



Politecnico di Torino

FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria per l'Ambiente e il Territorio

TESI DI LAUREA MAGISTRALE

Dinamica di bolle di gas e vapore in un campo di pressione stocastico

Relatori:

prof. Costantino Manes

prof. Luca Ridolfi

ing. Riccardo Vesipa

Candidato:

Eleonora Paissoni

Anno Accademico 2017–2018

Sommario

In questo lavoro di tesi viene descritta la dinamica di bolle di gas e vapore, poste in un liquido e soggette a una fluttuazione di pressione variabile nel tempo. In particolare, viene valutata la risposta del sistema bifase in un campo di pressione stocastico. La dinamica delle bolle costituisce la base del fenomeno della cavitazione, considerata una delle più promettenti tecniche alternative di disinfezione delle acque, ed è caratterizzata da equazioni altamente non lineari. A seguito della presentazione del fenomeno fisico e dei principali modelli matematici (Rayleigh-Plesset, Keller-Miksis e Gilmore), viene osservato che la manifestazione dei primi effetti non lineari nel comportamento delle bolle avviene già in presenza di un campo di pressione acustico e quindi periodico. Infatti, come altri oscillatori non lineari, una bolla forzata periodicamente è caratterizzata dal caos deterministico. Tuttavia, la cavitazione idrodinamica è spesso presente in un regime fluido turbolento che determina delle oscillazioni casuali nell'andamento della pressione agente sulle bolle. Per questo motivo viene studiata la risposta delle bolle a questa tipologia di fluttuazione, i cui parametri caratteristici, tempo di correlazione e deviazione standard, vengono ricavati dalla precedente oscillazione sinusoidale. Confrontando i risultati ottenuti nei due diversi campi di pressione si osserva una maggior dispersione dei valori del raggio e uno spostamento della media verso valori più grandi in caso di forzante stocastica. Inoltre, per elevate deviazioni standard (o intensità) del rumore, la risposta della bolla risulta indipendente dal tempo di correlazione della forzante.

Indice

1	Introduzione	5
2	Descrizione fisica del fenomeno	7
2.1	Dinamica delle bolle	7
2.1.1	Modello base di Rayleigh-Plesset	8
2.2	Cavitazione	13
2.2.1	Cavitazione acustica	14
2.2.1.1	Cavitazione acustica stabile	18
3	Modelli della dinamica delle bolle	23
3.1	Descrizione dei principali modelli	23
3.1.1	Modello di Keller-Miksis	23
3.1.2	Modello di Gilmore	25
3.2	Confronto tra i modelli presentati	26
3.3	Forma adimensionale delle equazioni scelte	29
3.3.1	Modello adimensionale di Rayleigh-Plesset	29
3.3.2	Modello adimensionale di Keller-Miksis	30
4	Simulazione numerica	33
4.1	Verifica di attendibilità dell'implementazione in MATLAB	34
4.1.1	Modello adimensionale di Rayleigh-Plesset	34
4.1.2	Modello adimensionale di Keller-Miksis	37
5	Risultati ottenuti con forzante di pressione sinusoidale	41
5.1	Modello adimensionale di Rayleigh-Plesset	41
5.2	Modello adimensionale di Keller-Miksis	45
6	Forzante di pressione stocastica	53
6.1	Rumore	53
6.2	Processo di Ornstein-Uhlenbeck	55
6.2.1	Applicazione del processo alla pressione del liquido	56
7	Risultati ottenuti con forzante di pressione stocastica	61
7.1	Serie temporali del raggio della bolla	62

7.2	Analisi statistica delle serie temporali del raggio della bolla	63
7.2.1	Funzione di densità di probabilità e funzione di ripartizione . .	64
7.2.2	Indici statistici	69
7.3	Autocorrelogramma e scala integrale del raggio della bolla	74
8	Conclusioni	79
	Appendice A Equazioni adimensionali in MATLAB	81
	Appendice B Durata delle simulazioni in campo stocastico	83
	Appendice C Medie degli indici statistici su più realizzazioni	87

1 Introduzione

Ad oggi nel mondo 1 persona su 9 non ha accesso ad acqua potabile correttamente gestita [66], specialmente nei paesi in via di sviluppo. Questo numero tenderà ad aumentare nei prossimi anni a causa dei cambiamenti climatici e della crescita della popolazione mondiale.

Un'acqua sicura per il consumo umano è un'acqua con una concentrazione sufficientemente bassa di contaminanti pericolosi per la salute. Una fase particolarmente importante nella potabilizzazione dell'acqua risulta, perciò, la disinfezione, che ha lo scopo di rimuovere o inattivare i microrganismi patogeni per l'uomo.

La disinfezione può essere svolta tramite processi sia chimici sia fisici. La clorazione (mezzo chimico), che prevede l'utilizzo di cloro, è la tecnica maggiormente utilizzata perché più efficiente ed economica dei principali mezzi fisici; tuttavia, può generare sottoprodotti della disinfezione pericolosi e talvolta cancerogeni.

Per questo motivo si è reso necessario lo sviluppo di tecniche di disinfezione alternative che operino senza prodotti chimici, per eliminare il rischio di sottoprodotti, e implementabili facilmente nei paesi più poveri, per contrastare la mancanza di acqua potabile.

Una delle possibili soluzioni è la cavitazione. La cavitazione consiste nella formazione, crescita e collasso di cavità (o bolle), poste in un liquido, a causa di una variazione nella pressione del liquido. L'implosione o collasso di una bolla genera un aumento locale di temperatura fino ad alcune migliaia di gradi Kelvin con formazione di radicali liberi, che influenzano lo sviluppo e l'intensità di eventuali reazioni chimiche che possono avvenire nel sistema considerato, e un aumento locale di pressione fino ad alcune centinaia di bar con emissione di onde d'urto, che generano effetti meccanici come rimescolamento ed emulsificazione. Di conseguenza, è un meccanismo di disinfezione sia chimico sia fisico.

Una rappresentazione schematica del fenomeno è riportata in Figura 1.1; nei lavori di Gogate [31] e Carpenter *et al.* [14] si può ritrovare un'accurata rassegna e descrizione delle diverse configurazioni del reattore di cavitazione idrodinamica e delle più importanti applicazioni industriali di questo processo.

Recenti studi hanno confermato sperimentalmente l'efficacia della cavitazione come tecnica di disinfezione dell'acqua [38, 9, 50, 17, 62].

Tuttavia, l'attuale comprensione del complesso e turbolento sistema bifase in cui avviene questo fenomeno è alquanto limitata.

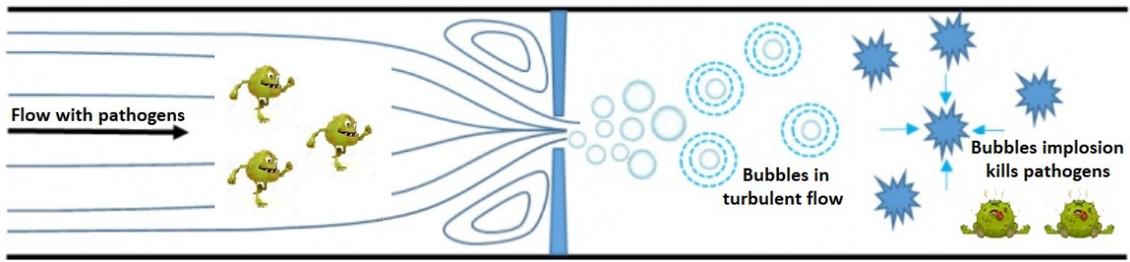


Figura 1.1: Rappresentazione schematica dell'applicazione nella disinfezione dell'acqua del fenomeno di cavitazione idrodinamica

Le equazioni che governano la dinamica delle bolle sono infatti caratterizzate da un elevato grado di non linearità; ciò implica l'insorgenza di comportamenti non lineari e poco prevedibili nell'oscillazione delle cavità.

Questa tesi ha lo scopo di indagare questi tipi di comportamenti analizzando la risposta di bolle di gas e vapore poste in un liquido e soggette a differenti variazioni di pressione.

Dopo aver illustrato fisicamente il fenomeno (capitolo 2), nel capitolo 3 vengono presentati i principali modelli della dinamica delle bolle (Rayleigh-Plesset, Keller-Miksis e Gilmore). Una volta individuati i modelli più appropriati per lo studio che si intende intraprendere, si verifica che l'implementazione delle diverse equazioni in MATLAB sia attendibile (capitolo 4).

Successivamente, in una prima parte di simulazioni numeriche (capitolo 5), si osserva la risposta di una bolla a un'oscillazione di pressione sinusoidale e lo sviluppo dei primi effetti non lineari che caratterizzano questa dinamica. Infatti, nonostante la periodicità della forzante, le oscillazioni del raggio della bolla possono essere non solo non simmetriche rispetto al raggio di equilibrio, ma anche caotiche e imprevedibili (caos deterministico).

Tuttavia, i sistemi bifase bolle-liquido sono spesso soggetti a un regime turbolento, soprattutto in seguito al collasso di bolle o a un cambiamento nella geometria del sistema come nella cavitazione idrodinamica. Per questo motivo, nella seconda serie di simulazioni, si osserva il comportamento di una bolla in un campo di pressione stocastico.

L'oscillazione di pressione è modellata come un rumore colorato Gaussiano tramite il processo stocastico di Ornstein-Uhlenbeck (capitolo 6); i due parametri che la caratterizzano sono la varianza, che ne definisce l'intensità, e il tempo di correlazione, che ne definisce la scala temporale. La forzante stocastica è descritta in termini probabilistici; di conseguenza, le serie temporali del raggio risultanti sono analizzate tramite strumenti statistici, confrontate con la risposta della bolla alla fluttuazione sinusoidale e in ultimo rapportate dal punto di vista dell'autocorrelazione temporale alla forzante di pressione stocastica (capitolo 7).

2 Descrizione fisica del fenomeno

2.1 Dinamica delle bolle

Una bolla è una cavità, contenente gas e/o vapore, immersa in un fluido.

Un sistema così costituito si definisce multifase, in quanto comprende più fasi, in questo caso due e separate a una scala molto maggiore di quella molecolare, e disperso, in quanto la fase composta da particelle finite, in questo caso l'aeriforme, è dispersa in un volume della fase continua, in questo caso la liquida (Figura 2.1).

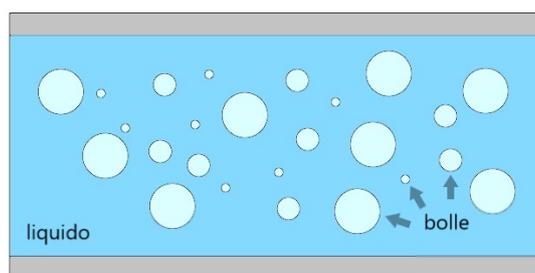


Figura 2.1: Rappresentazione schematica di un flusso bifase disperso composto da bolle di gas e/o vapore e liquido

In caso di sistema bifase bolle-liquido, la superficie di separazione tra le due fasi risulta mobile. Le bolle, infatti, al contrario delle particelle solide o delle gocce liquide, altre possibili fasi disperse, possono espandersi e/o contrarsi nel liquido.

In generale una bolla in un liquido non è in equilibrio stabile e può allontanarsi dal sistema per galleggiamento o dissolversi a causa della tensione superficiale del liquido, diretta verso il centro della bolla, e della diffusione dei gas verso l'esterno della bolla. A volte, però, può essere sospesa nel liquido e stabilizzata rispetto alla dissoluzione grazie a un sottile rivestimento di materiale organico oppure intrappolata nelle fessure o di particelle solide sospese o delle pareti del recipiente contenente il liquido.

In assenza di stabilizzazioni fisiche, una bolla può comunque contrastare l'instabilità a cui è soggetta grazie a un cambiamento nel sistema bifase. Molto spesso questo cambiamento si concretizza in una fluttuazione di pressione del liquido. Tuttavia, poiché una bolla può contenere sia gas sia vapore, la variazione del suo raggio può

dipendere non solo da una riduzione di pressione, ma anche da un innalzamento della temperatura e da fenomeni diffusivi.

Ulteriori complicazioni nella dinamica di questo fenomeno sono: la presenza di gas e vapore nella bolla in proporzioni sconosciute, l'influenza della viscosità, tensione superficiale e comprimibilità del liquido, il trasferimento di massa e calore all'interfaccia tra le fasi e la redistribuzione e dissipazione di energia in seguito al collasso della bolla.

L'implosione o collasso di una bolla genera turbolenza e rilascio di calore; si ha quindi un aumento locale di temperatura fino ad alcune migliaia di gradi Kelvin con formazione di radicali liberi dalla dissociazione del vapore interno alla bolla e un aumento locale di pressione fino ad alcune centinaia di bar con emissione di onde d'urto. L'incremento di temperatura e la presenza di radicali influenzano lo sviluppo e l'intensità di eventuali reazioni chimiche che possono avvenire nel sistema considerato, mentre le onde d'urto generano effetti meccanici come rimescolamento ed emulsificazione, ma anche possibile erosione delle componenti del sistema.

Inoltre, l'implosione di una bolla ha effetto anche sulle bolle presenti nel sistema non ancora collassate perchè modifica le proprietà del mezzo liquido e quindi dell'ambiente in cui deve avvenire il collasso.

Nonostante i diversi fenomeni fisici implicati, è possibile affrontare questo problema dinamico applicando una serie di semplificazioni al sistema, riguardanti in particolar modo gli effetti termici e diffusivi. Infatti, i principali modelli matematici, utilizzati con successo per lo studio di questa dinamica, sono stati sviluppati assumendo, tra le diverse ipotesi, l'assenza di questi fenomeni.

2.1.1 Modello base di Rayleigh-Plesset

I primi studi sulla dinamica delle bolle iniziarono alla fine dell'Ottocento per indagare le cause del danneggiamento delle eliche delle navi. La Marina britannica commissionò lo studio a Lord Rayleigh, il quale osservò come l'erosione delle eliche potesse essere spiegato dalla turbolenza e dalle elevate pressioni e temperature generate durante il collasso delle bolle (Figura 2.2).

Nel 1917 Lord Rayleigh presentò il primo modello teorico per il collasso di una cavità sferica in un dominio infinito di liquido [59], successivamente modificato negli anni '50 da Plesset [54], Noltingk e Neppiras [53, 52] e Poritsky [56]. L'equazione così derivata si definisce di Rayleigh-Plesset-Noltingk-Neppiras-Poritsky (RPNNP) o più comunemente di Rayleigh-Plesset e costituisce la base della dinamica delle bolle.

Successivamente sono state sviluppate numerose varianti di questo modello, le quali a loro volta negli anni sono state modificate per descrivere fenomeni più complicati rispetto alla crescita e collasso di una singola bolla sferica, come ad esempio le interazioni tra bolle, i moti traslatori delle bolle e la dinamica di bolle non sferi-



Figura 2.2: Esempio di danneggiamento, causato dalle onde d'urto generate dal collasso di bolle, delle pale di una turbina [13]

che. Tuttavia, sia i modelli più semplici sia quelli più complessi sono caratterizzati da una natura altamente non lineare causata dalla complessità del fenomeno che descrivono.

Per la presentazione in questo lavoro del modello base si è seguito l'approccio di Brennen [13].

Si consideri una bolla posta in un dominio infinito di liquido, in quiete lontano da essa. In questo modello (Figura 2.3) il liquido è caratterizzato da una temperatura (T_∞), assunta costante, e una pressione ($p_\infty(t)$), variabile nel tempo, che regola la crescita o il collasso della bolla ed è ritenuta un input noto. La bolla è considerata sferica di raggio $R(t)$.

Le altre ipotesi sono:

- densità del liquido (ρ_L) costante (liquido incomprimibile);
- viscosità dinamica del liquido (μ_L) costante e uniforme;
- temperatura ($T_B(t)$) e pressione ($p_B(t)$) all'interno della bolla uniformi;
- assenza di trasporto di massa attraverso la superficie della bolla.

Date queste condizioni, per la legge di conservazione della massa, si ottiene

$$4\pi r^2 u(r, t) \rho_L = 4\pi R^2 u(R, t) \rho_L, \quad (2.1)$$

dove $u(r, t)$ indica la velocità di una particella di liquido.

Considerando l'assenza di trasporto di massa attraverso la superficie, per cui la velocità del liquido all'interfaccia è uguale alla velocità dell'interfaccia ($u(R, t) = dR/dt$), da (2.1) si ricava la condizione al contorno cinematica

$$u(r, t) = \frac{R^2}{r^2} \frac{dR}{dt}. \quad (2.2)$$

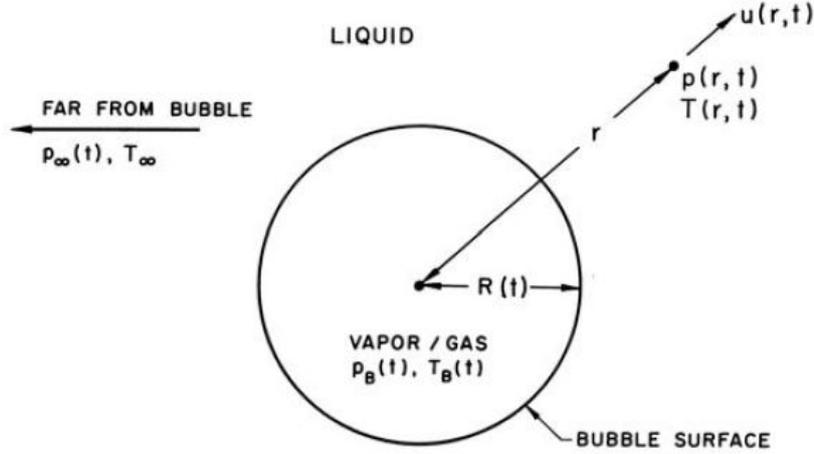


Figura 2.3: Rappresentazione schematica di una bolla posta in un liquido [13] con indicazione della temperatura e pressione del liquido lontano dalla bolla (T_∞ e $p_\infty(t)$), dell'interno della bolla ($T_B(t)$ e $p_B(t)$) e del liquido all'interfaccia ($T(r,t)$ e $p(r,t)$). $R(t)$ indica il raggio della bolla e $u(r,t)$ la velocità del liquido all'interfaccia.

L'equazione di Navier-Stokes per il moto di un fluido newtoniano lungo la direzione radiale

$$-\frac{1}{\rho_L} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} - \nu_L \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{2u}{r^2} \right], \quad (2.3)$$

dove p indica la pressione del liquido e ν_L la viscosità cinematica dello stesso, può essere riscritta utilizzando la relazione (2.2)

$$-\frac{1}{\rho_L} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{2R}{r^2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + \frac{R^2}{r^2} \frac{d^2 R}{dt^2} - \frac{2R^4}{r^5} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 \quad (2.4)$$

e integrata per $p \rightarrow p_\infty$ e $r \rightarrow \infty$, ottenendo

$$\frac{p - p_\infty}{\rho_L} = \frac{2R}{r} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + \frac{R^2}{r} \frac{d^2 R}{dt^2} - \frac{R^4}{2r^4} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2. \quad (2.5)$$

All'interfaccia, $r = R$, l'equazione (2.5) diventa

$$\frac{(p)_{r=R} - p_\infty(t)}{\rho_L} = R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2. \quad (2.6)$$

A questo punto, per ricavare l'equazione di Rayleigh-Plesset, è necessario introdurre una condizione al contorno dinamica sulla superficie della bolla, considerando

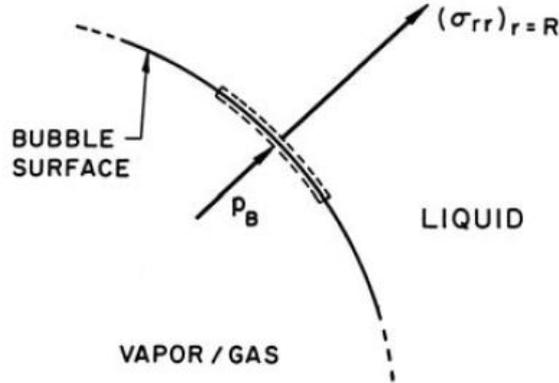


Figura 2.4: Tratto della superficie della bolla sferica su cui agiscono radialmente verso l'esterno la pressione interna della bolla (p_B) e lo sforzo normale e di taglio alla superficie ($(\sigma_{rr})_{r=R}$) in contrapposizione alla tensione superficiale (non riportata) [13].

come volume di controllo un tratto della superficie stessa (Figura 2.4) e valutando le forze agenti su di esso.

La forza netta lungo la direzione radiale uscente per unità di area risulta

$$p_B + (\sigma_{rr})_{r=R} - \frac{2S}{R}, \quad (2.7)$$

dove S è la tensione superficiale del liquido e $\sigma_{rr} = -p + 2\mu_L \partial u / \partial r$. Inoltre, poiché non vi è trasporto di massa attraverso la superficie, l'equilibrio tra queste forze agenti sull'unità di area è nullo, per cui l'equazione (2.7) può essere riscritta come

$$p_B - (p)_{r=R} - \frac{4\mu_L}{R} \frac{dR}{dt} - \frac{2S}{R} = 0, \quad (2.8)$$

esprimendo così la relazione tra le pressioni ai due lati della superficie della bolla.

Sostituendo nell'equazione di equilibrio (2.8) il valore di $(p)_{r=R}$ ottenuto con la soluzione dell'equazione di Navier-Stokes (2.6), si ottiene l'equazione di Rayleigh-Plesset generalizzata

$$\frac{p_B(t) - p_\infty(t)}{\rho_L} = R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + \frac{4\nu_L}{R} \frac{dR}{dt} + \frac{2S}{\rho_L R}. \quad (2.9)$$

Questa equazione può essere riscritta facendo alcune considerazioni sul contenuto della bolla. Si assume che la bolla contenga una certa quantità di gas non condensabile e una certa quantità di vapore. Di conseguenza la pressione all'interno della bolla è data dalla somma delle pressioni parziali del gas (p_G) e del vapore (p_V)

$$p_B = p_G + p_V. \quad (2.10)$$

La tensione di vapore p_V dipende dalla temperatura della bolla T_B , la cui differenza con la temperatura del liquido si considera trascurabile. Questa assunzione non può essere fatta in tutte le circostanze. Infatti, in alcuni casi, gli effetti causati dalla differenza $(T_B(t) - T_\infty)$, noti come effetti termici, dominano la dinamica della bolla. Per risolvere l'equazione di Rayleigh-Plesset, considerando gli effetti termici, è necessario determinare una relazione tra $(T_B(t) - T_\infty)$ e $R(t)$, la quale richiede un bilancio di energia per la bolla e la soluzione parecchio difficoltosa di un'equazione di diffusione del calore [13]. Tuttavia, per questo caso studio, gli effetti termici non sono considerati e quindi si assume $p_V(T_B) = p_V(T_\infty)$. Di conseguenza, non vengono presi in considerazione fenomeni di condensazione o evaporazione e cambiamenti chimici nel sistema.

Il gas contenuto nella bolla, invece, si ipotizza segua una legge di tipo politropico

$$p_G = p_{G_0} \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3k}, \quad (2.11)$$

per la quale la pressione parziale a una certa dimensione di riferimento (R_0) risulta p_{G_0} e k , che è l'esponente caratteristico della trasformazione, può assumere qualsiasi valore compreso tra 1 (caso di trasformazione isoterma) e γ , cioè il rapporto tra il calore specifico del gas a pressione costante e il calore specifico del gas a volume costante (caso di trasformazione adiabatica).

Sotto queste condizioni, l'equazione di Rayleigh-Plesset (2.9) diventa

$$R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 = \frac{p_V(T_\infty) - p_\infty(t)}{\rho_L} + \frac{p_{G_0}}{\rho_L} \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3k} - \frac{2S}{\rho_L R} - \frac{4\nu_L}{R} \frac{dR}{dt}. \quad (2.12)$$

Per risolverla si assume che $(dR/dt)_{t=0} = 0$ e che il raggio di riferimento R_0 coincida col raggio di equilibrio R_{eq} , cioè la dimensione della bolla in assenza di una perturbazione di pressione, e quindi la pressione di riferimento p_{G_0} sia pari a

$$p_{G_0} = P_\infty - p_V + \frac{2S}{R_{eq}}, \quad (2.13)$$

dove P_∞ è la pressione ambiente.

Dato l'input iniziale di pressione $p_\infty(t)$, composto da un termine statico (P_∞) e uno oscillante ($p(t)$), e note tutte le altre costanti, l'equazione differenziale (2.12), fortemente non lineare a causa dei termini inerziali, può essere integrata numericamente per ottenere l'evoluzione temporale del raggio della bolla e conseguentemente la pressione sulla sua superficie.

Come si può osservare dall'equazione (2.12), in assenza di effetti termici, la variazione del raggio della bolla dipende da quattro forzanti fisiche: la pressione esterna, la pressione interna della bolla, la tensione superficiale del liquido e la viscosità del liquido.

Questo primo modello, che risulta il più semplice da applicare per la dinamica delle bolle, affronta la complessità del fenomeno assumendo una serie di approssimazioni, come l'assenza di effetti termici e di trasferimento di massa e calore attraverso la superficie della bolla, la costanza del contenuto di gas della bolla e della tensione di vapore del liquido e l'incomprimibilità del liquido.

Fisicamente, durante la fase di collasso della bolla, con lo sviluppo di elevate pressioni e temperature, non è possibile trascurare la comprimibilità del liquido ed è quindi necessario utilizzare dei modelli che ne tengano conto.

Nonostante questi limiti di applicabilità, l'equazione di Rayleigh-Plesset è da preferire, per la semplicità di implementazione, nei casi in cui si considerino delle piccole oscillazioni del raggio della bolla.

2.2 Cavitazione

La dinamica delle bolle rappresenta la base dello studio della cavitazione, che consiste nella formazione, crescita e collasso di bolle in un liquido a seguito di una variazione di pressione.

Per formazione si può intendere sia la creazione di una nuova bolla sia l'espansione di una preesistente cavità a una dimensione tale per cui possano essere osservati effetti macroscopici.

La crescita è caratterizzata da oscillazioni volumetriche della bolla dello stesso ordine di grandezza del proprio raggio di equilibrio.

La fase di collasso, invece, dominata dall'inerzia del liquido, prevede il raggiungimento di valori del raggio di diversi ordini di grandezza inferiori al raggio di equilibrio, a causa degli elevati valori di velocità della superficie della bolla.

A seconda della modalità con cui è generata, esistono 4 tipi di cavitazione:

- cavitazione acustica: è prodotta da variazioni di pressione nel liquido indotte da onde acustiche;
- cavitazione idrodinamica: è prodotta da variazioni di pressione nel liquido dovute alla geometria del sistema;
- cavitazione ottica: è prodotta da bolle generate da laser;
- cavitazione particellare: è prodotta da bolle generate da un qualsiasi tipo di particella elementare (e.g., protone).

Questo fenomeno è presente in natura, generato ad esempio nel tessuto vegetale delle piante vascolari o dalla chela del gambero pistola.

Spesso in campo idraulico ed energetico si cerca di evitare la cavitazione a causa del danneggiamento che può causare alle componenti meccaniche del sistema, come turbine e pompe.

Tuttavia, numerose applicazioni industriali impiegano la cavitazione, in particolare la cavitazione acustica. Se ne fa un uso pratico ad esempio in sonochimica, nel lavaggio di superfici con ultrasuoni, in medicina con l'utilizzo di bolle come mezzi di contrasto per la diagnostica a ultrasuoni, nei processi alimentari, nel trattamento biologico delle acque reflue e nella disinfezione delle acque.

2.2.1 Cavitazione acustica

In un liquido la pressione ambiente (P_∞) può essere fatta variare attraverso delle onde sonore.

Un'onda sonora è una perturbazione che si propaga longitudinalmente in un mezzo, in questo caso il liquido, e trasporta energia tramite la variazione di una grandezza fisica, in questo caso la pressione. Tale variazione è costituita da una serie di rarefazioni e condensazioni del liquido.

In particolare, durante la fase di rarefazione la pressione nel mezzo diminuisce e la bolla si espande, mentre nella fase di condensazione la bolla diminuisce di dimensione perchè soggetta a una maggior pressione da parte del liquido (Figura 2.5).

Nella cavitazione acustica si ipotizza generalmente un'onda sonora sinusoidale, descrivibile perciò da un'ampiezza (A), la massima variazione di pressione rispetto al valore ambiente, e un periodo ($T = 1/f$), il tempo necessario per il completamento di una fase di rarefazione e una fase di compressione. Questa fluttuazione di pressione così ottenuta è applicata al valore ambiente (P_∞), in modo tale che la forzante agente sulla bolla risulti

$$p_\infty(t) = P_\infty + A \sin(2\pi ft).$$

A causa del carattere non lineare delle equazioni che governano la dinamica delle bolle, nonostante la periodicità dell'oscillazione di pressione esterna riscontrabile nella cavitazione acustica, nella risposta di una bolla a questo tipo di forzante possono manifestarsi effetti non lineari, soprattutto all'aumentare dell'ampiezza dell'onda.

Un primo effetto non lineare riguarda la crescita della bolla.

Una bolla, che in assenza di una perturbazione di pressione si dissolverebbe nel liquido, può aumentare la propria massa a seguito di oscillazioni di volume, col passare di periodi della forzante, a causa del fenomeno noto come *rectified diffusion*. La crescita di una singola bolla tramite *rectified diffusion* è dovuta a un trasferimento non lineare di massa attraverso la superficie della bolla. Ciò è ascrivibile principalmente a due effetti: *area effect* e *shell effect*.

Durante la fase di condensazione la bolla si comprime e i gas contenuti al suo interno diffondono nel liquido, mentre durante la fase di rarefazione la bolla si espande e i gas diffondono dal liquido al suo interno. Poiché nella fase di rarefazione la superficie della bolla disponibile al trasferimento di massa è maggiore, il flusso netto di diffusione dei gas in un ciclo sonoro non è nullo. La bolla, infatti, guadagna gas a ogni periodo e cresce. Questo effetto è noto come *area effect*.

