POLITECNICO DI TORINO

Laurea Magistrale in Ingegneria Civile

Orientamento Strutture

Tesi di Laurea Magistrale

Instabilità flesso-torsionale di travi in c.a.p.: Analisi di un caso studio

Relatori

Prof. Giuseppe Lacidogna

Dott. Gianfranco Piana

Candidato

Daniele Vacchiano

Marzo 2018

Ai miei nonni Anna, Bettina, Sergio e Tommaso

Ringraziamenti

Il sottoscritto si sente in dovere di ringraziare tutti coloro i quali hanno contribuito alla realizzazione del mio percorso di studi culminato con realizzazione del seguente lavoro di tesi. Il primo ringraziamento va al Prof. Giuseppe Lacidogna che mi ha dato l'opportunità di poter svolgere il seguente lavoro di tesi e si è dimostrato un valido professore durante le lezioni svolte nei corsi da lui tenuti, durante le quali è stato suscitato in me l'interesse per gli argomenti trattati. Un grande ringraziamento va al Dott. Gianfranco Piana per avermi seguito durante tutto il percorso di tesi con preziosi consigli teorici e pratici, che mi hanno fornito le basi, ma soprattutto la fiducia necessaria per poter portare a termine tutto il lavoro di tesi, dall'inizio alla fine.

Un immenso ringraziamento lo devo ai miei genitori e a mio fratello Davide che mi hanno saputo educare, spronare e supportare affinchè potessi raggiungere traguardi sempre più prestigiosi. Un secondo ringraziamento, ma non per questo meno importante, lo devo alla Persona che mi ha saputo supportare, ma soprattutto sopportare negli anni di studio (e non solo) più importanti della mia vita, Ilaria. Un ulteriore tributo lo devo ai miei zii Gianni e Paola con i quali sono cresciuto e ho passati alcuni dei momenti più belli della mia vita; ai miei migliori amici Antonio, Fausto, Greta, Ilaria, Miriam e Nicola con i quali siamo sempre liberi di separarci senza, in realtà, separarci mai; ai miei amici di "zingarate" Francesco e Gianluca, con i quali la vita di tutti i giorni risulta più leggera e meno seria di quella che in realtà è; ai miei colleghi e grandi amici Angela, Alessandro, Federico M., Federico S. e Giuseppe. Infine, mi sento in dovere di ringraziare un'istituzione, la mia istituzione, quella che mi consente almeno un giorno a settimana di dimenticarmi di tutte le

difficoltà quotidiane e colei che mi ha dato un motto per la vita in tutto quello che faccio, fino alla fine, la Juventus.

Sommario

Il fenomeno dell'instabilità dell'equilibrio elastico ricopre un ruolo molto importante da un punto di vista strutturale; infatti, ai primi studi teorici portati avanti da Eulero intorno alla metà '700, ne seguirono numerosi altri, soprattutto in seguito ad alcuni crolli verificatisi con l'avvento delle costruzioni metalliche nel XIX secolo. Per una corretta progettazione strutturale, è necessario tenere in conto anche questi fenomeni, affinchè la struttura rispetti tutti i requisiti per i quali è stata progettata e non pervenga al collasso prematuramente. Come ben noto, infatti, le parti di struttura soggette ad elevati sforzi di compressione, potrebbero "svergolare" e dunque pervenire al collasso molto prima che vengano esplicate tutte le risorse resistenti della stessa. In particolare, l'instabilità flesso-torsionale è un tipo di instabilità che prevede non solo uno sbandamento nel piano di minore rigidezza flessionale, come avviene nel caso della trave soggetta al "carico di punta" di Eulero, ma anche una contemporanea rotazione torsionale. Tale tipo di instabilità solitamente riguarda strutture molto snelle e con sezioni sottili, ma anche strutture compatte con elevati valori di rigidezza torsionale e flessionale potrebbero essere soggette a svergolamento qualora la loro lunghezza fosse molto elevata. In tal senso, l'instabilità flesso-torsionale non riguarda potenzialmente soltanto strutture snelle con piccoli spessori come potrebbero essere le travi e i pilastri in acciaio, ma anche strutture con spessori molto più grandi come le travi in calcestruzzo armato. Per questa ragione, scopo del presente lavoro di tesi è quello di valutare le ragioni che hanno portato al crollo di una trave in calcestruzzo armato precompresso (c.a.p.) lunga circa 30 metri, avvenuto in una località del Piemonte durante la costruzione della copertura di un capannone industriale. Più in particolare, l'obiettivo è quello di individuare, mediante analisi numeriche con un codice agli elementi finiti (FEM), il carico critico che ha provocato il collasso per l'instabilità flesso-torsionale, valutando al contempo l'eventuale ruolo favorevole o sfavorevole giocato dalla presenza della precompressione sul carico di collasso stesso.

Il presente elaborato è suddiviso in 2 parti.

Nella prima parte è riassunto il lavoro di ricerca bibliografica svolto in merito all'instabilità flesso-torsionale di strutture elastiche in generale, e di strutture in c.a. e c.a.p. in particolare, con lo scopo di inquadrare l'ambito nel quale si inserisce il lavoro di tesi. Sono quindi richiamati alcuni casi notevoli trattati in letteratura, e sono inoltre presentate alcune analisi FEM effettuate su casi "test", confrontandone i risultati con le corrispondenti soluzioni in forma chiusa, al fine di validare l'approccio utilizzato nell'analisi del caso studio in esame.

La seconda parte è a sua volta suddivisa in 3 sotto parti. Nella prima sotto parte viene presentato il caso studio in esame, analizzando i dati a disposizione e ponendo l'attenzione sulla geometria, le tipologie di elementi costruttivi, i carichi di progetto e le possibili cause del crollo. La seconda sotto parte, invece, è dedicata alla descrizione del modello agli elementi finiti implementato nel programma "Lusas". Infine, nella terza e ultima sotto parte sono presentate le analisi numeriche che hanno consentito di confrontare il carico critico ottenuto numericamente con quello che si è verificato nella realtà durante il processo costruttivo.

Indice

Capitolo 1

Instabilità flesso-torsionale delle strutture elastiche

1.1 Aspetti generali

Quando si parla in generale di instabilità strutturale si fa spesso riferimento alle travi caricate di punta, che costituisce il caso studiato durante la metà del '700 da Eulero, ovvero il collasso di un corpo soggetto a sforzi di compressione, sebbene l'effettivo sforzo di compressione che provoca il collasso sia minore dello sforzo massimo che il materiale è in grado di sopportare. Il carico di punta è una sollecitazione di compressione applicata alla testa della trave o del corpo. Ciò che accade nella realtà però è che il carico non sarà coincidente con l'asse della trave, ma sarà eccentrico con la conseguente nascita di un momento flettente. Una struttura snella, essendo sottoposta a sollecitazioni di questo tipo, tende ad incurvarsi fino al punto di instabilità e a collassare.
Il caso dell'instabilità flesso-torsionale prevede uno sbandamento fuori dal piano di massima rigidezza flessionale accompagnato da una rotazione attorno il proprio asse (fig. 1.1); la trave raggiunge il collasso senza esplicare tutte le risorse flessionali su cui si poteva pensare di contare a causa della nascita di questo fenomeno.
Come si vede in figura (1.1), in un esperimento fatto in laboratorio il profilato di acciaio IPE sottoposto all'applicazione di due masse nell'estremo, riconducibili a una forza verticale, e incastrata nell'altro estremo, portano all'instabilità laterale della

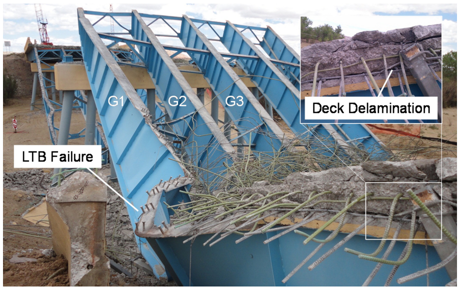
trave. Proprio da questo esperimento si capisce l'importanza della verifica degli elementi strutturali che potrebbero essere soggetti a questo tipo di instabilità, perchè qualora questo fenomeno non si presentasse come in questo caso in un laboratorio ma in una struttura reale, si potrebbe arrivare al crollo della stessa con delle gravi conseguenze.
Con il passare del tempo il fenomeno dell'instabilità ha acquisito sempre più importanza, perchè la possibilità di impiegare materiali sempre più resistenti ha dato la possibilità di ridurre le sezioni, con un conseguente beneficio in termini di peso, ma anche un relativo aumento di snellezza che gioca un ruolo molto importante a favore dell'instabilità.

Figura 1.1: Esempio di instabilità flesso-torsionale

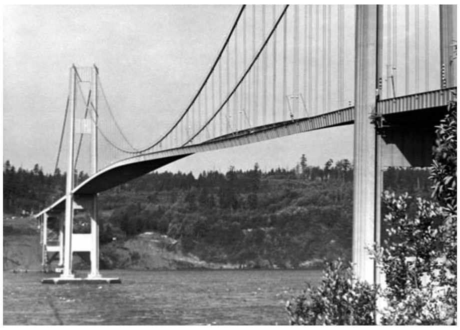
Di conseguenza, le analisi di instabilità hanno acquisito un ruolo molto importante nella progettazione strutturale, infatti, nella progettazione delle strutture in acciaio le NTC2008 prevedono delle formule matematiche per il calcolo del momento resistente di aste soggette a instabilità flesso-torsionale. Tali fenomeni possono manifestarsi in tutti i tipi di strutture: travi rettilinee o ad arco, travi reticolari, lastre piane o curve, coperture, strutture in parete sottile e possono coinvolgere singole parti di una costruzione, oppure l'intera struttura. In ogni caso le conseguenze sono sicuramente negative per l'intera costruzione.

A testimonianza di quanto detto, questo fenomeno ha causato diversi crolli nell'arco del tempo, non solo nel passato, ma anche recentemente.
In figura (1.2) sono riportati alcuni esempi di questi collassi. Il caso più eclatante è stato il collasso del Tacoma Narrows Bridge (fig. 1.2-c) negli anni '40. In questo caso si parla di un tipo di instabilità flesso-torsionale in regime dinamico e non statico, tipo di instabilità nota come "flutter". Al di là di spiegazioni più precise fornite dall'instabilità dinamica, una spiegazione del fenomeno avvenuto che ha portato al collasso può essere data dalla presenza di un impalcato troppo sottile e debole a torsione, infatti come verrà illustrato in seguito, uno spessore troppo piccolo porta a un abbattimento del momento critico; nel caso in esame la presenza del vento ha portato a delle oscillazioni torsionali via via più grandi fino al crollo della campata centrale avvenuto per rottura dei punti di ancoraggio pendini.

(a) *Marcy Bridge*



(b) *Rio Grande Bridge*



(c) *Tacoma Narrows Bridge*

Figura 1.2: Esempio di collassi di strutture reali

Questo tipo di fenomeno però si è presentato anche in epoca più recente, durante la costruzione di un ponte pedonale a cassone nel 2002 a Marcy, vicino New York [1] (fig. 1.2-a); il ponte pedonale era stato progettato con un'unica campata, rettilineo e con un cassone trapezoidale composito in acciaio e da un impalcato di calcestruzzo. Il crollo è avvenuto durante il posizionamento dell'impalcato di calcestruzzo sulla parte in acciaio torsionalmente flessibile. Infatti, dopo questo crollo l'American Association of State Highway and Transportation Officials (AASHTO), che è l'ente che si occupa di pubblicare le specifiche e le linee guida da seguire nelle costruzioni negli Stati Uniti, ha previsto l'uso di diagonali tra le flange superiori per evitare questo tipo di collasso per instabilità.
Diverso, invece, è il caso del Rio Grande Bridge [2] (fig. 1.2-b); il suo crollo è avvenuto durante dei lavori di manutenzione nel 2011 a cause delle cattive condizioni nelle quali si trovava dopo 44 anni di servizio. Il collasso in questo caso è avvenuto durante la rimozione dell'impalcato, che ha portato all'instabilità della flangia compressa a causa dell'inadeguata presenza di diagonali nelle travi esterne; pertanto questo collasso locale ha generato una ridistribuzione delle azioni sulle travi rimanenti, generando un rapporto tra domanda e offerta maggiore di 1, provocando così il collasso dell'intero ponte.

1.2 Formulazione del problema

Si vuole giungere alle equazioni finali, che governano il problema, anlizzando qual è l'interazione dovute alla flessione, con i momenti flettenti che nascono per effetto della torsione e le equazioni dovute alla torsione, con i momenti torcenti che nascono come componenti dei momenti flettenti a causa degli spostamenti u e v. Si sposta il sistema dalla sua configurazione equilibrata, imponendo una deformata tramite una perturbazione, e in questo modo si valuta la stabilità del problema [3].
Si consideri una trave AB con sezione retta sottile comunque variabile (fig. 1.3), in cui il baricentro G e il centro di taglio C siano situati su due rette parallele. La trave sia caricata con forze $Ff(z)$ agenti secondo un asse s normale all'asse z e passante per il centro di taglio, e da delle forze parallele all'asse z agenti lungo la

retta dei baricentri e tali che nella sezione di ascissa generica sia lo sforzo normale sia $N = -F\eta(z)$.

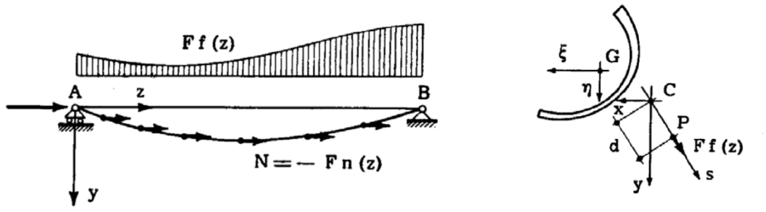


Figura 1.3

Sia d la distanza del centro C del punto P di applicazione delle forze $Ff(z)$; l'asse s e la distanza d siano invariabili con z.
Gli assi principali ξ e η siano sulla trave indeformata e gli assi x e y, invariabili con la deformazione e paralleli agli assi ξ e η della trave indeformata, abbiano per origine il centro C.

1.2.1 Equazioni degli spostamenti u e v

Partendo dai tagli T_x e T_y alla generica ascissa z, e tenendo in considerazione anche della componente di N che genera il taglio si avrà:

$$((EI_\eta u^{''})^{'} = -Fnu^{'} - T_x \tag{1.1}$$

$$((EI_\xi v^{''})^{'} = -Fnv^{'} - T_y \tag{1.2}$$

inoltre, tenendo in conto di tutte le componenti che generano momento, il momento flettente sarà:

$$dM_y = Ndu - T_x dz = -Fndu - T_x dz$$

$$dM_x = Ndv + T_y dz = -Fndv - T_y dz$$

dividendo ambo i membri per la quantità dz si otterranno le espressioni differenziali dei momenti nelle due direzioni x e y:

$$\frac{dM_y}{dz} = -Fn\frac{du}{dz} - T_x \tag{1.3}$$

$$\frac{dM_x}{dz} = -Fn\frac{dv}{dz} - T_y \tag{1.4}$$

dalla teoria della trave valgono inoltre le seguenti relazioni:

$$M_y = EI_\eta u^{''} \tag{1.5}$$

$$M_x = -EI_\xi v^{''} \tag{1.6}$$

Pertanto, sostituendo le (1.5) e (1.6) nelle (1.3) e (1.4), si perviene alla formualazione generale delle equazioni come segue:

$$(EI_\eta u^{''})^{'} + Fnu^{'} - M_{fy}^{'} = 0 \tag{1.7}$$

$$(EI_\xi v^{''})^{'} + Fnv^{'} - M_{fx}^{'} = 0 \tag{1.8}$$

Se la trave però risulta essere soggetta a delle rotazioni θ attorno all'asse z, le flessioni provocate da M_x e M_y saranno deviate perchè il momento non coincide con un asse centrale d'inerzia (fig. 1.4); se però le rotazioni sono piccole, e dunque trascurabili, le componenti di spostamento u e v possono essere confuse con quelle relative agli assi centrali d'inerzia ξ e η, sostituendo in maniera opportuna M_{fx} e M_{fy} con $M_{f\xi}$ e $M_{f\eta}$ e tenendo conto del fatto che G non coincide con C, si ottengono le relazioni finali che descrivono gli spostamenti:

$$(EI_\eta u^{''})^{'} + Fnu^{'} - Fy_G n\theta^{'} - (M_{fy} - M_{fx}\theta)^{'} = 0 \tag{1.9}$$

$$(EI_\xi v^{''})^{'} + Fnv^{'} + Fx_G n\theta^{'} + (M_{fx} + M_{fy}\theta)^{'} = 0 \tag{1.10}$$

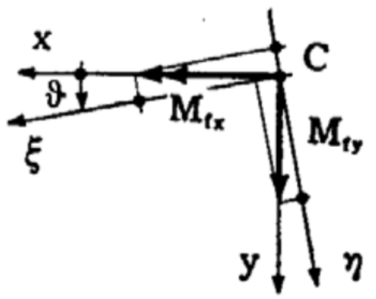


Figura 1.4

1.2.2 Equazione della rotazione ϑ

Per quanto riguarda l'equazione della rotazione ϑ si considera l'espressione più generale della torsione non uniforme, nota come teoria di Vlasov, nella quale l'angolo unitario di torsione non è più costante, ma variabile, pertanto le sezioni si ingobbano in maniera diversa e nascono nella trave delle tensioni normali a causa dell'ingobbamento impedito. L'equazione generale risulta essere:

$$C_2\vartheta^{IV} + C_2^{'}\vartheta^{'''} - C_1\vartheta^{''} - C_1\vartheta^{'} = -\frac{dM_t}{dz} \tag{1.11}$$

In queste ipotesi l'angolo unitario di torsione vale $\vartheta^{'} = \dfrac{M_t(z)}{C_1}$, dove C_1 e C_2 rappresentano rispettivamente la rigidezza torsionale e la rigidezza all'ingobbamento. In questo caso a differenza della teoria della torsione alla De Saint Venant, la derivata dell'angolo unitario di torsione non sarà più pari a 0, ma sarà diverso da 0 provocando la nascita di una nuova sollecitazione interna chiamata "bimomento" e definita come segue:

$$\theta'' = -\frac{B}{EI_w} = \frac{B}{C_2}$$

Il bimomento è una caratteristica di sollecitazione interna che nasce per la presenza delle tensioni normali dovute all'ingobbamento impedito (fig. 1.5).

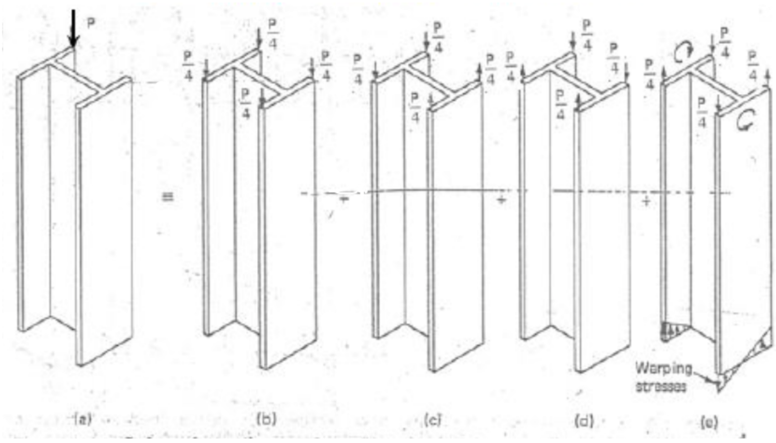


Figura 1.5: Trave a doppio T caricata da una forza eccentrica

Un modo abbastanza semplice per spiegare il concetto di bimomento è quello di considerare uno schema di una trave a doppio T caricata in maniera eccentrica come somma di schemi elementari, che sommati sono equivalenti a quello iniziale. Mentre negli schemi b), c) e d) si notano rispettivamente la presenza di uno sforzo normale centrato P, un momento flettente M_x e un momento flettente M_y, nello schema e) vi è la presenza di due coppie uguali e opposte che rappresentano un sistema equivalente a zero.

Il bimomento non è un momento flettente, ma sono due momenti flettenti equivalenti posti a una certa distanza che causano l'ingobbamento delle flange; infatti, sarà definito come il prodotto tra la singola coppia e il braccio, avendo come dimensioni fisiche non più $[FL]$ come i momenti flettenti, bensì $[FL^2]$.
Per quanto detto è possibile esprimere il bimomento in maniera matematica come segue:

$$B = \int_A \sigma_z \omega dA$$

in cui ω rappresenta l'area settoriale, cioè il doppio dell'area spazzata dal raggio vettore OP, che dall'origine O, percorre la linea media della sezione (fig. 1.6).

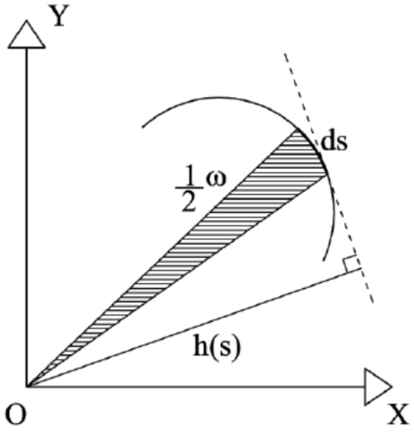


Figura 1.6

1.2.3 Equazione generale della torsione

Si analizzi il generico concio di trave infinitesimo. Il carico applicato sarà un momento torcente distribuito m_z. Scrivendo l'equilibrio del concio di trave da z a $z+dz$ si otterrà:

$$-M_z + M_z + dM_z + m_z dz = 0 \Longrightarrow \frac{dM_z}{dz} = -m_z(z)$$

La sollecitazione interna dovrà tenere conto oltre del momento torcente primario alla De Saint Venant, anche di un momento torcente secondario dovuto alla variazione del bimomento:

- $M_z^1 = C_1 \vartheta'$
- $M_z^{VL} = -C_2 \vartheta'''$

Si valuti adesso il momento torcente. A causa della presenza dei momenti flettenti nasceranno, come già detto, delle componenti torcenti (fig. 1.7):

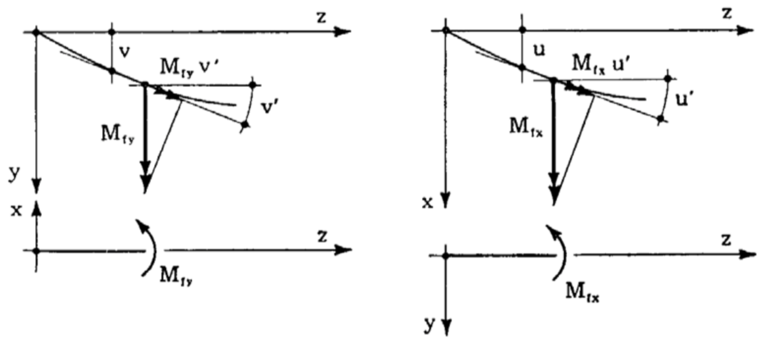


Figura 1.7

perciò, potendo confondere la rotazione con la derivata prima dello spostamento, è possibile ricavare la componente di momento torcente a causa della presenza degli spostamenti u e v e considerando anche dell'incremento nel passaggio da z a $z + dz$ si ottiene:

$$M_t = M_{fx}u^{'} + M_{fy}v^{'} \tag{1.12}$$

$$\frac{dM_t}{dz}dz = -T_y\frac{du}{dz}dz + T_x\frac{dv}{dz}dz \tag{1.13}$$

inoltre a causa dell'effetto della rotazione, la retta d'azione della forza non passerà più per il centro di taglio, ma a una certa distanza pari a θd (fig. 1.8):

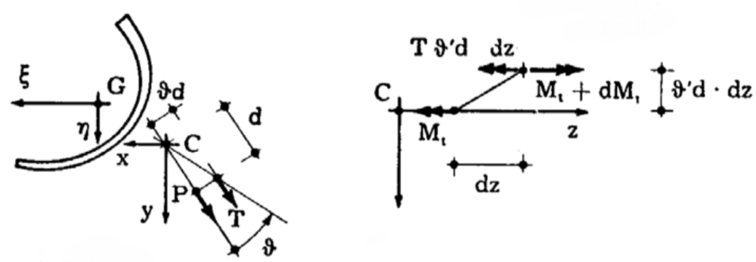


Figura 1.8

equilibrando il concio come mostrato in figura 1.8, si ottiene la seguente equazione:

$$-M_t + M_t + dM_t - Td\vartheta' dz = 0$$

da cui

$$\frac{dM_t}{dz} = Td\vartheta' \tag{1.14}$$

sostituendo (1.12) e (1.14) in (1.13) si ottiene:

$$M_t' = (M_x u')' + (M_y v')' - T_y u' + T_x v' + T\vartheta' d \tag{1.15}$$

svolgendo le operazioni di derivazione tra parentesi nella (1.15) e ricordando che il taglio risulta essere la derivata del momento si ottiene:

$$M_t' = M_x u'' + M_y v'' + T\vartheta' d \tag{1.16}$$

infine, sotituendo (1.16) all'interno di (1.11) si ottiene l'equazione generale che governa la rotazione ϑ:

$$C_2 \vartheta^{IV} + C_2' \vartheta''' - C_1 \vartheta'' - C_1 \vartheta' + M_{fx} u'' + M_{fy} v'' + T\vartheta' d = 0 \tag{1.17}$$

1.3 Equazioni generali del probelma

Si riportano pertanto le equazioni (1.7), (1.8) e (1.17) che governano il problema dell'instabilità flesso-torsionale:

$$\begin{cases} (EI_\eta u'')' + Fnu' - M_{fy}' = 0 \\ (EI_\xi v'')' + Fnv' - M_{fx}' = 0 \\ C_2 \vartheta^{IV} + C_2' \vartheta''' - C_1 \vartheta'' - C_1 \vartheta' + M_{fx} u'' + M_{fy} v'' + T\vartheta' d = 0 \end{cases}$$

1.4 Instabilità flesso-torsionale di una trave a sezione rettangolare soggetta a momento costante

Per analizzare la trave di sezione rettangolare soggetta a momento costante si potrebbe partire dalle equazioni defnite nella sezione 1.3 tenendo conto delle opportune condizioni al contorno. In questo esempio, essendo la sezione rettangolare, si ricaverano direttamente l'equazioni che governano il problema tramite delle considerazioni di equilibrio [4]. L'obiettivo di questo esempio è quello di calcolare il valore del momento critico m_c, tale che per $m < m_c$ risulta essere presente solo lo spostamento in direzione verticale $v \neq 0$, ovvero un valore del momento flettente agente minore di quello critico che non porta all'instablità fuori dal piano, ma solo un abbassamento nella direzione di maggiore rigidezza flessionale; mentre per $m > m_c$ saranno presenti lo spostamento fuori dal piano e la rotazione attorno l'asse longitudinale, $u \neq 0$ e $\vartheta \neq 0$.
Si consideri una trave di sezione rettangolare sottile (fig. 1.9-a) , vincolata agli estremi con delle cerniere torsionali in modo che sia impedita la rotazione attorno all'asse longitudinale Z e gli spostamenti in direzione X e Y. Sia la trave soggetta a flessione uniforme tramite l'applicazione alle estremità di due momenti m contenuti nel piano YZ di maggiore rigidezza flessionale. Per poter affrontare questo tipo di problema è necessario fare le opportune ipotesi:

- trave elastica senza imperfezioni, soggetta a momento costante attorno all'asse X;
- vincoli a cerniera nel piano della trave, impedendo la torsione e lo spostamento laterale in quei punti;
- I_x»I_y, ovvero imporre spostamenti molto piccoli nel piano YZ;
- ingobbamento libero nelle sezioni di estremità.

