

POLITECNICO DI TORINO

I Facoltà di Ingegneria

**Corso di Laurea Magistrale
in Ingegneria Civile**

Tesi di Laurea Magistrale

Monitoraggio strutturale usando lo shape sensing: iFEM per strutture civili



Relatori:

Prof. Donato Sabia

Prof. Francesco Tondolo

Prof. Marco Gherlone

Candidato:

Pierclaudio Savino

Ottobre 2018

Sommario

Lo shape sensing, cioè la ricostruzione del campo di spostamento di una struttura a partire da misure di deformazione in punti discreti, ha implicazioni rilevanti per il monitoraggio della salute strutturale (SHM), nonché per il controllo e l'attuazione di strutture intelligenti opportunamente strumentate con sensori di deformazione. La conoscenza a pieno campo degli spostamenti implica la possibilità di valutare altre quantità di risposta strutturale come le tensioni, consentendo in tal modo la previsione di danni in tempo reale mediante opportuni criteri di rottura.

Il metodo degli elementi finiti inverso (iFEM) è una metodologia veloce, accurata e robusta che sfruttando un principio variazionale pesato ai minimi quadrati, consente il rilevamento della forma deformata. A partire da una discretizzazione della struttura con elementi inversi, è possibile ricostruire la risposta strutturale senza la conoscenza delle proprietà meccaniche e delle condizioni di carico ma basandosi esclusivamente sulle relazioni tra spostamenti e deformazioni.

La formulazione teorica dell'iFEM, originariamente sviluppata per i casi delle piastre alla Mindlin è stata riformulata per i casi di tralicci, travi e telai sulla base delle ipotesi cinematiche della teoria di Timoshenko al fine di definire una tecnologia abilitante a fornire feedback ai sistemi di controllo ed attuazione dei veicoli aerospaziali.

Con lo scopo di avvicinare tale metodo al campo dell'ingegneria civile, è stata definita nella presente tesi la formulazione iFEM anche sulla base della teoria di Eulero-Bernoulli. Sono stati realizzati un elemento di ordine 0 utilizzato in presenza di una sollecitazione a taglio costante e un elemento di ordine 1 idoneo ai casi di sollecitazione a taglio lineare.

Il quadro generale adottato è stato di valutare la precisione raggiunta con l'iFEM alla Eulero-Bernoulli e di compararla con quella dell'iFEM alla Timoshenko, verificare la robustezza della metodologia rispetto alla distribuzione dei sensori ed alla snellezza degli elementi e di consolidare la metodologia rispetto ai casi più comuni di travi a sbalzo e telai piani caricati con forze concentrate e carichi uniformemente distribuiti. Per testare la capacità predittiva dell'iFEM, l'algoritmo è stato implementato in un codice di calcolo Matlab. Per simulare i dati di deformazione sperimentali nei punti di stazione e per verificare l'accuratezza degli spostamenti ottenuti con la procedura inversa, è stata adottata l'analisi FEM diretta utilizzando il software LUSAS.

La validazione dei risultati ha dimostrato che l'iFEM risulta essere una metodologia altamente efficace ed efficiente nel predire le risposte strutturali e di possedere un'estrema versatilità in termini di tipologia strutturale, condizioni di carico e obiettivi da raggiungere.

Indice

Sommario	I
1 Introduzione	1
1.1 Definizione di Structural Health Monitoring (SHM)	1
1.2 Structural Health Monitoring per strutture Smart.....	4
1.3 Structural Health Monitoring e biomimetica.....	5
1.4 Elementi base dei sistemi SHM.....	6
1.5 Shape sensing	9
2 Teoria tecnica della trave	17
2.1 Trave alla Eulero - Bernoulli	17
2.2 Trave di Timoshenko.....	21
2.2.1 Determinazione del fattore di correzione a taglio	24
2.3 Torsione.....	26
3 Metodo degli Elementi Finiti per la soluzione del problema elastico	31
3.1 Metodo di Ritz-Galerkin.....	31
3.2 Principio dei Lavori Virtuali.....	34
3.3 Applicazione della stazionarietà del potenziale alle travi.	37
3.4 Soluzione del sistema lineare con le condizioni al contorno.....	38
4 Analisi delle travi con il Metodo degli Elementi Finiti	39
4.1 Elementi finiti di travi alla Eulero-Bernoulli.....	39
4.2 Trasformazione di coordinate	43
4.3 Elementi finiti di travi alla Timoshenko.....	44
4.3.1 Fenomeno dello Shear locking.....	47
4.4 Elemento trave sollecitato a torsione.....	50
5 Metodo degli Elementi Finiti inverso per travi e telai	53
5.1 Equazioni che governano il problema di Eulero - Bernoulli	53
5.1.1 Elemento finito inverso con Eulero-Bernoulli	56
5.1.2 Funzioni di forma di Eulero-Bernoulli.....	60
5.1.2.1 Elemento di ordine 0 EB.....	61
5.1.2.2 Elemento di ordine 1 EB.....	63
5.1.3 Valutazione delle deformazioni sperimentali di Eulero-Bernoulli	66
5.2 Equazioni che governano il problema di Timoshenko	68
5.2.1 Elemento finito inverso con Timoshenko	71
5.2.2 Funzioni di forma di Timoshenko.....	74

5.2.2.1	Elemento di ordine 0 TM.....	75
5.2.2.2	Elemento di ordine 1 TM.....	78
5.2.3	Valutazione delle deformazioni sperimentali di Timoshenko.....	82
5.3	Equazioni che governano il problema della torsione.....	83
5.3.1	Elemento finito inverso con la torsione.....	85
6	Valutazione numerica del metodo iFEM	87
6.1	Casi studio	87
6.2	Distribuzione dei sensori di deformazione	88
6.3	Risultati numerici ottenuti con l'iFEM.....	90
7	Conclusioni.....	95
	Bibliografia	97

Capitolo 1

Introduzione

La qualità della nostra vita e del nostro lavoro dipende dall'efficienza delle infrastrutture a cui quotidianamente facciamo affidamento e da cui ci aspettiamo totale funzionalità senza interruzioni di servizio. Purtroppo, tali strutture cominciano a degradarsi non appena sono messe in servizio; processi come la corrosione, la fatica e l'usura le danneggiano rendendole incapaci di assolvere alle funzioni per le quali sono state progettate.

Gli ultimi anni sono stati caratterizzati da un'inversione di tendenza da parte di governi e proprietari di strutture, che si sono allontanati dalle nuove costruzioni cercando di valorizzare quelle esistenti. A tal fine vi è la necessità di conoscere la stima della vita residua e monitorare costantemente lo stato di salute della struttura in modo tale da ottimizzare i costi di manutenzione.

In tale prospettiva si colloca il concetto di monitoraggio della salute strutturale (Structural Health Monitoring) e quindi di rilevamento in ogni momento della vita della struttura e in real-time, dell'evoluzione del danno o del cambiamento delle caratteristiche strutturali causato dal normale utilizzo, dalle azioni ambientali o da eventi eccezionali.

Lo SHM permette di riconsiderare la progettazione della struttura, ottimizzandola in funzione delle reali condizioni di utilizzo e diventando quindi parte integrante della moderna ingegneria strutturale. Oltre a portare benefici nell'ambito della progettazione, consente agli utenti un uso in sicurezza della struttura, una riduzione del tempo di inutilizzo e di evitare collassi catastrofici. Integrando le valutazioni relative agli interventi di manutenzione permette ai costruttori un miglioramento del loro servizio. A differenza del programma di manutenzione preventiva in cui la struttura è valutata solo a intervalli cadenzati, lo Structural Health Monitoring permette di intervenire solo quando strettamente necessario, migliorando l'efficienza degli interventi e ottimizzando i costi.

1.1 Definizione di Structural Health Monitoring (SHM)

Il monitoraggio della salute strutturale definisce il processo di valutazione dello stato di salute di una struttura e di previsione della sua vita rimanente al fine di determinare interventi correttivi e prevenire collassi catastrofici (Gopalakrishnan et al., 2011).

Il concetto di monitoraggio in ambito civile non è nuovo in quanto le strutture di valore sono sempre state regolarmente ispezionate con tecniche non distruttive, per valutare il danno ed il suo effetto sulle prestazioni. L'efficacia di tali ispezioni si basa sull'accessibilità del luogo da esaminare e in larga misura sulla competenza del personale che effettua tali ispezioni. Inoltre, le metodologie d'indagine tradizionali sono di tipo "locale" e richiedono la conoscenza a priori della parte danneggiata. Essendo tali approcci laboriosi e costosi, e data la necessità di analizzare strutture sempre più complesse, è nata l'esigenza di sviluppare metodi alternativi di tipo "globale" in grado di accertare la condizione della struttura, raccogliendo e analizzando automaticamente una serie di dati in modo affidabile, continuo ed economicamente efficiente. Le ispezioni visive, le prove di carico, e tutta la serie di valutazioni che gli ingegneri civili hanno condotto per molto tempo, non sempre riescono a garantire l'identificazione del sistema e ad un'interpretazione tempestiva in combinazione con un approccio proattivo di gestione della salute strutturale. Le attuali applicazioni di valutazione della salute consentono di reagire solo alla mancanza di operatività, danneggiamento e prestazioni allo stato limite.

Da qui la nascita dello Structural Health Monitoring (SHM) che integra sensori, acquisizione e trasmissione di dati, potenza computazionale e capacità di elaborazione all'interno della struttura. L'idea di base è quella di fornire alla struttura di interesse la capacità di analisi e di valutazione in modo continuativo.

Il sistema di monitoraggio è caratterizzato da una funzione di controllo dell'integrità strutturale ed una funzione di controllo dell'utilizzo. Il segnale fornito dal sottosistema di monitoraggio d'integrità è utilizzato dal controller che elabora la diagnosi attraverso cui determinare in ogni momento della vita della struttura lo stato dei componenti. Associando le informazioni provenienti dal monitoraggio d'integrità e d'utilizzo alle conoscenze basate sulla meccanica del danno e le leggi comportamentali, è possibile elaborare la prognosi in termini di gravità di malfunzionamento e vita residua e quindi la gestione della salute della struttura (organizzazione della manutenzione, operazioni di riparazione) (Balageas, 2006).

Per molteplici ragioni le tecniche di monitoraggio strutturale per il settore civile non sono ancora molto diffuse: tra queste la scarsa conoscenza dei vantaggi in termini di costo/beneficio che si possono in molti casi conseguire mediante l'applicazione di tali tecniche di gestione del costruito, tanto a livello di singola struttura quanto a livello di patrimoni infrastrutturali complessi. A differenza delle costruzioni classiche in cui al trascorrere del tempo di utilizzo ad un aumento dei costi di manutenzione vi è una corrispondente riduzione di affidabilità, per le strutture con sistemi SHM, vi sono effetti benefici rappresentati da costi di manutenzione e affidabilità che rimangono immutati nel tempo (figura 1.1).

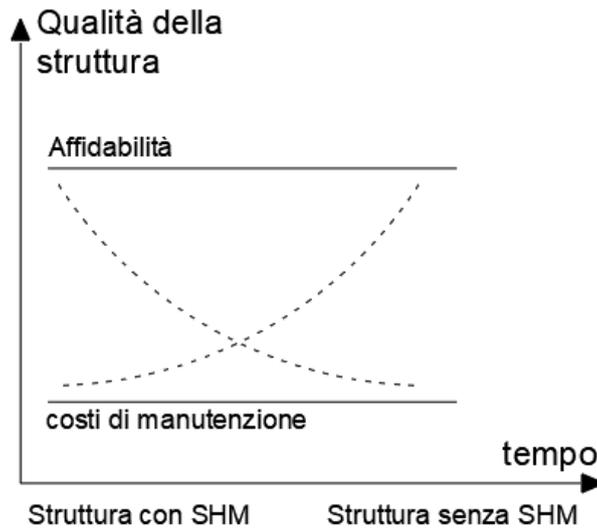


Figura 1.1 – Benefici dello Structural Health Monitoring

Il miglioramento della sicurezza sta suscitando negli ultimi anni un notevole interesse a causa degli eventi tragici che stanno investendo la nostra nazione e che stanno mettendo in discussione lo stato di salute delle strade e autostrade italiane. Il collasso del ponte Morandi è solo l'ultimo e il più grave di una lunga serie di crolli nella maggior parte dei quali la mancata manutenzione è stata la principale causa. Per comprendere l'importanza del monitoraggio nel contesto attuale, basta effettuare una semplice analisi statistica sullo stato di ponti e viadotti italiani.

La progettazione agli stati limite prevede una probabilità di raggiungimento dello Stato Limite Ultimo variabile tra 10^{-5} e 10^{-6} per struttura all'anno. Identificando per semplicità il raggiungimento dello SLU con il collasso, si ottiene che ogni ponte costruito oggi avrebbe una probabilità su un milione di crollare ogni anno, in condizioni "pari al nuovo" e quindi di perfetta manutenzione.

Considerando solo i 3617 ponti che fanno parte della rete autostradale italiana (Autostrade per l'Italia, "Libro dei Fatti") ed ipotizzando che fossero nuovi e costruiti con gli standard attuali, ci si dovrebbe aspettare un numero di crolli all'anno pari $3617/10^6$ cioè un crollo ogni 250-300 anni. Negli ultimi anni invece abbiamo visto circa un crollo all'anno con perdite di vite umane. Assistiamo ad un manifestarsi di episodi che è centinaia di volte peggiore dello standard attuale di progetto.

La maggior parte del nostro patrimonio di infrastrutture stradali e autostradali risale agli anni 60 e 70, quindi ha in media 50 o 60 anni. Queste strutture sono state progettate quasi interamente secondo normative vecchie alle tensioni ammissibili, con richieste di durabilità meno severe di quelle attuali. Molte di esse, anche se fossero state progettate con gli standard attuali, avrebbero comunque raggiunto la vita di progetto di 50 anni o comunque la metà della stessa nel caso in

cui fosse stata di 100 anni. Il raggiungimento della vita di progetto significa che, anche nel caso in cui la manutenzione ordinaria fosse stata eseguita correttamente e continuamente, l'opera ha buone probabilità di necessitare di opere di manutenzione straordinaria per riportare la sicurezza ai livelli "pari al nuovo".

Allargando l'analisi ad una scala più ampia, ci si accorge che anche a livello europeo il quadro è drammatico. In Francia, dei 12000 ponti della rete, circa il 30 % ha bisogno di riparazioni per evitare la comparsa di un deterioramento strutturale. In Germania un rapporto dell'anno scorso dell'Istituto federale di ricerca sulle autostrade ha affermato che se da una parte solo il 12,4 % dei ponti stradali del Paese era in cattive condizioni, dall'altra solo il 12,5 % era da considerare in buono stato ("europa.today.it").

Da tale scenario emerge la necessità di valutare il comportamento strutturale con le moderne tecniche predittive in modo che il rilevamento tempestivo delle anomalie e gli interventi di manutenzione mirati consentano di ridurre i costi operativi, i tempi di fermo e salvare numerose vite umane.

1.2 Structural Health Monitoring per strutture Smart

Il concetto di materiali e strutture intelligenti, presente nei campi dell'ingegneria aerospaziale e civile sin dagli anni '80, rappresenta oggi uno dei fattori che spingono all'innovazione in tutti i campi.

C'è un'evoluzione continua negli oggetti creati dall'uomo che è partita dall'uso di materiali omogenei presenti in natura, a cui ha fatto seguito la creazione dei materiali compositi che coniugano le proprietà di più materiali in modo tale da essere idonei ad usi specifici. Il concetto di materiali/strutture Smart (SMS) può essere considerato come il passo successivo dell'evoluzione. Tale livello consiste nel dotare i materiali e le strutture di un certo grado di "auto-consapevolezza", capaci quindi di rilevare, analizzare e adeguarsi alle mutevoli condizioni ambientali. Il diverso livello di tale "intelligenza" dipende dalla capacità degli SMS di essere sensibili, controllabili e attivi.

Una classificazione dei tipi di SMS può essere effettuata in base al tipo di controllo che sono in grado di effettuare: controllo di forma, delle vibrazioni e della salute. Il livello d'intelligenza raggiunto nel campo dello SHM risulta ancora basso in quanto l'equipaggiamento di materiali/strutture con i sensori, non fa altro che renderli sensibili e controllabili; il successivo step sarebbe quello di renderli autoriparanti o autoadattivi.

Nell’ottica di uno sviluppo delle strutture sempre più “intelligenti” in grado di assolvere alle tre funzionalità, si dovrebbero compiere ricerche finalizzate allo sviluppo di nuovi materiali per la realizzazione di sensori e attuatori, sviluppo di tecnologie per miniaturizzarli e incorporarli senza degrado delle strutture ospitanti, concepire sistemi per la riduzione dei dati e la formulazione diagnostica (Balageas, 2006).

1.3 Structural Health Monitoring e biomimetica

Prendendo spunto da una citazione di Albert Einstein, “Ogni cosa che puoi immaginare, la natura l’ha già inventata”, si può osservare come la vita dell’uomo non solo si è sviluppata a partire dalla natura, ma è da sempre intrecciata ad essa. La biomimetica è infatti la scienza che si occupa dello studio del trasferimento di processi biologici dal mondo naturale a quello artificiale. L’uomo ispirandosi alla natura e mimandola trova nuove idee e soluzioni ai più svariati problemi.

La ricerca nel campo del monitoraggio della salute strutturale è fortemente ispirata alla biologia e come descritto in (Gandhi e Thompson, 1992) vi è un parallelismo tra i controlli sanitari effettuati durante la vita dell’uomo ed i monitoraggi strutturali. Il principale vantaggio atteso dallo SHM è di essere in grado di gestire in modo proattivo la salute proprio come fa la professione medica.

La tendenza a strumentare lo scheletro della struttura con una serie di sensori sensibili, fa pensare alla costruzione di un sistema simile al sistema nervoso umano che raccoglie e trasferisce le informazioni ad un sistema di controllo centrale dotato di capacità computazionali, che analizza, valuta le condizioni di salute e prende decisioni su come intervenire (figura 1.2).

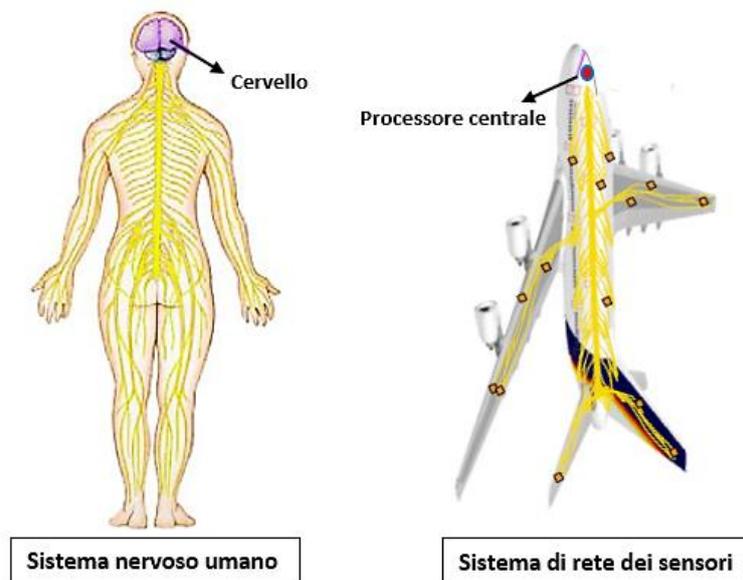


Figura 1.2 - Analogia tra il sistema nervoso dell’uomo ed una struttura con SHM

Lo studio del funzionamento del sistema nervoso e del cervello è utile per concepire sistemi di controllo adattivo influenzato dall'ambiente. Dopo aver rilevato il danno attraverso i sensori incorporati nella struttura, il processore centrale può definire una diagnosi e decidere le azioni da intraprendere, ad esempio una restrizione del dominio operativo per evitare il sovraccarico nell'area danneggiata o la programmazione di un'ispezione possibilmente seguita da una riparazione (Balageas, 2006).

Un'ulteriore analogia potrebbe essere quella tra i tessuti viventi ed i materiali Smart. Tuttavia, questa analogia rimane limitata alle funzionalità di sensibilità e controllo in quanto il numero e la varietà dei sensori della pelle che consentono di essere autoadattiva ed in grado di controbilanciare le aggressioni ambientali, è molto lontano da quello delle strutture sensibili artificiali. La capacità di ricostruzione dei tessuti viventi è certamente la funzione più difficile da riprodurre.

Per lo sviluppo di sistemi pratici, una notevole svolta è stata l'idea ad ispirazione biologica d'incorporare i sensori all'interno dei materiali di alcune tipologie di strutture come quelle aerospaziali. Tuttavia, la soluzione completamente integrata complica la tecnologia necessaria creando problemi di una eccessiva miniaturizzazione, di riparabilità e di ridondanza delle reti; deve essere dimostrata l'innocuità del sensore incorporato per la struttura ospite e la vita operativa dei sensori deve essere almeno pari a quella della struttura.

1.4 Elementi base dei sistemi SHM

Un sistema SHM comprende hardware e software: gli hardware sono essenzialmente i sensori e la strumentazione ad essi associata mentre il software riguarda la parte computazionale di individuazione e modellazione del danno.

Lo SHM, così come le tecniche di rilevamento non distruttive, può essere attivo o passivo. Se lo sperimentatore monitora l'evoluzione dei parametri fisici della struttura che è in interazione con l'ambiente circostante, si parla di "monitoraggio passivo". Una tecnica di rilevamento non distruttiva "passiva" è l'Emissione Acustica, basata su sensori progettati per rilevare gli eventi acustici associati al verificarsi ed alla propagazione del danno.

Nel caso di "monitoraggio attivo" la struttura è strumentata con sensori e attuatori, in modo da generare perturbazioni con gli attuatori e utilizzare sensori per monitorare la risposta della struttura. In riferimento alle emissioni acustiche, il monitoraggio diventa attivo incorporando nella struttura oltre la patch piezoelettrica usata come rivelatore di emissione acustica, una seconda patch usata come emettitore di onde ultrasoniche.

È interessante osservare come il monitoraggio della salute strutturale abbia basi comuni alle tecniche di rilevamento non distruttive e come queste possano essere convertite in tecniche SHM integrando contemporaneamente sensori e attuatori all'interno della struttura monitorata oppure come soluzione intermedia, incorporando solo un componente e lasciando l'altro sulla superficie dell'elemento.

A seconda del tipo di tecnica e del tipo di struttura da monitorare, vi è una grande varietà di sensori che possono essere utilizzati, basati su materiali e fenomeni fisici differenti tra loro.

In figura 1.3 sono presentati i principali tipi di sensori utilizzati nei due principali campi di applicazione: ingegneria civile e ingegneria aerospaziale (Balageas, 2006).

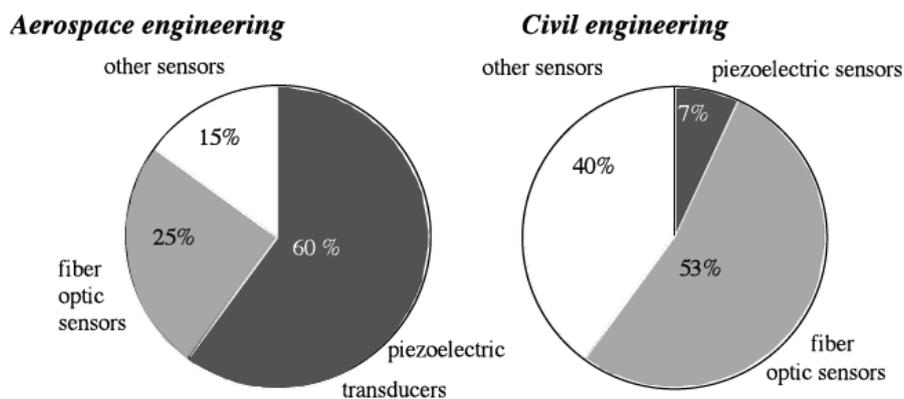


Figura 1.3 - Principali tipi di sensori usati nello SHM, presa da (Balageas, 2006)

È possibile osservare che in ambito aerospaziale le tipologie maggiormente utilizzate sono i sensori a fibra ottica ed i trasduttori piezoelettrici. I primi lavorano sul principio che la variazione di deformazione nella struttura, induce il cambiamento della lunghezza d'onda dello spettro della luce e l'output è generalmente la deformazione; gli output forniti dai sensori piezoelettrici sono essenzialmente le storie di voltaggio che attraversano i sensori e che necessitano di un post processamento per essere trasformati in spostamenti, velocità o accelerazioni. Dal grafico inerente al campo civile, data l'elevata percentuale dell'uso di altri sensori in cui si collocano i sensori di tipo tradizionale, è possibile dedurre che devono essere affrontate ancora numerose sfide nel campo dello SHM.

Più recentemente, il progresso della tecnologia del silicio, ha dato un grande impulso allo sviluppo di sensori MEMS (Micro Electro Mechanical Systems) diventati molto popolari come dispositivi di rilevamento nei sistemi SHM a causa non solo delle dimensioni ma anche dei costi rispetto agli strain gauges tradizionali.

Ulteriore innovazione tecnologica è rappresentata dai sensori senza contatto, diventati popolari poiché evitano completamente il cablaggio e il contatto diretto con la superficie. Il sensore

senza contatto più comunemente utilizzato è il Vibrometro Laser Doppler Scanning (SDLV). Il vantaggio di tali misurazioni è che senza la necessità di cablaggio e altri collegamenti, è possibile monitorare regione per regione determinando gli effetti locali causati da difetti. Considerando ora i metodi di monitoraggio indipendentemente dal tipo di sensore utilizzato, è possibile osservare una varietà molto ampia (figura 1.4).

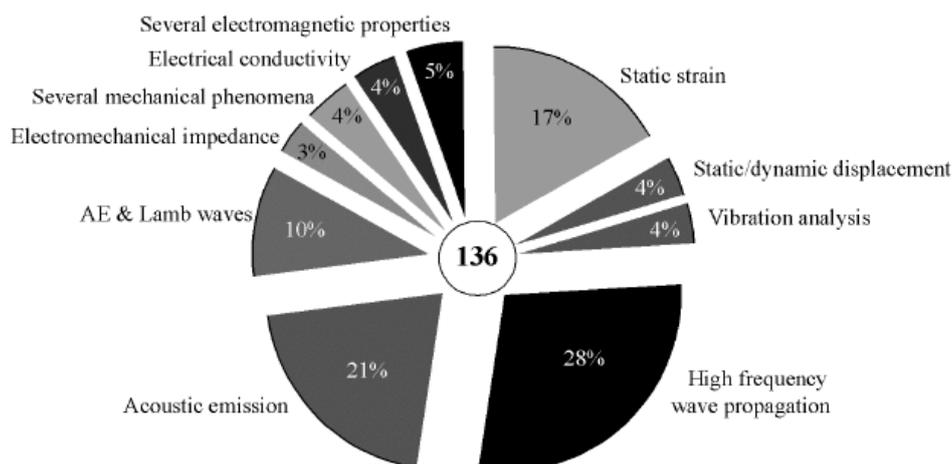


Figura 1.4 - Metodi di monitoraggio, presa da (Balageas, 2006)

La metodologia maggiormente utilizzata per individuare la presenza di danni è il monitoraggio delle frequenze naturali, a causa della sua natura di tipo “globale” nel rilevare le prestazioni di tutta la struttura. Poiché il danno riducendo la rigidità della struttura induce un cambiamento delle frequenze naturali, dal confronto tra frequenza fondamentale di base e frequenza fondamentale della struttura danneggiata, si può confermare o meno la presenza del danno. Tuttavia, quando l’entità del danno genera variazioni di rigidità piccole, si hanno variazioni trascurabili nelle prime frequenze modali. In questi casi, le tecniche basate sulla propagazione delle onde ad alta frequenza sono considerate una valida alternativa. Nel caso in cui la presenza del danno fosse confermata, per individuarne la posizione è necessario attivare sperimentalmente un segnale ad alta frequenza e misurarne l’uscita in qualche punto. Nota la velocità di propagazione nel mezzo e il tempo di arrivo dell’impulso riflesso a causa della presenza del danno, è possibile localizzare la sua posizione.

Da tali osservazioni è evidente come le tecniche SHM operino su un ampio spettro di frequenze che si estende dalla risposta vibrazionale a bassa frequenza della struttura ai regimi ultrasonici nella gamma dei MHz. Una relazione che è possibile stabilire è che la sensibilità nel rilevamento del danno diminuisce con il diminuire della frequenza d’ispezione. In particolare, quando l’elemento è eccitato a frequenze vicine ai suoi principali modi naturali di vibrazione, subirà

una risposta che può essere considerata "globale". All'aumentare della frequenza d'ispezione, la risposta diventa sempre più localizzata intorno alla regione di eccitazione e il comportamento registrato diventa più sensibile alle piccole variazioni locali (Gopalakrishnan et al., 2011).

Per rimanere nell'ottica dello SHM e quindi di monitoraggio di tipo "globale", risulta opportuno superare i limiti dell'applicabilità del monitoraggio dinamico nel caso in cui il danno causa piccole variazioni sulle frequenze naturali. In tale direzione si potrebbe intervenire con il monitoraggio di tipo statico, che porta all'identificazione del danno confrontando la risposta strutturale statica in termini di spostamenti o deformazioni dovute a carichi applicati o effetti ambientali, con opportuni criteri di rottura.

