POLITECNICO DI TORINO

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA MECCANICA E AEROSPAZIALE Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

Tesi di Laurea Magistrale

Analisi dinamica di nano-piastre *Functionally Graded* rinforzate da nanotubi in carbonio su fondazione visco-elastica di Pasternak



Relatore: Marco Di Sciuva

> **Candidato:** Matteo Sorrenti

ANNO ACCADEMICO 2017-2018

"We choose to go to the Moon in this decade and do the other things, not because they are easy, but because they are hard"

John F. Kennedy

Sommario

Il materiale del terzo millennio è il carbonio. Dalla seconda metà del secolo scorso questo straordinario elemento, caratterizzato da una bassa densità, è stato utilizzato per produrre dei materiali sottoforma di fibra dalle caratteristiche meccaniche eccellenti. Però, la ricerca per utilizzarlo al meglio non si è fermata, ma si è arrivati ad ottenere strutture di dimensioni nanoscopiche chiamate nanotubi di carbonio.

Questa nuova classe di materiali, insieme al grafene, presentano proprietà interessanti non solo dal punto di vista strutturale (elevate caratteristiche meccaniche, bassa densità), ma anche dal punto di vista elettrico e magnetico, rendendoli potenziali materiali per utilizzi in vari campi ingegneristici.

L'industria aerospaziale è sempre stata alla ricerca di materiali in grado di soddisfare elevati standard di sicurezza e allo stesso tempo garantire un basso peso. Benché tali materiali innovativi non siano ancora impiegati a livello macroscopico, ma solo a quello nanoscopico, nel prossimo futuro si prevede che questi materiali inizino ad essere utilizzati per costruire strutture più elaborate. Quindi, diventa necessario avere gli strumenti adeguati a poter descrivere il comportamento di tali strutture.

Lo scopo di questo lavoro di tesi è quello di analizzare gli effetti derivanti dalla nanoscala per alcune tipologie di piastre, nelle quali si sceglie una certa distribuzione lungo lo spessore di nanotubi in carbonio. In particolare, partendo da un generico problema dinamico generale, si arriverà ad analizzare un caso semplificato di vibrazioni libere smorzate, dove si prenderà in considerazione l'effetto della fondazione viscoelastica di Pasternak, lo smorzamento strutturale e l'effetto della nanoscala. Per fare questo si utilizzeranno due programmi Matlab ®, di cui uno scritto dall'autore e un secondo rielaborato dal lavoro di tesi di Simone Gaia "*Analisi di risposta di piastre composite e sandwich*", con i quali si andrà a calcolare frequenze e smorzamento delle forme modali al variare di alcuni parametri. I risultati ottenuti verranno confrontati tra di loro e tra quelli presenti in letteratura per validare ulteriormente questi strumenti di analisi.

Ringraziamenti

Desidero ringraziare anzitutto il relatore di questa tesi, il Professore **Marco Di Sciuva**, per essere stato una guida ed un punto di riferimento, oltre che per la sua grande conoscenza e disponibilità mostratemi in questi mesi di lavoro.

Vorrei ringraziare anche i miei colleghi di università, amici di nuova e vecchia data, compagni di avventure dentro e fuori il collegio che mi sono stati vicini sopportandomi e sostenendomi nei momenti difficili, oltre ad obbligarmi a prendere qualche momento di pausa e di svago. Purtroppo, e per fortuna siete tanti e non basterebbe questo breve spazio per ringraziare personalmente ciascuno di voi.

Ringrazio particolarmente anche coloro che hanno speso parte del loro tempo a leggere, correggendo e fornendomi consigli a questo lavoro.

Infine, ma non per ultimo di importanza, un grande ringraziamento va alla mia famiglia, a mia mamma **Cristina**, a mio padre **Francesco** e a mio fratello **Davide** che in tutti questi anni della mia vita universitaria lontano, ma non troppo, da casa hanno saputo credere in me, sostenendomi in tutte le scelte e sopportandomi quando, purtroppo, diventavo poco trattabile nei momenti in cui qualcosa non funzionava.

Indice

SOMM	ARIO	V
RINGR	AZIAMENTI	VII
1. IN	FRODUZIONE	1
2. TE MATER NANOT	ORIA NON LOCALE PER I <i>MAGNETO-ELECTRO-THERMO-ELASTIC</i> RIALS (METE) E PROPRIETÀ DEI FUNCTIONALLY GRADED CARBON FUBES REINFORCED COMPOSITE (FG-CNTRC)	4
2.1.	TEORIA NON LOCALE DI ERINGEN	4
2.2.	REGOLA DELLE MISCELE E GEOMETRIA DEI FG-CNTRC	6
2.3.	SMORZAMENTO STRUTTURALE	9
3. RE	FINED ZIGZAG THEORY (RZT)	10
3.1.	CINEMATICA DELLA RZT	11
3.2.	FUNZIONI DELLA RFZ E RELAZIONI COSTITUTIVE DEL TAGLIO TRASVERSALE	12
4. EF	FETTI ESTERNI: ELETTROMAGNETISMO E FONDAZIONE	
VISCO	ELASTICA DI PASTERNAK	15
4.1.	Materiale piezoelettrico	15
4.2.	MATERIALE PIEZOMAGNETICO	17
4.3.	CAMPO MAGNETICO	18
4.4.	Fondazione viscoelastica di Pasternak	19
5. EQ	UAZIONI DEL MOTO	21
5.1.	RELAZIONI COSTITUTIVE	21
5.2.	METODO ENERGETICO: IL PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI	23
5.3.	ENERGIA DI DEFORMAZIONE ELASTICA	23
5.4.	LAVORO DELLE FORZE D'INERZIA	25
5.5.	LAVORO DEI CARICHI ESTERNI	27
5.5.	.1. Pressione esterna	27
5.5.	.2. Fondazione viscoelastica di Pasternak	27
5.5.	.3. Campo magnetico	28
5.5.	.4. Effetti termici	29 20
5.5	5. Attuatori piezomagnatici	29 30
5.5	7 Lavoro degli effetti indotti	50
5.6.	EOUAZIONI DEL MOTO	31
5.7.	RISULTANTI DI FORZE E MOMENTI ESPRESSE IN TERMINI LOCALI	33
6 50	LUZIONE APPROSSIMATA CON IL METODO DI RITZ	37
0. 50		
0.1. 6.2		3 / 27
63	FUNZIONI TRIAI	57
6.3. 6.4	FORMULAZIONE ENERGETICA DEL PROBLEMA	57
6.5.	IL PROBLEMA DINAMICO: VIBRAZIONI LIBERE SMORZATE	59
6.6.	IMPLEMENTAZIONE DEL METODO <i>P-RITZ</i> IN MATLAB ®	63

7. SO SULLA	LUZIONE APPROSSIMATA MEDIANTE ELEMENTI FINITI BASAT	'I 65
7.1.	Formulazione degli elementi finiti basati sulla teoria RZT	
7.3.	MATRICI DEGLI ELEMENTI FINITI	
7.3	2.1. Matrice di rigidezza dell'elemento	
7.3	2.2. Matrice di massa dell'elemento	69
7.3	2.3. Matrice di smorzamento strutturale dell'elemento	
7.3	2.4. Matrice di rigidezza della fondazione di Pasternak dell'elemento	
7.3	2.5. Matrice di smorzamento della fondazione di Pasternak dell'elemento	
7.3	2.6. Vettore dei carichi nodali dell'elemento	
7.4.	SCELTA DELLE FUNZIONI DI FORMA	74
7.5.	IL PROBLEMA DELLO SHEAR LOCKING	
7.6.	TRASFORMAZIONE DI COORDINATE E INTEGRAZIONE NUMERICA DI GAUSS	
7.7.	RISOLUZIONE DEL PROBLEMA DINAMICO: VIBRAZIONI LIBERE SMORZATE	80
8. AN	ALISI NUMERICA E CONFRONTI	
8.1.	ANALISI DI CONVERGENZA DEL METODO <i>P-RITZ</i>	
8.2.	ANALISI DI CONVERGENZA DEL PROGRAMMA AGLI ELEMENTI FINITI	
8.3.	ANALISI DI NANO-PIASTRE FG-CNTRC	
9. CC	DNCLUSIONE	127
APPEN	DICE	129
Prog	RAMMA MATLAB ® <i>P-RITZ</i>	129
BIBLIC)GRAFIA	146

Elenco delle tabelle

Tabella 2.1: Parametri di efficienza dei CNTs per differenti valori delle frazioni volumi	<i>che</i> [1]
$T_1 = 11 = 0.1$, $D_1 = 1 = 1 = 1 = 1 = 1 = 1 = 1 = 1 = 1 =$	0
Tabella 8.1: Dali relativi al laminalo L2 [2]	83 01
Tabella 8.2: Prime sei puisazioni adimensionali ai variare dei grado p	····· 84
Tabella 8.3: Prime sel pulsazioni dalmensionali al variare del grado p (segue da l	abella
	84
1 abella 8.4: Analisi di convergenza per l'elemento RZIQ4 Tabella 8.4: Analisi di convergenza per l'elemento RZIQ4	8/
Tabella 8.5: Analisi di convergenza per l'elemento RZTQ4 (segue da tabella precedente))87
Tabella 8.6: Analisi di convergenza per l'elemento RZTQ8	88
Tabella 8.7: Analisi di convergenza per l'elemento RZTQ8 (segue da tabella precedente)) 88
Tabella 8.8: Analisi di convergenza per l'elemento RZTQ4S	88
Tabella 8.9: Analisi di convergenza per l'elemento RZTQ4S (segue da tabella precedent	e) 89
Tabella 8.10: Caratteristiche meccaniche della matrice	90
Tabella 8.11: Caratteristiche meccaniche dei nanotubi in carbonio	90
Tabella 8.12: <i>Parametri di efficienza per</i> $V_{cnt}^* = 0.11$	91
Tabella 8.13: Prime 6 frequenze adimensionate per la nano-piastra FG-V	92
Tabella 8.14: Rapporti R _{mn}	92
Tabella 8.15: Prime pulsazioni adimensionali (SSSS)	93
Tabella 8.16: Prime pulsazioni adimensionali (CCCC)	94
Tabella 8.17: Prima frequenza adimensionale per le diverse nano-piastre FG con vincole	o SSSS 95
Tabella 8.18: Prima frequenza adimensionale per le diverse nano-piastre FG con v CCCC	<i>incolo</i>
Tabella 8.19: Valori delle pulsazioni adimensionali del primo modo e degli smorza adimensionali per $G=0.075$	<i>amenti</i> 99
Tabella 8.20: Valori delle pulsazioni adimensionali del primo modo e degli smorza adimensionali per $G=0.5$	<i>amenti</i> 100
Tabella 8.21:Valori delle pulsazioni adimensionali del primo modo e degli smorza adimensionali per $G=1$	<i>amenti</i> 100
Tabella 8.22: Valori della prima pulsazione adimensionale non smorzata per il caso di	nano-
piastra SSSS, con i parametri della fondazione $K_w = 100, K_G = 0, C_D = 0$ per i diver	rsi FG 106
Tabella 8.23: Valori della prima pulsazione adimensionale non smorzata per il caso di	nano-
piastra SSSS, con i parametri della fondazione $K_w = 100, K_G = 10, C_D = 0$ per i diver	rsi FG 107
Tabella 8.24: Valori della prima pulsazione adimensionale non smorzata per il caso di	nano-
piastra SSSS, con i parametri della fondazione $K_w = 200, K_G = 10, C_D = 0$ per i dive	rsi FG 107
Tabella 8.25: Valori di pulsazioni smorzate e fattore di smorzamento per le nano-piastre parametri della fondazione di Pasternak e smorzamento strutturale sono $K_w = 100$ 10, $C_D = 0$, $G = 0$	FG. I , $K_G =$ 113

Tabella 8.26: Valori di pulsazioni smorzate e fattore di smorzamento per le nano-piastre FG. I
parametri della fondazione di Pasternak e smorzamento strutturale sono $K_w = 100, K_G =$
$10, C_D = 15, G = 0$
Tabella 8.27: Valori di pulsazioni smorzate e fattore di smorzamento per le nano-piastre FG. I
parametri della fondazione di Pasternak e smorzamento strutturale sono $K_w = 100, K_G =$
$10, C_D = 20, G = 0.06$
Tabella 8.28: Valori della pulsazione naturale adimensionale per il caso FG-V (SSSS) 120
Tabella 8.29: Valori della pulsazione naturale adimensionale per il caso FG-V (CCCC) 120
Tabella 8.30: Valori di pulsazione adimensionata e coefficiente di smorzamento adimensionato
per il caso FG-V (SSSS) con parametri relativi alla fondazione e smorzamento strutturale sono
$K_w = 100, K_G = 10, C_D = 15 G = 0$
Tabella 8.31: Valori di pulsazione adimensionata e coefficiente di smorzamento adimensionato
per il caso FG-V (SSSS) con parametri relativi alla fondazione e smorzamento strutturale sono
$K_w = 100, K_G = 0, C_D = 20, G = 0.06$

Elenco delle Figure

Figura 1.1: Rappresentazione schematica di CNTs (a sinistra) e osservazioni al microscopio)
elettronico (al centro e a destra) [3]1	L
Figura 1.2: Schema di disposizione degli atomi di un singolo piano di grafene.[4]	2
Figura 1.3: Esempio di struttura realizzata con la filosofia FG e l'utilizzo di nanotubi e allumino	l
[5]	2
Figura 2.1: Raffigurazione schematica delle tipologie di FG-CNTRC [6]	3
Figura 2.2: Modello di materiale viscoelastico di Kelvin-Voigt [7]9)
Figura 3.1: Sistema di riferimento della piastra [8]11	L
Figura 3.2: Esempio di funzioni a zigzag per un laminato composto da 3 strati.[9]12	2
Figura 4.1: Rappresentazione della coordinata per lo strato di piezoelettrico16	5
Figura 4.2: Posizione dei piezoelettrici e relativi sistemi di coordinate	7
Figura 4.3: Rappresentazione schematica della fondazione viscoelastica di Pasternak [10]. 19)
Figura 4.4: Sistema di riferimento della fondazione di Pasternak [11])
Figura 6.1: Rappresentazione del piano di riferimento	2
Figura 6.2: Schema programma p-Ritz	ł
Figura 7.1: Piano naturale per elementi basati su 4 nodi	5
Figura 7.2: Piano naturale per elementi basati su 8 nodi	5
Figura 7.3: Elementi Virgin e Constrained [12]77	1
Figura 7.4: Esempio di integrazione con 9 punti di Gauss [13])
Figura 7.5: Schema risolutivo del problema dinamico mediante elementi finiti)
Figura 7.6: Schema dei vari passaggi per l'analisi dinamica con il programma agli element.	i
finiti)
Figura 8.1: Andamento della convergenza per le prime due frequenze	5
Figura 8.2: Rappresentazione dei primi 6 modi di vibrare, (1,1) in alto a sinistra, (1,2) in alto)
a destra, $(2,2)$ al centro a sinistra, $(1,3)$ al centro a destra, $(2,3)$ in basso a sinistra, $(3,3)$ in	ı
basso a destra	5
Figura 8.3: Confronto tra le convergenze alla prima pulsazione dei vari elementi)
Figura 8.4: Andamento delle pulsazioni adimensionali del primo modo nel caso di SSSS96	5
Figura 8.5: Andamento delle pulsazioni adimensionali del primo modo nel caso di CCCC 97	1
Figura 8.6: Confronto tra diverse condizioni al contorno della prima pulsazione adimensionale	2
per il caso FG-V	3
Figura 8.7: Andamento delle frequenze al variare del parametro non locale per diverse	2
tipologie di FG [11])
Figura 8.8: Andamento delle pulsazioni adimensionali smorzate al variare di G, per la nano-	-
piastra FG-U	L
Figura 8.9: Andamento delle pulsazioni adimensionali smorzate al variare di G, per la nano-	-
piastra FG-V)
Figura 8.10: Andamento del fattore di smorzamento al variare di G, per la nano-piastra FG-U	J
	,
Figura 8.11: Andamento delle pulsazioni adimensionali smorzate al variare di G. per la nano-	-
piastra FG-O	3

Figura 8.12: Andamento del fattore di smorzamento al variare di G, per la nano-piastra FG-V
Figura 8.13: Andamento delle pulsazioni adimensionali smorzate al variare di G, per la nano- piastra FG-X
Figura 8.14: Andamento del fattore di smorzamento al variare di G, per la nano-piastra FG-O 104
Figura 8.15: Andamento dello smorzamento adimensionale al variare di G, per la nano-piastra FG-X
Figura 8.16: Nella figura a sinistra si ha l'andamento della frequenza in funzione del parametro non locale. Nella figura a destra si ha la variazione del coefficiente di smorzamento al variare del parametro non locale. Le variazioni sono per diversi valori di G [14]106
Figura 8.17: Andamento delle pulsazioni adimensionali nei vari casi di nano-piastre FG (SSSS) con valori della fondazione di Pasternak $K_W = 100, K_G = 0, C_D = 0$
Figura 8.18: Andamento delle pulsazioni adimensionali nei vari casi di nano-piastre FG (SSSS) con valori della fondazione di Pasternak $K_W = 200, K_G = 10, C_D = 0$
Figura 8.19: Anaamento delle pulsazioni naturali adimensionali per la piastra FG-V (SSSS)
Figura 8.20: Andamento delle pulsazioni naturali adimensionali per la piastra FG-O (SSSS)
Figure 8.22: Andamento delle pulsazioni naturali adimensionali per la piastra FG-X (SSSS)
Figura 8.23: Andamento delle pulsazioni per la nano-piastra FG-U (SSSS) al variare dei
parametri della fondazione e di smorzamento strutturale
dei parametri della fondazione e di smorzamento strutturale
parametri della fondazione e di smorzamento strutturale
Figura 8.27: Andamento delle pulsazioni per la nano-piastra FG-O (SSSS) al variare dei parametri della fondazione e di smorzamento strutturale
Figura 8.28: Andamento del fattore di smorzamento per la nano-piastra FG-O (SSSS) al variare dei parametri della fondazione e di smorzamento strutturale
parametri della fondazione e di smorzamento strutturale
dei parametri della fondazione e di smorzamento strutturale
dell'articolo di riferimento, con caratteristiche della fondazione e di smorzamento strutturale $K_W = 100, G = 0.01, K_G = 0$ [14]

Figura 8.32: Andamento del fattore di smorzamento relativo al caso della piastra isotropa, dell'articolo di riferimento, con caratteristiche della fondazione e di smorzamento strutturale $K_W = 100, G = 0.01, K_G = 0$ [14].....119 Figura 8.33: Confronto tra le pulsazioni adimensionali per il caso SSSS tra p-Ritz e gli elementi Figura 8.34: Confronto tra le pulsazioni adimensionali per il caso CCCC tra p-Ritz e gli Figura 8.35: Andamento delle pulsazioni adimensionate nei casi p-Ritz e FEM (RZTQ8) per la nano-piastra FG-V, caratteristiche viscoelastiche $K_W = 100, K_G = 10 C_D = 15 G = 0..... 123$ Figura 8.36: Andamento del fattore di smorzamento nei casi p-Ritz e FEM (RZTQ8) per la Figura 8.37: Andamento del fattore di smorzamento nei casi p-Ritz e FEM (RZTQ8) per la nano-piastra FG-V, caratteristiche viscoelastiche $K_W = 100, K_G = 10 C_D = 15 G = 0 \dots 124$ Figura 8.38: Andamento delle pulsazioni adimensionate nei casi p-Ritz e FEM (RZTQ8) per la nano-piastra FG-V, caratteristiche viscoelastiche $K_W = 100, K_G = 0 C_D = 20 G = 0.06$. 124 Figura 8.39: Prima forma modale relativa alla nano-piastra FG-V ottenuta con il programma Figura 8.40: Prima forma modale relativa alla nano piastra FG-V ottenuta con il programma agli elementi finiti (RZTQ8)125

1. Introduzione

L'industria aerospaziale negli ultimi decenni si è evoluta nella progettazione delle strutture, ottenendone di sempre più leggere e, garantendo al tempo stesso un elevato grado di sicurezza. A tal proposito si è passato dall'utilizzo di materiali esclusivamente metallici a nuovi materiali innovativi come quelli compositi.

Ne corso degli anni, alcuni componenti strutturali impiegati negli aeromobili sono stati realizzati in materiale composito sottoforma di laminati o strutture di tipo sandwich, mentre precedentemente erano realizzati in lega di alluminio. Le straordinarie proprietà di leggerezza di questi nuovi materiali unita alle ottime caratteristiche meccaniche, comportamento a fatica, ha portato a compiere numerose ricerche in questo ambito. Contemporaneamente, anche le teorie strutturali impiegate per descrivere il comportamento sia statico che dinamico si sono modificate per tenere conto di effetti che in precedenza non erano previsti.

Nelle strutture in composito il materiale maggiormente impiegato per la sua versatilità è il carbonio. Utilizzato tipicamente sotto forma di fibre, presenta ottime caratteristiche meccaniche, bassa densità, buon comportamento a fatica, ma scarsa resistenza agli impatti.

Agli inizi degli anni '90 furono scoperti i nanotubi in carbonio (*Carbon Nanotubes CNTs*). Trattasi di strutture tubulari aventi dimensioni nanoscopiche costituite da atomi di carbonio ben organizzati per formare l'impalcatura cilindrica tipica [15].



Figura 1.1: *Rappresentazione schematica di CNTs (a sinistra) e osservazioni al microscopio elettronico (al centro e a destra)*

I forti legami di tipo covalente tra gli atomi di carbonio e la loro disposizione, permette di avere dei nanotubi, i quali nonostante le dimensioni siano molto ridotte, possiedono caratteristiche migliori di quelle delle fibre di carbonio più comunemente utilizzate. Oltre alle ottime proprietà meccaniche, i *CNTs* presentano anche capacità termiche magnetiche ed elettriche il che li rendono potenzialmente adatti ad un elevato numero di applicazioni, non solo quelle strutturali.

Oltre ai nanotubi in carbonio sono state scoperte anche altre strutture di interesse per numerose applicazioni, tra queste troviamo il grafene. In questa particolare configurazione nanostrutturale, gli atomi di carbonio si trovano disposti a formare una struttura bidimensionale, reticolare di tipo esagonale.



Figura 1.2: Schema di disposizione degli atomi di un singolo piano di grafene.

Disponendo in maniera opportuna i CNTs o i piani di grafene, si possono ottenere strutture in composito dalle differenti caratteristiche.

Quando il materiale di rinforzo viene opportunamente distribuito lungo lo spessore secondo una certa legge, i materiali che si ottengono vengono definiti *Functionally Graded (FG)*. Lo scopo originale di tali materiali [16] era quello di variare gradualmente le proprietà dei materiali utilizzati, in maniera tale da ottenere un prodotto con ottime caratteristiche e con meno problemi di incompatibilità in corrispondenza delle interfacce. Sempre secondo Estili et al. [16] i *CNTs* sono degli ottimi candidati per ottenere piastre del tipo *Functionally Graded*.



Figura 1.3: Esempio di struttura realizzata con la filosofia FG e l'utilizzo di nanotubi e allumina

Allo stato dell'arte, queste strutture sono ancora nanoscopiche e in una fase di ricerca in quanto le tecnologie per ottenerle e i metodi di produzione sono ancora troppo costosi ed elaborati per avere un'applicazione a livello industriale per il campo macroscopico. Recentemente, sempre nell'ambito della ricerca, sono stati raggiunti importanti risultati nell'utilizzo di questi materiali.

Nonostante questa limitazione tecnologica, gli impieghi attuali sono già molteplici [17] e vanno dai sensori per il monitoraggio delle strutture, a impieghi nella microelettronica e in campo biomedico, ma anche impieghi spaziali come nano-satelliti [18] o come micro-attuatori se utilizzati in combinazione con i materiali piezoelettrici [15].

Le teorie strutturale negli anni hanno subito anche loro un'evoluzione per poter essere sempre in grado di fornire risultati compatibili con quello che è il reale comportamento delle strutture. Con l'avvento dei nanomateriali si rende quindi necessario andare a considerare tutti quegli effetti (temperatura, campi elettrici/magnetici, interazioni atomiche) che nella scala macroscopica potevano essere trascurati.

Per poter quindi impiegare questi nuovi materiali, dobbiamo essere in grado di descrivere e prevedere il loro comportamento sia statico che dinamico con le opportune interazioni.

Lo scopo di questa tesi è quello di andare ad analizzare il comportamento dinamico di nanopiastre ottenute con la tecnica dei FG, dove il materiale di rinforzo è costituito dai CNTs. Per una descrizione migliore del comportamento reale verrà considerata la presenza della fondazione viscoelastica di Pasternak e dello smorzamento strutturale.

Nel **Capitolo 2** andremo ad analizzare la teoria nonlocale di Eringen, uno strumento fondamentale per poter descrivere le relazioni costitutive per le piastre di dimensione nanometrica costitute da *Magneto-ElectroThermo-Elastic materials (METE)*. Inoltre, verranno illustrate le caratteristiche dei *Functionally Graded Materials* più comunemente analizzati quando si vuole impiegare i nanotubi in carbonio come materiale di rinforzo.

Nel **Capitolo 3** verrà introdotta la teoria strutturale che verrà utilizzata in questo lavoro, la *Refined Zigzag Theory*. Questa teoria, derivata dalla *First Order Shear Deformation Theory*, ma con l'aggiunta di ulteriori gradi di libertà, permette nelle strutture costituite da più strati di materiali di cogliere meglio l'effetto del taglio trasversale, grazie all'azione di apposite funzioni a zigzag.

Nel **Capitolo 4** andremo a presentare gli effetti dovuti alla presenza della fondazione viscoelastica di Pasternak, di un campo magnetico, e di piezoelettrici/piezomagnetici integrati con la nano-piastra.

Nel **Capitolo 5** verranno derivate le equazioni del moto del problema generico della nanopiastra con i *METE materials* soggetta alla fondazione di Pasternak, all'azione dei piezoelettrici, a quella dei piezomagnetici, a quella del campo magnetico e agli effetti termici.

Il **Capitolo 6** prenderà in considerazione, partendo dal caso generale del **Capitolo 5**, un caso semplificato di maggiore interesse per questa tesi, il caso puramente elastico in cui compaiono gli effetti non locali, gli effetti viscosi e quelli della fondazione di Pasternak per risolvere il problema dinamico delle vibrazioni libere. A tale scopo verrà presentato il metodo di Ritz per ottenere una soluzione approssimata. Inoltre, verrà descritto anche la procedura di implementazione di Matlab ® di un programma con tale metodo.

Il **Capitolo 7** sarà riservato all'utilizzo come metodo risolutivo quello degli elementi finiti per il calcolo delle vibrazioni libere. In particolare, partendo da un programma agli elementi finiti su Matlab ® basato sulla RZT sviluppato nella tesi magistrale di Simone Gaia "Analisi di Risposta di Piastre Composite e Sandwich", verrà ampliato introducendo anche gli effetti della fondazione viscoelastica, dello smorzamento strutturale e degli effetti della nanoscala.

Nel **Capitolo 8** verranno presentati alcuni esempi numerici e confronti tra i risultati esistenti in letteratura e quelli ottenuti sia con il programma basato sul metodo di Ritz dell'autore applicato alla RZT e quello agli elementi finiti modificato.

Infine, nel **Capitolo 9** verranno presentate le conclusioni di tale lavoro, i commenti ai risultati e alcune considerazioni personali sui possibili sviluppi futuri.

2. Teoria non locale per i Magneto-Electro-Thermo-Elastic materials (METE) e proprietà dei Functionally Graded Carbon Nanotubes Reinforced Composite (FG-CNTRC)

2.1. Teoria non locale di Eringen

Nell'ambito delle nano/micro strutture, gli effetti delle interazioni tra i vari componenti che costituiscono i materiali impiegati diventano rilevanti e trascurarli potrebbe portare ad ottenere dei risultati poco accurati se confrontati con quelli che si osserverebbero sperimentalmente.

Considerando il caso di piastre o travi le cui dimensioni appartengono all'ambito della nanoscala, la presenza di materiali con proprietà che dipendono da punto a punto e con un'influenza reciproca, come nel caso dei nanotubi, non permette di utilizzare la teoria classica del continuo.

In letteratura, esistono molteplici teorie in grado di descrivere gli effetti nanoscopici di tali materiali. Nel confronto analizzato da Sladek et al. [19], si individua che la teoria dell'elasticità non locale di Eringen [20] è quella più indicata per l'analisi delle frequenze nel caso di vibrazioni smorzate.

In base a quanto viene espresso dallo stesso autore [20], per un generico materiale le cui proprietà dipendono da effetti meccanici, elettrici, magnetici e termici, lo stato tensionale o le relative grandezze elettriche e magnetiche, non dipendono solo dallo stato di deformazione in quello stesso punto, ma anche dallo stato di deformazione, dalle componenti elettriche, magnetiche e termiche di tutti gli altri punti del corpo.

Sfruttando il lavoro svolto da Jandaghian et al. [21] e adattandolo al caso di una piastra possiamo scrivere le relazioni costitutive nonlocali:

$$t_{ij} = \int_{V} \alpha(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \tau) [c_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\mathbf{x}') - e_{mij} E_m(\mathbf{x}') - q_{nij} H_n(\mathbf{x}') - \lambda_{ij} \Delta T] dV$$

$$D^{nl}_{\ i} = \int_{V} \alpha(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \tau) [e_{ikl} \varepsilon_{kl}(\mathbf{x}') + s_{im} E_m(\mathbf{x}') + d_{in} H_n(\mathbf{x}') + p_i \Delta T] dV$$

$$B^{nl}_{\ i} = \int_{V} \alpha(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \tau) [q_{ikl} \varepsilon_{kl}(\mathbf{x}') + d_{im} E_m(\mathbf{x}') + \mu_{in} H_n(\mathbf{x}') + \beta_i \Delta T] dV$$
(2.1)

All'interno delle equazioni (2.1) compaiono le componenti di tensione non locali t_{ij} , le componenti di deformazione della teoria locale ε_{ij} , gli spostamenti elettrici non locali D_i^{nl} , le componenti del campo elettrico locale E_i , le componenti del campo di induzione magnetico non locali B_i^{nl} , le componenti del campo magnetico locale H_i e il cambiamento di temperatura ΔT . Insieme a questi compaiono anche le varie costanti tipiche a seconda del materiale, in particolare abbiamo: c_{ijkl} le costanti elastiche, e_{mij} le costanti piezoelettriche, s_{im} le costanti dielettriche, q_{nij} le costanti piezomagnetiche, d_{in} le costanti magneto-elettriche, μ_{in} le costanti

magnetiche, λ_i il coefficiente di dilatazione termico, p_i le costanti pyro-elettriche e β_i le costanti pyro-magnetiche. I vettori $\mathbf{x} \in \mathbf{x}'$ indicano due punti del corpo considerato.

Il termine $\alpha(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \tau)$ è anche definita come *Kernel function* da Arani et al. [15], normalizzata rispetto al volume del corpo e rappresenta il modulo non locale. Secondo Eringen esso dipende da $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$, ovvero la norma euclidea, e dal parametro della scala di lunghezza τ così definito:

$$\tau = \frac{e_0 \tilde{a}}{l} \tag{2.2}$$

Il parametro individuato dall'espressione (2.2) è funzione della costante e_0 , definita anche come parametro non locale di Eringen, il quale dipende dal materiale e può essere ottenuto sperimentalmente oppure approssimato da alcune curve caratteristiche che fanno coincidere le curve di dispersione delle onde nel piano e la dinamica atomica. Il parametro τ dipende, inoltre dal rapporto tra due lunghezze caratteristiche: la lunghezza indicata con \tilde{a} rappresenta una caratteristica interna del materiale (ad esempio, può essere il diametro dei nanotubi o le dimensioni di una molecola), la lunghezza indicata con *l*, rappresenta una caratteristica macroscopica (come può essere una delle due dimensioni della piastra). Purtroppo, non è sempre facile avere un valore preciso del prodotto $e_0\tilde{a}$, proprio nella difficoltà delle misurazioni sperimentali. Ma dall'esperienza di Eringen [20] si è visto che tale parametro è uguale a 0.39 *nm*, mentre per i *CNTs* Wang [22] ottenne che il valore massimo si ottiene per 2*nm*.

Per le proprietà del modulo non locale esso assume il suo massimo valore quando $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ e diminuisce all'aumentare della norma euclidea. Quando $\tau \to 0$, la funzione α deve diventare la funzione delta di Dirac per poter includere la teoria classica dell'elasticità. Infatti, ricordando che l'integrale della funzione delta di Dirac è uguale ad uno, per questo caso particolare si trascurano gli effetti della scala nanoscopica. Quando invece, l'ordine di grandezza della caratteristica di lunghezza esterna l è lo stesso di quello della lunghezza interna a, il parametro $\tau \to 1$. In questo caso particolare, la teoria non locale deve approssimare quella dinamica atomica.

L'espressione integrale (2.1) è di difficile utilizzo in quanto l'integrale di volume non è facilmente risolvibile. Con le ipotesi di Eringen [20] si assume la funzione *Kernel* una funzione di Green di un operatore differenziale lineare \mathcal{L} espresso come segue:

$$L\alpha(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \tau) = \delta(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)$$
(2.3)

Sempre dalla trattazione di Eringen, l'operatore differenziale precedente può essere ricondotto ad una forma differenziale più facile da utilizzare nelle equazioni.

$$L = 1 - \tau^2 l^2 \nabla^2 \tag{2.4}$$

Applicando l'operatore differenziale espresso dalla formula (2.4) alle equazioni (2.1) otteniamo la scrittura delle relazioni costitutive tra tensioni non locali, spostamenti elettrici non locali, componenti del campo di induzione magnetico non locale e le corrispondenti della teoria locale.

$$L(t_{ij}) = \sigma_{ij}$$

$$L(D_i^{nl}) = D_i$$

$$L(B_i^{nl}) = B_i$$
(2.5)

Sviluppando le relazioni a destra dell'uguale per il caso di materiali *METE* nell'espressione (2.5) possiamo arrivare a scrivere:

$$t_{ij} - \tau^2 l^2 \nabla^2 t_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\mathbf{x}') - e_{mij} E_m(\mathbf{x}') - q_{nij} H_n(\mathbf{x}') - \lambda_{ij} \Delta T$$

$$D^{nl}_{\ i} - \tau^2 l^2 \nabla^2 D^{nl}_{\ i} = e_{ikl} \varepsilon_{kl}(\mathbf{x}') + s_{im} E_m(\mathbf{x}') + d_{in} H_n(\mathbf{x}') + p_i \Delta T$$

$$B^{nl}_{\ i} - \tau^2 l^2 \nabla^2 B^{nl}_{\ i} = q_{ikl} \varepsilon_{kl}(\mathbf{x}') + d_{im} E_m(\mathbf{x}') + \mu_{in} H_n(\mathbf{x}') + \beta_i \Delta T$$
(2.6)

Possiamo notare come a sinistra dell'uguale nelle equazioni (2.6), sia presente il laplaciano ∇^2 . Esso è moltiplicato per il parametro non locale τ , il quale tende a zero quando le dimensioni della piastra sono tali da non considerare gli effetti della nanoscala, ottenendo così le classiche equazioni dell'elasticità locale. In questo caso le equazioni (2.6) vengono riscritte:

$$t_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\mathbf{x}') - e_{mij} E_m(\mathbf{x}') - q_{nij} H_n(\mathbf{x}') - \lambda_{ij} \Delta T$$

$$D^{nl}_{\ i} = e_{ikl} \varepsilon_{kl}(\mathbf{x}') + s_{im} E_m(\mathbf{x}') + d_{in} H_n(\mathbf{x}') + p_i \Delta T$$

$$B^{nl}_{\ i} = q_{ikl} \varepsilon_{kl}(\mathbf{x}') + d_{im} E_m(\mathbf{x}') + \mu_{in} H_n(\mathbf{x}') + \beta_i \Delta T$$
(2.7)

2.2. Regola delle miscele e geometria dei *FG-CNTRC*

Le strutture realizzate in composito sono costituite da due tipologie di materiali, un primo definito matrice (tipicamente in quantità maggiore) ed un secondo detto rinforzo (in genere in quantità minore). Le caratteristiche di questi materiali vengono determinate, nella maggior parte dei casi, sperimentalmente mediante procedure standardizzate. Nel caso dei nanocompositi, l'utilizzo di tali metodi non sempre è possibile in quanto per effetto della nanoscala non è possibile riprodurre certe condizioni.

Nel determinare le caratteristiche meccaniche delle piastre nano-composite, dove il rinforzo è dato dai nanotubi in carbonio disposti secondo la tecnica dei FG, la regola delle miscele è quella più utilizzata ed è in grado di fornire risultati molto attendibili e in linea con i dati sperimentali che vengono ottenuti, come viene anche evidenziato da alcuni articoli elaborati da Arani et al. [15], Kolahchi et al. [23] e Thai et al. [1].

Le proprietà dei materiali si possono quindi esprimere:

$$E_{11} = \eta_1 V_{cnt} E_{11}^{cnt} + V_m E^m$$
(2.8)

$$\frac{\eta_2}{E_{22}} = \frac{V_{cnt}}{E_{22}^{cnt}} + \frac{V_m}{G_m}$$
(2.9)

$$\frac{\eta_3}{G_{12}} = \frac{V_{cnt}}{G_{12}^{cnt}} + \frac{V_m}{G_m}$$
(2.10)

Dove E_{11}^{cnt} , E_{22}^{cnt} , G_{12}^{cnt} sono i moduli di Young e il modulo di taglio dei nanotubi in carbonio, mentre E^m e G_m sono il modulo di Young e il modulo di taglio della matrice, considerata come materiale isotropo.

I coefficienti η_1, η_2, η_3 che compaiono nelle espressioni (2.8), (2.9) e (2.10) vengono definiti parametri di efficienza dei nanotubi in carbonio nelle proprietà del composito. Introducono un ulteriore dipendenza delle proprietà dalla scala del materiale. Vengono calcolati mediante l'utilizzo di simulazioni di dinamica molecolare.

La relazione che intercorre tra la frazione volumica dei $CNT(V_{cnt})$ e quella della matrice (V_m) è la seguente:

$$V_{cnt} + V_m = 1 \tag{2.11}$$

Il parametro che viene fatto variare nei *Functionally Graded materials*, nei quali sono impiegati a nanotubi in carbonio, è la frazione volumica di *CNTs*, pertanto i termini dell'equazione (2.11) sono funzione della variabile z.

La frazione volumica dei nanotubi in carbonio può essere derivata da quella in massa nel seguente modo:

$$V_{cnt}^{*} = \frac{W_{cnt}}{W_{cnt} + \left(\frac{\rho_{cnt}}{\rho_{m}}\right) (1 - W_{cnt})}$$
(2.12)

Dove si indica con w_{cnt} la frazione in massa di nanotubi, mentre ρ_m e ρ_{cnt} sono rispettivamente, la densità della matrice e quella dei nanotubi in carbonio.

Sempre con la regola delle miscele è possibile ricavare altre caratteristiche per il coefficiente di Poisson, per la densità del materiale e per i coefficienti di espansione termica.

$$v_{12} = V_{cnt}^* v_{12}^{cnt} + V_m v^m \tag{2.13}$$

$$\rho = V_{cnt} \rho_{cnt} + V_m \rho_m \tag{2.14}$$

$$\alpha_{11} = V_{cnt}^* \alpha_{11}^{cnt} + V_m \alpha^m$$
(2.15)

$$\alpha_{22} = \left(1 + v_{12}^{cnt}\right) V_{cnt} \alpha_{22}^{cnt} + \left(1 + v_m\right) V_m \alpha_m - v_{12} \alpha_{11}$$
(2.16)

A seconda della tipologia di piastra, il coefficiente di Poisson del composito può anche essere costante lungo lo spessore.

Note le principali caratteristiche, se non viene specificato in altro modo si possono usare le seguenti relazioni per le altre costanti del materiale:

$$E_{33} = E_{22}$$

$$G_{12} = G_{13} = G_{23}$$

$$v_{12} = v_{13}$$

$$v_{31} = v_{21}$$

$$v_{32} = v_{23} = v_{21}$$

$$v_{21} = \frac{E_{22}}{E_{11}}v_{12}$$
(2.17)

Le caratteristiche del materiale sono quindi funzioni della frazione volumica di nanotubi in carbonio e di quella della matrice. Dovendo però soddisfare l'equazione (2.11) si potrà scegliere solo una delle due frazioni volumiche. Come già accennato in precedenza la scelta ricade sulla frazione di nanotubi.

Di seguito riportiamo, per alcuni valori di frazione volumiche di *CNTs* più comunemente studiati [1], i valori dei corrispondenti parametri di efficienza.

V_{cnt}^{*}	η_1	η_2	η_3
0.11	0.149	0.934	0.934
0.14	0.150	0.941	0.941
0.17	0.149	1.381	1.381

Tabella 2.1: Parametri di efficienza dei CNTs per differenti valori delle frazioni volumiche

Per le nano-piastre rinforzate da *CNTs*, possiamo trovare quattro tipologie di distribuzione lungo lo spessore. Nella figura 2.1 vengono raffigurate in maniera schematica queste tipologie.



Figura 2.1: Raffigurazione schematica delle tipologie di FG-CNTRC

Per ciascuna tipologia, individuata da un'apposita lettera che rappresenta similmente la disposizione lungo lo spessore dei *CNTs*, possiamo definire le leggi di variazione della frazione volumica di quest'ultimi.

Per la distribuzione uniforme FG-UD (Figura 2.1 (a)) abbiamo:

$$V_{cnt}(z) = V_{cnt}^* \tag{2.18}$$

Per la distribuzione FG-V (Figura 2.1 (b)) abbiamo:

$$V_{cnt}(z) = \left(1 + 2\frac{z}{h}\right) V_{cnt}^*$$
(2.19)

Per la distribuzione FG-O (Figura 2.1 (c)) abbiamo:

$$V_{cnt}(z) = 2\left(1 - \frac{2|z|}{h}\right) V_{cnt}^{*}$$
(2.20)

Infine, per la distribuzione FG-X (Figura 2.1 (d)) abbiamo:

$$V_{cnt}(z) = 4 \frac{|z|}{h} V_{cnt}^{*}$$
(2.21)

2.3. Smorzamento strutturale

Nell'analisi dinamica delle nano-piastre, diventa rilevante anche l'effetto dello smorzamento strutturale. Le caratteristiche dei materiali sono, come viene anche individuato negli articoli di Arefi e Zenkour [24], Arani et al. [15] e Jamalpoor et al. [21], dipendenti dal tempo. In particolare, secondo il modello di Kelvin-Voigt, i moduli elastici e di taglio del materiale sono funzione di una parte indipendente dal tempo (quella statica) e da una parte funzione del tempo (quella viscosa), moltiplicata per un termine g definito coefficiente di smorzamento strutturale viscoelastico. Per i moduli elastici e di taglio possiamo quindi scrivere, rispettivamente:

$$\overline{E}_{ij} = E_{ij} + g \frac{\partial E_{ij}}{\partial t}$$
(2.22)

$$\overline{G}_{ij} = G_{ij} + g \frac{\partial G_{ij}}{\partial t}$$
(2.23)

Il modello di Kelvin-Voigt per la viscoelasticità del materiale può essere visto come una molla posizionata in parallelo ad uno smorzatore viscoso. La molla rappresenta la prima parte delle equazioni (2.22) e (2.23), mentre lo smorzatore individua il secondo termine delle suddette equazioni. Il parametro g, invece, può essere visto come il valore della costante di smorzamento dello smorzatore.

Questo completa la trattazione sulle varie caratteristiche da considerare per le nano-piastre di tipo *FG-CNTRC*, in cui è presente anche il contributo di smorzamento strutturale e l'effetto non locale.



Figura 2.2: Modello di materiale viscoelastico di Kelvin-Voigt

3. Refined Zigzag Theory (RZT)

Con l'avvento dei materiali compositi nelle strutture aeronautiche, si è reso necessario andare ad analizzare in maniera più dettagliata l'effetto del taglio trasversale. Le teorie classiche, come la teoria di Kirchhoff e la FSDT (*First order Shear Deformation Theory*), sono utilizzate per descrivere il comportamento di piastre, nel primo caso, sottili e, nel secondo caso, spesse. Queste teorie però non sono in grado di cogliere gli effetti del taglio quando si è in presenza di variazioni delle proprietà dei materiali lungo lo spessore. In particolare, il contributo relativo al taglio viene sottostimato e porta ad avere risultati poco in linea con le osservazioni sperimentali. Una possibile soluzione è quella di utilizzare le teorie dell'elasticità 3D, come quella di Pagano [25], ma questo comporta numerosi calcoli, specialmente se si vuole implementare tale teoria negli elementi finiti. L'alternativa è quella di sviluppare una teoria bidimensionale in grado di poter cogliere con più precisione l'effetto del taglio dovuto alla differenza dei vari strati che compongono il materiale composito della struttura.

La *Refined Zigzag Theory* sviluppata da Tessler et al.[21], è in grado, tramite l'utilizzo di apposite funzioni a zigzag per valutare gli spostamenti alle interfacce dei vari *layers*, di descrivere in maniera accurata il comportamento di tali piastre laminate, rendendo tale teoria molto competitiva dal punto di vista computazionale quando viene impiegata per l'utilizzo con gli elementi finiti. Inoltre, non si rende necessaria l'aggiunta di fattori correttivi del taglio come viene di solito fatto nella FSDT.

Nella nostra analisi delle nano-piastre FG-CNTRC abbiamo una variazione continua delle caratteristiche meccaniche del materiale. Questa variazione continua può essere vista come una variazione discreta di N_s strati di materiale. Le proprietà dell'ennesimo strato di materiale si suppongono costanti nello strato e il valore viene calcolato come il valore in corrispondenza a metà dello strato. Risulta evidente come facendo tendere ad infinito il numero di strati si otterrà la variazione continua di partenza.

Operando in questo modo possiamo utilizzare le potenzialità della teoria RZT al caso delle nano-piastre *FG-CNTRC*, come è stato già pensato da Arani et al. [15] o da Kolahchi [18].

Prendendo spunto dalla trattazione più approfondita di Tessler et al. [21], andiamo ad esprimere i concetti principali della teoria RZT.

3.1. Cinematica della RZT

Consideriamo una piastra di spessore uniforme h in un sistema di coordinate (x, y, z), come rappresentato in figura 3.1.



Figura 3.1: Sistema di riferimento della piastra

Per un generico punto (x, y, z) in un certo istante *t*, nello strato *k*-esimo, possiamo scrivere le componenti del vettore spostamento (u, v, w) come segue:

$$u^{(k)}(x, y, z, t) = u(x, y, t) + z\theta_{x}(x, y, t) + \phi_{x}^{(k)}\psi_{x}(x, y, t)$$

$$v^{(k)}(x, y, z, t) = v(x, y, t) + z\theta_{y}(x, y, t) + \phi_{y}^{(k)}\psi_{y}(x, y, t)$$

$$w^{(k)}(x, y, z, t) = w(x, y, z, t)$$
(3.1)

Le variabili $u(x, y, t) \in v(x, y, t)$ rappresentano gli spostamenti del piano medio lungo le direzioni $x \in y$, rispettivamente; $\theta_x(x, y, t) \in \theta_y(x, y, t)$ descrivono le rotazioni dovute alla flessione della normale alla faccia laterale, rispettivamente, attorno all'asse y positivo e x negativo; le variabili $\psi_x(x, y, t) \in \psi_y(x, y, t)$ rappresentano, invece, le ampiezze spaziali delle rotazioni individuate dalle funzioni a zigzag rappresentate da $\phi_x^{(k)} \in \phi_y^{(k)}$. Dalle equazioni (3.1) osserviamo che la teoria RZT comprende come caso particolare anche la teoria FSDT. Infatti, per un materiale omogeneo le funzioni a zigzag diventano nulle in quanto non sono presenti disomogeneità del materiale lungo lo spessore.

Andiamo ora a scrivere le componenti di deformazione, tenendo conto per una descrizione più completa anche delle non linearità delle deformazioni che vanno sotto il nome di non linearità di von Kàrmàn.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^{(k)} &= u_{,x} + z\theta_{x,x} + \phi_{x}^{(k)}\psi_{x,x} + \frac{1}{2}w_{,x}^{2} \\ \varepsilon_{yy}^{(k)} &= v_{,y} + z\theta_{y,y} + \phi_{y}^{(k)}\psi_{y,y} + \frac{1}{2}w_{,y}^{2} \\ \gamma_{xy}^{(k)} &= v_{,x} + u_{,y} + z\theta_{y,x} + z\theta_{x,z} + \phi_{x}^{(k)}\psi_{x,y} + \phi_{y}^{(k)}\psi_{y,x} + w_{,x}w_{,y} \\ \gamma_{xz}^{(k)} &= w_{,x} + \theta_{x} + \phi_{x,z}^{(k)}\psi_{x} \\ \gamma_{yz}^{(k)} &= w_{,y} + \theta_{y} + \phi_{y,z}^{(k)}\psi_{y} \end{aligned}$$
(3.2)

3.2. Funzioni della RFZ e relazioni costitutive del taglio trasversale

Le *refined zigzag functions* sono definite come funzioni lineari a tratti di classe C^0 che si sviluppano nello spessore del laminato.

Per il *k*-esimo strato localizzato tra $[z_{(k-1)}, z_{(k)}]$, le funzioni $\phi_x^{(k)} \in \phi_y^{(k)}$ sono date:

$$\phi_{x}^{(k)} = \frac{1}{2} \left(1 - \xi^{(k)} \right) u_{(k-1)} + \frac{1}{2} \left(1 + \xi^{(k)} \right) u_{(k)}$$

$$\phi_{y}^{(k)} = \frac{1}{2} \left(1 - \xi^{(k)} \right) v_{(k-1)} + \frac{1}{2} \left(1 + \xi^{(k)} \right) v_{(k)}$$
(3.3)

Dove indichiamo la coordinata adimensionata $\xi^{(k)}$

$$\xi^{(k)} = \left[\frac{z - z_{(k-1)}}{h^{(k)}} - 1\right]$$
(3.4)

Con $\xi^{(k)} \in [-1,1]$ (k = 1, ..., N).

Si definisce $h^{(k)}$ lo spessore dello strato k - esimo.

L'inizio del primo strato si definisce a $z_{(0)} = -\frac{h}{2}$, mentre l'ultimo $z_{(N)} = \frac{h}{2}$, $h^{(k)}$ rappresenta, invece, lo spessore del *k*-esimo strato. La coordinata che determina la fine del *k*-esimo layer è $z_{(k)} = z_{(k-1)} + h^{(k)}$.

Utilizzando la notazione di Tessler et al. [21] per la figura 3.2, possiamo visualizzare gli spostamenti alle interfacce u e v nelle direzioni x e y rispettivamente. Questi non sono altro che le funzioni zigzag valutate in corrispondenza delle interfacce.



Figura 3.2: Esempio di funzioni a zigzag per un laminato composto da 3 strati.

Nello specifico possiamo scrivere per (k = 1, ..., N):

$$u_{(k-1)} = \phi_x^{(k)}(\xi^{(k)} = -1), u_{(k)} = \phi_x^{(k)}(\xi^{(k)} = 1)$$

$$v_{(k-1)} = \phi_y^{(k)}(\xi^{(k)} = -1), v_{(k)} = \phi_y^{(k)}(\xi^{(k)} = 1)$$
(3.5)

Oltre alle espressioni individuate dalle equazioni (3.5), occorre imporre lo spostamento per u e v uguale a zero in corrispondenza della parte esterna della faccia superiore e di quella inferiore.

$$u_{(0)} = u_{(N)} = v_{(0)} = v_{(N)} = 0$$
(3.6)

Le espressioni (3.5) e (3.6) rappresentano un sistema di equazioni le cui incognite sono gli spostamenti alle interfacce e da queste, valutare le espressioni delle funzioni a zigzag.

