



**POLITECNICO  
DI TORINO**

Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Fisica

Tesi di Laurea Specialistica

# **Analisi dinamica di laser a semiconduttore Quantum Dot mediante modelli non eccitonici**

**Relatore**

prof.ssa Mariangela Gioannini

**Corelatore**

prof. Ivo Montrosset

**Candidato**

Angelo Lotito

matricola: 178831

Aprile 2018

Quest'opera è soggetta alla Creative Commons Public License **Attribuzione - Non commerciale - Non opere derivate** versione 3.0 Italia. Commons Deed reperibile all'indirizzo internet <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/it/deed.it>; Legal Code reperibile all'indirizzo internet <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/it/legalcode>.

## Nota

Si rendono necessarie alcune precisazioni, anche a completamento del frontespizio (e della bibliografia).

Questa tesi mi è stata proposta dal prof. Ivo Montrosset, che ne ha coordinato di fatto l'intero svolgimento; la sua esperienza si è rivelata preziosa per trovare la 'via'. Per ragioni di servizio non è (più) ufficialmente relatore, ma ha seguito completamente anche la stesura della tesi, nonostante un dilatamento dei tempi – non dovuto comunque a ragioni accademiche o formali – oltre quello “normale”. La prof.ssa Mariangela Gioannini, invece, ha seguito molto da vicino, in una prima fase, prevalentemente gli aspetti legati alla simulazione (sia la messa a punto dei modelli che la loro implementazione), mediante un approccio molto diretto. Le indicazioni e spunti forniti da entrambi i docenti sono risultati, quindi, complementari e maggiormente utili per affrontare e completare tutte le fasi di questa tesi.

## Sommario

Questa tesi, di calcolo, studia la dinamica di laser a semiconduttore Quantum Dot (QD). Il dispositivo studiato è formato da un ensemble di QD, di tipo self-assembled InAs/GaAs, accoppiati dal Wetting Layer (struttura bidimensionale), che fa da 'riserva' di portatori. Ogni singolo dot può emettere ed il guadagno ottico complessivo viene ad essere il contributo di tutti i dot laseranti. Sono analizzati i casi di emissione solo da Ground State, solo da Excited State e da entrambi simultaneamente. Il modello di partenza consiste in un sistema di Rate Equation (RE) per elettroni, lacune e fotoni; si descrive una dinamica separata per elettroni e lacune (modello non eccitonico). Per la dinamica delle lacune, tra i livelli permessi, si assumono due ipotesi: una dinamica infinitamente veloce (ipotesi di termalizzazione) e una dinamica finita.

Si studia la dinamica in regime di *piccolo segnale*, in cui si può supporre che il sistema si comporti in modo lineare. Si linearizzano le RE attorno ad un punto in polarizzazione, dalle quali ricavare la funzione di risposta armonica.

Si trova che le risposte, nei due casi esaminati, discostano di poco. In particolare, nell'ipotesi di dinamica finita delle lacune, si ottiene una riduzione di banda poco significativa, suggerendo una certa plausibilità dell'ipotesi di termalizzazione.

# Indice

<b>1</b>	<b>I Quantum Dot</b>	<b>8</b>
1.1	Laser a semiconduttore Quantum Dot . . . . .	8
1.1.1	Confinamento quantico . . . . .	9
1.1.2	Caratteristiche ideali . . . . .	10
1.1.3	Caratteristiche reali . . . . .	12
1.2	Evoluzione storica . . . . .	13
1.3	Tecniche di fabbricazione . . . . .	15
1.4	Applicazioni . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Modelli per Quantum Dot</b>	<b>21</b>
2.1	Rate Equation per laser a semiconduttore . . . . .	21
2.2	Guadagno di soglia . . . . .	27
2.3	Il modello macro-stato lacune . . . . .	30
2.4	Emissione da GS . . . . .	37
2.4.1	Lo stato stazionario . . . . .	37
2.4.2	La linearizzazione delle RE . . . . .	38
2.4.3	La funzione di trasferimento . . . . .	50
2.5	Emissione da ES . . . . .	60
2.6	Emissione simultanea da GS ed ES . . . . .	67
2.7	Il modello dinamica discreta lacune . . . . .	77
2.8	Il modello eccitonico . . . . .	80
2.9	Considerazioni finali . . . . .	82
<b>3</b>	<b>Interpretazione risultati</b>	<b>84</b>
3.1	Dinamica di un laser a QD: il ruolo dei tempi coinvolti . . . . .	84
3.2	La necessità di un modello non eccitonico . . . . .	85
3.3	I parametri di simulazione . . . . .	86
3.4	Macro-stato lacune . . . . .	89
3.4.1	Caratteristiche statiche . . . . .	89
3.4.2	Caratteristiche dinamiche: emissione da GS . . . . .	89
3.4.3	Caratteristiche dinamiche: emissione da ES . . . . .	93

3.4.4	Caratteristiche dinamiche: emissione da GS e da ES a confronto . . . . .	100
3.4.5	Caratteristiche dinamiche: emissione simultanea da GS ed ES . . . . .	100
3.5	Dinamica discreta lacune . . . . .	102
3.6	Modello eccitonico . . . . .	105
3.7	Confronto con i dati sperimentali e conclusioni . . . . .	107
<b>A</b>	<b>L'implementazione dei calcoli</b>	<b>112</b>
A.1	Il simulatore analitico . . . . .	112
A.2	Il simulatore numerico . . . . .	118
A.3	Il ruolo dei due simulatori . . . . .	119
<b>B</b>	<b>Altri risultati</b>	<b>121</b>
B.1	Macro-stato lacune: emissione da GS . . . . .	121
B.1.1	Set Greedy lento (intero ensemble laserante) . . . . .	121
B.1.2	Cattura diretta: caratteristiche statiche . . . . .	124
B.1.3	Dinamica sotto soglia . . . . .	129
B.2	Dinamica discreta lacune (emissione da GS) . . . . .	132
B.2.1	Risposta portatori (emissione da GS) . . . . .	133
B.2.2	Risposta elettroni (emissione simultanea da GS ed ES) . . . . .	138
	<b>Bibliografia</b>	<b>141</b>

# Elenco delle figure

1.1	Struttura di un tipico laser a semiconduttore QD . . . . .	9
1.2	DOS ideale per le diverse dimensionalità (banda di conduzione)	11
1.3	Evoluzione della densità di corrente di soglia . . . . .	13
1.4	Fasi di crescita di dot self-assembled . . . . .	17
1.5	Immagine AFM di QD ad alta densità . . . . .	17
1.6	Immagine SEM di una struttura a QD usata come sorgente a singolo fotone . . . . .	19
2.1	Modello di pompaggio elettrico . . . . .	22
2.2	Cavità laser con le sezioni attiva e passiva e il modo guidato .	28
2.3	Diagramma delle bande di conduzione (a) e di valenza (b) con i livelli confinati per i portatori, la loro densità e i tempi di cattura/rilassamento . . . . .	31
2.4	Andamento della densità normalizzata di fotoni GS rispetto alla corrente di bias (set a confronto) . . . . .	39
2.5	Emissione da GS: andamento delle densità normalizzate di portatori rispetto alla corrente di bias (set Arakawa) . . . . .	40
2.6	Emissione da GS: probabilità di occupazione degli elettroni negli stati GS ed ES rispetto alla corrente di bias (set Arakawa)	41
2.7	Emissione da GS: risposta IM vs bias (set Arakawa) . . . . .	59
2.8	Andamento della densità normalizzata di fotoni ES rispetto alla corrente di bias (set Arakawa) . . . . .	61
2.9	Emissione da ES: andamento delle densità normalizzate di portatori rispetto alla corrente di bias (set Arakawa) . . . . .	62
2.10	Emissione da ES: probabilità di occupazione degli elettroni negli stati GS ed ES rispetto alla corrente di bias (set Arakawa)	63
2.11	Emissione da ES: risposta IM vs bias (set Arakawa) . . . . .	67
2.12	Andamento della densità normalizzata di fotoni GS rispetto alla corrente di bias (valori di corrente inferiori a 10 mA) (set Arakawa) . . . . .	69

2.13 Andamento delle densità normalizzate di fotoni GS ed ES rispetto alla corrente di bias (set Arakawa) . . . . .	70
2.14 Emissione simultanea da GS ed ES: andamento delle densità normalizzate di portatori rispetto alla corrente di bias (set Arakawa) . . . . .	71
2.15 Emissione simultanea da GS ed ES: probabilità di occupazione degli elettroni negli stati GS ed ES rispetto alla corrente di bias (set Arakawa) . . . . .	72
2.16 Risposta IM per i fotoni GS ed ES (set Arakawa) . . . . .	78
3.1 Emissione da GS: andamento di poli e zeri con la corrente di bias (set Arakawa) . . . . .	90
3.2 Emissione da GS: fattore di merito e frequenza massima della banda a $-3$ dB rispetto alla corrente di bias (set a confronto) .	91
3.3 Cattura diretta: densità normalizzata di fotoni GS rispetto alla corrente di bias (set Gready lento) . . . . .	92
3.4 Andamento di poli e zeri rispetto alla corrente di bias per $\tau_{c,GS}^e = 10^4$ ps (set Gready lento) . . . . .	94
3.5 Andamento, per alcune correnti di bias, della risposta IM (risultato analitico); caso $\tau_{c,GS}^e = 10^4$ ps (set Gready lento) . .	94
3.6 Andamento di poli e zeri rispetto alla corrente di bias per $\tau_{c,GS}^e = 5\tau_{c,ES}^e$ (set Gready lento) . . . . .	95
3.7 Andamento, per alcune correnti di bias, della risposta IM (risultato analitico); caso $\tau_{c,GS}^e = 5\tau_{c,ES}^e$ (set Gready lento) . . .	95
3.8 Andamento di poli e zeri rispetto alla corrente di bias per $\tau_{c,GS}^e = \tau_{c,ES}^e$ (set Gready lento) . . . . .	96
3.9 Andamento, per alcune correnti di bias, della risposta IM (risultato analitico); caso $\tau_{c,GS}^e = \tau_{c,ES}^e$ (set Gready lento) . . .	96
3.10 Andamento di poli e zeri rispetto alla corrente di bias per $\tau_{c,GS}^e = (1/5)\tau_{c,ES}^e$ (set Gready lento) . . . . .	97
3.11 Andamento, per alcune correnti di bias, della risposta IM (risultato analitico); caso $\tau_{c,GS}^e = (1/5)\tau_{c,ES}^e$ (set Gready lento)	97
3.12 Cattura diretta: fattore di merito rispetto alla corrente di bias (set Gready lento) . . . . .	98
3.13 Cattura diretta: frequenza massima della banda a $-3$ dB rispetto alla corrente di bias (set Gready lento) . . . . .	98
3.14 Emissione da ES: andamento di poli e zeri con la corrente di bias (set Arakawa) . . . . .	99
3.15 Emissione da ES: fattore di merito e frequenza massima della banda a $-3$ dB rispetto alla corrente di bias (set a confronto) .	100

3.16 Emissione GS ed ES a confronto: risposta IM (risultato analitico) per $2I_{th}$ (set Arakawa) . . . . .	101
3.17 Emissione GS ed ES a confronto: risposta IM (risultato analitico) per $5I_{th}$ (set Arakawa) . . . . .	101
3.18 Emissione GS ed ES a confronto: risposta IM (risultato analitico) per $10I_{th}$ (set Arakawa) . . . . .	102
3.19 Emissione simultanea da GS ed ES: andamento di poli e zeri con la corrente di bias (set Arakawa) . . . . .	103
3.20 Emissione simultanea da GS ed ES: fattore di merito rispetto alla corrente di bias (set Arakawa) . . . . .	104
3.21 Modelli non eccitonici a confronto: densità normalizzata di fotoni GS rispetto alla corrente di bias (set Gready lento) . . .	105
3.22 Modelli non eccitonici a confronto: risposta IM vs bias (set Gready lento) . . . . .	106
3.23 Modelli non eccitonici a confronto: fattore di merito e frequenza massima della banda a $-3$ dB rispetto alla corrente di bias (set Gready lento) . . . . .	106
3.24 Modello eccitonico: densità normalizzata di fotoni GS rispetto alla corrente di bias (set Gready lento) . . . . .	108
3.25 Eccitonico vs macro-stato lacune: risposta IM vs bias (risultati numerici) (set Gready lento) . . . . .	109
3.26 Risposta IM, per varie correnti di bias, a temperatura ambiente; dati sperimentali . . . . .	110
B.1 Densità normalizzata di fotoni GS rispetto alla corrente di bias (set Gready lento; intero ensemble laserante) . . . . .	122
B.2 Risposta IM vs bias (set Gready lento; intero ensemble laserante)	122
B.3 Andamento di poli e zeri con la corrente di bias (set Gready lento; intero ensemble laserante) . . . . .	123
B.4 Cattura diretta: densità normalizzata di elettroni SCH rispetto alla corrente di bias (set Gready lento) . . . . .	124
B.5 Cattura diretta: densità normalizzata di elettroni WL rispetto alla corrente di bias (set Gready lento) . . . . .	125
B.6 Cattura diretta: densità normalizzata di elettroni ES rispetto alla corrente di bias (set Gready lento) . . . . .	125
B.7 Cattura diretta: densità normalizzata di elettroni GS rispetto alla corrente di bias (set Gready lento) . . . . .	126
B.8 Cattura diretta: densità normalizzata di lacune QD+WL rispetto alla corrente di bias (set Gready lento) . . . . .	126
B.9 Cattura diretta: densità normalizzata di lacune SCH rispetto alla corrente di bias (set Gready lento) . . . . .	127

B.10	Cattura diretta: probabilità di occupazione degli elettroni nello stato ES rispetto alla corrente di bias (set Greedy lento) . . .	127
B.11	Cattura diretta: probabilità di occupazione degli elettroni nello stato GS rispetto alla corrente di bias (set Greedy lento) . . .	128
B.12	Sotto soglia: andamento di poli e zeri rispetto alla corrente di bias (set Arakawa) . . . . .	129
B.13	Sotto soglia: andamento di poli e zeri rispetto alla corrente di bias (set Greedy lento) . . . . .	130
B.14	Sotto soglia: fattore di merito rispetto alla corrente di bias (set a confronto) . . . . .	131
B.15	Guadagno dei fotoni GS rispetto alla corrente di bias (set Greedy lento) . . . . .	132
B.16	Risposta IM per gli elettroni WL (set Greedy lento) . . . . .	133
B.17	Risposta IM per gli elettroni ES (set Greedy lento) . . . . .	134
B.18	Risposta IM per gli elettroni GS (set Greedy lento) . . . . .	134
B.19	Risposta IM per le lacune GS (set Greedy lento) . . . . .	135
B.20	Risposta IM per le lacune $ES_1$ (set Greedy lento) . . . . .	135
B.21	Risposta IM per le lacune $ES_2$ (set Greedy lento) . . . . .	136
B.22	Risposta IM per le lacune $ES_3$ (set Greedy lento) . . . . .	136
B.23	Risposta IM per le lacune $ES_4$ (set Greedy lento) . . . . .	137
B.24	Risposta IM per le lacune WL (set Greedy lento) . . . . .	137
B.25	Emissione contemporanea da GS ed ES: densità normalizzata di fotoni GS ed ES rispetto alla corrente di bias (set Greedy lento) . . . . .	138
B.26	Emissione contemporanea da GS ed ES: risposta IM per gli elettroni WL (set Greedy lento) . . . . .	139
B.27	Emissione contemporanea da GS ed ES: risposta IM per gli elettroni ES (set Greedy lento) . . . . .	139
B.28	Emissione contemporanea da GS ed ES: risposta IM per gli elettroni GS (set Greedy lento) . . . . .	140

# Capitolo 1

## I Quantum Dot

### 1.1 Laser a semiconduttore Quantum Dot

La principale motivazione che sta dietro i laser a semiconduttore Quantum Dot (QD) è di avere un dispositivo con le seguenti caratteristiche (vantaggi):

- singola frequenza della radiazione emessa;
- il guadagno massimo del materiale e il guadagno differenziale è almeno 2–3 ordini di grandezza più alto dei laser a quantum well (QW);
- vantaggi dovuti alle piccole dimensioni: bassa potenza e alta frequenza di operazione, ampia modulazione di banda, bassa dinamica di chirp, basso fattore di allargamento di riga, bassa corrente di soglia;
- maggiore stabilità della corrente di soglia rispetto alla temperatura (non è necessario un controllo esterno per la temperatura).

Queste caratteristiche sono conseguenza della natura discreta della densità degli stati o Density Of States (DOS).

Una delle principali differenze, con i tradizionali dispositivi a semiconduttore, è che il picco di emissione delle frequenze è molto sensibile sia alla dimensione che alla composizione. La luce emessa ha la lunghezza d'onda determinata dai livelli di energia (piuttosto che dall'energia di band-gap); ne deriva una maggiore flessibilità rispetto alle lunghezze d'onda di interesse. Le dimensioni di questi dispositivi sono dell'ordine di 2–10 nm (decine di atomi).

Nella figura 1.1 è rappresentata una struttura di tipo *dots in a well* [17]. La regione attiva, formata da uno *stack* di 7 layer di QD self-assembled (paragrafo 1.3) di InAs<sup>1</sup> è posta tra 2 layer di AlGaAs (cladding). I dot sono

---

<sup>1</sup>Semiconduttore a band-gap diretto.

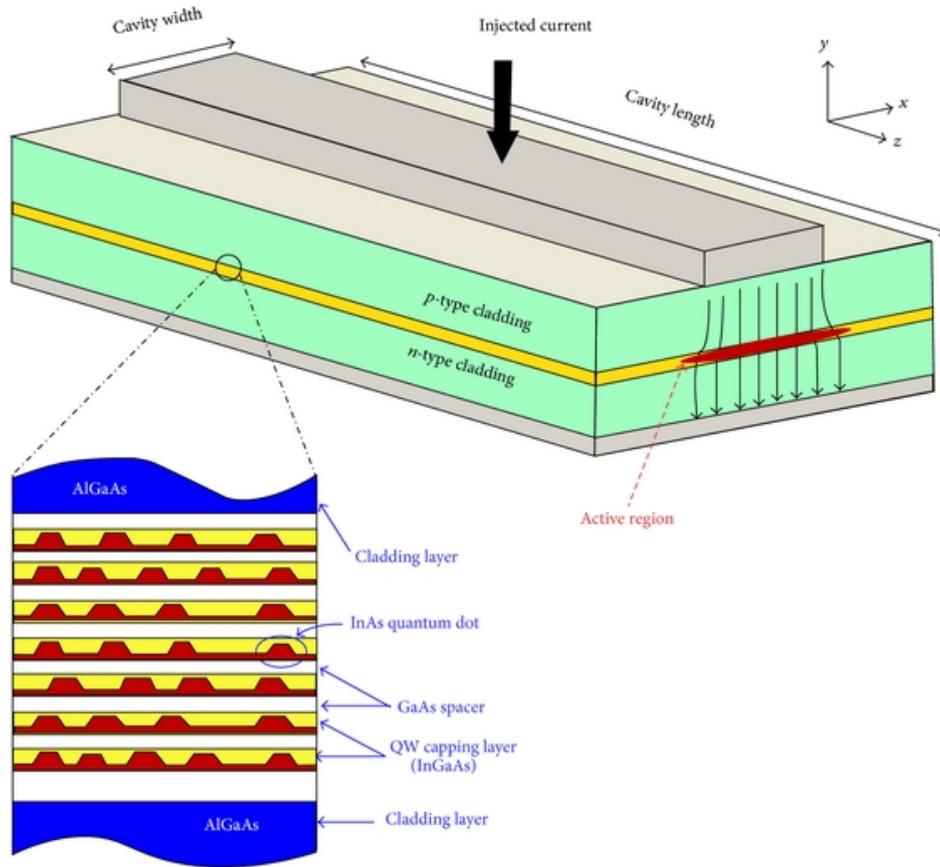


Figura 1.1: Struttura di un tipico laser a semiconduttore QD.

ricoperti con un layer di InGaAs di 5 nm di spessore (capping). I layer di QD sono separati da layer di GaAs (spacer) aventi spessore di 33–50 nm.

### 1.1.1 Confinamento quantico

Il quantum dot è una nanostruttura di materiale semiconduttore in cui un profilo di potenziale confina i portatori, nelle tre dimensioni spaziali, nel range della loro lunghezza d'onda di De Broglie (*buca di potenziale*). In un tipico reticolo semiconduttore, a temperatura ambiente (energia termica di 26 meV), un elettrone ha una lunghezza d'onda di De Broglie attorno ai 10 nm; il confinamento del potenziale è poche volte questo valore. Tutti i gradi di libertà della propagazione dei portatori sono quantizzati; per l'estensione della regione di confinamento, ci si riferisce ai QD anche come struttura

*zero dimensionale* (0D). Per comparazione, il materiale *bulk* (nessun confinamento) è 3D, i *quantum well* (confinamento in una direzione) sono 2D e i *quantum wire* (confinamento in due direzioni) è 1D. La quantizzazione dell'energia avviene nella direzione di confinamento.<sup>2</sup> Il confinamento porta alla quantizzazione dello spettro dei portatori (energie permesse) e quindi influenza la DOS. La dipendenza della DOS ( $\rho$ ) dall'energia ( $E$ ) per differenti dimensionalità ( $d$ ) è espressa da

$$\rho(E) \propto E^{d/2-1}$$

con  $d = 1, 2, 3$ . Per un QD la DOS consiste in una somma di funzioni  $\delta$  in corrispondenza delle energie permesse (figura 1.2).

L'inversione di popolazione, necessaria per il laseramento, avviene più efficientemente se lo strato di materiale attivo passa da 3D a 0D. Infatti ad un abbassamento della dimensionalità corrisponde un aumento della DOS a bordo banda: maggiore è la porzione di portatori iniettati che contribuiscono all'inversione di popolazione e al guadagno. La DOS, quindi, gioca un ruolo chiave per le proprietà fisiche del dispositivo.

### 1.1.2 Caratteristiche ideali

Un dispositivo ideale consiste in un array perfetto di QD identici e il potenziale di confinamento, di ogni dot, è considerato infinitamente profondo. In questo caso le caratteristiche dell'intero array corrispondono a quelle di un singolo dot, ma con una maggiore sovrapposizione del campo ottico con gli stati attivi dei portatori.

Il forte confinamento dei portatori nel dot fa sì che non è possibile estrarli tramite eccitazione termica: il comportamento del QD ideale non risente di fluttuazioni di temperatura.

Un'altra conseguenza, derivante dalla natura della DOS, è che l'inversione di popolazione (numero di elettroni in banda di conduzione maggiore che in banda di valenza) si ottiene facilmente (guadagno differenziale alto). Infatti nel QD sono disponibili solo gli stati otticamente attivi e conseguentemente

---

<sup>2</sup>La quantizzazione viene formalmente espressa nel modo seguente:

- caso 3D:  $[\hat{H}, \vec{k}] = 0$
- caso 2D:  $[\hat{H}, k_z] \neq 0$ , quantizzazione lungo  $z$ ;
- caso 1D:  $[\hat{H}, k_z] \neq 0$ , quantizzazione lungo  $z$ ;  $[\hat{H}, k_x] \neq 0$ , quantizzazione lungo  $x$ ;
- caso 0D:  $[\hat{H}, \vec{k}] \neq 0$

dove  $[\cdot, \cdot]$  esprime la *commutazione* tra i due operatori  $\hat{H}$  (*hamiltoniana* del sistema) e  $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)^T$  (vettore d'onda).

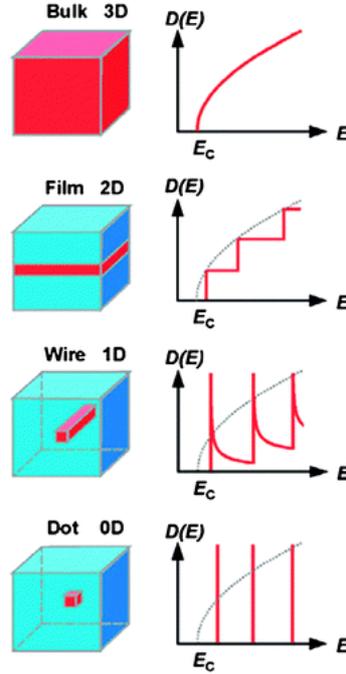


Figura 1.2: DOS ideale per le diverse dimensionalità (banda di conduzione;  $E_c$  indica l'energia di band-gap).

i portatori iniettati possono occupare solo quelli. Nei dispositivi a dimensionalità maggiore, invece, sono riempiti prima tutti gli stati a energia più bassa di quelli otticamente attivi. Questo significa che è necessaria una maggiore iniezione di corrente per raggiungere l'inversione; ciò spiega perché la soglia dei QD è più bassa.

L'alto guadagno differenziale spiega perché sia possibile una veloce modulazione diretta del dispositivo: devono essere mossi un numero limitato di portatori per cambiare in modo significativo il guadagno.

La natura discreta della DOS fa sì che un sistema con più popolazioni differenti di QD non presenta fenomeni di guadagno/assorbimento tra le varie popolazioni (le DOS hanno le funzioni  $\delta$  in corrispondenza di livelli energetici diversi). Questo non succede per i materiali bulk o QW.

Un'altra caratteristica dei QD è il basso fattore di allargamento di riga,  $\alpha_{\text{lef}}$ , dal quale risulta un basso chirp (modulazione spuria di frequenza ossia variazione della lunghezza d'onda di emissione sotto modulazione diretta). Si può esprimere  $\alpha_{\text{lef}}$  come

$$\alpha_{\text{lef}} \propto n_r' / g'$$

dove  $n_r'$  è la variazione differenziale dell'indice di rifrazione rispetto alla densità dei portatori e  $g'$  è il guadagno differenziale;  $n_r'$  e  $g'$  sono legati dalle

relazioni di Kramers-Kronig. Il basso valore di  $\alpha_{\text{lef}}$  si ha per due motivi:

1. l'alto valore di  $g'$  dei QD rispetto agli altri materiali;
2. per un profilo di guadagno simmetrico rispetto alla lunghezza d'onda (approssimazione lorentziana), la variazione di indice è zero all'energia di risonanza (quindi senza chirp).

### 1.1.3 Caratteristiche reali

Gli array reali sono caratterizzati da una distribuzione delle dimensioni dei dot; questo influenza la DOS (allargamento e abbassamento dei picchi). In questo caso il comportamento tende ad essere simile a quello di una struttura di tipo bulk. Più in generale un array di dot reali si discosta dal caso ideale per fluttuazioni nella dimensione, composizione e localizzazione; per questo i dot mostrano differenti autofunzioni ed autovalori (le energie permesse per i portatori) del hamiltoniana. Tali variazioni avvengono lentamente da un dot all'altro. Dato che le variazioni per un dot sono diverse da quelle degli altri dot, si parla di *inhomogeneous broadening*, in contrapposizione al *homogeneous broadening*.<sup>3</sup>

Come conseguenza le funzioni simil- $\delta$  della DOS sono distribuite ognuna su più energie di transizione possibili (e in generale diverse per ogni dot). In questo caso, poiché il contributo di ogni dot non è alla stessa energia, risulta che i valori di picco della DOS sono più bassi e di conseguenza anche i valori di guadagno. La corrente di soglia si alza rispetto al caso ideale, perché risulta meno efficiente il riempimento degli stati otticamente attivi. La riduzione del guadagno differenziale, con una rottura di una simmetria perfetta dello spettro di guadagno, provoca un valore di  $\alpha_{\text{lef}}$  finito e quindi si presenta il fenomeno del chirp.

Un dot reale ha un profilo di potenziale di confinamento con un'altezza finita. Questo significa che quando l'energia termica è maggiore dell'energia relativa alla barriera, tra il dot e il materiale che lo circonda, è possibile per i portatori uscire dal dot. Di conseguenza il dispositivo a QD avrà una soglia in corrente dipendente dalla temperatura.

Si riportano alcuni valori tipici per sistemi reali:

- *densità di corrente di soglia* a temperatura ambiente:  $50 \div 200$  A/cm<sup>2</sup>;
- *guadagno differenziale*:  $7 \times 10^{-14}$  cm<sup>2</sup>;

<sup>3</sup>Per un singolo dot reale non avviene l'inhomogeneous broadening delle funzioni simil- $\delta$  della DOS: questo avviene per un array reale di dot, poiché la DOS totale consiste nella somma delle DOS relative a tutti i dot del array.

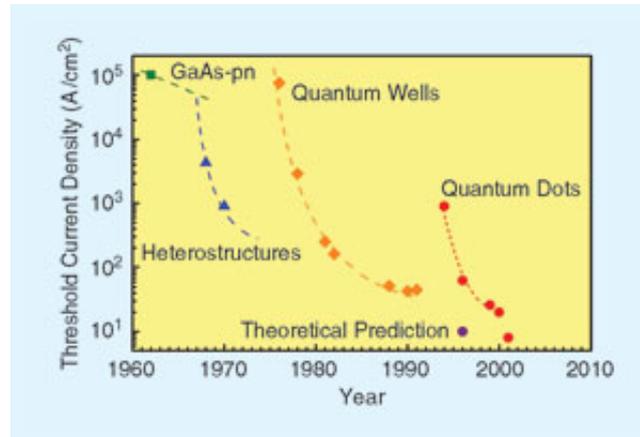


Figura 1.3: Evoluzione della densità di corrente di soglia. [10].

- $\alpha_{\text{lef}}$ :  $0,5 \div 1$

## 1.2 Evoluzione storica

Il primo a mostrare l'emissione di luce coerente da un diodo a semiconduttore (il primo diodo laser) fu Robert N. Hall ed il suo gruppo di lavoro al centro di ricerca General Electric nel novembre del 1962. Questo laser era formato da una giunzione p-n di GaAs (omogiunzione) in cui si iniettano gli elettroni dal lato n e le lacune dal lato p.<sup>4</sup> La densità di corrente di soglia osservata era di  $10^5$  A/cm<sup>2</sup> ad una temperatura di 4,2 K (figura 1.3); si operava in modalità pulsata. L'efficienza quantica esterna era ben al di sotto del 1% e quindi l'energia pompata elettricamente veniva convertita quasi completamente in calore. L'efficienza così bassa è dovuta al fatto che nelle strutture ad omogiunzione non c'è un buon confinamento dei portatori nella regione attiva. Comunque i laser a semiconduttore risultano molto compatti se comparati agli altri tipi di laser.

Verso la fine degli anni '60 furono riportati (da Alferov, Hayashi e Panish) i laser a doppia eterostruttura (DH). In questo tipo di struttura lo strato attivo (con bassa energia di band-gap), è inserito tra due strati con energia di band-gap maggiore.<sup>5</sup> Il vantaggio di un laser DH è che la regione dove i portatori liberi, elettroni e lacune, esistono simultaneamente (la regione attiva) è confinata al sottile strato intermedio. Questo significa che molte più coppie elettrone-lacuna possono contribuire all'amplificazione e non ne rimangono

<sup>4</sup>Quello che si considera è il moto degli elettroni e delle lacune nelle bande rispettivamente di conduzione (BC) e di valenza (BV).

<sup>5</sup>Giunzione tra due semiconduttori chimicamente diversi.

così tante escluse come nella periferia a bassa amplificazione. Inoltre, la luce viene riflessa dalla eterogiunzione: la luce viene confinata nella regione dove avviene l'amplificazione. Questo ha permesso un abbassamento della densità di corrente di soglia di due ordini di grandezza. Il primo laser funzionante in modalità ad onda continua fu un dispositivo a doppia eterostruttura.

Nel 1969 si ha il funzionamento a temperatura ambiente dei laser a semiconduttore.

Il problema delle strutture DH semplici è che il sottile strato intermedio (la regione attiva) è troppo piccolo per confinare efficacemente la luce. A tal fine vengono aggiunti altri due strati esternamente ai tre di una struttura DH semplice. Gli strati aggiunti, per confinare la luce in maniera più efficace, devono avere un indice di rifrazione inferiore ai tre strati centrali. La struttura è chiamata eterostruttura a confinamento separato (Separate Confinement Heterostructure o SCH). Quasi tutti i diodi laser commerciali prodotti dal 1990 sono stati di tipo SCH.

I dispositivi di questa fase storica erano di tipo bulk e quindi mostravano alcune caratteristiche non desiderabili come un'alta corrente di soglia, una forte dipendenza dalla temperatura e un alto chirp. La ricerca si concentrò sullo sviluppo di dispositivi che non mostravano tali caratteristiche.

Successivamente ci fu la scoperta del confinamento degli elettroni in strutture a bassa dimensionalità, con proprietà completamente diverse dai materiali bulk. Si tratta dell'effetto *quantum size*: quando lo strato attivo ha uno spessore di 10 nm o meno, la distribuzione energetica degli elettroni e lacune confinati in esso, diventa (da bande continue) a livelli discreti. Nel caso in cui il movimento dei portatori è fortemente confinato in una direzione, mentre si possono muovere liberamente nelle altre due dimensioni, si ha un materiale QW; questi dispositivi sono superiori a quelli di tipo bulk in quasi tutti gli aspetti. L'idea che questo effetto poteva essere usato nei laser a semiconduttore fu per prima suggerita da Henry e Dingle nel 1975. Nello stesso anno, gli stessi, descrissero una ulteriore riduzione della dimensionalità verso strutture quantum wire, con una densità degli stati caratterizzate da singolarità ai bordi delle sotto-bande (figura 1.2) e una conseguente ulteriore riduzione della densità di corrente di soglia. Tra la fine degli anni '70 e l'inizio degli '80 risalgono le prime realizzazioni di strutture QW mediante tecniche di crescita Metal-Organic Chemical Vapor Deposition (MOCVD) e Molecular Beam Epitaxy (MBE). Con queste tecniche infatti era possibile formare strati spessi pochi nanometri in eterostrutture.

La teoria che descrive il QD fu proposta per prima da Arakawa e Sakaki nel 1982; al 1984 risale la descrizione delle dinamiche di modulazione e proprietà spettrali (Arakawa e Yariv). Nel 1994 fu realizzato il primo laser a QD di tipo self-assembled (paragrafo 1.3) in cui le energie erano pienamente

quantizzate in entrambe le bande, ma lo spettro di guadagno era fortemente ‘inhomogeneously broadened’. I QD mostrano caratteristiche superiori, rispetto alle altre strutture, dovute al forte confinamento dei portatori attivi.

### 1.3 Tecniche di fabbricazione

La fabbricazione di dot di alta qualità è un problema di soluzione non semplice, a causa delle dimensioni in gioco. Solamente negli ultimi anni è stato possibile produrre array di dot estesi ed uniformi su base regolare. Le tecniche di fabbricazione possono essere raggruppate in tre gruppi.

La prima tecnica usata per realizzare QD fu l’inclusione di particelle nanometriche di semiconduttore (CdS o CdSe) in una matrice di silice ( $\text{SiO}_2$ ). I dot così prodotti andavano bene se usati, grazie alle loro righe di assorbimento, come filtri di colore. I dot prodotti in questo modo non sono però adatti per applicazioni di tipo elettro-ottico, dato che il materiale semiconduttore risulta elettricamente isolato dalla silice da cui è circondato.

Nel secondo gruppo si possono includere vari tipi di tecniche. Un tipico esempio è la tecnica di *dry etching* utilizzata per produrre geometrie in strutture a film sottile, come ad esempio strutture di tipo *pillar*. In questo modo possono essere prodotti dot abbastanza regolari in array quasi perfetti; di contro le dimensioni laterali sono limitate dai processi litografici che, nel caso migliore, sono nel range dei 10 nm. Inoltre questo processo causa seri danni al materiale semiconduttore su un range di 50 nm e ciò costituisce una seria limitazione per l’uso del metodo alle scale più piccole possibili. Uno dei punti di forza di questo metodo è la possibilità, usando la litografia a fascio elettronico, di fare dot di forma arbitraria.

Il terzo metodo è detto **self-assembled** ed è ad oggi il metodo più utilizzato. L’idea base di questa tecnica è quella di depositare il materiale di cui sarà fatto il dot su un substrato avente una differente costante reticolare. Per depositare il materiale dei dot si usano principalmente due tecniche:

- Metal-Organic Vapor Phase Epitaxy (MOVPE) ossia crescita epitassiale mediante deposizione chimica da fase vapore con precursori metal-organici; le fasi gassose sono in condizioni di bassa pressione ( $2 \div 100$  kPa);
- Molecular Beam Epitaxy (MBE) ossia deposizione epitassiale di tipo fisico che, in condizioni di flusso molecolare, permette di crescere film di spessore atomico; per permettere il flusso molecolare si opera in condizioni di alto vuoto (pressione di fondo  $\approx 10^{-8}$  Pa).

Lo strato epitassiale (ad esempio InAs) che si va a depositare ha una costante reticolare maggiore del substrato (ad esempio GaAs). Come risultato del moderato disadattamento reticolare (*mismatch*), con deformazioni nette di almeno  $\approx 2\%$  tra i due semiconduttori, si ha una deformazione a cui è associata un'energia. Il materiale del dot tenderà ad attaccarsi insieme in piccole isole 3D (*fase di nucleazione*) al fine di minimizzare la deformazione superficiale: questo dà luogo alla formazione dei dot. La formazione delle isole si deve al rilassamento elastico sui bordi delle facce, alla minimizzazione dell'energia delle facce e all'interazione tra le isole vicine attraverso il substrato. L'energia elastica derivante dal mismatch è, per i primi monostrati, compensata da forze di superficie, ma quando viene aggiunto altro materiale, porta alla formazione di domini tridimensionali. Il processo di formazione delle isole riduce l'energia di deformazione, ma incrementa l'energia di superficie: il processo di crescita è determinato dall'equilibrio di queste due energie competitive.<sup>6</sup> La crescita, quindi, avviene attraverso la formazione di uno strato iniziale monoatomico (strato 2D), che costituisce il *wetting layer* (WL), e successivamente di isole (figura 1.4). Il WL è dello stesso materiale dei dot e consiste delle prime molecole depositate sul substrato di crescita; in tal modo si forma un film sottile e uniforme prima che abbia inizio la formazione dei dot. Continuando nella crescita, le isole tendono a fondersi insieme (*fase di coalescenza*), per cui la crescita viene arrestata prima che vengano meno le caratteristiche volute.<sup>7</sup> La dimensione, la forma, la densità di area e le proprietà ottiche dipendono dai parametri di crescita, come la temperatura, il rate di crescita e la quantità di materiale depresso.<sup>8</sup> Successivamente i dot formati vengono ricoperti con un materiale ad alto band-gap (possibilmente dello stesso materiale del substrato). A questo punto viene ripetuto il processo per crescere un altro array di dot (sopra il materiale ad alto band-gap).

I dot così formati hanno dimensioni tipiche di 15–20 nm con un'altezza di 8 nm; tra un dot e i primi vicini ci sono tipicamente 50–100 nm. I dot risultano in posizioni casuali sulla superficie. La disposizione casuale fa sì che i differenti dot interagiscono in modo differente con quelli vicini e ciò costituisce un contributo al inhomogeneous broadening. La dimensione dei dot (che dipende anche dal substrato su cui sono formati) risulta diversa da un layer all'altro. Questa fluttuazione delle dimensioni dei dot dà un altro contributo al inhomogeneous broadening. L'alta densità ( $10^{10} \text{ cm}^{-2}$ ), invece,

---

<sup>6</sup>La deformazione, che porta alla formazione dei dot, influenza anche il potenziale di confinamento dei portatori. Inoltre, cambiando la geometria della superficie del dot, cambia l'energia di band-gap.

<sup>7</sup>Questo metodo di crescita è noto anche come crescita Stranski-Krastanov.

<sup>8</sup>Per ridurre il gradiente di densità si ruota opportunamente il substrato di crescita.

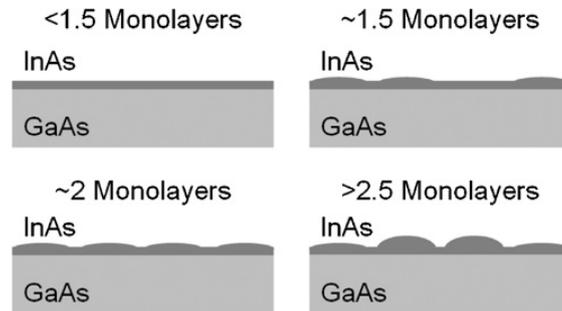


Figura 1.4: Fasi di crescita di dot self-assembled. [18].

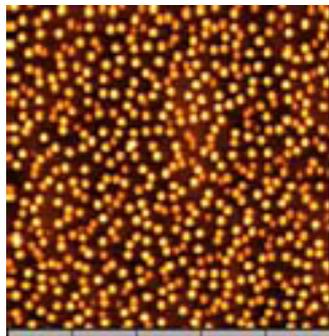


Figura 1.5: Immagine AFM di QD ad alta densità; ad ogni tacca visibile sulla base dell'immagine corrispondono 200 nm. Fonte [9].

fa sì che ci sia una buona sovrapposizione con il campo ottico e ciò permette di ottenere un alto guadagno. La figura 1.5 mostra una immagine AFM (Atomic Force Microscope) relativa ad un caso di una densità di dot (self-assembled di InAs formati con MBE su substrato di GaAs) per un'area di  $5,9 \times 10^{10} \text{ cm}^{-2}$ ; questo valore è un parametro di simulazione usato in questa tesi (tabella 3.2). Generalmente la forma dei dot è stimata essere di tipo piramidale o a lente. Questa forma esiste prima che il dot venga ricoperto dal materiale di capping. In seguito viene meno la netta separazione tra i due materiali a causa di fenomeni di diffusione del materiale del dot nel layer di capping; la struttura risultante non è ben conosciuta.<sup>9</sup>

Una caratteristica delle strutture self-assembled è la presenza del WL, che connette i dot di ciascun layer. Il WL è molto importante per le caratteristiche di cattura del dispositivo: fa da linea di alimentazione dei portatori quando si pompa elettricamente il dispositivo; questo è particolarmente importante se i dot non riempiono omogeneamente il piano su cui si formano,

<sup>9</sup>La funzione d'onda dipende anche dalla forma del dot, poiché questa influenza il profilo spaziale del potenziale di confinamento.

in quanto, diminuisce l'efficienza di cattura dei portatori.

Un punto di forza del metodo self-assembled è che è possibile crescere una gran quantità di dot ravvicinati, abbastanza omogenei e con un buon confinamento. La densità dei dot, però, non può essere controllata in modo indipendente e la natura casuale del processo di formazione rende difficile ridurre l'inhomogeneous broadening. Inoltre questo metodo risulta costoso.

## 1.4 Applicazioni

L'alta velocità di un dispositivo a QD, nel range delle lunghezze d'onda di 1,3  $\mu\text{m}$  e 1,55  $\mu\text{m}$ , possono trovare applicazione nell'ambito delle telecomunicazioni.

I dispositivi a QD possono essere usati come laser ad alta potenza (sorgenti ottiche con potenze d'uscita dell'ordine del watt o più).<sup>10</sup>

Un sistema con più popolazioni di dot, si presta all'amplificazione contemporanea di canali ottici multipli indipendenti. Questo è dovuto ad effetti di *cross gain* (ed assorbimento). In generale c'è la possibilità di adattare lo spettro di guadagno agendo sulla distribuzione della dimensione dei dot.

Le strutture a QD sono utilizzate, per il loro spettro di emissione a righe, anche come *filtri ottici*. Dal 2013, si sono iniziati ad utilizzare tali filtri alla retroilluminazione LED (Light Emitting Diode) nei display a cristalli liquidi. Questo permetterebbe di ottenere un più ampio spettro di colori<sup>11</sup> rispetto all'uso del solo filtro RGB (Red Green Blue).<sup>12</sup>

I dispositivi QD sono anche candidati come emettitori/rilevatori nel regime del lontano infrarosso, senza la necessità di operare a temperature inferiori a quella ambiente. Questo è dovuto ai tempi di scattering più bassi (o piuttosto tempi di rilassamento) rispetto a strutture QW.<sup>13</sup>

Un QD, poiché ha una DOS simile a quella di un atomo, può essere usato come atomo 'artificiale'. Usare un sistema di QD, rispetto agli atomi veri, da dei vantaggi per via delle maggiori dimensioni in gioco ed è un sistema più controllabile, poiché è molto più facile tenere un dot separato da ciò che lo circonda. Questa caratteristica può essere usata nell'ambito della computazione quantistica. In tale contesto i QD self-assembled vengono

---

<sup>10</sup>Il motivo di questo tipo di vantaggio non è pienamente compreso, ma ha un ruolo chiave il basso valore dell'allargamento di riga.

<sup>11</sup>Tecnicamente il gamut del modello di colore del display.

<sup>12</sup>Il modello di colore rimane, quindi, anche con l'aggiunta del filtro a QD, RGB.

<sup>13</sup>Nelle strutture QW è necessario operare a basse temperature per abbassare il rate di scattering (cioè si aumenta il tempo di coerenza).

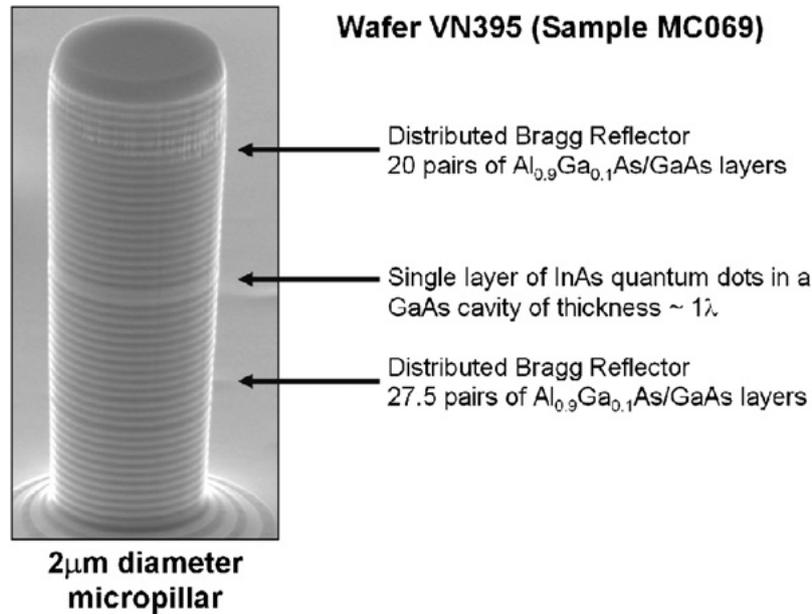


Figura 1.6: Immagine SEM (Scanning Electron Microscope) di una struttura a QD usata come sorgente a singolo fotone; lo strato più scuro sulla parte superiore è il capping layer (strato di contatto). Fonte [18].

utilizzati come sorgenti a *singolo fotone*.<sup>14</sup> In particolare è stata studiata l'emissione da singoli dot di InAs in strutture di tipo micropillar [18]. In questa struttura i dot sono in una cavità Fabry–Perot di dimensioni tali da avere la risonanza al modo della cavità (onda stazionaria). Questo serve perché il sistema di dot è eccitato otticamente. L'emissione di singoli fotoni in dot eccitati elettricamente è stata dimostrata nel 2009 (Bimberg et al) ad una temperatura di 15 K. Il dispositivo usato era simile a quello descritto sopra ed era formato da un layer di QD di InAs/GaAs di densità di  $5 \times 10^8 \text{ cm}^{-2}$ , incorporato in una struttura a diodo p–i–n; anche in questo caso il layer di dot era confinato in una cavità risonante, realizzata con specchi DBR di GaAs/AlGaAs. Questa struttura è riportata nella figura 1.6.

15

<sup>14</sup>Un elettrone e una lacuna, con spin opposti, possono ricombinarsi emettendo un fotone.

<sup>15</sup>Un laser è una sorgente di fotoni, che sono le ‘particelle’ più abbondanti nell’Universo. La teoria della coerenza [19, 20] fornisce gli strumenti matematici per descrivere una sorgente di luce; a tal fine bisogna utilizzare la funzione di correlazione al secondo ordine, funzione del ritardo temporale o intervallo di correlazione tra due fotoni emessi (quella al primo ordine non basta). Le sorgenti di luce si possono distinguere in:

- sorgente termica (il corpo nero);

- 
- laser ideale;
  - sorgente di singoli fotoni (un atomo, un QD).

Nel caso di luce termica la radiazione è incoerente: i fotoni emessi hanno diverso momento (quindi diversa direzione), diversa frequenza, diversa fase (essendo diversa la lunghezza d'onda non c'è fasamento) e diversa polarizzazione. Inoltre, i fotoni arrivano in gruppi.

