

POLITECNICO DI TORINO

Collegio di Ingegneria Meccanica, Aerospaziale, dell'Autoveicolo e della
Produzione

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

Tesi di Laurea Magistrale

Ottimizzazione di traiettorie per sistema M2P2



Relatore:
Lorenzo Casalino

Candidato:
Mattia Ponzio

Novembre 2018

Indice

1. Introduzione	1
2. Il sistema propulsivo	3
2.1 <i>Il vento solare</i>	3
2.2 <i>La Mini Magnetospheric Plasma Propulsion (M2P2)</i>	5
2.3 <i>Simulazioni ed esperimenti sulla M2P2</i>	7
2.4 <i>Critiche</i>	10
3. Il modello matematico	15
3.1 <i>Equazioni fondamentali della meccanica del volo spaziale</i>	15
3.2 <i>Teoria del controllo ottimo</i>	19
3.3 <i>Applicazione del controllo ottimo al caso di M2P2</i>	22
3.3.1 <i>Equazioni differenziali e condizioni al contorno</i>	22
3.3.2 <i>Le leggi di controllo</i>	24
3.3.2.1 <i>La legge di controllo di F_θ</i>	25
3.3.2.2 <i>La legge di controllo di τ</i>	26
3.3.3 <i>Funzione di costo alternativa</i>	28
4. Risoluzione del problema	31
4.1 <i>Il programma di calcolo</i>	31
4.2 <i>Dati e adimensionalizzazione</i>	32
4.3 <i>La modellazione della traiettoria</i>	34
5. Risultati	37
5.1 <i>Minimizzazione del ΔV per spacecraft da 100 Kg</i>	37
5.2 <i>Massimizzazione della massa finale per spacecraft da 100 Kg</i>	41
5.3 <i>Massimizzazione della massa finale per spacecraft da 15 tonnellate</i>	43
6. Conclusione	45
Bibliografia e Sitografia	47
Elenco Tabelle	49
Elenco figure	50
Ringraziamenti	51

1. Introduzione

C'è qualcosa negli esseri umani che li spinge sempre verso ciò che non conoscono, un'insaziabile curiosità di fondo che guida le loro azioni e vite attraverso gli anni e le generazioni. Ed è probabilmente questa forza il motivo per cui le stelle e lo spazio ci sembrano così affascinanti, per cui inventiamo storie su "universi molto molto lontani", su esseri simili a noi che ci aspettano al di là dei nostri limiti e su un futuro in cui ciò che adesso sembra inconcepibile è diventato realtà. È per inseguire i racconti di tutta una vita che vogliamo andare a vedere ciò che c'è dietro la prossima collina, al di là del vuoto che ci imprigiona, verso pianeti e stelle che popolano le nostre fantasie fin dalla notte in cui, come specie, abbiamo volto i nostri occhi al cielo per la prima volta. La colonizzazione dello spazio è uno dei più grandi sogni dell'umanità, ma le immense distanze che ci separano dagli altri corpi celesti sono l'ostacolo principale alla realizzazione delle nostre fantasie. Avventurarsi lontano dal nostro pianeta di origine richiede attualmente elevati tempi o elevati consumi, e per abbattere entrambi contemporaneamente sono necessarie tecnologie che attualmente non possediamo e sistemi propulsivi che ancora non esistono, ma che possiamo immaginare.

Tra i prodotti dell'ingegno di ricercatori da tutto il mondo, la classe delle vele spicca per la sua promessa eccezionale: sfruttare la luce o il vento solare per spingere uno spacecraft come un veliero sul mare, senza alcun consumo di propellente. Il problema di questo approccio sta nelle difficoltà di lanciare o costruire nello spazio le grandi strutture necessarie per intercettare abbastanza spinta, e il dispiegamento di queste se necessario, ma un tipo di vela si propone di risolverlo: la vela al plasma (o sistema Propulsivo con Plasma a Mini-Magnetosfera, M2P2). Questo approccio prevede la realizzazione di un grande ostacolo al vento solare gonfiando il campo magnetico generato a bordo tramite l'iniezione di plasma senza far uso di strutture eccessivamente grandi o pesanti, ma introducendo un (piccolo) consumo necessario a mantenere il sistema operativo.

Numerose ricerche sono state presentate per analizzarne la fattibilità, sia a sostegno delle sue potenzialità che contrarie, ma molte di meno si sono concentrate sulla simulazione delle sue supposte prestazioni. Le pubblicazioni in cui questo è stato fatto si sono concentrate sulla minimizzazione di un certo indice prestazionale, ovvero la spinta impulsiva di circolarizzazione dell'orbita all'arrivo alla sfera d'influenza del pianeta bersaglio, tutte utilizzando uno spacecraft dotato di sistema M2P2 con le prime caratteristiche ipotizzate. Al fine di meglio valutare la bontà di questo approccio al problema del viaggio interplanetario si è pensato opportuno, dopo aver riprodotto i risultati già da altri ottenuti, introdurre un nuovo indice prestazionale volto a massimizzare la massa al termine della missione e considerare le ipotesi più recenti circa le caratteristiche di questo apparato, il quale si crede possa essere molto più massivo di quanto originariamente supposto.

Il presente studio si propone quindi di esporre e analizzare in maniera più ampia rispetto a quanto fatto in altre opere le performance della vela al plasma, esaminando le traiettorie ottime ricavate con l'applicazione del metodo indiretto alla teoria del controllo ottimo. Inizialmente viene presentato lo stato della ricerca, con principi di funzionamento teorici del sistema, simulazioni ed esperimenti sia da sostenitori che detrattori. Successivamente si espone il modello matematico alla base del metodo e le equazioni che da esso scaturiscono e che costituiscono il problema da risolvere, con una breve descrizione delle caratteristiche del programma di calcolo utilizzato allo scopo. In ultimo vengono presentati i risultati a cui si è giunti e questi vengono comparati tra loro e con quelli esposti in altre pubblicazioni.

2. Il sistema propulsivo

2.1 *Il vento solare*

Il Sole è la stella al centro del sistema solare, quella attorno cui ruotano tutti i pianeti appartenenti a questa struttura, compresa la Terra, e che rende possibile la vita su di essa. L'energia che questo corpo celeste irradia è per gli esseri umani di fondamentale importanza, ma può anche essere una minaccia. Insieme alla costante emissione di fotoni infatti, particelle prive di massa composte solamente di energia (che viene percepita come luce e calore), viene emesso anche un gran numero di particelle a cui viene dato il nome di "vento solare". In quanto questo sarà il vero propellente del sistema descritto in seguito, è sembrato giusto renderlo il protagonista di questa prima sezione, per la quale si è fatto riferimento principalmente a [1, 2, 3].

Il Sole è composto da plasma, uno stato della materia in cui gli atomi sono abbastanza energizzati da rompere i legami che tengono insieme il nucleo e gli elettroni, creando un gas fortemente o completamente ionizzato e globalmente neutro. Il cuore del Sole è il luogo in cui vengono prodotti i fotoni grazie al processo di fusione nucleare e questi risalgono nel corso di centinaia di migliaia di anni verso gli strati più esterni fino ad arrivare in superficie, definita convenzionalmente come la prima zona visibile del Sole in quanto si osserva proprio la loro fuoriuscita, mentre l'interno è invece completamente opaco. Il Sole si estende però ancora molto oltre la sua superficie e la regione esterna, la sua atmosfera, è in ordine suddivisa in: fotosfera, cromosfera, zona di transizione e corona. Quest'ultima è formata da plasma un milione di volte meno denso di quello presente alla superficie, la quale ha in contrasto una temperatura di circa 6000 K contro temperature della corona che vanno dai $300,000\text{ K}$ a qualche milione di kelvin. Per effetto dell'alta temperatura del plasma e dei significativi campi magnetici nella corona, la quale si estende per grandi distanze oltre la superficie solare, alcune particelle raggiungono una velocità sufficiente a sfuggire alla forza d'attrazione della stella e allontanarsi da essa, creando così il vento solare. Una volta emesso esso viaggia per lo spazio interplanetario fino ad incontrare, molto oltre l'orbita di Plutone, il mezzo interstellare, il quale è formato dalla polvere cosmica, dai raggi cosmici e da gas di ioni, atomi o molecole che permeano lo spazio presente tra le stelle della Via Lattea. Nel punto in cui la pressione del vento solare equilibra quella del mezzo interstellare si ha l'eliopausa, limite ultimo dell'eliosfera, la regione dello spazio dominata dall'attività solare. Questa zona, seppur sottoposta all'azione del vento solare, il quale è pur sempre composto da particelle ionizzanti pericolose per gli esseri umani e tutto ciò che essi costruiscono, è però proprio da esso protetta dalla maggior parte delle altre particelle prodotte nella nostra galassia e oltre, ovvero i già citati raggi cosmici.

Le caratteristiche del vento solare variano significativamente nel tempo a causa dell'attività solare dato che questo attraversa un ciclo quasi periodico di circa 11 anni, nel quale ci sono momenti di massimo e momenti di minimo. Il campo magnetico solare domina l'attività nella sua atmosfera e causa fenomeni come macchie solari, spicole, filamenti, archi coronali, buchi coronali, brillamenti ed espulsioni di massa coronale, quest'ultime due responsabili di un forte vento solare, che quando colpisce la Terra genera una tempesta solare. Brillamenti ed espulsioni di massa coronale generano inoltre le "particelle energetiche solari" (o *Solar Energetic Particles*, SEP), un plasma di protoni, elettroni e nuclei d'elio e più pesanti con energie molto elevate, che vanno dalle poche decine di keV ai GeV . Le particelle del vento solare per contro raggiungono energie comprese tra i 0.5 keV e i 10 keV , ma la sua composizione è simile in quanto quasi completamente formato da particelle cariche,

di cui la stragrande maggioranza sono nuclei d'idrogeno (protoni) ed elettroni, una piccola parte nuclei d'elio (particelle alfa) e il resto ioni di vari elementi come carbonio, ossigeno, neon, magnesio, silicio, zolfo, argon e ferro, ognuno dei quali è presente sotto forma di più isotopi ^[4]. Si può inoltre distinguere il vento solare in veloce e lento:

- il flusso più veloce ha una composizione simile a quella della fotosfera e viene originato nei buchi coronali presenti nelle zone polari, vicino alla Terra ha velocità tipiche di 750 km/s e temperature di $8 \cdot 10^5 \text{ K}$;
- il flusso più lento ha una composizione simile a quella della corona ed è generato nella fascia equatoriale solare, ha velocità comprese tra i 300 e i 500 km/s vicino alla Terra e temperature di $1.4 - 1.6 \cdot 10^6 \text{ K}$.

Durante i massimi solari la diversa origine dei due flussi è meno ben separata e la situazione si fa più complessa e dinamica, con origini ad ogni latitudine.

Il vento solare, come anche la corona, è altamente elettricamente conduttivo, il che significa che per il teorema di Alfvén della magnetoidrodinamica le linee del campo magnetico sono congelate nel fluido (il plasma in questione) e si muovono con esso. Con l'allontanarsi del vento solare dalla stella il suo campo magnetico viene da questo trascinato, e dato che il Sole gira su sé stesso, la combinazione di movimento radialmente uscente del vento solare e di rotazione della sua origine creano un andamento a spirale di Archimede sul piano dell'eclittica, detta spirale di Parker in onore dell'astronomo che la predisse. Grazie a quest'azione di trasporto del vento solare l'intensità del campo magnetico interplanetario decade più lentamente, motivo per cui all'altezza della Terra è circa 100 volte maggiore di quanto sarebbe se tutto lo spazio interplanetario fosse vuoto. Il fatto che il campo magnetico sia a spirale, che al livello della Terra è inclinata di circa 45° rispetto alla direzione Terra-Sole, non vuol dire però che la traiettoria del vento solare sia anch'essa distintamente a spirale come ben mostrato in *Figura 2.1*. La velocità di questo plasma è infatti per la maggior parte radiale, con piccole componenti tangenziali e azimutali, nell'ordine delle decine di chilometri al secondo e variabili con l'attività solare, che saranno trascurate nel modello matematico finale in seguito utilizzato. Le componenti tangenziali sono nel verso di rotazione del Sole e nascono in parte nelle sue vicinanze per la conservazione del momento angolare, diminuendo con l'allontanarsi del vento solare fino alle 20 AU (dove con AU si indicano le Astronomical Units, unità di misura pari alla distanza media Sole-Terra), e in parte per interazioni tra il flusso veloce e quello lento. Le componenti azimutali si pensa invece siano dovute principalmente a effetti della dinamica del fluido e diminuiscono anch'esse con la distanza dal Sole. ^[5]

Con l'allontanarsi dalla stella la pressione dinamica, la densità e la temperatura del vento solare mediamente diminuiscono secondo delle leggi di potenza mentre la velocità media ha un andamento opposto, essendo bassa (flusso subsonico) vicino alla corona e accelerando per meccanismi non ancora del tutto compresi fino ad una velocità asintotica (flusso supersonico) attorno alle 30 AU , con delle differenze per flusso lento e veloce. ^[6,7]

Nonostante i molti dati a disposizione e i sempre continui passi avanti nel settore, predire correttamente le caratteristiche del vento solare in un dato luogo e ad un dato momento è ancora un'impresa ardua. La difficoltà nell'ottenere informazioni precise sulle sue proprietà e di tenerle in considerazione nella creazione dei modelli per le seguenti simulazioni, porta in quest'ambito a fare ipotesi semplificative come quella già accennata di flusso completamente radiale e quelle di vento solare con velocità di 500 km/s e densità di 6 cm^{-3} , come fatto da Winglee et al. ^[8] per calcolare le caratteristiche del sistema M2P2. Queste semplificazioni saranno valide ad ogni istante e per ogni punto dello spazio.

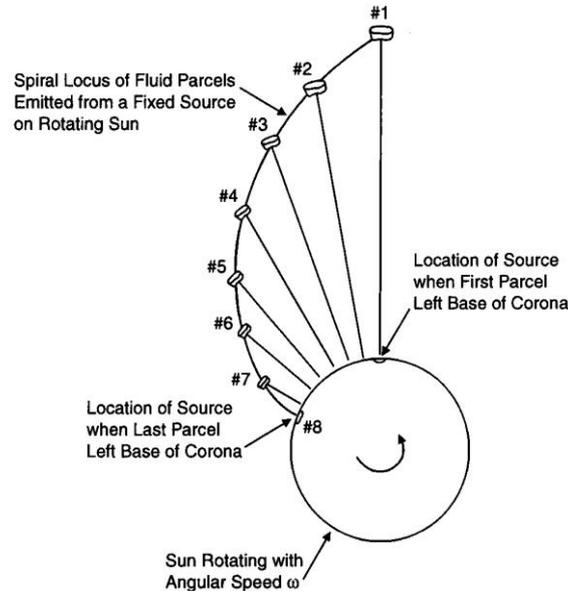


Figura 2.1: Movimento combinato di rotazione del Sole ed emissione di vento solare in direzione radiale, da Russell ^[2] adattata da Hundhausen ^[9]. Anche se osservando l'andamento complessivo del vento solare ad un dato istante questo appare a spirale, ogni particella fluida ha in realtà direzione del moto (quasi) radiale.

2.2 La Mini Magnetospheric Plasma Propulsion (M2P2)

Il sistema M2P2 può essere considerato una variante di vela magnetica in quanto condivide con essa il suo principio base di funzionamento, ma fu concepita successivamente da Winglee et. al. ^[8] come un miglioramento dell'altra. La vela magnetica infatti, proposta da Andrews e Zubrin nel 1988 ^[10] nasce dall'idea di ottenere una spinta deviando con un campo magnetico sufficientemente grande le particelle elettricamente cariche del vento solare. Il campo magnetico può essere ottenuto facendo scorrere una corrente elettrica in una spira collegata allo spacecraft, infatti per la legge di Ampère-Laplace

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\vec{j} \wedge \hat{u}_r}{r^2} d\tau, \quad (2.1)$$

in cui:

- $B(P)$ è l'intensità del campo magnetico nel punto P dello spazio;
- μ_0 è la permeabilità magnetica del vuoto;
- \vec{j} è la densità di corrente che scorre nel circuito;
- \hat{u}_r è il versore che va dal punto considerato del filo percorso da corrente al punto P ;
- r è la distanza dal punto considerato del filo al punto P ;
- τ è il volume in cui j è non nulla,
- \wedge indica il prodotto vettoriale.

Utilizzando questa legge per un dipolo magnetico (statico), ovvero un filo chiuso percorso da corrente detto spira, e ponendosi ad una distanza molto maggiore rispetto alle dimensioni del sistema, è possibile ricavare che

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \hat{u}_r + \sin \theta \hat{u}_\theta), \quad (2.2)$$

in cui:

- $m = iA$ è il momento magnetico della spira, dato dal prodotto dell'intensità di corrente i per l'area racchiusa dalla spira A ;
- θ è l'angolo tra la direzione dell'asse della spira e la retta di versore \hat{u}_r congiungente il centro della spira al punto P ;
- \hat{u}_θ è il versore della componente tangenziale perpendicolare alla direzione radiale e che compare nel caso bidimensionale di spira vista lateralmente.

Osservando l'equazione (2.2) si può subito notare che il campo magnetico decade molto velocemente (andamento r^{-3}), e questo costringe ad avere strutture molto grandi per produrre campi magnetici tali da porre un ostacolo significativo al vento solare ed ottenere quindi la spinta richiesta nelle applicazioni pratiche. Questa è la strada seguita da Andrews e Zubrin per la vela magnetica, con la quale si stima si possano raggiungere, nel pieno della sua maturità, auto-accelerazioni dell'ordine di $0.01 - 0.1 m/s^2$, ma con diametri del solenoide (serie di spire) di oltre $60 km^{[11]}$, il che comporta grandi masse e difficoltà costruttive e di dispiegamento della vela. Altro problema è quello della ricerca del materiale per produrre il filo elettrico, poiché per diminuire la richiesta di energia prodotta a bordo per alimentare il sistema propulsivo, punto particolarmente importante per la vela magnetica ma rilevante anche per la M2P2, sarebbe molto conveniente se non indispensabile utilizzare materiali superconduttivi, i quali sono in rapido sviluppo ma attualmente non disponibili o quantomeno maturi. Questi richiederebbero solo un input iniziale di energia per far scorrere la corrente, ma servirebbe a quel punto un sistema di raffreddamento criogenico in grado di mantenere una temperatura inferiore a quella critica, temperatura alla quale la resistenza elettrica del circuito diventa nulla.

Furono questi problemi a portare all'ideazione del sistema M2P2, comparato in *Figura 2.2* alla *MagSail*, nella quale il campo magnetico verrebbe ancora generato a bordo tramite un circuito percorso da corrente, ma a differenza della vela magnetica non necessariamente superconduttivo e di dimensioni molto minori, e l'estensione richiesta alla bolla magnetica verrebbe così raggiunta "gonfiandola" con l'iniezione di plasma, ad esempio ottenuto tramite dall'argon. A tale scopo è stata proposta una sorgente di plasma helicon, la quale riscalda il gas che diventerà plasma per riscaldamento da radiofrequenza con un'onda elettromagnetica a bassa frequenza detta appunto helicon, in quanto questo sistema è capace di dare scariche ad alta densità in presenza di forti campi magnetici.

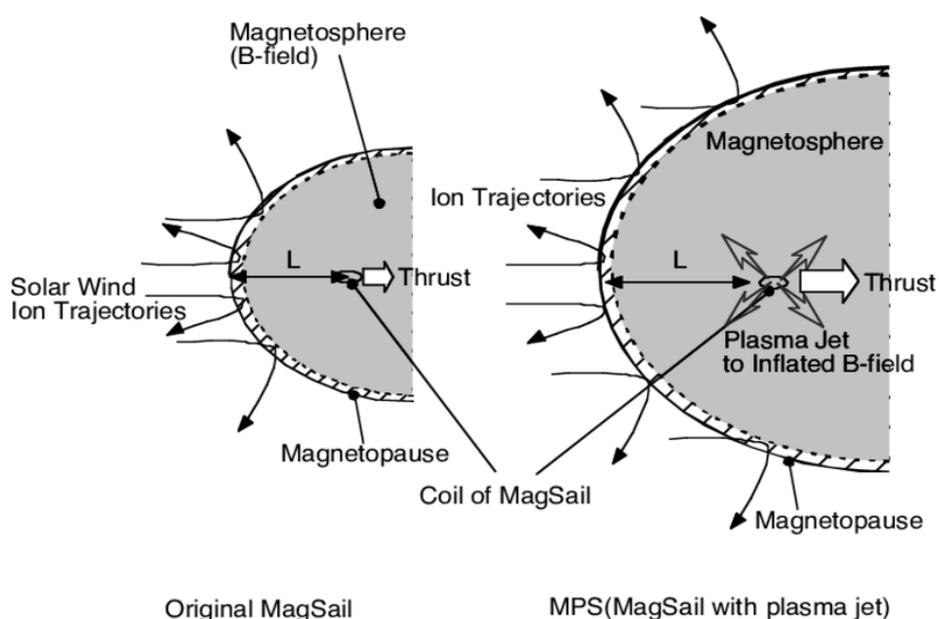


Figura 2.2: Comparazione schematica tra *MagSail* (a sinistra) e *M2P2* (a destra), da Yamakawa et al. ^[12]

Il plasma così generato si occuperebbe di trasportare il campo magnetico verso distanze maggiori dallo spacecraft in modo del tutto simile a quanto fatto dal vento solare, le cui particelle trasportano le linee di flusso del campo magnetico solare fino all'eliopausa. Anche il meccanismo di gonfiaggio del campo magnetico per iniezione di plasma e la deflessione del vento solare da parte di una magnetosfera possono essere osservati in natura, rispettivamente negli anelli coronali solari e nella magnetosfera terrestre.

Affinché questo avvenga è però necessario che il campo magnetico sia di intensità sufficiente da magnetizzare gli ioni presenti nel plasma e che il raggio del solenoide sia diverse volte superiore alla larghezza della sorgente di plasma, in modo che gli ioni rimangano magnetizzati quando lasciano la sorgente per entrare nel campo magnetico. In assenza del vento solare il flusso di plasma iniettato potrebbe espandersi liberamente e il campo magnetico sarebbe in grado di decadere al massimo come r^{-2} , ma tenendo in considerazione il suo effetto, che tende a frenare quest'espansione libera, il plasma iniettato sarebbe da questo riscaldato adiabaticamente portando ad un decadimento del campo magnetico del tipo r^{-1} . In ultimo il vento solare ed il plasma energizzato dovrebbero venir respinti dalla mini-magnetosfera, generando per azione e reazione una forza sulle linee di flusso del campo magnetico, che verrebbe poi trasmessa allo spacecraft al quale esse sono attaccate. Si formerebbe così una magnetosfera la cui magnetopausa è il risultato dell'equilibrio tra il campo magnetico locale e la pressione dinamica del vento solare.

Il plasma iniettato verrebbe in questo modo perso, respinto via insieme al vento solare, portando alla necessità di un flusso continuo di plasma che lo rimpiazza e quindi ad un sistema a massa variabile. Questo plasma avrebbe sia la funzione di incrementare la spinta del sistema, aumentando le dimensioni del campo magnetico, sia il ruolo di pseudo-propellente, in quanto in seguito all'incontro con il vento solare verrebbe da questo energizzato e successivamente eserciterebbe esso stesso una piccola forza sulla mini-magnetosfera. Seppur i consumi di plasma non dovrebbero essere troppo elevati, si crea una differenza fondamentale rispetto alla vela magnetica: la vela magnetica è un sistema propulsivo il cui unico propellente è il vento solare, con una massa costante nel tempo e capace di funzionare finché questo non viene a mancare a grandi distanze dal Sole e l'energia a bordo è sufficiente (se si utilizzano materiali superconduttori, le richieste del sistema criogenico potrebbero essere elevate), mentre il sistema M2P2 ha una massa variabile fintato che il plasma viene iniettato nel sistema, dopo di che diventa una vela magnetica sottodimensionata.

