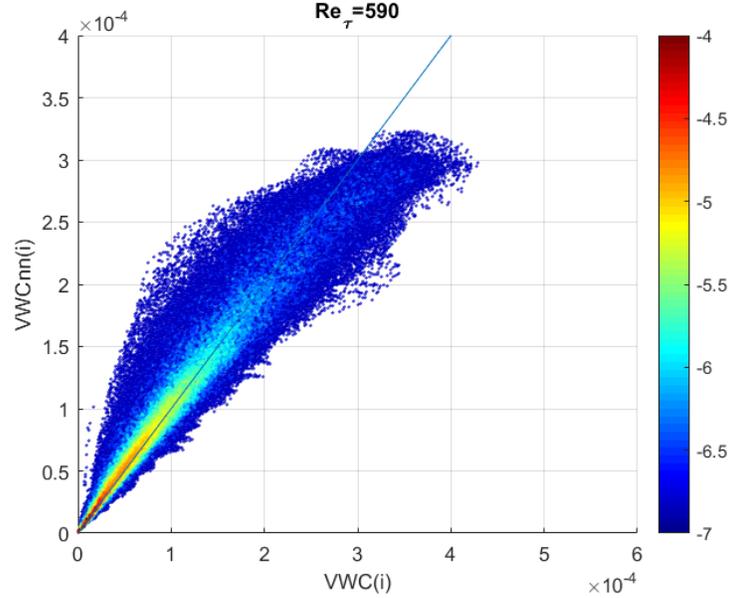


Fig.4.4  $VWC_{nn}(i)$  in funzione di  $VWC(i)$  per la rete a  $Re_\tau = 590$ . I colori rappresentano la joint PDF, quindi la probabilità che un nodo con una certa  $VWC(i)$  sia connesso ad un nodo con un certo valore di  $VWC_{nn}(i)$ . La linea continua rappresenta la bisettrice.

L'andamento assortativo si può intravedere nelle reti a  $Re_\tau = 180$  e in quella a  $Re_\tau = 590$ , anche se per un certo valore di  $VWC$  i valori di  $VWC_{nn}$  possono essere ben diversi, nel complesso  $VWC_{nn}(i)$  è una funzione crescente di  $VWC$ . Tuttavia, analizzando la probabilità congiunta riportata in colore su scala logaritmica, si nota comunque che per entrambe le reti la probabilità di avere vicini di diversa degree è molto bassa, motivo per cui si può concludere che in tutti e due i casi i nodi tendono essenzialmente a collegarsi ad altri nodi con valore di degree simile, mostrando dunque un comportamento assortativo. Con l'analisi di sensitività, a valori di  $\tau$  maggiori (sez. 5.2), si noterebbe un andamento assortativo ben evidente per entrambe le reti, anche senza dover valutare la probabilità congiunta.

Successivamente in Fig. 4.5 e Fig. 4.6 viene riportata la distribuzione cumulativa di  $VWC$ , la  $P(VWC)$ . Questa grandezza è utile per determinare i nodi ad alta degree ( $H-VWC$  o *hubs*), che corrispondono ai nodi con  $P(VWC)$  inferiore al 99° percentile ( $P(VWC) \leq 10^{-2}$ ). Di conseguenza si determinano anche i nodi a bassa degree ( $L-VWC$ ), se è soddisfatta la condizione  $P(VWC) = 10^{-2}$ , che corrisponde al 1° percentile. Da queste analisi si può affermare che gli hubs sono rari in entrambe le reti, in quanto la  $VWC$  decade esponenzialmente, e che tendono a connettersi tra loro o con nodi con  $VWC$  leggermente inferiore.

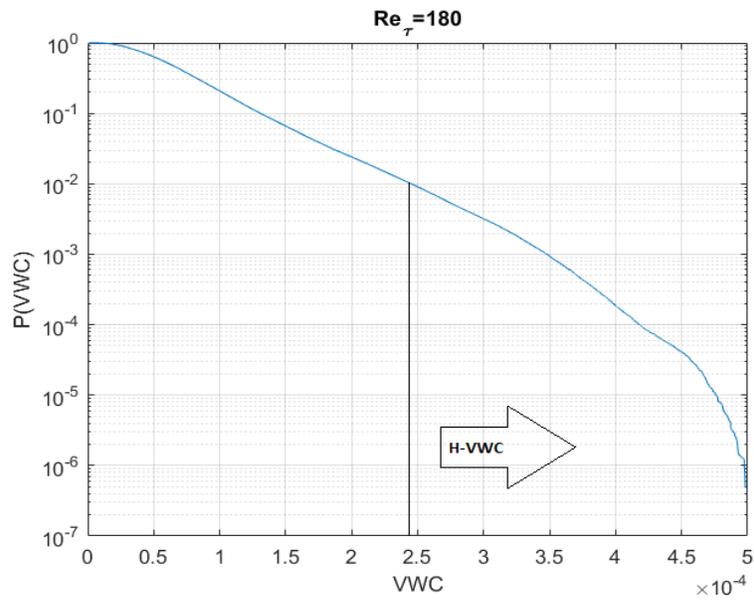


Fig.4.5  $P(VWC)$  per la rete  $Re_\tau = 180$ . A destra del tratto verticale si hanno i nodi hub.

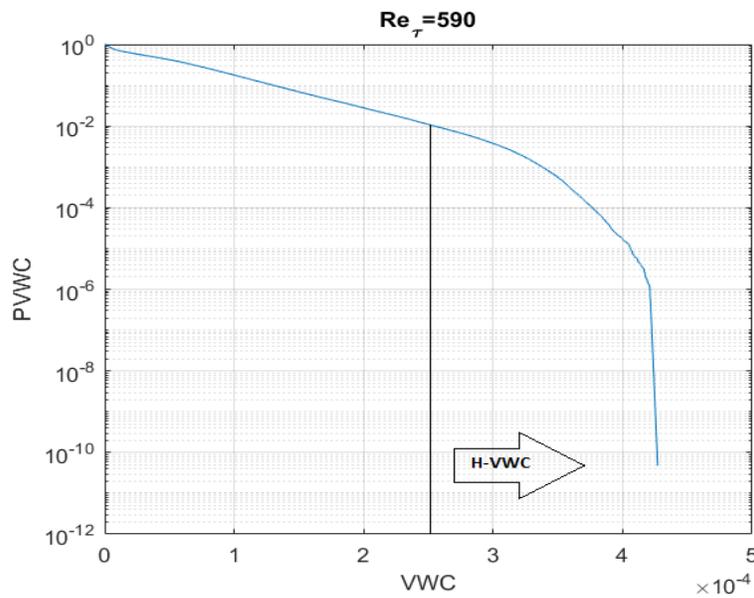


Fig.4.6  $P(VWC)$  per la rete  $Re_\tau = 590$ . A destra del tratto verticale si hanno i nodi hub.

## 4.2 Analisi di mesoscala

### 4.2.1 Analisi lungo la direzione $y^+$

Passando ad un'analisi di mesoscala viene riportata l'ultima elaborazione sulla  $VWC$ , ovvero si riportano gli andamenti per le due reti della  $VWC$  media in funzione di  $y^+$ , insieme alla deviazione standard (Fig. 4.7-9).

A  $Re_\tau = 180$  si è mediato prima su tutti i nodi appartenenti allo stesso piano ad  $y^+$  fissata (che sono 21600), poi tra le due metà del canale, poiché il flusso è simmetrico, quindi ritrovo lo stesso andamento. Per verificare che anche a  $Re_\tau = 590$  il flusso è simmetrico, invece, vengono riportati anche gli stessi grafici per tutta l'estensione del canale in scala non logaritmica. A  $Re_\tau = 590$  il numero di nodi per piano a  $y^+$  costante è pari a 25536.

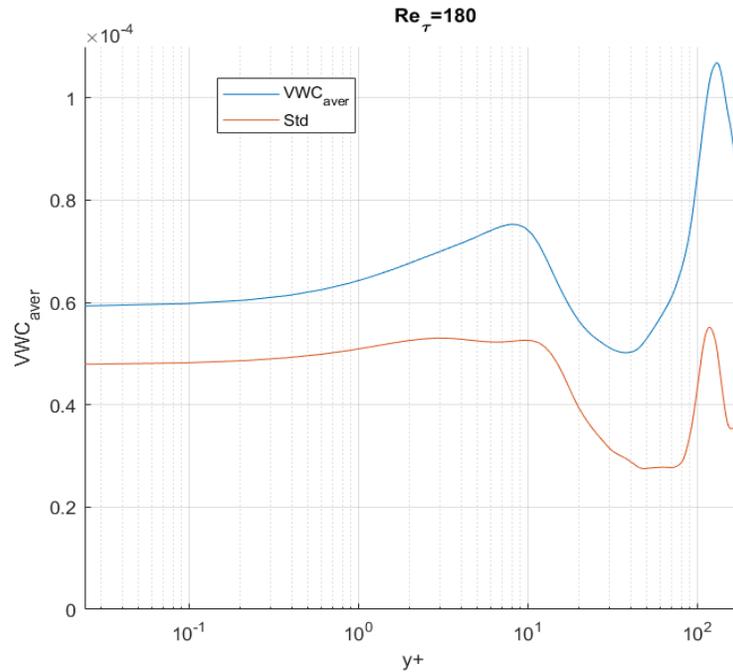


Fig.4.7  $VWC$  media e deviazione standard in funzione di  $y^+$  per rete per  $Re_\tau = 180$  mediate tra le due metà del canale

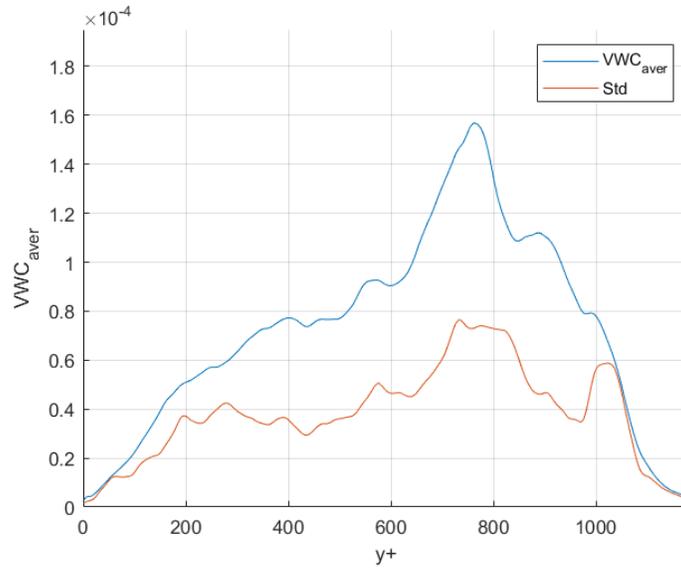


Fig.4.8  $VWC$  media e deviazione standard in funzione di  $y^+$  per rete  $Re_\tau = 590$  , senza mediare le due metà del canale per verificare la simmetria

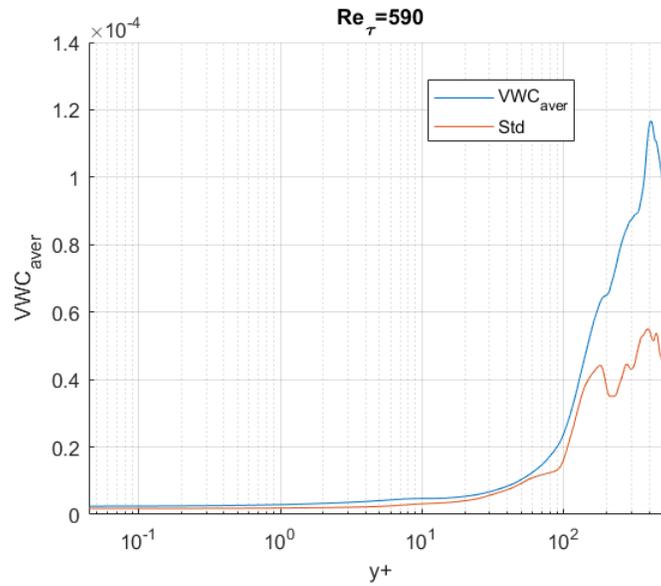


Fig.4.9  $VWC$  media e deviazione standard in funzione di  $y^+$  per rete  $Re_\tau = 590$  , mediando le due metà del canale

Per  $Re_\tau = 180$  i massimi locali di  $VWC$  media si hanno per valori di  $y^+ \approx 10$  e  $y^+ \approx 120$ , mentre per  $Re_\tau = 590$  per  $y^+ \approx 400$ ,  $y^+ \approx 570$ ,  $y^+ \approx 780$ ,  $y^+ \approx 840$ .

Per quanto riguarda la deviazione standard, a  $Re_\tau = 180$  i massimi locali sono a  $3 \lesssim y^+ \lesssim 10$  e  $y^+ \approx 120$ , che sono valori pressoché identici a quelli dei massimi della  $VWC$  media. Pertanto i nodi  $H - VWC$  aumentano di più la variabilità dei valori di  $VWC$ . Discorso analogo vale anche per entrambe le reti a  $Re_\tau = 590$ , dove i picchi di deviazione standard coincidono con i picchi di  $VWC$  media.

In un secondo momento si è passati all'analisi sul vicinato, ed inizialmente sul primo vicinato, indicato come  $\Gamma_i^1$ . Per questo tipo di analisi è importante capire dove sono i vicini di un nodo*i* nel dominio, in modo da capire se è presente una qualche organizzazione spaziale. In particolare, a tal scopo, del primo vicinato si è calcolato il numero di regioni spazialmente connesse che ogni nodo forma coi suoi primi vicini per ogni valore di  $y^+$  fissato. Come nel caso descritto in precedenza a  $Re_\tau = 590$  si è mediato il valore per ogni singolo piano e poi per le due metà del canale (Fig. 4.10-12). Si ricorda che la regione viene definita come un insieme di nodi geometricamente connessi, dove un nodo appartiene alla stessa regione se ha distanza di griglia massima unitaria in ogni direzione Cartesiana da un altro nodo della stessa regione.

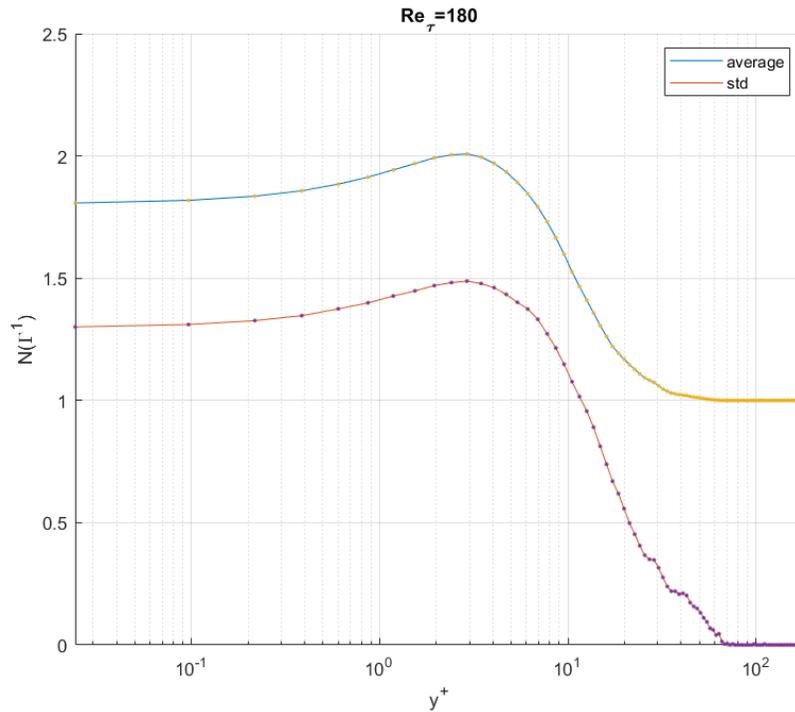


Fig.4.10 Media e deviazione standard del numero di regioni del primo vicinato  $N(\Gamma^1)$  in funzione di  $y^+$  per la rete a  $Re_\tau = 180$

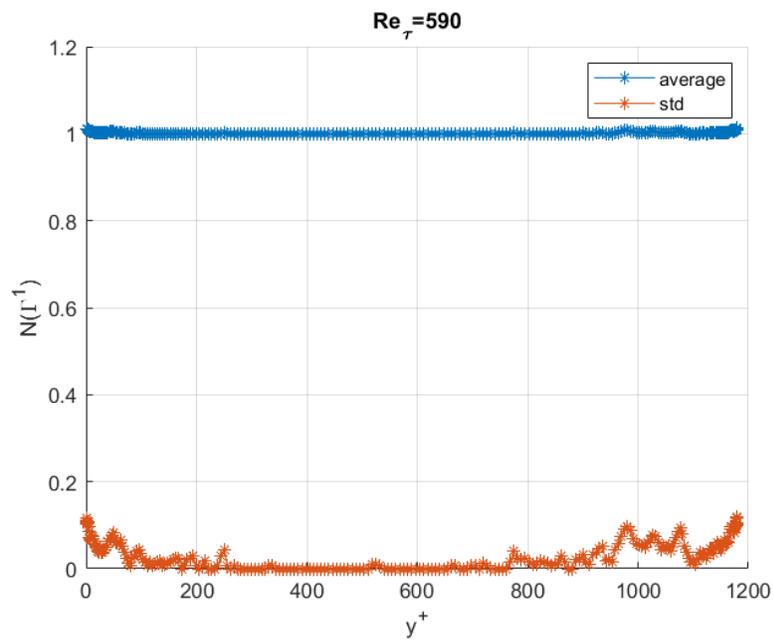


Fig.4.11 Media e deviazione standard del numero di regioni del primo vicinato  $N(\Gamma^1)$  in funzione di  $y^+$  per la rete a  $Re_\tau = 590$ , su tutta l'altezza del canale

