

**Corso di Laurea Magistrale
in Ingegneria Civile indirizzo Geotecnica**



Tesi di Laurea Magistrale

Stima dei moduli pseudo-elastici in un mezzo trasversalmente isotropo

Relatore:

Prof. Ing. Fabrizio Barpi

Co-relatore:

Prof. Ing. Giorgio Iabichino

Prof. Ing. Corrado Fidelibus

Laureando:

Marco Falcone

A.A 2017/2018

INDICE

Introduzione	1
1. Cenni di teoria dell'elasticità	5
1.1. Materiale isotropo.....	5
1.2. Materiale ortotropo	7
1.3. Materiale trasversalmente isotropo.....	8
2. Stima dei moduli pseudo-elastici per un materiale trasversalmente isotropo .	11
2.1. Soluzione analitica di Nunes.....	11
2.1.1. Modello costitutivo	11
2.1.2. Definizione del problema e ipotesi.....	14
2.1.3. Definizione dell'espressioni generali.....	17
2.1.4. Direzione ed immersione del piano di isotropia	20
2.1.5. Equazioni per definire i parametri pseudo-elastici.....	22
2.2. Soluzione analitica di Nunes modificata	23
2.3. Analisi dei risultati dello stato di deformazione	24
2.4. Considerazioni sulle soluzioni analitiche	27
3. Validazione tramite codici di calcolo	29
3.1 Modellazione numerica FEM: Code_Aster.....	29
3.1.1. Anisotropia in Code_Aster	29
3.2. Simulazione numerica con il codice Code_Aster	31
3.2.1. Geometria del provino	31
3.2.2. Discretizzazione.....	32
3.2.3. Caratterizzazione del modello.....	35
3.2.4. Definizione del comportamento meccanico	36
3.2.5. Definizione e assegnazione del materiale	36
3.2.6. Condizioni al contorno	37
3.2.7. Analisi dei risultati.....	40
3.2.7.1. Analisi e congruenza per il provino isotropo e trasversalmente isotropo con $\beta = 0^\circ$	40
3.2.7.2. Analisi e congruenza per il provino trasversalmente isotropo con $\alpha = 30^\circ$ e $\beta = 60^\circ$	46
3.3. Modellazione numerica FDM: FLAC3D	48
3.3.1. Anisotropia in FLAC3D	48
3.3.1.1. Modello elastico isotropo.....	48

3.3.1.2.	Modello elastico ortotropo	49
3.3.1.3.	Modello elastico trasversalmente isotropo	50
3.4.	Simulazione numerica con il codice FLAC3D	51
3.4.1.	Geometria e discretizzazione del provino	51
3.4.2.	Proprietà meccaniche e condizioni al contorno	51
3.4.3.	Analisi dei risultati	54
3.4.3.1.	Analisi e congruenza per il provino isotropo e trasversalmente isotropo con $\beta = 0^\circ$	54
3.4.3.2.	Analisi e congruenza per il provino trasversalmente isotropo con $\alpha = 30^\circ$ e $\beta = 60^\circ$	61
4.	Determinazione dei moduli pseudo-elastici	65
	Conclusioni	71
	Appendice 1. Cenni sulla determinazione sperimentale per lo stato di deformazione	73
1.1.	Metodo del rilascio tensionale con cella CSIRO o con cella CSIR	73
	Bibliografia	77
	Allegati	79
	Allegato 1: Rotazione del sistema di riferimento xyz	79
	Allegato 2: Risultati del metodo teorico A. L. Nunes	82
Materiale isotropo		82
Materiale trasversalmente isotropo con $\beta=0^\circ$		85
Materiale trasversalmente isotropo con $\beta=60^\circ$		88
	Allegato 3: Risultati metodo teorico A. L. Nunes modificato	91
Materiale trasversalmente isotropo con $\beta=0^\circ$		91
Materiale trasversalmente isotropo con $\beta=60^\circ$		94
	Allegato 4: Script modellazione Code_Aster	97
	Allegato 5: Risultati della soluzione numerica Code_Aster	99
	Allegato 6: Script modellazione FLAC3D	102
	Allegato 7: Soluzione analitica Matlab	104
Soluzione analitica per la determinazione dello stato di deformazione		104
Soluzione analitica del processo inverso per la determinazione dello costanti elastiche		108

Introduzione

Il materiale maggiormente diffuso, in natura, con cui o in cui realizzare opere ingegneristiche è costituito dalla roccia. Le rocce sono corpi inorganici formati in seguito a processi spontanei, generalmente classificate in tre grandi insiemi: (rocce) magmatiche, sedimentarie e metamorfiche. La composizione delle rocce, a differenza dei minerali che le costituiscono e indipendentemente dalla loro genesi, non può essere definita mediante formule chimiche (semplici o complesse), in quanto statisticamente differente da punto a punto. In particolare, le rocce, hanno proprietà fisiche variabili con la direzione e, in tal senso, sono considerate intrinsecamente anisotrope.

Lo studio dello stato tenso-deformativo, indotto o naturale, dei materiali (naturali e/o artificiali) è stato, tra gli altri, studiato da Robert Hooke (1666) che ne ha enunciato le relazioni fondamentali in termini di sollecitazioni e deformazioni.

Nella fisica dei materiali, la legge di Hooke è la più semplice relazione in grado di descrivere il comportamento dei materiali (naturali e/o artificiali), quando sottoposti alla sollecitazione di compressione semplice. Detta legge, quando riferita a materiali elastici-lineari, lega la deformazione mediante il modulo di Young (E) e coefficiente di Poisson (ν), alla sollecitazione applicata al corpo in esame.

In studi successivi, R. Hooke estende la relazione da lui individuata, adattandola in modo da descrivere il comportamento di materiali aventi eterogeneità (delle proprietà fisiche) dipendenti dalla direzione di esame. In tale ambito sono state elaborate le relazioni che legano, in campo elastico, le sollecitazioni alle deformazioni per i materiali a comportamento trasversalmente isotropo (definito da cinque costanti elastiche) e per i materiali a comportamento ortotropo (definito da nove costanti elastiche).

Nell'ingegneria geotecnica e geomeccanica sono di fondamentale importanza sia la conoscenza delle caratteristiche di resistenza e deformabilità del materiale che si intende utilizzare, sia le condizioni di sollecitazione, naturale e/o indotta in cui si trova il materiale stesso in sito. Per tale motivo, l'International Society for Rock Mechanics (ISRM) dal 1977 e più recentemente nel 2014, con la pubblicazione del libro "The ISRM Suggested Methods for Rock Characterization, Testing and Monitoring: 2007 – 2014" individua e suggerisce ai tecnici del settore le principali prove sperimentali utili per la caratterizzazione fisica e il monitoraggio di campioni di roccia o ammassi rocciosi, da eseguire in laboratorio o in sito.

Il presente elaborato, esclusivamente per le rocce a comportamento trasversalmente isotropo, esamina l'esperienza di Anna Laura Nunes condotta nell'ambito della valutazione dello stato di deformazione e la conseguente stima dei moduli pseudo-elastici. In aggiunta, si applica una semplice modifica, alla suddetta esperienza, al fine di ottenere un risultato maggiormente aderente ai risultati

sperimentali. In tale applicazione è di fondamentale importanza la legge di Hooke generalizzata unitamente ai lavori sviluppati da Sergei Gheorgievich Lekhnitskii (1963), nell'ambito della resistenza dei ribattini utilizzati nelle costruzioni navali per unire saldamente lastre metalliche. Infatti, S. G. Lekhnitskii, sviluppa una soluzione analitica per la determinazione dell'intensità e della distribuzione delle sollecitazioni nell'intorno di un foro, praticato in lastre metalliche sovrapposte, sollecitato da pressioni interne o esterne al foro stesso. In tal senso, il mezzo presentava isotropia nel piano delle lastre metalliche, mentre anisotropia nella direzione perpendicolare allo stesso piano.

Nel 1983 Bernard Amadei, a partire dalle considerazioni fatte da Lekhnitskii, estende la soluzione analitica al materiale roccia, eseguendo a supporto, anche determinazioni sperimentali finalizzate alla individuazione delle caratteristiche di deformabilità di rocce a comportamento trasversalmente isotropo. Dette prove, essenzialmente di compressione condotte su dischi muniti di rosette estensimetriche sulle facce opposte o su cilindri pieni o cavi, prelevati in differenti direzioni nella massa rocciosa in esame ed anch'essi muniti di rosette estensimetriche (Peres-Rodrigues, 1966; Douglass and Voight, 1969; Peres-Rodrigues and Aires-Barros, 1970, Duvall, 1965; Liakhovitski and Nevski, 1970; Simonson et al, 1976; Pinto, 1979; Becker and Hooker, 1967), illustrano differenti metodiche utili per ricavare lo stato di deformazione e quindi i cinque parametri elastici necessari alla caratterizzazione delle rocce a comportamento trasversalmente isotropo. Purtroppo, tutti i metodi indicati sono laboriosi, per quanto attinente l'attrezzatura, il numero di determinazioni da effettuare e l'interpretazione nonché dispendiosi, dal punto di vista economico e per tal motivo praticamente non utilizzati.

Grazie ai progressi tecnologici e di ricerca dell'ultimo ventennio, sono stati proposti nuovi metodi per la determinazione sperimentale dei parametri elastici caratteristici dell'anisotropia trasversa. Nel presente elaborato è stato studiato il metodo di determinazione sperimentale delle costanti indicate, proposto da Anna Laura Nunes nel 2002, suggerendone anche una modifica.

Il metodo originale postula che le deformazioni assiali, tangenziali e di taglio, indotte in un cilindro cavo, sollecitato da una pressione di compressione costante applicata sulla sua superficie esterna, sono definite da tre relazioni sinusoidali, derivate dalla matrice generalizzata simmetrica proposta da R. Hooke (1666) e dalle assunzioni riprese dai lavori di Lekhnitskii (1963) e Amadei (1983). Inoltre, come già indicato, il metodo descrive un processo inverso che consente la stima dei moduli pseudo-elastici del materiale roccia.

Alla suddetta soluzione analitica è stata introdotta una modifica, consistente nella sostituzione della matrice di Hooke generalizzata simmetrica con quella asimmetrica, quindi alla roccia si attribuisce un comportamento trasversalmente

isotropo. Anche in questo caso, come indicato in precedenza, il metodo modificato consente la determinazione delle costanti pseudo-elastiche del materiale indagato. La soluzione analitica descritta è maggiormente affidabile per rocce che presentano un basso grado di anisotropia e quindi detta soluzione è stata validata mediante la modellazione numerica. Pertanto, l'esperienza è stata riprodotta utilizzando un metodo numerico agli elementi finiti implementato nel codice di calcolo denominato Code_Aster e uno basato sulle differenze finite, implementato nel codice di calcolo denominato FLAC3D.

Code_Aster è un codice di calcolo realizzato dall'azienda di produzione e distribuzione di energia in Francia EDF (Electricité de France). Il codice open-source, nasce nel 1989, per modellazioni monodimensionali, bidimensionali e tridimensionali, impiegato in ambito strutturale e geotecnico; mentre FLAC3D è un codice, di produzione della Itasca Consulting Group, molto utilizzato per le modellazioni tridimensionali, nell'ambito delle analisi geotecniche di suolo, rocce e acque sotterranee.

1. Cenni di teoria dell'elasticità

Il comportamento delle rocce, sottoposte ad uno stato di sollecitazione, è complesso. Possiamo osservare fenomeni di non linearità anche per le piccole deformazioni, fenomeni di isteresi, anisotropia e deformazioni nel tempo anche a carico costante.

1.1. Materiale isotropo

Un approccio semplice con il quale viene rappresentato un materiale roccioso è il comportamento isotropo, elastico, lineare ed omogeneo.

Un materiale è isotropo, quando le proprietà meccaniche sono indipendenti dalla direzione e quindi risultano identiche lungo tre direzioni ortogonali tra loro (ad esempio X , direzione longitudinale; Y , direzione trasversale; ed Z , direzione normale), come mostrato in figura 1.

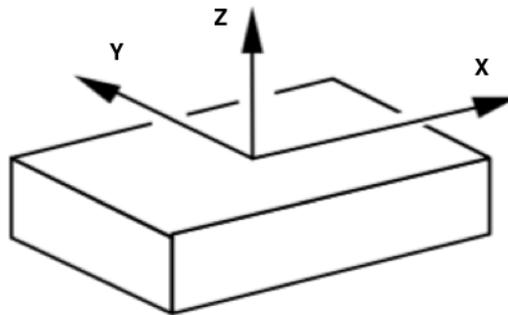


Figura 1: Direzione degli assi di isotropia (Code_Aster)

Lo stato di sollecitazione del materiale a comportamento isotropo è legato allo stato di deformazione secondo una matrice, definita da due costanti elastiche E e ν , in cui E rappresenta il rapporto tra lo stato tensionale applicato e la deformazione da essa prodotta:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

Mentre, ν è il rapporto tra la dilatazione trasversale nella direzione del suo versore j , quando la matrice è sollecitata in direzione longitudinale secondo il versore i :

$$\nu_{ij} = -\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_i} \text{ con } i, j = x, y \text{ e } z$$

Tali parametri, sono denominati rispettivamente modulo elastico normale (o modulo di Young, E) e coefficiente di dilatazione trasversale (coefficiente di Poisson, ν), da questi si ricavano le costanti di Lamè λ e G , dove:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Pertanto la matrice rappresentativa del materiale a comportamento isotropo assume la seguente forma:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & \frac{1}{E} & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

Un materiale si definisce elastico-lineare quando, sottoposto ad una tensione, subisce una deformazione elastica, proporzionale alla tensione applicata secondo il modulo di Young. In tal senso, è possibile individuare diversi comportamenti del materiale, in relazione al carico applicato, come mostrato in *figura 2*. In detta figura, si rappresenta un comportamento elastico-lineare convenzionale ed è possibile osservare come il materiale sia rigorosamente elastico fino al punto 1, al punto 2 sussiste ancora una proporzionalità tra tensione e deformazione, ma dal punto 3 si esce dal campo lineare sino ad arrivare al punto 4 il quale si configura come punto di snervamento del materiale stesso.

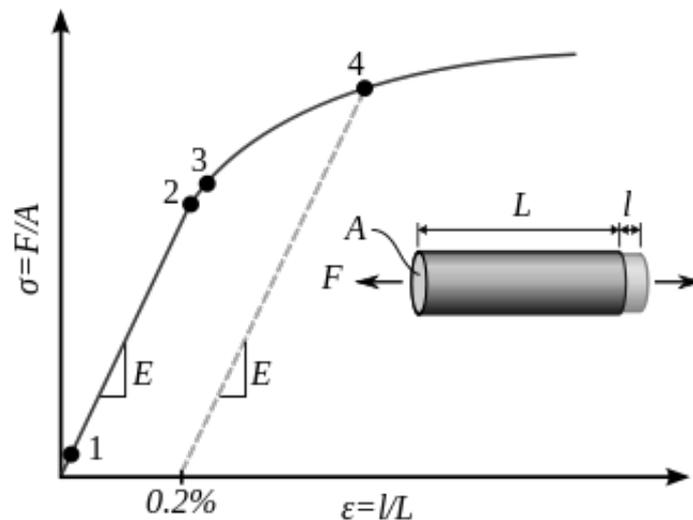


Figura 2: Comportamento elastico-lineare convenzionale (Wikipedia, 2018)

Infine, un materiale si definisce omogeneo, quando sono indipendenti da punto a punto.

1.2. Materiale ortotropo

In realtà, il comportamento del materiale roccia non può sempre essere assunto elastico, lineare, isotropo ed omogeneo poiché, la roccia stessa può essere caratterizzata da differenti proprietà fisiche a loro volta dipendenti dalla disposizione del volume di materiale esaminato. In tal senso il comportamento del materiale roccia può essere definito, anisotropo o trasversalmente isotropa; oppure, a causa delle eterogeneità o discontinuità contenute, può essere definito a comportamento elastico non lineare.

Si definisce quindi materiale a comportamento ortotropo, il materiale che presenta tre piani di simmetria elastica tra loro perpendicolari ed in questo caso le proprietà sono uniche e indipendenti nelle tre direzioni ($x \neq y \neq z$) come mostrato in *figura 3*. In detto materiale le costanti elastiche rappresentative sono nove: E_x, E_y, E_z , sono i moduli elastici nelle direzioni degli assi di simmetria elastica; $\nu_{yx}, \nu_{zx}, \nu_{xy}, \nu_{zy}, \nu_{xz}, \nu_{yz}$, sono i rapporti di Poisson che caratterizzano la deformazione trasversale per effetto di una sollecitazione (compressione o trazione longitudinale) agente in direzione degli assi coordinati; ed infine, G_{xy}, G_{yz}, G_{xz} , sono i moduli di elasticità tangenziale caratteristici di piani rispettivamente paralleli ai piani di simmetria elastica (Barla, 1974). La matrice costitutiva, sarà la seguente:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_x} & \frac{-\nu_{xy}}{E_y} & \frac{-\nu_{zx}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & \frac{-\nu_{zy}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{zx}}{E_x} & \frac{-\nu_{zy}}{E_y} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xz}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{yz}} \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

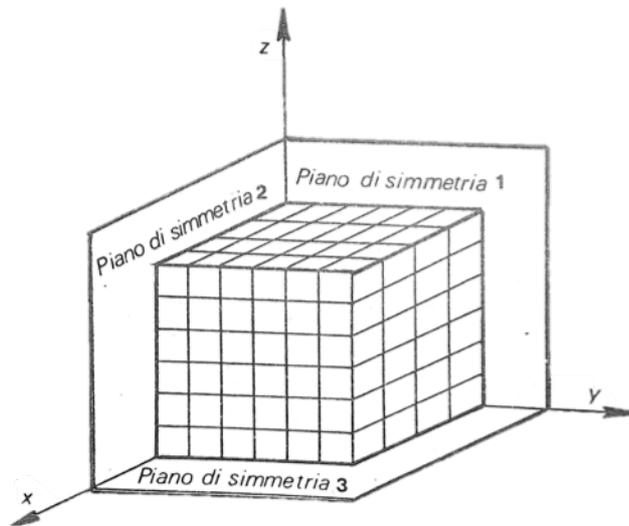


Figura 3: Materiale ortotropo (Barla, 1974)

1.3. Materiale trasversalmente isotropo

Quando un materiale possiede un asse di simmetria elastica di rotazione ed un piano di simmetria elastica (figura 4), tutte le direzioni, giacenti in questo piano o in piani paralleli ad esso, sono equivalenti per quel che riguarda le proprietà elastiche. In tal caso il materiale è definito “trasversalmente isotropo” e le proprietà meccaniche che lo rappresentano sono definite da cinque costanti elastiche: $E_x = E_y \neq E_z$, sono i moduli di elasticità rispetto alle direzioni giacenti nel piano di simmetria e perpendicolarmente ad esso; ν_{xy} è il rapporto di Poisson che caratterizza la deformazione trasversale nel piano di simmetria, conseguente a tensioni giacenti lungo direzioni parallelo al piano, mentre ν_{xz} e ν_{yz} , sono i rapporti di Poisson che definiscono la deformazione trasversale nel piano di simmetria, conseguente a tensioni giacenti lungo direzioni normali ad esso; $G_{xy} \neq G_{yz} = G_{xz}$, sono i moduli di elasticità tangenziale rispettivamente per piani paralleli e normali al piano di simmetria elastica (Barla, 1974). In questo caso la matrice tenso-deformativa sarà:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_x} & \frac{-\nu_{xy}}{E_x} & \frac{-\nu_{xz}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_x} & \frac{-\nu_{zy}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{xz}}{E_x} & \frac{-\nu_{yz}}{E_x} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu_{xy})}{E_x} = \frac{1}{G_{xy}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xz}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{yz}} \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

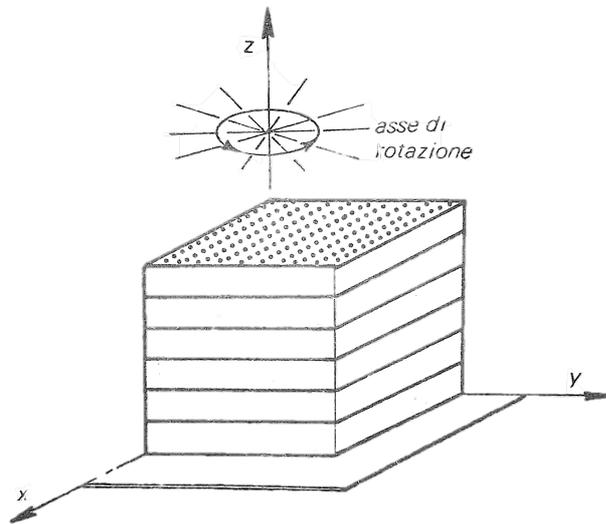


Figura 4: Materiale trasversalmente isotropo (Barla, 1974)

2. Stima dei moduli pseudo-elastici per un materiale trasversalmente isotropo

La valutazione dei parametri di elasticità per un mezzo trasversalmente isotropo, avviene in seguito alla determinazione dello stato di deformazione ottenuto mediante l'esecuzione di prove in sito e/o prove in laboratorio. Ciascuna prova è caratterizzata da differenti fattori come ad esempio il numero di provini necessari, la diversa strumentazione utilizzata, la precisione di indagine e così via.

Lo stato di deformazione può essere definito anche mediante delle soluzioni analitiche. In principio sono state studiate da un Lekhnitskii (1963), nell'ambito della resistenza dei ribattini utilizzati nelle costruzioni navali per unire saldamente lastre metalliche, che sviluppa una soluzione analitica per la determinazione dell'intensità e della distribuzione delle sollecitazioni nell'interno di un foro, praticato in lastre metalliche sovrapposte, sollecitato da pressioni interne o esterne al foro stesso. In tal senso, il mezzo presentava isotropia nel piano delle lastre metalliche, mentre anisotropia nella direzione perpendicolare allo stesso piano. In seguito a tali soluzioni, nel 1983 Bernard Amadei, estende la soluzione analitica alla roccia, eseguendo, a supporto, anche determinazioni sperimentali finalizzate alla individuazione delle caratteristiche di deformabilità di rocce a comportamento trasversalmente isotropo. Dette prove, essenzialmente di compressione condotte su dischi muniti di rosette estensimetriche sulle facce opposte o su cilindri pieni o cavi, prelevati in differenti direzioni nella massa rocciosa in esame ed anch'essi muniti di rosette estensimetriche. I metodi studiati in passato erano molto complicati, da un punto di vista di attrezzatura, numero di determinazioni da effettuare e interpretazione, quindi dispendiose.

Dagli studi di Lekhnitskii e Amadei diversi sono i metodi studiati, tra questi il metodo analitico che viene analizzato in questo elaborato, sviluppato da Anna Laura Nunes (2002) per la determinazione dei parametri di orientazione e deformabilità di un cilindro cavo di roccia avente isotropia trasversa. A questo si affianca una prova di laboratorio con cella triassiale CSIR basata sul principio del metodo del rilascio tensionale. Si riporta in appendice 1, i cenni sul metodo del rilascio tensionale con cella CSIRO o con cella CSIR.

2.1. Soluzione analitica di Nunes

2.1.1. Modello costitutivo

Un materiale continuo lineare trasversalmente isotropo obbedisce alla legge di Hooke generalizzata, come si evince nell'equazione 3 del capitolo 1.3. La medesima equazione può essere espressa in forma matriciale compatta:

$$\{\varepsilon\} = [A]\{\sigma\}$$

A causa della simmetria dei tensori di sollecitazione e deformazione, ci sono 36 distinti termini nella matrice [A]. Questo numero può essere ridotto a 21 se si assume una funzione di energia di deformazione. I numero dei termini nella matrice [A] possono essere ulteriormente ridotti nel caso di simmetria elastica, comportamento che caratterizza gran parte delle rocce. Per esempio, una roccia ortotropica possiede nove costanti elastiche indipendenti, mentre una roccia trasversalmente isotropa ne possiede cinque ed infine un materiale di tipo isotropo possiede soltanto due costanti elastiche. Nel caso in esame, la matrice può essere scritta:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & \frac{-\nu_{xy}}{E_x} & \frac{-\nu_{xz}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{E_x} & \frac{-\nu_{zy}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{2(1+\nu_{xy})}{E_x} = \frac{1}{G_{xy}} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{G_{xz}} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{G_{yz}} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

sym

Tale matrice è definita da un sistema di riferimento arbitrario globale x, y e z, ed un sistema di riferimento locale x', y' e z', essenzialmente legato all'isotropia trasversa del materiale considerato. La direzione α e l'angolo di inclinazione β del piano di isotropia, definiscono l'orientazione del sistema x', y' e z' in relazione al sistema globale x, y e z dell'ammasso roccioso come mostrato in *figura 7*. L'utilizzo dei coseni direttori consentono la trasformazione delle coordinate x', y' e z' nel sistema di coordinate x, y e z, presenti nella *tabella 1*.

La relazione costitutiva, per il materiale trasversalmente isotropo nel sistema di coordinate x', y' e z', è espresso dalla seguente relazione:

$$\{\varepsilon\}_{x'y'z'} = [A]\{\sigma\}_{x'y'z'} \quad (5)$$

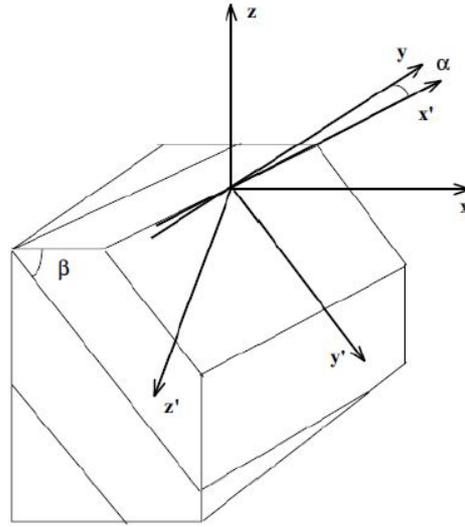


Figura 5: Sistema di coordinate dell'ammasso roccioso trasversalmente isotropo (Nunes, 2002).

	x	y	z
x	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	0
y	$\cos\beta\cos\alpha$	$-\cos\beta\sin\alpha$	$-\sin\beta$
z	$-\sin\beta\cos\alpha$	$\sin\beta\sin\alpha$	$-\cos\beta$

Tabella 1: Coseni direttori

La matrice [A] è esplicitata nell'equazione 4.

I tensori di deformazione e di tensione del sistema di coordinate anisotropo ($\{\varepsilon\}_{x'y'z'}$, $\{\sigma\}_{x'y'z'}$), sono collegati ai tensori di deformazione e tensione del sistema globale ($\{\varepsilon\}_{xyz}$, $\{\sigma\}_{xyz}$) mediante le seguenti equazioni:

$$\{\sigma\}_{x'y'z'} = [T_\sigma]\{\sigma\}_{xyz} \quad (6)$$

$$\{\varepsilon\}_{x'y'z'} = [T_\varepsilon]\{\varepsilon\}_{xyz} \quad (7)$$

In cui, $[T_\sigma]$ è la matrice di trasformazione per i tensori delle tensioni; $[T_\varepsilon]$ è la matrice di trasformazione per i tensori delle deformazioni. Dette matrici sono definite in accordo con i coseni direttori mostrati nella *tabella 1*, ottenuti dalla rotazione del sistema di riferimento (*Allegato 1*).

La relazione costitutiva del suddetto materiale, nel sistema globale x, y e z, si ottiene dalla sostituzione delle equazioni 6 e 7 nelle equazione 5, quindi:

$$\{\varepsilon\}_{xyz} = [T_\varepsilon]^t[A][T_\sigma]\{\sigma\}_{xyz} \quad (8)$$

Che può essere scritta anche nel medesimo modo:

$$\{\varepsilon\}_{xyz} = [K_{ij}]\{\sigma\}_{xyz} \quad \text{dove } i, j = 1, 2, \dots, 6 \quad (9)$$

La matrice $[K]$ è la seguente:

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{21} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix}$$

La matrice di conformità $[K_{ij}]$, presente nella relazione costitutiva riferita al sistema di coordinate globali (x, y e z) per il materiale trasversalmente isotropo, è composta da 13 coefficienti dipendenti da 7 parametri, cioè le cinque costanti elastiche intrinseche (E_1 , E_2 , ν_1 , ν_2 e G_2) e i due parametri della direzione e dell'immersione del piano di isotropia (α e β) (Nunes, 2002).

2.1.2. Definizione del problema e ipotesi

La soluzione analitica di Nunes, consente di stimare i parametri di orientamento (α e β), i moduli elastici (E_1 e E_2), i coefficienti di Poisson (ν_1 e ν_2) e il modulo di taglio (G_2) di rocce principalmente trasversalmente isotrope, in seguito alla determinazione dello stato di deformazione registrato su un provino cilindrico cavo mediante una prova di carico radiale.

Lo sviluppo matematico della soluzione oggetto di studio si basa sulle seguenti tre ipotesi:

- a) Il provino di roccia (residuo da una determinazione di stato tensionale effettuato con metodo CSIR) può essere considerato continuo, omogeneo e trasversalmente isotropo con isotropia trasversale elastica lineare;
- b) La distribuzione delle tensioni isotropiche nei provini cilindrici può essere determinate mediante la teoria elastica lineare;
- c) L'entità delle deformazioni è assunta indipendente dalle dimensioni degli estensimetri.

Il principio di distribuzione isotropa degli sforzi è un aspetto caratterizzante del modello, poiché per valutare lo stato di deformazione per le suddette rocce, la soluzione analitica in forma chiusa non è ancora a disposizione. Lekhnitskii nello studio sullo stato di deformazione, nell'ambito della resistenza dei ribattini utilizzati nelle costruzioni navali per unire saldamente lastre metalliche, ha sviluppato due teorie che possono essere applicate al caso di carichi biassiali su provini cilindrici

CSIR. Queste due teorie possono essere considerate per valutare la grandezza dell'errore associato alla distribuzione delle sollecitazioni ipotizzate.

La prima teoria studia il problema di piastra infinite anisotrope ed omogenee con un foro circolare sotto carico idrostatico. Mediante le espressioni di Lekhnitskii è possibile determinare la distribuzione degli sforzi tangenziali, che si ottengono per diversi gradi di anisotropia. Infatti, si confronta la distribuzione delle sollecitazioni tangenziali di un piano di compensato con rapporto di anisotropia $E_1/E_2 = 2$ e $E_1/E_2 = 1$ (figura 8). Nel caso isotropo, le tensioni tangenziali non variano e assumono un valore pari a $2P$ (P = pressione idrostatica). Mentre le tensioni per caso anisotropo aumentano sino a raggiungere uno scarto percentuale circa pari a l'11% per un angolo $\theta = 90^\circ$ (Nunes, 2002).

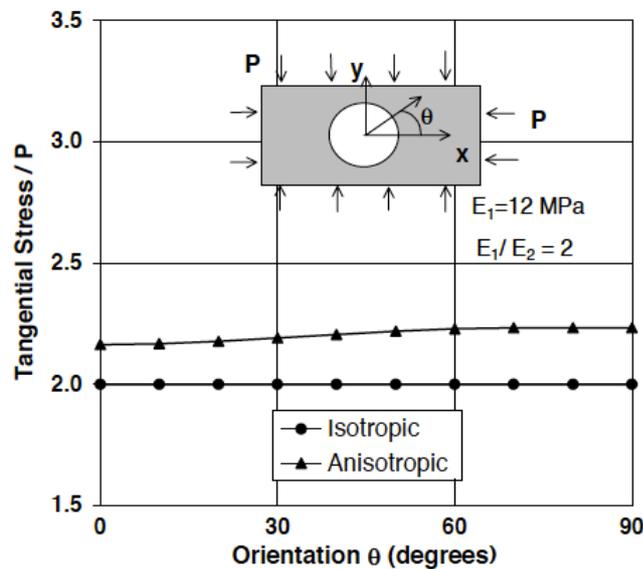


Figura 6: Distribuzione delle tensioni tangenziali sul bordo di un foro in una piastra sottoposta a carico idrostatico P (Nunes, 2002).