Le derivate delle funzioni a zigzag lungo la coordinata z si possono così definire:

$$\begin{cases} \beta_x^{(k)} \\ \beta_y^{(k)} \end{cases} = \begin{cases} \phi_{x,z}^{(k)} \\ \phi_{y,z}^{(k)} \end{cases} = \frac{1}{h^{(k)}} \begin{cases} u_{(k)} - u_{(k-1)} \\ v_{(k)} - v_{(k-1)} \end{cases}$$
(3.7)

Integrando lungo lo spessore ed eguagliando ai valori che si ottengono sulla faccia superiore e inferiore otteniamo:

$$\int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \beta_{x}^{(k)} \atop \beta_{y}^{(k)} \right\} dz = \left\{ \sum_{k=1}^{N} h^{(k)} \beta_{x}^{(k)} \\ \sum_{k=1}^{N} h^{(k)} \beta_{y}^{(k)} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}$$
(3.8)

Integrando le espressioni per γ_{xz} e γ_{yz} otteniamo i valori medi delle deformazioni a taglio trasversale:

$$\begin{cases} \gamma_x \\ \gamma_y \end{cases} = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{+h/2} \begin{cases} \gamma_{xz}^{(k)} \\ \gamma_{yz}^{(k)} \end{cases} dz$$
(3.9)

Gli spostamenti alle interfacce vengono quindi ottenuti, combinando le equazioni (3.7) e (3.9) per (k = 1, ..., N):

$$\begin{cases} u_{(k)} \\ v_{(k)} \end{cases} = \begin{cases} \sum_{i=1}^{k} h^{(i)} \beta_{x}^{(i)} \\ \sum_{i=1}^{k} h^{(i)} \beta_{y}^{(i)} \end{cases}$$
(3.10)

A questo punto occorre ricavare le espressioni per $\beta_x^{(k)} \in \beta_y^{(k)}$. Seguendo la procedura indicata da Tessler et al.[21] si ottiene:

$$\begin{cases} \beta_x^{(k)} \\ \beta_y^{(k)} \end{cases} = \begin{cases} \frac{G_4}{Q_{44}^{(k)}} - 1 \\ \frac{G_5}{Q_{55}^{(k)}} - 1 \end{cases}$$
(3.11)

Integrando l'equazione (3.11) lungo lo spessore è possibile ricavare:

$$\begin{cases} G_{5} \\ G_{4} \end{cases} = \begin{cases} \left(\frac{1}{h} \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{dz}{Q_{55}^{(k)}}\right)^{-1} \\ \left(\frac{1}{h} \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{dz}{Q_{44}^{(k)}}\right)^{-1} \end{cases} = \begin{cases} \left(\frac{1}{h} \sum_{k=1}^{N} \frac{h^{(k)}}{Q_{55}^{(k)}}\right)^{-1} \\ \left(\frac{1}{h} \sum_{k=1}^{N} \frac{h^{(k)}}{Q_{44}^{(k)}}\right)^{-1} \end{cases}$$
(3.12)

Noti questi valori, i quali dipendono solamente dal materiale e dagli spessori, risulta immediato ricavare le derivate delle funzioni a zigzag e, in seguito, ottenere l'espressione per le stesse funzioni:

$$\phi_{x}^{(k)} = (z + \frac{h}{2}) \left(\frac{G_{5}}{Q_{55}^{(k)}} - 1 \right) + \sum_{i=2}^{k} h^{(i-1)} \left(\frac{G_{5}}{Q_{55}^{(i-1)}} - \frac{G_{5}}{Q_{55}^{(k)}} \right)$$

$$\phi_{y}^{(k)} = (z + \frac{h}{2}) \left(\frac{G_{4}}{Q_{44}^{(k)}} - 1 \right) + \sum_{i=2}^{k} h^{(i-1)} \left(\frac{G_{4}}{Q_{44}^{(i-1)}} - \frac{G_{4}}{Q_{44}^{(k)}} \right)$$
(3.13)

Con (k = 1, ..., N).

In particolare, osserviamo i rapporti adimensionali delle rigidezze, ottenuti con la seguente equazione, per $\alpha = 4,5$:

$$\frac{G_{\alpha}}{Q_{\alpha\alpha}^{(k)}} = \left(\frac{Q_{\alpha\alpha}^{(k)}}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{dz}{Q_{\alpha\alpha}^{(k)}}\right)^{-1}$$
(3.14)

Questi, sono delle funzioni costanti a tratti lungo lo spessore del laminato e nel caso di un materiale omogeneo per tutto lo spessore della piastra il valore del rapporto è uguale a 1. Per questo caso particolare si ottiene la teoria FSDT.

Diversamente, con un materiale fortemente disomogeneo, come possono esserlo i *Functionally Graded materials*, l'espressione (3.14) è in grado di cogliere le differenze di rigidezza tra strato e strato e permettere una corretta valutazione del contributo del taglio trasversale.

4. Effetti esterni: elettromagnetismo e fondazione viscoelastica di Pasternak

In letteratura, ed in particolare dai lavori di Arani et al. [10], [15], Arefi et al.[24], Zhang et al. [26], Jandaghian et al. [21] e Kamali et al. [27], la presenza di strati costituiti da materiali piezoelettrici, piezomagnetici, nanotubi in carbonio disposti secondo la tecnica dei *Functionally Graded*, si evince come l'effetto elettromagnetico debba essere tenuto in conto per descrivere correttamente il comportamento di queste particolari nano-piastre. Oltre agli effetti elettromagnetici, anche la presenza del mezzo in cui si trovano le nano-piastre deve essere presa in considerazione.

Per avere una trattazione il più generale possibile, in questo capitolo verranno trattati gli effetti dovuti alla presenza di strati di piezoelettrico, strati di piezomagnetici. Inoltre, poiché i nanotubi in carbonio presentano proprietà magnetiche quando sottoposti ad un campo magnetico, verranno esposte le equazioni per determinare le interazioni dovuti a questo effetto. Infine, verrà trattata la presenza del mezzo viscoelastico modellizzato con la fondazione di Pasternak.

4.1. Materiale piezoelettrico

Prendendo come riferimento la trattazione di Jandaghian et al. [21] e Kamali et al. [27], la presenza di strati di materiale piezoelettrico richiede il soddisfacimento delle equazioni di Maxwell. Per ottenere ciò, il campo elettrico deve soddisfare la seguente relazione vettoriale:

$$\vec{E} = -\nabla \varphi \tag{4.1}$$

Dove indichiamo con ∇ l'operatore gradiente:

$$\nabla(\bullet) = \left\{ \frac{\partial \bullet}{\partial x} \vec{i} \quad \frac{\partial \bullet}{\partial y} \vec{j} \quad \frac{\partial \bullet}{\partial z} \vec{k} \right\}$$
(4.2)

Con $\varphi(x, y, z, t)$ si indica il potenziale elettrico.

Sviluppando l'equazione (4.1) otteniamo:

$$\begin{cases} E_x \\ E_y \\ E_z \end{cases} = \begin{cases} -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{cases}$$
(4.3)

Come anche individuato da Arani et al. [22], il potenziale elettrico, dovendo soddisfare le equazioni di Maxwell, viene definito con una combinazione di una funzione trigonometrica ed una variazione lineare. Per un generico strato k costituito da un materiale piezoelettrico possiamo scrivere:

$$\varphi^{(k)}(x, y, z, t) = -\cos\left(\frac{\pi \overline{z}^{(k)}}{h_p^{(k)}}\right) \phi^{(E)}(x, y, t) + \frac{2\overline{z}^{(k)}V_0}{h_p^{(k)}}$$
(4.4)

Nell'equazione (4.4) compaiono: la distribuzione spaziale del potenziale elettrico $\phi^{(E)}(x, y, t)$ del piezoelettrico, il potenziale elettrico esterno V_0 applicato se si vuole far funzionare il materiale come attuatore. Lo spessore $h_p^{(k)}$ è lo spessore dello strato k-esimo di materiale piezoelettrico. L'espressione del potenziale elettrico φ viene fornita in funzione della coordinata $\bar{z}^{(k)}$. Il sistema di riferimento per cui viene definita questa nuova coordinata è riferito al piano medio dello strato di piezoelettrico come viene mostrato nella figura 4.1.



Figura 4.1: Rappresentazione della coordinata per lo strato di piezoelettrico

Indicando con $z_{-}^{(k)}$ è la quota dell'interfaccia inferiore dello strato k-esimo, $z_{+}^{(k)}$ la quota dell'interfaccia superiore dello strato k-esimo, possiamo ottenere l'espressione della coordinata \overline{z} :

$$\overline{z}^{(k)} = z - z_{-}^{(k)} - \frac{z_{+}^{(k)} - z_{-}^{(k)}}{2}$$
(4.5)

Tipicamente, gli strati di piezoelettrico vengono posizionati in corrispondenza degli strati più esterni in quanto più accessibili, per l'inserimento dei cablaggi.

L'equazione (4.5) si può quindi specializzare per lo strato esterno inferiore $\bar{z}^{(inf)}$ e per quello superiore $\bar{z}^{(sup)}$:

$$\overline{z}^{(inf)} = z + \frac{h_e}{2} + \frac{h_p}{2}$$
(4.6)

$$\overline{z}^{(sup)} = z - \frac{h_e}{2} - \frac{h_p}{2} \tag{4.7}$$

Nella figura 4.2 vengono rappresentati le due coordinate per gli strati suddetti.



Figura 4.2: Posizione dei piezoelettrici e relativi sistemi di coordinate

L'equazione (4.4) è valida nel caso generale di piezoelettrico funzionante da attuatore in quanto compare la differenza di potenziale V_0 applicato. Nel caso in cui si utilizzasse il piezoelettrico come sensore, non vi è alcuna differenza di potenziale da applicare e quindi il secondo termine della somma viene eliminato.

$$\varphi^{(k)}(x, y, z, t) = -\cos\left(\frac{\pi \overline{z}^{(k)}}{h_p^{(k)}}\right) \phi^{(E)}(x, y, t)$$
(4.8)

4.2. Materiale piezomagnetico

In presenza di strati di materiale piezomagnetico, usando sempre come riferimento Jandaghian [21], occorre soddisfare anche per questo caso l'equazione di Maxwell. Per ottenere ciò, il campo magnetico deve soddisfare la seguente relazione vettoriale:

$$\vec{H} = -\nabla \psi^{(m)} \tag{4.9}$$

Con $\psi^{(m)}(x, y, z, t)$ il potenziale magnetico. Sviluppando l'equazione (4.9) otteniamo:

$$\begin{cases}
H_{x} \\
H_{y} \\
H_{z}
\end{cases} = \begin{cases}
-\frac{\partial \psi^{(m)}}{\partial x} \\
-\frac{\partial \psi^{(m)}}{\partial y} \\
-\frac{\partial \psi^{(m)}}{\partial z}
\end{cases}$$
(4.10)

In maniera analoga con quanto visto per il campo elettrico, possiamo scrivere il potenziale magnetico come espressione di una parte trigonometrica e di una parte lineare. Per un generico strato k di materiale piezomagnetico

$$\psi^{(m)(k)}(x, y, z, t) = -\cos\left(\frac{\pi \overline{z}^{(k)}}{h^{(k)}_{m}}\right)\psi^{(H)}(x, y, t) + \frac{2\overline{z}^{(k)}A_{0}}{h^{(k)}_{m}}$$
(4.11)

La coordinata $\bar{z}^{(k)}$ è la stessa vista precedente, mentre $h_m^{(k)}$ rappresenta, invece, lo spessore dello strato k-esimo di materiale piezomagnetico, come $h_e^{(k)}$ lo era per quello piezomagnetico.

Se uno strato di tale materiale viene usato come sensore anziché da attuatore, la differenza di potenziale magnetico A_0 è nulla e possiamo riscrivere l'equazione (4.11):

$$\psi^{(m)(k)}(x, y, z, t) = -\cos\left(\frac{\pi \overline{z}^{(k)}}{h^{(k)}_{m}}\right)\psi^{(H)}(x, y, t)$$
(4.12)

Pertanto, risultano valide anche le espressioni (4.5), (4.6) e (4.7) con la sostituzione di notazione per il caso di materiale piezomagnetico.

4.3. Campo magnetico

Come già introdotto precedentemente, la presenza dei nanotubi in carbonio non solo permette di ottenere un materiale migliore dal punto di vista meccanico, ma introduce anche delle proprietà magnetiche. Queste diventano un effetto importante quando la nano-piastra viene sottoposta all'azione di un campo magnetico.

Kolahchi et al. [23] e Arani et al. [22] nei loro articoli, considerano un campo magnetico bidimensionale. Supponiamo di applicarlo in direzione α , con $\alpha = x, y$, il campo magnetico può essere scritto nel seguente modo:

$$\vec{H}_0 = H_x \delta_{x\alpha} \vec{i} + H_y \delta_{y\alpha} \vec{j}$$
(4.13)

Con $\delta_{x\alpha} \in \delta_{y\alpha}$ il delta di Kronecker. A seconda della scelta di α come allineamento lungo x o lungo y, il campo magnetico può avere di conseguenza solo una componente lungo x o lungo y rispettivamente.

La forza di Lorentz agente sulla piastra viene calcolata nel seguente modo, tramite il prodotto vettoriale tra il campo magnetico \vec{H}_0 e il vettore densità di corrente \vec{J} :

$$\vec{f}_m = \eta \left(\vec{J} \times \vec{H}_0 \right) \tag{4.14}$$

Nell'equazione (4.14) η è la costante di permeabilità magnetica.

Il vettore densità di corrente viene calcolato dalla seguente espressione:

$$\vec{J} = \nabla \times \vec{h} \tag{4.15}$$

L'equazione (4.15) definisce il vettore densità di corrente come il rotore del vettore \vec{h} .

Questo vettore è anche chiamato vettore di perturbazione del campo magnetico e si calcola come il rotore del prodotto vettoriale tra il campo di spostamenti $\vec{u} = (u, v, w)$ e il campo magnetico \vec{H}_0 .

$$\vec{h} = \nabla \times \left(\vec{u} \times \vec{H}_0 \right) \tag{4.16}$$

Dal punto di vista fisico questo vettore può essere inteso come l'effetto che il campo magnetico applicato ha sul campo magnetico intrinseco dei nanotubi in carbonio.

Mettendo insieme le equazioni precedenti arriviamo alla scrittura delle forze di Lorentz per unità di volume:

$$\vec{f}_m = \eta \left(\nabla \times \left(\nabla \times \left(\vec{u} \times \vec{H}_0 \right) \right) \right) \times \vec{H}_0$$
(4.17)

4.4. Fondazione viscoelastica di Pasternak

La fondazione viscoelastica di Pasternak viene comunemente inserita anche da altri autori in letteratura, come Arani et al. [28], per simulare i carichi normali che vengono trasferiti alla nano-piastra.

La fondazione viscoelastica di Pasternak è costituita da una serie di molle di rigidezza K_{1w} lineari, da molle di rigidezza K_{2w} per la parte non lineare, smorzatori viscosi di caratteristica C_d e da uno strato legato all'effetto del taglio di rigidezza K_q .

Nella figura 4.3 osserviamo la struttura di schematizzata della fondazione viscoelastica di Pasternak.



Figura 4.3: *Rappresentazione schematica della fondazione viscoelastica di Pasternak*

In generale la fondazione può avere caratteristiche ortotrope nell'espressione della rigidezza a taglio.



Figura 4.4: Sistema di riferimento della fondazione di Pasternak

Per un sistema solidale alla fondazione visco-elastica, rappresentato in figura 4.4, le cui direzioni principali sono identificate dai parametri (ξ, η) , l'angolo Θ rappresenta l'angolo tra la direzione di ξ e la direzione x della nano-piastra.

La forza di pressione prodotta dalla fondazione è la seguente, prendendo come esempio Arani et al [22]:

$$q_{PK} = K_{1w}w + K_{2w}w^3 + C_d\dot{w} - K_{g\xi} \left(\cos^2\Theta w_{,xx} + 2\cos\Theta\sin\Theta w_{,xy} + \sin^2\Theta w_{,yy}\right) + -K_{g\eta} \left(\sin^2\Theta w_{,xx} - 2\cos\Theta\sin\Theta w_{,xy} + \cos^2\Theta w_{,yy}\right)$$

$$(4.18)$$

I valori delle rigidezze a taglio nel caso ortotropo sono $K_{g\xi}$ e $K_{g\eta}$ nelle direzioni ξ ed η rispettivamente del sistema di riferimento della fondazione.

I parametri della fondazione dipendono dalle caratteristiche meccaniche dello strato sottostante. Kerr nel suo articolo [29] illustra una procedura semplificata per determinarli, dalla quale si osserva la diretta dipendenza tra i parametri e moduli elastici.
5. Equazioni del moto

In questo capitolo verranno ricavate le equazioni del moto secondo la teoria non locale di Eringe, presentata in precedenza, per una nano-piastra costituita da materiali *Magneto-Electro-Thermo-Elastic*, ottenuta con la tecnica dei *Functionally Graded* il cui materiale di rinforzo è dato dai *CNTs*. La teoria strutturale utilizzata è la *Refined Zigzag Theory* presentata precedentemente.

Verranno introdotte le relazioni costitutive e in seguito mediante il principio di Hamilton si andrà a derivare le equazioni del moto, tenendo in considerazione anche gli effetti trattati nel capitolo precedente.

5.1. Relazioni costitutive

Prendendo in considerazione i lavori di Arefi et al. [24], [30] e le relazioni della teoria non locale viste nel capitolo 2, andiamo a scrivere le equazioni costitutive per la generica la mia k-esima.

Come anche evidenziato da Liu et al. [31], per una struttura di tipo piastra nella quale si utilizza una teoria bidimensionale come l'RZT, compariranno, nell'espressione delle relazioni costitutive, i coefficienti di rigidezza ridotta, le costanti piezoelettriche ridotte, le costanti dielettriche ridotte, quelle magnetiche ridotte, termiche e pyro-elettriche/pyro-magnetiche ridotte.

Inoltre, consideriamo anche l'effetto dello smorzamento del materiale secondo la teoria di Kelvin-Voigt introdotta precedentemente.

Per le tensioni non locali possiamo scrivere:

$$\left(1 - \tau^{2} l^{2} \nabla^{2}\right) \begin{cases} t_{xx}^{(k)} \\ t_{yy}^{(k)} \\ t_{xz}^{(k)} \\ t_{yz}^{(k)} \\ t_{yz}^{(k)} \end{cases} = \left(1 + g \frac{\partial}{\partial t}\right) \begin{bmatrix} Q_{11}^{(k)} & Q_{12}^{(k)} & Q_{16}^{(k)} & 0 & 0 \\ Q_{12}^{(k)} & Q_{22}^{(k)} & Q_{26}^{(k)} & 0 & 0 \\ Q_{16}^{(k)} & Q_{26}^{(k)} & Q_{66}^{(k)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44}^{(k)} & Q_{45}^{(k)} \\ 0 & 0 & 0 & Q_{45}^{(k)} & Q_{55}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{cases} \varepsilon_{xx}^{(k)} \\ \varepsilon_{yy}^{(k)} \\ \gamma_{xy}^{(k)} \\ \gamma_{xz}^{(k)} \\ \gamma_{yz}^{(k)} \end{bmatrix} - \begin{cases} \lambda^{(k)} \\ \lambda^{(k)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta T + \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta T + \\ \left(1 + g \frac{\partial}{\partial t}\right) \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{13}^{(k)} \\ 0 & 0 & e_{23}^{(k)} \\ 0 & 0 & e_{23}^{(k)} \\ 0 & 0 & 0 \\ e_{41}^{(k)} & 0 & 0 \\ 0 & e_{52}^{(k)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{x}^{(k)} \\ \varepsilon_{x}^{(k)} \\ \varepsilon_{y}^{(k)} \\ \varepsilon_{y}^{(k)} \\ \varepsilon_{z}^{(k)} \end{bmatrix} - \left(1 + g \frac{\partial}{\partial t}\right) \begin{bmatrix} 0 & 0 & q_{31}^{(k)} \\ 0 & 0 & 0 \\ q_{41}^{(k)} & 0 & 0 \\ 0 & q_{52}^{(k)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{x}^{(k)} \\ H_{y}^{(k)} \\ H_{z}^{(k)} \end{bmatrix}$$
(5.1)

Per gli spostamenti elettrici non locali possiamo scrivere:

$$\begin{split} & \left(1-\tau^{2}l^{2}\nabla^{2}\right) \begin{cases} D_{x}^{(nl)(k)} \\ D_{y}^{(nl)(k)} \\ D_{z}^{(nl)(k)} \end{cases} = \left(1+g\frac{\partial}{\partial t}\right) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & e_{14}^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{25}^{(k)} \\ e_{31}^{(k)} & e_{32}^{(k)} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} \varepsilon_{xx}^{(k)} \\ \varepsilon_{yy}^{(k)} \\ \gamma_{xy}^{(k)} \\ \gamma_{yz}^{(k)} \\ \gamma_{yz}^{($$

Infine, per le componenti del campo di induzione magnetico non locale possiamo scrivere:

$$\begin{split} & \left(1-\tau^{2}l^{2}\nabla^{2}\right) \begin{cases} B_{x}^{(nl)(k)} \\ B_{y}^{(nl)(k)} \\ B_{y}^{(nl)(k)} \\ B_{z}^{(nl)(k)} \\$$

Nelle equazioni precedenti, compaiono le espressioni del campo elettrico \vec{E} e di quello magnetico \vec{H} , sostituendo le equazioni (4.4) e (4.11) nelle equazioni (4.3) e (4.10) rispettivamente, otteniamo:

$$\begin{cases}
E_{x}^{(k)} \\
E_{y}^{(k)} \\
E_{z}^{(k)}
\end{cases} = \begin{cases}
\cos\left(\frac{\pi \overline{z}^{(k)}}{h^{(k)}}\right) \frac{\partial \phi^{(E)}}{\partial x} \\
\cos\left(\frac{\pi \overline{z}^{(k)}}{h^{(k)}}\right) \frac{\partial \phi^{(E)}}{\partial y} \\
-\frac{\pi}{h^{(k)}} \sin\left(\frac{\pi \overline{z}^{(k)}}{h^{(k)}}\right) \phi^{(E)} - \frac{2V_{0}}{h^{(k)}}
\end{cases}$$
(5.4)

$$\begin{cases}
 H_{x}^{(k)} \\
 H_{y}^{(k)} \\
 H_{z}^{(k)}
 \end{bmatrix} = \begin{cases}
 \cos\left(\frac{\pi \overline{z}^{(k)}}{h^{(k)}}\right) \frac{\partial \psi^{(H)}}{\partial x} \\
 \cos\left(\frac{\pi \overline{z}^{(k)}}{h^{(k)}}\right) \frac{\partial \psi^{(H)}}{\partial y} \\
 -\frac{\pi}{h^{(k)}} \sin\left(\frac{\pi \overline{z}^{(k)}}{h^{(k)}}\right) \psi^{(H)} - \frac{2A_{0}}{h^{(k)}}
 \end{bmatrix}$$
(5.5)

In questo modo abbiamo tutti gli strumenti per poter scrivere le espressioni complete delle equazioni costitutive.

5.2. Metodo energetico: il Principio dei Lavori Virtuali

Il principio energetico che utilizzeremo per derivare le equazioni del moto è il Principio dei Lavori Virtuali.

Esso afferma [32]: "Dato un sistema di forze e tensioni equilibrato e un sistema di spostamenti e deformazioni congruenti, il lavoro che le forze esterne del rimo sistema compiono sugli spostamenti del secondo è uguale al lavoro che le tensioni interne del primo compiono sulle deformazioni del secondo".

Da questo principio si può ottenere un'importante relazione, ovvero l'uguaglianza tra le variazioni virtuali del lavoro delle forze interne con la variazione virtuale delle forze esterne:

$$\delta \mathcal{L}_{int} = \delta \mathcal{L}_{ext} \tag{5.6}$$

Dove all'interno delle forze interne compare l'energia di deformazione elastica, mentre in quella esterna vi si trova il lavoro dei carichi applicati.

Quanto detto è valido per il caso statico, ma può essere esteso al caso dinamico ottenendo così il Principio di D'Alambert, nel quale compaiono le forze d'inerzia.

In formule possiamo scrivere [2], [18]

$$\delta U + \delta W_{inersia} - \delta W_{ext} = 0 \tag{5.7}$$

Dove con δU si indica la variazione di energia cinetica, con $\delta W_{inerzia}$ la variazione del lavoro delle forze d'inerzia, mentre con δW_{ext} la variazione del lavoro delle forze esterne.

Andiamo ora a scrivere i vari contributi energetici.

5.3. Energia di deformazione elastica

Andiamo ora ad esprimere l'energia di deformazione elastica espressa nella teoria non locale.

$$\delta U = \int_{A-h/2}^{h/2} \int_{A-h/2}^{(k)} \delta E_{xx}^{(k)} + t_{yy}^{(k)} \delta E_{yy}^{(k)} + t_{xy}^{(k)} \delta \gamma_{xy}^{(k)} + t_{yz}^{(k)} \delta \gamma_{yz}^{(k)} + \\ -D_{x}^{(nl)(k)} \delta E_{x}^{(k)} - D_{y}^{(nl)(k)} \delta E_{y}^{(k)} - D_{z}^{(nl)(k)} \delta E_{z}^{(k)} + \\ -B_{x}^{(nl)(k)} \delta H_{x}^{(k)} - B_{y}^{(nl)(k)} \delta H_{y}^{(k)} - B_{z}^{(nl)(k)} \delta H_{z}^{(k)} \end{pmatrix} dz dA$$
(5.8)

Sostituendo con le espressioni delle deformazioni non lineari della teoria RZT e con le espressioni del campo elettrico e del campo magnetico, otteniamo:

$$\delta U = \int_{A-h/2}^{h/2} \int_{A-h/2}^{h/2} \cos\left(\frac{\pi z^{(k)}}{h^{(k)}}\right) \left(\frac{1}{2} \frac{w_{,x}^{2}}{w_{,y}^{2}}\right) + zt_{,xx}^{(k)} \delta \theta_{x,x} + \phi_{x}^{(k)} t_{,xx}^{(k)} \delta \psi_{x,x} + \\ + t_{,yy}^{(k)} \delta v_{,y} + t_{,yy}^{(k)} \delta \left(\frac{1}{2} \frac{w_{,y}^{2}}{w_{,y}^{2}}\right) + zt_{,yy}^{(k)} \delta \theta_{y,y} + \phi_{y}^{(k)} t_{,yy}^{(k)} \delta \psi_{y,y} + \\ + t_{,xy}^{(k)} \delta \left(v_{,x} + u_{,y}\right) + t_{,xy}^{(k)} \delta \left(w_{,x} w_{,y}\right) + zt_{,xy}^{(k)} \delta \left(\theta_{,x,y} + \theta_{y,x}\right) + \\ + \phi_{x}^{(k)} t_{,yy}^{(k)} \delta \psi_{x,y} + \phi_{y}^{(k)} t_{,yy}^{(k)} \delta \psi_{y,x} + \\ + t_{,xz}^{(k)} \delta \left(w_{,x} + \theta_{,x}\right) + t_{,xz}^{(k)} \phi_{x}^{(k)} \delta \psi_{x} + t_{,yz}^{(k)} \delta \left(w_{,y} + \theta_{,y}\right) + t_{,yz}^{(k)} \phi_{y}^{(k)} \delta \psi_{y} + \\ - D_{x}^{(nl)(k)} \cos\left(\frac{\pi \overline{z}^{(k)}}{h^{(k)}}\right) \delta \frac{\partial \phi^{(E)}}{\partial x} - D_{y}^{(nl)(k)} \cos\left(\frac{\pi \overline{z}^{(k)}}{h^{(k)}}\right) \delta \frac{\partial \phi^{(E)}}{\partial y} + \\ - B_{x}^{(nl)(k)} \cos\left(\frac{\pi \overline{z}^{(k)}}{h^{(k)}}\right) \delta \frac{\partial \psi^{(H)}}{\partial x} - B_{y}^{(nl)(k)} \cos\left(\frac{\pi \overline{z}^{(k)}}{h^{(k)}}\right) \delta \frac{\partial \psi^{(H)}}{\partial y} + \\ - B_{z}^{(nl)(k)} \left[-\frac{2A_{0}}{h^{(k)}} - \frac{\pi}{h^{(k)}} \sin\left(\frac{\pi \overline{z}^{(k)}}{h^{(k)}}\right) \delta \psi^{(H)}\right] \right]$$

$$(5.9)$$

Facendo comparire le risultanti di forze e momenti, e integrando lungo lo spessore otteniamo:

$$\delta U = \int_{A} \begin{pmatrix} \tilde{N}_{x} \delta \left(u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^{2} \right) + \tilde{M}_{x} \delta \theta_{x,x} + \tilde{M}_{x}^{\phi_{x}} \delta \psi_{x,x} + \tilde{N}_{y} \delta \left(v_{,y} + \frac{1}{2} w_{,y}^{2} \right) + \tilde{M}_{y} \delta \theta_{y,y} + \tilde{M}_{y}^{\phi_{y}} \delta \psi_{y,y} + \\ + \tilde{N}_{xy} \delta \left[\left(v_{,x} + u_{,y} \right) + w_{,x} w_{,y} \right] + \tilde{M}_{xy} \delta \left(\theta_{x,y} + \theta_{y,x} \right) + \tilde{M}_{xy}^{\phi_{x}} \delta \psi_{x,y} + \tilde{M}_{xy}^{\phi_{y}} \delta \psi_{y,x} + \\ + \tilde{Q}_{x} \delta \left(w_{,x} + \theta_{x} \right) + \tilde{Q}_{x}^{\phi_{x}} \delta \psi_{x} + \tilde{Q}_{y} \delta \left(w_{,y} + \theta_{y} \right) + \tilde{Q}_{y}^{\phi_{y}} \delta \psi_{y} + \\ - \tilde{L}_{x} \delta \frac{\partial \phi^{(E)}}{\partial x} - \tilde{L}_{y} \delta \frac{\partial \phi^{(E)}}{\partial y} + \tilde{L}_{z1} \delta \phi^{(E)} + \tilde{L}_{z2} V_{0} + \\ - \tilde{O}_{x} \delta \frac{\partial \psi^{(H)}}{\partial x} - \tilde{O}_{y} \delta \frac{\partial \psi^{(H)}}{\partial y} + \tilde{O}_{z1} \delta \psi^{(H)} + \tilde{O}_{z2} A_{0} \\ (5.10)$$

Dove le forze indicate con (\tilde{N}) , i momenti indicati con (\tilde{M}) , le forze di taglio trasversale (\tilde{Q}) , le forze elettriche (\tilde{L}) e quelle magnetiche (\tilde{O}) sono tutte espresse in termini non locali.

Possiamo quindi scrivere ciascuna espressione:

$$\begin{cases} \tilde{N}_{x} \\ \tilde{N}_{y} \\ \tilde{N}_{xy} \end{cases} = \sum_{k=1}^{N_{s}} \int_{z_{-}^{(k)}}^{z_{+}^{(k)}} \begin{cases} t_{xx}^{(k)} \\ t_{yy}^{(k)} \\ t_{xy}^{(k)} \end{cases} dz$$
(5.11)

$$\begin{cases} \tilde{M}_{x} \\ \tilde{M}_{y} \\ \tilde{M}_{xy} \end{cases} = \sum_{k=1}^{N_{s}} \int_{z_{-}^{(k)}}^{z_{+}^{(k)}} z \begin{cases} t_{xx}^{(k)} \\ t_{yy}^{(k)} \\ t_{xy}^{(k)} \end{cases} dz$$
(5.12)

$$\begin{cases} \tilde{Q}_{x} \\ \tilde{Q}_{y} \end{cases} = \sum_{k=1}^{N_{s}} \int_{z_{-}^{(k)}}^{z_{+}^{(k)}} \begin{cases} t_{xz}^{(k)} \\ t_{yz}^{(k)} \end{cases} dz$$
(5.13)

$$\begin{cases} \tilde{M}_{x}^{\phi_{x}} \\ \tilde{M}_{y}^{\phi_{y}} \\ \tilde{M}_{xy}^{\phi_{x}} \\ \tilde{M}_{xy}^{\phi_{y}} \end{cases} = \sum_{k=1}^{N_{s}} \int_{z_{-}^{(k)}}^{z_{+}^{(k)}} \begin{cases} \phi_{x}^{(k)} t_{xx}^{(k)} \\ \phi_{y}^{(k)} t_{yy}^{(k)} \\ \phi_{x}^{(k)} t_{xy}^{(k)} \\ \phi_{y}^{(k)} t_{xy}^{(k)} \\ \phi_{y}^{(k)} t_{xy}^{(k)} \\ \phi_{y}^{(k)} t_{xy}^{(k)} \\ \end{cases} dz$$
(5.14)

$$\begin{cases} \tilde{Q}_{x}^{\phi_{x}} \\ \tilde{Q}_{y}^{\phi_{y}} \end{cases} = \sum_{k=1}^{N_{s}} \int_{z_{-}^{(k)}}^{z_{+}^{(k)}} \begin{cases} \phi_{x,z}^{(k)} t_{xz}^{(k)} \\ \phi_{y,z}^{(k)} t_{yz}^{(k)} \end{cases} dz$$

$$(5.15)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{L}_{x} \\ \tilde{L}_{y} \\ \tilde{L}_{z1} \\ \tilde{L}_{z2} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{N_{x}} \int_{z_{-}^{(k)}}^{z_{+}^{(nl)(k)}} \cos\left(\frac{\pi \overline{z}^{(k)}}{h^{(k)}}\right) \\ D_{y}^{(nl)(k)} \cos\left(\frac{\pi \overline{z}^{(k)}}{h^{(k)}}\right) \\ D_{z}^{(nl)(k)} \frac{\pi \overline{z}^{(k)}}{h^{(k)}} \sin\left(\frac{\pi \overline{z}^{(k)}}{h^{(k)}}\right) \\ \frac{2D_{z}^{(nl)(k)}}{I^{(k)}} \end{bmatrix}$$
(5.16)

$$\begin{cases} \tilde{O}_{x} \\ \tilde{O}_{y} \\ \tilde{O}_{z1} \\ \tilde{O}_{z2} \end{cases} = \sum_{k=1}^{N_{x}} \sum_{z_{-}^{(k)}}^{z_{+}^{(k)}} \begin{cases} B_{x}^{(nl)(k)} \cos\left(\frac{\pi \overline{z}^{(k)}}{h^{(k)}}\right) \\ B_{y}^{(nl)(k)} \cos\left(\frac{\pi \overline{z}^{(k)}}{h^{(k)}}\right) \\ B_{z}^{(nl)(k)} \frac{\pi}{h^{(k)}} \sin\left(\frac{\pi \overline{z}^{(k)}}{h^{(k)}}\right) \\ B_{z}^{(nl)(k)} \frac{\pi}{h^{(k)}} \sin\left(\frac{\pi \overline{z}^{(k)}}{h^{(k)}}\right) \\ \frac{2B_{z}^{(nl)(k)}}{h^{(k)}} \end{cases} dz$$
(5.17)

5.4. Lavoro delle forze d'inerzia

Andiamo ad esprimere la variazione del lavoro delle forze d'inerzia:

$$\delta W_{inerzia} = -\int_{A-h/2}^{+h/2} \rho^{(k)} \Big[\dot{u}^{(k)} \delta \dot{u}^{(k)} + \dot{v}^{(k)} \delta \dot{v}^{(k)} + \dot{w}^{(k)} \delta \dot{w}^{(k)} \Big] dz dA$$
(5.18)

Si indica con $\rho^{(k)}$ la densità dello strato *k*-esimo, mentre il segno puntato sopra alle variabili indica la derivata rispetto al tempo $\dot{} = \frac{d}{dt}$.

Andando a sostituire all'interno dell'espressione del lavoro, le relazioni cinematiche, otteniamo:

$$\delta W_{inerzia} = -\int_{A-h/2}^{+h/2} \rho^{(k)} \begin{bmatrix} \dot{u}^{(0)} \delta \dot{u}^{(0)} + z^2 \dot{\theta}_x \delta \dot{\theta}_x + \phi_x^{(k)^2} \dot{\psi}_x \delta \dot{\psi}_x + z \dot{u}^{(0)} \delta \dot{\theta}_x + z \dot{\theta}_x \delta \dot{u}^{(0)} + \\ + \phi_x^{(k)} \dot{u}^{(0)} \delta \dot{\psi}_x + \phi_x^{(k)} \dot{\psi}_x \delta \dot{u}^{(0)} + z \phi_x^{(k)} \dot{\theta}_x \delta \dot{\psi}_x + z \phi_x^{(k)} \dot{\psi}_x \delta \dot{\theta}_x + \\ + \dot{\psi}^{(0)} \delta \dot{\psi}^{(0)} + z^2 \dot{\theta}_y \delta \dot{\theta}_y + \phi_y^{(k)^2} \dot{\psi}_y \delta \dot{\psi}_y + z \dot{\psi}^{(0)} \delta \dot{\theta}_y + z \dot{\theta}_y \delta \dot{\psi}^{(0)} + \\ + \phi_y^{(k)} \dot{\psi}^{(0)} \delta \dot{\psi}_y + \phi_y^{(k)} \dot{\psi}_y \delta \dot{\psi}^{(0)} + z \phi_y^{(k)} \dot{\theta}_y \delta \dot{\psi}_y + z \phi_y^{(k)} \dot{\psi}_y \delta \dot{\theta}_y + \\ + \dot{\psi}^{(0)} \delta \dot{\psi}^{(0)} \end{bmatrix} dz dA$$
(5.19)

Integrando lungo lo spessore si ha:

$$\delta W_{inerzia} = -\int_{A} \begin{bmatrix} I_{0} \dot{u}^{(0)} \delta \dot{u}^{(0)} + I_{2} \dot{\theta}_{x} \delta \dot{\theta}_{x} + I_{2}^{\phi_{x}} \dot{\psi}_{x} \delta \dot{\psi}_{x} + I_{1} \dot{u}^{(0)} \delta \dot{\theta}_{x} + I_{1} \dot{\theta}_{x} \delta \dot{u}^{(0)} + \\ + I_{0}^{\phi_{x}} \dot{u}^{(0)} \delta \dot{\psi}_{x} + I_{0}^{\phi_{x}} \dot{\psi}_{x} \delta \dot{u}^{(0)} + I_{1}^{\phi_{x}} \dot{\theta}_{x} \delta \dot{\psi}_{x} + I_{1}^{\phi_{x}} \dot{\psi}_{x} \delta \dot{\theta}_{x} + \\ + I_{0} \dot{v}^{(0)} \delta \dot{v}^{(0)} + I_{2} \dot{\theta}_{y} \delta \dot{\theta}_{y} + I_{2}^{\phi_{y}} \dot{\psi}_{y} \delta \dot{\psi}_{y} + I_{1} \dot{v}^{(0)} \delta \dot{\theta}_{y} + I_{1} \dot{\theta}_{y} \delta \dot{v}^{(0)} + \\ + I_{0}^{\phi_{y}} \dot{v}^{(0)} \delta \dot{\psi}_{y} + I_{0}^{\phi_{y}} \dot{\psi}_{y} \delta \dot{v}^{(0)} + I_{1}^{\phi_{y}} \dot{\theta}_{y} \delta \dot{\psi}_{y} + I_{1}^{\phi_{y}} \dot{\psi}_{y} \delta \dot{\theta}_{y} + \\ + I_{0} \dot{w}^{(0)} \delta \dot{w}^{(0)} \end{bmatrix} dA \qquad (5.20)$$

Nell'equazione (5.20) compaiono le varie inerzie. Queste vengono altresì calcolate:

$$I_0 = \sum_{k=1}^{N_s} \int_{z_-^{(k)}}^{z_+^{(k)}} \rho^{(k)} dz$$
(5.21)

$$I_{1} = \sum_{k=1}^{N_{s}} \int_{z_{-}^{(k)}}^{z_{+}^{(k)}} \rho^{(k)} z dz$$
(5.22)

$$I_{2} = \sum_{k=1}^{N_{s}} \int_{z_{-}^{(k)}}^{z_{+}^{(k)}} z^{2} \rho^{(k)} dz$$
(5.23)

$$I_{0}^{\phi_{x}} = \sum_{k=1}^{N_{s}} \int_{z_{-}^{(k)}}^{z_{+}^{(k)}} \phi_{x}^{(k)} \rho^{(k)} dz$$

$$I_{0}^{\phi_{y}} = \sum_{k=1}^{N_{s}} \int_{z_{-}^{(k)}}^{z_{+}^{(k)}} \phi_{y}^{(k)} \rho^{(k)} dz$$
(5.24)

$$I_{1}^{\phi_{x}} = \sum_{k=1}^{N_{s}} \int_{z_{-}^{(k)}}^{z_{+}^{(k)}} z \phi_{x}^{(k)} \rho^{(k)} dz$$

$$I_{1}^{\phi_{y}} = \sum_{k=1}^{N_{s}} \int_{z_{-}^{(k)}}^{z_{+}^{(k)}} z \phi_{y}^{(k)} \rho^{(k)} dz$$
(5.25)

$$I_{2}^{\phi_{x}} = \sum_{k=1}^{N_{s}} \sum_{z_{-}^{(k)}}^{z_{+}^{(k)}} \phi_{x}^{(k)2} \rho^{(k)} dz$$

$$I_{2}^{\phi_{y}} = \sum_{k=1}^{N_{s}} \sum_{z_{-}^{(k)}}^{z_{+}^{(k)}} \phi_{y}^{(k)2} \rho^{(k)} dz$$
(5.26)

5.5. Lavoro dei carichi esterni

Dal capitolo precedente, i possibili carichi esterni sono:

- Pressione esterna q_p
- Fondazione viscoelastica di Pasternak
- Campo magnetico

• Effetti indotti dalla temperatura, dai piezoelettrici e dai piezomagnetici

Mettendo insieme i vari contributi energetici si ha:

$$\delta W_{ext} = \left[\delta W_p + \delta W_{PK} + \delta W_m + \delta W_{in} \right]$$
(5.27)

Dove δW_p è la variazione virtuale del lavoro della pressione esterna, δW_{PK} è la variazione virtuale del lavoro della fondazione visco-elastica di Pasternak, δW_m la variazione virtuale del lavoro del campo magnetico applicato e δW_{in} la variazione virtuale del lavoro delle forze indotte.

5.5.1. Pressione esterna

Indicando con q_p il carico di pressione esterna applicata sulla piastra, andiamo a scrivere il lavoro prodotto:

$$\delta W_p = \int_A q \delta w dA \tag{5.28}$$

Questo può essere un semplice carico distribuito su tutta la piastra oppure un carico impulsivo applicato in zona localizzata.

5.5.2. Fondazione viscoelastica di Pasternak

Il carico trasferito dalla fondazione viscoelastica di Pasternak viene espresso nel seguente modo:

$$q_{P} = K_{1w}w + K_{2w}w^{3} + C_{d}\dot{w} - K_{g\xi}\left(\cos^{2}\Theta w_{,xx} + 2\cos\Theta\sin\Theta w_{,xy} + \sin^{2}\Theta w_{,yy}\right) + -K_{g\eta}\left(\sin^{2}\Theta w_{,xx} - 2\cos\Theta\sin\Theta w_{,xy} + \cos^{2}\Theta w_{,yy}\right)$$
(5.29)

Il lavoro prodotto può essere così scritto:

$$\delta W_{PK} = \int_{A} q_P \delta w dA =$$

$$= \int_{A} \left(K_{1w} w + K_{2w} w^3 + C_d \dot{w} - K_{g\xi} \left(\cos^2 \Theta w_{,xx} + 2\cos \Theta \sin \Theta w_{,xy} + \sin^2 \Theta w_{,yy} \right) + -K_{g\eta} \left(\sin^2 \Theta w_{,xx} - 2\cos \Theta \sin \Theta w_{,xy} + \cos^2 \Theta w_{,yy} \right) \right) \delta w dA$$
(5.30)

Nel caso in cui l'angolo Θ tra $x \in \xi$ sia nullo e $K_{g\xi} = K_{g\eta} = K_g$ possiamo scrivere:

$$\delta W_{PK} = \int_{A} \left(K_{1w} w + K_{2w} w^3 + C_d \dot{w} - K_g \nabla^2 w \right) \delta w dA$$
(5.31)

5.5.3. Campo magnetico

Nel caso in cui venga applicato un campo magnetico bidimensionale in una delle direzioni x o y, l'equazione (4.14) permette di ottenere la forza magnetica per unità di volume.

Sostituendo all'interno dell'equazione (4.14) le varie espressioni e sviluppando i passaggi avendo presente che il prodotto $H_x H_y$, per come viene definito $\overrightarrow{H_0}$, è sempre nullo, si arriva alla scrittura ottenuta anche da Arani et al. [15] della forza magnetica per unità di volume, la quale a seconda dell'orientamento del campo magnetico può essere ulteriormente semplificata eliminando alcuni termini.

Quindi si ottengono le forze per unità di volume:

$$f_x^{(k)} = \eta H_y^2 u_{,xx} + \eta H_y^2 z \theta_{x,xx} + \eta H_y^2 \phi_x^{(k)} \psi_{x,xx} + \eta H_y^2 u_{,yy} + \eta H_y^2 z \theta_{x,yy} + \eta H_y^2 \phi_x^{(k)} \psi_{x,yy}$$
(5.32)

$$f_{y}^{(k)} = \eta H_{x}^{2} v_{,xx} + \eta H_{x}^{2} z \theta_{y,xx} + \eta H_{x}^{2} \phi_{y}^{(k)} \psi_{y,xx} + \eta H_{x}^{2} v_{,yy} + \eta H_{x}^{2} z \theta_{y,yy} + \eta H_{x}^{2} \phi_{y}^{(k)} \psi_{y,yy}$$
(5.33)

$$f_{z}^{(k)} = \eta H_{x}^{2} w_{,xx} + \eta H_{y}^{2} w_{,yy} + \eta H_{y}^{2} \theta_{x,x} + \eta H_{y}^{2} \phi_{x,z}^{(k)} \psi_{x,x} + \eta H_{x}^{2} \theta_{y,y} + \eta H_{x}^{2} \phi_{y,z}^{(k)} \psi_{y,y}$$
(5.34)

Integrando lungo lo spessore otteniamo le risultanti di forze e momenti del campo magnetico per unità di area.

$$F_{mx} = \sum_{k=1}^{N_s} \int_{z_{-k}^{(k)}}^{z_{+k}^{(k)}} {\eta H_y^2 u_{,xx} + \eta H_y^2 z \theta_{x,xx} + \eta H_y^2 \phi_x^{(k)} \psi_{x,xx} + \eta H_y^2 \phi_x^{(k)} \psi_{x,xx} + \eta H_y^2 \psi_{x,yy} + \eta H_y^2 z \theta_{x,yy} + \eta H_y^2 \phi_x^{(k)} \psi_{x,yy} \right) dz$$
(5.35)

$$F_{my} = \sum_{k=1}^{N_s} \int_{z_{-}^{(k)}}^{z_{+}^{(k)}} {\eta H_x^2 v_{,xx} + \eta H_x^2 z \theta_{y,xx} + \eta H_x^2 \phi_y^{(k)} \psi_{y,xx} + \eta H_x^2 \psi_{y,yy} + \eta H_x^2 z \theta_{y,yy} + \eta H_x^2 \phi_y^{(k)} \psi_{y,yy} } dz$$
(5.36)

$$F_{mz} = \sum_{k=1}^{N_{x}} \int_{z_{-}^{(k)}}^{z_{+}^{(k)}} \binom{\eta H_{x}^{2} w_{,xx} + \eta H_{y}^{2} w_{,yy} + \eta H_{y}^{2} \theta_{x,x}}{+ \eta H_{y}^{2} \phi_{x,z}^{(k)} \psi_{x,x} + \eta H_{x}^{2} \theta_{y,y} + \eta H_{x}^{2} \phi_{y,z}^{(k)} \psi_{y,y}} dz$$
(5.37)

$$M_{mx} = \sum_{k=1}^{N_s} \int_{z_{-}^{(k)}}^{z_{+}^{(k)}} \left(\frac{z\eta H_y^2 u_{,xx} + \eta H_y^2 z^2 \theta_{x,xx} + \eta H_y^2 z \phi_x^{(k)} \psi_{x,xx} +}{+ z\eta H_y^2 u_{,yy} + \eta H_y^2 z^2 \theta_{x,yy} + \eta H_y^2 z \phi_x^{(k)} \psi_{x,yy}} \right) dz$$
(5.38)

$$M_{my} = \sum_{k=1}^{N_s} \int_{z_-^{(k)}}^{z_+^{(k)}} \left(\frac{z\eta H_x^2 v_{,xx} + \eta H_x^2 z^2 \theta_{y,xx} + \eta H_x^2 z \phi_y^{(k)} \psi_{y,xx} +}{+z\eta H_x^2 v_{,yy} + \eta H_x^2 z^2 \theta_{y,yy} + \eta H_x^2 z \phi_y^{(k)} \psi_{y,yy}} \right) dz$$
(5.39)

$$M_{mz} = \sum_{k=1}^{N_{s}} \int_{z_{-}^{(k)}}^{z_{+}^{(k)}} \begin{pmatrix} z\eta H_{x}^{2} w_{,xx} + z\eta H_{y}^{2} w_{,yy} + z\eta H_{y}^{2} \theta_{x,x} \\ +\eta H_{y}^{2} z\phi_{x,z}^{(k)} \psi_{x,x} + z\eta H_{x}^{2} \theta_{y,y} + \eta H_{x}^{2} z\phi_{y,z}^{(k)} \psi_{y,y} \end{pmatrix} dz$$
(5.40)

$$M_{mx}^{\phi_{x}} = \sum_{k=1}^{N_{s}} \int_{z_{-}^{(k)}}^{z_{+}^{(k)}} \begin{pmatrix} \eta H_{y}^{2} \phi_{x}^{(k)} u_{,xx} + \eta H_{y}^{2} z \phi_{x}^{(k)} \theta_{x,xx} + \eta H_{y}^{2} \phi_{x}^{(k)2} \psi_{x,xx} +$$

$$M_{mx}^{\phi_{y}} = \sum_{k=1}^{N_{s}} \int_{z_{-}^{(k)}}^{z_{+}^{(k)}} \begin{pmatrix} \eta H_{y}^{2} \phi_{y}^{(k)} u_{,xx} + \eta H_{y}^{2} z \phi_{y}^{(k)} \theta_{x,xx} + \eta H_{y}^{2} \phi_{x}^{(k)} \phi_{y}^{(k)} \psi_{x,xx} + \eta H_{y}^{2} \phi_{y}^{(k)} \theta_{x,yy} + \eta H_{y}^{2} z \phi_{y}^{(k)} \theta_{x,yy} + \eta H_{y}^{2} \phi_{x}^{(k)} \phi_{y}^{(k)} \psi_{x,yy} \end{pmatrix} dz$$
(5.42)

$$M_{my}^{\phi_{x}} = \sum_{k=1}^{N_{s}} \int_{z_{-}^{(k)}}^{z_{+}^{(k)}} \begin{pmatrix} \eta H_{x}^{2} \phi_{x}^{(k)} v_{,xx} + \eta H_{x}^{2} z \phi_{x}^{(k)} \theta_{y,xx} + \eta H_{x}^{2} \phi_{y}^{(k)} \phi_{x}^{(k)} \psi_{y,xx} + \eta H_{x}^{2} \phi_{y}^{(k)} \phi_{x}^{(k)} \psi_{y,xx} + \eta H_{x}^{2} \phi_{y}^{(k)} \phi_{x}^{(k)} \psi_{y,yy} + \eta H_{x}^{2} \phi_{y}^{(k)} \theta_{y,yy} + \eta H_{x}^{2} \phi_{y}^{(k)} \phi_{x}^{(k)} \psi_{y,yy} \end{pmatrix} dz$$
(5.43)

$$M_{mz}^{\phi_{x}} = \sum_{k=1}^{N_{s}} \int_{z_{-}^{(k)}}^{z_{+}^{(k)}} \begin{pmatrix} \phi_{x}^{(k)} \eta H_{x}^{2} w_{,xx} + \phi_{x}^{(k)} \eta H_{y}^{2} w_{,yy} + \phi_{x}^{(k)} \eta H_{y}^{2} \theta_{x,x} \\ + \eta H_{y}^{2} \phi_{x}^{(k)} \phi_{x,z}^{(k)} \psi_{x,x} + \phi_{x}^{(k)} \eta H_{x}^{2} \theta_{y,y} + \eta H_{x}^{2} \phi_{x}^{(k)} \phi_{y,z}^{(k)} \psi_{y,y} \end{pmatrix} dz$$
(5.44)

$$M_{mz}^{\phi_{y}} = \sum_{k=1}^{N_{s}} \int_{z_{-}^{(k)}}^{z_{+}^{(k)}} \left(\begin{array}{c} \phi_{y}^{(k)} \eta H_{x}^{2} w_{,xx} + \phi_{y}^{(k)} \eta H_{y}^{2} w_{,yy} + \phi_{y}^{(k)} \eta H_{y}^{2} \theta_{x,x} \\ + \eta H_{y}^{2} \phi_{y}^{(k)} \phi_{x,z}^{(k)} \psi_{x,x} + \phi_{y}^{(k)} \eta H_{x}^{2} \theta_{y,y} + \eta H_{x}^{2} \phi_{y}^{(k)} \phi_{y,z}^{(k)} \psi_{y,y} \end{array} \right) dz$$
(5.45)

Si scrive, quindi, il lavoro del campo magnetico:

$$\delta W_m = \int_{A} \begin{pmatrix} F_{mx} \delta u + F_{my} \delta v + F_{mz} \delta w + M_{mx} \delta \theta_x + M_{my} \delta \theta_y + \\ + \left(M_{mx}^{\phi_x} + M_{mx}^{\phi_y} \right) \delta \psi_x + \left(M_{my}^{\phi_x} + M_{my}^{\phi_y} \right) \delta \psi_y \end{pmatrix} dA$$
(5.46)

I momenti magnetici M_{mz} , $M_{mz}^{\phi_x} \in M_{mz}^{\phi_y}$ non compaiono nell'espressione dell'energia, in quanto non producono lavoro, non essendoci le variabili cinematiche per i quali verrebbero moltiplicati e pertanto sono posti uguale a zero [15].