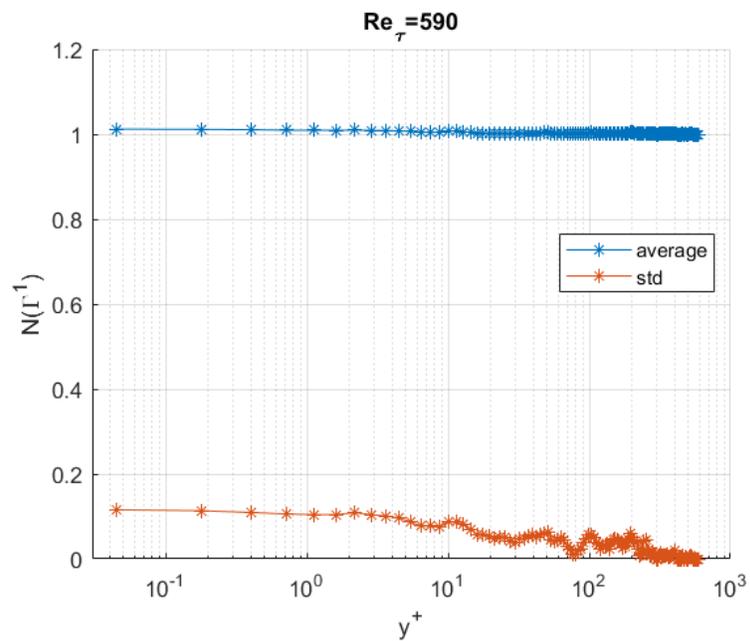


Fig.4.12 Media e deviazione standard del numero di regioni del primo vicinato  $N(\Gamma^1)$  in funzione di  $y^+$  per la rete a  $Re_\tau = 590$ , mediando le due metà del canale

Dalle figure precedenti 4.10 e 4.12 si può notare che a  $Re_\tau = 180$  i primi vicini dei nodi vicino a parete tendono ad avere più regioni, mentre vicino al centro del canale tendono ad averne solo una, invece a  $Re_\tau = 590$  il numero di regioni rimane pressoché invariato al variare di  $y^+$ , attestandosi sempre attorno all'unità, mostrando quindi un comportamento differente dal caso precedente. Questo infatti può essere indice di mancanza, o di quantità molto ridotta, di teleconnection, quindi di collegamenti di lungo raggio tra diverse zone del canale. Proprio per andare a investigare sulla presenza di legami a lungo raggio si è valutata la probabilità che ha ogni nodo ad una fissata  $y^+$  di avere come primo vicino un nodo ad una certa  $y^+$ . (Fig. 4.13 e Fig. 4.14)

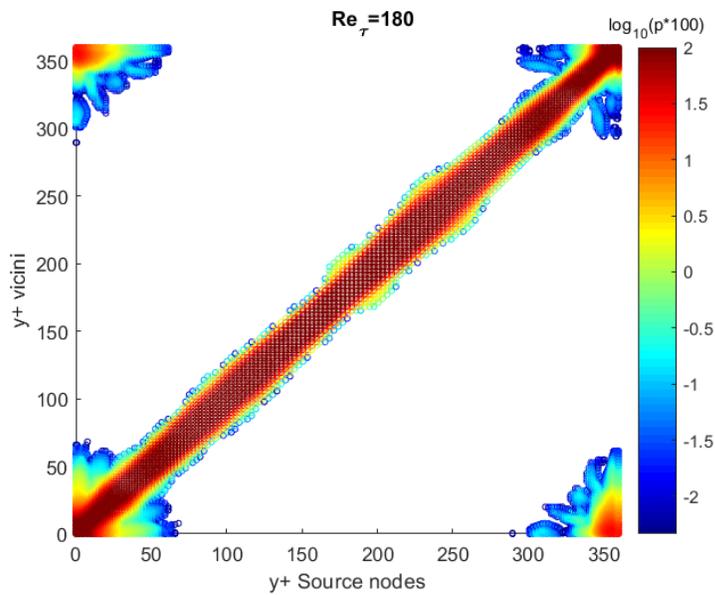


Fig.4.13 Probabilità che un nodo ad una data  $y^+$  sia collegato con un nodo ad un altro valore di  $y^+$  rete  $Re_\tau = 180$

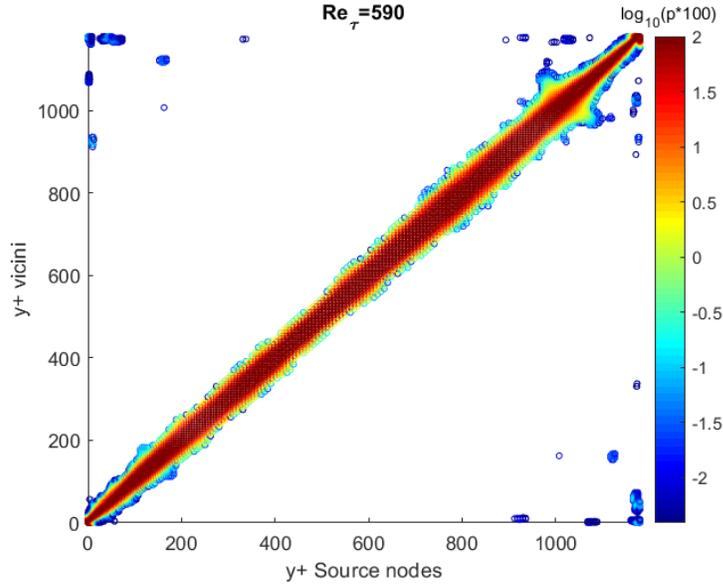


Fig.4.14 Probabilità che un nodo ad una data  $y^+$  sia collegato con un nodo ad un altro valore di  $y^+$  rete  $Re_\tau = 590$

Per qualunque valore di  $y^+$  i nodi tendono ad avere primi vicini in prossimità, come dimostra la diagonale, ma si hanno anche vicini in prossimità dell'altra parete. Per  $Re_\tau = 180$  questo avviene solo fino ad una  $y^+ = 70$ , mostrando come ci siano solo collegamenti parete-parete e centro-centro. Anche a  $Re_\tau = 590$  sono presenti collegamenti parete-parete, anche in zone più centrali del canale (fino a  $y^+ \approx 400$  e da  $y^+ \approx 900$ ), per quanto abbiano una probabilità inferiore e comunque numericamente inferiori al caso precedente. Dalla definizione di autocorrelazione spaziale non sorprende che qualche primo vicino di un nodo  $i$  sia vicino ad  $i$ , formando la regione short-range  $R_S$ , che nel centro del canale costituisce, rispettivamente per le due reti, tutto il primo vicinato o la quasi totalità. Quello che emerge di interessante e non scontato da questa analisi è la presenza di legami di lungo raggio, soprattutto tra parete e parete, che in analogia con le analisi climatiche, come descritto in sezione 2.4, prendono il nome di *teleconnections*, e possono essere interpretate come interazioni degli strati superiori con quelli inferiori (outer-layer e regioni di parete). Di solito queste sono presenti appunto solo tra le due pareti e rivelano una risposta analoga delle due regioni vicino a parete alle strutture di larga scala, mentre non si trovano tra gli strati interni e le regioni esterne in quanto la dinamica tra gli strati è molto differente (cfr, [7]).

#### 4.2.2 Analisi dei nodi più centrali

In seguito si sono presi gli *hubs*, i nodi ad alta  $VWC$ . Per comprenderne la loro distribuzione spaziale si fornisce nelle prossime figure 4.15 e 4.16 una vista

3D dei nodi  $H - VWC$  per le due reti, numerati progressivamente a  $y^+$  media crescente

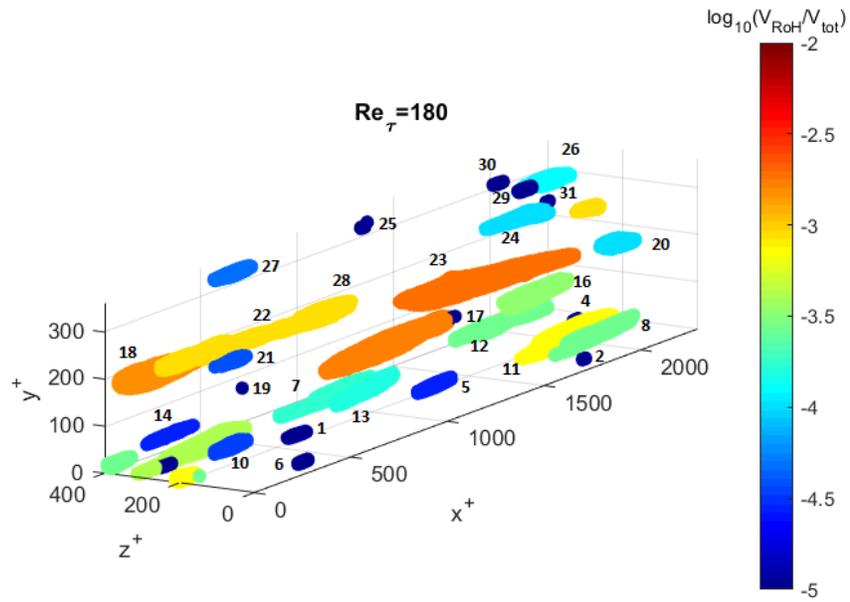


Fig.4.15 RoHs (regioni degli hub) per la rete a  $Re_{\tau} = 180$ . I colori in figura indicano la percentuale di volume occupata dalla singola regione sul volume totale.

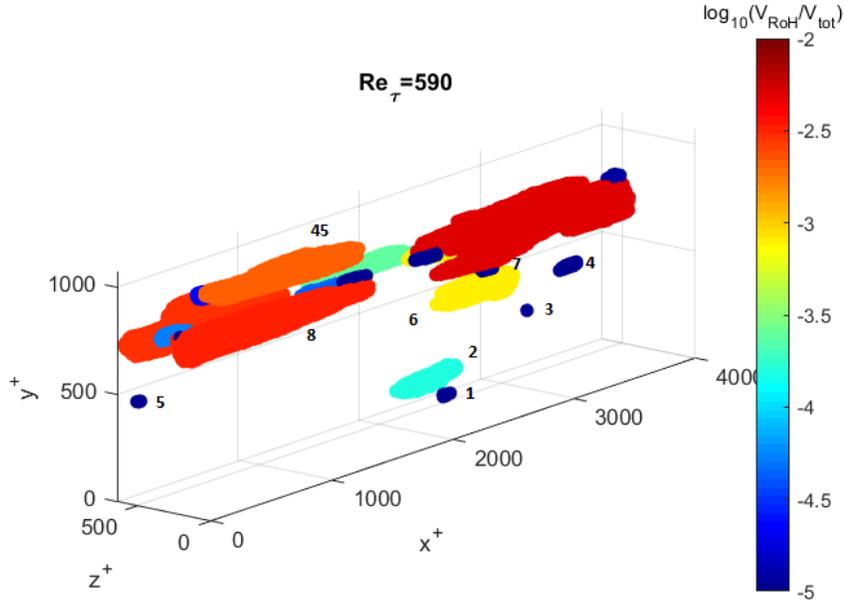


Fig.4.16 RoHs (regioni degli hub) per la rete a  $Re_\tau = 590$ . I colori in figura indicano la percentuale di volume occupata dalla singola regione sul volume totale.

Ne emerge che per tutte le reti i nodi fortemente connessi tendono a raggrupparsi in regioni anisotrope, allungate lungo l'asse  $x$ , indipendentemente dalla coordinata  $y^+$ , con allungamenti considerevoli dell'ordine di  $10^3 x^+$ . A  $Re_\tau = 180$  si hanno 31 regioni, nel caso a  $Re_\tau = 590$  45 regioni. Queste regioni sono chiamate regioni degli hubs (RoHs) e i nodi all'interno di tali regioni non sono necessariamente connessi, ma soddisfano solo un vincolo geometrico. La presenza di grosse RoHs a valori di  $y^+$  simile a quella dei picchi locali di  $VWC$ , dimostra proprio come siano gli *hubs* i responsabili di tali picchi.

Inoltre per le due reti si riportano i primi vicini di due coppie di nodi ad alta degree e bassa degree poste vicino alla parete, indicate con la lettera  $w$  e al centro del canale, indicate con la lettera  $c$ . Le coordinate dei nodi selezionati di cui si riporta il primo vicinato vengono riportate in tabella 1 e 2:

Nodo	$x^+$	$y^+$	$z^+$
H-VWC-w1	1919.7	3.46	387.39
H-VWC-c	173.09	180	334.32
L-H-VWC-w1	1369	3.46	267.99
L-H-VWC-c	1117.2	180	336.98

Tab.1 Coordinate nodi di cui si riporta il primo vicinato per  $Re_\tau = 180$

Nodo	$x^+$	$y^+$	$z^+$
H-VWC-w1	1989	193.78	57.96
H-VWC-c	34565	855.27	217.35
L-H-VWC-w1	3.7	2.84	516.81
L-H-VWC-c	3321	626.18	72.45

Tab.2 Coordinate nodi di cui si riporta il primo vicinato per  $Re_\tau = 590$

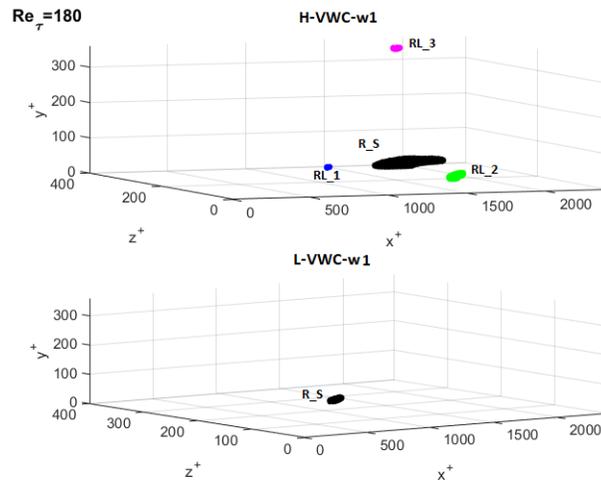


Fig.4.17 Primo vicinato per la coppia di nodi vicina a parete ad alta e bassa degree  $Re_\tau = 180$ . In nero sono rappresentate le regioni short contenenti i nodi connessi direttamente al nodo di partenza, in colore le regioni con i vicini di lungo raggio

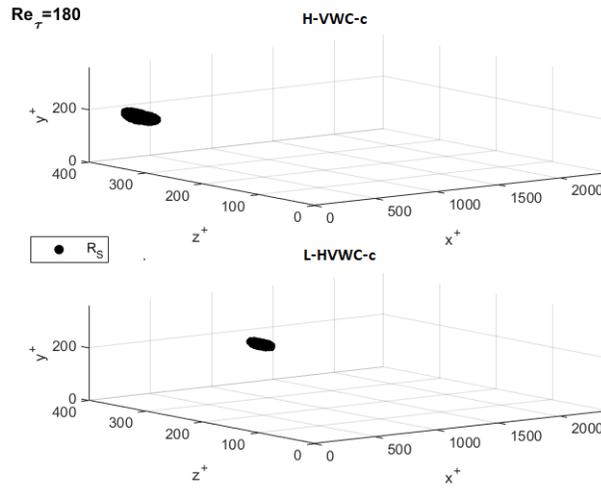


Fig.4.18 Primo vicinato per la coppia di nodi centrale ad alta e bassa degree a  $Re_\tau = 180$ . In nero sono rappresentate le regioni short contenenti i nodi connessi direttamente al nodo di partenza.

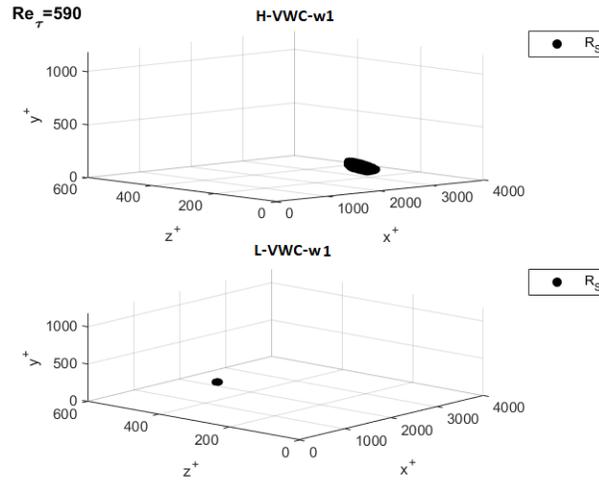


Fig. 4.19 Primo vicinato per la coppia di nodi vicina a parete ad alta e bassa degree a  $Re_\tau = 590$ . In nero sono rappresentate le regioni short contenenti i nodi connessi direttamente al nodo di partenza.

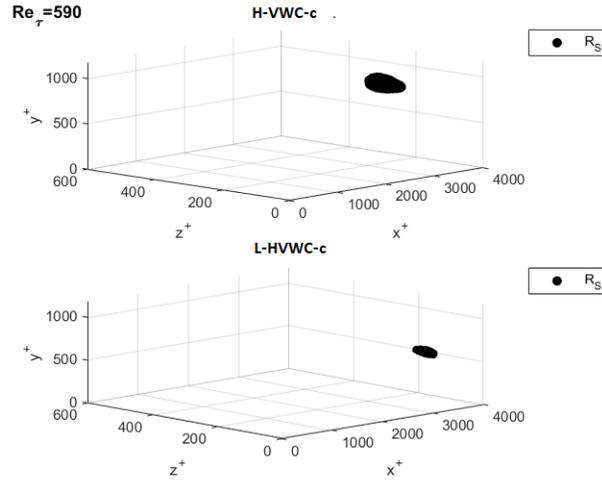


Fig. 4.20 Primo vicinato per la coppia di nodi centrale ad alta e bassa degree a  $Re_\tau = 590$ . In nero sono rappresentate le regioni short contenenti i nodi connessi direttamente al nodo di partenza.