La misura della deformazione è considerata la quantità più sensibile al danno locale; è stato dimostrato che il rilevamento delle deformazioni riflette il cambiamento del comportamento locale della struttura. Tuttavia, è così "locale" che per ottenere l'influenza del danno sulla misurazione della deformazione è necessario che l'area in cui è fissato il sensore di deformazione, copra la regione danneggiata. Pertanto, per rilevare danni arbitrari e imprevedibili in una struttura ampia e complessa, i sensori di deformazione devono essere installati in modo distribuito. A tal fine possono essere utilizzati i sensori in fibra ottica che coniugano alta precisione, immunità al campo elettrico e magnetico e capacità di rilevamento distribuito (Serker, 2010).

Per monitorare la struttura globalmente, è necessaria la ricostruzione della forma deformata in modo da ottenere le misure di deformazione in punti differenti da quelli in cui si trovano i sensori. La ricostruzione della forma deformata a partire dai dati di deformazione misurati in-situ è un problema inverso conosciuto con il termine di shape sensing. La conoscenza in tempo reale delle deformazioni e quindi dello stato tensionale, è una tecnologia chiave per l'attuazione e il controllo di strutture intelligenti, nonché per il monitoraggio della salute strutturale (Gherlone et al., 2012).

1.5 Shape sensing

La maggior parte degli algoritmi di rilevamento della forma presenti in letteratura, eseguono la stima della forma deformata a partire da misurazioni di deformazione discrete secondo un approccio variazionale. Molti dei lavori che trattano il problema flessionale della trave, si basano sulle equazioni classiche che sono utilizzate per integrare direttamente le deformazioni misurate e determinare quindi la deflessione.

Akl et al. (2007) hanno proposto un metodo per il rilevamento distribuito wireless della forma deformata di una trave utilizzando la teoria non lineare degli elementi finiti attraverso la relazione di von Karman:

$$\varepsilon = u_{,x} + \frac{1}{2}(w_{,x})^2 - aw_{,xx}$$

dove u e w rappresentano rispettivamente lo spostamento assiale e trasversale. Approssimando gli spostamenti con le classiche funzioni di forma e sostituendo le relazioni nell'espressione della deformazione, è possibile calcolare la variazione di lunghezza attraverso una singola integrazione. Si ottiene un sistema di n equazioni in n incognite essendo n il numero di intervalli in cui si suddivide l'elemento in funzione dei g.d.l. incogniti.

Jones et al. (1998) hanno sviluppato un algoritmo per determinare il campo di deformazione di una piastra a sbalzo in condizioni di carico arbitrarie. Per creare la funzione polinomiale bidimensionale che rappresenta il campo di deformazione è stato utilizzato un approccio di adattamento ai minimi quadrati. Questa funzione è stata integrata due volte introducendo le condizioni al contorno per ottenere il campo di deformazione della piastra.

Shkarayev et al. (2001) hanno definito una procedura computazionale che utilizza un'analisi diretta con un modello ad elementi finiti standard integrata con l'approccio inverso. La formulazione d'interpolazione inversa si basa su un'approssimazione parametrica del carico:

$$F_i(s) = \sum_{j=1}^l a_{ij}R_{ij}(s)$$

dove $R_{ij}(s)$ è la funzione di distribuzione spaziale scelta sulla base di simulazioni al computer e dati statistici ed a_{ij} sono i parametri di approssimazione incogniti dipendenti dalle prestazioni di volo come fattore di carico, velocità ed angolo di attacco. Sostituendo tale relazione nell'espressione degli elementi finiti, si ottengono spostamenti, deformazioni e tensioni in forma parametrica.

I parametri d'interpolazione sono ottenuti usando la procedura di minimizzazione ai minimi quadrati rispetto ad a_{ij} :

$$S_i = \left(\sum_{j=1}^l a_{ij} \{ \varepsilon_{ij} \} - \varepsilon_i^* \right)^2$$

dove ε^* rappresentano le deformazioni misurate dai sensori. A questo punto è possibile ricostruire il carico e quindi gli spostamenti.

Foss e Haugse (1995) hanno sviluppato una tecnica che consente di passare da deformazioni a spostamenti partendo da forme modali per il caso di una piastra a sbalzo. Hanno usato il test modale per raccogliere le funzioni di risposta in frequenza dell'accelerometro e le funzioni di risposta in frequenza di deformazione. I modi di deformare sono stati utilizzati per sviluppare una trasformazione ai minimi quadrati dalle misure di deformazione a coordinate modali. I modi di spostamento sono stati quindi utilizzati per trasformare le coordinate modali in spostamenti.

$$[\phi_s]\{q\} = \{S\} \quad [\phi_d]\{q\} = \{D\}$$

Le coordinate modali possono essere approssimate ai minimi quadrati:

$$\{q\} = [[\phi_d]^T[\phi_d]]^{-1}[\phi_d]^T\{D\}$$

e quindi sostituite per ottenere gli spostamenti dalle deformazioni:

$$\{S\} = [\phi_s][[\phi_d]^T[\phi_d]]^{-1}[\phi_d]^T\{D\}$$

I modi di deformarsi come funzioni di base, sono stati ampiamente utilizzati da numerosi studiosi negli anni successivi.

Lively et al. (2001), hanno dimostrato che la stima della forma dinamica utilizzando tecniche di stima statica in ogni fase temporale risulta insoddisfacente perché il problema dell'aliasing delle modalità alte che si verifica fortemente nel caso dinamico, non si vede nel caso statico. A tal proposito, utilizzando il filtro di Kalman che permette di avere un numero di modi maggiore del numero di sensori, è possibile selezionare le modalità a bassa frequenza che contribuiscono maggiormente agli spostamenti e trattare i modi più alti come componente del rumore presente nel sistema.

Gli esempi citati dimostrano come l'approccio variazionale sia particolarmente promettente e versatile, consentendo di risolvere molteplici problemi che vanno dalla definizione del carico fino alla determinazione della forma deformata. Tuttavia, molti dei metodi inversi richiedono la conoscenza delle condizioni di carico oppure delle proprietà meccaniche dei materiali, dati che molte volte sono difficili da rilevare se non con prove di laboratorio. Per questi motivi, tali approcci sono generalmente inadatti all'uso negli algoritmi per lo SHM. Un algoritmo idoneo allo SHM dovrebbe essere:

- generale, per trattare tipologie strutturali e condizioni al contorno complesse;
- robusto, stabile e preciso in un'ampia gamma di carichi, materiali, caratteristiche inerziali e di smorzamento ed errori intrinseci nelle misure di deformazione;
- sufficientemente veloce per le applicazioni in tempo reale.

Un algoritmo che sembra soddisfare i suddetti requisiti è stato sviluppato da Tessler e Spangler (2004). La metodologia, chiamata Metodo degli Elementi Finiti inverso (iFEM), utilizza un principio variazionale pesato ai minimi quadrati ed una discretizzazione di elementi finiti continui C^0 contenenti i dati provenienti da sensori di deformazione posizionati e orientati arbitrariamente. A partire dalle relazioni tra deformazioni e spostamenti, senza conoscere le proprietà meccaniche, inerziali, di carico e di smorzamento, è possibile ricostruire la risposta statica e dinamica di travi, piastre, gusci ed ogni tipo di dominio strutturale discretizzato, in modo stabile e preciso. Tale ricostruzione in real-time dell'intero campo di spostamenti strutturali, si presta ad essere una tecnologia abilitante per fornire feedback ai sistemi di controllo ed attuazione dei veicoli aerospaziali aventi la struttura portante strumentata con una rete di sensori (Gherlone et al., 2012).

Per modellare arbitrariamente piastre e gusci, Tessler e Spangler (2004) hanno creato l'elemento inverso chiamato iMIN3 a 3 nodi (figura 1.5) basato sulla teoria di Mindlin.

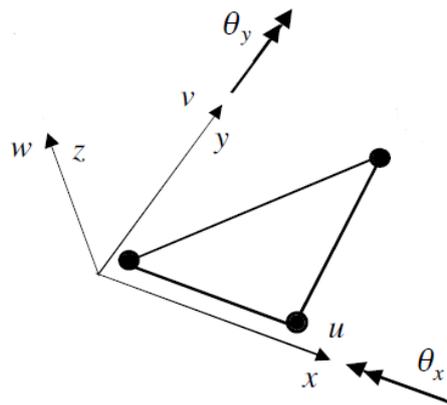


Figura 1.5 - Elemento shell inverso a tre nodi, presa da (Tessler e Spangler (2003))

In accordo con la teoria di deformazione a taglio del primo ordine, il campo degli spostamenti è dato da:

$$\begin{Bmatrix} u_x(x, y, z) \\ u_y(x, y, z) \\ u_z(x, y, z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \\ w(x, y) \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \theta_y(x, y) \\ \theta_x(x, y) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

dove $u(x, y)$ e $v(x, y)$ rappresentano gli spostamenti in direzione x e y , $w(x, y)$ è la deflessione che risulta costante lungo lo spessore $2t$, $\theta_x(x, y)$ e $\theta_y(x, y)$ le rotazioni. Il vettore dei parametri cinematici incogniti risulta:

$$u \equiv \{u, v, w, \theta_x, \theta_y\}^T$$

Il campo deformativo, derivante dal campo degli spostamenti definito, risulta espresso da:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{y0} \\ \gamma_{xy0} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_{x0} \\ \kappa_{y0} \\ \kappa_{xy0} \end{Bmatrix} \equiv e(u) + z K(u) \\ \begin{Bmatrix} \gamma_{xz0} \\ \gamma_{yz0} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} w_{,x} + \theta_y \\ w_{,y} + \theta_x \end{Bmatrix} \equiv g(u) \end{aligned}$$

Assumendo la struttura dotata di sensori di deformazione, le deformazioni misurate nei punti di coordinate $(z_i, y_i, \pm t)$ all'intradosso e all'estradosso della superficie risultano:

$$\begin{aligned} e_i^\varepsilon &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x0}^\varepsilon \\ \varepsilon_{y0}^\varepsilon \\ \gamma_{xy0}^\varepsilon \end{Bmatrix}_i = \frac{1}{2} \left(\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^+ \\ \varepsilon_{yy}^+ \\ \gamma_{xy}^+ \end{Bmatrix}_i + \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^- \\ \varepsilon_{yy}^- \\ \gamma_{xy}^- \end{Bmatrix}_i \right) \\ K_i^\varepsilon &= \begin{Bmatrix} \kappa_{x0}^\varepsilon \\ \kappa_{y0}^\varepsilon \\ \kappa_{xy0}^\varepsilon \end{Bmatrix}_i = \frac{1}{2t} \left(\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^+ \\ \varepsilon_{yy}^+ \\ \gamma_{xy}^+ \end{Bmatrix}_i - \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^- \\ \varepsilon_{yy}^- \\ \gamma_{xy}^- \end{Bmatrix}_i \right) \end{aligned}$$

A partire dalle misure di deformazione dei sensori nei punti discreti, il vettore di spostamento si trova minimizzando l'errore quadratico tra le misure di deformazione stimata e sperimentale (Tessler e Spangler, 2004).

L'errore funzionale da minimizzare per l'elemento finito inverso è definito come:

$$\Phi(u) \equiv \|e(u) - e^\varepsilon\|^2 + \|K(u) - K^\varepsilon\|^2 + \|g(u) - g^\varepsilon\|^2$$

dove l'apice ε indica le deformazioni misurate mentre i quadrati delle norme risultano:

$$\begin{aligned} \|e(u) - e^\varepsilon\|^2 &\equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [e(u)_i - e_i^\varepsilon]^2 \\ \|K(u) - K^\varepsilon\|^2 &\equiv \frac{(2t)^2}{n} \sum_{i=1}^n [K(u)_i - K_i^\varepsilon]^2 \\ \|g(u) - g^\varepsilon\|^2 &\equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [g(u)_i - g_i^\varepsilon]^2 \end{aligned}$$

in cui n è il numero di punti dove le deformazioni sono valutate e $2t$ è la normalizzazione della curvatura rispetto all'area.

Utilizzando le tecniche di interpolazione del metodo degli elementi finiti, il campo di spostamento è interpolato attraverso adeguate funzioni di forma in modo che le deformazioni membranali e di flessione, risultino costanti e le deformazioni di taglio lineari:

$$u(x, y) = N(x, y) \cdot u_e$$

dove $N(x, y)$ rappresenta le funzioni di forma e u_e i gradi di libertà nodali. Da tale interpolazione è possibile esprimere nel funzionale le deformazioni analitiche in termini di gradi di libertà nodali:

$$e(u) = B_\varepsilon(x, y)u_e$$

$$k(u) = B_k(x, y)u_e$$

$$g(u) = B_\gamma(x, y)u_e$$

Sostituendo tali espressioni in quella del funzionale, la soluzione del problema è ottenuta dalla sua minimizzazione rispetto alle incognite cinematiche:

$$\frac{\partial \Phi(u)}{\partial u} = 0$$

L'equazione risolutiva in termini matriciali risulta:

$$K u_e = f_e$$

dove la matrice K dipende solo dalle posizioni degli estensimetri, mentre il vettore f_e dipende dai valori di deformazione misurati. Le matrici degli elementi della struttura discretizzata sono quindi trasformate rispetto ad un sistema di riferimento globale e assemblate secondo le operazioni classiche degli elementi finiti. Imponendo le condizioni al contorno la matrice K risulta non singolare, definita positiva e quindi invertibile. La soluzione è ottenuta in tempo reale moltiplicando l'inversa della matrice K che risulta invariata nel tempo, per il vettore dei termini noti che dev'essere aggiornato ad ogni nuova acquisizione dei sensori.

Per rendere la formulazione applicabile anche nel caso di piastre sottili (alla Kirchhoff), la norma della deformazione di taglio trasversale risulta espressa da:

$$\|g(u)\|^2 \equiv \frac{1}{A} \int_A [g(u)]^2 dA$$

essendo la deformazione a taglio delle piastre sottili trascurabile. Per la stima della deformazione analitica, si fa ricorso alla condizione di equilibrio che lega la deformazione di taglio con la derivata prima della curvatura.

Il Metodo degli elementi finiti inversi è stato raffinato da Gherlone (2008) per il rilevamento della forma di tralicci, travi e telai strumentati con estensimetri, utilizzando un elemento inverso di ordine 0. Poiché, come per il metodo degli elementi finiti diretto, è richiesta alle funzioni di forma una continuità C^{r-1} dove r è il grado delle incognite cinematiche nel campo delle

deformazioni, Gherlone et al. (2012) hanno integrato la formulazione con l'elemento inverso di ordine 1.

Le ipotesi cinematiche effettuate, sono quelle della teoria della deformazione a taglio di Timoshenko (Timoshenko, 1921) i quali incorporano le deformazioni di allungamento, torsione, flessione e taglio trasversale in tre dimensioni.

Nel presente lavoro, con lo scopo di avvicinare l'iFEM alle applicazioni del campo dell'ingegneria civile, è stata definita la formulazione inversa considerando le ipotesi cinematiche del modello di trave alla Eulero-Bernoulli nel caso spaziale. Analogamente ai casi trattati da Gherlone et al. (2012) sono state formulate due tipologie di elementi inversi, di ordine 0 e 1.

Infine, per dimostrare la validità della metodologia proposta, è stato implementato un codice di calcolo che ha permesso di applicare le due metodologie ai casi più frequenti dell'ingegneria civile come travi e telai piani sottoposti a condizioni di carico concentrato e distribuito. Per simulare le misure sperimentali di deformazione e stabilire gli spostamenti di riferimento è stato utilizzato il software agli elementi finiti LUSAS.

Capitolo 2

Teoria tecnica della trave

Poiché nella trattazione della formulazione inversa si fa ampio richiamo ad una serie di conoscenze proprie della meccanica strutturale, dal Capitolo 2 al Capitolo 4 sono stati trattati i concetti principali che vanno dalla soluzione del problema elastico, alla soluzione con il metodo degli elementi finiti. Tale strategia ha permesso di creare un filo conduttore tra le varie teorie in cui si è cercato di collocare il Metodo degli elementi finiti inverso come naturale prosecuzione.

Bypassando la definizione del problema del solido elastico generale per brevità, si considerano le formulazioni per il caso specifico delle travi. Mediante ipotesi semplificative che traggono origine dalla particolare geometria dell'elemento o dalla condizione di carico, il problema elastico è riformulato sviluppando delle teorie strutturali approssimate. In particolare, da opportune ipotesi sul campo degli spostamenti, si definiscono le teorie cinematiche della trave da cui deriva il campo deformativo e quindi tensionale.

2.1 Trave alla Eulero - Bernoulli

L'ipotesi alla base della teoria di Eulero – Bernoulli è che a deformazione avvenuta, una sezione inizialmente ortogonale all'asse della trave continua ad essere ortogonale all'asse deformato, mantenendo la propria forma di sezione piana. Tale semplificazione è tanto più attendibile quanto più la trave è snella.

Si consideri una trave generica avente l'asse z coincidente con l'asse della trave e gli assi x e y con gli assi principali d'inerzia della sezione. Supponendo la trave caricata nel piano (y, z) , gli spostamenti dell'asse in direzione x risulteranno nulli.

La cinematica della trave è definita dalla deformazione dell'asse e dalla rotazione delle sezioni; osservando la configurazione della generica sezione si individuano i seguenti parametri cinematici (figura 2.1):

- spostamento assiale $w = w(z)$;
- inflessione $v = v(z)$;

- rotazione $\phi = \phi(z)$.

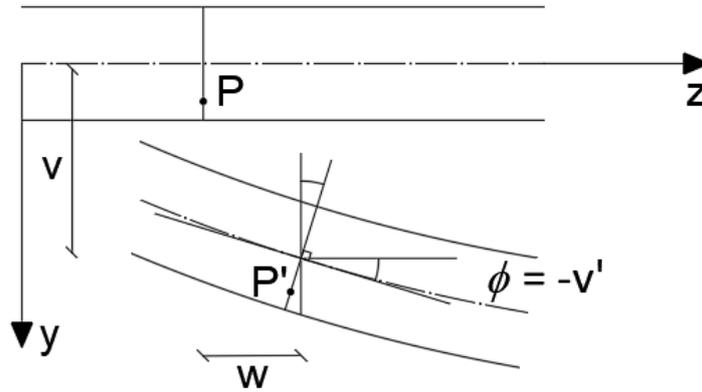


Figura 2.1 - Cinematica della trave alla Eulero-Bernoulli

Considerando v e w spostamenti della linea d'asse in direzione y e z rispettivamente, è possibile scrivere il campo di spostamenti per un punto generico della sezione come:

$$w = w(z) + y \cdot \varphi(z)$$

$$v = v(z)$$

Dove $\varphi(z)$ rappresenta la rotazione della sezione piana che per il modello di Eulero-Bernoulli deve risultare pari all'angolo che la tangente alla linea d'asse forma con l'asse z . In base all'ipotesi di piccoli spostamenti, è possibile confondere tale valore con il coefficiente angolare della retta tangente la funzione $v(z)$ che è pari alla sua derivata:

$$\varphi(z) = -v'$$

Il segno meno assicura $\varphi > 0$ per rotazioni antiorarie.

Il campo degli spostamenti risulta quindi definito da $w(z)$ e $v(z)$ che rappresentano gli spostamenti generalizzati del modello di trave alla Eulero-Bernoulli.

Le corrispondenti deformazioni sono deducibili a partire dalle leggi che legano le deformazioni con le derivate prime degli spostamenti:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = 0$$

$$\varepsilon_y = \frac{dv}{dy} = 0$$

$$\varepsilon_z = \frac{dw}{dz} = \frac{dw(z)}{dz} + y \cdot \frac{d\varphi(z)}{dz}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} = 0$$

$$\gamma_{xz} = \frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx} = 0$$

$$\gamma_{yz} = \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} = \frac{dv(z)}{dz} + \varphi(z) = 0$$

Il campo di deformazioni è caratterizzato dall'unica componente non nulla:

$$\varepsilon_z = \frac{dw(z)}{dz} - y \cdot \frac{d^2v}{dz^2} = \varepsilon_{z0} - y \cdot \chi_x$$

dove ε_{z0} e χ_x rispettivamente deformazione assiale e curvatura dell'asse deformato della trave costituiscono le deformazioni generalizzate.

Ottenute le deformazioni che caratterizzano il modello cinematico, si possono definire le variabili statiche ad esse associate.

Indicando con E il modulo elastico (o modulo di Young) è possibile scrivere il legame costitutivo che lega le deformazioni alle tensioni, riferito alla sola componente lungo z :

$$\sigma_z = E \cdot \varepsilon_z = E \cdot (\varepsilon_{z0} - y \cdot \chi_x)$$

La presenza della tensione σ_z può far nascere sia lo sforzo normale che il momento flettente; considerando la trave come un fascio di fibre sulle quali agiscono le tensioni σ_z , lo sforzo normale e il momento flettente si calcolano come la risultante e il momento risultante delle tensioni sulla sezione:

$$N = \int_A \sigma_z dA = \int_A E (\varepsilon_{z0} - y \cdot \chi_x) dA = EA \varepsilon_{z0} - ES_x \chi_x$$

$$M = \int_A y \sigma_z dA = \int_A y E (\varepsilon_{z0} - y \cdot \chi_x) dA = ES_x \varepsilon_{z0} - EI_x \chi_x$$

Essendo S_x il momento statico rispetto all'asse x , che risulta nullo poiché x è baricentrico, risulta:

$$\varepsilon_{z0} = \frac{N}{EA}$$

$$\chi_x = -\frac{M}{EI_x}$$

dove EA è la rigidezza assiale ed EI_x è la rigidezza flessionale.

Una notevole incongruenza della teoria di Eulero-Bernoulli risiede nella mancanza di una variabile cinematica per la quale lo sforzo di taglio potrebbe compiere lavoro e quindi nell'impossibilità di calcolare lo sforzo di taglio come risultante delle tensioni tangenziali:

$$T_y = \int_A \tau_{yz} dA = 0$$

Tuttavia, l'equilibrio alla traslazione verticale di un concio di trave di lunghezza dz mostra la necessità della presenza del taglio affinché venga soddisfatto.

Considerando la trave soggetta ad un sistema piano di sollecitazioni (forze agenti nel piano yz), le equazioni di equilibrio del tratto di trave infinitesimo di lunghezza dz (figura 2.2) risultano:

- traslazione lungo z :

$$N - N - dN - p \cdot dz = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dN}{dz} = -p$$

- traslazione lungo y :

$$T - T - dT - q \cdot dz = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dT}{dz} = -q$$

- rotazione rispetto al baricentro:

$$M - M - dM + T \cdot \frac{dz}{2} + (T + dT) \cdot \frac{dz}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dM}{dz} = T \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2M}{dz^2} = -q$$

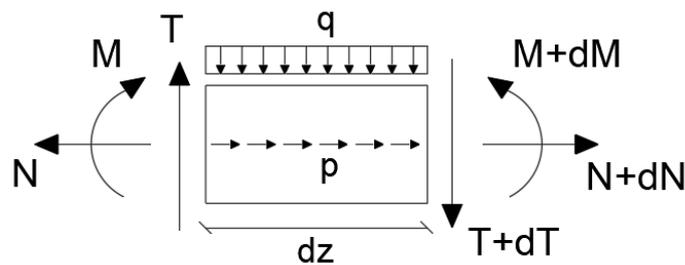


Figura 2.2 - Equilibrio di un concio di trave

In definitiva, le equazioni che governano il problema della trave alla Eulero-Bernoulli sono:

- congruenza:

$$\varepsilon_{z0} = w'$$

$$\chi_x = v''$$

- legame costitutivo:

$$N = EA \cdot \varepsilon_{z0}$$

$$M = -EI_x \cdot \chi_x$$

- equilibrio:

$$N' = -p$$

$$M'' = -q$$

Dalle condizioni ottenute, si ricavano le equazioni del problema dell'equilibrio elastico della trave dette anche equazioni della linea elastica:

$$EA \cdot w'' = -p$$

$$EI_x \cdot v'''' = q$$

2.2 Trave di Timoshenko

Il modello di trave alla Eulero-Bernoulli è capace di riprodurre la risposta di una trave sotto l'azione di forze assiali e flessionali mentre le forze di taglio sono ottenute dall'equilibrio statico. Il comportamento della trave alle Eulero-Bernoulli è completamente caratterizzato dalla conoscenza della variazione di lunghezza della linea d'asse e delle rotazioni delle sezioni normali all'asse in configurazione deformata, mentre i relativi effetti deformativi dovuti al taglio sono trascurati.

Nel caso di travi non particolarmente snelle, quando gli effetti delle sollecitazioni tangenziali sono significativi per la risposta dell'elemento, è necessario ricorrere a teorie più raffinate come la teoria di Timoshenko.

Il modello di trave di Timoshenko è basato sull'ipotesi che in seguito al processo deformativo, una retta perpendicolare alla linea media della trave rimane una retta senza restare perpendicolare alla linea media. Da tale assunzione deriva che la rotazione $\phi(z)$ della generica sezione non è più una funzione dipendente dalla $v(z)$, ma differisce per un contributo aggiuntivo dovuto al taglio, detto scorrimento angolare medio (figura 2.3).

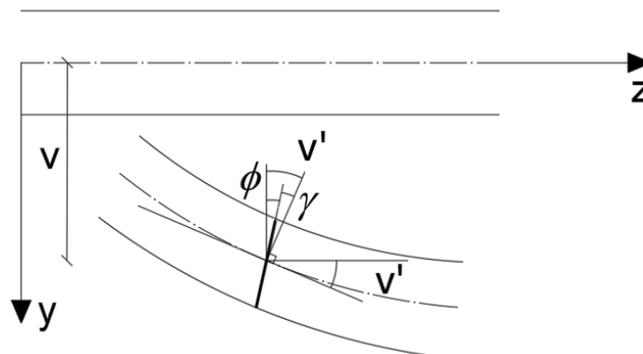


Figura 2.3 - Cinematica della trave di Timoshenko

Il campo di spostamenti della trave risulta caratterizzato dalle relazioni:

$$w = w(z) + y \cdot \varphi(z)$$

$$v = v(z)$$

Dove $\varphi(z)$ questa volta risulta:

$$\varphi(z) = \gamma_y(z) - \frac{dv}{dz}$$

Il campo degli spostamenti risulta quindi definito da $w(z)$, $v(z)$ e $\varphi(z)$ che rappresentano gli spostamenti generalizzati del modello di trave di Timoshenko.

Le deformazioni conseguenti a tale campo di spostamenti risultano:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = 0$$

$$\varepsilon_y = \frac{dv}{dy} = 0$$

$$\varepsilon_z = \frac{dw}{dz} = \frac{dw(z)}{dz} + y \cdot \frac{d\varphi(z)}{dz}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} = 0$$

$$\gamma_{xz} = \frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx} = 0$$

$$\gamma_{yz} = \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} = \frac{dv}{dz} + \varphi(z)$$

Introducendo la curvatura, si ha:

$$\varepsilon_z = \varepsilon_{z0} - y \cdot \chi_x$$

$$\gamma_{yz} = \frac{dv}{dz} + \varphi(z) = \gamma_y$$

dove ε_{z0} , χ_x e γ_y definiscono il campo deformativo e rappresentano quindi le deformazioni generalizzate.

In merito alle relazioni ottenute è interessante osservare come nel caso di sezione ortogonale all'asse della trave, si ritrova la teoria di Eulero-Bernoulli e nel caso di rotazione nulla si ha lo scorrimento puro.

Indicando con E il modulo elastico e con G il modulo di taglio, è possibile definire tramite il legame costitutivo la tensione normale e tangenziale della sezione:

$$\sigma_z = E \cdot \varepsilon_z = E \cdot (\varepsilon_{z0} - y \cdot \chi_x)$$

$$\tau_y = G \cdot \gamma_y = G \cdot \left(\frac{dv}{dz} + \varphi \right)$$

La presenza della tensione σ_z può far nascere sia lo sforzo normale che il momento flettente, la tensione τ_y fa sorgere il taglio:

$$N = \int_A \sigma_z dA = \int_A E (\varepsilon_{z0} - y \cdot \chi_x) dA = EA \varepsilon_{z0} - ES_x \chi_x$$

$$M = \int_A y \sigma_z dA = \int_A y E (\varepsilon_{z0} - y \cdot \chi_x) dA = ES_x \varepsilon_{z0} - EI_x \chi_x$$

$$T = \int_A \tau_y dA = \int_A G \left(\frac{dv}{dz} + \varphi \right) dA = GA_t \gamma_y$$

dove A_t rappresenta un'area fittizia ridotta rispetto a quella reale, detta area di taglio; i restanti simboli hanno i significati già definiti in precedenza.