La radiazione emessa da un laser è coerente. Nell'emissione stimolata, infatti, i fotoni creati ed emessi simultaneamente – i fotoni sono bosoni e non risentono, quindi, della pressione di degenerazione – sono totalmente coerenti con quello incidente: hanno lo stesso momento, fase, frequenza, e polarizzazione del fotone incidente. La monocromaticità è correlata con la *coerenza temporale* (le onde conservano la stessa fase nel tempo), mentre la direzionalità è correlata con la *coerenza spaziale* (le onde hanno la stessa fase in tutti i punti della sezione del fascio). La funzione di correlazione al secondo ordine risulta costante, conseguenza del fatto che, ciascuna emissione è un evento indipendente da tutte le altre emissioni; due fotoni possono essere separati da qualunque ritardo, cioè gli intervalli di tempo relativi all'emissione di due fotoni qualunque sono casuali (*distribuzione poissoniana*). Si osserva anche che, una sorgente *monocromatica* è solo ideale in quanto, per la relazione tempo-frequenza, in accordo con il *principio di indeterminazione*, richiede un tempo infinito. Infatti, la  $\delta$  di Dirac nel dominio della frequenza (positiva) è la trasformata di Fourier di una sinusoidale che ha supporto temporale  $(-\infty, +\infty)$ . Le sinusoidi reali, essendo 'troncate', danno trasformate a supporto finito e diverso da zero, quindi in tal senso, tali segnali non sono monocromatici.

Nel caso di emissione di singoli fotoni, la correlazione al secondo ordine risulta nulla per ritardo nullo (perfetto *antibunching*). L'emissione di due fotoni qualunque risulta temporalmente separata da un ritardo finito, cioè i fotoni arrivano separatamente.

## Capitolo 2

# Modelli per Quantum Dot

I fenomeni di transizione di portatori tra i livelli di energia permessi in un semiconduttore, sono caratterizzati da tempi – fortemente dipendenti dal tipo di transizione – responsabili della dinamica ‘intrinseca’ di un dispositivo a semiconduttore. Questa dinamica si può descrivere con un modello a Rate Equation (RE) ossia equazioni di bilancio per la concentrazione di portatori e fotoni, che descrivono la loro variazione ‘istantanea’ (equazioni differenziali nel tempo). Per una modulazione di piccolo segnale, queste equazioni sono analoghe a quelle che descrivono corrente e tensione in un circuito RLC. Quindi la risposta di *modulazione elettro-ottica* deve mostrare una frequenza di risonanza, al di sopra della quale la risposta scende rapidamente. I modelli a RE, presi in esame ed utilizzati per derivare la dinamica dei laser a QD, sono di tipo *non eccitonico*, cioè descrivono sia la popolazione di elettroni che di lacune. In questi modelli lo ‘scenario’ per le lacune non è quindi considerato ‘simmetrico’ rispetto a quello degli elettroni.

### 2.1 Rate Equation per laser a semiconduttore

La densità dei portatori nella regione attiva è governata da un processo dinamico. Per descrivere questo processo, e il raggiungimento dello stato stazionario per i portatori, si può usare un modello di pompaggio elettrico, schematizzato nella figura 2.1. Supponendo la neutralità di carica si può fare riferimento solo agli elettroni; a questa condizione ci si avvicina comunque per alti livelli di iniezione di corrente.

La corrente iniettata fornisce un termine di generazione, mentre la perdita di portatori è descritta da un termine di ricombinazione. Si può scrivere

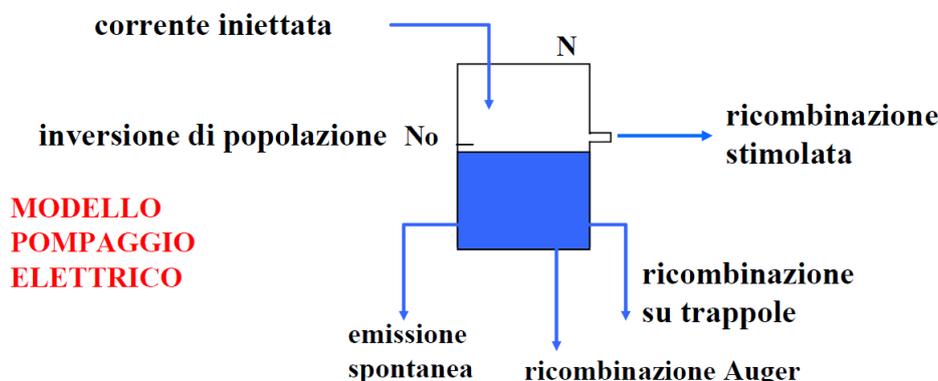


Figura 2.1: Modello di pompaggio elettrico in cui la concentrazione di portatori liberi ( $N$ ) è il risultato del bilancio dei vari fenomeni di ricombinazione; quando  $N$  raggiunge quella richiesta dall'inversione di popolazione ( $N_0$ ) ha inizio l'emissione stimolata.

l'equazione di bilancio come

$$\frac{dN}{dt} = G_{\text{gen}} - R_{\text{rec}} \quad (2.1)$$

dove  $N$  è la densità di portatori (elettroni),  $t$  il tempo,  $G_{\text{gen}}$  è il tasso di portatori iniettati (processo di generazione) e  $R_{\text{rec}}$  è il tasso di ricombinazione dei portatori per unità di volume nella regione attiva.

Nelle condizioni di *stato stazionario*,  $dN/dt = 0$ , il tasso di generazione è pari a quello di ricombinazione.

Nel modello viene inclusa anche la perdita di corrente dovuta all'esistenza di percorsi attorno alla regione attiva, che contribuiscono a ridurre l'*efficienza quantica interna*, la quale indica la frazione di corrente terminale che genera portatori nella regione attiva. Dato che il numero di elettroni iniettati nella regione attiva, per unità di tempo, è espresso da  $\eta_i I/q$  (dove  $\eta_i$  è l'efficienza quantica interna,  $I$  è la corrente iniettata e  $q$  è la carica del portatore) risulta che

$$G_{\text{gen}} = \frac{\eta_i I}{qV} \quad (2.2)$$

dove  $V$  è il volume della regione attiva.

Il processo di ricombinazione include più meccanismi (transizioni) tramite i quali il sistema rilassa verso l'equilibrio termodinamico. Si hanno i seguenti tipi di ricombinazione:

- radiativi (emissione di luce):
  - ricombinazione spontanea;

- ricombinazione stimolata;
- non radiativi (senza emissione di luce):
  - ricombinazione su trappole;
  - ricombinazione Auger.

Nei processi radiativi, ogni volta che una coppia elettrone-lacuna ricom-  
bina, si genera un fotone.

Il tasso di *ricombinazione spontanea* è proporzionale alla probabilità di  
scontro tra elettroni in BC e buche in BV (urto a due corpi).

L'*emissione stimolata* è il fenomeno inverso dell'assorbimento, per cui per  
avere maggiore probabilità di indurre diseccitazione che di essere assorbito,  
un fotone deve trovare più elettroni in BC che in BV, cioè è necessario che  
ci sia *inversione di popolazione*. Questa condizione viene raggiunta iniettan-  
do corrente nella regione attiva in modo da aumentare la concentrazione di  
portatori. Il tasso di ricombinazione stimolata è proporzionale (tramite la  
stessa costante che caratterizza il tasso di assorbimento) al flusso di fotoni,  
alla concentrazione di elettroni in BC e lacune in BV. Il fenomeno corrispon-  
de allo scontro di tre particelle (cinetica del terzo ordine). Questa situazione  
è molto lontana dall'equilibrio termodinamico, per cui il decadimento di un  
elettrone in stato eccitato, su cui incide il fotone, è estremamente veloce.<sup>1</sup>

Le ricombinazioni non radiative si possono descrivere con due tipi di  
meccanismo: la ricombinazione su trappole e la ricombinazione Auger.

La *ricombinazione su trappole* (difetti puntuali, superfici e interfacce nella  
regione attiva) avviene se sono presenti livelli intermedi nel gap (le trappole)  
che possono catturare un portatore. Il tasso è proporzionale alla concentra-  
zione di trappole e di portatore libero. La ricombinazione, normalmente non  
radiativa (IR termico), è una cinetica del primo ordine.

Nella *ricombinazione Auger*, l'energia di ricombinazione elettrone-lacuna  
non viene emessa come fotone, ma utilizzata (come energia cinetica) per  
eccitare in livelli ad alta energia un altro portatore, che poi termalizzerà  
disperdendo in calore la sua energia. Dal punto di vista cinetico si tratta di  
urto a tre particelle.

In aggiunta a contributi radiativi e non, bisogna considerare anche la  
perdita dei portatori dalla regione attiva prima di ricombinare. Questo può

---

<sup>1</sup>Considerando la struttura a bande di un laser a semiconduttore si ha che nella zona  
attiva, aumentando la concentrazione di portatori (plasma) si ha  $NP \gg N_i^2$  dove  $N$  è  
la concentrazione di elettroni,  $P$  quella delle lacune e  $N_i$  la concentrazione di elettroni  
nella regione intrinseca. L'inversione di popolazione si raggiunge quando i pseudo livelli  
di Fermi delle bande sono separati da una energia maggiore di quella del gap dell'attivo.

avvenire per emissione termoionica o, se la barriera di potenziale trasversa e/o laterale non è sufficientemente alta, per diffusione laterale.

Quindi il tasso di ricombinazione totale si esprime come

$$R_{\text{rec}} = R_{\text{sp}} + R_{\text{nr}} + R_{\text{l}} + R_{\text{st}} \quad (2.3)$$

dove  $R_{\text{sp}}$  è il tasso di ricombinazione spontanea,  $R_{\text{nr}}$  è il tasso di ricombinazione non radiativo,  $R_{\text{l}}$  è il tasso di perdita di portatori e  $R_{\text{st}}$  è il tasso di emissione stimolata.

Ciascuno dei termini suddetti dipende dall'esistenza dei portatori. Si può esprimere il tasso di ricombinazione come

$$R_{\text{rec}} = BN^2 + (AN + CN^3) + R_{\text{st}} \quad (2.4)$$

in cui  $R_{\text{sp}} \sim BN^2$  e  $R_{\text{nr}} + R_{\text{l}} \sim (AN + CN^3)$ .<sup>2</sup> Il coefficiente  $B$  è chiamato *coefficiente di ricombinazione bimolecolare*. Poiché la ricombinazione spontanea richiede la presenza di una coppia elettrone-lacuna, il tasso corrispondente tende ad essere proporzionale al prodotto delle densità degli elettroni e delle lacune, quindi proporzionale ad  $N^2$  ( $N$  rappresenta anche la densità di lacune).<sup>3</sup> I centri di ricombinazione non richiedono l'esistenza simultanea di elettroni e lacune, per cui il tasso tende ad essere proporzionale ad  $N$ . Nella ricombinazione Auger il tasso tende ad essere proporzionale a  $N^3$  (sensibile quindi ad alte concentrazioni di portatori) poiché si ha simultaneamente la coppia elettrone-lacuna ricombinante e la terza particella che riceve l'energia di ionizzazione.

I tassi  $R_{\text{sp}}$ ,  $R_{\text{nr}}$  e  $R_{\text{l}}$  rappresentano processi di *decadimento* naturali (o non stimolati) di portatori (che può, in virtù di quanto esposto sopra, essere espresso in serie di potenze di  $N$ );  $R_{\text{st}}$ , invece, richiede la presenza di fotoni. Si possono descrivere i processi di decadimento naturali mediante il *tempo di vita* dei portatori,  $\tau$ . In assenza di fotoni, o di un termine di generazione, la 2.1 descrive il decadimento della concentrazione di portatori

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{N}{\tau} \quad (2.5)$$

dove  $N/\tau \equiv R_{\text{sp}} + R_{\text{nr}} + R_{\text{l}}$  (per confronto con  $R_{\text{rec}}$ ). La 2.5 definisce  $\tau$  (che in generale non è indipendente da  $N$ ).

---

<sup>2</sup>La dipendenza dei tassi di ricombinazione dalle concentrazione dipende dalle approssimazioni fatte per descrivere il sistema di portatori. In questo caso non si considera lo spin (oltre ad assumere la neutralità di carica). [11].

<sup>3</sup>La probabilità di occupazione, sia degli elettroni che delle lacune, dipende linearmente da  $N$ ; la probabilità di ricombinazione deve essere proporzionale al prodotto delle due probabilità di occupazione.

4

Si può scrivere l'equazione di bilancio dei portatori come

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\eta_i I}{qV} - \frac{N}{\tau} - R_{st} \quad (2.6)$$

in cui il termine  $R_{st}$  è trascurabile nel caso in cui la densità di fotoni sia bassa (laser sotto soglia).

La descrizione della dinamica della regione attiva necessita anche dell'equazione di bilancio per la densità di fotoni, che includa sia la generazione che la perdita degli stessi. Si considera l'emissione di luce in un singolo modo della cavità laser (tipicamente ci sono più modi ottici).

Ogni volta che una coppia elettrone-lacuna è stimolata a ricombinare si genera un altro fotone. Il principale termine di generazione di fotoni, sopra la soglia, è  $R_{st}$ , mentre solo una piccola frazione di  $R_{sp}$  contribuisce al tasso di generazione di fotoni per il modo. I fotoni occupano l'intero volume della cavità,  $V_p$ , che è maggiore del volume della regione attiva occupato dagli elettroni,  $V$ . Conseguenza che il tasso di generazione di densità di fotoni è pari a  $[V/V_p]R_{st}$ . Il rapporto  $V/V_p$  è chiamato *fattore di confinamento* ed è indicato con  $\Gamma$ ; ovviamente  $\Gamma \leq 1$ .

Le perdite di fotoni dal modo avvengono nella cavità per assorbimento ottico e scattering, oltre che per l'accoppiamento della cavità con l'uscita per mezzo degli specchi (trasmissione); una porzione del modo è infatti accoppiata a un mezzo di uscita (fibra ottica). Dato che tutta la luce emessa deve essere coerente (stessa lunghezza d'onda, direzione di propagazione, polarizzazione e fase), parte di essa deve rimanere dentro la cavità in modo che è sempre lo 'stesso' fotone a indurre l'emissione stimolata; questo *feed back* è ottenuto tramite la riflessione agli specchi. Si può caratterizzare la perdita netta dei fotoni mediante il *tempo di vita* (del fotone o piuttosto della cavità),  $\tau_p$ , analogamente a come è stato fatto per caratterizzare il decadimento dei portatori.

---

<sup>4</sup>Si può dare, a questo punto, l'interpretazione fenomenologica, nel dominio del tempo, del "ritardo di accensione" o *turn-on delay* del laser (paragrafi 5.4.1 e 5.4.2 di [13]). Se la corrente all'istante  $t = 0$ , passa da zero ad un valore sopra soglia, la densità dei portatori aumenta, riempiendo la regione attiva, mentre la densità dei fotoni rimane bassa finché non si raggiunge la condizione di inversione di popolazione (la densità dei portatori raggiunge il valore soglia). A questo punto, la ricombinazione stimolata inizia a limitare un ulteriore incremento della densità dei portatori, mentre la densità dei fotoni inizia ad aumentare, ma ciò avviene con un ritardo temporale rispetto all'iniezione. All'aumentare della corrente diminuisce questo ritardo, il che suggerisce che diminuisce il tempo di vita dei portatori, funzione della corrente. Le proprietà del ritardo di accensione dell'emissione stimolata da GS (Ground State), per varie correnti iniettate, è mostrato in [4] a pagina 1147; si tratta di un modello eccitonico per QD con i seguenti stati nella banda di conduzione: WL (Wetting Layer), ES (Excited State) e GS (Ground State).

Tenendo conto della generazione e perdita di fotoni si può scrivere la loro equazione di bilancio come

$$\frac{dN_p}{dt} = \Gamma R_{st} + \Gamma \beta_{sp} R_{sp} - \frac{N_p}{\tau_p} \quad (2.7)$$

dove  $N_p$  è la densità di fotoni e  $\beta_{sp}$  è il *fattore di emissione spontanea*, che indica la frazione di fotoni emessi per emissione spontanea accoppiati con il modo della cavità laser.<sup>5</sup> Dall'equazione 2.7 si ricava che in assenza dei termini di generazione,  $\Gamma R_{st} + \Gamma \beta_{sp} R_{sp}$ , i fotoni *decadono* esponenzialmente nel tempo con una costante di decadimento pari a  $\tau_p$  (definizione di tempo di vita).

Le equazioni di bilancio per portatori e fotoni sono due equazioni accoppiate, che possono essere risolte per lo stato stazionario e per la risposta dinamica del laser. Per esprimere la soluzione è necessario esplicitare la dipendenza dei tassi di ricombinazione, e quindi anche di  $R_{st}$ , da  $N$  e  $N_p$ .

L'emissione stimolata è un processo di guadagno per i fotoni. La densità di fotoni aumenta da un valore iniziale di  $N_p$  ad un valore di  $N_p + \Delta N_p$  dopo aver percorso una (piccola) lunghezza  $\Delta z$  di regione attiva. Si assume, per semplicità (e senza perdere di generalità), una piena sovrapposizione tra la regione attiva e il campo di fotoni ( $\Gamma = 1$ ). Si può descrivere la crescita di fotoni definendo un guadagno per unità di lunghezza  $g$ , che è il *guadagno del materiale*. La crescita di fotoni è

$$N_p + \Delta N_p = N_p e^{g\Delta z} \quad (2.8)$$

Se  $\Delta z \ll 1$  si ha che  $e^{g\Delta z} \approx 1 + g\Delta z$ ; essendo  $\Delta z = v_g \Delta t$ , dove  $v_g$  è la velocità di gruppo, si ha che l'incremento di fotoni è dato da  $\Delta N_p = N_p g v_g \Delta t$ . Si può esprimere, a questo punto, il tasso di emissione stimolata come

$$R_{st} = \frac{\Delta N_p}{\Delta t} = v_g g N_p \quad (2.9)$$

Il sistema delle *equazioni di bilancio* o *Rate Equation* (RE) per la densità di elettroni e fotoni è

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\eta_i I}{qV} - \frac{N}{\tau} - v_g g N_p \quad (2.10)$$

$$\frac{dN_p}{dt} = \Gamma v_g g N_p + \Gamma \beta_{sp} R_{sp} - \frac{N_p}{\tau_p} \quad (2.11)$$

---

<sup>5</sup>L'emissione spontanea può avvenire a tutte le frequenze dello spettro di guadagno e in tutte le direzioni spaziali, ma solo una piccola frazione di tutti i fotoni emessi entrano nel modo. Nel caso di accoppiamento uniforme a tutti i modi (tutti i modi ricevono la stessa quantità di emissione spontanea),  $\beta_{sp}$  è proprio il reciproco del numero totale di modi ottici della cavità nella larghezza di banda dell'emissione spontanea.

La quantità  $\Gamma g$  rappresenta il *guadagno modale*.

Il guadagno è una funzione della densità dei portatori, che può essere approssimato, almeno in condizioni di piccolo segnale, da una dipendenza lineare:

$$g \approx a(N - N_{\text{tr}}) \quad (2.12)$$

dove  $a$  è il *guadagno differenziale*,  $\partial g/\partial N$ , e  $N_{\text{tr}}$  è la densità dei portatori alla *trasparenza*.<sup>6 7</sup>

Seguono considerazioni sulla *potenza ottica* in gioco. La potenza (totale) generata spontaneamente è data da

$$P_{\text{sp}} = h\nu R_{\text{sp}} V \quad (2.13)$$

dove  $h\nu$  è l'energia di un fotone e  $V$  il volume della regione attiva ( $R_{\text{sp}}$  rappresenta il numero di fotoni generati per unità di tempo per unità di volume). La potenza di uscita del modo è data da

$$P_{\text{out}} = \eta_0 h\nu \frac{N_p V_p}{\tau_p} \quad (2.14)$$

dove  $\eta_0$  è l'*efficienza ottica*<sup>8</sup> del laser e dipende dalla frazione di potenza riflessa sulla cavità.

## 2.2 Guadagno di soglia

Le perdite della cavità sono state caratterizzate da una costante di decadimento dei fotoni o tempo di vita  $\tau_p$ , che può essere espresso in termini di perdite associate alla propagazione ottica nella cavità e di perdite relative agli specchi. Le perdite nette del modo danno il valore di guadagno netto richiesto per raggiungere la soglia di laseramento.

---

<sup>6</sup>Il fattore di guadagno/assorbimento per un sistema trova giustificazione nella regola aurea di Fermi, da cui si ricava l'espressione del fattore di guadagno del materiale  $g(h\omega)$ .

<sup>7</sup>Per completezza si riporta anche il seguente aspetto. Dove c'è guadagno c'è anche una (leggera) diminuzione di concentrazione di portatori, che causa un aumento dell'indice di rifrazione rispetto alla zona dove non vi è guadagno; si ha per questo un guidaggio da guadagno. L'iniezione di portatori, invece, abbassa l'indice di rifrazione. Il legame tra indice di rifrazione  $n$ , e densità di portatori è  $\Delta n \propto -\Delta N$  (guida ottica).

<sup>8</sup>L'efficienza ottica del laser è data da

$$\eta_0 = F \frac{\alpha_m}{\alpha_m + \langle \alpha_i \rangle}$$

dove il fattore  $F$  è la frazione di potenza trasmessa attraverso lo specchio (e persa dalla cavità),  $\alpha_m$  rappresenta le perdite relative agli specchi e  $\langle \alpha_i \rangle$  rappresenta la perdita interna media della cavità (paragrafo 2.2).

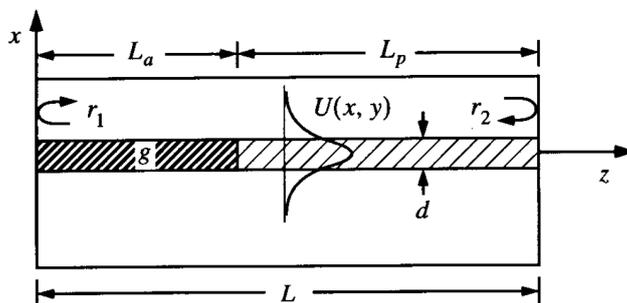


Figura 2.2: Cavità laser con le sezioni attiva e passiva e il modo guidato. [13].

Si consideri l'energia ottica di un diodo laser che si propaga in una guida d'onda dielettrica, confinata sia trasversalmente che lateralmente. Il campo elettrico può essere espresso come

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{e}_y E_0 U(x, y) e^{j(\omega t - \tilde{\beta} z)} \quad (2.15)$$

dove  $\vec{e}_y$  è il versore dell'asse  $y$  (polarizzazione TE),  $E_0$  è l'ampiezza del campo,  $U(x, y)$  il profilo di campo trasverso normalizzato (modo guidato),  $\omega$  la pulsazione,  $z$  la direzione assiale della guida ( $xy$  è il piano trasverso),  $\tilde{\beta}$  la costante di propagazione complessa, con cui il modo si propaga;  $\tilde{\beta}$  include sia le perdite modali interne che il guadagno modale trasverso.

La figura 2.2 mostra la cavità laser divisa in due sezioni: una sezione attiva di lunghezza  $L_a$  ed una passiva di lunghezza  $L_p$  (si assume che non ci sia discontinuità di impedenza all'interfaccia tra le due sezioni). I valori di guadagno  $g$ , e delle perdite interne  $\alpha_i$ , hanno valori differenti nelle due sezioni; nella regione passiva, per definizione,  $g = 0$  e  $\alpha_i = \alpha_{i,p}$ . Le perdite interne sono le perdite che avvengono sia per assorbimento che per i vari fenomeni di scattering ottico possibili (interfacce attivo-cladding rugose, portatori liberi, fluttuazioni di indice di rifrazione), oltre che, per fenomeni di diffrazione e modi non allineati con la cavità. Il modo di propagazione è riflesso dagli specchi, con coefficienti di riflessione in ampiezza di  $r_1$  ed  $r_2$ . Il campo, confinato dal salto di indice di rifrazione, non viaggia tutto dentro l'attivo, ma la sua coda viaggia negli strati di confinamento (cladding), che non guadagnano.<sup>9</sup>

Affinché il modo del laser raggiunga la soglia, il guadagno nella sezione attiva deve essere incrementato al punto che tutte le perdite (di propagazione e degli specchi) sono compensate, così che il campo elettrico replica esattamente se stesso dopo un viaggio circolare, lungo l'asse  $z$ , nella cavità.

<sup>9</sup>Il fattore di confinamento del campo (paragrafo 2.1) può essere definito anche in relazione alla frazione di campo presente nell'attivo.

Quindi la soglia di laseramento è raggiunta quando l'intensità luminosa è la stessa dopo aver attraversato il dispositivo, essere stata riflessa, e ritornata nel punto di partenza. Questo corrisponde alle condizioni al contorno in  $z$  del campo:

$$\vec{E}(2L) = \vec{E}(0) \quad (2.16)$$

da cui

$$r_1 r_2 e^{-2j(\tilde{\beta}_{a,th} L_a + \tilde{\beta}_{p,th} L_p)} = 1 \quad (2.17)$$

Si può osservare quanto segue:

- il campo si propaga assialmente come  $e^{j\tilde{\beta}z}$ ;
- $r_1 r_2$  corrisponde alle perdite per le due riflessioni agli specchi in  $z = 0$  e  $z = L$ ;
- il fattore 2 nell'esponente corrisponde al 'giro' di andata e ritorno della luce nella cavità (lunghezza  $2L$ );
- 1 a secondo membro corrisponde ad avere la stessa intensità di campo dopo il percorso di  $2L$  nella cavità (condizione di soglia);
- il pedice th sta ad indicare che l'equazione definisce un valore soglia per  $\tilde{\beta}$ .

L'equazione complessa 2.17 si può spezzare, esplicitando le componenti di  $\tilde{\beta}$ , in due equazioni che danno la descrizione in ampiezza e in fase. [13]. La parte in ampiezza è

$$r_1 r_2 e^{(\Gamma_{xy} g_{th} - \alpha_{i,a}) L_a - \alpha_{i,p} L_p} = 1 \quad (2.18)$$

dove

- $e^{\Gamma_{xy} g_{th} L_a}$  è il fattore corrispondente al guadagno;
- $e^{-\alpha_{i,a} L_a - \alpha_{i,p} L_p}$  è il fattore corrispondente alle perdite.

Risolvendo per  $\Gamma_{xy} g_{th} L_a$  si ottiene

$$\Gamma_{xy} g_{th} L_a = \alpha_{i,a} L_a + \alpha_{i,p} L_p + \ln \frac{1}{R} \quad (2.19)$$

con  $R = r_1 r_2$ .

In considerazione che  $\Gamma_{xy} L_a / L \approx \Gamma_{xy} \Gamma_z = \Gamma$  con  $L_a \gg \lambda$  e definendo la media spaziale delle *perdite interne* della cavità come

$$\langle \alpha_i \rangle = \frac{\alpha_{i,a} L_a + \alpha_{i,p} L_p}{L} \quad (2.20)$$

si può esprimere il guadagno alla soglia dall'equazione 2.19:

$$\langle g \rangle_{\text{th}} = \Gamma g_{\text{th}} = \langle \alpha_i \rangle + \frac{1}{L} \ln \frac{1}{R} \quad (2.21)$$

Le perdite dovranno essere recuperate dal guadagno distribuito su tutta la lunghezza  $L_a$ ; maggiore è  $L_a$ , minore è la necessità di guadagno. Per convenienza il termine di perdita relativo agli *specchi* viene definito come

$$\alpha_m \equiv \frac{1}{L} \ln \frac{1}{R} \quad (2.22)$$

Inoltre si può scrivere che

$$\frac{1}{\tau_p} = \frac{1}{\tau_i} + \frac{1}{\tau_m} = v_g (\langle \alpha_i \rangle + \alpha_m) \quad (2.23)$$

e quindi che

$$\langle g \rangle_{\text{th}} = \langle \alpha_i \rangle + \alpha_m = \frac{1}{v_g \tau_p} \quad (2.24)$$

dove  $v_g$  è la velocità di gruppo del modo (include sia la dispersione del materiale che della guida). L'equazione 2.24 permette di ricavare, dai parametri di perdita della cavità, il guadagno di soglia.

Il guadagno, per lo stato stazionario di un laser operante sopra la soglia, deve essere uguale al suo valore soglia: se il guadagno fosse più alto di questo valore, l'ampiezza del campo dovrebbe continuare a crescere indefinitamente. Questo implica che anche la densità dei portatori deve rimanere bloccata ad un valore di soglia: la concentrazione di portatori non può più aumentare e l'incremento di iniezione aumenterà solo più l'intensità di luce emessa; alla soglia  $g_{\text{th}} = g(N_{\text{th}})$ .

## 2.3 Il modello macro-stato lacune

Si considera un *ensemble* di laser QD a semiconduttore self-assembled di InAs cresciuti su substrato di GaAs (InAs/GaAs). Il modello si basa su un sistema di RE che descrive la dinamica di elettroni, lacune e fotoni; si tratta di un modello *non eccitonico* in quanto si descrive una dinamica diversa per elettroni e lacune. Nella figura 2.3 è mostrato il diagramma con gli stati permessi in BC e BV, con le rispettive densità di portatori e le costanti di tempo per i processi di cattura e rilassamento. Si indica con  $n_k^{e,h}$  il numero di portatori (elettroni, e, o lacune, h), normalizzato rispetto al numero totale di QD, nello stato  $k \in \{\text{SCH, WL, ES, GS, QD+WL}\}$ ; gli acronimi indicano rispettivamente: Separate Confinement Heterostructure

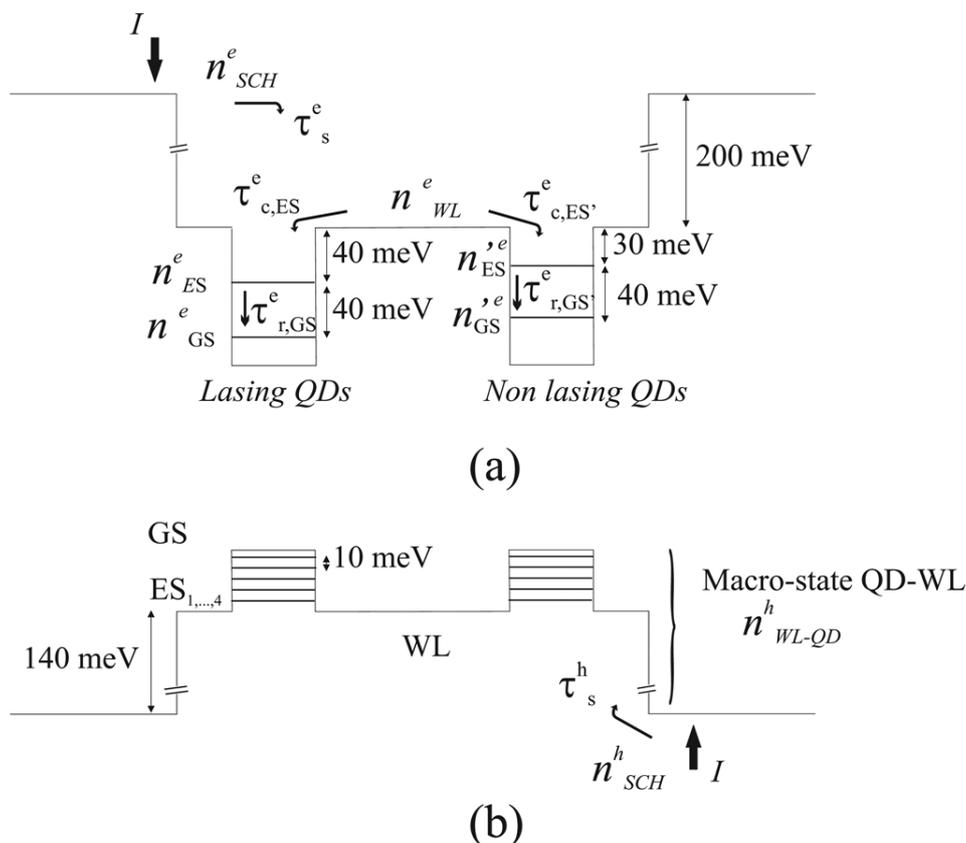


Figura 2.3: Diagramma delle bande di conduzione (a) e di valenza (b) con i livelli confinati per i portatori, la loro densità e i tempi di cattura/rilascamento; la struttura *si ripete*, anche se il rapporto tra dot laseranti e non laseranti non è, in generale, di 1÷1 (profilo di potenziale pseudo-periodico). [1].

(BC e BV), Wetting Layer (BC), Excited State (BC), Ground State (BC), QD+WL (BV). I portatori sono iniettati nella barriera SCH (confinamento bulk); il WL accoppia tutti i dot; in BC si hanno gli stati confinati GS ed ES; in BV ci sono cinque stati confinati in QD: GS e quattro ES ( $ES_{1,2,3,4}$ ).

L'ensemble di dot è formato da due popolazioni: quelli *laseranti* (l'insieme di tutti i dot che raggiungono la condizione di soglia) e quelli non laseranti (l'insieme di tutti i dot che non possono mai raggiungere la condizione di soglia a causa del basso guadagno); questi ultimi non vengono considerati.

Per la BC si hanno quattro RE: una per ogni stato elettronico. In BV si assume una *termalizzazione* (dinamica infinitamente veloce) delle lacune tra gli stati permessi (stati confinati nel dot e WL), che sono energeticamente molto ravvicinati rispetto a quelli degli elettroni (la massa efficace delle la-

cune è maggiore rispetto a quella degli elettroni). La termalizzazione delle lacune avviene perché la differenza tra i relativi livelli energetici è inferiore all'energia termica  $k_B T$ , pari a 26 meV (la temperatura di operazione  $T$  è quella ambiente;  $k_B$  è la costante di Boltzmann). Gli stati interessati dalla termalizzazione sono descritti come un unico stato chiamato *macro-stato* QD+WL, a cui corrisponde una sola RE. Una ulteriore RE descrive le lacune in SCH.

Il sistema di RE per le densità di portatori e fotoni sono:

$$\frac{dn_{\text{SCH}}^e}{dt} = \eta_i \frac{I}{n_d n_l w L q} - \frac{n_{\text{SCH}}^e}{\tau_s^e} + \frac{n_{\text{WL}}^e}{\tau_{\text{esc,WL}}^e} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{dn_{\text{WL}}^e}{dt} = & \frac{n_{\text{SCH}}^e}{\tau_s^e} - \frac{n_{\text{WL}}^e}{\tau_{\text{esc,WL}}^e} - \frac{n_{\text{WL}}^e}{\tau_{\text{nr,WL}}^e} - \frac{n_{\text{WL}}^e}{\tau_{\text{c,ES}}^e} G_n (1 - \rho_{\text{ES}}^e) + \frac{n_{\text{ES}}^e}{\tau_{\text{esc,ES}}^e} \\ & - \frac{n_{\text{WL}}^e}{\tau_{\text{c,GS}}^e} G_n (1 - \rho_{\text{GS}}^e) + \frac{n_{\text{GS}}^e}{\tau_{\text{esc,GS} \rightarrow \text{WL}}^e} \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} \frac{dn_{\text{ES}}^e}{dt} = & \frac{n_{\text{WL}}^e}{\tau_{\text{c,ES}}^e} G_n (1 - \rho_{\text{ES}}^e) - \frac{n_{\text{ES}}^e}{\tau_{\text{esc,ES}}^e} - \frac{n_{\text{ES}}^e}{\tau_{\text{r,GS}}^e} (1 - \rho_{\text{GS}}^e) + \frac{n_{\text{GS}}^e}{\tau_{\text{esc,GS}}^e} (1 - \rho_{\text{ES}}^e) \\ & - R_{\text{st ES}} - R_{\text{sp ES}} - \frac{n_{\text{ES}}^e}{\tau_{\text{nr,ES}}^e} \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{dn_{\text{GS}}^e}{dt} = & \frac{n_{\text{ES}}^e}{\tau_{\text{r,GS}}^e} (1 - \rho_{\text{GS}}^e) - \frac{n_{\text{GS}}^e}{\tau_{\text{esc,GS}}^e} (1 - \rho_{\text{ES}}^e) + \frac{n_{\text{WL}}^e}{\tau_{\text{c,GS}}^e} G_n (1 - \rho_{\text{GS}}^e) - \frac{n_{\text{GS}}^e}{\tau_{\text{esc,GS} \rightarrow \text{WL}}^e} \\ & - R_{\text{st GS}} - R_{\text{sp GS}} - \frac{n_{\text{GS}}^e}{\tau_{\text{nr,GS}}^e} \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\frac{ds_{\text{ES}}}{dt} = \beta_{\text{sp}} R_{\text{sp ES}} + g_{\text{ES}} s_{\text{ES}} - \frac{s_{\text{ES}}}{\tau_{\text{p,ES}}} \quad (2.29)$$

$$\frac{ds_{\text{GS}}}{dt} = \beta_{\text{sp}} R_{\text{sp GS}} + g_{\text{GS}} s_{\text{GS}} - \frac{s_{\text{GS}}}{\tau_{\text{p,GS}}} \quad (2.30)$$

$$\frac{dn_{\text{QD+WL}}^h}{dt} = \frac{n_{\text{SCH}}^h}{\tau_s^h} - \frac{n_{\text{QD+WL}}^h}{\tau_{\text{esc,QD+WL}}^h} - R_{\text{st tot}} - R_{\text{sp tot}} - R_{\text{nr tot}} \quad (2.31)$$

$$\frac{dn_{\text{SCH}}^h}{dt} = \eta_i \frac{I}{n_d n_l w L q} - \frac{n_{\text{SCH}}^h}{\tau_s^h} + \frac{n_{\text{QD+WL}}^h}{\tau_{\text{esc,QD+WL}}^h} \quad (2.32)$$

La corrente  $I$  (corrente di bias o di polarizzazione) è iniettata in SCH, ma solo una frazione di questa corrente, pari a  $\eta_i$ , genera portatori nella regione attiva (paragrafo 2.1).

Si indica con  $G_n$  la frazione (probabilità di esistenza) di dot laseranti; la frazione di dot non laseranti,  $G'_n$ , non viene considerata, ma la normalizzazione dell'intero ensemble di dot tiene conto di entrambe le popolazioni:  $G_n + G'_n = 1$ .

Si indicano con:

- $n_d$  la densità di dot per layer;
- $n_l$  il numero di layer che formano lo stack (figura 1.1);
- $w$  la larghezza della guida d'onda;
- $L$  la lunghezza del laser.

I tempi che caratterizzano le transizioni dei portatori tra i livelli energetici sono:

- $\tau_s^{e,h}$ : tempo di trasporto, per elettroni/lacune, in SCH (tempi di *diffusione* da SCH a WL);
- $\tau_{esc,WL}^{e,h}$ : tempo di fuga, per elettroni/lacune, da WL a SCH (effetti termici);
- $\tau_{c,ES}^e$ : tempo di cattura, per gli elettroni, da WL ad ES;
- $\tau_{esc,ES}^e$ : tempo di fuga, per gli elettroni, da ES a WL;
- $\tau_{r,GS}^e$ : tempo di rilassamento, per gli elettroni, da ES a GS;
- $\tau_{esc,GS}^e$ : tempo di fuga, per gli elettroni, da GS ad ES.

Nel modello si considera anche una probabilità non nulla di *cattura diretta*, per gli elettroni in BC, da WL a GS; i tempi dei relativi tassi sono indicati con:

- $\tau_{c,GS}^e$ : tempo di cattura, per gli elettroni, da WL a GS;
- $\tau_{esc,GS \rightarrow WL}^e$ : tempo di fuga, per gli elettroni, da GS a WL.

I tempi di vita dei portatori (elettroni), per ricombinazione non radiativa, in WL, ES e GS sono rispettivamente indicati con  $\tau_{nr,WL}^e$ ,  $\tau_{nr,ES}^e$ ,  $\tau_{nr,GS}^e$ . La transizione non radiativa da SCH è trascurata.

Gli altri parametri sono:

- $\tau_{p,GS}$ ,  $\tau_{p,ES}$ : tempi di vita dei fotoni rispettivamente alla lunghezza d'onda di GS e alla lunghezza d'onda di ES; tiene conto sia delle perdite agli specchi che delle perdite intrinseche della cavità (equazione 2.23);

- $\beta_{\text{sp}}$ : fattore di emissione spontanea.

La probabilità di occupazione di ciascuno stato elettronico è definita da

$$\rho_{\text{GS,ES}}^e = \frac{n_{\text{GS,ES}}^e}{\mu_{\text{GS,ES}}^e G_n} \quad (2.33)$$

con  $\mu_{\text{GS}}^e = 2$  e  $\mu_{\text{ES}}^e = 4$ , che sono rispettivamente la *degeneracy* di GS e di ES;  $1 - \rho_{\text{GS,ES}}^e$  rappresenta la probabilità di trovare posti non occupati in GS ed ES (stato di portatore vuoto). Questi fattori sono chiamati anche *Pauli blocking factor* e si suppongono pari ad 1 per gli stati SCH e WL; quindi si assume che in tali stati, che sono rispettivamente 3D e 2D, il numero di portatori può essere infinito. Per energie molto elevate, infatti, gli stati liberi sono così numerosi che il principio di esclusione è praticamente inoperante. Si può supporre uno *spettro continuo* ad alta energia (risoluzione inferiore a  $k_{\text{B}}T$ ).<sup>10</sup>

La termalizzazione delle lacune nel macro-stato QD+WL, con uno pseudo livello di Fermi  $E_{\text{f}}^{\text{h}}$ , permette di esprimere la loro probabilità di occupazione mediante la distribuzione di Fermi-Dirac

$$\rho_k^{\text{h}} = \frac{1}{1 + e^{(E_k^{\text{h}} - E_{\text{f}}^{\text{h}})/k_{\text{B}}T}} \quad (2.34)$$

dove  $E_k^{\text{h}}$  è il livello di energia in BV corrispondente allo stato  $k$  confinato nel QD.<sup>11</sup> Questo permette di ottenere la densità di lacune nel macro-stato:

$$n_{\text{QD+WL}}^{\text{h}} = \delta_{\text{WL}}^{\text{h}} \ln(1 + e^{(E_{\text{f}}^{\text{h}} - E_{\text{WL}}^{\text{h}})/k_{\text{B}}T}) + \sum_{k=\text{GS,ES}_1,\dots,4} \mu_k^{\text{h}} \rho_k^{\text{h}} \quad (2.35)$$

dove

- $E_{\text{WL}}^{\text{h}}$  è l'energia, per le lacune, dello stato WL;

---

<sup>10</sup>Il *principio di esclusione* vale per elettroni e lacune, che sono *fermioni* (mentre la coppia elettrone-lacuna descritta come eccitone è un bosone). La funzione d'onda di due fermioni nello stesso stato è identicamente nulla: impossibile per due fermioni condividere lo stesso stato. La distribuzione di Fermi-Dirac che vale per i fermioni, tende, per energie crescenti (e maggiori dell'energia di Fermi), alla distribuzione di Maxwell-Boltzmann, che è propria delle particelle classiche e per le quali il principio di esclusione non vale.

<sup>11</sup>La distribuzione si usa, per l'analisi dei dispositivi a semiconduttore, anche in condizioni di *quasi equilibrio termodinamico*, introducendo gli pseudo livelli di Fermi (uno in BC e uno in BV), che mantengono il significato di 'baricentri' energetici per i portatori nella relativa banda. Questa assunzione è lecita per bassi livelli di iniezione.

- $\delta_{\text{WL}}^{\text{h}}$  è la DOS *efficace* bidimensionale delle lacune nel WL, normalizzata rispetto al numero totale di QD.<sup>12</sup>

13

I tempi di fuga sono tali da garantire l'equilibrio termodinamico senza eccitazione esterna (l'iniezione di corrente) e senza perdita di portatori (per ricombinazioni radiative e non). L'equilibrio termodinamico si esprime imponendo l'uguaglianza dei tassi tra i due livelli interessati dal trasferimento di portatori, pesati dalla probabilità di trovare posti vuoti nel livello destinazione (funzione della distribuzione di Fermi-Dirac). La condizione di equilibrio termodinamico può essere espressa, in BC, dalle seguenti relazioni tra i tempi

<sup>12</sup>La DOS bidimensionale è pari a  $\frac{m^*}{\pi\hbar^2} u(E - E_{\text{WL}}^{\text{h}})$  dove  $u(E)$  è la funzione di Heaviside, nulla per  $E < 0$  e pari ad 1 per  $E > 0$ ;  $E_{\text{WL}}^{\text{h}}$  è l'energia permessa ricavata dalla equazione di Schrödinger nella direzione di confinamento. Questa DOS è la densità superficiale degli stati in energia (risulta per unità di area poiché l'espressione ingloba la divisione per l'area totale del gas bidimensionale). La *massa efficace*,  $m^*$ , supposta isotropa, è data da  $0,043 m_0$  per gli elettroni e  $0,4 m_0$  per le lacune, dove  $m_0$  è la massa dell'elettrone libero. La DOS a un solo gradino permette di integrare sulle energie:

$$\int_{E_{\text{WL}}^{\text{h}}}^{\infty} \frac{1}{1 + e^{(E - E_{\text{f}}^{\text{h}})/k_{\text{B}}T}} dE = k_{\text{B}}T \ln(1 + e^{(E_{\text{f}}^{\text{h}} - E_{\text{WL}}^{\text{h}})/k_{\text{B}}T})$$

La quantità  $\delta_{\text{WL}}^{\text{h}}$  ingloba, oltre alla DOS bidimensionale, anche  $k_{\text{B}}T$  derivante dall'integrazione.

<sup>13</sup>Con riferimento alla situazione definita in uno spazio cartesiano nella nota 2, si fanno le seguenti osservazioni sul ruolo della *funzione d'onda* nel WL e in SCH.

Nel caso WL (gas di Fermi bidimensionale) il moto dei portatori è impedito solo ortogonalmente alle pareti della buca di potenziale in  $z$ , dove  $z$  è la direzione di confinamento. La funzione d'onda di una particella può esprimersi come il prodotto di due fattori:

- fattore dipendente da  $z$ , ricavata dalla soluzione dell'equazione di Schrödinger con il profilo di potenziale della buca in  $z$ ; definisce il problema agli autovalori, quindi, le *energie permesse*; il modulo quadro di questo fattore dà la distribuzione dei portatori nella direzione di confinamento  $z$ ;
- $e^{-jk_x x} e^{-jk_y y}$ , che avendo modulo quadro pari ad 1, descrive una *delocalizzazione* nel piano  $xy$  dei portatori (interpretazione di onda di probabilità associata alla materia).

Nel caso SCH invece, la funzione d'onda dà un termine di probabilità pari a  $|e^{-jk_x x} e^{-jk_y y} e^{-jk_z z}|^2 = 1$ , che corrisponde, quindi, al *moto libero* dei portatori nelle tre direzioni spaziali (le equazioni del moto si possono ricavare dalle relazioni di commutazione).

Nelle strutture reali, anche per i gradienti di concentrazione delle specie chimiche coinvolte nella composizione del dispositivo (fenomeni di diffusione), la transizione della funzione d'onda da 'localizzata' a 'delocalizzata' avviene in modo graduale.

di fuga e i corrispondenti tempi di cattura/rilassamento:

$$\frac{1}{\tau_{\text{esc,GS}}^e} = \frac{\mu_{\text{ES}}^e}{\mu_{\text{GS}}^e} e^{(E_{\text{GS}}^e - E_{\text{ES}}^e)/k_{\text{B}}T} \frac{1}{\tau_{\text{r,GS}}^e} \quad (2.36)$$

$$\frac{1}{\tau_{\text{esc,GS} \rightarrow \text{WL}}^e} = \frac{\delta_{\text{WL}}^e}{\mu_{\text{GS}}^e} e^{(E_{\text{GS}}^e - E_{\text{WL}}^e)/k_{\text{B}}T} \frac{1}{\tau_{\text{c,GS}}^e} \quad (2.37)$$

$$\frac{1}{\tau_{\text{esc,ES}}^e} = \frac{\delta_{\text{WL}}^e}{\mu_{\text{ES}}^e} e^{(E_{\text{ES}}^e - E_{\text{WL}}^e)/k_{\text{B}}T} \frac{1}{\tau_{\text{c,ES}}^e} \quad (2.38)$$

I tempi di fuga da WL a SCH, sia per gli elettroni che per le lacune, si considerano costanti, trascurando l'interazione con il WL e quindi la dipendenza da  $n_{\text{WL}}^{\text{e,h}}$ .<sup>14</sup>

La densità di fotoni emessi, normalizzato rispetto al numero totale di QD, è rappresentato da  $s_{\text{GS,ES}}$  per i fotoni alla lunghezza d'onda di GS e di ES. Le quantità  $g_{\text{GS,ES}}$  tengono conto del guadagno alle lunghezze d'onda di emissione di GS e di ES. Questi coefficienti di guadagno sono espressi come tassi:

$$g_{\text{GS,ES}} = \frac{G_{\text{n}}(\rho_{\text{GS,ES}}^e + \rho_{\text{GS,ES}_1}^h - 1)}{\tau_{\text{g GS,ES}}} \quad (2.39)$$

dove  $\tau_{\text{g GS,ES}}$  sono costanti di tempo 'di guadagno', che includono la dipendenza dal fattore di confinamento ottico  $\Gamma$ , dal guadagno del materiale  $g_{\text{mat}}$  e dalla velocità di gruppo  $v_{\text{g}}$ ; per l'equazione 2.11,  $\tau_{\text{g GS,ES}}$  deve essere pari a  $(\Gamma g_{\text{mat}} v_{\text{g}})^{-1}$ .