Con la M2P2 in conclusione sembrerebbe possibile ridurre di molto la massa del sistema propulsivo e i suoi requisiti energetici, con un ulteriore benefico "effetto palloncino", presente solo nel caso di decrescita come r^{-1} , per il quale con l'allontanarsi dal Sole la minore pressione dinamica del vento solare porta la mini-magnetosfera a gonfiarsi ulteriormente, aumentando il suo ingombro per compensare alla minor pressione, permettendo così di mantenere spinte circa costanti all'interno del sistema solare. Inoltre, la bolla magnetica creata avrebbe il gradito effetto di fare da scudo contro minacce come il vento solare, le SEP e i raggi cosmici galattici che riescono a penetrare l'eliosfera, creando così un sistema di schermatura attivo in grado di proteggere almeno parzialmente l'equipaggio e l'elettronica presenti a bordo.

2.3 Simulazioni ed esperimenti sulla M2P2

All'idea di realizzare un sistema come quello descritto in precedenza seguirono numerose simulazioni ed esperimenti, volti a validare le ipotesi di funzionamento proposte e a quantificare le caratteristiche e prestazioni. Di fondamentale importanza nella realizzazione delle simulazioni è la scelta del modello di plasma da utilizzare, in quanto diversi modelli comportano diversi pregi e difetti, in particolare

maggiori o minori accuratèzze, difficoltà di trattazione e tempi di calcolo. Sostanzialmente ci sono due famiglie di modelli (e diversi modelli ibridi), che vedono il plasma più come un gas o come un fluido: nella trattazione gassosa ci si concentra sul comportamento microscopico del plasma, mentre in quella fluida è l'aspetto macroscopico il principale interesse.

Si può esaminare il comportamento microscopico sia seguendo ogni particella e valutando il modo in cui interagisce con le altre e con i campi elettromagnetici presenti per effetto della forza di Lorentz (modello *single particles*), sia adottando un approccio più probabilistico che si basa su l'equazione di Boltzmann (o sue varianti) e le equazioni di Maxwell, con l'utilizzo di funzioni di distribuzione di probabilità che indicano il numero di particelle per unità di volume che possiedono all'incirca una certa posizione e velocità ad un dato tempo (modello cinetico).

Nella trattazione fluida invece il plasma è considerato un mezzo continuo le cui proprietà sono ricavate utilizzando i momenti delle grandezze coinvolte (momenti in senso probabilistico, per maggiori informazioni sull'argomento consultare Wiegmann ^[13]) con le distribuzioni di probabilità prese dalle equazioni del modello cinetico, in modo da trovare dei valori rappresentativi per indicare le condizioni in cui si trova una regione di fluido. Si può quindi vedere il plasma come composto da un singolo fluido in equilibrio termodinamico locale ed elettricamente conduttivo (modello magnetoidrodinamico, o MHD) o come un insieme di più specie trattate come fluidi diversi (modello multi-fluido), utilizzando in entrambi i casi le equazioni di Navier-Stokes, le equazioni di Maxwell e l'equazione della forza di Lorentz.

La trattazione gassosa, per il suo maggior livello di dettaglio, porta a risultati più accurati e permette di vedere fenomeni che con i modelli fluidi non sarebbero apprezzabili, ma quest'ultimi richiedono tempi computazionali molto minori, per cui la scelta del modello da utilizzare dipende sempre dal problema che si intende risolvere.

Per le prime simulazioni ^[8] fu scelto un modello tempo-dipendente multi-fluido 3D rappresentante il plasma prodotto a bordo e quello del vento solare come due flussi diversi sotto l'ipotesi che tutto il plasma iniettato venga perso, e si impiegò lo stesso modello numerico che fu già usato dallo stesso Winglee ^[14,15] per modellare la magnetosfera terrestre. Venne così simulata una prima interazione del vento solare con il debole campo magnetico prodotto dallo spacecraft e poi, una volta raggiunto l'equilibrio con la creazione di un'onda d'urto e una scia, un aumento della forza del campo magnetico, l'iniezione di plasma e il raggiungimento di un nuovo punto di equilibrio, ripetendo per campi magnetici più intensi e plasma più denso.

Da queste simulazioni si vide che l'ordine di grandezza del campo magnetico era direttamente proporzionale alla sua intensità e che, considerando inizialmente l'asse del dipolo perpendicolare alla direzione del vento solare, un'inclinazione del solenoide verso il Sole causava la nascita di una forza tangenziale e/o azimutale. Tale inclinazione, testata fino al punto di maggior forza tangenziale, ovvero i 45°, causava inoltre un aumento delle dimensioni della magnetosfera per un più forte campo magnetico nella regione dei poli. Questo implicava che la configurazione con direzione dell'asse magnetico ortogonale a quella del vento solare fosse quella di minor energia, per cui non c'era alcun rischio di perforare la bolla magnetica, e si poteva aumentare la forza radiale, seppur annullando le altre componenti, allineando l'asse del dipolo con la direzione del vento solare.

Queste simulazioni mostrarono inoltre (*Figura 2.3*) come la forza necessaria per sostenere il sistema fosse molto minore, e direttamente proporzionale in scala logaritmica, alla forza che il vento solare esercitava sullo spacecraft, calcolata utilizzando il principio di conservazione della quantità di moto. Furono realizzate simulazioni solo per un sistema M2P2 di dimensioni diversi ordini di grandezza minori a quelle che servirebbero per un'applicazione pratica, ma dai risultati ottenuti sarebbe possibile

estrapolarne di nuovi proseguendo da questi lungo una retta fino ad arrivare alla regione di interesse, e quindi scalare la M2P2. Bisogna però fare attenzione, perché affinché questa sia un'operazione valida è necessario che siano ancora rispettate le condizioni di applicazione del modello fluido (multi-fluido o MHD che sia), ovvero che il raggio di Larmor degli ioni nel campo magnetico del dipolo e la loro lunghezza d'inerzia, (o profondità di pelle, in inglese *ion skin depth*) siano molto minori della scala di grandezza caratteristica del dipolo. Nonostante ci siano dei dubbi riguardo la legittimità di quest'operazione, esposti nella sezione 2.4, nel seguito si prenderà per buono questo scalamento e verranno usati proprio i valori mostrati in *Figura 2.3* e ricavati da Winglee et al. tramite estrapolazione, per poter confrontare i risultati successivamente trovati con quelli esposti in un analogo studio di Mengali e Quarta del 2006 ^[16].

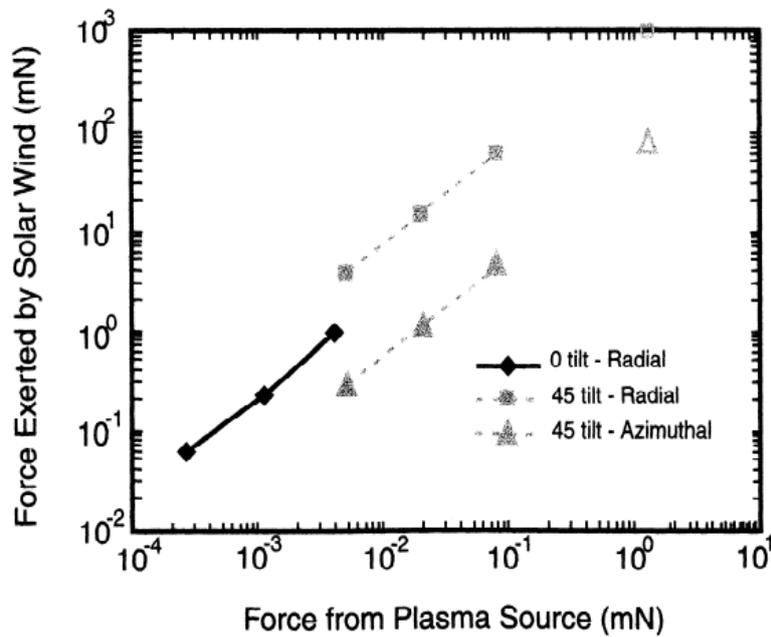


Figura 2.3: Forza sviluppata sul sistema M2P2 in funzione della forza del plasma immesso dalla sorgente derivata dalle simulazioni, da Winglee et al. ^[8]

La mancanza di un'espressione analitica per la forza obbliga ad usare una formulazione matematica approssimata, e a questo scopo è stata scelta un'approssimazione polinomiale del secondo ordine, ancora una volta utilizzata da Mengali e Quarta nel loro studio (ma anche da Bolle e Circi nel 2009 ^[17]), che limitandosi al caso piano porta a:

$$F_r = F_{r0} \left[1 + b_1 \left(\frac{|F_\theta|}{F_{r0}} \right) + b_2 \left(\frac{|F_\theta|}{F_{r0}} \right)^2 \right], \quad (2.3)$$

$$\beta = \beta_0 \left[1 + b_3 \left(\frac{|F_\theta|}{F_{r0}} \right) + b_4 \left(\frac{|F_\theta|}{F_{r0}} \right)^2 \right], \quad (2.4)$$

in cui:

- F_r e F_θ sono rispettivamente la componente di forza radiale e tangenziale agenti sullo spacecraft, con quest'ultima usata (come controllo) per determinare la prima e con valore compreso tra $-F_{\theta max}$ e $F_{\theta max}$;
- β è il consumo di plasma iniettato nella mini-magnetosfera;

- F_{r0} , β_0 , b_1 , b_2 , b_3 e b_4 sono i coefficienti (i primi due dimensionali) che interpolano i risultati delle simulazioni effettuate da Winglee et al.

Questa formulazione delle forze risulta particolarmente utile in quanto se futuri sviluppi dovessero indicare, come sembra probabile, una nuova relazione tra F_r , F_θ e β , questa sarà ottenibile con un semplice cambio di coefficienti, i quali potranno cambiare anche a seconda che ci si trovi nell'intervallo $0^\circ - 45^\circ$ o $45^\circ - 90^\circ$, caso quest'ultimo non trattato (e sul quale non si conoscono dati) in cui si voglia permettere al dipolo una maggior rotazione. Di particolare importanza è il fatto che la forza tangenziale sia di più di un ordine di grandezza inferiore a quella radiale, la quale potrà solo assumere segno positivo contrariamente a quella tangenziale.

Successivamente a queste simulazioni, nel 2001 un prototipo di sistema M2P2 fu assemblato all'University of Washington e testato in una camera a vuoto, dimostrando la sua capacità di gonfiare una magnetosfera artificiale e di deviare un surrogato di vento solare ^[18]. Ulteriori esperimenti svolti con lo stesso prototipo nel 2003, con lo scopo di investigare quantitativamente l'interazione vento solare-sistema M2P2, dimostrarono tra le altre cose che la deflessione del surrogato di vento solare all'accensione del sistema era molto efficiente anche in quello che poteva essere probabilmente considerato il peggiore scenario possibile, provando che la M2P2 aveva tutte le caratteristiche fondamentali per operare con successo nello spazio ^[19].

Nuove simulazioni nel 2004 da parte di Winglee et al. ^[20] dettagliarono ulteriormente le fasi di inflazione della magnetosfera e deflessione del vento solare, con l'aggiunta al precedente modello multi-fluido di effetti di ciclotrone degli ioni importanti per la generazione di accelerazioni non radiali, e un modello di sistema M2P2 molto simile a al sopracitato prototipo. Da queste simulazioni si ottenne un decadimento del campo magnetico come $r^{-1.2}$ nel piano equatoriale e $r^{-1.7}$ al di fuori di questo, ma l'abilità della M2P2 di moltiplicare la forza data al plasma iniettato per ottenere una spinta circa 100 volte maggiore fu confermata. Ulteriori simulazioni ed analisi furono svolte in questi anni sull'argomento da ricercatori di tutto il mondo, alcune delle quali rafforzanti la bontà di questo sistema propulsivo (a mero titolo esemplificativo si cita il lavoro di Yamakawa et al. ^[12] e quelli lì riportati), altre avanzanti perplessità sulla sua effettiva fattibilità e possibili prestazioni.

2.4 Critiche

In seguito alla divulgazione delle prime simulazioni ed esperimenti furono pubblicati due studi, nel 2004 da Khazanov et al. ^[21] e nel 2005 da Cattell et al. ^[22], che riconsideravano il lavoro svolto da Winglee et al.

Il primo di questi si focalizzò sulla scelta del modello multi-fluido, la quale ha delle conseguenze importanti sui risultati in quanto alcuni effetti, legati in particolar modo delle instabilità del plasma, non sono visibili con questo approccio e questo potrebbe condurre a problemi come ad esempio un aumento considerevole del consumo di plasma iniettato, come notato già dal 2000 dagli stessi Winglee et al. Oltre ai limiti insiti nel modello fu notato da Khazanov et al. un problema nella sua applicazione in quanto l'estrapolazione dei risultati nella regione di applicabilità pratica della M2P2 non sarebbe legittima poiché la condizione di validità del modello fluido legata al raggio di Larmor degli ioni non sarebbe in tale regione più verificata. Anche l'effettivo decadimento del campo magnetico come r^{-1} fu messo in discussione in quanto frutto di simulazioni a bassa scala, e l'utilizzo di un modello MHD multi scala adattativo che simulasse l'interno della regione controllata dalla fonte di plasma con le dimensioni suggerite da Winglee et al. fu in grado di dimostrare un andamento intermedio tra r^{-1} e r^{-2} (Figura 2.4). Questo è un parametro molto importante, in quanto assumere un decadimento

troppo lento porterebbe a sottovalutare l'intensità del campo magnetico richiesto, e quindi a sottostimare anche la potenza richiesta a bordo, per produrre la quale servirebbero masse più grandi (a parità di livello tecnologico).

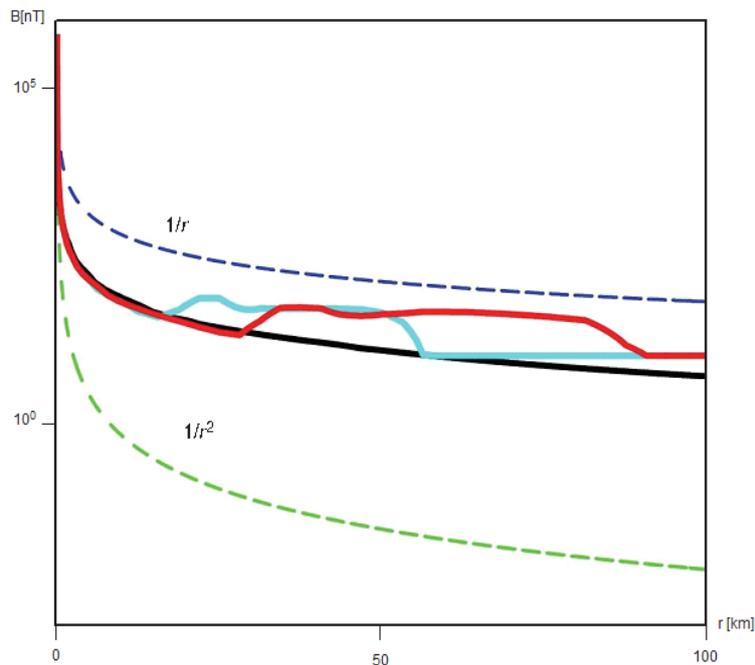


Figura 2.4: “Decadimento del campo magnetico in direzione sub-solare. La linea rossa indica una simulazione MHD con il vento solare, quella nera indica una simulazione MHD senza il vento solare, e la linea blu indica una simulazione MHD con il vento solare con pressione dinamica aumentata; le linee tratteggiate sottili mostrano dipendenze $1/r$ e $1/r^2$ per comparazione” (didascalia e immagine da Khazanov et al. [21])

Per risolvere le problematiche di simulazione fu proposto e simulato da Khazanov et al. un modello misto, che utilizzasse il modello MHD nella parte controllata dalla sorgente di plasma e il modello cinetico per la parte controllata dal vento solare, con condizioni al contorno date dall'uno all'altro, per ridurre il costo computazionale di un modello completamente cinetico. Da queste simulazioni preliminari si concluse che il trasferimento di quantità di moto dal vento solare allo spacecraft sembrerebbe considerevolmente minore di quello predetto da Winglee et al., e questo porterebbe alla necessità di creare una bolla notevolmente più grande per ottenere le stesse prestazioni.

Nel secondo studio venne invece indagata da Cattell et al. la fattibilità di costruire un sistema M2P2 competitivo con altri sistemi propulsivi attualmente disponibili o proposti, focalizzandosi sui requisiti sul flusso magnetico e sul decadimento del campo magnetico necessari per avere una buona deflessione del vento solare e sulle conseguenze che questi hanno sulle dimensioni del solenoide.

Analiticamente viene ricavato che per avere trasferimento di quantità di moto alla M2P2 è necessario che il campo magnetico sia abbastanza forte da deviare il vento solare alla magnetopausa e da magnetizzare gli ioni. Da questi è stato ricavato rispettivamente che, passando per il bilancio tra la densità d'energia del campo magnetico locale con l'energia cinetica del vento solare, il raggio ciclotronico degli ioni alla magnetopausa deve essere comparabile con il raggio d'inerzia degli ioni nel vento solare, e che il raggio della bolla deve essere maggiore o uguale ai due parametri prima citati. Per raggi della bolla magnetica minori della lunghezza d'inerzia degli ioni, le simulazioni MHD mostreranno un significativo scambio di quantità di moto, portando così a sovrastimare la spinta.

Il principale ostacolo per il sistema M2P2 risulterebbe però essere il principio di conservazione del flusso, per il quale in un dipolo le linee di flusso del campo magnetico si generano e si chiudono sul solenoide facendo sì che i flussi del campo magnetico in entrata e in uscita si equivalgano, e questo porrebbe dei limiti sulla grandezza della bolla magnetica legandola alla quantità di flusso magnetico che si è in grado di produrre. Tenendo conto di queste limitazioni, assumendo un decadimento (ottimistico) di r^{-1} e indicando con B_0 il campo magnetico medio nel solenoide di raggio a e con B_{mp} il campo al limite della bolla di raggio b , viene ricavato uguagliando i flussi all'interno e all'esterno del solenoide che

$$B_0 = B_{mp} \left(\frac{b}{a} \right)^2, \quad (2.5)$$

contrariamente all'espressione utilizzata da Winglee et al. per cui

$$B_0 = B_{mp} \left(\frac{b}{a} \right). \quad (2.6)$$

Questo farebbe sì che il solenoide di 10 cm e 50 kg da questi proposto riuscirebbe al massimo a produrre una bolla di circa 100 m invece dei 20 km previsti, con problemi ancora maggiori se si considerassero le più realistiche dimensioni di circa 100 km richieste, per le quali il flusso magnetico necessario sarebbe di circa 3000 Wb . Questa incongruenza con le simulazioni eseguite potrebbe essere spiegata in molti modi, tra cui una mancanza di conservazione dei flussi o problemi nello scalamento, e si potrebbe risolvere mostrando che gli anelli del campo magnetico si chiudano all'interno dei confini della magnetopausa, ma questo non sembrerebbe essere il caso dalle simulazioni di Winglee et al. del 2004 ^[20].

I problemi aumentano inoltre considerando i requisiti per gli elettromagneti da usare a bordo, in quanto un elettromagnete di rame raffreddato che produca 30 Wb (vela al plasma da 10 km) richiederebbe 88 MW di potenza per una massa di 48.5 tonnellate. Questo forzerebbe ad usare anche per la M2P2 un superconduttore, il quale avrebbe caratteristiche molto migliori in termini di refrigerazione, potenza e massa, con circa 3 tonnellate necessarie per una bolla da 10 km (un ordine di grandezza inferiore a quella necessaria per condizione sulla lunghezza d'inerzia degli ioni) e ottimistiche spinte da Winglee et al. di circa 1 N , assumendo completo trasferimento di quantità di moto dal vento solare allo spacecraft.

In *Tabella 2.1* si presenta un riassunto delle possibili prestazioni di questo sistema comparato con quelle di una vela magnetica da Cattell et al. Il risultato di questa analisi è che, anche senza considerare altri problemi come la stabilità della bolla, la perdita di plasma iniettato, la massa e le richieste energetiche del sistema di raffreddamento e del resto dello spacecraft, e la necessità di un sistema secondario di spinta per direzioni diverse da quella antisolare, dato che come visto precedentemente la componente tangenziale è più di un ordine di grandezza inferiore a quella radiale, oltre alle difficoltà nel simulare correttamente la fisica del sistema, le prestazioni della M2P2 non sembrano essere competitive.

Tabella 2.1: Comparazione di possibili parametri costruttivi e prestazioni di M2P2 e vela magnetica, adattata da Cattell et al. [22]

Proprietà	Stime di Winglee et al.	Stime con $B \propto \frac{1}{r}$	Stime con $B \propto \frac{1}{r^2}$	Stime da MagSail $B \propto \frac{1}{r^3}$
			Decadimento più lento possibile senza vento solare	Progetto di MagSail
Forza	0.7 N	0.7 N	0.7 N	70 N
Raggio bolla	10 km	10 km	10 km	100 km
Raggio bobina	0.1 m	2.5 m	7.5 m	50 km
Flusso magn. bobina	$2 \cdot 10^{-3}$ webers	30 webers	300 webers	$2 \cdot 10^4$ webers
Massa magnete	10 kg	$3 \cdot 10^3$ kg (superconduttivo)	$1 \cdot 10^5$ kg (superconduttivo)	$4 \cdot 10^4$ kg (superconduttivo)
Massa totale	50 kg	$3 \cdot 10^3$ kg + massa refr., etc.	$1 \cdot 10^5$ kg + massa refr., etc.	$4 \cdot 10^4$ kg + massa refr., etc.
Densità di corrente	...	$1.2 \cdot 10^8 \frac{A}{m^2}$	$3.5 \cdot 10^7 \frac{A}{m^2}$	$4 \cdot 10^9 \frac{A}{m^2}$
Tempo per raggiungere 0.1 volte la velocità del vento solare	0.25 years	> 25 years	> 500 years	> 2 years
commenti	Parametri da Winglee et al. (2000)	Nessuna prova convincente di significativo decadimento $1/r$; realizzazione non possibile	Una bobina di queste dimensioni non è mai stata costruita e non potrebbe essere lanciata da un Saturn 5	Una bobina di queste dimensioni non è mai stata costruita e dovrebbe essere costruita in spazio, e il raffreddamento potrebbe non essere possibile

3. Il modello matematico

3.1 Equazioni fondamentali della meccanica del volo spaziale

Il modello utilizzato si basa sull'approssimazione delle "patched conics", in cui si vede l'intero spazio come un insieme di sfere d'influenza nelle quali vale il problema dei due corpi e le traiettorie si uniscono all'intersezione di tali sfere. L'unica sfera d'influenza di dimensioni non trascurabili qui considerata è quella solare ed uno specifico pianeta si considera raggiunto all'ingresso nella sua sfera d'influenza. Un complicato problema degli n corpi viene così semplificato in un problema dei due corpi con soluzione analitica nota, in cui i due corpi in questione, il Sole e lo spacecraft, interagiscono esclusivamente tramite la forza di gravità. Con riferimento alla *Figura 3.1* è possibile esprimere la forza gravitazionale agente sui due corpi con il sistema di equazioni

$$\begin{cases} \ddot{\vec{R}}_1 M = G \frac{Mm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \\ \ddot{\vec{R}}_2 m = -G \frac{Mm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \end{cases}, \quad (3.1)$$

in cui:

- $\vec{r} = \vec{R}_2 - \vec{R}_1$ è la distanza tra i due corpi;
- M e m sono rispettivamente la massa solare e la massa dello spacecraft;
- $G \simeq 6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ è la costante di gravitazione universale.

