

POLITECNICO DI TORINO

Dipartimento di Ingegneria dell'Ambiente, del Territorio e
delle Infrastrutture

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Civile

Tesi di Laurea

**Dinamiche dei sistemi preda - predatore
negli ambienti fluviali non stazionari**



Relatore

Prof. Luca Ridolfi

Correlatore:

Ing. Riccardo Vesipa

Laureanda

Chiara Sordo

Marzo 2018

A nonno Aldo

Ringraziamenti

Molte persone hanno dato supporto al presente lavoro di tesi, pertanto ritengo doveroso spendere alcune parole per ringraziare.

Ringrazio anzitutto il mio relatore, Professor Luca Ridolfi, per l'aiuto e il sostegno offertomi sin dal principio e il collaboratore Riccardo Vesipa per il prezioso contributo e la disponibilità mostratami.

Ringrazio l'ingegner Fabio Borgogno per la preziosa consulenza e per la pazienza mostratami durante il lavoro di tesi. Mi sento in dovere di ringraziare la mia famiglia che mi ha sempre supportato in questi anni; senza la costante presenza di papà Sergio, mamma Daniela, Francesco e Federico, non sarei arrivata a questo traguardo tanto importante dal punto di vista professionale e personale.

Un ringraziamento va anche agli amici che sono stati presenti durante tutto il mio percorso universitario, nei quali ho trovato costante conforto e appoggio nelle sfide che quotidianamente offre il Politecnico.

Indice

Introduzione	6
2 Modello matematico	10
2.1 Generalità	10
2.2 Modello	10
2.2.1 Adimensionalizzazione	12
2.2.2 Formulazione del problema matematico e risultati analitici	17
2.3 Parametri biologici	25
3 Metodo numerico	41
3.1 Generalità	41
3.2 Metodo delle differenze finite esplicito	41
3.2.1 Definizione della discretizzazione spaziale e temporale ottimale	48
4 Caso velocità della corrente costante	62
4.1 Generalità	62
4.2 Casi considerati	62
4.3 Risultati	71
5 Caso velocità della corrente periodica	78
5.1 Generalità	78
5.2 Casi considerati	78
5.3 Risultati	80
6 Caso velocità della corrente stocastica	98
6.1 Generalità	98
6.2 Casi considerati	98
6.3 Risultati	107
7 Conclusioni	126

A	Aspetti matematici: analisi di von Neumann, Principio di massimo e Teorema del limite centrale	129
	A.0.1 Analisi di von Neumann	129
	A.0.2 Principio di massimo	131
	A.0.3 Test di Kolmogorov - Smirnov	132
	bibliografia	135

Introduzione

Il fiume e l'ambiente fluviale rivestono un ruolo fondamentale per lo svolgimento delle attività umane. Il corso d'acqua infatti costituisce una risorsa in termini energetici e di cibo oltre a contribuire ad alimentare le falde acquifere. Consente inoltre la navigazione e, soprattutto nell'ultimo ventennio, vi è stata una crescente attenzione nella valorizzazione di tutto l'ambiente fluviale per scopi ricreativi.

Il corso d'acqua rappresenta anche l'habitat di numerosissime specie viventi e lo sfruttamento delle risorse da parte dell'uomo, troppo frequentemente non tiene in considerazione il delicato ecosistema fluviale compromettendo la sopravvivenza delle specie animali e vegetali che ne fanno parte.

Tra gli organismi che costituiscono l'ecosistema sono presenti interazioni, più o meno forti, che sono suscettibili di cambiamenti.

Non tenere in considerazione le possibili conseguenze degli interventi umani sull'ecosistema può provocare danni ingenti dal punto di vista ambientale.

Un problema comune relativo allo sfruttamento delle risorse naturali, di qualunque natura esse siano, è quello di non valutare gli effetti a medio termine; ciò fa sì che spesso, si debbano attuare misure correttive a posteriori, con costi elevati sia in termini economici che ambientali.

Con riferimento all'ambiente fluviale il rischio in cui si può incorrere intervenendo sul corso d'acqua senza considerare le specie che lo popolano, è quello di creare zone all'interno del fiume non popolate o in cui una specie è assente; ciò determina una variazione dell'ecosistema e può portare all'estinzione anche di altre specie che mancano di fonte di cibo.

Alterazioni delle caratteristiche della corrente possono influenzare l'habitat disponibile per le specie che popolano il fiume, determinando conseguenze sia sul nutrimento che sulla riproduzione delle specie.

La trota comune, ad esempio, necessita di un habitat freddo, poco inquinato (per la riproduzione e la crescita) e inserito all'interno di un ambiente fluviale articolato tale da consentire le migrazioni per motivi di cibo. Variazioni del flusso della corrente, in termini di regime di velocità e di valori di velocità può avere gravi conseguenze sulla persistenza di questa specie.

Talvolta le variazioni delle caratteristiche del flusso sono di entità tale da far sì che non si ristabilisca più l'ecosistema originariamente esistente mentre in altri casi affinché ciò si verifichi è necessario un tempo molto grande. Non sempre infatti gli interventi di ripopolamento fluviale e le politiche volte a favorire la riproduzione delle specie riescono a riportare il sistema nelle condizioni

originali.

A tal riguardo, l'*instream flow need*, IFN, è un concetto che affronta tale problematica cercando di individuare la dimensione, il tempo e la variabilità del flusso della corrente tale da preservare prefissati livelli di biodiversità (Poff et al., 1997).

Sulla scorta di tali considerazioni è di fondamentale importanza comprendere quali grandezze idrauliche influiscono maggiormente sull'equilibrio dell'ecosistema fluviale.

Risulta utile conoscere gli scenari che ragionevolmente si verificheranno in conseguenza ad una variazione di suddette grandezze.

Un'analisi qualitativa non è tuttavia esauriente in quanto non consente di definire l'entità delle variazioni in grado di provocare la realizzazione di uno scenario piuttosto che un altro.

Uno degli obiettivi del presente studio è proprio quello di trattare questa problematica strettamente ambientale e ampiamente discussa, dal punto di vista ingegneristico effettuando un'analisi quantitativa che permetta di prevedere, sulla base dei valori assunti dalla velocità della corrente, le conseguenze sulle specie presenti all'interno del corso d'acqua.

All'interno di un ecosistema, l'interazione fondamentale è quella predatore - preda, ampiamente trattata in letteratura, il cui modello fondamentale è stato formulato da *Lotka - Volterra* (1925 - 1926).

Ci si è pertanto concentrati sullo studio degli effetti delle variazioni della velocità della corrente, sia in termini di valore sia in termini di regime, sul delicato equilibrio tra prede e predatori all'interno di un corso d'acqua.

Il punto di partenza dell'analisi condotta è stato lo studio di Hilker e Lewis (2010) in cui sono stati studiati gli scenari di invasione di prede e predatori all'interno di un corso d'acqua nel caso in cui la velocità della corrente fosse costante.

Hilker e Lewis (2010) hanno studiato l'influenza del valore assunto dalla velocità del fiume sulla persistenza o l'estinzione di un sistema preda - predatore, basandosi su un sistema di equazioni di reazione - convezione - diffusione e facendo ricorso ai diagrammi di velocità di invasione. Questi ultimi forniscono un utile strumento grafico per individuare il valore di velocità della corrente che permette la persistenza delle specie.

A partire dalla trattazione di Hilker e Lewis (2010), si è ampliato il campo dei regimi di velocità, studiando gli scenari di diffusione di prede e predatori all'interno del fiume quando la velocità della corrente vari periodicamente nel tempo o quando si consideri anche la componente stocastica.

Tali situazioni si verificano molto frequentemente; già naturalmente, a causa della stagionalità delle piogge, la portata di un corso d'acqua subisce variazioni con una certa ciclicità. Oltre ai fattori climatici anche opere costruite dall'uomo possono provocare variazioni di velocità della corrente, basti pensare al caso del funzionamento di una centrale idroelettrica che deve gestire i picchi di richiesta di energia da parte delle utenze. In questo caso, la diga immagazzina acqua quando la domanda è minore dell'offerta, per poi rilasciarla nelle situazioni opposte.

Lo studio del caso stocastico è invece dettato dalla volontà di voler studiare la situazione maggiormente aderente con la realtà in cui, a causa di turbolenze e altri fattori, la velocità della

corrente varia in modo casuale da un'istante temporale al successivo sempre oscillando intorno ad un valor medio.

La presente analisi è stata condotta considerando un sistema in cui sia le prede sia i predatori sono pesci, tuttavia le considerazioni effettuate e i risultati ottenuti sono validi indipendentemente dalle specie viventi considerate, ma per la comprensione fisica completa del fenomeno in termini spazio - temporali è necessario riferirsi a parametri tipici delle specie in esame; si è preso come riferimento un sistema di prede e predatori in cui entrambe le specie sono pesci ed in particolare è stata presa in considerazione la famiglia dei *Salmonidi* a cui appartengono ad esempio la trota e il salmone. Queste due specie si nutrono di piccoli pesci, crostacei o molluschi. La figura 1.1 riporta un esemplare di trota e uno di salmone, che, nel modello preda - predatore rappresentano quest'ultimo.



(a) Trota comune, *Salmo trutta fario*



(b) Salmone, *Salmo salar*

Figura 1.1: Due specie appartenenti alla famiglia dei *Salmonidi*, la trota comune e il salmone, alle cui caratteristiche specifiche medie si è fatto riferimento per il riferimento temporale e spaziale dello studio

Gli scenari ottenuti sono, tuttavia, validi anche nel caso di specie viventi diverse dai pesci; per comprendere i diversi riferimenti spazio - temporali sarà sufficiente utilizzare specifici parametri.

Il presente documento è così strutturato: nel capitolo 2 viene presentato il modello matematico

sia in forma dimensionale sia in forma adimensionale e le relative ipotesi che stanno alla base della trattazione compiuta; nello stesso capitolo, la sezione 2.3 illustra alcuni possibili valori che possono assumere i parametri che compaiono nella adimensionalizzazione delle grandezze del modello.

Nel capitolo 3 viene descritto il metodo numerico adottato per la risoluzione delle equazioni differenziali che regolano il fenomeno; nello stesso capitolo viene presentata l'analisi che ha consentito di individuare la discretizzazione spaziale e temporale ottimale per l'applicazione del metodo.

Sono stati analizzati gli scenari possibili di diffusione delle prede e predatori in tre casi: il caso di velocità della corrente costante è presentato al capitolo "Caso statico"; quello di velocità della corrente variabile con legge periodica è illustrato al capitolo 5 mentre il capitolo 6 riporta i risultati ottenuti qualora si tenga in conto anche la stocasticità. Infine, nel capitolo 7 vengono riassunti i risultati ottenuti.

Capitolo 2

Modello matematico

2.1 Generalità

Le variazioni del flusso della corrente di un corso d'acqua provocano alterazioni dell'habitat fluviale con possibili conseguenze negative per le popolazioni che lo abitano; risulta pertanto di primaria importanza quantificare l'entità delle variazioni tale da mantenere l'ecologia fluviale intatta. A tale scopo, viene considerato un metodo, basato sui diagrammi di velocità di invasione, che consente di mettere in relazione la velocità della corrente con la persistenza o l'estinzione delle specie che popolano il corso d'acqua.

Nel presente capitolo viene presentato il modello matematico basato su un sistema di equazioni di reazione-advezione-diffusione, dapprima in forma dimensionale e, attraverso l'adimensionalizzazione, in forma adimensionale.

2.2 Modello

Il sistema considerato è costituito da *(i)* un fiume, caratterizzato da flusso prevalentemente monodirezionale in direzione x , approssimato con una linea spazialmente omogenea; *(ii)* dalla popolazione delle prede, la cui densità è indicata con N , *(iii)* dalla popolazione dei predatori, di densità P . N e P sono dipendenti dal tempo t e dallo spazio x , ovvero $N(x, t)$ e $P(x, t)$ (Hilker et al., 2009). Si suppone che l'ambiente in cui vivono le popolazioni non subisca mutazioni e che esse siano omogenee dal punto di vista della natalità, riproduzione e mortalità.

In generale, il moto di specie animali all'interno di ambienti è di tipo Browniano e viene descritto da un modello di diffusione cui può essere aggiunto un termine sorgente per tenere in conto le mutue interazioni tra le specie. Tuttavia, nel caso in cui gli individui vengano trasportati dalla corrente bisogna considerare anche il contributo convettivo.

Le equazioni che descrivono il sistema, in forma dimensionale, sono:

$$\frac{\partial}{\partial t}N(x, t) = -v_N \frac{\partial}{\partial x}N(x, t) + D_N \frac{\partial^2}{\partial x^2}N(x, t) + f(N, P)N \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x, t) = -v_P \frac{\partial}{\partial x}P(x, t) + D_P \frac{\partial^2}{\partial x^2}P(x, t) + g(N, P)P \quad (2.2)$$

dove:

- v_N : velocità dovuta alla convezione sperimentata dalle prede;
- v_P : velocità dovuta alla convezione sperimentata dai predatori;
- D_N : diffusività delle prede;
- D_P : diffusività dei predatori;
- $f(N, P)N$, $g(N, P)P$: funzioni che descrivono le variazioni di prede e predatori dovute alla crescita e alle mutue interazioni; il legame funzionale che descrive tali variazioni è lineare di tipo Lotka-Volterra.

Il termine a primo membro nelle (2.1) e (2.2), indica la variazione temporale rispettivamente di prede e predatori; tale variazione è dovuta (i) ad un termine convettivo $-v_\beta \partial/\partial x \beta(x, t)$, dove $\beta = N, P$, (ii) ad un termine diffusivo $D_\beta \partial^2/\partial x^2 \beta(x, t)$ e (iii) ad un termine sorgente $f(N, P)N$ e $g(N, P)P$. Ogni termine di trasporto, (i), (ii), (iii) è legato a meccanismi differenti, descritti nel seguito.

(i) Il termine convettivo

$$-v_\beta \frac{\partial}{\partial x} \beta(x, t)$$

rappresenta la componente di trasporto di prede e predatori dovuta alla velocità della corrente; è pertanto assente in condizioni idrostatiche. Il segno $-$ è convenzionalmente introdotto per avere convezione positiva quando il flusso ha direzione opposta al gradiente di densità delle popolazioni.

(ii) Il termine diffusivo

$$D_\beta \frac{\partial^2}{\partial x^2} \beta(x, t)$$

indica la componente di trasporto dovuta al gradiente di densità di prede e predatori, e tende, nel tempo, ad uniformare il valore di densità. Non dipendendo dalla velocità della corrente, questo meccanismo di trasporto è presente anche in ipotesi di regime idrostatico.

(iii) I termini sorgente $f(N, P)N$ e $g(N, P)P$ sono indipendenti dai termini differenziali che descrivono il sistema; la loro struttura viene analizzata in dettaglio di seguito.

La funzione $f(N, P)N$ è così definita:

$$f(N, P) = \left(r \left(1 - \frac{N}{K} \right) - aP \right) N \quad (2.3)$$

dove:

- r : tasso di crescita intrinseco delle prede in assenza di predatori;
- K : carrying capacity del sistema;
- a : tasso di predazione, ovvero il numero di incontri predatore-preda che ha successo.

L'equazione (2.3) é così composta: un primo termine, $r(1 - N/K)N$, esprime la crescita della popolazione delle prede secondo il modello logistico, mentre il termine aPN esprime la regolazione del numero di prede effettuata dai predatori, il prodotto PN traduce la probabilità che avvenga l'incontro tra predatore e preda nell'ipotesi che le due specie siano distribuite uniformemente nello spazio e si muovano casualmente.

Il tasso di crescita intrinseco r che compare nel primo termine, viene decrementato della quantità N/K , ovvero la carrying capacity del sistema stesso limita la crescita delle prede. Ciò è dovuto al fatto che, nel momento in cui viene raggiunto il numero massimo di individui che il sistema è in grado di ospitare, per ulteriori incrementi di popolazione vengono meno le condizioni per la sopravvivenza; infatti diventa sempre più difficile trovare cibo e gli individui si ostacolano a vicenda.

Il termine aPN , invece, rappresenta la diminuzione del numero di prede dovuta al numero di incontri predatore-preda che si conclude con l'eliminazione della preda stessa.

Relativamente alla funzione $g(N, P)P$ si considera il caso di predatori specialisti, la cui unica fonte di nutrimento è costituita dalle prede; in questa situazione l'assenza delle ultime determina l'estinzione dei primi. La funzione di crescita $g(N, P)P$ è espressa dalla relazione

$$g(N, P) = (eaN - m)P \quad (2.4)$$

dove:

- e : efficienza di conversione trofica, rappresenta la quantità di energia a disposizione dei predatori derivante dal consumo delle prede appartenenti ad un livello trofico inferiore (da un livello trofico all'altro, una parte dell'energia viene sempre dissipata in calore per il secondo principio della termodinamica, pertanto l'efficienza è inferiore all'unità. Questo processo è descritto con maggior dettaglio alla sezione 2.3);
- m : tasso di mortalità naturale dei predatori in assenza di prede.

Nella (2.4) il termine $eaNP$ rappresenta l'aumento del numero di predatori legato alla disponibilità di cibo ed è proporzionale al numero di incontri preda-predatore che si concludono con il consumo della preda. il termine mP indica, invece, la diminuzione dei predatori dovuto alla mortalità naturale della specie stessa, m .

2.2.1 Adimensionalizzazione

Nel modello dimensionale descritto dalle (2.1)- (2.4) compaiono numerosi parametri

$$K, e, a, m, r, D_N, D_P, v_N, v_P$$

lo studio delle variazioni spazio-temporali di prede e predatori i parametri da determinare sono quindi molteplici. Per comprendere l'influenza di tali parametri sul comportamento delle due specie risulta conveniente adimensionalizzare le grandezze che compaiono nelle (2.1)- (2.4) , in modo da ridurne il numero. Attraverso l'adimensionalizzazione é possibile, inoltre, individuare i raggruppamenti notevoli.

Dal modello (2.1)-(2.4) è possibile individuare una relazione funzionale tra le grandezze che vi compaiono, quindi risulta

$$N = l(x, t, v_N, D_N, r, K, a), \quad (2.5)$$

e,

$$P = w(x, t, v_N, D_N, r, K, a, e). \quad (2.6)$$

Con riferimento al **Teorema di Buckingham**, è possibile definire una serie di grandezze, dimensionalmente indipendenti, che consente di ricondurre le relazioni funzionali (2.5) e (2.6) in relazioni tra numeri puri.

Nel caso in esame le grandezze dimensionalmente indipendenti, ovvero tali che nessuna loro combinazione di prodotti e quozienti dia un numero puro, sono

$$a, e, K, D_N,$$

Considerando l'analisi dimensionale, una generica grandezza, ad esempio N , può essere espressa in forma adimensionale nel seguente modo:

$$\tilde{N} = \frac{N}{(ea)^\beta K^\gamma D_N^\zeta} \quad (2.7)$$

dove \tilde{N} indica la grandezza adimensionale e il valore degli esponenti viene definito considerando le unità di misura delle grandezze fondamentali usate per adimensionalizzare e le unità di misura della grandezza da scalare.

Considerando le grandezze dimensionalmente indipendenti, le rispettive unità di misura sono esprimibili in funzione delle grandezze fondamentali lunghezza L , tempo T , e massa M ; in particolare si ha:

$$D_N = [L]^2[T]^{-1} \quad ea = [M]^{-1}[T]^{-1} \quad K = [M]^{-1}$$

Il termine ea é stato considerato insieme in quanto rappresenta la percentuale di energia a disposizione dei predatori proveniente dagli incontri con le prede che hanno avuto esito positivo. Per maggiori dettagli sul significato della efficienza di conversione trofica, e , e del tasso di predazione, a , si rimanda alla sezione (2.3).

Il valore assunto degli esponenti β, γ, ζ necessari per scalare le varie grandezze, è stato ricavato nel modo di seguito illustrato. Con riferimento all'unità di misura, N può essere espresso in funzione delle grandezze fondamentali come

$$[N] = [L]^0[T]^0[M]^1$$

ovvero N rispetto alla serie ea, K, D_N risulta

$$[N] = [ea]^\beta [K]^\gamma [D_N]^\zeta.$$

Ne deriva che:

$$[L]^0 [T]^0 [M]^1 = [[M]^{-1} [T]^{-1}]^\beta [[M]]^\gamma [[L]^2 [T]^{-1}]^\zeta$$

è possibile scrivere il seguente sistema uguagliando gli esponenti di ciascuna grandezza fondamentale $[L]$, $[T]$, $[M]$:

$$\begin{cases} L) & 0 = 2\zeta \\ T) & 0 = -\beta - \zeta \\ M) & 1 = \gamma \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} L) & \zeta = 0 \\ T) & \beta = 0 \\ M) & \zeta = 1 \end{cases}$$

La (2.7) diventa quindi

$$\tilde{N} = \frac{N}{K}. \quad (2.8)$$

In modo del tutto analogo si ricava

$$\tilde{P} = \frac{P}{K}. \quad (2.9)$$

L'analisi dimensionale condotta sulle altre grandezze che compaiono nelle (2.1)-(2.4) per ottenere le grandezze adimensionali è riportata di seguito.

Tempo t

$$[t] = [L]^0 [T]^1 [M]^0$$

rispetto alle unità di misura della serie ea, K, D_N risulta

$$[L]^0 [T]^1 [M]^0 = [[M]^{-1} [T]^{-1}]^\beta [[M]]^\gamma [[L]^2 [T]^{-1}]^\zeta$$

da cui

$$\begin{cases} L) & 0 = 2\zeta \\ T) & 1 = -\beta - \zeta \\ M) & 0 = -\beta + \gamma \end{cases}$$

e risulta

$$\begin{cases} L) & \zeta = 0 \\ T) & \beta = -1 \\ M) & \gamma = -1 \end{cases}$$

Pertanto si ottiene:

$$\tilde{t} = eaKt. \quad (2.10)$$

Coordinata spaziale x

$$[x] = [L]^1[T]^0[M]^0$$

rispetto alle unità di misura della serie ea, K, D_N risulta

$$[L]^1[T]^0[M]^0 = [[M]^{-1}[T]^{-1}]^\beta [[M]]^\gamma [[L]^2[T]^{-1}]^\zeta$$

da cui

$$\begin{cases} L) & 1 = 2\zeta \\ T) & 0 = -\beta - \zeta \\ M) & 0 = -\beta + \gamma \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} L) & \zeta = \frac{1}{2} \\ T) & \beta = -\frac{1}{2} \\ M) & \gamma = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Pertanto, la forma adimensionale della coordinata spaziale, x , é:

$$\tilde{x} = \sqrt{\frac{eaK}{D_N}} x. \quad (2.11)$$

Velocità di convezione sperimentata dalle prede v_N

$$[v] = [L]^1[T]^{-1}[M]^0$$

rispetto alle unità di misura della serie ea, K, D_N si ha

$$[L]^1[T]^{-1}[M]^0 = [[M]^{-1}[T]^{-1}]^\beta [[M]]^\gamma [[L]^2[T]^{-1}]^\zeta$$

da cui

$$\begin{cases} L) & 1 = 2\zeta \\ T) & -1 = -\beta - \zeta \\ M) & 0 = -\beta + \gamma \end{cases}$$

$$\begin{cases} L) & \zeta = \frac{1}{2} \\ T) & \beta = \frac{1}{2} \\ M) & \gamma = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Si ottiene la seguente forma adimensionale:

$$\tilde{v}_0 = \frac{v_N}{\sqrt{eaKD_N}}. \quad (2.12)$$

Tasso di crescita delle prede r e tasso di mortalità dei predatori m

Dal momento che entrambe le grandezze hanno come unità di misura $[T]^{-1}$ si conduce l'analisi dimensionale per r ma si estende la medesima adimensionalizzazione anche a m .

$$[\alpha] = [L]^0 [T]^{-1} [M]^0$$

rispetto alla serie ea, K, D_N , con riferimento alle unità di misura, è possibile scrivere la seguente relazione

$$[L]^0 [T]^{-1} [M]^0 = [[M]^{-1} [T]^{-1}]^\beta [[M]]^\gamma [[L]^2 [T]^{-1}]^\zeta$$

da cui

$$\begin{cases} L) & 0 = 2\zeta \\ T) & -1 = \beta - \zeta \\ M) & 0 = -\beta + \gamma \end{cases}$$

$$\begin{cases} L) & \zeta = 0 \\ T) & \beta = 1 \\ M) & \gamma = 1 \end{cases}$$

Si ottiene la seguente forma adimensionale per il tasso di crescita delle prede:

$$\alpha = \frac{r}{eaK}, \quad (2.13)$$

e per il tasso di mortalità naturale dei predatori, si ottiene:

$$\mu = \frac{m}{eaK}. \quad (2.14)$$

Sono inoltre state definite altre due grandezze adimensionali δ e ϵ rispettivamente pari al rapporto tra le velocità di convezione e coefficienti di diffusione delle due specie:

$$\delta = \frac{v_P}{v_N} \quad (2.15)$$

$$\epsilon = \frac{D_P}{D_N}. \quad (2.16)$$

Ricapitolando, le grandezze adimensionali sono:

$$\begin{aligned} \tilde{N} &= \frac{N}{K} & \tilde{P} &= \frac{P}{K} & \tilde{t} &= eaKt \\ \tilde{x} &= \sqrt{\frac{eaK}{D_N}} x & v_0 &= \frac{v_N}{\sqrt{eaKD_N}} & \alpha &= \frac{r}{eaK} \\ \delta &= \frac{v_P}{v_N} & \epsilon &= \frac{D_P}{D_N} & \mu &= \frac{m}{eaK} \end{aligned}$$

che sostituite nelle (2.1) e (2.2) consentono di ottenere il modello adimensionale:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \tilde{N}(x, t) = -v_0 \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \tilde{N}(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} \tilde{N}(x, t) + f(\tilde{N}, \tilde{P})\tilde{N}; \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \tilde{P}(x, t) = -\delta v_0 \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \tilde{P}(x, t) + \epsilon \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} \tilde{P}(x, t) + g(\tilde{N}, \tilde{P})\tilde{P}. \quad (2.18)$$

con $f(\tilde{N}, \tilde{P})$ e $g(\tilde{N}, \tilde{P})$ definite come segue:

$$f(\tilde{N}, \tilde{P}) = \alpha(1 - \tilde{N}) - \tilde{P} \quad (2.19)$$

$$g(\tilde{N}, \tilde{P}) = \tilde{N} - \mu \quad (2.20)$$

Nel seguito della trattazione si fa riferimento alle grandezze adimensionali ma sono stati omessi per semplicità espositiva i tilde, ~

I parametri che compaiono nelle equazioni (2.19), (2.20) sono:

- rapporto tra i coefficienti di diffusione dei predatori e delle prede: ϵ ;
- tasso di mortalità dei predatori specialisti in assenza di prede: μ ;
- rapporto tra velocità di predatori e prede: δ ;
- tasso di crescita delle prede: α ;
- velocità media della corrente in forma adimensionale: v_0 .

2.2.2 Formulazione del problema matematico e risultati analitici

Nella sezione precedente è stato ricavato il modello matematico che descrive la diffusione nello spazio di prede e predatori al trascorrere del tempo. Il modello adimensionale ricavato è:

$$\frac{\partial}{\partial t} N(x, t) = -v_0 \frac{\partial}{\partial x} N(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} N(x, t) + f(N, P)N; \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = -\delta v_0 \frac{\partial}{\partial x} P(x, t) + \epsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, t) + g(N, P)P \quad (2.18)$$

dove $f(N, P)$ e $g(N, P)$ sono definite nel modo seguente:

$$f(N, P) = \alpha(1 - N) - P \quad (2.19)$$

$$g(N, P) = N - \mu \quad (2.20)$$

Per la formulazione del problema matematico é necessario definire le condizioni al contorno agli estremi del dominio spaziale e le condizioni iniziali.

Relativamente alle condizioni al contorno all'estremità di monte del dominio si ipotizza che sia presente una barriera diffusa che impedisca sia l'ingresso che l'uscita dal sistema da parte di qualsivoglia individuo; tale condizione è descritta dall'assenza di flusso a $x = 0$; e si traduce in:

$$-v_0 N + \frac{\partial}{\partial x} N = 0, \quad (2.21)$$

$$-\delta v_0 P + \epsilon \frac{\partial}{\partial x} P = 0. \quad (2.22)$$

Considerando invece l'estremo di valle, corrispondente a $x = L$, si assume che il fiume sia molto lungo in modo che le estremità esercitino una piccola influenza su ciò che accade lungo il corso d'acqua; ciò viene espresso dalla condizione al contorno di Danckwert:

$$\frac{\partial}{\partial x} N = 0, \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} P = 0. \quad (2.24)$$

Relativamente alle condizioni iniziali le due specie sono introdotte localmente nel dominio spaziale secondo una configurazione iniziale che vede un nucleo di predatori (più piccolo) inglobato all'interno di un nucleo di prede. Entrambe le popolazioni sono soggette ad un flusso della corrente verso valle. La figura 2.1 mostra le condizioni iniziali. Matematicamente le condizioni iniziali

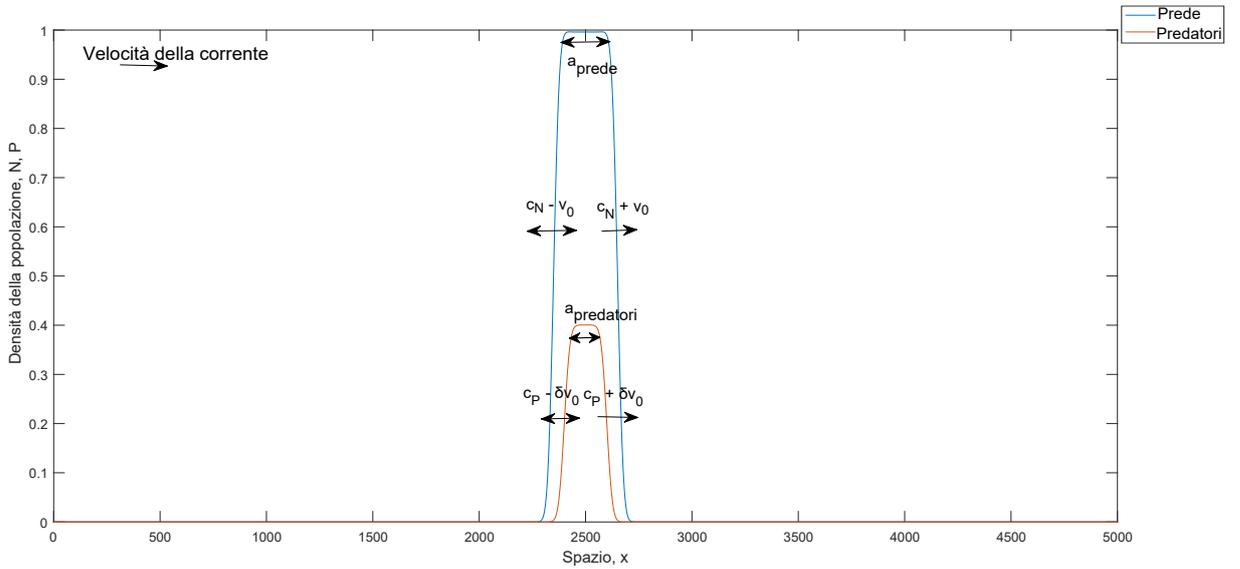


Figura 2.1: Condizioni iniziali per prede e predatori. I fronti d'onda possono procedere sia verso valle che verso monte con velocità di invasione pari a $C_N = c_N \pm v_0$ per le prede e $C_P = c_P \pm \delta v_0$ per i predatori, con $\delta = \frac{v_P}{v_N}$

sono descritte da

$$N(x, t = 0) = (K/2 - (K/2) * erf((abs(x - L/2) - a_{prede})/30)), \quad (2.25)$$

$$P(x, t = 0) = (0.2 - 0.2 * erf((abs(x - L/2) - a_{predatori})/30)) \quad (2.26)$$

dove L indica la lunghezza del dominio e a_{prede} e $a_{predatori}$ sono indicate in figura 2.1.

Le prede si trovano alla carrying capacity all'istante iniziale $t = 0$; la presenza dei predatori all'interno del dominio spaziale, tuttavia, dà origine, a partire dall'istante temporale successivo, ad una depressione nel profilo delle prede in corrispondenza della zona in cui si trovano entrambe le specie. La figura 2.2 riporta la densità di prede e predatori a $t = 10$, ed è visibile la depressione nel profilo delle prede in corrispondenza della zona in cui sono presenti i predatori.

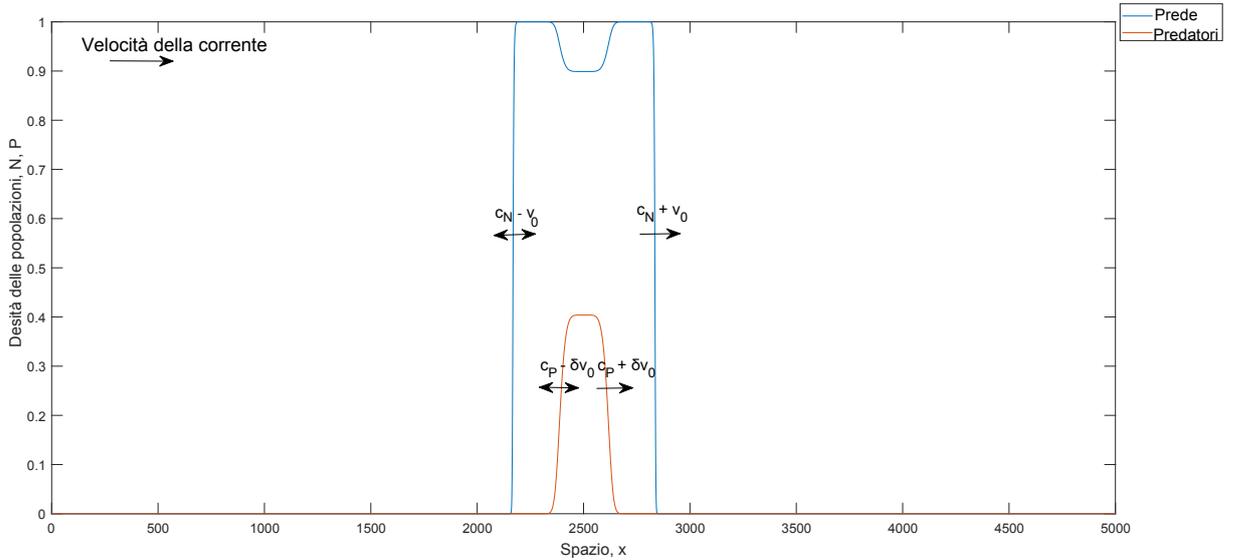


Figura 2.2: Profili di prede e predatori a $t = 10$. La presenza del nucleo di predatori nella zona centrale del dominio determina un abbassamento del profilo delle prede

Il fenomeno di diffusione delle specie all'interno di un ambiente è regolato da due quantità differenti: (i) la velocità di reazione-diffusione, indicata con c_N e c_P rispettivamente per prede e predatori, e (ii) la velocità di invasione o celerità dei fronti d'onda, C_N e C_P .

La (i) velocità di reazione - diffusione rappresenta la velocità con cui una popolazione introdotta localmente si diffonde all'interno dell'habitat circostante.

Per comprendere, invece, il significato della (ii) celerità è necessario definire preliminarmente il concetto di onda.

Le onde sono particolari soluzioni delle equazioni differenziali alle derivate parziali del modello matematico, invarianti alla traslazione, che collegano uno stato stazionario (assenza di invasione) ad un altro (invasione di prede e predatori) mantenendo costante la propria forma e muovendosi con una velocità costante C , detta celerità, all'interno del dominio spaziale.

Le soluzioni del sistema (2.17), (2.18) sono delle onde di prede e predatori che si propagano all'interno del dominio spaziale.

Nel caso in cui il fiume abbia velocità $v_0 = 0$, il modello (2.17), (2.18) si semplifica in un modello

di reazione - diffusione e le onde si propagano con celerità minime C_N e C_P pari a c_N e c_P , ovvero

$$C_N = c_N \quad (2.27)$$

$$C_P = c_P. \quad (2.28)$$

Se il fiume ha, invece, una velocità v_0 non nulla, è presente una componente di trasporto convettiva; i fronti d'onda di prede e predatori si propagano in due direzioni:

- verso monte, con una velocità decrementata della velocità della corrente;
- verso valle, con una velocità incrementata della velocità del flusso.

In particolare, le celerità dei fronti d'onda rispettivamente di prede e predatori risultano essere pari a:

$$C_N = c_N \pm v_0 \quad (2.29)$$

$$C_P = c_P \pm \delta v_0 \quad (2.30)$$

Qualora la velocità della corrente v_0 sia maggiore del termine di reazione-diffusione, la celerità dell'onda che procede verso monte assume valore negativo, ovvero il fronte d'onda non è più in grado di risalire la corrente; questo potrebbe determinare l'assenza di una delle due specie dal corso d'acqua anche per lungo tempo. Lo scenario appena descritto viene indicato con il termine *dilavamento*.

Nella figura 2.1 il possibile duplice verso di propagazione del fronte d'onda più a monte è espresso dalla doppia freccia. Le celerità dei fronti che procedono verso valle sono, invece, sempre positive.

Le condizioni iniziali scelte danno origine a due possibili scenari per ciascuno dei quali è stato ricavato il valore minimo delle velocità di reazione-diffusione.

Diffusione delle prede in assenza dei predatori ($P = 0$)

Con riferimento al caso in cui le prede siano libere di diffondersi sia verso monte che verso valle in uno spazio vuoto; la (2.17) diventa:

$$\frac{\partial}{\partial t} N = -v_0 \frac{\partial}{\partial x} N + \frac{\partial^2}{\partial x^2} N + (\alpha(1 - N))N \quad (2.31)$$

che corrisponde al modello di Fisher, ma con il contributo dovuto alla convezione; ne deriva che il minimo della velocità di reazione diffusione è:

$$\begin{aligned} c_N &= 2\sqrt{f(0,0)} \\ &= 2\sqrt{\alpha} \end{aligned} \quad (2.32)$$

con $f(N, P)$ definita come in (2.19)(Fisher, Kolmogorov et al.).

Diffusione dei predatori in uno spazio in cui sono già presenti le prede

Assumendo che le prede si trovino alla carrying capacity, ovvero $N \sim 1$ la (2.20) diventa:

$$\frac{\partial}{\partial t} P = -\delta v_0 \frac{\partial}{\partial x} P + \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} P + (1 - \mu)P \quad (2.33)$$

da cui (Luther, Skellam)

$$\begin{aligned} c_P &= 2\sqrt{\varepsilon g(1,0)} \\ &= 2\sqrt{\varepsilon(1 - \mu)} \end{aligned} \quad (2.34)$$

con $g(N, P)$ come definita in (2.20).

La (2.34) é valida nel caso in cui la mortalità dei predatori $0 < \mu < 1$, nel caso in cui $1 < \mu$ i predatori risultano sempre estinguersi, pertanto si considera l'intervallo $0 < \mu < 1$.

Come emerge dalla figura 2.1 tra il fronte d'onda delle prede e quello dei predatori è presente una distanza che varia, con il trascorrere del tempo, in base alla celerità dei fronti C_N , e C_P . A seconda dei valori della velocità di reazione-diffusione c_N e c_p e della velocità della corrente v_0 , è possibile che le due specie coesistano, che si estinguano o che siano presenti solo le prede.

Considerando un valore di v_0 fissato, se la velocità di invasione delle prede, C_N , è maggiore rispetto a quella dei predatori, C_P , la distanza tra i fronti d'onda aumenta linearmente nel tempo: questo scenario viene chiamato *fuga*; se, al contrario, le prede diffondono nello spazio più lentamente dei predatori, la distanza tra i fronti diminuisce linearmente nel tempo fino a quando avviene la *cattura*.

Le due specie possono essere soggette alla medesima velocità della corrente e, quindi, il confronto delle velocità di invasione si riduce al confronto dei termini c_N e c_P , oppure possono sperimentare velocità della corrente differenti. Quest'ultima situazione si può verificare per diversi meccanismi: le due specie possono essere dotate di locomozione propria e pertanto aumentare l'effettiva velocità di convezione, le prede possono trascorrere il tempo all'interno di rifugi nel fiume (itshape e.g., Waters et al.,1972); tali meccanismi possono aumentare o decrementare la velocità sperimentata dalle due specie.

Nel seguito della trattazione si prende in considerazione il caso in cui la velocità della corrente sperimentata da prede e predatori sia la medesima; con riferimento alla (2.18) ciò implica $\delta = v_P/v_N = 1$.

La figura 2.3 riporta il *diagramma della velocità di invasione* che mostra l'andamento delle celerità dei fronti d'onda al variare di v_0 . In ascissa vi è la velocità della corrente adimensionale v_0 , mentre in ordinata la celerità dei fronti d'onda di prede e predatori, C_N e C_P . Il legame tra le due variabili è di tipo lineare ed espresso dalle (2.29) e (2.30).

Il diagramma è valido nel caso in cui la velocità di reazione-diffusione delle prede sia maggiore rispetto a quella dei predatori, ovvero $c_N > c_P$.

Considerando i fronti delle due specie che procedono verso monte si ha: ¹

$$C_\beta = c_\beta - v_0 \tag{2.35}$$

dove β è in luogo di N o P .

Nel diagramma in figura 2.3 la 2.35 indica due rette, una per le prede e una per i predatori, con andamento decrescente; al contrario, i fronti che procedono verso valle avranno celerità il cui andamento, nel diagramma di velocità di invasione é rappresentato da due rette crescenti. All'aumentare della velocità della corrente le celerità dei fronti d'onda divergono linearmente con pendenza ± 1 .

Per $v_0 = 0$ la celerità del fronte d'onda di ciascuna specie è la medesima sia verso monte che verso valle e coincide con i termini di reazione-diffusione che definiscono anche l'intercetta con l'asse verticale. I parametri che compaiono delle (2.17), (2.18) per i quali è stato tracciato il diagramma

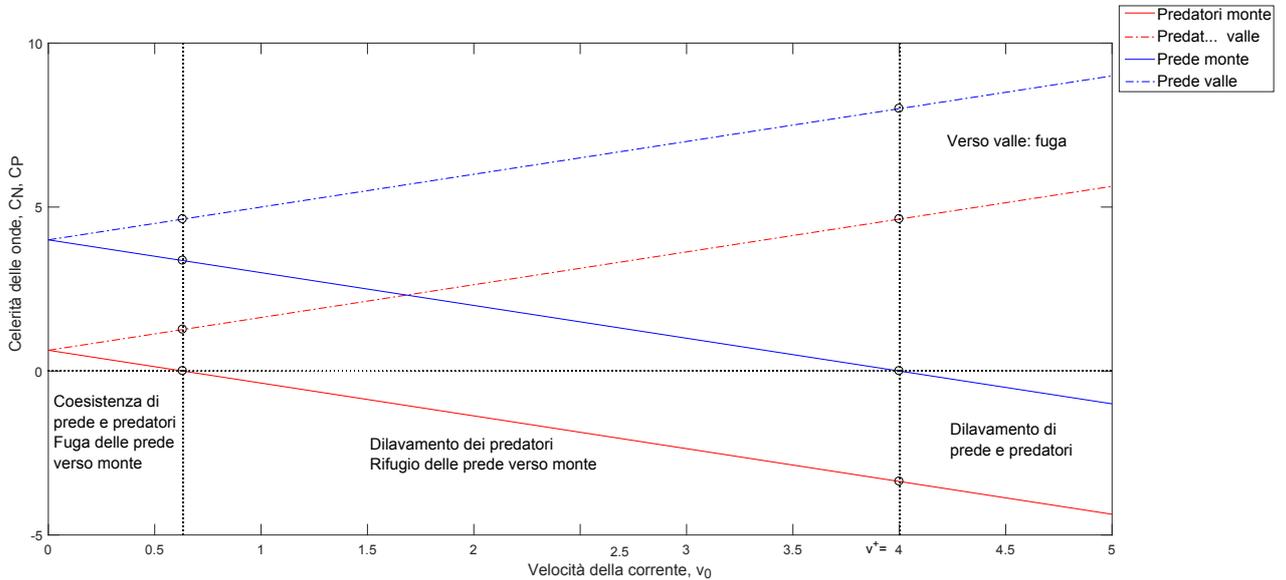


Figura 2.3: Diagramma di velocità di invasione, valido per predatori specialisti e $c_N > c_P$ e parametri delle (3.3), (3.4) pari a $\varepsilon = 1$, $\mu = 0.9$, $\delta = 1$, $\alpha = 4$

di velocità di invasione sono:

$$\varepsilon = 1; \quad \mu = 0.9; \quad \delta = 1; \quad \alpha = 4;$$

Con riferimento alle (2.32) e (2.34), sulla base della scelta dei parametri effettuata, per $v_0 = 0$, i due valori di velocità di reazione-diffusione per i fronti d'onda delle prede e dei predatori valgono

¹Si ricorda che $\delta = 1$ pertanto è stato omesso per semplicità espositiva.

rispettivamente:

$$c_N = 2\sqrt{4} = 4, \quad (2.36)$$

$$c_P = 2\sqrt{1(1 - 0.9)} = 0.632456. \quad (2.37)$$

Tali valori definiscono le intercette con l'asse verticale.

In base alla velocità della corrente è possibile che coesistano prede e predatori, che persista una sola delle due specie o che entrambe si estinguano.

Partendo dal presupposto che la persistenza delle specie nel corso d'acqua dipende dalla velocità di invasione del fronte d'onda che procede verso monte, le considerazioni sui campi di esistenza dei diversi scenari che si possono verificare sono fatte sulla base delle celerità dei fronti che avanzano in tale direzione. Con riferimento alla figura 2.3, esistono due particolari valori di v_0 , indicati con v^* e v^+ che assumono un significato particolare nella definizione degli scenari possibili. v^* corrisponde al valore di velocità del flusso per il quale la celerità del fronte d'onda dei predatori che procede verso monte si annulla e il suo valore dipende dal valore dei parametri ϵ e μ come di seguito mostrato.

Considerando l'equazione della retta parallela all'asse delle ascisse:

$$C_P = 0 \quad (2.38)$$

e sostituendola nell'equazione della retta che esprime il legame tra celerità del fronte che procede verso monte e velocità della corrente,

$$C_P = c_P - v_0\delta \quad (2.39)$$

si ottiene

$$-c_P = -v_0\delta. \quad (2.40)$$

Dalla (2.34) si ha che $c_P = 2\sqrt{\epsilon(1 - \mu)} = 2\sqrt{1(1 - 0.9)} = 0.632456$ e poiché $\delta = 1$ si ottiene

$$v^* = c_P = 0.632456. \quad (2.41)$$

Analogamente a quanto riscontrato nel caso dei predatori, esiste un valore di v_0 , indicato con v^+ , per il quale si annulla la velocità di invasione del fronte d'onda delle prede che procede verso monte. Seguendo il procedimento sopra illustrato, è possibile individuare il valore di $v_0 = v^+$. L'equazione della retta parallela all'asse delle ascisse è

$$C_N = 0 \quad (2.42)$$

e sostituita nell'equazione della retta che descrive il legame tra celerità del fronte che procede verso monte e velocità della corrente

$$C_N = c_N - v_0 \quad (2.43)$$

si ottiene

$$-c_N = -v_0 \quad (2.44)$$

poiché dalla (2.32) si ha $c_N = 2\sqrt{\alpha} = 2\sqrt{4} = 4$ si ottiene:

$$v^+ = c_N = 4. \quad (2.45)$$

I valori della velocità della corrente v^* e v^+ costituiscono un discriminante tra possibili scenari differenti:

- se la velocità della corrente v_0 è inferiore a v^* , $v_0 < v^*$, sia i predatori che le prede sono in grado di risalire il fiume ed entrambe le specie coesistono. In questo caso le prede riescono a fuggire verso monte poiché hanno una velocità di reazione-diffusione maggiore dei predatori.
- Nel caso in cui la velocità della corrente sia $v_0 = v^*$, la velocità di invasione dei predatori è nulla, i predatori si trovano in una condizione di stallo, non si muovono, mentre le prede trovano rifugio verso monte in quanto non corrono pericolo di essere catturate.
- Per valori di velocità della corrente $v^* < v_0 < v^+$, i predatori non sono in grado di risalire la corrente e vengono portati verso valle; se la situazione si protrae per lungo tempo, la specie può eventualmente scomparire dal corso d'acqua. Il ramo del fiume a monte risulta essere popolato solo dalle prede il cui fronte d'onda continua a risalire la corrente.
- Per $v_0 > v^+$ anche la velocità di invasione delle prede diventa negativa, entrambe le specie sono portate verso valle e tendono asintoticamente a scomparire dal corso d'acqua.

2.3 Parametri biologici

Il passaggio dal modello dimensionale (2.1)-(2.4), a quello adimensionale (2.17)-(2.20), è stato effettuato normalizzando rispetto alla terna di grandezze dimensionalmente indipendenti $\{ea, K, D_N\}$, tuttavia non è stato fatto riferimento al valore assunto da tali parametri. Per la definizione dei parametri α e μ che compaiono nelle funzioni $f(N, P)$ e $g(N, P)$ è necessario, inoltre, indagare il valore del tasso di crescita intrinseco delle prede r e della mortalità naturale dei predatori in assenza delle prede m .

Tutte queste grandezze sono parametri biologici caratteristici del sistema in esame. La letteratura fornisce un ampio intervallo di variazione dei valori di suddetti parametri, solitamente legati ad osservazioni dirette, a seconda delle specie e delle condizioni ambientali.

Bisogna anche tener presente che gli impatti introdotti da una variazione di regime di portata del corso d'acqua possono provocare notevoli variazioni dei parametri biologici delle popolazioni che vivono nel fiume, inclusi il tasso di mortalità e il tasso di crescita delle specie strettamente dipendente dalla disponibilità di cibo.

I corsi d'acqua sono naturalmente soggetti a variazioni di portata all'interno di un ciclo idrologico, oltre a questo processo naturale dovuto alla stagionalità, possono verificarsi eventi puntuali che provocano variazioni molto brevi ed intense del regime di portata; anche la costruzione di opere idrauliche come dighe e centrali idroelettriche causa variazioni più o meno cicliche della velocità e quindi della portata del fiume. Premesso pertanto che, a causa della molteplicità di fattori che incidono sui parametri biologici che caratterizzano le specie, non è possibile giungere alla definizione univoca di un loro valore che prescindano da osservazioni dirette sul sistema in esame in modo da conoscere le sue specificità, nella trattazione seguente, seppur non esaustiva, si propongono valori plausibili che tali parametri possono assumere.

Tasso di crescita intrinseco delle prede, r

La stima del *tasso di crescita intrinseco*, r è legata ad osservazioni dirette, e dipende da fattori ambientali quali la natura del fondo che può favorire o meno la riproduzione e la disponibilità di cibo.

Nell'ipotesi di un ambiente non limitante, il tasso specifico o intrinseco di crescita è massimo; in particolare, indicando con N il numero di individui della popolazione delle prede, si ha:

$$\frac{dN}{dt} = rN,$$

ed integrando si ottiene il numero di individui al tempo t

$$N_t = N_0 e^{rt}$$

dove N_0 indica il numero di individui al tempo zero.

È possibile quindi ricavare r dalla seguente relazione:

$$r = \frac{\ln N_t - \ln N_0}{t}$$

In questo caso si assume un modello di crescita della popolazione di tipo esponenziale non realistica.

Il modello che esprime la legge di crescita realistica delle popolazioni è di tipo logistico:

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right)$$

in questo caso la crescita diminuisce quando la densità raggiunge la carrying capacity del sistema in quanto l'habitat stesso non è più in grado di supportare ulteriormente la vita, pertanto la curva di crescita diventa di tipo sigmoideale. La figura 2.4 riporta un esempio di curva di crescita esponenziale, non realistica, e di quella logistica. Lo scostamento tra le due curve rappresenta la resistenza ambientale, ovvero l'insieme dei fattori ambientali che limitano il potenziale biotico² di una specie, determinando la carrying capacity, K .