Essendo S_x il momento statico rispetto all'asse x , che risulta nullo poiché x è baricentrico, si ottiene:

$$\varepsilon_{z0} = \frac{N}{EA}$$

$$\chi_x = -\frac{M}{EI_x}$$

$$\gamma_y = \frac{T}{GA_t}$$

Analogamente al caso di Eulero-Bernoulli, imponendo l'equilibrio di un concio di trave infinitesimo, si ottengono le equazioni indefinite di equilibrio (figura 2.2):

$$\frac{dN}{dz} = -p$$

$$\frac{dT}{dz} = -q$$

$$\frac{d^2M}{dz^2} = -q$$

In definitiva, le equazioni che governano il problema della trave di Timoshenko sono:

- congruenza:

$$\varepsilon_{z0} = w'$$

$$\chi_x = -\varphi'$$

$$\gamma_y = v' + \varphi$$

- legame costitutivo:

$$N = EA \cdot \varepsilon_{z0}$$

$$M = -EI_x \cdot \chi_x$$

$$T = GA_t \cdot \gamma_y$$

- equilibrio:

$$N' = -p$$

$$M' = T$$

$$M'' = -q$$

Dalle condizioni ottenute, si ricavano le equazioni del problema dell'equilibrio elastico della trave dette anche equazioni della linea elastica, che permettono di valutare la deformata tenendo conto della deformabilità assiale, flessionale e tagliante:

$$EA \cdot w'' = -p$$

$$EI_x \cdot \varphi''' = -q$$

$$EI_x \cdot \varphi'' = GA_t (v' + \varphi)$$

2.2.1 Determinazione del fattore di correzione a taglio

Con l'approssimazione secondo cui le sezioni si conservano piane a deformazione avvenuta, si trascura il fatto che gli scorrimenti angolari non sono costanti sull'altezza della trave e che conseguentemente le sezioni si ingobbano. Per tener conto di tale effetto, si introduce un fattore correttivo k nella valutazione della rigidezza a taglio che riduce l'area della sezione ottenendo l'area di taglio (Corigliano, 2011).

Le tensioni tangenziali si possono determinare tramite:

- l'equazione del legame costitutivo

$$\tau_y = G \cdot \gamma_y$$

- la formula di Jourawsky, derivante dall'equilibrio

$$\tau_{yz} = \frac{T_y \cdot S(y)}{I_x \cdot b}$$

dove $S(y)$ è il momento statico calcolato come il prodotto tra l'area della parte sottesa alla corda e la distanza del suo baricentro dall'asse neutro che nel caso di sezione rettangolare risulta:

$$S(y) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

In definitiva si ricava:

$$\tau_{yz} = \frac{3 T_y}{2 b h^3} (h^2 - 4y^2)$$

È possibile osservare che le tensioni derivanti dal legame costitutivo presentano un andamento costante nella sezione con conseguenti valori irrealistici diversi da zero all'intradosso e all'estradosso della trave; le tensioni che si hanno dalla formula di Jourawsky presentano un profilo più accurato caratterizzato da un andamento parabolico, con valori nulli all'intradosso e all'estradosso della trave.

Si valuta quindi l'energia di deformazione generata dalle tensioni tangenziali, avente l'espressione seguente:

$$U = \frac{1}{2} \int \tau \cdot \gamma dA$$

Indicando con U_k l'energia di deformazione generata dalle tensioni tangenziali ottenute dal legame costitutivo e con U_{eq} quella generata dalle tensioni derivanti dall'equilibrio, risulta:

$$U_k = \frac{1}{2 kG} \int_A \tau_y^2 dA = \frac{1}{2 kG} \int_A \frac{T_y^2}{A^2} dA = \frac{T_y^2}{2 kGA}$$

$$U_{eq} = \frac{1}{2 G} \int_A \tau_y^2 dA = \frac{1}{2 G} \int_A \left[\frac{3 T_y}{2 b h^3} (h^2 - 4y^2) \right]^2 dA$$

Calcolando l'integrale si ottiene:

$$\begin{aligned}
 U_{eq} &= \frac{b}{2G} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left[\frac{3T_y}{2bh^3} (h^2 - 4y^2) \right]^2 dy \\
 U_{eq} &= \frac{9bT_y^2}{8b^2h^6G} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} (h^4 - 8h^2y^2 + 16y^4) dy \\
 &= \frac{9T_y^2}{8bh^6G} \left[h^4y - \frac{8h^2y^3}{3} + \frac{16y^5}{5} \right]_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \\
 &= \frac{9T_y^2}{8bh^6G} \cdot \frac{8}{15} h^5 \\
 &= \frac{3}{5} \frac{T_y^2}{bhG}
 \end{aligned}$$

Imponendo l'uguaglianza energetica si ha:

$$\begin{aligned}
 U_k &= U_{eq} \\
 \frac{T_y^2}{2kGA} &= \frac{3}{5} \frac{T_y^2}{GA} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{5}{6}
 \end{aligned}$$

2.3 Torsione

La trave, oltre a comportarsi come asta se sollecitata da carichi assiali e come trave inflessa se sollecitata da sforzi di taglio e/o momenti flettenti, può comportarsi anche come barra di torsione se sollecitata da momento torcente.

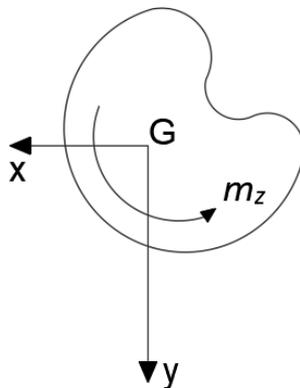


Figura 2.4 - Cinematica della torsione

Come per i casi precedenti, per la determinazione della soluzione del problema dell'equilibrio elastico, si fanno delle ipotesi sulla cinematica della trave suggerite dal suo comportamento: si

assume che la generica sezione ruoti rigidamente attorno ad un asse longitudinale di un angolo Θ costante detto angolo unitario di torsione, non restando piana.

Considerando α_z l'angolo di rotazione infinitesima, si ha:

$$u = -\alpha_z \cdot (y - y_c)$$

$$v = \alpha_z \cdot (x - x_c)$$

$$w = \frac{\alpha_z}{z} \cdot \omega(x, y)$$

dove x_c, y_c sono le coordinate del centro di torsione e $\omega(x, y)$ esprime la legge di variazione dello spostamento longitudinale dei punti della sezione detta funzione d'ingobbamento.

Il campo degli spostamenti risulta quindi definito da $\alpha_z(z)$ che rappresenta lo spostamento generalizzato del modello di trave soggetta a torsione.

Essendo Θ la rotazione relativa per unità di lunghezza, le sezioni ruotano intorno al centro di torsione di un angolo proporzionale alla distanza dalla sezione di riferimento (Carpinteri, 1993):

$$\alpha_z = \Theta \cdot z$$

Le equazioni diventano quindi:

$$u = -\Theta \cdot z(y - y_c)$$

$$v = \Theta \cdot z(x - x_c)$$

$$w = \Theta \cdot \omega(x, y)$$

Dal campo cinematico è immediato ottenere il campo deformativo tramite le equazioni cinematiche:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = 0$$

$$\gamma_{xz} = -\Theta \cdot (y - y_c) + \Theta \cdot \frac{d\omega}{dx}$$

$$\gamma_{yz} = \Theta \cdot (x - x_c) + \Theta \cdot \frac{d\omega}{dy}$$

dove $\Theta = d\alpha/dz$ definisce interamente il campo deformativo e rappresenta quindi la deformazione generalizzata.

Applicando le equazioni costitutive, dal campo deformativo si ottiene il relativo campo tensionale:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$$

$$\tau_{xz} = G\theta \cdot \left[\frac{d\omega}{dx} - (y - y_c) \right]$$

$$\tau_{yz} = G\theta \cdot \left[\frac{d\omega}{dy} + (x - x_c) \right]$$

Si può osservare che gli sforzi tangenziali dovuti alla torsione, sono diretti circonferenzialmente e variano linearmente con la distanza dall'asse.

Dall'equazione indefinita di equilibrio in direzione z, essendo le altre identicamente nulle, si ottiene una limitazione della funzione d'ingobbamento e cioè di essere una funzione armonica:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 0$$

La condizione al contorno è fornita dall'equazione di equivalenza sulla superficie laterale:

$$\left[\frac{d\omega}{dx} - (y - y_c) \right] n_x + \left[\frac{d\omega}{dy} + (x - x_c) \right] n_y = 0$$

La risoluzione combinata di queste due equazioni è unica a meno di una costante arbitraria.

Dal momento che per ipotesi la trave è sollecitata esclusivamente a momento torcente, in ogni sezione della stessa per equilibrio dovranno essere nulle tutte le altre caratteristiche della sollecitazione. Mentre per lo sforzo normale e per i flettenti le equazioni risultano identicamente soddisfatte essendo $\sigma_z = 0$, dall'annullamento dei tagli si hanno le coordinate del centro di torsione:

$$T_x = \int_A \tau_{xz} dA = G\theta \int_A \left[\frac{d\omega}{dx} - (y - y_c) \right] dA = 0$$

$$T_y = \int_A \tau_{yz} dA = G\theta \int_A \left[\frac{d\omega}{dy} + (x - x_c) \right] dA = 0$$

da cui si ricava:

$$\int_A \frac{d\omega}{dx} dA - S_x + y_c A = 0$$

$$\int_A \frac{d\omega}{dy} dA + S_y - x_c A = 0$$

Essendo nulli i momenti statici baricentrici, risulta:

$$y_c = -\frac{1}{A} \int_A \frac{d\omega}{dx} dA$$

$$x_c = \frac{1}{A} \int_A \frac{d\omega}{dy} dA$$

Calcolate le coordinate del centro di torsione, è possibile definire completamente la funzione d'ingobbamento.

Considerando l'ultima condizione di equilibrio sulle basi, tra il momento torcente esterno ed il momento torcente interno generato dalle tensioni tangenziali, si ha:

$$M_z = \int_A (x\tau_{yz} - y\tau_{xz}) dA$$

Sostituendo le espressioni delle tensioni tangenziali, si ottiene:

$$\begin{aligned} M_z &= G\theta \int_A \left[x \left(\frac{d\omega}{dy} + (x - x_c) \right) - y \left(\frac{d\omega}{dx} - (y - y_c) \right) \right] dA \\ &= G\theta \left[\int_A (x^2 + y^2) dA + \int_A \frac{d\omega}{dy} x dA - \int_A \frac{d\omega}{dx} y dA \right] \\ &= G\theta \left[I_p + \int_A \frac{d\omega}{dy} x dA - \int_A \frac{d\omega}{dx} y dA \right] \end{aligned}$$

La parentesi rappresenta il fattore di rigidezza torsionale I_t , che risulta una grandezza inferiore o uguale al momento d'inerzia polare I_p .

L'angolo unitario di torsione si può quindi esprimere attraverso l'equazione di legame:

$$\theta = \frac{M_z}{GI_t}$$

Introducendo l'espressione analoga a quella della trave a sezione circolare, al fine di averne un'unica generale che comprenda tutti i tipi di sezione, si moltiplica e si divide per il momento polare I_p :

$$\theta = \frac{M_z}{GI_p} \cdot \frac{I_p}{I_t} = \kappa \frac{M_z}{GI_p}$$

Si ottiene un'espressione simile a quella delle sezioni circolari a meno di un fattore $\kappa = I_p/I_t$ detto fattore di forma, funzione esclusivamente delle caratteristiche geometriche della sezione. Il valore di κ indica quante volte l'angolo unitario di torsione della generica sezione è maggiore di quello della sezione circolare sottoposta al medesimo momento torcente M_z ed avente stesso materiale G e momento polare I_p .

Per la sezione rettangolare, la κ dipende dal rapporto dei lati a/b con $a > b$ secondo la seguente formula:

$$\kappa = \frac{3 \frac{a}{b}}{\frac{a}{b} - 0,63} \cdot \frac{a^2 + b^2}{12b^2}$$

Dall'equilibrio di un concio di trave infinitesimo soggetto ad un momento torcente $m(z)$ si ha:

$$\frac{dM_z}{dz} + m(z) = 0$$

In definitiva, le equazioni che governano il problema torsionale, sono:

- congruenza:

$$\theta = \alpha_z'$$

- legame costitutivo:

$$M_z = \frac{GI_p}{\kappa} \cdot \theta$$

- equilibrio:

$$M_z' = -m(z)$$

Dalle condizioni ottenute, si ricava l'equazione del problema dell'equilibrio elastico:

$$\frac{GI_p}{\kappa} \cdot \alpha_z' = -m$$

Capitolo 3

Metodo degli Elementi Finiti per la soluzione del problema elastico

A causa delle difficoltà nella soluzione analitica del sistema di equazioni differenziali del problema elastico, sono stati sviluppati metodi numerici come il Metodo degli Elementi Finiti, che consentono di risolvere il problema anche in presenza di geometrie e configurazioni di carichi complesse.

Il Metodo degli Elementi Finiti è un metodo di discretizzazione che considera come incognite del problema solo gli spostamenti di un numero discreto di punti e non la funzione continua, ed è inoltre un metodo d'interpolazione che una volta determinati gli spostamenti li connette con delle funzioni. Il problema quindi si riconduce alla determinazione della configurazione di equilibrio, da cui ottenere per interpolazione il campo di spostamenti, per derivazione il campo deformativo e mediante le equazioni costitutive il campo tensionale.

3.1 Metodo di Ritz-Galerkin

Secondo il Principio di Minimo dell'Energia Potenziale Totale, l'energia potenziale totale relativa al campo di spostamento che risolve il problema elastico è la minima rispetto a qualsiasi altro campo. Così, in alternativa all'equilibrio diretto, è possibile imporre la stazionarietà del potenziale rispetto al campo degli spostamenti ricavando le equazioni di equilibrio.

Per rendere stazionario il funzionale $W(\eta)$ si può far ricorso al metodo di approssimazione numerica di Ritz-Galerkin, esprimendo la funzione degli spostamenti incognita $\{\eta\}$ come somma di funzioni note e linearmente indipendenti $\{\eta_i\}$ (Carpinteri, 1995):

$$\eta = \sum_{i=1}^{g \cdot n} \alpha_i \{\eta_i\}$$

Essendo note le funzioni η_i , per definire la deformata in corrispondenza della configurazione di equilibrio è necessario calcolare i coefficienti α_i che rendono minimo il potenziale

Il problema della descrizione del modo di deformarsi del continuo risulta così discretizzato su n nodi caratterizzati da g gradi di libertà, ottenendo $(g \cdot n)$ incognite.

Si definisce l'energia potenziale totale come:

$$W(\eta) = \int_V \phi(q) dV - \int_V \{\eta\}^T \{F\} dV - \int_S \{\eta\}^T \{p\} dS$$

dove $\{\eta\}$ è il vettore degli spostamenti in senso generalizzato, $\phi(q)$ è il potenziale elastico del campo deformativo pari a $d\phi = \{\sigma\}^T \{d\varepsilon\}$, $\{F\}$ è il vettore delle forze di volume e $\{p\}$ è il vettore delle forze di superficie.

Dal Teorema di Clapeyron secondo cui l'energia di deformazione elastica è la metà del lavoro compiuto dalle forze esterne, si ricava:

$$W(\eta) = \frac{1}{2} \left(\int_V \{\eta\}^T \{F\} dV + \int_S \{\eta\}^T \{p\} dS \right) - \left(\int_V \{\eta\}^T \{F\} dV + \int_S \{\eta\}^T \{p\} dS \right)$$

Si introducono le equazioni di Lamè che racchiudono il problema elastico in forma compatta.

In particolare, le equazioni statiche e le equazioni di equivalenza al contorno si scrivono:

$$[\mathcal{L}] \{\eta\} = -\{F\}$$

$$[\mathcal{L}_0] \{\eta\} = \{p\}$$

L'operatore di Lamè $[\mathcal{L}]$ risulta:

$$[\mathcal{L}] = [\partial]^T [H] [\partial]$$

mentre l'operatore relativo alle condizioni di equivalenza al contorno $[\mathcal{L}_0]$ risulta:

$$[\mathcal{L}_0] = [N]^T [H] [\partial]$$

dove $[H]$ è la matrice Hessiana del potenziale elastico ed $[N]^T$ è la matrice che trasforma il vettore delle forze statiche nel vettore delle forze esterne.

Sostituendo le equazioni di Lamè nel primo addendo del potenziale, si ottiene:

$$W(\eta) = \frac{1}{2} \left(- \int_V \{\eta\}^T [\mathcal{L}] \{\eta\} dV + \int_S \{\eta\}^T [\mathcal{L}_0] \{\eta\} dS \right) - \left(\int_V \{\eta\}^T \{F\} dV + \int_S \{\eta\}^T \{p\} dS \right)$$

Inserendo la combinazione lineare per ogni campo di spostamento si ha:

$$W(\eta) = \frac{1}{2} \left(- \sum_{i=1}^{(g \cdot n)} \sum_{j=1}^{(g \cdot n)} \alpha_i \alpha_j \int_V \{\eta_i\}^T [\mathcal{L}] \{\eta_j\} dV + \sum_{i=1}^{(g \cdot n)} \sum_{j=1}^{(g \cdot n)} \alpha_i \alpha_j \int_S \{\eta_i\}^T [\mathcal{L}_0] \{\eta_j\} dS \right) - \left(\sum_{i=1}^{(g \cdot n)} \alpha_i \int_V \{\eta_i\}^T \{F\} dV + \sum_{i=1}^{(g \cdot n)} \alpha_i \int_S \{\eta_i\}^T \{p\} dS \right)$$

L'espressione ottenuta per l'energia potenziale totale può essere riscritta in forma compatta come:

$$W(\alpha) = \frac{1}{2} \{\alpha\}^T [L] \{\alpha\} - \{\alpha\}^T \{F\}$$

dove la matrice $[L]$ e il vettore $\{F\}$ sono dati da:

$$[L] = - \int_V \{\eta_i\}^T [\mathcal{L}] \{\eta_j\} dV + \int_S \{\eta_i\}^T [\mathcal{L}_0] \{\eta_j\} dS$$

$$\{F\} = \int_V \{\eta_i\}^T \{F\} dV + \int_S \{\eta_i\}^T \{p\} dS$$

La stazionarietà dell'energia potenziale totale si traduce nell'annullamento della sua derivata prima per ogni variazione del vettore $\{\alpha\}^T$:

$$\frac{dW(\alpha)}{d\alpha} = [L]\{\alpha\} - \{F\} = 0$$

La precedente scrittura equivale alla soluzione di un sistema di $(g \cdot n)$ equazioni in $(g \cdot n)$ incognite α_j rappresentanti le condizioni di equilibrio che permettono di risolvere il problema elastico:

$$\sum_{j=1}^{(g \cdot n)} L_{ij} \alpha_j - F_i = 0$$

Poiché la matrice $[L]$ detta matrice di Ritz-Galerkin presenta problemi di stabilità numerica, si considerano funzioni $\{\eta_i\}$ dette splines, definite non su tutto il dominio ma su sottoinsiemi del dominio. Le funzioni $\{\eta_i\}$ associate ad ogni nodo, presentano valore unitario nel nodo corrispondente e nullo in tutti gli altri. Con l'introduzione delle splines i coefficienti $\{\alpha\}$ coincidono con i valori nodali degli spostamenti generalizzati $\{\delta\}$, per cui risulta:

$$[L]\{\delta\} = \{F\}$$

La soluzione approssimata che si ottiene, deve garantire la convergenza alla soluzione esatta all'aumentare del numero dei gradi di libertà utilizzati per il modello di spostamenti. Per il rispetto delle condizioni di convergenza, le funzioni del modello di spostamenti devono presentare i seguenti requisiti:

- 1) Devono risultare continue all'interno dell'elemento;
- 2) Le derivate parziali fino all'ordine $(m-1)$, essendo m il massimo ordine di derivazione che appare nel funzionale $W(\eta)$, devono essere continue sul contorno degli elementi. Questo porta ad avere deformazione continua tra elementi adiacenti;

- 3) Le funzioni interpolanti devono essere complete, nel senso che devono essere in grado di rappresentare le derivate parziali fino al massimo ordine di derivazione che appare nel funzionale $W(\eta)$, al diminuire delle dimensioni dell'elemento. La nozione di completezza si traduce nell'esigenza di rappresentare almeno i moti rigidi (deformazione nulla) e gli stati di deformazione costante di un elemento infinitesimo.

Gli elementi per i quali le funzioni interpolanti soddisfano le condizioni 1 e 2 sono detti conformi e presentano continuità di tipo C^{m-1} sull'interfaccia dell'elemento, gli elementi completi invece, presentano continuità di tipo C^m all'interno.

Le principali fasi del Metodo degli Elementi Finiti possono essere così sintetizzate nei seguenti passaggi:

- Modellazione: costringere la struttura o il continuo a deformarsi secondo un modello algebrico semplificato. Tale idea è analoga alle teorie strutturali, in cui si individua la cinematica dell'elemento secondo modelli semplificati rispetto a quelli del continuo;
- Stazionarietà del Potenziale: ottenuto il modello algebrico che descrive il comportamento deformativo, è introdotto nella stazionarietà del potenziale al fine di ottenere le relazioni di equilibrio;
- Soluzione del sistema: ottenuto il sistema di equazioni si procede con la risoluzione che fornisce il vettore dei gradi di libertà;
- Interpolazione della soluzione: a partire dai gradi di libertà ottenuti, si ricostruisce il campo degli spostamenti e quindi si calcolano le deformazioni e gli sforzi in ogni punto dell'elemento.

3.2 Principio dei Lavori Virtuali

Oltre al Principio di Minimo dell'Energia Potenziale Totale per la ricerca della configurazione di equilibrio, si può far ricorso anche al Principio dei Lavori Virtuali; applicando uno spostamento virtuale ad un sistema in equilibrio, il lavoro prodotto deve risultare nullo. In particolare, è possibile dimostrare il Metodo degli Elementi Finiti sulla base del Principio dei Lavori Virtuali, ottenendo risultati del tutto analoghi a quelli ottenuti nel paragrafo precedente (Carpinteri, 1995).

Si associa a ciascun nodo n dell'elemento finito V_e appartenente al dominio V , una matrice contenente g funzioni di forma dove g sono i gradi di libertà. Il campo vettoriale di spostamento dell'elemento V_e è rappresentabile come:

$$\{\eta\} = \sum_{i=1}^n [\eta_i] \{\delta_i\}$$

dove $[\eta_i]$ è la matrice contenente le splines di dimensione $(g \cdot g)$ e $\{\delta_i\}$ è il vettore degli spostamenti generalizzati di dimensione $(g \cdot 1)$.

A questo punto è possibile ottenere per derivazione il vettore del campo di deformazione:

$$\{q\} = [\partial]\{\eta\} = [\partial][\eta_i]\{\delta_i\} = [B]\{\delta_i\}$$

dove si è indicato con la matrice $[B]$ la matrice delle derivate delle funzioni di forma.

Premoltiplicando il vettore delle caratteristiche deformative per la matrice Hessiana si ottiene il vettore delle caratteristiche statiche:

$$\{Q\} = [H]\{q\} = [H][B]\{\delta_i\}$$

Imponendo un campo di spostamenti virtuali $\{\Delta\eta\}$, il Principio dei Lavori Virtuali porta alla seguente uguaglianza tra lavoro interno ed esterno:

$$\int_{V_e} \{\Delta q\}^T \{Q_e\} dV = \int_{V_e} \{\Delta \eta\}^T \{F\} dV + \int_{S_e} \{\Delta \eta\}^T \{p\} dS$$

Sostituendo i valori dei termini contenuti nell'equazione, si ricava:

$$\int_{V_e} \{\Delta \delta\}^T [B]^T [H] [B] \{\delta\} dV = \int_{V_e} \{\Delta \delta\}^T [\eta]^T \{F\} dV + \int_{S_e} \{\Delta \delta\}^T [\eta]^T \{p\} dS$$

Semplificando il termine di spostamento nodale virtuale $\{\Delta \delta\}^T$ e portando fuori dall'integrale il termine costante degli spostamenti nodali, si ottiene la seguente espressione:

$$\int_{V_e} [B]^T [H] [B] dV \cdot \{\delta\} = \int_{V_e} [\eta]^T \{F\} dV + \int_{S_e} [\eta]^T \{p\} dS$$

Introducendo la matrice di rigidezza locale e i vettori delle forze nodali equivalenti è possibile riscrivere l'equazione nella seguente forma:

$$[K]\{\delta\} = \{F\} + \{p\}$$

dove il termine di rigidezza $[K]$, contiene i seguenti valori:

$$[K] = \int_{V_e} [B]^T [H] [B] dV$$

Prima di procedere al calcolo degli spostamenti nodali essendo le forze di volume $\{F\}$ un dato del problema e la matrice $[K]$ facilmente calcolabile, è necessario conoscere le forze $\{p\}$ che gli elementi si scambiano alle frontiere, essendo incognite.

Per superare tale inconveniente, è possibile sommare la relazione su tutti gli elementi che compongono il reticolo in modo tale da eliminare le componenti $\{p\}$ appartenenti a frontiere interne analoghe e lasciare le componenti appartenenti alle frontiere esterne che risultano quindi note. Tale operazione è possibile attraverso l'espansione dei vettori dalla dimensione locale $(g \cdot n)$ alla dimensione strutturale $(g \cdot m)$ e l'assemblaggio degli stessi, essendo m il numero totale dei nodi della struttura.

A tal proposito si premoltiplicano i vettori per la matrice di assemblaggio $[A_e]^T$ di dimensione $(g \cdot m) \cdot (g \cdot n)$ avente tutti gli elementi nulli, ad eccezione dei $(g \cdot n)$ elementi unitari nelle posizioni che competono all'elemento considerato:

$$\{\delta^e\} = [A_e]^T \{\delta\}$$

$$\{F^e\} = [A_e]^T \{F\}$$

$$\{p^e\} = [A_e]^T \{p\}$$

Introducendo le relazioni nell'equazione di equilibrio e premoltiplicando per $[A_e]^T$, si ha:

$$([A_e]^T [K] [A_e]) \{\delta^e\} = \{F^e\} + \{p^e\}$$

La relazione locale, in forma espansa risulta:

$$[K^e] \{\delta\} = \{F^e\} + \{p^e\}$$

in cui si è sostituito il vettore espanso degli spostamenti nodali con l'analogo vettore globale degli spostamenti nodali.

Le relazioni espanse di tutti gli elementi finiti, riportate ad un unico sistema di riferimento globale, sono sommabili tra di loro:

$$\left(\sum_e [K^e] \right) \{\delta\} = \sum_e (\{F^e\} + \{p^e\})$$

Questa equazione si può porre nella forma:

$$[K] \{\delta\} = \{F\}$$

dove $[K]$ è la matrice di rigidezza globale coincidente con la matrice di Ritz-Galerkin.

L'espressione dell'energia potenziale totale si può dunque riscrivere come:

$$W(\delta) = \frac{1}{2} \{\delta\}^T [K] \{\delta\} - \{\delta\}^T \{F\}$$

3.3 Applicazione della stazionarietà del potenziale alle travi.

Applicando il metodo di stazionarietà del potenziale ai problemi di travi che obbediscono al modello di Eulero-Bernoulli, si dimostra la capacità di definire la formulazione delle proprietà degli elementi.

Si consideri una trave sottoposta a carichi uniformemente distribuiti trasversalmente alla propria linea d'asse $q(z)$ e assialmente $p(z)$; l'energia potenziale totale risulta:

$$W(v, w) = \frac{1}{2} \int_0^L (EJ (v'')^2 + EA (w')^2) dz - \int_0^L q(z)v dz - \int_0^L p(z)w dz$$

dove v e w sono funzioni continue che rappresentano la generica deformata dell'elemento aventi le seguenti espressioni:

$$v(z) = \{\eta_f\}^T \{\delta_i\}$$

$$w(z) = \{\eta_a\}^T \{\delta_i\}$$

Sostituendo le relazioni degli spostamenti nell'espressione del potenziale, si ha:

$$W(v, w) = \frac{1}{2} \{\delta_i\}^T \left[\int_0^L (EJ \{\eta_f''\}^T \{\eta_f''\} + EA \{\eta_a'\}^T \{\eta_a'\}) dz \right] \{\delta_i\} - \left[\int_0^L (q(z)\{\eta_f\}^T + p(z)\{\eta_a\}^T) dz \right] \{\delta_i\}$$

Ricordando la formula del potenziale totale:

$$W(\delta) = \frac{1}{2} \{\delta\}^T [K] \{\delta\} - \{\delta\}^T \{F\}$$

è immediato individuare le matrici di rigidità del problema assiale e flessionale:

$$[K_a] = \int_0^L EA \{\eta_a'\}^T \{\eta_a'\} dz$$

$$[K_f] = \int_0^L EJ \{\eta_f''\}^T \{\eta_f''\} dz$$

Per il Principio di Minimo dell'Energia Potenziale Totale, l'annullamento della derivata prima del potenziale, equivale ad imporre l'equilibrio del sistema e porta all'equazione della linea elastica.

3.4 Soluzione del sistema lineare con le condizioni al contorno

Poichè la matrice $[K]$ non è invertibile, il sistema delle equazioni di equilibrio non può essere risolto direttamente rispetto all'intero vettore degli spostamenti nodali. Tale condizione è legata al fatto che la struttura, non essendo vincolata è libera nello spazio e quindi capace di movimenti rigidi. Per risolvere le equazioni è necessario introdurre le condizioni vincolari in modo tale da ottenere un sistema ridotto risolubile.