A  $Re_\tau = 180$  i vicinati centrali, sia a bassa degree che ad alta degree sono costituiti da un'unica regione, la *short region*, isotropa, mentre per quanto riguarda i nodi vicino a parete ad alta degree vi sono 3 regioni distanti dal nodo di partenza, allungate in direzione  $x$ , situate su entrambe le pareti, mostrando la presenza delle teleconnection. A  $Re_\tau = 590$  invece i primi vicinati sono quasi tutti costituiti da un'unica regione, quindi il fatto che anche nei nodi ad alta *VWC* ci sia un'unica regione non stupisce. In base alla definizione data di nodo hub, quello piú vicino a parete, rappresentato nella figura 4.18 in alto a sinistra è comunque ad  $y^+ \approx 60$ , mostrando come in questa rete il fenomeno delle teleconnection non è così evidente come nel caso a  $Re_\tau = 180$  e comunque non coinvolge hub vicino a parete. Tuttavia si possono continuare a distinguere facilmente le zone ad alta degree perché occupano una frazione di volume ben maggiore rispetto ad un nodo in posizione simile a bassa degree.

In un secondo momento si è deciso di costruire le figure 4.5 e 4.6 secondo un altro criterio, ovvero si è andati a calcolare il 99° percentile per ogni  $y^+$ . Ne consegue che il valore della  $P(VWC)$  di ogni nodo, che ci fornisce l'informazione se il nodo è un nodo  $H - VWC$ , viene calcolato mediando solo tra i nodi alla stessa  $y^+$ , quindi i nodi che erano hubs per la rete considerata nella sua globalità non è detto che lo siano anche in questo caso. Infatti per prima cosa si riportano in fig. 4.20 e fig. 4.21 gli andamenti della  $P(VWC)$  per ogni  $y^+$ . La linea piú spesso indica l'andamento riportato nei grafici precedenti in fig. 4.5 e 4.6.

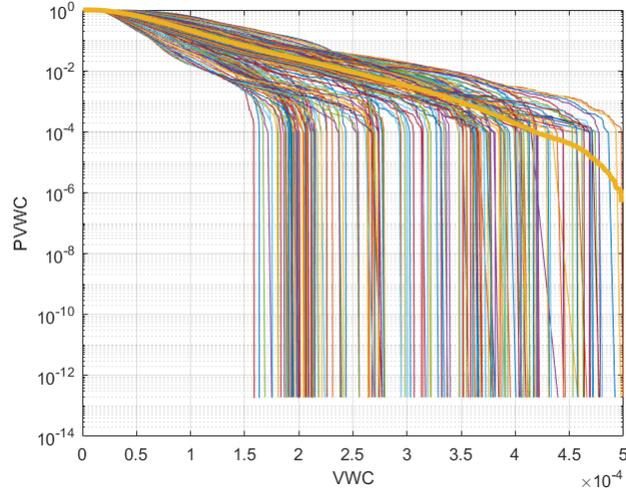


Fig.4.21  $P(WC)(y^+)$  rete  $Re_\tau = 180$ . Le curve indicano l'andamento della  $P(WC)$  calcolata per ogni piano  $y^+$  costante. La linea piú spessa indica la  $P(WC)$  globale.

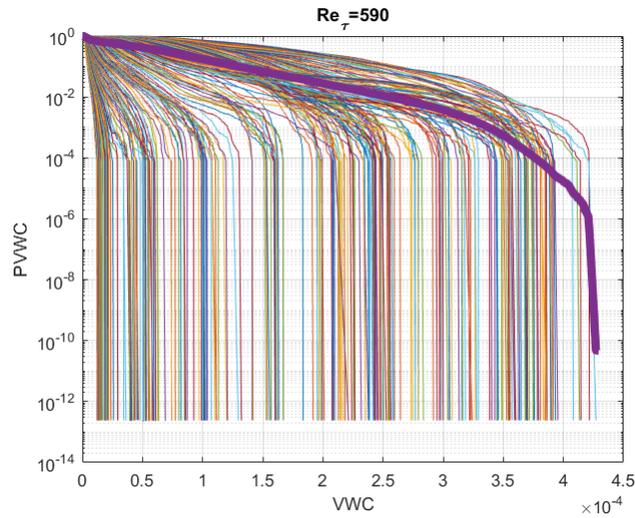


Fig.4.22  $P(WC)(y^+)$  rete a  $Re_\tau = 590$ . Le curve indicano l'andamento della  $P(WC)$  calcolata per ogni piano  $y^+$  costante. La linea piú spessa indica la  $P(WC)$  globale.

Successivamente, in fig. 4.23 e 4.24 sono mostrate le RoHs formate da hubs individuate con  $P(WC)(y^+)$

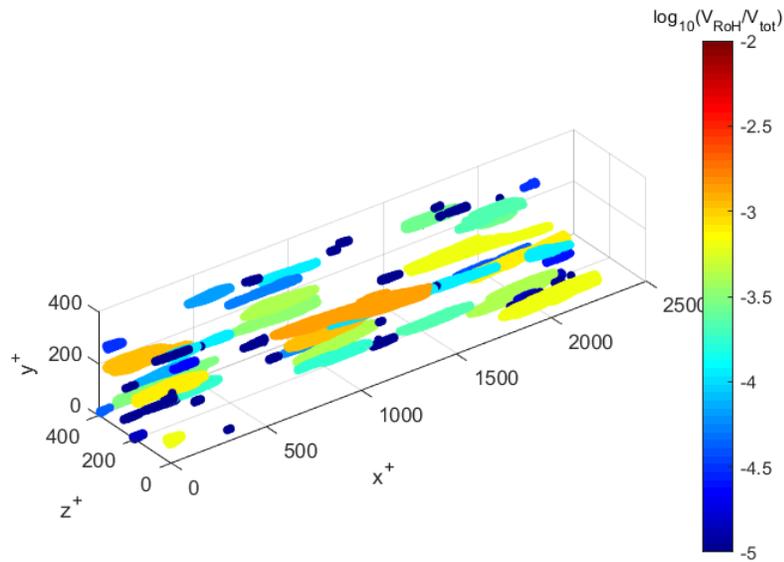


Fig. 4.23 ROH formate da hubs individuate con  $P(VWC)(y^+)$  rete  $Re_\tau = 180$ . Il colore indica la frazione di volume occupata sul totale dalla singola RoH.

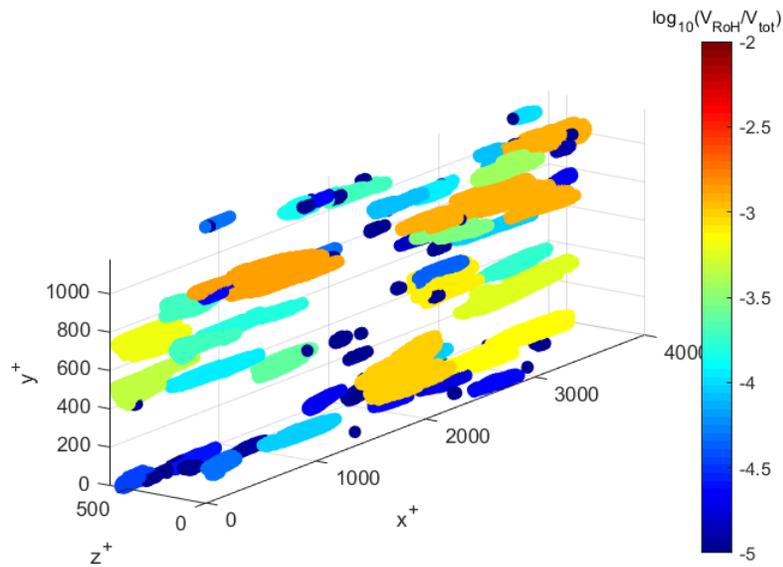


Fig.4.24 ROH formate da hubs individuate con  $P(VWC)(y^+)$  rete  $Re_\tau = 590$ . Il colore indica la frazione di volume occupata sul totale dalla singola RoH.

A  $Re_\tau = 180$  si hanno 65 regioni, nel caso a  $Re_\tau = 590$  109. Il numero di regioni è più che raddoppiato rispetto al caso in cui la P(VWC) era calcolata globalmente, proprio perché valutando gli hub ad ogni piano, sono presenti un numero maggiore di hub o comunque sono distribuiti maggiormente in tutta l'altezza del canale. Nelle prossime figure 4.25 e 4.26 viene riportata l'estensione spaziale di queste Roh nelle tre direzioni cartesiane x,y,z in funzione della coordinata pesata y del baricentro, definita come  $y_B^+ = \sum(y_i^+ V_i / V_{tot}) / N(Roh)$ , con  $i \in Roh$  e  $N(Roh)$  il numero di nodi in ciascuna Roh. Le dimensioni lungo y e z sono normalizzate rispetto alla x, poiché quest'ultima è la dimensione più rilevante delle Roh.

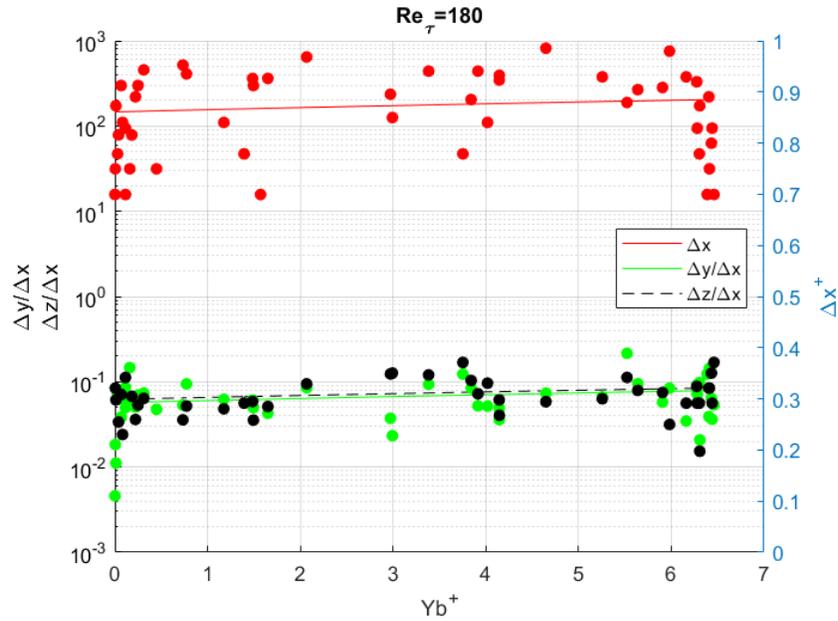


Fig.4.25 In questo grafico è riportata l'estensione delle Roh a  $Re_\tau = 180$  in tutte e tre le sue dimensioni. Il  $\Delta x$  non è normalizzato e ha asse delle ordinate a destra, mentre  $\Delta y$  e il  $\Delta z$  sono normalizzati con il  $\Delta x$  ed hanno asse delle ordinate a sinistra.

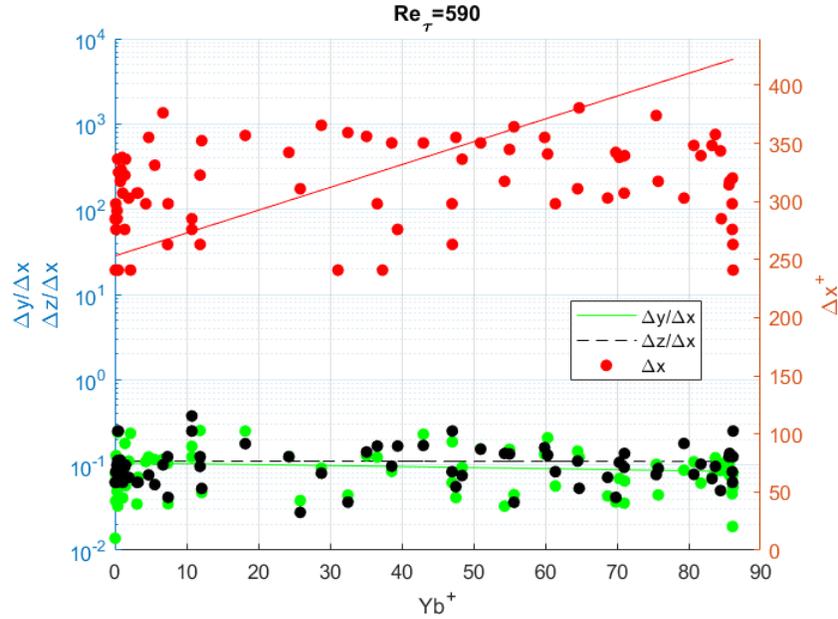


Fig.4.26 In questo grafico è riportata l'estensione delle RoH a  $Re_\tau = 590$  in tutte e tre le sue dimensioni. Il  $\Delta x$  non è normalizzato e ha asse delle ordinate a destra, mentre  $\Delta y$  e il  $\Delta z$  sono normalizzati con il  $\Delta x$  ed hanno asse delle ordinate a sinistra.

Da queste ultime figure si evidenzia come le RoH si estendano principalmente in direzione  $x$ , infatti lungo le direzioni  $y$  e  $z$  l'estensione è almeno un ordine di grandezza inferiore. I dati sono poi stati interpolati con un'approssimazione del primo ordine, in modo da capire la dipendenza dalla  $y_B^+$ . Questo valore medio è pressoché costante per ogni  $y_B^+$ , anche si hanno degli scostamenti significativi da questo valore, soprattutto per quanto riguarda la  $\Delta x$ .

Infine per le due reti, in fig. 4.27,4.28,4.29,4.30 viene riportata la probabilità di avere una certa dimensione di RoH al variare di  $y^+$  e  $\Delta x^+$ , e nelle figure successive al variare di  $y^+$  e  $\Delta z^+$ .

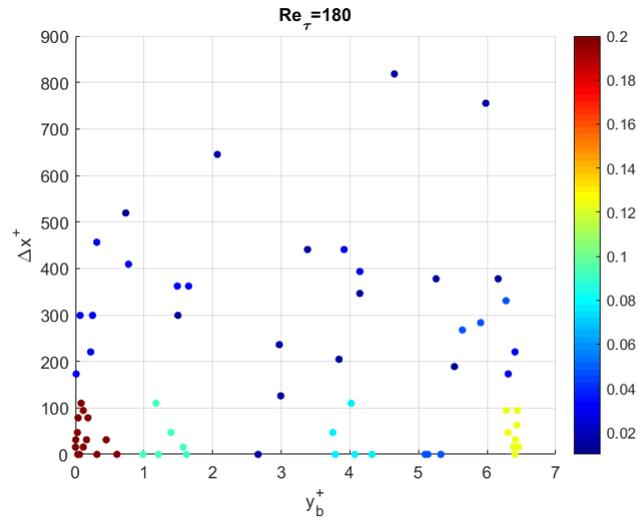


Fig.4.27 Joint probability (PDF 2d) di una certa dimensione di RoH al variare di  $y^+$  e  $\Delta x^+$ ,  $Re_\tau=180$

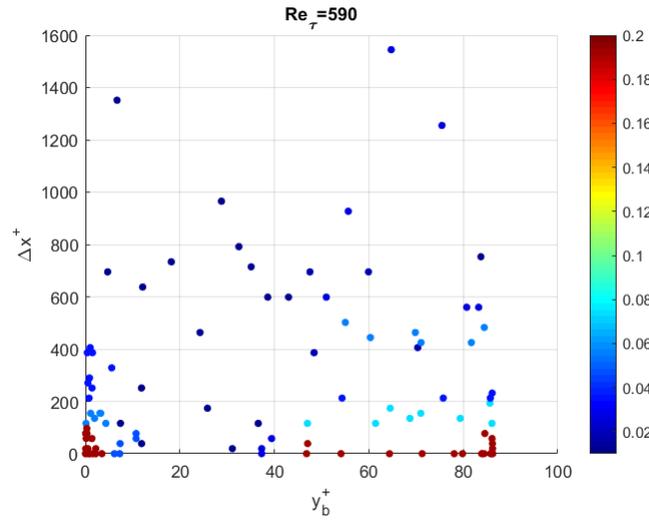


Fig4.28 Joint probability (PDF 2d) di una certa dimensione di RoH al variare di  $y^+$  e  $\Delta x^+$ ,  $Re_\tau=590$

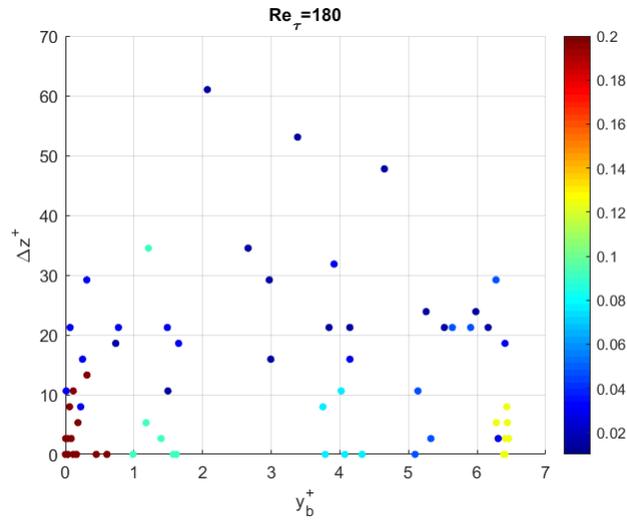


Fig.4.29 Joint probability (PDF 2d) di una certa dimensione di RoH al variare di  $y^+$  e  $\Delta z^+$ ,  $Re_\tau=180$

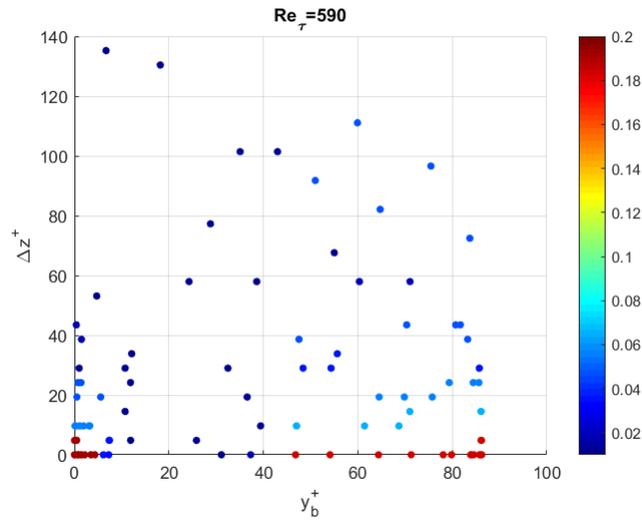


Fig.4.30 Joint probability (PDF 2d) di una certa dimensione di RoH al variare di  $y^+$  e  $\Delta z^+$ ,  $Re_\tau=590$

Dalle precedenti quattro figure, oltre a verificare quanto detto nel paragrafo precedente, emerge che la maggior parte delle RoH ha un'estensione spaziale relativamente limitata, infatti tutti i punti a probabilità maggiore sono vicini all'asse delle ascisse e a  $Re_\tau = 180$  si concentrano vicino a parte, mentre a  $Re_\tau = 590$  fino a  $y^+ \approx 90$ .