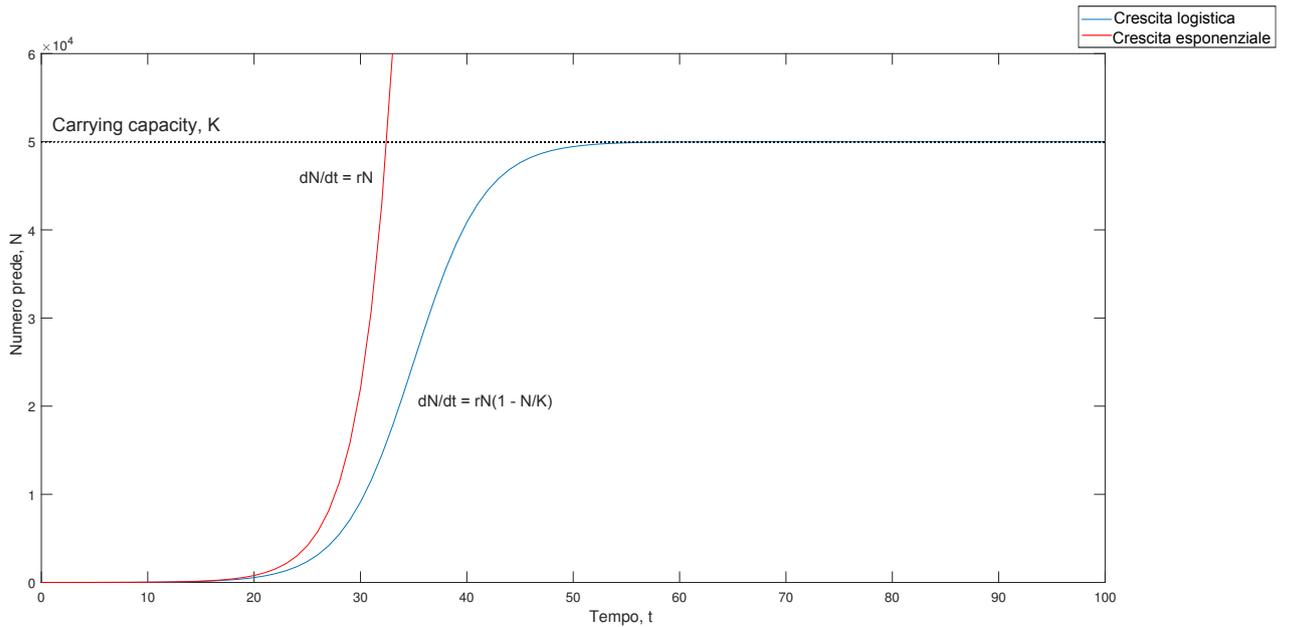


Figura 2.4: Curva di crescita di tipo esponenziale e di tipo logistico. In un ambiente ideale, la crescita degli individui di una popolazione ha una crescita di tipo esponenziale; tuttavia in realtà, a causa della resistenza ambientale, la crescita segue la curva logistica, fino al raggiungimento della carrying capacity del sistema

In linea generale r rappresenta la differenza tra il tasso di natalità specifica istantanea e il

²Il potenziale biotico di una specie rappresenta la massima capacità riproduttiva di una specie in relazione alla disponibilità di risorse. Il potenziale biotico è specie - dipendente.

tasso di mortalità istantanea.

Una stima del parametro r può essere definita a partire dai dati di biomassa disponibili.

In ambito fluviale, non sono stati reperiti dati che consentissero una stima del tasso di crescita intrinseco di una popolazione di pesci; mentre in ambito marino si possiedono più dati. Si è pertanto fatto riferimento ai valori di r ricavati per specie tipicamente marine, ma solo in termini di ordine di grandezza di questo parametro. È stato condotto uno studio Dytham et al. (2007) sui merluzzi del Mare del Nord; in particolare sono stati valutati i valori di r per le specie bentiche e pelagiche che costituiscono la dieta dei Merluzzi.

Il valore del tasso di crescita è stato ottenuto basandosi sui valori di biomassa, produzione di epifauna e piccoli esemplari di pesci pelagici forniti da Jennings et al. [2002], ed è stato calcolato, per ciascuna specie e per ciascuna classe dimensionale, come incremento annuale in termini di biomassa rispetto a quella esistente per metro quadrato. In questo caso è stato ottenuto un valore medio di $r = 2 \text{ anno}^{-1}$ sia per la specie pelagica che bentica.

Tale valore è legato alla zona di osservazione per la quale si hanno a disposizione i dati, pertanto è possibile avere tassi di crescita anche molto diversi.

Carrying capacity del sistema, K

La *carrying capacity* di un sistema rappresenta il numero massimo di individui di una specie che l'ambiente può adeguatamente sostenere per un periodo di tempo dato un definito livello delle risorse.

La stima di K è di primaria importanza per le politiche di gestione e conservazione delle specie; con riferimento al caso dei pesci, la definizione della *carrying capacity* è necessaria per le misure di controllo riproduttivo o per lo studio della probabilità di persistenza della specie.

La *carrying capacity* non è costante nel tempo in quanto sia le risorse disponibili che le necessità della specie sono soggette a variazioni temporali. Si hanno pertanto variazioni di K stagionali, annuali ma anche relative a diverse classi di età della popolazione.

La *carrying capacity* di un sistema, tuttavia, non è legata solo alla disponibilità delle risorse ma dipende anche dalla competizione tra gli individui per l'uso delle ultime. Meccanismi competitivi per lo sfruttamento delle risorse dell'habitat nascono anche tra individui appartenenti a diverse classi di età della medesima specie. Dal momento che, in linea generale, gli esemplari di età maggiore prevalgono sui più giovani, alti valori di densità delle classi più anziane determinano una diminuzione della densità delle classi più giovani, che hanno a disposizione meno risorse e meno spazio vitale. Tuttavia ci possono essere dei casi in cui l'ambiente si presenta più favorevole ad accogliere esemplari più giovani, pertanto l'occupazione dell'ambiente stesso e lo sfruttamento delle risorse da parte degli individui anziani diventa difficoltoso e la loro densità diminuisce Almodovar et al. (2012).

La stima di K richiede misurazioni dirette sul campo, le variabili che la influenzano sono molteplici e per questo non è del tutto corretto estendere un valore di K misurato ad un sistema simile, poiché in ogni caso saranno presenti specificità che possono far variare questo parametro.

Le osservazioni effettuate in stazioni di campionamento collocate leggermente più a monte o più a valle possono dare origine a valori di densità delle specie differenti e occorre anche scegliere il periodo migliore per effettuare le misurazioni in modo da non correre il rischio di trovare il fiume in secca (discorso valido per i corsi d'acqua di piccole dimensioni). In passato sono state forniti valori di K a partire dalle serie storiche di dati di massima occupazione di un ambiente. Questo approccio è tuttavia soggetto ad errori in quanto particolari esplosioni di popolazione possono falsare le stime di K e non rappresentare un livello di popolazione sostenibile da parte dell'ambiente sul medio - lungo periodo.

Generalmente, i valori di carrying capacity vengono ricavati moltiplicando l'area del corso d'acqua in esame per i valori massimi di densità compatibili con le risorse ambientali, ricavati seguendo diversi modelli. E' possibile quindi esprimere K in termini di massima densità e non in termini assoluti. Ciò consente di rendersi maggiormente conto del valore fisico rappresentato dal dato numerico, svincolandolo dalle dimensioni del fiume in esame.

Nello studio condotto da Almodovar et al. (2012) sulla Trota Marrone (*Salmo trutta*) in dodici corsi d'acqua del bacino del fiume spagnolo Aragón, sono stati stimati valori di K per differenti classi di età dei pesci. La natura tipicamente territoriale dei salmonidi e le richieste energetiche costituiscono un limite al numero di pesci che l'ambiente può supportare, pertanto la dimensione stessa e la qualità dell'habitat definisce il numero massimo di individui che il fiume può sostenere. Il concetto alla base dello studio è seguente: per bassi valori di densità, gli individui occupano larghe porzioni di territorio di elevata qualità relativamente alle esigenze della specie; con l'aumento della densità, gli esemplari sono portati a difendere il proprio territorio e necessariamente ad occupare regioni meno favorevoli e di dimensioni progressivamente minori. E' possibile definire una soglia in termini di qualità dell'ambiente superata la quale non risulta più favorevole difendere il territorio e gli esemplari mettono in atto comportamenti differenti, possono emigrare o morire. Quando la densità di una specie risulta essere tale che ciascun individuo ha a disposizione lo spazio corrispondente al minimo necessario per esplicare la propria si considera raggiunta la carrying capacity del fiume.

All'interno delle stagioni, il valore minimo di K si verifica nel periodo estivo, quando la portata del fiume è più bassa e si ha un aumento della lunghezza degli esemplari e delle richieste spaziali durante la fase di crescita. Partendo dallo stretto legame esistente tra la qualità ambientale, lo spazio richiesto dagli individui della specie e le variazioni qualitative e quantitative dell'ambiente nel tempo Almodovar et al. (2012) hanno calcolato la carrying capacity nel periodo estivo, K_i , per ciascuna classe di età della Trota Marrone, facendo riferimento ad un esemplare di dimensione media rappresentativo della classe in analisi. I risultati ottenuti hanno evidenziato una grande differenza di K da un sito all'altro oggetto di studio, da valori di $K = 14.800 \pm 1.919$ trote/ha/, riscontrato in un solo dei diciannove siti in studio, a $K = 1.835 \pm 208$ trote/ha/. Escludendo il sito maggiormente popolato, il cui valore di carrying capacity si discosta molto dagli altri, altri sette siti hanno mostrato valori di $K \in \{4.831 \pm 570 \text{ e } 6.136 \pm 1291\}$ trote/ha. La definizione del valore di K è costituita dal valore medio e dalla deviazione standard in quanto l'approccio utilizzato nello studio è stato di tipo statistico, a causa della grande incertezza che accompagna la stima

della carrying capacity.

Anche l'analisi delle carte ittiche della Regione Umbria (2010) e della Provincia di Verona (2004) ha evidenziato la grande variabilità spaziale di densità massima, da un bacino idrografico all'altro e, per uno stesso corso d'acqua, da un tratto all'altro. I dati raccolti dai campionamenti sono stati elaborati con tecniche statistiche e, anche basandosi sui dati delle serie storiche, si è pervenuti ad una stima di K . Nel caso della Regione Umbria, considerando un totale di 312 stazioni campionate, è risultato $K = 0.79 \pm 0.98 \text{ ind/m}^2$.

Rimanendo nell'ambito di valutazione delle strategie di tutela delle diverse specie ittiche, si colloca lo studio sulla carrying capacity condotto da Kuikka, Romakkaniemi e Uusitalo (2005) sui fiumi della Svezia e della Finlandia che sfociano nel mare del Nord per la definizione della politica di salvaguardia dei salmoni selvaggi.

In particolare, la letteratura fornisce stime puntuali di K il cui grado di incertezza non è noto e che spesso sottostimano il valore reale. Alcuni biologi fissano, per i fiumi svedesi e finlandesi, un valore di 0.3 – 1.5 giovani salmoni per 100 m² di fiume, tuttavia tale valore, se confrontato con le stime che si hanno per i corsi d'acqua canadesi che sfociano nell'Atlantico, circa 3 giovani salmoni 100 m², risulta essere sottostimato.

Nello studio di Kuikka, Romakkaniemi e Uusitalo (2005) sono stati ricavati valori di K seguendo un approccio statistico a partire dalle stime di esperti in materia di salmoni che hanno tenuto in considerazione dati relativi a habitat, mortalità durante la migrazione, probabilità di accoppiamento e dimensioni del tratto di fiume in esame.

In particolare per ciascun corso d'acqua, sono state costruite, da parte degli esperti le distribuzioni di probabilità della massima densità di salmoni di età appena superiore all'anno. Sulla base di tali distribuzioni è risultato un valore medio di densità pari a 4.5 ind/100m², anche se vi è una grande variabilità, alcuni fiumi hanno valori anche di 6 ind/100m² mentre altri di 2 ind/100m².

A partire dalle distribuzioni di densità sono state ricavate quelle di carrying capacity K per ciascun fiume. E' stato quindi utilizzato un approccio di tipo statistico. Un valore rappresentativo della distribuzione di probabilità che può essere confrontato con le stime puntuali di K disponibili in letteratura è la mediana. Facendo riferimento alla distribuzione di densità di probabilità aggregata su tutti i fiumi, la mediana è pari a 273.723 individui, molto più alta rispetto alla media dalle stime puntuali riscontrate in letteratura pari a $K = 95.615$ individui. Il problema dei valori puntuali di K , che risultano scostarsi grandemente dal valore ottenuto con il metodo statistico, consiste nel grado di incertezza non noto a priori e nei parametri alla base della stima non sempre definiti chiaramente, e anch'essi soggetti ad incertezza. La figura 2.5 riporta quanto ottenuto dalle stime degli esperti.

Il valore di K , come detto in precedenza, è strettamente legato alle politiche di salvaguardia e di agevolazione dell'accoppiamento adottate dai diversi paesi al fine di tutelare la biodiversità e le varie specie anche in presenza di pesca. Considerando il caso del River Brook in Canada, a seguito della chiusura della pesca a fini commerciali nel 1992, la densità di salmoni ogni 100 m² è più che raddoppiata dal 1981 al 1995 (Gibson 2002).

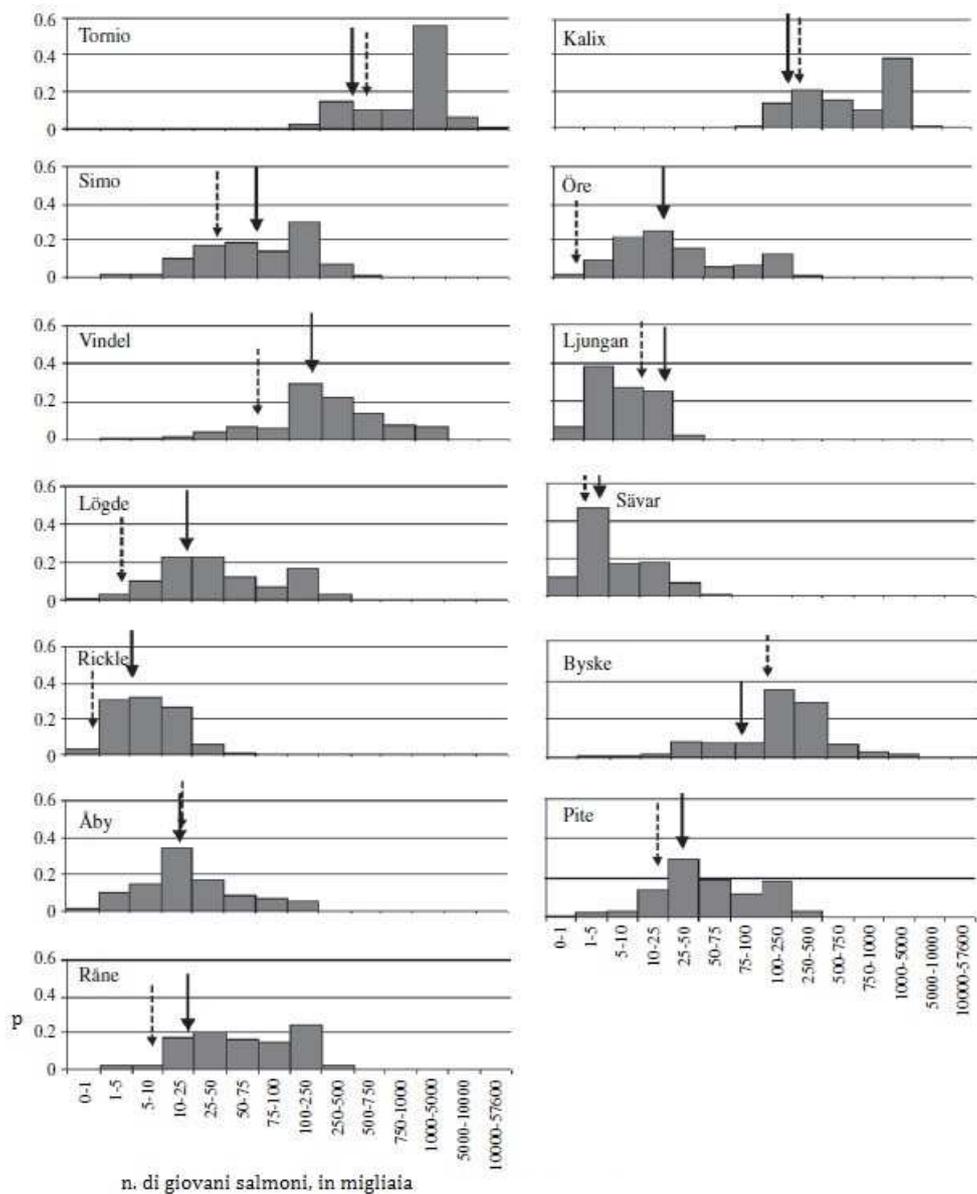


Figura 2.5: Distribuzione di probabilità della carrying capacity dei giovani salmoni nei fiumi del Mare del Nord. Le frecce piene indicano le stime puntuali di capacità precedenti al 2001, mentre le linee tratteggiate indicano le stime puntuali del 2001. L'asse x non è lineare

L'ambiente fluviale stesso e i processi che lo caratterizzano influenzano notevolmente la carrying capacity del sistema. I laghi all'interno del sistema fluviale da un lato esercitano un effetto stabilizzante sull'idrologia e sul regime di temperatura dei corsi d'acqua da essi alimentati; dall'altro, essendo fonte di seston, nutrimento di molti invertebrati acquatici, determinano un incremento della produttività dei salmoni nel tratto a valle; tale incremento dipende dalla dimensione del fiume, da quella del lago e dalla sua posizione all'interno del sistema.

La carrying capacity di un corso d'acqua è anche legata alla presenza di vegetazione; particolarmente importante è la vegetazione acquatica sommersa (SAV) (Amyot et al. 2012), che costituisce un riparo dai predatori e fonte di cibo per molte specie acquatiche oltre a ridurre la torbidità dell'acqua trattenendo i nutrienti (si parla in questo caso di autoepurazione esercitata dalla vegetazione del fiume). L'incremento della biomassa della SAV, attraverso un arricchimento moderato di nutrienti, determina l'aumento di K . L'arricchimento non deve essere eccessivo in quanto produrrebbe effetti negativi sulla SAV, fino a farla scomparire, causando un'eccessiva crescita del plankton e aumentando la torbidità dell'acqua (Gregory e Levings 2011).

Tasso di predazione delle prede, a

Il *tasso di predazione* rappresenta il numero di incontri predatore-preda che si conclude con la cattura. La definizione del parametro a è strettamente legata al caso in analisi e l'intervallo di valori che può assumere è molto ampio, da valori di $a = 0 \text{ ind}^{-1} \cdot \text{tempo}^{-1}$ a $a = 1 \text{ ind}^{-1} \cdot \text{tempo}^{-1}$, quando ogni predatore riesce a catturare tutte le prede che incontra.

Il tasso di predazione è strettamente legato in primo luogo alla disponibilità di cibo, ma anche la temperatura e la massa corporea dei predatori lo influenzano. A partire da studi sui tassi di nutrimento (Brose et al. 2012) è stato definito il legame tra a e la temperatura o la massa corporea delle prede. A questo proposito, il tasso di nutrimento, $F_{i,j}$ è definito come segue:

$$F_{i,j} = \frac{a_{i,j} N_j}{1 + a_{i,j} h_{i,j} N_j}$$

dove $a_{i,j}$ è il tasso di predazione ($m^{2o3} s^{-1}$) e $h_{i,j}$ è il tempo di trattamento che, in termini biologici rappresenta il tempo necessario al predatore per catturare, assoggettare, ingerire e digerire la preda.

Il tasso di nutrimento aumenta all'aumentare di $a_{i,j}$ mentre diminuisce al crescere di $h_{i,j}$; pertanto $a_{i,j}$ rappresenta il tasso di nutrimento per bassi valori di densità della risorsa per i quali è trascurabile $h_{i,j}$ ($F_{i,j} = a_{i,j} N_j$ per $N_j \rightarrow 0$).

Per la definizione di $a_{i,j}$ si assume che la possibilità di successo dell'incontro tra due individui sia proporzionale all'area o al volume indagato per unità di tempo dal consumatore, trascurando il movimento della risorsa. Indicando con m_i e m_j le masse del predatore e della preda, si ottiene la relazione seguente:

3

$$a_{i,j} = a_0 m_i^{\alpha^*} m_j^{\beta^*} e^{\frac{E_a(T-T_0)}{kTT_0}}$$

dove:

³Il legame tra la temperatura e $a_{i,j}$ deriva dalla Teoria Metabolica dell'Ecologia, che estende la descrizione allometrica del tasso metabolico, I , con la dipendenza dalla temperatura secondo la relazione di Arrhenius: $I = I_0 m^{0.75} e^{\frac{E_I(T-T_0)}{kTT_0}}$

- α^* e β^* sono due esponenti minori di 1, il cui valore dipende dalla velocità di movimento del consumatore e dalla area o volume di ricerca del consumatore;
- E_a : energia di attivazione, descrive l'aumento esponenziale nel metabolismo con la temperatura;
- k : costante di Boltzmann;
- T : temperatura assoluta;
- T_0 : valore di temperatura fissato per avere l'intercetta della relazione della temperatura diversa da 0.

Un altro fattore che incide sul tasso di predazione è la torbidità dell'acqua; alte concentrazioni di particelle solide sospese in acqua possono risultare dannose per i pesci fino a causarne la morte, mentre valori bassi agevolano notevolmente la sopravvivenza delle specie acquatiche riducendo il rischio di predazione in conseguenza alla diminuzione della visibilità.

Gregory e Levings (2011) hanno verificato questo aspetto nello studio condotto sul Fraiser River e sul suo affluente l'Harrison River, corsi d'acqua della Columbia Britannica in Canada. Il Fraiser River, caratterizzato da una torbidità elevata, variabile tra 27 – 108 NTU (unità di torbidità nefelometriche) è uno dei principali produttori di salmoni a livello mondiale, mentre il suo affluente, l'Harrison River ha una torbidità inferiore ad 1 NTU; questi fiumi vengono in parte percorsi dai giovani esemplari di salmoni tra marzo e maggio per raggiungere il mare.

Dallo studio condotto è emerso che, mentre per il fiume più limpido il 30% del campione aveva ingerito pesci di recente, per il Fraiser River la percentuale è risultata essere pari al 10%.

In generale, anche basandosi su osservazioni dirette non è semplice definire il tasso o coefficiente di predazione, in quanto si tratta di combinare i dati reperiti analizzando il contenuto dello stomaco degli esemplari con la disponibilità di prede.

Con riferimento al caso marino, nello studio di Dytham et al. (2007) è stato considerato un di tasso di predazione delle prede pelagiche e bentiche, da parte dei merluzzi, pari a $a = 0.01 \text{ ind}^{-1} \cdot \text{anno}^{-1}$.

Efficienza di conversione trofica, e

All'interno degli ecosistemi è possibile individuare una serie o catena di organismi, dipendenti gli uni dagli altri. Il primo anello di tale catena, detta *catena trofica*, è costituito dagli *organismi produttori*; nel caso di sistemi acquatici, alla base della catena si trova il *fitoplankton* costituito alghe di grandezza microscopica, e batteri. Le dimensioni del fitoplancton sono funzionali a garantire la permanenza negli strati d'acqua più prossimi alla superficie e quindi più illuminati; infatti i produttori, sintetizzando l'energia luminosa fornita dal sole attraverso la fotosintesi, trasformano la sostanza inorganica in sostanza organica che può essere sfruttata dagli altri organismi. Oltre la metà dell'energia prodotta con la fotosintesi viene consumata dal microorganismo stesso per la respirazione mentre la restante parte viene utilizzata per l'accrescimento e la riproduzione rimanendo sotto forma di energia potenziale alimentare a disposizione degli esseri viventi appartenenti

agli anelli successivi della catena trofica. la figura 2.6 riporta una struttura tipica della catena trofica degli ambienti acquatici.

Il processo di trasferimento di energia ha sempre un rendimento minore del 100% in quanto, per il secondo principio della termodinamica, un'aliquota viene dispersa sotto forma di calore; l'*efficienza di conversione trofica*, e , rappresenta, quindi, l'aliquota di energia che da un livello trofico della catena alimentare arriva al successivo.

La definizione del valore di efficienza di conversione trofica da un livello all'altro della catena è molto complessa e presenta grande variabilità. In generale si può assumere che ad ogni passaggio si abbia una perdita energetica compresa tra il 70 – 90%; per i pesci, solitamente si assume un valore di e appartenente all'intervallo $\{0.1, 0.3\}$; nel caso in cui le condizioni siano particolarmente favorevoli, qualora, ad esempio, la fonte di nutrimento sia fornita dall'esterno (dall'uomo per esempio) fino al raggiungimento della sazietà, numerosi esperimenti hanno dimostrato che il valore di e può arrivare fino a 0.45 (Bjornsson et al., 2001).

In generale, per essere cautelativi, ma tenere in conto sia condizioni favorevoli che sfavorevoli, si possono prendere in considerazione valori di e pari a 0.3 – 0.4 come suggerito da Dytham et al. (2007).



Figura 2.6: Catena trofica tipica degli ambienti acquatici, tutti gli organismi di uno stesso livello trofico ottengono energia con lo stesso numero di passaggi.

Tasso di mortalità dei predatori in assenza delle prede, m

Il *tasso di mortalità naturale*, spesso indicata solo con mortalità naturale con il medesimo significato, di una specie ittica è la mortalità dovuta a cause come patologie, predazione, stress post-riproduttivo, carenze alimentari ed invecchiamento, ovvero comprende tutte le cause di morte ad eccezione della pesca.

La valutazione diretta del tasso di mortalità naturale presenta notevoli complessità ed è da tempo oggetto di studio, anche perché bisogna tenere in considerazione che è soggetta a variazioni

temporali e, negli ultimi trent'anni, è stato osservato un trend di mortalità crescente per diverse specie ittiche.

Con riferimento al caso marino, per il quale si dispone di un maggior numero di dati e studi in merito prevalentemente legati alle politiche di controllo della pesca intensiva, da studi effettuati nel golfo di St. Lawrence sui merluzzi dell'Atlantico, è emerso che il tasso di mortalità naturale è passato da $m = 0.1 - 0.2 \text{ anno}^{-1}$ degli anni '80 a 0.6 anno^{-1} nei primi anni 2000 (Swain, 2011; Swain et al., 2008). I motivi di questo incremento possono essere molteplici e avere cause antropogeniche, tra cui la pesca che influenza anche la mortalità naturale, o naturali, come cambiamenti dell'habitat.

La mortalità naturale può essere scomposta in diverse componenti (Hall et al. 2015), e l'influenza delle variazioni di una o alcune di queste sugli altri contributi di mortalità è stata studiata per la Platessa appartenente alla specie dei Pleuronettiformi, comunemente noti con il nome di pesci piatti. Pur essendo una specie tipicamente marina, le relazioni trovate e le componenti di mortalità sono valide anche nel caso fluviale; ciò che varia da una specie ittica all'altra sono i valori dei parametri che compaiono nelle formulazioni di seguito riportate (sono indicati i valori validi nel caso della Platessa) ma, in ogni caso, l'ordine di grandezza rimane il medesimo.

Le componenti in cui può essere scomposta la mortalità naturale sono:

- **mortalità dovuta alla predazione:** dipende dalla lunghezza dell'esemplare L (cm) come riportato in figura (2.7); si ha che

$$m_{predazione} = cL^{-d}$$

dove si può assumere $c = 2.5 \text{ anno}^{-1}$ mentre $d = 0.75$ (Andersen et al., 2006; Gislason et al., 2010; McGurk, 1986; Peterson et al., 1984). La figura 2.7 mostra l'andamento della mortalità dovuta alla predazione in funzione della lunghezza del corpo degli individui della specie. Si può assumere che tutte le componenti di mortalità naturali siano legate a $m_{predazione}$, in quanto molte attività, come la stessa fase di riproduzione e gestazione determinano un aumento di esposizione al rischio di predazione, come nel seguito illustrato;

- **mortalità legata al nutrimento:** contrariamente a quanto si potrebbe pensare, è stato osservato che, anche il nutrimento può determinare un incremento di mortalità. Se, infatti, le opportunità di nutrimento più sicure possono essere sfruttate in un primo momento, per raggiungere livelli di nutrimento superiori i pesci potrebbero esporsi a scenari più pericolosi; o ancora, alti tassi di digestione richiedono grandi quantità di ossigeno, ciò riduce la mobilità dei pesci, rendendoli facili prede. In particolare, il contributo di mortalità dovuto al nutrimento è espresso dalla seguente relazione:

$$m_{nutrimento} = \phi m_{predazione}$$

dove ϕ è una variabile che rappresenta il livello di rischio accettato dovuto al nutrimento;

- **mortalità dovuta alla riproduzione:** questa componente a sua volta può essere suddivisa in due contributi

- mortalità dovuta alla fase di accoppiamento: sono inclusi in questa la fase la ricerca del partner, il corteggiamento, e l'accoppiamento; durante queste operazioni l'individuo è esposto a predazione, pertanto si ha:

$$m_{\text{accoppiamento}} = um_{\text{predazione}}$$

dove u è il coefficiente che rappresenta il costo, in termini di mortalità, dovuto all'accoppiamento; generalmente si può assumere $u = 0.5$

- mortalità dovuta al trasporto delle uova: il trasporto di uova diminuisce la mobilità dell'individuo che quindi risulta essere più esposto ad eventuali predatori, il contributo di mortalità dovuto alla fase di gestazione è:

$$m_{\text{uova}} = m_{\text{predazione}} \frac{Q^p}{q_{\text{ref}}}$$

dove $Q = \frac{G}{W+G}$ è l'indice gonado-somatico, con G massa delle gonadi e W massa dell'individuo in assenza di gonadi e q_{ref} è un valore di riferimento tale per cui risulta:

$m_{\text{uova}} = m_{\text{predazione}}$; si può assumere $q_{\text{ref}} = 0.15$ e $p = 2$;

- **mortalità non dipendente dalle dimensioni dell'individuo:** questo termine comprende, tra le altre cause, la mortalità dovuta alle malattie, effetti ambientali, invecchiamento.

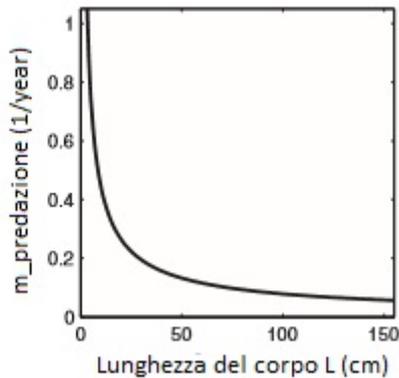


Figura 2.7: Andamento della mortalità dovuta alla predazione in funzione della lunghezza del corpo dell'individuo, L . La mortalità, come supportato da evidenze sperimentali è proporzionale a $L^{0.75}$

Lo studio condotto da Holt e Jorgensen (2013) ha dimostrato che la variazione dei parametri che compaiono nelle formule sopra riportate determina non solo una variazione della mortalità naturale, ma anche un cambiamento nelle *life history* dei pesci; ad esempio un incremento del parametro u che indica un costo maggiore, in termini di mortalità, legato all'accoppiamento, implica una maturazione ritardata e accoppiamento tra individui di dimensioni maggiori.

Al di là delle singole componenti in cui può essere scomposta la mortalità naturale, il cui

studio può essere interessante per capire la life history di una specie, per la stima di m la letteratura fornisce numerose formule empiriche ad uno o più parametri quali l'età massima t_{max} degli individui, la temperatura dell'acqua, T , il coefficiente di crescita, K , o ancora parametri specifici legati alla dimensione degli individui, come la dimensione asintotica di Von Bertalanffy, L_∞ .

Osservazioni dirette hanno dimostrato che la mortalità è strettamente dipendente dalla dimensione e dall'età dei pesci; tuttavia, è stato constatato che definire anche un unico valore di m che caratterizza l'intero gruppo di pesci considerato è comunque molto utile (Deroba and Schueller, 2013; Johnson et al., 2015).

Trattandosi di formulazioni empiriche, i valori di m che si ottengono presentano un ampio intervallo di variazione e definire l'affidabilità di ciascun valore non è sempre semplice.

Un grande contributo in merito è stato dato da Hall et al. (2015) che, a partire da una base di dati di mortalità osservati di oltre 200 specie, hanno organizzato gerarchicamente le formule esistenti basandosi sulle performance offerte dalle singole e di ciascuna hanno valutato il grado di incertezza.

Dallo studio degli errori residui, ottenuti confrontando quanto ricavato dal modello di volta in volta in esame e le misure dirette di m , è emerso che le formule che stimano m basandosi sul t_{max} , laddove si possieda tale dato, sono preferibili. In particolare, la formula che viene raccomandata è quella di *Hoening*:

$$m = 4.899t_{max}^{-0.916} \text{ anno}^{-1}$$

che ha un errore stimato di 0.32.

Nel caso in cui non siano disponibili valori di t_{max} , la formula consigliata è quella di *Pauly*:

$$m = 4.118k^{0.73}L_\infty^{-0.333},$$

dove L_∞ , espressa in centimetri, è la lunghezza asintotica a cui ogni individuo tende al raggiungimento della massima età possibile della specie e k è il coefficiente di crescita che descrive il modo, se rapido o lento, con cui l'individuo tende a L_∞ .

La formula precedente consente di stimare la mortalità naturale di una specie con un errore di 0.6.

La formula di *Pauly*, tuttavia, sembra non essere adatta per le specie che hanno una rapida crescita e una fase adulta molto lunga o che non raggiungono mai valori di lunghezza vicini a L_∞ .

In generale, i modelli che stimano m a partire dai valori di temperatura dell'acqua sono da utilizzare solo in assenza di dati relativi ai parametri sopracitati e ciò è dovuto alla scarsa precisione con cui si riesce a calcolare la temperatura e a definirne un valore unico per le varie profondità.

Occorre, inoltre, tener presente che ogni parametro che compare nelle formule sopracitate ha un grado di incertezza e che pertanto, non sempre un modello a più parametri risulta essere il migliore.

La grande variabilità che caratterizza i valori di mortalità potrebbe indurre a calcolare il valor medio dei risultati ottenuti dall'applicazione di diversi modelli, tuttavia tale approccio presuppone

che le stime di m siano indipendenti tra loro (caso non sempre verificato) e che abbiano tutte lo stesso grado di affidabilità.

Gli autori di tale studio hanno creato un elenco, disponibile sul sito del Virginia Institute of Marine Science, di dati di mortalità naturale di 230 specie di pesci marine, fluviali e lacustri (dati utilizzati per testare l'affidabilità dei modelli). I valori più alti si aggirano intorno a $m = 4.5 - 5 \text{anno}^{-1}$ per la specie delle *Gobiidae* mentre quelli più bassi registrati per differenti specie sono di circa $m = 0.05 \text{anno}^{-1}$.

Oltre alle formulazioni di *Hoening* e *Pauly*, è possibile riferirsi a due altri modelli per la stima di m :

- *Modello di Alangarja*:

$$m_{0.1\%} = -\ln \frac{0.001}{T_m}$$

dove T_m è la longevità espressa in anni e $m_{0.1\%}$ indica la mortalità corrispondente all'uno per mille di sopravvivenza;

- *Modello di Rikhter & Efanov*: partendo dal presupposto che il rapporto tra $\frac{L_m}{L_\infty}$ con L_m lunghezza di prima riproduzione, ha un valore medio di circa 0.65 gli autori riscontrarono uno stretto legame tra m e T_{m50} , età di maturazione del 50% della popolazione anche detta età di maturazione massiva e formularono la seguente relazione per il calcolo della mortalità naturale delle specie ittiche:

$$m = \frac{1.521}{T_{m50}^{0.72}} - 0.155$$

I modelli di Alangarja e Rikhter & Efanov sono stati utilizzati per la stima della mortalità naturale della Alborella nei laghi di Avigliana nell'ambito dello studio per il recupero della popolazione di questa specie.

L'Alborella che fino a pochi anni fa costituiva una delle specie a maggior rilevanza commerciale all'interno dell'economia della pesca professionale dei grandi laghi sub-alpini, ha subito un drastico calo di popolazione in epoca recente pertanto sono stati avviati programmi di monitoraggio ed intervento mirati al suo recupero. Per definire le politiche di intervento è stato necessario valutare la mortalità naturale di questa specie, e, dall'applicazione dei due modelli sopracitati, a partire dalle osservazioni effettuate su un campione, prelevato tra Maggio e Giugno 2011, che includeva sia esemplari maschi che femmine di età differenti, è risultato un valore di $m = 1.37 \text{anno}^{-1}$ e $m = 1.38 \text{anno}^{-1}$. Questo studio è stato preso in considerazione in quanto la specie dell'Alborella si trova, oltre che nei laghi anche in numerosi corsi d'acqua dell'Italia centro - settentrionale. Nel caso, ancora, dei Merluzzi che popolano il Mare del Nord, da osservazioni dirette è stato ricavato $m = 0.2 \text{anno}^{-1}$, tuttavia l'aumento del rischio di vulnerabilità alle malattie e di inedia dovuto all'assenza di prede può far salire il valore di m anche fino a $m = 0.5 \text{anno}^{-1}$.

Diffusività delle prede e diffusività dei predatori, D_N , D_P

Nella fase di ricerca di cibo, molte specie animali seguono percorsi casuali in quanto le abilità

sia detettive che cognitive risultano essere limitate rispetto alla distribuzione delle prede. In questi casi, la ricerca di cibo è un processo di tipo stocastico che deve essere il più efficiente possibile per consentire non solo la sopravvivenza ma anche la crescita sana degli individui stessi (Henert 2012).

In generale, il movimento degli organismi può essere rappresentato attraverso un modello di reazione - diffusione del secondo ordine che si basa sull'ipotesi di moto Browniano.

La definizione del coefficiente di diffusione D_β , con $\beta = N, P$ è strettamente legato al sistema e alla specie in esame e la reperibilità di valori di diffusività in termini di ordini di grandezza risulta essere molto difficoltosa e legata ad applicazioni specifiche.

Con la presente premessa, è stato considerato lo studio condotto da Bonnefon e Roques (2016) che tratta la diffusione della Zanzara Tigre (*Aedes Albopictus*) lungo corridoi aerei del territorio Francese. Pur non trattando specie ittiche, lo studio si è rivelato uno strumento utile e molto versatile, e ciò lo ha reso adatto, con opportune considerazioni, anche all'applicazione al sistema fluviale. In particolare, in un corso d'acqua è possibile studiare la diffusione in una unica direzione in quanto la dinamica della popolazione di sviluppa in una direzione preferenziale, così come avviene nel caso di un corridoio aereo. Nello studio è stato costruito un modello misto, monodimensionale per il corridoio aereo e bidimensionale per l'ambiente circostante e i parametri caratteristici del modello sono state definite attraverso il principio di massima somiglianza.

Dal punto di vista numerico, nell'ipotesi di percorso casuale con un cambiamento di direzione all'ora, il coefficiente di diffusione è stato calcolato attraverso la seguente espressione

$$D = \frac{\Delta y^2}{2\Delta t}$$

dove Δy rappresenta la lunghezza dello spazio percorso durante un passo temporale. La formula precedente può essere scritta in forma analoga come:

$$D = \frac{1}{2}v^2\Delta t$$

Dallo studio condotto sono emersi valori del coefficiente di diffusione $D \in \{10^{-1}, 10^4\} \text{m}^2/\text{s}$, corrispondenti a velocità medie comprese tra $v = 0.5\text{km}/\text{h}$ e $v = 105\text{km}/\text{h}$.

Considerando il caso fluviale, i valori di velocità della corrente sono generalmente compresi tra $v \in \{0.5, 2\} \text{m}/\text{s}$ ovvero $v \in \{1.8, 7\} \text{km}/\text{h}$, a cui corrispondono valori di $D \in \{10^1, 10^3\} \text{m}^2/\text{s}$. In particolare, nel caso di velocità della corrente $v_{min} = 0.5 \text{m}/\text{s}$, risulta $D = 31 \text{m}^2/\text{s}$ mentre nel caso di $v_{max} = 2 \text{m}/\text{s}$ si ottiene: $D = 503 \text{m}^2/\text{s}$. I valori di D così ottenuti sono stati ricavati considerando il passo temporale dimensionale Δt corrispondente a $\Delta t = 0.008$ adimensionale, come nel seguito illustrato.

In sintesi, pur restando la definizione dei valori dei parametri biologici un problema molto complesso e specificamente legato alle specie cui si fa riferimento e al sistema in esame, si riassumono, nella tabella 2.1 intervalli di valori ragionevoli per ciascuna grandezza presa in considerazione.

Sulla base degli intervalli di variazione dei parametri biologici riportati in tabella 2.1 sono stati scelti i valori adottati per la dimensionalizzazione spazio - temporale in modo da comprendere in termini quantitativi il fenomeno che si sta studiando dando anche una caratterizzazione alle specie di prede e predatori considerate.

Tabella 2.1: Tabella riassuntiva dei valori dei parametri biologici

parametro	valori
r	$2 - 3 \text{ anno}^{-1}$
K	$6136 \pm 1291 \text{ ind} \cdot \text{ha}^{-1} - 1835 \pm 208 \text{ ind} \cdot \text{ha}^{-1}$ da studi su Aragón, $4.5 \text{ ind}/100\text{m}^2$ ind da studi per fiumi Mar Baltico $0.79 \pm 0.98 \text{ ind}/\text{m}^2$ da carta ittica della Regione Umbria
a	$0 - 1 \text{ ind}^{-1} \cdot \text{tempo}^{-1}$ per acque torbide o limpide
e	$0.1 - 0.4$
m	$0.05 - 5 \text{ anno}^{-1}$ a seconda delle specie
D_N, D_P	$10^1 - 10^3 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ a seconda della velocità

La dimensionalizzazione è stata effettuata considerando le formule riportate nella sezione 2.2.1; in particolare, relativamente al tempo, dalla (2.10) si ha:

$$\tilde{t} = eaKt,$$

ovvero

$$t = \frac{\tilde{t}}{eaK} \tag{2.46}$$

mentre per la coordinata spaziale x , dalla (2.11) si ha

$$\tilde{x} = \sqrt{\frac{eaK}{D_N}} x$$

ovvero

$$x = \sqrt{\frac{D_N}{eaK}} \tilde{x}. \tag{2.47}$$

In particolare, i valori dei parametri biologici adottati sono stati:

- efficienza di conversione trofica e : nei corsi d'acqua naturali è ragionevole supporre $e \in \{0.3, 0.4\}$, si è quindi scelto $e = 0.35$;
- tasso di predazione a : si è assunto il valore ricavato da osservazioni dirette sulla specie dei Merluzzi, in quanto di maggior affidabilità rispetto ad un valore ipotizzato $a = 0.01\text{anno}^{-1}$;
- carrying capacity del sistema K : è stata considerata la densità media ottenuta dagli studi condotti sul bacino dell'Aragón; è stata ottenuta una densità media $d = 0.35 \text{ ind} \cdot \text{m}^{-2}$. Si è fatto riferimento ad un tratto di fiume di larghezza $l = 100 \text{ m}$ da cui è stata ricavata una densità lineare di $d = 35\text{ind} \cdot \text{m}^{-1}$. Con questi dati è risultato ragionevole un valore di K oltre le 250000 unità in quanto il tratto di fiume che si è supposto di analizzare, per le ipotesi riportate al capitolo 2 deve essere sufficientemente lungo da far sì che ciò che accade

agli estremi del dominio non influisca su ciò che accade all'interno. È stato quindi adottato $K = 280000$ individui;

- diffusività delle prede, D_N : per la definizione del valore di D_N è stata calcolata l'ampiezza temporale dimensionale del passo di discretizzazione utilizzato nelle simulazioni corrispondente a $\Delta t = 0.008$ sulla base della scelta di e, a, K , secondo la formula

$$t = \frac{\tilde{t}}{eaK},$$

dove, al posto di \tilde{t} è stato inserito $\Delta t = 0.008$. Considerando quindi un valore intermedio tra i due ottenuti nel caso di v_{min} e v_{max} è stato ottenuto: $D_N = 2.67 \cdot 10^2 \text{ m}^2/\text{s}$.

La diffusione di prede e predatori, è stata valutata, in un intervallo temporale di ampiezza $150t$ e dalla (2.46) si ha

$$t = \frac{150}{0.35 \cdot 0.01 \cdot 340000} = 55 \text{ giorni}.$$

Per maggiori dettagli sulla definizione della discretizzazione temporale e sull'intervallo di valutazione dei risultati si rimanda al capitolo 3. Relativamente alla lunghezza del dominio spaziale, avendo considerato una lunghezza totale $L = 5000$ dalla (2.47) si ha

$$x = \sqrt{\frac{8 \cdot 10^9}{0.35 \cdot 0.01 \cdot 280000}} 5000 \sim 8 \text{ km}.$$

La figura 2.8 riporta un possibile esempio reale di dominio spaziale considerato.



Figura 2.8: Dominio spaziale considerato nello studio, esempio di caso reale da foto aerea, fiume Po. Scala 1 : 50000

Capitolo 3

Metodo numerico

3.1 Generalità

Le equazioni differenziali alle derivate parziali (2.17) e (2.18) che costituiscono il modello matematico sono di tipo parabolico, il cui esempio più semplice è l'equazione del calore in una dimensione spaziale

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D_u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (3.1)$$

dove u è la temperatura e D_u è la diffusività termica.

Rispetto alla forma canonica, le (2.17), (2.18) contengono anche il termine di reazione, ovvero si presentano nella forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D_u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - f(u) = 0 \quad (3.2)$$

il termine di reazione è rappresentato dalle funzioni di crescita di prede e predatori $f(N, P)$, $g(N, P)$.

La risoluzione delle equazioni richiede la scelta di un metodo numerico; in questa trattazione è stato adottato il metodo delle differenze finite esplicito illustrato nel presente capitolo.

3.2 Metodo delle differenze finite esplicito

Il principio cardine dei metodi alle differenze finite è quello di sostituire, nell'equazione da approssimare, ad ogni derivata, spaziale o temporale, un rapporto incrementale finito, valutato in determinati punti, detti nodi, del dominio. Per l'applicazione del metodo è necessario, quindi, definire una griglia di punti nel piano (x, t) , ovvero fissare un passo di discretizzazione spaziale $\Delta x = h$, e temporale $\Delta t = k$ che consenta di individuare i punti nodali del piano $(x_m, t_n) = (mh, nk)$ per valori interi arbitrari di m, n . Data una funzione f definita sul dominio, il valore che tale funzione assume nel nodo (x_m, t_n) viene indicato con la notazione f_m^n .

Secondo lo schema di risoluzione alle differenze finite esplicito, una volta definita una discretizzazione standard del dominio spaziale e temporale, la derivata temporale può essere approssimata

con una differenza forward:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x_m, t_n) \approx \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f(x, t - \Delta t) - f(x, t)}{\Delta t}; \quad (3.3)$$

mentre le derivate temporali vengono approssimate con una differenza centrata prima e seconda:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_m, t_n) \approx \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x + \Delta x, t) - f(x - \Delta x, t)}{2\Delta x}; \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_m, t_n) \approx \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f(x + \Delta x, t) - 2f(x, t) + f(x - \Delta x, t)}{\Delta^2 x}; \quad (3.5)$$

Considerando le funzioni che descrivono l'andamento delle prede e dei predatori nello spazio e nel tempo $N(x, t)$ e $P(x, t)$, le (3.3), (3.4), (3.5) diventano:

$$\frac{\partial N}{\partial t}(x_m, t_n) \approx \frac{\partial N}{\partial t} = \frac{N(x, t - \Delta t) - N(x, t)}{\Delta t};$$

e, sostituendo $\Delta t = k$, $\Delta x = h$, considerando gli indici di spazio e di tempo rispettivamente m , n si perviene a:

$$\frac{\partial N}{\partial t}(x_m, t_n) \approx \frac{\partial N}{\partial t} = \frac{N(x_m, t_{n-1}) - N(x_m, t_n)}{k};$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}(x_m, t_n) \approx \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{N(x + \Delta x, t) - N(x - \Delta x, t)}{2\Delta x};$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}(x_m, t_n) \approx \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{N(x_{m+1}, t_n) - N(x_{m-1}, t_n)}{2h};$$

$$\frac{\partial^2 N}{\partial x^2}(x_m, t_n) \approx \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} = \frac{N(x + \Delta x, t) - 2N(x, t) + N(x - \Delta x, t)}{\Delta^2 x};$$

$$\frac{\partial^2 N}{\partial x^2}(x_m, t_n) \approx \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} = \frac{N(x_{m+1}, t_n) - 2N(x_m, t_n) + N(x_{m-1}, t_n)}{h^2};$$

Analogamente per i predatori si ha:

$$\frac{\partial P}{\partial t}(x_m, t_n) \approx \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{P(x, t - \Delta t) - P(x, t)}{\Delta t}; \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t}(x_m, t_n) \approx \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{P(x_m, t_{n-1}) - P(x_m, t_n)}{k};$$

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x_m, t_n) \approx \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{P(x + \Delta x, t) - P(x - \Delta x, t)}{2\Delta x};$$

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x_m, t_n) \approx \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{P(x_{m+1}, t) - P(x_{m-1}, t)}{2h};$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x_m, t_n) \approx \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{P(x + \Delta x, t) - 2P(x, t) + P(x - \Delta x, t)}{\Delta^2 x};$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x_m, t_n) \approx \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{P(x_{m+1}, t_n) - 2P(x_m, t_n) + P(x_{m-1}, t_n)}{h^2};$$

Esprimendo quindi con la notazione con indici ed esponenti sopra indicata la (2.17) approssimata

con le differenze finite si ottiene:

$$\frac{1}{k}(N_m^{n+1} - N_m^n) = -\frac{v_0}{2h}(N_{m+1}^n - N_{m-1}^n) + \frac{1}{h^2}(N_{m+1}^n - 2N_m^n + N_{m-1}^n) + \alpha N_m^n(1 - N_m^n) - P_m^n N_m^n; \quad (3.7)$$

$$N_m^{n+1} = \left(-\frac{v_0 k}{2h} + \frac{k}{h^2}\right) N_{m+1}^n + \left(1 - \frac{2k}{h^2} + \alpha k\right) N_m^n - P_m^n k N_m^n + \left(\frac{v_0 k}{2h} + \frac{k}{h^2}\right) N_{m-1}^n + \alpha k N_m^{n2}; \quad (3.8)$$

La (3.8) può essere riscritta in forma matriciale:

$$\overrightarrow{N^{n+1}} = A \overrightarrow{N^n} + B \overrightarrow{P^n} + C \overrightarrow{N^{n2}} \quad (3.9)$$

dove $\overrightarrow{N^n}$, $\overrightarrow{P^n}$ sono i valori di N e P al tempo t_n nei vari nodi x_1, \dots, x_m le matrici A, B, C sono così definite:

$$A = \begin{bmatrix} b & a & 0 & \dots & 0 \\ c & b & a & 0 & 0 \\ 0 & c & b & a & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \dots & 0 & c & b \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

dove i termini a, b, c valgono:

$$a = \frac{k}{h^2} - \frac{k v_0}{2h} \quad (3.11)$$

$$b = 1 + \alpha k - \frac{2k}{h^2}$$

$$c = \frac{k}{h^2} + \frac{k v_0}{2h}$$

$$B = \begin{bmatrix} d & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & & \ddots & 0 \\ 0 & & \dots & 0 & d \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

dove

$$d = -k;$$

$$C = \begin{bmatrix} e & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & & \ddots & 0 \\ 0 & & \cdots & 0 & e \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

dove

$$e = -k\alpha;$$

Per risolvere compiutamente il sistema di equazioni differenziali è necessario considerare le condizioni al contorno e quindi approssimare alle differenze finite anche le equazioni (2.21), (2.23). Il problema relativo ai bordi si ha in quanto, per approssimare la funzione nel primo nodo, si può far ricorso solamente al valore della funzione nel nodo immediatamente successivo, mentre nell'ultimo nodo si può considerare solamente la funzione definita nel nodo precedente; pertanto per $x = 0$ si è considerata una differenza forward, mentre per $x = L$, si è fatto ricorso ad una differenza backward; si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial x} &= \frac{N_{m+1}^n - N_m^n}{h}; \\ \frac{\partial N}{\partial x} &= \frac{N_m^n - N_{m-1}^n}{h}; \end{aligned}$$

La (2.21) diventa quindi

$$-v_0 N m^n + \frac{N_{m+1}^n - N_m^n}{h} = 0; \quad (3.14)$$

mentre la (2.23):

$$\frac{N_m^n - N_{m-1}^n}{h} = 0; \quad (3.15)$$

Risolvendo la (3.14) rispetto a N_{m+1}^n e la (3.15) rispetto a N_{m-1}^n si giunge a:

$$N_m^n = \frac{1}{1 + hv_0} N_{m+1}^n; \quad (3.16)$$

$$N_m^n = N_{m-1}^n. \quad (3.17)$$

Una volta calcolato il vettore $\overrightarrow{N^{n+1}}$ al passo temporale $n + 1$ secondo la (3.9), lo si ridefinisce per tenere in conto le condizioni al contorno nel modo seguente:

$$\overrightarrow{N^n} = \begin{bmatrix} N_1 \\ N^{n+1}(2 : end - 1) \\ N_{end} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

dove

$$N_1 = = \frac{1}{1 + hv_0} N_2^{n+1};$$

e

$$N_{end} = = N_{end-1}^{n+1};$$

Ovvero il primo e l'ultimo nodo di $\overrightarrow{N^{n+1}}$ vengono sostituiti dalle condizioni al contorno.