5.5.4. Effetti termici

L'effetto di variazione della temperatura produce una forza applicata nelle direzioni x e y come anche già individuato da Zhang [26] e Jandaghian [21].

$$N_{T_x} = N_{T_y} = \sum_{k=1}^{N_x} \sum_{z_{-}^{(k)}}^{z_{+}^{(k)}} \lambda^{(k)} \Delta T dz$$
(5.47)

5.5.5. Attuatori piezoelettrici

In presenza di strati di materiale piezoelettrico occorre tenere conto della differenza di potenziale applicato allo strato. In analogia con quanto espresso da Arani [15] Zhang [26] e Arefi [30] si può scrivere per il campo elettrico E_z generato dal solo termine esterno:

$$E_z^{(k)} = 2\frac{V_0^{(k)}}{h^{(k)}} \tag{5.48}$$

Le risultanti delle forze generate dal piezoelettrico sono:

$$N_{Ex} = \sum_{k=1}^{N_s} \int_{z_-^{(k)}}^{z_+^{(k)}} e_{13}^{(k)} E_z^{(k)} dz = \sum_{k=1}^{N_s} 2e_{13}^{(k)} V_0^{(k)}$$
(5.49)

$$N_{Ey} = \sum_{k=1}^{N_s} \int_{z_{-}^{(k)}}^{z_{+}^{(k)}} e_{23}^{(k)} E_z^{(k)} dz = \sum_{k=1}^{N_s} 2e_{23}^{(k)} V_0^{(k)}$$
(5.50)

La risultante dei momenti dovuti all'azione degli strati di piezoelettrici è data da:

 α

$$M_{Ex} = \sum_{k=1}^{N_s} \int_{z_-^{(k)}}^{z_+^{(k)}} z e_{13}^{(k)} E_z^{(k)} dz$$
(5.51)

$$M_{Ey} = \sum_{k=1}^{N_s} \sum_{z_{-}^{(k)}}^{z_{+}^{(k)}} z e_{23}^{(k)} E_z^{(k)} dz$$
(5.52)

$$M_{Ex}^{\phi_x} = \sum_{k=1}^{N_s} \int_{z_-^{(k)}}^{z_+^{(k)}} \phi_x^{(k)} e_{13}^{(k)} E_z^{(k)} dz$$
(5.53)

$$M_{Ex}^{\phi_y} = \sum_{k=1}^{N_s} \int_{z_-^{(k)}}^{z_+^{(k)}} \phi_y^{(k)} e_{13}^{(k)} E_z^{(k)} dz$$
(5.54)

$$M_{Ey}^{\phi_x} = \sum_{k=1}^{N_s} \int_{z_-^{(k)}}^{z_+^{(k)}} \phi_x^{(k)} e_{23}^{(k)} E_z^{(k)} dz$$
(5.55)

$$M_{Ey}^{\phi_y} = \sum_{k=1}^{N_s} \int_{z_-^{(k)}}^{z_+^{(k)}} \phi_y^{(k)} e_{23}^{(k)} E_z^{(k)} dz$$
(5.56)

Se la posizione degli strati di piezoelettrico è simmetrica rispetta al piano medio ed entrambi funzionano come attuatori l'effetto dei momenti diventa nullo pertanto si avrà in questo caso:

$$M_{Ex} = M_{Ey} = M_{Ex}^{\phi_x} = M_{Ex}^{\phi_y} = M_{Ey}^{\phi_x} = M_{Ey}^{\phi_y} = 0$$
(5.57)

5.5.6. Attuatori piezomagnetici

In presenza di strati di materiale piezomagnetico possiamo scrivere in analogia a quanto fatto nella sezione precedente le risultanti di forza e momenti prodotti dall'attuazione di questi strati. Il campo magnetico generato dalla sola attuazione è dato:

$$H_z^{(k)} = 2\frac{A_0^{(k)}}{h^{(k)}} \tag{5.58}$$

Scriviamo ora le risultanti di forze e momenti:

$$N_{Mx} = \sum_{k=1}^{N_s} \int_{z_{-}^{(k)}}^{z_{+}^{(k)}} q_{13}^{(k)} H_z^{(k)} dz = \sum_{k=1}^{N_s} 2q_{13}^{(k)} A_0^{(k)}$$
(5.59)

$$N_{My} = \sum_{k=1}^{N_s} \int_{z_-^{(k)}}^{z_+^{(k)}} q_{23}^{(k)} H_z^{(k)} dz = \sum_{k=1}^{N_s} 2q_{23}^{(k)} A_0^{(k)}$$
(5.60)

$$M_{Mx} = \sum_{k=1}^{N_s} \int_{z_{-}^{(k)}}^{z_{+}^{(k)}} zq_{13}^{(k)} H_z^{(k)} dz$$
(5.61)

$$M_{My} = \sum_{k=1}^{N_s} \int_{z_-^{(k)}}^{z_+^{(k)}} zq_{23}^{(k)} H_z^{(k)} dz$$
(5.62)

$$M_{Mx}^{\phi_x} = \sum_{k=1}^{N_s} \int_{z_-^{(k)}}^{z_+^{(k)}} \phi_x^{(k)} q_{13}^{(k)} H_z^{(k)} dz$$
(5.63)

$$M_{My}^{\phi_x} = \sum_{k=1}^{N_s} \int_{z_-^{(k)}}^{z_+^{(k)}} \phi_x^{(k)} q_{23}^{(k)} H_z^{(k)} dz$$
(5.64)

$$M_{My}^{\phi_{y}} = \sum_{k=1}^{N_{s}} \sum_{z_{-}^{(k)}}^{z_{+}^{(k)}} \phi_{y}^{(k)} q_{23}^{(k)} H_{z}^{(k)} dz$$
(5.65)

Anche in questo caso per una laminazione simmetrica dei piezomagnetici, e con un'attuazione combinata di entrambi si ottiene:

$$M_{Mx} = M_{My} = M_{Mx}^{\phi_x} = M_{Mx}^{\phi_y} = M_{My}^{\phi_x} = M_{My}^{\phi_y} = 0$$
(5.66)

5.5.7. Lavoro degli effetti indotti

Gli effetti indotti dalla presenza di una differenza di temperatura, dall'azione dei piezoelettrici e dei piezomagnetici producono una risultante di forze (nelle ipotesi di avere una laminazione simmetrica) che possiamo scrivere come:

$$\bar{N}_{x} = N_{Tx} + N_{Ex} + N_{Mx}$$
(5.67)

$$\bar{N}_{y} = N_{Ty} + N_{Ey} + N_{My} \tag{5.68}$$

$$\overline{N}_{xy} = 0 \tag{5.69}$$

Il lavoro di queste forze può essere così scritto [33]:

$$\delta W_{in} = \int_{A} \left(\bar{N}_{x} w_{,x} \delta w_{,x} + \bar{N}_{y} w_{,y} \delta w_{,y} + \bar{N}_{xy} w_{,x} \delta w_{,y} + \bar{N}_{xy} w_{,y} \delta w_{,x} \right) dA$$
(5.70)

5.6. Equazioni del moto

Andiamo ora a scrivere le equazioni derivandole dal principio di D'Alambert.

Nell'espressione dell'energia potenziale elastica compaiono le tensioni non locali. Applicando a ciascun termine energetico (5.7) l'operatore differenziale $\mathcal{L} = (1 - \tau^2 l^2 \nabla^2)$ ottenuto dalla teoria non locale, si ottiene l'energia potenziale elastica espressa in termini delle risultanti nel caso locale. Questa operazione però porta ad avere un contributo aggiuntivo dovuta all'effetto non locale all'energia cinetica e a quella dei carichi applicati. Dal punto di vista fisico questa operazione può essere vista come cambiare il punto di vista tra il non locale ed il locale.

In precedenza, il funzionale energetico era espresso dal punto di vista non locale e secondo la teoria di Eringen, l'effetto era visibile solo all'interno dell'energia di deformazione elastica. Applicando l'operatore differenziale al funzionale energetico si cambia punto di vista e ci si riporta in quello locale. L'energia di deformazione elastica in questo caso diventa quella locale,

ma il contributo dovuto alla nanoscala precedente viene ripartito sull'energia cinetica e su quella dei carichi.

Sviluppando i vari passaggi otteniamo:

$$\delta u: N_{x,x} + N_{xy,y} + \left(1 - \tau^2 l^2 \nabla^2\right) \left(F_{mx}\right) = \left(1 - \tau^2 l^2 \nabla^2\right) \left(I_0 \ddot{u} + I_1 \ddot{\theta}_x + I_0^{\phi_x} \ddot{\psi}_x\right)$$
(5.71)

$$\delta v : N_{xy,x} + N_{y,y} + \left(1 - \tau^2 l^2 \nabla^2\right) \left(F_{my}\right) = \left(1 - \tau^2 l^2 \nabla^2\right) \left(I_0 \ddot{v} + I_1 \ddot{\theta}_y + I_0^{\phi_y} \ddot{\psi}_y\right)$$
(5.72)

$$\delta w : Q_{x,x} + Q_{y,y} + (1 - \tau^2 l^2 \nabla^2) \Big[\Big(\bar{N}_x w_{,x} + \bar{N}_{xy} w_{,y} \Big)_{,x} + \Big(\bar{N}_y w_{,y} + \bar{N}_{xy} w_{,x} \Big)_{,y} + q_P + q + F_{mz} \Big] = \\ = (1 - \tau^2 l^2 \nabla^2) I_0 \ddot{w}$$

(5.73)

$$\delta\theta_{x}: M_{x,x} + M_{xy,y} - Q_{x} + (1 - \tau^{2}l^{2}\nabla^{2})(M_{mx}) = (1 - \tau^{2}l^{2}\nabla^{2})(I_{2}\ddot{\theta}_{x} + I_{1}\ddot{u} + I_{1}^{\phi_{x}}\ddot{\psi}_{x})$$
(5.74)

$$\delta\theta_{y}: M_{xy,x} + M_{y,y} - Q_{y} + \left(1 - \tau^{2}l^{2}\nabla^{2}\right)\left(M_{my}\right) = \left(1 - \tau^{2}l^{2}\nabla^{2}\right)\left(I_{2}\ddot{\theta}_{y} + I_{1}\ddot{v} + I_{1}^{\phi_{y}}\ddot{\psi}_{y}\right)$$
(5.75)

$$\delta\psi_{x}: M_{x,x}^{\phi_{x}} + M_{xy,y}^{\phi_{x}} - Q_{x}^{\phi_{x}} + (1 - \tau^{2}l^{2}\nabla^{2})(M_{mx}^{\phi_{x}} + M_{mx}^{\phi_{y}}) = (1 - \tau^{2}l^{2}\nabla^{2})(I_{0}^{\phi_{x}}\ddot{u} + I_{1}^{\phi_{x}}\ddot{\theta}_{x} + I_{2}^{\phi_{x}}\ddot{\psi}_{x})$$
(5.76)

$$\delta\psi_{y}: M_{xy,x}^{\phi_{y}} + M_{y,y}^{\phi_{y}} - Q_{y}^{\phi_{y}} + (1 - \tau^{2}l^{2}\nabla^{2})(M_{my}^{\phi_{x}} + M_{my}^{\phi_{y}}) = (1 - \tau^{2}l^{2}\nabla^{2})(I_{0}^{\phi_{y}}\ddot{v} + I_{1}^{\phi_{y}}\ddot{\theta}_{y} + I_{2}^{\phi_{y}}\ddot{\psi}_{y})$$
(5.77)

$$\delta\phi^{(E)} : -L_{x,x} - L_{y,y} + L_{z1} = 0 \tag{5.78}$$

$$\delta \psi^{(H)} : -O_{x,x} - O_{y,y} + O_{z1} = 0$$
(5.79)

E le corrispondenti condizioni al contorno come segue [26]:

$$u = 0$$
 oppure $N_x n_x + N_{xy} n_y = 0$ (5.80)

$$v = 0$$
 oppure $N_{xy}n_x + N_yn_y = 0$ (5.81)

$$w = 0 \quad \text{oppure} \quad \left[Q_x + \left(1 - \tau^2 l^2 \nabla^2\right) \left(\overline{N}_x w_{,x} + \overline{N}_{xy} w_{,y} \right)_{,x} \right] n_x +$$

$$\left[\left[Q_x + \left(1 - \tau^2 l^2 \nabla^2\right) \left(\overline{N}_x w_{,x} + \overline{N}_{xy} w_{,y} \right)_{,x} \right] \right] n_x +$$

$$(5.82)$$

$$+ \left[Q_{y} + \left(1 - \tau^{2} l^{2} \nabla^{2} \right) \left(\bar{N}_{xy} w_{,x} + \bar{N}_{y} w_{,y} \right)_{,y} \right] n_{y} = 0$$
(7.72)

$$\theta_x = 0$$
 oppure $M_x n_x + M_{xy} n_y = 0$ (5.83)

$$\theta_y = 0$$
 oppure $M_{xy}n_x + M_yn_y = 0$ (5.84)

$$\psi_x = 0$$
 oppure $M_x^{\phi_x} n_x + M_{xy}^{\phi_x} n_y = 0$ (5.85)

$$\psi_{y} = 0$$
 oppure $M_{xy}^{\phi_{y}} n_{x} + M_{y}^{\phi_{y}} n_{y} = 0$ (5.86)

 $\phi^{(E)} = 0$ oppure $L_x n_x + L_y n_y = 0$ (5.87)

$$\psi^{(H)} = 0$$
 oppure $O_x n_x + O_y n_y = 0$ (5.88)

Nelle equazioni precedenti si indica con n_x e n_y i coseni direttori aventi normale uscente dai bordi della piastra considerando il piano medio.

Alcune considerazioni sulle equazioni precedenti. Supponendo di avere una piastra tale da far tendere il parametro non locale $\tau \rightarrow 0$, si ottengono le classiche equazioni relative alla piastra senza effetti non locali. Le equazioni che si ottengono in questo caso, supponendo trascurati i carichi della fondazione di Pasternak, gli effetti dei piezoelettrici/piezomagnetici, gli effetti termici e quelli derivanti dal campo magnetico bidimensionale, sono quelle ottenute nel caso puramente meccanico anche da Iurlaro et al. [2]. In questo caso particolare e per un ulteriore confronto si scrivono:

$$\delta u: N_{x,x} + N_{xy,y} = \left(I_0 \ddot{u} + I_1 \ddot{\theta}_x + I_0^{\phi_x} \ddot{\psi}_x\right)$$
(5.89)

$$\delta v : N_{xy,x} + N_{y,y} = \left(I_0 \ddot{v} + I_1 \ddot{\theta}_y + I_0^{\phi_y} \ddot{\psi}_y \right)$$
(5.90)

$$\delta w : Q_{x,x} + Q_{y,y} + q = \left(1 - \tau^2 l^2 \nabla^2\right) I_0 \ddot{w}$$
(5.91)

$$\delta\theta_x : M_{x,x} + M_{xy,y} - Q_x = \left(I_2 \ddot{\theta}_x + I_1 \ddot{u} + I_1^{\phi_x} \ddot{\psi}_x\right)$$
(5.92)

$$\delta\theta_{y}: M_{xy,x} + M_{y,y} - Q_{y} = \left(I_{2}\ddot{\theta}_{y} + I_{1}\ddot{v} + I_{1}^{\phi_{y}}\ddot{\psi}_{y}\right)$$
(5.93)

$$\delta\psi_{x}: M_{x,x}^{\phi_{x}} + M_{xy,y}^{\phi_{x}} - Q_{x}^{\phi_{x}} = \left(I_{0}^{\phi_{x}}\ddot{u} + I_{1}^{\phi_{x}}\ddot{\theta}_{x} + I_{2}^{\phi_{x}}\ddot{\psi}_{x}\right)$$
(5.94)

$$\delta\psi_{y}: M_{xy,x}^{\phi_{y}} + M_{y,y}^{\phi_{y}} - Q_{y}^{\phi_{y}} = \left(I_{0}^{\phi_{y}}\ddot{v} + I_{1}^{\phi_{y}}\ddot{\theta}_{y} + I_{2}^{\phi_{y}}\ddot{\psi}_{y}\right)$$
(5.95)

5.7. Risultanti di forze e momenti espresse in termini locali

Andiamo ora a scrivere le risultanti di forze e momenti scritte in termini locali [18]:

$$\begin{cases} N_{x} \\ N_{y} \\ N_{xy} \end{cases} = \left(1 + g \frac{\partial}{\partial t}\right) \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^{2} \\ v_{,y} + \frac{1}{2} w_{,y}^{2} \\ u_{,y} + v_{,x} + w_{,x} w_{,y} \end{bmatrix} + \left(1 + g \frac{\partial}{\partial t}\right) \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{x,x} \\ \theta_{y,y} \\ \theta_{x,y} + \theta_{y,x} \end{bmatrix} + \left(1 + g \frac{\partial}{\partial t}\right) \begin{bmatrix} G_{x11} & G_{y12} & G_{x16} & G_{y16} \\ G_{x12} & G_{y22} & G_{x26} & G_{y26} \\ G_{x16} & G_{y26} & G_{x66} & G_{y66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{x,x} \\ \psi_{y,y} \\ \psi_{x,y} \\ \psi_{y,x} \end{bmatrix} + \left(1 + g \frac{\partial}{\partial t}\right) \begin{bmatrix} 0 & 0 & E^{e}_{13} \\ 0 & 0 & E^{e}_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{x} \\ E_{y} \\ E_{z} \end{bmatrix} + \left(1 + g \frac{\partial}{\partial t}\right) \begin{bmatrix} 0 & 0 & Q^{m}_{13} \\ 0 & 0 & Q^{m}_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{x} \\ H_{y} \\ H_{z} \end{bmatrix}$$
(5.96)

$$\begin{cases} M_{x} \\ M_{y} \\ M_{y} \\ M_{y} \\ \end{pmatrix} = \left(1 + g \frac{\partial}{\partial t}\right) \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{23} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{cases} u_{x} + \frac{1}{2} w_{x}^{2} \\ v_{y} + \frac{1}{2} w_{y}^{2} \\ u_{y} + v_{x} + w_{x} w_{y} \\ u_{y} + v_{x} + w_{x} w_{y} \end{bmatrix} + \\ + \left(1 + g \frac{\partial}{\partial t}\right) \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{25} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{cases} \theta_{x,x} \\ \theta_{x,y} + \theta_{y,x} \\ \theta_{x,y} + \theta_{y,x} \end{bmatrix} + \left(1 + g \frac{\partial}{\partial t}\right) \begin{bmatrix} M_{x10} & H_{y10} & H_{x16} & H_{y16} \\ H_{x10} & H_{y22} & H_{x26} & H_{y66} \\ H_{y12} & H_{y22} & H_{x26} & H_{y66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{x,x} \\ \psi_{y,y} \\ \psi_{x,y} \\ \psi_{y,x} \end{bmatrix} + \\ + \left(1 + g \frac{\partial}{\partial t}\right) \begin{bmatrix} 0 & 0 & E_{x13}^{*} \\ 0 & 0 & E_{x23}^{*} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{x} \\ E_{y} \\ E_{z} \end{bmatrix} + \left(1 + g \frac{\partial}{\partial t}\right) \begin{bmatrix} Mx_{44} & My_{45} \\ Mx_{45} & My_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{x} \\ \psi_{y} \\ H_{y} \end{bmatrix} + \\ + \left(1 + g \frac{\partial}{\partial t}\right) \begin{bmatrix} E_{x}^{*} & 0 \\ 0 & E_{x23}^{*} \\ E_{y}^{*} \end{bmatrix} + \left(1 + g \frac{\partial}{\partial t}\right) \begin{bmatrix} Mx_{44} & My_{45} \\ Mx_{45} & My_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{x} \\ \psi_{y} \\ H_{y} \end{bmatrix} + \\ + \left(1 + g \frac{\partial}{\partial t}\right) \begin{bmatrix} E_{x}^{*} & 0 \\ 0 & E_{x22}^{*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{x} \\ E_{y} \end{bmatrix} + \left(1 + g \frac{\partial}{\partial t}\right) \begin{bmatrix} Mx_{44} & My_{45} \\ Mx_{45} & My_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{x} \\ \psi_{y} \\ W_{y} \end{bmatrix} + \\ + \left(1 + g \frac{\partial}{\partial t}\right) \begin{bmatrix} E_{x}^{*} & 0 \\ 0 & E_{x2}^{*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{x} \\ E_{y} \end{bmatrix} + \left(1 + g \frac{\partial}{\partial t}\right) \begin{bmatrix} Mx_{44} & My_{45} \\ Mx_{45} & My_{45} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{x} \\ W_{y} \end{bmatrix} + \\ + \left(1 + g \frac{\partial}{\partial t}\right) \begin{bmatrix} Gx_{11} & Gx_{12} & Gx_{16} \\ Gy_{12} & Gy_{22} & Gy_{26} \\ Gy_{16} & Gy_{26} & Gy_{26} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x} + \frac{1}{2} w_{x}^{2} \\ u_{y} + v_{x} + w_{x} w_{y} \end{bmatrix} + \\ + \left(1 + g \frac{\partial}{\partial t}\right) \begin{bmatrix} Hx_{11} & Hx_{12} & Hx_{16} \\ Hy_{16} & Hy_{26} & Hy_{66} \end{bmatrix} \begin{cases} \theta_{x,x} \\ \theta_{x,y} \\ \theta_{x,y} + \theta_{y,x} + \theta_{y,x} \end{bmatrix} + \left(1 + g \frac{\partial}{\partial t}\right) \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} \\ U_{14} & U_{23} & U_{23} & U_{14} \\ U_{14} & U_{23} & U_{23} & U_{14} \\ U_{14} & U_{23} & U_{23} & U_{14} \end{bmatrix} \\ + \left(1 + g \frac{\partial}{\partial t}\right) \begin{bmatrix} Hx_{11} & Hx_{12} & Hx_{16} \\ Hy_{16} & Hy_{26} & Hy_{66} \end{bmatrix} \begin{cases} W_{x,y} \\ W_{y,y} \\ W_{y,y} \end{bmatrix} + \\ + \left(1 + g \frac{\partial}{\partial t}\right) \begin{bmatrix} Hx_{11} & Hx_{12} & Hx_{16} \\ Hy_{16} & Hy_{26} & Hy_{66} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ \begin{cases} W_{x,y} \\ W_{y,y} \\ W_{y,y} \end{bmatrix} + \\ + \left(1 + g$$

$$\begin{split} & \left\{ \begin{aligned} Q_{x}^{\phi_{1}} \\ Q_{y}^{\phi_{2}} \\ \right\} = \left(1 + g \frac{\partial}{\partial t} \right) \begin{bmatrix} M_{x_{44}} & My_{4s} \\ M_{x_{45}} & My_{55} \end{bmatrix} \left\{ \begin{aligned} W_{x} + \theta_{x} \\ W_{y} + \theta_{y} \\ \\ W_{y} + \theta_{y} \\ \end{aligned} + \left(1 + g \frac{\partial}{\partial t} \right) \begin{bmatrix} E^{\phi_{4}}_{41} & 0 \\ 0 & E^{\phi}_{52} \end{bmatrix} \left\{ \begin{aligned} E_{x} \\ E_{y} \\ E_{y} \\ \end{bmatrix} + \left(1 + g \frac{\partial}{\partial t} \right) \begin{bmatrix} Q_{m}^{\phi_{4}}_{41} & 0 \\ 0 & Q_{m}^{\phi_{52}} \end{bmatrix} \left\{ \begin{aligned} H_{x} \\ H_{y} \\ \\ W_{y} \\ \end{bmatrix} + \left(1 + g \frac{\partial}{\partial t} \right) \begin{bmatrix} 0 & 0 & E_{41}^{e} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{52}^{e} \\ E_{51}^{e} & E_{52}^{e} & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x} + \frac{1}{2} \frac{w_{x}^{2}}{w_{x}^{2}} \\ W_{y} + \frac{1}{2} \frac{w_{x}^{2}}{w_{y}^{2}} \\ W_{x} + \theta_{x} \\ W_{y} + \theta_{y} \end{bmatrix} + \left(1 + g \frac{\partial}{\partial t} \right) \begin{bmatrix} 0 & 0 & E_{41}^{e} & 0 \\ 0 & E^{\phi}_{52} \\ 0 & 0 & E_{52}^{\phi} \\ 0 & 0 & E_{52}^{\phi} \\ \end{bmatrix} \\ & + \left(1 + g \frac{\partial}{\partial t} \right) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ E^{\phi}_{41} & 0 \\ 0 & D_{22}^{\phi} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33}^{H} \end{bmatrix} \left\{ \begin{aligned} H_{x} \\ H_{y} \\ H_{z} \\ \end{bmatrix} + \left(1 + g \frac{\partial}{\partial t} \right) \begin{bmatrix} E_{x} \\ E_{y} \\ E_{z} \\ \end{bmatrix} + (5.101) \\ & + \left(1 + g \frac{\partial}{\partial t} \right) \begin{bmatrix} 0 & 0 & Q_{41}^{e} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33}^{H} \\ Q_{31}^{e} & Q_{32}^{e} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{aligned} \begin{aligned} H_{x} \\ H_{y} \\ H_{z} \\ \end{bmatrix} + \left(1 + g \frac{\partial}{\partial t} \right) \begin{bmatrix} P_{11} \\ P_{22} \\ P_{33} \\ DT \\ \\ \end{bmatrix} \\ & + \left(1 + g \frac{\partial}{\partial t} \right) \begin{bmatrix} 0 & 0 & Q_{41}^{e} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33}^{e} \\ Q_{31}^{e} & Q_{32}^{e} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \left\{ \begin{aligned} W_{x} \\ H_{y} \\ H_{z} \\ \end{bmatrix} + \left(1 + g \frac{\partial}{\partial t} \right) \begin{bmatrix} P_{11} \\ P_{22} \\ P_{33} \\ DT \\ \\ \\ \end{bmatrix} \\ & + \left(1 + g \frac{\partial}{\partial t} \right) \begin{bmatrix} 0 & 0 & Q_{41}^{e} & 0 \\ 0 & Q_{31}^{e} & Q_{32}^{e} \\ \end{bmatrix} \left\{ \begin{aligned} W_{x} \\ W_{y} \\ + \left(1 + g \frac{\partial}{\partial t} \right) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ Q_{m}^{\phi}_{41} & 0 \\ 0 & Q_{m}^{\phi}_{52} \\ \end{bmatrix} \\ & + \left(1 + g \frac{\partial}{\partial t} \right) \begin{bmatrix} D_{11}^{H} & 0 & 0 \\ 0 & Q_{m}^{\phi}_{52} \\ \end{bmatrix} \left\{ \begin{aligned} W_{x} \\ W_{y} \\ + \left(1 + g \frac{\partial}{\partial t} \right) \begin{bmatrix} D_{11}^{e} & 0 & 0 \\ 0 & Q_{m}^{\phi}_{52} \\ \end{bmatrix} \\ & + \left(1 + g \frac{\partial}{\partial t} \right) \begin{bmatrix} M_{11}^{H} & 0 & 0 \\ 0 & M_{33}^{H} \\ \end{bmatrix} \\ & + \left(1 + g \frac{\partial}{\partial t} \right) \begin{bmatrix} M_{11}^{H} & 0 & 0 \\ 0 & M_{33}^{H} \\ \end{bmatrix} \\ & + \left(1 + g \frac{\partial}{\partial t} \right) \begin{bmatrix} M_{11}^{H} & 0 & 0 \\ 0 & M_{33}^{H} \\ \end{bmatrix} \\ & + \left(1 + g \frac{\partial}{\partial t} \right) \begin{bmatrix} M_{11}^{H} & 0 & 0 \\ 0 & M_{33}^{H} \\ \end{bmatrix} \\ & + \left(1 + g \frac{\partial}{\partial t} \right) \begin{bmatrix} M_{11}^{H} & 0 & 0 \\ 0 & M_{33}^{H} \\ \end{bmatrix} \\ \\ & + \left(1 + g \frac{\partial}{\partial t$$

Indicando con <*> l'integrazione lungo lo spessore, le varie matrici sono così espresse:

$$\left[A\right] = < \left[Q^{(k)}\right] > \tag{5.103}$$

$$[B] = < z [Q^{(k)}] >$$
(5.104)

$$[D] = \langle z^2 [Q^{(k)}] \rangle \tag{5.105}$$

Indicando con $\alpha = x, y$

$$\{B\} = \langle \beta^{(k)} \rangle$$

$$(5.12)$$

$$\{P\} = <\{p^{(k)}\}>$$

$$[M^{H}] = <[\mu]>$$
(5.119)
(5.120)

$$\left\{B\right\} = <\left\{\beta^{(k)}\right\} > \tag{5.121}$$

$$[H_{\alpha}] = \langle z\phi_{\alpha}^{(k)} \lfloor Q^{(k)} \rfloor \rangle$$

$$[L_{\alpha}] = \langle \phi_{\alpha}^{(k)2} \lfloor Q^{(k)} \rfloor \rangle$$
(5.107)
(5.108)

(5.109)

(5.110)

(5.111)

(5.112)

(5.113)

(5.114)

(5.115)

(5.116)

(5.117)

(5.118)

(5.119)

$$\left[H_{\alpha}\right] = \langle z\phi_{\alpha}^{(k)} \left[Q^{(k)}\right] \rangle \tag{5.107}$$

 $[M_{\alpha}] = <\phi_{\alpha,z}^{(k)} [Q^{(k)}] >$

 $\left[N_{\alpha}\right] = <\phi_{\alpha,z}^{(k)2} \left[Q^{(k)}\right] >$

 $\left[E^{e}\right] = < \left[e^{(k)}\right] >$

 $\left[E_z^e\right] = < z \left[e^{(k)}\right] >$

 $\left[E^{\phi_{\alpha}}\right] = <\phi_{\alpha}^{(k)} \left[e^{(k)}\right] >$

 $\left[Q^{m}\right] = < \left[q^{(k)}\right] >$

 $\left[Q_{z}^{m}\right] = < z \left[q^{(k)}\right] >$

 $\left[Q^{\phi_{\alpha}}_{m}\right] = <\phi_{\alpha}^{(k)}\left[q^{(k)}\right] >$

 $[S] = < [s^{(k)}] >$

 $\left[D^{H}\right] = < \left[d^{(k)}\right] >$

$$\left[G_{\alpha}\right] = \langle \phi_{\alpha}^{(k)} \left[Q^{(k)}\right] \rangle \tag{5.106}$$

6. Soluzione approssimata con il Metodo di Ritz

Nel capitolo precedente sono state ricavate le equazioni del moto della nano-piastra costituita da strati di materiale piezoelettrico/piezomagnetico, strati di materiale FG rinforzato da nanotubi in carbonio e sottoposto all'azione di forze magnetiche, potenziali elettrici e magnetici, effetti termici, pressioni e forze viscoelastiche trasmesse dalla fondazione di Pasternak.

La combinazione di tutte queste interazioni, unita all'ulteriore effetto derivante dalla teoria non locale di Eringen, usata per descrivere meglio il comportamento del materiale a livello nanometrico, comporta avere equazioni molto complesse e difficilmente risolvibili anche nei casi più semplici.

In letteratura, il caso più analizzato per la sua facilità nella risoluzione analitica come anche individuato e trattato da Lu [34] è il caso della piastra semplicemente appoggiata. Dal punto di vista ingegneristico, però, le condizioni di vincolo non sempre sono facilmente individuabili e talvolta andando a confrontare modelli matematici con prove sperimentali non sempre si trova la giusta corrispondenza, generalmente per la difficoltà nel riprodurre realmente il tipo di vincolo scelto, oppure nell'utilizzare un modello con un vincolo diverso da quello reale.

Pertanto, andare a risolvere il problema statico o dinamico mediante approcci chiamati metodo di Navier non sempre è possibile farlo.

Bisogna quindi affidarsi a metodi risolutivi approssimati in grado di andare a descrivere in maniera corretta il comportamento delle nostre piastre.

Tra i più famosi e i più utilizzati in letteratura abbiamo il metodo di Ritz (1909).

6.1. Metodo di Ritz

Il metodo di Ritz (1909) trae origine dal metodo di Rayleigh, sviluppato dallo stesso nel 1877. In entrambi i metodi (talvolta vengono entrambi messi insieme con il nome: metodo di Rayleigh-Ritz) utilizzano delle funzioni tentativo in grado di soddisfare le condizioni al contorno di tipo geometrico. Il metodo di Rayleigh, basato sull'equivalenza tra energia cinetica ed energia potenziale elastica di una struttura che vibra, viene applicato per determinare le frequenze e le forme dei modi di vibrare, a patto che le funzioni utilizzate siano in grado di poterla descrivere.

Il metodo di Ritz, invece, è più generale del precedente, in quanto utilizza delle funzioni tentativo (*trial*) opportunamente moltiplicate per un coefficiente, ciascuno indipendente dall'altro. Andando a sostituire tali funzioni all'interno dell'espressione del funzionale energetico, minimizzandolo, è possibile ricavare i coefficienti incogniti di tali funzioni e risolvere il problema sia esso statico o dinamico.

6.2. Applicazione del Metodo di Ritz

Prendendo come riferimento il libro di Liew et al. *"Vibration of Mindlin Plates"* [35] andiamo a sviluppare il metodo di Ritz adattandolo alla teoria RZT.

Le incognite del problema sono le variabili: $u, v, w, \theta_x, \theta_y, \psi_x, \psi_y$. Queste, utilizzando il principio di separazione, relativamente alla parte spaziale, vengono approssimate mediante una combinazione lineare di *m* funzioni, che può così essere espressa secondo Liew [35]:

$$\Re(x, y) \approx \sum_{i=1}^{m} c_i \phi_i(x, y)$$
(6.1)

Dove $\phi_i(x, y)$ sono le funzioni approssimate che devono soddisfare le condizioni al contorno di tipo geometrico.

I coefficienti c_i sono le incognite del problema. Questi si determinano andando a sostituire nel funzionale energetico, indicato comunemente con Π , le variabili approssimate con l'espressione (6.1). In seguito, imponendo la condizione di stazionarietà del funzionale energetico per ogni coefficiente c_i si ottengono m equazioni omogenee le cui incognite sono gli stessi coefficienti.

In formule si può così scrivere:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial c_i} = 0 \quad i = 1, 2, ..., m \tag{6.2}$$

Il funzionale energetico comprende tutti i contributi energetici del sistema, per il problema in questione:

- Energia di deformazione elastica
- Energia cinetica
- Energia potenziale della fondazione di Pasternak
- Lavoro dei carichi esterni
- Energia dovuta all'effetto viscoso

Il funzionale energetico può così essere scritto nella forma più generale:

$$\Pi = U + V - E_k + Q \tag{6.3}$$

Dove indichiamo con:

- *U* l'energia di deformazione elastica
- *V* l'energia dovuta agli effetti viscosi
- E_k l'energia cinetica
- *Q* il lavoro dei carichi

Poiché il problema nel caso dinamico generale prevede anche una dipendenza dal tempo, le soluzioni approssimanti possono essere riscritte nella seguente forma usando, come detto in precedenza il principio di separazione delle variabili:

$$\Re(x,y)e^{\lambda t} \approx e^{\lambda t} \sum_{i=1}^{m} c_i \phi_i(x,y)$$
(6.4)

Utilizzando la notazione matriciale per esprimere il generico problema dinamico, indicando con $\{c\}$ il vettore dei coefficienti incogniti, si può scrivere:

$$\left(\begin{bmatrix} K \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} C \end{bmatrix} + \lambda^2 \begin{bmatrix} M \end{bmatrix} \right) \{ c \} = \{ P \}$$
(6.5)

Espressione nella quale si individuano:

• La matrice di rigidezza [K] del sistema ottenuta:

$$[K] = \frac{\partial U}{\partial \{c\}} \tag{6.6}$$

• La matrice delle masse [*M*] ottenuta:

$$[M] = \frac{\partial E_k}{\partial \{c\}} \tag{6.7}$$

• La matrice di smorzamento [*C*] ottenuta:

$$[C] = \frac{\partial V}{\partial \{c\}} \tag{6.8}$$

• Il vettore dei carichi {*P*} ottenuto:

$$\{P\} = \frac{\partial Q}{\partial \{c\}} \tag{6.9}$$

L'approssimazione fatta con l'espressione (6.1) introduce delle limitazioni del metodo. Trattandosi di un metodo approssimato, la soluzione tende a quella esatta tanto più velocemente quanto si aumenta il numero di funzioni di prova utilizzate. Idealmente, facendo tendere il valore *m* all'infinito (infinite funzioni ed infiniti coefficienti da determinare), i coefficienti che verranno determinati corrisponderanno alla soluzione esatta. Poiché tale problema viene comunque risolto tramite calcolatori, il costo computazionale in termini di tempo e di memoria aumentano all'aumentare del numero di funzioni scelte. Occorrerà pertanto scegliere un numero di funzioni *trial* tale da avere la soluzione con una buona approssimazione.

Le funzioni di tentativo scelte devono possedere certe proprietà:

- Essere tra loro linearmente indipendenti
- Formare un sistema di funzioni completo
- Soddisfare almeno le condizioni al contorno geometriche

Se le funzioni sono in grado di soddisfare anche le condizioni al contorno di tipo meccanico, oltre a quelle di tipo geometrico, allora la convergenza alla soluzione esatta avverrà con un numero minore di termini. Questa condizione appena espressa, però non è sempre possibile da ottenere.

Nel caso dell'analisi dinamica delle nano-piastre, usando la teoria non locale di Eringen, compare l'effetto della scala. Il problema illustrato in precedenza non cambia. All'interno dei contributi energetici illustrati in precedenza per le teorie classiche, si aggiungerà un ulteriore contributo derivante dagli effetti non locali.

6.3. Funzioni trial

Le funzioni *trial* devono essere opportunamente scelte in modo tale da poter soddisfare le condizioni enunciate in precedenza. La scelta delle funzioni è molto importante, in quanto determina se usare più o meno termini per ottenere la soluzione esatta. Operativamente le funzioni che vengono maggiormente impiegate sono le funzioni polinomiali.

Una classe particolare di tali funzioni è quella dei polinomi ortogonali. I polinomi più famosi sono infatti quelli di Gram-Schmidt, i quali a partire da polinomi di base che soddisfano le condizioni al contorno geometriche, si costruiscono mediante un processo ricorsivo tutti gli altri.

Il metodo implementato da Liew nel suo libro [35], prende il nome di p-Ritz method, dal grado massimo p dei polinomi ortogonali scelti. Per questo lavoro di tesi si è scelto di riprendere tale

programma, basato sulla teoria FSDT, ed ampliarlo, estendendolo anche alla teoria RZT e includendo gli effetti non locali e gli effetti viscosi strutturali e gli effetti viscoelastici della fondazione di Pasternak.

Il problema che si vuole affrontare è quello di una piastra rettangolare. Questo può essere ricondotto a quello di una piastra quadrata, operando un'opportuna adimensionalizzazione delle variabili. In questo modo, le integrazioni saranno più semplici da svolgere e con meno errori, in quanto necessariamente dovranno essere calcolate numericamente.

Andiamo ora individuare le funzioni che approssimano le variabili:

$$\overline{u}\left(\xi,\eta\right) = \sum_{q=0}^{p_1} \sum_{i=0}^{q} a_m \gamma_m^u\left(\xi,\eta\right) \tag{6.10}$$

$$\overline{v}\left(\xi,\eta\right) = \sum_{q=0}^{p_2} \sum_{i=0}^{q} b_m \gamma_m^v\left(\xi,\eta\right) \tag{6.11}$$

$$\overline{w}(\xi,\eta) = \sum_{q=0}^{p_3} \sum_{i=0}^{q} c_m \gamma_m^w(\xi,\eta)$$
(6.12)

$$\theta_{x}\left(\xi,\eta\right) = \sum_{q=0}^{p_{4}} \sum_{i=0}^{q} d_{m} \gamma_{m}^{\theta_{x}}\left(\xi,\eta\right)$$
(6.13)

$$\theta_{y}\left(\xi,\eta\right) = \sum_{q=0}^{p_{5}} \sum_{i=0}^{q} e_{m} \gamma_{m}^{\theta_{y}}\left(\xi,\eta\right)$$
(6.14)

$$\Psi_{x}(\xi,\eta) = \sum_{q=0}^{p_{6}} \sum_{i=0}^{q} f_{m} \gamma_{m}^{\Psi_{x}}(\xi,\eta)$$
(6.15)

$$\psi_{y}(\xi,\eta) = \sum_{q=0}^{p_{7}} \sum_{i=0}^{q} g_{m} \gamma_{m}^{\psi_{y}}(\xi,\eta)$$
(6.16)

Le relazioni che esistono tra grandezze adimensionate e dimensionali sono le seguenti:

$$\xi = \frac{2x}{a} \quad \eta = \frac{2y}{b} \quad \overline{u} = \frac{2u}{b} \quad \overline{v} = \frac{2v}{b} \quad \overline{w} = \frac{2w}{b} \tag{6.17}$$

Nelle espressioni precedenti, il pedice m individua il numero della funzione e del relativo coefficiente e viene così calcolato:

$$m = \frac{(q+1)(q+2)}{2} - i \tag{6.18}$$

Con q ed i gli indici delle sommatorie.

Nelle equazioni (6.10)-(6.16), la lettera p_k con k = 1, 2, ..., 7 indica il grado massimo del polinomio che andrà a costituire l'insieme delle funzioni per quella variabile. Può essere diverso per ciascuna variabile, ma nel nostro caso per semplicità utilizzeremo un valore unico per tutti.

Pertanto, noto il massimo grado p è possibile ricavare il numero totale dei coefficienti incogniti N per ciascun insieme di polinomi ortogonali che abbiamo utilizzato.

$$N = \frac{(p+1)(p+2)}{2}$$
(6.19)

Le funzioni γ_m si ottengono dalla seguente formula ricorsiva:

$$\gamma_m^u(\xi,\eta) = \xi^i \eta^{q-i} \gamma_1^u(\xi,\eta) \tag{6.20}$$

$$\gamma_m^{\nu}(\xi,\eta) = \xi^i \eta^{q-i} \gamma_1^{\nu}(\xi,\eta)$$
(6.21)

$$\gamma_m^w(\xi,\eta) = \xi^i \eta^{q-i} \gamma_1^w(\xi,\eta) \tag{6.22}$$

$$\gamma_m^{\theta_x}(\xi,\eta) = \xi^i \eta^{q-i} \gamma_1^{\theta_x}(\xi,\eta)$$
(6.23)

$$\gamma_m^{\theta_y}(\xi,\eta) = \xi^i \eta^{q-i} \gamma_1^{\theta_y}(\xi,\eta)$$
(6.24)

$$\gamma_m^{\psi_x}(\xi,\eta) = \xi^i \eta^{q-i} \gamma_1^{\psi_x}(\xi,\eta)$$
(6.25)

$$\gamma_m^{\psi_y}(\xi,\eta) = \xi^i \eta^{q-i} \gamma_1^{\psi_y}(\xi,\eta) \tag{6.26}$$

Le funzioni di base sono scelte nel seguente modo:

$$\gamma_0^u = \gamma_0^v = \gamma_0^w = \gamma_0^{\theta_x} = \gamma_0^{\theta_y} = \gamma_0^{\psi_x} = \gamma_0^{\psi_y} = 0$$
(6.27)

$$\gamma_1^u\left(\xi,\eta\right) = \prod_{j=1}^{n_l} \left[\chi_j\left(\xi,\eta\right)\right]^{\Omega_j^u} \tag{6.28}$$

$$\gamma_1^{\nu}(\xi,\eta) = \prod_{j=1}^{n_l} \left[\chi_j(\xi,\eta) \right]^{\Omega_j^{\nu}}$$
(6.29)

$$\gamma_1^w(\xi,\eta) = \prod_{j=1}^{n_l} \left[\chi_j(\xi,\eta) \right]^{\Omega_j^w}$$
(6.30)

$$\gamma_{1}^{\theta_{x}}\left(\xi,\eta\right) = \prod_{j=1}^{n_{l}} \left[\chi_{j}\left(\xi,\eta\right)\right]^{\Omega_{j}^{\theta_{x}}}$$
(6.31)

$$\gamma_1^{\theta_y}\left(\xi,\eta\right) = \prod_{j=1}^{n_l} \left[\chi_j\left(\xi,\eta\right)\right]^{\Omega_j^{\theta_y}} \tag{6.32}$$

$$\gamma_1^{\psi_x}\left(\xi,\eta\right) = \prod_{j=1}^{n_l} \left[\chi_j\left(\xi,\eta\right)\right]^{\Omega_j^{\psi_x}}$$
(6.33)

$$\gamma_{1}^{\psi_{y}}\left(\xi,\eta\right) = \prod_{j=1}^{n_{i}} \left[\chi_{j}\left(\xi,\eta\right)\right]^{\Omega_{j}^{\psi_{y}}}$$
(6.34)

Dove si indica con:

- n_l il numero di lati della piastra (nel caso in questione uguale a 4)
- $\chi_j(\xi,\eta)$ sono le equazioni che descrivono il j-esimo lato
- Gli esponenti Ω_j sono scelti in modo tale da poter soddisfare la condizione al contorno relativa a quel lato

In particolare, per una piastra quadrata possiamo scrivere le funzioni che descrivono i lati:

$$\chi_1(\xi,\eta) = (\xi+1) \tag{6.35}$$

$$\chi_2(\xi,\eta) = (\eta+1)$$
 (6.36)

$$\chi_3(\xi,\eta) = (\xi - 1) \tag{6.37}$$

$$\chi_4(\xi,\eta) = (\eta - 1) \tag{6.38}$$

In figura 6.1 viene rappresentata la piastra nel piano di riferimento (ξ, η) .



Figura 6.1: Rappresentazione del piano di riferimento

Mentre per gli esponenti, per le condizioni al contorno più classiche, possono essere riassunti nel modo seguente:

$$\begin{split} \Omega_{j}^{u} &= \begin{cases} 0 & per \ l'estremo \ F \ o \ SS \ nella \ direzione \ y \\ per \ l'estremo \ SS \ nella \ direzione \ x \ o \ C \\ \Omega_{j}^{v} &= \begin{cases} 0 & per \ l'estremo \ SS \ nella \ direzione \ y \ o \ C \\ \Omega_{j}^{w} &= \begin{cases} 0 & per \ l'estremo \ SS \ nella \ direzione \ y \ o \ C \\ \Omega_{j}^{\theta_{x}} &= \begin{cases} 0 & per \ l'estremo \ F \ o \ SS \ nella \ direzione \ y \ o \ C \\ \Omega_{j}^{\theta_{x}} &= \begin{cases} 0 & per \ l'estremo \ SS \ nella \ direzione \ x \ o \ C \\ \Omega_{j}^{\theta_{x}} &= \begin{cases} 0 & per \ l'estremo \ SS \ nella \ direzione \ x \ o \ C \\ \Omega_{j}^{\theta_{y}} &= \begin{cases} 0 & per \ l'estremo \ F \ o \ SS \ nella \ direzione \ x \ o \ C \\ \Omega_{j}^{\theta_{y}} &= \begin{cases} 0 & per \ l'estremo \ F \ o \ SS \ nella \ direzione \ x \ o \ C \\ \Omega_{j}^{\psi_{x}} &= \begin{cases} 0 & per \ l'estremo \ F \ o \ SS \ nella \ direzione \ y \ o \ C \\ \Omega_{j}^{\psi_{x}} &= \begin{cases} 0 & per \ l'estremo \ F \ o \ SS \ nella \ direzione \ y \ o \ C \\ \Omega_{j}^{\psi_{y}} &= \begin{cases} 0 & per \ l'estremo \ F \ o \ SS \ nella \ direzione \ x \ o \ C \\ \Omega_{j}^{\psi_{y}} &= \begin{cases} 0 & per \ l'estremo \ F \ o \ SS \ nella \ direzione \ x \ o \ C \\ \Omega_{j}^{\psi_{y}} &= \begin{cases} 0 & per \ l'estremo \ F \ o \ SS \ nella \ direzione \ x \ o \ C \\ \Omega_{j}^{\psi_{y}} &= \begin{cases} 0 & per \ l'estremo \ SS \ nella \ direzione \ x \ o \ C \\ \Omega_{j}^{\psi_{y}} &= \begin{cases} 0 & per \ l'estremo \ SS \ nella \ direzione \ x \ o \ C \\ \Omega_{j}^{\psi_{y}} &= \begin{cases} 0 & per \ l'estremo \ SS \ nella \ direzione \ x \ o \ C \\ \Omega_{j}^{\psi_{y}} &= \end{cases}$$

Dove con F si indica il caso di estremo libero, con SS quello semplicemente appoggiato e quello C il caso incastrato.

Nel caso più generale si sceglie 0 se non si ha nessuna condizione da imporre per quella variabile su quell'estremo, mentre si sceglie 1 se si deve imporre la variabile nulla. Si ha anche un altro caso, che nella trattazione dell'RZT non è presente, ma per Kirchhoff è rilevante. Per quest'ultimo si sceglie 2 se si deve imporre sul lato l'annullamento della variabile e della sua derivata prima.

6.4. Formulazione energetica del problema

Per poter applicare il metodo di Ritz, come abbiamo introdotto in precedenza, occorre andare a sostituire le funzioni di tentativo scelte all'interno della formulazione energetica e procedere poi a derivare quest'ultima rispetto alle variabili per ottenere il sistema da risolvere.

Il passo, quindi, da seguire è ottenere l'espressione del funzionale energetico.

Nel capitolo precedente è stato utilizzato il principio di D'Alambert derivato dal PLV per poter scrivere le equazioni del moto nel caso più generale.

In questa tesi, lo scopo è analizzare il caso particolare di nano-piastre *Functionally Graded* realizzate con *CNTs*, tenendo conto dell'effetto viscoso strutturale, dell'effetto della fondazione di Pasternak e degli effetti non locali tipici.

Considerando quindi questa tipologia di nano-piastra, operando le opportune semplificazioni possiamo scrivere le equazioni del moto:

$$N_{x,x} + N_{xy,y} = \left(1 - \tau^2 l^2 \nabla^2\right) \left(I_0 \ddot{u} + I_1 \ddot{\theta}_x + I_0^{\phi_x} \ddot{\psi}_x\right)$$
(6.39)

$$N_{xy,x} + N_{y,y} = \left(1 - \tau^2 l^2 \nabla^2\right) \left(I_0 \ddot{v} + I_1 \ddot{\theta}_y + I_0^{\phi_y} \ddot{\psi}_y\right)$$
(6.40)

$$Q_{x,x} + Q_{y,y} + (1 - \tau^2 l^2 \nabla^2) [q_P + q] = (1 - \tau^2 \nabla^2) I_0 \ddot{w}$$
(6.41)

$$M_{x,x} + M_{xy,y} - Q_x = (1 - \tau^2 l^2 \nabla^2) (I_2 \ddot{\theta}_x + I_1 \ddot{u} + I_1^{\phi_x} \ddot{\psi}_x)$$
(6.42)

$$M_{xy,x} + M_{y,y} - Q_y = (1 - \tau^2 l^2 \nabla^2) (I_2 \ddot{\theta}_y + I_1 \ddot{v} + I_1^{\phi_y} \ddot{\psi}_y)$$
(6.43)

$$M_{x,x}^{\phi_x} + M_{xy,y}^{\phi_x} - Q_x^{\phi_x} = \left(1 - \tau^2 l^2 \nabla^2\right) \left(I_0^{\phi_x} \ddot{u} + I_1^{\phi_x} \ddot{\theta}_x + I_2^{\phi_x} \ddot{\psi}_x\right)$$
(6.44)

$$M_{xy,x}^{\phi_{y}} + M_{y,y}^{\phi_{y}} - Q_{y}^{\phi_{y}} = \left(1 - \tau^{2} l^{2} \nabla^{2}\right) \left(I_{0}^{\phi_{y}} \ddot{v} + I_{1}^{\phi_{y}} \ddot{\theta}_{y} + I_{2}^{\phi_{y}} \ddot{\psi}_{y}\right)$$
(6.45)

Dalla teoria non locale, quando $\tau \rightarrow 0$ si riottengono le espressioni delle equazioni del moto nel caso locale classico.

Le equazioni precedenti sono anche definite in letteratura come forma forte delle equazioni di governo del sistema.

