

# POLITECNICO DI TORINO

Laurea Magistrale in Ingegneria Civile

*Orientamento Strutture*



Tesi di Laurea Magistrale

## **Instabilità dell'equilibrio elastico nelle strutture ad arco: indagine teorica e sperimentale**

### **Relatori**

Prof. Alberto Carpinteri

Dr. Amedeo Manuello Bertetto

Dr. Fabio Bazzucchi

### **Candidata**

Angela Siciliano

Marzo 2018



*Niente nella vita va temuto, dev'essere solamente compreso.  
Ora è tempo di comprendere di più, così possiamo temere di meno.*

*Marie Curie*

*Ai miei genitori*

# Ringraziamenti

Desidero ringraziare tutti coloro che sono stati indispensabili per la realizzazione del presente lavoro di tesi.

Grazie al Prof. Alberto Carpinteri per l'opportunità che mi ha concesso, permettendomi di approfondire le conoscenze relative agli argomenti trattati nei suoi corsi.

Grazie al Dr. Manuello che ha supervisionato e guidato tale lavoro con pazienza e disponibilità.

Grazie al Dr. Bazzucchi, una guida preziosa e indispensabile affinché tale lavoro potesse prendere forma. Porterò sempre con me: i suoi consigli, gli insegnamenti, gli input che hanno suscitato in me la curiosità di indagare su tali argomenti.

Grazie al Dr. Gianfranco Piana per i suoi inestimabili consigli e suggerimenti.

Vorrei ringraziare la mia famiglia che mi ha sostenuto e ha creduto in me. Un ulteriore ringraziamento va agli amici, quelli d'infanzia e quelli conosciuti durante l'esperienza universitaria. Ringrazio soprattutto quelli che hanno vissuto con me quest'esperienza rendendola più piacevole e allegra. Il loro incoraggiamento nei momenti di difficoltà è stato sicuramente prezioso.

Ringrazio mia sorella Katia, con la quale ho condiviso l'esperienza universitaria; per uno strano gioco del destino abbiamo cominciato e concludiamo insieme quest'esperienza. È stata sicuramente un punto di riferimento importante con cui condividere gioie e fatiche di questo percorso.

## Sommario

L'analisi d'instabilità è di particolare rilevanza per alcune tipologie strutturali quali archi o gusci soggetti prevalentemente a compressione. Questi sistemi sono molto diffusi grazie alla loro versatilità dovuta alla possibilità di assumere configurazioni spaziali capaci di coprire superfici considerevoli e garantire flessibilità.

Le principali tipologie d'instabilità dell'equilibrio elastico a cui possono essere soggette le strutture sono: l'instabilità Euleriana e l'instabilità per Snap-Through. Tali instabilità possono interagire, provocando un collasso per una condizione di carico minore rispetto a quella in cui i due fenomeni sono considerati separatamente.

La struttura analizzata nel presente lavoro è l'arco di Von Mises. Quest'ultimo è il modulo base riscontrabile sia in strutture alla macroscale che alla microscale (MEMS, nanotubi di carbonio).

L'obiettivo della tesi è quello di proseguire gli studi sul fenomeno dell'interazione tra instabilità euleriana e snap-through e validare il fenomeno dal punto di vista sperimentale.

Nel primo capitolo vengono riportati una breve genesi storica degli studi sull'instabilità e un inquadramento del fenomeno dal punto di vista fisico.

Il secondo capitolo è dedicato alle analisi numeriche che sono state effettuate, mediante l'ausilio del software FEM Lusas 15.1, per mettere a punto la struttura oggetto delle prove sperimentali. Al fine di valutare il carico critico di un'ampio range di configurazioni strutturali sono state condotte delle analisi non lineari al variare dei parametri: snellezza, grado di ribassamento e imperfezioni geometriche.

Nella terzo capitolo il problema dell'interazione, con riferimento all'arco di von Mises, viene affrontato utilizzando approcci teorici e numerici originali sfruttando i concetti classici della scienza delle costruzioni.

Nella prima parte del capitolo 3 si è definita un'energia di deformazione critica considerando la deformabilità membranale della struttura mentre nella seconda parte del capitolo il problema viene affrontato in termini dinamici sia nella fase antecedente al carico critico che nella fase post-buckling.

La fase pre-critica è stata esaminata in termini vibrazionali valutando l'andamento delle frequenze proprie della struttura fino al raggiungimento del carico critico.

Il comportamento post-buckling è stato investigato in quanto l'instabilità per snap-through coinvolge notevoli quantità di energia cinetica rilasciata durante lo scatto, che possono essere limitate in modo tale da evitare propagazioni di instabilità locali. L'analisi post-buckling ha consentito la definizione di un parametro di velocità con la quale il sistema raggiunge la configurazione di equilibrio ribaltata e, per i sistemi che ricadono sulla curva d'interazione tale parametro è una costante. Un riscontro numerico è stato ottenuto attraverso la definizione del modello del semiarco di Von Mises sul software Working Model 2D che permette l'analisi di sistemi meccanici in movimento.

Nell'ultima parte della tesi viene illustrata l'attività sperimentale svolta per indagare il fenomeno dell'interazione tra l'instabilità euleriana e l'instabilità per snap-through. I test sperimentali hanno fornito dei risultati confrontabili con quelli derivanti dai modelli numerici in termini di carico massimo a cui la struttura può essere sottoposta.

