

POLITECNICO DI TORINO

---

Corso di Laurea Magistrale in  
Ingegneria Energetica e Nucleare



INTERAZIONE FLUIDO-STRUTTURA  
IN TURBINE AERONAUTICHE  
DI BASSA PRESSIONE

Relatore:  
Prof. Christian Maria Furrone

Studente:  
Andrea Bray

Tutor Aziendale:  
Ing. Enrico Ampellio

Anno Accademico  
2017-2018



Alla mia famiglia



# Sommario

---

<b>Premessa.....</b>	<b>7</b>
<b>1. Introduzione .....</b>	<b>8</b>
Contesto e motivazione .....	8
1.1 Flusso nelle turbine assiali .....	10
1.2 Patterns di vibrazione strutturale.....	16
1.3 Descrizione delle aree di contatto.....	20
1.4 L'aeroelasticità .....	22
<b>2. Simulazione di flussi periodici .....</b>	<b>29</b>
2.1 Equazioni di conservazione della fluidodinamica.....	29
2.2 Risoluzione numerica delle equazioni di governo: approccio RANS .....	34
2.3 Strategie computazionali per flussi periodici nelle turbomacchine.....	40
<b>3. Dinamica dei dischi palettati.....</b>	<b>49</b>
3.1 Equazioni della dinamica .....	49
3.2 Analisi modale agli elementi finiti per un sistema in simmetria ciclica .....	52
<b>4. Metodologia di calcolo della risposta forzata per configurazioni ridotte .....</b>	<b>60</b>
4.1. Il codice CFD: TRAF .....	60
4.2 Definizione del caso multi-schiera di riferimento e setup numerico.....	61
4.3 Simulazioni con dominio ridotto.....	71
4.4 Analisi modali e calcolo della risposta forzata.....	76
4.5 Definizione del flusso di lavoro complessivo .....	77
<b>5. Risultati .....</b>	<b>83</b>
5.1 Caso A: Rotore di primo stadio .....	83
5.2 Caso B: Rotore di coda.....	89
5.3 Considerazioni finali .....	93
<b>Sviluppi futuri .....</b>	<b>99</b>



# Premessa

---

Il GREAT2020 (Green Engine for Air Traffic 2020) è un programma di ricerca finanziato dalla Regione Piemonte che si pone l'obiettivo di offrire soluzioni tecnologiche innovative destinate al mondo della mobilità aerea sostenibile. Nato nel 2009, rappresenta il punto di contatto tra GE Avio Aero, il Politecnico di Torino ed il network di piccole e grandi imprese del Piemonte impegnate nella filiera aerospaziale.

Esso si inserisce all'interno di un progetto elaborato dalla Commissione Europea e dall'ACARE (Advisory Council for Aviation Research and Innovation in Europe) che prende il nome di "Vision2020", finalizzato al raggiungimento di una serie di traguardi strategici per il settore entro l'anno 2020.

Efficienza ed ecocompatibilità sono le parole chiave che accomunano i diversi punti in cui è articolato il programma, sostanzialmente orientato all'abbattimento dei costi operativi ed alla drastica diminuzione dell'impatto ambientale del trasporto aereo sull'ambiente. L'obiettivo è quello di ridurre del 50% le emissioni di CO<sub>2</sub> e dell'80% quelle di NO<sub>x</sub>, diminuendo al contempo il rumore percepito nelle vicinanze dell'aerea aeroportuale di 10dB.

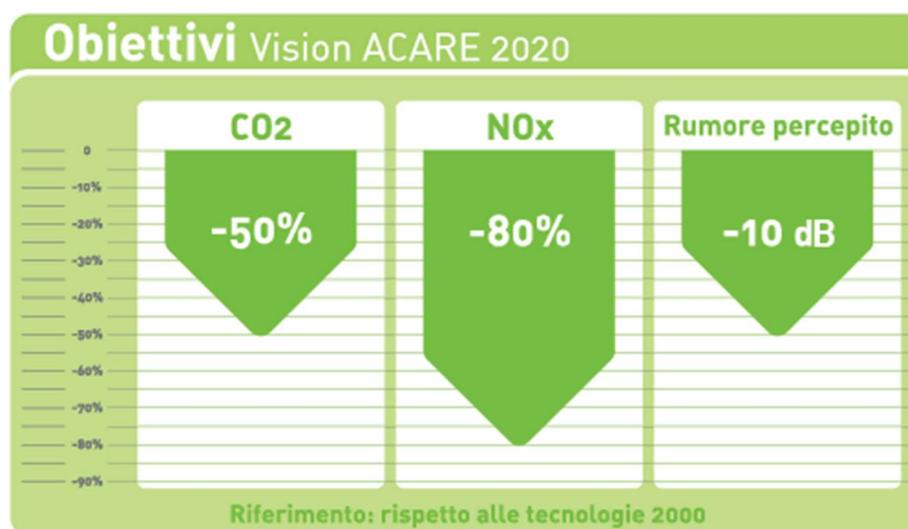


Figura 1: Obiettivi Vision 2020

# Introduzione

---

## Contesto e motivazione

Le palettature delle turbomacchine sono soggette a forze aerodinamiche non stazionarie generate dalla reciproca interazione tra flusso, schiere rotoriche e statoriche.

Lo studio della risposta forzata è l'indagine dell'interazione tra tali forzanti armoniche ed i modi di vibrare propri del sistema disco-palette ed ha lo scopo di individuare eventuali criticità all'interno dell'intervallo operativo del motore, come sollecitazioni superiori al limite di fatica dei componenti o condizioni di risonanza.

La determinazione del campo di moto non stazionario richiede l'esecuzione di simulazioni CFD dall'elevato costo computazionale, in particolar modo se estese a tutto il complesso turbina.

La soluzione attualmente impiegata per analisi aerodinamiche di questo tipo consiste nell'utilizzo di modelli "mixing plane" per la determinazione della soluzione media "steady state" sull'intera macchina, a partire dalla quale si estraggono le condizioni al contorno ed i campi di inizializzazione per le successive analisi nel dominio del tempo sulle schiere di interesse.

La natura armonica dei fenomeni non stazionari permette inoltre di ridurre i tempi di calcolo mediante l'impiego di opportuni modelli di periodicità. Utilizzando tradizionali condizioni al contorno periodiche il dominio computazionale deve coprire un settore periodico della turbomacchina. Di conseguenza è possibile diminuire il numero di canali analizzati di un fattore pari al massimo comun divisore esistente tra le pale delle schiere di interesse. Adottando condizioni al contorno di tipo "chorocronico" è invece possibile circoscrivere l'analisi ad un singolo canale per schiera, pur mantenendo i medesimi vincoli di discretizzazione temporale riconducibili alla periodicità geometrica del motore in esame.

Nelle moderne architetture multistadio, tuttavia, i canali delle diverse schiere sono spesso primi tra loro, rendendo di fatto impossibili riduzioni significative del dominio di calcolo.

Soluzioni ragionevolmente accurate sono ottenibili con l'impiego dei modelli "scalati senza ripristino della solidità", i quali consistono nell'alterazione del numero originale dei canali della schiera al fine di ottenere rapporti di combinazione più convenienti per la riduzione periodica del dominio.

Nel presente lavoro di tesi sono stati valutati gli effetti sulla risposta forzata di tali modelli ed è stato messo a punto un criterio per l'individuazione dell'alterazione geometrica in grado di offrire il miglior compromesso tra riduzione dei tempi di calcolo ed accuratezza del campo di pressione non stazionario ottenuto. L'attenzione è stata concentrata su due settori del motore aeronautico particolarmente rappresentativi, corrispondenti al primo ed all'ultimo rotore della turbina di bassa pressione.

## **1.1 Flusso nelle turbine assiali**

### **1.1.1 Caratteristiche 3D non stazionarie del flusso**

L'aerodinamica all'interno di una turbomacchina differisce in modo sostanziale rispetto a quella associata ad un flusso che investe un profilo alare isolato. Le caratteristiche del campo di moto risultano infatti marcatamente tridimensionali, con effetti complessi legati alla compresenza di forze centrifughe, effetti di parete di considerevole entità ed interazione mutua tra schiere in moto rotatorio relativo tra loro.

Uno dei fenomeni di maggior rilevanza è quello associato all'ispessimento ed al successivo distacco dello strato limite in corrispondenza del tratto di decelerazione del flusso lungo il dorso del profilo, legato alla presenza di forti gradienti di pressione esistenti tra monte e valle della schiera. Lungo i profili ed a valle degli stessi si instaurano condizioni di moto fortemente turbolente, con formazione di vortici di diverse dimensioni e fluttuazioni considerevoli delle grandezze fluidodinamiche.

La condizione di stallo appena descritta agisce come bloccante del flusso principale in queste regioni, inducendo un'accelerazione nelle zone centrali dei canali inter-palari. Un effetto analogo si realizza in prossimità delle pareti superiori ed inferiori del canale anulare della macchina, con un conseguente incremento della velocità di attraversamento in corrispondenza del raggio medio.

La presenza di forti gradienti avversi di pressione è inoltre responsabile dell'instaurarsi di flussi secondari di trafilamento tra le pareti statoriche ed il tettuccio delle pale rotoriche. Il rapido passaggio in direzione circonferenziale dalla regione di alta pressione di un canale a quella di bassa pressione del canale adiacente genera vortici che vengono trasportati verso valle dal flusso principale.

Un'altra tipologia di strutture vorticose è creata dall'impatto dello strato limite delle regioni di parete con il bordo d'attacco dei profili in corrispondenza del punto di ristagno. Ne deriva una coppia di vortici che si propaga assialmente lungo i lati della paletta, con comportamenti differenti nelle due regioni di alta e bassa pressione. Il vortice formatosi lungo il dorso rimane attaccato al profilo a causa del moto

circonferenziale della schiera, mentre quello immesso nella zona di alta pressione è trascinato verso la regione centrale del canale e termina sull'estradosso della schiera adiacente. Strutture vorticose con asse parallelo all'asse macchina si formano infine a causa dell'interazione viscosa tra questi vortici ed il flusso principale, coprendo fino al 70% della larghezza del canale ed il 20% dell'estensione radiale della schiera.

Gli effetti tridimensionali appena descritti hanno un contributo significativo nelle perdite aerodinamiche della macchina e generano un flusso fortemente non uniforme all'uscita di ogni canale, contribuendo alla formazione di fenomeni non stazionari nelle schiere di valle. Esiste quindi una forte correlazione tra flussi secondari e le dinamiche di interazione fluido-struttura.

Effetti di interazione tra schiere, questa volta di carattere macroscopico, sono invece legati alla fenomenologia delle scie, degli effetti potenziali e delle onde d'urto.

### **1.1.2 Scie**

Le scie sono regioni di distorsione del flusso, di carattere turbolento, generate a valle di un corpo investito da un fluido in moto. Esse hanno un contributo di entropia e di vorticità maggiore rispetto al flusso principale e, in generale, inducono una variazione locale di velocità nelle regioni di propagazione. Fisicamente agiscono come “getti negativi”, ovvero zone confinate con deficit di velocità che modificano i triangoli di velocità delle schiere investite introducendo componenti fluttuanti nelle forze di pressione che agiscono su di esse.

Durante l'attraversamento dei canali di valle in moto relativo rispetto alla loro sorgente, questi getti vengono deformati dall'azione dei gradienti di pressione e del campo non uniforme di velocità. Di conseguenza, una volta rientrate nei canali solidali al loro sistema di riferimento originario, le scie risultano disallineate rispetto ai profili generanti. La condizione risultante media è quindi di aperiodicità circonferenziale procedendo lungo la direzione del flusso.

### 1.1.3 Disturbi potenziali

Sotto l'ipotesi di flusso irrotazionale e facendo uso della tecnica delle trasformazioni conformi, il campo di velocità intorno ad un profilo alare può essere descritto come il gradiente di una funzione potenziale. Il teorema di Kutta-Joukowski, inoltre, suggerisce che la circuitazione non nulla intorno al profilo induce una modificazione del campo di moto a monte ed a valle dello stesso

La non uniformità di pressione statica che ne deriva è alla base dell'interazione tra schiere adiacenti, in cui onde di pressione si propagano a monte ed a valle con attenuazioni governate dalla loro lunghezza d'onda e dal numero di Mach. L'ampiezza delle onde decade approssimativamente secondo la legge valida per la propagazione delle onde acustiche per un flusso puramente assiale:

$$R = \exp\left(-2\pi \frac{\sqrt{1-M^2}x}{S}\right)$$

con  $x$  la distanza assiale,  $M$  il Mach assiale ed  $S$  il pitch.

Interazioni potenziali sono pertanto maggiori per alti  $M$  e per piccoli gap assiali, con tasso di decadimento  $R$  verso monte e verso valle proporzionale alle variazioni di Mach locale.

### 1.1.4 Onde d'urto

Un ulteriore fenomeno di interazione tra schiere di pale è rappresentato dalle onde d'urto, associate al funzionamento della macchina in regime supersonico. Gli urti sono frontiere di discontinuità che possono formarsi al raggiungimento o al successivo superamento della condizione sonica nel flusso e sono caratterizzati da brusche variazioni nelle grandezze termodinamiche. Essi si suddividono in urti orizzontali ed obliqui. I primi si generano prevalentemente all'interno dei canali interpalari e sono legati all'incipienza dello choking nella schiera, con una fenomenologia in parte assimilabile a quella ben nota dei getti sottoespansi. Urti obliqui si formano invece quando un flusso supersonico incontra variazioni di pendenza, come ad esempio le deviazioni imposte dalle schiere di palette. In questo caso gli effetti differiscono sulla base del numero di Mach in ingresso o, in altri termini, sull'entità del salto di pressione

tra monte e valle della schiera. Per bassi salti di pressione, un urto obliquo attaccato ed un urto orizzontale si formano rispettivamente in corrispondenza del bordo d'attacco della pala e all'interno del canale. Abbassando la pressione di valle, l'urto orizzontale si sposta progressivamente verso valle e perde di intensità, fino a raggiungere la frontiera dell'urto obliquo in prossimità del bordo di attacco. In questa condizione lo choking della schiera è quasi assente e le condizioni di funzionamento corrispondono a quelle di massima efficienza. Per ulteriori aumenti di velocità, l'intensità dell'urto obliquo cresce e quest'ultimo si distacca dal profilo della pala, muovendosi verso monte. In maniera analoga, gli urti che si formano sul bordo d'uscita si muovono verso valle. Quando questi urti colpiscono le schiere di monte o di valle, essi si riflettono mediante complesse strutture a cascata, influenzandone in maniera sostanziale l'aerodinamica non stazionaria.

### 1.1.5 Interazione tra schiere statoriche e rotoriche.

Le caratteristiche tridimensionali di flusso finora descritte comportano variazioni locali nelle proprietà del flusso che, nel sistema di riferimento in cui sono generate, possono essere anche di natura stazionaria. Quando una pala interagisce con queste non uniformità create dalla schiera adiacente, invece, esse appaiono come disturbi periodici viaggianti in direzione circonferenziale con una frequenza ed un numero d'onda caratteristico. La risultante è una forzante periodica agente sui profili con una frequenza pari ad un multiplo intero dell'Engine Order (EO) definito in funzione della velocità angolare relativa esistente tra le schiere. Definite  $\Omega_S$  e  $\Omega_R$  le velocità di rotazione di statore e rotore, l'Engine Order sarà pari a:

$$EO = \frac{|\Omega_S - \Omega_R|}{2\pi}$$

Il multiplo intero dell'EO che definisce la frequenza della forzante armonica agente sul un profilo è pari al numero di pale della schiera adiacente il profilo. Le frequenze delle non stazionarietà nel rotore e nello statore, corrispondenti alle frequenze di passaggio dello statore e del rotore, sono quindi pari a:

$$f_R = \frac{N_S |\Omega_S - \Omega_R|}{2\pi}$$
$$f_S = \frac{N_R |\Omega_S - \Omega_R|}{2\pi}$$

### 1.1.6 Interazione statore-statore e rotore-rotore.

I disturbi generati da una schiera rotante alla generica velocità di rotazione  $\Omega$  sono visti come disturbi stazionari da una schiera rotante alla medesima velocità. Nel caso delle turbomacchine questo si verifica tra coppie di schiere statoriche o rotoriche calettate sul medesimo albero, e le condizioni di periodicità risultanti dipendono dal numero di pale delle due schiere interessate.

Se il numero è uguale, il disturbo è periodicamente replicato all'interno di ogni canale con uno shift angolare rispetto alle pale generanti dipendente dall'interazione con la schiera intermedia. Al contrario, se il numero di pale è differente, le non uniformità costituiscono un pattern circonferenziale lungo la schiera R2 con diametro nodale  $N_D = N_{R1} - kN_{R2}$ , con k l'intero più vicino al rapporto  $N_{R1}/N_{R2}$ . Pertanto, in assenza di un

denominatore comune tra le pale, la posizione del disturbo nei canali si ripete periodicamente solo dopo  $360^\circ$ . Ciò che ne risulta è una non stazionarietà oscillante in direzione circonferenziale nel sistema di riferimento solidale al canale di R2 con numero d'onda  $N_{R2} - kN_{R1}$  per effetto dell'aliasing.

Sebbene l'ampiezza di questi disturbi sia piccola se comparata alle forzanti generate dal passaggio della schiera adiacente, la loro lunghezza d'onda è relativamente grande. Essi hanno inoltre tassi di decadimento assiali molto piccoli, e la loro influenza può diventare rilevante per gli stadi di valle.

## 1.2 Patterns di vibrazione strutturale

### *Diametri nodali*

Il comportamento dinamico del sistema disco-palette differisce da quello delle singole pale, poiché queste ultime sono meccanicamente ed aerodinamicamente accoppiate. La natura e l'intensità di questo legame dinamico dipende da molteplici fattori, primi fra tutti la tipologia dei supporti e delle superfici di mutuo contatto che caratterizzano il disegno della schiera.

Nell'ipotesi di disco perfettamente rigido ed in assenza di anello esterno di turbina, le palette vibrano indipendentemente le une dalle altre con modalità del tutto simili a quelle di travi incastrate. L'unica interazione reciproca è dunque di tipo aerodinamico, associata all'azione delle perturbazioni generate dal moto individuale dei singoli profili. Con queste premesse e con l'ipotesi di linearità del sistema, la risultante sulla singola palette si calcola mediante la *teoria dei coefficienti di influenza*.

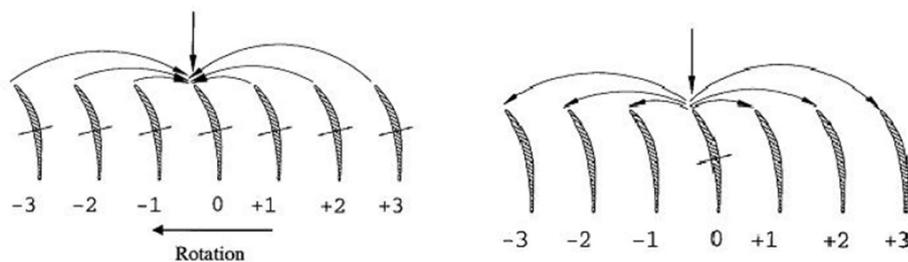


Figure 2: Coefficienti di influenza [Fonte: (1)]

Allontanandosi da questa condizione limite, il sistema disco-palette sperimenta modi di vibrare molto complessi, principalmente caratterizzati dalla mutua interazione di due parametri di deformazione tradizionalmente impiegati nello studio dinamico delle membrane circolari: i diametri nodali ed i cerchi nodali.

Essi indicano il luogo di punti in corrispondenza dei quali il sistema ha deformazione nulla, rispettivamente segmenti rettilinei passanti per l'origine del sistema assiale-simmetrico e circonferenze concentriche in essa centrate.

Nel caso dei dischi palettati, l'evoluzione fisica del fenomeno è influenzata dalla natura discreta delle appendici che definiscono l'assialsimmetria del sistema, ed è pertanto correlabile al numero di pale calettate sul disco. Nello specifico, nel caso di un sistema con  $N_B$  palette, il massimo numero di diametri nodali ND è pari a:

$$ND_{max} = \begin{cases} \frac{N_B}{2} & (se\ N_B\ pari) \\ \frac{N_B - 1}{2} & (se\ N_B\ dispari) \end{cases}$$

Il minimo e massimo diametro nodale corrispondono a deformazioni in forma di onda singola, mentre tutti gli altri diametri nodali si manifestano contemporaneamente, alla medesima frequenza ma con deformate modali ortogonali tra loro.

Secondo la *teoria delle onde viaggianti*, ogni coppia di modi può essere interpretata come combinazione di perturbazioni sinusoidali di tipo forward o backward, con il pattern di deformazione associato ad ogni diametro modale in rotazione lungo il disco. Per ciascuna coppia di modi al diametro nodale  $n$ , le pale vibrano di conseguenza con la medesima ampiezza e frequenza ma con fase differente. L'ampiezza del moto sinusoidale risultante sarà la somma di una parte reale ed una immaginaria:

$$\hat{a}_n = Re(a_n) + Imag(a_n)$$

In un sistema con  $N_B$  pale che vibrano alla frequenza  $\omega_n$ , è possibile esprimere lo spostamento  $u$  della  $j$ -esima pala mediante somma di Fourier dei modi di vibrare ad ogni diametro modale.

$$u_j(t) = \sum_{n=0}^{N_B-1} \hat{a}_n e^{i(\omega t(j-1)\frac{2\pi n}{N_B})}$$

con  $n$  il diametro modale e  $\frac{2\pi n}{N_B}$  il ritardo di fase tra pale adiacenti. Analogamente all'inter blade phase angle IPBA introdotto in ambito aerodinamico, questo parametro fornisce indicazioni importanti per la stima del damping aerodinamico e della conseguente risposta a flutter della schiera.

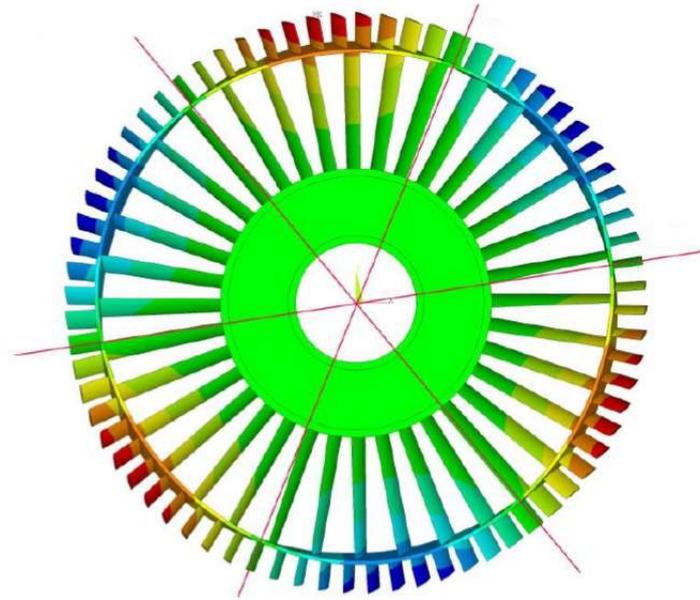


Figure 3: Modo con 3 diametri nodali e 0 circonferenze nodali [Fonte: (4)]

#### *Forme e famiglie modali.*

Come già detto, per ogni diametro nodale il sistema disco-pala sperimenta differenti modi di vibrare, in numero pari ai suoi gradi di libertà e pertanto teoricamente infiniti per un sistema fisico di tipo continuo. Ad ognuno modo di vibrare corrisponde una differente forma modale, che ne caratterizza la risposta libera alla frequenza di risonanza.

Al crescere del diametro nodale, frequenze e forme modali associate al medesimo modo di vibrare si modificano in accordo con la variazione della fisica di vibrazione del sistema. Maggiori ND implicano configurazioni dalla crescente complessità geometrica, che si traducono in un sistema globalmente più rigido e frequenze di vibrazione più elevate.

Pur modificandosi con il diametro nodale, molte forme modali mantengono una caratterizzazione geometrica piuttosto evidente, al punto da suggerirne una classificazione in *famiglie modali* distinte. Quelle ingegneristicamente più rilevanti, ovvero le maggiormente coinvolte nei fenomeni di instabilità o rottura strutturale, sono quelle caratterizzate dalla configurazione deformata più semplice. Il loro basso

contenuto energetico ne garantisce un'alta probabilità, e la loro caratterizzazione geometrica contribuisce a rendere relativamente semplice la sollecitazione sincrona da parte di forzanti esterne (risposta forzata) o autoindotte (flutter)

Per quanto riguarda un disco palettato, le famiglie modali di maggior rilevanza sono le seguenti:

- Prima Edgewise (sigla 1EW), che prevede una traslazione quasi rigida del tettuccio della pala in direzione circonferenziale;
- Prima Flapwise (sigla 1FW), che consiste in una flessione retta in direzione assiale con freccia massima sul tettuccio, assimilabile a quella di una trave incastrata;
- Prima Flessionale (sigla 1F), flessione con freccia massima al raggio medio della pala.
- Torsionale (sigla 1T), con deformazione a doppio lobo con asse lungo l'estensione radiale della pala.

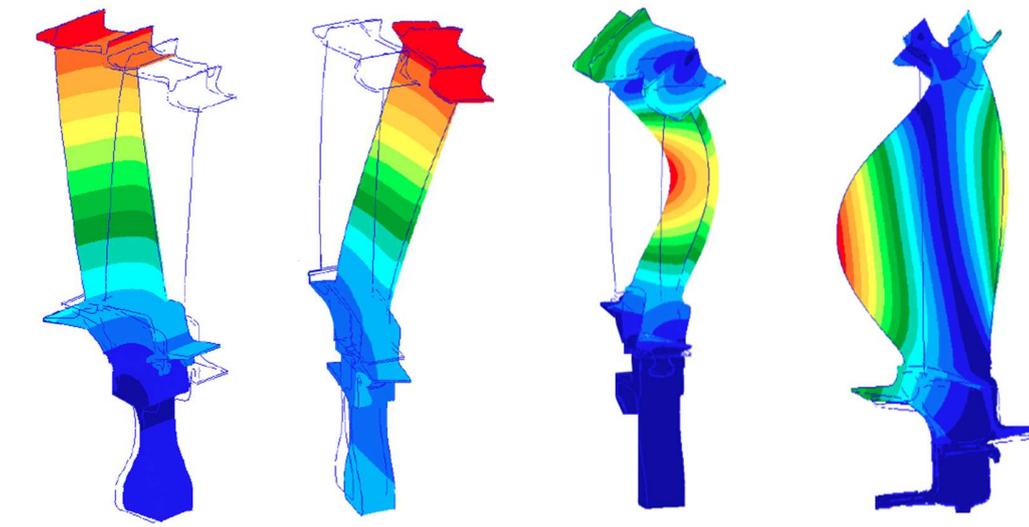


Figure 4: Deformate modali (1EW, 1FW, 1F, 1T) [fonte: (2)]

### 1.3 Descrizione delle aree di contatto

Sottili e dall'elevata estensione radiale, le palettature di turbina sono uno dei componenti staticamente e dinamicamente più sollecitati durante la vita operativa del motore aeronautico. Come precedentemente spiegato, i fenomeni aeroelastici di flutter e risposta forzata sono la causa di guasto più probabile, e potenzialmente più catastrofica, tra quelle che vedono coinvolto il modulo di turbina. Garantire un adeguato smorzamento è di cruciale importanza per evitare la divergenza dei fenomeni sopra citati: per questa ragione le zone di vincolo tra i diversi componenti sono progettate in modo da garantire un'adeguata dissipazione di energia.