Tale operazione può essere eseguita dividendo il vettore dei gradi di libertà in spostamenti nodali incogniti relativi ai nodi liberi e spostamenti nodali noti relativi ai nodi vincolati. In seguito a tale partizione anche il vettore dei carichi conterrà le forze note applicate ai nodi e le reazioni vincolari incognite, per cui risulta:

$$\begin{bmatrix} K_{LL} & K_{LV} \\ K_{VL} & K_{VV} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_L \\ \delta_V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_L \\ F_V \end{bmatrix}$$

La seconda riga del sistema fornisce:

$$\{\delta_V\} = [K_{VV}]^{-1} \cdot (\{F_V\} - [K_{VL}] \cdot \{\delta_L\})$$

Sostituendo nella prima riga si ottiene il vettore contenente le incognite del problema $\{\delta_L\}$:

$$[K_{LL}] \cdot \{\delta_L\} + [K_{LV}] \cdot \{\delta_V\} = \{F_L\}$$

$$([K_{LL}] - [K_{LV}] \cdot [K_{VV}]^{-1} \cdot [K_{VL}]) \cdot \{\delta_L\} = \{F_L\} - [K_{LV}] \cdot [K_{VV}]^{-1} \cdot \{F_V\}$$

Dal processo di condensazione statica si ricava:

$$[K_L^*] = [K_{LL}] - [K_{LV}] \cdot [K_{VV}]^{-1} \cdot [K_{VL}]$$

$$\{F_L^*\} = \{F_L\} - [K_{LV}] \cdot [K_{VV}]^{-1} \cdot \{F_V\}$$

$$[K_L^*] \cdot \{\delta_L\} = \{F_L^*\}$$

dove $[K_L^*]$ è la 'matrice di rigidezza' condensata e dalla sua inversione si ricavano i gradi di libertà incogniti della struttura.

Sostituendo i valori di $\{\delta_L\}$ nella seconda equazione, è possibile calcolare il vettore delle reazioni vincolari $\{F_V\}$.

Capitolo 4

Analisi delle travi con il Metodo degli Elementi Finiti

Alla luce del procedimento generale descritto nel Capitolo 3, si illustra di seguito la formulazione del Metodo degli Elementi Finiti per l'analisi di sistemi di travi.

A partire dalle teorie strutturali di Eulero-Bernoulli e di Timoshenko che forniscono la cinematica delle travi, si giunge alla definizione di un elemento finito caratterizzato da un modello di spostamenti governato da un numero finito di parametri. Le variabili nodali scelte come parametri di interpolazione coincidono con i gradi di libertà del sistema e forniscono il grado del polinomio da utilizzare.

4.1 Elementi finiti di travi alla Eulero-Bernoulli

In relazione a quanto visto nella teoria di Eulero-Bernoulli, la cinematica della trave risulta definita dalle componenti di spostamento trasversale e assiale $v(z)$ e $w(z)$. Indicando con $\{u\}$ il vettore del campo degli spostamenti, si ha:

$$\{u\} = \begin{bmatrix} v(z) \\ w(z) \end{bmatrix}$$

Le deformazioni generalizzate che caratterizzano il campo di deformazioni, sono ε_{z0} e χ_x raggruppate nel vettore:

$$\{q\} = \begin{bmatrix} \chi_x(z) \\ \varepsilon_{z0}(z) \end{bmatrix}$$

In merito a quanto detto a riguardo della convergenza della soluzione con gli elementi finiti, si noti che l'energia potenziale totale dipende dalla derivata seconda dello spostamento $v(z)$ e dalla derivata prima di $w(z)$; di conseguenza dalla condizione di completezza per la corretta rappresentazione di moti rigidi e stati di deformazione costante, lo spostamento trasversale deve essere almeno quadratico, mentre quello assiale almeno lineare. Per garantire la condizione di continuità di ordine C^{m-1} sull'interfaccia dell'elemento, le funzioni di forma dello spostamento $v(z)$ devono essere di ordine C^1 , mentre le funzioni di forma dello spostamento $w(z)$ devono essere di ordine C^0 .

Da tali considerazioni emerge che per lo spostamento assiale $w(z)$ è necessario garantire la continuità della sola funzione ed è quindi sufficiente adottare funzioni di forma con andamento lineare. Per quanto riguarda lo spostamento trasversale $v(z)$ è necessario garantire la continuità non solo della funzione ma anche della sua derivata prima, motivo per cui i quattro parametri nodali definiscono un campo di spostamento cubico.

Tale modellazione, viene definita attraverso un elemento finito di trave alla Eulero-Bernoulli a 2 nodi, caratterizzato da sei gradi di libertà:

$$\{\bar{u}\} = [v_1, \phi_1, w_1, v_2, \phi_2, w_2]^T$$

Si consideri l'elemento monodimensionale di lunghezza L compreso tra i nodi 1 e 2, con sistema di riferimento locale (z, y) e origine nel nodo 1 (figura 4.1).

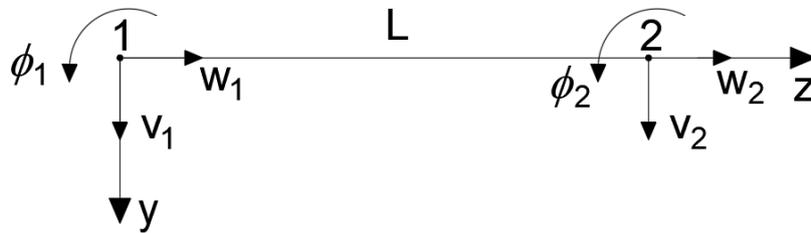


Figura 4.1 - Elemento finito di trave alla Eulero-Bernoulli

Per la determinazione delle funzioni di forma, si assume per $w(z)$ una variazione lineare:

$$w(z) = a_0 + a_1 \cdot z$$

Imponendo le condizioni ai nodi, si calcolano i coefficienti del polinomio:

$$w_1 = a_0$$

$$w_2 = a_0 + a_1 \cdot L$$

Risolvendo il sistema rispetto ad a_0 e a_1 e sostituendo le espressioni ottenute nella modellazione di $w(z)$, si ottiene:

$$w(z) = N_{w,1}(z)w_1 + N_{w,2}(z)w_2$$

dove le funzioni di forma $N_{w,i}(z)$ sono polinomi del primo ordine in z , pari a:

$$N_{w,1} = 1 - \frac{z}{L}$$

$$N_{w,2} = \frac{z}{L}$$

Introducendo un'ascissa adimensionale $\xi = z/L$ variabile sull'elemento fra 0 e 1, si può scrivere:

$$N_{w,1} = 1 - \xi$$

$$N_{w,2} = \xi$$

Gli spostamenti trasversali invece, sono legati oltre che ai loro valori nei due estremi anche alle rotazioni nodali, per cui è ragionevole imporre un campo di spostamento cubico:

$$v(z) = a_0 + a_1 \cdot z + a_2 \cdot z^2 + a_3 \cdot z^3$$

I coefficienti della cubica sono determinati imponendo le condizioni ai nodi:

$$v_1 = a_0$$

$$\varphi_1 = a_1$$

$$v_2 = a_0 + a_1 L + a_2 L^2 + a_3 L^3$$

$$\varphi_2 = a_1 + 2a_2 L + 3a_3 L^2$$

Risolvendo il sistema rispetto ad a_0 e a_3 e sostituendo le espressioni ottenute nella modellazione di $v(z)$, si ottiene:

$$v(z) = N_{v,1}(z)v_1 + N_{\varphi,1}(z)\varphi_1 + N_{v,2}(z)v_2 + N_{\varphi,2}(z)\varphi_2$$

dove le funzioni di forma hanno le seguenti espressioni:

$$N_{v,1} = 1 - 3\left(\frac{z}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{z}{L}\right)^3$$

$$N_{\varphi,1} = L\left[\frac{z}{L} - 2\left(\frac{z}{L}\right)^2 + \left(\frac{z}{L}\right)^3\right]$$

$$N_{v,2} = 3\left(\frac{z}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{z}{L}\right)^3$$

$$N_{\varphi,2} = L\left[-\left(\frac{z}{L}\right)^2 + \left(\frac{z}{L}\right)^3\right]$$

Scrivendo le funzioni di forma secondo l'ascissa adimensionale, si ha:

$$N_{v,1} = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3$$

$$N_{\varphi,1} = L(\xi - 2\xi^2 + \xi^3)$$

$$N_{v,2} = 3\xi^2 - 2\xi^3$$

$$N_{\varphi,2} = L(-\xi^2 + \xi^3)$$

Fisicamente le quattro funzioni di forma rappresentano la deformata della trave ottenuta ponendo il corrispondente grado di libertà uguale ad 1 e gli altri gradi di libertà uguali a 0.

In definitiva, il modello di spostamenti in notazione matriciale risulta:

$$\{u\} = [N]\{\bar{u}\}$$

dove la matrice delle funzioni di forma è data da:

$$[N] = \begin{bmatrix} N_{v,1} & N_{\varphi,1} & 0 & N_{v,2} & N_{\varphi,2} & 0 \\ 0 & 0 & N_{w,1} & 0 & 0 & N_{w,2} \end{bmatrix}$$

Dalla condizione di congruenza della teoria della trave di Eulero-Bernoulli deriva il seguente modello di deformazioni generalizzate:

$$\{q\} = \begin{bmatrix} \chi_x(z) \\ \varepsilon_{z0}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v''(z) \\ w(z)' \end{bmatrix} = [B]\{\bar{u}\}$$

dove la matrice delle derivate delle funzioni di forma è:

$$[B] = \begin{bmatrix} N''_{v,1} & N''_{\varphi,1} & 0 & N''_{v,2} & N''_{\varphi,2} & 0 \\ 0 & 0 & N'_{w,1} & 0 & 0 & N'_{w,2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{L^2}(12\xi - 6) & \frac{1}{L}(6\xi - 4) & 0 & \frac{1}{L^2}(12\xi - 6) & \frac{1}{L}(6\xi - 2) & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

Gli sforzi generalizzati derivanti dal legame costitutivo, risultano:

$$\{Q\} = \begin{bmatrix} M(z) \\ N(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -EJ & 0 \\ 0 & EA \end{bmatrix} \{q\} = [D]\{q\}$$

Esprimendo l'energia elastica di deformazione in termini quadratici degli spostamenti, si ricavano le matrici di rigidezza per il problema assiale e flessionale:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \{q\}^T [D] \{q\} dz = \frac{1}{2} \{\bar{u}\}^T \left(\int_0^L [B]^T [D] [B] dz \right) \{\bar{u}\} = \frac{1}{2} \{\bar{u}\}^T [K] \{\bar{u}\}$$

Essendo le variabili cinematiche e statiche disaccoppiate, è possibile ricavare separatamente i termini di rigidezza assiali e flessionali:

$$[K_a] = \int_0^L EA [B_w]^T [B_w] dz$$

$$[K_f] = \int_0^L EJ [B_v]^T [B_v] dz$$

In definitiva la matrice di rigidezza dell'elemento trave alla Eulero-Bernoulli risulta:

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{12 EJ}{L^3} & \frac{6 EJ}{L^2} & 0 & -\frac{12 EJ}{L^3} & \frac{6 EJ}{L^2} & 0 \\ \frac{6 EJ}{L^2} & \frac{4 EJ}{L} & 0 & -\frac{6 EJ}{L^2} & \frac{2 EJ}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{12 EJ}{L^3} & -\frac{6 EJ}{L^2} & 0 & \frac{12 EJ}{L^3} & -\frac{6 EJ}{L^2} & 0 \\ \frac{6 EJ}{L^2} & \frac{2 EJ}{L} & 0 & -\frac{6 EJ}{L^2} & \frac{4 EJ}{L} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix}$$

Per il calcolo delle forze nodali equivalenti, si considera l'espressione del lavoro dei carichi esterni, raggruppati nel vettore $P(z) = [q(z), p(z)]^T$ e si sostituisce la modellazione ottenuta:

$$W(v, w) = \int_0^L \{P(z)\}^T \{u\} dz = \left(\int_0^L \{P(z)\}^T [N] dz \right) \{\bar{u}\}$$

Il vettore dei carichi nodali equivalenti ai carichi distribuiti lungo l'asse dell'elemento, risulta:

$$P_F = \int_0^L [N]^T \{P(z)\} dz$$

Nel caso di carichi distribuiti uniformemente, si ha:

$$P_F = \{P\} \int_0^L [N]^T dz = \left[\frac{qL}{2}, \frac{qL^2}{12}, \frac{pL}{2}, \frac{qL}{2}, -\frac{qL^2}{12}, \frac{pL}{2} \right]^T$$

4.2 Trasformazione di coordinate

Poiché le matrici di rigidezza calcolate sono riferite al sistema di riferimento locale dell'elemento, prima di procedere alla fase di assemblaggio è necessario riferirle ad un unico sistema di coordinate globali, comune a tutti gli elementi che compongono il generico telaio.

Si indicano con l'apice L, le componenti appartenenti al riferimento locale (z^L, y^L) e senz'apice le componenti nel sistema globale (z, y).

Le componenti di spostamento riferite al sistema locale sono legate a quelle riferite al sistema globale, dalle seguenti relazioni (figura 4.2):

$$w^L = w \cos\alpha + v \sin\alpha$$

$$v^L = -w \sin\alpha + v \cos\alpha$$

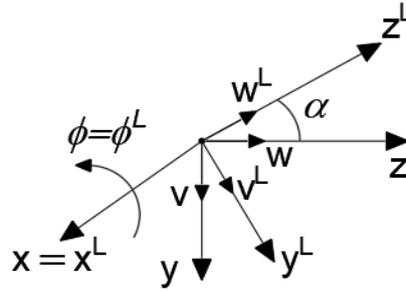


Figura 4.2 – Spostamenti nodali nel riferimento locale e globale

Considerando che per la rotazione si ha $\phi = \phi^L$, la matrice di trasformazione per i sei gradi di libertà dell'elemento finito risulta:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Riscrivendo in forma matriciale, si ha la relazione seguente:

$$\{\bar{u}^L\} = [T]\{\bar{u}\}$$

Introducendo la relazione che lega forze e spostamenti, si può scrivere:

$$\{F^L\} = [K^L]\{\bar{u}^L\} = [K^L][T]\{\bar{u}\}$$

Premoltiplicando per $[T]^T$, si ottiene la formula nel riferimento globale:

$$[T]^T\{F^L\} = [T]^T[K^L][T]\{\bar{u}\}$$

$$\{F\} = [K]\{\bar{u}\}$$

dove la matrice $[K]$ indica la matrice di rigidità dell'elemento trave nel sistema globale:

$$[K] = [T]^T[K^L][T]$$

Analogamente, si dovranno riportare le forze nodali equivalenti nel riferimento globale:

$$\{P_F\} = [T]^T\{P_F^L\}$$

4.3 Elementi finiti di travi alla Timoshenko

Dalla teoria di Timoshenko, è emerso che la cinematica del modello di trave è caratterizzata dalla conoscenza degli spostamenti $w(z)$ e $v(z)$ come nel caso di Eulero-Bernoulli, più la rotazione $\varphi(z)$ delle sezioni. Le deformazioni conseguenti a tale campo di spostamenti risultano

definite da ε_{z0} e χ_x analoghe al modello di Eulero-Bernoulli, più lo scorrimento angolare medio γ_y . Analizzando l'energia elastica di deformazione dell'elemento trave, si può notare che compaiono al più le derivate prime degli spostamenti generalizzati:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L (EJ (\varphi')^2 + kAG \gamma_y^2 + EA (w')^2) dz$$

Ne consegue che per la continuità delle funzioni di forma nel passaggio da un elemento all'altro, è richiesto l'ordine C^0 dei polinomi; per la condizione di completezza, per descrivere un generico modo deformativo costante, l'elemento finito di trave alla Timoshenko deve prevedere funzioni di forma lineari.

Per tale motivo si considera un elemento a due nodi, dai quali si esclude la modellazione di $w(z)$ poiché vale quanto detto a proposito della trave alla Eulero-Bernoulli. Considerando quindi il comportamento flessionale e tagliante, il vettore dei gradi di libertà risulta:

$$\{\bar{u}\} = [v_1, \varphi_1, v_2, \varphi_2]^T$$

A differenza degli elementi di trave alla Eulero-Bernoulli, rotazioni e spostamenti trasversali sono quantità indipendenti, motivo per cui sono modellati separatamente:

$$v(z) = N_1(z)v_1 + N_2(z)v_2$$

$$\varphi(z) = N_1(z)\varphi_1 + N_2(z)\varphi_2$$

Essendo la modellazione di tipo lineare, le funzioni di forma coincidono con quelle utilizzate per $w(z)$:

$$N_1 = 1 - \frac{z}{L}$$

$$N_2 = \frac{z}{L}$$

Riscrivendo in notazione matriciale, si ha:

$$\{u\} = [N]\{\bar{u}\}$$

con

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 \end{bmatrix}$$

Dalla condizione di congruenza, deriva la seguente modellazione del campo di deformazione:

$$\{q\} = \begin{bmatrix} \chi_x(z) \\ \gamma_y(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\varphi(z)' \\ v(z)' + \varphi(z) \end{bmatrix} = [B]\{\bar{u}\}$$

dove la matrice delle derivate delle funzioni di forma è:

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & -N'_1 & 0 & -N'_2 \\ N'_1 & N_1 & N'_2 & N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} & 0 & -\frac{1}{L} \\ -\frac{1}{L} & 1 - \frac{z}{L} & \frac{1}{L} & \frac{z}{L} \end{bmatrix}$$

e può essere vista come somma di due matrici che modellano separatamente le curvature e gli scorrimenti:

$$[B_\chi] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} & 0 & -\frac{1}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[B_\gamma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{L} & 1 - \frac{z}{L} & \frac{1}{L} & \frac{z}{L} \end{bmatrix}$$

Le azioni interne derivanti dal legame costitutivo risultano:

$$\{Q\} = \begin{bmatrix} M(z) \\ N(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -EJ & 0 \\ 0 & GA_t \end{bmatrix} \{q\} = [D]\{q\}$$

È interessante notare come a parità di gradi di libertà, gli elementi finiti di trave alla Timoshenko sono più poveri di quelli alla Eulero-Bernoulli essendo i momenti costanti. Inoltre, si osserva che la cinematica della modellazione introdotta, comporta una violazione dell'equilibrio locale dell'elemento poiché il taglio varia con legge lineare.

Dall'energia elastica di deformazione si ricava la matrice di rigidità dell'elemento, che può essere espressa come somma di due contributi, uno flessionale ed uno tagliante:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L (EJ (\varphi')^2 + kAG (v' + \varphi)^2) dz$$

$$= \frac{1}{2} \{\bar{u}\}^T \int_0^L (EJ [B_\chi]^T [B_\chi] + kAG [B_\gamma]^T [B_\gamma]) dz \cdot \{\bar{u}\}$$

$$[K_\chi] = EJ \int_0^L [B_\chi]^T [B_\chi] dz = \frac{EJ}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K_\gamma] = kAG \int_0^L [B_\gamma]^T [B_\gamma] dz = \frac{kAG}{L} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{L}{2} & -1 & -\frac{L}{2} \\ -\frac{L}{2} & \frac{L^2}{3} & \frac{L}{2} & \frac{L^2}{6} \\ -1 & \frac{L}{2} & 1 & \frac{L}{2} \\ -\frac{L}{2} & \frac{L^2}{6} & \frac{L}{2} & \frac{L^2}{3} \end{bmatrix}$$

Tenendo conto anche del comportamento assiale dell'elemento, la matrice di rigidezza completa ottenuta mediante integrazione esatta, risulta:

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{kAG}{L} & -\frac{kAG}{2} & 0 & -\frac{kAG}{L} & -\frac{kAG}{2} & 0 \\ \frac{kAG}{2} & \frac{EJ}{L} + \frac{kAGL}{3} & 0 & \frac{kAG}{2} & -\frac{EJ}{L} + \frac{kAGL}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{kAG}{L} & \frac{kAG}{2} & 0 & \frac{kAG}{L} & \frac{kAG}{2} & 0 \\ -\frac{kAG}{2} & -\frac{EJ}{L} + \frac{kAGL}{6} & 0 & \frac{kAG}{2} & \frac{EJ}{L} + \frac{kAGL}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix}$$

Il vettore dei carichi nodali, equivalenti ai carichi distribuiti lungo l'asse dell'elemento, risulta:

$$P_F = \int_0^L [N]^T \{P(z)\} dz$$

Il vettore $\{P(z)\}$ contiene le componenti di carico compatibili con il modello di trave alla Timoshenko, che lavorano per gli spostamenti v , φ e w :

$$P(z) = [q(z), m(z), p(z)]^T$$

Nel caso di solo carico trasversale distribuito uniformemente, si ha:

$$P_F = \{P\} \int_0^L [N]^T dz = \left[\frac{qL}{2}, 0, 0, \frac{qL}{2}, 0, 0 \right]^T$$

4.3.1 Fenomeno dello Shear locking

La semplicità della modellazione del campo di spostamenti per gli elementi alla Timoshenko ha come inconveniente problemi di natura numerica nel caso di applicazione a travi snelle. In particolare, al diminuire dell'altezza della sezione, si ha un'esasperazione della rigidezza della trave che porta ad una sottostima degli spostamenti trasversali.

Per illustrare i problemi che insorgono nel caso di travi snelle, si consideri per semplicità la presenza di un incastro nel nodo due e quindi la matrice associata ai soli due gradi di libertà:

$$\{\bar{u}\} = [v_1, \varphi_1]^T$$

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{kAG}{L} & -\frac{kAG}{2} \\ -\frac{kAG}{2} & \frac{EJ}{L} + \frac{kAGL}{3} \end{bmatrix}$$

da cui si ottiene la matrice di deformabilità:

$$[K]^{-1} = \frac{12 L^2}{12 kAGEJ + (kAGL)^2} \begin{bmatrix} \frac{EJ}{L} + \frac{kAGL}{3} & \frac{kAG}{2} \\ \frac{kAG}{2} & \frac{kAG}{L} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{12 L^2}{(kAGL)^2 \cdot (\varepsilon + 1)} \begin{bmatrix} \frac{EJ}{L} + \frac{kAGL}{3} & \frac{kAG}{2} \\ \frac{kAG}{2} & \frac{kAG}{L} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\varepsilon}{(\varepsilon + 1)} \begin{bmatrix} \frac{L}{kAG} + \frac{L^3}{EJ} & \frac{L^2}{2EJ} \\ \frac{L^2}{2EJ} & \frac{L}{EJ} \end{bmatrix}$$

dove si è indicato con ε il parametro:

$$\varepsilon = \frac{12 EJ}{kAG L^2}$$

Applicando l'elemento in esame all'analisi di una trave snella ($L \rightarrow \infty$), avente comportamento alla Eulero-Bernoulli, la matrice di flessibilità tende a zero. Il comportamento dell'elemento è completamente condizionato dalla deformabilità a taglio e la matrice di rigidità presenta il fenomeno di bloccaggio.

Per superare questo inconveniente nella valutazione della matrice di rigidità tagliante, si può utilizzare un'integrazione numerica ridotta su un solo punto di Gauss:

$$\int_{-1}^1 y(\xi) d\xi = w_1 y(\xi_1)$$

Considerando funzioni di forma riferite ad un sistema di coordinate $\xi = (z-L/2)/L/2$ comprese tra -1 e +1, il peso è $w_1=2$ mentre la coordinata del punto di Gauss risulta $\xi_1=0$.

Le funzioni di forma nel nuovo sistema di coordinate risultano:

$$N_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi)$$

$$N_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi)$$

La matrice $[B_\gamma]$ diventa:

$$[B_\gamma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{L} & \frac{(1-\xi)}{2} & \frac{1}{L} & \frac{(1+\xi)}{2} \end{bmatrix}$$

La matrice di rigidezza tagliante risulta:

$$\begin{aligned} [K_\gamma] &= \frac{kAGL}{2} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{(1-\xi)}{2} \\ \frac{1}{L} \\ \frac{(1+\xi)}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{(1-\xi)}{2} & \frac{1}{L} & \frac{(1+\xi)}{2} \end{bmatrix} d\xi \\ &= \frac{kAGL}{2} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \frac{1}{L^2} & -\frac{1}{2L}(1-\xi) & -\frac{1}{L^2} & -\frac{1}{2L}(1+\xi) \\ -\frac{1}{2L}(1-\xi) & \frac{1}{4}(1-\xi)^2 & \frac{1}{2L}(1-\xi) & \frac{1}{4}(1-\xi^2) \\ -\frac{1}{L^2} & \frac{1}{2L}(1-\xi) & \frac{1}{L^2} & \frac{1}{2L}(1+\xi) \\ -\frac{1}{2L}(1+\xi) & \frac{1}{4}(1-\xi^2) & \frac{1}{2L}(1+\xi) & \frac{1}{4}(1+\xi)^2 \end{bmatrix} d\xi \\ &= \frac{kAG}{L} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{L}{2} & -1 & -\frac{L}{2} \\ -\frac{L}{2} & \frac{L^2}{4} & \frac{L}{2} & \frac{L^2}{4} \\ -1 & \frac{L}{2} & 1 & \frac{L}{2} \\ -\frac{L}{2} & \frac{L^2}{4} & \frac{L}{2} & \frac{L^2}{4} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e consente di scrivere per il caso di studio:

$$[K] = [K_x] + [K_\gamma] = \begin{bmatrix} \frac{kAG}{L} & -\frac{kAG}{2} \\ -\frac{kAG}{2} & \frac{EJ}{L} + \frac{kAGL}{4} \end{bmatrix}$$

da cui si ottiene la matrice di deformabilità:

$$\begin{aligned}
 [K]^{-1} &= \frac{L^2}{kAGEJ} \begin{bmatrix} \frac{EJ}{L} + \frac{kAGL}{4} & \frac{kAG}{2} \\ \frac{kAG}{2} & \frac{kAG}{L} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{L}{kAG} + \frac{L^3}{4EJ} & \frac{L^2}{2EJ} \\ \frac{L^2}{2EJ} & \frac{L}{EJ} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

La matrice così ottenuta non presenta il fenomeno di locking al crescere della lunghezza dell'elemento.

4.4 Elemento trave sollecitato a torsione

L'elemento barra di torsione è formalmente analogo all'elemento asta poiché l'energia di deformazione elastica dipende dalla derivata prima dello spostamento generalizzato (Gugliotta, 2002)

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{GI_p}{\kappa} (\alpha'_z)^2 dz$$

Di conseguenza, per le condizioni di completezza e continuità è sufficiente adottare funzioni di forma con andamento lineare.

Tale modellazione viene definita attraverso un elemento finito caratterizzato da due gradi di libertà (figura 4.3):

$$\{\bar{u}\} = [\alpha_{z,1}, \alpha_{z,2}]^T$$

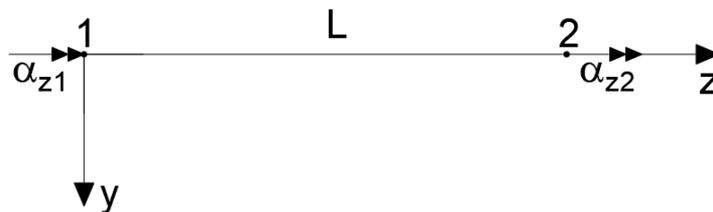


Figura 4.3 - Elemento finito barra di torsione

Per la determinazione delle funzioni di forma, si assume per $\alpha_z(z)$ una variazione lineare:

$$\alpha_z(z) = a_0 + a_1 \cdot z$$

Imponendo le condizioni ai nodi e risolvendo il sistema rispetto ad α_0 e α_1 , si ottiene:

$$\alpha_z(z) = N_{\alpha,1}(z)\alpha_{z,1} + N_{\alpha,2}(z)\alpha_{z,2}$$

dove le funzioni di forma $N_{\alpha,i}(z)$ risultano:

$$N_{\alpha,1} = 1 - \xi$$

$$N_{\alpha,2} = \xi$$

In definitiva il modello di spostamenti risulta:

$$\{u\} = [N]\{\bar{u}\}$$

dove la matrice delle funzioni di forma è data da:

$$[N] = [N_{\alpha,1} \quad N_{\alpha,2}]$$

Dalla condizione di congruenza deriva il seguente modello di deformazioni generalizzate:

$$\{q\} = [\theta] = [\alpha'_z] = [B]\{\bar{u}\}$$

dove la matrice delle derivate delle funzioni di forma è:

$$[B] = [N'_{\alpha,1} \quad N'_{\alpha,2}] = \left[-\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right]$$

Gli sforzi generalizzati derivanti dal legame costitutivo, risultano:

$$\{Q\} = [M_z(z)] = \left[\frac{GI_p}{\kappa} \right] \{q\} = [D]\{q\}$$

Dall'energia elastica di deformazione si ricava la matrice di rigidezza per il problema torsionale:

$$U = \frac{1}{2} \{\bar{u}\}^T \left(\int_0^L [B]^T [D] [B] dz \right) \{\bar{u}\} = \frac{1}{2} \{\bar{u}\}^T [K_t] \{\bar{u}\}$$

$$[K_t] = \int_0^L \frac{GI_p}{\kappa} [B]^T [B] dz$$

Sviluppando l'integrazione, risulta:

$$[K_t] = \begin{bmatrix} \frac{GI_p}{\kappa L} & -\frac{GI_p}{\kappa L} \\ -\frac{GI_p}{\kappa L} & \frac{GI_p}{\kappa L} \end{bmatrix}$$

La matrice di rigidezza finale può essere ottenuta come sovrapposizione dell'elemento trave di Eulero-Bernoulli o Timoshenko e dell'elemento trave sollecitato a torsione.

Capitolo 5

Metodo degli Elementi Finiti inverso per travi e telai

In questo Capitolo, è definito il Metodo degli Elementi Finiti inverso applicato al caso di travi e telai. La formulazione usa il principio di variazione ai minimi quadrati introdotto da Tessler e Spangler (2004) per le piastre ed applicato da Gherlone (2008) alle travi.