Si consideri una configurazione variata della trave, con inflessione della stessa nel piano XZ di minore rigidezza flessionale, e contemporanea torsione attorno all'asse

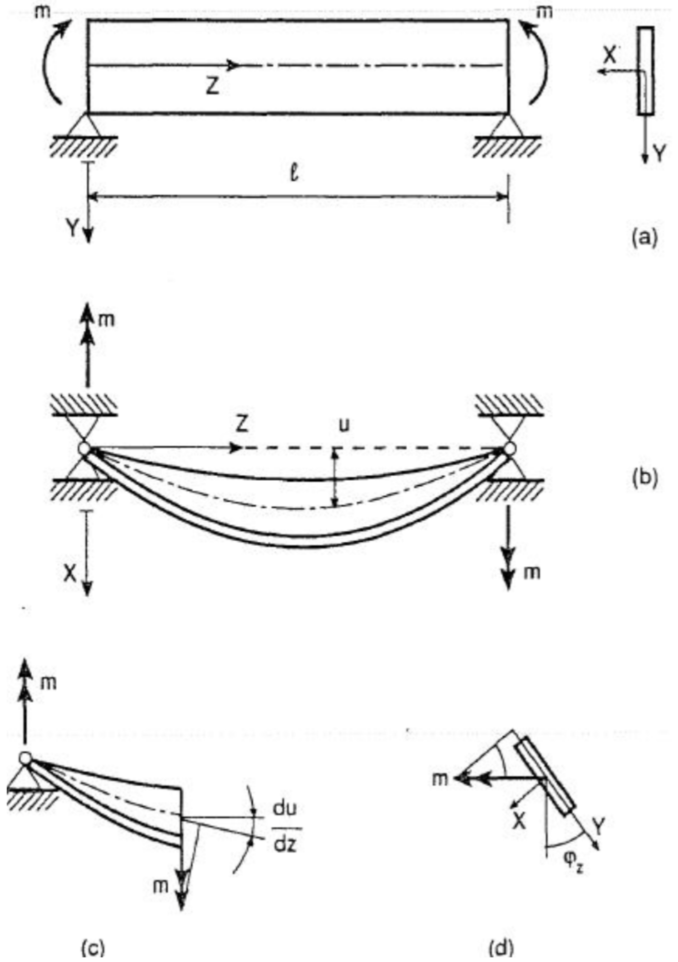


Figura 1.9

Z (fig. 1.9-b).

Lo spostamento laterale u e la rotazione torsionale φ_z, generano delle componenti del momento esterno m; si può notare come lo schema in figura (1.9-c), nonostante rappresenti lo schema di perturbazione flessionale, generi un momento torcente instabilizzante, mentre lo schema di perturbazione torsionale presente in figura (1.9-d) genera un momento instabilizzante flessionale.

Quanto detto può essere espresso matematicamente come segue:

$$M_{iz} = m\frac{du}{dz} \tag{1.18}$$

$$M_{iy} = -m\varphi_z \tag{1.19}$$

Come già detto entrambe le sollecitazioni M_{iz} e M_{iy} sono instabilizzanti, perchè tendono a far aumentare rispettivamente la rotazione torsionale φ_z e lo spostamento u.
Saranno però presenti anche dei momenti stabilizzanti pari a:

$$M_{sz} = GJ\frac{d\varphi}{dz} \tag{1.20}$$

$$M_{sy} = EI_y\frac{d^2u}{dz^2} \tag{1.21}$$

Abbiamo così quattro quantità, due stabilizzanti e due instabilizzanti; possiamo andare ad uguagliarle a due a due, ipotizzando che queste uguaglianze siano valide allo stesso tempo in ogni punto della trave, ottenendo queste due equazioni:

$$GJ\frac{d\varphi_z}{dz} = m\frac{du}{dz} \tag{1.22}$$

$$EI_y\frac{d^2u}{dz^2} = -m\varphi_z \tag{1.23}$$

Si può subito notare che queste equazioni non sono risolubili in maniera diretta, infatti nella prima equazione compare la derivata prima di φ_z e di u, nella seconda equazione compare la derivata seconda di u e la φ_z. Per poter pervenire alla soluzione si potrebbe ad esempio derivare rispetto a z l'equazione (1.22) e sostituire tutto all'interno dell'equazione (1.23), ottenendo:

$$\varphi_z^{''} + \alpha^2 \varphi_z = 0 \tag{1.24}$$

avendo posto:

$$\alpha^2 = \frac{m^2}{EI_y GJ} \tag{1.25}$$

una soluzione che soddisfa questa equazione differenziale del secondo ordine è data dalla somma di due funzioni trigonometriche che rispetta anche le condizioni al contorno nel rispetto dei vincoli presenti:

$$\begin{cases} \varphi_z = A\sin(\alpha z) + B\cos(\alpha z) \\ z = 0, \varphi_z = 0 \\ z = l, \varphi_z = 0 \end{cases}$$

imponendo le condizioni al contorno, si otterrà $B = 0$ e $A\sin(\alpha l) = 0$; per evitare la soluzione banale con entrambi le costanti nulle, si impone l'annullamento della funzione trigonometrica che fornisce di conseguenza gli autovalori del problema:

$$\alpha_n = n\frac{\pi}{l}, n = numero\ naturale \tag{1.26}$$

ponendo $n = 1$ e il valore di α come riportato in (1.25) si può trovare il valore più basso del momento, che rappresenta la situazione critica:

$$m_{cri} = \frac{\pi}{l}\sqrt{EI_y GJ} \tag{1.27}$$

L'equazione (1.27) è comunemente nota come formula di Prandtl. Dalla (1.27) si può notare come più è lunga la trave, più la stessa è instabile, poichè aumentando la lunghezza della trave l, il valore di m_{cri} tende a diminuire; se J e I_y fossero grandi come lo sono in una sezione compatta, basterebbe una lunghezza l molto grande per

abbattere il valore di momento critico. Quanto detto vuole evidenziare il fatto che questo tipo di fenomeno vale non solo per sezioni alte e sottili, ma anche per sezioni compatte.
Si noti inoltre che nel caso in cui l non sia abbastanza grande da abbattere il valore del carico critico, un parametro che potrebbe ridurlo notevolmente sarebbe lo spessore:

$$m_{cri} \propto \frac{1}{l}\sqrt{(\frac{b\delta^3}{12})(\frac{1}{3}b\delta^3)} \propto \delta^3\frac{b}{l} \tag{1.28}$$

infatti, per valori grandi dello spessore δ, quindi nel caso di travi più compatte, soltanto la presenza di una lunghezza molto elevata potrebbe portare un'instabilità dell'equilibrio elastico, mentre per valori di spessore δ piccoli, come si può vedere nella formula (1.28), il valore della forza critica tende ad abbattersi.

1.5 Instabilità flesso-torsionale di una trave a doppio T soggetta a momento costante

Nel caso della sezione a doppio T, il comportamento della trave risulta essere simile a quello della sezione rettangolare, ma a causa della presenza delle ali sarà presente anche un contributo di rigidezza all'ingobbamento I_w. Infatti, potendo scindere il momento flettente in due forze orizzontali, si avranno una flangia tesa e una compressa. La flangia inflessa compressa nella configurazione perturbata sarà soggetta a uno spostamento di componente u nel piano stesso della flangia, potendo valutare in questo modo l'effetto torcente dovuto al bimomento. Questo può essere dedotto a partire dalla componente di spostamento fuori dal piano cui è soggetta la flangia compressa, ricordando la relazione che lega il momento flettente alla curvatura nelle ipotesi di Eulero-Bernoulli:

$$M = -EI_y^{ala}\frac{d^2u}{dz^2} \tag{1.29}$$

al quale corrisponderà un taglio pari a:

$$T = \frac{dM}{dz} = -EI_y^{ala}\frac{d^3u}{dz^3} \tag{1.30}$$

in questo modo considerando che i due tagli siano separati da una distanza H e ipotizzando che la legge di spostamento di u per piccoli angoli φ sia $u = \frac{H}{2}\tan\varphi \simeq \frac{H}{2}\varphi$ si può valutare il valore di momento torcente secondario in funzione dell'angolo di torsione φ, sostituendo nella relazione (1.30) l'espressione linearizzata si u:

$$M_t^{(2)} = T \cdot H = -EI_y^{ala}\frac{H^2}{2}\frac{d^3\varphi}{dz^3} \tag{1.31}$$

Considerando lo stesso tipo di schema statico e di sollecitazione della trave a sezione rettangolare, si potrà operare modificando direttamente la relazione (1.22) che deve tener in conto anche del contributo di ingobbamento impedito da parte delle ali (1.31). Così facendo si ottengono le seguenti relazioni:

$$GJ\frac{d\varphi_z}{dz} = m\frac{du}{dz} - EI_y^{ala}\frac{H^2}{2}\frac{d^3\varphi}{dz^3} \tag{1.32}$$

imponendo il valore di rigidezza all'ingobbamento pari a $I_\omega = I_y\frac{H^2}{2}$ e derivando una volta l'equazione (1.32) rispetto la variabile z si ottengono le equazioni che governano il problema:

$$-EI_\omega\frac{d^4\varphi}{dz^4} + GJ\frac{d^2\varphi}{dz^2} + \frac{m^2\varphi}{EI_y} = 0 \tag{1.33}$$

$$EI_y\frac{d^2u}{dz^2} = -m\varphi_z \tag{1.34}$$

la relazione (1.33) risulta essere un'equazione differenziale di quarto ordine a coefficienti costanti, pertanto per poterla risolvere sarà necessario trovare le radici del polinomio caratteristico e a seconda che le stesse radici si trovino nel campo reale o complesso, saranno associate delle soluzioni. Si pongano per comodità le posizioni:

$$2\alpha = \frac{GJ}{EI_\omega} \tag{1.35}$$

$$\beta = \frac{m^2}{EI_y EI_\omega} \tag{1.36}$$

in questo modo potrà scriversi l'equazione precedente in forma compatta come segue:

$$\frac{d^4\varphi}{dz^4} - 2\alpha\frac{d^2\varphi}{dz^2} - \beta\varphi = 0 \tag{1.37}$$

a questo punto per poter risolvere l'equazione differenziale si può partire scrivendo il polinomio caratteristico, sostituendo con la variabile λ le derivate e ottenendo un'equazione algebrica biquadratica:

$$\lambda^4 - 2\alpha\lambda^2 - \beta = 0 \tag{1.38}$$

le cui radici saranno:

$$\lambda_1 = \sqrt{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + b}}$$

$$\lambda_2 = -\sqrt{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + b}}$$

$$\lambda_3 = -\sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + b}}$$

$$\lambda_4 = \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + b}}$$

si può notare come le radici λ_1 e λ_2 appartenagano al campo complesso perchè la quantità al di sotto del radicando è sempre minore di 0, verificando che è sempre soddisfatta la condizione $\sqrt{\alpha^2+\beta} > \alpha$, in quanto β risulta essere sempre una quantità maggiore di 0. Ponendo le quantità $m = \sqrt{\alpha - \sqrt{\alpha^2+b}}$ e $n = \lambda_1 = \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2+b}}$ si otterranno le radici in forma compatta:

$$\lambda_{1,2} = \pm im \tag{1.39}$$

$$\lambda_{3,4} = \pm n \tag{1.40}$$

una volta trovate le radici, sarà possibile attribuire una soluzione ad ognuna di esse. Essendo, le radici $\lambda_{3,4}$ reali, la soluzione a esse associata sarà del tipo $\varphi(z) = C_k e^{\lambda_k z}$, mentre per λ_1 la soluzione associata sarà $\varphi(z) = C_k e^{\alpha_k z}\cos(\beta_k z)$ e per λ_2 essa sarà $\varphi(z) = C_k e^{\alpha_k z}\sin(\beta_k z)$, dove α e β rappresentano rispettivamente il valore della parte reale e immaginaria della radice.
Andando a sostituire direttamente il valore delle due radici (1.40) nella soluzione esponenziale e il solo valore della parte immaginaria delle prime due radici (1.39), poichè $\alpha_{1,2} = 0$ e $\beta_{1,2} = \pm m$, si ottiene la soluzione dell'equazione differenziale del quarto ordine a coefficienti costanti:

$$\varphi = A\sin(mz) + B\cos(mz) + Ce^{-nz} + De^{nz} \tag{1.41}$$

per ottenere il carico critico è necessario a questo punto imporre le condizioni al contorno, tenendo conto che per via dei vincoli presenti si ha agli estremi l'impossibilità di rotazione torsionale e momento flettente nullo:

$$\begin{cases} \varphi = A\sin(mz) + B\cos(mz) + Ce^{-nz} + De^{nz} \\ z = 0, \varphi = 0 \\ z = 0, \varphi'' = 0 \end{cases}$$

sostituendo i valori delle condizioni al contorno nell'equazione precedente è possibile trovare i valori di due costanti, $B = 0$ e $D = -C$. Sostituendo i valori delle costanti trovate nella relazione (1.41) e ricordando che il seno iperbolico ha un'espressione del tipo $\sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, è possibile scrivere la relazione di φ con le condizioni al contorno del secondo estremo:

$$\begin{cases} \varphi = A\sin(mz) - 2D\sinh(nz) \\ z = l, \varphi = 0 \\ z = l, \varphi'' = 0 \end{cases}$$

dopo aver sostituito le precedenti condizioni al contorno all'interno della nuova espressione di φ è possibile ottenere due relazioni che possono essere riportate in forma matriciale, perchè per ottenere una soluzione diversa da quella banale si imporrà l'annullamento del determinante della matrice dei coefficienti:

$$\begin{pmatrix} \sin(ml) & -2\sinh(nl) \\ m^2\sin(ml) & 2n^2\sinh(nl) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

imponendo l'annullamento del determinante si ottiene:

$$\sin(ml)(n^2\sinh(nl) + m^2\sinh(nl)) = 0$$

in questo modo si può notare che l'unica quantità che può rispettare l'uguaglianza pari a zero è $\sin(nl)$ poichè n e m sono quantità sempre positive e mai nulle. Inoltre per far in modo che la relazione precedente sia verificata è necessario imporre $D = 0$. Si ottiene pertanto l'espressione della deformata della membratura instabilizzata:

$$\varphi = A\sin(mz)$$

infine, ricordando la precedente uguaglianza $\sin(nl)$ da cui ne segue che $ml = k\pi$, imponendo $k = 1$ per ottenere il valore critico minore e ricordando l'espressione di m si ottiene:

$$-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta} = \frac{\pi^2}{l^2} \tag{1.42}$$

sostituendo le espressioni (1.35) e (1.36) in (1.42) si ottiene l'espressione del carico critico di una trave a doppio T soggetta a momento flettente costante:

$$m_{cri} = \frac{\pi}{l}\sqrt{EI_y GJ}\sqrt{1 + \frac{\pi^2 EI_\omega}{l^2 GJ}} \tag{1.43}$$

dalla relazione (1.43) si nota come la presenza delle ali fornisce un contributo irrigidente ulteriore rispetto al caso della trave rettangolare (1.27), e quindi a parità di sollecitazione, schema statico analizzato e materiale il carico critico sarà maggiore grazie all'ingobbamento impedito dalle flange.

1.6 Influenza delle condizioni di vincolo e della configurazione di carico

I casi precedentemente analizzati di trave a sezione rettangolare e a doppio T soggette a momento costante, sono dei casi particolari perchè in realtà il valore di forza critica cambia a seconda delle condizioni di vincolo e anche dal punto di applicazione della forza stessa [5]. Infatti, la forza critica non dipende soltanto dalla presenza o meno delle flange che possono dare un ulteriore contributo irrigidente rispetto alla semplice sezione sottile rettangolare, ma anche dalle condizioni al contorno che devono essere soddisfatte in rispetto dei vincoli presenti nella struttura che possono dare maggiore o minore contributo irrigidente e anche il punto di applicazione della forza deve essere tenuto in conto perchè potrebbe avere un effetto stabilizzante o instabilizzante.

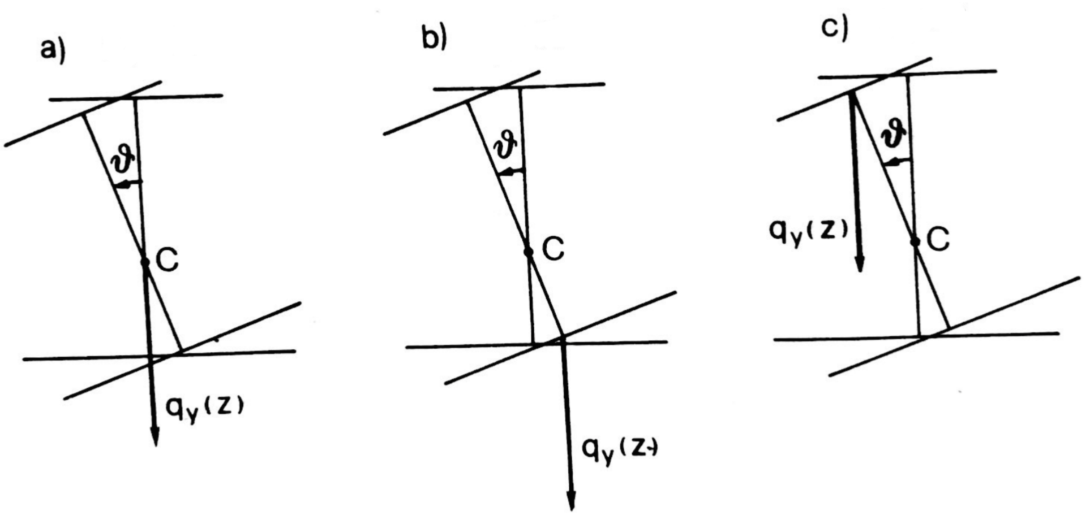


Figura 1.10

Come si può vedere in fig. 1.10-a il carico q_y applicato nel centro di taglio, in una configurazione variata, non ha alcun contributo in termini di equilibrio; invece, se il carico è applicato all'intradosso (fig. 1.10-b) o all'estradosso (fig. 1.10-c) si ha un contributo, rispettivamente stabilizzante nel primo caso in quanto l'applicazione all'intradosso della forza provoca un momento opposto rispetto alla rotazione imposta nella configurazione variata, mentre nel secondo caso la forza applicata è chiaramente instabilizzante in quanto il momento derivante segue la rotazione ϑ.

Come affrontato nelle precedenti sezioni 1.4 e 1.5, il valore della forza critica varia a seconda che sia presente un contributo di rigidezza all'ingobbamento o meno. In generale nel caso in cui la rigidezza all'ingobbamento $I_\omega \neq 0$ per sezioni simmetriche è pari a:

$$F_{cri} = \frac{\gamma_1}{l^2}\sqrt{GJEI_y} \tag{1.44}$$

$l^2 \frac{GJ}{E\Gamma}$	0.1	1	2	3	4	6	8
γ_1	44.3	15.7	12.2	10.7	9.76	8.69	8.03
$l^2 \frac{EJ}{E\Gamma}$	10	12	14	16	24	32	40
γ_1	7.58	7.20	6.96	6.73	6.19	5.87	5.64

Figura 1.11

Il valore γ_1 dipende dal rapporto tra la rigidezza torsionale primaria e quella secondaria, e dal quadrato della lunghezza della trave per rendere il coefficiente adimensionalizzato. Infatti nel caso in cui dovesse prevalere l'effetto della rigidezza torsionale primaria come nel caso di sezioni compatte il valore di γ_1 tenderebbe asintoticamente a quello calcolato trascurando l'effetto della rigidezza all'ingobbamento abbattendo di conseguenza il valore della forza critica. Nel caso in cui, invece, il valore di rigidezza all'ingobbamento sia prossimo a quello della rigidezza torsionale primaria, il valore di γ_1 diminuisce e il corrispondente valore di forza critica aumenta.

Il discorso appena affrontato dipende però non solo dai contributi resistenti presenti e dalla posizione nella quale si trova il carico applicato, ma anche a seconda del tipo di vincoli presenti.