L'attacco pala-disco, ad esempio, consiste di una serie di superfici di accoppiamento che si serrano al crescere della velocità di rotazione per effetto della forza centrifuga. Le soluzioni più comuni sono di tipo *dovetail* (a coda di rondine) o *fir tree* (ad abete), ed entrambe prevedono l'inserimento ed il successivo bloccaggio assiale della pala sul disco. L'assenza di serraggi iperstatici garantisce moti di strisciamento relativo tra i componenti, assicurando smaltimento di energia tramite attrito.

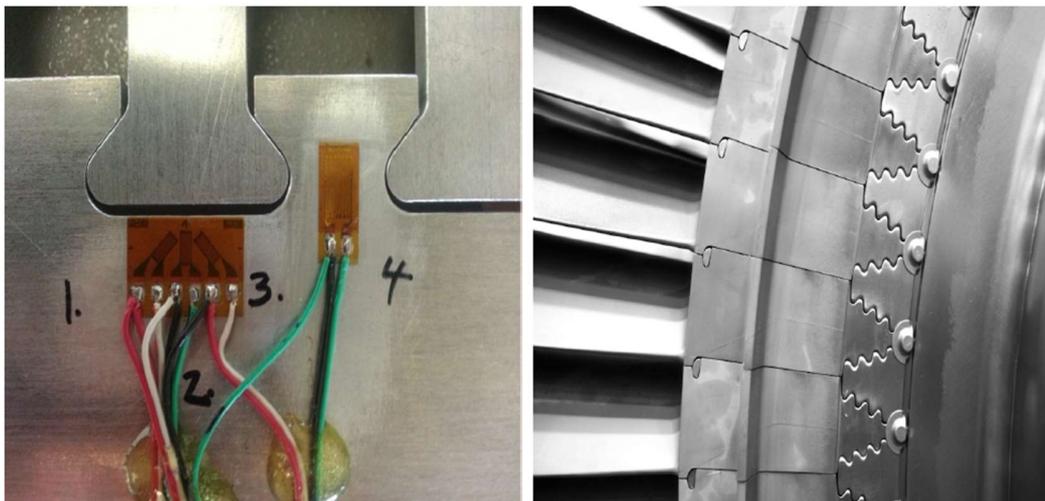


Figure 5: Attacco a coda di rondine e ad abete [Fonte: (2)]

Sempre in prossimità della zona di radice della pala, un'ulteriore soluzione prevede l'impiego di smorzatori nella zona di contatto tra disco e pale adiacenti.

Laddove i carichi risultano particolarmente elevati o l'estensione radiale significativa, come nel caso delle turbine di bassa pressione, la palettatura di ogni stadio è inoltre caratterizzata da una zona di contatto tra pale adiacenti nella regione di massimo raggio. Questa appendice, chiamata *tip shroud*, ha una duplice funzione: rappresenta una tenuta per evitare la perdita di pressione verso l'esterno e garantisce un aumento della rigidità complessiva della struttura, realizzando un mutuo accoppiamento tra le palette in una regione definita di "interlocking".

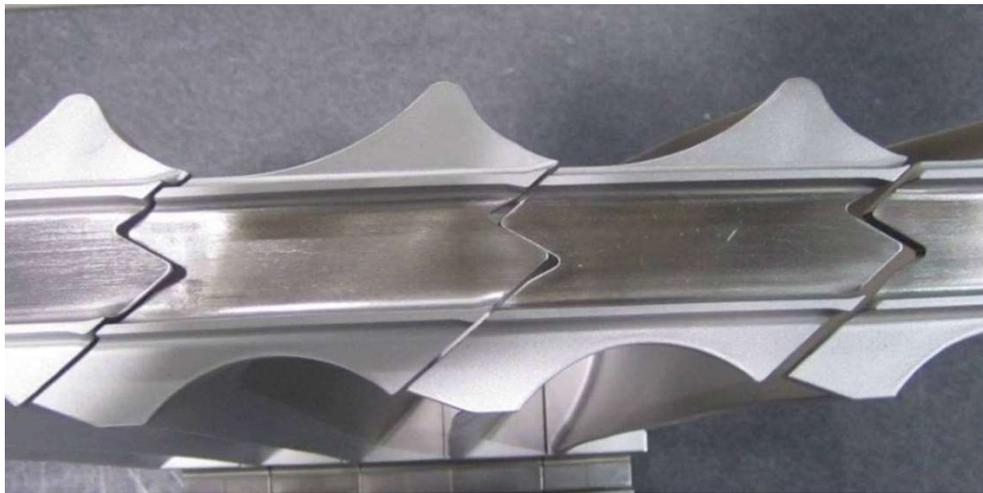


Figure 6. Dettaglio dell'interlocking [Fonte: wikipedia.com]

Come nel caso dell'attacco pala-disco, il bloccaggio che ne risulta è volutamente labile, in modo da garantire un'adeguata dissipazione di energia del sistema durante la vibrazione.

## 1.4 L'aeroelasticità

Le forze aerodinamiche dipendono dalla forma e dall'orientamento del componente investito dal flusso. Oscillazioni strutturali inducono di conseguenza un'alterazione dei carichi agenti su una struttura rispetto alla condizione indeformata, che a loro volta modificano il pattern di deformazione del sistema. Questa interazione di forze inerziali, elastiche e aerodinamiche prende il nome di aeroelasticità.

Una rappresentazione particolarmente efficace di questa interazione venne elaborata da Corral, che pose l'aeroelasticità all'interno di un triangolo definito dalle tre forze appena citate.

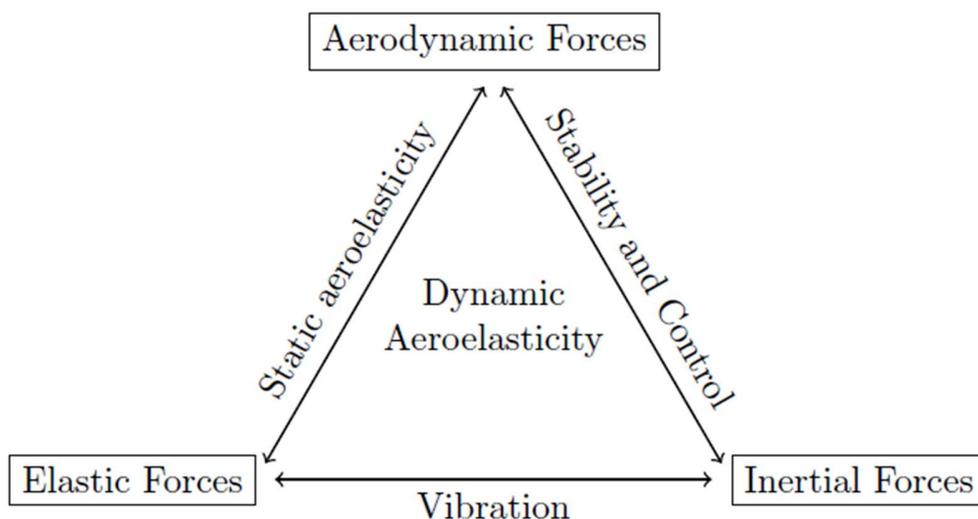


Figure 7: Triangolo dell'aeroelasticità di Corral [Fonte: (1)]

La meccanica delle vibrazioni studia l'interazione tra forze elastiche e inerziali, permettendo l'individuazione della risposta libera del sistema in termini di frequenze naturali e deformate modali.

L'aeroelasticità statica è invece alla base dell'accoppiamento tra forze elastiche ed aerodinamiche, e si occupa dello studio dell'inevitabile deformazione a cui la struttura dovrà andare incontro affinché sia in grado di reagire ai carichi aerodinamici che su di

essa insistono. Questi ultimi crescono infatti con il quadrato della velocità del flusso che investe la struttura, mentre le reazioni elastiche della stessa sono proporzionali alle deformazioni. Per definizione, questa disciplina studia il sistema come privo di vibrazioni e soggetto a carichi di tipo stazionario, e si pone come obiettivo ultimo quello di prevenire fenomenologie distruttive come la divergenza statica o l'inversione.

Forze aerodinamiche ed inerziali sono invece studiate nella macro-area della meccanica del volo e della teoria sul controllo e la stabilità delle strutture avioniche.

L'aeroelasticità dinamica analizza infine il problema intrinsecamente non stazionario di interazione tra queste tre macro-aree, distinguendo tra fenomeni di vibrazione indotta dal fluido (risposta forzata) e fenomeni di vibrazioni autoeccitate (flutter). La necessità di scongiurare l'insorgere di tali fenomeni è un problema di cruciale importanza nell'ambito delle turbomacchine, al punto da rappresentare uno dei fattori limitanti nelle moderne architetture.

#### **1.4.1 Flutter**

Con il termine Flutter si intende il complesso dei fenomeni di vibrazione autoeccitata ed autosostenuta di una struttura, la cui oscillazione non è messa in moto da un carico aerodinamico non stazionario ma si origina alle frequenze naturali del sistema secondo i suoi modi di vibrare. In alcune situazioni le forze aerodinamiche non stazionarie risultanti dall'oscillazione sono grandi abbastanza da alterare le caratteristiche di vibrazione del sistema, allontanandolo dalle condizioni di risposta libera in termini di frequenza e modo di vibrare. La misura in cui questo avviene dipende principalmente dal rapporto tra la massa del corpo e quella del fluido: le strutture alari, ad esempio, sperimentano spesso un flutter flessio-torsionale accoppiato a causa della loro leggerezza, mentre le palettature di turbomacchine rispondono principalmente secondo un unico modo con frequenze prossime a quelle della loro risposta libera.

Se il sistema non risulta opportunamente smorzato, l'oscillazione cresce in tempi molto brevi. L'estrema pericolosità di questi fenomeni ed i minimi intervalli di tempo richiesti

per il loro sviluppo sono essenzialmente dovuti al fatto che, una volta innescata la vibrazione, l'energia cinetica del flusso che la alimenta è in così larga misura maggiore all'energia che la struttura può assorbire da determinare la distruzione immediata di quest'ultima.

La forza aerodinamica, in generale, ha direzione arbitraria e non è in fase con il moto di vibrazione del sistema. Dato un sistema con un fissato valore di damping meccanico, l'incipienza del flutter dipende sostanzialmente dallo smorzamento aerodinamico dovuto alla componente fuori fase del carico agente sul sistema.

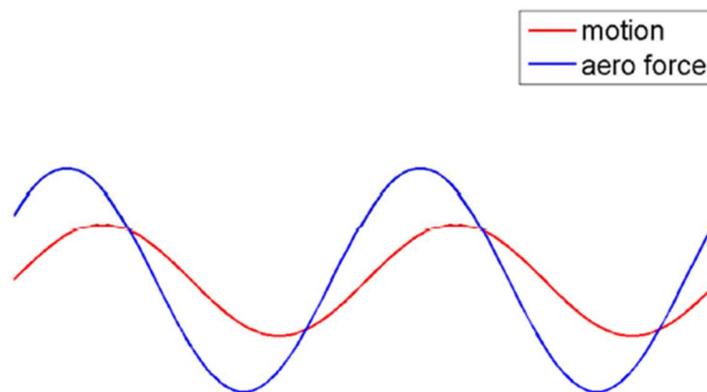


Figure 8: Delay tra forzante aerodinamica e vibrazione del sistema [Fonte: (2)]

In una schiera di pale, come già detto, l'oscillazione delle pale non è indipendente. A causa dell'accoppiamento meccanico esistente, esse vibrano alle medesime frequenze e forme modali, sfasate di un ritardo definito per l'n-esimo diametro nodale come  $IBPA = \frac{2\pi n}{N}$ . La condizione aerodinamica risultante risente pertanto della mutua influenza tra le pale, con effetti complessivi sul singolo profilo valutabili come sovrapposizione lineare dei singoli campi di perturbazione.

Al fine di valutare i valori di aerodamping di un modo di vibrare (complesso ad onda viaggiante) per ognuno dei diametri nodali associati alla configurazione geometrica del sistema, uno dei metodi maggiormente utilizzati consiste nel calcolo del lavoro aerodinamico fatto lungo un periodo di oscillazione del profilo, assegnata ampiezza e frequenza di vibrazione dello stesso.

Il lavoro aerodinamico sarà calcolato come:

$$L_{aero} = \int_t^{t+T} \int_{S_{pala}} -p \hat{n} \cdot \underline{w} dS dt$$

con  $S_{pala}$  la superficie istantanea della pala,  $\hat{n}$  il versore uscente dalla superficie della pala e  $\underline{w}$  la velocità istantanea della pala associata al moto di vibrazione.

Il coefficiente di smorzamento critico è quindi definito come:

$$\xi = \frac{-L_{aero}}{8\pi E}$$

dove

$$E = \frac{1}{4} m \omega_n^2 a^2$$

è l'energia cinetica media (nel periodo T) della pala, calcolata sulla base della massa modale m e dell'ampiezza modale di vibrazione a.

Ripetendo per ognuno dei diametri nodali si ottiene la curva di stabilità aeroelastica che segue, dalla quale è possibile individuare eventuale criticità del sistema.

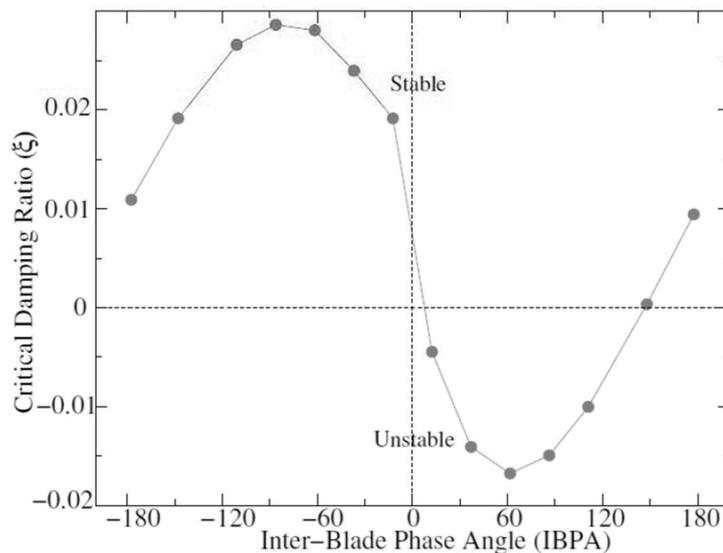


Figure 9: Diagramma di aeroplot [Fonte: (1)]

### 1.4.2 Risposta forzata

La condizione di risposta forzata si verifica in presenza di un carico aerodinamico armonico con frequenza coincidente con una delle frequenze naturali del sistema.

Generalmente si fa la distinzione tra risposta forzata ad alti EO (Engine Order), causata dai fenomeni di interazione tra schiere rotanti e schiere statoriche precedentemente introdotti, e risposta forzata a bassi EO. Quest'ultima è causata dalla presenza di discontinuità ad elevato diametro nodale, come ad esempio sbilanciamento delle masse rotanti, asimmetria nei supporti dell'albero, interazione con i getti del combustore o distorsioni del flusso a valle del distributore.

In ognuno dei casi sopra indicati la vibrazione forzata si verifica in corrispondenza di forzanti con frequenze multiple della velocità di rotazione dell'asse (Engine Orders, per l'appunto) e prendono pertanto il nome di *vibrazioni sincrone*. Esistono poi delle situazioni in cui la risposta forzata è dovuta ad instabilità di flusso quali separazioni, vortex shedding o condizioni di stallo rotante, le quali si generano a frequenze non multiple intere della velocità angolare del sistema. In questi casi le forzanti non stazionarie modificano in qualche modo la loro frequenza, fino a coincidere con la più vicina tra quelle naturali del sistema. Si parla in tal caso di *vibrazioni asincrone*.

Un diagramma particolarmente usato nell'ambito dell'aeroelasticità è il diagramma di Campbell. Esso riporta sull'asse orizzontale la velocità di rotazione del motore e su quello verticale la frequenza delle non stazionarietà, intese come forzanti aerodinamiche e vibrazioni del sistema. I diversi Engine Order, multipli della frequenza fondamentale di rotazione dell'albero, sono rappresentati da linee rette passanti per l'origine e divergenti nel quadrante positivo. I diversi modi di vibrare del sistema, che per effetto dell'azione giroscopica assumono frequenze e forme modali differenti al crescere di  $\Omega$ , sono invece rappresentati dalle linee continue che incrociano le rette degli EO.

Situazioni potenzialmente pericolose si verificano quando forzanti aerodinamiche e frequenze di vibrazione del sistema coincidono: si parla in questo caso di *crossing*.

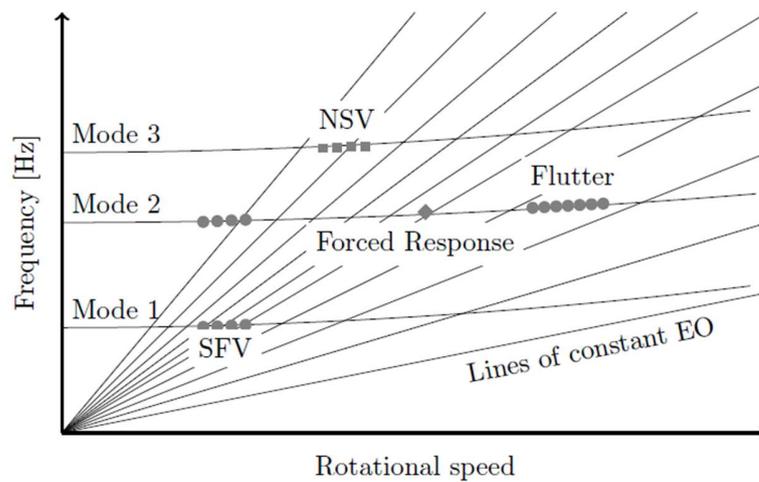


Figure 10: Diagramma di Campbell [Fonte: (1)]

#### *Accoppiamento tra forzanti armoniche e deformate modali*

La presenza di un crossing all'interno del range operativo di un motore non rappresenta necessariamente una situazione aero-elasticamente critica. In accordo alla proprietà di ortogonalità, un modo di vibrare periodico può essere eccitato in risonanza solo da una forzante periodica con il medesimo numero d'onda.

Ciò nonostante, la condizione  $EO = ND$  non è l'unica in cui si realizza l'accoppiamento tra forzante e deformata modale. A causa del fenomeno dell'aliasing, Engine Order di ordine superiore sono percepiti dalla struttura con frequenze ridotte, con shift dipendenti dal numero di settori di discretizzazione del sistema assial-simmetrico.

Si prenda come esempio la deformata modale al ND 4 di un disco con 21 palette. Per un istante di tempo qualsiasi, sollecitazioni diverse avranno il medesimo effetto purché il loro valore in corrispondenza dei 21 punti di campionamento della forzante sia il medesimo. L'eccitazione periodica prodotta dall'EO 4 sarà dunque garantita dall'EO 17.

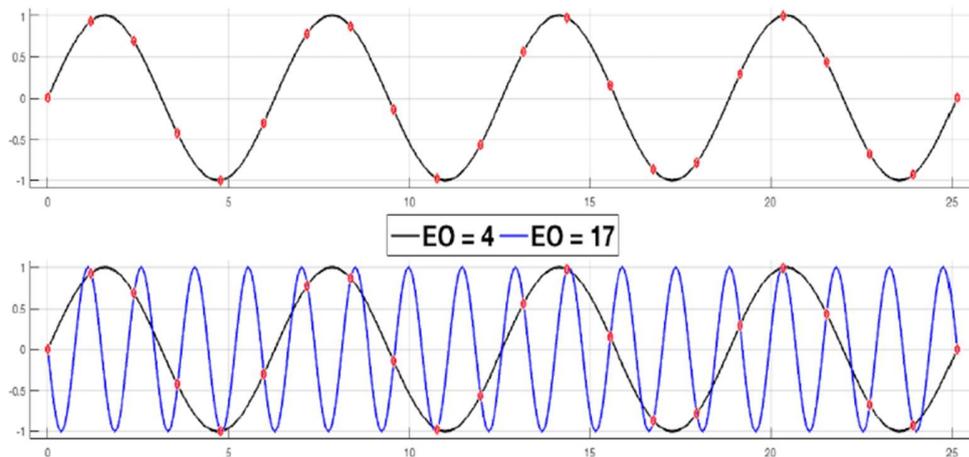


Figure 11: Aliasing [Fonte: (2)]

Generalizzando per una configurazione con  $N$  pale, la condizione di accoppiamento tra forzante e deformata modale prescrive:

$$\begin{cases} EO = ND & \text{per } ND < \text{floor}\left(\frac{N}{2}\right) \\ EO = m \cdot N \pm ND & \text{per } ND > \text{floor}\left(\frac{N}{2}\right) \end{cases}$$

Una rappresentazione grafica di tale condizione è offerta nel diagramma che segue, costruito per una geometria a 60 settori:

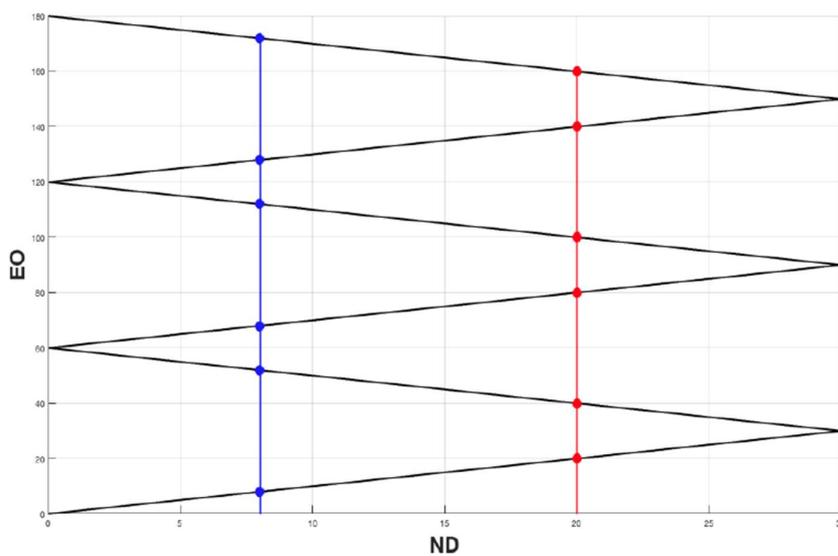


Figure 12: Diagramma zig-zag [Fonte: (2)]

# Simulazione di flussi periodici

---

## 2.1 Equazioni di conservazione della fluidodinamica

### 2.1.1 Conservazione della massa

Preso un volume di controllo di lati  $\delta x, \delta y, \delta z$  attraversato da un fluido comprimibile di densità  $\rho$ , la variazione di massa nel tempo deve corrispondere al flusso netto di massa.

Il primo termine, considerata l'invarianza nel tempo del volume di fluido considerato, può essere riscritto come:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \delta x \delta y \delta z) = \frac{\partial \rho}{\partial t} \delta x \delta y \delta z$$

Per quel che riguarda invece il secondo membro, avvalendosi dell'espansione in serie di Taylor condotta nell'interno del punto  $(x, y, z)$  di proprietà  $\rho, u, v, w$ , è possibile scrivere i bilanci di flusso attraverso le superfici del cubo nel seguente modo:

$$-\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \delta x \delta y \delta z - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \delta x \delta y \delta z - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \delta x \delta y \delta z$$

che permette di scrivere l'equazione di partenza come

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

Riscrivendo la stessa equazione in forma compatta, è possibile apprezzare la presenza di soli due termini responsabili della conservazione della massa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{u}) = 0$$

il primo relativo alla variazione temporale di densità, il secondo associato al flusso netto di massa attraverso i contorni del dominio e per questo definito "termine convettivo".

### 2.1.2 Conservazione della quantità di moto

Dalla seconda legge di Newton sappiamo che la variazione della quantità di moto della singola particella dipende dall'entità delle forze agenti su di essa. In particolare, sarà possibile distinguere forze di superficie (come quelle viscosose o di pressione) e forze di volume (gravitazionale, centrifuga, di Coriolis, elettromagnetica, etc).

Nella formulazione delle equazioni utili alla trattazione successiva, tuttavia, gli unici contributi che verranno analizzati saranno quelli responsabili dello stato di "stress" di un elemento fluido, ovvero quelli relativi allo stress normale  $p$  (pressione) e alle 9 componenti  $\tau_{ij}$  di stress viscoso. I restanti contributi saranno invece inclusi nel bilancio come sorgenti di quantità di moto  $S_M$ .

Di seguito le espressioni in forma differenziale:

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \text{div}(\rho u \underline{u}) &= \frac{\partial(-p + \tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} + S_{Mx} \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \text{div}(\rho v \underline{u}) &= \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial(-p + \tau_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z} + S_{My} \\ \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \text{div}(\rho w \underline{u}) &= \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial(-p + \tau_{zz})}{\partial z} + S_{Mz}\end{aligned}$$

Da cui l'espressione compatta :

$$\frac{\partial(\rho \underline{u})}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{u} \underline{u}) = \text{div}([\tau] - p [I]) + S_M$$

dove  $[\tau]$  è la matrice degli sforzi viscosi  $\tau_{ij}$  agenti sul fluido.

Nei fluidi definiti Newtoniani, gli stress viscosi possono essere espressi in funzione della deformazione: quest'ultima si suddivide in una componente lineare ed una volumetrica. La matrice delle deformazioni lineari di un elemento fluido in tre dimensioni consta di nove componenti  $s_{ij}$ , solo sei delle quali risultano indipendenti nel caso di isotropia della sostanza. E' importante fare questa precisazione in quanto tutti i gas e la maggior parte dei liquidi vantano un comportamento di questo tipo.

Entrando nel merito della deformazione lineare, preso un elemento fluido di forma cubica sottoposto a stress normale e tangenziale, è possibile individuare tre componenti  $s_{xx}$ ,  $s_{yy}$  ed  $s_{zz}$  corrispondenti alla variazione relativa di lunghezza degli spigoli lungo i tre assi x,y e z così definite:

$$s_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad s_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad s_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

Analogamente possono essere definite sei componenti di scorrimento angolare tra gli assi dell'elemento fluido, che per l'ipotesi di isotropia precedentemente introdotta si riducono a tre termini:

$$s_{xy} = s_{yx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right); \quad s_{xz} = s_{zx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right); \quad s_{yz} = s_{zy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

La deformazione volumetrica è invece, come noto, restituita dall'equazione

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \text{div} \underline{u}$$

Tornando alla costruzione del modello di cui sopra, esprimere gli stress viscosi in funzione della deformazione del fluido vuol dire individuare appropriate costanti viscose da associare allo stesso.

Il primo termine di viscosità  $\mu$ , che prende il nome di “viscosità dinamica”, associa lo stress alla componente lineare di deformazione; il secondo, indicato con  $\lambda$ , è invece legato alla deformazione volumetrica, i cui effetti nella pratica sono tuttavia trascurabili. Le espressioni delle tensioni diventano, tramite la semplificazione appena introdotta:

$$\tau_{ii} = 2\mu \frac{\partial u_i}{\partial i} + \lambda \text{div} \underline{u}$$

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial j} + \frac{\partial u_j}{\partial i} \right)$$

### 2.1.3 Conservazione dell'energia

Resta ora da definire l'equazione di conservazione dell'energia. Dalla prima legge della termodinamica si ha che la variazione dell'energia di una particella fluida è uguale alla somma tra il flusso netto di calore somministrato alla particella ed il lavoro fatto sulla stessa. Cominciamo col definire il termine relativo alla conduzione di calore.