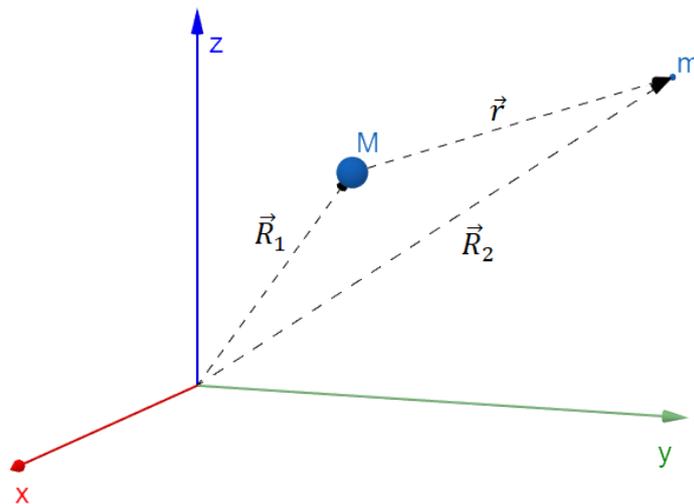


Figura 3.1: Corpi di massa M ed m in un sistema di riferimento 3D. Il vettore posizione \vec{R}_1 va dall'origine ad M , il vettore posizione \vec{R}_2 va dall'origine ad m e il vettore \vec{r} va da M ad m .

Considerando la massa dello spacecraft trascurabile rispetto a quella solare, e quindi $m + M \simeq M$, e definendo il parametro gravitazionale standard solare come $\mu_{\odot} = GM = 1.33 \cdot 10^{11} \text{ Km}^3/\text{s}^2$, sottraendo membro a membro le precedenti (3.1) si arriva all'equazione del moto dei due corpi

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{R}}_2 - \ddot{\vec{R}}_1 = -G \frac{M+m}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \simeq -\frac{\mu_{\odot}}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad (3.2)$$

la quale descrive la traiettoria percorsa dallo spacecraft nel tempo. Da questa espressione è possibile ricavare la forma dell'orbita, che nell'ambito dell'approssimazione introdotta sarà un'orbita Kepleriana, descritta da una sezione (piana) di conica. È possibile dimostrarlo comparando l'equazione precedente, integrata ed espressa in coordinate polari, con l'equazione di una conica in coordinate polari, rispettivamente:

$$r = \frac{h^2/\mu_{\odot}}{1+B/\mu_{\odot} \cos \nu}, \quad (3.3)$$

$$r = \frac{p}{1+e \cos \nu}, \quad (3.4)$$

in cui:

- $\vec{h} = \vec{r} \wedge \vec{v}$ è il momento della quantità di moto per unità di massa;
- B è il modulo di un vettore fisso (è una costante che deriva dall'integrazione) con direzione che va da uno dei fuochi al periastro, il punto di minima distanza della traiettoria da uno dei fuochi;
- ν è l'anomalia vera, l'angolo compreso tra la retta che congiunge il fuoco al periastro e quella che congiunge il fuoco al corpo di massa m ;
- $p = a(1 - e^2)$ è il semilatus rectum, con a la lunghezza del semiasse maggiore (nel caso di orbita ellittica);
- e è l'eccentricità, la quale si annulla nel caso di orbita circolare, è compresa tra 0 e 1 nel caso di orbita ellittica, è uguale a 1 nel caso di orbita parabolica, e assume valori maggiori di 1 per orbite iperboliche.

In *Figura 3.2a* una classica orbita Kepleriana, nella quale il Sole occupa uno dei fuochi e lo spacecraft si muove lungo l'ellisse (che potrebbe essere sostituito da una parabola o un ramo di iperbole, a seconda dei valori delle grandezze prima esposte). Il semiasse maggiore, l'eccentricità e l'anomalia vera sono tre parametri fondamentali per determinare la posizione di un corpo nel tempo, e per questo sono chiamati "parametri orbitali Kepleriani classici". Per determinarne la posizione nello spazio 3D sono però necessari altri tre parametri, mostrati in *Figura 3.2b*, nello specifico tre angoli:

- Ω è la longitudine del nodo ascendente, ovvero l'angolo compreso tra il versore \hat{I} del sistema di riferimento scelto e il versore \hat{n} del nodo ascendente, a sua volta identificato come versore della retta d'intersezione tra il piano $\hat{I}\hat{J}$ e il piano dell'orbita, scegliendo come verso quello alla cui estremità si trova il punto in cui il corpo m passa da coordinata associata al versore \hat{K} negativa a positiva;
- ω è l'argomento del periastro, angolo compreso tra il già citato versore \hat{n} e il versore \hat{e} del vettore $\vec{e} = \frac{\vec{B}}{\mu_{\odot}}$, vettore associato all'eccentricità che come \vec{B} ha direzione che va dal fuoco al periastro;
- i è l'inclinazione, angolo tra il versore \hat{K} e il versore \hat{h} del momento della quantità di moto.

Il sistema di riferimento utilizzato nel caso trattato, e considerato inerziale, sarà quello Eliocentrico-Eclittico, il quale ha origine nel centro del Sole con versore \hat{I} diretto verso il punto vernale (punto nel quale il Sole visto dalla Terra durante l'equinozio di primavera appariva circa 2100 anni fa nella costellazione dell'Ariete \mathcal{V}), versore \hat{K} con stessa direzione e verso della velocità angolare di rivoluzione terrestre e versore \hat{J} che completa la terna destrorsa. Il piano $\hat{I}\hat{J}$ in questo modo sarà quindi il piano dell'eclittica.

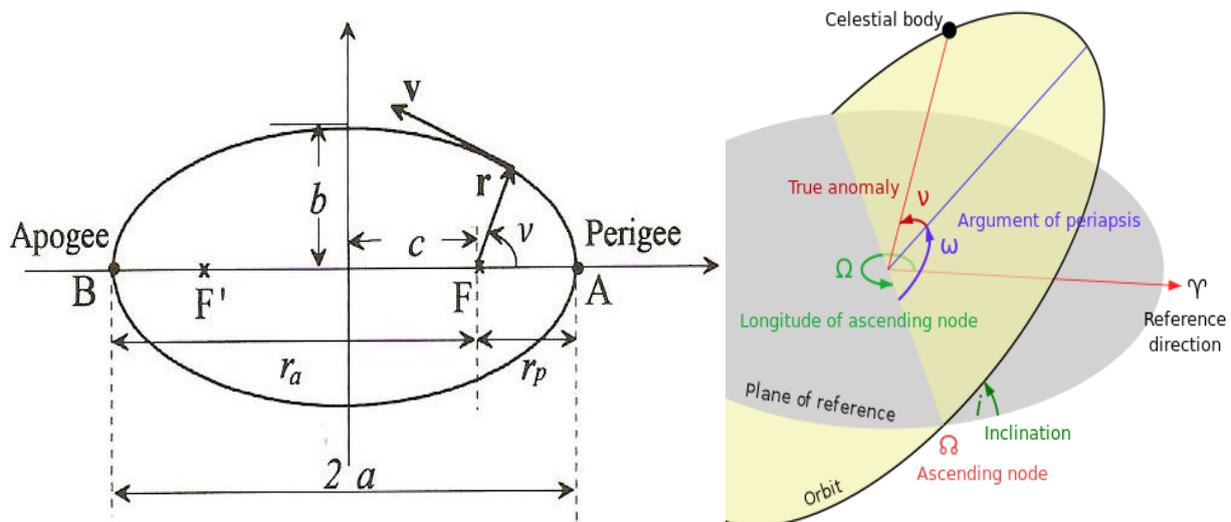


Figura 3.2 Esempio di orbita ellittica ^[23] a sinistra (3.2a), in cui F e F' sono i due fuochi distanti c dal centro dell'ellisse di semiasse maggiore a e minore b . La distanza dal fuoco F all'apogeo B e al perigeo A è rispettivamente r_a e r_p e il corpo in orbita dista \vec{r} da F , ha anomali vera v e velocità \vec{v} . Lo stesso tipo di orbita è mostrata nello spazio 3D ^[3] a destra (3.2b), in cui si evidenzia la presenza degli elementi orbitali prima introdotti.

Ad ogni orbita è inoltre possibile associare un livello di energia (energia meccanica per unità di massa), che si può dimostrare essere calcolabile semplicemente come

$$E = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu_{\odot}}{r} = -\frac{\mu_{\odot}}{2a} \quad (3.5)$$

e un periodo di rivoluzione (nota anche come terza legge di Keplero)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu_{\odot}}} \quad (3.6)$$

Nell'approssimazione delle *patched conics* è quindi possibile trattare il moto di ogni pianeta come un problema dei due corpi, in cui le orbite sono descritte dai parametri precedentemente esposti. In realtà questi parametri variano ciclicamente, ma saranno qui considerati costanti (ad eccezione dell'anomalia vera naturalmente), e in particolare si assumerà che l'eccentricità, in quanto molto piccola, sia nulla, ottenendo in questo modo orbite circolari.

Si introduce inoltre il ΔV , ovvero la differenza (indicata dal simbolo Δ) di velocità tra la fine e l'inizio di una manovra, utile per valutarne la convenienza in quanto legata dall'equazione di Tsiolkovsky (equazione del razzo) ai consumi:

$$\Delta V = c \ln\left(\frac{m_i}{m_f}\right), \quad (3.7)$$

dove:

- c è la velocità efficace di scarico del propellente dal propulsore (in un propulsore convenzionale operante nello spazio);
- m_i e m_f indicano rispettivamente la massa iniziale e finale.

Il parametro c , relativo ad un particolare propulsore, è fondamentale per capirne le prestazioni poiché esso è legato all'impulso specifico I_{sp} , che a sua volta rappresenta un bilancio tra effetto e spesa:

$$I_{sp} = \frac{T \Delta t}{\dot{m}_p \Delta t g_0} = \frac{c}{g_0}, \quad (3.8)$$

in cui:

- $T = \dot{m}_p c$ indica la spinta del propulsore nell'intervallo di tempo Δt (che se costante rende il numeratore pari all'impulso totale I_t);
- \dot{m}_p è il flusso di propellente;
- $g_0 = 9.80665 \text{ m/s}^2$ è la costante di gravità standard.

Limitando lo studio al solo caso bidimensionale (e quindi moto nel piano dell'eclittica), ponendosi ancora una volta in un sistema di riferimento polare centrato sul Sole come quello in *Figura 3.3*, risulta molto vantaggioso scomporre le velocità e accelerazioni dello spacecraft che si andrà a considerare in una componente radiale ed una tangenziale, per esprimere in una diversa forma, che tornerà utile in seguito, l'equazione (3.2). In questo modo:

$$\vec{r} = r\hat{i} , \quad (3.9)$$

$$\vec{V} = u\hat{i} + v\hat{j} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{i} + r\dot{\hat{i}} , \quad (3.10)$$

$$\hat{i} = \cos \theta \hat{I} + \sin \theta \hat{J} , \quad (3.11)$$

$$\hat{j} = -\sin \theta \hat{I} + \cos \theta \hat{J} . \quad (3.12)$$

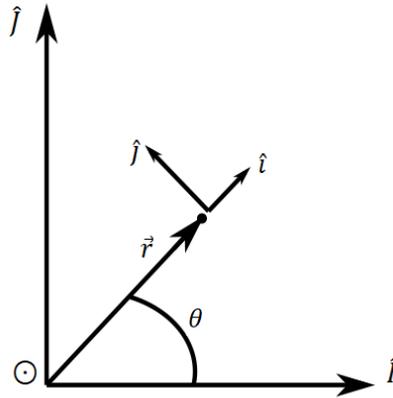


Figura 3.3: Sistema di riferimento polare centrato sul Sole (assi $\hat{I}\hat{J}$) e sistema di riferimento radiale-tangenziale centrato sullo spacecraft (assi $\hat{i}\hat{j}$)

Derivando i versori esplicitati nelle ultime due equazioni si ottiene

$$\dot{\hat{i}} = -\dot{\theta} \sin \theta \hat{I} + \dot{\theta} \cos \theta \hat{J} = \dot{\theta} \hat{j} , \quad (3.13)$$

$$\dot{\hat{j}} = -\dot{\theta} \cos \theta \hat{I} - \dot{\theta} \sin \theta \hat{J} = -\dot{\theta} \hat{i} . \quad (3.14)$$

Queste si sostituiscono quindi nella (3.10) e comparando le componenti si ottiene:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{i} + r\dot{\theta}\hat{j} = u\hat{i} + v\hat{j} , \quad (3.15)$$

$$\dot{r} = u , \quad (3.16)$$

$$\dot{\theta} = \frac{v}{r} . \quad (3.17)$$

Derivando la precedente equazione (3.15) e comparando nuovamente le componenti si arriva a:

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu_{\odot}}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = -\frac{\mu_{\odot}}{r^2} \hat{i} = \dot{u}\hat{i} + u\dot{\hat{i}} + \dot{v}\hat{j} + v\dot{\hat{j}} = \dot{u}\hat{i} + u\dot{\theta}\hat{j} + \dot{v}\hat{j} - v\dot{\theta}\hat{i} = \dot{u}\hat{i} + \frac{uv}{r}\hat{j} + \dot{v}\hat{j} - \frac{v^2}{r}\hat{i} , \quad (3.18)$$

$$\dot{u} = -\frac{\mu_{\odot}}{r^2} + \frac{v^2}{r}, \quad (3.19)$$

$$\dot{v} = -\frac{uv}{r}. \quad (3.20)$$

Le ultime due equazioni rappresentano l'accelerazione radiale e tangenziale dello spacecraft quando questo è sottoposto alla sola forza di gravità, ma per considerare la forza esercitata dai motori presenti a bordo è necessario aggiungere due termini. In maniera molto generica e indipendente dal sistema propulsivo utilizzato, le precedenti equazioni (3.19) e (3.20) possono essere riscritte come

$$\dot{u} = -\frac{\mu_{\odot}}{r^2} + \frac{v^2}{r} + \tau \frac{F_r}{m}, \quad (3.21)$$

$$\dot{v} = -\frac{uv}{r} + \tau \frac{F_{\theta}}{m}, \quad (3.22)$$

in cui τ è la manetta, ovvero un coefficiente adimensionale che indica se il sistema propulsivo è acceso o spento e assume i valori 0 o 1, o in caso di arco singolare anche valori tra essi compresi. È possibile inoltre aggiungere altri termini che tengano conto delle forze dovute a fenomeni quali l'attrito, rilevante solo nelle immediate vicinanze di un pianeta, o la pressione solare, ma saranno in questo studio trascurati. Le espressioni (3.16), (3.17), (3.21) e (3.22) costituiscono le equazioni del moto.

3.2 Teoria del controllo ottimo

La teoria del controllo ottimo si propone di individuare le leggi di controllo che portano alla massimizzazione o alla minimizzazione di un certo indice prestazionale, ma dato che il problema può essere molto complicato o impossibile da risolvere per via analitica, è reso necessario l'utilizzo di metodi numerici. Per giungere ad una soluzione si può utilizzare un metodo diretto, un metodo indiretto, un metodo ibrido o un metodo evolutivo; la scelta deve ricadere su quello che si presenta meglio al problema in esame poiché ognuno di questi ha dei pro e dei contro. In campo aerospaziale uno dei metodi più usati è quello indiretto grazie alla sua alta accuratezza, ai bassi costi computazionali e all'alto contenuto teorico che permette di inquadrare al meglio il problema, ma è anche un metodo poco robusto, ha delle difficoltà nel trattare condizioni al contorno complicate, specie derivanti da disuguaglianze, e come per altri metodi dipendenti fortemente da dei valori di tentativo, che possono portare a soluzioni subottimali. Questo sarà il metodo utilizzato nel presente studio, e per applicarlo alla teoria del controllo ottimo si farà uso del calcolo variazionale per definire un problema differenziale ai limiti (*Boundary Value Problem, BVP*) nel quale alcuni dei valori iniziali delle variabili saranno incogniti, riassumendo quanto esposto più dettagliatamente in [24, 25]. Questi valori incogniti saranno ricavati numericamente in modo da rispettare le condizioni al contorno, anche quelle di ottimo, partendo da dei valori di tentativo.

Per poter impostare il problema si fa uso di un vettore di controlli $\vec{u}(t)$ i cui vincoli saranno espliciti e costanti nel caso qui considerato, e quindi indipendenti dal tempo e dalle altre variabili, e di un vettore di variabili di stato $\vec{x}(t)$, la cui evoluzione è descritta da un set di equazioni differenziali nella forma

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}(t), \vec{u}(t), t). \quad (3.23)$$

A queste sono associate delle condizioni al contorno all'istante iniziale, finale ed eventualmente anche intermedio, sia in forma di uguaglianza che, in generale, di disuguaglianza, inserite nel vettore $\vec{\chi}$ in modo da annullarlo quando le condizioni risultano verificate:

$$\vec{\chi}(\vec{x}(t), t) = 0. \quad (3.24)$$

Per poter valutare la bontà di una soluzione delle (3.23) con condizioni al contorno (3.24) servirà un indice prestazionale e questo è dato dal funzionale J , che potrà essere espresso con la formulazione di Mayer, di Lagrange o di Bolza, le quali hanno rispettivamente la seguente forma:

$$J = \varphi(\vec{x}(t), t) , \quad (3.25)$$

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \phi(\vec{x}(t), \vec{u}(t), t) dt , \quad (3.26)$$

$$J = \varphi(\vec{x}(t), t) + \int_{t_0}^{t_f} \phi(\vec{x}(t), \vec{u}(t), t) dt . \quad (3.27)$$

Si può dimostrare che è sempre possibile passare da una formulazione all'altra e che quindi le tre forme sono del tutto equivalenti nei risultati, indirizzando la scelta verso quella che risulta di maggior convenienza pratica. Nello specifico si farà uso della formulazione di Bolza, composizione delle altre due, per esporre in maniera più generale alcuni risultati teorici, mentre quella di Mayer sarà utilizzata per semplicità pratica nell'effettiva applicazione del metodo.

Da questi ingredienti la teoria del controllo ottimo fa uso del calcolo variazionale per trovare il massimo o il minimo di J , e per il teorema fondamentale del calcolo delle variazioni si ha che il differenziale di J deve annullarsi in un punto di estremo (ovvero un punto di massimo o di minimo). Risulta comodo inserire nell'espressione del funzionale delle variabili aggiuntive λ associate alle variabili di stato, chiamate moltiplicatori di Lagrange o più semplicemente variabili aggiunte, e delle costanti aggiunte μ , in modo da arrivare al funzionale aumentato J^* . Utilizzando la formulazione di Bolza si ottiene

$$J^* = \varphi + \vec{\mu}^T \vec{\chi} + \int_{t_0}^{t_f} [\phi + \vec{\lambda}^T (\vec{f} - \dot{\vec{x}})] dt , \quad (3.28)$$

in cui il simbolo di trasposizione è utilizzato per indicare un vettore riga, mentre il vettore colonna non presenta alcun apice. Come si può vedere se le condizioni al contorno e le equazioni di stato sono soddisfatte i due funzionali (3.27) e (3.28) coincidono, ma quest'ultima scrittura permette di integrare per parti, ottenendo:

$$J^* = \varphi + \vec{\mu}^T \vec{\chi} + (-\vec{\lambda}^T(t_f) \vec{x}(t_f) + \vec{\lambda}^T(t_0) \vec{x}(t_0)) + \int_{t_0}^{t_f} [\phi + \vec{\lambda}^T \vec{f} + \dot{\vec{\lambda}}^T \vec{x}] dt . \quad (3.29)$$

Si introduce ora l'Hamiltoniano H , definito come

$$H = \phi + \vec{\lambda}^T \vec{f} . \quad (3.30)$$

Differenziando la (3.29), facendo comparire l'Hamiltoniano dove possibile e imponendo l'annullarsi del tutto per trovare i punti d'estremo si ottiene:

$$\begin{aligned} \delta J^* = & \left(-H(t_0) + \frac{\partial \varphi}{\partial t_0} + \vec{\mu}^T \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial t_0} \right) \delta t_0 + \left(H(t_f) + \frac{\partial \varphi}{\partial t_f} + \vec{\mu}^T \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial t_f} \right) \delta t_f + \\ & + \left(\vec{\lambda}_0^T + \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{x}_0} + \vec{\mu}^T \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial \vec{x}_0} \right) \delta \vec{x}_0 + \left(-\vec{\lambda}_f^T + \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{x}_f} + \vec{\mu}^T \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial \vec{x}_f} \right) \delta \vec{x}_f + \\ & + \int_{t_0}^{t_f} \left[\left(\frac{\partial H}{\partial \vec{x}} + \dot{\vec{\lambda}}^T \right) \delta \vec{x} + \left(\frac{\partial H}{\partial \vec{u}} \right) \delta \vec{u} \right] dt = 0 . \end{aligned} \quad (3.31)$$

È bene evidenziare che con la notazione usata, ripresa da Casalino ^[24]:

- la derivata di un vettore colonna \vec{a} fatta rispetto ad uno scalare b restituisce un vettore colonna in cui ognuna delle componenti di \vec{a} viene derivata rispetto a b ;
- la derivata di uno scalare a fatta rispetto ad un vettore colonna \vec{b} restituisce un vettore riga le cui componenti sono date dalla derivata di a rispetto alle componenti di \vec{b} ;

- la derivata di un vettore colonna \vec{a} di n componenti rispetto ad un vettore colonna \vec{b} di m componenti restituisce una matrice di n righe ed m colonne in cui lungo le righe si deriva una componente di \vec{a} rispetto a \vec{b} e lungo le colonne si deriva \vec{a} rispetto ad una componente di \vec{b} .

Le variazioni δt , $\delta \vec{x}$ e $\delta \vec{u}$, che siano dentro l'integrale o al tempo iniziale o finale, sono arbitrarie, per cui per trovare i punti d'estremo si dovranno annullare le espressioni tra le parentesi tonde nella precedente equazione (3.31). Si ottengono così le condizioni al contorno di ottimo

$$\vec{\lambda}_0^T + \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{x}_0} + \vec{\mu}^T \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial \vec{x}_0} = 0 , \quad (3.32)$$

$$-\vec{\lambda}_f^T + \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{x}_f} + \vec{\mu}^T \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial \vec{x}_f} = 0 , \quad (3.33)$$

$$-H_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial t_0} + \vec{\mu}^T \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial t_0} = 0 , \quad (3.34)$$

$$-H_f + \frac{\partial \varphi}{\partial t_f} + \vec{\mu}^T \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial t_f} = 0 , \quad (3.35)$$

le equazioni di Eulero-Lagrange

$$\frac{\partial H}{\partial \vec{x}} + \dot{\vec{\lambda}}^T = 0 , \quad (3.36)$$

e le condizioni sui controlli:

$$\frac{\partial H}{\partial \vec{u}} = 0 . \quad (3.37)$$

Notevole è che queste siano indipendenti dal fatto che si cerchi di massimizzare o minimizzare la cost function (3.28), e per il Principio del Massimo o del Minimo di Pontryagin (PMP) il controllo ottimo sarà quello che massimizza H se si sta cercando un massimo di J o minimizza H se si sta cercando un minimo di J , lungo tutta la traiettoria e rispettando i vincoli imposti. Nel caso l'Hamiltoniano posseda più di un massimo (o minimo) quello da cercare è quello globale, ma non è sempre facile capire se si è di fronte ad un massimo (o minimo) globale o locale, per cui è relativamente facile trovare soluzioni subottimali ma difficile capire se sia possibile fare di meglio. Nel caso in cui l'Hamiltoniano risulta lineare rispetto al controllo preso in esame l'equazione (3.37) non può fornire esplicitamente una formula per il controllo ottimo poiché questo non comparirebbe nell'espressione, ma se il coefficiente del controllo non è nullo l'andamento di H rispetto al controllo sarà quello di una retta, per cui nel caso H vada massimizzato si prenderà il valore del controllo più grande appartenente al dominio per coefficiente positivo, e il valore più piccolo per coefficiente negativo (controllo bang-bang, mostrato in *Figura 3.4*). Se il coefficiente del controllo è nullo ci si trova davanti ad un cosiddetto arco singolare per cui è necessario imporre l'annullamento di tutte le derivate successive rispetto al tempo fino a che il controllo non appaia esplicitamente, e imporre poi l'annullamento anche di quest'ultima. È inoltre noto che l'ordine di derivazione affinché questo succeda è sempre pari. Una proprietà importante dell'Hamiltoniano, utile per verificare la correttezza dei calcoli, è che se questo non dipende in maniera esplicita dal tempo e il controllo ottimo viene adottato, allora il suo valore sarà costante.