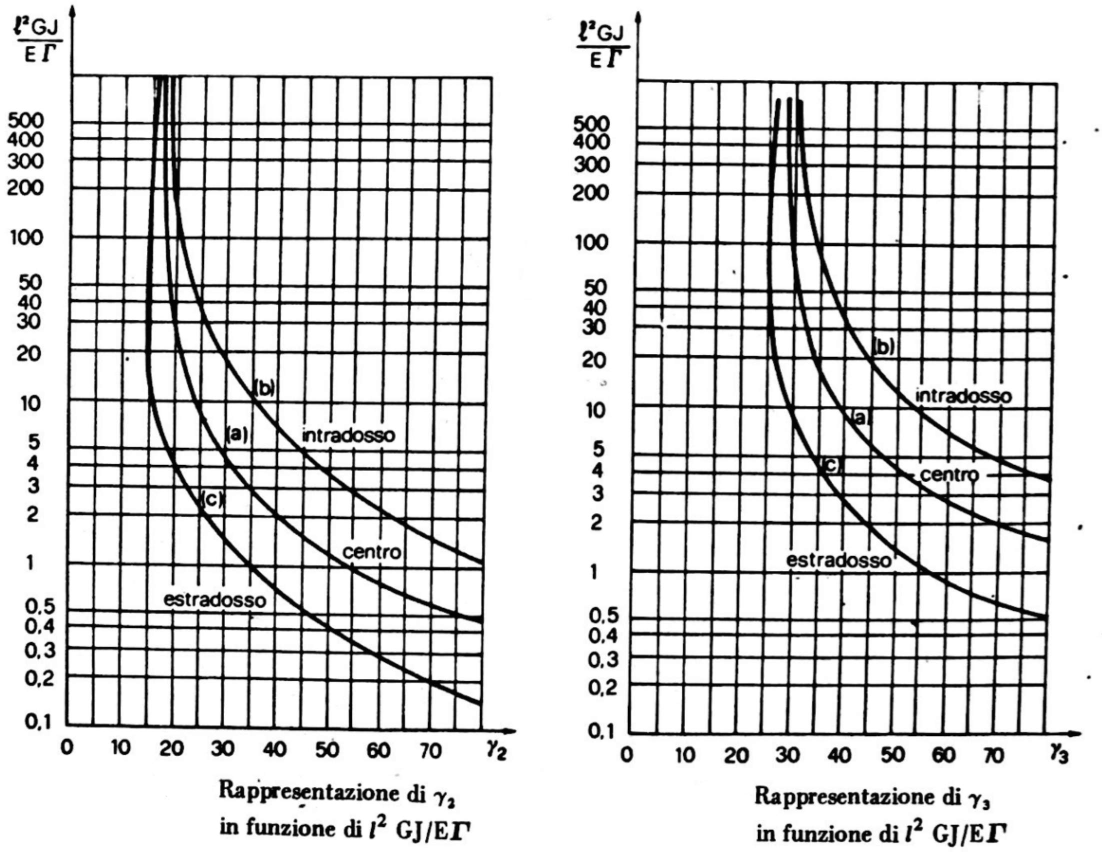


Figura 1.12

In presenza, invece, di un contributo di rigidezza all'ingobbamento non nullo come nel caso delle sezioni a doppio T, il valore della forza critica mantiene sempre la stessa espressione (1.44), ma variano i valori di γ. In fig. 1.12 sono riportati i valori di γ_2 e γ_3 tenendo conto ance del punto di applicazione della forza, rispettivamente nel caso di di trave con sezione a doppio T con ali uguali, appoggiata e con forza concentrata applicata in mezzeria e trave con sezione a doppio T ad ali uguali con carico uniformemente distribuito.

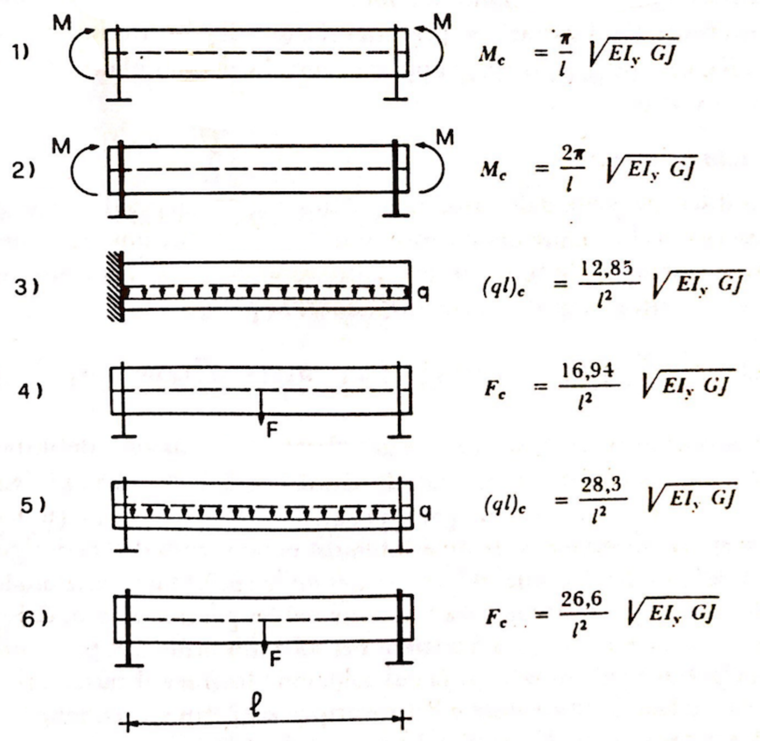


Figura 1.13: Valore di F_{cri} con diverse condizioni di vincolo

In fig. 1.13 vengono riportati i valori della forza critica, di una trave a sezione rettangolare sottile nel caso di diverse condizioni di vincolo. Il caso 1) e 2) rappresenta il valore di momento critico alla "Prandtl" con la differenza dei vincoli presenti sulla trave, infatti il valore di forza critica nel secondo caso risulta essere il doppio del primo poichè oltre ad essere impedite le traslazioni vengono impedite anche le rotazioni torsionali e flessionali rendendo il sistema più rigido; il caso 3) invece rappresenta il caso della mensola delle mensola soggetta a carico distribuito; i casi 4) e 6) come nel caso alla "Prandtl" differiscono solo per le condizioni di vincolo e infine il caso 5) risulta essere soggetto a una forza verticle distribuita sulla lunghezza.

Capitolo 2

Instabilità flesso-torsionale delle strutture in c.a. e c.a.p.

A differenza degli elementi in acciaio, le travi in calcestruzzo in linea generale non sono soggette a instabilità flesso-torsionale perchè le sezioni risultano essere diverse. Infatti, le sezioni delle travi in acciaio hanno generalmente uno spessore delle flange minore rispetto a quello delle travi in calcestruzzo, inoltre i fenomeni di instabilità si verificano per compressione e il calcestruzzo lavora molto bene quando sottoposto a questo tipo di sollecitazione. Pertanto in generale gli elementi di calcestruzzo risultano essere più tozzi di quelli in acciaio e quindi meno soggetti a questo tipo di fenomeno, anche se come già detto una luce troppo elevata potrebbe anche provocarlo.
L'instabilità flesso-torsionale, infatti, è stata analizzata negli ultimi anni a causa dell'aumento delle luci utilizzate nella costruzione di ponti con elementi prefabbricati.
Questi problemi di instabilità potrebbero verificarsi durante la costruzione, a causa di un ribaltamento laterale dovuto a un particolare meccanismo quando gli elementi si trovano appesi ai cavi della gru per essere sollevati e messi in posizione, oppure quando questi elementi vengono poggiati su appoggi temporanei con insufficiente rigidezza laterale, poichè a causa della flessibilità del supporto la trave potrebbe essere soggetta a una deflessione laterale che potrebbe portare al fenomeno di svergolamento [6].

2.1 Instabilità laterale di travi di grande luce in c.a. e c.a.p. su appoggi elastici

Si consideri una trave appoggiata da entrambi gli estremi e che sia soggetta a una rotazione φ. A causa di questa rotazione dovuta alla flessibilità dei vincoli, il peso proprio della trave provocherà una deflessione fuori dal piano secondo l'asse di minore rigidezza.

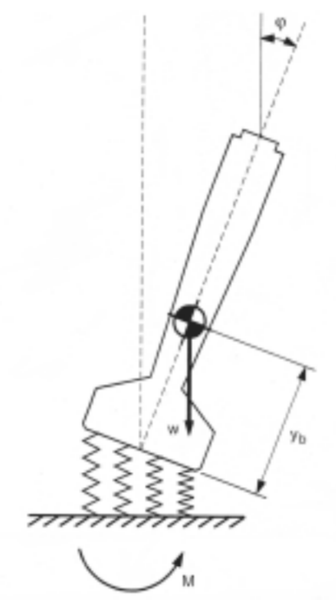


Figura 2.1

Per questo motivo in questo caso il carico critico da ricercare sarà il peso proprio w. Nelle ipotesi che la trave ruoti come un corpo rigido e che il vincolo offra poca rigidezza nei confronti della rotazione rispetto l'asse longitudinale, la deflessione laterale di una trave semplicemente appoggiata sotto l'azione del carico uniformemente distribuito $w\sin(\varphi)$ può essere ricavata a partire dall'integrazione dell'equazione della linea elastica:

$$\begin{cases} \dfrac{d^4 v}{dx^4} = \dfrac{q}{EI_y} \\ q = w\sin(\varphi) \end{cases}$$

imponenendo le quattro condizioni al contorno necessarie, nel rispetto dei vincoli è possibile trovare la seguente espressione:

$$v = \frac{w\sin(\varphi)}{EI_y}(\frac{z^4}{24} - \frac{Lz^3}{12} + \frac{L^3 z}{24}) \tag{2.1}$$

dove:

- z indica la posizione di un punto generico lungo la trave
- L è la luce della trave
- EI_y è la rigidezza flessionale della trave rispetto l'asse Y

Lo spostamento totale laterale sarà dato dall'effetto del peso proprio e dalla rotazione iniziale dovuta alla flessibilità del vincolo. Perciò integrando su tutta la lunghezza della trave L l'equazione (2.1) sarà possibile ottenere un valore medio da sommare all'effetto della rotazione. Integrando si ottiene:

$$v_{av} = \int_0^L v dz = \frac{w\sin(\varphi)L}{120EI_y}$$

lo spostamento u totale sarà:

$$u = y_b \sin(\varphi) + \frac{w\sin(\varphi)L^4}{120EI_y}\cos(\varphi) \tag{2.2}$$

dove y_b rappresenta la distanza tra l'intradosso e il baricentro della sezione.

A causa di questa deflessione laterale ci sarà la nascita di un momento instabilizzante (fig. 2.1):

$$M_i = wLu \tag{2.3}$$

Nello stesso tempo per via delle ipotesi fatte, ovvero che su entrambe le estremità siano presenti dei vincoli elastici con rigidezza rotazionale K, sarà presente un momento stabilizzante:

$$M_s = 2K\varphi \tag{2.4}$$

Sostituendo la relazione (2.2) nella (2.3) ed eguagliano le relazioni (2.3) e (2.4) si ottiene la condizione di equilibrio che permette di ottenere il valore del carico critico:

$$wL(y_b \sin(\varphi) + \frac{w \sin(\varphi) L^4}{120EI_y} \cos(\varphi)) = 2K\varphi \tag{2.5}$$

Nelle ipotesi di piccoli spostamenti e dunque di angolo φ piccolo la relazione (2.5) può essere riscritta come segue:

$$(wL)^2_{cr} \frac{L^3}{120EI_y} + (wL)_{cr} y_b - 2K = 0 \tag{2.6}$$

Analizzando la relazione (2.6) possono essere individuati due casi limite che facilitano la determinazione del carico critico senza risolvere l'equazione di secondo grado:

- $(wL)_{cr} = \dfrac{2K}{y_b}$ carico critico nel caso di trave infinitamente rigida
- $(wL)_{cr} = \sqrt{\dfrac{240EI_yK}{L^3}}$ carico critico nel caso di trave flessibile

In questo modo è possibile calcolare il valore del carico che potrebbe portare a instabilità flesso-torsionale una trave senza imperfezioni, conoscendo le caratteristiche geometriche della trave e la rigidezza del vincolo. La possibilità di calcolare questo valore critico è utile anche per poter tener in conto di un fattore di sicurezza nei confronti di questo tipo di instabilità, inteso come il rapporto tra il peso critico e il peso della trave $\frac{w_{cr}}{w}$ [7], per tenere in conto da quanto ci si discosta dalla situazione critica nel caso di travi appoggiate su vincoli elastici o in caso di sollevamenti delle stesse.

2.1.1 Comportamento di travi di grande luce in c.a. e c.a.p. con imperfezioni

L'analisi della precedente sezione è stata fatta tenendo in considerazione una trave in assenza di imperfezioni. Questa situazione però non rappresenta la realtà, perchè questi elementi presentano delle imperfezioni da un punto di vista sia di materiali sia geometrico. In questo caso una possibile scelta può essere quella di quantificare queste imperfezioni come effetti del seondo ordine, più in particolare come la curvatura associata allo sbandamento laterale che può portare alla fessurazione delle parti di calcestruzzo tese.
Utilizzando l'approccio di "Southwell" [8] è possibile trovare la deflessione laterale della trave come mostrato in figura:

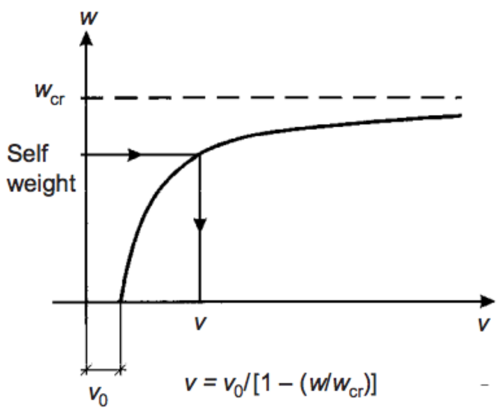


Figura 2.2

Dunque, conoscendo il valore del carico critico e assumendo un valore opportuno dell'imperfezione iniziale è possibile ottenere il valore della deflessione laterale:

$$v = \frac{v_0}{1 - \dfrac{w}{w_{cr}}} \tag{2.7}$$

Tenendo conto inoltre della componente di deflessione laterale indotta dalla componente di peso proprio a causa della rotazione inziale φ dovuta al vincolo è possibile scrivere:

$$v - v_0 = \frac{5wL^4 \sin(\varphi)}{384EI_y} \tag{2.8}$$

Inoltre, avendo considerato la trave come semplicemente appoggiata tra i 2 estremi, è possibile ricavare la curvatura in mezzeria della trave a partire dalla sollecitazione di momento flettente:

$$k_{ms} = \frac{M}{EI_y} = \frac{qL^2}{8EI_y} = \frac{w\sin(\varphi)L^2}{8EI_y} \tag{2.9}$$

Combinando le relazioni (2.7), (2.8) e (2.9) è possibile ottenere una relazione che lega il carico alla curvatura:

$$k_{ms} = \frac{48v_0}{5L^2}(\frac{1}{\frac{w_{cr}}{w} - 1}) \tag{2.10}$$

Si nota facilmente come dalla relazione (2.10) se il "fattore di sicurezza" tende all'unità, ovvero il valore del carico critico tende al peso proprio della trave, il termine presente al denominatore tende a zero e dunque la curvatura a infinito, cioè la curvatura rispetto all'asse debole tende a diventare molto grande portando a instabilità.

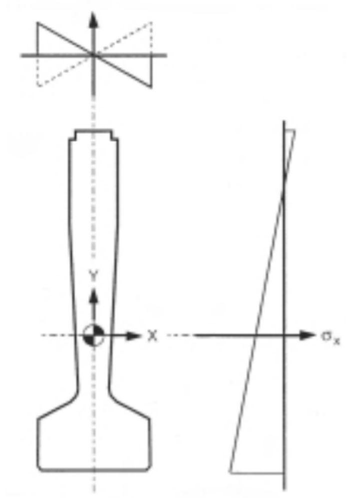


Figura 2.3: Distribuzione delle tensioni rispetto gli assi di minore e maggiore rigidezza

A partire dalla curvatura trovata nella relazione (2.10) è possibile ricavare le tensioni dovute all'imperfezione iniziale che provoca lo sbandamento laterale. È importante notare come l'aggiunta delle tensioni dovute all'imperfezione si vadano a sommare direttamente alle tensioni dovute all'inflessione della trave rispetto l'asse di maggiore rigidezza. Le tensioni rispetto l'asse di minore rigidezza dipendono dalla direzione dell'imperfezione (fig. 2.3), quindi la somma con le tensioni rispetto l'asse di maggiore rigidezza può comportare la nascita di alcuni punti critici, normalmente in prossimità dei vertici della sezione, provocando un aumento delle tensioni di trazione o di compressione.
La variazione delle tensioni del calcestruzzo $\Delta\sigma$ a una generica distanza X dall'asse di minore rigidezza, dovuto alla somma dei due contributi, può essere quantificata a partire dalla curvatura precedentemente calcolata (2.10):

$$\Delta\sigma = Ek_{ms}X \tag{2.11}$$

È importante tenere conto di queste tensioni addizionali perchè, se nel caso di tensioni di compressione aggiuntive questo non sarebbe un grosso problema perchè il calcestruzzo lavora bene a compressione, nel caso in cui queste fossero di trazione potrebbero comportare una riduzione della rigidezza EI_y, una riduzione del carico critico w_{cr} come si nota dalla relazione (2.6) e un aumento della curvatura fuori dal piano (2.9).

2.2 L'instabilità delle travi precompresse di sezione aperta sottile

Un altro aspetto da valuare sull'effettiva stabilità o instabilità di una trave può essere ricercata nella presenza della precompressione. L'eventuale effetto stabilizzante o instabilizzante della precompressione in sezioni aperte sottili può essere utile visto il grande sviluppo tecnologico del precompresso per la realizzazione di strutture sottili [9]. A partire da una trattazione matematica sarà possibile calcolare le tensioni critiche che portano allo svergolamento della sezione precompressa, e quindi avere effettivamente uno strumento di valutazione dell'effetto della forza di precompressione sulla sezione in esame.

2.2.1 Svergolamento per torsione nel caso di cavo rettilineo eccentrico

Si consideri una trave sottile aperta precompressa da un cavo rettilineo eccentrico con centro di pressione E. La distanza dal baricentro della sezione C può essere quantificata tramite le coordinate (e_x, e_y) (fig. 2.4). Sia N_p lo sforzo di precompressione agente sulla sezione in esame. Lo stato di tensione delle sezioni trasversali della trave, nell'ipotesi di comportamento elastico lineare, può essere calcolato mediante l'utilizzo della formula della presso-flessione:

$$\sigma_z = -\frac{N_p}{A} - \frac{N_p e_y}{I_x} y - \frac{N_p e_x}{I_y} x \tag{2.12}$$

Per individuare gli eventuali valori critici della forza di precompressione si parte dall'analisi dell'equazione di equilibrio della configurazione variata:

$$\delta L_2^* + \delta W = 0 \tag{2.13}$$

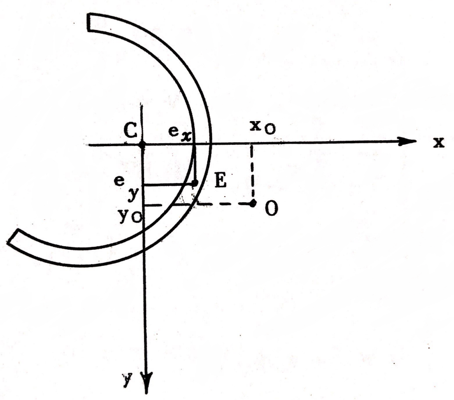


Figura 2.4: sezione trave aperta sottile precompressa

Le espressioni che esprimono il lavoro L_2^* e l'energia W, tenendo conto solo della rotazione torsionale φ_z, sono:

$$L_2^* = \int_0^L \int_A \sigma_z \varepsilon_z^{(2)} dAdZ + \int_0^L N_p \varepsilon_{zE}^{(2)} dz \tag{2.14}$$

$$W = \frac{1}{2} GJ \int_0^L \varphi'^2 dz + \frac{1}{2} EI_w \int_0^L \varphi''^2 dz \tag{2.15}$$

In questo modo sostituendo le relazioni (2.14) e (2.15) in (2.13) sarà possibile individuare il valore critico della forza di precompressione di una sezione sottile aperta. In realtà però la ricerca dei valori critici varia da caso a caso, poichè il risultato finale dipende dalle condizioni al contorno presenti imposte dai vincoli della trave.I risultati cambieranno pertanto in funzione delle condizioni al contorno, dalla posizione del cavo e dalla forma della sezione.
Supponendo un andamento sinusoidale della rotazione $\varphi = A\sin(\frac{\pi}{z})$ e il caso in cui la trave, ai suoi estremi, sia vincolata in maniera tale che siano impedite le rotazioni ma non l'ingobbamento, il valore del carico critico N_p sarà:

$$N_p = \frac{EI_w \frac{\pi^2}{l^2} + GJ}{\frac{I_x + I_y}{A} + e_x \beta_y^* + e_y \beta_x^* - e_x^2 - e_y^2} \tag{2.16}$$

Inoltre se il cavo è baricentrico le eccentricità e_x ed e_y saranno nulle e se la sezione è rettangolare sottile il valore del carico critico si semplificherà a:

$$N_{p,cr} = 4G\frac{t^3}{h} \tag{2.17}$$

Per ottenere la tensione critica σ_p basta dividere per l'area $A = th$ della sezione sottile:

$$\sigma_{p,cr} = 4G(\frac{t}{h})^2 \tag{2.18}$$

In base alle ipotesi fatte è stato possibile individuare dei valori critici di sforzo applicato alla sezione. È utile notare come nella relazione (2.16) oltre alla possibilità di calcolare dei valori di sforzo che possano avere un effetto instabilizzante, è possibile anche avere un effetto stabilizzante con un aumento di rigidezza alla torsione anzichè una diminuzione. Infatti, se i valori di eccentricità hanno un valore tale da rendere negativo il denominatore (2.16), al tendere di N_p verso il valore critico si avrebbe un beneficio e dunque un effetto stabilizzante con conseguente aumento di rigidezza.

Capitolo 3

Presentazione del caso studio in esame

3.1 Descrizione

Il caso studio preso in esame riguarda l'ampliamento di un fabbricato industriale esistente, mediante la realizzazione di travi a due campate. Più precisamente sono state realizzate le travi ad altezza variabile TD001, TD002, TD003 e TD004 poggiate su pilastri nuovi ed esistenti, e due travi rettilinee a I a sezione costante TI001 e TI002 per la realizzazione di una porzione di copertura piana, come si può vedere dalla seguente pianta:

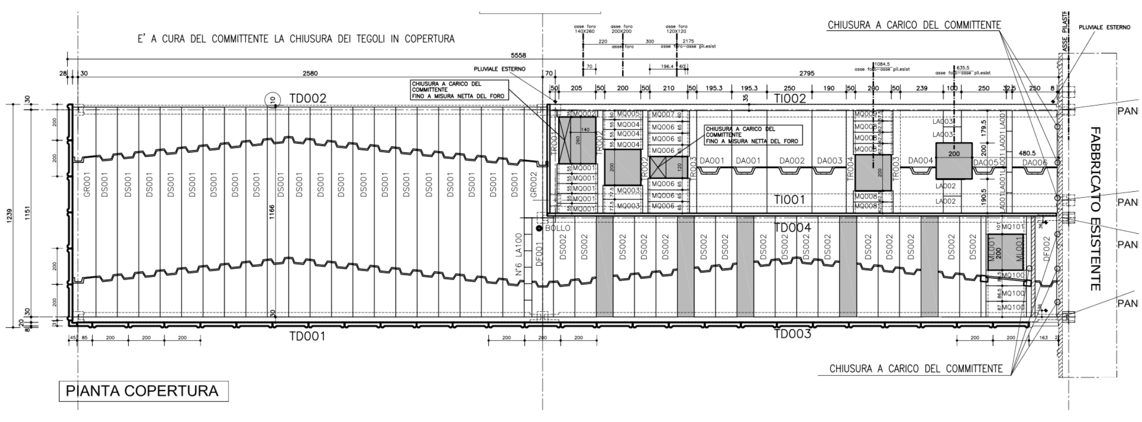


Figura 3.1: Pianta copertura

Le due campate delle travi hanno luce diversa, e rispettivamente per la capriata posata sulla parte di edificio esistente si ha un interasse pari a 2920 cm, mentre per la capriata opposta si ha un interasse pari a 2580 cm.
Per la realizzazione della copertura del fabbricato sono stati utilizzati due elementi diversi. Nella copertura piana (fig. 3.1 in alto a destra) sono stati usati dei "dalloni" alternati con delle travi rettilinee per la realizzazione di cavedii, mentre nella parte di struttura a doppia pendenza sono stati utilizzati dei tegoli "dalla".
Nel prospetto "ovest" (fig. 3.2), ovvero quello opposto al fabbricato esistente è stato utilizzato un tamponamento di tipo verticale di altezza 1080 cm, mentre per il prospetto "sud" è stata prevista una veletta di coronamento mediante l'utilizzo di pannelli di altezza 300 cm e in corrispondenza dei pilastri dei pannelli verticali a tutta altezza a copertura del pilastro stesso.