Individuato un elemento fluido di lati  $\delta x, \delta y, \delta z$  ed impostando i bilanci di conservazione attraverso le 6 facce dello stesso, mediante l'espansione di Taylor al secondo termine si ottiene per il flusso netto di energia per conduzione:

$$-\left[\frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \dot{q}_y}{\partial y} + \frac{\partial \dot{q}_z}{\partial z}\right](\delta x \delta y \delta z) = -[\text{div} \underline{\dot{q}}](\delta x \delta y \delta z)$$

dove  $\dot{q}_x$ ,  $\dot{q}_y$  e  $\dot{q}_z$  rappresentano le tre componenti del flusso termico.

Riscrivendo queste ultime secondo la legge di Fourier

$$\dot{q}_i = -k \frac{\partial T}{\partial i} \rightarrow \underline{\dot{q}} = -k \text{grad} T \rightarrow \text{div}(k \text{grad} T)$$

Analogo è il procedimento per ottenere il contributo del lavoro nel bilancio di energia. Anche in questo caso, come avvenuto nella formulazione relativa alla quantità di moto, le uniche forze di cui verranno calcolate in forma esplicita le potenze meccaniche sono quelle associate allo stress “superficiale” dell’elemento fluido, ovvero pressione  $p$  e tensione viscosa  $\tau_{ij}$ . Per tutte le altre il lavoro verrà incluso nell’equazione globale tramite adeguate sorgenti di energia.

Il bilancio complessivo per unità di volume sarà:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{L}_x + \dot{L}_y + \dot{L}_z}{\delta x \delta y \delta z} = & [-\text{div}(p \underline{u})] + \frac{\partial(u \tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(u \tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(u \tau_{zx})}{\partial z} + \frac{\partial(v \tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v \tau_{yy})}{\partial y} \\ & + \frac{\partial(v \tau_{zy})}{\partial z} + \frac{\partial(w \tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial(w \tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial(w \tau_{zz})}{\partial z} \end{aligned}$$

Mettendo insieme i due contributi di calore e lavoro si perviene dunque alla seguente espressione dell’equazione dell’energia specifica di un fluido:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \text{div}(\rho E \underline{u}) = & [-\text{div}(p \underline{u})] + \frac{\partial(u \tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(u \tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(u \tau_{zx})}{\partial z} + \frac{\partial(v \tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v \tau_{yy})}{\partial y} \\ & + \frac{\partial(v \tau_{zy})}{\partial z} + \frac{\partial(w \tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial(w \tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial(w \tau_{zz})}{\partial z} + \text{div}(k \text{grad} T) + S_E \end{aligned}$$

### 2.1.3 Forma integrale delle equazioni di Navier Stokes

Dall'osservazione della forma conservativa delle equazioni di governo del flusso, risulta evidente come ci siano forti somiglianze tra le stesse.

Introducendo una variabile  $\theta$ , un coefficiente diffusivo  $\Gamma$  ed includendo in un contributo  $S_\theta$  tutti i termini non condivisi, è possibile riscrivere un'espressione generica di trasporto:

$$\frac{\partial(\rho\theta)}{\partial t} + \text{div}(\rho\theta\mathbf{u}) = \text{div}(\Gamma \text{grad}\theta) + S_\theta$$

Gli algoritmi alla base del Metodo dei Volumi Finiti cominciano propria da questa equazione, procedendo alla sostituzione delle diverse variabili in luogo di quella generica ed assegnando appropriati valori ai termini diffusivi e di sorgente.

Le PDE così ottenute sono quindi integrate in un volume di controllo CV tridimensionale corrispondente alla cella della Mesh, generando di conseguenza un'istruzione di conservazione delle proprietà del fluido al suo interno.

Si avrà dunque per la variabile generica  $\theta$ :

$$\int_{VC} \frac{\partial(\rho\theta)}{\partial t} dV + \int_{VC} \text{div}(\rho\theta\mathbf{u}) dV = \int_{VC} \text{div}(\Gamma \text{grad}\theta) dV + \int_{VC} S_\theta dV$$

Il primo termine esprime la variazione temporale della proprietà  $\theta$  nel VC. Il secondo, definito termine convettivo, esprime il tasso di variazione di  $\theta$  nel VC legato al fenomeno della convezione. L'ultimo termine è infine quello relativo alla creazione o alla distruzione della proprietà generica nel volume di controllo.

## 2.2 Risoluzione numerica delle equazioni di governo: approccio RANS

Flussi complessi come quelli trattati nel presente lavoro di tesi, altamente turbolenti e tridimensionali, non hanno soluzione analitiche e conseguentemente devono essere trattati con tecniche numeriche.

Se tutte le scale spaziali e temporali del fenomeno dovessero essere risolte, sarebbe necessari algoritmi di simulazione numerica diretta (DNS). Questa soluzione, pur con le risorse computazionali più recenti, risulterebbe estremamente onerosa e praticamente incompatibile con i tempi caratteristici della progettazione ingegneristica.

Una possibile alternativa è rappresentata dall'impiego delle RANS (Reynolds Averaged Navier Stokes), ovvero equazioni derivate dalle equazioni di Navier Stokes attraverso una procedura di media temporale. Concettualmente, tale procedura si basa sul principio della “decomposizione di Reynolds, che prevede la scomposizione della generica proprietà  $\theta$  in un valore medio stazionario nel tempo  $\Theta$  ed in una componente oscillante  $\theta'$ . Varrà pertanto la relazione:

$$\theta = \Theta + \theta'$$

Tale ipotesi è valida solo nel caso in cui il flusso sia statisticamente stazionario o la scala temporale delle non stazionarietà sia molto maggiore della scala temporale della quantità oscillante che si desidera mediare.

Sostituendo all'interno delle equazioni di Navier Stokes e considerando per semplicità un fluido incomprimibile con viscosità costante, si perviene al set di equazioni

$$\begin{aligned} \text{div}(\underline{U}) &= 0 \\ \rho \frac{\partial(U_i)}{\partial t} + \rho \text{div}(U_i \underline{U}) &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \left[ \frac{\partial(-\overline{\rho u_i' u_i'})}{\partial x_i} + \frac{\partial(-\overline{\rho u_i' u_j'})}{\partial x_j} + \frac{\partial(-\overline{\rho u_i' u_k'})}{\partial x_k} \right] \\ &+ \mu \text{div}(\text{grad} U_i) \end{aligned}$$

Ciò che si ottiene sono termini di stress addizionali  $\tau_{ij}$  incogniti, definiti “di Reynolds”, dovuti alla natura non lineare delle equazioni.

I modelli di turbolenza usati per la risoluzione delle RANS sono classificati sulle base del numero di equazioni di trasporto addizionali impiegate per risolvere il sistema con le nuove incognite appena definite, che variano da un minimo di 0 ad un massimo di 7.

Nella gran parte di essi si parte da un'ipotesi di correlazione tra la deformazione del flusso principale e gli stress di Reynolds associati ai moti turbolenti.

Il legame tra queste due entità si realizza matematicamente attraverso l'introduzione di una nuova grandezza  $\mu_T$  che prende il nome di viscosità turbolenta, dal cui valore dipende il reintegro delle informazioni di trasporto e dissipazione trascurate nell'operazione di media temporale.

Tale quantità si esprime come

$$\mu_T = \rho C \sigma l$$

dove  $C$  è una costante adimensionale mentre  $\sigma$  ed  $l$  rispettivamente le scale di velocità e grandezza caratteristiche dei vortici di grandi dimensioni.

Il contributo di  $\mu_T$  risulta particolarmente evidente nella formalizzazione del rapporto tra stress turbolenti e deformazione proposta dal matematico francese Joseph Boussinesq nel 1877, secondo cui:

$$\tau_{ij} = -\rho \overline{u'_i u'_j} = \mu_T \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$$

Il coefficiente  $\delta_{ij}$ , definito "delta di Kronecker", è normalmente posto uguale a 0 ed assume il valore di 1 solo se  $i = j$ , così da garantire che ci sia identità tra i due termini dell'equazione e che la somma degli stress normali sia pari a  $-2\rho k$  piuttosto che a 0.

Le RANS così ottenute sono discretizzate dividendo il dominio di studio in una serie di piccoli volumi, costituendo la griglia computazionale che prende il nome di mesh.

### 2.2.1 Discretizzazione nel tempo

La forma semi-discretizzata rispetto al tempo delle RANS per la generica variabile vettoriale  $\underline{\Theta}$  assume per una cella di volume  $V$  la forma:

$$V \frac{\delta \underline{\Theta}}{\delta t} + R(\underline{\Theta}) = 0$$

con  $R(\underline{\Theta})$  la parte relative alla discretizzazione spaziale delle equazioni.

Esistono diversi modi in cui il termine di derivata temporale può essere trattato. Macroscopicamente, essi si dividono in metodi espliciti ed impliciti.

Gli schemi espliciti hanno l'inconveniente di non essere incondizionatamente stabili, pertanto la dimensione massima dei time steps dipende dalla dimensione della cella computazionale nella quale si calcola la soluzione e dalla velocità delle perturbazioni viaggianti nel flusso. Ciononostante, tali metodi sono largamente usati all'interno di solutori stazionari in combinazione con tecniche di time stepping locale, che permettono l'impiego di passi temporali differenti nelle diverse regioni della griglia di calcolo.

Per problemi non stazionari, dove la soluzione è richiesta contemporaneamente sull'intero dominio, tali soluzioni non possono essere impiegate e la progressione temporale del calcolo risulta vincolata alle dimensioni delle celle computazionali più piccole, localizzate prevalentemente nelle regioni di boundary layer.

I passi temporali nei metodi impliciti, al contrario, non sono vincolati da relazioni di stabilità e possono teoricamente assumere una dimensione qualsiasi. Nella pratica, tuttavia, la dimensione dello step deve essere compatibile con la scala temporale caratteristica del fenomeno che si vuole studiare.

Sebbene nominalmente più impegnativi sotto il profilo computazionale, tali metodi trovano di una larga applicazione nell'ambito di problemi la cui risoluzioni richiede l'impiego di mesh molto allungate, come nel caso di simulazioni con alti numeri di Reynolds.

Di seguito una breve descrizione di un metodo largamente utilizzato nell'ambito della fluidodinamica delle turbomacchine e per questo impiegato nel presente lavoro di tesi, ovvero l'algoritmo A-stabile al secondo ordine Backward Difference (BDF).

### **Backward Difference Formula**

Il metodo al secondo ordine BDF approssima la derivata temporale del vettore di variabili  $\underline{\Theta}$  all'istante temporale  $n$  nel seguente modo:

$$\frac{\delta}{\delta t} \underline{\Theta}^{(n)} \cong \frac{3\underline{\Theta}^{(n)} - 4\underline{\Theta}^{(n-1)} + \underline{\Theta}^{(n-2)}}{2\Delta t}$$

Sostituendo nell'espressione individuata precedentemente:

$$V \frac{3\underline{\Theta}^{(n)} - 4\underline{\Theta}^{(n-1)} + \underline{\Theta}^{(n-2)}}{2\Delta t} + R(\underline{\Theta}^{(n)}) = 0$$

Una possibile strategia per risolvere tale sistema consiste nella linearizzazione del termine non lineare  $R(\underline{\Theta}^{(n)})$  e in una successiva inversione matriciale per l'individuazione dell'incognita in forma di delta  $\Delta \underline{\Theta} = \underline{\Theta}^{(n)} - \underline{\Theta}^{(n-1)}$ .

Un metodo computazionalmente più efficiente, che verrà impiegato nel presente lavoro di tesi, prevede invece l'impiego di metodi iterativi. La soluzione per ogni istante temporale è ottenuta trattando il problema come un equivalente stazionario risolto con tecniche time marching nello pseudo-tempo  $t^*$ . A causa della coesistenza di tempo fisico e pseudo tempo, tale metodo prende spesso il nome di "dual-time stepping BDF".

Una soluzione particolarmente diffusa [1] consiste nell'integrazione delle equazioni discretizzate mediante schema esplicito RK al quarto ordine e tecniche di accelerazione come time stepping locale e approccio Multigrid.

### **Analisi dell'errore nello spazio dei numeri d'onda per uno schema BDF del secondo ordine.**

Una stima della capacità dello schema BDF al secondo ordine di approssimare la derivata di un segnale periodico  $u = e^{ikt}$  con numero d'onda  $k$  è possibile mediante l'analisi dell'errore nello spazio dei numeri d'onda.

La derivata esatta di tale funzione all'istante  $n$  è pari a:

$$\frac{\delta}{\delta t}(u^{(n)}) = D_t^{exact} u^{(n)} = ik u^{(n)}$$

da cui l'operatore differenziale nella sua forma esatta:

$$D_t^{exact} = ik$$

Per uno schema BDF al secondo ordine, l'operatore differenziale vale:

$$D_t^{BDF} = \frac{3 - 4e^{-ik\Delta t} + e^{-ik2\Delta t}}{2\Delta t} = ik^*$$

Riformulando in funzione del numero d'onda numerico  $k^*$  si ottiene:

$$k^* \Delta t = \frac{(4 \sin(k\Delta t) - \sin(2k\Delta t)) - i(3 - 4 \cos(k\Delta t) + \cos(2k\Delta t))}{2}$$

La deviazione della parte reale tra  $k^{BDF} \Delta t$  e  $k\Delta t$  rappresenterà un errore, così come l'intera componente immaginaria di  $k^{BDF} \Delta t$ .

Il valore del  $\Delta t$  dipenderà dal numero di punti del campionamento secondo la relazione:

$$\Delta t = \frac{T}{N} = \frac{2\pi}{N k}$$

E' quindi possibile esprimere il rapporto tra il numero d'onda numerico e quello reale nel seguente modo:

$$\frac{k^*}{k} = \frac{N}{4\pi} \left( 4 \sin\left(\frac{2\pi}{N}\right) - \sin\left(\frac{4\pi}{N}\right) \right) - i \frac{N}{4\pi} \left( 3 - 4 \cos\left(\frac{2\pi}{N}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{N}\right) \right)$$

Come evidenziato nel grafico, la deviazione rispetto alla rappresentazione esatta del segnale diventa significativa per  $N < 16$ , con un errore superiore al 5% sulla componente reale e del 0.5% su quella immaginaria.

### Numero d'onda modificato

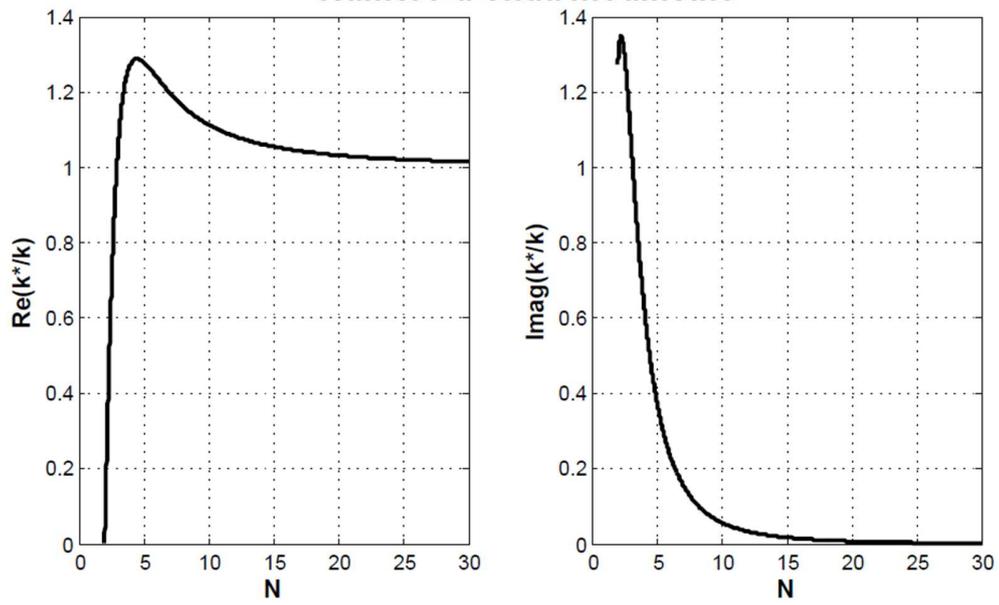


Figure 13: Analisi di numero d'onda modificato

## **2.3 Strategie computazionali per flussi periodici nelle turbomacchine**

La risoluzione nel dominio del tempo di flusso non stazionari nelle turbomacchine senza alcuna tecnica di riduzione è troppo dispendiosa dal punto di vista computazionale per poter essere impiegata nella pratica di progetto, anche considerando le potenze di calcolo attualmente utilizzate in ambito industriale.

Sebbene metodi A stabili come il dual time stepping BDF precedentemente introdotto siano teoricamente indipendenti da vincoli sugli step temporali, per una sufficiente accuratezza è necessario che la simulazione sia in grado di catturare le scale temporali dei fenomeni dominanti nella fisica del problema studiato. Questo si traduce in tempi di calcolo di ordini di grandezza superiori rispetto ad analisi di tipo steady state.

Di seguito verranno presentati alcuni dei metodi prevalentemente impiegati per la modellazione di flussi periodici, sottolineandone i vantaggi computazionali ed i compromessi in termini di accuratezza della soluzione individuata.

### METODI PER FLUSSI PERIODICI:

- Mixing plane – Steady State.
- Non lineari nel dominio del tempo:
  1. Metodi multipassaggio - Intero Anello / Settore periodico;
  2. Metodi a singolo/doppio passaggio - Phase Lagged.
- Nel dominio della frequenza:
  1. Linearizzati;
  2. Non Lineari.

### **2.3.1 Approccio Mixing Plane**

L'approccio più semplice, tradizionalmente usate nel progetto delle turbomacchine, consiste nella risoluzione delle equazioni di governo su un dominio costituito da un solo canale, con BCs periodiche tra un canale e quello successivo e condizioni di ingresso/uscita corrispondenti alla condizione media circonferenziale.

Questo approccio prende il nome di "mixing plane" poiché assume un mescolamento istantaneo delle non uniformità del flusso all'interfaccia tra una schiera e quella successiva. E' quindi possibile impiegare le quantità di uscita di una palettatura, corrispondenti per costruzione a grandezze medie circonferenziali, come condizioni di ingresso per la schiera successiva.

I maggiori inconvenienti legati all'utilizzo di metodi di questo tipo consiste in una sovrastima delle perdite di mescolamento, modellato come un fenomeno istantaneo piuttosto che graduale, e all'incapacità di predire fenomeni aeroelastici intrinsecamente non stazionari come flutter e risposta forzata.

Ciò detto, tale metodo trova ancora oggi un largo utilizzo come strumento di progetto preliminare, fondamentale per la definizione e l'ottimizzazione della geometria 3D della pala.

### 2.3.2 Metodi multipassaggio: approccio Full Annulus

Negli approcci ad intero anello, la totalità dei fenomeni non stazionari è simulata mediante tradizionali modelli di calcolo 3D multi-schiera per flussi viscosi nel dominio del tempo. Sebbene questo metodo sia tra tutti il più oneroso, esso non richiede alcun tipo di assunzione circa la linearità o la periodicità dei disturbi ed è in grado di catturare instazionarietà non assialsimmetriche del flusso.

Laddove la geometria del sistema lo permetta, ovvero in presenza di fattori interi di divisione tra il numero di pale delle schiere analizzate, il dominio computazionale può essere ridotto ad un settore periodico, imponendo condizioni al contorno di periodicità sulle frontiere circolari dello stesso.

$$\phi(x, r, \theta_1, t) = \phi\left(x, r, \theta_1 + \frac{2\pi}{MCD}, t\right)$$

La condizione di periodicità reale risulterà di conseguenza un multiplo intero di quella valutata nel dominio ridotto, il cui valore corrisponderà al fattore di divisione applicato al dominio.

Di seguito l'esempio applicato a due schiere in moto angolare relativo con numero di pale 120 – 40 .

	<b>Dominio fisico</b>	<b>Dominio ridotto</b>
<b>Numero di pale</b>	120 : 40	3 : 1
<b>Estensione del dominio</b>	1	1/40
<b>Armonica della non stazionarietà nella prima schiera</b>	40	1
<b>Armonica della non stazionarietà nella seconda schiera</b>	120	3

Table 1: Dominio ridotto in simmetria ciclica

### 2.3.3 Metodi a singolo passaggio: modello Phase Lag

Un'alternativa all'impiego di modelli Full Annulus è possibile con l'implementazione di condizioni al contorno di tipo "chorocronico", dove i termini "Choro" e "Chronos" stanno ad indicare la coesistenza di condizioni spaziali e temporali di periodicità delle grandezze.

A causa del moto relativo angolare esistente tra le schiere della macchina, infatti, il flusso non stazionario all'interno dei canali è non assialsimmetrico e periodico nel tempo con soluzioni in forma di onda viaggiante in direzione circonferenziale.

Una spiegazione semplificata del fenomeno è possibile prendendo in considerazione due schiere di palette adiacenti A e B in moto angolare relativo tra loro  $\Omega_A \neq \Omega_B$  e dotate di un arbitrario numero di canali  $N_A$  ed  $N_B$ .

Nel sistema di riferimento relativo delle due pale, la posizione di ogni pala sarà determinata dalla relazione [Fonte: (3)]:

$$\Theta_{A_i} = (i - 1) \frac{2\pi}{N_A} \quad \text{con } 0 \leq i \leq N_A$$
$$\Theta_{B_j} = (j - 1) \frac{2\pi}{N_B} \quad \text{con } 0 \leq j \leq N_B$$

Per la scelta del sistema di riferimento assoluto e dell'istante iniziale è possibile considerare la condizione di allineamento tra le pale  $A_1$  e  $B_1$ :

$$(t = 0, \Theta_{ABS} = 0) : \Theta_{A_1} = \Theta_{A_2}$$

da cui derivano le relazioni:

$$\Theta_A = \Theta_{ABS} - \Omega_A t + 2k\pi \quad \text{con } k \in Z$$
$$\Theta_B = \Theta_{ABS} - \Omega_B t + 2k\pi \quad \text{con } k \in Z$$
$$\Theta_A = \Theta_B - (\Omega_A - \Omega_B)t + 2k\pi \quad \text{con } k \in Z$$

Come già detto, il moto relativo tra le due schiere induce un flusso periodico, con fenomeni non stazionari caratterizzati da frequenze differenti nei canali appartenenti ai due sistemi.

Nel frame A, ad esempio, il periodo di oscillazione della quantità aeromeccanica arbitraria  $F_A$  è pari al tempo esistente tra il passaggio di due pale B consecutive alla velocità angolare relativa  $\Omega$ :

$$2\pi f_A = N_B |\Omega_A - \Omega_B|$$

Medesime le considerazioni per il frame B:

$$2\pi f_B = N_A |\Omega_A - \Omega_B|$$

A partire da queste relazioni e attraverso semplici osservazioni geometriche è possibile pervenire alla definizione dell'Interblade Phase Angle IBPA, noto il quale si potrà imporre la condizione di chorochronicità per la schiera A come:

$$\phi(x, r, \theta, t) = \phi\left(x, r, \theta + \frac{2\pi}{N_A}, t + \frac{IBPA_A}{2\pi f_A}\right)$$

Prima di arrivare ad una formulazione generale per l'IBPA, è utile analizzare due casi distinti di numerazione delle schiere.

**Caso 1:**  $N_B \leq N_A \leq 2N_B$

Come si evince dalla figura che segue, l'IBPA tra due pale consecutive  $A_i$  ed  $A_{i+1}$  è l'intervallo angolare descritto con velocità angolare  $|\Omega_A - \Omega_B|$  nel tempo compreso tra l'allineamento delle pale  $A_i$  e  $B_i$  e quello delle pale  $A_{i+1}$  e  $B_{i+1}$ .

[inserire figura]

$$dt = \frac{\Delta\theta}{\Omega_A - \Omega_B} = dt_A = dt_B$$

$$\Delta\theta = 2\pi\left(\frac{1}{N_B} - \frac{1}{N_A}\right) = \Delta\theta_A = \Delta\theta_B$$

L'inter blade phase angle si definisce come:

$$IBPA_A = 2\pi f_A \cdot dt_A$$

$$IBPA_A = N_B \Omega dt_A = N_B |\Omega_A - \Omega_B| \frac{\Delta\theta_A}{\Omega_A - \Omega_B}$$

Da cui:

$$IBPA_A = -2\pi \text{sign}(\Omega_A - \Omega_B) \frac{N_A - N_B}{N_A} + 2k_A\pi$$

Per il frame B valgono le medesime considerazioni:

$$IBPA_B = 2\pi f_B dt$$

$$IBPA_B = -2\pi \text{sign}(\Omega_A - \Omega_B) \left(1 - \frac{N_B}{N_A}\right) + 2k_B\pi$$

**Caso 2:**  $2N_B \leq N_A \leq 3N_B$

In questo caso la definizione dell'interblade phase angle per i due frames è differente. I canali della schiera B risentono infatti della presenza contemporanea di tre pale della schiera A, ed affinché le medesime condizioni di perturbazione siano replicate all'interno del canale successivo è sufficiente che sia la pala  $A_{i+2}$  ad allinearsi con la  $B_{i+1}$ , e non la  $A_{i+1}$  come nei casi precedenti.

L'espressione dell'IBPA per il frame B diventa:

$$IBPA_B = -2\pi \operatorname{sign}(\Omega_A - \Omega_B) \left( \frac{N_A}{N_B} - 2 \right) + 2k_B\pi$$

**Caso generale:**  $\frac{N_A}{N_B} \geq 1$

L'espressione ottenuta per il caso 2 è facilmente generalizzabile ad arbitrari rapporti tra  $N_A$  ed  $N_B$ :

$$IBPA_A = \arg \left\{ \exp \left[ -2\pi i \operatorname{sign}(\Omega_A - \Omega_B) \left( 1 - \frac{N_B}{N_A} \right) \right] \right\}$$

$$IBPA_B = \arg \left\{ \exp \left[ -2\pi i \operatorname{sign}(\Omega_A - \Omega_B) \left( \frac{N_A}{N_B} - 1 \right) \right] \right\}$$

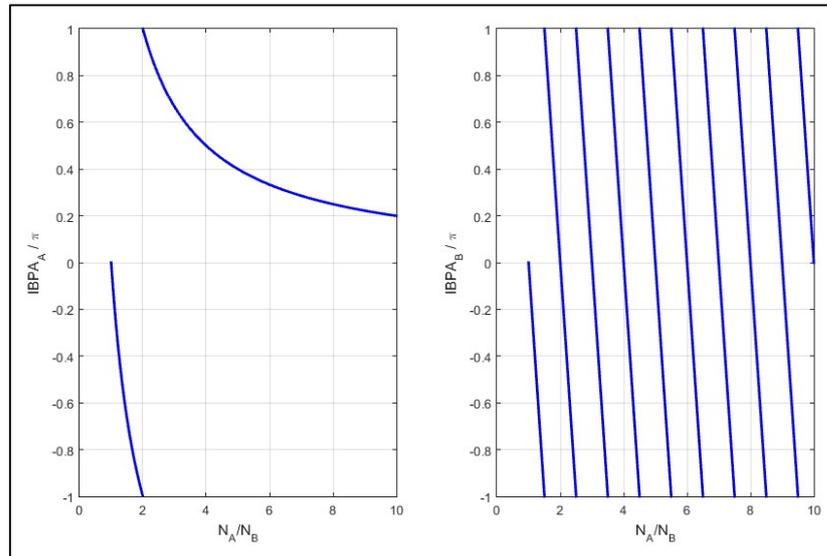


Figure 14: IBPA e rapporto tra pale adiacenti

Con una appropriata rappresentazione delle condizioni al contorno Phase Lagged, relative al valore di IBPA appena definito, diventa di conseguenza possibile ridurre il dominio computazionale ad un singolo passaggio per schiera, con un ingente risparmio di memoria fisica richiesta per il salvataggio dei dati elaborati.