Il procedimento viene ripetuto iterativamente per tutta la durata temporale prestabilita. Relativamente ai predatori, si ha:

$$\frac{1}{k}(P_m^{n+1} - P_m^n) = -\frac{\delta v_0}{2h}(P_{m+1}^n - P_{m-1}^n) + \frac{\epsilon}{h^2}(P_{m+1}^n - 2P_m^n + P_{m-1}^n) + P_m^n(N_m^n - \mu); \quad (3.19)$$

$$\rightarrow P_m^{n+1} = \left(-\frac{\delta v_0 k}{2h} + \frac{\epsilon k}{h^2}\right)P_{m+1}^n + \left(1 - \frac{\epsilon 2k}{h^2} - \mu k\right)P_m^n + kN_m^n P_m^n + \left(\frac{\delta v_0 k}{2h} + \frac{\epsilon k}{h^2}\right)P_{m-1}^n; \quad (3.20)$$

La (3.20) in forma matriciale diventa:

$$P^{n+1} = D\overrightarrow{P^n} + E\overrightarrow{N^n}P^n \quad (3.21)$$

dove, nuovamente, $\overrightarrow{N^n}$, $\overrightarrow{P^n}$ sono i valori di N e P al tempo t_n nei vari nodi x_1, \dots, x_m , e le matrici D ed E sono così definite:

$$D = \begin{bmatrix} e & d & 0 & \dots & 0 \\ f & e & d & 0 & 0 \\ 0 & f & e & d & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & d \\ 0 & \dots & 0 & f & e \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

dove i termini d, e, f valgono:

$$d = \frac{\epsilon k}{h^2} - \frac{\delta k v_0}{2h}$$

$$e = 1 - \mu k - \frac{2\epsilon k}{h^2}$$

$$f = \frac{\epsilon k}{h^2} + \frac{\delta k v_0}{2h}$$

$$E = \begin{bmatrix} h & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & & \ddots & 0 \\ 0 & & \cdots & 0 & h \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

dove

$$h = k;$$

Tenendo in considerazione le condizioni al contorno le (2.22), (2.24) approssimate con le differenze finite backward e forward

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{P_{m+1}^n - P_m^n}{h}; \\ \frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{P_m^n - P_{m-1}^n}{h}; \end{aligned}$$

diventano

$$-v_0 P_m^n + \frac{P_{m+1}^n - P_m^n}{h} = 0; \quad (3.24)$$

mentre la (2.23):

$$\frac{P_m^n - P_{m-1}^n}{h} = 0; \quad (3.25)$$

Analogamente a quanto già illustrato per le prede, dopo aver calcolato $\overrightarrow{P^{n+1}}$, secondo la (3.21) si definisce:

$$\overrightarrow{P^n} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P^{n+1}(2 : \text{end} - 1) \\ P_{\text{end}} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

e in questo caso

$$P_1 = \frac{\epsilon}{\epsilon + \delta h v_0} P_2^{n+1};$$

e

$$P_{\text{end}} = P_{\text{end}-1}^{n+1};$$

Scelto lo schema di risoluzione alle differenze finite esplicite forward-central, si è analizzata la stabilità e la convergenza per verificare se tale schema sia appropriato ad approssimare le funzioni in esame.

Considerato lo schema forward-central, è possibile definire l'errore di troncamento $T(x, t)$ dello schema alle differenze finite sostituendo, nell'equazione approssimata, una soluzione u abbastanza regolare. Sviluppando in serie di Taylor la soluzione u in un intorno di (mh, nk) , i vari termini

che compaiono nelle (3.7), (3.19) diventano:

$$u_m^{n+1} = u_m^n + k \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + O(k^3); \quad (3.27)$$

$$u_{m+1}^n = u_m^n + h \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{h^4}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + O(h^5); \quad (3.28)$$

$$u_{m-1}^n = u_m^n - h \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{h^4}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + O(h^5). \quad (3.29)$$

Considerando la formula, valida per le prede:

$$\frac{1}{k}(N_m^{n+1} - N_m^n) = -\frac{v_0}{2h}(N_{m+1}^n - N_{m-1}^n) + \frac{1}{h^2}(N_{m+1}^n - 2N_m^n + N_{m-1}^n) + f(N_m^n, P_m^n)N_m^n$$

sostituendo le (3.27),(3.28),(3.29), si ottiene

$$T_N = u \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h}{3} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{12} h^4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + O(k^2) + O(h^3) + F(x, t) \quad (3.30)$$

che tende a 0 per $h, k \rightarrow 0$, poiché u è soluzione della (2.17). Dal momento che l'errore di troncamento

$$T_N(x, t) \rightarrow 0 \quad \text{se } h, k \rightarrow 0$$

per ogni (x, t) nel dominio di interesse, lo schema (3.7) è consistente con l'equazione (2.17).

Procedendo analogamente nel caso dei predatori, definita v una soluzione della (2.18), l'errore di troncamento è:

$$T_P = v \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - v_0 \delta \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{h}{3} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right) + \varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{12} h^4 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + O(k^2) + O(h^3) + G(x, t) \quad (3.31)$$

anche in questo caso si ha che

$$T_P(x, t) \rightarrow 0 \quad \text{se } h, k \rightarrow 0,$$

pertanto lo schema (3.19) è consistente con la (2.18). Considerando lo studio della stabilità dello schema, si fa riferimento all'analisi di Von Neumann. Maggiori dettagli in merito sono riportati in appendice A.

Considerando la (2.17) e con riferimento all'approssimazione alle differenze finite (3.8), la condizione di stabilità, ottenuta dall'analisi di Von Neumann, si traduce in:

$$\frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2}; \quad (3.32)$$

La convergenza dello schema viene valutata facendo riferimento al principio di massimo, valido per le equazioni paraboliche. Con riferimento alla (3.8), affinché il principio sia valido è necessario che i coefficienti di N_{m+1}^n , N_m^n e N_{m-1}^n siano positivi. Il termine sorgente non modifica le proprietà

fondamentali dello schema, pertanto non é incluso nell'analisi. Considerando l'equazione:

$$N_m^{n+1} = \left(-\frac{v_0 k}{2h} + \frac{k}{h^2}\right) N_{m+1}^n + \left(1 - \frac{2k}{h^2}\right) N_m^n + \left(\frac{v_0 k}{2h} + \frac{k}{h^2}\right) N_{m-1}^n + f(N_m^n, P_m^n) N_m^n, \quad (3.33)$$

deve risultare quindi:

$$1 - \frac{2k}{h^2} \geq 0; \quad (3.34)$$

condizione analoga alla (3.32).

$$\frac{v_0 k}{2h} + \frac{k}{h^2} \geq 0; \quad (3.35)$$

sempre verificato in quanto somma di valori positivi;

$$-\frac{v_0 k}{2h} + \frac{k}{h^2} \geq 0$$

si ha

$$\frac{k}{h^2} \geq \frac{v_0 k}{2h}$$

ovvero

$$\frac{1}{h} \geq \frac{v_0}{2} \quad (3.36)$$

La disuguaglianza (3.36) impone una restrizione sul passo spaziale h dipendente dal valore della velocità della corrente v_0 .

3.2.1 Definizione della discretizzazione spaziale e temporale ottimale

Vengono richiamate le condizioni necessarie per la stabilità e la convergenza dello schema forward - central adottato per approssimare le equazioni (2.17) e (2.18) ricavate.

- **Stabilità:**

$$\frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2};$$

- **Convergenza:**

$$\frac{1}{h} \geq \frac{v_0}{2}.$$

Tali condizioni impongono delle restrizioni sul passo spaziale e sul rapporto tra il passo temporale e quello spaziale. Ipotizzando di considerare come velocità limite della corrente $v_0 = v^+ = 4$, valore per cui, come emerge dal diagramma di velocità di invasione (2.3) si verifica il dilavamento di prede e predatori, si ottiene la restrizione sul passo spaziale da adottare:

$$h \leq \frac{2}{v_0} = h \leq \frac{2}{4} = 0.5 \quad (3.37)$$

La tabella 3.1 riporta le restrizioni relative ai passi spaziali e temporali, h e k , sulla base di quanto stabilito dalla (3.32) e dalla (3.37).

Tabella 3.1: Restrizioni sulla discretizzazione spaziale e temporale per garantire la stabilità dello schema di risoluzione alle differenze finite

h	k
0.1	≤ 0.005
0.2	≤ 0.02
0.3	≤ 0.045
0.4	≤ 0.08
0.5	≤ 0.0125

E' stata condotta un'analisi per individuare il passo temporale e spaziale ottimale per l'applicazione dello schema alle differenze finite forward - central. Sono stati indagati differenti rapporti $h/k = \Delta x / \Delta t$, per ciascuno dei quali sono stati definite le coppie $\{\Delta x, \Delta t\}$ e calcolate le soluzioni delle (2.17) e (2.18). Per la definizione della discretizzazione spaziale e temporale ottimale sono stati adottati due criteri:

- criterio 1: posizione dei fronti d'onda;
- criterio 2: ampiezza delle oscillazioni della celerità dei fronti.

Per ciascuno dei due criteri adottati, sono state prese in considerazione le coppie $\Delta x, \Delta t$ che verificavano il criterio consentendo di avere il minor tempo di simulazione possibile.

Sono stati analizzati diversi rapporti h/k e ne sono stati scelti in particolare due:

$$\frac{h}{k} = 40 \quad \frac{h}{k} = 50$$

. Le motivazioni della scelta risiedono nel fatto che: nel caso di rapporti h/k maggiori, come $h/k = 70$, per il rispetto della condizione imposta sul passo spaziale dalla (3.36) i valori di k sono risultati essere troppo piccoli, richiedendo tempi di simulazione di decine di minuti nel caso della coppia $\{h = \Delta x = 0.2, k = \Delta t = 0.002\}$. Rapporti h/k minori, come $h/k = 20$, pur consentendo tempi di simulazione minori, hanno dato risultati poco precisi. Maggiori dettagli in merito sono riportati alla sezione (3.2.1).

I rapporti analizzati sono stati quelli che hanno consentito il miglior compromesso tra tempi di simulazione e precisione dei risultati.

Le coppie $\frac{h}{k}$ considerate sono riportate in tabella 3.2:

Tabella 3.2: h e k testati per diversi rapporti $\frac{h}{k}$

(a) $\frac{h}{k} = 40$		(b) $\frac{h}{k} = 50$	
h	k	h	k
0.2	0.005	0.2	0.004
0.3	0.0075	0.3	0.006
0.4	0.01	0.4	0.008
0.5	0.0125	0.5	0.01

Critério 1: posizione dei fronti d'onda

La cernita delle coppie $\{\Delta x, \Delta t\}$ ottimali per ciascuno dei due rapporti $\Delta x/\Delta t$ indagati é avvenuta sulla base della posizione dei fronti d'onda di prede e predatori ad un istante temporale t fissato. Sono state calcolate le soluzioni delle (2.17), e (2.18), considerando, per semplicità, la velocità della corrente $v_0 = 0$, le soluzioni sono state valutate a $t = 200$, affinché la fase di assestamento iniziale fosse terminata.

Sono, quindi, state prese in considerazione solo le coppie di discretizzazione spaziale e temporale per le quali è stato ottenuto il medesimo risultato, a meno della tolleranza, e tra queste è stata scelta la coppia $\Delta x, \Delta t$ che consentisse di avere il minor tempo di simulazione.

Nelle tabelle 3.2(a), 3.2(b), non è stata testata la coppia corrispondente a $\Delta x = 0.1$, in quanto avrebbe richiesto tempi di simulazione dell'ordine di decine di minuti.

Le figure 3.1, 3.2 riportano i fronti d'onda di prede e predatori e l'ingrandimento relativo al fronte d'onda delle prede, calcolati per i differenti rapporti $\Delta x/\Delta t$.

Dalle immagini 3.1(b), 3.2(b) emerge come non vi sia perfetta sovrapposizione tra le soluzioni; sono stati quindi calcolati gli scostamenti percentuali, dei fronti d'onda rispetto ad un riferimento. Per ciascun rapporto $\Delta x/\Delta t$ analizzato, è stato assunto come riferimento il fronte d'onda corrispondente alla coppia $\{\Delta x, \Delta t\}$ minore ovvero $\Delta x = 0.2 \Delta t = 0.005$ nel caso di $\Delta x/\Delta t = 40$ e $\Delta x = 0.2 \Delta t = 0.004$ per $\Delta x/\Delta t = 50$.

Definito il riferimento, lo scostamento, s , di ciascun fronte rispetto a questo é stato calcolato nel seguente modo:

$$s = |x_{fronte} - x_{riferimento}| \quad (3.38)$$

dove x_{fronte} indica la posizione del fronte e il valore assoluto é stato introdotto per avere scostamenti positivi anche nel caso dei fronti che procedono verso monte.

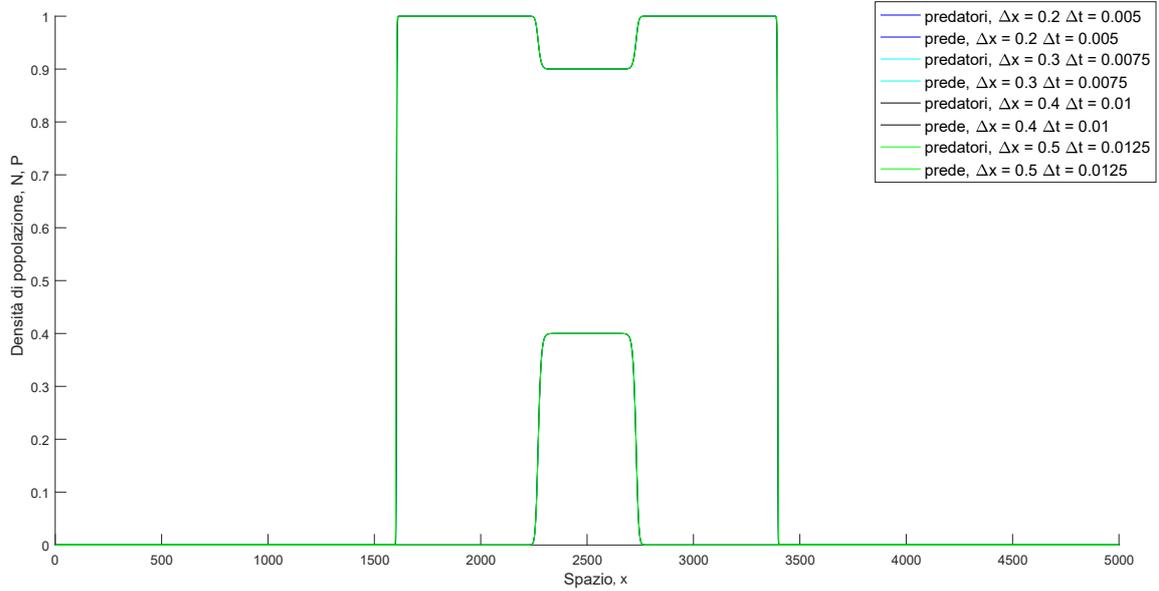
Lo scostamento in termini assoluti non é molto significativo in quanto non consente di comprendere, sulla totalità dello spazio percorso dal fronte, quanto effettivamente si discosti dal riferimento. Per questo motivo si sono calcolati gli scostamenti percentuali facendo riferimento allo spazio totale percorso dal fronte d'onda durante la durata della simulazione pari a $t = 200$.

$$s\% = 100 \cdot \frac{|x_{fronte} - x_{riferimento}|}{|x_{fronte} - x(t_0)|} \quad (3.39)$$

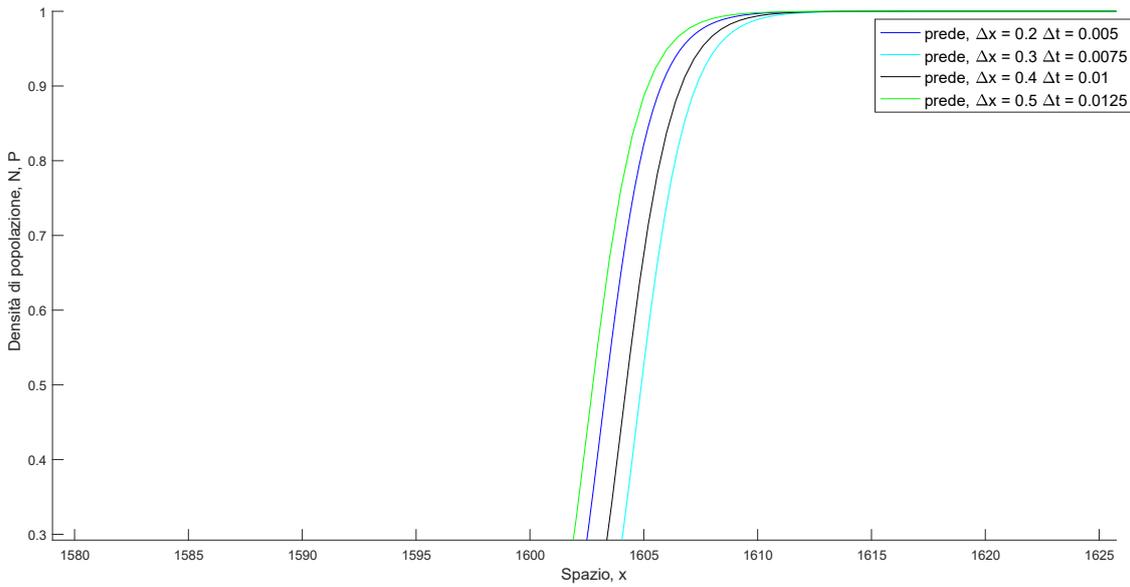
dove $x(t_0)$ é la posizione del fronte a all'istante iniziale.

Dal momento che, per lo studio della posizione dei fronti d'onda, è stata presa in considerazione una velocità della corrente nulla, $v_0 = 0$, le velocità di invasione coincidono con i termini di reazione - diffusione di prede e predatori, pari, a meno della tolleranza dello 0.04%, a $c_P = 4 c_N = 0.632456$. Lo spazio totale, $|x_{fronte} - x(t_0)|$, percorso da $t = 0$ a $t = 200$ in ciascuna delle due direzioni, verso monte e verso valle, dai fronti di prede e predatori é pari a:

- Prede: $4 \cdot 200 = 800$;
- Predatori: $0.632456 \cdot 200 = 126$.

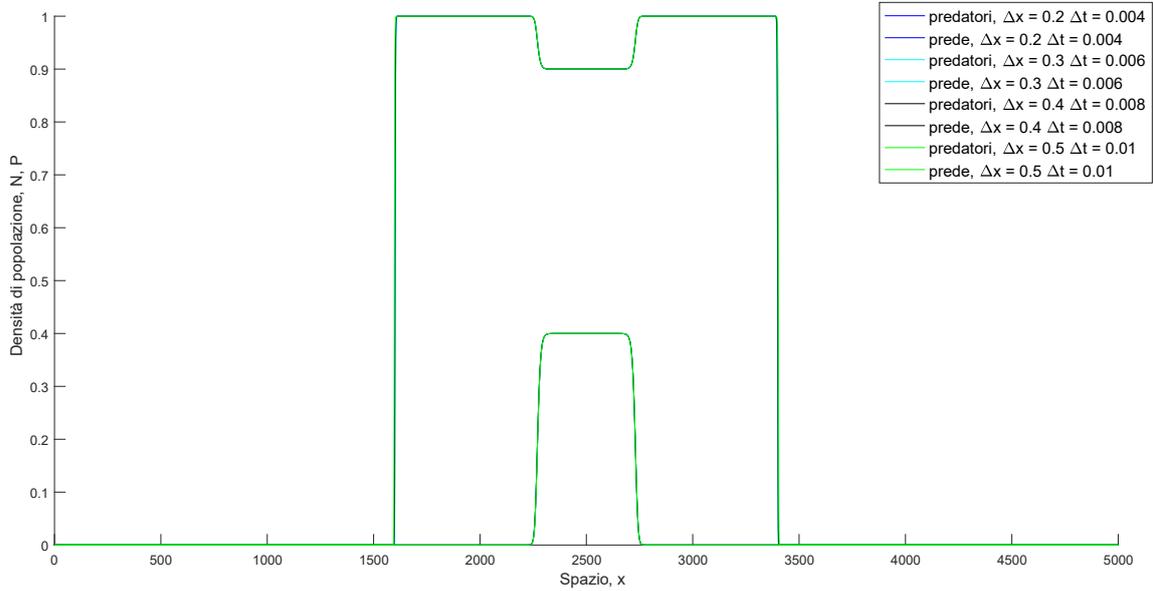


(a) Fronti d'onda di prede e predatori $\frac{\Delta x}{\Delta t} = 40$

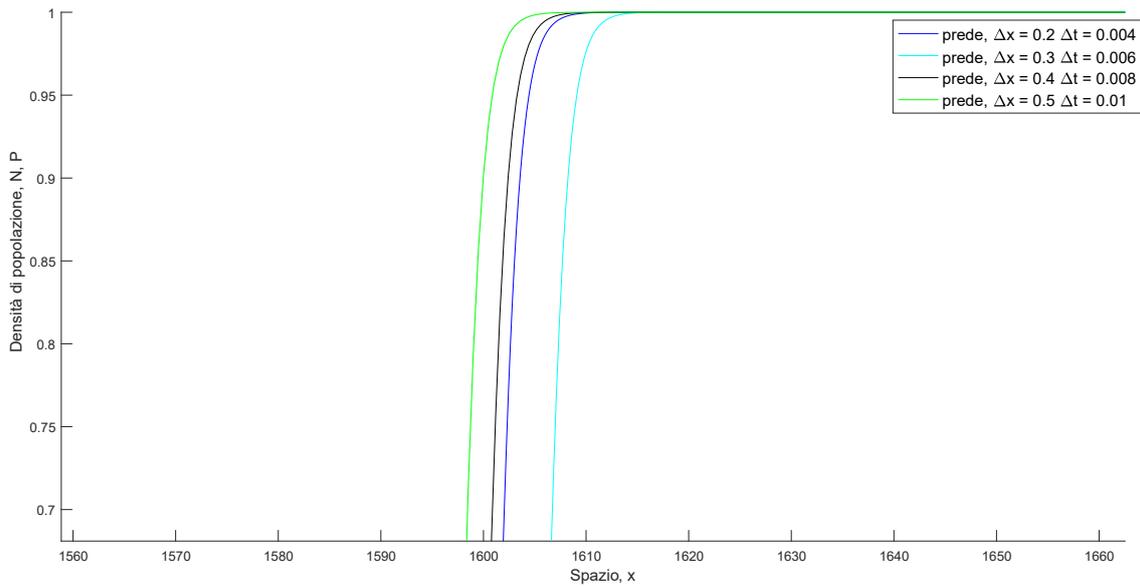


(b) Ingrandimento fronte d'onda delle prede

Figura 3.1: Fronti d'onda di prede e predatori ottenuti per differenti $\Delta x, \Delta t$ (a) ed ingrandimento fronte d'onda delle prede (b) per $\frac{\Delta x}{\Delta t} = 40$ a $t = 200$ e $v_0 = 0$. Il pannello (a) mostra che i fronti d'onda delle due specie si sovrappongono, tuttavia dal pannello (b) che riporta l'ingrandimento del fronte d'onda delle prede emerge come la sovrapposizione non sia perfetta. Sono stati calcolati gli scostamenti dei fronti ottenuti per le diverse coppie $\{\Delta x, \Delta t\}$ rispetto al fronte di riferimento corrispondente a $\{\Delta x = 0.2, \Delta t = 0.005\}$



(a) Fronti d'onda di prede e predatori $\frac{\Delta x}{\Delta t} = 50$



(b) Ingrandimento fronte d'onda delle prede

Figura 3.2: Fronti d'onda di prede e predatori ottenuti per differenti $\Delta x, \Delta t$ (a) ed ingrandimento fronte d'onda delle prede (b) per $\frac{\Delta x}{\Delta t} = 50$ a $t = 200$ e $v_0 = 0$. Il pannello (a) mostra che i fronti d'onda delle due specie si sovrappongono, tuttavia dal pannello (b) che riporta l'ingrandimento del fronte d'onda delle prede emerge come la sovrapposizione non sia perfetta. Sono stati calcolati gli scostamenti dei fronti ottenuti per le diverse coppie $\{\Delta x, \Delta t\}$ rispetto al fronte di riferimento corrispondente a $\{\Delta x = 0.2, \Delta t = 0.004\}$

Le tabelle 3.3(a) e 3.3(b) riportano gli scostamenti in termini assoluti e percentuali dei fronti d'onda di prede e predatori rispetto al fronte preso come riferimento.

Tabella 3.3: Scostamenti assoluti e percentuali rispetto al fronte d'onda corrispondente a $\Delta x = 0.2$ $\Delta t = 0.005$ per $\Delta x / \Delta t = 40$, $\Delta x = 0.2$ $\Delta t = 0.004$ per $\Delta x / \Delta t = 50$

(a) $\frac{\Delta x}{\Delta t} = 40$

Δx	Δt	s prede	s predatori	s% prede	s% predatori
0.2	0.005	0	0	0	0
0.3	0.075	1.15	0.04	0.14	0.03
0.4	0.01	0.87	0.04	0.11	0.03
0.5	0.0125	0.6	0.06	0.08	0.05

(b) $\frac{\Delta x}{\Delta t} = 50$

Δx	Δt	s prede	s predatori	s% prede	s% predatori
0.2	0.004	0	0	0	0
0.3	0.006	4.66	0.03	0.58	0.02
0.4	0.008	1.15	0.03	0.14	0.02
0.5	0.01	3.56	0.048	0.45	0.04

Volendo considerare come soglia, scostamenti dell'1% tutte le coppie $\Delta x, \Delta t$ testate vanno bene, pertanto, le possibili discretizzazioni ottimali sono

$$\Delta x = 0.5 \quad \Delta t = 0.0125; \quad (3.40)$$

$$\Delta x = 0.5 \quad \Delta t = 0.01. \quad (3.41)$$

Criterio 2: ampiezza delle oscillazioni della celerità dei fronti

Il criterio 1 ha consentito di individuare due coppie di discretizzazione spaziale e temporale. E' stato definito anche un secondo criterio di cernita delle coppie $\{\Delta x, \Delta t\}$ che fosse legato al tipo di analisi che é obiettivo dello studio: la celerità dei fronti d'onda delle due specie.

La velocità di invasione dei fronti d'onda al variare del tempo è stata calcolata con il procedimento di seguito illustrato. Si è partiti dall'assunzione di identificare la posizione di un fronte d'onda ad un istante temporale t con quella di un punto appartenente allo stesso. E' stato definito un valore target di densità, N_{target}, P_{target} per ciascuna delle due popolazioni:

$$N_{target} = \frac{N_{max} + N_{min}}{2} \quad (3.42)$$

$$P_{target} = \frac{P_{max}}{2} \quad (3.43)$$

dove N_{max} indica il valore di saturazione delle prede pari all'unità mentre N_{min} indica il valore di densità di tale specie nella zona in cui sono presenti i predatori (a partire dall'istante temporale $t_0 + \Delta t$) e vale 0.9 mentre P_{max} è la densità massima raggiunta dai predatori pari a 0.4. I valori

assunti da N_{max} , N_{min} , P_{max} e i rispettivi valori target sono riportati in figura 3.4.

I valori target di densità che sono stati ricercati sui fronti d'onda sono stati definiti in modo tale da evitare la zona corrispondente a densità prossime allo zero dove l'individuazione del target sul fronte sarebbe stata maggiormente influenzata da problemi numerici. Con riferimento ai valori di N_{max} , N_{min} , P_{max} sopra definiti, i valori di densità di prede e predatori che sono stati ricercati sui fronti al trascorrere del tempo sono stati:

$$d_{N,target} = \frac{1 + 0.8}{2} 0.8; \quad (3.44)$$

$$d_{P,target} = \frac{0.4}{2} = 0.2; \quad (3.45)$$

In realtà difficilmente ai vari istanti temporali vi saranno valori di densità di prede e predatori

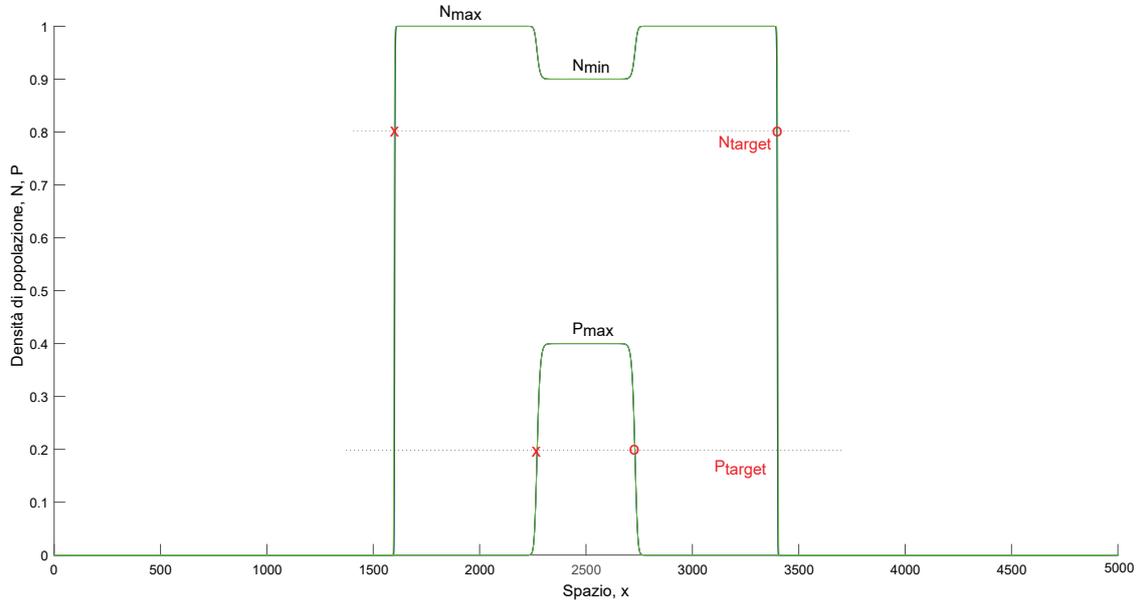


Figura 3.3: Indicazione dei valori di densità N_{max} , N_{min} , P_{max} ed individuazione della posizione del valore target di densità sui fronti per l'istante temporale $t = 200$

esattamente pari al valore target in quanto, per motivi numerici, il valore esatto non risulta uno dei punti necessariamente discreti che appartengono al fronte. Per superare questo limite è stata definita una tolleranza pari al $\pm 0.04\%$ e per ciascun istante temporale t sul fronte d'onda sono stati individuati i punti ricadenti nell'intorno, di ampiezza 0.08 del valore target.

La figura 3.4 è esplicativa di quanto descritto.

Per ricavare la ascissa del punto target, necessaria per definirne compiutamente la posizione sul fronte è stata effettuata l'interpolazione lineare tra le ascisse di tali punti è stata quindi ottenuta quella corrispondente al valore di densità da ricercare, x_{target} .

Il procedimento appena descritto è stato ripetuto per tutte le soluzioni salvate; in particolare, pur essendo $\Delta t = 0.008$, è stata definita una frequenza di salvataggio tale da permettere di

cogliere l'andamento reale della celerità dei fronti mantenendo tempi di simulazione al di sotto di una decina di minuti. Sono state salvate le soluzioni ogni $50\Delta t$, ovvero ogni

$$50 \cdot 0.008 = 0.4t; \tag{3.46}$$

Infine la velocità di invasione di ciascuna delle due specie, in entrambe le direzioni, è stata calcolata dividendo la differenza delle ascisse del punto target su due fronti d'onda successivi tra quelli salvati, per il tempo intercorso tra le due soluzioni considerate.¹

$$C = \frac{x_{target,t_{i+1}} - x_{target,t_i}}{t_{i+1} - t_i} \tag{3.47}$$

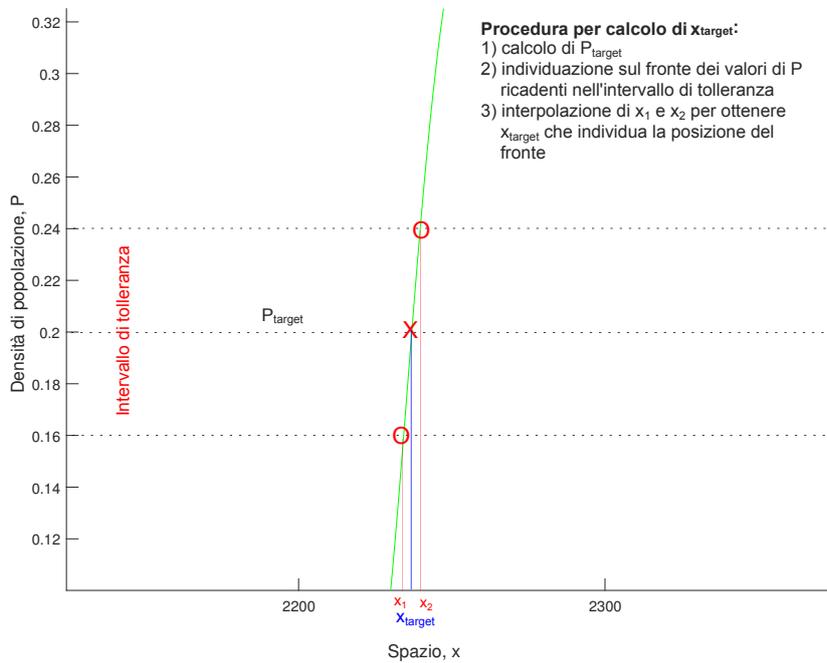


Figura 3.4: Valore target di densità di prede e predatori da ricercare e intervallo di tolleranza all'interno della quale sono stati cercati i valori di densità. Interpolando le ascisse dei punti dei fronti ricadenti all'interno della tolleranza è stata individuata la ascissa del punto target

La celerità dei fronti d'onda di prede e predatori è stata calcolata con riferimento alle sole soluzioni salvate ed è quindi definita in modo discreto, la velocità della corrente è invece definita in modo continuo per tutto l'intervallo temporale considerato. E' stato necessario considerare un numero discreto di valori di v_0 in modo da stabilire una corrispondenza biunivoca tra velocità della corrente e quella dei fronti. Per ottenere il valore di velocità della corrente ogni $0.4t$ si

¹Nelle (3.47), (2.30), gli istanti temporali t_{i+1} e t_i sono quelli corrispondenti alle due soluzioni salvate successive, ovvero lo scarto temporale tra le due soluzioni è pari a $0.4t$

è considerato il valor medio della velocità su tale intervallo temporale; questo è stato associato convenzionalmente all'istante di tempo medio sull'intervallo di ampiezza $0.4t$ (tra $t = 0$ e $t = 0.4$ è stato attribuito il valor medio di velocità a $t = 0.2$, tra $t = 0.4$ e $t = 0.8$, a $t = 0.6$ e così via).

Analizzando la velocità invasione del fronte d'onda delle prede in entrambe le direzioni, monte e valle, per i differenti valori di velocità della corrente, emergono delle oscillazioni, com'è possibile osservare, ad esempio, dalla figura 3.5 nel caso in cui la velocità della corrente sia costante e pari a v_0 . Questa patologia si verifica per entrambe le possibili coppie di discretizzazione ottimale (3.40) e (3.41) (maggiori dettagli sulla metodologia utilizzata e sui risultati ottenuti sono illustrati al capitolo 4).

Indicando con C_N la velocità di invasione delle prede, l'ampiezza dell'oscillazione è pari a

$$A_{oscill,i} = \frac{C_{N,max,i} - C_{N,min,i}}{2} \quad (3.48)$$

dove $A_{oscill,i}$ indica l'ampiezza della i -esima oscillazione, mentre $C_{N,max,i}$ e $C_{N,min,i}$ sono il massimo e il minimo locali.

Calcolate le ampiezze delle oscillazioni sull'intervallo temporale considerato, si è ricavata un'ampiezza dell'oscillazione media. Sono, quindi, state studiate le variazioni di ampiezza media delle oscillazioni al variare del Δt e del corrispondente Δx e si è osservato che, per entrambi i rapporti $\Delta x/\Delta t$ analizzati, l'ampiezza delle oscillazioni della celerità dei fronti d'onda delle prede diminuisce al decrescere del Δt e del Δx considerati.

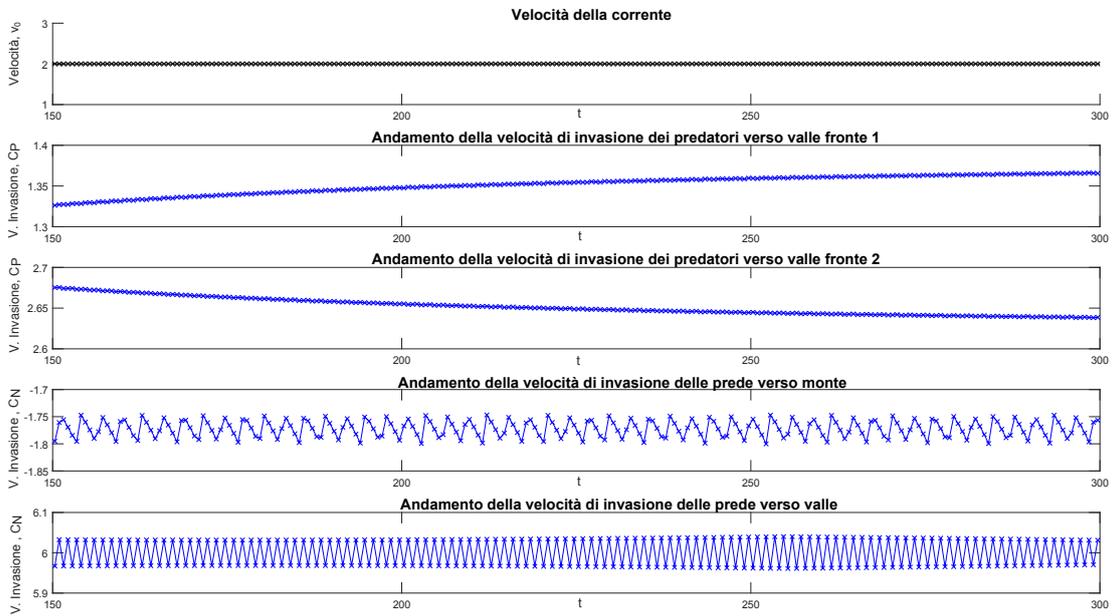


Figura 3.5: Andamento della velocità della corrente e delle velocità di invasione dei fronti d'onda di prede e predatori nell'intervallo temporale 150 – 300 per $v_0 = 2$. Discretizzazione spaziale $\Delta x = 0.5$, discretizzazione temporale $\Delta t = 0.125$

Le figure 3.6, 3.7(a), 3.7(b) riportano l'andamento dell'ampiezza di tali oscillazioni in funzione di Δx per $\Delta x/\Delta t = 40$ e $\Delta x/\Delta t = 50$.

Dalle immagini si nota che per le basse velocità del flusso, ovvero $v_0 = 0.2$, $v_0 = 0.632456$, sia preferibile scegliere la coppia $\{\Delta x, \Delta t\}$ ottimale che abbia un rapporto $\Delta x/\Delta t = 40$, mentre per velocità della corrente $v_0 = 2$ l'ampiezza delle oscillazioni risulta minore considerando coppie $\{\Delta x, \Delta t\}$ per le quali valga il rapporto $\Delta x/\Delta t = 50$.

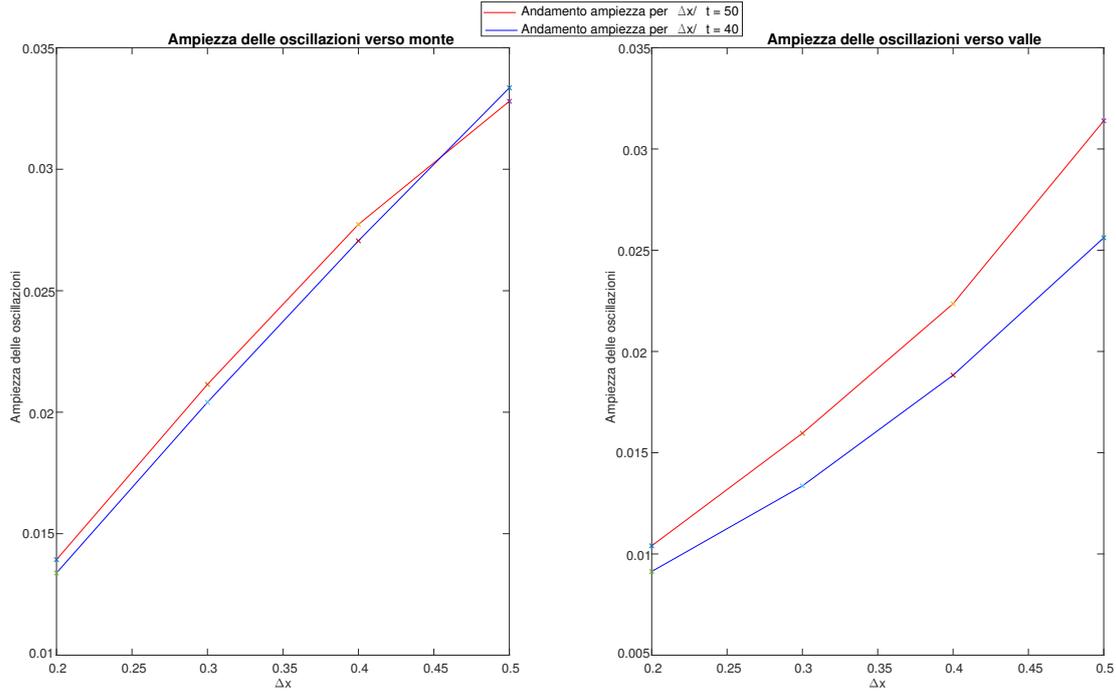


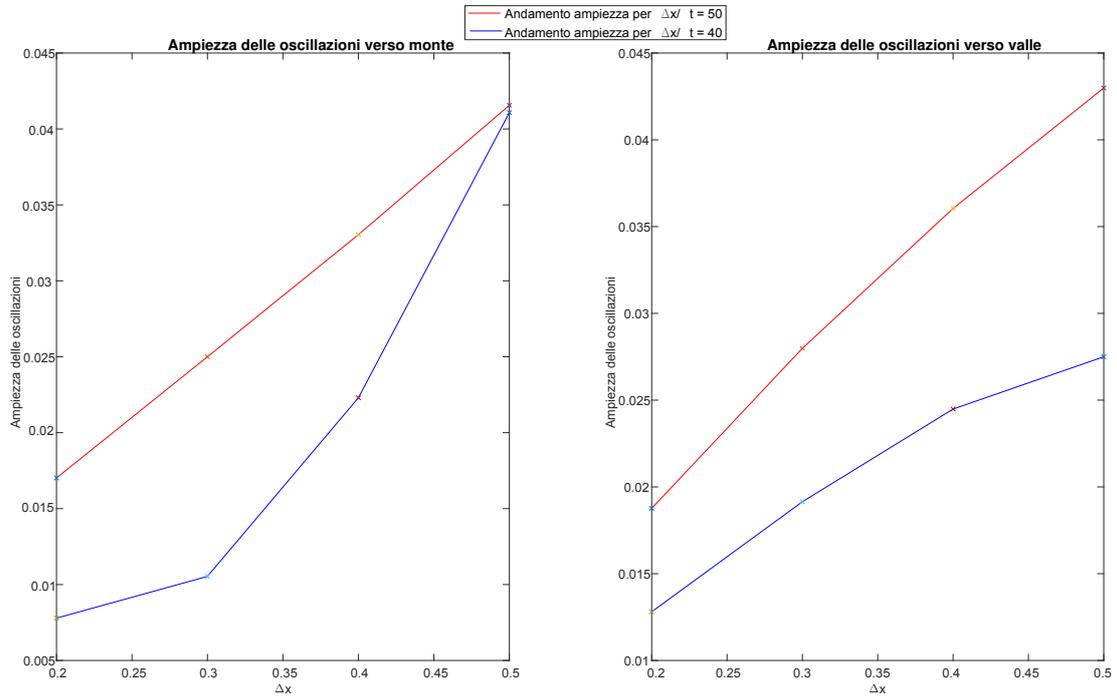
Figura 3.6: Ampiezza delle oscillazioni in funzione di Δx per velocità $v_0 = 0.2$ della corrente e rapporti $\frac{\Delta x}{\Delta t} = 40$ e $\frac{\Delta x}{\Delta t} = 50$

Per comprendere se l'ampiezza delle oscillazioni della velocità di invasione fosse eccessiva è stato valutato il rapporto

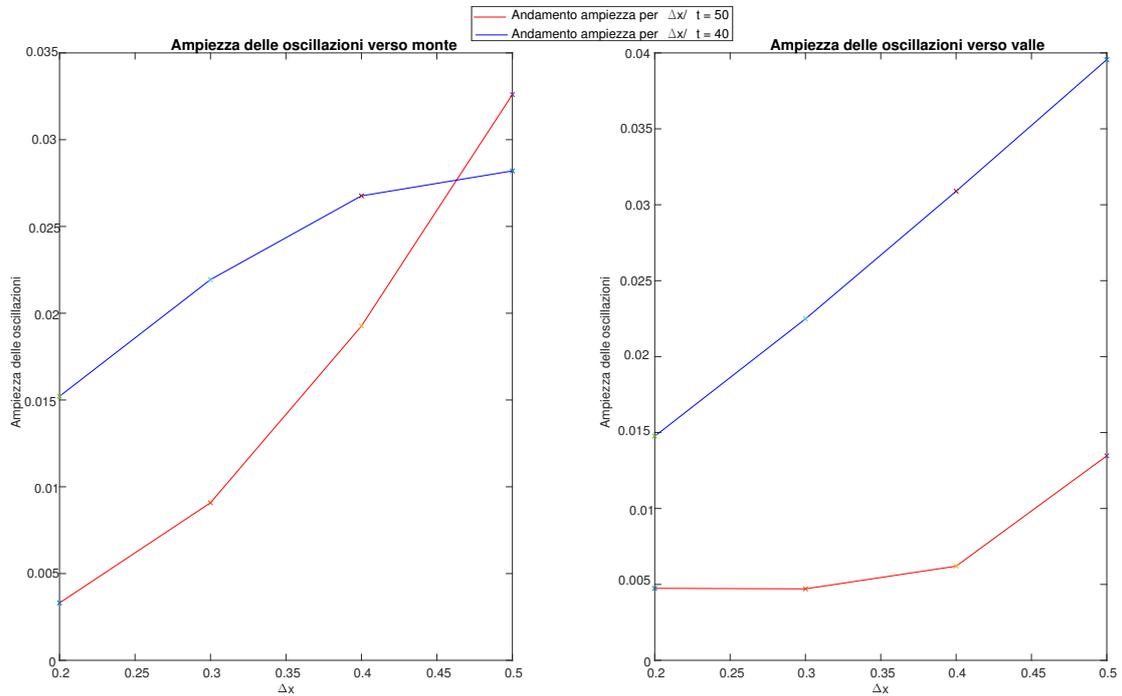
$$\frac{A_{oscill,media}}{v_0};$$

il caso più critico è quello corrispondente alla velocità della corrente minore, $v_0 = 0.2$ e, in entrambi i casi sopra analizzati, l'ampiezza delle oscillazioni delle celerità dei fronti sono intorno o addirittura maggiori del 10% della velocità media.

Dal momento che, per rapporti $\Delta x/\Delta t$ considerati, $A_{oscill,media}$ è risultato, nel caso peggiore maggiore o uguale al 10%, è stato testato un ulteriore rapporto $\Delta x/\Delta t$ minore dei rispetto ai due precedenti per provare se fosse possibile giungere a risultati soddisfacenti per quanto riguarda le oscillazioni della celerità delle prede senza aumentare i tempi di simulazione; come già osservato infatti, rapporti $\Delta x/\Delta t > 50$ aumentano la durata della simulazione per bassi valori di Δx .



(a) Ampiezza delle oscillazioni per velocità $v_0 = 0.632456$



(b) Ampiezza delle oscillazioni per velocità $v_0 = 2$

Figura 3.7: Ampiezza delle oscillazioni in funzione di Δx per velocità della corrente a) $v_0 = 0.632456$ e b) $v_0 = 2$ e rapporti $\frac{\Delta x}{\Delta t} = 40$ e $\frac{\Delta x}{\Delta t} = 50$

E' stato preso in considerazione il rapporto $\Delta x/\Delta t = 30$; in questo caso sono stati fissati i valori di Δt e si sono ricavati i corrispondenti Δx dal momento che l'operazione inversa avrebbe dato origine a valori di Δt periodici, e le approssimazioni inevitabilmente introdotte avrebbero determinato un'ulteriore perdita di precisione dei risultati. La tabella 3.4 riporta le coppie $\{\Delta x, \Delta t\}$ considerate.

Tabella 3.4: h e k testati per $\frac{h}{k} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 30$

h	k
0.12	0.004
0.18	0.006
0.24	0.008
0.30	0.01
0.36	0.012
0.42	0.014
0.48	0.016

L'ampiezza delle oscillazioni della velocità di invasione del fronte d'onda delle prede diminuisce rispetto ai casi $\Delta x/\Delta t = 40$ e $\Delta x/\Delta t = 50$; anche nel caso più critico di velocità della corrente media $v_0 = 0.2$ si ha

$$\frac{A_{oscill,media}}{v_0} < 10\%$$

fino a $\Delta t = 0.012$, come riportato in figura 3.8. I valori di ampiezza media dell'oscillazione dei fronti delle prede nelle due direzioni in funzione di Δt sono riportati in tabella 3.5

Tabella 3.5: Ampiezza delle oscillazioni della celerità dei fronte d'onda delle prede nelle due direzioni in funzione di Δt , per $\Delta x/\Delta t = 30$ e velocità media della corrente $v_0 = 0.2$

Δt	Ampiezza direz. monte	Ampiezza direz. valle
0.004	0.0052	0.0026
0.006	0.0072	0.0036
0.008	0.0088	0.0044
0.01	0.0103	0.0051
0.012	0.0113	0.0056
0.014	0.0125	0.0063
0.016	0.0131	0.0069

Considerando le ampiezze delle oscillazioni, è stata scelta come coppia ottimale quella corrispondente a

$$\Delta x = 0.24 \quad \Delta t = 0.008 \quad (3.49)$$

in quanto consente di tenere il rapporto

$$\frac{A_{oscill,media}}{v_0} < 5\%$$

e, al contempo, durata della simulazione inferiore alla decina di minuti.

La coppia $\{\Delta x = 0.24, \Delta t = 0.008\}$ è stata scelta come ottimale sulla base del criterio 2, ovvero considerando l'ampiezza delle oscillazioni della celerità.