Esaminando le equazioni ricavate in questo capitolo si può notare che ci sono $2n + m$ incognite (\vec{x} , $\vec{\lambda}$ e $\vec{\mu}$ rispettivamente) e due parametri incogniti t_0 e t_f , che richiederanno altrettante condizioni al contorno sulle equazioni differenziali. Si useranno quindi le $2n + 2$ condizioni di ottimo dalle equazioni (3.32) - (3.35) e le m equazioni contenute in $\vec{\chi}$, con $0 \leq m \leq 2n$, ma è importante notare che le costanti $\vec{\mu}$ sono solo di comodo, per cui non sarà importante calcolarne effettivamente i valori

e ci si concentrerà solamente su $2n + 2$ condizioni provenienti da una combinazione delle (3.32) - (3.35) con le (3.24). Come fatto prima con $\vec{\lambda}$, queste possono essere raggruppate in un vettore $\vec{\Psi}$:

$$\vec{\Psi}(\vec{x}(t), t) = 0 . \quad (3.38)$$

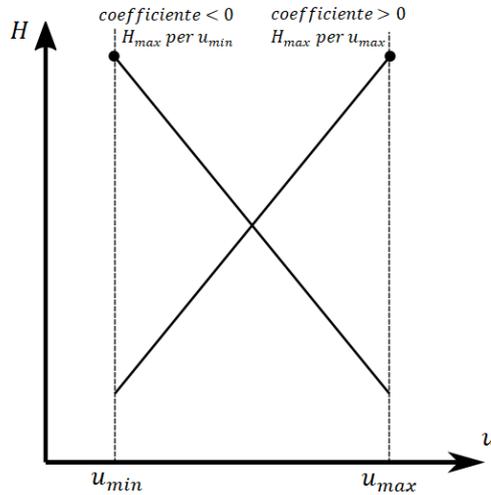


Figura 3.4: Logica alla base del controllo bang-bang, adattamento da Casalino [25]

3.3 Applicazione del controllo ottimo al caso di M2P2

3.3.1 Equazioni differenziali e condizioni al contorno

Per applicare il controllo ottimo al sistema propulsivo in questione si parte dall'esplicitazione del vettore delle variabili di stato $\vec{x} = (r, \theta, u, v, m)$, del vettore delle variabili aggiunte ad esse associate $\vec{\lambda} = (\lambda_r, \lambda_\theta, \lambda_u, \lambda_v, \lambda_m)$, e dalla scelta della funzione di costo, ovvero di ciò che si vuole massimizzare o minimizzare. Il primo obiettivo è quello di ottenere gli stessi risultati a cui sono giunti i ricercatori Mengali e Quarta nella già citata [16], motivo per cui si sceglierà come loro di diminuire il più possibile il ΔV di circolarizzazione all'orbita di arrivo, da non confondere con il ΔV realizzato dal sistema M2P2 per raggiungere le condizioni finali, con la formulazione di Mayer

$$J = \varphi = -(\Delta V)^2 = -u_f^2 - \left(v_f - \sqrt{\frac{\mu_\odot}{r_f}} \right)^2 . \quad (3.39)$$

Come si vedrà infatti non è stato possibile azzerare questo indice e il valore che si riesce a raggiungere dipende fortemente da quanto tempo si vuole far durare la trasferta. Le equazioni del moto sono date compattamente da $\dot{\vec{x}} = (\dot{r}, \dot{\theta}, \dot{u}, \dot{v}, \dot{m})$ e sono sostanzialmente le precedenti (3.16), (3.17), (3.21) e (3.22) con l'aggiunta della semplice equazione di variazione della massa:

$$\dot{r} = u , \quad (3.40a)$$

$$\dot{\theta} = \frac{v}{r} , \quad (3.40b)$$

$$\dot{u} = \frac{v^2}{r} - \frac{\mu_\odot}{r^2} + \tau \frac{F_r}{m} , \quad (3.40c)$$

$$\dot{v} = -\frac{uv}{r} + \tau \frac{F_\theta}{m} , \quad (3.40d)$$

$$\dot{m} = -\tau\beta . \quad (3.40e)$$

Da queste è possibile riscrivere l'Hamiltoniano in (3.30) come

$$H = \lambda_r u + \lambda_\theta \frac{v}{r} + \lambda_u \left(\frac{v^2}{r} - \frac{\mu_\odot}{r^2} \right) + \lambda_v \left(-\frac{uv}{r} \right) - \lambda_m \tau \beta + \lambda_u \tau \frac{F_r}{m} + \lambda_v \tau \frac{F_\theta}{m} . \quad (3.41)$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange, descritte concisamente dall'equazione (3.34), forniscono invece le variazioni temporali delle variabili aggiunte $\dot{\lambda} = (\dot{\lambda}_r, \dot{\lambda}_\theta, \dot{\lambda}_u, \dot{\lambda}_v, \dot{\lambda}_m)$, che derivando appropriatamente l'espressione appena ricavata dell'Hamiltoniano possono essere scritte come:

$$\dot{\lambda}_r = \lambda_\theta \frac{v}{r^2} + \lambda_u \left(\frac{v^2}{r^2} - 2 \frac{\mu_\odot}{r^3} \right) - \lambda_v \frac{uv}{r^2} , \quad (3.42a)$$

$$\dot{\lambda}_\theta = 0 , \quad (3.42b)$$

$$\dot{\lambda}_u = -\lambda_r + \lambda_v \frac{v}{r} , \quad (3.42c)$$

$$\dot{\lambda}_v = -\frac{\lambda_\theta}{r} - 2\lambda_u \frac{v}{r} + \lambda_v \frac{u}{r} , \quad (3.42d)$$

$$\dot{\lambda}_m = \lambda_u \tau \frac{F_r}{m^2} + \lambda_v \tau \frac{F_\theta}{m^2} . \quad (3.42e)$$

Per poter risolvere le 10 equazioni differenziali servono altrettante condizioni al contorno, che vengono fornite sostituendo appropriatamente i vari termini delle equazioni (3.32) - (3.35). Per farlo è bene per prima cosa imporre dei vincoli alla traiettoria cercata, in questo caso essi saranno:

$$r_0 = r_{earth} , \quad (3.43a)$$

$$\theta_0 = 0 , \quad (3.43b)$$

$$u_0^2 + \left(v_0 - \sqrt{\frac{\mu_\odot}{r_0}} \right)^2 = V_\infty , \quad (3.43c)$$

$$m_0 = M_{s/c} , \quad (3.43d)$$

$$t_0 = 0 , \quad (3.43e)$$

$$r_f = \bar{r} , \quad (3.43f)$$

$$t_f = \bar{t} , \quad (3.43g)$$

in cui

- r_{earth} è la distanza media Sole-Terra, fatta qui coincidere con la distanza tra il Sole e la sfera d'influenza terrestre in quanto questa (come quella d'arrivo) è considerata di dimensioni trascurabili, e corrispondente ad $1 AU$, in quanto si suppone che al tempo iniziale lo spacecraft stia lasciando questa sfera d'influenza;
- $M_{s/c}$ è la massa dello spacecraft;
- V_∞ è la velocità dello spacecraft rispetto alla Terra;
- \bar{r} e \bar{t} sono rispettivamente la distanza radiale finale e il tempo finale imposti.

Ad ogni condizione è inoltre associata una costante $\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6, \mu_7)$, e portando tutti i termini delle equazioni precedenti a primo membro e riscrivendo questi nel vettore $\vec{\chi}$, si ha tutto il necessario per esplicitare le equazioni (3.32) - (3.35), che diventano:

$$(\lambda_{r0}, \lambda_{\theta0}, \lambda_{u0}, \lambda_{v0}, \lambda_{m0}) + (0, 0, 0, 0, 0) + \left(\mu_1, \mu_2, 2u_0\mu_3, 2 \left(v_0 - \sqrt{\frac{\mu_\odot}{r_0}} \right) \mu_3, \mu_4 \right) = 0 , \quad (3.44)$$

$$-(\lambda_{rf}, \lambda_{\theta f}, \lambda_{uf}, \lambda_{vf}, \lambda_{mf}) + \left(-v_f \sqrt{\frac{\mu_{\odot}}{r_f^3}} + \frac{\mu_{\odot}}{r_f^2}, 0, -2u_f, -2 \left(v_f - \sqrt{\frac{\mu_{\odot}}{r_f}} \right), 0 \right) + (\mu_6, 0, 0, 0, 0) = 0, \quad (3.45)$$

$$-H_0 + 0 + \mu_5 = 0, \quad (3.46)$$

$$H_f + 0 + \mu_7 = 0. \quad (3.47)$$

Esprimendo ogni componente singolarmente si ottengono le seguenti condizioni:

$$\lambda_{r0} + \mu_1 = 0, \quad (3.48a) \quad -\lambda_{rf} - v_f \sqrt{\frac{\mu_{\odot}}{r_f^3}} + \frac{\mu_{\odot}}{r_f^2} + \mu_6 = 0, \quad (3.48g)$$

$$\lambda_{\theta0} + \mu_2 = 0, \quad (3.48b) \quad -\lambda_{\theta f} = 0, \quad (3.48h)$$

$$\lambda_{u0} + \mu_3 \cdot 2u_0 = 0, \quad (3.48c) \quad -\lambda_{uf} - 2u_f = 0, \quad (3.48i)$$

$$\lambda_{v0} + \mu_3 \cdot 2 \left(v_0 - \sqrt{\frac{\mu_{\odot}}{r_0}} \right) = 0, \quad (3.48d) \quad -\lambda_{vf} - 2 \left(v_f - \sqrt{\frac{\mu_{\odot}}{r_f}} \right) = 0, \quad (3.48j)$$

$$\lambda_{m0} + \mu_4 = 0, \quad (3.48e) \quad -\lambda_{mf} = 0, \quad (3.48k)$$

$$-H_0 + \mu_5 = 0, \quad (3.48f) \quad H_f + \mu_7 = 0. \quad (3.48l)$$

Le condizioni (3.48b) e (3.48h), unite alla (3.42b), permettono subito di dire che $\lambda_{\theta} = 0$ e $\mu_2 = 0$, mentre la (3.48c) e la (3.48d) possono essere unite e sostituite dalle condizioni

$$\mu_3 = -\frac{\lambda_{u0}}{2u_0}, \quad (3.48c)$$

$$\lambda_{v0}u_0 - \lambda_{u0}v_0 = 0. \quad (3.48d)$$

Le equazioni (3.48a), (3.48e), (3.48f), (3.48g) e (3.48l) danno invece i valori di $\mu_1, \mu_4, \mu_5, \mu_6$ e μ_7 , ma come già detto non è importante il loro calcolo esplicito, per cui queste equazioni non verranno utilizzate. In definitiva restano solo le seguenti 12 condizioni al contorno, comprese le 2 condizioni al contorno aggiuntive sul tempo:

$$r_0 = r_{earth}, \quad (3.49a) \quad r_f = \bar{r}, \quad (3.49g)$$

$$\theta_0 = 0, \quad (3.49b) \quad -\lambda_{\theta(0,f)} = 0, \quad (3.49h)$$

$$u_0^2 + \left(v_0 - \sqrt{\frac{\mu_{\odot}}{r_0}} \right)^2 = V_{\infty}, \quad (3.49c) \quad -\lambda_{uf} - 2u_f = 0, \quad (3.49i)$$

$$\lambda_{v0}u_0 - \lambda_{u0}v_0 = 0, \quad (3.49d) \quad -\lambda_{vf} - 2 \left(v_f - \sqrt{\frac{\mu_{\odot}}{r_f}} \right) = 0, \quad (3.49j)$$

$$m_0 = M_{s/c}, \quad (3.49e) \quad -\lambda_{mf} = 0, \quad (3.49k)$$

$$t_0 = 0, \quad (3.49f) \quad t_f = \bar{t}. \quad (3.49l)$$

Rispetto al lavoro di Mengali e Quarta le differenze sono nelle condizioni (3.49c) e (3.49d), che si riducono a quelle dei due ricercatori nel caso (trattato) in cui $V_{\infty} = 0$, che restituirà sempre $u_0 = 0$ e $v_0 = 1$ (adimensionalizzate come si vedrà nella sezione 4.2), e nella condizione (3.49l), che fissa il tempo finale invece di lasciarlo libero, come invece sarebbe se fosse sostituita da $H_f = 0$.

3.3.2 Le leggi di controllo

L'ultimo passo da fare è quello di trovare le espressioni dei due controlli F_{θ} e τ che, per il Principio del massimo di Pontryagin, massimizzano l'Hamiltoniano in ogni punto della traiettoria e ad ogni

istante. Per massimizzare H si è scelto di intraprendere una strada diversa da quella seguita da Mengali e Quarta in quanto si vogliono utilizzare solo due controlli invece di tre, usando F_θ e τ al posto di $|F_\theta|$, $\zeta = \text{sgn}(F_\theta)$ e τ , ottenendo comunque gli stessi risultati a parità di valore delle variabili di stato e aggiunte.

Per comodità si comincia separando l'Hamiltoniano in una parte che, ad un dato istante, non dipende dai controlli ed una parte che invece ne dipende, chiamando queste due rispettivamente H^* e H' . Si ha in questo modo che $H = H^* + H'$, e dato che i controlli che massimizzano H sono anche quelli che massimizzano $H' = -\lambda_m \tau \beta + \lambda_u \tau \frac{F_r}{m} + \lambda_v \tau \frac{F_\theta}{m}$, si considererà solo quest'ultimo.

Si riscrive quindi H' sostituendo le formule per F_r e β , vale a dire le equazioni (2.3) e (2.4):

$$\begin{aligned} H' &= \tau \left\{ \lambda_u \frac{F_{r0}}{m} \left[1 + b_1 \frac{|F_\theta|}{F_{r0}} + b_2 \left(\frac{|F_\theta|}{F_{r0}} \right)^2 \right] + \lambda_v \frac{F_\theta}{m} - \lambda_m \beta_0 \left[1 + b_3 \frac{|F_\theta|}{F_{r0}} + b_4 \left(\frac{|F_\theta|}{F_{r0}} \right)^2 \right] \right\} = \\ &= \tau \left[|F_\theta|^2 \left(\frac{b_2 F_{r0} \lambda_u}{m F_{r0}^2} - \frac{b_4 \beta_0 \lambda_m}{F_{r0}^2} \right) + |F_\theta| \left(\frac{b_1 F_{r0} \lambda_u}{m F_{r0}} - \frac{b_3 \beta_0 \lambda_m}{F_{r0}} \right) + F_\theta \left(\frac{\lambda_v}{m} \right) + \left(\frac{\lambda_u F_{r0}}{m} - \lambda_m \beta_0 \right) \right] = \quad (3.50) \\ &= \tau (A |F_\theta|^2 + B_1 |F_\theta| + B_2 F_\theta + C) \end{aligned}$$

3.3.2.1 La legge di controllo di F_θ

Cercando F_θ che massimizza H' (o analogamente $\frac{H'}{\tau}$ per indipendenza dei controlli) ci si rende subito conto osservando l'ultima riga della (3.48) che è necessario che F_θ abbia lo stesso segno di B_2 , per cui si creano due casi diversi a seconda che questi abbiano entrambi segno positivo o negativo:

Caso 1	$se B_2 > 0 \Rightarrow F_\theta > 0 \Rightarrow F_\theta = F_\theta \Rightarrow \frac{H'}{\tau} = A F_\theta^2 + B_1 F_\theta + B_2 F_\theta + C$
Caso 2	$se B_2 < 0 \Rightarrow F_\theta < 0 \Rightarrow F_\theta = -F_\theta \Rightarrow \frac{H'}{\tau} = A (-F_\theta)^2 - B_1 F_\theta + B_2 F_\theta + C$

È bene notare che queste condizioni sono analoghe a quella sul valore di ζ trattata da Mengali e Quarta. Il caso $B_2 = 0$ renderebbe $\frac{H'}{\tau} = A |F_\theta|^2 + B_1 |F_\theta| + C$, la quale è esattamente la funzione analizzata dai due ricercatori con il cambio di notazione $B_1 = B$, in quanto $B_2 = 0$ implica $\lambda_v = 0$. Per brevità la legge di controllo che se ne ricava non viene qui riporta, ma è bene notare che strettamente a rigore $\lambda_v = 0$ farebbe sì che il coefficiente di ζ nell'espressione dell' H' (vale a dire $\lambda_v \tau \frac{|F_\theta|}{m}$) si annulli, rendendo non definito il controllo nel caso ciò avvenga per un intervallo finito di tempo. Anche se per il modo in cui è definito il controllo ζ questo non rappresenta in alcun modo un problema pratico ma solo uno teorico, l'averlo rimosso evita la nascita di questo inconveniente. In questo modo si sono eliminati i valori assoluti e ci si è ricondotti all'equazione di una parabola, che si studia tenendo in considerazione il segno di F_θ . Se si assume $A > 0$ si ha una parabola con concavità rivolta verso l'alto in cui il massimo si troverà ai limiti del dominio di F_θ , ovvero $0, F_{\theta max}$ nel primo caso e $-F_{\theta max}, 0$ nel secondo, i quali andranno sostituiti nelle rispettive equazioni e comparati:

Caso 1	$se F_\theta = 0 \Rightarrow \frac{H'}{\tau} = C$	$C \lesseqgtr A F_{\theta max}^2 + F_{\theta max} (B_1 + B_2) + C ?$
$A > 0$	$se F_\theta = F_{\theta max} \Rightarrow \frac{H'}{\tau} = A F_{\theta max}^2 + F_{\theta max} (B_1 + B_2) + C$	
Caso 2	$se F_\theta = 0 \Rightarrow \frac{H'}{\tau} = C$	$C \lesseqgtr A F_{\theta max}^2 - F_{\theta max} (-B_1 + B_2) + C ?$
$A > 0$	$se F_\theta = -F_{\theta max} \Rightarrow \frac{H'}{\tau} = A F_{\theta max}^2 - F_{\theta max} (-B_1 + B_2) + C$	

da cui:

Caso 1 $A > 0$	$se C < AF_{\theta max}^2 + F_{\theta max}(B_1 + B_2) + C \Rightarrow F_{\theta max} > -\frac{B_1+B_2}{A} \Rightarrow F_{\theta} = F_{\theta max}$
	$se C > AF_{\theta max}^2 + F_{\theta max}(B_1 + B_2) + C \Rightarrow F_{\theta max} < -\frac{B_1+B_2}{A} \Rightarrow F_{\theta} = 0$
	$se C = AF_{\theta max}^2 + F_{\theta max}(B_1 + B_2) + C \Rightarrow F_{\theta max} = -\frac{B_1+B_2}{A} \Rightarrow F_{\theta} = 0$ o $F_{\theta max}$ (indifferente)
Caso 2 $A > 0$	$se C < AF_{\theta max}^2 - F_{\theta max}(-B_1 + B_2) + C \Rightarrow F_{\theta max} > \frac{-B_1+B_2}{A} \Rightarrow F_{\theta} = -F_{\theta max}$
	$se C > AF_{\theta max}^2 - F_{\theta max}(-B_1 + B_2) + C \Rightarrow F_{\theta max} < \frac{-B_1+B_2}{A} \Rightarrow F_{\theta} = 0$
	$se C = AF_{\theta max}^2 - F_{\theta max}(-B_1 + B_2) + C \Rightarrow F_{\theta max} = \frac{-B_1+B_2}{A} \Rightarrow F_{\theta} = 0$ o $-F_{\theta max}$ (indifferente)

La parabola diventa una retta nel caso $A = 0$, per cui si può adottare un controllo di tipo bang-bang:

Caso 1 $A > 0$	$\frac{H'}{\tau} = F_{\theta}(B_1 + B_2) + C$	$se (B_1 + B_2) > 0 \Rightarrow F_{\theta} = F_{\theta max}$ $se (B_1 + B_2) < 0 \Rightarrow F_{\theta} = 0$
	Caso 2 $A > 0$	$\frac{H'}{\tau} = F_{\theta}(-B_1 + B_2) + C$

Se oltre ad $A = 0$ avessimo che anche $B_1 + B_2 = 0$ nel Caso 1 o $-B_1 + B_2 = 0$ nel Caso 2 per un tempo non infinitesimo ci si troverebbe di fronte ad un caso di controllo singolare di F_{θ} , il quale non viene qui considerato in quanto si presume improbabile che un'evenienza del genere si presenti.

L'ultimo caso è quello di parabola con concavità verso il basso, ovvero $A < 0$. La legge di controllo si ricava semplicemente derivando l'equazione del caso considerato e applicando le limitazioni al dominio:

Caso 1 $A < 0$	Max per $2AF_{\theta} + B_1 + B_2 = 0$	$se -\frac{B_1+B_2}{2A} \geq F_{\theta max} \Rightarrow F_{\theta} = F_{\theta max}$
		$se -\frac{B_1+B_2}{2A} \leq 0 \Rightarrow F_{\theta} = 0$
		altrimenti $F_{\theta} = -\frac{B_1+B_2}{2A}$
Caso 2 $A < 0$	Max per $2AF_{\theta} - B_1 + B_2 = 0$	$se -\frac{-B_1+B_2}{2A} \geq 0 \Rightarrow F_{\theta} = 0$
		$se -\frac{-B_1+B_2}{2A} \leq -F_{\theta max} \Rightarrow F_{\theta} = -F_{\theta max}$
		altrimenti $F_{\theta} = -\frac{-B_1+B_2}{2A}$

Nel seguito ci si riferirà alle condizioni contenute in questa sezione come alle condizioni (3.51).