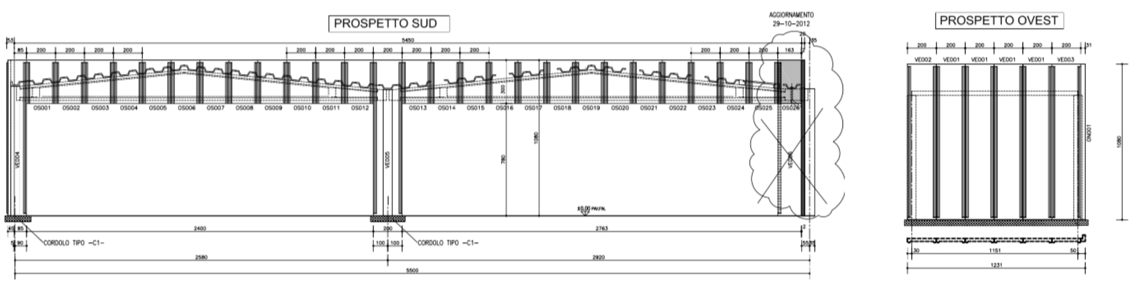


Figura 3.2: Prospetto "sud" e "ovest"

3.2 Cause del collasso

Durante la fase di completamento della struttura, più precisamente durante il montaggio dei pannelli prefabbricati per il coronamento esterno del prospetto "sud", si è verificato il crollo della trave a doppia pendenza TD003 che ha trascinato i tegoli "dalla" e la trave TD004 parallela a essa (fig. 3.3); i pannelli di coronamento sulla trave TD001 erano stati già tutti posati.Il cedimento della trave è avvenuto a causa del carico indotto dai pannelli di coronamento posti con un'eccentricità pari a 40 cm rispetto l'asse della trave stessa. L'eccentricità di questo carico ha provocato un'instabilità flesso-torsionale, infatti si è verificato uno spostamento fuori dal piano e una rotazione attorno l'asse della trave.

Figura 3.3: Crollo trave TD 003

Questo risulta evidente perchè sul lato d'innesto della trave nei pilastri esistenti, la presenza del tamponamento verticale del fabbricato esistente ha generato un'elevata rigidezza della zona d'innesto (fig. 3.4), rispetto la porzione di trave appoggiata sui nuovi pilastri provocando la rottura della forcella e un conseguente collasso della trave.
Facendo l'analisi di una porzione di struttura considerando la presenza dei tegoli, la trave e un pannello di coronamento si può notare come l'effetto del peso proprio trasmesso dai tegoli "dalla" sulla trave abbia un effetto stabilizzante rispetto al carico eccentrico del pannello che invece tende a far sbandare la trave nella direzione

opposta. Pertanto l'effetto del carico eccentrico indotto dalle pareti è risultato superiore rispetto a quello dei tegoli, procurando una deformazione fuori dal piano di flessione causando un aumento dell'eccentricità del carico e di conseguenza l'effetto flesso-torsionale. Il fenomeno non è arrivato a convergenza a causa del carico eccentrico non tenuto in conto adeguatamente durante le fasi di progettazione, ma anche a causa della snellezza della trave, che ha trascinato con sè i tegoli che risultavano essere spinottati alle due travi. I collegamenti tra i tegoli e la capriata risultavano non ancora totalmente definiti a causa della mancanza del getto di completamento, non risultando comunque sia efficaci visto il comportamento d'insieme verificatosi.

Figura 3.4: Innesto trave TD 003 su tamponamento esistente

La trave TD001 è stata soggetta allo stesso tipo di fenomeno, ma a causa del maggior carico trasmesso dai tegoli per effetto del maggior interasse di campata e da una inferiore luce della trave stessa è rimasta in precario equilibrio, sebbene sia stata soggetta anch'essa da una marcata deformazione fuori dal piano come si può bene vedere dalle figure 3.5 e 3.6.

Figura 3.5: Deformata trave TD 001

Figura 3.6: Particolare cedimento forcella

Capitolo 4

Modello agli elementi finiti

4.1 Introduzione

Al fine di poter validare quanto detto circa le cause del crollo e creare un modello che potesse rappresentare la realtà di quanto accaduto, si è deciso di modellare la trave soggetta al crollo utilizzando un software agli elementi finiti. Il software utilizzato è il codice di calcolo strutturale LUSAS Finite Element Analysis. Tramite la realizzazione del modello si è pensato in una prima analisi di fare un calcolo approssimato della forza critica che porterebbe al collasso la struttura mediante un'analisi di tipo "linear buckling" e in seguito un'analisi più precisa di tipo "non lineare" che possa identificare il valore critico del carico di collasso.
La costruzione del modello avviene in maniera schematica: si parte attraverso la modellazione della geometria definendo punti, linee e generando superfici a partire dalle linee e/o volumi a partire dalle superfici (se necessario), per riprodurre l'elemento desiderato. Una volta definita la geometria è necessario definire gli attributi per passare da elementi di puro disegno (punti, linee, ecc...) all'elemento finito. Gli attirbuti sono:

- definizione della mesh, scegliendo la discretizzazione dell'elemento nelle direzioni X,Y e Z del sistema di riferimento, il tipo di elemento da usare e l'ordine di interpolazione

- definizione della geometria della sezione, assegnando sezioni già disponibili in libreria o particolari sezioni create dall'utente oppure assegnando lo spessore per gli elementi bidimensionali
- scelta del materiale costituente l'elemento dalla libreria disponibile o materiale creato dall'utente
- assegnazione dei vincoli
- assegnazione dei carichi

Per poter assegnare gli attributi basta un semplice "drag and drop" ovvero prendere l'attributo da assegnare e trascinarlo all'interno dell'interfaccia grafica.
Una volta scelto il tipo di analisi da effettuare (lineare, non lineare, buckling ecc...) si può lanciare il solutore visualizzando sia in forma numerica sia in forma grafica i risultati.

4.2 Definizione della geometria

A partire dai dati presenti nelle piante e nei prospetti dei dati in possesso è stato possibile definire la geometria del modello. La trave presa in esame per la modellazione è stata la trave TD003. Al fine di avere una giusta rappresentazione della realtà, tenendo conto della variazione dell'altezza e del ringrosso presente alla fine della trave con conseguente variazione dello spessore da 10 cm a 30 cm, sono state identificate 6 sezioni principali tramite le quali è stato possibile realizzare il modello geometrico.
Utilizzando il software AutoCad è stata disegnata in 2D la trave TD003 e partendo dalla sezione centrale di maggior altezza e dalla sezione terminale sono state ricavate le altezze intermedie che sono state inserite all'interno della modellazione. Una volta note le altezze delle sezioni principali e le lunghezze relative tra i vari conci di trave sono stati definiti per prima cosa i punti di contorno delle varie sezioni utilizzando l'apposito comando presente all'interno dell'interfaccia nella quale è possibile definire le coordinate di un generico punto (x,y,z) e successivamente uniti tramite linee geometriche come mostrato in fig. 4.1:

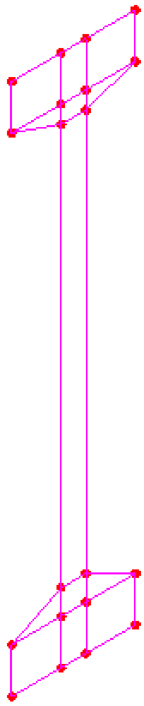


Figura 4.1: Punti e linee sezione di mezzeria

Si può notare come nella sezione non siano presenti solo punti e linee di contorno, ma anche punti e linee all'interno: questo sarà fondamentale nella definizione della mesh cercando di ricreare delle suddivisioi più regolari possibili.
Selezionando quattro linee per volta, facendo attenzione di seguire sempre lo stesso ordine per non avere problemi in termini di sistema di riferimento locale, è stato possibile definire tredici superfici dalle quali è stato poi possibile ricavare per estrusione i volumi utilizzando l'apposito comando "sweep by surface".
Anche per i volumi è necessario fare attenzione in termini di assi locali per evitare problemi di diversa orientazione degli stessi durante l'assegnazione degli elementi finiti della mesh.
Ripetendo in maniera schematica queste operazioni è stata ottenuta la geometria della trave, facendo attenzione però che in questa fase sono state definite semplici linee, punti, superfici e volumi che non definiscono gli elementi finiti che saranno utili nelle analisi, ma rappresentano solo i contorni entro i quali essi dovranno essere

collocati.
Nelle (fig. 4.2) e (fig. 4.3) è possibile vedere la geometria ultimata comprensiva delle sei sezioni definite precedentemente e del posizionamento dell'asse di riferimento globale (X,Y,Z):

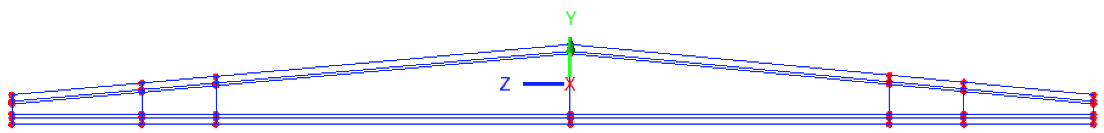


Figura 4.2: Geometria piano (z,y)

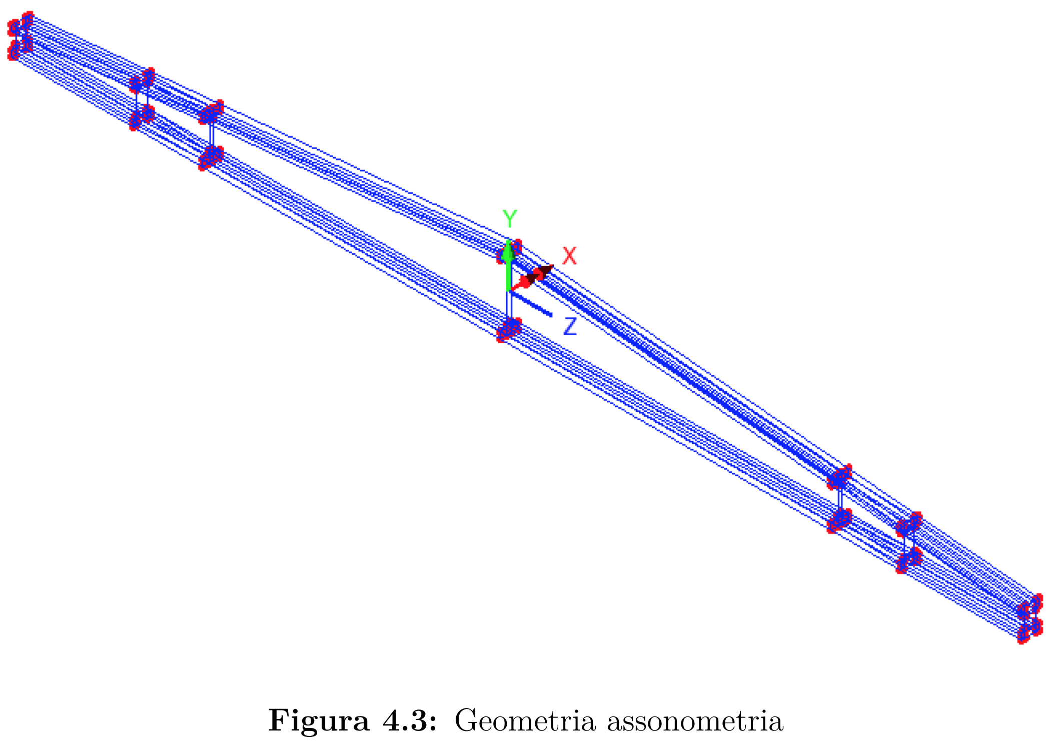


Figura 4.3: Geometria assonometria

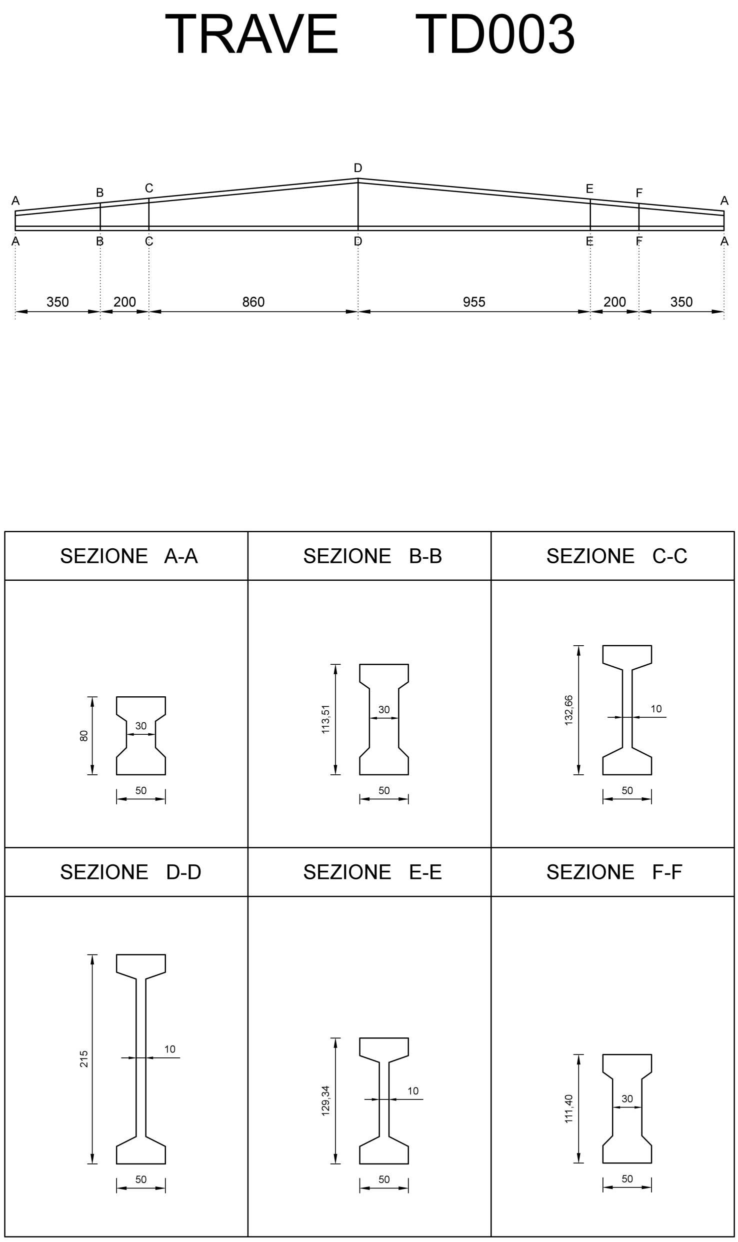


Figura 4.4: Geometria trave TD 003

4.3 Definizione della mesh

Partendo dalla geometria creata precedentemente è stato possibile passare alla definizione della mesh ovvero della suddivisione degli elementi finiti utilizzati per eseguire le analisi numeriche. In letteratura sono presenti molti elementi, ma è bene scegliere sempre gli elementi adatti per il tipo di analisi che deve essere svolta per non avere problemi in termini di convergenza dei risultati. Infatti nel caso studio analizzato, per tener conto di determinate variazioni geometriche e per poter rappresentare in maniera realistica la trave analizzata, si è scelto di utilizzare un tipo di elementi 3D.
È importante definire gli elementi con una certa logica cercando di utilizzare sempre le stesse famiglie; questo non vuol dire che elementi di altre famiglie non possano essere utilizzati, ma è importante seguire determinate regole per far in modo che non si riscontrino errori di modellazione e di risultati. Errori abbastanza comuni sono ad esempio usare elementi della stessa famiglia con elementi adiacenti che non hanno lo stesso lato, creando delle discontinuità in termini di spostamenti; anche avendo lo stesso ordine di interpolazione, gli spostamenti calcolati sarebbero diversi per via delle diverse condizioni al bordo. Un altro caso molto comune è quello di utilizzare elementi che hanno un ordine di interpolazione diverso: porre un elemento con un lato in cui sono presenti due nodi e uno in cui sono presenti tre nodi provocherebbe una non congruenza in termini di spostamenti.
La modellazione del caso in esame ha portato all'utilizzo di due tipi differenti di elementi, cercando di rispettare le suddette regole.

4.3.1 Elementi 3D Solid HX20

Gli HX20 sono degli elementi di volume facenti parte dell famiglia degli "isoparametrici" [10] [11]. A differenza degli altri tipi di elementi, gli isoparametrici prevedono non solo una interpolazione in termini di spostamenti, ma anche in termini di geometria tramite un'applicazione che trasforma l'elemento "parent" in elemento "real" e viceversa.

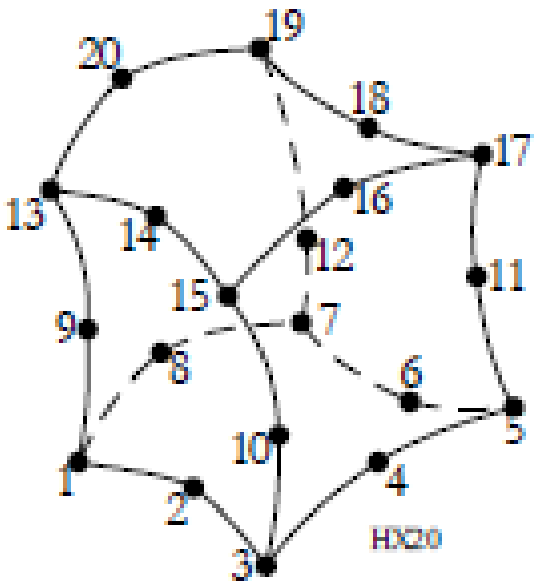


Figura 4.5: Elemento HX20

In particolare l'elemento HX20 riportato in (fig. 4.5), possiede tre gradi di libertà per nodo: u, v, w. Nella modellazione in esame mediante l'utilizzo del codice agli elementi finiti Lusas si è scelto di utilizzare un'interpolazione di tipo quadratico facendo le opportune attenzioni in termini di suddivisioni (fig. 4.6).

Per quanto riguarda la suddivisione dei vari elementi, si è cercato di poter assegnare una divisione più regolare possibile, perchè utilizzare delle mesh non uniformi potrebbe comportare il problema di avere elementi altamente distorti che provocherebbe una riduzione del grado del polinomio approssimante la funzione di campo. Infatti, per evitare questa possibile distorsione durante la divisione dei vari conci è stato tenuto sotto controllo il parametro "aspect ratio" ovvero assicurarsi che il rapporto tra i vari lati fosse inferiore a una certa soglia limite.

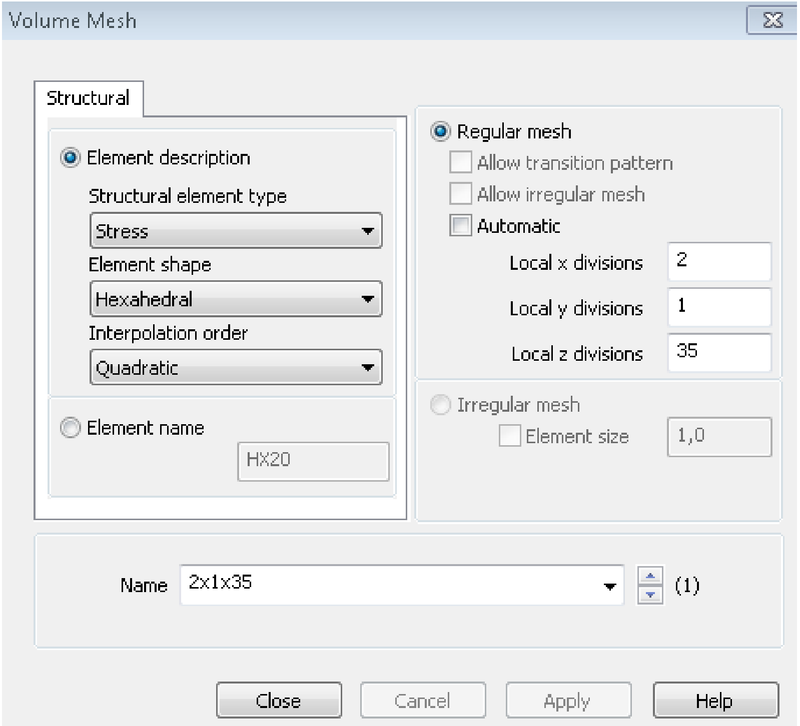


Figura 4.6

4.3.2 Elementi 3D Solid PN15

Anche gli elementi PN15 fanno parte della famiglia degli "isoparametrici" e allo stesso modo degi HX20 hanno 3 gradi di libertà per nodo: u, v e w.
Questo tipo di elemento è stato molto utile per poter rappresentare il raccordo presente tra la parte terminale dell'anima con la flangia superiore e inferiore. Inoltre è utile notare come la presenza di 3 nodi per ogni lato consenta la corretta interpolazione degli spostamenti con gli elementi adiacenti HX20.
All'interno del software è possibile definire come fatto precedentemente il tipo di interpolazione, il tipo di elemento e la sua suddivisione, facendo attenzione a selezionare un elemento di tipo "penthaedral".

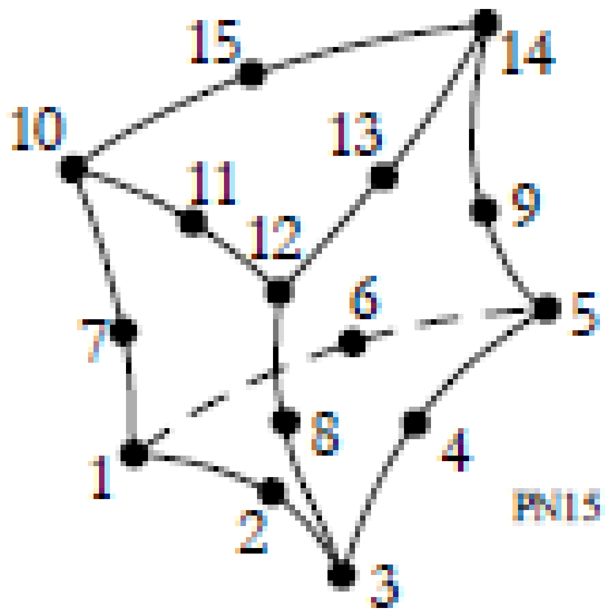


Figura 4.7: Elemento PN15

4.3.3 Mesh finale

Per definire la mesh finale dell'elemento trave sono stati divisi gli elementi rettangolari e triangolari nelle direzione z come segue in tabella. La suddivisione lungo l'ascissa longitudinale come si può bene notare risulta essere diversa per i vari conci analizzati, questo perchè si è cercato di infittire gli elementi nelle zone terminali della trave per rendere il modello più realistico possibile, infatti le zone terminali sono molto più rigide rispetto alla mezzeria.

Un discorso diverso invece può essere affrontato per le sezioni presenti nel piano (x,y). Infatti le suddivisioni in direzione y devono essere le stesse per avere continuità negli elementi adiacenti, mentre in direzione x possono essere più fitte o meno fitte sempre risspettando la logica del problema affrontato.

Altezza [cm]	**Anima** [cm]	**L** [cm]	**z**
80 – 111,4	30	350	25
111,4 – 129,3	30 – 10	200	8
129,3 – 215	10	955	30
215 – 132,6	10	860	28
132,6 – 113,5	10 – 30	200	8
113,5 – 80	30	350	25

Tabella 4.1: Valori altezza-anima e divisioni lungo z

In tabella 4.1 sono riportati i valori di suddivisione rispetto all'asse longitudinale della trave tenendo conto della variazione di altezza tra le varie sezioni costituenti il modello e la variazione di spessore nelle zone terminali della trave. Per quanto riguarda le divisioni lungo l'asse Z si è pensato di andare a suddividere gli elementi della trave cercando di mantenere la stessa lunghezza per ogni elemento delle due lunghezze maggiori e poi cercare di andare a creare un infittimento sempre maggiore, vista la variazione di spessore e il conseguente aumento di rigidezza, verso le zone terminali della trave in maniera graduale.

Per quanto riguarda la suddivisione nel piano (x,y), invece, sono stati suddivisi i singoli rettangoli e i prismi a base triangolare, utili per la creazione della geometria. I rettangoli ai vertici delle due flange sono stati divisi con 2 divisioni in direzione x e 1 divisione lungo la direzione y; mentre i rettangoli compresi tra i precedenti rettangoli e gli elementi prismatici hanno mantenuto una suddivisione 1x1, mentre il rettangolo centrale che definisce l'anima è stato suddiviso 6 volte in direzione y e 1 volta in direzione x; infine, gli elementi prismatici a base triangolare hanno ricevuto una suddivisione tale da garantire la continuità con gli elementi adiacenti.