I termini  $R_{\text{st GS,ES}}$  rappresentano i tassi di emissione stimolata per GS ed ES; i termini  $R_{\text{sp GS,ES}}$  sono i tassi di emissione spontanea per GS ed ES. Questi termini corrispondono ad un aumento dei fotoni ed a una perdita di elettroni (e lacune) e quindi accoppiano le RE dei fotoni con quelle degli elettroni (e lacune). Le espressioni di questi tassi radiativi è

- per l'emissione stimolata (guadagno di fotoni):

$$R_{\text{st GS,ES}} = g_{\text{GS,ES}} s_{\text{GS,ES}} \quad (2.40)$$

- per l'emissione spontanea:

$$R_{\text{sp GS,ES}} = \frac{G_{\text{n}} \mu_{\text{GS,ES}} \rho_{\text{GS,ES}}^e \rho_{\text{GS,ES}_1}^h}{\tau_{\text{sp GS,ES}}} \quad (2.41)$$

dove  $\tau_{\text{sp GS,ES}}$  è il tempo di vita dei portatori dovuto all'emissione spontanea.

---

<sup>14</sup>La condizione sui tassi a cui obbediscono questi tempi sono formulate assumendo che la probabilità di trovare posti vuoti nel WL sia pari ad 1; questo fa sì che questi tempi dipendono da  $n_{\text{WL}}^{\text{e,h}}$ . Anche gli altri tempi considerati in BC, in generale, dipendono da  $n_{\text{WL}}^e$ . Si considera lo scattering solo con elettroni.

I termini  $R_{\text{st tot}}$  e  $R_{\text{sp tot}}$  tengono conto rispettivamente del tasso di emissione stimolata totale e del tasso di emissione spontanea totale. Questi tassi costituiscono una diminuzione della concentrazione di lacune nel macro-stato QD+WL, quindi accoppiano la relativa RE con quelle dei fotoni (ed elettroni). I tassi sono espressi come

$$R_{\text{st tot}} = R_{\text{st GS}} + R_{\text{st ES}} \quad (2.42)$$

$$R_{\text{sp tot}} = R_{\text{sp GS}} + R_{\text{sp ES}} \quad (2.43)$$

Il termine  $R_{\text{nr tot}}$  tiene conto del tasso di ricombinazione non radiativa totale ed è un contributo alla perdita di lacune nel macro-stato QD+WL; si esprime come

$$R_{\text{nr tot}} = \frac{n_{\text{GS}}^e}{\tau_{\text{nr,GS}}^e} + \frac{n_{\text{ES}}^e}{\tau_{\text{nr,ES}}^e} + \frac{n_{\text{WL}}^e}{\tau_{\text{nr,WL}}^e} \quad (2.44)$$

e quindi costituisce un termine di accoppiamento con le RE degli elettroni.

Le principali approssimazioni che sono state assunte sono:

- la regione attiva consiste di una sola popolazione di QD;
- tutti i dot della popolazione sono uguali per dimensione, forma e composizione;
- tutti i dot sono neutri (stesso numero di elettroni e lacune);
- si considerano le quantità in gioco come media rispetto alla posizione nella cavità (approssimazione di *campo medio*);
- i processi di cattura, fuga e ricombinazione sono considerati indipendenti dall'iniezione.

## 2.4 Emissione da GS

Il modello è quello non eccitonico con termalizzazione lacune (modello a macro-stato lacune QD+WL).

### 2.4.1 Lo stato stazionario

Quando gli ingressi sono *costanti* nel tempo (in questo caso la corrente iniettata  $I$ ), anche le uscite lo sono (in questo caso le densità di portatori e fotoni); questo è il regime stazionario.

Lo stato stazionario è ottenuto risolvendo il sistema delle RE mediante il solutore numerico ode23s, implementato in ambiente Matlab®(paragrafo A.2).

Il sistema di equazioni *non* lineare ha le derivate temporali nulle, essendo, a regime, costanti nel tempo le densità (normalizzate) di portatori e fotoni. Tali densità sono determinate per vari valori della corrente iniettata, che è assunta come *parametro indipendente* del sistema; di conseguenza sono determinati, in virtù delle equazioni 2.39, 2.33 e 2.34, anche i valori di guadagno modale.

La *potenza ottica* emessa è proporzionale alla densità di fotoni normalizzata,  $s_{GS}$ , il cui andamento rispetto alla corrente è mostrato in figura 2.4.<sup>15</sup> La *corrente di soglia*,  $I_{th}$ , per l'emissione stimolata relativa allo stato GS, è approssimativamente pari a 4 mA. Per una corrente inferiore a quella di soglia si può trascurare l'emissione stimolata; l'iniezione di corrente serve solo a rifornire i portatori persi per emissione spontanea (radiazione incoerente) e ricombinazione non radiativa; la densità di fotoni è vicina a zero e l'emissione spontanea aumenta all'aumentare della corrente iniettata. All'avvicinarsi alla soglia, l'emissione stimolata (radiazione coerente) diventa dominante andando ad incrementare 'velocemente' il numero di fotoni nel modo (e quindi la potenza ottica emessa); l'andamento è lineare<sup>16</sup> e l'emissione spontanea è *bloccata* al suo valore soglia. La caratteristica e la corrente di soglia dipendono dalla temperatura, ma tale dipendenza non viene analizzata (la temperatura di operazione è sempre quella ambiente). La figura 2.5 mostra l'andamento delle densità normalizzate di portatori rispetto alla corrente; la figura 2.6 mostra la probabilità di occupazione degli elettroni negli stati ES e GS rispetto alla corrente. Le curve delle densità di portatori (e conseguentemente quelle relative alle probabilità di occupazione) presentano un 'ginocchio' in prossimità del valore di  $I_{th}$ .

## 2.4.2 La linearizzazione delle RE

Per studiare le caratteristiche statiche del laser si considerano le RE con  $d/dt = 0$  (stato stazionario). Per studiare il comportamento dinamico del laser, in risposta ad una modulazione della corrente iniettata, è necessario considerare le RE con  $d/dt \neq 0$ . In questo caso non è possibile procedere per via analitica, in quanto, non si può ottenere l'espressione simbolica della

---

<sup>15</sup>I parametri di riferimento, per il modello a macro-stato lacune, sono quelli "Arakawa". Tuttavia, nella figura 2.4, si riporta anche il caso per il set di parametri "Gready lento", poiché in seguito tornerà utile. A tal proposito si veda il paragrafo 3.3.

<sup>16</sup>Sopra soglia, la pendenza della curva (il rapporto incrementale) rappresenta il numero di fotoni emessi rispetto al numero di portatori iniettati (la corrente  $I$ ); se si esprime da  $s_{GS}$  la potenza ottica, tenendo conto dell'energia del fotone ( $\hbar\omega_{GS}$ ), detto rapporto è l'*efficienza quantica esterna*.

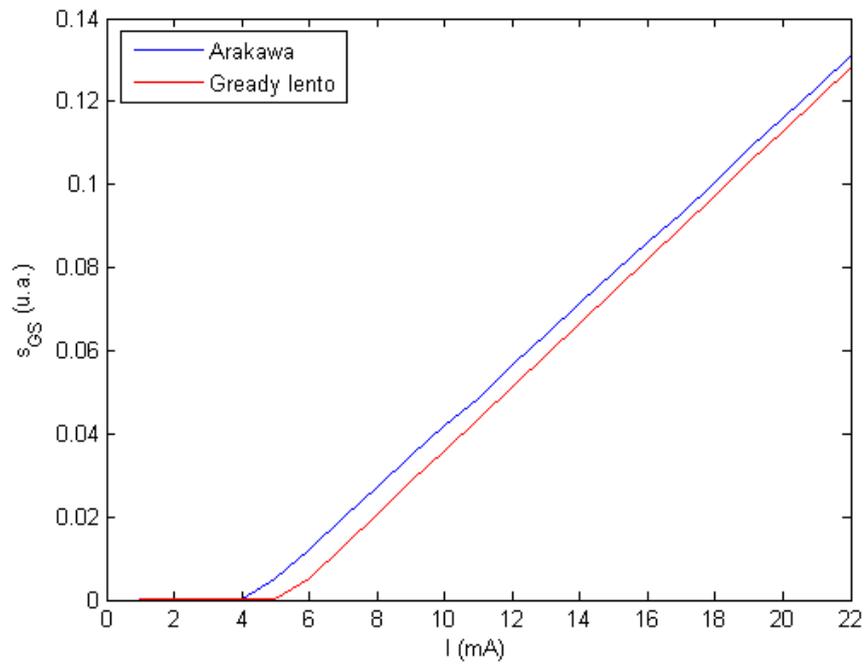


Figura 2.4: Andamento della densità normalizzata di fotoni GS rispetto alla corrente di bias (set a confronto).

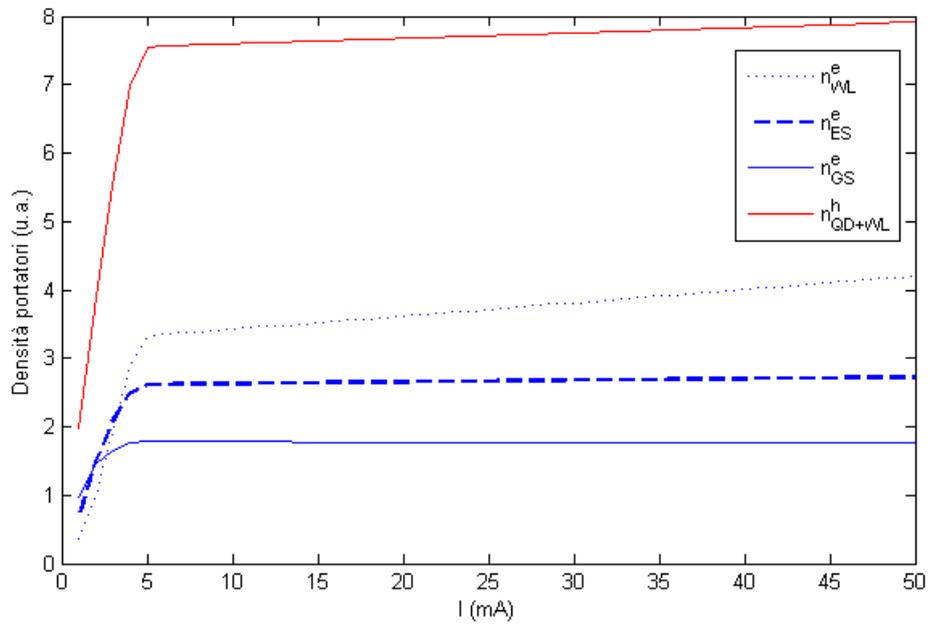


Figura 2.5: Emissione da GS: andamento delle densità normalizzate di elettroni (curve blu) e lacune (curva rossa) rispetto alla corrente di bias (set Arakawa).

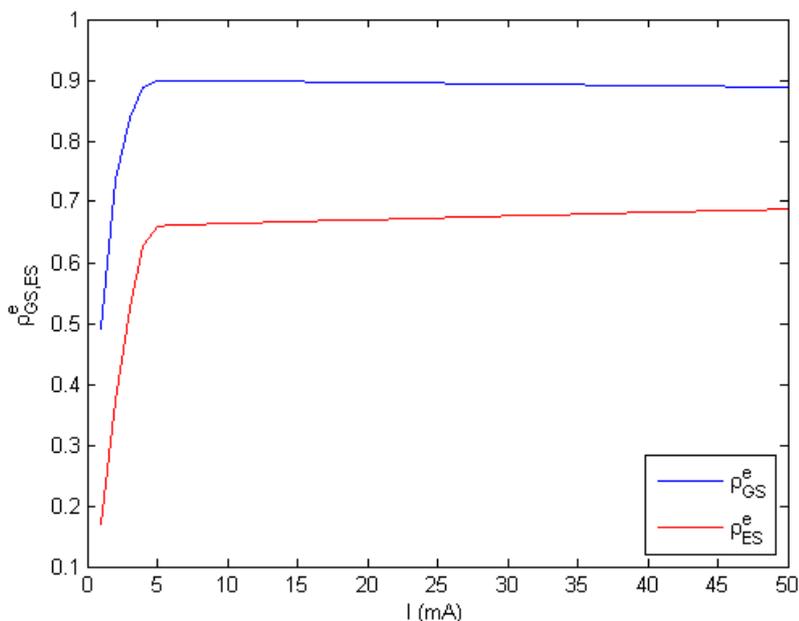


Figura 2.6: Probabilità di occupazione degli elettroni negli stati GS ed ES rispetto alla corrente di bias (set Arakawa).

soluzione.<sup>17</sup> Se si vuole una soluzione per via analitica bisogna fare delle approssimazioni. Si considerano le RE assumendo che le variazioni dinamiche delle densità di portatori e fotoni, dal loro valore stazionario, siano piccole; questo permette di fare un'*approssimazione* al primo ordine rispetto alle variazioni delle densità di portatori e fotoni ed ottenere delle risposte di *piccolo segnale* delle variabili dinamiche. Quindi l'*analisi dinamica lineare* serve per trovare l'evoluzione del sistema in un piccolo intorno del *punto di equilibrio statico* (o punto di lavoro), trovato con l'*analisi statica non lineare*.

Le RE, esprimendo le derivate temporali delle densità di portatori e fotoni, descrivono una dinamica (temporale) di un sistema con *memoria*; tale memoria è dovuta ai *valori iniziali* delle variabili che sono sottoposte a derivazione e che dipendono, quindi, dall'intera storia passata. Nel caso stazionario, non essendoci evoluzione temporale, il sistema è senza memoria.<sup>18</sup>

<sup>17</sup>In genere, non si può ottenere l'espressione della/delle soluzioni in termini di funzioni elementari, pur essendone garantita l'esistenza da teoremi. Si procede, per altro, per via numerica (nel senso di metodo numerico) anche nei casi, poco frequenti, in cui tale possibilità esista, ma troppo costosa in termini computazionali (numero di operazioni elementari da compiere). Qui non si dirime su questa questione.

<sup>18</sup>Per analogia con un circuito RLC, gli induttori e i condensatori sono gli elementi con memoria (la relazione costitutiva è un'equazione differenziale nel tempo), mentre i resistori

Considerando la corrente e le densità di portatori e fotoni come variabili dinamiche, si calcolano i *differenziali* di tutte le RE. Tali differenziali possono anche essere trovati considerando, per tutte le variabili dinamiche, lo *sviluppo di Taylor* attorno allo stato stazionario, arrestato al *primo ordine*; trascurando i termini di prodotti che coinvolgono due o più termini di piccolo segnale (i differenziali di ordine superiore al primo) e annullando le soluzioni di stato stazionario, si ottengono le RE approssimate per i differenziali delle densità, identiche ai differenziali delle RE. [13]. Si applica, quindi, il modello a RE intorno ad un *punto di polarizzazione* (a cui corrisponde lo stato stazionario), attorno al quale si *linearizza*, per ricavare il modello di piccolo segnale. Quindi il sistema reale in esame si comporta come un sistema lineare<sup>19</sup> in regime di piccoli segnali.

Il modello analitico per piccolo segnale, relativo all'emissione solo da GS, è ricavato dalle RE, senza l'equazione per  $s_{ES}$ . Il sistema considerato è quindi  $7 \times 7$ . I differenziali delle RE si calcolano differenziando rispetto alla corrente e alle densità, considerando che il guadagno (equazione 2.39), e il tasso di emissione spontanea (equazione 2.41) sono funzione delle probabilità di occupazione, che sono funzione delle densità (equazione 2.33); per i termini relativi ai tassi pesati dalle probabilità di occupazione si applica, quindi, banalmente la regola di differenziazione di un prodotto. I calcoli portano, raccogliendo i termini simili per le densità, alle seguenti RE differenziate, espresse in notazione matriciale:<sup>20</sup>

$$\frac{d}{dt}(d\mathbf{X}_t) = -\mathbf{A}(d\mathbf{X}_t) + d\mathbf{B}_t \quad (2.45)$$

dove

$$\mathbf{X}_t = \begin{bmatrix} n_{SCH}^e(t) \\ n_{WL}^e(t) \\ n_{ES}^e(t) \\ n_{GS}^e(t) \\ s_{GS}(t) \\ n_{QD+WL}^h(t) \\ n_{SCH}^h(t) \end{bmatrix}$$

---

sono elementi senza memoria (relazione costitutiva di tipo algebrico).

<sup>19</sup>In genere i sistemi reali non sono lineari; un esempio di 'forte' non linearità è data dagli *effetti di soglia*, come la soglia di emissione stimolata di un laser.

<sup>20</sup> $d\left(\frac{d}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(d)$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} & a_{56} & 0 \\ 0 & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} & a_{67} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{76} & a_{77} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_t = \frac{1}{\tau_{\text{inj}}} \begin{bmatrix} I(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I(t) \end{bmatrix}$$

I differenziali si intendono applicati ai singoli elementi dei vettori, in cui il pedice  $t$  sta ad indicare la dipendenza dal tempo.

Si definisce un *tempo di iniezione*,  $\tau_{\text{inj}}$ , che, per confronto con il termine di ‘iniezione’ in SCH (equazioni 2.25 e 2.32), risulta pari a

$$\tau_{\text{inj}} = n_d n_l w L q$$

Si suppone inoltre che, durante il laseramento,  $\eta_i = 1$ , per tutte le simulazioni, sia analitiche che numeriche.

La matrice  $\mathbf{A}$  risulta *sparsa*; questa è la conseguenza di aver considerato solo le transizioni da un livello energetico ai primi vicini, assumendo una probabilità nulla negli altri casi (la probabilità diminuisce all’aumentare della differenza di energia). In un’interpretazione circuitale ciò corrisponde ad un grafo con nodi ‘poco’ connessi (le maglie del circuito); la topologia con ‘poche’ maglie ‘grandi’ corrisponde ad una matrice sparsa; il considerare la cattura diretta, da WL a GS, rende solo meno sparsa la matrice. Si rimanda alla nota 29 per ulteriori considerazioni.

Gli elementi non identicamente nulli della matrice sparsa  $\mathbf{A}$  dipendono dai seguenti valori stazionari:

- $s_{\text{GS}}$ ;
- densità di elettroni;
- $E_f^h$  (da cui dipende, per la 2.34,  $\rho_{\text{GS}}^h$ ).<sup>21</sup>

---

<sup>21</sup>Essendo  $E_f^h$  uno pseudo livello di Fermi, deve dipendere dall’iniezione (quasi equilibrio termodinamico).

Quindi, questi elementi di matrice dipendono dalla corrente di polarizzazione. La loro espressione risulta essere, in base ai calcoli effettuati, la seguente:

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \frac{1}{\tau_s^e} \\
 a_{12} &= -\frac{1}{\tau_{\text{esc,WL}}^e} \\
 a_{21} &= -\frac{1}{\tau_s^e} \\
 a_{22} &= \frac{1}{\tau_{\text{esc,WL}}^e} + \frac{G_n(1 - \rho_{\text{ES}}^e)}{\tau_{\text{c,ES}}^e} + \frac{1}{\tau_{\text{nr,WL}}^e} + \frac{G_n(1 - \rho_{\text{GS}}^e)}{\tau_{\text{c,GS}}^e} \\
 a_{23} &= -\frac{1}{\tau_{\text{esc,ES}}^e} - \frac{n_{\text{WL}}^e}{\tau_{\text{c,ES}}^e \mu_{\text{ES}}^e} \\
 a_{24} &= -\frac{n_{\text{WL}}^e}{\tau_{\text{c,GS}}^e \mu_{\text{GS}}^e} - \frac{1}{\tau_{\text{esc,GS} \rightarrow \text{WL}}^e} \\
 a_{32} &= -\frac{G_n(1 - \rho_{\text{ES}}^e)}{\tau_{\text{c,ES}}^e} \\
 a_{33} &= \frac{n_{\text{WL}}^e}{\tau_{\text{c,ES}}^e \mu_{\text{ES}}^e} + \frac{1}{\tau_{\text{esc,ES}}^e} + \frac{1 - \rho_{\text{GS}}^e}{\tau_{\text{r,GS}}^e} + \frac{n_{\text{GS}}^e}{\tau_{\text{esc,GS}}^e G_n \mu_{\text{ES}}^e} + \frac{1}{\tau_{\text{nr,ES}}^e} \\
 a_{34} &= -\frac{n_{\text{ES}}^e}{\tau_{\text{r,GS}}^e G_n \mu_{\text{GS}}^e} - \frac{1 - \rho_{\text{ES}}^e}{\tau_{\text{esc,GS}}^e} \\
 a_{42} &= -\frac{G_n(1 - \rho_{\text{GS}}^e)}{\tau_{\text{c,GS}}^e} \\
 a_{43} &= -\frac{1 - \rho_{\text{GS}}^e}{\tau_{\text{r,GS}}^e} - \frac{n_{\text{GS}}^e}{\tau_{\text{esc,GS}}^e G_n \mu_{\text{ES}}^e} \\
 a_{44} &= \frac{n_{\text{ES}}^e}{\tau_{\text{r,GS}}^e G_n \mu_{\text{GS}}^e} + \frac{1 - \rho_{\text{ES}}^e}{\tau_{\text{esc,GS}}^e} + \frac{s_{\text{GS}}}{\tau_{\text{gGS}} \mu_{\text{GS}}^e} + \frac{\rho_{\text{GS}}^h}{\tau_{\text{spGS}}} + \frac{1}{\tau_{\text{nr,GS}}^e} + \frac{n_{\text{WL}}^e}{\tau_{\text{c,GS}}^e \mu_{\text{GS}}^e} + \frac{1}{\tau_{\text{esc,GS} \rightarrow \text{WL}}^e} \\
 a_{45} &= \frac{G_n(\rho_{\text{GS}}^e + \rho_{\text{GS}}^h - 1)}{\tau_{\text{gGS}}} \\
 a_{46} &= \frac{G_n s_{\text{GS}}}{\tau_{\text{gGS}}} \left( \frac{\partial \rho_{\text{GS}}^e}{\partial n_{\text{QD+WL}}^h} + \frac{\partial \rho_{\text{GS}}^h}{\partial n_{\text{QD+WL}}^h} \right) \\
 a_{54} &= -\frac{\beta_{\text{sp}} \rho_{\text{GS}}^h}{\tau_{\text{spGS}}} - \frac{s_{\text{GS}}}{\tau_{\text{gGS}} \mu_{\text{GS}}^e}
 \end{aligned}$$

$$a_{55} = \begin{cases} -\frac{G_n(\rho_{\text{GS}}^e + \rho_{\text{GS}}^h - 1)}{\tau_{\text{gGS}}} + \frac{1}{\tau_{\text{p,GS}}} & \text{per } I \leq I_{\text{th}} \\ 0 & \text{per } I > I_{\text{th}} \end{cases}$$

$$a_{56} = -\frac{G_n s_{\text{GS}}}{\tau_{\text{gGS}}} \frac{\partial \rho_{\text{GS}}^h}{\partial n_{\text{QD+WL}}^h}$$

$$a_{62} = \frac{1}{\tau_{\text{nr,WL}}^e}$$

$$a_{63} = \frac{1}{\tau_{\text{nr,ES}}^e}$$

$$a_{64} = \frac{s_{\text{GS}}}{\tau_{\text{gGS}} \mu_{\text{GS}}^e} + \frac{\rho_{\text{GS}}^h}{\tau_{\text{spGS}}} + \frac{1}{\tau_{\text{nr,GS}}^e}$$

$$a_{65} = \frac{G_n(\rho_{\text{GS}}^e + \rho_{\text{GS}}^h - 1)}{\tau_{\text{gGS}}}$$

$$a_{66} = \frac{1}{\tau_{\text{esc,QD+WL}}^h} + \frac{G_n s_{\text{GS}}}{\tau_{\text{gGS}}} \frac{\partial \rho_{\text{GS}}^h}{\partial n_{\text{QD+WL}}^h}$$

$$a_{67} = -\frac{1}{\tau_s^h}$$

$$a_{76} = -\frac{1}{\tau_{\text{esc,QD+WL}}^h}$$

$$a_{77} = \frac{1}{\tau_s^h}$$

Si assume, in  $a_{46}$ , che<sup>22</sup>

$$\frac{\partial \rho_{\text{GS}}^e}{\partial n_{\text{QD+WL}}^h} = 0 \quad (2.46)$$

Inoltre

$$\frac{\partial \rho_{\text{GS}}^h}{\partial n_{\text{QD+WL}}^h} = \frac{\partial \rho_{\text{GS}}^h}{\partial E_f^h} \frac{\partial E_f^h}{\partial n_{\text{QD+WL}}^h} = \frac{\partial \rho_{\text{GS}}^h}{\partial E_f^h} \left( \frac{\partial n_{\text{QD+WL}}^h}{\partial E_f^h} \right)^{-1} \quad (2.47)$$

---

<sup>22</sup>Il legame tra le probabilità di occupazione, per elettroni e lacune, è dato dalla condizione di *neutralità di carica*, esprimibile come

$$n_{\text{SCH}}^e + n_{\text{WL}}^e + n_{\text{ES}}^e + n_{\text{GS}}^e = n_{\text{QD+WL}}^h + n_{\text{SCH}}^h$$

dove le densità  $n_{\text{GS,ES}}^e$  e  $n_{\text{QD+WL}}^h$  sono date, rispettivamente, dalla 2.33 e dalla 2.35.

Si calcola che

$$\frac{\partial \rho_k^h}{\partial E_f^h} = \frac{e^{(E_k^h - E_f^h)/k_B T}}{(1 + e^{(E_k^h - E_f^h)/k_B T})^2 k_B T} \quad (2.48)$$

dove  $\rho_k^h$  è data dalla 2.34.

Si calcola anche che

$$\frac{\partial n_{\text{QD+WL}}^h}{\partial E_f^h} = \frac{\delta_{\text{WL}}^h e^{(E_f^h - E_{\text{WL}}^h)/k_B T}}{(1 + e^{(E_f^h - E_{\text{WL}}^h)/k_B T}) k_B T} + \sum_{k=\text{GS}, \text{ES}_{1,\dots,4}} \mu_k^h \frac{\partial \rho_k^h}{\partial E_f^h} \quad (2.49)$$

dove  $n_{\text{QD+WL}}^h$  è data dalla 2.35; sostituendo la 2.48 nella 2.49, si ottiene

$$\frac{\partial n_{\text{QD+WL}}^h}{\partial E_f^h} = \frac{\delta_{\text{WL}}^h e^{(E_f^h - E_{\text{WL}}^h)/k_B T}}{(1 + e^{(E_f^h - E_{\text{WL}}^h)/k_B T}) k_B T} + \sum_{k=\text{GS}, \text{ES}_{1,\dots,4}} \mu_k^h \frac{e^{(E_k^h - E_f^h)/k_B T}}{(1 + e^{(E_k^h - E_f^h)/k_B T})^2 k_B T} \quad (2.50)$$

Infine, sostituendo la 2.48 (con  $k = \text{GS}$ ) e la 2.50 nella 2.47, si ottiene (semplificando  $k_B T$ )

$$\frac{\partial \rho_{\text{GS}}^h}{\partial n_{\text{QD+WL}}^h} = \frac{e^{(E_{\text{GS}}^h - E_f^h)/k_B T}}{(1 + e^{(E_{\text{GS}}^h - E_f^h)/k_B T})^2} \left[ \frac{\delta_{\text{WL}}^h e^{(E_f^h - E_{\text{WL}}^h)/k_B T}}{1 + e^{(E_f^h - E_{\text{WL}}^h)/k_B T}} + \sum_{k=\text{GS}, \text{ES}_{1,\dots,4}} \mu_k^h \frac{e^{(E_k^h - E_f^h)/k_B T}}{(1 + e^{(E_k^h - E_f^h)/k_B T})^2} \right]^{-1} \quad (2.51)$$

Questa espressione va sostituita nei termini  $a_{46}$ ,  $a_{56}$  e  $a_{66}$ .

Ponendo (non calcolando i differenziali delle densità) *sopra* la soglia  $a_{55} = 0$ , si tiene conto della condizione di laseramento (equazione 2.24), senza nessuna approssimazione. Questo significa che si include implicitamente il contributo, nel coefficiente di guadagno  $g_{\text{GS}}$ , anche dei dot non laseranti per homogeneous broadening (*allargamento omogeneo*), discusso nel paragrafo 1.1.3.<sup>23 24</sup> *Sotto*

<sup>23</sup>Questo contribuisce a migliorare l'accordo tra il simulatore analitico (basato sulla linearizzazione delle RE) e il simulatore numerico (integrazione numerica delle RE). Il simulatore numerico descrive, infatti, sia la frazione di dot laseranti che non laseranti, e tiene conto per questi ultimi del loro contributo per l'allargamento omogeneo dello spettro di guadagno ottico. Il coefficiente di guadagno, riportato anche in [1], è dato da

$$g_{\text{GS}} = \frac{G_n(\rho_{\text{GS}}^e + \rho_{\text{GS}}^h - 1)}{\tau_{\text{g GS}}} + \frac{G'_n(\rho_{\text{GS}}^e + \rho_{\text{GS}}^h - 1)}{\tau_{\text{g GS}}} \gamma_{\text{homo}}$$

dove le quantità con l'apice sono relative alla frazione di dot non laseranti. Il secondo termine, quindi, rappresenta il contributo dei dot non laseranti, pesato dal coefficiente  $\gamma_{\text{homo}} \in [0, 1]$ , che rappresenta la frazione di questo contributo. Per tutte le simulazioni numeriche, si è posto  $\gamma_{\text{homo}} = 0,5$ .

<sup>24</sup>In [8] si riporta, per un caso eccitonico, un valore di allargamento omogeneo della riga di emissione, di circa 10 meV, corrispondente anche a misure sperimentali (profilo di *allargamento lorentziano*).

la *soglia*, l'espressione di  $a_{55}$  è ottenuta differenziando. L'accordo, sia sopra che sotto soglia, dovuto a questo termine, sarà tanto migliore quanto più è alto il valore di  $G_n$  (diminuiscono i dot non laseranti). Questo avviene per i parametri Arakawa, in cui  $G_n = 0,99$  (tabella 3.2); in questo caso, sopra soglia, risulta  $a_{55} \approx 0$ .

In virtù di quanto osservato su  $a_{55}$ , si osserva anche che, sopra soglia per il set Arakawa, si ha

$$\frac{G_n(\rho_{GS}^e + \rho_{GS}^h - 1)}{\tau_{g,GS}} \approx \frac{1}{\tau_{p,GS}} \quad (2.52)$$

ed essendo il primo membro l'espressione di  $a_{45} = a_{65}$  (la matrice  $\mathbf{A}$  presenta delle 'simmetrie/antisimmetrie', conseguenza del bilancio dei tassi nelle RE) si ha che

$$a_{45} = a_{65} \approx \frac{1}{\tau_{p,GS}}$$

Le RE differenziate (l'equazione matriciale 2.45) sono ancora un sistema di equazioni differenziali nel dominio del tempo, ma di un sistema lineare. Tali equazioni si possono ricondurre, mediante la *trasformata di Laplace*, a un sistema di equazioni algebriche nel dominio della *pulsazione complessa*<sup>25</sup>. Sotto opportune condizioni<sup>26</sup> la *trasformata di Fourier* di queste funzioni (*dominio armonico*), coincide con la trasformata di Laplace se la pulsazione complessa è pari a  $j\omega$ ; di conseguenza è possibile passare dal dominio di Laplace al dominio armonico (o viceversa) ponendo la variabile complessa pari a  $j\omega$ . Il dominio armonico va bene studiare i sistemi *lineari*<sup>27</sup> (gli elementi

---

<sup>25</sup>La pulsazione complessa, oltre che essere un parametro da cui dipende l'integrale di Laplace, rappresenta anche l'estensione in campo complesso della pulsazione 'ordinaria'; ha le stesse dimensioni e gioca lo stesso ruolo; identifica una *cisoide* complessa, invece che, una sinusoide complessa  $e^{j\omega t}$ . La parte reale della pulsazione complessa è responsabile di un termine esponenziale (reale) nel tempo che moltiplica (inviluppa)  $e^{j\omega t}$ .

<sup>26</sup>La trasformata di Fourier è garantita soltanto per le funzioni sommabili in senso integrale (come gli esponenziali complessi). La *convergenza* della trasformata di Laplace viene assicurata anche per molte funzioni che non verificano la condizione di sommabilità, modificando l'integrale di Fourier con l'introduzione di un opportuno fattore, detto di convergenza e prendendo come estremo inferiore d'integrazione l'origine anziché  $-\infty$  (si considerano le trasformate di funzioni che rappresentano segnali applicati a partire da  $t = 0$  in poi, come gli esponenziali complessi causali); si parla di trasformata *monolatera*. Così facendo, la pulsazione complessa, la cui parte reale è legata alla convergenza, viene a sostituire la variabile  $j\omega$ .

<sup>27</sup>Un sistema è lineare se tali sono le equazioni che ne costituiscono il modello; di conseguenza vale il principio di *sovraposizione* degli *effetti*. Le funzioni seno e coseno sono "invarianti in forma" per trasformazioni lineari; quando una sinusoide attraversa un sistema lineare in uscita è ancora una sinusoide. Ciò permette di definire un *guadagno* e una *fase* (funzione di trasferimento).

della matrice  $\mathbf{A}$  non dipendono dalle grandezze descrittive, cioè le densità di portatori e fotoni), *invarianti* (gli elementi della matrice  $\mathbf{A}$  non dipendono dal tempo)<sup>28</sup> e a *parametri concentrati*<sup>29 30</sup>, come il sistema di laser QD in esame.

Ai fini dell'analisi dinamica lineare si considerano eccitazioni variabili attorno ad un valore medio; si considerano solo le variazioni piccole delle eccitazioni. In questo caso c'è una sola eccitazione, la corrente iniettata. Si applica, quindi, una corrente sopra soglia dc,  $I_0$ , a cui corrisponde lo stato stazionario, cui si sovrappone una corrente ac con piccola ampiezza (una sinusoide con ampiezza  $I_1$  e valore medio  $I_0$ ). Usando, per comodità, la

---

<sup>28</sup>In generale, per un sistema invariante, le uscite non dipendono dall'istante di tempo a cui l'ingresso è applicato, ad esempio, un sistema che *non invecchia*; questo permette la *ripetibilità* degli esperimenti.

<sup>29</sup>In questo caso le variabili descrittive, le densità di portatori e fotoni, non dipendono dallo spazio, per cui il modello non contempla la valutazione delle loro *derivate parziali* rispetto alle coordinate spaziali. Come conseguenza, si suppone implicitamente che, la propagazione dei segnali di 'densità' sia istantanea, per cui non ci sono *ritardi* da considerare nel dominio del tempo (cioè i ritardi sono nulli).

Si anticipa che, la natura della funzione di trasferimento ricavata dalle RE lineari, deve contenere l'informazione sulla natura concentrata delle densità; essa risulterà razionale fratta in  $j\omega$ , quindi come per un circuito RLC a parametri concentrati. Questo dipende dalla trasformazione di  $d/dt$ , presente nelle RE, nel dominio armonico, così come avviene nelle relazioni costitutive di induttori e condensatori. Nel caso i parametri fossero distribuiti, cioè il modello include, oltre alla derivata temporale, anche le derivate parziali spaziali delle grandezze costitutive, la funzione di trasferimento è trascendente.

Infine, si può osservare che, un modello a parametri concentrati può essere descritto matematicamente da un *grafo*, che ne rappresenta la *topologia*. Questo tipo di descrizione risulta naturale per una rete elettrica, per via delle connessioni che creano nodi e maglie – le equazioni di Kirchhoff sono di natura topologica e sono le stesse per tutte le reti che hanno lo stesso grafo –, ma vale in generale. Infatti, mediante una equivalenza degli elementi costitutivi, si possono trasformare sistemi meccanici, sistemi idraulici e sistemi termici, in un sistema elettrico equivalente, conservando la topologia. La stessa analogia idraulica per la dinamica del laser, riportata nel paragrafo 2.1 (modello di pompaggio elettrico) e riportata anche nel capitolo 2 di [13] (reservoir), descrive di fatto una dinamica con RE relative a variabili di massa, anziché di densità di portatori e fotoni, rimanendo nella *stessa* topologia. Quello che conta nella geometria topologica è la *natura discreta* degli oggetti rappresentati. Questa idea può modellizzare l'evoluzione temporale dei fenomeni fisici, che compongono l'intero processo o una sua parte; nel caso della dinamica di un laser, gli oggetti discreti potrebbero essere gli stati permessi. . .

Un circuito a parametri distribuiti invece, come ad esempio una linea di trasmissione, non può essere descritta in questo modo.

<sup>30</sup>Si evidenzia un aspetto dei grafi, indirettamente legato a questa tesi. Gli algoritmi di *algebra computazionale* fanno uso di grafi ricorsivi per rappresentare le funzioni composte (la funzione è l'entità discreta). Il calcolo simbolico in  $\omega$ , effettuato in ambiente Matlab<sup>®</sup>, della funzione di trasferimento, si basa su questi algoritmi (paragrafo A.1).

notazione complessa si esprime la corrente come

$$I(t) = I_0 + dI(t) \quad (2.53)$$

con

$$dI(t) \triangleq I_1 e^{j\omega t} \quad (2.54)$$

in cui si è usato il simbolo di corrispondente ( $\triangleq$ ), al posto dell'uguaglianza, poiché il secondo membro è una quantità finita. L'obiettivo è ottenere la risposta in frequenza di piccolo segnale dei differenziali delle densità alla modulazione di corrente  $dI(t)$ . Potendo assumere che le densità rispondono variando con la stessa legge con cui varia  $I(t)$  (a regime sono *isomorfe* con l'eccitazione) si ha

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{X}_0 + d\mathbf{X}_t \quad (2.55)$$

con

$$d\mathbf{X}_t \triangleq \mathbf{X}_1 e^{j\omega t} \quad (2.56)$$

dove

$$\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} n_{\text{SCH},0}^e \\ n_{\text{WL},0}^e \\ n_{\text{ES},0}^e \\ n_{\text{GS},0}^e \\ s_{\text{GS},0} \\ n_{\text{QD+WL},0}^h \\ n_{\text{SCH},0}^h \end{bmatrix} \quad \mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} n_{\text{SCH},1}^e \\ n_{\text{WL},1}^e \\ n_{\text{ES},1}^e \\ n_{\text{GS},1}^e \\ s_{\text{GS},1} \\ n_{\text{QD+WL},1}^h \\ n_{\text{SCH},1}^h \end{bmatrix}$$

L'equazione matriciale 2.56 esprime la forma che ha la soluzione. Il pedice 0 si riferisce alla componente stazionaria, mentre il pedice 1 si riferisce alle ampiezze di piccolo segnale (mediante le quali si esprime la linearizzazione del sistema).

Sostituendo nella 2.45 la 2.56 e sostituendo la 2.54 in  $\mathbf{B}_t$ , si ha

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{X}_1 e^{j\omega t}) = (-\mathbf{A}\mathbf{X}_1 + \mathbf{B}_1) e^{j\omega t} \quad (2.57)$$

dove

$$\mathbf{B}_1 = \frac{1}{\tau_{\text{inj}}} \begin{bmatrix} I_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I_1 \end{bmatrix}$$

Passando al dominio armonico (d/dt trasformato diventa  $j\omega$ ), la 2.57 diventa

$$j\omega \mathbf{X}_1 = -\mathbf{A}\mathbf{X}_1 + \mathbf{B}_1$$

da cui portando  $\mathbf{A}\mathbf{X}_1$  al primo membro e raccogliendo a destra  $\mathbf{X}_1$  si ottiene

$$(j\omega \mathbf{1} + \mathbf{A})\mathbf{X}_1 = \mathbf{B}_1$$

dove  $\mathbf{1}$  è la matrice identità  $7 \times 7$ . Chiamando  $j\omega \mathbf{1} + \mathbf{A} = \mathbf{A}_\omega$  il sistema lineare si esprime come

$$\mathbf{A}_\omega \mathbf{X}_1 = \mathbf{B}_1 \quad (2.58)$$

La matrice  $\mathbf{A}_\omega$ , espressa in componenti, risulta quindi pari a

$$\mathbf{A}_\omega = \begin{bmatrix} a_{11} + j\omega & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} + j\omega & a_{23} & a_{24} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} + j\omega & a_{34} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} + j\omega & a_{45} & a_{46} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} + j\omega & a_{56} & 0 \\ 0 & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} + j\omega & a_{67} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{76} & a_{77} + j\omega \end{bmatrix}$$

Il sistema non omogeneo 2.58 esprime le RE linearizzate, nel dominio armonico, per le ampiezze di piccolo segnale. Il termine forzante  $\mathbf{B}_1$  è ‘guidato’ dalla corrente  $I_1$ , che è l’ampiezza del *gradino* di corrente da applicare intorno al punto di bias per calcolare la risposta in frequenza. Nelle simulazioni, sia analitiche che numeriche, si è usato il valore di 1 mA.

In conclusione, si è passati da un modello continuo nel dominio del tempo (le RE di partenza) ad un modello continuo nel dominio  $\omega$ ; la *relazione* tra i due domini è *biunivoca* (si può *antitrasformare* la soluzione del sistema algebrico ottenuto, per tornare al dominio del tempo).

### 2.4.3 La funzione di trasferimento

Il sistema lineare 2.58 ha tante equazioni quante incognite ed il rango della matrice  $\mathbf{A}_\omega$  è massimo<sup>31</sup> (7); tale sistema risulta, quindi, determinato. La matrice  $\mathbf{A}_\omega$  è invertibile ( $\det \mathbf{A}_\omega \neq 0$ ) e l’unica soluzione del sistema è

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{A}_\omega^{-1} \mathbf{B}_1 \quad (2.59)$$

---

<sup>31</sup>Tutte le righe (o le colonne) sono linearmente indipendenti ed appartengono ad uno spazio vettoriale di dimensione 7.

Essendo la matrice  $\mathbf{A}_\omega$  sparsa, si può calcolare la soluzione senza l'utilizzo di metodi numerici (bassa complessità computazionale).<sup>32</sup> La funzione di trasferimento, o meglio la *funzione di risposta armonica*, è data da

$$H(j\omega) = \frac{\mathbf{X}_1[5]}{I_1} \quad (2.60)$$

dove  $\mathbf{X}_1[5] = s_{\text{GS},1}$  (si indica nelle parentesi quadre la componente del vettore). La dipendenza di  $\mathbf{X}_1$ , e quindi di  $H$ , da  $j\omega$  deriva dagli elementi diagonali della matrice  $\mathbf{A}_\omega$ . La funzione  $H(j\omega)$  esprime, per un sistema lineare, il rapporto dell'ampiezza di piccolo segnale dell'uscita,  $s_{\text{GS},1}$ , rispetto all'ampiezza di piccolo segnale dell'ingresso,  $I_1$ . Si può esprimere la funzione di risposta armonica anche per ognuna delle densità di portatori, prendendo la corrispondente componente del vettore soluzione; prendendo l'intero vettore soluzione si può esprimere una *matrice di trasferimento*, per una data corrente di polarizzazione  $I_0$  ( $\mathbf{X}_1$  dipende, tramite gli elementi della matrice  $\mathbf{A}$  e quindi di  $\mathbf{A}_\omega$ , da  $I_0$ ).<sup>33</sup>

---

<sup>32</sup>L'espressione della soluzione è direttamente implementabile, in ambiente Matlab®, grazie alla presenza della *divisione a sinistra*; per questo non si utilizza la regola di Cramer.

<sup>33</sup>Per ricavare la matrice di trasferimento si può anche partire dal sistema delle RE linearizzate nel dominio  $t$  (equazione 2.45); lo si può fare anche per ispezione! Tale sistema di equazioni, infatti, identifica l'*equazione di stato* del nostro sistema (dinamico) di QD per  $t \geq 0^+$ , in cui le variabili di stato indipendenti sono i differenziali al primo ordine delle densità normalizzate di elettroni e fotoni (la dimensione della matrice  $\mathbf{A}$  è pari al numero di elementi con memoria indipendenti, ossia l'*ordine di complessità* del sistema). La teoria dei sistemi di equazioni differenziali, lineari, a coefficienti costanti, assicura che ogni incognita sia esprimibile come la somma della soluzione dell'equazione omogenea associata e dell'integrale particolare. La soluzione dell'omogenea associata è l'*evoluzione libera* del sistema dinamico, partendo da condizioni iniziali non nulle (le costanti sono scelte in modo che siano soddisfatte queste condizioni iniziali), ma senza forzante, cioè è la risposta ad ingresso nullo ( $d\mathbf{B}_t = 0$ ); nel dominio armonico questo termine lo si ritrova come termine additivo nella risposta (non siamo in questo caso). L'integrale particolare si può esprimere come prodotto (integrale) di *convoluzione* ed esprime la *risposta forzata* del sistema dinamico, con condizioni iniziali nulle; dipende, quindi, solo dall'ingresso. Questo è il tipo di risposta che si sta considerando. Infatti, la funzione di trasferimento è la trasformata della risposta (forzata) all'impulso. Nel nostro caso, si trascura completamente l'oscillazione libera, e si suppone che il sistema sia inizialmente a riposo, privo di energia iniziale, e che, eventuali transitori siano già smorzati rispetto alla risposta forzata. La funzione di trasferimento – ricavata come rapporto tra la trasformata dell'uscita forzata e quella dell'ingresso corrispondente, applicato con condizioni iniziali nulle – corrisponde ad una relazione ingresso-uscita di tipo algebrico, a causa della trasformazione del prodotto di convoluzione in prodotto.

La funzione  $H(j\omega)$  è razionale fratta<sup>34</sup> a coefficienti reali<sup>35</sup>; si può scrivere che

$$H(j\omega; I_0) = \frac{N(j\omega; I_0)}{D(j\omega; I_0)} \quad (2.61)$$

dove  $N(j\omega; I_0)$  e  $D(j\omega; I_0)$  sono *polinomi completi* (tutti i coefficienti sono diversi da zero) di grado, rispettivamente, 4 e 7 (il grado di  $D(j\omega; I_0)$  è pari al rango della matrice  $\mathbf{A}_\omega$ ). I coefficienti sono funzioni composte, per la dipendenza dagli elementi della matrice  $\mathbf{A}$ , dei parametri del sistema e di  $I_0$ . Inoltre, il grado di  $N(j\omega; I_0)$ , essendo non superiore al grado di  $D(j\omega; I_0)$ , conferma la causalità<sup>36</sup>.

Si calcolano poli<sup>37</sup> <sup>38</sup> e zeri<sup>39</sup> come radici, rispettivamente, di  $D(j\omega; I_0)$  e  $N(j\omega; I_0)$ . Poli e zeri si presentano reali o a coppie complesse coniugate ed essendo funzione dei coefficienti dei polinomi di cui sono radici,<sup>40</sup> sono dipendenti da  $I_0$ , oltre che dai parametri del sistema.

---

<sup>34</sup>Questo è dovuto al numero limitato di ‘componenti’, ossia le densità in gioco. Infatti, in generale, se il numero dei componenti è in numero illimitato è possibile avere funzioni irrazionali.

Inoltre, la natura di  $H(j\omega)$  conferma che l’uscita non è ritardata rispetto all’ingresso in quanto, mancano i prodotti con termini esponenziali del tipo  $e^{-\text{ritardo}j\omega}$ ; questo tipo di risultato è coerente per un modello a parametri concentrati (nota 29). L’inclusione di tempi di ritardo, ad esempio per fenomeni di trasporto, non cambierebbe la natura LTI (Linear Time-Invariant) del sistema; un sistema modellato da un ritardo puro finito è un sistema LTI, pur non essendo caratterizzato da una funzione di trasferimento razionale fratta.

<sup>35</sup>I coefficienti nelle RE, e conseguentemente nelle RE linearizzate, sono reali in quanto funzioni reali, di tipo algebrico ed esponenziale, dei parametri reali che descrivono il sistema; di conseguenza anche i coefficienti dei polinomi sono tutti reali.

<sup>36</sup>Il sistema è *causale* se la sua risposta all’impulso è nulla per  $t < 0$ ; questa condizione equivale ad imporre che non si possa ottenere l’uscita del sistema prima che venga applicato l’ingresso. Diversamente si può dimostrare, usando la definizione per la funzione di trasferimento di trasformata della risposta all’impulso, che se il grado di  $N(j\omega; I_0)$  è maggiore del grado di  $D(j\omega; I_0)$ , il sistema risponde all’ingresso anticipandolo, ossia con una uscita più veloce dell’ingresso stesso.

<sup>37</sup>Se interessa solo il calcolo dei poli, senza risolvere il sistema lineare, si può considerare che  $\det \mathbf{A}_\omega = D(j\omega; I_0)$ ; se si utilizza la regola di Cramer è necessario comunque calcolare questo determinante.