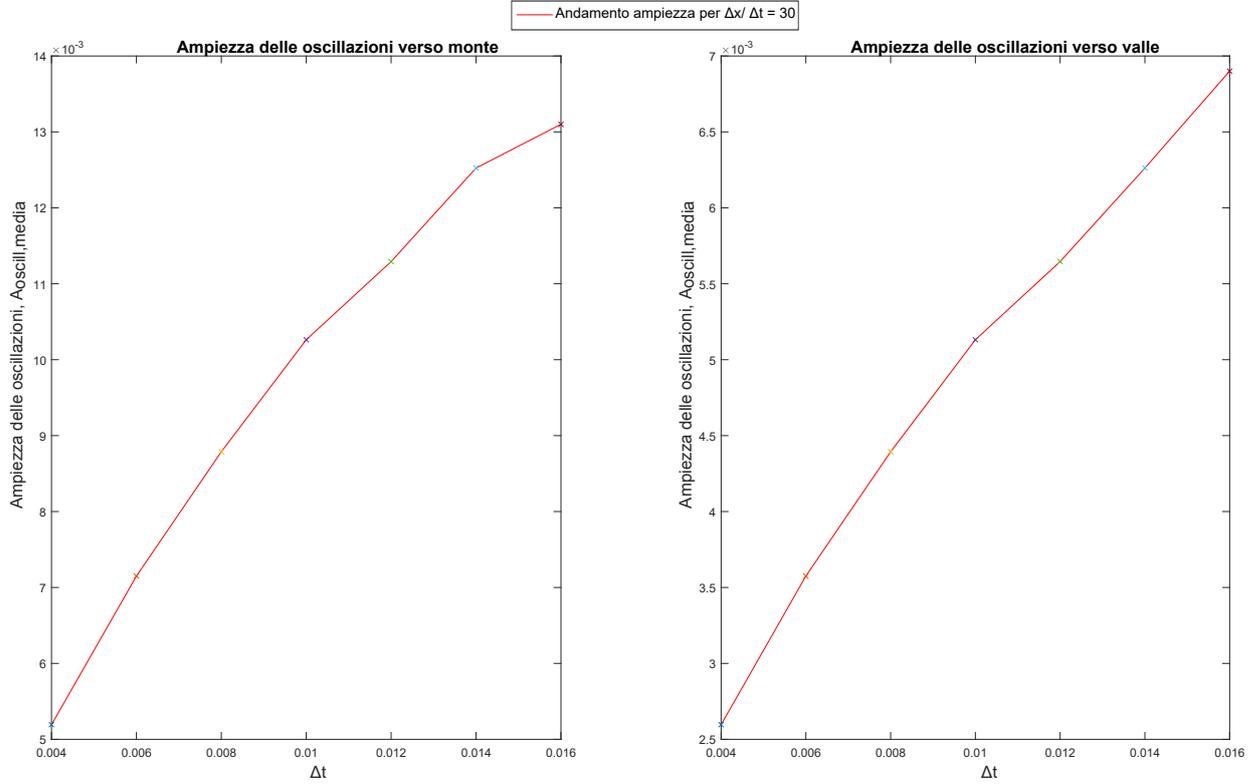
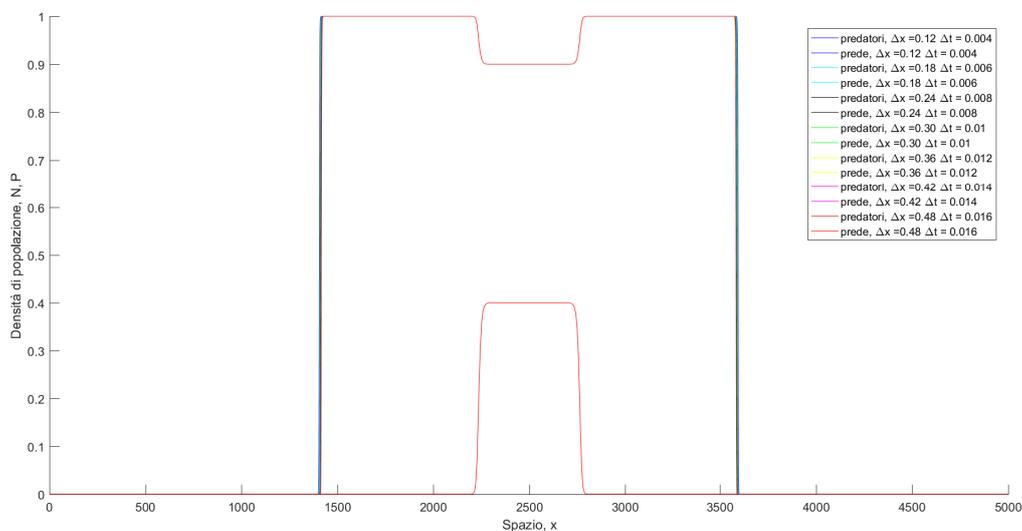
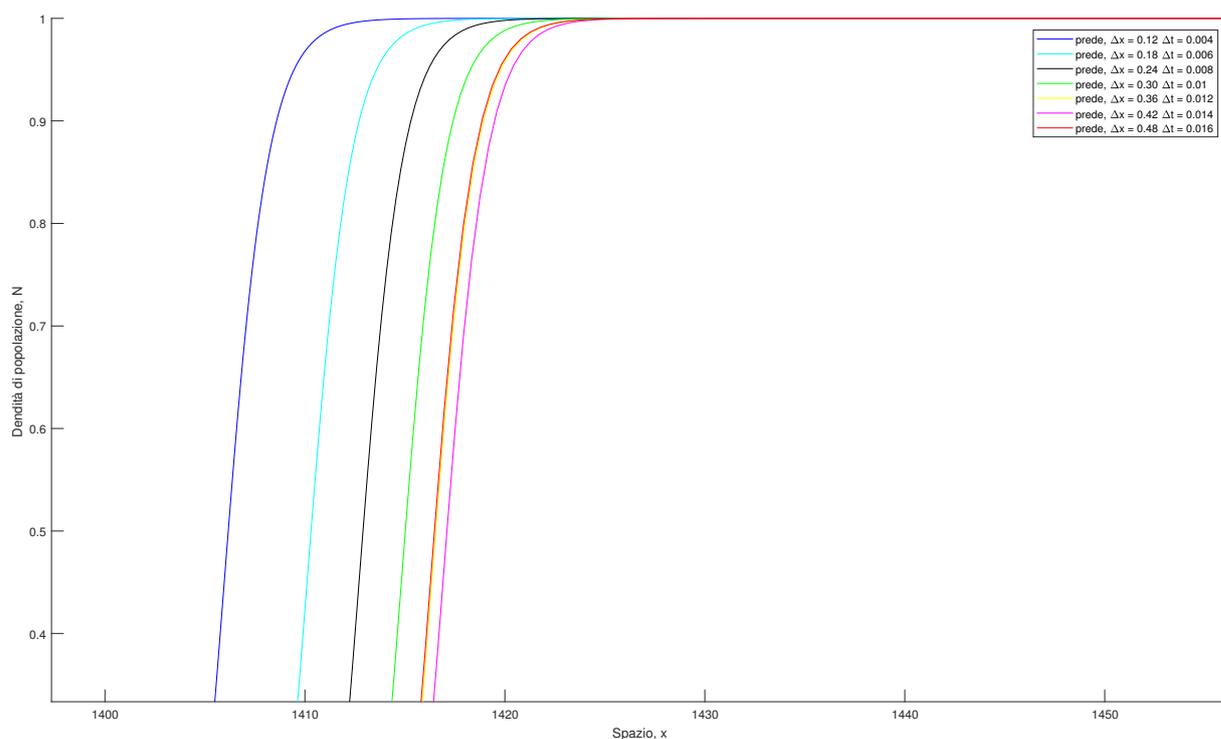


Figura 3.8: Ampiezza delle oscillazioni della celerità dei fronti d'onda delle prede nelle due direzioni in funzione di Δt , per $\frac{\Delta x}{\Delta t} = 30$ e velocità media della corrente $v_0 = 0.2$

Considerando il rapporto $\Delta x/\Delta t = 30$ è stato, infine, verificato, che le coppie che compaiono in tabella 3.4, soddisfacessero il criterio 1, relativo alla posizione dei fronti d'onda ad un istante temporale t fissato. La figura 3.9 mostra come la sovrapposizione dei fronti rimanga valida per il rapporto $\Delta x/\Delta t = 30$. In particolare, lo scostamento del fronte d'onda corrispondente alla coppia di discretizzazione spaziale e temporale scelta rispetto a quello di riferimento (che si ottiene nel caso di $\Delta x = 0.12, \Delta t = 0.004$) è pari a 0.96% per le prede e 0.05% per i predatori.

(a) Fronti d'onda di prede e predatori per $\frac{\Delta x}{\Delta t} = 30$ 

(b) Ingrandimento fronti d'onda delle prede

Figura 3.9: Fronti d'onda di prede e predatori ottenuti per differenti Δx , Δt (a) ed ingrandimento fronte d'onda delle prede (b) per $\frac{\Delta x}{\Delta t} = 40$ a $t = 200$ e $v_0 = 0$. Il pannello (a) mostra che i fronti d'onda delle due specie si sovrappongono, tuttavia dal pannello (b) che riporta l'ingrandimento del fronte d'onda delle prede emerge come la sovrapposizione non sia perfetta. Gli scostamenti dei fronti ottenuti per le diverse coppie $\{\Delta x, \Delta t\}$ rispetto al fronte di riferimento corrispondente a $\{\Delta x = 0.12, \Delta t = 0.004\}$ sono inferiori all'1%

Capitolo 4

Caso velocità della corrente costante

4.1 Generalità

La definizione della discretizzazione spaziale e temporale ottimale del dominio ha consentito di verificare con simulazioni numeriche i risultati analitici presentati nella sezione 2.2.

L'analisi dei possibili scenari di coesistenza o estinzione di predatori e prede in un corso d'acqua, viene condotto, nel presente capitolo, con l'ipotesi di velocità della corrente costante. La diffusione delle due specie all'interno del dominio viene studiata in un intervallo temporale fissato nel quale sono state valutate: l'andamento della velocità di invasione dei fronti d'onda delle due specie, lo spazio globalmente percorso e l'evoluzione temporale dei fronti.

Per le simulazioni numeriche si è fatto ricorso al software MATLAB della casa Simulink ed è stato utilizzato Wolfram Mathematica 8 come supporto alla programmazione.

4.2 Casi considerati

Per le simulazioni numeriche si è fatto riferimento ad un tratto di corso d'acqua di lunghezza $L = 5000$, sufficientemente ampio da far sì che le condizioni al bordo abbiano una piccola influenza su ciò che accade nel fiume, come spiegato al capitolo 2.

Le configurazioni iniziali di prede e predatori sono quelle di figura 2.1; i valori di velocità della corrente da studiare sono stati definiti sulla base del diagramma di velocità di invasione 4.1. I valori di v_0 sono stati scelti in modo da studiare diversi scenari di diffusione delle due specie.

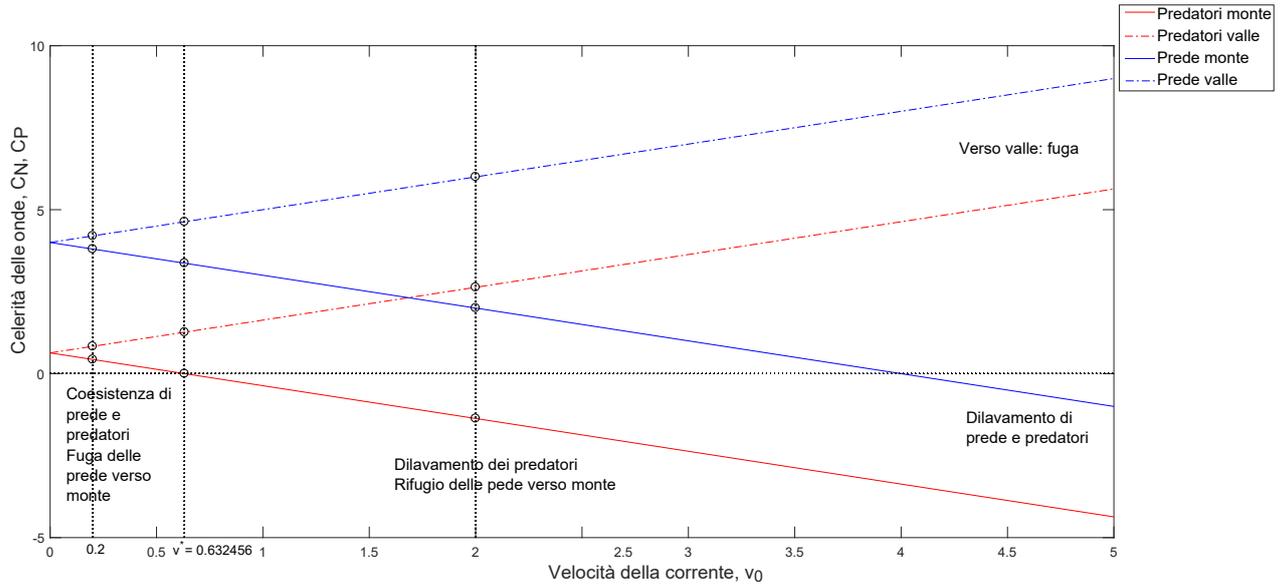


Figura 4.1: Diagramma di velocità di invasione con velocità della corrente v_0 considerate. Il diagramma è valido per predatori specialisti e $c_N > c_P$ e parametri delle (3.3), (3.4) pari a $\varepsilon = 1$, $\mu = 0.9$, $\delta = 1$, $\alpha = 4$

In particolare sono state considerate le seguenti situazioni:

- **SCENARIO 1: coesistenza di predatori e prede;**
- **SCENARIO 2: stallo dei predatori;**
- **SCENARIO 3: dilavamento dei predatori e rifugio delle prede verso monte.**

Nel seguito sono descritti i diversi scenari considerati in dettaglio.

- **SCENARIO 1**

Il diagramma di velocità di invasione di figura 4.1 riporta i campi di esistenza dei diversi scenari di prede e predatori che si possono verificare in base alla velocità della corrente. Lo scenario 1 di coesistenza delle due specie, si verifica se $v_0 < v^* = 0.632456$. In questo caso le prede sono in grado di fuggire dai predatori avanzando verso monte in quanto hanno una velocità di invasione, C_N maggiore. In particolare, è stato analizzato il caso di velocità della corrente $v_0 = 0.2$. La figura 4.2 riporta l'evoluzione temporale dei fronti d'onda di prede e predatori per $v_0 = 0.2$.

- **SCENARIO 2**

Per velocità della corrente $v_0 = v^* = 0.632456$, verso monte, si verifica lo stallo dei predatori, il corrispondente fronte d'onda risulta essere fermo al variare del tempo come emerge dalla figura 4.3 in cui si vede un unico fronte. $v_0 = 0.632456$ è infatti il valore di velocità del flusso per il quale si annulla la celerità di tale fronte d'onda. Il fronte d'onda delle prede continua invece a risalire la corrente. I fronti di entrambe le specie procedono normalmente verso valle e i predatori non riescono a raggiungere le prede.

- **SCENARIO 3**

Nel caso in cui la velocità della corrente $v_0 > v^*$ la celerità del fronte d'onda dei predatori che procede verso monte è negativa, pertanto il fronte non è più in grado di risalire la corrente. I predatori vengono portati verso valle e le prede si diffondono nel ramo di monte del fiume senza pericolo di essere catturate. E' stato analizzato nel dettaglio il caso di velocità della corrente $v_0 = 2$ e in figura 4.4 sono riportati i fronti d'onda al trascorrere del tempo. Il fronte delle prede continua a risalire la corrente, ma con velocità di invasione minore rispetto a quello di valle, i fronti sono infatti maggiormente densi verso monte.

Le velocità della corrente prese in considerazione per lo studio sono quindi state:

- $v_0 = 0.2$;
- $v_0 = 0.632456$;
- $v_0 = 2$.

Le figure 4.2, 4.3 e 4.4 mostrano l'evoluzione temporale dei fronti d'onda per le tre velocità della corrente, v_0 , considerati a partire da un istante temporale $t \neq 0$. Infatti, inizialmente si verifica una fase di assestamento iniziale, caratterizzata da celerità molto elevate prima che si raggiungano i valori riportati dal diagramma di velocità di invasione 4.1.

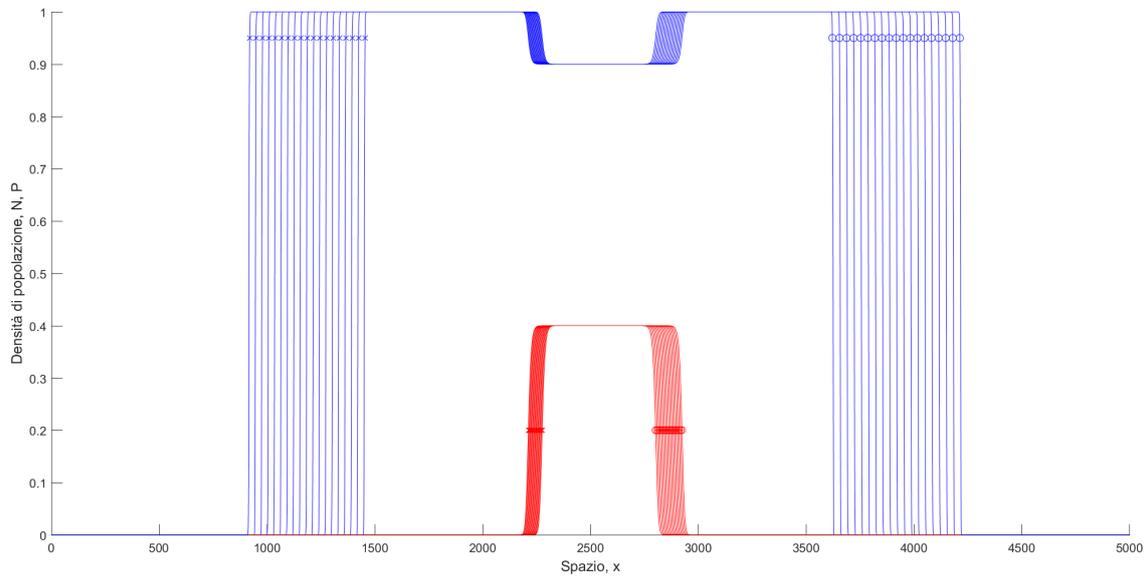


Figura 4.2: Scenario 1 Fronti d'onda di predatori e prede ogni 1000 unità temporali, a partire da $t = 200$, per velocità della corrente $v_0 = 0.2$. I simboli \circ e \times indicano la posizione, sul fronte, del punto target utilizzato per il calcolo della celerità

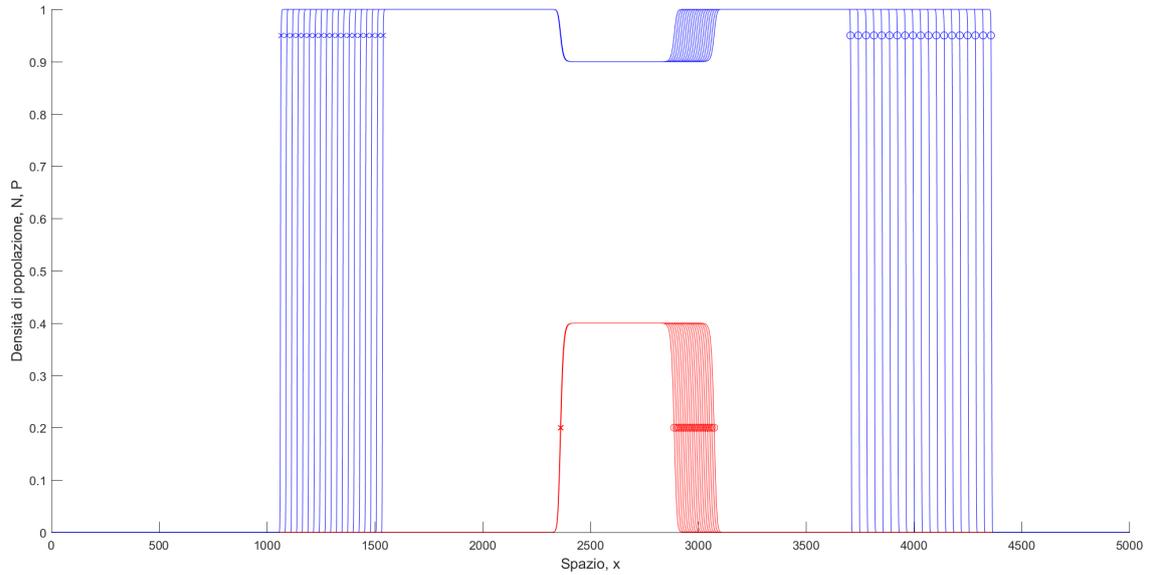


Figura 4.3: Fronti d'onda di predatori e prede ogni 1000 unità temporali, a partire da $t = 200$, per velocità della corrente $v_0 = 0.632456$. I simboli \emptyset e \times indicano la posizione, sul fronte, del punto target utilizzato per il calcolo della celerità

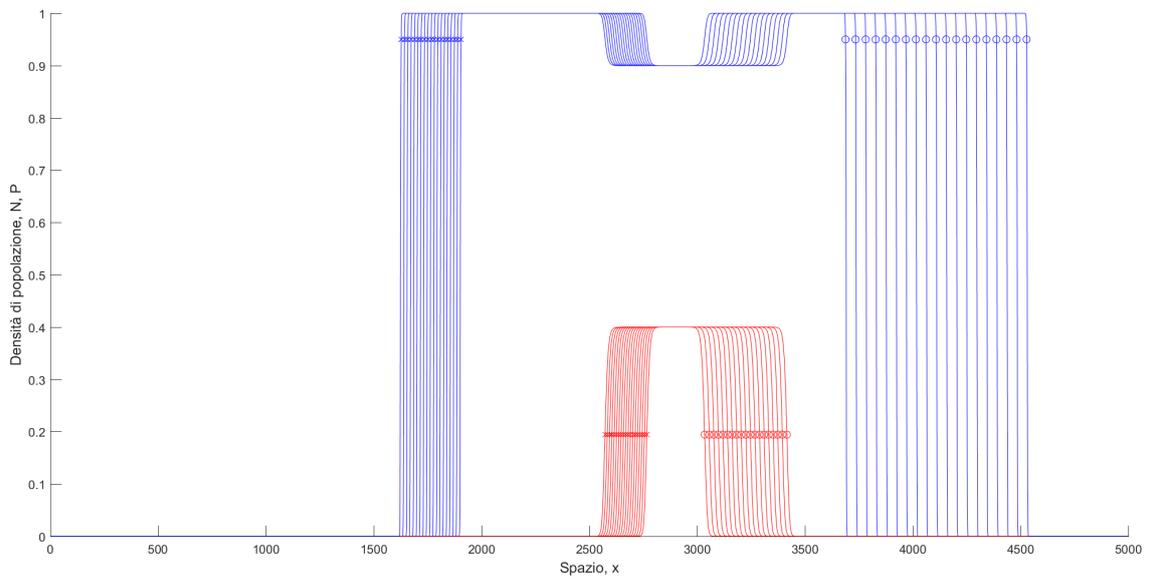


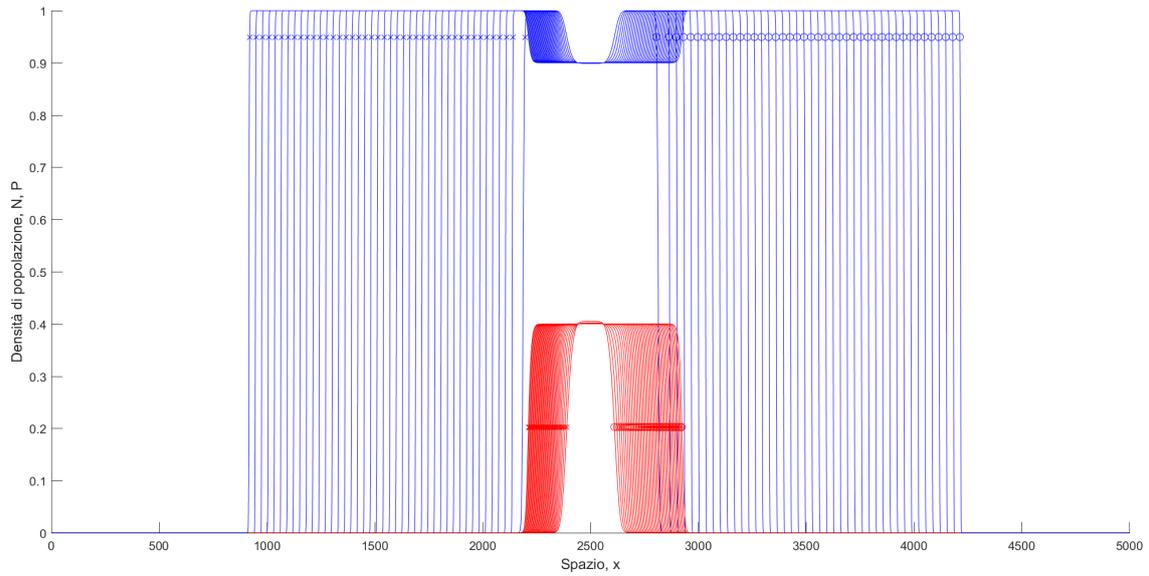
Figura 4.4: Fronti d'onda di predatori e prede ogni 1000 unità temporali, a partire da $t = 150$, per velocità della corrente $v_0 = 2$. I simboli \emptyset e \times indicano la posizione, sul fronte, del punto target utilizzato per il calcolo della celerità

Considerando le due specie é da osservare che sono le prede, che si muovono con velocità maggiore, ad impiegare più tempo prima di raggiungere le celerità a regime.

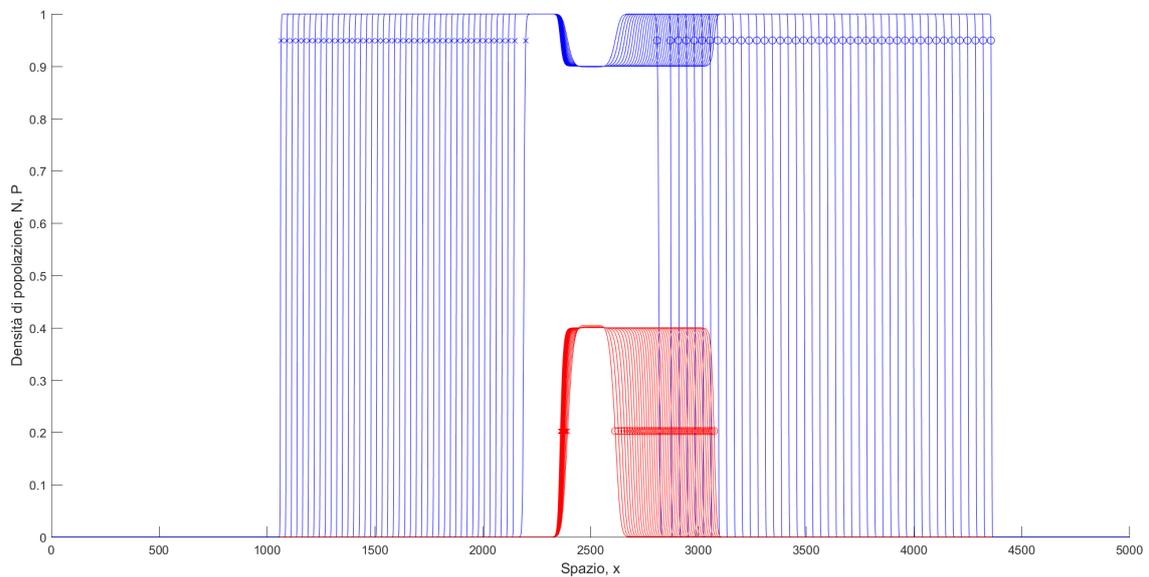
Velocità maggiori implicano maggior spazio percorso inizialmente, pertanto la distanza tra i fronti

d'onda è più grande all'inizio dell'intervallo temporale mentre tende ad assumere un valore costante con il trascorrere del tempo, come si può notare dalla figura 4.5 che riporta i fronti d'onda di predatori e prede a partire da $t = 0$ per velocità della corrente $v_0 = 0.2$ e $v_0 = 0.632456$.

In merito alle celerità con cui avanzano i fronti d'onda delle due specie, per tutti e tre i valori



(a) $v_0 = 0.2$



(b) $v_0 = 0.632456$

Figura 4.5: Fronti d'onda di predatori e prede da $t = 0$ a $t = 350$, ogni 500 unità temporali. Dalla figura emerge come i primi fronti sono maggiormente distanziati in quanto la celerità è maggiore

di velocità della corrente considerati, $v_0 = 0.2$, $v_0 = 0.632456$ e $v_0 = 2$, è stata osservata la medesima tendenza: relativamente alle prede in una prima fase, che si può ritenere conclusa a $t = 10$ le velocità di invasione hanno un ordine di grandezza superiore rispetto ai valori finali, tuttavia diminuiscono rapidamente. In seguito a ciò inizia una seconda fase che si assume protrarsi fino all'istante di inizio valutazione dei risultati in cui la celerità diminuisce gradualmente fino ad assestarsi. Per quanto riguarda i predatori, è assente la prima fase descritta per le prede e le velocità di invasione raggiungono gradualmente i valori finali.

La tendenza sopra descritta è ben visibile nelle figure 4.6 e ?? che riportano l'andamento delle velocità dei fronti d'onda a partire da $t = 0$ e l'ingrandimento relativo alla primissima fase per le prede per velocità della corrente $v_0 = 0.632456$. Sono stati quindi definiti degli intervalli di

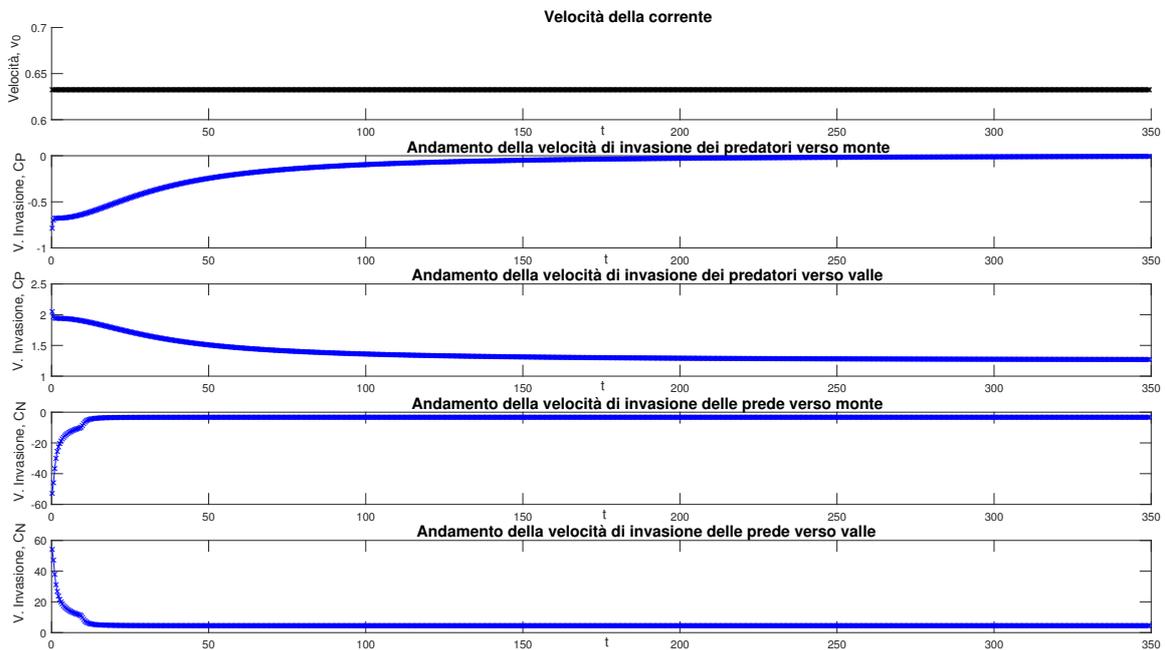


Figura 4.6: Velocità di invasione dei fronti d'onda di predatori e prede a partire da $t = 0$ per velocità della corrente $v_0 = 0.632456$. Si nota un andamento graduale a partire da $t = 0$ nel caso dei predatori, mentre per le prede si ha una fase iniziale che termina a $t = 10$ in cui la celerità diminuisce di un'ordine di grandezza, e successivamente si ha una diminuzione graduale fino a stabilizzarsi

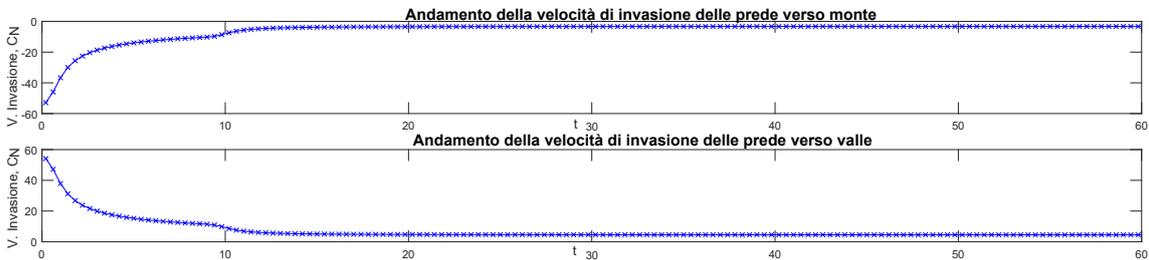


Figura 4.7: Ingrandimento velocità di invasione delle prede da $t = 0$ a $t = 60$ per $v_0 = 0.632456$

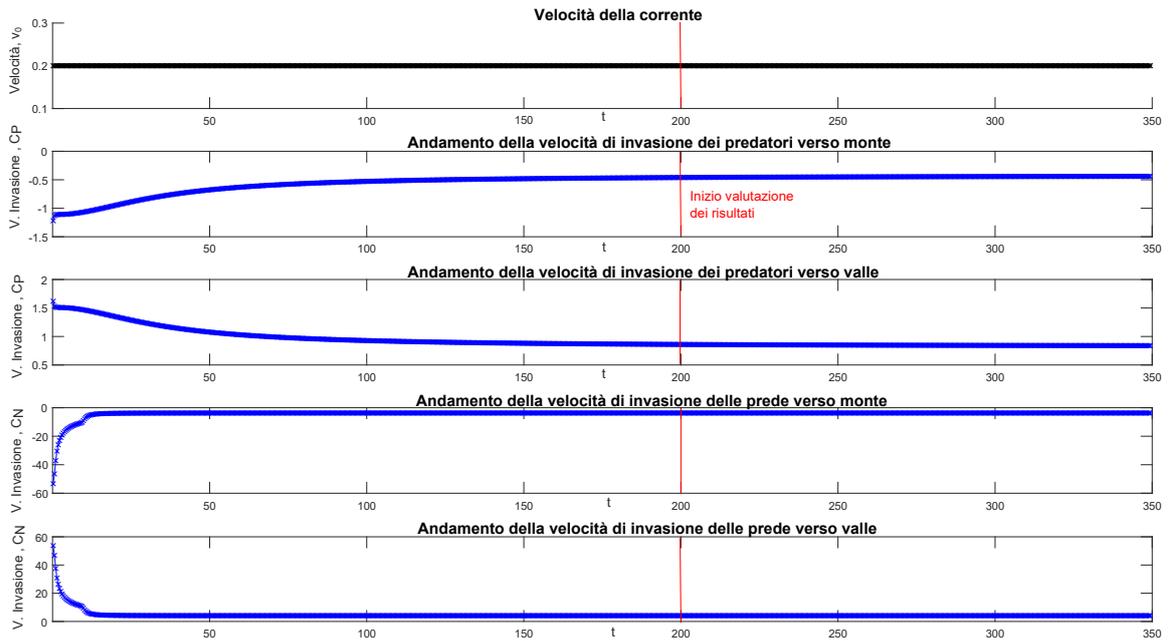
valutazione dei risultati in modo che venisse esclusa la fase di assestamento iniziale che avrebbe

portato a conclusioni errate, come è possibile notare dalla figura 4.8 che riporta gli andamenti di velocità di invasione dei fronti d'onda per $v_0 = 0.2$ e $v_0 = 2$ e l'indicazione dell'istante iniziale dell'intervallo di valutazione dei risultati. Tale istante è stato scelto sulla base di considerazioni sulla celerità delle due specie; in particolare, è stato considerato il t a cui corrisponde una velocità di invasione dei fronti che si discosta dal valore a stabilità raggiunta al più di una quantità pari alla tolleranza di 0.04. Nel caso di velocità della corrente $v_0 = 2$ già a partire da $t = 150$, i valori di celerità soddisfano tale condizione, ciò non è verificato nel caso di $v_0 = 0.2$ e $v_0 = 0.632456$ per i quali i risultati sono stati valutati a partire da $t = 200$.

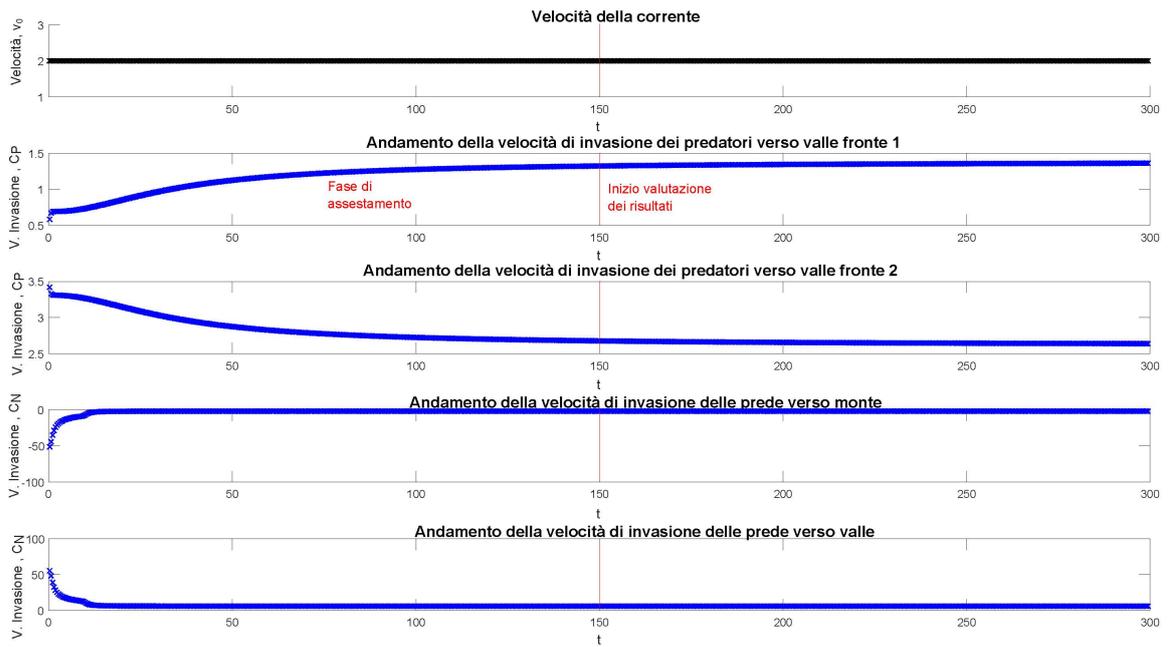
La tabella 4.1 riporta gli intervalli di valutazioni dei risultati in funzione della velocità della corrente.

Tabella 4.1: Velocità della corrente e intervallo temporale di valutazione risultati

v_0	Intervallo temporale di valutazione risultati
0.2	200-350
0.632456	200-350
2	150-300



(a) $v_0 = 0.2$



(b) $v_0 = 2$

Figura 4.8: Velocità di invasione dei fronti d’onda di predatori e prede a partire da $t = 0$ per velocità della corrente $v_0 = 0.2$ e $v_0 = 2$; nel caso di $v_0 = 2$ la fase di assestamento iniziale può ritenersi conclusa a $t = 150$

La tabella 4.2 riporta i valori di celerità dei fronti d’onda a $t = 0$, all’inizio dell’intervallo di valutazione dei risultati, $t = 200$ o $t = 150$ a seconda della velocità della corrente, e al termine

della simulazione, $t = 350$ per $v_0 = 0.2$ e $v_0 = 0.632456$ e $t = 300$ per $v_0 = 2$.

Tabella 4.2: Velocità di invasione dei fronti d'onda di prede e predatori a $t = 0$, $t = 200$ ($t = 150$) e $t = 350$ ($t = 300$) per valori di velocità della corrente $v_0 = 0.2$, $v_0 = 0.632456$, $v_0 = 2$. Si è considerata raggiunta la stabilità quando la celerità del fronte si scosta dal valore raggiunto al termine della simulazione al più di 0.04%

(a) $v_0 = 0.2$

$v_0 = 0.2$	$t = 0$	$t = 200$	$t = 350$
<i>Predatori monte</i>	1.220	0.461	0.438
<i>Predatori valle</i>	1.620	0.860	0.839
<i>Prede monte</i>	55.352	3.717	3.725
<i>Prede valle</i>	53.750	4.104	4.120

(b) $v_0 = 0.632456$

$v_0 = 0.2$	$t = 0$	$t = 200$	$t = 350$
<i>Predatori monte</i>	0.787	0.028	0.007
<i>Predatori valle</i>	2.052	1.292	1.272
<i>Prede monte</i>	52.089	3.301	3.300
<i>Prede valle</i>	54.150	4.520	4.541

(c) $v_0 = 2$

$v_0 = 0.2$	$t = 0$	$t = 150$	$t = 300$
Predatori monte	-0.581 ¹	-1.320	-1.360
<i>Predatori valle</i>	3.420	2.672	2.638
<i>Prede monte</i>	51.420	1.920	1.930
<i>Prede valle</i>	55.420	5.843	5.840

4.3 Risultati

Definiti gli intervalli di valutazione dei risultati per ciascun valore di velocità della corrente considerato, la diffusione dei fronti d'onda di prede e predatori all'interno del dominio è stata studiata sia in termini di velocità di invasione verso monte e verso valle per le due specie, sia in termini di spazio percorso. Le figure 4.9, 4.10, 4.11 riportano la velocità di invasione dei fronti d'onda di prede e predatori verso monte e verso valle per i tre valori di velocità della corrente testati.

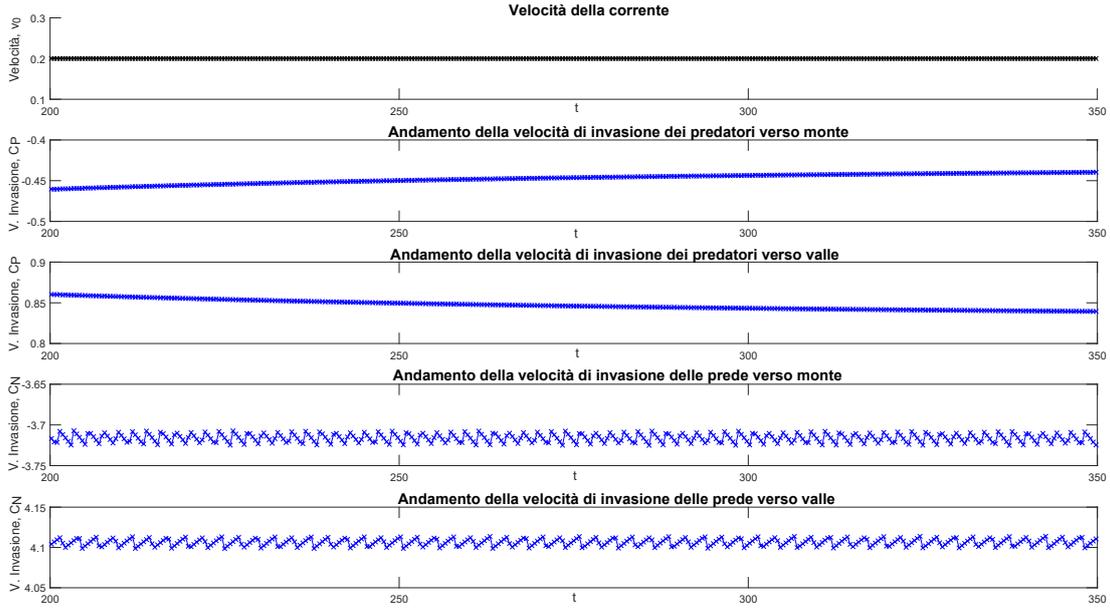


Figura 4.9: Velocità della corrente e velocità di invasione dei fronti d'onda di predatori e prede nelle direzioni verso monte e verso valle, per $v_0 = 0.2$

Con riferimento alla velocità di invasione delle prede sono presenti oscillazioni di cui si è trattato alla sezione 3.2.1; questo effetto non è stato riscontrato nel caso dei predatori. Riprendendo brevemente quanto già discusso, l'ampiezza di tali oscillazioni, per la discretizzazione spaziale e temporale scelta in (3.49), $\Delta x = 0.24$, $\Delta t = 0.008$, risulta sempre

$$\frac{A_{oscill,media}}{v_0} < 5\%. \quad (4.1)$$

Per la rimozione di tali oscillazioni è stato costruito un filtro a media mobile.

Mediante questa tecnica, all' i -esimo valore della serie temporale si sostituisce, la media dei dati immediatamente precedenti e successivi ad esso. Il numero di dati utilizzati per la media dipende dall'ampiezza della finestra considerata.

La media mobile opera nel modo di seguito illustrato.

Data una serie storica di valori y_i, \dots, y_n assunti dalla variabile Y agli istanti temporali t_i, \dots, t_n ,

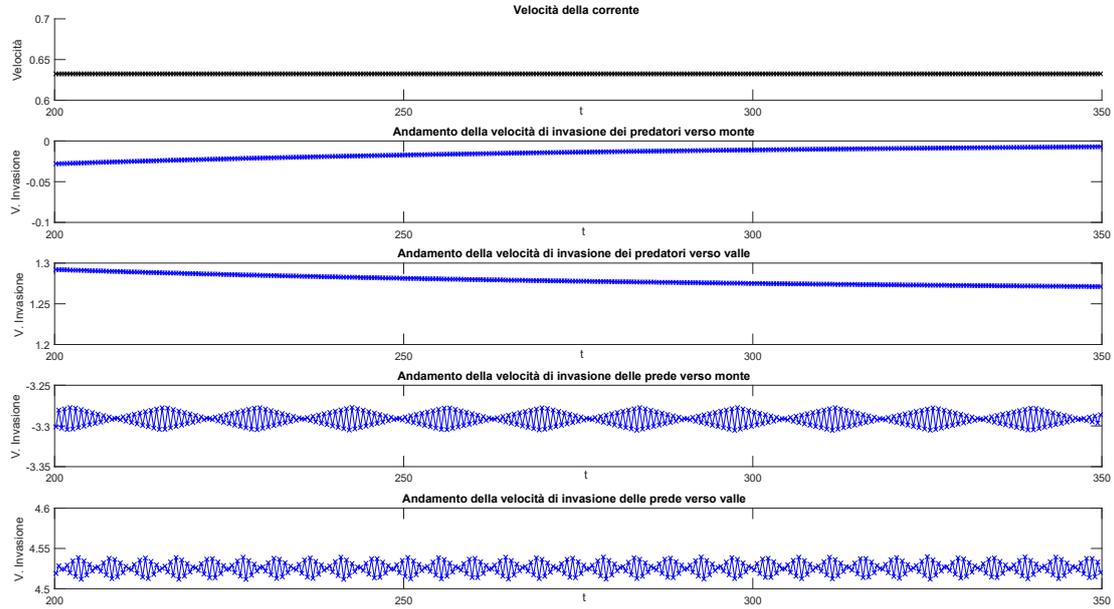


Figura 4.10: Velocità della corrente e velocità di invasione dei fronti d'onda di predatori e prede nelle direzioni verso monte e verso valle, per $v_0 = 0.632456$

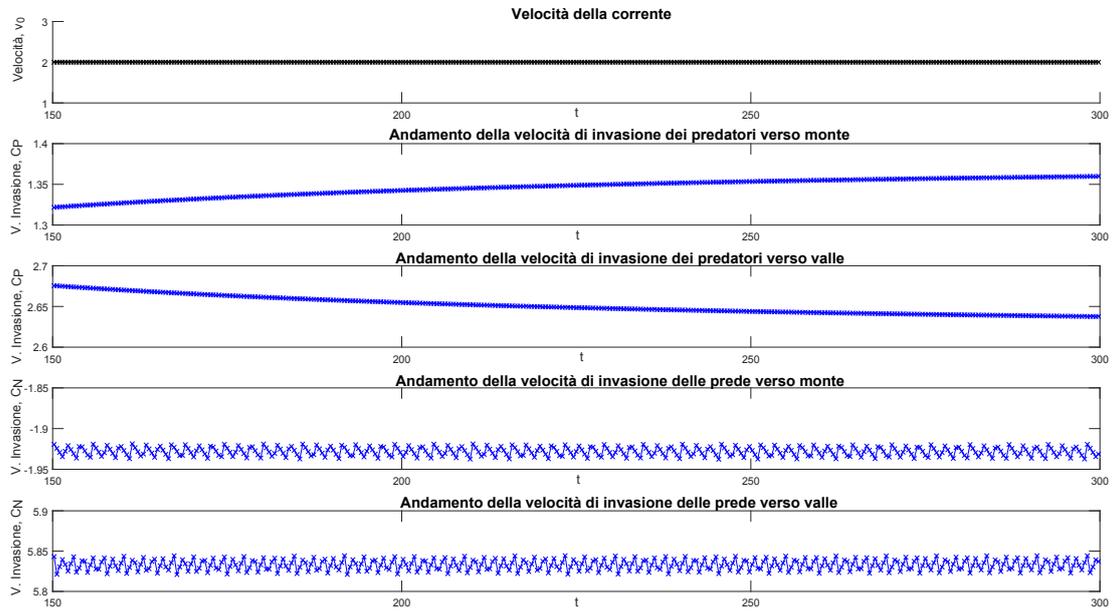


Figura 4.11: Velocità della corrente e velocità di invasione dei fronti d'onda di predatori e prede nelle direzioni verso monte e verso valle, per $v_0 = 2$

la media mobile al tempo t si definisce:

$$mm_t = \frac{1}{K} = \sum_{i=-m_1}^m w_i y_{t+i} \quad (4.2)$$

dove

- m_1 : numero di dati precedenti a quello considerato;
- m_2 : numero di dati successivi a quello considerato;
- K : ampiezza della finestra, si ha $K = m_1 + m_2 + 1$
- w_i : peso dell' i -esimo dato;

Nel caso in esame è stato attribuito il medesimo peso w_i a tutti i dati del campione $C_{N_i} \cdots C_{N_n}$ ed è stata considerata una finestra di ampiezza $K = 21$; l'ampiezza della finestra è risultata essere la minima necessaria per ripulire il segnale. Dalla serie filtrata così ottenuta sono stati scartati i dati estremi in quanto non omogenei con i rimanenti.

La figura 4.12 riporta la velocità di invasione originale e filtrata del fronte d'onda delle prede in entrambe le direzioni nel caso di velocità della corrente $v_0 = 0.632456$.

I risultati ottenuti in termini di celerità dei fronti d'onda sono coerenti con quanto riportato nel diagramma di velocità di invasione di figura 4.1; il confronto tra le celerità ottenute tramite le (2.39), (2.43)

$$C_P = c_P \pm v_0 \delta$$

$$C_N = c_N \pm v_0$$

e quelle ottenute dalla simulazione numerica è riportato nella tabella 4.3.

Tabella 4.3: Confronto tra risultati analitici e numerici della velocità di invasione dei fronti d'onda di prede e predatori per valori di velocità della corrente $v_0 = 0.2$, $v_0 = 0.632456$, $v_0 = 2$ (a) $v_0 = 0.2$

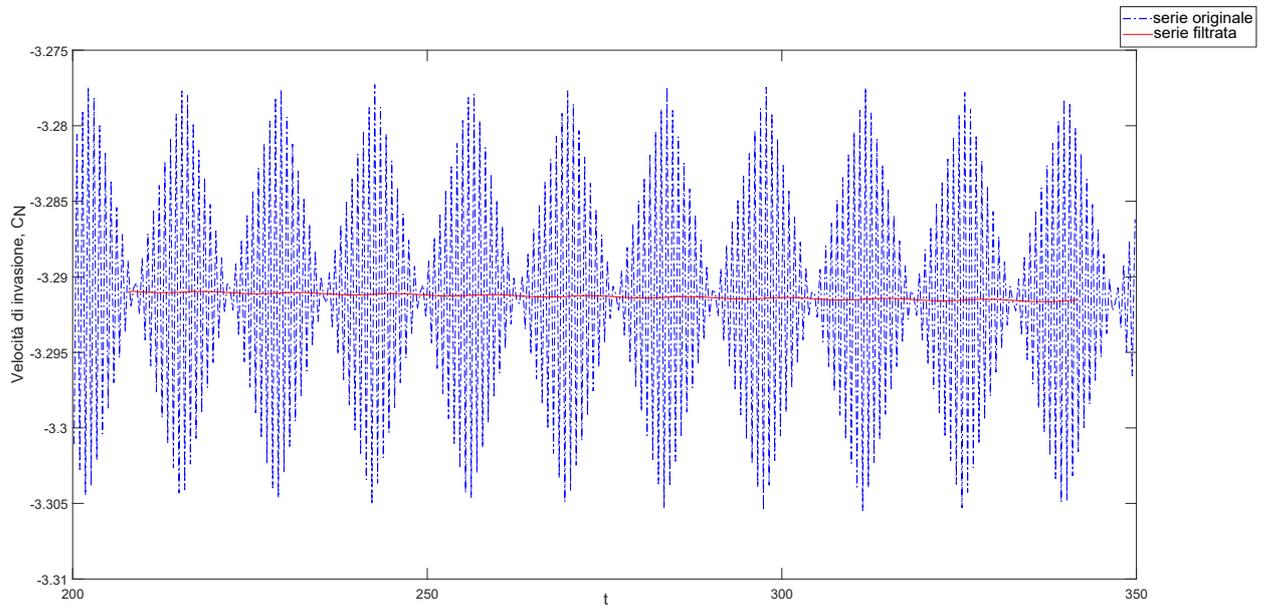
$v_0 = 0.2$	Sol. analitica	Sol. numerica
<i>Predatori monte</i>	0.432	0.438
<i>Predatori valle</i>	0.832	0.839
<i>Prede monte</i>	3.800	3.725
<i>Prede valle</i>	4.200	4.120

(b) $v_0 = 0.632456$

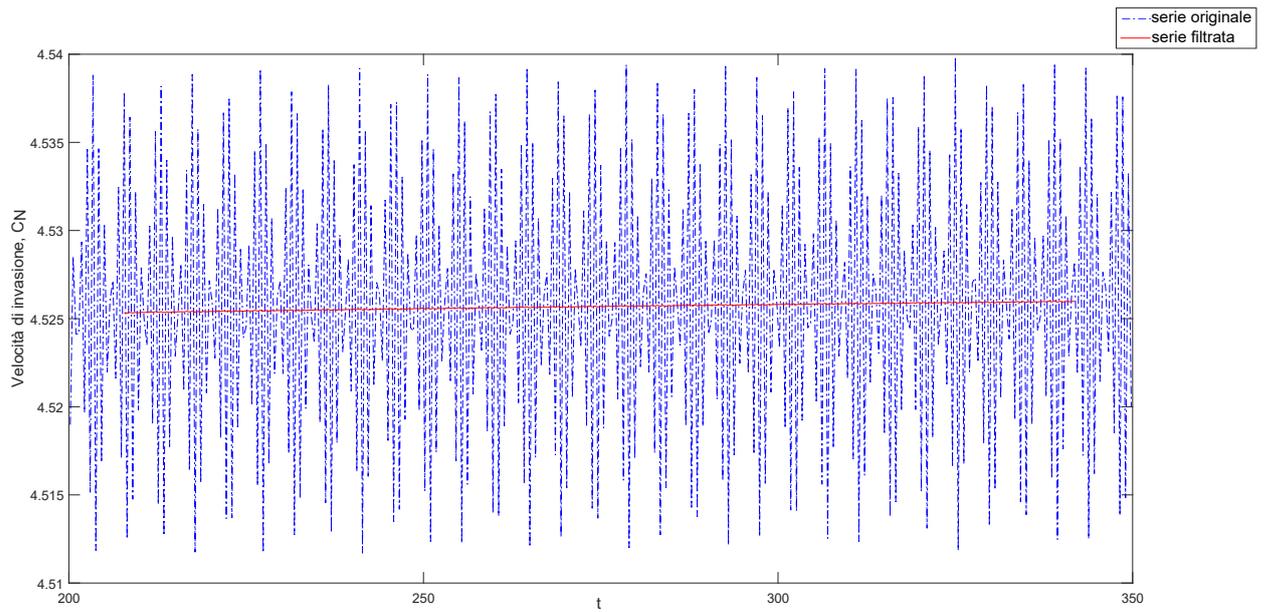
$v_0 = 0.632456$	Sol. analitica	Sol. numerica
<i>Predatori monte</i>	0 0.007	
<i>Predatori valle</i>	1.265	1.272
<i>Prede monte</i>	3.368	3.300
<i>Prede valle</i>	4.632	4.541

(c) $v_0 = 2$

$v_0 = 2$	Sol. analitica	Sol. numerica
Predatori monte	-1.368 ²	1.360
<i>Predatori valle</i>	2.632	2.638
<i>Prede monte</i>	2.000	1.930
<i>Prede valle</i>	6.000	5.840



(a) Velocità di invasione verso monte



(b) Velocità di invasione verso valle

Figura 4.12: Velocità di invasione del fronte d'onda delle prede verso monte (a) e verso valle (b) per velocità della corrente costante $v_0 = 0.632456$. Serie originale e serie filtrata in media mobile, ampiezza della finestra $K = 21$

Il caso $v_0 = 0.632456$ merita una precisazione: in base al diagramma di velocità di invasione, la celerità del fronte d'onda dei predatori che procede verso monte dovrebbe essere nulla in corrispondenza di tale valore di velocità della corrente; la simulazione numerica tuttavia ha dato

valori di velocità di invasione, a stabilità raggiunta, leggermente diversi da 0. Dalla figura 4.13 si nota che tale fronte d'onda risulta fermo al variare del tempo, ciò è testimoniato anche dal calcolo dello spazio percorso durante l'intervallo di valutazione dei risultati; in particolare, tra $t = 200$ e $t = 350$, i predatori si sono spostati verso monte di -2.16 che, su un dominio di lunghezza $L = 5000$ corrisponde allo 0.04% pari alla tolleranza con cui è stata calcolata la posizione dei fronti d'onda; pertanto si è ritenuto trascurabile. La tabella 4.4 riporta lo spazio percorso dai fronti d'onda di prede e predatori verso monte e verso valle nell'intervallo temporale di ampiezza $150t$ in cui vengono studiati i risultati.