### 4.3 Analisi locale

Su scala locale si sono analizzati i vicinati cumulativi  $\Gamma^{N,c}$ , per comprendere come l'informazione si muova attraverso il dominio ad esempio da un nodo  $i$  ad un nodo  $k$  non collegati, ma entrambi collegati ad un terzo nodo  $j$ . Infine per la sola rete a  $Re_\tau = 180$  viene svolta l'analisi degli shortest path in modo da comprendere come l'assenza di link di lungo raggio influenzi la diffusione dell'informazione.

#### 4.3.1 Analisi vicinati successivi

Per questa analisi si sono presi per le due reti 3 coppie di nodi, una vicina ad una parete, una vicina all'altra parete e l'altra ancora al centro del canale, indicati rispettivamente come  $(w1, w2, c)$ . In ogni coppia vi è un nodo ad  $H - VWC$  e uno  $L - VWC$ . In questo modo si può assumere che il comportamento di tutti gli altri nodi ad  $y^+$  e  $VWC$  intermedie giaccia tra i due. I vicinati successivi hanno un comportamento che dipende da molti fattori, quali il numero e la grandezza di regioni del primo vicinato del nodo sorgente e la distanza dei vicini dal nodo sorgente. Nelle figure 4.31 e 4.32 si mette in evidenza la differenza tra un nodo vicino a parete ed uno al centro del canale, riportando gli  $N$  vicinati cumulativi, con  $N = [1, 2, 3, 8, 13, 18]$ .

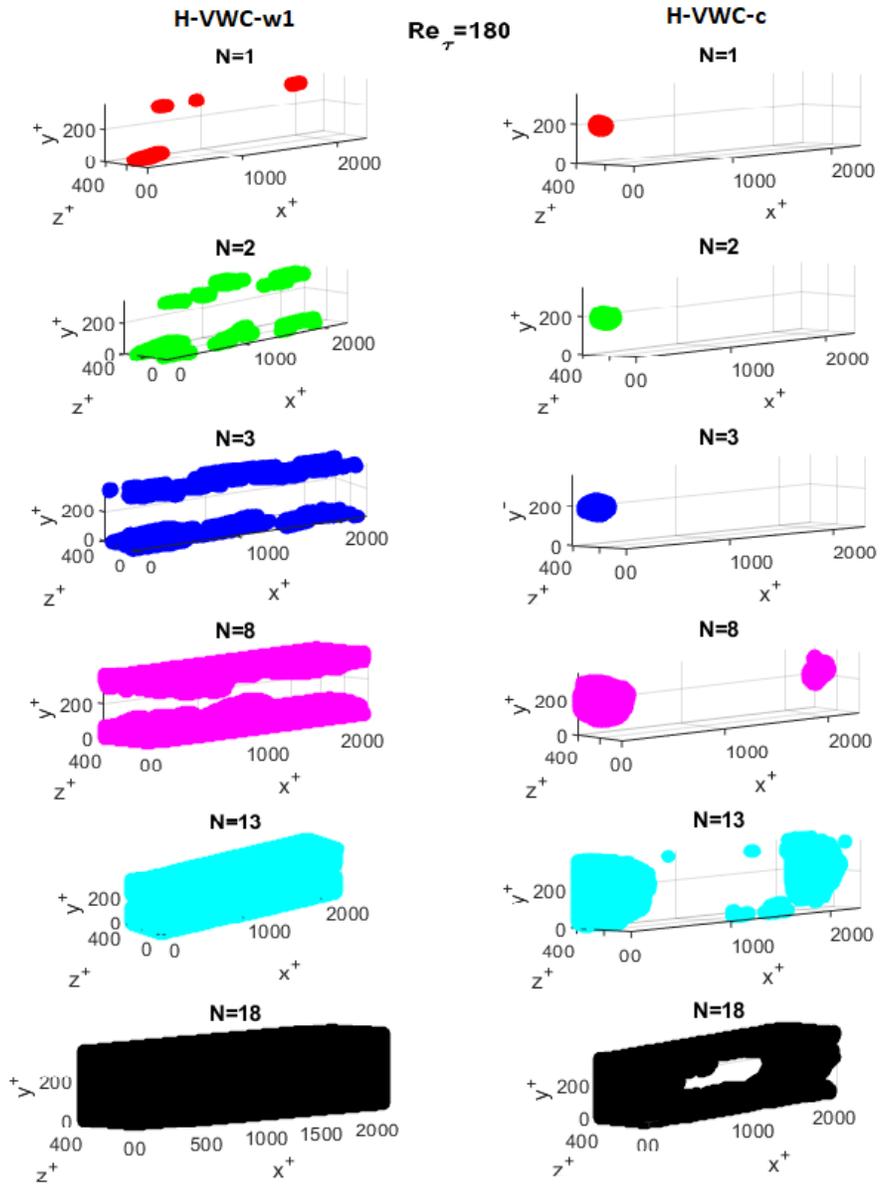


Fig.4.31 Vicinati cumulativi N-esimi per  $Re_\tau = 180$

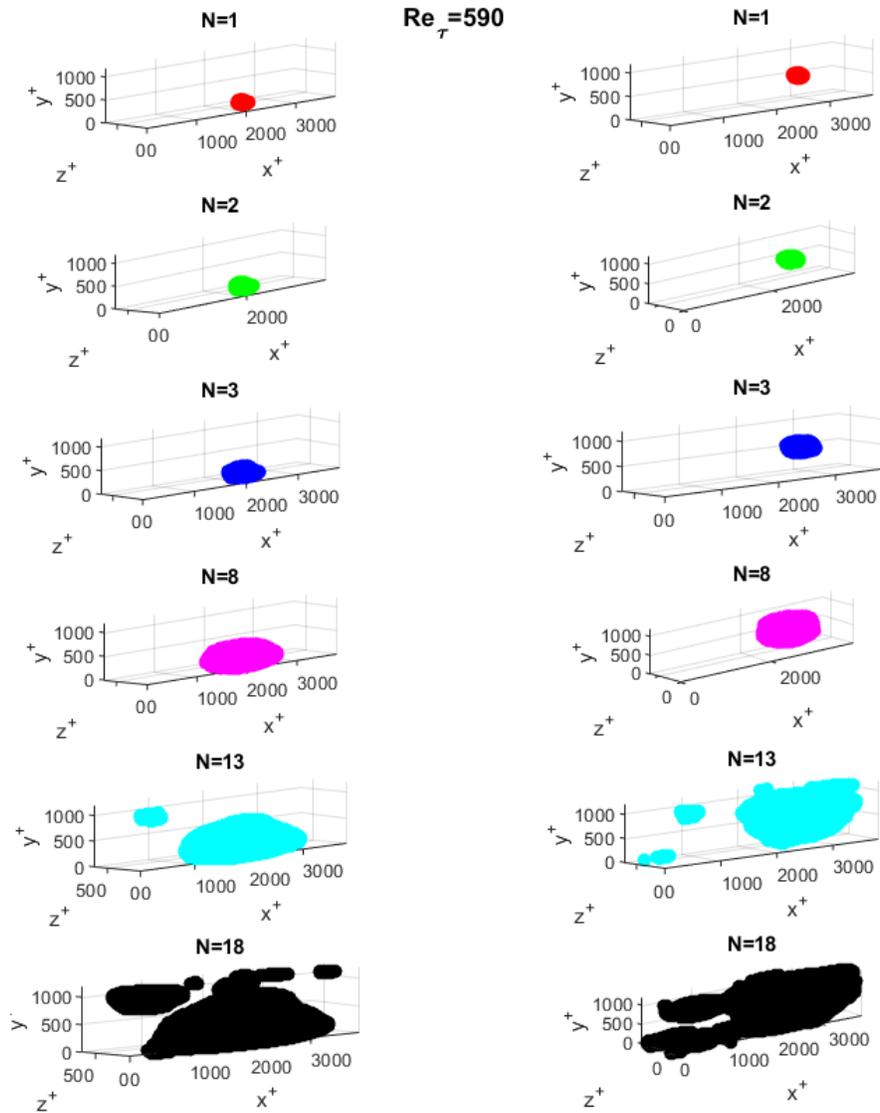


Fig.4.32 Vicinati cumulativi N-esimi per  $Re_\tau = 590$

Si può notare come a diversa  $y^+$  l'estensione spaziale dei diversi  $\Gamma^{N,c}$  sia diversa. Considerando dapprima il nodo vicino a parete si osserva che con la rete costruita a  $Re_\tau = 180$  i primi tre vicinati sono vicini ad entrambe le pareti, allungati in direzione  $x$ , mostrando la presenza di teleconnections. Poi per  $N > 3$  si inizia ad inglobare nodi a valore di  $y^+$  maggiore fino ad inglobare il centro, mostrando quindi uno spostamento progressivo del del vicinato cumulativo dalle pareti al centro del canale, implicando una grande connettività tra i nodi delle

pareti e quindi un ruolo importante delle teleconnection. Per quanto riguarda il nodo al centro del canale a  $Re_\tau = 180$  i primi vicini sono isotropi e vicini al nodo considerato (ad  $N=8$  la regione è unica poiché il dominio è periodico in direzione  $x$ ) e solo ad  $N=13$  iniziano ad essere inclusi nodi vicino a parete, che a loro volta includeranno prima tutti i nodi vicino a parete e infine gli altri nodi ad  $y^+$  maggiore. A  $Re_\tau = 590$  non ci sono differenze significative tra il nodo vicino a parete e quello al centro del canale, mostrando l'assenza di teleconnection anche nella zona vicino a parete, che comporta dunque un coinvolgimento di volume all'aumentare di  $N$  inferiore rispetto al caso a  $Re_\tau = 180$ , infatti fino ad un  $N=8$  si ha solo un ingrandimento dell'unica regione presente e iniziano a comparire regioni lontane solo a  $N=13$ . Non sorprende dunque che a  $N=18$  per entrambi i nodi la frazione di volume del vicinato cumulativo è ben lontana dall'essere la totalità del canale, come invece lo era a  $Re_\tau = 180$ .

Per quanto riguarda la frazione di volume in funzione di  $N$ , dalle figure 4.34 e 4.35 si può notare un comportamento simile per le coppie  $w1, w2$ , che aumentano più velocemente che le coppie  $c$ . Inoltre i nodi  $H - VWC$  aumentano più velocemente dei corrispondenti nodi  $L - VWC$ . Questo è dovuto all'assortatività per cui nodi a bassa  $VWC$  tendono a collegarsi con nodi a  $VWC$  simile, richiedendo dunque più step per raggiungere i nodi  $H - VWC$ , che invece tendono a connettersi più velocemente a frazioni più ampie del dominio.

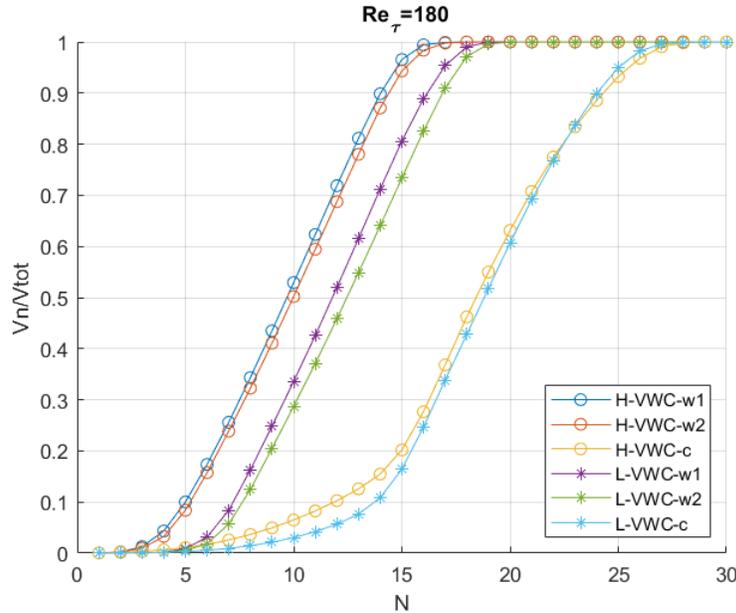


Fig. 4.34 Frazione di volume occupata dall' $N$ -esimo vicinato per 3 coppie di nodi per la rete a  $Re_\tau = 180$ , a destra quello per la rete a  $Re_\tau = 590$

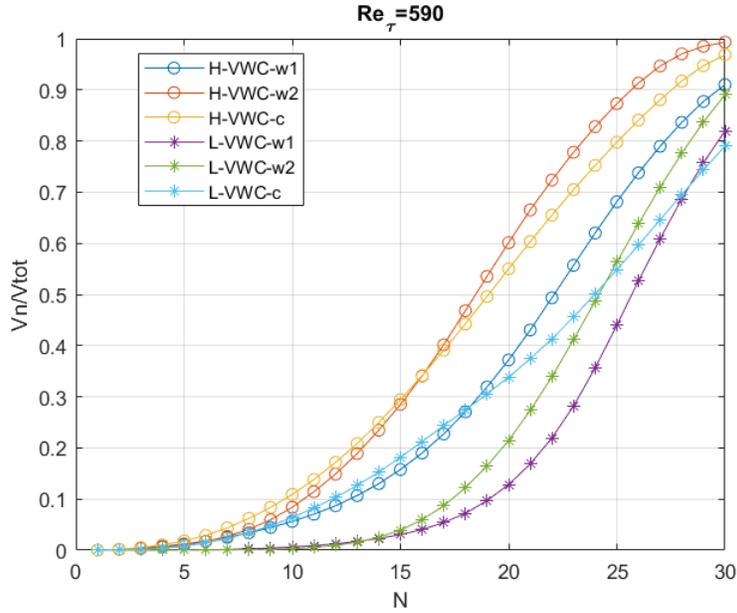


Fig. 4.35 Frazione di volume occupata dall' $N$ -esimo vicinato per 3 coppie di nodi per la rete a  $Re_\tau = 590$

Nonostante le diverse velocità di crescita dei vicini però, a valori intermedi di  $N$ , si ha una crescita quasi lineare, con pendenze simili. Questo range di  $N$  cambia a seconda della rete e della collocazione dei nodi considerati: è tra 5 e 15 per i nodi vicini a parete e tra 15 e 25 per la coppia di nodi centrale a  $Re_\tau = 180$ , mentre a  $Re_\tau = 590$  è tra 15 e 25 per tutti i nodi ad alta  $VWC$ , tra 20 e 30 per i nodi vicini a parete  $L - VWC$  e tra 10 e 30 per il nodo  $L - VWC$  al centro del canale. Dunque l' $N$ -esimo vicinato è composto in gran parte da strati piani di nodi paralleli a parete. Il fatto che ha  $Re_\tau = 590$  ad  $N=30$  non si raggiunga il volume totale neanche in un nodo ad alta  $VWC$  indica come il numero ridotto di teleconnection registrato in precedenza renda più difficoltoso il trasferimento dell'informazione nel dominio, rendendo necessario un maggior numero di passaggi intermedi perché un nodo sia collegato con tutto il resto del dominio.

### 4.3.2 Analisi degli shortest path

Per evidenziare l'importanza delle teleconnection viene svolta l'analisi degli shortest path, in cui la teleconnection viene spezzata e si valuta come i due nodi tendono a riconnettersi. Questa analisi a causa dell'elevato onere computazionale verrà presentata solamente per la rete principale a  $Re_\tau = 180$ . Con questa ultima analisi locale si esplorano dunque gli shortest path tra nodi a differente coordinata normale alla parete, ricordando che lo shortest path è il cammino di

minimo costo tra una coppia di nodi, dove la metrica per pesare i link e valutare gli shortest path è la distanza  $D_{i,j} = \sqrt{2(1 - |C_{i,j}|)}$ , quindi costo minimo significa il minimo di  $\Sigma D_{i,j}$ . Nelle figure 4.37-39 si riportano esempi di shortest path tra un nodo source vicino a parete e quattro nodi target appartenenti a quattro diverse regioni teleconnesse. Per analizzare questo tipo di shortest path ovviamente il source node deve essere vicino a parete, in quanto nella rete a  $Re_\tau = 180$  non vi sono teleconnection con nodi nella zona centrale del canale.

