

POLITECNICO DI TORINO

Collegio di Ingegneria Gestionale

**Corso di Laurea Magistrale
in Ingegneria Gestionale**

Tesi di Laurea Magistrale

Evoluzione dei modelli di asset allocation



Relatore

prof. Franco Varetto

Candidato

Adriano Mucci

Settembre 2018

INDICE

1. INTRODUZIONE	1
1.1. La metrica del rischio	1
1.2. Il portafoglio come aggregato di rischi e opportunità	2
1.3. L'insieme possibile e la frontiera efficiente	3
1.4. La soluzione di Markowitz	4
1.5. Verso la modernità: Black & Litterman	5
1.6. Un caso particolare: il “portafoglio perfetto”	7
2. ANALISI DEI DATI	9
2.1. Titoli o indici?	9
2.2. Premessa al trattamento dei dati	11
2.3. CAC 40	14
2.3.1. WEIBULL-CAC 40	15
2.3.2. NORMALE-CAC40	16
2.4. DAX	17
2.4.1. NORMALE-DAX	18
2.5. DOW JONES	19
2.5.1. NORMALE-DOW JONES	20
2.6. FTSE 100	21
2.6.1. WEIBULL-FTSE 100	22
2.6.2. NORMALE-FTSE 100	23
2.7. FTSE MIB	24
2.7.1. WEIBULL-FTSE MIB	25
2.7.2. NORMALE-FTSE MIB	26
2.8. HANG SENG	27
2.8.1. BETA-HANG SENG	28
2.8.2. NORMALE-HANG SENG	29
2.9. IBEX 35	30
2.9.1. BETA-IBEX 35	31
2.9.2. NORMALE-IBEX 35	32
2.10. IBOVESPA	33
2.10.1. NORMALE-IBOVESPA	34
2.11. Merval	35

2.11.1.	BETA-MERVAL	36
2.11.2.	NORMALE-MERVAL	37
2.12.	NASDAQ 100	38
2.12.1.	WEIBULL-NASDAQ 100	39
2.12.2.	NORMALE-NASDAQ 100	40
2.13.	NIFTY 50	41
2.13.1.	NORMALE-NIFTY 50	42
2.14.	NIKKEI 225	43
2.14.1.	NORMALE-NIKKEI 225	44
2.15.	S&P 500	45
2.15.1.	NORMALE-S&P 500	46
2.16.	SHCOMP	47
2.16.1.	WEIBULL-SHCOMP	48
2.16.2.	NORMALE-SHCOMP	49
2.17.	STI	50
2.17.1.	NORMALE-STI	51
2.18.	Correlazione dei dati storici	52
3.	IL PORTAFOGLIO DI MARKOWITZ	56
3.1.	Il modello analitico	56
3.2.	Il portafoglio di minima varianza	58
3.3.	Il portafoglio ottimo	60
3.4.	Le fragilità del modello	63
4.	IL MODELLO DI BLACK E LITTERMAN	69
4.1.	L'impianto teorico e le ipotesi	69
4.2.	La determinazione dei parametri	69
4.3.	Le view	73
4.4.	Il termine ε^v	74
4.5.	Il teorema di Bayes come ponte tra l'investitore e il mercato	75
4.6.	L'applicazione del modello	77
4.6.1.	I pesi della capitalizzazione di mercato	77
4.6.2.	Il coefficiente di avversione al rischio	78
4.6.3.	Il vettore Π	80
4.7.	Le opinioni del manager	82
4.7.1.	Il mosaico dei mercati asiatici	82
4.7.2.	Wall Street	82
4.7.3.	Dallo spread alla Brexit: il labirinto dell'area Euro	83

4.8.	L'aggregazione degli extra-rendimenti alle view.....	85
4.9.	I pesi del portafoglio di Black & Litterman.....	87
5.	IL PORTAFOGLIO DI BROWNE.....	89
5.1.	La composizione.....	89
5.2.	L'applicazione della simulazione Monte Carlo.....	93
5.3.	Le performance di un portafoglio equipartito.....	95
5.4.	L'inizio di un nuovo capitolo.....	102
6.	CONCLUSIONI.....	104
6.1.	I modelli di asset allocation come metafora evolutiva dell'investitore.....	104
	RINGRAZIAMENTI.....	106
	SITOGRAFIA.....	108
	BIBLIOGRAFIA.....	109

1. INTRODUZIONE

1.1. La metrica del rischio

Il termine rischio non presenta di per sé un'accezione positiva o negativa; a ben pensarci l'incertezza costitutiva del concetto stesso può condurre tanto a risultati migliori quanto a conseguenze peggiori rispetto a ciò che ci si aspettava. Proprio il senso della parola è dunque in grado di fornire una definizione applicabile a qualsivoglia ambito e, in particolare, al mondo della finanza e del risk-management:

❖ *Un evento è rischioso quando il suo verificarsi determina un effetto che può essere superiore o inferiore alle aspettative.*

Ovviamente un ragionamento analogo è effettuabile, per complemento a uno, sul non verificarsi del medesimo evento. Al pari della fisica, in cui il sistema di riferimento scelto incide enormemente sui risultati ottenuti, anche nella materia d'interesse di questa trattazione è quanto mai importante definire la metrica del rischio, attribuendo a quest'ultimo un peso che consenta di interpretare correttamente le conclusioni tratte. La tendenza più seguita nell'ambito della capital allocation¹ (e quella che verrà adottata in questo elaborato) è quella di valutare negativamente la rischiosità, considerandola come misura di scostamenti in grado di determinare output inferiori alle aspettative. Il mapping dei fattori rischio² ha quindi un grande impatto sulle scelte effettuate dall'investitore nel ripartire la ricchezza posseduta dal momento che, combinato con fattori più spiccatamente idiosincratici, influenza non solo i volumi ma anche le categorie degli strumenti finanziari impiegati per la composizione del portafoglio. In presenza di risorse limitate occorre scegliere quanto e come indebitarsi, risparmiare o investire; partendo da un opportunity set³ la rosa delle alternative esistenti verrà dunque ristretta a quelle raggiungibili e in grado di garantire la più alta utilità possibile rispettando tutti i vincoli del caso. Ragionando in aggregato quello che si ottiene è il quadro delle propensioni, i dubbi e le aspettative dei mercati finanziari; la rapidità e l'efficienza nell'incorporare le informazioni rilevanti nei cambiamenti di tali variabili è poi condizionata alla presenza di inefficienze

¹ Il termine "capital allocation" (o "asset allocation") si riferisce a tutte quelle scelte che hanno come obiettivo un'allocazione efficiente e razionale della ricchezza posseduta.

² Si definisce "mapping" dei fattori di rischio l'esplicitazione puntuale di tutti i profili sotto i quali l'asset è considerato caratterizzato da un certo tipo di rischiosità (di mercato, di credito, operativo, di liquidità, di tasso etc.)

³ L' "opportunity set" consta della mappatura di tutte le alternative possibili di risparmio e investimento che si hanno a disposizione.

informativa (es. selezione avversa e azzardo morale), sulle quali le teorie finanziarie si esprimono nei modi più disparati.

1.2. Il portafoglio come aggregato di rischi e opportunità

Uno dei metodi più utilizzati per una capital allocation efficiente è l'approccio media-varianza, il quale si basa sullo studio del rapporto intercorrente tra la remunerazione offerta da un investimento e la sua esposizione al rischio. Supponendo di avere un portafoglio composto da n titoli, ciascuno di essi avrà rendimento espresso da una variabile aleatoria caratterizzata da un valore atteso e una varianza, quest'ultima interpretabile come volatilità e dunque come misura di rischiosità. Il valore atteso e la varianza dei rendimenti sono definiti come segue:

$$E(r_i) = \bar{r}_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$Var(r_i) = \sigma_i^2 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Normalizzando a uno la ricchezza posseduta dall'investitore, di fatto, i pesi percentuali di allocazione delle risorse rappresentano la struttura compositiva del portafoglio⁴ e ne determinano rendimento medio e varianza; i pesi negativi indicano attività di "vendita allo scoperto" o "short selling"⁵.

$$R = \sum_{i=1}^n w_i = 1 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$r_p = \sum_{i=1}^n w_i r_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\sigma_p^2 = \sum_{i,j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij} \quad \text{con } \sigma_{ii} = \sigma_i^2 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Come si può facilmente notare, le covarianze tra i rendimenti delle coppie di titoli giocano un ruolo fondamentale nella definizione della rischiosità di portafoglio; i termini misti possono dare sia contributo positivo che negativo a seconda del segno della correlazione lineare esistente tra gli elementi. Appare dunque evidente l'importanza del fenomeno della diversificazione, ossia la traduzione pratica dell'antico consiglio "non mettere tutte le uova nello stesso paniere": avendo a disposizione un pool ragionevolmente variegato di titoli combinati adeguatamente la

⁴ Dividendo l'ammontare di liquidità ad oggetto di un'operazione di vendita allo scoperto o acquisto, è possibile ricavare la percentuale di tesoreria corrispondente.

⁵ Operazione con la quale l'alienante vende titoli non ancora in suo possesso; si dovrà impegnare a consegnare i titoli all'acquirente perciò, in prima battuta, ad avere liquidità sufficiente per procurarseli.



Figura 1 - Diversificando in maniera ragionata è possibile ottenere una significativa diminuzione del rischio.

varianza complessiva può diminuire. Ciò ovviamente non è vero in assoluto in quanto una scelta poco accurata e senza studi sulle conseguenze potrebbe condurre ad un decremento del rendimento di portafoglio, situazione non desiderabile per gli investitori. È ragionevole supporre che la maggior parte di essi non vorrà sacrificare in modo sostanzioso il rendimento in cambio di una piccola

diminuzione del rischio, occorre tuttavia tenere in considerazione i diversi atteggiamenti nei confronti di rischi e opportunità caratterizzanti l'investitore. È proprio partendo da simili idee che Markowitz propose un approccio di tipo media-varianza, un metodo in cui i rapporti tra questi due elementi venissero esplicitati sin dal principio.

1.3. L'insieme possibile e la frontiera efficiente

Avendo a disposizione n titoli con cui comporre un portafoglio, si potrebbe pensare di rappresentare tutte le combinazioni realizzabili in un unico diagramma avente la deviazione standard sull'asse delle ascisse e il rendimento atteso su quello delle ordinate. Le varie configurazioni si ottengono facendo variare i pesi in modo tale che la somma degli stessi dia sempre uno, in riferimento alla normalizzazione della ricchezza di cui si è parlato nel paragrafo precedente. L'insieme dei punti corrispondenti a questi portafogli è chiamato "insieme possibile" (o "regione possibile") e soddisfa due importanti proprietà⁶:

1. *Se si hanno almeno tre titoli (non perfettamente correlati e con medie differenti) l'insieme possibile è costituito da una regione bidimensionale continua;*
2. *La regione possibile è convessa verso sinistra.*

Il bordo sinistro costituisce l'"insieme di minima varianza"; per ogni valore di rendimento atteso la curva rappresenta il luogo dei punti caratterizzati da scarto quadratico medio minimo tra tutti quelli facenti parte della regione possibile. Uno fra questi assume rilevanza particolare: il "punto di minima varianza" ("MVP", "Minimum-Variance Point"). Si supponga poi che la scelta di portafoglio si limiti alle configurazioni giacenti su una retta orizzontale (valore atteso fissato ex-ante). Tutti i punti lungo la linea avranno stesso rendimento ma diversa rischiosità e,

⁶ Per le proprietà della regione possibile ci si riferisce alle definizioni proposte da G.Luenberger nel testo "Finanza e investimenti. Fondamenti matematici" (Apogeo,2013)

proprio per tale ragione, la maggior parte degli investitori preferirà scegliere il punto estremo a sinistra corrispondente alla deviazione standard minima per una media data; gli investitori che concordano con questa visione si dicono “avversi al rischio” o “risk-averse”. Viceversa quelli che sceglieranno di collocarsi in un punto diverso da quello di minima varianza saranno “propensi al rischio” o “risk-preferring”. Lo stesso ragionamento è perfettamente ricalcabile se ci si limita alle alternative giacenti su una retta verticale (deviazione standard fissata ex-ante); essa sarà composta da portafogli col medesimo livello di rischio ma differenti rendimenti, la maggioranza degli investitori si collocherà quindi nel punto più alto di tale linea in modo da raggiungere il massimo valore della media per un dato livello di volatilità. Questa specifica caratteristica viene chiamata “insaziabilità”; tale termine indica che, ceteris paribus, gli investitori desidereranno sempre ricevere più denaro. Tutto ciò ha come diretta conseguenza che, in presenza di avversione al rischio ed insaziabilità, la preferenza verterà per la parte superiore dell’insieme di minima varianza (dall’MVP in su); questa parte della curva è denominata “frontiera efficiente”. Essa costituisce il luogo dei punti caratterizzati dalle migliori combinazioni rischio-rendimento per la maggior parte degli investitori.

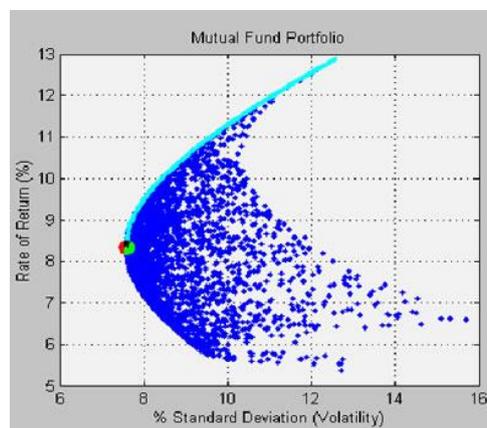


Figura 2 - Un esempio di regione possibile e frontiera efficiente

1.4. La soluzione di Markowitz



Figura 3 - H.Markowitz

L’idea di Markowitz muove dal meccanismo stesso di generazione della domanda e dell’offerta di attività finanziarie, profondamente influenzato dal rapporto tra esposizione al rischio e rendimento offerto. “*Al fine di costruire un portafoglio efficiente occorre individuare una combinazione di titoli tale da minimizzare il rischio e massimizzare il rendimento complessivo compensando gli andamenti asincroni dei singoli titoli*” (A.

Castiglione. *Gli uomini nella storia della finanza*. Performance Trading. Web. 7 Marzo 2018. www.performancetrading.it); le ipotesi essenziali del modello di Markowitz sono elencate a seguire:

- ✓ *Gli investitori sono insaziabili e avversi al rischio;*
- ✓ *L'investimento è su orizzonte uniperiodale;*
- ✓ *I costi di transazione e le imposte sono nulli;*
- ✓ *Le attività sono perfettamente divisibili;*
- ✓ *Il rendimento atteso e la rischiosità sono gli unici parametri a guidare la scelta;*
- ✓ *Il mercato è in concorrenza perfetta;*
- ✓ *Tutta la ricchezza posseduta viene investita.*

Un'assunzione fondamentale è quella circa il processo stocastico sul quale si fonda il meccanismo di formazione dei prezzi, il quale si ipotizza essere di tipo gaussiano. Il rischio complessivo di portafoglio è strettamente influenzato dal segno della correlazione lineare presente tra le coppie di attività finanziarie; se la risultante da contributo positivo la volatilità dei rendimenti (in aggregato) è maggiore di quella dei singoli titoli, se il contributo è negativo invece si riesce a godere del beneficio da diversificazione, determinando una riduzione complessiva del rischio a cui il portafoglio è esposto rispetto a quello caratteristico delle componenti prese individualmente. Nel caso in cui non vi sia correlazione il profilo di volatilità dei titoli rappresenta perfettamente quello dell'intero paniere. La funzione obiettivo di Markowitz è dunque un problema di minimo se si considera il rischio per un dato livello di rendimento o di massimo se la prospettiva adottata è quella del rendimento in funzione della sua volatilità; i vincoli rispecchiano l'ipotesi di normalizzazione della liquidità investita ed eventualmente l'esclusione delle vendite allo scoperto dalla rosa delle opportunità. Volendo è possibile includere nel mix titoli risk-free, i quali saranno dunque caratterizzati da volatilità nulla e rendimento diverso da zero⁷.

1.5. Verso la modernità: Black & Litterman

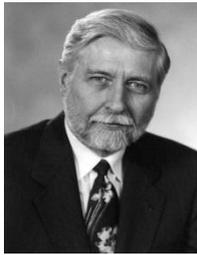
Nel 1990 Fisher Black e Robert Litterman iniziarono a lavorare presso la Goldman Sachs ad un modello matematico di capital allocation che, partendo dalle intuizioni che Markowitz ebbe

⁷ Il paragrafo "La soluzione di Markowitz" contiene sintesi tratte dalla sezione "*I principi base della teoria di Markowitz*" appartenenti alla biografia "*Gli uomini che hanno scritto la storia della finanza*", a cura del Dott. Andrea Castiglione. Il materiale è visionabile presso il sito www.performancetrading.it alla voce "*Biografie & esperienze*".

negli anni '50, fosse in grado di formulare un approccio meno asettico alla teoria di composizione del portafoglio (l'articolo fu poi pubblicato due anni dopo). L'idea di base era che le strategie di investimento del gestore di un fondo dovessero sì dipendere dal valore di mercato degli asset disponibili, ma anche dalle view personali dello stesso⁸. Non è infatti detto che le opinioni di un individuo circa la bontà di un investimento debbano necessariamente rispecchiare la tendenza del mercato, dal momento che i meccanismi di formazione di domanda ed offerta incorporano sì le aspettative della maggior parte degli investitori ma non della totalità. Partendo semplicemente dalle considerazioni su cui è edificata la teoria del mercato efficiente, è ragionevole affermare che non si possano realizzare profitti sistematicamente positivi o, per meglio dire, che non si possa sistematicamente “battere il mercato”. Questo implica che se il mancato avverarsi delle previsioni determinerà una perdita o un risultato inferiore a quanto preventivato, non necessariamente ciò sarà vero per tutti gli investitori; ci sarà sempre una parte di essi contro tendenza che scommetterà secondo prospettive diverse da quelle più comuni. Ovviamente tale considerazione vale anche nel caso contrario, del resto la legge che governa i mercati finanziari è basata su una ciclica redistribuzione del surplus tra posizioni in utile e posizioni in perdita. Tornando al modello, la soluzione ottima è in larga parte influenzata dalla visione personale dei manager. Le opinioni del gestore saranno dunque caratterizzate da un intervallo di confidenza che ne moduli l'impatto sulla composizione del portafoglio; la probabilità di compiere errori di primo e secondo tipo dipende, come diretta conseguenza, dall'ampiezza di tale intervallo. La forza del metodo di Black & Litterman risiede principalmente nella sua duttilità: non è detto che il manager debba necessariamente avere delle view su tutti i componenti del basket e i risultati sono consistenti col modello a monte. Dalla posizione markowitziana di piena spersonalizzazione rispetto al mercato si è dunque passati a una visione più ampia e partecipativa dell'individuo nelle scelte di composizione del portafoglio; quello di Markowitz è un metodo che nacque negli anni '50 e rivoluzionò la moderna capital allocation ma che, con il passare del tempo e l'evoluzione del mondo finanziario, iniziò ad essere troppo restrittivo rispetto alle nuove esigenze degli investitori.

⁸ Le view sono profondamente condizionate dalla presenza di asimmetrie informative e dal grado di diffusione delle informazioni a partire dalle quali il manager delinea le proprie opinioni di rialzo o ribasso.

1.6. Un caso particolare: il “portafoglio perfetto”



La ricerca di un portafoglio ideale che possa garantire rendimenti soddisfacenti con una gestione equilibrata del rischio, è al centro di molte delle ricerche compiute dagli analisti finanziari dei nostri giorni. “*Il pioniere degli studi del “portafoglio perfetto” (il “permanent portfolio”) è stato lo statunitense Harry Browne, ex analista finanziario e politico liberale morto nel 2006*” (A. Gennai.

Figura 4 - H.Browne

Ecco come si costruisce il portafoglio “perfetto”. Il Sole 24 Ore. 9 Marzo 2013. Web. 9 Marzo 2018. www.ilsole24ore.com); il principio basilare su cui si fonda la sua teoria è il medesimo citato nel paragrafo “Il portafoglio come aggregato di rischi e opportunità”: la diversificazione consente di avere a disposizione potenti strumenti per una gestione oculata della rischiosità, spesso senza la necessità di sostenere onerosi costi per transazione. Il portafoglio perfetto, in base alla formulazione originaria di Browne, presenta la seguente composizione:

25% in azioni



25% in oro



25% in titoli governativi a breve



25% in titoli governativi a lungo



Sempre secondo il Sole 24 Ore a riprendere gli studi di Browne in Italia e ad adattarli alla nostra situazione economico-finanziaria è stato Francesco Caruso, analista e fondatore del sito Cicliemercati.it. La logica su cui si fonda la composizione del permanent portfolio è quella di un basket nel quale l’aggregato di asset dia i propri frutti nel medio-lungo termine (sono necessari dai 3 ai 5 anni), con dei pesi di allocazione pressoché fissi; ricorrendo al beneficio da

diversificazione è infatti possibile far leva su un meccanismo di compensazione che consenta di ottenere profitti mediamente positivi. Va da sé che a giocare un ruolo fondamentale, anche in questo modello di asset allocation, sono le caratteristiche idiosincratiche di propensione/avversione al rischio dell'investitore. Caruso ha effettuato un calco del modello statunitense, aggiustandolo per investitori che utilizzano l'euro come valuta domestica; le categorie selezionate per la composizione del portafoglio sono:

- *L'indice tedesco DAX 30 per le azioni;*
- *L'oro;*
- *I CTZ italiani (zero-coupon bond) per i titoli governativi a breve;*
- *I Bund tedeschi decennali per i titoli governativi a lungo.*

Nello studio effettuato da Caruso circa l'applicazione della teoria di Browne in Italia, le performance del portafoglio sono state piuttosto soddisfacenti; in generale una delle coppie di attività performa meglio dell'altra permettendo una rivalutazione complessiva delle posizioni. Quando invece c'è una flessione che riguarda uno degli asset ve ne sono almeno altri due in grado di bilanciare l'effetto negativo. Lo sfruttamento dei principi di diversificazione permette dunque di avventurarsi sui terreni finanziari più impervi, garantendo una gestione del rischio ponderata ed efficiente⁹.

⁹Il paragrafo "*Un caso particolare: il "portafoglio perfetto"*" contiene sintesi tratte dall'articolo "*Ecco come si costruisce il portafoglio "perfetto"*", pubblicato nella sezione "*Plus 24*" a cura di Andrea Gennai. Il materiale è visionabile presso il sito www.ilsole24ore.com alla voce "*Finanza e Mercati*".

2. ANALISI DEI DATI

2.1. Titoli o indici?

Estremamente cruciale ai fini della trattazione in oggetto è la scelta degli strumenti finanziari che verranno utilizzati come set di partenza per la composizione del portafoglio. Il problema principale consiste nell'impiegare dati che incorporino il più possibile gli effetti delle operazioni

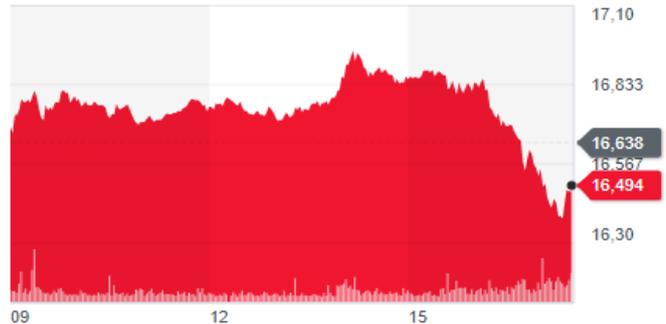


Figura 5 - L'andamento del titolo FCA aggiornato alle 17.30 del 26/03/2018

compiute sul capitale; frazionamenti, scissioni e dividendi straordinari sono eventi che influenzano profondamente l'andamento delle quotazioni e, in prima battuta, gli operatori finanziari. Le fonti utilizzate per il reperimento delle serie storiche (Yahoo Finance, Investing.com, Borsa Italiana Spa) non presentano indicazioni chiare circa le rettifiche applicate ai singoli titoli azionari per operazioni sul capitale, proprio per tale ragione si è deciso di ricorrere agli indici. La maggior parte di essi viene definita secondo un criterio di tipo “value weighted”: il peso di ciascun titolo è proporzionale alla capitalizzazione di Borsa; ciò permette di limitare fortemente la distorsione indotta da quotazioni determinate secondo il principio “price weighted”. In queste ultime i pesi variano in funzione del prezzo, indipendentemente dalla dimensione della capitalizzazione e dell'impresa; l'andamento del portafoglio presenta bias dovuti alla maggiore importanza attribuita ai titoli più costosi e allo stralcio di fattori ben più rilevanti per la determinazione di un valore equo. Esempi di indici value weighted sono:

- ❖ **S&P 500**
- ❖ **FTSE MIB**
- ❖ **FTSE 100**
- ❖ **CAC 40**
- ❖ **DAX 30**
- ❖ **TOPIX**

Nonostante quanto detto, sui mercati finanziari permangono comunque realtà basate su una logica di tipo price weighted come quelle del Dow Jones e dello Shanghai Stock Composite Index (SHCOMP). La tabella seguente riassume gli indici selezionati per l'elaborato in oggetto;

la ratio adottata per la composizione del set è proprio quella sopra evidenziata, volta a limitare il più possibile le distorsioni da variabili omesse:

N°	INDICE	STATO	VALUTA
1	NIKKEI 225	Giappone	JPY
2	S&P 500	Stati Uniti	USD
3	DAX	Germania	EUR
4	HANG SENG	Hong Kong	HKD
5	NASDAQ 100	Stati Uniti	USD
6	DOW JONES	Stati Uniti	USD
7	CAC 40	Francia	EUR
8	FTSE 100	Gran Bretagna	GBP
9	IBEX 35	Spagna	EUR
10	NIFTY 50	India	INR
11	IBOVESPA	Brasile	BRL
12	STI	Singapore	SGD
13	MERVAL	Argentina	USD
14	FTSE MIB	Italia	EUR
15	SHANGAI COMPOSITE	Cina	CNY

Legenda valute:

- EUR: Euro
- USD: Dollaro americano
- JPY: Yen giapponese
- HKD: Dollaro di Hong Kong
- GBP: Sterlina britannica
- INR: Rupia indiana
- BRL: Real brasiliano
- SGD: Dollaro di Singapore
- CNY: Yuan cinese

Come si evince dalla provenienza, si è cercato di effettuare un mix che coinvolgesse i principali indici delle Borse mondiali, così da trarre delle conclusioni il più possibile di ampio respiro. In questo modo si vanno ad includere nell'elaborazione dei dati sia mercati finanziari più sviluppati che realtà meno spesse, con liquidità delle contrattazioni estremamente variegate. Ovviamente occorre tener presente che quasi tutti gli indici sono calcolati sulla base del puro prezzo di mercato e ciò determina un'incompletezza costitutiva nell'ambito dell'analisi dei rendimenti; l'unico fattore di cui essi tengono conto è il guadagno da capital gain¹⁰, ossia quello imputabile unicamente alle variazioni del prezzo registrate nei vari trading day. L'esclusione dello stacco dei dividendi dalle determinanti del profitto provoca un gap tra il valore osservato e la reale percezione dell'evento da parte degli operatori finanziari: l'underpricing teorico

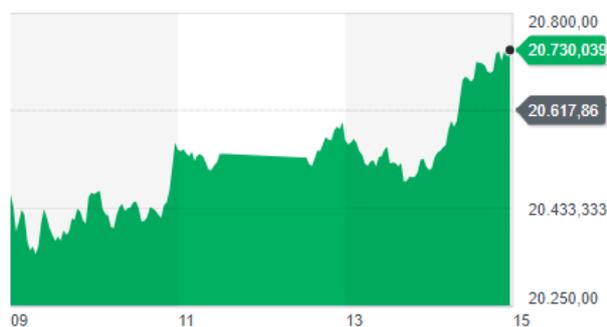


Figura 6 - L'andamento dell'indice Nikkei 225 aggiornato alle ore 15 del 26/03/2018

conseguente (pari in valore nominale al totale dei dividendi pagati) può sembrare a un primo impatto imputabile ad una cattiva performance, in realtà viene accolto con estremo favore dalla compagine azionaria¹¹. Tornando alla trattazione, quando l'oggetto della scelta di investimento ricade su strumenti finanziari esteri è necessario avere

¹⁰ Il rendimento offerto da un titolo azionario è dato dalla somma di due diverse componenti: il rendimento da dividendo (utili distribuiti alla compagine azionaria) e quello in conto capitale (fluttuazioni del valore di mercato del titolo).

¹¹ Se si considera il solo capital gain, un underpricing può essere interpretato erroneamente come unicamente imputabile ad una svalutazione di mercato del titolo.

un occhio di riguardo circa i rischi aggiuntivi a cui ci si espone. Il Forex, ossia il mercato delle valute, è una delle piazze più grandi del mondo e presenta delle dinamiche proprie in grado di influenzare significativamente la redditività di un investimento (non a caso nei bilanci compare la voce “utile/perdita su cambi”). Colui che decide di avventurarsi nei mercati di Paesi extra-europei deve



Figura 7 - Alcune delle valute di riferimento degli indici analizzati

debitamente tener conto di elementi come il vantaggio comparato e il rischio valutario per poter comporre il proprio portafoglio in modo ponderato ed efficiente. Se da un lato il primo può garantire migliori condizioni di indebitamento sfruttando una moneta diversa dalla propria, il secondo vincola una fetta più o meno consistente del rendimento alle fluttuazioni dei cambi. In questo elaborato tutti i dati in valuta estera verranno convertiti in euro in modo da incorporare nelle considerazioni effettuate il rischio di cambio stesso; in sostanza si ragionerà dalla prospettiva di un investitore europeo.

2.2. Premessa al trattamento dei dati

Le serie storiche di dati, impiegate per l’elaborazione delle statistiche descrittive, sono costituite da stringhe composte dai valori di chiusura assunti dagli indici presi in esame¹²; l’arco temporale coperto va dal 5 marzo 2013 al

Data indice	Hang Seng	Data cambio	Cambio HKD
29.12.2017	29.919,15	29.12.2017	9,3738
02.01.2018	30.515,31	01.01.2018	9,3833
03.01.2018	30.560,95	02.01.2018	9,424

Figura 6 - Esempio di sfasamento: in data 1-1-2018 per l’Hang Seng sono disponibili i valori del cambio EUR/HKD ma non dell’indice

5 marzo 2018 (un quinquennio). I tassi di cambio sono stati utilizzati in tutti quei casi nei quali la valuta di riferimento è diversa dall’euro, in modo da assumere il punto di vista di un investitore che ragioni in ottica europea. Va da sé che un po’ per la diversa gestione delle giornate di contrattazione dei vari Paesi, un po’ perché la calendarizzazione dei trading day differisce in funzione del mercato di riferimento, i valori di indice e cambio relativi ad una determinata data in molti casi non corrispondevano; in sostanza le stringhe con i dati valutari presentavano un numero maggiore di elementi rispetto a quelle degli indici azionari,

¹² Le serie storiche di dati comprendevano i valori di apertura, massimo, minimo e chiusura delle sedute di contrattazione. Si è ritenuto opportuno utilizzare i soli valori di chiusura perché erano i più attendibili tra le quotazioni disponibili.

provocando una desincronizzazione delle mile-stone temporali. Si è reso dunque necessario un intervento di filtratura dei dati, andando a scartare tutti quei valori che non trovavano una corrispondenza negli indici; solo dopo aver riallineato le componenti dei vettori è stato possibile provvedere alla conversione in euro e al calcolo delle statistiche campionarie. La variabile aleatoria di riferimento è costituita dai rendimenti logaritmici che, in presenza di variazioni percentuali ragionevolmente piccole, approssimano in modo soddisfacente il calcolo aritmetico¹³. Il log-rendimento rilevato al tempo t è dunque definito come:

$$r_t = \ln(p^t/p_{t-1})$$

Dove il numeratore e il denominatore dell'argomento sono rispettivamente il valore dell'indice al tempo t e al tempo t-1. Una volta determinate tali stringhe si è potuto procedere allo studio di ulteriori indicatori che dessero maggiori informazioni sulla distribuzione temporale dei rendimenti logaritmici:

- ❖ *La media come parametro di centratura della distribuzione;*
- ❖ *La deviazione standard e la varianza come misure di dispersione;*
- ❖ *La skewness (asimmetria) per indicazioni sulla scentratura;*
- ❖ *La curtosi come indicatore di pesantezza delle code (fat tails).*

Un ragionamento analogo è stato ricalcato per la sezione relativa all'analisi della correlazione tra le serie storiche, per poter effettuare la quale era necessario che tutti i vettori colonna della matrice dei log-rendimenti avessero uguale dimensione; la formula utilizzata per il calcolo dei ρ è:

$$\text{Correlazione } (X, Y) = \frac{\sum(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})}{\sqrt{\sum(X - \bar{X})^2 \sum(Y - \bar{Y})^2}}$$

L'utilizzo di indici aventi un numero di dati relativamente alto rispetto agli altri avrebbe comportato delle inefficienze computazionali e diluito il risultato ottenuto; si è scelta perciò la sorgente contenente il numero minore di valori tra tutte quelle disponibili nel pool esaminato. A partire dallo SHCOMP tutti i dati per i quali non è stata trovata corrispondenza di data col riferimento adottato sono stati eliminati e rimpiazzati con la media aritmetica dei valori

¹³ In alcuni casi le variazioni sono piuttosto rilevanti e ciò renderebbe l'approssimazione lineare più adatta. Per ovviare a questo inconveniente si è ipotizzato che le distorsioni derivanti dall'applicazione della formula logaritmica siano trascurabili.

disponibili più vicini nel tempo¹⁴; su un totale di 18255 rendimenti logaritmici selezionati 529 erano mancanti (ossia il 2,9%). In questo modo è stato possibile limitare gli effetti distorsivi che avrebbero inciso sulla matrice di correlazione e di varianza-covarianza. Altra possibilità ugualmente valida era quella di ricorrere a serie storiche più lunghe utilizzando approcci simulativi per saturare i vuoti lasciati aperti dalle desincronizzazioni, senza così inficiare la robustezza statistica dei risultati. Un'ulteriore ipotesi si è infine resa necessaria nell'ambito dello studio della correlazione al variare delle finestre temporali prese in considerazione (nel caso in esame rispettivamente 50 e 100 trading day). Poiché i vettori presentavano un numero di componenti che non era multiplo intero né di 50 né di 100, si è assunto che i rendimenti logaritmici rimanessero costanti in tutti quei giorni necessari per la definizione della media ma al di fuori del quinquennio considerato. Il valore atteso degli ultimi dati storici è dunque condizionato dall'ipotesi effettuata¹⁵; un'altra alternativa possibile sarebbe stata quella di ricorrere alla simulazione Monte Carlo per creare un campione aggiuntivo, utilizzando come distribuzione per l'algoritmo della trasformata inversa quella dei rendimenti logaritmici osservati su tutto il periodo d'interesse.

¹⁴ Laddove ciò non è stato possibile (numero maggiore di valori mancanti consecutivi), il procedimento è stato applicato iterativamente per colmare le lacune.

¹⁵ Per via di questa semplificazione, i valori finali delle medie calcolate sulle finestre temporali d'interesse sono significativamente centrati attorno all'ultimo dato storico disponibile.

2.3. CAC 40

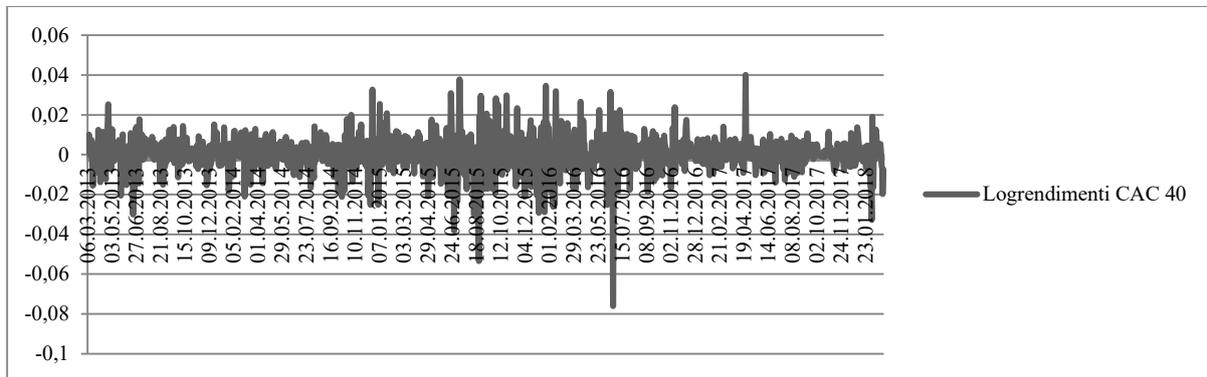


Figura 7 - I rendimenti logaritmici del CAC 40 dal 5/3/2013 al 5/3/2018

Il grafico in alto mostra l'andamento dei log-rendimenti del CAC 40 negli ultimi 5 anni; come si può intuitivamente notare le performance peggiori sono state registrate nell'agosto 2015 e nel giugno 2016, i risultati più soddisfacenti della serie analizzata sono invece quelli dell'aprile 2017. Questi ultimi tuttavia non si distanziano significativamente dal picco massimo della fascia caratterizzata da maggior volatilità (il biennio 2015-2016). La distribuzione che meglio fitta i log-rendimenti risulta essere una Weibull (square error: 0,009105) con valori relativamente poco dispersi rispetto alla media campionaria. Nonostante gli indici di asimmetria e

Distribution Summary	
Distribution:	Weibull
Expression:	-0.09 + WEIB(0, 0)
Square Error:	0.009105
Chi Square Test	
Number of intervals	= 11
Degrees of freedom	= 8
Test Statistic	= 95.3
Corresponding p-value	< 0.005
Kolmogorov-Smirnov Test	
Test Statistic	= 0.08
Corresponding p-value	< 0.01
Data Summary	
Number of Data Points	= 1278
Min Data Value	= -0.076
Max Data Value	= 0.0401
Sample Mean	= 0.000244
Sample Std Dev	= 0.00892
Histogram Summary	
Histogram Range	= -0.09 to 0.06
Number of Intervals	= 35

Figura 9 - Caratteristiche dell'istogramma e test di bontà del fitting (CAC 40) eseguiti tramite il simulatore ARENA

Function	Sq Error
Weibull	0.00911
Normal	0.00979
Beta	0.0103
Lognormal	0.0189
Erlang	0.061
Gamma	0.0611
Triangular	0.0985
Uniform	0.136
Exponential	0.153

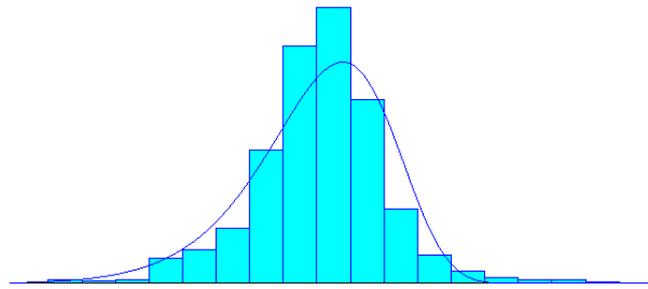
Figura 8 - Il ranking delle distribuzioni che meglio fittano i dati (CAC 40) in funzione dello square error

curtosi (rispettivamente pari a -0,67940557 e 6,905915093)

indichino una scentratura verso destra e una maggiore pesantezza delle code rispetto alla Normale, dal confronto tra gli errori quadratici emerge una differenza decisamente trascurabile tra le due. Ciò consente, senza produrre effetti distorsivi significativi, di approssimare la Weibull con la Normale in modo da poter beneficiare di tutte le semplificazioni del caso. Di seguito si riporta il report completo del fitting per entrambe, comprensivo di intervalli, densità di probabilità e distribuzione cumulata. Lo schema di presentazione delle statistiche descrittive

verrà ricalcato per tutti gli indici a seguire indicando, ove possibile, le alternative di approssimazione.