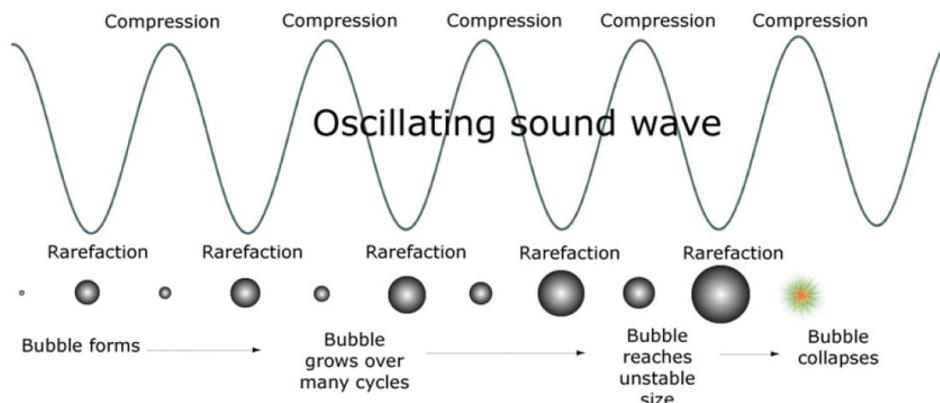


Figura 2.5: Comportamento di una bolla (formazione, crescita e collasso) in risposta a un'oscillazione di pressione esterna sinusoidale; la bolla si espande durante le fasi di rarefazione e si contrae in quelle di compressione [45].

Inoltre, è necessario considerare che il tasso di diffusione di un gas in un liquido è proporzionale al gradiente di concentrazione del gas disciolto. Si consideri un "guscio" sferico di liquido che circonda la bolla. Quando la bolla si espande, il guscio si assottiglia e la concentrazione del gas in esso aumenta; di conseguenza il maggior gradiente di concentrazione del gas tra esterno e interno della bolla incrementa il tasso di trasferimento di massa del gas nella bolla. Quando la bolla si contrae, aumenta lo spessore del guscio e diminuisce la concentrazione del gas nello stesso, determinando un aumento del gradiente di concentrazione. Tuttavia, a causa del maggior spessore del guscio, il gradiente di concentrazione del gas che si raggiunge nella fase di compressione è minore del gradiente della fase di rarefazione, determinando così un flusso netto di gas verso l'interno della bolla. Questo meccanismo viene chiamato *shell effect*.

I due effetti precedentemente descritti, dovuti alla presenza di un campo di pressione oscillante, si sommano nel causare un impari trasferimento di massa attraverso la superficie della bolla e ne determinano la crescita nel tempo.

Affinchè una bolla possa crescere per *rectified diffusion* è necessario che il valore dell'ampiezza dell'oscillazione di pressione sonora agente su di essa sia superiore a un valore soglia. Al di sotto di tale soglia, se non stabilizzata, la bolla si dissolve. Una completa revisione delle prime teorie, relative a questo fenomeno, sviluppate da Eller e Flynn [23] e da Hsieh e Plesset [37], è stata fatta da Crum [20, 19].

In un sistema multibolle esiste una seconda modalità di crescita, la coalescenza, cioè l'unione tra più bolle, la quale può portare alla formazione di una bolla di dimensioni tali da lasciare il sistema per galleggiamento (*degassing*) [45]. Questo meccanismo, però, non viene approfondito ulteriormente in questo lavoro perchè si considera la dinamica di una singola bolla sferica.

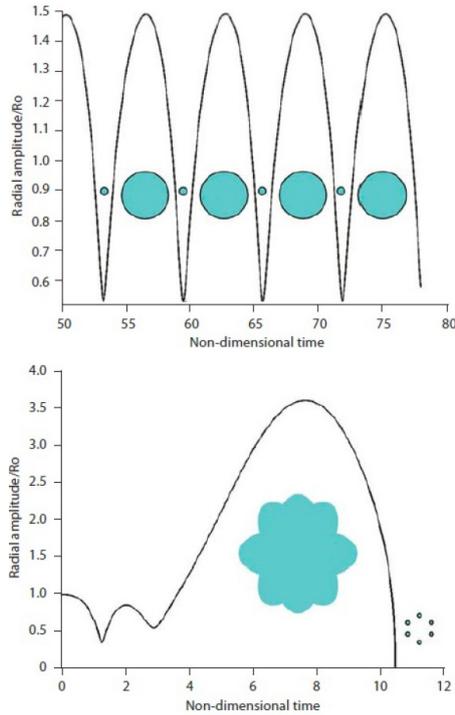


Figura 2.6: Illustrazione semplificata dei due regimi di cavitazione: cavitazione stabile (sopra) e cavitazione instabile (sotto) [24]. La cavitazione stabile prevede che la bolla oscilli attorno alla propria dimensione di equilibrio nel tempo. La cavitazione instabile, invece, è composta da una fase di immediata ed elevata crescita e una di violento collasso ed avviene in tempi più brevi.

Al raggiungimento della dimensione di equilibrio della bolla, una bolla può andare incontro a due destini, a seconda delle caratteristiche dell'onda sonora incidente.

Il fenomeno di cavitazione a cui prende parte può essere infatti definito cavitazione stabile o cavitazione instabile.

La cavitazione stabile prevede che la bolla oscilli attorno alla propria dimensione di equilibrio per diversi cicli sonori, mentre la cavitazione instabile è composta da una fase di immediata crescita e una di violento collasso e avviene in un unico periodo di oscillazione della forzante. La cavitazione instabile si differenzia dalla stabile perchè il raggio della bolla cambia anche di diversi ordini di grandezza in ogni ciclo.

Nella Figura 2.6 è riportata una rappresentazione semplificata delle due tipologie di cavitazione. Si può osservare come, in caso di instabilità (grafico inferiore), il fenomeno della cavitazione preveda il raggiungimento di valori del raggio della bolla più elevati e si esaurisca in tempi più brevi rispetto alla cavitazione stabile (grafico superiore).

I due comportamenti sono separati da una soglia di pressione dipendente dalla dimensione di riferimento della bolla e dall'ampiezza e frequenza della pressione acustica, in particolare dalla relazione tra la frequenza di oscillazione naturale della bolla e la frequenza dell'oscillazione sinusoidale di pressione. La frequenza di oscillazione naturale (f_n) di una bolla dipende dal suo raggio di equilibrio, dal suo contenuto di gas e dalle caratteristiche del liquido in cui si trova ed è pari a

$$f_n = \frac{1}{2\pi R_{eq}} \sqrt{\frac{1}{\rho_L} \left[3kp_{G_0} - \frac{2S}{R_{eq}} \right]}. \quad (2.14)$$

Questa frequenza caratterizza le oscillazioni libere di una bolla, cioè quelle che avvengono quando la bolla oscilla, se spostata dalla propria posizione di equilibrio, in assenza di una fluttuazione di pressione esterna.

Nel caso in cui la frequenza della forzante sia molto più piccola di quella naturale la dinamica della bolla è governata solo dagli effetti della tensione superficiale del liquido; di conseguenza, sono valide le ipotesi di Blake e la soglia di cavitazione instabile può essere approssimata dalla soglia di Blake (*Blake threshold*) [11]. Quando invece la frequenza di oscillazione della pressione è molto più grande della frequenza naturale, è necessario tener conto anche degli effetti inerziali e viscosi per la determinazione della soglia di cavitazione instabile.

Al di sopra di questa soglia si manifestano le condizioni critiche di oscillazione. I dettagli su questo fenomeno non lineare si possono ritrovare nei lavori di Flynn [25] e Apfel [8, 7], basati sugli studi pionieristici di Neppiras e Noltingk [53, 52].

Nella Figura 2.7 è riportata una schematizzazione dei diversi processi a cui una bolla può andare incontro dalla propria formazione al collasso.

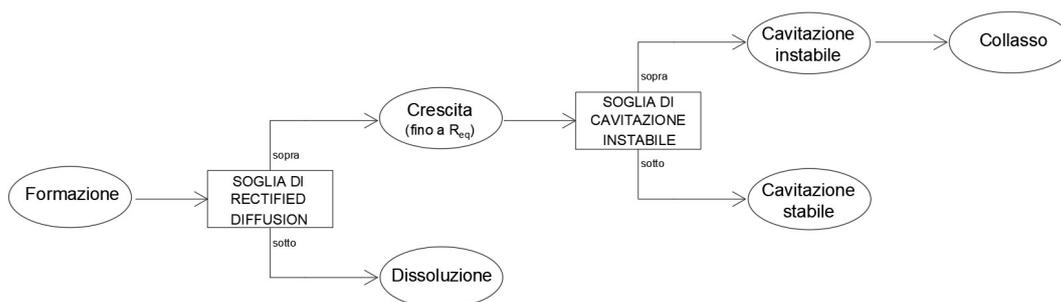


Figura 2.7: Una singola bolla, se sottoposta a una forzante di pressione maggiore della soglia di *rectified diffusion*, può crescere e, se le condizioni del sistema sono tali da superare anche la soglia di cavitazione instabile, collassa. Al di sotto della soglia di *rectified diffusion*, invece, si dissolve e, al di sotto della soglia di cavitazione instabile, oscilla stabilmente attorno alla propria dimensione di equilibrio.

Il collasso delle bolle può causare a volte la frammentazione della bolla implodendo in tante bolle più piccole. Inoltre, sotto determinate condizioni, durante questa fase, può avvenire un'emissione di luce (sonoluminescenza). Le piccole bolle, generate dal collasso, possono a loro volta crescere per *rectified diffusion* ed eventualmente implodere.

Nonostante attraverso le soglie di pressione precedentemente presentate si semplifichi la comprensione del percorso di una bolla in un campo acustico, nella realtà la previsione del comportamento di una bolla, a partire dalla dimensione di equilibrio e dall'ampiezza e frequenza della forzante, è di difficile realizzazione.

Inoltre, durante il fenomeno di cavitazione stabile, si manifestano ulteriori effetti non lineari riguardanti la modalità di oscillazione della bolla.

2.2.1.1 Cavitazione acustica stabile

Nel fenomeno noto come cavitazione acustica stabile una bolla, sottoposta a un'oscillazione di pressione periodica, oscilla attorno alla propria dimensione di equilibrio, tipicamente in maniera non simmetrica con espansioni più pronunciate delle compressioni.

Le oscillazioni del raggio della bolla, però, nonostante la periodicità della forzante, possono essere non solo non simmetriche, ma anche caotiche e imprevedibili. Questa caratteristica, tipica di molti oscillatori non lineari, è chiamata caos deterministico.

La modalità con cui un sistema dinamico diventa caotico si definisce *route to chaos* e avviene tramite la variazione di un parametro del sistema. Una tipologia di *route to chaos* molto comune tra i sistemi dinamici, compreso quello in questione (oscillazione forzata di bolle in un liquido), è la *period-doubling*, cioè una serie di raddoppiamenti del periodo (o dimezzamenti della frequenza) dell'oscillazione del raggio.

Il parametro di controllo, che opportunamente modificato permette il raggiungimento di oscillazioni caotiche del raggio della bolla, può essere o l'ampiezza o la frequenza della forzante di pressione.

In Figura 2.8 è riportato un esempio di *period-doubling route to chaos* [48].

In questo caso il parametro di controllo è l'ampiezza della forzante di pressione, che viene fatta aumentare nei grafici dall'alto verso il basso, mentre la frequenza è mantenuta costante.

In questo esempio è stata considerata una bolla di gas di $2 \mu\text{m}$ (raggio di equilibrio), forzata da un'oscillazione di pressione con frequenza f di 2 MHz e periodo $T = 1/f$. L'ampiezza A dell'oscillazione è stata assunta pari a 100, 250, 265 e 320 kPa. Il modello impiegato nelle simulazioni è quello di Keller, noto anche come Keller-Miksis, un'evoluzione del modello base di Rayleigh-Plesset che verrà descritto dettagliatamente nel seguito di questo lavoro.

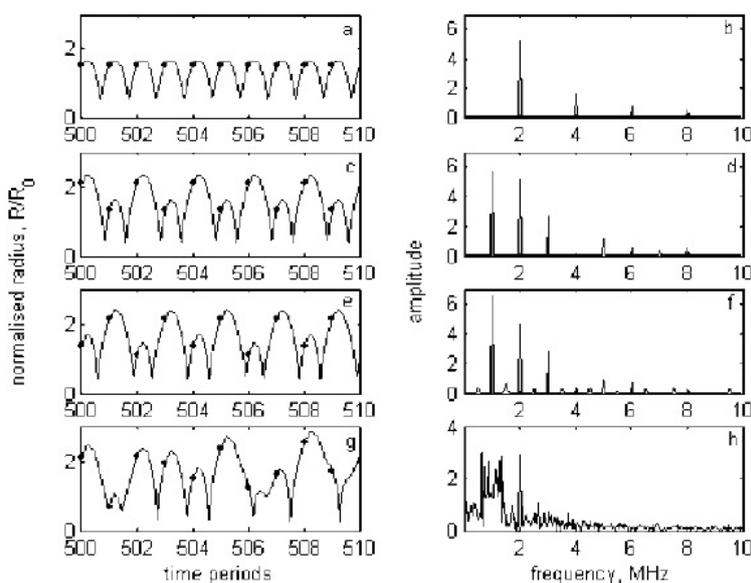


Figura 2.8: Sulla colonna di sinistra è riportata la risposta normalizzata del raggio di una bolla di gas di $2 \mu\text{m}$ forzata da un'onda di pressione sinusoidale di frequenza f pari a 2 MHz nell'intervallo di tempo tra $500T$ e $510T$ con $T = 1/f$. I pallini neri sono riportati alla fine di ogni ciclo sonoro. Dall'alto verso il basso l'ampiezza dell'oscillazione di pressione aumenta e vale 100, 250, 265 e 320 kPa. Sulla colonna di destra è riportata la stessa risposta, ma nel dominio della frequenza [48].

Per ciascun valore di ampiezza dell'oscillazione considerato, la prima colonna della Figura 2.8 riporta l'andamento nel tempo del raggio normalizzato (rispetto al valore di equilibrio) e i valori del raggio alla fine di ogni periodo della forzante (contrassegnati da un pallino nero), mentre la seconda lo spettro di frequenza, che descrive il rispettivo segnale temporale nel dominio della frequenza.

Poiché la risposta di un oscillatore forzato prevede la presenza di una fase transitoria prima del raggiungimento di un'oscillazione stazionaria, le considerazioni sulla tipologia di oscillazione del raggio della bolla devono essere fatte solo dopo un certo intervallo di tempo in modo tale da assicurare la fine del transitorio.

In questo esempio sono riportate le oscillazioni tra $500T$ e $510T$.

Nei due grafici sulla prima riga si può osservare che il valore del raggio normalizzato alla fine di ogni periodo T è sempre lo stesso e di conseguenza nello spettro di frequenza sono presenti solo multipli interi della frequenza fondamentale (armoniche). Nella seconda riga, aumentando il valore dell'ampiezza, la curva di risposta del raggio si ripete ogni 2 periodi e contiene delle frequenze equidistanti dalle armoniche (subarmoniche); nella terza riga, invece, si ripete ogni 4 periodi, mentre nell'ultima non si ripete più a causa della comparsa di oscillazioni caotiche. Anche l'ultimo

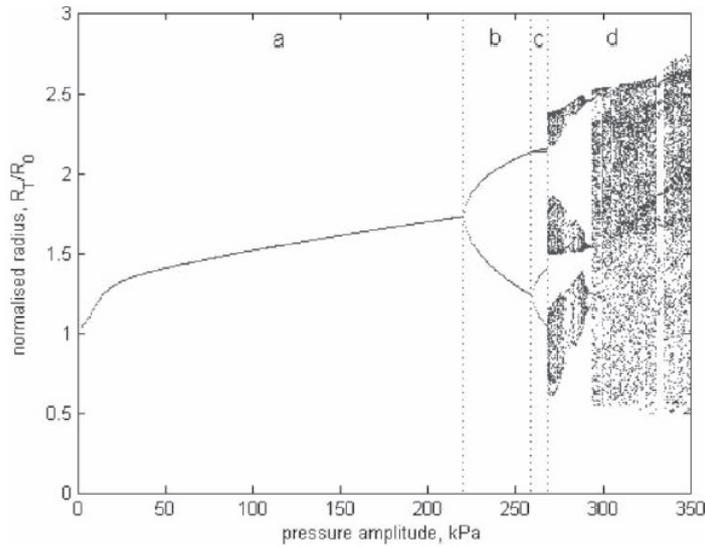


Figura 2.9: Diagramma di biforcazione di una bolla di gas di $2 \mu\text{m}$ forzata a 2 MHz. L'ampiezza dell'oscillazione di pressione aumenta lungo l'asse delle ascisse, mentre in ordinata è riportata la risposta del sistema tra $501T$ e $600T$ in termini di valore assunto dal raggio a ogni periodo della forzante considerato (T), normalizzato rispetto al valore di equilibrio. Sul grafico si individuano quattro tipologie di oscillazione del raggio della bolla (con T_{bolla} , periodo di oscillazione della bolla): (a) $T_{bolla} = T$, (b) $T_{bolla} = 2T$, (c) $T_{bolla} = 4T$ e (d) caotica [48].

spettro mostra, infatti, la perdita della natura periodica delle oscillazioni del raggio con la scomparsa della frequenza fondamentale, delle armoniche e subarmoniche.

Indipendentemente dall'esempio scelto, la stessa tipologia di *route to chaos* può essere dimostrata facendo variare la frequenza della forzante e mantenendo l'ampiezza costante [42].

Le regioni di caos di un sistema dinamico sono meglio visualizzate tramite l'utilizzo di diagrammi di biforcazione. In essi viene riportata la risposta del sistema, e di conseguenza i suoi cambiamenti qualitativi, in funzione della variazione del parametro di controllo.

In Figura 2.9 è riportato il diagramma di biforcazione corrispondente all'esempio precedentemente illustrato.

Prima di tutto è necessario scegliere l'intervallo di tempo rispetto al quale realizzare il diagramma, sempre tenendo conto di escludere il transitorio. In questo caso è stato scelto il periodo di tempo tra $501T$ e $600T$.

Per ogni valore del parametro di controllo, corrispondente a una simulazione e quindi a un andamento del raggio della bolla nel tempo, deve essere riportata la

risposta sul diagramma. La risposta del sistema è stata quantificata con il valore assunto dal raggio della bolla alla fine di ciascun periodo T considerato, normalizzato rispetto al valore di equilibrio.

In Figura 2.9 si possono osservare le quattro tipologie di oscillazione corrispondenti alle 4 righe della Figura 2.8.

Nel caso in cui in una simulazione, e quindi per un valore dell'asse delle ascisse, il periodo di oscillazione del raggio corrisponda al periodo di oscillazione della forzante, sul diagramma di biforcazione si ha un unico punto (caso *a*) perchè il raggio della bolla assume sempre lo stesso valore a ogni periodo T . Nel caso in cui il periodo di oscillazione del raggio sia pari al doppio del periodo di oscillazione della forzante, sul diagramma di biforcazione si hanno due punti (caso *b*) perchè il raggio della bolla assume lo stesso valore ogni $2T$; di conseguenza quando il periodo di oscillazione del raggio è il quadruplo del periodo di oscillazione della forzante, si hanno quattro punti (caso *c*). In ultimo, in presenza di oscillazioni caotiche, poiché il valore del raggio normalizzato alla fine di ogni T non si ripete mai, si avranno sul diagramma tanti punti quanti sono i periodi T dell'intervallo di tempo considerato per la realizzazione del grafico (caso *d*).

Questo tipo di grafico permette di individuare molto chiaramente i punti di biforcazione del sistema, corrispondenti al *period-doubling* dell'oscillazione del raggio, e le regioni caotiche.

Inoltre, come si può osservare dalla Figura 2.9, non è detto che una volta raggiunto il comportamento caotico esso si mantenga indefinitamente all'aumentare dell'ampiezza della forzante, è possibile, infatti, ritornare a oscillazioni periodiche (fasce bianche nella regione caotica).

In aggiunta, la bolla, non solo può cambiare la tipologia di oscillazione, ma, se raggiunto il valore di ampiezza opportuno per il proprio sistema, può diventare instabile e collassare; quindi il fenomeno di cavitazione instabile può essere preceduto da un periodo di cavitazione stabile.

Tutto ciò dimostra, come già precedentemente affermato, che questo tipo di sistema dinamico è altamente imprevedibile a causa dei numerosi effetti non lineari che lo caratterizzano.

3 Modelli della dinamica delle bolle

3.1 Descrizione dei principali modelli

Il modello base a cui si ispirano diverse equazioni della dinamica delle bolle è il modello di Rayleigh-Plesset (3.1).

$$R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 = \frac{p_V(T_\infty) - p_\infty(t)}{\rho_L} + \frac{p_{G_0}}{\rho_L} \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3k} - \frac{2S}{\rho_L R} - \frac{4\nu_L}{R} \frac{dR}{dt} \quad (3.1)$$

Questa equazione descrive la variazione nel tempo del raggio di una bolla di gas e vapore posta in un liquido. Tale variazione dipende da quattro forzanti fisiche che agiscono sulla bolla: la pressione esterna, la pressione interna della bolla, la tensione superficiale del liquido e la viscosità del liquido.

Per ottenere la risposta della bolla a queste forzanti, l'equazione deve essere integrata numericamente. Tuttavia, nell'interpretare i risultati dell'integrazione è bene ricordare le assunzioni che sono state fatte per ottenere l'equazione 3.1. Le principali ipotesi del modello di Rayleigh-Plesset sono riportate in Tabella 3.1.

Le approssimazioni su cui è costruito un modello costituiscono lo spunto per lo sviluppo dei successivi, che hanno lo scopo di diminuire le semplificazioni fatte e migliorare la descrizione del fenomeno, avvicinandosi sempre di più alla realtà fisica che rappresentano.

Nel campo della dinamica delle bolle i primi e principali sforzi sono stati concentrati sull'assunzione dell'incompressibilità del liquido (velocità del suono nel liquido infinita), in particolare per la fase di collasso. Infatti, con lo sviluppo di elevate pressioni e temperature, non è più possibile trascurare la comprimibilità del liquido ed è quindi necessario utilizzare dei modelli che ne tengano conto.

3.1.1 Modello di Keller-Miksis

L'equazione di Keller-Miksis fa parte della classe di modelli che tiene conto della comprimibilità del liquido e utilizza l'approssimazione di Herring, cioè considera la velocità del suono nel liquido (c) finita e costante.

Una prima versione dell'equazione è stata proposta da Keller e Kolodner [39] e successivamente è stata generalizzata da Keller e Miksis [40].

Tabella 3.1: Ipotesi del modello di Rayleigh-Plesset

Elemento del sistema/Sistema	Assunzione
Mezzo liquido	Dominio infinito Incomprimibile (densità costante) Temperatura costante
Bolla	Singola Sferica (in ogni istante temporale)
Interno della bolla	Condizioni spazialmente uniformi Contenuto di gas costante Gas sottoposto a trasformazione politropica Tensione di vapore costante
Sistema	Assenza di trasporto di massa attraverso la superficie della bolla Assenza di effetti termici (differenza tra la temperatura della bolla e la temperatura del liquido all'infinito trascurabile)

Essa prevede le stesse ipotesi iniziali dell'equazione di Rayleigh-Plesset, a eccezione del valore di comprimibilità del liquido. Questa equazione viene normalmente presentata tramite la formulazione ottenuta da Prosperetti [57], seguendo la procedura di Keller e Miksis,

$$\left(1 - \frac{\dot{R}}{c}\right) R \ddot{R} + \left(1 - \frac{\dot{R}}{3c}\right) \frac{3}{2} \dot{R}^2 = \left(1 + \frac{\dot{R}}{c}\right) \frac{\tilde{P}_{Pro} + p_V - p_\infty(t + R/c)}{\rho_L} + \frac{R}{\rho_L c} \frac{d\tilde{P}_{Pro}}{dt} \quad (3.2)$$

con

$$\tilde{P}_{Pro} = \left(P_\infty - p_V + \frac{2S}{R_{eq}}\right) \left(\frac{R_{eq}}{R}\right)^{3k} - \frac{2S}{R} - \frac{4\mu_L \dot{R}}{R}.$$

Questa equazione differisce leggermente da quella di Keller-Miksis, in quanto non sono stati riportati alcuni termini dovuti alla viscosità del fluido che vengono normalmente trascurati per i liquidi impiegati nella cavitazione acustica.

Nonostante la presenza del termine \dot{R}/c (numero di Mach), che indica il rapporto tra la velocità della bolla e la velocità del suono nel liquido, l'oscillazione del raggio della bolla, in assenza di effetti termici, dipende dalle stesse quattro forzanti

fisiche individuate nel modello di Rayleigh-Plesset (pressione esterna, pressione interna, tensione superficiale e viscosità). Infatti, nel caso in cui la velocità del suono tenda a infinito (fluido incomprimibile), l'equazione di Keller-Miksis coincide con quella di Rayleigh-Plesset. In questa forma il modello di Keller-Miksis è di difficile integrazione perchè la pressione esterna presenta un ritardo nel tempo: $p_\infty(t + R/c)$.

È possibile però utilizzare un'altra formulazione [43], che risulta equivalente a quella di Prosperetti fino a termini di ordine $O(c^{-2})$, che non presenta il ritardo nel tempo ed è perciò più facile da integrare

$$\left(1 - \frac{\dot{R}}{c}\right) R \ddot{R} + \left(1 - \frac{\dot{R}}{3c}\right) \frac{3}{2} \dot{R}^2 = \left(1 + \frac{\dot{R}}{c}\right) \frac{\tilde{P}_{mod}}{\rho_L} + \frac{R}{\rho_L c} \frac{d\tilde{P}_{mod}}{dt} \quad (3.3)$$

con

$$\tilde{P}_{mod} = \left(P_\infty - p_V + \frac{2S}{R_{eq}}\right) \left(\frac{R_{eq}}{R}\right)^{3k} + p_V - \frac{2S}{R} - \frac{4\mu_L \dot{R}}{R} - p_\infty(t).$$

Si preferisce l'utilizzo del modello di Keller-Miksis al modello di Rayleigh-Plesset per la fase di collasso della bolla, in cui la velocità della superficie della bolla è comparabile alla velocità del suono nel liquido e di conseguenza è necessario considerare il liquido comprimibile.

3.1.2 Modello di Gilmore

L'equazione di Gilmore fa parte della classe di modelli che tiene conto della comprimibilità del liquido e utilizza l'approssimazione di Kirkwood-Bethe, cioè considera la velocità del suono nel liquido alla superficie della bolla variabile nel tempo e dipendente dal movimento stesso della bolla.

L'utilizzo di questa approssimazione tiene conto della formazione di onde d'urto e permette quindi l'impiego di questo modello in caso di ampie oscillazioni del raggio, tali per cui la velocità della superficie della bolla è comparabile se non addirittura maggiore della velocità del suono nel liquido.

L'equazione di Gilmore [30] risulta

$$\left(1 - \frac{\dot{R}}{C}\right) R \ddot{R} + \left(1 - \frac{\dot{R}}{3C}\right) \frac{3}{2} \dot{R}^2 = \left(1 + \frac{\dot{R}}{C}\right) H + \left(1 - \frac{\dot{R}}{C}\right) \frac{R \dot{H}}{C}, \quad (3.4)$$

dove C è la velocità del suono nel liquido alla superficie della bolla e H è la differenza nell'entalpia del liquido tra la superficie della bolla e l'infinito ed entrambi sono funzione della pressione nel liquido alla superficie della bolla.

In particolare si ha [43]

$$H = \int_{p|_{r \rightarrow \infty}}^{p|_{r=R}} \frac{dp(\rho_L)}{\rho_L}, \quad (3.5)$$

$$p(\rho_L) = K_1 \left(\frac{\rho_L}{\rho_{L0}} \right)^{n_T} - K_2, \quad (3.6)$$

$$p|_{r=R} = \left(P_\infty + \frac{2S}{R_{eq}} \right) \left(\frac{R_{eq}^3 - bR_{eq}^3}{R^3 - bR_{eq}^3} \right)^k - \frac{2S}{R} - \frac{4\mu_L}{R} \dot{R}, \quad (3.7)$$

$$p|_{r \rightarrow \infty} = P_\infty + p(t), \quad (3.8)$$

$$C = \sqrt{c_0^2 + (n_T - 1)H}. \quad (3.9)$$

Questo modello prevede l'utilizzo dell'equazione di stato di Tait (3.6), i cui parametri sono K_1 , K_2 e n_T , per relazionare la pressione alla densità del liquido. Inoltre, poiché viene impiegato per ampie oscillazioni e quindi forti compressioni del contenuto della bolla, è stato assunto che il comportamento del gas interno alla bolla segua la legge di van der Waals (con la relativa costante b) [47], e non una legge di tipo politropico, come per il modello di Rayleigh-Plesset e quello di Keller-Miksis. Le ulteriori variabili che compaiono sono la velocità del suono nel liquido, c_0 , e la densità del liquido, ρ_{L0} , entrambe valutate in condizioni normali, quindi per ampiezze d'oscillazione infinitesime. Nell'equazione (3.7), nel caso in cui sia presente del vapore nella bolla, è possibile inserire la tensione di vapore, p_V .

A causa della complessità del modello e della difficoltà nell'implementazione, l'equazione di Gilmore (3.4) è da preferire al modello di Keller-Miksis solo in particolari casi.

3.2 Confronto tra i modelli presentati

Nella Tabella 3.2 sono riportate in modo schematico le principali differenze dei modelli presentati rispetto all'equazione di Rayleigh-Plesset. Sono indicati anche un paio di modelli più avanzati dal punto di vista delle ipotesi considerate: il modello di Prosperetti [58], che costituisce un'evoluzione del modello di Keller-Miksis, e il modello di Fujikawa-Akamatsu [27], che considera gli effetti termici e diffusivi.