La seconda teoria è riferita ad anelli aventi isotropia trasversa lineare, questo è l'ipotesi che si avvicina maggiormente al caso di provini con cella CSIR. Una soluzione matematica in forma chiusa per questo tipo di anisotropia non esiste, detta soluzione è disponibile se si considerano casi più semplici in cui le proprietà elastiche non variano lungo la direzione radiale. In un problema di anisotropia lineare, la soluzione è più complessa, perché le tensioni sono funzione dell'angolo di orientazione. Lekhnitskii, propone una soluzione approssimata per anelli con deboli anisotropie lineari, riscontrando risultati più esatti al diminuire dell'anisotropia. In figura 9 mostra la comparazione fra le sollecitazioni della parete interna ($r = a$) di un anello di compensato con ($E_1 = E_2 = 2$) e le sollecitazioni di un cilindro isotropo. La geometria del provino cilindrico presenta il raggio interno di 19mm e il raggio

esterno pari a 43mm, soggetto ad una pressione di confinamento P_{rad} e una pressione interna nulla (Nunes, 2002).

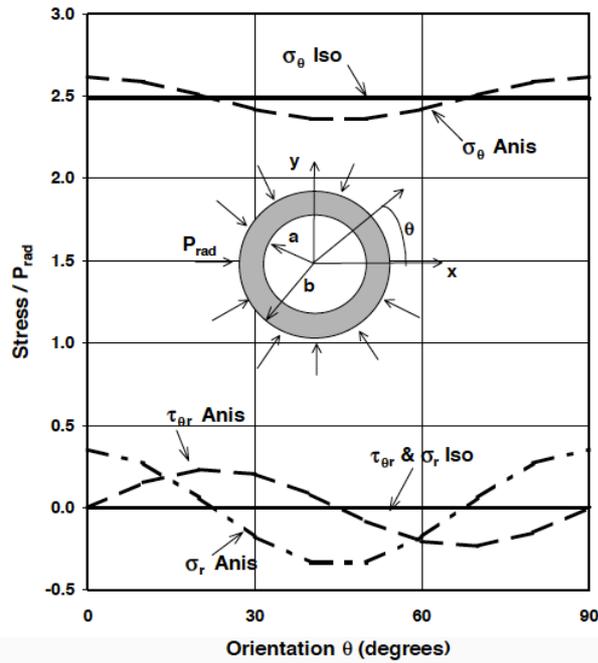


Figura 7: Distribuzione delle tensioni all'interno dell'anello con $a = 19\text{mm}$ e $b = 43\text{mm}$ (Nunes, 2002)

La *figura 9* mostra la variazione delle sollecitazioni nell'anello in funzione della variazione dell'angolo θ sul raggio interno dell'anello anisotropo. In contrasto con la distribuzione uniforme di σ_θ per anelli isotropi, la componente σ_θ non è uniforme quando l'anello è costituito da materiale anisotropo, in quanto σ_θ varia con l'angolo θ e può avere un valore massimo di $2,617P_{rad}$. Il valore di σ_θ corrisponde a una differenza del 5% se rapportato al valore costante di $2,485P_{rad}$ per anelli isotropi. Inoltre la *figura 9* mostra che σ_r e $\tau_{r\theta}$, per quanto piccole, non sono nulle. Questo non è in accordo con le condizioni al contorno $\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0$, per anelli con comportamento anisotropo o isotropi. Questa è una diretta conseguenza delle approssimazioni introdotte dalla teoria Lekhnitskii.

Nunes presenta una disquisizione specifica sui valori tipici di rigidezza per le rocce anisotrope. Considerando un materiali altamente anisotropo, come nel caso estremo del piano di compensato, i valori ottenuti con la teoria di Lekhnitskii presentano un errore massimo relativo del 5%, per l'anello, e dell'11%, nel caso del foro in una piastra finita. L'errore relativo diventa ancora meno significativo (circa il 3%) per materiali con rigidezza maggiore, e con grado di anisotropia inferiore a 2. Pertanto, se le ipotesi formulate nel caso delle due teorie descritte possono essere considerate valide, l'ipotesi sulla distribuzione delle σ_θ può essere ritenuta accettabile (Nunes, 2002).

2.1.3. Definizione dell'espressioni generali

Per sviluppare le espressioni generali del suddetto metodo, è necessario stabilire tre differenti sistemi di coordinate:

- Il sistema di coordinate dell'ammasso roccioso (figura 7), corrispondente al sito di ottenimento del provino;
- Il sistema di coordinate del provino (figura 10, 11), corrispondente alla roccia intatta dove il rilascio tensionale e il carico biassiale sono stati applicati;
- Il sistema di coordinate delle rosette CSIR (figura 12), corrispondente alla posizione locale del provino dove gli estensimetri sono stati applicati.

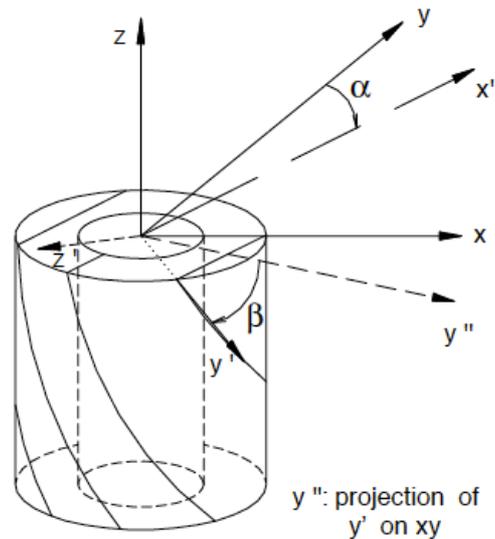


Figura 8: Sistema di coordinate per il modello analitico dell'overcoring (Nunes, 2002)

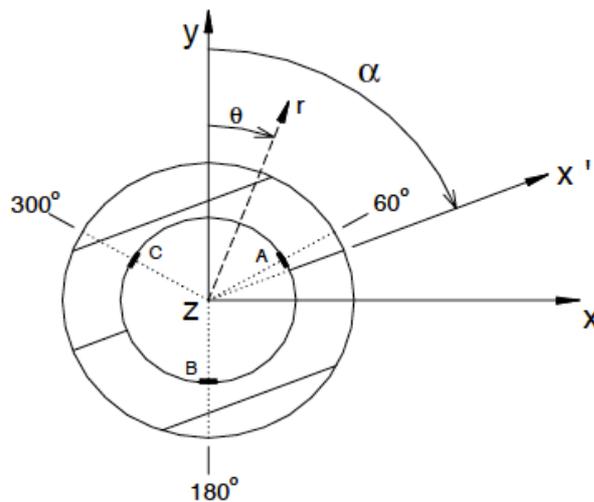


Figura 9: Sistema di coordinate per il modello analitico dell'overcoring con la cella CSIR (Nunes, 2002)

Il sistema di coordinate dell'ammasso roccioso è associato a quello del sovra-carotaggio (figura 10 e 11) x, y, z ed è corrispondente al sistema globale, mentre il

sistema x', y', z' corrisponde al sistema dell'anisotropia del materiale. Gli angoli α e β anch'essi sono stati precedentemente definiti.

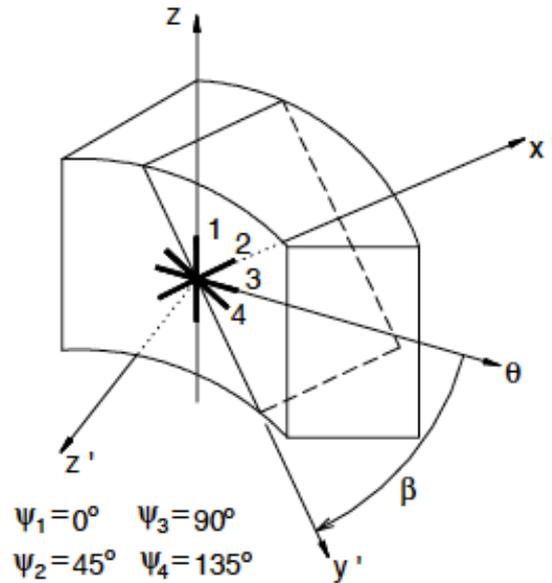


Figura 10: Sistema di coordinate per il modello analitico delle quattro rosette estensimetriche (Nunes, 2002)

Il sistema globale x, y, z è trasformato nel sistema di coordinate cilindriche r, θ, z (con z che rimane costante). Questo consente di identificare in maniera migliore la posizione angolare delle rosette. L'angolo θ definisce l'orientazione del sistema locale in relazione al sistema globale, con la sua origine fissato sull'asse y . Tre rosette CSIR (A, B, C in figura 11) sono posizionate a $\theta_A = 60^\circ$, $\theta_B = 180^\circ$ e $\theta_C = 300^\circ$. Anche i 4 estensimetri delle rosette sono identificati con un sistema di coordinate bidimensionali θ, z , alla posizione $0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ e 135° , in figura 12.

Considerando le suddette ipotesi, l'equazione costitutiva globale (equazione 9) può essere usata per legare le deformazioni e gli sforzi dovuti a un test di compressione biassiale condotto su un provino utilizzato per la determinazione di stato di sollecitazione con il metodo CSIR. Le deformazioni misurate sulla parete interna del cilindro cavo sono funzione della posizione delle rosette della cella CSIR. È necessario trasformare le deformazioni dal sistema globale x, y, z nel sistema globale cilindrico r, θ, z . Questa trasformazione è più conveniente farla mantenendo lo stesso orientamento per la direzione α (figura 11). Devono essere presi in considerazione i coseni direttori della tabella 1, con angolo di immersione $\beta = 0$ (la cella CSIR è posizionata orizzontalmente). La trasformazione del sistema di coordinate porta all'equazione 10:

$$\{\varepsilon\}_{r\theta z} = [T_\varepsilon]_{r\theta z} \{\varepsilon\}_{xyz} \quad (10)$$

sostituendo in questa equazione quanto esplicitato nell'equazione 9, le deformazioni ottenute dalle rosette possono essere associate ai parametri elastici e alle componenti tensionali per un carico biassiale, come segue:

$$\{\varepsilon\}_{r\theta z} = [T_\varepsilon]_{r\theta z} [K] \{\sigma\}_{xyz} \quad (11)$$

Le deformazioni sono misurate sulla parete interna del cilindro cavo e quindi la matrice nel sistema x, y, z deve essere trasformata nel sistema r, θ , z. Considerando $r = a$ e l'asse z costante, si ottengono così le espressioni:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\theta i} = \frac{b^2 P_{rad}}{b^2 - a^2} \cdot & [(1 + \cos 2\theta_i)(K_{11} \cos^2 \theta_i + K_{21} \sin^2 \theta_i - K_{41} \left(\frac{\sin 2\theta_i}{2}\right) + \\ & + (1 - \cos 2\theta_i)(K_{12} \cos^2 \theta_i + K_{22} \sin^2 \theta_i - K_{42} \left(\frac{\sin 2\theta_i}{2}\right) + \\ & - \sin 2\theta_i (K_{14} \cos^2 \theta_i + K_{24} \sin^2 \theta_i - K_{44} \left(\frac{\sin 2\theta_i}{2}\right)); \end{aligned} \quad (12)$$

$$\varepsilon_{zi} = \frac{b^2 P_{rad}}{b^2 - a^2} \cdot [K_{31}(1 + \cos 2\theta_i) + K_{32}(1 - \cos 2\theta_i) - K_{34} \sin 2\theta_i]; \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\theta i} = \frac{b^2 P_{rad}}{b^2 - a^2} \cdot & [(1 + \cos 2\theta_i)(K_{51} \sin \theta_i - K_{61} \cos \theta_i) + \\ & + (1 - \cos 2\theta_i)(K_{52} \sin \theta_i - K_{62} \cos \theta_i) + \\ & - \sin 2\theta_i (K_{54} \sin \theta_i - K_{64} \cos \theta_i)] \end{aligned} \quad (14)$$

Dove $\varepsilon_{\theta i}$, ε_{zi} , γ_{zi} sono le deformazioni nel piano delle rosette ($i = A, B, C$) della cella CSIR, a e b sono rispettivamente il raggio interno ed esterno, P_{rad} è la pressione isotropa biassiale nel test di ricarica, e K_{ij} sono i coefficienti della matrice $[K]$.

Le componenti di deformazione $\varepsilon_{\theta i}$, ε_{zi} , γ_{zi} nel piano delle rosette sono ottenute utilizzando il metodo dei minimi quadrati applicato alle deformazione misurate dagli estensimetri per angoli 0° , 45° , 90° e 135° , l'applicazione del principio dei minimi quadrati porta al seguente risultato:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\theta i} &= \frac{1}{4} (3\varepsilon_0 + \varepsilon_{45} + \varepsilon_{135} - \varepsilon_{90}); \\ \varepsilon_{zi} &= \frac{1}{4} (3\varepsilon_{90} + \varepsilon_{45} + \varepsilon_{135} - \varepsilon_0); \\ \gamma_{\theta zi} &= \varepsilon_{45} - \varepsilon_{135}. \end{aligned} \quad (15)$$

Il metodo statistico sopra riportato è molto aderente al problema reale in quanto prende in considerazione sia l'eterogeneità della roccia sia gli errori sperimentali causati dall'imperfetto collaggio delle rosette estensimetriche alla roccia e dalle

condizioni ambientali che molto spesso hanno cattiva influenza sui circuiti elettrici (mancanza di impatto di terra, presenza di umidità, presenza di giunzioni e così via). Sostituendo le deformazioni ottenute dall'equazione 15 nelle espressioni generali 12, 13 e 14, si ottiene un sistema di 9 equazioni. A questo segue la determinazione dei parametri di rigidezza e di orientazione della isotropia trasversa. Spesso è conveniente ridurre a 4 il numero dei parametri incogniti di elasticità assumendo che il modulo di taglio G_2 dipenda dagli altri, in accordo con la teoria classica di Saint Venant si ottiene:

$$G_2 = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2 + 2\nu E_1} \quad (16)$$

Il modulo di taglio G_2 può anche essere ottenuto dalle relazioni proposte da Batugin e Nirenburg o da Kiehl, anche se ci sono molte evidenze sperimentali che l'equazione di Saint Venant è valida per rocce anisotrope. Sulla base dei risultati a partire da 200 prove statistiche e dinamiche, Worotnicki ha concluso che l'equazione di Saint Venant produce valori del modulo G_2 in accordo con i valori ottenuti da prove di laboratorio su rocce di quarzo-feldspato (come granito e marmo) o rocce basaltiche.

È interessante notare che questi due gruppi di rocce presentano una anisotropia da bassa a moderata. Nell'80% dei casi il rapporto dei moduli di Young (E_1/E_2) è risultato essere più basso di 1.5 raggiungendo un valore massimo di 3.5.

Nel modello proposto da Nunes quindi l'equazione 16 è usata per ottenere il modulo di taglio. Fatta eccezione per questo, tutte le costanti elastiche sono considerate indipendenti. Inoltre, nessuna restrizione è imposta agli angoli α e β del piano di isotropia.

Basandosi sulla semplificazione per il calcolo del modulo di taglio proposta da Saint Venant, le equazioni delle tre deformazioni generali si presentano come funzioni sinusoidali. Con questa ipotesi è possibile ottenere la stima diretta dell'orientazione e dei piani di isotropia trasversa e dei parametri di deformabilità dai valori massimi e minimi di deformazione nel test di compressione biassiale su provini provenienti da sovra-carotaggio (Nunes, 2002).

2.1.4. Direzione ed immersione del piano di isotropia

Dalla prova sperimentale i risultati ottenuti sono delle curve sinusoidali. Per quanto riguarda le deformazioni assiali e tangenziali le curve sinusoidali hanno fase di 180° , mentre la deformazione di taglio fase 360° . Quindi, è possibile definire le seguenti relazioni:

$$\varepsilon_{\theta_i} = L \cdot \cos 2\theta_i + M \cdot \sin 2\theta_i + N; \quad (17)$$

$$\varepsilon_{z_i} = O \cdot \cos 2\theta_i + P \cdot \sin 2\theta_i + Q; \quad (18)$$

$$\gamma_{\theta z_i} = R \cdot \cos \theta_i + S \cdot \sin \theta_i + T. \quad (19)$$

dove $\epsilon_{\theta i}$, $\epsilon_{z i}$, $\gamma_{\theta z i}$ sono rispettivamente le deformazioni, tangenziale, assiale e di taglio delle rosette A, B e C; θ_i sono gli angoli delle posizioni delle rosette (*figura 11*) e L, M, N, O, P, Q, R, S, T sono le costanti sinusoidali.

Considerando le rosette A, B e C e introducendo le deformazioni tangenziali ($\epsilon_{\theta A}$, $\epsilon_{\theta B}$, $\epsilon_{\theta C}$) nell'equazione 17, le deformazioni assiali ($\epsilon_{z A}$, $\epsilon_{z B}$, $\epsilon_{z C}$) nell'equazione 18, e le deformazioni di taglio ($\gamma_{\theta A}$, $\gamma_{\theta B}$, $\gamma_{\theta C}$) nell'equazione 19, si ottengono tre sistemi di tre equazioni. Da questi, le costanti sinusoidali e le espressioni delle curve sinusoidali possono essere ottenute.

La direzione α è determinata dalla posizione della massima deformazione tangenziale nella curva sinusoidale, che determinata la direzione parallela dei piani di isotropia, come mostrato in *figura 13*.

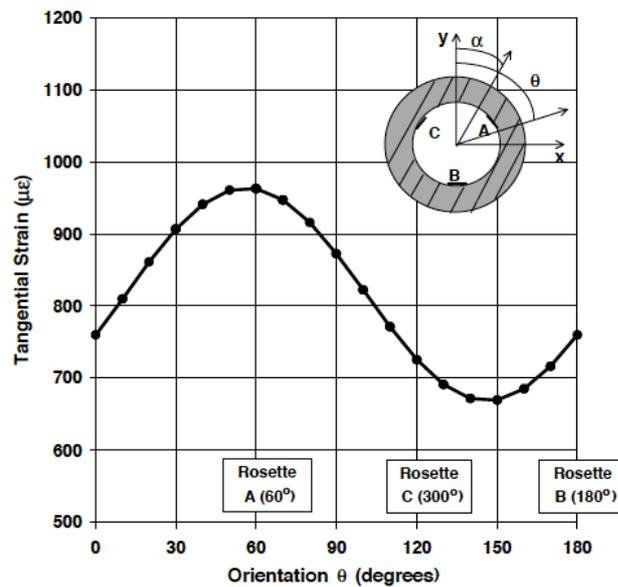


Figura 11: Deformazione tangenziale (Nunes, 2002)

La posizione del valore minimo della deformazione tangenziale indica la direzione normale al piano di isotropia ($\alpha + 90^\circ$). Allo stesso modo la posizione del valore minimo della deformazione assiale e di taglio determina la direzione α . Analiticamente invece la direzione del piano di isotropia può essere calcolata mediante le derivate delle equazioni 18, 19 e 20. Il segno della derivata seconda fornisce la posizione dell'angolo corrispondente alla direzione α .

È importante notare che questa formulazione analitica dipende dalla formulazione delle deformazioni tangenziali, assiali e di taglio precedentemente formulate nelle equazioni 13, 14 e 15. Queste equazioni possono essere scritte raggruppando tutti i termini in funzione di $\sin 2\theta$ e $\cos 2\theta$. L'immersione del piano di isotropia deriva dalla deformazione massima e minima tangenziale, e dalla deformazione di taglio, usando la seguente formulazione:

$$\tan \beta = \frac{\varepsilon_{\theta_{\max}} - \varepsilon_{\theta_{\min}}}{\gamma_{\theta_{z\max}}} \quad (20)$$

Dove m_{\max} corrisponde al valore massimo della deformazione tangenziale con $\theta = \alpha$ nell'equazione 17, $\varepsilon_{\theta_{\min}}$ è il minimo valore della deformazione tangenziale con $\theta = \alpha + 90^\circ$ nell'equazione 17 e infine $\gamma_{\theta_{z\max}}$ è il massimo valore di deformazione tagliante con $\theta = \alpha + 180^\circ$ nell'equazione 19 (Nunes, 2002).

2.1.5. Equazioni per definire i parametri pseudo-elastici

I parametri di deformabilità possono essere determinati dalle curve di deformazione sinusoidali. Le equazioni di deformazione tangenziali, assiali e di taglio, rappresentate dall'equazione 12, 13 e 14, possono essere espresse in forma sinusoidali:

$$\varepsilon_{\theta_i} = \xi \left[\sin^2 \beta \left(-\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) (\cos 2\alpha \cos 2\theta_i + \sin 2\alpha \sin 2\theta_i) + \frac{1 + \cos^2 \beta}{E_1} + \frac{\sin^2 \beta}{E_2} \right]; \quad (21)$$

$$\varepsilon_{z_i} = \xi \left[\sin^2 \beta \left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2} \right) (\cos 2\alpha \cos 2\theta_i + \sin 2\alpha \sin 2\theta_i) - \frac{\nu_2}{E_2} (1 + \cos^2 \beta) - \frac{\nu_1}{E_1 \sin^2 \beta} \right]; \quad (22)$$

$$\gamma_{\theta_{z_i}} = \xi \sin 2\beta \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2} \right) (\cos \alpha \cos \theta_i + \sin \alpha \sin \theta_i). \quad (23)$$

In queste equazioni ξ , è un parametro di sollecitazione definito da:

$$\xi = \frac{b^2 P_{rad}}{b^2 - a^2}. \quad (24)$$

Sostituendo a θ_i i valori delle posizioni angolari si ottengono i parametri di deformazione massimi e minimi, rispettivamente a $\theta = \alpha$ e $\theta = \alpha + 90$. Pertanto la equazioni saranno:

$$\varepsilon_{\theta\alpha} = \varepsilon_{\theta_{\max}} = \frac{2b^2 P_{rad}}{b^2 - a^2} \left(\frac{\cos^2 \beta}{E_1} - \frac{\sin^2 \beta}{E_2} \right); \quad (26)$$

$$\varepsilon_{\theta\alpha+90} = \varepsilon_{\theta_{\min}} = \frac{2b^2 P_{rad}}{(b^2 - a^2)E_1}; \quad (26)$$

$$\varepsilon_{z\alpha} = \varepsilon_{z_{\min}} = -\frac{\nu_2}{E_2} \left(\frac{2b^2 P_{rad}}{b^2 - a^2} \right); \quad (27)$$

$$\varepsilon_{z(\alpha+90)} = \varepsilon_{zmax} = \frac{2b^2 P_{rad}}{b^2 - a^2} \left(-\frac{\nu_1}{E_1} \sin^2 \beta - \frac{\nu_2}{E_2} \cos^2 \beta \right). \quad (28)$$

Il modulo di Young E_1 è ottenuto direttamente dall'equazione 26 e il modulo di Young E_2 può essere calcolato dall'equazione 25:

$$E_1 = \frac{2b^2 P_{rad}}{(b^2 - a^2) \varepsilon_{\theta(\alpha+90)}}; \quad (29)$$

$$\frac{1}{E_2} = \frac{1}{\sin^2 \beta} \left[\frac{\varepsilon_{\theta\alpha}(b^2 - a^2)}{2b^2 P_{rad}} - \frac{\cos^2 \beta}{E_1} \right]. \quad (30)$$

I rapporti di Poisson ν_1 e ν_2 sono calcolati dall'equazioni di deformazioni sinusoidali di massimo e minimi assiali, con angolo $\theta = \alpha$ (eq. 28) e $\theta = \alpha + 90$ (eq. 29), a partire dal valore di E_2 , calcolato precedentemente.

Pertanto si ottiene:

$$\nu_2 = -\varepsilon_{z\alpha} E_2 \left(\frac{b^2 - a^2}{2b^2 P_{rad}} \right). \quad (31)$$

Mentre il rapporti di Poisson può essere ottenuto dall'equazione 26, a partire dai valori calcolati precedentemente (E_1, E_2, β e ν_2):

$$\nu_1 = -\frac{E_1}{\sin^2 \beta} \left[\frac{\varepsilon_{z\alpha+90}(b^2 - a^2)}{2b^2 P_{rad}} + \frac{\nu_2}{E_2} \cos^2 \beta \right]. \quad (32)$$

In conclusione, il modello analitico proposto offre un metodo semplice per determinare i parametri di orientazione (α e β) e i parametri di deformabilità (E_1, E_2, G_2, ν_1 e ν_2) a partire dalle deformazioni sinusoidali misurate in una compressione biassiale mediante cella CSIR su un campione di roccia anisotropa.

In allegato 2, i risultati del metodo analitico (Nunes, 2002).

2.2. Soluzione analitica di Nunes modificata

La semplificazione adottata da A.L. Nunes, cioè la condizione di simmetria elastica, necessaria per ridurre le numero delle incognite che il problema presenta, non è sempre adottabile nel caso pratico. Infatti, le ipotesi alla base del metodo, sono in parziale contrasto con la schematizzazione da adottare in presenza di roccia a comportamento trasversalmente isotropo. In tal caso occorre tenere presente che, soltanto il materiale isotropo, presenta una matrice simmetrica rispetto alla diagonale principale, in quanto il materiale, in tutte le direzioni, presenta le medesime caratteristiche di deformabilità e resistenza (Hooke). In condizione di

isotropia trasversa, le costanti elastiche sono uguali in due direzioni e diverse nell'altra e quindi la matrice non è più simmetrica, ma asimmetrica.

L'impiego di tale considerazione, conduce ad una alterazione dei valori di deformazione assiale, perché quest'ultime sono espresse secondo la seguente relazione:

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu_2}{E_2}\sigma_x - \frac{\nu_2}{E_2}\sigma_y + \frac{1}{E_2}\sigma_z \quad (33)$$

Dove, la deformazione è caratterizzata dal modulo elastico $E_2 < E_1$.

In tal senso è stata effettuata una modifica al metodo proposto da A. L. Nunes, consistente nell'utilizzo della matrice di Hooke generalizzata per materiali trasversalmente isotropi, quindi una matrice asimmetrica (*equazione 3*) al posto di quella simmetrica. In questo modo la deformazione assiale, assume la seguente forma:

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu_2}{E_1}\sigma_x - \frac{\nu_2}{E_1}\sigma_y + \frac{1}{E_2}\sigma_z \quad (34)$$

Si evince, che le componenti delle direzioni x ed y sono in relazione con il modulo elastico $E_1 (> E_2)$. In questo modo, la deformazione assiale avrà un valore di intensità più piccolo rispetto a quello definito dalla soluzione Nunes.

La computazione del metodo teorico modificato è stata effettuata con il software Matlab.

2.3. Analisi dei risultati dello stato di deformazione

Per valutare l'efficacia della soluzione Nunes e della modifica proposta, appare utile esaminare un caso pratico.

Si esamina un provino cilindrico cavo avente raggio interno pari a 19 mm e raggio esterno pari a 43 mm, soggetto ad una pressione biassiale costante pari a 20 MPa. In tali condizioni sperimentali è possibile calcolare lo stato tensionale tridimensionale agente mediante le relazioni del tubo cavo a parete spessa:

- Tensione radiale:

$$\sigma_r = -p \frac{r_e^2}{r_e^2 - r_i^2} \left(1 - \frac{r_i^2}{r^2} \right) = \begin{cases} r = r_i \rightarrow \sigma_r = 0 \\ r = r_e \rightarrow \sigma_r = -20 \text{ MPa} \end{cases}; \quad (35)$$

- Tensione circonferenziale:

$$\sigma_c = -p \frac{r_e^2}{r_e^2 - r_i^2} \left(1 + \frac{r_i^2}{r^2} \right) = \begin{cases} r = r_i \rightarrow \sigma_r = -49,70 \text{ MPa} \\ r = r_e \rightarrow \sigma_r = -29,70 \text{ MPa} \end{cases} \quad (36)$$

- Tensione assiale:

$$\sigma_a = 0 \text{ MPa}; \quad (37)$$

Per l'attribuzione al provino delle necessarie caratteristiche meccaniche, sono state scelte differenti ipotesi:

1. La prima ipotesi è costituita dal caso isotropo, caratterizzato esclusivamente da due costanti E , ν assunte rispettivamente pari a 60 GPa e 0,15. In questo caso, i valore di deformazione assiale e circonferenziale restano costanti e sono pari a:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\theta_i} &= \xi \left[\sin^2 \beta \left(-\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) (\cos 2\alpha \cos 2\theta_i + \sin 2\alpha \sin 2\theta_i) + \frac{1+\cos^2 \beta}{E_1} + \frac{\sin^2 \beta}{E_2} \right] = \\ &= 828 \mu\varepsilon [10^{-6}]; \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{z_i} &= \xi \left[\sin^2 \beta \left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2} \right) (\cos 2\alpha \cos 2\theta_i + \sin 2\alpha \sin 2\theta_i) + \right. \\ &\quad \left. - \frac{\nu_2}{E_2} (1 + \cos^2 \beta) - \frac{\nu_1}{E_1 \sin^2 \beta} \right] = 124 \mu\varepsilon [10^{-6}]. \end{aligned} \quad (39)$$

Al medesimo risultato si giunge utilizzando sia la soluzione analitica Nunes, sia la soluzione Nunes modificato (cioè sostituendo alla matrice simmetrica del caso elastico la matrice di Hooke generalizzata, asimmetrica).

Nell'allegato 2 sono riportati i valori di $\varepsilon_{\theta} [\mu\varepsilon]$ e $\varepsilon_z [\mu\varepsilon]$ calcolati ogni 10° di sviluppo della sezione ortogonale all'asse del provino passante per i punti baricentrici delle rosette estensimetriche utilizzate nella sperimentazione.

2. La seconda ipotesi è costituita dal caso di isotropia trasversa, caratterizzato esclusivamente dall'angolo di immersione pari a $\beta=0^\circ$ e le cinque costanti elastiche pari a: $E_1= 60$ GPa, $E_2 = 30$ GPa, $\nu_1 = 0,15$, $\nu_2 = 0,25$ e $G_2 = 15$ GPa definito dalla relazione di Saint Venant (equazione 16).

In questo caso le deformazioni assiali e circonferenziali, sono riportate in *tabella 2*:

$\varepsilon_{\theta} [\mu\varepsilon]$	$\varepsilon_z [\mu\varepsilon]$
828	414

Tabella 2: Deformazioni assiali e circonferenziali calcolate con la soluzione Nunes per un materiale a comportamento trasversalmente isotropo con $\beta=0^\circ$

Anche in questo caso nell'allegato 2 sono riportati i valori di $\varepsilon_{\theta} [\mu\varepsilon]$ e $\varepsilon_z [\mu\varepsilon]$ calcolati ogni 10° di sviluppo della sezione ortogonale all'asse del provino passante per i punti baricentrici delle rosette estensimetriche utilizzate nella sperimentazione.

3. La terza ipotesi di lavoro è costituita ancora dal caso di isotropia trasversa, caratterizzato dagli angoli di direzione α e inclinazione β dei piani, rispettivamente pari a $\alpha = 30^\circ$ e $\beta = 60^\circ$ e cinque costanti pseudo-elastiche pari a: $E_1 = 60$ GPa, $E_2 = 30$ GPa, $\nu_1 = 0,15$, $\nu_2 = 0,25$, $G_2 = 15$ GPa.

In questo caso, lo sviluppo delle deformazioni all'interno del cilindro cavo varia (come già indicato) con legge sinusoidale. Per eseguire il confronto tra i risultati forniti dai metodi di interpretazione sperimentali esaminati e i risultati dei test di laboratorio sono stati evidenziati i valori registrati dalle rosette estensimetriche, posizionate a 60° , 180° e 300° dalla verticale locale (cella CSIR), come si dimostra in *tabella 3*.