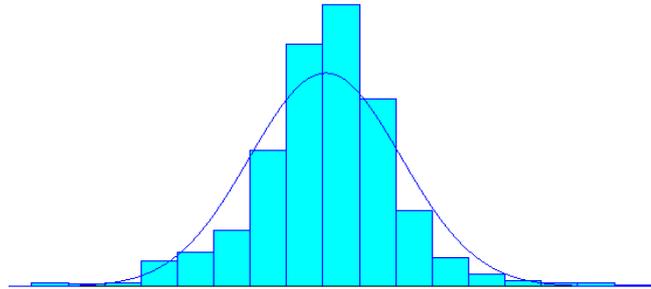
2.3.1. WEIBULL-CAC 40



Int. No.	No. of Data Pts.	x	Probability Density		Cumulative Distribution	
			Data	Function	Data	Function
0	0	-0.0857	0.000	1.11e-016	0.000	1.11e-016
1	0	-0.0814	0.000	2.95e-013	0.000	2.95e-013
2	0	-0.0771	0.000	3.88e-011	0.000	3.91e-011
3	1	-0.0729	0.000782	1.22e-009	0.000782	1.25e-009
4	0	-0.0686	0.000	1.72e-008	0.000782	1.85e-008
5	0	-0.0643	0.000	1.48e-007	0.000782	1.66e-007
6	0	-0.0600	0.000	8.99e-007	0.000782	1.07e-006
7	0	-0.0557	0.000	4.26e-006	0.000782	5.33e-006
8	1	-0.0514	0.000782	1.67e-005	0.00156	2.20e-005
9	0	-0.0471	0.000	5.64e-005	0.00156	7.84e-005
10	0	-0.0429	0.000	0.000169	0.00156	0.000247
11	0	-0.0386	0.000	0.000459	0.00156	0.000706
12	1	-0.0343	0.000782	0.00115	0.00235	0.00185
13	4	-0.0300	0.00313	0.00267	0.00548	0.00452
14	3	-0.0257	0.00235	0.00583	0.00782	0.0103
15	5	-0.0214	0.00391	0.0120	0.0117	0.0224
16	30	-0.0171	0.0235	0.0235	0.0352	0.0459
17	40	-0.0129	0.0313	0.0434	0.0665	0.0894
18	65	-0.00857	0.0509	0.0750	0.117	0.164
19	157	-0.00429	0.123	0.119	0.240	0.283
20	279	-5.20e-018	0.218	0.168	0.459	0.451
21	323	0.00429	0.253	0.199	0.711	0.650
22	216	0.00857	0.169	0.184	0.880	0.834
23	87	0.0129	0.0681	0.116	0.948	0.950
24	33	0.0171	0.0258	0.0424	0.974	0.993
25	15	0.0214	0.0117	0.00701	0.986	1.00
26	7	0.0257	0.00548	0.000377	0.991	1.00
27	4	0.0300	0.00313	4.09e-006	0.995	1.00
28	4	0.0343	0.00313	4.44e-009	0.998	1.00
29	2	0.0386	0.00156	1.78e-013	0.999	1.00
30	1	0.0429	0.000782	0.000	1.00	1.00
31	0	0.0471	0.000	0.000	1.00	1.00
32	0	0.0514	0.000	0.000	1.00	1.00
33	0	0.0557	0.000	0.000	1.00	1.00
34	0	0.0600	0.000	0.000	1.00	1.00

Figura 10 - Intervalli, densità di probabilità e cumulata della Weibull (CAC 40)

2.3.2. NORMALE-CAC40



Int. No.	No. of Data Pts.	x	Probability Density		Cumulative Distribution	
			Data	Function	Data	Function
0	0	-0.0857	0.000	2.60e-022	0.000	2.60e-022
1	0	-0.0814	0.000	2.51e-020	0.000	2.53e-020
2	0	-0.0771	0.000	1.92e-018	0.000	1.95e-018
3	1	-0.0729	0.000782	1.17e-016	0.000782	1.19e-016
4	0	-0.0686	0.000	5.69e-015	0.000782	5.81e-015
5	0	-0.0643	0.000	2.19e-013	0.000782	2.25e-013
6	0	-0.0600	0.000	6.74e-012	0.000782	6.96e-012
7	0	-0.0557	0.000	1.65e-010	0.000782	1.72e-010
8	1	-0.0514	0.000782	3.20e-009	0.00156	3.37e-009
9	0	-0.0471	0.000	4.96e-008	0.00156	5.30e-008
10	0	-0.0429	0.000	6.11e-007	0.00156	6.64e-007
11	0	-0.0386	0.000	6.00e-006	0.00156	6.66e-006
12	1	-0.0343	0.000782	4.69e-005	0.00235	5.36e-005
13	4	-0.0300	0.00313	0.000292	0.00548	0.000346
14	3	-0.0257	0.00235	0.00145	0.00782	0.00179
15	5	-0.0214	0.00391	0.00573	0.0117	0.00752
16	30	-0.0171	0.0235	0.0180	0.0352	0.0256
17	40	-0.0129	0.0313	0.0453	0.0665	0.0708
18	65	-0.00857	0.0509	0.0905	0.117	0.161
19	157	-0.00429	0.123	0.144	0.240	0.306
20	279	-5.20e-018	0.218	0.183	0.459	0.489
21	323	0.00429	0.253	0.186	0.711	0.675
22	216	0.00857	0.169	0.150	0.880	0.825
23	87	0.0129	0.0681	0.0966	0.948	0.921
24	33	0.0171	0.0258	0.0495	0.974	0.971
25	15	0.0214	0.0117	0.0203	0.986	0.991
26	7	0.0257	0.00548	0.00660	0.991	0.998
27	4	0.0300	0.00313	0.00171	0.995	1.00
28	4	0.0343	0.00313	0.000355	0.998	1.00
29	2	0.0386	0.00156	5.85e-005	0.999	1.00
30	1	0.0429	0.000782	7.67e-006	1.00	1.00
31	0	0.0471	0.000	8.02e-007	1.00	1.00
32	0	0.0514	0.000	6.68e-008	1.00	1.00
33	0	0.0557	0.000	4.43e-009	1.00	1.00
34	0	0.0600	0.000	2.34e-010	1.00	1.00

Figura 11 - Intervalli, densità di probabilità e cumulata della Normale (CAC 40)

2.4. DAX

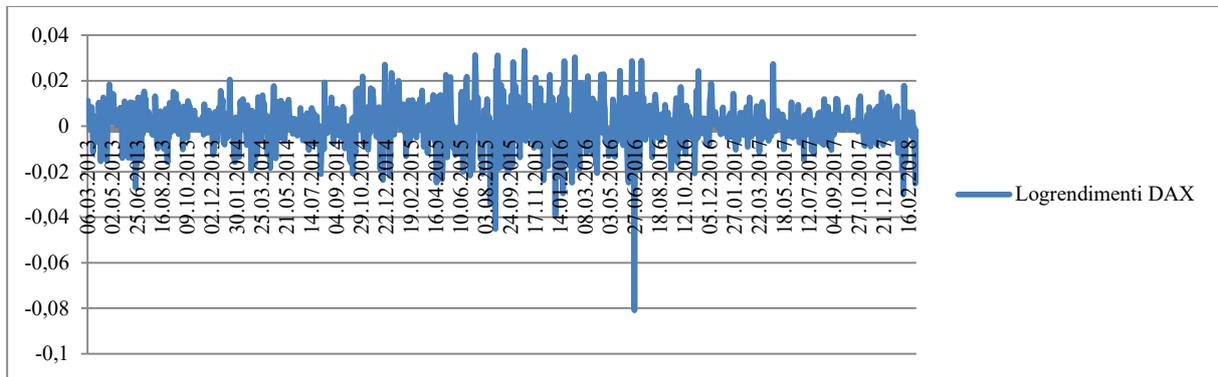


Figura 12 - I rendimenti logaritmici del DAX dal 5/3/2013 al 5/3/2018

Distribution Summary	
Distribution:	Normal
Expression:	NORM(0.000335, 0.00917)
Square Error:	0.008752
Chi Square Test	
Number of intervals	= 11
Degrees of freedom	= 8
Test Statistic	= 90.7
Corresponding p-value	< 0.005
Kolmogorov-Smirnov Test	
Test Statistic	= 0.0658
Corresponding p-value	< 0.01
Data Summary	
Number of Data Points	= 1266
Min Data Value	= -0.081
Max Data Value	= 0.0332
Sample Mean	= 0.000335
Sample Std Dev	= 0.00917
Histogram Summary	
Histogram Range	= -0.1 to 0.05
Number of Intervals	= 35

Figura 14 - Caratteristiche dell'istogramma e test di bontà del fitting (DAX) eseguiti tramite il simulatore ARENA

I rendimenti logaritmici calcolati sull'indice della Borsa di Francoforte si sono mantenuti su valori relativamente stabili nel biennio 2013-2014 senza registrare fluttuazioni significative rispetto al range +2%/-2%, tuttavia hanno risentito delle turbolenze che hanno agitato i mercati finanziari tra il 2015 e il 2016. Da notare la pessima performance, realizzata nel terzo trimestre del 2016, che ha visto i log-rendimenti scendere a quota -8%. Dopo questo scossone il DAX si è gradualmente riassetato, raggiungendo un nuovo equilibrio che appare decisamente più solido del precedente; i mercati stanno dimostrando una certa fiducia nella stabilità di tale ripresa. I dati

analizzati seguono una

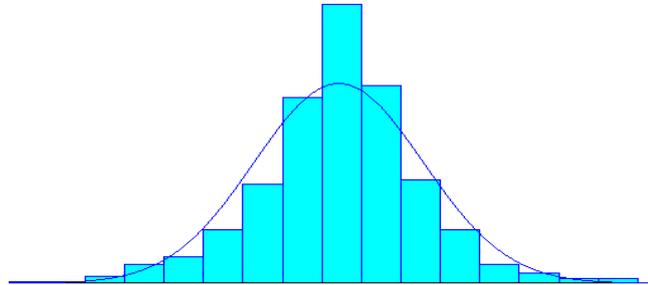
Normale caratterizzata da

media e deviazione standard praticamente nulle. Il test del chi quadrato indica che il p-value relativo è inferiore allo 0,5%, la bontà del fitting identifica dunque un intervallo di confidenza superiore al 99,5% con scarsissima probabilità di commettere errori di primo tipo. La normalità si evince chiaramente anche dagli indici di skewness e curtosi (la prima pari a -0,72979452 e la seconda pari a 0,001452451), i quali tratteggiano una densità con code quasi nulle e con una leggera asimmetria verso destra.

Function	Sq Error
Normal	0.00875
Beta	0.00878
Weibull	0.00887
Lognormal	0.0154
Erlang	0.0614
Gamma	0.0615
Triangular	0.0915
Uniform	0.128
Exponential	0.145

Figura 13 - Il ranking delle distribuzioni che meglio fittano i dati (DAX) in funzione dello square error

2.4.1. NORMALE-DAX



Int. No.	No. of Data Pts.	x	Probability Density		Cumulative Distribution	
			Data	Function	Data	Function
0	0	-0.0957	0.000	5.59e-026	0.000	5.59e-026
1	0	-0.0914	0.000	7.00e-024	0.000	7.05e-024
2	0	-0.0871	0.000	7.05e-022	0.000	7.13e-022
3	0	-0.0829	0.000	5.73e-020	0.000	5.80e-020
4	1	-0.0786	0.000790	3.74e-018	0.000790	3.80e-018
5	0	-0.0743	0.000	1.97e-016	0.000790	2.01e-016
6	0	-0.0700	0.000	8.35e-015	0.000790	8.56e-015
7	0	-0.0657	0.000	2.85e-013	0.000790	2.94e-013
8	0	-0.0614	0.000	7.85e-012	0.000790	8.15e-012
9	0	-0.0571	0.000	1.74e-010	0.000790	1.82e-010
10	0	-0.0529	0.000	3.11e-009	0.000790	3.29e-009
11	0	-0.0486	0.000	4.48e-008	0.000790	4.81e-008
12	1	-0.0443	0.000790	5.20e-007	0.00158	5.69e-007
13	0	-0.0400	0.000	4.87e-006	0.00158	5.44e-006
14	1	-0.0357	0.000790	3.68e-005	0.00237	4.22e-005
15	2	-0.0314	0.00158	0.000224	0.00395	0.000266
16	2	-0.0271	0.00158	0.00110	0.00553	0.00136
17	8	-0.0229	0.00632	0.00435	0.0118	0.00571
18	22	-0.0186	0.0174	0.0139	0.0292	0.0196
19	31	-0.0143	0.0245	0.0358	0.0537	0.0554
20	64	-0.0100	0.0506	0.0744	0.104	0.130
21	117	-0.00571	0.0924	0.125	0.197	0.255
22	220	-0.00143	0.174	0.169	0.370	0.424
23	329	0.00286	0.260	0.185	0.630	0.608
24	234	0.00714	0.185	0.163	0.815	0.771
25	122	0.0114	0.0964	0.116	0.912	0.887
26	64	0.0157	0.0506	0.0664	0.962	0.953
27	23	0.0200	0.0182	0.0308	0.980	0.984
28	12	0.0243	0.00948	0.0115	0.990	0.995
29	6	0.0286	0.00474	0.00346	0.994	0.999
30	6	0.0329	0.00474	0.000842	0.999	1.00
31	1	0.0371	0.000790	0.000165	1.00	1.00
32	0	0.0414	0.000	2.61e-005	1.00	1.00
33	0	0.0457	0.000	3.33e-006	1.00	1.00
34	0	0.0500	0.000	3.43e-007	1.00	1.00

Figura 15 - Intervalli, densità di probabilità e cumulata della Normale (DAX)

2.5. DOW JONES

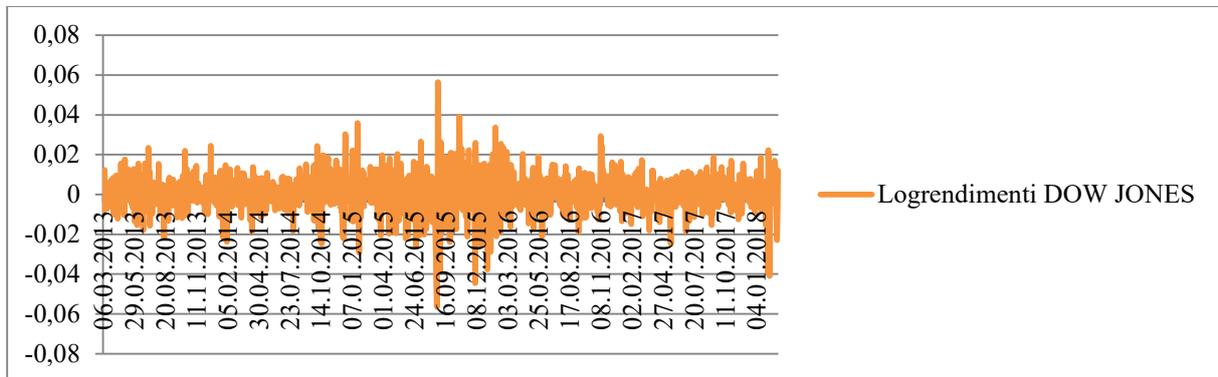


Figura 16 - I rendimenti logaritmici del DOW JONES dal 5/3/2013 al 5/3/2018

Eccezion fatta per l'ultimo trimestre del 2015 e il primo del 2016 il DOW JONES ha mantenuto dei log-rendimenti piuttosto stabili lungo l'arco temporale preso in esame. In particolare è degna di nota

Distribution Summary	
Distribution:	Normal
Expression:	NORM(0.00194, 0.0213)
Square Error:	0.006429
Chi Square Test	
Number of intervals	= 15
Degrees of freedom	= 12
Test Statistic	= 95.8
Corresponding p-value	< 0.005
Kolmogorov-Smirnov Test	
Test Statistic	= 0.0585
Corresponding p-value	< 0.01
Data Summary	
Number of Data Points	= 1222
Min Data Value	= -0.109
Max Data Value	= 0.0835
Sample Mean	= 0.00194
Sample Std Dev	= 0.0213
Histogram Summary	
Histogram Range	= -0.13 to 0.11
Number of Intervals	= 34

Figura 17 - Caratteristiche dell'istogramma e test di bontà del fitting (DOW JONES) eseguiti tramite il simulatore ARENA

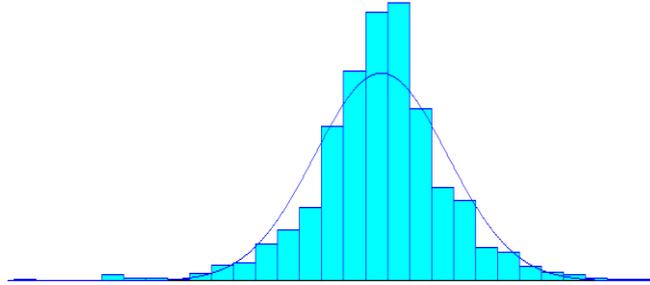
la repentina risalita dell'agosto 2015, seguita da un'altrettanto rapida discesa; in tutta probabilità si tratta di una delle tante reazioni dei mercati finanziari a seguito della

diffusione di informazioni rilevanti dal punto di vista socio-economico. La distribuzione della variabile aleatoria è di tipo Normale, nonostante la leggera asimmetria verso destra identificata dal valore negativo della skewness (-0,28974019) e la tendenza leptocurtica (indice di curtosi pari a 3,655361465) la densità di tipo gaussiano si dimostra essere la più indicata.

Function	Sq Error
Normal	0.00501
Beta	0.00542
Weibull	0.00697
Lognormal	0.0104
Erlang	0.0254
Gamma	0.0255
Triangular	0.0714
Uniform	0.107
Exponential	0.122

Figura 18 - Il ranking delle distribuzioni che meglio fittano i dati (DOW JONES) in funzione dello square error.

2.5.1. NORMALE-DOW JONES



Int. No.	No. of Data Pts.	x	Probability Density		Cumulative Distribution	
			Data	Function	Data	Function
0	0	-0.123	0.000	1.90e-009	0.000	1.90e-009
1	0	-0.116	0.000	1.31e-008	0.000	1.50e-008
2	1	-0.109	0.000818	8.09e-008	0.000818	9.58e-008
3	0	-0.102	0.000	4.48e-007	0.000818	5.44e-007
4	0	-0.0947	0.000	2.23e-006	0.000818	2.77e-006
5	0	-0.0876	0.000	9.93e-006	0.000818	1.27e-005
6	5	-0.0806	0.00409	3.97e-005	0.00491	5.24e-005
7	2	-0.0735	0.00164	0.000142	0.00655	0.000194
8	2	-0.0665	0.00164	0.000456	0.00818	0.000651
9	1	-0.0594	0.000818	0.00131	0.00900	0.00196
10	6	-0.0524	0.00491	0.00339	0.0139	0.00535
11	12	-0.0453	0.00982	0.00785	0.0237	0.0132
12	14	-0.0382	0.0115	0.0163	0.0352	0.0295
13	29	-0.0312	0.0237	0.0303	0.0589	0.0598
14	40	-0.0241	0.0327	0.0506	0.0917	0.110
15	57	-0.0171	0.0466	0.0756	0.138	0.186
16	120	-0.0100	0.0982	0.101	0.236	0.287
17	163	-0.00294	0.133	0.122	0.370	0.409
18	209	0.00412	0.171	0.132	0.541	0.541
19	216	0.0112	0.177	0.127	0.718	0.668
20	134	0.0182	0.110	0.110	0.827	0.778
21	73	0.0253	0.0597	0.0857	0.887	0.864
22	63	0.0324	0.0516	0.0597	0.939	0.924
23	26	0.0394	0.0213	0.0373	0.960	0.961
24	22	0.0465	0.0180	0.0209	0.978	0.982
25	11	0.0535	0.00900	0.0105	0.987	0.992
26	7	0.0606	0.00573	0.00473	0.993	0.997
27	5	0.0676	0.00409	0.00191	0.997	0.999
28	2	0.0747	0.00164	0.000692	0.998	1.00
29	1	0.0818	0.000818	0.000225	0.999	1.00
30	1	0.0888	0.000818	6.54e-005	1.00	1.00
31	0	0.0959	0.000	1.71e-005	1.00	1.00
32	0	0.103	0.000	3.99e-006	1.00	1.00
33	0	0.110	0.000	8.38e-007	1.00	1.00

Figura 19 - Intervalli, densità di probabilità e cumulata della Normale (DOW JONES)

2.6. FTSE 100

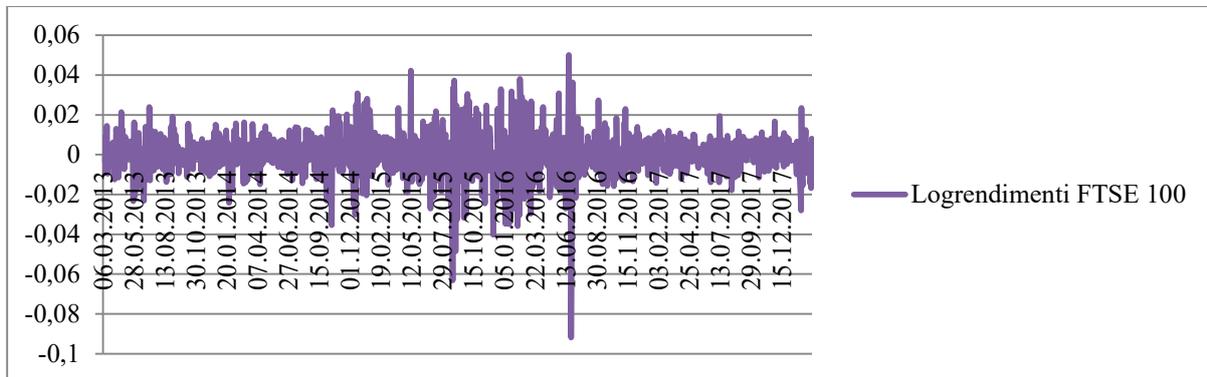


Figura 20 - I rendimenti logaritmici del FTSE 100 dal 5/3/2013 al 5/3/2018

Distribution Summary	
Distribution:	Weibull
Expression:	-0.11 + WEIB(0, 0)
Square Error:	0.009023
Chi Square Test	
Number of intervals	= 11
Degrees of freedom	= 8
Test Statistic	= 177
Corresponding p-value	< 0.005
Kolmogorov-Smirnov Test	
Test Statistic	= 0.0698
Corresponding p-value	< 0.01
Data Summary	
Number of Data Points	= 1264
Min Data Value	= -0.0918
Max Data Value	= 0.0501
Sample Mean	= 5.44e-005
Sample Std Dev	= 0.0107
Histogram Summary	
Histogram Range	= -0.11 to 0.07
Number of Intervals	= 35

Figura 22 - Caratteristiche dell'istogramma e test di bontà del fitting (FTSE 100) eseguiti tramite il simulatore ARENA

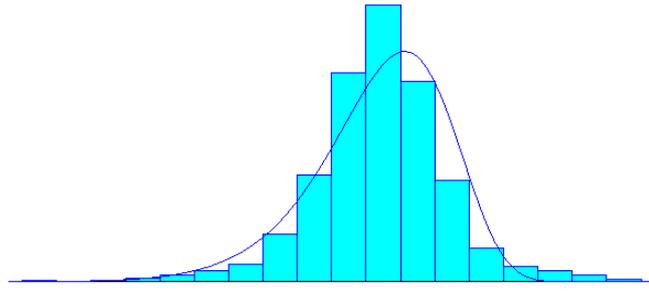
Tra i principali indici azionari del London Stock Exchange, il FTSE 100 ha risentito pesantemente delle turbolenze caratterizzanti il periodo a cavallo tra il 2015 ed il 2016. La volatilità dei rendimenti logaritmici ha subito un deciso incremento soprattutto nel giugno 2016, determinando un'esplosione della rischiosità degli investimenti sull'indice londinese; lo scorso anno il FTSE 100 è stato invece protagonista di una netta stabilizzazione che probabilmente inizierà ad incresparsi in concomitanza della Brexit. I dati estrapolati si distribuiscono secondo una Weibull di parametri nulli (costante pari a -0,11). La curtosi è particolarmente accentuata e l'asse di simmetria

Function	Sq Error
Weibull	0.00902
Normal	0.00937
Beta	0.00968
Lognormal	0.0179
Erlang	0.0634
Gamma	0.0635
Triangular	0.1
Uniform	0.138
Exponential	0.154

Figura 21 - Il ranking delle distribuzioni che meglio fittano i dati (FTSE 100) in funzione dello square error

è spostato verso destra rispetto al valor medio; l'alternativa second best è rappresentata dall'approssimazione offerta dalla Normale.

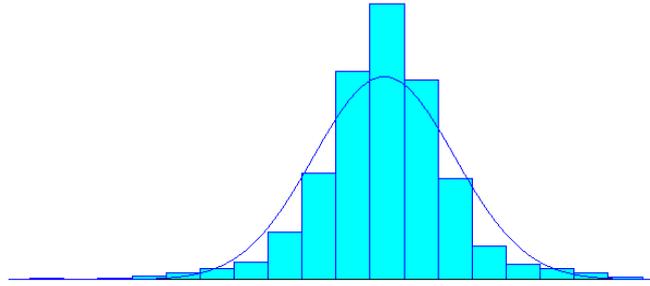
2.6.1. WEIBULL-FTSE 100



Int. No.	No. of Data Pts.	x	Probability Density		Cumulative Distribution	
			Data	Function	Data	Function
0	0	-0.105	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0	-0.0997	0.000	1.90e-014	0.000	1.90e-014
2	0	-0.0946	0.000	3.86e-012	0.000	3.88e-012
3	1	-0.0894	0.000791	1.65e-010	0.000791	1.69e-010
4	0	-0.0843	0.000	2.98e-009	0.000791	3.15e-009
5	0	-0.0791	0.000	3.13e-008	0.000791	3.45e-008
6	0	-0.0740	0.000	2.26e-007	0.000791	2.60e-007
7	0	-0.0689	0.000	1.24e-006	0.000791	1.50e-006
8	0	-0.0637	0.000	5.53e-006	0.000791	7.03e-006
9	1	-0.0586	0.000791	2.10e-005	0.00158	2.80e-005
10	0	-0.0534	0.000	6.97e-005	0.00158	9.77e-005
11	2	-0.0483	0.00158	0.000208	0.00316	0.000306
12	0	-0.0431	0.000	0.000568	0.00316	0.000874
13	2	-0.0380	0.00158	0.00143	0.00475	0.00231
14	4	-0.0329	0.00316	0.00339	0.00791	0.00569
15	8	-0.0277	0.00633	0.00753	0.0142	0.0132
16	14	-0.0226	0.0111	0.0158	0.0253	0.0291
17	21	-0.0174	0.0166	0.0314	0.0419	0.0605
18	57	-0.0123	0.0451	0.0586	0.0870	0.119
19	128	-0.00714	0.101	0.101	0.188	0.220
20	250	-0.00200	0.198	0.156	0.386	0.376
21	330	0.00314	0.261	0.204	0.647	0.580
22	239	0.00829	0.189	0.209	0.836	0.789
23	121	0.0134	0.0957	0.145	0.932	0.934
24	41	0.0186	0.0324	0.0565	0.964	0.990
25	18	0.0237	0.0142	0.00923	0.979	1.00
26	14	0.0289	0.0111	0.000423	0.990	1.00
27	8	0.0340	0.00633	2.95e-006	0.996	1.00
28	3	0.0391	0.00237	1.23e-009	0.998	1.00
29	1	0.0443	0.000791	7.66e-015	0.999	1.00
30	0	0.0494	0.000	0.000	0.999	1.00
31	1	0.0546	0.000791	0.000	1.00	1.00
32	0	0.0597	0.000	0.000	1.00	1.00
33	0	0.0649	0.000	0.000	1.00	1.00
34	0	0.0700	0.000	0.000	1.00	1.00

Figura 23 - Intervalli, densità di probabilità e cumulata della Weibull (FTSE 100)

2.6.2. NORMALE-FTSE 100



Int. No.	No. of Data Pts.	x	Probability Density		Cumulative Distribution	
			Data	Function	Data	Function
0	0	-0.105	0.000	3.63e-023	0.000	3.63e-023
1	0	-0.0997	0.000	3.91e-021	0.000	3.95e-021
2	0	-0.0946	0.000	3.35e-019	0.000	3.39e-019
3	1	-0.0894	0.000791	2.28e-017	0.000791	2.31e-017
4	0	-0.0843	0.000	1.23e-015	0.000791	1.25e-015
5	0	-0.0791	0.000	5.27e-014	0.000791	5.39e-014
6	0	-0.0740	0.000	1.79e-012	0.000791	1.85e-012
7	0	-0.0689	0.000	4.85e-011	0.000791	5.04e-011
8	0	-0.0637	0.000	1.04e-009	0.000791	1.09e-009
9	1	-0.0586	0.000791	1.78e-008	0.00158	1.89e-008
10	0	-0.0534	0.000	2.42e-007	0.00158	2.61e-007
11	2	-0.0483	0.00158	2.61e-006	0.00316	2.87e-006
12	0	-0.0431	0.000	2.24e-005	0.00316	2.53e-005
13	2	-0.0380	0.00158	0.000153	0.00475	0.000178
14	4	-0.0329	0.00316	0.000829	0.00791	0.00101
15	8	-0.0277	0.00633	0.00358	0.0142	0.00459
16	14	-0.0226	0.0111	0.0123	0.0253	0.0169
17	21	-0.0174	0.0166	0.0336	0.0419	0.0505
18	57	-0.0123	0.0451	0.0730	0.0870	0.123
19	128	-0.00714	0.101	0.126	0.188	0.250
20	250	-0.00200	0.198	0.174	0.386	0.424
21	330	0.00314	0.261	0.190	0.647	0.614
22	239	0.00829	0.189	0.166	0.836	0.780
23	121	0.0134	0.0957	0.115	0.932	0.895
24	41	0.0186	0.0324	0.0636	0.964	0.959
25	18	0.0237	0.0142	0.0279	0.979	0.987
26	14	0.0289	0.0111	0.00977	0.990	0.997
27	8	0.0340	0.00633	0.00272	0.996	0.999
28	3	0.0391	0.00237	0.000601	0.998	1.00
29	1	0.0443	0.000791	0.000106	0.999	1.00
30	0	0.0494	0.000	1.48e-005	0.999	1.00
31	1	0.0546	0.000791	1.65e-006	1.00	1.00
32	0	0.0597	0.000	1.46e-007	1.00	1.00
33	0	0.0649	0.000	1.03e-008	1.00	1.00
34	0	0.0700	0.000	5.74e-010	1.00	1.00

Figura 24 - Intervalli, densità di probabilità e cumulata della Normale (FTSE 100)

2.7. FTSE MIB

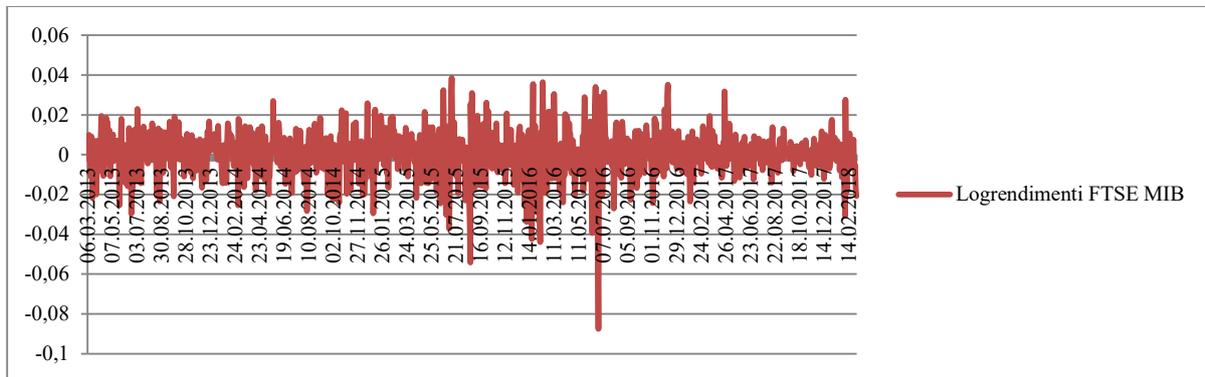


Figura 25 - I rendimenti logaritmici del FTSE MIB dal 5/3/2013 al 5/3/2018

Distribution Summary	
Distribution:	Weibull
Expression:	-0.11 + WEIB(0.115, 12.9)
Square Error:	0.007472
Chi Square Test	
Number of intervals	= 11
Degrees of freedom	= 8
Test Statistic	= 80.8
Corresponding p-value	< 0.005
Kolmogorov-Smirnov Test	
Test Statistic	= 0.0725
Corresponding p-value	< 0.01
Data Summary	
Number of Data Points	= 1285
Min Data Value	= -0.0876
Max Data Value	= 0.0386
Sample Mean	= 0.000244
Sample Std Dev	= 0.0107
Histogram Summary	
Histogram Range	= -0.11 to 0.06
Number of Intervals	= 35

Figura 27 - Caratteristiche dell'istogramma e test di bontà del fitting (FTSE MIB) eseguiti tramite il simulatore ARENA

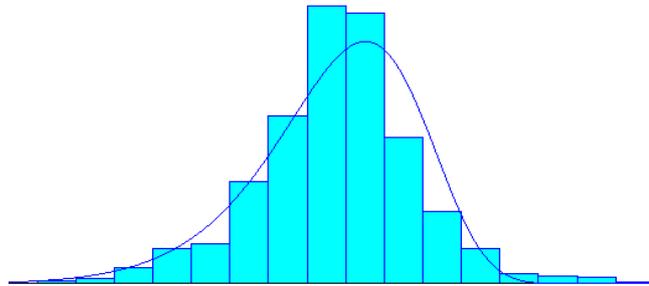
variabile casuale in oggetto è la Weibull; il risultato è coerente con i valori campionari di asimmetria e curtosi, i quali indicano una distribuzione sbilanciata a destra e con code spesse (rispettivamente -0,75936283 e 5,277389669). La curva può essere approssimata sia da una Beta e, all'occorrenza, da una Normale; le distorsioni indotte non risultano infatti significative, essendo la differenza tra gli errori quadratici di pochi punti percentuali

Osservando il grafico sull'andamento dei log-rendimenti del FTSE MIB nel quinquennio 2013-2018 ci si accorge subito di quanto le fluttuazioni siano relativamente contenute, in particolar modo nelle fasce iniziale e finale della serie storica d'interesse. Anche nei periodi di maggior fragilità dei mercati i valori presentano pochi massimi e minimi che sfondano il +2% segno tangibile che, pur non essendo protagonista di performance eccezionali, il trend si è mantenuto piuttosto equilibrato. Nota negativa rilevante è quella relativa al tracollo avvenuto tra il giugno e il luglio del 2016, in cui si è sfiorata una perdita del -9%. Anche in questo caso, come per il CAC 40, la densità di probabilità che meglio descrive l'andamento della

Function	Sq Error
Weibull	0.00747
Beta	0.0082
Normal	0.00836
Lognormal	0.015
Erlang	0.0556
Gamma	0.0557
Triangular	0.0877
Uniform	0.123
Exponential	0.14

Figura 26 - Il ranking delle distribuzioni che meglio fittano i dati (FTSE MIB) in funzione dello square error

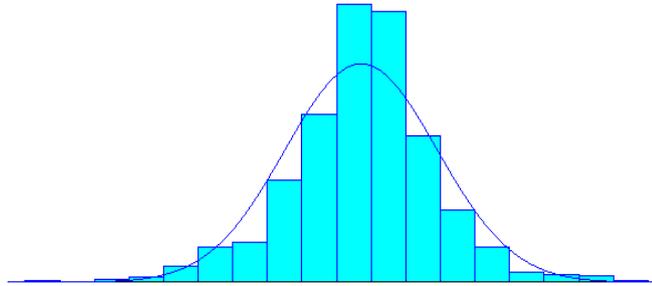
2.7.1. WEIBULL-FTSE MIB



Int. No.	No. of Data Pts.	x	Probability Density		Cumulative Distribution	
			Data	Function	Data	Function
0	0	-0.105	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0	-0.100	0.000	1.44e-014	0.000	1.44e-014
2	0	-0.0954	0.000	2.69e-012	0.000	2.70e-012
3	0	-0.0906	0.000	1.08e-010	0.000	1.11e-010
4	1	-0.0857	0.000778	1.86e-009	0.000778	1.97e-009
5	0	-0.0809	0.000	1.87e-008	0.000778	2.07e-008
6	0	-0.0760	0.000	1.30e-007	0.000778	1.51e-007
7	0	-0.0711	0.000	6.96e-007	0.000778	8.47e-007
8	0	-0.0663	0.000	3.02e-006	0.000778	3.87e-006
9	0	-0.0614	0.000	1.12e-005	0.000778	1.51e-005
10	0	-0.0566	0.000	3.65e-005	0.000778	5.15e-005
11	1	-0.0517	0.000778	0.000107	0.00156	0.000158
12	1	-0.0469	0.000778	0.000286	0.00233	0.000445
13	2	-0.0420	0.00156	0.000712	0.00389	0.00116
14	1	-0.0371	0.000778	0.00166	0.00467	0.00281
15	3	-0.0323	0.00233	0.00365	0.00700	0.00646
16	6	-0.0274	0.00467	0.00761	0.0117	0.0141
17	17	-0.0226	0.0132	0.0151	0.0249	0.0292
18	38	-0.0177	0.0296	0.0286	0.0545	0.0578
19	43	-0.0129	0.0335	0.0512	0.0879	0.109
20	109	-0.00800	0.0848	0.0857	0.173	0.195
21	179	-0.00314	0.139	0.131	0.312	0.326
22	296	0.00171	0.230	0.177	0.542	0.503
23	289	0.00657	0.225	0.199	0.767	0.703
24	156	0.0114	0.121	0.169	0.889	0.872
25	77	0.0163	0.0599	0.0952	0.949	0.967
26	38	0.0211	0.0296	0.0293	0.978	0.996
27	11	0.0260	0.00856	0.00378	0.987	1.00
28	8	0.0309	0.00623	0.000141	0.993	1.00
29	7	0.0357	0.00545	8.89e-007	0.998	1.00
30	2	0.0406	0.00156	4.26e-010	1.00	1.00
31	0	0.0454	0.000	5.00e-015	1.00	1.00
32	0	0.0503	0.000	0.000	1.00	1.00
33	0	0.0551	0.000	0.000	1.00	1.00
34	0	0.0600	0.000	0.000	1.00	1.00

Figura 28 - Intervalli, densità di probabilità e cumulata della Weibull (FTSE MIB)

2.7.2. NORMALE-FTSE MIB



Int. No.	No. of Data Pts.	x	Probability Density		Cumulative Distribution	
			Data	Function	Data	Function
0	0	-0.105	0.000	2.86e-023	0.000	2.86e-023
1	0	-0.100	0.000	2.39e-021	0.000	2.42e-021
2	0	-0.0954	0.000	1.63e-019	0.000	1.66e-019
3	0	-0.0906	0.000	9.07e-018	0.000	9.24e-018
4	1	-0.0857	0.000778	4.11e-016	0.000778	4.20e-016
5	0	-0.0809	0.000	1.52e-014	0.000778	1.56e-014
6	0	-0.0760	0.000	4.55e-013	0.000778	4.71e-013
7	0	-0.0711	0.000	1.12e-011	0.000778	1.16e-011
8	0	-0.0663	0.000	2.23e-010	0.000778	2.34e-010
9	0	-0.0614	0.000	3.63e-009	0.000778	3.86e-009
10	0	-0.0566	0.000	4.81e-008	0.000778	5.20e-008
11	1	-0.0517	0.000778	5.21e-007	0.00156	5.73e-007
12	1	-0.0469	0.000778	4.59e-006	0.00233	5.17e-006
13	2	-0.0420	0.00156	3.31e-005	0.00389	3.82e-005
14	1	-0.0371	0.000778	0.000194	0.00467	0.000232
15	3	-0.0323	0.00233	0.000928	0.00700	0.00116
16	6	-0.0274	0.00467	0.00362	0.0117	0.00479
17	17	-0.0226	0.0132	0.0115	0.0249	0.0163
18	38	-0.0177	0.0296	0.0300	0.0545	0.0463
19	43	-0.0129	0.0335	0.0636	0.0879	0.110
20	109	-0.00800	0.0848	0.110	0.173	0.220
21	179	-0.00314	0.139	0.155	0.312	0.376
22	296	0.00171	0.230	0.179	0.542	0.555
23	289	0.00657	0.225	0.168	0.767	0.723
24	156	0.0114	0.121	0.129	0.889	0.852
25	77	0.0163	0.0599	0.0810	0.949	0.933
26	38	0.0211	0.0296	0.0414	0.978	0.975
27	11	0.0260	0.00856	0.0172	0.987	0.992
28	8	0.0309	0.00623	0.00587	0.993	0.998
29	7	0.0357	0.00545	0.00163	0.998	1.00
30	2	0.0406	0.00156	0.000369	1.00	1.00
31	0	0.0454	0.000	6.81e-005	1.00	1.00
32	0	0.0503	0.000	1.03e-005	1.00	1.00
33	0	0.0551	0.000	1.26e-006	1.00	1.00
34	0	0.0600	0.000	1.26e-007	1.00	1.00

Figura 29 - Intervalli, densità di probabilità e cumulata della Normale (FTSE MIB)

2.8. HANG SENG

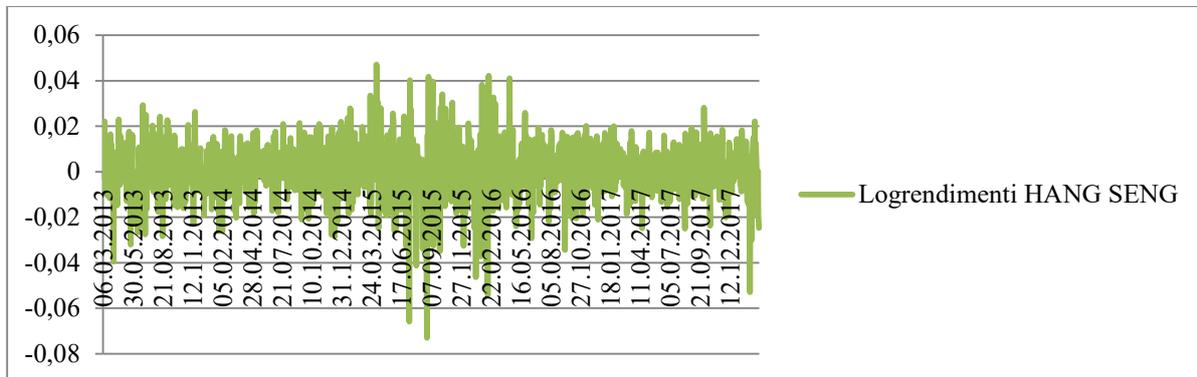


Figura 30 - I rendimenti logaritmici del HANG SENG dal 5/3/2013 al 5/3/2018

Come molti degli indici di provenienza asiatica l'HANG SENG, espressione dell'andamento dei principali titoli della "Perla dell'Oriente", ha manifestato significative oscillazioni nel biennio

Distribution Summary	
Distribution:	Beta
Expression:	$-0.09 + 0.15 * \text{BETA}(0, 0)$
Square Error:	0.003357
Chi Square Test	
Number of intervals	= 14
Degrees of freedom	= 11
Test Statistic	= 76.6
Corresponding p-value	< 0.005
Kolmogorov-Smirnov Test	
Test Statistic	= 0.075
Corresponding p-value	< 0.01
Data Summary	
Number of Data Points	= 1231
Min Data Value	= -0.0731
Max Data Value	= 0.0471
Sample Mean	= 0.000266
Sample Std Dev	= 0.0123
Histogram Summary	
Histogram Range	= -0.09 to 0.06
Number of Intervals	= 35

Figura 31 - Caratteristiche dell'istogramma e test di bontà del fitting (HANG SENG) eseguiti tramite il simulatore ARENA

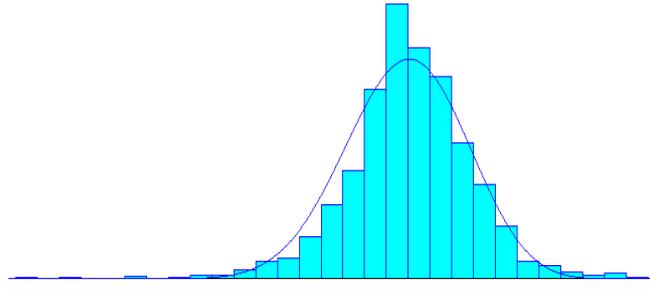
2015-2016; i minimi dei logrendimenti hanno sfiorato il tetto del -8%. Dopo una fase di riassetto che ha interessato il secondo e il terzo trimestre del 2016 il trend si è poi stabilizzato

nel corso 2017, con accenni di turbolenze riguardanti prevalentemente la situazione odierna. Sebbene sia la Beta la densità più appropriata (in termini di errore quadratico) all' interpolazione delle frequenze, la Normale può comunque essere utilizzata tenendo debitamente conto di una lieve skewness negativa (-0,40232082) e di una tendenza leptocurtica (2,844624927).