In particolare, inizialmente è definita la formulazione dell'elemento finito inverso seguendo le assunzioni cinematiche secondo la teoria di Eulero-Bernoulli e successivamente è descritta la formulazione seguendo il modello di Timoshenko trovata da Gherlone (2008, 2012). L'elemento finito inverso è stato realizzato considerando i sei gradi di libertà per nodo nel sistema di riferimento cartesiano. Le variabili cinematiche sono interpolate mediante funzioni di forma consistenti con l'effettivo comportamento della trave e con le equazioni di equilibrio. Per considerare un unico elemento inverso anche in presenza di carichi trasversali distribuiti, sono definite formulazioni di ordine zero per il caso di forze concentrate e formulazioni di ordine uno per il caso di carichi distribuiti.

5.1 Equazioni che governano il problema di Eulero - Bernoulli

In riferimento alla figura 5.1, si consideri una trave definita in un sistema di riferimento avente l'asse z coincidente con l'asse longitudinale baricentrico e gli assi x e y principali d'inerzia. L'elemento di lunghezza L e sezione A , è caratterizzato dai momenti d'inerzia I_x ed I_y riferiti rispettivamente agli assi x e y .

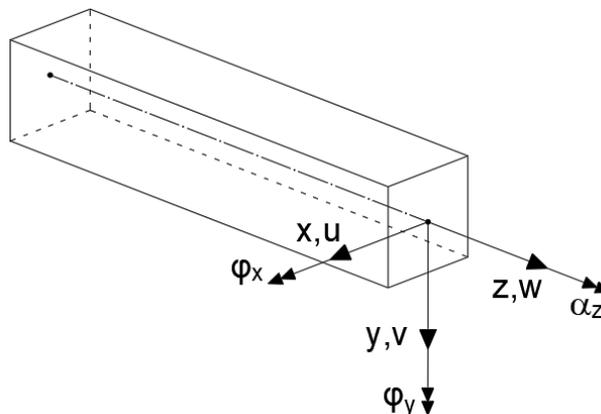


Figura 5.1 - Geometria e cinematica della trave di Eulero-Bernoulli

Considerando le ipotesi viste a proposito della teoria di Eulero-Bernoulli, in cui a deformazione avvenuta la sezione continua ad essere piana e ortogonale all'asse deformato, il campo degli spostamenti per il caso spaziale può essere scritto come segue:

$$u_z(x, y, z) = w(z) + y \cdot \varphi_x(z) - x \cdot \varphi_y(z)$$

$$u_y(x, y, z) = v(z)$$

$$u_x(x, y, z) = u(z)$$

dove u_z , u_y e u_x sono gli spostamenti lungo z , y e x , w è lo spostamento assiale, v ed u sono le inflessioni rispettivamente lungo y e x , φ_x e φ_y rappresentano le rotazioni rispetto alle direzioni positive degli assi x e y .

Le cinque variabili cinematiche che descrivono il campo degli spostamenti, possono essere raggruppate nel vettore:

$$u = \{w, v, \varphi_x, u, \varphi_y\}^T$$

In analogia con quanto visto nel paragrafo 2.1, le corrispondenti deformazioni sono ottenute ricorrendo alle relazioni della teoria elastica lineare:

$$\varepsilon_z = w_{,z} + y \cdot \varphi_{x,z} - x \cdot \varphi_{y,z}$$

$$\gamma_{xz} = u_{,z} - \varphi_y = 0$$

$$\gamma_{yz} = v_{,z} + \varphi_x = 0$$

Il campo di deformazione è caratterizzato dall'unica componente non nulla:

$$\varepsilon_z = \varepsilon_{z0} - y \cdot \chi_x - x \cdot \chi_y$$

dove ε_{z0} è la deformazione assiale, χ_x e χ_y sono le curvature legate alle inflessioni dalle relazioni:

$$\chi_x = -\varphi_{x,z} = \frac{d^2 v}{dz^2}$$

$$\chi_y = \varphi_{y,z} = \frac{d^2 u}{dz^2}$$

Le tre variabili che definiscono il campo deformativo e che saranno introdotte nella formulazione variazionale dell'elemento finito inverso risultano:

$$e(u) = \{\varepsilon_{z0}, \chi_x, \chi_y\}^T$$

Ottenute le deformazioni che caratterizzano il modello cinematico, si possono definire le variabili statiche ad esse associate (figura 5.2).

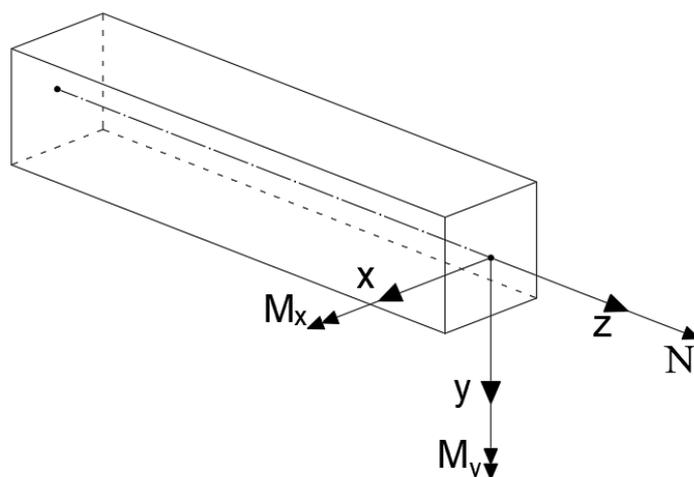


Figura 5.2 - Caratteristiche statiche

Considerando la trave con materiale omogeneo ed isotropo, caratterizzato da modulo elastico E , è possibile definire il legame costitutivo che lega le tensioni all'unica componente deformativa non nulla:

$$\sigma_z = E \cdot \varepsilon_z = E \cdot (\varepsilon_{z0} - y \cdot \chi_x - x \cdot \chi_y)$$

Calcolando la risultante ed il momento risultante delle tensioni sulla sezione, si ricavano lo sforzo normale ed i momenti flettenti agenti:

$$N = \int_A \sigma_z dA = \int_A E \cdot (\varepsilon_{z0} - y \cdot \chi_x - x \cdot \chi_y) dA$$

$$M_x = \int_A y \sigma_z dA = \int_A E \cdot (y \varepsilon_{z0} - y^2 \cdot \chi_x - yx \cdot \chi_y) dA$$

$$M_y = \int_A x \sigma_z dA = \int_A E \cdot (x \varepsilon_{z0} - xy \cdot \chi_x - x^2 \cdot \chi_y) dA$$

Sviluppando gli integrali, poiché l'origine del sistema di coordinate è baricentrico, i termini inerenti ai momenti statici si annullano, per cui si ottengono i seguenti legami costitutivi:

$$N = EA \cdot \varepsilon_{z0}$$

$$M_x = -EI_x \cdot \chi_x$$

$$M_y = -EI_y \cdot \chi_y$$

dove EA è la rigidità assiale, EI_x ed EI_y le rigidità flessionali.

Coerentemente con la teoria di Eulero-Bernoulli, considerando la trave soggetta a carichi distribuiti lungo x , y e z , le equazioni di equilibrio risultano:

$$\frac{dN}{dz} = -p_z$$

$$\frac{dT_y}{dz} = -q_y$$

$$\frac{dT_x}{dz} = -q_x$$

$$\frac{dM_x}{dz} = T_y$$

$$\frac{dM_y}{dz} = T_x$$

5.1.1 Elemento finito inverso con Eulero-Bernoulli

L'elemento finito inverso, basato sulla teoria di Eulero-Bernoulli, è stato realizzato considerando gli stessi concetti adottati da Tessler e Spangler (2004) per l'elemento finito inverso piastra e da Gherlone (2008, 2012) per l'elemento finito trave di Timoshenko.

Per la ricostruzione della forma deformata di un elemento a partire da deformazioni misurate in situ, si minimizza il funzionale $\Phi(u)$ pesato ai minimi quadrati, rispetto al completo campo degli spostamenti. Indicando con $e(u)$ le deformazioni analitiche relative alla teoria di Eulero-Bernoulli e con e^ε le deformazioni sperimentali misurate in situ, il funzionale risulta:

$$\Phi(u) = ||e(u) - e^\varepsilon||^2$$

Le variabili cinematiche sono interpolate usando opportune funzioni polinomiali $N(z)$ di grado coerente con il comportamento della trave, mettendo quindi in relazione il campo di spostamento con le equazioni di equilibrio:

$$u = N(z) \cdot u^e$$

dove u^e indica i gradi di libertà nodali. Considerando l'elemento discretizzato in N parti, il funzionale totale è pari alla somma dei singoli contributi:

$$\Phi = \sum_{e=1}^N \Phi^e$$

In riferimento alla teoria di EB caratterizzata dalle deformazioni di allungamento e curvatura, l'errore funzionale da minimizzare è definito come:

$$\Phi^e = \Phi_\varepsilon^e + \Phi_{\chi_x}^e + \Phi_{\chi_y}^e$$

I quadrati delle norme per le tre componenti deformative risultano:

$$\Phi_\varepsilon^e = \|\varepsilon(u) - \varepsilon^\varepsilon\|^2 = \frac{l^e}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (\varepsilon_{z0}(z_i) - \varepsilon_{z0i}^\varepsilon)^2$$

$$\Phi_{\chi_x}^e = \|\chi_x(u) - \chi_x^\varepsilon\|^2 = \left(\frac{I_x^e}{A^e}\right) \cdot \frac{l^e}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (\chi_x(z_i) - \chi_{xi}^\varepsilon)^2$$

$$\Phi_{\chi_y}^e = \|\chi_y(u) - \chi_y^\varepsilon\|^2 = \left(\frac{I_y^e}{A^e}\right) \cdot \frac{l^e}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (\chi_y(z_i) - \chi_{yi}^\varepsilon)^2$$

dove l^e , A^e , I_x^e e I_y^e sono rispettivamente la lunghezza, l'area della sezione ed i momenti d'inerzia rispetto a x e y dell'elemento, n è il numero di stazioni in corrispondenza dei quali sono effettuate le misure con i sensori di deformazione, con coordinate z_i , $0 \leq z_i \leq l^e$.

Sostituendo l'espressione delle variabili cinematiche in quella delle deformazioni, si ottengono quest'ultime in maniera analitica, in funzione dei gradi di libertà nodali:

$$e(u) = B(z) \cdot u^e$$

dove $B(z)$ contiene le derivate delle funzioni di forma e costituisce la matrice delle funzioni di forma delle deformazioni.

Sostituendo tale relazione in quella del funzionale si ottiene:

$$\begin{aligned} \Phi^e &= \frac{l^e}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (\{B_\varepsilon(z_i)\} \cdot \{w_i^e\} - \varepsilon_{z0i}^\varepsilon)^2 + \left(\frac{I_x^e}{A^e}\right) \cdot \frac{l^e}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (\{B_{\chi_x}(z_i)\} \cdot \{v_i^e\} - \chi_{xi}^\varepsilon)^2 + \\ &\quad + \left(\frac{I_y^e}{A^e}\right) \cdot \frac{l^e}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (\{B_{\chi_y}(z_i)\} \cdot \{u_i^e\} - \chi_{yi}^\varepsilon)^2 \\ \Phi^e &= \frac{l^e}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (\{B_\varepsilon(z_i)\} \cdot \{w_i^e\} - \varepsilon_{z0i}^\varepsilon)^T \cdot (\{B_\varepsilon(z_i)\} \cdot \{w_i^e\} - \varepsilon_{z0i}^\varepsilon) + \\ &\quad + \left(\frac{I_x^e}{A^e}\right) \cdot \frac{l^e}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (\{B_{\chi_x}(z_i)\} \cdot \{v_i^e\} - \chi_{xi}^\varepsilon)^T \cdot (\{B_{\chi_x}(z_i)\} \cdot \{v_i^e\} - \chi_{xi}^\varepsilon) + \\ &\quad + \left(\frac{I_y^e}{A^e}\right) \cdot \frac{l^e}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (\{B_{\chi_y}(z_i)\} \cdot \{u_i^e\} - \chi_{yi}^\varepsilon)^T \cdot (\{B_{\chi_y}(z_i)\} \cdot \{u_i^e\} - \chi_{yi}^\varepsilon) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Phi^e &= \frac{l^e}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \{w_i^e\}^T \cdot \{B_\varepsilon(z_i)\}^T \cdot \{B_\varepsilon(z_i)\} \cdot \{w_i^e\} - 2 \cdot \{w_i^e\}^T \cdot \{B_\varepsilon(z_i)\}^T \cdot \varepsilon_{zoi}^\varepsilon + (\varepsilon_{zoi}^\varepsilon)^2 + \\
 &+ \frac{I_x^e l^e}{A^e n} \cdot \sum_{i=1}^n \{v_i^e\}^T \cdot \{B_{\chi_x}(z_i)\}^T \cdot \{B_{\chi_x}(z_i)\} \cdot \{v_i^e\} - 2 \cdot \{v_i^e\}^T \cdot \{B_{\chi_x}(z_i)\}^T \cdot \chi_{xi}^\varepsilon + (\chi_{xi}^\varepsilon)^2 + \\
 &+ \frac{I_y^e l^e}{A^e n} \cdot \sum_{i=1}^n \{u_i^e\}^T \cdot \{B_{\chi_y}(z_i)\}^T \cdot \{B_{\chi_y}(z_i)\} \cdot \{u_i^e\} - 2 \cdot \{u_i^e\}^T \cdot \{B_{\chi_y}(z_i)\}^T \cdot \chi_{yi}^\varepsilon + (\chi_{yi}^\varepsilon)^2 \\
 \Phi^e &= \{w^e\}^T \left(\frac{l^e}{n} \sum_{i=1}^n \{B_\varepsilon(z_i)\}^T \{B_\varepsilon(z_i)\} \right) \{w^e\} - 2 \{w^e\}^T \left(\frac{l^e}{n} \sum_{i=1}^n \{B_\varepsilon(z_i)\}^T \varepsilon_{zoi}^\varepsilon \right) + \frac{l^e}{n} \sum_{i=1}^n (\varepsilon_{zoi}^\varepsilon)^2 \\
 &+ \{v^e\}^T \left(\frac{I_x^e l^e}{A^e n} \sum_{i=1}^n \{B_{\chi_x}(z_i)\}^T \{B_{\chi_x}(z_i)\} \right) \{v^e\} - 2 \{v^e\}^T \left(\frac{I_x^e l^e}{A^e n} \sum_{i=1}^n \{B_{\chi_x}(z_i)\}^T \chi_{xi}^\varepsilon \right) + \\
 &+ \frac{I_x^e l^e}{A^e n} \sum_{i=1}^n (\chi_{xi}^\varepsilon)^2 + \{u^e\}^T \left(\frac{I_y^e l^e}{A^e n} \sum_{i=1}^n \{B_{\chi_y}(z_i)\}^T \{B_{\chi_y}(z_i)\} \right) \{u^e\} + \\
 &- 2 \{u^e\}^T \left(\frac{I_y^e l^e}{A^e n} \sum_{i=1}^n \{B_{\chi_y}(z_i)\}^T \chi_{yi}^\varepsilon \right) + \frac{I_y^e l^e}{A^e n} \sum_{i=1}^n (\chi_{yi}^\varepsilon)^2
 \end{aligned}$$

Si è ottenuta una relazione in forma quadratica degli spostamenti, analoga a quella dell'energia potenziale totale, a meno di una costante:

$$\begin{aligned}
 \Phi^e &= \frac{1}{2} \cdot \{w^e\}^T \cdot [K_\varepsilon^e] \cdot \{w^e\} - \{w^e\}^T \cdot \{F_\varepsilon^e\} + c_\varepsilon + \frac{1}{2} \cdot \{v^e\}^T \cdot [K_{\chi_x}^e] \cdot \{v^e\} - \{v^e\}^T \cdot \{F_{\chi_x}^e\} \\
 &+ c_{\chi_x} + \frac{1}{2} \cdot \{u^e\}^T \cdot [K_{\chi_y}^e] \cdot \{u^e\} - \{u^e\}^T \cdot \{F_{\chi_y}^e\} + c_{\chi_y} \\
 \Phi^e &= \frac{1}{2} \cdot \{u^e\}^T \cdot [K^e] \cdot \{u^e\} - \{u^e\}^T \cdot \{F^e\} + c
 \end{aligned}$$

La soluzione del problema inverso è ottenuta imponendo la stazionarietà del funzionale rispetto alle incognite cinematiche. Analogamente al Principio di Minimo dell'Energia Potenziale Totale, risulta:

$$\frac{\partial \Phi^e}{\partial u^e} = 0$$

Il risultato della minimizzazione dell'errore funzionale conduce all'equazione risolutiva:

$$[K^e] \cdot \{u^e\} = \{F^e\}$$

dove:

$$\begin{aligned}
 [K^e] &= [K_\varepsilon^e] + [K_{\chi_x}^e] + [K_{\chi_y}^e] \\
 [K_\varepsilon^e] &= \frac{l^e}{n} \sum_{i=1}^n \{B_\varepsilon(z_i)\}^T \{B_\varepsilon(z_i)\} \\
 [K_{\chi_x}^e] &= \frac{I_x^e l^e}{A^e n} \sum_{i=1}^n \{B_{\chi_x}(z_i)\}^T \{B_{\chi_x}(z_i)\} \\
 [K_{\chi_y}^e] &= \frac{I_y^e l^e}{A^e n} \sum_{i=1}^n \{B_{\chi_y}(z_i)\}^T \{B_{\chi_y}(z_i)\} \\
 \{F^e\} &= \{F_\varepsilon^e\} + \{F_{\chi_x}^e\} + \{F_{\chi_y}^e\} \\
 \{F_\varepsilon^e\} &= \frac{l^e}{n} \sum_{i=1}^n \{B_\varepsilon(z_i)\}^T \varepsilon_{z0_i}^\varepsilon \\
 \{F_{\chi_x}^e\} &= \frac{I_x^e l^e}{A^e n} \sum_{i=1}^n \{B_{\chi_x}(z_i)\}^T \chi_{x_i}^\varepsilon \\
 \{F_{\chi_y}^e\} &= \frac{I_y^e l^e}{A^e n} \sum_{i=1}^n \{B_{\chi_y}(z_i)\}^T \chi_{y_i}^\varepsilon
 \end{aligned}$$

La relazione ottenuta per la formulazione inversa ha la stessa forma dell'equazione di equilibrio trovata con il metodo degli elementi finiti, dove $[K^e]$ è la matrice di rigidità ed $\{F^e\}$ è il vettore dei carichi. Nella formulazione inversa, la matrice $[K^e]$ dipende solo dalla coordinata z_i dei sensori e dal numero di misurazioni, $\{u^e\}$ è il vettore degli spostamenti nodali ed $\{F^e\}$ contiene i dati in ingresso rappresentati dalle deformazioni sperimentali.

Le caratteristiche della matrice $[K^e]$ sono di fondamentale importanza per le applicazioni in tempo reale perché data una distribuzione di sensori, essendo indipendente dalle misurazioni e quindi dal tempo, la sua inversa è calcolata solo una volta.

Analogamente al metodo degli elementi finiti, sono introdotte a questo punto le usuali operazioni di espansione ed assemblaggio delle matrici della struttura discretizzata, previa trasformazione ad un unico sistema di riferimento globale, che portano alla scrittura del sistema risultante:

$$[K] \cdot \{u\} = \{F\}$$

In accordo con quanto osservato per la matrice di rigidezza di un elemento libero nello spazio, che risulta non invertibile a causa della presenza di moti rigidi, anche la matrice [K] presenta determinante nullo ed è pertanto necessario imporre le condizioni di vincolo che permettono di ottenere un sistema ridotto risolubile.

La parte rimanente della formulazione coinvolge la selezione di adeguate funzioni di forma e l'interpolazione degli spostamenti.

5.1.2 Funzioni di forma di Eulero-Bernoulli

In funzione della condizione di carico, sono stati definiti due elementi inversi denominati elemento di ordine 0 ed elemento di ordine 1 riferiti rispettivamente al caso di forze nodali e carichi distribuiti.

In merito a quanto detto a riguardo della convergenza della soluzione con gli elementi finiti riferiti al problema di Eulero-Bernoulli, emerge la necessità di garantire per lo spostamento assiale la continuità della sola funzione e per lo spostamento trasversale la continuità non solo della funzione ma anche della sua derivata. Il grado dei polinomi interpolanti è stato selezionato in funzione del comportamento dell'elemento, in accordo con le equazioni di equilibrio.

Tale modellazione è stata realizzata mediante l'uso dei polinomi di Hermite $H_{ki}^{(N)}(z)$ dove 'N' è il numero di derivate da interpolare (grado derivazione), 'k' è un indice che varia tra 0 e N ed 'i' è l'indice del punto di stazione z_i , dove la funzione da interpolare risulta definita.

La generica funzione $f(z)$ può essere così approssimata tramite le funzioni di Hermite secondo la relazione:

$$f(z) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^N H_{ki}^{(N)}(z) \cdot f_i^{(k)}$$

$$f(z) = \sum_{i=1}^n \left(H_{0i}^{(N)}(z) \cdot f_i^{(0)} + H_{1i}^{(N)}(z) \cdot f_i^{(1)} + H_{2i}^{(N)}(z) \cdot f_i^{(2)} + \dots + H_{Ni}^{(N)}(z) \cdot f_i^{(N)} \right)$$

dove $f_i^{(k)}$ è il valore della derivata 'k-esima' nel punto 'i' ed i polinomi di Hermite sono definiti dalla seguente proprietà:

$$\frac{d^r H_{ki}^{(N)}}{dz^r}(z_p) = \delta_{ip} \delta_{kr} \quad \text{con} \quad \begin{cases} i, p = 1, \dots, n \\ k, r = 0, 1, \dots, N \end{cases}$$

Le funzioni di forma sono state riferite ad un elemento di lunghezza unitaria, in termini di coordinate adimensionalizzate:

$$\xi = \frac{z}{L} \in [0,1] \text{ con } z \in [0, L]$$

5.1.2.1 Elemento di ordine 0 EB

Tale formulazione è consistente con le condizioni di equilibrio di Eulero-Bernoulli relative a forze e coppie concentrate applicate in corrispondenza dei nodi finali. In questo caso sforzo normale e taglio sono costanti lungo l'elemento mentre il momento flettente risulta lineare.



Figura 5.3 - Elemento di riferimento per la formulazione di ordine 0 EB

Essendo la componente di spostamento $w(z)$ lineare rispetto alla coordinata assiale z , le funzioni di forma sono ottenute considerando il polinomio di Hermite definito su due nodi:

$$f(z) = \sum_{i=1}^2 H_{0i}^{(0)}(z) \cdot f_i^{(0)}$$

Il singolo polinomio è ottenuto considerando $i = 2$ e la continuità della sola funzione $k = 0$:

$$\frac{d^0 H_{01}^{(0)}}{dz^0}(z_p) = \delta_{1p} \delta_{00} = \delta_{1p} = H_{01}^{(0)}(z_p) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} H_{01}^{(0)}(z_1) = 1 \\ H_{01}^{(0)}(z_2) = 0 \end{cases}$$

Poiché si hanno due condizioni al contorno, il polinomio H_{01} risulta lineare:

$$H_{01}^{(0)}(z) = a_1 + a_2 \cdot z$$

Considerando $z_1 = 0$ e $z_2 = L$ si ottiene $a_1=1$ e $a_2=-1/L$; riscrivendo in termini adimensionalizzati si ha:

$$H_{01}^{(0)}(\xi) = 1 - \xi$$

Operando in maniera analoga per H_{02} , si ricava:

$$H_{02}^{(0)}(\xi) = \xi$$

La variazione dello spostamento $w(\xi)$ tra due stazioni approssimata con i polinomi di Hermite, risulta:

$$w(\xi) = H_{01}^{(0)}(\xi) \cdot w(0) + H_{02}^{(0)}(\xi) \cdot w(1)$$

Nel caso in cui si volesse esprimere la curvatura in termini di spostamento, si considerano le funzioni di Hermite del primo ordine ($k=1$) perché in questo caso oltre a garantire la continuità della funzione, deve essere definita anche la sua derivata. Poiché ogni nodo dell'elemento trave di Eulero-Bernoulli ha almeno due gradi di libertà per il problema flessionale, il più semplice campo di spostamenti ammissibile è cubico.

La funzione approssimante del primo ordine risulta espressa da:

$$f(z) = \sum_{i=1}^2 \sum_{k=0}^1 H_{ki}^{(1)}(z) \cdot \frac{d^k f}{dz^k}(z_i)$$

dove il singolo polinomio risulta determinato dalla proprietà precedentemente descritta; ad esempio per l' H_{01} si ha $k=0$ ed $i=1$, quindi:

$$\frac{d^r H_{01}^{(1)}}{dz^r}(z_p) = \delta_{1p} \delta_{0r}$$

$$H_{01}^{(1)}(z_1) = 1, \quad H_{01}^{(1)}(z_2) = 0, \quad \frac{dH_{01}^{(1)}}{dx}(z_1) = 0, \quad \frac{dH_{01}^{(1)}}{dx}(z_2) = 0$$

Ne consegue che H_{01} può essere espresso da una cubica con quattro coefficienti incogniti:

$$H_{01}^{(1)}(z) = a_1 + a_2 \cdot z + a_3 \cdot z^2 + a_4 \cdot z^3$$

Nell'ipotesi di $z_1 = 0$ e $z_2 = L$, si ha $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = -3/L^2$ e $a_4 = 2/L^3$, per cui risulta:

$$H_{01}^{(1)}(z) = 1 - \frac{3}{L^2} \cdot z^2 + \frac{2}{L^3} \cdot z^3$$

Operando in modo analogo è possibile ricavare gli altri polinomi di Hermite. In termini di coordinate adimensionalizzate risulta:

$$H_{01}^{(1)}(\xi) = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3$$

$$H_{02}^{(1)}(\xi) = 3\xi^2 - 2\xi^3$$

$$H_{11}^{(1)}(\xi) = L(\xi - 2\xi^2 + \xi^3)$$

$$H_{12}^{(1)}(\xi) = L(-\xi^2 + \xi^3)$$

La funzione risulta approssimata mediante la:

$$f(\xi) = H_{01}^{(1)}(\xi) \cdot f(0) + H_{11}^{(1)}(\xi) \cdot \frac{df(0)}{d\xi} + H_{02}^{(1)}(\xi) \cdot f(1) + H_{12}^{(1)}(\xi) \cdot \frac{df(1)}{d\xi}$$

Gli spostamenti trasversali risultano così definiti dalle seguenti espressioni:

$$v(\xi) = H_{01}^{(1)}(\xi)v_1 + H_{11}^{(1)}(\xi)\varphi_{x1} + H_{02}^{(1)}(\xi)v_2 + H_{12}^{(1)}(\xi)\varphi_{x2}$$

$$u(\xi) = H_{01}^{(1)}(\xi)u_1 + H_{11}^{(1)}(\xi)\varphi_{y1} + H_{02}^{(1)}(\xi)u_2 + H_{12}^{(1)}(\xi)\varphi_{y2}$$

Riassumendo, il campo di spostamento è interpolato usando il polinomio lineare per lo spostamento assiale $w(z)$ e funzioni di forma cubiche per gli spostamenti $v(z)$ e $u(z)$ per un totale di 10 gradi di libertà:

$$u^e = \{w_1, v_1, \varphi_{x1}, u_1, \varphi_{y1}, w_2, v_2, \varphi_{x2}, u_2, \varphi_{y2}\}^T$$

5.1.2.2 Elemento di ordine 1 EB

Tale formulazione è consistente con le condizioni di equilibrio di Eulero-Bernoulli relative a forze concentrate assiali e carichi distribuiti trasversali. Essendo lo sforzo normale ancora costante, l'interpolazione dello spostamento assiale è analoga a quella dell'elemento di ordine 0. Poiché il momento flettente ha andamento parabolico, occorre definire altri due gradi di libertà che portano ad un campo di spostamenti in direzione trasversale di quinto grado. Si è scelto un elemento a 3 nodi (figura 5.4) e 14 gradi di libertà che sono ridotti a 10 mediante condensazione statica del nodo centrale.