<sup>38</sup>Le equazioni di stato del nostro sistema LTI, si possono accoppiare ad un’equazione di uscita, tale che il vettore di stato,  $d\mathbf{X}_t$ , coincide con l’uscita. In questo caso non ci sono problemi di *osservabilità* dell’uscita (per il tipo di equazione di uscita costruita) e di *controllabilità* dello stato (si consideri, nell’equazione canonica dell’uscita, il ruolo dell’ingresso). Sotto queste condizioni si può affermare che, i poli sono gli *autovalori* della matrice  $-\mathbf{A}$ , con lo stesso ordine di molteplicità di detti autovalori.

<sup>39</sup>Gli zeri, sono *zeri di trasmissione* in quanto, indicano i valori di  $\omega$  per i quali la componente della risposta isomorfa con l’eccitazione è nulla.

<sup>40</sup>Un polinomio a coefficienti reali ammette, in campo complesso, radici reali o a coppie complesse coniugate, in numero pari al grado del polinomio, contate con la loro molteplici-

I calcoli svolti mostrano che

- $\exists \quad j\omega_{\text{polo}} = 0 \quad \forall I_0;$
- $\exists \quad j\omega_{\text{zero}} = 0 \quad \forall I_0.$

Bisogna considerare l'errore numerico associato alla rappresentazione dei coefficienti. Inoltre, il calcolo simbolico di  $\det \mathbf{A}_\omega$  (paragrafo A.1) suggerisce che la natura del polo in zero non sia analitica. Nel caso del polinomio  $D(j\omega; I_0)$  il termine noto risulta essere la somma di 20 termini, con segni alterni, ciascuno dei quali consiste in 7 prodotti con gli elementi non identicamente nulli della matrice  $\mathbf{A}$ ; l'ordine di grandezza degli elementi di matrice coinvolti – che possono essere positivi o negativi, con un modulo molto inferiori ad 1 o, meno frequentemente, paragonabili ad 1 – fa sì che questo termine sia prossimo a zero (l'elemento  $a_{55} = 0$  sopra soglia non è coinvolto). Il modello numerico non prevede lo 'zero di trasmissione' [15], che è quindi legato alla matrice  $\mathbf{A}_\omega$ . Si aggiunge che, considerando due insiemi di equazioni nelle cariche, che mantengono una neutralità globale, si ha come conseguenza uno zero, a pulsazione nulla, della funzione di trasferimento. Infatti, facendo delle approssimazioni, è possibile scrivere una equazione in funzione delle altre, cioè le equazioni si possono considerare 'approssimativamente' non indipendenti [16]. Si consideri, comunque, che per arrivare all'espressione di  $H(j\omega)$  si sono fatte delle approssimazioni che coinvolgono proprio la neutralità di carica (equazione 2.46).

---

tà; inoltre, se il grado è dispari si ha almeno una radice reale (da  $D(j\omega; I_0)$  si hanno 4 poli reali, di cui 3 sono ad 'alta' pulsazione; c'è anche un polo nell'origine di cui si discuterà più avanti). Queste considerazioni sono conseguenze del *teorema fondamentale dell'algebra*. Le radici sono funzioni razionali o irrazionali dei coefficienti fino a quando il grado del polinomio non supera 4, mentre sono funzioni trascendenti dei coefficienti – incluse le funzioni non elementari o non esprimibili analiticamente, cioè per le quali non esiste formula chiusa che consenta di esprimerle a partire da coefficienti arbitrari – quando il grado è superiore (è stato dimostrato che non esiste una formula generale di risoluzione per mezzo di operazioni algebriche e radicali). Le radici sono determinate con *metodi iterativi*, ma la precisione diminuisce sensibilmente quando il grado supera 5.

‘Semplificando’ il polo-zero in  $\omega = 0$ ,<sup>41</sup> si ha

$$H(j\omega) = \frac{N_3(j\omega)}{D_4(j\omega)} \frac{1}{[(j\omega)^2 - (j\omega_{\text{polo c.}} + j\omega_{\text{polo c.}}^*)j\omega + j\omega_{\text{polo c.}}j\omega_{\text{polo c.}}^*]} \quad (2.62)$$

dove  $N_3(j\omega)$  e  $D_4(j\omega)$  sono polinomi completi, rispettivamente, di grado 3 e 4. Si sono utilizzate, per il polinomio di grado 2 a denominatore, le relazioni tra radici e coefficienti. La somma dei poli complessi coniugati è il fattore di smorzamento, mentre il loro prodotto dà il quadrato della pulsazione di risonanza,  $\omega_R$ . Si usa il *fattore di merito*,  $Q$ , al posto del fattore di smorzamento ( $Q^{-1}$ ); questo è il  $Q$  dei due poli relativi alla parte di funzione di trasferimento del 2° ordine,<sup>42</sup> che chiameremo  $H_2(j\omega)$ .

La risposta relativa alla 2.62, deve risultare simile ad una del 2° ordine per la presenza nelle RE linearizzate, nel dominio  $t$  e conseguentemente nel dominio  $\omega$ , del prodotto della densità di elettroni nel GS con la densità di fotoni GS, e del prodotto della densità di lacune nel GS con la densità di fotoni GS. Questi termini nascono dal prodotto righe per colonne relativo al sistema

---

<sup>41</sup>Queste semplificazioni di fattori, fra il numeratore e il denominatore della funzione di trasferimento, hanno un significato fisico: l’impulso dato in ingresso al sistema introduce dell’energia, ma non permette di ‘dosare’ lo stato energetico iniziale in modo arbitrario, cioè le condizioni iniziali dell’oscillazione libera. Quando intervengono queste semplificazioni, il contenuto informativo della funzione di trasferimento è inferiore alla rappresentazione di stato, in quanto non rappresenta dinamiche che non hanno effetto sulla relazione ingresso-uscita. In questi casi, infatti, una parte della dinamica non ha alcun effetto sull’uscita forzata. La rappresentazione in variabili di stato è più generale e tiene in conto anche parti che “vanno perse” quando si passa alla funzione di trasferimento. La semplificazione dei fattori suddetti, fa sì che il sistema non è completamente controllabile e osservabile, per cui i poli della funzione di trasferimento sono un sottoinsieme degli autovalori della matrice  $-\mathbf{A}$ .

<sup>42</sup>Il modulo della funzione di trasferimento presenta un picco di risonanza in  $\omega$ , che è una pulsazione ‘di modulazione’; per questo si fa riferimento ad un  $Q$  dei poli.

Diversamente, per la risonanza del modo nella cavità laser, si associa il fattore di merito (o di qualità) della cavità, che nella sua interpretazione classica, ha un significato energetico e lo si può pensare proporzionale a  $\tau_{p,GS}$ , in quanto è il rapporto tra l’energia immagazzinata nella cavità e la potenza dissipata; questo è valutato alla frequenza di risonanza del modo (è costante), ma lo si può definire, più in generale, in modo dipendente dalla frequenza ‘modale’. Ogni risonanza è caratterizzata, oltre che dalla sua pulsazione – determinata dalle dimensioni e forma della cavità, nonché dal materiale che la riempie (descritto con l’indice di rifrazione) – anche dal suo fattore di qualità, legato alla larghezza della curva di risposta del modo, rispetto alla ‘sua’ frequenza. Questo è il fattore di qualità intrinseco della cavità chiusa (totale riflessione agli specchi) e quindi, senza l’accoppiamento con la fibra. Il fattore di merito della cavità, con accoppiamento, è inferiore a quello intrinseco per via della potenza dissipata, oltre che nelle pareti (inclusi gli specchi) e nel dielettrico, anche sul carico. Infine, si osserva che, avendo dei QD che emettono nella cavità, quest’ultima ci ‘sintonizza’ sulla pulsazione di emissione dei QD (la pulsazione ‘modale’), ossia  $\omega_{GS}$ .

lineare che coinvolge gli elementi di matrice:  $a_{45}$ ,  $a_{55}$  (se siamo sotto soglia) e  $a_{65}$ ; le probabilità di occupazione che vi compaiono ci danno le densità. I termini suddetti nascono dall'espressione, nelle RE di partenza, del tasso di emissione stimolata, nel cui fattore di guadagno compaiono, come termini additivi, le probabilità di occupazione di elettroni e lacune (equazioni 2.39 e 2.40). I prodotti delle densità suddette rappresentano delle *non linearità* del *secondo ordine*.

Al fine di studiarne le proprietà, si scrive la funzione di secondo grado a guadagno unitario (quindi senza la costante moltiplicativa di guadagno statico) nella forma

$$H_2(j\omega) = \frac{1}{-\left(\frac{\omega}{\omega_R}\right)^2 + \frac{j}{Q}\frac{\omega}{\omega_R} + 1} \quad (2.63)$$

dove  $Q$  ed  $\omega_R$  sono relativi alla coppia di radici del polinomio di secondo grado a denominatore, i poli.<sup>43</sup> La funzione scritta è come la funzione di rete *passa-basso* di un circuito RLC. L'espressione dei due poli è data da

$$j\omega_{1,2} = -\omega_R \left( \frac{1}{2Q} \pm j\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \right) \quad (2.64)$$

con

$$\omega_R = |j\omega_{1,2}| \quad (2.65)$$

Evidentemente  $\omega_{1,2}(I_0)$ ,  $Q(I_0)$ ,  $\omega_R(I_0)$ . I poli risultano:

- reali, distinti e negativi se  $Q < 1/2$  (caso *sovrasmorzato*);
- reali e coincidenti ( $j\omega_{1,2} = -\omega_R$ ) se  $Q = 1/2$  (*smorzamento critico*);
- complessi coniugati a parte reale negativa se  $1/2 < Q < +\infty$  (caso *sottosmorzato*); per  $Q = +\infty$  si ha  $j\omega_{1,2} = \mp j\omega_R$  (poli immaginari coniugati).

Il fattore di merito è dato da

$$Q(I_0) = -\frac{|j\omega_{1,2}(I_0)|}{2 \operatorname{Re}\{j\omega_{1,2}(I_0)\}} \quad (2.66)$$

L'eventuale coppia di poli complessi coniugati è responsabile del *picco di risonanza* della risposta. Se, per determinati valori di corrente, avviene il

---

<sup>43</sup>Analogamente, si può fare lo stesso anche per un eventuale polinomio di secondo grado a numeratore, definendo un fattore di merito ed una pulsazione di risonanza per gli zeri.

fenomeno del *pole splitting* della frequenza di risonanza della coppia di poli complessi coniugati, cioè tutti i poli diventano reali, non si ha il picco. I casi relativi a questa tesi sono riportati nella figura 3.4 per il caso sopra soglia, e nelle figure B.12 e B.13 per il caso sotto soglia.<sup>44</sup> La curva di risposta inizia con 0 dB (trasmissione completa), per poi aumentare fino ad arrivare al picco, vicino alla pulsazione di risonanza, e dopo di essa diminuisce con pendenza di  $-40$  dB/decade; la pendenza è dovuta al polo del secondo ordine in quanto, per  $\omega \rightarrow +\infty$ , predomina il termine in  $\omega^2$  e si ha  $2 \times (-20$  dB/decade), dove  $-20$  dB/decade è l'attenuazione relativa ad un polo del primo ordine. I due asintoti, quello per  $\omega \rightarrow 0$  (pendenza nulla) e quello per  $\omega \rightarrow +\infty$ , si intersecano per  $\omega = \omega_R$ . La valutazione della funzione, per questo valore di pulsazione, porta a

$$H_2(j\omega_R) = -jQ \quad (2.67)$$

Questo ha permesso di calcolare il  $Q$  anche per la risposta IM numerica, valutandola dove la sua fase è  $-\pi/2$ . L'errore che si commette, oltre a quello numerico, è dovuto al fatto che la risposta IM numerica non è del secondo ordine, ma  $Q$  è calcolato a partire da essa. Il  $Q$  è responsabile di un massimo nell'intorno di  $\omega_R$ . Dallo studio del segno della derivata di  $H_2$  rispetto ad  $\omega$ , al variare di  $Q$ , si trova un massimo assoluto se  $Q > 1/\sqrt{2}$ ; il massimo, che si ha per  $\omega_{\max} = \omega_R \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ , vale  $\frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$ . Per alti valori di  $Q$  la

posizione del picco,  $\omega_{\max}$ , tende ad  $\omega_R$  (coincidono per  $Q = +\infty$ ) e il suo valore tende a  $Q^+$ . Per  $Q = 1/\sqrt{2}$  si ha una risposta *massimamente piatta* o risposta alla Butterworth. Se  $Q < 1/\sqrt{2}$  il massimo di  $|H_2(j\omega)|$  si ha per  $\omega = 0$ ; per  $Q \leq 1/\sqrt{2}$  il massimo vale 1. In conclusione si può affermare che, il comportamento dinamico del sistema di QD è simile a quello di un filtro passa-basso del secondo ordine con una risonanza smorzata, cioè con  $Q < +\infty$ .

L'interpretazione fenomenologica della pulsazione di risonanza (di rilassamento), sta nella mutua dipendenza fra la densità di fotoni emessi da GS e la densità di portatori; il rilassamento a cui si fa riferimento è quello relativo, nel dominio temporale, al valore delle densità di fotoni e portatori, che *rilassano* attorno al loro nuovo valore stazionario, in risposta ad una variazione della corrente (gradino), con oscillazioni smorzate corrispondenti alla pulsazione di risonanza. Qui non si calcolano gli andamenti temporali

---

<sup>44</sup>Esempi per modelli eccitonici con compressione di guadagno si trovano in [2] (stati SCH, WL, ES e GS) e in [12] (stati WL, ES e GS).

delle densità, ma andamenti tipici sono mostrati nella figura 5.6 di [13].<sup>45</sup> Si tratta, quindi, della risposta di *transiente* nel tempo al gradino di corrente. Infatti, in risposta ad un cambio brusco nel sistema – come un aumento istantaneo della corrente (per l'appunto il gradino), una riduzione del tempo di vita dei fotoni, ecc. – i valori delle densità di portatori e fotoni oscillano sinusoidalmente, in modo smorzato, prima di decadere eventualmente al nuovo valore stazionario. All'aumentare del gradino di corrente aumenta sia la pulsazione di risonanza che lo smorzamento; uno smorzamento maggiore fa sì che il decadimento al nuovo valore stazionario sia più veloce. Gli andamenti temporali delle densità si possono trovare, per il modello lineare, mediante antitrasformazione e considerando che, dalla funzione di trasferimento si ottiene una combinazione lineare di termini del tipo  $u(t)e^{j\omega_{polo}t}$ , che sono i *modi propri di oscillazione*; alla coppia di poli complessi coniugati corrisponde un termine cisoidale (sinusoide smorzata esponenzialmente), mentre ai poli reali corrispondono termini esponenziali. I modi si estinguono tanto più velocemente quanto più i poli a cui corrispondono sono lontani dall'origine del piano complesso, poiché diminuiscono le relative costanti di tempo.

Ha senso parlare di funzione di risposta armonica solo per sistemi stabili, in quanto, se il sistema non fosse stabile non si potrebbe individuare alcuna risposta permanente di regime. La *stabilità*, nel nostro caso, è verificata, poiché si ha per la coppia di poli complessi coniugati che

$$\mathbf{Re}\{j\omega_{polo.c.}\} = \mathbf{Re}\{j\omega_{polo.c.}^*\} < 0 \quad (2.68)$$

e per i poli reali che

$$j\omega_{polo.r.} < 0 \quad (2.69)$$

Questo fa sì che, i singoli modi propri, presenti nella risposta all'impulso, convergono per  $t \rightarrow +\infty$ .<sup>46 47</sup>

---

<sup>45</sup>Nell'analogo circuitale si tratta della naturale oscillazione di un circuito RLC, ossia la risposta risonante smorzata.

<sup>46</sup>Parti reali strettamente negative garantiscono la stabilità, qualunque sia la sua definizione, senza considerare altre condizioni. Si può dimostrare (paragrafo 5.8 di [14]) che la condizione  $|H(j\omega)| < +\infty$  è una condizione solo necessaria di stabilità, e come tale, ha interesse solo quando viene violata. Bisogna anche considerare che, gioca un ruolo chiave anche la variazione di fase con la pulsazione, in quanto le rotazioni di fase possono cambiare il segno ad una *reazione* (il guadagno d'anello), da negativo (sistema stabile) a positivo (sistema instabile); la reazione per effetto della dipendenza dalla pulsazione, potrebbe portare ad effetti cumulativi instabili.

<sup>47</sup>Nel caso interessino solo le proprietà di stabilità, si può evitare il calcolo delle radici. Alcune informazioni sulla stabilità, infatti, si possono ricavare anche dai segni dei coefficienti del polinomio a denominatore della funzione di trasferimento, scritto nella forma *monica*, cioè con coefficiente direttore pari ad 1:  $(j\omega)^{\text{grado}} + \sum_{i=1}^{\text{grado}} \text{coefficiente}_i (j\omega)^{\text{grado}-i}$ .

La *risposta di modulazione* di intensità di piccolo segnale, o risposta IM (Intensity Modulation), in dB, viene riportata come  $10 \log \left| \frac{H(j\omega)}{H(j\omega)|_{\omega=0}} \right|^2$ , anche se esprime rapporti di potenze; in letteratura è chiamata anche trasmissione di piccolo segnale [3]. Nella figura 2.7 è confrontata la risposta IM calcolata dalla 2.60, indicato come *risultato analitico* (curva rossa), con quella calcolata tramite l'algoritmo numerico della FFT (Fast Fourier Transform), indicato come *risultato numerico* (curva blu) <sup>48</sup>.

La FFT è calcolata per la soluzione numerica delle RE, ottenuta con il solutore ode23s, con l'iniezione del gradino di corrente (per avere una risposta a regime). La risposta così ottenuta, dal sistema di RE non lineari, è di piccolo segnale poiché l'ampiezza del gradino è la stessa usata come forzante nel sistema lineare, cioè 1 mA.<sup>49</sup> Come nel caso analitico, si può ottenere la risposta IM sia dei fotoni GS, che dei portatori, considerando nel vettore soluzione, il corrispondente valore di densità.<sup>50</sup>

Si possono verificare altre proprietà della funzione di trasferimento:

- $\text{Re}\{H(j\omega)\}$  è una funzione pari di  $\omega$ ;
- $\text{Im}\{H(j\omega)\}$  è una funzione dispari di  $\omega$ .

Queste condizioni sono necessarie e sufficienti affinché il *sistema* sia *reale* (risposta all'impulso reale); le suddette proprietà sono una conseguen-

---

Se il grado non supera 2, condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema sia stabile è che tutti i coefficienti siano positivi. Questa condizione è solo necessaria quando il grado è superiore, cioè se almeno uno dei coefficienti è minore o uguale a zero, allora il sistema è instabile; se la condizione non è violata si può usare il *criterio di Routh-Hurwitz*, per determinare il numero di radici a parte reale positiva e negativa a partire dai coefficienti del polinomio (il criterio di Cartesio da meno informazioni).

<sup>48</sup>Il risultato numerico è stato ottenuto con una *frequenza massima di simulazione* di 150 GHz (tranne la curva relativa a  $5I_{th}$  che, per motivi 'storici', è stata ottenuta con 60 GHz); questa scelta influisce, perlopiù per alte frequenze di modulazione ed in modo poco significativo, sul risultato.

<sup>49</sup>Se si usano ampiezze maggiori per il gradino di corrente, diminuisce l'accordo tra i due modelli, per il maggiore errore di quello lineare. Per *ampio segnale*, infatti, si deve necessariamente ricorrere al modello non lineare (modello numerico); si è in questo caso, oltre che per l'analisi statica (punti in polarizzazione), anche quando le deviazioni dallo stato stazionario sono comparabili con i valori stazionari stessi, come quando si vuole ottenere il *diagramma ad occhio* del laser; questi, infatti, è ottenuto come risultato di una *modulazione diretta* di ampio segnale. Quest'ultimo caso non è sviluppato in questa tesi. Si aggiunge che, l'importanza di questo tipo di analisi, sta nel fatto che, nei sistemi di comunicazione, la probabilità di errore è dovuta, oltre che al rumore, all'*interferenza intersimbolica* associata all'occhio (diminuisce all'aumentare dell'apertura dell'occhio). Alcuni risultati si possono trovare in [12], [2], [9], [3] e [7].

<sup>50</sup>La risposta IM numerica, per un valore di corrente che non supera i 100 mA, è affetta da un errore considerato accettabile [15].

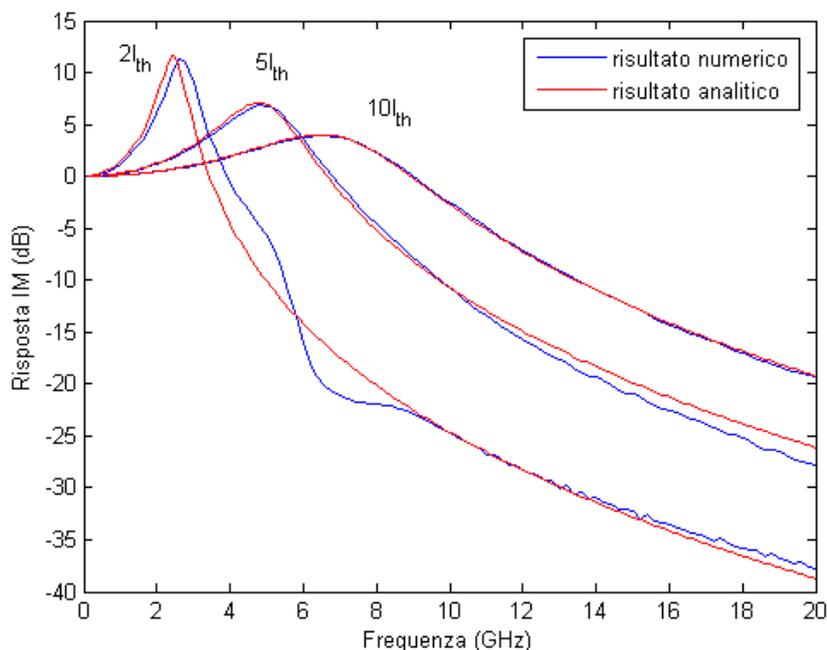


Figura 2.7: Emissione da GS: risposta IM vs bias (set Arakawa).

za della definizione formale della trasformata di Fourier per segnali reali (paragrafo 4.1.4 di [14]), da cui si hanno anche le seguenti:

- $|H(j\omega)| = \sqrt{[\mathbf{Re}\{H(j\omega)\}]^2 + [\mathbf{Im}\{H(j\omega)\}]^2}$  è una funzione pari di  $\omega$ ;
- $\arg[H(j\omega)] = \arctan \frac{\mathbf{Im}\{H(j\omega)\}}{\mathbf{Re}\{H(j\omega)\}}$  è una funzione dispari di  $\omega$ .

Le proprietà del modulo e della fase della funzione di risposta armonica permettono, per un sistema LTI reale, di trovare che l'uscita è *isomorfa* con l'ingresso (paragrafo 5.7 di [14]), cambiano cioè, solo l'ampiezza e la fase dell'uscita rispetto all'ingresso; questo risultato è stato già usato per formulare il modello lineare e suggerisce anche una determinazione sperimentale, della funzione di trasferimento, sulla base di misure di ampiezza e di fase. Un'altra conseguenza è che, la funzione a valori complessi  $H(j\omega)$  è *hermitiana*, cioè per  $-\infty < \omega < +\infty$ , si ha che  $H(-j\omega) = H^*(j\omega)$ , in quanto trasformata di una funzione reale (la risposta all'impulso). Di questa proprietà gode una *funzione analitica*<sup>51</sup> reale per valori reali della variabile; è così per  $H(j\omega)$ , poi-

<sup>51</sup>Le funzioni analitiche sono funzioni localmente espresse da una serie di potenze convergente, cioè, la funzione coincide col suo sviluppo in serie di Taylor.

ché i suoi coefficienti sono reali.<sup>52</sup> La funzione  $H(j\omega)$ , infatti, è una funzione analitica complessa in quanto:

- tutte le funzioni polinomiali sono anche funzioni analitiche;<sup>53</sup>
- il reciproco di una funzione analitica, che non si annulla mai, è analitico;
- il prodotto di funzioni analitiche è una funzione analitica.

A questo aspetto è legata anche la causalità temporale che si traduce, nel dominio armonico, nel mettere in relazione la parte reale e la parte immaginaria della funzione di trasferimento tramite le *relazioni di dispersione* di Kramers-Kronig, in quanto, la causalità implica che venga soddisfatta la condizione di analiticità, e viceversa. Dette relazioni, infatti, legano la parte reale e la parte immaginaria di una funzione analitica complessa.

Le proprietà generali della funzione  $H(j\omega)$ , messe in evidenza in relazione alla natura della sua espressione matematica, valgono per tutti i sistemi:

- lineari;
- tempo invarianti;
- reali;
- a parametri concentrati;
- causali;
- senza ritardo ingresso-uscita.

## 2.5 Emissione da ES

Il modello è quello non eccitonico con termalizzazione lacune (modello a macro-stato lacune QD+WL). Nel caso di emissione di fotoni alla lunghezza d'onda di ES, si procede in maniera analoga a quanto fatto per l'emissione di fotoni alla lunghezza d'onda di GS; non si ripetono le considerazioni generali già esposte, poiché valevoli in entrambi i casi.

---

<sup>52</sup>Il risultato numerico, ottenuto per un intervallo discreto di valori di  $\omega$  simmetrico rispetto all'origine, conferma tutte queste proprietà, inclusa la *simmetria* rispetto all'asse reale di  $H(j\omega)$ , in cui  $\omega$  è la variabile implicita. Non vengono qui mostrati i risultati perché, ai fini delle caratteristiche dinamiche studiate non si considerano valori negativi di pulsazione.

<sup>53</sup>Nel caso dei polinomi, l'espansione in serie di potenze contiene un numero finito di termini non nulli.

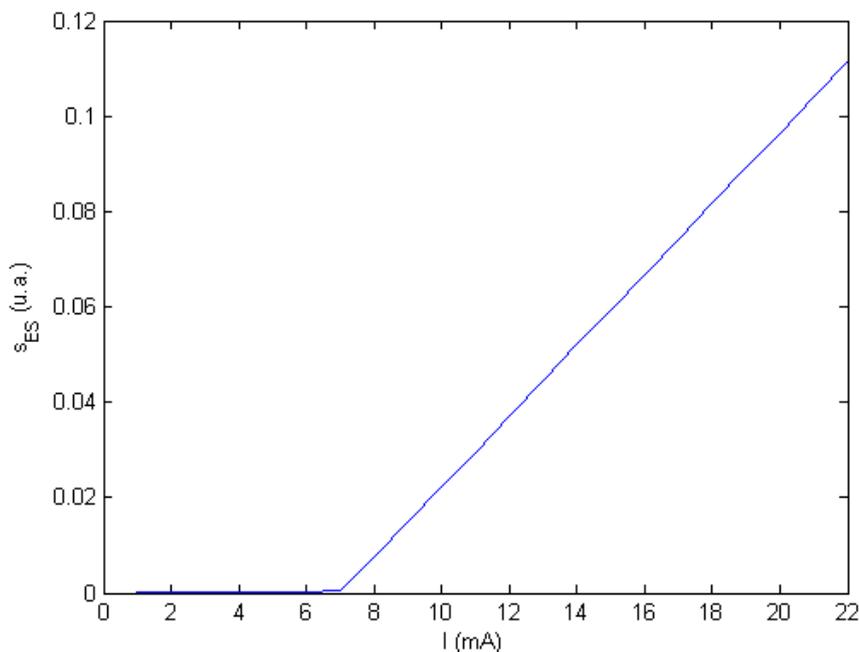


Figura 2.8: Andamento della densità normalizzata di fotoni ES rispetto alla corrente di bias (set Arakawa).

Lo *stato stazionario* è ottenuto risolvendo il sistema delle RE mediante il solutore numerico ode23s, implementato in ambiente Matlab® (paragrafo A.2). Il parametro indipendente del sistema è la corrente iniettata, costante nel tempo per avere un regime stazionario.

La potenza ottica emessa è proporzionale alla densità di fotoni normalizzata,  $s_{ES}$ , il cui andamento rispetto alla corrente, è mostrato in figura 2.8. La *corrente di soglia*,  $I_{th}$ , per l'emissione stimolata relativa allo stato ES, è approssimativamente pari a 7 mA. La figura 2.9 mostra l'andamento delle densità normalizzate di portatori rispetto alla corrente; la figura 2.10 mostra la probabilità di occupazione degli elettroni negli stati ES e GS rispetto alla corrente. Le curve delle densità di portatori (e conseguentemente quelle relative alle probabilità di occupazione) presentano un 'ginocchio' in prossimità del valore di  $I_{th}$ .

Il modello analitico per piccolo segnale, il modello lineare, relativo all'emissione solo da ES, è ricavato dalle RE, senza l'equazione per  $s_{GS}$ . Il sistema considerato è quindi  $7 \times 7$ . Come per l'emissione da GS, i calcoli portano alle RE differenziate espresse dall'equazione matriciale 2.45 dove, in questo

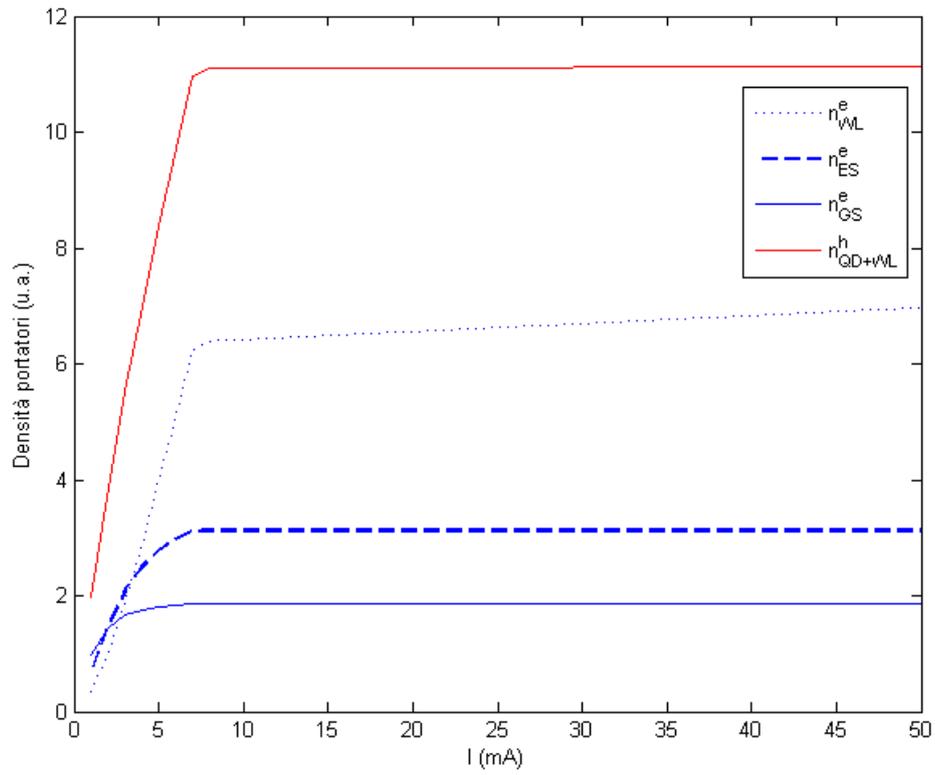


Figura 2.9: Emissione da ES: andamento delle densità normalizzate di elettroni (curve blu) e lacune (curva rossa) rispetto alla corrente di bias (set Arakawa).

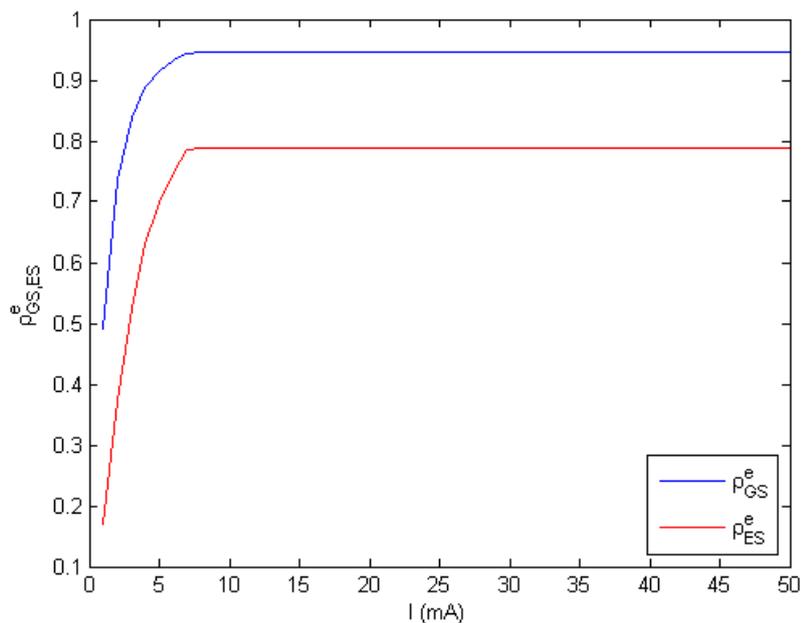


Figura 2.10: Probabilità di occupazione degli elettroni negli stati GS ed ES rispetto alla corrente di bias (set Arakawa).

caso, il vettore delle densità normalizzate è dato da

$$\mathbf{X}_t = \begin{bmatrix} n_{\text{SCH}}^e(t) \\ n_{\text{WL}}^e(t) \\ n_{\text{ES}}^e(t) \\ n_{\text{GS}}^e(t) \\ s_{\text{ES}}(t) \\ n_{\text{QD+WL}}^h(t) \\ n_{\text{SCH}}^h(t) \end{bmatrix}$$

Il vettore forzante,  $\mathbf{B}_t$ , è lo stesso del caso GS, mentre la matrice sparsa  $\mathbf{A}$  è data da

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & 0 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{53} & 0 & a_{55} & a_{56} & 0 \\ 0 & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} & a_{67} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{76} & a_{77} \end{bmatrix}$$

Gli elementi non identicamente nulli dipendono dai seguenti valori stazionari:

- $s_{ES}$ ;
- densità di elettroni;
- $E_f^h$  (da cui dipende, per la 2.34,  $\rho_{ES_1}^h$ ).

Quindi, questi elementi di matrice dipendono dalla corrente di polarizzazione. La loro espressione risulta essere, in base ai calcoli effettuati, la seguente:<sup>54</sup>

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \frac{1}{\tau_s^e} \\
 a_{12} &= -\frac{1}{\tau_{esc,WL}^e} \\
 a_{21} &= -\frac{1}{\tau_s^e} \\
 a_{22} &= \frac{1}{\tau_{esc,WL}^e} + \frac{G_n(1 - \rho_{ES}^e)}{\tau_{c,ES}^e} + \frac{1}{\tau_{nr,WL}^e} + \frac{G_n(1 - \rho_{GS}^e)}{\tau_{c,GS}^e} \\
 a_{23} &= -\frac{1}{\tau_{esc,ES}^e} - \frac{n_{WL}^e}{\tau_{c,ES}^e \mu_{ES}^e} \\
 a_{24} &= -\frac{n_{WL}^e}{\tau_{c,GS}^e \mu_{GS}^e} - \frac{1}{\tau_{esc,GS \rightarrow WL}^e} \\
 a_{32} &= -\frac{G_n(1 - \rho_{ES}^e)}{\tau_{c,ES}^e} \\
 a_{33} &= \frac{n_{WL}^e}{\tau_{c,ES}^e \mu_{ES}^e} + \frac{1}{\tau_{esc,ES}^e} + \frac{1 - \rho_{GS}^e}{\tau_{r,GS}^e} + \frac{n_{GS}^e}{\tau_{esc,GS}^e G_n \mu_{ES}^e} + \frac{1}{\tau_{nr,ES}^e} + \frac{s_{ES}}{\tau_{gES} \mu_{ES}^e} + \frac{\rho_{ES_1}^h}{\tau_{spES}} \\
 a_{34} &= -\frac{n_{ES}^e}{\tau_{r,GS}^e G_n \mu_{GS}^e} - \frac{1 - \rho_{ES}^e}{\tau_{esc,GS}^e} \\
 a_{35} &= \frac{G_n(\rho_{ES}^e + \rho_{ES_1}^h - 1)}{\tau_{gES}} \\
 a_{36} &= \frac{G_n s_{ES}}{\tau_{gES}} \left( \frac{\partial \rho_{ES}^e}{\partial n_{QD+WL}^h} + \frac{\partial \rho_{ES_1}^h}{\partial n_{QD+WL}^h} \right) \\
 a_{42} &= -\frac{G_n(1 - \rho_{GS}^e)}{\tau_{c,GS}^e}
 \end{aligned}$$

---

<sup>54</sup>Anche se analiticamente si considera la *cattura diretta* degli elettroni dallo stato WL allo stato GS, nelle simulazioni si è sempre posto  $\tau_{c,GS}^e = 10^4$  ps (stesso valore usato nel modello numerico); i tassi conseguenti sono piccoli (la cattura diretta è, in questo caso, un evento poco probabile).

$$\begin{aligned}
 a_{43} &= -\frac{1 - \rho_{\text{GS}}^e}{\tau_{\text{r,GS}}^e} - \frac{n_{\text{GS}}^e}{\tau_{\text{esc,GS}}^e G_{\text{n}} \mu_{\text{ES}}^e} \\
 a_{44} &= \frac{n_{\text{ES}}^e}{\tau_{\text{r,GS}}^e G_{\text{n}} \mu_{\text{GS}}^e} + \frac{1 - \rho_{\text{ES}}^e}{\tau_{\text{esc,GS}}^e} + \frac{1}{\tau_{\text{nr,GS}}^e} + \frac{n_{\text{WL}}^e}{\tau_{\text{c,GS}}^e \mu_{\text{GS}}^e} + \frac{1}{\tau_{\text{esc,GS} \rightarrow \text{WL}}^e} \\
 a_{53} &= -\frac{\beta_{\text{sp}} \rho_{\text{ES}_1}^h}{\tau_{\text{sp ES}}} - \frac{s_{\text{ES}}}{\tau_{\text{g ES}} \mu_{\text{ES}}^e} \\
 a_{55} &= \begin{cases} -\frac{G_{\text{n}}(\rho_{\text{ES}}^e + \rho_{\text{ES}_1}^h - 1)}{\tau_{\text{g ES}}} + \frac{1}{\tau_{\text{p,ES}}} & \text{per } I \leq I_{\text{th}} \\ 0 & \text{per } I > I_{\text{th}} \end{cases} \\
 a_{56} &= -\frac{G_{\text{n}} s_{\text{ES}}}{\tau_{\text{g ES}}} \frac{\partial \rho_{\text{ES}_1}^h}{\partial n_{\text{QD+WL}}^h} \\
 a_{62} &= \frac{1}{\tau_{\text{nr,WL}}^e} \\
 a_{63} &= \frac{s_{\text{ES}}}{\tau_{\text{g ES}} \mu_{\text{ES}}^e} + \frac{\rho_{\text{ES}_1}^h}{\tau_{\text{sp ES}}} + \frac{1}{\tau_{\text{nr,ES}}^e} \\
 a_{64} &= \frac{1}{\tau_{\text{nr,GS}}^e} \\
 a_{65} &= \frac{G_{\text{n}}(\rho_{\text{ES}}^e + \rho_{\text{ES}_1}^h - 1)}{\tau_{\text{g ES}}} \\
 a_{66} &= \frac{1}{\tau_{\text{esc,QD+WL}}^h} + \frac{G_{\text{n}} s_{\text{ES}}}{\tau_{\text{g ES}}} \frac{\partial \rho_{\text{ES}_1}^h}{\partial n_{\text{QD+WL}}^h} \\
 a_{67} &= -\frac{1}{\tau_{\text{s}}^h} \\
 a_{76} &= -\frac{1}{\tau_{\text{esc,QD+WL}}^h} \\
 a_{77} &= \frac{1}{\tau_{\text{s}}^h}
 \end{aligned}$$

Si assume, in  $a_{36}$ , che

$$\frac{\partial \rho_{\text{ES}}^e}{\partial n_{\text{QD+WL}}^h} = 0 \tag{2.70}$$

Inoltre

$$\frac{\partial \rho_{\text{ES}_1}^h}{\partial n_{\text{QD+WL}}^h} = \frac{\partial \rho_{\text{ES}_1}^h}{\partial E_{\text{f}}^h} \frac{\partial E_{\text{f}}^h}{\partial n_{\text{QD+WL}}^h} = \frac{\partial \rho_{\text{ES}_1}^h}{\partial E_{\text{f}}^h} \left( \frac{\partial n_{\text{QD+WL}}^h}{\partial E_{\text{f}}^h} \right)^{-1} \tag{2.71}$$

Considerando i calcoli fatti per il caso GS, sostituendo la 2.48 (con  $k = \text{ES}$ ) e la 2.50 nella 2.71, si ottiene (semplificando  $k_B T$ )

$$\frac{\partial \rho_{\text{ES}_1}^h}{\partial n_{\text{QD+WL}}^h} = \frac{e^{(E_{\text{ES}_1}^h - E_f^h)/k_B T}}{(1 + e^{(E_{\text{ES}_1}^h - E_f^h)/k_B T})^2} \left[ \frac{\delta_{\text{WL}}^h e^{(E_f^h - E_{\text{WL}}^h)/k_B T}}{1 + e^{(E_f^h - E_{\text{WL}}^h)/k_B T}} + \sum_{k=\text{GS,ES}_1,\dots,4} \mu_k^h \frac{e^{(E_k^h - E_f^h)/k_B T}}{(1 + e^{(E_k^h - E_f^h)/k_B T})^2} \right]^{-1} \quad (2.72)$$

Questa espressione va sostituita nei termini  $a_{36}$ ,  $a_{56}$  e  $a_{66}$ .

Per l'espressione del termine  $a_{55}$  valgono le stesse considerazioni fatte per il caso di emissione da GS, purché si consideri  $g_{\text{ES}}$ . Si osserva inoltre che, sopra soglia per il set Arakawa, si ha

$$\frac{G_n(\rho_{\text{ES}}^e + \rho_{\text{ES}_1}^h - 1)}{\tau_{g,\text{ES}}} \approx \frac{1}{\tau_{p,\text{ES}}} \quad (2.73)$$

da cui

$$a_{35} = a_{65} \approx \frac{1}{\tau_{p,\text{ES}}}$$

I calcoli fatti per il caso GS, espressi in notazione matriciale, valgono anche in questo caso, ma con

$$\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} n_{\text{SCH},0}^e \\ n_{\text{WL},0}^e \\ n_{\text{ES},0}^e \\ n_{\text{GS},0}^e \\ s_{\text{ES},0} \\ n_{\text{QD+WL},0}^h \\ n_{\text{SCH},0}^h \end{bmatrix} \quad \mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} n_{\text{SCH},1}^e \\ n_{\text{WL},1}^e \\ n_{\text{ES},1}^e \\ n_{\text{GS},1}^e \\ s_{\text{ES},1} \\ n_{\text{QD+WL},1}^h \\ n_{\text{SCH},1}^h \end{bmatrix}$$

Il vettore  $\mathbf{B}_1$  è lo stesso del caso GS (dato che lo è anche  $\mathbf{B}_t$ ). Si arriva al sistema lineare 2.58, ma in questo caso la matrice  $\mathbf{A}_\omega$ , espressa in componenti, risulta pari a

$$\mathbf{A}_\omega = \begin{bmatrix} a_{11} + j\omega & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} + j\omega & a_{23} & a_{24} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} + j\omega & a_{34} & a_{35} & a_{36} & 0 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} + j\omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{53} & 0 & a_{55} + j\omega & a_{56} & 0 \\ 0 & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} + j\omega & a_{67} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{76} & a_{77} + j\omega \end{bmatrix}$$

Dalla soluzione del sistema lineare ottenuto si ricava, nello stesso modo del caso GS, la funzione di risposta armonica per i portatori e i fotoni; in

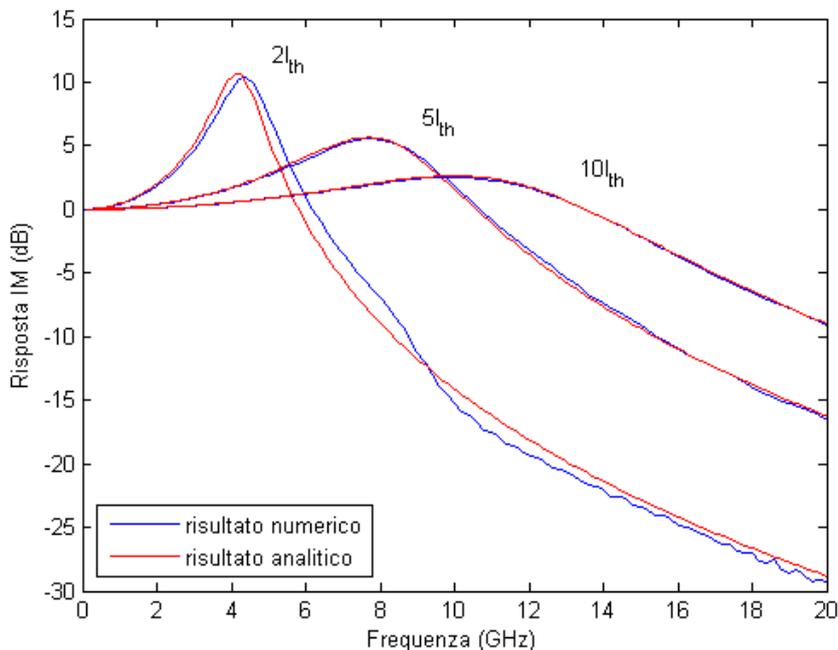


Figura 2.11: Emissione da ES: risposta IM vs bias (set Arakawa).

quest'ultimo caso si ha  $\mathbf{X}_1[5] = s_{ES,1}$ . Per la funzione di risposta armonica vale quanto già esposto per il caso di emissione da GS; l'espressione analitica è la stessa, a parte il differente valore dei coefficienti dei polinomi in  $j\omega$ . Nella figura 2.11 è confrontata la risposta IM calcolata dalla 2.60, indicato come *risultato analitico* (curva rossa), con quella calcolata tramite l'algoritmo numerico della FFT, indicato come *risultato numerico* (curva blu)<sup>55</sup>.

## 2.6 Emissione simultanea da GS ed ES

Il modello numerico è un modello non eccitonico con termalizzazione lacune (modello a macro-stato lacune QD+WL) e descrive l'emissione contemporanea da GS ed ES [1]. Quando i risultati sono confrontati con i modelli lineari per l'emissione solo da GS o solo da ES, si intende che, nel modello numerico, è sotto soglia, rispettivamente, l'emissione da ES e l'emissione da GS. A tal fine, si imposta un tempo di vita per i fotoni sufficientemente piccolo affinché *non* si raggiunga la condizione di soglia per nessun valore della

<sup>55</sup>Il risultato numerico è stato ottenuto con una *frequenza massima di simulazione* di 150 GHz; questa scelta influisce, perlopiù per alte frequenze di modulazione ed in modo poco significativo, sul risultato.

corrente iniettata (i valori usati per i tempi di vita dei fotoni sono indicati nel paragrafo 3.3).

Il sistema di RE considerate sono quelle del modello numerico, ma descriventi solo i dot laseranti. Partendo da queste, si può considerare anche un modello analitico per piccolo segnale, il modello lineare, che contempli l'emissione simultanea di fotoni alle lunghezze d'onda corrispondenti all'energia sia dello stato GS che dello stato ES. Si procede in maniera analoga a quanto fatto per l'emissione solo da GS e solo da ES – modelli con una sola equazione per i fotoni, ossia sistemi  $7 \times 7$  – ottenendo un sistema  $8 \times 8$  (l'ordine è pari al numero di RE considerate) *più generale* dei due precedenti. Non si ripetono le considerazioni generali già esposte e valevoli anche nel caso in esame.

Lo *stato stazionario* è ottenuto risolvendo il sistema delle RE mediante il solutore numerico ode23s, implementato in ambiente Matlab<sup>®</sup> (paragrafo A.2). Il parametro indipendente del sistema è la corrente iniettata (la corrente di bias), costante nel tempo per avere un regime stazionario.

Il set di parametri utilizzato è quello Arakawa (valori nelle tabelle 3.1 e 3.2), ma con  $\tau_{p,GS} = \tau_{p,ES} = 12,936$  ps; questi tempi soddisfano la condizione di soglia, per l'emissione di fotoni, sia da GS che da ES. Infatti, si sta considerando il caso in cui, aumentando la corrente di bias, si ha prima l'emissione di fotoni GS e poi *anche* l'emissione di fotoni ES.