#### Condizioni al contorno tra blocchi appartenenti alla stessa schiera

Nei metodi a singolo passaggio, l'implementazione delle condizioni al contorno tra blocchi appartenenti alla stessa schiera avviene mediante l'utilizzo di punti ausiliari che si estendono all'interno del dominio dei canali adiacenti. Ognuno di essi ha un suo corrispondente all'intero del dominio di interesse, in corrispondenza del quale l'algoritmo colleziona le informazioni sulle variabili di flusso da trasferire dopo aver applicato lo sfasamento secondo l'IBPA.

La definizione della generica soluzione sulle frontiere di chorochronicità si fonda sull'ipotesi fondamentale che il flusso in corrispondenza di esse possa essere scomposto in una componente media  $\Psi_0(x, r, \theta)$  più un contributo non stazionario. Tale componente è assunta armonica e approssimabile con una serie di Fourier nel tempo di ordine  $N_{harm}$ , ovvero con un numero definito a priori di coefficienti  $\psi_r$ :

$$\Psi(x, r, \theta, t) = \Psi_0(x, r, \theta) + \sum_{r=1}^{N_{rows}} Re \left\{ \sum_{h=1}^{N_{harm}} \psi_r(x, r, \theta, h) e^{j IBPA_r(h)} \right\}$$

Nella sua implementazione più diffusa, per la schiera "r" gli unici IBPA presi in considerazione sono quelli relativi alla frequenza di passaggio delle sole schiere adiacenti "r-1" ed "r+1". Perturbazioni con frequenze non appartenenti alla famiglia degli spinning modes risultanti dalla combinazione lineare delle due frequenze principali di monte e valle sono pertanto escluse.

Tali coefficienti vengono mantenuti costanti durante il transiente di marching nello pseudotempo e all'interno dei loop di multigrid e di sottoiterazione. Vengono infine aggiornati non appena un nuovo istante fisico è raggiunto.

### Condizioni al contorno tra blocchi appartenenti a schiere differenti

Le variabili di flusso in corrispondenza delle interfacce tra schiere sono espresse anche in questo caso mediante serie di Fourier in  $t - \theta$ , con un termine di ordine zero corrispondente alla distribuzione spaziale media nel tempo ed una serie di termini di ordine superiore che soddisfano la condizione di periodicità chorochronica di cui sopra.

### Inizializzazione

Per l'inizializzazione del metodo, un approccio particolarmente semplice ed efficace è quello di utilizzare la soluzione mixing plane stazionaria calcolata per un singolo canale per schiera, assegnando ai coefficienti di Fourier un valore nullo.

### **2.3.4 Metodi non lineari nel dominio della frequenza per flussi assialsimmetrici**

I metodi non lineari nel dominio della frequenza risolvono le equazioni di governo nel dominio di Fourier, assumendo il flusso costituito dalla somma di una componente media ed una periodica. Differentemente dai modelli lineari, che sovrappongono la soluzione steady state individuata con approccio mixing plane alle soluzioni delle diverse armoniche, gli algoritmi non lineari cercano di modellare la reciproca interazione tra flusso medio e le componenti oscillanti dello stesso.

Nel modello proposto da Ning ed He, ad esempio, la soluzione media non corrisponde a quella stazionaria, ma è calcolata con un'operazione di media temporale sul periodo di oscillazione. Nel caso dell'equazione di Eulero in 2D, le variabili non stazionarie  $\underline{U}$  ed i flussi assiali e tangenziali sono espressi come:

$$U = \bar{U} + U' = \bar{U} + \hat{U}e^{i\omega t}$$

$$F = \bar{F} + F' = \bar{F} + \hat{F}e^{i\omega t}$$

$$G = \bar{G} + G' = \bar{G} + \hat{G}e^{i\omega t}$$

Sostituendo nell'equazione di Eulero, le equazioni per la componente media e per l'armonica del primo ordine diventano:

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{G}}{\partial y} = 0$$

$$i\omega \hat{U} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial y} = 0$$

L'interazione tra flusso principale e perturbazioni armoniche emerge all'interno dei termini di flusso medi e non stazionari, dati da:

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} \overline{\rho u_x} \\ \overline{u_x} \overline{\rho u_x} + \bar{p} + \overline{(\rho u_x)' u_x'} \\ \overline{u_y} \overline{\rho u_x} + \overline{(\rho u_x)' u_y'} \\ \overline{H} \overline{\rho u_x} + \overline{(\rho u_x)' H'} \end{pmatrix} \quad F' = \begin{pmatrix} (\rho u_x)' \\ u_x' \overline{\rho u_x} + p' + (\rho u_x)' \overline{u_x} \\ u_y' \overline{\rho u_x} + (\rho u_x)' \overline{u_y'} \\ H' \overline{\rho u_x} + (\rho u_x)' \overline{H'} \end{pmatrix}$$

I termini di addizionali nelle equazioni di quantità di moto e momento, che prendono il nome di “stress non stazionari” per la loro somiglianza con gli stress di Reynolds, tengono conto degli effetti non lineare legati alla non stazionarietà del flusso.

Le due equazioni risultanti sono stazionarie e possono essere risolte con procedure di time marching nello pseudo tempo. Essendo interdipendenti, tuttavia, la loro integrazione deve essere simultanea.

Il maggior inconveniente di tale metodo consiste nell'incapacità di modellare l'interazione tra disturbi di armoniche differenti se non indirettamente attraverso il flusso medio.

# Dinamica dei dischi palettati

---

## 3.1 Equazioni della dinamica

### 3.1.1 Sistema ad n gradi di libertà

La dinamica di un sistema meccanico con n gradi di libertà è descritta, sotto l'ipotesi di parametri concentrati e sistema lineare, dalla seguente equazione ordinaria alle derivate parziale in forma matriciale (3.1):

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F(t)\}$$

con  $[M]$ ,  $[C]$ ,  $[K]$  rispettivamente matrici "nxn" di massa, smorzamento e rigidità del sistema ed  $[F]$  vettore "nx1" delle forzanti esterne applicate al sistema.

L'ipotesi di linearità permette di risolvere tale sistema mediante la combinazione lineare della soluzione del sistema omogeneo, che descrive la risposta libera del sistema, con una soluzione particolare.

Nel caso di vibrazioni libere non smorzate, la soluzione si ottiene nel dominio delle frequenze ipotizzando una soluzione del tipo:

$$\{x(t)\} = \{X\}e^{i\omega t}$$

e risolvendo il conseguente problema agli autovalori così formulato:

$$\det(-\omega^2[M] + [K]) = 0$$

Gli autovalori  $\omega_{1...n}^2$  corrispondono al quadrato delle frequenze naturali del sistema, mentre gli autovettori  $\{q\}_{1...n}$  rappresentano le deformate del sistema associate ai diversi modi di vibrare dello stesso.

E' bene osservare che, nel sistema di riferimento fisico, i modi di vibrare sono in generale accoppiati poiché le matrici di massa e rigidità non sono diagonali: pertanto, il trasferimento di energia risultante rende impossibile il loro studio indipendente. Per il

loro disaccoppiamento è necessario riferirsi al sistema di riferimento individuato dagli autovettori  $\{q\}_{1\dots n}$ , i quali rappresentano una base metrica dello spazio.

Definita la matrice  $[\Phi]$  come:

$$[\Phi] = [\{q_1\} \{q_2\} \dots \{q_n\}]$$

e definito il vettore di coordinate modali

$$\{\eta\} = [\Phi]^{-1}\{X\}$$

si sfrutta le proprietà di m-ortogonalità e la k-ortogonalità per riscrivere il sistema completo in forma disaccoppiata:

$$\begin{aligned} [\Phi]^T[M][\Phi]\{\ddot{\eta}\} + [\Phi]^T[K][\Phi]\{\eta\} &= [\Phi]^T\{F(t)\} \\ [\bar{M}]\{\ddot{\eta}\} + [\bar{K}]\{\eta\} &= \{\bar{F}\} \end{aligned}$$

con  $[\bar{M}]$  e  $[\bar{K}]$  matrici diagonali di massa e rigidità modale.

La risposta forzata non smorzata del generico modo di vibrare  $q_i$  è quindi ottenibile risolvendo l'equazione:

$$\{q_i\}^T[M]\{q_i\}\{\ddot{\eta}_i\} + \{q_i\}^T[K]\{q_i\}\{\eta_i\} = \{q_i\}^T\{F(t)\}$$

Nel caso smorzato, al contrario, la matrice  $[\bar{C}]$  non è ortogonale. Pertanto il disaccoppiamento è valido solo in prima approssimazione e per valori contenuti della matrice di damping C.

$$[\bar{M}]\{\ddot{\eta}\} + [\bar{C}]\{\dot{\eta}\} + [\bar{K}]\{\eta\} \cong \{\bar{F}\}$$

### 2.1.2 Equazioni della dinamica per un sistema in rotazione

Nel caso di un sistema posto in rotazione, è possibile in contributo degli effetti giroscopici ricorrendo ad un approccio energetico (o di Lagrange) a partire dalla definizione di energia cinetica rotazionale riferita al sistema di riferimento principale di inerzia del corpo (pedice \*):

$$K_R = \frac{1}{2}\{\Omega^*\}^T[J]\{\Omega^*\}$$

Con l'ipotesi di disaccoppiamento del comportamento assiale e torsionale rispetto a quello flessionale e poste le coordinate complesse:

$$\begin{aligned}\{z\} &= \{x\} + i \{y\} \\ \{\phi\} &= \{\phi_y\} - i \{\phi_x\} \\ \{p\} &= \begin{Bmatrix} \{z\} \\ \{\phi\} \end{Bmatrix}\end{aligned}$$

il sistema omogeneo non smorzato in coordinate complesse per un modello a  $2n$  gradi di libertà diventa:

$$[M]\{\ddot{p}\} - i\Omega[G]\{\dot{p}\} + [K]\{p\} = 0$$

con  $[M]$ ,  $[K]$  e  $[G]$  rispettivamente matrici di massa, di rigidezza e giroscopica con dimensioni "n x n".

Per la sua risoluzione si ipotizza una soluzione del tipo:

$$\{p\} = \{p_0\} e^{i\omega t} = \begin{Bmatrix} \{z_0\} \\ \{\phi_0\} \end{Bmatrix} e^{i\omega t}$$

e si ricercano le soluzioni del polinomio caratteristico di ordine  $2n$  ottenuto dal problema agli autovalori risultante.

Tali soluzioni dipendono dalla velocità di rotazione del sistema e definiscono i diversi rami del diagramma di Campbell caratteristico del sistema in esame.

A partire dagli autovalori vengono infine calcolati i rispettivi autovettori, corrispondenti alle deformate del sistema alle frequenze di risonanza.

## 3.2 Analisi modale agli elementi finiti per un sistema in simmetria ciclica

### 3.2.1 Riduzione del dominio in simmetria ciclica ed imposizione delle condizioni al contorno

La risoluzione di tale sistema con il metodo degli elementi finiti implica la discretizzazione del dominio in elementi di calcolo, per ognuno dei quali vengono definite caratteristiche di massa e rigidezza, gradi di libertà e carichi.

Ad ogni grado di libertà dell'elemento finito corrisponde una riga del sistema di equazioni omogenee, la cui risoluzione agli autovalori richiede una spesa di calcolo crescente in modo geometrico con le dimensioni del dominio computazionale.

Come nel caso del calcolo della fluidodinamica, anche l'analisi dinamica può essere semplificata ricorrendo alle caratteristiche di assialsimmetria della struttura e periodicità delle perturbazioni. Nello specifico, frequenze e modi di vibrare del sistema sono calcolate analizzandone un singolo settore, composto da una paletta e dalla relativa porzione di disco.

Si definisce il vettore  $\underline{p}_S$  dei gradi di libertà del singolo settore come:

$$\underline{p}_S = \begin{Bmatrix} \underline{p}_L \\ \underline{p}_I \\ \underline{p}_R \end{Bmatrix}$$

con  $\underline{p}_I$ ,  $\underline{p}_L$ ,  $\underline{p}_R$  rispettivamente i gradi di libertà dei nodi interni, di simmetria ciclica sinistra e destra. Analogamente si costruiscono le matrici di massa e rigidezza del sistema ridotto  $[K_S]$  e  $[M_S]$ . Il sistema omogeneo risultante nel dominio della frequenza è pari a:

$$([K_S] - \omega^2[M_S]) \underline{p}_S = \underline{0}$$

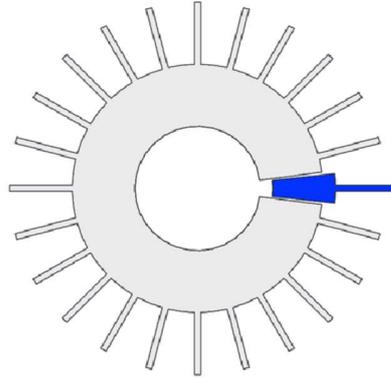


Figure 15: Settore di disco palettato in simmetria ciclica [Fonte: 4]

Concettualmente, l'imposizione delle condizioni al contorno per il sistema ridotto che ne deriva segue la medesima logica utilizzata nel caso fluidodinamico. Si definisce la condizione di sfasamento di fase come:

$$\underline{p}_R^{(n)} = \underline{p}_L^{(n)} e^{i\Phi} = \underline{p}_L^{(n)} (\cos \Phi^{(n)} + i \sin \Phi^{(n)})$$

Il valore dell'IBPA è quello relativo al diametro nodale di interesse "n" e vale  $\Phi = \frac{2\pi n}{N}$ , con N numero di pale. Riprendendo la teoria dell'onda viaggiante, per  $n = 0$  ed  $n = N/2$  il valore di  $\underline{p}_R$  ha parte immaginaria nulla e pertanto la soluzione è unica e reale. Per i restanti valori di diametro nodale esistono invece due soluzioni complesse, identiche ma con verso di rotazione opposto, relative alla separazione tra onde.

Affinché tale condizione di sfasamento sia correttamente imposta in fase di costruzione del modello FEM, è necessario che le interfacce siano tra loro identiche, poiché il trasferimento delle informazioni avviene di elemento in elemento.

Il vettore delle incognite relativo ai gradi di libertà del modello in simmetria ciclica, con pedice CS, è quindi definibile a partire dalla relazione:

$$\underline{p}_S^{(n)} = \begin{Bmatrix} \underline{p}_L \\ \underline{p}_I \\ \underline{p}_R \end{Bmatrix}^{(n)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ e^{i\Phi} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \underline{p}_L \\ \underline{p}_I \end{Bmatrix}^{(n)} = [T]^{(n)} \cdot \underline{p}_{CS}^{(n)}$$

Le matrici di massa e rigidezza del singolo settore dovranno essere modificate di conseguenza:

$$\begin{cases} [K_{CS}^{(n)}] = [T]^T \cdot [K_S] \cdot [T] \\ [M_{CS}^{(n)}] = [T]^T \cdot [M_S] \cdot [T] \end{cases}$$

Il problema agli autovalori diventa, in forma matriciale:

$$\left( [K_{CS}^{(n)}] - \omega^2 [M_{CS}^{(n)}] \right) \begin{Bmatrix} p_L^{(n)} \\ p_I^{(n)} \end{Bmatrix} = \underline{0}$$

in cui i diversi diametri nodali  $n$  e le rispettive soluzioni risultano disaccoppiati tra loro. Per ottenere la risposta fisica del sistema è quindi necessario procedere con una trasformazione di Fourier inversa, sovrapponendo linearmente le soluzioni trovate per un settore in corrispondenza dei diversi diametri nodali:

$$\underline{p}_S = \sum_{n=1-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \underline{p}_S^{(n)} e^{i\Phi^{(n)}}$$

Questo passaggio diviene superfluo nel caso in cui, per valutare la risposta forzata del componente ad uno specifico Engine Order, sia sufficiente conoscerne frequenza e forma modale del solo diametro nodale eccitato da tale forzante armonica.

### 3.2.2 Dinamica dell'area di contatto

In presenza di elementi di contatto come quelli descritti nell'introduzione, la dinamica del sistema diviene non lineare e la sua risoluzione si complica notevolmente.

L'equazione di governo per un sistema a parametri concentrati con un grado di libertà in assenza di superfici di contatto e forzante armonica assume la forma:

$$m\ddot{x}(t) + k(1 + j\delta)x(t) = f(t) = F\cos(\omega t)$$

che nel dominio della frequenza diventa:

$$(-m\omega^2 + k(1 + j\delta))Xe^{i\Psi} = F$$

con  $\bar{k} = k(1 + j\delta)$  lo smorzamento strutturale,  $F$  l'ampiezza della forzante armonica ed  $\bar{X} = Xe^{i\Psi}$  la soluzione particolare con ritardo di fase  $\Psi$  dovuto al termine isteretico.

In presenza di contatto, al contrario, la risposta del sistema cessa di essere direttamente correlata alla fonte dell'eccitazione e l'integrazione nel dominio del tempo diventa l'unica soluzione per risolvere in forma esatta l'equazione.

$$m\ddot{x}(t) + k(1 + j\delta)x(t) = f(\omega t) - f_{NL}(t)$$

I modelli di contatto hanno come obiettivo l'individuazione di un'espressione periodica con periodo  $T = 2\pi/\omega$  in grado di approssimare la forza di contatto  $f_{NL}(t)$ , così da permettere lo studio del sistema nel dominio della frequenza.

Un modello di contatto è un modello matematico che, partendo da un'informazione di spostamento relativo tra superfici all'istante  $t^*$ , calcola in modo analitico o numerico il valore della forza di contatto  $f_{NL}(\omega t)$  correlata.

Modelli di contatto particolarmente diffusi sono quelli basati su *funzioni di penalità*, per i quali le violazioni delle condizioni di contatto generano nell'istante  $t^*$  un carico opposto alla direzione della violazione. La forza in questione è determinata a partire dalla teoria Coulombiana del contatto e prevede l'impiego di un coefficiente di frizione  $\mu$  e di un set di rigidzze di penalità tangenziali e normali  $k_T$  e  $k_N$ .

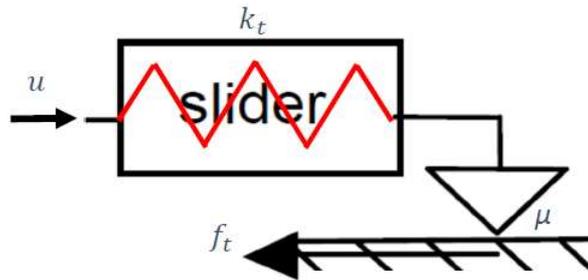


Figure 16: Rigidzza di penalità tangenziale [Fonte: (5)]

Vengono quindi definite tre distinte condizioni:

- Contatto/attaccamento, per cui la forza di contatto è proporzionale allo spostamento relativo tangenziale e/o normale:

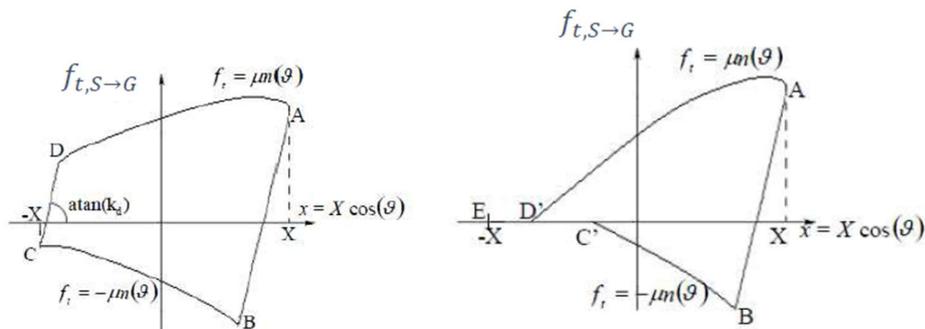
$$f_{NL_c}(\omega t) = k_T(x_1 - x_2) = k_T u(\omega t)$$

- Scorrimento, durante il quale il carico di penalità vale:

$$f_{NL_{slip}}(\omega t) = -\text{sign}(\dot{u}(\omega t)) \mu n(\omega t)$$

- Separazione, in cui nessuna forza di contatto viene scambiata.

L'area del ciclo di isteresi individuato nel piano  $f_{NL}(\omega t) - u(\omega t)$  corrisponde all'energia dissipata nel ciclo di oscillazione del sistema dinamico.



Sebbene la modellistica del contatto appena presentata offra molteplici vantaggi sotto il profilo dell'accuratezza e sia relativamente semplice da implementare all'interno di un modello agli elementi finiti, nel corso del presente lavoro di tesi è stata preferita l'implementazione di soluzioni di contatto rigido per la riproduzione delle interfacce disco-pala e pala-pala.

L'informazione principale derivante dalla simulazione del contatto è infatti quella relativa al quantitativo di energia dissipata durante un ciclo, la cui conoscenza è di cruciale importanza per la modellazione di fenomeni di divergenza statica, flutter o amplificazione dell'oscillazione forzata. In ognuno di questi casi la comprensione e la riproduzione del fenomeno fisico passa necessariamente dall'accoppiamento (completo o parziale) tra comportamento meccanico del componente e forzante aerodinamica.

Tale approccio esula dalle finalità di questa tesi, il cui obiettivo è quello di valutare l'accuratezza delle diverse soluzioni di calcolo del campo di pressione non stazionario agente su una palettatura indeformata, senza entrare nel metodo degli effetti di mutua interazione tra fluido e struttura. Aerodinamica non stazionaria e dinamica del sistema sono quindi risolti separatamente, con uno scambio di informazioni limitato alla fase di mappatura della forzante sul profilo e successivo calcolo della risposta forzata non accoppiata.

L'incipienza di fenomeni di contatto nei casi analizzati non modifica in maniera significativa la deformata modale del sistema, né le frequenze di vibrazione dello stesso. Per le ragioni appena esposte, i seguenti modelli semplificati sono stati implementati per il calcolo della risposta dinamica delle palette.

### *Vincoli all'interlocking*

L'approccio più semplice per modellare il contatto all'interlocking consiste nel vincolare i gradi di libertà dei nodi della mesh collocati sulla superficie di strisciamento.

Le condizioni al contorno imposte sono di tipo cinematico e prescrivono l'assenza di traslazione e rotazione relativa tra i nodi  $R^k$  appartenenti ad un settore e quelli  $L^{k+1}$  del settore successivo. Estensione delle aree rese solidali e direzioni lungo cui elidere i gradi di libertà sono variabili che hanno un peso significativo sull'accuratezza del risultato finale.

La complessità del fenomeno fisico ed il sostanziale livello di semplificazione introdotto nel modello hanno richiesto lo svolgimento di una campagna di sperimentazione numerica per diverse configurazioni di contatto, portata avanti dallo studente del Politecnico di Torino Amedeo Ramieri nell'ambito della sua tesi di laurea magistrale *“Analisi e comparazione di diversi modelli di contatto all'interlocking per rotori di turbine di bassa pressione”* in collaborazione con GE AvioAero.

I risultati della ricerca mostrano come predizioni accurate del comportamento dinamico di dischi palettati si possano ottenere limitando il bloccaggio dei gradi di libertà ad un'area molto ristretta dell'interlocking, con errori nelle frequenze di risonanza delle principali forme modali compresi tra l'1% ed il 2% rispetto ai risultati sperimentali.

La bontà dei risultati degrada rapidamente se si estende l'area di applicazione del modello o si svincolano alcuni dei gradi di libertà cinematici dei nodi coinvolti, con errori fino a 4 volte maggiori. E' inoltre emersa una bassa sensibilità del modello alla posizione della zona di contatto ridotta all'interno dell'area di interlocking.

Sebbene un'interpretazione fisicamente consistente di tali risultati sia difficile, ciò che emerge chiaramente è il ruolo di centrale importanza della rigidità complessiva del sistema nella definizione del suo comportamento dinamico.

Alla luce dei risultati citati, il modello impiegato nel proseguo della trattazione è stato pertanto quello ad area di contatto ridotta, con bloccaggio dei gradi di libertà sulle tre direzioni di traslazione.

Sotto il profilo della costruzione del modello, tale modello si è tradotto nell'imposizione delle medesime condizioni di simmetria ciclica con shift di fase precedentemente introdotte. In altre parole si è assunta la continuità di materiale tra le porzioni selezionate sull'interlocking di pale adiacenti.

#### *Vincoli di contatto disco-pala*

La corretta modellazione delle interfacce di contatto tra disco e pala sono materia di studio estremamente attuale, nonché punto di incontro di numerosi temi di ricerca tra il Politecnico di Torino e GE Avio Aero. Ciononostante, per le medesime considerazioni fatte precedentemente, nell'ambito del presente lavoro di tesi è stato ritenuto opportuno mantenere un livello di semplificazione coerente con l'accuratezza dei restanti modelli impiegati e dei risultati che si sarebbero prodotti.

Nel caso del contatto in questione, il modello implementato ha previsto il vincolo completo dei gradi di libertà esistenti tra i nodi dei due componenti nella regione di interfaccia, realizzando di fatto un bloccaggio assoluto tra disco e palette.

# Metodologia di calcolo della risposta forzata per configurazioni ridotte

---

Come discusso nel capitolo introduttivo, il calcolo del campo di pressione periodico agente sulla palettatura di turbina richiede l'utilizzo di codici numerici agli elementi finiti. Nelle pagine che seguono verrà illustrata la procedura di setup del modello di analisi non stazionaria, dalla costruzione del dominio computazionale fino alla definizione delle condizioni al contorno e dei modelli numerici impiegati. Verranno quindi descritti i due casi studio per la valutazione delle diverse strategie di calcolo non stazionario.

## 4.1. Il codice CFD: TRAF

Il presente lavoro è stato sviluppato mediante l'utilizzo del codice di fluidodinamica computazione TRAF [Arnone (1994)], un solutore per le RANS formulate nella loro forma conservativa in un sistema di riferimento cilindrico. Il codice è strutturato per rispondere alle esigenze specifiche della progettazione aerodinamica nelle turbomacchine, dalla simulazione di moti incompressibili fino ai flussi in regime transonico. Le equazioni di Navier Stokes stazionarie sono riformulate in modo da essere risolte nello pseudo-tempo con approccio time-marching, mentre le equazioni non stazionarie sono risolte con uno schema di discretizzazione spaziale implicito a 3 punti backward (BDF) anch'esso nello pseudo-tempo (dual time stepping). Lo schema numerico impiegato è un Runge Kutta esplicito a 4 stadi, con risoluzione sulla griglia di calcolo condotta con approccio multigrid.

La simulazione dei flussi multischiera avviene in regime stazionario, con approccio mixing plane, o con integrazione diretta nel tempo, rispettivamente con metodologia Full Annulus e Phase-Lag (Generalized Shape Correction method).

## **4.2 Definizione del caso multi-schiera di riferimento e setup numerico**

Lo stato di sollecitazione aerodinamica a cui una turbina aeronautica di bassa pressione è sottoposta non è costante lungo il suo asse. Velocità ed angoli caratteristici in ingresso ad ogni stadio variano in modo considerevole attraverso i diversi stadi di espansione, così come gli effetti di interazione legati alla presenza di schiere adiacenti con numero di pale differenti.

La risposta forzata, così come i restanti indicatori aero-meccanici utilizzati in fase progettuale, sono quindi funzione non solo dalla palettatura impiegata e del salto di pressione ad essa associato in condizioni di incidenza ideale, ma anche e soprattutto dell'aerodinamica locale perturbata alla specifica condizione operativa di funzionamento del motore. Variazioni nella geometria o nelle caratteristiche tridimensionali del flusso anche di un singolo settore inducono modificazioni sostanziali sul flow path e, di conseguenza, sulla genesi delle forzanti armoniche agenti sul sistema.