Come già anche accennato in precedenza, non sempre è possibile risolverle semplicemente e si fa uso dei metodi approssimati come quello di Ritz o come il metodo degli elementi finiti che verrà trattato nel capitolo seguente.

Si deve quindi passare dalla forma forte alla forma debole la quale ci permetterà di ottenere la formulazione energetica adatta ad essere utilizzata per il metodo di Ritz.

Se la forma forte è un insieme di equazioni, quella debole è tipicamente una formulazione integrale e richiede la continuità delle variabili del campo (nel nostro caso le incognite).

Come anche espresso da Anjomshoa [36] per ottenere la forma debole occorre utilizzare un principio energetico o il metodo dei residui pesati.

Questo secondo metodo è particolarmente utilizzato perché permette di utilizzare le equazioni di equilibrio precedenti.

Andiamo quindi ad applicare il metodo dei residui pesati per poter arrivare a scrivere la formulazione variazionale energetica del problema.

Per ogni equazione precedente possiamo quindi scrivere:

$$\int_{A} \left[N_{x,x}^{l} + N_{xy,y}^{l} - \left(1 - \tau^{2} l^{2} \nabla^{2}\right) \left(I_{0} \ddot{u} + I_{1} \ddot{\theta}_{x} + I_{0}^{\phi_{x}} \ddot{\psi}_{x} \right) \right] f_{w}^{u} \left(x, y, t \right) dx dy = 0$$
(6.46)

$$\int_{A} \left[N_{xy,x}^{l} + N_{y,y}^{l} - \left(1 - \tau^{2} l^{2} \nabla^{2}\right) \left(I_{0} \ddot{v} + I_{1} \ddot{\theta}_{y} + I_{0}^{\phi_{y}} \ddot{\psi}_{y} \right) \right] f_{w}^{v} (x, y, t) dx dy = 0$$
(6.47)

$$\int_{A} \left[Q_{x,x}^{l} + Q_{y,y}^{l} + \left(1 - \tau^{2} l^{2} \nabla^{2}\right) \left[K_{1w} w + C_{d} \dot{w} - K_{g} \nabla^{2} w + q - I_{0} \ddot{w} \right] \right] f_{w}^{w} (x, y, t) dx dy = 0$$
(6.48)

$$\int_{A} \left[M_{x,x}^{l} + M_{xy,y}^{l} - Q_{x}^{l} - \left(1 - \tau^{2} l^{2} \nabla^{2}\right) \left(I_{2} \ddot{\theta}_{x} + I_{1} \ddot{u} + I_{1}^{\phi_{x}} \ddot{\psi}_{x} \right) \right] f_{w}^{\theta_{x}} \left(x, y, t \right) dx dy = 0 \quad (6.49)$$

$$\int_{A} \left[M_{xy,x}^{l} + M_{y,y}^{l} - Q_{y}^{l} - (1 - \tau^{2} l^{2} \nabla^{2}) (I_{2} \ddot{\theta}_{y} + I_{1} \ddot{v} + I_{1}^{\phi_{y}} \ddot{\psi}_{y}) \right] f_{w}^{\theta_{y}} (x, y, t) dxdy = 0 \quad (6.50)$$

$$\int_{A} \left[M_{x,x}^{\phi_{x}l} + M_{xy,y}^{\phi_{x}l} - Q_{x}^{\phi_{x}l} - \left(1 - \tau^{2}l^{2}\nabla^{2}\right) \left(I_{0}^{\phi_{x}}\ddot{u} + I_{1}^{\phi_{x}}\ddot{\theta}_{x} + I_{2}^{\phi_{x}}\ddot{\psi}_{x} \right) \right] f_{w}^{\psi_{x}} \left(x, y, t\right) dxdy = 0 \quad (6.51)$$

$$\int_{A} \left[M_{xy,x}^{\phi_{y}l} + M_{y,y}^{\phi_{y}l} - Q_{y}^{\phi_{y}l} - \left(1 - \tau^{2}l^{2}\nabla^{2}\right) \left(I_{0}^{\phi_{y}}\ddot{v} + I_{1}^{\phi_{y}}\ddot{\theta}_{y} + I_{2}^{\phi_{y}}\ddot{\psi}_{y} \right) \right] f_{w}^{\psi_{y}} \left(x, y, t\right) dxdy = 0 \quad (6.52)$$

Dove $f_w^u, f_w^v, f_w^w, f_w^{\theta_x}, f_w^{\theta_y}, f_w^{\psi_x}, f_w^{\psi_y}$ sono le funzioni peso scelte.

Per le espressioni delle risultanti di forze e momenti scritte in termini locali abbiamo:

$$\{N\} = \begin{cases} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{cases} = \left(1 + g \frac{\partial}{\partial t}\right) \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{cases} u_{,x} \\ v_{,y} \\ u_{,y} + v_{,x} \end{cases} + \left(1 + g \frac{\partial}{\partial t}\right) \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{x,x} \\ \theta_{y,y} \\ \theta_{x,y} + \theta_{y,x} \end{bmatrix} + \left(1 + g \frac{\partial}{\partial t}\right) \begin{bmatrix} G_{x11} & G_{y12} & G_{x16} & G_{y16} \\ G_{x12} & G_{y22} & G_{x26} & G_{y26} \\ G_{x16} & G_{y26} & G_{x66} & G_{y66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{x,x} \\ \psi_{y,y} \\ \psi_{y,x} \end{bmatrix}$$

$$(6.53)$$

$$\{M\} = \begin{cases} M_{x} \\ M_{y} \\ M_{xy} \end{cases} = \left(1 + g \frac{\partial}{\partial t}\right) \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x} \\ v_{y} \\ u_{y} + v_{x} \end{bmatrix} + \\ + \left(1 + g \frac{\partial}{\partial t}\right) \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{x,x} \\ \theta_{y,y} \\ \theta_{x,y} + \theta_{y,x} \end{bmatrix} + \left(1 + g \frac{\partial}{\partial t}\right) \begin{bmatrix} H_{x11} & H_{y12} & H_{x16} & H_{y16} \\ H_{x12} & H_{y22} & H_{x26} & H_{y26} \\ H_{x16} & H_{y26} & H_{x66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{x,x} \\ \psi_{y,y} \\ \psi_{y,x} \end{bmatrix}$$

$$(6.54)$$

$$\{Q\} = \begin{cases} Q_{x} \\ Q_{y} \end{cases} = \left(1 + g \frac{\partial}{\partial t}\right) \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{x} + \theta_{x} \\ w_{y} + \theta_{y} \end{bmatrix} + \left(1 + g \frac{\partial}{\partial t}\right) \begin{bmatrix} Mx_{44} & My_{45} \\ Mx_{45} & My_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{x} \\ \psi_{y} \end{bmatrix}$$

$$(6.55)$$

$$\begin{cases} M_{x}^{\theta_{y}} \\ M_{y}^{\theta_{y}} \\ M_{y}^{\theta_{y}} \end{bmatrix} = \left(1 + g \frac{\partial}{\partial t}\right) \begin{bmatrix} Gx_{11} & Gx_{12} & Gx_{16} \\ Gy_{16} & Gy_{26} & Gy_{26} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x} \\ v_{y} \\ u_{y} + v_{x} \end{bmatrix} + \left(1 + g \frac{\partial}{\partial t}\right) \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} \\ Hy_{12} & Hy_{22} & Hy_{26} \\ Hx_{16} & Hx_{26} & Hx_{66} \\ Hy_{16} & Hy_{26} & Hy_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{x,x} \\ \theta_{y,y} \\ \theta_{x,y} + \theta_{y,x} \end{bmatrix} + \left(1 + g \frac{\partial}{\partial t}\right) \begin{bmatrix} Nx_{44} & Ny_{45} \\ L_{13} & L_{23} & L_{33} & L_{34} \\ L_{14} & L_{24} & L_{34} & L_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{x,x} \\ \psi_{y,y} \\ \psi_{y,x} \end{bmatrix}$$

$$(6.56)$$

$$\left\{ Q_{y}^{\theta_{y}} \right\} = \left(1 + g \frac{\partial}{\partial t}\right) \begin{bmatrix} Mx_{44} & My_{45} \\ Mx_{45} & My_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{x} + \theta_{x} \\ w_{y} + \theta_{y} \end{bmatrix} + \left(1 + g \frac{\partial}{\partial t}\right) \begin{bmatrix} Nx_{44} & Ny_{45} \\ Nx_{45} & My_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{x} \\ \psi_{y,y} \\ \psi_{y,x} \end{bmatrix}$$

Le matrici relative al materiale sono già state espresse nel capito precedente.

Ipotizzando una soluzione, usando il principio di separazione delle variabili, sia per le incognite cinematiche sia per le caratteristiche meccaniche Q_{ij} e sia per le funzioni peso:

$$u(x, y, t) = u(x, y)e^{\lambda t}$$

$$v(x, y, t) = v(x, y)e^{\lambda t}$$

$$w(x, y, t) = w(x, y)e^{\lambda t}$$

$$\theta_x(x, y, t) = \theta_x(x, y)e^{\lambda t}$$

$$\theta_y(x, y, t) = \theta_y(x, y)e^{\lambda t}$$

$$\psi_x(x, y, t) = \psi_x(x, y)e^{\lambda t}$$

$$\psi_y(x, y, t) = \psi_y(x, y)e^{\lambda t}$$

$$Q_{ij}^{(k)}(t) = Q_{ij}^{(k)}e^{\lambda t}$$

$$f_w^k(x, y, t) = f_w^k(x, y)e^{\lambda t}$$
(6.58)

Andando a sostituire le espressioni (6.58) all'interno delle equazioni (6.46)-(6.57) otteniamo:

$$\int_{A} \begin{bmatrix} N_{x,x} + N_{xy,y} + g\lambda (N_{x,x} + N_{xy,y}) + \\ -\lambda^{2} (1 - \tau^{2} l^{2} \nabla^{2}) (I_{0} u + I_{1} \theta_{x} + I_{0}^{\phi_{x}} \psi_{x}) \end{bmatrix} f_{w}^{u}(x, y) dx dy = 0$$
(6.59)

$$\int_{A} \begin{bmatrix} N_{xy,x} + N_{y,y} + g\lambda (N_{xy,x} + N_{y,y}) + \\ -\lambda^{2} (1 - \tau^{2} l^{2} \nabla^{2}) (I_{0} v + I_{1} \theta_{y} + I_{0}^{\phi_{y}} \psi_{y}) \end{bmatrix} f_{w}^{v} (x, y) dx dy = 0$$
(6.60)

$$\int_{A} \begin{bmatrix} Q_{x,x} + Q_{y,y} + g\lambda(Q_{x,x} + Q_{y,y}) + \\ + (1 - \tau^{2}l^{2}\nabla^{2}) \begin{bmatrix} K_{1w}w + \lambda C_{d}w - K_{g}\nabla^{2}w + q - \lambda^{2}I_{0}w \end{bmatrix} f_{w}^{w}(x,y) dxdy = 0$$
(6.61)

$$\int_{A} \begin{bmatrix} M_{x,x} + M_{xy,y} - Q_x + g\lambda (M_{x,x} + M_{xy,y} - Q_x) + \\ -\lambda^2 (1 - \tau^2 l^2 \nabla^2) (I_2 \theta_x + I_1 u + I_1^{\phi_x} \psi_x) \end{bmatrix} f_w^{\theta_x} (x, y) dx dy = 0$$
(6.62)

$$\int_{A} \begin{bmatrix} M_{xy,x} + M_{y,y} - Q_{y} + g\lambda (M_{xy,x} + M_{y,y} - Q_{y}) + \\ -\lambda^{2} (1 - \tau^{2} l^{2} \nabla^{2}) (I_{2} \theta_{y} + I_{1} v + I_{1}^{\phi_{y}} \psi_{y}) \end{bmatrix} f_{w}^{\theta_{y}} (x, y) dx dy = 0$$
(6.63)

$$\int_{A} \begin{bmatrix} M_{x,x}^{\phi_{x}} + M_{xy,y}^{\phi_{x}} - Q_{x}^{\phi_{x}} + g\lambda \left(M_{x,x}^{\phi_{x}} + M_{xy,y}^{\phi_{x}} - Q_{x}^{\phi_{x}} \right) + \\ -\lambda^{2} \left(1 - \tau^{2} l^{2} \nabla^{2} \right) \left(I_{0}^{\phi_{x}} u + I_{1}^{\phi_{x}} \theta_{x} + I_{2}^{\phi_{x}} \psi_{x} \right) \end{bmatrix} f_{w}^{\psi_{x}} \left(x, y \right) dxdy = 0$$
(6.64)

$$\int_{A} \begin{bmatrix} M_{xy,x}^{\phi_{y}} + M_{y,y}^{\phi_{y}} - Q_{y}^{\phi_{y}} + g\lambda \left(M_{xy,x}^{\phi_{y}} + M_{y,y}^{\phi_{y}} - Q_{y}^{\phi_{y}} \right) + \\ -\lambda^{2} \left(1 - \tau^{2} l^{2} \nabla^{2} \right) \left(I_{0}^{\phi_{y}} v + I_{1}^{\phi_{y}} \theta_{y} + I_{2}^{\phi_{y}} \psi_{y} \right) \end{bmatrix} f_{w}^{\psi_{y}} \left(x, y \right) dxdy = 0$$
(6.65)

Il laplaciano ∇^2 nel caso bidimensionale viene così definito:

$$\nabla^2\left(\bullet\right) = \frac{\partial^2 \bullet}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bullet}{\partial y^2} \tag{6.66}$$

Si procede quindi per ogni integrale precedente a sviluppare il laplaciano.

$$\int_{A} \begin{bmatrix} N_{x,x} f_{w}^{u} + N_{xy,y} f_{w}^{u} + g\lambda \left(N_{x,x} f_{w}^{u} + N_{xy,y} f_{w}^{u} \right) - \lambda^{2} \left(I_{0} u f_{w}^{u} + I_{1} \theta_{x} f_{w}^{u} + I_{0}^{\phi_{x}} \psi_{x} f_{w}^{u} \right) \\ + \tau^{2} l^{2} \lambda \left(I_{0} \left(u_{,xx} f_{w}^{u} + u_{,yy} f_{w}^{u} \right) + I_{1} \left(\theta_{x,xx} f_{w}^{u} + \theta_{x,yy} f_{w}^{u} \right) + I_{0}^{\phi_{x}} \left(\psi_{x,xx} f_{w}^{u} + \psi_{x,yy} f_{w}^{u} \right) \right) \end{bmatrix} dxdy$$

$$(6.67)$$

$$\int_{A} \begin{bmatrix} N_{xy,x} f_{w}^{v} + N_{y,y} f_{w}^{v} + g\lambda \left(N_{xy,x} f_{w}^{v} + N_{y,y} f_{w}^{v} \right) - \lambda^{2} \left(I_{0} v f_{w}^{v} + I_{1} \theta_{y} f_{w}^{v} + I_{0}^{\phi_{y}} \psi_{y} f_{w}^{v} \right) + \\ + \tau^{2} l^{2} \lambda^{2} \left(I_{0} \left(v_{,xx} f_{w}^{v} + v_{,yy} f_{w}^{v} \right) + I_{1} \left(\theta_{y,xx} f_{w}^{v} + \theta_{y,yy} f_{w}^{v} \right) + I_{0}^{\phi_{y}} \left(\psi_{y,xx} f_{w}^{v} + \psi_{y,yy} f_{w}^{v} \right) \right) \end{bmatrix} dxdy$$

$$(6.68)$$

$$\begin{aligned} Q_{x,x}f_{w}^{w} + Q_{y,y}f_{w}^{w} + g\lambda(Q_{x,x}f_{w}^{w} + Q_{y,y}f_{w}^{w}) + \\ \int_{A} K_{1w}wf_{w}^{w} + \lambda C_{d}wf_{w}^{w} - K_{g}(w_{,xx} + w_{,yy})f_{w}^{w} + qf_{w}^{w} - \lambda^{2}I_{0}wf_{w}^{w} + dxdy \quad (6.69) \\ & -l^{2}\tau^{2} \left[\begin{array}{c} K_{1w}(w_{,xx}f_{w}^{w} + w_{,yy}f_{w}^{w}) + \\ + \lambda C_{d}(w_{,xx}f_{w}^{w} + w_{,yy}f_{w}^{w}) - K_{g}(w_{,xxx}f_{w}^{w} + 2w_{,xxyy}w + w_{,yyy}f_{w}^{w}) + \\ + (q_{,xx}f_{w}^{w} + q_{,yy}f_{w}^{w}) - \lambda^{2}I_{0}(w_{,xx}f_{w}^{w} + w_{,yy}f_{w}^{w}) + \\ & -\lambda^{2}(I_{2}\theta_{x}f_{w}^{\theta_{x}} + I_{1}uf_{w}^{\theta_{x}} + I_{1}^{\theta_{x}}\psi_{x}f_{w}^{\theta_{x}}) + \\ -\lambda^{2}(I_{2}\theta_{x}f_{w}^{\theta_{x}} + I_{1}uf_{w}^{\theta_{x}} + u_{,yy}f_{w}^{\theta_{x}}) + I_{1}^{\theta_{x}}(\psi_{x,xx}f_{w}^{\theta_{x}} + \psi_{y,yy}f_{w}^{\theta_{y}})) \\ & (6.70) \\ \end{bmatrix} \\ \int_{A} \left[\begin{array}{c} M_{xy,x}f_{w}^{\theta_{y}} + M_{y,y}f_{w}^{\theta_{y}} - Q_{y}f_{w}^{\theta_{y}} + g\lambda(M_{xy,x}f_{w}^{\theta_{y}} + M_{y,y}f_{w}^{\theta_{y}} - Q_{y}f_{w}^{\theta_{y}}) + \\ -\lambda^{2}(I_{2}\theta_{y}f_{w}^{\theta_{y}} + I_{1}vf_{w}^{\theta_{y}} + I_{1}^{\theta_{y}}\psi_{y}f_{w}^{\theta_{y}}) + I_{1}^{\theta_{y}}(\psi_{x,xx}f_{w}^{\theta_{y}} + \psi_{y,yy}f_{w}^{\theta_{y}})) \\ & \\ \int_{A} \left[\begin{array}{c} M_{xy,x}f_{w}^{\theta_{y}} + M_{y,y}f_{w}^{\theta_{y}} - Q_{y}f_{w}^{\theta_{y}} + g\lambda(M_{xy,x}f_{w}^{\theta_{y}} + M_{y,y}f_{w}^{\theta_{y}} - Q_{y}f_{w}^{\theta_{y}}) + \\ -\lambda^{2}(I_{2}\theta_{y}f_{w}^{\theta_{y}} + I_{1}vf_{w}^{\theta_{y}} + I_{1}^{\theta_{y}}\psi_{y}f_{w}^{\theta_{y}}) + I_{1}^{\theta_{y}}(\psi_{y,xx}f_{w}^{\theta_{y}} + \psi_{y,yy}f_{w}^{\theta_{y}}) + \\ -\lambda^{2}(I_{2}(\theta_{y,xx}f_{w}^{\theta_{y}} + \theta_{y,yy}f_{w}^{\theta_{y}}) + I_{1}(v_{,xx}f_{w}^{\theta_{y}} + v_{,yy}f_{w}^{\theta_{y}}) + I_{1}^{\theta_{y}}(\psi_{y,xx}f_{w}^{\theta_{y}} + \psi_{y,yy}f_{w}^{\theta_{y}})) \\ \end{pmatrix} \\ dxdy \\ \end{array}$$

$$\int_{A} \begin{bmatrix} M_{x,x}^{\phi_{x}} f_{w}^{\psi_{x}} + M_{xy,y}^{\phi_{x}} f_{w}^{\psi_{x}} - Q_{x}^{\phi_{x}} f_{w}^{\psi_{x}} + g\lambda \left(M_{x,x}^{\phi_{x}} f_{w}^{\psi_{x}} + M_{xy,y}^{\phi_{x}} f_{w}^{\psi_{x}} - Q_{x}^{\phi_{x}} f_{w}^{\psi_{x}} \right) + \\ -\lambda^{2} \left(I_{0}^{\phi_{x}} u f_{w}^{\psi_{x}} + I_{1}^{\phi_{x}} \theta_{x} f_{w}^{\psi_{x}} + I_{2}^{\phi_{x}} \psi_{x} f_{w}^{\psi_{x}} \right) + \\ +\lambda^{2} l^{2} \tau^{2} \left(I_{0}^{\phi_{x}} \left(u_{,xx} f_{w}^{\psi_{x}} + u_{,yy} f_{w}^{\psi_{x}} \right) + I_{1}^{\phi_{x}} \left(\theta_{x,xx} f_{w}^{\psi_{x}} + \theta_{x,yy} f_{w}^{\psi_{x}} \right) + I_{2}^{\phi_{x}} \left(\psi_{x,xx} f_{w}^{\psi_{x}} + \psi_{x,yy} f_{w}^{\psi_{x}} \right) \right) \end{bmatrix}$$

$$(6.72)$$

$$\int_{A} \begin{bmatrix} M_{xy,x}^{\phi_{y}} f_{w}^{\psi_{y}} + M_{y,y}^{\phi_{y}} f_{w}^{\psi_{y}} - Q_{y}^{\phi_{y}} f_{w}^{\psi_{y}} + g\lambda \left(M_{xy,x}^{\phi_{y}} f_{w}^{\psi_{y}} + M_{y,y}^{\phi_{y}} f_{w}^{\psi_{y}} - Q_{y}^{\phi_{y}} f_{w}^{\psi_{y}} \right) + \\ -\lambda^{2} \left(I_{0}^{\phi_{y}} v f_{w}^{\psi_{y}} + I_{1}^{\phi_{y}} \theta_{y} f_{w}^{\psi_{y}} + I_{2}^{\phi_{y}} \psi_{y} f_{w}^{\psi_{y}} \right) + \\ + \tau^{2} l^{2} \lambda^{2} \left(I_{0}^{\phi_{y}} \left(v_{,xx} f_{w}^{\psi_{y}} + v_{,yy} f_{w}^{\psi_{y}} \right) + I_{1}^{\phi_{y}} \left(\theta_{y,xx} f_{w}^{\psi_{y}} + \theta_{y,yy} f_{w}^{\psi_{y}} \right) + I_{2}^{\phi_{y}} \left(\psi_{y,xx} f_{w}^{\psi_{y}} + \psi_{y,yy} f_{w}^{\psi_{y}} \right) \right) \end{bmatrix} dxdy$$

$$(6.73)$$

Si procede a questo punto ad integrare per parti ciascun integrale. Il risultato, usando la notazione di Anjomshoa [36], viene espresso come somma di due integrali:

$$\int_{A} \dot{\Pi}^{nl}(x, y) dx dy + \int_{\partial A} \Lambda(s) ds = 0$$
(6.74)

 $\dot{\Pi}^{nl}$ rappresenta l'espressione dei vari contributi integrati per parti contenente sia funzioni e derivate delle variabili, sia le funzioni peso e le relative derivate, il tutto valutato nel dominio A.

Il termine A rappresenta l'espressione dei vari contributi integrati per parti che dovranno essere valutati lungo il bordo del dominio e rappresenta le condizioni al contorno.

Le funzioni peso sono scelte in questo caso coincidenti con le funzioni incognite del nostro problema:

$$f_{w}^{u}(x, y) = u(x, y)$$

$$f_{w}^{v}(x, y) = v(x, y)$$

$$f_{w}^{w}(x, y) = w(x, y)$$

$$f_{w}^{\theta_{x}}(x, y) = \theta_{x}(x, y)$$

$$f_{w}^{\theta_{y}}(x, y) = \theta_{y}(x, y)$$

$$f_{w}^{\psi_{x}}(x, y) = \psi_{x}(x, y)$$

$$f_{w}^{\psi_{y}}(x, y) = \psi_{x}(x, y)$$

$$f_{w}^{\psi_{y}}(x, y) = \psi_{y}(x, y)$$

Il primo integrale dell'equazione (6.74) diventa quindi l'espressione dell'energia potenziale totale della nano-piastra.

Consideriamo ora il secondo integrale, applicando il metodo di Ritz, all'interno si trovano le espressioni delle incognite del problema e delle loro derivate prime, valutate ai bordi del dominio della nano-piastra. Poiché le funzioni di tentativo utilizzate, per come sono state necessariamente costruite, soddisfano le condizioni al contorno di tipo geometrico, tale integrale diventa nullo.

L'equazione (6.74) può essere così riscritta e si può individuare l'espressione dell'energia potenziale totale scritta contenente anche i termini non locali:

$$\Pi_{tot}^{(nl)} = \int_{A} \dot{\Pi}^{(nl)} dx dy \tag{6.76}$$

Sulla base di quanto scritto in precedenza, l'energia potenziale totale è costituita da diversi contributi che qui riportiamo per la versione semplificata di piastra che stiamo analizzando.

$$\Pi_{tot}^{(nl)} = U + W_k + V - E_k + Q \tag{6.77}$$

In particolare, si riconoscono:

- *U* energia di deformazione elastica
- W_k energia della fondazione viscoelastica
- *V* energia degli effetti viscosi del materiale
- E_k energia cinetica
- *Q* lavoro dei carichi esterni

Svolgendo i vari passaggi possiamo arrivare a scrivere le espressioni complete delle varie componenti energetiche.

$$U = \frac{1}{2} \int_{A}^{1} \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}_{11} u_{x} u_{x} + 2\mathcal{A}_{12} u_{x} v_{y} + 2\mathcal{A}_{16} (u_{y} + v_{x}) u_{x} + \mathcal{A}_{22} v_{y} v_{y} + 2\mathcal{A}_{26} v_{y} (u_{y} + v_{x}) + \mathcal{A}_{66} (u_{y} + v_{x})^{2} + \\ + 2\left[\begin{array}{l} \mathcal{B}_{11} u_{x} \partial_{xx} + \mathcal{B}_{12} (u_{x} \partial_{y,y} + v_{y} \partial_{xx}) + \mathcal{B}_{16} (u_{x} (\partial_{x,y} + \partial_{y,x}) + (u_{y} + v_{x}) \partial_{xx}) + \\ + \mathcal{B}_{22} v_{y} \partial_{y,y} + \mathcal{B}_{26} (v_{y} (\partial_{x,y} + \partial_{y,x}) + (u_{y} + v_{x}) \partial_{y,y}) + \mathcal{B}_{66} (u_{y} + v_{x}) (\partial_{x,y} + \partial_{y,x}) \\ + \mathcal{B}_{26} v_{y} \partial_{y,y} + \mathcal{B}_{26} (v_{y} (\partial_{x,y} + \partial_{y,x}) + (u_{y} + v_{x}) \partial_{y,y}) + \mathcal{B}_{66} (u_{y} + v_{x}) (\partial_{x,y} + \partial_{y,x}) \\ + \mathcal{D}_{60} (\mathcal{A}_{xy} + \mathcal{G} y_{12} u_{x} \partial_{y,y} + \mathcal{G} y_{16} u_{x} \partial_{y,y} + \mathcal{G} x_{16} u_{x} \partial_{y,y} + \mathcal{G} x_{16} u_{y} + v_{x}) \partial_{y,y} \\ + \mathcal{D}_{10} v_{x} \partial_{x,x} + 2\mathcal{D}_{12} \partial_{x,x} \partial_{y,y} + \mathcal{D}_{16} \partial_{x,x} (\partial_{x,y} + \partial_{y,x}) + \mathcal{D}_{22} \partial_{y,y} \partial_{y,y} + \mathcal{D}_{26} \partial_{y,y} (\partial_{x,y} + \partial_{y,x}) + \\ + \mathcal{D}_{66} (\partial_{x,y} + \partial_{y,x}) (\partial_{x,y} + \partial_{y,x}) + \mathcal{D}_{16} \partial_{x,x} \partial_{y,y} + \mathcal{D}_{20} \partial_{y,y} \partial_{y,y} + \mathcal{D}$$

$$W_{k} = \frac{1}{2} \int_{A} \left\{ K_{1w} ww + \lambda C_{d} ww + K_{g} (w_{,x} w_{,x} + w_{,y} w_{,y}) + \\ + L^{2} \tau^{2} \left[K_{1w} (w_{,x} w_{,x} + w_{,y} w_{,y}) + \lambda C_{d} (w_{,x} w_{,x} + w_{,y} w_{,y}) + \\ + K_{g} (w_{,xx} w_{,xx} + 2w_{,xy} w_{,xy} + w_{,yy} w_{,yy}) \right] \right\} dxdy$$

$$(6.79)$$

$$V = \frac{1}{2} g \lambda_{A}^{f} \left\{ \begin{array}{l} A_{11} u_{x} u_{x} + 2A_{12} u_{x} v_{y} + 2A_{16} (u_{y} + v_{x}) u_{x} + A_{22} v_{y} v_{y} + 2A_{26} v_{y} (u_{y} + v_{x}) + A_{66} (u_{y} + v_{x})^{2} + \\ + 2 \left[B_{11} u_{x} \theta_{xx} + B_{12} (u_{x} \theta_{yy} + v_{y} \theta_{xx}) + B_{16} (u_{x} (\theta_{xy} + \theta_{yx}) + (u_{y} + v_{x}) \theta_{xy}) + \\ + B_{22} v_{y} \theta_{y,y} + B_{26} (v_{y} (\theta_{xy} + \theta_{yx}) + (u_{y} + v_{x}) \theta_{y,y}) + B_{66} (u_{y} + v_{x}) (\theta_{x,y} + \theta_{yx}) + \\ + B_{22} v_{y} \theta_{y,y} + B_{26} (v_{y} (\theta_{xy} + \theta_{yx}) + (u_{y} + v_{x}) \theta_{y,y}) + B_{66} (u_{y} + v_{x}) (\theta_{x,y} + \theta_{yx}) + \\ + B_{26} v_{y} \psi_{x,y} + G y_{12} u_{x} \psi_{y,y} + G x_{16} u_{x} \psi_{x,y} + G y_{16} u_{x} \psi_{y,x} + G x_{12} v_{y} \psi_{x,x} + G y_{22} v_{y} \psi_{y,y} + \\ + G x_{16} (u_{y} + v_{x}) \psi_{x,x} + G y_{26} (u_{y} + v_{x}) \psi_{y,y} + G x_{66} (u_{y} + v_{x}) \psi_{x,x} + G y_{20} \theta_{y,y} (\theta_{x,y} + \theta_{y,x}) + \\ + G x_{16} (u_{y} + v_{x}) \psi_{x,x} + G y_{26} (u_{y} + v_{x}) \psi_{y,y} + G x_{66} (u_{y} + v_{x}) \psi_{x,x} + G y_{20} \theta_{y,y} (\theta_{x,y} + \theta_{y,x}) + \\ + D_{16} \theta_{x,y} \theta_{y,y} + 2D_{16} \theta_{x,x} (\theta_{x,y} + \theta_{y,x}) + D_{22} \theta_{y,y} \theta_{y,y} + 2D_{26} \theta_{y,y} (\theta_{x,y} + \theta_{y,x}) + \\ + D_{16} \theta_{x,y} \theta_{y,y} + H x_{16} \theta_{x,y} \theta_{y,y} + H x_{16} \theta_{x,x} \psi_{x,y} + H y_{16} \theta_{x,x} \psi_{x,y} + H x_{12} \theta_{y,y} \psi_{x,x} + \\ + H y_{22} \theta_{y,y} \psi_{y,y} + H x_{26} \theta_{y,y} \psi_{y,y} + \\ + H y_{26} \theta_{y,y} \psi_{y,y} + H x_{16} (\theta_{x,y} + \theta_{y,x}) \psi_{y,x} + \\ + H x_{66} (\theta_{x,y} + \theta_{y,x}) \psi_{x,y} + H y_{66} (\theta_{x,y} + \theta_{y,x}) \psi_{y,x} + \\ + 2L_{34} \psi_{x,y} \psi_{y,x} + 2L_{34} \psi_{x,y} \psi_{y,x} + 2L_{44} \psi_{x,y} \psi_{y,x} + L_{22} \psi_{y,y} \psi_{y,y} + \\ + 2L_{34} \psi_{x,y} \psi_{y,x} + A_{45} \psi_{y,y} \psi_{y,x} + A_{45} \psi_{y,y} \psi_{y,y} + \\ + 2L_{14} W_{x} \psi_{x} + M y_{45} \theta_{x} \psi_{y} + M y_{55} \psi_{y} \psi_{y} + \\ + 2L_{14} W_{x} \psi_{x} + M y_{45} \theta_{x} \psi_{y} + M x_{45} \theta_{y,y} + M y_{55} \theta_{y} \psi_{y} + \\ + 2L_{14} W_{x} \psi_{x} + 2N x_{45} \psi_{y,y} \psi_{y} + M x_{45} \theta_{y,y} \psi_{y} + \\ + 2L_{14} W_{x} \psi_{y} + 2N x_{45} \psi_{y,y} \psi_{y} + M y_{55} \psi_{y} \psi_{y} + \\ + 2L_{14} W_{x} \psi_{x} + M y_{45$$

$$E_{k} = -\frac{1}{2}\lambda^{2}\int_{A} \begin{cases} \left(I_{0}uu + 2I_{1}u\theta_{x} + 2I_{0}^{\phi_{x}}u\psi_{x}\right) + l^{2}\tau^{2} \begin{bmatrix} I_{0}\left(u_{x}u_{x} + u_{y}u_{y}\right) + 2I_{1}\left(u_{x}\theta_{x,x} + u_{y}\psi_{x,y}\right) + \\ + 2I_{0}^{\phi_{x}}\left(u_{x}\psi_{x,x} + u_{y}\psi_{x,y}\right) \end{bmatrix} + \\ + \left(I_{0}vv + 2I_{1}v\theta_{y} + 2I_{0}^{\phi_{y}}v\psi_{y}\right) + l^{2}\tau^{2} \begin{bmatrix} I_{0}\left(v_{x}v_{x} + v_{y}v_{y}\right) + 2I_{1}\left(v_{x}\theta_{y,x} + v_{y}\theta_{y,y}\right) + \\ + 2I_{0}^{\phi_{y}}\left(v_{x}\psi_{y,x} + v_{y}\psi_{y,y}\right) \end{bmatrix} + \\ + I_{0}ww + l^{2}\tau^{2}I_{0}\left(w_{x}w_{x} + w_{y}w_{y}\right) + \\ + \left(I_{2}\theta_{x}\theta_{x} + 2I_{1}^{\phi_{x}}\theta_{x}\psi_{x}\right) + l^{2}\tau^{2} \left[I_{2}\left(\theta_{x,x}\theta_{x,x} + \theta_{x,y}\theta_{x,y}\right) + 2I_{1}^{\phi_{y}}\left(\theta_{x,x}\psi_{x,x} + \theta_{x,y}\psi_{y,y}\right)\right] + \\ + \left(I_{2}\theta_{y}\theta_{y} + 2I_{1}^{\phi_{y}}\theta_{y}\psi_{y}\right) + l^{2}\tau^{2} \left[I_{2}\left(\theta_{y,x}\theta_{y,x} + \theta_{y,y}\theta_{y,y}\right) + 2I_{1}^{\phi_{y}}\left(\theta_{y,x}\psi_{y,x} + \theta_{y,y}\psi_{y,y}\right)\right] + \\ + I_{2}^{\phi_{y}}\psi_{y}w_{y} + l^{2}\tau^{2}I_{2}^{\phi_{y}}\left(\psi_{x,x}\psi_{x,x} + \psi_{x,y}\psi_{x,y}\right) + \\ + I_{2}^{\phi_{y}}\psi_{y}\psi_{y} + l^{2}\tau^{2}I_{2}^{\phi_{y}}\left(\psi_{y,x}\psi_{y,x} + \psi_{y,y}\psi_{y,y}\right) + \\ + I_{2}^{\phi_{y}}\psi_{y}\psi_{y} + l^{2}\tau^{2}I_{2}^{\phi_{y}}\left(\psi_{y,x}\psi_{y,x} + \psi_{y,y}\psi_{y,y}\right) + \\ (6.81)$$

$$Q = -\int_{A} \left[qw - ql^{2}\tau^{2} \left(w_{,xx} + w_{,yy} \right) \right] dxdy$$
(6.82)

Il passaggio successivo ora è quello di adimensionalizzare le espressioni energetiche in odo da poter utilizzare i polinomi ortogonali visti in precedenza, validi per una piastra quadrata avente lato di lunghezza 2 e origine degli assi ξ ed η nel centro di tale quadrato.

$$\xi = \frac{2x}{a} \quad \eta = \frac{2y}{b} \quad \overline{u} = \frac{2u}{b} \quad \overline{v} = \frac{2v}{b} \quad \overline{w} = \frac{2w}{b} \quad \alpha = \frac{b}{a} \tag{6.83}$$

Osserviamo che le variabili θ_x , θ_y , ψ_x , ψ_y non necessitano di essere adimensionate in quanto già numeri puri.

Ottenute le forme energetiche in forma adimensionale, occorre sostituire all'interno dei esse le funzioni per poter applicare il metodo di Ritz. In questo modo otteniamo:

$$\bar{U} = \bar{U}_{pb} + \bar{U}_s \tag{6.84}$$

$$\overline{V} = \overline{V}_{pb} + \overline{V}_s \tag{6.85}$$

$$\bar{U}_{s} = \frac{1}{2} \int_{\bar{A}} \begin{cases} +A_{44} \alpha^{2} \frac{ba}{4} \gamma_{,\xi}^{w} \gamma_{,\xi}^{w} c_{m}^{2} + 2A_{45} \alpha \frac{ba}{4} \gamma_{,\xi}^{w} \gamma_{,\eta}^{w} c_{m}^{2} + A_{55} \frac{ba}{4} \gamma_{,\eta}^{w} \gamma_{,\eta}^{w} c_{m}^{2} + \\ +2 \begin{bmatrix} A_{44} \alpha \frac{ba}{4} \gamma_{,\xi}^{w} \gamma^{\phi_{s}} c_{m} d_{m} + A_{45} \alpha \frac{ba}{4} \gamma_{,\xi}^{w} \gamma^{\phi_{y}} c_{m} e_{m} + \\ +A_{45} \frac{ba}{4} \gamma_{,\eta}^{w} \gamma^{\phi_{s}} c_{m} d_{m} + A_{55} \frac{ba}{4} \gamma_{,\eta}^{w} \gamma^{\phi_{y}} c_{m} e_{m} + \\ +A_{45} \frac{ba}{4} \gamma_{,\eta}^{w} \gamma^{\phi_{s}} c_{m} d_{m} + M_{55} \frac{ba}{4} \gamma_{,\xi}^{w} \gamma^{\psi_{y}} c_{m} g_{m} + \\ +M_{45} \frac{ba}{4} \gamma_{,\eta}^{w} \gamma^{\psi_{s}} c_{m} f_{m} + My_{55} \frac{ba}{4} \gamma_{,\eta}^{w} \gamma^{\psi_{y}} c_{m} g_{m} + \\ +M_{44} \frac{ba}{4} \gamma^{\phi_{s}} \gamma^{\phi_{s}} d_{m}^{2} + 2A_{45} \frac{ba}{4} \gamma^{\phi_{s}} \gamma^{\phi_{y}} d_{m} e_{m} + A_{55} \frac{ba}{4} \gamma^{\phi_{y}} \gamma^{\phi_{y}} e_{m}^{2} + \\ +2 \begin{bmatrix} Mx_{44} \frac{ba}{4} \gamma^{\phi_{s}} \gamma^{\phi_{s}} d_{m}^{2} + 2A_{45} \frac{ba}{4} \gamma^{\phi_{s}} \gamma^{\phi_{y}} d_{m} e_{m} + A_{55} \frac{ba}{4} \gamma^{\phi_{y}} \gamma^{\phi_{y}} e_{m}^{2} + \\ +2 \begin{bmatrix} Mx_{44} \frac{ba}{4} \gamma^{\phi_{s}} \gamma^{\phi_{s}} d_{m}^{2} + 2A_{45} \frac{ba}{4} \gamma^{\phi_{s}} \gamma^{\phi_{y}} d_{m} e_{m} + A_{55} \frac{ba}{4} \gamma^{\phi_{y}} \gamma^{\phi_{y}} e_{m}^{2} + \\ +2 \begin{bmatrix} Mx_{44} \frac{ba}{4} \gamma^{\phi_{s}} \gamma^{\psi_{s}} d_{m} f_{m} + My_{45} \frac{ba}{4} \gamma^{\phi_{s}} \gamma^{\psi_{y}} d_{m} g_{m} + \\ +Mx_{45} \frac{ba}{4} \gamma^{\phi_{y}} \gamma^{\psi_{s}} e_{m} f_{m} + My_{55} \frac{ba}{4} \gamma^{\phi_{y}} \gamma^{\psi_{y}} e_{m} g_{m} \end{bmatrix} + \\ +Nx_{44} \frac{ba}{4} \gamma^{\psi_{s}} \gamma^{\psi_{s}} f_{m}^{2} + 2Nx_{45} \frac{ba}{4} \gamma^{\psi_{s}} \gamma^{\psi_{s}} f_{m} g_{m} + Ny_{55} \frac{ba}{4} \gamma^{\psi_{s}} \gamma^{\psi_{s}} g_{m}^{2} \end{bmatrix}$$

$$(6.86)$$

$$\begin{split} \overline{U}_{pb} &= \frac{1}{2} \int_{A}^{A} + 2 \int_{A_{12}} y_{a}^{\mu} y_{a}^{\mu} a_{b} h_{a} + 2 \int_{A_{10}} (y_{a}^{\mu} a_{a} + \alpha y_{a}^{\nu} b_{a}) y_{a}^{\mu} a_{a} h_{a} + 2 \int_{A}^{\mu} y_{a}^{\mu} y_{b}^{\mu} b_{a}^{\mu} + \frac{1}{4} \\ &+ 2 \frac{1}{\alpha} A_{2a} y_{a}^{\nu} b_{a} (y_{a}^{\mu} a_{a} + \alpha y_{a}^{\nu} b_{a}) + A_{ab} \frac{1}{\alpha} (y_{a}^{\mu} a_{a} + \alpha y_{a}^{\nu} b_{a})^{2} \\ &+ 2 \frac{1}{\alpha} A_{2a} y_{a}^{\nu} y_{a}^{\mu} a_{a} d_{a} + B_{12} (y_{a}^{\nu} y_{a}^{\mu} a_{a} e_{a} + y_{a}^{\nu} y_{a}^{\mu} b_{a}) + B_{bi} \left(y_{a}^{\nu} (y_{a}^{\mu} a_{a} + \alpha y_{a}^{\nu} b_{a}) y_{a}^{\mu} d_{a} + 1 \\ &+ (y_{a}^{\mu} a_{a} + \alpha y_{a}^{\nu} b_{a}) y_{a}^{\mu} d_{a} + \frac{1}{\alpha} B_{2a} (y_{a}^{\nu} (y_{a}^{\mu} d_{a} + \alpha y_{a}^{\mu} c_{a}) b_{a} + (y_{a}^{\mu} a_{a} + \alpha y_{a}^{\nu} b_{a}) y_{a}^{\mu} d_{a} + 1 \\ &+ \frac{1}{\alpha} B_{ba} (y_{a}^{\nu} a_{a} + \alpha y_{a}^{\nu} b_{a}) (y_{a}^{\mu} d_{a} + \alpha y_{a}^{\mu} c_{a}) b_{a} + (y_{a}^{\mu} a_{a} + \alpha y_{a}^{\nu} b_{a}) y_{a}^{\mu} d_{a} + 1 \\ &+ \frac{1}{\alpha} B_{ba} (y_{a}^{\nu} a_{a} + \alpha y_{a}^{\nu} b_{a}) (y_{a}^{\mu} d_{a} + \alpha y_{a}^{\mu} c_{a}) b_{a} + (y_{a}^{\mu} a_{a} + \alpha y_{a}^{\nu} b_{a}) y_{a}^{\mu} d_{a} + 1 \\ &+ \frac{1}{\alpha} B_{ba} (y_{a}^{\nu} a_{a} + \alpha y_{a}^{\nu} b_{a}) (y_{a}^{\mu} d_{a} + \alpha y_{a}^{\mu} c_{a}) b_{a} + (y_{a}^{\mu} a_{a} + \alpha y_{a}^{\nu} b_{a}) y_{a}^{\mu} d_{a} + 1 \\ &+ \frac{1}{\alpha} B_{ba} (y_{a}^{\nu} a_{a} + \alpha y_{a}^{\nu} b_{a}) (y_{a}^{\mu} d_{a} + \alpha y_{a}^{\mu} c_{a}) b_{a} + (y_{a}^{\mu} a_{a} + \alpha y_{a}^{\nu} b_{a}) y_{a}^{\mu} d_{a} + 1 \\ &+ \frac{1}{\alpha} G_{x_{2a}} (y_{a}^{\mu} a_{a} + \alpha y_{a}^{\nu} b_{a}) y_{a}^{\mu} f_{a} + 1 \\ &+ \frac{1}{\alpha} G_{x_{2a}} (y_{a}^{\mu} a_{a} + \alpha y_{a}^{\nu} b_{a}) y_{a}^{\mu} f_{a} + 1 \\ &+ \frac{1}{\alpha} G_{x_{2a}} (y_{a}^{\mu} a_{a} + \alpha y_{a}^{\mu} b_{a}) y_{a}^{\mu} f_{a} + 1 \\ &+ \frac{1}{\alpha} G_{x_{2a}} (y_{a}^{\mu} a_{a} + \alpha y_{a}^{\mu} b_{a}) y_{a}^{\mu} f_{a} + 1 \\ &+ \frac{1}{\alpha} G_{x_{2a}} (y_{a}^{\mu} a_{a} + \alpha y_{a}^{\mu} b_{a}) y_{a}^{\mu} f_{a} + 1 \\ &+ \frac{1}{\alpha} G_{x_{2a}} (y_{a}^{\mu} a_{a} + \alpha y_{a}^{\mu} b_{a}) y_{a}^{\mu} f_{a} + 1 \\ &+ \frac{1}{\alpha} G_{x_{2a}} (y_{a}^{\mu} a_{a} + \alpha y_{a}^{\mu} b_{a}) y_{a}^{\mu} f_{a} + 1 \\ &+ \frac{1}{\alpha} G_{x_{2a}} y_{a}^{\mu} y_{a}^{\mu} f_{a} + 0 \\ &+ \frac{1}{\alpha} H_{x_{2a}} y_{a$$

$$\overline{W}_{k} = \frac{1}{2} \int_{A} \begin{cases} K_{1w} \gamma_{m}^{w} \gamma_{m}^{w} c_{m}^{2} \frac{b^{3}a}{4} + \lambda C_{d} \gamma_{m}^{w} \gamma_{m}^{w} c_{m}^{2} \frac{b^{3}a}{16} + K_{g} \frac{ba}{4} \left(\alpha^{2} \gamma_{m,\xi}^{w} \gamma_{m,\xi}^{w} c_{m}^{2} + \gamma_{m,\eta}^{w} \gamma_{m,\eta}^{w} c_{m}^{2}\right) + \\ + L^{2} \tau^{2} \begin{bmatrix} K_{1w} \left(\alpha^{2} \gamma_{m,\xi}^{w} \gamma_{m,\xi}^{w} c_{m}^{2} + \gamma_{m,\eta}^{w} \gamma_{m,\eta}^{w} c_{m}^{2}\right) \frac{ba}{4} + \lambda C_{d} \frac{ba}{4} \left(\alpha^{2} \gamma_{m,\xi}^{w} \gamma_{m,\xi}^{w} c_{m} + \gamma_{m,\eta}^{w} \gamma_{m,\eta}^{w} c_{m}\right) + \\ + K_{g} \frac{1}{\alpha} \left(\alpha^{4} \gamma_{m,\xi\xi}^{w} \gamma_{m,\xi\xi}^{w} c_{m}^{2} + 2\alpha^{2} \gamma_{m,\xi\eta}^{w} \gamma_{m,\xi\eta}^{w} c_{m}^{2} + \gamma_{m,\eta\eta}^{w} \gamma_{m,\eta\eta}^{w} c_{m}^{2}\right) \\ \end{cases}$$

$$(6.88)$$

$$\bar{V}_{s} = \frac{1}{2} g \lambda_{\tilde{A}} \begin{cases} +A_{44} \alpha^{2} \frac{ba}{4} \gamma_{,\xi}^{w} \gamma_{,\xi}^{w} c_{m}^{2} + 2A_{45} \alpha \frac{ba}{4} \gamma_{,\xi}^{w} \gamma_{,\eta}^{w} c_{m}^{2} + A_{55} \frac{ba}{4} \gamma_{,\eta}^{w} \gamma_{,\eta}^{w} c_{m}^{2} + \\ +2 \begin{bmatrix} A_{44} \alpha \frac{ba}{4} \gamma_{,\xi}^{w} \gamma^{\phi_{x}} c_{m} d_{m} + A_{45} \alpha \frac{ba}{4} \gamma_{,\xi}^{w} \gamma^{\phi_{y}} c_{m} e_{m} + \\ +A_{45} \frac{ba}{4} \gamma_{,\eta}^{w} \gamma^{\phi_{x}} c_{m} d_{m} + A_{55} \frac{ba}{4} \gamma_{,\eta}^{w} \gamma^{\phi_{y}} c_{m} e_{m} \end{bmatrix} + \\ +2 \begin{bmatrix} Mx_{44} \alpha \frac{ba}{4} \gamma_{,\xi}^{w} \gamma^{w_{x}} c_{m} f_{m} + My_{45} \alpha \frac{ba}{4} \gamma_{,\eta}^{w} \gamma^{\psi_{y}} c_{m} g_{m} + \\ +Mx_{45} \frac{ba}{4} \gamma_{,\eta}^{w} \gamma^{\psi_{x}} c_{m} f_{m} + My_{55} \frac{ba}{4} \gamma_{,\eta}^{w} \gamma^{\psi_{y}} c_{m} g_{m} \end{bmatrix} + \\ +A_{44} \frac{ba}{4} \gamma^{\phi_{x}} \gamma^{\phi_{x}} d_{m}^{2} + 2A_{45} \frac{ba}{4} \gamma^{\phi_{x}} \gamma^{\phi_{y}} d_{m} e_{m} + A_{55} \frac{ba}{4} \gamma^{\phi_{y}} \gamma^{\phi_{y}} e_{m}^{2} + \\ +2 \begin{bmatrix} Mx_{44} \frac{ba}{4} \gamma^{\phi_{x}} \gamma^{\psi_{x}} d_{m} f_{m} + My_{45} \frac{ba}{4} \gamma^{\phi_{x}} \gamma^{\psi_{y}} d_{m} g_{m} + \\ +Mx_{45} \frac{ba}{4} \gamma^{\phi_{y}} \gamma^{\psi_{x}} e_{m} f_{m} + My_{55} \frac{ba}{4} \gamma^{\phi_{y}} \gamma^{\psi_{y}} e_{m} g_{m} \end{bmatrix} + \\ +Nx_{44} \frac{ba}{4} \gamma^{\psi_{x}} \gamma^{\psi_{x}} f_{m}^{2} + 2Nx_{45} \frac{ba}{4} \gamma^{\psi_{x}} \gamma^{\psi_{y}} f_{m} g_{m} + Ny_{55} \frac{ba}{4} \gamma^{\psi_{y}} \gamma^{\psi_{y}} g_{m}^{2} \end{bmatrix}$$

$$(6.89)$$

$$\begin{split} \vec{F}_{pb} &= \frac{g\lambda}{2} \int_{1}^{2} \int_{1}^{2}$$

$$\begin{split} & \left[\left(I_{0} \varphi^{w} \gamma^{w} a_{m}^{2} \frac{b^{3}a}{16} + 2I_{1} \gamma^{w} \gamma^{\phi} a_{m} d_{m}^{w} \frac{b^{2}a}{8} + 2I_{0}^{\phi} \gamma^{w} \gamma^{w} a_{m} f_{m}^{w} \frac{b^{2}a}{8} \right) + \\ & + I_{2}^{2} \tau^{2} \left[I_{0} \left(\alpha^{2} \gamma_{m,z}^{w} \gamma_{m,z}^{u} a_{m}^{2} + \gamma_{m,y}^{w} \gamma_{m,y}^{u} a_{m}^{2} \right) \frac{ba}{4} + 2 \frac{a}{2} I_{1} \left(\alpha^{2} \gamma_{m,z}^{\phi} \gamma_{m,z}^{u} d_{m} d_{m} + \gamma_{m,y}^{u} \gamma_{m,y}^{u} a_{m}^{2} \right) + \\ & + I_{0}^{2} \tau^{2} \left[I_{0} \left(\alpha^{2} \gamma_{m,z}^{w} \gamma_{m,z}^{w} a_{m} f_{m} + \gamma_{m,y}^{w} \gamma_{m,y}^{w} a_{m} f_{m} \right) + \\ & + \left(I_{0} \gamma^{v} \gamma^{v} b_{m}^{2} \frac{b^{3}a}{16} + 2I_{1} \gamma^{v} \gamma^{\phi} b_{m} e_{m} \frac{b^{2}a}{8} + 2I_{0}^{\phi} \gamma^{v} \gamma^{v} \gamma^{w} b_{m} g_{m} \frac{b^{2}a}{8} \right) + \\ & + I_{0}^{2} \tau^{2} \left[I_{0} \left(\alpha^{2} \gamma_{m,z}^{v} \gamma_{m,z}^{w} b_{m}^{2} + \gamma_{m,y}^{w} \gamma_{m,y}^{w} b_{m}^{2} b_{m}^{2} + 2I_{0}^{4} \frac{a}{2} \left(\alpha^{2} \gamma_{m,z}^{v} \gamma_{m,z}^{\phi} b_{m} e_{m} + \gamma_{m,y}^{w} \gamma_{m,y}^{w} b_{m} g_{m} \frac{b^{2}a}{8} \right) + \\ & + I_{0}^{2} \tau^{2} \left[I_{0} \left(\alpha^{2} \gamma_{m,z}^{v} \gamma_{m,z}^{w} b_{m}^{2} + \gamma_{m,y}^{w} \gamma_{m,y}^{w} b_{m} g_{m} \frac{b^{2}a}{8} + 2I_{0}^{4} \gamma^{v} \gamma^{v} \gamma^{w} b_{m} g_{m} \frac{b^{2}a}{8} \right) + \\ & + I_{0}^{2} \tau^{2} \left[I_{0} \left(\alpha^{2} \gamma_{m,z}^{v} \gamma_{m,z}^{w} b_{m}^{2} + \gamma_{m,y}^{w} \gamma_{m,y}^{w} b_{m} g_{m} \frac{b^{2}a}{8} \right) + \\ & + I_{0}^{2} \tau^{2} \left[I_{0} \left(\alpha^{2} \gamma_{m,z}^{v} \gamma_{m,z}^{w} b_{m}^{2} + \gamma_{m,y}^{w} \gamma_{m,y}^{w} b_{m} g_{m} \right) \right] + \\ & + I_{0}^{v} \gamma^{v} \gamma^{v} \tau^{2} \frac{b^{3}a}{16} + I^{2} \tau^{2} I_{0} \frac{ba}{4} \left(\alpha^{2} \gamma_{m,z}^{w} \gamma_{m,z}^{w} c_{m}^{2} + \gamma_{m,y}^{w} \gamma_{m,y}^{w} c_{m}^{2} \right) \right] + \\ & + I_{0}^{v} \gamma^{v} \gamma^{v} \tau^{2} \frac{b^{3}a}{16} + I^{2} \tau^{2} r^{0} \frac{ba}{4} \left(\alpha^{2} \gamma_{m,z}^{w} \gamma_{m,z}^{w} c_{m}^{2} + \gamma_{m,y}^{w} \gamma_{m,y}^{w} d_{m} f_{m} \right) \right] + \\ & + \left[I_{2} \gamma^{\phi} \gamma^{\phi} \gamma^{\phi} e_{m}^{2} + 2I_{1}^{\phi} \gamma^{\phi} \gamma^{\psi} \gamma^{w} g_{m} d_{m}^{2} \right] + \left[I_{1} \left(\alpha^{2} \gamma_{m,z}^{\phi} \gamma_{m,z}^{w} f_{m,y}^{w} d_{m} f_{m} \right) \right] + \\ & + I_{2}^{\phi} \gamma^{v} \gamma^{v} \gamma^{v} f_{m}^{2} \frac{ba}{4} + I^{2} \tau^{2} I_{2}^{\phi} \frac{1}{a} \left(\alpha^{2} \gamma_{m,z}^{w} \gamma_{m,z}^{w} f_{m,z}^{w} f_{m,y}^{w} \eta_{m,y}^{w} f_{m}^{2} \right) \right] + \\ & + I_{2}^{\phi} \gamma^{\psi} \gamma^{\psi} \gamma^{$$

$$\overline{Q} = -\int_{\overline{A}} \left[\overline{q}(\xi,\eta) \gamma^{w} c_{m} \frac{b^{2}a}{8} - \overline{q}(\xi,\eta) l^{2} \tau^{2} \frac{a}{2} \left(\alpha^{2} \gamma^{w}_{m,\xi\xi} c_{m} + \gamma^{w}_{m,\eta\eta} c_{m} \right) \right] d\xi d\eta$$
(6.92)

Note quindi le espressioni adimensionali delle forme energetiche, è possibile applicare il principio di stazionarietà dell'energia potenziale totale, derivando ciascun termine energetico rispetto ad ogni variabile. Si ottiene così il problema dinamico:

$$\left(\left[K\right] + \left[K_{PK}\right] + \lambda\left(\left[C\right] + \left[C_{PK}\right]\right) + \lambda^{2}\left[M\right]\right) \left\{\mathbf{q}\right\} = \left\{P\right\}$$

$$(6.93)$$

_

Nell'equazione compaiono le seguenti matrici:
• La matrice di rigidezza della struttura:

$$[K] = \frac{\partial \bar{U}}{\partial \{\mathbf{q}\}} \tag{6.94}$$

• La matrice di rigidezza aggiunta dovuta alla sola parte elastica della fondazione di Pasternak:

$$\left[K_{PK}\right] = \frac{\partial \overline{W}_{k}}{\partial \{\mathbf{q}\}} \tag{6.95}$$

• La matrice di smorzamento ottenuta considerando il solo effetto smorzante strutturale (derivata dalla dipendenza dal tempo dei coefficienti elastici):

$$[C] = \frac{\partial \overline{V}}{\partial \{\mathbf{q}\}} \tag{6.96}$$

• La matrice di smorzamento dovuta all'effetto viscoso della fondazione elastica di Pasternak:

$$\left[C_{PK}\right] = \frac{\partial \overline{W}_{k}}{\partial \{\mathbf{q}\}} \tag{6.97}$$

• La matrice di massa della struttura:

$$[M] = \frac{\partial \overline{E}_k}{\partial \{\mathbf{q}\}} \tag{6.98}$$

• Il vettore dei carichi:

$$\{P\} = \frac{\partial \overline{Q}}{\partial \{\mathbf{q}\}} \tag{6.99}$$

Il vettore $\{q\}$ che compare nelle espressioni precedenti, contiene i coefficienti incogniti da calcolare. Usando la notazione espressa dalle equazioni (6.10)-(6.16), possiamo scrivere:

$$\{\mathbf{q}\} = \begin{cases} \{\mathbf{a}\}\\ \{\mathbf{b}\}\\ \{\mathbf{c}\}\\ \{\mathbf{c}\}\\ \{\mathbf{d}\}\\ \{\mathbf{e}\}\\ \{\mathbf{f}\}\\ \{\mathbf{g}\} \end{cases}$$
(6.100)

Dove ciascun sottovettore precedente è del tipo Nx1.