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
1.1	Instabilità delle strutture . . . . .	1
1.1.1	Stato dell'arte . . . . .	1
1.1.2	Campi d'interesse del fenomeno . . . . .	2
1.1.3	Buckling delle strutture reticolari . . . . .	4
1.1.4	Obiettivo della tesi . . . . .	6
1.2	Coupled Instability . . . . .	7
1.2.1	Riduzione del carico critico . . . . .	7
1.3	Interazione tra Snap-Through e Buckling . . . . .	10
1.3.1	Instabilità Euleriana . . . . .	10
1.3.2	Snap-Through . . . . .	12
1.3.3	Interazione tra Instabilità Euleriana e Snap-Through per l'arco di Von Mises . . . . .	15
1.3.4	Curva d'interazione . . . . .	19
1.3.5	Effetto delle imperfezioni sull'interazione . . . . .	21
<b>2</b>	<b>Modelli numerici</b>	<b>23</b>
2.1	Descrizione del modello . . . . .	23
2.1.1	Elemento BTS3 . . . . .	23
2.1.2	Analisi geometricamente non lineare, GNIA . . . . .	25
2.2	Imperfezioni . . . . .	25
2.3	Risultati . . . . .	26
2.3.1	Percorsi d'equilibrio $F$ - $\eta$ . . . . .	26
2.3.2	Riduzioni di carico . . . . .	30
2.3.3	Influenza dei parametri $h/d$ e $\lambda$ . . . . .	33
2.4	Osservazioni . . . . .	35

---

<b>3</b>	<b>Aspetti energetici e dinamici</b>	<b>36</b>
3.1	Introduzione . . . . .	36
3.2	Analisi d'instabilità: Energia di deformazione critica . . . . .	36
3.2.1	Fenomeno dell'interazione . . . . .	38
3.2.2	Effetto della snellezza e del grado di ribassamento . . . . .	40
3.3	Analisi dinamica pre-critica . . . . .	42
3.3.1	Interazione tra Snap-Through e Buckling Euleriano . . . . .	44
3.3.2	Analisi numerica . . . . .	45
3.3.3	Effetto della snellezza sulle frequenze . . . . .	46
3.3.4	Validazione FEM . . . . .	47
3.4	Analisi dinamica post-buckling . . . . .	50
3.4.1	Effetto dell'interazione . . . . .	54
3.4.2	Validazione numerica: Working Model 2D . . . . .	55
3.5	Relazione $E_{def,cr} - E_{k,cr}$ . . . . .	57
3.6	Oscillazioni post-critiche lineari . . . . .	58
<b>4</b>	<b>Test Sperimentali</b>	<b>61</b>
4.1	Introduzione . . . . .	61
4.2	Setup sperimentale . . . . .	61
4.3	Risultati sperimentali . . . . .	66
4.3.1	Test 1 . . . . .	66
4.3.2	Test 2 . . . . .	67
4.3.3	Test 3 . . . . .	68
4.4	Osservazioni . . . . .	69
4.4.1	Effetto del vincolo . . . . .	70
4.4.2	Effetto del cavo di collegamento al martinetto . . . . .	72
4.4.3	Comportamento reale . . . . .	77
<b>5</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>79</b>

# Capitolo 1

## Introduzione

### 1.1 Instabilità delle strutture

#### 1.1.1 Stato dell'arte

L'instabilità elastica è uno dei problemi centrali nel progetto degli elementi strutturali snelli soggetti a compressione. Il primo ad interessarsi a questo problema fu Eulero nel 1744, il quale introdusse il concetto di carico critico per una colonna snella soggetta a compressione. Al raggiungimento del carico critico la struttura subisce grandi deformazioni e può perdere la stabilità. Una particolare tipologia d'instabilità dell'equilibrio elastico è detta Snap-Through ST. A differenza del Buckling Euleriano EB, che tiene conto solo della deformabilità flessionale, nello Snap-Through si prende in considerazione soltanto la deformabilità membranale.

Queste due tipologie d'instabilità possono avere un'interazione che comporta una riduzione del carico critico. L'instabilità accoppiata, detta anche Interactive Buckling (IB) oppure Coupled Instability (CI), venne studiata per la prima volta da Koiter nel 1945, il quale elaborò la moderna teoria sulla stabilità strutturale. Koiter chiarì il comportamento post-critico delle strutture applicando il metodo delle variazioni a sistemi elastici continui dotati di imperfezioni iniziali e dimostrò che l'effetto di queste è strettamente legato al comportamento post-critico della struttura.

Mentre per quanto riguarda i sistemi discreti Thompson sviluppò una teoria generale utilizzando le coordinate generalizzate [1].

Successivamente Roorda dimostrò che il comportamento instabile dei sistemi strutturali può essere influenzato da differenti tipi di imperfezioni quali difetti nella geometria iniziale della struttura oppure nella disposizione del carico o ancora nelle proprietà del materiale. Egli sviluppò appunto una teoria, mediante l'uso delle

coordinate generalizzate, che permettesse di analizzare qualsiasi sistema, e stabilì che gli stati critici sono caratterizzati dall'annullamento del determinante della derivata seconda dei coefficienti di stabilità correlati all'energia potenziale totale attraverso una trasformazione delle coordinate generalizzate. Un sistema è stabile se esistono tutti i coefficienti di stabilità e sono positivi.

Questa condizione di stabilità garantisce un aumento dell'energia potenziale per qualsiasi piccolo spostamento del sistema dalla posizione di equilibrio stabile [2] [3]. La prima applicazione pratica della teoria sulla stabilità strutturale è dovuta a Van der Neut nel 1969, quest'ultimo focalizzò la sua attenzione sull'interazione tra buckling globale e locale delle colonne a parete sottile.

Nel 1975 Thom sviluppò una nuova teoria dell'instabilità associandola alle catastrofi. L'applicazione della teoria delle catastrofi alla stabilità ha permesso una classificazione dei tipi di biforcazione ed di approfondire la conoscenza di tale fenomeno.