Le condizioni al contorno in ingresso ed in uscita per una particolare schiera di turbina sono, in indefinitiva, determinate dalle condizioni di monte e di valle dell'interna macchina e dalle caratteristiche costruttive di tutto il dominio fluido coinvolto.

Fatta questa premessa, risulta evidente come l'utilizzo dei profili palari reali inseriti in condizioni di flusso non reali, come ad esempio condizioni di incidenza nulla o pressione uniforme lungo il raggio, risultino parzialmente inadeguati a descrivere la reale sensibilità della risposta forzata alle strategie di calcolo ridotto che saranno in seguito valutate. D'altra parte, l'estensione del dominio CFD all'intero motore sarebbe insostenibile dal punto di vista computazionale, soprattutto considerando le dimensioni del campione necessarie all'extrapolazione di dati significativi.

L'approccio selezionato per il presente lavoro è stato quello di utilizzare le condizioni al contorno medie circonferenziali estratte da una simulazione mixing-plane dell'intera turbina di bassa pressione per l'analisi non stazionaria di un set ridotto di schiere.

In questo modo, l'informazione relativa all'influenza degli stadi di monte e di valle sulle condizioni medie dell'intervallo di motore analizzato è in larga parte conservata ed i contributi di non stazionarietà vengono approfonditi solo laddove richiesti.

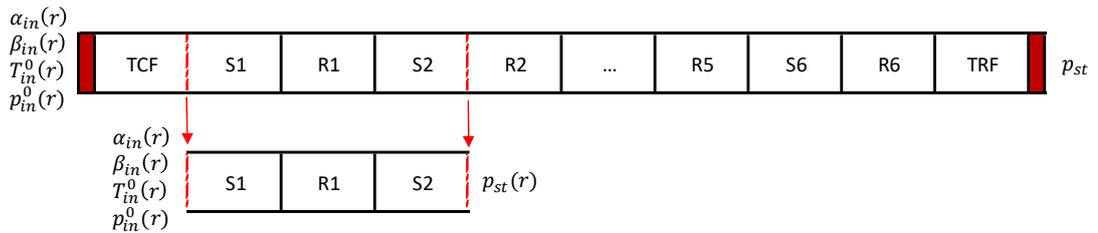


Figure 17: Trasferimento delle condizioni al contorno

Un approccio di questo tipo comporta diversi vantaggi, soprattutto sotto il profilo della spesa computazionale e del quantitativo di memoria fisica richiesta per il salvataggio dei dati. Come sottolineato in diversi articoli di letteratura, la qualità del disturbo non stazionario responsabile della risposta forzata è inoltre accettabile, poiché i disturbi armonici di maggior rilevanza sono quelli associati all'interazione della palettatura in esame con la schiera di monte e quella di valle. Ciò che si perde, seppure di debole intensità, sono le sollecitazioni periodiche ad alto Engine Order relative alle scie delle schiere di monte ed eventuali disturbi rotanti dall'elevata lunghezza d'onda associati a distorsioni del flusso, fenomeni di instabilità aerodinamica (es. stallo rotante in una schiera di monte) o al getto dei combustori.

La geometria delle schiere e le caratteristiche geometriche delle pareti di turbina sono quelle relative ad un motore aeronautico turbofan per il trasporto civile sviluppato e prodotto dalla GE Aviation. La turbina di bassa pressione, che di seguito verrà analizzata, conta di 6 stadi di espansione.

#### 4.2.1 Costruzione della mesh e grid convergence

La mesh aerodinamica impiegata è di tipo strutturato ed è stata costruita in modo parametrico mediante l'impiego di un software di proprietà di GE AvioAero, sviluppato dal T-Group dell'università di Firenze.

Dopo aver definito l'estensione assiale del dominio di ciascuna, il processo di meshing è stato svolto indipendentemente per ognuna delle palettature di turbina. La caratteristica multiblocco del codice TRAF permette infatti il trasferimento di informazioni tra schiere adiacenti mediante interpolazione, ragione per cui non è richiesta corrispondenza esatta tra le celle di blocchi successivi. L'assialsimmetria del problema e l'impostazione parametrica del software hanno inoltre permesso di definire i parametri di griglia per solo un canale per ogni schiera.

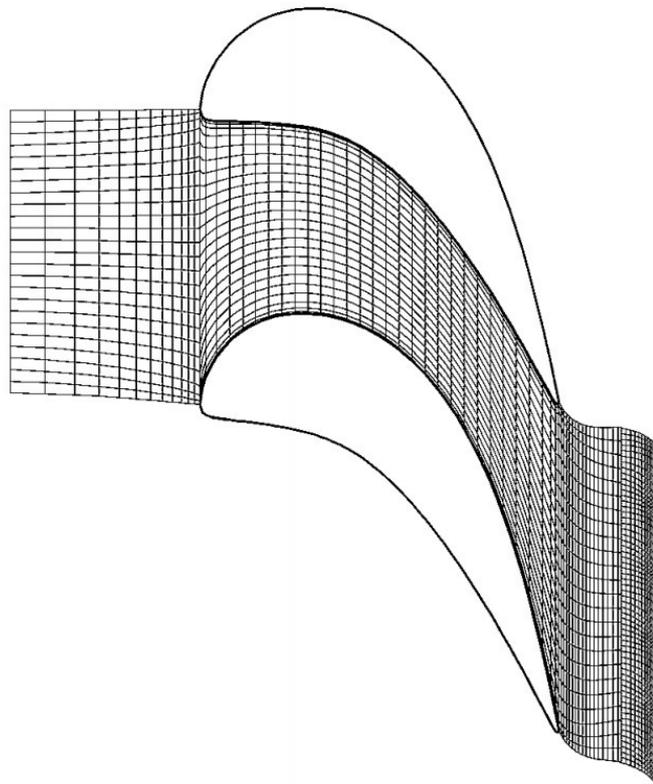


Figure 18: Mesh ad H [Fonte (6)]

La griglia impiegata è di tipo ad H e si estende in coordinate cilindriche dal dorso di un profilo fino al ventre di quello successivo. Le frontiere periodiche sono posizionate lungo superfici condotte dal bordo d'attacco e di uscita della paletta fino rispettivamente alle sezioni di ingresso e di uscita del blocco. Angoli caratteristici ed ordine polinomiale di queste linee sono scelti in accordo con i triangoli di velocità di progetto di ognuna delle schiere della turbina.

L'impiego di modelli di turbolenza low-Re, necessari ad una corretta modellazione dello strato limite nelle regioni di inspessimento, ha richiesto l'inserimento di layers in prossimità delle pareti. Particolare attenzione è stata posta in due zone critiche della palettatura: a monte del punto di ristagno, dove si realizzano elevate accelerazioni del flusso, e nella regione di scia a valle del profilo, in cui hanno luogo fenomeni turbolenti ad alta frequenza (vortici di Von Karman).

### Grid convergence

L'indipendenza dei risultati dalla dimensione delle celle di calcolo è stata accertata facendo variare la discretizzazione spaziale di un singolo canale inter-palare, passando da un minimo di  $4 \cdot 10^5$  ad un massimo di  $5 \cdot 10^6$  celle. Lo scalamento assiale, tangenziale e radiale è stato fatto in modo proporzionale, mantenendo in ognuno dei casi un numero di celle compatibile con la risoluzione multi-grid delle RANS. Durante la grid convergence il numero di layers è stato modificato in modo da preservare il medesimo valore di  $y^+$  nelle diverse configurazioni. Il confronto tra i set di risultati è stato condotto confrontando un parametro globale (il coefficiente di lift) e la distribuzione locale del campo di pressione agente sulla pala al 50% del raggio.

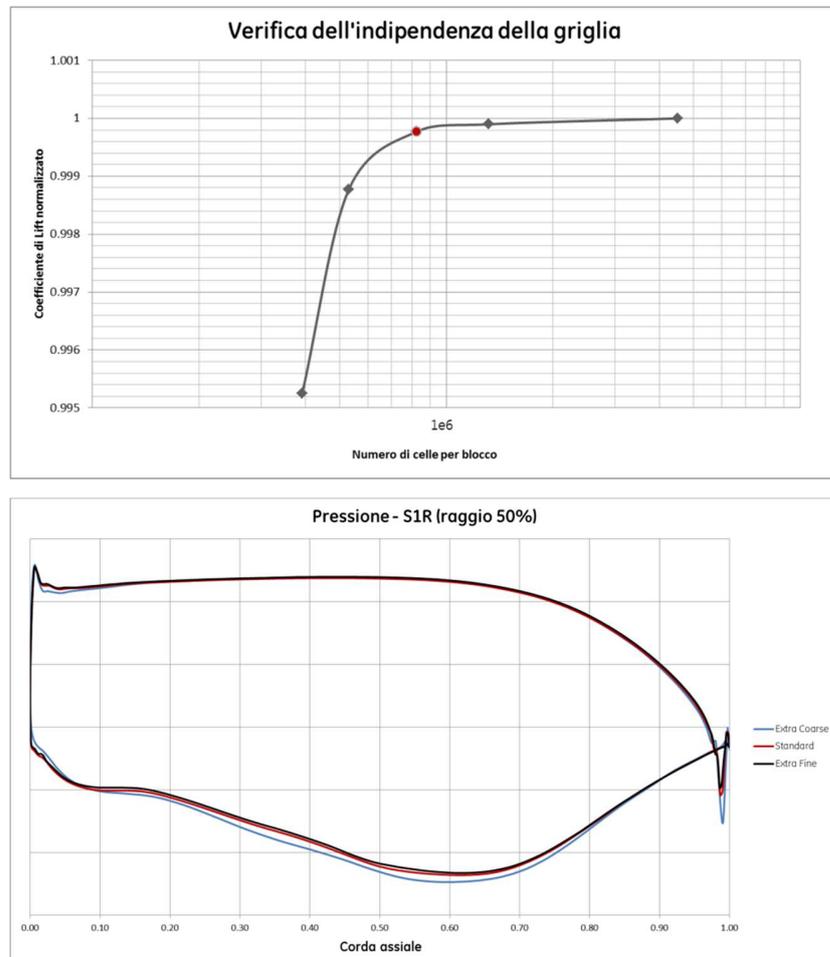


Figure 19: Grid convergence

Di seguito sono riportati i tempi di calcolo per le diverse configurazioni:

Celle assiali	Celle circonferen.	Celle radiali	Layers	Totale per blocco	CPU time [h]
2.2	0.65	1	2	4E+05	0.18
3	0.8	1.5	2	5E+05	0.36
4.1	1	2	2	8E+05	0.64
5.3	1.2	2.5	2	1E+06	1.05
8.2	2	3	2	4E+06	2.67

Table 2: Grid convergence

Fissate le dimensioni della mesh nelle tre direzioni, è stata verificata la convergenza rispetto al numero di layers utilizzati per il modello di turbolenza Baldwin Lomax LowRe.

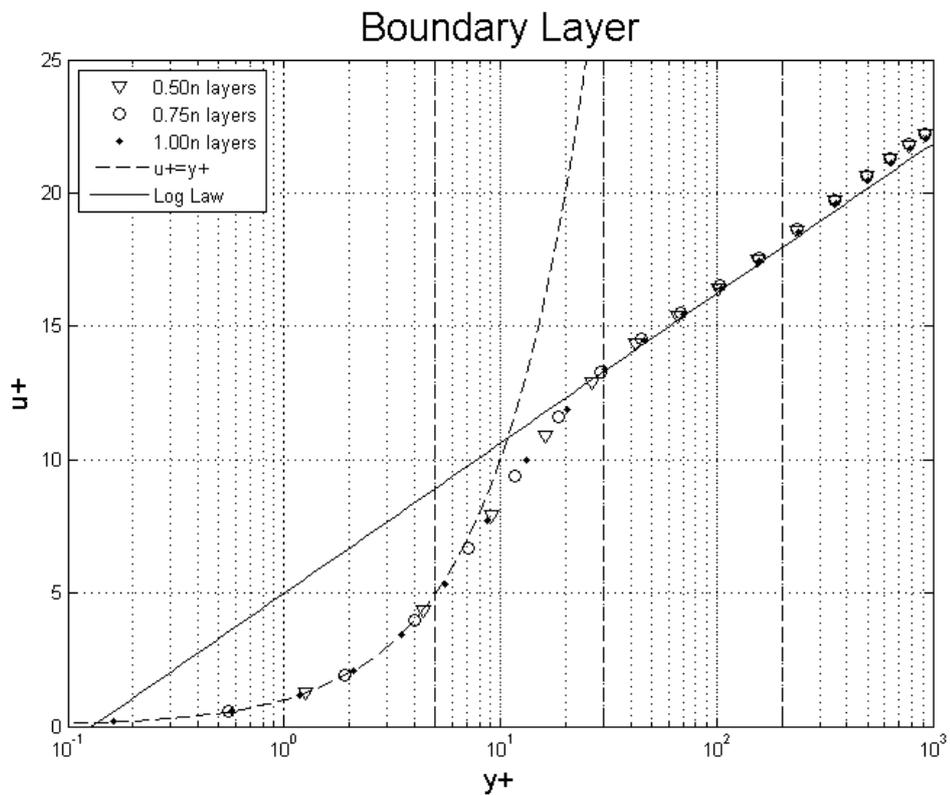


Figure 20: Layer convergence

#### 4.2.2 Scelta del modello di turbolenza

Nell'ambito delle turbomacchine la scelta del modello di turbolenza adatto rappresenta un compito piuttosto difficile. Non esistono modelli adeguati per ogni tipologia di simulazione, soprattutto se si considera la complessità e l'ampiezza del range (spaziale e temporale) dei fenomeni coinvolti. In generale, per simulazioni con flussi secondari complessi, elevati gradienti di pressione e dinamiche non stazionarie ad alta frequenza è consigliabile usare modelli Low-Re. Dipendentemente dal grado di accuratezza che si intende raggiungere, modelli a 0,1 o 2 equazioni ausiliarie possono essere utilizzati, a patto ovviamente di disporre di opportune calibrizioni specifiche per l'ambito delle turbomacchine.

Per flussi attaccati ad alte velocità, ragionevolmente vicini al punto operativo, un modello algebrico semplice come il Baldwin-Lomax rappresenta un'alternativa accurata e molto efficiente. Tale approccio è spesso impiegato nell'ambito di procedure di progettazione iterativa dove la robustezza è più importante del livello di dettaglio catturato nella fisica del flusso.

In questo modello la viscosità turbolenta  $\mu_T$  è calcolata in funzione del profilo di velocità locale dello strato limite ed assume valori differenti nella zona di parete ed in quella di flusso sviluppato. Nello specifico:

$$\mu_T = \begin{cases} \mu_T^{inner} & \text{se } y \leq y_{crossover} \\ \mu_T^{outer} & \text{se } y > y_{crossover} \end{cases}$$

La viscosità turbolenta per le zone prossime alla parete è data dalla formula di Prandtl – Van Driest ed è calcolata ricorrendo a caratteristiche locali del campo di moto come il rotore della velocità, la densità, il valore di  $y^+$  e la distanza dalla parete. Analoghe le relazioni valide per la determinazione di  $\mu_T$  nelle zone di flusso sviluppato. La distanza di crossover è infine determinata dalla minima distanza di parete in cui i due valori di viscosità si equivalgono.

Il modello di Baldwin Lomax è, come già accennato, un modello Low-Re e richiede pertanto una griglia sufficientemente risolta nelle regioni di parete. Il calcolo della distanza di crossover e la dipendenza dal valore di  $y^+$  per il calcolo della viscosità turbolenza rende questo modello particolarmente indicato nelle griglie di tipo strutturato, in cui la disposizione delle celle segue una logica di allontanamento parallelo dalle pareti.

Per le ragioni appena illustrate questo modello di turbolenza è stato selezionato come riferimento nel corso della presente trattazione. A conferma della bontà del metodo viene di seguito mostrato un confronto tra modello Baldwin Lomax ed un k-omega LowRe. I risultati, ottenuti a parità di mesh e condizioni operative per una simulazione a singola schiera, evidenziano la sostanziale coincidenza tra predizioni di mach isoentropico e pressione sulla schiera al 50 % del raggio.

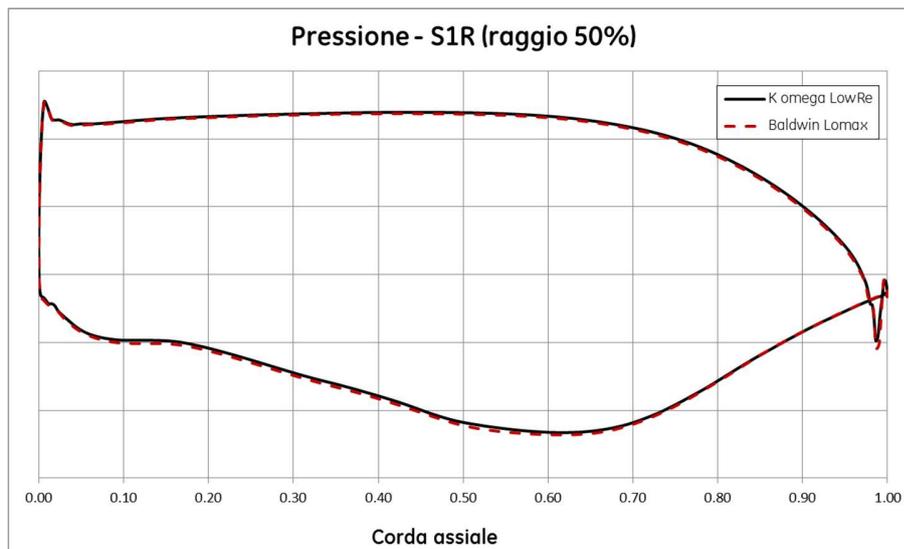


Figure 21: komega lowRe vs Baldwin Lomax per una simulazione Mixing Plane

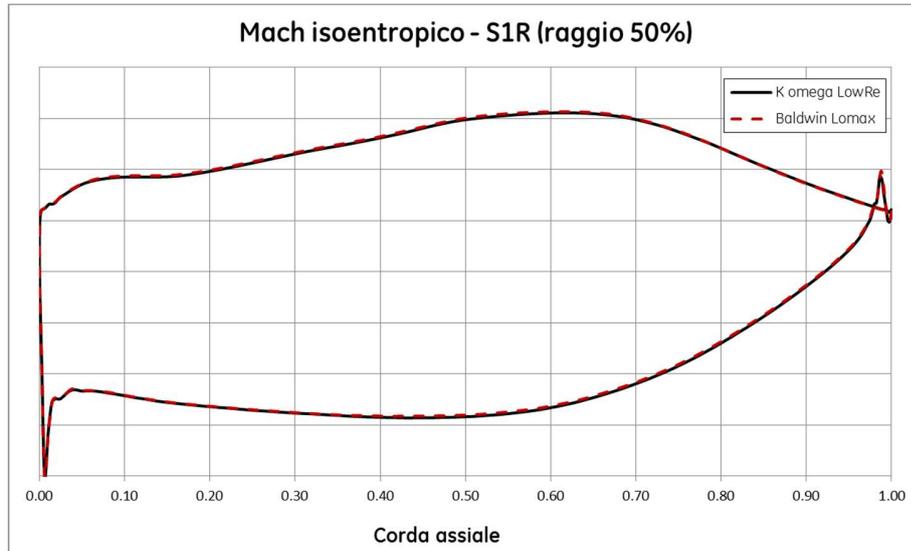


Figure 22: komega lowRe vs Baldwin Lomax per una simulazione Mixing Plane

Differenze più sostanziali, soprattutto nella regione di separazione dello strato limite in corrispondenza del dorso della paletta, sono attese nel caso non stazionario a causa dell'insorgenza di fenomeni turbolenti ad alta intensità come vortici di Von Karman o, in generale, effetti di scia. Un confronto tra le performance dei due modelli di turbolenza nel caso multischiera sarà evidenziato nelle fasi successive del lavoro, pur non rientrando nelle finalità di ricerca della presente trattazione.

### 4.2.3 Imposizione delle condizioni al contorno

Pressioni totali, temperature totali ed angoli geometrici di flusso sono imposti in ingresso al distributore statorico a monte del primo stadio di turbina di bassa pressione. Queste distribuzioni spanwise (lungo il raggio) dipendono dalla specifica condizione operativa del motore e sono ottenute mediando circonferenzialmente le caratteristiche del flusso in uscita dalla turbina di alta pressione. La pressione statica in uscita dall'ultimo stadio è imposta al raggio medio pari a quella di scarico, e la sua distribuzione lungo il raggio è automaticamente dedotta dal solutore imponendo la condizione di equilibrio radiale della quantità di moto. Condizioni no slip e scambio termico nullo sono imposte alle pareti solide del dominio. Le iniezioni di aria di raffreddamento nei primi stadi di bassa pressione, originariamente presenti nella configurazione reale del motore, sono per semplicità non implementate all'interno del modello.

La simulazione multistadio è condotta con approccio mixing plane, con la soluzione stazionaria ottenuta marciando nello pseudo tempo con schema di discretizzazione temporale esplicito e local time stepping. La soluzione raggiunge la convergenza dopo circa 10 ore senza particolari oscillazioni nei residui, il cui valore stazionario medio RMS è considerato sufficientemente piccolo da rendere il risultato della simulazione accettabile.

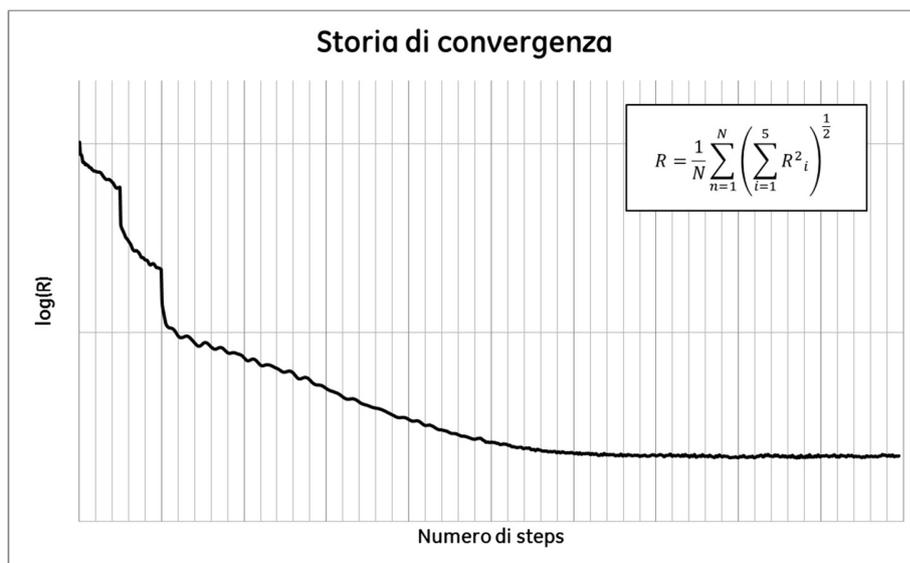


Figure 23: Storia di convergenza

### 4.3 Simulazioni con dominio ridotto

Le condizioni al contorno sono imposte per un set limitato di schiere di interesse. Per queste ultime si vuole infatti verificare la bontà dei risultati ottenuti facendo rigirare l'analisi con un intervallo macchina ridotto. Con riferimento alle schiere rotoriche presa in esame, sono state lanciate le configurazioni mostrate in tabella. Il calcolo degli errori è stato fatto per la distribuzione di pressione sul profilo al 50% del raggio, normalizzando l'area compresa tra la curva calcolata e quella di riferimento sull'area individuata dalla curva chiusa del campo di distribuzione di pressione:

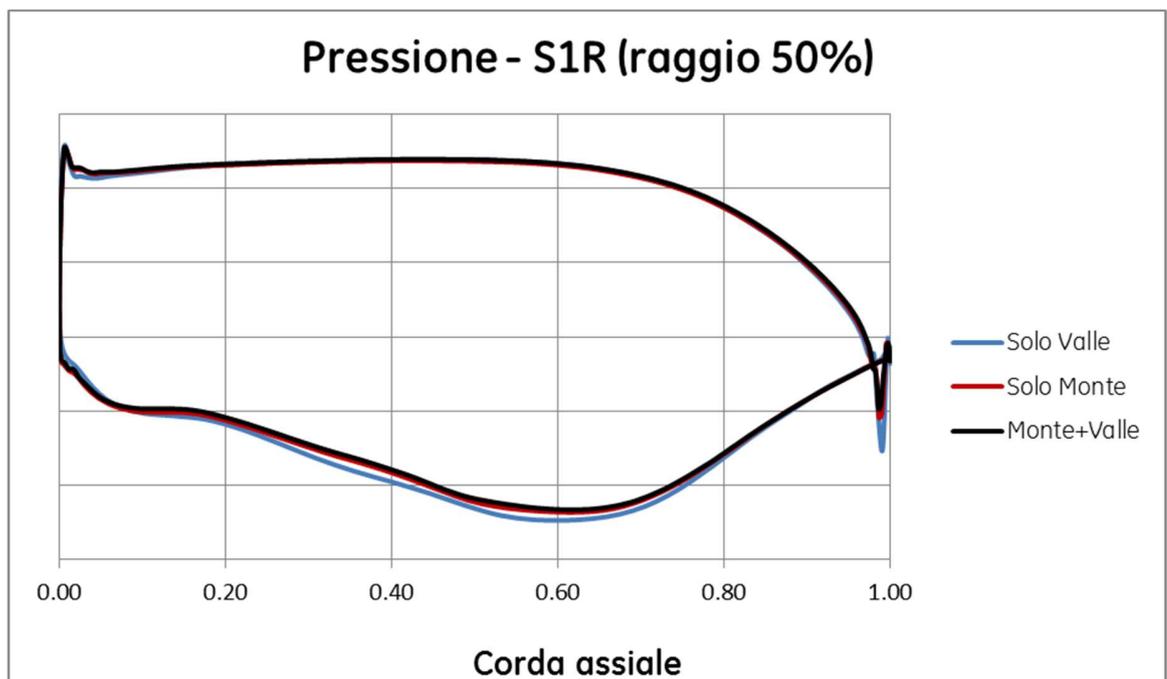


Figure 24: Confronto tra simulazioni con dominio ridotto

I tempi computazionali mostrano una riduzione con rapporto di circa 1:1 rispetto alla riduzione del dominio apportata. Questo dato trova riscontro nei valori di efficienza dichiarata dei metodi di calcolo in parallelo multiblocco adottati dal solutore, prossimi al 100%.

	<b>Dominio computazionale</b>	<b>CPU TIME [h]</b>	<b>Errore relativo</b>
<b>R1</b>	S1 – R1 – S2	1.2	0.6 %
	S1 – R1	0.8	0.9 %
	R1 – S1	0.8	1.2 %
<b>R6</b>	S6 – R6 - TRF	1.1	0.4 %
	S6 – R6	0.7	0.7 %
	R6 - TRF	0.8	0.9 %

*Table 3: Confronto tra simulazioni con dominio ridotto*

I risultati evidenziano la corretta riproduzione dei campi di moto medi agenti sulle schiere nei due casi analizzati. Il maggior livello di errore negli stadi di testa è ragionevolmente collegato all'elevato carico aerodinamico agente su di essi, con un conseguente aumento della sensibilità della soluzione a variazioni anche leggere del campo di moto.

### 4.3.1 Simulazioni ridotte con risoluzione del flusso periodico

Come discusso nel corso del paragrafo introduttivo, le perturbazioni periodiche del flusso legate all'interazione tra schiere statoriche e rotoriche non sono riproducibili attraverso modelli mixing plane. La non stazionarietà rotante in direzione circonferenziale è in fatti, per definizione, mediata durante il processo di interpolazione delle quantità fluidodinamiche tra blocchi adiacenti.