Per fornire una visione più chiara delle suddivisioni effettuate, si riporta nella seguente pagina uno schema delle sezioni più significative:

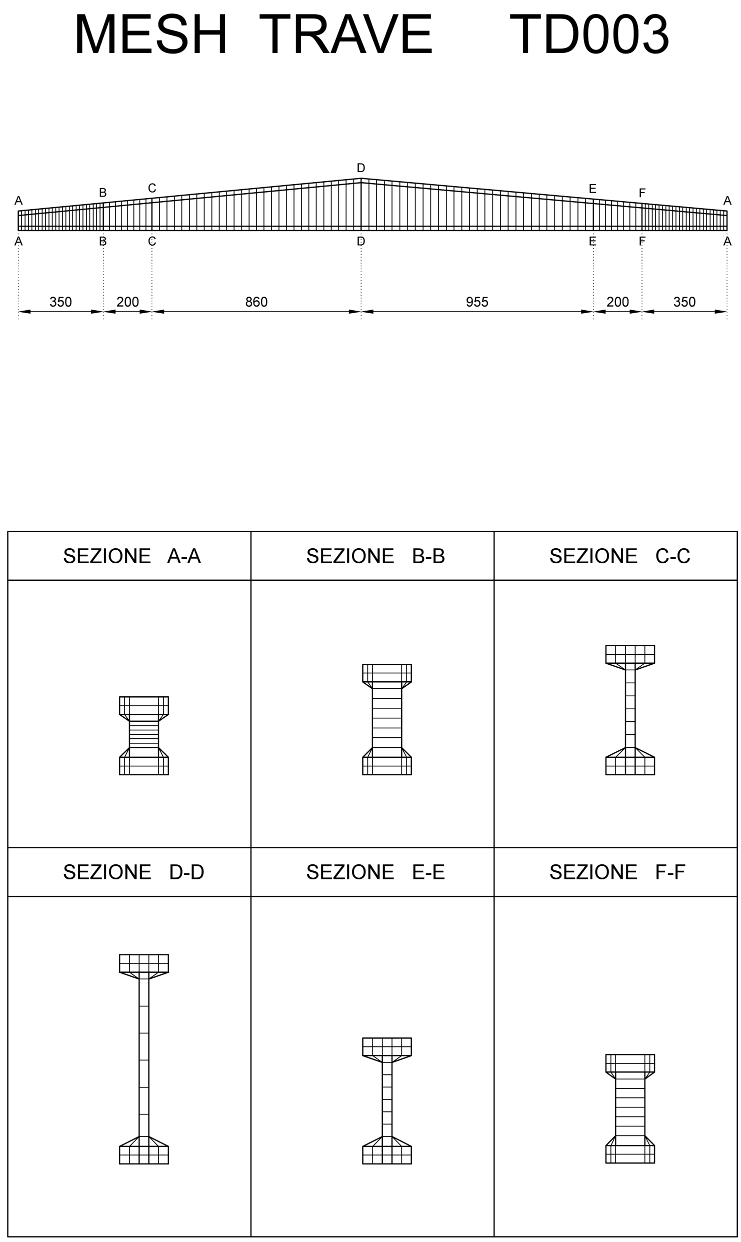


Figura 4.8: Suddivisione trave TD 003

Dalla fig. 4.10 e fig. 4.11 è possibile notare come con gli elementi solidi 3D utilizzati si sia riusciti a cogliere le variazioni di spessore dell'anima e la variazione lineare di altezza.

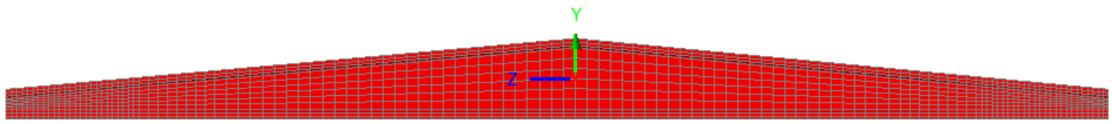


Figura 4.9: Trave con mesh nel piano (x,y)

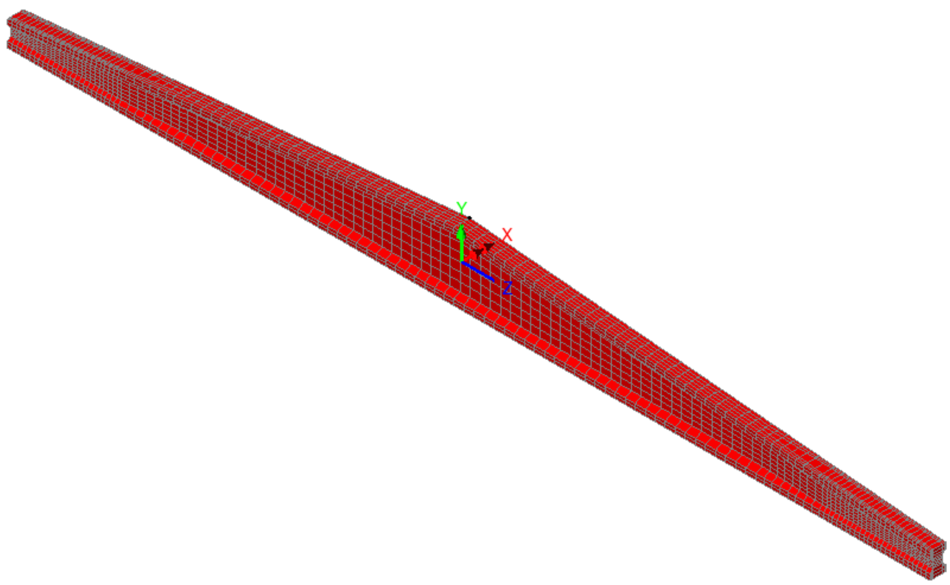


Figura 4.10: Assonometria trave con mesh

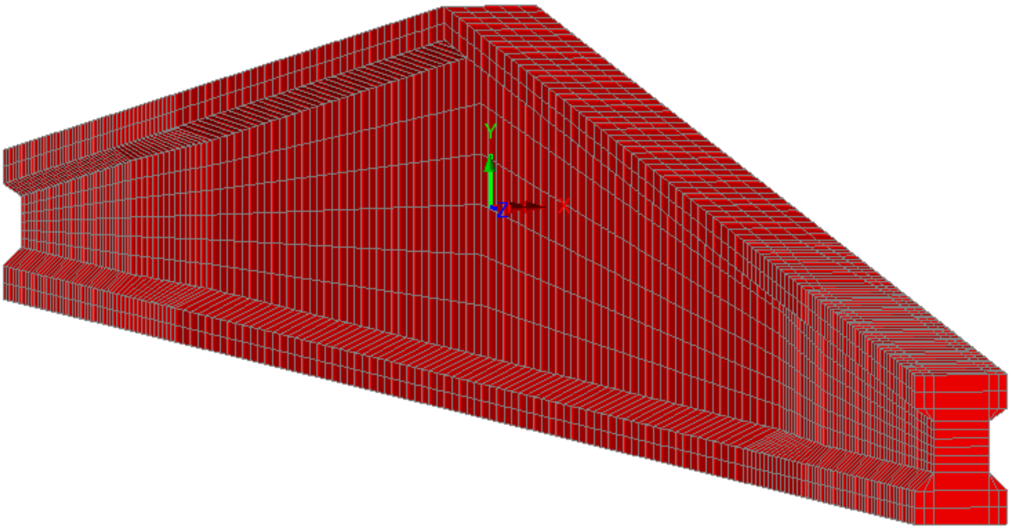


Figura 4.11: Particolare assonometria

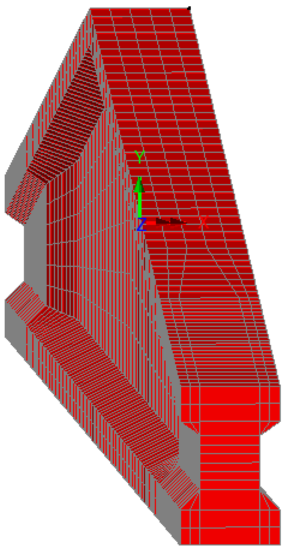


Figura 4.12: Particolare assonometria

4.4 Definizione del materiale

Il materiale utilizzato, reperito dalle informazioni di progetto, è un calcestruzzo di classe C25/30 con le suenti caratteristiche meccaniche:

- Resistenza caratteristica a compressione su provino cubico $R_{ck} = 35\frac{N}{mm^2}$
- Resistenza caratteristica a compressione su provino cilindrico $f_{ck} = 29{,}05\frac{N}{mm^2}$
- Modulo elastico $E = 33000\frac{N}{mm^2}$
- Coefficiente di Poisson $\nu = 0{,}2$
- Densità del materiale $\rho = 2548\frac{kg}{m^3}$

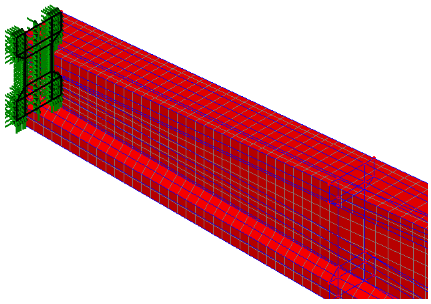
Il materiale invece utilizzato come rinforzo è un acciaio di tipo B450C e un acciaio da precompressione in trefoli con le seguenti caratteristiche meccaniche:

- Tensione caratteristica di snervamento $f_{yk} = 450\frac{N}{mm^2}$
- Tensione caratteristica di snervamento $f_{ptk} = 1900\frac{N}{mm^2}$

All'interno del software, è possibile assegnare le caratteristiche del materiale a partire da un archivio presente in libreria, infatti è possibile andare a scegliere il materiale a partire dall'opzione "Concrete EU" che tiene conto in maniera automatica delle caratteristiche meccaniche specificate in precedenza, definite dall'Eurocodice 2.

4.5 Definizione dei vincoli

(a) *Vincolo reale*



(b) *Vincolo modello*

La parte di definizione dei vincoli da utilizzare all'interno del modello risulta essere una delle più complicate. Questo perchè riuscire a realizzare le stesse condizioni di vincolo presenti nella realtà è abbastanza difficile. Nella situazione reale, la trave TD 003 risultava essere appoggiata da un estremo su un pilastro di nuova realizzazione con la presenza di una forcella, mentre dall'altro estremo risultava essere inserita all'interno di un tamponamento molto rigido della struttura esistente.
Pertanto, si è pensato di modellare le condizioni di vincolo dell'estremo sinistro della trave appoggiato sul pilastro come segue:

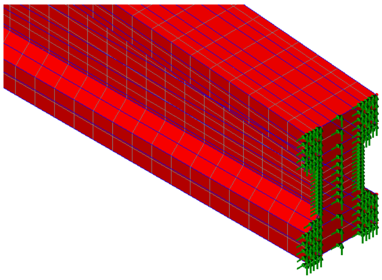
- Traslazioni verticali impedite lungo y
- Traslazioni orizzontali impedite lungo x
- Traslazioni assiali impedite lungo z

Queste scelte sono state fatte perchè la presenza del pilastro impedisce le traslazioni verticali, inoltre si è deciso di trascurare eventuali deformazioni dello stesso e considerarlo come vincolo rigido piuttosto che inserire delle molle; gli spostamenti orizzontali in direzione x sono stati impediti per evitare labilità in tale direzione, bloccando al contempo la rotazione torsionale, anche se il contributo della forcella in tal senso è modesto; infine sono stati impediti gli spostamenti in direzione z. Le condizioni di vincolo imposte sono state applicate su tutta la faccia della trave.

Le condizioni di vincolo dell'estremo destro della trave invece sono state modellate come segue:

- Traslazioni verticali impedite lungo y
- Traslazioni orizzontali impedite lungo x
- Traslazioni assiali libere lungo z

(a) *Vincolo reale*



(b) *Vincolo modello*

Come nel caso dell'altro estremo sono state bloccate entrambe le traslazioni lungo x e y su tutta la faccia della trave, ma non le traslazioni lungo l'asse z, così da evitare l'iperstaticità assiale.

4.6 Definizione dei carichi

I carichi che saranno utilizzati all'interno delle successive analisi, possono essere definiti dall'utente mediante dei semplici passaggi come mostrato in figura:

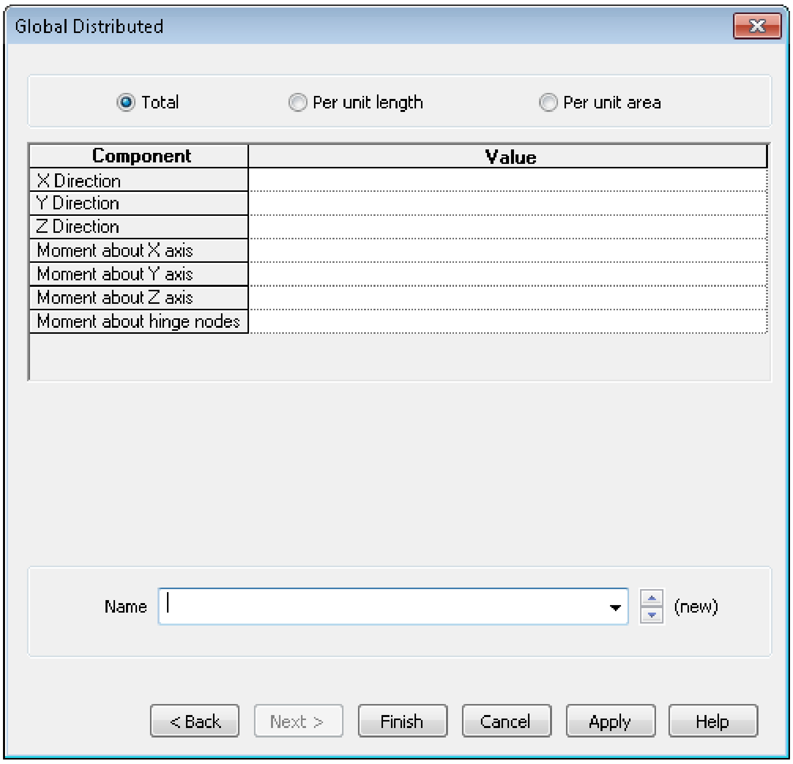


Figura 4.13

Tramite l'interfaccia presente in (fig. 4.13) è possibile scegliere il tipo di carico desiderato, in termini di carico distribuito, forza concentrata, pressione e così via. Lo stesso può anche essere definito in termini di forza effettiva, per unità di lunghezza o di area spuntando le specifiche opzioni.

I carichi di esercizio che saranno utilizzati nelle analisi sono stati reperiti anch'essi dal progetto in possesso e sono pari a:

Elemento	**Carico** [kN/m]
$TD003$	16
$Dalla$	2,5
$Pannelli$	12

Una volta definiti i carichi potranno essere assegnati su punti, linee, superfici o volumi con un semplice comando di "drag and drop"dopo aver selezionato l'elemento desiderato.

Capitolo 5

Analisi di instabilità

5.1 Introduzione

Al fine di poter valutare quale sia stato effettivamente il carico che ha portato al crollo per instabilità flesso-torsionale la trave TD003, sono state effettuate delle analisi numeriche mediante il codice agli elementi finiti Lusas; i risultati sono stati poi confrontati con quanto avvenuto nella realtà.
Le analisi eseguite sono di due tipi:

- Analisi "Linear Buckling"

- Analisi "Non Lineare" in grandi spostamenti e deformazioni

In particolare grazie alla possibilità di inserire l'effetto della precompressione all'interno del software, tenendo anche conto delle perdite in base al tipo di precompressione, si è cercato, seppure in maniera semplificata, di valutare il suo effetto sul carico critico.

5.2 Linear buckling

La "linear buckling analysis" è un tipo di analisi lineare volta alla ricerca del massimo carico applicabile a una struttura, il cui raggiungimento provocherebbe il collasso della stessa per instabilità elastica (equilibrio indifferente).
Per la ricerca del carico critico vengono fatte le seguenti assunzioni:

- La matrice di rigidezza elastica $[K]$ non varia prima del buckling

- La rigidezza geometrica cresce proporzionalmente alla matrice iniziale $[K_g]$

- Gli spostamenti prima del "buckling" non hanno una risposta rilevante ai fini della determinazione del carico critico

In funzione di queste ipotesi è possibile risolvere il problema risolvendo un semplice problema agli "autovalori", infatti poichè la ricerca del carico critico di collasso non dipende dagli spostamenti precedenti all'instabilità, l'applicazione di un incremento di spostamento virtuale renderà immutato il valore del carico F:

$$([K] + \lambda[K_g])(d) = ([K] + \lambda[K_g])(d + \delta d) = (F)$$

sottraendo la prima equazione con la seconda nella quale è presente l'incremento di spostamento virtuale si otterrà un problema agli autovalori:

$$([K] + \lambda[K_g])(\phi) = (0)$$

Il vettore (ϕ) rappresenta il vettore delle deformate corrispondente ad ogni singolo autovalore del problema, ovvero il moltiplicatore dei carichi. Il carico di intsabilità per buckling può essere facilmente ottenuto moltiplicando il vettore delle forze per il primo moltiplicatore λ_1, in quanto il carico di maggiore interesse risulta essere quello minimo:

$$(F_{cri}) = \lambda_1(F)$$

Il metodo utilizzato per la risoluzione del problema, individuando il valore dei λ_i e i conseguenti autovettori ϕ_i è il metodo del "subspace iteration".

L'impostazione di un problema di "Linear Buckling" in Lusas può essere facilmente impostata mediante la seguente procedura:

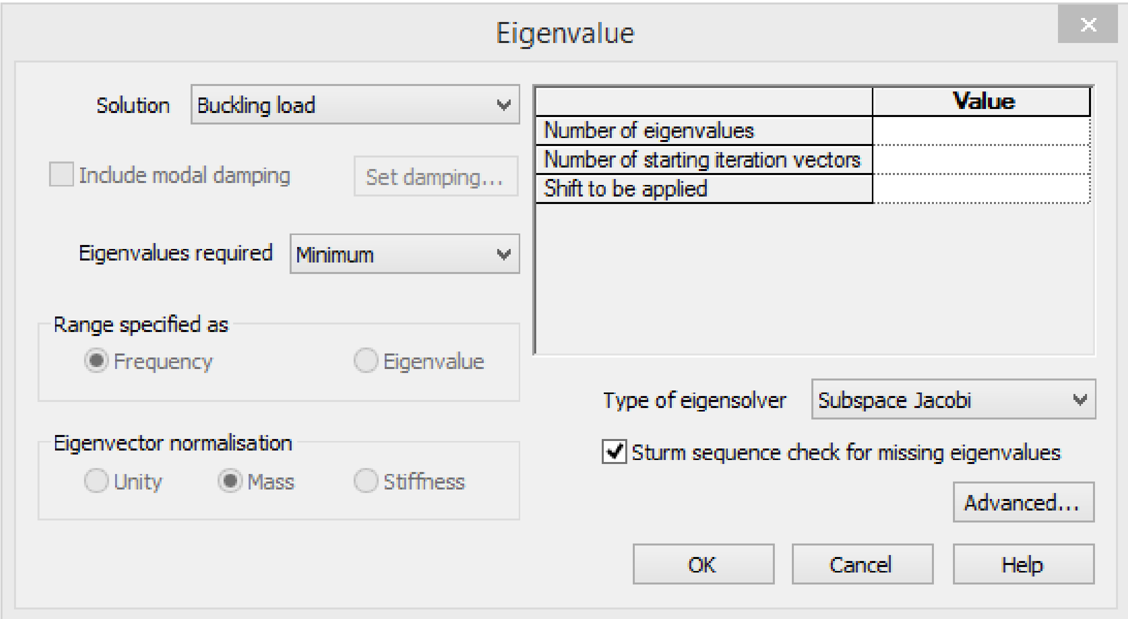


Figura 5.1: Impostazioni buckling analysis

Per poter impostare l'analisi di buckling è necessario cliccare sul loadcase in esame e scegliere l'opzione "eigenvalue" per poter arrivare all'interfaccia in fig. 5.1 nella quale è possibile impostare il numero di autovalori richiesto e il numero dei vettori necessari per portare avanti l'iterazione del metodo "subspace" di Jacobi (in realtà il solutore è già impostato su "default" che è corrispondente a questo metodo), oppure può essere scelto un altro tipo di solutore cliccando sul corrispondente menù a tendina.

Per poter eseguire l'analisi di "linear buckling" è necessario assegnare al modello creato nella precedente sezione il materiale, i vincoli e i carichi. Mentre per il materiale e i vincoli il discorso è stato già affrontato e basta un semplice comando di "drag and drop", per l'assegnazione dei carichi e le conseguenti analisi non è la stessa cosa, infatti prima di assegnare i carichi con la stessa procedura è necessario affrontare bene l'analisi in esame.

Per quanto detto precedentemente, il carico critico viene individuato moltiplicando il parametro λ per la forza assegnata al modello, per questo motivo al fine di evitare che tutte le forze presenti venissero moltiplicate per λ si è pensato di creare diverse "loadcase" nelle quali tener conto di tutti i carichi agenti in modo opportuno. Si è pensato di procedere con l'analisi creando due tipi diversi di loadcase, il primo con la presenza del carico stabilizzante fornito dai tegoli "dalla" e dal peso proprio della struttura, il secondo con il carico instabilizzante dato dai pannelli. Le forze presenti sulla generica sezione saranno le seguenti:

Forza [kN/m]	**Braccio** [m]	**Momento** [kNm/m]
1,25	0,17	0,22
16	0	0

Vista l'impossibilità di andare a collocare il carico in precisi punti del modello, sia per motivi dovuti alla geometria per i quali sarebbe stato necessario creare un infittimento esagerato delle linee geometriche con conseguente aumento di elementi di volume poi da suddividere, sia per l'impossibilità di assegnare determinati tipi di carico che avrebbero potuto creare ingobbamenti locali delle sezioni, si è pensato di poter calcolare delle forze equivalenti da applicare agli estremi della sezione tenendo conto degli effettivi bracci delle forze come illustrato in fig. 5.2:

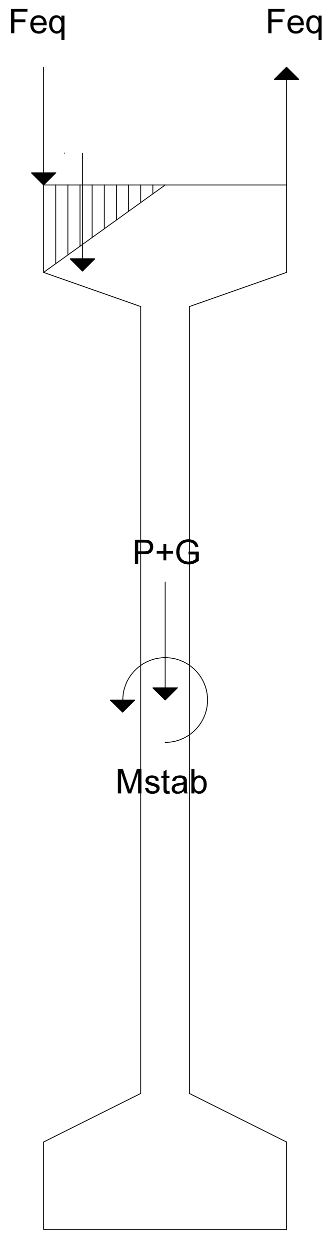


Figura 5.2: Sezione di trave con forze equivalenti

F_{eq} [kN/m]	**Braccio** [m]	F_a [kNm/m]
0,425	0,5	37,5
–	–	–

Si noti che per quanto rigurda la forza stabilizzante del tegolo che agisce a sinistra del baricentro della trave, una volta divisa per due nell'ipotesi che essa scarichi sia sulla trave di destra che sulla trave di sinistra, è stata ipotizzata una distribuzione triangolare per poter individuare il punto di applicazione della forza e il conseguente braccio che fornisce il momento stabilizzante. Sotto queste ipotesi è stato possibile assegnare i carichi nel modello collocando la forza equivalente agli estremi della sezione e riportando al baricentro della sezione il peso proprio della trave e il peso dei pannelli collocati come forza per unità di superficie lungo tutto lo sviluppo della trave sempre per ragioni geometriche.