Questi ultimi due modelli hanno un grado di rappresentatività superiore ai primi due. Infatti, tengono in considerazione un maggior numero di fenomeni legati alla dinamica di una bolla (Tabella 3.2). Tuttavia, per lo scopo di questa tesi, i modelli come Keller-Miksis e Gilmore costituiscono il giusto compromesso tra semplicità e rappresentatività. Per questo motivo i modelli di Prosperetti e Fujikawa-Akamatsu non sono descritti in questo lavoro, ma semplicemente citati, allo scopo di mostrare come la complessità di questa dinamica determini la necessità di sviluppo di un gran numero di modelli, simili tra loro, ma allo stesso tempo caratterizzati da un diverso grado di approssimazione della realtà fisica.

Tabella 3.2: Principali modelli della dinamica delle bolle che considerano la comprimibilità del liquido e differenze rispetto al modello di Rayleigh-Plesset

Modello	Modifica rispetto all'equazione RPNNP
Keller-Miksis [40, 57, 43]	Velocità del suono nel liquido costante (approssimazione di Herring)
Gilmore [30, 43, 47]	Velocità del suono nel liquido alla superficie della bolla variabile nel tempo (approssimazione di Kirkwood-Bethe) Introduce la differenza tra l'entalpia del liquido alla superficie della bolla e l'entalpia del liquido all'infinito Equazione di stato di Tait per il liquido Legge di van der Waals per il gas interno alla bolla
Prosperetti [58]	Basato sull'equazione di Keller-Miksis alla quale aggiunge una più accurata espressione della pressione interna alla bolla
Fujikawa-Akamatsu [27]	Considera la comprimibilità del liquido, la condensazione del vapore in condizioni di non equilibrio, la conduzione del calore nella bolla e nel liquido circostante e la discontinuità di temperatura all'interfaccia di fase

Tra il modello di Keller-Miksis e il modello di Gilmore si è preso in considerazione in questo lavoro, oltre al modello base, quello di Keller-Miksis. La scelta è ricaduta su questo a seguito di una ricerca bibliografica.

In Tabella 3.3 sono riportati gli articoli consultati per questo lavoro che hanno permesso questa scelta. Essi trattano il tema della dinamica delle bolle e nel farlo utilizzano un particolare tipo di modello (o più di uno). Si può notare come lo studio delle bolle sia di interesse per diversi tipi di applicazioni, dallo studio della sonoluminescenza all'impiego di ultrasuoni medici per la diagnostica per immagini, come precedentemente menzionato.

Focalizzando l'attenzione sugli articoli che seguono lo stesso approccio di que-

Tabella 3.3: Articoli relativi alla dinamica delle bolle consultati per la scelta del modello da impiegare nelle simulazioni di questa tesi. L'asterisco indica che l'articolo segue lo stesso approccio di questo lavoro.

Rif.	Modello/i	Argomento
[1]	Rayleigh-Plesset	Controllo del moto di una bolla con onda ultrasuonica
[3]	Herring-Flynn-Gilmore	Oscillazioni radiali e moto traslatorio di una bolla
[2]	Keller-Miksis	Sonoluminescenza
[5]*	Keller-Kolodner (Keller-Miksis)	Oscillazioni radiali di una bolla di gas in un liquido altamente viscoso
[6]	Rayleigh-Plesset (modificato)	Influenza di un campo magnetico su una bolla in un mezzo viscoelastico
[10]*	Keller-Miksis	Diagrammi di biforcazione di una singola bolla sferica
[15]	Rayleigh-Plesset (modificato)	Agenti di contrasto ad ultrasuoni (UCAs)
[16]	Gilmore-Akulichev	UCAs
[18]	Keller-Miksis	Dinamica di un cluster di microbolle
[21]*	Keller-Miksis	Dinamica di una singola bolla sferica
[28]	Keller-Miksis (2 tipologie); Flynn	Sonoluminescenza
[32]	Keller-Miksis	Oscillazioni radiali di una bolla forzata da una fluttuazione di pressione con doppia frequenza
[33]	Keller-Miksis	Dinamica di una bolla di vapore
[34]*	Keller-Miksis	Dinamica di una bolla di gas in glicerina
[61]*	Rayleigh-Plesset (con equazione di van der Waals)	Oscillazioni stabili e caotiche di una bolla di aria in acqua
[48]*	Keller-Miksis	Oscillazioni stabili e caotiche di una bolla di gas (UCAs)
[36]	Gilmore	Emissione di suono da bolle in acqua
[41]	Keller-Miksis (con equazione di van der Waals)	Stabilità di una bolla in un campo sonoro
[51]	Gilmore	Determinazione dell'intensità di cavitazione tramite l'osservazione dello spettro di emissione acustica
[64]*	Keller-Miksis	Diagrammi di biforcazione di bolla di gas forzata periodicamente
[65]	Keller-Miksis	Dinamica di una bolla sferica di gas in acqua forzata acusticamente
[35]	Rayleigh-Plesset	Sonoluminescenza
[69]	Keller-Miksis	Oscillazioni caotiche di una bolla di gas forzata da una fluttuazione di pressione con doppia frequenza

sta tesi, ma non necessariamente con lo stesso fine (indicati in Tabella 3.3 con un asterisco), si è osservata una propensione verso l'utilizzo del modello di Keller-Miksis.

3.3 Forma adimensionale delle equazioni scelte

3.3.1 Modello adimensionale di Rayleigh-Plesset

Il modello di Rayleigh-Plesset permette di studiare l'influenza di una fluttuazione di pressione esterna sulla dinamica di una singola bolla sferica posta in un liquido considerato incomprimibile (velocità del suono nel liquido infinita) (3.10).

$$R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 = \frac{p_V(T_\infty) - p_\infty(t)}{\rho_L} + \frac{p_{G_0}}{\rho_L} \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3k} - \frac{2S}{\rho_L R} - \frac{4\nu_L}{R} \frac{dR}{dt}. \quad (3.10)$$

Come si può osservare dall'equazione (3.10), in assenza di effetti termici, la variazione del raggio della bolla nel tempo dipende da quattro forzanti fisiche: la pressione esterna, la pressione interna della bolla, la tensione superficiale del liquido e la viscosità del liquido.

Le grandezze fisiche che descrivono questa dinamica sono il raggio della bolla e il tempo. Esprimendo ciascuna di queste grandezze in funzione della propria scala caratteristica (rispettivamente a e τ), è possibile ottenere l'equazione di Rayleigh-Plesset in forma adimensionale [26]

$$\bar{R} \bar{\bar{R}} + \frac{3}{2} \bar{\bar{R}}^2 = -Th \frac{p_\infty(\bar{t}) - p_V}{P_\infty - p_V} + \frac{\bar{P}_0}{\bar{R}^{3k}} - \frac{We}{\bar{R}} - \frac{1}{Re} \frac{\bar{R}}{\bar{R}}, \quad (3.11)$$

dove i punti sopra le lettere indicano la derivazione della grandezza rispetto al tempo (in questo caso tempo adimensionale).

In questa equazione sono presenti variabili e numeri non dimensionali. Le variabili non dimensionali valgono:

- $\bar{R} = R/a$;
- $\bar{t} = t/\tau$.

I numeri non dimensionali sono:

- numero di Reynolds: $Re = a^2/(4\nu_L\tau)$;
- numero di Weber: $We = 2S\tau^2/(\rho_L a^3)$;
- numero di pressione Th : $Th = (P_\infty - p_V)\tau^2/(\rho_L a^2)$;
- numero di pressione \bar{P}_0 : $\bar{P}_0 = p_{G_0} \bar{R}_0^{3k} \tau^2/(\rho_L a^2)$.

Il valore assunto dai suddetti numeri permette di valutare l'importanza delle diverse forzanti dell'equazione, già individuate nella forma dimensionale (3.10).

Il numero di Reynolds, che è un indice del grado di turbolenza a cui è soggetto un fluido ed è proporzionale al rapporto tra le forze inerziali e quelle viscosi, descrive il contributo alla dinamica della viscosità del liquido.

Il numero di Weber, invece, che mette in relazione le forze inerziali con la tensione superficiale, fornisce un'informazione sul contributo alla variazione del raggio della bolla da parte della tensione superficiale del liquido.

Il numero di pressione Th è simile al numero di cavitazione di Thoma, utilizzato nei sistemi idraulici per quantificare il fenomeno della cavitazione causato dall'oscillazione di pressione esterna, mentre il numero di pressione \bar{P}_0 valuta la forzante del sistema relativa alla pressione del gas interno alla bolla.

Le scale scelte per i casi simulati in questo lavoro sono:

- $a = R_{eq}$;
- $\tau = 1/f$.

Il termine R_{eq} indica il raggio di equilibrio della bolla considerata, mentre f è il valore della frequenza di oscillazione della forzante esterna di pressione. Si è scelto il raggio di equilibrio come scala delle lunghezze perchè corrisponde alla dimensione attorno alla quale la bolla oscilla se sollecitata da una fluttuazione di pressione, mentre la frequenza di oscillazione della forzante descrive da un punto di vista temporale come la fluttuazione in questione agisca sulla bolla e risulta perciò un buon valore da usare per determinare la scala temporale.

3.3.2 Modello adimensionale di Keller-Miksis

Anche per il modello di Keller-Miksis (3.12), per le simulazioni numeriche, è preferibile utilizzare la forma adimensionale.

$$\left(1 - \frac{\dot{R}}{c}\right) R \ddot{R} + \left(1 - \frac{\dot{R}}{3c}\right) \frac{3}{2} \dot{R}^2 = \left(1 + \frac{\dot{R}}{c}\right) \frac{\tilde{P}_{mod}}{\rho_L} + \frac{R}{\rho_L c} \frac{d\tilde{P}_{mod}}{dt} \quad (3.12)$$

con

$$\tilde{P}_{mod} = \left(P_\infty - p_V + \frac{2S}{R_{eq}}\right) \left(\frac{R_{eq}}{R}\right)^{3k} + p_V - \frac{2S}{R} - \frac{4\mu_L \dot{R}}{R} - p_\infty(t)$$

Le scale scelte sono le stesse impiegate per il modello di Rayleigh-Plesset adimensionale:

- $a = R_{eq}$ (scala spaziale);
- $\tau = 1/f$ (scala temporale).

Il raggio di equilibrio R_{eq} indica la dimensione attorno alla quale la bolla oscilla se sollecitata da una fluttuazione di pressione, mentre f è il valore della frequenza

di oscillazione della forzante esterna di pressione e descrive da un punto di vista temporale come la fluttuazione in questione agisca sulla bolla.

Si individuano così due nuove variabili adimensionali:

- $\bar{R} = R/a$;
- $\bar{t} = t/\tau$.

L'equazione di Keller-Miksis può essere riscritta come un sistema di due equazioni differenziali adimensionali del primo ordine, esprimendo il raggio adimensionale della bolla con $y_1 = \bar{R}$ e la velocità adimensionale della superficie della bolla con $y_2 = \dot{\bar{R}}$, in cui la derivazione della variabile è svolta rispetto al tempo adimensionale \bar{t} [34]. Il sistema risulta:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = \frac{Num}{Den} \end{cases}$$

con

$$Num = \frac{(p)_{r=R} - p_\infty(\bar{t})}{p_{ref} y_1} + \frac{y_2}{\mu_{ref}^A y_1} (p_G(1-3k) - p_\infty(\bar{t}) + p_V) - \frac{d(p_\infty(\bar{t}))}{d\bar{t} \mu_{ref}^A} - \left(1 - \frac{M}{3}\right) \frac{3}{2} \frac{y_2^2}{y_1}, \quad (3.13)$$

$$Den = 1 - M + \frac{4\mu_L}{\mu_{ref} y_1}. \quad (3.14)$$

I termini di riferimento p_{ref} , μ_{ref} e μ_{ref}^A presenti nelle equazioni (3.13) e (3.14) valgono

$$\begin{aligned} p_{ref} &= \rho_L \frac{a^2}{\tau^2}, \\ \mu_{ref} &= c\rho_L a, \\ \mu_{ref}^A &= c\rho_L \frac{a}{\tau} = \frac{\mu_{ref}}{\tau}. \end{aligned}$$

Inoltre, il numero di Mach e le diverse forzanti di pressioni agenti sulla bolla, espressi utilizzando le variabili adimensionali del sistema, valgono

$$\begin{aligned} M &= \frac{y_2 a}{c\tau}, \\ p_G &= \left(\frac{2S}{a} - (p_V - P_\infty)\right) \left(\frac{1}{y_1}\right)^{3k}, \\ (p)_{r=R} &= p_G + p_V - \frac{2S}{ay_1} - \frac{4\mu_L}{\tau} \frac{y_2}{y_1}, \\ p_\infty(\bar{t}) &= P_\infty + p(\bar{t}), \end{aligned}$$

con p_G pari alla pressione del gas all'interno della bolla, $(p)_{r=R}$ corrispondente alla pressione agente sulla superficie della bolla dalla parte del liquido e $p_\infty(\bar{t})$ indicante la forzante di pressione esterna del liquido lontana dalla bolla.

Esprimendo il sistema come un'equazione differenziale di secondo grado, il modello di Keller-Miksis in forma adimensionale risulta perciò

$$\begin{aligned} \bar{\ddot{R}} = & \left(\frac{(p)_{r=R} - p_\infty(\bar{t})}{p_{ref} \bar{R}} + \frac{\bar{\dot{R}}}{\mu_{ref}^A \bar{R}} (p_G(1 - 3k) - p_\infty(\bar{t}) + p_V) - \frac{d(p_\infty(\bar{t}))}{d\bar{t} \mu_{ref}^A} + \right. \\ & \left. - \left(1 - \frac{M}{3} \right) \frac{3}{2} \frac{\bar{\dot{R}}^2}{\bar{R}} \right) \left(1 - M + \frac{4\mu_L}{\mu_{ref} \bar{R}} \right)^{-1}. \quad (3.15) \end{aligned}$$

4 Simulazione numerica

Come precedentemente affermato, le equazioni in forma adimensionale scelte in questa tesi per le simulazioni dell'andamento del raggio della bolla nel tempo sono il modello di Rayleigh-Plesset (4.1)

$$\bar{R}\ddot{\bar{R}} + \frac{3}{2}\dot{\bar{R}}^2 = -Th\frac{p_\infty(\bar{t}) - p_V}{P_\infty - p_V} + \frac{\bar{P}_0}{\bar{R}^{3k}} - \frac{We}{\bar{R}} - \frac{1}{Re}\frac{\dot{\bar{R}}}{\bar{R}} \quad (4.1)$$

e quello di Keller-Miksis (4.2)

$$\begin{aligned} \ddot{\bar{R}} = & \left(\frac{(p)_{r=R} - p_\infty(\bar{t})}{p_{ref}\bar{R}} + \frac{\dot{\bar{R}}}{\mu_{ref}^A\bar{R}}(p_G(1 - 3k) - p_\infty(\bar{t}) + p_V) - \frac{d(p_\infty(\bar{t}))}{d\bar{t}\mu_{ref}^A} + \right. \\ & \left. - \left(1 - \frac{M}{3}\right)\frac{3}{2}\frac{\dot{\bar{R}}^2}{\bar{R}} \right) \left(1 - M + \frac{4\mu_L}{\mu_{ref}\bar{R}}\right)^{-1}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

La definizione dei diversi termini che compongono le equazioni si può ritrovare nel paragrafo 3.3.

L'integrazione numerica delle due equazioni differenziali (4.1, 4.2) è stata svolta in MATLAB, utilizzando il risolutore *ode45*, il quale implementa un metodo di Runge-Kutta per problemi *non stiff* con adattamento del passo di integrazione.

Si è scelto questo risolutore per tutte le simulazioni della tesi, piuttosto che uno adatto ad equazioni *stiff*, come *ode15s*, perchè, svolgendo un'integrazione per ciascuna tipologia di forzante considerata sia con *ode45* sia con *ode15s*, le durate delle simulazioni sono risultate comparabili.

Poiché le equazioni differenziali adimensionali considerate sono di secondo ordine, per risolverle è necessario trasformarle in sistemi di due equazioni di primo ordine nelle variabili adimensionali y_1 e y_2 con $y_1(\bar{t}) = \bar{R}(\bar{t})$ e $y_2(\bar{t}) = \dot{\bar{R}}(\bar{t})$.

Sistema per il modello adimensionale di Rayleigh-Plesset:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = \frac{1}{y_1} \left(-\frac{3}{2}y_2^2 - Th\frac{p_\infty(\bar{t}) - p_V}{P_\infty - p_V} + \frac{\bar{P}_0}{y_1^{3k}} - \frac{We}{y_1} - \frac{1}{Re}\frac{y_2}{y_1} \right) \end{cases}$$

Sistema per il modello adimensionale di Keller-Miksis:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = \left(\frac{(p)_{r=R} - p_\infty(\bar{t})}{p_{ref} y_1} + \frac{y_2}{\mu_{ref}^A y_1} (p_G(1 - 3k) - p_\infty(\bar{t}) + p_V) + \right. \\ \left. - \frac{d(p_\infty(\bar{t}))}{d\bar{t} \mu_{ref}^A} - \left(1 - \frac{M}{3} \right) \frac{3}{2} \frac{y_2^2}{y_1} \right) \left(1 - M + \frac{4\mu_L}{\mu_{ref} y_1} \right)^{-1} \end{cases}$$

Per integrare un'equazione differenziale tramite un risolutore *ode* è necessario indicare, inoltre, le condizioni iniziali ($y_1(\bar{t} = 0) = \bar{R}(\bar{t} = 0)$ e $y_2(\bar{t} = 0) = \dot{\bar{R}}(\bar{t} = 0)$) e l'intervallo temporale di integrazione. Il passo di integrazione all'interno dell'intervallo è scelto dal risolutore e non è costante.

Nelle simulazioni svolte in questa tesi il tempo di simulazione per il quale è stata valutata la risposta del raggio della bolla, viene discretizzato in maniera costante da un valore di tempo Δt scelto opportunamente caso per caso, in modo tale che i risultati di ciascuna simulazione siano indipendenti dallo stesso. Nella risoluzione del sistema differenziale la discretizzazione Δt definisce l'ampiezza di ciascun intervallo di integrazione. Questo significa che, per ottenere la risposta del raggio nel tempo di simulazione totale, è necessario svolgere una serie di integrazioni caratterizzate da intervalli di integrazione successivi gli uni agli altri, ma tutti di ampiezza Δt . I risultati ottenuti al tempo finale di ciascuna integrazione in termini di raggio e velocità della superficie della bolla costituiscono le condizioni iniziali per l'integrazione successiva.

Per verificare la correttezza dell'implementazione dei sistemi in MATLAB, riportata in Appendice A, è stata svolta per ciascuna equazione una simulazione di controllo.

4.1 Verifica di attendibilità dell'implementazione in MATLAB

4.1.1 Modello adimensionale di Rayleigh-Plesset

Per verificare l'affidabilità dell'implementazione del modello di Rayleigh-Plesset in MATLAB si è utilizzato un articolo di S. Popinet e S. Zaleski [55, Fig. 5], nel quale è stata riscontrata un'ottima corrispondenza tra il risultato ottenuto dalla simulazione numerica svolta con l'equazione di Rayleigh-Plesset e la soluzione numerica dell'equazione di Navier-Stokes per lo stesso problema.

Pertanto, è stata realizzata una simulazione utilizzando gli stessi dati di input dell'articolo, in modo da poter confrontare i risultati ottenuti con quelli presentati da Popinet e Zaleski.

I valori delle costanti utilizzati sono riportati in Tabella 4.1.

Tabella 4.1: Costanti per la simulazione di controllo di attendibilità del modello adimensionale di Rayleigh-Plesset implementato nella tesi

T_∞ ($^{\circ}C$)	ρ_L (kg/m^3)	μ_L ($Pa \cdot s$)	S (N/m)	p_V (Pa)	k ($-$)
4	1000	0.001	0.07	813.4	1.4

Poiché nell'articolo viene riportata una densità dell'acqua (ρ_L) pari a 1000 kg/m^3 , la temperatura della stessa è stata assunta pari a $4^{\circ}C$ (T_∞); di conseguenza alla tensione di vapore dell'acqua p_V , utilizzata nella simulazione e non indicata nell'articolo, è stato attribuito il valore corrispondente a una temperatura di $4^{\circ}C$ [22]. Le restanti costanti, il cui valore è stato preso dalla pubblicazione, sono: la viscosità del liquido (μ_L), la tensione superficiale del liquido (S) e l'esponente della legge politropica del gas (aria) interno alla bolla (k , è stato assunto un comportamento adiabatico).

Il caso studio preso in esame dall'articolo considera una bolla con un raggio di equilibrio di $5 \mu\text{m}$ posta in un fluido in quiete. La forzante esterna $p_\infty(t)$ è perciò composta solo dalla pressione statica P_∞ (10^5 Pa), mentre è assente qualunque termine oscillante.

Il raggio della bolla, a inizio simulazione, viene portato a $10 \mu\text{m}$ e se ne osservano le oscillazioni libere, cioè quelle che avvengono quando la bolla oscilla, se spostata dalla propria posizione di equilibrio, in assenza di una fluttuazione di pressione esterna. Le oscillazioni libere avvengono attorno al raggio di equilibrio e hanno una frequenza pari alla frequenza di oscillazione naturale (f_n), che per definizione le caratterizza, e vengono smorzate nel tempo principalmente dalla viscosità del liquido.

Per integrare un'equazione differenziale adimensionale è necessario definire le scale delle grandezze presenti. In questo caso per le lunghezze è stato scelto il raggio di equilibrio della bolla ($5 \mu\text{m}$) e per i tempi l'inverso della frequenza di oscillazione naturale ($1.4 \cdot 10^{-6} \text{ s}$).

Un altro aspetto da considerare è la scelta del tempo totale di simulazione e della sua discretizzazione Δt .

In questo lavoro di tesi la scelta del più opportuno valore di Δt , tale per cui i risultati di ciascuna simulazione siano indipendenti dallo stesso, è stata fatta attraverso il calcolo della differenza percentuale (ϵ_r) tra il valore del primo minimo del raggio ottenuto con la simulazione svolta con un certo Δt e il valore del primo minimo del raggio ottenuto con la stessa simulazione svolta con un Δt più piccolo rispetto al precedente. Questo metodo è stato scelto perchè la fase di raggiungimento del minimo del raggio (ed eventuale collasso della bolla) è quella più difficile da integrare a causa degli elevati valori della velocità della superficie della bolla ed è quindi la zona più indicata per valutare se il valore di discretizzazione temporale scelto sia adeguato o meno alla simulazione.

In questo caso si è scelto un Δt di 10^{-8} s corrispondente a un ϵ_r di 2.13%, valutato

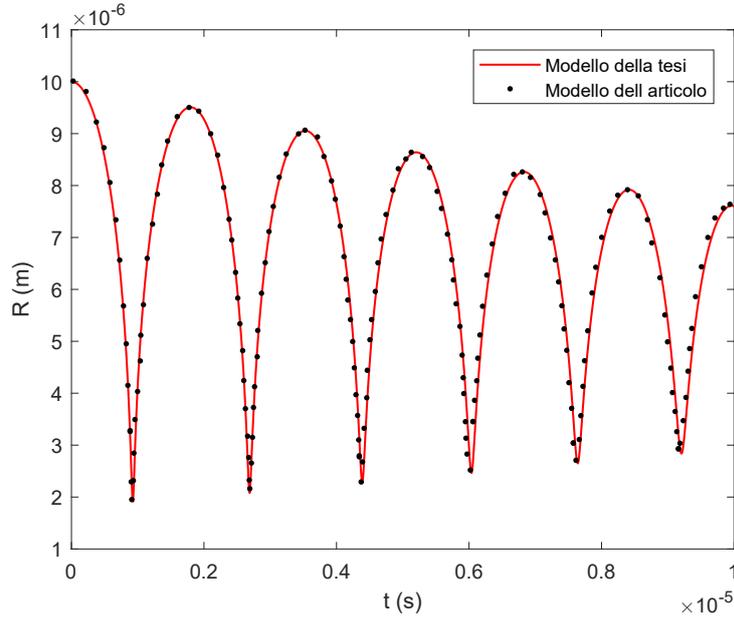


Figura 4.1: Test di controllo di affidabilità del modello adimensionale di Rayleigh-Plesset implementato nella tesi. In Figura sono riportate le oscillazioni libere nel tempo di una bolla di $5 \mu\text{m}$ forzata in maniera costante da una pressione di 10^5 Pa . I risultati ottenuti con la simulazione svolta in questa tesi concordano con quelli presentati da Popinet e Zaleski [55, Fig. 5].

per il primo minimo del raggio tra una discretizzazione a 10^{-8} s e una a 10^{-9} s .

In Tabella 4.2 sono riportate le condizioni iniziali ($R(0)$ e $\dot{R}(0)$), l'ampiezza dell'intervallo di integrazione (Δt) e le scale impiegate in questa simulazione (ls , scala spaziale e ts , scala temporale), necessarie a rendere i precedenti parametri adimensionali e quindi utilizzabili nell'integrazione.

In Figura 4.1 è riportato il confronto tra i risultati ottenuti e quelli presentati in articolo. I punti utilizzati per il confronto sono stati estratti dal grafico dell'articolo tramite un software di digitalizzazione. Data la buona corrispondenza, si può assumere che il modello adimensionale di Rayleigh-Plesset di questa tesi sia stato implementato correttamente.

Tabella 4.2: Parametri del caso studio per la risoluzione dell'equazione adimensionale di Rayleigh-Plesset

$R(0) (\mu\text{m})$	$\dot{R}(0) (\mu\text{m}/\text{s})$	$\Delta t (\text{s})$	$ls (\mu\text{m})$	$ts (\text{s})$
10	0	10^{-8}	5	$1.4 \cdot 10^{-6}$

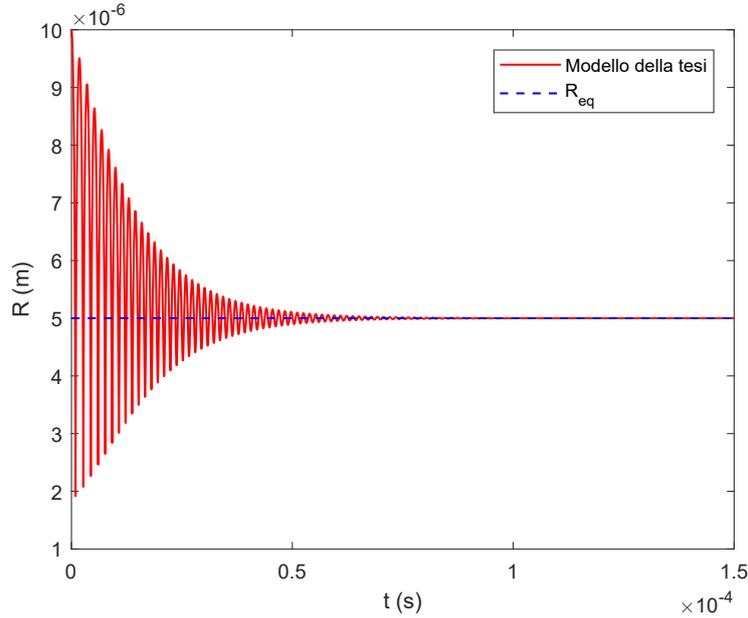


Figura 4.2: Oscillazioni libere smorzate di una bolla di $5 \mu\text{m}$ forzata in maniera costante da una pressione di 10^5 Pa . Nel tempo le oscillazioni del raggio si esauriscono e la bolla si riporta alla propria dimensione di equilibrio.

Trattandosi di oscillazioni libere smorzate, aumentando il tempo di simulazione, si può osservare come la bolla ritorni alla propria dimensione di equilibrio (Figura 4.2).

4.1.2 Modello adimensionale di Keller-Miksis

Per il controllo di attendibilità del modello adimensionale di Keller-Miksis implementato in questa tesi è stato utilizzato un articolo di F. Hegedus e K. Klapcsik perchè in esso la verifica di attendibilità è stata svolta tramite un confronto tra i risultati ottenuti con una simulazione numerica, che impiega questo tipo di equazione, e dei risultati sperimentali [34, Fig. 1].

Per questa tesi si è scelto di svolgere la verifica tramite il confronto con un diagramma di biforcazione presente in articolo [34, Fig. 4(left)], che descrive la risposta del raggio di una bolla al variare dell'ampiezza di oscillazione della forzante di pressione esterna.

Di conseguenza, in questo caso, la forzante esterna $p_\infty(t)$ è composta sia dalla pressione ambiente P_∞ (10^5 Pa), sia da un termine oscillante sinusoidale, descritto da una frequenza f e un'ampiezza A . Inoltre, come richiesto dal modello, è necessario considerare la comprimibilità della fase continua e quindi la velocità del suono nel

Tabella 4.3: Costanti per la simulazione di controllo di attendibilità del modello adimensionale di Keller-Miksis implementato nella tesi

T_∞ ($^{\circ}C$)	ρ_L (kg/m^3)	μ_L ($Pa \cdot s$)	S (N/m)	p_V (Pa)	k ($-$)	c (m/s)
40	1249	0.284	0.062	0.123	1.4	1886.5

liquido, in questo caso glicerina. Il comportamento del gas (aria) all'interno della bolla è considerato adiabatico.

I valori delle costanti utilizzati sono riportati in Tabella 4.3.

La temperatura della glicerina è stata considerata pari a $40^{\circ}C$; le restanti costanti, il cui valore dipende dalla temperatura, ad eccezione dell'esponente k , sono state definite attraverso le tabelle riportate nell'articolo. Per la tensione superficiale, non tabulata per $40^{\circ}C$, il valore è stato determinato con un'interpolazione lineare, come indicato dagli autori, mentre la tensione di vapore è stata calcolata tramite l'equazione di correlazione KDB, i cui coefficienti sono stati ritrovati nell'articolo.

Il raggio di equilibrio, che definisce la scala spaziale, è pari a $100 \mu m$ e coincide col raggio di inizio simulazione; la frequenza di oscillazione della forzante di pressione esterna, che in questo caso è pari alla frequenza di oscillazione naturale delle bolle, determina la scala temporale, che risulta pari a $3.4 \cdot 10^{-5}$ s. L'ampiezza di oscillazione viene fatta variare tra 0.01 bar e 5 bar con incrementi di 0.01 bar.