Function	Sq Error
Beta	0.00336
Normal	0.00377
Weibull	0.00453
Lognormal	0.0082
Erlang	0.0198
Gamma	0.0199
Triangular	0.0647
Uniform	0.0831
Exponential	0.0993

Figura 32 - Il ranking delle distribuzioni che meglio fittano i dati (HANG SENG) in funzione dello square error

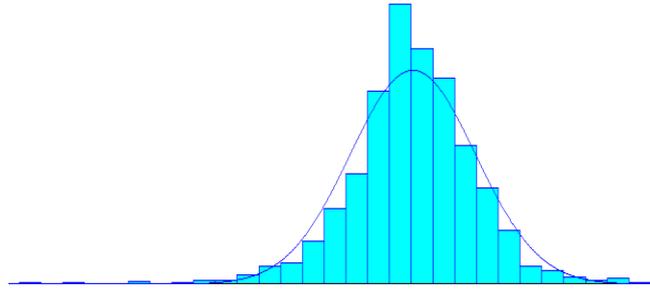
2.8.1. BETA-HANG SENG



Int. No.	No. of Data Pts.	x	Probability Density		Cumulative Distribution	
			Data	Function	Data	Function
0	0	-0.0857	0.000	4.23e-026	0.000	4.23e-026
1	0	-0.0814	0.000	1.96e-019	0.000	1.96e-019
2	0	-0.0771	0.000	1.30e-015	0.000	1.30e-015
3	1	-0.0729	0.000812	5.84e-013	0.000812	5.86e-013
4	0	-0.0686	0.000	5.93e-011	0.000812	5.99e-011
5	1	-0.0643	0.000812	2.32e-009	0.00162	2.38e-009
6	0	-0.0600	0.000	4.69e-008	0.00162	4.93e-008
7	0	-0.0557	0.000	5.79e-007	0.00162	6.28e-007
8	2	-0.0514	0.00162	4.87e-006	0.00325	5.50e-006
9	0	-0.0471	0.000	3.02e-005	0.00325	3.57e-005
10	1	-0.0429	0.000812	0.000145	0.00406	0.000181
11	3	-0.0386	0.00244	0.000562	0.00650	0.000743
12	3	-0.0343	0.00244	0.00181	0.00894	0.00255
13	7	-0.0300	0.00569	0.00494	0.0146	0.00749
14	14	-0.0257	0.0114	0.0116	0.0260	0.0191
15	17	-0.0214	0.0138	0.0239	0.0398	0.0430
16	34	-0.0171	0.0276	0.0432	0.0674	0.0862
17	60	-0.0129	0.0487	0.0693	0.116	0.156
18	88	-0.00857	0.0715	0.0989	0.188	0.254
19	154	-0.00429	0.125	0.126	0.313	0.380
20	223	-5.20e-018	0.181	0.142	0.494	0.522
21	188	0.00429	0.153	0.142	0.647	0.664
22	164	0.00857	0.133	0.126	0.780	0.790
23	111	0.0129	0.0902	0.0975	0.870	0.888
24	77	0.0171	0.0626	0.0651	0.933	0.953
25	43	0.0214	0.0349	0.0369	0.968	0.990
26	14	0.0257	0.0114	0.0173	0.979	1.01
27	11	0.0300	0.00894	0.00645	0.988	1.01
28	6	0.0343	0.00487	0.00183	0.993	1.02
29	3	0.0386	0.00244	0.000365	0.995	1.02
30	5	0.0429	0.00406	4.54e-005	0.999	1.02
31	1	0.0471	0.000812	2.89e-006	1.00	1.02
32	0	0.0514	0.000	6.55e-008	1.00	1.02
33	0	0.0557	0.000	2.33e-010	1.00	1.02
34	0	0.0600	0.000	9.55e-015	1.00	1.02

Figura 33 - Intervalli, densità di probabilità e cumulata della Beta (HANG SENG)

2.8.2. NORMALE-HANG SENG



Int. No.	No. of Data Pts.	x	Probability Density		Cumulative Distribution	
			Data	Function	Data	Function
0	0	-0.0857	0.000	1.45e-012	0.000	1.45e-012
1	0	-0.0814	0.000	1.60e-011	0.000	1.74e-011
2	0	-0.0771	0.000	1.56e-010	0.000	1.74e-010
3	1	-0.0729	0.000812	1.35e-009	0.000812	1.53e-009
4	0	-0.0686	0.000	1.04e-008	0.000812	1.19e-008
5	1	-0.0643	0.000812	7.12e-008	0.00162	8.31e-008
6	0	-0.0600	0.000	4.31e-007	0.00162	5.14e-007
7	0	-0.0557	0.000	2.32e-006	0.00162	2.83e-006
8	2	-0.0514	0.00162	1.10e-005	0.00325	1.39e-005
9	0	-0.0471	0.000	4.67e-005	0.00325	6.06e-005
10	1	-0.0429	0.000812	0.000175	0.00406	0.000236
11	3	-0.0386	0.00244	0.000584	0.00650	0.000820
12	3	-0.0343	0.00244	0.00172	0.00894	0.00254
13	7	-0.0300	0.00569	0.00452	0.0146	0.00707
14	14	-0.0257	0.0114	0.0105	0.0260	0.0176
15	17	-0.0214	0.0138	0.0217	0.0398	0.0393
16	34	-0.0171	0.0276	0.0398	0.0674	0.0791
17	60	-0.0129	0.0487	0.0646	0.116	0.144
18	88	-0.00857	0.0715	0.0932	0.188	0.237
19	154	-0.00429	0.125	0.119	0.313	0.356
20	223	-5.20e-018	0.181	0.135	0.494	0.491
21	188	0.00429	0.153	0.136	0.647	0.628
22	164	0.00857	0.133	0.122	0.780	0.750
23	111	0.0129	0.0902	0.0967	0.870	0.846
24	77	0.0171	0.0626	0.0681	0.933	0.914
25	43	0.0214	0.0349	0.0425	0.968	0.957
26	14	0.0257	0.0114	0.0236	0.979	0.980
27	11	0.0300	0.00894	0.0116	0.988	0.992
28	6	0.0343	0.00487	0.00505	0.993	0.997
29	3	0.0386	0.00244	0.00196	0.995	0.999
30	5	0.0429	0.00406	0.000672	0.999	1.00
31	1	0.0471	0.000812	0.000205	1.00	1.00
32	0	0.0514	0.000	5.54e-005	1.00	1.00
33	0	0.0557	0.000	1.33e-005	1.00	1.00
34	0	0.0600	0.000	2.83e-006	1.00	1.00

Figura 34 - Intervalli, densità di probabilità e cumulata della Normale (HANG SENG)

2.9. IBEX 35

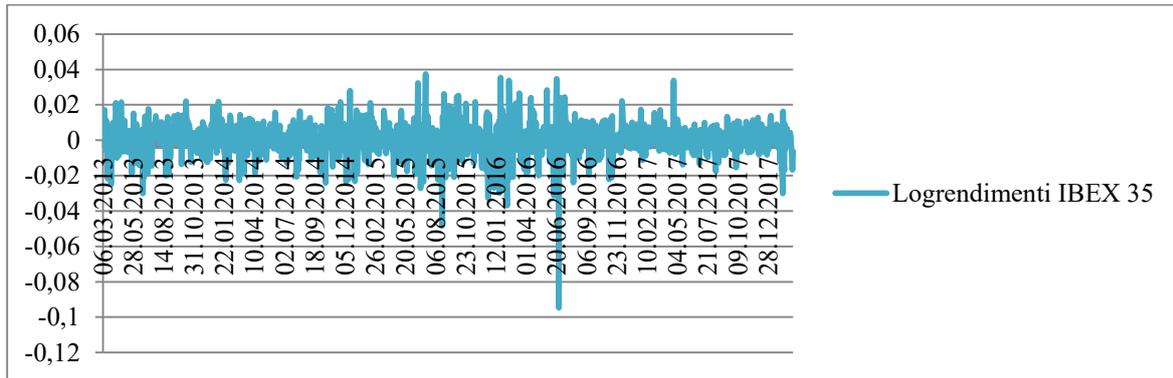


Figura 35 - I rendimenti logaritmici del IBEX 35 dal 5/3/2013 al 5/3/2018

L'indice spagnolo IBEX 35 ha vissuto un quinquennio decisamente stabile all'insegna di profitti modesti (per quanto concerne le fluttuazioni favorevoli) e di perdite contenute in situazioni di variazioni negative. Il grafico dei log-rendimenti è fortemente indicativo del trend stazionario degli stessi, anche nei

Distribution Summary	
Distribution:	Beta
Expression:	$-0.11 + 0.17 * \text{BETA}(0, 0)$
Square Error:	0.006241
Chi Square Test	
Number of intervals	= 11
Degrees of freedom	= 8
Test Statistic	= 73.4
Corresponding p-value	< 0.005
Kolmogorov-Smirnov Test	
Test Statistic	= 0.064
Corresponding p-value	< 0.01
Data Summary	
Number of Data Points	= 1279
Min Data Value	= -0.0946
Max Data Value	= 0.0375
Sample Mean	= 0.000102
Sample Std Dev	= 0.00982
Histogram Summary	
Histogram Range	= -0.11 to 0.06
Number of Intervals	= 35

Figura 36 - Caratteristiche dell'istogramma e test di bontà del fitting (IBEX 35) eseguiti tramite il simulatore ARENA

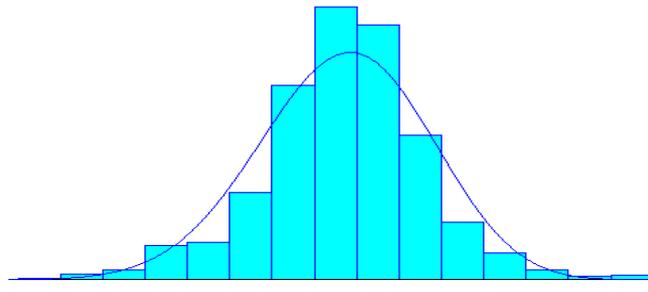
momenti di incertezza dei maggiori mercati finanziari europei; fa eccezione il piccolo

in concomitanza del bimestre giugno-luglio 2016. I dati storici vengono ragionevolmente descritti da una distribuzione Beta con skewness negativa (sbilanciamento verso destra) e fat tails (l'indice di curtosi è pari a 7,851149584). Anche in questo caso la seconda migliore alternativa è costituita dalla Normale con il compromesso di commettere un errore relativamente piccolo.

Function	Sq Error
Beta	0.00624
Normal	0.00636
Weibull	0.00788
Lognormal	0.0151
Erlang	0.0628
Gamma	0.063
Triangular	0.0963
Uniform	0.133
Exponential	0.15

Figura 37 - Il ranking delle distribuzioni che meglio fittano i dati (IBEX 35) in funzione dello square error

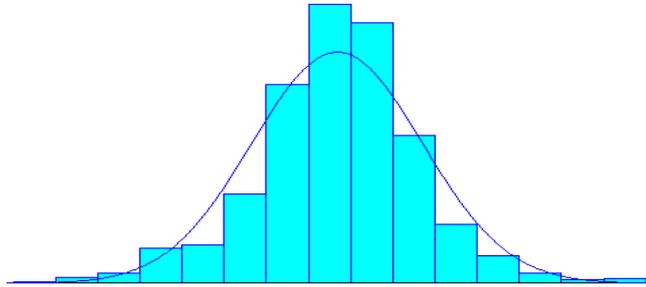
2.9.1. BETA-IBEX 35



Int. No.	No. of Data Pts.	x	Probability Density		Cumulative Distribution	
			Data	Function	Data	Function
0	0	-0.105	0.000	8.68e-051	0.000	8.68e-051
1	0	-0.100	0.000	5.68e-038	0.000	5.68e-038
2	0	-0.0954	0.000	1.37e-030	0.000	1.37e-030
3	1	-0.0906	0.000782	1.91e-025	0.000782	1.91e-025
4	0	-0.0857	0.000	1.56e-021	0.000782	1.56e-021
5	0	-0.0809	0.000	2.10e-018	0.000782	2.10e-018
6	0	-0.0760	0.000	8.04e-016	0.000782	8.06e-016
7	0	-0.0711	0.000	1.22e-013	0.000782	1.23e-013
8	0	-0.0663	0.000	8.99e-012	0.000782	9.11e-012
9	0	-0.0614	0.000	3.73e-010	0.000782	3.82e-010
10	0	-0.0566	0.000	9.64e-009	0.000782	1.00e-008
11	0	-0.0517	0.000	1.67e-007	0.000782	1.77e-007
12	1	-0.0469	0.000782	2.03e-006	0.00156	2.21e-006
13	0	-0.0420	0.000	1.83e-005	0.00156	2.05e-005
14	0	-0.0371	0.000	0.000125	0.00156	0.000146
15	2	-0.0323	0.00156	0.000667	0.00313	0.000812
16	6	-0.0274	0.00469	0.00282	0.00782	0.00363
17	11	-0.0226	0.00860	0.00958	0.0164	0.0132
18	38	-0.0177	0.0297	0.0264	0.0461	0.0396
19	42	-0.0129	0.0328	0.0592	0.0790	0.0988
20	97	-0.00800	0.0758	0.108	0.155	0.207
21	217	-0.00314	0.170	0.161	0.324	0.369
22	304	0.00171	0.238	0.194	0.562	0.563
23	284	0.00657	0.222	0.186	0.784	0.749
24	161	0.0114	0.126	0.140	0.910	0.889
25	64	0.0163	0.0500	0.0801	0.960	0.969
26	30	0.0211	0.0235	0.0337	0.984	1.00
27	11	0.0260	0.00860	0.00987	0.992	1.01
28	4	0.0309	0.00313	0.00187	0.995	1.01
29	5	0.0357	0.00391	0.000204	0.999	1.01
30	1	0.0406	0.000782	1.07e-005	1.00	1.01
31	0	0.0454	0.000	2.04e-007	1.00	1.01
32	0	0.0503	0.000	7.97e-010	1.00	1.01
33	0	0.0551	0.000	1.84e-013	1.00	1.01
34	0	0.0600	0.000	4.49e-020	1.00	1.01

Figura 38 - Intervalli, densità di probabilità e cumulata della Beta (IBEX 35)

2.9.2. NORMALE-IBEX 35



Int. No.	No. of Data Pts.	x	Probability Density		Cumulative Distribution	
			Data	Function	Data	Function
0	0	-0.105	0.000	4.16e-027	0.000	4.16e-027
1	0	-0.100	0.000	7.73e-025	0.000	7.77e-025
2	0	-0.0954	0.000	1.13e-022	0.000	1.13e-022
3	1	-0.0906	0.000782	1.29e-020	0.000782	1.30e-020
4	0	-0.0857	0.000	1.16e-018	0.000782	1.17e-018
5	0	-0.0809	0.000	8.14e-017	0.000782	8.26e-017
6	0	-0.0760	0.000	4.50e-015	0.000782	4.58e-015
7	0	-0.0711	0.000	1.95e-013	0.000782	2.00e-013
8	0	-0.0663	0.000	6.65e-012	0.000782	6.85e-012
9	0	-0.0614	0.000	1.78e-010	0.000782	1.85e-010
10	0	-0.0566	0.000	3.74e-009	0.000782	3.92e-009
11	0	-0.0517	0.000	6.17e-008	0.000782	6.56e-008
12	1	-0.0469	0.000782	8.00e-007	0.00156	8.66e-007
13	0	-0.0420	0.000	8.16e-006	0.00156	9.02e-006
14	0	-0.0371	0.000	6.54e-005	0.00156	7.44e-005
15	2	-0.0323	0.00156	0.000412	0.00313	0.000486
16	6	-0.0274	0.00469	0.00204	0.00782	0.00253
17	11	-0.0226	0.00860	0.00794	0.0164	0.0105
18	38	-0.0177	0.0297	0.0243	0.0461	0.0348
19	42	-0.0129	0.0328	0.0586	0.0790	0.0934
20	97	-0.00800	0.0758	0.111	0.155	0.205
21	217	-0.00314	0.170	0.166	0.324	0.371
22	304	0.00171	0.238	0.195	0.562	0.565
23	284	0.00657	0.222	0.180	0.784	0.745
24	161	0.0114	0.126	0.131	0.910	0.876
25	64	0.0163	0.0500	0.0747	0.960	0.950
26	30	0.0211	0.0235	0.0336	0.984	0.984
27	11	0.0260	0.00860	0.0119	0.992	0.996
28	4	0.0309	0.00313	0.00331	0.995	0.999
29	5	0.0357	0.00391	0.000724	0.999	1.00
30	1	0.0406	0.000782	0.000125	1.00	1.00
31	0	0.0454	0.000	1.69e-005	1.00	1.00
32	0	0.0503	0.000	1.79e-006	1.00	1.00
33	0	0.0551	0.000	1.50e-007	1.00	1.00
34	0	0.0600	0.000	9.86e-009	1.00	1.00

Figura 39 - Intervalli, densità di probabilità e cumulata della Normale (IBEX 35)

2.10. IBOVESPA

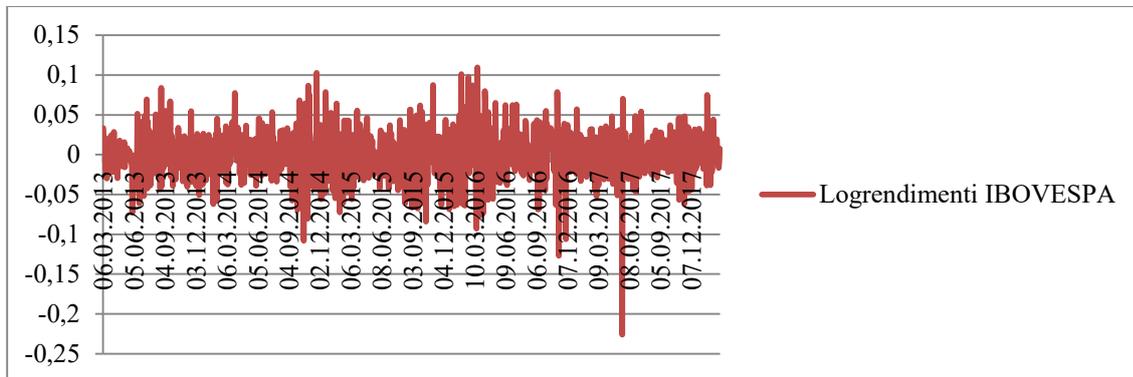


Figura 40 - I rendimenti logaritmici dell'IBOVESPA dal 5/3/2013 al 5/3/2018

L'andamento dell'indice brasiliano è piuttosto variabile nell'arco dei cinque anni presi in esame; dalla stazionarietà del biennio 2013-2014 si passa alle maggiori turbolenze del 2015-2016 e, nel 2017, al ritorno di una situazione molto simile a quella di partenza.

Distribution Summary	
Distribution:	Normal
Expression:	NORM(0, 0)
Square Error:	0.002899
Chi Square Test	
Number of intervals	= 13
Degrees of freedom	= 10
Test Statistic	= 50.4
Corresponding p-value	< 0.005
Kolmogorov-Smirnov Test	
Test Statistic	= 0.0407
Corresponding p-value	= 0.0344
Data Summary	
Number of Data Points	= 1235
Min Data Value	= -0.226
Max Data Value	= 0.11
Sample Mean	= -0.000377
Sample Std Dev	= 0.0286
Histogram Summary	
Histogram Range	= -0.26 to 0.15
Number of Intervals	= 35

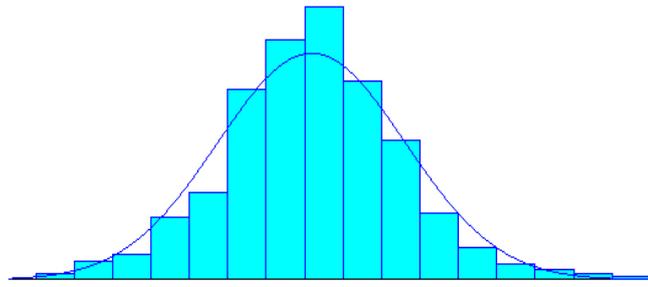
Figura 41 - Caratteristiche dell'istogramma e test di bontà del fitting (IBOVESPA) eseguiti tramite il simulatore ARENA

Mentre le performance migliori del quinquennio sono relativamente concentrate nella parte centrale del grafico (ultimo trimestre del 2014 e primo del 2016), il minimo si registra in concomitanza del maggio 2017. I rendimenti logaritmici dell'IBOVESPA seguono una distribuzione Normale centrata in zero; malgrado l'asimmetria negativa e la curtosi la soluzione è quella che garantisce il minor errore quadratico tra tutte quelle possibili.

Function	Sq Error
Normal	0.0029
Beta	0.00355
Weibull	0.00714
Lognormal	0.00743
Erlang	0.0334
Gamma	0.0335
Triangular	0.0646
Uniform	0.0996
Exponential	0.116

Figura 42 - Il ranking delle distribuzioni che meglio fittano i dati (IBOVESPA) in funzione dello square error

2.10.1. NORMALE-IBOVESPA



Int. No.	No. of Data Pts.	x	Probability Density		Cumulative Distribution	
			Data	Function	Data	Function
0	0	-0.248	0.000	1.86e-018	0.000	1.86e-018
1	0	-0.237	0.000	6.29e-017	0.000	6.48e-017
2	1	-0.225	0.000810	1.80e-015	0.000810	1.87e-015
3	0	-0.213	0.000	4.37e-014	0.000810	4.55e-014
4	0	-0.201	0.000	8.96e-013	0.000810	9.42e-013
5	0	-0.190	0.000	1.56e-011	0.000810	1.65e-011
6	0	-0.178	0.000	2.29e-010	0.000810	2.45e-010
7	0	-0.166	0.000	2.85e-009	0.000810	3.09e-009
8	0	-0.155	0.000	3.00e-008	0.000810	3.31e-008
9	0	-0.143	0.000	2.67e-007	0.000810	3.00e-007
10	0	-0.131	0.000	2.02e-006	0.000810	2.32e-006
11	1	-0.119	0.000810	1.29e-005	0.00162	1.52e-005
12	1	-0.108	0.000810	6.97e-005	0.00243	8.49e-005
13	1	-0.0960	0.000810	0.000320	0.00324	0.000405
14	1	-0.0843	0.000810	0.00124	0.00405	0.00164
15	6	-0.0726	0.00486	0.00408	0.00891	0.00572
16	17	-0.0609	0.0138	0.0113	0.0227	0.0171
17	23	-0.0491	0.0186	0.0267	0.0413	0.0438
18	56	-0.0374	0.0453	0.0534	0.0866	0.0972
19	78	-0.0257	0.0632	0.0902	0.150	0.187
20	170	-0.0140	0.138	0.129	0.287	0.317
21	214	-0.00229	0.173	0.157	0.461	0.473
22	243	0.00943	0.197	0.161	0.657	0.634
23	177	0.0211	0.143	0.140	0.801	0.775
24	125	0.0329	0.101	0.103	0.902	0.878
25	60	0.0446	0.0486	0.0645	0.951	0.942
26	29	0.0563	0.0235	0.0341	0.974	0.976
27	14	0.0680	0.0113	0.0153	0.985	0.992
28	9	0.0797	0.00729	0.00579	0.993	0.997
29	5	0.0914	0.00405	0.00186	0.997	0.999
30	3	0.103	0.00243	0.000506	0.999	1.00
31	1	0.115	0.000810	0.000117	1.00	1.00
32	0	0.127	0.000	2.28e-005	1.00	1.00
33	0	0.138	0.000	3.76e-006	1.00	1.00
34	0	0.150	0.000	5.26e-007	1.00	1.00

Figura 43 - Intervalli, densità di probabilità e cumulata della Normale (IBOVESPA)

2.11. MERVAL

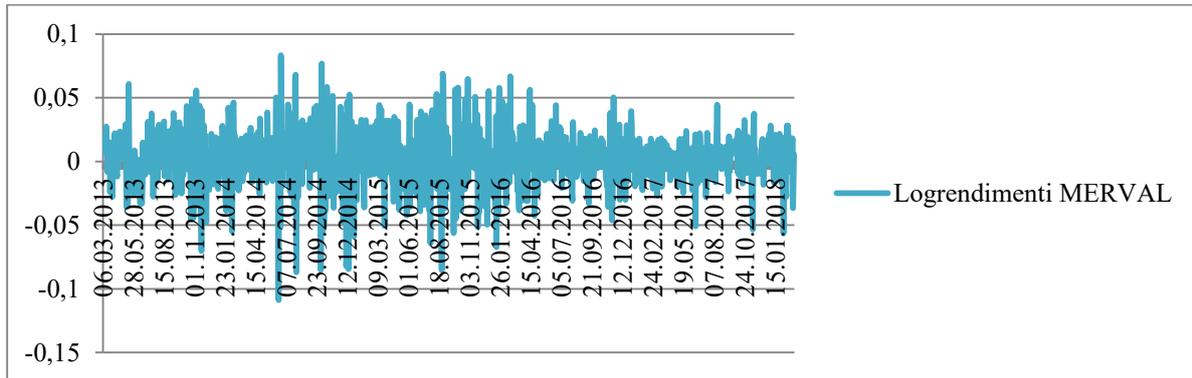


Figura 44 - I rendimenti logaritmici del MERVAL dal 5/3/2013 al 5/3/2018

Analizzando le fluttuazioni dei log-rendimenti del MERVAL, tra i principali indici azionari del mercato argentino, ciò che appare subito evidente è la localizzazione dei periodi di maggior volatilità in concomitanza del biennio 2014-2015. Nel primo trimestre del 2016 vi sono poi ulteriori strascichi che vanno progressivamente

Distribution Summary	
Distribution:	Beta
Expression:	$-0.13 + 0.24 * \text{BETA}(0, 0)$
Square Error:	0.004028
Chi Square Test	
Number of intervals	= 13
Degrees of freedom	= 10
Test Statistic	= 109
Corresponding p-value	< 0.005
Kolmogorov-Smirnov Test	
Test Statistic	= 0.0579
Corresponding p-value	< 0.01
Data Summary	
Number of Data Points	= 1222
Min Data Value	= -0.109
Max Data Value	= 0.0835
Sample Mean	= 0.00194
Sample Std Dev	= 0.0213
Histogram Summary	
Histogram Range	= -0.13 to 0.11
Number of Intervals	= 34

Figura 45 - Caratteristiche dell'istogramma e test di bontà del fitting (MERVAL) eseguiti tramite il simulatore ARENA

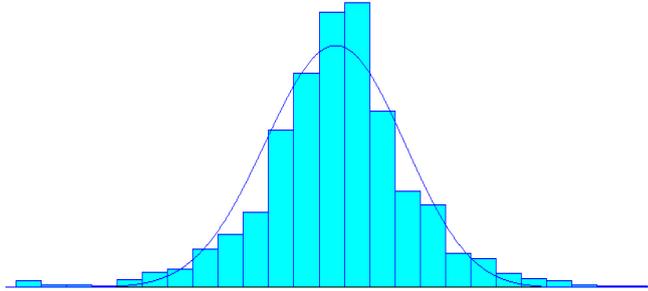
smorzandosi nel corso del 2017. Malgrado siano presente picchi massimi di sfondamento della soglia del

+5%, tra i minimi se ne registra uno che oltrepassa la fascia del -10%. Il fitting della distribuzione individua come first best una Beta (errore quadratico pari a 0,004028) con andamento leptocurtico e skewness negativa (gli indici sono rispettivamente 2,386428462 e -0,36117243); soluzione altrettanto valida, a patto di accettare un piccolo errore, è quella della Normale.

Function	Sq Error
Beta	0.00403
Normal	0.00643
Lognormal	0.0124
Weibull	0.0131
Erlang	0.0155
Gamma	0.0155
Triangular	0.0481
Uniform	0.0818
Exponential	0.0973

Figura 46 - Il ranking delle distribuzioni che meglio fittano i dati (MERVAL) in funzione dello square error

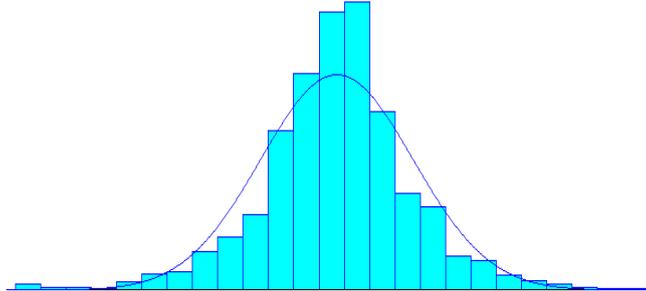
2.11.1. BETA-MERVAL



Int. No.	No. of Data Pts.	x	Probability Density		Cumulative Distribution	
			Data	Function	Data	Function
0	0	-0.123	0.000	9.70e-024	0.000	9.70e-024
1	0	-0.116	0.000	2.32e-017	0.000	2.32e-017
2	1	-0.109	0.000818	1.00e-013	0.000818	1.00e-013
3	0	-0.102	0.000	3.22e-011	0.000818	3.23e-011
4	0	-0.0947	0.000	2.45e-009	0.000818	2.48e-009
5	0	-0.0876	0.000	7.39e-008	0.000818	7.64e-008
6	5	-0.0806	0.00409	1.17e-006	0.00491	1.25e-006
7	2	-0.0735	0.00164	1.15e-005	0.00655	1.27e-005
8	2	-0.0665	0.00164	7.70e-005	0.00818	8.97e-005
9	1	-0.0594	0.000818	0.000383	0.00900	0.000473
10	6	-0.0524	0.00491	0.00148	0.0139	0.00195
11	12	-0.0453	0.00982	0.00460	0.0237	0.00656
12	14	-0.0382	0.0115	0.0119	0.0352	0.0184
13	29	-0.0312	0.0237	0.0259	0.0589	0.0443
14	40	-0.0241	0.0327	0.0484	0.0917	0.0928
15	57	-0.0171	0.0466	0.0785	0.138	0.171
16	120	-0.0100	0.0982	0.111	0.236	0.282
17	163	-0.00294	0.133	0.137	0.370	0.420
18	209	0.00412	0.171	0.150	0.541	0.569
19	216	0.0112	0.177	0.143	0.718	0.712
20	134	0.0182	0.110	0.119	0.827	0.830
21	73	0.0253	0.0597	0.0856	0.887	0.916
22	63	0.0324	0.0516	0.0529	0.939	0.969
23	26	0.0394	0.0213	0.0276	0.960	0.996
24	22	0.0465	0.0180	0.0119	0.978	1.01
25	11	0.0535	0.00900	0.00413	0.987	1.01
26	7	0.0606	0.00573	0.00110	0.993	1.01
27	5	0.0676	0.00409	0.000212	0.997	1.01
28	2	0.0747	0.00164	2.71e-005	0.998	1.01
29	1	0.0818	0.000818	2.00e-006	0.999	1.01
30	1	0.0888	0.000818	6.76e-008	1.00	1.01
31	0	0.0959	0.000	6.81e-010	1.00	1.01
32	0	0.103	0.000	7.80e-013	1.00	1.01
33	0	0.110	0.000	4.62e-018	1.00	1.01

Figura 47 - Intervalli, densità di probabilità e cumulata della Beta (MERVAL)

2.11.2. NORMALE-MERVAL



Int. No.	No. of Data Pts.	x	Probability Density		Cumulative Distribution	
			Data	Function	Data	Function
0	0	-0.123	0.000	1.90e-009	0.000	1.90e-009
1	0	-0.116	0.000	1.31e-008	0.000	1.50e-008
2	1	-0.109	0.000818	8.09e-008	0.000818	9.58e-008
3	0	-0.102	0.000	4.48e-007	0.000818	5.44e-007
4	0	-0.0947	0.000	2.23e-006	0.000818	2.77e-006
5	0	-0.0876	0.000	9.93e-006	0.000818	1.27e-005
6	5	-0.0806	0.00409	3.97e-005	0.00491	5.24e-005
7	2	-0.0735	0.00164	0.000142	0.00655	0.000194
8	2	-0.0665	0.00164	0.000456	0.00818	0.000651
9	1	-0.0594	0.000818	0.00131	0.00900	0.00196
10	6	-0.0524	0.00491	0.00339	0.0139	0.00535
11	12	-0.0453	0.00982	0.00785	0.0237	0.0132
12	14	-0.0382	0.0115	0.0163	0.0352	0.0295
13	29	-0.0312	0.0237	0.0303	0.0589	0.0598
14	40	-0.0241	0.0327	0.0506	0.0917	0.110
15	57	-0.0171	0.0466	0.0756	0.138	0.186
16	120	-0.0100	0.0982	0.101	0.236	0.287
17	163	-0.00294	0.133	0.122	0.370	0.409
18	209	0.00412	0.171	0.132	0.541	0.541
19	216	0.0112	0.177	0.127	0.718	0.668
20	134	0.0182	0.110	0.110	0.827	0.778
21	73	0.0253	0.0597	0.0857	0.887	0.864
22	63	0.0324	0.0516	0.0597	0.939	0.924
23	26	0.0394	0.0213	0.0373	0.960	0.961
24	22	0.0465	0.0180	0.0209	0.978	0.982
25	11	0.0535	0.00900	0.0105	0.987	0.992
26	7	0.0606	0.00573	0.00473	0.993	0.997
27	5	0.0676	0.00409	0.00191	0.997	0.999
28	2	0.0747	0.00164	0.000692	0.998	1.00
29	1	0.0818	0.000818	0.000225	0.999	1.00
30	1	0.0888	0.000818	6.54e-005	1.00	1.00
31	0	0.0959	0.000	1.71e-005	1.00	1.00
32	0	0.103	0.000	3.99e-006	1.00	1.00
33	0	0.110	0.000	8.38e-007	1.00	1.00

Figura 48 - Intervalli, densità di probabilità e cumulata della Normale (MERVAL)

2.12. NASDAQ 100

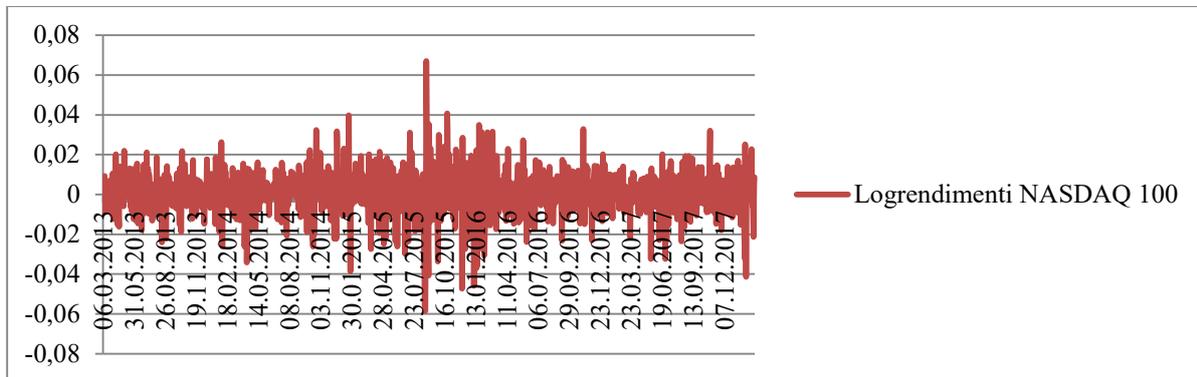


Figura 49 - I rendimenti logaritmici del NASDAQ 100 dal 5/3/2013 al 5/3/2018

Come chiaramente visibile dal grafico sopra riportato i rendimenti logaritmici del NASDAQ 100 si mantengono sostanzialmente compresi nel range $+2\%/-2\%$, in particolar modo negli anni 2013 e 2018. L'intervallo temporale che maggiormente appare caratterizzato da un incremento della volatilità dell'indice è quello del 2015 e del primo trimestre 2016. Proprio in tali circostanze i massimi e i minimi

Function	Sq Error
Weibull	0.00569
Normal	0.00625
Beta	0.00716
Lognormal	0.0125
Erlang	0.0273
Gamma	0.0274
Triangular	0.0726
Uniform	0.109
Exponential	0.123

Distribution Summary	
Distribution:	Weibull
Expression:	$-0.08 + WEIB(0, 0)$
Square Error:	0.005693
Chi Square Test	
Number of intervals	= 13
Degrees of freedom	= 10
Test Statistic	= 90.5
Corresponding p-value	< 0.005
Kolmogorov-Smirnov Test	
Test Statistic	= 0.0611
Corresponding p-value	< 0.01
Data Summary	
Number of Data Points	= 1259
Min Data Value	= -0.0586
Max Data Value	= 0.0671
Sample Mean	= 0.000759
Sample Std Dev	= 0.0111
Histogram Summary	
Histogram Range	= -0.08 to 0.08
Number of Intervals	= 35

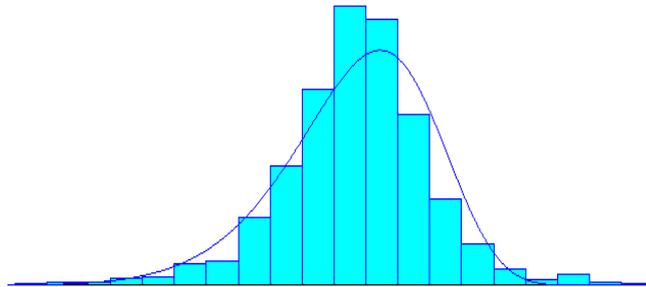
Figura 50 - Caratteristiche dell'istogramma e test di bontà del fitting (NASDAQ 100) eseguiti tramite il simulatore ARENA

hanno toccato rispettivamente le quote del $+6\%$ e del -6% ; salvo l'eccezione di cui si è

parlato, il quinquennio ha visto altri sfondamenti sporadici ma non particolarmente eccezionali (per quanto riguarda i profitti) o negativi (in merito alle perdite). Ordinando le varie distribuzioni che meglio sono in grado di interpolare i dati in funzione del relativo errore quadratico, la prima scelta ricade su una Weibull (square error pari a 0,005693); è comunque possibile ricorrere alla Normale senza incorrere in effetti distorsivi eccessivamente significativi.