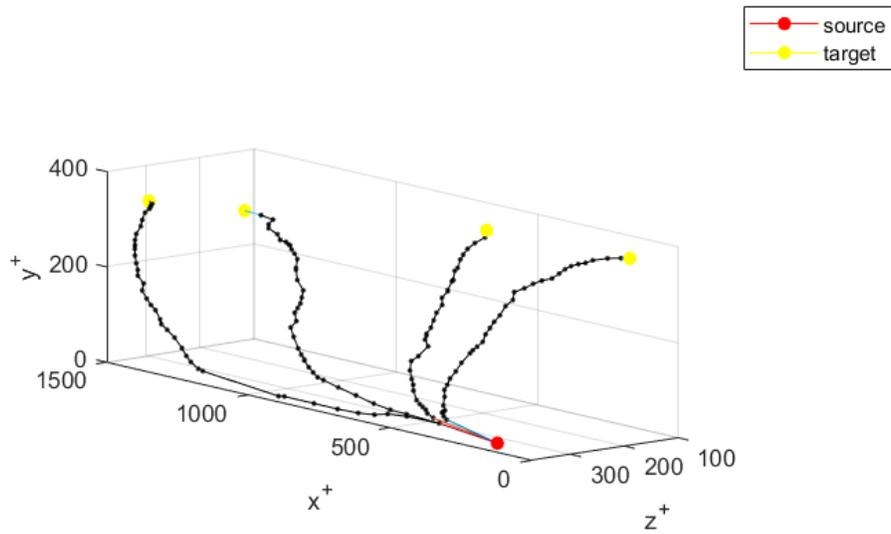


Fig.4.37 Shortest path source node  $(x^+, y^+, z^+) \approx (205, 0.39, 329)$ , end nodes  $(1133, 357.6, 310); (1400, 347.4, 347.6); (173, 352.2, 98); (630, 353.09, 124)$

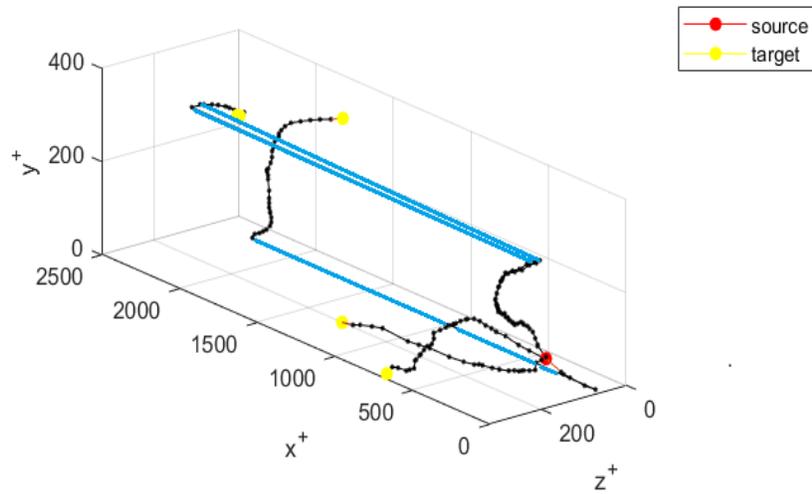


Fig.4.38 Shortest path source node  $(x^+, y^+, z^+) \approx (393, 11.54, 45)$ , end nodes  $(1274, 2.4, 204.3); (661, 12.6, 323.7); (1652, 348.46, 63.7); (1935, 351.37, 209.6); (1920, 352.25, 209.6)$ . Le linee in turchese indicano la presenza di un dominio periodico. In alto a sinistra i nodi target sono vicini al punto di sovrapporsi in questo grafico.

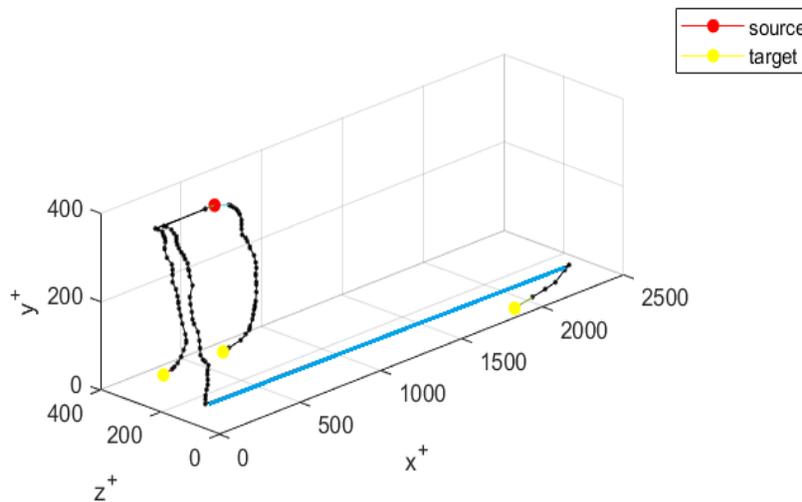


Fig.4.39 Shortest path source node  $(x^+, y^+, z^+) \approx (550.7, 359.98, 316)$ , end nodes  $(1904, 0.02, 42); (677, 0.1, 355); (220, 25.7, 307.8)$ . Anche qui la linea turchese nella parte inferiore indica la presenza di un dominio periodico.

I punti tra il nodo 'source' e gli 'end nodes' sono i nodi intermedi.

Nel primo caso (fig. 4.37) le distanze tra source e rispettivi end nodes sono di [18.87 19.61 17.94 16.18], nel secondo (fig. 4.38) sono [11.97 15.65 19.87 19.16

19.15] e nell'ultimo caso (fig. 4.39) le distanze sono di [21.99 15.92 14.81]. Il numero di link tra source e rispettivi end nodes nel primo caso è di [38,39,36,34], nel secondo caso di [24,33,39,39,37] e nell'ultimo [44,35,31]. Questi cammini rappresentano quelli più brevi nel caso in cui le teleconnection non fossero presenti. Rimuovendo i link di lungo raggio l'informazione cinematica dovrebbe passare attraverso numerosi link di corto raggio, mostrando come la presenza di teleconnection aumenti la diffusione di informazioni nel dominio. Le linee turchesi tra nodi agli estremi opposti del dominio sono anch'essi collegamenti di breve raggio, data la periodicità del dominio in direzione  $x$ . Nel caso in figura 4.38 ci sono due end nodes molto vicini (infatti sono indistinguibili) e si ottengono due path pressoché sovrapponibili. Come ultima analisi, sempre riguardo gli shortest path, si riportano gli andamenti nelle tre direzioni cartesiane delle distanze tra ogni singolo nodo di ogni path con il suo rispettivo nodo source. Per confrontare path diversi si normalizza il passo in ascissa con il numero totale di passi in quel determinato path ( $p/N_p$ ) e le distanze sono normalizzate con la distanza tra target e source node di quel path (ad esempio  $dp_x = \frac{|x_p - x_0|}{|x_{N_p} - x_0|}$ , con  $x_0$  coordinata x del nodo source,  $x_{N_p}$  coordinata x dell'end node,  $x_p$  coordinata x del nodo al passo  $p$ ). In questo modo si ottengono ascisse comprese tra 0 e 1 ed ordinate che hanno primo valore 0 ed ultimo pari a 1, anche se queste possono assumere valori maggiori nei punti intermedi.

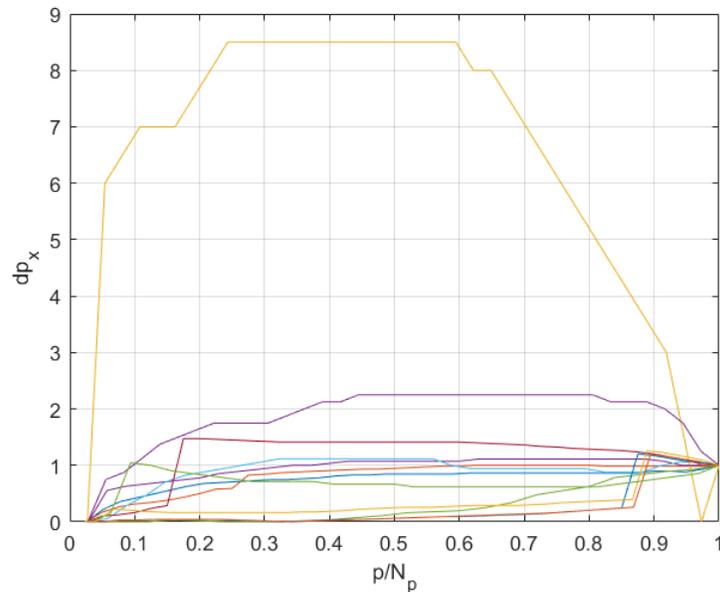


Fig. 4.40 Distanza in direzione x tra nodi del path e source node normalizzata in funzione del passo normalizzato

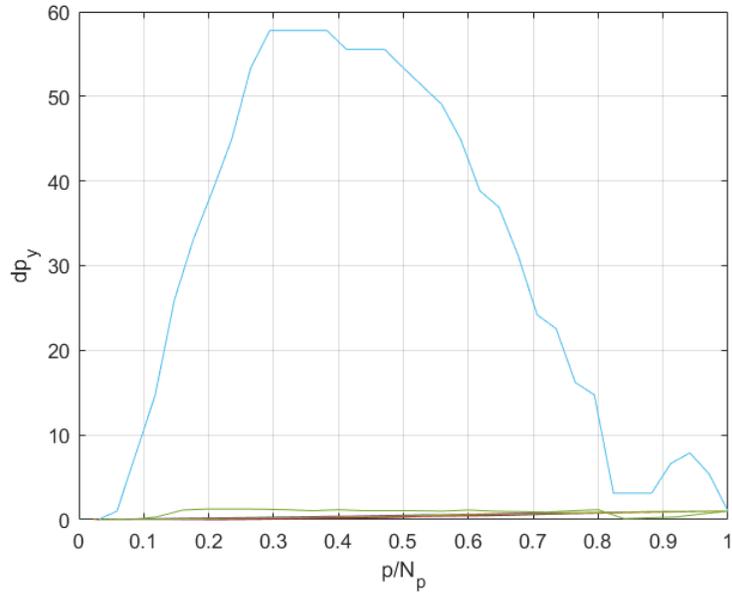


Fig. 4.41 Distanza in direzione y tra nodi del path e source node normalizzata in funzione del passo normalizzato

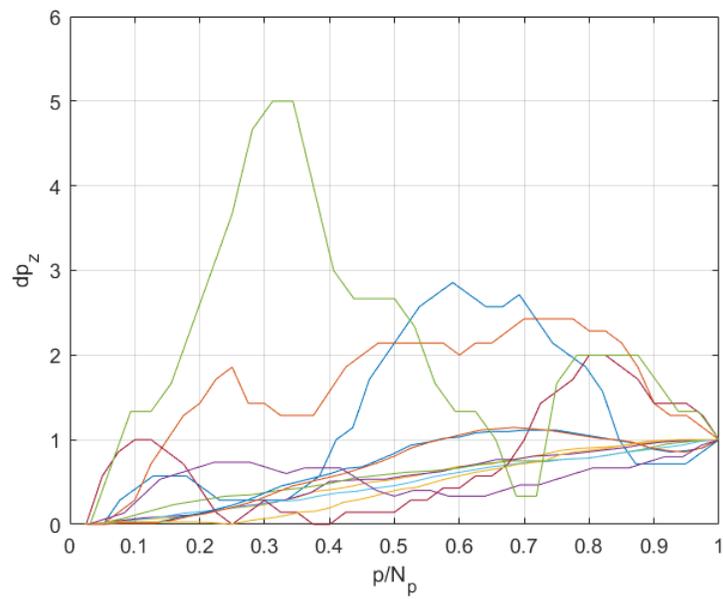


Fig. 4.42 Distanza in direzione z tra nodi del path e source node normalizzata in funzione del passo normalizzato

Considerando che allo stesso colore corrisponde lo stesso path, si può dedurre dalle immagini appena mostrate che per ogni path e per ogni direzione, anche per lo stesso path, gli andamenti delle distanze normalizzate sono differenti, con numerose crescite e decrescite, anche lontane dal valore unitario da raggiungere. In valore assoluto le distanze normalizzate massime sono dell'ordine di poche unità, salvo due casi (curva gialla fig.4.40 e azzurra in fig. 4.41) in cui gli scostamenti sono rispettivamente dell'ordine delle decine e delle centinaia.

## 5 Analisi parametrica

In questo capitolo viene svolta un'analisi parametrica in modo da evidenziare come alcuni parametri scelti in precedenza, in particolare step temporale e valore di soglia con cui è stata costruita la rete, influenzano alcuni dei risultati più rilevanti dell'analisi globale e di mesoscala. Data la funzione esemplificativa di questo capitolo, verranno riportati risultati solamente per  $Re_\tau = 180$ .

### 5.1 Sensitività alla finestra temporale

Per osservare la dipendenza dei risultati ottenuti in precedenza alla finestra temporale  $T$ , si sono ripetute le analisi con diversi valori di  $T$ , per la rete a  $Re_\tau = 180$ , pari a 10000, 7500, 2500. Il valore usato nelle precedenti analisi era  $T=5000$ .

Come prima cosa, in fig. 5.1.a viene riportato l'andamento delle PDF.

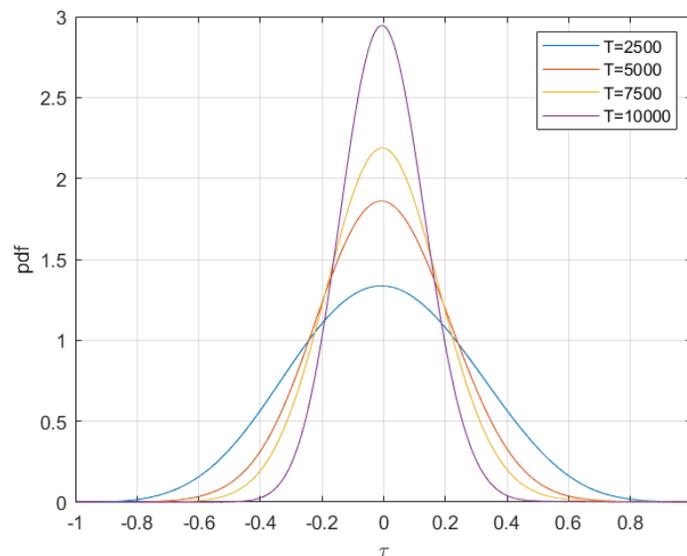


Fig.5.1.a PDF dei coefficienti di correlazione al variare di T

In queste reti il valore di picco aumenta all'aumentare di  $T$ . Tuttavia, visto che la soglia impiegata  $\tau = 0.85$  è ben lontana dal picco è interessante osservare che cosa succede nelle code (fig. 5.1.b).

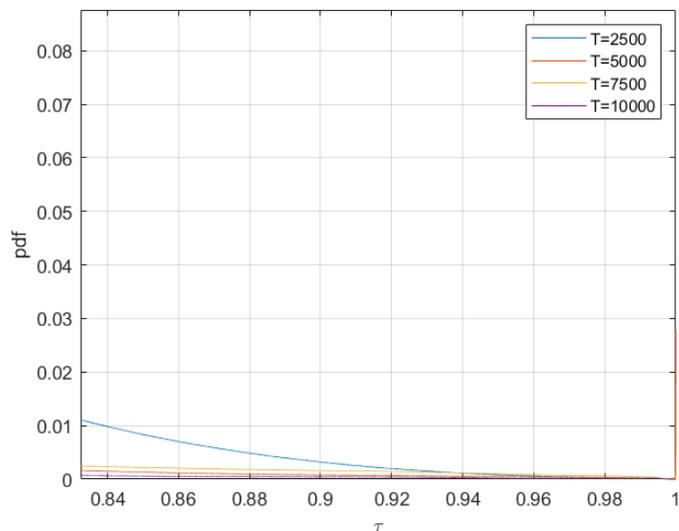


Fig.5.1.b Particolare della PDF dei coefficienti di correlazione al variare di T, per valori di soglia elevati

Nelle code si può osservare come l'ordine è invertito rispetto al picco, con PDF decrescente all'aumentare della finestra temporale

### 5.1.1 Analisi globale

L'analisi globale, svolta per un valore di soglia  $\tau = 0.85$  prevede dapprima lo studio sul comportamento assortativo della rete, quindi la tendenza dei nodi di avere come primi vicini nodi con  $VWC$  simile. Si riportano dunque nelle figure 5.2, 5.3, 5.4 i 3 grafici della  $VWC_{nn}$  in funzione di  $VWC$  per ogni diverso T ed infine un grafico comparativo in fig. 5.5.

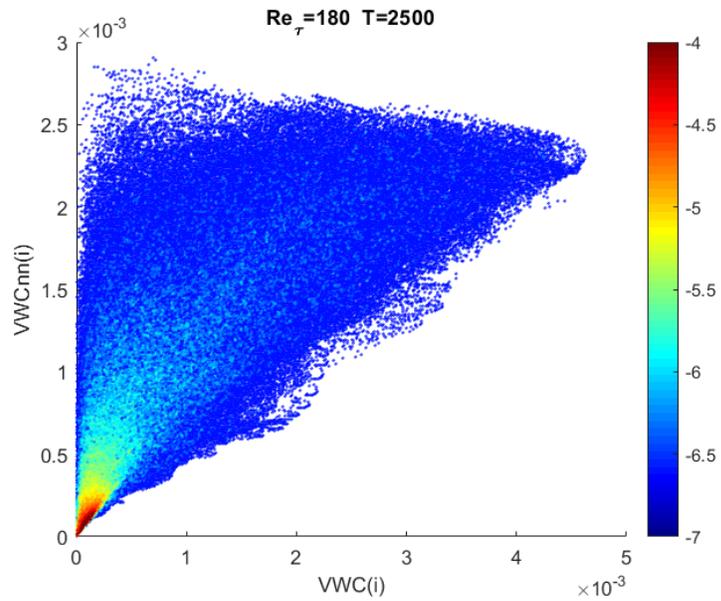


Fig.5.2 Assortatività  $Re_\tau = 180$   $T = 2500$ . I colori rappresentano la joint PDF, quindi la probabilità che un nodo con una certa  $VWC(i)$  sia connesso ad un nodo con un certo valore di  $VWC_{nn}(i)$ .