La discretizzazione temporale scelta è $T/50$ pari a circa $6.8 \cdot 10^{-7}$ s, dove T è il periodo dell'oscillazione (l'inverso della frequenza), con un ϵ_r di 0.01% valutato rispetto a un Δt di $T/100$ in caso di massima ampiezza ($A = 5$ bar). Si è scelto il valore di massima ampiezza dell'oscillazione della forzante perchè è quello che determina le oscillazioni del raggio più ampie e quindi i valori di velocità della superficie della bolla più elevati.

In Tabella 4.4 sono riportate le condizioni iniziali ($R(0)$ e $\dot{R}(0)$), l'ampiezza dell'intervallo di integrazione (Δt) e le scale impiegate in queste simulazioni (l_s , scala spaziale e t_s , scala temporale), necessarie a rendere i precedenti parametri adimensionali e quindi utilizzabili nell'integrazione.

Tabella 4.4: Parametri del caso studio per la risoluzione dell'equazione adimensionale di Keller-Miksis

$R(0)$ (μm)	$\dot{R}(0)$ ($\mu m/s$)	Δt (s)	l_s (μm)	t_s (s)
100	0	$6.8 \cdot 10^{-7}$	100	$3.4 \cdot 10^{-5}$

Per realizzare il diagramma di biforcazione è stata svolta una serie di simulazioni facendo variare l'ampiezza (A) dell'oscillazione sinusoidale di pressione e mantenendo costante la frequenza. Per ogni simulazione, e quindi ogni valore di A , deve essere

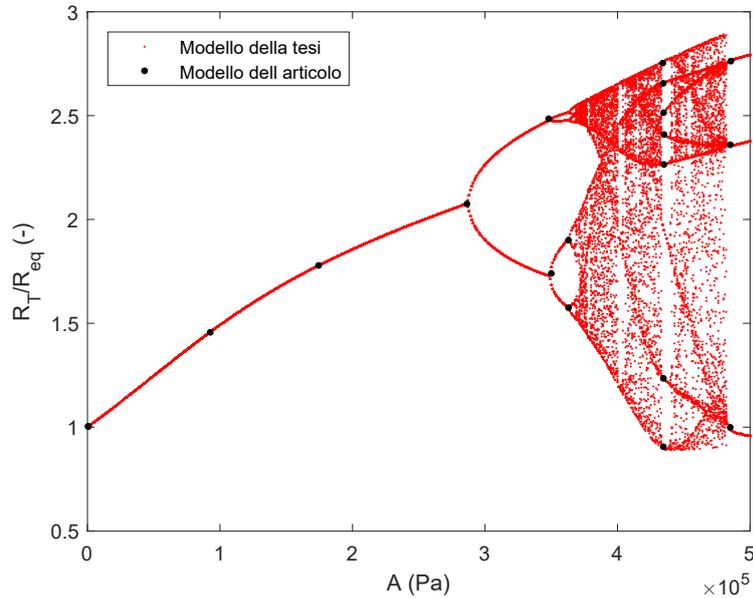


Figura 4.3: Test di controllo di affidabilità del modello adimensionale di Keller-Miksis implementato nella tesi. In Figura è riportato il diagramma di biforcazione. I risultati ottenuti con la simulazione svolta in questa tesi concordano con quelli presentati da Hegedus e Klapcsik [34, Fig. 4(left)].

riportata la risposta sul diagramma, che viene quantificata con il valore assunto dal raggio della bolla alla fine di ciascun periodo (T) considerato, normalizzato rispetto al valore di equilibrio.

In questo caso si è scelto di far durare le simulazioni $300T$ e il diagramma di biforcazione è stato realizzato considerando l'andamento del raggio della bolla nel periodo di tempo tra $201T$ e $300T$.

Il risultato ottenuto con l'equazione implementata nella tesi è riportato in Figura 4.3. Per il confronto tra articolo e tesi sono stati selezionati alcuni punti del diagramma, principalmente punti di biforcazione, i quali sono stati estratti dal grafico dell'articolo tramite un software di digitalizzazione. Data la buona corrispondenza, il modello adimensionale di Keller-Miksis implementato in questo lavoro si può considerare attendibile.

5 Risultati ottenuti con forzante di pressione sinusoidale

In seguito alla verifica di attendibilità dell'implementazione in MATLAB, le equazioni della dinamica delle bolle scelte sono state impiegate per determinare la risposta di una bolla, posta in un liquido, a una fluttuazione temporale di pressione.

Inizialmente si è scelta un'oscillazione di pressione esterna ($p_\infty(t)$) di tipo sinusoidale

$$p_\infty(t) = P_\infty + A \sin(2\pi ft) \quad (5.1)$$

con P_∞ pari alla pressione del liquido lontano dalla bolla.

Come precedentemente osservato, a causa del carattere non lineare delle equazioni che governano la dinamica delle bolle, nonostante la periodicità dell'oscillazione di pressione esterna, la risposta di una bolla a questo tipo di forzante può essere non lineare, soprattutto all'aumentare dell'ampiezza (A) dell'onda (caos deterministico).

In questo capitolo si intende mostrare questa caratteristica del sistema presentando una *route to chaos* di una bolla di $5 \mu\text{m}$, posta in un liquido, in equilibrio con la pressione ambiente (P_∞) pari a 10^5 Pa, realizzata tramite la variazione dell'ampiezza dell'oscillazione di pressione esterna sinusoidale.

5.1 Modello adimensionale di Rayleigh-Plesset

Si consideri una bolla di raggio $5 \mu\text{m}$, contenente aria e vapore, posta in acqua e in equilibrio con la pressione ambiente (P_∞) pari a 10^5 Pa. La temperatura del liquido, considerato incompressibile, è 20°C e il comportamento del gas nella bolla è assunto adiabatico ($k = 1.4$).

In Tabella 5.1 sono riportate le proprietà dell'acqua, costanti nella simulazione, dipendenti dalla temperatura del liquido (T_∞) [22]: la densità (ρ_L), la viscosità dinamica (μ_L), la tensione superficiale (S) e la tensione di vapore (p_V).

Il modello adimensionale utilizzato per queste prime simulazioni è quello di Rayleigh-Plesset (3.11).

La scala delle lunghezze e quella dei tempi scelte per questo caso studio sono il raggio di equilibrio della bolla ($5 \mu\text{m}$) e l'inverso della frequenza di oscillazione naturale della bolla (f_n), cioè il periodo (T_n). In funzione delle proprietà del liquido, del contenuto della bolla e del raggio di equilibrio è possibile determinare la frequenza

Tabella 5.1: Proprietà dell'acqua a $20^\circ C$ utilizzate nel modello adimensionale di Rayleigh-Plesset

T_∞ ($^\circ C$)	ρ_L (kg/m^3)	μ_L ($Pa \cdot s$)	S (N/m)	p_V (Pa)
20	998.2	0.001	0.073	2337.8

di oscillazione naturale, cioè la frequenza con la quale la bolla oscilla se spostata dalla propria posizione di equilibrio e in assenza di una fluttuazione di pressione esterna,

$$f_n = \frac{1}{2\pi R_{eq}} \sqrt{\frac{1}{\rho_L} \left[3kp_{G_0} - \frac{2S}{R_{eq}} \right]} = 7.15 \cdot 10^5 Hz, \quad (5.2)$$

con

$$p_{G_0} = P_\infty - p_V + \frac{2S}{R_{eq}},$$

e di conseguenza il periodo

$$T_n = \frac{1}{f_n} = 1.4 \cdot 10^{-6} s. \quad (5.3)$$

La scala temporale vale perciò $1.4 \cdot 10^{-6}$ s.

In assenza di una forzante esterna di pressione variabile nel tempo, la bolla, se spostata dalla propria posizione di equilibrio, è soggetta a oscillazioni libere, la cui frequenza è pari alla frequenza di oscillazione naturale. Un esempio, riferito alla bolla in questione, è riportato in Figura 5.1.

La simulazione è stata svolta considerando un raggio iniziale della bolla pari a $10 \mu m$. L'assenza di un termine oscillante di pressione fa sì che il raggio della bolla, a seguito dello smorzamento operato principalmente dalla viscosità del liquido, si riporti al valore di equilibrio.

La discretizzazione temporale di questa simulazione, che suddivide in maniera costante il tempo totale di simulazione e definisce l'ampiezza di ciascun intervallo di integrazione, è $T_n/200$ con un ϵ_r minore di 0.01% valutato tra $T_n/200$ e $T_n/300$. Il valore di Δt viene scelto opportunamente caso per caso, in modo tale che i risultati di ciascuna simulazione siano indipendenti dallo stesso.

Si ricorda che questa scelta è operata attraverso il calcolo della differenza percentuale (ϵ_r) tra il valore del primo minimo del raggio ottenuto con la simulazione svolta con un certo Δt e il valore del primo minimo del raggio ottenuto con la stessa simulazione svolta con un Δt più piccolo rispetto al precedente.

In Tabella 5.2 sono riportate le condizioni iniziali, l'ampiezza dell'intervallo di integrazione e le scale caratteristiche di questo problema; tramite questi valori è possibile ricavare gli argomenti di input del risolutore. Come per tutte le altre simulazioni di questo lavoro, il risolutore utilizzato in MATLAB è *ode45*.

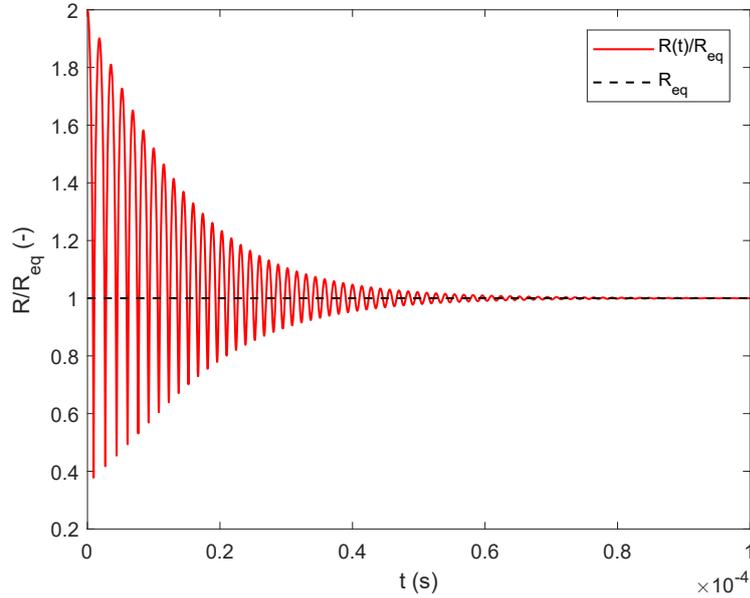


Figura 5.1: Oscillazioni libere smorzate di una bolla di $5 \mu\text{m}$, in equilibrio con la pressione ambiente pari a 10^5 Pa , portata a una dimensione di $10 \mu\text{m}$ (modello di Rayleigh-Plesset).

Si intende ora osservare come le oscillazioni del raggio della bolla, spostata dalla propria posizione di equilibrio, si modifichino in presenza di una fluttuazione temporale di pressione di tipo sinusoidale (5.1).

La frequenza di oscillazione sinusoidale (f) è stata scelta pari alla frequenza di oscillazione naturale della bolla (f_n), mentre l'ampiezza (A) è stata fatta variare tra 30 kPa e 90 kPa .

La discretizzazione temporale, in questo caso, è $T_n/300$ con un ϵ_r di 0.15% , valutato tra $T_n/300$ e $T_n/400$, in caso di massima ampiezza dell'oscillazione sinusoidale ($A = 90 \text{ kPa}$).

In Tabella 5.3 sono riportate le grandezze necessarie a ricavare gli argomenti di input del risolutore (*ode45*) per questa simulazione. Anche in questo caso la scala delle lunghezze coincide con il raggio di equilibrio della bolla ($5 \mu\text{m}$) e quella dei

Tabella 5.2: Condizioni iniziali, ampiezza dell'intervallo di integrazione e scale caratteristiche in caso di oscillazioni libere

$R(0) (\mu\text{m})$	$\dot{R}(0) (\mu\text{m}/\text{s})$	$\Delta t (s)$	$l_s (\mu\text{m})$	$ts (s)$
10	0	$7 \cdot 10^{-9}$	5	$1.4 \cdot 10^{-6}$

Tabella 5.3: Condizioni iniziali, ampiezza dell'intervallo di integrazione e scale caratteristiche in caso di oscillazioni forzate (ampiezza di oscillazione compresa tra 30 kPa e 90 kPa)

$R(0)$ (μm)	$\dot{R}(0)$ ($\mu\text{m}/\text{s}$)	Δt (s)	l_s (μm)	t_s (s)
10	0	$4.67 \cdot 10^{-9}$	5	$1.4 \cdot 10^{-6}$

tempi con il periodo di oscillazione naturale (5.3).

Inoltre, si è deciso di fornire al risolutore, per ogni intervallo di integrazione, un valore di pressione esterna ($p_\infty(\bar{t})$) pari all'interpolazione lineare tra i valori di pressione esterna corrispondenti al primo (t_{in}) e all'ultimo (t_{fin}) tempo dell'intervallo, calcolata utilizzando la discretizzazione e la variabile tempo adimensionali.

$$p_\infty(\bar{t}) = \frac{(p_{fin} - p_{in})\bar{t}}{\Delta t/T_n} \quad (5.4)$$

In Figura 5.2 è riportato l'andamento nel tempo (i primi $100T$, con $T = T_n$) del raggio della bolla in caso di ampiezza dell'oscillazione di pressione pari a 30 kPa. Prima del raggiungimento di un'oscillazione di tipo stazionario, in cui la bolla oscilla nel tempo con ampiezza e frequenza costanti, si può osservare la presenza di una fase transitoria. Le considerazioni sulla tipologia di oscillazione del raggio della bolla devono essere fatte solo dopo un certo intervallo di tempo in modo tale da assicurare la fine del transitorio.

In Figura 5.3, nella colonna di sinistra, sono stati riportati, al variare dell'ampiezza della forzante, gli andamenti nel tempo del raggio normalizzato e i valori del raggio alla fine di ogni periodo della forzante (contrassegnati da un pallino nero), per gli ultimi periodi simulati (da $140T$ a $150T$), in modo da assicurarsi la fine della fase transitoria. Nella colonna di destra, invece, lo spettro di ampiezza nel dominio della frequenza è stato realizzato per l'intera serie temporale del raggio. Il valore del raggio normalizzato alla fine di ogni periodo T è sempre lo stesso; di conseguenza, nello spettro di frequenza sono presenti solo multipli interi della frequenza fondamentale, cioè quella naturale, chiamate frequenze armoniche. Tuttavia, nonostante la frequenza di oscillazione del raggio non vari, le oscillazioni si fanno più ampie all'aumentare dell'ampiezza della forzante.

Lo stesso andamento è stato ottenuto mantenendo come raggio di inizio simulazione il raggio di equilibrio della bolla (Figura 5.4). L'unico cambiamento nei parametri di simulazione rispetto al caso precedente (Tabella 5.3) è nella condizione iniziale del raggio (in questo caso $R(0)=5 \mu\text{m}$).

Per quanto riguarda quindi il confronto tra oscillazioni libere e forzate, in seguito all'introduzione di una fluttuazione temporale nella pressione esterna agente sulla bolla, quest'ultima non ritorna alla dimensione di equilibrio, come nelle oscillazioni

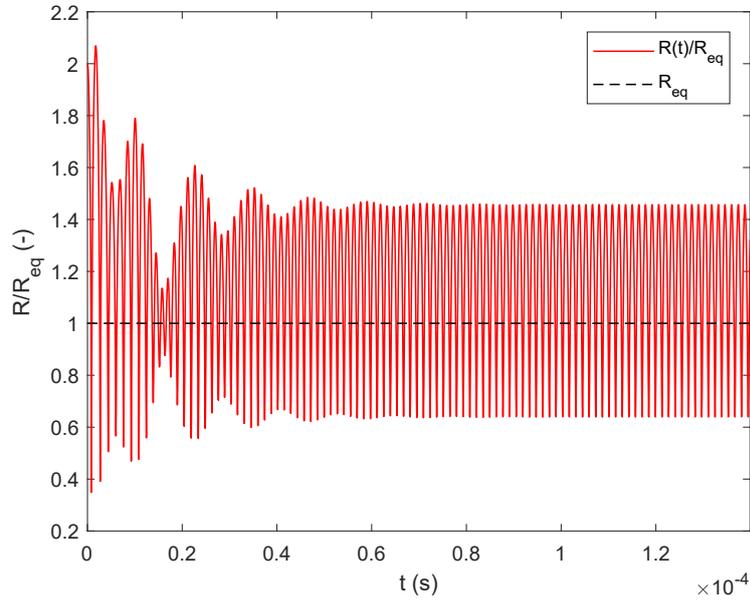


Figura 5.2: Andamento nel tempo del raggio adimensionale di una bolla di $5 \mu\text{m}$, portata a $10 \mu\text{m}$, soggetta a una forzante di pressione esterna sinusoidale ($P_\infty = 10^5 \text{ Pa}$, $A = 30 \text{ kPa}$, $f = f_n = 7.15 \cdot 10^5 \text{ Hz}$) ottenuto con il modello adimensionale di Rayleigh-Plesset.

libere, ma continua ad oscillare attorno alla propria posizione di equilibrio in maniera non simmetrica.

In Figura 5.5 sono riportati i valori dei massimi e dei minimi delle oscillazioni del raggio ottenuti con forzante periodica rapportati ai medesimi valori ottenuti con forzante costante, in caso di raggio a inizio simulazione pari a $10 \mu\text{m}$. Si può notare come la disposizione di questi valori non sia speculare rispetto al raggio di equilibrio della bolla, costituendo così un primo segnale di non linearità, e come l'asimmetria aumenti all'aumentare dell'ampiezza della fluttuazione di pressione. Tuttavia, per ciascun andamento del raggio della bolla simulato, l'ampiezza di oscillazione si mantiene costante nel tempo.

5.2 Modello adimensionale di Keller-Miksis

Si intende ora descrivere la parte di *route to chaos* caratterizzata dalla comparsa di oscillazioni subarmoniche e oscillazioni caotiche, altri effetti non lineari della dinamica delle bolle.

Poiché per fare ciò è necessario aumentare l'ampiezza della fluttuazione sinusoidale di pressione, si è deciso di utilizzare il modello adimensionale di Keller-Miksis (3.15),

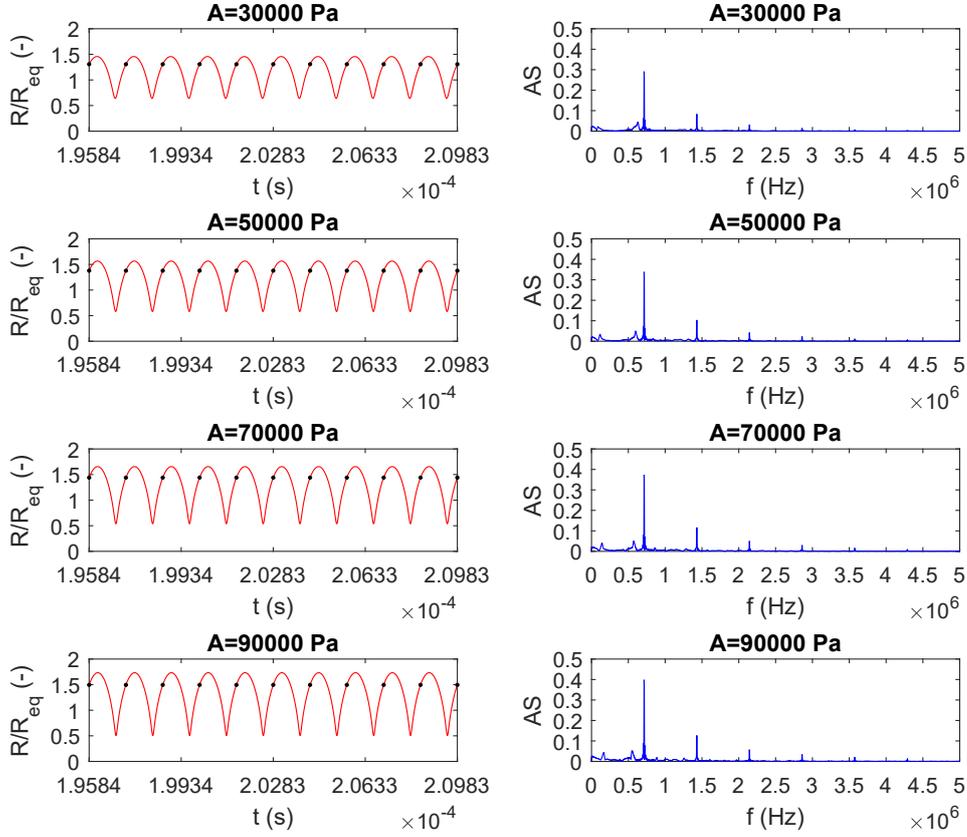


Figura 5.3: Sulla colonna di sinistra è riportata la risposta normalizzata del raggio di una bolla di $5 \mu\text{m}$ forzata da una fluttuazione di pressione sinusoidale di frequenza $f = f_n = 7.15 \cdot 10^5 \text{ Hz}$ nell'intervallo di tempo tra $140T$ e $150T$ con $T = T_n = 1/f_n$ (modello di Rayleigh-Plesset). Il raggio della bolla a inizio simulazione vale $10 \mu\text{m}$. I pallini neri sono riportati alla fine di ogni periodo. Dall'alto verso il basso l'ampiezza dell'oscillazione di pressione aumenta e vale 30, 50, 70 e 90 kPa. Sulla colonna di destra è riportata la stessa risposta, ma nel dominio della frequenza.

in modo da tener conto della comprimibilità del liquido. Infatti, all'aumentare dell'ampiezza delle oscillazioni della forzante, aumenta l'ampiezza delle oscillazioni del raggio.

Si considerano la stessa bolla di $5 \mu\text{m}$ dell'esempio precedente e le stesse condizioni del liquido (Tabella 5.1) e dell'interno della bolla ($k = 1.4$). Tuttavia, nel modello di Keller-Miksis, è necessario considerare anche la velocità del suono nel liquido che,

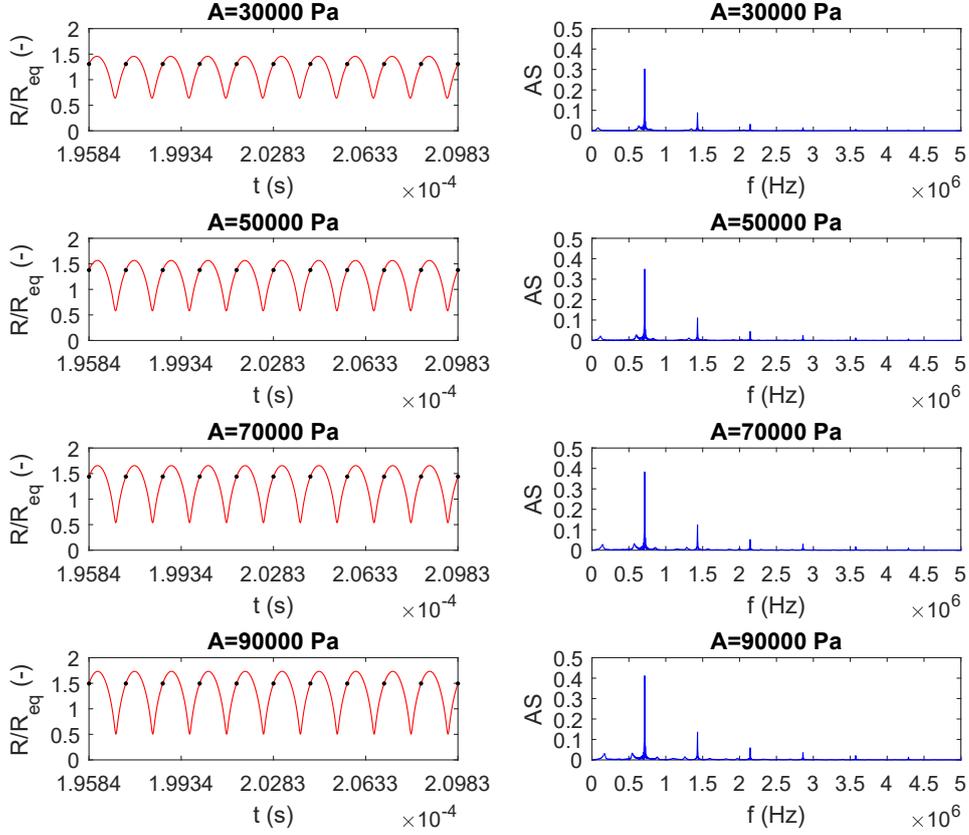


Figura 5.4: Sulla colonna di sinistra è riportata la risposta normalizzata del raggio di una bolla di $5 \mu\text{m}$ forzata da una fluttuazione di pressione sinusoidale con frequenza $f = f_n = 7.15 \cdot 10^5$ Hz nell'intervallo di tempo tra $140T$ e $150T$ con $T = T_n = 1/f_n$ (modello di Rayleigh-Plesset). Il raggio della bolla a inizio simulazione coincide con il raggio di equilibrio ($5 \mu\text{m}$). I pallini neri sono riportati alla fine di ogni periodo. Dall'alto verso il basso l'ampiezza dell'oscillazione di pressione aumenta e vale 30, 50, 70 e 90 kPa. Sulla colonna di destra è riportata la stessa risposta, ma nel dominio della frequenza.

in acqua a 20°C , vale 1483.2 m/s [46].

Anche in questo caso la frequenza dell'oscillazione sinusoidale di pressione è stata scelta pari alla frequenza di oscillazione naturale della bolla (5.2), mentre l'ampiezza è stata fatta variare tra 0 kPa e 300 kPa.

La scala delle lunghezze è assunta pari al raggio di equilibrio della bolla ($5 \mu\text{m}$),

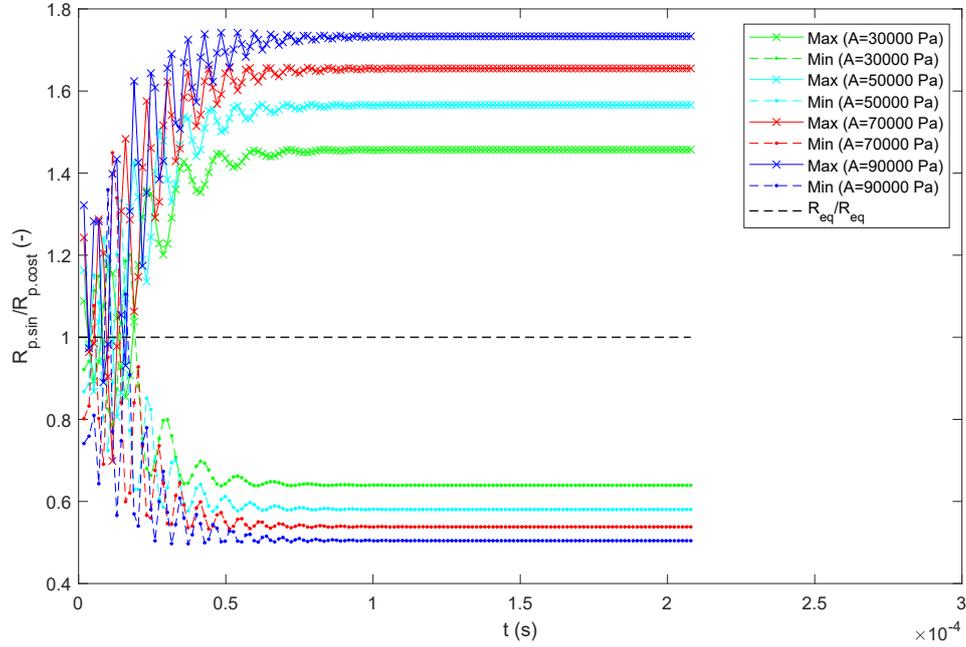


Figura 5.5: Andamento dei massimi e dei minimi delle oscillazioni del raggio di una bolla ottenuti con forzante di pressione sinusoidale rapportati agli stessi valori ottenuti con forzante di pressione costante (modello di Rayleigh-Plesset).

mentre quella dei tempi coincide con l'inverso della frequenza di oscillazione naturale (5.3).

L'ampiezza costante dell'intervallo temporale di integrazione (Δt) è $T_n/200$ con un ϵ_r di 0.05% valutato tra $T_n/200$ e $T_n/300$ in caso di massima ampiezza di oscillazione sinusoidale ($A = 300$ kPa).

In Tabella 5.4 sono riportate le grandezze necessarie a ricavare gli argomenti di input del risolutore (*ode45*) per questa simulazione.