1a Rosetta - 60°	ϵ_θ [$\mu\epsilon$]	1294
	ϵ_z [$\mu\epsilon$]	360
2a Rosetta - 180°	ϵ_θ [$\mu\epsilon$]	1294
	ϵ_z [$\mu\epsilon$]	360
3a Rosetta - 300°	ϵ_θ [$\mu\epsilon$]	828
	ϵ_z [$\mu\epsilon$]	197

Tabella 3: Deformazioni assiali e circonferenziali calcolate con la soluzione Nunes per un materiale a comportamento trasversalmente isotropo con $\alpha = 30^\circ$ e $\beta = 60^\circ$

Ancora una volta nell'allegato 2 sono riportati i valori di ϵ_θ [$\mu\epsilon$] e ϵ_z [$\mu\epsilon$] calcolati ogni 10° di sviluppo della sezione ortogonale all'asse del provino passante per i punti baricentrici delle rosette estensimetriche utilizzate nella sperimentazione.

Come evidenziato in precedenza, nel caso isotropo i risultati, in termini di deformazioni assiale e circonferenziale, rimangono invariati nelle soluzioni ottenute dai metodi a confronto, mentre un'importante differenza è riscontrabile nella seconda e terza applicazione.

In maggior dettaglio, applicando la sostituzione della matrice simmetrica con quella asimmetrica, i risultati ottenuti sono:

1. Per il secondo caso:

ϵ_θ [$\mu\epsilon$]	ϵ_z [$\mu\epsilon$]
828	207

Tabella 4: Deformazioni assiali e circonferenziali calcolate con la soluzione Nunes modificato per un materiale a comportamento trasversalmente isotropo con $\beta = 0^\circ$

Nell'allegato 3 sono riportati i valori di ϵ_θ [$\mu\epsilon$] e ϵ_z [$\mu\epsilon$] calcolati con la soluzione Nunes, in corrispondenza dei punti individuati dalla sezione ortogonale all'asse del

provino, passante per i baricentri delle tre rosette estensimetriche utilizzate nella sperimentazione.

2. Per il terzo caso:

1a Rosetta - 60°	ϵ_{θ} [$\mu\epsilon$]	1345
	ϵ_z [$\mu\epsilon$]	337
2a Rosetta - 180°	ϵ_{θ} [$\mu\epsilon$]	1345
	ϵ_z [$\mu\epsilon$]	337
3a Rosetta - 300°	ϵ_{θ} [$\mu\epsilon$]	828
	ϵ_z [$\mu\epsilon$]	145

Tabella 5: Deformazioni assiali e circonferenziali calcolate con la soluzione Nunes modificato per un materiale a comportamento trasversalmente isotropo con $\alpha = 30^\circ$ e $\beta = 60^\circ$

Nell'allegato 3 sono riportati i valori di ϵ_{θ} [$\mu\epsilon$] e ϵ_z [$\mu\epsilon$] calcolati con la soluzione Nunes modificato, in corrispondenza dei punti individuati dalla sezione ortogonale all'asse del provino, passante per i baricentri delle tre rosette estensimetriche utilizzate nella sperimentazione.

2.4. Considerazioni sulle soluzioni analitiche

Comparando i risultati delle due soluzioni, nel caso di isotropia trasversa con $\beta = 0^\circ$ e $\beta = 60^\circ$, è evidente che la modifica matriciale, che rende la matrice di Hooke generalizzata asimmetrica, riduce l'intensità delle deformazioni assiali.

Nella seconda applicazione, in cui il materiale è trasversalmente isotropo con $\beta = 0^\circ$ e quindi i piani di isotropia sono perpendicolare all'asse z, è rilevante che la deformazione assiale è ridotta del 50%. Questo è giustificato dal fatto che la semplificazione della soluzione analitica di Nunes, presenta una formulazione della deformazione assiale, come riportato nell'equazione 33, in cui il modulo elastico $E_2 = 30$ GPa. Mentre, la deformazione assiale valutata, inserendo la correzione della matrice di Hooke (equazione 34), è costituita da un modulo di Young di 60 GPa nella direzione di deformazione x e y. Pertanto la differenza delle deformazione, è coerente con i moduli di Young.

Anche nella seconda applicazione, in cui si inseriscono i piani di isotropia trasversa ($\alpha = 30^\circ$ e $\beta = 60^\circ$), è possibile fare le medesime considerazione. In questo caso, poiché entrano in gioco i piani di isotropia, la differenza tra le deformazioni assiali è pari al 30%.

Tuttavia, poiché una soluzione analitica o semi-empirica per la corretta determinazione dello stato di deformazione per rocce a comportamento trasversalmente isotropo non è ancora disponibile nella letteratura specializzata, la

soluzione proposta da A. L. Nunes può essere considerato attendibile. In tal senso è possibile la stima diretta delle costanti pseudo-elastiche di rocce trasversalmente isotrope, note le deformazioni attraverso un semplice test di compressione biassiale di un cilindro cavo, purché la soluzione sia limitatamente applicata alle rocce con moderato grado di anisotropia. Infatti, come precedentemente indicato, con questa limitazione, l'ipotesi di distribuzione di tensione isotropa in una roccia anisotropa può essere considerata valida.

L'attendibilità dello stato di deformazione, ottenuto dalle suddette soluzioni, verrà validato mediante l'applicazione di soluzioni numeriche, per verificarne l'affidabilità in fase previsionale.

3. Validazione tramite codici di calcolo

Nell'ingegneria civile i metodi numerici possono essere utilizzati per discretizzare differenti materiali e strutture sono molteplici. Tra i più comuni metodi appare opportuno citare i metodi: agli elementi finiti (Finite Element Method o FEM) mediante il quale si discretizza l'oggetto in esame in n elementi finiti (trattato in dettaglio nel capitolo successivo); alle differenze finite (Finite Difference Method o FDM), strategia utilizzata per risolvere numericamente equazioni differenziali che, nelle sue varianti, si basa sull'approssimazione delle derivate con equazioni alle differenze finite; agli elementi di contorno (Boundary Element Method o BEM) il quale risolve le equazioni lineari alle differenze parziali che sono formulate come equazioni integrali sul contorno del dominio; agli elementi distinti (Distinct Element Method o DEM) col quale si rappresenta il sistema come un insieme di corpi discreti e distinti che interagiscono tra loro solo in caso di reciproco contatto. Il comportamento meccanico del mezzo è descritto tracciando l'andamento delle forze che si sviluppano nei punti di contatto ed i movimenti dei singoli elementi che lo compongono; agli elementi discreti finiti (Finite Discrete Element Method o FDEM) questo metodo è un combinazione del FEM e del DEM; agli automi cellulari (Particle Element Method o PEM) in cui il sistema viene rappresentato da un insieme di particelle, le quali rappresentano dei corpi rigidi, in questo metodo è fondamentale il contatto tra le particelle, infatti l'utilizzo di tale metodo necessita un attenta valutazione di rigidità e deformabilità delle singole particelle.

In questo elaborato è stato impiegato il codice open source (Code_Aster) basato sul metodo FEM e il codice FLAC3D basato sul metodo FDM.

3.1 Modellazione numerica FEM: Code_Aster

Code_Aster è un codice open source di simulazione numerica dei materiali e delle strutture meccaniche, sviluppato principalmente dal dipartimento "*Analyses Mécaniques et Acoustiques*" del servizio Recherche et Développement di EDF – Electricité de France, distribuito principalmente su sistema operativo Linux.

Code_Aster è un risolutore basato sul metodo agli elementi finiti (FEM), il quale risolve numericamente equazioni alle derivate parziali, su un dominio complesso.

La libreria presente, consente di modellare ogni materiale, caratterizzando ogni tipo di comportamento, per esempio metalli, plastiche, gomme, terreni, rocce, calcestruzzi normali o rinforzati, etc (Code_Aster).

3.1.1. Anisotropia in Code_Aster

Il seguente capitolo sintetizza la parte di teoria, relativa ai materiali anisotropi, che il codice di calcolo open source utilizza, per la discretizzazione e la computazione del problema oggetto di studio.

Lo sviluppo numerico adottato da Code_Aster, vede l'applicazione di una semplificazione, pertanto la matrice di flessibilità $[H]^{-1}$ e di Hooke $[H]$ non adotta la nozione di tensore del quarto ordine, ma considera un materiale a comportamento elastico-lineare, la cui sollecitazione è funzione lineare della deformazione:

$$(\sigma) = [H](\varepsilon) \quad (40)$$

dove (σ) e (ε) sono le rappresentazioni vettoriali del tensore di secondo ordine e $[H]$ è la matrice 6x6.

Considerando il caso specifico l'isotropia è definita nel piano X-Y e ortotropismo nella direzione Z (figura 4) (Code_Aster).

La matrice $[H]^{-1}$ è definita dalle seguenti componenti:

- Nel piano X-Y:

$$\nu_{xy} = \nu_{yx};$$

$$E_x = E_y;$$

$$G_{xy} = \frac{E_x}{2(1+\nu_{xy})};$$

- Nel piano X-Z e Y-Z:

$$\nu_{zy} = \nu_{yz};$$

$$\nu_{zx} = \nu_{xz};$$

$$G_{yz} = G_{xz};$$

$$\frac{\nu_{zy}}{E_y} = \frac{\nu_{xz}}{E_x}.$$

Sulla base di quanto indicato la matrice di flessibilità $[H]^{-1}$ avrà la seguente forma:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_x} & \frac{-\nu_{xy}}{E_x} & \frac{-\nu_{xz}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_x} & \frac{-\nu_{zy}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{xz}}{E_x} & \frac{-\nu_{zy}}{E_x} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu_{xy})}{E_x} = \frac{1}{G_{xy}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xz}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{yz}} \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (41)$$

Mentre la matrice di Hooke [H]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\Delta'} \begin{pmatrix} \frac{1 - \nu_{zx}\nu_{xz}}{E_x E_z} & \frac{\nu_{xy} - \nu_{zx}\nu_{xz}}{E_x E_z} & \frac{\nu_{zx} + \nu_{xz}\nu_{zx}}{E_x E_z} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{yx} + \nu_{zx}\nu_{xz}}{E_x E_z} & \frac{1 - \nu_{zx}\nu_{xz}}{E_x E_z} & \frac{\nu_{xz} + \nu_{xy}\nu_{xz}}{E_x E_z} & 0 & 0 & 0 \\ \nu_{xz} + \nu_{xy}\nu_{xz} & \nu_{yz} + \nu_{xy}\nu_{xz} & \frac{1 - \nu_{xy}^2}{E_x^2} & 0 & 0 & 0 \\ E_x^2 & E_x^2 & E_x^2 & \frac{E_x \Delta'}{2(1 + \nu_{xy})} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{xz} \Delta' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{xz} \Delta' \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{yz} \end{Bmatrix} \quad (42)$$

$$\frac{1}{\Delta'} = \frac{E_x^2 E_z}{\begin{bmatrix} 1 - 2\nu_{zx}\nu_{xz} - \nu_{xy}^2 \\ -2\nu_{zx}\nu_{xz}\nu_{xy} \end{bmatrix}} \quad (43)$$

3.2. Simulazione numerica con il codice Code_Aster

L'analisi effettuata con il codice di calcolo ha lo scopo di riprodurre, nel modo più fedele possibile, l'esperienza di laboratorio, che è alla base della soluzione analitica Nunes, discusso nei capitoli precedenti.

Prima di analizzare il caso di provino sottoposto a una pressione circonferenziale e costituito da materiale a comportamento trasversalmente isotropo, si è preferito valutare l'affidabilità del codice attraverso lo studio di casi semplici per i quali era disponibile la soluzione numerica. A tal fine sono stati discretizzati i casi di provino costituito da materiale a comportamento isotropo e di provino costituito da materiale a comportamento trasversalmente isotropo con piani di isotropia perpendicolari fra di loro ($\alpha = 0^\circ$ e $\beta = 0^\circ$).

3.2.1. Geometria del provino

La determinazione sperimentale oggetto di studio, prevede la modellazione numerica di un provino cilindrico cavo, dalle dimensioni a (raggio esterno) = 43 mm, b (raggio interno) = 19 mm (*Figura 12*). L'altezza utilizzata nella modellazione è di 1000 mm, questa scelta è giustificata dal fatto che:

- In diversi tentativi si è constatato che, superata l'altezza di 300 mm il risultato finale non evidenziava variazioni significative.
- Inoltre, si è cercato di distanziare la zona di mezzeria del provino, dove sono posizionate le celle estensimetriche, dai bordi del modello in modo da minimizzare l'influenza dell'effetto dei vincoli sugli elementi di misura.

La modellazione geometrica del provino avviene mediante gli strumenti CAD messi a disposizione dal codice Salome-Meca.

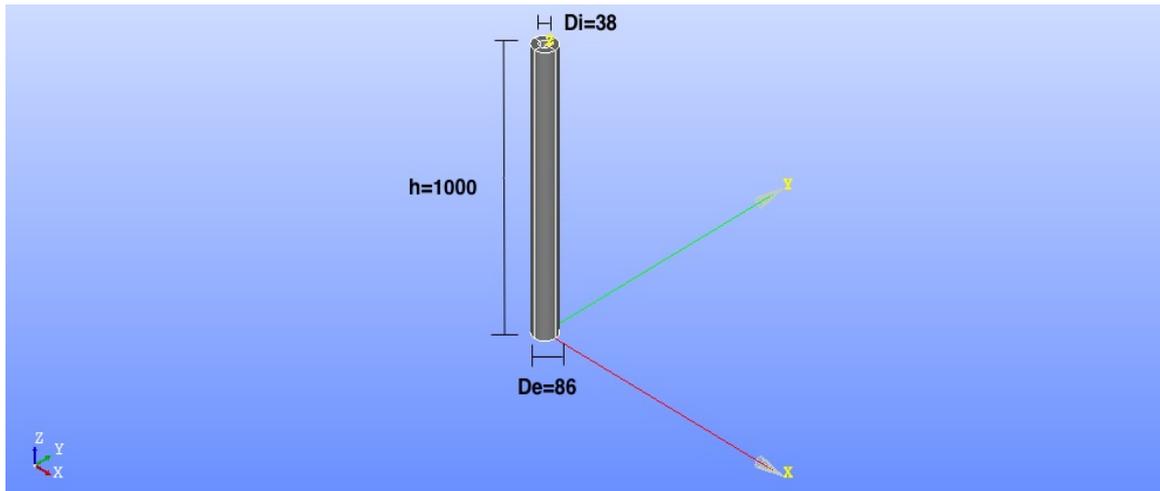


Figura 12: Geometria provino (misure in mm)

3.2.2. Discretizzazione

Definito il provino da un punto di vista geometrico, si discretizza il modello mediante elementi finiti.

Questa fase, è molto importante ai fini del risultato finale, in quanto la tipologia di elementi e la densità con cui si va a discretizzare influisce sulla precisione dei calcoli, pertanto in questo elaborato si sono confrontati diverse tipologie di mesh con una diversa densità di elementi, come riportato in seguito:

- a) Elementi triangolari con discretizzazione grossolana (*figura 13*);
- b) Elementi triangolari con discretizzazione più fine di quella precedente (*figura 14*);
- c) Elementi quadrati con discretizzazione fine (*figura 15*).

Si è ritenuto opportuno, utilizzare una mesh di tipo *c*) e quindi ad elementi quadrati con 10000 nodi, in quanto i risultati ottenuti nelle simulazioni delle prove hanno evidenziato buona aderenza alle grandezze attese rendendo inutile un ulteriore incremento del numero di nodi della mesh.

L'operazione di discretizzazione è stata eseguita utilizzando il codice Salome-Meca.

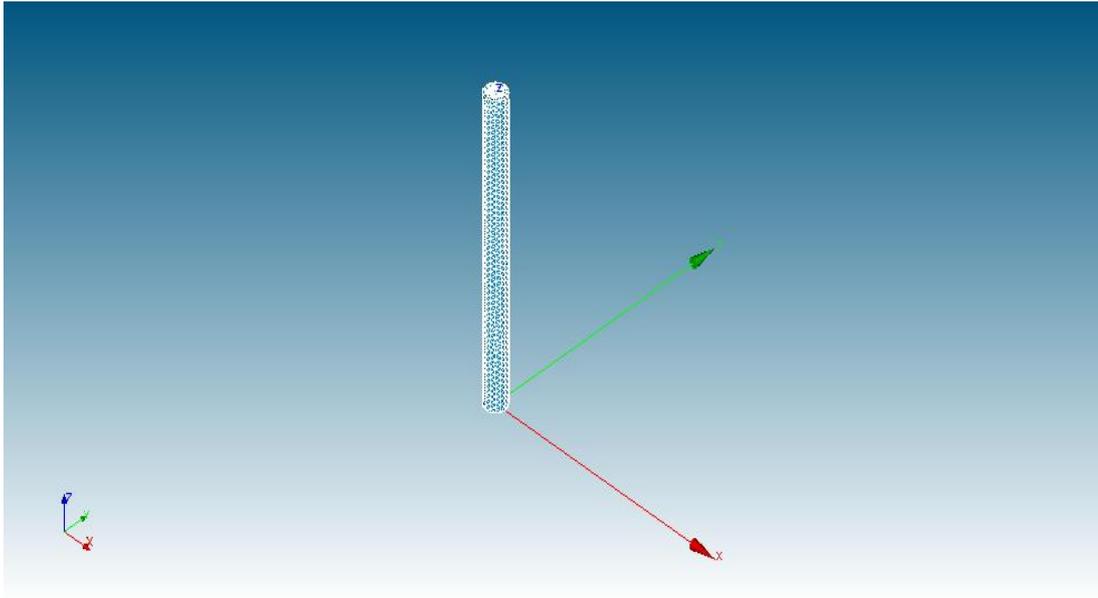


Figura 13: Mesh tipo A

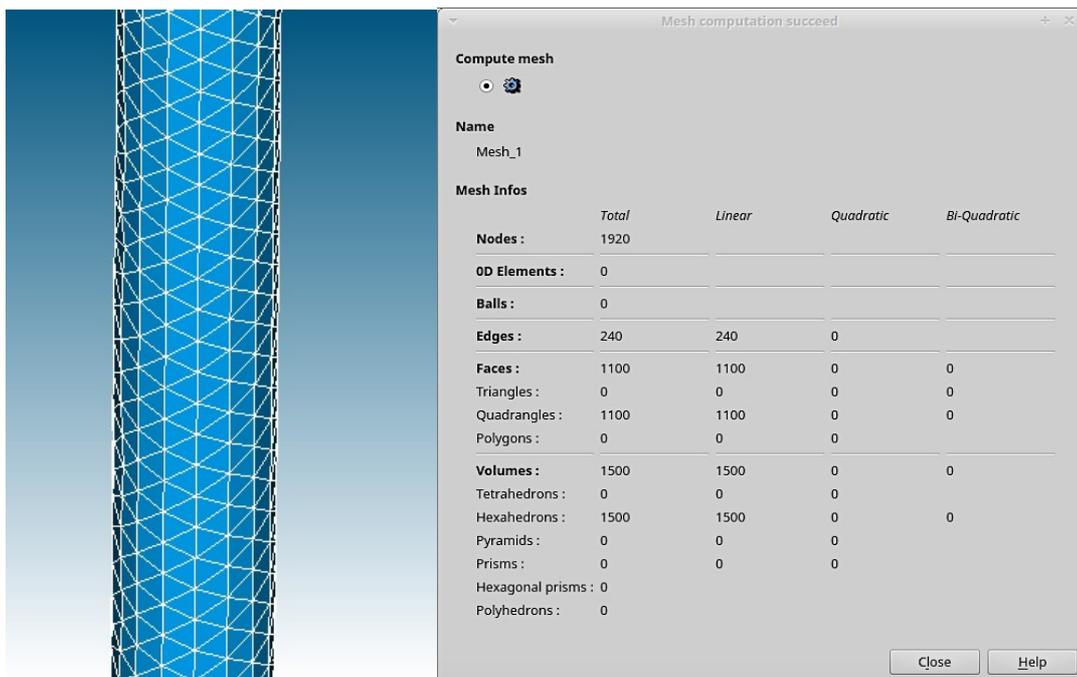


Figura 13a: Dettaglio mesh tipo A

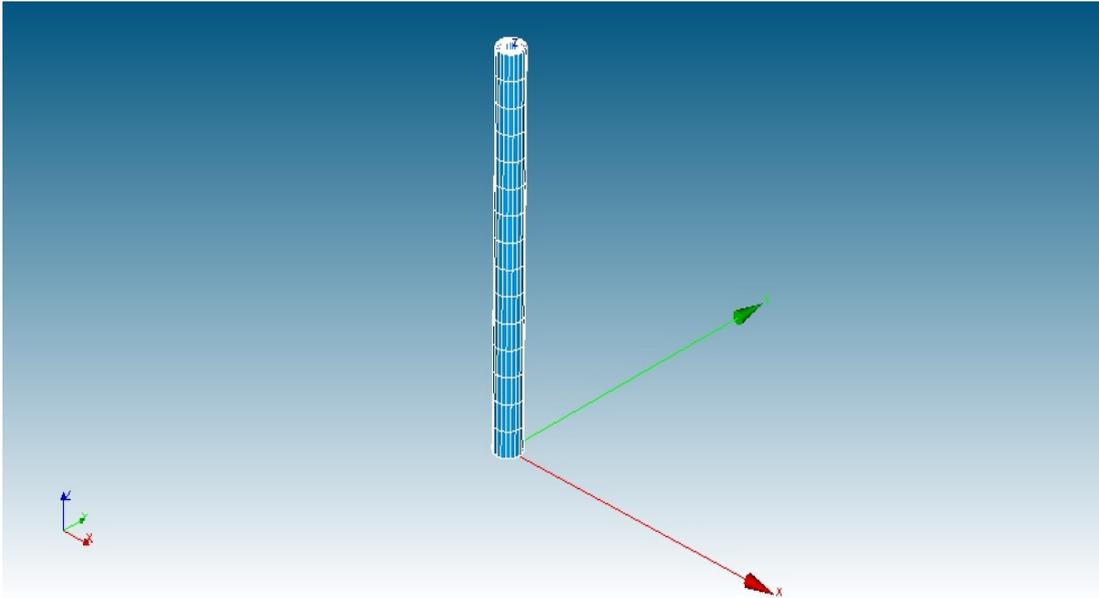


Figura 14: Mesh tipo B

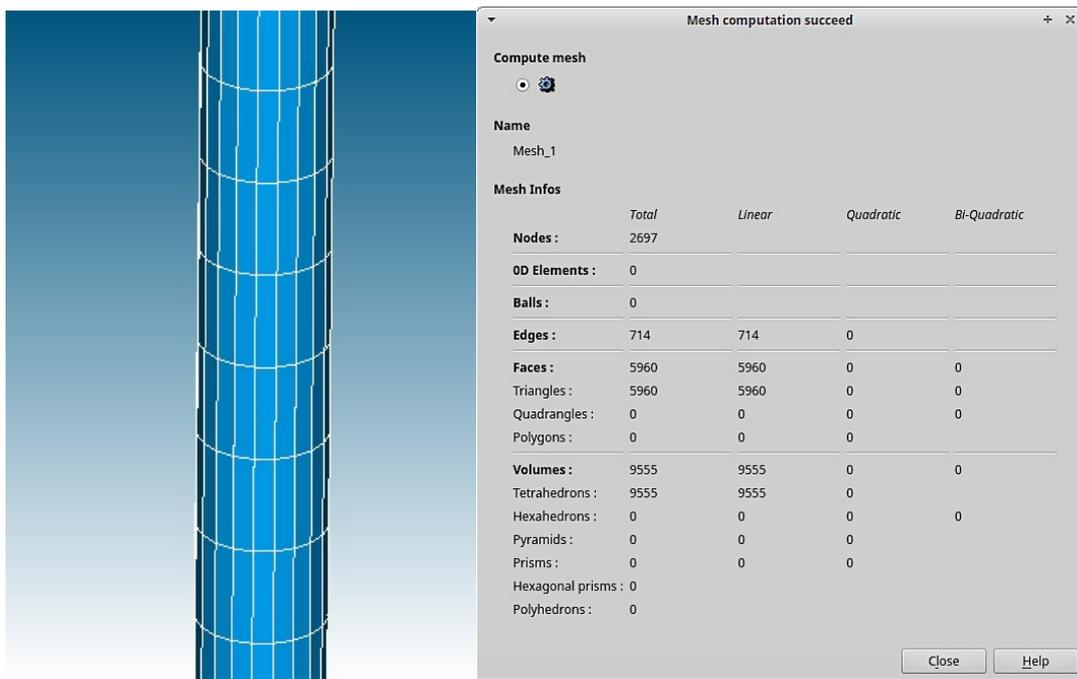


Figura 14a: Dettaglio mesh tipo B

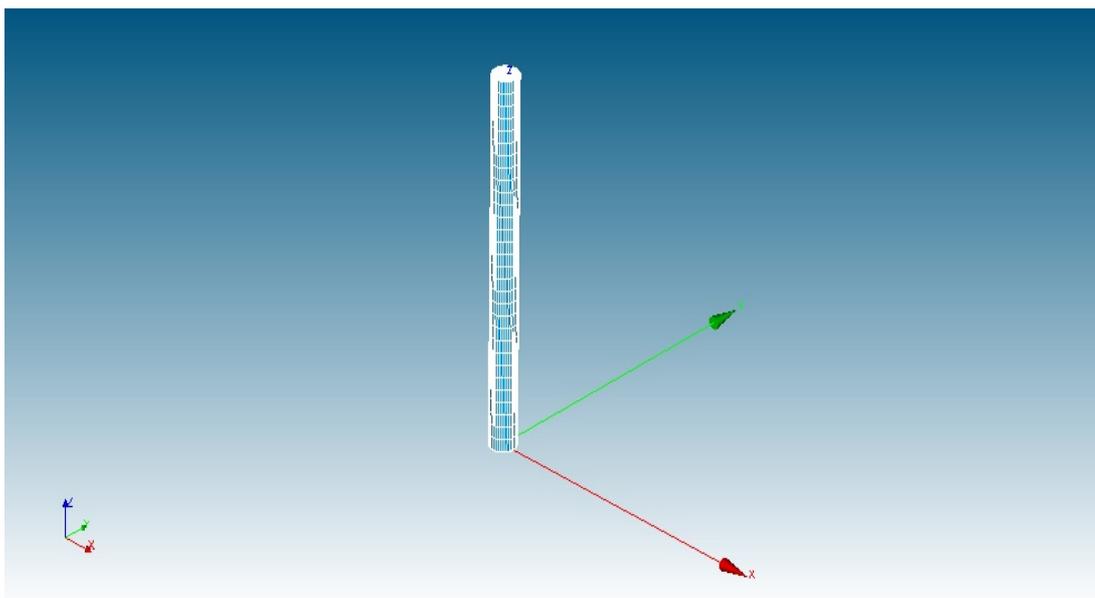


Figura 15: Mesh tipo C

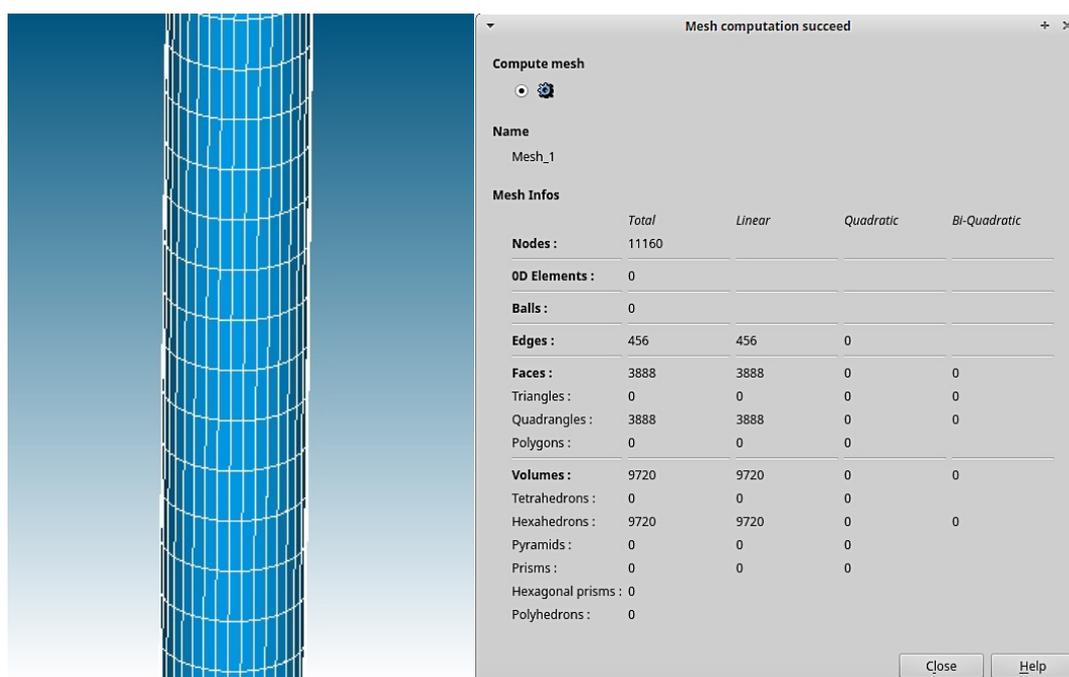


Figura 15a: Dettaglio mesh tipo C

3.2.3. Caratterizzazione del modello

Riprodotta il provino da un punto di vista geometrico e discretizzato con elementi finiti, è stato possibile procedere alla fase di definizione delle caratteristiche tenso-deformative del materiale oggetto di studio, e delle condizioni al contorno del modello numerico.

Le fasi indicate sono state eseguite utilizzando il codice di calcolo Code_Aster. In passato la computazione avveniva mediante la messa a punto di un listato di

istruzioni (script) basato sul linguaggio Python ma, recentemente, il dipartimento di ricerca e sviluppo della EDF ha sviluppato sistematici aggiornamenti, disponibili con cadenza settimanale, che hanno fortemente semplificato l'uso del codice dotandolo anche di una potente interfaccia grafica (*figura 16*), che evita (nella maggior parte dei casi) la necessita di scrivere il codice.

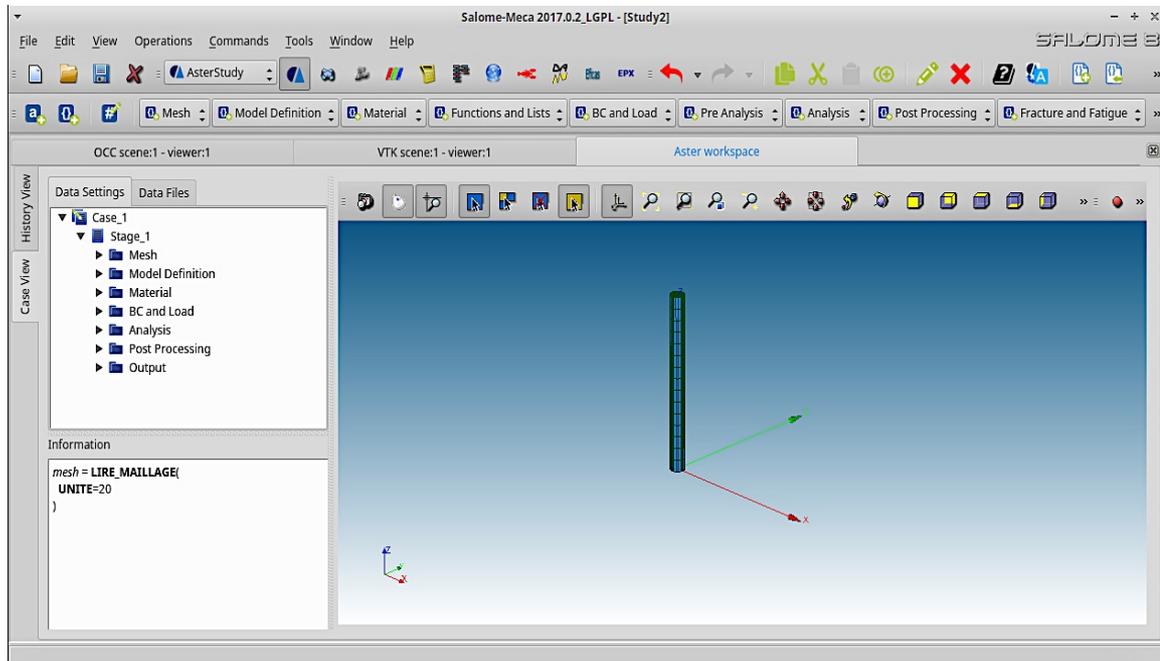


Figura 16: Interfaccia study code_aster

Nei successivi paragrafi verrà descritto il procedimento utile per definire il modello trasversalmente isotropo.