Figura 51 - Il ranking delle distribuzioni che meglio fittano i dati (NASDAQ 100) in funzione dello square error

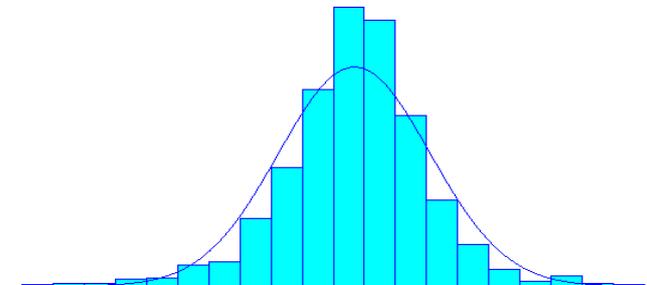
2.12.1. WEIBULL-NASDAQ 100



Int. No.	No. of Data Pts.	x	Probability Density		Cumulative Distribution	
			Data	Function	Data	Function
0	0	-0.0754	0.000	5.54e-012	0.000	5.54e-012
1	0	-0.0709	0.000	2.56e-009	0.000	2.56e-009
2	0	-0.0663	0.000	9.04e-008	0.000	9.30e-008
3	0	-0.0617	0.000	1.09e-006	0.000	1.19e-006
4	1	-0.0571	0.000794	7.38e-006	0.000794	8.57e-006
5	1	-0.0526	0.000794	3.45e-005	0.00159	4.30e-005
6	0	-0.0480	0.000	0.000125	0.00159	0.000169
7	2	-0.0434	0.00159	0.000381	0.00318	0.000550
8	3	-0.0389	0.00238	0.00101	0.00556	0.00156
9	3	-0.0343	0.00238	0.00240	0.00794	0.00396
10	7	-0.0297	0.00556	0.00522	0.0135	0.00918
11	8	-0.0251	0.00635	0.0106	0.0199	0.0197
12	20	-0.0206	0.0159	0.0199	0.0357	0.0397
13	23	-0.0160	0.0183	0.0354	0.0540	0.0751
14	64	-0.0114	0.0508	0.0588	0.105	0.134
15	112	-0.00686	0.0890	0.0909	0.194	0.225
16	185	-0.00229	0.147	0.128	0.341	0.353
17	262	0.00229	0.208	0.161	0.549	0.514
18	250	0.00686	0.199	0.174	0.747	0.688
19	161	0.0114	0.128	0.152	0.875	0.841
20	81	0.0160	0.0643	0.100	0.940	0.941
21	39	0.0206	0.0310	0.0451	0.971	0.986
22	16	0.0251	0.0127	0.0122	0.983	0.998
23	5	0.0297	0.00397	0.00168	0.987	1.00
24	10	0.0343	0.00794	9.63e-005	0.995	1.00
25	3	0.0389	0.00238	1.75e-006	0.998	1.00
26	2	0.0434	0.00159	7.18e-009	0.999	1.00
27	0	0.0480	0.000	4.22e-012	0.999	1.00
28	0	0.0526	0.000	2.22e-016	0.999	1.00
29	0	0.0571	0.000	0.000	0.999	1.00
30	0	0.0617	0.000	0.000	0.999	1.00
31	0	0.0663	0.000	0.000	0.999	1.00
32	1	0.0709	0.000794	0.000	1.00	1.00
33	0	0.0754	0.000	0.000	1.00	1.00
34	0	0.0800	0.000	0.000	1.00	1.00

Figura 52 - Intervalli, densità di probabilità e cumulata della Weibull (NASDAQ 100)

2.12.2. NORMALE-NASDAQ 100



Int. No.	No. of Data Pts.	x	Probability Density		Cumulative Distribution	
			Data	Function	Data	Function
0	0	-0.0754	0.000	3.64e-012	0.000	3.64e-012
1	0	-0.0709	0.000	5.85e-011	0.000	6.21e-011
2	0	-0.0663	0.000	7.94e-010	0.000	8.57e-010
3	0	-0.0617	0.000	9.13e-009	0.000	9.99e-009
4	1	-0.0571	0.000794	8.88e-008	0.000794	9.88e-008
5	1	-0.0526	0.000794	7.31e-007	0.00159	8.30e-007
6	0	-0.0480	0.000	5.10e-006	0.00159	5.93e-006
7	2	-0.0434	0.00159	3.01e-005	0.00318	3.60e-005
8	3	-0.0389	0.00238	0.000150	0.00556	0.000186
9	3	-0.0343	0.00238	0.000635	0.00794	0.000821
10	7	-0.0297	0.00556	0.00227	0.0135	0.00310
11	8	-0.0251	0.00635	0.00689	0.0199	0.00999
12	20	-0.0206	0.0159	0.0177	0.0357	0.0277
13	23	-0.0160	0.0183	0.0384	0.0540	0.0661
14	64	-0.0114	0.0508	0.0707	0.105	0.137
15	112	-0.00686	0.0890	0.110	0.194	0.247
16	185	-0.00229	0.147	0.145	0.341	0.392
17	262	0.00229	0.208	0.162	0.549	0.555
18	250	0.00686	0.199	0.154	0.747	0.708
19	161	0.0114	0.128	0.123	0.875	0.831
20	81	0.0160	0.0643	0.0834	0.940	0.915
21	39	0.0206	0.0310	0.0479	0.971	0.962
22	16	0.0251	0.0127	0.0233	0.983	0.986
23	5	0.0297	0.00397	0.00960	0.987	0.995
24	10	0.0343	0.00794	0.00335	0.995	0.999
25	3	0.0389	0.00238	0.000988	0.998	1.00
26	2	0.0434	0.00159	0.000247	0.999	1.00
27	0	0.0480	0.000	5.23e-005	0.999	1.00
28	0	0.0526	0.000	9.36e-006	0.999	1.00
29	0	0.0571	0.000	1.42e-006	0.999	1.00
30	0	0.0617	0.000	1.82e-007	0.999	1.00
31	0	0.0663	0.000	1.98e-008	0.999	1.00
32	1	0.0709	0.000794	1.82e-009	1.00	1.00
33	0	0.0754	0.000	1.42e-010	1.00	1.00
34	0	0.0800	0.000	9.33e-012	1.00	1.00

Figura 53 - Intervalli, densità di probabilità e cumulata della Normale (NASDAQ 100)

2.13. NIFTY 50

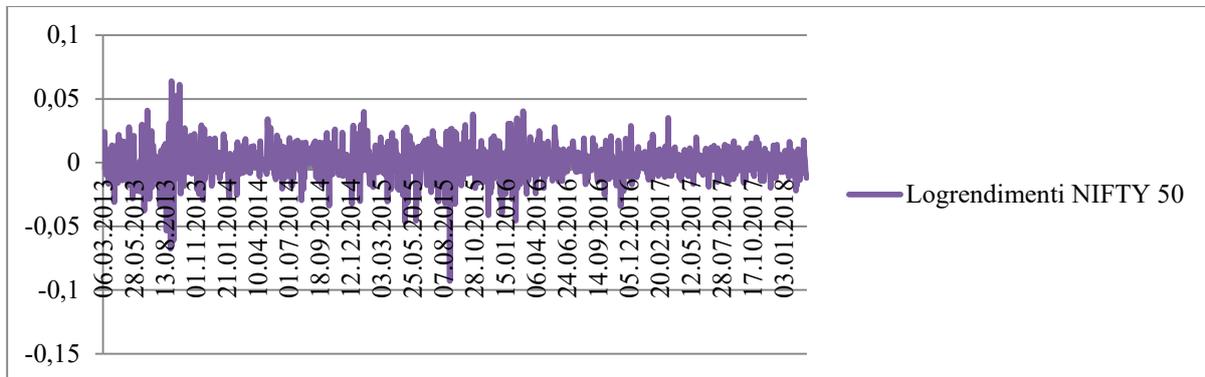


Figura 54 - I rendimenti logaritmici del NIFTY 50 dal 5/3/2013 al 5/3/2018

Tra i maggiori indici azionari della realtà indiana, il NIFTY 50 presenta un trend (in termini di rendimenti logaritmici) decisamente piatto. I valori, salvo un paio di eccezioni rilevanti, rimangono compresi in una fascia compresa tra il +5% e il -5%; non vi sono in generale performance eccezionali ma nemmeno perdite troppo esose. La flatness del grafico rivela un mercato finanziario che, nell'arco dei cinque anni d'interesse, non ha risentito di particolari turbolenze; da notare il crollo e la repentina ripresa dell'indice in concomitanza del

Function	Sq Error
Normal	0.00486
Beta	0.00538
Lognormal	0.011
Weibull	0.0163
Erlang	0.0327
Gamma	0.0328
Triangular	0.069
Uniform	0.105
Exponential	0.121

Figura 56 - Il ranking delle distribuzioni che meglio fittano i dati (NIFTY 50) in funzione dello square error

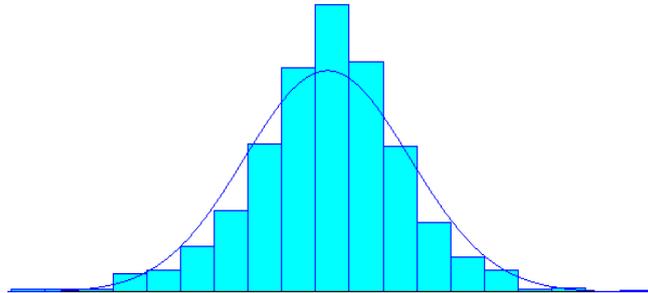
Distribution Summary	
Distribution:	Normal
Expression:	NORM(0, 0)
Square Error:	0.004859
Chi Square Test	
Number of intervals	= 13
Degrees of freedom	= 10
Test Statistic	= 65.7
Corresponding p-value	< 0.005
Kolmogorov-Smirnov Test	
Test Statistic	= 0.0552
Corresponding p-value	< 0.01
Data Summary	
Number of Data Points	= 1229
Min Data Value	= -0.0929
Max Data Value	= 0.0639
Sample Mean	= 0.000381
Sample Std Dev	= 0.0133
Histogram Summary	
Histogram Range	= -0.11 to 0.08
Number of Intervals	= 35

Figura 55 - Caratteristiche dell'istogramma e test di bontà del fitting (NIFTY 50) eseguiti tramite il simulatore ARENA

bimestre agosto-settembre 2013

e il minimo registrato nel terzo trimestre del 2015 (con valori che sfiorano il -10%). La migliore distribuzione per il fitting dei dati è una Normale centrata in zero nonostante la skewness negativa e la pesantezza delle code; i logrendimenti, come deducibile dall'osservazione del grafico, hanno un livello di dispersione attorno alla media campionaria ragionevolmente basso.

2.13.1. NORMALE-NIFTY 50



Int. No.	No. of Data Pts.	x	Probability Density		Cumulative Distribution	
			Data	Function	Data	Function
0	0	-0.105	0.000	1.19e-015	0.000	1.19e-015
1	0	-0.0991	0.000	2.93e-014	0.000	3.05e-014
2	0	-0.0937	0.000	6.10e-013	0.000	6.41e-013
3	1	-0.0883	0.000814	1.08e-011	0.000814	1.14e-011
4	0	-0.0829	0.000	1.61e-010	0.000814	1.72e-010
5	0	-0.0774	0.000	2.03e-009	0.000814	2.20e-009
6	0	-0.0720	0.000	2.18e-008	0.000814	2.40e-008
7	1	-0.0666	0.000814	1.98e-007	0.00163	2.22e-007
8	1	-0.0611	0.000814	1.52e-006	0.00244	1.74e-006
9	0	-0.0557	0.000	9.92e-006	0.00244	1.17e-005
10	1	-0.0503	0.000814	5.48e-005	0.00325	6.64e-005
11	3	-0.0449	0.00244	0.000256	0.00570	0.000323
12	3	-0.0394	0.00244	0.00102	0.00814	0.00134
13	3	-0.0340	0.00244	0.00342	0.0106	0.00476
14	17	-0.0286	0.0138	0.00974	0.0244	0.0145
15	20	-0.0231	0.0163	0.0235	0.0407	0.0380
16	41	-0.0177	0.0334	0.0482	0.0740	0.0862
17	74	-0.0123	0.0602	0.0835	0.134	0.170
18	134	-0.00686	0.109	0.123	0.243	0.293
19	203	-0.00143	0.165	0.153	0.408	0.446
20	260	0.00400	0.212	0.162	0.620	0.608
21	209	0.00943	0.170	0.145	0.790	0.752
22	132	0.0149	0.107	0.110	0.897	0.863
23	63	0.0203	0.0513	0.0708	0.949	0.933
24	32	0.0257	0.0260	0.0386	0.975	0.972
25	20	0.0311	0.0163	0.0179	0.991	0.990
26	3	0.0366	0.00244	0.00700	0.993	0.997
27	4	0.0420	0.00325	0.00233	0.997	0.999
28	0	0.0474	0.000	0.000655	0.997	1.00
29	2	0.0529	0.00163	0.000156	0.998	1.00
30	0	0.0583	0.000	3.16e-005	0.998	1.00
31	1	0.0637	0.000814	5.41e-006	0.999	1.00
32	1	0.0691	0.000814	7.85e-007	1.00	1.00
33	0	0.0746	0.000	9.66e-008	1.00	1.00
34	0	0.0800	0.000	1.01e-008	1.00	1.00

Figura 57 - Intervalli, densità di probabilità e cumulata della Normale (NIFTY 50)

2.14. NIKKEI 225

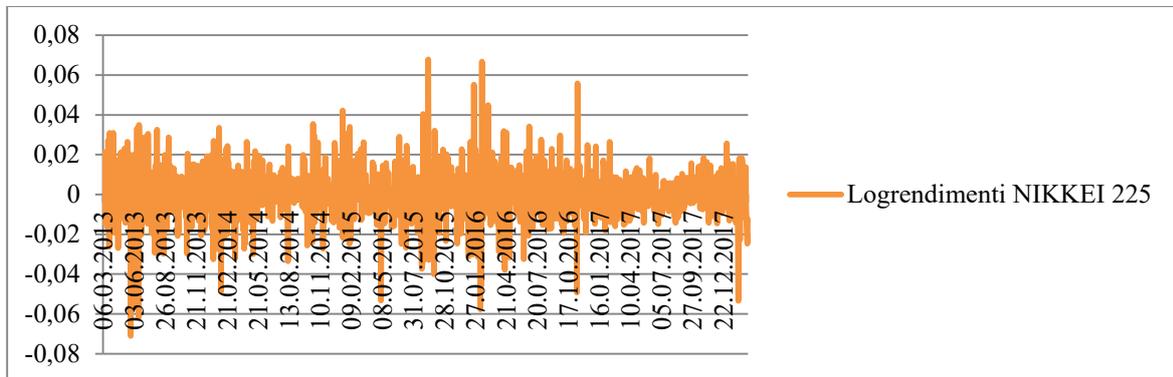


Figura 58 - I rendimenti logaritmici del NIKKEI 225 dal 5/3/2013 al 5/3/2018

Tra il 2013 e il 2018 il mercato giapponese è stato caratterizzato da forti ondate di volatilità, espressione evidente del regime di incertezza in cui ha versato l'area asiatica. Probabilmente, in seguito alle recenti iniziative dell'amministrazione Trump in

Distribution Summary	
Distribution:	Normal
Expression:	NORM(0, 0)
Square Error:	0.007101
Chi Square Test	
Number of intervals	= 13
Degrees of freedom	= 10
Test Statistic	= 101
Corresponding p-value	< 0.005
Kolmogorov-Smirnov Test	
Test Statistic	= 0.0644
Corresponding p-value	< 0.01
Data Summary	
Number of Data Points	= 1227
Min Data Value	= -0.0711
Max Data Value	= 0.0679
Sample Mean	= 0.000419
Sample Std Dev	= 0.0135
Histogram Summary	
Histogram Range	= -0.09 to 0.09
Number of Intervals	= 35

Figura 59 - Caratteristiche dell'istogramma e test di bontà del fitting (NIKKEI 225) eseguiti tramite il simulatore ARENA

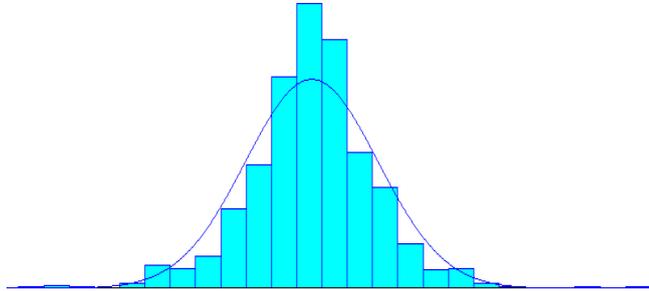
merito ai dazi doganali, ci saranno ulteriori scossoni che genereranno significative fluttuazioni dei rendimenti logaritmici. I

massimi e minimi più incisivi si concentrano nel biennio 2015-2016 e nel secondo trimestre del 2013, a partire dal 2017 i valori sembrano stabilizzarsi in un range compreso tra il +2% e il -2%. I dati storici seguono una distribuzione Normale di parametri nulli (errore quadratico pari a 0,007101), dal campione si rilevano inoltre tendenze di asimmetria negativa ed andamento leptocurtico.

Function	Sq Error
Normal	0.0071
Beta	0.00766
Weibull	0.0118
Lognormal	0.013
Erlang	0.0219
Gamma	0.022
Triangular	0.0647
Uniform	0.0998
Exponential	0.114

Figura 60 - Il ranking delle distribuzioni che meglio fittano i dati (NIKKEI 225) in funzione dello square error

2.14.1. NORMALE-NIKKEI 225



Int. No.	No. of Data Pts.	x	Probability Density		Cumulative Distribution	
			Data	Function	Data	Function
0	0	-0.0849	0.000	1.16e-010	0.000	1.16e-010
1	0	-0.0797	0.000	1.26e-009	0.000	1.38e-009
2	0	-0.0746	0.000	1.19e-008	0.000	1.33e-008
3	1	-0.0694	0.000815	9.70e-008	0.000815	1.10e-007
4	0	-0.0643	0.000	6.85e-007	0.000815	7.95e-007
5	1	-0.0591	0.000815	4.18e-006	0.00163	4.98e-006
6	2	-0.0540	0.00163	2.21e-005	0.00326	2.71e-005
7	3	-0.0489	0.00244	0.000101	0.00570	0.000129
8	2	-0.0437	0.00163	0.000402	0.00733	0.000531
9	1	-0.0386	0.000815	0.00138	0.00815	0.00191
10	5	-0.0334	0.00407	0.00411	0.0122	0.00602
11	21	-0.0283	0.0171	0.0106	0.0293	0.0166
12	18	-0.0231	0.0147	0.0236	0.0440	0.0403
13	29	-0.0180	0.0236	0.0457	0.0676	0.0859
14	71	-0.0129	0.0579	0.0764	0.126	0.162
15	110	-0.00771	0.0896	0.111	0.215	0.273
16	189	-0.00257	0.154	0.139	0.369	0.412
17	254	0.00257	0.207	0.151	0.576	0.563
18	222	0.00771	0.181	0.142	0.757	0.706
19	121	0.0129	0.0986	0.116	0.856	0.822
20	90	0.0180	0.0733	0.0820	0.929	0.904
21	40	0.0231	0.0326	0.0502	0.962	0.954
22	17	0.0283	0.0139	0.0266	0.976	0.981
23	18	0.0334	0.0147	0.0122	0.990	0.993
24	5	0.0386	0.00407	0.00485	0.994	0.998
25	2	0.0437	0.00163	0.00167	0.996	0.999
26	1	0.0489	0.000815	0.000497	0.997	1.00
27	0	0.0540	0.000	0.000128	0.997	1.00
28	2	0.0591	0.00163	2.87e-005	0.998	1.00
29	0	0.0643	0.000	5.54e-006	0.998	1.00
30	2	0.0694	0.00163	9.29e-007	1.00	1.00
31	0	0.0746	0.000	1.35e-007	1.00	1.00
32	0	0.0797	0.000	1.69e-008	1.00	1.00
33	0	0.0849	0.000	1.84e-009	1.00	1.00
34	0	0.0900	0.000	1.73e-010	1.00	1.00

Figura 61 - Intervalli, densità di probabilità e cumulata della Normale (NIKKEI 225)

2.15. S&P 500

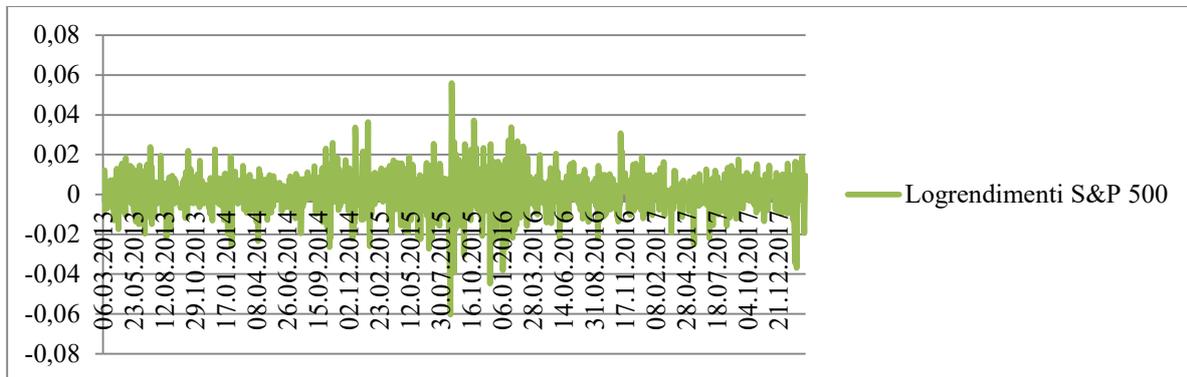


Figura 62 - I rendimenti logaritmici del S&P 500 dal 5/3/2013 al 5/3/2018

Nel quinquennio preso in esame lo S&P 500 ha dimostrato un'ottima stabilità; i log-rendimenti si collocano in un intervallo relativamente ristretto che va dal +2% al -2%. Eccezione rilevante a questa situazione di stazionarietà è quella relativa all'agosto del 2015, in cui l'indice ha sfiorato il -6% per poi raggiungere repentinamente un massimo prossimo al 6%. Nonostante molti si aspettassero che Wall Street avrebbe reagito alla successione

Function	Sq Error
Normal	0.0057
Beta	0.00603
Weibull	0.00892
Lognormal	0.0101
Erlang	0.0355
Gamma	0.0356
Triangular	0.0838
Uniform	0.116
Exponential	0.131

Figura 64 - Il ranking delle distribuzioni che meglio fittano i dati (S&P 500) in funzione dello square error

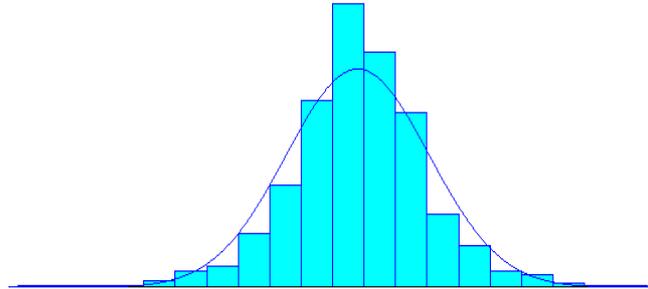
Distribution Summary	
Distribution:	Normal
Expression:	NORM(0, 0)
Square Error:	0.005701
Chi Square Test	
Number of intervals	= 12
Degrees of freedom	= 9
Test Statistic	= 77.8
Corresponding p-value	< 0.005
Kolmogorov-Smirnov Test	
Test Statistic	= 0.0595
Corresponding p-value	< 0.01
Data Summary	
Number of Data Points	= 1259
Min Data Value	= -0.0603
Max Data Value	= 0.056
Sample Mean	= 0.000497
Sample Std Dev	= 0.00973
Histogram Summary	
Histogram Range	= -0.08 to 0.07
Number of Intervals	= 35

Figura 63 - Caratteristiche dell'istogramma e test di bontà del fitting (S&P 500) eseguiti tramite il simulatore ARENA

Obama-Trump con pesanti ripercussioni sugli andamenti

dei titoli, basta osservare il grafico per rendersi conto che le imprese americane a grande capitalizzazione non hanno risentito particolarmente dell'evento; anche nella suddetta circostanza le fluttuazioni sono state decisamente contenute. La densità che meglio approssima la variabile casuale è costituita da una Normale (square error pari a 0,005701), dal campione si rievano inoltre una scentratura verso destra con un valore di asimmetria di -0,2921177 e una moderata pesantezza delle code della distribuzione (curtosi pari a 3,755165711).

2.15.1. NORMALE-S&P 500



Int. No.	No. of Data Pts.	x	Probability Density		Cumulative Distribution	
			Data	Function	Data	Function
0	0	-0.0757	0.000	2.21e-015	0.000	2.21e-015
1	0	-0.0714	0.000	6.68e-014	0.000	6.90e-014
2	0	-0.0671	0.000	1.67e-012	0.000	1.73e-012
3	0	-0.0629	0.000	3.43e-011	0.000	3.60e-011
4	1	-0.0586	0.000794	5.82e-010	0.000794	6.17e-010
5	0	-0.0543	0.000	8.14e-009	0.000794	8.76e-009
6	0	-0.0500	0.000	9.42e-008	0.000794	1.03e-007
7	0	-0.0457	0.000	8.98e-007	0.000794	1.00e-006
8	2	-0.0414	0.00159	7.07e-006	0.00238	8.08e-006
9	2	-0.0371	0.00159	4.60e-005	0.00397	5.41e-005
10	2	-0.0329	0.00159	0.000247	0.00556	0.000301
11	2	-0.0286	0.00159	0.00109	0.00715	0.00140
12	7	-0.0243	0.00556	0.00400	0.0127	0.00540
13	16	-0.0200	0.0127	0.0121	0.0254	0.0175
14	22	-0.0157	0.0175	0.0302	0.0429	0.0477
15	54	-0.0114	0.0429	0.0623	0.0858	0.110
16	104	-0.00714	0.0826	0.106	0.168	0.216
17	190	-0.00286	0.151	0.149	0.319	0.365
18	287	0.00143	0.228	0.173	0.547	0.538
19	238	0.00571	0.189	0.166	0.736	0.704
20	177	0.0100	0.141	0.132	0.877	0.836
21	74	0.0143	0.0588	0.0861	0.936	0.922
22	42	0.0186	0.0334	0.0465	0.969	0.968
23	17	0.0229	0.0135	0.0208	0.983	0.989
24	13	0.0271	0.0103	0.00766	0.993	0.997
25	4	0.0314	0.00318	0.00233	0.996	0.999
26	2	0.0357	0.00159	0.000586	0.998	1.00
27	2	0.0400	0.00159	0.000122	0.999	1.00
28	0	0.0443	0.000	2.09e-005	0.999	1.00
29	0	0.0486	0.000	2.95e-006	0.999	1.00
30	0	0.0529	0.000	3.45e-007	0.999	1.00
31	1	0.0571	0.000794	3.33e-008	1.00	1.00
32	0	0.0614	0.000	2.65e-009	1.00	1.00
33	0	0.0657	0.000	1.74e-010	1.00	1.00
34	0	0.0700	0.000	9.42e-012	1.00	1.00

Figura 65 - Intervalli, densità di probabilità e cumulata della Normale (S&P 500)

2.16. SHCOMP

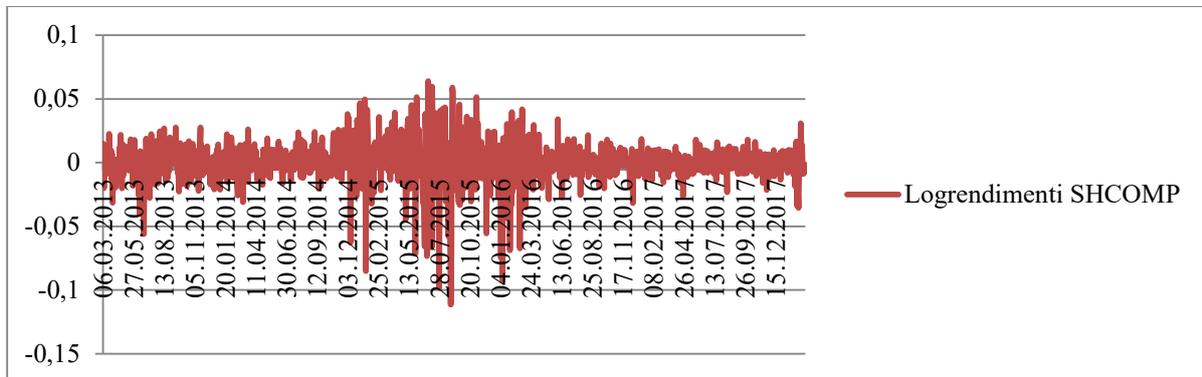


Figura 66 - I rendimenti logaritmici del SHCOMP dal 5/3/2013 al 5/3/2018

Lo SHCOMP (Shanghai Composite Index) è uno tra i più significativi indici azionari tra quelli presenti nella Borsa cinese; nel biennio 2013-2014 e nel 2017 i log-rendimenti non hanno subito brusche variazioni, rivelando una sostanziale stabilità della volatilità. Come appare evidente dal grafico sopra riportato, è nel 2015 che hanno avuto luogo i maggiori stravolgimenti; l'indice ha avuto una massiccia reazione concretizzatasi in un netto incremento della rischiosità, con perdite che hanno sfondato la soglia del -10%. Le fasi di transizione

Function	Sq Error
Weibull	0.0197
Normal	0.0218
Beta	0.0225
Lognormal	0.0371
Erlang	0.0563
Gamma	0.0564
Triangular	0.0927
Uniform	0.13
Exponential	0.147

Figura 68 - Il ranking delle distribuzioni che meglio fittano i dati (SHCOMP) in funzione dello square error

```

Distribution Summary
Distribution: Weibull
Expression: -0.13 + WEIB(0, 0)
Square Error: 0.019652

Chi Square Test
Number of intervals = 12
Degrees of freedom = 9
Test Statistic = 210
Corresponding p-value < 0.005

Kolmogorov-Smirnov Test
Test Statistic = 0.105
Corresponding p-value < 0.01

Data Summary
Number of Data Points = 1217
Min Data Value = -0.111
Max Data Value = 0.0639
Sample Mean = 0.000306
Sample Std Dev = 0.0163

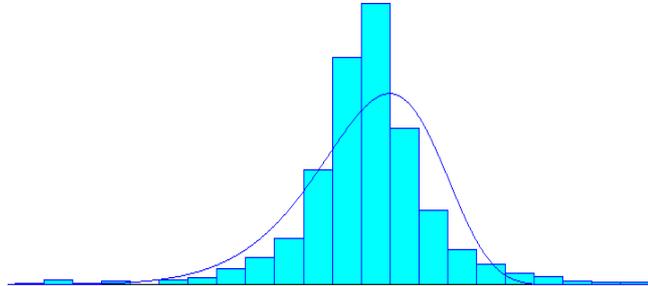
Histogram Summary
Histogram Range = -0.13 to 0.09
Number of Intervals = 34
    
```

Figura 67 - Caratteristiche dell'istogramma e test di bontà del fitting (SHCOMP) eseguiti tramite il simulatore ARENA

immediatamente prima e dopo il

periodo critico (secondo e terzo trimestre del 2015), si collocano in posizioni pressoché simmetrica rispetto ad esso, il mercato ha dunque reagito in maniera analoga tanto al verificarsi dell'evento quanto al ripianamento dei suoi effetti. In questo caso il fitting migliore è offerto da una Weibull; i valori di asimmetria e curtosi sono relativamente elevati (rispettivamente -1,15862096 e 7,32033913) e l'errore quadratico è pari a 0,019652. Accettando una piccola distorsione è possibile comunque ricorrere ad una distribuzione Normale di parametri nulli.