### 1.1.2 Campi d'interesse del fenomeno

L'instabilità per snap-through coinvolge sistemi strutturali a diverse scale, infatti non interessa solo strutture alla macroscale quali coperture ribassate di grande luce ma è un fenomeno che riguarda anche dispositivi elettronici alla microscale quali Micro-Electro-Mechanical System (MEMS); mentre, alla nanoscale, materiali come il grafene oppure le proteine (Figura 1.1). Per quanto riguarda i MEMS, questi sono di largo impiego nelle tecnologie moderne quali switches, accelerometri, micro energy harvesters, sensori di temperatura e di pressione, bioMems.

Il loro funzionamento generalmente è basato sull'azionamento meccanico oppure elettrostatico e in base a questo si può avere rispettivamente instabilità per snap-through oppure un'instabilità chiamata "pull-in" (Figura 1.2). L'instabilità per pull-in ha un effetto cruciale sull'attuazione elettrostatica in quanto limita gli intervalli di impiego.

Studi recenti sul buckling e post-buckling hanno studiato questi fenomeni al fine di trasformare gli aspetti negativi in positivi. Le caratteristiche che contraddistinguono la maggior parte dei fenomeni di buckling sono il movimento ad alta velocità e l'energia rilasciata improvvisamente. Queste proprietà fanno del buckling un meccanismo ideale per applicazioni 'smart' e 'adaptive' in quanto sfruttano l'energia rilasciata e l'energia dissipata durante l'instabilità [4]. Alla nanoscale il fenomeno dello snap-through può interessare le proteine, che possono essere viste come condotti che hanno la capacità di estroflettersi e inflettersi quindi si ha una transizione

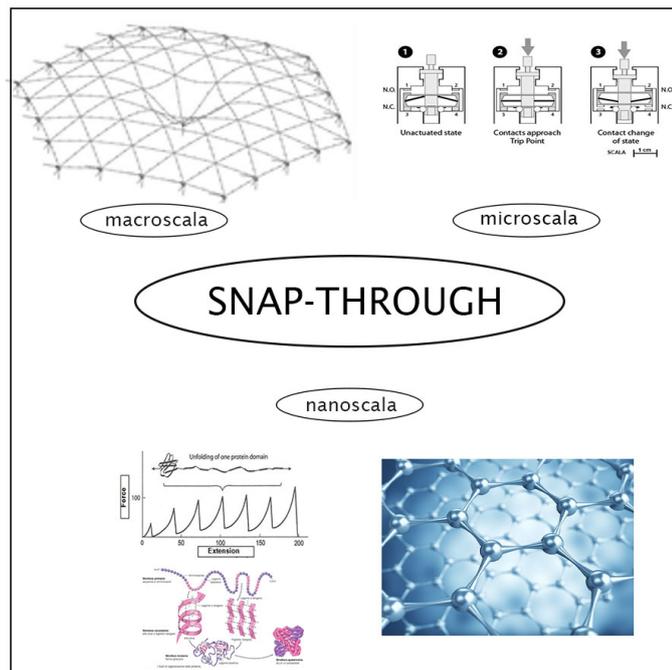


Figura 1.1: Esempi d'instabilità per snap-through in diversi campi

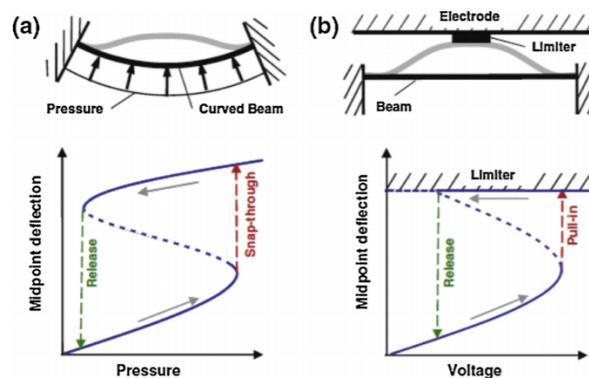


Figura 1.2: Schemi strutturali di MEMS soggetti ad instabilità meccanica (a) ed elettrostatica (b) [5]

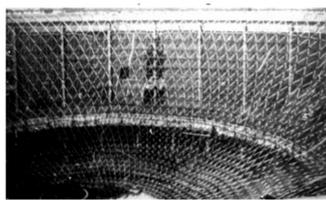
meccanica tra due posizioni, oppure riguarda anche le nanostrutture di carbonio CNTs (carbon nanotubes). Queste ultime sono impiegate per la costruzione di materiali cellulari tridimensionali 3D e sono, attualmente, sotto costante indagine in termini di fabbricazione e proprietà fisiche a causa del loro significativo potenziale tecnologico per varie applicazioni quali scaffolds biologici, biosensing elettrochimico, supercondensatori, etc.

Le reti 3D basate su CNTs sono interconnesse casualmente e vengono tenute in posizione solo da forze di Van der Waals, per questo motivo se compresse sono predisposte al collasso [6].

Infine nel campo delle costruzioni civili il collasso della cupola del Concert and Meeting Hall di Bucarest nel 1963, a causa di un carico neve asimmetrico e di un sistema di giunti non adeguato, ha suscitato un maggiore interesse nel comportamento del buckling e postbuckling riguardanti questo tipo di strutture [7]. Il collasso della copertura non ha provocato il danneggiamento degli elementi ma la struttura ha trovato una nuova posizione di equilibrio, differente da quella originaria, invertendo la concavità.

La medesima causa ha portato negli anni successivi altri collassi quali il collasso della copertura dell'arena di Hartford nel 1978 negli Stati Uniti e il collasso della copertura del Metrodome nel Mississippi del 2010.