Per ottenere soluzioni non stazionarie con un elevato grado di accuratezza è necessaria l'integrazione diretta nel tempo delle URANS sull'intero dominio anulare degli stadi presi in considerazione. Nel caso delle schiere precedentemente considerate, ovvero i rotor di stadi 1 e 6, sarebbe dunque necessario includere nel dominio computazionale tutti i canali costituenti i rotor in esame più quelli relativi alle palettature statoriche di monte e valle.

I tempi computazionali possono essere ridotti in maniera sostanziale laddove i numeri di palette delle schiere studiate permettano una riduzione periodica del dominio computazionale. Prendiamo come esempio le due configurazioni:

INTERO ANELLO				ANELLO PERIODICO			
<i>Schiera di Monte</i>	<i>Schiera studiata</i>	<i>Schiera di Valle</i>	<i>Totale Blocchi</i>	<i>Schiera di monte</i>	<i>Schiera studiata</i>	<i>Schiera di valle</i>	<i>Totale Blocchi</i>
172	104	16	292	43	26	4	73
118	158	124	400	59	79	62	200

Table 4: Riduzione del dominio con BC periodiche

I vantaggi di tale approccio risultano evidenti utilizzando tecniche di calcolo non stazionario di tipo tradizionale (Full Annulus) oppure sfruttando le condizioni di choro-cronicità con le condizioni al contorno del Generalized Shape Correction Method (Phase Lag). Nel primo caso si riducono i blocchi griglia fisicamente coinvolti nella simulazione e, di conseguenza, lo spazio occupato sul calcolatore e quello richiesto nella fase di post-processing. Inoltre, troncando ad un sottomultiplo il periodo di rotazione del motore, diminuiscono le armoniche associate ai disturbi non stazionari delle grandezze

aerodinamiche ed è pertanto richiesto un numero minore di step temporali per discretizzare accuratamente l'evoluzione dei fenomeni. Nel caso del Phase Lag, dove lo schema numerico necessita di due soli blocchi griglia per schiera in ogni caso, il vantaggio è solo quello relativo alla discretizzazione temporale.

Nella configurazione numero 1, le condizioni periodiche permettono una riduzione del dominio di 4:1; nella seconda di 2:1. In entrambi i casi i tempi di calcolo necessari alla convergenza del conto non stazionario sono molto lunghi, dell'ordine delle settimane sfruttando la parallelizzazione del calcolo che il solutore permette.

Intervalli temporali simili, se pur accettabili in fase di design di dettaglio, sono assolutamente incompatibili con la pratica di progettazione preliminare, spesso condotta con procedure iterative di ottimizzazione multivariata.

Una possibile tecnica di riduzione dei tempi computazionali consiste nell'alterazione del numero di canali delle schiere coinvolte, in modo da massimizzare il massimo comun denominatore esistente tra le schiere. Per modifiche contenute del numero di canali è infatti lecito attendersi variazioni altrettanto contenute della forzante aerodinamica agente sui diversi profili. A titolo di esempio si consideri la configurazione che segue:

<b>INTERO ANELLO</b>				<b>ANELLO PERIODICO</b>			
<i>Schiera di Monte</i>	<i>Schiera studiata</i>	<i>Schiera di Valle</i>	<i>Totale Blocchi</i>	<i>Schiera di monte</i>	<i>Schiera studiata</i>	<i>Schiera di valle</i>	<i>Totale Blocchi</i>
172	104	16	292	43	26	4	73
176 (+2.3%)	104	16	296	22	13	2	37 (-49.3%)

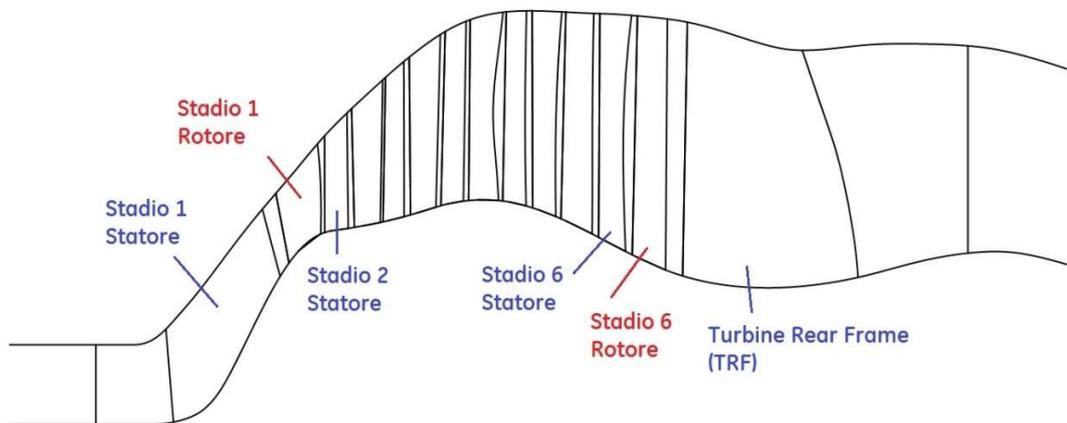
Table 5: Riduzione del dominio con BC periodiche ed alterazione numero canali

I vantaggi di un approccio di questo tipo sono evidenti, con riduzioni drastiche dei tempi computazionali e del quantitativo di memoria fisica impiegato durante la computazione. Tra gli svantaggi, l'impossibilità di quantificare o prevedere l'errore associato alle diverse perturbazioni.

I fenomeni non stazionari di flusso, ed in particolar modo quelli associati ai meccanismi di interazione tra schiere adiacenti, dipendono fortemente dalla geometria del sistema in cui si generano. Lo spostamento del punto di impatto di una scia, piuttosto che la differente compartecipazione tra gli effetti di monte e quelli di valle, possono modificare pesantemente la risultante armonica agente sulla palettatura, con fattori di amplificazione dipendenti dalle caratteristiche cinematiche e termodinamiche del flusso.

In aggiunta, forme modali diverse possono risultare più o meno sensibili all'alterazione delle condizioni di flusso, traducendo le forzanti aerodinamiche in eccitanti del modo di vibrare dall'intensità completamente diversa.

Nelle pagine che seguono verranno analizzate differenti configurazioni di alterazione di pala, confrontandone i risultati aerodinamici e di risposta forzata con le equivalenti non alterate. I casi studio sono stati scelti per la rilevanza delle informazioni estraibili e sono i seguenti:



<ul style="list-style-type: none"> <li>• Caso A: Rotore 1.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Caso B: Rotore 6</li> </ul>
3. Schiera di monte: $\frac{19}{25}n$ pale;	- Schiera di monte: $\frac{81}{55}m$ pale;
4. Schiera di studio: $n$ pale;	- Schiera di studio: $m$ pale;
5. Schiera di valle: $\frac{4}{5}n$ pale;	- Schiera di valle: $\frac{55}{7}m$ pale;
6. $\overline{\Delta p}_{norm} \approx 1$	- $\overline{\Delta p}_{norm} \approx 0.25$

Figure 25: Presentazione dei casi studio

## 4.4 Analisi modali e calcolo della risposta forzata

Il modello agli elementi finiti disco-pala è costruito mediante il software commerciale HyperMesh®, per la quale è stata verificata la convergenza rispetto ai parametri griglia.

La pala è rigidamente vincolata al disco e condizioni di simmetria ciclica sono imposte lungo le frontiere in accordo con quanto specificato nel capitolo 2. Il modello di contatto all'interlocking è di tipo "a zona ridotta", le cui buone performance sono state validate dal confronto con dati sperimentali acquisiti al banco. I materiali, i vincoli e le condizioni al contorno sono imposti con il software di preprocessing commerciale Patran®. Sullo stesso ambiente sarà successivamente svolta la fase di post-processing.

Il calcolo degli autovalori ed autovettori per i diversi diametri nodali è eseguito in Nastran®. Gli autovalori risultanti per i diversi diametri nodali sono confrontati con le frequenze di crossing acquisite sul banco, mostrano errori inferiori al 2% per tutte le famiglie modali principali.

Ampiezza e fase delle deformate modali ai diametri nodali eccitati dagli EO di monte e di valle (nella configurazione reale di pale) sono estratte durante la fase di elaborazione dei risultati, scaricando parte reale e parte immaginaria degli spostamenti dei nodi della mesh superficiale del profilo. Per le finalità della presente trattazione solo il primo modo flessionale sarà analizzato, poiché considerato il più sensibile alle variazioni delle caratteristiche aerodinamiche della forzante.

Una stima della risposta forzata è ottenuta calcolando il lavoro aerodinamico per ciclo di oscillazione a partire dalle forzanti armoniche agenti sui nodi e dagli spostamenti armonici degli stessi. L'interazione fluido-struttura è quindi valutata con approccio completamente disaccoppiato e sotto ipotesi di linearità.

$$L_{aero} = \int_t^{t+T} \int_{S_{pala}} -p \hat{n} \cdot \underline{w} dS dt$$

## 4.5 Definizione del flusso di lavoro complessivo

Il presente lavoro si inserisce all'interno di un progetto di integrazione tra design dinamico preliminare dei componenti e procedure di feedback aeromeccaniche. Per questa ragione, ognuna delle procedure di costruzione della mesh, lancio e monitoraggio della simulazione e successivo postprocessing è stata strutturata in modo da essere completamente automatica.

L'intero set di istruzioni è stato scritto in codice Matlab ed ha permesso la rapida gestione di una mole significativa di simulazioni e processi satellite.

Il primo processo riceve in input il numero di pale reali dell'intervallo motore analizzato e restituisce in uscita un set di configurazioni idonee al lancio. La preselezione è fatta, in primo tentativo, secondo un duplice criterio: minimizzazione delle variazioni sul numero totale di palette e massimizzazione del massimo comun denominatore esistente tra le schiere.

Successivamente si procede alla costruzione parametrica del dominio computazionale delle nuove configurazioni trovate ed al successivo lancio del conto stazionario a schiere ridotte con approccio mixing plane. Giunte a convergenza, le soluzioni di mach isentropico e pressione sul profilo a diversi raggi sono confrontate con i valori di riferimento del caso multischiera e, una volta attestatane la coerenza, si procede al lancio delle medesime configurazioni in assetto unsteady con i modelli phase lag e full annulus. La soluzione stazionaria è mappata e replicata sulla griglia relativa al settore angolare analizzato e le condizioni mixing plane tra schiere sono rimosse a favore di un approccio "sliding mesh" con integrazione nel tempo.

La convergenza del conto non stazionario è verificata mediante l'analisi dell'andamento nel periodo del coefficiente di lift della palettatura. Un pattern di oscillazioni ripetute in periodi successivi indica l'effettivo raggiungimento di condizioni periodiche stazionarie nei canali. Di seguito è mostrato l'esempio per un canale sollecitato da forzante di monte e di valle.

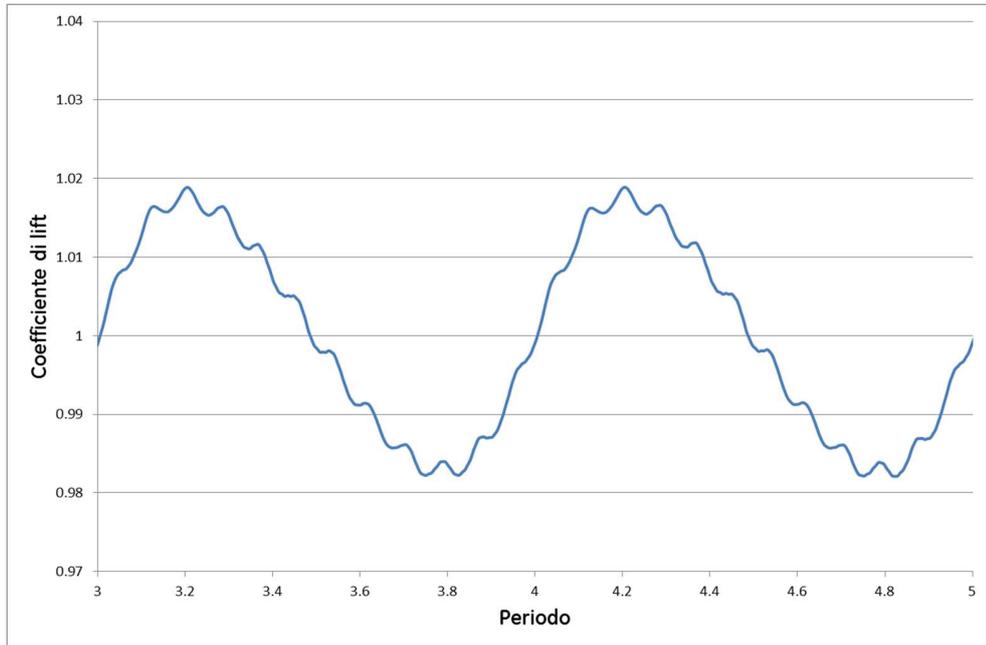


Figure 26: Controllo di convergenza per conti unsteady

Durante la procedura di post-processing la simulazione è rilanciata per un periodo addizionale, durante il quale il campo di moto è scaricato ed analizzato. Il campo di pressione risultante agente sulla paletta mostra un involuppo del tipo mostrato in figura:

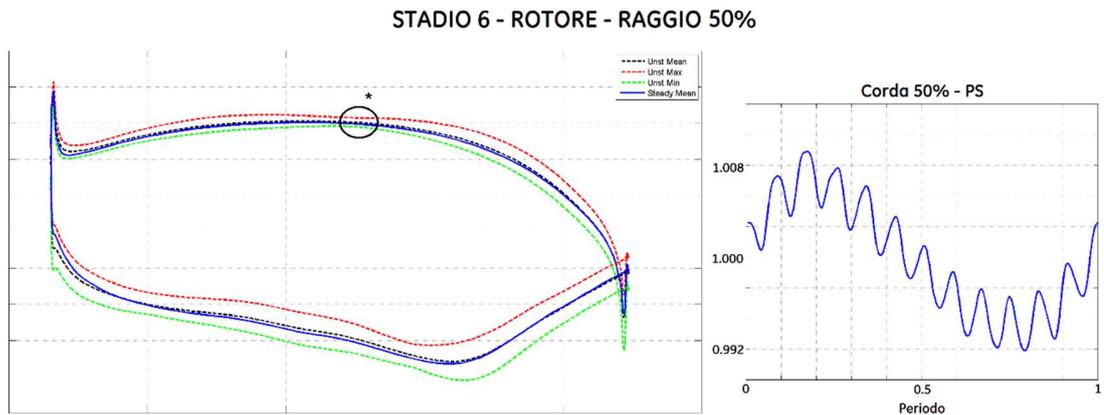


Figure 27: Involuppi campo di pressione massimo e minimo agenti sul profilo in regime non stazionario

L'oscillazione armonica della pressione è elaborata tramite FFT in modo da ottenerne la composizione armonica. Ben visibili sono i contributi di scia e interazione potenziale alla frequenza di passaggio delle schiere adiacenti e gli spinning modes principali

ottenuti dalla loro combinazione. Per un punto situato al raggio 50% e alla corda 50% sul ventre della paletta per una configurazione 12:8:1 si ottiene ad esempio:

### STADIO 6 - ROTORE (raggio 50% , corda 50%)

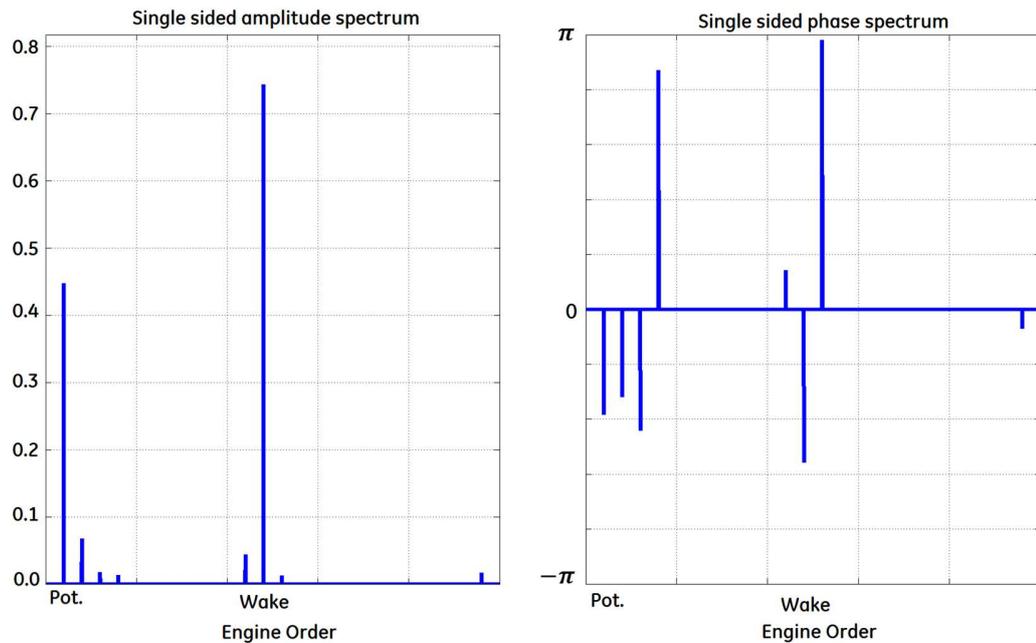


Figure 28: FFT del segnale di pressione su un punto della pressure side (N.B. ampiezze normalizzate su una quantità  $X$  comune per i diversi grafici del presente lavoro)

Ampiezza e fase delle di oscillazione per i diversi Engine Order sono quindi graficati lungo il ventre ed il dorso della paletta. Queste sono le componenti che, in fase di mapping, sono applicate ai nodi della mesh FEM per il calcolo della risposta forzata.

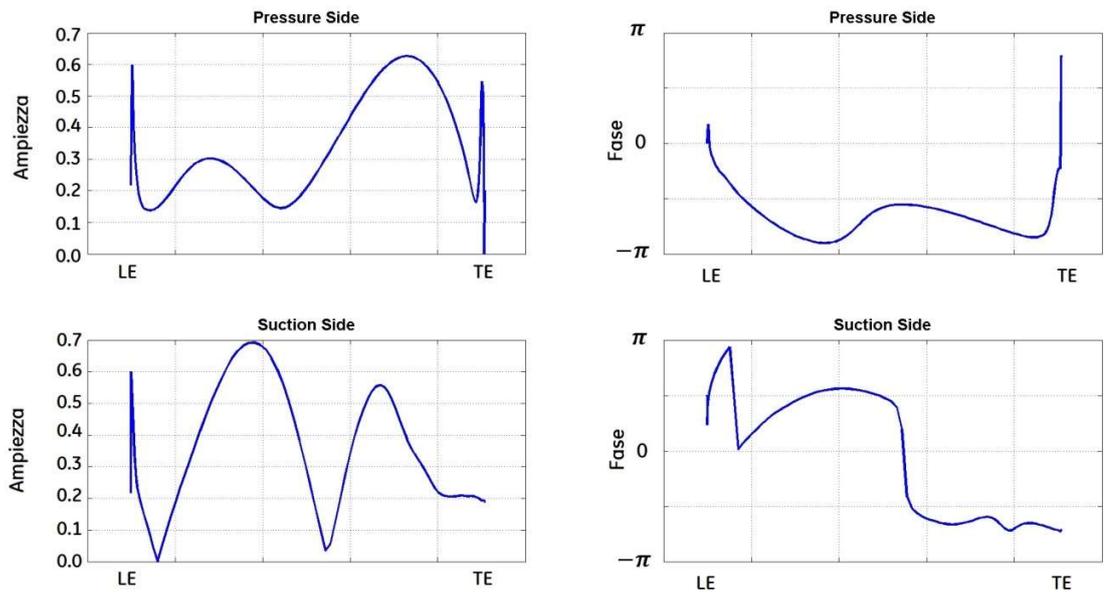


Figure 29: Ampiezza di vibrazione dell'EO di monte lungo il profilo. (N.B. ampiezze normalizzate su una quantità  $X$  comune per i diversi grafici del presente lavoro)

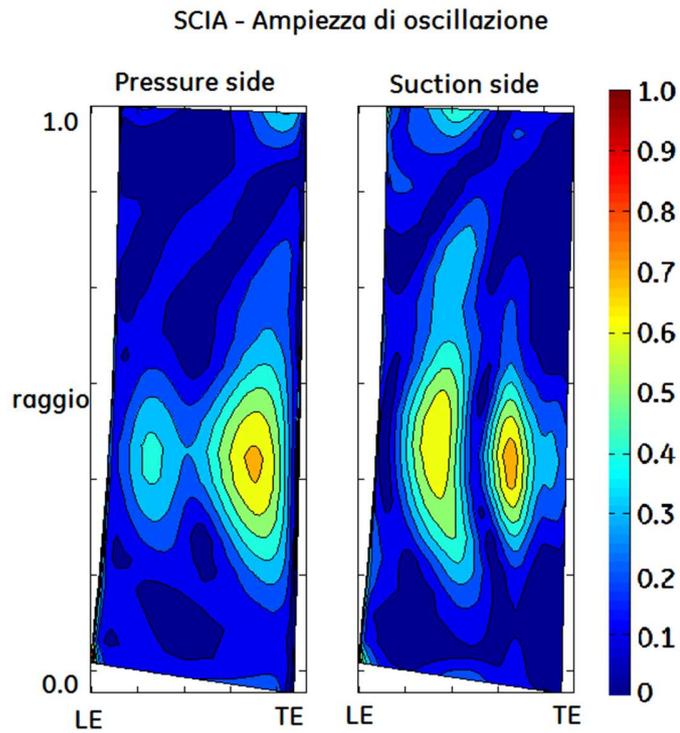


Figure 30: Ampiezza di oscillazione dell'EO di monte. (N.B. ampiezze normalizzate su una quantità  $X$  comune per i diversi grafici del presente lavoro)

Si procede quindi alla fase di mappatura vera a propria sul modello FEM. Le ampiezze complesse di pressione dei modi di Fourier corrispondenti alla frequenza di passaggio delle pale adiacenti sono trasferite mediante interpolazione sulla mesh del modello agli elementi finiti. Sulla faccia di ogni elemento di superficie è di conseguenza applicato il corrispondente campo di pressione armonico.

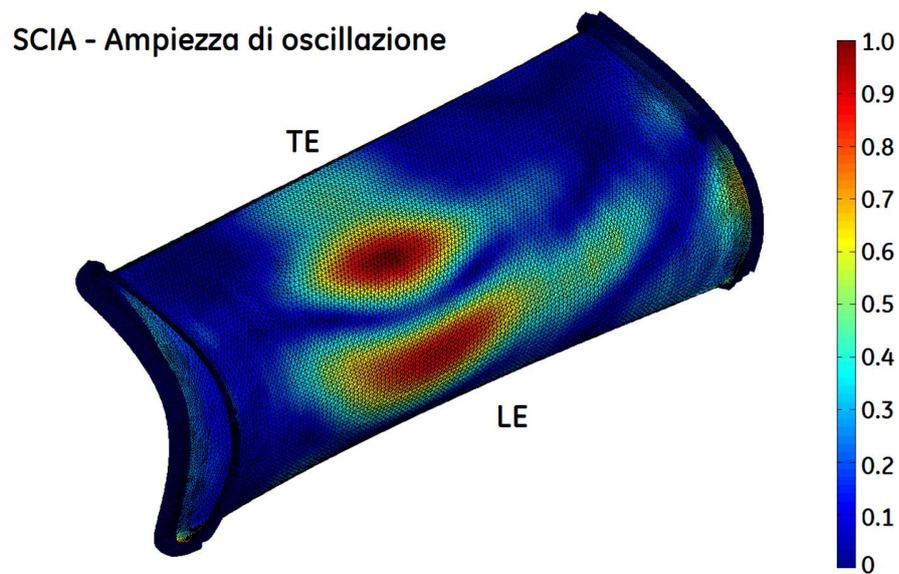


Figure 31: mappatura sulla pala della forzante di monte (N.B. ampiezze normalizzate su una quantità  $X$  comune per i diversi grafici del presente lavoro)

Infine si calcola il lavoro per ciclo di oscillazione sulla base delle caratteristiche della deformata modale.

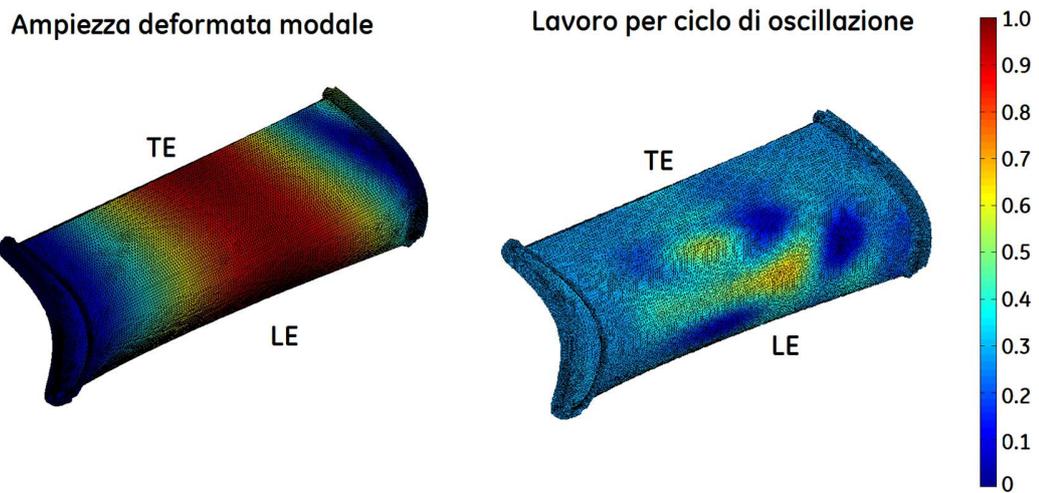


Figure 32: Ampiezza della deformata modale e calcolo del lavoro per ciclo di oscillazione (Range arbitrariamente normalizzato su un massimo di 1)

Le informazioni chiave estratte al termine del processo sono state, macroscopicamente:

- Individuazione di un livello di variazione accettabile del numero globale di palette;
- Comprensione dei contributi relativi di monte, valle e schiera d'interesse nella fluidodinamica e nella risposta forzata risultante, in modo da modificare l'ordinamento locale delle configurazioni consigliate;
- Individuare gli effetti fisici alla base di perturbazioni non direttamente correlabili alla variazione relativa del numero di pale.

# Risultati

## 5.1 Caso A: Rotore di primo stadio

La prima configurazione analizzata è quella relativa alla testa della turbina di alta pressione. Il rotore di primo stadio ha infatti delle caratteristiche peculiari che ne rendono interessante l'investigazione, come l'elevato coefficiente di carico agente sulla palettatura, la forte tridimensionalità del flusso legata allo sviluppo radiale del flow path e la relativa vicinanza tra le armoniche di sollecitazione dei due Engine Order di monte e di valle.