La *potenza ottica* totale emessa è proporzionale alla somma delle densità di fotoni normalizzate,  $s_{GS}$  e  $s_{ES}$ , il cui andamento rispetto alla corrente di bias, è mostrato nelle figure 2.12 e 2.13. Si osserva che, la somma delle suddette densità è lineare rispetto alla corrente di bias; infatti, con questi parametri, dalla soglia di laseramento ES, la pendenza della curva relativa ai fotoni ES è la stessa di quella relativa ai fotoni GS prima della suddetta soglia, in quanto la potenza GS rimane pressoché bloccata al valore che ha in corrispondenza di  $I_{th,ES}$  (le potenze GS ed ES si uguagliano a circa 1000 mA). Questo è in accordo con il principio di *conservazione*, per una data corrente di bias, della potenza totale. Inoltre quest'ultima, per ogni corrente di bias, è la stessa *indipendentemente* dal valore del parametro  $\tau_s^h$ , ossia il tempo di trasporto (o di diffusione) delle lacune da SCH a WL. Le singole potenze GS ed ES, invece, dipendono da tale parametro, che ne influenza la pendenza. Inoltre, all'aumentare di  $\tau_s^h$  si abbassa  $I_{th,ES}$  ed aumenta, a parità di corrente di bias, la potenza ES (a scapito di quella GS). Lo studio rispetto al parametro  $\tau_s^h$  è riportato in [1].

Le correnti di soglia per l'emissione da GS ( $I_{th,GS}$ ) ed ES ( $I_{th,ES}$ ) sono, rispettivamente, 3 mA (figura 2.12) e 500 mA (figura 2.13). Il valore più basso di  $I_{th,GS}$ , rispetto al valore trovato nel caso di emissione solo da GS (4 mA), è in accordo con un valore di  $\tau_{p,GS}$  più alto di quello utilizzato per l'emissione

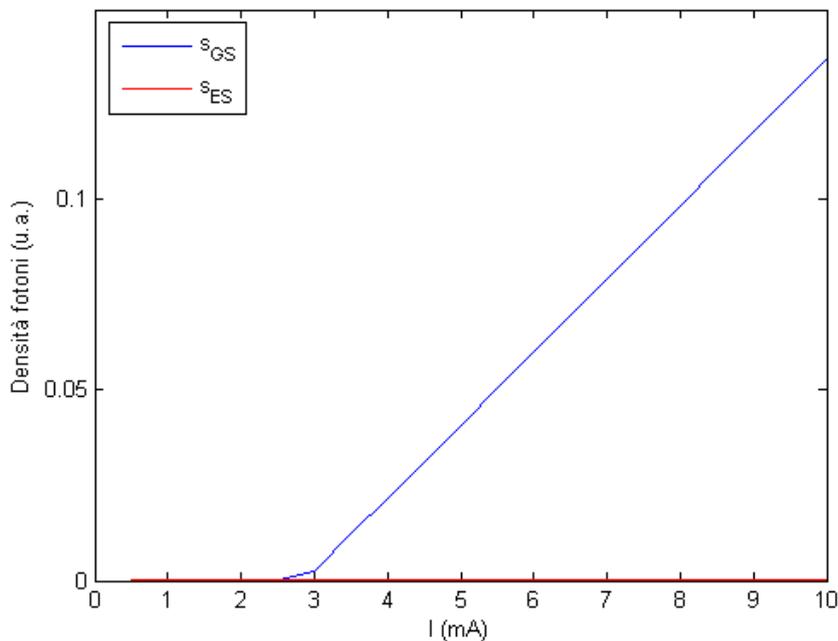


Figura 2.12: Andamento della densità normalizzata di fotoni GS rispetto alla corrente di bias (set Arakawa); per le correnti considerate l'emissione di fotoni ES è solo quella spontanea.

solo da GS (5 ps); il valore degli altri parametri è lo stesso. Si ricorda che, i valori stazionari sono ottenuti dal modello numerico, quindi, il sistema di RE considerato è sempre lo stesso per tutti i casi trattati. La figura 2.14 mostra l'andamento delle densità normalizzate di portatori rispetto alla corrente di bias. I valori relativi delle densità elettroniche sono in accordo, così come nei casi di sola emissione da GS o da ES, con l'aver assunto un numero di portatori nello stato WL che può essere infinito, oltre che  $\mu_{ES}^e > \mu_{GS}^e$ . La figura 2.15 mostra la probabilità di occupazione degli elettroni, negli stati ES e GS, rispetto alla corrente di bias. Le curve delle densità di portatori (e conseguentemente quelle relative alle probabilità di occupazione) presentano *due* 'ginocchi' in prossimità dei valori di  $I_{th,GS}$  e di  $I_{th,ES}$  (il primo ginocchio è poco visibile per ragioni di scala, ma è come quello mostrato nel caso di emissione solo da GS).

Come per l'emissione solo da GS e solo da ES, i calcoli portano alle RE differenziate espresse dall'equazione matriciale 2.45 dove, in questo caso, il

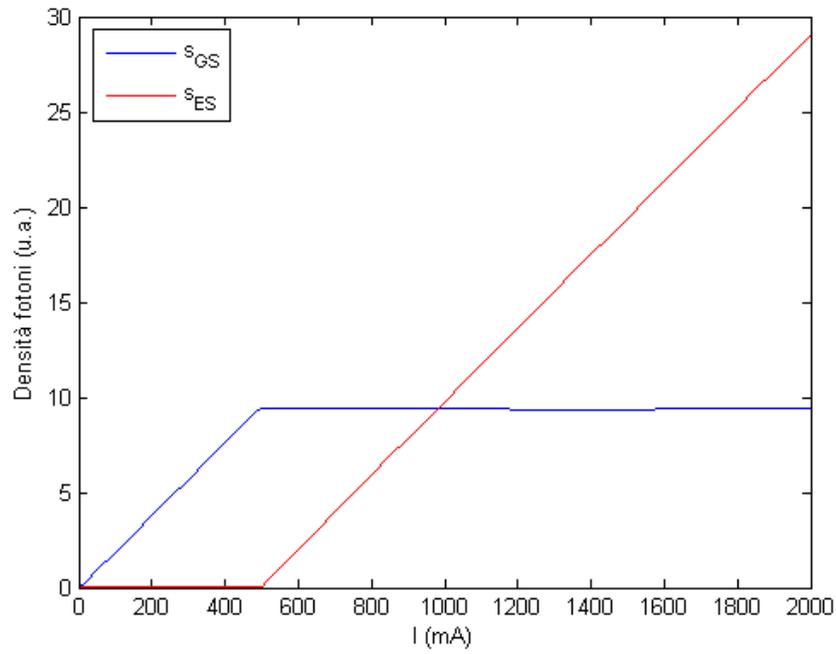


Figura 2.13: Andamento delle densità normalizzate di fotoni GS ed ES rispetto alla corrente di bias (set Arakawa).

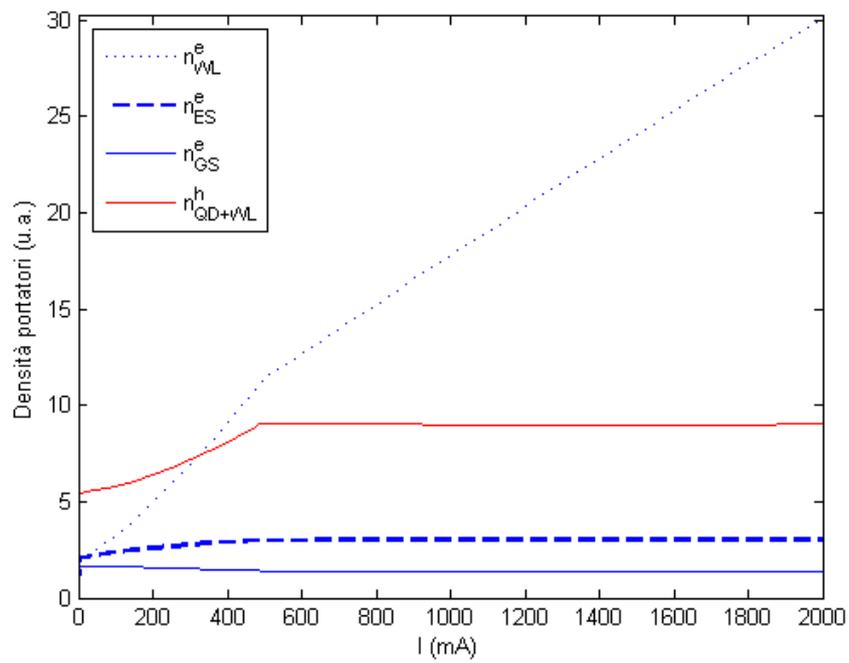


Figura 2.14: Emissione simultanea da GS ed ES: andamento delle densità normalizzate di elettroni (curve blu) e lacune (curva rossa) rispetto alla corrente di bias (set Arakawa).

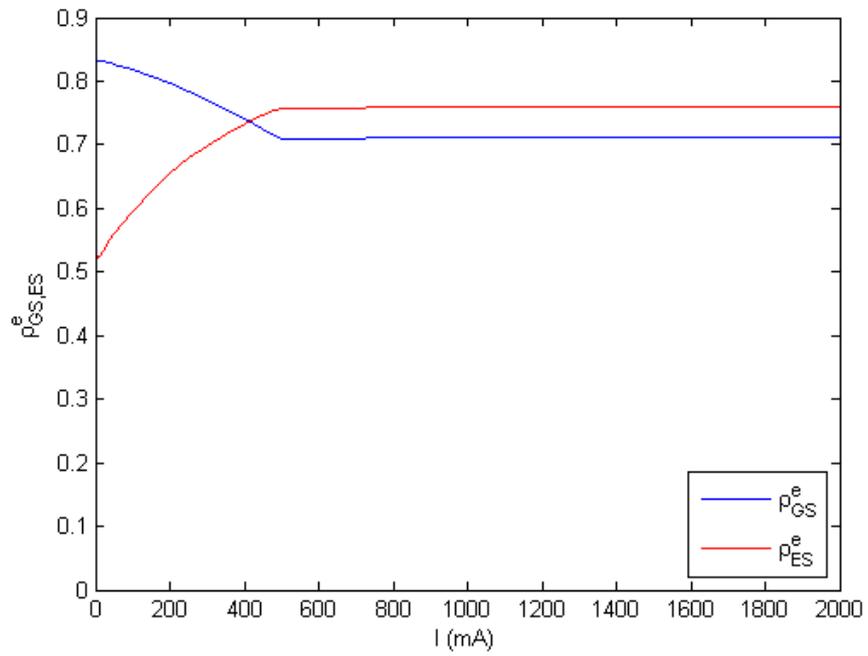


Figura 2.15: Probabilità di occupazione degli elettroni negli stati GS ed ES rispetto alla corrente di bias (set Arakawa).

vettore delle densità normalizzate è dato da

$$\mathbf{X}_t = \begin{bmatrix} n_{\text{SCH}}^e(t) \\ n_{\text{WL}}^e(t) \\ n_{\text{ES}}^e(t) \\ n_{\text{GS}}^e(t) \\ s_{\text{ES}}(t) \\ s_{\text{GS}}(t) \\ n_{\text{QD+WL}}^h(t) \\ n_{\text{SCH}}^h(t) \end{bmatrix}$$

il vettore forzante da

$$\mathbf{B}_t = \frac{1}{\tau_{\text{inj}}} \begin{bmatrix} I(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I(t) \end{bmatrix}$$

e la matrice sparsa  $\mathbf{A}$  da

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & 0 & a_{37} & 0 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} & 0 & a_{46} & a_{47} & 0 \\ 0 & 0 & a_{53} & 0 & a_{55} & 0 & a_{57} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{64} & 0 & a_{66} & a_{67} & 0 \\ 0 & a_{72} & a_{73} & a_{74} & a_{75} & a_{76} & a_{77} & a_{78} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{87} & a_{88} \end{bmatrix}$$

Gli elementi non identicamente nulli dipendono dai seguenti valori stazionari:

- $s_{\text{GS,ES}}$ ;
- densità di elettroni;
- $E_f^h$  (da cui dipende, per la 2.34,  $\rho_{\text{GS,ES}_1}^h$ ).

Quindi, questi elementi di matrice dipendono dalla corrente di polarizzazione. La loro espressione risulta essere, in base ai calcoli effettuati, la seguente:<sup>56</sup>

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \frac{1}{\tau_s^e} \\
 a_{12} &= -\frac{1}{\tau_{\text{esc,WL}}^e} \\
 a_{21} &= -\frac{1}{\tau_s^e} \\
 a_{22} &= \frac{1}{\tau_{\text{esc,WL}}^e} + \frac{G_n(1 - \rho_{\text{ES}}^e)}{\tau_{\text{c,ES}}^e} + \frac{1}{\tau_{\text{nr,WL}}^e} + \frac{G_n(1 - \rho_{\text{GS}}^e)}{\tau_{\text{c,GS}}^e} \\
 a_{23} &= -\frac{1}{\tau_{\text{esc,ES}}^e} - \frac{n_{\text{WL}}^e}{\tau_{\text{c,ES}}^e \mu_{\text{ES}}^e} \\
 a_{24} &= -\frac{n_{\text{WL}}^e}{\tau_{\text{c,GS}}^e \mu_{\text{GS}}^e} - \frac{1}{\tau_{\text{esc,GS} \rightarrow \text{WL}}^e} \\
 a_{32} &= -\frac{G_n(1 - \rho_{\text{ES}}^e)}{\tau_{\text{c,ES}}^e} \\
 a_{33} &= \frac{n_{\text{WL}}^e}{\tau_{\text{c,ES}}^e \mu_{\text{ES}}^e} + \frac{1}{\tau_{\text{esc,ES}}^e} + \frac{1 - \rho_{\text{GS}}^e}{\tau_{\text{r,GS}}^e} + \frac{n_{\text{GS}}^e}{\tau_{\text{esc,GS}}^e G_n \mu_{\text{ES}}^e} + \frac{1}{\tau_{\text{nr,ES}}^e} + \frac{s_{\text{ES}}}{\tau_{\text{gES}} \mu_{\text{ES}}^e} + \frac{\rho_{\text{ES}_1}^h}{\tau_{\text{spES}}} \\
 a_{34} &= -\frac{n_{\text{ES}}^e}{\tau_{\text{r,GS}}^e G_n \mu_{\text{GS}}^e} - \frac{1 - \rho_{\text{ES}}^e}{\tau_{\text{esc,GS}}^e} \\
 a_{35} &= \frac{G_n(\rho_{\text{ES}}^e + \rho_{\text{ES}_1}^h - 1)}{\tau_{\text{gES}}} \\
 a_{37} &= \frac{G_n s_{\text{ES}}}{\tau_{\text{gES}}} \left( \frac{\partial \rho_{\text{ES}}^e}{\partial n_{\text{QD+WL}}^h} + \frac{\partial \rho_{\text{ES}_1}^h}{\partial n_{\text{QD+WL}}^h} \right) \\
 a_{42} &= -\frac{G_n(1 - \rho_{\text{GS}}^e)}{\tau_{\text{c,GS}}^e} \\
 a_{43} &= -\frac{1 - \rho_{\text{GS}}^e}{\tau_{\text{r,GS}}^e} - \frac{n_{\text{GS}}^e}{\tau_{\text{esc,GS}}^e G_n \mu_{\text{ES}}^e} \\
 a_{44} &= \frac{n_{\text{ES}}^e}{\tau_{\text{r,GS}}^e G_n \mu_{\text{GS}}^e} + \frac{1 - \rho_{\text{ES}}^e}{\tau_{\text{esc,GS}}^e} + \frac{s_{\text{GS}}}{\tau_{\text{gGS}} \mu_{\text{GS}}^e} + \frac{\rho_{\text{GS}}^h}{\tau_{\text{spGS}}} + \frac{1}{\tau_{\text{nr,GS}}^e} + \frac{n_{\text{WL}}^e}{\tau_{\text{c,GS}}^e \mu_{\text{GS}}^e} + \frac{1}{\tau_{\text{esc,GS} \rightarrow \text{WL}}^e}
 \end{aligned}$$

<sup>56</sup>Anche se analiticamente si considera la *cattura diretta* degli elettroni dallo stato WL allo stato GS, nelle simulazioni si è sempre posto  $\tau_{\text{c,GS}}^e = 10^4$  ps (stesso valore usato nel modello numerico); i tassi conseguenti sono piccoli (la cattura diretta è, in questo caso, un evento poco probabile).

$$\begin{aligned}
 a_{46} &= \frac{G_n(\rho_{\text{GS}}^e + \rho_{\text{GS}}^h - 1)}{\tau_{\text{g GS}}} \\
 a_{47} &= \frac{G_n s_{\text{GS}}}{\tau_{\text{g GS}}} \left( \frac{\partial \rho_{\text{GS}}^e}{\partial n_{\text{QD+WL}}^h} + \frac{\partial \rho_{\text{GS}}^h}{\partial n_{\text{QD+WL}}^h} \right) \\
 a_{53} &= -\frac{\beta_{\text{sp}} \rho_{\text{ES}_1}^h}{\tau_{\text{sp ES}}} - \frac{s_{\text{ES}}}{\tau_{\text{g ES}} \mu_{\text{ES}}^e} \\
 a_{55} &= \begin{cases} -\frac{G_n(\rho_{\text{ES}}^e + \rho_{\text{ES}_1}^h - 1)}{\tau_{\text{g ES}}} + \frac{1}{\tau_{\text{p,ES}}} & \text{per } I \leq I_{\text{th,ES}} \\ 0 & \text{per } I > I_{\text{th,ES}} \end{cases} \\
 a_{57} &= -\frac{G_n s_{\text{ES}}}{\tau_{\text{g ES}}} \frac{\partial \rho_{\text{ES}_1}^h}{\partial n_{\text{QD+WL}}^h} \\
 a_{64} &= -\frac{\beta_{\text{sp}} \rho_{\text{GS}}^h}{\tau_{\text{sp GS}}} - \frac{s_{\text{GS}}}{\tau_{\text{g GS}} \mu_{\text{GS}}^e} \\
 a_{66} &= \begin{cases} -\frac{G_n(\rho_{\text{GS}}^e + \rho_{\text{GS}}^h - 1)}{\tau_{\text{g GS}}} + \frac{1}{\tau_{\text{p,GS}}} & \text{per } I \leq I_{\text{th,GS}} \\ 0 & \text{per } I > I_{\text{th,GS}} \end{cases} \\
 a_{67} &= -\frac{G_n s_{\text{GS}}}{\tau_{\text{g GS}}} \frac{\partial \rho_{\text{GS}}^h}{\partial n_{\text{QD+WL}}^h} \\
 a_{72} &= \frac{1}{\tau_{\text{nr,WL}}^e} \\
 a_{73} &= \frac{s_{\text{ES}}}{\tau_{\text{g ES}} \mu_{\text{ES}}^e} + \frac{\rho_{\text{ES}_1}^h}{\tau_{\text{sp ES}}} + \frac{1}{\tau_{\text{nr,ES}}^e} \\
 a_{74} &= \frac{s_{\text{GS}}}{\tau_{\text{g GS}} \mu_{\text{GS}}^e} + \frac{\rho_{\text{GS}}^h}{\tau_{\text{sp GS}}} + \frac{1}{\tau_{\text{nr,GS}}^e} \\
 a_{75} &= \frac{G_n(\rho_{\text{ES}}^e + \rho_{\text{ES}_1}^h - 1)}{\tau_{\text{g ES}}} \\
 a_{76} &= \frac{G_n(\rho_{\text{GS}}^e + \rho_{\text{GS}}^h - 1)}{\tau_{\text{g GS}}} \\
 a_{77} &= \frac{1}{\tau_{\text{esc,QD+WL}}^h} + \frac{G_n s_{\text{GS}}}{\tau_{\text{g GS}}} \frac{\partial \rho_{\text{GS}}^h}{\partial n_{\text{QD+WL}}^h} + \frac{G_n s_{\text{ES}}}{\tau_{\text{g ES}}} \frac{\partial \rho_{\text{ES}_1}^h}{\partial n_{\text{QD+WL}}^h} \\
 a_{78} &= -\frac{1}{\tau_{\text{s}}^h}
 \end{aligned}$$

$$a_{87} = -\frac{1}{\tau_{\text{esc,QD+WL}}^h}$$

$$a_{88} = \frac{1}{\tau_s^h}$$

Si assume, in  $a_{47}$ , che vale la 2.46 e, in  $a_{37}$ , la 2.70. Valgono, inoltre, la 2.51, da sostituire nei termini  $a_{47}$ ,  $a_{67}$  e  $a_{77}$ , e la 2.72, da sostituire nei termini  $a_{37}$ ,  $a_{57}$  e  $a_{77}$ .

Per l'espressione dei termini  $a_{55}$  e  $a_{66}$  valgono le stesse considerazioni fatte, rispettivamente, per il caso di emissione solo da ES e solo da GS (in quest'ultimo caso il ruolo di  $a_{66}$  è svolto da  $a_{55}$ ). Inoltre, sopra soglia per il set Arakawa, valgono le relazioni approssimate 2.52 e 2.73 da cui si ha, rispettivamente,  $a_{46} = a_{76} \approx \frac{1}{\tau_{p,GS}}$  e  $a_{35} = a_{75} \approx \frac{1}{\tau_{p,ES}}$ .

I calcoli fatti per i casi di emissione solo da GS e solo da ES, espressi in notazione matriciale, valgono anche in questo caso, ma con

$$\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} n_{\text{SCH},0}^e \\ n_{\text{WL},0}^e \\ n_{\text{ES},0}^e \\ n_{\text{GS},0}^e \\ s_{\text{ES},0} \\ s_{\text{GS},0} \\ n_{\text{QD+WL},0}^h \\ n_{\text{SCH},0}^h \end{bmatrix} \quad \mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} n_{\text{SCH},1}^e \\ n_{\text{WL},1}^e \\ n_{\text{ES},1}^e \\ n_{\text{GS},1}^e \\ s_{\text{ES},1} \\ s_{\text{GS},1} \\ n_{\text{QD+WL},1}^h \\ n_{\text{SCH},1}^h \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_1 = \frac{1}{\tau_{\text{inj}}} \begin{bmatrix} I_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I_1 \end{bmatrix}$$

Si arriva al sistema lineare 2.58, ma in questo caso la matrice  $\mathbf{A}_\omega$ , espressa in componenti, risulta pari a

$$\mathbf{A}_\omega = \begin{bmatrix} a_{11} + j\omega & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} + j\omega & a_{23} & a_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} + j\omega & a_{34} & a_{35} & 0 & a_{37} & 0 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} + j\omega & 0 & a_{46} & a_{47} & 0 \\ 0 & 0 & a_{53} & 0 & a_{55} + j\omega & 0 & a_{57} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{64} & 0 & a_{66} + j\omega & a_{67} & 0 \\ 0 & a_{72} & a_{73} & a_{74} & a_{75} & a_{76} & a_{77} + j\omega & a_{78} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{87} & a_{88} + j\omega \end{bmatrix}$$

Dalla soluzione del sistema lineare ottenuto si ricava, come spiegato nel caso di emissione solo da GS, la funzione di *risposta armonica* per i fotoni e i portatori. Per tale funzione vale quanto già esposto in precedenza. La

funzione di risposta armonica dei fotoni, è data da

$$H(j\omega) = \begin{cases} \frac{\mathbf{X}_1[5]}{I_1} = \frac{s_{ES,1}}{I_1} & \text{risposta fotoni ES} \\ \frac{\mathbf{X}_1[6]}{I_1} = \frac{s_{GS,1}}{I_1} & \text{risposta fotoni GS} \end{cases} \quad (2.74)$$

Naturalmente, la funzione di risposta armonica che si ottiene è matematicamente dello stesso tipo di quelle ottenute dai sistemi  $7 \times 7$ , ossia razionale fratta, ma in questo caso, il numeratore e il denominatore sono *polinomi completi* di grado, rispettivamente, 5 (per entrambe le risposte considerate) e 8 (il rango della matrice  $\mathbf{A}_\omega$ ).

Per ogni corrente di bias risulta esserci:

- *un* polo nullo;
- *due* zeri nulli per la risposta dei fotoni GS;
- *uno* zero nullo per la risposta dei fotoni ES.

Come per la risposta armonica derivante dai sistemi  $7 \times 7$ , anche in questo caso, i calcoli confermano che c'è *una* coppia di poli complessi coniugati (i rimanenti poli sono reali) e la parte reale di ogni polo è negativa.

Il modello analitico  $8 \times 8$  riproduce gli *stessi* risultati dei modelli analitici  $7 \times 7$ , quindi i casi di sola emissione da GS o da ES; non si ripropongono questi risultati. Nella figura 2.16 è confrontata la risposta IM, sia dei fotoni GS (a  $5I_{th,GS}$ ) che dei fotoni ES (a  $1,1I_{th,ES}$ ), calcolata dalle 2.74, indicato come *risultato analitico* (curve rosse), con quella calcolata tramite l'algoritmo numerico della FFT, indicato come *risultato numerico* (curve blu) <sup>57</sup>.

Le risposte per i fotoni ES sono in accordo solo *qualitativamente*. Bisogna considerare che, per valori di corrente così alti ( $1,1I_{th,ES} = 550 \text{ mA}$ ) l'errore del simulatore numerico, e a maggior ragione di quello lineare, diventa significativo; lo è già a 100 mA [15].

## 2.7 Il modello dinamica discreta lacune

Il modello non eccitonico a macro-stato lacune QD+WL, considerava una dinamica infinitamente veloce (la termalizzazione) delle lacune tra gli stati confinati nel dot – gli stati GS,  $ES_{1,\dots,4}$  – e il WL (stati in BV). Il modello

---

<sup>57</sup>Il risultato numerico è stato ottenuto con una *frequenza massima di simulazione* di 150 GHz; questa scelta influisce, perlopiù per alte frequenze di modulazione ed in modo poco significativo, sul risultato.

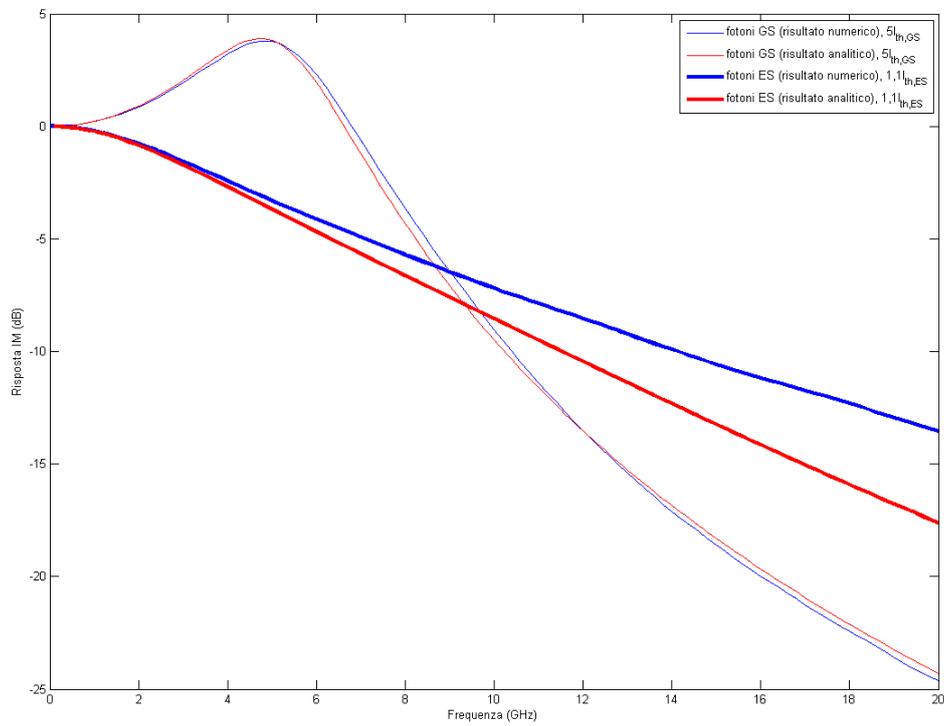


Figura 2.16: Risposta IM per i fotoni GS ed ES (set Arakawa).

descritto in questo paragrafo, chiamato “dinamica discreta lacune” [15], è un modello ancora *non eccitonico*, ma in cui le lacune hanno tempi di cattura/rilassamento diversi da zero; gli stati permessi sono gli stessi del modello macro-stato (figura 2.3).

Rispetto al modello macro-stato cambiano solo le RE per le lacune, che risultano le seguenti: <sup>58 59</sup>

$$\begin{aligned} \frac{dn_{\text{GS}}^h}{dt} &= \frac{n_{\text{ES}_1}^h}{\tau_r^h} (1 - \rho_{\text{GS}}^h) - \frac{n_{\text{GS}}^h}{\tau_{\text{esc,GS}}^h} (1 - \rho_{\text{ES}_1}^h) - R_{\text{st GS}} - R_{\text{sp GS}} - \frac{n_{\text{GS}}^h}{\tau_{\text{nr,GS}}^h} \\ \frac{dn_{\text{ES}_1}^h}{dt} &= \frac{n_{\text{ES}_2}^h}{\tau_r^h} (1 - \rho_{\text{ES}_1}^h) - \frac{n_{\text{ES}_1}^h}{\tau_{\text{esc,ES}_1}^h} (1 - \rho_{\text{ES}_2}^h) + \frac{n_{\text{GS}}^h}{\tau_{\text{esc,GS}}^h} (1 - \rho_{\text{ES}_1}^h) - \frac{n_{\text{ES}_1}^h}{\tau_r^h} (1 - \rho_{\text{GS}}^h) \\ &\quad - R_{\text{st ES}_1} - R_{\text{sp ES}_1} - \frac{n_{\text{ES}_1}^h}{\tau_{\text{nr,ES}_1}^h} \\ \frac{dn_{\text{ES}_2}^h}{dt} &= \frac{n_{\text{ES}_3}^h}{\tau_r^h} (1 - \rho_{\text{ES}_2}^h) - \frac{n_{\text{ES}_2}^h}{\tau_{\text{esc,ES}_2}^h} (1 - \rho_{\text{ES}_3}^h) + \frac{n_{\text{ES}_1}^h}{\tau_{\text{esc,ES}_1}^h} (1 - \rho_{\text{ES}_2}^h) - \frac{n_{\text{ES}_2}^h}{\tau_r^h} (1 - \rho_{\text{ES}_1}^h) - \frac{n_{\text{ES}_2}^h}{\tau_{\text{nr,ES}_2}^h} \\ \frac{dn_{\text{ES}_3}^h}{dt} &= \frac{n_{\text{ES}_4}^h}{\tau_r^h} (1 - \rho_{\text{ES}_3}^h) - \frac{n_{\text{ES}_3}^h}{\tau_{\text{esc,ES}_3}^h} (1 - \rho_{\text{ES}_4}^h) + \frac{n_{\text{ES}_2}^h}{\tau_{\text{esc,ES}_2}^h} (1 - \rho_{\text{ES}_3}^h) - \frac{n_{\text{ES}_3}^h}{\tau_r^h} (1 - \rho_{\text{ES}_2}^h) - \frac{n_{\text{ES}_3}^h}{\tau_{\text{nr,ES}_3}^h} \\ \frac{dn_{\text{ES}_4}^h}{dt} &= \frac{n_{\text{WL}}^h}{\tau_c^h} G_n (1 - \rho_{\text{ES}_4}^h) - \frac{n_{\text{ES}_4}^h}{\tau_{\text{esc,ES}_4}^h} + \frac{n_{\text{ES}_3}^h}{\tau_{\text{esc,ES}_3}^h} (1 - \rho_{\text{ES}_4}^h) - \frac{n_{\text{ES}_4}^h}{\tau_r^h} (1 - \rho_{\text{ES}_3}^h) - \frac{n_{\text{ES}_4}^h}{\tau_{\text{nr,ES}_4}^h} \\ \frac{dn_{\text{WL}}^h}{dt} &= \frac{n_{\text{SCH}}^h}{\tau_s^h} - \frac{n_{\text{WL}}^h}{\tau_{\text{esc,WL}}^h} + \frac{n_{\text{ES}_4}^h}{\tau_{\text{esc,ES}_4}^h} - \frac{n_{\text{WL}}^h}{\tau_c^h} G_n (1 - \rho_{\text{ES}_4}^h) - \frac{n_{\text{WL}}^h}{\tau_{\text{nr,WL}}^h} \\ \frac{dn_{\text{SCH}}^h}{dt} &= \eta_i \frac{I}{n_d n_l w L q} - \frac{n_{\text{SCH}}^h}{\tau_s^h} + \frac{n_{\text{WL}}^h}{\tau_{\text{esc,WL}}^h} \end{aligned}$$

dove  $\tau_c^h$  è il tempo di cattura per le lacune da WL ad ES<sub>4</sub> e  $\tau_r^h$  è il tempo di rilassamento per le lacune sugli stati GS, ES<sub>1</sub>, ..., <sub>3</sub> (gli altri simboli usati sono quelli definiti nel paragrafo 2.3, con le opportune estensioni per le lacune). In tutte le simulazioni si assume che  $\tau_c^h = \tau_r^h = 0,1$  ps [8]. Inoltre si pone

$$\begin{aligned} \tau_{\text{nr,GS}}^h &= \tau_{\text{nr,ES}_{1,\dots,4}}^h = \tau_{\text{nr,GS}}^e = \tau_{\text{nr,ES}}^e \\ \tau_{\text{nr,WL}}^h &= \tau_{\text{nr,WL}}^e \end{aligned}$$

<sup>58</sup>Anche se si considera la *cattura diretta* degli elettroni dallo stato WL allo stato GS, nelle simulazioni si è sempre posto  $\tau_{c,\text{GS}}^e = 10^4$  ps.

<sup>59</sup>Nella versione implementata si tiene conto anche dell’allargamento omogeneo dello spettro di guadagno ottico e del tasso di ricombinazione non radiativa dallo stato SCH.

I valori dei tempi non radiativi per gli elettroni sono riportati nella tabella 3.1. Si suppone inoltre che, durante il laseramento,  $\eta_i = 1$ .

La condizione di equilibrio termodinamico, come spiegato nel caso degli elettroni, porta alle seguenti relazioni tra i tempi di fuga e i corrispondenti tempi di cattura/rilassamento:

$$\frac{1}{\tau_{\text{esc,GS}}^h} = \frac{\mu_{\text{ES}_1}^h}{\mu_{\text{GS}}^h} e^{(E_{\text{GS}}^h - E_{\text{ES}_1}^h)/k_B T} \frac{1}{\tau_r^h}$$

$$\frac{1}{\tau_{\text{esc,ES}_i}^h} = \frac{\mu_{\text{ES}_{i+1}}^h}{\mu_{\text{ES}_i}^h} e^{(E_{\text{ES}_i}^h - E_{\text{ES}_{i+1}}^h)/k_B T} \frac{1}{\tau_r^h} \quad \text{per } i \in \{1, 2, 3\}$$

$$\frac{1}{\tau_{\text{esc,ES}_4}^h} = \frac{\delta_{\text{WL}}^h}{\mu_{\text{ES}_4}^h} e^{(E_{\text{ES}_4}^h - E_{\text{WL}}^h)/k_B T} \frac{1}{\tau_c^h}$$

I tempi di fuga da WL a SCH, sia per gli elettroni che per le lacune, si considerano costanti, come già spiegato per il modello macro-stato.

Le probabilità di occupazione per le lacune negli stati confinati sono date da

$$\rho_{\text{GS,ES}_1,\dots,4}^h = \frac{n_{\text{GS,ES}_1,\dots,4}^h}{\mu_{\text{GS,ES}_1,\dots,4}^h G_n}$$

I valori usati per le degeneracy sono riportati nella tabella 3.1.

Il sistema differenziale che si ottiene, costituito da 13 RE, è risolto con il solutore numerico ode23s, implementato in ambiente Matlab<sup>®</sup>.<sup>60</sup> Dato che le equazioni descrivono l'emissione sia da GS che da ES, continuano a valere le considerazioni fatte nel primo capoverso del paragrafo 2.6. Risultati nel capitolo 3 e nell'appendice B.

## 2.8 Il modello eccitonico

Se si suppone che la struttura della BV sia simmetrica rispetto a quella della BC (indicata nella figura 2.3 (a)), cioè avente gli stessi salti energetici tra gli stati permessi, e se si suppone che i tempi siano gli stessi (di cattura/rilassamento e di diffusione) in entrambe le bande, si ha un modello eccitonico. In tale modello, essendo le RE per le lacune le stesse degli elettroni, si descrive la *stessa dinamica* per entrambi i tipi di portatori.

---

<sup>60</sup>La versione implementata, descrivendo anche l'allargamento omogeneo dello spettro di guadagno, consiste in 17 RE.

Rispetto al modello macro-stato cambiano solo le RE per le lacune, che risultano le seguenti: <sup>61</sup> <sup>62</sup>

$$\begin{aligned} \frac{dn_{GS}^h}{dt} = & \frac{n_{ES}^h}{\tau_{r,GS}^h} (1 - \rho_{GS}^h) - \frac{n_{GS}^h}{\tau_{esc,GS}^h} (1 - \rho_{ES}^h) + \frac{n_{WL}^h}{\tau_{c,GS}^h} G_n (1 - \rho_{GS}^h) - \frac{n_{GS}^h}{\tau_{esc,GS \rightarrow WL}^h} \\ & - R_{st\ GS} - R_{sp\ GS} - \frac{n_{GS}^h}{\tau_{nr,GS}^h} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dn_{ES}^h}{dt} = & \frac{n_{WL}^h}{\tau_{c,ES}^h} G_n (1 - \rho_{ES}^h) - \frac{n_{ES}^h}{\tau_{esc,ES}^h} - \frac{n_{ES}^h}{\tau_{r,GS}^h} (1 - \rho_{GS}^h) + \frac{n_{GS}^h}{\tau_{esc,GS}^h} (1 - \rho_{ES}^h) \\ & - R_{st\ ES} - R_{sp\ ES} - \frac{n_{ES}^h}{\tau_{nr,ES}^h} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dn_{WL}^h}{dt} = & \frac{n_{SCH}^h}{\tau_s^h} - \frac{n_{WL}^h}{\tau_{esc,WL}^h} - \frac{n_{WL}^h}{\tau_{nr,WL}^h} - \frac{n_{WL}^h}{\tau_{c,ES}^h} G_n (1 - \rho_{ES}^h) + \frac{n_{ES}^h}{\tau_{esc,ES}^h} \\ & - \frac{n_{WL}^h}{\tau_{c,GS}^h} G_n (1 - \rho_{GS}^h) + \frac{n_{GS}^h}{\tau_{esc,GS \rightarrow WL}^h} \end{aligned}$$

$$\frac{dn_{SCH}^h}{dt} = \eta_i \frac{I}{n_d n_l w L q} - \frac{n_{SCH}^h}{\tau_s^h} + \frac{n_{WL}^h}{\tau_{esc,WL}^h}$$

dove i simboli usati sono quelli definiti nel paragrafo 2.3, con le opportune estensioni per le lacune (il cui stato eccitato è ora ES, anziché ES<sub>1</sub>).

Si pone

$$\begin{aligned} \tau_{nr,GS}^h &= \tau_{nr,ES}^h = \tau_{nr,GS}^e = \tau_{nr,ES}^e \\ \tau_{nr,WL}^h &= \tau_{nr,WL}^e \end{aligned}$$

I valori dei tempi non radiativi per gli elettroni sono riportati nella tabella 3.1. Si suppone inoltre che, durante il laseramento,  $\eta_i = 1$ .

La condizione di equilibrio termodinamico, come spiegato nel caso degli elettroni, porta alle seguenti relazioni tra i tempi di fuga e i corrispondenti tempi di cattura/rilassamento:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_{esc,GS}^h} &= \frac{\mu_{ES}^h}{\mu_{GS}^h} e^{(E_{GS}^h - E_{ES}^h)/k_B T} \frac{1}{\tau_{r,GS}^h} \\ \frac{1}{\tau_{esc,GS \rightarrow WL}^h} &= \frac{\delta_{WL}^h}{\mu_{GS}^h} e^{(E_{GS}^h - E_{WL}^h)/k_B T} \frac{1}{\tau_{c,GS}^h} \end{aligned}$$

<sup>61</sup> Anche se si considera la *cattura diretta* dallo stato WL allo stato GS, si pone  $\tau_{c,GS}^{e,h} = 10^4$  ps.

<sup>62</sup> Nella versione implementata si tiene conto anche del tasso di ricombinazione non radiativa dallo stato SCH.

$$\frac{1}{\tau_{\text{esc,ES}}^h} = \frac{\delta_{\text{WL}}^h}{\mu_{\text{ES}}^h} e^{(E_{\text{ES}}^h - E_{\text{WL}}^h)/k_B T} \frac{1}{\tau_{\text{c,ES}}^h}$$

I tempi di fuga da WL a SCH, sia per gli elettroni che per le lacune, si considerano costanti, come già spiegato per il modello macro-stato.

Le probabilità di occupazione per le lacune negli stati confinati sono date da

$$\rho_{\text{GS,ES}}^h = \frac{n_{\text{GS,ES}}^h}{\mu_{\text{GS,ES}}^h G_n}$$

I valori usati per le degeneracy sono riportati nella tabella 3.1.

Il sistema differenziale che si ottiene, costituito da 10 RE, è risolto con il solutore numerico ode23s, implementato in ambiente Matlab<sup>®</sup>. Dato che le equazioni descrivono l'emissione sia da GS che da ES, continuano a valere le considerazioni fatte nel primo capoverso del paragrafo 2.6. Risultati nel capitolo 3.

## 2.9 Considerazioni finali

In questo capitolo si sono sviluppati modelli non eccitonici per lo studio della dinamica di laser a semiconduttore QD. In tutti i modelli si descrive una dinamica separata per elettroni e lacune; il caso eccitonico è il caso ‘degenere’ di dinamiche uguali. I modelli si basano sulla descrizione di un bilancio istantaneo dei tassi in gioco tra gli stati permessi; in questa descrizione si trattano gli stati SCH e WL in modo energeticamente discreto, ma con sempre posti disponibili per i portatori.

Per il modello macro-stato lacune si sono linearizzate le RE, attorno ad un punto in polarizzazione (lo stato stazionario), al fine di ricavare un modello di piccolo segnale da cui ricavare la risposta in frequenza (nell’accezione di frequenza di modulazione). Si studia, quindi, la risposta al (piccolo) gradino di corrente del sistema.

Per il caso più generale di ampio segnale, bisogna integrare numericamente le RE, in cui le incognite sono le densità dei portatori (le probabilità di occupazione e quindi i tassi di emissione spontanea e stimolata sono funzione delle densità di portatori). Per questa via si ricava anche lo stato stazionario.

Si utilizza – in questa tesi – l’espressione ‘simulatore numerico’ che, tra le altre cose, implementa l’integrazione numerica delle RE. Questa terminologia vale anche per i modelli ‘dinamica discreta lacune’ ed ‘eccitonico’, che sono varianti del modello ‘macro-stato lacune’.

Si suppone che l’iniezione di corrente sia tale da portare il sistema poco fuori la condizione di equilibrio termodinamico, in modo tale da poter usare

lo pseudo livello di Fermi nell'espressione della distribuzione dei portatori in energia. Naturalmente, i modelli considerati valgono anche in condizioni di equilibrio termodinamico (assenza di iniezione di portatori); in tal caso sono nulli i tassi di emissione spontanea, stimolata e non radiativa.

Si sono mostrati, in questo capitolo, solo i risultati utili alla descrizione dei modelli analitici (modelli lineari), confrontati con quelli derivanti dal modello numerico, al fine di giustificare gli sviluppi fatti. Gli altri risultati sono, invece, mostrati nel capitolo 3 e nell'appendice B.

# Capitolo 3

## Interpretazione risultati

In questo capitolo si analizzano i risultati ottenuti con i modelli sviluppati nel capitolo 2.

### 3.1 Dinamica di un laser a QD: il ruolo dei tempi coinvolti

Quando si pompa elettricamente un QD i portatori attraversano la barriera SCH per *diffusione* ed entrano nel WL, da cui poi sono catturati, prevalentemente, negli stati a più alta energia e dai quali rilassano allo stato GS. La scala dei tempi caratteristica dei suddetti fenomeni hanno un ruolo chiave per le proprietà dinamiche del laser. Lo stesso tempo di trasporto dei portatori da SCH a WL può contribuire a ridurre la larghezza di banda [5].

I fenomeni di cattura e rilassamento avvengono attraverso *scattering* con fononi o di tipo portatore-portatore. I valori tipici dei relativi tempi, riportati in letteratura, sono compresi tra 0,1 ps e 10 ps; i valori presi in esame in questa tesi sono riportati nelle tabelle 3.1 e 3.2. In particolare, l'alta densità di portatori nel dot e nel WL portano ad alti tassi di scattering Auger, eludendo il cosiddetto problema "phonon bottleneck" [8]. Infatti, semplificando, i processi di cattura sono assistiti da portatori (i processi Auger, la cui cinetica è stata descritta nel paragrafo 2.1), mentre il rilassamento è un processo assistito da fononi [11].

Si assume che i fenomeni di cattura e rilassamento avvengano coinvolgendo solo i livelli *primi vicini*. Questa è un'approssimazione che semplifica il modello a RE. Infatti, il tasso di transizione tra due livelli va inversamente rispetto alla differenza della loro energia. Quindi, le transizioni ai primi vicini sono probabilisticamente dominanti rispetto alle altre transizioni [11]. Nei modelli considerati si assume che i portatori nel WL sono prima catturati in

ES, e poi da questo rilassano a GS; ciò è confermato sperimentalmente [8]. Questo spiega anche il laseramento dai due stati, ES e GS. Nel caso più generale avviene anche, con una certa probabilità, la cattura diretta da WL a GS; si discute, successivamente, di questa eventualità nel caso di emissione solo da GS.

I tempi di cattura/rilassamento finiti così come il “Pauli blocking factor”, introdotto nel paragrafo 2.3, sono i fattori fisici limitanti la banda di modulazione. Il limite all’incremento della probabilità di occupazione degli elettroni è, infatti, perlopiù causata dal termine di ‘blocking’. In letteratura è stato dimostrato che il tempo di cattura dei portatori dallo strato di confinamento ottico nel dot può fortemente limitare la banda di modulazione. Quest’ultima, in termini generali, è fortemente dipendente sia dalla frequenza di risonanza che dal fattore di smorzamento. La frequenza di risonanza è limitata dal guadagno modale massimo (e dagli effetti di compressione di guadagno), mentre il fattore di smorzamento fissa il limite della banda di modulazione. Tra i motivi fisici sottostanti l’alto fattore di smorzamento ci sono le interazioni di Coulomb, le dinamiche di cattura dei portatori (e la compressione di guadagno). [4].

## 3.2 La necessità di un modello non eccitonico

Gli elettroni e le lacune contribuiscono in modo molto differente al comportamento dinamico del laser. Infatti, la dinamica delle lacune nel QD è molto più veloce della dinamica degli elettroni. Il modello eccitonico è un’approssimazione troppo semplificata per modellare correttamente la dinamica di un laser QD. Si rende, quindi, necessario un modello non eccitonico, cioè un modello in cui sono descritte le dinamiche di entrambi i tipi di portatori. Bisogna considerare che la dinamica delle lacune avviene tra più stati confinati ed energeticamente più vicini rispetto al caso degli elettroni.

La differente dinamica di elettroni e lacune è dovuta alle differenti costanti di tempo caratterizzanti le transizioni tra i livelli confinati, rispettivamente di elettroni e lacune. La dinamica delle lacune, inoltre, è caratterizzata da una diffusione abbastanza lenta nella barriera SCH di GaAs (tempo di trasporto di diversi picosecondi) e una termalizzazione ultra veloce delle lacune negli stati QD (gli stati finemente spazati in banda di valenza).<sup>1</sup> Le differenti scale di tempo di elettroni e lacune causa una forte *de-sincronizzazione* tra

---

<sup>1</sup>Come spiegato nel paragrafo 2.3, per semplificare il modello, si assume di poter descrivere le lacune negli stati confinati nel QD e nello stato WL come un unico macro-stato. Questa approssimazione non cambia le conclusioni generali [1] ed è anche computazionalmente meno onerosa rispetto ad una ‘dinamica discreta’.

le dinamiche delle due popolazioni dopo una variazione di corrente. Sono i portatori più lenti a limitare la dinamica di modulazione del laser; per un sistema InAs/GaAs la dinamica è limitata dal tempo di rilassamento degli elettroni [8]. Il fattore di smorzamento delle oscillazioni di rilassamento è fortemente influenzato, invece, dalla dinamica delle lacune [1].

Il modello non eccitonico a macro-stato lacune si rivela utile anche per l'analisi sotto soglia, per i cui risultati si rimanda all'appendice B. Questo anche in virtù del fatto che un'analisi *vicino* la *soglia* evidenzia il limite del modello eccitonico e la necessità di un modello microscopico più accurato. Infatti risulta, sia teoricamente che sperimentalmente, che il regime di oscillazioni di rilassamento fortemente smorzate che avvengono vicino la soglia è molto sensibile ai 'dettagli' delle dinamiche di elettroni e lacune e ai differenti potenziali di confinamento [6].