Tabella 5.4: Condizioni iniziali, ampiezza dell'intervallo di integrazione e scale caratteristiche in caso di oscillazioni forzate (ampiezza di oscillazione compresa tra 30 kPa e 90 kPa)

$R(0)$ (μm)	$\dot{R}(0)$ ($\mu m/s$)	Δt (s)	l_s (μm)	t_s (s)
5	0	$7 \cdot 10^{-9}$	5	$1.4 \cdot 10^{-6}$

In Figura 5.6 è riportata la *route to chaos* ricercata. In questo caso il parametro di controllo che è stato fatto variare è l'ampiezza della fluttuazione sinusoidale di

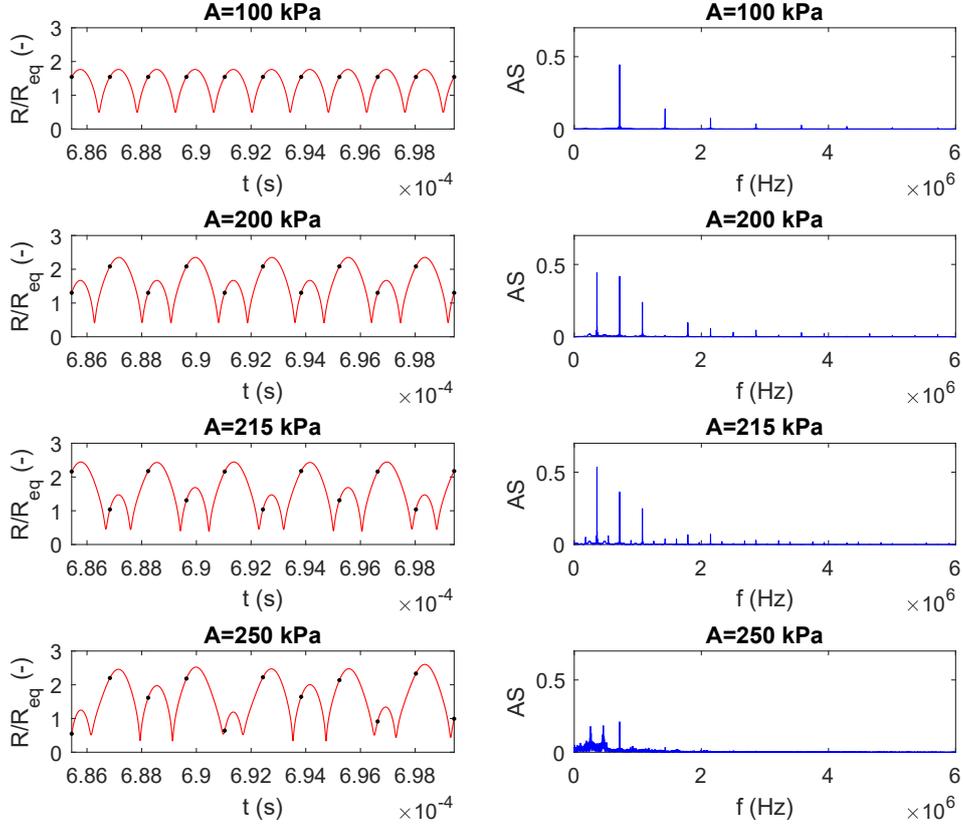


Figura 5.6: *Route to chaos* di una bolla di $5 \mu\text{m}$ forzata da una fluttuazione di pressione sinusoidale con frequenza $f = f_n = 7.15 \cdot 10^5 \text{ Hz}$ (modello di Keller-Miksis). Sulla colonna di sinistra è riportata la risposta normalizzata del raggio nell'intervallo di tempo tra $490T$ e $500T$ con $T = T_n = 1/f_n$. Il raggio della bolla a inizio simulazione coincide con il raggio di equilibrio. I pallini neri sono riportati alla fine di ogni periodo. Dall'alto verso il basso l'ampiezza dell'oscillazione di pressione aumenta e vale 100, 200, 215 e 250 kPa. Sulla colonna di destra è riportata la stessa risposta, ma nel dominio della frequenza.

pressione, mentre la frequenza è stata mantenuta costante. La prima colonna riporta l'andamento nel tempo, tra $490T$ e $500T$ (con $T=T_n$), del raggio normalizzato, rispetto al valore di equilibrio, e i valori del raggio alla fine di ogni periodo della forzante (contrassegnati da un pallino nero); la seconda, invece, i rispettivi spettri di frequenza.

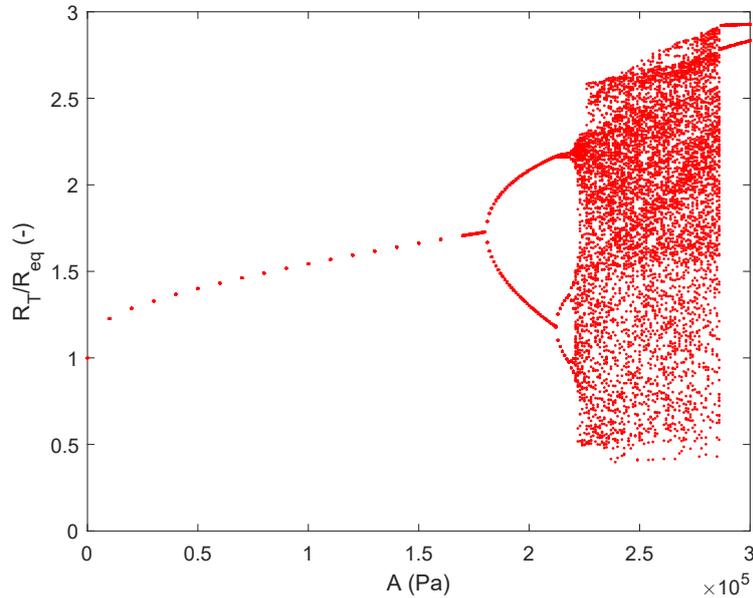


Figura 5.7: Diagramma di biforcazione di una bolla di $5 \mu\text{m}$ forzata con una frequenza pari alla frequenza di oscillazione naturale, realizzato con il modello di Keller-Miksis. L'ampiezza dell'oscillazione di pressione aumenta lungo l'asse delle ascisse, mentre in ordinata è riportata la risposta del sistema tra $400T$ e $500T$ in termini di valore assunto dal raggio a ogni multiplo intero del periodo della forzante considerato ($T = T_n$), normalizzato rispetto al valore di equilibrio.

Sulla prima riga si può osservare che il valore del raggio normalizzato alla fine di ogni periodo T è sempre lo stesso e di conseguenza nello spettro di frequenza sono presenti solo armoniche. Nella seconda riga, aumentando il valore dell'ampiezza, la curva di risposta del raggio si ripete ogni 2 periodi e lo spettro contiene anche le frequenze subarmoniche; nella terza riga, invece, si ripete ogni 4 periodi, mentre nell'ultima non si ripete più a causa della presenza di oscillazioni caotiche, che determinano nel relativo spettro la scomparsa della frequenza fondamentale e delle frequenze armoniche e subarmoniche.

Nonostante valori più elevati di ampiezza della fluttuazione di pressione sinusoidale implicino un aumento nell'ampiezza di oscillazione del raggio della bolla, anche con il raggiungimento delle oscillazioni caotiche, il rapporto tra il valore assunto dal raggio della bolla a ogni multiplo intero del periodo della forzante e il raggio di equilibrio non eccede 3.

Per visualizzare meglio le regioni di caos del caso studio è stato realizzato un diagramma di biforcazione, considerando la risposta del raggio della bolla alla forzante

di pressione nel periodo di tempo compreso tra $400T$ e $500T$.

Per ogni valore del parametro di controllo, cioè dell'ampiezza dell'oscillazione di pressione, corrispondente a una simulazione è stata riportata la risposta sul diagramma, la quale è stata quantificata con il valore assunto dal raggio della bolla alla fine di ciascun periodo T considerato, normalizzato rispetto al valore di equilibrio.

In Figura 5.7 si possono osservare le quattro tipologie di oscillazione osservate precedentemente in Figura 5.6. Nel caso in cui in una simulazione, e quindi per un valore dell'asse delle ascisse, il periodo di oscillazione del raggio corrisponda al periodo di oscillazione della forzante (prima riga, Figura 5.6), sul diagramma di biforcazione si ha un unico punto perchè il raggio della bolla assume sempre lo stesso valore a ogni periodo T . Nel caso in cui il periodo di oscillazione del raggio sia pari al doppio del periodo di oscillazione della forzante (seconda riga, Figura 5.6), sul diagramma di biforcazione si hanno due punti perchè il raggio della bolla assume lo stesso valore ogni $2T$. Quando il periodo di oscillazione del raggio è il quadruplo del periodo di oscillazione della forzante (terza riga, Figura 5.6), si hanno quattro punti. Infine, in presenza di oscillazioni caotiche, poichè il valore del raggio normalizzato alla fine di ogni T non si ripete mai (quarta riga, Figura 5.6), si avranno sul diagramma tanti punti quanti sono i periodi T dell'intervallo di tempo considerato per la realizzazione del grafico.

Questa *route to chaos* si definisce *period-doubling*, come precedentemente indicato, perchè le oscillazioni caotiche della bolla si raggiungono dopo una serie di raddoppiamenti del periodo di oscillazione del raggio rispetto al periodo di oscillazione fisso della forzante.

Inoltre, una volta raggiunto il comportamento caotico, non è detto che esso si mantenga indefinitamente all'aumentare dell'ampiezza della forzante, come si può notare in Figura 5.7 per ampiezze superiori a $2.8 \cdot 10^5$ Pa.

Con queste simulazioni si ottiene quindi un'ulteriore dimostrazione di come questa dinamica sia complicata e difficile da prevedere, anche in un campo di pressione acustico, a causa dei numerosi effetti non lineari che la caratterizzano.

6 Forzante di pressione stocastica

La maggior parte dei sistemi naturali è influenzata da forzanti casuali che causano delle oscillazioni random nello stato del sistema. Nei modelli stocastici questa casualità ambientale (*environmental randomness*) viene comunemente chiamata rumore. Pertanto, la presenza di rumore viene normalmente associata a fluttuazioni disorganizzate del sistema dinamico stocastico che tendono a rendere sempre meno riconoscibile il tessuto deterministico sottostante [60].

In questa tesi il sistema dinamico è rappresentato da una singola bolla sferica posta in un liquido e soggetta a una pressione esterna variabile nel tempo.

Nella prima parte di questo lavoro si è osservata la risposta del sistema bifase considerato a una fluttuazione di pressione di tipo sinusoidale. La bolla presa in esame ha un raggio di equilibrio di $5 \mu\text{m}$. L'oscillazione di pressione esterna ha una frequenza costante pari alla frequenza di oscillazione naturale della bolla, che in questo caso vale $7 \cdot 10^5 \text{ Hz}$, e un'ampiezza variabile tra 0 kPa e 300 kPa.

Nonostante la periodicità della forzante, a causa della complessità di questa dinamica, sono stati osservati degli effetti non lineari nella modalità di oscillazione della bolla, come la presenza di oscillazioni periodiche asimmetriche rispetto al raggio di equilibrio e la comparsa di oscillazioni caotiche.

Tuttavia, come la maggior parte dei sistemi naturali, anche i sistemi bifase bolle-liquido sono spesso soggetti a fluttuazioni randomiche di pressione, caratteristiche del regime turbolento, soprattutto in seguito al collasso di bolle o a un cambiamento nella geometria del sistema come nella cavitazione idrodinamica.

Per questo motivo nella seconda parte della tesi si intende valutare la risposta della bolla, precedentemente oggetto di studio, a una fluttuazione di pressione randomica, che può essere perciò associata alla presenza di turbolenza nel sistema dinamico considerato.

6.1 Rumore

Il rumore è un segnale di origine aleatoria generato da un processo stocastico.

Un processo stocastico è una modalità di rappresentazione di un sistema dinamico che evolve nel tempo in maniera probabilistica. Il singolo risultato di un processo stocastico si chiama realizzazione.

Il rumore viene perciò descritto in termini probabilistici, cioè in termini di distribuzione di probabilità, media, varianza e funzione di autocorrelazione.

Una distribuzione di probabilità è un modello matematico che lega i valori di una variabile (x) alle probabilità che tali valori possano essere osservati ed è espressa formalmente dalla funzione di densità di probabilità ($f(x)$).

La media è un indice di posizione che consente di valutare l'ordine di grandezza della variabile studiata, individuando attorno a quale valore si accentra la distribuzione di probabilità.

La varianza, invece, è un indice di dispersione che descrive quanto i valori assunti dalla variabile si discostino dalla media ed è pari al quadrato della deviazione standard.

La funzione di autocorrelazione permette di valutare la correlazione del segnale con se stesso nel tempo ed è lo strumento ideale per descrivere i campi di moto turbolenti.

La turbolenza, infatti, tramite la cascata di energia, trasferisce l'energia cinetica del moto medio ai vortici più piccoli (scala di Kolmogorov) e la dissipa sotto forma di calore a causa della viscosità del liquido. Tuttavia, l'energia viene sottratta al moto medio a una scala maggiore (scala integrale) che risente delle condizioni al contorno del sistema. Di conseguenza, la scala con cui la turbolenza interagisce con il sistema è la scala integrale, la quale viene determinata tramite la funzione di autocorrelazione del rumore. Infatti, l'area sottesa dall'autocorrelogramma, che è la rappresentazione grafica dell'autocorrelazione del segnale, corrisponde alla scala integrale ricercata.

L'autocorrelogramma fornisce informazioni sulla memoria temporale del segnale. Tanto più decresce lentamente, tanto più è facile fare previsioni riguardo al segnale; tanto più decresce velocemente, tanto più il segnale è complicato.

I rumori si suddividono in base all'andamento del proprio spettro di frequenza, che descrive il segnale (funzione del tempo) nel dominio della frequenza.

Il rumore bianco ha uno spettro caratterizzato da un'ampiezza costante. Questo segnale non è fisicamente realistico perchè nessun sistema naturale è in grado di generare uno spettro uniforme per tutte le frequenze. Inoltre, non ha memoria temporale ed è quindi composto da valori istantanei privi di correlazione.

Il rumore colorato, invece, è una funzione correlata e derivabile e, a seconda della tipologia di spettro di frequenza, viene associato a un particolare colore, ad esempio viola, blu, rosa o rosso. Questo tipo di segnale viene descritto tramite la varianza e il tempo di correlazione. Il tempo di correlazione altro non è che la scala temporale del rumore colorato e ne descrive perciò la scala integrale.

In Figura 6.1 sono riportati gli spettri di frequenza delle principali tipologie di rumore.

Nel caso studio della tesi la forzante stocastica di pressione è modellata come un rumore colorato Gaussiano. Il termine "Gaussiano" indica che il segnale ha come funzione di densità di probabilità una distribuzione normale o di Gauss.

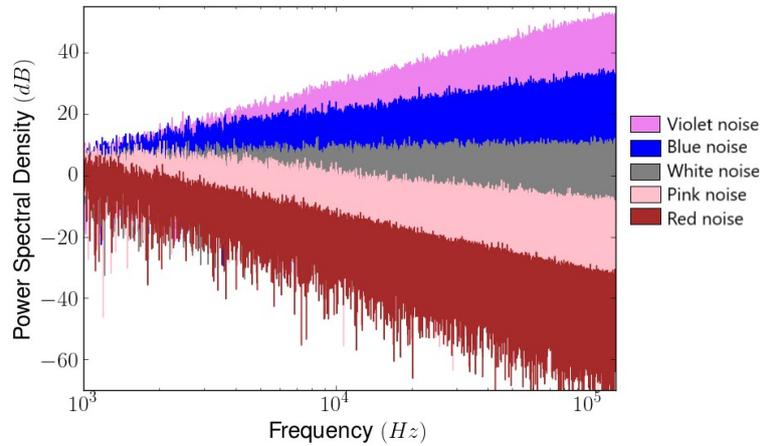


Figura 6.1: Spettri di frequenza delle principali tipologie di rumore (viola, blu, bianco, rosa e rosso). In ordinata è riportata la densità spettrale di potenza arbitrariamente normalizzata in modo tale che gli spettri assumano approssimativamente lo stesso valore nell'intorno di 1 kHz [67].

6.2 Processo di Ornstein-Uhlenbeck

La modellazione del rumore colorato Gaussiano è stata svolta tramite il processo stocastico Markoviano di Ornstein-Uhlenbeck. Un processo Markoviano è caratterizzato dalla proprietà di Markov per la quale lo stato attuale del sistema dipende solo dallo stato immediatamente precedente e non dai valori storici del processo.

Il processo di Ornstein-Uhlenbeck, oltre a essere un modello di rumore colorato Gaussiano, ha assunto particolare importanza in campo fisico e matematico perchè è utilizzato come modello per la velocità di una particella Browniana. Ulteriori applicazioni si hanno in campo biologico per la modellazione della risposta neuronale e in matematica finanziaria per la modellazione della dinamica dei tassi di interesse.

Il processo X di Ornstein-Uhlenbeck che evolve nel tempo t è descritto dalla seguente equazione

$$X(t + dt) = X(t) - \frac{1}{t_c}X(t)dt + c_d^{1/2}N(t)(dt)^{1/2}, \quad (6.1)$$

dove t_c e c_d sono rispettivamente il tempo di correlazione (*relaxation time*) e la costante di diffusione (*diffusion constant*) del processo, dt è un intervallo di tempo infinitesimale e $N(t)$ è una variabile casuale normale non correlata temporalmente con media 0 e varianza 1.

Il processo ha media nulla e funzione di autocorrelazione che decade esponenzialmente più o meno velocemente a seconda di t_c .

Il tempo di correlazione definisce la scala temporale del rumore, mentre la costante di diffusione, che è legata alla varianza del processo, ne descrive l'intensità.

Per simulare numericamente questo processo è necessario applicare delle formule di *updating*, cioè delle formule che, a partire da qualsiasi valore di X a un qualunque tempo t , siano in grado di fornire il valore di X a un tempo $t + \Delta t_{ou}$.

Le formule impiegate in questo lavoro (*exact updating formulas*) sono state ricavate da Gillespie [29]. Il processo X di Ornstein-Uhlenbeck risulta perciò pari a

$$X(t + \Delta t_{ou}) = X(t)\mu_{ou} + \sigma_{ou}n, \quad (6.2)$$

con

$$\mu_{ou} \equiv e^{-\Delta t_{ou}/t_c} \quad (6.3)$$

e

$$\sigma_{ou}^2 = (c_d t_c / 2)(1 - e^{-2\Delta t_{ou}/t_c}) = (c_d t_c / 2)(1 - \mu_{ou}^2). \quad (6.4)$$

I valori di μ_{ou} e σ_{ou}^2 rimangono costanti nel tempo, perchè il processo è stazionario, mentre n , che è un numero casuale tratto da una distribuzione normale, e $X(t)$ variano a ogni intervallo di tempo Δt_{ou} .

In Figura 6.2 è riportato il risultato della simulazione numerica di un processo di Ornstein-Uhlenbeck, caratterizzato da un tempo di correlazione e una costante di diffusione unitari. Il rapporto tra l'intervallo temporale Δt_{ou} e il tempo di correlazione t_c è stato assunto pari a 0.1 e il valore iniziale del processo è stata fissato pari a 0. Nel grafico inferiore è stato realizzato un ingrandimento del processo rappresentato nel grafico superiore in modo da poter osservare meglio le oscillazioni randomiche.

In Figura 6.3 sono riportati la funzione di densità di probabilità del processo ($f(X)$) e il suo autocorrelogramma ($\rho(\tau_{ac})$).

La rappresentazione tramite istogramma fornisce una stima della funzione continua di densità di probabilità. Data la buona concordanza tra la curva gaussiana di controllo e l'istogramma si può confermare, come da definizione, che la funzione di densità di probabilità del processo di Ornstein-Uhlenbeck ha una distribuzione normale, la quale è centrata in 0.

L'autocorrelogramma del rumore presenta in ascissa i valori del ritardo temporale (τ_{ac}) rispetto al quale il segnale è confrontato con se stesso e in ordinata i valori della funzione di autocorrelazione. Si può osservare, come precedentemente indicato, che la funzione di autocorrelazione del processo di Ornstein-Uhlenbeck ha un andamento esponenziale.

6.2.1 Applicazione del processo alla pressione del liquido

Per poter osservare la risposta della bolla oggetto di studio in un campo di pressione stocastico è stata realizzata un'oscillazione di pressione tramite il processo di

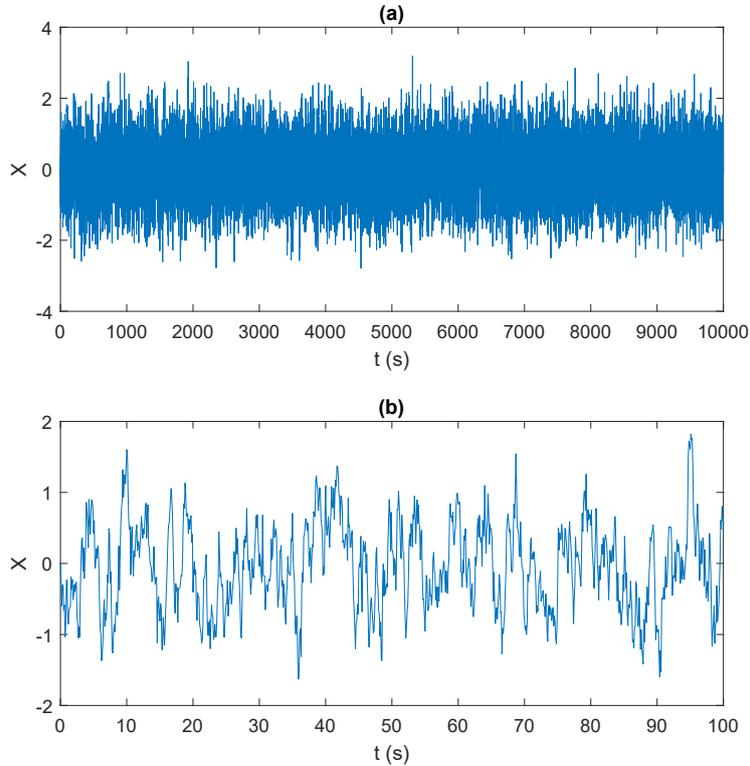


Figura 6.2: Risultato di una simulazione numerica di un processo di Ornstein-Uhlenbeck in cui sono state impiegate le *exact updating formulas*. I parametri di input risultano: t_c e c_d unitari, $X(t=0)=0$ e $\Delta t_{ou}/t_c=0.1$. Nel grafico (b) è riportato una porzione del processo raffigurato nel grafico (a).

Ornstein-Uhlenbeck

$$p_{ou}(t + \Delta t_{ou}) = p_{ou}(t)\mu_{ou} + \sigma_{ou}n. \quad (6.5)$$

Questa oscillazione è stata applicata alla pressione ambiente del liquido (P_∞), che nel caso preso in esame è pari a 10^5 Pa.

La scelta del tempo di correlazione e della costante di diffusione del processo, tramite i quali è possibile determinare i valori di μ_{ou} (6.3) e σ_{ou} (6.4), è stata fatta sulla base dei parametri dell'oscillazione sinusoidale di pressione studiata nel capitolo precedente.

In particolare, il tempo di correlazione ($t_{c,2}$) è stato scelto pari al periodo dell'oscillazione sinusoidale, il quale coincide con l'inverso della frequenza di oscillazione naturale della bolla. Inoltre, al fine di poter valutare l'influenza della variabilità

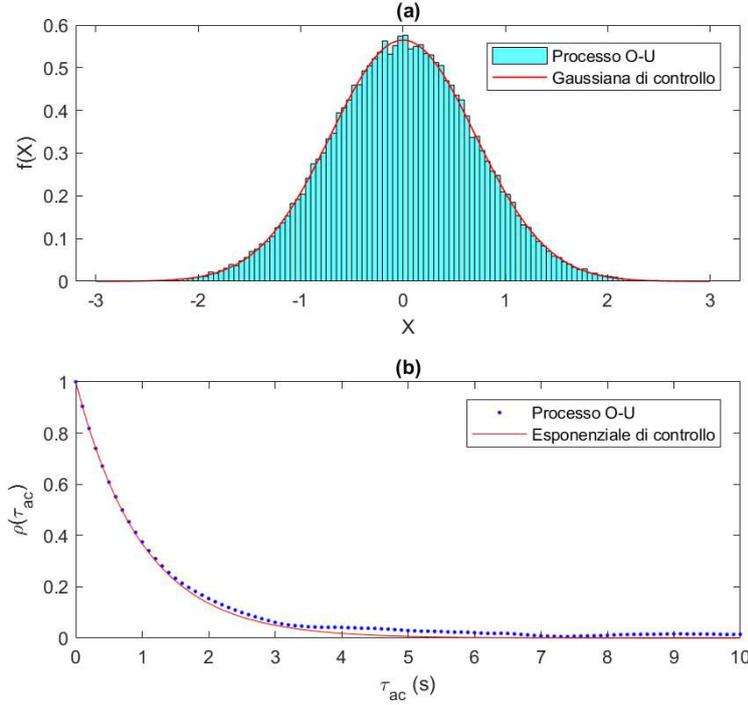


Figura 6.3: (a): stima della funzione di densità di probabilità del processo di Ornstein-Uhlenbeck riportato in Figura 6.2 con curva Gaussiana di controllo; (b): autocorrelogramma del processo di Ornstein-Uhlenbeck riportato in Figura 6.2 con curva esponenziale di controllo.

della scala temporale sull'andamento del raggio della bolla, sono stati considerati altri due tempi di correlazione $t_{c,1}$ e $t_{c,3}$ rispettivamente corrispondenti alla metà e al doppio di $t_{c,2}$. Di conseguenza, i tre tempi di correlazione risultano:

- $t_{c,1} = 7 \cdot 10^{-7}$ s;
- $t_{c,2} = 1.4 \cdot 10^{-6}$ s;
- $t_{c,3} = 2.8 \cdot 10^{-6}$ s.

Questi tre valori non sono particolarmente differenti gli uni dagli altri perchè, affinché la modellazione tramite rumore colorato Gaussiano sia corretta, è necessario che la scala temporale del sistema dinamico (T_n) e la scala temporale del rumore (t_c) siano paragonabili e quindi ricadano all'incirca nello stesso ordine di grandezza, in modo tale che il sistema sia effettivamente sensibile all'autocorrelazione della forzante.

La costante di diffusione del processo stocastico risulta pari a

$$c_d = \frac{2\sigma_{ou}^2}{t_c}. \quad (6.6)$$

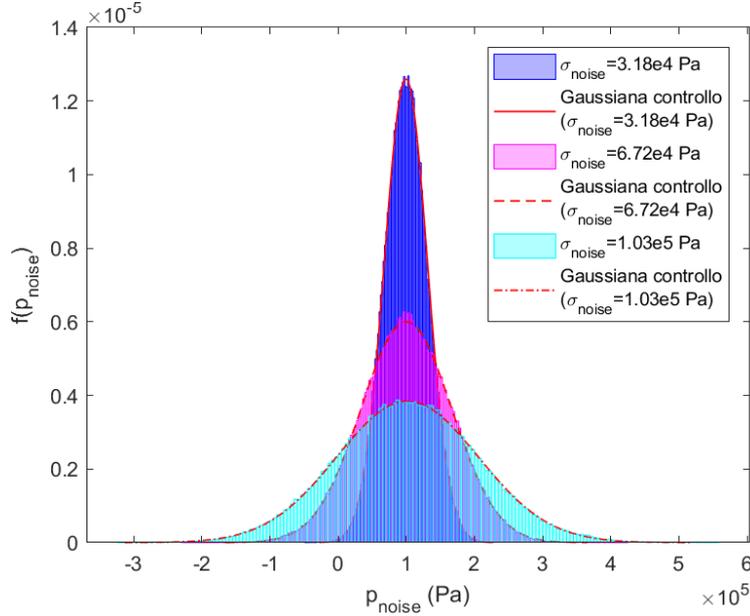


Figura 6.4: Funzioni densità di probabilità stimate di fluttuazioni stocastiche di pressione caratterizzate dallo stesso tempo di correlazione ($1.4 \cdot 10^{-6}$ s) e differente intensità del rumore.

Tuttavia, si è scelto di far coincidere la varianza dell'oscillazione stocastica (σ_{ou}^2) con quella dell'oscillazione sinusoidale (σ_{sin}^2), la quale dipende dall'ampiezza di oscillazione. Sono state scelte ampiezze sinusoidali tra 0 kPa e 175 kPa con passo 5 kPa, le quali hanno determinato una deviazione standard dell'oscillazione sinusoidale e, di conseguenza, un'intensità del rumore (o deviazione standard dell'oscillazione stocastica) compresa tra $3.50 \cdot 10^3$ Pa e $1.25 \cdot 10^5$ Pa. Tramite questi valori è stato definito per ciascuna simulazione il valore di costante di diffusione corrispondente.

Si è scelto di non considerare tutti i valori delle ampiezze di oscillazione, e quindi delle deviazioni standard, studiate nel caso sinusoidale ($A_{max} = 300$ kPa), perchè nel caso stocastico i valori di pressione sono distribuiti normalmente e quindi compresi quasi totalmente in $P_\infty \pm 3\sigma_{ou}$. Di conseguenza, anche limitando la gamma di ampiezze da cui ricavare i valori di σ_{ou} (o σ_{noise}), si osservano comunque picchi di pressione (positivi o negativi) corrispondenti a intensità del rumore superiori a quelle considerate, coprendo così l'intera gamma delle varianze del caso sinusoidale.

Il valore di fluttuazione stocastica di pressione iniziale ($p_{ou}(t = 0)$) è stato assunto pari a 0. L'intervallo di tempo Δt_{ou} è stato scelto pari a $1/50$ del tempo di correlazione della forzante.

In Figura 6.4 sono riportati alcuni andamenti della funzione di densità di probabilità stimata della forzante di pressione stocastica in caso di tempo di correlazione

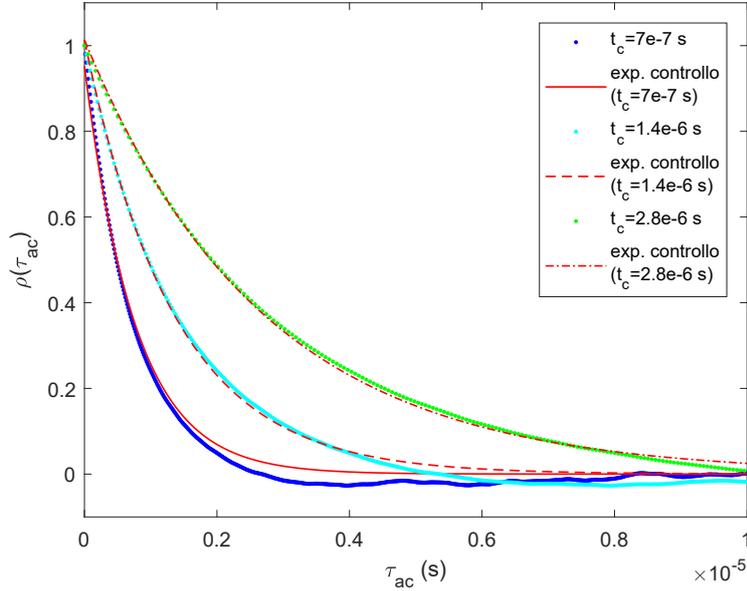


Figura 6.5: Autocorrelogrammi di fluttuazioni stocastiche di pressione caratterizzate dalla stessa intensità ($3.5 \cdot 10^4$ Pa) e differente tempo di correlazione del rumore.

pari a $1.4 \cdot 10^{-6}$ s al variare dell'intensità del rumore. Si è scelto di mostrare i risultati per un unico valore di tempo di correlazione perchè la forma della distribuzione non varia particolarmente a seconda della scala temporale della fluttuazione, ma piuttosto al variare dell'intensità del rumore. Le funzioni presentate sono simmetriche rispetto al valore di pressione ambiente (P_∞), seguono una distribuzione normale e risultano maggiormente disperse per elevati valori di varianza perchè in tali casi l'oscillazione di rumore assume valori più estremi di pressione con una maggiore probabilità.