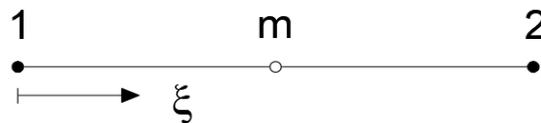


Figura 5.4 - Elemento di riferimento per la formulazione di ordine 1 EB

La funzione approssimante del campo di spostamenti $v(z)$ e $u(z)$ risulta espressa da:

$$f(z) = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=0}^1 H_{ki}^{(1)}(z) \cdot \frac{d^k f}{dz^k}(z_i)$$

Imponendo le condizioni sui polinomi di Hermite, si giunge a definire le funzioni di forma quintiche che in termini di coordinate adimensionalizzate risultano:

$$H_{01}^{(1)}(\xi) = 1 - 23\xi^2 + 66\xi^3 - 68\xi^4 + 24\xi^5$$

$$H_{11}^{(1)}(\xi) = L(-\xi + 6\xi^2 - 13\xi^3 + 12\xi^4 - 4\xi^5)$$

$$H_{0m}^{(1)}(\xi) = 16\xi^2 - 32\xi^3 + 16\xi^4$$

$$H_{1m}^{(1)}(\xi) = L(8\xi^2 - 32\xi^3 + 40\xi^4 - 16\xi^5)$$

$$H_{02}^{(1)}(\xi) = 7\xi^2 - 34\xi^3 + 52\xi^4 - 24\xi^5$$

$$H_{12}^{(1)}(\xi) = L(\xi^2 - 5\xi^3 + 8\xi^4 - 4\xi^5)$$

Gli spostamenti trasversali sono così approssimati dalle seguenti espressioni:

$$v(\xi) = H_{01}^{(1)}(\xi)v_1 + H_{11}^{(1)}(\xi)\varphi_{x1} + H_{0m}^{(1)}(\xi)v_m + H_{1m}^{(1)}(\xi)\varphi_{xm} + H_{02}^{(1)}(\xi)v_2 + H_{12}^{(1)}(\xi)\varphi_{x2}$$

$$u(\xi) = H_{01}^{(1)}(\xi)u_1 + H_{11}^{(1)}(\xi)\varphi_{y1} + H_{0m}^{(1)}(\xi)u_m + H_{1m}^{(1)}(\xi)\varphi_{ym} + H_{02}^{(1)}(\xi)u_2 + H_{12}^{(1)}(\xi)\varphi_{y2}$$

Tuttavia, dalle condizioni di equilibrio sulle curvature è possibile osservare come funzioni di forma di quinto grado per gli spostamenti flessionali risultano ridondanti; essendo l'elemento di ordine 1 caratterizzato da curvature quadratiche, il rispetto delle condizioni:

$$\chi_x = \frac{d^2v}{dz^2} = quad \quad \chi_y = \frac{d^2u}{dz^2} = quad$$

porta all'annullamento di tutti i termini cubici presenti nelle relazioni e quindi ad una riduzione dei gradi di libertà. Le derivate degli spostamenti rispetto alla coordinata $z = \xi \cdot L$, conducono alle seguenti funzioni polinomiali di terzo grado:

$$v_{,zz} = H_{01,\xi\xi}^{(1)} v_1 + H_{11,\xi\xi}^{(1)} \varphi_{x1} + H_{0m,\xi\xi}^{(1)} v_m + H_{1m,\xi\xi}^{(1)} \varphi_{xm} + H_{02,\xi\xi}^{(1)} v_2 + H_{12,\xi\xi}^{(1)} \varphi_{x2}$$

$$u_{,zz} = H_{01,\xi\xi}^{(1)} u_1 + H_{11,\xi\xi}^{(1)} \varphi_{y1} + H_{0m,\xi\xi}^{(1)} u_m + H_{1m,\xi\xi}^{(1)} \varphi_{ym} + H_{02,\xi\xi}^{(1)} u_2 + H_{12,\xi\xi}^{(1)} \varphi_{y2}$$

dove le derivate delle funzioni di forma quintiche sono:

$$H_{01,\xi\xi}^{(1)}(\xi) = \frac{1}{L^2}(-46 + 396\xi - 816\xi^2 + 480\xi^3)$$

$$H_{11,\xi\xi}^{(1)}(\xi) = \frac{1}{L}(12 - 78\xi + 144\xi^2 - 80\xi^3)$$

$$H_{0m,\xi\xi}^{(1)} = \frac{1}{L^2}(32 - 192\xi + 192\xi^2)$$

$$H_{1m,\xi\xi}^{(1)} = \frac{1}{L} (16 - 192\xi + 480\xi^2 - 320\xi^3)$$

$$H_{02,\xi\xi}^{(1)} = \frac{1}{L^2} (14 - 204\xi + 624\xi^2 - 480\xi^3)$$

$$H_{12,\xi\xi}^{(1)} = \frac{1}{L} (2 - 30\xi + 96\xi^2 - 80\xi^3)$$

Isolando i termini cubici e uguagliandoli a 0 è possibile osservare che uno dei cinque spostamenti nodali risulta linearmente dipendente dagli altri.

$$\frac{480}{L} v_1 - 80\varphi_{x1} - 320\varphi_{xm} - \frac{480}{L} v_2 - 80\varphi_{x2} = 0$$

$$\frac{480}{L} u_1 - 80\varphi_{y1} - 320\varphi_{ym} - \frac{480}{L} u_2 - 80\varphi_{y2} = 0$$

Risolvendo rispetto alle rotazioni del nodo interno si ha:

$$\varphi_{xm} = \frac{3}{2L} v_1 - \frac{1}{4} \varphi_{x1} - \frac{3}{2L} v_2 - \frac{1}{4} \varphi_{x2}$$

$$\varphi_{ym} = \frac{3}{2L} u_1 - \frac{1}{4} \varphi_{y1} - \frac{3}{2L} u_2 - \frac{1}{4} \varphi_{y2}$$

Sostituendo i valori di φ_{xm} e φ_{ym} nell'espressione degli spostamenti flessionali, si ricava:

$$v(\xi) = Q_{01,t}(\xi)v_1 + Q_{11,t}(\xi)\varphi_{x1} + Q_{0m,t}(\xi)v_m + Q_{02,t}(\xi)v_2 + Q_{12,t}(\xi)\varphi_{x2}$$

$$u(\xi) = Q_{01,t}(\xi)u_1 + Q_{11,t}(\xi)\varphi_{y1} + Q_{0m,t}(\xi)u_m + Q_{02,t}(\xi)u_2 + Q_{12,t}(\xi)\varphi_{y2}$$

dove le nuove funzioni di forma quartiche sono definite come:

$$Q_{01,t}(\xi) = 1 - 11\xi^2 + 18\xi^3 - 8\xi^4$$

$$Q_{11,t}(\xi) = L(-\xi + 4\xi^2 - 5\xi^3 + 2\xi^4)$$

$$Q_{0m,t}(\xi) = 16\xi^2 - 32\xi^3 + 16\xi^4$$

$$Q_{02,t}(\xi) = -5\xi^2 + 14\xi^3 - 8\xi^4$$

$$Q_{12,t}(\xi) = L(-\xi^2 + 3\xi^3 - 2\xi^4)$$

Riassumendo, il campo di spostamento è interpolato usando il polinomio lineare per lo spostamento assiale $w(z)$ e funzioni di forma quartiche per gli spostamenti $v(z)$ ed $u(z)$ per un totale di 12 gradi di libertà:

$$u^e = \{w_1, v_1, \varphi_{x1}, u_1, \varphi_{y1}, v_m, u_m, w_2, v_2, \varphi_{x2}, u_2, \varphi_{y2}\}^T$$

Prima di procedere all'assemblaggio della matrice globale, i gradi di libertà del nodo centrale sono eliminati attraverso la condensazione statica in modo tale da poter trattare il sistema ridotto con le modalità classiche.

5.1.3 Valutazione delle deformazioni sperimentali di Eulero-Bernoulli

In corrispondenza di ogni stazione di misura ($z = z_i$), la misura delle deformazioni in ingresso non è eseguibile direttamente ma è ottenuta indirettamente mettendo a sistema le letture di almeno tre estensimetri per ogni sezione ed eseguendo una stima con minimi quadrati.

$$\begin{cases} \varepsilon_{z,1}^\varepsilon = \varepsilon_{z0}^\varepsilon - y_1 \cdot \chi_x^\varepsilon - x_1 \cdot \chi_y^\varepsilon \\ \dots \\ \varepsilon_{z,n}^\varepsilon = \varepsilon_{z0}^\varepsilon - y_n \cdot \chi_x^\varepsilon - x_n \cdot \chi_y^\varepsilon \end{cases}$$

Considerando una serie di n misure dirette di ugual precisione $\varepsilon_{z,n}^\varepsilon$, le equazioni avranno peso unitario ed il sistema risolvibile può essere scritto in forma matriciale come (Cina, 2004):

$$[A] \cdot \{x\} - \{l_0\} = \{v\}$$

ovvero:

$$\begin{bmatrix} 1 & y_1 & x_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & y_n & x_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{z0}^\varepsilon \\ \chi_x^\varepsilon \\ \chi_y^\varepsilon \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \varepsilon_{z,1}^\varepsilon \\ \vdots \\ \varepsilon_{z,n}^\varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

dove [A] è la matrice disegno delle 3 deformazioni incognite, {x} è il vettore delle deformazioni incognite, {l₀} è il vettore dei termini noti e {v} il vettore degli scarti teorici. Poiché il sistema non è risolvibile, essendo caratterizzato da n scarti incogniti e 3 deformazioni incognite in n equazioni, si ricorre al principio dei minimi quadrati che cerca fra tutte le stime quella che minimizza la somma del quadrato degli scarti. Il sistema che ne deriva, chiamato “sistema normale”, risulta:

$$[N] \cdot \{\hat{x}\} = \{T_N\}$$

dove la matrice [N] è chiamata matrice normale e {T_N} è il vettore normalizzato dei termini noti. La stima delle grandezze è ottenuta da:

$$\{\hat{x}\} = [N]^{-1}\{T_N\}$$

È possibile giungere alla scrittura del sistema normale in modo agevole, tenendo conto che sussistono le seguenti relazioni:

$$[N] = [A]^T[A]$$

$$[T_N] = [A]^T \{l_0\}$$

Sostituendo i valori stimati nel sistema di partenza, si ottengono le discrepanze tra grandezze stimate e osservate dette scarti stimati:

$$\{\hat{v}\} = [A] \cdot \{\hat{x}\} - \{l_0\}$$

Poiché il problema non si esaurisce con la stima dei parametri incogniti ma occorre giungere anche alla stima della varianza, si calcola la stima della varianza dell'unità di peso e quindi la matrice di varianza-covarianza:

$$\{\hat{\sigma}_0^2\} = \frac{\hat{v}^T \hat{v}}{n - r}$$

dove r è il numero delle misure indirette in questo caso pari a 3. Per cui risulta:

$$[C_{\hat{x}\hat{x}}] = \{\hat{\sigma}_0^2\} \cdot [N]^{-1}$$

Per migliorare la precisione è necessario eseguire misure ridondanti; tuttavia non tutte le osservazioni danno lo stesso contributo alla ridondanza globale. Le misure di questo contributo, comprese tra 0 e 1, prendono il nome di ridondanza locale e si trovano sugli elementi diagonali di una matrice R detta matrice di ridondanza:

$$R = [I] - [A][N]^{-1}[A]^T$$

avendo posto [I] matrice identità.

L'analisi delle ridondanze locali, permette di valutare l'importanza dell'osservazione in funzione della geometria delle misure eseguite e della precisione. La matrice R, analogamente alla matrice di varianza-covarianza può essere progettata prima di eseguire le misure con la finalità di testare la bontà di schemi di misura per una loro ottimizzazione.

Per una buona stima dei parametri, la geometria della rete di misure è spesso fondamentale; il sistema può essere più che ridondante ma l'inversione della matrice normale difficoltosa in quanto prossima alla singolarità. Questa caratteristica è valutabile numericamente per mezzo del numero di condizione:

$$\chi_\infty = \frac{\max_i \sum_j N_{ij}}{\max_i \sum_j N_{ij}^{-1}}$$

Più il numero di condizione tende a zero e più si tende ad un mal condizionamento geometrico e peggiore sarà la stima dei parametri.

Per valutare la bontà delle osservazioni e quindi evitare la presenza di errori grossolani, si è considerato il test del residuo normalizzato:

$$w_i = \frac{v_i}{\sigma_{vi}}$$

dove il numeratore rappresenta gli scarti stimati e il denominatore la varianza degli scarti contenuta dalla diagonale della matrice di varianza-covarianza degli scarti:

$$[C_{\hat{v}\hat{v}}] = \{\hat{\sigma}_0^2\} \cdot [R]$$

Nell'ipotesi di presenza di soli errori accidentali, esso è un valore estratto da una distribuzione normale di media nulla e varianza uguale ad 1. Nota la distribuzione, ipotizzando un livello di significatività $\alpha=20\%$ si può verificare l'eventualità che w_i presenti un valore superiore all'intervallo di confidenza $k_\alpha=1.28$. In questo caso si considera la misura affetta da errore grossolano e quindi dovrà essere verificata e al limite rimossa.

5.2 Equazioni che governano il problema di Timoshenko

Nel caso di travi non particolarmente snelle in cui gli effetti delle sollecitazioni tangenziali sono significativi per la risposta dell'elemento, si ricorre alla teoria di Timoshenko.

Si consideri l'elemento strutturale riferito al sistema di riferimento cartesiano (x, y, z) avente l'asse z coincidente con l'asse longitudinale baricentrico e gli assi x e y principali d'inerzia. L'elemento di lunghezza L e sezione A , è caratterizzato dai momenti d'inerzia I_x ed I_y riferiti rispettivamente agli assi x e y (figura 5.5).

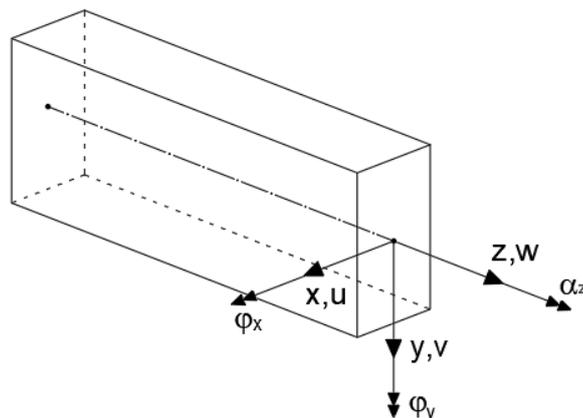


Figura 5.5 - Geometria e cinematica della trave di Timoshenko

Considerando che a deformazione avvenuta una retta perpendicolare alla linea media della trave rimane una retta senza restare perpendicolare alla linea media, il campo degli spostamenti per il caso spaziale può essere scritto come segue:

$$u_z(x, y, z) = w(z) + y \cdot \varphi_x(z) - x \cdot \varphi_y(z)$$

$$u_y(x, y, z) = v(z)$$

$$u_x(x, y, z) = u(z)$$

in cui gli elementi hanno i significati visti in precedenza.

Le cinque variabili cinematiche che descrivono il campo degli spostamenti, possono essere raggruppate nel vettore:

$$u = \{w, v, \varphi_x, u, \varphi_y\}^T$$

In analogia con quanto visto nel Paragrafo 2.2, la rotazione della generica sezione non è più una funzione dipendente dallo spostamento trasversale, ma differisce per un contributo aggiuntivo dovuto al taglio detto scorrimento angolare medio:

$$\varepsilon_z = w_{,z} + y \cdot \varphi_{x,z} - x \cdot \varphi_{y,z}$$

$$\gamma_{xz} = u_{,z} - \varphi_y = \gamma_x$$

$$\gamma_{yz} = v_{,z} + \varphi_x = \gamma_y$$

Il campo di deformazione è caratterizzato dalle componenti:

$$\varepsilon_z = \varepsilon_{z0} - y \cdot \chi_x - x \cdot \chi_y$$

$$\gamma_x = u_{,z} - \varphi_y$$

$$\gamma_y = v_{,z} + \varphi_x$$

Le tre variabili che definiscono il campo deformativo e che saranno introdotte nella formulazione variazionale dell'elemento finito inverso risultano:

$$e(u) = \{\varepsilon_{z0}, \chi_x, \chi_y, \gamma_y, \gamma_x\}^T$$

Ottenute le deformazioni che caratterizzano il modello cinematico, si possono definire le variabili statiche ad esse associate (figura 5.6).

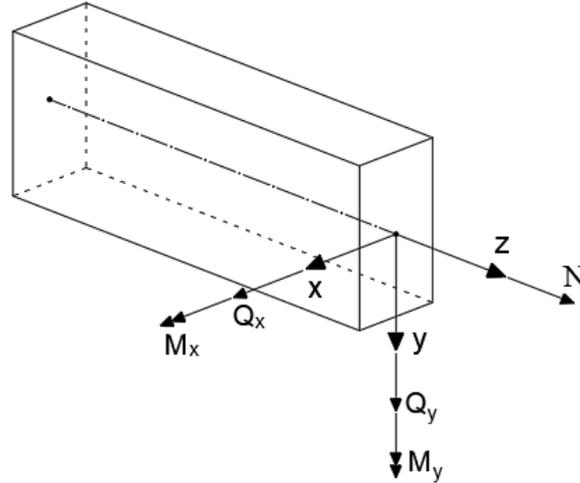


Figura 5.6 - Caratteristiche statiche

Considerando la trave con materiale omogeneo ed isotropo, caratterizzato da modulo elastico E e modulo di taglio G , è possibile definire il legame costitutivo che lega tensioni e deformazioni:

$$\sigma_z = E \cdot \varepsilon_z = E \cdot (\varepsilon_{z0} - y \cdot \chi_x - x \cdot \chi_y)$$

$$\tau_y = G \cdot \gamma_y = G \cdot \left(\frac{dv}{dz} + \varphi_x \right)$$

$$\tau_x = G \cdot \gamma_x = G \cdot \left(\frac{du}{dz} - \varphi_y \right)$$

Calcolando la risultante ed il momento risultante delle tensioni sulla sezione, si ricavano le seguenti sollecitazioni:

$$N = \int_A \sigma_z dA = \int_A E \cdot (\varepsilon_{z0} - y \cdot \chi_x - x \cdot \chi_y) dA$$

$$M_x = \int_A y \sigma_z dA = \int_A E \cdot (y \varepsilon_{z0} - y^2 \cdot \chi_x - yx \cdot \chi_y) dA$$

$$M_y = \int_A x \sigma_z dA = \int_A E \cdot (x \varepsilon_{z0} - xy \cdot \chi_x - x^2 \cdot \chi_y) dA$$

$$T_y = \int_A \tau_y dA = \int_A G \left(\frac{dv}{dz} + \varphi_x \right) dA = GA_t \gamma_y$$

$$T_x = \int_A \tau_x dA = \int_A G \left(\frac{du}{dz} - \varphi_y \right) dA = GA_t \gamma_x$$

Sviluppando gli integrali, poiché l'origine del sistema di coordinate è baricentrico, i termini inerenti ai momenti statici si annullano, per cui si ottengono i seguenti legami costitutivi:

$$N = EA \cdot \varepsilon_{z0}$$

$$M_x = -EI_x \cdot \chi_x$$

$$M_y = -EI_y \cdot \chi_y$$

$$T_y = GA_t \cdot \gamma_y$$

$$T_x = GA_t \cdot \gamma_x$$

dove EA è la rigidezza assiale, EI_x ed EI_y le rigidezze flessionali e kGA la rigidezza a taglio. Dall'equilibrio di un concio di trave infinitesimo soggetto a carichi uniformemente distribuiti nelle tre direzioni, si ottengono le seguenti equazioni:

$$\frac{dN}{dz} = -p_z$$

$$\frac{dT_y}{dz} = -q_y$$

$$\frac{dT_x}{dz} = -q_x$$

$$\frac{dM_x}{dz} = T_y$$

$$\frac{dM_y}{dz} = T_x$$

5.2.1 Elemento finito inverso con Timoshenko

Per la ricostruzione della forma deformata di un elemento tozzo, si minimizza rispetto alle variabili cinematiche il funzionale $\Phi(u)$ riferito al completo campo deformativo coerente con la teoria di Timoshenko. Il funzionale $\Phi(u)$ può essere scritto come:

$$\Phi(u) = ||e(u) - e^\varepsilon||^2$$

Le variabili cinematiche sono interpolate usando opportune funzioni polinomiali N(z) di grado coerente con la particolare condizione di carico:

$$u = N(z) \cdot u^e$$

dove u^e denota i gradi di libertà nodali. Considerando l'elemento discretizzato in N parti, il funzionale totale è pari alla somma del contributo di ogni elemento:

$$\Phi = \sum_{e=1}^N \Phi^e$$

Tenendo conto delle deformazioni di allungamento, flessione e taglio, il funzionale di ogni elemento risulta:

$$\Phi^e = \Phi_{\varepsilon}^e + \Phi_{\chi_x}^e + \Phi_{\chi_y}^e + \Phi_{\gamma_y}^e + \Phi_{\gamma_x}^e$$

I termini che costituiscono il funzionale presentano le seguenti espressioni:

$$\Phi_{\varepsilon}^e = \frac{l^e}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (\varepsilon_{z0}(z_i) - \varepsilon_{z0i}^{\varepsilon})^2$$

$$\Phi_{\chi_x}^e = \left(\frac{I_x^e}{A^e}\right) \cdot \frac{l^e}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (\chi_x(z_i) - \chi_{x_i}^{\varepsilon})^2$$

$$\Phi_{\chi_y}^e = \left(\frac{I_y^e}{A^e}\right) \cdot \frac{l^e}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (\chi_y(z_i) - \chi_{y_i}^{\varepsilon})^2$$

$$\Phi_{\gamma_y}^e = \frac{l^e}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (\gamma_y(z_i) - \gamma_{y_i}^{\varepsilon})^2$$

$$\Phi_{\gamma_x}^e = \frac{l^e}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (\gamma_x(z_i) - \gamma_{x_i}^{\varepsilon})^2$$

dove l^e , A^e , I_x^e e I_y^e sono rispettivamente la lunghezza, l'area della sezione ed i momenti d'inerzia rispetto a x e y , n è il numero di stazioni all'interno dell'elemento dove sono misurate le deformazioni con coordinate z_i , $0 \leq z_i \leq l^e$.

Sostituendo l'espressione delle variabili cinematiche in quella delle deformazioni, si ottengono quest'ultime in maniera analitica, in termini di gradi di libertà nodali:

$$e(u) = B(z) \cdot u^e$$

dove $B(z)$ contiene le derivate delle funzioni di forma.

Sostituendo tale relazione in quella del funzionale si ottiene:

$$\begin{aligned} \Phi^e = & \frac{l^e}{n} \sum_{i=1}^n (\{B_\varepsilon(z_i)\} \cdot \{w_i^e\} - \varepsilon_{z_{o_i}}^\varepsilon)^2 + \frac{I_x^e l^e}{A^e n} \sum_{i=1}^n (\{B_{\chi_x}(z_i)\} \cdot \{v_i^e\} - \chi_{x_i}^\varepsilon)^2 + \\ & + \frac{I_y^e l^e}{A^e n} \sum_{i=1}^n (\{B_{\chi_y}(z_i)\} \cdot \{u_i^e\} - \chi_{y_i}^\varepsilon)^2 + \frac{l^e}{n} \sum_{i=1}^n (\gamma_y(z_i) - \gamma_{y_i}^\varepsilon)^2 + \frac{l^e}{n} \sum_{i=1}^n (\gamma_x(z_i) - \gamma_{x_i}^\varepsilon)^2 \end{aligned}$$

Sviluppando i passaggi, si ricava la relazione in forma quadratica degli spostamenti analoga a quella dell'energia potenziale totale a meno di una costante:

$$\Phi^e = \frac{1}{2} \cdot \{u^e\}^T \cdot [K^e] \cdot \{u^e\} - \{u^e\}^T \cdot \{F^e\} + c$$

La soluzione del presente problema inverso è ottenuta dalla minimizzazione dell'errore funzionale rispetto ai gradi di libertà nodali. Analogamente al Principio di Minimo dell'Energia Potenziale Totale, risulta:

$$\frac{\partial \Phi^e}{\partial u^e} = 0$$

Il risultato della minimizzazione del funzionale conduce all'equazione:

$$[K^e] \cdot \{u^e\} = \{F^e\}$$

dove $[K^e]$ e $\{F^e\}$ hanno i seguenti significati:

$$[K^e] = [K_\varepsilon^e] + [K_{\chi_x}^e] + [K_{\chi_y}^e] + [K_{\gamma_y}^e] + [K_{\gamma_x}^e]$$

$$[K_\varepsilon^e] = \frac{l^e}{n} \sum_{i=1}^n \{B_\varepsilon(z_i)\}^T \{B_\varepsilon(z_i)\}$$

$$[K_{\chi_x}^e] = \frac{I_x^e l^e}{A^e n} \sum_{i=1}^n \{B_{\chi_x}(z_i)\}^T \{B_{\chi_x}(z_i)\}$$

$$[K_{\chi_y}^e] = \frac{I_y^e l^e}{A^e n} \sum_{i=1}^n \{B_{\chi_y}(z_i)\}^T \{B_{\chi_y}(z_i)\}$$

$$[K_{\gamma_y}^e] = \frac{l^e}{n} \sum_{i=1}^n \{B_{\gamma_y}(z_i)\}^T \{B_{\gamma_y}(z_i)\}$$

$$[K_{\gamma_x}^e] = \frac{l^e}{n} \sum_{i=1}^n \{B_{\gamma_x}(z_i)\}^T \{B_{\gamma_x}(z_i)\}$$

$$\{F^e\} = \{F_\varepsilon^e\} + \{F_{\chi_x}^e\} + \{F_{\chi_y}^e\} + \{F_{\gamma_y}^e\} + \{F_{\gamma_x}^e\}$$

$$\{F_\varepsilon^e\} = \frac{l^e}{n} \sum_{i=1}^n \{B_\varepsilon(z_i)\}^T \varepsilon_{z_{0i}}^\varepsilon$$

$$\{F_{\chi_x}^e\} = \frac{I_x^e l^e}{A^e n} \sum_{i=1}^n \{B_{\chi_x}(z_i)\}^T \chi_{x_i}^\varepsilon$$

$$\{F_{\chi_y}^e\} = \frac{I_y^e l^e}{A^e n} \sum_{i=1}^n \{B_{\chi_y}(z_i)\}^T \chi_{y_i}^\varepsilon$$

$$\{F_{\gamma_y}^e\} = \frac{l^e}{n} \sum_{i=1}^n \{B_{\gamma_y}(z_i)\}^T \gamma_{y_i}^\varepsilon$$

$$\{F_{\gamma_x}^e\} = \frac{l^e}{n} \sum_{i=1}^n \{B_{\gamma_x}(z_i)\}^T \gamma_{x_i}^\varepsilon$$

La relazione ottenuta per la formulazione inversa applicata al modello di Timoshenko, ha le stesse peculiarità descritte nel paragrafo 5.1.1 per il caso di Eulero-Bernoulli.

Definite le matrici ed i vettori dell'equazione risolvete, sono eseguite le usuali operazioni di espansione ed assemblaggio previa trasformazione ad un unico sistema di riferimento globale, che conducono alla scrittura del sistema risultante:

$$[K] \cdot \{u\} = \{F\}$$

L'imposizione delle condizioni al contorno genera la non singolarità della matrice $[K]$ che può quindi essere invertita per la soluzione del sistema.

La parte rimanente della formulazione coinvolge la selezione di adeguate funzioni di forma e la presa in conto delle deformazioni sperimentali.

5.2.2 Funzioni di forma di Timoshenko

In funzione della condizione di carico, sono stati definiti due elementi inversi consistenti con la teoria di Timoshenko e denominati elemento di ordine 0 ed elemento di ordine 1. Il grado del polinomio delle funzioni di forma per ogni variabile cinematica, è stato selezionato in accordo con le equazioni di equilibrio ed in particolare l'elemento di ordine 0 è riferito al caso di taglio costante, l'elemento di ordine 1 è riferito al caso di taglio lineare.

Poiché le funzioni di forma dovranno interpolare direttamente l'elemento, sono stati considerati i polinomi di Lagrange riferiti ad un elemento di lunghezza unitaria, in termini di coordinate adimensionalizzate:

$$\xi = \frac{z}{L} \in [0,1] \text{ con } z \in [0, L]$$

La configurazione iniziale contenente nodi interni, è ridotta a due nodi e 10 gradi di libertà mediante la condensazione statica.

$$u^e = \{w_1, v_1, \varphi_{x1}, u_1, \varphi_{y1}, w_2, v_2, \varphi_{x2}, u_2, \varphi_{y2}\}^T$$

5.2.2.1 Elemento di ordine 0 TM

Tale formulazione è consistente con le condizioni di equilibrio di Timoshenko relative a forze e coppie concentrate applicate in corrispondenza dei nodi finali. Le funzioni di forma per l'elemento di ordine 0 sono riferite ad una configurazione avente due nodi interni m e n posizionati rispettivamente a $\xi = 1/2$ e $\xi = 3/4$ (figura 5.7).

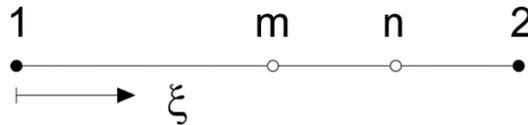


Figura 5.7 - Elemento di riferimento per la formulazione di ordine 0 TM

Dalle equazioni di equilibrio è possibile osservare che sforzo normale e taglio devono essere costanti lungo l'elemento mentre il momento flettente risulta lineare. Le equazioni costitutive indicano che l'allungamento assiale deve avere stesso andamento dello sforzo normale, le curvature devono essere lineari e le deformazioni di taglio costanti.