Il fatto che queste strutture siano caratterizzate da un peso proprio ridotto fa sì che i carichi asimmetrici siano la principale causa dell'instabilità.



a) RomExpo pavillion collapse, 1963



b) Hartford arena roof collapse, 1978



c) Metrodome roof collapse, Minneapolis 2010

**Figura 1.3:** Collassi per instabilità di coperture

### 1.1.3 Buckling delle strutture reticolari

Le strutture leggere sono state spesso oggetto di studio e sperimentazione, portando allo sviluppo di nuovi sistemi strutturali quali cupole reticolari, gridshell, etc. La diffusione di tali sistemi è dovuta alla loro versatilità in quanto possono assumere configurazioni spaziali capaci di coprire spazi considerevoli e garantire grande flessibilità (Figura 1.4). Inoltre la loro libertà compositiva si adatta bene alla società contemporanea sempre più mutevole e dinamica.



**Figura 1.4:** Esempi coperture: a. Pompidou Centre, Metz - France, Shigeru Ban/Arup b. King's Cross Station, John McAslan + Partners; c. Heydar Aliyev Centre, Baku - Azerbaijan, Zaha Hadid Architect; d. Particolare Metropol Parasol, Seville - Spain, J Mayer H / ARUP

Nell'ingegneria delle costruzioni la tendenza è quella di ottimizzare le strutture, ossia migliorarne l'efficienza, riducendone il peso e il consumo di materiali. Questo obiettivo può essere raggiunto adottando nuove soluzioni e materiali oppure razionalizzando quelli esistenti [8]. La riduzione delle inerzie degli elementi strutturali ha dato luogo a notevoli incrementi di snellezza portando ad una nuova forma d'instabilità, definita come "Interactive Buckling" o "Coupled Instability". L'instabilità delle strutture reticolari è un fenomeno che si verifica improvvisamente senza alcun segno visibile di una catastrofe imminente. Per questo motivo è necessaria un'analisi accurata che tenga conto della possibilità d'interazione tra le varie forme d'instabilità poichè questa è responsabile della riduzione drastica del carico critico.

#### 1.1.4 Obiettivo della tesi

Il fenomeno dell'interazione tra diverse instabilità, sebbene analizzato in vari studi finora, non prevede ancora un metodo di design sistematico che permetta la progettazione di sistemi strutturali interessati da tale problema.

L'obiettivo della tesi è studiare il fenomeno d'interazione tra l'instabilità euleriana e l'instabilità per snap-through di una struttura ad arco ribassata sia dal un punto di vista fisico che sperimentalmente, in quanto i modelli matematici, se scelti accuratamente, possono simulare il comportamento fisico, tuttavia è necessario verificarlo e convalidare i calcoli attraverso degli esperimenti.

Inoltre gli esperimenti possono mettere in evidenza dei comportamenti delle strutture reali che non vengono considerati nei modelli di calcolo semplificati [9].

Lo studio riguarda il comportamento instabile dell'arco di Von Mises in quanto questo modulo può essere ritrovato sia in strutture alla macroscale (coperture reticolari, grid-shell) che alla microscale (MEMS, nanotubi di carbonio).

## 1.2 Coupled Instability

Negli ultimi anni, l'attenzione è stata focalizzata sulla ricerca e sullo sviluppo di un criterio di progettazione che consentisse ad una data configurazione strutturale di avere un solo carico critico per differenti tipologie di collasso.

Questo concetto è ben riassunto nel principio di progettazione per instabilità simultanea proposto da Bleich Shanley e Spunt:

*Una data forma strutturale sarà ottimale se tutti i modi di collasso si verificano simultaneamente sotto la medesima azione.*

La validità di questo principio è stata messa in discussione, per la prima volta, da Koiter e Skaloud, i quali notarono che l'instabilità accoppiata è influenzata dalla sensibilità alle imperfezioni; quest'ultime possono modificare il valore di carico ottimale apparente. Infatti si è notato la diminuzione del carico di collasso è massima vicino al punto di instabilità simultanea, quindi tale principio è valido solo per strutture ideali.

Maquoi e Massonet hanno studiato l'instabilità accoppiata per sezioni di tipo scatolare confermando la diminuzione di carico prodotta dall'instabilità accoppiata. Da qui seguirono numerosi studi sull'instabilità accoppiata che raggiunsero il loro culmine nella "First Conference of Coupled Instability", svoltasi nel 1994 in Timisoara. I principali risultati della conferenza furono raccolti da Gioncu in un dettagliato report [8].

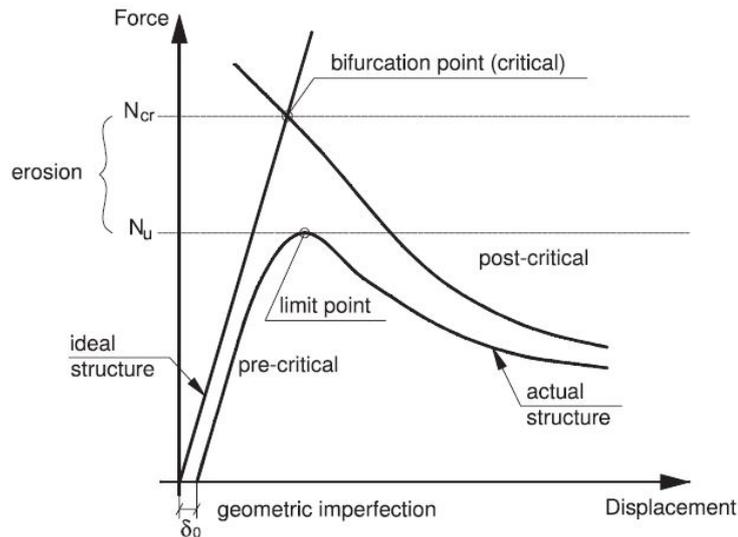
### 1.2.1 Riduzione del carico critico

La sensibilità alle imperfezioni, come già accennato, gioca un ruolo importante nell'instabilità delle strutture. La perdita di stabilità di una struttura *ideale* può avvenire in due modi, attraverso [8]:

- *punto limite*, dove la rigidità della struttura decresce progressivamente fino al raggiungimento del punto critico;
- *punto di biforcazione*, nel quale il percorso fondamentale è attraversato da un percorso di equilibrio instabile secondario. La struttura abbandona il percorso primario e segue quello secondario al punto di biforcazione corrispondente al valore critico ( $N_{cr}$ ).