### 3.3 I parametri di simulazione

I parametri utilizzati come input nelle simulazioni sono relativi alla struttura del laser (parametri del materiale e del dispositivo); in particolare si includono la struttura delle bande di conduzione e di valenza, le costanti di tempo, la geometria del laser e della guida d'onda.

Essendo la *temperatura* di operazione quella *ambiente*, si imposta, per tutte le simulazioni, una energia termica ( $k_B T$ ) di 26 meV.

Si utilizzano due set di parametri, indicati come:

- parametri *Arakawa* [9];
- parametri *Gready lento* [15].

I parametri che assumono lo stesso valore per i due set sono mostrati nella tabella 3.1, mentre nella tabella 3.2 sono indicati i parametri che assumono un valore differente nei due set.

Si indica con  $\Delta E_{i,j}^{e,h}$  la differenza di energia tra gli stati permessi  $i$  e  $j$ . Tali valori possono venire anche da misure sperimentali e sono dipendenti dalla dimensione, forma e composizione dei dot. I valori usati qui sono tipici per QD di InAs/GaAs. Nella figura 2.3, i valori delle separazioni in energia riportati, per il gruppo laserante, sono del set Arakawa. Il livello energetico di WL è riferito al gruppo laserante (c'è una separazione in energia, tra i due gruppi di dot, di 5 meV).<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup>Nel simulatore numerico, il riferimento delle energie è  $E_{GS}^{e,h}$  del gruppo laserante, impostato a 0 meV. Questa scelta di comodo – anche perché l'energia di punto zero non è nulla – è, naturalmente, ininfluenza per le differenze di energia.

Tabella 3.1: Parametri con lo stesso valore per i due set.

parametro	valore (Arakawa, Gready lento)
$\Delta E_{ES_1,GS}^h$	10 meV
$\Delta E_{ES_2,ES_1}^h$	10 meV
$\Delta E_{ES_3,ES_2}^h$	10 meV
$\Delta E_{ES_4,ES_3}^h$	10 meV
$\Delta E_{WL,ES_4}^h$	20 meV
$\Delta E_{SCH,WL}^h$	140 meV
$\mu_{GS}^{e,h}$	2
$\mu_{ES}^e$	4
$\mu_{ES_1}^h$	4
$\mu_{ES_2}^h$	6
$\mu_{ES_3}^h$	6
$\mu_{ES_4}^h$	4
$\tau_{c,GS}^e$	$1 \times 10^4$ ps
$\tau_{r,GS}^e$	1 ps
$\tau_{nr,SCH}^{e,h}$	$2 \times 10^8$ ps
$\tau_{nr,WL}^e$	900 ps
$\tau_{nr,ES}^e$	2000 ps
$\tau_{nr,GS}^e$	2000 ps
$\tau_{sp,GS,ES}$	2000 ps
$\tau_{sp,WL}$	$1 \times 10^7$ ps
$\tau_{p,GS}$	5 ps
$\tau_{p,ES}$	5 ps
$\tau_g,GS$	$0,86 \times 1,34$ ps
$\tau_g,ES$	$0,50 \times 1,34$ ps
$\beta_{sp}$	$1 \times 10^{-2}$
$w$	2,2 $\mu\text{m}$
$L$	0,4 mm

Tabella 3.2: Parametri con un differente valore per i due set.

parametro	valore Arakawa	valore Gready lento
$G_n$	0,99	0,65
$\Delta E_{\text{SCH,WL}}^e$	200 meV	84 meV
$\Delta E_{\text{WL,ES}}^e$	40 meV	100 meV
$\Delta E_{\text{ES,GS}}^e$	40 meV	80 meV
$\tau_s^e$	1,2 ps	5 ps
$\tau_s^h$	10 ps	15 ps
$\tau_{c,\text{ES}}^e$	2 ps	3 ps
$n_d$	$5,9 \times 10^{10} \text{ cm}^{-2}$	$3 \times 10^{10} \text{ cm}^{-2}$
$n_1$	8	15
$h_{\text{SCH}}$	0,43 $\mu\text{m}$	0,25 $\mu\text{m}$

Il valore del parametro  $\tau_{c,\text{GS}}^e$  (tempo di *cattura diretta* da WL a GS) indicato è relativo al caso di bassa probabilità; verranno considerati altri valori di questo parametro.

Per le simulazioni *sotto soglia* si è usato, per  $\tau_{p,\text{GS}}$  e per  $\tau_{p,\text{ES}}$ , il valore di 0,01 ps.<sup>3</sup>

Nelle tabelle sono indicati anche i parametri del simulatore numerico che non intervengono direttamente nel simulatore analitico (appendice A), visto il confronto dei risultati tra i due; alcuni risultati, comunque, sono relativi al solo simulatore numerico. I parametri che intervengono solo nel simulatore numerico sono:

- $\tau_{\text{sp,WL}}$ : tempo di vita dei portatori nel WL dovuto all'emissione spontanea;
- $\tau_{\text{nr,SCH}}^{e,h}$ : tempo di vita dei portatori in SCH per ricombinazione non radiativa;
- $h_{\text{SCH}}$ : spessore barriera SCH.

I tassi dovuti all'emissione spontanea da WL e alla ricombinazione non radiativa da SCH sono poco significativi rispetto agli altri tassi in gioco. Lo spessore della barriera SCH influenza la relativa DOS del simulatore numerico (DOS 3D *efficace*, normalizzata rispetto all'intera popolazione di QD, a 300 K), che non entra in gioco direttamente nel simulatore analitico vista l'assunzione sulla costanza dei tempi di fuga da WL a SCH.

<sup>3</sup>Il tempo di vita dei fotoni è un tempo misurato [4].

## 3.4 Macro-stato lacune

### 3.4.1 Caratteristiche statiche

Le considerazioni sulle caratteristiche statiche valgono sia per l'emissione da GS, che per l'emissione da ES.

Il modello eccitonico predice che la densità di portatori è bloccata al loro valore soglia; non è così con il modello non eccitonico a macro-stato lacune. Infatti, dai risultati (numerici) già mostrati nel capitolo 2 (figure 2.5 e 2.9), si evince che le densità di elettroni e lacune, degli stati risonanti con i modi laseranti, *non* sono *bloccate*, ma aumentano o diminuiscono in modo che il guadagno (proporzionale alla somma delle suddette densità) rimanga costante ad un valore fissato dalla condizione di soglia; se la densità di elettroni diminuisce, quella delle lacune aumenta per garantire un valore di guadagno costante. I risultati sulle densità di portatori sono coerenti con quelli ottenuti in [1]; si basano, infatti, sull'implementazione numerica del modello a macro-stato lacune (le densità sono le incognite del sistema di RE risolte nel dominio temporale).

In generale, l'alta densità di stati in SCH e WL è responsabile di un'alta densità di portatori ad alta energia, i vari stati eccitati (e a cui si associa, in un modello eccitonico, la compressione di guadagno). I portatori iniettati, infatti, risiedono prevalentemente negli stati a più alta energia (nel nostro caso il WL), ma gli elettroni devono decadere ai livelli più bassi (gli stati ES e GS) per poter avere emissione stimolata. Gli stati GS ed ES condividono gli stessi portatori accumulati nello stato WL, che funge da *reservoir*. Per questo motivo la potenza di uscita totale è praticamente indipendente dal parametro  $\tau_s^h$ , che cambia solamente la quantità di portatori per l'emissione da GS o da ES [1]. Inoltre, all'aumentare dei tempi di cattura (da WL) aumenta la corrente di soglia e diminuisce la pendenza della caratteristica densità fotoni–corrente (e quindi l'efficienza quantica esterna).

### 3.4.2 Caratteristiche dinamiche: emissione da GS

Nel capitolo 2 sono già state mostrate le curve di risposta IM (figura 2.7); da tali curve si può ottenere la frequenza massima della banda di modulazione a  $-3$  dB <sup>4</sup> in funzione della corrente di bias<sup>5</sup>.

Si possono fare alcune osservazioni generali:

<sup>4</sup>L'attenuazione in scala lineare corrisponde ad  $1/2$  della potenza.

<sup>5</sup>La corrente di bias o di polarizzazione  $I$  è la componente chiamata  $I_0$  nel paragrafo 2.4.2.

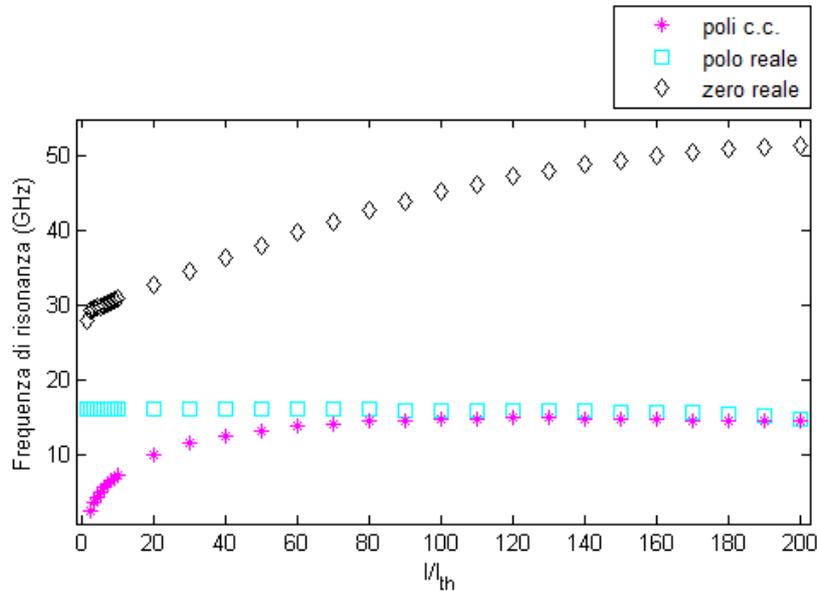


Figura 3.1: Emissione da GS: andamento di poli e zeri con la corrente di bias (set Arakawa).

- per valori alti di  $Q$ , la frequenza massima a  $-3$  dB è maggiore di quella di risonanza;
- la larghezza di banda aumenta all'aumentare del guadagno modale;
- all'aumentare della corrente di bias il picco di risonanza si appiattisce poiché, lo smorzamento aumenta (ossia  $Q$  diminuisce) più velocemente rispetto alla frequenza di risonanza.

Nelle figure 3.1 e 3.2 sono mostrati i risultati analitici (modello lineare). In particolare, nella figura 3.2 si confrontano i due set di parametri utilizzati. I valori di banda ottenuti, per il set Arakawa, sono compatibili con quelli ottenuti in [9].<sup>6</sup> Infatti, il set di parametri Arakawa è estrapolato proprio dai dati di [9]. Per il set Gready lento si ha un fattore di merito più basso e una banda a  $-3$  dB minore, come conseguenza anche del fatto che per il guadagno non si tiene conto del contributo dei dot non laseranti (vedere nota 23 del capitolo 2).

<sup>6</sup>Si consideri, ad esempio, il massimo valore di banda a  $-3$  dB ottenuto in [9], tenendo presente che la corrente di soglia è diversa.

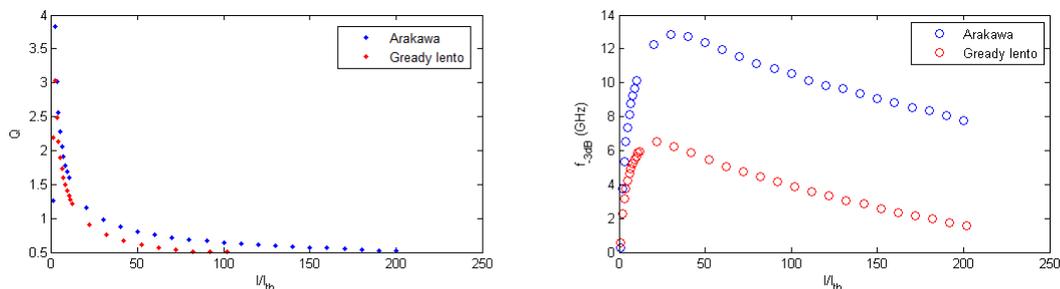


Figura 3.2: Emissione da GS: fattore di merito (a sinistra) e frequenza massima della banda a  $-3$  dB (a destra) rispetto alla corrente di bias (set a confronto).

### La cattura diretta

L'assunzione della transizione al livello primo vicino non è sempre giustificata. Si può considerare, nelle RE, anche il tasso di cattura diretta da WL a GS.

I risultati delle simulazioni sono relativi al solo set Greedy lento. Dall'andamento di  $s_{GS}$  rispetto alla corrente di bias, mostrato nella figura 3.3, risulta una corrente di soglia di  $5$  mA per tutti e quattro i valori di  $\tau_{c,GS}^e$  considerati.<sup>7</sup>

L'analisi delle simulazioni analitiche (poli e zeri, risposta IM,  $Q$  e banda a  $-3$  dB) porta alle seguenti osservazioni:

- In tutti i casi considerati, c'è un polo reale *quasi costante* a circa  $10,73$  GHz. Il modulo della frequenza di questo polo<sup>8</sup> diminuisce di poco all'aumentare della corrente di bias, in misura minore al diminuire del parametro  $\tau_{c,GS}^e$ , ossia all'aumentare del tasso di cattura diretta.
- Per il caso mostrato in figura 3.4 ( $\tau_{c,GS}^e = 10^4$  ps), si hanno *due splitting* di altrettante coppie di poli c.c. nei due poli reali. Tali splitting avvengono a correnti molto alte rispetto a quella di soglia. Il primo splitting, dell'unica coppia di poli c.c. a bassa frequenza, avviene a  $84I_{th}$ . La coppia di poli c.c. interessati dal secondo splitting 'nascono'

<sup>7</sup>C'è anche un piccolo aumento dell'efficienza quantica esterna all'aumentare del tasso di cattura diretta (poco visibile nella figura), cioè al diminuire del parametro  $\tau_{c,GS}^e$ ; questo è conseguenza dell'aumento di densità di portatori in GS e quindi un maggior numero di fotoni GS a parità di portatori iniettati.

<sup>8</sup>Nei grafici si è etichettata questa quantità come *frequenza di risonanza*, che corrisponde al *modulo della frequenza* del polo/zero. Questa terminologia si riferisce ad un sistema del 2° ordine, ossia ad una *sola* coppia di radici; la si mantiene, anche se, il sistema studiato è del 7° ordine (ma comunque con una dinamica assimilabile ad uno del 2° ordine).

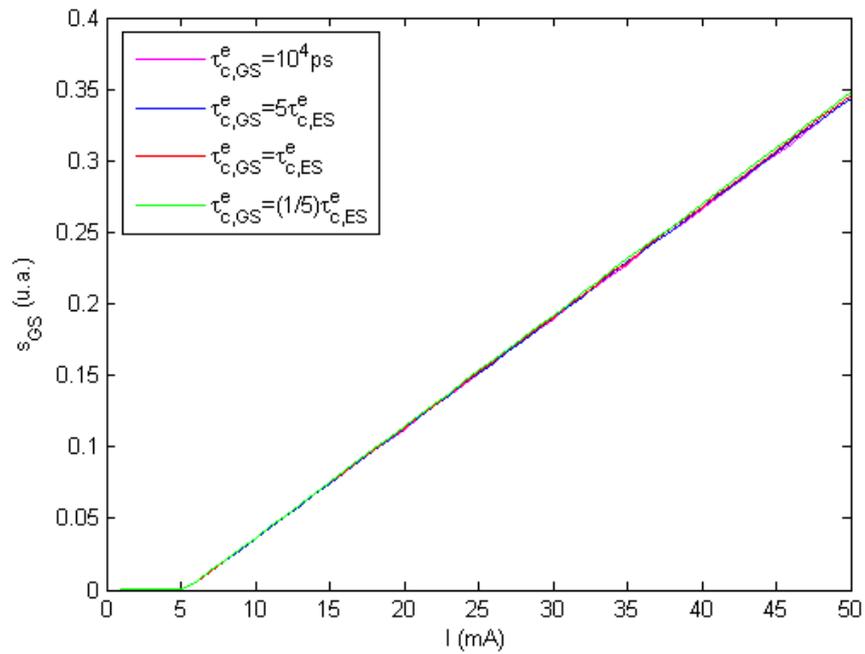


Figura 3.3: Cattura diretta: densità normalizzata di fotoni GS rispetto alla corrente di bias (set Greedy lento).

ad una corrente di  $86I_{th}$  (quindi di poco superiore a quella a cui avviene il primo splitting), dalla ‘fusione’ del polo reale a 10,73 GHz e il polo a modulo maggiore nato dal primo splitting. Il secondo splitting avviene a  $112I_{th}$ . Uno dei due poli reali nati da questo secondo splitting rimane pressoché costante a 10,73 GHz.<sup>9</sup>

- Dalle figure 3.6, 3.8 e 3.10 si evince che l’aumento della frequenza di risonanza del polo c.c. con la corrente di bias aumenta all’aumentare del tasso di cattura diretta (quindi al diminuire del parametro  $\tau_{c,GS}^e$ ); di conseguenza il picco della risposta IM si sposta verso frequenze di modulazione maggiori, all’aumentare della corrente di bias, in misura maggiore.
- Il fattore di merito, e quindi l’altezza del picco nella risposta IM, aumenta all’aumentare del tasso di cattura diretta (figura 3.12).
- La banda a  $-3$  dB (figura 3.13) aumenta all’aumentare del tasso di cattura diretta, come ci si aspetta da quanto osservato nei precedenti due punti.

Dall’analisi delle simulazioni analitiche risulta inoltre che, con la cattura diretta, i poli c.c. mantengono sempre un  $Q$  grande (oscillazioni poco smorzate), mentre il polo reale non si sposta e parzialmente attenua il picco di risonanza dovuto al  $Q$  grande. Il risultato è che anche per correnti alte, rispetto alla corrente di soglia, la risposta IM mantiene una banda larga e rimane abbastanza piatta; il polo reale gioca a favore della risposta piatta. Senza la cattura diretta, invece, si ha uno *splitting* dei poli da c.c. a reali e questo porta ad una banda che si attenua in modo significativo. [15].

<sup>10</sup>

### 3.4.3 Caratteristiche dinamiche: emissione da ES

Per bassi valori della corrente di bias avviene l’emissione da GS, mentre per alte correnti avviene anche l’emissione da ES. Qui si considera il modello

---

<sup>9</sup>Più precisamente, il polo reale da 10,73 GHz si abbassa a 10,2 GHz prima di dar vita al secondo polo c.c. (quello che ‘rinascere’ dopo il primo splitting); il polo reale a più bassa frequenza, nato dal secondo splitting, si abbassa da 11,03 GHz a 10,75 GHz.

<sup>10</sup>Nel caso  $\tau_{c,GS}^e = 5\tau_{c,ES}^e$  non c’è il valore corrispondente a  $90I_{th}$  nelle figure 3.6, 3.12 e 3.13. Non è un caso: il codice Matlab® non ‘gira’ solo in corrispondenza di questo valore!

Si può ipotizzare che la situazione dello splitting descritta nel caso  $\tau_{c,GS}^e = 10^4$  ps (figura 3.4) evolva in maniera continua rispetto al parametro  $\tau_{c,GS}^e$  fino a scomparire al di sotto di un suo determinato valore maggiore di  $\tau_{c,ES}^e$ . Bisognerebbe anche testare ‘tutti’ i valori di corrente nell’intorno di  $90I_{th}$ ...

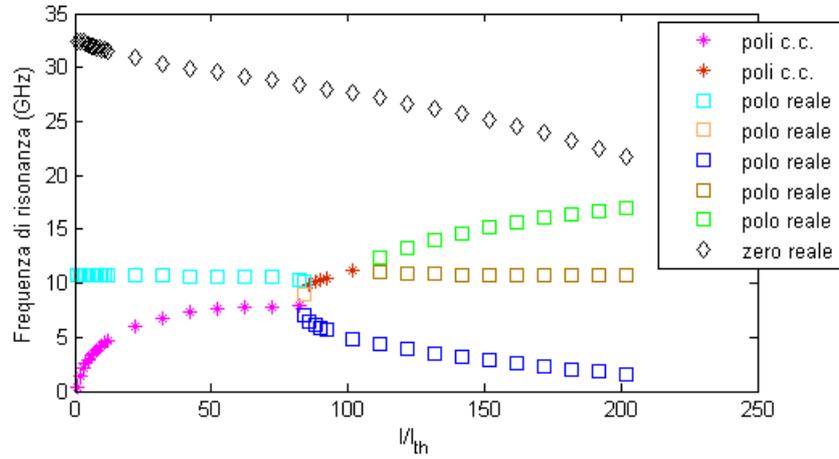


Figura 3.4: Andamento di poli e zeri rispetto alla corrente di bias per  $\tau_{c,GS}^e = 10^4$  ps (set Greedy lento).

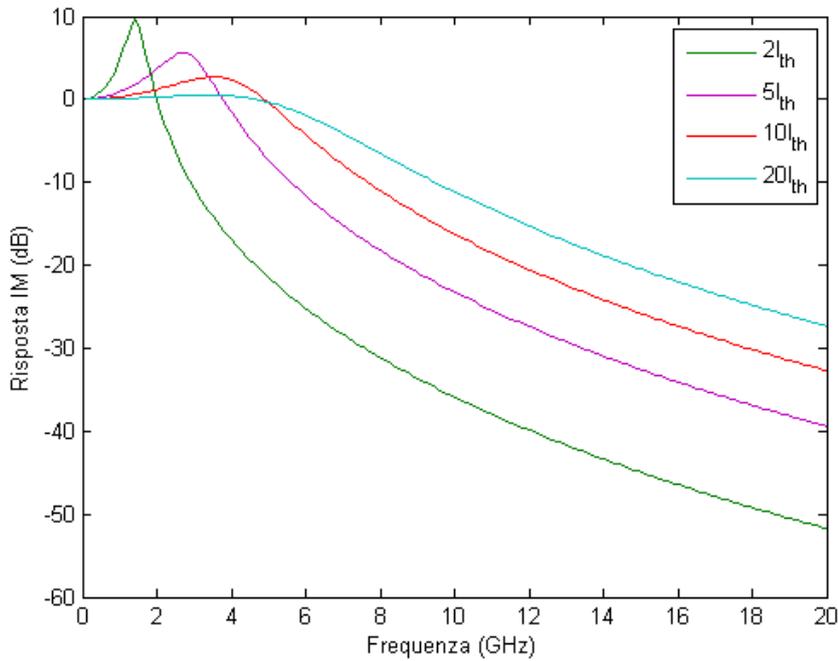


Figura 3.5: Andamento, per alcune correnti di bias, della risposta IM (risultato analitico); caso  $\tau_{c,GS}^e = 10^4$  ps (set Greedy lento).

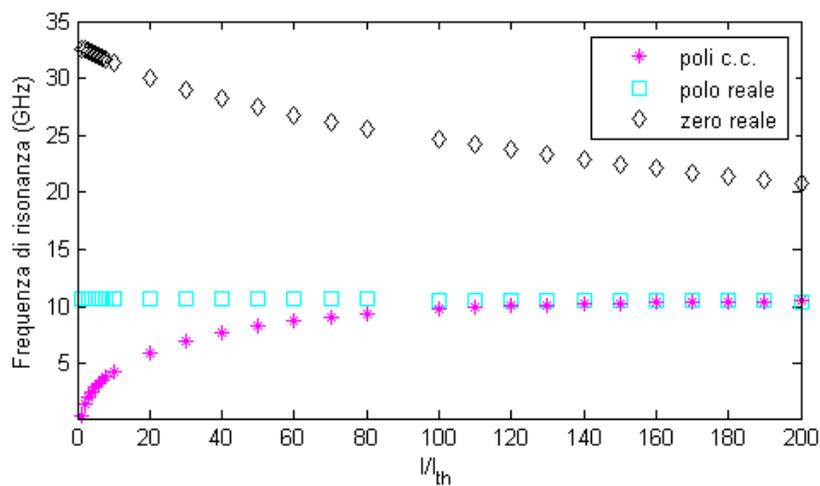


Figura 3.6: Andamento di poli e zeri rispetto alla corrente di bias per  $\tau_{c,GS}^e = 5\tau_{c,ES}^e$  (set Greedy lento).

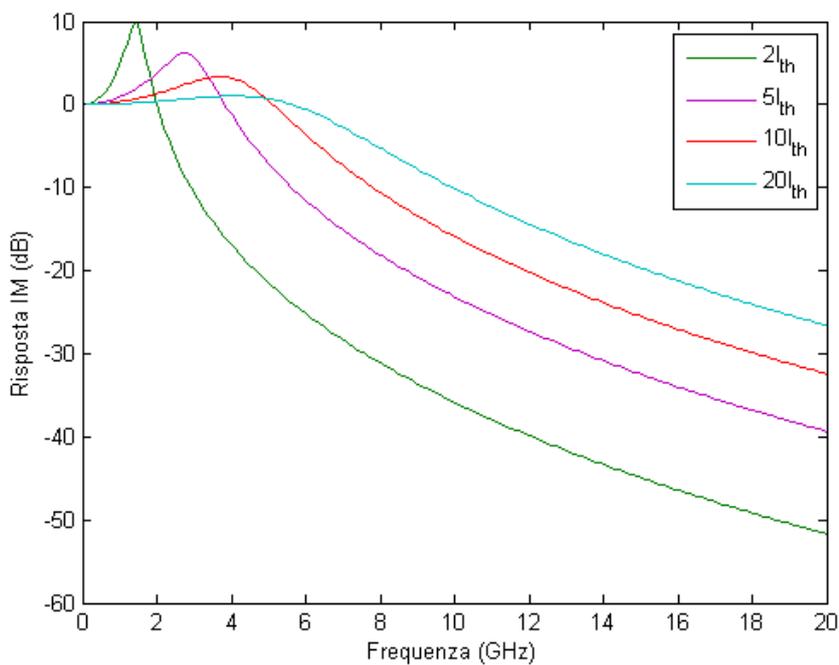


Figura 3.7: Andamento, per alcune correnti di bias, della risposta IM (risultato analitico); caso  $\tau_{c,GS}^e = 5\tau_{c,ES}^e$  (set Greedy lento).

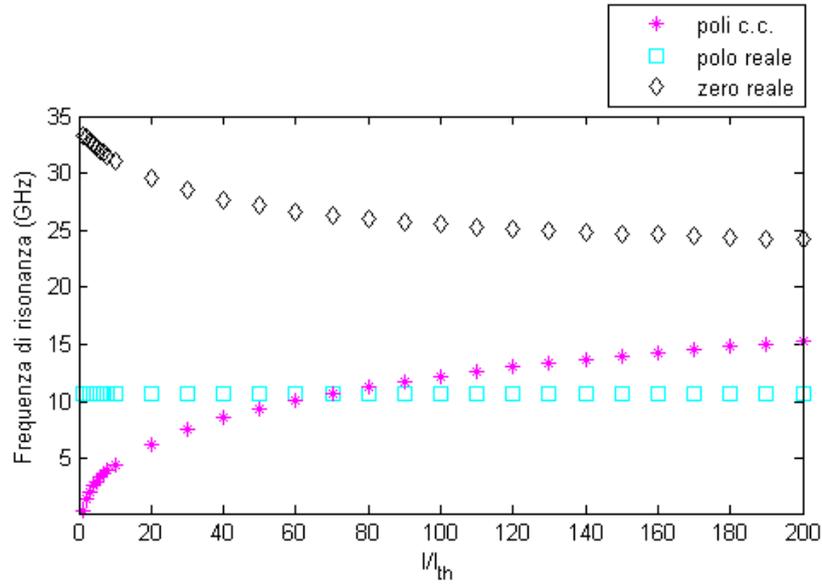


Figura 3.8: Andamento di poli e zeri rispetto alla corrente di bias per  $\tau_{c,GS}^e = \tau_{c,ES}^e$  (set Greedy lento).

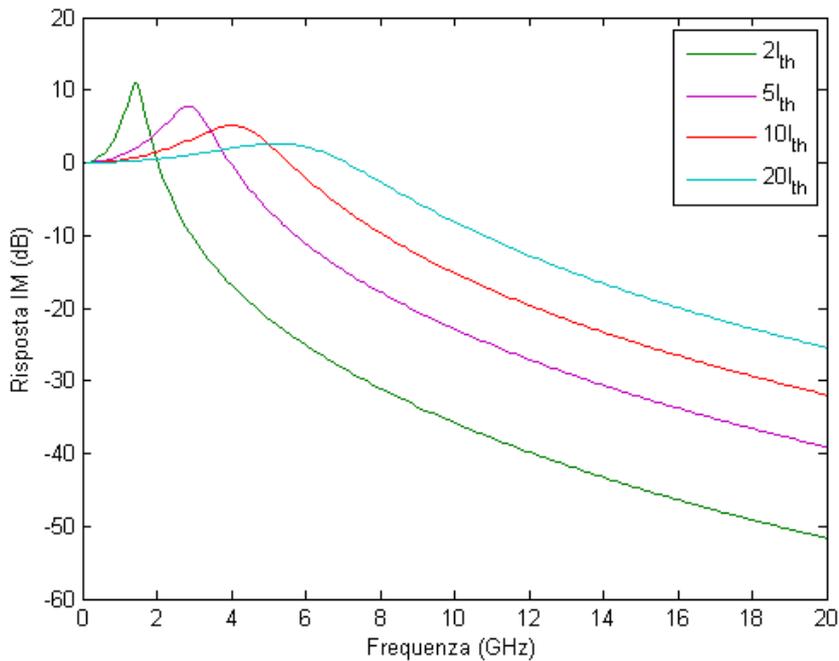


Figura 3.9: Andamento, per alcune correnti di bias, della risposta IM (risultato analitico); caso  $\tau_{c,GS}^e = \tau_{c,ES}^e$  (set Greedy lento).

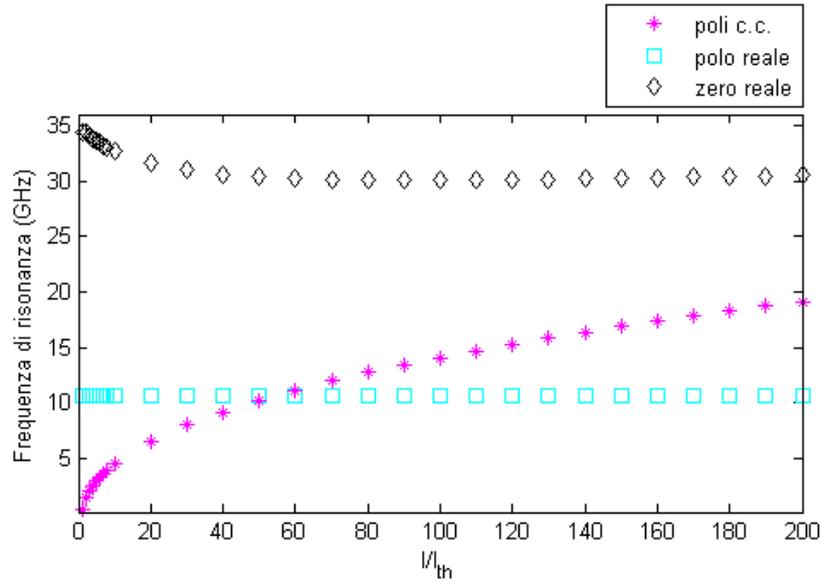


Figura 3.10: Andamento di poli e zeri rispetto alla corrente di bias per  $\tau_{c,GS}^e = (1/5)\tau_{c,ES}^e$  (set Gready lento).

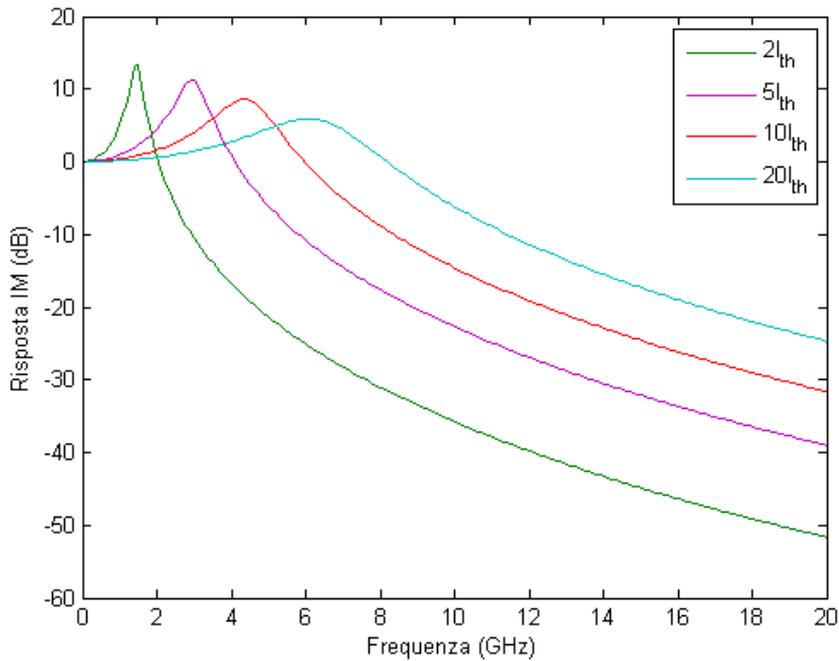


Figura 3.11: Andamento, per alcune correnti di bias, della risposta IM (risultato analitico); caso  $\tau_{c,GS}^e = (1/5)\tau_{c,ES}^e$  (set Gready lento).

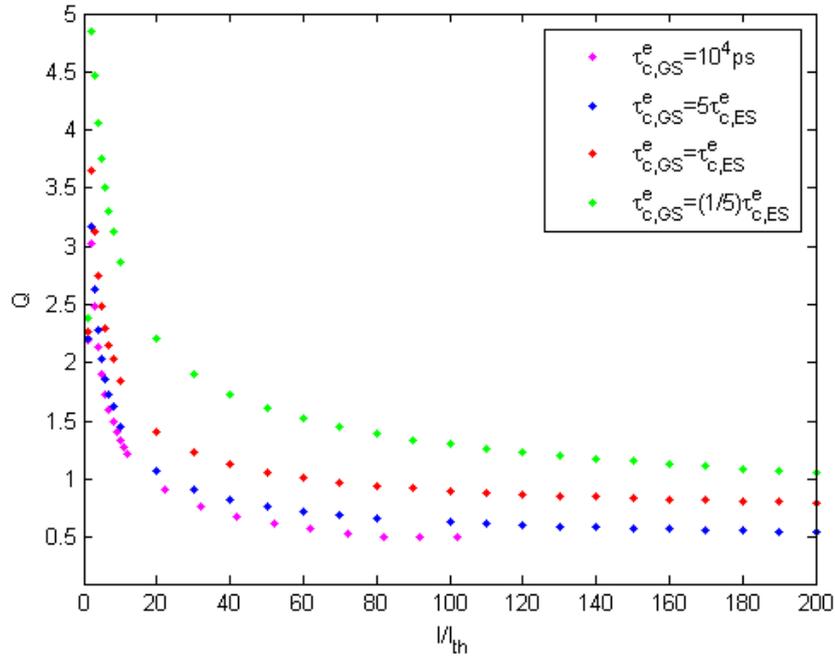


Figura 3.12: Cattura diretta: fattore di merito rispetto alla corrente di bias (set Greedy lento).

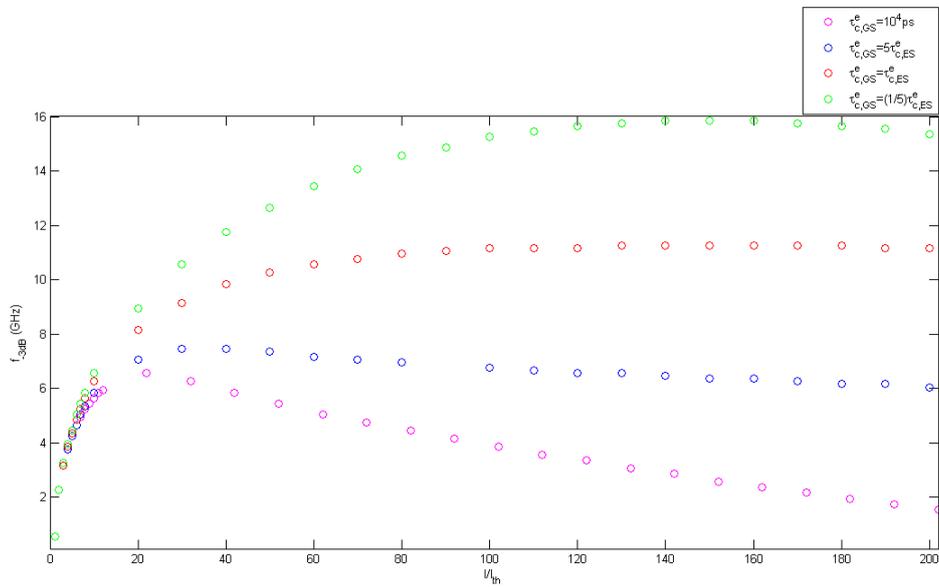


Figura 3.13: Cattura diretta: frequenza massima della banda a -3 dB rispetto alla corrente di bias (set Greedy lento).

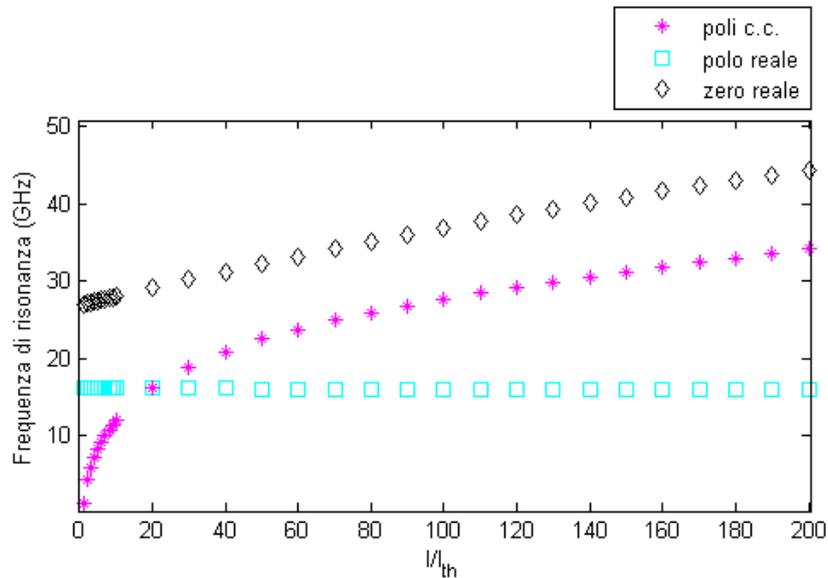


Figura 3.14: Emissione da ES: andamento di poli e zeri con la corrente di bias (set Arakawa).

con la sola equazione per i fotoni ES, quindi *solo* l'emissione ES. La banda di modulazione a  $-3$  dB, sia per l'emissione da GS che per l'emissione da ES, dapprima aumenta con la corrente di bias, raggiungendo un valore massimo, per poi ridursi (risposta sovrasmorzata). Ovviamente le considerazioni generali fatte per il caso di laseramento da GS valgono anche per il caso di laseramento da ES.

Dagli andamenti delle densità di fotoni ES e GS, mostrati nel capitolo 2 rispettivamente nelle figure 2.8 e 2.4, risulta, per il set Arakawa, che la soglia di laseramento da ES (7 mA) è maggiore rispetto a quella da GS (4 mA). La densità di portatori in ES è più alta rispetto a quella in GS a causa della maggiore degeneracy dello stato ES rispetto allo stato GS.

Le curve di risposta IM sono riportate nel capitolo 2 (figura 2.11). Si riportano, invece, nelle figure 3.14 e 3.15 i risultati analitici su poli, zeri, fattore di merito e banda a  $-3$  dB, rispetto alla corrente di bias. Nella figura 3.15 è stato lasciato il confronto con il set di parametri Gready lento; i valori più bassi del fattore di merito e della banda a  $-3$  dB sono compatibili con il considerare, per questo set di parametri, un guadagno che non tiene conto del contributo dei dot non laseranti.

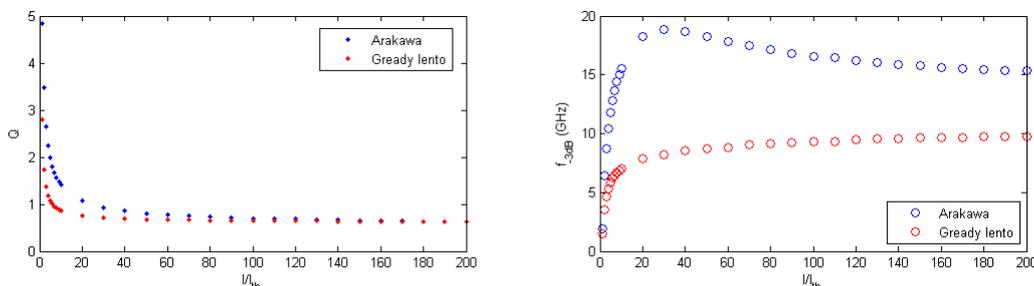


Figura 3.15: Emissione da ES: fattore di merito (a sinistra) e frequenza massima della banda a  $-3$  dB (a destra) rispetto alla corrente di bias (set a confronto).

### 3.4.4 Caratteristiche dinamiche: emissione da GS e da ES a confronto

Si confronta il risultato analitico relativo alla risposta IM, per emissione solo da GS e solo da ES, per i seguenti valori di corrente di bias:

- $2I_{th}$  (figura 3.16);
- $5I_{th}$  (figura 3.17);
- $10I_{th}$  (figura 3.18).

Il set di parametri è quello Arakawa.

Dalle figure risulta che la risposta relativa all'emissione da ES è più larga e piatta rispetto a quella relativa all'emissione da GS. La conseguente maggiore larghezza di banda è attribuibile parzialmente ad una cattura più veloce dei portatori (per l'emissione da GS bisogna considerare anche un tempo di rilassamento), e ad un maggior guadagno differenziale,<sup>11</sup> conseguente ad una maggiore degeneracy. Il picco di risonanza più basso nella risposta di ES indica un fattore di smorzamento maggiore cioè un valore di  $Q$  più basso.

### 3.4.5 Caratteristiche dinamiche: emissione simultanea da GS ed ES

Si riportano – a completamento di quanto già esposto nel paragrafo 2.6 – i risultati del modello analitico descrivente l'emissione (stimolata) sia dei fotoni alla lunghezza d'onda di GS che di ES. La figura 3.19 mostra l'andamento,

<sup>11</sup>Il valore di guadagno differenziale nei laser QD può variare in un range ampio dell'ordine di  $10^{-16} \div 10^{-14} \text{ cm}^2$ .

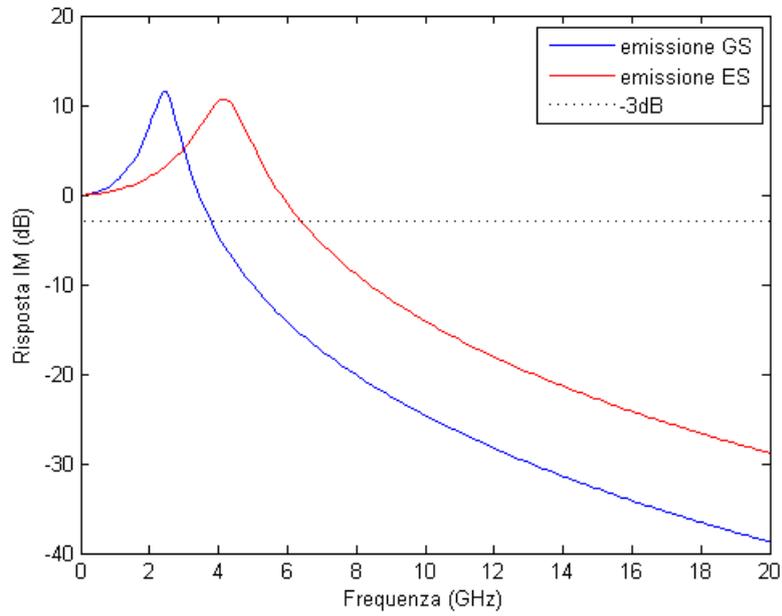


Figura 3.16: Emissione GS ed ES a confronto: risposta IM (risultato analitico) per  $2I_{th}$  (set Arakawa).

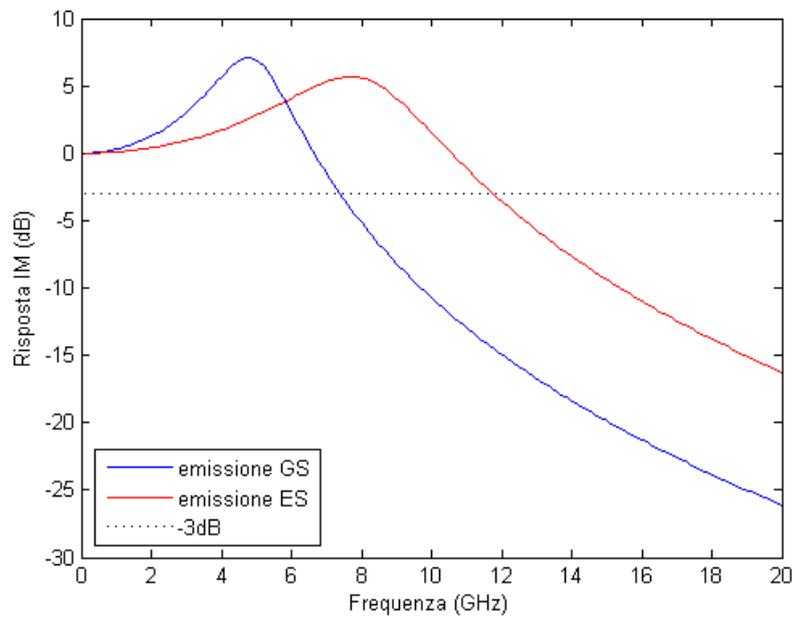


Figura 3.17: Emissione GS ed ES a confronto: risposta IM (risultato analitico) per  $5I_{th}$  (set Arakawa).

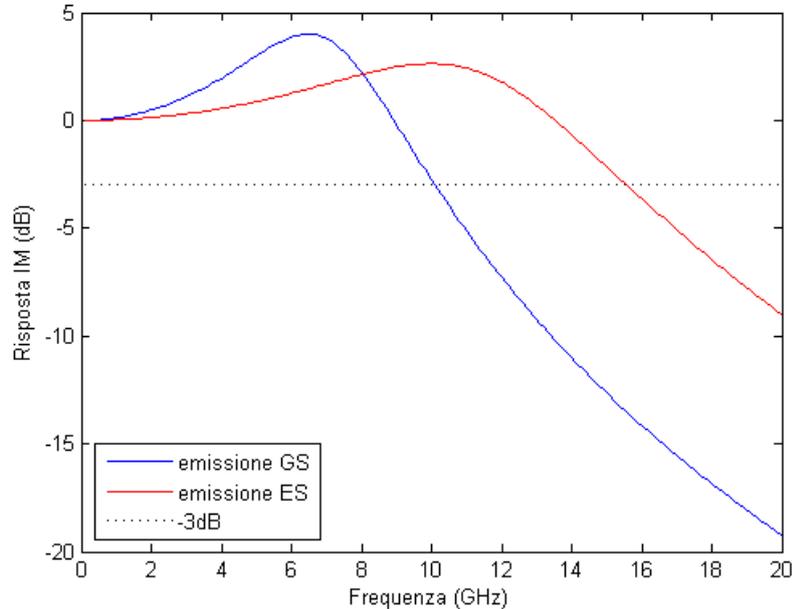


Figura 3.18: Emissione GS ed ES a confronto: risposta IM (risultato analitico) per  $10I_{th}$  (set Arakawa).

rispetto alla corrente di bias, dei poli e degli zeri. La figura 3.20 mostra l'andamento, rispetto alla corrente di bias, del fattore di merito della coppia di poli c.c.. In queste figure, *solo* gli ultimi due punti, che corrispondono a  $I_{th,ES} = 500\text{ mA}$  e a  $I_{th,ES} + 50\text{ mA}$ , sono relativi *anche* all'emissione da ES. Si osserva che, in corrispondenza di questi due punti c'è un polo reale (a modulo nullo per valori di corrente inferiori a  $I_{th,ES}$ ) che aumenta di modulo (sono i due quadratini arancio-marroni al di sotto di 5 GHz).