3.3.2.2 La legge di controllo di τ

Dall'equazione (3.41) per trovare il τ ottimo si può applicare un controllo di tipo bang-bang, per il quale, ponendo $S = \lambda_u \frac{F_r}{m} + \lambda_v \frac{F_{\theta}}{m} - \lambda_m \beta$ in modo che $H = H^* + \tau S$, si ottiene che:

$$\begin{aligned} \text{se } S > 0 &\Rightarrow \tau = 1, \\ \text{se } S < 0 &\Rightarrow \tau = 0. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Questa è la strada seguita da Mengali e Quarta, ma come si vedrà in seguito è possibile che S si annulli per un intervallo finito di tempo e nel caso questo succeda è necessario utilizzare un controllo singolare. Questo si ricava annullando le derivate successive di S rispetto al tempo fino ad arrivare ad un'equazione nella quale esplicitamente il controllo τ . In generale, dato che β e F_r sono funzioni di F_θ , si può esprimere \dot{S} come

$$\dot{S} = \frac{\partial S}{\partial m} \dot{m} + \frac{\partial S}{\partial \lambda_u} \dot{\lambda}_u + \frac{\partial S}{\partial \lambda_v} \dot{\lambda}_v + \frac{\partial S}{\partial \lambda_m} \dot{\lambda}_m + \frac{\partial S}{\partial F_\theta} \dot{F}_\theta. \quad (3.53)$$

L'ultimo termine a secondo membro è nullo in quanto si vuole utilizzare il controllo ottimo per F_θ , e questo significa

$$\frac{\partial H}{\partial F_\theta} = \frac{\partial(\tau S)}{\partial F_\theta} = \frac{\partial \tau}{\partial F_\theta} S + \frac{\partial S}{\partial F_\theta} \tau = 0. \quad (3.54)$$

Nel caso di controllo singolare $S = 0$, e se si esclude il caso privo di interesse in cui $\tau = 0$, anche $\frac{\partial S}{\partial F_\theta} = 0$. Sviluppando poi i vari termini presenti nell'equazione (3.53) si ottiene

$$\begin{aligned} \dot{S} = & \left(\lambda_u \frac{F_r}{m^2} + \lambda_v \frac{F_\theta}{m^2} \right) \tau \beta + \frac{F_r}{m} \left(-\lambda_r + \lambda_v \frac{v}{r} \right) + \frac{F_\theta}{m} \left(-\frac{\lambda_\theta}{r} - 2\lambda_u \frac{v}{r} + \lambda_v \frac{u}{r} \right) + \\ & -\beta \left(\lambda_u \tau \frac{F_r}{m^2} + \lambda_v \tau \frac{F_\theta}{m^2} \right) + \left(\frac{\lambda_u}{m} \frac{\partial F_r}{\partial F_\theta} + \frac{\lambda_v}{m} - \lambda_m \frac{\partial \beta}{\partial F_\theta} \right) \dot{F}_\theta = 0. \end{aligned} \quad (3.55)$$

L'ultimo termine come già detto si annulla, mentre il primo e il quarto termine si cancellano a vicenda in quanto c'è solo un segno di differenza tra i due. Nei restanti termini τ non compare in modo esplicito, perciò sarà necessario derivare una seconda volta S rispetto al tempo, ma prima di farlo si riscrive ciò che resta dell'equazione precedente in un modo da semplificare le operazioni successive:

$$-mr\dot{S} = F_r(r\lambda_r - \lambda_v v) + F_\theta(\lambda_\theta + 2\lambda_u v - \lambda_v u). \quad (3.56)$$

Derivando esclusivamente il primo membro si ottiene

$$(-\dot{m}r\dot{S}) = -(\dot{m}r + m\dot{r})\dot{S} - mr\ddot{S}. \quad (3.57)$$

Dato che $\dot{S} = 0$ la derivata del secondo membro della (3.56) sarà uguale a $-mr\ddot{S}$, ma dovendo imporre $\ddot{S} = 0$, allora anche la derivata del secondo membro della (3.56) si annullerà, quindi:

$$\begin{aligned} \ddot{S} = 0 \Rightarrow & F_r(\dot{r}\lambda_r + r\dot{\lambda}_r - \dot{\lambda}_v v - \lambda_v \dot{v}) + F_\theta(\dot{\lambda}_\theta + 2\dot{\lambda}_u v + 2\lambda_u \dot{v} - \dot{\lambda}_v u - \lambda_v \dot{u}) + \\ & + \dot{F}_\theta \left[\frac{\partial F_r}{\partial F_\theta} (r\lambda_r - \lambda_v v) + (\lambda_\theta + 2\lambda_u v - \lambda_v u) \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Sostituendo ancora le equazioni (3.40) e (3.42) nella (3.58) si ottiene

$$\begin{aligned} & F_r \left[u\lambda_r + \lambda_\theta \frac{v}{r} + \lambda_u \left(\frac{v^2}{r} - 2\frac{\mu_\odot}{r^2} \right) - \lambda_v \frac{uv}{r} + \lambda_\theta \frac{v}{r} + 2\lambda_u \frac{v^2}{r} - \lambda_v \frac{uv}{r} + \lambda_v \frac{uv}{r} - \lambda_v \tau \frac{F_\theta}{m} \right] + \\ & + F_\theta \left[0 - 2\lambda_r v + 2\lambda_v \frac{v^2}{r} - 2\lambda_u \frac{uv}{r} + 2\lambda_u \tau \frac{F_\theta}{m} + \lambda_\theta \frac{u}{r} + 2\lambda_u \frac{uv}{r} - \lambda_v \frac{u^2}{r} + \frac{\lambda_v}{r^2} - \lambda_v \frac{v^2}{r} - \lambda_v \tau \frac{F_r}{m} \right] + \\ & + \dot{F}_\theta \left[\frac{\partial F_r}{\partial F_\theta} (r\lambda_r - \lambda_v v) + (\lambda_\theta + 2\lambda_u v - \lambda_v u) \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Raggruppando e semplificando si ottiene

$$\begin{aligned} & +F_\theta \left[-2\lambda_r v + \lambda_v \left(\frac{v^2}{r} - \frac{u^2}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \lambda_\theta \frac{u}{r} + \tau \left(2\lambda_u \frac{F_\theta}{m} - \lambda_v \frac{F_r}{m} \right) \right] + \\ & + \dot{F}_\theta \left[\frac{\partial F_r}{\partial F_\theta} (r\lambda_r - \lambda_v v) + (\lambda_\theta + 2\lambda_u v - \lambda_v u) \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Adesso come la teoria predice, essendo questo un ordine di derivazione pari, il controllo τ è presente, e così si può ricavare la legge di controllo:

$$\tau = \frac{F_r \left[u \lambda_r + 2 \lambda_\theta \frac{v}{r} + \lambda_u \left(3 \frac{v^2}{r} - 2 \frac{\mu_\odot}{r^2} \right) - \lambda_v \frac{uv}{r} \right] + F_\theta \left[-2 \lambda_r v + \lambda_v \left(\frac{v^2}{r} - \frac{u^2}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \lambda_\theta \frac{u}{r} \right] + \dot{F}_\theta \left[\frac{\partial F_r}{\partial F_\theta} (r \lambda_r - \lambda_v v) + (\lambda_\theta + 2 \lambda_u v - \lambda_v u) \right]}{2 \left(\lambda_v \frac{F_r F_\theta}{m} - \lambda_u \frac{F_\theta}{m} \right)}. \quad (3.61)$$

Resta da ricavare la \dot{F}_θ , e per farlo si riprende l'espressione di $\frac{\partial S}{\partial F_\theta} = 0$ nell'ultimo termine tra parentesi della (3.55) e si esplicitano le derivate parziali utilizzando le (2.3) e (2.4):

$$\left(\frac{\lambda_u}{m} \frac{\partial F_r}{\partial F_\theta} + \frac{\lambda_v}{m} - \lambda_m \frac{\partial \beta}{\partial F_\theta} \right) = 0 = \frac{\lambda_u}{m} \left(b_1 \frac{|F_\theta|}{F_\theta} + 2 \frac{b_2}{F_{r0}} F_\theta \right) + \frac{\lambda_v}{m} - \lambda_m \left(\frac{b_3 \beta_0}{F_{r0}} \frac{|F_\theta|}{F_\theta} + 2 \frac{b_4 \beta_0}{F_{r0}^2} F_\theta \right). \quad (3.62)$$

Si può così ricavare una nuova espressione per F_θ :

$$F_\theta = - \frac{\frac{\lambda_v}{m} + \frac{|F_\theta|}{F_\theta} \left(\frac{\lambda_u}{m} b_1 - \lambda_m \frac{b_3 \beta_0}{F_{r0}} \right)}{2 \left(\frac{\lambda_u}{m} \frac{b_2}{F_{r0}} - \lambda_m \frac{b_4 \beta_0}{F_{r0}^2} \right)}. \quad (3.63)$$

Notando che $\frac{|F_\theta|}{F_\theta} = \text{sgn}(F_\theta)$, ricordando che F_θ e B_2 devono avere lo stesso segno per la prima delle condizioni (3.49) e vedendo dalla (3.48) che il segno di B_2 è lo stesso di quello di λ_v , si può sostituire nell'equazione precedente $\frac{|F_\theta|}{F_\theta} = \text{sgn}(\lambda_v)$, in modo da eliminare F_θ dal secondo membro.

La derivazione della (3.60) è del tutto analoga a quelle svolte in precedenza ma, anche con l'accortezza che la derivata della funzione segno è nulla, essa risulta come le precedenti abbastanza articolata. Si è perciò deciso di trattarne una versione semplificata adatta agli scopi del presente studio, ottenuta considerando che, come si vedrà meglio in seguito, dalle simulazioni numeriche di Winglee et al. in *Figura 2.3* si può ricavare che $b_1 = b_3 = b_4 = 0$. L'espressione di F_θ diventa così semplicemente

$$F_\theta = - \frac{F_{r0} \lambda_v}{2 b_2 \lambda_u}, \quad (3.64)$$

che derivata porta a

$$\dot{F}_\theta = - \frac{F_{r0} \lambda_v \lambda_u - \lambda_v \dot{\lambda}_u}{2 b_2 \lambda_u^2} = \frac{F_{r0}}{2 b_2 \lambda_u^2} \left(\frac{\lambda_\theta \lambda_u + 2 \lambda_u^2 v - \lambda_v \lambda_u u + \lambda_v^2 v}{r} - \lambda_v \lambda_r \right). \quad (3.65)$$

Sostituendo questa nell'equazione (3.61) si giunge infine alla legge di controllo singolare completa.

3.3.3 Funzione di costo alternativa

L'indice prestazionale scelto ed espresso dall'equazione (3.39) non è l'unico possibile e può anzi essere variato significativamente a seconda di ciò che si voglia ottimizzare. Se per esempio invece dei consumi ci si volesse interessare ai tempi di percorrenza si potrebbe porre l'obiettivo di massimizzare

$$J = -t_f. \quad (3.66)$$

Dai risultati esposti nella sezione 5.1 si vedrà come la minimizzazione del ΔV di circolarizzazione all'orbita finale, che si assume sia da realizzarsi tramite un secondo sistema propulsivo, può portare a consumi elevati di plasma per il trasferimento interplanetario. Per bilanciare i consumi di massa di plasma utilizzata dal sistema M2P2 e di massa di combustibile utilizzata dal secondo propulsore si è quindi utilizzato il seguente indice prestazionale:

$$J = m_i e^{-\frac{\Delta V}{c}}, \quad (3.67)$$

in cui m_i è la massa dopo il trasferimento interplanetario ma prima della circolarizzazione, e $e^{-\frac{\Delta V}{c}}$ è, per la (3.7), la massa dopo la circolarizzazione per unità di massa prima di questa manovra, in modo che J sia pari alla massa finale complessiva. L'obiettivo sarà quello di massimizzare questo indice per avere la massa più grande possibile una volta che lo spacecraft sarà giunto all'orbita d'arrivo.

Essendo le equazioni (3.32) - (3.35) le uniche che tengano conto della funzione di costo, basterà una loro modifica per adattare quanto esposto nelle sezioni precedenti a questo nuovo obiettivo. Partendo dal fatto che il ΔV è funzione solo di r_f , u_f e v_f , si sviluppano alcune derivate (di cui le ultime tre in precedenza già sott'intese) che torneranno particolarmente utili nei calcoli successivi:

$$\frac{d\left(e^{-\frac{\Delta V}{c}}\right)}{d(r_f, u_f, v_f)} = -\frac{e^{-\frac{\Delta V}{c}}}{2c\Delta V} \frac{d(\Delta V^2)}{d(r_f, u_f, v_f)}, \quad (3.68)$$

$$\frac{d(\Delta V^2)}{d(r_f)} = \frac{d\left(u_f^2 + \left(v_f - \sqrt{\frac{\mu_\odot}{r_f}}\right)^2\right)}{d(r_f)} = \frac{d\left(\frac{\mu_\odot}{r_f} - 2v_f\sqrt{\frac{\mu_\odot}{r_f}}\right)}{d(r_f)} = -\frac{\mu_\odot}{r_f^2} + v_f\sqrt{\frac{\mu_\odot}{r_f^3}}, \quad (3.69)$$

$$\frac{d(\Delta V^2)}{d(u_f)} = \frac{d\left(u_f^2 + \left(v_f - \sqrt{\frac{\mu_\odot}{r_f}}\right)^2\right)}{d(u_f)} = 2u_f, \quad (3.70)$$

$$\frac{d(\Delta V^2)}{d(v_f)} = \frac{d\left(u_f^2 + \left(v_f - \sqrt{\frac{\mu_\odot}{r_f}}\right)^2\right)}{d(v_f)} = \frac{d\left(v_f^2 - 2v_f\sqrt{\frac{\mu_\odot}{r_f}}\right)}{d(v_f)} = 2\left(v_f - \sqrt{\frac{\mu_\odot}{r_f}}\right). \quad (3.71)$$

Mentre le (3.44), (3.46) e (3.47) continuano a valere, cambia la (3.45), relativa alle condizioni al tempo finale:

$$\begin{aligned} & -(\lambda_{r_f}, \lambda_{\theta_f}, \lambda_{u_f}, \lambda_{v_f}, \lambda_{m_f}) + \\ & + \left(-m_f \frac{e^{-\frac{\Delta V}{c}}}{2c\Delta V} \left(-\frac{\mu_\odot}{r_f^2} + v_f\sqrt{\frac{\mu_\odot}{r_f^3}}\right), 0, -m_f \frac{e^{-\frac{\Delta V}{c}}}{c\Delta V} u_f, -m_f \frac{e^{-\frac{\Delta V}{c}}}{c\Delta V} \left(v_f - \sqrt{\frac{\mu_\odot}{r_f}}\right), e^{-\frac{\Delta V}{c}}\right) + (\mu_6, 0, 0, 0, 0) = 0. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Alle (3.48) si sostituiscono:

$$\lambda_{r_0} + \mu_1 = 0, \quad (3.73a) \quad -\lambda_{r_f} - m_f \frac{e^{-\frac{\Delta V}{c}}}{2c\Delta V} \left(-\frac{\mu_\odot}{r_f^2} + v_f\sqrt{\frac{\mu_\odot}{r_f^3}}\right) + \mu_6 = 0, \quad (3.73g)$$

$$\lambda_{\theta_0} + \mu_2 = 0, \quad (3.73b) \quad -\lambda_{\theta_f} = 0, \quad (3.73h)$$

$$\lambda_{u_0} + \mu_3 \cdot 2u_0 = 0, \quad (3.73c) \quad -\lambda_{u_f} - m_f \frac{e^{-\frac{\Delta V}{c}}}{c\Delta V} u_f = 0, \quad (3.73i)$$

$$\lambda_{v_0} + \mu_3 \cdot 2\left(v_0 - \sqrt{\frac{\mu_\odot}{r_0}}\right) = 0, \quad (3.73d) \quad -\lambda_{v_f} - m_f \frac{e^{-\frac{\Delta V}{c}}}{c\Delta V} \left(v_f - \sqrt{\frac{\mu_\odot}{r_f}}\right) = 0, \quad (3.73j)$$

$$\lambda_{m_0} + \mu_4 = 0, \quad (3.73e) \quad -\lambda_{m_f} + e^{-\frac{\Delta V}{c}} = 0, \quad (3.73k)$$

$$-H_0 + \mu_5 = 0, \quad (3.73f) \quad H_f + \mu_7 = 0. \quad (3.73l)$$

Con le stesse considerazioni presentate per le (3.49) si ottengono infine le seguenti condizioni:

$$r_0 = r_{earth}, \quad (3.74a) \quad r_f = \bar{r}, \quad (3.74g)$$

$$\theta_0 = 0, \quad (3.74b) \quad -\lambda_{\theta(0,f)} = 0, \quad (3.74h)$$

$$u_0^2 + \left(v_0 - \sqrt{\frac{\mu_\odot}{r_0}} \right)^2 = V_\infty^2 , \quad (3.74c) \quad -\lambda_{uf} - m_f \frac{e^{-\frac{\Delta V}{c}}}{c\Delta V} u_f = 0 , \quad (3.74i)$$

$$\lambda_{v0} u_0 - \lambda_{u0} v_0 = 0 , \quad (3.74d) \quad -\lambda_{vf} - m_f \frac{e^{-\frac{\Delta V}{c}}}{c\Delta V} \left(v_f - \sqrt{\frac{\mu_\odot}{r_f}} \right) = 0 , \quad (3.74j)$$

$$m_0 = M_{s/c} , \quad (3.74e) \quad -\lambda_{mf} + e^{-\frac{\Delta V}{c}} = 0 , \quad (3.74k)$$

$$t_0 = 0 , \quad (3.74f) \quad t_f = \bar{t} . \quad (3.74l)$$

4. Risoluzione del problema

4.1 Il programma di calcolo

Il problema viene risolto con un metodo di shooting sviluppato al Politecnico di Torino, implementato in un programma utilizzato dal professor Casalino e dal professor Colasurdo per l'ottimizzazione della traiettoria di una vela solare, il cui funzionamento e risultati sono descritti in maniera più dettagliata rispettivamente in [24] e [26]. Il codice, scritto in Fortran 77, è stato parzialmente modificato per adattarlo allo studio in questione, in particolare la parte relativa alla caratterizzazione del sistema propulsivo e alla definizione del BVP è stata aggiornata, mentre il processo di modifica della soluzione di tentativo e l'integratore sono stati lasciati inalterati.

Dall'unione delle equazioni delle forze (2.3) e (2.4), delle equazioni del moto (3.40), dalle equazioni di Eulero-Lagrange (3.42), dalle condizioni al contorno (3.49) o (3.74) e dalle leggi di controllo (3.51) e (3.52), o (3.51) e (3.61) (con in questo caso l'aggiunta della (3.65)), nasce il BVP che si vuole risolvere. La ricerca di una soluzione analitica è una strada difficile da percorrere per la non linearità del problema in esame, ma anche una semplice integrazione numerica non è possibile poiché non si dispone di tutte le condizioni al contorno ad uno degli estremi ma queste sono invece divise, restituendo un problema differenziale ai limiti non lineare bi-punto, o in generale multi-punto. Come accennato in precedenza per risolvere questo problema si farà uso di un codice che implementi il metodo indiretto, il quale integra le equazioni differenziali partendo da dei dati di tentativo forniti dall'utente per le condizioni iniziali mancanti (o finali, la scelta è dettata da ragioni pratiche). Successivamente controlla che le condizioni al contorno siano rispettate con la precisione desiderata (fissata a $1 \cdot 10^{-9}$ nella versione utilizzata) e se questa non è raggiunta il programma varia i valori di tentativo e risolve nuovamente le equazioni, ripetendo lo stesso processo iterativamente fino a convergere alla precisione cercata, o fino a che o le variabili o le condizioni iniziali mancanti non varino più significativamente.

La scelta delle condizioni di tentativo è particolarmente delicata in quanto per condizioni troppo distanti da quelle corrette (non note) il programma potrebbe non trovare l'ottimo assoluto, convergere a soluzioni fisicamente non possibili, non arrivare mai a convergenza o farlo in maniera scorretta (non soddisfacendo il PMP nei casi trattati in seguito). Inoltre, anche se ci si può far guidare dal buon senso nello scegliere i valori iniziali di tentativo delle variabili di stato qualora ce ne fosse bisogno, altrettanto non si può fare per quelli delle variabili aggiunte, e quindi può essere necessario costruirsi un insieme di valori di tentativo interpretando i dati forniti dal programma quando questo non riesce a trovare una soluzione accettabile.

A processo terminato si vorrebbe che l'errore sulle condizioni al contorno fosse nullo, e quindi che rispetti le condizioni (3.38), mentre nelle iterazioni intermedie esisterà un errore

$$\Delta \bar{\Psi} = \bar{\Psi}^{r+1} - \bar{\Psi}^r, \quad (4.1)$$

dove l'apice r indica l'iterazione considerata. Per annullare tale errore alla nuova iterazione si vorrà

$$\bar{\Psi}^{r+1} = 0 \Rightarrow \Delta \bar{\Psi} = -\bar{\Psi}^r. \quad (4.2)$$

Il rispetto delle condizioni al contorno è legato alle condizioni iniziali mancanti scelte \vec{p}^r e quindi, approssimando $\Delta \bar{\Psi}$ con un'espansione polinomiale arrestata al primo ordine, si otterrà

$$\Delta\bar{\Psi} = \frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial\vec{p}} \Delta\vec{p} \Rightarrow \Delta\vec{p} = \vec{p}^{r+1} - \vec{p}^r = -\left(\frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial\vec{p}}\right)^{-1} \Delta\bar{\Psi}. \quad (4.3)$$

Per calcolare la correzione $\Delta\vec{p}$ alle condizioni mancanti scelte \vec{p}^r è così necessario valutare l'inversa della matrice $\frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial\vec{p}}$. Ciò può essere fatto con un metodo semi-analitico o un metodo numerico, con il primo più preciso ma anche più lento del secondo, ed utile soprattutto nelle prime fasi di vita del codice. Il metodo numerico, più veloce ma meno preciso, non garantisce la convergenza vista la grande sensibilità del problema anche alle più piccole variazioni introdotte dagli errori numerici, ma è di più semplice impostazione e sarà per questo studio utilizzato.

La valutazione numerica consiste nell'introdurre una variazione Δp_i all' i -esima componente del vettore \vec{p} tenendo le altre fisse (valori nell'ordine di $10^{-6} - 10^{-7}$ si sono rilevati empiricamente validi), e calcolare la rispettiva modifica alle condizioni al contorno $\Delta\bar{\Psi}(\Delta p_i)$, poi divisa per il cambiamento Δp_i che l'ha prodotta per ottenere l' i -esima colonna della matrice $\frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial\vec{p}}$. Una volta che si è ottenuta l'intera matrice questa viene invertita, se possibile, per calcolare dalla (4.3) la correzione $\Delta\vec{p}$ alle condizioni al contorno di tentativo, ma non è inusuale che si decida di prendere solo una frazione di questa correzione per migliorare le capacità di convergenza del programma, non allontanandosi troppo dalla soluzione precedente. Se l'errore sulle condizioni al contorno cresce troppo (più di 2-3 volte quello precedente, un aumento è generalmente accettabile alle prime iterazioni), viene eseguita una bisezione, ovvero si tenta nuovamente di risolvere il problema apportando correzioni dimezzate rispetto a quelle usate precedentemente.

Infine, l'integrazione delle equazioni differenziali viene svolta utilizzando un metodo con passo e ordine variabile basato sulle formule di Adams e l'extrapolazione locale, come descritto da Shampine e Gordon [27] e nel caso questa non vada a buon fine la si può ripetere, se possibile, dopo una bisezione.

Esistono inoltre alcuni parametri costanti \vec{c} il cui valore non è sempre noto a priori, come il tempo finale, che nel caso trattato sarà fisso ma che nello studio di Mengali e Quarta era invece libero. Queste sono delle vere e proprie incognite aggiuntive del problema, per ognuna delle quali è necessario aggiungere nella (3.38) una nuova condizione al contorno, interno o esterno che sia, e un'equazione differenziale alle (3.23) e (3.36) a questa associata del tipo $\dot{c} = 0$, come già implicitamente fatto per il parametro tempo finale. Sarà inoltre necessario per queste assumere un valore di tentativo come viene fatto per le variabili incognite al tempo iniziale, ed inserirlo nel vettore \vec{p} , rendendolo quindi parte della procedura iterativa di variazione. Il parametro t_f nello specifico è particolarmente importante perché è uno degli estremi di integrazione, può rientrare nell'espressione della cost function e viene usato per suddividere la traiettoria in n intervalli di uguale durata all'interno di $n + 1$ nodi e j fasi, con n in generale variabile per diverse fasi. Mentre la suddivisione in n intervalli è utilizzata solo per produrre l'output dell'integratore, la suddivisione in j fasi è utile per poter scrivere diverse equazioni in fasi diverse, facendo per esempio coincidere il cambio di fase con un cambio di sfera d'influenza o per imporre l'accensione o lo spegnimento del motore al cambio di fase, modellando così la traiettoria ipotizzata nella ricerca di quella ottima.

4.2 Dati e adimensionalizzazione

Le equazioni (2.3) e (2.4) hanno bisogno di dati sperimentali o simulazioni a cui appoggiarsi per il calcolo dei coefficienti F_{r0} , β_0 , b_1 , b_2 , b_3 e b_4 , e per fare questo l'unica scelta al momento è quella di affidarsi alle simulazioni di Winglee et al. Questi si possono ricavare dalla *Figura 2.3* come

mostrato da Mengali e Quarta in [16], osservando che come la regione a spinte maggiori in alto a destra è stata ricavata prolungando lungo una retta i risultati ottenuti quando il dipolo magnetico è inclinato di 45° rispetto alla direzione iniziale, così si può fare per risultati relativi agli 0° (corrispondenti ad asse di dipolo perpendicolare alla direzione del vento solare). In questo modo per 0° di inclinazione $F_\theta = 0$ e $F_r = F_{r0} \approx 0.3 N$, mentre per i 45° $F_\theta = F_{\theta max} \approx 0.08 N$ e $F_r = F_{r max} = 1 N$, e sostituendo questi nella (2.3) si scopre che questo andamento è riproducibile utilizzando $b_1 = 0$ e $b_2 = 33$.