In Figura 6.5, invece, sono riportati gli autocorrelogrammi di tre fluttuazioni stocastiche di pressione con diversi valori di tempo di correlazione. In questo caso l'andamento della curva $\rho(\tau_{ac})$ non è particolarmente influenzato dall'intensità del rumore, ma piuttosto dalla scala temporale. Infatti, l'area sottesa dalla curva coincide col tempo di correlazione del segnale. Di conseguenza, la curva decresce più lentamente in caso di elevato tempo di correlazione e viceversa. Si osserva, inoltre, una buona corrispondenza tra gli andamenti presentati e le rispettive curve esponenziali di controllo.

Una volta descritta la modellazione della forzante di pressione stocastica, si può valutare la corrispondente risposta del raggio della bolla al variare dei due parametri che caratterizzano questo tipo di rumore, cioè l'intensità e il tempo di correlazione.

7 Risultati ottenuti con forzante di pressione stocastica

Per simulare il comportamento di una singola bolla sferica in un campo di pressione stocastico è stato utilizzato il modello di Keller-Miksis in forma adimensionale. Data la variabilità dell'intensità della fluttuazione stocastica, la quale può determinare ampie oscillazioni del raggio della bolla, si è preferito all'equazione di Rayleigh-Plesset (3.11) un modello che tenesse conto della comprimibilità del liquido (3.15). Inoltre, poiché i parametri della fluttuazione stocastica sono stati determinati in base a quelli dell'oscillazione sinusoidale già analizzata, si è scelto di impiegare lo stesso sistema di equazioni per osservare la risposta della bolla.

La bolla oggetto di studio, come precedentemente indicato, ha un raggio di $5 \mu\text{m}$, contiene aria e vapore ed è posta in acqua a 20°C in equilibrio con una pressione ambiente di 10^5 Pa . In Tabella 7.1 sono riportate le costanti di simulazione relative al liquido. La velocità del suono in acqua a 20°C è 1483.2 m/s e il gas contenuto nella bolla segue una trasformazione adiabatica ($k = 1.4$).

Tabella 7.1: Proprietà dell'acqua a 20°C

T_∞ ($^\circ\text{C}$)	ρ_L (kg/m^3)	μ_L ($\text{Pa} \cdot \text{s}$)	S (N/m)	p_V (Pa)
20	998.2	0.001	0.073	2337.8

La fluttuazione di pressione stocastica ($p_{ou}(t)$) è determinata tramite il processo di Ornstein-Uhlenbeck

$$p_{ou}(t + \Delta t_{ou}) = p_{ou}(t)\mu_{ou} + \sigma_{ou}n, \quad (7.1)$$

con

$$\mu_{ou} \equiv e^{-\Delta t_{ou}/t_c} \quad (7.2)$$

e

$$\sigma_{ou}^2 = (c_d t_c / 2)(1 - e^{-2\Delta t_{ou}/t_c}) = (c_d t_c / 2)(1 - \mu_{ou}^2). \quad (7.3)$$

Sono stati scelti tre valori di tempo di correlazione ($7 \cdot 10^{-7} \text{ s}$, $1.4 \cdot 10^{-6} \text{ s}$ e $2.8 \cdot 10^{-6} \text{ s}$) e, per ciascun tempo, 36 valori di costante di diffusione, tali per cui l'intensità del rumore (o deviazione standard) arrivi fino a valori attorno a $1.25 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.

La scala delle lunghezze è assunta pari al raggio di equilibrio della bolla ($5 \mu\text{m}$), mentre quella dei tempi coincide con il tempo di correlazione della fluttuazione stocastica di pressione impiegata nella simulazione. L'ampiezza dell'intervallo di integrazione è stata scelta pari a $1/50$ della scala temporale della forzante.

Per ogni intervallo di integrazione, è stato fornito al risolutore (*ode45*), un valore di oscillazione di pressione stocastica ($p_{ou}(t)$) pari all'interpolazione lineare tra i valori di oscillazione di pressione stocastica corrispondenti al primo (t_{in}) e all'ultimo (t_{fin}) tempo dell'intervallo, calcolata utilizzando in forma adimensionale sia la discretizzazione ($\Delta t = \Delta t_{ou}$) sia la variabile tempo.

In ultimo, è necessario definire la durata delle simulazioni. Si è scelto un valore pari a 5000 volte la scala temporale di ciascuna simulazione. Questo valore è stato determinato osservando la convergenza della media delle serie temporali del raggio realizzate, per diverse durate, con la stessa realizzazione di pressione stocastica. I relativi grafici sono riportati in Appendice B.

La risposta della bolla, presentata di seguito, è stata osservata considerando prima di tutto l'andamento delle serie temporali del raggio. Successivamente, la forma della distribuzione dei valori del raggio è stata analizzata tramite gli indici statistici e in ultimo, calcolando la scala integrale, è stata determinata la scala temporale del sistema forzato.

7.1 Serie temporali del raggio della bolla

Una bolla di gas e vapore, posta in acqua, soggetta a una forzante di pressione esterna di tipo stocastico, presenta delle oscillazioni del raggio di carattere randomico. In particolare, all'aumentare dell'intensità e del tempo di correlazione del rumore, le oscillazioni risultano più ampie e quindi più asimmetriche, non potendo raggiungere valori negativi del raggio (Figura 7.1). In Figura 7.1 è riportato un breve tratto dell'intera simulazione dell'andamento nel tempo del raggio normalizzato della bolla, in modo da poter osservare meglio le oscillazioni.

Per individuare l'eventuale presenza di oscillazioni periodiche è stato realizzato il diagramma di biforcazione, uno per ciascun tempo di correlazione (Figura 7.2). Per ogni valore di intensità del rumore, sul corrispondente andamento del raggio della bolla sono stati individuati i valori assunti dal raggio a ogni tempo pari a un multiplo intero del tempo di correlazione (R_T) per l'intera durata della simulazione. Indipendentemente dai parametri del processo stocastico, il raggio della bolla non presenta periodicità nascoste e zone di biforcazione, come accade invece nel caso di oscillazioni di pressione esterna di tipo sinusoidale. Come già osservato attraverso la rappresentazione delle serie temporali (Figura 7.1), all'aumentare dell'intensità e del tempo di correlazione del rumore, il raggio della bolla assume valori sempre più elevati.

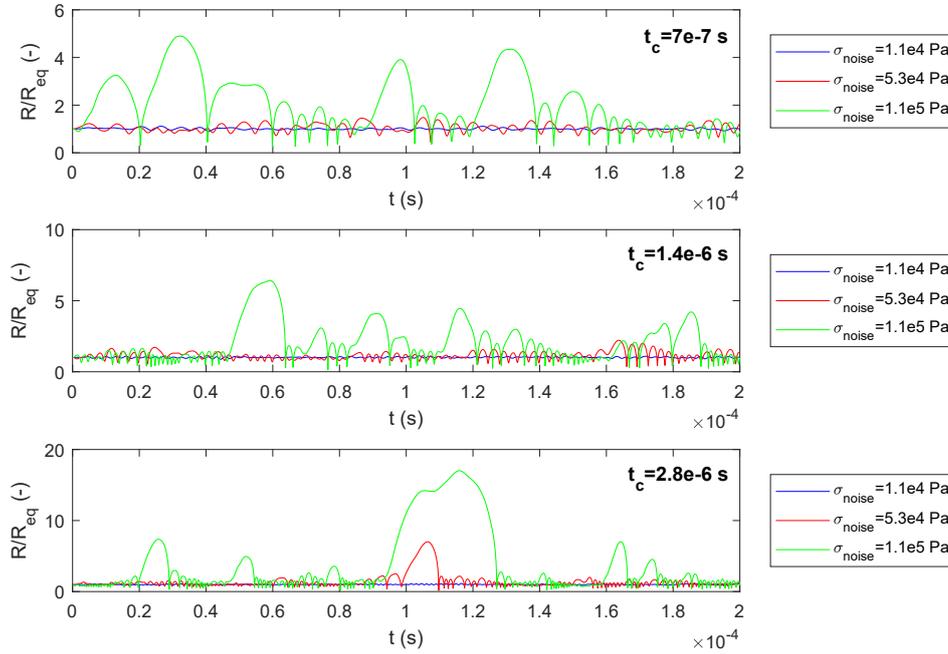


Figura 7.1: Andamenti temporali del raggio normalizzato di una bolla di $5 \mu\text{m}$ soggetta a una fluttuazione di pressione stocastica (modello di Keller-Miksis). Per ciascun tempo di correlazione della forzante (t_c) sono stati considerati tre valori di intensità del rumore (σ_{noise}).

7.2 Analisi statistica delle serie temporali del raggio della bolla

Una volta osservati gli andamenti temporali del raggio della bolla oggetto di studio, ottenuti integrando numericamente il modello adimensionale di Keller-Miksis in risposta a una fluttuazione di pressione esterna di tipo stocastico, si intende ora analizzare i risultati da un punto di vista statistico. Infatti, la forzante considerata è stata modellata come un rumore colorato Gaussiano, le cui oscillazioni aleatorie vengono descritte in termini probabilistici. Di conseguenza, anche la risposta della bolla, che presenta delle fluttuazioni random, può essere valutata tramite la distribuzione di probabilità e la stima dei momenti.

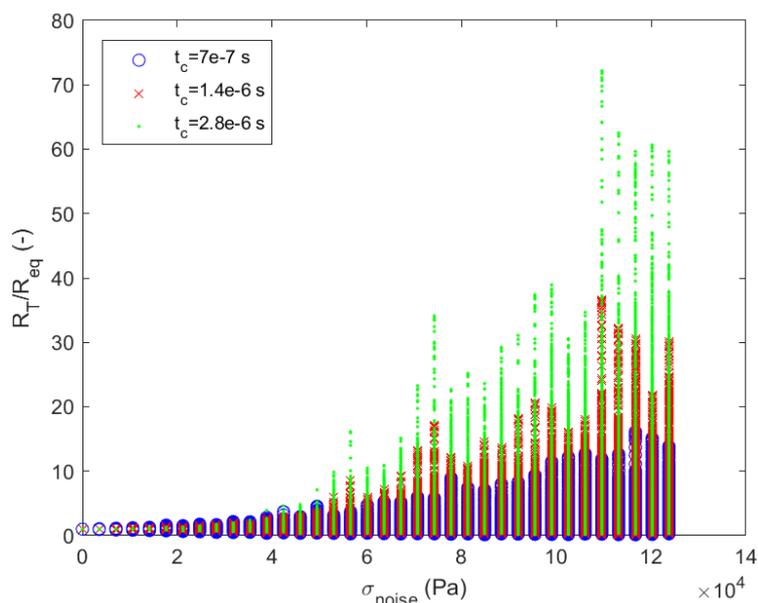


Figura 7.2: Diagrammi di biforcazione di una bolla di $5 \mu\text{m}$ forzata stocasticamente da oscillazioni di pressione con diversi tempi di correlazione (modello di Keller-Miksis). In ascissa è riportata la deviazione standard dell'oscillazione di rumore, mentre in ordinata è indicata la risposta del sistema per l'intera durata della simulazione ($5000t_c$), in termini di valore assunto dal raggio a ogni multiplo del tempo di correlazione della forzante considerato (R_T), normalizzato rispetto al valore di equilibrio (R_{eq}).

7.2.1 Funzione di densità di probabilità e funzione di ripartizione

La funzione di densità di probabilità permette di osservare la distribuzione dei valori assunti da una grandezza rappresentativa del sistema dinamico in una realizzazione del processo stocastico.

La funzione di ripartizione (o funzione cumulativa), invece, fornisce informazioni sulla distribuzione di probabilità prima o dopo un certo valore assunto dalla grandezza.

In Figura 7.3 sono riportate le funzioni densità di probabilità stimate del raggio normalizzato della bolla in caso di forzante di pressione stocastica con tempo di correlazione pari a $1.4 \cdot 10^{-6}$ s e intensità variabile. Le distribuzioni sono unimodali e asimmetriche. In particolare, all'aumentare dell'intensità del rumore il raggio assume valori sempre più elevati, come osservato nelle serie temporali. Di conseguenza, anche il complementare a 1 della funzione di ripartizione del raggio normalizzato decresce più lentamente in caso di elevata deviazione standard del rumore, perchè il

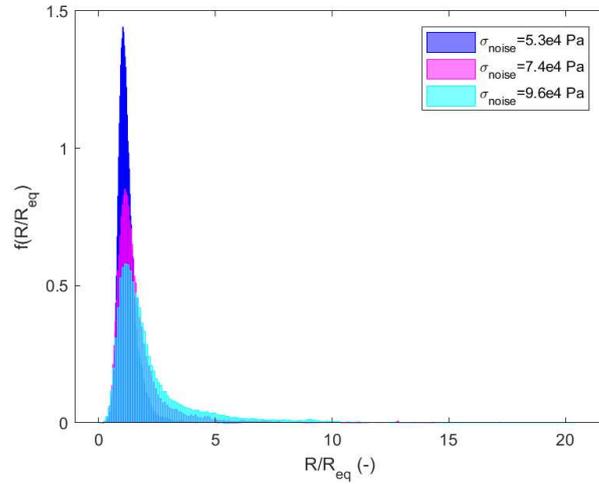


Figura 7.3: Funzioni densità di probabilità stimate del raggio normalizzato di una bolla di $5 \mu\text{m}$ forzata stocasticamente da un'oscillazione di pressione con tempo di correlazione pari a $1.4 \cdot 10^{-6}$ s e intensità variabile (σ_{noise}).

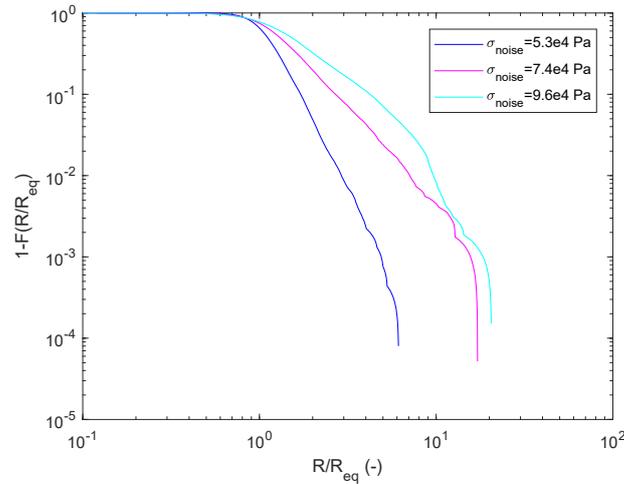


Figura 7.4: Complementare a 1 delle funzioni di ripartizione del raggio normalizzato di una bolla di $5 \mu\text{m}$ forzata stocasticamente da un'oscillazione di pressione con tempo di correlazione pari a $1.4 \cdot 10^{-6}$ s e intensità variabile (σ_{noise}).

raggio assume un maggior numero di valori (Figura 7.4).

Si confrontano ora le funzioni densità di probabilità del raggio normalizzato di una bolla soggetta a fluttuazioni di pressione random con stessa intensità ($5.3 \cdot 10^4$ Pa), ma differente tempo di correlazione del rumore (Figura 7.5). All'aumentare della

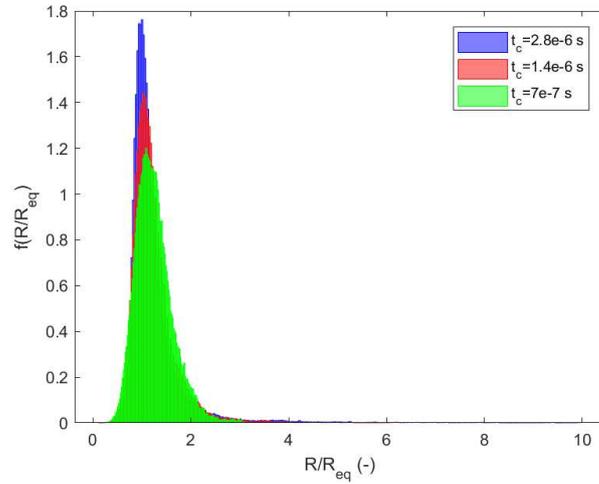


Figura 7.5: Funzioni densità di probabilità stimate del raggio normalizzato di una bolla di $5 \mu\text{m}$ forzata stocasticamente da un'oscillazione di pressione con deviazione standard di $5.3 \cdot 10^4$ Pa e tempo di correlazione variabile (t_c).

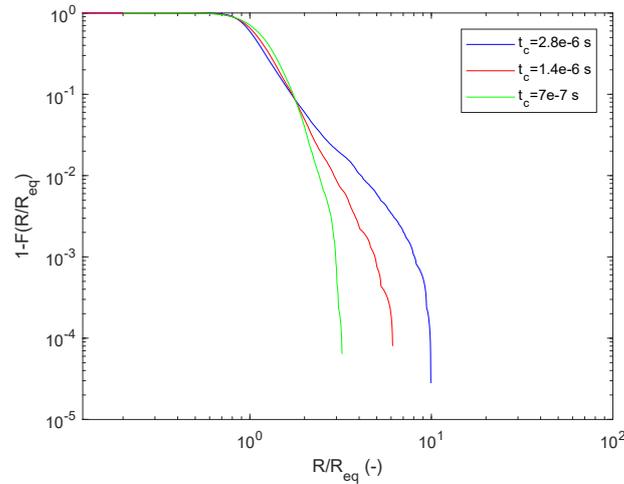


Figura 7.6: Complementare a 1 delle funzioni di ripartizione del raggio normalizzato di una bolla di $5 \mu\text{m}$ forzata stocasticamente da un'oscillazione di pressione con deviazione standard di $5.3 \cdot 10^4$ Pa e tempo di correlazione variabile (t_c).

scala temporale della forzante, la distribuzione dei valori del raggio risulta maggiormente asimmetrica e con code più lunghe. Perciò, il complementare a 1 della funzione di ripartizione del raggio normalizzato decresce più lentamente all'aumentare del tempo di correlazione (Figura 7.6).

La realizzazione delle distribuzioni di frequenza delle serie temporali del raggio permette, inoltre, di confrontare la diversa casualità di oscillazione della bolla tra il caso caotico con forzante sinusoidale e il caso con forzante stocastica.

Come precedentemente affermato, in una distribuzione Gaussiana alcuni valori assunti dalla variabile analizzata, in questo caso la pressione, ricadono al di fuori dell'intervallo $(P_\infty \pm \sigma_{noise})$.

Per questo motivo si è deciso di considerare per il confronto tra distribuzioni di frequenza la serie temporale del raggio della bolla ottenuta con una forzante stocastica con intensità $\sigma_{noise} = \sigma_1$ e la serie del raggio corrispondente a una fluttuazione di pressione esterna sinusoidale avente deviazione standard $\sigma_2 = 3\sigma_1$.

Le simulazioni sono state svolte per una durata pari a $5000T$, con $T = 1/f_n = 1.4 \cdot 10^{-6}$ s e coincidente col periodo e il tempo di correlazione rispettivamente della forzante sinusoidale e di quella stocastica. Per determinare σ_1 si è scelto un valore di ampiezza di oscillazione sinusoidale ($A = 90$ kPa), tale per cui il periodo del raggio della bolla coincida col periodo della forzante (prima zona del diagramma di biforcazione 5.7) e una fluttuazione di pressione sinusoidale con deviazione standard pari a σ_2 determini delle oscillazioni caotiche nel raggio della bolla.

Considerando unicamente i valori assunti dal raggio della bolla per tempi pari a multipli interi del periodo e trascurando i primi valori compresi nella fase transitoria, la relativa distribuzione di frequenza in caso di oscillazione sinusoidale con deviazione standard σ_1 risulta, perciò, costituita da un'unica barra a frequenza unitaria perchè, data la periodicità del raggio della bolla, il valore assunto dal raggio a ciascun periodo della forzante è sempre lo stesso.

Risulta invece interessante confrontare la distribuzione dei valori del raggio in caso di forzante sinusoidale con deviazione standard σ_2 e in caso di forzante stocastica con intensità σ_1 perchè entrambe causano delle oscillazioni irregolari e non periodiche nella bolla.

Come si può osservare nelle Figure 7.7 e 7.8 la distribuzione dei valori del raggio nei due diversi campi di pressione, in caso di oscillazioni irregolari, non è la stessa. Se in caso di forzante sinusoidale si può parlare di caos deterministico e la distribuzione del raggio della bolla non ha spiccate peculiarità (Figura 7.7), in caso di campo stocastico la distribuzione del raggio può essere analizzata in termini statistici e descritta in base alla forma assunta, come viene fatto per il segnale di pressione agente sulla bolla. Quest'ultima distribuzione, infatti, ha una forma unimodale, asimmetrica con la coda più lunga a destra. La maggior parte dei valori si distribuisce attorno al raggio di equilibrio, ad eccezione di alcuni picchi che costituiscono la coda. Al contrario, in Figura 7.7, i dati non sembrano seguire una particolare distribuzione di frequenza; tuttavia, i valori più elevati raggiunti dal raggio sono inferiori a quelli ottenuti in Figura 7.8.

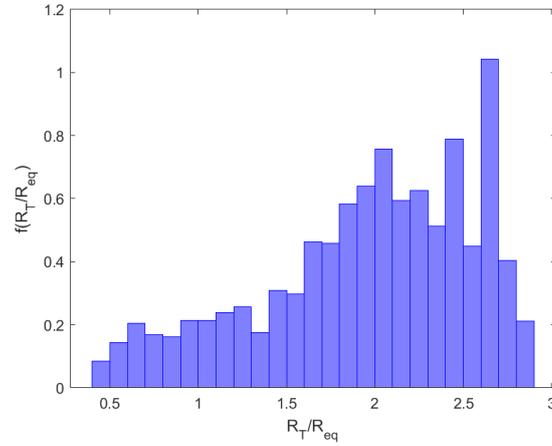


Figura 7.7: Funzione di densità di probabilità stimata dei valori assunti dal raggio di una bolla di $5 \mu\text{m}$, forzata da un'oscillazione di pressione sinusoidale, ogni istante temporale pari a un multiplo intero del periodo della forzante (T), fino a $5000T$, normalizzati rispetto al raggio di equilibrio. La deviazione standard della pressione è pari a $1.9 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ e il periodo vale $1.4 \cdot 10^{-6} \text{ s}$.

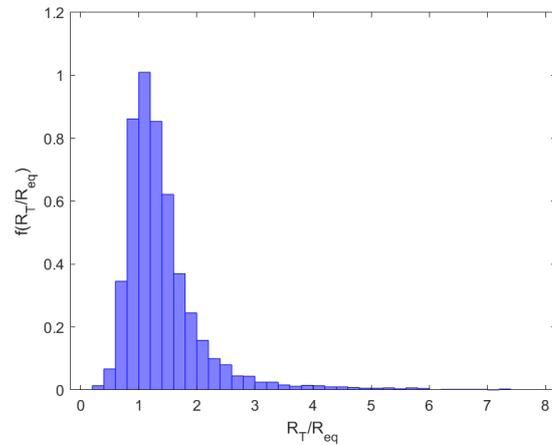


Figura 7.8: Funzione di densità di probabilità stimata dei valori assunti dal raggio di una bolla di $5 \mu\text{m}$, forzata da un'oscillazione di pressione stocastica, ogni istante temporale pari a un multiplo intero del tempo di correlazione della forzante (t_c), fino a $5000t_c$, normalizzati rispetto al raggio di equilibrio. La deviazione standard della pressione è pari a $6.4 \cdot 10^4 \text{ Pa}$ e il periodo vale $1.4 \cdot 10^{-6} \text{ s}$.

7.2.2 Indici statistici

Per descrivere in modo sintetico le distribuzioni di frequenza dei valori assunti dal raggio della bolla, rappresentate graficamente dagli istogrammi, come quelli realizzati nel paragrafo precedente, si utilizzano gli indici statistici. Per ciascun andamento del raggio corrispondente a un diverso valore dell'intensità del rumore e del tempo di correlazione sono stati calcolati la media, la deviazione standard, l'indice di curtosi e l'indice di asimmetria.

Il valor medio è un indice di posizione e si può interpretare come il baricentro della distribuzione dei valori del raggio.

La varianza, o momento centrale di ordine 2, è un indice di dispersione, quindi descrive come si distribuiscono i valori rispetto alla media. Poiché le dimensioni della varianza corrispondono al quadrato dell'unità di misura dei valori di riferimento, spesso viene usata la sua radice quadrata positiva chiamata scarto quadratico medio o deviazione standard.

L'indice di curtosi o *kurtosis* è un indice di forma che descrive l'allontanamento della distribuzione considerata dalla curva Gaussiana e fornisce un'informazione sull'importanza delle code rispetto ai valori centrali. Si calcola tramite il rapporto tra il momento centrale di quarto ordine e la varianza al quadrato, è adimensionale e vale 3 per una distribuzione normale. Se la distribuzione oggetto di studio risulta più appuntita della normale, allora viene chiamata leptocurtica e l'indice di curtosi è maggiore di 3. Invece, per distribuzioni meno appuntite della curva Gaussiana, definite platicurtiche, l'indice è inferiore a 3.

L'indice di asimmetria o *skewness* è un indice di forma che definisce la presenza o l'assenza di specularità della distribuzione rispetto a un asse verticale. I momenti centrali di ordine dispari sono nulli per distribuzioni simmetriche, quindi il momento centrale di ordine 3 risulta adeguato per valutare la simmetria di una distribuzione. Tuttavia, per confrontare più distribuzioni è necessario utilizzare una misura relativa, che consiste appunto nell'indice di asimmetria, definito come il rapporto tra il momento centrale di terzo ordine e il cubo dello scarto quadratico medio. Contrariamente all'indice di curtosi che valuta l'importanza relativa tra code e valori centrali, l'indice di asimmetria discrimina tra le due code. Un valore positivo indica una coda più lunga verso destra e quindi verso i valori maggiori; un indice di asimmetria negativo indica una coda più lunga verso sinistra.

Nelle Figure [7.9-7.10-7.11-7.12](#) sono riportati gli andamenti degli indici sopra descritti della risposta del raggio di una bolla a una forzante stocastica con diversi valori di intensità e scala temporale.

Per quanto riguarda il valor medio del raggio della bolla (Figura [7.9](#)), fino a intensità del rumore pari a circa $2 \cdot 10^4$ Pa, i valori non si allontanano di molto dal valore di equilibrio, indipendentemente dal tempo di correlazione. Al crescere dell'intensità e della scala temporale della forzante, l'allontanamento si fa via via sempre più significativo.

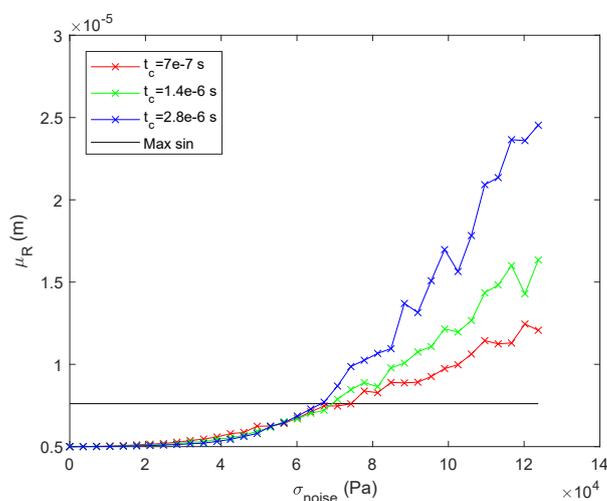


Figura 7.9: Andamento della media della serie temporale del raggio di una bolla forzata stocasticamente al variare dell'intensità (σ_{noise}) e del tempo di correlazione del rumore (t_c). La linea orizzontale nera indica il massimo valore di media raggiunto da una serie temporale del raggio di una bolla soggetta a un'oscillazione di pressione sinusoidale con periodo pari a $1.4 \cdot 10^{-6}$ s e deviazione standard coincidente con la gamma di intensità del rumore considerato.

Le curve relative alla deviazione standard del raggio della bolla (Figura 7.10) hanno un andamento simile alle rispettive curve riportanti le medie (Figura 7.9).

I grafici di *kurtosis* e *skewness* (Figure 7.11-7.12) mostrano come all'aumentare del tempo di correlazione i valori di questi indici subiscano maggiori variazioni al variare dell'intensità del rumore (lungo l'asse delle ascisse). Tuttavia, per intensità superiori a circa $9 \cdot 10^4$ Pa, queste variazioni risultano meno significative di quelle osservate a intensità minori e indipendenti dal tempo di correlazione. Questi ultimi due grafici non presentano un trend piuttosto evidente. Tuttavia, i valori dell'indice di curtosi risultano sempre superiori a 3, quindi le distribuzioni del raggio della bolla sono leptocurtiche (più appuntite di una normale) e i valori dell'indice di asimmetria sono sempre maggiori di 0 e quindi la coda più lunga risulta quella destra, come ci si poteva aspettare dato che il raggio della bolla non può assumere valori negativi.

Nei grafici della media e della deviazione standard (Figure 7.9-7.10) è stato riportato, tramite una linea costante, il massimo valore raggiunto in questi due parametri dal raggio della bolla in caso di fluttuazione di pressione sinusoidale avente la stessa gamma di valori di varianza e periodo pari a $1.4 \cdot 10^{-6}$ s.

Si osserva, perciò, che lo spostamento della media e della deviazione standard del raggio della bolla che si ottiene con una forzante di pressione stocastica è molto superiore a quello risultante da un'oscillazione di pressione sinusoidale.