Una volta assegnati i carichi è stata eseguita un'analisi statica lineare che ha portato alla seguente deformata (fig. 5.3 e 5.4):

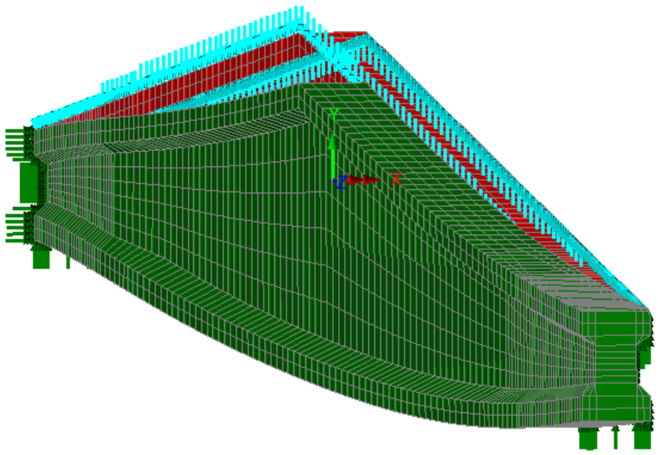


Figura 5.3: Deformata in assonometria

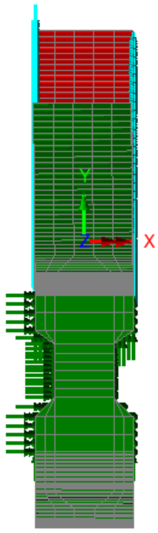


Figura 5.4: Deformata nel piano (x,y)

Successivamente, a partire dalla deformata corrispondente al carico stabilizzante e al peso proprio, è stato possibile definire l'analisi di buckling collocando nel modello la forza equivalente che generasse un momento torcente pari a quello fornito dalla forza con la stessa eccentricità e riportando nel baricentro il valore della forza esercitata dai pannelli.
Come mostrato in fig. 5.5 è possibile partire da una configurazione deformata, cliccando su "start with deformed mesh" sia per delle analisi di tipo incrementale come sarà poi affrontato nel caso dell'analisi non lineare, sia per analisi di tipo "time-step" o agli autovalori; inoltre può essere specificata anche quale deformata tenere in conto, nella nuova analisi, specificando il numero della deformata all'incremento/autovalore i-esimo oppure l'ultima deformata relativa all'ultimo caso analizzato, con la possibilità anche di definire un fattore di scala nell'ipotesi in cui si volesse assegnare un'imperfezione.

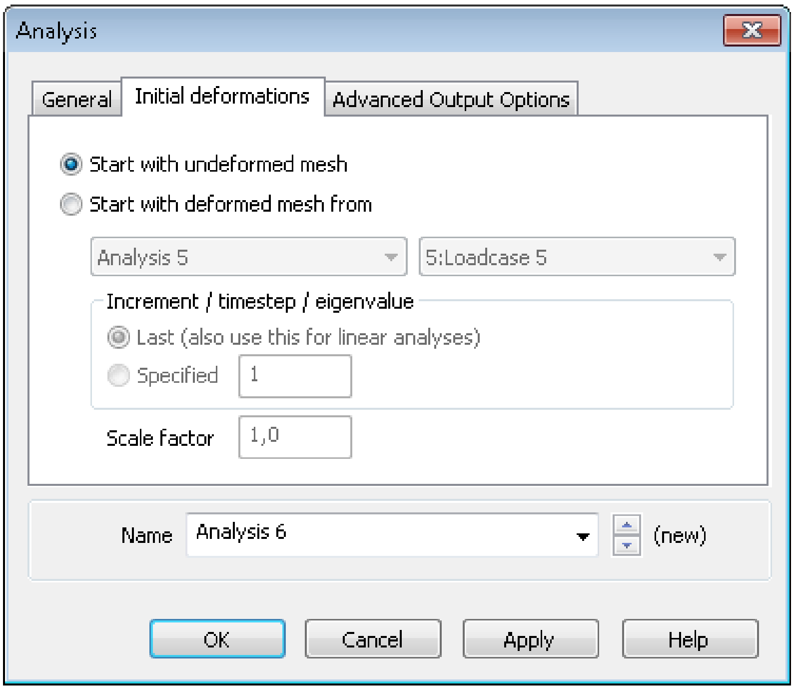


Figura 5.5

Una volta assegnato il carico dei pannelli con lo stesso procedimento seguito per le forze stabilizzanti (fig. 5.6), è stato possibile calcolare gli autovalori del problema lanciando l'analisi attraverso il solutore impostato. Sono state definite le prime 10 autodeformate con i corrispondenti 10 autovalori, ricordando sempre che l'autovalore più importante dal punto di vista fisico è il primo perchè moltiplicato per il carico applicato fornisce il carico di collasso. Ricordando che il carico che compete ad un singolo pannello di dimensioni 2x3x0,28 è stato possibile calcolare la forza da moltiplicare per i fattori λ forniti dal solutore. Riportando tutto ad 1 m di lunghezza si ottiene:

$$12\frac{kN}{m}1m = 12kN$$

Si riportano nella seguente tabella gli autovalori calcolati:

Autovalore	λ [-]
1	4,649
2	5,691
3	9,347
4	10,51
5	15,21
6	16,71
7	20,61
8	22,58
9	27,51
10	29,98

Tabella 5.1: Moltiplicatori di collasso

Il carico critico di collasso può essere ricavato moltiplicando λ_1 per il solo valore della forza competente al pannello in quanto i pesi propri della trave e dei tegoli "dalla" sono stati presi in conto nell'analisi precedente e non devono essere moltiplicate per λ_1:

$$P_{cri} = 12 \cdot 4{,}649 + 16 + 1{,}25 = 73{,}04kN$$

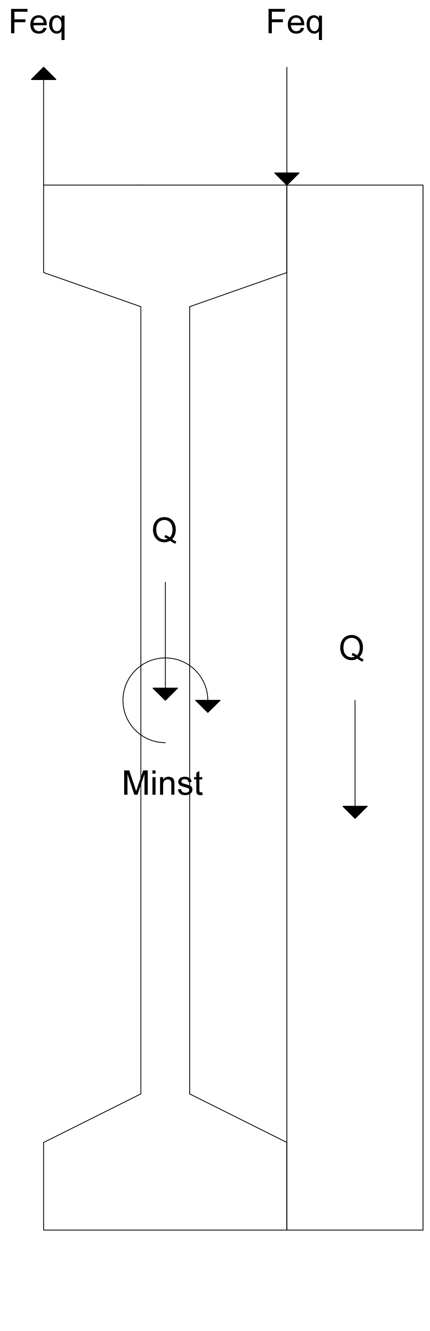


Figura 5.6: Sezione di trave con forze equivalenti instabilizzanti

A partire dalle deformate presenti in fig. 5.8 e fig. 5.9 è possibile notare lo sbandamento fuori dal piano della trave e una rotazione rispetto l'asse longitudinale, che può essere colto meglio proponendo una vista assonometrica e una nel piano verticale (x,y). Inoltre, in fig. 5.7 è rappresentato il campo di spostamenti risultante, da questo è possibile notare come gli spostamenti maggiori non siano distribuiti equamente su entrambe le luci, ma vi sia una concentrazione maggiore nella zona destra della trave TD003. Questo perchè le due luci non sono uguali, ma la campata destra di lunghezza 15,05 m è maggiore dela campata sinistra di lunghezza 14,10 m e dunque più flessibile.
A scopo illustrativo si riportanto anche la seconda e la terza deformata critica, ricordando che le stesse da un punto di vista fisico non hanno significato in quanto si manifesterebbero soltanto in condizioni particolari che impedirebbero l'avvento della prima deformata, per l'attivazione della seconda o l'impedimento delle prime due per il verificarsi della terza.

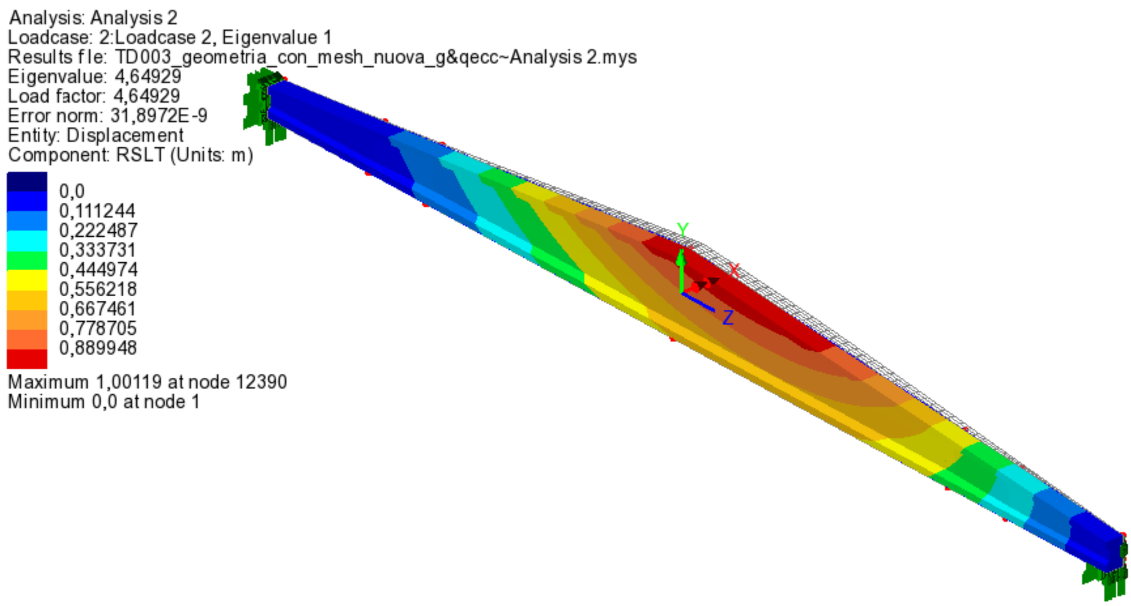


Figura 5.7: Campo di spostamenti

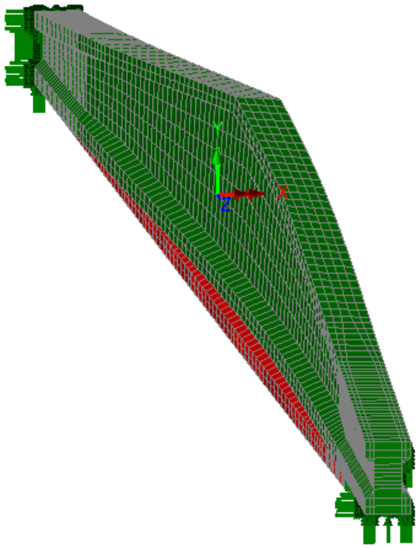


Figura 5.8: Prima deformata critica vista 3D

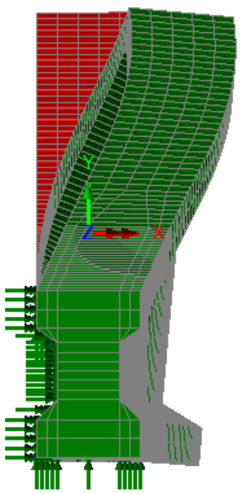


Figura 5.9: Prima deformata critica vista 2D

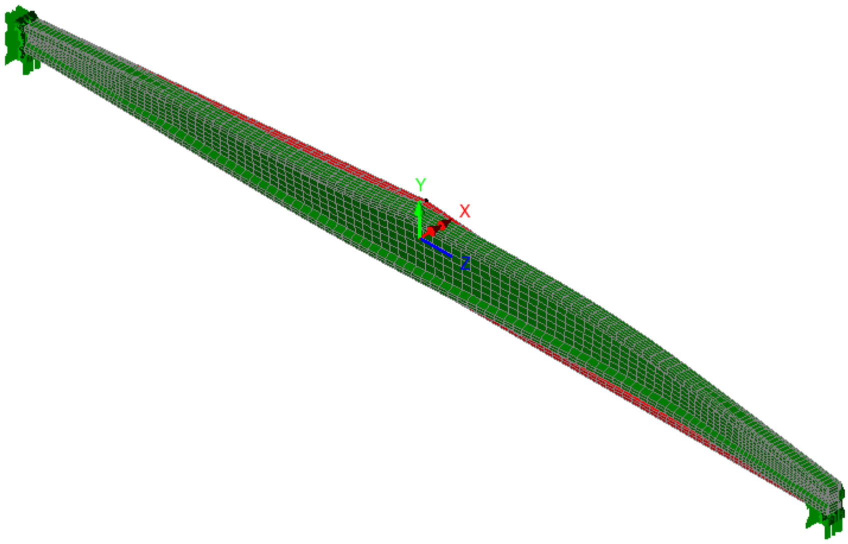


Figura 5.10: Seconda deformata critica vista 3D

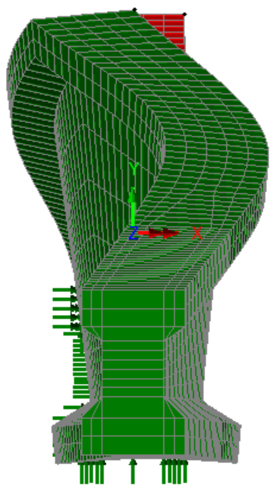


Figura 5.11: Seconda deformata critica vista 2D

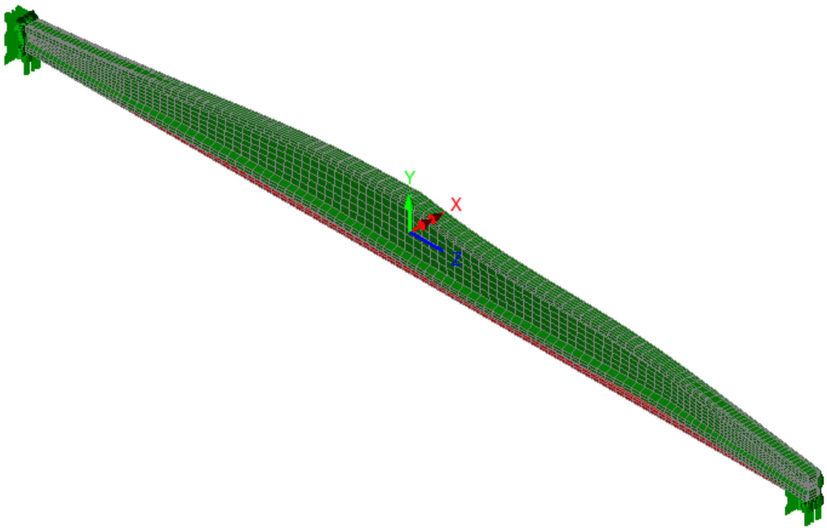


Figura 5.12: Terza deformata critica vista 3D

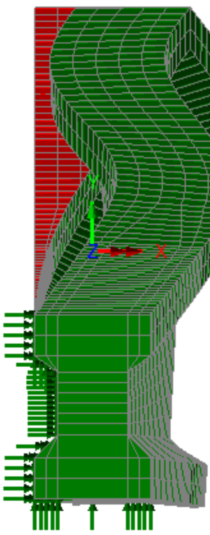


Figura 5.13: Terzaa deformata critica vista 2D

5.3 Linear buckling con precompressione

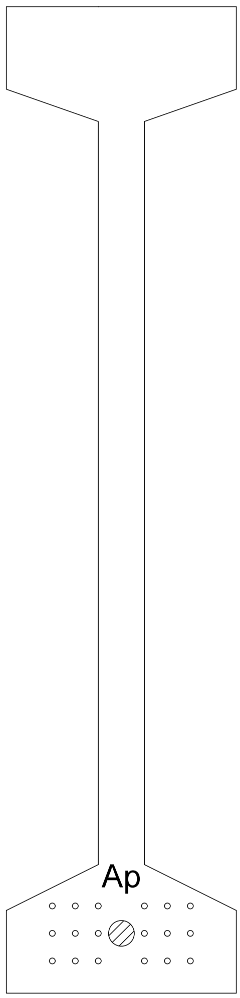


Figura 5.14: Sezione trave con cavi da precompressione

Per valutare il comportamento critico alla quale perviene la struttura tenendo però conto della contemporanea presenza della precompressione, si procede in maniera analoga a quanto spiegato nel paragrafo 5.2.
In fig. 5.14 è riportata una sezione tipo della trave con l'armatura da precompressione. Per poter svolgere le analisi in maniera semplificata si è preferito introdurre all'interno del modello un cavo risultante posto nel baricentro dell'area totale dei cavi.

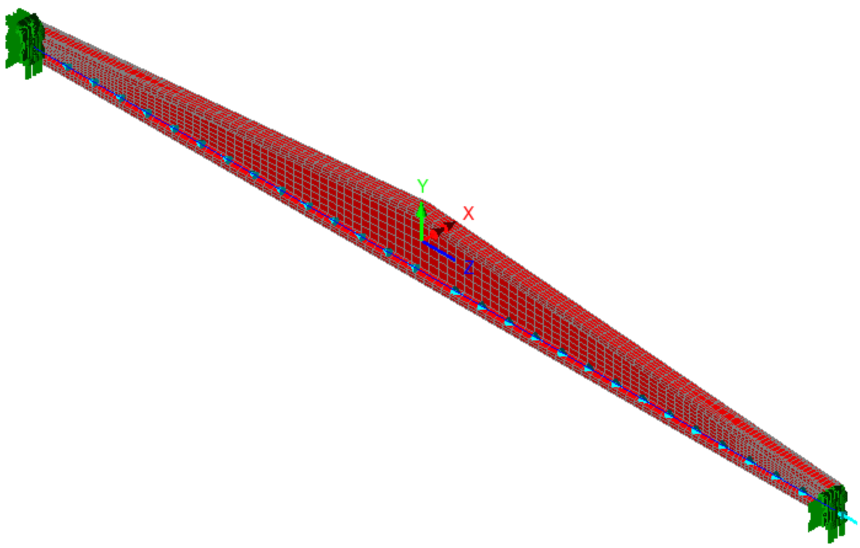


Figura 5.15: Trave TD003 modellata con cavo risultante

In fig. 5.15 viene riportata la trave modellata con l'aggiunta del cavo risultante da precompressione.
Per la definizione del cavo su Lusas è necessario creare una linea geometrica mediante il comando "spline by points" delimitata dal punto iniziale e finale dello stesso; per semplicità mediante l'utilizzo del comando "group" è stato possibile definire due gruppi diversi di elementi, ovvero un gruppo denominato "tendon" al quale possono essere assegnati i soli elementi competenti al cavo (punti, linee, ecc..) e un altro relativo alla sola trave. Questo è stato molto utile nella definizione del cavo per

evitare sovrapposizioni grafiche dei diversi elementi presenti nel modello e poi per assegnare la forza di precompressione agente.

Per poter definire il cavo è necessario selezionare prima la spline che definisce il cavo e soltanto dopo tutto il resto degli elementi che rappresentano il calcestruzzo armato.

Fatto ciò devono essere specificati il tipo di analisi, in questo caso di tipo "solid" poichè gli elementi definiti sono tridimensionali, la forza di precompressione agente, l'area del cavo, il modulo elastico e soprattutto i "tendon sampling points" ovvero il numero di divisioni da effettuare sulla spline che definisce il cavo, su cui verranno calcolati i carichi equivalenti da applicare sui rispettivi nodi. Nel caso in esame il cavo è stato diviso in 30 segmenti essendo la luce totale della trave circa 30 m.

Area $[mm^2]$	A	2502
Modulo elastico $[GPa]$	E_P	210
Tensione iniziale $[N/mm^2]$	σ_{in}	1360
Precompressione iniziale $[kN]$	P_{in}	3053,4
Tensione finale $[N/mm^2]$	σ_{in}	1022,5
Precompressione finale $[kN]$	P_{in}	2558,28

Tabella 5.2

Nella tabella 5.2 sono riportate le caratteristiche dell'acciaio e le azioni di precompressione. Si noti che sono presenti sia i valori iniziali che quelli finali, questo perchè la forza di precompressione applicata è soggetta a perdite di diversa natura. Nel caso studio in esame il tipo di precompressione presente è a cavi pre-tesi; a causa della messa in tensione dei cavi, con il conseguente allungamento del cavo e la nascita di tensioni di trazione, nel calecstruzzo all'atto del taglio dei cavi, nascono delle tensioni di compressione che portano a un accorciamento dello stesso e dunque a una conseguente perdita di tensione.

L'analisi svolta è analoga alla precedente, ma in questo caso per tener conto dell'ulteriore effetto fornito dalla precompressione, il tutto parte dalla deformata presente in fig. 5.16 e in seguito l'applicazione dei carichi stabilizzanti seguiti dall'analisi di "buckling".

Autovalore	λ [-]
1	4,643
2	5,667
3	9,329
4	10,48
5	15,21
6	16,71
7	20,61
8	22,58
9	27,51
10	29,98

Tabella 5.3: Moltiplicatori di collasso

Una volta ottenuti i moltiplicatori λ è possibile calcolare il carico critico:

$$P_{cri} = 12 \cdot 4{,}643 + 16 + 1{,}25 = 72{,}96 kN$$

Se si effettua il calcolo della variazione percentuale tra il valore ottenuto in assenza e in presenza della precompressione si ottiene:

$$\mathit{\Delta}_p = \frac{72{,}96 - 73{,}04}{73{,}04} \cdot 100 = -0{,}11\%$$

Si nota dunque una dimunizione molto piccola (trascurabile) in termini di carico critico che porta al collasso il sistema strutturale, infatti gli autovalori riportati nelle tabelle 5.2 e 5.3 sono molto simili e la differenza si riscontra soltanto alla terza cifra decimale.

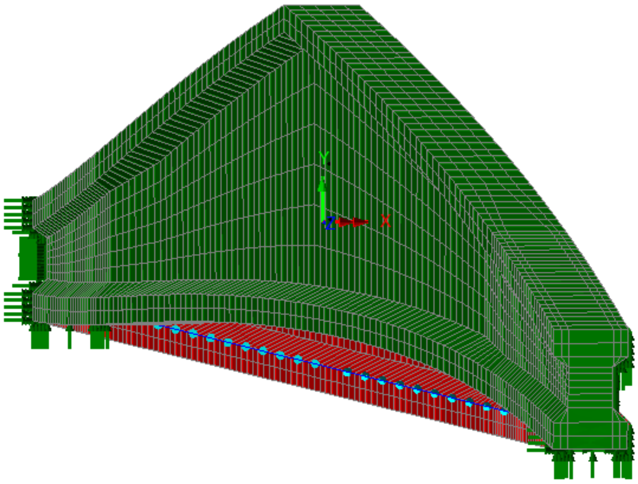


Figura 5.16: Deformata dovuta alla presenza di precompressione

5.4 Analisi incrementale non lineare

Questo tipo di analisi è differente rispetto la precedente, in quanto in questo caso è possibile ottenere una curva carico-spostamento di un nodo di controllo della struttura che ripercorra tutta la storia di carico fino al collasso della struttura, e non fornisca soltanto il valore limite che può essere sopportato dalla stessa. Questo è molto importante perchè con questo tipo di analisi vengono rimosse le ipotesi di piccoli spostamenti in favore di grandi spostamenti e deformazioni.

Da un punto di vista numerico l'analisi utilizzata mediante il software "Lusas" è il motodo iterativo a più incrementi di Newton-Raphson [12] [13]. Per poter risolvere questo tipo di problema è necessario un metodo iterativo anche noto come "algoritmo predictor-corrector".