Dalla relazione tra deformazione e spostamento assiale, si deduce che $w(z)$ deve essere lineare rispetto alla coordinata assiale z , motivo per cui la funzione di forma definita su due nodi coincide con il polinomio di Lagrange lineare già esplicitato nel paragrafo 5.1.2.1:

$$w(\xi) = L_1(\xi) \cdot w_1 + L_2(\xi) \cdot w_2$$

Poiché per il rispetto dell'equilibrio alla rotazione φ_x e φ_y devono presentare un andamento quadratico, i polinomi di Lagrange sono calcolati su tre punti. Considerando i nodi 1, 2 e m, le rotazioni risultano:

$$\varphi_x(\xi) = P_1(\xi) \cdot \varphi_{x1} + P_m(\xi) \cdot \varphi_{xm} + P_2(\xi) \cdot \varphi_{x2}$$

$$\varphi_y(\xi) = P_1(\xi) \cdot \varphi_{y1} + P_m(\xi) \cdot \varphi_{ym} + P_2(\xi) \cdot \varphi_{y2}$$

dove P_1 , P_m e P_2 sono i polinomi di Lagrange quadratici:

$$P_1(\xi) = 1 - 3\xi + 2\xi^2$$

$$P_m(\xi) = 4\xi - 4\xi^2$$

$$P_2(\xi) = -\xi + 2\xi^2$$

Poiché le ultime due variabili cinematiche $v(z)$ ed $u(z)$ sono legate alle rotazioni dalle espressioni:

$$\gamma_y = v_{,z} + \varphi_x \quad \gamma_x = u_{,z} - \varphi_y$$

affinché le loro derivate abbiano stesso andamento delle rotazioni, devono essere di terzo grado. Per definire una funzione cubica, è necessario prendere in conto un ulteriore nodo; considerando il nodo n posizionato in $\xi = 3/4$, le variabili $v(\xi)$ ed $u(\xi)$ sono rappresentate come segue:

$$v(\xi) = C_1(\xi)v_1 + C_m(\xi)v_m + C_n(\xi)v_n + C_2(\xi)v_2$$

$$u(\xi) = C_1(\xi)u_1 + C_m(\xi)u_m + C_n(\xi)u_n + C_2(\xi)u_2$$

dove le funzioni di forma cubiche sono:

$$C_1(\xi) = 1 - \frac{13}{3}\xi + 6\xi^2 - \frac{8}{3}\xi^3$$

$$C_m(\xi) = 12\xi - 28\xi^2 + 16\xi^3$$

$$C_n(\xi) = -\frac{32}{3}\xi + 32\xi^2 - \frac{64}{3}\xi^3$$

$$C_2(\xi) = 3\xi - 10\xi^2 + 8\xi^3$$

Poiché le sollecitazioni di taglio sono costanti, le deformazioni di taglio risultano:

$$\gamma_y = v_{,z} + \varphi_x = \text{cost} \quad \gamma_x = u_{,z} - \varphi_y = \text{cost}$$

Le derivate degli spostamenti rispetto alla coordinata $z = \xi \cdot L$, conducono alle seguenti funzioni polinomiali di secondo grado:

$$v_{,z} = \frac{1}{L} (C_{1,\xi}(\xi)v_1 + C_{m,\xi}(\xi)v_m + C_{n,\xi}(\xi)v_n + C_{2,\xi}(\xi)v_2)$$

$$u_{,z} = \frac{1}{L} (C_{1,\xi}(\xi)u_1 + C_{m,\xi}(\xi)u_m + C_{n,\xi}(\xi)u_n + C_{2,\xi}(\xi)u_2)$$

dove le derivate delle funzioni di forma cubiche sono:

$$C_{1,\xi}(\xi) = -\frac{13}{3} + 12\xi - 8\xi^2$$

$$C_{m,\xi}(\xi) = 12 - 56\xi + 48\xi^2$$

$$C_{n,\xi}(\xi) = -\frac{32}{3} + 64\xi - 64\xi^2$$

$$C_{2,\xi}(\xi) = 3 - 20\xi + 24\xi^2$$

Il rispetto di tali condizioni, porta all'annullamento di tutti i termini quadratici e lineari presenti nelle relazioni e quindi ad una consistente riduzione dei gradi di libertà interni.

Risolvendo rispetto allo scorrimento in direzione y si ottiene:

$$\begin{cases} 2\varphi_{x1} - 4\varphi_{xm} + 2\varphi_{x2} - \frac{8}{L}v_1 + \frac{48}{L}v_m - \frac{64}{L}v_n + \frac{24}{L}v_2 = 0 \\ -3\varphi_{x1} + 4\varphi_{xm} - \varphi_{x2} + \frac{12}{L}v_1 - \frac{56}{L}v_m + \frac{64}{L}v_n - \frac{20}{L}v_2 = 0 \end{cases}$$

Dal sistema omogeneo si può notare che non tutti gli spostamenti nodali sono linearmente indipendenti in quanto due di loro possono essere valutati in funzione degli altri. È possibile dimostrare che non è possibile risolvere il sistema in funzione di v_n e φ_{xm} in quanto porta ad una singolarità. Risolvendo rispetto a v_m e v_n si ha:

$$v_m = \frac{v_1}{2} + \frac{v_2}{2} - L\frac{\varphi_{x1}}{8} + L\frac{\varphi_{x2}}{8}$$

$$v_n = \frac{v_1}{4} + \frac{3}{4}v_2 - L\frac{\varphi_{x1}}{16} - L\frac{\varphi_{xm}}{16} + L\frac{\varphi_{x2}}{8}$$

Sostituendo i valori di v_m e v_n nell'espressione di $v(\xi)$, si ricava:

$$v(\xi) = L_1(\xi)v_1 + L[C_{t1}(\xi)\varphi_{x1} + C_{tm}(\xi)\varphi_{xm} + C_{t2}(\xi)\varphi_{x2}] + L_2(\xi)v_2$$

dove L_1 e L_2 sono i polinomi lineari di Lagrange e le nuove funzioni di forma cubiche sono definite come:

$$C_{t1}(\xi) = -\frac{2}{3}\xi^3 + \frac{3}{2}\xi^2 - \frac{5}{6}\xi$$

$$C_{tm}(\xi) = \frac{4}{3}\xi^3 - 2\xi^2 + \frac{2}{3}\xi$$

$$C_{t2}(\xi) = -\frac{2}{3}\xi^3 + \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{6}\xi$$

Considerando lo scorrimento in direzione x , un'analogia procedura può essere usata ottenendo il sistema:

$$\begin{cases} -2\varphi_{y1} + 4\varphi_{ym} - 2\varphi_{y2} - \frac{8}{L}u_1 + \frac{48}{L}u_m - \frac{64}{L}u_n + \frac{24}{L}u_2 = 0 \\ +3\varphi_{y1} - 4\varphi_{ym} + \varphi_{y2} + \frac{12}{L}u_1 - \frac{56}{L}u_m + \frac{64}{L}u_n - \frac{20}{L}u_2 = 0 \end{cases}$$

Risolviendo rispetto a u_m e u_n si ha:

$$u_m = \frac{u_1}{2} + \frac{u_2}{2} + \frac{\varphi_{y1}}{8} - \frac{\varphi_{y2}}{8}$$

$$u_n = \frac{u_1}{4} + \frac{3}{4}u_2 + \frac{\varphi_{y1}}{16} + \frac{\varphi_{ym}}{16} - \frac{\varphi_{y2}}{8}$$

Sostituendo i valori di u_m e u_n nell'espressione di $u(\xi)$, si ricava:

$$u(\xi) = L_1(\xi)u_1 - L[C_{t1}(\xi)\varphi_{y1} + C_{tm}(\xi)\varphi_{ym} + C_{t2}(\xi)\varphi_{y2}] + L_2(\xi)u_2$$

dove L_1 e L_2 sono i polinomi lineari di Lagrange e C_{t1} , C_{tm} e C_{t2} le nuove funzioni di forma cubiche definite precedentemente.

Riassumendo, il campo di spostamento è interpolato usando il polinomio lineare per lo spostamento assiale $w(z)$, funzioni di forma quadratiche per le rotazioni $\theta_x(z)$ e $\theta_y(z)$, mentre funzioni di forma cubiche sono state definite per $v(z)$ ed $u(z)$ per un totale di 12 gradi di libertà:

$$u^e = \{w_1, v_1, \varphi_{x1}, u_1, \varphi_{y1}, \varphi_{xm}, \varphi_{ym}, w_2, v_2, \varphi_{x2}, u_2, \varphi_{y2}\}^T$$

5.2.2.2 Elemento di ordine 1 TM

La formulazione di ordine 1 soddisfa le equazioni di Timoshenko quando l'elemento è soggetto anche ad un carico trasversale distribuito. Dalle equazioni di equilibrio deriva che lo sforzo normale è ancora costante, il taglio è lineare ed il momento flettente risulta parabolico. Le equazioni costitutive indicano che l'allungamento assiale deve avere stesso andamento dello sforzo normale, le curvature devono essere quadratiche e le deformazioni di taglio lineari.

Dalle relazioni tra deformazione e spostamento si deduce che $w(z)$ rimane lineare rispetto alla coordinata assiale z , mentre per le variabili cinematiche $v(z)$, $u(z)$, $\varphi_x(z)$ e $\varphi_y(z)$ sono necessarie funzioni di forma di quarto grado e cubiche. La configurazione di riferimento per le funzioni di forma dell'elemento di ordine 1, è caratterizzata da 3 nodi interni 1, m e n posizionati rispettivamente a $\xi = 1/4$, $\xi = 1/2$ e $\xi = 3/4$ (figura 5.8).

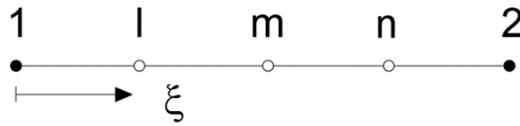


Figura 5.8 - Elemento di riferimento per la formulazione di ordine 1 TM

Analogamente all'elemento di ordine 0, la funzione di forma dello spostamento assiale $w(\xi)$ è il polinomio di Lagrange lineare:

$$w(\xi) = L_1(\xi) \cdot w_1 + L_2(\xi) \cdot w_2$$

Per definire la funzione cubica delle rotazioni $\varphi_x(\xi)$ e $\varphi_y(\xi)$, sono stati considerati i nodi estremi ed i due nodi interni m e n posizionati in $\xi = 1/2$ e $\xi = 3/4$; le variabili $\varphi_x(\xi)$ e $\varphi_y(\xi)$ sono interpolate come segue:

$$\varphi_x(\xi) = C_1(\xi)\varphi_{x1} + C_m(\xi)\varphi_{xm} + C_n(\xi)\varphi_{xn} + C_2(\xi)\varphi_{x2}$$

$$\varphi_y(\xi) = C_1(\xi)\varphi_{y1} + C_m(\xi)\varphi_{ym} + C_n(\xi)\varphi_{yn} + C_2(\xi)\varphi_{y2}$$

dove le funzioni di forma cubiche hanno la stessa forma di quelle viste per gli spostamenti trasversali dell'elemento di ordine 0.

Facendo riferimento alle relazioni che vincolano il grado degli spostamenti trasversali a quello delle rotazioni:

$$\gamma_y = v_{,z} + \varphi_x \quad \gamma_x = u_{,z} - \varphi_y$$

deriva che le variabili cinematiche $v(z)$ e $u(z)$ devono essere di quarto grado. Considerando l'ulteriore nodo l posizionato in $\xi = 1/4$, è possibile scrivere:

$$v(\xi) = Q_1(\xi)v_1 + Q_l(\xi)v_l + Q_m(\xi)v_m + Q_n(\xi)v_n + Q_2(\xi)v_2$$

$$u(\xi) = Q_1(\xi)u_1 + Q_l(\xi)u_l + Q_m(\xi)u_m + Q_n(\xi)u_n + Q_2(\xi)u_2$$

dove le funzioni di forma di quarto grado sono:

$$Q_1(\xi) = 1 - \frac{25}{3}\xi + \frac{70}{3}\xi^2 - \frac{80}{3}\xi^3 + \frac{32}{3}\xi^4$$

$$Q_l(\xi) = 16\xi - \frac{208}{3}\xi^2 + 96\xi^3 - \frac{128}{3}\xi^4$$

$$Q_m(\xi) = -12\xi + 76\xi^2 - 128\xi^3 + 64\xi^4$$

$$Q_n(\xi) = \frac{16}{3}\xi - \frac{112}{3}\xi^2 + \frac{224}{3}\xi^3 - \frac{128}{3}\xi^4$$

$$Q_2(\xi) = -\xi + \frac{22}{3}\xi^2 - 16\xi^3 + \frac{32}{3}\xi^4$$

Le derivate degli spostamenti rispetto alla coordinata $z = \xi \cdot L$ conducono alle seguenti funzioni polinomiali di terzo grado:

$$v_{,z} = \frac{1}{L} (Q_{1,\xi}(\xi)v_1 + Q_{l,\xi}(\xi)v_l + Q_{m,\xi}(\xi)v_m + Q_{n,\xi}(\xi)v_n + Q_{2,\xi}(\xi)v_2)$$

$$u_{,z} = \frac{1}{L} (Q_{1,\xi}(\xi)u_1 + Q_{l,\xi}(\xi)u_l + Q_{m,\xi}(\xi)u_m + Q_{n,\xi}(\xi)u_n + Q_{2,\xi}(\xi)u_2)$$

dove le derivate delle funzioni di forma di quarto grado risultano:

$$Q_{1,\xi}(\xi) = -\frac{25}{3} + \frac{140}{3}\xi - 80\xi^2 + \frac{128}{3}\xi^3$$

$$Q_{l,\xi}(\xi) = 16 - \frac{416}{3}\xi + 288\xi^2 - \frac{512}{3}\xi^3$$

$$Q_{m,\xi}(\xi) = -12 + 152\xi - 384\xi^2 + 256\xi^3$$

$$Q_{n,\xi}(\xi) = \frac{16}{3} - \frac{224}{3}\xi + 224\xi^2 - \frac{512}{3}\xi^3$$

$$Q_{2,\xi}(\xi) = -1 + \frac{44}{3}\xi - 48\xi^2 + \frac{128}{3}\xi^3$$

Poiché le sollecitazioni di taglio sono lineari, le deformazioni di taglio risultano:

$$\gamma_y = v_{,z} + \varphi_x = \text{linear} \quad \gamma_x = u_{,z} - \varphi_y = \text{linear}$$

Ne consegue che tutti i termini di secondo e terzo grado devono essere nulli. Come precedentemente visto per l'elemento di ordine 0, tale condizione porta alla scrittura di un sistema lineare omogeneo attraverso cui calcolare gli spostamenti linearmente dipendenti.

Risolvendo rispetto allo scorrimento in direzione y si ottiene:

$$\begin{cases} -\frac{8}{3}\varphi_{x1} + 16\varphi_{xm} - \frac{64}{3}\varphi_{xn} + 8\varphi_{x2} + \frac{128}{3L}v_1 - \frac{512}{3L}v_l + \frac{256}{L}v_m - \frac{512}{3L}v_n + \frac{128}{3L}v_2 = 0 \\ 6\varphi_{x1} - 28\varphi_{xm} + 32\varphi_{xn} - 10\varphi_{x2} - \frac{80}{L}v_1 + \frac{288}{L}v_l - \frac{384}{L}v_m + \frac{224}{L}v_n - \frac{48}{L}v_2 = 0 \end{cases}$$

Considerando φ_{xm} e φ_{xn} come spostamenti linearmente dipendenti, risulta:

$$\varphi_{xm} = -\frac{4}{L}v_1 + \frac{8}{L}v_l - \frac{8}{L}v_n + \frac{4}{L}v_2 + \frac{\varphi_{x1}}{2} + \frac{\varphi_{x2}}{2}$$

$$\varphi_{xn} = -\frac{v_1}{L} - \frac{2}{L}v_l + \frac{12}{L}v_m - \frac{14}{L}v_n + \frac{5}{L}v_2 + \frac{\varphi_{x1}}{4} + \frac{3}{4}\varphi_{x2}$$

Sostituendo i valori trovati nell'espressione di $\varphi_x(\xi)$, si ricava:

$$\varphi_x(\xi) = L_1(\xi)\varphi_{x1} + \frac{1}{L} [C_{s1}(\xi)v_1 + C_{sl}(\xi)v_l + C_{sm}(\xi)v_m + C_{sn}(\xi)v_n + C_{s2}(\xi)v_2] + L_2(\xi)\varphi_{x2}$$

dove L_1 e L_2 sono i polinomi lineari di Lagrange e C_{s1} , C_{sl} , C_{sm} , C_{sn} e C_{s2} le nuove funzioni di forma cubiche definite come:

$$C_{s1}(\xi) = -\frac{128}{3}\xi^3 + 80\xi^2 - \frac{112}{3}\xi$$

$$C_{sl}(\xi) = \frac{512}{3}\xi^3 - 288\xi^2 + \frac{352}{3}\xi$$

$$C_{sm}(\xi) = -256\xi^3 + 384\xi^2 - 128\xi$$

$$C_{sn}(\xi) = \frac{512}{3}\xi^3 - 224\xi^2 + \frac{160}{3}\xi$$

$$C_{s2}(\xi) = -\frac{128}{3}\xi^3 + 48\xi^2 - \frac{16}{3}\xi$$

Similmente, per lo scorrimento in direzione x si ha:

$$\begin{cases} \frac{8}{3}\varphi_{y1} - 16\varphi_{ym} + \frac{64}{3}\varphi_{yn} - 8\varphi_{y2} + \frac{128}{3L}u_1 - \frac{512}{3L}u_l + \frac{256}{L}u_m - \frac{512}{3L}u_n + \frac{128}{3L}u_2 = 0 \\ -6\varphi_{y1} + 28\varphi_{ym} - 32\varphi_{yn} + 10\varphi_{y2} - \frac{80}{L}u_1 + \frac{288}{L}u_l - \frac{384}{L}u_m + \frac{224}{L}u_n - \frac{48}{L}u_2 = 0 \end{cases}$$

Risolviendo rispetto a φ_{ym} e φ_{yn} si ha:

$$\varphi_{ym} = \frac{4}{L}u_1 - \frac{8}{L}u_l + \frac{8}{L}u_n - \frac{4}{L}u_2 + \frac{\varphi_{y1}}{2} + \frac{\varphi_{y2}}{2}$$

$$\varphi_{yn} = \frac{u_1}{L} + \frac{2}{L}u_l - \frac{12}{L}u_m + \frac{14}{L}u_n - \frac{5}{L}u_2 + \frac{\varphi_{y1}}{4} + \frac{3}{4}\varphi_{y2}$$

Sostituendo i valori trovati nell'espressione di $\varphi_y(\xi)$, si ricava:

$$\varphi_y(\xi) = L_1(\xi)\varphi_{y1} - \frac{1}{L} [C_{s1}(\xi)u_1 + C_{sl}(\xi)u_l + C_{sm}(\xi)u_m + C_{sn}(\xi)u_n + C_{s2}(\xi)u_2] + L_2(\xi)\varphi_{y2}$$

dove le funzioni di forma sono analoghe a quelle della rotazione $\varphi_x(\xi)$.

Riassumendo, l'elemento di ordine uno presenta 16 gradi di libertà, 10 esterni e 6 interni:

$$u^e = \{w_1, v_1, \varphi_{x1}, u_1, \varphi_{y1}, v_l, v_m, v_n, u_l, u_m, u_n, w_2, v_2, \varphi_{x2}, u_2, \varphi_{y2}\}^T$$

Prima di procedere all'assemblaggio della matrice globale, i gradi di libertà del nodo centrale sono eliminati attraverso la condensazione statica in modo tale da poter trattare il sistema ridotto con le modalità classiche.

5.2.3 Valutazione delle deformazioni sperimentali di Timoshenko

Poiché le deformazioni sperimentali non possono essere valutate direttamente, è necessario stabilire delle relazioni che le leghino alle letture delle deformazioni di superficie.

A differenza del problema di Eulero-Bernoulli in cui per la definizione di curvature e allungamenti sono sufficienti estensimetri con l'asse parallelo a quello della trave, nella teoria di Timoshenko per cogliere gli scorrimenti a taglio è necessario disporli con un angolo β rispetto alla direzione longitudinale.

Si considera il sistema di riferimento locale (x_1, x_2, x_3) avente l'asse x_1 diretto secondo l'asse dell'estensimetro e l'origine coincidente con il punto di misura (figura 5.9).

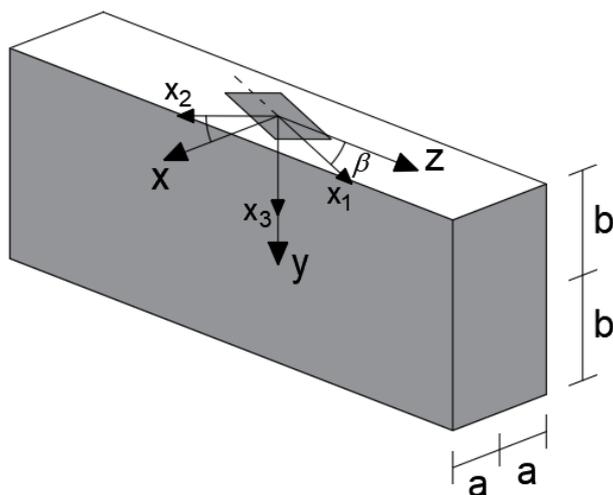


Figura 5.9 – Sistema di riferimento globale e locale dell'estensimetro

Considerando che la superficie su cui è collocato l'estensimetro è scarica, le componenti σ_y , τ_{yx} e τ_{yz} sono nulle. Il corrispondente stato deformativo è dato da:

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}, \quad \varepsilon_x = -\frac{\nu}{E} \sigma_z = -\nu \varepsilon_z, \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

L'estensimetro arbitrariamente orientato secondo il sistema di riferimento locale (x_1, x_2, x_3) fornisce misure di deformazione che sono funzione del tensore di deformazione definito.

Considerando la trasformazione di coordinate tra riferimento locale e globale, la misura di deformazione può essere espressa in funzione delle componenti non trasformate:

$$\varepsilon_1 = \cos^2\beta \varepsilon_z + \sin^2\beta \varepsilon_x + \cos\beta \sin\beta \gamma_{zx}$$

Sostituendo ε_x in funzione di ε_z , si ottiene:

$$\varepsilon_1 = (\cos^2\beta - \nu \sin^2\beta) \varepsilon_z + \cos\beta \sin\beta \gamma_{zx}$$

La misura della deformazione di superficie ε_1 , può inoltre essere legata alle deformazioni generalizzate sostituendo le espressioni del campo deformativo:

$$\varepsilon_z = \varepsilon_{z0} - y \cdot \chi_x - x \cdot \chi_y$$

$$\gamma_{xz} = u_{,z} - \varphi_y = \gamma_x$$

$$\gamma_{yz} = v_{,z} + \varphi_x = \gamma_y$$

Considerando che le coordinate y e x risultano $y = \pm b$ e $a \leq x \leq -a$, la relazione tra misure e deformazioni di sezione è data da:

$$\varepsilon_1^\varepsilon = (c^2 - \nu s^2) \varepsilon_{z0}^\varepsilon \mp b(c^2 - \nu s^2) \chi_x^\varepsilon - x(c^2 - \nu s^2) \chi_y^\varepsilon \pm c s \gamma_x^\varepsilon$$

dove $c = \cos\beta$ e $s = \sin\beta$.

Nel caso di estensimetro posizionato sulla superficie $x = \pm a$ e $b \leq y \leq -b$, risulta:

$$\varepsilon_1^\varepsilon = (c^2 - \nu s^2) \varepsilon_{z0}^\varepsilon - y(c^2 - \nu s^2) \chi_x^\varepsilon \mp a(c^2 - \nu s^2) \chi_y^\varepsilon \pm c s \gamma_y^\varepsilon$$

È importante osservare come la deformazione ε_1 , oltre a dipendere dalle coordinate (x, y) e dall'angolo β che definisce l'orientamento dell'estensimetro rispetto alla direzione assiale, dipende implicitamente anche dalla coordinata z essendo le deformazioni generalizzate funzioni di quest'ultima.

Dall'espressione ottenuta, se sono disponibili per la generica sezione alla coordinata $z = z_i$ 5 misure di deformazione superficiale $\varepsilon_1^\varepsilon$, è possibile valutare le 5 deformazioni ε_{z0} , χ_x , χ_y , γ_x e γ_y .

5.3 Equazioni che governano il problema della torsione

Per completare l'analisi inversa di un elemento avente comportamento alla Eulero-Bernoulli o di Timoshenko, è necessario considerare l'eventuale presenza della torsione.

Analogamente con quanto detto nel paragrafo 2.3, il campo di spostamenti può essere definito come:

$$u = -y \cdot \alpha_z$$

$$v = x \cdot \alpha_z$$

La variabile cinematica che descrive il campo di spostamenti risulta α_z .

Le corrispondenti deformazioni ottenute ricorrendo alle relazioni della teoria elastica lineare, risultano:

$$\gamma_{xz} = -y \cdot \Theta$$

$$\gamma_{yz} = x \cdot \Theta$$

dove $\Theta = d\alpha/dz$ definisce interamente il campo deformativo e rappresenta quindi la deformazione generalizzata.

Ottenute le deformazioni che caratterizzano il modello cinematico, si possono definire le variabili statiche ad esse associate. Dal legame costitutivo che lega le tensioni alle componenti deformative si ha:

$$\tau_{xz} = G\Theta \cdot \left[\frac{d\omega}{dx} - (y - y_c) \right]$$

$$\tau_{yz} = G\Theta \cdot \left[\frac{d\omega}{dy} + (x - x_c) \right]$$

Dal momento che l'elemento risulta sottoposto esclusivamente alla torsione, l'unica caratteristica della sollecitazione non nulla è il momento torcente:

$$M_z = \int_A (x\tau_{yz} - y\tau_{xz}) dA$$

Sviluppando l'integrale ed introducendo il fattore di forma κ , si ricava la seguente equazione di legame:

$$M_z = \frac{GI_p}{\kappa} \Theta$$

dove I_p rappresenta il momento d'inerzia polare.

Considerando la trave soggetta a carichi distribuiti lungo x, y e z, l'equazione di equilibrio risulta:

$$\frac{dM_z}{dz} = 0$$

5.3.1 Elemento finito inverso con la torsione

Seguendo la medesima procedura usata per le altre componenti deformative, anche per la deformazione torsionale è possibile definire il funzionale:

$$\Phi_{\Theta}^e = \frac{I_p^e l^e}{A^e n} \cdot \sum_{i=1}^n (\Theta(z_i) - \Theta^{\varepsilon})^2$$

dove l^e , A^e e I_p^e sono rispettivamente la lunghezza, l'area della sezione ed il momento d'inerzia polare, n è il numero di stazioni all'interno dell'elemento dove sono misurate le deformazioni con coordinate z_i , $0 \leq z_i \leq l^e$.

Sostituendo nel funzionale la relazione che lega la deformazione ai parametri cinematici, risulta:

$$\Phi^e = \frac{I_p^e l^e}{A^e n} \sum_{i=1}^n (\{B_{\Theta}(z_i)\} \cdot \{\alpha_{z_i}^e\} - \Theta_i^{\varepsilon})^2$$

Sviluppando i passaggi, si ottiene la relazione in forma quadratica degli spostamenti analoga a quella dell'energia potenziale totale a meno di una costante:

$$\Phi^e = \frac{1}{2} \cdot \{u^e\}^T \cdot [K^e] \cdot \{u^e\} - \{u^e\}^T \cdot \{F^e\} + c$$

La soluzione del problema inverso è ottenuta minimizzando l'errore funzionale rispetto ai gradi di libertà nodali:

$$\frac{\partial \Phi^e}{\partial u^e} = 0$$

Il risultato della minimizzazione del funzionale conduce all'equazione:

$$[K^e] \cdot \{u^e\} = \{F^e\}$$

dove $[K^e]$ e $\{F^e\}$ hanno i significati seguenti:

$$[K_{\Theta}^e] = \frac{I_p^e l^e}{A^e n} \sum_{i=1}^n \{B_{\Theta}(z_i)\}^T \{B_{\Theta}(z_i)\}$$

$$\{F_{\Theta}^e\} = \frac{I_p^e l^e}{A^e n} \sum_{i=1}^n \{B_{\Theta}(z_i)\}^T \Theta_i^{\varepsilon}$$

La parte rimanente della formulazione coinvolge i passaggi precedentemente descritti per i modelli di Eulero-Bernoulli e Timoshenko.

Dall'equazione di equilibrio risulta che il momento torcente è costante, motivo per cui per l'interpolazione delle rotazioni α_z si sono considerati i polinomi di Lagrange di tipo lineare:

$$\alpha_z(\xi) = L_1(\xi) \cdot \alpha_{z1} + L_2(\xi) \cdot \alpha_{z2}$$

Come descritto nel paragrafo 5.2.3, per cogliere gli scorrimenti di taglio è necessario disporre estensimetri orientati secondo l'angolo β rispetto alla direzione dell'asse longitudinale. In conformità con il sistema di riferimento rappresentato in figura 5.9, la trasformazione tra sistema di riferimento locale e globale conduce alla seguente relazione tra deformazione di superficie e scorrimento di taglio:

$$\varepsilon_1 = \cos\beta \sin\beta \gamma_{zt}$$

dove γ_{zt} rappresenta lo scorrimento in direzione tangente al piano di appartenenza dell'estensimetro.

Per valutare correttamente la deformazione Θ a partire dalla deformazione di superficie misurata, deve essere considerato il contributo dovuto all'ingobbamento mediante il fattore correttivo κ :

$$\gamma_{xz} = -\kappa_1 \cdot y \cdot \Theta$$

$$\gamma_{yz} = \kappa_2 \cdot x \cdot \Theta$$

Nel caso di estensimetro posizionato sulla superficie $y = \pm b$ e $a \leq x \leq -a$, la relazione tra misura e deformazione di sezione è data da:

$$\varepsilon_1^\varepsilon = \kappa_1 c s \Theta^\varepsilon b$$

dove $c = \cos\beta$ e $s = \sin\beta$.