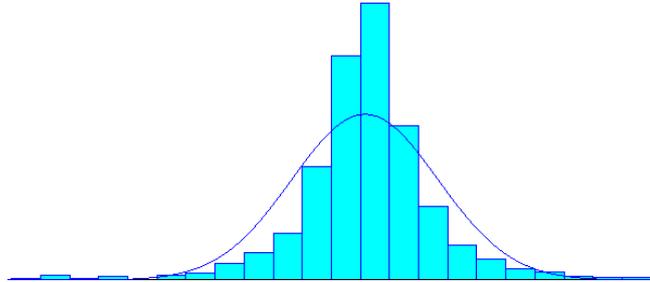
2.16.1. WEIBULL-SHCOMP



Int. No.	No. of Data Pts.	x	Probability Density		Cumulative Distribution	
			Data	Function	Data	Function
0	0	-0.124	0.000	2.05e-014	0.000	2.05e-014
1	0	-0.117	0.000	2.62e-011	0.000	2.63e-011
2	1	-0.111	0.000822	1.70e-009	0.000822	1.73e-009
3	0	-0.104	0.000	3.19e-008	0.000822	3.37e-008
4	1	-0.0976	0.000822	3.03e-007	0.00164	3.37e-007
5	1	-0.0912	0.000822	1.88e-006	0.00247	2.21e-006
6	1	-0.0847	0.000822	8.66e-006	0.00329	1.09e-005
7	0	-0.0782	0.000	3.23e-005	0.00329	4.31e-005
8	2	-0.0718	0.00164	0.000102	0.00493	0.000146
9	6	-0.0653	0.00493	0.000286	0.00986	0.000432
10	2	-0.0588	0.00164	0.000723	0.0115	0.00115
11	4	-0.0524	0.00329	0.00168	0.0148	0.00283
12	1	-0.0459	0.000822	0.00363	0.0156	0.00646
13	6	-0.0394	0.00493	0.00737	0.0205	0.0138
14	8	-0.0329	0.00657	0.0142	0.0271	0.0280
15	19	-0.0265	0.0156	0.0258	0.0427	0.0538
16	32	-0.0200	0.0263	0.0444	0.0690	0.0982
17	54	-0.0135	0.0444	0.0720	0.113	0.170
18	132	-0.00706	0.108	0.108	0.222	0.278
19	261	-0.000588	0.214	0.147	0.436	0.425
20	322	0.000588	0.265	0.175	0.701	0.600
21	180	0.0124	0.148	0.173	0.849	0.773
22	86	0.0188	0.0707	0.131	0.919	0.904
23	41	0.0253	0.0337	0.0696	0.953	0.974
24	24	0.0318	0.0197	0.0224	0.973	0.996
25	13	0.0382	0.0107	0.00367	0.984	1.00
26	10	0.0447	0.00822	0.000241	0.992	1.00
27	4	0.0512	0.00329	4.68e-006	0.995	1.00
28	3	0.0576	0.00247	1.75e-008	0.998	1.00
29	3	0.0641	0.00247	7.21e-012	1.00	1.00
30	0	0.0706	0.000	1.11e-016	1.00	1.00
31	0	0.0771	0.000	0.000	1.00	1.00
32	0	0.0835	0.000	0.000	1.00	1.00
33	0	0.0900	0.000	0.000	1.00	1.00

Figura 69 - Intervalli, densità di probabilità e cumulata della Weibull (SHCOMP)

2.16.2. NORMALE-SHCOMP



Int. No.	No. of Data Pts.	x	Probability Density		Cumulative Distribution	
			Data	Function	Data	Function
0	0	-0.124	0.000	1.29e-014	0.000	1.29e-014
1	0	-0.117	0.000	2.57e-013	0.000	2.70e-013
2	1	-0.111	0.000822	4.39e-012	0.000822	4.66e-012
3	0	-0.104	0.000	6.39e-011	0.000822	6.86e-011
4	1	-0.0976	0.000822	7.97e-010	0.00164	8.65e-010
5	1	-0.0912	0.000822	8.49e-009	0.00247	9.36e-009
6	1	-0.0847	0.000822	7.74e-008	0.00329	8.67e-008
7	0	-0.0782	0.000	6.03e-007	0.00329	6.90e-007
8	2	-0.0718	0.00164	4.02e-006	0.00493	4.71e-006
9	6	-0.0653	0.00493	2.29e-005	0.00986	2.76e-005
10	2	-0.0588	0.00164	0.000112	0.0115	0.000139
11	4	-0.0524	0.00329	0.000465	0.0148	0.000604
12	1	-0.0459	0.000822	0.00166	0.0156	0.00226
13	6	-0.0394	0.00493	0.00505	0.0205	0.00731
14	8	-0.0329	0.00657	0.0132	0.0271	0.0205
15	19	-0.0265	0.0156	0.0294	0.0427	0.0499
16	32	-0.0200	0.0263	0.0561	0.0690	0.106
17	54	-0.0135	0.0444	0.0916	0.113	0.198
18	132	-0.00706	0.108	0.128	0.222	0.325
19	261	-0.000588	0.214	0.153	0.436	0.478
20	322	0.000588	0.265	0.156	0.701	0.634
21	180	0.0124	0.148	0.136	0.849	0.771
22	86	0.0188	0.0707	0.102	0.919	0.873
23	41	0.0253	0.0337	0.0652	0.953	0.938
24	24	0.0318	0.0197	0.0357	0.973	0.973
25	13	0.0382	0.0107	0.0167	0.984	0.990
26	10	0.0447	0.00822	0.00669	0.992	0.997
27	4	0.0512	0.00329	0.00229	0.995	0.999
28	3	0.0576	0.00247	0.000671	0.998	1.00
29	3	0.0641	0.00247	0.000168	1.00	1.00
30	0	0.0706	0.000	3.60e-005	1.00	1.00
31	0	0.0771	0.000	6.60e-006	1.00	1.00
32	0	0.0835	0.000	1.03e-006	1.00	1.00
33	0	0.0900	0.000	1.39e-007	1.00	1.00

Figura 70 - Intervalli, densità di probabilità e cumulata della Normale (SHCOMP)

2.17. STI

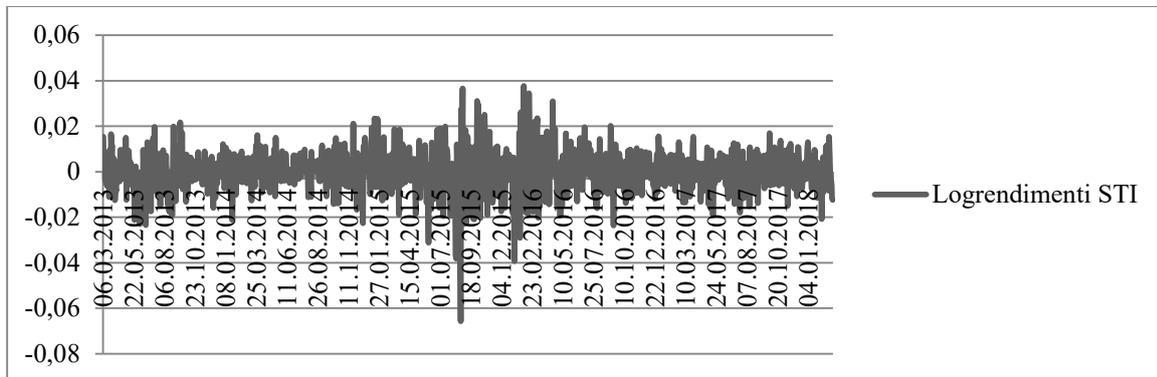


Figura 71 - I rendimenti logaritmici dello STI dal 5/3/2013 al 5/3/2018

La serie storica circa l'andamento quinquennale dello STI (espressione di alcune tra le maggiori imprese di Singapore) non rivela, in generale, momenti prolungati di elevata volatilità dei log-rendimenti. Fanno eccezione il secondo e il terzo trimestre del 2015 e il primo del 2016, dove si registra un incremento della

Distribution:	Normal
Expression:	NORM(0, 0)
Square Error:	0.005753
Chi Square Test	
Number of intervals	= 13
Degrees of freedom	= 10
Test Statistic	= 68
Corresponding p-value	< 0.005
Kolmogorov-Smirnov Test	
Test Statistic	= 0.0588
Corresponding p-value	< 0.01
Data Summary	
Number of Data Points	= 1262
Min Data Value	= -0.0657
Max Data Value	= 0.0377
Sample Mean	= 4.43e-005
Sample Std Dev	= 0.00889
Histogram Summary	
Histogram Range	= -0.08 to 0.05
Number of Intervals	= 35

Figura 72 - Caratteristiche dell'istogramma e test di bontà del fitting (STI) eseguiti tramite il simulatore ARENA

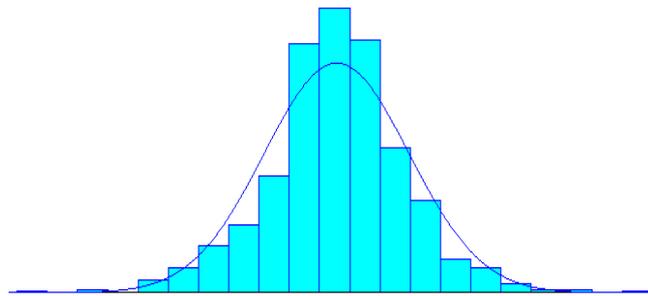
rischiosità dell'indice dovuto ad un periodo di relativa incertezza dei mercati finanziari nell'area del sud-

est asiatico. In data 20-08-2015 si rileva una significativa perdita che oltrepassa il -6% mentre, globalmente, gli extra-rendimenti si mantengono tutti al di sotto del tetto del +4%. I valori in esame si distribuiscono secondo una Normale caratterizzata da media tendente a zero e dispersione contenuta, gli stimatori campionari di asimmetria e curtosi assumono valori rispettivamente pari a -0,34934096 e 3,875163694.

Function	Sq Error
Normal	0.00575
Beta	0.00655
Weibull	0.00657
Lognormal	0.0104
Erlang	0.0388
Gamma	0.0389
Triangular	0.0725
Uniform	0.108
Exponential	0.124

Figura 73 - Il ranking delle distribuzioni che meglio fittano i dati (STI) in funzione dello square error

2.17.1. NORMALE-STI



Int. No.	No. of Data Pts.	x	Probability Density		Cumulative Distribution	
			Data	Function	Data	Function
0	0	-0.0763	0.000	4.44e-018	0.000	4.44e-018
1	0	-0.0726	0.000	1.54e-016	0.000	1.58e-016
2	0	-0.0689	0.000	4.47e-015	0.000	4.62e-015
3	1	-0.0651	0.000792	1.09e-013	0.000792	1.14e-013
4	0	-0.0614	0.000	2.25e-012	0.000792	2.36e-012
5	0	-0.0577	0.000	3.89e-011	0.000792	4.12e-011
6	0	-0.0540	0.000	5.66e-010	0.000792	6.07e-010
7	0	-0.0503	0.000	6.94e-009	0.000792	7.55e-009
8	0	-0.0466	0.000	7.15e-008	0.000792	7.91e-008
9	0	-0.0429	0.000	6.21e-007	0.000792	7.00e-007
10	1	-0.0391	0.000792	4.53e-006	0.00158	5.23e-006
11	2	-0.0354	0.00158	2.79e-005	0.00317	3.31e-005
12	0	-0.0317	0.000	0.000144	0.00317	0.000177
13	3	-0.0280	0.00238	0.000628	0.00555	0.000805
14	0	-0.0243	0.000	0.00230	0.00555	0.00311
15	12	-0.0206	0.00951	0.00710	0.0151	0.0102
16	23	-0.0169	0.0182	0.0185	0.0333	0.0287
17	43	-0.0131	0.0341	0.0404	0.0674	0.0690
18	62	-0.00943	0.0491	0.0743	0.116	0.143
19	107	-0.00571	0.0848	0.115	0.201	0.259
20	228	-0.00200	0.181	0.150	0.382	0.409
21	260	0.00171	0.206	0.165	0.588	0.574
22	231	0.00543	0.183	0.153	0.771	0.728
23	133	0.00914	0.105	0.119	0.876	0.847
24	85	0.0129	0.0674	0.0783	0.944	0.925
25	31	0.0166	0.0246	0.0433	0.968	0.968
26	23	0.0203	0.0182	0.0201	0.987	0.989
27	8	0.0240	0.00634	0.00788	0.993	0.996
28	3	0.0277	0.00238	0.00260	0.995	0.999
29	3	0.0314	0.00238	0.000721	0.998	1.00
30	1	0.0351	0.000792	0.000169	0.998	1.00
31	2	0.0389	0.00158	3.31e-005	1.00	1.00
32	0	0.0426	0.000	5.49e-006	1.00	1.00
33	0	0.0463	0.000	7.64e-007	1.00	1.00
34	0	0.0500	0.000	8.96e-008	1.00	1.00

Figura 74 - Intervalli, densità di probabilità e cumulata della Normale (STI)

2.18. Correlazione dei dati storici

L'output dell'analisi di correlazione tra le serie storiche è costituita da una matrice 15X15 in cui sono presenti tutti i valori dei coefficienti ρ campionari calcolati per coppie di stringhe. Per ragioni costitutive la tabella a doppia entrata è simmetrica e tutti gli elementi della diagonale principale sono pari ad uno (banalmente i log-rendimenti di ciascun titolo sono perfettamente correlati con sé stessi). Di seguito viene riportata la matrice definita sull'intero arco temporale analizzato, per ragioni di impaginazione è stata spezzata in più parti:

	Logrendimenti CAC 40	Logrendimenti DAX	Logrendimenti DOW JONES	Logrendimenti FTSE 100	Logrendimenti FTSE MIB
Logrendimenti CAC 40	1	0,913778526	0,435967655	0,737689482	0,861765285
Logrendimenti DAX	0,913778526	1	0,426977563	0,692467361	0,791353537
Logrendimenti DOW JONES	0,435967655	0,426977563	1	0,618061072	0,384877069
Logrendimenti FTSE 100	0,737689482	0,692467361	0,618061072	1	0,658194211
Logrendimenti FTSE MIB	0,861765285	0,791353537	0,384877069	0,658194211	1
Logrendimenti HANG SENG	0,587775005	0,569914454	0,431944873	0,508559438	0,503435037
Logrendimenti IBEX 35	0,899144177	0,830916934	0,368182335	0,663708968	0,871954815
Logrendimenti IBOVESPA	0,274361418	0,243112263	0,379819079	0,374382279	0,259915791
Logrendimenti MERVAL	0,328363183	0,304821647	0,426391878	0,398433204	0,290318122
Logrendimenti NIFTY 50	0,467524911	0,463895149	0,468100924	0,485330571	0,412402512
Logrendimenti NIKKEI 225	0,487158362	0,481610953	0,190577827	0,278954924	0,403565161
Logrendimenti NASDAQ 100	0,412066205	0,408255463	0,895974259	0,562384147	0,357613571
Logrendimenti S&P 500	0,445694534	0,432339022	0,978577061	0,622434916	0,395804527
Logrendimenti SHCOMP	0,283384532	0,269243568	0,310748853	0,271781442	0,216141203
Logrendimenti STI	0,542330928	0,522856963	0,486678275	0,536036571	0,46032667

	Logrendimenti HANG SENG	Logrendimenti IBEX 35	Logrendimenti IBOVESPA	Logrendimenti MERVAL	Logrendimenti NIFTY 50
Logrendimenti CAC 40	0,587775005	0,899144177	0,274361418	0,328363183	0,467524911
Logrendimenti DAX	0,569914454	0,830916934	0,243112263	0,304821647	0,463895149
Logrendimenti DOW JONES	0,431944873	0,368182335	0,379819079	0,426391878	0,468100924
Logrendimenti FTSE 100	0,508559438	0,663708968	0,374382279	0,398433204	0,485330571
Logrendimenti FTSE MIB	0,503435037	0,871954815	0,259915791	0,290318122	0,412402512
Logrendimenti HANG SENG	1	0,519372025	0,237097862	0,24135316	0,558771473
Logrendimenti IBEX 35	0,519372025	1	0,264400027	0,298423662	0,432936251
Logrendimenti IBOVESPA	0,237097862	0,264400027	1	0,440604683	0,272286786
Logrendimenti MERVAL	0,24135316	0,298423662	0,440604683	1	0,27892958
Logrendimenti NIFTY 50	0,558771473	0,432936251	0,272286786	0,27892958	1
Logrendimenti NIKKEI 225	0,499377257	0,442693207	0,107465367	0,148316137	0,317615048
Logrendimenti NASDAQ 100	0,42831149	0,35054076	0,359654086	0,398645243	0,441712691
Logrendimenti S&P 500	0,444429435	0,379286934	0,395786535	0,44329866	0,480894021
Logrendimenti SHCOMP	0,27526539	0,227526539	0,176141361	0,170246168	0,326790226
Logrendimenti STI	0,681950122	0,480432758	0,292853301	0,273316852	0,572685018

	Logrendimenti NIKKEI 225	Logrendimenti NASDAQ 100	Logrendimenti S&P 500	Logrendimenti SHCOMP	Logrendimenti STI
Logrendimenti CAC 40	0,487158362	0,412066205	0,445694534	0,283384532	0,542330928
Logrendimenti DAX	0,481610953	0,408255463	0,432339022	0,269243568	0,522856963
Logrendimenti DOW JONES	0,190577827	0,895974259	0,978577061	0,310748853	0,486678275
Logrendimenti FTSE 100	0,278954924	0,562384147	0,622434916	0,271781442	0,536036571
Logrendimenti FTSE MIB	0,403565161	0,357613571	0,395804527	0,216141203	0,46032667
Logrendimenti HANG SENG	0,499377257	0,42831149	0,444429435	0,591704042	0,681950122
Logrendimenti IBEX 35	0,442693207	0,35054076	0,379286934	0,227526539	0,480432758
Logrendimenti IBOVESPA	0,107465367	0,359654086	0,395786535	0,176141361	0,292853301
Logrendimenti MERVAL	0,148316137	0,398645243	0,44329866	0,170246168	0,273316852
Logrendimenti NIFTY 50	0,317615048	0,441712691	0,480894021	0,326790226	0,572685018
Logrendimenti NIKKEI 225	1	0,177576165	0,192334111	0,298161685	0,450212608
Logrendimenti NASDAQ 100	0,177576165	1	0,943263252	0,308368373	0,454256
Logrendimenti S&P 500	0,192334111	0,943263252	1	0,3166639	0,495519212
Logrendimenti SHCOMP	0,298161685	0,308368373	0,3166639	1	0,393287095
Logrendimenti STI	0,450212608	0,454256	0,495519212	0,393287095	1

Figura 75 - La matrice di correlazione su orizzonte giornaliero

Grazie all'utilizzo della formattazione condizionale è possibile apprezzare ad occhio nudo l'intensità della correlazione presente tra i vari indici, a partire dalla perfetta (verde smeraldo)

via via diminuendo sino all'assenza di legame statistico tra le serie (rosso cremisi). Si noti che tutti i ρ assumono valore positivo (non vi è correlazione inversa tra nessuna coppia di vettori) e che l'intensità è mediamente maggiore tra tutti quegli indici che si muovono sullo stesso mercato o che presentano legami con un determinato mercato; ad esempio, gli indici delle Borse europee mostrano in generale una correlazione tra loro più forte rispetto a quella intercorrente tra un indice europeo ed uno asiatico. Ovviamente tutto ciò è fortemente condizionato dal grado di sviluppo e dallo spessore dei mercati in cui essi si muovono; mentre il Brasile e l'Argentina viaggiano su binari leggermente distanti rispetto all'Occidente e all'Asia, Singapore e India (Paesi a forte presenza occidentale) hanno maggiori legami con le realtà europea e statunitense. La correlazione tra i rendimenti logaritmici degli indici in esame costituisce dunque un realistico ritratto dell'inter-relazione tra i mercati globali e, in particolare, tra le reazioni ad eventi ed informazioni in grado di travalicare grandi distanze geografiche. Vigè un po' quello che in fisica è il principio dei vasi comunicanti: maggiori sono i legami tra due mercati, maggiore è la probabilità che la reazione in condizioni rischiose sia analoga. Andando a suddividere i dati in finestre temporali di ampiezza minore, è possibile studiare la correlazione sulle medie di riferimento; ad esempio considerando 50 trading day si ha che:

	Logrendimenti CAC 40	Logrendimenti DAX	Logrendimenti DOW JONES	Logrendimenti FTSE 100	Logrendimenti FTSE MIB
Logrendimenti CAC 40	1	0,950555749	0,631652783	0,862619809	0,923435949
Logrendimenti DAX	0,950555749	1	0,69472337	0,895329657	0,831764796
Logrendimenti DOW JONES	0,631652783	0,69472337	1	0,801605532	0,515912519
Logrendimenti FTSE 100	0,862619809	0,895329657	0,801605532	1	0,735257194
Logrendimenti FTSE MIB	0,923435949	0,831764796	0,515912519	0,735257194	1
Logrendimenti HANG SENG	0,767032927	0,82413824	0,635116432	0,828148649	0,626190808
Logrendimenti IBEX 35	0,926513055	0,854434292	0,494487497	0,779893183	0,893855203
Logrendimenti IBOVESPA	0,326601468	0,424707542	0,400051031	0,522756554	0,196916999
Logrendimenti Merval	0,46013598	0,42142614	0,471496605	0,534135572	0,41152343
Logrendimenti NIFTY 50	0,685421152	0,730351456	0,628873816	0,739690989	0,545026648
Logrendimenti NIKKEI 225	0,77377728	0,809826247	0,704011981	0,819925436	0,63482777
Logrendimenti NASDAQ 100	0,625551711	0,691907378	0,895814341	0,797308393	0,503826536
Logrendimenti S&P 500	0,665602003	0,717288217	0,979981191	0,830004853	0,543335866
Logrendimenti SHCOMP	0,508124495	0,625179667	0,63414395	0,703594396	0,389931309
Logrendimenti STI	0,763676232	0,777395219	0,77073386	0,869567466	0,634953271

	Logrendimenti HANG SENG	Logrendimenti IBEX 35	Logrendimenti IBOVESPA	Logrendimenti Merval	Logrendimenti NIFTY 50
Logrendimenti CAC 40	0,767032927	0,926513055	0,326601468	0,46013598	0,685421152
Logrendimenti DAX	0,82413824	0,854434292	0,424707542	0,42142614	0,730351456
Logrendimenti DOW JONES	0,635116432	0,494487497	0,400051031	0,471496605	0,628873816
Logrendimenti FTSE 100	0,828148649	0,779893183	0,522756554	0,534135572	0,739690989
Logrendimenti FTSE MIB	0,626190808	0,893855203	0,196916999	0,41152343	0,545026648
Logrendimenti HANG SENG	1	0,681335508	0,484379464	0,439761233	0,760862498
Logrendimenti IBEX 35	0,681335508	1	0,390150257	0,520229362	0,600182368
Logrendimenti IBOVESPA	0,484379464	0,390150257	1	0,457473777	0,527864881
Logrendimenti Merval	0,439761233	0,520229362	0,457473777	1	0,533469249
Logrendimenti NIFTY 50	0,760862498	0,600182368	0,527864881	0,533469249	1
Logrendimenti NIKKEI 225	0,808811823	0,620336578	0,372908773	0,433860635	0,789642182
Logrendimenti NASDAQ 100	0,678261243	0,551919821	0,408780372	0,540712735	0,671158597
Logrendimenti S&P 500	0,680676203	0,535859255	0,41198867	0,53879085	0,687811032
Logrendimenti SHCOMP	0,754597013	0,381692098	0,483925607	0,367507308	0,533745099
Logrendimenti STI	0,842163912	0,71026512	0,61544395	0,549025993	0,848668758

	Logrendimenti NIKKEI 225	Logrendimenti NASDAQ 100	Logrendimenti S&P 500	Logrendimenti SHCOMP	Logrendimenti STI
Logrendimenti CAC 40	0,77377728	0,625551711	0,665602003	0,508124495	0,763676232
Logrendimenti DAX	0,809826247	0,691907378	0,717288217	0,625179667	0,777395219
Logrendimenti DOW JONES	0,704011981	0,895814341	0,979981191	0,63414395	0,77073386
Logrendimenti FTSE 100	0,819925436	0,797308393	0,830004853	0,703594396	0,869567466
Logrendimenti FTSE MIB	0,63482777	0,503826536	0,543335866	0,389931309	0,634953271
Logrendimenti HANG SENG	0,808811823	0,678261243	0,680676203	0,754597013	0,842163912
Logrendimenti IBEX 35	0,620336578	0,551919821	0,535859255	0,381692098	0,71026512
Logrendimenti IBOVESPA	0,372908773	0,408780372	0,41198867	0,483925607	0,61544395
Logrendimenti Merval	0,433860635	0,540712735	0,53879085	0,367507308	0,549025993
Logrendimenti NIFTY 50	0,789642182	0,671158597	0,687811032	0,533745099	0,848668758
Logrendimenti NIKKEI 225	1	0,702356599	0,73417104	0,533260259	0,779271307
Logrendimenti NASDAQ 100	0,702356599	1	0,939711961	0,650690586	0,718130862
Logrendimenti S&P 500	0,73417104	0,939711961	1	0,651467191	0,796380673
Logrendimenti SHCOMP	0,533260259	0,650690586	0,651467191	1	0,687975647
Logrendimenti STI	0,779271307	0,718130862	0,796380673	0,687975647	1

Figura 76 - La matrice di correlazione su finestre di 50 trading day

Calcolando gli stimatori campionari su medie sufficientemente piccole rispetto alla quantità di valori dei vettori, l'intensità della correlazione presenta un andamento analogo ma subisce un deciso rafforzamento; mantenendo le finestre temporali ragionevolmente capillari si riscontra esattamente l'effetto che ci si aspetterebbe: al tendere dell'intervallo all'unità si ritorna ai valori originari di correlazione. Tutto ciò, senza la necessità di addentrarsi nei valori specifici assunti dai ρ , è perfettamente visibile dalla scala di colori della matrice; la preponderanza delle tonalità verde-giallo rispetto alla tabella precedente rivela legami statistici più forti tra gli andamenti delle variabili. Procedendo all'ampliamento della base di calcolo della media, si genera un effetto di diluizione della correlazione; i dati conteggiati per ciascun valore atteso aumentano e vanno a comprendere elementi che "annacquano" i risultati. Ecco perché, nel passaggio dell'ampiezza a 100 trading day, compaiono coefficienti negativi inizialmente non presenti; per maggior chiarezza a seguire si propone la matrice di riferimento:

	Logrendimenti CAC 40	Logrendimenti DAX	Logrendimenti DOW JONES	Logrendimenti FTSE 100	Logrendimenti FTSE MIB
Logrendimenti CAC 40	1	0,810931592	-0,814841222	-0,714551181	0,968337186
Logrendimenti DAX	0,810931592	1	-0,366210621	-0,220936876	0,659174122
Logrendimenti DOW JONES	-0,814841222	-0,366210621	1	0,977953522	-0,924823121
Logrendimenti FTSE 100	-0,714551181	-0,220936876	0,977953522	1	-0,848048049
Logrendimenti FTSE MIB	0,968337186	0,659174122	-0,924823121	-0,848048049	1
Logrendimenti HANG SENG	0,950772769	0,626710466	-0,923322742	-0,870664856	0,980233567
Logrendimenti IBEX 35	0,965582352	0,827250894	-0,726251178	-0,600164398	0,922153195
Logrendimenti IBOVESPA	-0,320961542	-0,013550474	0,540420182	0,534786896	-0,42583029
Logrendimenti Merval	-0,28070879	-0,02175987	0,507763087	0,521404661	-0,360108725
Logrendimenti NIFTY 50	0,943507686	0,684929252	-0,84645783	-0,785423569	0,947210608
Logrendimenti NIKKEI 225	0,954601327	0,698133985	-0,840165108	-0,782948632	0,947719923
Logrendimenti NASDAQ 100	-0,75053183	-0,293708778	0,982903519	0,977873026	-0,872589453
Logrendimenti S&P 500	-0,771830242	-0,311097999	0,994591696	0,98395639	-0,89638733
Logrendimenti SHCOMP	0,400472678	0,628428825	-0,081138921	-0,047799483	0,277504645
Logrendimenti STI	0,957445822	0,708731214	-0,825897549	-0,76363923	0,949721712

	Logrendimenti HANG SENG	Logrendimenti IBEX 35	Logrendimenti IBOVESPA	Logrendimenti Merval	Logrendimenti NIFTY 50
Logrendimenti CAC 40	0,950772769	0,965582352	-0,320961542	-0,28070879	0,943507686
Logrendimenti DAX	0,626710466	0,827250894	-0,013550474	-0,02175987	0,684929252
Logrendimenti DOW JONES	-0,923322742	-0,726251178	0,540420182	0,507763087	-0,84645783
Logrendimenti FTSE 100	-0,870664856	-0,600164398	0,534786896	0,521404661	-0,785423569
Logrendimenti FTSE MIB	0,980233567	0,922153195	-0,42583029	-0,360108725	0,947210608
Logrendimenti HANG SENG	1	0,88268342	-0,391842943	-0,3110115	0,958212201
Logrendimenti IBEX 35	0,88268342	1	-0,198919854	-0,125594224	0,906356627
Logrendimenti IBOVESPA	-0,391842943	-0,198919854	1	0,674105787	-0,228310086
Logrendimenti Merval	-0,3110115	-0,125594224	0,674105787	1	-0,137700244
Logrendimenti NIFTY 50	0,958212201	0,906356627	-0,228310086	-0,137700244	1
Logrendimenti NIKKEI 225	0,979349144	0,891778863	-0,31242966	-0,218983678	0,946784002
Logrendimenti NASDAQ 100	-0,87264466	-0,647491881	0,473132701	0,548097759	-0,790567844
Logrendimenti S&P 500	-0,892778672	-0,680411683	0,529682426	0,540703234	-0,805888033
Logrendimenti SHCOMP	0,365585804	0,345187566	0,098342664	0,238816532	0,413269298
Logrendimenti STI	0,968566553	0,919520709	-0,203854623	-0,134517059	0,986011208

	Logrendimenti NIKKEI 225	Logrendimenti NASDAQ 100	Logrendimenti S&P 500	Logrendimenti SHCOMP	Logrendimenti STI
Logrendimenti CAC 40	0,954601327	-0,75053183	-0,771830242	0,400472678	0,957445822
Logrendimenti DAX	0,698133985	-0,293708778	-0,311097999	0,628428825	0,708731214
Logrendimenti DOW JONES	-0,840165108	0,982903519	0,994591696	-0,081138921	-0,825897549
Logrendimenti FTSE 100	-0,782948632	0,977873026	0,98395639	-0,047799483	-0,76363923
Logrendimenti FTSE MIB	0,947719923	-0,872589453	-0,89638733	0,277504645	0,949721712
Logrendimenti HANG SENG	0,979349144	-0,87264466	-0,892778672	0,365585804	0,968566553
Logrendimenti IBEX 35	0,891778863	-0,647491881	-0,680411683	0,345187566	0,919520709
Logrendimenti IBOVESPA	-0,31242966	0,473132701	0,529682426	0,098342664	-0,203854623
Logrendimenti Merval	-0,218983678	0,548097759	0,540703234	0,238816532	-0,134517059
Logrendimenti NIFTY 50	0,946784002	-0,790567844	-0,805888033	0,413269298	0,986011208
Logrendimenti NIKKEI 225	1	-0,782193073	-0,802925083	0,445504736	0,977570239
Logrendimenti NASDAQ 100	-0,782193073	1	0,991152555	-0,009499291	-0,770638397
Logrendimenti S&P 500	-0,802925083	0,991152555	1	-0,035949643	-0,787522114
Logrendimenti SHCOMP	0,445504736	-0,009499291	-0,035949643	1	0,443662587
Logrendimenti STI	0,977570239	-0,770638397	-0,787522114	0,443662587	1

Figura 77 - La matrice di correlazione su finestre di 100 trading day

3. IL PORTAFOGLIO DI MARKOWITZ

3.1. Il modello analitico

La soluzione analitica proposta parte dalle teorie degli anni '60 sul Capital Asset Pricing Model e, attraverso un calcolo del modello di Markowitz, si concretizza in un problema di ottimizzazione vincolata sotto le seguenti ipotesi:

- ✓ Relazione di linearità tra il rendimento atteso di portafoglio e i rendimenti medi degli asset componenti (N.B. nel caso della trattazione in oggetto si ricorre ai rendimenti logaritmici);
- ✓ La ricchezza liquida posseduta è pienamente investita.

Il modello è ispirato a quello proposto da Campbell, Lo e Mac Kinley (1997)¹⁶; la funzione obiettivo da minimizzare corrisponde alla varianza di portafoglio σ^2_p ed è:

$$\text{Min } \frac{1}{2} \omega' \Omega \omega$$

Dove:

- $\frac{1}{2}$ è uno scalare moltiplicato per una maggiore semplicità computazionale ma che non determina alcuna variazione nelle soluzioni;
- ω e ω' sono rispettivamente il vettore dei pesi del portafoglio ed il suo trasposto (di dimensione 15X1 e 1X15);
- Ω è la matrice di varianza (i valori della diagonale principale) e covarianza (i valori al di fuori della diagonale principale) di dimensione 15X15, ottenuta dalle stime campionarie effettuate sulle serie storiche dei log-rendimenti¹⁷.

I vincoli da rispettare sono invece:

$$\omega' \mu = \mu_p$$

$$\omega' \mathbf{1} = 1$$

¹⁶ Per la notazione adottata e la costruzione del procedimento di ottimizzazione si fa riferimento al paper "Modello di simulazione per un portafoglio diversificato", redatto a cura di G.Palomba (materiale didattico per il Dipartimento di Economia presso l'Università Politecnica delle Marche, Maggio 2004).

¹⁷ Le varianze devono rispettare tassativamente il vincolo di non negatività.

Dove:

- μ_p è il rendimento atteso di portafoglio (valore scalare);
- μ è il vettore dei rendimenti medi di ciascun indice (vettore di dimensione 15X1);
- ι è il vettore costituito da sole componenti unitarie (vettore di dimensione 15X1).

In base alla teoria di risoluzione dei problemi di ottimizzazione occorre calcolare il Lagrangiano sottraendo alla funzione obiettivo i vincoli, ciascuno dei quali moltiplicato per uno scalare:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \omega' \Omega \omega - \lambda_1 (\omega' \mu - \mu_p) - \lambda_2 (\omega' \iota - 1)$$

Ricorrendo alle first order condition si giunge alla definizione dei moltiplicatori e, come diretta conseguenza, del vettore dei pesi ω :

$$\omega = \Omega^{-1} [\lambda_1 \mu + \lambda_2 \iota]$$

$$\lambda_1 = \frac{b - a \cdot \mu_p}{d} = 4,703867375$$

$$\lambda_2 = \frac{b \cdot \mu_p - c}{d} = -0,001018078$$

Dove:

- $a = \iota' \Omega^{-1} \iota = 20488,66$;
- $b = \iota' \Omega^{-1} \mu = 4,647039$;
- $c = \mu' \Omega^{-1} \mu = 0,022265$;
- $d = b^2 - ac = -434,583$.

Nel caso in esame, prendendo come valore arbitrario un rendimento atteso del generico portafoglio pari al 10%, i pesi determinati (ossia le componenti del vettore ω) sono:

N°	Asset	Peso	Operazione
1	CAC 40	1,340444	buying
2	DAX	39,47092	buying
3	DOW JONES	89,05997	buying
4	FTSE 100	-20,306	short selling
5	FTSE MIB	15,91922	buying
6	HANG SENG	3,639632	buying
7	IBEX 35	-46,0851	short selling
8	IBOVESPA	-8,42526	short selling
9	MERVAL	24,07612	buying
10	NIFTY 50	10,85315	buying
11	NIKKEI 225	8,312705	buying
12	NASDAQ 100	85,5379	buying
13	S&P 500	-154,83	short selling
14	SHCOMP	-1,45891	short selling
15	STI	-46,1045	short selling

Figura 78 - I pesi corrispondenti ad un portafoglio con rendimento del 10%

Effettuando un rapido controllo per verificare il pieno rispetto dei vincoli, si ottiene che la somma dei pesi è pari ad 1 (liquidità pienamente investita) e che il prodotto tra il vettore delle quote e quello dei log-rendimenti medi assume esattamente il valore del rendimento desiderato μ_p (10%).

3.2. Il portafoglio di minima varianza

Da una prospettiva squisitamente analitica, il punto di partenza per la definizione della frontiera consiste nel ragionare in un sistema cartesiano in cui l'asse delle ascisse e quello delle ordinate rappresentino rispettivamente il rischio e il rendimento atteso di portafoglio. La funzione obiettivo del problema di Markowitz, come già detto in precedenza, rappresenta la varianza del portafoglio stesso:

$$\sigma_p^2 = \omega' \Omega \omega$$

Sostituendo ω con la soluzione del problema di ottimo e imponendo i vincoli nel risultato ottenuto si ha dunque che:

$$\sigma_p^2 = \omega' \Omega \Omega^{-1} [\lambda_1 \mu + \lambda_2 \iota] = \lambda_1 \omega' \mu + \lambda_2 \omega' \iota = \lambda_1 \mu_p + \lambda_2$$

Come già stabilito nel capitolo introduttivo, la misura di rischio adottata è la deviazione standard dei rendimenti di portafoglio; estraendo la radice quadrata di entrambi i membri

dell'uguaglianza, la relazione ottenuta descrive un andamento iperbolico con concavità rivolta verso destra.

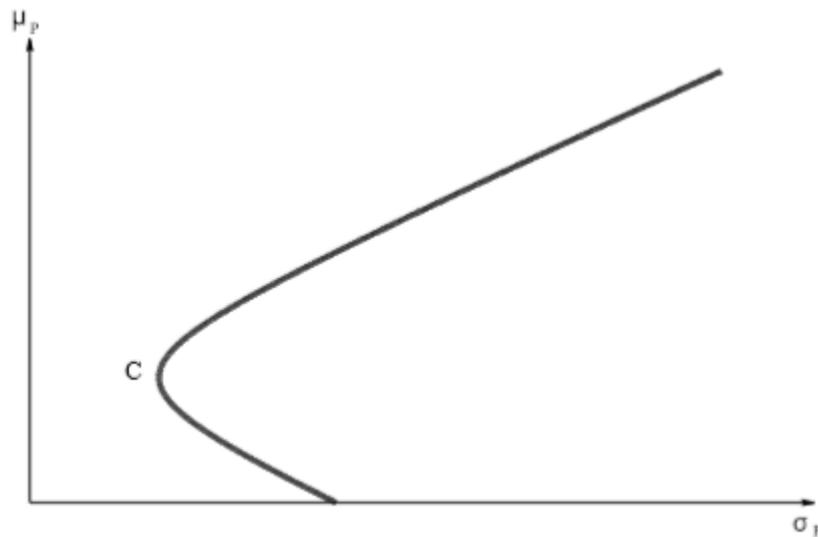


Figura 79 - La tipica forma iperbolica ottenuta rappresentando la legge che lega rendimento e deviazione standard

Il punto C di minimo sarà quello del portafoglio di minima varianza, al di sopra del quale la frontiera descriverà unicamente portafogli efficienti; applicando la teoria al caso in esame la rischiosità rilevata in termini di deviazione standard è di $4,88075 \cdot 10^{-5}$. Rimuovendo dal problema originario il primo vincolo è a questo punto possibile determinare, mediante il medesimo problema di ottimizzazione, il vettore ω_C corrispondente ai pesi del portafoglio di minima varianza:

$$\text{Min } \frac{1}{2} \omega'_C \Omega \omega_C$$

$$\omega'_C \iota = 1$$

Da cui $\omega_C = \frac{\Omega^{-1} \iota}{\iota' \Omega^{-1} \iota}$ e $\lambda = \frac{1}{\iota' \Omega^{-1} \iota}$. A seguire viene riportata la tabella con le quote del MVP e la tipologia di operazione associata a ciascun asset componente:

N°	Asset	Peso	Operazione
1	CAC 40	0,298046	buying
2	DAX	0,120102	buying
3	DOW JONES	0,146958	buying
4	FTSE 100	-0,11166	short selling
5	FTSE MIB	-0,08277	short selling
6	HANG SENG	-0,18693	short selling
7	IBEX 35	0,141018	buying
8	IBOVESPA	-0,03026	short selling
9	MERVAL	-0,01517	short selling
10	NIFTY 50	-0,02224	short selling
11	NIKKEI 225	0,056838	buying
12	NASDAQ 100	-0,25937	short selling
13	S&P 500	0,489177	buying
14	SHCOMP	0,073378	buying
15	STI	0,382885	buying

Figura 80 - I pesi del portafoglio di minima varianza

In base alle medesime considerazioni fatte per il generico portafoglio, i livelli attesi di rendimento e di varianza si ricavano come:

$$\mu_c = \frac{t' \Omega^{-1} \mu}{t' \Omega^{-1} t} = \frac{b}{a} = 0,00022681$$

$$\sigma_c^2 = \frac{1}{t' \Omega^{-1} t} = \frac{1}{a} = 4,88075 \cdot 10^{-5}$$

3.3. Il portafoglio ottimo

Per giungere alla formulazione del portafoglio ottimo è indispensabile definire il concetto di Sharpe Ratio; per una generica situazione ove si includano titoli risk-free esso non è altro che il rapporto tra lo spread dei rendimenti attesi ed il livello di rischio associato al portafoglio, ovvero:

$$SR_p = \frac{\mu_p - \mu_f}{\sigma_p}$$

Nel caso affrontato non sono incluse nel pool attività prive di rischio, ne deriva che $\mu_f=0$; come appare evidente il parametro SR_P non è altro che la costante di proporzionalità del rapporto, ossia il coefficiente angolare della retta:

$$\mu_P = SR_P \cdot \sigma_P$$

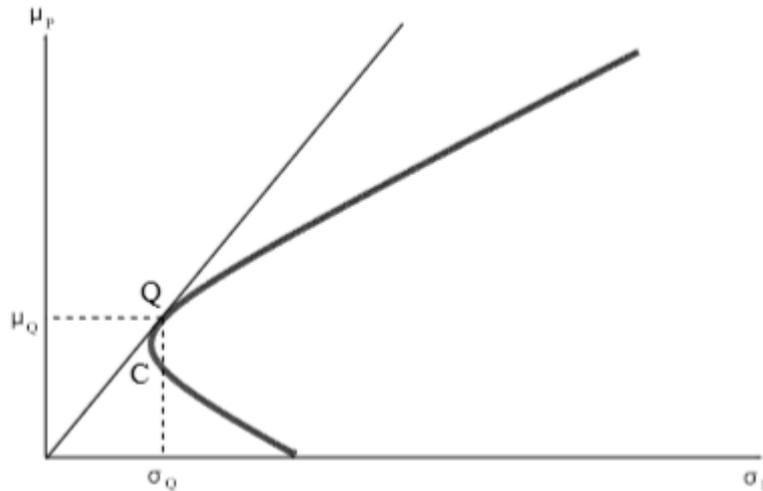


Figura 81 - Lo Sharpe Ratio rappresenta il coefficiente angolare della retta passante per un dato punto della frontiera

Poiché l'equazione manca dell'intercetta ($\mu_f=0$), la retta ottenuta passa per l'origine degli assi e la sua inclinazione specifica è un elemento caratterizzante il tipo di portafoglio cui si riferisce. Ogni aggregato di asset della frontiera possiede un suo Sharpe Ratio (ad esempio quelli relativi al portafoglio generico e di minima varianza sono rispettivamente pari a 0,145963059 e a 0,032465311) e quello relativo al punto di tangenza Q è di sostanziale importanza per l'identificazione del portafoglio ottimo. La retta tangente alla curva è quella avente la costante di proporzionalità maggiore rispetto a tutte le altre individuabili¹⁸ e, analiticamente, si può ricorrere ad una semplice intersezione tra funzioni per la sua determinazione:

$$\begin{cases} \sigma_P^2 = \lambda_1 \mu_P + \lambda_2 \\ SR_P^2 = \frac{\mu_P^2}{\sigma_P^2} \end{cases}$$

¹⁸ In corrispondenza del punto di tangenza si ha il valore massimo del coefficiente di Sharpe o, in altre parole, la combinazione rischio-rendimento caratterizzata dal rapporto più elevato (soluzione ottima).