Per quanto riguarda i consumi non ci sono molte informazioni riguardo alla loro variazione, le uniche indicazioni provengono da Winglee et al., i quali affermano che questi aumentano con l'inclinazione del dipolo magnetico, ma non si conosce al momento esattamente di quanto. Per questo motivo Mengali e Quarta hanno assunto un consumo costante, e quindi $b_3 = b_4 = 0$, pari conservativamente a $\beta = \beta_0 = 0.5 Kg/day$ come fatto anche da Noca et al. [28] e Trask et al. [29], con questo dato indicato da Winglee et al. come limite maggiore. Per uniformità si farà uso di questo stesso valore.

Nella sezione 5.1 la massa dello spacecraft verrà assunta essere di $100 kg$, sempre per facilitare la comparazione con quanto fatto da Mengali e Quarta e con quanto ipotizzato da Winglee et al., ma come indicato nella sezione 2.4 una stima migliore sarebbe ben superiore. Per questo motivo nella sezione 5.3 verrà utilizzata una massa di 15 tonnellate, ricavata partendo dal dato sulla massa del solenoide conduttore suggerita da Cattell et al. e pari a 3 tonnellate, e utilizzando questo per fare una proporzione con la massa di una vela magnetica stimata in [11]. Considerando solamente la massa dell'isolante termico, che costituisce comunque il contributo più importante, si può rozzamente approssimare la massa del sistema M2P2 a $3800 Kg$, mentre il resto della massa dello spacecraft sarà il plasma necessario alla trasferta interplanetaria e il combustibile per il secondo sistema propulsivo necessario alla circolarizzazione nella sua sfera d'influenza, entrambi ricavati a posteriori sulla base delle simulazioni. Da notare che questa massa non è comprensiva di nessun altro sottosistema necessario per una vera missione, della massa del secondo sistema propulsivo, dei serbatoi necessari ad immagazzinare le enormi quantità plasma e propellente, di margini (assunti in [11] di 1.2 e qui ignorati) e di payload.

La velocità efficace di scarico del secondo sistema propulsivo presente a bordo viene presa nella sezione 5.2 pari a quella del motore Leros 1b, alimentato ad idrazina e tetrossido di azoto, presente sulla sonda Juno attualmente in orbita attorno Giove. Dal valore dato di impulso specifico, pari a $318 s^{[30]}$, si può ricavare la velocità efficace di scarico dalla (3.8): $c = I_{sp} g_0 = 3.1185 km/s$. Per diminuire i consumi, nella sezione 5.3 viene invece utilizzato il motore principale dello Space Shuttle, il quale utilizza idrogeno e ossigeno liquidi e ha $I_{sp} = 452 s^{[31]}$. La scelta di un propulsore di tipo chimico è dovuta al fatto che lo spacecraft raggiungerà Giove su una traiettoria iperbolica rispetto ad esso (ed ellittica rispetto al Sole), e sebbene un propulsore elettrico, il quale ha normalmente impulsi specifici molto maggiori, porterebbe ad una diminuzione considerevole dei consumi, l'elevato tempo necessario al fine di azzerare il considerevole ΔV con quel tipo di propulsore porterebbe lo spacecraft ad evadere, rendendo necessario un propulsore chimico.

Ancora per motivi comparativi si è deciso di ottimizzare la manovra di trasferta interplanetaria Terra-Giove, con quest'ultimo assunto approssimativamente ad una distanza di $5.209 AU$ dal Sole.

Risulta particolarmente conveniente trattare una versione adimensionalizzata delle precedenti equazioni poiché così è possibile trattare non uno specifico problema ma una famiglia di problemi, evitare errori numerici dati dal dover avere a che fare a volte con numeri molto grandi o molto piccoli, facilitare le operazioni di cambio di scala e ottenere informazioni su quali termini siano più significativi e quali meno, e possano quindi essere trascurati. L'adimensionalizzazione viene fatta tenendo in

considerazione la cinematica del rapporto Sole-Terra, per cui verranno utilizzate le seguenti grandezze di riferimento:

- $r_{rif} = \text{distanza media Terra - Sole (1 AU)} = 149597870.700 \text{ Km};$
- $V_{rif} = \text{velocità di rivoluzione della Terra (se orbita perfettamente circolare) in } \frac{\text{Km}}{\text{s}} = \sqrt{\frac{\mu_{\odot}}{r_{rif}}};$
- $a_{rif} = \text{accelerazione di gravità da parte del Sole all'orbita terrestre in } \frac{\text{Km}}{\text{s}^2} = \frac{\mu_{\odot}}{r_{rif}^2};$
- $M_{rif} = M_{s/c} \text{ in Kg};$
- $F_{rif} = \text{forza di riferimento in N} = M_{rif} a_{rif} \cdot 10^3;$
- $t_{rif} = \text{giorni che la terra impegna per percorrere un radiante } \left(\frac{\text{day}}{\text{rad}}\right) =$

$$= \frac{V_{rif}}{a_{rif}} \frac{1}{86400} = \frac{2\pi}{2\pi} \sqrt{\frac{r_{rif}^3}{\mu_{\odot}}} \frac{1}{86400} = \frac{T_{rif}}{2\pi} \frac{1}{86400};$$
- $\beta_{rif} = \text{flusso di riferimento} = \frac{M_{rif}}{t_{rif}}.$

Nell'espressione di t_{rif} , 86400 sono i secondi in un giorno e il T_{rif} è il periodo di rivoluzione in secondi, adattato dalla (3.6) per un'orbita circolare. È inoltre particolarmente comodo il passaggio dal tempo adimensionale agli anni (usati per presentare i dati nel capitolo 5) in quanto è possibile farlo dividendo semplicemente il primo per 2π o, in maniera più articolata, moltiplicandolo per t_{rif} e dividendo poi per il numero di giorni esatto in un anno. Per passare da una generica grandezza dimensionale g_d ad una adimensionale g_{ad} è sufficiente dividere la prima per la relativa grandezza di riferimento g_{rif} , quindi:

$$g_{ad} = \frac{g_d}{g_{rif}} \quad (4.4)$$

La grandezza di riferimento per una data grandezza dimensionale avrà le stesse dimensioni di quest'ultima, per cui per esempio si utilizzerà V_{rif} per adimensionalizzare c . La maggior parte delle equazioni riportate nei precedenti capitoli 2 rimangono formalmente inalterate dopo l'adimensionalizzazione, con l'unica modifica da apportare la sostituzione di μ_{\odot} con un 1. Ogni grandezza sarà così quella adimensionale e nel caso compaiano coefficienti dimensionali, come quelli delle equazioni (2.3) e (2.4), sarà sufficiente sostituirli con la versione adimensionalizzata ricavata tramite l'equazione (4.4).

4.3 La modellazione della traiettoria

Inizialmente si è preso in considerazione uno spacecraft con massa di 100 kg, si è deciso di non dividere la traiettoria in più fasi, di escludere la presenza di controllo singolare e di lasciare t_f libero di assumere qualsiasi valore, sostituendo la condizione (3.49I) con $H_f = 0$, tutto esattamente come fatto da Mengali e Quarta. In queste condizioni il programma non è stato in grado di trovare alcuna soluzione, e al fine di replicare quella dei due ricercatori si è deciso di fissare il tempo finale facendolo coincidere con quello da loro trovato, ma neanche questo è stato sufficiente.

Il tipo di traiettoria ottenuto in [16] prevede un primo breve intervallo di tempo in cui il motore è acceso seguito da un tratto molto più lungo in cui è spento, fino ad arrivare a Giove con una piccolissima componente di velocità radiale. Per arrivare a questo tipo di traiettoria si è quindi pensato

di suddividere la trasferta in due fasi con una legge di controllo modificata, nella prima delle quali imporre $\tau = 1$ e nella seconda $\tau = 0$. La suddivisione crea l'incognita del tempo di spegnimento del motore, tempo di passaggio tra le due fasi chiamato t_1 , il quale può essere imposto a piacere o ricavato dalla condizione aggiuntiva $S(t_1) = 0$, che deriva dalle (3.52) osservando che il passaggio dall'accensione allo spegnimento deve coincidere con il passaggio di S da un valore positivo ad uno negativo. Questa imposizione consente al programma di trovare una soluzione al problema ma l'andamento di S , del tipo di quello mostrato in *Figura 4.1c* per un t_f inferiore, non è quello che si dovrebbe avere secondo il PMP in quanto non rispetta la (3.52). Il non rispetto del PMP al t_f imposto può avvenire in quanto non si utilizza più il segno di S per decidere se tenere il motore acceso o spento ma solo il suo *cambio* di segno per deciderne il momento di spegnimento, e quindi non si utilizza più esattamente il controllo ottimo.

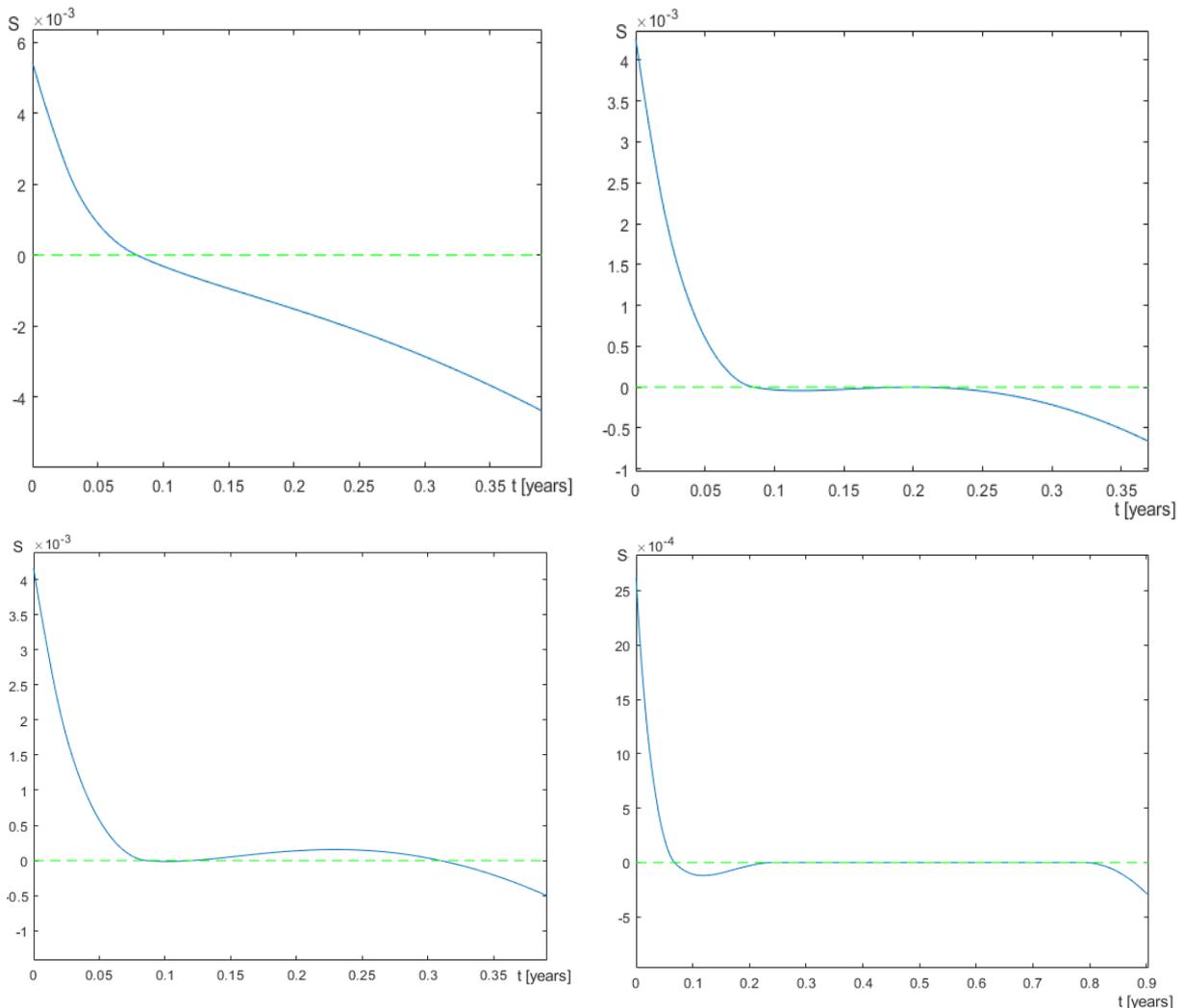


Figura 4.1: Andamenti di S in funzione del tempo per traiettorie (da sinistra verso destra, dall'alto verso il basso) 1-0 con $t_f = 2.069$ years (4.1a), 1-0 con $t_f = 2.127$ years (4.1b), 1-0 con $t_f = 2.133$ years (4.1c) e 1-0-s-0 con $t_f = t_{fMQ}$ (4.1d).

La cosa degna di nota della soluzione trovata in questo modo è quella di avere un ΔV di circolarizzazione a Giove leggermente inferiore di quello trovato da Mengali e Quarta a parità di $M_{S/C}$ e t_f (questo specifico indicato con t_{fMQ} da ora in poi) e che una qualsiasi variazione di t_1 porta ad

un peggioramento del ΔV , con la soluzione trovata dai due ricercatori riproducibile imponendo manualmente il valore di t_1 . Abbassando il t_f imposto si trova un intervallo, il cui limite superiore è minore di t_{fMQ} , per il quale il programma è in grado di convergere ad una soluzione che soddisfi il PMP. Per la gran parte di questo intervallo l'andamento di S è simile a quello di due rette con pendenze diverse riportato in *Figura 4.1a*, mentre per una piccola parte finale si comincia ad intravedere, *Figura 4.1b*, quello che sarà l'andamento per tempi maggiori, per i quali il PMP non è soddisfatto. Per l'intervallo di t_f in cui l'andamento di S è quello in *Figura 4.1a* la versione del programma in cui non è fatta alcuna imposizione sulla forma della traiettoria trova anch'esso che questa ha andamento 1-0 e giunge alle stesse identiche soluzioni della versione in cui quest'andamento è imposto.

Gli andamenti di S mostrati sembrano suggerire che la traiettoria ottima a t_{fMQ} possa essere del tipo 1-0-1-0 (*Figura 4.1c*) o 1-s-0 (*Figura 4.1b*), con quest'ultima che fa uso di un arco singolare, ma entrambe queste possibilità hanno fallito nel produrre alcun tipo di soluzione al problema. Una soluzione è stata invece trovata con una traiettoria del tipo 1-0-1, che fornisce un ΔV a t_{fMQ} minore di quello dato dalla 1-0, ma che ancora non rispetta il PMP. Una soluzione che soddisfi il PMP a questo t_f si è invece trovata imponendo una struttura 1-0-s-0, in cui si sono imposte le condizioni aggiuntive:

$$S(t_1) = 0 \quad (4.5a)$$

$$S(t_2) = 0 \quad (4.5b)$$

$$\dot{S}(t_2) = 0 \quad (4.5c)$$

L'ultima di queste è la condizione necessaria affinché si abbia un arco singolare e anche se non è stato direttamente imposto $S(t_3) = 0$ questa condizione risulta comunque rispettata, dando così l'andamento di S in *Figura 4.1d*. Questa soluzione è valida per un intervallo di tempo molto ampio, il cui limite inferiore coincide esattamente con il limite superiore per cui la 1-0 soddisfa il PMP, e fornisce un ΔV sempre minore a parità di t_f di quello dato dalla 1-0-1 e dalla 1-0. L'intervallo di t_f in cui si sono trovate delle soluzioni ottime è così continuo, e il suo limite inferiore è da considerarsi il tempo minimo per cui una trasferta Terra-Giove è possibile con un sistema M2P2, mentre non è ancora nota la struttura che dovrebbe avere la traiettoria ottima per tempi maggiori del limite superiore di validità della 1-0-s-0. Aumentando t_f dovrebbero diventare più convenienti traiettorie che prevedano uno o più giri intorno al Sole allo scopo di effettuarne un flyby, e azionare quindi il sistema M2P2 nelle condizioni più favorevoli possibili, ovvero quelle per cui le perdite per gravità sono minori (la maggiore efficienza si ottiene spingendo dove le velocità sono maggiori, in quanto a parità di r , quindi più appropriatamente per un propulsore impulsivo, dalla (3.5) si vede che $dE = VdV$). Una soluzione di questo tipo dovrebbe rappresentare l'ottimo globale a tempo finale libero, in grado probabilmente di azzerare il ΔV di circolarizzazione, e questa strada è stata percorsa per il sistema a massa maggiore nel tentativo di ridurre i consumi a discapito dell'elevato tempo di percorrenza. In entrambi i casi non è noto se le soluzioni trovate a t_f fisso rappresentino un ottimo globale o locale (ovviamente $\Delta V_{ott} a t_f \text{ libero} \leq \Delta V_{ott} a t_f \text{ fisso}$, con l'uguale relativo al caso in cui esistano più ottimi globali e/o $t_f \text{ fisso} = t_f \text{ libero}$).

In modo del tutto analogo a quanto fatto in questa sezione sono state modellate anche le traiettorie ottime per diverso indice prestazionale e diversi valori di $M_{S/C}$, i cui risultati saranno esposti direttamente nel capitolo successivo.

5. Risultati

5.1 Minimizzazione del ΔV per spacecraft da 100 Kg

La soluzione di Mengali e Quarta a $t_f \simeq 879.12 \text{ days} \simeq 2.4069 \text{ years}$ è comparata con soluzioni di tipo 1-0, 1-0-1 e 1-0-s-0 allo stesso t_f nella *Tabella 5.1* e nella *Figura 5.1*, dalla quale è possibile notare come $\Delta V_{1-0-s-0} < \Delta V_{1-0-1} < \Delta V_{1-0} < \Delta V_{MQ}$ e $\Delta M_{MQ} < \Delta M_{1-0-s-0} < \Delta M_{1-0-1} < \Delta M_{1-0}$ (con ΔM si intende $M_i - M_f$, che a rigore sarebbe il $-\Delta M$). La soluzione trovata dai due ricercatori non sembra quindi essere una soluzione ottima in termini di ΔV ma ha comunque dei pregi, per cui non sarebbe corretto ignorarla. Come già detto questa soluzione non rispetta il PMP ma ha delle particolarità, perché se si diminuisce il t_1 imposto a t_{fMQ} fisso dal valore che si è imposto per riottenere quanto trovato dai due ricercatori, si raggiunge un valore minimo di $t_1 = t_{1min} \simeq 0.064816 \text{ years}$ (che non soddisfa il PMP) oltre il quale il programma non è più in grado di trovare una soluzione. La vicinanza del t_{1min} con il t_{1MQ} (in tabella) e l'incertezza che c'è nella comparazione dovuta al fatto che i dati in [16] sono forniti solo per via grafica, fa sorgere il dubbio che possa essere la soluzione 1-0 a t_{1min} quella effettivamente da loro trovata. Inoltre, come si vedrà meglio nella sezione 5.2, la stessa soluzione di Mengali e Quarta viene ritrovata anche con l'utilizzo del nuovo indice prestazionale imponendo solamente $t_f = t_{fMQ}$, ma nuovamente il PMP non sarà soddisfatto.

Tabella 5.1: Alcuni valori caratteristici di diversi tipi di traiettorie a t_{fMQ} , dove la traiettoria di Mengali-Quarta ha il ΔV maggiore, ma anche il ΔM minore. I valori delle variabili aggiunte sono adimensionali.

t_{fMQ}	Mengali-Quarta	1-0	1-0-1	1-0-s-0
ΔV [Km/s]	6.9806	6.9402	6.9268	6.81321
ΔM [%]	0.11883	0.20200	0.19564	0.19404
t_1 [years]	0.065068	0.11061	0.10524	0.067706
t_2 [years]	/	/	2.4050	0.24439
t_3 [years]	/	/	/	0.78885
$\Delta\theta$ [°]	110.59	118.80	117.52	131.78
u_f [Km/s]	0.017440	0.18274	0.60131	1.1957
v_f [Km/s]	6.0695	6.1124	6.1495	6.3427
λ_{r0}	$8.7413 \cdot 10^{-2}$	$7.9854 \cdot 10^{-2}$	$7.7110 \cdot 10^{-2}$	$6.5608 \cdot 10^{-2}$
λ_{u0}	$-3.8957 \cdot 10^{-3}$	$-5.71087 \cdot 10^{-3}$	$-4.8245 \cdot 10^{-3}$	$-3.02658 \cdot 10^{-3}$
λ_{v0}	$8.0869 \cdot 10^{-2}$	$7.1082 \cdot 10^{-2}$	$6.7976 \cdot 10^{-2}$	$5.6606 \cdot 10^{-2}$
λ_{m0}	$-1.6618 \cdot 10^{-3}$	$4.8883 \cdot 10^{-4}$	$1.5441 \cdot 10^{-4}$	$-3.6193 \cdot 10^{-4}$

È utile osservare che durante l'arco singolare la spinta è sempre molto piccola, minore del 10% di quella nominale come mostrato dalla *Figura 5.2a*, e l'angolo di cui è inclinata è il valore massimo (quasi 5°), come da *Figura 5.2b*. Durante la parte di controllo non singolare la 1-0-s-0 cresce da un valore qualche decimo di grado minore di quello più grande, fino ad assumere il valore massimo proprio prima

di spegnersi, e le altre hanno un comportamento simile. In particolare, la crescita della 1-0 è monotona a meno di non andare sotto ad un t_f di soglia per cui rimane costantemente circa 4.5° per poi invertirsi anche di segno, la 1-0-1 cresce, scende e poi ricresce fino al valore massimo nel primo tratto e scende leggermente dal valore massimo nel tratto finale.

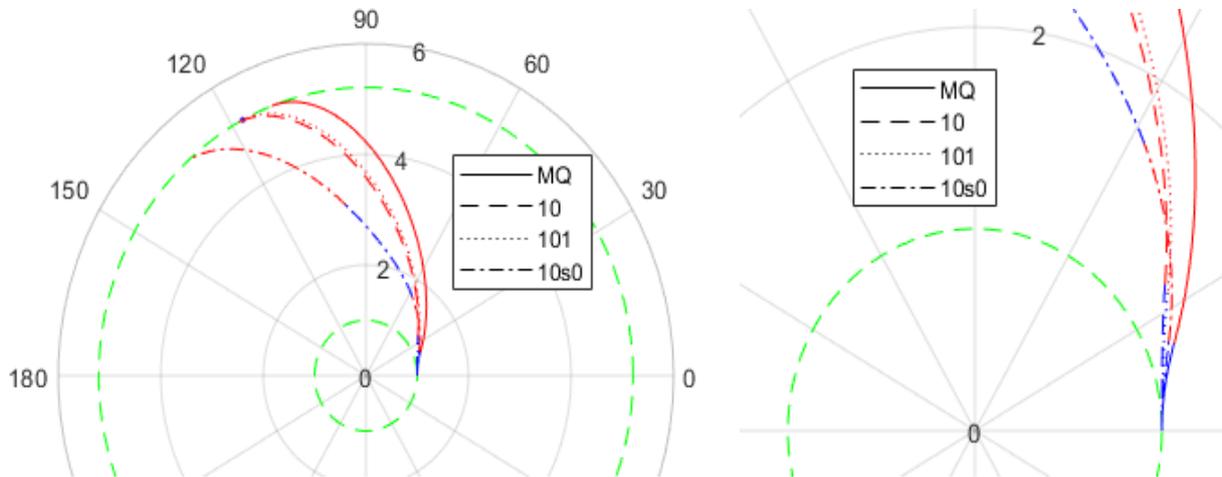


Figura 5.1: A sinistra le traiettorie ottimali a t_{fMQ} secondo vari modelli di traiettoria, a destra un dettaglio dello stesso caso nella prima parte del tragitto. Qua come in seguito, un tratto blu indicherà un arco in cui il sistema M2P2 è acceso, mentre uno rosso indicherà che questo è spento. Il puntino blu alla fine di una traiettoria denoterà un arco propulso di breve durata, reso graficamente in questo modo per essere meglio visibile, mentre i due cerchi verdi tratteggiati rappresenteranno sempre l'orbita della Terra e quella di Giove, assunte circolari. Gli angoli sono in gradi e la distanza radiale è in AU.