Il comportamento di una struttura *reale*, invece, sede inevitabile di piccole imperfezioni geometriche oppure dovute ad eccentricità di carico, dipende dalla forma di

quest'ultime. Infatti la capacità ultima ( $N_u$ ) di una struttura reale è caratterizzata dall'equilibrio del punto limite. La differenza tra  $N_u$  e  $N_{cr}$  rappresenta la riduzione del carico critico di biforcazione attribuibile alle imperfezioni [10]. L'entità di questa riduzione dipende dalla tipologia di struttura e dalle dimensioni delle imperfezioni.



**Figura 1.5:** Comportamento critico e post-critico [10]

L'effetto delle imperfezioni è quindi quello di erosione della cuspide formata dall'intersezione tra il percorso fondamentale e il ramo post-critico. Nel caso di una struttura priva di imperfezioni il carico critico è dato dall'intersezione tra il percorso fondamentale di equilibrio e quello secondario post-critico mentre se si considerano le imperfezioni si ha un incremento continuo della deformazione e l'instabilità cessa di essere per biforcazione, per avvenire tramite punto limite.

Il carico di biforcazione critico è composto da una componente stabile e da un'altra instabile (Figura 1.6). Quest'ultima è quella che viene abbattuta dalle imperfezioni. L'erosione della componente instabile che dipende dalle deformazioni, dai vincoli elastici è detta erosione primaria. Nel caso di instabilità accoppiata si ha una seconda erosione (Figura 1.7). In funzione dell'entità dell'erosione, Gioncu [8] ha suggerito la seguente classificazione delle interazioni:

- Interazione debole, se l'erosione è meno del 10%;
- Interazione moderata se l'erosione è meno del 30%;
- Interazione considerevole per erosioni fino al 50%;
- Interazione veramente considerevole per erosioni superiori al 50%.

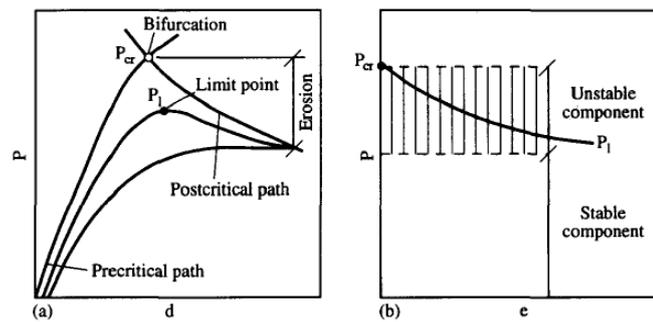


Figura 1.6: Erosione del carico critico [8]

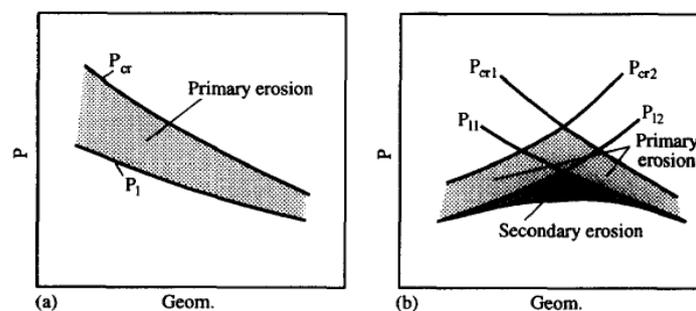


Figura 1.7: Erosione primaria e secondaria [8]

Nel caso di debole interazione l'instabilità accoppiata può essere trascurata, poiché a tutela di ciò vi sono i coefficienti di sicurezza utilizzati nella pratica progettuale. Altrimenti è necessario utilizzare dei modelli che tengano conto dell'interazione. La perdita di stabilità è un fenomeno dinamico, ma per lo studio di sistemi conservativi possono essere usati metodi statici, e vi sono due approcci:

1. *Metodo dell'equilibrio diretto* che utilizza semplici equazioni di equilibrio;
2. *Metodo energetico* che permette di individuare la stabilità ricercando un valore stazionario dell'energia potenziale totale EPT.

La teoria dell'instabilità accoppiata è basata esclusivamente sul metodo energetico, questo perché attraverso tale metodo possono essere prese in considerazione sia le condizioni di equilibrio che parametri quali il carico e le imperfezioni. Inoltre tale metodo è più facile da sviluppare in termini di coordinate generalizzate attraverso un numero finito di gradi di libertà.

## 1.3 Interazione tra Snap-Through e Buckling

Un caso particolare di Coupled Instability è l'interazione tra il fenomeno dello Snap-Through (ST) e l'Instabilità Euleriana (EB-Eulerian Buckling).

Nello Snap-Through è possibile percorrere il ramo pre-critico non lineare in maniera stabile fino al raggiungimento del punto limite, oltre il quale il sistema scatta verso una nuova configurazione di equilibrio non adiacente stabile.

Allo stesso modo nel caso dell'instabilità Euleriana, la quale è un'instabilità a biforcazione simmetrica stabile, si ha stabilità fino al raggiungimento del punto di biforcazione, oltre il quale si possono avere ancora configurazioni di equilibrio stabili lungo il ramo critico.