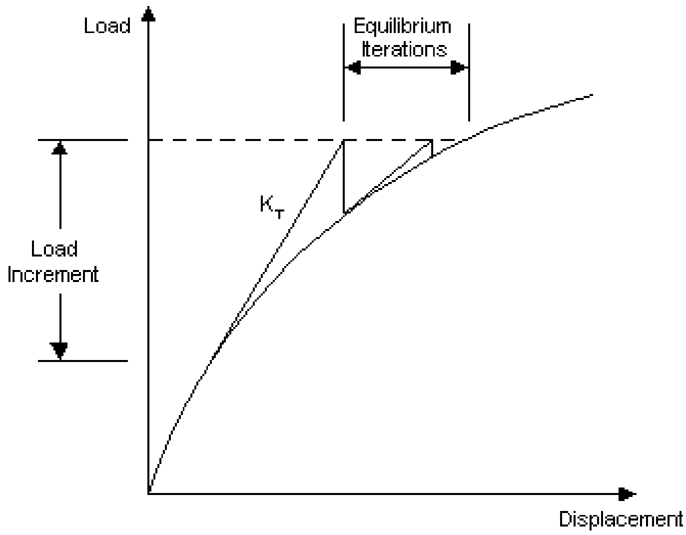


Figura 5.17: Metodo di Newton-Raphson

Si consideri nota la soluzione al passo (i-1)-esimo della storia di carico, nella quale il corpo in esame è in equilibrio con il carico applicato P_{i-1}. A questo punto la soluzione al problema può essere trovata per via iterativa applicando un incremento di carico $\mathit{\Delta}_{i-1}$ al passo successivo (r-1)-esimo e inoltre si suppone, che non si sia verificata la convergenza al metodo scelto. Non essendo giunti a convergenza, solo parte del carico applicato P_i^{r-1} risulterà essere in equilibrio con, le rispettive sollecitazioni, deformazioni e spostamenti. Di conseguenza ci sarà ancora una parte di carico non equilibrata F_i^r. È qui, di fatto, che entra in gioco la predizione-correzione. Per poter individuare l'incremento di spostamento necessario ${}^{r-1}\Delta\delta^r$ a equilibrare i carichi residui viene fatto mediante:

- fase di previsione: lo spostamento ${}^{r-1}\Delta\delta^r$ viene calcolato a partire dalla matrice di rigidezza elastica della struttura

- fase di correzione: l'incremento precedentemente trovato tra i 2 passi successivi equilibra solo parte dei carichi residui F_i^r

A questo punto risolvendo delle equazioni di tipo non-lineare possono essere calcolate le sollecitazioni al passo r-esimo e da queste la parte dei carichi non ancora equilibrata all'iterazione r-esima. A questo punto si procede in maniera iterativa come già elencato con l'iterazione sucessiva (r+1)-esima fino a quando i carichi residui non equilibrati siano inferiori in norma a una certa tollerenza ε definita all'inizio del processo iterativo. Inoltre nel metodo di Newton-Raphson la matrice di rigidezza tangente viene aggiornata a ogni iterazione, infatti il metodo è conosciuto anche come "metodo delle tangenti" (fig. 5.17).

Nell'analisi del caso studio si è pensato di ripercorrere le fasi costruttive che hanno condotto al crollo; infatti, andando a effettuare un'analisi "step-by-step", facendo incrementare il carico instabilizzante fornito dai pannelli si vuole calcolare il carico critico di collasso e dei conseguenti spostamenti per i vari step di carico. I questo modo sarà possibile plottare un grafico carico-spostamento di un nodo di "controllo" e cogliere l'andamento non lineare.

L'analisi è stata svolta partendo, come fatto per l'analisi di buckling, dall'analisi statica lineare e dalla conseguente deformata fornita dal peso proprio e del carico stabilizzante dei tegoli. Questo perchè mediante il software in possesso non è possibile specificare quali carichi far crescere e quali far rimanere immutati.
Per poter lanciare l'analisi è necesserio definire alcuni parametri con i quali può essere definito il metodo iterativo:

- Opzione "Total Lagrangian" per tenere in conto grandi spostamentie grandi deformazioni
- Scelta del primo moltiplicatore da cui far partire l'iterazione del carico applicato
- Scelta del massimo moltiplicatore da applicare in caso di incrementi successivi
- Numero di incrementi limite per arrivare a convergenza

Nel caso in esame è possibile configurare l'analisi a partire dal comando "non linear and transient" e tenendo conto anche di un fattore di scala 0,1 della deformata di buckling effettuata precedentemente per tenere in conto dello sbandamento laterale; sono stati scelti i parametri riportati in fig. 5.18.

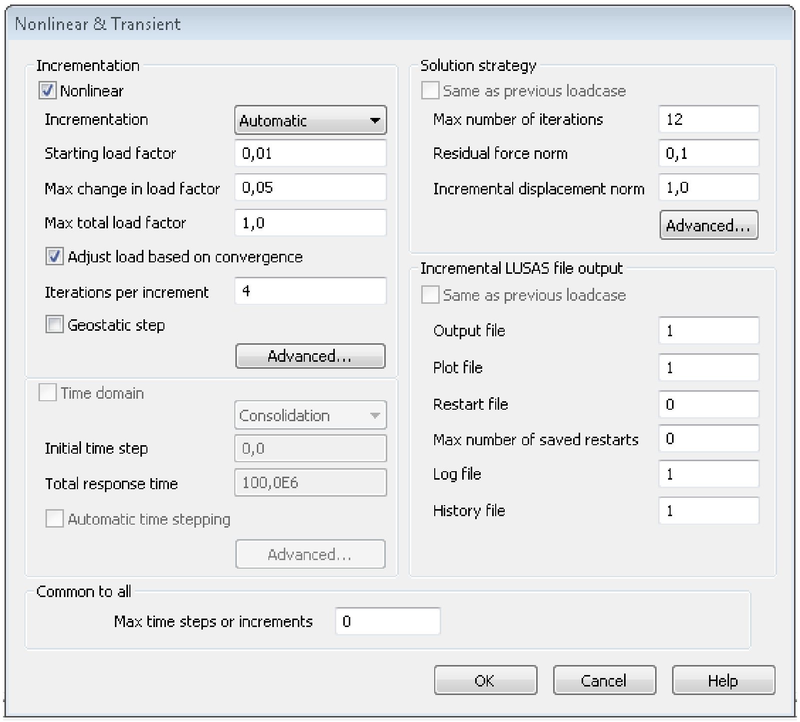


Figura 5.18

L'analisi è stata portata avanti pensando di ripercorrere il processo di posa dei pannelli, avvenuto dopo il posizionamaneto della trave e dei tegoli di copertura, andando ad applicare un carico che via via crescesse nel tempo per poter tenere conto dell'effetto degli stessi e rapportarli con gli spostamenti e le rotazioni conseguenti alla loro applicazione. Poichè il peso di un pannello è poco più di una tonnellata al metro e il pannello generico ha un'altezza di 3 metri e uno sviluppo di 2 metri si è pensato di andare a considerare degli step di carico di 12 kN in modo da poter studiare il comportamento non lineare del problema in maniera più precisa.

Come già detto precedentemente per poter tenere conto non solo della inflessione nel piano di maggiore rigidezza, ma anche degli sbandamenti fuori dal piano è stato assegnato un fattore di 0,01 alla prima deformata di buckling. Ogni step di carico successivo tiene conto di quello precedente poichè l'iterazione successiva parte sempre dalla precedente a ogni incremento di carico. Nelle varie fig. 5.19, 5.20 e 5.21 sono stati riportati alcuni step di carico, dalle quali si può vedere come si tenga conto delle varie configurazioni deformate riferite agli step precedenti. Dopo aver lanciato le analisi e il conseguente raggiungimento della forza critica, è stato possibile tracciare dei diagrammi forza-spostamento, dai quali è possibile cogliere l'andamento non lineare del problema. I diagrammi vengono tracciati a partire da un nodo di controllo del modello, ovvero quello presente al colmo, prendendo tutti gli spostamenti fuori dal piano nella direzione X e andando a sommare l'ultimo spostamento del passo (i-1)-esimo a quelli del passo i-esimo poichè a ogni nuovo caso di carico la nuova forza applicata viene incrementata partendo dal fattore 0,01 come mostrato in fig. 5.18.

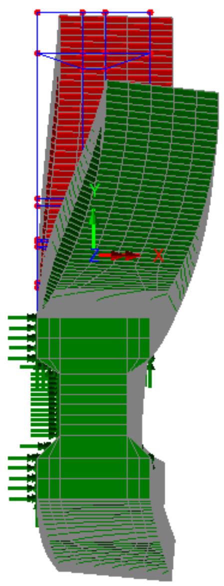


Figura 5.19: Step di carico P=24 kN

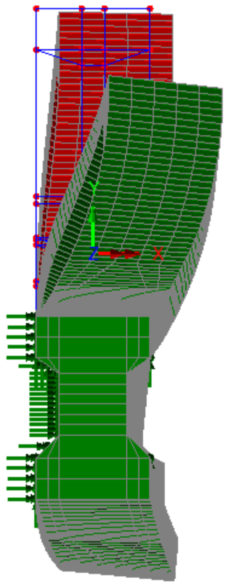


Figura 5.20: Step di carico P=48 kN

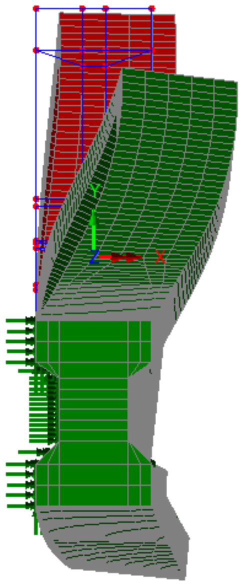


Figura 5.21: Step di carico P=72 kN

Si riportano pertanto i due diagrammi forza-spostamento e rotazione-spostamento nel caso in cui non sia presente precompressione:

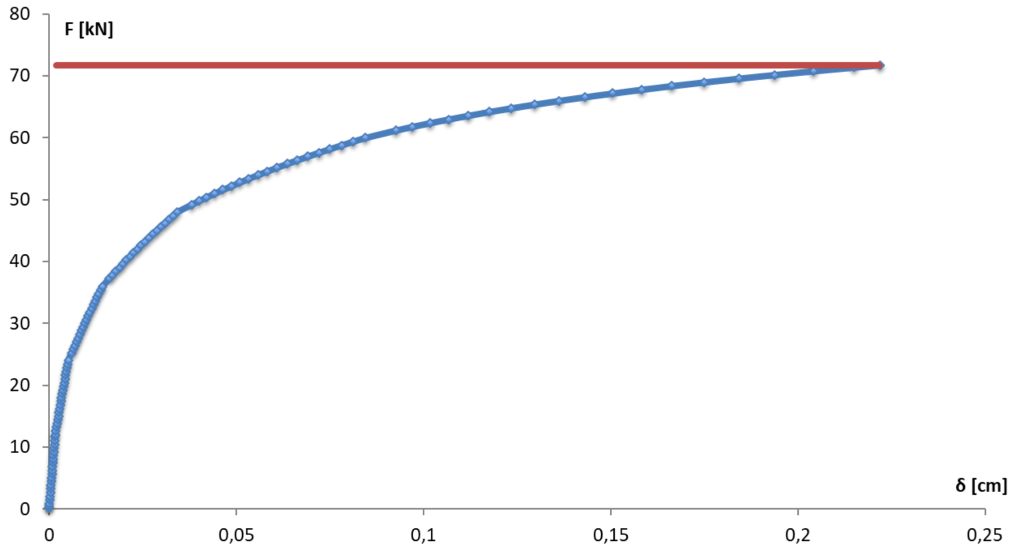


Figura 5.22: Diagramma F-δ senza precompressione

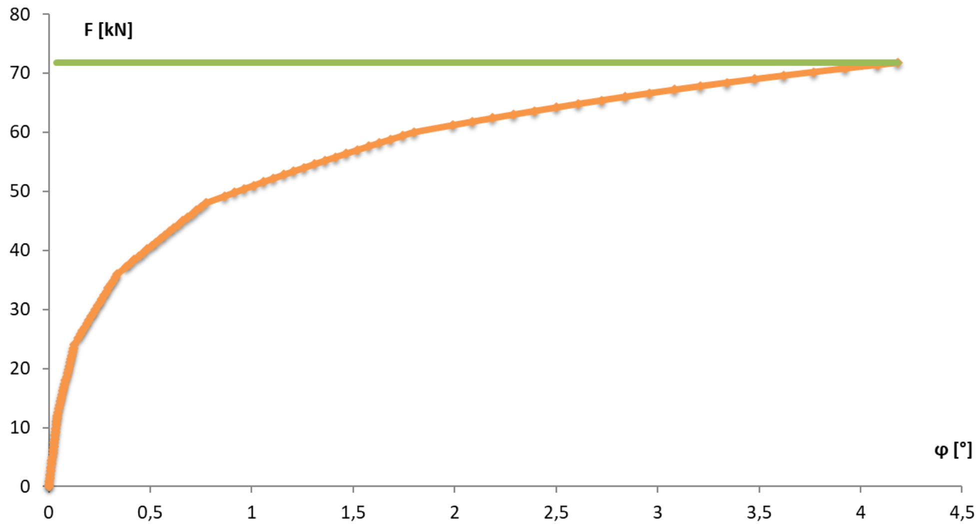


Figura 5.23: Diagramma F-φ senza precompressione

Mentre nell'analisi nella quale è presente la precompressione le stesse curve sono:

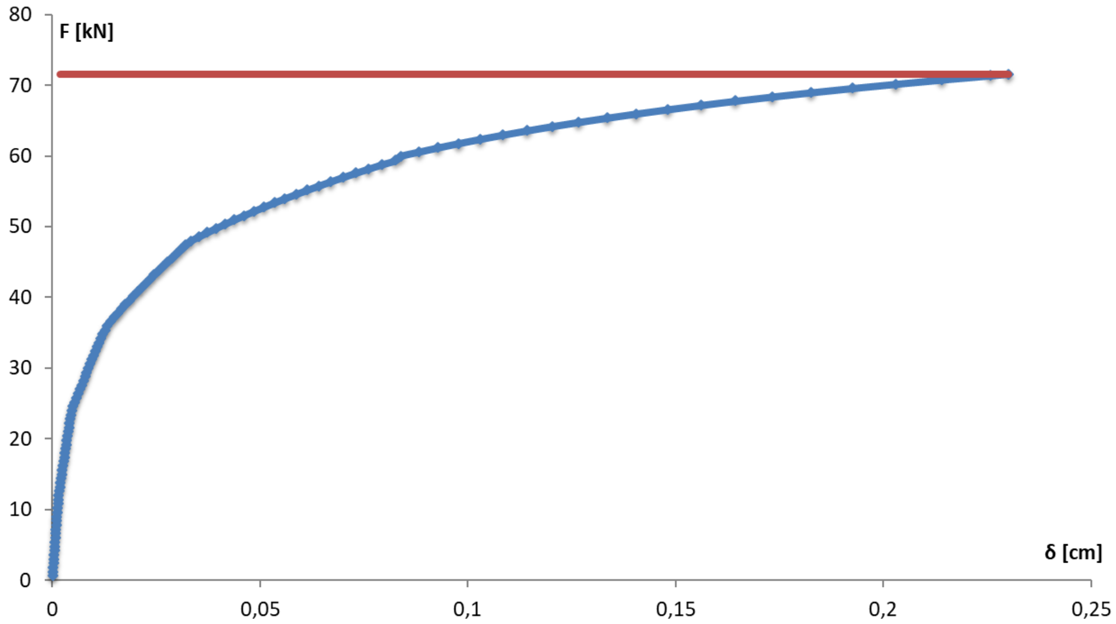


Figura 5.24: Diagramma F-δ con precompressione

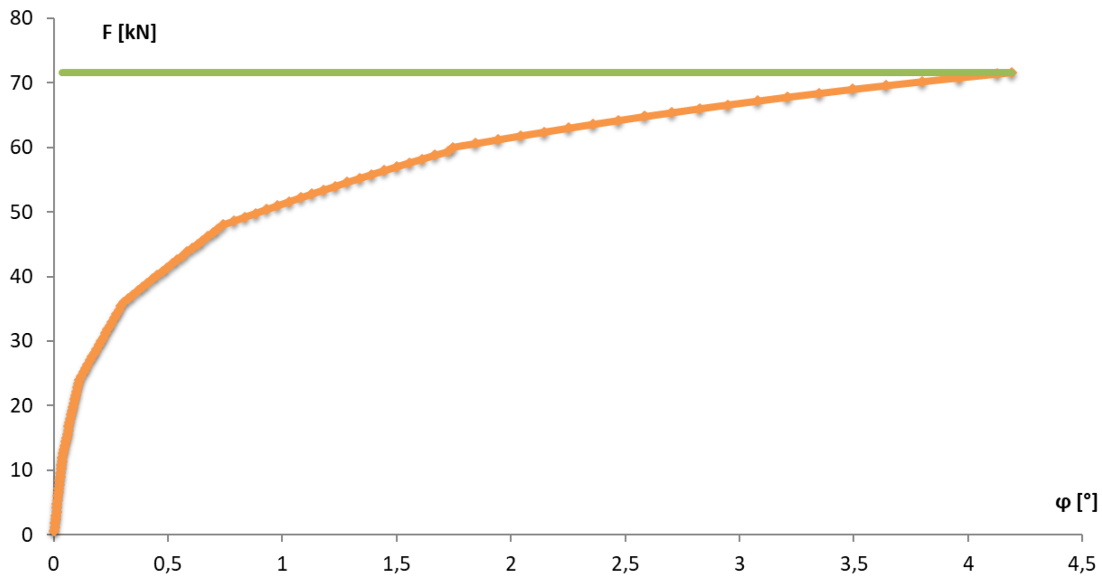


Figura 5.25: Diagramma F-φ con precompressione

Si noti come è possibile ottenere il grafico forza-rotazione come il rapporto tra la differenza del nodo di controllo di colmo e il nodo collocato a metà altezza della sezione di mezzeria.

Anche in questo caso è possibile effettuare una differenza percentuale tra il carico fornito dalla prima e dalla seconda analisi. Infatti, come nel caso dell'analisi di linear buckling il carico critico fornito dall'analisi con precompressione risulta essere di poco più basso e dunque più restrittivo in termini di carico critico che porta a instabilità.
Si riportano di seguito i valori critici:

P_{cri} [kN]	δ_{cri} [cm]	φ_{cri} [°]
71,76	22	4,18
71,62	23	4,2

Tabella 5.4: Valori critici con e senza precompressione

Anche in questo caso è pertanto possibile valutare la variazione percentuale del carico critico come segue:

$$\varDelta_p = \frac{71{,}62 - 71{,}76}{71{,}76} \cdot 100 = -0{,}20\%$$

Si nota che l'effetto è anche in questo caso trascurabile.

5.5 Valutazioni finali sulle cause del crollo

Al fine di poter effettivamente valutare il crollo per instabilità flesso-torsionale della struttura, si è pensato di calcolare il momento resistente della sezione di mezzeria della quale è stato ricavato il grafico forza-spostamento e verificare che il momento torcente resistente fosse maggiore del momento torcente critico elastico. In questi termini, sarebbe possibile affermare che il crollo sia avvenuto per instabilità dell'equilibrio elastico e non per raggiungimento del limite di resistenza del materiale.

Per effettuare il calcolo del momento torcente resistente è stato utilizzato l'approccio fornito dalle norme tecniche NTC2008 [14]. Il modello di calcolo è basato su un meccanismo resistente a traliccio (fig. 5.26), in cui gli sforzi di trazione sono associati alle staffe e alle armature longitudinali presenti nella sezione e quelli di compressione sono associati alle bielle di calcestruzzo compresse. Si è scelto di utilizzare questo approccio, in cui, rispetto all'EC2, la torsione viene analizzata in maniera indipendente dal taglio, in quanto, nell'intorno della sezione di mezzeria il taglio tende ad annullarsi.

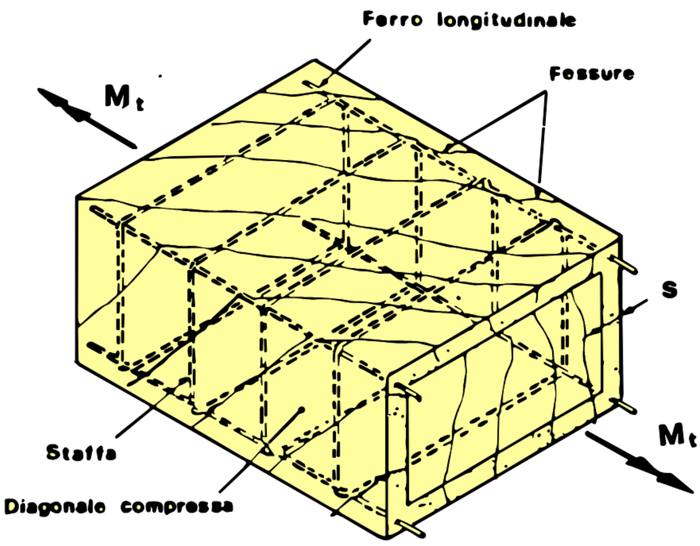


Figura 5.26: Traliccio periferico resistente

Nel caso in esame si è pensato di suddividere la sezione in 3 rettangoli, racchiusi dalla linea media delimitata dalle armature longitudinali e trasversali e sommare i 3 contributi resistenti di ciascun rettangolo. I diversi contributi resistenti si calcolano nel seguente modo:

- Momento torcente resistente bielle cls:

$$T_{Rcd} = 2 \cdot A \cdot t \cdot f'_{cd} \cdot \frac{\cot(\vartheta)}{1+\cot^2(\vartheta)}$$

- Momento torcente resistente staffe:

$$T_{Rsd} = 2 \cdot A \cdot \frac{A_s}{s} \cdot f_{yd} \cdot \cot(\vartheta)$$

- Momento torcente resistente armature longitudinali:

$$T_{Rld} = 2 \cdot A \cdot \frac{\sum A_l}{u_m} \cdot \frac{f_{yd}}{\cot(\vartheta)}$$

Dove A rappresenta l'area racchiusa dalla linea media del profilo periferico, t è lo spessore equivalente della sezione tubolare e u_m il perimetro medio del profilo periferico. Inoltre l'angolo di inclinazione delle bielle compresse di calcestruzzo deve rispettere i seguenti limiti:

$$0{,}4 \leq \cot(\vartheta) \leq 2{,}5$$

Una volta calcolati i 3 contributi, il valore del momento resistente sarà dato dal contributo minimo:

$$T_{Rd} = min\{T_{Rcd}, T_{Rsd}, T_{Rld}\}$$

Nel caso in esame è stato assunto un angolo di inclinazione dei puntoni compressi pari a 21,8° essendo in una situazione di armatura minima. Si riportano di seguito i calcoli effettuati per i 3 rettangoli, trascurando la piccola differenza di altezza tra flangia inferiore e superiore si ottiene:

- Momento torcente resistente bielle cls:

$$T_{Rcd,1} = 2 \cdot 52000 \cdot 62{,}95 \cdot 0{,}4 \cdot 16{,}46 \cdot 0{,}3448 \cdot 10^{-6} = 14{,}86kNm$$

$$T_{Rcd,2} = 2 \cdot 64800 \cdot 19{,}52 \cdot 0{,}4 \cdot 16{,}46 \cdot 0{,}3448 \cdot 10^{-6} = 5{,}74kNm$$

$$T_{Rcd,3} = T_{Rcd,1}$$

- Momento torcente resistente staffe:

$$T_{Rsd,1} = 2 \cdot 52000 \cdot \frac{270}{333} \cdot 391 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-6} = 82{,}46kNm$$

$$T_{Rsd,2} = 2 \cdot 64800 \cdot \frac{150}{333} \cdot 391 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-6} = 57{,}06kNm$$

$$T_{Rsd,3} = T_{Rsd,1}$$

- Momento torcente resistente armature longitudinali:

$$T_{Rld,1} = 2 \cdot 52000 \cdot \frac{1257}{1060} \cdot \frac{391}{2{,}5} \cdot 10^{-6} = 19{,}28kNm$$

$$T_{Rld,2} = 0kNm$$

$$T_{Rld,3} = T_{Rld,1}$$

Sommando tutti i contributi è evidente che il momento torcente resistente minimo è fornito dalle bielle di calcestruzzo:

$$T_{Rd} = T_{Rcd,1} + T_{Rcd,2} + T_{Rcd,3} = 35{,}46kNm$$

Il momento torcente critico elastico sarà fornito dal carico critico precedentemente calcolato con l'analisi non lineare moltiplicato per la sua eccentricità, tenendo conto dell'insorgenza di un'ulteriore eccentricità del secondo ordine a causa della rotazione. Infatti, l'eccentricità totale sarà data dalla distanza del carico eccentrico più un'eccentricità del secondo ordine calcolata moltiplicando la rotazione critica per la metà dell'altezza:

$$e = e_1 + e_2 = e_1 + \varphi \frac{h}{2} = 0{,}39 + 4{,}18 \cdot \frac{3{,}14}{180} \cdot 1{,}075 = 0{,}463m$$

da cui può essere calcolato il valore di momento torcente critico elastico:

$$T_{cri,el} = P_{cri} \cdot e = 71{,}76 \cdot 0{,}463 = 33{,}22kNm$$

Analizzando i momenti torcenti calcolati si può notare come il momento critico elastico sia minore di quello resistente, e di conseguenza questo vuol dire che il collasso è avvenuto per instabilità dell'equilibrio elastico e non per raggiungimento delle risorse resistenti del materiale.