### 3.5 Dinamica discreta lacune

Le simulazioni sono tutte per il set Gready lento. La figura 3.21 mostra una corrente di soglia di circa 5 mA, per entrambi i modelli confrontati (il confronto, per questi risultati, è sempre con il modello a macro-stato lacune). La figura 3.22 mostra, invece, il confronto della risposta IM alle tre correnti di bias  $3I_{th}$ ,  $6I_{th}$  e  $12I_{th}$ ; in questo caso quello che interessa è il disaccordo delle curve. La minore risposta ricavata dal modello dinamica discreta lacune è dovuto ad una dinamica delle lacune caratterizzata da tempi finiti non nulli, diversamente dal modello a macro-stato lacune in cui questi tempi sono nulli (dinamica infinitamente veloce); in quest'ultimo modello, infatti,

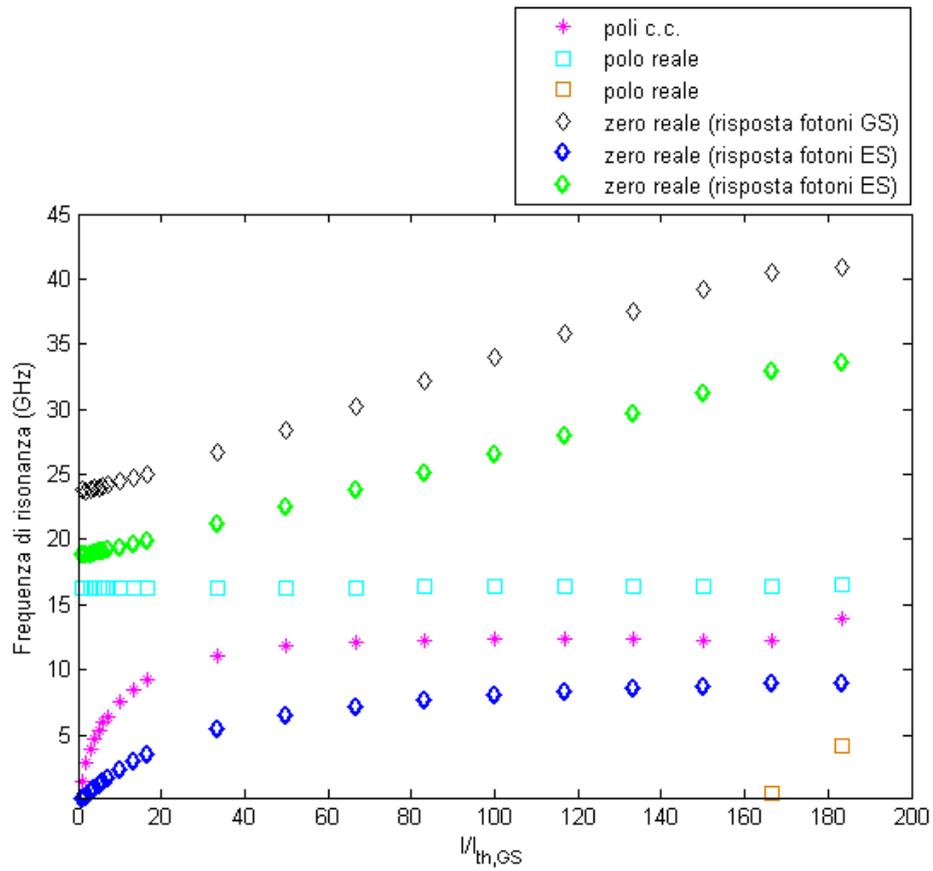


Figura 3.19: Emissione simultanea da GS ed ES: andamento di poli e zeri con la corrente di bias (set Arakawa).

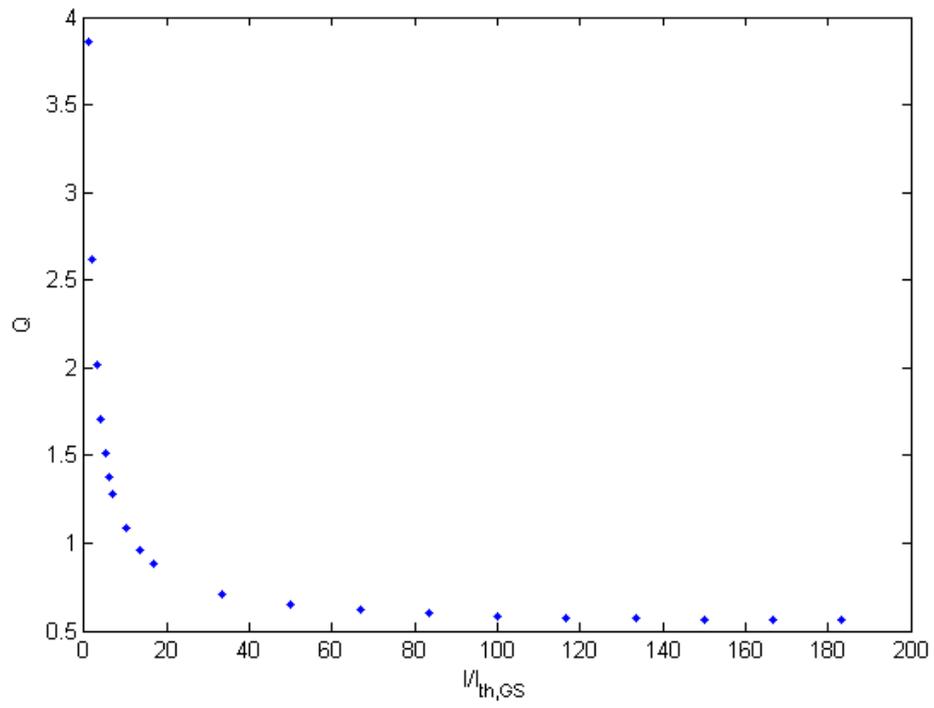


Figura 3.20: Emissione simultanea da GS ed ES: fattore di merito rispetto alla corrente di bias (set Arakawa).

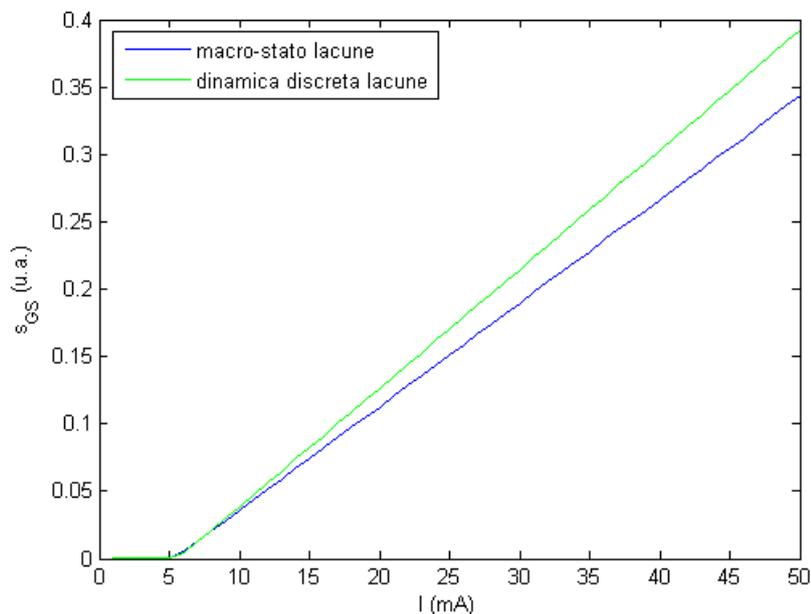


Figura 3.21: Modelli non eccitonici a confronto: densità normalizzata di fotoni GS rispetto alla corrente di bias (set Greedy lento).

si suppone che le lacune termalizzano. Questi risultati sono confermati anche dalla figura 3.23, che mostra per il caso dinamica discreta lacune un fattore di merito ed una banda a  $-3$  dB inferiori.<sup>12 13</sup>

### 3.6 Modello eccitonico

Si chiama modello eccitonico il modello a *stati di coppia*; la coppia elettrone-lacuna è l'*eccitone*. Prima di soffermarsi sui risultati di questo modello, conviene analizzare brevemente il fenomeno della saturazione di guadagno, poiché in questo caso ha un ruolo chiave.

Il guadagno del materiale è funzione delle densità di portatori e fotoni. La variazione del guadagno con la densità di fotoni, usualmente definita fattore di *saturazione* o *compressione* di *guadagno*, fisicamente nasce dalla redistribuzione di portatori tra gli stati laseranti e non, a seguito di una va-

<sup>12</sup>Valori di correnti di bias troppo alti interessano poco (a  $50I_{th}$  la risposta è quasi piatta).

<sup>13</sup>Per comodità, nella figura 3.23 si sono utilizzati i risultati analitici per il modello a macro-stato lacune; l'errore di guadagno associato al set Greedy lento non cambia le considerazioni qualitative.

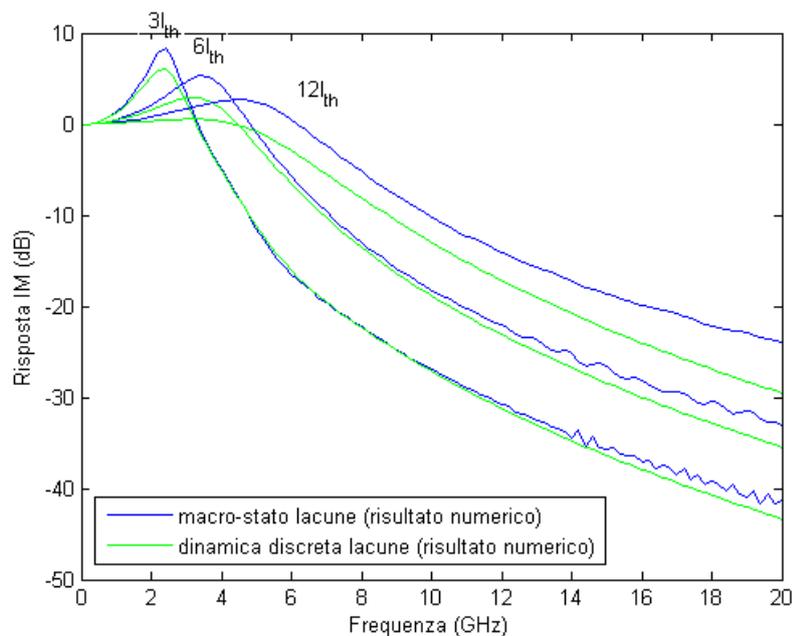


Figura 3.22: Modelli non eccitonici a confronto: risposta IM vs bias (set Greedy lento).

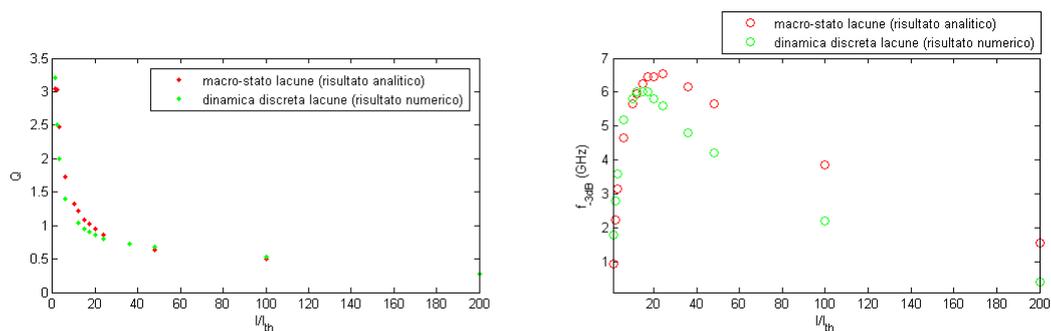


Figura 3.23: Modelli non eccitonici a confronto: fattore di merito (a sinistra) e frequenza massima della banda a  $-3$  dB (a destra) rispetto alla corrente di bias (set Greedy lento).

riazione del numero di fotoni; gli stati non laseranti sono gli stati ‘spettatori’ ad alta energia [8]. La saturazione di guadagno può anche essere dovuta a effetti termici: per l’energia termica ricevuta i portatori tendono a popolare gli stati energeticamente superiori. La compressione di guadagno non è in genere uniforme, sia spazialmente che spettralmente. Si ha un ‘buco’ spaziale dovuto alla natura stazionaria dell’onda relativa ai modi ottici; la deplezione veloce dei portatori nell’intorno del massimo del campo ottico causa una diminuzione del guadagno modale.

In un modello eccitonico si tiene conto della compressione di guadagno introducendo nell’espressione del termine di guadagno (della densità di fotoni), nelle RE, un opportuno coefficiente che ne ‘regola’ la dipendenza dalla stessa densità di fotoni.<sup>14</sup> Si può ritenere, invece, che la fenomenologia descritta con un modello non eccitonico, descrivendo una dinamica più ‘dettagliata’, tiene conto intrinsecamente del fenomeno della compressione di guadagno [16].

I risultati sono per il set Greedy lento. Dalla figura 3.24 si vede che la corrente di soglia è pari a 0,7 mA. Nella figura 3.25 è riportata la risposta IM (risultati numerici) relativa all’emissione da GS, per tre valori di correnti di bias,  $2I_{th}$ ,  $5I_{th}$  e  $10I_{th}$ .<sup>15</sup> Osservando le curve di risposta ci si rende conto come le bande relative al modello eccitonico siano *molto maggiori* rispetto a quelle ricavate dal modello (non eccitonico) a macro-stato lacune. Questo proprio perché il modello eccitonico qui considerato *non* include una descrizione della compressione di guadagno.

### 3.7 Confronto con i dati sperimentali e conclusioni

I valori della larghezza di banda ottenuti nelle simulazioni rimangono limitati a valori *compatibili* con quelli riportati in letteratura, come in [4] o nell’analisi sperimentale di [3] (la temperatura è quella ambiente).

I risultati che si ottengono (splitting, banda massima, ecc.) si hanno, però, per *correnti* troppo *alte* rispetto a quelli derivanti dai dati sperimentali.

<sup>14</sup>A tal scopo si introduce nel termine di guadagno un fattore moltiplicativo pari a  $(1 + \epsilon s_{GS,ES})^{-1}$ , dove  $\epsilon$  rappresenta il coefficiente di compressione di guadagno [12, 2]. Tale fattore moltiplicativo è pari ad 1 per  $\epsilon = 0 \text{ cm}^3$ , che corrisponde al caso del modello eccitonico di questa tesi, in cui non si tiene conto della compressione di guadagno; infatti, il modello è ‘direttamente’ derivato da quello non eccitonico a macro-stato lacune.

<sup>15</sup>Per comodità ci si riferisce alla corrente di soglia del modello a macro-stato lacune, pari a 5 mA (figura 2.4).

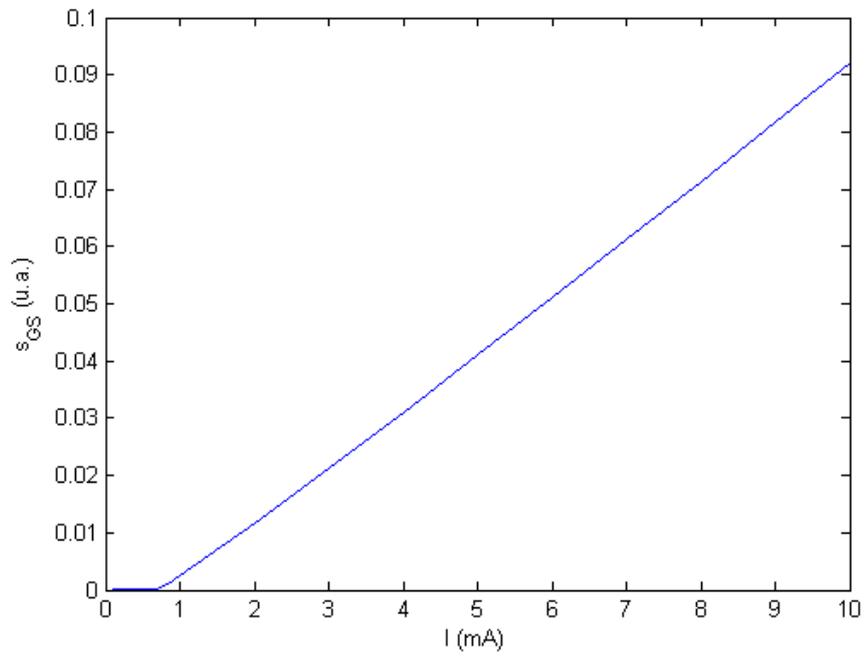


Figura 3.24: Modello eccitonico: densità normalizzata di fotoni GS rispetto alla corrente di bias (set Greedy lento).

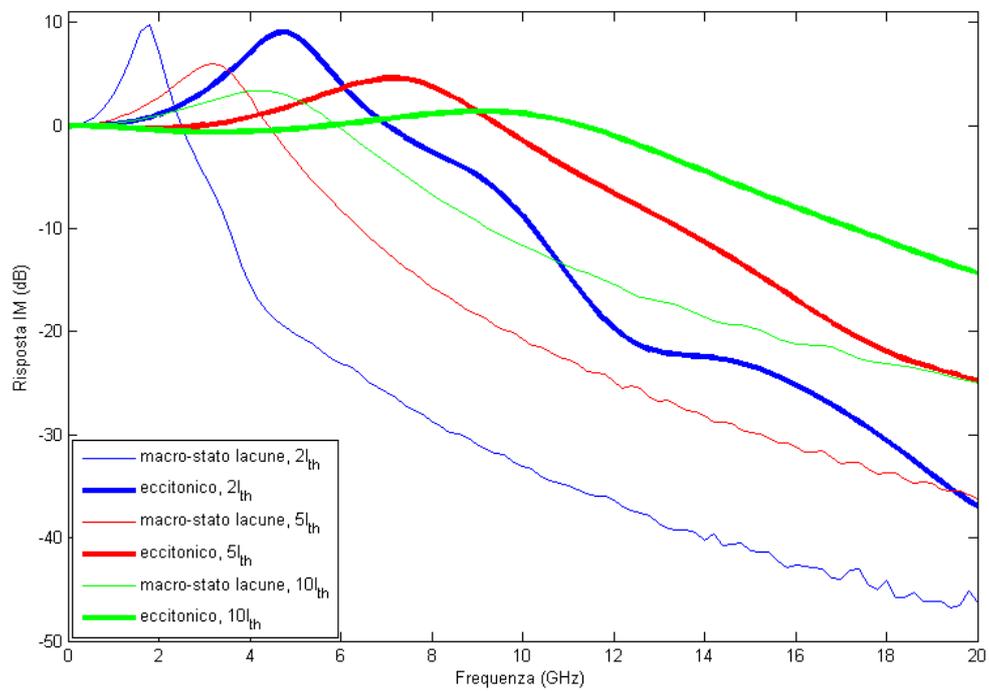


Figura 3.25: Eccitonico vs macro-stato lacune: risposta IM vs bias (risultati numerici) (set Gready lento).

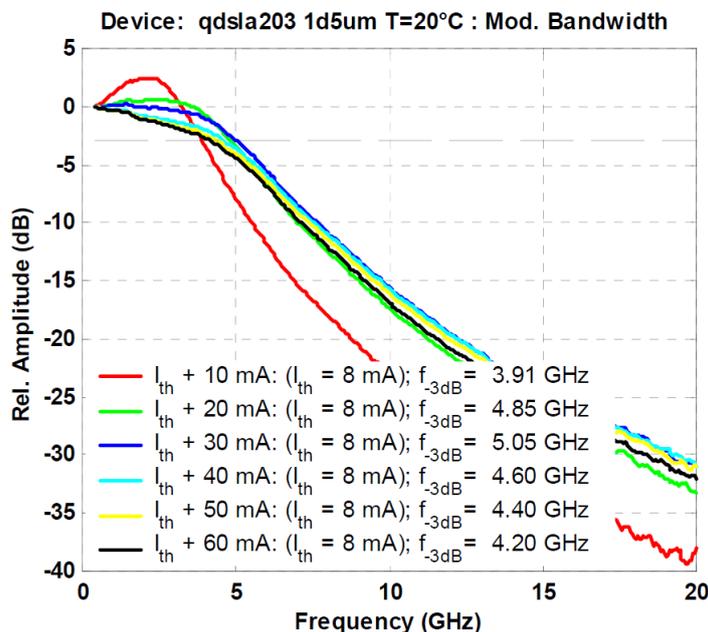


Figura 3.26: Risposta IM, per varie correnti di bias, a temperatura ambiente; dati sperimentali. [15].

Dalla figura 3.26,<sup>16</sup> che riporta la risposta sperimentale a varie correnti, si può vedere l'andamento della banda di modulazione con la corrente di bias; in questo caso la banda massima a  $-3$  dB si ottiene a circa  $5I_{th}$ . Per quanto riguarda lo splitting, si può fare un confronto con i risultati di [2], dove la risposta è calcolata con un modello eccitonico con compressione di guadagno, in sostanziale accordo con i dati sperimentali; lo splitting avviene a circa  $4I_{th}$ , una corrente molto più bassa di quella ottenuta qui con il modello a macro-stato lacune.

I valori del fattore di merito mostrati nelle figure 3.2 e 3.15 sono compatibili con le misure sperimentali che hanno rivelato uno smorzamento più alto nella risposta relativa a GS rispetto a quella relativa ad ES [3]. Inoltre, il fattore di smorzamento ES (e quindi il relativo  $Q$ ) sembra più sensibile alla corrente di bias rispetto al caso GS.

Il guadagno, e di conseguenza la banda di modulazione, diminuisce al diminuire di  $G_n$ , che è un *parametro chiave* per avvicinarsi ai dati sperimentali. Per avvicinarsi a tali dati, i parametri migliori appaiono essere quelli del set Gready lento con  $G_n = 0,65$  [15].

<sup>16</sup>La figura è in relazione ad uno studio di modulazione diretta (ampio segnale) riportato in [7].

Dai risultati mostrati nel paragrafo 3.5 emerge la poca differenza, in termini di dinamica, tra i due modelli non eccitonici (macro-stato lacune e dinamica discreta lacune). Questo conferma una sostanziale *plausibilità* circa l'ipotesi di *termalizzazione* delle lacune, alla base del modello macro-stato lacune [15].

# Appendice A

## L'implementazione dei calcoli

### A.1 Il simulatore analitico

La procedura per il calcolo delle caratteristiche dinamiche (zeri, poli, fattore di merito, risposta IM e relativa banda a  $-3$  dB), al variare della corrente di bias, è implementata in ambiente Matlab®.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>MATrix LABoratory è un ambiente *interattivo* di calcolo che integra la computazione, la visualizzazione e la programmazione. In particolare, l'ambiente è dotato di un vero linguaggio di programmazione, che offre strutture, costrutti per il controllo di flusso (selezione e cicli), modularizzazione dei programmi, funzioni, gestione di input ed output. Gli aspetti generali che lo differenziano da un linguaggio *general purpose*, come il C, sono:

- la variabile contiene un *array* (vettore o matrice), che rappresenta l'unità fondamentale di dato (quindi non richiede il dimensionamento);
- *non tipizzato*, poiché le variabili, che non occorre dichiarare, risultano definite nel punto in cui vengono utilizzate per la prima volta; inoltre, il loro *tipo* è *dinamico*, nel senso che esso può cambiare durante l'esecuzione del programma per effetto di assegnamenti di valori che appartengono a tipi diversi;
- è un linguaggio *interpretato* direttamente dall'ambiente, cioè non deve essere compilato (tradotto in codice macchina direttamente eseguibile dall'hardware); questo permette di rendere i programmi indipendenti dalla piattaforma; è possibile per questo provare incrementalmente il programma durante la sua scrittura in modo da verificarne immediatamente il comportamento;
- linguaggio di *alto livello*, cioè possiede comandi sintetici per effettuare complesse elaborazioni numeriche, mentre con un linguaggio di uso generale, essendo le istruzioni più 'elementari' – definibili di medio livello se si considera il linguaggio macchina di basso livello; in questo senso, i comandi di basso livello sono più primitivi – i programmi risultano più 'lunghi'.

Altri aspetti, meno generali, sono:

- funzione *plot* (basata comunque sui vettori), per realizzare grafici a due o tre dimensioni, polimorfa a seconda degli argomenti in ingresso;

Il modello a Rate Equations (RE) a cui si fa riferimento è quello in cui le lacune termalizzano con un unico livello di Fermi (*modello a macro-stato lacune QD+WL*). Nel modello si prende in considerazione solo la popolazione di QD laseranti; l'emissione (stimolata e spontanea) avviene sia da GS che da ES; si trascura la transizione non radiativa da SCH. I modelli implementati considerano i casi seguenti rispetto all'emissione stimolata:

1. emissione stimolata solo da GS (sistema RE linearizzate di ordine  $7 \times 7$ );
2. emissione stimolata solo da ES (sistema RE linearizzate di ordine  $7 \times 7$ );
3. emissione stimolata sia da GS che da ES (sistema RE linearizzate di ordine  $8 \times 8$ ).

Quanto riportato in seguito è per l'ultimo caso, che è il più generale. Inoltre si considera una probabilità non nulla di cattura diretta degli elettroni, dal WL al GS.

Nella procedura descritta non sono usati metodi numerici e ci si riferisce alla sua implementazione come *simulatore analitico*. Si utilizza, invece, un *simulatore numerico* (paragrafo A.2), che utilizza metodi numerici per il calcolo delle grandezze in ingresso al simulatore analitico.

In ingresso al simulatore analitico (e numerico) i seguenti parametri:

- parametri che descrivono la struttura di banda:
    - energie livelli;
    - degeneracy stati confinati;
  - parametri del materiale:
    - probabilità di esistenza dei QD laseranti;
    - densità QD;
    - numero di layer;
    - tempi di guadagno (inserito attraverso i tempi) per GS ed ES;
- 
- libreria di funzioni matematiche;
  - libreria che permette di integrare funzioni Matlab<sup>®</sup> con altri linguaggi (C, C++, Fortran).

Questo linguaggio è concepito, quindi, per risolvere problemi formulati in forma vettoriale e matriciale, in quanto offre meccanismi molto semplici da usare e, al tempo stesso, sofisticati ed efficienti per il trattamento di array di dati. Per gli stessi scopi, esistono anche altri linguaggi di programmazione, di simile concezione e che differiscono per lo più per aspetti operativi.

- tempi di cattura/rilassamento e tempi di diffusione (da SCH a WL) per elettroni e lacune;
- tempi di vita portatori per ricombinazioni non radiativa in WL, ES e GS e radiativa in ES e GS;
- tempi di vita dei fotoni da GS ed ES;
- energia termica (a 300 K);
- parametri geometrici:
  - lunghezza della guida;
  - larghezza della guida;
  - spessore SCH.

Le quantità in uscita dal simulatore numerico ed in ingresso al simulatore analitico sono:

- concentrazione di elettroni e lacune nei livelli energetici (da cui le probabilità di occupazione negli stati confinati);
- probabilità di occupazione delle lacune nel macro-stato QD+WL;
- concentrazione di fotoni GS ed ES: è la caratteristica potenza-corrente da cui si ricava la corrente di soglia;
- tempi di fuga per elettroni e lacune;
- tempo di iniezione in SCH;
- livello di Fermi per le lacune nel macro-stato;
- DOS, normalizzata per QD, per elettroni e lacune nel WL;
- step di corrente (già usato per la risposta IM numerica);
- costanti fisiche (massa portatori,  $\hbar$ ).

Altre costanti introdotte nel simulatore analitico sono:

- tempo di fuga, per elettroni e lacune, da WL a SCH. Questi tempi sono considerati costanti rispetto alla concentrazione di portatori nel WL;<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup>Nel simulatore numerico questi tempi dipendono dalla concentrazione dei portatori nel WL: i valori utilizzati nel simulatore analitico sono quelli dati dal simulatore numerico per una data concentrazione di portatori nel WL.

- tempo di cattura diretta dal WL al GS;<sup>3</sup>
- fattore di emissione spontanea.<sup>4</sup>

Il tempo di fuga relativo alla cattura diretta viene calcolato dal relativo tempo di cattura (condizione di equilibrio termodinamico) e come gli altri tempi viene considerato indipendente dall'iniezione di corrente.

Le altre grandezze calcolate dal simulatore analitico, e dipendenti dall'iniezione, sono:<sup>5 6</sup>

- derivata della probabilità di occupazione delle lacune nel GS rispetto alla concentrazione delle stesse in QD+WL;
- derivata della probabilità di occupazione delle lacune in ES rispetto alla concentrazione delle stesse in QD+WL;
- elementi di matrice del sistema delle RE linearizzate;
- soluzione del sistema lineare delle RE,<sup>7</sup> da cui le funzioni di trasferimento per fotoni e portatori;
- calcolo di poli e zeri come radici rispettivamente del denominatore e numeratore della funzione di trasferimento;<sup>8</sup>

---

<sup>3</sup>Viene utilizzato un valore di  $10^4$  nel caso si trascuri la cattura diretta, sia nel simulatore analitico che in quello numerico.

<sup>4</sup>Valore di  $10^{-2}$  come nel simulatore numerico (in cui compare come costante numerica nelle RE).

<sup>5</sup>Il calcolo delle grandezze rispetto alla corrente è implementato con un ciclo `for` con indice sulle correnti.

<sup>6</sup>Le derivate della probabilità di occupazione degli elettroni sia nel GS che in ES, rispetto alla concentrazione di lacune in QD+WL, è posta pari a zero (approssimazione).

<sup>7</sup>Il termine forzante si ricava dallo step di corrente e dal tempo di iniezione in SCH.

<sup>8</sup>Per il tipo di risultati che si hanno (radici di un polinomio nella pulsazione, di grado superiore a due, a coefficienti complessi), si è ritenuto usare una precisione minore dell'`eps` di Matlab<sup>®</sup> per la parte immaginaria dei poli. Per fare questo si impone una condizione logica: il modulo della parte immaginaria dei poli deve essere minore di  $10^{-\delta}$  con  $\delta > 0$ . Il valore di  $\delta$  viene determinato caso per caso a posteriori, in modo da non avere problemi di 'rappresentazione': poli reali che diventano complessi, non coniugati, per alcune correnti, ma con parte immaginaria troppo piccola. Il valore di  $\delta$  generalmente è di  $10 \div 12$ , quindi si ha una quantità maggiore dell'`eps` di Matlab<sup>®</sup> (la più piccola differenza rappresentabile tra due numeri), che è pari a  $2,2204 \times 10^{-16}$ . Il valore di  $\delta$  è da intendere come il massimo valore che garantisce questo tipo di rappresentazione.

La condizione sulla parte immaginaria da come risultato un array logico (in cui c'è un padding di zero logici). L'array dei poli reali è ottenuto come prodotto tra l'array di tutti i poli con l'array logico, mentre i poli complessi coniugati sono ricavati per differenza tra l'array di tutti i poli e l'array dei poli reali. La scelta di  $\delta$  evita che l'array dei poli

- calcolo del fattore di merito ( $Q$ ) per i poli complessi coniugati.<sup>9</sup>

Riguardo agli elementi di matrice, nel caso di emissione sopra soglia, si tiene conto della condizione di laseramento, includendo implicitamente il contributo derivante dall'homogenous broadening; nel caso di emissione sotto soglia, invece, lo stesso termine di matrice deve essere espresso in funzione dei soli parametri della popolazione laserante (tali termini tendono al valore che hanno sopra soglia se la probabilità di esistenza dei QD laseranti tende ad 1).

In ambiente Matlab<sup>®</sup> solitamente si rappresentano le grandezze in gioco con array numerici o logici, ma per effettuare i calcoli precedenti, si è utilizzato anche un array di tipo simbolico per rappresentare la pulsazione.<sup>10</sup> Gli oggetti simbolici sono un nuovo tipo di variabile built-in, in aggiunta ai tipi già noti (double, int, character, ecc.).

Inizialmente, i poli sono stati ricavati a partire dal calcolo simbolico del determinante della matrice del sistema delle RE;<sup>11</sup> infatti la matrice, pur essendo sparsa, ha un ordine tale da rendere piuttosto laborioso il calcolo del determinante a mano.<sup>12</sup> L'andamento della risposta IM conseguente suggeriva l'esistenza di almeno uno zero, per cui si è proceduto al calcolo completo della soluzione del sistema delle RE. Il sistema lineare viene risolto direttamente,<sup>13</sup> senza metodi numerici, dato che la matrice è sparsa. La soluzione del sistema, e conseguentemente la funzione di trasferimento, sono espressioni simboliche nella pulsazione. La rappresentazione simbolica è utile anche per verificare a vista alcune proprietà della funzione di trasferimento, come ad esempio, la presenza di un polo e di uno zero nell'origine per ogni

---

complessi coniugati contenga anche i poli complessi non coniugati di cui sopra. Tutti gli array, per come sono generati, hanno le stesse dimensioni. La stessa implementazione vale per gli zeri.

<sup>9</sup>L'array che contiene i valori di  $Q$ , per le scelte fatte, viene ad essere una matrice in cui il numero di righe corrisponde all'ordine del sistema (7 o 8), e ogni colonna è relativo ad un valore di corrente; nel caso in cui tale matrice è quadrata, l'interprete Matlab<sup>®</sup> restituisce come risultato la sua trasposta.

<sup>10</sup>Questo è possibile grazie al Symbolic Math Toolbox di Matlab<sup>®</sup> che utilizza il motore simbolico MuPAD (precedentemente il Symbolic Math Toolbox conteneva una parte del motore di Maple 10, sostituita da MuPAD a partire dalla release R2007b+).

<sup>11</sup>Codice Matlab<sup>®</sup>: `collect(det(A))`, dove  $A$  è la matrice, `det` è la funzione che ne calcola il determinante e `collect` è la funzione che esprime il risultato come potenze della variabile simbolica, in questo caso la pulsazione.

<sup>12</sup>La complessità computazionale del determinante di una matrice quadrata  $n \times n$  è  $n!(2n + 1)$ .

<sup>13</sup>*Divisione a sinistra* presente in Matlab<sup>®</sup>.

corrente. Dal numeratore e denominatore della funzione di trasferimento si trovano rispettivamente zeri e poli.<sup>14</sup>

Per il calcolo della risposta IM, si considera lo stesso sistema lineare precedente, ma in cui la pulsazione non è rappresentata simbolicamente: servono infatti i plot rispetto alla frequenza. Si procede risolvendo nuovamente il sistema, di cui si calcola la soluzione per tutte le correnti e pulsazioni,<sup>15</sup> piuttosto che lavorare sulle funzioni simboliche ottenute in precedenza. Dalla soluzione si ricavano le risposte IM per fotoni e portatori da cui modulo<sup>16</sup> (normalizzato rispetto al valore assunto alla minima frequenza)<sup>17</sup> e fase<sup>18</sup>.

La frequenza massima della banda a  $-3$  dB è espressa semplicemente come la media aritmetica dei due valori di frequenza in cui la risposta IM assume i valori più prossimi, per difetto e per eccesso, a  $-3$  dB.<sup>19</sup>

Inoltre se si considerano anche le seguenti quantità:

- probabilità di esistenza dei QD non laseranti (dai parametri di ingresso);
- homogenous broadening (dai parametri di ingresso);
- tempi di guadagno (inserito attraverso i tempi), per GS ed ES, relativi alla popolazione di QD non laseranti (dai parametri di ingresso);
- concentrazioni portatori per QD non laseranti (in uscita dal simulatore numerico);

si può anche calcolare il guadagno per ogni valore di corrente.

---

<sup>14</sup>Le funzioni Matlab® utilizzate sono dalla più interna: `numden`, che restituisce numeratore e denominatore della funzione fratta, `sym2poly` che converte l'espressione di un polinomio, in variabile simbolica, nel vettore dei suoi coefficienti e `roots` che dal vettore dei coefficienti calcola le radici del polinomio.

<sup>15</sup>Implementazione con un doppio ciclo `for` annidato: uno per le correnti e uno per le pulsazioni.

<sup>16</sup>Funzione Matlab®: `abs`.

<sup>17</sup>Nel caso l'emissione da GS sia sotto soglia e quella da ES sia sopra soglia, conviene, normalizzare la risposta da GS rispetto al valore assunto alla minima frequenza di ES.

<sup>18</sup>Funzione Matlab®: `angle`.

<sup>19</sup>I valori più prossimi a  $-3$  dB, per difetto e per eccesso, si trovano imponendo una condizione logica, rispettivamente di minore e di maggiore a  $-3$  dB, per la risposta IM. Per trovare nell'array logico conseguente i corrispondenti indici del primo valore più prossimo, si usa la funzione Matlab® `find` con le opzioni `first` e `last`, rispettivamente per il minore e il maggiore. Tali indici individuano, nell'array delle frequenze, i valori di cui si fa la media.

## A.2 Il simulatore numerico

Il simulatore numerico, implementato in ambiente Matlab<sup>®</sup>, calcola per vari valori della corrente di bias, i valori stazionari delle concentrazioni dei portatori e dei fotoni (dalle RE), nonché la risposta IM (dalle RE, dato uno step di corrente attorno al bias point). Il modello a RE è implementato in una function, la quale è richiamata dal programma principale. Tale function implementa, quindi, un sistema di equazioni differenziali del tipo  $y' = f(t, y)$  dove  $f$  è una la funzione vettoriale. Nel caso di modello a macro-stato lacune QD+WL,  $f$  ha 12 componenti poiché, rispetto al corrispondente caso analitico, si considera anche la popolazione di QD non laseranti.

Questo sistema di equazioni differenziali è di tipo **stiff**. Un sistema, di ordine superiore al primo, si dice stiff quando presenta autovalori con costanti di tempo aventi ordini di grandezza differente. I problemi stiff si incontrano, ad esempio, quando si vuole simulare un fenomeno caratterizzato da un transitorio molto veloce, dopo il quale il sistema si stabilizza su una soluzione che varia più lentamente nel tempo. Il sistema stiff risulta essere numericamente instabile secondo certi metodi di integrazione numerici, a meno che il passo di integrazione non sia abbastanza piccolo. Per mantenere la stabilità dell'integrazione bisogna basarsi sull'autovalore più piccolo: il passo massimo dipende dall'autovalore relativo ad un termine della soluzione che diventa rapidamente trascurabile. Quindi i sistemi stiff richiedono grandi tolleranze.

Matlab<sup>®</sup> fornisce diverse *function*, o solutori, per l'integrazione numerica di sistemi di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine con condizioni iniziali. Queste function sono chiamate ODE (Ordinary Differential Equation). Nei casi stiff, come quello in esame, si usa *ode23s* (la s sta per stiff), che è un solutore basato su una formula modificata di Rosenbrock di ordine 2; è una generalizzazione del metodo Runge-Kutta. I metodi di Rosenbrock sono metodi impliciti, nei quali l'equazione non lineare per la valutazione della soluzione al nuovo passo è ottenuta tramite un passo del metodo di Newton; si tratta quindi di un risolutore a singolo passo (variabile);<sup>20</sup> per questo risulta efficiente per tolleranze stringenti.

Il simulatore numerico è stato modificato per implementare anche i modelli:

1. dinamica discreta lacune;
2. eccitonico.

---

<sup>20</sup>Un risolutore è a singolo passo quando per calcolare la soluzione al passo  $n$  esso necessita solamente della soluzione ottenuta al passo precedente, ovvero  $n - 1$ .

Per il caso *dinamica discreta lacune* si è proceduto come segue:<sup>21</sup>

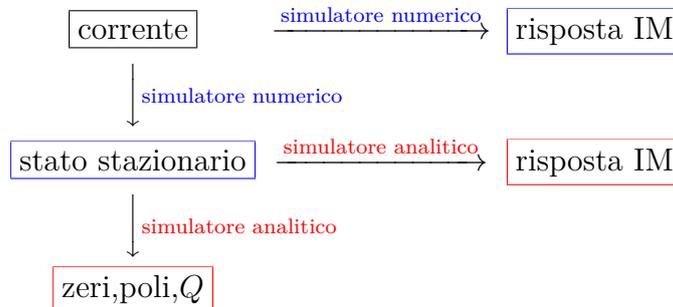
- introduzione, per le lacune, dei tempi di cattura/rilassamento (con il relativo calcolo dei corrispondenti tempi di fuga) per i livelli GS, ES<sub>1</sub>, ES<sub>2</sub>, ES<sub>3</sub>, ES<sub>4</sub> e WL;<sup>22</sup> l'energia di questi livelli è la stessa del caso macro-stato;
- eliminazione del livello di Fermi del macro-stato e della relativa termalizzazione delle lacune.

Le equazioni differenziali (RE), conseguenti all'introduzione dei tempi nella banda di valenza, sono 17 e sono integrate numericamente con ode23s.

Nel caso *eccitonico* si modificano anche le energie della banda di valenza (parametri di input), le quali devono essere simmetriche rispetto a quelle della banda di conduzione. Questo porta ad avere un sistema di 10 equazioni differenziali (RE) risolte numericamente con ode23s.

### A.3 Il ruolo dei due simulatori

L'implementazione dei calcoli si può riassumere nel seguente schema, in cui il colore blu è relativo alla parte numerica e il rosso a quella analitica:



Data la corrente come input al simulatore numerico, questi calcola la risposta IM e lo stato stazionario<sup>23</sup>; quest'ultimo è l'input del simulatore analitico, che

<sup>21</sup>Per semplicità il guadagno (e quindi il tasso di emissione stimolata) alla lunghezza d'onda dei fotoni ES del gruppo di QD laseranti, così come pure del gruppo non laserante alla lunghezza d'onda di GS ed ES, è posto pari a zero; anche il tasso di emissione spontanea, negli stessi casi, è posto pari a zero. Inoltre non avendo più il macro-stato per le lacune, non è necessario esprimere i tassi di emissione stimolata, spontanea e non radiativa totali.

<sup>22</sup>I tempi di vita non radiativi per le lacune sono posti uguali ai corrispondenti tempi per gli elettroni.

<sup>23</sup>Il simulatore numerico calcola la condizione stazionaria al variare (a piccoli step) della corrente di bias, usando ad ogni passo, come condizione iniziale, i valori stazionari ottenuti al passo precedente.

calcola le caratteristiche dinamiche (risposta IM, zeri, poli e  $Q$ ). La risposta IM calcolata dal simulatore analitico è confrontata con quella calcolata con il simulatore numerico; in linea di principio non possono coincidere poiché

- il simulatore analitico parte da equazioni approssimate (ipotesi di linearità) risolto in modo ‘esatto’;
- il simulatore numerico parte da equazioni ‘esatte’ risolte in modo approssimato.

Naturalmente il risultato in entrambi i casi è ‘numerico’, ma mentre nel caso del simulatore analitico deriva da una discretizzazione uniforme (la rappresentazione di un intervallo continuo di valori richiede memoria infinita), nel caso del simulatore numerico si tratta di una discretizzazione non uniforme (data dal metodo numerico ode23s).

# Appendice B

## Altri risultati

### B.1 Macro-stato lacune: emissione da GS

#### B.1.1 Set Greedy lento (intero ensemble laserante)

Si prende in considerazione il set di parametri Greedy lento, ma con  $G_n = 0,999$ ; in tal caso, come per il set Arakawa che ha lo stesso valore di  $G_n$ , viene a non avere peso il contributo al guadagno dei dot non laseranti (intero ensemble di dot laserante). Rispetto allo stesso set, ma con  $G_n = 0,65$ , *non* si ha un errore dovuto all'aver trascurato, nel modello analitico, la popolazione di dot non laseranti. L'accordo delle risposte date dai modelli analitico e numerico (figura B.2),<sup>1</sup> confermano la precedente asserzione.

---

<sup>1</sup>Le risposte, in questo caso, si riferiscono alla funzione di trasferimento e *non* al suo quadrato (per questo è riportato il coefficiente 1/2 in ordinata); i motivi di questo sono solo "storici".

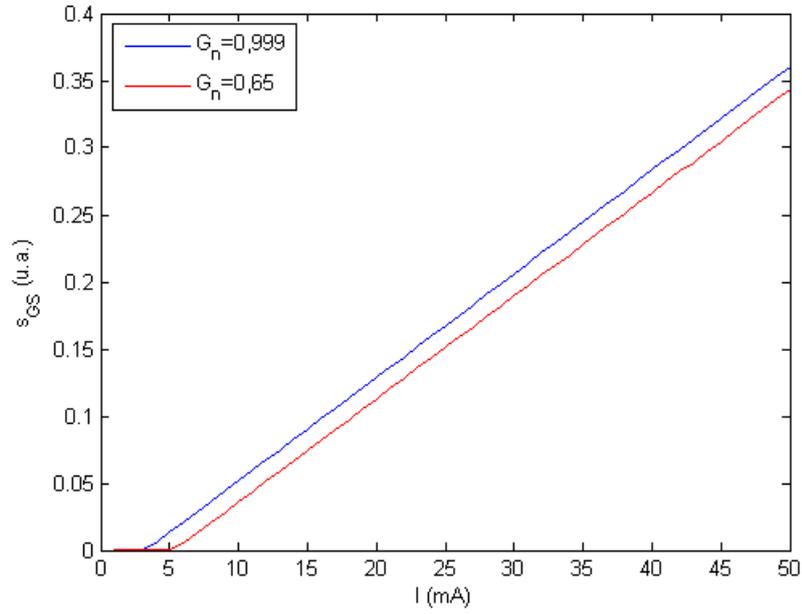


Figura B.1: Densità normalizzata di fotoni GS rispetto alla corrente di bias.

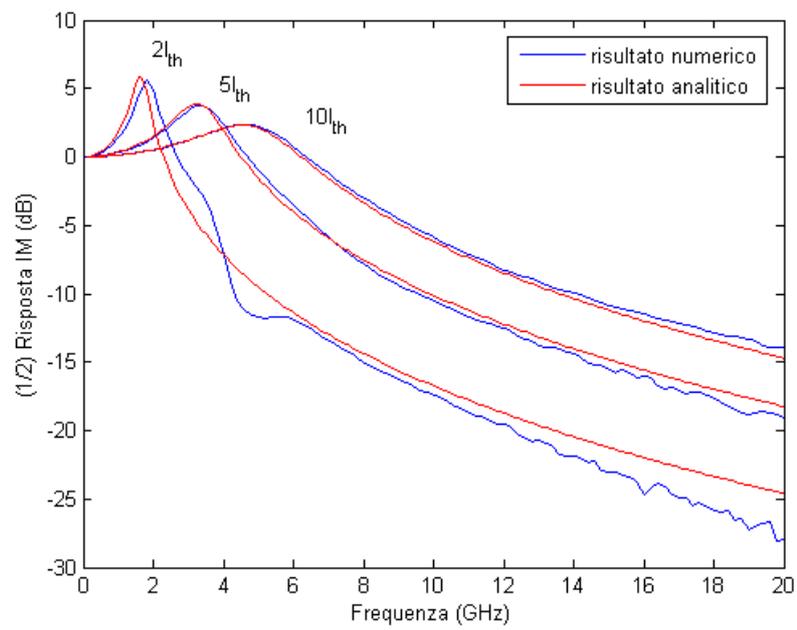


Figura B.2: Risposta IM vs bias.

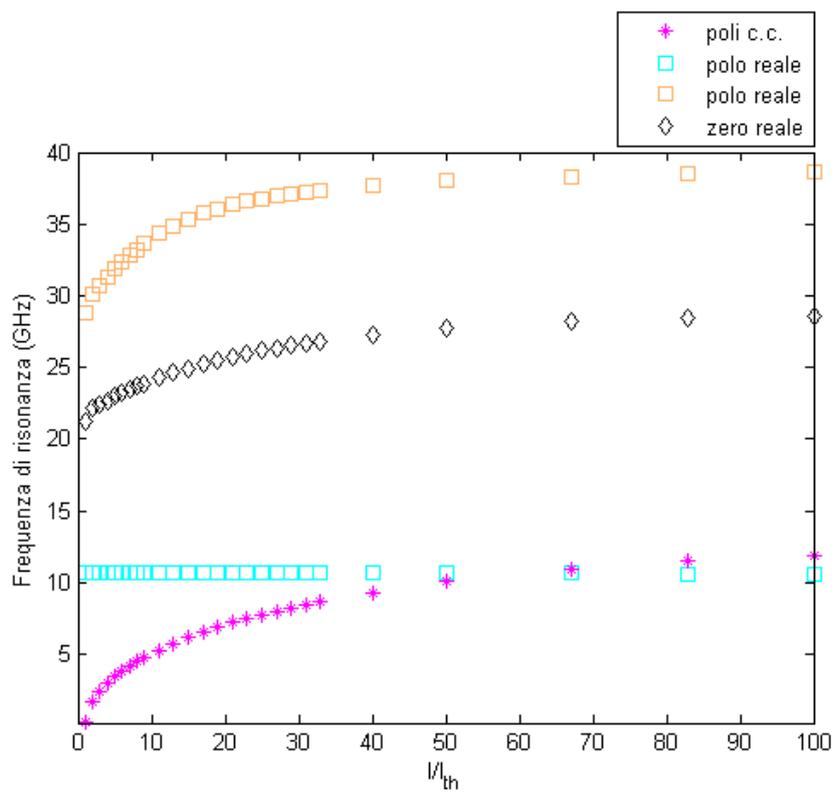


Figura B.3: Andamento di poli e zeri con la corrente di bias.

### B.1.2 Cattura diretta: caratteristiche statiche

Seguono le densità dei portatori e le probabilità di occupazione. Come spiegato nei paragrafi 2.4.1 e 3.4.1, tali curve presentano un ‘ginocchio’ in prossimità della corrente di soglia, pari a 5 mA (figura 3.3).