3.2.4. Definizione del comportamento meccanico

Il primo passo è la definizione del comportamento fisico del modello (meccanico, termico o acustico), utilizzando AFPE_MODELE. Quest'operatore permette di influenzare tutto il modello o solo una parte, definendo:

- a) Gradi di libertà sui nodi;
- b) Tipi di elementi finiti della mesh.

In questo elaborato, si è utilizzato un modello con comportamento meccanico di tipo tridimensionale.

3.2.5. Definizione e assegnazione del materiale

In seguito, si definisce il materiale (DEFI_MATERIAU).

Il codice open source consente di operare in diversi ambiti dell'ingegneria, tra cui l'ambito meccanico, termico, idraulico o termo-idro-meccanico ed in ognuno di esse sono implementate diverse leggi costitutive.

Nel caso in esame, si considera un materiale con comportamento meccanico trasversalmente isotropo (ELAS_ISTR), in cui è presente isotropia nel piano LT (=xy)

e ortotropia nella direzione N (=z) (figura 4). Per definire il materiale sono necessarie cinque costanti elastiche, quindi è opportuno definire modulo di Young (E_{LT}) nel piano LT, modulo di Young (E_N) nella direzione normale N, modulo di rigidezza (G_{LN}) nel piano LN, coefficiente di Poisson (ν_{LT}) nel piano LT ed infine il coefficiente di Poisson (ν_{LN}) nel piano LN (Tabella 6):

E_{LT} [GPa]	E_N [GPa]	ν_{LT} [-]	ν_{LN} [-]	G_{LN} [GPa]
60	30	0,15	0,25	15

Tabella 6: Parametri meccanici di anisotropia

Si assegna il materiale al modello (AFFE_MATERAU), successivamente, si assegnano gli angoli del piano di isotropia trasversa (direzione ed inclinazione), utilizzando AFFE_CHAR_MECA, applicando il modello di tipo MASSIF (=massa solida) in cui si indicano gli angoli α e β , dove l'angolo α è un angolo che ruota in senso orario da 0° a 360° nel piano LT, mentre β è un angolo che ruota in senso orario tra 0° e 90° nel piano LN o TN (Tabella 7).

α [°]	β [°]
30	60

Tabella 7: Angoli di anisotropia

3.2.6. Condizioni al contorno

Un'ulteriore importante fase, per simulare il caso di studio, è rappresentata dalla definizione delle condizioni al contorno. Questa fase è stata condotta mediante l'operatore AFFE_CHAR_MECA.

La condizione al contorno necessaria affinché la modellazione simuli il principio teorico adottato nella soluzione analitica, è necessario riprodurre una condizione di *plane strain generalizzato* riferita al caso 3D, cioè lo spostamento w è indipendente dall'asse z :

$$u = u(x, y) \quad v = v(x, y) \quad w = w(x, y)$$

Questa condizione è, una variante del *plane strain*, dove w è nullo:

$$u = u(x, y) \quad v = v(x, y) \quad w = 0$$

Per riprodurre la condizione di *plane strain generalizzato* 3D, il provino deve avere l'estremità libere, ma nel contempo bisogna evitare che lo spostamento w dipenda da z . Queste condizioni, applicate al provino in esame, daranno luogo ad una

dilatazione assiale e una lieve rotazione delle facce di estremità, a causa del grado di anisotropia.

Per simulare le condizioni sopracitate, nella modellazione numerica sarà necessario che, sulla superficie inferiore, lungo la generatrice interna su quattro specifici nodi siano impediti gli spostamenti nel piano e quindi nella direzione x ed y come mostrato in *figura 17a*, mentre lungo la generatrice esterna, si applicano quattro vincoli che impediscono lo spostamento lungo z (*figura 17b*). La superficie superiore è completamente libera (*figura 18*).

In questo modo, si garantisce una piccola dilatazione longitudinale e la rotazione delle estremità.

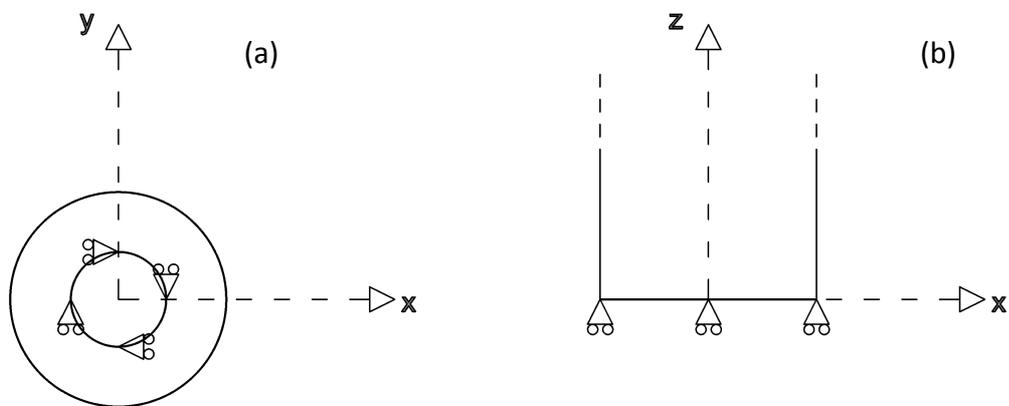


Figura 17: Condizione al contorno dell'estremità inferiore (a) generatrice interna (sinistra), (b) generatrice esterna (destra)

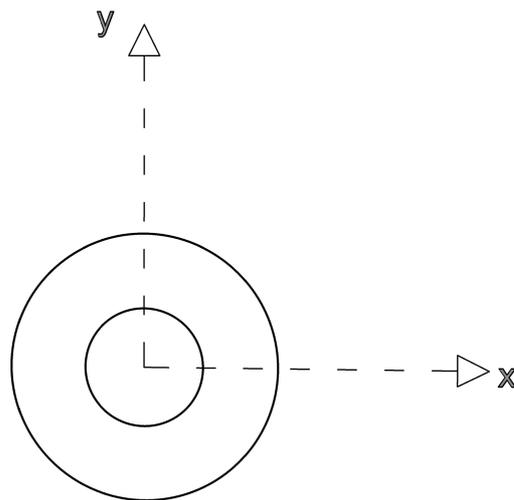


Figura 18: Condizione al contorno dell'estremità superiore

Inoltre, il provino cilindrico è sollecitato sulla superficie esterna da una pressione radiale costante pari a 20 MPa, mentre sulle superfici piane di estremità e all'interno della cavità del provino si applica una pressione atmosferica (figura 19).

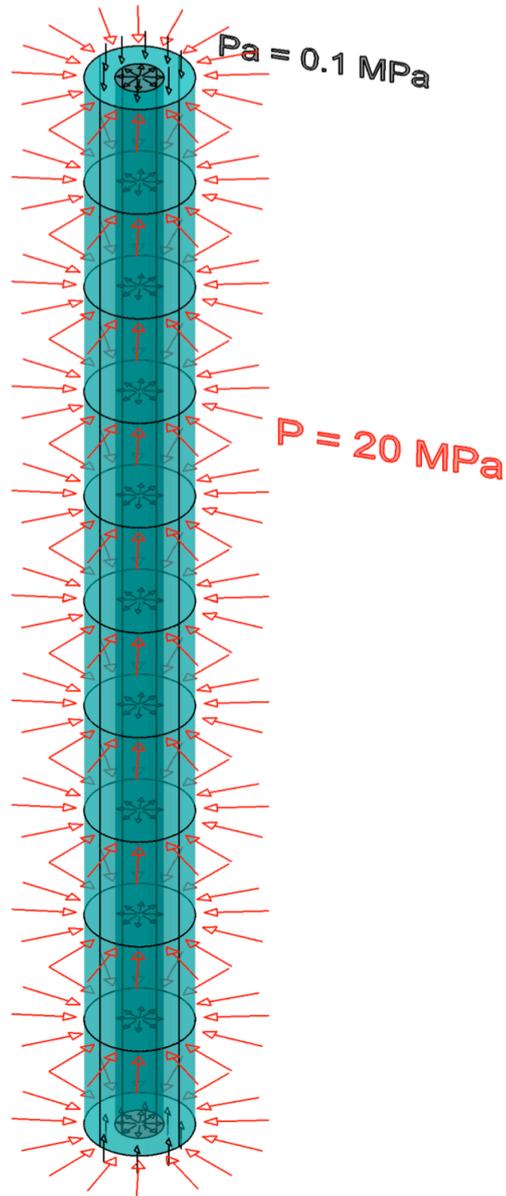


Figura 19: Schema dello stato tensionale sul provino

In allegato 4 il codice di calcolo. Le unità di misura usate dal programma sono mm e MPa.

3.2.7. Analisi dei risultati

3.2.7.1. Analisi e congruenza per il provino isotropo e trasversalmente isotropo con $\beta = 0^\circ$

Prima di analizzare i risultati del provino in esame, si esaminano i risultati forniti per un provino a comportamento isotropo, lineare ed elastico e a comportamento trasversalmente isotropo con $\beta = 0^\circ$.

La modellazione è identica da un punto di vista geometrico, di meshing e di condizioni al contorno, poiché utilizzano le suddette impostazioni, mentre la variazione è sostanziale nella fase di definizione del materiale, in quanto si considera un provino con materiale isotropo (ELAST), aventi le seguenti caratteristiche:

E [GPa]	ν [-]
60	0,15

Tabella 8: Caratteristiche meccaniche materiale ILE

Restano invariate le condizioni di vincolo, che sono state discusse precedentemente.

La soluzione tensionale restituita dal codice di calcolo, presenta i seguenti risultati (figura 20 – 24) di *tabella 9*:

	Sol. Analitica*	Sol. Code_Aster
$\sigma_r(r=r_e)$ [MPa]	-20	-19,66
$\sigma_\theta(r=r_e)$ [MPa]	-29,70	-29,61
σ_z [MPa]	0	0
$\sigma_r(r=r_i)$ [MPa]	0	-3,4
$\sigma_\theta(r=r_i)$ [MPa]	-49,70	-50

Tabella 9: Stato tensionale isotropo con Code_aster

*Soluzione analitica definita dall'equazioni 36 - 37 - 38



Figura 20: Stato tensionale radiale esterno

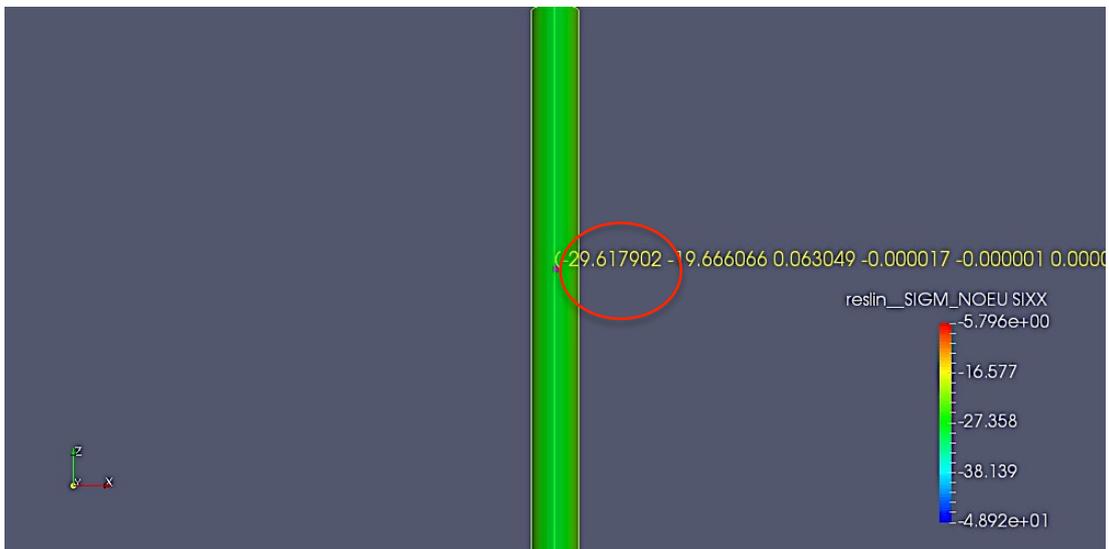


Figura 21: Stato tensionale tangenziale esterno

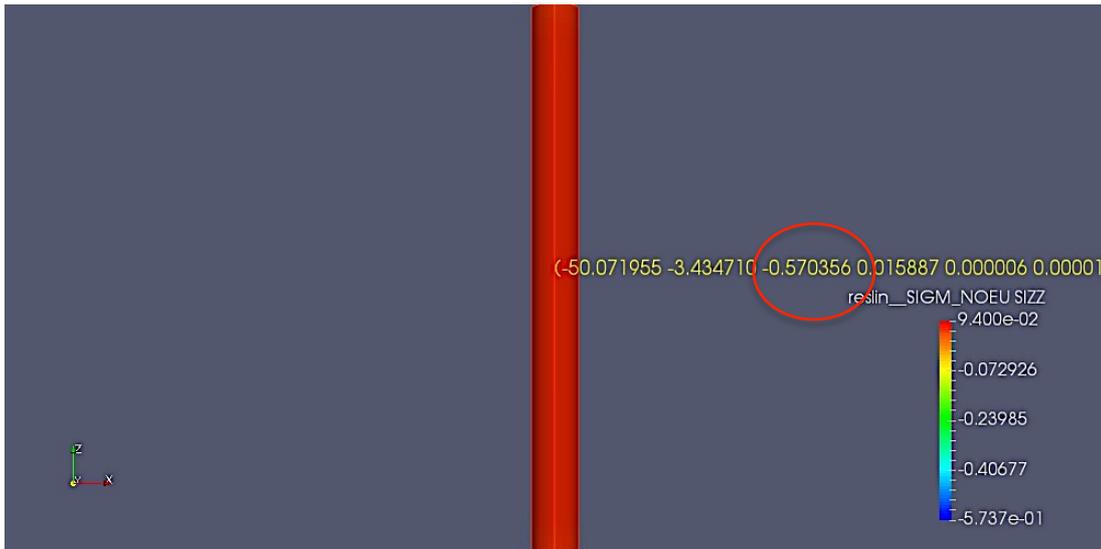


Figura 22: Stato tensionale assiale



Figura 23: Stato tensionale radiale interno

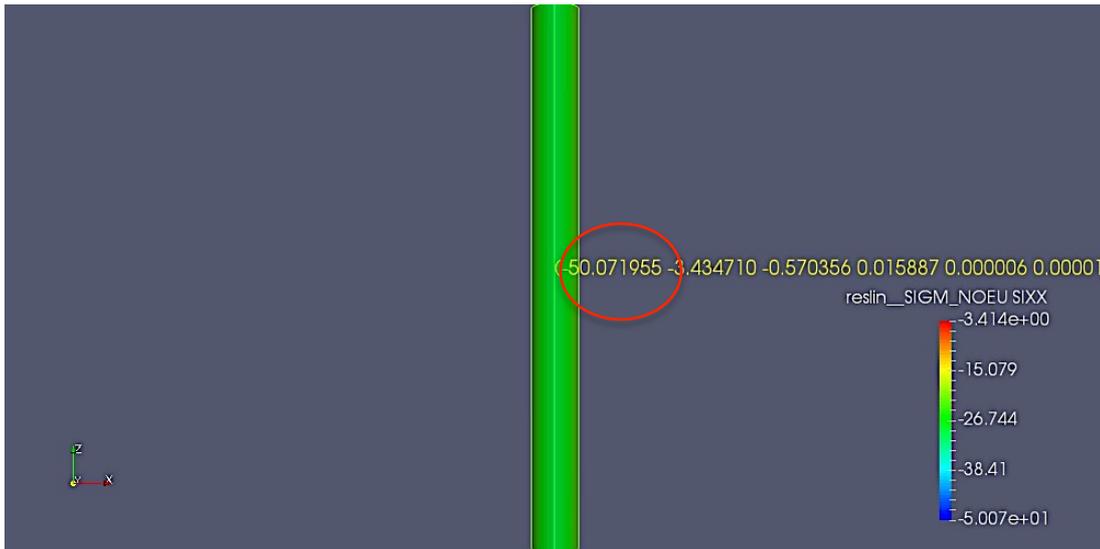


Figura 24: Stato tensionale tangenziale interno

L'esame dei risultati ottenuti evidenzia che, le tensioni calcolate mediante la modellazione numerica condotte con Code_Aster sono congruenti con quelle ottenute utilizzando la soluzione analitica. Ad analoga evidenza si giunge comparando i risultati ottenuti, in termini di deformazioni, nei due casi indicati (Tabella 10).

	Sol. Nunes	Sol. Nunes modificata	Code_Aster
ϵ_{θ} [$\mu\epsilon$]	828	828	825
ϵ_z [$\mu\epsilon$]	124	124	124

Tabella 10: Confronto deformativo con materiale isotropo delle soluzioni

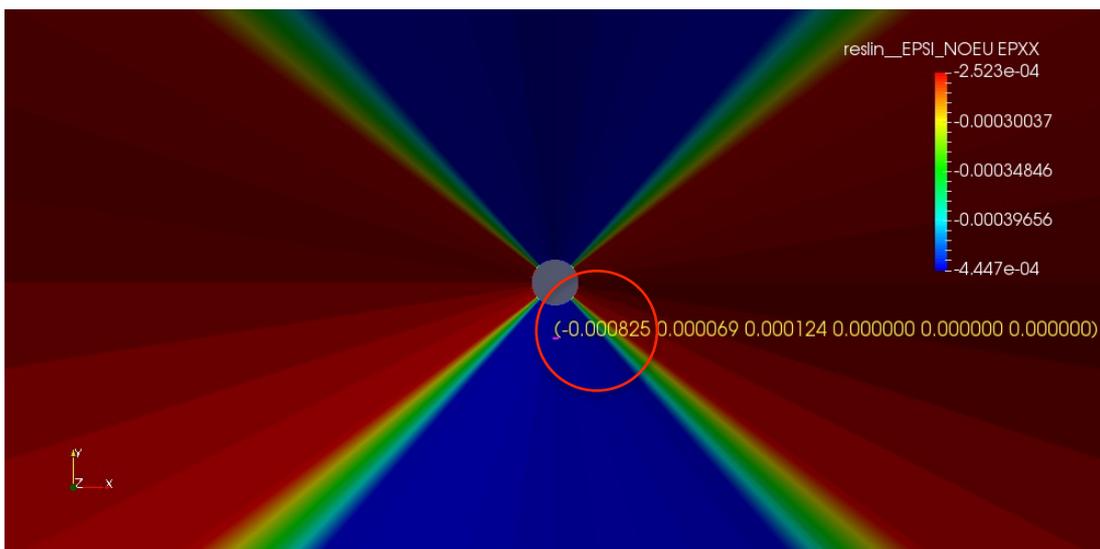


Figura 25: Deformazione tangenziale interna per materiale isotropo

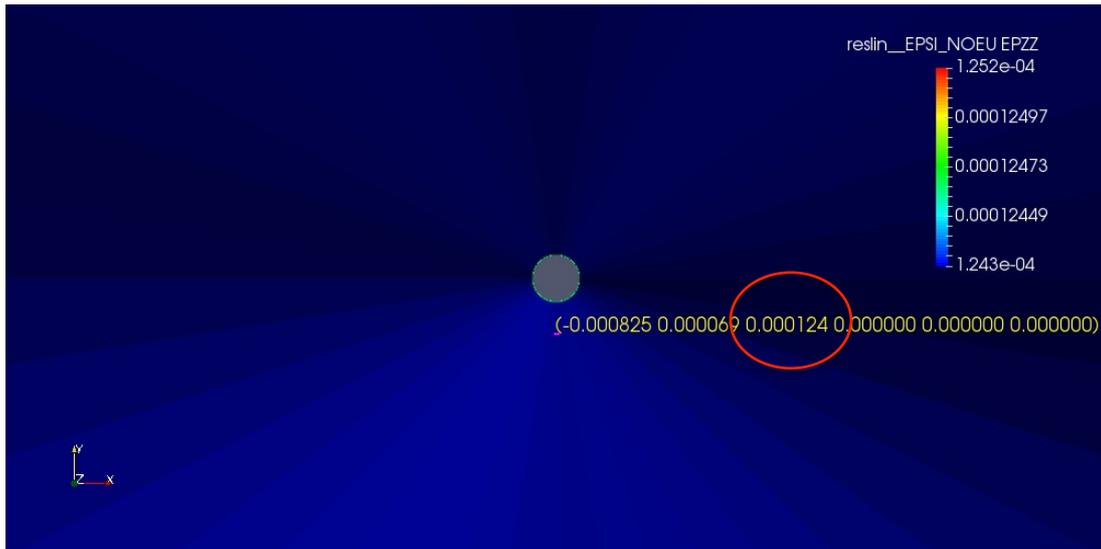


Figura 26: Deformazione assiale interna per materiale isotropo

Analogo studio è stato effettuato per un materiale trasversalmente isotropo con piani di isotropia perpendicolari all'asse z ($\beta=0^\circ$), aventi le seguenti caratteristiche:

E_1 [GPa]	E_2 [GPa]	ν_1 [-]	ν_2 [-]	α [°]	β [°]
60	30	0,15	0,25	0	0

Tabella 11: Caratteristiche dell'isotropia trasversa con piani perpendicolari all'asse z

Nel medesimo caso, la soluzione numerica restituisce i seguenti risultati *tabella 12*:

	Sol. Nunes	Sol. Nunes modificata	Sol. numerica Code_Aster
ϵ_θ [$\mu\epsilon$]	828	828	824
ϵ_z [$\mu\epsilon$]	414	207	207

Tabella 12: Risultati Code_Aster caso isotropia trasversa $\beta=0^\circ$

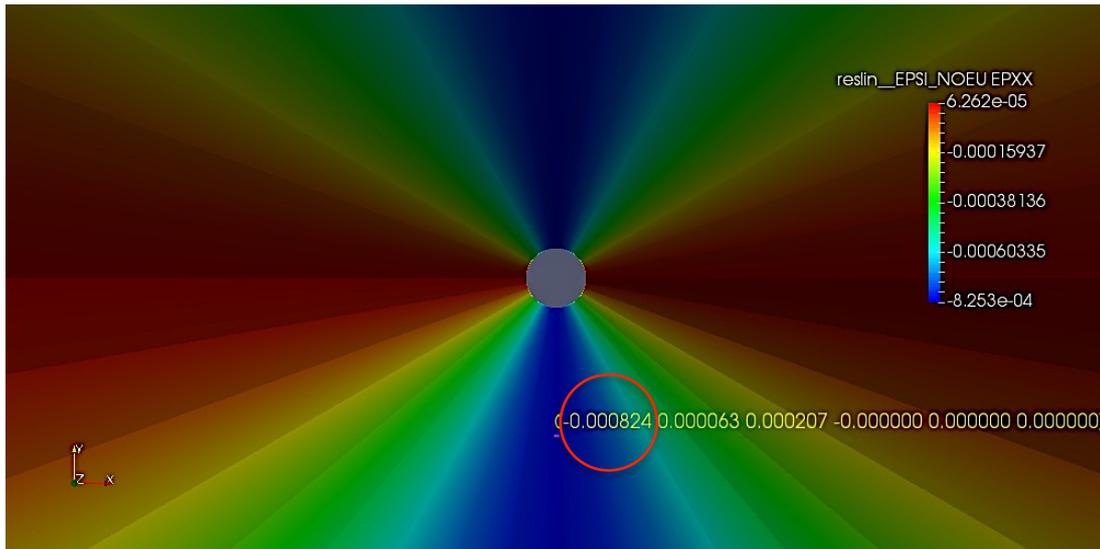


Figura 27: Deformazione tangenziale interna per materiale trasversalmente isotropo con $\beta=0^\circ$

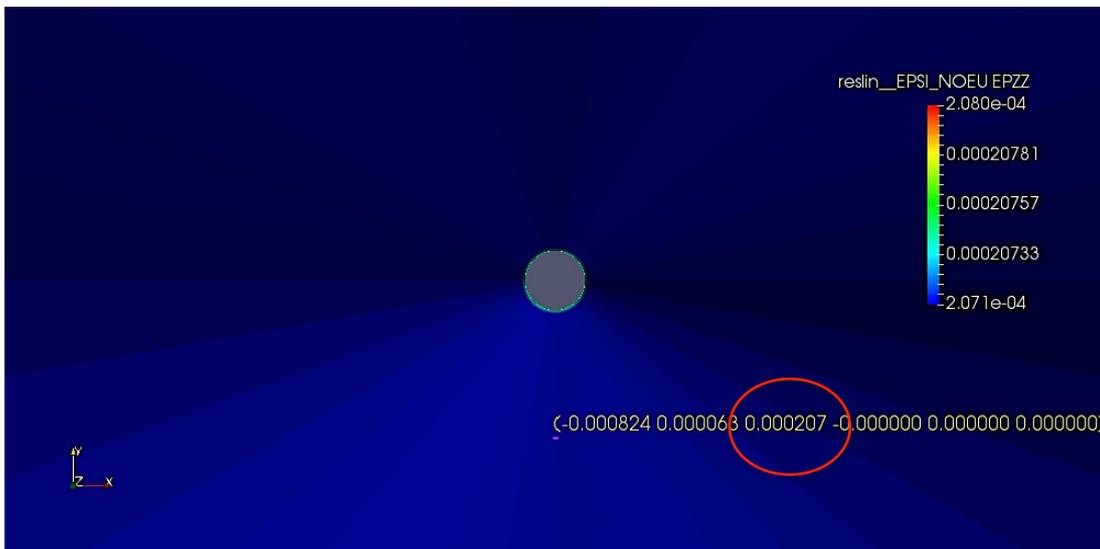


Figura 28: Deformazione assiale interna per materiale trasversalmente isotropo con $\beta=0^\circ$

In questo caso le soluzioni analitiche e numeriche sono congruenti per le deformazioni tangenziali, mentre c'è un evidente differenza nelle deformazioni assiali, in cui si nota uno scarto del 50% per la deformazione assiale della soluzione analitica Nunes. Questa sostanziale differenza, è causata dall'utilizzo della matrice di Hooke, poiché la soluzione analitica Nunes utilizza una matrice di Hooke generalizzata simmetrica per materiale trasversalmente isotropo, mentre la soluzione numerica utilizza una matrice asimmetrica. Per tale motivo, la deformazione assiale nella soluzione numerica è uguale all'equazione 34, la quale utilizza per le componenti di deformazione nella direzione x e y , il modulo elastico E_1 , mentre la soluzione teorica utilizza l'equazione 33, in cui i valori di deformazione in x e y , utilizzano il modulo elastico E_2 . Quindi, la deformazione assiale della

soluzione numerica, risulterà dimezzata rispetto alla soluzione teorica, al contrario, la deformazione tangenziale è congruente perché in entrambe le soluzioni, essa viene calcolata con la medesima relazione:

$$\varepsilon_y = -\frac{\nu_1}{E_1} + \frac{1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2}$$

Pertanto, si è applicata la modifica alla soluzione analitica Nunes già discussa nel capitolo 3.2, la quale prevede l'utilizzo della matrice asimmetrica di Hooke per materiale trasversalmente isotropo, ciò consente la congruenza tra soluzione analitica e soluzione numerica (*Tabella 12*).

3.2.7.2. Analisi e congruenza per il provino trasversalmente isotropo con $\alpha = 30^\circ$ e $\beta = 60^\circ$

Nel caso di isotropia trasversa, le caratteristiche meccaniche sono le seguenti:

E_1 [GPa]	E_2 [GPa]	ν_1 [-]	ν_2 [-]	α [°]	β [°]
60	30	0,15	0,25	30	60

Tabella 13: Caratteristiche meccaniche del materiale trasversalmente isotropo

In questo caso, i valori delle deformazioni non sono uniformi lungo la corona interna del provino come nei casi precedenti, pertanto si riporta in *allegato 5* l'andamento della deformazione tangenziale ed assiale. Nel seguito si confrontano i risultati della soluzione numerica, in prossimità della mezzeria del provino, nelle posizioni 60° , 180° e 300° , cioè nella posizione delle celle estensimetriche (*figura 29 - 30*).

Orientazione	Sol. Nunes			Sol. Nunes modificata			Code_Aster		
	60°	180°	300°	60°	180°	300°	60°	180°	300°
ε_θ [$\mu\varepsilon$]	1294	1294	828	1396	1396	828	1398	1400	856
ε_z [$\mu\varepsilon$]	-360	-360	-197	-337	-337	-145	-270	-270	-227

Tabella 14: Confronto dei risultati

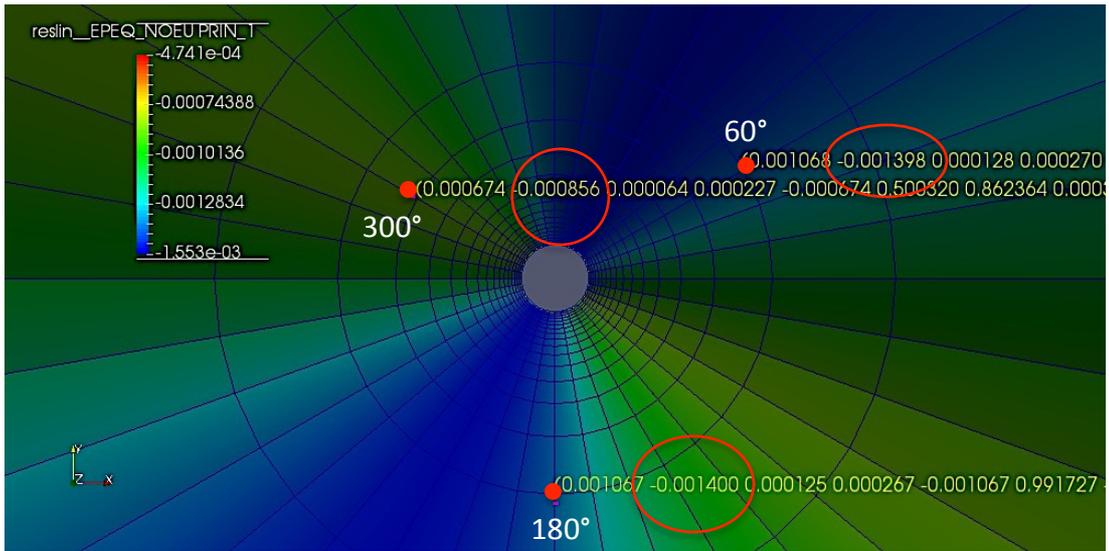


Figura 29: Deformazione tangenziale interna per materiale trasversalmente isotropo

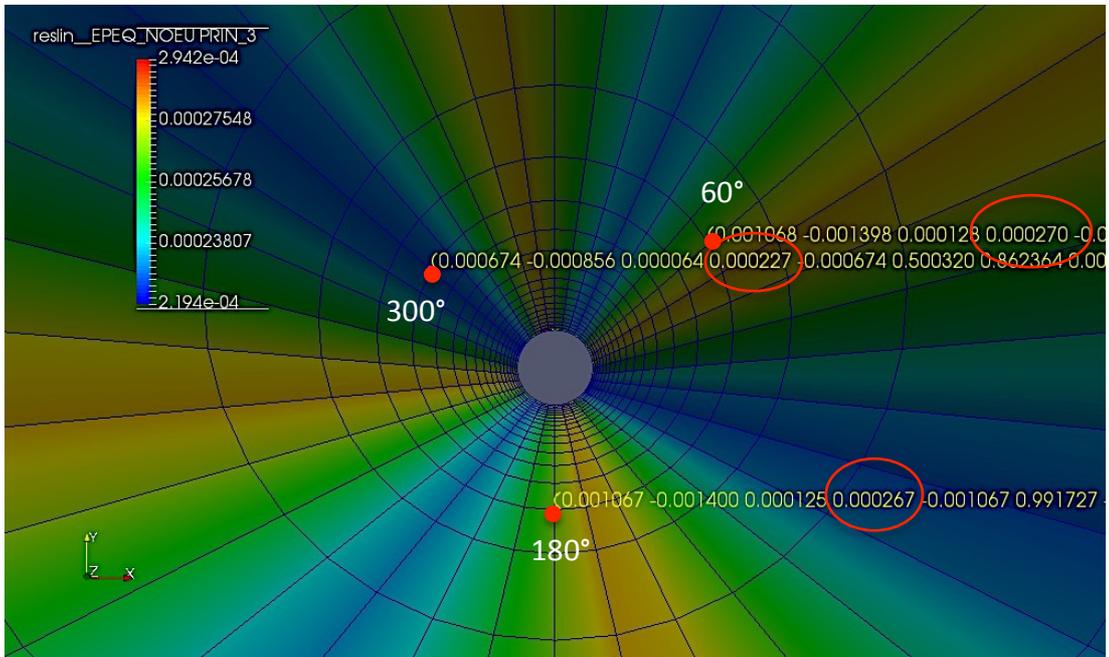


Figura 30: Deformazione assiale interna per materiale trasversalmente isotropo

3.3. Modellazione numerica FDM: FLAC3D

FLAC3D è un codice, sviluppato da Itasca Consulting Group, molto utilizzato per le modellazioni tridimensionali, nell'ambito delle analisi geotecniche di suolo, rocce, acque sotterranee e delle costruzioni e quindi possibile effettuare progettazioni ingegneristiche, calcoli del fattore di previsione della sicurezza ed infine ricerche e analisi retrospettive del fallimento.