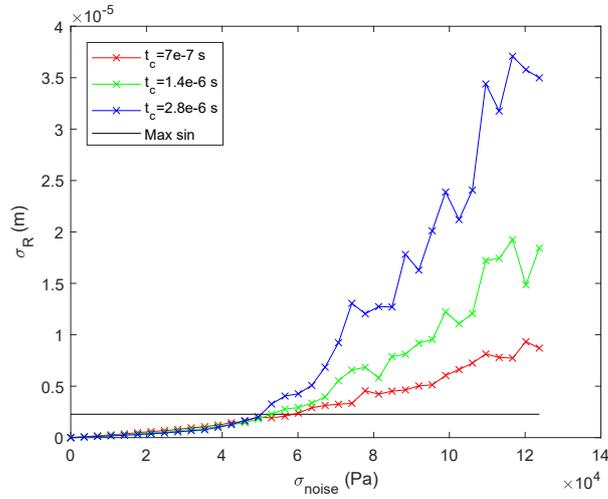


Figura 7.10: Andamento della deviazione standard della serie temporale del raggio di una bolla forzata stocasticamente al variare dell'intensità (σ_{noise}) e del tempo di correlazione del rumore (t_c). La linea orizzontale nera indica il massimo valore di deviazione standard raggiunto da una serie temporale del raggio di una bolla soggetta a un'oscillazione di pressione sinusoidale con periodo pari a $1.4 \cdot 10^{-6}$ s e deviazione standard coincidente con la gamma di intensità del rumore considerato.

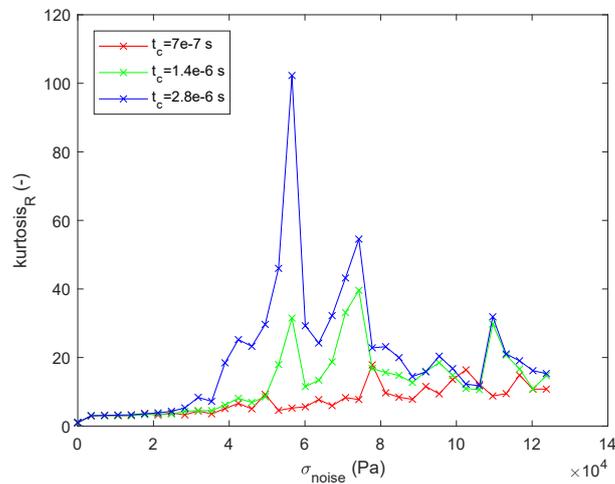


Figura 7.11: Andamento dell'indice di curtosi della serie temporale del raggio di una bolla forzata stocasticamente al variare dell'intensità (σ_{noise}) e del tempo di correlazione del rumore (t_c).

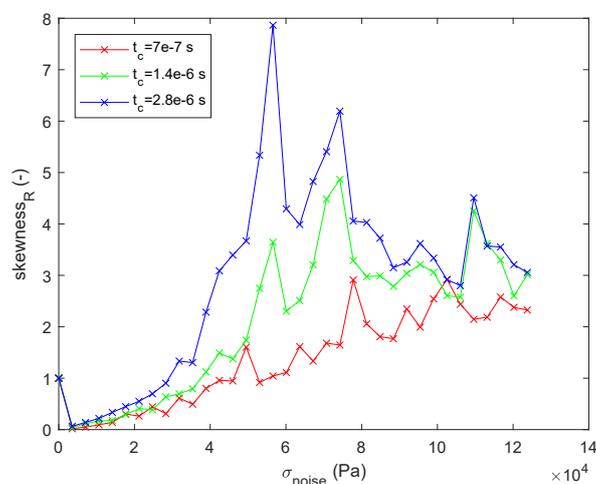


Figura 7.12: Andamento dell'indice di asimmetria della serie temporale del raggio di una bolla forzata stocasticamente al variare dell'intensità (σ_{noise}) e del tempo di correlazione del rumore (t_c).

Si ricorda, però, che, data la forma della distribuzione di probabilità, alcuni valori di pressione stocastica corrispondono a intensità del rumore, e quindi a varianze, superiori rispetto a quella caratteristica del segnale di pressione.

I grafici degli indici statistici ottenuti sono riferiti a un'unica realizzazione del processo stocastico per ciascun valore di deviazione standard e tempo di correlazione della fluttuazione di pressione.

Per poter trarre delle conclusioni sulla risposta del raggio a una forzante di pressione stocastica è necessario verificare che gli andamenti ottenuti nelle Figure 7.9-7.10-7.11-7.12 siano indipendenti dalla realizzazione. In Appendice C sono riportati i risultati conseguiti mediando, per ciascun indice statistico, i valori ottenuti con diverse realizzazioni del processo stocastico. Con circa 6-7 osservazioni si raggiunge una stabilizzazione delle curve. Nonostante, alcuni picchi dei grafici dell'indice di curtosi e dell'indice di asimmetria vengano leggermente smussati, le curve relative alla media e alla varianza del raggio mantengono lo stesso andamento ottenuto con una singola realizzazione. Perciò, si possono considerare valide le osservazioni fatte finora e si può effettivamente confermare l'elevato spostamento della media e della deviazione standard del raggio per elevati valori di intensità del rumore.

Utilizzando i valori di media e deviazione standard mediati su 7 realizzazioni, sono stati elaborati i grafici relativi a un ulteriore indice di dispersione: il coefficiente di variazione.

Il coefficiente di variazione è dato dal rapporto tra la deviazione standard di un certo campione di dati e la media, è adimensionale e permette di confrontare fenomeni descritti da grandezze con diverse unità di misura. In questo caso viene

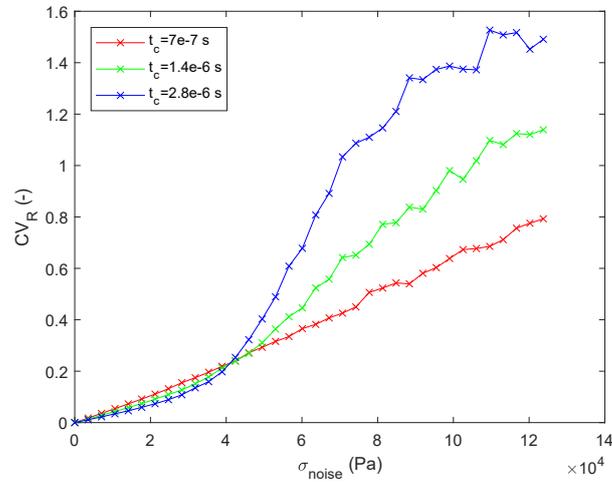


Figura 7.13: Andamento del coefficiente di variazione della serie temporale del raggio di una bolla forzata stocasticamente al variare dell'intensità (σ_{noise}) e del tempo di correlazione del rumore (t_c), realizzato utilizzando i valori di media e deviazione standard del raggio mediati su più realizzazioni.

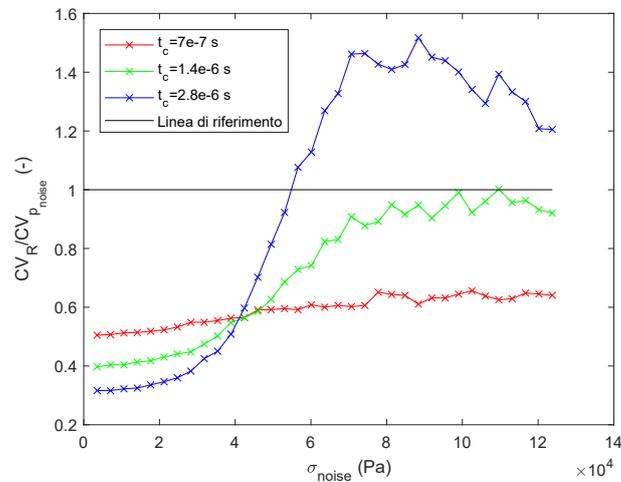


Figura 7.14: Andamento del rapporto tra il coefficiente di variazione della serie temporale del raggio di una bolla forzata stocasticamente e il coefficiente di variazione della serie temporale della forzante di pressione al variare dell'intensità (σ_{noise}) e del tempo di correlazione del rumore (t_c), realizzato utilizzando i valori di media e deviazione standard del raggio mediati su più realizzazioni.

adoperato per confrontare la dispersione dei valori della serie temporale del raggio della bolla e di quella della forzante stocastica corrispondente, al variare dei due parametri che la caratterizzano (t_c e c_d).

Per quanto riguarda la pressione agente, la media è una costante ed è pari alla pressione ambiente 10^5 Pa, mentre la deviazione standard varia con l'intensità della fluttuazione, ma non con il tempo di correlazione. Invece, per il raggio della bolla, come osservato nelle Figure 7.9 e 7.10, al variare dei parametri della forzante stocastica, si modificano sia la media sia la varianza.

Nelle Figura 7.13 è riportato l'andamento del coefficiente di variazione del raggio al variare dell'intensità e del tempo di correlazione del rumore, mentre in Figura 7.14 sono stati messi in relazione gli indici del raggio e della forzante. Il coefficiente di variazione del raggio aumenta al crescere dell'intensità del rumore e del tempo di correlazione. Inoltre, per il più grande valore della scala temporale della forzante considerato, la dispersione dei valori del raggio risulta superiore a quella dei valori della pressione stocastica agente sulla bolla.

7.3 Autocorrelogramma e scala integrale del raggio della bolla

In ultima analisi è stata valutata la funzione di autocorrelazione della serie temporale del raggio della bolla al variare dei parametri della forzante. Nella Figura 7.15 sono riportati alcuni autocorrelogrammi, che costituiscono la rappresentazione grafica di queste funzioni, al variare dell'intensità del rumore, per un tempo di correlazione della forzante pari a $1.4 \cdot 10^{-6}$ s.

Si può osservare come per i valori più bassi di intensità del rumore (casi (a) e (b)), la funzione risulti anti-correlata, presentando valori negativi per i primi valori di ritardo temporale (τ_{ac}), mentre per i valori più elevati (casi (c) e (d)) si abbia una buona approssimazione dei risultati con una curva esponenziale. Questi andamenti sono stati osservati anche per le simulazioni del raggio relative agli altri due tempi di correlazione studiati.

La scala integrale è l'area sottesa dalla curva di autocorrelazione e descrive la memoria del segnale. In questo lavoro, per calcolarla, si è considerata la curva per valori di $\rho(\tau_{ac})$ compresi tra 1 e 0.1.

Per individuare il valore di ritardo temporale (τ_{ac}) corrispondente a $\rho(\tau_{ac}) = 0.1$ si è proceduto in maniera differente a seconda della forma dell'autocorrelogramma. Infatti, nel caso in cui fossero presenti anti-correlazioni e quindi oscillazioni nella curva, come ad esempio nei casi (a) e (b) della Figura 7.15, invece di considerare tutti i valori dell'autocorrelazione, per determinare a quale valore di τ_{ac} interrompere il calcolo della scala integrale, sono stati considerati solo i massimi di ciascuna oscillazione, il cui inviluppo ha un andamento esponenziale (Figura 7.16). Una volta

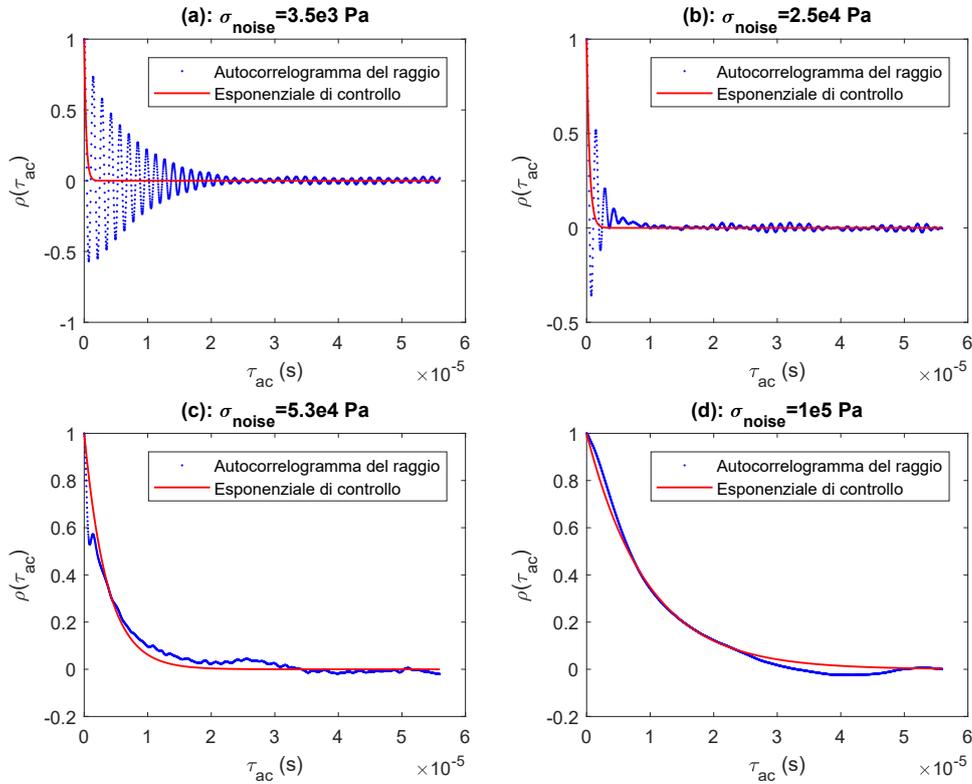


Figura 7.15: Autocorrelogramma del raggio di una bolla soggetta a una fluttuazione di pressione stocastica avente tempo di correlazione pari a $1.4 \cdot 10^{-6}$ s e deviazione standard variabile.

individuato il tempo finale, l'area sottesa, determinata con il metodo dei trapezi, è stata calcolata considerando il valore assoluto della funzione di autocorrelazione, in modo da tener conto anche della memoria dell'anti-correlazione.

La scala integrale del raggio così ottenuta è stata confrontata con quella della fluttuazione di pressione stocastica (Figura 7.17). Per basse intensità del rumore il raggio della bolla è caratterizzato da un'autocorrelazione diversa a seconda della scala temporale della forzante; in Figura 7.17 si possono individuare tre curve ben distinte. Invece, per alte intensità del rumore, la risposta della bolla risulta indipendente dal tempo di correlazione della forzante; in Figura 7.17 non si può osservare una marcata distinzione tra i tre andamenti.

Ciò può essere osservato considerando tre segnali di pressione con oscillazione stocastica aventi gli stessi valori per ogni istante temporale, ma differenti tempi di correlazione. Gli andamenti temporali del raggio normalizzato risultanti sono riportati nelle Figure 7.18 e 7.19.

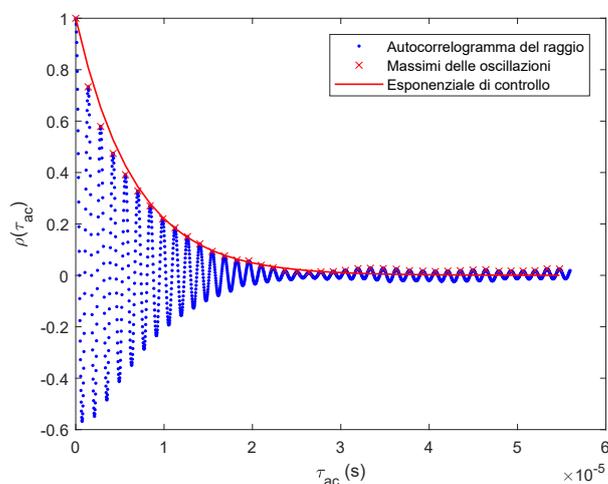


Figura 7.16: Autocorrelogramma del raggio di una bolla soggetta a una fluttuazione di pressione stocastica avente tempo di correlazione pari a $1.4 \cdot 10^{-6}$ s e deviazione standard $3.5 \cdot 10^3$ Pa con involucro esponenziale dei massimi delle oscillazioni.

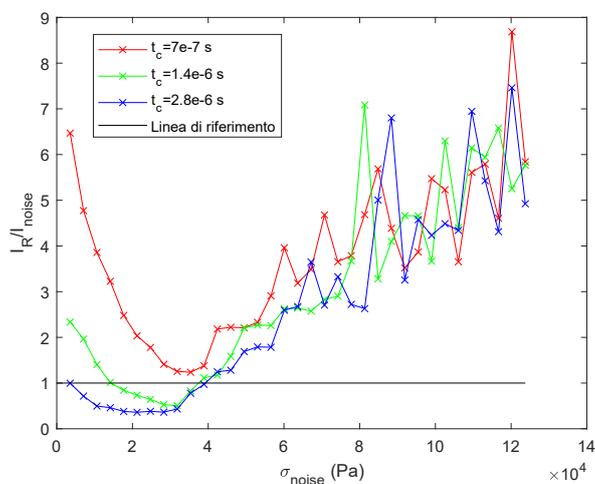


Figura 7.17: Rapporto tra la scala integrale del raggio di una bolla forzata stocasticamente e la scala integrale della forzante al variare dell'intensità del rumore, per i tre tempi di correlazione considerati.

Nella Figura 7.18 sono stati considerati due valori di intensità del rumore bassi, tali per cui il rapporto tra la scala temporale del raggio e quella della forzante preveda tre andamenti distinti in Figura 7.17; si può osservare come la risposta della bolla sia differente a seconda del tempo di correlazione.

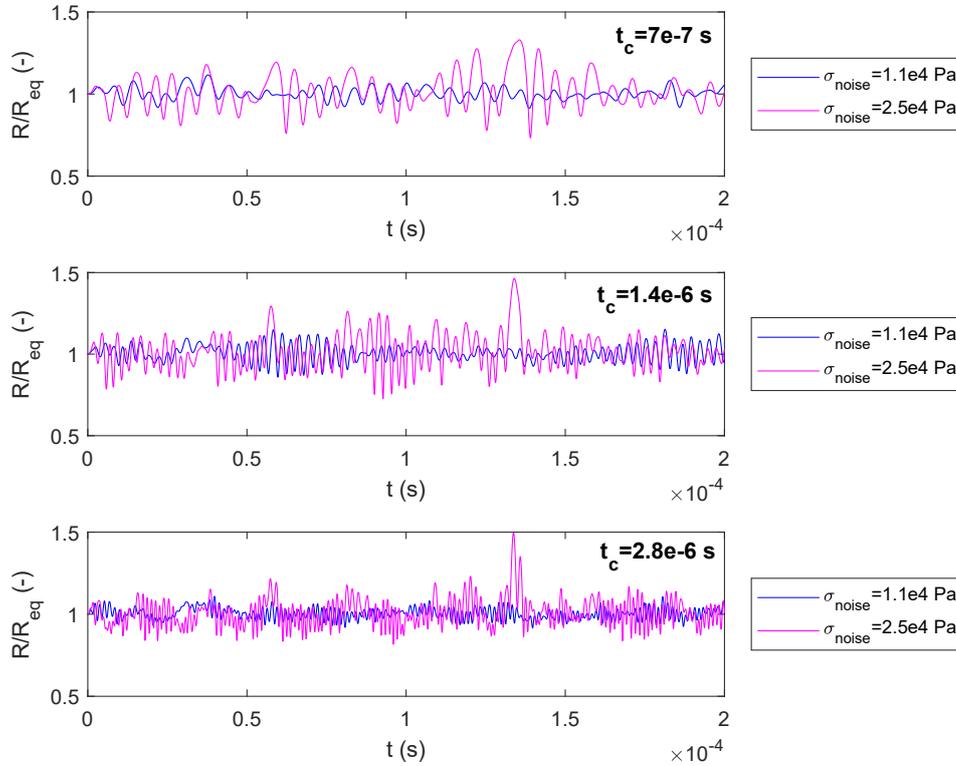


Figura 7.18: Andamenti temporali del raggio normalizzato di una bolla di $5 \mu\text{m}$ soggetta a una fluttuazione di pressione stocastica. Le forzanti hanno gli stessi valori per ogni istante temporale, ma diversi tempi di correlazione (t_c). Per ciascun tempo di correlazione sono stati considerati due valori bassi di intensità del rumore (σ_{noise}).

In Figura 7.19, invece, sono stati considerati due valori di intensità alti. Come già osservato (Figure 7.1 e 7.5), l'ampiezza delle oscillazioni del raggio aumenta al crescere del tempo di correlazione della forzante. Tuttavia, la risposta della bolla, valutabile nella posizione lungo l'asse temporale delle oscillazioni del raggio più pronunciate, risulta indipendente dalla scala temporale della forzante, perchè si ottengono andamenti del raggio simili per tutti e tre i tempi di correlazione considerati.

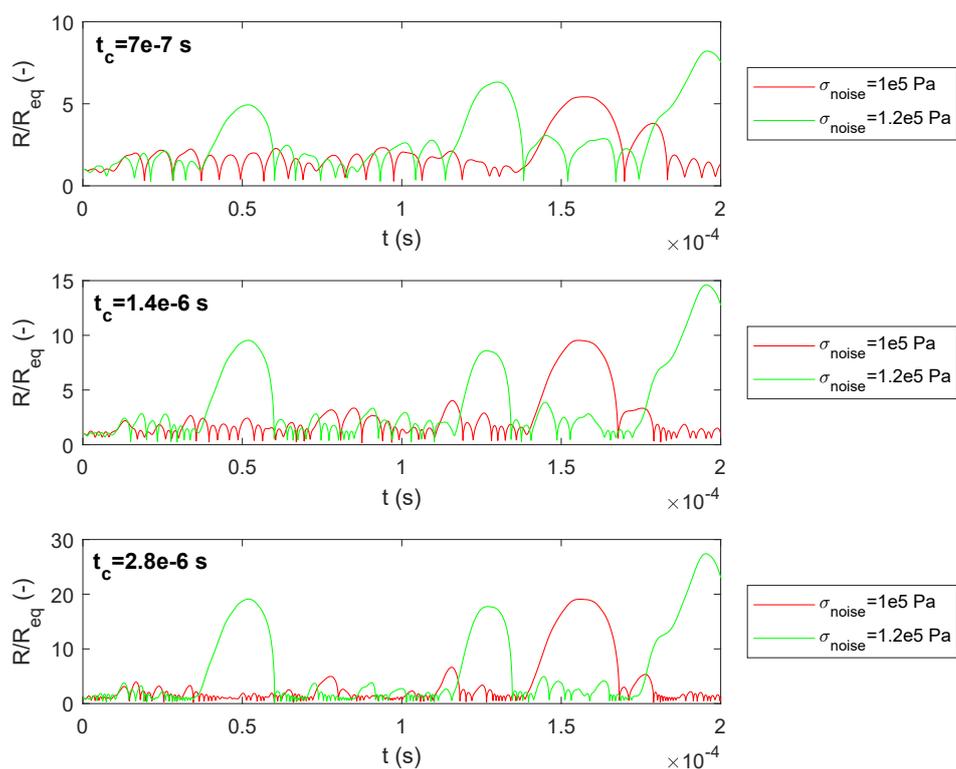


Figura 7.19: Andamenti temporali del raggio normalizzato di una bolla di $5 \mu\text{m}$ soggetta a una fluttuazione di pressione stocastica. Le forzanti hanno gli stessi valori per ogni istante temporale, ma diversi tempi di correlazione (t_c). Per ciascun tempo di correlazione sono stati considerati due valori alti di intensità del rumore (σ_{noise}).

8 Conclusioni

Il principale motivo di sviluppo di questa tesi consiste nella recente applicazione del processo di cavitazione idrodinamica come tecnica alternativa di disinfezione dell'acqua.

La base della cavitazione è la dinamica delle bolle, la quale è caratterizzata da equazioni complesse e non lineari.

Nella prima parte della tesi si è osservato il comportamento di una bolla di gas e vapore di $5 \mu\text{m}$, posta in un liquido avente temperatura di 20°C , in equilibrio con una pressione ambiente di 10^5 Pa e soggetta a una fluttuazione di pressione sinusoidale.

Questa forzante variabile nel tempo è caratterizzata da una frequenza pari alla frequenza di oscillazione naturale della bolla e un'ampiezza variabile tra 0 kPa e 300 kPa .

In una prima serie di simulazioni è stato utilizzato il modello adimensionale di Rayleigh-Plesset e l'ampiezza di oscillazione della pressione è stata mantenuta sotto i 100 kPa . Si è osservato che l'oscillazione del raggio, benché avvenga attorno alla posizione di equilibrio, non è simmetrica rispetto a questo valore e risulta più ampia all'aumentare dell'ampiezza della forzante, anche se per ciascuna simulazione si mantiene costante nel tempo.

Successivamente, aumentando l'ampiezza di oscillazione della forzante fino a 300 kPa e di conseguenza anche quella del raggio della bolla, si è deciso di utilizzare il modello adimensionale di Keller-Miksis che tiene conto della comprimibilità del liquido. Infatti, se la velocità della superficie della bolla è comparabile alla velocità del suono nel liquido, come in caso di ampie oscillazioni, non è più possibile considerare quest'ultima velocità infinita.

Questa seconda serie di simulazioni con forzante sinusoidale ha permesso di osservare la *period-doubling route to chaos* della bolla oggetto di studio, cioè la modalità con cui le oscillazioni periodiche della bolla diventano caotiche. La presenza di caos deterministico è uno dei principali effetti non lineari della dinamica delle bolle. Per visualizzare le regioni caotiche al variare dell'ampiezza dell'oscillazione di pressione è stato realizzato il diagramma di biforcazione, dal quale si è osservato che, una volta raggiunto il comportamento caotico, non è detto che esso si mantenga indefinitamente al variare dell'ampiezza di oscillazione.

Sebbene la bolla assuma comportamenti poco prevedibili già in un campo di pressione acustico, come precedentemente osservato, l'ambiente in cui avviene la cavitazione

zione idrodinamica è spesso soggetto a fluttuazioni casuali di pressione. Per questo motivo, per simulare un regime fluido turbolento, si è considerata una fluttuazione stocastica di pressione, modellata, tramite il processo Markoviano di Ornstein-Uhlenbeck, come un rumore colorato Gaussiano.

I parametri che caratterizzano questo tipo di segnale sono la costante di diffusione, che ne descrive l'intensità, e il tempo di correlazione, che ne descrive la scala temporale. In base alle combinazioni dei valori assunti da questi due parametri, scelti secondo le caratteristiche dell'oscillazione di pressione sinusoidale studiata in precedenza, sono state ottenute diverse realizzazioni del processo stocastico e quindi diversi andamenti di pressione stocastica.

Anche in questo caso per le simulazioni del raggio della bolla si è utilizzato il modello adimensionale di Keller-Miksis.

L'andamento del raggio simulato è stato osservato dal punto di vista della forma della distribuzione dei valori assunti dal raggio e della funzione di autocorrelazione.

La serie temporale del raggio di una bolla è caratterizzata da oscillazioni irregolari e non periodiche. All'aumentare dell'intensità e del tempo di correlazione del rumore, l'ampiezza delle oscillazioni aumenta; inoltre, a pari deviazione standard del campo di pressione, la media delle oscillazioni del raggio causate da una fluttuazione stocastica è maggiore di quella raggiunta in seguito a una fluttuazione sinusoidale.

Le distribuzioni di frequenza dei valori del raggio sono asimmetriche, più appuntite di una normale e unimodali; come osservato dalle serie temporali, all'aumentare dell'intensità e del tempo di correlazione della forzante, presentano code più lunghe verso destra con valori dell'indice di asimmetria positivi.

Anche il calcolo degli indici statistici permette di affermare il consistente spostamento verso valori maggiori della media delle serie temporali del raggio, dovuto alle ampie oscillazioni compiute dalla bolla, soprattutto per elevati valori di intensità del rumore e di tempo di correlazione.

In ultimo, dopo aver confrontato l'andamento del raggio della bolla e della sua media nei due diversi campi di pressione, sono state rapportate le scale temporali della bolla e della forzante di pressione stocastica. Attraverso le funzioni di autocorrelazione, si è osservato che, per i valori più elevati di intensità del rumore, il comportamento della bolla è indipendente dal tempo di correlazione della forzante.

Un possibile sviluppo futuro di questa tesi potrebbe consistere nell'esaminare il comportamento di una bolla in un campo di pressione stocastico con intensità superiori a quelle finora considerate e nello studiare la fase di collasso, in quanto costituisce la fase della cavitazione attiva nel processo di disinfezione.