Riscrivendo la seconda relazione in funzione del quadrato del rendimento atteso, sostituendo nella prima e imponendo il determinante del polinomio di secondo grado pari a 0 (condizione di tangenza), quello che si ottiene agevolmente è che:

$$SR_Q = \sqrt{c} = 0,149214213$$

A questo punto sono disponibili tutti gli elementi per determinare il rendimento atteso e l'esposizione al rischio del portafoglio ottimo:

$$\mu_Q = \frac{\mu' \Omega^{-1} \mu}{t' \Omega^{-1} \mu} = \frac{c}{b} = 0,004791197$$

$$\sigma_Q^2 = \frac{\mu' \Omega^{-1} \mu}{(t' \Omega^{-1} \mu)^2} = \frac{c}{b^2} = 0,001031021$$

Utilizzando μ_Q come dato di input per la determinazione del vettore dei pesi, ricorrendo alle impostazioni analitiche effettuate per il generico portafoglio all'inizio del paragrafo, si ottiene la composizione del portafoglio ottimo in base alla teoria di Markowitz:

N°	Asset	Peso	Operazione
1	CAC 40	0,345733	buying
2	DAX	1,920309	buying
3	DOW JONES	4,214517	buying
4	FTSE 100	-1,03551	short selling
5	FTSE MIB	0,649281	buying
6	HANG SENG	-0,01187	short selling
7	IBEX 35	-1,97372	short selling
8	IBOVESPA	-0,41432	short selling
9	MERVAL	1,086952	buying
10	NIFTY 50	0,475283	buying
11	NIKKEI 225	0,434524	buying
12	NASDAQ 100	3,665654	buying
13	S&P 500	-6,61632	short selling
14	SHCOMP	0,003279	buying
15	STI	-1,7438	short selling

Figura 82 - I pesi del portafoglio ottimo

Come evidente dalle tabelle riassuntive dei pesi di portafoglio, variando il livello di esposizione al rischio e/o il rendimento la composizione varia molto; mentre in una certa circostanza può esser conveniente acquistare, in un'altra la via più efficiente è magari la vendita allo scoperto. Partendo da questa evidente mutevolezza dei risultati in funzione della prospettiva adottata, ciò che traspare è la fragilità del modello di Markowitz. Il passo successivo sarà quello di “cambiare le carte in tavola” di proposito in modo da studiare la risposta del portafoglio alle mutazioni indotte.

3.4. Le fragilità del modello

Il pilastro su cui si fonda il meccanismo di ottimizzazione alla base del modello di Markowitz è la matrice di varianza e covarianza dei rendimenti e dunque, a monte, la matrice di correlazione¹⁹. I valori che la compongono sono la più diretta e concreta espressione del legame tra le coppie di strumenti finanziari facenti parte del portafoglio e, nel caso ad oggetto di questa trattazione, degli indici selezionati. La sensibilità dei mercati nell'incorporare informazioni relative al mondo politico e finanziario è molto pronunciata e determina scossoni in grado di modificare profondamente gli esiti di un'analisi statistica compiuta su un certo set di dati storici. Intervenendo sui coefficienti di correlazione, e forzandoli ad assumere valori differenti da quelli effettivi, si possono notare cambiamenti particolarmente significativi nella struttura del portafoglio (sia a livello quantitativo che qualitativo). Man mano che si aggiungono nuove quotazioni, gli stimatori campionari di covarianza e correlazione subiscono un aggiornamento determinando una rimodulazione globale delle posizioni aperte in portafoglio; operazioni di vendita allo scoperto possono mutare in acquisti e viceversa, con proporzioni anche molto distanti da quelle di partenza. Per studiare questo fenomeno legato ai limiti del modello di Markowitz si è ricorso alla funzione *CASUALE()* di Excel²⁰, impiegandola nella matrice di correlazione e producendo cinque diverse simulazioni per un numero via via sempre più consistente di indici, sino a coprire l'intero pool. L'idea è quella di propagare la distorsione a partire dalla situazione di partenza più semplice possibile: quella in cui solo uno degli asset vede cambiare i propri legami statistici nei confronti degli altri facenti parte del basket in esame²¹. L'utilizzo della generazione di numeri casuali, campionati da una distribuzione

¹⁹ I concetti di correlazione e covarianza sono molto legati fra loro: la covarianza può essere espressa dal prodotto tra le deviazioni standard e il ρ ; viceversa il ρ è rappresentabile come rapporto tra la covarianza e il prodotto delle deviazioni standard (la normalizzazione ne facilita la comprensione).

²⁰ La via più corretta in termini computazionali sarebbe stata quella di simulare le variabili casuali ricorrendo alle distribuzioni stimate a partire dalle serie storiche dei log-rendimenti.

²¹ L'ordine di propagazione della distorsione, per semplicità, segue quello con il quale gli indici sono elencati in tabella.

uniforme di estremi 0 e 1, consente di simulare in maniera ragionevolmente buona la randomizzazione delle fluttuazioni, giacché tutti i valori compresi nell'intervallo hanno la medesima probabilità di essere estratti. L'impiego di un numero così esiguo di scenari è motivato dalla semplice volontà di mostrare l'evoluzione di massima delle caratteristiche di rendimento atteso e rischio, non di calcolare le statistiche campionarie di equilibrio nel lungo periodo.

	Simulazioni				
	1	2	3	4	5
CAC 40	0,31779	0,070186	0,127533	0,381299	-0,48839
DAX	1,356025	2,214484	2,368016	0,889379	1,154931
DOW JONES	-0,62899	3,093845	1,375824	-0,11509	1,386963
FTSE 100	-1,01556	-1,01873	-1,05009	-0,40773	-1,39726
FTSE MIB	0,2751	0,648883	0,839476	0,697242	0,955046
HANG SENG	0,066569	0,041957	0,051561	-0,42932	-0,59436
IBEX 35	-0,8572	-2,01162	-2,2784	-1,14362	-0,90931
IBOVESPA	-0,31659	-0,40982	-0,42365	-0,39837	-0,43749
MERVAL	0,684998	1,052446	1,067746	0,542062	1,048385
NIFTY 50	0,368308	0,467315	0,42326	0,435402	0,795126
NIKKEI 225	0,278959	0,437324	0,424942	0,187835	0,703499
NASDAQ 100	-0,10941	3,159339	3,053235	0,780819	2,595753
S&P 500	2,312938	-4,96708	-3,05437	0,395555	-2,27257
SHCOMP	-0,10126	-0,03642	0,02026	0,060977	0,349864
STI	-1,63167	-1,74212	-1,94535	-0,87645	-1,89017
Rendimento atteso	0,003001	0,00466	0,004807	0,002549	0,004531
Rischio	0,022519	0,031319	0,032697	0,018736	0,031953

Figura 83 - Pesì, rendimento atteso e rischio dei cinque portafogli ottimi facendo variare i coefficienti di correlazione dell'indice CAC 40

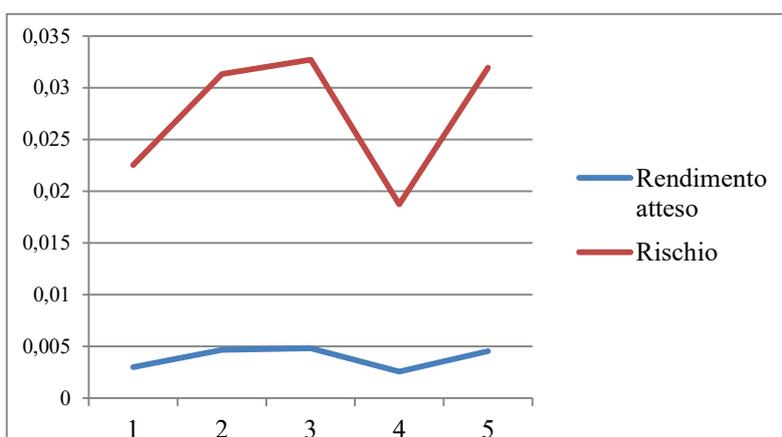
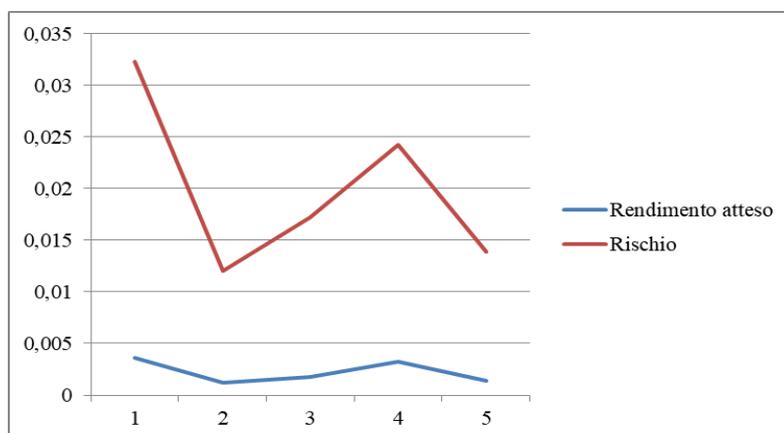


Figura 84 - L'andamento di rischio e rendimento nelle prime cinque simulazioni

Il grafico sopra riportato si riferisce alle cinque simulazioni di variazione casuale dei coefficienti ρ effettuate per il solo indice CAC 40. In base alle configurazioni di portafoglio ottimo ottenute si può chiaramente riconoscere un pattern di fluttuazione del rendimento atteso e del rischio all'interno di una fascia relativamente contenuta (soprattutto per quanto riguarda il primo). Come era naturale immaginare, i punti di maggiore e minore rendimento atteso si collocano esattamente in corrispondenza delle situazioni di rispettiva massima e minima esposizione al rischio. La prima distorsione indotta produce dunque cambiamenti nella struttura compositiva del portafoglio significativi ma non drammatici, con un impatto sui profili di remunerazione e rischiosità commisurato alla variazione casuale applicata.

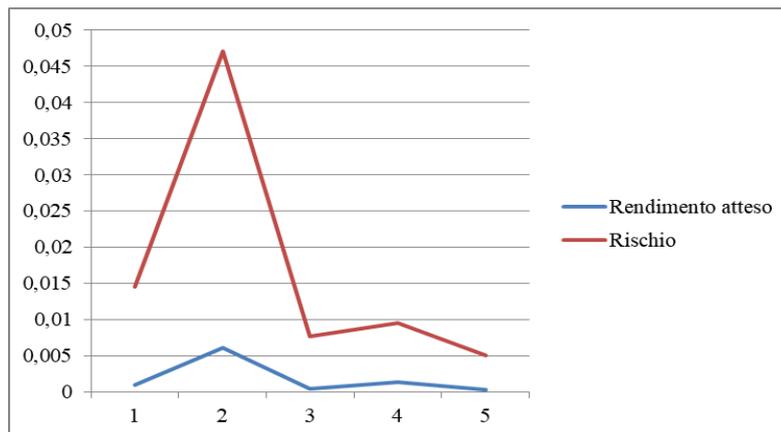
	Simulazioni				
	1	2	3	4	5
CAC 40	-0,28553	0,817395	0,839977	0,201007	-0,11029
DAX	-1,97716	0,92085	0,260517	-0,64023	0,771226
DOW JONES	0,052382	-0,1797	-0,7802	-0,09457	0,884685
FTSE 100	0,819691	1,177953	0,732484	-1,03932	-0,51084
FTSE MIB	-0,20372	-0,9999	0,299028	1,153977	0,902837
HANG SENG	0,628933	0,208579	-0,31408	-0,23634	0,175998
IBEX 35	0,074671	-0,71246	-1,12117	-1,04416	-1,03767
IBOVESPA	-0,37333	-0,30824	-0,29267	-0,38185	-0,10645
MERVAL	1,047017	0,259156	0,54472	0,853624	0,183103
NIFTY 50	0,206929	-0,01745	0,043889	0,450107	-0,71042
NIKKEI 225	1,669568	0,464503	0,951591	0,591271	-0,09487
NASDAQ 100	-1,44775	0,708011	-1,44148	1,395915	0,058101
S&P 500	3,873876	-0,86544	2,749819	0,369258	0,594776
SHCOMP	0,38338	-0,28467	-0,34531	0,266804	0,196491
STI	-3,46896	-0,18858	-1,12711	-0,8455	-0,19668
Rendimento atteso	0,003581	0,001167	0,001747	0,00321	0,001358
Rischio	0,03229	0,012076	0,017176	0,024273	0,013864

Figura 85 - Le cinque simulazioni che interessano i ρ dei primi tre indici; nel grafico in basso il relativo andamento dei profili rischio-rendimento



	Simulazioni				
	1	2	3	4	5
CAC 40	-0,47188	-1,52107	0,854852	1,47338	0,552498
DAX	1,648515	-0,48931	0,330984	-0,51028	1,122547
DOW JONES	-0,78826	0,456569	0,338391	-0,00854	-0,74027
FTSE 100	0,653241	-2,13923	0,349122	0,71639	0,294873
FTSE MIB	0,072807	-0,39927	0,395219	-0,59436	0,436768
HANG SENG	0,247622	1,003728	0,373063	-0,32595	-0,45228
IBEX 35	-0,01569	-0,73535	0,582395	-1,15071	0,440834
IBOVESPA	-0,1069	-0,31673	-0,13764	0,002611	-0,07903
MERVAL	0,431479	1,541081	-0,11908	0,755082	-0,25474
NIFTY 50	-0,73641	-0,83617	-0,00807	-0,45646	0,390958
NIKKEI 225	-0,56686	1,544765	-0,59355	0,16423	0,314403
NASDAQ 100	-0,02401	2,116943	0,332281	-0,65178	0,492244
S&P 500	0,956025	2,589246	-0,45573	1,117015	-0,30139
SHCOMP	-0,24423	1,003536	-0,19804	0,200702	-0,38511
STI	-0,05545	-2,81874	-1,04418	0,268668	-0,8323
Rendimento atteso	0,00106	0,006168	0,000519	0,001376	0,000322
Rischio	0,01462	0,047031	0,007681	0,009587	0,005075

Figura 86 - Le cinque simulazioni che interessano i ρ dei primi sette indici; nel grafico in basso il relativo andamento dei profili rischio-rendimento

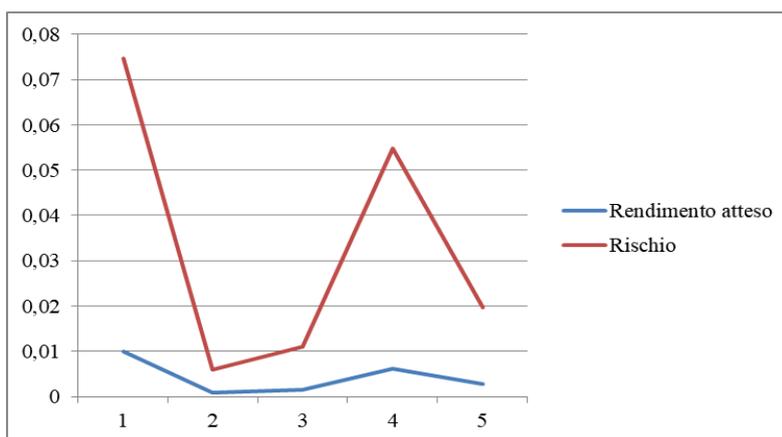


I due prospetti di cui sopra si riferiscono a condizioni di ulteriore esasperazione della variazione random di correlazione tra le serie storiche dei rendimenti logaritmici; mentre nel primo caso la generazione di numeri casuali è stata applicata ai coefficienti ρ di due indici in più, in quello seguente il campione incrementale cresce ulteriormente fino a comprenderne sette. A partire dalla situazione iniziale, caratterizzata da stazionarietà e fluttuazioni contenute, si passa a configurazioni con cambiamenti sempre più consistenti ed estremi nella composizione del portafoglio. Osservando le spezzate che descrivono l'andamento di rendimento atteso e rischio si osserva un netto aumento della volatilità di tali parametri, fermo restando il fondamentale parallelismo che costituisce la più tangibile manifestazione della congruità tra i due (la rischiosità di un investimento deve essere premiata da una maggiore remunerazione).

Nell'ultimo scenario (vedi Figura 87) la correlazione varia casualmente tra i log-rendimenti dell'intero blend di asset, definendo lo step finale in cui la distorsione indotta è più intensa. L'andamento del portafoglio ottimo è dunque legato a doppio filo alle nuove informazioni che il mercato fornisce e, in seconda battuta, all'aggiornamento della dipendenza statistiche fra esse; pesi e performance rivelano una spiccata sensitività ai trend dei mercati finanziari.

	Simulazioni				
	1	2	3	4	5
CAC 40	-1,77584	-0,55107	0,394891	-5,33717	-1,50038
DAX	-6,46325	0,24529	0,288221	2,825406	-0,89861
DOW JONES	4,43138	0,858206	0,910816	-4,79186	2,360481
FTSE 100	1,155197	0,400891	-0,6374	-0,02652	0,778242
FTSE MIB	1,210082	0,421234	0,418544	3,039957	0,734754
HANG SENG	4,491731	0,469439	-0,2187	-0,55594	-1,2058
IBEX 35	-1,2633	0,62158	-1,12649	-0,68734	-1,19442
IBOVESPA	-2,08312	-0,29913	-0,74729	-2,22601	0,229351
MERVAL	3,694477	-0,31505	0,072724	3,045161	0,461543
NIFTY 50	9,543342	0,812888	1,559324	-0,80541	0,745842
NIKKEI 225	-10,1292	-0,61872	0,101947	3,146547	-0,22731
NASDAQ 100	2,426465	0,353877	-0,19986	-0,52457	0,442924
S&P 500	-1,74414	-0,0965	-0,0056	2,688132	1,808179
SHCOMP	1,913765	-0,05277	0,128829	1,995547	-0,68352
STI	-4,40756	-1,25016	0,060059	-0,78593	-0,85129
Rendimento atteso	0,009967	0,000743	0,001423	0,006153	0,002809
Rischio	0,074796	0,005895	0,011087	0,054728	0,019743

Figura 87 - Le cinque simulazioni che interessano ρ dell'intero basket; nel grafico a fianco il relativo andamento dei profili rischio-rendimento



Il modello di Markowitz si basa su un assunto di rilevanza essenziale: l'investitore non possiede delle opinioni personali che condizionano la configurazione del portafoglio. Con questi presupposti è evidente che sia il mercato a fare da sovrano e, ai fini delle operazioni di trading, ciò che rileva è unicamente la modalità con cui le quotazioni vanno ad incorporare le nuove informazioni disponibili e le opinioni della maggioranza degli investitori facenti parte dei segmenti di riferimento. Possedendo una certa fetta del portafoglio di mercato è dunque essenziale dedicarsi costantemente al suo monitoraggio, in modo da reagire prontamente alle variazioni con operazioni di acquisto o vendita allo scoperto. Trattandosi di un modello dove i pesi del portafoglio vengono determinati in modo assolutamente asettico, le escursioni tra le varie configurazioni possono essere anche molto ampie e richiedono un'attenta gestione della liquidità posseduta. L'instabilità costitutiva si ripercuote quindi sulla necessità di compiere operazioni di trading ad altra frequenza, con l'ovvia erosione dei profitti realizzati a causa dei costi per transazione sostenuti²². Markowitz propose dunque una soluzione innovativa per l'epoca, ma che presenta numerose fragilità intrinseche (la maggior parte di esse sono collegate alle ipotesi effettuate a monte); con l'evoluzione dei mercati finanziari e l'ispessimento di realtà all'epoca ancora molto arretrate si rese necessario pensare a qualcosa di diverso. L'investitore, il gestore del fondo o chiunque si occupasse di amministrare i beni in portafoglio, diventò una figura sempre più centrale condizionando con le proprie opinioni le prospettive di redditività e di esposizione al rischio della capital allocation; Black & Litterman proposero una prospettiva assolutamente inedita, un nuovo modo di ragionare che faceva perno su uno dei teoremi più noti del calcolo combinatorio: quello di Bayes.

²² Recentemente si stanno diffondendo piattaforme multimediali che consentono di gestire le operazioni con pochi click (anche tramite smart-phone), a fronte di costi per transazione praticamente nulli; nel futuro prossimo l'abbattimento di oneri transazionali probabilmente andrà ad incidere ulteriormente sul processo di delineazione delle scelte d'investimento. Per memoria si ricorda che sono stati ipotizzati imposte e costi per transazione nulli.

4. IL MODELLO DI BLACK E LITTERMAN

4.1. L'impianto teorico e le ipotesi

Il modello muove dall'ipotesi essenziale che la densità di probabilità dei rendimenti attesi sia di tipo Normale di parametri μ (media) e Σ (varianza); dal momento che la media del valore atteso non è definibile senza compiere un errore, per quanto piccolo esso sia, anche la μ si distribuirà secondo una Normale. Lo scarto quadratico medio (e quindi la deviazione standard) costituisce dunque una metrica dell'approssimazione effettuata nell'utilizzare π come stima della media dei rendimenti attesi.

$$E(r) \sim N(\mu, \Sigma) \rightarrow \mu \sim N(\pi, \Sigma_r)$$

Riscrivendo la relazione in modo da legare tra di loro i parametri μ e π ciò che si ottiene è che:

$$\pi = \mu + \varepsilon$$

Dove ε rappresenta l'errore compiuto effettuando l'approssimazione e si assume sia distribuito secondo una Normale di media nulla e varianza pari a Σ_π . Sfruttando la relazione e passando allo scarto quadratico medio si ha che:

$$\Sigma_r = \Sigma + \Sigma_\pi \quad \text{con} \quad \Sigma_r \geq \Sigma, \Sigma_\pi$$

Qualora non vi sia un errore di stima, Σ_r tende a Σ ; man mano che l'approssimazione si fa più imprecisa la varianza Σ_r aumenta. Concludendo, il valore atteso dei rendimenti (logaritmici nel caso di questa trattazione) segue una Normale di media π e varianza Σ_r .

4.2. La determinazione dei parametri

- π

Il primo "ingrediente" del modello nasce dall'esigenza di andare ad incorporare nel calcolo dei pesi la redditività del portafoglio nel caso più semplice tra quelli verificabili: l'investitore è privo di view personali e si affida al mercato. Ciò che rileva è dunque la capacità degli investimenti di garantire un ritorno mediamente più alto rispetto a quello dell'asset risk-free selezionato; lo spread descrive quindi l'extra-rendimento ottenuto, ossia il premio per il rischio

di mercato rappresentato dallo scostamento del valore atteso dei rendimenti rispetto a quello di una posizione priva di rischio²³:

$$E(r_i) - r_f = \Pi = \delta \Sigma w$$

Dove:

- ❖ $\Pi = E(\mathbf{r}_i) - r_f$ è il market risk-premium (nel caso affrontato ha dimensione 15X1);
- ❖ δ è il coefficiente di avversione al rischio, ossia il costo opportunità della scelta dell'investitore tra rischio e rendimento;
- ❖ Σ è la matrice di varianza e covarianza (di dimensione 15X15 in riferimento al portafoglio in esame);
- ❖ w è il vettore dei pesi determinati dalla capitalizzazione di mercato (di dimensione 15X1).

Secondo la teoria del mercato efficiente, quest'ultimo tende al raggiungimento di una situazione di equilibrio nella quale l'utilità derivante dalla compresenza di un contributo positivo (quello del rendimento di un investimento) e di uno negativo (quello dell'esposizione al rischio) sia massimizzata²⁴. È perciò cruciale che la composizione del portafoglio ideale sia quella che vada ad annullare la derivata prima della funzione di utilità stessa; ricorrendo alla tecnica dell'ottimizzazione inversa di Sharpe si ottiene che:

$$U(w) = w\Pi - \frac{\delta}{2} w\Sigma w$$

$$U'(w) = \Pi - \delta \Sigma w$$

$$U'(w) = 0 \rightarrow \Pi - \delta \Sigma w = 0 \rightarrow \Pi = \delta \Sigma w$$

²³ È ragionevole affermare che maggiore è il gap che separa il rendimento atteso di un titolo rispetto ad un asset risk-free, maggiore dovrà essere il premio corrisposto all'investitore; ad esempio, nel caso delle obbligazioni, il rendimento corrisposto ai possessori viene calcolato sulla base del rating assegnato al titolo. Lo spread desiderabile dall'investitore è perciò funzione del grado di avversione al rischio che lo caratterizza.

²⁴ La soluzione di ottimo si trova laddove l'investitore è in condizione di indifferenza tra l'utilità marginale di un incremento di profitto e quella di un decremento di rischio.

- δ

Come già detto in precedenza, il coefficiente di avversione al rischio δ è una costante che fornisce una metrica dell'atteggiamento dell'investitore nei confronti del trade-off rischio/performance; è una delle componenti essenziali per il calcolo degli extra-rendimenti di equilibrio (va a modulare l'impatto della matrice di varianza e covarianza e dei pesi di capitalizzazione). Considerando che il vettore Π costituisce la forbice tra il valore atteso dei rendimenti dei singoli asset e quello della componente risk-free, se si va a moltiplicare entrambi i membri dell'uguaglianza per w , quello che si ottiene è il market risk-premium, il quale è direttamente proporzionale alla varianza del portafoglio di mercato:

$$w\Pi = \delta w\Sigma w \rightarrow E(r_M) - r_f = \delta \sigma_M^2$$

$$\delta = \frac{E(r_M) - r_f}{\sigma_M^2}$$

A parità di esposizione al rischio, considerando unicamente il mercato costituito dagli asset componenti, maggiore è lo spread richiesto dall'investitore e maggiore sarà il valore assunto dal parametro δ ; viceversa, a parità di spread, la costante decrescerà quadraticamente all'aumentare della varianza del portafoglio di mercato. Il rapporto da dunque un'idea del rendimento aggiuntivo necessario per remunerare l'incremento di rischiosità del titolo posseduto.

- w

Il vettore dei pesi w si ottiene in modo molto semplice: effettuando una proporzione tra la capitalizzazione del singolo asset e quella complessiva di tutti i componenti del portafoglio:

$$w_i = \frac{c_i}{c_M}$$

I termini c_i e c_M rappresentano rispettivamente la capitalizzazione del singolo titolo e del portafoglio di mercato, mentre w_i è il peso percentuale associato alla singola posizione. Il mercato d'interesse dell'investitore è quindi quello costituito unicamente dagli strumenti finanziari selezionati per la costituzione del paniere; l'utilizzo della formula di Sharpe consente tuttavia di incorporare nel modello le aspettative sugli extra-rendimenti offerti rispetto ad una posizione ritenuta ragionevolmente priva di rischio. Nella stragrande maggioranza dei casi l'asset risk-free è costituito da un'obbligazione governativa di durata medio-lunga (ad esempio

il Bund tedesco quinquennale) il cui rendimento alla scadenza è una media ponderata dei tassi spot corrispondenti alle date di stacco delle cedole. Pur tenendo ancora fuori dal ragionamento le view del manager, il modello di Black & Litterman si configura come una moderna sintesi tra la gestione personale del portafoglio e le opinioni della maggioranza degli investitori di un certo segmento di interesse.

- τ

Lo scalare τ è l'elemento fondamentale per la definizione della matrice di varianza e covarianza relativa alla stima della media dei rendimenti; B&L ipotizzarono che la legge tra Σ e Σ_π fosse di tipo lineare, era dunque necessaria l'introduzione di un numero puro che misurasse il rapporto tra le due matrici²⁵. Il termine τ presenta due caratteristiche fondamentali:

- ❖ $0 \leq \tau \leq 1$ secondo la teoria;
- ❖ $\tau \rightarrow 0$ secondo la prassi (nella maggior parte dei casi $0,01 \leq \tau \leq 0,05$).

Tali condizioni sono dovute al fatto che, ragionevolmente, l'investitore avrà meno incertezza riguardo ad un'approssimazione della variabile casuale; mentre alcune scuole di pensiero tendono ad adottare un valore unitario della costante (effettuando una semplificazione che incorpora un'ipotesi di mancanza di aggiornamento), a livello concettuale la scelta più corretta sarebbe quella di selezionare valori quasi nulli²⁶. Proprio in questo consiste uno dei maggiori punti di forza del modello di B&L: le opportunità di arbitraggio possono essere adeguatamente sfruttate per realizzare un profitto (che sarà centrato attorno valori congrui, dal momento che il verificarsi di scostamenti troppo elevati è piuttosto raro); l'intero meccanismo fa dunque leva sulle tempistiche dei processi di bilanciamento tipici del mercato efficiente e ricorre alla statistica bayesiana per stabilire un ponte tra di essi e le opinioni personali di chi gestisce la liquidità. Tornando alla scelta del valore assunto dalla costante di proporzionalità, un'altra strada che si può percorrere è quella di tararla ricorrendo all'idea che le view vengano formulate sulla base di un adeguato numero di osservazioni sotto regime di incertezza. A questo punto anche l'ultimo elemento cardine per la determinazione del vettore dei rendimenti impliciti è disponibile per l'analisi:

$$\Sigma_\pi = \tau \Sigma$$

²⁵ Il parametro τ indica di quante volte aumenta Σ_π all'aumentare di Σ .

²⁶ Dal momento che la costante tende a zero, la matrice di varianza e covarianza della stima sarà significativamente più piccola rispetto a quella della media dei rendimenti.

4.3. Le view

Parte integrante del modello di B&L è la possibilità di suddividere le view in due specifiche categorie:

➤ *view absolute:*

esprimono l'opinione che il valore assunto da un certo asset sia maggiore, minore o uguale a quello assunto dal medesimo in un periodo di riferimento (per semplicità si assume sia l'anno precedente)

$$A_t >/=/< A_{t-1} \quad \text{con } t = 1, 2, \dots, n$$

➤ *view relative:*

esprimono l'opinione che il valore assunto da un asset sia maggiore, minore o uguale a quello assunto da un altro asset nel medesimo periodo di riferimento

$$A_t >/=/< B_t \quad \text{con } t = 1, 2, \dots, n$$

In altre parole, le view non sono altro che matrici incorporanti il grado di fiducia del manager nei confronti delle proprie opinioni di andamento del valore degli asset, sia in senso assoluto che relativo. Eventuali discordanze tra di esse verranno poi processate dal modello, che provvederà a mescolarle in modo coerente e consistente con l'andamento del mercato. Andando ad assumere che il gestore del fondo abbia k differenti opinioni in merito ad n asset, le view sono rappresentabili sotto forma di relazione lineare:

$$P \cdot \mu = Q + \varepsilon^v$$

Dove:

- P è una matrice di dimensione $k \times n$, nella quale ciascun elemento indica la k -esima view riferita all' n -esimo asset; i valori nulli rappresentano l'assenza di opinioni personali a riguardo. Le due diverse tipologie di view sono facilmente riconoscibili

all'interno della matrice P: mentre le relative hanno somma per riga pari a 0, le assolute sono caratterizzate da un valore complessivo pari ad 1;

- μ è il vettore di dimensione $n \times 1$ (vettore colonna) che racchiude al suo interno la media dei rendimenti dell' n -esimo asset;
- Q è il vettore di dimensione $k \times 1$ costituito dal valore atteso per ciascuna opinione;
- ε^v è il vettore degli errori random commessi dal manager nel formulare le view.

4.4. Il termine ε^v

Come già citato nel paragrafo precedente, la formulazione delle view da parte del manager è caratterizzata da un dato livello di incertezza, determinato dall'impossibilità effettiva di sapere ex-ante se le previsioni in merito all'andamento del valore degli asset rispetto a quello di equilibrio saranno corrette. Il termine ε^v è quindi espressione di tale errore e si distribuisce secondo una Normale di media 0 e varianza Ω , ne consegue che la distribuzione delle opinioni sarà anch'essa di tipo Normale ma con media Q e scarto quadratico medio Ω . Quest'ultima non è altro che la matrice di varianza e covarianza caratteristica delle view; si tratta di una matrice in cui gli elementi presenti sulla diagonale principale possono anche non assumere tutti valori non nulli, considerando che questa è una caratteristica di opinioni in regime di incertezza (nel caso non si abbiano dubbi sull'esattezza delle view il rispettivo termine sulla diagonale sarà pari a 0).

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \omega_{kn} \end{pmatrix}$$

La matrice Ω è di sostanziale importanza per il corretto funzionamento del meccanismo messo in piedi da B&L, questo perché ad essere utilizzata nel procedimento è la sua inversa denominata "matrice di confidenza". Gli esperti di capital allocation hanno elaborato diversi metodi per la definizione di Ω , uno dei più utilizzati si basa tuttavia sulla stessa logica impiegata per ottenere Σ_π : utilizzare una matrice di varianza e covarianza proporzionale a quella dei rendimenti attesi. Ciò è possibile ricorrendo ancora una volta al termine $\tau\Sigma$ nell'espressione²⁷:

$$\Omega = \text{diag} (P (\tau\Sigma) P')$$

²⁷ L'operatore "diag" restituisce in output una matrice in cui i termini sulla diagonale sono pari a quelli della matrice di input e gli altri sono nulli.

Altra strada è invece quella di far leva sulla distribuzione Normale delle view per ottenere il valore della varianza dopo aver fissato un intervallo di confidenza adeguato: ipotizzando che quanto previsto si realizzerà con una determinata probabilità (ampiezza dell'intervallo) e conoscendo a priori la ripartizione dell'area sottesa alla distribuzione in funzione della deviazione standard (dispersione dal valor medio), è possibile calcolare agevolmente la varianza. Si hanno dunque a disposizione tutti gli elementi, ricavabili in modo più o meno semplice e in misura più o meno soggettiva, per l'applicazione del modello di B&L; ultimo passo è quello di mescolare tutti gli "ingredienti" attraverso l'ausilio del teorema di Bayes.

4.5. Il teorema di Bayes come ponte tra l'investitore e il mercato

Il teorema di Bayes è il perno attorno a cui ruota l'intero procedimento di mescolta delle due sorgenti informative secondo B&L; per memoria si ricorda che la formula è:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) P(A)}{P(B)}$$

Dove $P(B|A)$ è la probabilità del realizzarsi dell'evento B condizionata al realizzarsi dell'evento A mentre $P(A|B)$ è la cosiddetta *distribuzione a posteriori* o *posterior distribution*; $P(A)$ e $P(B)$ sono rispettivamente la *distribuzione a priori* (o *prior distribution*) e la probabilità del verificarsi dell'evento B.

Bisogna dunque stabilire una corrispondenza che permetta di associare le informazioni del modello alla formula analitica:

- ❖ $P(A)$ è la prior costituita dalle view del manager ($P(Q)$);
- ❖ $P(B)$ rappresenta la distribuzione dei rendimenti attesi ($P(\Lambda)$);
- ❖ $P(B|A)$ è la probabilità che si verifichino i livelli di rendimento attesi date le opinioni dell'investitore ($P(\Lambda|Q)$);
- ❖ $P(A|B)$ è la posterior ottenuta tramite Bayes ($P(Q|\Lambda)$).

Con le opportune sostituzioni la formula di Bayes può essere riscritta come:

$$P(Q|\Lambda) = \frac{P(Q|\Lambda) P(\Lambda)}{P(Q)}$$

La lettera Q è dunque il vettore dei rendimenti di equilibrio, mentre la Λ rappresenta il vettore dei rendimenti attesi dal manager in base alle opinioni formulate con un certo livello di fiducia

a riguardo; si assume poi che $\Lambda|\mu \sim N(Q, \tau\Sigma)$. Quest'ultima condizione in particolare sta ad indicare che, all'equilibrio, i rendimenti condizionati alle previsioni del manager corrispondono alle previsioni stesse in valore atteso. Essendo la posterior distribution della media dei rendimenti di tipo Normale, si può concludere che:

$$\mu_{post} \sim N(M_{BL}, V_{BL})$$

$$M_{BL} = [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}[(\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P'\Omega^{-1}Q]$$

$$V_{BL} = [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}$$

Il punto di arrivo del modello è dunque costituito esattamente dalle due statistiche descrittive principali di un portafoglio composto dal pool di strumenti finanziari selezionato dall'investitore (fungeranno poi da input per il procedimento di Markowitz); media e varianza tengono conto sia dell'andamento effettivo del mercato che delle aspettative del manager, a spostare l'ago della bilancia sono perciò rispettivamente la matrice di varianza e covarianza del portafoglio di mercato ed il livello di fiducia che il gestore del fondo ripone nel proprio punto di vista. Chi decide come investire la liquidità si ritrova perciò completamente integrato come parte attiva nel modello abbandonando la più arcaica e fragile soluzione di Markowitz, nella quale veniva relegato a mero spettatore delle dinamiche di mercato. Sfruttando la correlazione tra i differenti mercati di riferimento è poi possibile godere di un beneficio da diluizione dell'errore; l'incertezza intrinseca nelle opinioni formulate viene ripartita su tutti gli asset presenti in portafoglio. Il meccanismo di B&L consente dunque di condurre una gestione equilibrata della composizione, evitando escursioni troppo ampie nei pesi (al variare delle informazioni disponibili); occorre però tener presente che, rispetto ad un portafoglio di equilibrio, gli asset i cui pesi varieranno maggiormente saranno proprio quelli su cui il manager ha espresso delle view. A chiudere il cerchio è infine il ciclo di upgrade delle distribuzioni: la vecchia posterior diviene la nuova prior, garantendo un valore atteso più prossimo alle osservazioni effettuate e una volatilità inferiore per via del maggiore stock informativo a disposizione.

4.6. L'applicazione del modello

4.6.1. I pesi della capitalizzazione di mercato

Utilizzando come punto di partenza lo stesso paniere impiegato per la costruzione del portafoglio secondo Markowitz, il primo passo da compiere per il calcolo dei rendimenti impliciti²⁸ è capire quanto pesi la capitalizzazione del singolo indice rispetto al totale degli asset che compongono il basket; in altre parole, occorre definire il peso w della capitalizzazione di mercato di ciascun indice. Per effettuare questi calcoli si è ricorso agli ultimi dati disponibili²⁹, in modo da rendere la trattazione il più possibile aggiornata; per poter confrontare i risultati ottenuti con quelli di Markowitz si assume poi che non vi siano state variazioni significative di capitalizzazione rispetto all'intervallo temporale a cui si riferiscono i dati di input. Un ragionamento a parte va poi esplicitato per due asset in particolare: l'IBOVESPA e lo STI (rispettivamente gli indici della Borsa del Brasile e di Singapore). Si tratta infatti non di indici azionari (costruiti come una media del valore delle azioni contenute al loro interno) ma di indici puri, espressione concreta dell'andamento del mercato di riferimento. Per ovviare al problema di non potersi ricondurre ad un valore di capitalizzazione, si è ritenuto opportuno ricorrere ad una proporzione calcolata rispetto al mercato più spesso presente nel portafoglio, ossia quello americano:

Rank	Nome Borsa	Capitalizzazione	Peso relativo
1	NYSE	20658991	100%
21	BM & BOVESPA	780247	3,78%
22	SINGAPORE EXCHANGE	737995	3,57%

Figura 88 - Il calcolo del peso di IBOVESPA e STI sulla base della capitalizzazione della Borsa di New York

²⁸ Con tale termine si indica il premio per il rischio di mercato da corrispondere agli investitori per ciascun asset; in altre parole si tratta degli extra-rendimenti richiesti (rispetto all'asset risk-free) per assumersi l'onere di un investimento più rischioso.