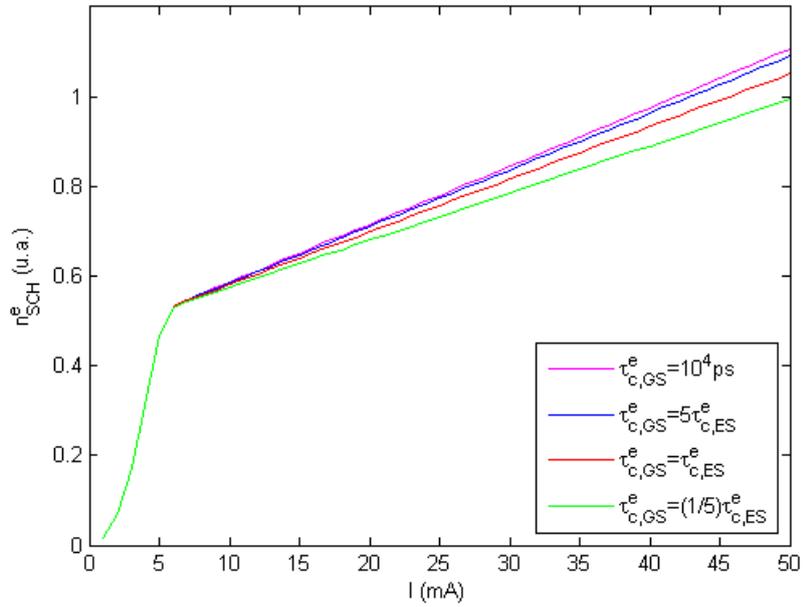


Figura B.4: Densità normalizzata di elettroni SCH rispetto alla corrente di bias (set Greedy lento).

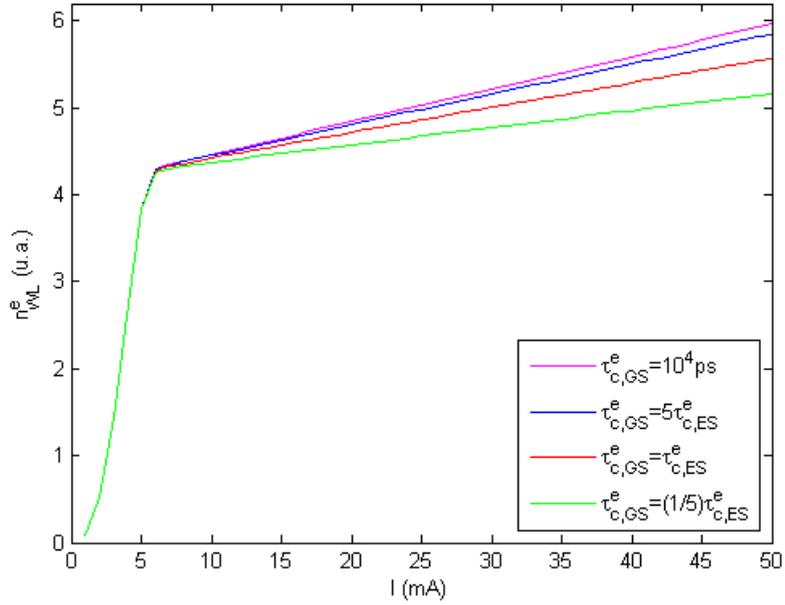


Figura B.5: Densità normalizzata di elettroni WL rispetto alla corrente di bias (set Gready lento).

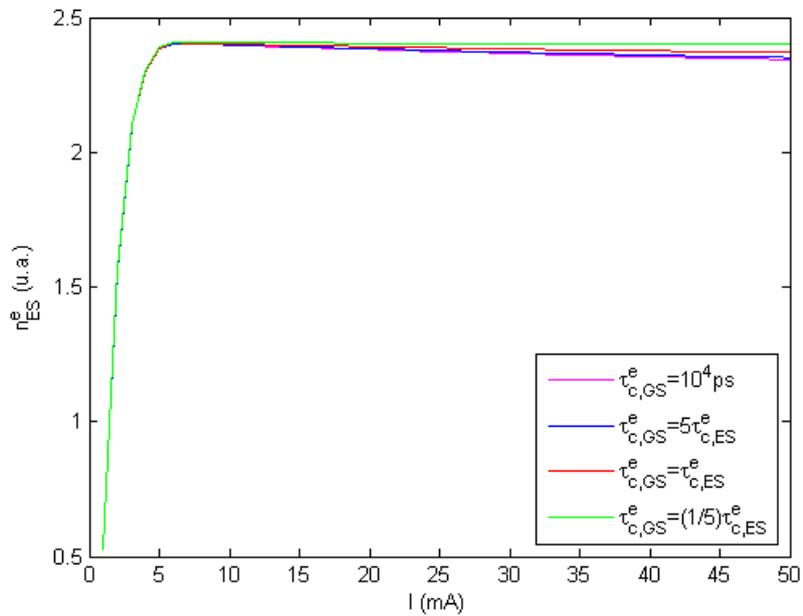


Figura B.6: Densità normalizzata di elettroni ES rispetto alla corrente di bias (set Gready lento).

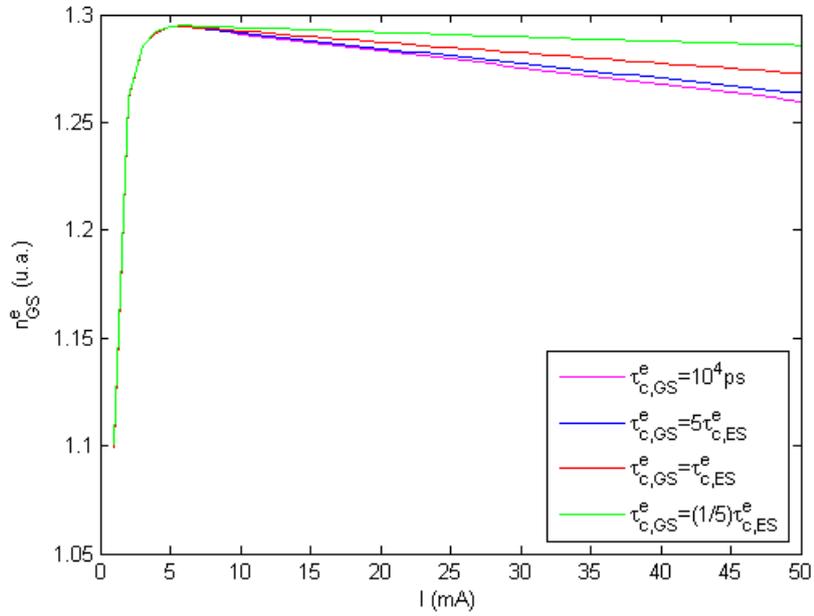


Figura B.7: Densità normalizzata di elettroni GS rispetto alla corrente di bias (set Greedy lento).

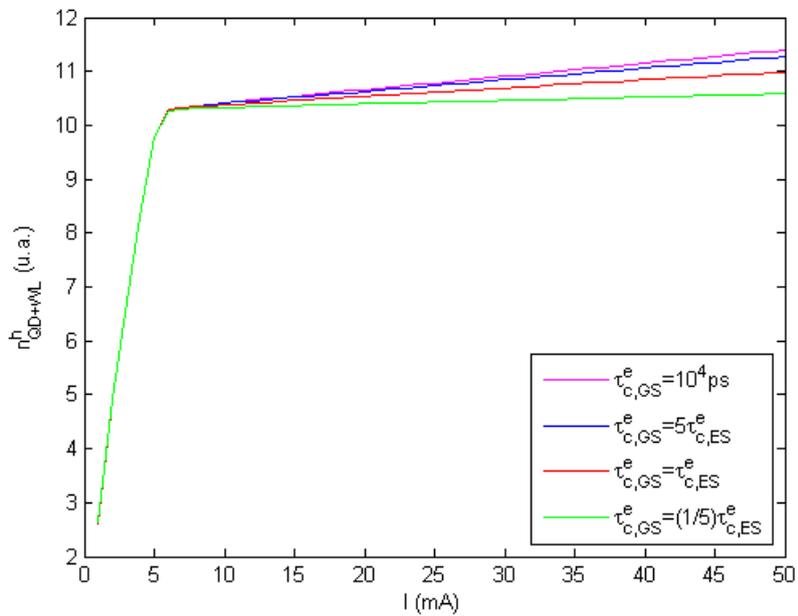


Figura B.8: Densità normalizzata di lacune QD+WL rispetto alla corrente di bias (set Greedy lento).

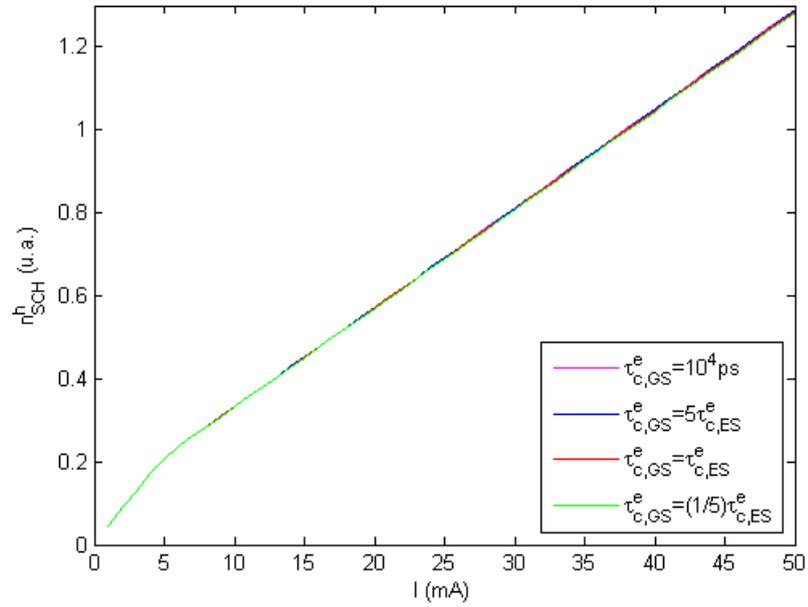


Figura B.9: Densità normalizzata di lacune SCH rispetto alla corrente di bias (set Greedy lento).

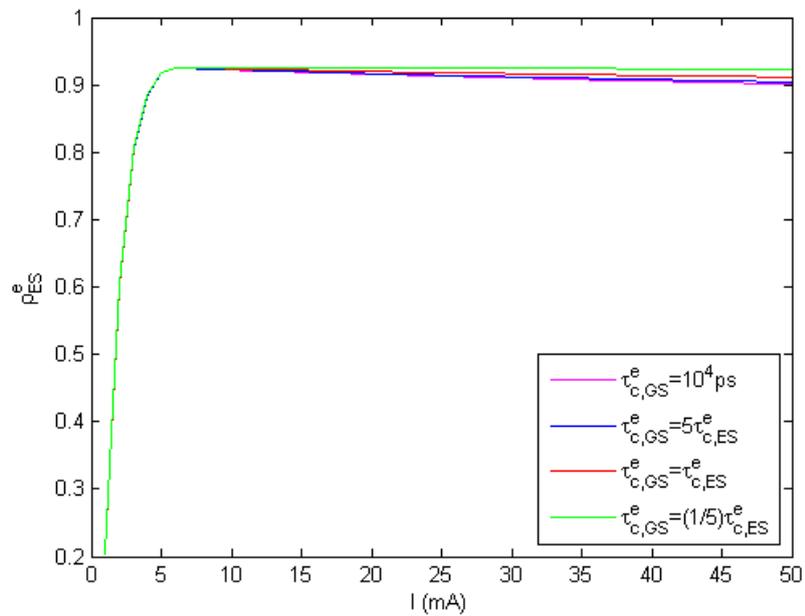


Figura B.10: Probabilità di occupazione degli elettroni nello stato ES rispetto alla corrente di bias (set Greedy lento).

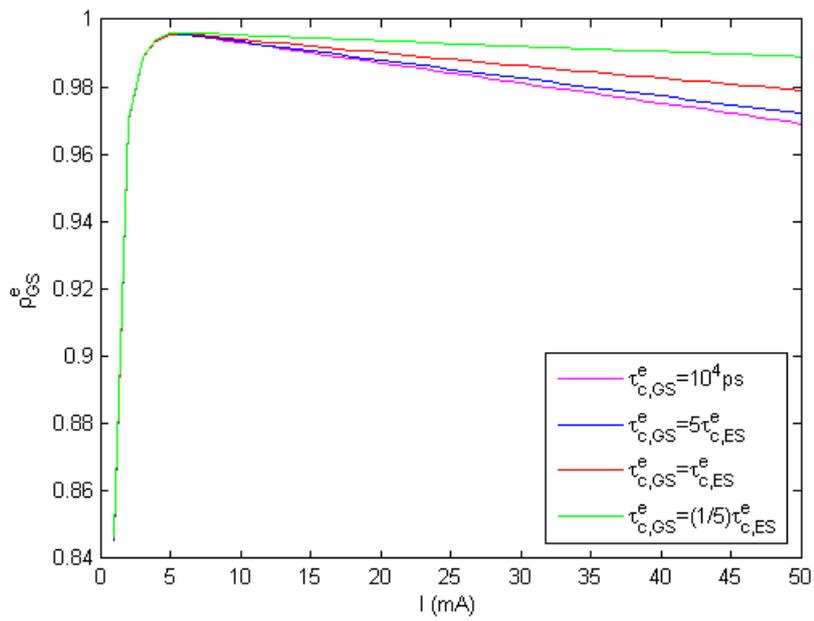


Figura B.11: Probabilità di occupazione degli elettroni nello stato GS rispetto alla corrente di bias (set Greedy lento).

### B.1.3 Dinamica sotto soglia

Il valore della corrente di soglia, per i set Arakawa e Gready lento, è rispettivamente di, 4 mA e 5 mA (figura 2.4).

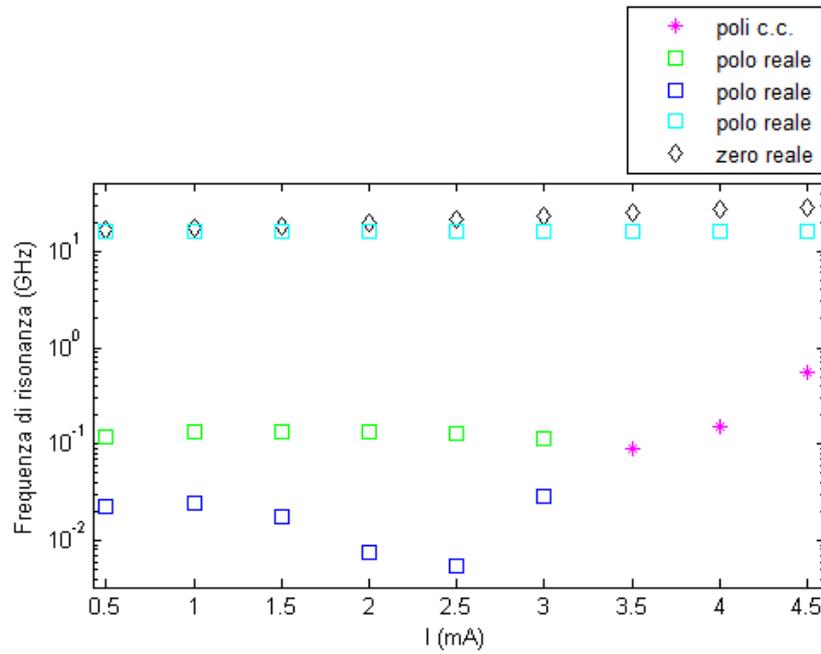


Figura B.12: Andamento di poli e zeri rispetto alla corrente di bias (set Arakawa).

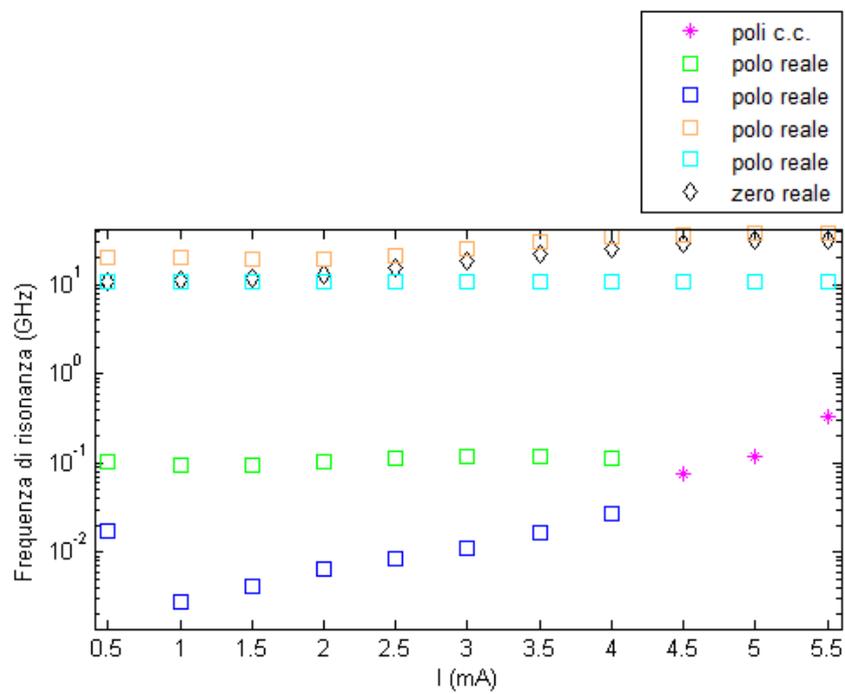


Figura B.13: Andamento di poli e zeri rispetto alla corrente di bias (set Gready lento).

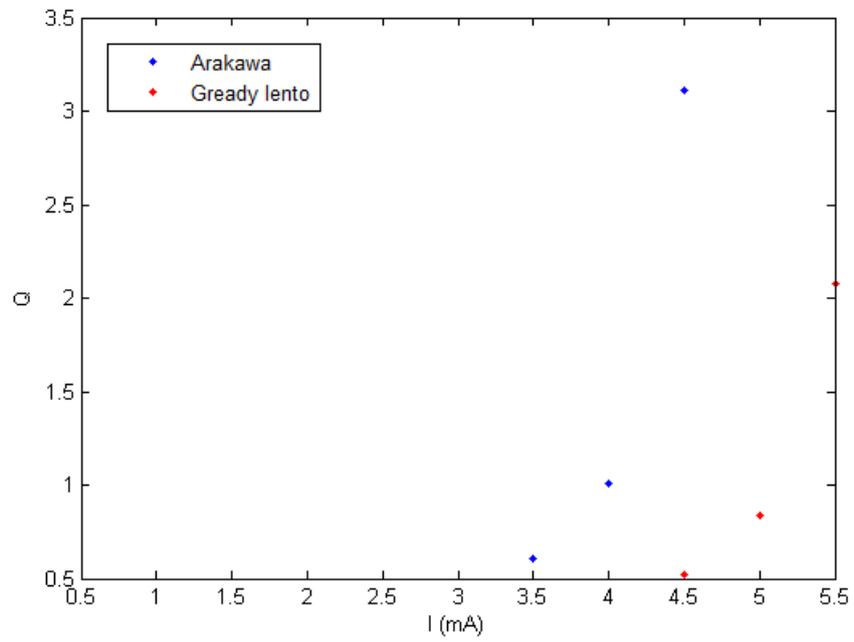


Figura B.14: Fattore di merito rispetto alla corrente di bias (set a confronto).

## B.2 Dinamica discreta lacune (emissione da GS)

La figura B.15 mostra l'andamento, rispetto alla corrente di bias, del guadagno modale per i fotoni GS, per i seguenti valori del tempo di vita di questi ultimi:

- $\tau_{p,GS} = 5 \text{ ps}$ : valore tale da soddisfare la condizione di laseramento (il bilancio del guadagno e delle perdite, spiegato nel paragrafo 2.2) e, quindi, tale da permettere di raggiungere un valore di guadagno di soglia (il guadagno *saturo* a questo valore), in questo caso pari a  $23,33 \text{ cm}^{-1}$ ; tale valore risulta confrontabile con quelli riportati in letteratura e in particolare in [12]; poiché il numero di layer è 15 (set Gready lento) risulta che, il guadagno modale per singolo layer è di circa  $1,56 \text{ cm}^{-1}$ ;
- $\tau_{p,GS} = 1 \text{ ps}$ : valore troppo basso per soddisfare la condizione di laseramento; *non* si raggiunge, per nessun valore della corrente di bias, un valore di guadagno di soglia.

Inoltre, il valore dei parametri  $n_d$  (la densità di dot per layer) e  $n_l$  (il numero di layer che formano lo stack) influisce sul valore del guadagno modale netto, che aumenta all'aumentare del valore dei suddetti parametri [9].

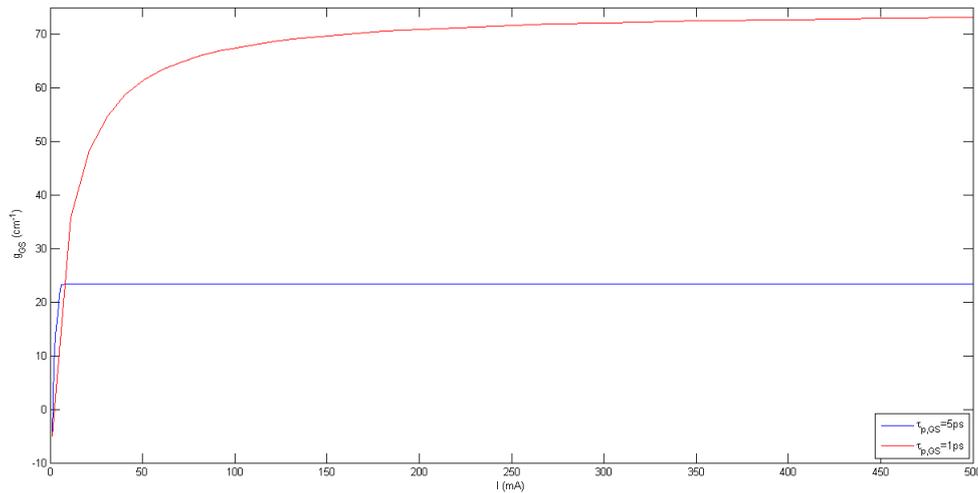


Figura B.15: Guadagno dei fotoni GS rispetto alla corrente di bias (set Gready lento).

### B.2.1 Risposta portatori (emissione da GS)

La risposta IM vista finora riguardava i fotoni; se questi ultimi sono “particelle” si valuta il loro numero (l’intensità del segnale ottico) rispetto ad una frequenza di modulazione (associata al segnale di corrente).

Ovviamente, si può fare lo stesso per i portatori che popolano i vari livelli energetici permessi. L’interesse per questo tipo di risultati nasce dal fatto che essi hanno un impatto sul *chirp* (modulazione spuria di frequenza) al crescere della frequenza di modulazione [16].

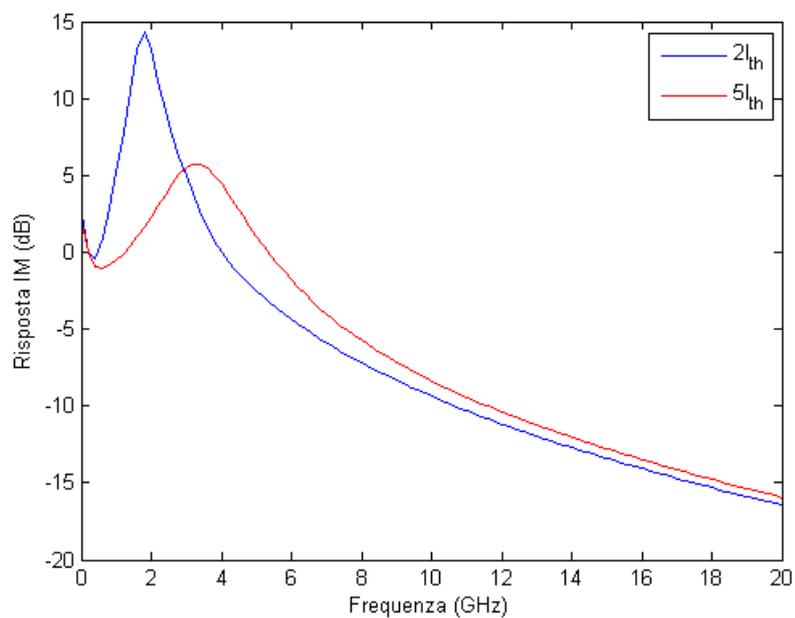


Figura B.16: Risposta IM per gli elettroni WL (set Gready lento).

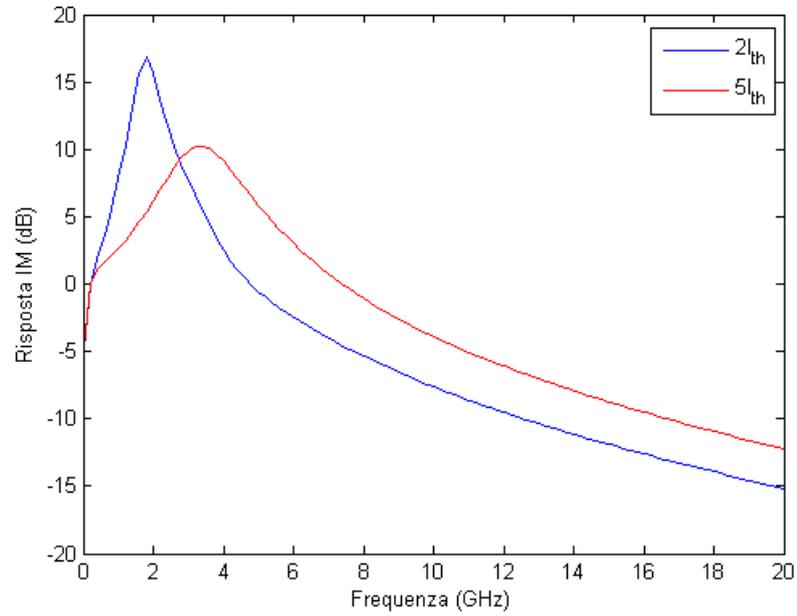


Figura B.17: Risposta IM per gli elettroni ES (set Greedy lento).

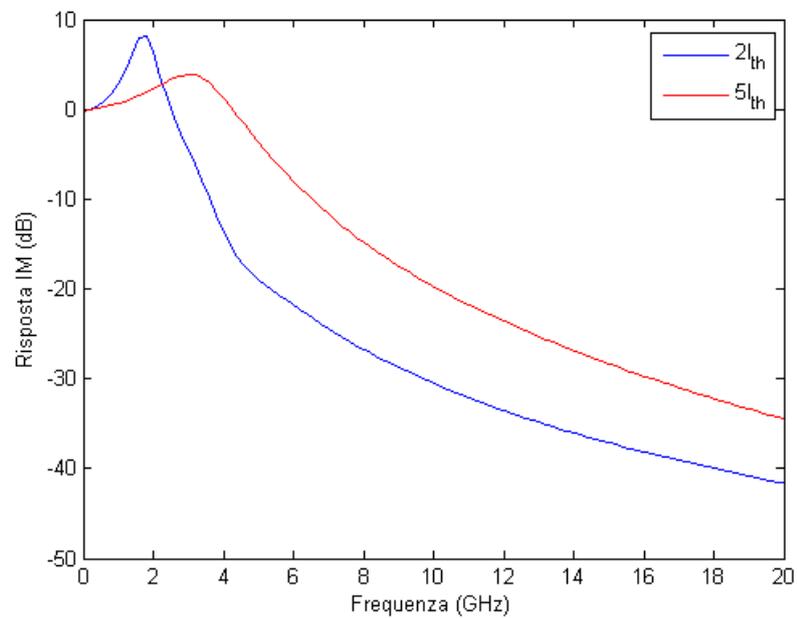


Figura B.18: Risposta IM per gli elettroni GS (set Greedy lento).

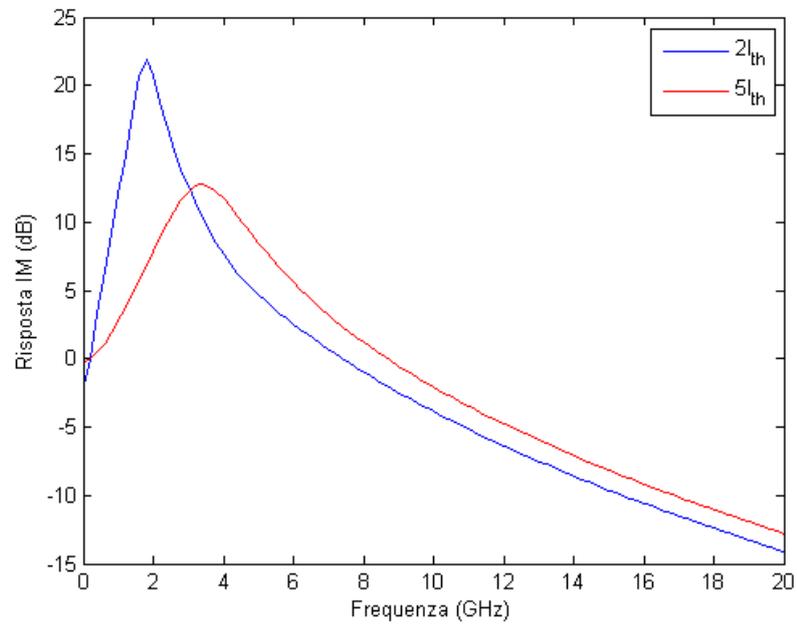


Figura B.19: Risposta IM per le lacune GS (set Greedy lento).

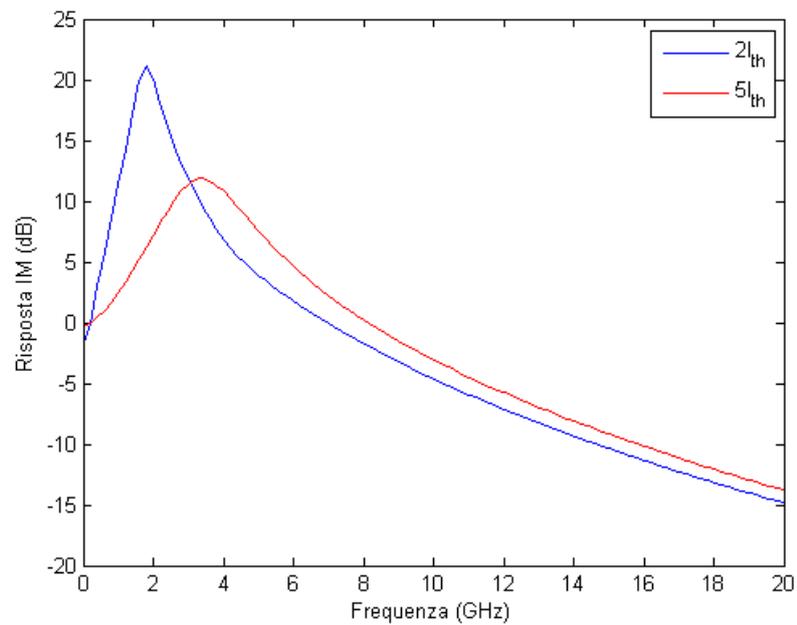


Figura B.20: Risposta IM per le lacune ES<sub>1</sub> (set Greedy lento).

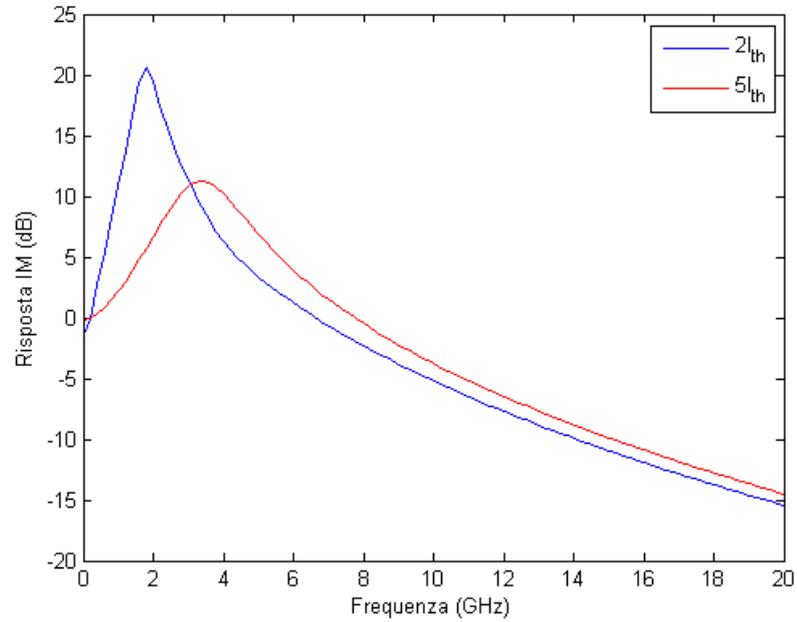


Figura B.21: Risposta IM per le lacune ES<sub>2</sub> (set Greedy lento).

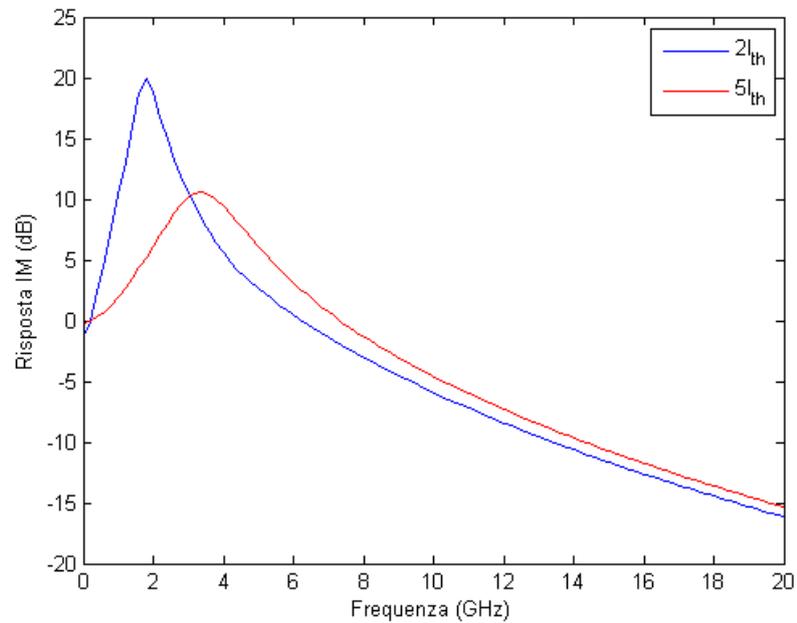


Figura B.22: Risposta IM per le lacune ES<sub>3</sub> (set Greedy lento).

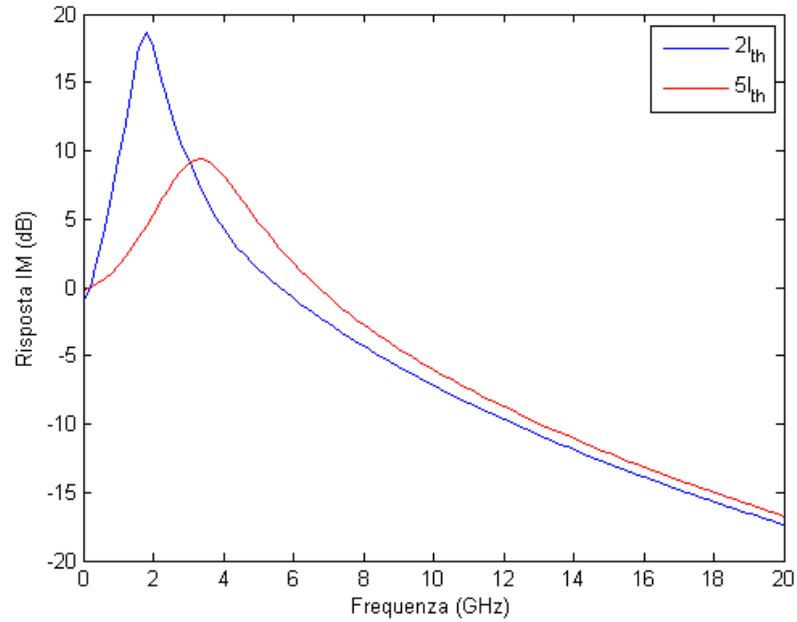


Figura B.23: Risposta IM per le lacune ES<sub>4</sub> (set Gready lento).

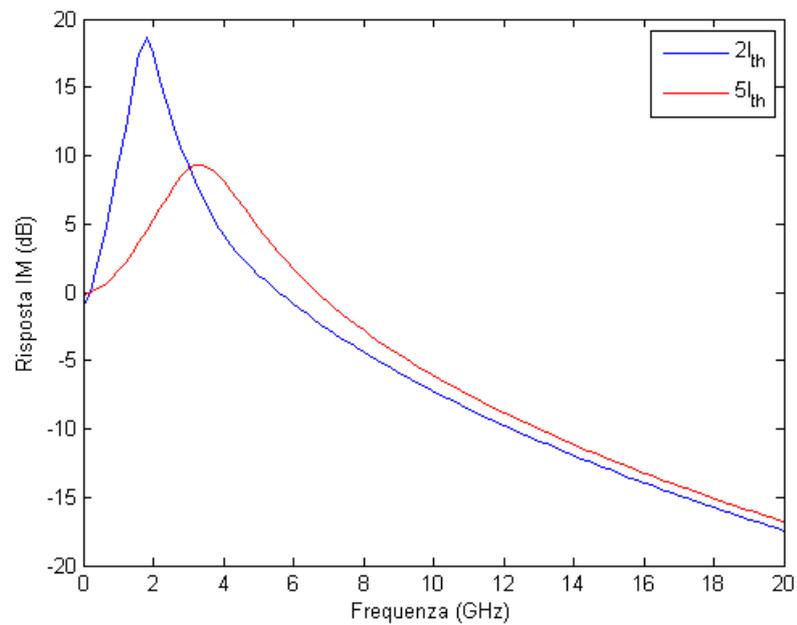


Figura B.24: Risposta IM per le lacune WL (set Gready lento).

## B.2.2 Risposta elettronici (emissione simultanea da GS ed ES)

Si confrontano le risposte elettroniche per i seguenti valori di corrente di bias:

- 60 mA: emissione da GS, ma *vicino* alla soglia ES;
- 80 mA: emissione *simultanea* da GS ed ES.

Valgono le osservazione generali, fatte nel paragrafo 2.6, sulla potenza ottica totale e le sue due componenti.

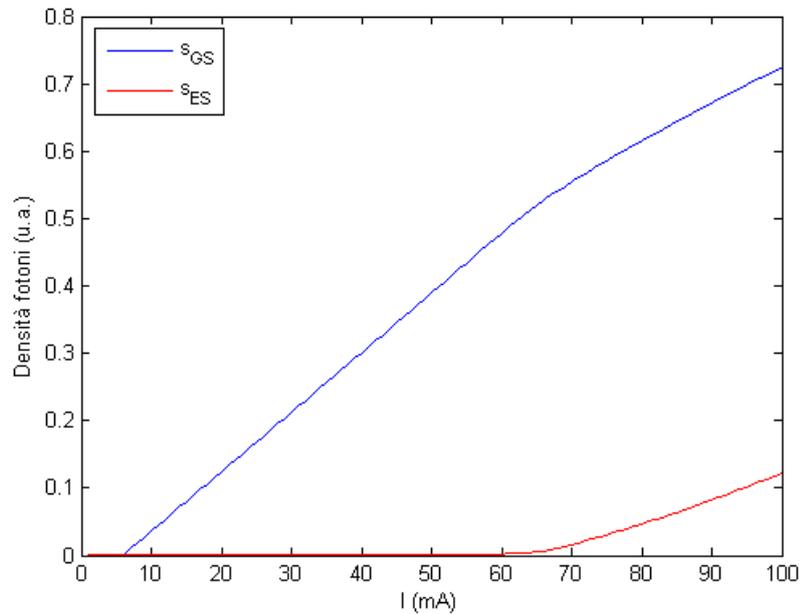


Figura B.25: Densità normalizzata di fotoni GS ed ES rispetto alla corrente di bias (set Gready lento).

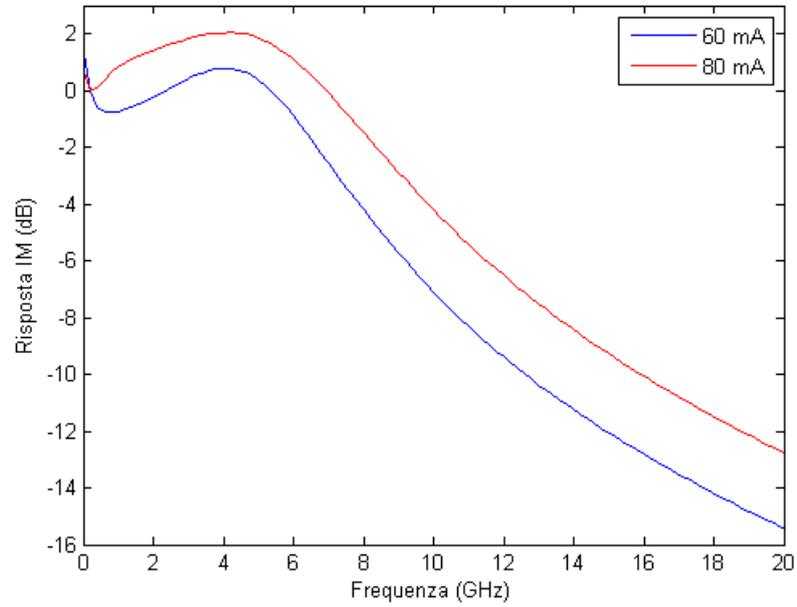


Figura B.26: Risposta IM per gli elettroni WL (set Gready lento).

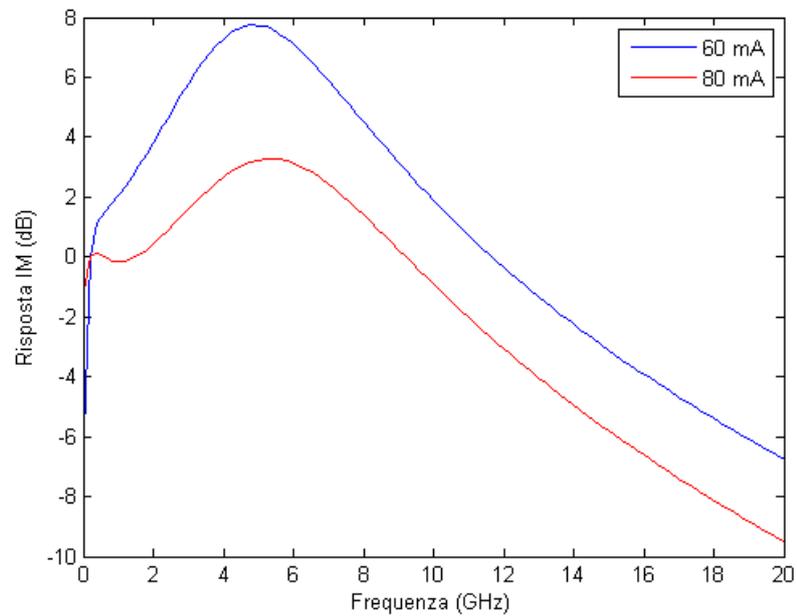


Figura B.27: Risposta IM per gli elettroni ES (set Gready lento).

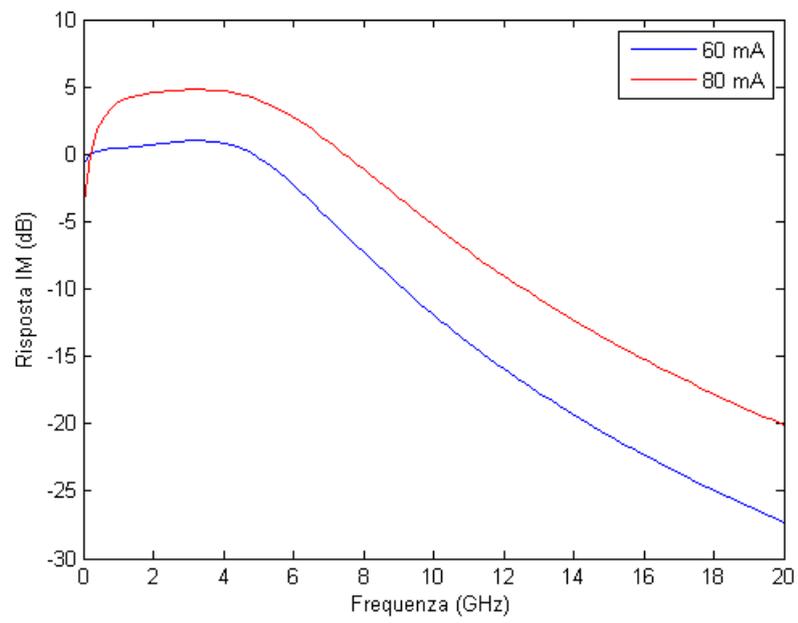


Figura B.28: Risposta IM per gli elettroni GS (set Greedy lento).

# Bibliografia

- [1] M. Gioannini, *Ground-state power quenching in two-state lasing quantum dot lasers*, Journal of Applied Physics **111**, 043108 (2012)
- [2] D. Gready, G. Eisenstein, M. Gioannini, I. Montrosset, D. Arsenijevic, H. Schmeckeber, M. Stubenrauch, and D. Bimberg, *On the relationship between small and large signal modulation capabilities in highly nonlinear quantum dot lasers*, Applied Physics Letters **102**, 101107 (2013)
- [3] D. Arsenijevic, A. Schliwa, H. Schmeckeber, M. Stubenrauch, M. Spiegelberg, D. Bimberg, V. Mikhelashvili, and G. Eisenstein, *Comparison of dynamic properties of ground- and excited-state emission in p-doped InAs/GaAs quantum-dot lasers*, Applied Physics Letters **104**, 181101 (2014)
- [4] C. Wang, F. Grillot, and J. Even, *Impacts of wetting layer and excited state on the modulation response of quantum-dot lasers*, IEEE Journal of Quantum Electronics, **48** (9), 1144–1150, 2012
- [5] C. Wang, B. Lingnau, K. Lüdge, J. Even, and F. Grillot, *Enhanced dynamic performance of quantum dot semiconductor lasers operating on the excited state*, 2014, pre-stampa
- [6] C. Wang, J. Even and F. Grillot, *Near-threshold relaxation dynamics of a quantum dot laser*, SPIE, 2014, pre-stampa
- [7] M.T. Todaro, A. Salhi, L. Fortunato, R. Cingolani, A. Passaseo, M. De Vittorio, P. Della Casa, F. Ghiglieno, and L. Bianco, *High-performance directly modulated 1.3- $\mu$ m undoped InAs–InGaAs quantum-dot lasers*, IEEE Photonics Technology Letters, Vol. 19, No. 4, February 15, 2007
- [8] A. Fiore and A. Markus, *Differential gain and gain compression in quantum-dot lasers*, IEEE Journal of Quantum Electronics, Vol. 43, No. 4, April 2007

- [9] Y. Tanaka, M. Ishida, K. Takada, T. Yamamoto, H. Song, Y. Nakata, M. Yamaguchi, K. Nishi, M. Sugarawa, and Y. Arakawa, *25 Gbps direct modulation in 1.3- $\mu$ m InAs/GaAs high-density quantum dot lasers*, OSA/CLEO/QELS, 2010
- [10] D. Bimberg, *From ugly duckling to radiant swan: half a century after the discovery of the semiconductor laser*, IEEE Photonics Society, 2013
- [11] T. Berg, *Modelling of quantum-dot amplifiers*, PhD Thesis, TUD, Cap. 1–2, 2002
- [12] P. Perrucci, *Study of modulation properties of quantum dot lasers*, Master Thesis (Electronic Engineering), Politecnico di Torino, September 2012
- [13] L.A. Coldren, S.W. Corzine, *Diode lasers and photonic integrated circuits*, Wiley, New York, 1995
- [14] L. Lo Presti e F. Neri, *L'analisi dei segnali*, Edizioni C.L.U.T., Torino, 1992, 2<sup>a</sup> edizione
- [15] Discussione con prof.ssa Mariangela Gioannini
- [16] Discussione con prof. Ivo Montrosset
- [17] H. Taleb, K. Abedi, and S. Golmohammadi, *Quantum-dot semiconductor optical amplifiers: state space model versus rate equation model*, Hindawi Publishing Corporation, Advances in OptoElectronics, Volume 2013, Article ID 831852, p. 3
- [18] G.S. Buller and R.J. Collins, *Single-photon generation and detection*, Topical Review, Meas. Sci. Technol. **21** (2010) 012002, pp. 5–8
- [19] Roy J. Glauber, *The quantum theory of optical coherence*, Physical Review, Volume 130, Number 6, 15 June 1963
- [20] Roy J. Glauber, *Coherent and incoherent states of the radiation field*, Physical Review, Volume 131, Number 6, 15 September 1963