Il codice di calcolo è dotato di solutore che utilizza il metodo delle differenze finite esplicite. Tale solutore è basato su equazioni lagrangiane, applicate al continuo, discretizzato con una mesh di elementi di forma cubica. In tal senso ogni equazione differenziale che governa il problema è descritta da un'equazione algebrica in termini di variabili di campo in punti discreti dello spazio. Il metodo è esplicito perché utilizza le equazioni del moto per ricavare, in un intervallo molto piccolo, la velocità e lo spostamento di sollecitazioni e forze che agiscono sul singolo elemento. Reiterando i cicli di calcolo il sistema tende ad un nuovo stato di equilibrio, a condizione che esista. I risultati sono evidenziati in forma grafica.

3.3.1. Anisotropia in FLAC3D

Il modello elastico è caratterizzato da deformazioni reversibili al momento dello scarico; le leggi sforzo-deformazione utilizzate sono lineari e indipendenti dal percorso. Il modello elastico comprende sia il comportamento isotropo del materiale, sia quello anisotropo. In FLAC3D sono disponibili due leggi di comportamento per i materiali anisotropi oggetto di studio: la prima si riferisce ai materiali ortotropi mentre la seconda si riferisce ai materiali trasversalmente isotropi (Itasca Consulting Group).

3.3.1.1. Modello elastico isotropo

A partire dal modello elastico, lineare isotropo, la legge di Hooke è definita dagli incrementi della deformazione che generano incrementi di stress:

$$\Delta\sigma_{ij} = 2G\Delta\epsilon_{ij} + \alpha_2\Delta\epsilon_{kk}\delta_{ij} \quad (44)$$

dove δ_{ij} è il delta di Kroenecker, α_2 è la costante del materiale, definita dal modulo di dilatazione cubica (K) e dal modulo di taglio (G):

$$\alpha_2 = K - \frac{2}{3}G \quad (45)$$

Quindi, il nuovo valore di sollecitazione, sarà:

$$\sigma_{ij}^N = \sigma_{ij} + \Delta\sigma_{ij} \quad (46)$$

3.3.1.2. Modello elastico ortotropo

Il modello ortotropo presenta tre piani ortogonali di simmetria elastica. Il sistema di riferimento è definito dagli assi, 1', 2' e 3' e la relazione che lega le tensioni alle deformazioni, assume la stessa forma:

$$\begin{Bmatrix} \Delta\epsilon'_{11} \\ \Delta\epsilon'_{22} \\ \Delta\epsilon'_{33} \\ 2\Delta\epsilon'_{12} \\ 2\Delta\epsilon'_{13} \\ 2\Delta\epsilon'_{23} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & -\nu_{12} & -\nu_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{21}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\nu_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{31}}{E_1} & \frac{-\nu_{32}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta\sigma'_{11} \\ \Delta\sigma'_{22} \\ \Delta\sigma'_{33} \\ \Delta\sigma'_{12} \\ \Delta\sigma'_{13} \\ \Delta\sigma'_{23} \end{Bmatrix} \quad (47)$$

Il modello presenta nove costanti elastiche indipendenti:

- E_1, E_2, E_3 = Moduli di Young;
- G_{23}, G_{13}, G_{12} = Moduli di taglio
- $\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$ = Coefficiente di Poisson.

In aggiunta a questi nove parametri, ci sono anche i parametri che descrivono l'orientazione del piano di isotropia, cioè la direzione e l'inclinazione del piano.

In FLAC3D il calcolo dello stato tensionale e dello stato di deformazione, è effettuato costruendo la matrice di rigidezza locale $[K']$ mediante l'inversione della matrice simmetrica (equazione 48), quindi:

$$\Delta[\sigma'] = [K']\Delta[\epsilon'] \quad (48)$$

L'asse globale della relazione tenso-deformativo, è dato:

$$\Delta[\sigma] = [K]\Delta[\epsilon] \quad (49)$$

La matrice di rigidezza globale $[K]$ è calcolata dalla seguente relazione:

$$[K] = [Q]^T [K'] [Q] \quad (50)$$

Dove la matrice $[Q]$ è la matrice di rotazione 6x6 utile per passare dal sistema globale al sistema locale (Itasca Consulting Group).

3.3.1.3. Modello elastico trasversalmente isotropo

Il modello trasversalmente isotropo prende in considerazione un piano di isotropia. Pertanto gli assi principali vengono così definiti: l'asse normale al piano di isotropia, corrisponde all'asse locale 3, mentre il piano definito dagli assi 1 e 2 determinano il piano di isotropia.

Quindi, in questo specifico modello le costanti elastiche vengono ridotte da 9 a 5, perché si hanno delle uguaglianze:

$$\begin{aligned} E_1 &= E_2; \\ G_{13} &= G_{23}; \\ \nu_{13} &= \nu_{23}; \\ G_{12} &= \frac{E_1}{2(1 + \nu_{12})}; \\ G_{13} = G_{23} &= \frac{E_1 E_2}{E_1(1 + 2\nu_2) + E_2}; \end{aligned}$$

dove:

$E = E_1 = E_2$ è il modulo di Young del piano isotropo;

$E' = E_3$ è il modulo di Young nella direzione normale al piano di isotropia;

$\nu = \nu_{12}$ è il coefficiente di Poisson, il quale indica la dilatazione trasversale nella direzione del suo versore 2, quando la matrice è sollecitata in direzione longitudinale secondo il versore 1;

$\nu' = \nu_{13} = \nu_{23}$ è il coefficiente di Poisson, il quale indica la dilatazione trasversale nella direzione del suo versore 3, quando la matrice è sollecitata in direzione longitudinale secondo il versore 1/2.

$G = G_{12}$ è il modulo di taglio nel piano di isotropia;

$G' = G_{13} = G_{23}$ è il modulo di taglio nel piano normale al piano di isotropia, suggerito da Lekhnitskii, basato su prove di laboratorio (Itasca Consulting Group).

Infine, la relazione tenso-deformativa, assumerà la seguente forma:

$$\begin{Bmatrix} \Delta\epsilon'_{11} \\ \Delta\epsilon'_{22} \\ \Delta\epsilon'_{33} \\ 2\Delta\epsilon'_{12} \\ 2\Delta\epsilon'_{13} \\ 2\Delta\epsilon'_{23} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu'}{E'} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & \frac{-\nu'}{E'} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu'}{E'} & \frac{-\nu'}{E'} & \frac{1}{E'} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G'} \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta\sigma'_{11} \\ \Delta\sigma'_{22} \\ \Delta\sigma'_{33} \\ \Delta\sigma'_{12} \\ \Delta\sigma'_{13} \\ \Delta\sigma'_{23} \end{Bmatrix} \quad (51)$$

3.4. Simulazione numerica con il codice FLAC3D

Come nel caso del metodo agli elementi finiti, anche con il codice alle differenze finite, la modellazione del test biassiale parte con il caso più semplice e quindi con il provino per cui è ipotizzato il comportamento isotropo elastico lineare. Successivamente si esegue la modellazione per un provino trasversalmente isotropo con piani di isotropia perpendicolari all'asse z ($\beta = 0^\circ$), sino ad arrivare al caso in esame cioè all'isotropia trasversa ($\alpha = 30^\circ$ e $\beta = 60^\circ$).

3.4.1. Geometria e discretizzazione del provino

Per la discretizzazione del provino è stata utilizzata la stessa geometria descritta precedentemente nel Capitolo 5.3, costituita da una mesh contenente 81000 nodi (Figura 35).

a (raggio interno) [mm]	19
b (raggio esterno) [mm]	43
h (altezza) [mm]	1000

Tabella 15: Dati geometria

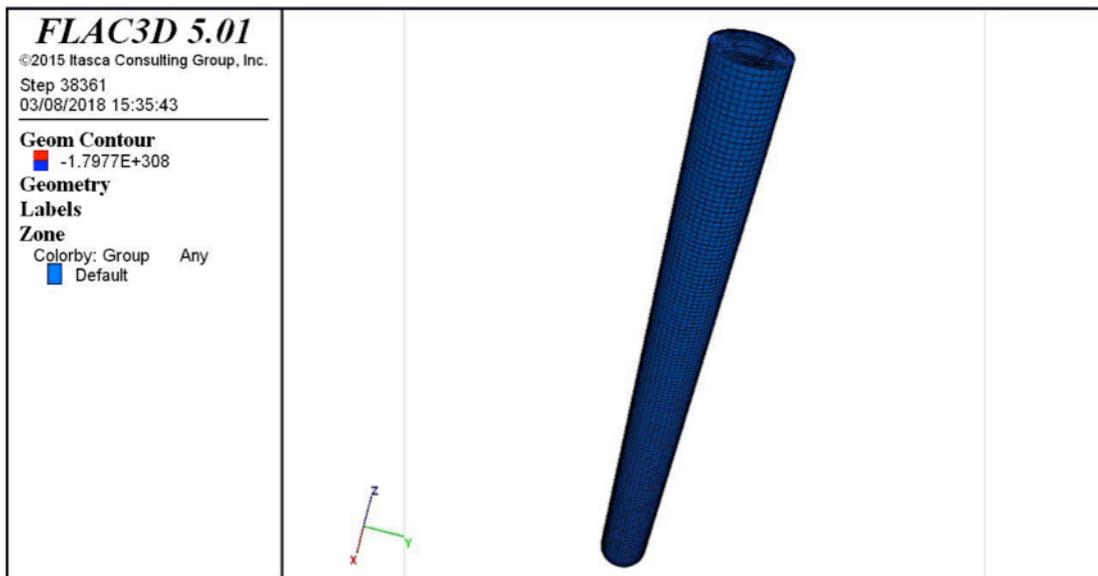


Figura 31: Geometria e mesh del provino FLAC3D

3.4.2. Proprietà meccaniche e condizioni al contorno

Le proprietà meccaniche assegnate, al modello numerico oggetto di studio, è di tipo meccanico trasversalmente isotropo con le costanti elastiche di Tabella 17 e gli angoli dei piani di isotropia indicati in Tabella 18:

E_{xy} [GPa]	E_z [GPa]	ν_{xy} [-]	ν_{xz} [-]	G_{xz} [GPa]
60	30	0,15	0,25	15

Tabella 16: Proprietà meccaniche assegnate al modello numerico di FLAC3D

α [°]	β [°]
30	60

Tabella 17: Angoli dei piani di isotropia

L'ultima fase della modellazione con FLAC3D è l'applicazione delle condizioni al contorno. Come definito in precedenza, bisogna garantire la dilatazione longitudinale del provino e pertanto si è optato per vincolare la faccia dell'estremità inferiore, inserendo delle cerniere che impediscono lo spostamento lungo x , y e z , mentre sull'estremità superiore non viene applicato nessun vincolo, quindi è libera (Figura 33 - 34).

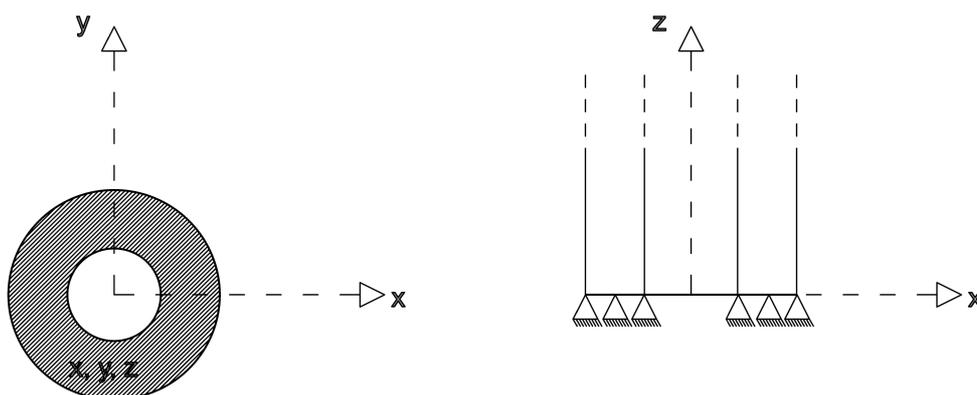


Figura 32: Condizioni al contorno inferiore

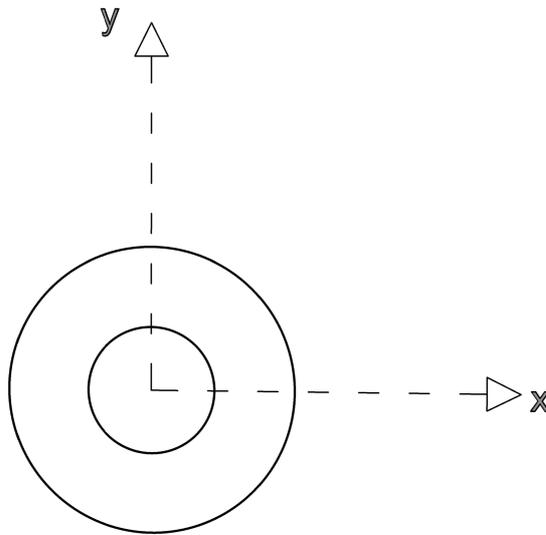


Figura 33: Condizioni al contorno superiore

Inoltre, viene applicato un carico circonferenziale sulla faccia radiale esterna di 20 MPa ed infine una pressione atmosferica sulla faccia superiore ed inferiore e nell'incavo (Figura 35).

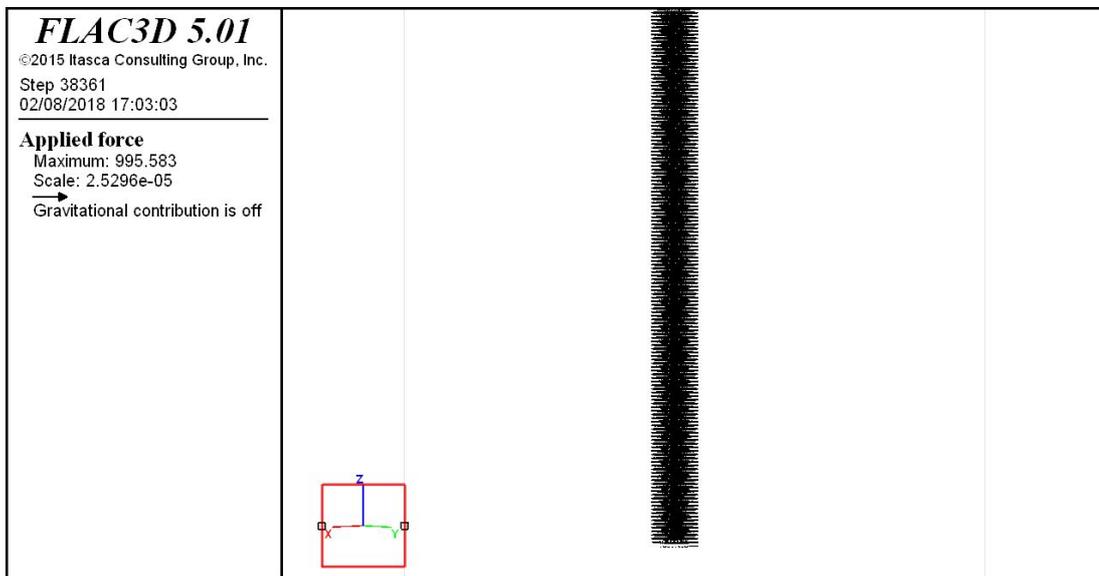


Figura 34: Pressione applicata sul provino

In allegato 5 lo script della modellazione. Le unità di misura adottata dal programma sono m e Pa.

3.4.3. Analisi dei risultati

3.4.3.1. Analisi e congruenza per il provino isotropo e trasversalmente isotropo con $\beta = 0^\circ$

Anche in questo caso, prima di analizzare il caso di materiale trasversalmente isotropo con $\alpha = 30^\circ$ e $\beta = 60^\circ$, si sono analizzati due casi semplici:

1. Materiale isotropo elastico lineare (ILE)
2. Materiale trasversalmente isotropo con $\beta = 0^\circ$.

Per questi due casi, la modellazione è simile a quella descritta precedentemente, ma con delle differenze nel comportamento del materiale. Nel primo caso si ha un modello meccanico elastico con le seguenti costanti elastiche:

k [GPa]	G [GPa]
60	30

Tabella 18: Proprietà elastiche del provino a comportamento ILE

dove k e G sono definite dalle seguenti relazioni, con $E = 60$ GPa e $\nu = 0.15$:

$$k = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}; \quad (52)$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (53)$$

Lo stato tensionale (*Figura 36 – 41*) che si ottiene a seguito della convergenza, è congruente ai risultati analizzati con Code_Aster e con la soluzione analitica riportati precedentemente in *Tabella 9*.

σ_r [MPa]	$r=r_i$	-4
	$r=r_e$	-20
σ_θ [MPa]	$r=r_i$	-49,5
	$r=r_e$	-30
σ_z [MPa]	$r=r_i$	0
	$r=r_e$	0

Tabella 19: Stato tensionale per materiale ILE calcolato da FLAC3D

Lo stato di deformazione viene valutato all'interno del provino ad una altezza di 500 mm, proprio dove sono alloggiare le celle estensimetriche (*Figura 42 – 44*).

ϵ_{θ} [$\mu\epsilon$]	ϵ_z [$\mu\epsilon$]
800	120

Tabella 20: Stato deformativo per materiale ILE calcolato da FLAC3D

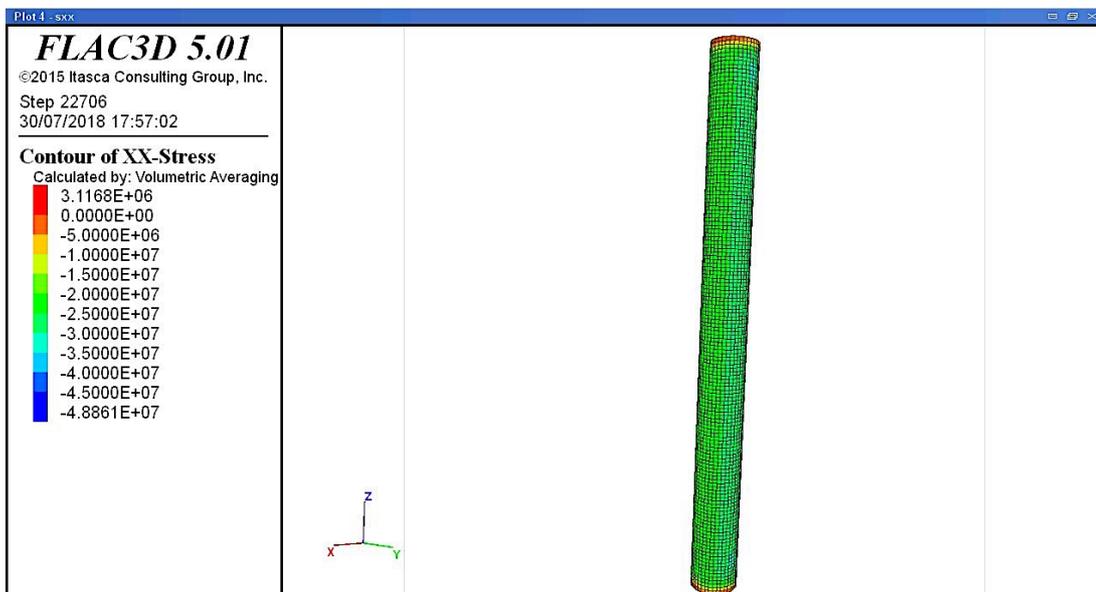


Figura 35: Stato tensionale XX esterno

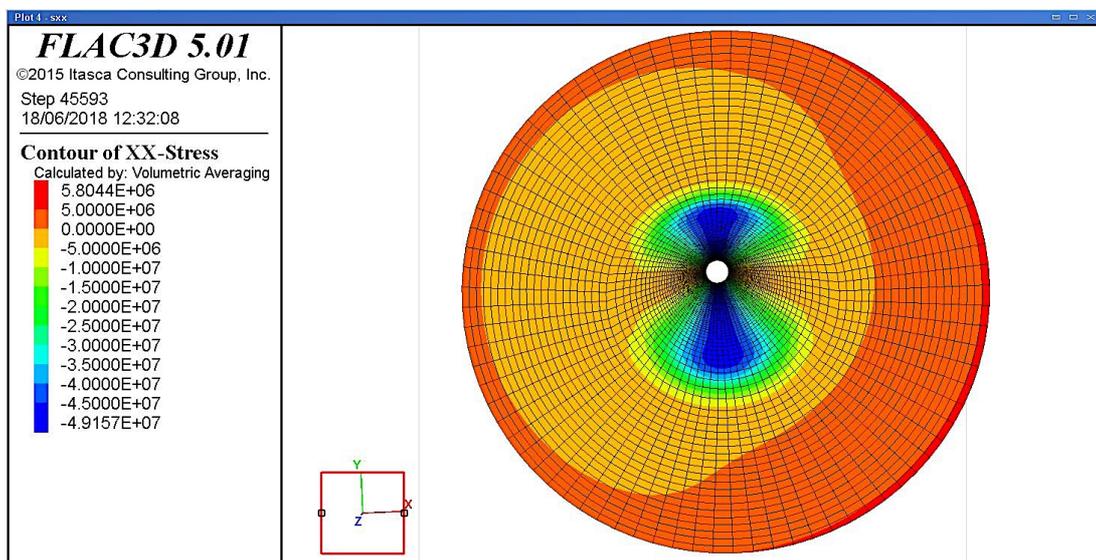


Figura 36: Stato tensionale XX interno

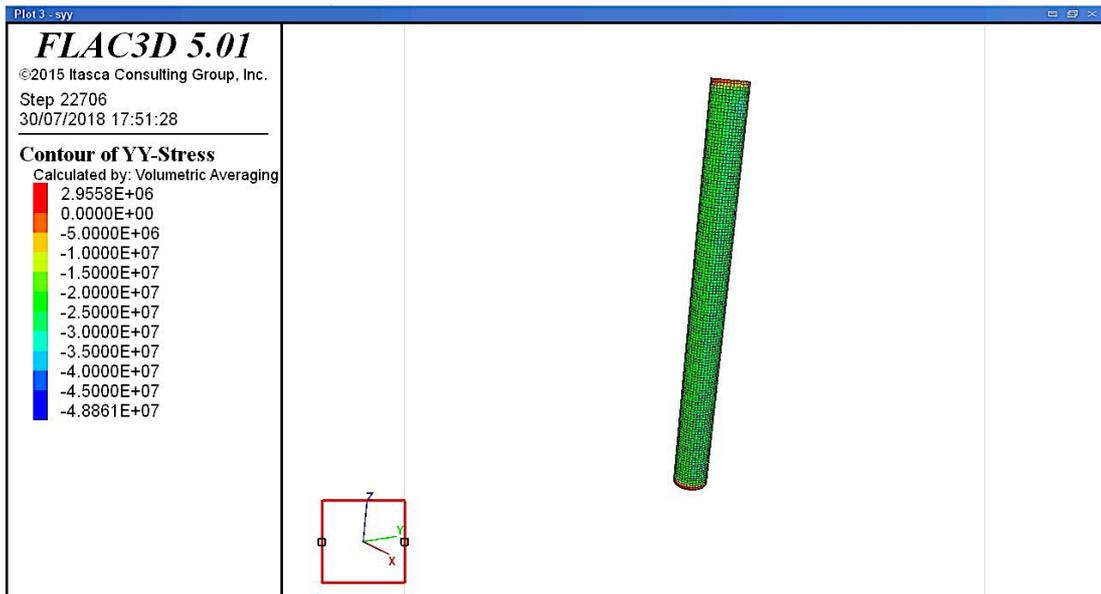


Figura 37: Stato tensionale YY esterno

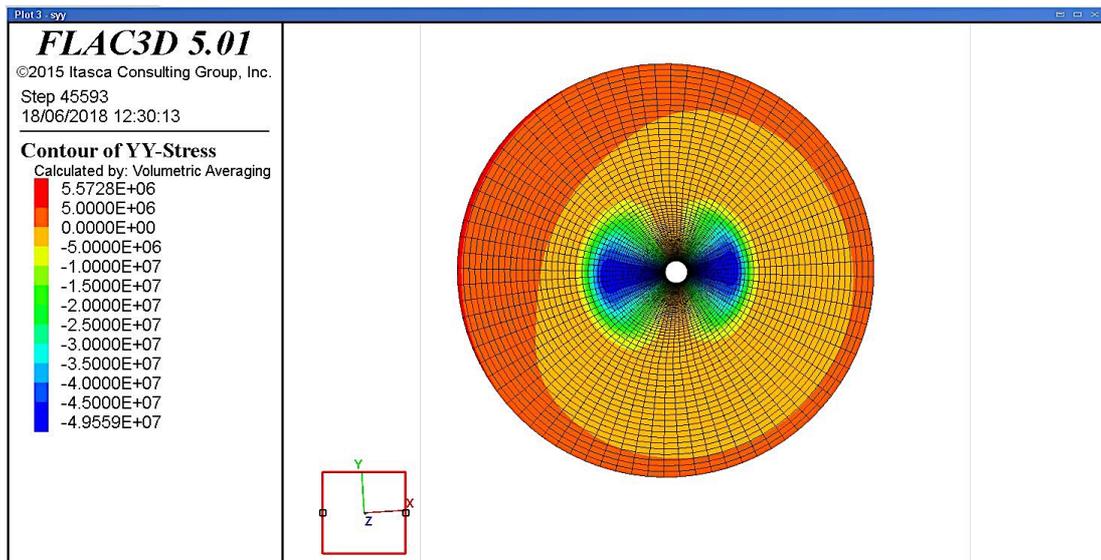


Figura 38: Stato tensionale YY interno

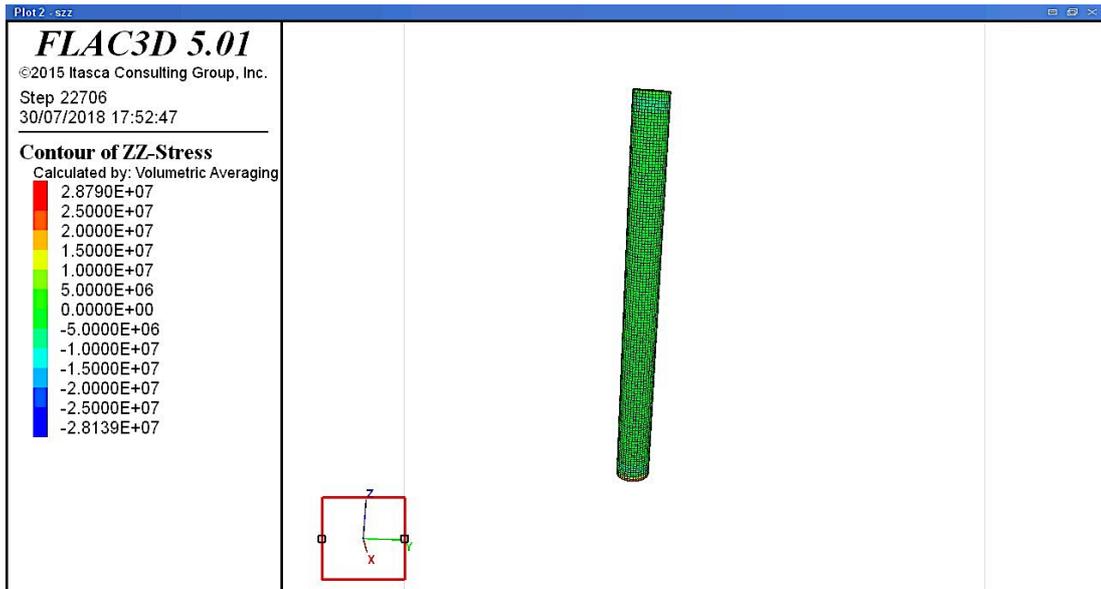


Figura 39: Stato tensionale ZZ esterno

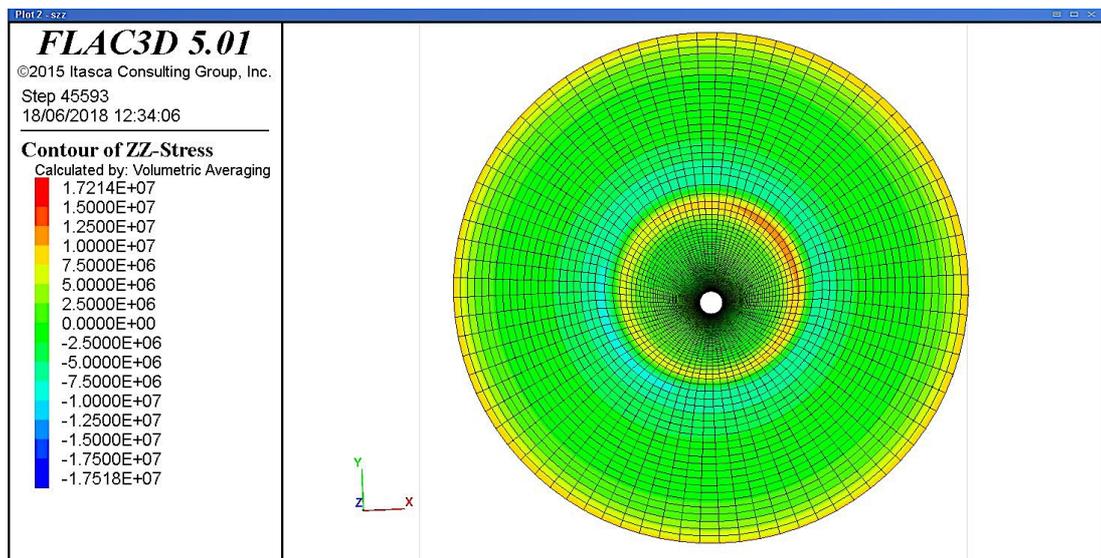
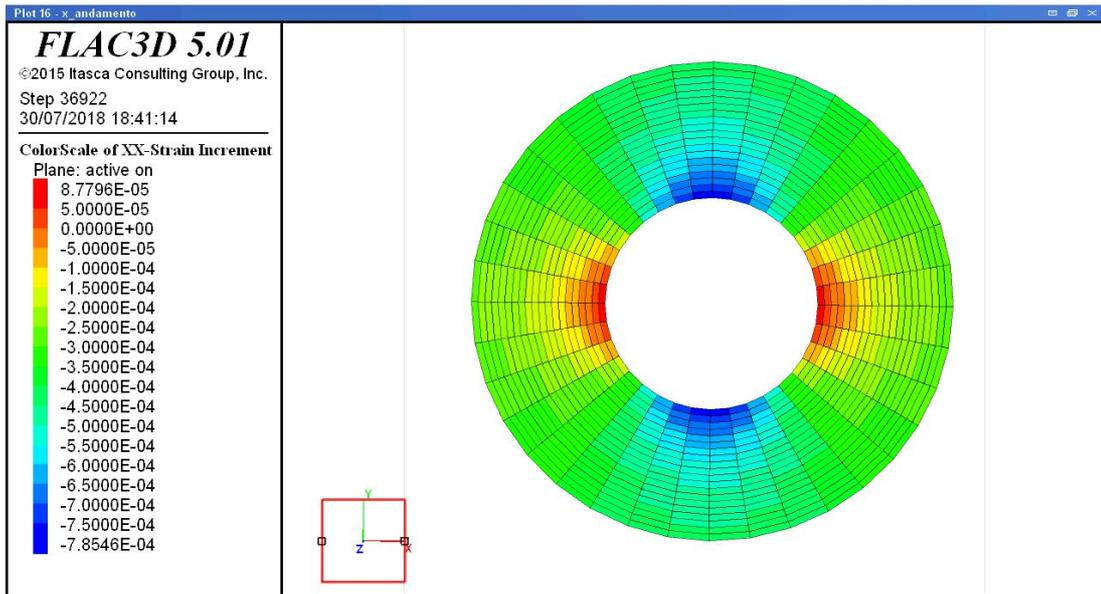