Ciascuna matrice individuata in precedenza è costituita da 7x7 sottomatrici di dimensione NxN. La matrice di rigidezza della struttura si può così scrivere:

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} K^{aa} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} K^{ab} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} K^{ac} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} K^{ad} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} K^{ae} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} K^{af} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} K^{ag} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} K^{ab} \end{bmatrix}^T & \begin{bmatrix} K^{bb} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} K^{bc} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} K^{bd} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} K^{be} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} K^{bf} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} K^{bg} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} K^{ac} \end{bmatrix}^T & \begin{bmatrix} K^{bc} \end{bmatrix}^T & \begin{bmatrix} K^{cc} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} K^{cd} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} K^{ce} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} K^{cf} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} K^{cg} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} K^{ad} \end{bmatrix}^T & \begin{bmatrix} K^{bd} \end{bmatrix}^T & \begin{bmatrix} K^{cd} \end{bmatrix}^T & \begin{bmatrix} K^{dd} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} K^{de} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} K^{df} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} K^{dg} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} K^{ae} \end{bmatrix}^T & \begin{bmatrix} K^{be} \end{bmatrix}^T & \begin{bmatrix} K^{ce} \end{bmatrix}^T & \begin{bmatrix} K^{de} \end{bmatrix}^T & \begin{bmatrix} K^{ee} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} K^{ef} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} K^{eg} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} K^{af} \end{bmatrix}^T & \begin{bmatrix} K^{bf} \end{bmatrix}^T & \begin{bmatrix} K^{cf} \end{bmatrix}^T & \begin{bmatrix} K^{df} \end{bmatrix}^T & \begin{bmatrix} K^{ef} \end{bmatrix}^T & \begin{bmatrix} K^{ff} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} K^{fg} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} K^{ag} \end{bmatrix}^T & \begin{bmatrix} K^{bg} \end{bmatrix}^T & \begin{bmatrix} K^{cg} \end{bmatrix}^T & \begin{bmatrix} K^{dg} \end{bmatrix}^T & \begin{bmatrix} K^{eg} \end{bmatrix}^T & \begin{bmatrix} K^{fg} \end{bmatrix}^T & \begin{bmatrix} K^{gg} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

La matrice di rigidezza in aggiunta dovuta alla presenza della fondazione elastica di Pasternak:

La matrice di smorzamento dovuto agli effetti viscosi del materiale secondo la teoria di Kelvin-Voigt [24]:

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} C^{aa} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} C^{ab} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} C^{ac} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} C^{ad} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} C^{ae} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} C^{af} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} C^{ag} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} C^{ab} \end{bmatrix}^{T} & \begin{bmatrix} C^{bb} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} C^{bc} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} C^{bd} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} C^{be} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} C^{bf} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} C^{bg} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} C^{ac} \end{bmatrix}^{T} & \begin{bmatrix} C^{bc} \end{bmatrix}^{T} & \begin{bmatrix} C^{cc} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} C^{cd} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} C^{ce} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} C^{cf} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} C^{cg} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} C^{ad} \end{bmatrix}^{T} & \begin{bmatrix} C^{bd} \end{bmatrix}^{T} & \begin{bmatrix} C^{cd} \end{bmatrix}^{T} & \begin{bmatrix} C^{dd} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} C^{de} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} C^{de} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} C^{df} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} C^{dg} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} C^{ae} \end{bmatrix}^{T} & \begin{bmatrix} C^{be} \end{bmatrix}^{T} & \begin{bmatrix} C^{ce} \end{bmatrix}^{T} & \begin{bmatrix} C^{de} \end{bmatrix}^{T} & \begin{bmatrix} C^{ee} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} C^{ef} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} C^{eg} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} C^{af} \end{bmatrix}^{T} & \begin{bmatrix} C^{bf} \end{bmatrix}^{T} & \begin{bmatrix} C^{cf} \end{bmatrix}^{T} & \begin{bmatrix} C^{df} \end{bmatrix}^{T} & \begin{bmatrix} C^{ef} \end{bmatrix}^{T} & \begin{bmatrix} C^{fg} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} C^{ag} \end{bmatrix}^{T} & \begin{bmatrix} C^{bg} \end{bmatrix}^{T} & \begin{bmatrix} C^{cg} \end{bmatrix}^{T} & \begin{bmatrix} C^{dg} \end{bmatrix}^{T} & \begin{bmatrix} C^{eg} \end{bmatrix}^{T} & \begin{bmatrix} C^{fg} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

La matrice di smorzamento aggiuntivo dovuta alla presenza della fondazione viscoelastica di Pasternak viene espressa come segue:

La matrice delle masse si può quindi esprimere:

$$\begin{bmatrix} M^{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & M^{ad} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & M^{af} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & M^{af} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & M^{bf} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & M^{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & M^{bc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & M^{bc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & M^{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M^{ad} \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} 0 & 0 & M^{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & M^{df} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & M^{df} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & M^{df} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & M^{bf} \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} 0 & 0 & M^{df} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & M^{ef} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M^{ef} \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} 0 & 0 & M^{df} \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} 0 & M^{ef} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & M^{ef} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M^{ef} \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} 0 & 0 & M^{ef} \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} 0 & 0 & M^{ef} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$
(6.105)

Il vettore dei carichi applicati, nell'ipotesi di avere solo un carico di pressione:

$$\{P\} = \begin{cases} \{0\} \\ \{0\} \\ \{P^c\} \\ \{0\} \\$$

Anche se non scritti esplicitamente, ma osservabile dalle espressioni energetiche, all'interno delle matrici precedenti, ove presente, c'è anche il contributo degli effetti non locali.

6.5. Il problema dinamico: vibrazioni libere smorzate

Il problema che si vuole affrontare in questo lavoro è il caso delle vibrazioni libere smorzate. Pertanto, l'equazione del problema ottenuta con il metodo di Ritz (6.93) viene semplificata e riscritta nel seguente modo, eliminando il vettore dei carichi:

$$\left(\left[K\right] + \left[K_{PK}\right] + \lambda\left(\left[C\right] + \left[C_{PK}\right]\right) + \lambda^{2}\left[M\right]\right)\left\{\mathbf{q}\right\} = \left\{0\right\}$$

$$(6.107)$$

L'equazione precedente, presenta due soluzioni:

• La prima è quella banale, ma non è di nostro interesse:

$$\left\{\mathbf{q}\right\} = \left\{\mathbf{0}\right\} \tag{6.108}$$

• La seconda è quella ottenuta annullando il determinante della matrice dei coefficienti:

$$\det([K] + [K_{PK}] + \lambda([C] + [C_{PK}]) + \lambda^{2}[M]) = 0$$
(6.109)

Scrivendo l'equazione (6.109) in forma più compatta introducendo:

$$\left[\tilde{K}\right] = \left[K\right] + \left[K_{PK}\right] \tag{6.110}$$

$$\left[\tilde{C}\right] = \left[C\right] + \left[C_{PK}\right] \tag{6.111}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M \end{bmatrix} \tag{6.112}$$

Si ottiene:

$$\det\left(\left[\tilde{K}\right] + \lambda\left[\tilde{C}\right] + \lambda^{2}\left[\tilde{M}\right]\right) = 0 \tag{6.113}$$

Dall'equazione (6.113) si ottiene, imponendo il determinante nullo, si ottiene un polinomio in λ dal quale è possibile ricavare gli autovalori. Tale espressione non è però di immediata risoluzione in quanto si tratta di un problema agli autovalori quadratico.

Il problema presenta un'ulteriore semplificazione quando le matrici di smorzamento strutturale [C] e dovuto alla fondazione viscoelastica di Pasternak $[C_{PK}]$ sono nulli. In questo caso, il problema diventa il caso semplificato di vibrazioni libere non smorzate. La soluzione esponenziale precedentemente ipotizzata viene ad essere riscritta in modo tale che:

$$\lambda = j\omega \tag{6.114}$$

Con *j* l'unità immaginaria.

In questo modo dall'equazione (6.113) eliminando le matrici di smorzamento e introducendo l'espressione (6.114) otteniamo:

$$\det\left(\left[\tilde{K}\right] - \omega^{2}\left[\tilde{M}\right]\right) = 0 \tag{6.115}$$

Quest'ultimo problema permette di ottenere le pulsazioni naturali ω_n (autovalori) e le corrispondenti forme modali (autovettori).

Le matrici di massa e di rigidezza, per come sono costruite, sono simmetriche. La matrice $[\tilde{M}]$, inoltre, è sempre definita positiva, mentre la matrice $[\tilde{K}]$ può essere definita positiva o semidefinita positiva, a seconda della presenza o meno dei vincoli. Una matrice viene detta definita positiva se presenta tutti gli autovalori positivi, mentre viene detta semidefinita positiva se gli autovalori corrispondenti sono positivi o uguali a zero.

Gli autovettori di una matrice simmetrica e definita/semidefinita positiva sono anche ortogonali.

Questa importantissima proprietà matematica, che presenta anche dei riscontri a livello fisico, viene sfruttata per poter rendere il sistema più semplice da analizzare.

Andiamo a definire una nuova matrice, chiamata matrice modale, le cui colonne sono costituite dalle forme modali (autovettori $\{\phi_i\}$) del problema delle vibrazioni libere non smorzate.

$$\begin{bmatrix} \Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{\phi_1\} & \{\phi_2\} & \dots & \{\phi_n\} \end{bmatrix}$$
(6.116)

La proprietà di ortogonalità delle forme modali permette di risolvere il problema, nel nostro caso a 7xN gradi di libertà, a 7xN problemi ad un singolo grado di libertà.

La soluzione del problema non smorzato è ottenuta come combinazione lineare delle varie forme modali, ciascuna moltiplicata per un opportuno fattore detto fattore di partecipazione modale o coordinata normalizzata. Questo può essere scritto come:

$$\{\mathbf{q}\} = [\Phi]\{\mathbf{v}(t)\} \tag{6.117}$$

Scrivendo l'equazione (6.93), considerando il caso non smorzato libero, utilizzando l'espressione (6.114) si ottiene:

$$\left(\left[\tilde{K}\right]\left[\Phi\right] - \omega^{2}\left[\tilde{M}\right]\left[\Phi\right]\right)\left\{\mathbf{v}(t)\right\} = \left\{0\right\}$$
(6.118)

Premoltiplichiamo ciascun termine dell'equazione (6.118) per la matrice modale: :

$$\left(\left[\Phi\right]^{T}\left[\tilde{K}\right]\left[\Phi\right]-\omega^{2}\left[\Phi\right]^{T}\left[\tilde{M}\right]\left[\Phi\right]\right)\left\{\mathbf{v}(t)\right\}=\left\{0\right\}$$
(6.119)

Per le proprietà di ortogonalità dei modi di vibrare, infatti, le matrici ottenute sono matrici diagonali:

$$\left[\Phi\right]^{T}\left[\tilde{K}\right]\left[\Phi\right] = \left[D_{K}\right] = \begin{bmatrix} k_{1} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ 0 & k_{2} & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & k_{i} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & k_{7N} \end{bmatrix}$$
(6.120)

Questa viene anche detta matrice delle rigidezze modali.

$$\left[\Phi \right]^{T} \left[\tilde{M} \right] \left[\Phi \right] = \left[D_{M} \right] = \begin{bmatrix} m_{1} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_{2} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_{i} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & m_{7N} \end{bmatrix}$$
(6.121)

Quella delle masse è altresì definita come matrice delle masse modali.

Scrivendo in forma compatta:

$$k_i - \omega^2 m_i = 0 \quad i = 1, ..., 7N \tag{6.122}$$

Fin qui detto è valido per il caso delle vibrazioni libere non smorzate. Il nostro problema, però, contiene anche lo smorzamento. Utilizzando la scrittura (6.117) anche per il problema con la matrice di smorzamento abbiamo:

$$\left(\left[\Phi\right]^{T}\left[\tilde{K}\right]\left[\Phi\right] + \lambda\left[\Phi\right]^{T}\left[\tilde{C}\right]\left[\Phi\right] + \lambda^{2}\left[\Phi\right]^{T}\left[\tilde{M}\right]\left[\Phi\right]\right)\left\{\mathbf{v}(t)\right\} = \left\{0\right\}$$
(6.123)

Volendo applicare la stessa procedura adottata per il caso non smorzato, la matrice modale dei modi non smorzati $[\Phi]$ non diagonalizza la matrice di smorzamento. Non avendo quindi, in generale, una matrice diagonale non è possibile disaccoppiare i vari modi di vibrare e pertanto

il problema con 7xN gradi di libertà non si può ricondurre a quello di 7xN problemi ad un singolo grado di libertà.

Osservando attentamente come è costruita la matrice di smorzamento strutturale, per la teoria di Kelvin-Voigt adottata:

$$\left[C\right] = g\left[K\right] \tag{6.124}$$

Avendo la matrice di smorzamento strutturale proporzionale alla matrice di rigidezza del sistema, è possibile ottenere una matrice diagonale anche per quella di smorzamento.

La matrice di smorzamento ottenuta dalla presenza degli smorzatori viscosi della fondazione di Pasternak, è comunque una matrice diagonale semidefinita positiva.

Mettendo insieme i due contributi quindi possiamo scrivere una matrice diagonale anche per lo smorzamento:

$$\left[\Phi\right]^{T} \left[\tilde{C}\right] \left[\Phi\right] = \left[D_{C}\right] = \begin{bmatrix} c_{1} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_{2} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{i} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & c_{7N} \end{bmatrix}$$
(6.125)

Il sistema si può così riscrivere in forma in indici:

$$\lambda^2 m_i + \lambda c_i + k_i = 0 \quad i = 1, ..., 7N$$
(6.126)

Andando a dividere ciascun termine per la massa modale i-esima, si ha:

$$\lambda^{2} + \lambda \frac{c_{i}}{m_{i}} + \frac{k_{i}}{m_{i}} = 0 \quad i = 1, ..., 7N$$
(6.127)

Riconoscendo l'espressione della pulsazione naturale i-esima:

$$\omega_{n_i}^2 = \frac{k_i}{m_i} \tag{6.128}$$

E introducendo il fattore di smorzamento del modo i-esimo ξ_i

$$\frac{c_i}{m_i} = 2\omega_{n_i}\xi_i \tag{6.129}$$

Otteniamo la seguente equazione:

$$\lambda^{2} + \lambda 2\omega_{n_{i}}\xi_{i} + \omega_{n_{i}}^{2} = 0 \quad i = 1,...,7N$$
(6.130)

Da quest'ultima espressione riusciamo quindi a ricavare i valori di λ_i , risolvendo una semplice equazione di secondo grado.

$$\lambda_{i_{1,2}} = -\xi_i \omega_{n_i} \pm j \omega_{n_i} \sqrt{1 - \xi_i^2}$$
(6.131)

Da quest'ultima possiamo osservare che la parte reale rappresenta il contributo smorzante al modo di vibrare libero i-esimo, mentre la parte immaginaria fornisce il valore della pulsazione smorzata di quel modo.

Risulta evidente come al variare del fattore di smorzamento ξ_i possiamo ottenere diverse tipologie di moto:

- $\xi_i = 0$ due soluzioni complesse coniugate con sola parte immaginaria (moto armonico non smorzato)
- $0 < \xi < 1$ due soluzioni complesse coniugate con parte reale negativa (moto armonico sottosmorzato)
- $\xi = 1$ due soluzioni reali coincidenti, il moto non è più oscillatorio in quanto la parte immaginaria è nulla (moto criticamente smorzato)
- $\xi > 1$ due soluzioni reali distinte, moto non oscillatorio (moto sovrasmorzato)

Noti quindi i vari parametri della fondazione viscoelastica (K_{w1}, K_g, C_d) , il valore dello smorzamento strutturale *g*, il parametro nonlocale τ e tutte le caratteristiche della nano-piastra è possibile andare a determinare pulsazioni e forme modali del caso non smorzato e poi da questo andare a considerare lo smorzamento e calcolare la pulsazione e lo smorzamento delle varie forme modali.

6.6. Implementazione del Metodo p-Ritz in Matlab \mathbb{R}

Il metodo descritto in precedenza, chiamato anche *p-Ritz* da Liew [35], si presta ad essere utilizzato per produrre un programma in grado di risolvere problemi sia statici che dinamici.

Infatti, è solo necessario andare a sviluppare ulteriormente le espressioni delle matrici e del vettore dei carichi per avere le relazioni complete che le compongono.

In questo lavoro di tesi è stato, quindi sviluppato un programma, in grado di ricevere in input i dati relativi alla piastra (geometria, materiali e caratteristiche, orientamento, tipologia di carico, vincoli, tipo di analisi). In particolare, vengono definiti gli esponenti delle funzioni base che andranno a formare ricorsivamente le espressioni delle funzioni scelte ed il massimo grado p del polinomio che approssima le variabili incognite.

Il programma mediante una funzione a parte calcola a partire dai dati di input le matrici caratteristiche del laminato secondo la teoria RZT.

Successivamente, una funzione dedicata permette di calcolare le matrici necessarie a risolvere il problema. All'interno di quest'ultima, grazie agli esponenti e alle formule ricorsive vengono calcolate le funzioni e le relative derivate per ogni variabile presente nelle espressioni delle matrici precedenti e nel vettore dei carichi.

Le espressioni all'interno delle matrici devono essere integrate nel dominio definito in precedenza. L'esponente p dei polinomi non è noto a priori, ma dipende dalla scelta dell'utente (un valore più alto permette una convergenza maggiore al risultato esatto), pertanto l'integrazione da svolgere non può essere fatta in maniera analitica. Occorre utilizzare un metodo numerico alternativo per poterla svolgere.

Il metodo impiegato in questo programma è l'integrazione di Gauss. I prodotti delle funzioni e delle derivate che devono essere successivamente integrati nel dominio, vengono, invece, valutati in alcuni punti, detti punti di Gauss, e successivamente moltiplicati per appositi pesi. I punti e i pesi sono scelti per minimizzare l'errore dell'integrazione numerica.

Nel programma, secondo anche le indicazioni di Liew nel suo libro per la teoria di Mindlin, si fa uso di 20 punti di Gauss per l'integrazione numerica.

Calcolate le matrici ed il vettore si può procedere all'analisi, risolvendo un classico problema agli autovalori/autovettori nel caso dinamico modale, oppure risolvendo un sistema lineare nel caso statico.

Note le pulsazioni naturali e gli autovettori delle forme modali, si procede ad inserire anche lo smorzamento (se presente) e calcolare lo smorzamento della forma modale corrispondente e la pulsazione del modo smorzato corrispondente.

Di seguito viene visualizzato un diagramma di flusso del programma.



Figura 6.2: Schema programma p-Ritz

7. Soluzione approssimata mediante elementi finiti basati sulla teoria RZT

Per un generico problema strutturale non sempre è possibile ottenere la soluzione analitica. Quando questo può essere fatto, di solito siamo in presenza di problemi relativamente semplici, come il caso della piastra semplicemente appoggiata su tutti e quattro i lati. Passando al caso dell'incastro su tutti i lati o più in generale a condizioni di vincolo differenti per ogni lato, la soluzione analitica diventa sempre più difficile ottenerla e bisogna utilizzare metodi approssimati come il metodo di Ritz visto nel capitolo precedente. Il vantaggio del metodo di Ritz illustrato precedentemente, applicato al caso della piastra, può essere esteso a geometrie più complicate, ma sempre riconducibili ad una forma inscrivibile in un quadrato sul piano di riferimento (ξ , η) [35]. Risulta più facile andare a scegliere condizioni a contorno diverse per ogni lato e ottenere quindi una soluzione anche per quei casi che in letteratura non sono analizzati, o esistono pochi riferimenti.

Volendo però applicare un metodo versatile e adattabile a qualsiasi geometria, gli elementi finiti ci vengono in aiuto per perseguire questo obiettivo.

Con gli elementi finiti è possibile andare a discretizzare una qualsiasi geometria continua in elementi più piccoli di geometria finita (da qui il nome elementi finiti). A seconda della teoria strutturale utilizzata ciascun elemento possiede un certo numero di gradi di libertà, ovvero le incognite di nostro interesse. Queste sono un numero finito che dipende dal numero di nodi presenti. Risolvendo il problema si andrà a conoscere i valori delle incognite dei nodi, mentre in tutti gli altri punti della piastra si dovranno utilizzare apposite funzioni, dette funzioni di forma, che approssimano i valori all'interno dell'elemento in funzione delle variabili nodali.

Ciascun elemento possiede le sue caratteristiche di rigidezza e massa e devono essere opportunamente combinate tra loro per riprodurre in maniera corretta quella dell'intera struttura e quindi fornire anche il risultato corretto.

I vincoli applicati permettono di agire direttamente sui valori delle incognite nodali. Di fatto è possibile utilizzare molteplici tipologie di vincoli, anche all'interno della generica piastra, basa imporre i corrispondenti gradi di libertà a zero.

Prendendo come riferimento la tesi "Analisi di risposte di piastre composite e sandwich" di Gaia [37], andremo ad elaborare un elemento finito basato sull'RZT, in grado di considerare anche l'effetto non locale, viscoso strutturale e quello della fondazione viscoelastica di Pasternak.

Per poter andare a definire le matrici di rigidezza e di massa del sistema, oltre a quelle dei carichi nodali, occorre partire da una formulazione energetica. A questo proposito verranno sfruttate le scritture in termini energetici precedenti.

7.1. Formulazione degli elementi finiti basati sulla teoria RZT

La teoria RZT è particolarmente indicata per quei casi in cui si hanno strutture con un diverso numero di strati e proprietà molto variabili tra *layer* e *layer*. Per l'analisi delle nano-pastre in cui abbiamo strati *Functionally Graded*, la teoria RZT permette di avere buoni risultati [38]. Unendo questa teoria agli elementi finiti siamo in grado di ottenere degli elementi

bidimensionali in grado di prevedere in maniera corretta il comportamento della struttura soprattutto quando questa è composta da un notevole numero di strati.

Per poter formulare gli elementi finiti occorre partire da una formulazione energetica. Poiché andremo a svilupparli secondo il metodo di Rayleigh-Ritz, quanto trattato nel capitolo precedente in termini energetici è ancora valido, come già accennato. In particolare, abbiamo già espresse le varie componenti energetiche:

- Energia di deformazione elastica *U* (equazione 6.78)
- Energia della fondazione viscoelastica di Pasternak W_k (equazione 6.79)
- Energia dovuta allo smorzamento strutturale *V* (equazione 6.80)
- Energia cinetica E_K (equazione 6.81)
- Energia dei carichi esterni Q (equazione 6.82)

Ricordiamo che l'effetto non locale, per la trattazione sviluppata nei capitoli precedenti, fa comparire dei termini aggiuntivi nelle varie matrici. Pertanto, al lavoro di Gaia [37] si dovrà aggiungere questi ulteriori termini, oltre agli effetti della fondazione e quelli di smorzamento.

Restringendo il dominio di integrazione a quello di un generico elemento, si vuole approssimare il campo di spostamenti del generico elemento in funzione di quanto avviene ai nodi.

Per fare ciò, come accennato in precedenza, utilizziamo delle funzioni di forma che per il metodo di Rayleigh-Ritz devono soddisfare almeno le condizioni al contorno di tipo geometrico dell'elemento.

Possiamo, quindi scrivere:

$$\left\{d^{(e)}(x, y, z, t)\right\} = \left[N^{(e)}(x, y, z)\right] \left\{q^{(e)}(t)\right\}$$
(7.1)

Dove con $\{d^{(e)}\}$ è il vettore degli spostamenti del generico punto del sottodominio, $\{q^{(e)}\}$ è il vettore degli spostamenti nei punti nodali dell'elemento (ovvero le nostre incognite), mentre $[N^{(e)}]$ è la matrice delle funzioni di forma.

Il vettore $\{q^{(e)}\}$, detto anche vettore dei gradi di libertà nodali, può essere scritto:

$$\left\{ q^{(e)} \right\} = \begin{cases} \left\{ q_1^{(e)} \right\} \\ \left\{ q_2^{(e)} \right\} \\ \vdots \\ \left\{ q_i^{(e)} \right\} \\ \vdots \\ \left\{ q_{NN}^{(e)} \right\} \end{cases}$$
(7.2)

Dove ciascun sottovettore è costituito dai gradi di libertà del nodo i-esimo, così espresso per la teoria RZT:

$$\left\{q_{i}^{(e)}\right\} = \begin{cases} U_{i} \\ V_{i} \\ W_{i} \\ \Theta_{x_{i}} \\ \Theta_{y_{i}} \\ \Psi_{x_{i}} \\ \Psi_{y_{i}} \\ \end{bmatrix}$$
(7.3)

La matrice delle funzioni di forma si può così definire:

$$\begin{bmatrix} N^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1^{(e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_2^{(e)} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} N_i^{(e)} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} N_{NN}^{(e)} \end{bmatrix}$$
(7.4)

Con:

$$\left[N_{i}^{(e)}\right] = N_{i}^{(e)}\left[I\right] \tag{7.5}$$

Dove $N_i^{(e)}$ è la funzione di forma scelta per quell'elemento e [I] è la matrice identità di dimensione 7x7.

7.3. Matrici degli elementi finiti

Basandosi sulle espressioni energetiche già ottenute nel capitolo precedente, si considera come dominio di integrazione l'area del singolo elemento e si procede a scrivere per esso le varie matrici di rigidezza, massa e smorzamento e il vettore dei carichi nodali.

7.3.1. Matrice di rigidezza dell'elemento

L'energia di deformazione elastica espressa in forma matriciale, suddividendola in due contributi (uno membrano-flesso-torsionale e uno di taglio), è la seguente:

$$U^{(e)} = \frac{1}{2} \int_{A^{(e)}} \left([\nabla_1] \{ d^{(e)} \} \right)^T \begin{bmatrix} [A] & [B] & [G] \\ [B]^T & [D] & [H] \\ [G]^T & [H]^T & [L] \end{bmatrix} [\nabla_1] \{ d^{(e)} \} dA + \frac{1}{2} \int_{A^{(e)}} \left([\nabla_2] \{ d^{(e)} \} \right)^T \begin{bmatrix} [A_\tau] & [M] \\ [M]^T & [N] \end{bmatrix} [\nabla_2] \{ d^{(e)} \} dA$$
(7.6)

Con le matrici:

$$\begin{bmatrix} \nabla_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
(7.7)

$$\left[\nabla_{1} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$$
(7.8)

Andando a sostituire con l'espressione (7.1) abbiamo:

$$U^{(e)} = \frac{1}{2} \int_{A^{(e)}} \{q^{(e)}\}^{T} ([\nabla_{1}][N^{(e)}])^{T} \begin{bmatrix} [A] & [B] & [G] \\ [B]^{T} & [D] & [H] \\ [G]^{T} & [H]^{T} & [L] \end{bmatrix} [\nabla_{1}][N^{(e)}] \{q^{(e)}\} dA + \frac{1}{2} \int_{A^{(e)}} \{q^{(e)}\}^{T} ([\nabla_{2}][N^{(e)}])^{T} \begin{bmatrix} [A_{\tau}] & [M] \\ [M]^{T} & [N] \end{bmatrix} [\nabla_{2}][N^{(e)}] \{q^{(e)}\} dA$$
(7.9)

Sviluppando ulteriormente si ha:

$$U^{(e)} = \frac{1}{2} \{q^{(e)}\}^{T} \left(\int_{A^{(e)}} \left([\nabla_{1}] [N^{(e)}] \right)^{T} \begin{bmatrix} [A] & [B] & [G] \\ [B]^{T} & [D] & [H] \\ [G]^{T} & [H]^{T} & [L] \end{bmatrix} [\nabla_{1}] [N^{(e)}] dA \right) \{q^{(e)}\} + \frac{1}{2} \{q^{(e)}\}^{T} \left(\int_{A^{(e)}} \left([\nabla_{2}] [N^{(e)}] \right)^{T} \begin{bmatrix} [A_{\tau}] & [M] \\ [M]^{T} & [N] \end{bmatrix} [\nabla_{2}] [N^{(e)}] dA \right) \{q^{(e)}\}$$
(7.10)

Espressione nella quale individuiamo la matrice di rigidezza dell'elemento:

$$\begin{bmatrix} K^{(e)} \end{bmatrix} = \int_{A^{(e)}} \left(\begin{bmatrix} \nabla_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N^{(e)} \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} A \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} B \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} G \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} B \end{bmatrix}^T & \begin{bmatrix} D \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} H \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} G \end{bmatrix}^T & \begin{bmatrix} H \end{bmatrix}^T & \begin{bmatrix} L \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N^{(e)} \end{bmatrix} dA +$$

$$+ \int_{A^{(e)}} \left(\begin{bmatrix} \nabla_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N^{(e)} \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\tau \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} M \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} M \end{bmatrix}^T & \begin{bmatrix} N \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N^{(e)} \end{bmatrix} dA$$
(7.11)

7.3.2. Matrice di massa dell'elemento

L'energia cinetica dell'elemento, espressa in termini matriciali, può essere così scritta:

$$E_{k}^{(e)} = \frac{1}{2} \int_{A^{(e)}} \left\{ \dot{d}^{(e)} \right\}^{T} \begin{bmatrix} I_{0} & 0 & 0 & I_{1} & 0 & I_{0}^{\phi_{i}} & 0 \\ 0 & I_{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{0} & 0 & 0 & I_{0} & 0 & 0 & 0 \\ I_{1} & 0 & 0 & I_{2} & 0 & I_{1}^{\phi_{i}} & 0 \\ 0 & I_{1} & 0 & 0 & I_{2} & 0 & I_{1}^{\phi_{i}} \\ I_{0}^{\phi_{i}} & 0 & 0 & I_{1}^{\phi_{i}} & 0 & I_{2}^{\phi_{i}} \\ 0 & I_{0}^{\phi_{i}} & 0 & 0 & I_{1}^{\phi_{i}} & 0 & I_{2}^{\phi_{i}} \\ 0 & I_{0}^{\phi_{i}} & 0 & 0 & I_{1} & 0 & I_{0}^{\phi_{i}} \\ 0 & 0 & I_{0} & 0 & 0 & I_{1} & 0 & I_{0}^{\phi_{i}} \\ 0 & 0 & I_{0} & 0 & 0 & I_{1} & 0 & I_{0}^{\phi_{i}} \\ 0 & 0 & I_{0} & 0 & 0 & I_{0}^{\phi_{i}} & 0 \\ I_{1} & 0 & 0 & I_{2} & 0 & I_{1}^{\phi_{i}} \\ 0 & I_{1} & 0 & 0 & I_{2} & 0 & I_{1}^{\phi_{i}} \\ 0 & I_{0}^{\phi_{i}} & 0 & 0 & I_{1}^{\phi_{i}} & 0 & I_{2}^{\phi_{i}} \\ 0 & I_{0}^{\phi_{i}} & 0 & 0 & I_{1}^{\phi_{i}} & 0 & I_{2}^{\phi_{i}} \\ 0 & I_{0}^{\phi_{i}} & 0 & 0 & I_{1}^{\phi_{i}} & 0 & I_{2}^{\phi_{i}} \\ 0 & I_{0}^{\phi_{i}} & 0 & 0 & I_{1}^{\phi_{i}} & 0 & I_{2}^{\phi_{i}} \\ 0 & I_{0}^{\phi_{i}} & 0 & 0 & I_{1}^{\phi_{i}} & 0 & I_{2}^{\phi_{i}} \\ 0 & I_{0}^{\phi_{i}} & 0 & 0 & I_{1} & 0 & I_{0}^{\phi_{i}} \\ 0 & I_{0} & 0 & 0 & I_{1} & 0 & I_{2}^{\phi_{i}} \\ 0 & I_{1} & 0 & 0 & I_{2} & 0 & I_{1}^{\phi_{i}} \\ 0 & I_{1} & 0 & 0 & I_{2} & 0 & I_{1}^{\phi_{i}} \\ 0 & I_{1} & 0 & 0 & I_{2} & 0 & I_{1}^{\phi_{i}} \\ 0 & I_{0}^{\phi_{i}} & 0 & 0 & I_{1}^{\phi_{i}} \\ 0 & I_{0}^{\phi_{i}} & 0 & 0 & I_{1}^{\phi_{i}} \\ 0 & I_{0}^{\phi_{i}} & 0 & 0 & I_{1}^{\phi_{i}} \\ 0 & I_{0}^{\phi_{i}} & 0 & 0 & I_{1}^{\phi_{i}} \\ 0 & I_{0}^{\phi_{i}} & 0 & 0 & I_{1}^{\phi_{i}} \\ 0 & I_{0}^{\phi_{i}} & 0 & 0 & I_{2}^{\phi_{i}} \\ 0 & I_{0}^{\phi_{i}} & 0 & 0 & I_{1}^{\phi_{i}} \\ 0 & I_{0}^{\phi_{i}} & 0 & 0 & I_{1}^{\phi_{i}} \\ 0 & I_{0}^{\phi_{i}} & 0 & I_{2}^{\phi_{i}} \\ 0 & I_{0}^{\phi_{i}} & 0 & 0 & I_{2}^{\phi_{i}} \\ 0 & I_{0}^{\phi_{i}} & 0 & 0 & I_{2}^{\phi_{i}} \\ 0 & I_{0}^{\phi_{i}} & 0 & 0 & I_{2}^{\phi_{i}} \\ 0 & I_{0}^{\phi_{i}} & 0 & 0 & I_{2}^{\phi_{i}} \\ 0 & I_{0}^{\phi_{i}} & 0 & 0 & I_{2}^{\phi_{i}} \\ 0 & I_{0}^{\phi_{i}} & 0 & 0 & I_{2}^{\phi_{i}} \\ 0 & I_{0}^{\phi_{i}} & 0 & I_{0}^{\phi_{i}} \\ 0 & I_{0}^{\phi_{i}} & 0 & 0 & I_{0}^{\phi_{i}} \\ 0 & I_{0}^{\phi_{i}} & 0 & 0 & I_{0}^{\phi_{i}} \\$$

Definendo la matrice:

$$\begin{bmatrix} I_{0} & 0 & 0 & I_{1} & 0 & I_{0}^{\phi_{x}} & 0 \\ 0 & I_{0} & 0 & 0 & I_{1} & 0 & I_{0}^{\phi_{y}} \\ 0 & 0 & I_{0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I_{1} & 0 & 0 & I_{2} & 0 & I_{1}^{\phi_{x}} & 0 \\ 0 & I_{1} & 0 & 0 & I_{2} & 0 & I_{1}^{\phi_{y}} \\ I_{0}^{\phi_{x}} & 0 & 0 & I_{1}^{\phi_{x}} & 0 & I_{2}^{\phi_{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \breve{m} \end{bmatrix}$$
(7.13)

Possiamo scrivere:

$$E_{k}^{(e)} = \frac{1}{2} \left\{ \dot{q}^{(e)} \right\}^{T} \int_{A^{(e)}} \left[N^{(e)} \right]^{T} \left[\breve{m} \right] \left[N^{(e)} \right] dA \left\{ \dot{q}^{(e)} \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \dot{q}^{(e)} \right\}^{T} \int_{A^{(e)}} \tau^{2} l^{2} \left(\frac{\partial \left[N^{(e)} \right]}{\partial x} \right)^{T} \left[\breve{m} \right] \frac{\partial \left[N^{(e)} \right]}{\partial x} dA \left\{ \dot{q}^{(e)} \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \dot{q}^{(e)} \right\}^{T} \int_{A^{(e)}} \tau^{2} l^{2} \left(\frac{\partial \left[N^{(e)} \right]}{\partial y} \right)^{T} \left[\breve{m} \right] \frac{\partial \left[N^{(e)} \right]}{\partial y} dA \left\{ \dot{q}^{(e)} \right\}$$
(7.14)

Da quest'ultima espressione individuiamo la matrice delle masse, dove si può vedere il contributo aggiuntivo derivante dagli effetti non-locali

$$\begin{bmatrix} M^{(e)} \end{bmatrix} = \int_{A^{(e)}} \left\{ \begin{bmatrix} N^{(e)} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \breve{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N^{(e)} \end{bmatrix} + \tau^2 l^2 \left(\left(\begin{bmatrix} N^{(e)} \end{bmatrix}_{,x} \right)^T \begin{bmatrix} \breve{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N^{(e)} \end{bmatrix}_{,x} + \left(\begin{bmatrix} N^{(e)} \end{bmatrix}_{,y} \right)^T \begin{bmatrix} \breve{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N^{(e)} \end{bmatrix}_{,y} \right) \right\} dA$$
(7.15)

7.3.3. Matrice di smorzamento strutturale dell'elemento

L'energia dovuta allo smorzamento strutturale è legata a quella di rigidezza strutturale, per come è stata definita:

$$\left[C^{(e)}\right] = g\left[K^{(e)}\right] \tag{7.16}$$

7.3.4. Matrice di rigidezza della fondazione di Pasternak dell'elemento

Per quanto riguarda la rigidezza aggiunta dovuta alla presenza delle molle della fondazione di Pasternak, abbiamo la seguente espressione energetica scritta in forma matriciale:

$$\begin{split} W_{k}^{(e)} &= \frac{1}{2} \int_{A^{(e)}} \left(\left[\nabla_{3} \right] \left\{ d^{(e)} \right\} \right)^{T} K_{1w} \left[\nabla_{3} \right] \left\{ d^{(e)} \right\} + K_{g} \left[\left(\left[\nabla_{4} \right] \left\{ d^{(e)} \right\} \right)^{T} \left[\nabla_{4} \right] \left\{ d^{(e)} \right\} \right)^{T} \left[\nabla_{5} \right] \left\{ d^{(e)} \right\} \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \tau^{2} l^{2} \int_{A^{(e)}} \left\{ K_{1w} \left[\left(\left[\nabla_{6} \right] \left\{ d^{(e)} \right\} \right)^{T} \left[\nabla_{6} \right] \left\{ d^{(e)} \right\} + \left(\left[\nabla_{7} \right] \left\{ d^{(e)} \right\} \right)^{T} \left[\nabla_{7} \right] \left\{ d^{(e)} \right\} + \\ &+ K_{g} \left(\left[\left(\left[\nabla_{6} \right] \left\{ d^{(e)} \right\} \right)^{T} \left[\nabla_{6} \right] \left\{ d^{(e)} \right\} + \left(\left[\nabla_{7} \right] \left\{ d^{(e)} \right\} \right)^{T} \left[\nabla_{7} \right] \left\{ d^{(e)} \right\} + \\ &+ \left(\left[\nabla_{8} \right] \left\{ d^{(e)} \right\} \right)^{T} \left[\nabla_{8} \right] \left\{ d^{(e)} \right\} \end{split} \right)$$

 $0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$

(7.18)

(7.19)

(7.20)

(7.17)

0

 $\left[\nabla_{4}\right] =$

Con:

71

Sviluppando ulteriormente:

$$W_{k}^{(e)} = \frac{1}{2} \left\{ q^{(e)} \right\}^{T} \int_{A^{(e)}} \left(\left[\nabla_{3} \right] \left[N^{(e)} \right] \right)^{T} K_{1w} \left[\nabla_{3} \right] \left[N^{(e)} \right] + K_{g} \left[\left(\left[\nabla_{4} \right] \left[N^{(e)} \right] \right)^{T} \left[\nabla_{4} \right] \left[N^{(e)} \right] + \left(\left[\nabla_{5} \right] \left[N^{(e)} \right] \right)^{T} \left[\nabla_{5} \right] \left[N^{(e)} \right] \right] \right] dA \left\{ q^{(e)} \right\} + \frac{1}{2} \tau^{2} l^{2} \left\{ q^{(e)} \right\}^{T} \int_{A^{(e)}} \left\{ K_{1w} \left[\left(\left[\nabla_{4} \right] \left[N^{(e)} \right] \right)^{T} \left[\nabla_{4} \right] \left[N^{(e)} \right] + \left(\left[\nabla_{5} \right] \left[N^{(e)} \right] \right)^{T} \left[\nabla_{5} \right] \left[N^{(e)} \right] \right] + \left(\left[\nabla_{6} \right] \left[N^{(e)} \right] \right)^{T} \left[\nabla_{6} \right] \left[N^{(e)} \right] + \left(\left[\nabla_{7} \right] \left[N^{(e)} \right] \right)^{T} \left[\nabla_{7} \right] \left[N^{(e)} \right] + \left(\left[\nabla_{7} \right] \left[N^{(e)} \right] \right] + \left(\left[\nabla_{8} \right] \left[N^{(e)} \right] \right)^{T} \left[\nabla_{8} \right] \left[N^{(e)} \right] \right] \right\} dA \left\{ q^{(e)} \right\}$$

$$(7.24)$$

Dalla quest'ultima abbiamo l'espressione della matrice di rigidezza della fondazione di Pasternak per l'elemento.

$$\begin{bmatrix} K_{PK}^{(e)} \end{bmatrix} = \int_{A^{(e)}} \left(\begin{bmatrix} \nabla_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N^{(e)} \end{bmatrix} \right)^T K_{1w} \begin{bmatrix} \nabla_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N^{(e)} \end{bmatrix} + K_g \begin{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \nabla_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N^{(e)} \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} \nabla_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N^{(e)} \end{bmatrix} + \\ + \left(\begin{bmatrix} \nabla_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N^{(e)} \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} \nabla_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N^{(e)} \end{bmatrix} \end{bmatrix} dA + \\ \tau^2 l^2 \int_{A^{(e)}} \begin{cases} K_{1w} \begin{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \nabla_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N^{(e)} \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} \nabla_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N^{(e)} \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} \nabla_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N^{(e)} \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} \nabla_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N^{(e)} \end{bmatrix} \end{bmatrix} + \\ + K_g \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \nabla_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N^{(e)} \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} \nabla_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N^{(e)} \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} \nabla_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N^{(e)} \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} \nabla_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N^{(e)} \end{bmatrix} + \\ + \left(\begin{bmatrix} \nabla_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N^{(e)} \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} \nabla_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N^{(e)} \end{bmatrix} \end{cases}$$
(7.25)

7.3.5. Matrice di smorzamento della fondazione di Pasternak dell'elemento

Oltre alla presenza delle molle nella fondazione, abbiamo anche un contributo energetico dovuto alla presenza degli smorzatori viscosi, l'energia scritta in termini matriciali è la seguente:

$$V_{PK}^{(e)} = \frac{1}{2} \int_{A^{(e)}} \left\{ \left(\left[\nabla_3 \right] \left\{ \dot{d}^{(e)} \right\} \right)^T C_d \left[\nabla_3 \right] \left\{ \dot{d}^{(e)} \right\} + \tau^2 l^2 C_d \left[\left(\left[\nabla_4 \right] \left\{ \dot{d}^{(e)} \right\} \right)^T \left[\nabla_4 \right] \left\{ \dot{d}^{(e)} \right\} + \left(\left[\nabla_5 \right] \left\{ \dot{d}^{(e)} \right\} \right)^T \left[\nabla_5 \right] \left\{ \dot{d}^{(e)} \right\} \right] \right\} dA$$
(7.26)

Sviluppando ulteriormente:

$$V_{PK}^{(e)} = \frac{1}{2} \left\{ \dot{q}^{(e)} \right\}^{T} \int_{A^{(e)}} \left\{ \begin{pmatrix} \left[\nabla_{3} \right] \left[N^{(e)} \right] \right\}^{T} C_{d} \left[\nabla_{3} \right] \left[N^{(e)} \right] + \left(\left[\nabla_{3} \right] \left[N^{(e)} \right] \right]^{T} \left[\nabla_{4} \right] \left[N^{(e)} \right] + \left(\left[\nabla_{5} \right] \left[N^{(e)} \right] \right)^{T} \left[\nabla_{5} \right] \left[N^{(e)} \right] \right] \right\} dA \left\{ \dot{q}^{(e)} \right\}$$

$$(7.27)$$

Da quest'ultima espressione possiamo individuare l'espressione della matrice di smorzamento dell'elemento dovuta all'effetto viscoso della fondazione di Pasternak.

$$\begin{bmatrix} C_{PK}^{(e)} \end{bmatrix} = \int_{A^{(e)}} \left\{ \begin{aligned} \left\{ \left[\nabla_3 \right] \left[N^{(e)} \right] \right\}^T C_d \left[\nabla_3 \right] \left[N^{(e)} \right] + \\ \left\{ + \tau^2 l^2 C_d \left[\left(\left[\nabla_4 \right] \left[N^{(e)} \right] \right)^T \left[\nabla_4 \right] \left[N^{(e)} \right] + \left(\left[\nabla_5 \right] \left[N^{(e)} \right] \right)^T \left[\nabla_5 \right] \left[N^{(e)} \right] \right] \right\} \end{aligned} \right\} dA$$

$$(7.28)$$

Si individua sempre l'effetto viscoso locale ed il contributo aggiuntivo dovuto alla teoria non locale.

7.3.6. Vettore dei carichi nodali dell'elemento

Scriviamo ora il contributo energetico dovuto alla presenza di un carico di pressione agente sulla nano-piastra.

L'energia espressa in termini matriciale è la seguente:

$$Q^{(e)} = \int_{A^{(e)}} \left\{ q \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left\{ d^{(e)} \right\} - q\tau^2 l^2 \left[\begin{bmatrix} \nabla_6 \end{bmatrix} \left\{ d^{(e)} \right\} + \begin{bmatrix} \nabla_8 \end{bmatrix} \left\{ d^{(e)} \right\} \right] \right\} dA$$
(7.29)

Sviluppando si ottiene:

$$Q^{(e)} = \int_{A^{(e)}} \left\{ q \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N^{(e)} \end{bmatrix} - q\tau^2 l^2 \begin{bmatrix} \nabla_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N^{(e)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \nabla_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N^{(e)} \end{bmatrix} \right\} dA \left\{ q^{(e)} \right\}$$
(7.30)

Da quest'ultima otteniamo:

$$\left\{ P^{(e)} \right\} = \int_{A^{(e)}} \left\{ q \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N^{(e)} \end{bmatrix} - q\tau^2 l^2 \begin{bmatrix} \nabla_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N^{(e)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \nabla_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N^{(e)} \end{bmatrix} \right\} dA$$
(7.31)

Anche in questo caso osserviamo l'effetto aggiuntivo della teoria non locale nell'espressione del vettore dei carichi nodali dell'elemento.