### 1.3.1 Instabilità Euleriana

L'instabilità euleriana è il fenomeno d'instabilità classico dovuto al carico di punta. Si consideri un'asta di lunghezza  $L$  incernierata ad un estremo e soggetta ad un carico assiale (Figura 1.8).

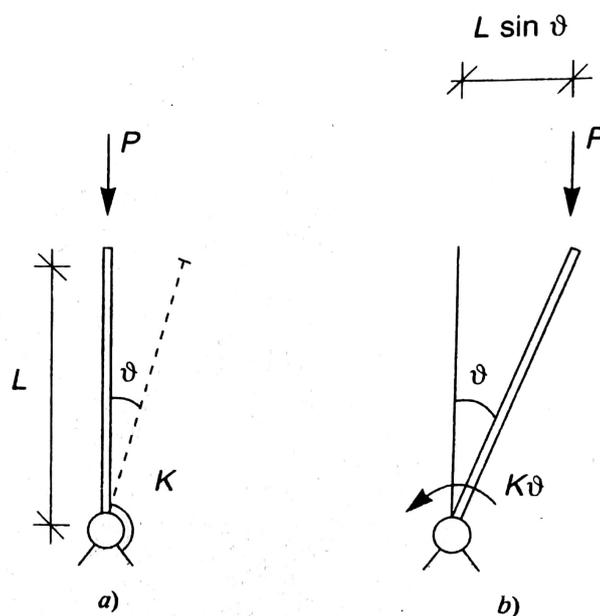


Figura 1.8: asta soggetta ad un carico di compressione [11]

Lo studio delle configurazioni di equilibrio non banali che comportano un'inflessione  $\theta \neq 0$  avviene attraverso la rimozione dell'ipotesi di piccoli spostamenti, imponendo l'equilibrio nella configurazione deformata. Assumendo come coordinata

generalizzata la rotazione  $\theta$  della trave, l'Energia Potenziale Totale EPT vale:

$$W(\theta) = \frac{1}{2}K\theta^2 - PL(1 - \cos \theta) \quad (1.1)$$

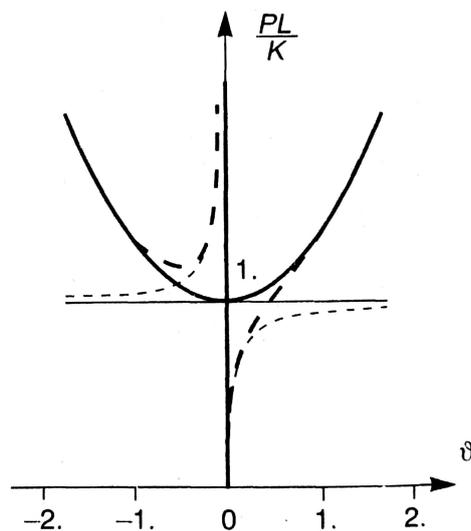
La condizione di equilibrio si ha imponendo la stazionarietà dell'EPT:

$$\frac{dW}{d\theta} = 0 \rightarrow W'(\theta) = K\theta - PL \sin \theta = 0 \quad (1.2)$$

Il percorso di equilibrio fondamentale è coincidente con il carico assiale mentre il secondo è dato dalla seguente espressione:

$$P(\theta) = \frac{K\theta}{L \sin \theta} \quad (1.3)$$

Questo percorso interseca quello fondamentale in corrispondenza dello stato di equilibrio critico.



**Figura 1.9:** Instabilità per diramazione stabile simmetrica [11]

La stabilità dell'equilibrio si verifica attraverso l'analisi della concavità del potenziale:

$$W''(\theta) = K - PL \cos \theta \quad (1.4)$$

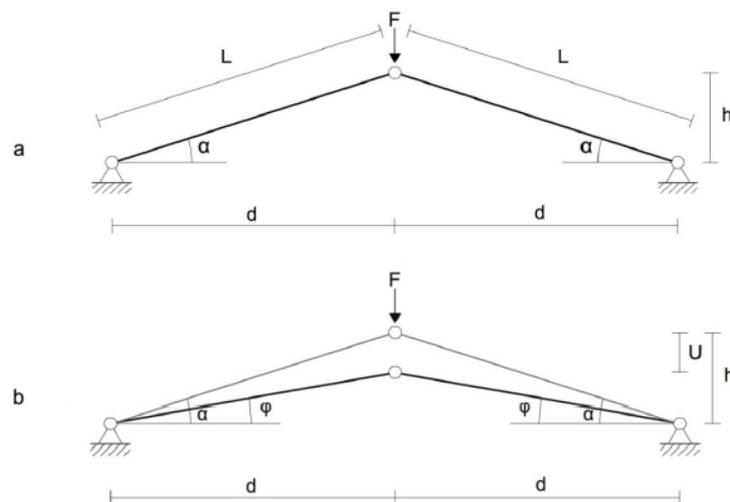
L'equilibrio sarà di tipo stabile oppure instabile, per  $\theta=0$ , a seconda che il carico assiale agente sia inferiore o superiore al carico critico  $P=K/L$ . Il punto corrispondente al carico critico viene definito punto di biforcazione dell'equilibrio stabile-simmetrico. Il sistema presenta un comportamento di tipo rigido-incrudente in quanto per avere un aumento di deformazione è necessario un incremento di carico.

### 1.3.2 Snap-Through

A differenza del caso precedente non si ha biforcazione dell'equilibrio ma l'instabilità si verifica con una riduzione progressiva della rigidità del sistema fino a raggiungere il punto limite nel percorso di equilibrio, il quale definisce il carico critico. Dal momento che non esiste la biforcazione non si ha equilibrio in una configurazione adiacente.