Considerando la fase di assestamento iniziale discussa nella sezione 4.2, di durata pari a $200t$ per $v_0 = 0.2$ e $v_0 = 0.632456$ e pari a $150t$ per $v_0 = 2$, in termini di spazio percorso dai fronti d'onda delle due specie da $t = 0$, per le tre velocità della corrente considerate, mediamente è risultato essere circa 2.5 volte superiore a quello percorso nell'intervallo di valutazione dei risultati.

Il dato più interessante, che conferma come la fase di assestamento iniziale falsi i risultati e quindi sia da scartare, è quello relativo al fronte d'onda dei predatori che procede verso monte per $v_0 = 0.632456$. In base a quanto riportato nel diagramma di velocità di invasione 4.1, per $v_0 = 0.632456$ la celerità di suddetto fronte dovrebbe annullarsi, pertanto lo spazio percorso dovrebbe essere nullo.

Tabella 4.4: Spazio percorso verso monte e verso valle dai fronti d'onda di prede e predatori, per i valori di velocità della corrente considerati, nell'intervallo temporale di valutazione dei risultati

v_0	predatori monte	predatori valle	prede monte	prede valle
0.2	67.13	127.10	557.42	615.96
0.632456	2.18	191.85	493.70	678.85
2	201.94	397.66	289.20	874.95

Come già osservato, nell'intervallo di valutazione dei risultati lo spazio percorso verso monte dai predatori è trascurabile rispetto alla lunghezza totale del dominio; questa assunzione non è più valida considerando l'intervallo temporale $t = 0 - 350$.

In questo caso, lo spazio percorso è pari allo 0.8% della lunghezza del dominio, quindi superiore rispetto alla tolleranza con cui viene calcolata la celerità dei fronti e di conseguenza lo spazio percorso. Da $t = 0$ a $t = 350$ il fronte percorre uno spazio pari a 40, ma solamente un ventesimo di questo viene percorso negli ultimi $150t$. La tabella 4.5 riporta il confronto in termini di spazio percorso a partire da $t = 0$ e nell'intervallo temporale di valutazione dei risultati per ciascuna velocità della corrente v_0 .

Tabella 4.5: Spazio percorso verso monte e verso valle dai fronti d'onda di prede e predatori, velocità della corrente $v_0 = 0.2$, $v_0 = 0.632456$ e $v_0 = 2$ La prima riga riporta i valori di spazio percorso a partire dall'istante iniziale $t = 0$ mentre in grassetto sono riportati i risultati ottenuti nell'intervallo temporale di valutazione dei risultati

v_0	predatori monte	predatori valle	prede monte	prede valle
0.2	189.80 67.13	329.55 127.10	1463.5 557.42	1599.8 615.96
0.632456	39.60 2.18	480.52 191.85	1314.8 493.70	1746.2 678.85
2	372.24 201.94	825.38 397.66	741.68 289.20	1911.3 874.95

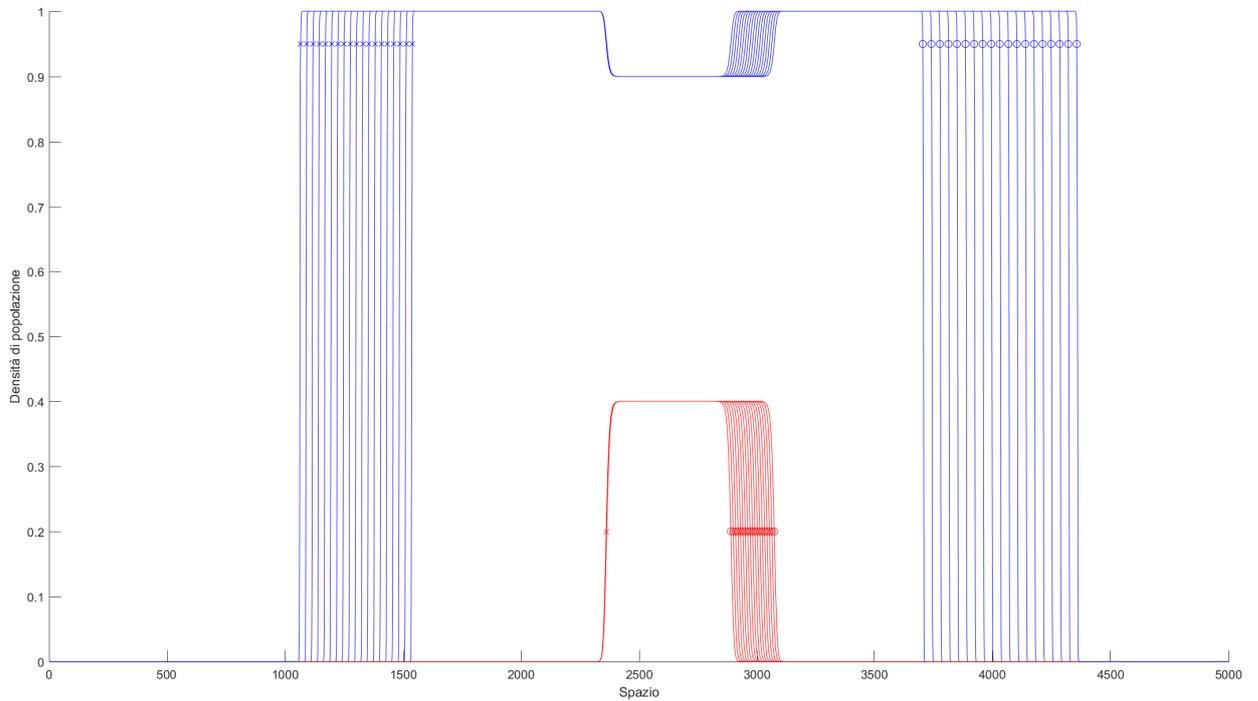


Figura 4.13: Fronti d'onda di predatori e prede ogni 1000 unità temporali, a partire da $t = 200$, per velocità della corrente $v_0 = 0.632456$. Il fronte dei predatori che procede verso monte risulta spostarsi di 2.16, corrispondente allo 0.04% della lunghezza del dominio spaziale $L = 5000$.

Capitolo 5

Caso velocità della corrente periodica

5.1 Generalità

Nel capitolo 4 viene studiata la diffusione dei fronti d'onda di prede e predatori all'interno del dominio spaziale nell'ipotesi in cui la velocità della corrente sia costante nel tempo; all'interno di un corso d'acqua si può ritenere che in media la velocità sia costante; tuttavia è sempre presente una componente stocastica che fa sì che, ad un'analisi più approfondita, ciò non sia verificato.

A prescindere dalla componente stocastica, variazioni del regime di portata di un corso d'acqua si hanno durante l'anno idrologico, dovute allo scioglimento delle nevi in primavera o durante la stagione autunnale naturalmente piovosa; la costruzione di opere idrauliche in alveo altera il regime delle portate permanentemente o con una certa ciclicità, basti pensare al caso di centrali idroelettriche che devono gestire i picchi di richiesta di energia da parte delle utenze. In questo caso, la diga immagazzina acqua quando la domanda è minore dell'offerta, per poi rilasciarla nelle situazioni opposte. Per tenere in considerazione queste situazioni, nel presente capitolo si è studiato il caso di un fiume con velocità variabile nel tempo secondo una legge definita.

In particolare, viene studiata la diffusione di prede e predatori nel fiume nel caso in cui la velocità della corrente vari nel tempo con legge sinusoidale.

Sono stati presi in considerazione diversi valori di periodi e ampiezze di oscillazione e se ne sono studiati gli effetti sulla celerità dei fronti d'onda delle due specie.

5.2 Casi considerati

Con riferimento al medesimo dominio spaziale, L , e alle medesime configurazioni iniziali di prede e predatori già prese in considerazione al capitolo 4, è stato studiato il caso in cui la velocità della

corrente non sia costante nel tempo ma oscilli intorno ad un valor medio secondo la legge:

$$v = A \sin(\omega t) + v_0 \quad (5.1)$$

dove v_0 è il valor medio della velocità della corrente, A è l'ampiezza dell'oscillazione mentre ω è la pulsazione.

La velocità della corrente presa in considerazione per lo studio, oscilla intorno ai valori medi indicati nel diagramma di velocità di invasione riportato in figura 4.1 già considerati al capitolo precedente, $v_0 = 0.2$, $v_0 = 0.632456$ e $v_0 = 2$.

Sono stati considerati due valori di ampiezza dell'oscillazione sufficientemente grandi da consentire di vedere gli effetti sulla velocità di invasione dei fronti d'onda delle due specie. I valori considerati sono stati:

- $A = 0.5v_0$;
- $A = 0.75v_0$.

La pulsazione ω è stata ottenuta a partire dal periodo di oscillazione T_{oscill} secondo la legge:

$$\omega = \frac{2\pi}{T_{oscill}}. \quad (5.2)$$

La scelta del periodo di oscillazione è stata dettata dalla lunghezza degli intervalli temporali di valutazione dei risultati; essendo di ampiezza $t = 150$ per le tre velocità della corrente, sono stati scelti dei valori di frequenza che consentissero di vedere un numero di oscillazioni significativo in tale lasso temporale; sono stati, quindi, studiati tre periodi di oscillazione:

- $T_{oscill} = 5$;
- $T_{oscill} = 15$;
- $T_{oscill} = 30$.

Definiti i valori delle grandezze che compaiono nella (5.1) sono stati studiati gli scenari di diffusione di prede e predatori nei seguenti casi:

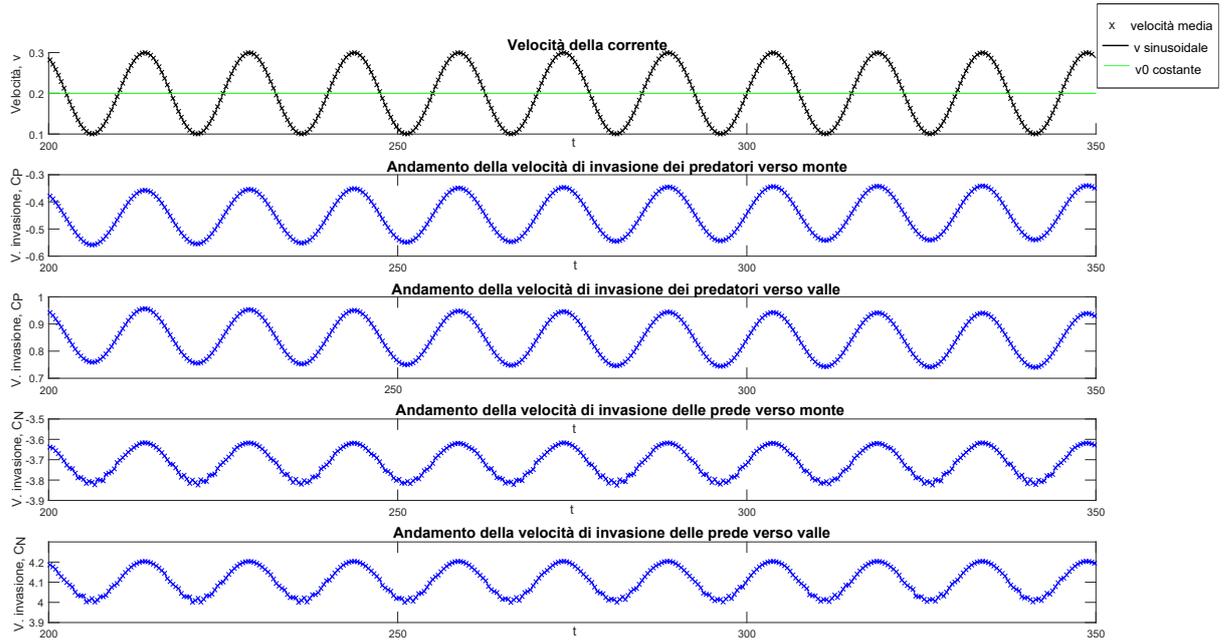
- **SCENARIO 1: coesistenza di predatori e prede**
 - $v_0 = 0.2 \frac{A}{v_0} = 0.5 \ T_{oscill} = 5,15,30$;
 - $v_0 = 0.2 \frac{A}{v_0} = 0.75 \ T_{oscill} = 5,15,30$;
- **SCENARIO 2: stallo dei predatori**
 - $v_0 = 0.632456 \frac{A}{v_0} = 0.5 \ T_{oscill} = 5,15,30$;
 - $v_0 = 0.632456 \frac{A}{v_0} = 0.75 \ T_{oscill} = 5,15,30$;
- **SCENARIO 3: dilavamento dei predatori e rifugio delle prede verso monte**
 - $v_0 = 2 \frac{A}{v_0} = 0.5 \ T_{oscill} = 5,15,30$;
 - $v_0 = 2 \frac{A}{v_0} = 0.75 \ T_{oscill} = 5,15,30$.

5.3 Risultati

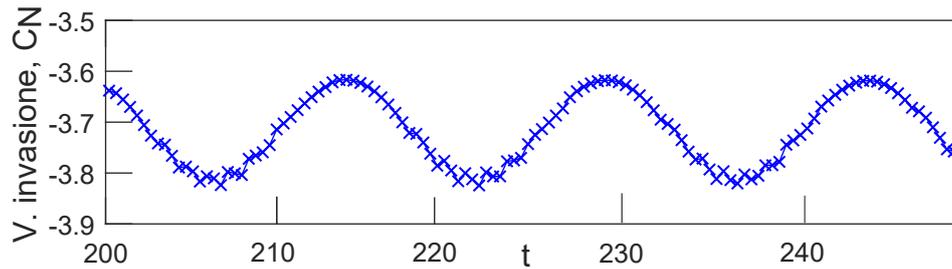
Quando la velocità della corrente non è costante ma varia nel tempo con legge sinusoidale nascono oscillazioni anche nella celerità dei fronti d'onda di prede e predatori.

Le figure 5.1(a),5.2,5.3 riportano la velocità della corrente, le velocità di invasione dei fronti d'onda di prede e predatori verso monte e verso valle, considerando velocità della corrente oscillanti intorno a $v_0 = 0.2$, $v_0 = 0.632456$ e $v_0 = 2$.

Come già osservato al capitolo 4, la celerità dei fronti delle prede che procedono nelle due direzioni presenta un leggero rumore, come emerge dall'ingrandimento di figura 5.1(b).



(a) Velocità della corrente e celerità dei fronti di prede e predatori



(b) Ingrandimento celerità fronte delle prede

Figura 5.1: Andamento della velocità della corrente e delle velocità di invasione dei fronti d'onda di predatori e prede verso monte e verso valle, per $v_0 = 0.2$, $T_{oscill} = 15$, $A = 0.5v_0$ a) e ingrandimento celerità del fronte d'onda delle prede che procede verso monte b). E' presente un leggero rumore che è stato eliminato attraverso un filtro a media mobile

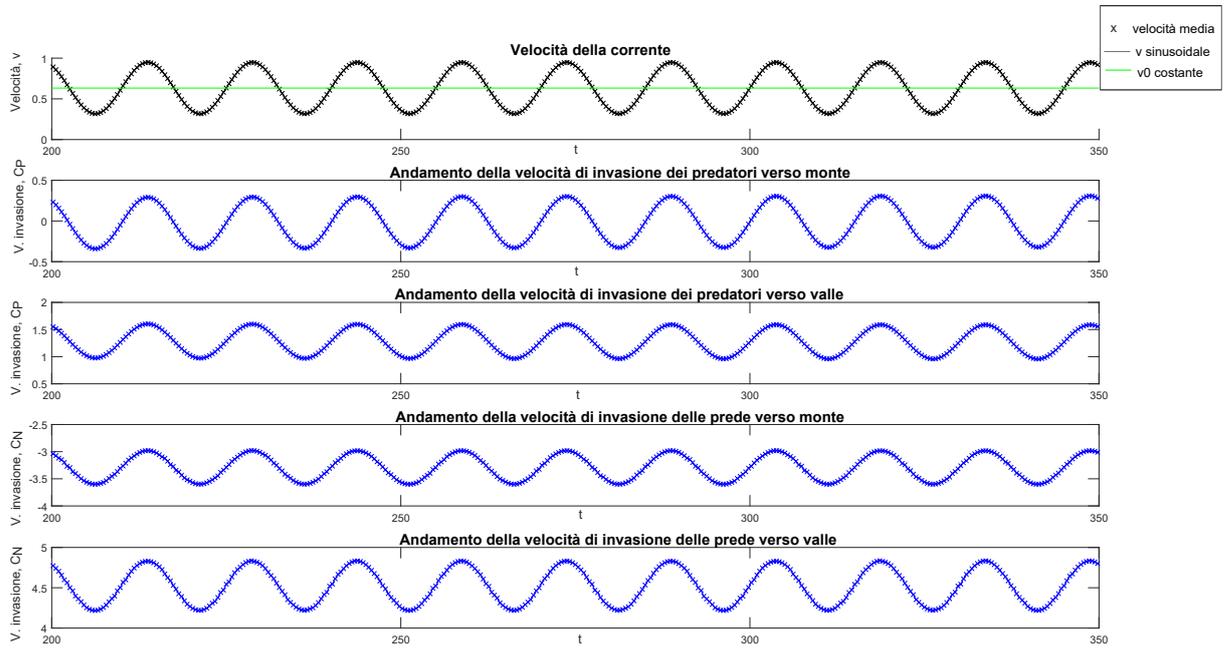


Figura 5.2: Andamento della velocità della corrente e delle velocità di invasione dei fronti d'onda di predatori e prede verso monte e verso valle, per $v_0 = 0.632456$, $T_{oscill} = 15$, $A = 0.5v_0$

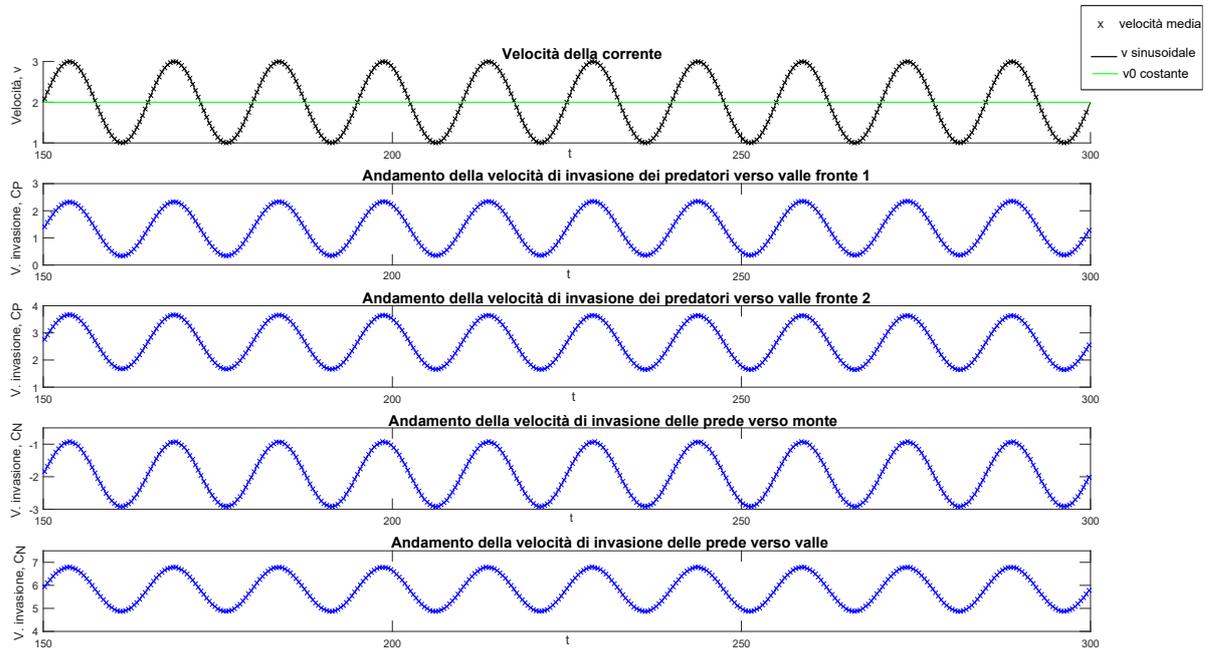
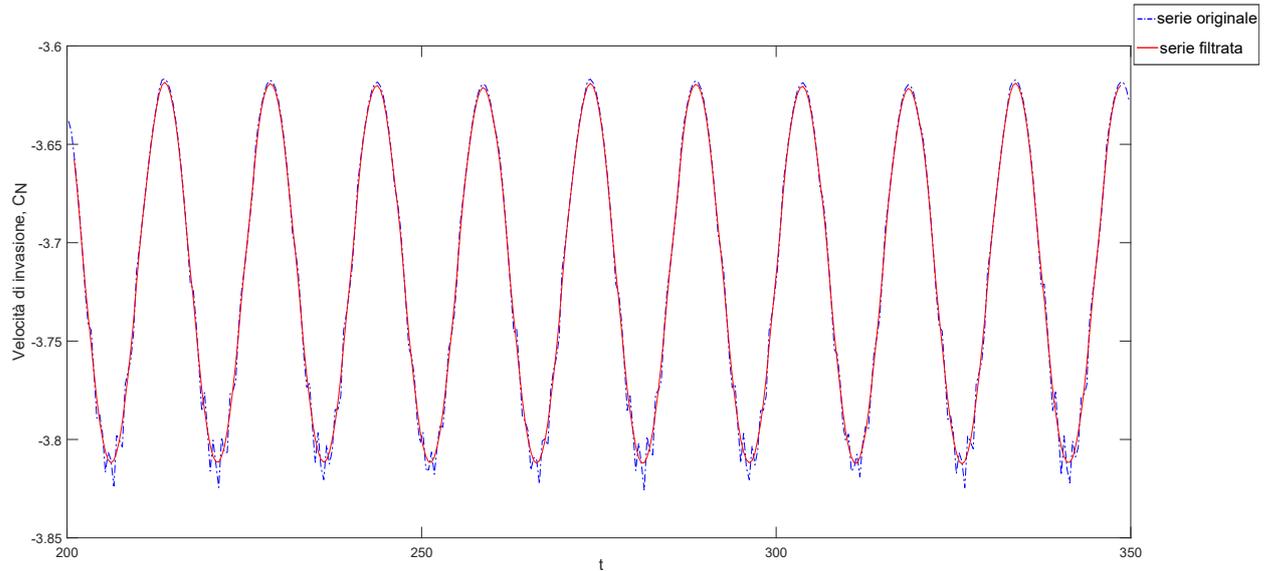
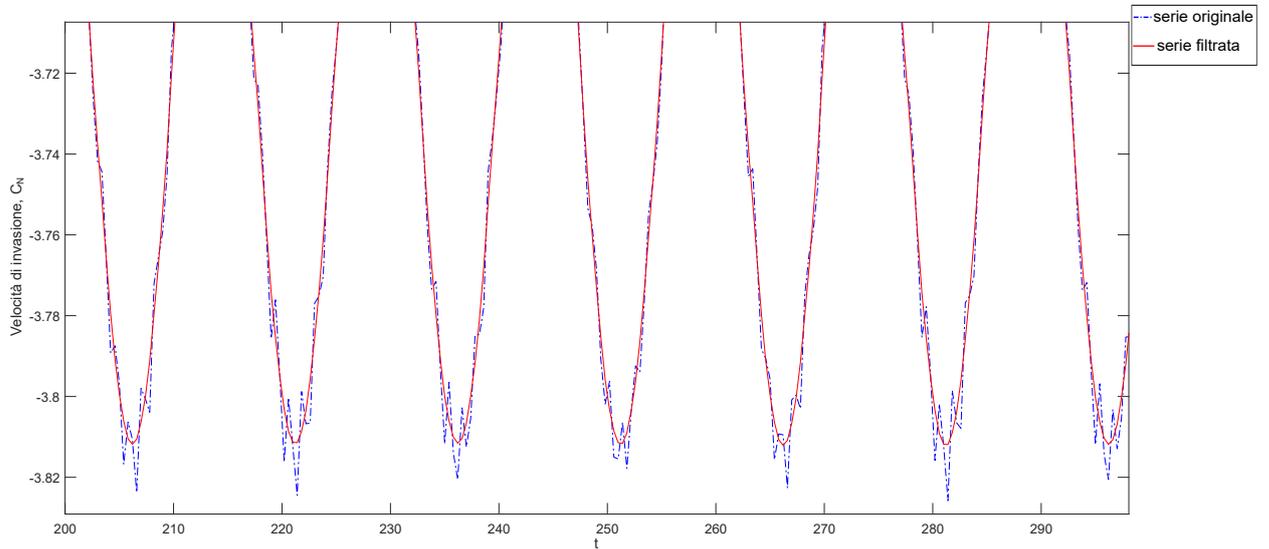


Figura 5.3: Andamento della velocità della corrente e delle velocità di invasione dei fronti d'onda di predatori e prede verso monte e verso valle, per $v_0 = 2$, $T_{oscill} = 15$, $A = 0.5v_0$. Quando $v_0 = 2$ i predatori non riescono a risalire la corrente, pertanto si hanno due fronti d'onda che procedono verso valle, in figura indicati con "fronte 1" e "fronte 2"

Anche in questo caso il rumore è stato rimosso con l'utilizzo di un filtro a media mobile con una finestra di ampiezza $K = 3$; finestre di ampiezza maggiore avrebbero infatti rimosso anche la portante sinusoidale. L'immagine 5.4 riporta la velocità di invasione del fronte d'onda delle prede che procede verso monte e la corrispondente serie filtrata del rumore per velocità della corrente media pari a $v_0 = 0.2$, ampiezza di oscillazione $A = 0.5v_0$ e periodo $T_{oscill} = 15$.



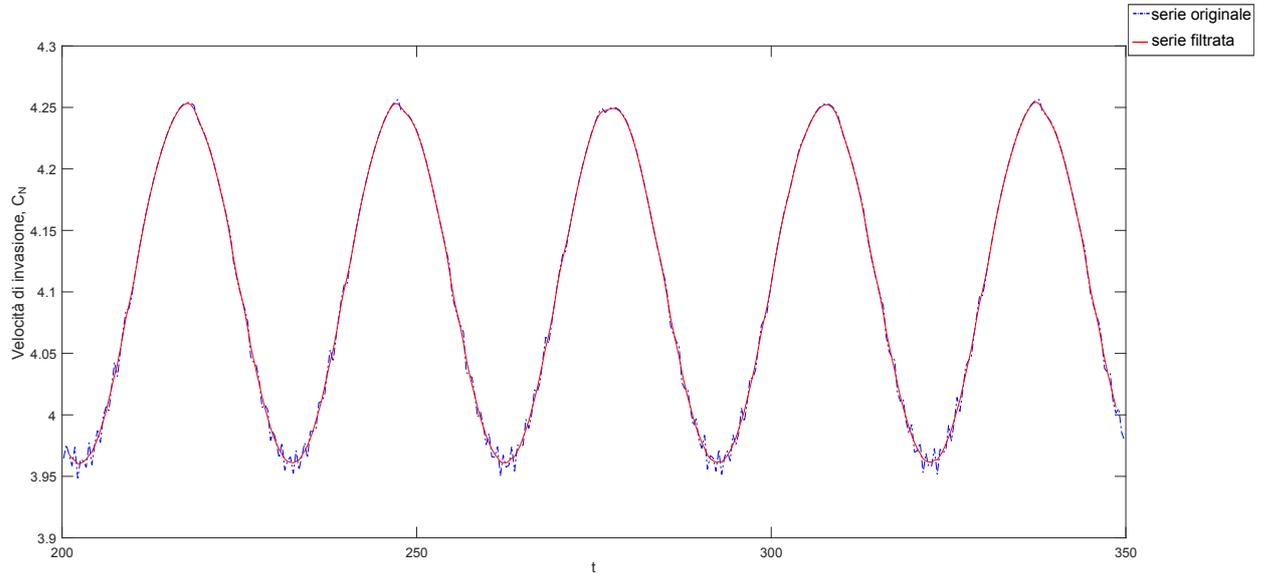
(a) Serie originale e serie filtrata



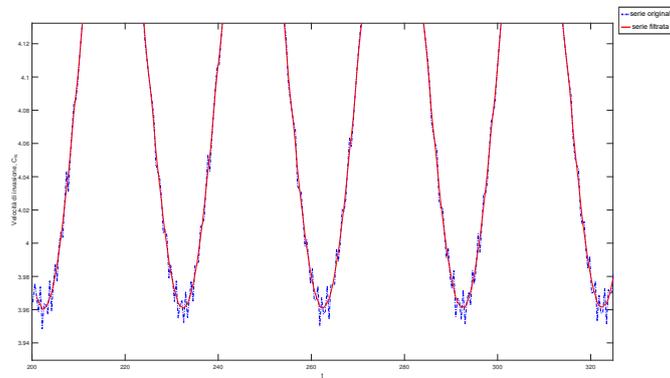
(b) Ingrandimento

Figura 5.4: Velocità di invasione del fronte d'onda delle prede che procede verso monte per velocità della corrente media $v_0 = 0.2$ ampiezza di oscillazione $A = 0.5v_0$ e periodo $T_{oscill} = 15$. Serie originale e serie filtrata in media mobile con ampiezza della finestra $K = 3$. Dal pannello b) emerge come il filtro rimuova il rumore senza inficiare sulla portante

Il filtro è stato applicato alla serie delle celerità delle prede anche per gli altri T_{oscill} e per le differenti velocità della corrente considerate in entrambe le direzioni, monte e valle. La figura (5.5), riporta l'andamento della velocità del fronte d'onda delle prede che procede verso valle per velocità oscillante intorno a $v_0 = 0.2$, $T_{oscill} = 30$, $A = 0.75v_0$.



(a) Serie originale e serie filtrata



(b) Ingrandimento

Figura 5.5: Velocità di invasione del fronte d'onda delle prede che procede verso monte per velocità della corrente media $v_0 = 0.2$ ampiezza di oscillazione $A = 0.75v_0$ e periodo $T_{oscill} = 30$. Serie originale e serie filtrata in media mobile con ampiezza della finestra $K = 3$

Per i tre macroscenari studiati, *coesistenza delle specie*, *stallo dei predatori* e *dilavamento dei predatori e fuga delle prede verso monte*, è stata presa in considerazione l'ampiezza dell'oscillazione della velocità sia della corrente intorno al valor medio sia delle velocità di invasione dei fronti d'onda di predatori e prede. Per bassi valori di velocità della corrente ($v_0 = 0.2$, $v_0 = 0.632456$) l'ampiezza delle oscillazioni è la medesima, a meno della tolleranza, sia per la velocità della corrente che per la celerità dei fronti, indipendentemente dal periodo e dall'ampiezza di oscillazione considerati. Per $v_0 = 2$, invece, le oscillazioni di celerità del fronte d'onda delle prede verso valle sono leggermente inferiori per entrambe le ampiezze di oscillazione considerate. La tabella 5.1 riassume quanto osservato.

Un'osservazione è doverosa in merito al caso in cui la velocità della corrente media sia $v_0 = 0.632456$. L'introduzione delle oscillazioni fa sì che la celerità del fronte d'onda dei predatori abbia valori positivi e valori negativi, come visibile dalla figura 5.6; nel complesso il fronte d'onda procede risalendo la corrente anche se, in relazione al dominio spaziale, lo spazio percorso da tale fronte risulta essere trascurabile; pertanto lo scenario che si verifica è, anche in questo caso, quello di *stallo dei predatori*.

Tabella 5.1: Ampiezza delle oscillazioni di velocità della corrente e velocità di invasione dei fronti d'onda di prede e predatori verso monte e verso valle. Nel caso di velocità della corrente oscillante intorno al valor medio $v_0 = 2$, le celerità delle due specie hanno un'ampiezza di oscillazione leggermente inferiore a quella della velocità del flusso

v_0 medio	Ampiezza dell'oscillazione di v_0	Ampiezza dell'oscillazione della celerità
0.2	0.1	0.1 ± 0.04
0.2	0.15	0.15 ± 0.04
0.632456	0.3116	0.3116 ± 0.04
0.632456	0.4743	0.3116 ± 0.04
2	1	1 ± 0.04 tranne per prede verso valle
2	1.5	1.5 ± 0.04 tranne per prede verso valle

L'andamento periodico che si riscontra nelle velocità di invasione emerge anche considerando l'evoluzione temporale dei fronti d'onda delle due specie; la figura 5.8 riporta i fronti d'onda ottenuti in caso di velocità della corrente costante pari a $v_0 = 2$, quelli ottenuti e il relativo ingrandimento per velocità della corrente oscillante nel tempo intorno al medesimo valore di v_0 . Dal confronto delle figure è possibile notare, nel caso di 5.8(b) la medesima ripetizione nel tempo di fronti a distanza minore e maggiore.

L'intervallo temporale considerato per il plottaggio è di ampiezza $t = 60$; a seconda del periodo di oscillazione pari a $T_{oscill} = 5, T_{oscill} = 15, T_{oscill} = 30$, la celerità oscilla in tale intervallo rispettivamente 12, 4, o 2 volte; in tutti i casi emergono delle fasce in cui i fronti sono più densi e zone in cui, invece sono più radi. Considerando l'andamento della velocità di invasione in funzione del tempo, i fronti a distanza minore sono quelli in corrispondenza delle pendenze maggiori nel diagramma, mentre in prossimità dei massimi e dei minimi della celerità, dove la pendenza della funzione seno tende a zero, la distanza tra i fronti d'onda di predatori e prede è maggiore.

L'ampiezza dell'oscillazione, sia della velocità della corrente sia della velocità di invasione delle specie, è proporzionale alla velocità media della corrente, da ciò deriva che per $v_0 = 2$, è

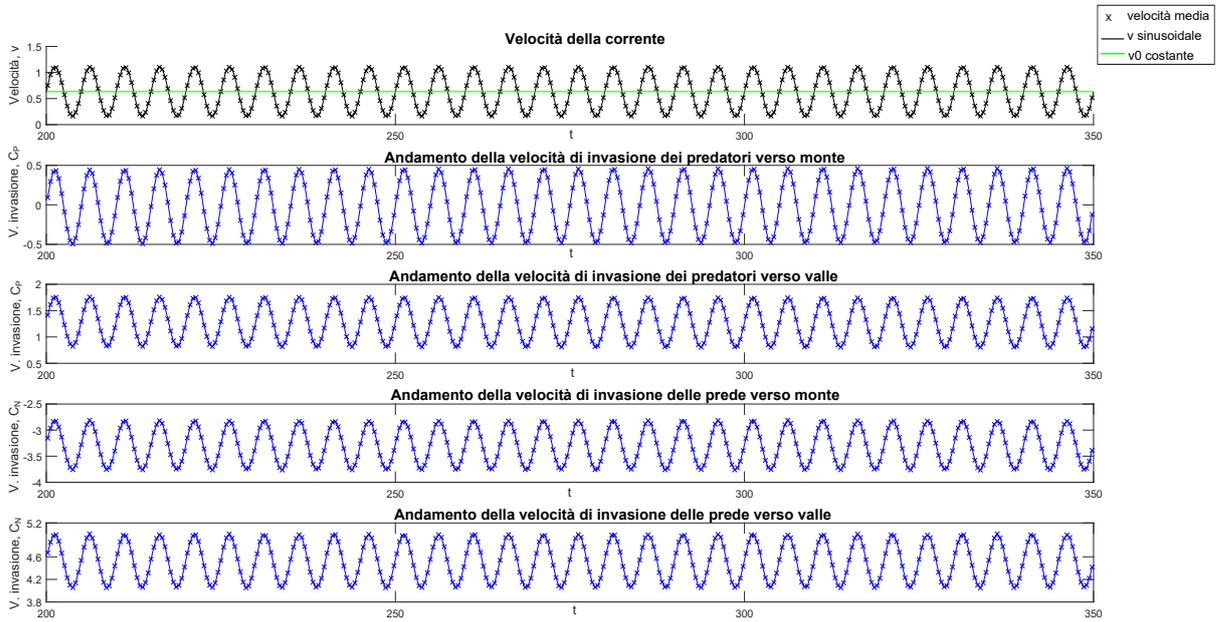


Figura 5.6: Andamento della velocità della corrente e delle velocità di invasione dei fronti d’onda di predatori e prede per velocità della corrente media $v_0 = 0.632456$, $T_{oscill} = 5$, $A = 0.75v_0$. La celerità del fronte d’onda dei predatori che procede verso monte, assume valori positivi e negativi, nel complesso, tuttavia, il fronte si sposta verso monte

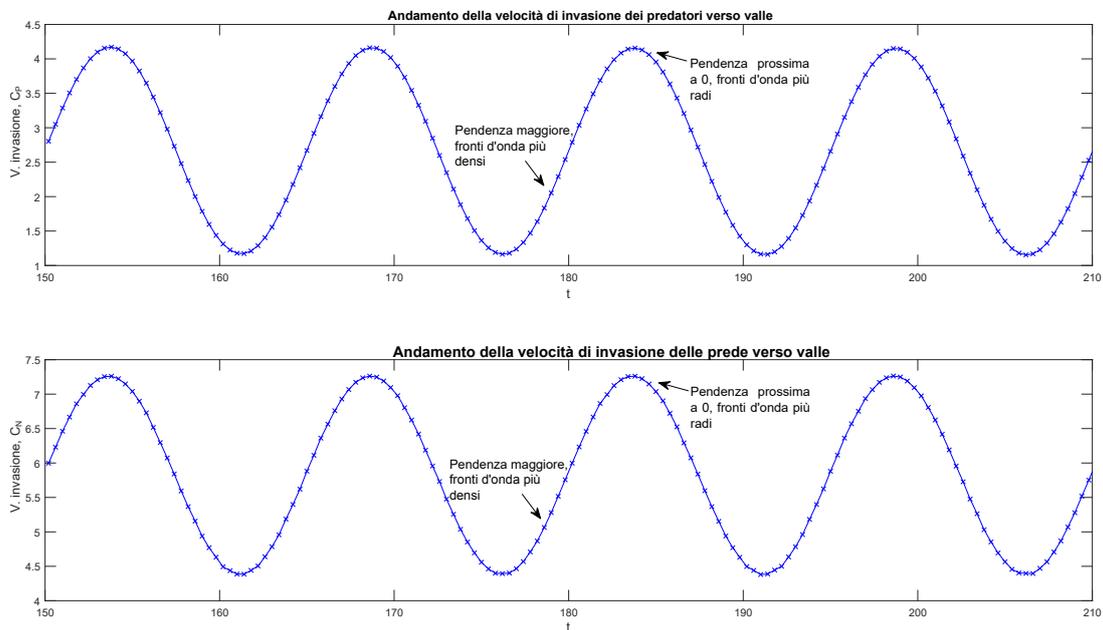


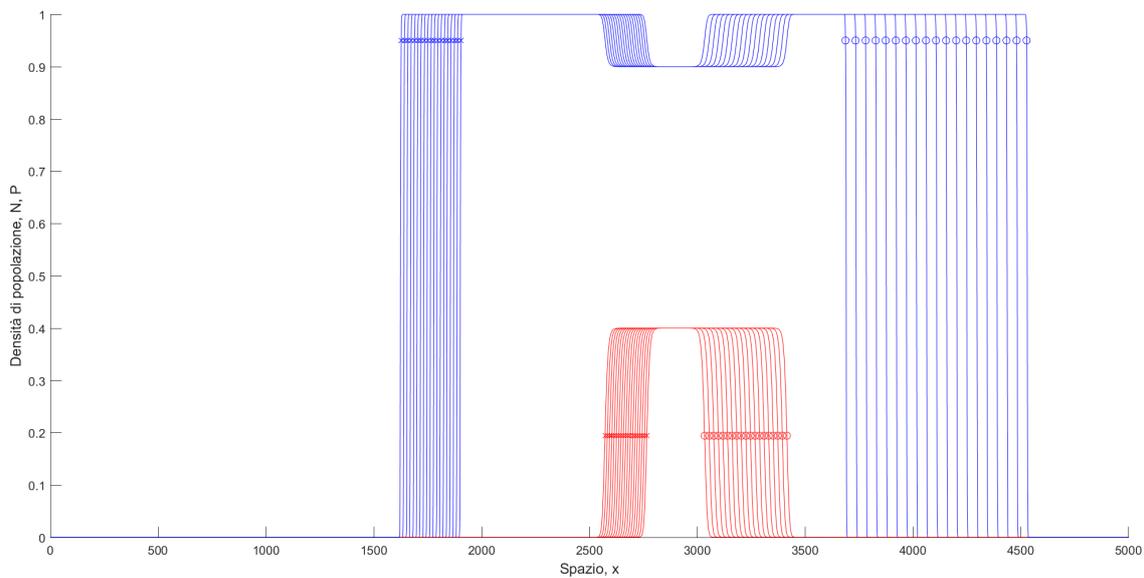
Figura 5.7: Andamento delle velocità di invasione di predatori e prede verso valle per velocità media della corrente $v_0 = 2$, $T_{oscill} = 15$, $A = 0.75v_0$

possibile apprezzare visivamente la periodicità dei fronti sopra descritta in quanto le oscillazioni sono dell'ordine di ± 1 nel caso di $A = 0.5v_0$ e ± 1.5 nel caso di $A = 0.75v_0$; per $v_0 = 0.2$ e $v_0 = 0.632456$ dal plottaggio dei fronti la periodicità non è apprezzabile, in quanto le oscillazioni sono modeste (rispettivamente di ± 0.1 e ± 0.15 nel caso di velocità media della corrente $v_0 = 0.2$ e di ± 0.316 e ± 0.474 nel caso di velocità media della corrente $v_0 = 0.632456$), la differenza di densità dei fronti è bassa e non apprezzabile ad occhio nudo per intervalli di salvataggio e plottaggio anche molto piccoli.

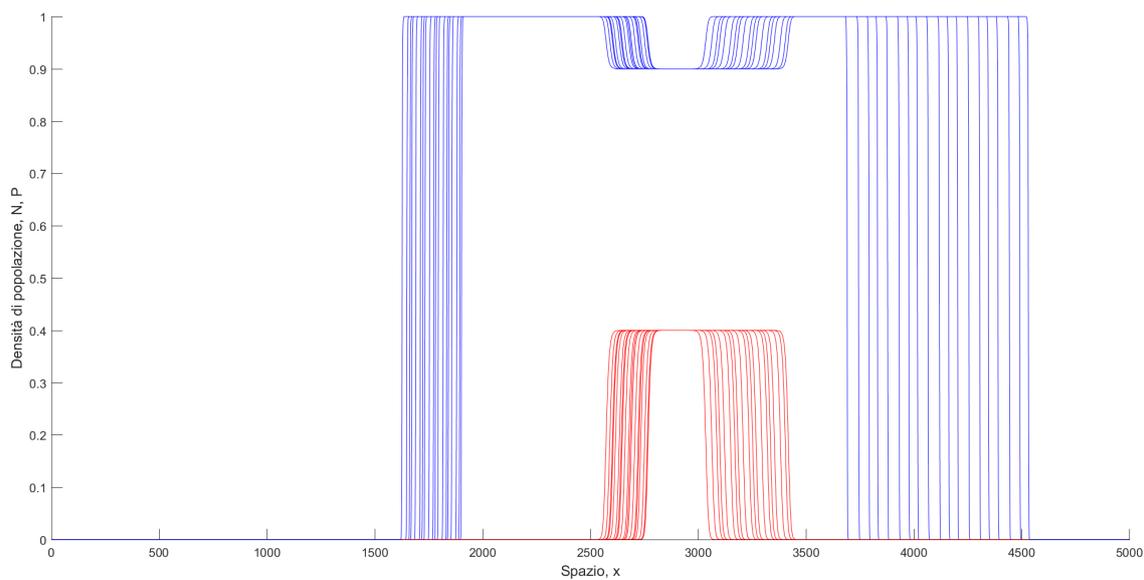
Pur essendo evidente un andamento periodico nell'evoluzione temporale dei fronti d'onda, lo spazio complessivamente percorso nell'intervallo temporale considerato è, per tutti i valori di ampiezza e periodo di oscillazione, il medesimo, a meno della tolleranza pari a 0.04%, già ottenuto nel caso di velocità della corrente costante; si riporta, per completezza, la tabella 5.2 con i valori di spazio percorso da predatori e prede per i tre valori di velocità media della corrente considerati.

Tabella 5.2: Spazio percorso verso monte e verso valle dai fronti d'onda di prede e predatori, per velocità della corrente dipendente dal tempo con legge sinusoidale, nell'intervallo temporale di valutazione dei risultati di ampiezza $t = 150$. Lo spazio complessivamente percorso dai fronti è il medesimo percorso nell'ipotesi di velocità della corrente costante

v_0	predatori monte	predatori valle	prede monte	prede valle
0.2	67.13	127.10	557.42	615.96
0.632456	2.18	191.85	493.70	678.85
2	201.94	397.66	289.20	874.95



(a) Fronti d'onda di predatori e prede per $v_0 = 2$ costante



(b) Fronti d'onda periodici di predatori e prede, velocità della corrente oscillante intorno a $v_0 = 2$

Figura 5.8: Fronti d'onda di predatori e prede con andamento periodico. Velocità della corrente oscillante intorno a $v_0 = 2$, $T_{oscill} = 30$, $A = 0.5v_0$. Salvataggio ogni mille unità temporali $\Delta t = 0.008$

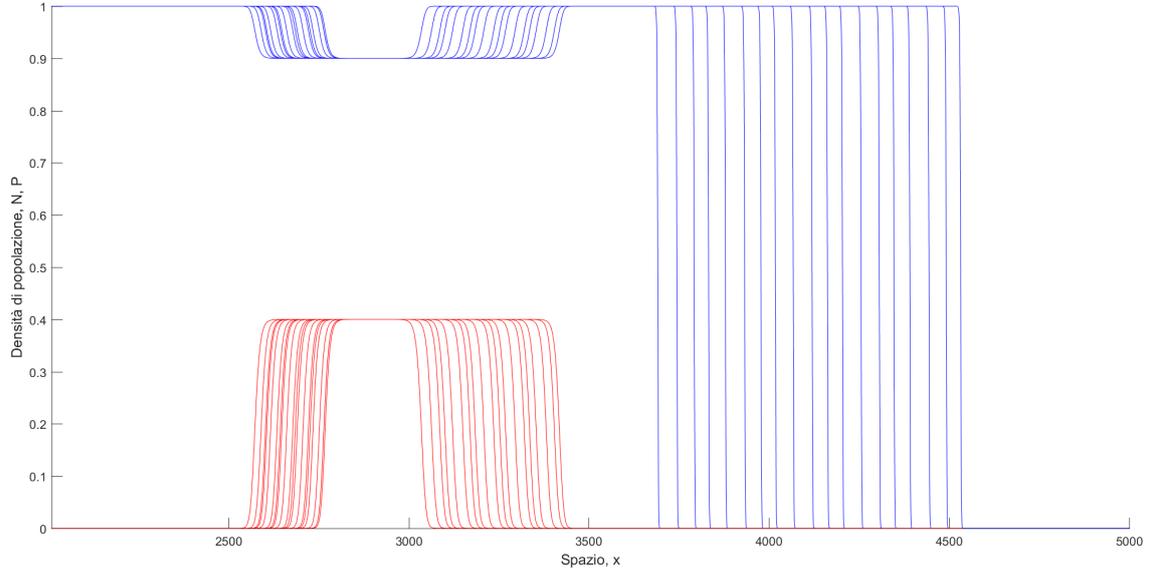


Figura 5.9: Ingrandimento dei fronti di prede e predatori che procedono verso valle

Dopo aver analizzato l'influenza della velocità della corrente variabile nel tempo sull'evoluzione temporale dei fronti d'onda e sullo spazio percorso, è stato valutato in maggior dettaglio l'effetto indotto sulle celerità dei fronti d'onda delle due specie.

A questo scopo sono stati valutati gli scostamenti assoluti e relativi rispetto ai valori ottenuti nel caso di velocità della corrente costante secondo le seguenti relazioni:

$$\Delta C_P = C_P(t) - C_{P,v=cost} \quad \Delta C_N = C_N(t) - C_{N,v=cost} \quad (5.3)$$

$$\Delta C_{P,rel} = \frac{C_P(t) - C_{P,v=cost}}{C_{P,v=cost}} \quad \Delta C_{N,rel} = \frac{C_N(t) - C_{N,v=cost}}{C_{N,v=cost}}. \quad (5.4)$$

dove ΔC_P e ΔC_N indicano gli scostamenti assoluti, $C_P(t)$, $C_N(t)$ sono i valori di celerità di predatori e prede nel caso di velocità della corrente dipendente dal tempo mentre $C_{P,v=cost}$ e $C_{N,v=cost}$ sono le medesime celerità ottenute nel caso di flusso con velocità costante. La medesima simbologia è stata adottata per definire gli scostamenti relativi $\Delta C_{P,rel}$ e $\Delta C_{N,rel}$. Considerando velocità della corrente oscillanti intorno a $v_0 = 0.2$, $v_0 = 0.632456$, e $v_0 = 2$ relativamente agli scostamenti assoluti e relativi delle celerità dei fronti d'onda sono stati ottenuti i risultati di seguito riportati.

- Velocità oscillante intorno a $v_0 = 0.2$

- Gli scostamenti delle velocità di invasione dei fronti di prede e predatori sono gli stessi della velocità della corrente rispetto al valor medio; in particolare nel caso di $A = 0.5v_0$ lo scostamento massimo è pari, in valore assoluto a 0.1, mentre per $A = 0.75v_0$ è pari a 0.15;
- in merito agli scostamenti relativi è stato osservato che, sia nel caso di ampiezza di

oscillazione $A = 0.5v_0$ che $A = 0.75v_0$, lo scostamento relativo della celerità dei predatori è di un'ordine di grandezza superiore rispetto a quello delle prede; ciò è valido per tutti i periodi di oscillazione considerati. La figura 5.10 riporta gli scostamenti relativi nel caso di ampiezza di oscillazione $A = 0.75v_0$ e periodo $T_{oscill} = 30$.

- **Velocità oscillante intorno a $v_0 = 0.632456$**

- Gli scostamenti assoluti delle velocità di invasione dei fronti d'onda di prede e predatori verso monte e verso valle sono i medesimi di v_0 , i valori massimi e minimi sono, in valore assoluto, pari a 0.316228 per $A = 0.5v_0$ e 0.474342 nel caso di $A = 0.75v_0$. La figura 5.11 riporta, a titolo di esempio, l'andamento degli scostamenti assoluti per $A = 0.75v_0$ e $T_{oscill} = 30$;
- per quanto riguarda gli scostamenti relativi, è necessario tenere in considerazione che nell'intervallo temporale di valutazione dei risultati, la celerità del fronte d'onda dei predatori che procede verso monte nel caso di $v_0 = 0.632456$ costante è prossima allo 0, e diminuisce leggermente nel tempo a partire dal valore $C_P = 0.026$. Dal momento che, nel calcolo dello scostamento relativo secondo la (5.4), $C_{P,v=cost}$ compare a denominatore, lo scostamento relativo ha un andamento crescente nel tempo. In questo caso risulta, quindi, più significativo lo scostamento assoluto. Il fronte dei predatori che procede verso valle, presenta uno scostamento relativo di un ordine di grandezza maggiore rispetto a quello delle prede che procede nella stessa direzione. L'andamento degli scostamenti relativi nel caso di ampiezza di oscillazione $A = 0.5v_0$ e periodo $T_{oscill} = 30$ è riportato in figura 5.12.