7.4. Scelta delle funzioni di forma

Le matrici ed il vettore ottenuti in precedenza sono validi per qualsiasi tipo di funzione di forma adottata. Le funzioni di forma sono funzioni polinomiali, che devono rispettare determinati requisiti per assicurare la convergenza alla soluzione esatta del problema:

- La formulazione deve essere in grado di simulare deformazione e spostamento almeno uniforme (Requisito di completezza)
- Le funzioni di forma devono assicurare la continuità delle funzioni e di tutte le sue derivate fino all'ordine r − 1, dove r è l'odine di derivazione massimo che compare nell'energia di deformazione elastica (Requisito di conformità)

Nell'energia di deformazione elastica, si osserva che il grado massimo di derivazione delle funzioni è r = 1. Pertanto, le funzioni di forma che dovranno essere usate devono essere continue fino al grado 0. Funzioni di questo tipo sono quelle lineari. È possibile anche scegliere delle funzioni di forma con un grado superiore, permettendo una convergenza migliore anche per le deformazioni e per le tensioni, ma comportando un dispendio maggiore in termini computazionali.

Elementi finiti basati su 4 nodi utilizzano funzioni di tipo lagrangiano.

Viene adottato come sistema di riferimento nel piano detto naturale, per elementi finiti basati su 4 nodi, quello in figura 7.1 (in analogia con quanto fatto anche nel metodo *p-Ritz* del capitolo precedente).



Figura 7.1: Piano naturale per elementi basati su 4 nodi

La funzione di forma i-esima viene scritta nel seguente modo:

$$N_{i} = \frac{1}{4} \left(1 + \xi^{(i)} \xi \right) \left(1 + \eta^{(i)} \eta \right)$$
(7.32)

Dove $(\xi^{(i)}, \eta^{(i)})$ sono le coordinate del nodo i-esimo nel sistema di riferimento ξ, η , detto anche piano naturale.

Esistono anche elementi finiti basati su 8 nodi, le cui funzioni di forma sono di ordine superiore, ma privi di nodi all'interno dell'elemento. Lo schema con la disposizione dei nodi è individuato dalla figura 7.2.



Figura 7.2: Piano naturale per elementi basati su 8 nodi

Questi elementi particolari prendono il nome di elementi serendipity.

Le funzioni di forma sono le seguenti:

$$N_{i} = \frac{1}{4} \left(1 + \xi^{(i)} \xi \right) \left(1 + \eta^{(i)} \eta \right) \left(\xi^{(i)} \xi + \eta^{(i)} \eta - 1 \right) \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$$N_{i} = \frac{1}{2} \left(1 + \xi^{(i)} \xi \right) \left(1 - \eta^{2} \right) \quad i = 6, 8$$

$$N_{i} = \frac{1}{2} \left(1 - \xi^{2} \right) \left(1 + \eta^{(i)} \eta \right) \quad i = 5, 7$$

$$(7.33)$$

7.5. Il problema dello *shear locking*

La tipologia di elementi basata sulla teoria RZT fin qui presentata funziona molto bene per il caso di piastre spesse, in quanto si riesce con una buona accuratezza tenere conto dell'effetto del taglio trasversale. Nel caso di piastre sottili, la teoria strutturale più indicata per descriverne il comportamento è quella di Kirchhoff, in quanto l'effetto della deformabilità a taglio diventa trascurabile.

In generale, si vuole utilizzare la stessa tipologia di elementi per descrivere entrambe le tipologie di piastre. Dal punto di vista concettuale, non esistono problemi, in quanto al diminuire dello spessore della piastra il contributo del taglio diminuisce fino a diventare trascurabile. Ma per gli elementi finiti, in particolare dal punto di vista operativo, questo si traduce in un problema di grande importanza. L'energia dovuta al taglio trasversale, che si riflette nella rigidezza al taglio dell'elemento, quando viene calcolata al tendere a zero dello spessore (caso di piastre molto sottili) non tende a zero come dovrebbe, ma viene sovrastimata. Sovrastimando il contributo della matrice di rigidezza, il risultato non sarà ovviamente quello corretto. Il problema sorge all'interno dell'integrazione numerica usata nel metodo degli elementi finiti.

Il contributo di taglio che andrà a far parte della rigidezza è contenuta l'espressione delle rotazioni γ_{xz} e γ_{yz} scritti per la teoria RZT nel seguente modo:

$$\gamma_{xz} = w_{,x} + \theta_x + \phi_{x,z} \psi_x$$

$$\gamma_{yz} = w_{,y} + \theta_y + \gamma_{y,z} \psi_y$$
(7.34)

Quando si considera l'effetto del taglio nelle piastre spesse il contributo di γ_{xz} e γ_{yz} deve essere tenuto in considerazione. Quando si analizzano piastre sottili le equazioni (7.34) diventano:

$$\gamma_{xz} = w_{,x} + \theta_x + \phi_{x,z} \psi_x = 0$$

$$\gamma_{yz} = w_{,y} + \theta_y + \gamma_{y,z} \psi_y = 0$$
(7.35)

Negli elementi finiti di classe C^0 come nel caso precedente della formulazione a 4 nodi, questo comporta avere nell'espressione (7.35) una parte lineare, data dalle funzioni $\theta \in \psi$ ed una parte costante data dalla derivata di w. Integrando numericamente, la parte lineare può fornire un contributo nullo, ma la parte costante fornirà un contributo sicuramente diverso da zero. Il contributo del taglio è quindi sovrastimato. Questo porta ad avere come conseguenza un elemento più rigido di quello che dovrebbe essere, sottostimando la deflessione e sovrastimando le frequenze, con errori significativi.

Tra le possibili soluzioni adottate in letteratura [39] e nei casi pratici l'integrazione ridotta è quella più utilizzata. Sottostimando l'integrazione permette di compensare l'errore derivante

dall'integrazione del contributo del taglio. Benché largamente utilizzata non si tratta di uno dei metodi migliori.

Utilizzare funzioni di forma di classi superiori a quella C^0 , aumentando il numero di nodi può servire per far ritardare l'insorgere dello *shear locking*, ma il problema rimane sempre nella differenza di ordine tra derivate e funzioni quando avviene l'integrazione numerica e inoltre, si aumentano i costi computazionali.

La soluzione proposta da Tessler [37] contiene due effetti per gli elementi a 4 nodi: il primo è quello di introdurre un fattore correttivo dell'elemento finito, il secondo è quello di utilizzare funzioni di forma diverse a seconda della variabile cinematica considerata.

In particolare, il secondo aspetto è stato sviluppato più nel dettaglio e utilizzato in questo lavoro.

Nelle equazioni (7.34) compaiono sia funzioni che termini derivati, usando pertanto le funzioni di forma dell'elemento a 4 nodi si hanno termini lineari e termini costanti. Nel lavoro di Tessler [37] si vuole avere solo termini lineari per i contributi $\gamma_{xz} \in \gamma_{yz}$. Per fare ciò occorre usare funzioni di forma quadratiche per la sola variabile w. Funzioni di forma di questo genere si sono incontrate nel caso dell'elemento ad 8 nodi, detto *Serendipity*.

Partendo quindi dall'elemento a 8 nodi, in cui si usano le funzioni di forma *Serendipity* per la variabile *w*, in quanto è definita per gli 8 nodi, e le funzioni di forma lineari per tutte le altre variabili definite per solo i 4 nodi di vertice (*Virgin*), imponendo apposite condizioni sulla continuità del taglio nei nodi interni dei lati. In particolare, si impone che lungo i bordi dell'elemento le derivate dell'angolo di taglio trasversale siano nulle.

$$\gamma_{sz,z} = 0 \tag{7.36}$$

In questo modo si può passare dall'elemento a 8 nodi di tipo *Virgin* ad un nuovo elemento a 4 nodi Questo tipo di elemento, per via della condizione imposta su ciascun nodo interno, viene definito *constrained*.



Figura 7.3: Elementi Virgin e Constrained

Questa operazione permette di avere un elemento a 4 nodi, con un numero di gradi di libertà ridotto rispetto a quello con 8 nodi, in grado di risolvere, almeno in parte il problema dello *shear locking*.

7.6. Trasformazione di coordinate e integrazione numerica di Gauss

Le espressioni precedenti per le varie matrici dell'elemento e per il vettore dei carichi nodali equivalenti hanno come integrazione il dominio nelle coordinate del piano fisico x, y. Le funzioni di forma che abbiamo introdotto in precedenza sono definite sul piano naturale

Occorre, pertanto, introdurre un'opportuna trasformazione di coordinate dal piano fisico al piano naturale e viceversa. Generalmente, e così viene anche fatto in questo caso, le trasformazioni per le coordinate dal piano naturale a quello fisico e viceversa sono le stesse funzioni di forma usate per definire una variabile incognita all'interno dell'elemento in funzione delle variabili ai nodi.

Questa tipologia di elemento è chiamato anche elemento isoparametrico.

、 **-**

~

La trasformazione può quindi scriversi:

$$x = \sum_{i=1}^{4} N_i (\xi, \eta) x_i$$

$$y = \sum_{i=1}^{4} N_i (\xi, \eta) y_i$$
(7.37)

Introducendo però questo cambio di coordinate, le derivate che vengono espresse nel piano fisico devono essere messe in relazione con quelle nel piano naturale.

La relazione tra le derivate è ottenuta mediante la scrittura della matrice Jacobiana [J]:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial\xi} \\ \frac{\partial}{\partial\eta} \\ \frac{\partial}{\partial\eta} \end{cases} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial\xi} & \frac{\partial y}{\partial\xi} \\ \frac{\partial x}{\partial\eta} & \frac{\partial y}{\partial\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J \end{bmatrix} \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$$
(7.38)

In realtà, è l'operazione inversa quella di nostro interesse:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{cases} = \begin{bmatrix} J \end{bmatrix}^{-1} \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{cases}$$
(7.39)

L'espressione (7.39) non sempre è possibile eseguirla, in particolare occorre che la matrice Jacobiana sia invertibile.

Una procedura per determinare la matrice Jacobiana e applicarla al caso di nostro interesse è già stata sviluppata nella tesi di Gaia [37].

La scelta di passare dal piano fisico a quello naturale è dovuta non solo ad una semplicità nell'usare le funzioni di forma, ma, una volta definito il tipo di elemento (4,8,9,... nodi), sono sempre le stesse. Il vantaggio, oltre a quello precedente, è quello di ricondurre elementi dalla forma non regolare a elementi di forma quadrata sui quali poi occorre effettuare l'integrazione di tipo numerico. Sebbene l'integrazione lungo lo spessore sia stata fatta in maniera pressoché semplice in quanto a priori si conoscono le funzioni da integrare, per la versatilità degli elementi finiti, questo non può essere fatto nell'integrazione nel piano.

Il metodo di integrazione numerica più utilizzato è quello dell'integrazione con il metodo di Gauss [38].

Già in precedenza era stato utilizzato nel metodo *p-Ritz*, proprio perché non erano note a priori le espressioni dei polinomi da integrare.

In generale possiamo scrivere per una generica funzione $f(\xi, \eta)$ da integrare nel dominio \overline{A} la seguente formula per l'integrazione di Gauss:

$$\int_{\overline{A}} f\left(\xi,\eta\right) d\xi d\eta \approx \sum_{i=1}^{N_{GP}} W_i f\left(\xi_P,\eta_P\right)$$
(7.40)

L'integrale di tale funzione è possibile approssimarlo con una sommatoria della funzione stessa valutata in un numero finito di punti (detti punti di Gauss), moltiplicata per opportuni coefficienti che dipendono dai punti e che rendono l'errore di integrazione il minimo possibile.

A seconda dei polinomi che devono essere integrati occorre utilizzare un numero minimo di punti di Gauss per assicurare la convergenza all'integrale corretto. In particolare, scegliendo di integrare la funzione con N_{GP} , il massimo grado del polinomio che si riuscirà ad integrare esattamente sarà $2N_{GP} - 1$.

Nel precedente capitolo si era scelto di utilizzare un'integrazione prevedendo 20 punti di gauss per tutto il dominio come suggerito da Liew [35]. Tale numero, nonostante sia elevato per un'integrazione numerica, ci permetteva di avere un certo margine sulla scelta dell'esponente, ottenendo polinomi di ordine anche elevato. L'integrazione però avveniva sempre su un solo dominio. In questo caso, l'integrazione avviene su tutti gli elementi e questo richiede un certo tempo di calcolo. Per integrare quindi si utilizzerà il numero minimo di punti che garantisce il minimo errore di integrazione.

In particolare, per un elemento a 4 nodi con funzioni di forma lagrangiane lineari, il numero minimo di punti di Gauss che verrà utilizzato è 4 (2x2), mentre per un elemento a 8 nodi il numero minimo è 9 punti (3x3). Nel caso dell'elemento a 4 nodi di tipo *Constrained* avendo funzioni di forma quadratiche occorre utilizzare 9 punti di Gauss come nel caso precedente.

In figura 7.3 un esempio di integrazione su 9 punti di Gauss.



Figura 7.4: Esempio di integrazione con 9 punti di Gauss

7.7. Risoluzione del problema dinamico: vibrazioni libere smorzate

Una volta ottenute le varie matrici, opportunamente assemblate per ottenere le matrici di massa, rigidezza e smorzamento, ed il vettore dei carichi nodali globale, occorre imporre le condizioni al contorno per vincolare la nano-piastra.

Il problema dinamico a questo punto è il seguente:

$$\left(\left[K\right] + \left[K_{PK}\right] + \lambda\left(\left[C\right] + \left[C_{PK}\right]\right) + \lambda^{2}\left[M\right]\right) \left\{\mathbf{q}\right\} = \left\{0\right\}$$

$$(7.41)$$

Diventa evidente come si tratti dello stesso problema ottenuto con il metodo di Ritz descritto nel capitolo precedente. In questo caso, però, nel vettore $\{q\}$ sono contenuti i gradi di libertà nodali dell'intera struttura, ma concettualmente si tratta dello stesso problema.

Il metodo di risoluzione è pertanto lo stesso e viene qui riassunto mediante uno schema in figura 7.4.



Figura 7.5: Schema risolutivo del problema dinamico mediante elementi finiti

Nello schema in figura 7.5 si riassumono i vari passaggi che vengono realizzati dal programma per calcolare frequenze smorzate e smorzamento delle varie forme modali (il programma realizzato nella tesi di Gaia [37] e stato ampliato dall'autore di questa tesi introducendo, come enunciato in precedenza, lo smorzamento, la fondazione viscoelastica di Pasternak e l'effetto non locale per lo studio delle nano-piastre).



Figura 7.6: Schema dei vari passaggi per l'analisi dinamica con il programma agli elementi finiti

8. Analisi numerica e confronti

In questo capitolo andremo a considerare alcuni casi presenti in letteratura ed effettueremo alcuni confronti.

In una prima parte di questo capitolo andremo ad effettuare un'analisi di convergenza alla soluzione esatta dei programmi che utilizzeremo. In particolare, per il programma basato sul metodo p-Ritz si dovrà andare a determinare il grado p che con il minor numero di termini assicuri la convergenza. Per il programma agli elementi finiti si dovrà andare a valutare il numero minimo di elementi da utilizzare per assicurare la convergenza.

Successivamente verranno analizzate dinamicamente, con i valori di p e del numero di elementi scelti dall'analisi precedente, alcune nano-piastre FG-CNTRC.

8.1. Analisi di convergenza del metodo *p-Ritz*

Per scegliere il numero minimo del massimo grado del polinomio da utilizzare nelle nostre analisi, occorre confrontare la soluzione ottenuta dal programma con quella di un caso analitico presente in letteratura. Per fare ciò, si considera il problema proposto da Iurlaro et al. [2]. In questo articolo vengono presentate diverse analisi, basandosi sulla teoria RZT, sia di tipo statico (flessione e carichi critici) sia dinamici (vibrazioni libere). Per il nostro scopo ci soffermeremo sulla seconda tipologia di analisi.

In particolare, si considera una piastra di tipo sandwich, semplicemente appoggiata su tutti e 4 i lati e di questa vengono calcolate le prime 6 pulsazioni proprie. A questo particolare problema, Iurlato et al. [2] utilizzano il metodo di Navier con le funzioni trigonometriche per risolverlo analiticamente.

Utilizzando la stessa tipologia di laminazione del sandwich e gli stessi materiali del laminato L2 [2], possiamo scrivere le caratteristiche di ogni strato:

<i>E</i> ₁ [<i>MPa</i>]	Е ₂ [MPa]	<i>v</i> ₁₂	v_{13}	v_{23}	G ₁₂ [MPa]	G ₁₃ [MPa]	G ₂₃ [MPa]	h _{ply} [mm]	θ [°]	$\begin{bmatrix} \rho \\ \frac{g}{mm^3} \end{bmatrix}$
131000	10340	0.22	0.22	0.49	6895	6205	6895	0.5	0	0.01627
131000	10340	0.22	0.22	0.49	6895	6205	6895	0.5	90	0.01627
6.89	6.89	0	0	0	3.45	3.45	3.45	10	0	0.00097
131000	10340	0.22	0.22	0.49	6895	6205	6895	0.5	0	0.01627
131000	10340	0.22	0.22	0.49	6895	6205	6895	0.5	90	0.01627

 Tabella 8.1: Dati relativi al laminato L2

Per poter confrontare i nostri risultati con quelli del paper di Iurlaro [2], si considera la seguente espressione per la pulsazione adimensionale:

$$\bar{\omega}_{mn} = \omega_{mn} \sqrt{\frac{a^4 \rho_f}{E_{2_f} h^2}} \tag{8.1}$$

Nella formula (8.1) compaiono:

- la lunghezza della piastra *a* in direzione *x*
- la densità ρ_f della faccia
- E_{2_f} il modulo elastico in direzione 2 della faccia
- lo spessore del sandwich *h*

Lo spessore totale della piastra in questo caso è h = 12 mm e, per rispettare un rapporto di $\frac{a}{h} = 10$, la larghezza a e lunghezza b della piastra (trattandosi di una piastra quadrata) devono essere entrambe di 120 mm.

Si sceglie come grado del polinomio di partenza il valore p = 2.

Dalla letteratura in generale, ci si aspetta che il grado per il quale si ha convergenza alla soluzione esatta si aggiri per un valore di p = 10.

а p = 2p = 3p = 4p = 5p = 6RZT [2] h 1.88139 1.852 1.8517 1.8517 1.8516 1.8516 $\overline{\omega}_{11}$ 3.229 3.49963 3.23369 3.2293 3.49927 3.23368 $\overline{\omega}_{12}$ 4.305 4.71693 4.71641 4.3177 4.3177 $\overline{\omega}_{22}$ -10 5.241 5.2872 $\overline{\omega}_{13}$ -_ $\overline{\omega}_{23}$ 6.117 6.1814 _ _ _ _ $\overline{\omega}_{33}$ 7.704 _ _ -_ -

 Tabella 8.2: Prime sei pulsazioni adimensionali al variare del grado p

Tabella 8.3: Prime sei pulsazioni adimensionali al variare del grado p (segue da tabella precedente)

$\frac{a}{h}$		RZT [2]	<i>p</i> = 7	<i>p</i> = 8	<i>p</i> = 9	<i>p</i> = 10	<i>p</i> = 11
	$\overline{\omega}_{11}$	1.852	1.8516	1.8516	1.8516	1.8516	1.8516
	$\overline{\omega}_{12}$	3.229	3.2293	3.2292	3.2292	3.2292	3.2292
10	$\overline{\omega}_{22}$	4.305	4.3055	4.3055	4.3054	4.3054	4.3054
10	$\overline{\omega}_{13}$	5.241	5.241	5.2414	5.2407	5.2407	5.2407
	$\overline{\omega}_{23}$	6.117	6.1813	6.1185	6.1185	6.1169	6.1169
	$\overline{\omega}_{33}$	7.704	7.8525	7.8523	7.7110	7.7110	7.7047

Con polinomi di undicesimo grado siamo in grado di assicurare la convergenza anche per la sesta pulsazione adimensionale. Il costo computazionale in termini di tempo di calcolo è per quest'ultimo caso pari a 23.03 s, mentre se si vuole assicurare la convergenza della sola prima frequenza (con p = 5) si hanno solo 8.45 s.



Figura 8.1: Andamento della convergenza per le prime due frequenze

Nella figura 8.1 osserviamo l'andamento della convergenza al variare del grado p per le prime due frequenze.

Ad ulteriore conferma si osservano le forme modali corrispondenti nelle figure seguenti per il sandwich di cui sopra.



Figura 8.2: *Rappresentazione dei primi 6 modi di vibrare, (1,1) in alto a sinistra, (1,2) in alto a destra, (2,2) al centro a sinistra, (1,3) al centro a destra, (2,3) in basso a sinistra, (3,3) in basso a destra*

8.2. Analisi di convergenza del programma agli elementi finiti

Prendiamo in considerazione ora il programma agli elementi finiti e andiamo a considerare gli elementi basati sulla teoria RZT:

- A 4 nodi (RZTQ4)
- A 8 nodi (RZTQ8)
- A 4 nodi *constrained* (RZTQ4S)

Usando le stesse caratteristiche del sandwich individuato dalla tabella 8.1, andiamo per ciascun elemento a variare il numero di elementi che discretizza la piastra in questione per cercare il numero di elementi minimo che garantisce la convergenza. La mesh è di tipo regolare NxN, dove N è il numero di elementi per lato.

	RZTQ4										
$\frac{a}{h}$		RZT [2]	<i>N</i> = 2	<i>N</i> = 3	N = 4	N = 5	<i>N</i> = 8	N = 10	N = 15	<i>N</i> = 20	
	$\overline{\omega}_{11}$	1.852	17.2256	10.4440	7.6425	6.1119	4.0205	3.3919	2.6430	2.3287	
	$\overline{\omega}_{12}$	3.229	24.8592	23.5835	23.1278	18.8654	11.2605	9.0747	6.4269	5.2523	
10	$\overline{\omega}_{22}$	4.305	28.5637	27.2587	24.9904	22.9172	15.4445	12.4218	8.7597	7.1316	
10	$\overline{\omega}_{13}$	5.241	79.6530	37.1721	26.7944	25.9898	22.6899	20.1056	13.4946	10.5848	
	$\overline{\omega}_{23}$	6.117	87.0569	51.5251	34.5182	26.5803	25.7791	21.8631	14.8112	11.7112	
	$\overline{\omega}_{33}$	7.704	95.0419	52.7343	49.7184	47.3246	26.3494	22.6376	19.1065	15.0501	
Τe	empo d [<i>s</i>	i calcolo]	1.91	2.12	2.25	2.26	2.37	2.57	2.93	3.86	

 Tabella 8.4: Analisi di convergenza per l'elemento RZTQ4

 Tabella 8.5: Analisi di convergenza per l'elemento RZTQ4 (segue da tabella precedente)

	RZTQ4											
$\frac{a}{h}$		RZT [2]	<i>N</i> = 25	<i>N</i> = 30	<i>N</i> = 35	N = 40	<i>N</i> = 50	N = 60				
	$\overline{\omega}_{11}$	1.852	2.1686	2.0767	2.0194	1.9813	1.9356	1.9103				
	$\overline{\omega}_{12}$	3.229	4.6204	4.2412	3.9965	3.8298	3.6246	3.5083				
10	$\overline{\omega}_{22}$	4.305	6.2531	5.7247	5.3829	5.1496	4.8618	4.6985				
10	$\overline{\omega}_{13}$	5.241	8.9939	8.0189	7.3766	6.9311	6.3710	6.0468				
	$\overline{\omega}_{23}$	6.117	10.0243	8.9961	8.3223	7.8571	7.2755	6.9408				
	$\overline{\omega}_{33}$	7.704	12.8426	11.4957	10.6117	10.001	9.2354	8.7941				
Ten	npo di cal	colo [s]	4.70	10.538	11.12	14.24	29.76	61.19				

Osserviamo che all'aumentare del numero di elementi il risultato converge alla soluzione esatta anche se molto lentamente. Inoltre, occorrerebbe un numero ancora più elevato di elementi il che produrrebbe un tempo eccessivo di calcolo.

Prendiamo ora in considerazione l'elemento a 8 nodi:

	RZTQ8										
a		RZT	N - 2	N - 2	N - A	N — 5	M = Q	Ν	Ν	Ν	
\overline{h}	[2] $N = 2$ $N = 3$ $N = 4$ $N = 4$	N = 3	N = 0	= 10	= 15	= 20					
	$\overline{\omega}_{11}$	1.852	3.1472	1.9360	1.8663	1.8565	1.8526	1.8521	1.8518	1.8517	
	$\overline{\omega}_{12}$	3.229	12.5549	4.6306	3.4693	3.3101	3.2473	3.2395	3.2329	3.2309	
10	$\overline{\omega}_{22}$	4.305	22.6294	9.1101	6.6388	4.8577	4.3480	4.3242	4.3111	4.3079	
10	$\overline{\omega}_{13}$	5.241	26.2881	15.8770	6.7060	5.7607	5.3646	5.3116	5.2662	5.2523	
	$\overline{\omega}_{23}$	6.117	45.3865	22.5626	9.9148	8.7359	6.3055	6.1987	6.1417	6.1279	
	$\overline{\omega}_{33}$	7.704	50.1563	26.2203	15.5839	9.6558	8.2422	7.8767	7.7443	4.4212	
Tempo di calcolo [s]		2.13	2.20	2.25	2.33	2.44	2.67	4.63	14.44		

 Tabella 8.6: Analisi di convergenza per l'elemento RZTQ8

Tabella 8.7: Analisi di convergenza per l'elemento RZTQ8 (segue da tabella precedente)

RZTQ8									
$\frac{a}{h}$		RZT [2]	<i>N</i> = 25	<i>N</i> = 30	<i>N</i> = 35	N = 40	N = 50		
	$\overline{\omega}_{11}$	1.852	1.8516	1.8516	1.8516	1.8516	1.8516		
	$\overline{\omega}_{12}$	3.229	3.2301	3.2297	3.2295	3.2294	3.2293		
10	$\overline{\omega}_{22}$	4.305	4.3067	4.3061	4.3058	4.3057	4.3055		
10	$\overline{\omega}_{13}$	5.241	5.2467	5.2441	5.2427	5.2420	5.2413		
	$\overline{\omega}_{23}$	6.117	6.1225	6.120	6.1188	6.1181	6.1174		
	$\overline{\omega}_{33}$	7.704	7.7130	7.7092	7.7074	7.7063	7.7053		
Ter	mpo di cal	colo [s]	18.73	36.53	57.45	74.06	166.11		

Osserviamo che con l'elemento a 8 nodi, la convergenza è più veloce e occorrono meno elementi rispetto a quelli utilizzati nel caso dell'elemento a 4 nodi per ottenere la soluzione esatta. Inoltre, rispetto al caso precedente, a parità del numero di elementi il tempo utilizzato per l'analisi è un po' più grande poiché il numero di nodi per elemento è aumentato, e di conseguenza le dimensioni del problema.

Consideriamo ora il caso dell'elemento a 4 nodi *constrained*, i parametri adimensionali del materiale per effetto della formulazione *constrained* da inserire nell'elemento secondo Gherlone et al. [40] sono $r_T = -1 r_L = -1$ (condizione di materiale eterogeneo).

	RZTQ4S										
а	a	RZT	N - 2	N = 2	N — 4	M — F	M = 0	Ν	Ν	Ν	
\overline{h}		[2]	N - Z	N = 3	IV — 4	N = 5	N = 0	= 10	= 15	= 20	
	$\overline{\omega}_{11}$	1.852	5.4565	2.5019	2.0378	1.9232	1.8623	1.8562	1.8527	1.8520	
	$\overline{\omega}_{12}$	3.229	22.3305	8.7991	4.7196	3.7510	3.2997	3.2607	3.2382	3.2334	
10	$\overline{\omega}_{22}$	4.305	24.7317	22.1609	10.8920	6.8929	4.6512	4.4449	4.3363	4.3173	
10	$\overline{\omega}_{13}$	5.241	24.8592	23.2623	13.2357	8.1449	5.6131	5.4055	5.2904	5.2650	
	$\overline{\omega}_{23}$	6.117	28.5637	24.6227	23.178	14.3041	7.1137	6.5034	6.2040	6.1527	
	$\overline{\omega}_{33}$	7.704	79.6529	27.2587	23.2286	15.3140	9.0675	8.4247	7.9142	7.7827	
Tempo di calcolo [s]			1.89	1.99	2.20	2.24	2.80	2.92	4.04	5.74	

Tabella 8.8: Analisi di convergenza per l'elemento RZTQ4S

RZTQ4S										
$\frac{a}{h}$		RZT [2]	<i>N</i> = 25	<i>N</i> = 30	<i>N</i> = 35	N = 40	N = 50			
	$\overline{\omega}_{11}$	1.852	1.8518	1.8517	1.8517	1.8516	1.8516			
	$\overline{\omega}_{12}$	3.229	3.2316	3.2308	3.2304	3.2301	3.2298			
10	$\overline{\omega}_{22}$	4.305	4.3115	4.3091	4.3078	4.3071	4.3064			
10	$\overline{\omega}_{13}$	5.241	5.2552	5.2504	5.2477	5.2460	5.2440			
	$\overline{\omega}_{23}$	6.117	6.1363	6.1291	6.1253	6.1231	6.1206			
	$\overline{\omega}_{33}$	7.704	7.7440	7.7281	7.7203	7.7158	7.7112			
Tempo di calcolo [s] 8.34 13.19 19.25 25.22 50.40							50.40			

Tabella 8.9: Analisi di convergenza per l'elemento RZTQ4S (segue da tabella precedente)

Osserviamo come anche in questo caso la convergenza, per la prima pulsazione, avviene con un numero di elementi molto ridotto rispetto ai precedenti e con un tempo di calcolo inferiore. La stessa cosa vale per le altre pulsazioni, le quali richiedono comunque un certo numero di elementi per avvicinarsi ad un valore più corretto. Nella figura 8.3 osserviamo l'andamento per la convergenza alla prima pulsazione con i vari elementi utilizzati.



Figura 8.3: Confronto tra le convergenze alla prima pulsazione dei vari elementi

Nelle analisi che andremo a condurre, il numero di elementi che utilizzeremo sarà differente in base al tipo di elemento finito. In particolare:

- per l'elemento RZTQ4 si utilizzerà una mesh di 60x60 (3600 elementi)
- per l'elemento RZTQ8 si utilizzerà una mesh di 30x30 (900 elementi)
- per l'elemento RZTQ4S si utilizzerà una mesh di 40x40 (1600 elementi)

Con questi valori assicuriamo, in un tempo di calcolo ragionevole, la convergenza alla soluzione esatta per la prima frequenza propria con un errore inferiore al 4% (se si considera lo scostamento dalla soluzione esatta per l'elemento RZTQ4 con la mesh 60x60).

8.3. Analisi di nano-piastre *FG-CNTRC*

Andiamo ora ad analizzare il caso di una nano-piastra rinforzata da nanotubi in carbonio secondo il principio dei *Fucntionally Graded materials* presentato in precedenza.

Le tipologie variazione che verranno prese in considerazione sono quelle presentate nel capitolo 2 e vengono qui riportate:

- UD (uniform distribution) CNTRC
- FGV CNTRC
- FGO CNTRC
- FGX CNTRC

Le regole per determinare le caratteristiche meccaniche delle varie nano-piastre sono già state indicate in precedenza nel capitolo 2, in particolare, la variazione continua delle proprietà viene ipotizzata come una variazione discreta delle proprietà con 100 strati dello stesso spessore. In questo modo possiamo sfruttare al meglio le potenzialità della teoria RZT, cogliendo gli effetti del taglio trasversale dovuta alla variazione delle proprietà lungo lo spessore. Il numero di strati viene scelto confrontando alcuni risultati dell'articolo di Iurlaro et al. [38] con quelli che si ottengono con il programma *p-Ritz*.

Le proprietà che andremo ad utilizzare sono ottenute dal *paper* di Thai et al. [1] e vengono qui riportate:

	E _m [GPa]	ν_m	G _m [GPa]	$ \rho_m \left[\frac{kg}{m^3} \right] $
Matrice in poly{(m- phenylenevinylene)- co-[(2,5-dioctoxy-p- phenylene)vinylene]} (PmPV)	2.1	0.34	0.7836	1150

 Tabella 8.10: Caratteristiche meccaniche della matrice

 Tabella 8.11: Caratteristiche meccaniche dei nanotubi in carbonio

	E ₁ ^{cnt} [TPa]	E ₂ ^{cnt} [TPa]	G_{12}^{cnt} [TPa]	v_{12}^{cnt}	$ \rho^{cnt}\left[\frac{kg}{m^3}\right] $
Nanotubi di rinforzo (10,10) SWCNT	5.6466	7.0800	1.9445	0.175	1400

I dati precedenti, relativi alle caratteristiche dei materiali, sono da considerarsi riferiti alla temperatura di 300 K.

Un primo confronto che si può fare è quello di analizzare l'effetto che ha il parametro non locale sulle pulsazioni naturali in assenza dell'effetto viscoso e della fondazione viscoelastica di Pasternak.

In particolare, si fa riferimento all'articolo di Lu et al. [34] nel quale vengono calcolati i rapporti tra pulsazioni naturali del caso non locale e pulsazioni naturali del caso locale, utilizzando la teoria di Mindlin. Per alcune dimensioni in pianta della nano-piastra, viene fatto variare il parametro non locale τ e calcolati i rapporti precedenti. La soluzione utilizzata da Lu et al. [34] è quella con il metodo di Navier, in quanto il caso analizzato è relativo a piastre semplicemente appoggiate. Nell'articolo viene osservato che i rapporti tra le frequenze sono gli stessi sia considerando la teoria di Kirchhoff, sia considerando la teoria della piastra di Mindlin. Andiamo ora a verificare se ciò sia vero anche per la teoria RZT con il caso di una nano-piastra *FG-CNTRC*. Per questa prima analisi si utilizza il programma *p-Ritz*, in grado di calcolare in maniera corretta più frequenze con un dispendio minore di calcolo computazionale rispetto al metodo agli elementi finiti.

La frazione volumica di *CNTs* che verrà presa in considerazione è pari a $V_{cnt}^* = 0.11$. Per tale valore, come visto nel capitolo 2, si hanno i seguenti parametri di efficienza η_i :

Tabella 8.12: Parametri di efficienza per $V_{cnt}^* = 0.11$

n	n	n
η_1	η_2	<i>1</i> /3
0 149	0.934	0.934
0.147	0.754	0.754

Per una maggiore semplicità nell'elaborazione dei risultati andremo a esprimere ciascuna pulsazione, in forma adimensionata con la seguente formula:

$$\overline{\omega}_{mn} = \frac{\omega_{mn}a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}$$
(8.2)

Il rapporto (R_{mn}) tra le pulsazioni calcolate con la teoria non locale $(\overline{\omega}_{mn}^{nl})$ e quelle calcolate con la teoria classica $(\overline{\omega}_{mn}^{l})$ si può definire:

$$R_{mn} = \frac{\overline{\omega}_{mn}^{nl}}{\overline{\omega}_{mn}^{l}}$$
(8.3)

Nelle espressioni precedenti, m ed n servono a identificare le pulsazioni relative alle forme modali con m semionde nella direzione x ed n semionde nella direzione y.

Prendiamo come riferimento il caso di una nano-piastra quadrata con a = b e quello di una nano-piastra rettangolare con b = 2.5a.

Lo spessore che consideriamo per la nano-piastra è h = 0.015 mm. Il rapporto $\frac{a}{h} = 10$, pertanto la lunghezza a = 0.15 mm.

La tipologia di *Functionally Graded* che viene considerata in questa prima analisi è il caso di *FG-V*.

Per il parametro τ si considerano i seguenti valori: 0, 0.4 *e* 0.8.

Andiamo, quindi a calcolare le pulsazioni ed i rapporti.

			$\overline{\omega}$ programma <i>p</i> - <i>Ritz</i>				
$AT\left(\frac{a}{h}\right)$	$\frac{a}{b}$	(<i>m</i> , <i>n</i>)	au=0	au = 0.4	$\tau = 0.8$		
		(1,1)	12.7478	6.25141	3.45253		
		(1,2)	17.3382	5.81318	3.03745		
		(2,1)	32.8583	11.0168	5.75641		
	1	(2,2)	35.2107	9.53625	4.90495		
		(2,3)	41.4859	8.94108	4.55051		
		(3,2)	55.0082	11.8554	6.03375		
10		(3,3)	59.3487	10.941	5.54155		
10		(1,1)	12.0926	7.18603	4.19055		
		(1,2)	12.4174	6.55384	3.68432		
		(2,1)	32.5059	11.8151	6.22395		
	0.4	(2,2)	32.6872	11.3273	5.93736		
		(2,3)	33.1045	10.6897	5.56696		
		(3,2)	53.3073	13.235	6.77597		
		(3,3)	53.5954	12.8168	6.5504		

Tabella 8.13: Prime 6 frequenze adimensionate per la nano-piastra FG-V

Tabella 8.14: Rapporti R_{mn}

			Programma <i>p-Ritz</i>			Lu et al. [34]		
$\begin{pmatrix} AT \\ \left(\frac{a}{h}\right) \end{pmatrix}$	$\frac{a}{b}$	(<i>m</i> , <i>n</i>)	au = 0	$\tau = 0.4$	$\tau = 0.8$	au = 0	$\tau = 0.4$	$\tau = 0.8$
10	1	(1,1)	1	0.4904	0.2708	1	0.4904	0.2708
		(1,2)	1	0.3353	0.1752	1	0.3353	0.1752
		(2,1)	1	0.3353	0.1752	1	0.3353	0.1752
		(2,2)	1	0.2708	0.1393	1	0.2708	0.1393
		(2,3)	1	0.2155	0.1097	1	0.2155	0.1097
		(3,2)	1	0.2155	0.1097	1	0.2155	0.1097
		(3,3)	1	0.1844	0.0934	1	0.1844	0.0934
	0.4	(1,1)	1	0.5943	0.3465	1	0.5942	0.3465
		(1,2)	1	0.5278	0.2967	1	0.5278	0.2967
		(2,1)	1	0.3635	0.1915	1	0.3635	0.1915
		(2,2)	1	0.3465	0.1816	1	0.3465	0.1816
		(2,3)	1	0.3229	0.1682	1	0.3229	0.1682
		(3,2)	1	0.2483	0.1271	1	0.2483	0.1271
		(3,3)	1	0.2391	0.1222	1	0.2391	0.1222

Si osserva come anche per la teoria RZT si abbiano gli stessi rapporti tra le pulsazioni per il caso di semplice appoggio.

Dalla tabella 8.14, si evince come l'effetto non locale porti ad una diminuzione delle pulsazioni. Infatti, considerando gli effetti della nanoscala, la matrice di massa del sistema ha un ulteriore contributo che, nel calcolo delle pulsazioni essendo al denominatore, fa diminuire il valore. Maggiore è il contributo dell'effetto non locale, maggiore è l'effetto di riduzione.
La stessa cosa si osserva sia nel caso della piastra quadrata, sia in quella rettangolare. Nella seconda, in particolare, l'effetto di riduzione, a parità di τ , rispetto alla nano-piastra quadrata è inferiore. Ciò è dovuto verosimilmente alla vicinanza maggiore tra due vincoli ai lati opposti che rende la struttura un po' più rigida nel caso non locale.

Un'ulteriore analisi che possiamo condurre sulle nano-piastre FG, della tipologia espressa in precedenza, è quella di confrontare i valori ottenuti Thai et al. [1] con quelli che otteniamo usando la teoria RZT, utilizzando il programma *p-Ritz* ed il metodo agli elementi finiti. Nell'articolo di Thai et al. [1] viene utilizzata come teoria, per descrivere il comportamento delle nano-piastre, la *Modified Strain Gradient Theory (MSGT)*, che a differenza della teoria non locale di Eringen, porta ad incrementare la rigidezza delle strutture. Possiamo quindi solo confrontare i risultati ottenuti da Thai, con la teoria *High Order Shear Deformation Theory* senza considerare l'effetto della nano-scala, e quelli ottenuti nel nostro caso con la teoria RZT.

Per un ulteriore confronto si affianca al risultato calcolato con la teoria RZT mediante il programma p-Ritz, anche quelli ottenuti dallo stesso programma escludendo gli effetti delle funzioni a zigzag, ovvero usando la teoria FSDT. In particolare, per quest'ultima teoria il fattore correttivo del taglio viene posto uguale a 1.

Si andranno a considerare due condizioni di vincolo: quella semplicemente appoggiata su tutti e 4 i lati (SSSS) e quella incastrata su tutti e 4 i lati (CCCC).

Lo spessore della nano-piastra rimarrà sempre lo stesso e pari a h = 0.015mm, mentre andremo a variare le dimensioni in pianta, considerando sempre una forma quadrata. Nell'analisi verranno prese in considerazione tutte e 4 le tipologie di *FG* e in quella agli elementi finiti l'elemento RZTQ8 e l'elemento RZTQ4S, per verificare se insorge il problema dello *shear locking* nel caso di piastre sottili.

			SSSS			
~			FSDT (p-	RZT (p-	RZTQ4S	RZTO8
$\frac{u}{\overline{x}}$	Tipologia	That [1]	Ritz	Ritz	(FEM	(FEM
h di FG	(HSD1+MSG1)	program)	program)	40x40)	30x30)	
	UD	19.1537	19.2217	19.2217	19.2264	19.2217
50	FGV	16.1998	16.2331	16.2211	16.2268	16.2211
	FGO	14.2486	14.2787	14.2323	14.2410	14.2324
	FGX	22.8967	23.0189	22.9136	22.9256	22.9137
	UD	17.3096	17.6214	17.6214	17.6249	17.6214
20	FGV	15.0696	15.2623	15.2025	15.2146	15.2026
20	FGO	13.4079	13.619	13.379	13.4083	13.3791
	FGX	19.9085	20.3794	19.9496	19.9784	19.9496
	UD	13.5526	14.1141	14.1141	14.1160	14.1141
10	FGV	12.4567	12.8724	12.7478	12.7674	12.7478
10	FGO	11.3449	11.8689	11.311	11.3697	11.311
	FGX	14.6897	15.3799	14.7406	14.7747	14.7406
	UD	7.4792	7.7708	7.7708	7.7713	7.7708
1	FGV	7.3436	7.6170	7.5417	7.5518	7.5417
4	FGO	6.8660	7.4164	6.9044	6.9470	6.9044
	FGX	7.7093	7.957	7.6424	7.6517	7.6424

 Tabella 8.15: Prime pulsazioni adimensionali (SSSS)

			CCCC			
a	Tinalagia	Thai et al. [1] (HSDT+MSGT)	FSDT (p-	RZT (p-	RZT	RZTQ8
$\frac{a}{h}$	di EG		Ritz	Ritz	(FEM	(FEM
	uiro		program)	program)	40x40)	30x30)
	UD	39.6330	40.0736	40.0736	40.1188	40.0736
50	FGV	34.0298	34.2958	34.1828	34.2687	34.1839
30	FGO	29.9955	30.3388	29.9026	30.1072	29.9041
	FGX	46.2097	46.8597	46.0585	46.3750	46.0594
	UD	29.0224	29.7411	29.7411	29.7628	29.7411
20	FGV	26.7270	27.2847	26.9989	27.1210	26.9991
20	FGO	24.1986	25.228	23.9489	24.3976	23.9493
	FGX	31.4096	32.1443	30.8685	31.2383	30.8687
	UD	18.7742	18.8463	18.8463	18.8553	18.8463
10	FGV	18.2163	18.3019	18.0921	18.1593	18.0922
10	FGO	16.7450	17.6846	16.4809	16.8143	16.4810
	FGX	19.5559	19.4111	18.6883	18.8431	18.6883
	UD	10.1057	9.13441	9.13441	9.1383	9.13441
4	FGV	10.0563	9.12166	9.08764	9.0969	9.0876
4	FGO	9.0229	9.02723	8.66955	8.7410	8.6696
	FGX	10.5060	9.23896	9.02251	9.0655	9.0225

 Tabella 8.16: Prime pulsazioni adimensionali (CCCC)

Dai risultati osserviamo che sia la teoria RZT che quella FSDT producono risultati molto vicini a quelli ottenuti da Thai et al. [1]. Bisogna però tenere conto che la teoria HSDT, così come anche la FSDT non sono in grado di cogliere correttamente gli effetti del taglio dovuti alla variazione delle proprietà nei vari strati. Infatti, con la teoria FSDT si ottengono frequenze più alte, mentre l'RZT, introducendo un grado di libertà aggiuntivo rende il sistema più flessibile, abbassando le frequenze. Questo risultato è anche confermato dagli elementi finiti. La piccola differenza tra i risultati ottenuti con il programma *p-Ritz* e quelli ottenuti con l'elemento RZTQ4S è dovuta al numero di elementi utilizzati (40x40). Aumentando il numero sicuramente ci si avvicinerà al risultato esatto, ma il costo computazionale aumenta considerevolmente. Diversamente, con l'elemento finito RZTQ8 si ottiene la soluzione esatta con una mesh 30x30.

Allo stato attuale in letteratura non esistono molti casi con cui confrontare i risultati di questo lavoro. Arani et al. [15], però considerano il caso di una piastra sandwich di tipo FG-CNTRC, con le stesse proprietà di materiali utilizzate in questo lavoro, integrata con due piezoelettrici. In questo articolo [15] vengono analizzati frequenze e rapporti di smorzamento al variare di alcuni parametri. Similmente, nel seguito andremo a caratterizzare il comportamento delle nano-piastre FG-CNTRC variando alcuni parametri sia sull'effetto non locale, sia considerando i contributi di smorzamento strutturale, sia quelli della fondazione di Pasternak.

Il parametro principale che faremo variare è il parametro non locale $e_0 \tilde{a}$. Secondo l'articolo di Arani et al. [15] esso varia tra un minimo di $e_0 \tilde{a} = 0.39 nm$ ed un massimo di $e_0 \tilde{a} = 2 nm$.

Riferendoci all'articolo di Pouresmaeeli et al. [14], i dati relativi alla fondazione di Pasternak e allo smorzamento strutturale vengono di solito forniti sottoforma adimensionale.

Tali relazioni si possono così scrivere:

$$K_G = \frac{K_g a^2}{D_{11}}$$
(8.4)

$$K_{w} = \frac{K_{w1}a^{4}}{D_{11}}$$
(8.5)

$$G = \frac{g \sqrt{\frac{D_{11}}{I_0}}}{a^2}$$
(8.6)

$$C_D = \frac{C_d a^2}{\sqrt{I_0 D_{11}}}$$
(8.7)

Prenderemo in considerazione sia il caso di piastra semplicemente appoggiata su tutti e 4 i lati, sia il caso di incastro su tutti e 4 i lati. Consideriamo il caso di nano-piastra con $\frac{a}{h} = 10$. Per questo caso andiamo a ridurre ulteriormente le dimensioni della piastra affinché sia coerente il parametro $e_0\tilde{a} = 2 nm$. Per avere un valore vicino a questa condizione lo spessore viene ipotizzato essere h = 0.15 nm. Andiamo a variare il parametro τ tra il valore 0 ed il valore 2, calcolando per ciascun tipo di FG il valore della prima frequenza adimensionale con la formula (8.2).

Poiché si analizza solo la prima frequenza propria, dall'analisi di convergenza, per risparmiare in termini di costi computazionali, si considera p = 7, per il caso del semplice appoggio e p = 9 per il caso dell'incastro su tutti i lati

In questa prima parte si considera solo l'effetto della tipologia di vincolo, al variare di τ per le varie nano-piastre.

		SSSS		
τ	FG-U	FG-V	<i>FG-0</i>	FG-X
0	14.1141	12.7478	11.311	14.7406
0.1	12.8984	11.6497	10.3367	13.4709
0.2	10.5507	9.52929	8.45528	11.0189
0.3	8.47037	7.65039	6.78815	8.84633
0.4	6.92145	6.25141	5.546844	7.22866
0.5	5.79363	5.23277	4.643	6.05078
0.6	4.95732	4.47742	3.97279	5.17735
0.7	4.32042	3.90218	3.46238	4.51219
0.8	3.82258	3.45253	3.06341	3.99224
0.9	3.42431	3.09281	2.74424	3.5763
1	3.09926	2.79923	2.48374	3.23682
1.1	2.82937	2.55547	2.26745	2.95495
1.2	2.60195	2.35007	2.0852	2.71744
1.3	2.40786	2.17477	1.92966	2.51474
1.4	2.24037	2.02349	1.79543	2.33981
1.5	2.09441	1.89166	1.67846	2.18737
1.6	1.96614	1.7758	1.57566	2.0534

Tabella 8.17: Prima frequenza adimensionale per le diverse nano-piastre FG con vincolo SSSS

1.7	1.85253	1.6732	1.48462	1.93476
1.8	1.75125	1.58171	1.40345	1.82897
1.9	1.66039	1.49965	1.33063	1.73408
2	1.57843	1.42563	1.26495	1.64849



Figura 8.4: Andamento delle pulsazioni adimensionali del primo modo nel caso di SSSS

		CCCC		
τ	FG-U	FG-V	<i>FG-0</i>	FG-X
0	18.8464	18.0922	16.4809	18.6883
0.1	17.0284	16.3471	14.888	16.8913
0.2	13.3864	12.9194	11.8099	13.2903
0.3	10.003	9.80061	9.08253	9.94427
0.4	7.74295	7.63391	7.14086	7.70097
0.5	6.27689	6.20163	5.82356	6.24381
0.6	5.26707	5.20883	4.90015	5.23968
0.7	4.53317	4.48531	4.22366	4.50977
0.8	3.97698	3.93619	3.70878	3.95654
0.9	3.54144	3.50582	3.30455	3.5233
1	3.19137	3.1597	2.97911	3.17505
1.1	2.90398	2.87545	2.71163	2.88916
1.2	2.66388	2.63791	2.48798	2.6503
1.3	2.46034	2.43649	2.29826	2.44781

 Tabella 8.18: Prima frequenza adimensionale per le diverse nano-piastre FG con vincolo CCCC

1.4	2.2856	2.26355	2.13532	2.27397
1.5	2.13399	2.11347	1.99388	2.12313
1.6	2.00119	1.98201	1.86997	1.99102
1.7	1.88393	1.86592	1.76052	1.87436
1.8	1.77963	1.76264	1.66314	1.77058
1.9	1.68625	1.67019	1.57596	1.67768
2	1.60217	1.58693	1.49744	1.59403

Dal grafico di figura 8.4 (per il semplice appoggio) osserviamo che la tipologia di nano-piastra FG che fa ottenere un valore di pulsazione più alto è quella con la disposizione X dei CNTs, mentre quella che risulta più deformabile è, invece, quella con la disposizione O. La causa di ciò è da ricercare nella disposizione del materiale di rinforzo. La presenza di nanotubi in strati più esterni della nano-piastra aumenta l'effetto di rigidezza complessiva, mentre disponendoli più vicino al piano medio l'effetto risulta essere ridotto. I casi restanti della distribuzione uniforme e in quella a V si collocano tra i due casi O ed X. Risulta evidente come la rigidezza del caso uniforme sia maggiore di quella del caso a V (si ha più materiale di rinforzo lungo lo spessore) e questo fa ottenere valori di frequenze più alte nel caso uniforme.



Figura 8.5: Andamento delle pulsazioni adimensionali del primo modo nel caso di CCCC

Nel grafico in figura 8.5, l'effetto di irrigidimento è più accentuato, con la condizione di incastro, nella nano-piastra in cui la distribuzione è uniforme rispetto con quella ad X. Si può supporre che questo sia dovuto all'effetto del vincolo che incrementa maggiormente le frequenze nel primo caso anziché nel secondo. Inoltre, la presenza di un incastro su tutti i lati rispetto a quella di un semplice appoggio, permette di ottenere una struttura più rigida.

Confrontando i valori dei due grafici si osserva un valore più alto delle frequenze della nanopiastra *fully clamped* rispetto a quella *simply supported*, come esempio specifico viene estrapolato per la nano-piastra FG-V il confronto in figura 8.6.



Figura 8.6: Confronto tra diverse condizioni al contorno della prima pulsazione adimensionale per il caso FG-V

In generale, si osserva un andamento simile per entrambi i casi al variare di τ . All'aumentare di questo parametro, le frequenze si riducono fino a convergere ad un valore quasi costante per valori di τ molto alti. L'effetto non locale fornisce per questo caso un contributo ulteriore in termini inerziali e diventa tanto più importante quanto il valore di τ diventa elevato. La conseguenza è quella di abbassare le frequenze, rendendo la nano-piastra meno rigida e più flessibile in tutti i casi. Lo stesso effetto è valutabile nella figura 4a dell'articolo di Arani et al. [15] e riportata qui in figura 8.7. Benché siano andamenti simili, il nostro caso differisce da quello trattato nell'articolo perché non si è considerato l'effetto dello smorzamento. Nell'articolo appena enunciato non vengono tuttavia fornite ulteriori informazioni sulle caratteristiche di smorzamento e sulla fondazione di Pasternak, ma ai fini qualitativi degli andamenti relativi alle frequenze possiamo ritenere i nostri risultati in linea con quanto osservato.