Nel caso di estensimetro posizionato sulla superficie $x = \pm a$ e $b \leq y \leq -b$, risulta:

$$\varepsilon_1^\varepsilon = \kappa_2 c s \Theta^\varepsilon a$$

Capitolo 6

Valutazione numerica del metodo iFEM

Al fine di testare la capacità predittiva dell'iFEM per i casi alla Timoshenko e verificare la validità della formulazione definita nel Capitolo 5 per le travi con comportamento alla Eulero-Bernoulli, è stata implementata la procedura in un codice Matlab. Il codice sviluppato interfaccia una fase di acquisizione dati di tipo geometrico e di deformazione ed una fase di elaborazione e d'identificazione della forma deformata della struttura.

In particolare, al fine di verificare la convergenza della soluzione inversa basta sulle teorie di Eulero Bernoulli e Timoshenko all'aumentare della snellezza, sono stati trattati casi piani di travi a sbalzo caricate staticamente con forze concentrate ed aventi un rapporto di snellezza crescente. Inoltre, la metodologia è stata applicata anche al caso di travi a sbalzo con carichi uniformemente distribuiti e telai piani anch'essi caricati staticamente con forze concentrate e carichi distribuiti.

Le travi a sbalzo, così come le strutture a telaio utilizzate per testare l'iFEM, sono state tutte analizzate con il software agli elementi finiti LUSAS sia per verificare l'accuratezza degli spostamenti nodali ottenuti con l'iFEM, sia per ottenere i dati di deformazione sperimentali nei punti di stazione necessari.

6.1 Casi studio

Per la verifica della convergenza dei risultati, sono state considerate quattro differenti geometrie di travi a sbalzo in calcestruzzo ($E = 30$ GPa, $\nu = 0,2$) aventi rapporti di snellezza (l/h) rispettivamente di 2.5, 3.75, 5 e 10. La sezione rettangolare delle quattro mensole ha base $b = 0,3$ m, altezza $h = 0,4$ m ed un fattore di correzione a taglio $k = 5/6$; le luci di ogni elemento considerato sono rispettivamente 1 m, 1,5 m, 2 m e 4 m.

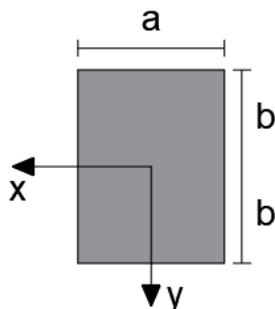


Figura 6.1 - Geometria sezione mensola

Per quanto riguarda l'applicazione al caso dei telai, è stato considerato un impalcato avente due piedritti a sezione quadrata 0,5 m x 0,5 m ed un traverso a sezione rettangolare di dimensioni $b = 0,4$ m e $h = 0,3$ m. Le lunghezze dei piedritti e del traverso sono rispettivamente di 3 m e 5 m.

Nella modellazione con gli elementi finiti diretta, per i casi di mensole caricate con forze concentrate sono state applicate una componente assiale di 4 kN ed una trasversale di 0,4 kN in corrispondenza del nodo libero. Nel caso di carico distribuito, al posto della forza trasversale è stato considerato un carico uniformemente distribuito di 40 kN (figura 6.2).

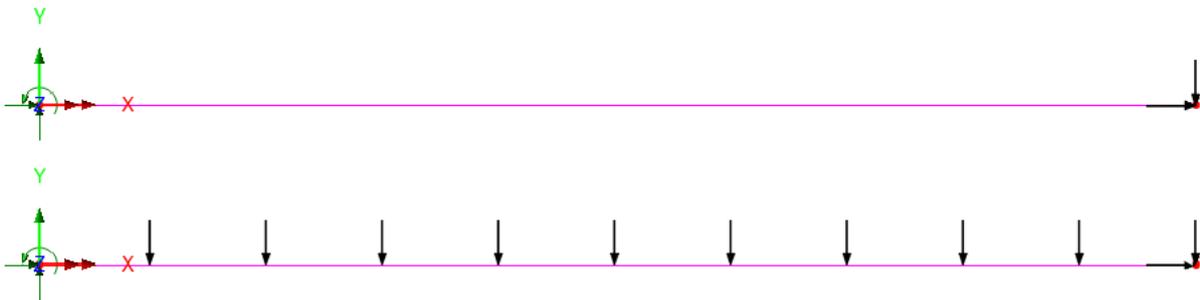


Figura 6.2 – Condizioni di carico mensola

Per il telaio è stata considerata una condizione di carico con forza concentrata in corrispondenza del traverso di 10 kN ed un'ulteriore condizione con carico uniformemente distribuito di 25 kN sul traverso (figura 6.3).

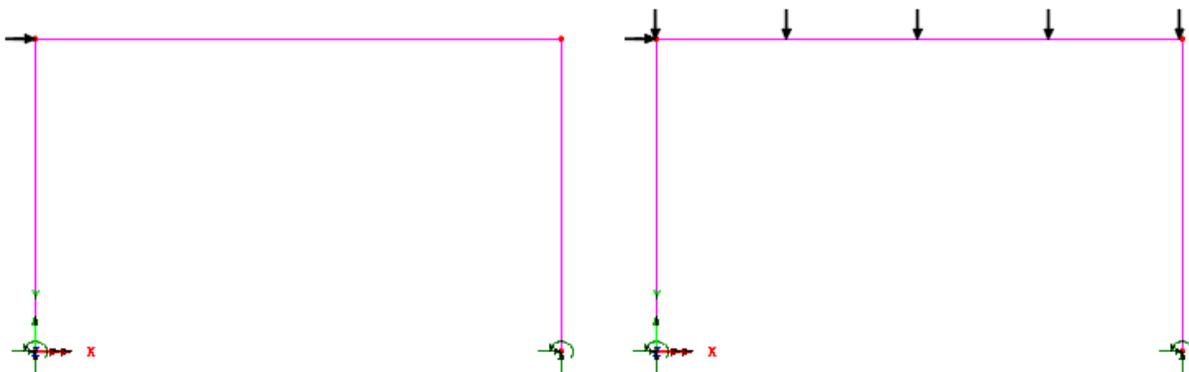


Figura 6.3 - Condizioni di carico telaio

6.2 Distribuzione dei sensori di deformazione

Nota la geometria del problema e definito il grado di approssimazione che si vuole ottenere a seconda della scelta dell'elemento di ordine 0 o 1, una questione molto importante è rappresentata dal numero minimo di misure di deformazione di cui si necessita per le due formulazioni.

Per l'elemento di ordine 0 alla Eulero-Bernoulli, essendo ε_{z0} costante e χ_x lineare rispetto alla coordinata assiale z , sono necessarie tre misure di deformazione in due punti di stazione. Analogamente, per l'elemento di ordine 1, ε_{z0} risulta ancora costante mentre χ_x quadratica, motivo per cui sono necessarie quattro misure di deformazione in tre punti di stazione.

Nel caso di elemento di ordine 0 alla Timoshenko, essendo ε_{z0} e γ_y costanti e χ_x lineare rispetto alla coordinata assiale z , sono necessarie quattro misure di deformazione in due punti di stazione. Allo stesso modo, per l'elemento di ordine 1, ε_{z0} risulta ancora costante, γ_y lineare e χ_x quadratica, motivo per cui sono necessarie sei misure di deformazione in tre punti di stazione. In particolare, le misure di deformazione parabolica sono valutate in tre stazioni, quelle lineari in due e quella costante in un unico punto indipendentemente dalla sua posizione.

A seconda dello scopo che si è voluto perseguire, sono state considerate varie distribuzioni di sensori di deformazione. Per verificare l'effetto della snellezza sulla convergenza dei risultati, poiché è stato considerato il caso di trave a sbalzo con forze concentrate, si è utilizzato un singolo elemento inverso di ordine 0 avente la configurazione di sensori mostrata in tabella 6.1.

Nome distribuzione	Luce trave (m)	Snellezza (λ)	Punti di stazione	
			z_1	z_2
D.01	1	2.5	0.25 L	0.75 L
D.02	1.5	3.75	0.25 L	0.75 L
D.03	2	5	0.125 L	0.875 L
D.04	4	10	0.125 L	0.875 L

Tabella 6.1 - Configurazione sensori elemento di ordine 0

Per dimostrare l'arbitrarietà nella scelta dei punti di stazione, è stato considerato l'elemento inverso di ordine 1 applicato al caso di trave a sbalzo con luce di 1 m. Le distribuzioni di sensori considerate, sono descritte in tabella 6.2.

Nome distribuzione	Punti di stazione		
	z_1	z_2	z_3
D.11	0.125 L	0.5 L	0.875 L
D.12	0.25 L	0.5 L	0.75 L
D.13	0.125 L	0.375 L	1 L

Tabella 6.2 - Configurazione sensori elemento di ordine 1

L'accuratezza del metodo iFEM è stata dimostrata anche per i casi di telai piani, modellati con l'elemento inverso di ordine 0 e 1. Le configurazioni dei sensori per le due tipologie di elementi sono presentate in tabella 6.3. e in tabella 6.4.

Lunghezza elemento (m)	Punti di stazione	
	z ₁	z ₂
3	0.1 L	0.9 L
5	0.1 L	0.9 L

Tabella 6.3 - Configurazione elemento di ordine 0 (telaio)

Lunghezza elemento (m)	Punti di stazione		
	z ₁	z ₂	z ₃
3	0.1 L	0.5 L	0.9 L
5	0.1 L	0.5 L	0.9 L

Tabella 6.4 - Configurazione elemento di ordine 1 (telaio)

6.3 Risultati numerici ottenuti con l'iFEM

Per verificare l'accuratezza dell'iFEM, gli spostamenti dell'estremità libera dell'elemento, ottenuti con l'analisi inversa, sono confrontati con i corrispondenti spostamenti ottenuti dall'analisi FEM diretta.

Sono state analizzate due travi a sbalzo, con comportamento alla Eulero-Bernoulli e Timoshenko, per i casi di carichi concentrati e distribuiti. Per predire il campo di spostamento con l'elemento inverso di ordine 0 è stata considerata la distribuzione D.01; per la modellazione con elemento inverso di ordine 1, è stata considerata la distribuzione D.11. I risultati dell'analisi inversa per i casi citati, sono riportati in tabella 6.5.

Teoria	dof	LUSAS		iFEM		ERROR [%]	
		F	Q	D.01	D.11	D.01	D.11
EB	u	1.11E-06	1.11E-06	1.11E-06	1.11E-06	0.010	0.010
	v	-2.78E-06	-1.33E-04	-2.78E-06	-1.33E-04	-0.008	0.241
TM	u	1.11E-06	1.11E-06	1.11E-06	1.11E-06	0.010	0.010
	v	-3.10E-06	-1.21E-04	-3.10E-06	-1.20E-04	-0.007	0.261

Tabella 6.5 - Spostamenti nodali per il caso di trave a sbalzo

Come si può vedere dai dati riportati, utilizzando un singolo elemento inverso sia di ordine 0 che di ordine 1, i risultati ottenuti sono perfettamente in accordo con quelli dell'analisi FEM diretta per entrambe le teorie. In particolare, l'errore percentuale massimo commesso nella previsione della forma deformata è per il caso di carico distribuito pari allo 0,24 % per la teoria di Eulero-Bernoulli e 0,26 % per quella di Timoshenko.

Poiché per brevità i risultati completi sono stati omessi, per verificare la previsione iFEM del campo di spostamento lungo l'elemento, gli spostamenti ottenuti con l'analisi inversa sono stati interpolati con le loro funzioni di forma, ottenendo funzioni continue lungo z . I risultati ottenuti sono mostrati nelle figure 6.4 – 6.6.

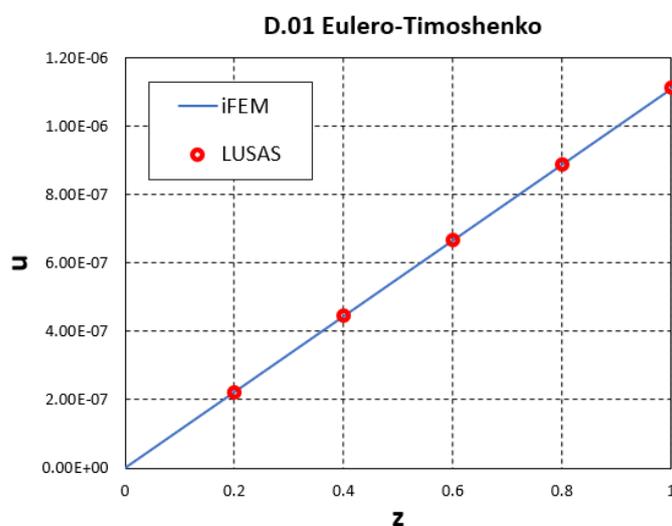


Figura 6.4- Spostamento assiale analogo nelle due teorie

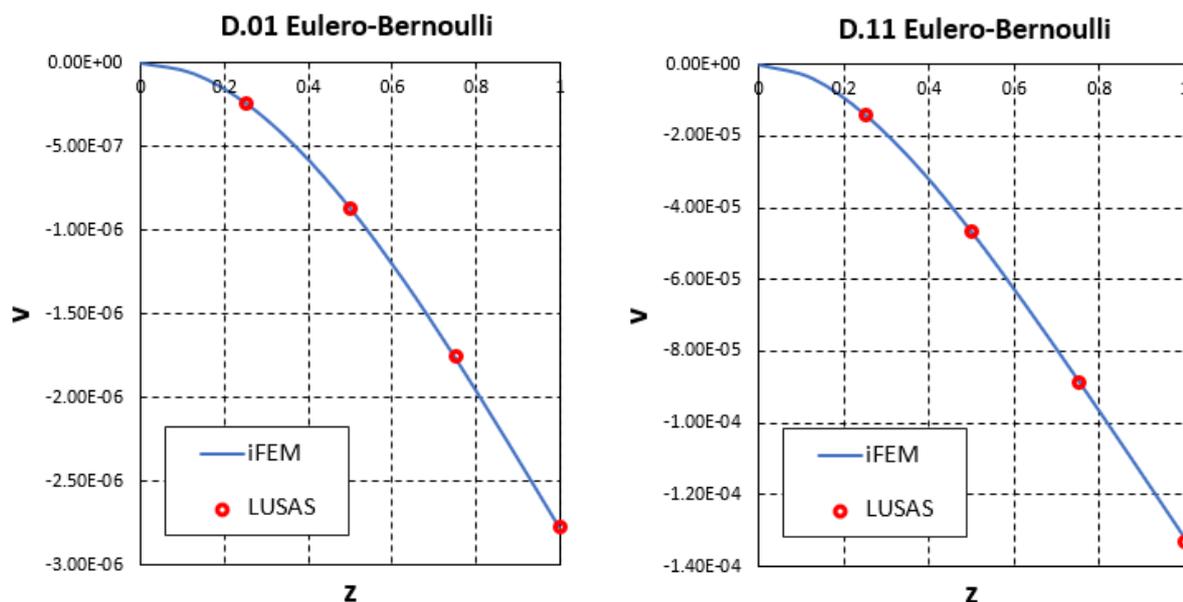


Figura 6.5 - Spostamento flessionale nel caso di forza concentrata e carico distribuito (Eulero Bernoulli)

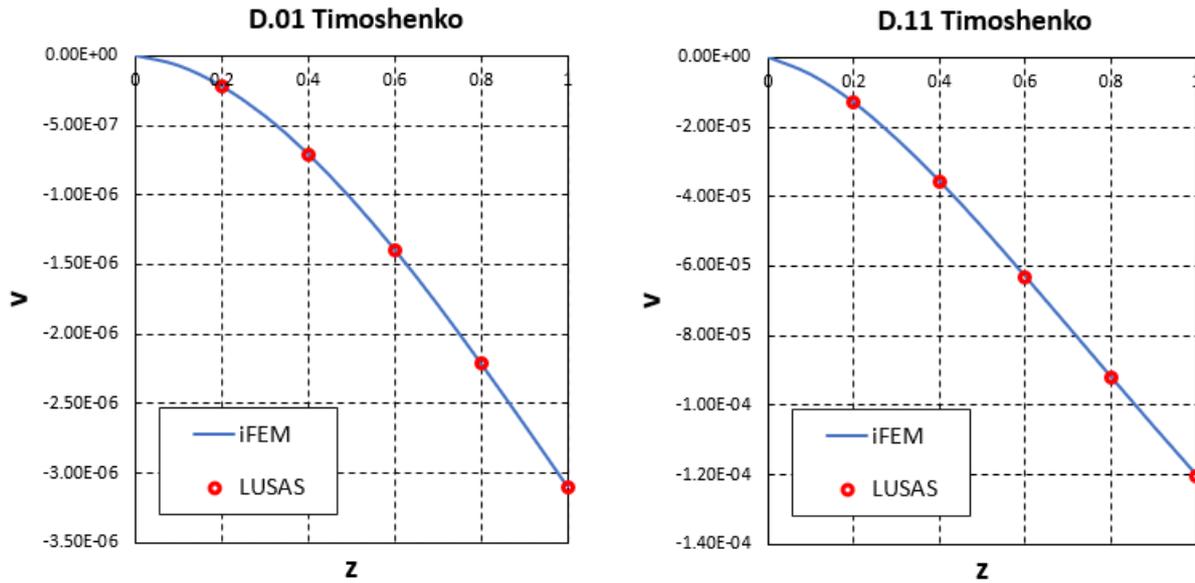


Figura 6.6 - Spostamento flessionale nel caso di forza concentrata e carico distribuito (Timoshenko)

Per la verifica dell'influenza che ha la posizione delle stazioni di misura sui risultati, si è considerato il caso di trave a sbalzo con la teoria di Eulero-Bernoulli, modellata con le distribuzioni D.11, D.12 e D.13. Si riportano in tabella 6.6 i risultati ottenuti per gli spostamenti dell'estremità libera.

Distribuzione	iFEM		LUSAS		ERROR [%]	
	u	v	u	v	u	v
D.11	1.11E-06	-1.33E-04	1.11E-06	-1.33E-04	0.010	0.241
D.12	1.11E-06	-1.30E-04			0.010	2.047
D.13	1.11E-06	-1.34E-04			0.010	0.737

Tabella 6.6 - Influenza della configurazione dei sensori

Dai risultati ottenuti si può rilevare che c'è una dipendenza dalla disposizione dei sensori che mostra come una configurazione maggiormente distribuita su tutto l'elemento fornirebbe risultati migliori. In particolare, l'errore maggiore è inerente alla configurazione D.12 che risulta quella meno distribuita sull'intera lunghezza dell'elemento. Tuttavia, considerando che l'errore in tal caso è del 2,047 %, si può ritenere un risultato comunque accettabile.

Per verificare l'effetto della snellezza λ sulla convergenza delle due teorie e sulla precisione dell'iFEM, si considerano travi a sbalzo caricate con forze concentrate, aventi stessa sezione trasversale ma valori crescenti di λ , ovvero 2.5, 3.75, 5 e 10. Le distribuzioni di sensori

considerate sono riportate in tabella 6.1. Si riporta di seguito il confronto dello spostamento flessionale v tra le varie tipologie.

Snellezza (l/h)	iFEM		LUSAS		ERROR [%]	
	EB	TM	EB	TM	EB	TM
2.5	-2.78E-06	-3.10E-06	-2.78E-06	-3.10E-06	0.01	0.01
3.75	-9.38E-06	-9.89E-06	-9.38E-06	-9.86E-06	0.00	0.30
5	-2.22E-05	-2.29E-05	-2.22E-05	-2.29E-05	0.01	0.01
10	-1.78E-04	-1.79E-04	-1.78E-04	-1.79E-04	0.01	0.02

Tabella 6.7 - Influenza della snellezza

Dai risultati riportati in tabella 6.7 si può osservare innanzitutto che l'affidabilità dell'iFEM è inalterata al variare della snellezza e quindi che la modellazione alla Timoshenko non risulta affetta dallo shear locking; inoltre, come prevedibile, si nota la convergenza delle due teorie all'aumentare della snellezza.

La procedura è stata testata anche per il caso dei telai piani caricati con forze concentrate e carichi distribuiti. Come per i casi precedenti, il risultato è stato comparato con la soluzione ottenuta attraverso la modellazione agli elementi finiti descritta nel paragrafo 6.1. Per l'analisi inversa, sono state usate le distribuzioni di sensori indicate in tabella 6.3 e 6.4 rispettivamente per i casi di forza concentrata e carico distribuito. I risultati ottenuti per i nodi liberi, sono riportati in tabella 6.8 così come le percentuali d'errore.

Teoria	dof	LUSAS		iFEM		ERROR [%]	
		F	Q	D.01	D.11	D.01	D.11
EB	u_1	2.09E-04	2.12E-04	2.09E-04	2.12E-04	0.003	0.013
	v_1	4.60E-07	-4.54E-06	4.60E-07	-4.54E-06	0.005	0.008
EB	u_2	2.02E-04	1.99E-04	2.02E-04	1.99E-04	0.021	0.032
	v_2	-4.60E-07	-5.46E-06	-4.60E-07	-5.46E-06	0.005	0.007
TM	u_1	2.15E-04	2.18E-04	2.15E-04	2.19E-04	0.056	0.109
	v_1	4.57E-07	-4.54E-06	4.57E-07	-4.53E-06	0.086	0.315
TM	u_2	2.08E-04	2.05E-04	2.08E-04	2.05E-04	0.083	0.076
	v_2	-4.57E-07	-5.46E-06	-4.57E-07	-5.46E-06	0.086	0.079

Tabella 6.8 - Spostamenti nodali per il caso dei telai piani

Complessivamente, si può concludere che anche se la teoria di Eulero-Bernoulli presenta una fedeltà maggiore con i risultati ottenuti mediante l'analisi FEM diretta, entrambe le teorie permettono di ottenere una predizione degli spostamenti ottimale. È importante osservare come tutti i risultati siano stato ottenuti con l'adozione di un solo elemento finito inverso. Anche se non necessario, date le basse percentuali di errore ottenute, la discretizzazione della struttura con mesh più fitte consentirebbe di abbassare ulteriormente le percentuali d'errore.

Capitolo 7

Conclusioni

L'obiettivo del presente lavoro è stato la ricerca di un metodo computazionale idoneo all'uso nei sistemi di monitoraggio della salute strutturale (SHM).

Un approccio robusto e computazionalmente efficiente per eseguire il rilevamento della forma è stato individuato nel cosiddetto metodo degli elementi finiti inverso (iFEM) sviluppato da Tessler e Spangler (2004) sulla base della teoria della deformazione a taglio del primo ordine per le piastre e successivamente adottato da Gherlone (2008) per il rilevamento della forma di tralicci, travi e telai sulla base delle ipotesi cinematiche della teoria di Timoshenko.

Al fine di rendere tale metodologia il più vicino possibile al campo dell'ingegneria civile, è stata definita nella presente tesi la formulazione iFEM anche sulla base della teoria di Eulero-Bernoulli. Analogamente alla procedura sviluppata da Gherlone et al. (2008, 2012) sono stati definiti due elementi inversi, uno di ordine 0 e l'altro di ordine 1. L'elemento di ordine 0 è utilizzato in presenza di una sollecitazione a taglio costante, mentre l'elemento di ordine 1 nel caso di sollecitazione a taglio di tipo lineare. Il numero di estensimetri necessari per l'analisi è legato all'ordine d'interpolazione desiderata.

In particolare, il quadro generale adottato è stato di valutare la precisione dei risultati ottenuti con l'iFEM alla Eulero-Bernoulli e di confrontarla con quella dell'iFEM alla Timoshenko, verificare la robustezza della metodologia rispetto alla distribuzione dei sensori ed alla snellezza degli elementi e di consolidare la metodologia rispetto ai casi più comuni di travi a sbalzo e telai piani caricati con forze concentrate e carichi uniformemente distribuiti. La validazione dei risultati è stata definita attraverso una comparazione con gli spostamenti ottenuti attraverso il metodo FEM diretto.

In generale, l'analisi inversa iFEM, che si basa solo sulle relazioni tra spostamenti e deformazioni, senza fare affidamento sui carichi applicati e sulle proprietà meccaniche dei materiali, ha dimostrato di essere altamente efficace ed efficiente nel predire le risposte strutturali e di possedere un'estrema versatilità in termini di tipologia strutturale, condizioni di carico e obiettivi da raggiungere. I futuri sviluppi dell'iFEM dovranno essere quelli di dimostrare la sua idoneità per la modellazione di una varietà di problemi tipici del campo civile, con geometrie complesse e soprattutto con condizioni di carico laboriose da determinare. Per

tali strutture sarebbero necessari un infittimento della discretizzazione facilmente realizzabile con l'adozione di sensori in fibra ottica o la definizione di un elemento inverso “ad hoc” che consenta una discretizzazione con il minor numero possibile di elementi.

La ricostruzione dell'intero campo degli spostamenti tridimensionali, con la definizione della forma deformata (shape sensing) e la valutazione di quantità utili a prevedere lo stato di salute strutturale (SHM), potrebbe svolgere un ruolo importante nel monitoraggio continuo e sistematico delle infrastrutture. Nell'ottica di una “digitalizzazione” delle infrastrutture, consentirebbe la mappatura di tutte le infrastrutture costruendo un registro informatizzato delle opere civili che ne individui parametri strutturali e priorità degli interventi manutentivi.

I dati raccolti potrebbero portare ulteriori conoscenze su come l'invecchiamento, il deterioramento e il danno possono influenzare le prestazioni dei sistemi strutturali e sulle interazioni tra costruito, sistemi naturali e sociali.

L'intera pratica dell'ingegneria civile e di gestione delle infrastrutture potrebbe essere migliorata grazie ad una progettazione efficace ed una validazione tempestiva dell'efficacia della manutenzione. La pratica corrente seguita nella manutenzione dei sistemi strutturali è basata su un approccio programmatico ed è guidata principalmente dalla paura del fallimento piuttosto che da una reale necessità. Se il fattore paura venisse superato, sarebbe possibile compiere progressi verso un'ispezione basata sulla domanda, ovvero monitorare solo quando è assolutamente necessario. La sicurezza sulla vita e i benefici economici associati a tale filosofia saranno ottenuti solo quando tutto questo verrà messo in pratica.

Bibliografia

- Akl W., Poh S., Baz A., “Wireless and distributed sensing of the shape of morphing structures” in *Sensors and Actuators A* 140, p. 94–102, 2004
- Balageas D., Fritzen C. P., Güemes A., *Structural Health Monitoring* London, Iste, 2006
- Carpinteri A., *Scienza delle costruzioni 1* II ed. Bologna, Pitagora Editrice, 1993
- Carpinteri A., *Scienza delle costruzioni 2* III ed. Bologna, Pitagora Editrice, 1995
- Cina A., *Trattamento delle misure topografiche* II ed. Torino, Celid, 2004
- Corigliano A., Taliercio A., *Meccanica computazionale* VII ed. Bologna, Società Esculapio, 2011
- Foss G. C., Hauge E. D., “Using modal test results to develop strain to displacement transformations” in *Spie* v. 2460, p. 112-118, 1995
- Gandhi M. V., Thompson B. D., *Smart materials and structures* London, Chapman & Hall, 1992
- Gherlone M., “Beam inverse finite element formulation” LAQ Report Politecnico di Torino, 2008
- Gherlone M., Cerracchio P., Mattone M., Di Sciuva M., Tessler A., “Inverse finite element method for three-dimensional frame structures” DIASP Report, 2010
- Gherlone M., Cerracchio P., Mattone M., Di Sciuva M., Tessler A., “Shape sensing of 3D frame structures using an inverse Finite Element Method” in *International Journal of Solids and Structures* v. 49, p. 3100-3112, 2012
- Gopalakrishnan S., Ruzzene M., Hanagud S., *Computational Techniques for Structural Health Monitoring* London, Springer, 2011
- Gugliotta A., *Elementi finiti Parte I* Politecnico di Torino, Otto editore, 2002
- Gugliotta A., *Elementi finiti Parte II* Politecnico di Torino, Otto editore, 2002
- <https://matlabacademy.mathworks.com>
- Jones R. T., Bellemore D. G., Berkoff T. A., Sirkis J. S., Davis M. A., Putnam M. A., Friebele E. J., Kersey A. D., “Determination of cantilever plate shapes using wavelength division multiplexed fiber Bragg grating sensors and a least-squares strain-fitting algorithm” in *Smart Materials and Structures* v. 7, p. 178-188, 1998
- Lively P. S., Atalla M. J., Hagood N. W., “Investigation of filtering techniques applied to the dynamic shape estimation problem” in *Smart Materials and Structures* v. 10, p. 264-272, 2001
- Serker N. H. M. K., Wu Z., “Structural health monitoring using static and dynamic strain data from long-gage distributed FBG sensor” in *IABSEJSCE Joint Conference on Advances in Bridge Engineering-II*, p. 519-526, 2010
- Shkarayev S., Krashantisa R., Tessler A., “An inverse interpolation method utilizing inflight strain measurements for determining loads and structural response of aerospace vehicles” in NASA Langley Technical Report Server, 2001

Tessler A., Spangler J. L., “Inverse FEM for full-field reconstruction of elastic deformations in shear deformable plates and shells” *Proc. of 2nd European Workshop on Structural Health Monitoring*, Munich, 2004

Timoshenko S., Goodier J. N., *Theory of elasticity* New York, McGraw-Hill, 1951

Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., *The Finite Element Method*, 1 v., V ed., Oxford, Butterworth-Heinemann, 2000