Se la struttura viene perturbata nell'intorno del punto limite, questa raggiungerà l'equilibrio in una configurazione lontana da quella critica. Questa variazione di configurazione avviene attraverso uno scatto, da qui il nome snap-through, solitamente in campo elastico. Lo studio di questo problema viene affrontato attraverso un approccio energetico [12] cioè si ricavano le posizioni di equilibrio differenziando l'Energia Potenziale Totale.

Si consideri l'arco di Von Mises, il quale è costituito da due aste, di rigidezza  $EA/L$ ,



**Figura 1.10:** Arco di Von Mises [12]

incernierate soggette ad una forza verticale applicata in chiave. In questo caso viene trascurato il contributo flessionale ma si tiene conto solo dell'accorciamento delle aste  $\Delta L$ :

$$\Delta L = L - L' = L - \frac{d}{\cos \varphi} \quad (1.5)$$

essendo  $d = L \cos \alpha$  si ottiene:

$$\Delta L = L - \frac{L \cos \alpha}{\cos \varphi} = L \left( 1 - \frac{\cos \alpha}{\cos \varphi} \right) \quad (1.6)$$

Essendo la struttura simmetrica, può essere considerato un solo grado di libertà dato dall'angolo  $\varphi$ ; mentre lo spostamento del punto di applicazione del carico vale:

$$U = h - L' \sin \varphi = L \sin \alpha - \frac{L \cos \alpha}{\cos \varphi} \sin \varphi = L(\sin \alpha - \cos \alpha \tan \varphi) \quad (1.7)$$

Noti i parametri cinematici, l'EPT può essere scritta come:

$$W(\varphi) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{EA}{L} \Delta l^2 - FU = L \left[ EA \left( 1 - \frac{\cos \alpha}{\cos \varphi} \right)^2 - F(\sin \alpha - \cos \alpha \tan \varphi) \right] \quad (1.8)$$

dove l'angolo  $\alpha$  definisce il ribassamento della struttura mentre  $\varphi$  e  $U$  sono le coordinate lagrangiane ed  $F$  è il carico applicato in sommità.

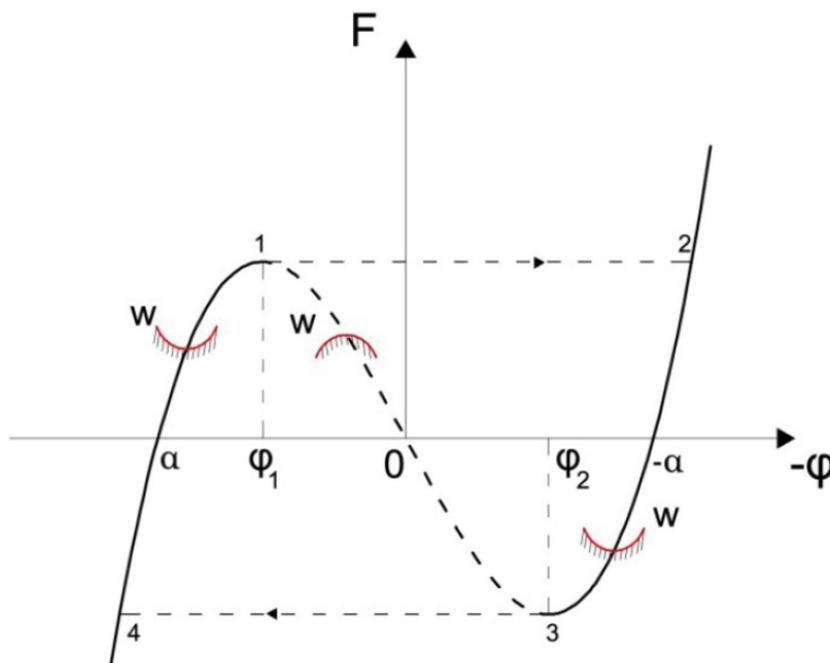
La condizione d'equilibrio si ottiene andando ad imporre la stazionarietà dell'EPT:

$$\frac{dW}{d\varphi} = 0 \rightarrow L \frac{\cos \alpha}{\cos^2 \varphi} \left[ F - 2EA \sin \varphi \left( 1 - \frac{\cos \alpha}{\cos \varphi} \right) \right] = 0 \quad (1.9)$$

Da cui si ottiene:

$$F(\varphi) = 2EA \sin \varphi \left( 1 - \frac{\cos \alpha}{\cos \varphi} \right) \quad (1.10)$$

Tale relazione, rappresentata in (Figura 1.11), esprime il legame tra il carico applicato  $F$  e la rotazione  $\varphi$  delle aste.



**Figura 1.11:** Percorso di equilibrio per l'arco di Von Mises [12]

La risposta del sistema è non lineare fin dai primi incrementi di carico, infatti si ha una graduale perdita di rigidità del sistema fino ad annullarsi nel punto 1 dove si ha la condizione di equilibrio limite.

L'introduzione di una perturbazione produce uno scatto che porta la struttura ad assumere una nuova configurazione di equilibrio ribaltata rispetto alla configurazione originaria.

Infatti, quando il carico raggiunge il limite di elasticità, il punto di applicazione del carico si sposta di scatto su un nuovo tratto a rigidità positiva. La nuova configurazione geometrica è un punto di equilibrio stabile, in quanto se si rimuove il carico il punto rimane in quiete.

L'esistenza di due differenti configurazioni stabili allo stesso livello di forza sorge a causa della non linearità geometrica e in particolare a causa della dipendenza non monotona tra rigidità e inflessione di un elemento strutturale deformabile.

Il percorso di equilibrio evidenzia un massimo e un minimo locale ottenuti dalla derivata seconda della (1.8):

$$\varphi_{1,2} = \pm \arccos \sqrt[3]{\cos \alpha} \quad (1.11)$$

L'analisi rigorosa della stabilità dei percorsi di equilibrio si effettua andando a studiare il segno della derivata seconda dell'EPT. Laddove la funzione  $W$  presenta un minimo si ha un punto di equilibrio stabile mentre se  $W$  mostra un massimo quello sarà un punto di equilibrio instabile.