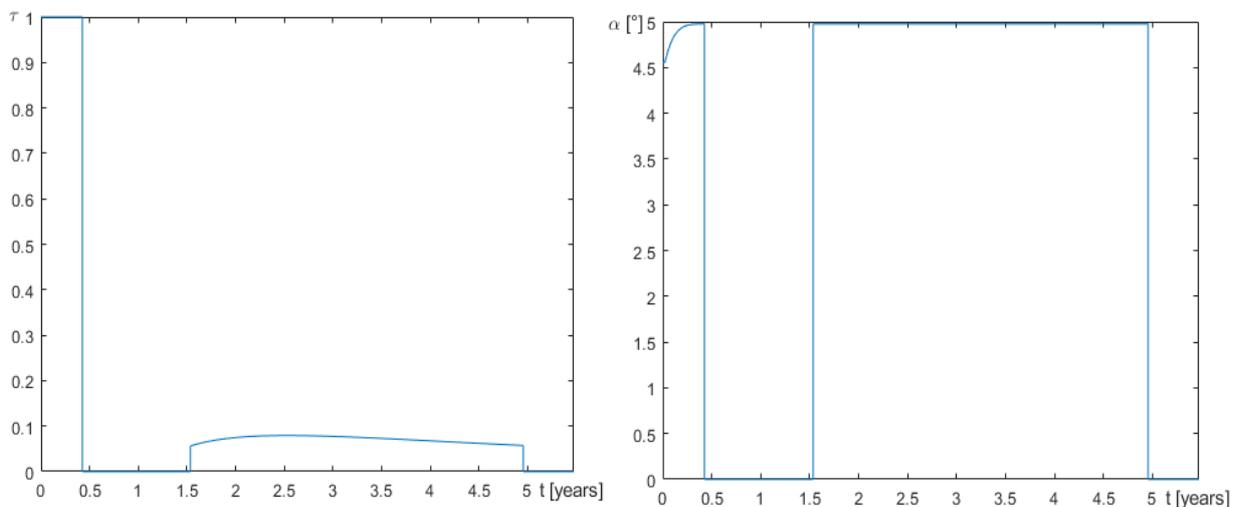


Figura 5.2: Andamento di τ a sinistra (5.2a) e inclinazione della spinta a destra (5.2b) in funzione del tempo per la traiettoria 1-0-s-0 a t_{fMQ} .

In [29] Trask et al. affrontano lo stesso problema trovando che la spinta tende sempre ad assumere il valore massimo di 5° per ottenere la massima accelerazione tangenziale, e in questo modo ottengono un $t_f = 2.406 \text{ years}$, leggermente minore di t_{fMQ} , e $\Delta V = 6.951 \text{ Km/s}$ per la circolarizzazione. Anche se una spinta costantemente inclinata di 5° è un'ottima approssimazione dell'andamento mostrato in Figura 5.2b, si è qui trovato che avere qualche decimo di grado in meno può essere in realtà benefico, in quanto a parità di t_f e di posizione di Giove (da loro assunto essere a 5.2028 AU dal Sole) la 1-0 dà $\Delta V = 6.940 \text{ Km/s}$ e la 1-0-s-0 dà $\Delta V = 6.811 \text{ Km/s}$.

Nelle *Figura 5.3* viene mostrato l'andamento del ΔV con il variare di t_f per vari tipi di traiettorie, evidenziando come ci sia continuità di risultati cambiando tipo di traiettoria e la 1-0-s-0 porti ai ΔV minori, mentre la 1-0 dopo un minimo in prossimità di t_{fMQ} dia ΔV crescenti con t_f .

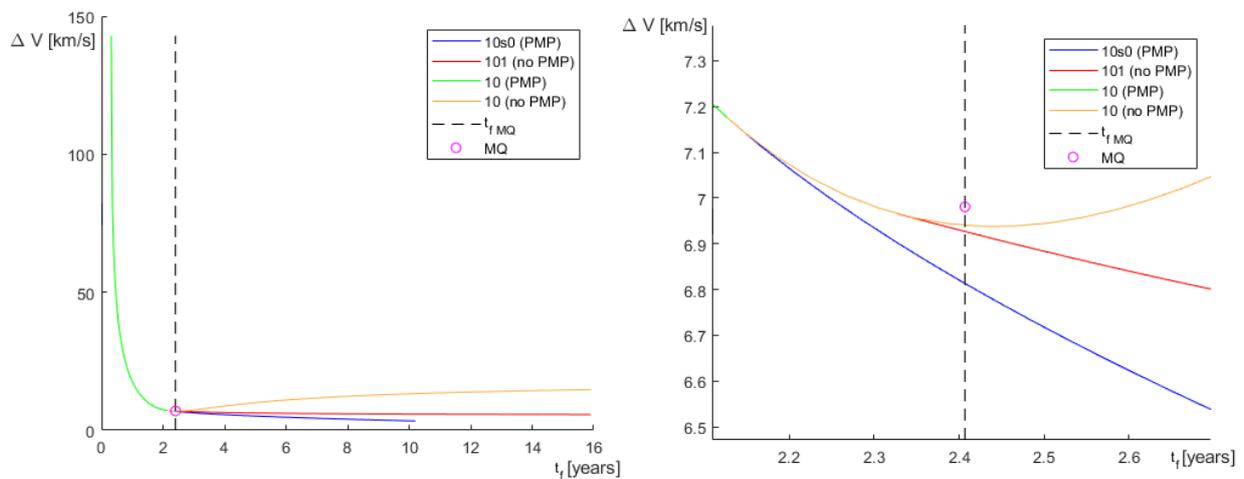


Figura 5.3: Andamento di ΔV in funzione t_f a sinistra (5.3a) e dettaglio intorno a t_{fMQ} a destra (5.3b) per vari tipi di traiettorie. La soluzione trovata da Mengali e Quarta è indicata qui e in seguito con un pallino rosa. Da un'intorno di t_{fMQ} le possibilità a disposizione aumentano, con la 1-0-s-0 quella che offre i risultati migliori e che comincia quando per la 1-0 non è più rispettato il PMP.

Mentre la classifica in termini di ΔV associati alle varie traiettorie rimane invariata anche per tempi maggiori di t_{fMQ} , lo stesso non si può dire per quella relativa ai ΔM in *Figura 5.4*, la quale si ribalta molto velocemente, facendo diventare la traiettoria più performante in termini di ΔV di circolarizzazione quella che consuma anche maggior plasma. Come prima sia la 1-0-s-0 che la 1-0-1 hanno il loro punto di partenza sulla 1-0.

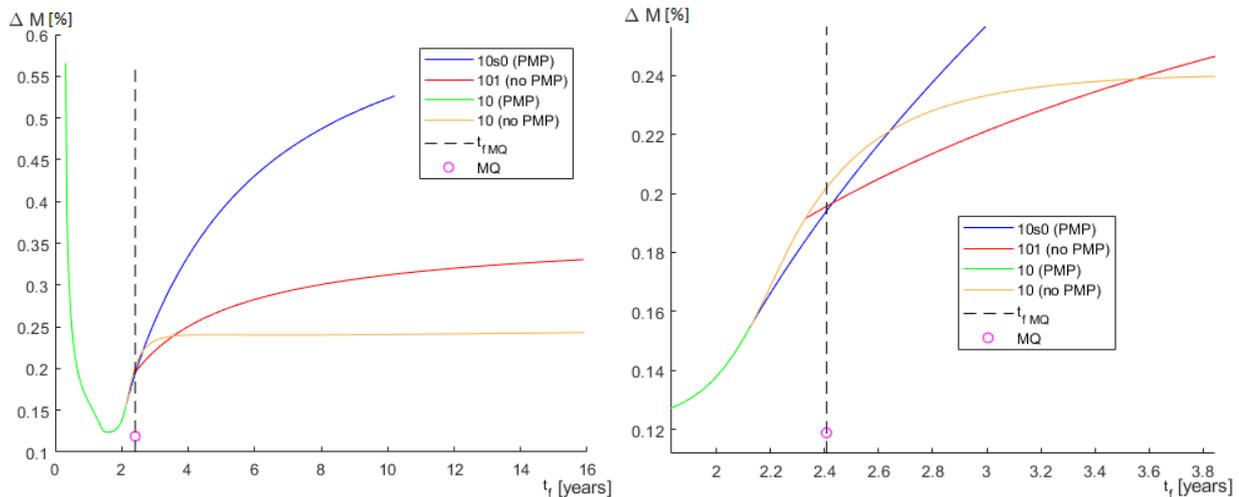


Figura 5.4: Andamento di ΔM in funzione t_f a sinistra (5.4a) e dettaglio intorno a t_{fMQ} a destra (5.4b) per vari tipi di traiettorie. La soluzione trovata da Mengali e Quarta è ben al di sotto di tutte le altre. Nell'intorno di t_{fMQ} gli andamenti si incrociano più volte e quello che sembrerebbe il peggiore a t_{fMQ} , ovvero quello della 1-0, diventa poi il migliore per t_f superiori, con la 1-0-s-0 che segue un'evoluzione opposta.

Risulta quindi spontaneo chiedersi quale aspetto sia da favorire, e nonostante la minimizzazione del ΔV sia molto importante, tale da averlo scelto come indice prestazionale, ricercarla a tutti i costi a discapito del consumo di plasma sarebbe controproducente. Per questo motivo si è scelto di utilizzare

nella sezione successiva l'indice prestazionale (3.67), il quale bilancia i due aspetti massimizzando la massa finale (al termine della circolarizzazione).

È interessante notare come all'aumentare di t_f la traiettoria della 1-0 tenda ad assumere la stessa forma di quella della 1-0-1, senza però frenare in prossimità dell'arrivo a Giove superato l'apoastro dell'orbita (Figura 5.5a e 5.5b). Inoltre, come mostrato nella Figura 5.5c, per $t_f \rightarrow t_{fmin}$ la 1-0-s-0 tende a diventare una 1-0 (con scomparsa del tratto singolare), mentre avvicinandosi al limite superiore di t_f è il tratto finale a motore spento che tende a scomparire, andando verso una 1-0-s e suggerendo che la traiettoria ottima possa assumere questo andamento per t_f superiori, qui non indagati.

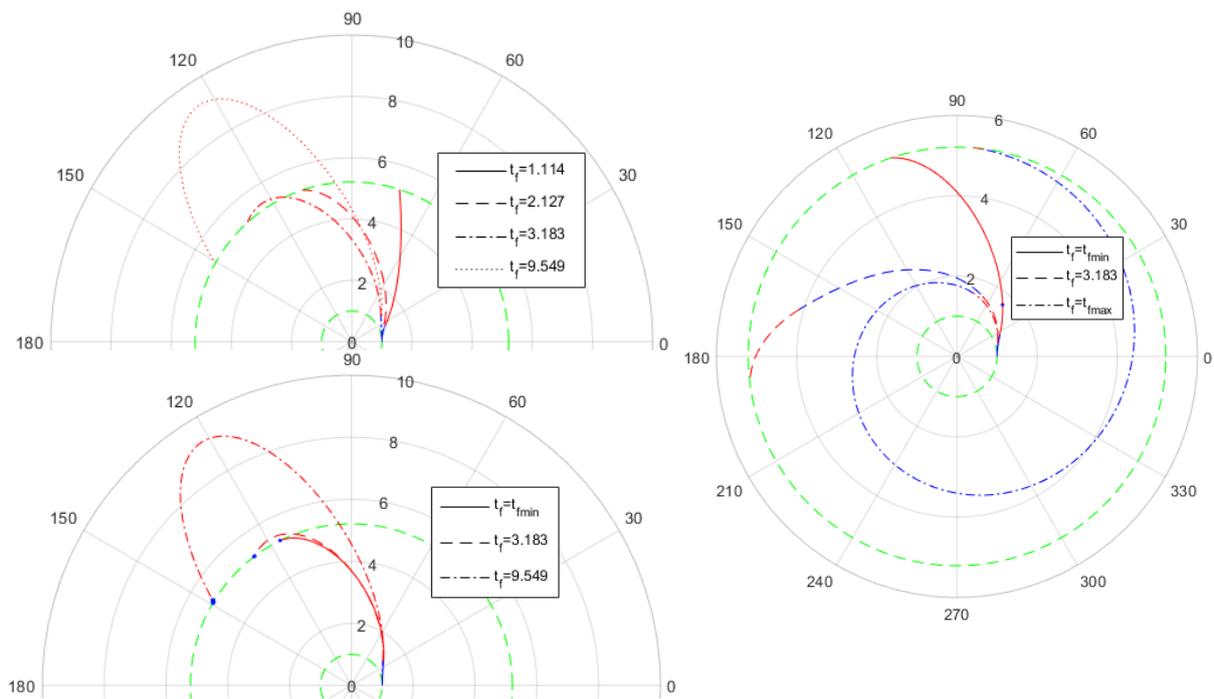


Figura 5.5: Famiglie di traiettorie di tipo 1-0 in alto a sinistra (5.5a), 1-0-1 in basso a sinistra (5.5b) e 1-0-s-0 a destra (5.5c). I tempi minimi e massimi relativi ad ogni famiglia sono quelli successivamente esposti in Tabella 5.2, gli altri tempi sono rappresentativi: $t_f = 2.127$ years è il limite per cui la 1-0 soddisfa il PMP, $t_f = 3.183$ years = 20 (adimensionale) e $t_f = 9.549$ years = 60 (adimensionale).

A scopo riepilogativo vengono dati in Tabella 5.2 i tempi minimi e massimi di validità delle soluzioni (ovvero per cui è rispettato il PMP) o semplicemente quelli per cui si sono trovate soluzioni che rispettino tutti gli altri vincoli ma non il PMP (soluzioni qui chiamate “quasi-ottime”) per i tre tipi di traiettorie analizzate.

Tabella 5.2: Limiti temporali di validità o per cui sono state trovate soluzioni “quasi ottime” per i tre tipi di traiettorie studiati. Tutti i tempi sono in anni. La 1-0-1 non rispetta mai il PMP, per cui i relativi tempi sono sbrattati.

	t_{min} PMP	t_{min}	t_{max} PMP	t_{max}
1-0	0.31577	0.31577	2.1734	Indefinito (prove fino a circa 48 anni)
1-0-1	/	2.3281	/	Indefinito (prove fino a circa 48 anni)
1-0-s-0	2.1734	2.1734	10.202	10.202

5.2 Massimizzazione della massa finale per spacecraft da 100 Kg

Gli andamenti esposti nelle *Figure 5.3* e *5.4* mostrano come, nel caso ci siano più soluzioni possibili, l'ottenimento del ΔV di circolarizzazione minore non coincida anche con il conseguimento del ΔM di trasferta minore. Per bilanciare i due parametri ed ottenere la massa maggiore possibile dopo la circolarizzazione è necessario utilizzare la funzione di costo (3.67), da cui derivano le condizioni al contorno (3.74), che si sostituiscono alle (3.49). Una soluzione a questo BVP è stata ottenuta solo per tempi finali relativamente bassi, per i quali la traiettoria ottima si riconferma essere di tipo 1-0, mentre per tempi più alti molti tipi di traiettorie sono state esaminate, ma benché ce ne siano diverse "quasi-ottime", nessuna traiettoria ottima (e quindi che rispetti il PMP) è al momento nota. In *Figura 5.6* sono riportati come prima gli andamenti del ΔV e del ΔM al variare del tempo finale, con l'aggiunta dell'andamento di M_f , la massa alla fine della circolarizzazione che qui si è cercato di massimizzare. A differenza di prima però le linee piene indicano ora i risultati ottenuti cercando di massimizzare M_f , mentre quelle tratteggiate sono le precedenti soluzioni ottenute minimizzando il ΔV e riportate per confronto. Con la nuova funzione di costo si è trovato che la traiettoria di tipo 1-0 soddisfa il PMP fino a $t_f = 2.1776$ years, leggermente superiore al limite precedente, mentre si sono trovate traiettorie quasi ottime solo per traiettorie del tipo 1-0-1 e 1-0-1-0, con quest'ultima che è possibile proprio dal t_f limite.

Come si può ben vedere in *Figura 5.6b* le nuove soluzioni non differiscono di troppo da quelle vecchie e presentano un ΔV leggermente maggiore (con la 1-0-1-0 che fa le veci della vecchia 1-0-s-0) per ottenere ΔM più marcatamente ridotti (*Figura 5.6d*). Notevole il fatto che la soluzione di tipo 1-0 a t_{fMQ} coincida circa con quella trovata da Mengali e Quarta (il "circa" è per le approssimazioni con cui è stata qui ricavata la seconda) e assuma qui il suo valore minimo. Osservando infine le *Figure 5.6e* e *5.6f* si può apprezzare come la 1-0 dia effettivamente il valore più alto di M_f fino a che il PMP risulti soddisfatto, per poi essere sostituita dalla 1-0-1-0 quando esso non è più rispettato, la quale a sua volta viene battuta dalla vecchia 1-0-s-0, non ottimizzata per la massimizzazione di questo indice, per $t_f \simeq 5.36$ years. Questo porta ad ipotizzare che la soluzione ottima abbia forma 1-0-s-0 per tempi finali sufficientemente elevati come con l'indice prestazionale precedente, ma nonostante questa strada sia stata percorsa non si è arrivati ad alcun valore fisicamente possibile, probabilmente per problemi di natura numerica più che teorica causati da un'eccessiva distanza delle condizioni al contorno iniziali di tentativo da quelle corrette. La breve durata di alcune curve in *Figura 5.6* è conseguenza del fatto che il codice non sia stato in grado di trovare una soluzione con medesima struttura oltre i limiti dell'intervallo, la cui causa è probabilmente numerica in quanto le vecchie soluzioni erano in grado di andar oltre, e dalle durate dei tratti propulsi non si evince alcun imminente cambio di struttura della traiettoria che giustifichi l'impossibilità della sua applicazioni per tempi finali minori (1-0) o maggiori (1-0-1 e 1-0-1-0).

Da notare inoltre che le masse finali dopo la circolarizzazione sono di almeno un ordine di grandezza minori alla già piccola massa assunta da Winglee et al. per tutto ciò che non qualifica come propellente, ovvero 70 kg (anche se non viene da loro presa in considerazione la presenza di un secondo sistema propulsivo). Per questo motivo neanche assumendo buona questa loro stima della massa del sistema M2P2 le traiettorie presentate in questa sezione e in quella precedente sono realistiche, mentre dei passi avanti in questa direzione saranno fatti nella sezione successiva.

Le traiettorie, in quanto non dissimili alle precedenti (anche la 1-0-1-0 ricorda molto una 1-0-s-0), non verranno qui riproposte.

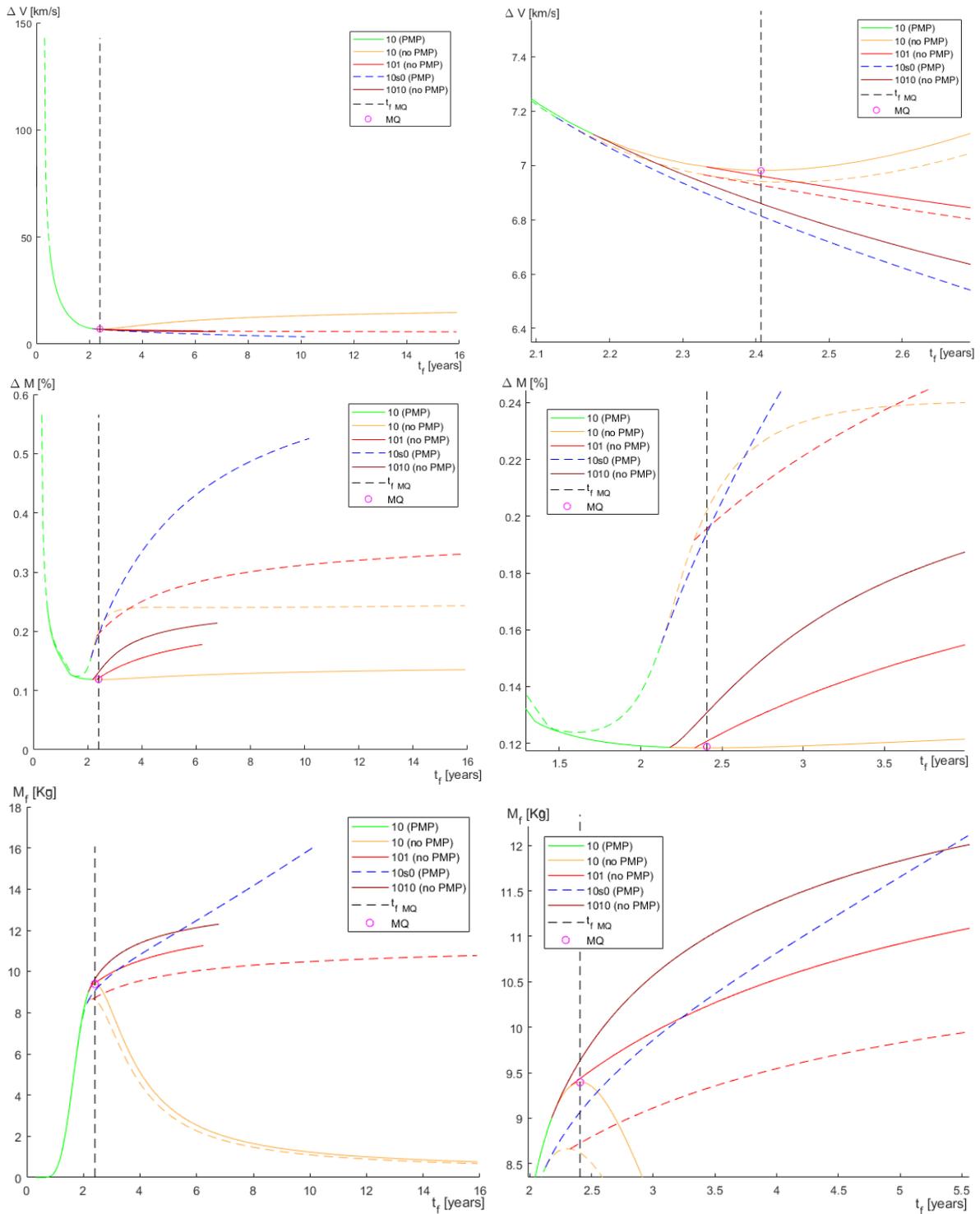


Figura 5.6: Andamenti del ΔV (5.6a) e suo dettaglio (5.6b), del ΔM (5.6c) e suo dettaglio (5.6d) e della M_f (5.6e) e suo dettaglio (5.6f) in funzione del tempo. Le linee tratteggiate rappresentano gli andamenti relativi alla massimizzazione della (3.39) già presentati nella sezione 5.1, mentre quelli con linea piena sono relativi alla (3.67).