### Configurazioni testate

Il rapporto di combinazione originale tra le pale è pari a 19:25:20. Di seguito sono indicate le configurazioni alterate prese in analisi nel presente lavoro:

ROTORE 1					
DOMINIO CFD	RAPPORTI DI COMBINAZIONE TRA PALE	Alterazione percentuale			
		Totale	Monte	Rotore	Valle
SCHIERA MONTE + SCHIERA VALLE	19:25:20	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
	14:19:15	1.04%	-1.75%	1.33%	0.00%
	11:15:12	1.04%	-3.51%	0.00%	0.00%
	8:11:9	3.13%	-1.75%	2.67%	5.00%
	4:5:4	1.56%	5.26%	0.00%	0.00%
	3:4:3	2.08%	0.00%	1.33%	-5.00%
	2:3:2	7.03%	0.00%	14.00%	-5.00%
SOLO SCHIERA MONTE	19:25:00	0.00%	0.00%	0.00%	/
	11:15:00	1.52%	-3.51%	0.00%	/
	4:5:00	2.27%	5.26%	0.00%	/
	3:4:00	0.76%	0.00%	1.33%	/
	2:3:00	7.95%	0.00%	14.00%	/
	2:3:00	5.30%	-12.28%	0.00%	/
SOLO SCHIERA VALLE	00:5:4	0.00%	/	0.00%	0.00%
	00:4:3	2.96%	/	1.33%	-5.00%
	00:4:3	3.70%	/	6.67%	0.00%

Table 6: Configurazioni testate del rotore 1

### 5.1.1 Scia: Simulazioni a due schiere

#### *Variazioni di solidità della schiera di monte*

Una prima serie di considerazioni possono essere fatte osservando la variazione di ampiezza della forzante di scia lungo la corda della pala investita al variare della solidità della schiera di monte.

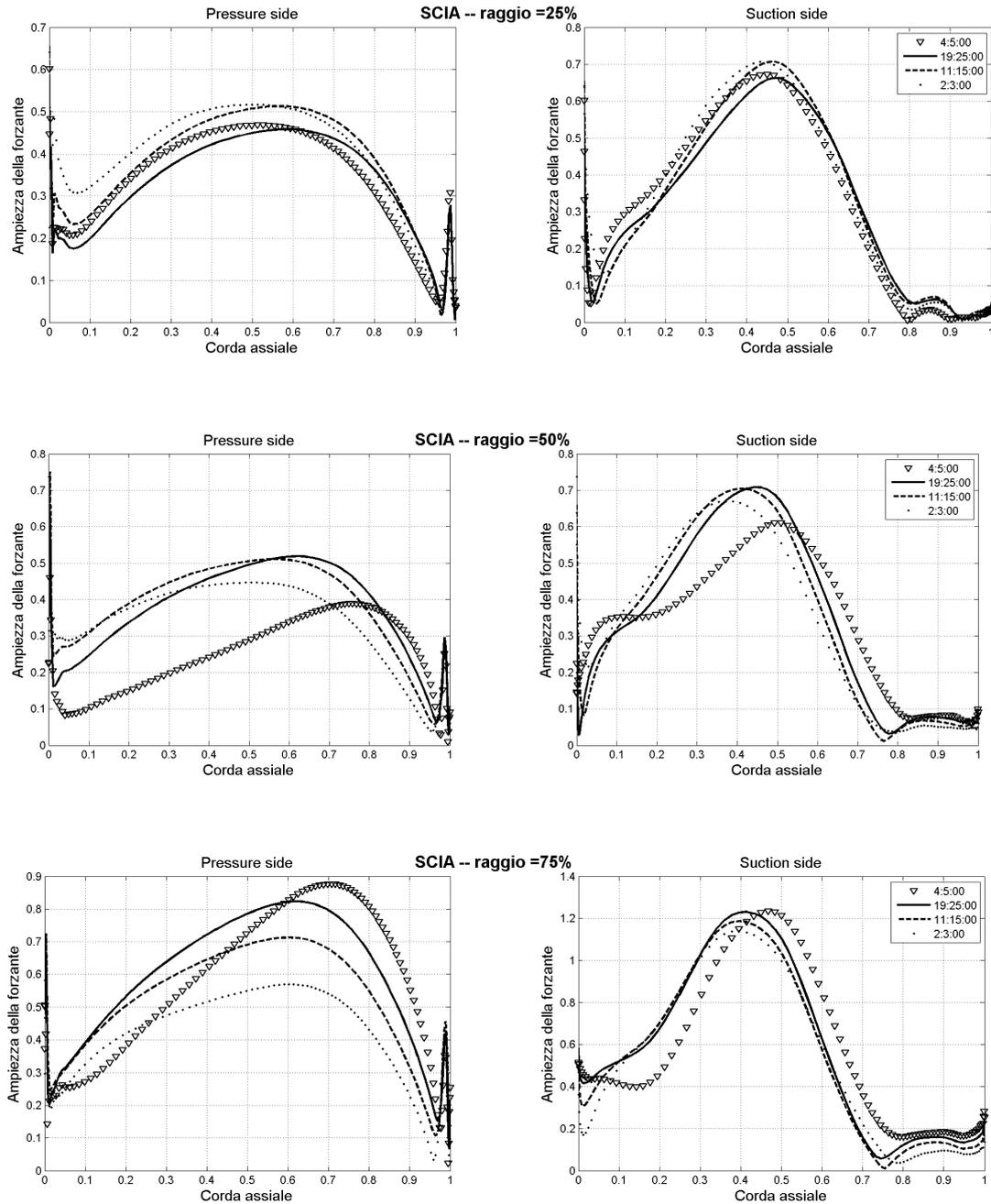


Figure 33: Scia - Simulazioni a due schiere (N.B. ampiezze normalizzate su una quantità  $X$  comune per i diversi grafici del presente lavoro)

Nei casi con solo schiera di monte, l'aumento della solidità comporta lo slittamento del punto di impatto della scia in direzione del trailing edge. L'effetto è più evidente a span elevati, dove gli effetti di scia sono più intensi a causa della direzione imposta al flusso della geometria della macchina e dalle maggiori velocità di trascinamento in gioco. Per un modo flessionale come l'1F, dove la deformata massima è spesso in corrispondenza del TE, un effetto di questo tipo comporta in genere un aumento della forza modale.

Una discontinuità piuttosto brusca si ottiene nel caso con incremento del numero di pale di monte e conseguente rapporto tra le schiere di 4:5. In questo caso a cambiare è la fenomenologia associata all'impatto della scia: le perturbazioni armoniche si spostano al di là della gola, dove il flusso decelera e la pressione media del fluido sulla pala ricomincia ad aumentare, smorzando le ampiezze di oscillazione.

La tabella di seguito indica gli errori per le diverse configurazioni illustrate rispetto alla simulazione a due blocchi con geometrie reali.

DOMINIO CFD	RAPPORTI DI COMBINAZIONE	Alterazione percentuale				Errore risp. Forzata*
		Totale	Monte	Rotore	Valle	
SOLO SCHIERA MONTE	19:25:00	0.00%	0.00%	0.00%	/	0.00%
	11:15:00	1.52%	-3.51%	0.00%	/	2.51%
	4:5:00	2.27%	5.26%	0.00%	/	42.40%
	2:3:00	5.30%	-12.28%	0.00%	/	13.60%

Table 7: Errori nella risposta forzata da Engine Order di monte per modifica della solidità di monte.

### Variazioni di solidità nella schiera di interesse

La variazione di solidità della schiera di interesse produce, nelle configurazioni a due blocchi, effetti piuttosto chiari sulla risposta forzata. La diminuzione di carico sul singolo profilo produce decrementi proporzionali delle ampiezze di oscillazioni, senza modificare significativamente la posizione dei picchi lungo la corda. Altrettanto proporzionale è la variazione della risposta forzata, con errori dal 2% per variazioni dell'1% fino ad errori del 25% per variazioni del 14%.

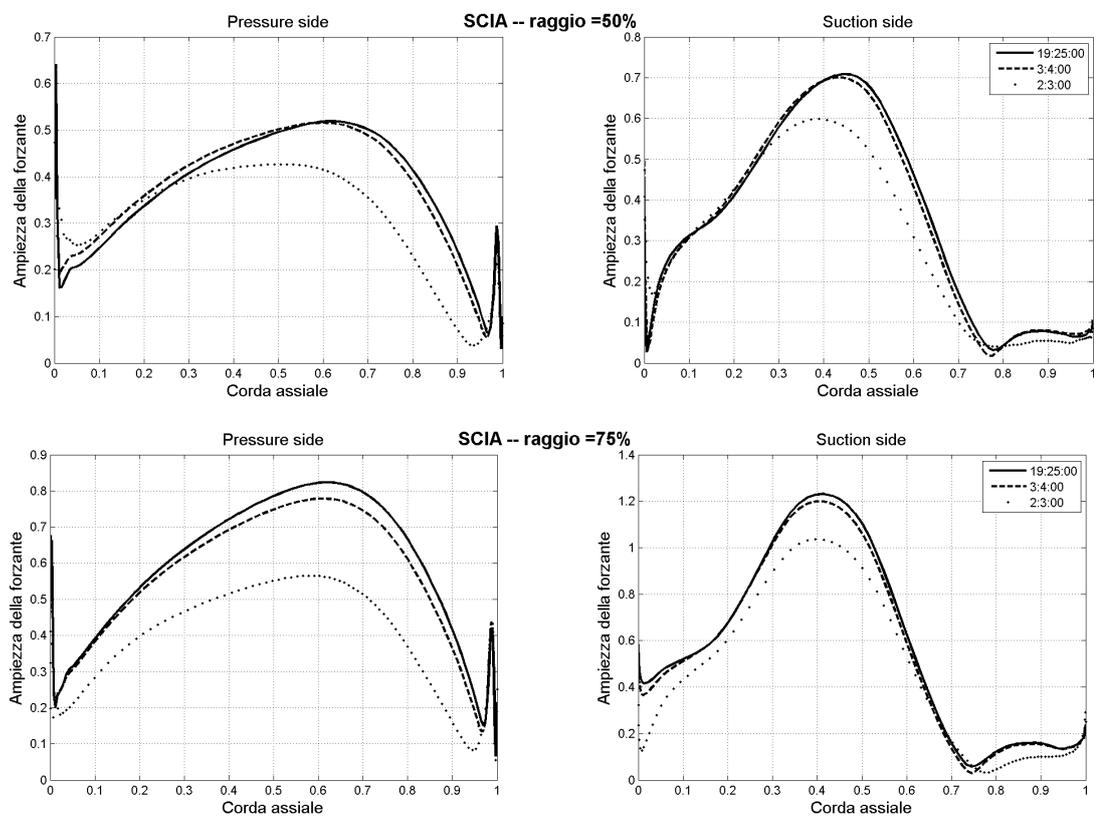


Figure 34: Scia – Simulazioni a due schiere (N.B. ampiezze normalizzate su una quantità X comune per i diversi grafici del presente lavoro)

DOMINIO CFD	RAPPORTI DI COMBINAZIONE	Alterazione percentuale				Errore risp. Forzata*
		Totale	Monte	Rotore	Valle	
SOLO SCHIERA MONTE	19:25:00	0.00%	0.00%	0.00%	/	0.00%
	3:4:00	0.76%	0.00%	1.33%	/	0.01%
	2:3:00	7.95%	0.00%	14.00%	/	25.90%

Table 8: Errori nella risposta forzata da Engine Order di monte per modifica della solidità della pala.

### 5.1.2 Scia: Simulazioni a tre schiere

Informazioni rilevanti si ottengono studiando gli effetti di scia in presenza delle perturbazioni potenziali indotte dalla schiera di valle. In generale, gli effetti di interazione generano profili di oscillazione più complessi, rendendo di fatto il fenomeno meno prevedibile a fronte di modificazioni della geometria.

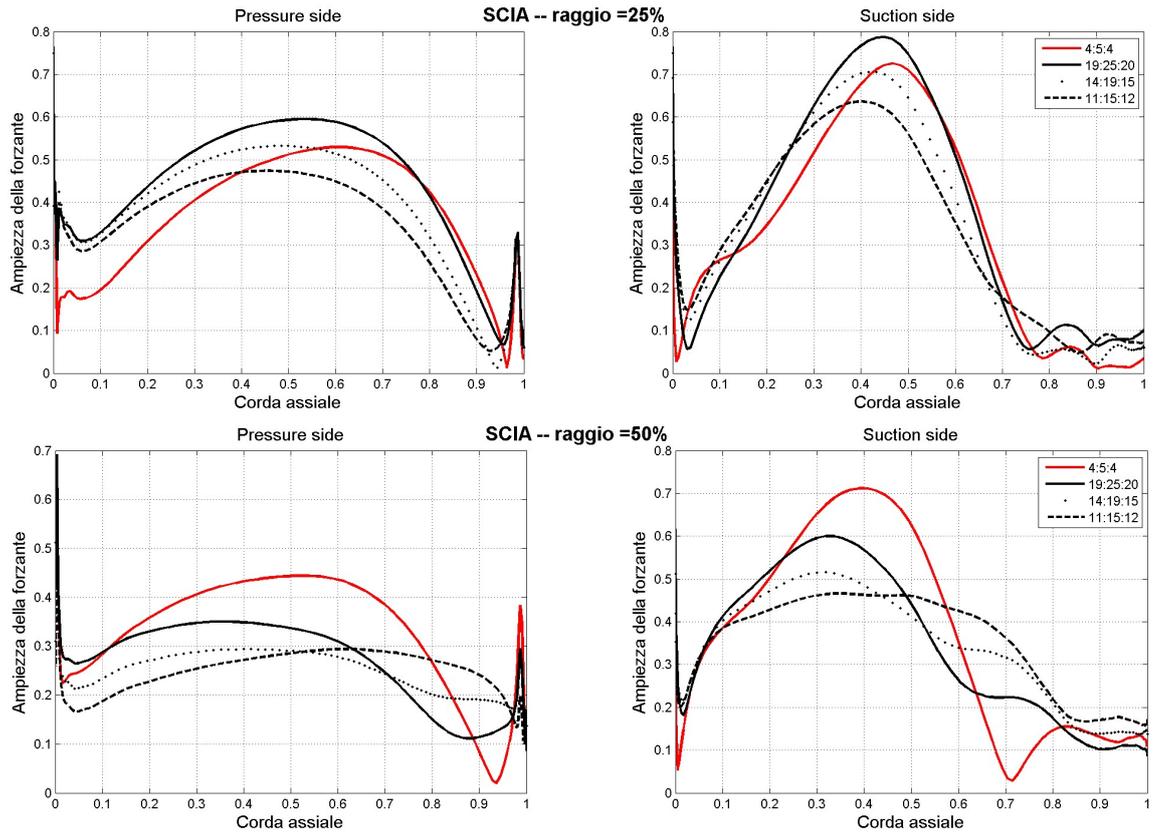


Figure 35: Scia - Simulazioni a due schiere. (N.B. ampiezze normalizzate su una quantità X comune per i diversi grafici del presente lavoro)

DOMINIO CFD	RAPPORTI DI COMBINAZIONE TRA PALE	Alterazione percentuale				Errore risp. Forzata
		Totale	Monte	Rotore	Valle	
SCHIERA MONTE + SCHIERA VALLE	19:25:20	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
	14:19:15	1,04%	-1,75%	1,33%	0,00%	9,27%
	11:15:12	1,04%	-3,51%	0,00%	0,00%	27,97%
	8:11:9	3,13%	-1,75%	2,67%	5,00%	20,86%
	4:5:4	1,56%	5,26%	0,00%	0,00%	1,80%
	3:4:3	2,08%	0,00%	1,33%	-5,00%	57,11%

Table 9: Errori nella risposta forzata di monte per simulazioni a tre schiere

### 5.1.3 Effetti potenziali

Di più semplice lettura la valutazione dell'impatto delle geometrie modificate sull'effetto potenziale. Dal confronto del campione analizzato, diverse linee guida possono essere chiaramente identificate:

1. L'inclusione dello stadio di monte produce effetti di interazione estremamente evidenti. La forzante potenziale valutata con o senza schiera di monte ha distribuzioni ed ampiezze differenti, rendendo di fatto non praticabile l'approccio ridotto disaccoppiato.
2. L'incipienza del clocking rende impossibile la separazione del contributo forzante di valle da quello di monte. La risultante è un campo di perturbazione di difficile previsione, con interferenze costruttive (caso evidenziato in rosso nella tabella) o distruttive (caso evidenziato in verde).
3. Al di fuori delle configurazioni di clocking, la variazione della schiera di valle risulta avere l'effetto più rilevante. La forzante potenziale ha infine pari sensibilità all'alterazione della pala di interesse e di quella di monte.

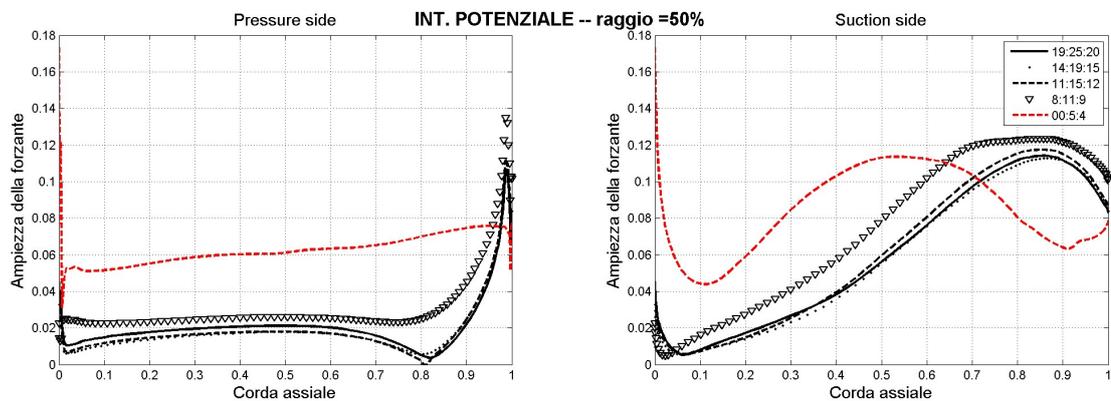


Figure 36: Interazione potenziale - Simulazioni a due schiere. (N.B. ampiezze normalizzate su una quantità  $X$  comune per i diversi grafici del presente lavoro)

DOMINIO CFD	RAPPORTI DI COMBINAZIONE	Alterazione percentuale				Errore risp. Forzata
		Totale	Monte	Rotore	Valle	
SCHIERA MONTE + SCHIERA VALLE	19:25:20	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
	14:19:15	1,04%	-1,75%	1,33%	0,00%	0,39%
	11:15:12	1,04%	-3,51%	0,00%	0,00%	5,74%
	8:11:9	3,13%	-1,75%	2,67%	5,00%	23,81%
	4:5:4	1,56%	5,26%	0,00%	0,00%	87,81%
	3:4:3	2,08%	0,00%	1,33%	-5,00%	26,96%
VALLE	00:5:4	0,00%	/	0,00%	0,00%	52,87%

Table 10: Errori nella risposta forzata di valle per simulazioni a tre schiere

## 5.2 Caso B: Rotore di coda

La presenza del “Turbine Rear Frame” (TRF) a valle del rotore di coda rendono lo studio di questa configurazione particolarmente interessante. Differentemente dal caso precedente infatti, dove l’ordine armonico delle perturbazioni era molto vicino, forzante di scia e di effetto potenziale sono in rapporto di 81:7. Ci si attende un disaccoppiamento più marcato degli effetti di monte e valle, e si paventa la possibilità di eseguire in modo indipendente le simulazioni relative ai due contributi.

*Configurazioni testate*

ROTORE 6					
DOMINIO CFD	RAPPORTI DI COMBINAZIONE TRA PALE	Alterazione percentuale			
		Totale	Monte	Rotore	Valle
SCHIERA MONTE + SCHIERA VALLE	81:55:7	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
	23:16:2	1.05%	-0.62%	1.82%	0.00%
	16:10:1	2.10%	-1.23%	0.00%	-28.57%
	12:8:1	2.80%	3.70%	1.82%	0.00%
	11:7:1	3.15%	1.85%	-4.55%	7.14%
SOLO SCHIERA MONTE	16:10:00	0.74%	-1.23%	0.00%	/
	3:2:00	2.94%	3.70%	1.82%	/
	3:2:00	1.10%	1.85%	0.00%	/
SOLO SCHIERA VALLE	00:8:1	1.61%	/	1.82%	0.00%
	00:7:1	4.84%	/	-4.55%	7.14%
	00:7:1	3.23%	/	1.82%	14.29%

Table 11: Configurazioni testate per il rotore 6

### 5.2.1 Scia

La casistica simulata delinea un quadro piuttosto chiaro circa la sensibilità della forzante di monte alle perturbazioni del dominio fisico. Nello specifico:

1. Simulazioni a due o tre schiere offrono un grado di accuratezza comparabile, rappresentando la medesima situazione fisica a parità di alterazione di schiere di vall e di interesse. Questo è indice del sostanziale disaccoppiamento tra disturbi armonici di monte e di valle, legata alla loro distanza relativa nel dominio delle frequenze.
2. Modifiche di solidità nella schiera di interesse incidono pesantemente sul campo di perturbazione risultante, con sensibilità comparabili al caso di testa.
3. Modifiche di solidità nella schiera di monte mostrano effetti molto meno evidenti rispetto al caso di testa. La ragione è dovuta al minor carico aerodinamico agente sulla palettatura dello stadio.

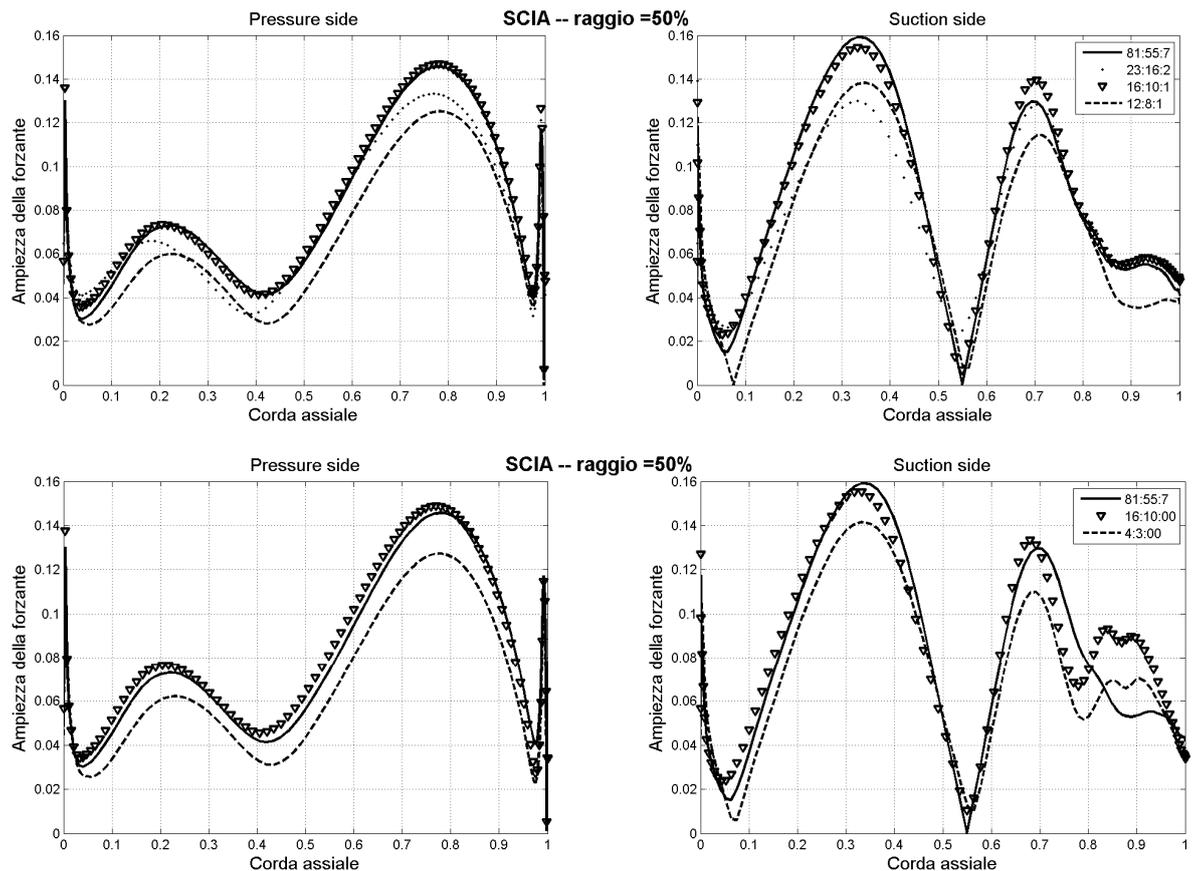


Figure 37: Ampiezza dell'oscillazione della forzante di monte per simulazioni a tre (sopra) e due (sotto) schiere. (N.B. ampiezze normalizzate su una quantità  $X$  comune per i diversi grafici del presente lavoro)

DOMINIO CFD	RAPPORTI DI COMBINAZIONE	Alterazione percentuale				Errore risp. Forzata
		Totale	Monte	Rotore	Valle	
SCHIERA MONTE + SCHIERA VALLE	81:55:7	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
	23:16:2	1,05%	-0,62%	1,82%	0,00%	16,35%
	16:10:1	2,10%	-1,23%	0,00%	-28,57%	0,80%
	12:8:1	2,80%	3,70%	1,82%	0,00%	19,60%
	11:7:1	3,15%	1,85%	-4,55%	7,14%	21,58%
SOLO	16:10:00	0,74%	-1,23%	0,00%	/	2,13%
SCHIERA MONTE	3:2:00	2,94%	3,70%	1,82%	/	18,42%
	3:2:00	1,10%	1,85%	0,00%	/	3,95%

Table 12: Errori nella risposta forzata da forzante di monte

### 5.2.2 Interazione potenziale

Del tutto analoghe le considerazioni per l'interazione potenziale. Anche qui:

1. Simulazioni a due o tre schiere offrono un grado di accuratezza comparabile, rappresentando la medesima situazione fisica a parità di alterazione di schiere di monte e di interesse. Questo è indice del sostanziale disaccoppiamento tra disturbi armonici di monte e di valle, legata alla loro distanza relativa nel dominio delle frequenze.
2. Modifiche di solidità nella schiera di valle incidono pesantemente sul campo di perturbazione risultante, con sensibilità comparabili al caso di testa.
3. Modifiche di solidità nella schiera di interesse mostrano effetti molto deboli, poiché la fisica del fenomeno non è condizionata dal passaggio del fluido attraverso la gola.

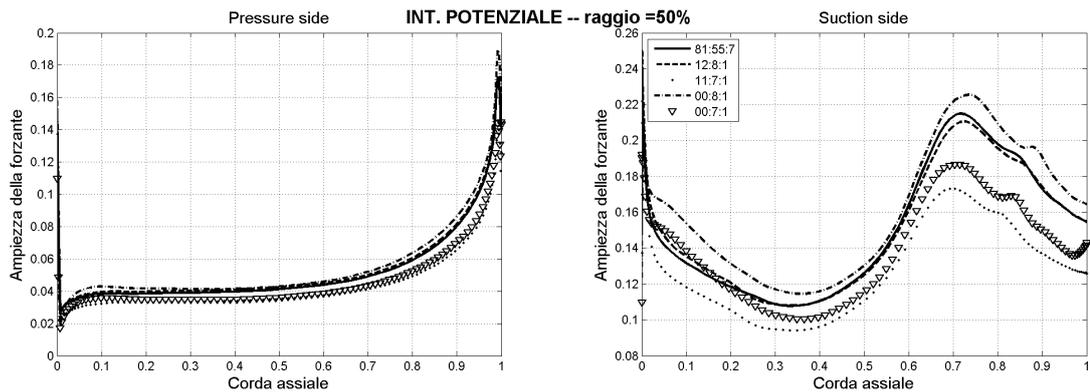


Figure 38: Ampiezza dell'oscillazione della forzante di valle. (N.B. ampiezze normalizzate su una quantità  $X$  comune per i diversi grafici del presente lavoro)

DOMINIO CFD	RAPPORTI DI COMBINAZIONE	Alterazione percentuale				Errore risp. Forzata
		Totale	Monte	Rotore	Valle	
SCHIERA MONTE + SCHIERA VALLE	81:55:7	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
	23:16:2	1,05%	-0,62%	1,82%	0,00%	1,99%
	16:10:1	2,10%	-1,23%	0,00%	-28,57%	64,11%
	12:8:1	2,80%	3,70%	1,82%	0,00%	2,10%
	11:7:1	3,15%	1,85%	-4,55%	7,14%	14,95%
SOLO SCHIERA VALLE	00:8:1	1,61%	/	1,82%	0,00%	2,60%
	00:7:1	4,84%	/	-4,55%	7,14%	11,09%
	00:7:1	3,23%	/	1,82%	14,29%	18,67%

Table 13: Errori nella risposta forzata da forzante di valle

## 5.3 Considerazioni finali

### 5.3.1 Numero di schiere studiate

Un dato rilevante emerso nella presente investigazione riguarda l'influenza reciproca che scia ed effetti potenziali hanno sulla distribuzione delle rispettive forzanti sul profilo alare. Una pratica piuttosto diffusa negli studi di interazione fluido-struttura consiste nel considerare gli effetti di perturbazione aerodinamica come fenomeni lineari, il cui studio può sostanzialmente condursi sfruttando il principio di sovrapposizione degli effetti. Tale ipotesi, valida in un ampio range di situazioni, fallisce laddove l'interazione energetica tra i disturbi sia non trascurabile. E' questo il caso del complesso di testa, dove la vicinanza nel dominio delle frequenze delle perturbazioni di campo si traduce in fenomeni di interazione piuttosto marcati.