Figura 40: Stato tensionale ZZ interno



41: Stato di deformazione lungo X per materiale ILE

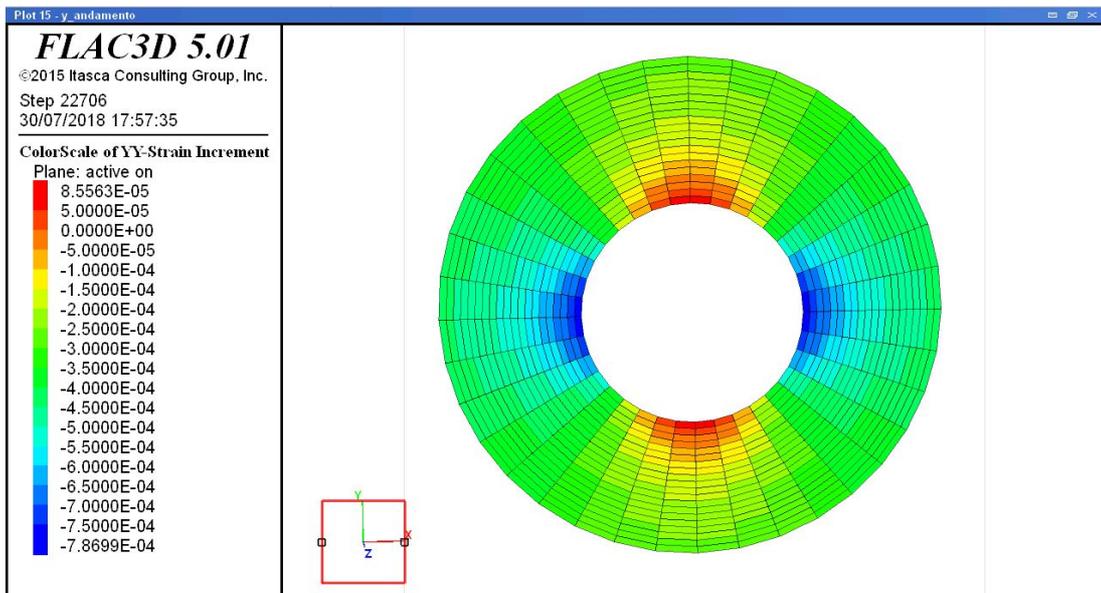


Figura 42: Stato di deformazione lungo Y per materiale ILE

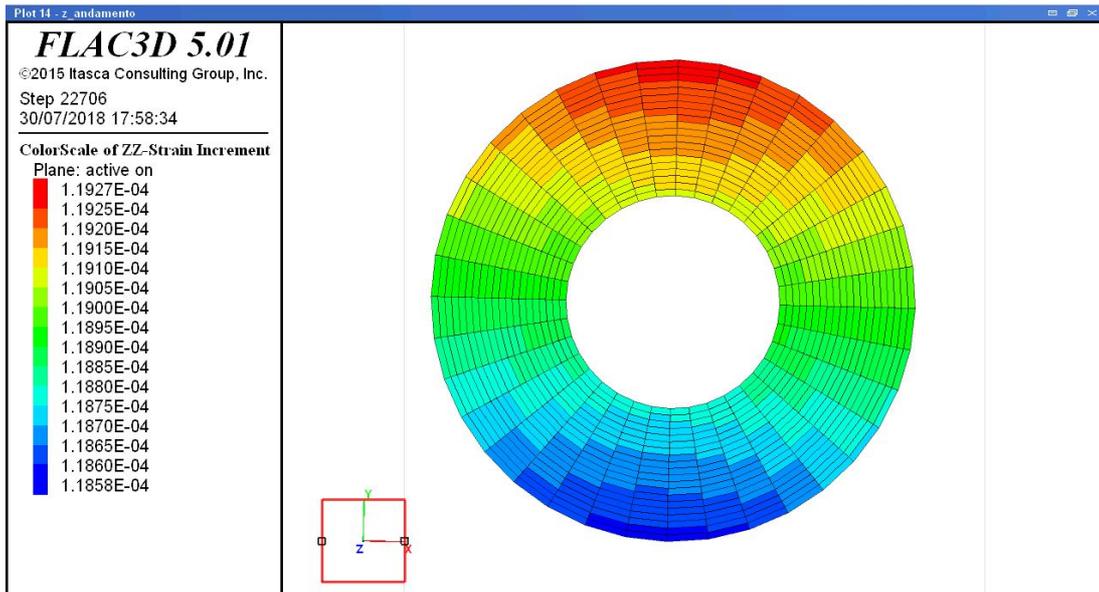


Figura 43: Stato di deformazione lungo Z per materiale ILE

Per quanto riguarda il secondo caso, si considera un modello meccanico di tipo trasversalmente isotropo con i piani di isotropia perpendicolari all'asse z ($\beta = 0^\circ$) con le medesime costanti elastiche di *Tabella 11*.

Lo stato di deformazione ottenuto è comparabile alla soluzione analitica Nunes poiché la computazione effettuata dal codice utilizza la matrice di Hooke per materiale trasversalmente isotropo simmetrica, quindi la stessa semplificazione utilizzata nella soluzione teorica. Pertanto i parametri deformativi sono i seguenti:

ϵ_θ [$\mu\epsilon$]	ϵ_z [$\mu\epsilon$]
800	400

Tabella 21: Deformazioni per materiale trasversalmente isotropo $\beta = 0^\circ$

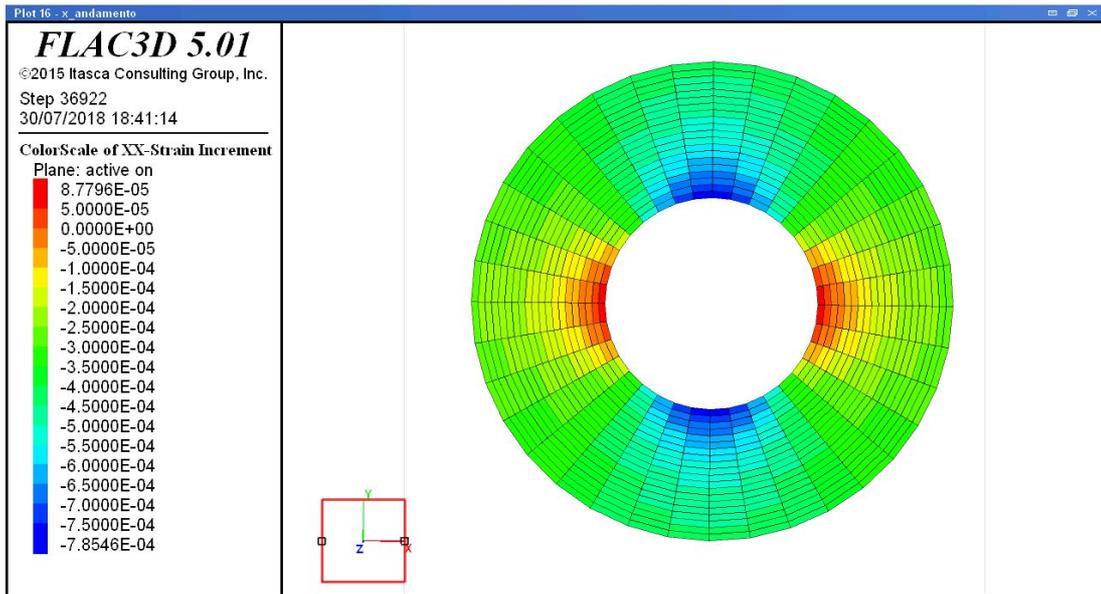


Figura 44: Stato di deformazione lungo X per materiale trasversalmente isotropo $\beta = 0^\circ$

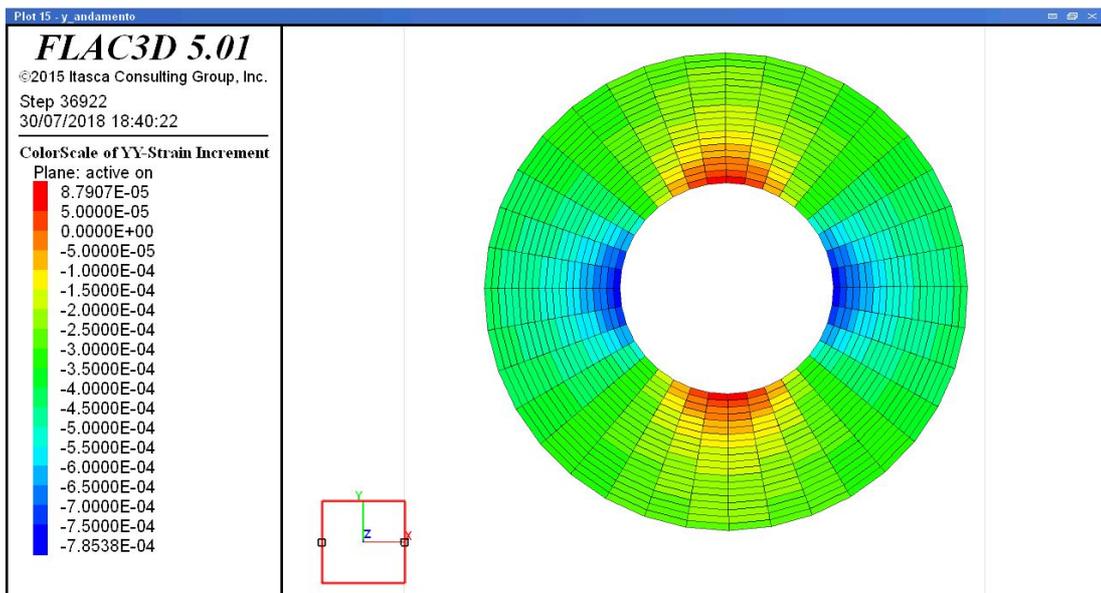


Figura 45: Stato di deformazione lungo Y per materiale trasversalmente isotropo $\beta = 0^\circ$

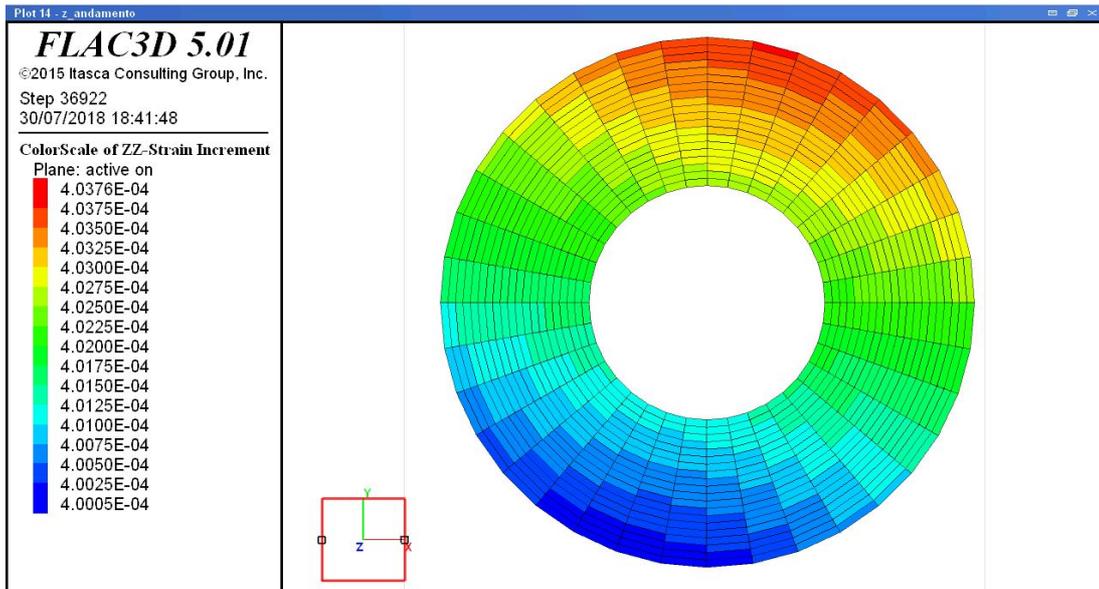


Figura 46: Stato di deformazione lungo Z per materiale trasversalmente isotropo $\beta = 0^\circ$

3.4.3.2. Analisi e congruenza per il provino trasversalmente isotropo con $\alpha = 30^\circ$ e $\beta = 60^\circ$

Valutata la congruenza e l'attendibilità della soluzione numerica per i due casi preliminari, si procede ad analizzare i risultati del caso di studio.

La computazione porta ad una discreta congruenza con i risultati della soluzione analitica Nunes (come si riporta in *Tabella 14*):

Pos. estensimetri	60°	180°	300°
ϵ_θ [$\mu\epsilon$]	1200	1000	800
ϵ_z [$\mu\epsilon$]	400	400	320

Tabella 22: Deformazioni calcolate nella posizione delle celle estensimetriche

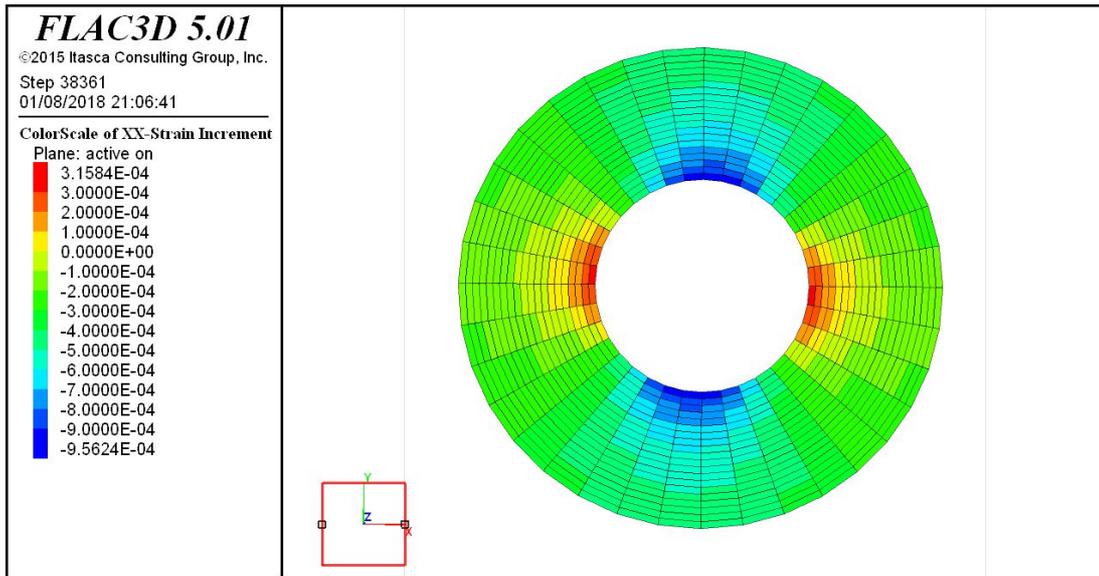


Figura 47: Stato di deformazione lungo X per il materiale trasversalmente isotropo con $\alpha = 30^\circ$ e $\beta = 60^\circ$

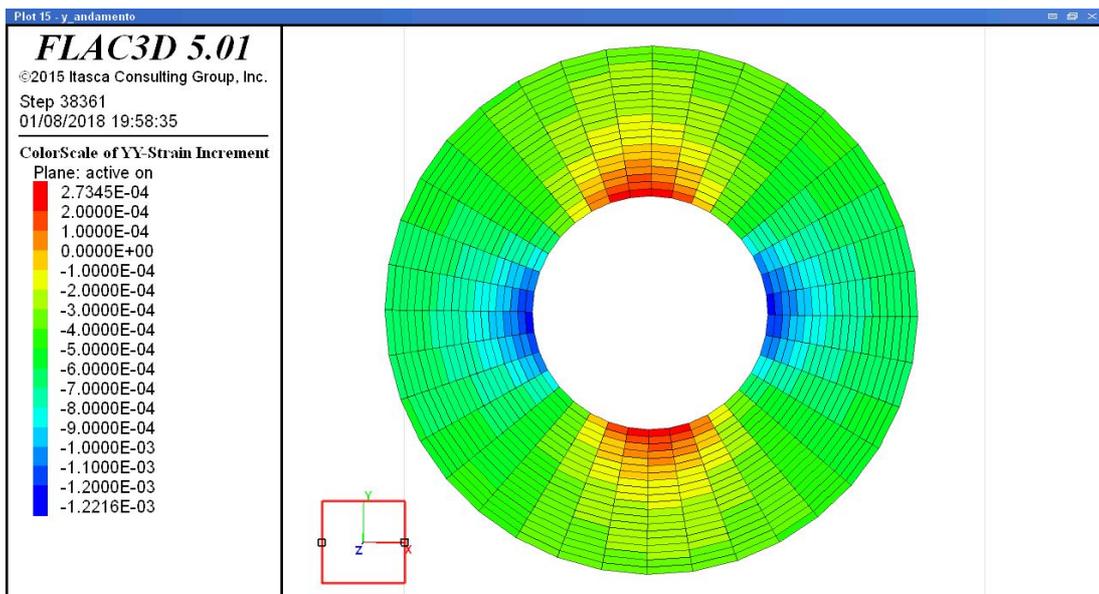


Figura 48: Stato di deformazione lungo Y per il materiale trasversalmente isotropo con $\alpha = 30^\circ$ e $\beta = 60^\circ$

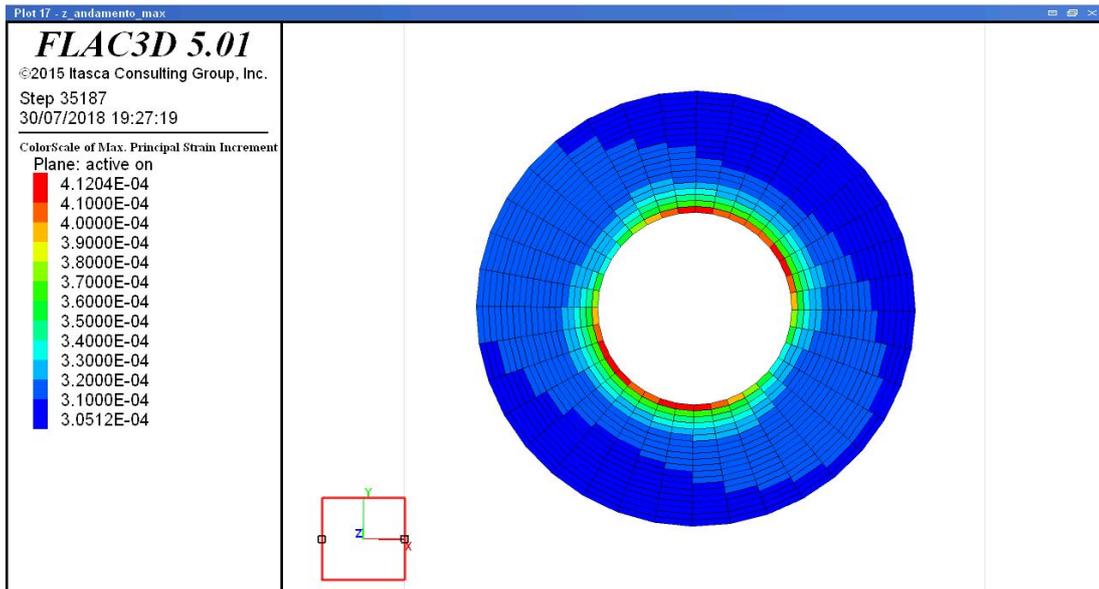


Figura 49: Stato di deformazione lungo Z per il materiale trasversalmente isotropo con $\alpha = 30^\circ$ e $\beta = 60^\circ$

4. Determinazione dei moduli pseudo-elastici

Dalle analisi eseguite per validare la soluzione analitica di Nunes emerge che, i risultati della soluzione numerica Code_Aster, in termini di deformazione tangenziale sono comparabili ammettendo uno scarto complessivo del 5% (Tabella 24). La modifica operata alla soluzione analitica di Nunes riporta una miglior congruenza con la soluzione numerica, il quale scarto percentuale è di circa 4%.

Per quanto riguarda le deformazioni assiali, si rileva che lo scarto percentuale tra le soluzioni è circa pari al 25%, comunque accettabile per avere una prima stima dei parametri di deformazione, in mancanza di ulteriori tecniche di indagini speditive. Tuttavia, la soluzione di Nunes si presenta più affidabile in caso di un basso grado di anisotropia, mentre il caso in esame ha un grado di anisotropia di circa il 50% (E_2 è la metà di E_1) e si può pensare che questo è un caso limite.

I risultati forniti da codice FLAC3D e confrontati con le soluzioni numeriche, riportano una discrepanza maggiore rispetto al precedente (Figura 51). La differenza appare dovuta ad un codice estremamente complesso rispetto a Code_Aster. Per colmare tale discrepanza, sarà opportuno migliorare la modellazione, ad esempio utilizzando una mesh costituita da un numero di elementi maggiore rispetto a quella utilizzata in tale elaborato. Questo potrebbe condurre dei risultati più precisi, ma anche un'analisi più lunga in termini di tempo.

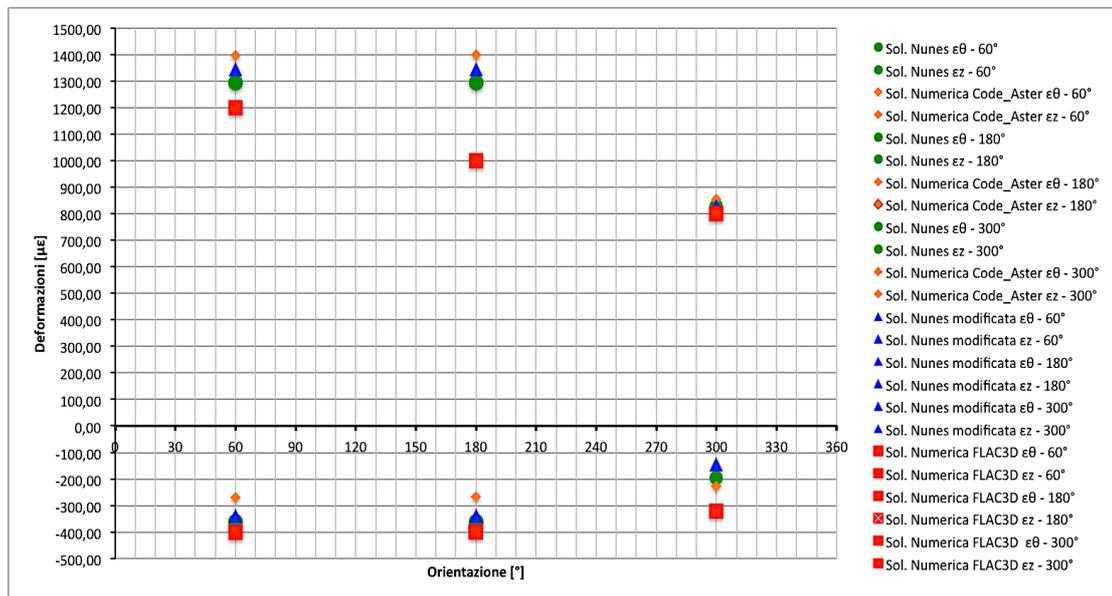


Figura 50: Confronto dello stato di deformazione ottenuto dai quattro metodi.

		Scarto della cella estensimetrica 60° [%]	Scarto della cella estensimetrica 180° [%]	Scarto della cella estensimetrica 300° [%]	Scarto medio [%]
$\Delta\varepsilon_\theta$	Metodo Nunes	3,79	3,79	0,00	2,53
	Metodo Nunes Modificata				
$\Delta\varepsilon_\theta$	Sol. num. Code_Aster	3,78	3,90	3,18	3,62
	Metodo Nunes Modificata				
$\Delta\varepsilon_\theta$	Metodo Nunes	7,42	7,54	3,18	6,05
	Sol. num. Code_Aster				
$\Delta\varepsilon_\theta$	Metodo Nunes	7,29	22,74	3,43	11,15
	Sol. num. FLAC3D				
$\Delta\varepsilon_\theta$	Sol. num. Code_Aster	14,17	28,57	6,50	16,41
	Sol. num. FLAC3D				
$\Delta\varepsilon_\theta$	Metodo Nunes Modificata	10,80	25,67	3,43	13,30
	Sol. num. FLAC3D				
$\Delta\varepsilon_z$	Metodo Nunes	6,29	6,29	26,32	12,97
	Metodo Nunes Modificata				
$\Delta\varepsilon_z$	Sol. num. Code_Aster	20,02	20,75	36,24	25,67
	Metodo Nunes Modificata				
$\Delta\varepsilon_z$	Metodo Nunes	25,05	25,74	13,46	21,42
	Sol. num. Code_Aster				
$\Delta\varepsilon_z$	Metodo Nunes	10,04	10,04	38,52	19,53
	Sol. num. FLAC3D				
$\Delta\varepsilon_z$	Sol. num. Code_Aster	32,58	33,19	28,95	31,57
	Sol. num. FLAC3D				
$\Delta\varepsilon_z$	Metodo Nunes Modificata	15,70	15,70	54,70	28,70
	Sol. num. FLAC3D				

Tabella 23: Variazione percentuale delle soluzioni Nunes, Nunes Modificata, Code_Aster e FLAC3D

Nonostante un errore medio di circa pari al 25% registrato per le deformazioni assiali e di circa il 10% per le deformazioni tangenziali, la suddetta soluzione si può considerare affidabile in mancanza di ulteriori tecniche in forma chiusa.

Note, quindi, le deformazioni, considerando i massimi e i minimi, è possibile verifica la validità e applicabilità del processo inverso (dai valori di deformazione ottenuti in conseguenza dell'applicazione di una pressione di confinamento nota, sono stimate le intensità delle costanti elastiche del materiale nonché la direzione e l'inclinazione dei piani di isotropia trasversa).

Utilizzando le relazioni 30 – 33, si valutano i seguenti valori:

- Soluzione analitica Nunes:

$$E_1 = \frac{2b^2 P_{rad}}{(b^2 - a^2) \varepsilon_{\theta min}} = 60 \text{ GPa} \rightarrow \varepsilon_{\theta min} = 828 \mu\varepsilon [10^{-6}];$$

$$\frac{1}{E_2} = \frac{1}{\sin^2 \beta} \left[\frac{\varepsilon_{\theta max} (b^2 - a^2)}{2b^2 P_{rad}} - \frac{\cos^2 \beta}{E_1} \right] = 30 \text{ GPa} \rightarrow$$

$$\rightarrow \varepsilon_{\theta max} = 1450 \mu\varepsilon [10^{-6}];$$

$$\nu_2 = -\varepsilon_{z min} E_2 \left(\frac{b^2 - a^2}{2b^2 P_{rad}} \right) = 0,25 \rightarrow \varepsilon_{z min} = -414 \mu\varepsilon [10^{-6}];$$

$$\nu_1 = -\frac{E_1}{\sin^2 \beta} \left[\frac{\varepsilon_{z\alpha+90} (b^2 - a^2)}{2b^2 P_{rad}} + \frac{\nu_2}{E_2} \cos^2 \beta \right] = 0,15 \rightarrow \varepsilon_{z max} =$$

$$= -197 \mu\varepsilon [10^{-6}];$$

$$G_2 = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2 + 2\nu_2 E_1} = 15 \text{ GPa};$$

$$G_1 = \frac{E_1}{2(1 + \nu_1)} = 30 \text{ GPa};$$

$$\tan \beta = \frac{\varepsilon_{\theta max} - \varepsilon_{\theta min}}{\gamma_{\theta z max}} = 60^\circ$$

- Soluzione analitica Nunes modificato:

$$E_1 = \frac{2b^2 P_{rad}}{(b^2 - a^2) \varepsilon_{\theta min}} \cong 60 \text{ GPa} \rightarrow \varepsilon_{\theta min} = 828 \mu\varepsilon [10^{-6}];$$

$$\frac{1}{E_2} = \frac{1}{\sin^2 \beta} \left[\frac{\varepsilon_{\theta max} (b^2 - a^2)}{2b^2 P_{rad}} - \frac{\cos^2 \beta}{E_1} \right] \cong 26 \text{ GPa} \rightarrow$$

$$\rightarrow \varepsilon_{\theta max} = 1488 \mu\varepsilon [10^{-6}];$$

$$\nu_2 = -\varepsilon_{zmin} E_2 \left(\frac{b^2 - a^2}{2b^2 P_{rad}} \right) \cong 0,22 \rightarrow \varepsilon_{zmin} = -401 \mu\varepsilon [10^{-6}];$$

$$\nu_1 = -\frac{E_1}{\sin^2 \beta} \left[\frac{\varepsilon_{z\alpha+90}(b^2 - a^2)}{2b^2 P_{rad}} + \frac{\nu_2}{E_2} \cos^2 \beta \right] \cong 0,10 \rightarrow \varepsilon_{zmax} = -145 \mu\varepsilon [10^{-6}];$$

$$G_2 = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2 + 2\nu_2 E_1} \cong 13 \text{ GPa};$$

$$G_1 = \frac{E_1}{2(1 + \nu_1)} \cong 28 \text{ GPa};$$

$$\tan \beta = \frac{\varepsilon_{\theta max} - \varepsilon_{\theta min}}{\gamma_{\theta zmax}} = 63^\circ$$

Deformazioni [$\mu\varepsilon$]		Costanti pseudoelastiche di partenza		Costanti pseudoelastiche ottenute
$\varepsilon_{\theta min}$	828	E_1 [GPa]	60	$\cong 60$
$\varepsilon_{\theta max}$	1450	E_2 [GPa]	30	$\cong 30$
ε_{zmax}	-197	ν_1 [-]	0,15	$\cong 0,15$
$\varepsilon_{\theta min}$	-414	ν_2 [-]	0,25	$\cong 0,25$
		G_1 [GPa]	30	$\cong 30$
		G_2 [GPa]	15	$\cong 15$
		β [°]	60	$\cong 60$

Tabella 24: Risultati ottenuti con la soluzione Nunes

I risultati ottenuti dal processo inverso della soluzione Nunes, mostra la convergenza con i dati di input ipotizzati per avviare il processo di calcolo.