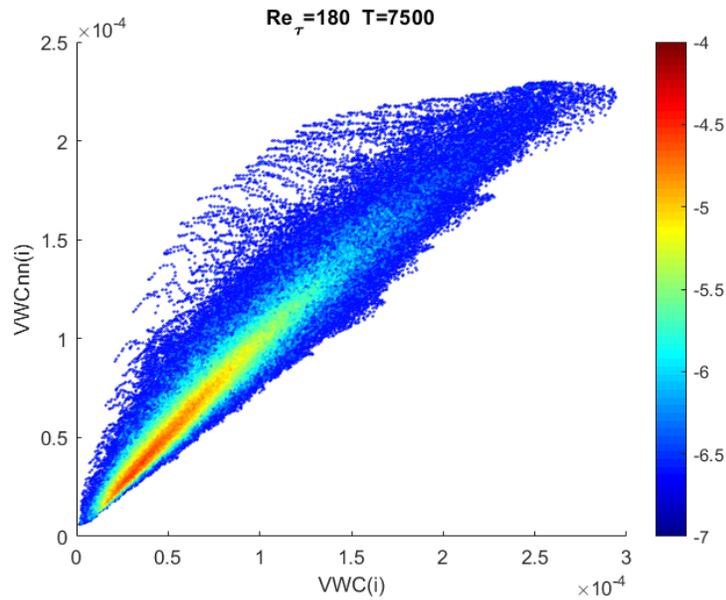


Fig.5.3 Assortatività  $Re_\tau = 180$   $T = 7500$ . I colori rappresentano la joint PDF, quindi la probabilità che un nodo con una certa  $VWC(i)$  sia connesso ad un nodo con un certo valore di  $VWC_{nn}(i)$ .

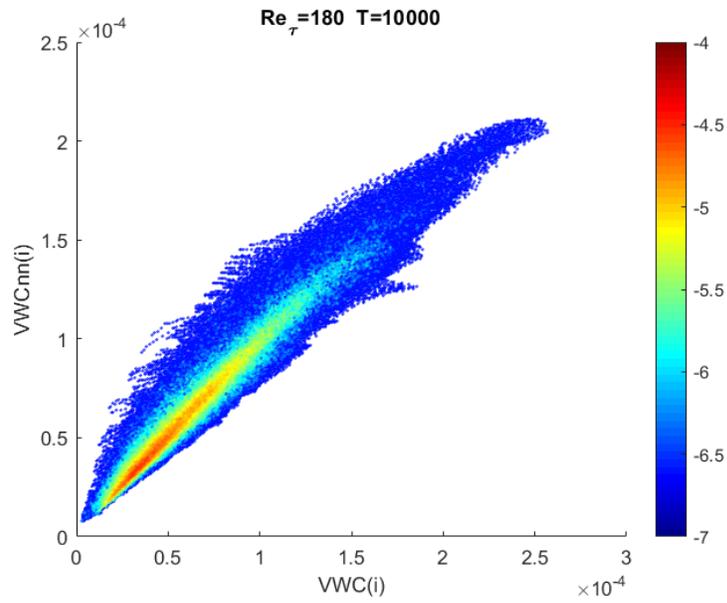


Fig.5.4 Assortatività  $Re_\tau = 180$   $T = 10000$ . I colori rappresentano la joint PDF, quindi la probabilità che un nodo con una certa  $VWC(i)$  sia connesso ad un nodo con un certo valore di  $VWC_{nn}(i)$ .

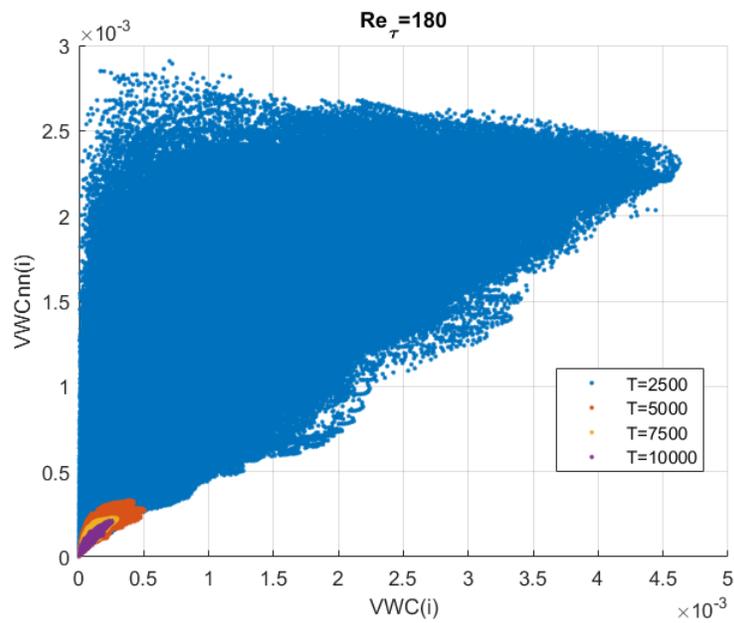


Fig.5.5 Confronto assortatività al variare di T

Si nota come all'aumentare di  $T$  le reti presentino un comportamento assortativo ben più evidente, anche se comunque nei casi a  $T$  più basso le probabilità di legame tra nodi con  $VWC$  molto diversa sono piuttosto basse.

Successivamente, nella figure 5.6 viene riportato il confronto tra le tre finestre temporali della distribuzione cumulativa di  $VWC$ , la  $P(VWC)$ , utile per determinare i nodi ad alta degree.

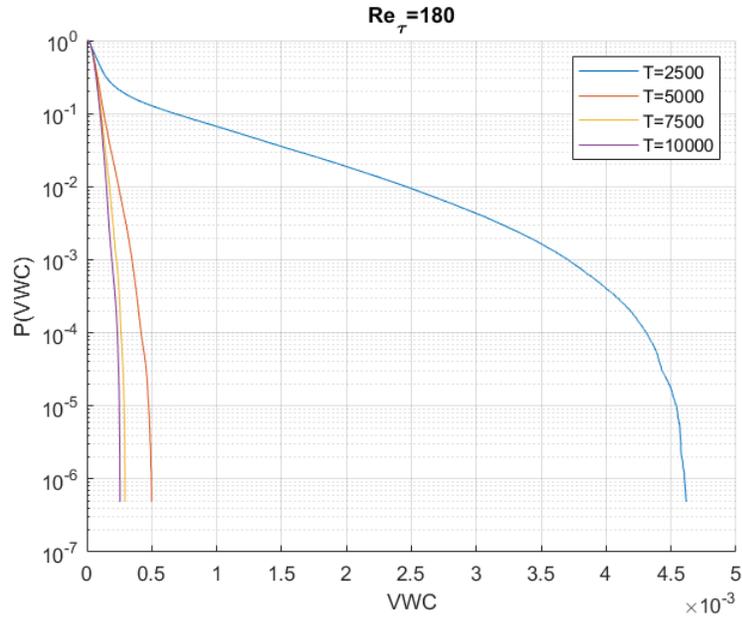


Fig.5.6 Confronto andamenti  $P(VWC)$  per diversi valori di  $T$

L'andamento è sempre esponenziale negativo e, in accordo con l'immagine che rappresenta l'assortatività, la  $VWC$  massima si riduce con  $T$ .

### 5.1.2 Analisi di mesoscala

Per quanto riguarda l'analisi di mesoscala si riporta come prima analisi il confronto tra le tre finestre temporali sugli andamenti della  $VWC$  media, mediata tra le due metà del canale. (Fig. 5.7)

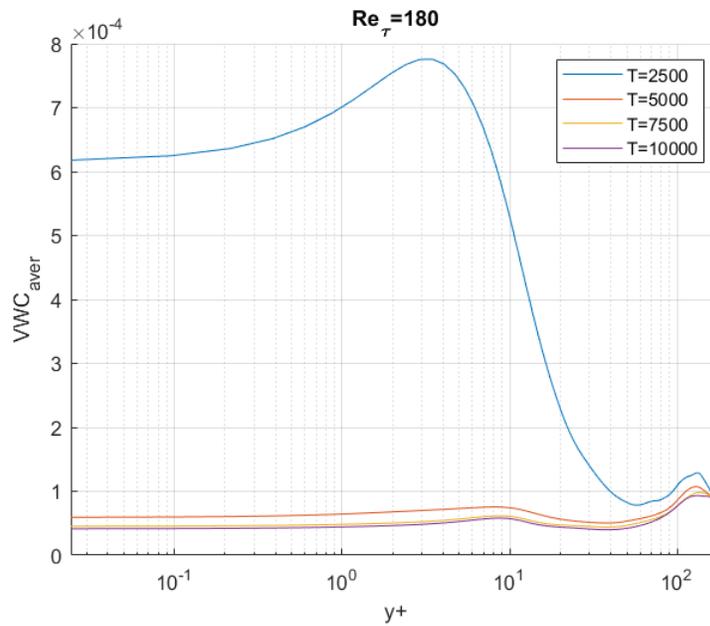


Fig.5.7 Confronto  $WWC$  mediato per ogni  $y^+$  al variare di  $T$

Variando  $T$  i picchi locali rimangono praticamente nella stessa posizione nella zona centrale del canale, ma a  $T=2500$  ho un primo picco locale a  $y^+ \approx 3$  molto più marcato e più vicino a parete. Pertanto ci si può aspettare che in quest'ultima rete gli hubs siano concentrati nelle zone di parete e che nelle altre reti invece siano distribuiti anche al centro.

In seguito si è analizzato il numero medio di regioni spazialmente connesse formato dai primi vicini al variare di  $y^+$ . (Fig. 5.8, 5.9). Dato l'eccessivo onere computazionale non sono presenti risultati per  $T=2500$ .

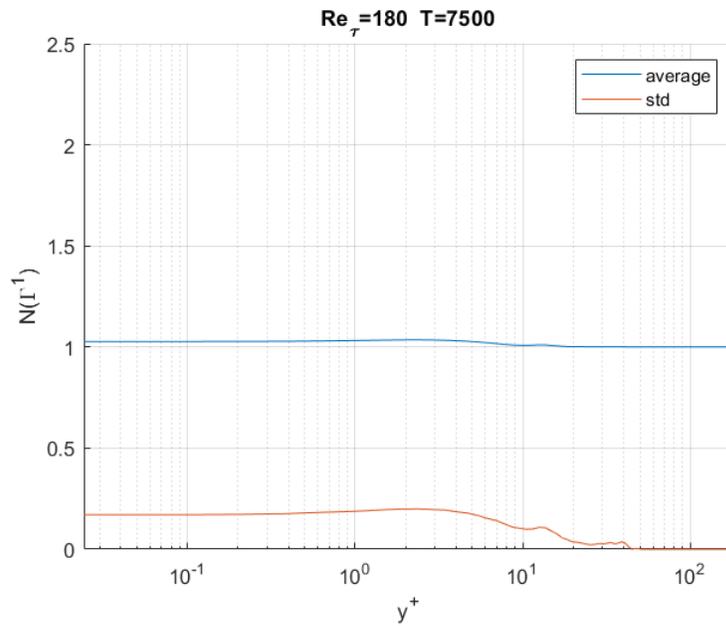


Fig.5.8 N regioni del primo vicinato mediate per ogni  $y^+$  T=7500

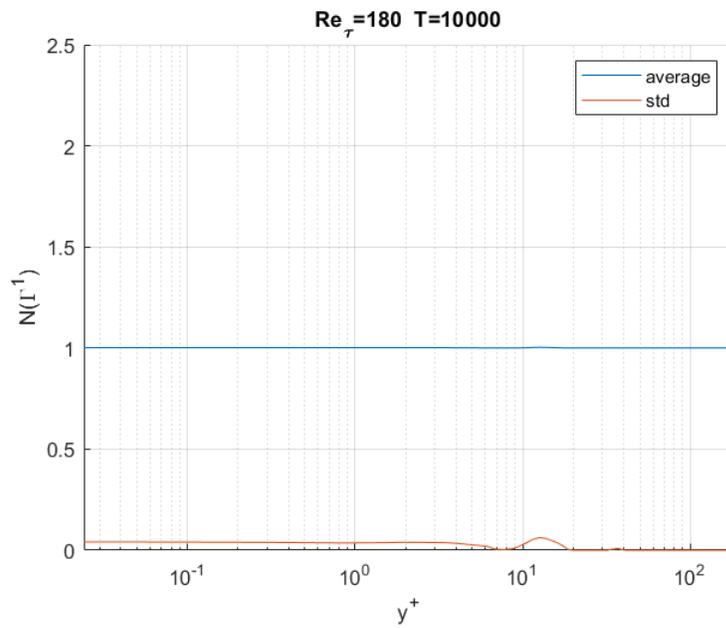


Fig.5.9 N regioni del primo vicinato mediate per ogni  $y^+$  T=10000

Il fatto che il numero di regioni sia praticamente 1 ovunque fa presupporre la quasi totale assenza di teleconnection per le due reti riportate. Per verificare

la presenza di teleconnections si è analizzata la probabilità che un un nodo ad una certa  $y^+$  fissata abbia come vicino un nodo ad un altro valore di  $y^+$ . (Fig. 5.10-12)

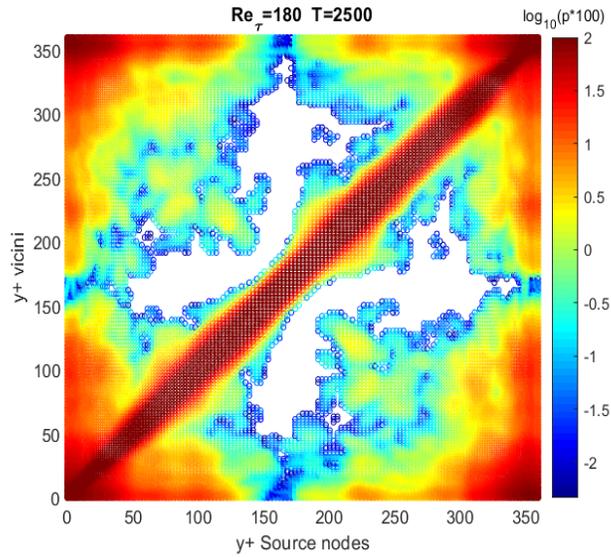


Fig.5.10 Probabilità che un nodo ad una data  $y^+$  sia collegato con un nodo ad un altro valore di  $y^+$  T=2500

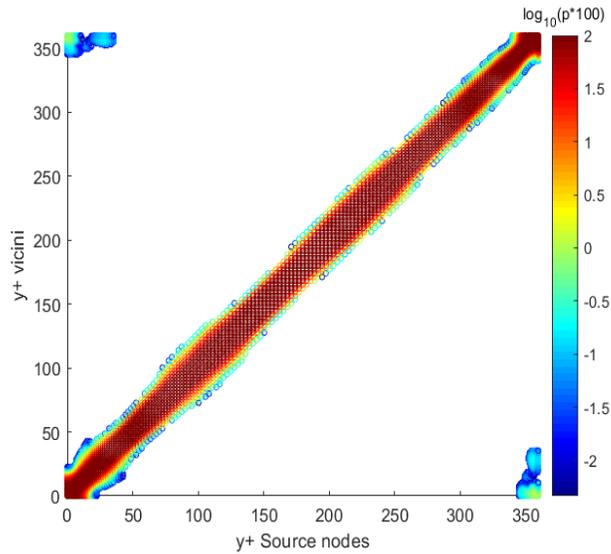


Fig.5.11 Probabilità che un nodo ad una data  $y^+$  sia collegato con un nodo ad un altro valore di  $y^+$  T=7500

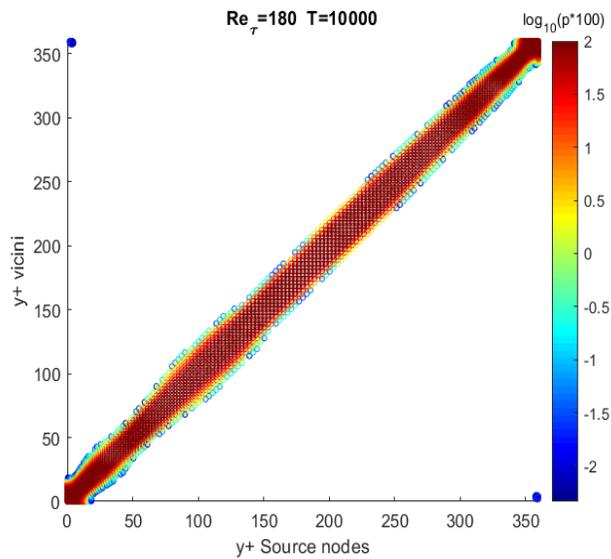


Fig.5.12 Probabilità che un nodo ad una data  $y^+$  sia collegato con un nodo ad un altro valore di  $y^+$  T=10000

Aumentando T la presenza di teleconnection è sempre più rara, andando a confermare la supposizione precedente.

Di seguito, nelle figura 5.13-15, vengono riportate le ROH al variare di T.