Capitolo 6

Conclusioni

Lo scopo di questo lavoro di tesi è stato quello di analizzare le cause che hanno portato al collasso della copertura di un capannone industriale durante la sua costruzione, e di ottenere, tramite analisi linearizzate e non lineari agli elementi finiti, un carico di collasso da confrontare con quello che ha portato al crollo della struttura; inoltre si è cercato di valutare, sempre tramite analisi numeriche, se la presenza della precompressione possa aver influito in maniera favorevole o sfavorevole sul carico di collasso.
Le analisi effettuate hanno messo in evidenza che il crollo della struttura è effettivamente avvenuto per instabilità flesso-torsionale, con il raggiungimento del carico di collasso in prossimità dell'applicazione di 3 pannelli eccentrici della veletta di coronamento, come risulta sia avvenuto durante il processo costruttivo.
In particolare, dalle analisi svolte è emerso che:

- l'analisi linearizzata di stabilità, opportunamente impostata per tener conto della presenza di un momento torcente distribuito, ha fornito un'ottima stima del carico critico; di contro, per sua natura, tale analisi non fornisce alcuna indicazione sulle deformazioni (spostamenti e rotazioni) subite dalla struttura;

- l'analisi non lineare ha fornito un carico di collasso per instabilità dell'equilibrio (mancanza di convergenza della soluzione) che è risultato essere dell'1,75 % inferiore rispetto a quello fornito dall'analisi linearizzata. Al contempo, l'analisi non lineare ha consentito di simulare il processo costruttivo, mediante l'applicazione graduale del carico corrispondente alla pannellatura di coronamento, fornendo inoltre indicazioni sulle deformazioni flesso-torsionali fuori piano;

- entrambe le analisi di stabilità non hanno evidenziato effetti apprezzabili della precompressione sul carico di collasso: quest'ultimo, infatti, rispetto al caso in assenza di precompressione è risultato essere inferiore di circa lo 0,1 e 0,2 % rispettivamente per le analisi linearizzata e non lineare.

Infine, la scelta di modellare la struttura mediante l'uso di elementi finiti di volume, al fine di rappresentare nel modo più veritiero la trave, unita alle ipotesi adottate per lo svolgimento delle analisi, ha permesso di ricavare l'effettivo carico che ha portato al crollo della struttura in esame, mettendo in evidenza gli errori di progettazione a monte del problema.

Bibliografia

[1] DJ Corr, DM McCann, and BM McDonald. Lessons learned from marcy bridge collapse. In *Forensic Engineering 2009: Pathology of the Built Environment*, pages 395–403. 2010.

[2] David V Jáuregui. Evaluation of a steel girder bridge collapse during deck removal. *Journal of Performance of Constructed Facilities*, 28(4):04014007, 2013.

[3] Vincenzo Franciosi. *Scienza delle costruzioni*. Pellerano-Del Gaudio, 1959.

[4] Alberto Carpinteri. *Scienza delle costruzioni, Vol. 2, 2a ed., Pitagora Editrice, Bologna, 1993*.

[5] M Pignataro, N Rizzi, and A Luongo. *Stabilità, biforcazione e comportamento postcritico delle strutture elastiche*. ESA Editrice, 1983.

[6] TJ Stratford and CJ Burgoyne. Lateral instability of long-span prestressed concrete beams on flexible bearings. *Structural Engineer*, 79(6):24, 2001.

[7] Robert F Mast. Lateral stability of long prestressed concrete beams. *PCI JOURNAL*, page 35, 1989.

[8] Richard V Southwell. On the analysis of experimental observations in problems of elastic stability. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 135, pages 601–616. The Royal Society, 1932.

[9] Mario Como. *Teoria della stabilità dell'equilibrio elastico*. Liguori, 1967.

[10] LUSAS User's Manual FEA. Lusas element reference manual.

[11] Sara Rosa Terracciano. Dinamica e instabilità di travi in sezione sottile aperta: analisi numeriche e sperimentali, Tesi di laurea magistrale in ingegneria civile, Politecnico di Torino, 2014.

[12] LUSAS User's Manual FEA. Lusas theory manual.

[13] Fabio Bazzucchi. Fenomeni di instabilità nelle strutture leggere di copertura: la nuova stazione FS Porta Susa di Torino, Tesi di laurea magistrale in ingegneria civile, Politecnico di Torino, 2013.

[14] Aicap. *Progettazione di struttutre in calcestruzzo armato*. 2012.

Appendice A

Nella presente appendice sono riportati alcuni esempi di modellazione eseguiti mediante il software agli elementi finiti Lusas. I suddetti esempi sono stati utili per fare dei confronti con le soluzioni analitiche in forma chiusa presenti in letteratura e per poter modellare al meglio, in seguito, la struttura del caso studio.
In particolare si è cercato di mettere in evidenza l'instabilità di tipo flesso-torsionale delle due sezioni analizzate nei paragrafi 1.4 e 1.5, utilizzando due elementi finiti di famiglie diverse.

A.1 Trave con sezione rettangolare - elementi "shell"

In questo esempio è stato affrontato il problema di una trave in acciaio con sezione rettangolare sottile con dimensioni 0,0015 x 0,25 x 4 m. Lo schema statico utilizzato è quello presente in fig. 1.13-5. Gli elementi utilizzati per la definizione della mesh sono degli elementi di tipo quadrangolare denominati "QTS4". In questo caso, poichè gli elementi utilizzati sono di tipo "shell" basterà semplicemente assegnare al modello uno spessore costante di 0,015 m per tutta la sua lunghezza. Per quanto riguarda i vincoli utilizzati nel modello si è cercato di bloccare gli spostamenti in direzione x e y e le rotazioni torsionali al fine di ricreare le condizioni di vincolo presenti in fig. 1.13-5.Infine, il tipo di carico applicato utile per trovare il carico di "buckling" è stato reso unitario per fare in modo che il moltiplicatore di collasso calcolato dall'analisi agli autovalori coincidesse con il carico critico, pertanto è stato applicato un carico pari a 1 kN/m.

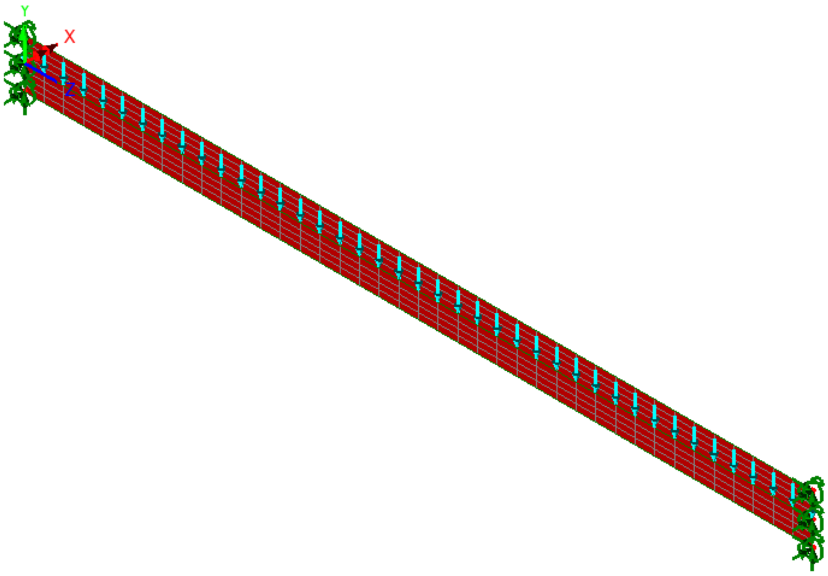


Figura A.1: Trave modellata con elementi QTS4

Le caratteristiche geometriche e meccaniche della sezione utili per calcolare il valore del carico critico sono le seguenti:

- Momento d'inerzia rispetto l'asse debole y: I_y=7,03125 $\cdot 10^{-8} m^4$
- Momento d'inerzia torsionale: J=2,8125 $\cdot 10^{-7} m^4$
- Modulo elastico: E=210 $\cdot$ 10^9 $\frac{N}{m^2}$
- Modulo elastico tangenziale: G=81 $\cdot$ 10^9 $\frac{N}{m^2}$

Il valore del carico critico secondo la teoria delle travi sarà:

$$(ql_{cri,teo}) = \frac{28{,}3}{l^2}\sqrt{EI_yGJ} = 32{,}44kN$$

mentre il valore ottenuto dal modello FEM risulta:

$$(ql_{cri,fem}) = q \cdot \lambda_{1,S} = 1kN \cdot 32{,}35 = 32{,}35kN$$

Si riporta la prima deformata critica ottenuta:

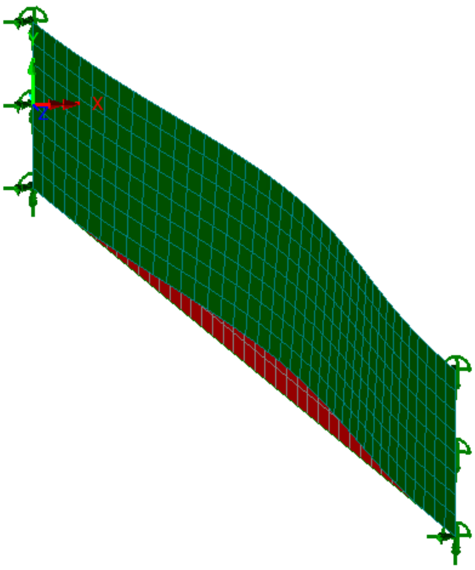


Figura A.2

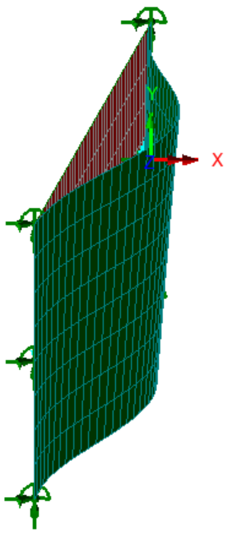


Figura A.3

A.2 Trave con sezione rettangolare sottile - elementi "brick"

In generale gli elementi brick possono essere utilizzati per modellare nel modo migliore possibile la geometria di un elemento. La differenza principale con gli elementi precedenti è rappresentata dai gradi di libertà presenti su ogni noso, infatti negli elementi di tipo "shell" oltre alle 3 componenti di spostamento sono presenti anche le 3 rotazioni rispetto gli assi, mentre negli elementi di tipo "brick" sono presenti solo le 3 traslazioni. Dunque, da un punto di vista del problema analizzato avere la possibilità di controllare le rotazioni come gradi di libertà sarebbe più utile, di contro però gli elementi shell non sono in grado di garantire la stessa utilità fornita dagli elementi brick in termini di geometria, in quanto possono lavorare soltanto tramite spessori costanti.

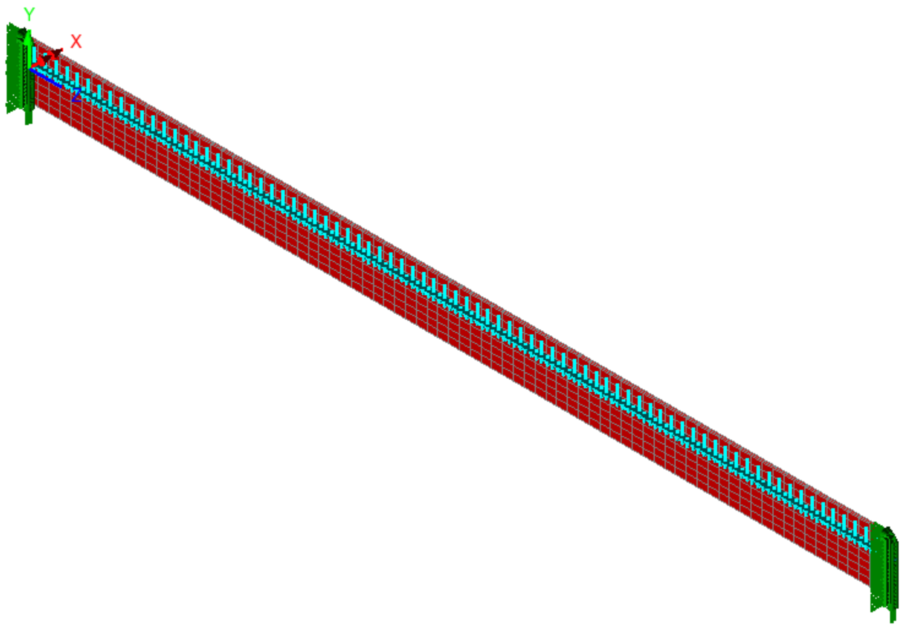


Figura A.4

Si riporta la deformata critica ottenuta:

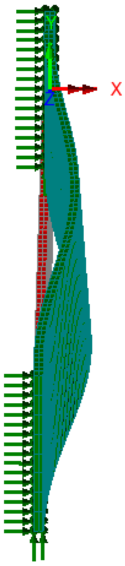


Figura A.5

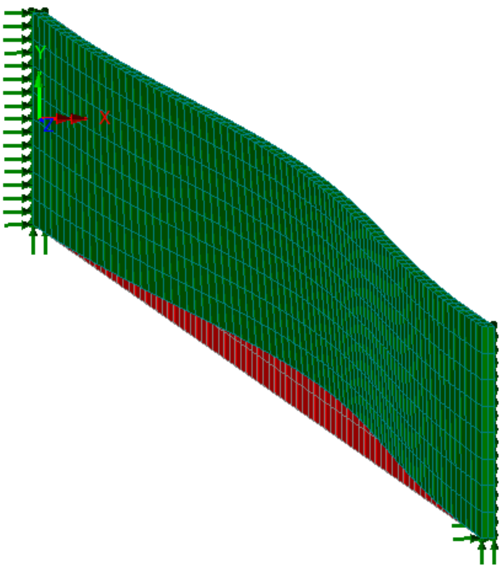


Figura A.6

Il modello in questione è del tutto analogo al precedente in termini di materiale e carico applicato, pertanto valgono le stesse caratteristiche definite precedentemente. Il carico critico fornito dal modello risulta:

$$(ql_{cri,fem}) = q \cdot \lambda_{1,B} = 1kN \cdot 33{,}1 = 33{,}1kN$$

A.3 Conclusioni

È possibile notare come le soluzioni ottenute tramite il modello FEM si avvicinino molto alla soluzione teorica in forma chiusa.

$P_{cri,teo}$ [kN]	$P_{cri,fem,S}$ [kN]	$P_{cri,fem,B}$ [kN]	$\Delta P_{cri,S}$ [%]	$\Delta P_{cri,B}$[%]
32,44	32,35	33,1	0,28	2

Tabella A.1: Valori critici e differenze percentuali

Come si può vedere in tabella A.1 la soluzione che si avvicina di più a quella teorica è data dagli elementi shell.

A.4 Trave con sezione a doppio T - elementi "shell"

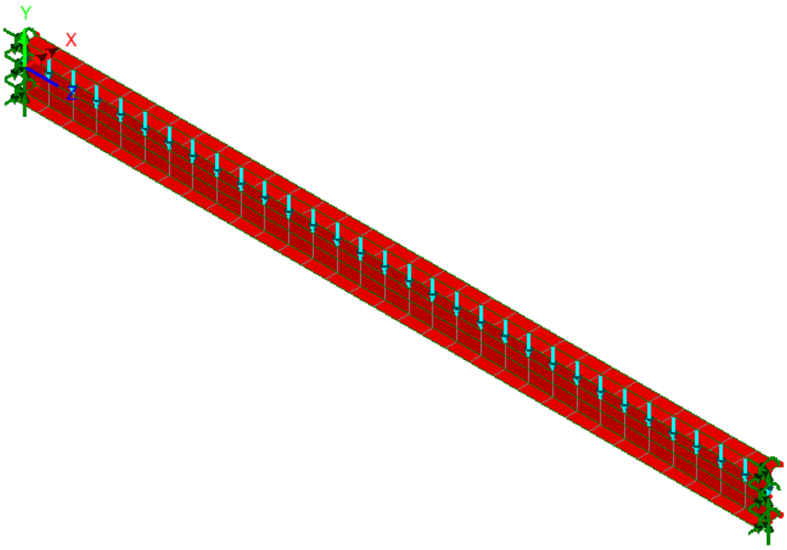


Figura A.7

In questo caso è stato analizzata una trave in acciaio con una sezione a doppio T. L'anima ha le stesse dimensioni della precedente trave analizzata con l'aggiunta delle ali di spessore 0,015 m e base di 0,125 m. La presenza delle ali contribuisce in modo favorevole in termini di carico critico; infatti, la presenza delle flange ne provoca un incremento, a causa dell'aumento del momento d'inerzia I_y e alla presenza dell'ulteriore contributo resistente fornito dall'inerzia all'ingobbamento I_ω. Il carico applicato è sempre di $1kN/m$ mentre le caratteristiche geometriche e meccaniche della sezione utili per calcolare il valore del carico critico sono le seguenti:

- Momento d'inerzia rispetto l'asse debole y: I_y=4,94469 $\cdot 10^{-6} m^4$

- Momento d'inerzia torsionale: J=0,544567 $\cdot 10^{-6} m^4$

- Momento d'inerzia all'ingobbamento: $I_\omega = \dfrac{t_f \cdot h^2 \cdot b^3}{24}$=7,62939 $\cdot 10^{-8} m^6$

- Modulo elastico: $E = 210 \cdot 10^9 \ \dfrac{N}{m^2}$

- Modulo elastico tangenziale: G=81 $\cdot\, 10^9\ \dfrac{N}{m^2}$

In presenza di sezioni a doppio T il valore della forza critica ha sempre la stessa espressione del caso precedente, ma deve essere definito il moltiplicatore λ_3 che tiene conto anche del contributo aggiuntivo dato da I_ω. Il valore della forza critica risulta:

$$(ql)_{cri} = \frac{\gamma_3}{l^2}\sqrt{GJEI_y}$$

Il valore di γ_3 può essere ricavato a partire dal grafico presente in fig. 1.12. Una volta calcolato il valore tra il rapporto della rigidezza torsionale e la rigidezza all'ingobbamento moltiplicato per la lunghezza al quadrato, basta interpolare tra il valore calcolato e i 2 valori precedente e successivo.
Posto $l^2 \frac{GJ}{EI_\omega} = k$ si ottiene:

$$k = 50 \longrightarrow \lambda_3 = 31$$

$$k = 40 \longrightarrow \lambda_3 = 32$$

$$k = 44{,}05 \longrightarrow \lambda_3 = 31{,}6$$

Sostituendo i precedenti valori, la forza critica sarà pari a:

$$(ql)_{cri,teo} = 422{,}68kN$$

Il carico calcolato dal software invece è pari a:

$$(ql)_{cri,fem} = 422{,}35kN$$

Si riporta la deformata critica ottenuta:

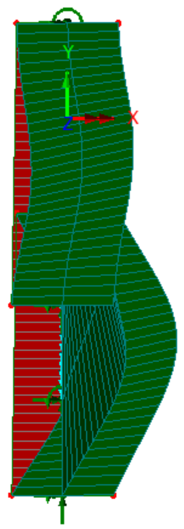


Figura A.8

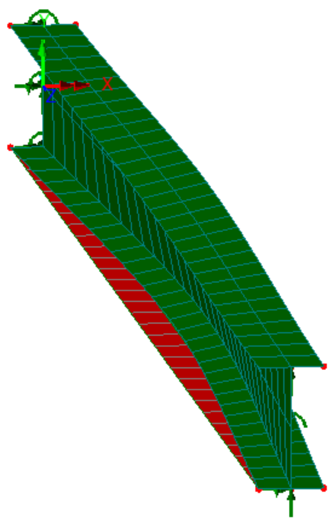


Figura A.9

A.5 Trave con sezione a doppio T - elementi "brick"

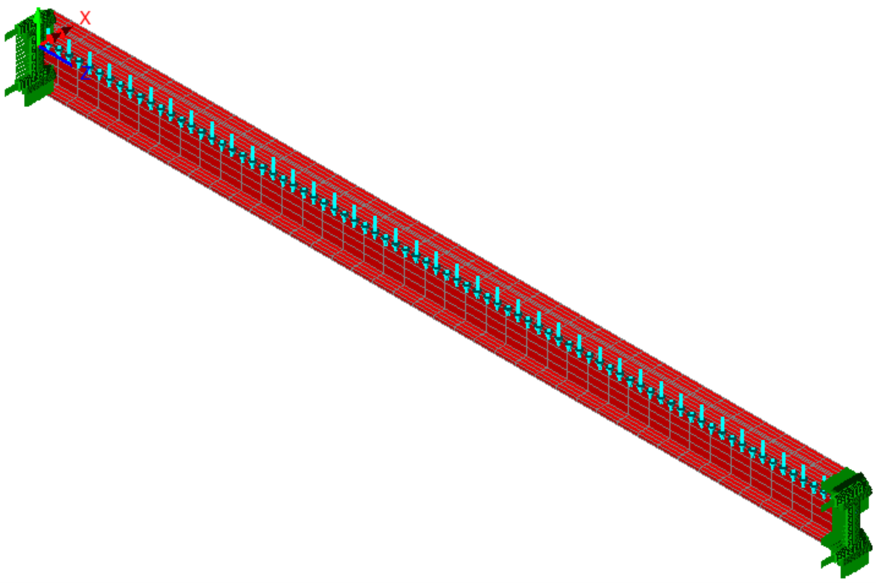


Figura A.10

Il problema è lo stesso di quello affrontato precedentemente, infatti le caratteristiche geometriche e meccaniche sono rimaste le stesse, a differenza degli elementi utilizzati nella discretizzazione dell'elemento.
In questo caso avendo dei volumi e non delle superfici è stato necessario inserire nei vari rettangoli divisioni diverse nelle direzioni x e y e una divisione di 40 elementi su 4 metri in direzione z per non avere problemi di distorsioni troppo elevate. Il carico applicato è un carico unitario di $1kN/m$ per far in modo che il primo autovalore calcolato coincida con il carico critico, mentre per i vincoli sono stati bloccati gli spostamenti di entrambe le facce.
Il valore del carico critico ottenuto dal software risulta:

$$(ql)_{cri,fem} = 450{,}2kN$$

Si riporta la deformata critica ottenuta:

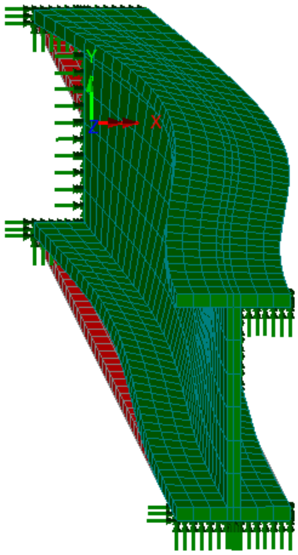


Figura A.11

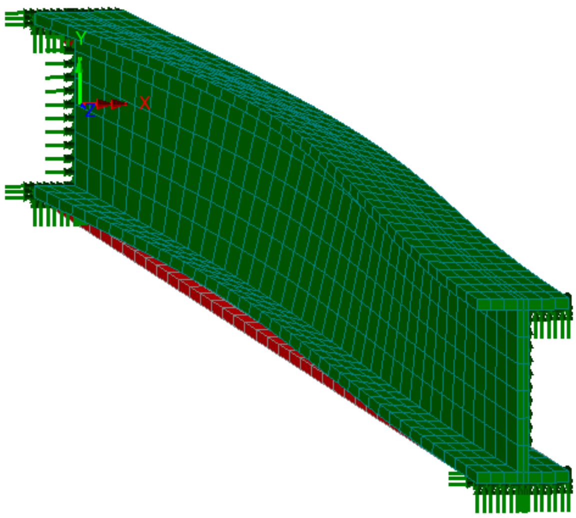


Figura A.12

A.6 Conclusioni

È possibile notare come le soluzioni ottenute tramite il modello FEM si avvicinino molto alla soluzione teorica in forma chiusa.

$P_{cri,teo}$ [kN]	$P_{cri,fem,S}$ [kN]	$P_{cri,fem,B}$ [kN]	$\Delta P_{cri,S}$ [%]	$\Delta P_{cri,B}$[%]
422,68	422,35	450,20	0,1	6,5

Tabella A.2: Valori critici e differenze percentuali

Come si può vedere in tabella A.2 la soluzione che si avvicina di più a quella teorica è data dagli elementi shell.