Analogo discorso viene effettuato per quanto riguarda la soluzione Nunes modificata, mostrata in tabella 25.

Deformazioni [$\mu\epsilon$]		Costanti pseudoelastiche di partenza		Costanti pseudoelastiche ottenute
$\epsilon_{\theta\min}$	828	E_1 [GPa]	60	$\cong 60$
$\epsilon_{\theta\max}$	1527	E_2 [GPa]	30	$\cong 26$
$\epsilon_{z\max}$	-145	ν_1 [-]	0,15	$\cong 0,10$
$\epsilon_{\theta\min}$	-401	ν_2 [-]	0,25	$\cong 0,22$
		G_1 [GPa]	30	$\cong 28$
		G_2 [GPa]	15	$\cong 13$
		β [°]	60	$\cong 63$

Tabella 25: Risultati ottenuti con la soluzione Nunes modificato

L'esame dei risultati ottenuti evidenzia che: a meno di modeste variazioni l'applicazione del metodo inverso modificato fornisce risultati comparabili con il metodo teorico originale (non-modificato).

Conclusioni

Lo studio illustrato nel presente elaborato è incentrato sulla stima dei moduli pseudo-elastici, in seguito alla valutazione dello stato di deformazione di un cilindro cavo di roccia ottenuto dall'applicazione della soluzione analitica originariamente proposta da Anna Laura Nunes (2002) e da una modifica elaborata nel corso del presente lavoro. La soluzione analitica è stata validata con la modellazione numerica della medesima determinazione sperimentale, realizzata con due differenti approcci numerici.

La soluzione analitica Nunes è stata implementata con il software Matlab sia per ricavare lo stato di deformazione indotto in un cilindro cavo sollecitato da compressione radiale e moduli di deformabilità noti, sia per il processo inverso (stima dei moduli pseudo-elastici del materiale indagato, quando sono note le deformazioni indotte dall'applicazione di compressione radiale e l'intensità di quest'ultima). Al fine di ottenere una maggiore aderenza del metodo analitico indicato, al caso reale indagato sperimentalmente e numericamente, è stata apportata una modifica nel solutore, sostituendo la matrice generalizzata di Hooke asimmetrica a quella simmetrica originariamente adottata. La variante ottenuta è stata denominata soluzione di Nunes modificata. Detta modifica induce una leggera variazione nei risultati ottenuti infatti: l'intensità della deformazione tangenziale determinata, differisce da quella ricavata con la soluzione di Nunes originale, di circa il 3%; mentre per la deformazione assiale la differenza è pari a circa il 13%. Dunque, si può affermare che l'ipotesi alla base della soluzione di Nunes, tende a sovrastimare, con differente intensità, le deformazioni misurate.

La soluzione analitica è stata, successivamente, validata mediante un confronto con le modellazioni numeriche. Il confronto dei risultati ottenuti in termini di deformazione (tangenziale e assiale) tra il codice di calcolo Code_Aster e l'applicazione della soluzione di Nunes originale, evidenzia che la deformazione tangenziale media ricavata con il calcolo numerico si discosta di circa il 6% dalla medesima deformazione ricavata con il metodo analitico. Maggiore differenza (in media pari a circa il 21%) si riscontra dall'analogo confronto condotto per la deformazione assiale. Lo scarto percentuale diminuisce se si confrontano, nelle singole posizioni in cui sono incollate le celle estensimetriche, i risultati ottenuti dal calcolo numerico condotto con il codice Code_Aster con quelli ottenuti con l'applicazione della soluzione di Nunes modificata (poiché anche il codice utilizza la matrice di Hooke generalizzata asimmetrica).

Analogamente, se si confrontano i risultati ottenuti dal calcolo numerico condotto con il codice FLAC3D, con quelli ottenuti con l'applicazione della soluzione di Nunes originale, la differenza risulta pari a circa il 11%, per la deformazione tangenziale e pari a circa il 20% per quella assiale. Dal confronto dei risultati ottenuti dal calcolo

numerico condotto con il codice FLAC3D, con quelli ottenuti con l'applicazione della soluzione di Nunes modificato, la differenza risulta pari a circa il 13%, per la deformazione tangenziale e pari a circa il 28% per quella assiale. Questo risultato appare dovuto al solutore utilizzato dal codice FLAC3D. Infatti, quest'ultimo utilizza la matrice di Hooke generalizzata (simmetrica) del tutto analoga a quella utilizzata originariamente nella soluzione fornita dalla soluzione di Nunes.

Appare quindi evidente dal confronto riportato, che la differenza tra i risultati (in termini di deformazione) forniti dalla soluzione analitica e quelli forniti dalla modellazione numerica, mostra lo scarto percentuale maggiore nell'intensità della deformazione assiale. Questo risultato appare dovuto alla difficoltà nel conferimento, ai modelli numerici, delle giuste condizioni al contorno, le quali presumibilmente non consentono di simulare, in modo ottimale, la determinazione sperimentale.

Ulteriore conclusione che è possibile trarre dal presente lavoro è la conferma che le soluzioni analitiche (soluzione di Nunes e soluzione di Nunes modificata) sono maggiormente affidabili quando utilizzati in presenza di rocce che evidenziano basso grado di anisotropia, quindi per applicazioni con rocce a comportamento isotropo, lineare ed elastico o rocce trasversalmente isotrope con piani perpendicolari alla direzione assiale. Infatti, la determinazione sperimentale analizzata nell'elaborato presenta grado di anisotropia pari al 50% ($E_2/E_1 = 0,5$) che può essere considerato come caso limite, in quanto in grado di evidenziare i limiti nel metodo analitico originale e modificato proposto.

I risultati ottenuti confermano che la soluzione analitica restituisce uno stato di deformazione che può essere ritenuto affidabile, in mancanza di ulteriori soluzioni in forma chiusa per la valutazione dello stato di deformazione. Quindi, note le deformazioni indotte al materiale indagato e ora possibile applicare il processo inverso, che stima i moduli pseudo-elastici. I risultati ottenuti, da tale processo, sono convergenti ai parametri elastici utilizzati per ricavare lo stato di deformazione, di conseguenza si può affermare che, l'applicazione analitica proposta (e validata con le modellazioni numeriche) può essere considerata attendibile, in fase previsionale, per avere una prima caratterizzazione della roccia oggetto di studio.

Appendice 1. Cenni sulla determinazione sperimentale per lo stato di deformazione

La stima dello stato di deformazione in un ammasso roccioso risulta molto complessa in quanto occorre tenere conto di differenti aspetti, che possono influenzare la valutazione. Le più comuni cause che possono influenzare in maniera consistente la determinazione dello stato di deformazione originario o indotto nella roccia sono: l'approssimativa conoscenza del comportamento meccanico-deformativo dell'ammasso roccioso, il suo assetto geo-morfologico e geo-strutturale, la presenza di processi di tipo termico, fisico-chimico e meccanico.

La determinazione, dello stato di deformazione nel materiale roccia, deve essere eseguita con opportuni metodi di indagine, ricordando, che la misura dello stato di deformazione viene anche influenzata dalla profondità di indagine. In tal senso si è sperimentalmente osservato che è opportuno sottoporre alle indagini volumi di roccia posti a distanza (profondità) da cause perturbanti quali scavi o riporti in modo da non influenzare le determinazioni sperimentali e ottenere uno stato di deformazione maggiormente rappresentativo dell'ammasso roccioso.

Diverse sono le tecniche di indagine dello stato di deformazione, la tecnica esposta in questo elaborato è il metodo del rilascio tensionale mediante cella CSIRO o cella CSIR, utilizzata dal metodo analitico per la determinazione delle costanti pseudo-elastiche, che discussa nella capitolo 2.

1.1. Metodo del rilascio tensionale con cella CSIRO o con cella CSIR

La tecnica utilizzata si basa sulla misura delle deformazioni in sito, conseguiti al rilascio delle tensioni provocato da un'operazione di sovra-carotaggio, o in laboratorio sollecitando un provino cilindrico mediante una pressione circonferenziale costante. La registrazione delle deformazioni (indotte o naturali) è effettuata utilizzando le celle triassiali CSIRO o CSIR.

Per quanto riguarda la cella di misura CSIRO si compone di un tubo di materiale polimerico avente raggio pari a 16 mm e dello spessore di 2 mm, circa nella mezzera di tale spessore sono annegate tre rosette estensimetriche disposte a 120° l'una dall'altra, ciascuna presenta quattro estensimetri elettrici disposti a 45° l'una dall'altra, secondo lo schema riportato in *figura 52*. La cella CSIRO, viene resa solidale alla parete interna della roccia, mediante un'operazione di cementazione, che consiste nell'immissione della colla dall'involucro cilindrico. Infatti, il puntale in plastica, visibile in *figura 25*, è collegato assialmente al cilindro, avente diametro pari a quello del diametro interno della cella. Raggiunto il fondo del foro pilota, il pistone costituito dall'insieme cilindro-puntale di legno si muove verso l'interno della cella ripieno di colla, quest'ultima viene emessa nell'interstizio fra la parete del foro e l'estradosso della cella. Successivamente, si effettua il sovra-carotaggio e

mediante la tecnica del rilascio tensionale vengono registrate le deformazioni dagli estensimetri.

Effettuata la prova, la carota viene staccata dalla roccia, in tal senso è possibile recuperarla ed eseguire delle prove in laboratorio mediante prove di compressione biassiale su cilindro cavo. In dettaglio lo schema di esecuzione della prova in sito è riportato in *figura 53*.



Figura 51: Illustrazione di una generica cella triassiale CSIRO (in evidenza una delle tre rosette estensimetrica) e della sua sezione trasversale esemplificata.

Analoga è la tecnica che può essere eseguita, utilizzando la cella triassiale CSIR. Quest'ultima differisce dalla precedente poiché le rosette estensimetriche non sono annegate nella mezzera dello spessore del tubo di materiale polimerico, ma sono isolate. Nella fase di cementazione, si crea un film di colla che fissa gli estensimetri alla parete interna del foro, rendendoli solidali alla stessa (roccia).

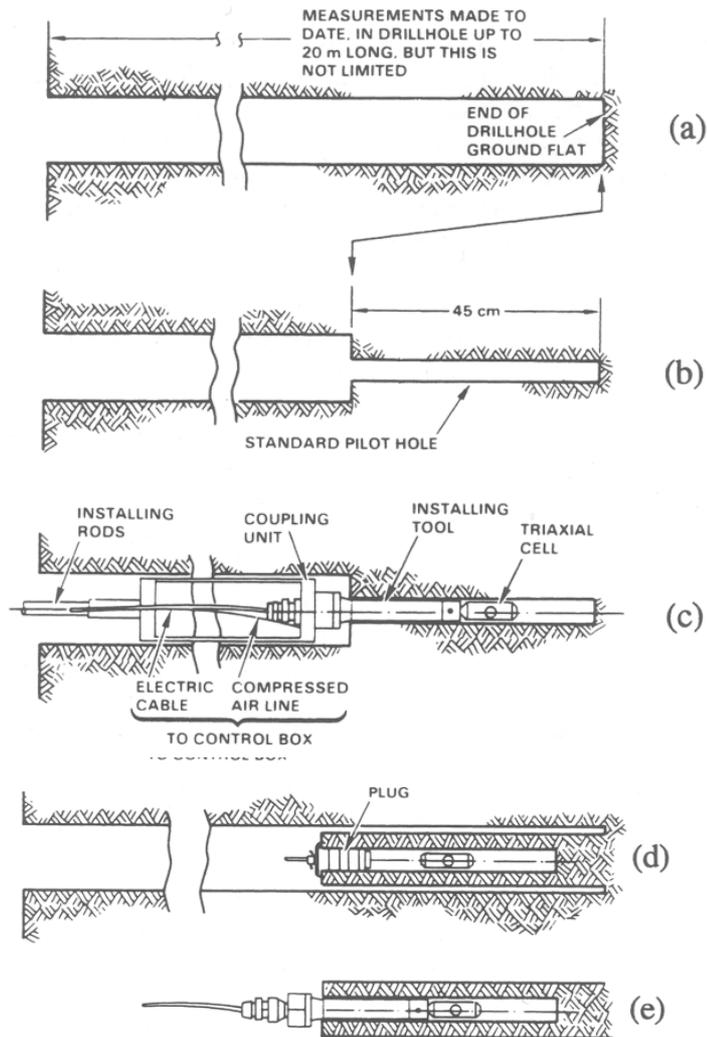


Figura 52: Schema di esecuzione della misura di distensione mediante sovra-carotaggio; nell'esempio vengono descritte le operazioni di realizzazione di un foro di sondaggio di diametro pari al diametro di sovra-carotaggio Φ_1 (a) e del foro pilota, di diametro inferiore $\Phi_2 \sim 0.3 \Phi_1$ (b), posizionamento della cella all'interno del foro pilota e lettura di zero (c), sovra-carotaggio (d) e estrazione della carota con conseguente misura della deformazione (e).

Bibliografia

- Amadei, B. (1996). Importance of Anisotropy When Estimating and Measuring In Situ Stresses in Rock. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts* .
- Amadei, B. (1983). *Rock anisotropy and theory of stress Measurements*. Germany: Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Barla, G. (1974). *Meccanica delle rocce*. Torino: Cooperativa Libreria Universitaria Torinese.
- Code_Aster. (s.d.). *Manuale Code_Aster*. Tratto da Code_Aster: <https://www.code-aster.org/V2/doc/default/en/index.php?man=commande>
- Itasca Consulting Group. *Fast Lagrangian Analysis of Continua (FLAC) Manual*.
- Lekhnitskii, S. (1963). *Theory of Elasticity of an anisotropic elastic body*. San Francisco: Holden day Inc. San Francisco.
- Nunes, A. L. (2002). A new method for determination of transverse isotropic orientation and the associated elastic parameters for intact rock. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*.
- Nunes, A. L. (1997). *Nouvelle methode de determination de la deformabilite des roche transversalement isotropes avec la cellule triaxiale CSIR*. Canada: Ph D. Thesis, Ecole Polytechnique de Montreal, University of Montreal.
- Wikipedia. (2018). *Materiale_elastico_lineare*. Tratto da Wikipedia: https://it.wikipedia.org/wiki/Materiale_elastico_lineare
- Wikipedia. (2018). *Metodo degli elementi finiti*. Tratto da Wikipedia: https://it.wikipedia.org/wiki/Metodo_degli_elementi_finiti

Allegati

Allegato 1: Rotazione del sistema di riferimento xyz

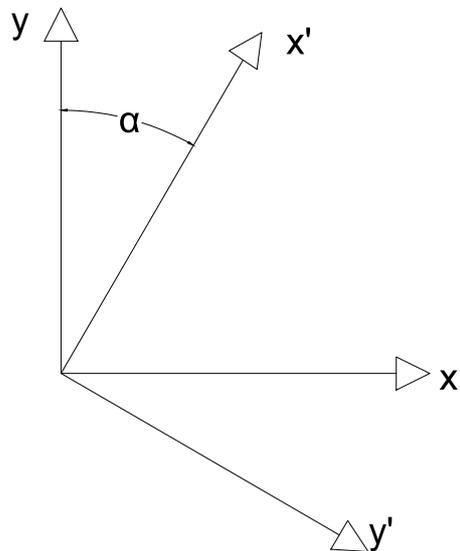


Figura 53: Rotazione di α $R_z(\alpha)$ del piano $x - y$

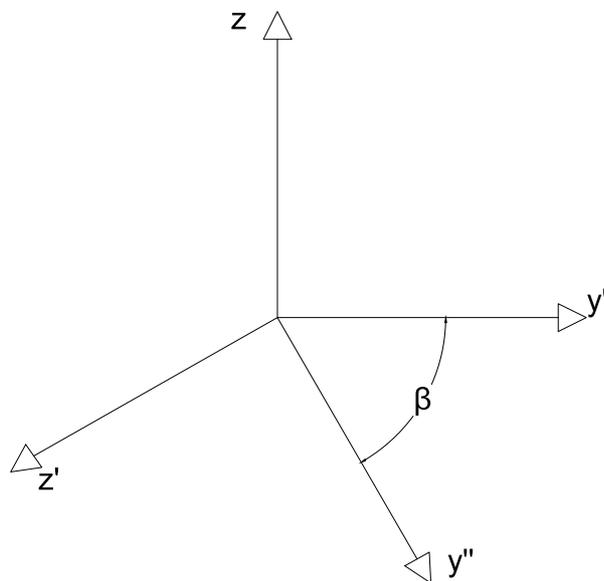


Figura 54: Rotazione di β $R_x(\beta)$ del piano $z - y'$

Per definire i coseni direttori, bisogna valutare la rotazione dei singoli piano:

1 Rotazione del piano xy :

$$R_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(90 - \alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ \cos(\alpha) & \cos(90 + \alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

→ applicando gli archi associati →

$$R_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

2 Rotazione del piano zy' :

$$R_y(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\beta) & \cos(180 - \beta) \\ 0 & \cos(90 + \beta) & \cos(270 - \beta) \end{bmatrix}$$

→ applicando gli archi associati →

$$R_y(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ 0 & -\sin(\beta) & -\cos(\beta) \end{bmatrix};$$

Mediante il prodotto matriciale delle due rotazioni, si ottengono i coseni direttori:

$$\begin{aligned} R = R_y R_z &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ 0 & -\sin(\beta) & -\cos(\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ \cos(\beta) \cos(\alpha) & -\cos(\beta) \sin(\alpha) & -\sin \beta \\ -\sin(\beta) \cos(\alpha) & \sin(\beta) \sin(\alpha) & -\cos \beta \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Per semplicità di calcolo i coseni direttori sono indicati nella seguente forma:

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix};$$

Quindi, si calcola la matrice di rotazione:

$$\begin{aligned}
& [T] = \\
& \left[\begin{array}{cccccc}
R_{11}^2 & R_{12}^2 & R_{13}^2 & 2R_{11}R_{13} & 2R_{12}R_{13} & 2R_{11}R_{12} \\
R_{21}^2 & R_{22}^2 & R_{23}^2 & 2R_{23}R_{21} & 2R_{22}R_{23} & 2R_{21}R_{22} \\
R_{31}^2 & R_{32}^2 & R_{33}^2 & 2R_{33}R_{31} & 2R_{32}R_{33} & 2R_{31}R_{32} \\
R_{21}R_{31} & R_{22}R_{32} & R_{23}R_{33} & R_{33}R_{21} + R_{31}R_{23} & R_{23}R_{32} + R_{22}R_{33} & R_{31}R_{22} + R_{32}R_{21} \\
R_{11}R_{31} & R_{32}R_{12} & R_{33}R_{13} & R_{31}R_{13} + R_{33}R_{11} & R_{32}R_{13} + R_{33}R_{12} & R_{31}R_{12} + R_{32}R_{11} \\
R_{11}R_{21} & R_{12}R_{22} & R_{13}R_{23} & R_{11}R_{23} + R_{13}R_{21} & R_{12}R_{23} + R_{13}R_{22} & R_{11}R_{22} + R_{12}R_{21}
\end{array} \right]
\end{aligned}$$

Allegato 2: Risultati del metodo teorico A. L. Nunes

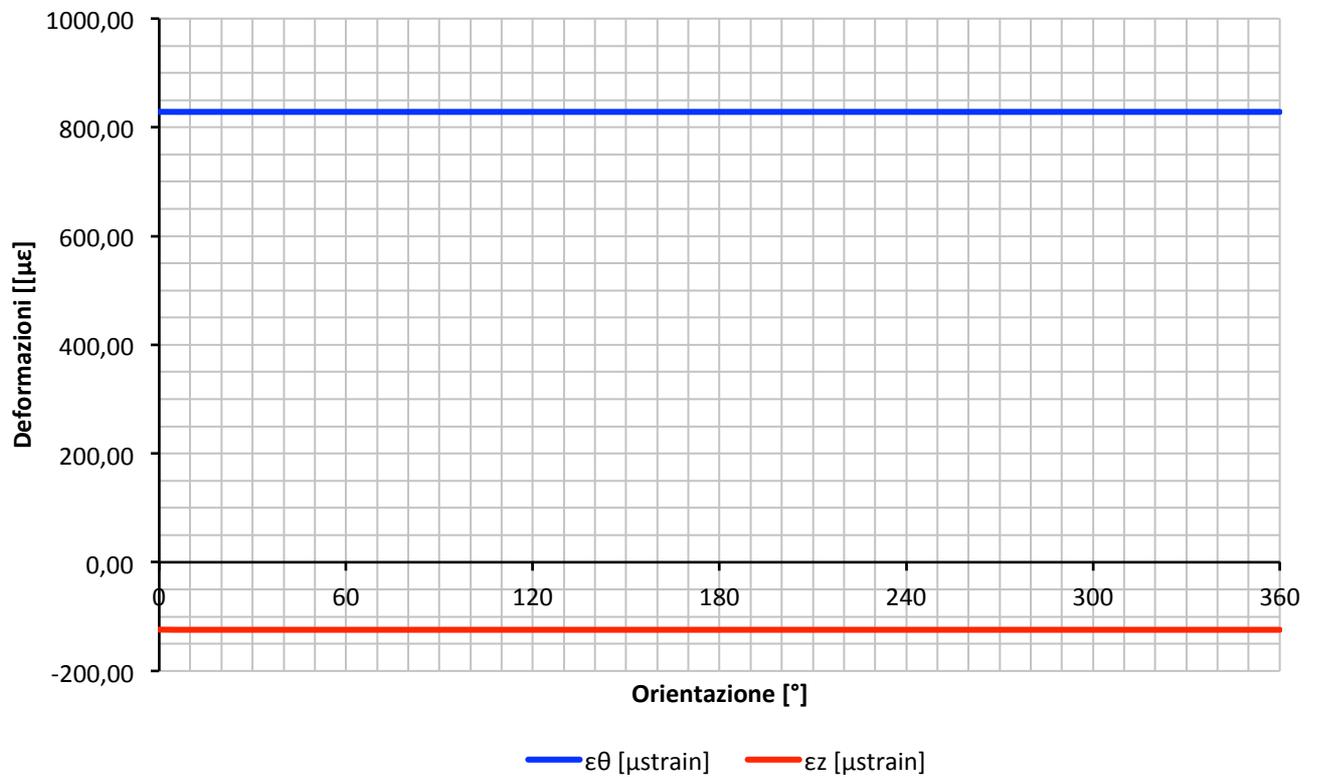
Materiale isotropo

E [GPa]	60
ν	0,15

θ_i	$\epsilon_\theta [\mu\epsilon]$	$\epsilon_z [\mu\epsilon]$
0	828,41	-124,26
10	828,41	-124,26
20	828,41	-124,26
30	828,41	-124,26
40	828,41	-124,26
50	828,41	-124,26
60	828,41	-124,26
70	828,41	-124,26
80	828,41	-124,26
90	828,41	-124,26
100	828,41	-124,26
110	828,41	-124,26
120	828,41	-124,26
130	828,41	-124,26
140	828,41	-124,26
150	828,41	-124,26
160	828,41	-124,26
170	828,41	-124,26
180	828,41	-124,26
190	828,41	-124,26
200	828,41	-124,26
210	828,41	-124,26
220	828,41	-124,26

230	828,41	-124,26
240	828,41	-124,26
250	828,41	-124,26
260	828,41	-124,26
270	828,41	-124,26
280	828,41	-124,26
290	828,41	-124,26
300	828,41	-124,26
310	828,41	-124,26
320	828,41	-124,26
330	828,41	-124,26
340	828,41	-124,26
350	828,41	-124,26
360	828,41	-124,26

Deformazioni della soluzione analitica di Nunes per materiale isotropo



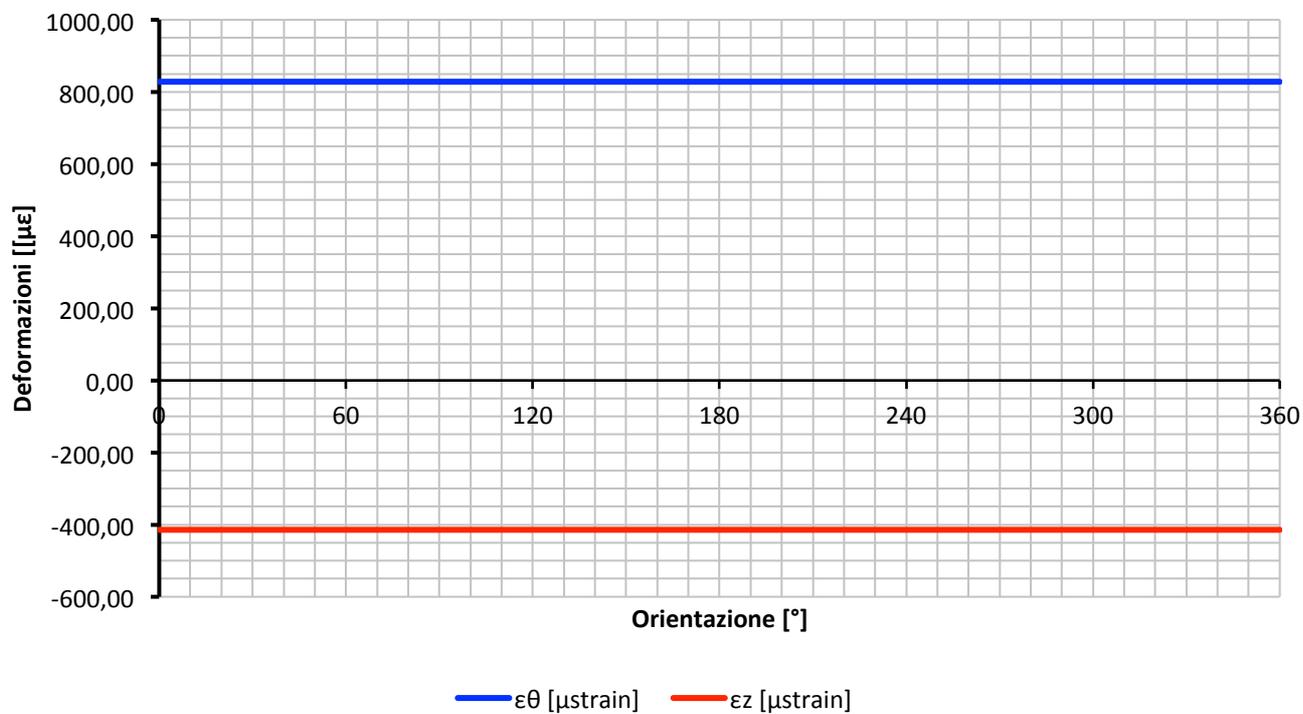
Materiale trasversalmente isotropo con $\beta=0^\circ$

E_1 [GPa]	60
E_2 [GPa]	30
ν_1	0,15
ν_2	0,25
α [°]	0
β [°]	0

θ_i	ϵ_θ [$\mu\epsilon$]	ϵ_z [$\mu\epsilon$]
0	828,41	-414,20
10	828,41	-414,20
20	828,41	-414,20
30	828,41	-414,20
40	828,41	-414,20
50	828,41	-414,20
60	828,41	-414,20
70	828,41	-414,20
80	828,41	-414,20
90	828,41	-414,20
100	828,41	-414,20
110	828,41	-414,20
120	828,41	-414,20
130	828,41	-414,20
140	828,41	-414,20
150	828,41	-414,20
160	828,41	-414,20
170	828,41	-414,20
180	828,41	-414,20
190	828,41	-414,20

200	828,41	-414,20
210	828,41	-414,20
220	828,41	-414,20
230	828,41	-414,20
240	828,41	-414,20
250	828,41	-414,20
260	828,41	-414,20
270	828,41	-414,20
280	828,41	-414,20
290	828,41	-414,20
300	828,41	-414,20
310	828,41	-414,20
320	828,41	-414,20
330	828,41	-414,20
340	828,41	-414,20
350	828,41	-414,20
360	828,41	-414,20

Deformazioni della soluzione analitica di Nunes per materiale trasversalmente isotropo con $\beta=0^\circ$



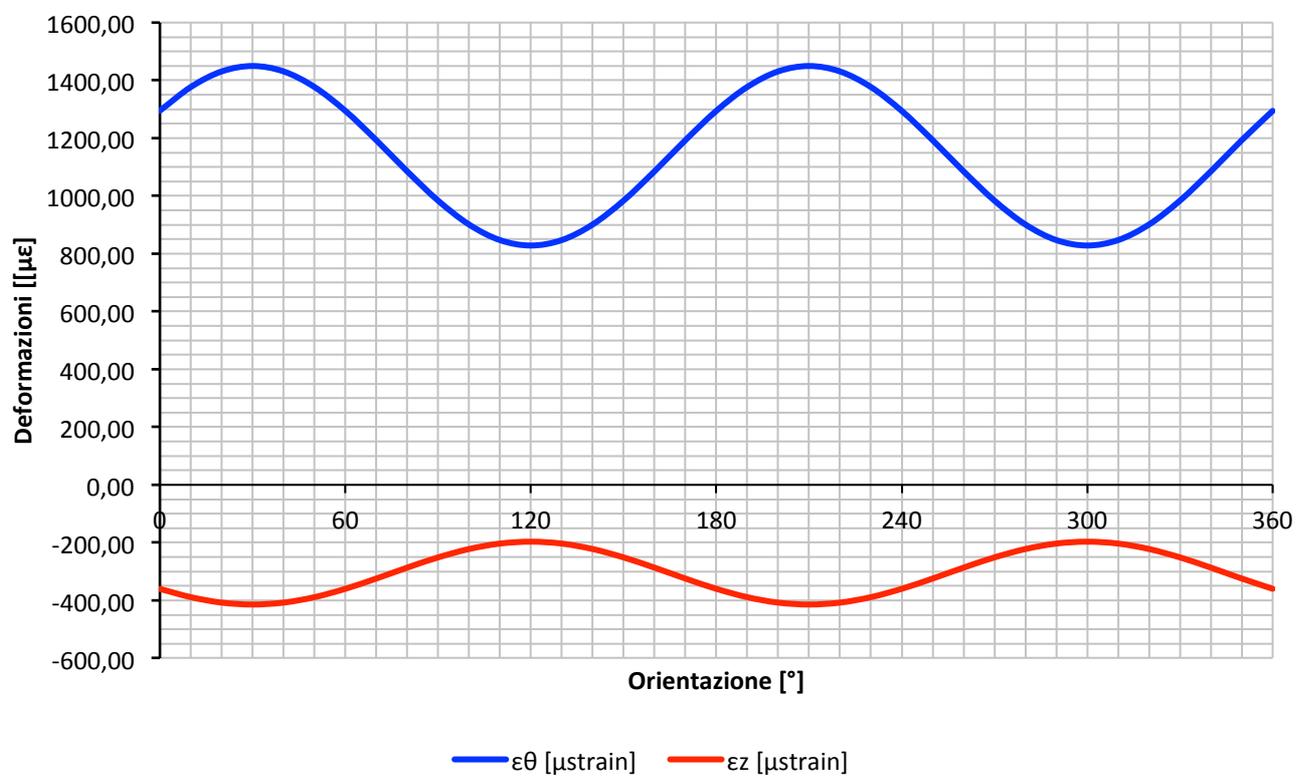
Materiale trasversalmente isotropo con $\beta=60^\circ$