- **Velocità oscillante intorno a $v_0 = 2$**

- Gli scostamenti assoluti della celerità del fronte d'onda di prede e di predatori sono i medesimi della velocità della corrente, e oscillano tra ± 1 e ± 1.5 a seconda che si consideri rispettivamente $A = 0.5v_0$ e $A = 0.75v_0$;
- gli scostamenti relativi hanno il medesimo ordine di grandezza sia per le prede che per i predatori. Si riporta in figura 5.13, l'andamento degli scostamenti relativi per velocità della corrente media pari a $v_0 = 2$, ampiezza di oscillazione $A = 0.75v_0$, e periodo di oscillazione $T_{oscill} = 30$.

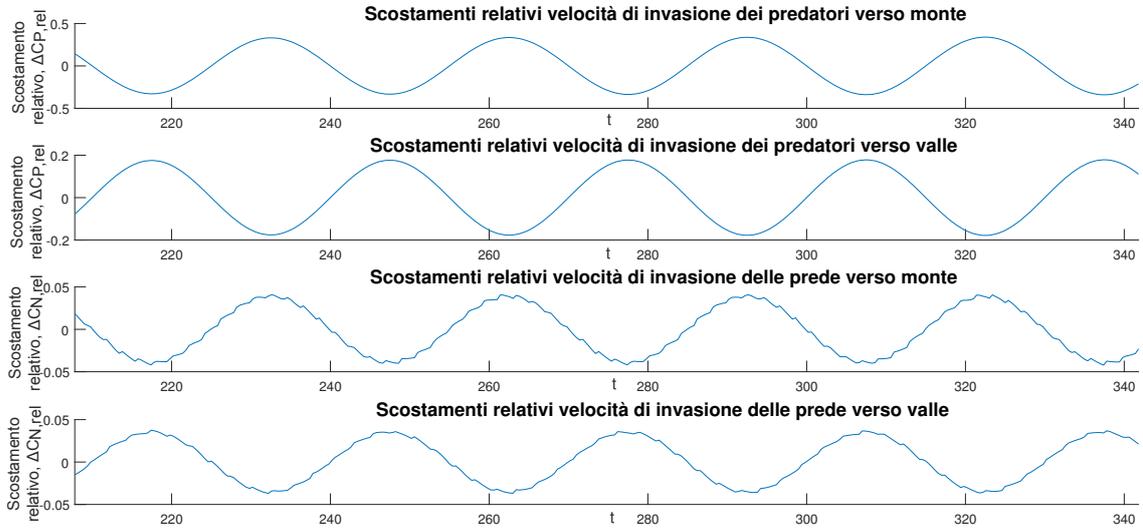


Figura 5.10: Scostamenti relativi delle velocità di invasione dei fronti d'onda di predatori e prede per velocità media della corrente pari a $v_0 = 0.2$, $A = 0.75v_0$ e $T_{oscill} = 30$

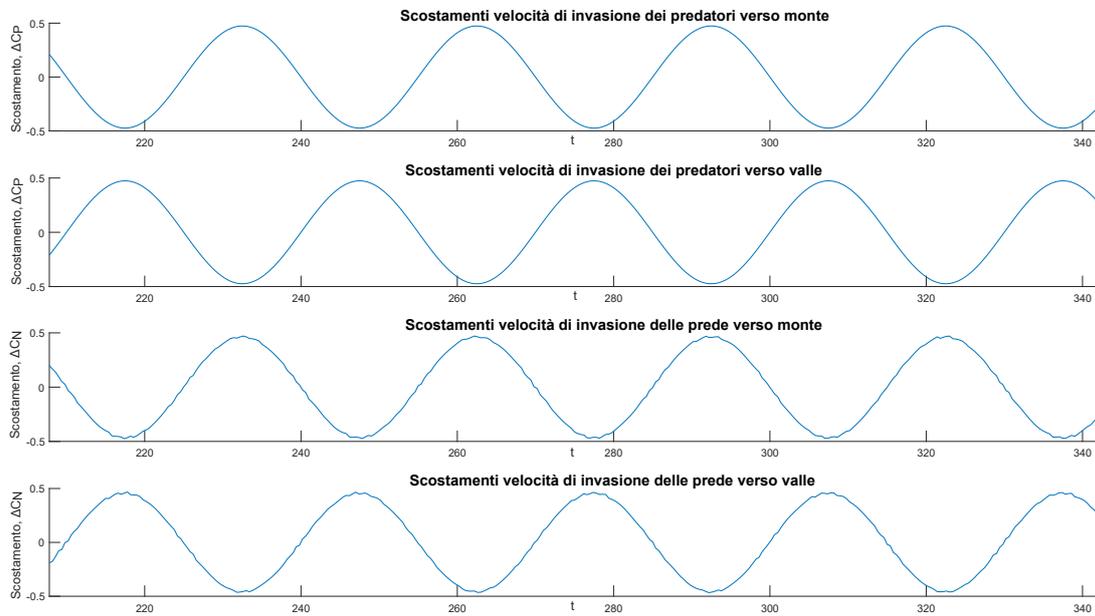


Figura 5.11: Scostamenti assoluti delle velocità di invasione dei fronti d'onda di predatori e prede per velocità media della corrente pari a $v_0 = 0.632456$, $A = 0.75v_0$ e $T_{oscill} = 30$

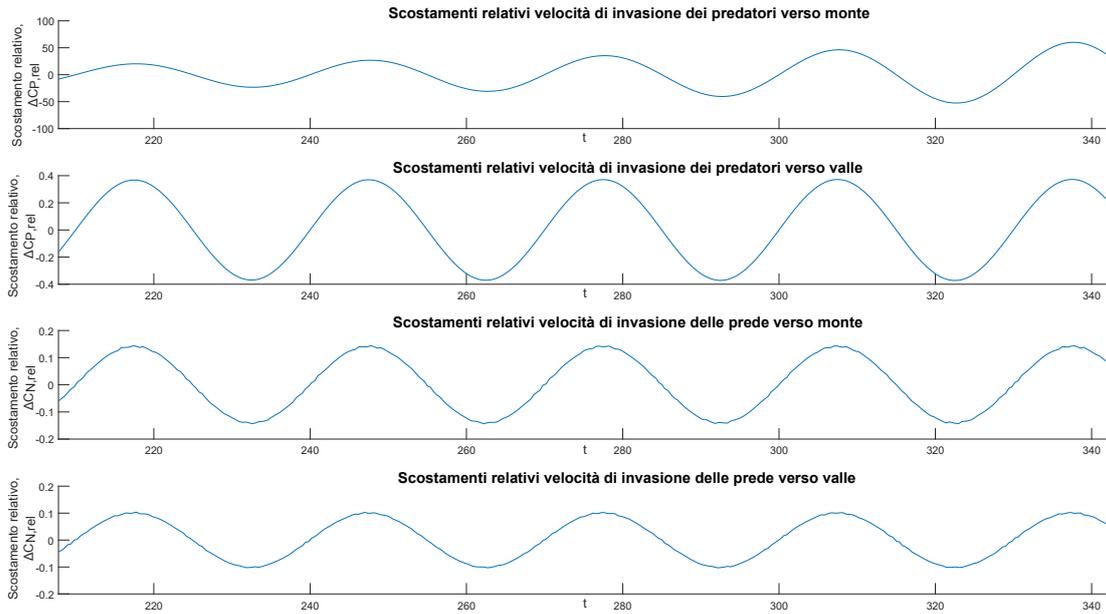


Figura 5.12: Scostamenti relativi delle velocità di invasione dei fronti d'onda di predatori e prede per velocità media della corrente pari a $v_0 = 0.632456$, $A = 0.75v_0$ e $T_{oscill} = 30$

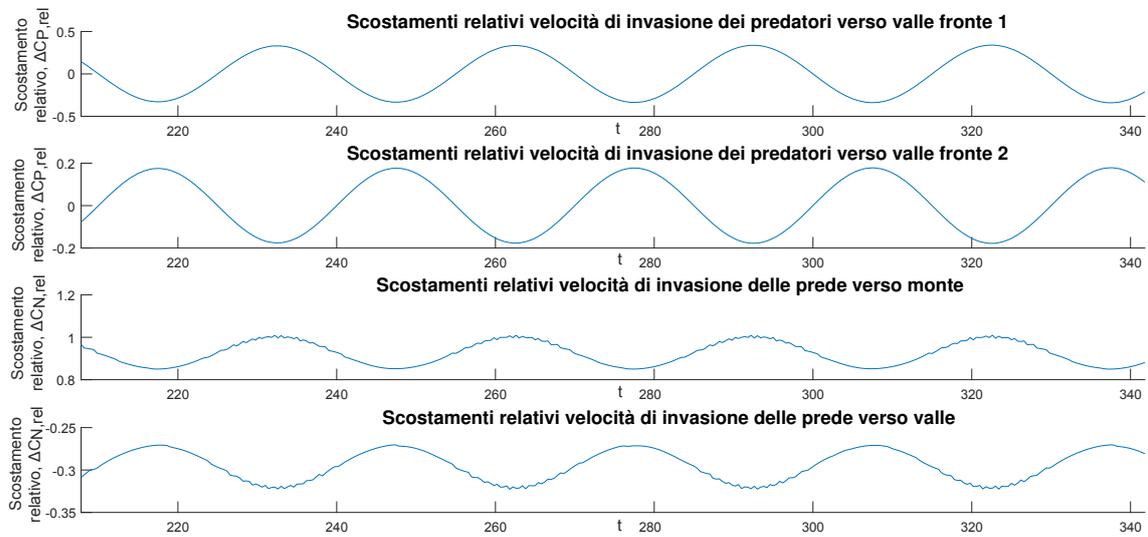


Figura 5.13: Scostamenti relativi delle velocità di invasione dei fronti d'onda di predatori e prede per velocità media della corrente pari a $v_0 = 2$, $A = 0.75v_0$ e $T_{oscill} = 30$

Per valutare l'influenza del periodo e dell'ampiezza dell'oscillazione sui risultati sono stati confrontati gli scostamenti assoluti nel caso di (i) periodo di oscillazione T_{oscill} costante e (ii) ampiezza di oscillazione A costante.

(i) **Periodo di oscillazione T_{oscill} costante**

Preso in considerazione un periodo di oscillazione T_{oscill} fissato, sono stati confrontati gli scostamenti delle velocità di invasione dei fronti d'onda di predatori e prede al variare delle ampiezze di oscillazione $A = 0.5v_0$ e $A = 0.75v_0$, considerando le tre velocità medie della corrente $v_0 = 0.2$, $v_0 = 0.632456$ e $v_0 = 2$.

I risultati ottenuti hanno mostrato che gli scostamenti corrispondenti ad ampiezze minori risultano essere più bassi: in particolare, scostamenti corrispondenti ad $A = 0.5v_0$ risultano essere inferiori di circa il 33% rispetto a quelli che si ottengono per $A = 0.75v_0$ per entrambe le specie, tali valori percentuali sono validi per i tre T_{oscill} considerati e per le tre velocità medie della corrente analizzate. La figure ?? e (5.15) riportano l'andamento degli scostamenti per le due ampiezze di oscillazione per $T_{oscill} = 5$, $T_{oscill} = 15$, $T_{oscill} = 30$ nel caso di velocità media della corrente $v_0 = 2$.

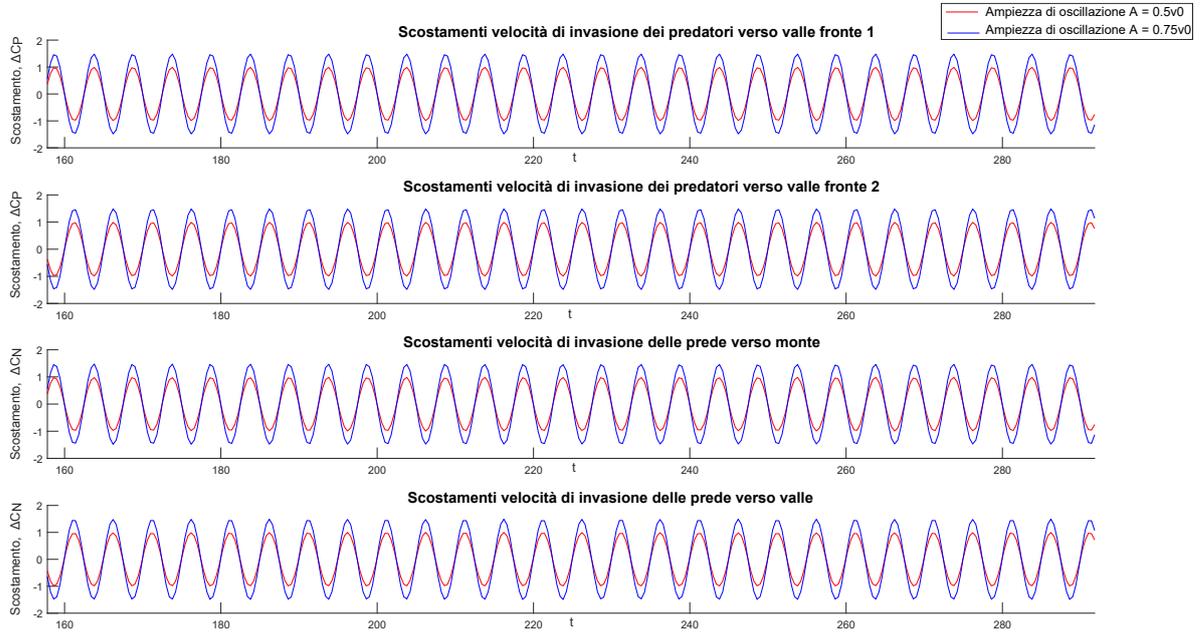


Figura 5.14: Scostamenti delle velocità di invasione dei fronti d'onda di predatori e prede per ampiezze di oscillazione $A = 0.5v_0$ e $A = 0.75v_0$ per $T_{oscill} = 5$ e velocità media della corrente $v_0 = 2$. Gli scostamenti che si ottengono per $A = 0.75v_0$ sono il 33% più alti di quelli ottenuti nel caso in cui l'ampiezza dell'oscillazione sia $A = 0.5v_0$

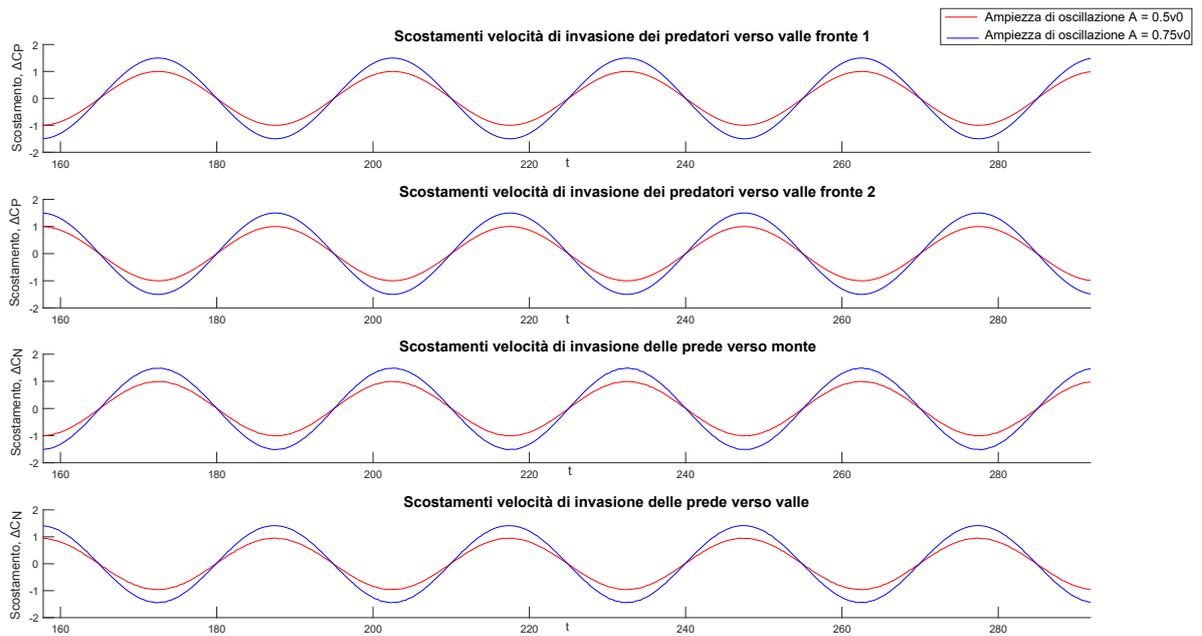
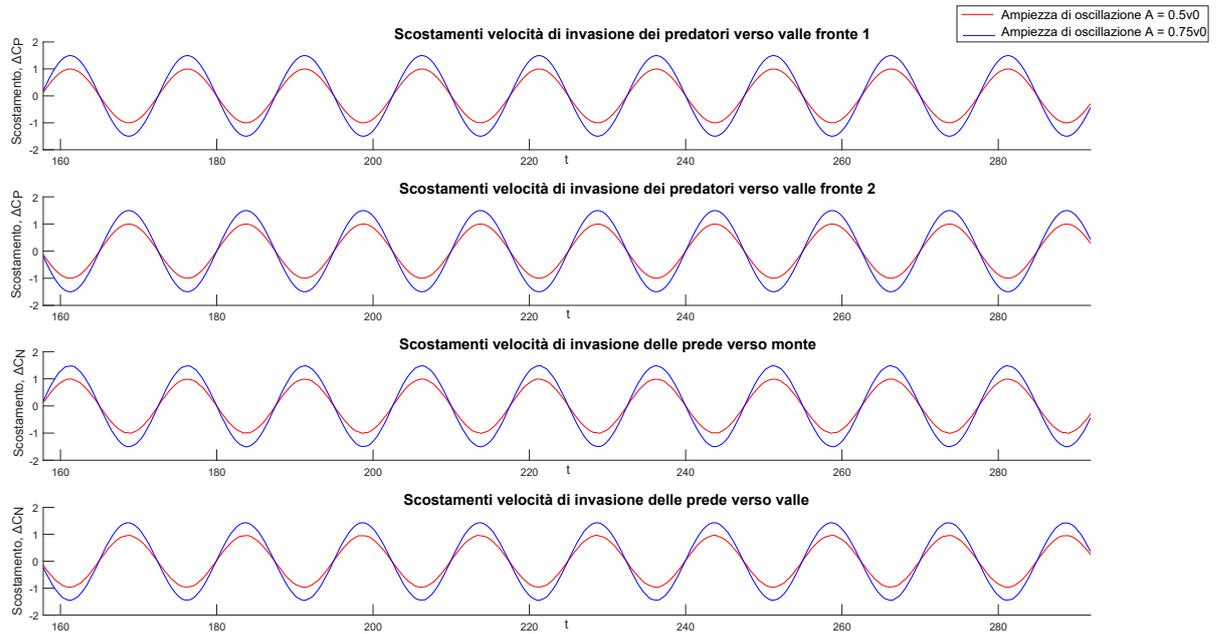
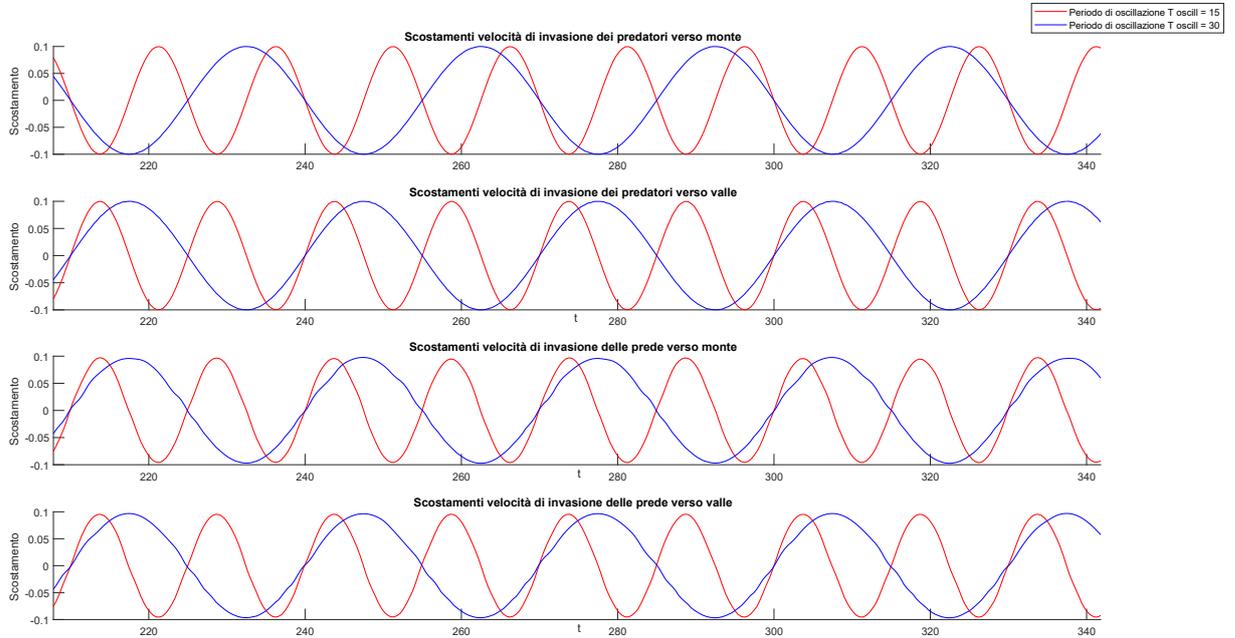
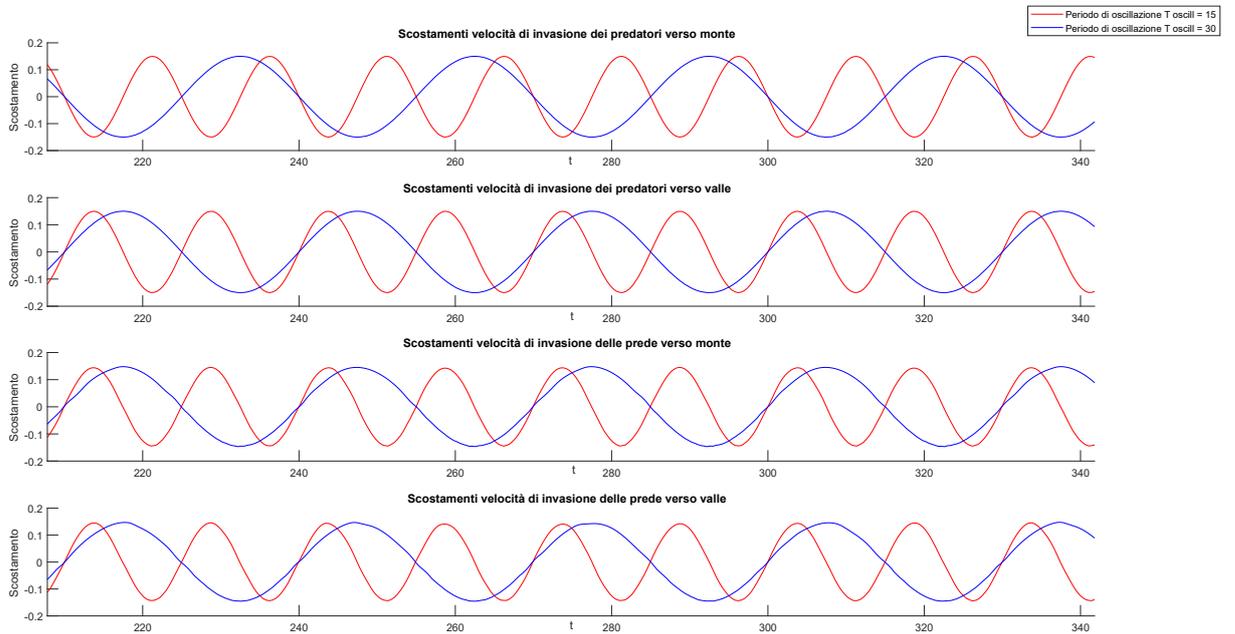


Figura 5.15: Scostamenti delle velocità di invasione dei fronti d’onda di predatori e prede per ampiezze di oscillazione (a) $A = 0.5v_0$ e $A = 0.75v_0$ per $T_{oscill} = 15$ e (b) $T_{oscill} = 30$ velocità media della corrente $v_0 = 2$. Gli scostamenti corrispondenti ad $A = 0.5v_0$ sono del 33% più bassi rispetto a quelli che si ottengono per $A = 0.75v_0$

(ii) **Ampiezza di oscillazione A costante** Sono state analizzate le celerità dei fronti d'onda delle due specie per ampiezza dell'oscillazione fissa, pari a $A = 0.5v_0$ o $A = 0.75v_0$, e periodi di oscillazione $T_{oscill} = 5, T_{oscill} = 15, T_{oscill} = 30$.



(a) $A = 0.5v_0, v_0 = 0.2$



(b) $A = 0.75v_0, v_0 = 0.2$

Figura 5.16: Scostamenti delle velocità di invasione dei fronti d'onda di predatori e prede per periodi di oscillazione $T_{oscill} = 15$, e $T_{oscill} = 30$ per i differenti valori di A e velocità media della corrente $v_0 = 0.2$

Considerando una velocità della corrente oscillante intorno a $v_0 = 0.2$, la figura 5.16 riporta il confronto tra $T_{oscill} = 15$ e $T_{oscill} = 30$, mentre nelle figure 5.17 5.18 viene effettuato il confronto, a parità di A delle celerità ottenute per $T_{oscill} = 5$ e $T_{oscill} = 15$, infine la figura 5.18 riporta il confronto tra tutti i periodi.

In generale, dall'analisi dei risultati ottenuti considerando velocità della corrente oscillanti intorno ai tre valori v_0 scelti, rispettivamente pari a $v_0 = 0.2$, $v_0 = 0.632456$, $v_0 = 2$, tenendo fissa l'ampiezza di oscillazione A , e considerando periodi differenti è emerso che, indipendentemente dal periodo, i massimi e minimi raggiunti dalla celerità sono i medesimi, ma sfasati temporalmente a seconda del valore di T_{oscill} .

In definitiva, è possibile affermare che, anche nel caso di velocità della corrente variabile nel tempo con legge sinusoidale, gli scenari di diffusione sono i medesimi che si verificano in caso di v_0 costante, riportati nel diagramma di velocità di invasione 4.1 ovvero *coesistenza di predatori e prede e fuga delle prede verso monte, stallo dei predatori e fuga delle prede verso monte e dilavamento dei predatori*. La differenza, rispetto al caso studiato al capitolo 4 consiste nella modalità in cui avviene la diffusione. Nel caso di velocità della corrente variabile nel tempo con una certa periodicità, i fronti d'onda delle due specie procedono con celerità differenti da un'istante temporale all'altro, di conseguenza, all'interno di un intervallo temporale fissato il fronte non percorre uno spazio costante tra un'istante e il successivo, tuttavia lo spazio percorso ha una certa periodicità dipendente dal periodo di oscillazione T_{oscill} considerato.

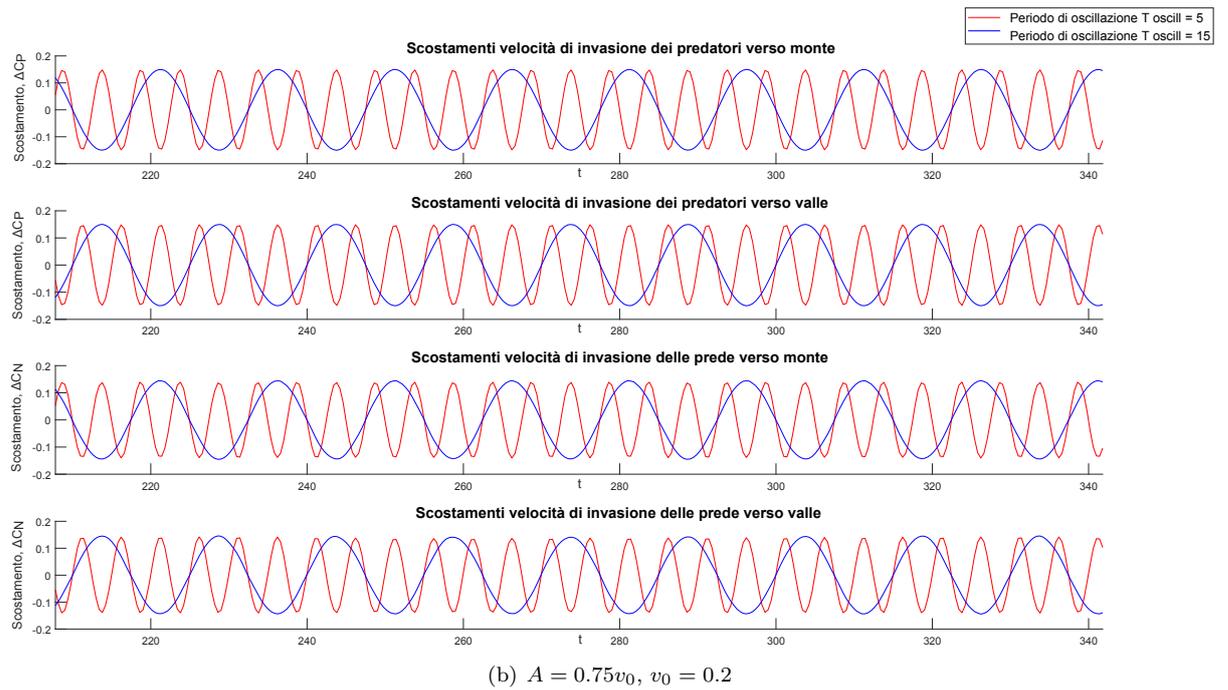
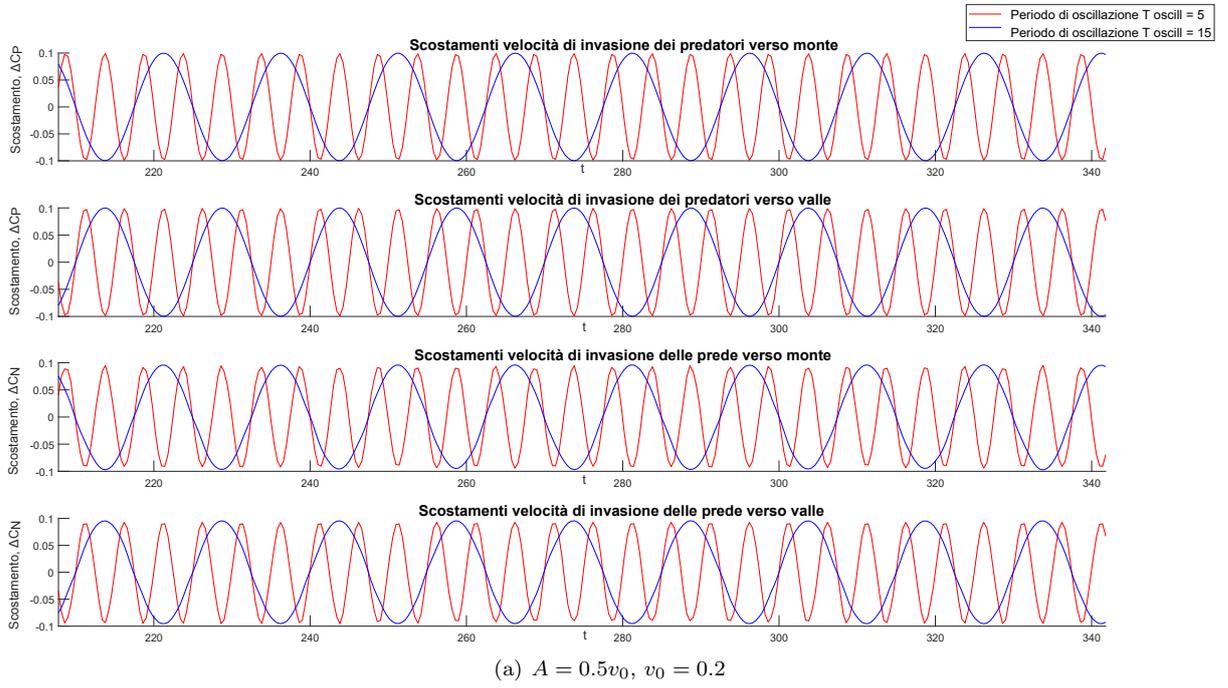
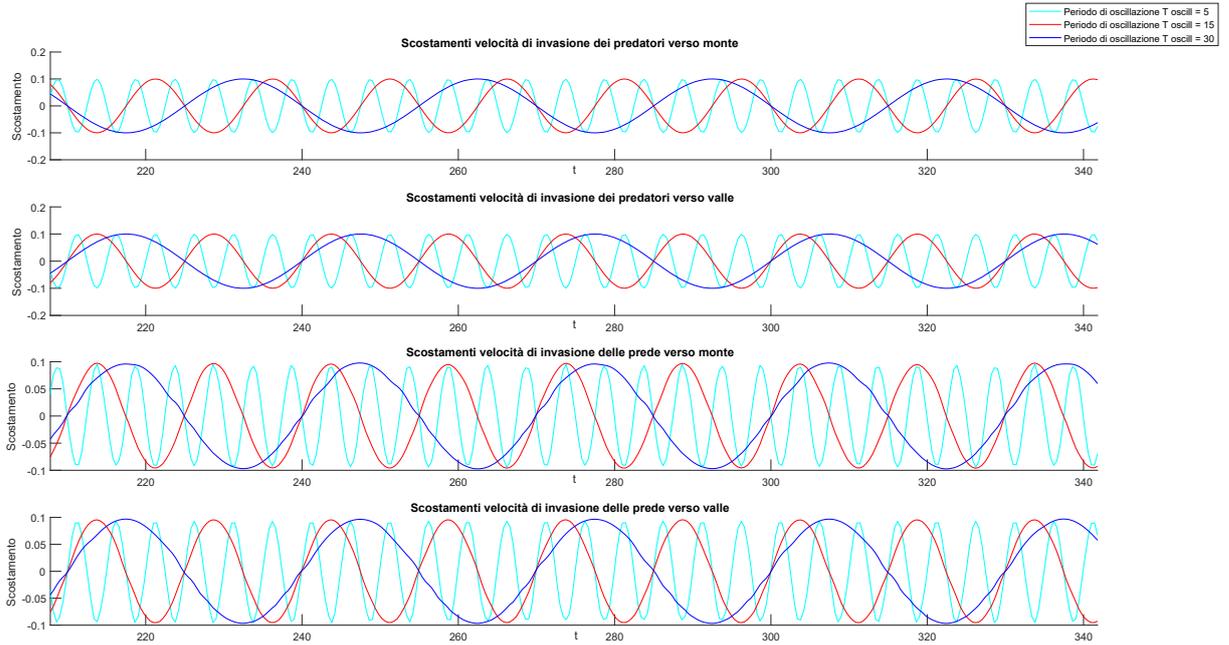
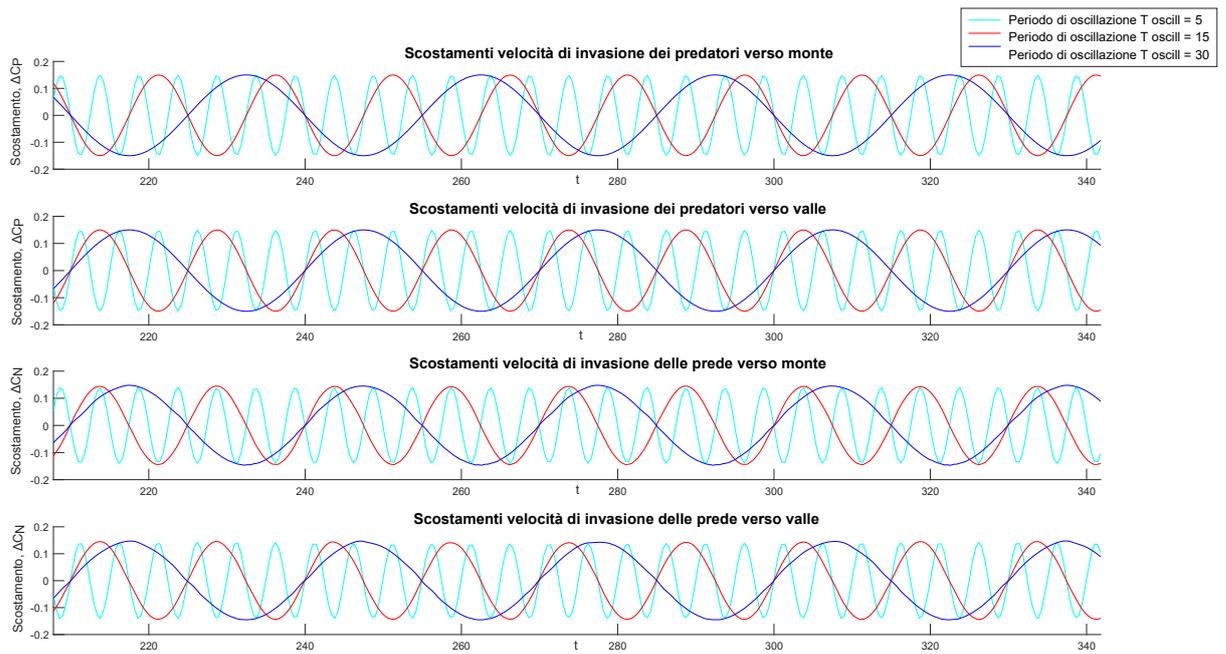


Figura 5.17: Scostamenti delle velocità di invasione dei fronti d'onda di predatori e prede per periodi di oscillazione $T_{oscill} = 5$, e $T_{oscill} = 15$ per i differenti valori di A e velocità media della corrente $v_0 = 0.2$



(a) $A = 0.5v_0, v_0 = 0.2$



(b) $A = 0.75v_0, v_0 = 0.2$

Figura 5.18: Scostamenti delle velocità di invasione dei fronti d'onda di predatori e prede per periodi di oscillazione $T_{oscill} = 5$, $T_{oscill} = 15$, e $T_{oscill} = 30$ per i differenti valori di A e velocità media della corrente $v_0 = 0.2$. I valori massimi e minimi degli scostamenti sono i medesimi per i diversi periodi di oscillazione ma sfalsati temporalmente

Capitolo 6

Caso velocità della corrente stocastica

6.1 Generalità

Nello studio dei sistemi ambientali non si può prescindere dall'analisi della componente stocastica, in quanto essi generalmente sono sottoposti a forzanti che oscillano nel tempo. Una grande componente della variabilità ambientale, fatta eccezione per i processi dominati da oscillazioni deterministiche, come i cicli stagionali, è di tipo casuale per l'incertezza associata alle fluttuazioni climatiche o agli episodi puntuali come terremoti o piene che costituiscono un disturbo rispetto allo stato indisturbato.

La dinamica di un sistema è quindi influenzata dalla stocasticità insita nei processi ambientali stessi.

Con questa premessa, nel presente capitolo viene trattata l'analisi della diffusione delle prede e predatori in un corso d'acqua considerando anche la componente stocastica. In particolare, non si fa riferimento alla stocasticità associata un evento di piena ma si analizza la variabilità temporale casuale della velocità della corrente.

In particolare è stato dapprima effettuato un confronto dei risultati ottenuti in caso stocastico considerando diversi valori di velocità media della corrente, successivamente è stato effettuato un confronto con quanto ottenuto considerando i casi deterministici in ipotesi di velocità della corrente costante e variabile nel tempo con legge sinusoidale, analizzati nei capitoli 4 e 5.

6.2 Casi considerati

Un sistema ambientale viene definito univariato, quando può essere studiato con riferimento ad una sola variabile di stato; Con riferimento alla sola componente deterministica, la dinamica di

un sistema univariato, può essere espressa dalla relazione

$$\frac{d\phi}{dt} = f(\phi) \quad (6.1)$$

dove ϕ è una variabile di stato che caratterizza lo stato di un sistema e $f(\phi)$ è una funzione deterministica della variabile di stato.

La casualità associata ai processi ambientali viene solitamente modellata con un rumore $\xi(t)$, pertanto la dinamica di un sistema in cui è presente una forzante stocastica può essere espressa dalla relazione

$$\frac{d\phi}{dt} = f(\phi) + g(\phi)\xi(t) \quad (6.2)$$

dove la funzione $g(\phi)$ esprime la possibilità che l'effetto della forzante casuale sul sistema dipenda dallo stato del sistema stesso. Si parla di rumore additivo nel caso in cui $g(\phi) = cost$, moltiplicativo in caso contrario (D'Odorico, Laio e Ridolfi 2011). Esistono differenti tipi di rumore, in particolare è possibile far riferimento al rumore bianco e al rumore colorato; per comprenderne la differenza si introducono due scale temporali, τ_s e τ_n , rispettivamente del sistema e del rumore.

τ_s , esprime il tempo di risposta del sistema deterministico dopo una perturbazione dallo stato stazionario, indicato con ϕ_s ; misura quindi quanto rapidamente il sistema converge allo stato stazionario ϕ_s .

τ_n è una funzione dell'autocorrelazione del rumore che esprime il grado di dipendenza tra i valori assunti dal rumore stesso a istanti temporali differenti. Generalmente è possibile esprimere la scala temporale τ_n , come integrale della funzione di autocorrelazione, C , che indica la memoria temporale del rumore. I valori di $\xi(t)$ a due differenti istanti temporali t_1 e t_2 , sono fortemente correlati se risulta

$$|t_2 - t_1| \leq \tau_n.$$

A seconda del valore assunto dal rapporto $\frac{\tau_s}{\tau_n}$ il rumore viene modellato come bianco o colorato; in particolare:

- se $\frac{\tau_s}{\tau_n} < 1$: il sistema dinamico è molto più lento rispetto alla variabilità temporale delle forzanti stocastiche, il sistema pertanto non risente degli effetti dell'autocorrelazione del rumore, che pertanto può essere modellato come un rumore bianco, ovvero incorrelato. Il rumore bianco non ha una corrispondenza fisica, in quanto rappresenta una realizzazione di rumore non continua; tuttavia in molti processi ambientali il rumore esterno varia molto più rapidamente rispetto alla componente deterministica del sistema, pertanto è ragionevole modellare la forzante esterna come un rumore bianco.

Quando le fluttuazioni nelle componenti forzanti esterne sono dovute ad un grande numero di fattori agenti simultaneamente sul sistema, con riferimento al **Teorema del limite centrale** (per maggiori dettagli si rimanda all'appendice A) si può assumere che le fluttuazioni nei parametri esterni abbiano una distribuzione di tipo Gaussiano. La qualità dell'approssimazione dipende dal numero dei fattori, dalla forma delle loro distribuzioni di probabilità e dalla correlazione tra i fattori stessi. Occorre precisare che le soluzioni analitiche della (6.2) sono ricavate solo nel caso in cui il processo $\phi(t)$ sottoposto ad un rumore bianco è di tipo

Markoviano, ovvero quando la sua futura evoluzione dipende solo dallo stato presente del processo.

- se $\frac{\tau_s}{\tau_n} \sim 1$: la dinamica è sufficientemente lenta da risentire dell'effetto dell'autocorrelazione della forzante stocastica, pertanto si parla di rumore colorato. Per la definizione stessa di rumore colorato, il processo stocastico $\phi(t)$, ad esso sottoposto non è di tipo Markoviano, in quanto ad ogni istante la componente del rumore è legata a istanti temporali precedenti attraverso la autocorrelazione. Si assume tuttavia che il rumore colorato stesso sia di tipo Markoviano, ovvero generato da un processo Markoviano. Questa assunzione è valida nel caso di rumore Gaussiano colorato, anche noto come *Ornstein - Uhlenbeck process*.

Nella presente trattazione, la velocità della corrente è stata modellata con l'Ornstein - Uhlenbeck (O-U) process. Con riferimento ad un processo Markoviano univariato, $v(t)$, che evolve nel tempo, l'O-U process viene espresso attraverso l'equazione di Langevin:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\tau}v(t) + c^{1/2}\Gamma(t) \quad (6.3)$$

dove:

- τ : tempo di decadimento;
- c : costante di diffusione;
- $\Gamma(t)$: rumore bianco Gaussiano, corrispondente al limite, per $dt \rightarrow 0$ di una variabile casuale incorrelata temporalmente con media nulla e varianza $1/dt$;
- dt : variabile reale appartenente all'intervallo $\{0, \varepsilon\}$, con ε arbitrariamente prossimo a 0.

Dalla (6.3), emerge evidente come i parametri che possono essere utilizzati per modellare differenti tipi di rumore sono τ e c . La funzione di autocorrelazione, $C(t_2 - t_1)$ dell'O-U process decade esponenzialmente con un tempo caratteristico pari a τ e vale:

$$C(t_2 - t_1) = \frac{c}{\tau} e^{-\frac{|t_2 - t_1|}{\tau}} \quad (6.4)$$

dove t_1 e t_2 sono due istanti temporali. È possibile dimostrare che l'O-U process $v(t)$ è una variabile casuale con distribuzione normale per tutti gli istanti temporali successivi all'istante iniziale t_0 , da cui ne consegue che anche $v(t + \Delta t)$ lo è. A questo proposito si considera l'equazione di Langevin equivalente alla (6.3),

$$v(t + \Delta t) = v(t) - \frac{1}{\tau}v(t)dt + c^{1/2}N(t)dt^{1/2} \quad (6.5)$$

dove $dt \in \{0, \varepsilon\}$, con ε arbitrariamente prossimo a 0, e $N(t)$ è una variabile casuale normale temporalmente incorrelata con media nulla e varianza unitaria.

Se $N(m, \sigma^2)$ vale la relazione

$$a + bN(m, \sigma^2) = N(a + bm, b^2\sigma^2) \quad (6.6)$$

e se $N(m_1, \sigma_1^2)$ e $N(m_2, \sigma_2^2)$ sono le due variabili normali statisticamente indipendenti, si ha

$$N(m_1, \sigma_1^2) + N(m_2, \sigma_2^2) = N(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2). \quad (6.7)$$

Applicando ricorsivamente la (6.6) e la (6.7) all'equazione di Langevin (6.5) per gli istanti temporali successivi $t, t + dt, t + 2dt, \dots$, ne deriva la normalità di $v(t)$ per tutti gli istanti temporali.

Il valore assunto dalla velocità della corrente, $v(t)$, ad istanti temporali successivi è stato calcolato facendo riferimento alla formula esatta:

$$v(t + \Delta t) = v(t)\mu + \sigma n \quad (6.8)$$

dove n è un numero casuale estratto da una distribuzione normale di media nulla e varianza unitaria, $n \in N(0,1)$, mentre i momenti della variabile casuale normale $v(t + \Delta t)$, μ e σ^2 valgono:

- $\mu = e^{-\Delta t/\tau}$;
- $\sigma^2 = (c\tau/2)(1 - \mu^2)$.

Dalla (6.8) emerge evidente come, in base al valore assunto da μ e quindi da τ , e da σ sia possibile modellare il rumore. *sigma* prende il nome di deviazione standard ed è un indicatore della dispersione dei dati. La figura 6.1 illustra il significato dello scarto quadratico medio o deviazione standard di un campione di osservazioni di una generica variabile aleatoria, $Y(t)$.

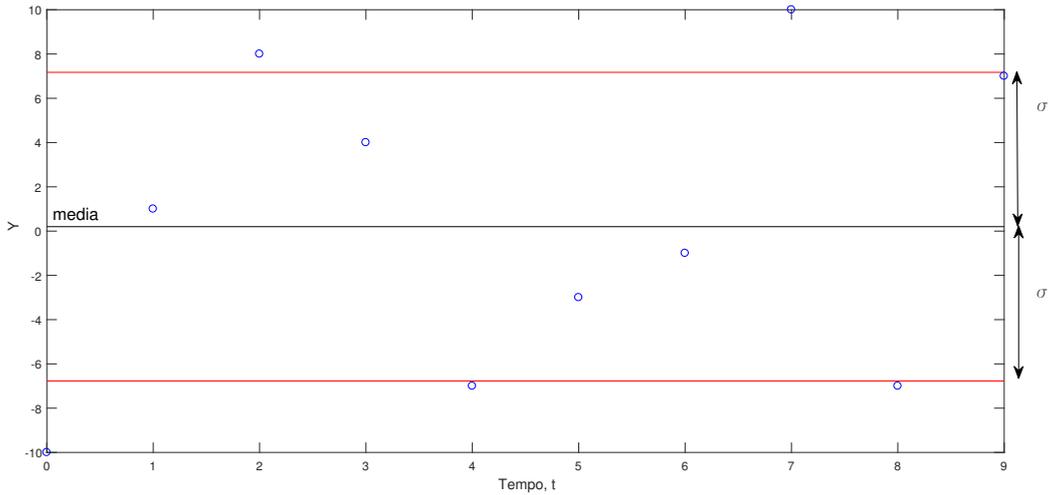


Figura 6.1: Figura esemplificativa del significato della deviazione standard σ di un campione di osservazioni di una generica variabile aleatoria $Y(t)$

Fissato il passo di discretizzazione temporale, $\Delta t = 0.008$, sono stati scelti differenti valori di τ e σ , in modo da valutare l'influenza di questi parametri che caratterizzano la velocità della corrente sul fenomeno di diffusione di prede e predatori all'interno del fiume. In particolare, sono state considerate:

- $\sigma = 0.3v_0$ e $\sigma = 0.25v_0$;
- $\tau = 0.5, \tau = 5$.

La scelta dei valori di σ e τ è stata dettata dalla volontà di effettuare un confronto delle velocità di avanzamento dei fronti d'onda di prede e predatori ottenute con l'ipotesi di velocità della corrente costante e di velocità della corrente oscillante con legge sinusoidale e quelle ottenute considerando

anche la componente stocastica. È stata calcolata la deviazione standard della velocità della corrente dipendente dal tempo con legge sinusoidale secondo la formula

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_1^N (v_i - v_0)^2}{N}} \quad (6.9)$$

dove v_0 indica la velocità media della corrente e v_i è l' i -esimo valore assunto dalla velocità della corrente all'istante temporale t_i e N indica il numero degli elementi del campione. Tale valore di σ è stato imposto nella formula (6.8). Nel caso di ampiezza di oscillazione $A = 0.5v_0$, è stato ottenuto un valore pari a $\sigma = 0.32v_0$ per tutti e tre i periodi di oscillazione, T_{oscill} considerati. Tale valore di scarto quadratico medio è stato imposto anche in caso stocastico, quando il tempo di decadimento è stato $\tau = 5$.

Nel caso in cui la velocità della corrente sinusoidale presenti un'ampiezza di oscillazione pari a $A = 0.75v_0$, per i periodi di oscillazione considerati, pari a $T_{oscill} = 5$, $T_{oscill} = 15$, $T_{oscill} = 30$, la deviazione standard risulta essere pari a $\sigma = 0.5v_0$, tuttavia non è stato possibile imporre tale valore nella (6.8). Infatti, nella generazione del rumore, secondo tale equazione, si ottengono sia valori positivi che negativi; nel caso in esame è la velocità del fiume ad essere modellata come un rumore colorato, e pertanto i valori assunti al trascorrere del tempo devono risultare positivi. Effettuata la scelta di τ , rimane definito il valore di μ che compare nella (6.8), e, non essendo possibile prevedere il valore delle unità casuali n , imponendo $\sigma = 0.5v_0$ si ottengono valori di velocità della corrente negativi e pertanto privi di significato.

Quando invece, $\tau = 0.5$ il valore massimo di scarto quadratico medio compatibile con la condizione di positività della corrente è risultato essere $\sigma = 0.25v_0$. In questo caso, al fine di effettuare un confronto con il caso periodico, è stato preso come riferimento il valore di σ ottenuto ed è stata ricavata la corrispondente ampiezza di oscillazione del caso periodico attraverso la formula

$$A = \sqrt{2}\sigma. \quad (6.10)$$

È stato inoltre studiato il caso avente tempo di decadimento $\tau = 5$ e deviazione standard $\sigma = 0.25v_0$.

Relativamente al tempo di decadimento sono stati scelti valori che consentissero di ottenere un rumore significativo sull'intervallo temporale considerato, pertanto sono stati scelti valori minori o al più uguali al periodo di oscillazione, T_{oscill} , più piccolo, pari a 5 scelto nel capitolo 5. Nel caso in cui $\tau = 0.5$ il valore massimo di deviazione standard, σ , compatibile con la condizione di valori della corrente positivi è stato $\sigma = 0.25v_0$. Testando anche ulteriori valori di τ , come $\tau = 1$ e $\tau = 3$, la condizione di positività della velocità della corrente limita i valori di deviazione standard ad essere al più pari a $\sigma = 0.30v_0$.

Il confronto delle velocità di invasione dei fronti dei predatori, C_P e C_N è stato quindi effettuato tra il caso deterministico che presenta un'ampiezza di oscillazione $A = 0.5v_0$ e il caso stocastico caratterizzato da un tempo di decadimento, τ pari a 5 e tra il caso stocastico con tempi di decadimento $\tau = 0.5$ e $\tau = 5$ e il caso deterministico aventi entrambi $\sigma = 0.25v_0$.