Figura 8.7: Andamento delle frequenze al variare del parametro non locale per diverse tipologie di FG

Prendiamo ora in considerazione l'effetto di smorzamento strutturale per il caso di semplice appoggio. Anche in questo caso, per ora, non si considera l'effetto della fondazione di Pasternak, ma si va a valutare l'effetto dello smorzamento strutturale per le varie tipologie di FG.

Verranno considerati tre valori di smorzamento strutturale G: 0.075, 0.5 e 1.

	G=0.075									
_	FG-U		FG	FG-V		G-0	FG	-X		
l	$\overline{\omega}$	ξ	$\overline{\omega}$	ξ	$\overline{\omega}$	ξ	$\overline{\omega}$	ξ		
0	13.5645	0.2764	12.3443	0.2496	10.756	0.3094	14.3219	0.2366		
0.1	12.4803	0.2526	11.3426	0.2281	9.91495	0.2827	13.1521	0.2162		
0.2	10.3231	0.2066	9.36195	0.1866	8.22603	0.2313	10.8452	0.1769		
0.3	8.35307	0.1658	7.56407	0.1498	6.6701	0.1857	8.75667	0.142		
0.4	6.85759	0.1355	6.20441	0.1224	5.48262	0.1517	7.17982	0.116		
0.5	5.75623	0.1134	5.20523	0.1025	4.60541	0.127	6.02216	0.0971		
0.6	4.93391	0.0971	4.46019	0.0877	3.94926	0.1087	5.15944	0.0831		
0.7	4.30494	0.0846	3.89077	0.0764	3.44682	0.0947	4.50033	0.0724		
0.8	3.81186	0.0748	3.44463	0.0676	3.05263	0.0838	3.98404	0.0641		
0.9	3.4166	0.067	3.08714	0.0606	2.73649	0.0751	3.5704	0.0574		
1	3.09354	0.0607	2.79502	0.0548	2.478	0.0679	3.23244	0.052		
1.1	2.82502	0.0554	2.55227	0.05	2.26309	0.062	2.95162	0.0474		
1.2	2.59857	0.0509	2.34758	0.046	2.08181	0.057	2.71485	0.0436		
1.3	2.40518	0.0471	2.17279	0.0426	1.92697	0.0528	2.51269	0.0404		
1.4	2.23821	0.0439	2.0219	0.0396	1.79326	0.0491	2.33816	0.0376		
1.5	2.09265	0.041	1.89036	0.037	1.67669	0.0459	2.18602	0.0351		
1.6	1.96468	0.0385	1.77473	0.0348	1.57419	0.0431	2.05229	0.033		
1.7	1.85132	0.0363	1.6723	0.0328	1.48339	0.0406	1.93383	0.0311		

Tabella 8.19: Valori delle pulsazioni adimensionali del primo modo e degli smorzamenti adimensionali perG=0.075

1.8	1.75022	0.0343	1.58096	0.031	1.40241	0.0384	1.82819	0.0294
1.9	1.65951	0.0325	1.499	0.0294	1.32975	0.0364	1.73341	0.0278
2	1.57768	0.0309	1.42507	0.0279	1.2642	0.0346	1.64791	0.0265

Tabella 8.20: Valori delle pulsazioni adimensionali del primo modo e degli smorzamenti adimensionali perG=0.5

	G=0.5									
_	FG-U		FC	<i>G-V</i>	FG	<i>G-0</i>	FG	FG-X		
l	$\overline{\omega}$	ξ	$\overline{\omega}$	ξ	$\overline{\omega}$	ξ	$\overline{\omega}$	ξ		
0	0	1.8424	0	1.664	0	2.0627	0	1.5775		
0.1	0	1.6837	0	1.5207	0	1.885	0	1.4417		
0.2	0	1.3768	0	1.2439	0	1.5419	0	1.1793		
0.3	0	1.1057	0.40282	0.9986	0	1.2555	2.84844	0.9467		
0.4	2.96674	0.9035	3.61361	0.816	0	1.0115	4.58046	0.7736		
0.5	3.79059	0.7563	3.82192	0.683	2.47047	0.8467	4.61078	0.6476		
0.6	3.7795	0.6471	3.63314	0.5844	2.73846	0.7245	4.30994	0.5541		
0.7	3.56782	0.564	3.35805	0.5099	2.68495	0.6314	3.95121	0.4829		
0.8	3.31271	0.499	3.08205	0.4507	2.54083	0.5586	3.60951	0.4273		
0.9	3.06318	0.447	2.82958	0.4037	2.37589	0.5004	3.30398	0.3827		
1	2.83431	0.4046	2.60568	0.3654	2.21437	0.4529	3.03641	0.3464		
1.1	2.62933	0.3693	2.40911	0.3336	2.06454	0.4135	2.8033	0.3162		
1.2	2.44728	0.3396	2.23677	0.3068	1.92857	0.3803	2.59998	0.2908		
1.3	2.28584	0.3143	2.0853	0.2839	1.80624	0.3519	2.42195	0.2691		
1.4	2.14243	0.2924	1.95163	0.2641	1.69647	0.3274	2.26526	0.2504		
1.5	2.01462	0.2734	1.83309	0.2469	1.5979	0.3061	2.1266	0.2341		
1.6	1.90028	0.2566	1.72744	0.2318	1.50921	0.2873	2.00321	0.2198		
1.7	1.79755	0.2418	1.6328	0.2184	1.42917	0.2707	1.89283	0.2071		
1.8	1.70488	0.2286	1.54764	0.2065	1.3567	0.2559	1.7936	0.1957		
1.9	1.62092	0.2167	1.47064	0.1958	1.29086	0.2427	1.70396	0.1856		
2	1.54456	0.206	1.40073	0.1861	1.23084	0.2307	1.62263	0.1764		

Tabella 8.21: Valori delle pulsazioni adimensionali del primo modo e degli smorzamenti adimensionali perG=1

G=1									
_	FG	G-U	FG-V		FG-O		FG-X		
ı	$\overline{\omega}$	ξ	$\overline{\omega}$	ξ	$\overline{\omega}$	ξ	$\overline{\omega}$	ξ	
0	0	3.6847	0	3.328	0	4.1253	0	3.1551	
0.1	0	3.3673	0	3.0413	0	3.77	0	2.8833	
0.2	0	2.7544	0	2.6247	0	3.0838	0	2.3174	
0.3	0	2.2113	0	2.2794	0	2.5111	0	1.913	
0.4	0	1.807	0	1.7487	0	2.023	0	1.5472	
0.5	0	1.5125	0	1.4142	0	1.6934	0	1.2951	
0.6	0	1.2942	0	1.1856	0	1.4489	0	1.1082	
0.7	0	1.1279	0	1.0199	0	1.2628	1.17001	0.9658	
0.8	0.24475	0.9979	1.49545	0.9013	0	1.1173	2.07373	0.8545	

0.9	1.5345	0.894	1.82471	0.8074	0	1.0009	2.30121	0.7655
1	1.82129	0.8091	1.91081	0.7308	1.05205	0.9059	2.33412	0.6928
1.1	1.90723	0.7387	1.90366	0.6671	1.27484	0.827	2.28883	0.6325
1.2	1.90951	0.6793	1.85581	0.6135	1.35398	0.7605	2.21048	0.5816
1.3	1.87264	0.6286	1.79027	0.5677	1.37087	0.7038	2.11937	0.5383
1.4	1.8172	0.5849	1.71811	0.5283	1.35695	0.6548	2.02523	0.5008
1.5	1.7536	0.5468	1.6449	0.4938	1.32721	0.6122	1.93282	0.4682
1.6	1.68736	0.5133	1.57345	0.4636	1.2895	0.5747	1.84444	0.4395
1.7	1.62147	0.4836	1.50513	0.4368	1.24815	0.5415	1.76106	0.4141
1.8	1.5575	0.4572	1.44057	0.4129	1.20566	0.5119	1.683	0.3915
1.9	1.49629	0.4335	1.37994	0.3915	1.16343	0.4853	1.61021	0.3712
2	1.43819	0.4121	1.32321	0.3722	1.12229	0.4613	1.54246	0.3528

Riportiamo alcuni confronti dei valori ottenuti dalle tabelle precedenti.



Figura 8.8: Andamento delle pulsazioni adimensionali smorzate al variare di G, per la nano-piastra FG-U



Figura 8.10: Andamento del fattore di smorzamento al variare di G, per la nanopiastra FG-U



Figura 8.9: Andamento delle pulsazioni adimensionali smorzate al variare di G, per la nanopiastra FG-V



Figura 8.12: Andamento del fattore di smorzamento al variare di G, per la nano-piastra FG-V



Figura 8.11: Andamento delle pulsazioni adimensionali smorzate al variare di G, per la nano-piastra FG-O



Figura 8.14: Andamento del fattore di smorzamento al variare di G, per la nano-piastra FG-O



Figura 8.13: Andamento delle pulsazioni adimensionali smorzate al variare di G, per la nano-piastra FG-X



Figura 8.15: Andamento dello smorzamento adimensionale al variare di G, per la nano-piastra FG-X

Andare a considerare l'effetto dello smorzamento strutturale, comporta un effetto sulle frequenze dei vari modi di vibrare. Se nell'analisi in assenza di smorzamento, il coefficiente di smorzamento ξ era nullo, in questo caso abbiamo un valore diverso da zero.

Si ricorda che il coefficiente di smorzamento e la pulsazione nel caso smorzato dell'*i-esimo* modo di vibrare, sono dati dalle formule:

$$\xi_i = \frac{c_i}{2m_i\omega_{n_i}} \tag{8.8}$$

$$\omega_i = \omega_n \sqrt{1 - \xi_i^2} \tag{8.9}$$

Risulta evidente dalle equazioni (8.8) e come all'aumentare dell'effetto smorzante, incrementando il valore dello smorzamento strutturale adimensionato G, anche il coefficiente di smorzamento aumenti. Per $\tau = 0$, il sistema può passare, a seconda del valore di G, dal caso sottosmorzato a quello sovrasmorzato, nel quale il sistema non oscilla. Di conseguenza, cambia anche il valore della pulsazione, diminuendo rispetto a quella del caso non smorzato ω_n . Negli esempi precedenti, si osserva come nel caso dei valori di G=0.5 e G=1, le nano-piastre si trovino nella condizione di moto sovrasmorzato (sempre per $\tau = 0$).

All'aumentare del parametro non locale τ , dalla trattazione nei capitoli precedenti, l'effetto inerziale aumenta. Questo determina, come abbiamo visto dagli esempi precedenti (nanopiastre non smorzate), una diminuzione delle pulsazioni naturali, più evidenti per piccoli valori di τ , meno evidenti per valori più alti. Con l'incremento di τ , si ha quindi un incremento di m_i ed un decremento di ω_{n_i} , mentre l'effetto dello smorzamento strutturale rimane costante perché non dipende da effetti non locali. La combinazione di questi effetti porta ad una riduzione più accentuata, per valori ridotti di τ , del fattore di smorzamento. Nei casi precedenti, questa riduzione può portare il sistema dalla condizione sovrasmorzata a quella sottosmorzata. Infatti, per i casi di G=0.5 e G=1, oltre un certo valore di τ , il sistema recupera la prima forma modale come modo di vibrare. Lo smorzamento si riduce a mano a mano che il parametro non locale aumenta, provocando inizialmente un aumento della pulsazione del caso smorzato. In seguito, l'effetto del fattore di smorzamento diventa meno influente e l'andamento della pulsazione passando da un valore massimo, diventa decrescente in quanto prevale l'effetto decrescente di ω_n .

Un risultato analogo come confronto possiamo osservarlo nell'articolo di Pouresmaeeli et al. [14], in particolare si fa riferimento alle figure 4a e 4c del suddetto articolo, nel quale si pone a confronto l'effetto smorzante al variare di τ per una nano-piastra monostrato.

Nella figura 8.14, si riporta l'esempio dall'articolo [14]. Le differenze negli andamenti del fattore di smorzamento è da ricercarsi nel non aver considerato per il nostro caso l'effetto della fondazione di Pasternak, considerata, invece, da Pouresmaeeli et al. [14]



Figura 8.16: Nella figura a sinistra si ha l'andamento della frequenza in funzione del parametro non locale. Nella figura a destra si ha la variazione del coefficiente di smorzamento al variare del parametro non locale. Le variazioni sono per diversi valori di G

Andiamo ora a considerare l'effetto della fondazione di Pasternak nell'analisi delle frequenze delle nano-piastre.

Dalla letteratura [14], [41] e [42] possiamo dedurre alcuni valori di K_W , K_G e C_D per le analisi che possiamo condurre. Inizialmente si considera solo l'effetto delle molle elastiche e del taglio, in seguito si aggiungerà anche l'effetto degli smorzatori viscosi della fondazione. Riportiamo i risultati delle analisi nelle tabelle seguenti. Poiché non c'è effetto smorzante, il fattore di smorzamento viene in questo caso omesso.

Tabella 8.22: Valori della prima pulsazione adimensionale non smorzata per il caso di nano-piastra SSSS, con i parametri della fondazione $K_W = 100, K_G = 0, C_D = 0$ per i diversi FG

τ	FG-U	FG-V	FG-O	FG-X
0	23.7157	22.9128	17.7162	27.5348
0.1	23.0128	22.3203	17.1106	26.8762
0.2	21.7835	21.2894	16.044	25.7341
0.3	20.8549	20.5128	15.2312	24.8801
0.4	20.2744	20.0428	14.7197	24.3562
0.5	19.9165	19.7439	14.4029	24.0241

0.6	19.688	19.5545	14.2004	23.8156
0.7	19.5355	19.428	14.0654	23.6755
0.8	19.4293	19.3395	13.9717	23.5763
0.9	19.3522	19.2746	13.9041	23.5023
1	19.2942	19.2251	13.8539	23.444
1.1	19.2489	19.1857	13.8154	23.3949
1.2	19.2124	19.1528	13.785	23.3505
1.3	19.1819	19.1242	13.7606	23.3064
1.4	19.1553	19.0978	13.7404	23.2576
1.5	19.1313	19.0721	13.7233	23.1962
1.6	19.1085	19.0453	13.7085	23.1064
1.7	19.0859	19.0155	13.6953	22.9501
1.8	19.0622	18.979	13.6834	22.6327
1.9	19.0359	18.9289	13.6722	22.0267
2	19.0048	18.847	13.6615	21.197

Tabella 8.23: Valori della prima pulsazione adimensionale non smorzata per il caso di nano-piastra SSSS, con i parametri della fondazione $K_W = 100, K_G = 10, C_D = 0$ per i diversi FG

τ	FG-U	FG-V	FG-O	FG-X
0	35.7668	35.2055	26.0926	42.7251
0.1	35.3041	34.8713	25.685	42.3024
0.2	34.5137	34.1876	24.9564	41.5822
0.3	33.9322	33.7054	24.4711	41.052
0.4	33.5739	33.4079	24.1542	40.7214
0.5	33.3525	33.2219	23.9599	40.5097
0.6	33.2077	33.0971	23.8355	40.3591
0.7	33.1057	33.0048	23.7511	40.232
0.8	33.0269	32.9274	23.6905	40.0934
0.9	32.959	32.8515	23.6442	39.8772
1	32.8924	32.7607	23.6065	39.3366
1.1	32.816	32.6172	23.5735	37.6761
1.2	32.711	32.2236	23.5424	35.1324
1.3	32.5326	30.7215	23.5106	32.662
1.4	32.144	28.7275	23.4751	30.4553
1.5	31.2281	26.8974	23.4318	28.5058
1.6	29.7876	25.2683	23.3732	26.7806
1.7	28.244	23.8182	23.2844	25.2467
1.8	26.7816	22.522	23.1295	23.8756
1.9	25.4367	21.3575	22.8233	22.6435
2	24.2084	20.3061	22.2511	21.5307

Tabella 8.24: Valori della prima pulsazione adimensionale non smorzata per il caso di nano-piastra SSSS, con i parametri della fondazione $K_W = 200, K_G = 10, C_D = 0$ per i diversi FG

τ	FG-U	FG-V	FG-O	FG-X
0	40.5258	40.0481	29.4398	48.6407

0.1	40.1176	39.7038	29.079	48.2688
0.2	39.4223	39.1263	28.4632	47.6355
0.3	38.9117	38.7028	28.011	47.167
0.4	38.5957	38.4384	27.7329	46.8685
0.5	38.3974	38.2683	27.5618	46.6653
0.6	38.2632	38.147	27.4508	46.4984
0.7	38.1619	38.046	27.3738	46.3085
0.8	38.0738	37.9428	27.3162	45.9564
0.9	37.982	37.8027	27.2693	44.7588
1	37.8633	37.4928	27.2274	41.7122
1.1	37.6638	36.0015	27.1857	38.3529
1.2	37.2018	33.3585	27.1394	35.3669
1.3	35.9749	30.9253	27.0815	32.7746
1.4	34.01	28.796	26.9985	30.5203
1.5	31.9771	26.9313	26.8591	28.5478
1.6	30.0996	25.2884	26.5766	26.8098
1.7	28.4038	23.8315	25.9581	25.268
1.8	26.877	22.5314	24.9575	23.8917
1.9	25.4995	21.3644	23.8308	22.6561
2	24.2527	20.3114	22.7331	21.5408

Possiamo innanzitutto osservare dai valori della tabella 8.24, per valori piccoli di τ , l'effetto della disposizione dei nanotubi lungo lo spessore e l'effetto della fondazione, considerando la sola parte elastica, provoca un aumento della rigidezza della struttura, con un conseguente aumento delle pulsazioni naturali. Nella figura 8.15, si osserva come per i diversi casi di nanopiastre *FG*, l'incremento della rigidezza ad opera della fondazione sia diverso.



Figura 8.17: Andamento delle pulsazioni adimensionali nei vari casi di nano-piastre FG (SSSS) con valori della fondazione di Pasternak $K_W = 100, K_G = 0, C_D = 0$



Figura 8.18: Andamento delle pulsazioni adimensionali nei vari casi di nano-piastre FG (SSSS) con valori della fondazione di Pasternak $K_W = 200, K_G = 10, C_D = 0$

Dal confronto tra le figure 8.17 e 8.18, si osserva la differenza nel valore delle pulsazioni naturali considerando nella prima solo l'effetto della fondazione di Winkler (solo K_w), mentre nella seconda anche l'effetto dello strato relativo al taglio. In particolare, nella figura 8.18 la presenza della deformabilità a taglio, per valori piccoli di τ , comporta solo un incremento di rigidezza. Per valori di τ più elevati, benché l'effetto non locale di incremento della massa sia preponderante (le frequenze dopo un certo valore di τ scendono), l'effetto dello strato del taglio della fondazione nella sua parte non locale, comporta una variazione nelle pulsazioni naturali. La tipologia di *FG-X*, per valori elevati non sembrerebbe quella più rigida, mentre quella *FG-O* migliora le sue caratteristiche.

Nelle figure seguenti andiamo ad osservare l'effetto della fondazione di Pasternak, per ciascun tipo di nano-piastra *FG*.



Figura 8.20: Andamento delle pulsazioni naturali adimensionali per la piastra FG-U (SSSS)



Figura 8.19: Andamento delle pulsazioni naturali adimensionali per la piastra FG-V (SSSS)



Figura 8.21: Andamento delle pulsazioni naturali adimensionali per la piastra FG-O (SSSS)



Figura 8.22: Andamento delle pulsazioni naturali adimensionali per la piastra FG-X (SSSS)

Nei grafici delle figure 8.19-8.20-8.21 e 8.22, le pulsazioni naturali adimensionali calcolate per alcuni valori dei parametri della fondazione, dopo un certo valore di τ tendono a sovrapporsi e in seguito a diminuire. Questo ci permette di comprendere che l'effetto non locale della fondazione di Pasternak è osservabile per valori piccoli del parametro non locale τ . Quando questo diventa elevato, nelle frequenze l'effetto di incremento dovuto all'inerzia non locale è il fattore principale nella determinazione delle pulsazioni naturali.

Prendiamo ora in considerazione anche l'effetto dello smorzamento strutturale e quello degli smorzatori viscosi della fondazione di Pasternak.

Per le considerazioni appena fatte sull'effetto della fondazione al variare del parametro non locale, si analizzerà il comportamento delle pulsazioni smorzate e del fattore di smorzamento solo fino al valore $\tau = 1$.

Si analizzano tre casi: il primo in assenza di smorzamento (come confronto), il secondo con solo effetto viscoso della fondazione di Pasternak e l'ultimo aggiungendo anche l'effetto dello smorzamento strutturale.

La nano-piastra considerata è quella semplicemente appoggiata su tutti e 4 i lati.

Nelle tabelle seguenti riportiamo i risultati dei vari calcoli.

Tabella 8.25: Valori di pulsazioni smorzate e fattore di smorzamento per le nano-piastre FG. I parametri della fondazione di Pasternak e smorzamento strutturale sono $K_W = 100, K_G = 10, C_D = 0, G = 0$

_	FG	G- U	FC	<i>G-V</i>	FG	<i>G-0</i>	FG-	X
l	$\overline{\omega}$	ξ	$\overline{\omega}$	ξ	$\overline{\omega}$	ξ	$\overline{\omega}$	λξ
0	35.7668	0	35.2055	0	26.0926	0	42.7251	0
0.1	35.3041	0	34.8713	0	25.685	0	42.3024	0
0.2	34.5137	0	34.1876	0	24.9564	0	41.5822	0
0.3	33.9322	0	33.7054	0	24.4711	0	41.052	0
0.4	33.5739	0	33.4079	0	24.1542	0	40.7214	0
0.5	33.3525	0	33.2219	0	23.9599	0	40.5097	0
0.6	33.2077	0	33.0971	0	23.8355	0	40.3591	0
0.7	33.1057	0	33.0048	0	23.7511	0	40.232	0
0.8	33.0269	0	32.9274	0	23.6905	0	40.0934	0
0.9	32.959	0	32.8515	0	23.6442	0	39.8772	0
1	32.8924	0	32.7607	0	23.6065	0	39.3366	0

Tabella 8.26: Valori di pulsazioni smorzate e fattore di smorzamento per le nano-piastre FG. I parametri della fondazione di Pasternak e smorzamento strutturale sono $K_W = 100, K_G = 10, C_D = 15, G = 0$

_	FG	G-U	FC	<i>G-V</i>	FG	<i>G-0</i>	FG-	-X
l	$\overline{\omega}$	ξ	$\overline{\omega}$	ξ	$\overline{\omega}$	ξ	$\overline{\omega}$	ξ
0	32.819	0.3975	32.2703	0.3997	24.0292	0.3897	39.0415	0.4062
0.1	32.3146	0.4027	32.0843	0.3917	23.5862	0.3959	38.5797	0.4102
0.2	31.4508	0.4118	31.1088	0.4147	22.8242	0.4069	37.7924	0.4171
0.3	30.8145	0.4187	30.5802	0.4205	22.2602	0.4154	37.2155	0.4221
0.4	30.4241	0.4229	30.2581	0.4239	21.913	0.4207	36.8628	0.4249
0.5	30.1862	0.4253	30.0622	0.4256	21.7012	0.4239	36.6489	0.4261
0.6	30.0356	0.4265	29.9383	0.4264	21.567	0.4258	36.5166	0.4259
0.7	29.9361	0.427	29.8571	0.4262	21.4781	0.4269	36.4399	0.4238
0.8	29.8685	0.4268	29.804	0.4251	21.4165	0.4275	36.4246	0.4179
0.9	29.823	0.4257	29.7751	0.4225	21.3725	0.4277	36.5628	0.3992
1	29.7967	0.4235	29.7825	0.4166	21.3403	0.4275	37.2795	0.3192

-	FG	G-U	FG	G-V	FG	G-0	FG-	-X
l	$\overline{\omega}$	ξ	$\overline{\omega}$	ξ	$\overline{\omega}$	ξ	$\overline{\omega}$	ξ
0	8.64286	0.9312	8.00288	0.937	6.79496	0.9235	9.22697	0.9422
0.1	8.02055	0.9373	7.42571	0.943	6.32255	0.9292	8.5445	0.9481
0.2	6.76567	0.9505	6.28754	0.9554	5.3512	0.9427	7.19505	0.9601
0.3	5.61725	0.963	5.41268	0.9646	4.44479	0.9565	5.98843	0.9706
0.4	4.76071	0.972	4.61726	0.9731	3.75803	0.9669	5.11083	0.9777
0.5	4.15284	0.978	3.97368	0.9795	3.26261	0.974	4.50992	0.9822
0.6	3.72456	0.9819	3.60654	0.9828	2.90583	0.9788	4.11198	0.985
0.7	3.42351	0.9845	3.36486	0.9849	2.64653	0.9821	3.86418	0.9866
0.8	3.21475	0.9862	3.21118	0.9861	2.45663	0.9844	3.73431	0.9874
0.9	3.0756	0.9873	3.12451	0.9868	2.31742	0.986	3.70556	0.9875
1	2.99153	0.9879	3.09251	0.987	2.21638	0.9871	3.77322	0.987

Tabella 8.27: Valori di pulsazioni smorzate e fattore di smorzamento per le nano-piastre FG. I parametri della fondazione di Pasternak e smorzamento strutturale sono $K_W = 100, K_G = 0, C_D = 20, G = 0.06$

Dalle tabelle precedenti possiamo osservare qualche confronto.



Figura 8.23: Andamento delle pulsazioni per la nano-piastra FG-U (SSSS) al variare dei parametri della fondazione e di smorzamento strutturale



Figura 8.24: Andamento del fattore di smorzamento per la nano-piastra FG-U (SSSS) al variare dei parametri della fondazione e di smorzamento strutturale



Figura 8.25: Andamento delle pulsazioni per la nano-piastra FG-V (SSSS) al variare dei parametri della fondazione e di smorzamento strutturale



Figura 8.26: Andamento del fattore di smorzamento per la nano-piastra FG-V (SSSS) al variare dei parametri della fondazione e di smorzamento strutturale



Figura 8.27: Andamento delle pulsazioni per la nano-piastra FG-O (SSSS) al variare dei parametri della fondazione e di smorzamento strutturale



Figura 8.28: Andamento del fattore di smorzamento per la nano-piastra FG-O (SSSS) al variare dei parametri della fondazione e di smorzamento strutturale



Figura 8.29: Andamento delle pulsazioni per la nano-piastra FG-X (SSSS) al variare dei parametri della fondazione e di smorzamento strutturale



Figura 8.30: Andamento del fattore di smorzamento per la nano-piastra FG-X (SSSS) al variare dei parametri della fondazione e di smorzamento strutturale

Dai grafici delle figure precedenti, si può ben notare come lo smorzamento strutturale e gli smorzatori viscosi della fondazione di Pasternak, facciano diminuire il valore della pulsazione propria all'aumentare dei parametri appena citati. Inoltre, l'effetto non locale produce un aumento del fattore di smorzamento, il principale effetto è imputabile al contributo non locale di smorzamento della fondazione, ma già intorno a $\tau = 1$, l'effetto inerziale inizia ad essere predominante. L'effetto è tanto più accentuato quanto minore è il valore di C_D .

Osservando gli andamenti dei fattori di smorzamento per le varie nano-piastre (figure 8.24-8.26-8.28-8.30), per valori elevati dei parametri di smorzamento, l'effetto non locale fa avvicinare la nano-piastra nella condizione critica. Considerare un contributo maggiore dello smorzamento strutturale o del parametro viscoso della fondazione di Pasternak, avrebbe portato la nano-piastra nella condizione critica o anche in una condizione sovrasmorzata, per il primo modo di vibrare.

In letteratura, andamenti simili (pulsazioni decrescenti e fattore di smorzamento crescente al variare del parametro non locale) si possono osservare per il caso di una nano-piastra monostrato isotropa analizzata da Pouresmaeeli et al. [14]. Andiamo a riportare gli andamenti relativi alle figure $3a \, e \, 3c$ dell'articolo in questione come confronto.



Figura 8.31: Andamento delle pulsazioni smorzate relative al caso della piastra isotropa dell'articolo di riferimento, con caratteristiche della fondazione e di smorzamento strutturale $K_w = 100, G = 0.01 K_G = 0$



Figura 8.32: Andamento del fattore di smorzamento relativo al caso della piastra isotropa, dell'articolo di riferimento, con caratteristiche della fondazione e di smorzamento strutturale $K_w = 100, G = 0.01 K_G = 0$

Benché le tipologie di piastre poste a confronto sono diverse, i risultati ottenuti per questa tipologia di nano-piastre sono confrontabili con quelli in letteratura e si possono considerare attendibili.

Da questi primi risultati andiamo ad utilizzare il programma agli elementi finiti e confrontiamo i risultati che otteniamo con alcuni casi precedenti per verificare se effettivamente gli elementi finiti sono in grado di prevedere il comportamento dinamico delle nano-piastre.

Per l'elemento RZTQ4 si utilizzeranno 50x50 elementi, per l'elemento RZTQ4S si utilizzeranno 40x40 elementi e i parametri relativi al materiale $r_T = -1$, $r_L = -1$, infine, per l'elemento RZTQ8 si useranno 20x20 elementi.

Si considera il caso FG-V in assenza di fondazione elastica ed effetti smorzanti strutturali. Inoltre, confrontiamo i casi di semplice appoggio e di incastro su tutti e 4 i lati.

		FG-V		
τ	p-Ritz Method	RZTQ4 (50x50)	RZTQ4S (40x40)	RZTQ8 (20x20)
0	12.7478	12.7587	12.7674	12.7478
0.1	11.6497	11.6594	11.6677	11.6498
0.2	9.52929	9.5367	9.544	9.5293
0.3	7.65039	7.6561	7.6622	7.6504
0.4	6.25141	6.256	6.261	6.2514
0.5	5.23277	5.2365	5.2408	5.2328
0.6	4.47742	4.4806	4.4843	4.4774
0.7	3.90218	3.9049	3.9082	3.9022
0.8	3.45253	3.455	3.4578	3.4525
0.9	3.09281	3.095	3.0976	3.0928
1.0	2.79923	2.8012	2.8035	2.7992

 Tabella 8.28: Valori della pulsazione naturale adimensionale per il caso FG-V (SSSS)

 Tabella 8.29: Valori della pulsazione naturale adimensionale per il caso FG-V (CCCC)

FG-V							
τ	p-Ritz Method	RZTQ4 (50x50)	RZTQ4S (40x40)	RZTQ8 (20x20)			
0	18.0922	18.1161	18.1593	18.0924			
0.1	16.3471	16.3693	16.4079	16.3473			
0.2	12.9194	12.944	12.9682	12.9198			
0.3	9.80061	9.8371	9.841	9.8017			
0.4	7.63391	7.6703	7.6674	7.6351			
0.5	6.20163	6.2336	6.2296	6.2027			
0.6	5.20883	5.2366	5.2327	5.2097			
0.7	4.48531	4.5096	4.506	4.4861			
0.8	3.93619	3.9578	3.9545	3.9369			
0.9	3.50582	3.5252	3.5221	3.5065			
1.0	3.1597	3.1772	3.1744	3.1603			



Figura 8.33: Confronto tra le pulsazioni adimensionali per il caso SSSS tra p-Ritz e gli elementi finiti



Figura 8.34: Confronto tra le pulsazioni adimensionali per il caso CCCC tra p-Ritz e gli elementi finiti

Dai confronti dei grafici delle figure 8.33 e 8.33 e dai corrispettivi valori delle tabelle 8.28 e 8.29, osserviamo una buona corrispondenza tra i valori ottenuti dal programma basato sul metodo *p-Ritz* e quelli ottenuti dal FEM in entrambi i casi di vincolo presi in analisi. In particolare, risultano essere più accurati quelli ottenuti con l'elemento RZTQ8, mentre negli altri casi si ottengono dei valori di frequenza leggermente più alti. Per migliorare l'accuratezza dei valori ottenuti con gli elementi RZTQ4 e RZTQ4S occorre aumentare il numero di elementi, ma questo comporta un costo computazionale notevole.

Andiamo ora ad analizzare l'effetto dello smorzamento e della fondazione sempre considerando il caso FG-V, ma solo per la condizione di semplice appoggio su tutti e quattro i lati.

L'elemento finito che utilizziamo è quello RZTQ8, perché in precedenza abbiamo ottenuto i migliori risultati.

Tabella 8.30: Valori di pulsazione adimensionata e coefficiente di smorzamento adimensionato per il caso FG-V (SSSS) con parametri relativi alla fondazione e smorzamento strutturale sono $K_W = 100, K_G = 10, C_D = 15, G = 0$

FG-V	p-Ritz Method		FEM RZTQ8 (20x20)	
τ	$\overline{\omega}$	ξ	$\overline{\omega}$	ξ
0	32.2703	0.3997	32.2703	0.3997
0.1	32.0843	0.3917	30.0709	0.4164
0.2	31.1088	0.4147	25.6169	0.4811

Tabella 8.31: Valori di pulsazione adimensionata e coefficiente di smorzamento adimensionato per il caso FG-V (SSSS) con parametri relativi alla fondazione e smorzamento strutturale sono $K_W = 100, K_G = 0, C_D = 20, G = 0.06$

FG-V	p-Ritz Method		FEM RZTQ8 (20x20)	
τ	$\overline{\omega}$	ξ	$\overline{\omega}$	ξ
0	8.00288	0.937	8.0029	0.937
0.1	7.42571	0.943	7.4257	0.943
0.2	6.28754	0.9554	6.2875	0.9554

Andiamo a visualizzare graficamente quanto ottenuto.



Figura 8.35: Andamento delle pulsazioni adimensionate nei casi p-Ritz e FEM (RZTQ8) per la nano-piastra FG-V, caratteristiche viscoelastiche $K_W = 100, K_G = 10, C_D = 15, G = 0$



Figura 8.36: Andamento del fattore di smorzamento nei casi p-Ritz e FEM (RZTQ8) per la nanopiastra FG-V, caratteristiche viscoelastiche $K_W = 100, K_G = 10, C_D = 15, G = 0$

Dai grafici in figura 8.35 e 8.36 osserviamo che i risultati ottenuti dal FEM si discostano da quelli ottenuti con il programma *p-Ritz* quando si considera un valore di τ diverso da zero. Questo è dovuto all'approssimazione che utilizziamo nel metodo agli elementi finiti.

Le funzioni di forma che usiamo, per garantire la convergenza alla soluzione, devono soddisfare i criteri esposti in precedenza. Nell'espressione dell'energia però compare una derivata seconda dello spostamento *w*, quando viene considerato l'effetto non locale dello strato di rigidezza a taglio della fondazione. Se nel programma *p-Ritz* non c'erano problemi per la convergenza, con gli elementi finiti abbiamo una differenza dovuta all'effetto non locale del taglio della

fondazione tra elemento ed elemento. Questo effetto sottostima il contributo precedente e si ottengono i valori mostrati in precedenza.

Considerando un caso in cui non compare l'effetto del taglio della fondazione, come quello ottenuto nella tabella 8.31, i risultati sono coincidenti con entrambi i programmi.

Graficamente si ottiene il seguente risultato.



Figura 8.38: Andamento delle pulsazioni adimensionate nei casi p-Ritz e FEM (RZTQ8) per la nanopiastra FG-V, caratteristiche viscoelastiche $K_W = 100, K_G = 0, C_D = 20, G = 0.06$



Figura 8.37: Andamento del fattore di smorzamento nei casi p-Ritz e FEM (RZTQ8) per la nanopiastra FG-V, caratteristiche viscoelastiche $K_W = 100, K_G = 0, C_D = 20, G = 0.06$

Come ultimo confronto andiamo a rappresentare la prima forma modale relativa al caso FG-V analizzato con gli elementi finiti e con il programma p-Ritz.



Figura 8.39: *Prima forma modale relativa alla nano-piastra FG-V ottenuta con il programma p-Ritz*



Figura 8.40: Prima forma modale relativa alla nano piastra FG-V ottenuta con il programma agli elementi finiti (RZTQ8)

Questo conclude la parte relativa all'analisi parametrica delle nano-piastre considerando i vari effetti non locali e della fondazione viscoelastica di Pasternak.

9. Conclusione

In questo lavoro di tesi si è andato ad analizzare gli strumenti e le teorie che stanno alla base per poter studiare il comportamento dinamico delle nano-piastre di tipo *Fucntionally Graded* rinforzate da nanotubi in carbonio su fondazione viscoelastica di Pasternak. Dopo aver introdotto i vari effetti per descrivere il comportamento a livello nanometrico e quelli esterni (campi magnetici, forze di pressione, differenze di temperatura, smorzamento strutturale e fondazione viscoelastica) che possono agire sulle nano-piastre costituite da tali materiali, con in aggiunta anche piezoelettrici e piezomagnetici, si sono ricavate le equazioni del moto per il caso più generale utilizzando la teoria RZT. Da queste poi, si sono ricavate le equazioni nel caso semplificato elastico non locale delle *FG-CNTRC nanoplate*, quello approfondito in questo lavoro. Il programma Matlab \mathbb{R} scritto dall'autore basato sul metodo *p-Ritz* ha permesso di analizzare i vari contributi della fondazione viscoelastica, dell'effetto non locale e quello dei vincoli, sulle vibrazioni libere smorzate di nano-piastre *FG-CNTRC*.

La *Refined Zigzag Theory* ha permesso di analizzare queste piastre caratterizzate da una variazione continua delle caratteristiche meccaniche lungo lo spessore. Suddividendo in tanti strati caratterizzati da variazioni discrete delle proprietà è stato possibile prevedere, nelle varie analisi, l'effetto del taglio senza aggiungere fattori correttivi come nel caso della teoria *FSDT*.

Si è osservato che l'effetto dei vincoli e l'effetto della disposizione dei nanotubi in carbonio all'interno della nano-piastra può portare ad una riduzione o ad un aumento della rigidezza complessiva, diminuendo o aumentando di conseguenza il valore della prima frequenza di vibrazione calcolate nei vari esempi.

Dalle varie simulazioni, è emerso che le variazioni più significative si ottengono per valori relativamente bassi del parametro non locale τ . Applicando il principio di ortogonalità dei modi di vibrare è stato possibile analizzare anche il caso smorzato. La presenza dello smorzamento strutturale e quello viscoso della fondazione, porta a considerare nei calcoli un fattore di smorzamento ξ . Anche questo parametro dipende dal parametro non locale. Tale effetto può produrre un aumento od una diminuzione dello smorzamento relativo al modo di vibrare libero della nano-piastra, a seconda del valore dei coefficienti di smorzamento usato nei vari esempi precedentemente esposti.

L'effetto delle molle e dello strato di rigidezza a taglio della fondazione, inoltre, determina un aumento di rigidezza complessiva del sistema, aumentando i valori delle pulsazioni.

Però, l'effetto che predomina su tutti gli altri, soprattutto per alti valori del parametro non locale, è quello inerziale. Il contributo aggiuntivo della massa dovuta agli effetti non locali, in alcuni, casi rende poco influenti gli altri parametri aggiuntivi della fondazione.

Analizzare l'influenza dei vari parametri come lo smorzamento strutturale e quelli della fondazione permettono di comprendere come le caratteristiche del materiale e l'ambiente circostante influenzano le vibrazioni libere delle nano-piastre.

Il vantaggio di aver scritto un programma basato sul metodo di *p-Ritz* è quello di avere uno strumento in grado di calcolare frequenze e modi di vibrare, per diverse condizioni al contorno, con varie geometrie ed eventualmente considerare anche i contributi aggiuntivi analizzati in questo lavoro. Questo permette, non solo di analizzare in maniera semplice e con una teoria in grado di prevedere correttamente l'effetto del taglio trasversale (RZT), ma anche di analizzare numerosi casi che in letteratura talvolta è difficile reperire.

Il programma agli elementi finiti, ampliato e perfezionato dall'autore permette di analizzare le nano-piastre considerandone i vari effetti.

Si tratta di uno strumento molto utile e che può, potenzialmente, essere esteso anche all'analisi per altre strutture, non solo a quelle nanoscopiche con gli effetti non locali.

Sono stati individuati certi limiti del metodo agli elementi finiti (numero di elementi da utilizzare, analisi di convergenza, tempi di calcolo) e come possibile sviluppo futuro si può certamente procedere ad implementare elementi con funzioni di forma di grado superiore a quelli usati in questa trattazione per poter risolvere il caso in cui si considera l'effetto non locale del taglio della fondazione di Pasternak.

Partendo dall'analisi parametrica sviluppata in questo lavoro, si potrà in futuro andare ad analizzare in dettaglio lo smorzamento strutturale e cercare di ricavare un valore più corretto e il più vicino possibile a quello reale. Allo stesso modo si potrà studiare come si possono ricavare i valori delle costanti di rigidezza e degli smorzatori viscosi della fondazione di Pasternak, per avere una descrizione più precisa l'effetto dell'ambiente su cui viene posta la nanopiastra.

Ulteriori sviluppi futuri, oltre a quelli appena esposti, possono essere l'approfondimento dei vari effetti elettromagnetici per possibili applicazioni come sensori o attuatori per smorzare le vibrazioni di componenti più grandi o analizzare la risposta dinamica al caso di impatti di grande interesse per l'ambito aerospaziale.
Appendice Programma Matlab ® *p-Ritz*

Di seguito riportiamo gli script Matlab ® usati nell'ambito del programma p-Ritz.

• INUPT.m

```
%RECTANGULAR PLATE DIMENSION
•
  % [a]=mm [b]=mm [h]=mm
   a=0.0000015;
   b=0.0000015;
   h=0.0000015;
  %FILE CONTAINING MATERIAL TYPE
   MATERIALTYPE = 'FGV2';
  %SHEAR CORRECTION FACTOR
  % ONE -> 1
  % REISSNER -> 5/6
  % MINDLIN -> pi^2/12
  % 2/3 -> 2/3
  % RAMAN -> ad hoc
  SCFTYPE='ONE';
  %EXPONENTS FOR FUNCTIONS (7X4)
  % 0 - No conditions
  % 1 - Variable
  % 2 - Variable and derivative first
  % esp=ones(7,4);
  % esp(3,:)=2;
  % esp=[0 0 1 1;
  % 1010;
       1011;
  %
  % 0011;
  % 1010;
  % 0 0 1 1;
  % 1010];
  % esp=[1 0 0 0;
  % 1000;
  %
      1000;
  % 1000;
  % 1000;
  % 1000;
   %
      1000];
   %Symmetric CROSS-PLY SS
   esp=[0 1 0 1;
      1010;
      1 1 1 1;
      0 1 0 1;
      1010;
      0 1 0 1;
      1 0 1 0];
```

```
% %Antisymmetric CROSS-PLY SS
% esp=[1 0 1 0;
     0 1 0 1;
%
%
     1 1 1 1;
%
     0 1 0 1;
%
    1010;
%
    0 1 0 1;
%
    1 0 1 0];
%DEFINITION OF THEORY
% CLT: f1b=-1; f1s=0; c1=0 d=0;
% FSDT: f1b=0; f1s=1; c1=0 d=0;
% HSDT: f1b=...; f1s=...; c1=4/(3*h^2) d=0;
% RZT: f1b=0; f1s=1; c1=0 d=1;
f1b=0;
f1s=1;
% c1=4/(3*h^2);
c1=0;
d=1;
%MAXIMUM DEGREE OF THE COMPLETE POLYNOMIAL
p=7;
%ANALYSIS TYPE
% STATIC
% MODAL
AN='MODAL';
%LOAD INTENSITY AND TYPE
q0=-10;
%UNIFORM LOAD
% qq=@(xi,eta) q0;
%SINUSOIDAL LOAD
qq=@(xi,eta) q0*cos(pi/2*xi).*cos(pi/2*eta);
%Characteristics of PASTERNAK FOUNDATION
KW1=100;
CD=20;
KG=0;
G=0.06;
%Nonlocal parameter
tau=0.2;
MATRICES.m
```

```
    function [A,Bb,Bs,Db,Dbs,Ds,Abb,Abs,Ass,...
    Apsi,Bbpsi,Bspsi,Dpsi,Abtpsi,Astpsi,Atpsi,...
    m0,mb,ms,mbb,mbs,mss,mpsi,mbpsi,mspsi,mpsipsi]=...
```

•

```
MATRICES(MATERIALTYPE, f1b, f1s, c1, SCFTYPE, d)
SCHEDA_MATERIALE = xlsread(MATERIALTYPE);
E1 = SCHEDA_MATERIALE(:,1);
E2 = SCHEDA_MATERIALE(:,2);
E3 = SCHEDA_MATERIALE(:,3);
NU12 = SCHEDA_MATERIALE(:,4);
NU13 = SCHEDA_MATERIALE(:,5);
NU23 = SCHEDA_MATERIALE(:,6);
G12 = SCHEDA_MATERIALE(:,7);
G31 = SCHEDA_MATERIALE(:,8);
G23 = SCHEDA_MATERIALE(:,9);
hply = SCHEDA_MATERIALE(:, 10);
theta = SCHEDA_MATERIALE(:,11);
rho = SCHEDA_MATERIALE(:,12);
h = sum(hply(:,1));
nply = length(hply(:,1));
z = zeros(nply+1,1);
zmid = zeros(nply,1);
z(1,1)=-h/2;
for iz = 1:nply
   z(iz+1,1) = z(1,1) + sum(hply(1:1:iz));
   zmid(iz,1) = (z(iz+1,1)+z(iz,1))/2;
end
theta = flip(theta);
A=zeros(3); Bb=zeros(3); Bs=zeros(3);
Db=zeros(3); Dbs=zeros(3); Ds=zeros(3);
Abb=zeros(2); Abs=zeros(2); Ass=zeros(2);
m_{0=0}:
                        mb=0;
                                                 ms=0.
mbb=0;
                        mss=0;
                                                 mbs=0;
Q44 = zeros(nply,1);
                        Q55 = zeros(nply, 1);
fb=@(Z) f1b*Z.*(1-c1*Z.^2)-c1*Z.^3;
fs=@(Z) f1s*Z.*(1-c1*Z.^2);
fbb=@(z) fb(z).*fb(z);
fbs=@(Z) fb(Z).*fs(Z);
fss=@(Z) fs(Z).*fs(Z);
fbz=@(Z) f1b*(1-3*c1*Z.^2)-3*c1*Z.^2;
fsz=@(Z) f1s*(1-c1*Z.^2-2*c1*Z);
fbbs=@(Z) (1+fbz(Z)).^2;
fbss=@(Z) (1+fbz(Z)).*fsz(Z);
fsss=@(Z) fsz(Z).^2;
for i = 1:nply
        SL=[1/E1(i,1), -NU12(i,1)/E1(i,1), -NU13(i,1)/E1(i,1), 0, 0, 0;...
           -NU12(i,1)/E1(i,1), 1/E2(i,1),
                                           -NU23(i,1)/E2(i,1), 0, 0, 0;...
          -NU13(i,1)/E1(i,1), -NU23(i,1)/E2(i,1), 1/E3(i,1), 0, 0, 0;...
             0, 0, 0, 1/G12(i,1), 0, 0;...
             0, 0, 0, 0, 1/G31(i,1), 0;...
              0, 0, 0, 0, 0, 1/G23(i,1)];
```

```
C=inv(SL);
QL11=C(1,1)-C(1,3)*C(1,3)/C(3,3);
QL12=C(1,2)-C(1,3)*C(2,3)/C(3,3);
QL16=C(1,4)-C(1,3)*C(4,3)/C(3,3);
QL22=C(2,2)-C(2,3)*C(2,3)/C(3,3);
QL26=C(2,4)-C(2,3)*C(4,3)/C(3,3);
QL66=C(4,4)-C(4,3)*C(4,3)/C(3,3);
QL44=C(5,5);
QL55=C(6,6);
QL = [QL11 QL12 QL16 0 0;
    QL12 QL22 QL26 0 0;
   QL16 QL26 QL66 0 0;
   0
      0 0 QL44 0;
    0
        0
             0
                   0 QL55];
c=cosd(theta(i,1));
s=sind(theta(i,1));
T=[ c*c, s*s, -2*c*s, 0, 0;...
    s*s, c*c, 2*c*s, 0, 0;...
    c*s, -c*s, c*c-s*s, 0, 0;...
         0, 0, c, s;...
      0,
      0,
           0,
                   0, -s, c];
QG=T*QL*T';
Qb=QG(1:3,1:3);
Qs=QG(4:5,4:5);
Q44(i,1)=Qs(1,1);
Q55(i,1)=Qs(2,2);
A=A+Qb*hply(i);
Bb=Bb+Qb*integral(fb,z(i,1),z(i+1,1));
Bs=Bs+Qb*integral(fs,z(i,1),z(i+1,1));
Db=Db+Qb*integral(fbb,z(i,1),z(i+1,1));
Dbs=Dbs+Qb*integral(fbs,z(i,1),z(i+1,1));
Ds=Ds+Qb*integral(fss,z(i,1),z(i+1,1));
Abb=Abb+Qs*integral(fbbs,z(i,1),z(i+1,1));
Abs=Abs+Qs*integral(fbss,z(i,1),z(i+1,1));
Ass=Ass+Qs*integral(fsss,z(i,1),z(i+1,1));
m0=m0+rho(i)*hply(i);
mb=mb+rho(i)*integral(fb,z(i,1),z(i+1,1));
ms=ms+rho(i)*integral(fs,z(i,1),z(i+1,1));
mbb=mbb+rho(i)*integral(fbb,z(i,1),z(i+1,1));
mbs=mbs+rho(i)*integral(fbs,z(i,1),z(i+1,1));
mss=mss+rho(i)*integral(fss,z(i,1),z(i+1,1));
```

```
end
```