E_1 [GPa]	60
E_2 [GPa]	30
ν_1	0,15
ν_2	0,25
α [°]	30
β [°]	60

θ_i	ϵ_θ [$\mu\epsilon$]	ϵ_z [$\mu\epsilon$]
0	1294,38	-359,84
10	1377,03	-388,76
20	1430,97	-407,65
30	1449,71	-414,20
40	1430,97	-407,65
50	1377,03	-388,76
60	1294,38	-359,84
70	1193,00	-324,35
80	1085,11	-286,59
90	983,73	-251,11
100	901,08	-222,18
110	847,14	-203,30
120	828,41	-196,75
130	847,14	-203,30
140	901,08	-222,18
150	983,73	-251,11
160	1085,11	-286,59
170	1193,00	-324,35
180	1294,38	-359,84
190	1377,03	-388,76

200	1430,97	-407,65
210	1449,71	-414,20
220	1430,97	-407,65
230	1377,03	-388,76
240	1294,38	-359,84
250	1193,00	-324,35
260	1085,11	-286,59
270	983,73	-251,11
280	901,08	-222,18
290	847,14	-203,30
300	828,41	-196,75
310	847,14	-203,30
320	901,08	-222,18
330	983,73	-251,11
340	1085,11	-286,59
350	1193,00	-324,35
360	1294,38	-359,84

Deformazioni della soluzione analitica di Nunes per materiale trasversalmente isotropo $\beta=60^\circ$



Allegato 3: Risultati metodo teorico A. L. Nunes modificato

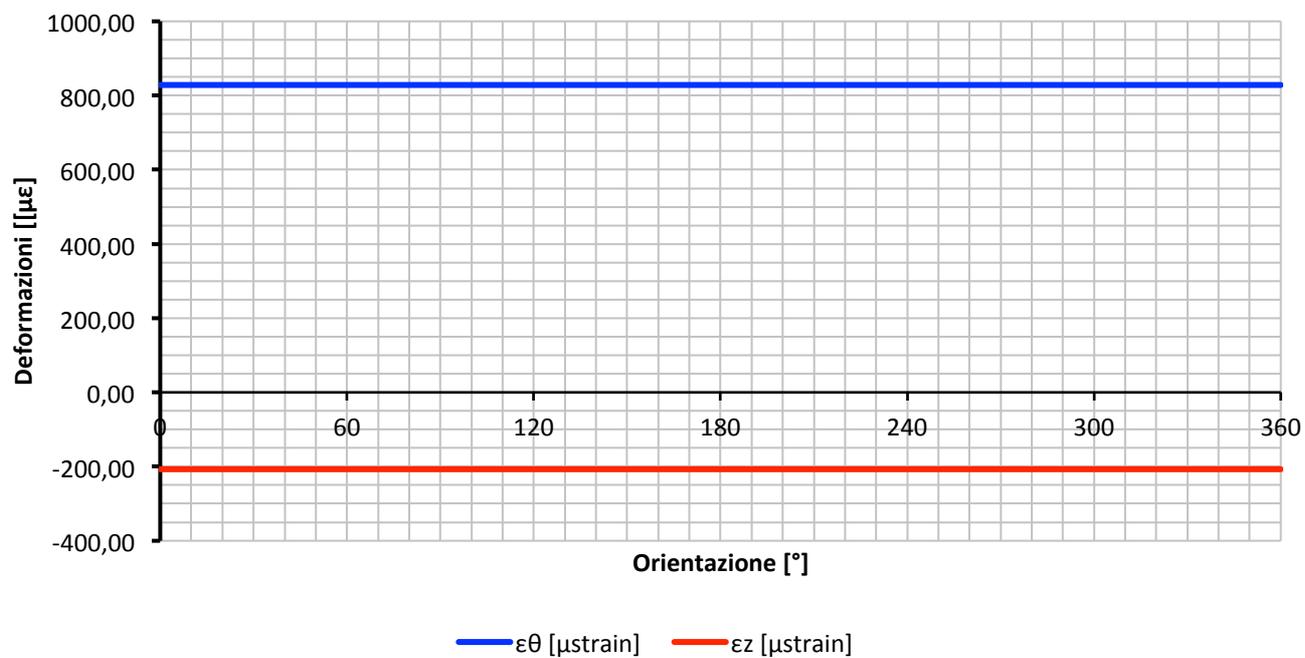
Materiale trasversalmente isotropo con $\beta=0^\circ$

E_1 [GPa]	60	α [°]	0
E_2 [GPa]	30	β [°]	0
G_2 [GPa]	15		
ν_1	0,15		
ν_2	0,25		

θ_i	ϵ_θ [μ ϵ]	ϵ_z [μ ϵ]
0	828,41	-207,10
10	828,41	-207,10
20	828,41	-207,10
30	828,41	-207,10
40	828,41	-207,10
50	828,41	-207,10
60	828,41	-207,10
70	828,41	-207,10
80	828,41	-207,10
90	828,41	-207,10
100	828,41	-207,10
110	828,41	-207,10
120	828,41	-207,10
130	828,41	-207,10
140	828,41	-207,10
150	828,41	-207,10
160	828,41	-207,10
170	828,41	-207,10
180	828,41	-207,10

190	828,41	-207,10
200	828,41	-207,10
210	828,41	-207,10
220	828,41	-207,10
230	828,41	-207,10
240	828,41	-207,10
250	828,41	-207,10
260	828,41	-207,10
270	828,41	-207,10
280	828,41	-207,10
290	828,41	-207,10
300	828,41	-207,10
310	828,41	-207,10
320	828,41	-207,10
330	828,41	-207,10
340	828,41	-207,10
350	828,41	-207,10
360	828,41	-207,10

Deformazioni della soluzione analitica di Nunes modificata per materiale trasversalmente isotropo $\beta=0^\circ$



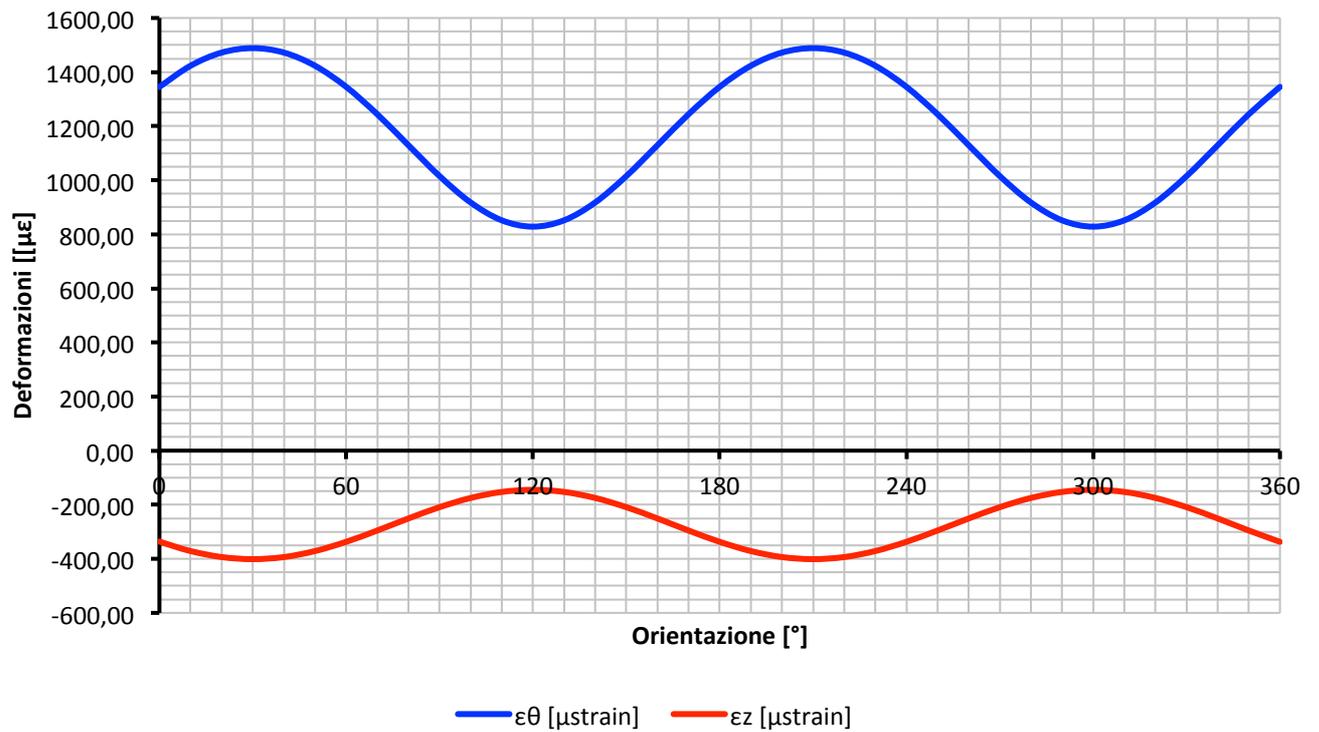
Materiale trasversalmente isotropo con $\beta=60^\circ$

E_1 [GPa]	60
E_2 [GPa]	30
G_2 [GPa]	15
ν_1	0,15
ν_2	0,25
α [°]	30
β [°]	60

θ_i	ϵ_θ [μ€]	ϵ_z [μ€]
0	1396,32	-337,19
10	1469,67	-371,28
20	1513,11	-393,53
30	1527,37	-401,26
40	1513,11	-393,53
50	1469,67	-371,28
60	1396,32	-337,19
70	1295,07	-295,37
80	1173,69	-250,86
90	1046,83	-209,04
100	934,23	-174,95
110	856,30	-152,70
120	828,41	-144,97
130	856,30	-152,70
140	934,23	-174,95
150	1046,83	-209,04
160	1173,69	-250,86
170	1295,07	-295,37
180	1396,32	-337,19

190	1469,67	-371,28
200	1513,11	-393,53
210	1527,37	-401,26
220	1513,11	-393,53
230	1469,67	-371,28
240	1396,32	-337,19
250	1295,07	-295,37
260	1173,69	-250,86
270	1046,83	-209,04
280	934,23	-174,95
290	856,30	-152,70
300	828,41	-144,97
310	856,30	-152,70
320	934,23	-174,95
330	1046,83	-209,04
340	1173,69	-250,86
350	1295,07	-295,37
360	1396,32	-337,19

Deformazioni della soluzione analitica di Nunes modificata per materiale trasversalmente isotropo $\beta=60^\circ$



Allegato 4: Script modellazione Code_Aster

```
DEBUT()

;Definizione della mesh
mesh = LIRE_MALLAGE(UNITE=20)
mesh = DEFI_GROUP(
  reuse=mesh,
  CREA_GROUP_MA=_F(NOM='volum', TOUT='OUI', TYPE_MAILLE='TOUT'),
  MAILLAGE=mesh
)

;Definizione delle proprietà meccaniche
model = AFFE_MODELE(
  AFFE=_F(MODELISATION=('3D', ), PHENOMENE='MECANIQUE', TOUT='OUI'),
  MAILLAGE=mesh
)
elemprop = AFFE_CARA_ELEM(
  MASSIF=_F(ANGL_REP=(-30.0, -60.0), GROUP_MA=('volum', )), MODELE=model
)
mater = DEFI_MATERIAU(
  ELAS_ISTR=_F(
    E_L=60000.0,
    E_N=30000.0,
    G_LN=15000.0,
    NU_LN=0.25,
    NU_LT=0.15,
  )
)

;Condizioni al contorno
fieldmat = AFFE_MATERIAU(
  AFFE=_F(MATER=(mater, ), TOUT='OUI'), MAILLAGE=mesh, MODELE=model
)
load = AFFE_CHAR_MECA(
  DDL_IMPO=(
    _F(DZ=0.0, GROUP_NO=('Group_17', 'Group_16', 'Group_15', 'Group_14')
    ), _F(DY=0.0, GROUP_NO=('Group_8', 'Group_6')),
    _F(DX=0.0, GROUP_NO=('Group_9', 'Group_7'))
  ),
)
```

```

MODELE=model,
PRES_REP=_F(GROUP_MA=('Group_3', ), PRES=20.0)
)

;Plot dei risultati
reslin = MECA_STATIQUE(
  CARA_ELEM=elemprop,
  CHAM_MATER=fieldmat,
  EXCIT=_F(CHARGE=load),
  MODELE=model
)
reslin = CALC_CHAMP(
  reuse=reslin,
  CONTRAINTE=('SIGM_ELNO', 'SIGM_NOEU'),
  CRITERES=('EPEQ_ELNO', 'EPEQ_NOEU'),
  DEFORMATION=('EPSI_ELNO', 'EPSI_NOEU'),
  RESULTAT=reslin
)
IMPR_RESU(
  RESU=_F(
    NOM_CHAM=('DEPL', 'SIGM_NOEU', 'EPSI_NOEU', 'EPEQ_NOEU'),
    RESULTAT=reslin
  ),
  UNITE=80
)
FIN()

```

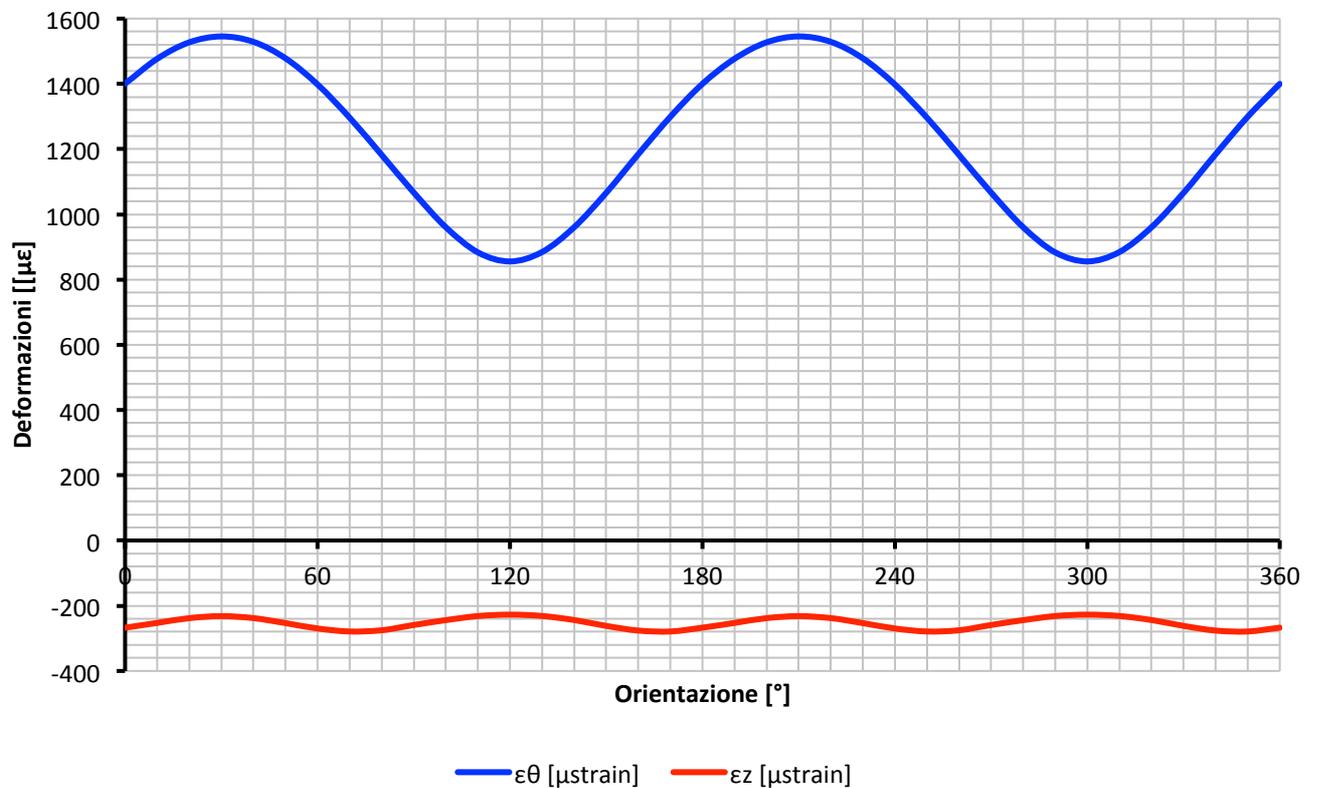
Allegato 5: Risultati della soluzione numerica Code_Aster

E_1 [GPa]	60
E_2 [GPa]	30
G_2 [GPa]	15
ν_1	0,15
ν_2	0,25
α [°]	30
β [°]	60

θ_i	ϵ_θ [$\mu\epsilon$]	ϵ_z [$\mu\epsilon$]
0	1399,92	-267,228
10	1476,8	-252,67
20	1527,24	-238,044
30	1545,34	-231,832
40	1528,86	-237,918
50	1478,42	-253,175
60	1398,15	-269,693
70	1296,27	-278,942
80	1182,14	-275,209
90	1066,72	-259,04
100	960,355	-244,184
110	883,274	-231,626
120	855,572	-227,351
130	884,365	-231,419
140	960,272	-243,819
150	1065,87	-261,828
160	1184,25	-276,141
170	1299,06	-278,962
180	1399,92	-267,227

190	1476,8	-252,669
200	1527,24	-238,042
210	1545,34	-231,831
220	1528,86	-237,919
230	1478,42	-253,177
240	1398,15	-269,696
250	1296,27	-278,946
260	1182,14	-275,213
270	1066,72	-259,04
280	960,355	-244,187
290	883,274	-231,629
300	855,572	-227,354
310	884,365	-231,422
320	960,271	-243,823
330	1065,87	-261,832
340	1184,25	-276,145
350	1299,06	-278,966
360	1399,92	-267,228

Deformazioni soluzione numerica con codice di calcolo Code_Aster



Allegato 6: Script modellazione FLAC3D

new

;Plot stato tensionale

plot create plot szz

plot zcontour szz

plot create plot syy

plot zcontour syy

plot create plot sxx

plot zcontour sxx

;Plot delle deformazioni

plot create plot displ_zz

plot contour zd

plot create plot displ_yy

plot contour yd

plot create plot displ_xx

plot contour xd

;Plot dello stato di deformazione

plot create plot def_zz

plot bcontour sizz

plot create plot def_zz_gen

plot bcontour simaxi

plot create plot def_yy

plot bcontour siyy

plot create plot def_xx

plot bcontour sixx

plot create plot z_andamento_max

plot bcontour simaxi

;Plot sezione di mezzeria dello stato di deformazione

plot cut add plane dd 0 dip 0 origin 0.043 0.043 0.5

plot create plot y_andamento

plot bcontour siyy

plot cut add plane dd 0 dip 0 origin 0.043 0.043 0.5

plot create plot x_andamento

plot bcontour sixx

plot cut add plane dd 0 dip 0 origin 0.043 0.043 0.5

plot create plot z_andamento
plot bcontour sizz

plot cut add plane dd 0 dip 0 origin 0.043 0.043 0.5

;Geometria del provino

gen zone cs size 20 150 9 20 nom p0 0.043,0.043,0 p1 0.086,0.043,0 p2
0.043,0.043,1 p3 0.043,0,0 p4 0.086,0.043,1 p5 0.043,0,1 p8 0.062,0.043,0 p9
0.043,0.024,0 p10 0.062,0.043,1 p11 0.043,0.024,1
gen zone reflect origin 0.043,0.043,0 dd 90 dip 90
gen zone reflect origin 0.043,0.043,0 dd 0 dip 90

;Proprietà meccaniche

model mech an
prop dd 30 dip 60 e1 60e9 e3 30e9 g13 15e9 nu12 0.15 nu13 0.25

;Condizioni al contorno

;Vincoli alla base

fix x y z range z -0.001 0.001

;Pressione esterna applicata alla faccia circonferenziale

apply ns -20e6

;Pressione atmosferica applicata sulle facce esterne e all'interno della cavità

apply ns -101325 range x 0.024 0.062 y 0.024 0.062

apply ns -101325 range z -0.01 0.01

apply ns -101325 range z 0.99 1.01

hist add unbal

solve

save base

Allegato 7: Soluzione analitica Matlab

Soluzione analitica per la determinazione dello stato di deformazione

```
clear all
close all
clc

%costanti elastiche e parametri provino

a = 19 %mm
b = 43 %mm
Prad = 20; %Pressione circonferenziale
E1 = 60; %MPa
E2 = 30; %MPa
nu1 = 0.15;
nu2 = 0.25;
G1 = E1/(2 * (1 + nu1)); %MPa
G2 = E1 * E2 / (E1 + E2 + 2 * nu2 * E1); %MPa
radians = pi/180;
alpha = radians*30; %gradi
beta = radians*60; %gradi

% Matrice A

A(1,1) = 1/E1;
A(1,2) = -nu1/E1;
A(1,3) = -nu2/E2;
A(1,4) = 0;
A(1,5) = 0;
A(1,6) = 0;
A(2,1) = -nu1/E1;
A(2,2) = 1/E1;
A(2,3) = -nu2/E2;
A(2,4) = 0;
A(2,5) = 0;
A(2,6) = 0;
A(3,1) = -nu2/E1;%Cambiare E1 con E2 per passare dal Metodo Nunes
Modificato a Metodo Nunes originale e viceversa
A(3,2) = -nu2/E1; Cambiare E1 con E2 per passare dal Metodo Nunes
Modificato a Metodo Nunes originale e viceversa
A(3,3) = 1/E2;
A(3,4) = 0;
A(3,5) = 0;
A(3,6) = 0;
A(4,1) = 0;
A(4,2) = 0;
A(4,3) = 0;
A(4,4) = 1/G1;
A(4,5) = 0;
A(4,6) = 0;
A(5,1) = 0;
A(5,2) = 0;
A(5,3) = 0;
A(5,4) = 0;
A(5,5) = 1/G2;
A(5,6) = 0;
A(6,1) = 0;
A(6,2) = 0;
```

```

A(6,3) = 0;
A(6,4) = 0;
A(6,5) = 0;
A(6,6) = 1/G2;

% Coseni direttori

r11 = sin(alpha);
r21 = cos(beta)*cos(alpha);
r31 = -sin(beta)*cos(alpha);
r12 = cos(alpha);
r22 = -cos(beta)*sin(alpha);
r32 = sin(beta)*sin(alpha);
r13 = 0;
r23 = -sin(beta);
r33 = -cos(beta);

% Matrice di rotazione r

r(1,1) = r11^2;
r(2,1) = r21^2;
r(3,1) = r31^2;
r(6,1) = r21*r31;
r(5,1) = r11*r31;
r(4,1) = r11*r21;
r(1,2) = r12^2;
r(2,2) = r22^2;
r(3,2) = r32^2;
r(6,2) = r22*r32;
r(5,2) = r32*r12;
r(4,2) = r12*r22;
r(1,3) = r13^2;
r(2,3) = r23^2;
r(3,3) = r33^2;
r(6,3) = r23*r33;
r(5,3) = r33*r13;
r(4,3) = r13*r23;
r(1,6) = 2*r11*r13;
r(2,6) = 2*r23*r21;
r(3,6) = 2*r33*r31;
r(6,6) = r33*r21+r31*r23;
r(5,6) = r31*r13+r33*r11;
r(4,6) = r11*r23+r13*r21;
r(1,5) = 2*r12*r13;
r(2,5) = 2*r22*r23;
r(3,5) = 2*r32*r33;
r(6,5) = r23*r32+r22*r33;
r(5,5) = r32*r13+r33*r12;
r(4,5) = r12*r23+r13*r22;
r(1,4) = 2*r11*r12;
r(2,4) = 2*r21*r22;
r(3,4) = 2*r31*r32;
r(6,4) = r31*r22+r32*r21;
r(5,4) = r31*r12+r32*r11;
r(4,4) = r11*r22+r12*r21;
rT = r';

D = rT*r % matrice identita#

```

```
%trasposizione K=T'*A*T Nunes
```

```
K = rT*A*r;
```

```
k11 = K(1,1);  
k12 = K(1,2);  
k13 = K(1,3);  
k14 = K(1,4);  
k15 = K(1,5);  
k16 = K(1,6);  
k21 = K(2,1);  
k22 = K(2,2);  
k23 = K(2,3);  
k24 = K(2,4);  
k25 = K(2,5);  
k26 = K(2,6);  
k31 = K(3,1);  
k32 = K(3,2);  
k33 = K(3,3);  
k34 = K(3,4);  
k35 = K(3,5);  
k36 = K(3,6);  
k41 = K(4,1);  
k42 = K(4,2);  
k43 = K(4,3);  
k44 = K(4,4);  
k45 = K(4,5);  
k46 = K(4,6);  
k51 = K(5,1);  
k52 = K(5,2);  
k53 = K(5,3);  
k54 = K(5,4);  
k55 = K(5,5);  
k56 = K(5,6);  
k61 = K(6,1);  
k62 = K(6,2);  
k63 = K(6,3);  
k64 = K(6,4);  
k65 = K(6,5);  
k66 = K(6,6);
```

```
Rz = [sin(alpha) cos(alpha) 0; cos(alpha) -sin(alpha) 0; 0 0 1];  
Ry = [1 0 0; 0 cos(beta) -sin(beta); 0 -sin(beta) -cos(beta)];  
RZY = Ry*Rz
```

```
%Grafico deformazioni
```

```
Jdeg=[0:0.1:360];  
J=Jdeg*radians;  
for i=1:length(J)  
    Term1(i) = (1+cos(2*J(i)))*(k11*(cos(J(i))^2)+k21*(sin(J(i))^2)-  
k41*(sin(2*J(i))/2));  
    Term2(i) = (1-cos(2*J(i)))*(k12*(cos(J(i))^2)+k22*(sin(J(i))^2)-  
k42*(sin(2*J(i))/2));  
    Term3(i) = sin(2*J(i))*(k14*(cos(J(i))^2)+k24*(sin(J(i))^2)-  
k44*(sin(2*J(i))/2));  
    Term4(i) = (k31*(1+cos(2*J(i)))+k32*(1-cos(2*J(i)))-  
k34*(sin(2*J(i))));  
    Term5(i) = (1+cos(2*J(i)))*(k51*sin(J(i))-k61*cos(J(i)));
```

```

Term6(i) = (1-cos(2*J(i)))*(k52*sin(J(i))-k62*cos(J(i)));
Term7(i) = sin(2 * J(i))*(k54*sin(J(i))-k64*cos(J(i)));

FEpsTeta(i) = 1000*((b ^ 2 * Prad) / (b ^ 2 - a ^ 2) * (Term1(i) +
Term2(i) - Term3(i)));
FEpsZeta(i) = 1000*((b ^ 2 * Prad) / (b ^ 2 - a ^ 2) * Term4(i));
FGammaTetaZeta(i) = 1000*((b ^ 2 * Prad) / (b ^ 2 - a ^ 2) *
(Term5(i) + Term6(i) - Term7(i)));
end

Orientazione = Jdeg;
plot(Orientazione, FEpsTeta, 'r');
title ('Curva sinusoidale');
xlabel('Orientazione Teta [ $\infty$ ]');
ylabel ('Deformazione [ $\mu$ strain]');
hold on
plot(Orientazione,FEpsZeta, 'g');
hold on
plot(Orientazione,FGammaTetaZeta);
legend('def tangenziale','def assiali', 'det taglio');
grid on;

```

Soluzione analitica del processo inverso per la determinazione delle costanti elastiche

```
clear all
close all
clc

%costanti elastiche e parametri provino

a = 19 %mm
b = 43 %mm
Prad = 20; %Pressione circonferenziale
degree = 180 / pi;
radians = pi / 180;

%Calcolo delle costanti elastiche e parametri di orientazione

Teta(1) = 60 * radians;
Teta(2) = 180 * radians;
Teta(3) = 300 * radians;

    %Valori di deformazione per Nunes Modificata

% Deformazioni ottenute dalla nunes originale
% epsilon_teta =[1294 1294 828];
% epsilon_zeta =[-360 -360 -197];
% gamma_teta_zeta =[-311 311 0];

% Deformazioni ottenute dalla nunes modificata
epsilon_teta = [1488 1488 828];
epsilon_zeta = [-401 -401 -145];
gamma_teta_zeta = [-379 379 0];

    %definisco l'espressione sinusoidali e le costanti sinusoidali
LMN - OPQ

A = [cos(2*Teta(1)) sin(2*Teta(1)) 1; cos(2*Teta(2)) sin(2*Teta(2))
1; cos(2*Teta(3)) sin(2*Teta(3)) 1];
Tepsilon_teta = epsilon_teta';
LMN = inv(A)*Tepsilon_teta;

B = [cos(2*Teta(1)) sin(2*Teta(1)) 1; cos(2*Teta(2)) sin(2*Teta(2))
1; cos(2*Teta(3)) sin(2*Teta(3)) 1];
Tepsilon_zeta = epsilon_zeta';
OPQ = inv(B)*Tepsilon_zeta;

C = [cos(Teta(1)) sin(Teta(1)) 1; cos(Teta(2)) sin(Teta(2)) 1;
cos(Teta(3)) sin(Teta(3)) 1];
Tgamma_teta_zeta = gamma_teta_zeta';
RST = inv(C)*Tgamma_teta_zeta;

    %Grafico funzione sinusoidale

i = [0:0.2:360]*radians;
Fepsilon_teta = LMN(1,1)*(cos(2*i))+LMN(2,1)*sin(2*i)+LMN(3,1);
Fepsilon_zeta = OPQ(1,1)*(cos(2*i))+OPQ(2,1)*sin(2*i)+OPQ(3,1);
Fgamma_teta_zeta = RST(1,1)*(cos(i))+ RST(2,1)*sin(i)+RST(3,1);
```

```

Orientazione = [0:0.2:360];
plot(Orientazione, Fepsilon_teta, 'r');
title ('Curva sinusoidale')
xlabel('Orientazione [ $\infty$ ]');
ylabel ('Deformazioni [ $\mu$ strain]');
hold on
plot(Orientazione, Fepsilon_zeta, 'g');
hold on
plot(Orientazione, Fgamma_teta_zeta, 'b');
legend('def tangenziale','def assiali', 'def taglio');
grid on;

%Parametri di orientazione

MaxFepsilon_teta = max(Fepsilon_teta)*10^-3;
MinFepsilon_teta = min(Fepsilon_teta)*10^-3;
MaxFepsilon_zeta = max(Fepsilon_zeta)*10^-3;
MinFepsilon_zeta = min(Fepsilon_zeta)*10^-3;
MaxFgamma_teta_zeta = max(Fgamma_teta_zeta)*10^-3;
MinFgamma_teta_zeta = min(Fgamma_teta_zeta)*10^-3;

alpha = 0.5*atan(LMN(2,1)/LMN(1,1))*degree;
beta = atan((MaxFepsilon_teta -
MinFepsilon_teta)/MaxFgamma_teta_zeta)*degree

    %Calcolo delle costanti elastiche per Nunes Modificata

E1 = (2*b^2*Prad)/((b^2-a^2)*MinFepsilon_teta);
E2 = ((1/(sin(beta*radians)^2))*(((MaxFepsilon_teta*(b^2-
a^2))/(2*b^2*Prad))-(cos(beta*radians)^2/E1)))^-1;
nu2 = - MinFepsilon_zeta*E2*((b^2-a^2)/(2*Prad*b^2));
nu1 = -(E1/((sin(beta*radians))^2))*(((MaxFepsilon_zeta*(b^2-
a^2))/(2*Prad*b^2))+((nu2*((cos(beta*radians))^2))/(E2)));
Costanti_Elastiche={'E1','E2','nu1','nu2','alpha','beta'};
D = [E1; 0; 0; 0; 0; 0];
E = [0; E2; 0; 0; 0; 0];
F = [0; 0; nu1; 0; 0; 0];
G = [0; 0; 0; nu2; 0; 0];
H = [0; 0; 0; 0; alpha; 0];
I = [0; 0; 0; 0; 0; beta];
Table=table(Costanti_Elastiche, D, E, F, G, H, I);
writetable(Table,'Costanti_elastiche_Nunes_modificata_ritorno.txt');
disp(Table);

G1 = E1/(2 * (1 + nu1)); %MPa
G2 = E1 * E2 / (E1 + E2 + 2 * nu2 * E1); %MPa
disp(G1);
disp(G2);

```