A Equazioni adimensionali in MATLAB

```
1 %%%%%Non dimensional form of the Rayleigh-Plesset equation
2
3
4 function [Rpad]=RP_eqAD_val(tad, Rad)
5
6 global S Pv k tt rr p_eq rho nu
7
8 % S: surface tension (N/m)
9 % Pv: vapour pression (Pa)
10 % k: polytropic exponent (-)
11 % rho: liquid density (kg/m^3)
12 % mu: liquid dynamic viscosity (Pa*s)
13 % nu=mu/rho: liquid kinematic viscosity (m^2/s)
14 % tt: temporal scale (s)
15 % rr: length scale (m)
16 % p_eq: liquid pressure far from the bubble (Pa)
17
18 pinf_t=p_eq;           %external pressure (Pa)
19 pp=p_eq-Pv;           %pressure scale (Pa)
20 pg0=p_eq-Pv+2*S/rr;   %reference gas pressure (Pa)
21 Th=(pp*(tt^2))/(rho*rr^2); %Thoma number (-)
22 P0ad=(pg0*(tt^2))/(rho*rr^2); %Pressure number (-)
23 We=(2*S*(tt^2))/(rho*rr^3); %Weber number (-)
24 Re=(rr^2)/(4*nu*tt); %Reynolds number (-)
25
26
27 Rpad=zeros(2,1);
28
29 Rpad(1)=Rad(2);
30 Rpad(2)=(1/Rad(1))*(-(3*(Rad(2)^2)/2)-(Th*(pinf_t-Pv)/pp)+...
31 (P0ad/(Rad(1)^(3*k)))-(We/Rad(1))-(Rad(2)/(Re*Rad(1))));
32
33 end
```

```

1 %%%Non dimensional form of the Keller-Miksis equation
2
3
4 function [Rpad]=KM_eqAD(tad, Rad)
5
6 global rho mu c k Pv S p_eq rr tt A
7
8 % S: surface tension (N/m)
9 % Pv: vapour pression (Pa)
10 % k: polytropic exponent (-)
11 % rho: liquid density (kg/m^3)
12 % mu: liquid dynamic viscosity (Pa*s)
13 % nu=mu/rho: liquid kinematic viscosity (m^2/s)
14 % c: sound velocity in liquid (m/s)
15 % A: pressure amplitude (Pa)
16 % tt: temporal scale (s)
17 % rr: length scale (m)
18 % p_eq: liquid pressure far from the bubble (Pa)
19
20 %%%gas pressure inside the bubble (Pa)
21 pG=(2*S/rr-(Pv-p_eq))*(1/Rad(1))^(3*k);
22 %%%pressure outside the bubble at the bubble wall (Pa)
23 pL=pG+Pv-2*S/(rr*Rad(1))-4*mu*Rad(2)/(tt*Rad(1));
24 %%%Mach number (-)
25 M=rr*Rad(2)/(tt*c);
26 %%%references properties
27 p_ref=rho*rr^2*tt^(-2);
28 mu_ref=c*rho*rr;
29 mu_refA=mu_ref/tt;
30 mu_refB=mu_refA/(2*pi);
31
32
33 N=(pL-(p_eq+A*sin(2*pi.*tad)))/(p_ref*Rad(1)+Rad(2)/...
34 (mu_refA*Rad(1))*(pG*(1-3*k)-(p_eq+A*sin(2*pi.*tad))+Pv)-...
35 (A*cos(2*pi.*tad))/mu_refB-(1-M/3)*3*(Rad(2)^2)/(2*Rad(1));
36 D=1-M+(4*mu/(mu_ref*Rad(1)));
37
38 Rpad=zeros(2,1);
39
40 Rpad(1)=Rad(2);
41 Rpad(2)=N/D;
42
43 end

```

B Durata delle simulazioni in campo stocastico

Per determinare la durata accettabile di simulazione in campo stocastico l'andamento del raggio della bolla è stato simulato per diversi intervalli di tempo a partire da una stessa realizzazione di pressione, al variare dell'intensità di pressione e per i tre tempi di correlazione considerati. Come parametro per il confronto tra simulazioni a durata diversa è stata scelta la media dei valori assunti dal raggio a ogni multiplo intero del tempo di correlazione.

Nelle Figure B.1-B.2-B.3-B.4-B.5-B.6 sono riportati i grafici relativi al confronto tra le diverse durate per tutti i tempi di correlazione. Si può osservare che, all'aumentare dell'intensità del rumore, è necessario aumentare la durata di simulazione per ottenere la convergenza della media; anche per questo motivo si è scelto di limitare le simulazioni a valori di deviazione standard del rumore inferiori a $1.25 \cdot 10^5$ Pa.

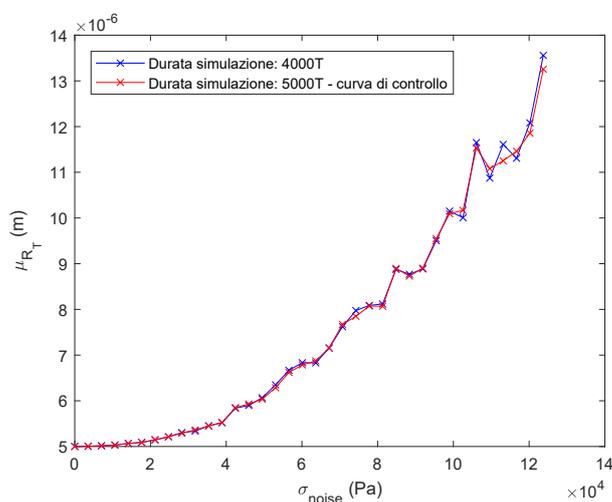


Figura B.1: Confronto tra i valori di media del raggio (R_T) ottenuti con simulazioni a durata diversa (4000T-5000T, con $T = t_c$), a partire da una stessa realizzazione di pressione ($t_c = 7 \cdot 10^{-7}$ s).

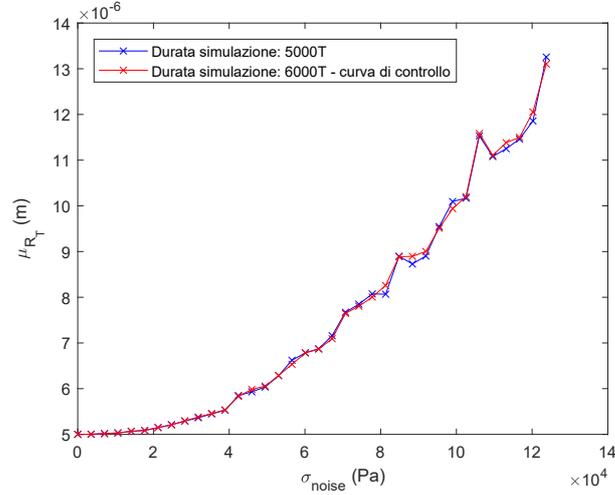


Figura B.2: Confronto tra i valori di media del raggio (R_T) ottenuti con simulazioni a durata diversa (5000T-6000T, con $T = t_c$), a partire da una stessa realizzazione di pressione ($t_c = 7 \cdot 10^{-7}$ s).

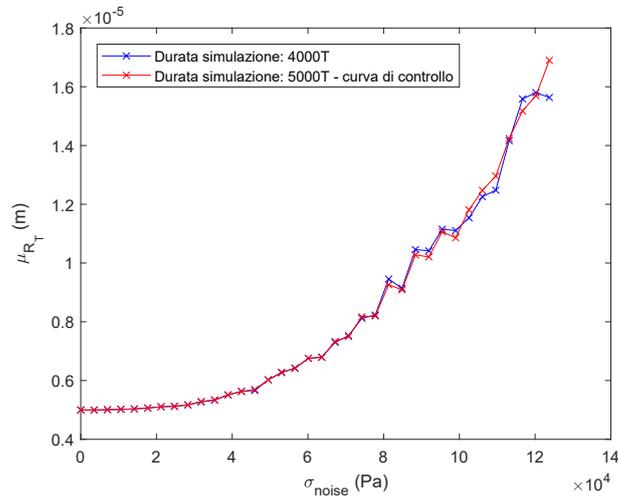


Figura B.3: Confronto tra i valori di media del raggio (R_T) ottenuti con simulazioni a durata diversa (4000T-5000T, con $T = t_c$), a partire da una stessa realizzazione di pressione ($t_c = 1.4 \cdot 10^{-6}$ s).

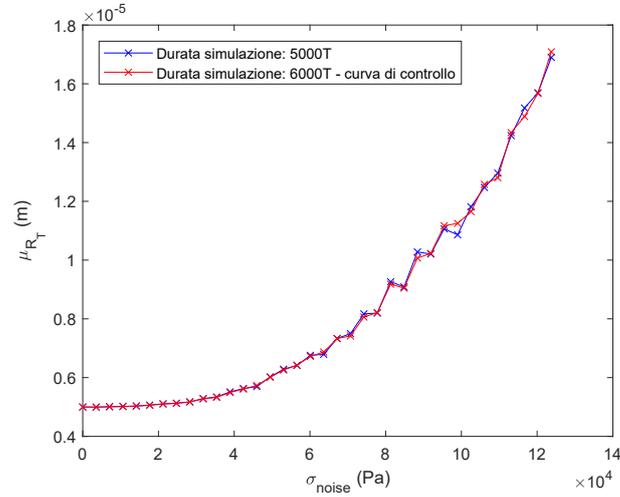


Figura B.4: Confronto tra i valori di media del raggio (R_T) ottenuti con simulazioni a durata diversa (5000T-6000T, con $T = t_c$), a partire da una stessa realizzazione di pressione ($t_c = 1.4 \cdot 10^{-6}$ s).

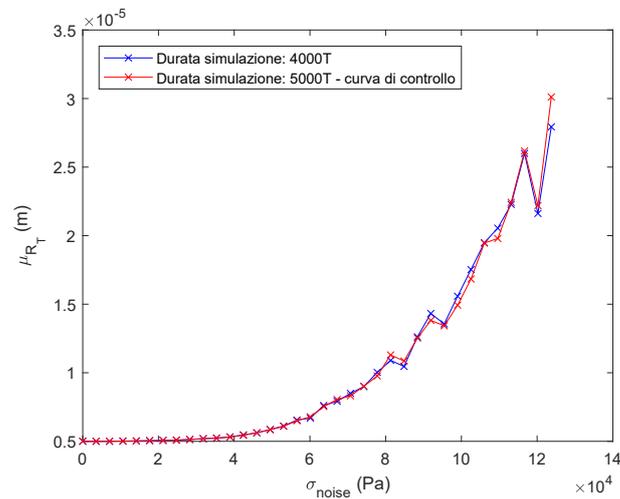


Figura B.5: Confronto tra i valori di media del raggio (R_T) ottenuti con simulazioni a durata diversa (4000T-5000T, con $T = t_c$), a partire da una stessa realizzazione di pressione ($t_c = 2.8 \cdot 10^{-6}$ s).

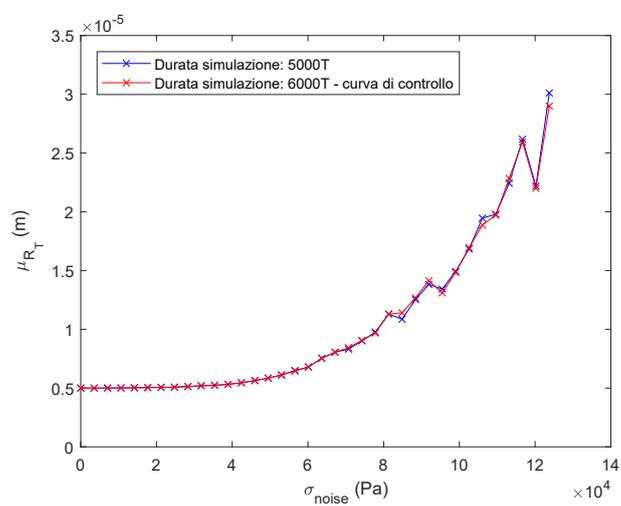


Figura B.6: Confronto tra i valori di media del raggio (R_T) ottenuti con simulazioni a durata diversa (5000T-6000T, con $T = t_c$), a partire da una stessa realizzazione di pressione ($t_c = 2.8 \cdot 10^{-6}$ s).

C Medie degli indici statistici su più realizzazioni

Per verificare l'indipendenza dalla singola realizzazione stocastica degli andamenti ottenuti nelle Figure 7.9-7.10-7.11-7.12 sono state svolte diverse simulazioni del raggio della bolla a partire da differenti osservazioni di pressione e ne sono stati calcolati i principali indici statistici. Successivamente, gli indici sono stati mediati all'aumentare delle simulazioni svolte, aggiungendo ogni volta i risultati di una nuova realizzazione (Figure C.1-C.2-C.3).

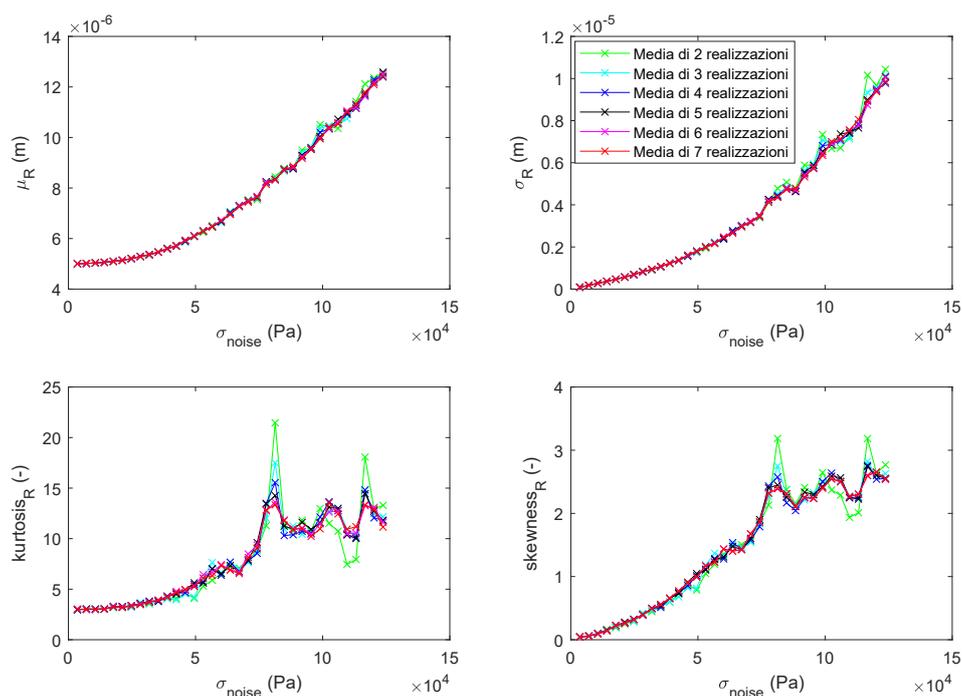


Figura C.1: Medie degli indici statistici di più realizzazioni del raggio di una bolla forzata stocasticamente da un'oscillazione di pressione avente tempo di correlazione $7 \cdot 10^{-7}$ s e deviazione standard variabile. La legenda, riportata una sola volta per migliorare la visualizzazione dei dati, è valida per tutti e quattro i grafici.

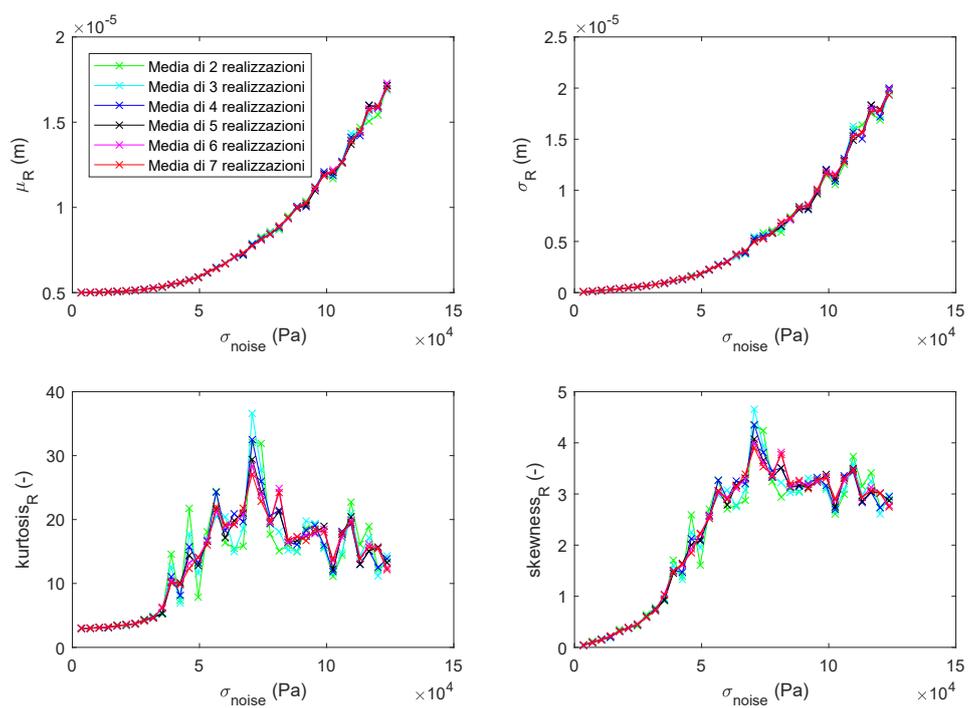


Figura C.2: Medie degli indici statistici di più realizzazioni del raggio di una bolla forzata stocasticamente da un'oscillazione di pressione avente tempo di correlazione $1.4 \cdot 10^{-6}$ s e deviazione standard variabile. La legenda, riportata una sola volta per migliorare la visualizzazione dei dati, è valida per tutti e quattro i grafici.

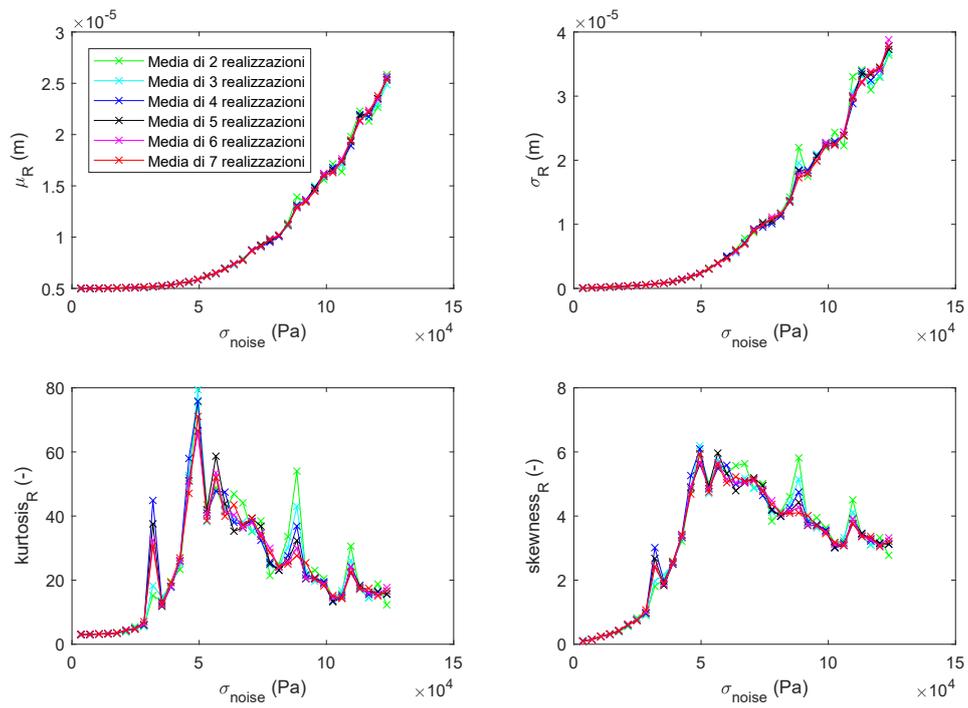


Figura C.3: Medie degli indici statistici di più realizzazioni del raggio di una bolla forzata stocasticamente da un'oscillazione di pressione avente tempo di correlazione $2.8 \cdot 10^{-6}$ s e deviazione standard variabile. La legenda, riportata una sola volta per migliorare la visualizzazione dei dati, è valida per tutti e quattro i grafici.

Bibliografia

- [1] Yutaka Abe, Masahiro Kawaji, and Tadashi Watanabe. Study on the bubble motion control by ultrasonic wave. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 26(6-7):817–826, 2002.
- [2] I Akhatov, N Gumerov, CD Ohl, U Parlitz, and W Lauterborn. The role of surface tension in stable single-bubble sonoluminescence. *Physical review letters*, 78(2):227, 1997.
- [3] I Sh Akhatov and SI Konovalova. Regular and chaotic dynamics of a spherical bubble. *Journal of applied mathematics and mechanics*, 69(4):575–584, 2005.
- [4] H Alehossein and Z Qin. Numerical analysis of rayleigh–plesset equation for cavitating water jets. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 72(7):780–807, 2007.
- [5] Ali Alhelfi and Bengt Sunden. Predictions of temperature and pressure fields due to collapse of a bubble in sulfuric acid solution under ultrasound. *Journal of Thermal Science and Engineering Applications*, 8(4):041010, 2016.
- [6] Abbas Aliabadi and Alireza Taklifi. The effect of magnetic field on dynamics of gas bubbles in visco-elastic fluids. *Applied Mathematical Modelling*, 36(6):2567–2577, 2012.
- [7] RE Apfel. Acoustic cavitation prediction. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 69(6):1624–1633, 1981.
- [8] Robert E Apfel. 7. acoustic cavitation. In *Methods in experimental physics*, volume 19, pages 355–411. Elsevier, 1981.
- [9] S Arrojo, Y Benito, and A Martínez Tarifa. A parametrical study of disinfection with hydrodynamic cavitation. *Ultrasonics Sonochemistry*, 15(5):903–908, 2008.
- [10] Sohrab Behnia, Amin Jafari Sojahrood, Wiria Soltanpoor, and Leila Sarkhosh. Towards classification of the bifurcation structure of a spherical cavitation bubble. *Ultrasonics*, 49(8):605–610, 2009.

- [11] FG Blake. Technical memo 12. *Acoustics Research Laboratory, Harvard University, Cambridge, MA*, 1949.
- [12] Christopher E Brennen. *Cavitation and bubble dynamics*. Cambridge University Press, 2013.
- [13] Christopher Earls Brennen and Christopher E Brennen. *Fundamentals of multiphase flow*. Cambridge university press, 2005.
- [14] Jitendra Carpenter, Mandar Badve, Sunil Rajoriya, Suja George, Virendra Kumar Saharan, and Aniruddha B Pandit. Hydrodynamic cavitation: an emerging technology for the intensification of various chemical and physical processes in a chemical process industry. *Reviews in Chemical Engineering*, 33(5):433–468, 2017.
- [15] James M Carroll, Michael L Calvisi, and Leal K Lauderbaugh. Dynamical analysis of the nonlinear response of ultrasound contrast agent microbubbles. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 133(5):2641–2649, 2013.
- [16] Kelsey J Carvell and Timothy A Bigelow. Dependence of optimal seed bubble size on pressure amplitude at therapeutic pressure levels. *Ultrasonics*, 51(2):115–122, 2011.
- [17] Luis M Cerecedo, Cesar Dopazo, and Rafael Gomez-Lus. Water disinfection by hydrodynamic cavitation in a rotor-stator device. *Ultrasonics Sonochemistry*, 48:71–78, 2018.
- [18] KJY Chong, CY Quek, F Dzaharudin, A Ooi, and R Manasseh. The effects of coupling and bubble size on the dynamical-systems behaviour of a small cluster of microbubbles. *Journal of Sound and Vibration*, 329(6):687–699, 2010.
- [19] LA Crum. Acoustic cavitation series: part five rectified diffusion. *Ultrasonics*, 22(5):215–223, 1984.
- [20] Lawrence A Crum and Gary M Hansen. Generalized equations for rectified diffusion. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 72(5):1586–1592, 1982.
- [21] Mario A Díaz de la Rosa, Ghaleb A Hussein, and William G Pitt. Mathematical modeling of microbubble cavitation at 70 khz and the importance of the subharmonic in drug delivery from micelles. *Ultrasonics*, 53(1):97–110, 2013.
- [22] John A Dean. Lange’s handbook of chemistry. *Material and manufacturing process*, 5(4):687–688, 1990.

-
- [23] Anthony Eller and HG Flynn. Rectified diffusion during nonlinear pulsations of cavitation bubbles. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 37(3):493–503, 1965.
- [24] Andreas Finnøy. Acoustic and mechanical properties of microbubbles stabilized by polymeric nanoparticles, 2013.
- [25] HG Flynn. Physics of acoustic cavitation in liquids. *Physical acoustics*, 1(Part B):57–172, 1964.
- [26] Jean-Pierre Franc and Jean-Marie Michel. *Fundamentals of cavitation*, volume 76. Springer Science & Business Media, 2006.
- [27] Shigeo Fujikawa and Teruaki Akamatsu. Effects of the non-equilibrium condensation of vapour on the pressure wave produced by the collapse of a bubble in a liquid. *Journal of Fluid Mechanics*, 97(3):481–512, 1980.
- [28] D Felipe Gaitan, Lawrence A Crum, Charles C Church, and Ronald A Roy. Sonoluminescence and bubble dynamics for a single, stable, cavitation bubble. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 91(6):3166–3183, 1992.
- [29] Daniel T Gillespie. Exact numerical simulation of the ornstein-uhlenbeck process and its integral. *Physical review E*, 54(2):2084, 1996.
- [30] Forrest R Gilmore. The growth or collapse of a spherical bubble in a viscous compressible liquid. 1952.
- [31] Parag R Gogate. Hydrodynamic cavitation for food and water processing. *Food and Bioprocess Technology*, 4(6):996–1011, 2011.
- [32] Matthieu Guédra, Claude Inserra, Bruno Gilles, and Jean-Christophe Béra. Numerical investigations of single bubble oscillations generated by a dual frequency excitation. In *Journal of Physics: Conference Series*, volume 656, page 012019. IOP Publishing, 2015.
- [33] Y Hao and Andrea Prosperetti. The dynamics of vapor bubbles in acoustic pressure fields. *Physics of fluids*, 11(8):2008–2019, 1999.
- [34] Ferenc Hegedűs and Kálmán Klapcsik. The effect of high viscosity on the collapse-like chaotic and regular periodic oscillations of a harmonically excited gas bubble. *Ultrasonics sonochemistry*, 27:153–164, 2015.
- [35] Sascha Hilgenfeldt, Michael P Brenner, Siegfried Grossmann, and Detlef Lohse. Analysis of rayleigh–plesset dynamics for sonoluminescing bubbles. *Journal of fluid mechanics*, 365:171–204, 1998.

- [36] Joachim Holzfuss. Acoustic energy radiated by nonlinear spherical oscillations of strongly driven bubbles. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 466, pages 1829–1847. The Royal Society, 2010.
- [37] DY Hsieh and MS Plesset. Comments on papers concerning rectified diffusion of cavitation bubbles. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 44(5):1453–1453, 1968.
- [38] KK Jyoti and Aniruddha B Pandit. Water disinfection by acoustic and hydrodynamic cavitation. *Biochemical Engineering Journal*, 7(3):201–212, 2001.
- [39] Joseph B Keller and Ignace I Kolodner. Damping of underwater explosion bubble oscillations. *Journal of applied physics*, 27(10):1152–1161, 1956.
- [40] Joseph B Keller and Michael Miksis. Bubble oscillations of large amplitude. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 68(2):628–633, 1980.
- [41] P Koch, T Kurz, U Parlitz, and W Lauterborn. Bubble dynamics in a standing sound field: The bubble habitat. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 130(5):3370–3378, 2011.
- [42] W Lauterborn and U Parlitz. Methods of chaos physics and their application to acoustics. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 84(6):1975–1993, 1988.
- [43] Werner Lauterborn and Thomas Kurz. Physics of bubble oscillations. *Reports on progress in physics*, 73(10):106501, 2010.
- [44] Timothy Leighton. *The acoustic bubble*. Academic press, 2012.
- [45] Thomas Leong, Muthupandian Ashokkumar, and Sandra Kentish. The fundamentals of power ultrasound-a review. 2011.
- [46] David R Lide et al. *CRC handbook of chemistry and physics*. CRC Boca Raton, 2012.
- [47] Ritva Löfstedt, Bradley P Barber, and Seth J Putterman. Toward a hydrodynamic theory of sonoluminescence. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, 5(11):2911–2928, 1993.
- [48] CA Macdonald and J Gomatam. Chaotic dynamics of microbubbles in ultrasonic fields. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 220(3):333–343, 2006.

- [49] Timothy J Mason. *Advances in sonochemistry*, volume 4. Elsevier, 1996.
- [50] L Mezule, S Tsyfansky, V Yakushevich, and Tālis Juhna. A simple technique for water disinfection with hydrodynamic cavitation: effect on survival of escherichia coli. *Desalination*, 248(1-3):152–159, 2009.
- [51] Vijayanand S Moholkar, Shishir P Sable, and Aniruddha B Pandit. Mapping the cavitation intensity in an ultrasonic bath using the acoustic emission. *AIChE journal*, 46(4):684–694, 2000.
- [52] EA Neppiras and BE Noltingk. Cavitation produced by ultrasonics: theoretical conditions for the onset of cavitation. *Proceedings of the Physical Society. Section B*, 64(12):1032, 1951.
- [53] B Eo Noltingk and Eo A Neppiras. Cavitation produced by ultrasonics. *Proceedings of the Physical Society. Section B*, 63(9):674, 1950.
- [54] Milton S Plesset. The dynamics of cavitation bubbles. *Journal of applied mechanics*, 16:277–282, 1949.
- [55] Stephane Popinet and Stephane Zaleski. Bubble collapse near a solid boundary: a numerical study of the influence of viscosity. *Journal of Fluid Mechanics*, 464:137–163, 2002.
- [56] H Poritsky. The collapse or growth of a spherical bubble or cavity in a viscous fluid. In *Journal of Applied Mechanics*, volume 18, pages 332–333, 1951.
- [57] A Prosperetti. Bubble phenomena in sound fields: part one. *Ultrasonics*, 22(2):69–77, 1984.
- [58] Andrea Prosperetti, Lawrence A Crum, and Kerry W Commander. Nonlinear bubble dynamics. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 83(2):502–514, 1988.
- [59] Lord Rayleigh. Viii. on the pressure developed in a liquid during the collapse of a spherical cavity. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 34(200):94–98, 1917.
- [60] Luca Ridolfi, Paolo D’Odorico, and Francesco Laio. *Noise-induced phenomena in the environmental sciences*. Cambridge University Press, 2011.
- [61] G Simon. Chaotic radial oscillations of a harmonically forced gas bubble, parametric dependence and consequences for sonoluminescence. 2000.

- [62] Xun Sun, Jong Jin Park, Hyun Soo Kim, Seung Ho Lee, Si Jin Seong, Ae Son Om, and Joon Yong Yoon. Experimental investigation of the thermal and disinfection performances of a novel hydrodynamic cavitation reactor. *Ultrasonics Sonochemistry*, 2018.
- [63] John Michael Tutill Thompson, Michael Thompson, and HB Stewart. *Nonlinear dynamics and chaos*. John Wiley & Sons, 2002.
- [64] Roxána Varga and Ferenc Hegedűs. Classification of the bifurcation structure of a periodically driven gas bubble. *Nonlinear Dynamics*, 86(2):1239–1248, 2016.
- [65] Roxána Varga and György Paál. Numerical investigation of the strength of collapse of a harmonically excited bubble. *Chaos, Solitons & Fractals*, 76:56–71, 2015.
- [66] Water.org. The water crisis, 2018.
- [67] Wikipedia. Colors of noise, 2018.
- [68] F Ronald Young. *Cavitation*. World Scientific, 1999.
- [69] Yuning Zhang. Chaotic oscillations of gas bubbles under dual-frequency acoustic excitation. *Ultrasonics sonochemistry*, 40:151–157, 2018.