Il grafico 6.2 riassume i casi di velocità della corrente stocastica considerati.

Le velocità medie della corrente considerate sono le medesime già analizzate nei capitoli 4 e 5,

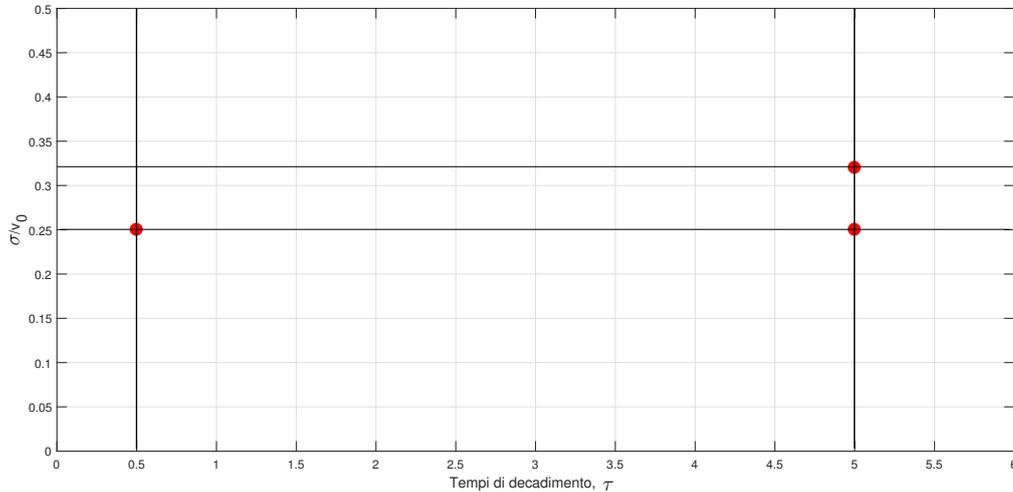


Figura 6.2: Grafico dei casi di velocità della corrente variabile casualmente nel tempo analizzati

ovvero: $v_0 = 0.2$, $v_0 = 0.632456$, $v_0 = 2$.

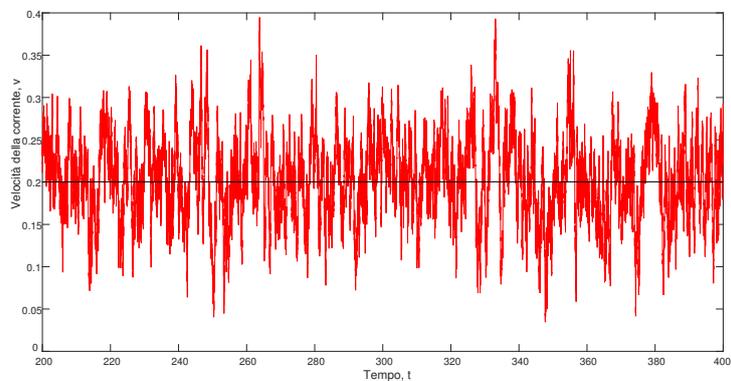
Per poter effettuare un confronto degli scenari di diffusione di prede e predatori ottenuti al variare, non solo dei parametri τ e σ ma anche della velocità media della corrente, è stato considerato sempre il medesimo set di valori di n estratti dalla distribuzione normale standard $N(0,1)$. In particolare, effettuata una prima volta l'estrazione, sono stati salvati i valori di n e sono stati poi utilizzati anche per le simulazioni successive con differenti τ e σ .

Per il calcolo dei valori della velocità della corrente al trascorrere del tempo è stato necessario definire la condizione iniziale $v(t_0)$. Come condizioni iniziali si è ipotizzato che all'istante t_0 la velocità della corrente fosse nulla, $v = 0$. È stato considerato un intervallo temporale di valutazione dei risultati di ampiezza superiore rispetto a quello analizzato ai capitoli 4 e 5 per far sì che la media del rumore tendesse maggiormente al valor medio della corrente v_0 ; l'istante di tempo iniziale dell'intervallo temporale è stato il medesimo dei casi deterministici analizzati ai capitoli precedenti.

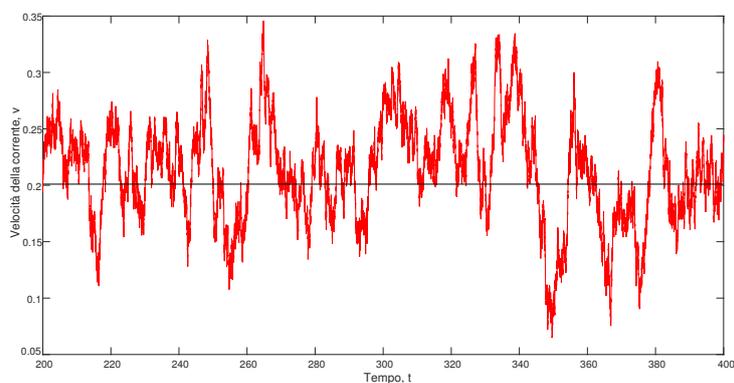
Quando la velocità media della corrente è stata assunta pari a $v_0 = 0.2$ e $v_0 = 0.632456$ la simulazione è stata protratta fino a $t = 400$ mentre nel caso di $v_0 = 2$ sono stati considerati i risultati ottenuti nell'intervallo temporale $t \in \{150,350\}$.

Le figure 6.3 - 6.5 riportano l'andamento della velocità della corrente nel tempo per le tre velocità medie $v_0 = 0.2$, $v_0 = 0.632456$ e $v_0 = 2$ per i diversi tempi di decadimento e deviazioni standard considerate. Come emerge dalle immagini, nell'intervallo temporale considerato, la media della velocità tende a v_0 e i valori di velocità della corrente sono sempre positivi. Le serie temporali delle velocità sono state sottoposte al test statistico di Kolmogorov - Smirnov per verificare che avessero distribuzione di probabilità normale, come da ipotesi della modellazione.

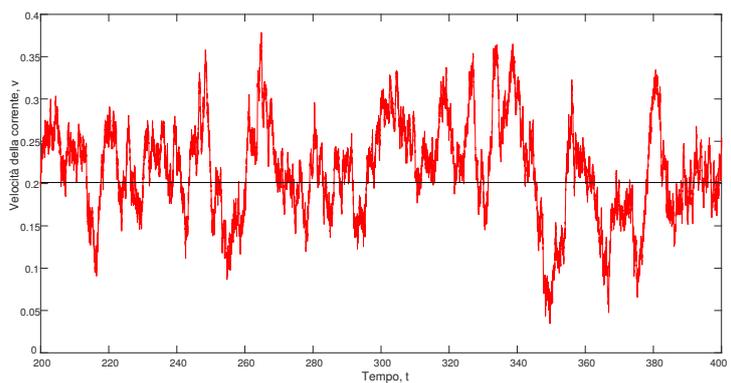
Considerando un livello di significatività del test, $\alpha = 5\%$, tutte le serie temporali considerate hanno superato il test (maggiori dettagli sul test sono riportati in appendice ??).



(a) $v_0 = 0.2$, $\tau = 0.5$, $\sigma = 0.25v_0$



(b) $v_0 = 0.2$, $\tau = 5$, $\sigma = 0.25v_0$



(c) $v_0 = 0.2$, $\tau = 5$, $\sigma = 0.32v_0$

Figura 6.3: Velocità della corrente oscillante intorno al valor medio $v_0 = 0.2$ con tempi di decadimento pari a (a) $\tau = 0.5$ e (b),(c) $\tau = 5$ nell'intervallo temporale di valutazione dei risultati $t = 200 - 400$. I valori di velocità sono sempre positivi

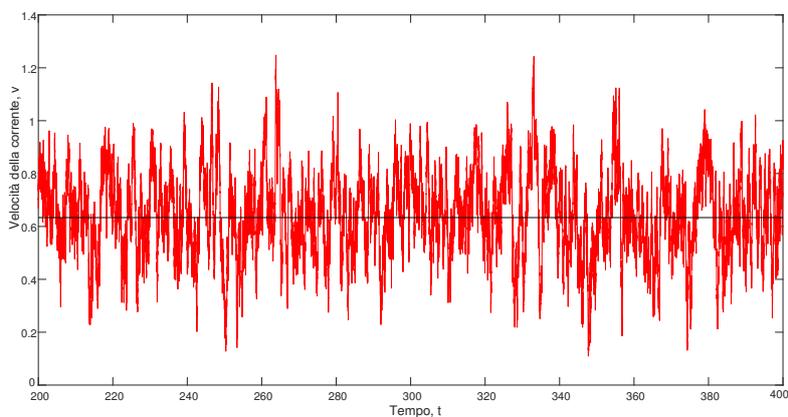
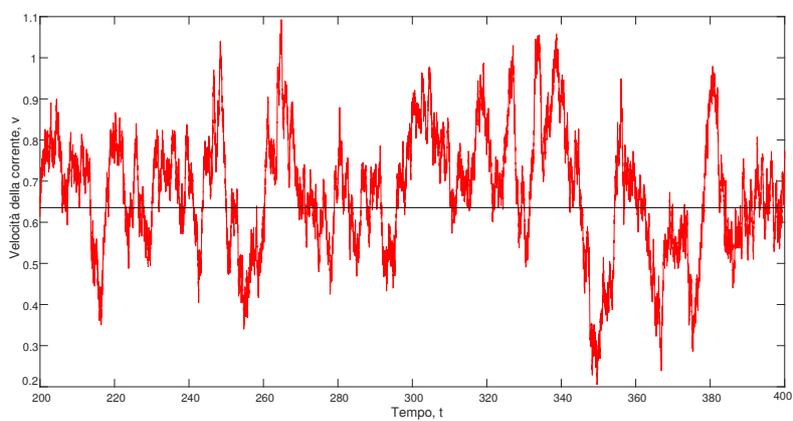
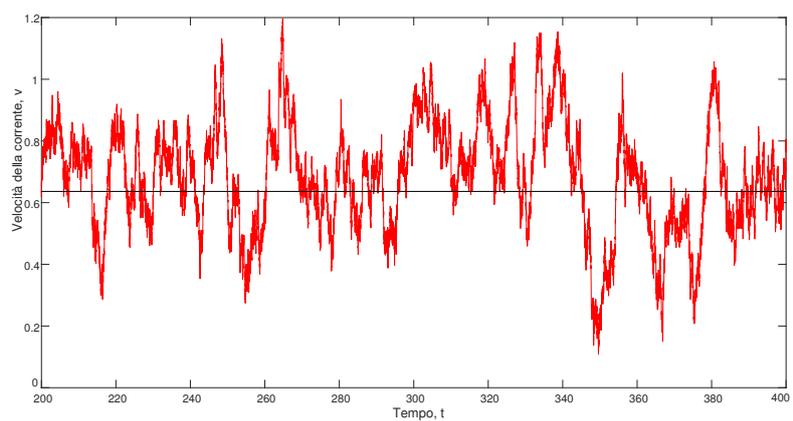
(a) $v_0 = 0.632456$, $\tau = 0.5$, $\sigma = 0.25v_0$ (b) $v_0 = 0.632456$, $\tau = 5$, $\sigma = 0.25v_0$ (c) $v_0 = 0.632456$, $\tau = 5$, $\sigma = 0.32v_0$

Figura 6.4: Velocità della corrente oscillante intorno al valor medio $v_0 = 0.632456$ con tempi di decadimento pari a (a) $\tau = 0.5$ e (b),(c) $\tau = 5$ nell'intervallo temporale di valutazione dei risultati $t = 200 - 400$. I valori di velocità sono sempre positivi

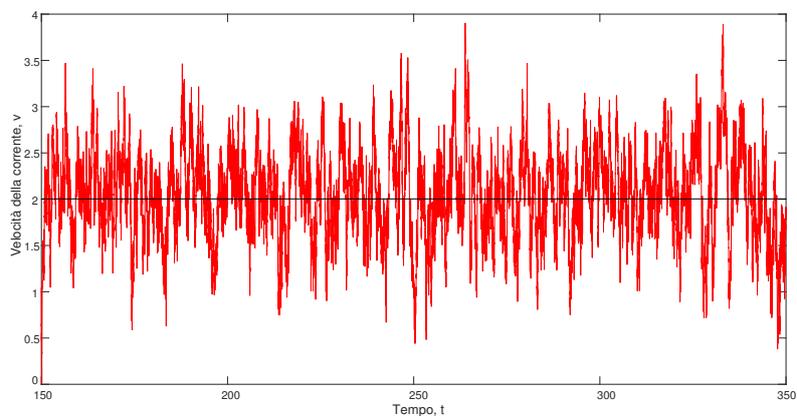
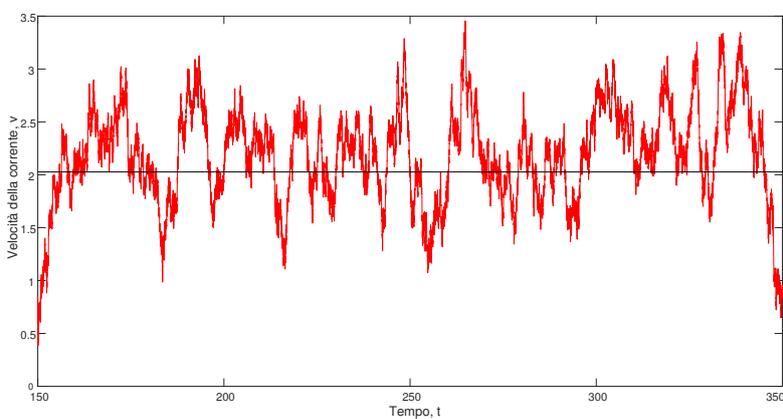
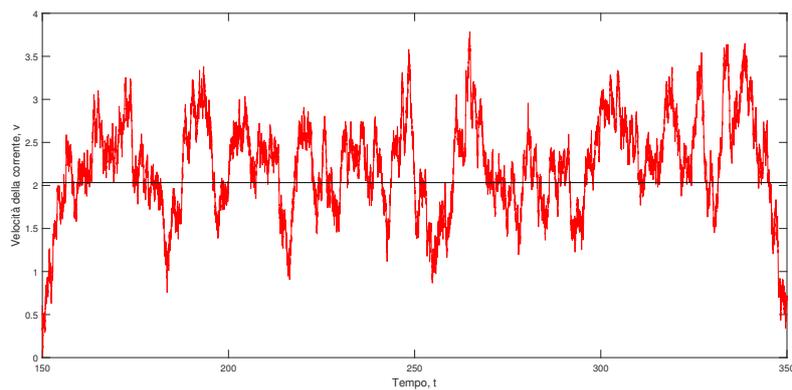
(a) $v_0 = 2, \tau = 0.5, \sigma = 0.25v_0$ (b) $v_0 = 2, \tau = 5, \sigma = 0.25v_0$ (c) $v_0 = 2, \tau = 5, \sigma = 0.32v_0$

Figura 6.5: Velocità della corrente oscillante intorno al valor medio $v_0 = 2$ con tempi di decadimento pari a (a) $\tau = 0.5$ e (b),(c) $\tau = 5$ nell'intervallo temporale di valutazione dei risultati $t = 150 - 350$. I valori di velocità sono sempre positivi

6.3 Risultati

Lo studio degli scenari di diffusione di prede e predatori nel corso d'acqua con l'ipotesi di velocità della corrente modellata come un rumore colorato si è concentrato, come già effettuato nei capitoli 4 e 5, sullo spazio percorso dai fronti d'onda delle due specie, sulla celerità dei fronti d'onda e sull'evoluzione temporale dei fronti d'onda stessi. È stato inoltre effettuato un confronto in termini di densità di probabilità delle celerità dei fronti d'onda ottenute nel caso in cui il sistema preda - predatore sia forzato da forzante sinusoidale o variabile casualmente nel tempo.

Con riferimento allo spazio percorso dai fronti d'onda delle due specie è stata osservata una tendenza comune, per i tre valori di velocità della corrente media v_0 considerati, al variare del tempo di decadimento, τ . In particolare, all'aumentare del tempo di decadimento, τ :

- lo spazio percorso dai predatori verso valle aumenta all'aumentare di τ a parità di σ , mentre diminuisce verso monte. Come accade nei casi deterministici precedentemente considerati, per velocità della corrente media $v_0 = 2$ i predatori non sono più in grado di risalire la corrente e lo spazio percorso dai due fronti verso valle (anche per il primo fronte) aumenta all'aumentare di τ ;
- lo spazio percorso dalle prede verso valle aumenta all'aumentare del tempo di decadimento del rumore, a parità di σ , mentre verso monte diminuisce.

Le tabelle 6.1 - 6.3 riportano lo spazio percorso dai fronti d'onda di prede e predatori al variare del tempo di decadimento e della deviazione standard, per i tre valori di velocità media della corrente $v_0 = 0.2$, $v_0 = 0.632456$, $v_0 = 2$. Nella medesima tabella sono indicati i valori di spazio percorso nel caso in cui la velocità della corrente sia costante e pari alla media v_0 del rumore considerato e nel caso in cui la velocità della corrente vari con legge sinusoidale. Come già osservato al capitolo 5 lo spazio percorso dai fronti d'onda è il medesimo in ipotesi di velocità della corrente costante o sinusoidale.

Dai valori ottenuti è possibile notare che, a meno di questioni numeriche, lo spazio percorso complessivamente dai fronti d'onda di prede e predatori quando la forzante del sistema è stocastica, è il medesimo percorso nel caso in cui la velocità della corrente sia costante.

Da notare che se la velocità media della corrente è pari a $v_0 = 0.632456$, valore per cui, in ipotesi di velocità costante, si verifica lo scenario di *stallo dei predatori*, considerando il caso stocastico il fronte dei predatori che dovrebbe essere fermo risulta spostarsi leggermente verso valle, ma di uno spazio trascurabile (pari allo 0.15% per $\tau = 5$) rispetto al dominio spaziale considerato. Nel caso di velocità della corrente costante, invece, tale fronte risulta risalire leggermente la corrente, seppur di uno spazio trascurabile (pari allo 0.04%).

Analizzando l'evoluzione temporale dei fronti d'onda è possibile notare un andamento irregolare che riflette l'andamento casuale della velocità nel tempo. Pertanto si avranno fronti più vicini quando la velocità è minore, mentre fronti più radi quando la velocità della corrente è maggiore, come è possibile notare dalla figura 6.6 che riporta i fronti d'onda nel caso di velocità con tempo di decadimento, $\tau = 5$ e deviazione standard $\sigma = 0.32v_0$, dove $v_0 = 2$. Tale effetto risulta evidente qualora si confronti con l'evoluzione temporale dei fronti quando la velocità della corrente

è costante, come emerge in figura 6.7 dove si riporta il confronto tra le storie temporali del fronte delle prede che procede verso monte.

Tabella 6.1: Spazio percorso dai fronti d'onda di predatori e prede al variare di τ e σ per velocità media $v_0 = 0.2$ fino a $t = 400$. In grassetto è riportato lo spazio percorso in ipotesi di velocità della corrente v_0 costante. Dai valori ottenuti si può notare che, se la velocità della corrente è costante o variabile sinusoidalmente, lo spazio percorso da entrambe le specie verso monte che verso valle è maggiore rispetto al caso stocastico mentre verso valle è minore. Relativamente al caso sinusoidale, per tutte le ampiezze e i periodi di oscillazione considerati, lo spazio percorso complessivamente dai fronti è il medesimo

Parametri	Predatori monte	Predatori valle	Prede monte	Prede valle
$\tau = 0.5, \sigma = 0.25v_0$	88.24	169.80	742.24	822.10
$\tau = 5, \sigma = 0.25v_0$	86.95	172.17	740.65	823.87
$\tau = 5, \sigma = 0.32v_0$	85.80	172.22	740.05	824.45
$v_0 = \text{cost}$	89.05	169.00	743.24	821.30
$\forall A \forall T$	89.05	169.00	743.24	821.30

Tabella 6.2: Spazio percorso dai fronti d'onda di predatori e prede al variare di τ e σ per velocità media $v_0 = 0.632456$ fino a $t = 400$. In grassetto è riportato lo spazio percorso in ipotesi di velocità della corrente v_0 costante. Dai valori ottenuti si può notare che, se la velocità della corrente è costante o variabile sinusoidalmente, lo spazio percorso da entrambe le specie verso monte che verso valle è maggiore rispetto al caso stocastico mentre verso valle è minore. Relativamente al caso sinusoidale, per tutte le ampiezze e i periodi di oscillazione considerati, lo spazio percorso complessivamente dai fronti è il medesimo

Parametri	Predatori monte	Predatori valle	Prede monte	Prede valle
$\tau = 0.5, \sigma = 0.25v_0$	-0.016 ¹	257.87	655.73	907.58
$\tau = 5, \sigma = 0.25v_0$	-5.29	264.21	650.00	913.20
$\tau = 5, \sigma = 0.32v_0$	-7.72	265.55	648.14	915.00
$v_0 = \text{cost}$	2.16	255.34	658.28	905.15
$\forall A \forall T$	2.16	255.34	658.28	905.15

Tabella 6.3: Spazio percorso dai fronti d'onda di predatori e prede al variare di τ e σ per velocità media $v_0 = 2$ fino a $t = 350$. In grassetto è riportato lo spazio percorso in ipotesi di velocità della corrente v_0 costante. Dai valori ottenuti si può notare che, se la velocità della corrente è costante o variabile sinusoidalmente, lo spazio percorso da entrambe le specie verso monte che verso valle è maggiore rispetto al caso stocastico mentre verso valle è minore. Relativamente al caso sinusoidale, per tutte le ampiezze e i periodi di oscillazione considerati, lo spazio percorso complessivamente dai fronti è il medesimo

Parametri	Predatori monte	Predatori valle	Prede monte	Prede valle
$\tau = 0.5, \sigma = 0.25v_0$	-280.66	539.92	364.58	1176.30
$\tau = 5, \sigma = 0.25v_0$	-306.16	567.37	347.97	1201.40
$\tau = 5, \sigma = 0.32v_0$	-315.60	574.65	339.35	1209.10
$v_0 = \text{cost}$	-259.20	508.30	370.20	1120.00
$\forall A \forall T$	-259.20	508.30	370.20	1120.00

L'irregolarità dei fronti è maggiormente evidente nel caso in cui la velocità media della corrente è più alta, in quanto, per come è definita la deviazione standard, σ , le variazioni dei valori assunti dalla velocità sono più grandi ed è quindi possibile apprezzare la differenza di spazio percorso con il trascorrere del tempo.

Relativamente ai valori di velocità di invasione dei fronti di predatori e prede nelle due direzioni, verso monte e verso valle, è possibile osservare che, nel caso in cui la velocità della corrente sia modellata come un rumore colorato, anche le celerità delle due specie riflettono l'andamento casuale. I valori di deviazione standard, σ delle velocità di avanzamento dei fronti d'onda sono più basse rispetto a quella della velocità della corrente. I valori σ sono al più pari al 10% del valor medio della celerità del fronte, ad eccezione del caso in cui la velocità media della corrente sia pari a $v_0 = 2$, per il quale la deviazione standard della celerità del primo fronte dei predatori assume valori anche pari a 35% del valor medio.

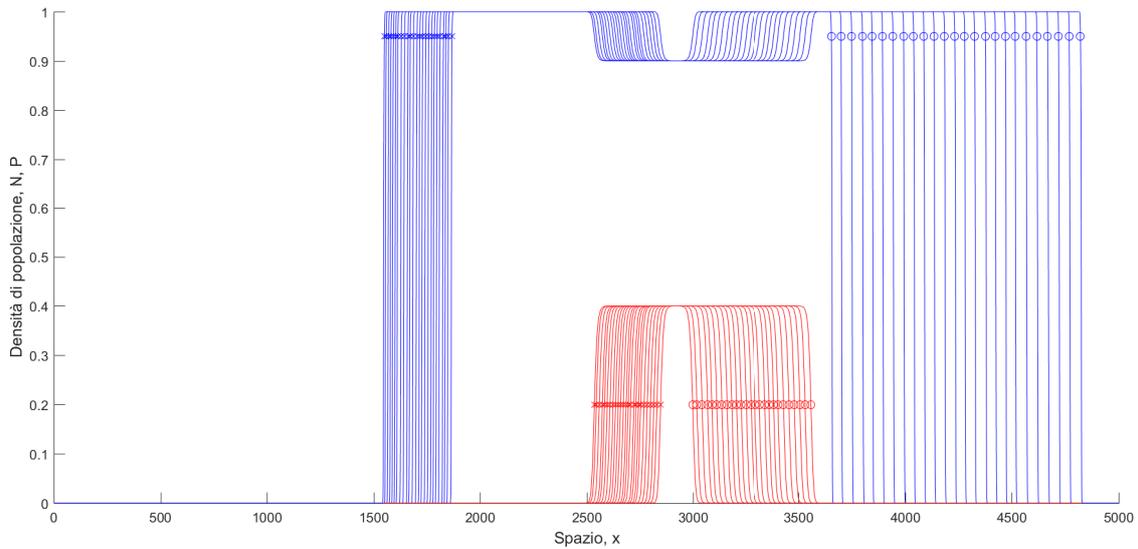


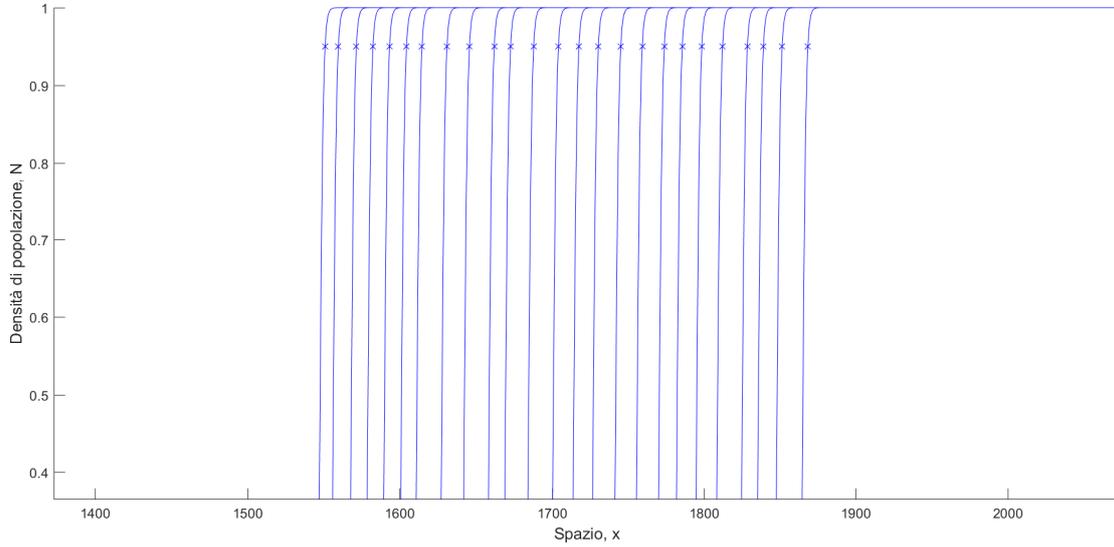
Figura 6.6: Evoluzione temporale dei fronti d'onda di prede e predatori per velocità della corrente modellata come rumore colorato. Velocità media della corrente $v_0 = 2$, tempo di decadimento del rumore $\tau = 5$. Plottaggio ogni 1000 unità temporali da $t = 150$ a $t = 350$. I fronti mostrano una densità non costante che riflette i valori casuali assunti dalla velocità ai diversi istanti temporali

L'aspetto di maggior interesse nello studio è il confronto tra le velocità di avanzamento dei fronti ottenute nel caso in cui la velocità della corrente sia costante o dipendente dal tempo con una legge definita come quella sinusoidale, e nel caso stocastico.

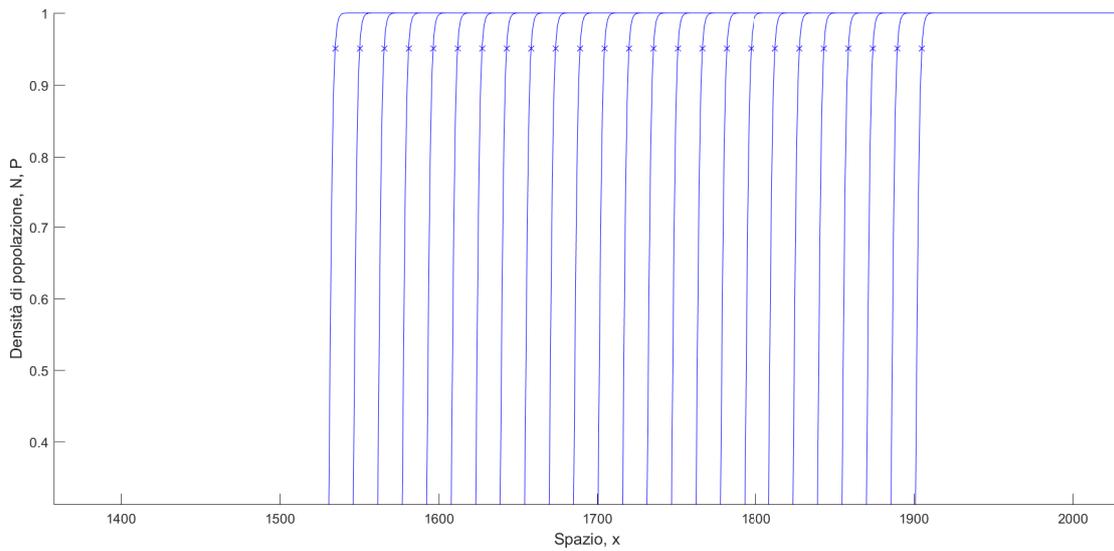
Un primo confronto è stato effettuato tra i risultati ottenuti per velocità della corrente costante e quelli ottenuti nel caso di velocità della corrente modellata come un rumore colorato, avente il medesimo valor medio e tempo di decadimento $\tau = 5$.

Le di velocità di invasione delle due specie sono valutate nell'intervallo temporale $t \in \{200, 350\}$ (eventualmente $t \in \{150, 300\}$ per $v_0 = 2$) quando la velocità della corrente è costante mentre $t \in \{200, 400\}$ (eventualmente $t \in \{150, 350\}$) nel caso di velocità della corrente variabile casualmente. Dovendo effettuare un confronto tra i risultati ottenuti nei due casi è stato considerato l'intervallo minore tra i due, ovvero $t \in \{200, 350\}$ ($t \in \{150, 300\}$ per $v_0 = 2$).

L'immagine 6.8 riporta le velocità di invasione dei fronti d'onda di prede e predatori nei due casi quando la velocità della corrente $v_0 = 0.632456$ e il tempo di decadimento $\tau = 5$. Nel caso di



(a) Evoluzione temporale del fronte delle prede che procede verso monte. Ingrandimento.



(b) Evoluzione temporale del fronte delle prede che procede verso monte per $v_0 = 2$ costante. Ingrandimento.

Figura 6.7: Ingrandimento della storia temporale del fronte d'onda delle prede che procede nel ramo di monte del corso d'acqua per velocità della corrente $v_0 = 2$, (a) per velocità della corrente modellata come rumore colorato e tempo di decadimento $\tau = 5$, (b) per velocità della corrente costante. Dai due ingrandimenti è possibile notare la differenza di densità dei fronti, costante se la velocità della corrente è costante

velocità della corrente costante, per la specie delle prede è stata considerata la serie di risultati filtrata con il filtro in media mobile avente finestra di ampiezza $K = 21$, come definito al capitolo 4.

È stato effettuato un confronto tra le velocità di avanzamento dei fronti ottenute nel caso di velocità della corrente variabile con legge sinusoidale e quelle ottenute in caso stocastico. Sono stati confrontati i risultati ottenuti nel caso di velocità della corrente avente il medesimo valor medio v_0 e deviazione standard σ . Come già indicato in precedenza, relativamente al caso periodico, è stata considerata la velocità della corrente avente ampiezza dell'oscillazione $A = 0.5v_0$, caratterizzata da un valore di $\sigma = 0.32v_0$, mentre nel caso stocastico è stato considerato il tempo di decadimento $\tau = 5$.

L'intervallo temporale di confronto dei risultati è stato $t \in \{200, 350\}$ ($t \in \{150, 300\}$ per $v_0 = 2$).

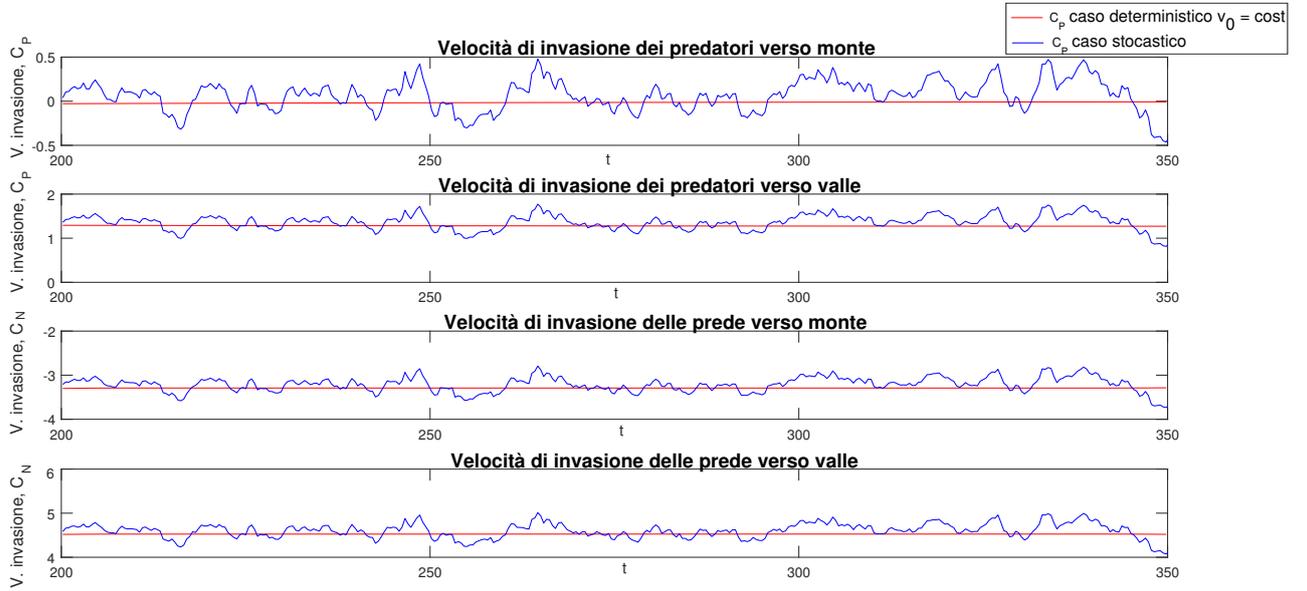


Figura 6.8: Confronto tra velocità di invasione dei fronti d'onda di predatori e prede quando la velocità della corrente è costante e pari a $v_0 = 0.632456$, in rosso, e quando la velocità della corrente varia casualmente nel tempo con valor medio $v_0 = 0.632456$ e tempo di decadimento $\tau = 5$. Relativamente alla celerità delle prede in ipotesi di velocità del fiume costante è stata considerata la serie filtrata con il filtro in media mobile avente finestra di ampiezza $K = 21$

La figura 6.9 riporta l'andamento delle velocità di invasione delle specie di predatori e prede per velocità media della corrente $v_0 = 0.632456$, e, relativamente al caso periodico, velocità della corrente con ampiezza di oscillazione $A = 0.5v_0$ e periodo di oscillazione $T_{oscill} = 15$.

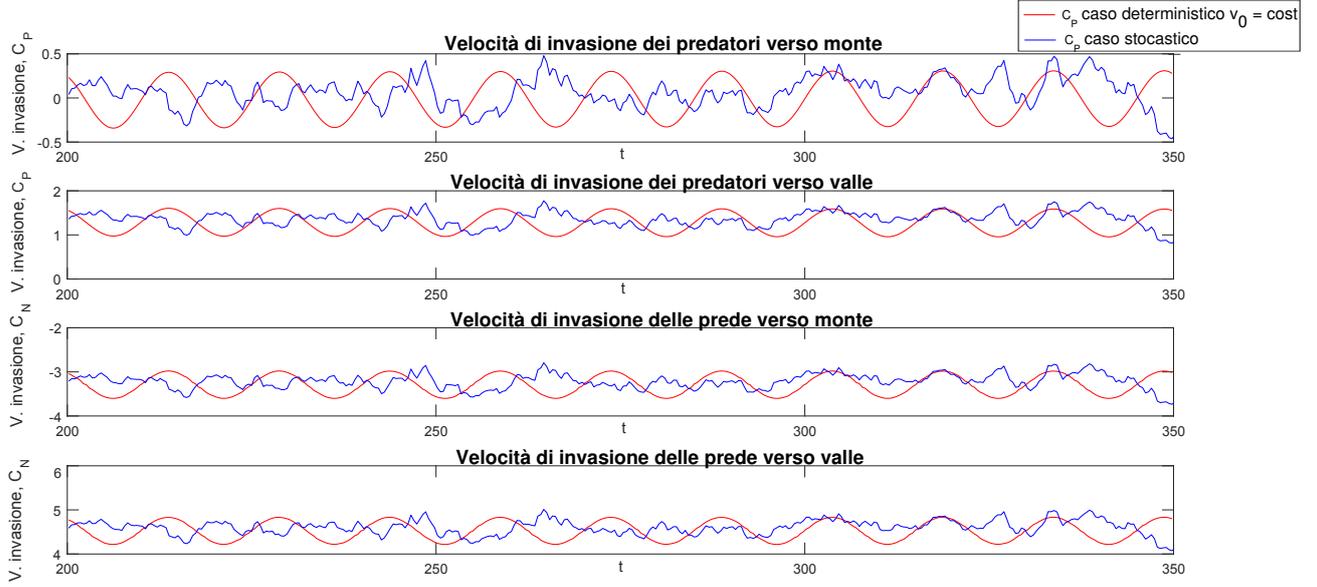


Figura 6.9: Confronto tra velocità di invasione dei fronti d’onda di predatori e prede quando la velocità della corrente è periodica con $T_{oscill} = 15$ e $A = 0.5v_0$ e valor medio $v_0 = 0.632456$, in rosso, e quando la velocità della corrente varia casualmente nel tempo con valor medio $v_0 = 0.632456$ e tempo di decadimento $\tau = 5$. La celerità delle prede ottenuta in caso di velocità del corso d’acqua variabile con legge sinusoidale è stata filtrata con il filtro in media mobile avente finestra di ampiezza $K = 3$

Il confronto delle velocità di invasione di prede e predatori è stato effettuato considerando le distribuzioni di probabilità delle celerità.

Se la velocità della corrente v_0 è costante, in un diagramma avente in ascissa la velocità della corrente e in ordinata la densità di probabilità, si ha una retta parallela all’asse delle ordinate di equazione $x = v_0$, come è possibile notare dalla figura 6.10 per velocità della corrente $v_0 = 0.2$.

Secondo quanto ottenuto al capitolo 4, quando il fiume ha velocità costante, le velocità di avanzamento di prede e predatori, ad assestamento raggiunto, sono costanti. Pertanto le funzioni di densità di probabilità saranno rette parallele all’asse delle ordinate e avranno equazione $x = C_\beta$ con $\beta = P, N$ a seconda che si tratti di predatori o prede.

Nella pratica, dal momento che la velocità di invasione dei fronti presenta piccolissime variazioni, è stata calcolata la media delle celerità sull’intervallo temporale di valutazione dei risultati e per le prede è stata considerata la serie filtrata.

Se la corrente ha una velocità variabile nel tempo con una legge definita, come quella sinusoidale, $v = A \cdot \sin(\omega t) + v_0$, anche le velocità di avanzamento dei fronti rifletteranno la medesima dipendenza dal tempo (con eventuali modeste variazioni di ampiezza di oscillazione rispetto alla velocità v del corso d’acqua come indicato al capitolo 5). La funzione di densità di probabilità, $f(v)$ vale

$$f(v) = \frac{1}{\pi \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2}} \quad (6.11)$$

con valori massimi in corrispondenza di $\pm A$.

In un diagramma avente in ascissa la velocità della corrente e in ordinata la densità di probabilità la (6.11) descrive una curva con concavità verso l'alto i cui valori massimi si ottengono in corrispondenza di $v = \pm A$. Tale curva è stata traslata orizzontalmente di v_0 in quanto la (6.11) è valida nel caso in cui la celerità oscilla intorno a 0. La distribuzione di densità di probabilità della funzione seno è bimodale. La figura 6.11 riporta la funzione di densità di probabilità della velocità della corrente con media $v_0 = 0.2$, ampiezza di oscillazione $A = 0.5v_0$ e periodo di oscillazione $T_{oscill} = 30$. Dal momento che le velocità di avanzamento dei fronti riflettono l'andamento sinusoidale della velocità della corrente, la funzione di densità di probabilità ha la medesima forma della (6.11).

Quando la velocità della corrente varia casualmente nel tempo, come nel caso analizzato nel presente capitolo, anche le celerità dei fronti d'onda ne risentono e avranno andamenti casuali. Dalla trattazione precedentemente illustrata, la velocità della corrente $v(t)$, ha una distribuzione di probabilità di tipo gaussiano (viene infatti modellata come un rumore gaussiano colorato). La funzione di densità di probabilità della distribuzione normale vale:

$$f(v) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(v-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (6.12)$$

dove μ è la media o valore atteso e σ^2 è la varianza. La figura 6.12 riporta la funzione di densità di probabilità della velocità della corrente con media $\mu = 0.2$ e deviazione standard $\sigma = 0.25v_0$. Se

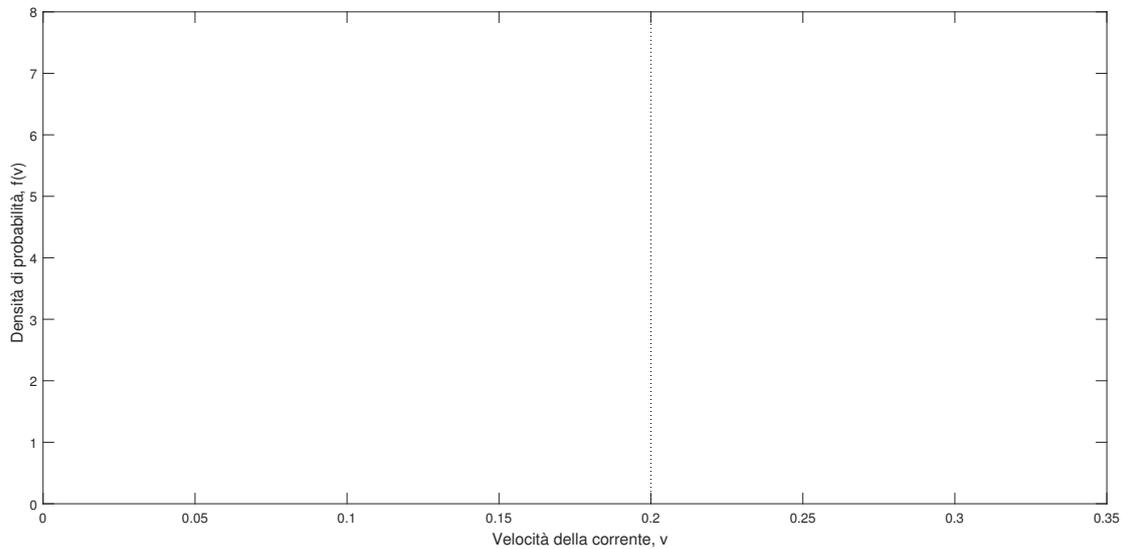


Figura 6.10: Funzione di densità di probabilità della velocità della corrente costante pari a $v_0 = 0.2$

il sistema viene forzato con una forzante avente distribuzione normale nulla è possibile dire a priori in termini di densità di probabilità delle velocità di avanzamento dei fronti d'onda delle prede e dei predatori. Pertanto, è stata ricavata la densità di probabilità di velocità di avanzamento per ciascuna delle due specie, sia per la direzione verso monte che verso valle, a partire dalla frequenza

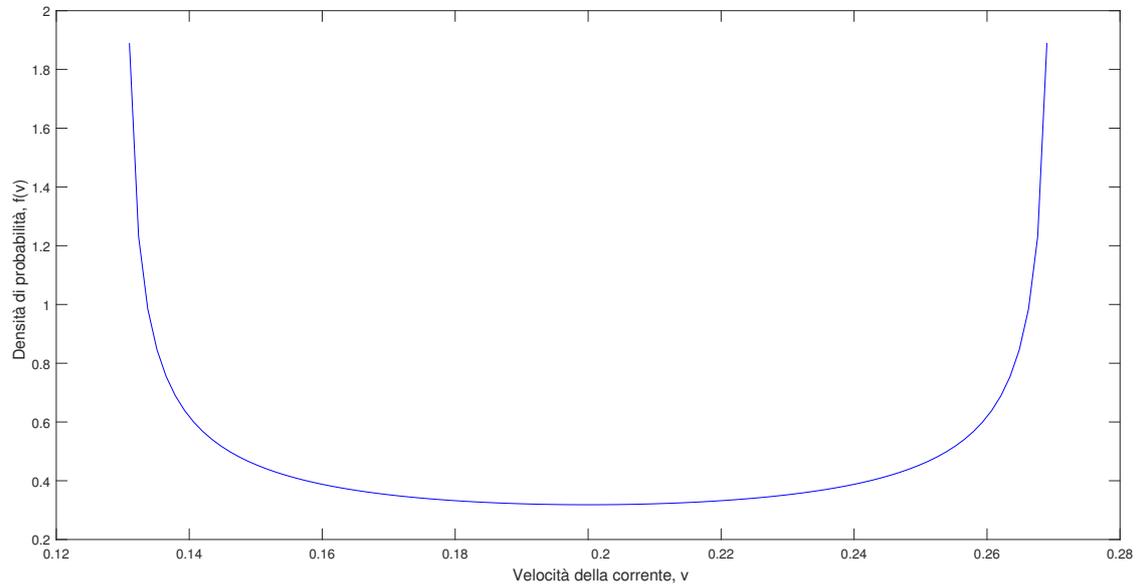


Figura 6.11: Funzione di densità di probabilità della velocità della corrente oscillante con legge sinusoidale intorno a $v_0 = 0.2$. L'ampiezza di oscillazione vale $A = 0.5v_0$ e il periodo $T_{oscill} = 30$. La curva presenta valori massimi in corrispondenza di $v_0 \pm A$

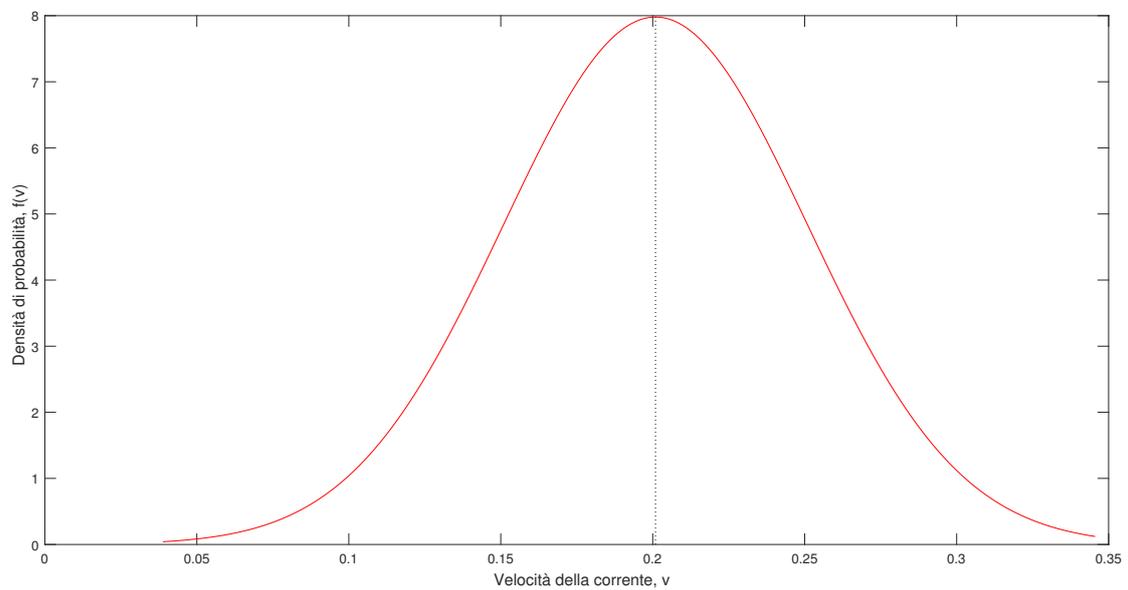


Figura 6.12: Funzione di densità di probabilità della velocità della corrente modellata come rumore gaussiano colorato. La curva è simmetrica rispetto a $v = \mu = 0.2$ e la deviazione standard $\sigma = 0.25v_0$

di accadimento.

Il procedimento utilizzato per definizione della densità di probabilità viene di seguito illustrato.

1. A partire dai valori di C_β ottenuti dalla simulazione, sono stati individuati il valore massimo e il minimo. L'intervallo $C_{\beta,max} - C_{\beta,min}$ è stato suddiviso in sottointervalli di ampiezza A_{int} pari a

$$A_{int} = \frac{C_{\beta,max} - C_{\beta,min}}{n} \quad (6.13)$$

con n numero di sottointervalli;

2. sono stati individuati i valori di celerità C_β ricadenti in ciascun sottointervallo ed è stato costruito l'istogramma velocità di invasione - numero di osservazioni;
3. si è passati alla probabilità associata a ciascun intervallo di valori di celerità indicata con $P(C_{\beta,int})$, attraverso la definizione di probabilità stessa:

$$P(C_{\beta,int}) = \frac{n. \text{ casi osservati}}{n. \text{ osservazioni totali}} \quad (6.14)$$

dove il numeratore indica quante volte è stato osservato un valore di celerità ricadente nel sottointervallo i -esimo;

4. il calcolo della densità di probabilità di C_β è stato ottenuto dividendo $P(C_{\beta,int})$ per l'ampiezza, costante, di ciascun sottointervallo.

Ricavate le densità di probabilità delle velocità di invasione dei fronti d'onda ottenute considerando i differenti regimi di velocità, sono stati calcolati i momenti di primo e secondo ordine μ e σ^2 ; è infatti noto dalla statistica che, per descrivere completamente una distribuzione di probabilità di una variabile aleatoria è necessario calcolarne i momenti, e i primi due sono quelli fondamentali. Noti μ e σ^2 è possibile calcolare il coefficiente di variazione CV , dato dal rapporto tra la deviazione standard, σ e la media μ :

$$CV = \frac{\sigma}{\mu}. \quad (6.15)$$

Un altro descrittore della distribuzione normale è il *kurtosis*, k , che da' informazioni sull'appiattimento della distribuzione e quindi, l'allontanamento dalla normalità distributiva. In particolare si ha:

$$k = \frac{(C_{\beta,i} - \mu)^4}{(\sigma^4)}. \quad (6.16)$$

dove m_4 indica il momento di quarto ordine della distribuzione.

Una distribuzione gaussiana ha un coefficiente di kurtosis pari a 3, mentre valori di k minori di 3 indicano un appiattimento della distribuzione rispetto al caso normale. Se invece $\beta > 3$ la distribuzione risulta più appuntita rispetto alla distribuzione normale.

Considerando le tre velocità della corrente medie $v_0 = 0.2$, $v_0 = 0.632456$ e $v_0 = 2$, sono state ricavate le distribuzioni di densità di probabilità dei risultati ottenuti e ne sono stati calcolati i momenti μ e σ , del coefficiente di variazione, CV , e del kurtosis, k . I valori ottenuti sono riportati nelle tabelle 6.4 - 6.6.

Come è possibile osservare dai risultati riportati nelle tabelle per i tempi di decadimento considerati, la deviazione standard delle velocità di avanzamento di prede e predatori è inferiore

rispetto alla valore di σ della velocità della corrente a cui il sistema è sottoposto, fa eccezione la σ relativa al primo fronte d'onda dei predatori che procede verso valle, e il fronte delle prede che procede verso valle nel caso in cui la velocità media della corrente sia pari a $v_0 = 2$ (maggiori dettagli vengono forniti in merito alle considerazioni sul CV). Quando $v_0 = 0.2$ o per i diversi τ e σ della forzante, la deviazione standard del fronte dei predatori che risale la corrente è di un ordine di grandezza superiore rispetto ai valori corrispondenti alle celerità degli altri fronti.

Se la velocità della corrente media è pari a $v_0 = 2$ tale tendenza scompare e le deviazioni standard hanno il medesimo ordine di grandezza sia per le prede sia per i predatori.

Relativamente al caso di velocità media $v_0 = 0.632456$ si rimanda alle considerazioni effettuate sul coefficiente di variazione.

Con riferimento ai coefficienti di variazione, CV è possibile osservare che, nel caso di velocità della corrente media $v_0 = 0.632456$ il valore di CV relativo alla velocità di invasione dei predatori che procedono verso monte $C_{P,monte}$ risulta avere valori molto alti (si ha addirittura $CV = 161.61$ quando $\tau = 0.5$ e $\sigma = 0.25v_0$). Ciò è dovuto al fatto che, come già accadeva nel caso di velocità della corrente costante o sinusoidale, quando la velocità della corrente assume mediamente questo valore, il fronte d'onda dei predatori che dovrebbe procedere verso monte risulta essere fermo (le velocità di avanzamento di tale fronte sono molto prossime a 0 come già indicato ai capitoli 4 e 5).