²⁹ I dati sulle capitalizzazioni sono aggiornati al 30/06/2018, ovvero sia prima del raggiungimento del livello storico di 200 miliardi da parte di Apple.

	Cap. Mercato	Peso %
FTSE MIB	561,77	1,09%
CAC 40	1567,09	3,03%
DAX	1269,94	2,46%
FTSE 100	2598,57	5,03%
S&P 500	21230,55	41,06%
NASDAQ 100	7606,32	14,71%
DOW JONES	5818,1	11,25%
NIKKEI 225	2594,53	5,02%
HANG SENG	1471,78	2,85%
NIFTY 50	963,49	1,86%
MERVAL	59,94	0,12%
STI	469,4	0,91%
IBOVESPA	28,19	0,05%
IBEX 35	529,52	1,02%
SHCOMP	4935,88	9,55%
Totale	51705,07	100%

Figura 89 - I pesi della capitalizzazione di mercato dei 15 indici

percentuali delle capitalizzazioni di mercato, sempre considerando che la base di calcolo è costituita unicamente dagli indici del basket. Ciò che appare subito evidente dalla formattazione condizionale dell'ultima colonna (si va dal rosso per i pesi più piccoli al verde per i più grandi), è che la capitalizzazione legata agli asset esponenti del mercato americano costituisce più del 65% dell'intero portafoglio. Tale caratteristica è coerente con la scelta di mescolare indici small/mid/large cap³⁰ (il solo S&P pesa per oltre il 40%) e da ulteriore riprova dell'esattezza in merito alla scelta fatta di utilizzare la NYSE come base di definizione dei pesi percentuali dell'IBOVESPA e dello STI.

4.6.2. Il coefficiente di avversione al rischio

Il termine δ del modello di Black & Litterman, come già specificato nel paragrafo dell'impianto teorico, richiama la tendenza degli investitori ad assumersi dei rischi o meno nel mercato di riferimento; dal punto di vista più strettamente analitico da quindi un'idea dell'extra-rendimento per ciascun punto aggiuntivo di rischio rispetto ad un benchmark. Nel caso in esame, trattandosi di un portafoglio composto da asset provenienti da tutto il mondo, si aprivano due possibili strade da seguire per la definizione del parametro δ :

1. Utilizzare un indice relativo all'andamento dei mercati globali facendo riferimento alla provenienza degli asset del paniere, ad esempio l'MSCI WORLD (Morgan Stanley Composite Index World);

³⁰ La capitalizzazione caratterizzante i singoli mercati da un'idea realistica del grado di sviluppo dei relativi Paesi e ai pivot attorno ai quali ruotano i mercati finanziari, quelli meno sviluppati e/o maggiormente "bancocentrici" detengono quote di capitalizzazione significativamente inferiori rispetto a realtà maggiormente incentrate sulla Borsa.

- Utilizzare un indice relativo ai mercati europei facendo riferimento alla provenienza dell'investitore tipo ad oggetto di questa trattazione; classici esempi sono l'MSCI EUROPE, l'EUROSTOXX50 o l'EUROSTOXX600.

Di seguito viene proposta una tabella riassuntiva in cui si sintetizzano le varie possibilità di calcolo del coefficiente di avversione al rischio sfruttando benchmark e asset risk-free differenti³¹:

Benchmark	Valore atteso	Varianza	Bund 2 anni	Bund 5 anni	Bund 10 anni	δ (B2)	δ (B5)	δ (B10)
Eurostoxx50	0,000174	0,000131	-0,00237	-0,00281	-0,00096	19,41985	22,77863	8,656489
Msci Europe	0,000217	0,000096	-0,00237	-0,00281	-0,00096	26,94792	31,53125	12,26042
Msci World	0,000346	0,00007	-0,00237	-0,00281	-0,00096	38,8	45,08571	18,65714
Eurostoxx600	0,000288	0,000094	-0,00237	-0,00281	-0,00096	28,2766	32,95745	13,2766

Figura 90 - I valori del coefficiente di avversione al rischio calcolati per diverse combinazioni benchmark/asset risk-free

Dal momento che l'intera trattazione esamina i rendimenti dei componenti del basket su base giornaliera, i valori del vettore degli extra-rendimenti che ci si aspetta di trovare saranno tutti molto prossimi allo 0; per renderli più apprezzabili la strada più logica da seguire è quella di ricorrere al δ più alto tra quelli proposti. L'alternativa selezionata corrisponde dunque al profilo di maggior avversione al rischio tra quelli identificabili nella tabella; più è elevato il maggior rendimento che si richiede a fronte di ciascun punto aggiuntivo di rischio e maggiore sarà l'avversione allo stesso. La combinazione utilizzata come input per l'applicazione del modello di B&L è quindi quella composta dall'MSCI WORLD come benchmark e dal Bund a 5 anni come asset privo di rischiosità. Ricalcando gli stessi step seguiti per l'analisi dei log-rendimenti storici degli indici selezionati, una volta dopo aver calcolato questi ultimi, è possibile farsi un'idea del profilo remunerazione/rischio circa il benchmark adottato. Con un valore atteso dello 0,0346% a fronte di una varianza pari a 0,000007, l'MSCI WORLD mostra tutti i segni di un asset con volatilità relativamente bassa; l'ampio spettro ricoperto dai suoi componenti permette dunque di beneficiare di un forte livello di diversificazione a livello globale. Per la definizione dell'extra-rendimento è però necessario un sottraendo che vada a modularne l'ampiezza; essendo la trattazione svolta dalla prospettiva di un investitore europeo, si è ritenuto

³¹ L'intervallo temporale sul quale sono state calcolate le statistiche campionarie coincide esattamente con quello adottato per la definizione dei rendimenti logaritmici storici: 05/03/2013-05/03/2018.

opportuno selezionare come asset risk-free il Bund tedesco quinquennale³² (obbligazione governativa con scadenza a 5 anni). L'analisi dei rendimenti logaritmici porta ad una media giornaliera sul quinquennio del -0,281%; in virtù della quasi trascurabile varianza dell'MSCI WORLD il coefficiente di avversione al rischio è pari a:

$$\delta = \frac{0,00035 - (-0,00281)}{0,000007} = 45,08571$$

4.6.3. Il vettore Π

Trovate le caratteristiche di avversione al rischio, varianza e capitalizzazione di mercato relative agli asset del portafoglio sull'intervallo temporale di riferimento, è possibile calcolare quei rendimenti impliciti in grado di massimizzare l'utilità di un investitore privo di view. La matrice di varianza e covarianza impiegata è la stessa del procedimento di Markowitz moltiplicata per lo scalare τ (in questo caso si assume sia pari a 0,05); i valori risultanti saranno dunque decisamente inferiori rispetto a quelli originali ma ciò è coerente con i principi su cui si fonda il modello di B&L: l'investitore che si affida al mercato efficiente sa che le fluttuazioni saranno contenute e che tenderanno all'equilibrio nel lungo termine. Le opinioni personali non sono altro che uno strumento per sfruttare le future opportunità di arbitraggio date dagli scostamenti rispetto al valore atteso dei rendimenti logaritmici. Utilizzando la formula $\Pi = \delta \Sigma w$ si ottiene il vettore dei rendimenti impliciti di Figura 91 (per esigenze di spazio viene rappresentato trasposto ma si tratta di un vettore riga):

³² La ratio adottata per la selezione della coppia benchmark-asset risk-free è stata quella di scegliere un riferimento che rappresentasse adeguatamente il basket e, globalmente, una combinazione che rendesse più apprezzabili i valori assunti dai rendimenti impliciti.

Indice	Π
CAC 40	0,000157
DAX	0,000152
DOW JONES	0,000109
FTSE 100	0,000162
FTSE MIB	0,000192
HANG SENG	0,000178
IBEX 35	0,000169
IBOVESPA	0,000272
MERVAL	0,000188
NIFTY 50	0,000145
NIKKEI 225	0,000128
NASDAQ 100	0,000119
S&P 500	0,000112
SHCOMP	0,000129
STI	0,000120

Figura 91 - Il vettore trasposto dei rendimenti impliciti

Gli extra-rendimenti e la matrice di varianza e covarianza (rettificata per lo scalare τ) vengono trattati come nuovi input per il procedimento di costruzione del portafoglio di Markowitz; il nuovo paniere ottimo è caratterizzato da un rendimento atteso dello 0,0177% a fronte di una varianza praticamente trascurabile ($3,91 \cdot 10^{-6}$). È banale osservare che la composizione del paniere corrispondente alla soluzione ottima è esattamente quella definita dai pesi percentuali di capitalizzazione; il manager che non ha delle proprie opinioni che gli consentano di sfruttare le opportunità di arbitraggio, di fatto, possiede una fetta del portafoglio di mercato. Una volta calcolato il primo blocco utile per l'applicazione del modello di B&L, non rimane che definire uno degli elementi più critici: le view.

4.7. Le opinioni del manager

4.7.1. Il mosaico dei mercati asiatici

La politica commerciale estera dell'amministrazione Trump, fortemente incentrata sul protezionismo del "made in USA", è la forza che maggiormente sta condizionando lo scacchiere asiatico. Le forze che agiscono sui mercati del Far East sono molteplici e spesso contrastanti: se da un lato le Borse asiatiche incassano risultati positivi perché trainate dai profitti di Wall Street, conseguiti sulle aspettative in merito a risultati societari forti, dall'altro l'ombra dell'inasprimento della guerra commerciale fra gli USA e Pechino sembra rendere il futuro piuttosto incerto. Nel giugno 2018 la Cina ha registrato un surplus commerciale record (28,97 miliardi) grazie all'export con l'America; tale segnale indica una situazione positiva per l'economia cinese ma anche un ulteriore appiglio per l'inasprimento dei rapporti tra Pechino e la Casa Bianca. Il 6 luglio sono stati ufficializzati dazi del 25% su molti prodotti di provenienza cinese (la cifra si aggira intorno ai 34 miliardi di dollari) e gli USA minacciano l'estensione a molti generi di largo consumo; in un momento di forte instabilità delle Borse asiatiche le aspettative sembrano suggerire un futuro dominato da andamenti contrastanti:

- ❖ *NIKKEI 225*: rialzo dello 1,1% (assoluta);
- ❖ *SHCOMP*: ribasso dello 0,6% (assoluta);
- ❖ *HANG SENG*: rialzo dello 0,7% (relativa);
- ❖ *STI*: rialzo dello 0,4% (relativa);
- ❖ *NIFTY 50*: no view.

4.7.2. Wall Street

Nel secondo trimestre del 2018 le realtà societarie facenti parte dello S&P 500 hanno registrato un drastico calo (21%) rispetto al medesimo periodo dell'anno precedente, determinando un andamento punteggiato di piccole perdite; il biglietto verde si conferma stabile rispetto all'euro e forte nel cambio con lo yen, quasi a dimostrare anche dal punto di vista valutario la posizione degli Stati Uniti di regolatore delle sorti asiatiche. Mentre il DOW JONES sta registrando cali lievemente più consistenti rispetto allo S&P 500, il NASDAQ 100 viene trainato dal risultato storico di Apple: per la prima volta dalla fondazione il colosso americano ha raggiunto i 200 miliardi di dollari di capitalizzazione. Per quanto riguarda l'America Latina, la difficile situazione socio-politica ed economica attuale rende difficile formulare una precisa opinione

sul trend di IBOVESPA e MERVAL (asset rispettivamente brasiliano e argentino). Le view in merito agli indici della Borsa di Wall Street selezionati sono dunque:

- ❖ *S&P 500*: ribasso dello 0,3% (assoluta);
- ❖ *DOW JONES*: ribasso dello 0,1% rispetto allo S&P 500 (relativa);
- ❖ *NASDAQ 100*: rialzo dell'1,3% (assoluta);
- ❖ *IBOVESPA*: no view;
- ❖ *MERVAL*: no view.

4.7.3. Dallo spread alla Brexit: il labirinto dell'area Euro

Molte sono le tematiche che dominano le testate giornalistiche di carattere finanziario del terzo trimestre 2018: la questione della spartizione dei migranti ha attirato non poche critiche sull'atteggiamento tenuto dal presidente francese Macron, la morte di Sergio Marchionne ha sollevato le insicurezze degli investitori circa la successione di Manley alla guida del colosso FCA (i target aziendali sono stati rivisti al ribasso), i timori del premier inglese Theresa May circa l'immediato post Brexit (la data prevista è il 31 marzo 2019). Il Ministro britannico dell'Economia Philip Hammond ha espresso esplicitamente forti preoccupazioni riguardo eventuali proposte di norme sulle transazioni verso terzi appoggiate dalla Francia; in questo modo gli operatori finanziari di Londra sarebbero fortemente ostacolati nell'accesso ai mercati europei. In questo vero e proprio labirinto, dove la Germania sembra "fissare l'asticella" dell'ortodossia finanziaria e il rialzo dei tassi è stato ulteriormente posticipato dal Presidente della BCE Mario Draghi, le quotazioni sembrano vivere di equilibri precari pronti a flettersi sotto il peso delle forti tensioni socio-economiche che gravano sull'Europa. Pur essendo complesso è comunque possibile formulare alcune view sugli indici europei dell'area Euro (il FTSE 100 non vi rientra):

- ❖ *DAX*: rialzo dello 0,4% (assoluta);
- ❖ *CAC 40*: rialzo dello 0,6% (assoluta);
- ❖ *FTSE MIB*: ribasso dello 0,2% rispetto al DAX (relativa);
- ❖ *IBEX 35*: no view;
- ❖ *FTSE 100*: ribasso dello 0,5% (assoluta).

Una volta definite le opinioni, dal punto di vista del gestore di un fondo, è possibile costruire il vettore Q (rendimenti caratteristici di ciascuna view) e la matrice P (pesi delle opinioni stesse);

per memoria si ricorda che la somma per ciascuna riga di P deve restituire 1 in caso di view assolute e 0 in caso di view relative:

			P														
			CAC 40	DAX	DOWJONES	FTSE 100	FTSE MIB	HANG SENG	IBEX 35	IBOVESPA	MERVAL	NIFTY 50	NIKKEI 225	NASDAQ	S&P 500	SHCOMP	STI
Q	View 1	0,011	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
	View 2	-0,006	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
	View 3	0,007	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	View 4	0,004	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
	View 5	-0,003	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
	View 6	-0,001	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0
	View 7	0,013	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
	View 8	0,004	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	View 9	0,006	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	View 10	-0,002	0	-1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	View 11	-0,005	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Figura 92 - La traduzione in forma matriciale delle view espresse dal manager

Per quanto riguarda la matrice di confidenza, l'approccio utilizzato per la sua determinazione è quello della diagonalizzazione secondo la formula $\Omega = \text{diag}(P(\tau\Sigma)P')$ già precedentemente introdotta nel paragrafo sul modello di B&L. Ciò che si ottiene è dunque:

8,80774E-06	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1,32322E-05	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	7,41957E-06	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	3,93714E-06	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	4,66432E-06	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1,98424E-07	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	6,19151E-06	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	4,18487E-06	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	3,90528E-06	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,11794E-06	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5,45976E-06	0	0	0	0	0

Figura 93 - La matrice di confidenza ottenuta

La formattazione condizionale aiuta ad avere una visione più chiara del grado di confidenza del manager rispetto alle proprie view: procedendo dal rosso al verde si passa rispettivamente dalle opinioni su cui è più sicuro a quelle caratterizzate da un minor livello di fiducia. Tutti gli elementi appartenenti alla diagonale sono praticamente nulli, questo vuol dire che i pesi di portafoglio terranno debitamente conto della visione personale del manager; nella fattispecie, quelle caratterizzate dal livello di confidenza più elevato sono la view sull'HANG SENG e quella sullo SHCOMP. Ora che tutti i tasselli del portafoglio di B&L sono al loro posto è necessario ricorrere alla statistica bayesiana per miscelare la componente degli extra-rendimenti di mercato a quella delle opinioni personali del gestore della liquidità da investire.

4.8. L'aggregazione degli extra-rendimenti alle view

L'output primario dell'applicazione del teorema di Bayes al modello di B&L è costituito dal vettore dei rendimenti di equilibrio di lungo periodo, ottenuto mediante l'applicazione della formula già presentata nel capitolo di introduzione a tale metodo di asset allocation (per memoria si riporta di seguito):

$$M_{BL} = [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1} [(\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P'\Omega^{-1}Q]$$

Svolgendo i calcoli è dunque possibile ricavare il vettore di dimensione 15X1 che andrà a costituire il primo dato input dello stesso procedimento di ottimizzazione impiegato per il portafoglio di Markowitz; la tabella di seguito accosta i rendimenti attesi ottenuti alle rispettive deviazioni standard (queste ultime sono state ricavate estraendo la radice quadrata degli elementi presenti sulla diagonale principale del primo fattore della formula sopra indicata):

	Rendimenti B&L	Deviazione standard B&L
CAC 40	0,003118	0,001057
DAX	0,003517	0,001118
DOW JONES	0,001517	0,001234
FTSE 100	0,000608	0,001355
FTSE MIB	0,002482	0,001389
HANG SENG	0,004299	0,001588
IBEX 35	0,002940	0,001371
IBOVESPA	0,001790	0,005842
MERVAL	0,002052	0,004222
NIFTY 50	0,003008	0,002365
NIKKEI 225	0,006512	0,001947
NASDAQ	0,003741	0,001402
S&P 500	0,002169	0,001200
SHCOMP	-0,000189	0,002407
STI	0,002956	0,001209

Figura 94 - I rendimenti di equilibrio e le relative deviazioni standard secondo la logica di Black & Litterman

Dei valori nella colonna dei rendimenti ciò che colpisce a primo impatto è senza dubbio che quello riferito allo SHCOMP ha segno negativo, questo è molto probabilmente imputabile al regime di forte incertezza in cui versa Pechino per via della guerra sui dazi intrapresa dagli Stati Uniti. Il manager si aspetta che, mediamente, il mercato giapponese benefici del periodo di crisi della Cina; l'ondata di dazi infatti colpirà prevalentemente Pechino e, parallelamente, potrebbe offrire nuove opportunità per gli altri Paesi orientali. Singapore e Hong Kong sono realtà di stampo occidentale che lasciano intendere al gestore del fondo di poter godere (in valore atteso) di un atteggiamento più compiacente da parte di Donald Trump. I timori sull'Inghilterra del dopo Brexit condizionano attese sui rendimenti piuttosto contenute seppur positive, il panorama

di Wall Street offre invece prospettive variegata ma interessanti, trainate prevalentemente dall'importante milestone storica raggiunta dalla Apple. Osservando invece i risultati ottenuti da una prospettiva più squisitamente analitica, bisogna sottolineare che i rendimenti di equilibrio di B&L si collocano ad un livello decisamente superiore rispetto agli extra-rendimenti di mercato condizionati dalla propensione al rischio dell'investitore; una quota parte significativa di ciò che il manager si aspetta di ottenere è da imputarsi alle opinioni formulate a riguardo.

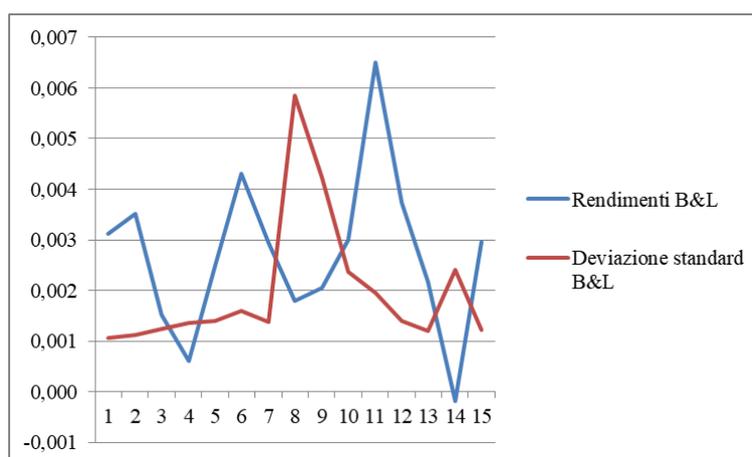


Figura 95 - Gli andamenti contrapposti di rendimento e deviazione standard rilevati nell'applicazione del modello di B&L

I risultati ottenuti per quegli asset sui quali il gestore del fondo non ha espresso delle view precise sono invece influenzati in larga misura dalla correlazione esistente tra i rendimenti dei componenti del paniere, malgrado siano caratterizzati da una volatilità leggermente più elevata. Come desumibile dal grafico che mette a confronto i rendimenti di equilibrio secondo B&L e le relative deviazioni standard, i primi seguono un andamento pressoché opposto rispetto alle seconde; chi gestisce la liquidità si aspetterà di ottenere un rendimento mediamente maggiore da quegli asset circa i quali ripone meno fiducia sulle proprie previsioni di andamento, ossia quelli i cui rendimenti sono caratterizzati da minori fluttuazioni³³. Prima di procedere con il calcolo dei pesi di portafoglio tramite le caratteristiche di rendimento e rischiosità identificate, occorre ragionare però sul significato della matrice di varianza e covarianza ottenuta dalla formula già introdotta nella presentazione della logica di B&L:

$$V_{BL} = [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}$$

³³ Dal momento che il rendimento atteso secondo B&L è costituito prevalentemente da quello imputabile alle opinioni del manager, i valori più alti saranno quelli riferiti alle condizioni di volatilità più basse; in regime di scarsa incertezza è ragionevole attribuire un peso maggiore alle view formulate.

A ben osservare, l'espressione sopra riportata è esattamente la prima componente utilizzata per il calcolo dei rendimenti di equilibrio; non bisogna però lasciarsi trarre in inganno. Le dispersioni che compongono la matrice non si riferiscono infatti al valore atteso dei rendimenti ma alla sua stima e, di conseguenza, non può essere utilizzate come input per la definizione dei pesi. Occorre infatti effettuare un passaggio intermedio di rimodulazione della matrice di varianza e covarianza di B&L aggiungendo Σ a quest'ultima, solo a questo punto è possibile proseguire con il passaggio conclusivo del modello.

7,92233E-05	7,47934E-05	3,7E-05	6,87E-05	8,15E-05	6,36E-05	7,82849E-05	6,88E-05	6,06E-05	5,4E-05	5,75E-05	4,06E-05	3,82E-05	4,08E-05	4,273E-05
7,47934E-05	8,49476E-05	3,75E-05	6,67E-05	7,76E-05	6,39E-05	7,48392E-05	6,3E-05	5,81E-05	5,55E-05	5,89E-05	4,17E-05	3,83E-05	4,01E-05	4,263E-05
3,6981E-05	3,75007E-05	9,31E-05	6,23E-05	3,91E-05	5,05E-05	3,42945E-05	0,000104	8,57E-05	5,87E-05	2,42E-05	9,68E-05	9,19E-05	4,86E-05	4,158E-05
6,87213E-05	6,67277E-05	6,23E-05	0,000111	7,33E-05	6,5E-05	6,79761E-05	0,000112	8,72E-05	6,64E-05	3,86E-05	6,58E-05	6,33E-05	4,63E-05	4,998E-05
8,15346E-05	7,75779E-05	3,91E-05	7,33E-05	0,000114	6,52E-05	9,08807E-05	7,81E-05	6,4E-05	5,7E-05	5,7E-05	4,22E-05	4,05E-05	3,71E-05	4,335E-05
6,36346E-05	6,38643E-05	5,05E-05	6,5E-05	6,52E-05	0,000151	6,18145E-05	8,18E-05	6,1E-05	8,94E-05	8,13E-05	5,83E-05	5,25E-05	0,000119	7,438E-05
7,82849E-05	7,48392E-05	3,43E-05	6,8E-05	9,09E-05	6,18E-05	9,62907E-05	7,32E-05	6,06E-05	5,51E-05	5,75E-05	3,8E-05	3,57E-05	3,59E-05	4,161E-05
6,88455E-05	6,30123E-05	0,000104	0,000112	7,81E-05	8,18E-05	7,31548E-05	0,000831	0,000266	0,000101	4,01E-05	0,000114	0,000109	8,15E-05	7,406E-05
6,0578E-05	5,81372E-05	8,57E-05	8,72E-05	6,4E-05	6,1E-05	6,05795E-05	0,000266	0,000447	7,59E-05	4,09E-05	9,28E-05	8,99E-05	5,77E-05	5,051E-05
5,39941E-05	5,55049E-05	5,87E-05	6,64E-05	5,7E-05	8,94E-05	5,50739E-05	0,000101	7,59E-05	0,000174	5,51E-05	6,43E-05	6,09E-05	6,95E-05	6,682E-05
5,75483E-05	5,88881E-05	2,42E-05	3,86E-05	5,7E-05	8,13E-05	5,75218E-05	4,01E-05	4,09E-05	5,51E-05	0,00018	2,62E-05	2,46E-05	6,47E-05	5,34E-05
4,06208E-05	4,16881E-05	9,68E-05	6,58E-05	4,22E-05	5,83E-05	3,79622E-05	0,000114	9,28E-05	6,43E-05	2,62E-05	0,000126	0,000103	5,61E-05	4,506E-05
3,81512E-05	3,83123E-05	9,19E-05	6,33E-05	4,05E-05	5,25E-05	3,56573E-05	0,000109	8,99E-05	6,09E-05	2,46E-05	0,000103	9,47E-05	5E-05	4,271E-05
4,07946E-05	4,00827E-05	4,86E-05	4,63E-05	3,71E-05	0,000119	3,5926E-05	8,15E-05	5,77E-05	6,95E-05	6,47E-05	5,61E-05	5E-05	0,00027	5,707E-05
4,27253E-05	4,26268E-05	4,16E-05	5E-05	4,33E-05	7,44E-05	4,16111E-05	7,41E-05	5,05E-05	6,68E-05	5,34E-05	4,51E-05	4,27E-05	5,71E-05	8,02E-05

Figura 96 - La nuova matrice di varianza e covarianza ottenuta sommando a quella di partenza quella ottenuta applicando il modello di B&L

4.9. I pesi del portafoglio di Black & Litterman

N°	Asset	Peso	Operazione
1	CAC 40	0,74753	buying
2	DAX	0,594723	buying
3	DOW JONES	-1,82231	short selling
4	FTSE 100	-1,03632	short selling
5	FTSE MIB	-0,4493	short selling
6	HANG SENG	0,378355	buying
7	IBEX 35	0,005285	buying
8	IBOVESPA	0,002282	buying
9	MERVAL	0,001303	buying
10	NIFTY 50	-0,00067	short selling
11	NIKKEI 225	0,523751	buying
12	NASDAQ 100	1,506003	buying
13	S&P 500	0,716467	buying
14	SHCOMP	-0,44515	short selling
15	STI	0,278047	buying

Figura 97 - I pesi di portafoglio secondo la logica di B&L

La tabella a fianco mostra i pesi ottenuti mediante l'inserimento dei risultati di B&L nel procedimento di ottimizzazione di Markowitz. I valori confermano quanto previsto dalla teoria alla base del modello: le posizioni più piccole sono quelle relative agli asset circa i quali non sono state formulate delle opinioni (IBEX 35, IBOVESPA, MERVAL e NIFTY 50). Per quanto concerne il segno delle posizioni, la situazione è ragionevolmente in linea rispetto alle view di rialzo (è conveniente acquistare) e di ribasso (è

conveniente vendere); eccezione rilevante è quella dello S&P 500, il componente con la maggiore capitalizzazione di mercato tra quelli facenti parte del paniere. Quest'ultimo è caratterizzato da un'opinione di ribasso ma la tipologia di operazione associata è di buying. Osservando il portafoglio ottimo da una prospettiva più ampia, il rendimento atteso complessivo è dell'1,3% a fronte di una volatilità dell'1,66%; i risultati del modello di

Markowitz presentavano invece un basket con una combinazione rendimento-rischio rispettivamente dello 0,48% e del 3,21%. Con una performance che è quasi tripla in termini di redditività, rispetto ad una deviazione standard praticamente dimezzata, la soluzione di Black & Litterman in questo caso si conferma vincente per l'investitore; le aspettative sul trend degli asset consentono al manager di guadagnare mediamente di più rispetto ad una casistica di passiva osservazione dei mercati da cui gli indici provengono. Occorre in conclusione evidenziare che i risultati ottenuti si riferiscono unicamente al paniere ad oggetto di questa trattazione e non hanno validità generale; tutti i ragionamenti effettuati sono a partire dal portafoglio selezionato, considerandolo come un ambiente finanziario che fornisca la cornice alla quale tutti i calcoli e le elaborazioni effettuati fanno riferimento.

5. IL PORTAFOGLIO DI BROWNE

Al contrario delle prime teorie di asset allocation, le quali erano orientate più che altro alla determinazione di un procedimento che consentisse di trovare in modo ragionevolmente semplice ed efficace i pesi ottimali di composizione del basket, la nuova frontiera di allocazione della liquidità è maggiormente rivolta verso soluzioni in grado di garantire una gestione equilibrata del portafoglio. In altre parole ciò che interessa la maggior parte degli investitori, ad oggi, è la possibilità di avere a disposizione una “ricetta” standard che consenta di comporre un paniere che garantisca rendimenti positivi (in valore atteso e sul medio-lungo periodo) senza la necessità di monitorare costantemente l’andamento dei mercati per la rimodulazione delle posizioni. Il superamento di instabilità a tal riguardo è un obiettivo fondamentale soprattutto per tutti quegli investitori medio-piccoli che non sono in grado di sostenere i costi per transazione e di informazione necessari per il trading ad alta frequenza³⁴. Proprio su tali interrogativi ruota il procedimento costruito da H.Browne, padre di quello che per gli addetti ai lavori viene definito “permanent portfolio” o “portafoglio perfetto”. Utilizzando una struttura di pesi e un pool di strumenti finanziari di tipologia pressoché fissa, l’analista finanziario riuscì a mescolare i titoli in modo da far sì che mediamente le performance migliori degli asset componenti riuscissero a più che bilanciare i risultati peggiori, sfruttando i meccanismi di convergenza all’equilibrio tipici delle teorie del mercato efficiente. La soluzione di Browne si presta particolarmente ad aggiornamenti e ritocchi per adeguarlo alle condizioni economico-finanziarie tipiche dell’ambiente in cui si muove l’investitore; come già citato nell’introduzione, la partita sulla ricerca della “ricetta” migliore è ancora aperta.

5.1. La composizione

➤ *Future sull’oro*

Il 25% della liquidità dell’investitore, secondo Browne, va investito in oro; si tratta di uno dei cosiddetti “beni rifugio”, ossia mediamente poco soggetti a forti svalutazioni (altri esempi sono il franco svizzero, lo yen, il dollaro canadese etc.). Tali asset si prestano particolarmente alla costituzione di stock di capitale facilmente monetizzabili e senza rischio eccessivo di perdite dovute alle fluttuazioni di Borsa. Dovendo selezionare una tipologia di investimento in oro ai

³⁴ In base ad alcuni articoli comparsi recentemente su testate giornalistiche quali il *Financial Times* e il *Sole 24 Ore*, si sta assistendo ad una diffusione a macchia d’olio di piattaforme destinate ad una gestione “smart” delle operazioni di portafoglio; la drastica riduzione dei costi per transazione sta facendo da catalizzatore per la categoria degli azionisti di risparmio.

fini specifici di questa trattazione (le alternative erano il ricorrere ad oro fisico, agli etf o a contratti scritti su tale sottostante), la scelta è ricaduta sui future sull'oro; questi assieme alle opzioni sull'oro sono tra i derivati finanziari più diffusi attualmente sui mercati mondiali. Per memoria se ne ricorda il funzionamento:

- Un “future” è un contratto ad esecuzione obbligatoria (a differenza dei forward non è standardizzato) con il quale due controparti si impegnano a scambiarsi una certa quantità di sottostante (nel caso dell'oro le caratteristiche stabilite saranno il peso e la caratura del metallo). Al momento della sottoscrizione del contratto viene fissato il prezzo al quale avverrà la transazione, detto “strike” (il valore di equilibrio si ottiene per capitalizzazione composta o continua dello spot all'istante iniziale). Sarà poi lo scostamento dallo strike raggiunto dalle quotazioni a determinare per una delle controparti un profitto e per l'altra una perdita.

Le aspettative dell'investitore sulle fluttuazioni dei prezzi sono perciò essenziali per definire il tipo di posizione: chi crede in un rialzo dei prezzi assumerà una posizione lunga, dal momento che di fatto acquisterà ad un certo costo qualcosa che il mercato valuta di più; chi invece supporta un ribasso dei prezzi avrà convenienza a stabilire una posizione corta, visto che si troverà a vendere per un certo ammontare un sottostante che il mercato valuta di meno. Forward e future sono particolarmente diffusi per costruire operazioni di hedging.

➤ *Titoli governativi a breve termine*

Il seguente 25% del portafoglio secondo Browne viene riservato ad investimenti in titoli governativi a breve, ossia obbligazioni con maturity (scadenza) minore o uguale ad uno o due anni. Alcuni tra i più diffusi sono:

- *Certificati del Tesoro Zero-Coupon (CTZ)*: si tratta di titoli con scadenza pari a 24 mesi o inferiore (18 mesi) la cui emissione ha l'obiettivo di finanziare il debito pubblico italiano. I CTZ sono privi di cedola e la durata originaria è passibile di riduzioni a seguito di riaperture; vengono trattati sul MOT (Mercato Obbligazionario Telematico) o sul segmento MTS (Mercato Telematico dei Titoli di Stato) a seconda del taglio. Il rendimento è pari alla differenza tra il

valore di rimborso (pari al valore nominale) e il prezzo di emissione (sempre sotto la pari);

- *Buoni Ordinari del Tesoro (BOT)*: sono obbligazioni governative prive di cedola e caratterizzate dallo stesso scopo di emissione dei CTZ. La maturity è minore o uguale a 12 mesi (sono previste anche a 3 e 6 mesi) e il meccanismo di formazione del prezzo avviene tramite una procedura d'asta che ha luogo sul MOT o sull'MTS (si tratta di un momento fondamentale alla base della definizione della remunerazione richiesta dagli investitori). Analogamente al caso dei CTZ la duration (media delle scadenze ponderata per i flussi di cassa) è pari alla vita residua dell'obbligazione;
- *Treasury Bill*: si tratta di una delle quattro categorie esistenti di Treasury, ossia di Titoli di Stato del governo federale degli USA; la scadenza è pari a 4, 13, 26 o 52 settimane e sono emessi sotto la pari (acquisto a sconto rispetto al valore nominale). Gli Stati Uniti solitamente utilizzano i Treasury Bill per finanziare opere pubbliche per la realizzazione di infrastrutture (scuole, autostrade etc.) e devono corrispondere agli investitori un interesse tanto maggiore quanto più distante è la scadenza.

Ai fini della trattazione in oggetto, ribadendo che l'ottica è quella di un investitore europeo ma tenendo conto che la capitalizzazione degli asset utilizzati nelle teorie di Markowitz e B&L è significativamente sbilanciata verso il mercato americano, si è ritenuto interessante scegliere i componenti obbligazionari in parte dal mercato statunitense e in parte da quello europeo. Per quanto concerne i titoli governativi a breve sono stati selezionati i Certificati del Tesoro Zero-Coupon italiani a 24 mesi, utilizzando tutti i dati a disposizione dal momento dell'emissione.

➤ *Titoli governativi a lungo termine*

La teoria di Browne prevede che un quarto del portafoglio sia dedicato ad essi; rientrano in questa categoria tutte le obbligazioni governative con scadenza medio-lunga, la quasi totalità delle quali è caratterizzata dallo stacco di cedole intermedie. Generalmente hanno duration più elevate, il che rende questi titoli particolarmente adatti per investimenti speculativi in regime di incertezza sulle fluttuazioni dei tassi di interesse. Le principali obbligazioni governative sul mercato rientranti in questa tipologia sono:

- I Buoni del Tesoro Poliennali (BTP): sono titoli a scadenza medio-lunga (3, 5, 7, 10, 15 o 30 anni) emessi dal Tesoro italiano; trattandosi di coupon bond il profitto non tiene solo conto della differenza tra prezzo di emissione e di rimborso ma anche del flusso cedolare (in questo caso fisso). Apprezzati per la loro liquidità vengono trattati sia sul MOT, che sull'MTS (è possibile acquistarli e venderli anche over-the-counter) a seconda dell'importo relativo all'operazione; il principale tipo di rischio a cui si espone un investitore che voglia acquistare BTP è quello di mercato: in caso di vendita prima della scadenza le fluttuazioni dei tassi possono determinare profitti o perdite;
- I Treasury Bond: si tratta di obbligazioni a tasso fisso emesse dal Tesoro statunitense, hanno una maturity superiore ai 10 anni. Il vantaggio di questa seconda categoria di titoli Treasury è che le cedole percepite vengono tassate solo a livello federale e che costituiscono una tipologia di asset pressoché risk-free (sono garantiti dallo Stato e caratterizzati da una probabilità di default molto bassa). I Treasury Bond vengono sovente utilizzati per comporre portafogli di investimenti bilanciati, dal momento che il Governo può intervenire sui ricavi per equilibrare l'eventuale aumento della tassazione in modo da garantire agli investitori gli incassi prospettati al momento dell'emissione;
- I Bund: sono titoli governativi decennali emessi dalla Germania, per finanziare il debito pubblico tedesco. La maturity varia dai 10 ai 30 anni (si sta valutando anche la possibilità di emettere Bund a 50 anni) e il rendimento cedolare corrisposto agli azionisti è fisso; vengono comunemente usati per la valutazione dello spread (differenziale di rendimento) rispetto a titoli sovrani di tipologia analoga nell'area Euro.

Tra le obbligazioni governative a lungo termine citate si è deciso di utilizzare i Treasury Bond americani; arrivati a questo punto rimane unicamente solo un 25% di liquidità da investire in strumenti finanziari di natura e tipologia diversa rispetto a quelli descritti finora.

➤ Azioni

L'ultima fetta di capitale viene destinata da Browne alle azioni (possono essere impiegati anche indici azionari come nella variante descritta nel capitolo introduttivo), titoli con rendimento variabile che in molti casi comprendono diritti corporativi oltre che patrimoniali. La remunerazione di questi strumenti finanziari presenta due componenti distinte: mentre da un lato l'investitore guadagna percependo i dividendi distribuiti (che non necessariamente corrispondono a quelli deliberati), dall'altro c'è il capital gain dovuto alle fluttuazioni del prezzo del titolo. Il primo può essere calcolato ricorrendo alle ipotesi semplificatrici del Dividend Discounted Model (DDM), il secondo si può stimare (effettuando specifiche assunzioni) con il prodotto tra ROE e Retention Ratio; in ogni caso il rendimento per gli azionisti può essere calcolato tramite il CAPM. Rimanendo fedeli alla tipologia di asset utilizzati per i portafogli di Markowitz e di B&L costruiti in questa trattazione, si è ritenuto interessante destinare l'ultimo 25% di liquidità ad un importante indice azionario europeo: il DAX. Scelto anche l'ultimo componente per il permanent portfolio, non resta che studiare le performance del paniere creato con gli asset selezionati in base ai criteri prestabiliti; in

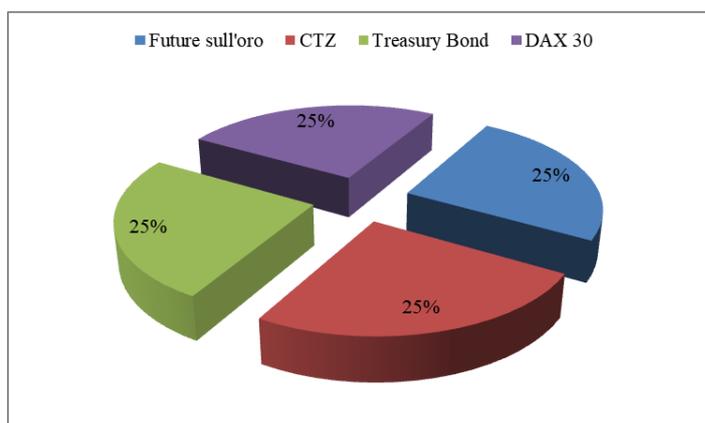


Figura 98 - Il caso di riferimento adottato è quello della formulazione originaria del modello, nella figura gli strumenti finanziari scelti e i pesi di allocazione

particolare l'analisi, condotta con l'approccio simulativo, si focalizzerà sull'andamento del rendimento atteso e della volatilità. Il diagramma a torta sulla sinistra mostra la ripartizione degli asset e degli strumenti finanziari.