5.3 Massimizzazione della massa finale per spacecraft da 15 tonnellate

Nella sezione 2.4 si è visto come le caratteristiche inizialmente ipotizzate per il sistema M2P2 siano in realtà da riconsiderare a causa di problematiche che nascono nello scalamento delle forze in una regione in cui le condizioni di applicabilità del modello MHD non sono più verificate e alla mancata conservazione del flusso magnetico, con conseguente riduzione delle dimensioni effettive della bolla magnetica. Queste due complicazioni causano, a meno di nuovi sviluppi, rispettivamente una diminuzione della forza esercitata dal vento solare sullo spacecraft e un aumento nelle dimensioni del solenoide necessario a produrre la bolla magnetica desiderata, le quali possono entrambe essere viste come un aumento di massa del sistema. Una massa più realistica del nuovo sistema può essere come detto in precedenza di 3800 Kg, a cui si aggiungono le masse di plasma e propellente impiegate per la missione che fanno raggiungere nel caso presentato, puramente esemplificativo, le 15 tonnellate (questo valore è in realtà approssimativo e fa riferimento ad una soluzione con errori sulle condizioni al contorno ancora piccoli ma svariati ordini di grandezza maggiori rispetto a quelli delle soluzioni precedenti, ma valori leggermente diversi portano comunque elevate precisioni).

La traiettoria trovata per questo caso, la quale soddisfa il PMP ed è mostrata in *Figura 5.7*, fa uso di un elevato numero di flyby del Sole, ben 20, con distanza minima di 0.81870 AU, maggiore dell'orbita di Venere, alla quale corrispondono altrettanti intervalli di accensione e spegnimento del sistema che iniziano nei pressi del periastro dell'orbita ma continuano fin circa all'arrivo all'apoaastro, e nel caso dell'ultimo di questi viene fatto addirittura più di un giro a motore acceso, da periastro della vecchia orbita a periastro della nuova. Dopo i 20 intervalli acceso/spento c'è un ultimo intervallo di tempo in cui il motore è acceso che va da poco dopo il periastro dell'orbita fino all'arrivo a Giove, il quale viene oltrepassato inizialmente dallo spacecraft in modo simile a quanto succedeva con la traiettoria 1-0-1 di *Figura 5.5b*.

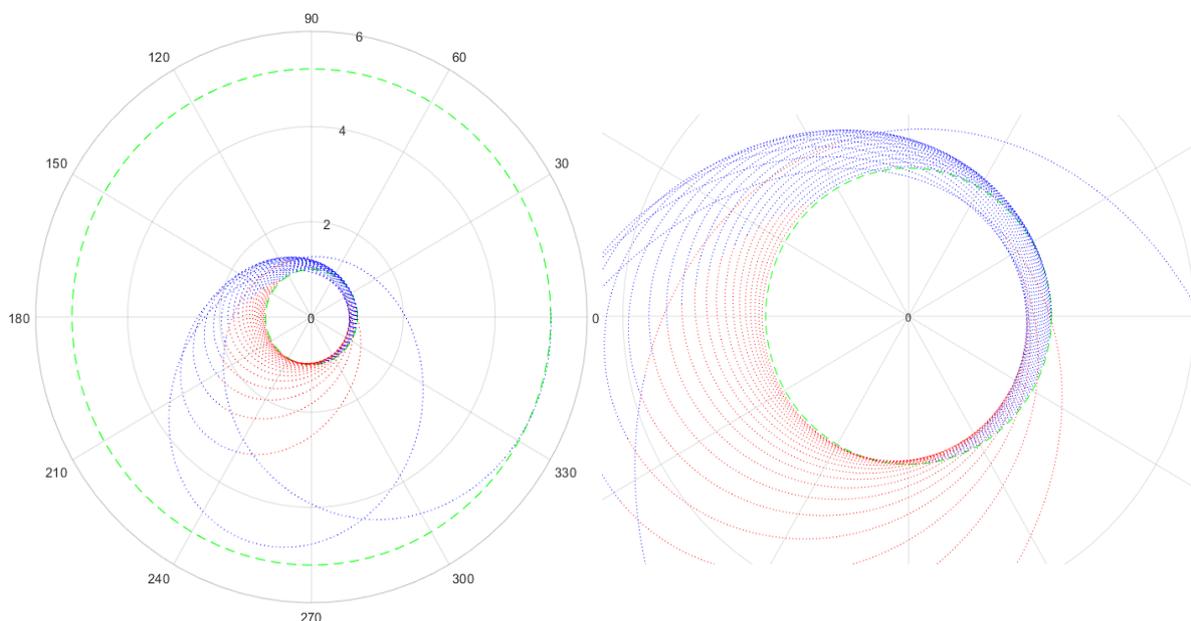


Figura 5.7: Traiettoria di 40.877 anni a sinistra (5.7a) e dettaglio a destra (5.7b) per spacecraft da 15 tonnellate con massimizzazione della massa finale.

Il tempo di percorrenza di questa traiettoria è molto elevato, pari a 40.877 anni, ed è frutto di un bilanciamento con la massa totale in quanto aumentando il tempo si può ridurre il ΔV di circolarizzazione e il plasma consumato, diminuendo quindi i consumi e di conseguenza la massa

richiesta, il che a sua volta diminuisce ancora i consumi. Nel caso qui descritto il plasma impiegato per arrivare a Giove costituisce circa il 35% della massa dello spacecraft, pari più precisamente a 5.2735 tonnellate, mentre il propellente per impartire ad esso un $\Delta V = 4.1655 \text{ Km/s}$ è quasi il 40% della massa complessiva, ovvero 5.9261 tonnellate. Un aumento del tempo porta in generale a traiettorie con maggiori rivoluzioni attorno al Sole, e il cambio tra un tipo di traiettoria e un altro porta a discontinuità nelle prestazioni e all'intrecciarsi di molte soluzioni differenti, tra cui un elevato numero di subottimali. Non è stata inoltre considerata la possibilità di archi singolari in quanto questo tipo di soluzioni è molto diverso da quelle precedenti, la presenza di questi avrebbe rappresentato una grande difficoltà nella ricerca di una soluzione adatta per l'alto numero di possibilità a disposizione, e poiché le soluzioni presentate sono state ricavate senza imporre una particolare forma alla traiettoria, utilizzando la formulazione originale del programma, il quale ha delle difficoltà nel trattare gli archi singolari.

Considerando anche la possibilità dello spacecraft di effettuare il flyby di altri pianeti lungo il suo tragitto, il risultato mostrato per questo caso è significativamente migliorabile e serve solo ad esibire gli effetti che un aumento nella massa del sistema M2P2 comporterebbe. In particolare si vuole mettere in evidenza come sono stati richiesti tempi molto elevati per diminuire il ΔV necessario, e quindi la massa, ma senza riuscire ad anche solo avvicinarsi ad un suo annullamento. Il motivo per cui questo rimane considerevole è che la velocità tangenziale all'arrivo a Giove è di non molto superiore alla metà di quella del pianeta (il 68.2%), e questo è a sua volta dovuto al fatto che la forza tangenziale è più di un ordine di grandezza inferiore rispetto a quella radiale (come detto $F_{r_{max}} = 1 \text{ N}$, $F_{\theta_{max}} = 0.08 \text{ N}$) e che un aumento dell'una è sempre accompagnato da un aumento dell'altra. Se così si volesse spingere più a lungo per aumentare l'accelerazione tangenziale, si incorrerebbe anche in un notevole aumento di quella radiale, che porterebbe a superare Giove ed evadere facilmente (almeno per il sistema a massa inferiore) dal sistema solare. Questo fa sì che se paradossalmente la forza radiale fosse minore, un cambio di strategia di accensione e spegnimento potrebbe rendere più semplici le operazioni di diminuzione del ΔV . Non è quindi solo la massa del sistema propulsivo in sé il grande limite della vela al plasma, ma anche, e forse soprattutto, questa grossa disparità tra le due forze, accentuata dal fatto che è proprio quella tangenziale, tradizionalmente "la più efficiente", ad essere quella minore (non a caso nella propulsione impulsiva si fa un grande uso di spinte puramente tangenziali).

Una speranza viene però dalla possibile unione di della M2P2 con un sistema propulsivo dedicato all'incremento di forza tangenziale durante tutta la traiettoria, per poter diminuire il ΔV di immissione nell'orbita di Giove spingendo dove più è conveniente e con un propulsore a più alto impulso specifico, come uno elettrico, e non solo alla fine. Un motore del genere dovrebbe però essere in grado di lavorare in presenza dei forti campi magnetici creati e non disturbare la stabilità della bolla magnetica che avvolge lo spacecraft, e quindi integrarsi al meglio con la M2P2.

6. Conclusione

Il sistema M2P2 è un sistema propulsivo innovativo che promette elevate prestazioni senza alcun consumo di propellente, generando spinta tramite la deflessione magnetica del vento solare con dimensioni e masse contenute, in quanto le grandi dimensioni del campo magnetico richieste sarebbero raggiunte tramite l'iniezione di plasma nella bolla magnetica. Nonostante l'ottimismo portato dalle prime simulazioni ed esperimenti, nuovi sviluppi mostrano come in realtà le spinte potrebbero essere sovrastimate e la massa largamente sottostimata, portando ad accelerazioni significativamente inferiori rispetto a quelle dei sistemi propulsivi oggi in stato dell'arte.

Applicando il metodo indiretto alla teoria del controllo ottimo sono state ricavate le equazioni che costituiscono il problema differenziale ai limiti (BVP), e queste sono state risolte tramite un codice precedentemente sviluppato al Politecnico di Torino e a questo scopo adattato.

La vela al plasma originariamente proposta mostra prestazioni molto interessanti, ancora migliorabili rispetto a quanto fatto in altri lavori e qui riottenuto in quanto quelle traiettorie non sembrano rispettare il Principio del Massimo di Pontryagin nella trasferta Terra-Giove. La soluzione qui trovata ed esaminata, in grado di rispettare questo principio, prevede l'utilizzo di un controllo singolare, il quale di per sé non è comune vedere in questo tipo di problemi.

Dato che la diminuzione del ΔV , da essere imposto allo spacecraft da un sistema propulsivo ausiliario, ricercata nel presente studio e in altri è volta principalmente alla diminuzione dei consumi, si è ritenuto opportuno integrarla in modo da massimizzare la massa finale, figura spesso più adatta a valutare la bontà di una trasferta interplanetaria in quanto bilancia tra i consumi della fase di avvicinamento al pianeta e di successiva circolarizzazione dell'orbita. Benché si siano trovate soluzioni solo per un intervallo di tempo finale di percorrenza relativamente ristretto per queste traiettorie, si è visto come altre soluzioni presenti in letteratura ricompaiano in questo tipo di analisi, e come la traiettoria con arco singolare non ottimizzata per questa nuova funzione dei costi si comporti ancora egregiamente rispetto alle soluzioni concorrenti nate a questo scopo.

Purtroppo però è molto probabile che un sistema M2P2 realistico, nel caso venga mai realizzato, sia meno performante di quello inizialmente ipotizzato, e in particolare avrà una massa molto superiore a quella inizialmente supposta. A valore puramente esemplificativo delle prestazioni che potrebbe avere il sistema reale, una stima di questa nuova massa è stata presentata e la sua traiettoria ottima è stata analizzata. Da questa analisi si vede come i tempi di trasferta aumentino considerevolmente, passando da qualche mese o anno, relativo al sistema originale, a oltre 40 anni per una trasferta a Giove nel caso più realistico, mentre la massa passa da 100 Kg a 15 tonnellate, di cui poco più del 25% costituito dal sistema propulsivo e il resto da plasma o propellente. Il motivo di una così ampia parte di massa consumabile è da ricercarsi nell'ancora alto ΔV nonostante ben 20 flyby del Sole, il quale è a sua volta dovuto in maniera rilevante alla grossa disparità di forza radiale e tangenziale che il sistema è in grado di imporre e al fatto che queste siano indissolubilmente legate, il che complica la diminuzione di questo indice.

Le povere prestazioni che il sistema realistico presenta possono però essere significativamente migliorate da nuovi e attesi sviluppi riguardo le sue caratteristiche costruttive e deflettive, mentre sul fronte dell'ottimizzazione delle traiettorie altri miglioramenti possono essere fatti con l'utilizzo di traiettorie singolari, come qui dimostrato, e tramite l'impiego di un secondo propulsore a bordo con il

compito di aumentare la forza tangenziale sullo spacecraft, utilizzabile nelle fasi di avvicinamento al pianeta *target*.

Il sistema, allo stato attuale delle cose, non sembra quindi rispettare le promesse fatte, ma forse non è ancora accantonabile e dei passi in avanti possono e si spera siano fatti. La smania per un sistema propulsivo che ci permetta di esplorare il cosmo è sempre grande e finché non si ha la certezza che questa sia la strada sbagliata per farlo, vale la pena perseguirla, sia per soddisfare la grande curiosità del genere umano che per proteggerlo da sé stesso e dalle insidie dello spazio. Come disse Stephen Hawking:

“Non penso che la razza umana sopravvivrà il prossimo migliaio d’anni a meno che non si espanda nello spazio. Ci sono troppi incidenti che possono terminare la vita su un singolo pianeta, ma sono un ottimista. Raggiungeremo le stelle.”

Bibliografia e Sitografia

- [1] S. Moschou, R. Keppens and V. Pierrard, 2016, *Dynamics of the solar atmosphere and solar wind modeling*, Dissertation, Arenberg Doctoral School, Leuven, Belgium, sections 1.2.1, 1.5.1 and 1.5.2.
- [2] C. T. Russell, 2001, *Solar Wind and Interplanetary Magnetic Field: A Tutorial*, *Space Weather*, Vol. 125, pp. 73-89, AGU, Washington, D. C.
- [3] <https://it.wikipedia.org/> e <https://en.wikipedia.org/>, last visit 26/11/2018.
- [4] Peter Bochsler, 2000, *Solar Wind Composition*, *Encyclopedia of Astronomy & Astrophysics*, [DOI: 10.1888/0333750888/2303].
- [5] J. D. Richardson, J. W. Belcher, A. J. Lazarus, K. I. Paularena, J. T. Steinberg and P.R. Gazis, 1995, *Non-Radial Flows in the Solar Wind*, *Proceedings of the Eighth International Solar Wind Conference*, Dana Point, CA.
- [6] J. D. Richardson, J. W. Belcher, A. J. Lazarus, K. I. Paularena and P. R. Gazis, 1996, Statistical properties of the solar wind, *Proceedings of the Eighth International Solar Wind Conference*, Dana Point, CA.
- [7] A. V. Suvorova and A. V. Dmitriev, 2011, *Pressure balance at the magnetopause: Experimental studies*, Web publication: <https://arxiv.org/abs/1110.5209>.
- [8] R. M. Winglee, J. Slough, T. Ziemba and A. Goodson, 2000, *Mini-Magnetospheric Plasma Propulsion: Tapping the energy of the solar wind for spacecraft propulsion*, *Journal of Geophysical research*, Vol 105, Issue A9, pp. 21067-21077.
- [9] A. J. Hundhausen, 1995, *The solar wind*, in *Introduction to Space Physics*, edited by M. G. Kivelson and C. T. Russell, 91-128, *Cambridge University Press*, New York.
- [10] D. G. Andrews and R. M. Zubrin, 1989, *Magnetic Sails and Interplanetary Travel*, Conference paper in *Journal of Spacecraft and Rockets*.
- [11] D. G. Andrews and R. M. Zubrin, 2000, *The Magnetic Sail, Final Report to the NASA Institute of Advanced Concepts*.

- [12] H. Yamakawa, H. Ogawa, H. Nishida, I. Shinohara, K. Fujita, Y. Nakayama, H. Otsu, 2005, *Feasibility Study of Magnetoplasma Sail, The 29th International Electric Propulsion Conference*, Princeton University, October 31 – November 4, 2005.
- [13] Thomas Wiegmann, 2012, *Space Plasma Physics*, Lecture, International Max Planck Research School for Solar System Science, University of Göttingen, Germany, Web publication: <https://www.mps.mpg.de/phd/space-plasma-physics>.
- [14] R. M. Winglee, 1998, *Multi-fluid simulations of the magnetosphere: The identification of the geopause and its variation with IMF*, *Geophysical Research Letters*, 25, 4441.
- [15] R. M. Winglee, 1998, *Imaging the ionospheric and solar wind sources in the magnetosphere through multi-fluid global simulation*, *Phys. Space Plasmas*, 15, 345.
- [16] G. Mengali and A. A. Quarta, 2006, *Optimal Missions with Minimagetospheric Plasma Propulsion*, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 29, No.1.
- [17] A. Bolle, C. Circi, 2009, *Optimal Trajectories For Spacecrafts with M2P2 Propulsion System*, *Communications to SIMAI Congress*, Vol. 3, [DOI: 10.1685/CSC09304].
- [18] R.M. Winglee, J. Slough, T. Ziemba, P. Euripides, M.L. Adrian, D. Gallagher, P. Craven, W. Tomlinson, J. Cravens and J. Burch, 2001, *Large-Scale Mini-Magnetosphere Plasma Propulsion (M2P2) Experiments*, in *Proceedings of the 7th Spacecraft Charging Technical Conference, 23–27 April 2001*, Noordwijk, Netherlands.
- [19] R.M. Winglee, P. Euripides, T. Ziemba, J. Slough and L.Giersh, 2003, *Simulation of Mini-Magnetospheric Plasma propulsion (M2P2) Interacting with an External Plasma Wind*, *39th AIAA Joint Propulsion Conference*; 20-23 Jul. 2003, Huntsville, AL.
- [20] R.M. Winglee, 2004, *Advances in Magnetized Plasma Propulsion and Radiation Shielding*, *NASA/DoD Conference on Evolvable Hardware*, Seattle, WA.
- [21] G.V. Khazanov, P. Delamere, K. Kabin, T.J. Linde, 2004, *Plasma Sail Concept Fundamentals*, *Technical Report*, NASA/TP-2004-213143, M-1103.
- [22] C. Cattell, P. Catto, H. Funsten, D. Garnier, N. Hershkowitz, R. Myers, H. Petschek and D. Winske, 2005, *Physics and Technology of the Feasibility of Plasma Sails*, *Journal of Geophysical Research*.
- [23] http://orbitertutorials.tripod.com/orbital_mechanics.htm, last visit 26/11/2018.

[24] L. Casalino, 2017, *Ottimizzazione indiretta di traiettorie spaziali*, Lezioni, Politecnico di Torino, Torino.

[25] L. Casalino, 2017, *Optimization Methods for Space Trajectories*, Lectures, Politecnico di Torino, Torino.

[26] L. Casalino and G. Colasurdo, 2003, *Optimal Control of a Grey Solar Sail for Interplanetary Missions*, *The Journal of the Astronautical Sciences*, Vol. 51, No. 4, pp. 405-418.

[27] D. F. Shampine, and M.K. Gordon, 1975, *Computer Solution of Ordinary Differential Equation: The Initial Value Problem*, 1^a ed., W.H. Freeman, San Francisco, CA.

[28] M. Noca, R. Frisbee, L. Johnson, L. Kos, L. Gefert, and L. Dudzinski, 2001, *Evaluation Advanced Propulsion Systems for the Titan Explorer Mission*, *International Electric Propulsion Conference*, Pasadena, CA, 15-19 October 2001.

[29] A. J. Trask, W. J. Mason, and V. L. Coverstone, 2002 *Optimal Interplanetary Trajectories Utilizing Constant Radial Thrust and Gravitational Assists*, *AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit*, Monterey.

[30] <http://spaceflight101.com/juno/spacecraft-information/>, last visit 26/11/2018.

[31] <https://www.rocket.com/rs-25-engine>, last visit 26/11/2018.

Elenco Tabelle

Tabella		Pagina
2.1	Comparazione di parametri costruttivi e prestazioni di M2P2 e vela magnetica, adattata da Cattell et al. ^[22] .	13
5.1	Alcuni valori caratteristici di diversi tipi di traiettorie a t_{fMQ} .	37
5.2	Limiti temporali di validità o per cui sono state trovate soluzioni "quasi ottime" per i tre tipi di traiettorie studiati.	40

Elenco figure

Figura		Pagina
2.1	Movimento combinato di rotazione del Sole ed emissione di vento solare in direzione radiale, da Russell ^[2] adattata da Hundhausen ^[9] .	5
2.2	Comparazione schematica tra MagSail (a sinistra) e M2P2 (a destra), da Yamakawa et al. ^[12] .	6
2.3	Forza sviluppata sul sistema M2P2 in funzione della forza del plasma immesso dalla sorgente derivata dalle simulazioni, da Winglee et al. ^[8] .	9
2.4	“Decadimento del campo magnetico in direzione sub-solare [...]”, (didascalia e immagine da Khazanov et al. ^[21]).	11
3.1	Corpi di massa M ed m in un sistema di riferimento 3D.	15
3.2	Esempio di orbita ellittica ^[23] a sinistra (3.2a) [...] e lo stesso tipo di orbita mostrata nello spazio 3D ^[3] a destra (3.2b).	17
3.3	Sistema di riferimento polare centrato sul Sole (assi $\hat{I}\hat{J}$) e sistema di riferimento radiale-tangenziale centrato sullo spacecraft (assi $\hat{i}\hat{j}$).	18
3.4	Logica alla base del controllo bang-bang, adattamento da Casalino ^[25] .	22
4.1	Andamenti di S in funzione del tempo.	35
5.1	A sinistra le trasferte ottime a t_{fMQ} secondo vari modelli di traiettoria, a destra un dettaglio dello stesso caso nella prima parte del tragitto.	38
5.2	Andamento di τ a sinistra (5.2a) e inclinazione della spinta a destra (5.2b) in funzione del tempo per la traiettoria 1-0-s-0 a t_{fMQ} .	38
5.3	Andamento di ΔV in funzione di t_f a sinistra (5.3a) e dettaglio intorno a t_{fMQ} a destra (5.3b) per vari tipi di traiettorie.	39
5.4	Andamento di ΔM in funzione di t_f a sinistra (5.4a) e dettaglio intorno a t_{fMQ} a destra (5.4b) per vari tipi di traiettorie.	39
5.5	Famiglie di traiettorie di tipo 1-0 in alto a sinistra (5.5a), 1-0-1 in basso a sinistra (5.5b) e 1-0-s-0 a destra (5.5c).	40
5.6	Andamenti del ΔV (5.6a) e suo dettaglio (5.6b), del ΔM (5.6c) e suo dettaglio (5.6d) e della M_f (5.6e) e suo dettaglio (5.6f) in funzione del tempo.	42
5.7	Traiettoria di 40.877 anni a sinistra (5.7a) e dettaglio a destra (5.7b) per spacecraft da 15 tonnellate con massimizzazione della massa finale.	43

Ringraziamenti

Questa tesi, come questa laurea, mi ha impiegato molto tempo e sforzi, forse troppi, molti mal di testa e momenti di frustrazione per non saper come andare avanti, ma nel momento in cui scrivo queste ultime righe posso dire che il peggio è ormai alle spalle. Voglio quindi ringraziare tutti coloro i quali mi hanno aiutato a raggiungere questo traguardo perché posso valere solo quanto le persone che mi circondano.

Non posso che cominciare ringraziando il professor Casalino, che mi ha dato la possibilità di svolgere con lui questo lavoro. La sua professionalità e disponibilità nel rispondere prontamente a qualsiasi tipo dubbio potessi avere mi hanno aiutato enormemente e mi saranno da esempio in futuro, ma ancor più importante è stato il grande sostegno e i preziosi consigli che mi ha fornito quando non sembravamo andare da nessuna parte e i risultati tardavano ad arrivare. Il suo impegno e dedizione non mi hanno fatto mai sentire solo, e questo è quanto di meglio ad un relatore, o a chiunque per quel che vale, si possa chiedere.

Devo inoltre ringraziare tutta la mia famiglia per il sempre ben accetto sostegno economico e soprattutto per essermi sempre stata vicino ed avermi dato quella serenità mentale e forza d'animo di cui ho avuto disperatamente bisogno nel corso di questi mesi e questi anni.

Ringrazio infine tutti i miei amici, sia quelli con cui ho condiviso le aule e i lunghi, lunghi, pomeriggi al Politecnico che quelli con cui ho condiviso una casa o che conosco da tutta una vita. Anche solo la vostra compagnia ha reso tutto più leggero, e la prospettiva di passare del tempo insieme dopo lo studio mi ha sempre dato la voglia necessaria per affrontarlo.

A tutti voi, di cuore, grazie.