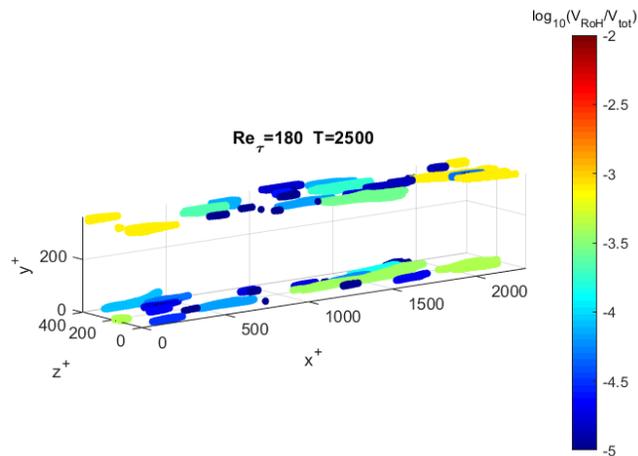


Fig.5.13 Nodi  $H - VWC$  T=2500. Il colore indica la frazione di volume occupata sul totale dalla singola RoH.

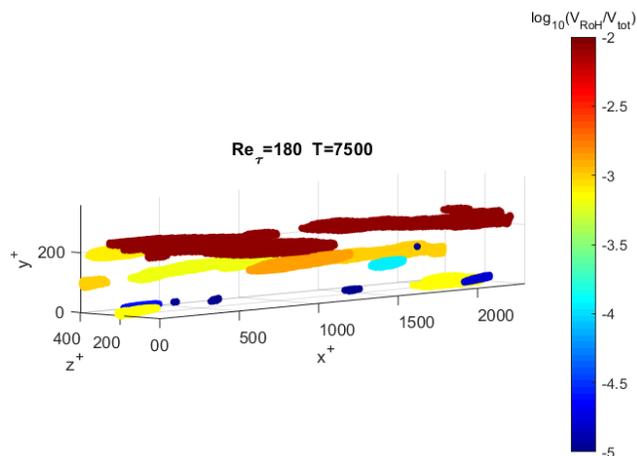


Fig.5.14 Nodi  $H - VWC$   $T=2500$ . Il colore indica la frazione di volume occupata sul totale dalla singola RoH.

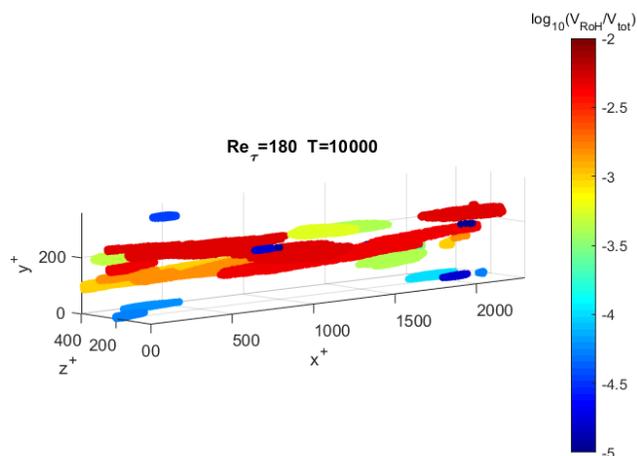


Fig.5.15 Nodi  $H - VWC$   $T=2500$ . Il colore indica la frazione di volume occupata sul totale dalla singola RoH.

A  $T=2500$  ci sono 51 regioni, tutte situate sulle pareti. A  $T=7500$  e a  $T=10000$  le RoHs si concentrano nella zona centrale del canale. L'assenza di teleconnections in queste ultime reti conferma la loro tendenza a formarsi tra regioni appartenenti alle due pareti, come si era osservato a  $T=5000$ .

Nelle prossime figure 5.16-18, invece, si ha la  $P(VWC)$  calcolata solo sui nodi alla stessa  $y^+$

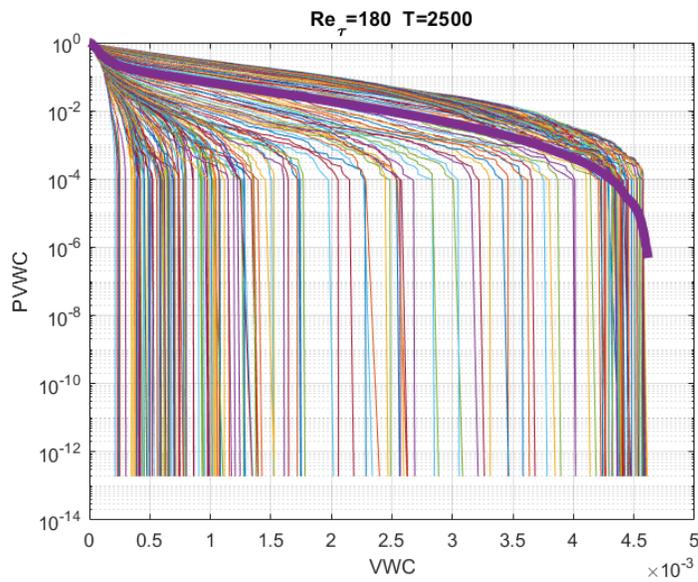


Fig.5.16  $P(VWC)(y^+)$  rete  $Re_\tau = 180$  e  $T=2500$ . Le curve indicano l'andamento della  $P(VWC)$  calcolata per ogni piano  $y^+$  costante. La linea piú spessa indica la  $P(VWC)$  globale.

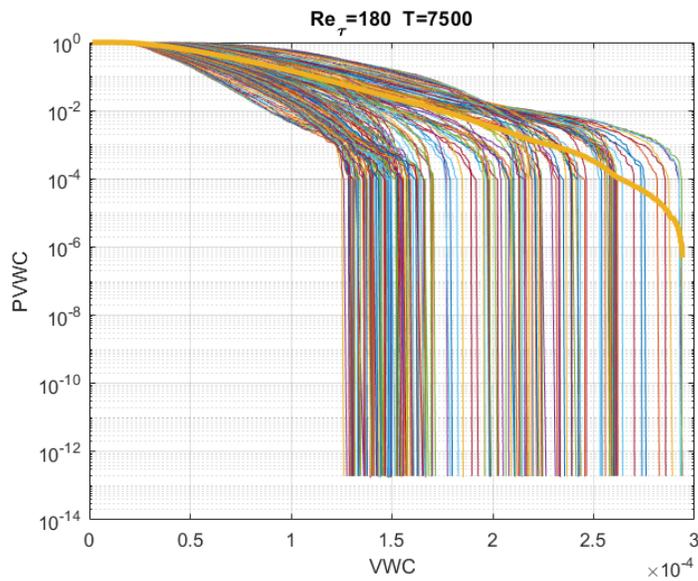


Fig.5.17  $P(VWC)(y^+)$  rete  $Re_\tau = 180$  e  $T=7500$ . Le curve indicano l'andamento della  $P(VWC)$  calcolata per ogni piano  $y^+$  costante. La linea piú spessa indica la  $P(VWC)$  globale.

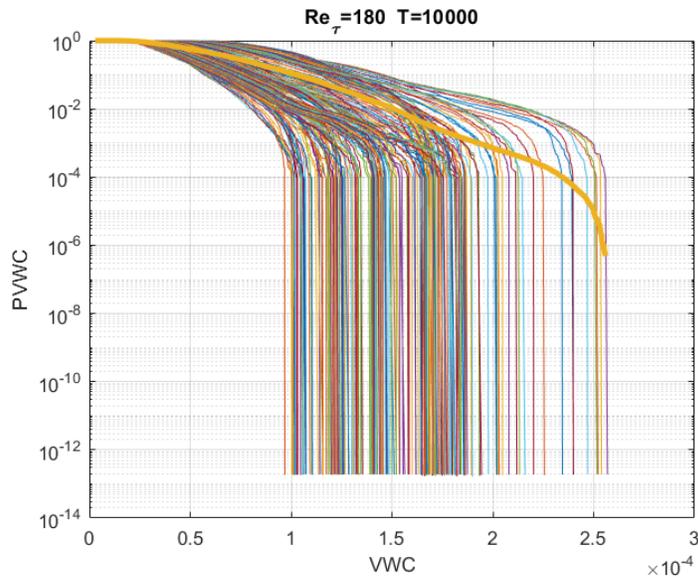


Fig.5.18  $P(WVC)(y^+)$  rete  $Re_\tau = 180$  e  $T=10000$ . Le curve indicano l'andamento della  $P(WVC)$  calcolata per ogni piano  $y^+$  costante. La linea piú spessa indica la  $P(WVC)$  globale.

Come ultima analisi di mesoscala si hanno nelle figure 5.19-21 le RoH con hub individuati dal 99° percentile per ogni  $y^+$ .

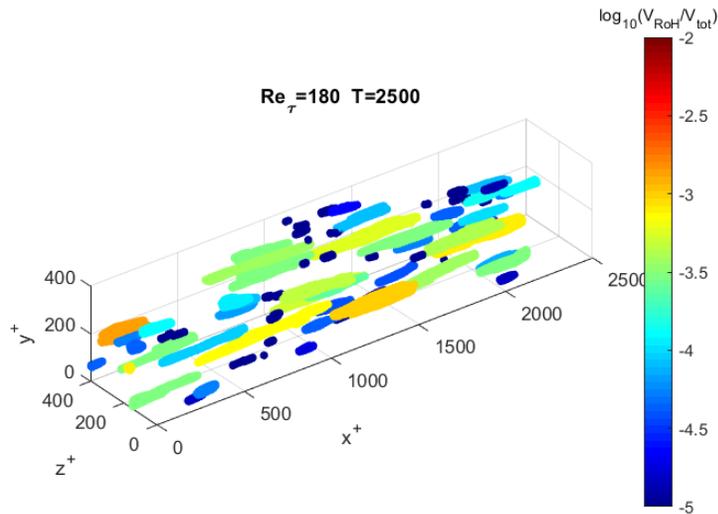


Fig.5.19 ROH formate da hubs individuate con  $P(WVC)(y^+)$  rete  $Re_\tau = 180$  e  $T=2500$ . Il colore indica la frazione di volume occupata sul totale dalla singola RoH.

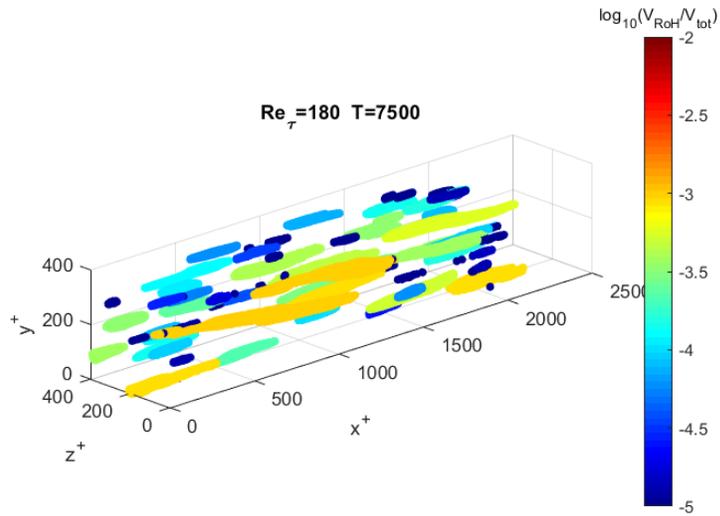


Fig.5.20 ROH formate da hubs individuate con  $P(VWC)(y^+)$  rete  $Re_\tau = 180$  e  $T=7500$ . Il colore indica la frazione di volume occupata sul totale dalla singola RoH.

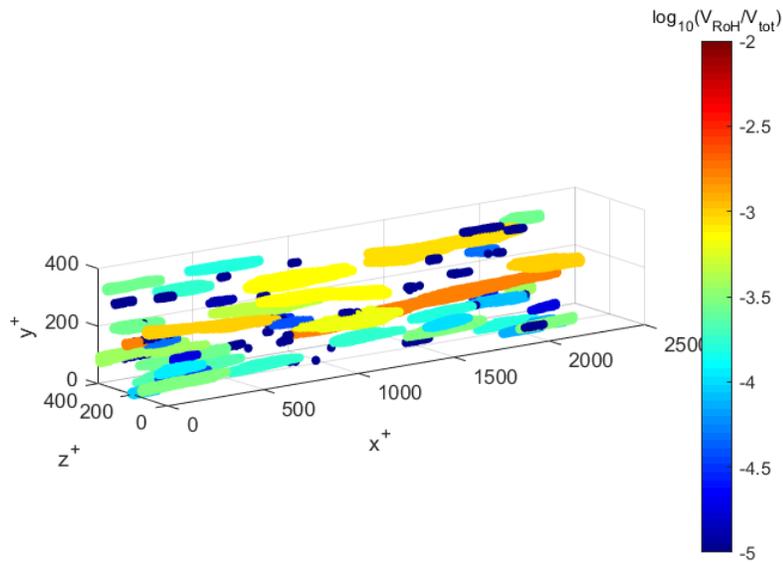


Fig.5.21 ROH formate da hubs individuate con  $P(VWC)(y^+)$  rete  $Re_\tau = 180$  e  $T=10000$ . Il colore indica la frazione di volume occupata sul totale dalla singola RoH.

A  $T=2500,7500$  ho 74 regioni, a  $T=10000$  84 regioni, che sono sempre prevalentemente anisotrope, allungate in direzione  $x$ .

## 5.2 Sensitività alla soglia $\tau$

In questa sottosezione si riportano i risultati per differenti valori di soglia dei coefficienti di correlazione  $\tau$ , pari a 0.9 e 0.95, che verranno confrontati con quelli della rete di partenza, ovvero quelli ottenuti fin'ora a  $\tau = 0.85$ .

### 5.2.1 Analisi globale

Nella prossima figura 5.22 si osserva come la distribuzione cumulativa di  $VWC$  mantenga lo stesso andamento esponenziale, osservato in precedenza con maggior pendenza negativa all'aumentare del valore di soglia.

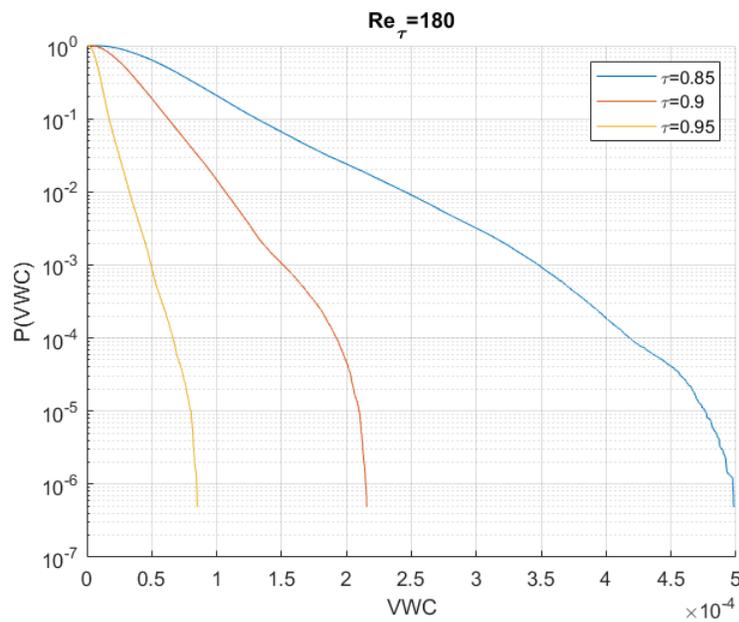


Fig.5.22  $P(VWC)$   $Re_{\tau} = 180$  al variare di  $\tau$

Dato che le alte correlazioni diventano sempre più improbabili all'aumentare di  $\tau$ , si nota una diminuzione della  $VWC$  totale. Per quanto riguarda l'assortatività, a valori di soglia maggiori si nota in figura 5.23 una relazione quasi lineare tra la  $VWC$  e la  $VWC_{nn}$ , non molto evidente per il valore di soglia più basso considerato. Da questo grafico si ha che le reti basate sulla correlazione mostrano sempre un comportamento assortativo.

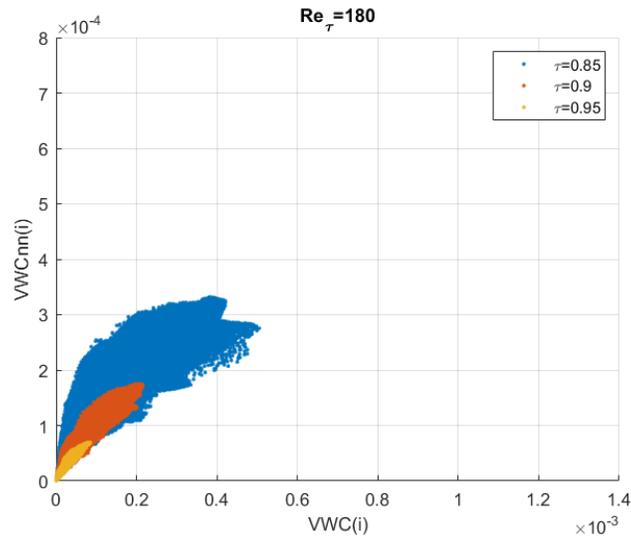


Fig.5.23 Confronto assortatività a  $Re_{\tau} = 180$  a diversi valore di soglia  $\tau$

### 5.2.2 Analisi di mesoscala

Per quanto riguarda l'analisi di mesoscala si riporta in fig. 5.24 l'andamento della  $VWC$  media mediata tra le due metà del canale.