[SCFx,SCFy]=ShearCorrectionFactor(A,Bs,Ds,MATERIALTYPE,SCFTYPE);

```
if f1b==0 && f1s==1 && c1==0 && d==0
% SCFx=0.085414;
% SCFy=0.085414;
Ass(1,1)=Ass(1,1)*SCFx; Ass(1,2)=Ass(1,2)*sqrt(SCFx)*sqrt(SCFy);
Ass(2,2)=Ass(2,2)*SCFy;
Abs(1,1)=Abs(1,1)*SCFx; Abs(1,2)=Abs(1,2)*sqrt(SCFx)*sqrt(SCFy);
```

```
Abs(2,2)=Abs(2,2)*SCFy;
    Abb(1,1)=Abb(1,1)*SCFx; Abb(1,2)=Abb(1,2)*sqrt(SCFx)*sqrt(SCFy);
    Abb(2,2)=Abb(2,2)*SCFy;
end
[phi1,dphi1,phimid1]=ZigZagFunction(nply,z,Q44);
[phi2,dphi2,phimid2]=ZigZagFunction(nply,z,Q55);
Apsi=zeros(3,4); Bbpsi=zeros(3,4); Bspsi=zeros(3,4);
Dpsi=zeros(4,4); Abtpsi=zeros(2); Astpsi=zeros(2);
Atpsi=zeros(2);
mbpsi=zeros(2); mspsi=zeros(2); mpsi=zeros(2);
mpsipsi=zeros(2);
for i = 1:nply
        SL=[1/E1(i,1), -NU12(i,1)/E1(i,1), -NU13(i,1)/E1(i,1), 0, 0, 0;...
           -NU12(i,1)/E1(i,1), 1/E2(i,1), -NU23(i,1)/E2(i,1), 0, 0, 0;...
          -NU13(i,1)/E1(i,1), -NU23(i,1)/E2(i,1), 1/E3(i,1), 0, 0, 0;...
             0, 0, 0, 1/G12(i,1), 0, 0;...
             0, 0, 0, 0, 1/G31(i,1), 0;...
              0, 0, 0, 0, 0, 1/G23(i,1)];
        C=inv(SL);
        QL11=C(1,1)-C(1,3)*C(1,3)/C(3,3);
        QL12=C(1,2)-C(1,3)*C(2,3)/C(3,3);
        QL16=C(1,4)-C(1,3)*C(4,3)/C(3,3);
        QL22=C(2,2)-C(2,3)*C(2,3)/C(3,3);
        QL26=C(2,4)-C(2,3)*C(4,3)/C(3,3);
        QL66=C(4,4)-C(4,3)*C(4,3)/C(3,3);
        QL44=C(5,5);
        QL55=C(6,6);
        QL=[QL11 QL12 QL16 0 0;
            QL12 QL22 QL26 0 0;
            QL16 QL26 QL66 0 0;
            0
                0
                    0 QL44 0;
            0
                0
                      0
                            0 QL55];
%
          SL=[1/E1(i,1), -NU12(i,1)/E1(i,1), 0, 0, 0;...
%
              -NU12(i,1)/E1(i,1), 1/E2(i,1), 0, 0, 0;...
%
              0, 0, 1/G12(i,1), 0, 0;...
%
              0, 0, 0, 1/G31(i,1), 0;...
%
              0, 0, 0, 0, 1/G23(i,1)];
%
          QL=inv(SL);
```

```
QL=inv(SL);
c=cosd(theta(i,1));
s=sind(theta(i,1));
T=[ c*c, s*s, -2*c*s, 0, 0;...
s*s, c*c, 2*c*s, 0, 0;...
c*s, -c*s, c*c-s*s, 0, 0;...
0, 0, 0, c, s;...
0, 0, 0, -s, c];
QG=T*QL*T';
Qb=QG(1:3,1:3);
qs=QG(4:5,4:5);
```

```
Gk1=@(Z) dphi1(i)*(Z-z(i,1))+phi1(i);
Gk2=@(Z) dphi2(i)*(Z-z(i,1))+phi2(i);
Gk1b=@(Z) Gk1(Z).*fb(Z);
Gk2b=@(Z) Gk2(Z).*fb(Z);
Gk1s=@(Z) Gk1(Z).*fs(Z);
Gk2s=@(Z) Gk2(Z).*fs(Z);
G= [integral(Gk1, z(i, 1), z(i+1, 1)) 0 0 0;
        0 integral(Gk2, z(i, 1), z(i+1, 1)) 0 0;
        0 0 integral(Gk1,z(i,1),z(i+1,1)) integral(Gk2,z(i,1),z(i+1,1))];
Gb= [integral(Gk1b,z(i,1),z(i+1,1)) 0 0 0;
        0 integral(Gk2b,z(i,1),z(i+1,1)) 0 0;
        0 0 integral(Gk1b,z(i,1),z(i+1,1)) integral(Gk2b,z(i,1),z(i+1,1))];
Gs= [integral(Gk1s, z(i, 1), z(i+1, 1)) 0 0 0;
        0 integral(Gk2s, z(i, 1), z(i+1, 1)) 0 0;
        0 0 integral(Gk1s,z(i,1),z(i+1,1)) integral(Gk2s,z(i,1),z(i+1,1))];
Q11=Qb(1,1); Q12=Qb(1,2); Q16=Qb(1,3);
Q21=Qb(2,1); Q22=Qb(2,2); Q26=Qb(2,3);
Q61=Qb(3,1); Q62=Qb(3,2); Q66=Qb(3,3);
GG1=@(Z) Gk1(Z).*Gk1(Z);
GG12=@(Z) Gk1(Z).*Gk2(Z);
GG2=@(Z) Gk2(Z).*Gk2(Z);
G11=integral(GG1, z(i, 1), z(i+1, 1));
Gg12=integral(GG12,z(i,1),z(i+1,1));
G22=integral(GG2,z(i,1),z(i+1,1));
GG=[Q11*G11 Q12*Gg12 Q16*G11 Q16*Gg12;
    Q21*Gg12 Q22*G22 Q26*Gg12 Q26*G22;
    Q61*G11 Q62*Gg12 Q66*G11 Q66*Gg12;
    Q61*Gg12 Q62*G22 Q66*Gg12 Q66*G22];
dGb1=@(Z) dphi1(i)*(1+fbz(Z));
dGb2=@(Z) dphi2(i)*(1+fbz(Z));
dGB=[integral(dGb1,z(i,1),z(i+1,1)) 0;
    0 integral(dGb2,z(i,1),z(i+1,1))];
dGs1=@(Z) dphi1(i)*fsz(Z);
dGs2=@(Z) dphi2(i)*fsz(Z);
dGS=[integral(dGs1,z(i,1),z(i+1,1)) 0;
    0 integral(dGs2,z(i,1),z(i+1,1))];
dG=[dphi1(i) 0;
    0 dphi2(i)];
Apsi=Apsi+Qb*G;
Bbpsi=Bbpsi+Qb*Gb;
```

```
134
```

```
Bspsi=Bspsi+Qb*Gs;
Dpsi=Dpsi+GG;
Abtpsi=Abtpsi+Qs*dGB;
Astpsi=Astpsi+Qs*dGS;
Atpsi=Atpsi+dG'*Qs*dG*hply(i);
gm=[integral(Gk1,z(i,1),z(i+1,1)) 0 ;
        0 integral(Gk2,z(i,1),z(i+1,1))];
gmb=[integra](Gk1b,z(i,1),z(i+1,1)) 0;
        0 integral(Gk2b,z(i,1),z(i+1,1))];
gms=[integral(Gk1s,z(i,1),z(i+1,1)) 0 ;
        0 integral(Gk2s,z(i,1),z(i+1,1))];
gg=[G11 0;
    0 G22];
mpsi=mpsi+rho(i)*gm;
mbpsi=mbpsi+rho(i)*qmb;
mspsi=mspsi+rho(i)*gms;
mpsipsi=mpsipsi+rho(i)*gg;
```

end

end

• ZigZagFunction.m

```
function [phi,dphi,phimid]=ZigZagFunction(nply,z,Qtv)
 %WRITTEN BY ALBERTO VITTON MEA
%Input: - nply ---> number of plies
%
      - z ---> Transverse position
       - Qtv ---> Vector of transverse stiffness
%
%Output: - phi ---> zig zag function at interfaces
        - dphi ---> der zig zag function at interfaces
%
%
        - phimid ---> zig zag function at middle ply
Q = Qtv;
 helpQtv = zeros(1,1,nply);
 helpQtv(1,1,:) = Qtv;
Qtv = helpQtv;
 spes=diff(z);
 %Compute ziazag functions at interfaces
M=zeros(nply+1);
 v=zeros(nply+1,1);
%Set (ns-1) continuity conditions of transverse shear stress
```

```
for k=1:nply-1
   iu=k+1;
   M(k,[iu-1,iu,iu+1])=[Qtv(:,:,k )/spes(k ),...
                        -(Qtv(:,:,k )/spes(k )+...
                        Qtv(:,:,k+1)/spes(k+1)),...
                        Qtv(:,:,k+1)/spes(k+1)];
   v(k,1)=Qtv(:,:,k )-Qtv(:,:,k+1);
end
%Two more conditions...
M(nply , 1)=1; M(nply+1,nply+1)=1;
%Compute interfaces displacement
u=M\v;
u(1,1)=0;
u(end, 1)=0;
% Compute beta coefficients
beta=(diff(u))./spes;
phi = u;
dphi = beta;
phimid = 0.5*(phi(1:end-1,1)+phi(2:end,1));
end
```

• FUNZIONIBASE.m

```
%FUNCTION FOR RECTANGULAR PLATE
gul=@(xi,eta) (xi+1)^esp(1,1)*(eta+1)^esp(1,2)*(xi-1)^esp(1,3)*(eta-1)^esp(1,4);
gv1=@(xi,eta) (xi+1)^esp(2,1)*(eta+1)^esp(2,2)*(xi-1)^esp(2,3)*(eta-1)^esp(2,4);
gw1=@(xi,eta) (xi+1)^esp(3,1).*(eta+1)^esp(3,2).*(xi-1)^esp(3,3).*(eta-1)^esp(3,4);
gphix1=@(xi,eta) (xi+1)^esp(4,1)*(eta+1)^esp(4,2)*(xi-1)^esp(4,3)*(eta-1)^esp(4,4);
gphiy1=@(xi,eta) (xi+1)^esp(5,1)*(eta+1)^esp(5,2)*(xi-1)^esp(5,3)*(eta-1)^esp(5,4);
gpsix1=@(xi,eta) (xi+1)^esp(6,1)*(eta+1)^esp(6,2)*(xi-1)^esp(6,3)*(eta-1)^esp(6,4);
gpsiy1=@(xi,eta) (xi+1)^esp(7,1)*(eta+1)^esp(7,2)*(xi-1)^esp(7,3)*(eta-1)^esp(7,4);
```

%DERIVATE u

```
dguxi1=@(xi,eta) esp(1,1)*(xi+1)^(esp(1,1)-1)*(eta+1)^esp(1,2)*(xi-
1)^esp(1,3)*(eta-1)^esp(1,4)+...
esp(1,3)*(xi+1)^esp(1,1)*(eta+1)^esp(1,2)*(xi-1)^(esp(1,3)-1)*(eta-
1)^esp(1,4);
```

```
dgueta1=@(xi,eta) esp(1,2)*(xi+1)^esp(1,1)*(eta+1)^(esp(1,2)-1)*(xi-
1)^esp(1,3)*(eta-1)^esp(1,4)+...
esp(1,4)*(xi+1)^esp(1,1)*(eta+1)^esp(1,2)*(xi-1)^esp(1,3)*(eta-1)^(esp(1,4)-
```

1);

%DERIVATE v

```
dgvxi1=@(xi,eta) esp(2,1)*(xi+1)^(esp(2,1)-1)*(eta+1)^esp(2,2)*(xi-
1)^esp(2,3)*(eta-1)^esp(2,4)+...
esp(2,3)*(xi+1)^esp(2,1)*(eta+1)^esp(2,2)*(xi-1)^(esp(2,3)-1)*(eta-
1)^esp(2,4);
```

```
dgveta1=@(xi,eta) esp(2,2)*(xi+1)^esp(2,1)*(eta+1)^(esp(2,2)-1)*(xi-
1)^{esp(2,3)*(eta-1)}^{esp(2,4)+...}
        esp(2,4)*(xi+1)^{esp(2,1)}*(eta+1)^{esp(2,2)}*(xi-1)^{esp(2,3)}*(eta-1)^{(esp(2,4)-1)}
1);
    %DERIVATE w
    dgwxi1=@(xi,eta) esp(3,1)*(xi+1)^(esp(3,1)-1)*(eta+1)^esp(3,2)*(xi-
1)^esp(3,3)*(eta-1)^esp(3,4)+...
        esp(3,3)*(xi+1)^esp(3,1)*(eta+1)^esp(3,2)*(xi-1)^(esp(3,3)-1)*(eta-
1)^esp(3,4);
    dgweta1=@(xi,eta) esp(3,2)*(xi+1)^esp(3,1)*(eta+1)^(esp(3,2)-1)*(xi-
1)^{esp(3,3)*(eta-1)^{esp(3,4)+...}}
        esp(3,4)*(xi+1)^{esp(3,1)}*(eta+1)^{esp(3,2)}*(xi-1)^{esp(3,3)}*(eta-1)^{(esp(3,4)-1)}
1);
    dgwxi2=@(xi,eta) esp(3,1)*(esp(3,1)-1)*(xi+1)^(esp(3,1)-2)*(eta+1)^esp(3,2)*(xi-
1)^esp(3,3)*(eta-1)^esp(3,4)+...
        2*esp(3,1)*esp(3,3)*(xi+1)^(esp(3,1)-1)*(eta+1)^esp(3,2)*(xi-1)^(esp(3,3)-
1)*(eta-1)^{esp(3,4)+...}
        esp(3,3)*(esp(3,3)-1)*(xi+1)^esp(3,1)*(eta+1)^esp(3,2)*(xi-1)^(esp(3,3)-
2)*(eta-1)^esp(3,4);
    dgwxieta2=@(xi,eta) esp(3,1)*esp(3,2)*(xi+1)^(esp(3,1)-1)*(eta+1)^(esp(3,2)-
1)*(xi-1)^esp(3,3)*(eta-1)^esp(3,4)+...
        esp(3,1)*esp(3,4)*(xi+1)^(esp(3,1)-1)*(eta+1)^esp(3,2)*(xi-1)^esp(3,3)*(eta-
1)^{(esp(3,4)-1)+...}
        esp(3,3)*esp(3,2)*(xi+1)^esp(3,1)*(eta+1)^(esp(3,2)-1)*(xi-1)^(esp(3,3)-
1)*(eta-1)^esp(3,4)+...
        esp(3,3)*esp(3,4)*(xi+1)^esp(3,1)*(eta+1)^esp(3,2)*(xi-1)^(esp(3,3)-1)*(eta-
1)^{(esp(3,4)-1)};
    dgweta2=@(xi,eta) esp(3,2)*(esp(3,2)-1)*(xi+1)^esp(3,1)*(eta+1)^(esp(3,2)-2)*(xi-
1)^esp(3,3)*(eta-1)^esp(3,4)+...
        2*esp(3,2)*esp(3,4)*(xi+1)^esp(3,1)*(eta+1)^(esp(3,2)-1)*(xi-1)^esp(3,3)*(eta-
1)^{(esp(3,4)-1)+...}
        esp(3,4)*(esp(3,4)-1)*(xi+1)^esp(3,1)*(eta+1)^esp(3,2)*(xi-1)^esp(3,3)*(eta-
1)^{(esp(3,4)-2)};
    %DERIVATE phix
    dqphixxi1=@(xi,eta) esp(4,1)*(xi+1)^{(esp(4,1)-1)*(eta+1)^{esp(4,2)}}(xi-1)^{(eta+1)^{esp(4,2)}}
1)^esp(4,3)*(eta-1)^esp(4,4)+...
        esp(4,3)*(xi+1)^esp(4,1)*(eta+1)^esp(4,2)*(xi-1)^(esp(4,3)-1)*(eta-
1)^esp(4,4);
    dgphixeta1=@(xi,eta) esp(4,2)*(xi+1)^esp(4,1)*(eta+1)^(esp(4,2)-1)*(xi-
1)^esp(4,3)*(eta-1)^esp(4,4)+...
        esp(4,4)*(xi+1)^esp(4,1)*(eta+1)^esp(4,2)*(xi-1)^esp(4,3)*(eta-1)^(esp(4,4)-
1);
    %DERIVATE phiy
    dgphiyxi1=@(xi,eta) esp(5,1)*(xi+1)^(esp(5,1)-1)*(eta+1)^esp(5,2)*(xi-
1)^esp(5,3)*(eta-1)^esp(5,4)+...
        esp(5,3)*(xi+1)^esp(5,1)*(eta+1)^esp(5,2)*(xi-1)^(esp(5,3)-1)*(eta-
```

```
1)^esp(5,4);
```

```
dgphiyeta1=@(xi,eta) esp(5,2)*(xi+1)^esp(5,1)*(eta+1)^(esp(5,2)-1)*(xi-
1)^esp(5,3)*(eta-1)^esp(5,4)+...
esp(5,4)*(xi+1)^esp(5,1)*(eta+1)^esp(5,2)*(xi-1)^esp(5,3)*(eta-1)^(esp(5,4)-
1);
```

%DERIVATE psix

```
dgpsixxi1=@(xi,eta) esp(6,1)*(xi+1)^(esp(6,1)-1)*(eta+1)^esp(6,2)*(xi-
1)^esp(6,3)*(eta-1)^esp(6,4)+...
esp(6,3)*(xi+1)^esp(6,1)*(eta+1)^esp(6,2)*(xi-1)^(esp(6,3)-1)*(eta-
1)^esp(6,4);
dgpsixeta1=@(xi,eta) esp(6,2)*(xi+1)^esp(6,1)*(eta+1)^(esp(6,2)-1)*(xi-
1)^esp(6,3)*(eta-1)^esp(6,4)+...
esp(6,4)*(xi+1)^esp(6,1)*(eta+1)^esp(6,2)*(xi-1)^esp(6,3)*(eta-1)^(esp(6,4)-
esp(6,4)*(xi+1)^esp(6,1)*(eta+1)^esp(6,2)*(xi-1)^esp(6,3)*(eta-1)^(esp(6,4)-
esp(6,4)*(xi+1)^esp(6,1)*(eta+1)^esp(6,2)*(xi-1)^esp(6,3)*(eta-1)^esp(6,4)-
```

1);

%DERIVATE psiy

```
dgpsiyxi1=@(xi,eta) esp(7,1)*(xi+1)^(esp(7,1)-1)*(eta+1)^esp(7,2)*(xi-
1)^esp(7,3)*(eta-1)^esp(7,4)+...
esp(7,3)*(xi+1)^esp(7,1)*(eta+1)^esp(7,2)*(xi-1)^(esp(7,3)-1)*(eta-
1)^esp(7,4);
dgpsiyeta1=@(xi,eta) esp(7,2)*(xi+1)^esp(7,1)*(eta+1)^(esp(7,2)-1)*(xi-
1)^esp(7,3)*(eta-1)^esp(7,4)+...
esp(7,4)*(xi+1)^esp(7,1)*(eta+1)^esp(7,2)*(xi-1)^esp(7,3)*(eta-1)^(esp(7,4)-
1);
```

• KCMF.m

```
function [K,C,M,F]=KCMF(N,A,Bb,Bs,Db,Dbs,Ds,Abb,Abs,Ass,...
    Apsi, Bbpsi, Bspsi, Dpsi, Abtpsi, Astpsi, Atpsi, ...
    m0,mb,ms,mbb,mbs,mss,mpsi,mbpsi,mspsi,mpsipsi,p,esp,alp,b,a,qq,d,mu,Cd,Kw1,Kg,g)
 Kaa=zeros(N); Kab=zeros(N); Kac=zeros(N); Kad=zeros(N); Kaf=zeros(N);
 Kag=zeros(N);
 Kbb=zeros(N); Kbc=zeros(N); Kbd=zeros(N); Kbf=zeros(N); Kbf=zeros(N);
 Kcc=zeros(N); Kcd=zeros(N); Kce=zeros(N); Kcf=zeros(N); Kcq=zeros(N);
 Kdd=zeros(N); Kde=zeros(N); Kdf=zeros(N); Kdg=zeros(N);
 Kee=zeros(N); Kef=zeros(N); Keg=zeros(N);
 Kff=zeros(N); Kfg=zeros(N);
 Kqq=zeros(N);
 KccP=zeros(N);
 KccPnl=zeros(N);
 Ccc=zeros(N);
 Cgen=zeros(N);
 Cnlcc=zeros(N);
 maa=zeros(N); mab=zeros(N); mac=zeros(N); mad=zeros(N); maf=zeros(N);
```

```
mag=zeros(N);
Mbb=zeros(N); mbc=zeros(N); mbd=zeros(N); mbd=zeros(N); mbd=zeros(N);
mcc=zeros(N); mcd=zeros(N); mce=zeros(N); mcf=zeros(N);
mdd=zeros(N); mde=zeros(N); mdf=zeros(N); mdg=zeros(N);
mee=zeros(N); mef=zeros(N); meg=zeros(N);
mff=zeros(N); mfg=zeros(N);
mgg=zeros(N);
Mnlaa=zeros(N); Mnlab=zeros(N); Mnlac=zeros(N); Mnlad=zeros(N); Mnlae=zeros(N);
Mnlaf=zeros(N); Mnlag=zeros(N);
Mnlbb=zeros(N); Mnlbc=zeros(N); Mnlbd=zeros(N); Mnlbf=zeros(N);
Mnlbg=zeros(N);
Mnlcc=zeros(N); Mnlcd=zeros(N); Mnlce=zeros(N); Mnlcf=zeros(N); Mnlcg=zeros(N);
Mnldd=zeros(N); Mnlde=zeros(N); Mnldf=zeros(N); Mnldg=zeros(N);
Mnlee=zeros(N); Mnlef=zeros(N); Mnleg=zeros(N);
Mnlff=zeros(N); Mnlfg=zeros(N);
Mnlgg=zeros(N);
pa=zeros(N,1); pb=zeros(N,1); pc=zeros(N,1); pd=zeros(N,1); pe=zeros(N,1);
pf=zeros(N,1); pg=zeros(N,1);
pcnl=zeros(N,1);
%Loading Gauss Points and Weights
PUNTI_GAUSS2;
NGAUP_F=length(GAUP_F);
FUNZIONIBASE;
for gp=1:NGAUP_F
    [gu,dguxi,dgueta]=integrazione(GAUP_F(gp,:),p,N,gu1,dguxi1,dgueta1);
    [gv,dgvxi,dgveta]=integrazione(GAUP_F(gp,:),p,N,gv1,dgvxi1,dgveta1);
[gw,dgwxi,dgweta,dgwxixi,dgwetaeta,dgwxieta]=integrazione2(GAUP_F(gp,:),p,N,gw1,dgwxi1
,dgweta1,dgwxi2,dgweta2,dgwxieta2);
[gphix,dgphixxi,dgphixeta]=integrazione(GAUP_F(gp,:),p,N,gphix1,dgphixxi1,dgphixeta1);
[gphiy,dgphiyxi,dgphiyeta]=integrazione(GAUP_F(gp,:),p,N,gphiy1,dgphiyxi1,dgphiyeta1);
[gpsix,dgpsixxi,dgpsixeta]=integrazione(GAUP_F(gp,:),p,N,gpsix1,dgpsixxi1,dgpsixeta1);
[gpsiy,dgpsiyxi,dgpsiyeta]=integrazione(GAUP_F(gp,:),p,N,gpsiy1,dgpsiyxi1,dgpsiyeta1);
Kaa=Kaa+(A(1,1)*alp*(dguxi*dguxi')+2*A(1,3)*(dgueta*dguxi')+A(3,3)/alp*(dgueta*dgueta'
))*b^2/4*GAUW_F(gp);
    Kab=Kab+(A(1,2)*(dguxi*dgveta')+alp*A(1,3)*(dguxi*dgvxi')+...
        A(2,3)/alp*(dgueta*dgveta')+A(3,3)*(dgueta*dgvxi'))*b^2/4*GAUW_F(gp);
    Kac=Kac+(alp^2*Bb(1,1)*(dguxi*dgwxixi')+Bb(1,2)*(dguxi*dgwetaeta')+...
```

```
2*alp*Bb(1,3)*(dguxi*dgwxieta')+alp*Bb(1,3)*(dgueta*dgwxixi')+...
```

1/alp*Bb(2,3)*(dgueta*dgwetaeta')+2*Bb(3,3)*(dgueta*dgwxieta'))*b/2*GAUW_F(gp);

Kad=Kad+(alp*Bs(1,1)*(dguxi*dgphixxi')+Bs(1,3)*(dguxi*dgphixeta')+... Bs(1,3)*(dgueta*dgphixxi')+1/alp*Bs(3,3)*(dgueta*dgphixeta'))*b/2*GAUW_F(gp);

Kae=Kae+(Bs(1,2)*(dguxi*dgphiyeta')+alp*Bs(1,3)*(dguxi*dgphiyxi')+... 1/alp*Bs(2,3)*(dgueta*dgphiyeta')+Bs(3,3)*(dgueta*dgphiyxi'))*b/2*GAUW_F(gp);

Kaf=Kaf+(alp*Apsi(1,1)*(dguxi*dgpsixxi')+Apsi(1,3)*(dguxi*dgpsixeta')+...

Apsi(3,1)*(dgueta*dgpsixxi')+1/alp*Apsi(3,3)*(dgueta*dgpsixeta'))*b/2*GAUW_F(gp);

Kag=Kag+(Apsi(1,2)*(dguxi*dgpsiyeta')+alp*Apsi(1,4)*(dguxi*dgpsiyxi')+...

1/alp*Apsi(3,2)*(dgueta*dgpsiyeta')+Apsi(3,4)*(dgueta*dgpsiyxi'))*b/2*GAUW_F(gp);

Kbb=Kbb+(A(2,2)/alp*(dgveta*dgveta')+2*A(2,3)*(dgveta*dgvxi')+alp*A(3,3)*(dgvxi*dgvxi'))*b^2/4*GAUW_F(gp);

Kbc=Kbc+(alp*Bb(1,2)*(dgveta*dgwxixi')+alp^2*Bb(1,3)*(dgvxi*dgwxixi')+... 1/alp*Bb(2,2)*(dgveta*dgwetaeta')+2*Bb(2,3)*(dgveta*dgwxieta')+... Bb(2,3)*(dgvxi*dgwetaeta')+2*Bb(3,3)*alp*(dgvxi*dgwxieta'))*b/2*GAUW_F(gp);

Kbd=Kbd+(Bs(1,2)*(dgveta*dgphixxi')+alp*Bs(1,3)*(dgvxi*dgphixxi')+... 1/alp*Bs(2,3)*(dgveta*dgphixeta')+Bs(3,3)*(dgvxi*dgphixeta'))*b/2*GAUW_F(gp);

Kbe=Kbe+(1/alp*Bs(2,2)*(dgveta*dgphiyeta')+Bs(2,3)*(dgveta*dgphiyxi')+... Bs(2,3)*(dgvxi*dgphiyeta')+alp*Bs(3,3)*(dgvxi*dgphiyxi'))*b/2*GAUW_F(gp);

Kbf=Kbf+(Apsi(2,1)*(dgveta*dgpsixxi')+1/alp*Apsi(2,3)*(dgveta*dgpsixeta')+... alp*Apsi(3,1)*(dgvxi*dgpsixxi')+Apsi(3,3)*(dgvxi*dgpsixeta'))*b/2*GAUW_F(gp);

Kbg=Kbg+(1/alp*Apsi(2,2)*(dgveta*dgpsiyeta')+Apsi(2,4)*(dgveta*dgpsiyxi')+... Apsi(3,2)*(dgvxi*dgpsiyeta')+alp*Apsi(3,4)*(dgvxi*dgpsiyxi'))*b/2*GAUW_F(gp);

Kcc=Kcc+(alp^3*Db(1,1)*(dgwxixi*dgwxixi')+2*alp*Db(1,2)*(dgwxixi*dgwetaeta')+4*alp^2*D b(1,3)*(dgwxixi*dgwxieta')+...

1/alp*Db(2,2)*(dgwetaeta*dgwetaeta')+4*Db(2,3)*(dgwetaeta*dgwxieta')+4*alp*Db(3,3)*(dg
wxieta*dgwxieta')+...

(Abb(1,1)*alp^2*(dgwxi*dgwxi')+2*Abb(1,2)*alp*(dgwxi*dgweta')+Abb(2,2)*(dgweta*dgweta'
))*b*a/4)*GAUW_F(gp);

Kcd=Kcd+(alp^2*Dbs(1,1)*(dgwxixi*dgphixxi')+Dbs(1,2)*(dgwetaeta*dgphixxi')+... alp*Dbs(1,3)*(dgwxixi*dgphixeta')+2*alp*Dbs(1,3)*(dgwxieta*dgphixxi')+... 1/alp*Dbs(2,3)*(dgwetaeta*dgphixeta')+2*Dbs(3,3)*(dgwxieta*dgphixeta')+... (alp*Abs(1,1)*(dgwxi*gphix')+Abs(1,2)*(dgweta*gphix'))*b*a/4)*GAUW_F(gp);

```
Kce=Kce+(alp*Dbs(1,2)*(dgwxixi*dgphiyeta')+alp^2*Dbs(1,3)*(dgwxixi*dgphiyxi')+...
1/alp*Dbs(2,2)*(dgwetaeta*dgphiyeta')+Dbs(2,3)*(dgwetaeta*dgphiyxi')+...
2*Dbs(2,3)*(dgwxieta*dgphiyeta')+2*alp*Dbs(3,3)*(dgwxieta*dgphiyxi')+...
(Abs(1,2)*alp*(dgwxi*gphiy')+Abs(2,2)*(dgweta*gphiy'))*b*a/4)*GAUW_F(gp);
```

```
Kcf=Kcf+(alp^2*Bbpsi(1,1)*(dgwxixi*dgpsixxi')+alp*Bbpsi(1,3)*(dgwxixi*dgpsixeta')+...
        Bbpsi(2,1)*(dgwetaeta*dgpsixxi')+1/alp*Bbpsi(2,3)*(dgwetaeta*dgpsixeta')+...
        2*alp*Bbpsi(3,1)*(dgwxieta*dgpsixxi')+2*Bbpsi(3,3)*(dgwxieta*dgpsixeta')+...
(Abtpsi(1,1)*alp*(dgwxi*gpsix')+Abtpsi(2,1)*(dgweta*gpsix'))*b*a/4)*GAUW_F(gp);
Kcg=Kcg+(alp*Bbpsi(1,2)*(dgwxixi*dgpsiyeta')+alp^2*Bbpsi(1,4)*(dgwxixi*dgpsiyxi')+...
        1/alp*Bbpsi(2,2)*(dgwetaeta*dgpsiyeta')+Bbpsi(2,4)*(dgwetaeta*dgpsiyxi')+...
        2*Bbpsi(3,2)*(dgwxieta*dgpsiyeta')+2*alp*Bbpsi(3,4)*(dgwxieta*dgpsiyxi')+...
(alp*Abtpsi(1,2)*(dgwxi*gpsiy')+Abtpsi(2,2)*(dgweta*gpsiy'))*b*a/4)*GAUW_F(gp);
Kdd=Kdd+(alp*Ds(1,1)*(dgphixxi*dgphixxi')+2*Ds(1,3)*(dgphixxi*dgphixeta')+1/alp*Ds(3,3
)*(dgphixeta*dgphixeta')+...
        Ass(1,1)*b*a/4*(gphix*gphix'))*GAUW_F(gp);
    Kde=Kde+(Ds(1,2)*(dgphixxi*dgphiyeta')+alp*Ds(1,3)*(dgphixxi*dgphiyxi')+...
        1/alp*Ds(2,3)*(dgphixeta*dgphiveta')+...
        Ds(3,3)*(dgphixeta*dqphiyxi')+Ass(1,2)*b*a/4*(gphix*gphiy'))*GAUW_F(gp);
Kdf=Kdf+(Bspsi(1,1)*alp*(dgphixxi*dgpsixxi')+Bspsi(1,3)*(dgphixxi*dgpsixeta')+Bspsi(3,
1)*(dgphixeta*dgpsixxi')+...
1/alp*Bspsi(3,3)*(dgphixeta*dgpsixeta')+Astpsi(1,1)*b*a/4*(gphix*gpsix'))*GAUW_F(gp);
Kdg=Kdg+(Bspsi(1,2)*(dgphixxi*dgpsiyeta')+Bspsi(1,4)*alp*(dgphixxi*dgpsiyxi')+1/alp*Bs
psi(3,2)*(dgphixeta*dgpsiyeta')+...
        Bspsi(3,4)*(dgphixeta*dgpsiyxi')+Astpsi(1,2)*b*a/4*(gphix*gpsiy'))*GAUW_F(gp);
    Kee=Kee+(1/alp*Ds(2,2)*(dgphiyeta*dgphiyeta')+2*Ds(2,3)*(dgphiyeta*dgphiyxi')+...
        alp*Ds(3,3)*(dgphiyxi*dgphiyxi')+Ass(2,2)*b*a/4*(gphiy*gphiy'))*GAUW_F(gp);
Kef=Kef+(Bspsi(2,1)*(dgphiyeta*dgpsixxi')+1/alp*Bspsi(2,3)*(dgphiyeta*dgpsixeta')+alp*
Bspsi(3,1)*(dgphiyxi*dgpsixxi')+...
        Bspsi(3,3)*(dgphiyxi*dgpsixeta')+Astpsi(2,1)*b*a/4*(gphiy*gpsix'))*GAUW_F(gp);
Keg=Keg+(1/alp*Bspsi(2,2)*(dgphiyeta*dgpsiyeta')+Bspsi(2,4)*(dgphiyeta*dgpsiyxi')*Bsps
i(3,2)*(dgphiyxi*dgpsiyeta')+...
alp*Bspsi(3,4)*(dgphiyxi*dgpsiyxi')+Astpsi(2,2)*b*a/4*(gphiy*gpsiy'))*GAUW_F(gp);
    Kff=Kff+(alp*Dpsi(1,1)*(dgpsixxi*dgpsixxi')+2*Dpsi(1,3)*(dgpsixxi*dgpsixeta')+...
1/alp*Dpsi(3,3)*(dgpsixeta*dgpsixeta')+Atpsi(1,1)*b*a/4*(gpsix*gpsix'))*GAUW_F(gp);
    Kfg=Kfg+(Dpsi(1,2)*(dgpsixxi*dgpsiyeta')+alp*Dpsi(1,4)*(dgpsixxi*dgpsiyxi')+...
        1/alp*Dpsi(2,3)*(dgpsixeta*dgpsiyeta')+...
        Dpsi(3,4)*(dgpsixeta*dgpsiyxi')+Atpsi(1,2)*b*a/4*(gpsix*gpsiy'))*GAUW_F(gp);
```

Kgg=Kgg+(1/alp*Dpsi(2,2)*(dgpsiyeta*dgpsiyeta')+2*Dpsi(2,4)*(dgpsiyeta*dgpsiyxi')+...

alp*Dpsi(4,4)*(dgpsiyxi*dgpsiyxi')+Atpsi(2,2)*b*a/4*(gpsiy*gpsiy'))*GAUW_F(gp);

```
\label{eq:KccP=KccP+(Kw1*(gw*gw')*b^3*a/16+Kg*b*a/4*(alp^2*(dgwxi*dgwxi')+(dgweta*dgweta')))*GAUW_F(gp);
```

```
KccPnl=KccPnl+mu^2*(Kw1*b*a/4*(alp^2*(dgwxi*dgwxi')+(dgweta*dgweta'))+Kg/alp*(alp^4*(d
gwxixi*dgwxixi')+...
```

2*alp^2*(dgwxieta*dgwxieta')+(dgwetaeta*dgwetaeta')))*GAUW_F(gp);

Ccc=Ccc+(Cd*b^3*a/16*(gw*gw'))*GAUW_F(gp);

Cnlcc=Cnlcc+mu^2*(Cd*b*a/4*(alp^2*(dgwxi*dgwxi')+(dgweta*dgweta')))*GAUW_F(gp);

maa=maa+(m0*b*a/4*(gu*gu'))*b/2*b/2*GAUW_F(gp);

mac=mac+(mb*alp*b*a/4*(gu*dgwxi'))*b/2*GAUW_F(gp);

mad=mad+(ms*b*a/4*(gu*gphix'))*b/2*GAUW_F(gp);

maf=maf+(mpsi(1,1)*b*a/4*(gu*gpsix'))*b/2*GAUW_F(gp);

mag=mag+(mpsi(1,2)*b*a/4*(gu*gpsiy'))*b/2*GAUW_F(gp);

Mbb=Mbb+(m0*b*a/4*(gv*gv'))*b/2*b/2*GAUW_F(gp);

mbc=mbc+(mb*b*a/4*(gv*dgweta'))*b/2*GAUW_F(gp);

mbe=mbe+(ms*b*a/4*(gv*gphiy'))*b/2*GAUW_F(gp);

mbf=mbf+(mpsi(1,2)*b*a/4*(gv*gpsix'))*b/2*GAUW_F(gp);

mbg=mbg+(mpsi(2,2)*b*a/4*(gv*gpsiy'))*b/2*GAUW_F(gp);

mcc=mcc+(b^3*a/16*m0*(gw*gw')+mbb*(alp^2*(dgwxi*dgwxi'+dgweta*dgweta')*b*a/4))*GAUW_F(
gp);

mcd=mcd+(mbs*alp*b*a/4*(dgwxi*gphix'))*GAUW_F(gp);

mce=mce+(mbs*b*a/4*(dgweta*gphiy'))*GAUW_F(gp);

mcf=mcf+(mbpsi(1,1)*alp*(dgwxi*gpsix')+mbpsi(1,2)*(dgweta*gpsix'))*b*a/4*GAUW_F(gp);

mcg=mcg+(mbpsi(1,2)*alp*(dgwxi*gpsiy')+mbpsi(2,2)*(dgweta*gpsiy'))*b*a/4*GAUW_F(gp);

mdd=mdd+(mss*b*a/4*(gphix*gphix'))*GAUW_F(gp);

mdf=mdf+(mspsi(1,1)*b*a/4*(gphix*gpsix'))*GAUW_F(gp);

mdg=mdg+(mspsi(1,2)*b*a/4*(gphix*gpsiy'))*GAUW_F(gp);

mee=mee+(mss*b*a/4*(gphiy*gphiy'))*GAUW_F(gp);

mef=mef+(mspsi(1,2)*b*a/4*(gphiy*gpsix'))*GAUW_F(gp);

meg=meg+(mspsi(2,2)*b*a/4*(gphiy*gpsiy'))*GAUW_F(gp);

mff=mff+(mpsipsi(1,1)*b*a/4*(gpsix*gpsix'))*GAUW_F(gp);

mfg=mfg+(mpsipsi(1,2)*b*a/4*(gpsix*gpsiy'))*GAUW_F(gp);

mgg=mgg+(mpsipsi(2,2)*b*a/4*(gpsiy*gpsiy'))*GAUW_F(gp);

pc=pc+qq(GAUP_F(gp,1),GAUP_F(gp,2))*gw*b^2*a/8*GAUW_F(gp);

pcnl=pcnl+mu^2*qq(GAUP_F(gp,1),GAUP_F(gp,2))*a/2*(alp^2*dgwxixi+dgwetaeta)*GAUW_F(gp);

Mnlaa=Mnlaa+mu^2*(m0*(alp^2*(dguxi*dguxi')+(dgueta*dgueta'))*b*a/4)*GAUW_F(gp);

Mnlad=Mnlad+mu^2*(ms*a/2*(d]p^2*(dguxi*dgphixxi')+(dgueta*dgphixeta')))*GAUW_F(gp);

Mnlaf=Mnlaf+mu^2*(mpsi(1,1)*a/2*(alp^2*(dguxi*dgpsixxi')+(dgueta*dgpsixeta')))*GAUW_F(
gp);

Mnlbb=Mnlbb+mu^2*(m0*(alp^2*(dgvxi*dgvxi')+(dgveta*dgveta'))*b*a/4)*GAUW_F(gp);

Mnlbe=Mnlbe+mu^2*(ms*a/2*(dpv2*(dgvxi*dgphiyxi')+(dgveta*dgphiyeta')))*GAUW_F(gp);

Mnlbg=Mnlbg+mu^2*(mpsi(2,2)*a/2*(alp^2*(dgvxi*dgpsiyxi')+(dgveta*dgpsiyeta')))*GAUW_F(
gp);

Mnlcc=Mnlcc+mu^2*(m0*(alp^2*(dgwxi*dgwxi')+(dgweta*dgweta'))*b*a/4)*GAUW_F(gp);

Mnldd=Mnldd+mu^2*(mss/alp*(alp^2*(dgphixxi*dgphixxi')+(dgphixeta*dgphixeta')))*GAUW_F(
gp);

Mnldf=Mnldf+mu^2*(mspsi(1,1)/alp*(alp^2*(dgphixxi*dgpsixxi')+(dgphixeta*dgpsixeta')))*
GAUW_F(gp);

Mnlee=Mnlee+mu^2*(mss/alp*(alp^2*(dgphiyxi*dgphiyxi')+(dgphiyeta*dgphiyeta')))*GAUW_F(
gp);

Mnleg=Mnleg+mu^2*(mspsi(2,2)/alp*(alp^2*(dgphiyxi*dgpsiyxi')+(dgphiyeta*dgpsiyeta')))*
GAUW_F(gp);

Mnlff=Mnlff+mu^2*(mpsipsi(1,1)/alp*(alp^2*(dgpsixxi*dgpsixxi')+(dgpsixeta*dgpsixeta'))
)*GAUW_F(gp);

Mnlgg=Mnlgg+mu^2*(mpsipsi(2,2)/alp*(alp^2*(dgpsiyxi*dgpsiyxi')+(dgpsiyeta*dgpsiyeta'))
)*GAUW_F(gp);

```
Kaf*d Kaq*d;
к=[каа
         каb
                кас
                       кad
                              кае
                                     кbf*d кbg*d;
  Kab'
         кbb
                кЬс
                       кbd
                              кbе
         Kbc'
   кас'
                Kcc+KccP+KccPnl
                                   кcd
                                        Ксе
                                                кcf*d кcg*d;
   Kad'
         кbd'
                Kcd'
                              кdе
                                     кdf*d кdg*d;
                       кdd
   кае'
         кbe'
                ксе'
                       кde'
                                     Kef*d Keg*d;
                              кее
   Kaf'*d Kbf'*d Kcf'*d Kdf'*d Kef'*d Kff*d Kfg*d;
   Kag'*d Kbg'*d Kcg'*d Kdg'*d Keg'*d Kfg'*d Kgg*d];
C=[Cgen Cgen Cgen Cgen Cgen Cgen;
   Cgen Cgen Cgen Cgen Cgen Cgen;
   Cgen Cgen Ccc+Cnlcc Cgen Cgen Cgen;
   Cgen Cgen Cgen Cgen Cgen Cgen];
M=[maa+Mnlaa
                                 mac+Mnlac
                                               mad+Mnlad
                  mab+Mnlab
                                                              mae+Mnlae
(maf+Mnlaf)*d (mag+Mnlag)*d;
   (mab+Mnlab)'
                  Mbb+Mn1bb
                                 mbc+Mnlbc
                                               mbd+Mn1bd
                                                              mbe+Mnlbe
(mbf+Mnlbf)*d (mbg+Mnlbg)*d;
   (mac+Mnlac)'
                 (mbc+Mnlbc)'
                                 mcc+Mnlcc
                                               mcd+Mnlcd
                                                              mce+Mnlce
(mcf+Mnlcf)*d (mcg+Mnlcg)*d;
   (mad+Mnlad)'
                 (mbd+Mnlbd)'
                                (mcd+Mnlcd)'
                                               mdd+Mn1dd
                                                              mde+Mnlde
(mdf+Mnldf)*d (mdg+Mnldg)*d;
   (mae+Mnlae)'
                 (mbe+Mnlbe)'
                                (mce+Mnlce)'
                                               (mde+Mnlde)'
                                                              mee+Mnlee
(mef+Mnlef)*d (meg+Mnleg)*d;
   (maf+Mnlaf)'*d (mbf+Mnlbf)'*d (mcf+Mnlcf)'*d (mdf+Mnldf)'*d (mef+Mnlef)'*d
(mff+Mnlff)*d (mfg+Mnlfg)*d;
   (mag+Mnlag)'*d (mbg+Mnlbg)'*d (mcg+Mnlcg)'*d (mdg+Mnldg)'*d (meg+Mnleg)'*d
(mfg+Mnlfg)'*d (mgg+Mnlgg)*d];
F=[pa; pb; pc-pcnl; pd; pe; pf*d; pg*d];
C=C+g*[Kaa
                                        Kaf*d Kag*d;
             каb
                    кас
                           кad
                                  кае
      кab'
             кbb
                    кbс
                           кbd
                                  кbе
                                         Kbf*d Kbg*d;
                                         Kcf*d Kcg*d;
      кас'
             кbс'
                    КСС
                           кса
                                  ксе
      Kad'
             Kbd'
                    Kcd'
                                         Kdf*d Kdg*d;
                           кdd
                                  Кdе
      кае'
                           Kde'
                                         Kef*d Keg*d;
             кbe'
                    Kce'
                                  кее
      Kaf'*d Kbf'*d Kcf'*d Kdf'*d Kef'*d Kff*d Kfg*d;
      Kag'*d Kbg'*d Kcg'*d Kdg'*d Keg'*d Kfg'*d Kgg*d];
```

end

end

RAPPRESENTAZIONEMODI.m

```
if ws(i)<opz && ws(i)>opzm
        for q=0:p
        for k=0:q
           m=(q+1)*(q+2)/2-k;
           fun=@(xi,eta) xi.^k.*eta.^(q-k).*gw1(xi,eta);
            gw=fun(X.*2/a,Y.*2/b);
            def=def+cm(m,i)*gw;
        end
        end
   end
   if ws(i)<opz && ws(i)>opzm
        figure(i)
        surf(X,Y,def);
        title(ws(i));
   end
end
```

Bibliografia

- C. H. Thai, A. J. M. Ferreira, T. Rabczuk, e H. Nguyen-Xuan, «Size-dependent analysis of FG-CNTRC microplates based on modified strain gradient elasticity theory», *European Journal of Mechanics - A/Solids*, vol. 72, pagg. 521–538, nov. 2018.
- [2] L. Iurlaro, M. Gherlone, M. Di Sciuva, e A. Tessler, «Assessment of the Refined Zigzag Theory for bending, vibration, and buckling of sandwich plates: a comparative study of different theories», *Composite Structures*, vol. 106, pagg. 777–792, dic. 2013.
- [3] M. Zhang e J. Li, «Carbon nanotube in different shapes», *Materials Today*, vol. 12, n. 6, pagg. 12–18, giu. 2009.
- [4] J. M. G. Araujo, «Finite Element Modelling of the Mechanical Behaviour of Graphene Nanocomposites», pag. 10.
- [5] M. Estili, K. Takagi, e A. Kawasaki, «Multiwalled carbon nanotubes as a unique agent to fabricate nanostructure-controlled functionally graded alumina ceramics», *Scripta Materialia*, vol. 59, n. 7, pagg. 703–705, ott. 2008.
- [6] A. Sharma, A. Kumar, C. K. Susheel, e R. Kumar, «Smart damping of functionally graded nanotube reinforced composite rectangular plates», *Composite Structures*, vol. 155, pagg. 29–44, nov. 2016.
- [7] A. D. Drozdov, «Chapter 2 Constitutive Models in Linear Viscoelasticity», in *Viscoelastic Structures*, A. D. Drozdov, A c. di Burlington: Academic Press, 1998, pagg. 25–106.
- [8] S.-C. Yi, L.-Q. Yao, e B.-J. Tang, «A Novel Higher-Order Shear and Normal Deformable Plate Theory for the Static, Free Vibration and Buckling Analysis of Functionally Graded Plates», *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2017, pagg. 1–20, 2017.
- [9] A. Tessler, M. D. Sciuva, e M. Gherlone, «Refined Zigzag Theory for Laminated Composite and Sandwich Plates», pag. 52.
- [10] A. Ghorbanpour Arani, R. Kolahchi, e M. S. Zarei, «Visco-surface-nonlocal piezoelasticity effects on nonlinear dynamic stability of graphene sheets integrated with ZnO sensors and actuators using refined zigzag theory», *Composite Structures*, vol. 132, pagg. 506–526, nov. 2015.
- [11] A. Ghorbanpour Arani, M. Mosayyebi, F. Kolahdouzan, R. Kolahchi, e M. Jamali, «Refined zigzag theory for vibration analysis of viscoelastic functionally graded carbon nanotube reinforced composite microplates integrated with piezoelectric layers», *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, vol. 231, n. 13, pagg. 2464–2478, nov. 2017.
- [12] A. Tessler e T. J. R. Hughes, «An improved treatment of transverse shear in the mindlintype four-node quadrilateral element», *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 39, n. 3, pagg. 311–335, set. 1983.
- [13] O. C. Zienkiewicz e R. L. Taylor, *The finite element method. Vol. 1: The basis*, 5. ed., reprinted. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2002.
- [14] S. Pouresmaeeli, E. Ghavanloo, e S. A. Fazelzadeh, «Vibration analysis of viscoelastic orthotropic nanoplates resting on viscoelastic medium», *Composite Structures*, vol. 96, pagg. 405–410, feb. 2013.
- [15] M. Paradise e T. Goswami, «Carbon nanotubes Production and industrial applications», *Materials & Design*, vol. 28, n. 5, pagg. 1477–1489, gen. 2007.
- [16] M. Estili, K. Takagi, e A. Kawasaki, «Advanced Nanostructure-Controlled Functionally Graded Materials Employing Carbon Nanotubes», *Materials Science Forum*, vol. 631–632, pag. 225, gen. 2010.
- [17] H. Zhang, E. Bilotti, e T. Peijs, «The use of carbon nanotubes for damage sensing and structural health monitoring in laminated composites: a review», *Nanocomposites*, vol. 1, n. 4, pagg. 167–184, ott. 2015.

- [18] R. Kolahchi, «A comparative study on the bending, vibration and buckling of viscoelastic sandwich nano-plates based on different nonlocal theories using DC, HDQ and DQ methods», *Aerospace Science and Technology*, vol. 66, pagg. 235–248, lug. 2017.
- [19] J. Sladek, V. Sladek, J. Kasala, e E. Pan, «Nonlocal and Gradient Theories of Piezoelectric Nanoplates», *Procedia Engineering*, vol. 190, pagg. 178–185, gen. 2017.
- [20] A. C. Eringen, «On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves», *Journal of Applied Physics*, vol. 54, n. 9, pagg. 4703–4710, set. 1983.
- [21] A. A. Jandaghian e O. Rahmani, «Free vibration analysis of magneto-electro-thermoelastic nanobeams resting on a Pasternak foundation», *Smart Materials and Structures*, vol. 25, n. 3, pag. 035023, mar. 2016.
- [22] Q. Wang, «Wave propagation in carbon nanotubes via nonlocal continuum mechanics», *Journal of Applied Physics*, vol. 98, n. 12, pag. 124301, dic. 2005.
- [23] R. Kolahchi, M. Esmailpour, e M. Safari, «Magneto-Thermo-Mechanical Buckling Analysis of Mindlin Plate Reinforced with FG-Carbon Nanotubes», *Archives of Civil Engineering*, vol. 62, n. 3, gen. 2016.
- [24] M. Arefi e A. M. Zenkour, «Nonlocal electro-thermo-mechanical analysis of a sandwich nanoplate containing a Kelvin–Voigt viscoelastic nanoplate and two piezoelectric layers», *Acta Mechanica*, vol. 228, n. 2, pagg. 475–493, feb. 2017.
- [25] N. J. Pagano, «Exact Solutions for Rectangular Bidirectional Composites and Sandwich Plates», *Journal of Composite Materials*, vol. 4, n. 1, pagg. 20–34, gen. 1970.
- [26] D. P. Zhang, Y. J. Lei, e Z. B. Shen, «Thermo-electro-mechanical vibration analysis of piezoelectric nanoplates resting on viscoelastic foundation with various boundary conditions», *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 131–132, pagg. 1001– 1015, ott. 2017.
- [27] M. Kamali, M. Shamsi, e A. R. Saidi, «Postbuckling of magneto-electro-elastic CNT-MT composite nanotubes resting on a nonlinear elastic medium in a non-uniform thermal environment», *The European Physical Journal Plus*, vol. 133, n. 3, mar. 2018.
- [28] A. G. Arani, E. Haghparast, e H. B. A. Zarei, «Vibration of axially moving 3-phase CNTFPC plate resting on orthotropic foundation», *Structural Engineering and Mechanics*, vol. 57, n. 1, pagg. 105–126, gen. 2016.
- [29] A. D. Kerr, «On the Determination of Foundation Model Parameters», *Journal of Geotechnical Engineering*, vol. 111, n. 11, pagg. 1334–1340, nov. 1985.
- [30] M. Arefi e A. M. Zenkour, «Employing sinusoidal shear deformation plate theory for transient analysis of three layers sandwich nanoplate integrated with piezo-magnetic face-sheets», *Smart Materials and Structures*, vol. 25, n. 11, pag. 115040, nov. 2016.
- [31] L.-L. Ke, C. Liu, e Y.-S. Wang, «Free vibration of nonlocal piezoelectric nanoplates under various boundary conditions», *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, vol. 66, pagg. 93–106, feb. 2015.
- [32] «AntonaCarrera_AppuntiPLV.pdf». .
- [33] H.-T. Thai e D.-H. Choi, «Analytical solutions of refined plate theory for bending, buckling and vibration analyses of thick plates», *Applied Mathematical Modelling*, vol. 37, n. 18–19, pagg. 8310–8323, ott. 2013.
- [34] P. Lu, P. Q. Zhang, H. P. Lee, C. M. Wang, e J. N. Reddy, «Non-local elastic plate theories», *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 463, n. 2088, pagg. 3225–3240, dic. 2007.
- [35] K. M. Liew, A c. di, *Vibration of Mindlin plates: programming the p-version Ritz Method*, 1st ed. Amsterdam; New York: Elsevier, 1998.

- [36] A. Anjomshoa, «Application of Ritz functions in buckling analysis of embedded orthotropic circular and elliptical micro/nano-plates based on nonlocal elasticity theory», *Meccanica*, vol. 48, n. 6, pagg. 1337–1353, ago. 2013.
- [37] Simone Gaia, «Analisi di Risposta di Piastre Composite e Sandwich», pag. 127.
- [38] L. Iurlaro, M. Gherlone, e M. Di Sciuva, "Bending and free vibration analysis of functionally graded sandwich plates using the Refined Zigzag Theory", *Jnl of Sandwich Structures & Materials*, vol. 16, n. 6, pagg. 669–699, nov. 2014.
- [39] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, e O. C. Zienkiewicz, *Solid mechanics*, 5. ed., reprinted. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2003.
- [40] M. Gherlone, A. Tessler, e M. D. Sciuva, «C0 beam elements based on the Refined Zigzag Theory for multilayered composite and sandwich laminates», *Composite Structures*, vol. 93, n. 11, pagg. 2882–2894, ott. 2011.
- [41] H. A. Zamani, M. M. Aghdam, e M. Sadighi, «Free vibration analysis of thick viscoelastic composite plates on visco-Pasternak foundation using higher-order theory», *Composite Structures*, vol. 182, pagg. 25–35, dic. 2017.
- [42] E. Bahmyari, M. M. Banatehrani, M. Ahmadi, e M. Bahmyari, «Vibration Analysis of Thin Plates Resting on Pasternak Foundations by Element free Galerkin Method», *Shock* and Vibration, vol. 20, n. 2, pagg. 309–326, 2013.