Un ulteriore conferma della bontà di questa ipotesi deriva dal confronto con una configurazione statore-rotore-statore in cui Engine Order di monte e di valle si trovano ad una distanza intermedia tra i due casi limite precedentemente studiati. L'interazione energetica risulta, come previsto, maggiore del caso di coda ed inferiore di quello di testa.

#### Caso 1. EO ratio= 0.95:1

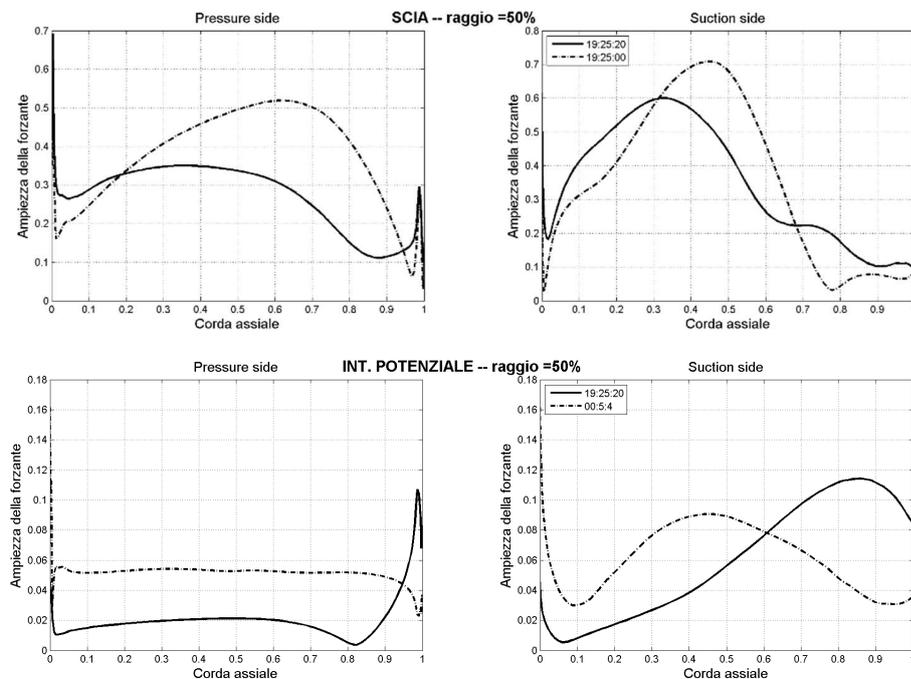


Figure 39: Simulazioni a 3 vs 2 schiere per Engine Order molto vicini (N.B. ampiezze normalizzate su una quantità X comune per i diversi grafici del presente lavoro)

**Caso 2. EO ratio= 11.5:1**

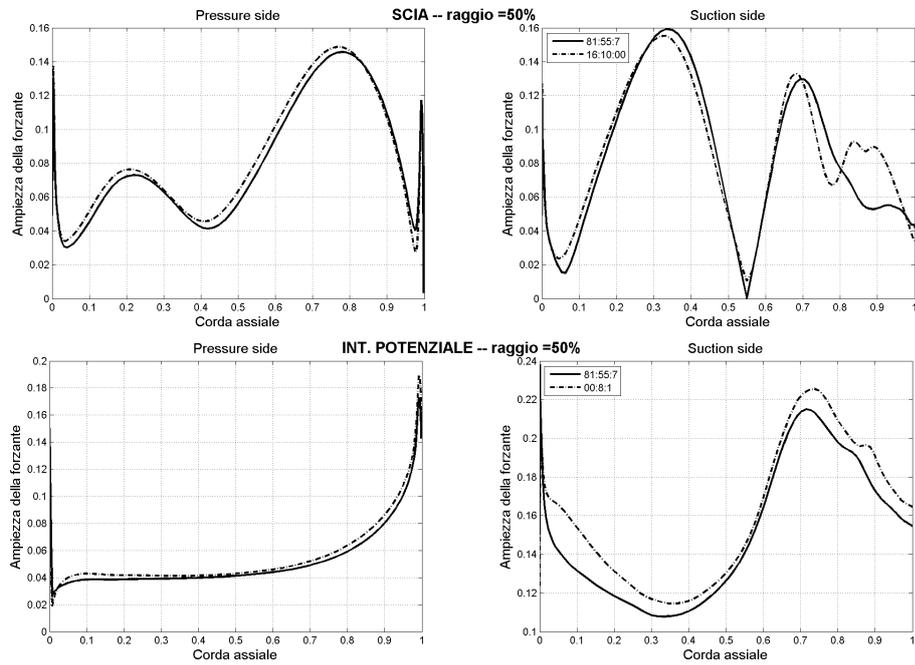


Figure 40: Simulazioni a 3 vs 2 schiere per Engine Order molto lontani. (N.B. ampiezze normalizzate su una quantità X comune per i diversi grafici del presente lavoro)

**Caso Aggiuntivo. EO ratio= 0.8:1**

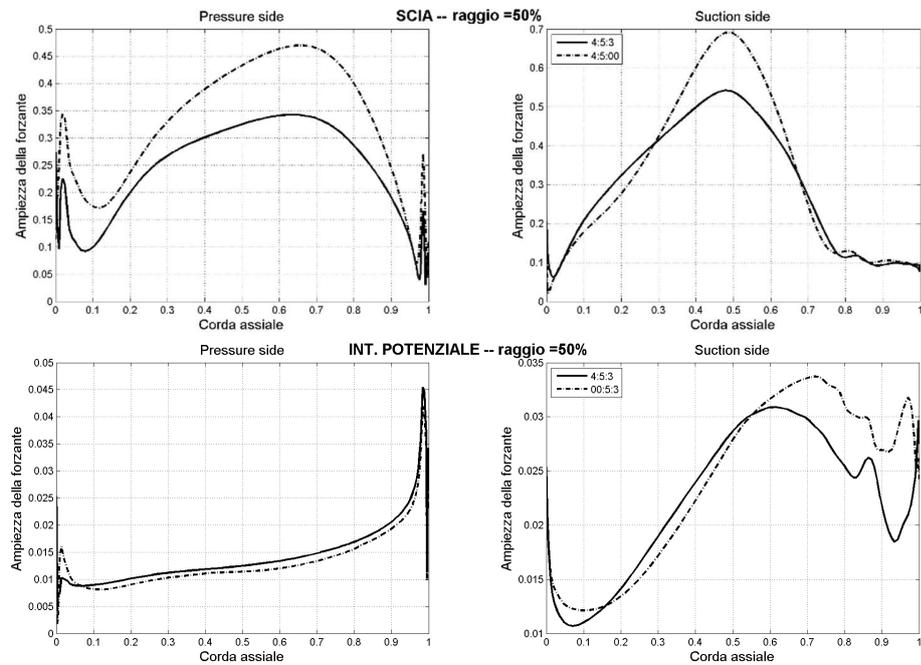


Figure 41: Simulazioni a 3 vs 2 schiere per Engine Order moderatamente vicini. (N.B. ampiezze normalizzate su una quantità X comune per i diversi grafici del presente lavoro)

### 5.3.2 Interazione monte-valle

Significative sono le linee guida individuate per l'alterazione della geometria di pale originaria. Nello specifico, in caso di EO di monte e valle molto vicini:

- Scia:
  1. Contributi schiera di monte e schiera di interesse molto forti;
  2. Alterazione numero schiera di valle poco rilevante;
  3. Impossibile modellare la sola schiera di monte.
- Interazione potenziale:
  1. Alta sensibilità a schiera di valle;
  2. Media sensibilità a schiera di interesse;
  3. Bassa sensibilità a schiera di monte;
  4. Il clocking altera completamente le caratteristiche;
  5. Impossibile modellare la sola schiera di valle.

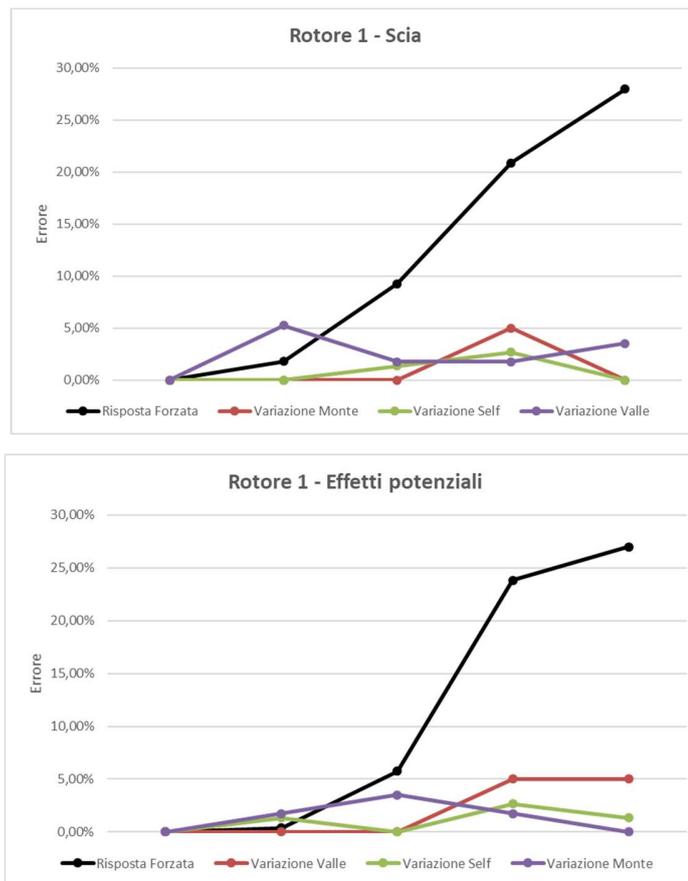


Figure 42: Rotore 1: Interazione monte-valle

In caso di EO di monte e valle distanti tra loro:

- Scia:

1. Media sensibilità a schiera di monte;
2. Alta sensibilità a schiera di interesse;
3. Sensibilità molto bassa o nulla alla schiera di valle;
4. Possibilità di simulare solo schiera di monte.

- Interazione potenziale:

6. Alta sensibilità a schiera di valle;
7. Media sensibilità a schiera di interesse;
8. Sensibilità molto bassa o nulla alla schiera di monte;
9. Possibilità di simulare solo schiera di valle.

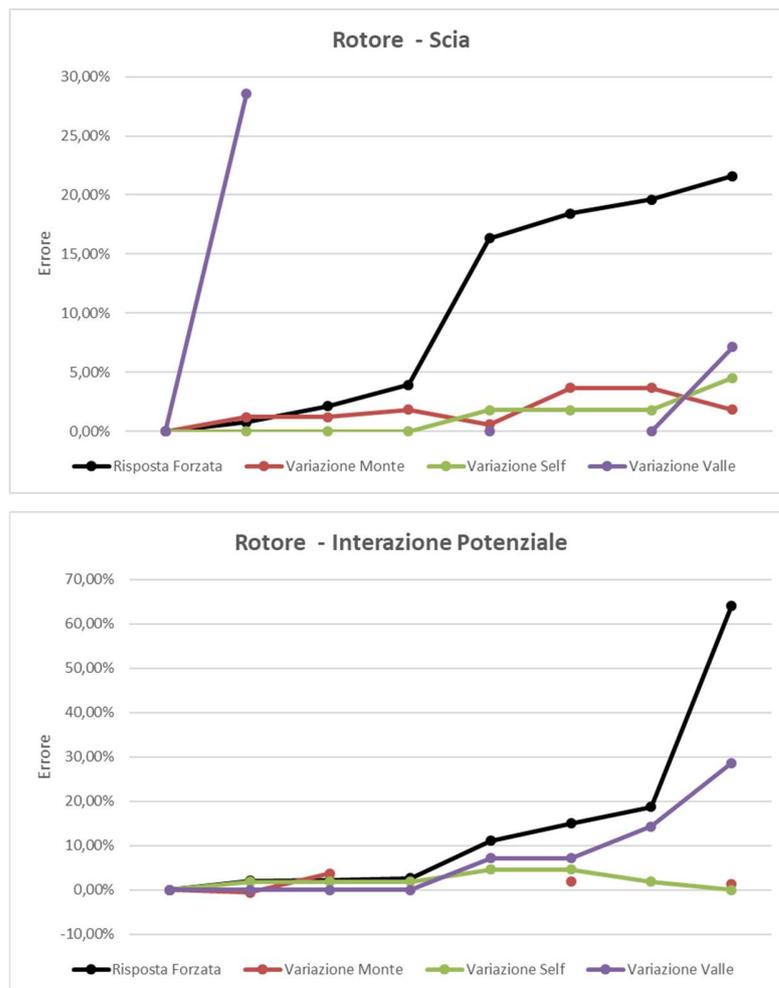


Figure 43: Rotore 6: Interazione monte-valle

### 5.3.3 Modello di periodicità

Approccio Full Annulus e Phase Lag offrono, per le simulazioni a due schiere, performance analoghe sotto il profilo di tempi di calcolo ed accuratezza del risultato finale. Diverso è lo spazio fisico richiesto per il salvataggio della soluzione, poiché nel caso del Phase Lag sono in ogni caso necessari solo due passaggi per schiera.

Differente è la questione per simulazioni a tre schiere. Nel caso del Phase Lag, i fenomeni di interazione tra schiera di monte e schiera di valle vengono troncati durante la traduzione delle condizioni al contorno nel dominio della frequenza. La modellazione è pertanto accurata per armoniche distanti ed assolutamente imprecisa per armoniche vicine.

#### Caso 1. EO ratio= 0.95:1

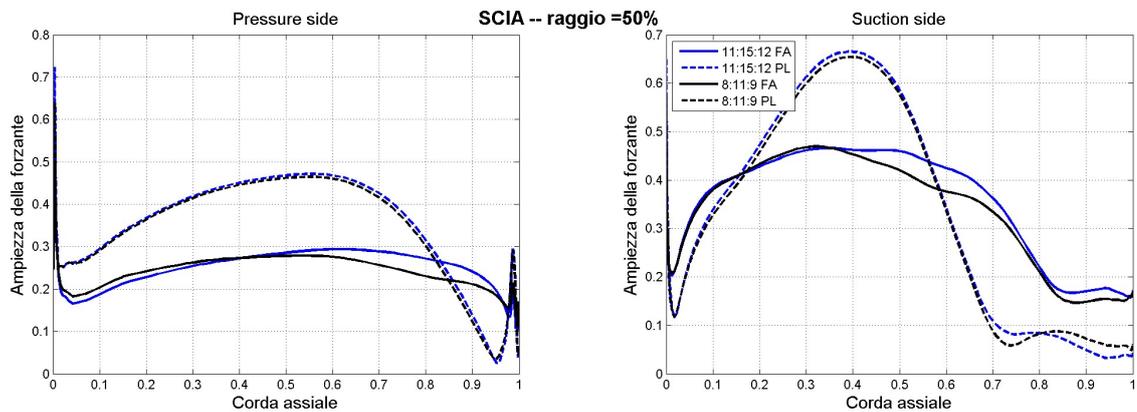


Figure 44: FA vs PL per configurazioni con EO di monte e valle molto vicini (N.B. ampiezze normalizzate su una quantità  $X$  comune per i diversi grafici del presente lavoro)

#### Caso 2. EO ratio= 11.5:1

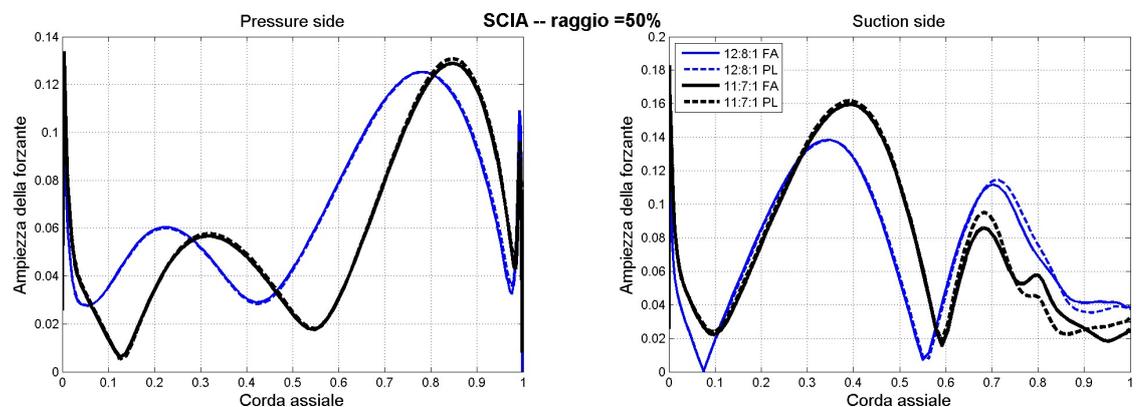


Figure 45: FA vs PL per configurazioni con EO di monte e di valle molto lontani (N.B. ampiezze normalizzate su una quantità  $X$  comune per i diversi grafici del presente lavoro)

### 5.3.4 Modello di turbolenza

La bontà del modello Baldwin Lomax a 0 equazioni ausiliarie è stata testata, per alcune configurazioni di prova, confrontando i risultati con quelli ottenuti con un modello a 2 equazioni ausiliare k-Omega LowRe. Come dimostrano i grafici che seguono, le differenze più evidenti emergono laddove i fenomeni turbolenti ad alta frequenza diventano significativi, ovvero in corrispondenza della regione di strato limite turbolento sul dorso pala in corrispondenza del TE. In queste situazioni la migliore accuratezza del k-omega permette una migliore riproduzione del fenomeno fisico. Il calcolo della risposta forzata mostra, ad ogni modo, differenze poco significative:

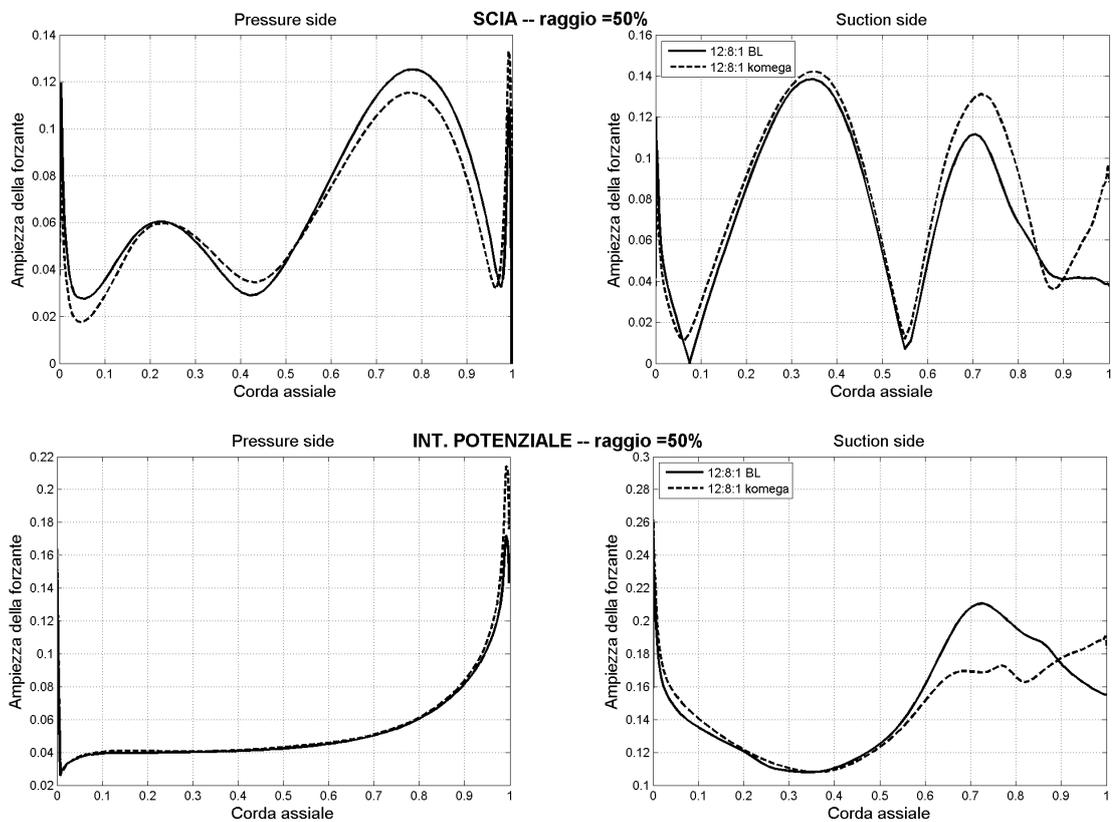


Figure 46: Komega lowRE vs Baldwin Lomax per simulazioni unsteady. (N.B. ampiezze normalizzate su una quantità X comune per i diversi grafici del presente lavoro)

DOMINIO CFD	RAPPORTI DI COMBINAZIONE TRA	Modello	Errore risp. Forzata Scia	Errore risp. Forzata Pot.	CPU TIME
Rotore 6 MONTE	12:8:1	komega LowRe	/	/	29.8 days
	12:8:1	Baldwin Lomax	5.2 %	3.4 %	6.3 days

Table 14: Errori nella risposta forzata tra komega LowRe e Baldwin Lomax

# Sviluppi futuri

---

Il presente studio ha messo in luce diversi aspetti significativi per la comprensione dell'efficacia delle diverse strategie di calcolo di flussi non stazionari nelle turbomacchine. Al contempo ha evidenziato i limiti delle correnti tecniche di riduzione del domino, in alcune occasioni incapaci di catturare correttamente i complessi fenomeni di interazione tra scie e disturbi potenziali.

Un interessante spunto per il futuro consiste nell'approfondimento dei modelli ridotti con ripristino della solidità. Queste tecniche prevedono, per le schiere a numero di palette alterato, la correzione della geometria del profilo ai diversi raggi in modo da ripristinare le dimensioni della gola e gli angoli cinematici di uscita del flusso. In questo modo le caratteristiche fluidodinamiche interni al canale ed il punto di impatto della scia sui canali di valle verrebbe in buona parte riportata alle condizioni originali, contenendo le alterazioni nella risposta forzata.

Mediante questa accortezza, e ricorrendo ad un modello potenziale Q3D semplificato, sarebbe possibile prevedere con maggior precisione gli effetti delle diverse modifiche geometriche, in modo da selezionare a priori la configurazione periodica potenzialmente più accurata.

Disponendo di questi strumenti sarebbe possibile una descrizione più sistematica dei meccanismi di clocking, i cui effetti sulla risposta forzata sono estremamente difficili da predire.

Si potrebbe infine allargare il campione per includere altre famiglie modali rilevanti in ambito aeroelastico, come la 1T o la 1Flap, in modo da sviluppare un algoritmo di alterazione dei canali orientato alla forma modale destinata allo studio di risposta forzata.

# Bibliografia

---

1. **Sina Cornelia Stapelfeldt** : “*Advanced methods for multi-row forced response and flutter computations*”, (Imperial College London – 2014);
2. **Amedeo Ramieri** : “*Analisi e comparazione di diversi modelli di contatto all’interlocking per rotori di turbine di bassa pressione*” (Politecnico di Torino – 2017);
3. **G.A.Gerolymos, V.Chapin** : “*Generalized expression of chorochronic periodicity in turbomachinery blade-row interaction*”, (La Recherche Aérospatiale – 1991);
4. **Christian Fantino** : “*Caratterizzazione dinamica di un rotore LPT in presenza di mistuning intenzionale*”, (Politecnico di Torino -2018);
5. **Christian M.Firrone, Marco Lassalle** : “*Aeroelasticity in blade arrays: numerical techniques for blade flutter suppression*”, (Politecnico di Torino, 2016);
6. **A.K.Gopinath** : “*Efficient Fourier-based algorithms for time-periodic unsteady problems*” – (2007);
7. **Graham Pullan, John Denton and Eric Curti** : “*Improving the Performance of a Turbine With Low Aspect Ratio Stators by Aft-Loading*”, (J. Turbomach 128(3) – 2004);
8. **K.C. Hall, R.E. Kielb, J.P. Thomas** : “*Unsteady aerodynamics, aeroacoustics and aeroelasticity of Turbomachines*”, (Springer – 2006);
9. **M.Giovannini, M.Marconcini, A.Arnone** : “*Evaluation of unsteady CFD models applied to the analysis of a transonic HP turbine stage*”, (Università di Firenze – 2013);
10. **A.Ghenaiet, K. Touil** : “*Characterization of component interactions in two-stages axial turbine*”, (Chinese Journal of Aeronautics – 2016);
11. **K.R.Evans, J.P.Longley** : “*Clocking in Low-Pressure Turbines*” , (University of Cambridge – 2017);
12. **N.Arndt** : “*Blade Row Interaction in a multistage Low-Pressur Turbine*” (MTU Munchen – 1993);
13. **A. V. Srinivasan**: “*Journal of Engineering for Gas Turbines and Power: Flutter and Resonant Vibration Characteristics of Engine Blades*”, (Worcester, Polytechnic Institute, Presented at the International Gas Turbine & Aeroengine Congress & Exhibition, Orlando, Florida, 1997);
14. **D. Vogt, T. Fransson**: “*Aeroelasticity of Turbomachines*”, ( Toulouse, France,2013).
15. **Giancarlo Genta**: “*Vibration Dynamics and Control*”, (Springer, Torino,2009).

# Ringraziamenti

---

Desidero esprimere la mia riconoscenza ai miei supervisori Enrico Ampellio e Marco Moletta per avermi dato l'opportunità di portare avanti questo progetto e per il costante supporto tecnico e umano datomi durante l'arco del lavoro.

Vorrei inoltre ringraziare il professor Firrone per la competenza e la cortesia con cui mi ha assistito durante questi mesi, introducendomi con la sua passione all'affascinante mondo dell'aeroelasticità delle turbomacchine.

Sono grato a GE AvioAero per avermi dato il privilegio di entrare in contatto con una realtà lavorativa di assoluta eccellenza, regalandomi il piacere del confronto con professionisti di inarrivabile esperienza.

Faccio infine i miei complimenti all'istituzione del Politecnico di Torino per la qualità dei servizi messi a mia disposizione durante questo periodo di collaborazione in azienda, oltre che per la serietà mostrata in ogni aspetto dell'attività didattica.

L'ultimo e più importante ringraziamento va alla mia famiglia, a cui devo tutto.