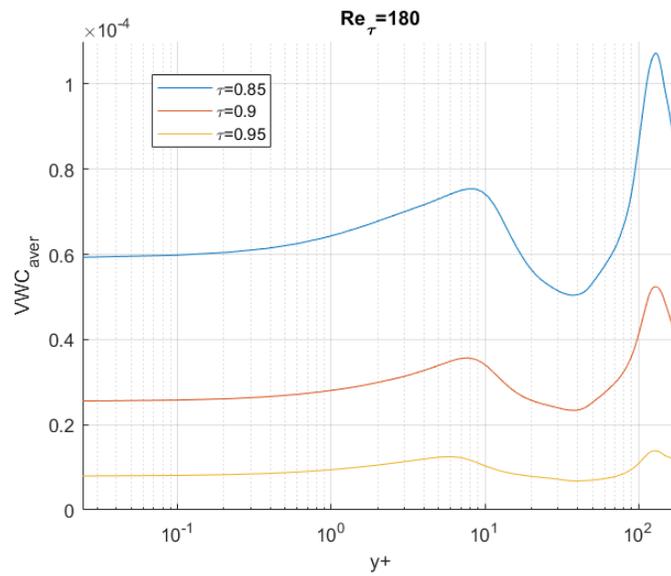


Fig.5.24  $VWC$  media in funzione di  $y^+ Re_{\tau} = 180$

Si può notare come cambiando  $\tau$  i picchi locali rimangono praticamente nella stessa posizione, pertanto in aggiunta alle considerazioni precedenti si può concludere che le caratteristiche topologiche delle reti rimangono sostanzialmente invariate, ma vengono riscalate per i diversi valori di  $\tau$ .

Successivamente si è analizzata la probabilità che un nodo ad una certa  $y^+$  fissata abbia come vicino un nodo ad un altro valore di  $y^+$  in modo da verificare la presenza di teleconnections. (Fig. 5.25-27)

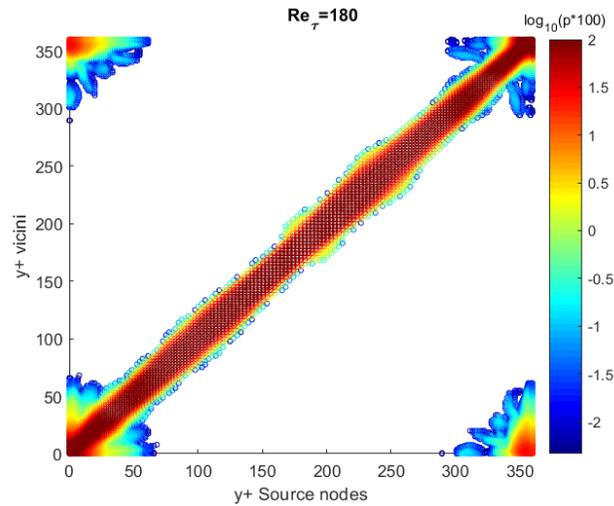


Fig.5.21 Probabilità che un nodo ad una data  $y^+$  sia collegato con un nodo ad un altro valore di  $y^+$   $\tau = 0.85$  rete  $Re_\tau = 180$

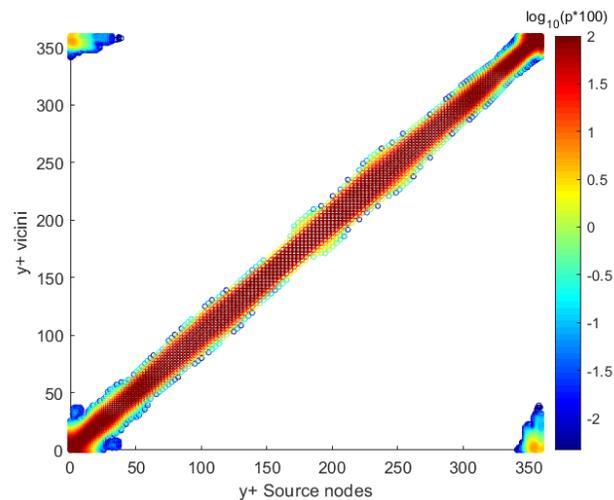


Fig.5.22 Probabilità che un nodo ad una data  $y^+$  sia collegato con un nodo ad un altro valore di  $y^+$   $\tau = 0.9$  rete  $Re_\tau = 180$

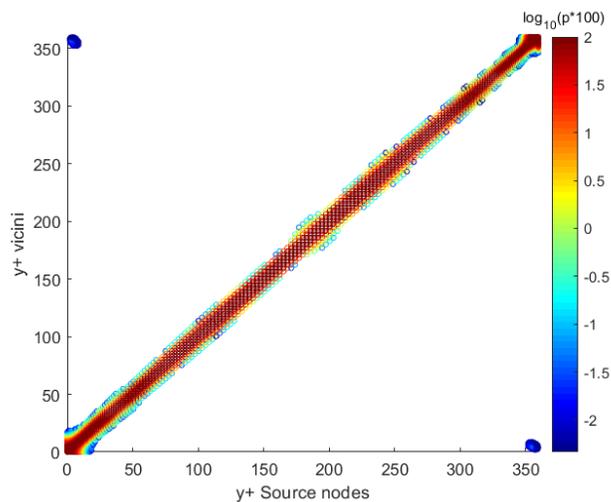


Fig.5.23 Probabilità che un nodo ad una data  $y^+$  sia collegato con un nodo ad un altro valore di  $y^+$   $\tau = 0.95$  rete  $Re_\tau = 180$

Aumentando la soglia, i nodi tendono ad avere vicini più prossimi a loro stessi nella direzione normale, ma legami tra le pareti sono presenti anche al valore di  $\tau = 0.95$ , per quanto sempre più confinati ad un numero molto inferiore di nodi molto vicini a parete e con probabilità inferiore.

Infine si mostra nelle figure 5.24-26 la distribuzione spaziale dei nodi  $H - VWC$  per le due reti al variare di  $\tau$ .

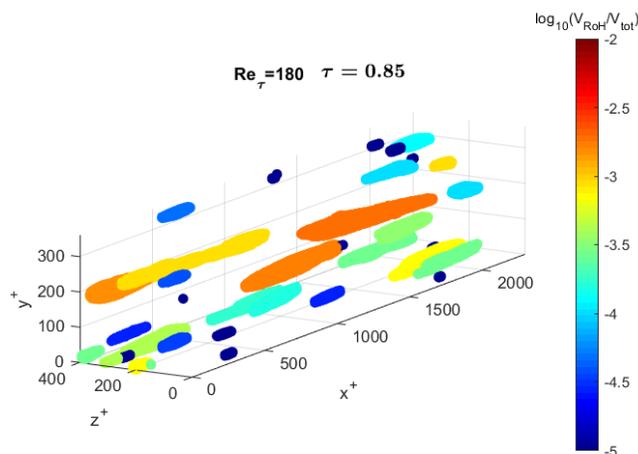


Fig.5.24 Nodi  $H - VWC$   $\tau = 0.85$ , rete  $Re_\tau = 180$ . Il colore indica la frazione di volume occupata sul totale dalla singola RoH.

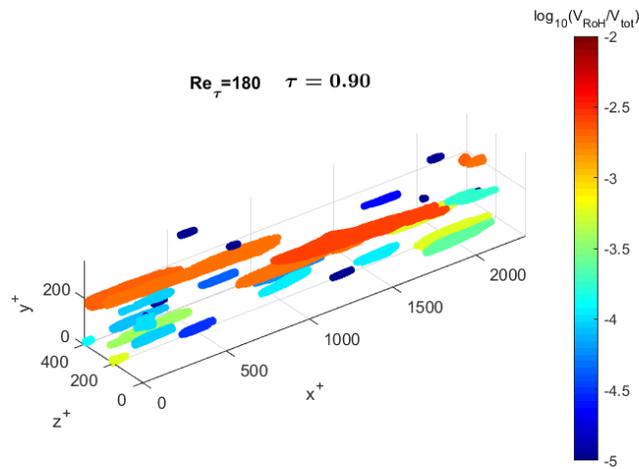


Fig.5.25 Nodi  $H - VWC$   $\tau = 0.9$ , rete  $Re_\tau = 180$ . Il colore indica la frazione di volume occupata sul totale dalla singola RoH.

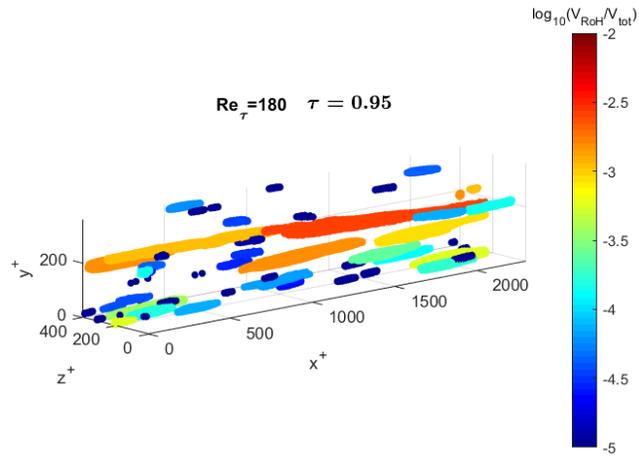


Fig.5.26 Nodi  $H - VWC$   $\tau = 0.95$ , rete  $Re_\tau = 180$ . Il colore indica la frazione di volume occupata sul totale dalla singola RoH.

Si può notare come per tutte le reti l'andamento delle RoH, allungato in direzione  $x$ , rimanga invariato per tutti i valori di  $\tau$ , sia per i nodi al centro del canale che per quelli vicini alle pareti.

## 6 Conclusioni

In questo lavoro di tesi si è sfruttata l'analisi delle reti complesse per studiare e confrontare due flussi turbolenti di canale pienamente sviluppati, sono state costruite due reti spaziali dove i nodi rappresentano frazioni di volume fisico e per attivare i link tra i nodi si sono sfruttati i coefficienti di correlazione basati sulla componente di velocità in direzione della corrente e se questi coefficienti superavano un certo valore di soglia i link venivano attivati, in modo da evidenziare solo le relazioni cinematiche più forti.

Le analisi sono state svolte a tre livelli: globale, mesoscala e locale (anche se quest'ultima con livelli di dettaglio diversi per le due reti). Dalla prima, per entrambe le reti, è emersa la presenza di nodi altamente connessi con altre parti del dominio (hubs) ed un comportamento assortativo delle reti. Dall'analisi a piani ad  $y^+$  costante è emerso che gli hub tendono ad essere localizzati a specifici valori di  $y^+$ , sia vicino a parete che al centro del canale, anche se a  $Re_\tau = 590$  tendono ad essere concentrati nella zona centrale e superiore del canale. Inoltre per  $Re_\tau = 180$  si è ottenuto che per  $y^+ < 70$  i primi vicini dei nodi tendono a concentrarsi in più regioni spazialmente connesse, mentre al centro del canale ne formano una sola, come invece accade per ogni valore di  $y^+$  a  $Re_\tau = 590$ . Sempre a fissata  $y^+$ , andando ad analizzare la  $y^+$  dei vicini si ha che per  $Re_\tau = 180$  c'è una ricorrenza di legami tra e nelle pareti di lungo raggio, che creano un tessuto cinematico di connessioni non banali. I legami di lungo raggio sono quelle che sono state definite come *teleconnection*, in analogia con le reti climatiche. A  $Re_\tau = 590$  questi legami sono ancora presenti, ma molto limitati in numero e con probabilità bassa. Andando ad analizzare nel dettaglio gli hub si è osservato che in tutti i casi considerati questi nodi tendono a formare delle regioni spazialmente connesse, chiamate RoH, allungate nella direzione x. In accordo con quanto scritto in precedenza a  $Re_\tau = 180$  sono presenti in tutte le zone del canale, mentre a  $Re_\tau = 590$  solo nella metà superiore. Impiegando un altro criterio per stabilire gli hub, ovvero calcolarli per ogni singolo piano ad  $y^+$  costante, le RoH risultanti, che in questo caso si possono trovare dunque in tutte le zone del canale per entrambe le reti, si mostrano sempre allungate in direzione x e qualitativamente simili.

Con l'analisi locale dei vicinati successivi di alcuni nodi posti vicino a parete e nel centro del canale si è osservato come la presenza di *teleconnection* faciliti la diffusione delle informazioni del dominio. Infatti i vicinati successivi dei nodi centrali a  $Re_\tau = 180$  e di tutti i nodi considerati a  $Re_\tau = 590$ , in zone in cui non sono state rilevate *teleconnection*, occupano porzioni di volume inferiore a parità di grado di vicinato, oltre a crescere più lentamente, nonostante l'andamento registrato sia simile, in gran parte lineare. L'analisi degli shortest-path di alcuni nodi a  $Re_\tau = 180$  ha permesso di avere un'idea su come è più lenta la diffusione dell'informazione in assenza di legami a lungo raggio (*teleconnection*), richiedendo circa 40 link di media per collegare due nodi «vicini» in regioni diverse del dominio.

Oltre al confronto, per la rete a  $Re_\tau = 180$  si è valutata l'influenza di due parametri sui quali ci si è basati nella costruzione della: la finestra temporale

e il valore di soglia dei coefficienti di correlazione. I risultati ottenuti, ovviamente differenti come valori assoluti rispetto al caso del confronto, hanno però mostrato andamenti del tutto identici a quelli osservati nella rete impiegata per il confronto. Pertanto si è potuto concludere che i risultati ottenuti ad una certa finestra temporale e con un certo valore di soglia sufficientemente alti, analizzando lo stesso flusso, presentano numerose analogie: comportamento assortativo della rete, stessi picchi di  $VWC$  media, stessa forma qualitativa delle  $RoH$  e poche differenze (tra tutte spicca il diverso numero di *teleconnection*). Per quanto riguarda l'onere computazionale, questo è risultato minore all'aumentare della finestra temporale e del valore di soglia (essendo considerato un numero inferiore di link attivi).

Studiando questi due flussi turbolenti di canale piano applicando il formalismo delle reti si è potuta preservare l'informazione spaziale e svolgere analisi a punti multipli dei link attivati in ogni direzione. La presenza di *teleconnection* tra regioni vicino a parete è stata localizzata in entrambe le reti, ma risultati evidenti, per le motivazioni scritte in precedenza, si sono ottenuti solamente per la rete a  $Re_\tau = 180$ . L'emergere di questi link a lunga distanza è da associare alla persistenza temporale di pattern coerenti, cosa che risulterebbe complicata applicando altre tecniche.

## Riferimenti bibliografici

- [1] J. Chen, F. Hussain, J. Pei, and Z.-S. She, *J. Fluid Mech.* 742, 291 (2014).
- [2] A. Shirazi et al., *J. Stat. Mech. Theory Exp.* 2009, P07046 (2009).
- [3] A. Charakopoulos, T. Karakasidis, P. Papanicolaou, and A. Liakopoulos, *Chaos* 24, 024408 (2014).
- [4] P. Manshour, M. R. R. Tabar, and J. Peinke, *J. Stat. Mech.: Theory Exp.* (2015) P08031.
- [5] J. Singh, R. Belur Vishwanath, S. Chaudhuri, and R. Sujith, *Chaos* 27, 043107 (2017).
- [6] S. Scarsoglio, G. Iacobello, and L. Ridolfi, *Int. J. Bifurcat. Chaos* 26, 1650223 (2016).
- [7] S. Scarsoglio, F. Cazzato, and L. Ridolfi, *Chaos* 27, 093107 (2017).
- [8] G. Iacobello, S. Scarsoglio, J. G. M. Kuerten, L. Ridolfi, *Spatial characterization of turbulent channel flow via complex network*, *PHYSICAL REVIEW E* 98, 013107 (2018).
- [9] J. M. Wallace, *Theor. Appl. Mech. Lett.* 4, 022003 (2014).
- [10] G. He, G. Jin, and Y. Yang, *Annu. Rev. Fluid Mech.* 49, 51 (2017).
- [11] S. B. Pope, *Turbulent Flows*, Cambridge University Press, (2000).
- [12] Robinson, S. K. (1991), *Coherent motions in the turbulent boundary layer*, *Annu. Rev. Fluid. Mech.* 23, 601-639.
- [13] A. J. Smits, B. J. McKeon, I. Marusic, (2011), *High-Reynolds Number Wall Turbulence*, *Annu. Rev. Fluid Mech.* 2011. 43:353-75.
- [14] S. Boccaletti, M. Chavez, D.-U. Hwang, V. Latora, Y. Moreno, *Complex networks : Structures and dynamics*, *Physics Reports* 424 (2006) 175-308.
- [15] Vinicio Pelino, *reti cyber-fisiche: vulnerabilità a random failures e attacchi internazionali* (2013).
- [16] J. F. Donges, Y. Zou, N. Marwan, and J. Kurths, *Eur. Phys. J.-Spec. Top.* 174, 157 (2009).
- [17] J. Heitzig, J. F. Donges, Y. Zou, N. Marwan, and J. Kurths, *Eur. Phys. J. B* 85, 38 (2012).
- [18] A. Lozano-Durán, O. Flores, and J. Jiménez, *J. FluidMech.* 694, 100 (2012).

- [19] R.V.Donner,M.Small,J.F.Donges,N.Marwan,Y.Zou,R.Xiang,J.Kurths,  
*Recurrence–Based Time Series Analysis By Means Of Complex  
Network Methods*, International Journal of Bifurcation and Chaos,  
Vol. 21, No. 4 (2011) 1019–1046.
- [20] D.Zhou,A.Gozolchiani,Y.Ashkenazy,S.Havlin,*Teleconnection Paths  
Via Climate Network Direct Link Detection*,PHYSICAL \_ REVIEW  
LETTERS, PRL 115, 268501 (2015).
- [21] M. Faloutsos, P. Faloutsos, C. Faloutsos, Comput. Commun. Rev. 29 (1999)  
251.
- [22] L.H. Harwell, J.J. Hopfield, S. Leibler, A.W. Murray, Nature 402 (1999)  
C47.
- [23] F. Varela, J.P. Lachaux, E. Rodriguez, J. Martinerie, Nat. Rev. Neurosci.  
2 (2001) 229.
- [24] C. Koch, G. Laurent, Science 284 (1999) 96.