Considerando la (6.15), quando a denominatore, la media assume valori molto prossimi a zero, il coefficiente di variazione risulta essere molto alto.

Tabella 6.4: Momenti delle densità di probabilità μ , σ (espresso in funzione del valor medio delle celerità di prede e predatori), coefficiente di variazione, CV e kurtosis, k , per prede e predatori nelle direzioni monte e valle per i differenti tempi di decadimento e deviazioni standard considerate e per velocità della corrente media $v_0 = 0.2$

$v_0 = 0.2, \tau = 0.5, \sigma = 0.25v_0$				
Parametri	C_P monte	C_P valle	C_N monte	C_N valle
μ	0.440	0.840	3.710	4.110
σ	$0.110C_P$	$0.054C_P$	$0.010C_N$	$0.011C_N$
CV	0.110	0.054	0.010	0.011
k	2.950	2.920	2.880	2.930
$v_0 = 0.2, \tau = 5, \sigma = 0.25v_0$				
Parametri	C_P monte	C_P valle	C_N monte	C_N valle
μ	0.430	0.850	3.710	4.110
σ	$0.110C_P$	$0.058C_P$	$0.013C_N$	$0.011C_N$
CV	0.110	0.058	0.013	0.011
k	2.643	2.457	2.607	2.615
$v_0 = 0.2, \tau = 5, \sigma = 0.32v_0$				
Parametri	C_P monte	C_P valle	C_N monte	C_N valle
μ	0.435	0.850	3.710	4.110
σ	$0.135C_P$	$0.072C_P$	$0.016C_N$	$0.014C_N$
CV	0.135	0.072	0.016	0.014
k	2.632	2.475	2.581	2.570

Tabella 6.5: Momenti delle densità di probabilità μ , σ , coefficiente di variazione, CV e kurtosis, k , per prede e predatori nelle direzioni monte e valle per i differenti tempi di decadimento e deviazioni standard considerate e per velocità della corrente media $v_0 = 0.632456$

$v_0 = 0.632456, \tau = 0.5, \sigma = 0.25v_0$				
Parametri	C_P monte	C_P valle	C_N monte	C_N valle
μ	0.0008	1.280	3.285	4.536
σ	$161.610 C_P$	$0.110 C_P$	$0.044 C_N$	$0.032 C_N$
CV	161.610	0.110	0.044	0.032
k	2.950	2.940	2.853	3.137
$v_0 = 0.632456, \tau = 5, \sigma = 0.25v_0$				
Parametri	C_P monte	C_P valle	C_N monte	C_N valle
μ	0.013	1.295	3.269	4.547
σ	$11.335 C_P$	$0.118 C_P$	$0.046 C_N$	$0.032 C_N$
CV	11.335	0.118	0.046	0.032
k	2.600	2.532	2.558	2.567
$v_0 = 0.632456, \tau = 5, \sigma = 0.32v_0$				
Parametri	C_P monte	C_P valle	C_N monte	C_N valle
μ	0.018	1.300	3.265	4.552
σ	$10.157 C_P$	$0.145 C_P$	$0.056 C_N$	$0.04 C_N$
CV	10.157	0.145	0.056	0.040
k	2.600	2.538	2.568	2.566

Tabella 6.6: Momenti delle densità di probabilità μ , σ , coefficiente di variazione, CV e kurtosis, k , per prede e predatori nelle direzioni monte e valle per i differenti tempi di decadimento e deviazioni standard considerate e per velocità della corrente media $v_0 = 2$ (Si ricorda che quando la velocità della corrente oscilla intorno a $v_0 = 2$ i predatori non sono in grado di risalire la corrente, pertanto si hanno due fronti che procedono verso valle. La scritta C_P monte è stata mantenuta per coerenza espositiva)

$v_0 = 2, \tau = 0.5, \sigma = 0.25v_0$				
Parametri	C_P monte	C_P valle	C_N monte	C_N valle
μ	1.389	2.652	1.907	5.851
σ	$0.320 C_P$	$0.166 C_P$	$0.232 C_N$	$0.075 C_N$
CV	0.320	0.166	0.232	0.075
k	2.950	2.944	2.950	2.976
$v_0 = 2, \tau = 5, \sigma = 0.25v_0$				
Parametri	C_P monte	C_P valle	C_N monte	C_N valle
μ	1.436	2.700	1.856	5.899
σ	$0.333 C_P$	$0.177 C_P$	$0.257 C_N$	$0.078 C_N$
CV	0.333	0.177	0.257	0.078
k	2.572	2.560	2.567	2.574
$v_0 = 2, \tau = 5, \sigma = 0.32v_0$				
Parametri	C_P monte	C_P valle	C_N monte	C_N valle
μ	1.451	2.717	1.840	5.906
σ	$0.401 C_P$	$0.217 C_P$	$0.320 C_N$	$0.096 C_N$
CV	0.401	0.217	0.320	0.096
k	2.570	2.558	2.565	2.574

Per tutti i casi analizzati, i coefficienti di kurtosis ottenuti appartengono all'intervallo $\{2.40 - 3\}$, indicano pertanto distribuzioni di densità di probabilità che sono leggermente appiattite rispetto a quella normale o coincidono con essa. Per tutte e tre le velocità medie della corrente, v_0 , quando il tempo di decadimento $\tau = 0.5$ e lo scarto quadratico medio, $\sigma = 0.25v_0$, si ha $k \in \{2.90 - 3\}$ ovvero la distribuzione di densità di probabilità delle velocità di avanzamento dei fronti è normale. La figura 6.13 riporta la densità di probabilità della celerità del fronte delle prede che procede verso monte ottenuta passando attraverso la frequenza di accadimento, e la distribuzione normale (in rosso), per velocità media della corrente $v_0 = 2$. Si nota come la sovrapposizione sia quasi totale.

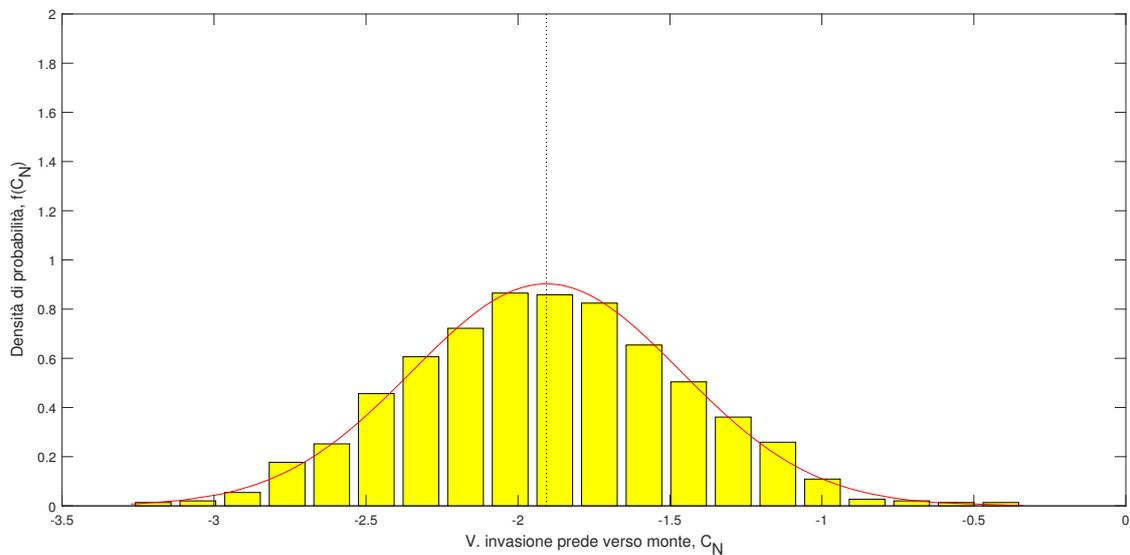
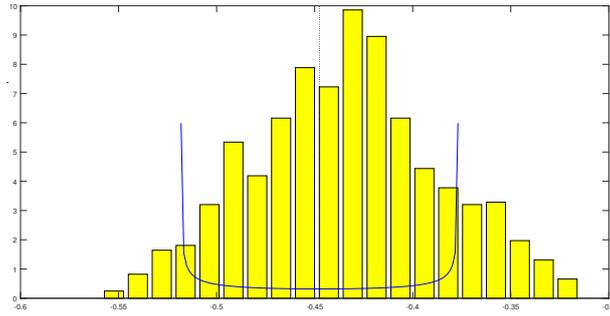


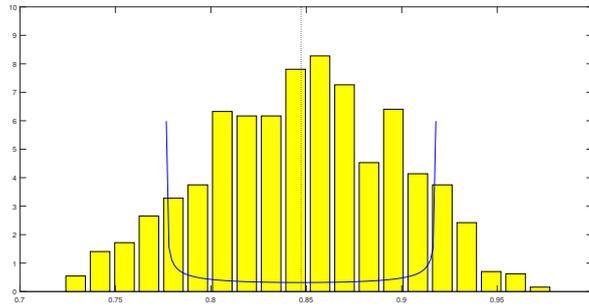
Figura 6.13: Densità di probabilità della velocità di avanzamento del fronte d'onda delle prede che procede verso monte quando la velocità della corrente media è pari a $v_0 = 2$, tempo di decadimento $\tau = 0.5$, $\sigma = 0.25v_0$. In rosso è riportata la gaussiana, mentre l'istogramma rappresenta la densità di probabilità ottenuta considerando la frequenza di accadimento dei valori di $C_{N, monte}$. La sovrapposizione è quasi totale

Le figure 6.14 e 6.15 riportano le densità di probabilità ottenute per la specie dei predatori e delle prede nelle due direzioni, monte e valle,

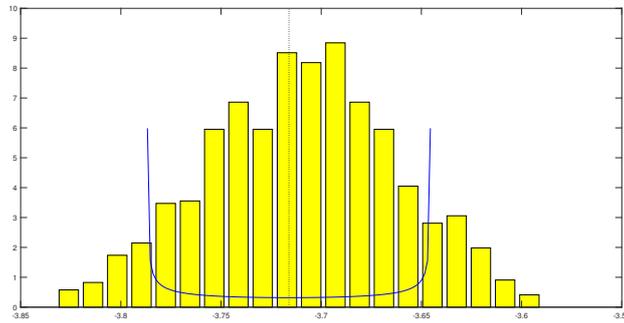
- per velocità della corrente costante (retta nera);
 - per velocità della corrente oscillante con legge sinusoidale (curva blu);
 - per velocità della corrente variabile nel tempo con legge casuale (istogramma giallo);
- quando il valor medio della corrente è pari a $v_0 = 0.2$ (6.14) e pari a $v_0 = 0.632456$ (6.15).



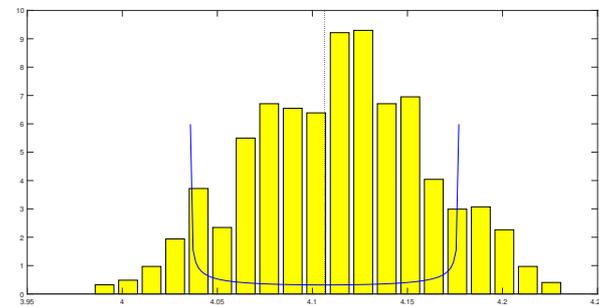
(a) Pdf celerità predatori verso monte, $f(C_P)$



(b) Pdf celerità predatori verso valle, $f(C_P)$

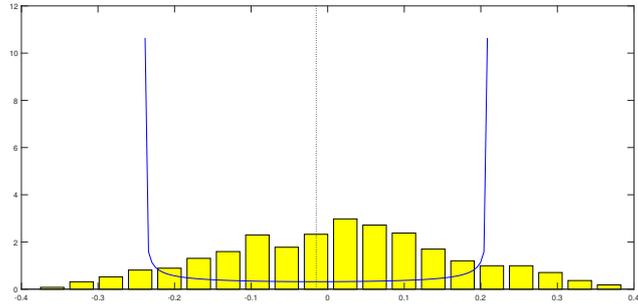


(c) Pdf celerità prede verso monte, $f(C_N)$

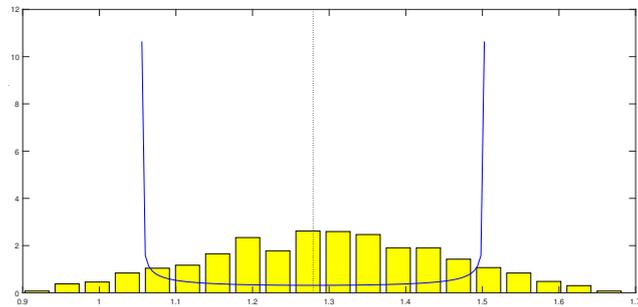


(d) Pdf celerità prede verso valle, $f(C_N)$

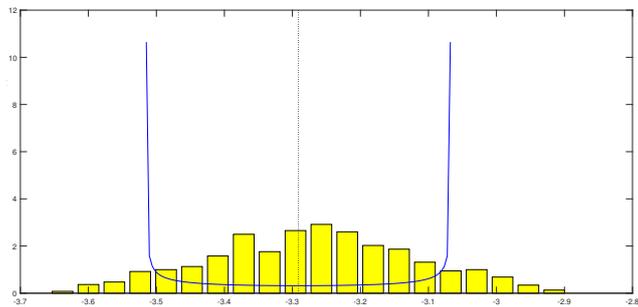
Figura 6.14: Funzioni di densità di probabilità delle celerità dei fronti di prede e predatori nei casi di velocità del corso d'acqua: 1) costante \rightarrow retta parallela all'asse delle ordinate di equazione $x = C_\beta$, *medio*; 2) variabile con legge sinusoidale e ampiezza $A = 0.35v_0$ \rightarrow curva con concavità verso l'alto; 3) stocastica con tempo di decadimento $\tau = 5$ e $\sigma = 0.25v_0$



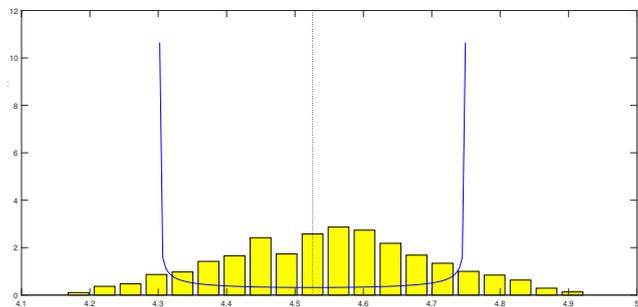
(a) Pdf celerità predatori verso monte, $f(C_P)$



(b) Pdf celerità predatori verso valle, $f(C_P)$



(c) Pdf celerità prede verso monte, $f(C_N)$



(d) Pdf celerità prede verso valle, $f(C_N)$

Figura 6.15: Funzioni di densità di probabilità delle celerità dei fronti di prede e predatori nei casi di velocità del corso d'acqua: 1) costante \rightarrow retta parallela all'asse delle ordinate di equazione $x = C_\beta$, medio; 2) variabile con legge sinusoidale e ampiezza $A = 0.35v_0$ \rightarrow curva con concavità verso l'alto; 3) stocastica con tempo di decadimento $\tau = 5$ e $\sigma = 0.25v_0$

Considerando le funzioni di densità di probabilità ottenute per le velocità di invasione dei fronti d'onda di prede e predatori verso monte e verso valle è possibile considerare i valori medi e le deviazioni standard, e, di conseguenza i valori del coefficiente di variazione ottenuti a seconda del regime di velocità a cui è sottoposto il sistema. La tabella 6.7 riporta quanto ottenuto.

Tabella 6.7: Valori di celerità medie e deviazioni standard dei fronti d'onda di prede e predatori ottenuti nei tre regimi di velocità (costante, variabile con legge sinusoidale e stocastica) per a) velocità della corrente media $v_0 = 0.2$, b) velocità della corrente media $v_0 = 0.632456$, c) velocità della corrente media $v_0 = 2$. (Si ricorda che quando la velocità della corrente oscilla intorno a $v_0 = 2$ i predatori non sono in grado di risalire la corrente, pertanto si hanno due fronti che procedono verso valle. La scritta C_P monte è stata mantenuta per coerenza espositiva)

(a) $v_0 = 0.2$

Regime	C_P monte		C_P valle		C_N monte		C_N valle	
	μ	σ	μ	σ	μ	σ	μ	σ
<i>cost.</i>	0.448		0.850		3.716		4.106	
<i>sin.</i> $\sigma = 0.25v_0$	0.448	$0.010C_P$	0.850	$0.007C_P$	3.716	$0.001C_N$	4.106	$0.001C_N$
<i>stoc.</i> $\tau = 0.5, \sigma = 0.25v_0$	0.438	$0.110C_P$	0.842	$0.050C_P$	3.715	$0.010C_N$	4.108	$0.011C_N$
<i>stoc.</i> $\tau = 5, \sigma = 0.25v_0$	0.434	$0.110C_P$	0.848	$0.060C_P$	3.710	$0.010C_N$	4.114	$0.010C_N$
<i>stoc.</i> $\tau = 5, \sigma = 0.32v_0$	0.435	$0.135C_P$	0.850	$0.070C_P$	3.710	$0.020C_N$	4.115	$0.010C_N$
<i>sin.</i> $\sigma = 0.32v_0$	0.448	$0.160C_P$	0.850	$0.080C_P$	3.716	$0.020C_N$	4.106	$0.017C_N$

(b) $v_0 = 0.632456$

Regime	C_P monte		C_P valle		C_N monte		C_N valle	
	μ	σ	μ	σ	μ	σ	μ	σ
<i>cost.</i>	0.015		1.279		3.291		4.526	
<i>sin.</i> $\sigma = 0.25v_0$	0.015	$0.400C_P$	1.279	$0.005C_P$	3.291	$0.002C_N$	4.526	$0.002C_N$
<i>stoc.</i> $\tau = 0.5, \sigma = 0.25v_0$	0.001	$161.6C_P$	1.280	$0.110C_P$	3.285	$0.040C_N$	4.536	$0.030C_N$
<i>stoc.</i> $\tau = 5, \sigma = 0.25v_0$	0.013	$11.340C_P$	1.295	$0.120C_P$	3.270	$0.050C_N$	4.547	$0.030C_N$
<i>stoc.</i> $\tau = 5, \sigma = 0.32v_0$	0.018	$10.600C_P$	1.300	$0.150C_P$	3.265	$0.060C_N$	4.552	$0.040C_N$
<i>sin.</i> $\sigma = 0.32v_0$	0.015	$15.070C_P$	1.279	$0.175C_P$	3.291	$0.070C_N$	4.526	$0.050C_N$

(c) $v_0 = 2$

Regime	C_P monte		C_P valle		C_N monte		C_N valle	
	μ	σ	μ	σ	μ	σ	μ	σ
<i>cost.</i>	1.346		2.651		1.928		5.833	
<i>sin.</i> $\sigma = 0.25v_0$	1.346	$0.008C_P$	2.651	$0.004C_P$	1.928	$0.003C_N$	5.833	$0.001C_N$
<i>stoc.</i> $\tau = 0.5, \sigma = 0.25v_0$	1.389	$0.320C_P$	2.652	$0.170C_P$	1.907	$0.230C_N$	5.851	$0.080C_N$
<i>stoc.</i> $\tau = 5, \sigma = 0.25v_0$	1.436	$0.330C_P$	2.700	$0.180C_P$	1.856	$0.260C_N$	5.899	$0.080C_N$
<i>stoc.</i> $\tau = 5, \sigma = 0.32v_0$	1.451	$0.400C_P$	2.717	$0.220C_P$	1.840	$0.320C_N$	5.906	$0.096C_N$
<i>sin.</i> $\sigma = 0.32v_0$	1.346	$0.520C_P$	2.651	$0.270C_P$	1.928	$0.370C_N$	5.833	$0.120C_N$

Un'informazione deducibile dai coefficienti di variazione CV associati alle densità di probabilità delle velocità di avanzamento dei fronti d'onda di prede e predatori, è l'amplificazione o lo smorzamento della variabilità della velocità della corrente. È stato pertanto effettuato un confronto tra i coefficienti di variazione delle celerità e quello della velocità del corso d'acqua sia nel caso in cui essa venga modellata come un rumore gaussiano colorato, sia nel caso in cui vari nel tempo secondo una legge sinusoidale. In entrambi i casi, i coefficienti di variazione della velocità della

corrente coincidono, in quanto i valori medi sono gli stessi e sono state imposte le medesime deviazioni standard σ , come illustrato nella sezione 6.2. La figura 6.16 riporta le funzioni di densità di probabilità della velocità della corrente per $\tau = 0.5$, $\sigma = 0.25v_0$ per $v_0 = 0.2$, $v_0 = 0.632456$, $v_0 = 2$. La tabella 6.8 riporta i coefficienti di variazione della velocità della corrente, delle velocità di avanzamento dei fronti ottenuti nel caso in cui la velocità vari casualmente nel tempo intorno al valor medio o oscilli sinusoidalmente.

Dai valori di CV ottenuti è possibile notare che, per tutte e tre le velocità medie della corrente, quando il sistema è forzato dalla forzante stocastica avente deviazione standard $\sigma = 0.25v_0$, il coefficiente di variazione associato alle celerità dei fronti d'onda è di un ordine di grandezza superiore rispetto al corrispondente ottenuto nel caso in cui la forzante del sistema sia sinusoidale (con medesima deviazione standard). Nel caso invece in cui le forzanti, stocastica e sinusoidale, del sistema abbiano deviazione standard $\sigma = 0.32v_0$ i CV dei fronti d'onda di prede e predatori hanno lo stesso ordine di grandezza.

Quando la velocità della corrente media è pari a $v_0 = 0.2$ si verifica uno smorzamento della forzante sia in caso stocastico che deterministico; le distribuzioni di densità di probabilità delle celerità dei fronti hanno CV inferiori rispetto a quello della distribuzione di densità della velocità della corrente. Questo fenomeno si verifica per i due tempi di decadimento $\tau = 0.5$ e $\tau = 5$ e i due valori di $\sigma = 0.25v_0$ e $\sigma = 0.32v_0$ considerati.

Analoghe considerazioni valgono anche per velocità della corrente media $v_0 = 0.632456$, con l'eccezione del fronte d'onda dei predatori che ha velocità prossime a zero. In questo caso, come sopra riportato, la distribuzione di densità di probabilità è caratterizzata da un CV elevato, ma ciò è legato a questioni numeriche, pertanto il dato non è significativo.

Nel caso in cui la velocità della corrente sia pari a $v_0 = 2$, come già specificato, i fronti d'onda dei predatori procedono entrambi verso valle.

Quando la velocità della corrente venga modellata come un rumore gaussiano colorato, sia per $\tau = 5$ sia per $\tau = 0.5$, uno dei due fronti d'onda dei predatori amplifica la forzante, l'altro la smorza. Analogo comportamento si verifica per le celerità dei fronti d'onda delle prede, il fronte che risale la corrente amplifica la forzante mentre il fronte che avanza verso valle la smorza.

Se invece, la velocità della corrente varia con legge sinusoidale, se la deviazione standard della forzante vale $\sigma = 0.25v_0$, i fronti d'onda di prede e predatori smorzano la forzante, mentre nel caso in cui $\sigma = 0.32v_0$ si verifica il medesimo comportamento descritto per il caso di forzante stocastica.

L'analisi condotta considerando la velocità della corrente modellata come un rumore gaussiano colorato, consente di ottenere risultati maggiormente aderenti con la realtà. Da quanto osservato in termini di spazio percorso dai fronti d'onda di prede e predatori, di velocità di invasione e di storia temporale dei fronti stessi è possibile concludere che è ragionevole ipotizzare che gli scenari di diffusione delle due specie siano gli stessi ottenuti considerando il caso deterministico: *coesistenza delle due specie* nel caso di velocità della corrente media $v_0 = 0.2$, *stallo dei predatori* se la velocità della corrente ha valor medio $v_0 = 0.632456$ e *dilavamento dei predatori e fuga delle prede verso monte* se $v_0 = 2$.

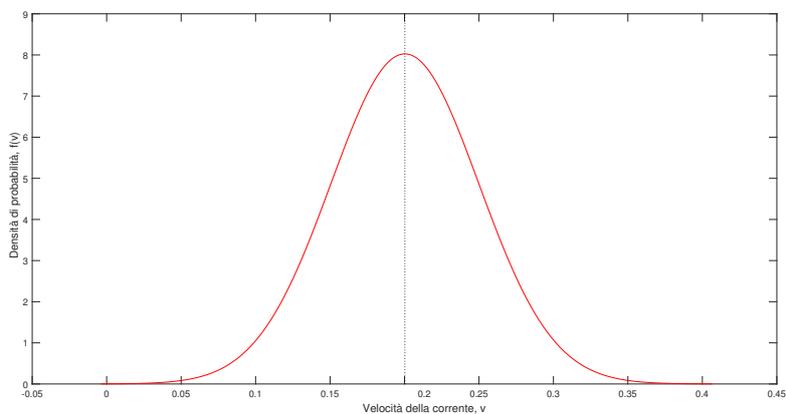
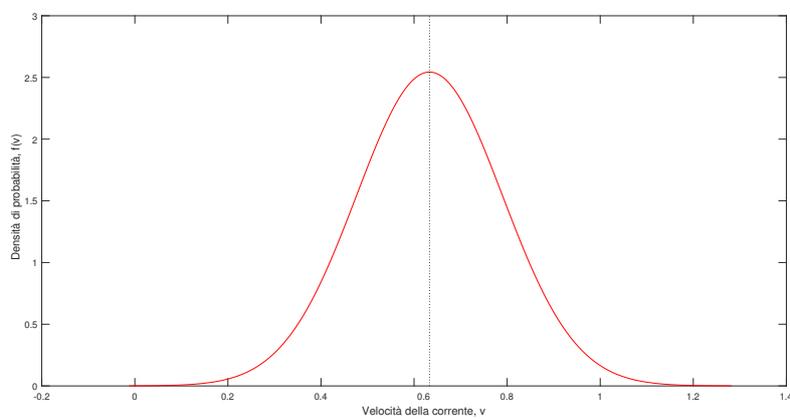
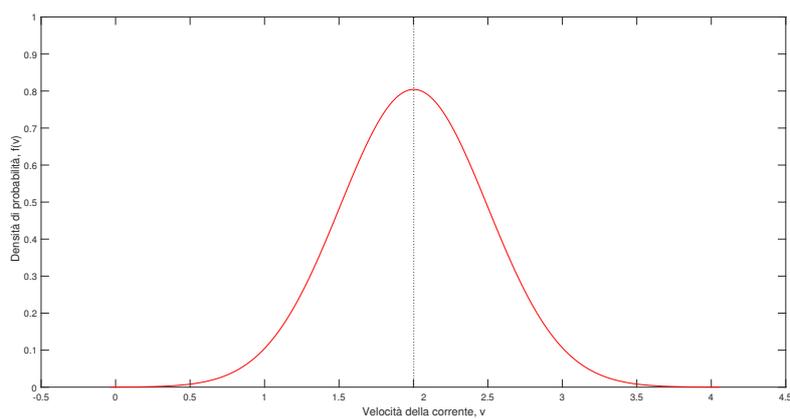
(a) $v_0 = 0.2$ (b) $v_0 = 0.632456$ (c) $v_0 = 2$

Figura 6.16: Funzioni di densità di probabilità della velocità della corrente con $\tau = 0.5$, $\sigma = 0.25v_0$. La retta indica il valor medio, rispetto a cui la curva è simmetrica. La velocità media della corrente vale a) $v_0 = 0.2$, b) $v_0 = 0.632456$, c) $v_0 = 2$

Le modalità in cui si verificano tali scenari tuttavia è diversa rispetto al caso deterministico. Se infatti la velocità della corrente è costante, in ogni istante di tempo il fronte avanza del medesimo spazio con celerità costante pari al valore che si ottiene dal diagramma di velocità di invasione. Nel caso di velocità del corso d'acqua variabile con legge sinusoidale, anche la celerità dei fronti presenta la medesima periodicità e ciò si riscontra anche nella storia temporale dei fronti d'onda. Nel caso in cui la velocità della corrente venga modellata come un rumore colorato avente tempo di decadimento τ e deviazione standard σ , l'evoluzione temporale dei fronti mostra una densità variabile da un'istante all'altro. I fronti percorrono spazi diversi nel medesimo intervallo temporale, ciò riflette l'andamento casuale delle velocità di avanzamento dei fronti d'onda di prede e predatori.

L'analisi relativa alle densità di probabilità delle celerità dei fronti d'onda ha mostrato distribuzioni che si discostano leggermente dalla distribuzione normale tipica della velocità della corrente. In alcuni casi inoltre è emerso un effetto di amplificazione delle velocità di avanzamento dei fronti di prede e predatori rispetto alla forzante, in altri uno smorzamento.

Il risultato fondamentale a cui si è pervenuti tuttavia è che, a causa del rumore, la distribuzione di densità di probabilità delle celerità passa da bimodale (quando la forzante è sinusoidale) a unimodale. Quando la corrente oscilla con legge sinusoidale i valori di celerità più probabili sono il massimo e il minimo della celerità, mentre i valori compresi sono poco probabili, il comportamento è opposto se si considera la stocasticità.

Tabella 6.8: Coefficienti di variazione della velocità della corrente e delle celerità dei fronti d'onda di prede e predatori. Quando la velocità della corrente ha valor medio $v_0 = 2$ tende ad esserci un'amplificazione del segnale da parte del primo fronte dei predatori che procede verso valle (nel caso di $v_0 = 2$) e di quello delle prede che risale la corrente

(a) $v_0 = 0.2$			(b) $v_0 = 0.632456$		
$\sigma = 0.25v_0$	$\tau = 0.5$	$A = 0.35v_0$	$\sigma = 0.25v_0$	$\tau = 0.5$	$A = 0.35v_0$
Grandezza	CV_{stoc}	CV_{sin}	Grandezza	CV_{stoc}	CV_{sin}
v	0.250		v	0.250	
$C_P monte$	0.110	0.010	$C_P monte$	161.600	0.400
$C_P valle$	0.050	0.007	$C_P valle$	0.110	0.005
$C_N monte$	0.010	0.001	$C_N monte$	0.040	0.002
$C_N valle$	0.011	0.001	$C_N valle$	0.030	0.002
$\sigma = 0.25v_0$	$\tau = 5$	$A = 0.35v_0$	$\sigma = 0.25v_0$	$\tau = 5$	$A = 0.35v_0$
v	0.250		v	0.250	
$C_P monte$	0.110	0.010	$C_P monte$	11.340	0.400
$C_P valle$	0.060	0.007	$C_P valle$	0.120	0.005
$C_N monte$	0.010	0.001	$C_N monte$	0.050	0.002
$C_N valle$	0.010	0.001	$C_N valle$	0.030	0.002
$\sigma = 0.32v_0$	$\tau = 5$	$A = 0.5v_0$	$\sigma = 0.32v_0$	$\tau = 5$	$A = 0.5v_0$
v	0.320		v	0.320	
$C_P monte$	0.135	0.160	$C_P monte$	10.160	15.070
$C_P valle$	0.070	0.080	$C_P valle$	0.150	0.175
$C_N monte$	0.020	0.020	$C_N monte$	0.060	0.070
$C_N valle$	0.010	0.017	$C_N valle$	0.040	0.050

(c) $v_0 = 2$

$\sigma = 0.25v_0$	$\tau = 0.5$	$A = 0.35v_0$
Grandezza	CV_{stoc}	CV_{sin}
v	0.250	
$C_P monte$	0.320	0.008
$C_P valle$	0.170	0.004
$C_N monte$	0.230	0.003
$C_N valle$	0.080	0.001
$\sigma = 0.25v_0$	$\tau = 5$	$A = 0.35v_0$
v	0.250	
$C_P monte$	0.330	0.008
$C_P valle$	0.180	0.004
$C_N monte$	0.260	0.003
$C_N valle$	0.080	0.001
$\sigma = 0.32v_0$	$\tau = 5$	$A = 0.5v_0$
v	0.320	
$C_P monte$	0.400	0.520
$C_P valle$	0.220	0.270
$C_N monte$	0.320	0.370
$C_N valle$	0.096	0.120

Capitolo 7

Conclusioni

Nello studio condotto è stata valutata l'influenza del valore assunto dalla velocità della corrente e dal suo regime sul fenomeno di diffusione di due specie, rispettivamente le prede e i predatori all'interno di un corso d'acqua, in cui il flusso predominante è monodimensionale.

Studi precedenti Hilker e Lewis 2010 hanno già indagato i possibili scenari di invasione delle specie quando la velocità della corrente è costante. Lo studio delle dinamiche preda - predatore è stato condotto attraverso il diagramma di velocità di invasione che riporta l'andamento delle velocità di invasione delle prede e dei predatori, o celerità dei fronti d'onda, delle due specie, rispettivamente C_N e C_P in funzione della velocità del fiume. Gli scenari di diffusione descritti sono asintotici e si verificano sul medio - lungo termine.

A partire da tale diagramma, sono state studiate le dinamiche dei sistemi preda - predatore all'interno di un corso d'acqua per le tre velocità della corrente costanti pari a $v_0 = 0.2$, $v_0 = 0.632456$, $v_0 = 2$, corrispondenti ad altrettanti scenari di invasione di prede e predatori.

Dai risultati ottenuti è emerso che qualora la velocità della corrente sia bassa ($v_0 = 0.2$) si ha la coesistenza delle due specie, mentre per valori intermedi ($v_0 = 0.632456$) una delle due specie, quella con velocità di invasione minore, non è più in grado di risalire la corrente, pertanto se la velocità aumenta, il ramo di monte del corso d'acqua non sarà più popolato da tale specie. Per velocità del fiume alte ($v_0 = 2$) la specie più lenta viene completamente dilavata e se tale situazione persiste nel tempo si arriva ad avere l'estinzione della specie, nel caso trattato, dei predatori.

Lo studio delle dinamiche ha anche considerato la corrispondenza tra i risultati analitici forniti dalla letteratura, per i valori di celerità dei fronti, e quelli numerici forniti dalle simulazioni. Le velocità di invasione dei fronti d'onda hanno rispecchiato quanto riportato nel diagramma di velocità di invasione.

Il cambiamento del regime di velocità ha necessariamente degli impatti sull'ecologia degli esseri viventi che popolano il corso d'acqua, pertanto il fulcro dello studio è stata l'analisi delle dinamiche preda - predatore per regimi di velocità non costanti nel tempo. Sono stati tenuti come riferimento i medesimi valori di velocità già studiati in regime costante ($v_0 = 0.2$, $v_0 = 0.632456$,

$v_0 = 2$), ovviamente dal momento che la velocità non è costante nel tempo tali valori sono valori medi.

Nel primo caso è stata assunta una velocità della corrente variabile nel tempo con una legge sinusoidale e i risultati ottenuti hanno mostrato dei fronti d'onda aventi celerità periodiche; pertanto in intervalli temporali pari al periodo di oscillazione il fronte d'onda percorre il medesimo spazio. In generale, sono stati ottenuti i medesimi scenari di diffusione ricavati nel caso di velocità della corrente costante, la differenza principale consiste nelle modalità in cui si attuano tali scenari (è infatti possibile riconoscere la periodicità). Lo spazio complessivamente percorso dal fronte è lo stesso indipendentemente dall'ampiezza dell'oscillazione e dal periodo di oscillazione considerati quando la velocità oscilla intorno al medesimo valor medio v_0 . Inoltre lo spazio percorso dai fronti quando la corrente varia con legge sinusoidale coincide con quello ottenuto in regime costante.

L'analisi degli scostamenti relativi delle celerità dei fronti rispetto al caso costante ha mostrato che lo scostamento relativo della velocità di invasione dei predatori, sia verso monte che verso valle, è di un ordine di grandezza superiore rispetto a quello delle prede quando la velocità della corrente oscilla intorno a $v_0 = 0.2$ e $v_0 = 0.632456$. Quando la velocità della corrente oscilla intorno a $v_0 = 2$ gli scostamenti relativi delle celerità hanno il medesimo ordine di grandezza sia per le prede che per i predatori.

Le dinamiche preda - predatore sono state studiate anche nel caso in cui la velocità della corrente variasse nel tempo in modo casuale, attorno ad un valor medio. Questa situazione descrive ciò che accade nella realtà. La velocità del corso d'acqua è stata pertanto modellata come un rumore gaussiano colorato descritto dall'O-U process. In questo caso la stocasticità della velocità del fiume ha determinato la stocasticità delle celerità dei fronti d'onda che pertanto percorrono spazi diversi in tempi uguali. Gli scenari di diffusione rimangono gli stessi, ad eccezione del caso in cui la velocità della corrente ha media $v_0 = 0.632456$, per il quale, se il tempo di decadimento del rumore è sufficientemente alto ($\tau = 5$), i predatori, anziché restare fermi, come accade se la velocità della corrente è costante o varia con legge sinusoidale, si spostano leggermente verso valle. Pertanto, i fronti d'onda dei predatori procedono entrambi verso valle già per velocità della corrente variabile casualmente intorno a $v_0 = 0.632456$. Quando invece il regime di velocità è costante o variabile con una certa periodicità, solo per velocità del corso d'acqua medie pari a $v_0 = 2$ i predatori vengono dilavati e portati verso valle.

Considerando il regime di velocità stocastico, una parte dello studio è stata dedicata all'analisi della densità di probabilità della celerità dei fronti d'onda di prede e predatori e il confronto con quelle ottenute nel caso in cui la velocità della corrente variasse sinusoidalmente.

Nel caso stocastico, partendo dalla forzante del sistema, la velocità del fiume che, essendo modellata secondo quanto descritto dall'O-U process, ha una distribuzione normale, sono state costruite le distribuzioni di densità di probabilità di C_P e C_N nelle due direzioni.

Sono emerse distribuzioni più appiattite rispetto alla distribuzione normale; inoltre, per valori di velocità della corrente elevati (caso con velocità media $v_0 = 2$), la celerità del fronte delle prede che risale la corrente amplifica la forzante (ha un CV maggiore rispetto a quello della velocità), ciò si verifica anche per uno dei due fronti dei predatori. Quando la velocità della corrente media

è più bassa, le celerità dei fronti sono sempre smorzate rispetto alla forzante.

Nel caso in cui la velocità della corrente vari nel tempo seguendo una legge sinusoidale, anche le celerità dei fronti seguiranno il medesimo andamento, pertanto sono state ricavate le funzioni di densità di probabilità della funzione seno e ne sono stati calcolati i momenti per comprendere le differenze di comportamento rispetto al caso stocastico.

In generale sono emersi coefficienti di variazione minori rispetto a quelli ottenuti in precedenza, ed effetti di amplificazione sono stati riscontrati solo nel caso in cui la velocità media della corrente sia $v_0 = 2$ e la deviazione standard sia pari a $\sigma = 0.32v_0$.

La differenza fondamentale, tuttavia, tra le funzioni di densità di probabilità delle celerità ottenute considerando le due forzanti consiste nel fatto che nel caso in cui la forzante sia sinusoidale la pdf è bimodale mentre diventa unimodale nel caso in cui la forzante sia modellata come rumore gaussiano colorato.

Sebbene numerosi fattori possano contribuire alla perturbazione delle popolazioni del fiume, come l'eterogeneità spaziale o la qualità stessa dell'habitat, una componente di fondamentale importanza che non può prescindere dallo studio delle dinamiche dei sistemi di prede e predatori è il regime di velocità, soggetto naturalmente o artificialmente a variazioni periodiche più o meno regolari. Pertanto nel presente studio si è voluta analizzare l'influenza di tale fattore con un modello semplificato che consentisse di comprendere i macroeffetti.

Il presente studio è stato di tipo esplorativo in merito ad una questione ambientale, che riveste un'importanza sempre maggiore nell'ambito delle opere di ingegneria idraulica.

Negli trent'anni, una crescente attenzione alle problematiche e agli impatti sull'ambiente ha fatto sì che nascesse una normativa specifica (L.R. 40 - 98, per il Piemonte) in base alla quale, la realizzazione di interventi che interferiscono con l'ambiente non possa prescindere dalla valutazione degli effetti sull'ambiente stesso.

All'interno di questo scenario il presente studio è da interpretarsi come un punto di partenza per approfondimenti e sviluppi futuri che considerino anche l'eventuale presenza di vortici o zone di ristagno caratterizzate da velocità differenti rispetto al canale principale.

Appendice A

Aspetti matematici: analisi di von Neumann, Principio di massimo e Teorema del limite centrale

A.0.1 Analisi di von Neumann

L'analisi di von Neumann é lo strumento principale per lo studio della stabilit  della equazioni differenziali a coefficienti costanti e pu  anche essere adattata al caso a coefficienti variabili.

Prima di introdurre il risultato fondamentale su cui si basa l'analisi   necessario introdurre alcuni concetti: sia Ω un intervallo reale e J_Ω l'insieme dei valori dell'indice m tali che $mh \in \Omega$, con h passo spaziale. I valori di una discretizzazione $u = u_m^n$ al livello temporale n sono definiti da:

$$u^n = u_m^n, m \in J_\Omega$$

si definisce norma in L^2

$$\|u^n\|_{2,h} = \sum_{m \in J_\Omega} h |u_m^n|^2 \frac{1}{2}. \quad (\text{A.1})$$

Presa in considerazione l'equazione differenziale parabolica:

$$u_t + au_x = bu_{xx} \quad (\text{A.2})$$

vale la seguente proposizione:

Proposizione A.0.1 (Proposizione). *Uno schema alle differenze finite ad un passo $P_h^k u = 0$ che approssima l'equazione differenziale (A.2)   stabile nella norma $\|\cdot\|_{2,h}$ nella regione Ω se per ogni $T > 0$ esiste una costante C_T tale che, per ogni u^0 ,*

$$\|u^n\|_{2,h} \leq C_T \|u^0\|_{2,h} \quad (\text{A.3})$$

Considerando gli schemi alle differenze finite ad un passo espliciti che possono essere scritti nella forma:

$$u^{n+1} = Cu^n \quad (\text{A.4})$$

dove C é un operatore lineare alle differenzi indipendente da n del tipo:

$$u^{n+1} = (Cu^n)_m = \sum_{k \in J_\Omega} c_{m,k} u_{k,n} \quad (\text{A.5})$$

La richiesta di stabilità si traduce quindi in una condizione sui coefficienti dell'operatore C del tipo:

$$\|C^n\| \leq C_T \quad (\text{A.6})$$

Nella presente trattazione non sono stati considerati i termini sorgente che, tuttavia, non modificano le proprietà essenziali dello schema.

Dopo aver definito il concetto di stabilità secondo la proposizione (A.3) si può considerare il teorema fondamentale su cui si basa l'analisi di von Neumann. Definiti h , k rispettivamente i passi spaziali e temporali di discretizzazione del dominio, $\chi = h\xi$, con $\xi \in [-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]$ e detta g funzione di amplificazione, l'analisi si basa sul seguente

Teorema A.0.2 (Teorema).

Uno schema alle differenze finite ad un passo é stabile se e solo se esiste una costante K e alcuni valori fissati k_0 e h_0 tali che

$$|g(\chi, h, k)| \leq 1 + Kk \quad (\text{A.7})$$

per tutti i valori di χ , $0 < k \leq k_0$ e $0 < h \leq h_0$. Se inoltre $g(\chi, h, k)$ é indipendente da h e k allora nella (A.7) é sufficiente prendere $K = 0$

L'applicazione del teorema (A.0.2) allo schema:

$$\frac{1}{k}(N_m^{n+1} - N_m^n) = -\frac{v_0}{2h}(N_{m+1}^n - N_{m-1}^n) + \frac{1}{h^2}(N_{m+1}^n - 2N_m^n + N_{m-1}^n) \quad (\text{A.8})$$

definiti $\mu = \frac{k}{h^2}$ e $\lambda = \frac{k}{h}k$ si ha:

$$N_m^{n+1} = (1 - 2\mu)N_m^n + (\mu - \frac{v_0\lambda}{2})N_{m+1}^n + (\mu + \frac{v_0\lambda}{2})N_{m-1}^n \quad (\text{A.9})$$

Considerando la serie di Fourier della funzione $N = N_m^n$ si ha:

$$\hat{N} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h e^{-im\xi h} \hat{N}_m^n \quad (\text{A.10})$$

si ha che $\hat{N}(-\frac{\pi}{h}) = \hat{N}(\frac{\pi}{h})$ e la formula di inversione dà:

$$\hat{N}_m^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} e^{im\xi h} \hat{N}^n(\xi) d\xi \quad (\text{A.11})$$

e sostituendo nella (A.9) si ottiene:

$$\hat{N}^{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} e^{im\xi h} [(1-2\mu) + (\mu - \frac{v_0\lambda}{2})e^{i\xi h} + (\mu + \frac{v_0\lambda}{2})e^{-i\xi h}] N^n(\xi) d\xi \quad (\text{A.12})$$

definita

$$g(h\xi) = [(1-2\mu) + (\mu - \frac{v_0\lambda}{2})e^{i\xi h} + (\mu + \frac{v_0\lambda}{2})e^{-i\xi h}]$$

si deduce:

$$N^{\hat{n}+1} = g(h\xi) \hat{N}^n(\xi) \quad (\text{A.13})$$

ovvero

$$\hat{N}^n = g(h\xi)^n \hat{N}^0(\xi) \quad (\text{A.14})$$

Sfruttando la relazione di Parseval:

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} h |N_m^n|^2 = \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} |\xi N^n(\xi)| d\xi = \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} |g(h\xi)^2 n| |\hat{N}^0(\xi)| d\xi \quad (\text{A.15})$$

per ottenere la stabilità richiesta dalla (A.3) nella norma L^2 é necessario verificare che $|g(h\xi)^2 n|$ é limitata in n . Detta $\chi = h\xi$ si ha:

$$|g(\xi)|^2 = [(1-2\mu) + (\mu - \frac{v_0\lambda}{2})e^{i\chi} + (\mu + \frac{v_0\lambda}{2})e^{-i\chi}] \quad (\text{A.16})$$

$$|g(\chi)|^2 = [(1-2\mu) + \mu(\cos \chi + i \sin \chi + \cos \chi - i \sin \chi) + \frac{v_0\lambda}{2}(\cos \chi - i \sin \chi - \cos \chi - i \sin \chi)] \quad (\text{A.17})$$

$$|g(\chi)|^2 = [-4\mu \sin^2 \frac{\chi}{2} - v_0\lambda i \sin \chi + 1]^2 \quad (\text{A.18})$$

da cui, la condizione di stabilita, richiesta dalla (A.3) é

$$\mu b < \frac{1}{2} \quad (\text{A.19})$$

A.0.2 Principio di massimo

Relativamente allo studio della convergenza si é fatto riferimento al *Principio di massimo*, che si basa sul seguente teorema:

Teorema A.0.3 (Principio di massimo). *Se u_m^n é la soluzione approssimata generata da uno schema alle differenze finite, esplicito o implicito o misto (θ -metodi), per cui risulti $\mu(1-\theta) \leq \frac{1}{2b}$,*

allora, posto

$$u_{min} = \min_{m,0}(m = 1, \dots, M - 1), 0$$

$$u_{max} = \max_{m,0}(m = 1, \dots, M - 1), 0$$

si avrà che

$$u_{min} \leq u_m^n \leq u_{max}. \tag{A.20}$$

Il Teorema del limite centrale è uno dei principali teoremi di statistica inferenziale il cui enunciato è:

Teorema A.0.4 (Teorema del limite centrale). *Sia X è una variabile aleatoria somma di variabili casuali x_i ovvero*

$$X = \sum a_i x_i$$

indipendenti tra loro e aventi legge di distribuzione qualsiasi ma con valori medi comparabili e varianza del medesimo ordine di grandezza. All'aumentare del numero di variabili aleatorie x_i , ovvero $n \rightarrow \infty$, la distribuzione di probabilità di X tende alla distribuzione normale avente media e varianza

$$\begin{aligned} \mu &= \sum a_i \mu(x_i) \\ \sigma^2 &= \sum a_i^2 \sigma^2(x_i). \end{aligned}$$

A.0.3 Test di Kolmogorov - Smirnov

Il test di *Kolmogorov - Smirnov* è un metodo di analisi statistica che consente di confrontare tra loro un campione di dati ed una distribuzione teorica allo scopo di verificare l'ipotesi statistica che la popolazione da cui i dati provengono sia quella in esame. Data una variabile aleatoria X , con funzione di ripartizione $F(x)$ si considera il campione $X_1 \cdots X_n$, e, dopo aver ordinato quest'ultimo, si calcola la funzione di ripartizione empirica $\hat{F}(x)$:

$$\hat{F}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq X'_1 \\ \frac{k}{n} & \text{se } X'_k \leq x \leq X'_{k+1} \\ 1 & \text{se } x \geq X'_n \end{cases}$$

$\hat{F}(x)$ è una stima della funzione di ripartizione $F(x)$, pertanto si calcola:

$$D_n = \sup_{-\infty < x < \infty} |\hat{F}(x) - F(x)|$$

dove $\sup x$ è l'estremo superiore dell'insieme delle distanze tra $\hat{F}(x)$ e $F(x)$, corrispondente alla massima differenza tra le due funzioni di ripartizione. Quando D_n è grande viene rigettata l'ipotesi

statistica in caso contrario viene accettata. In generale si definisce un livello di significatività del test pari a 5%.

Bibliografia

- Almodovar, Ana et al. (2012). «Modelling carrying capacity dynamics for the conservation and management of territorial salmonids». In: *Fisheries Research*.
- Amyot, Jean-Pierre et al. (2012). «Oligotrophication from wetland epuration alters the riverine trophic network and carrying capacity for fish». In: *Aquatic Sciences*.
- Anderson, Kurt, Robert Carlson e Jonathan Sarhad (2014). «Population persistence in river networks». In: *Mathematical Biology*.
- Banks, J.E et al. (1994). «Partial differential equations in ecology: spatial interactions and population dynamics». In: Ecological Society of America, pp. 17–29.
- Bonnefon, Olivier e Lionel Roques (2016). «Modelling population dynamics in realistic landscapes with linear elements: a mechanistic-statistical reaction diffusion approach». In: *Plos One*.
- Brose, Ulrich et al. (2012). «Universal temperature and body-mass scaling of feeding rates». In: *Philosophical transactions of the Royal Society*.
- Burden, Richard e Douglas Faires (2001). *Numerical Analysis*. Brooks/Cole.
- Carosi, Antonella et al. (2010). *La fauna ittica e i corsi d'acqua dell'Umbria*. Petrucci editore.
- Comincioli, Valeriano (2010). «Analisi numerica:metodi, modelli, applicazioni». In: Apogeo Editore, pp. 838–844.
- D'Odorico, Paolo, Francesco Laio e Luca Ridolfi (2011). *Noise-Induced Phenomena in the Environmental Sciences*. Cambridge University Press.
- De Marchi, Marco (1984). *Documenta dell'istituto italiano di idrologia - vol.4*.
- Dytham, Calvin et al. (2007). «Prey selection vertical migrations and the impacts of harvesting upon the population dynamics of a predator-prey system». In: *Bulletin of Mathematical Biology*.
- Flanagan, J.J, R.A. Jones e P. O'Reilly (2006). *A summary and evaluation of Atlantic salmon (Salmo salar) smolt monitoring and rotary screw fish trap activities in the Big Salmon River, 2001 - 2005*.
- Gibson, R.J. (2002). «The effects of fluvial processes and habitat heterogeneity on distribution, growth and densities of juvenile Atlantic salmon (*Salmo salar* L.), with consequences on abundance of the adult fish». In: *Ecology of freshwater fish*.
- Gillespie, Daniel (1996). «Exact numerical simulation of the Ornstein-Uhlenbeck process and its integral». In: *Physical Review E*.

- Gregory, Robert e Colin Levings (2011). «Turbidity reduces predation on migrating juvenile pacific salmon». In: *Transactions of the American Fisheries Society*.
- Hall, Norman et al. (2015). «Evaluating the predictive performance of empirical estimators of natural mortality rate using information on over 200 fish species». In: *ICES Journal of Marine Science*.
- Henert, Emmanuel (2012). «Front dynamics in a two species competition model driven by Lévy flights». In: *Journal of Theoretical Biology*.
- Hilker, Frank e Mark Lewis (2010). «Predator-prey systems in streams and rivers». In: *Theoretical Ecology*.
- Holt, Rebecca e Christian Jorgensen (2013). «Natural mortality: Its ecology, how it shapes fish life histories, and why it may be increased by fishing». In: *Journal of Sea Research*.
- Kimura, Yayoi Teramoto (2014). *The Mathematics of Patterns: The modeling and analysis of reaction-diffusion equations*. Princeton University.
- Kuikka, Sakari, Atso Romakkaniemi e Laura Uusitalo (2005). «Estimation of Atlantic salmon smolt carrying capacity of rivers using expert knowledge». In: *ICES Journal of Marine Science*.
- Marine Science, Virginia Institute of (2015). *Database on natural mortality rates and associated life-history parameters*. URL: www.vims.edu.
- Natalini, Roberto (2004). *Introduzione ai metodi numerici alle differenze finite per equazioni di evoluzione*. Università La Sapienza.
- Recupero della popolazione di Alborella (Alburnus Alborella) nei laghi di Avigliana - Studio e analisi preliminari* (n.d.).
- Stewart, James (2002). «Calcolo. Funzioni di più variabili». In: Apogeo Education. Cap. 1.