5.2. L'applicazione della simulazione Monte Carlo

Fino ad ora la via maestra seguita per lo studio dei modelli di portafoglio di Markowitz e di Black&Litterman è stata quella della simulazione storica; le statistiche campionarie e i parametri sono stati infatti calcolati sulla base di quotazioni passate (05/03/2013-05/03/2018). L'assunto fondamentale su cui poggiano la simulazione storica e le sue applicazioni nel campo della finanza è che il futuro replichi il passato ma, sfortunatamente, tutto ciò limita fortemente gli scenari a disposizione. Oltretutto le quotazioni, relative all'intervallo temporale preso in

considerazione, possono risentire di rialzi e flessioni imputabili a specifici eventi di stampo socio-politico e/o economico-finanziario; la propagazione delle eventuali distorsioni alle conclusioni tratte è perciò

inevitabile (se non attraverso un preventivo complesso lavoro di filtratura delle serie storiche e di depurazione dagli outlier³⁵ sovente infruttuoso). Tali problemi possono essere superati, senza intaccare la robustezza statistica delle elaborazioni, ricorrendo alla simulazione Monte Carlo:

studiando la distribuzione deducibile dai dati osservati e

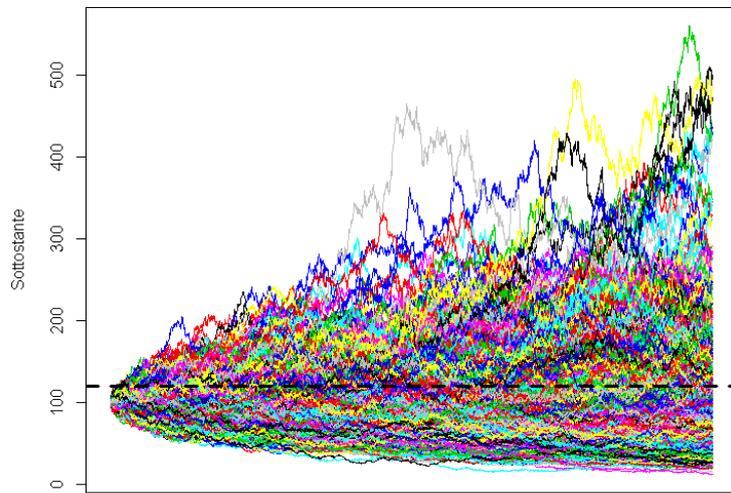


Figura 99 - Nell'immagine il classico grafico dei pattern creati da una simulazione Monte Carlo, nella fattispecie si tratta dei valori assunti dal sottostante di un derivato finanziario.

definendone i parametri caratterizzanti è possibile avere a disposizione una quantità pressoché infinita di scenari; essi sono di per se artificiali ma supportati da dati concreti, espressione tangibile dell'andamento dei mercati. Nel caso dello studio in questione ciò permette non solo di ovviare a problemi come la scarsità dei dati circa i CTZ (l'ipotesi adottata è quella della riemissione alla scadenza), ma anche di allungare a piacimento la simulazione in modo da poter studiare adeguatamente le performance di un portafoglio la cui stabilità spicca soprattutto nel medio- lungo termine. Tutto ciò aprirebbe una serie di conseguenti interrogativi in merito alla bontà del fitting delle distribuzioni adottate per descrivere le variabili casuali e riguardo gli elementi fondamentali per la buona riuscita di una Steady-State Simulation (lunghezza del warm-up e della simulazione, metodi di riduzione della varianza etc.³⁶). Pur essendo tali argomentazioni stimolanti ed interessanti, sarebbero poco consistenti con lo scopo della trattazione; l'obiettivo essenziale del capitolo in oggetto è infatti quello di osservare l'andamento delle performance di un portafoglio composto secondo la logica di Browne (la scelta cruciale è quella della tipologia di strumenti finanziari) e non di trovare il metodo ottimale

³⁵Si tratta di valori che si discostano significativamente dalla media e che possono indurre distorsioni nelle statistiche campionarie; gli outlier sono determinati da fattori spiccatamente circostanziali, al di fuori del meccanismo canonico di casualità alla base dei processi stocastici.

³⁶ Le SSS sono simulazioni che consentono di osservare un sistema al raggiungimento dell'equilibrio (posto che ciò sia possibile); l'identificazione del transitorio, la scelta della durata della replica e le tecniche di riduzione della varianza consentono di ottenere risultati meno spuri e affetti da variabilità.

per modellizzarlo. Si è assunto pertanto che le distribuzioni delle variabili random siano di tipo Normale, utilizzando le statistiche campionarie (media e deviazione standard) ricavabili dalle serie storiche dei rendimenti logaritmici come input; strettamente legata a tale ipotesi è l'idea di commettere un certo errore relativo all'utilizzo di un fitting non sempre ottimale³⁷. Per semplicità si è ipotizzato inoltre che le distribuzioni utilizzate per la simulazione non subissero aggiornamento; gli elementi caratterizzanti di centratura e dispersione sono pari a quelli rilevati nei dati del quinquennio in esame. Ciò equivale, in linea di fatto, ad una soluzione ibrida con la quale creare scenari sintetici ma pur sempre basati su dati realmente registrati. Attraverso l'algoritmo della trasformata inversa³⁸ sono stati generati 1500 valori per ciascun asset, con i quali calcolare le combinazioni rendimento/rischio su base giornaliera relativi al portafoglio di Browne; il nodo cruciale a conclusione dell'intera analisi è quindi quello di constatare, in valore atteso, la bontà della composizione del paniere, riservando attenzione particolare ai cambiamenti indotti da variazioni applicate ai pesi prescritti dal creatore del modello.

5.3. Le performance di un portafoglio equipartito

I 1500 dati sintetici dei trading day sono l'input primario per l'analisi delle performance del portafoglio di Browne. Le formule utilizzate per il calcolo di rendimento atteso e rischio sono quelle richiamate nel capitolo introduttivo e sono state applicate ad ogni scenario, in modo da poter apprezzare la stabilità tipica di questa metodologia di capital allocation (le repliche eseguite sono 30). Come già anticipato nel precedente paragrafo l'ipotesi fondamentale sottesa all'applicazione del metodo Monte Carlo in tale contesto è che la distribuzione dei log-rendimenti sia di tipo Normale; la tabella seguente mostra i valori di media e deviazione

	Media	Deviazione Standard
CTZ	-0,000199	0,00385
Future Oro	-0,0000913	0,00992
Treasury Bond	0,000363	0,02247
DAX	0,000335	0,00917

Figura 100 - Nella tabella in alto i valori di media e deviazione standard su base giornaliera caratterizzanti gli asset componenti

standard rilevati dalle stringhe di dati storici analizzate.

Come è facile notare, il profilo di rendimento degli asset selezionati è piuttosto basso; si tratta di strumenti finanziari poco rischiosi ma anche poco remunerativi.

Ciò che ci si aspetta da un'analisi preliminare è dunque che il portafoglio garantisca un rendimento modesto a

fronte di una certa stabilità della volatilità attorno a valori ragionevolmente contenuti. Ad ogni iterazione simulativa le probabilità random generate vengono impiegate come input di calcolo

³⁷ Avendo adottato tutte distribuzioni Normali, si accetta il compromesso di commettere un piccolo errore dettato dall'aver escluso le alternative first best in termini di fitting.

³⁸ Partendo dalla generazione di un numero casuale campionato da una distribuzione uniforme di estremi 0 e 1, si procede associando al valore random la relativa variabile casuale descritta dalla densità di probabilità adottata.

del corrispondente valore della variabile casuale in oggetto (i rendimenti logaritmici) e le serie sintetiche cambiano. Ogni scenario corrisponde dunque ad un quinquennio caratterizzato da un proprio andamento di remunerazione degli asset, varianza e covarianza; ciascuna replica risulta quindi definita da 1500 dati. Tutte le statistiche campionarie sono caratterizzate da una sostanziale equipartizione degli asset, in questo caso iniziale si ricalca dunque la prescrizione originaria per la composizione del portafoglio di Browne.

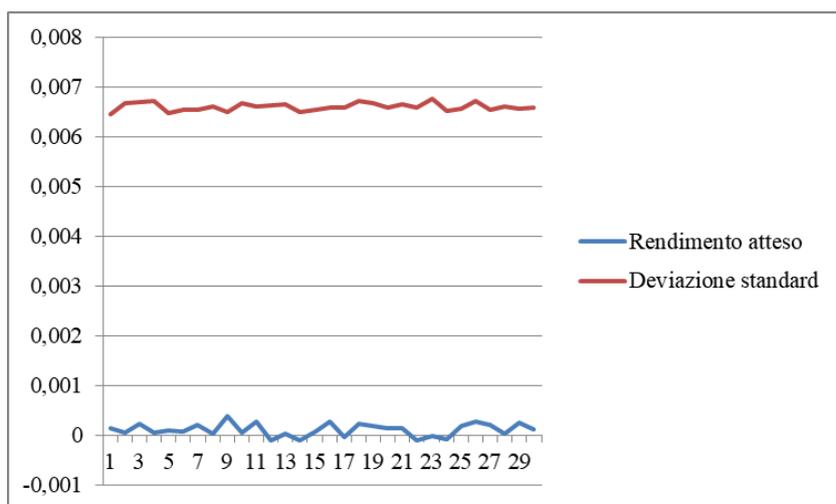


Figura 101 - Rischio e rendimento di un portafoglio equipartito secondo Browne

Uno sguardo globale al grafico in alto conferma le aspettative formulate in partenza: si tratta di un basket composto da attività poco rischiose; le fluttuazioni dei rendimenti logaritmici simulati sono contenute in un range molto ristretto che va dallo 0,6% allo 0,7%. Il rendimento è ragionevolmente basso se rapportato alla congruità rispetto al rischio ma pur sempre positivo in valore atteso (la media delle medie sulle repliche è pari a 0,000107768); è poi immediato notare che la smoothness del grafico è quella tipica di un portafoglio equilibrato e rispondente alla più importante tra le caratteristiche di un paniere composto secondo la teoria di Browne: una gestione bilanciata del rischio.

Il secondo elemento sostanziale emerge più chiaramente se si restringe significativamente il numero delle osservazioni di ciascuna simulazione (vedi grafico sotto), tenendo conto che si è passati da 1500 a solo 500 dati osservati. Eseguendo le solite 30 repliche si ottiene un rendimento atteso dall'andamento più turbolento ma in media molto vicino rispetto a quello ottenuto in precedenza e un profilo di rischio del portafoglio con fluttuazioni decisamente più marcate.

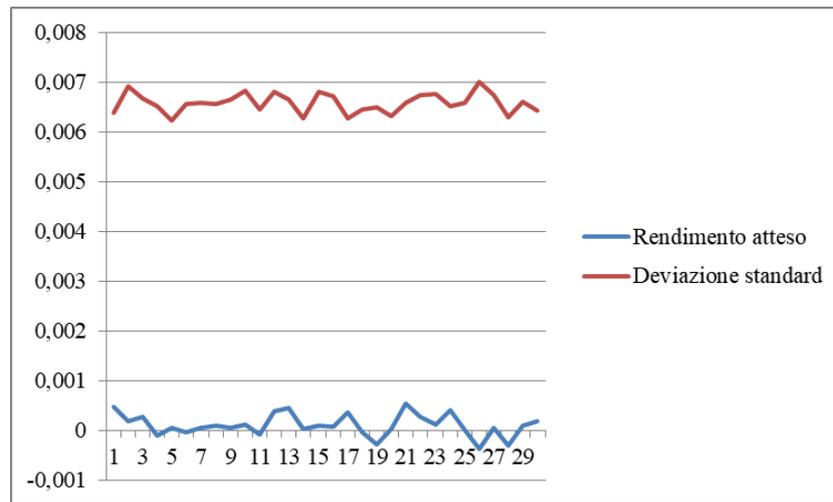


Figura 102 - Rischio e rendimento di un portafoglio equipartito secondo Browne - 30% delle osservazioni utilizzate nel caso iniziale

È evidente dunque la coerenza con la seconda delle peculiarità di questa metodologia di asset allocation: il portafoglio di Browne raggiunge il suo equilibrio, sia in termini di rendimento che di rischio, nel medio-lungo periodo. All'interno del modello i pesi non costituiscono un output come nel caso di Markowitz e Black&Litterman ma bensì un input, occorre poi verificare con i medesimi approcci sfruttati in precedenza l'influenza della concentrazione degli asset sulla stabilità del modello e sulle performance ottenute.

- **Variante 1**

La prima variante al modello analizzata è quella ottenuta concentrando il 40% della liquidità sui CTZ, ripartendo la rimanenza in parti uguali su DAX, Treasury Bond e contratti a termine sull'oro; i pesi adottati sono dunque:

- 40% per i CTZ;
- 20% per i Treasury Bond;

- 20% per i future sull'oro;
- 20% per il DAX.

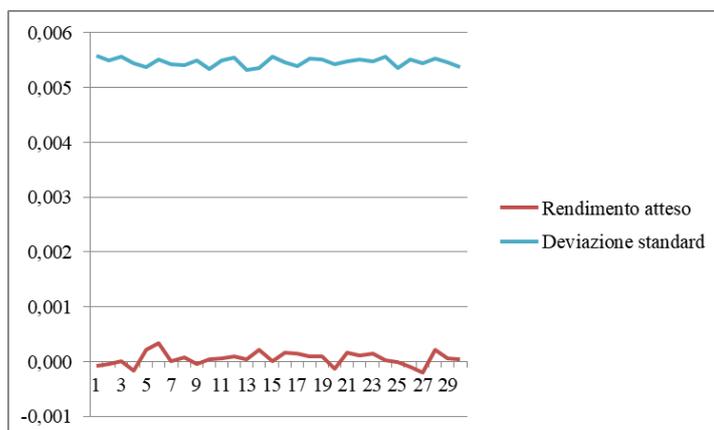


Figura 103 - Rischio e rendimento di un portafoglio composto secondo Browne - 40% in CTZ ed il resto equiripartito

I CTZ sono titoli obbligazionari governativi caratterizzati da rischio e rendimento relativamente bassi, ciò che ci si aspetta è dunque un profilo in media meno remunerativo rispetto a quello del modello originale, ma allo stesso tempo meno affetto da fluttuazioni. Osservando la spezzata azzurra appare evidente che la deviazione standard rimanga sempre contenuta in una fascia relativamente stretta, dallo 0,5% allo 0,6%. Pur essendo la volatilità più accentuata, di fatto essa si colloca ad un valor medio decisamente inferiore rispetto a quello del portafoglio equiripartito; la caratteristica dei certificati zero-coupon di essere dei titoli a basso contenuto di rischio (e dunque costosi) si ripercuote sull'esposizione al rischio dell'intero paniere, determinando una riduzione in valore atteso dello stesso. Spostando l'attenzione sull'andamento del rendimento atteso, è immediato notare che i punti di sfondamento negativi siano in numero analoghi a quelli della versione originaria del modello ma che raggiungano picchi più bassi; ne consegue che la media sulle repliche si attesti su un valore praticamente dimezzato rispetto al caso iniziale (0,0000511 a fronte di 0,0001078). I risultati osservati si rivelano essere perciò consistenti con le aspettative formulate in partenza.

- **Variante 2**

La seconda “variazione sul tema” proposta per il modello di portafoglio di Browne è quella ottenuta utilizzando la medesima ripartizione della precedente, con la differenza che ad essere oggetto di un investimento pari al 40% della liquidità posseduta dall'investitore sono i Treasury

Bond americani. Tra i quattro asset presenti nel paniere i titoli di debito del Tesoro statunitense sono quelli avente la più alta combinazione rendimento atteso-deviazione standard, basti pensare che la volatilità dei rendimenti logaritmici del DAX è più di un punto percentuale al di sotto di quella dei Treasury Bond a fronte di un rendimento medio analogo. La composizione della seconda variante è dunque:

- 20% per i CTZ;
- 40% per i Treasury Bond;
- 20% per i future sull'oro;
- 20% per il DAX.

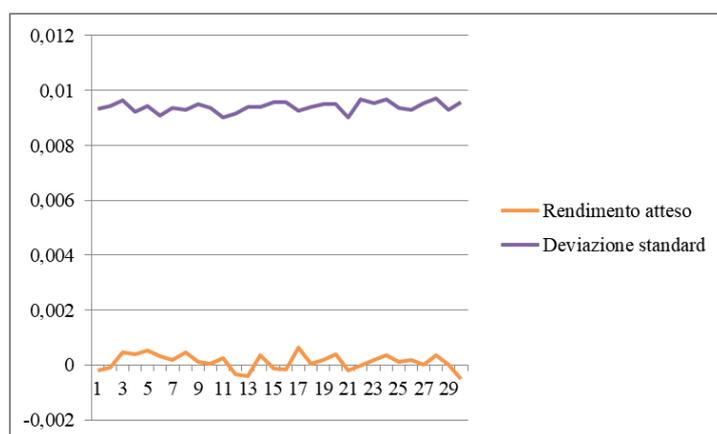


Figura 104 - Rischio e rendimento di un portafoglio composto secondo Browne - 40% in Treasury Bond ed il resto equiripartito

Ciò che appare subito evidente è che il rischio associato al portafoglio è nettamente al di sopra della media relativa agli altri asset, con punte che si avvicinano all'1%. Per quanto concerne il rendimento atteso osservato sulle repliche, questo si attesta attorno allo 0,011%, ponendosi di fatto ad un livello di poco superiore rispetto al benchmark di Browne. La scelta di adottare questa ripartizione della liquidità è in generale poco conveniente perché ci si assume rischi mediamente superiori a fronte di un rendimento atteso di poco superiore a quello del caso ideale di equipartizione.

- **Variante 3**

La terza possibilità di ricomposizione del portafoglio di Browne è quella ottenuta destinando il 40% degli investimenti a contratti a termine non standardizzati scritti sull'oro; l'eccedenza viene poi suddivisa equamente tra gli altri tre asset:

- 20% per i CTZ;
- 20% per i Treasury Bond;
- 40% per i future sull'oro;
- 20% per il DAX.

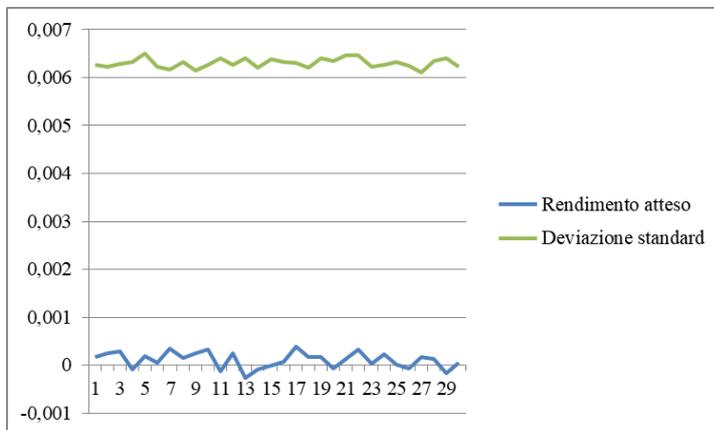


Figura 105 - Rischio e rendimento di un portafoglio composto secondo Browne - 40% in future sull'oro ed il resto equiripartito

La media dei rendimenti logaritmici osservati sull'arco temporale preso in esame indica un valore negativo, seppur molto vicino allo zero; l'esposizione al rischio è praticamente la meta di quella dei Treasury Bond, ma pur sempre superiore (in valore atteso) rispetto a quello di CTZ e DAX. Gli indizi sembrerebbero indicare che i

future sull'oro non diano attualmente contributo significativo alle performance di portafoglio, occorre però osservare l'andamento nelle varie simulazioni considerando anche gli effetti imputati alla correlazione tra le serie storiche. L'andamento delle fluttuazioni dei rendimenti logaritmici simulati è analogo a quello del portafoglio equipartito, ma ad un livello inferiore e più vicino allo 0,6% che allo 0,7%. Uno sguardo più attento alla media sulle repliche rivela un profilo molto simile al caso iniziale di riferimento, con un valore atteso pari a 0,00010924. Questa configurazione del paniere, sotto le ipotesi assunte, appare dunque conveniente per l'investitore, garantendo un rendimento medio superiore (seppur di poco) a fronte di una minore esposizione al rischio.

- **Variante 4**

L'ultima variante presa in esame è quella che vede come investimento principale del basket quello sul DAX, l'indice azionario della Borsa di Francoforte. Facendo sempre riferimento ai valori di media e deviazione standard campionari relativi alle stringhe di dati storici, è interessante osservare come tale strumento finanziario combini nel quinquennio un valor medio dei rendimenti logaritmici analogo a quello dei Treasury Bond a fronte di un trend del rischio simile a quello dei future sull'oro. Si tratta quindi di un investimento che, sotto il profilo rischio-rendimento, sembra dominare le due soluzioni dei titoli del Tesoro americani e dei contratti a termine; tutto sembra suggerire che fornisca un contributo positivo all'andamento delle performance di portafoglio. La composizione di quest' ultima casistica affrontata è:

- 20% per i CTZ;
- 20% per i Treasury Bond;
- 20% per i future sull'oro;
- 40% per il DAX.

Questa configurazione di portafoglio, come mostrato dal grafico, si rivela vincente rispetto al caso benchmark sia sotto il profilo del rischio che sotto quello del rendimento: se da un lato l'andamento della volatilità riscontrata nelle repliche è ragionevolmente contenuto, piazzandosi ad un livello di rischiosità inferiore rispetto al caso iniziale,

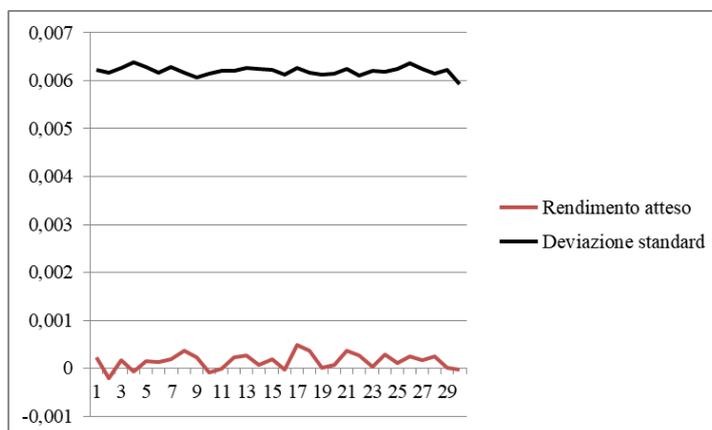


Figura 106 - Rischio e rendimento di un portafoglio composto secondo Browne - 40% in DAX ed il resto equiripartito

dall'altro il rendimento atteso è circa una volta e mezzo rispetto alla casistica di equipartizione della liquidità. Anche in questo caso le statistiche campionarie delle osservazioni sono state utili a costruirsi un'idea consistente circa la bontà della costituzione del portafoglio, sempre considerando l'effetto modulatore della correlazione tra i vettori dei log-rendimenti.

5.4. L'inizio di un nuovo capitolo

Il portafoglio di Browne fornisce una valida soluzione alle esigenze di un classico investitore del XXI secolo:

- Gestione bilanciata del rischio in un ambiente finanziario complesso ed incerto;
- Impossibilità di rimodulare frequentemente le posizioni del paniere (costi per transazione e asimmetrie informative)³⁹;
- Rendimenti positivi in valore atteso.

I risultati mostrano un'effettiva rispondenza a tali criteri, considerando che in tutte le casistiche affrontate i rendimenti logaritmici sono positivi (per quanto bassi). L'equipartizione dei pesi è l'alternativa che garantisce la maggior smoothness in termini di volatilità ma, ragionando sul rischio in termini di valore atteso, vi sono scelte migliori; la tabella seguente mostra in sintesi le conclusioni tratte dalle modifiche apportate alla struttura originaria del portafoglio:

Portafoglio	Componenti paniere				Media sulle repliche	
	CTZ	Treasury Bond	Future sull'oro	DAX	Valore atteso	Deviazione standard
Benchmark	25%	25%	25%	25%	0,000107768	0,006610671
Variante 1	40%	20%	20%	20%	0,000051070	0,005466260
Variante 2	20%	40%	20%	20%	0,000114193	0,009406314
Variante 3	20%	20%	40%	20%	0,00010924	0,006300765
Variante 4	20%	20%	20%	40%	0,000150274	0,0062017920

Figura 107 - Tabella riassuntiva dei risultati simulativi

Il benchmark è perciò quello che garantisce la combinazione più bilanciata tra rischio e rendimento ma, ad esempio, è strettamente dominata dalla variante incentrata sul DAX; la situazione è analoga tra la variante due e la quattro (la prima offre in media un rendimento di poco superiore a quello della seconda ma a fronte di una volatilità relativamente più alta). Concentrandosi sui CTZ, invece, il rischio è più basso (in valore atteso) degli altri, ma si ottiene un rendimento medio che è circa la metà rispetto al benchmark e circa un terzo rispetto alla terza variante. È evidente che la concentrazione degli asset concorra significativamente a definire le prospettive future di un portafoglio costruito secondo la logica di Browne. Come è facile intuire dai grafici e dalle tabelle proposti, il nodo cruciale della teoria di Browne non risiede tanto nei pesi da utilizzare per ripartire la liquidità, quanto piuttosto dagli strumenti finanziari selezionati per la composizione; non tutti i titoli governativi hanno la stessa

³⁹ Per semplicità si escludono dalla trattazione le ultime innovazioni nel campo delle transazioni "smart"

rischiosità e la stessa probabilità di default (le agenzie di rating sono teoricamente diffidate dall'emettere valutazioni sul debito sovrano) e la redditività della componente azionaria è influenzata da molteplici fattori legati alla struttura dell'impresa e/o del mercato di riferimento (corporate governance, politiche dei dividendi, composizione del capitale, capitalizzazione di mercato, sensitività alla diffusione di nuove informazioni, asimmetrie informative etc.). Come traspare dall'intervista all'analista finanziario Francesco Caruso, citata nel capitolo introduttivo della trattazione, e dalla volontà stessa di studiare l'allocazione utilizzando pesi differenti da quelli prescritti da Browne, la partita sulla composizione del permanent portfolio è ancora aperta. Il passo successivo della teoria finanziaria sarà quello di ampliare le basi gettate dal fondatore della metodologia, ricercando pesi e strumenti finanziari che consentano di sfruttare al meglio i benefici da diversificazione del rischio e ricorrendo ad un costante aggiornamento delle strategie di capital allocation sulla base di una continua evoluzione socio-economica, storica e finanziaria. Lo stesso Browne, facendo leva sui principi della massima diversificazione, suddivise il portafoglio in due componenti obbligazionarie (una a scadenza nel breve e l'altra nel lungo periodo) una azionaria e una basata sull'oro; abbandonando la comodità tipica della semplicità ci si potrebbe avventurare su panieri costruiti con derivati più complessi scritti sui medesimi sottostanti proposti, oppure si potrebbe tentare la strada del mantenere i pesi originari ricercando tipologie differenti di strumenti finanziari che garantiscano una più efficiente gestione del portafoglio. Browne ha tracciato il solco ma la strada è ancora molto lunga.

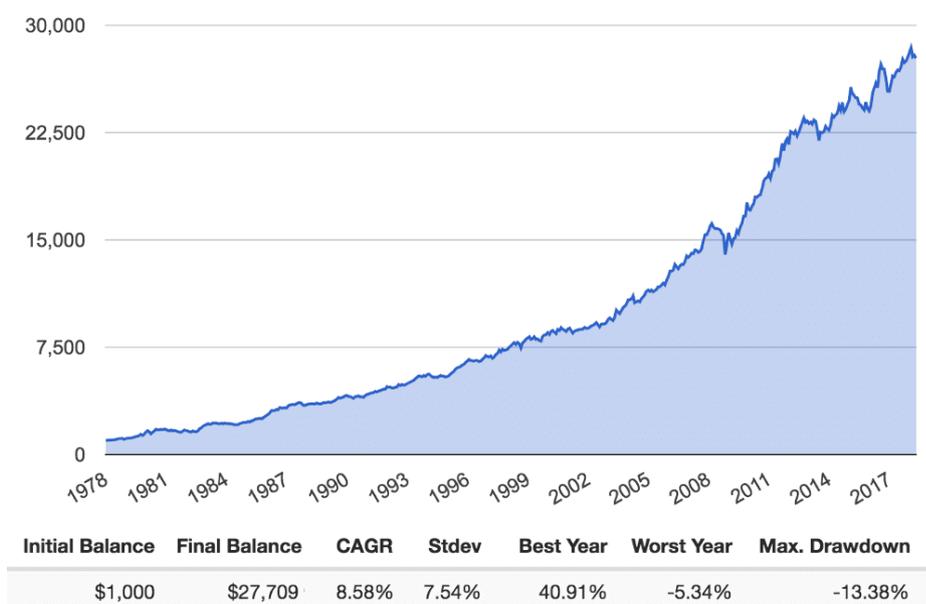


Figura 108 - Backtest del portafoglio originale proposto da Browne (1978-2018); tenendo conto di un ribilanciamento annuale delle componenti, il rendimento annuo composto è dell'8,58% (4,89% al netto dell'inflazione)

6. CONCLUSIONI

6.1. I modelli di asset allocation come metafora evolutiva dell'investitore

La seguente trattazione si prefiggeva di andare ad esaminare i punti di forza e di debolezza dei principali modelli di composizione di portafoglio attraverso le osservazioni di un caso di studi reale, nel quale il paniere considerato comprendeva quindici importanti indici borsistici mondiali. La prima milestone di importanza cruciale fu quella posta da Markowitz negli anni '50: il rendimento del basket dipende unicamente dalla redditività dei componenti rilevata nei mercati. L'investitore si limita a registrare i cambiamenti delle quotazioni e ad aggiornare le serie storiche, con un occhio particolare all'evoluzione della correlazione che lega queste ultime. La configurazione del portafoglio cambia in funzione delle informazioni carpite dal mercato e non viene influenzata da una partecipazione personale del manager in termini di opinioni; colui che si occupa di gestire la liquidità e farla fruttare ha il mero compito di tradurre i dati ottenuti dai mercati in posizioni lunghe o corte che siano. La composizione del paniere è fragile e instabile, i cambiamenti dei pesi sono piuttosto significativi sia in valore assoluto che in segno; più drammatiche saranno le variazioni dei coefficienti di correlazione tra le serie storiche e più ampia sarà l'escursione tra le configurazioni di portafoglio da un istante all'altro. Tutto ciò si traduce nella necessità di un monitoraggio continuo e ponderato dei rendimenti, in modo da poter reagire prontamente ed evitare cospicue perdite; i costi per transazione e di informazione sono piuttosto rilevanti, soprattutto se si considera la necessità di fronteggiare le asimmetrie informative tipiche del mondo finanziario. Con l'ispessimento dei mercati che caratterizzò soprattutto gli Stati Uniti, alcuni Paesi asiatici e svariate realtà dell'Europa continentale (l'Italia è ad oggi uno Stato prevalentemente bancocentrico), si avvertì sempre più la necessità di modelli che consentissero di allocare efficientemente il capitale ma che prevedessero un coinvolgimento più diretto e decisivo dell'investitore. È proprio su tali bisogni che si innestò l'elaborazione di Black & Litterman: sfruttando un teorema statistico basilare come quello di Bayes era possibile incorporare le aspettative del gestore della liquidità, rendendolo parte integrante del meccanismo di definizione della composizione del portafoglio. Mescolando le proprie opinioni, formulate con un certo livello di confidenza, agli extra-rendimenti basati sui benchmark di mercato selezionati e sulla propensione al rischio, fu possibile ottenere un procedimento più calibrato e robusto che consentisse di evitare le concentrazioni eccessive e le ampie escursioni tipiche del modello di Markowitz (il tutto con un deciso ridimensionamento dei costi per transazione). L'incertezza dei mercati finanziari e la

difficile situazione dello scacchiere geo-politico globale contemporanea ha in seguito determinato un'evoluzione decisiva della figura dell'investitore, modificandone radicalmente bisogni e sensibilità al rischio; la nuova frontiera della capital allocation sta cercando di sondare tutte le possibilità che consentano di costruire un paniere caratterizzato da profitti mediamente positivi nel lungo periodo, a fronte di una ragionevole volatilità dei rendimenti. L'investitore sente sempre di più la necessità di non dover provvedere continuamente alla riconfigurazione del portafoglio, avendo a disposizione un set di schemi fissi di ripartizione della liquidità; la domanda imperante è: "qual è la ricetta migliore?". Browne ha tracciato il solco della via maestra, mescolando componenti azionarie e obbligazionarie che consentissero di ottenere la stabilità desiderata. Una equipartizione delle risorse risponde a tale esigenza ma, le ricerche successive ed in parte i ragionamenti seguiti nel corso di questa trattazione, mostrano margini di migliorabilità del modello; molti sono gli studi che si sono sviluppati dall'idea originaria dell'analista finanziario recentemente scomparso e, quasi certamente, il futuro riserva al mondo dell'asset allocation nuovi orizzonti da esplorare per trovare composizioni sempre migliori. Concludendo, il percorso affrontato nella redazione della tesi in oggetto ha evidenziato che le metodologie di allocazione della liquidità sono in continua evoluzione assieme ai propri punti di forza e di debolezza, esattamente come il profilo dell'investitore medio; a ben vedere i rischi e i rendimenti legati al denaro investito sono speculari all'immagine di chi lo possiede.

RINGRAZIAMENTI

Nei ringraziamenti posti a conclusione di questa tesi ho deciso di ispirarmi alla mia opera letteraria preferita: la “Divina Commedia” di Dante Alighieri. Tutte e tre le cantiche di cui si compone terminano con la parola “stelle” per un motivo ben preciso; raggiungere il firmamento vuol dire ritrovare la parte di sé stessi che si era smarrita nella selva oscura, ma anche conquistare la realizzazione personale posta al termine di un cammino irto di ostacoli. Tante sono state le prove a cui la vita mi ha sottoposto nel corso della carriera universitaria, alcune sul profilo personale e altre su quello accademico; se c’è una cosa che l’esperienza ci insegna è che la strada verso la meta finale è lastricata di ogni genere di asperità. Nessuno dovrebbe essere lasciato solo nei momenti difficili e, nella vita, ognuno di noi meriterebbe di aver vicino un Virgilio, una Beatrice o un San Bernardo; io sono stato fortunato e desidero umilmente ringraziare chi mi è stato accanto e mi ha supportato lungo questo percorso. Dedico questa tesi: ai miei genitori e a mio fratello Leonardo, come segno di infinita gratitudine per essermi stati vicini nonostante la lontananza

geografica e i brutti momenti attraversati; ai miei nonni, per un sostegno che non è mai venuto meno e per essere stati le mie stelle anche nelle notti più buie; alle mie migliori amiche Beatrice ed Alma, compagne fedeli di glorie e sconfitte; al prof. Franco Varetto, che mi ha costantemente seguito ed aiutato nella redazione di questa trattazione. Un ringraziamento particolare va poi ad un caro amico, Carmine Ruggieri, per la disponibilità e la perizia dimostrata in merito alle



consulenze informatiche che gli ho richiesto; alla prof.ssa Maria Stella Barreca, per essersi sempre interessata al suo ex-studente; a tutti coloro con i quali ho condiviso questi anni difficili

ma ricchi di soddisfazioni e nuove esperienze. Vorrei concludere riportando gli ultimi versi del poema che è stato il filo conduttore dei ringraziamenti, sperando che siano un'ispirazione per andare avanti esattamente come lo sono sempre stati per me; ognuno di noi ce la può fare.

*“...Qual è geomètra che tutto s'affige
per misurar lo cerchio, e non ritrova,
pensando, quel principio ond'elli indige,
tal era io a quella vista nova:
veder voleva come si convenne
l'imago al cerchio e come vi s'indova;
ma non eran da ciò le proprie penne:
se non che la mia mente fu percossa
da un fulgore in che sua voglia venne.
A l'alta fantasia qui mancò possa;
ma già volgeva il mio disio e l'velle,
sì come rota ch'igualmente è mossa,
l'amor che move il sole e l'altre stelle”.*

PARADISO, CANTO XXXIII

SITOGRAFIA

www.wikipedia.org

www.ilsole24ore.com

www.ft.com

www.performancetrading.it

www.finance.yahoo.com

www.investing.com

www.morningstar.it

www.borsaitaliana.it

www.idealinvestimento.it

BIBLIOGRAFIA

- Bevan A., Winkelmann K. (1998), "Using the Black-Litterman global asset allocation model. Three years of practical experience", Fixed Income Research, Goldman Sachs.
- Biondi L. (2013), "Il modello di Black & Litterman. Descrizione teorica del modello", Edizioni Accademiche Italiane.
- Black F., Litterman R. (1991), "Asset Allocation: combining investor views with market equilibrium", The Journal of Fixed Income, September.
- Black F., Litterman R. (1992), "Global portfolio optimization", Financial Analysts Journal, Vol. 48, No. 5.
- Browne H. (1999), "Fail-safe investing. Lifelong financial security in 30 minutes", St. Martin's Press.
- Carbone A. (2018), "Il portafoglio perpetuo e permanente di Harry Browne", www.idealinvestimento.it.
- Castiglione A. (2018), "Gli uomini che hanno scritto la storia della finanza. I principi base della teoria di Markowitz", www.performancetrading.it.
- Gennai A. (2013), "Ecco come si costruisce il portafoglio "perfetto"", www.ilsole24ore.com.
- Gruber M.J. et al. (2013), "Teorie di portafoglio e analisi degli investimenti", Apogeo, Milano.
- He G., Litterman R. (1999), "The intuition behind Black-Litterman model portfolios", Working Paper, www.blacklitterman.org.
- Liguanti E., Bertelli R. (2008), "Analisi finanziaria e gestione del portafoglio. Valutazione del rischio, tecniche di asset allocation, relative e absolute return, strumenti di analisi", Franco Angeli Editore, Milano.
- Litterman R., Winkelmann K. (1988), "Estimating covariance matrices", Fixed Income Research, Goldman Sachs.
- Luenberger D.G. (2013), "Finanza e investimenti. Fondamenti matematici", Apogeo, Milano.

Markowitz H. (1952), "Portfolio selection", *The Journal of Finance*, Vol. 7, No. 1.

Pomante U. (2008), "Asset allocation razionale", *Bancaria Editrice*, Roma.

Rowland C., Lawson J.M. (2012), "The permanent portfolio: Harry Browne's long-term investment strategy", *Wiley*.

Palomba G., "Modello di simulazione per un portafoglio diversificato", Working Paper, utenti.dises.univpm.it/palomba/Mat/Markowitz.pdf.