Infine i punti di flesso sono punti in cui si ha una transizione del tipo di equilibrio. Si può osservare che la derivata seconda è positiva per  $\alpha < \varphi_1$  e  $\alpha > \varphi_2$  mentre è negativa nell'intervallo tra  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ . Quindi l'andamento è stabile fin tanto che non viene raggiunto il carico critico (punto 1) per poi divenire instabile.

Se analizziamo la derivata terza dell'EPT si può vedere che non presenta un minimo in corrispondenza dei due punti critici di equilibrio,  $\varphi = \varphi_1$   $\varphi = \varphi_2$ , questo significa che il ramo instabile, dal punto 1 al punto 3, può essere tracciato solo con un'analisi in controllo di spostamento. Altrimenti se si aumenta il carico dopo  $\varphi_1$  si ha uno scatto fino ad arrivare ad una nuova configurazione di equilibrio non adiacente identificata dal punto 2.

Il problema dell'instabilità per snap-through è pertanto intrinsecamente dinamico. L'area tratteggiata in (Figura 1.12) rappresenta l'energia cinetica del sistema rilasciata sottoforma di vibrazioni, infatti la struttura oscilla intorno alla posizione 2 di equilibrio stabile.

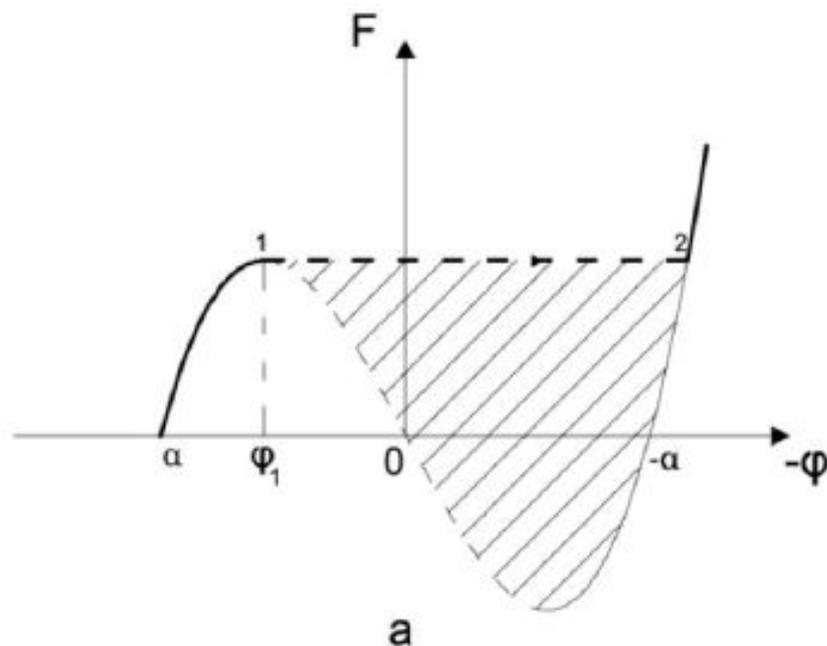


Figura 1.12: Energia rilasciata durante lo snap-through [12]

### 1.3.3 Interazione tra Instabilità Euleriana e Snap-Through per l'arco di Von Mises

Finora si sono trattate le due instabilità separatamente, tuttavia per un'analisi dettagliata si deve considerare la mutua interazione tra l'instabilità Euleriana e lo Snap-Through per la corretta valutazione del carico critico minore come affrontato in [12], [13].

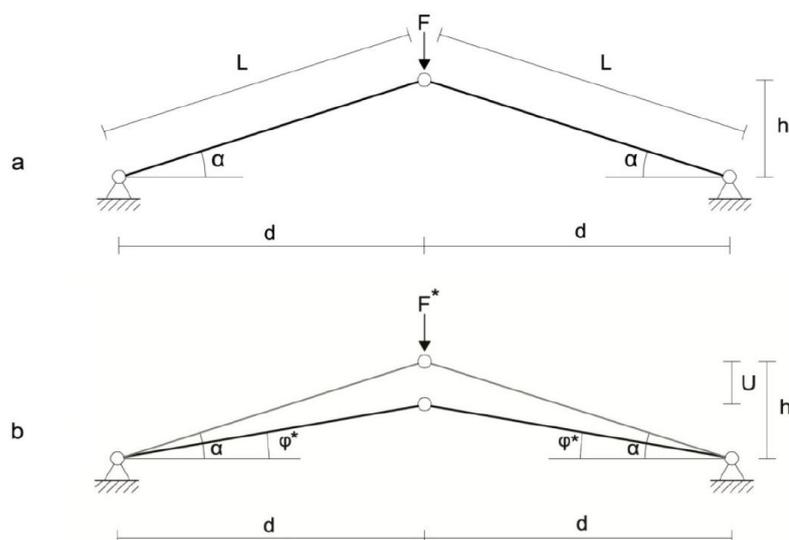
Si considera nuovamente il sistema meccanico dell'arco a tre cerniere (Fig. 1.13a). L'arco ha un comportamento pre-critico non lineare che coinvolge lo snap-through se il percorso di equilibrio è seguito al di là del punto limite.

Per quanto riguarda l'instabilità Euleriana si ha che per un dato carico esterno  $F$ , le aste reagiscono con la forza assiale  $N$ :

$$N = \frac{1}{2} \frac{F}{\sin \alpha} \quad (1.12)$$

Quando  $N$  raggiunge il carico critico di instabilità euleriana  $N_{CR,EB}$ , le aste perdono la loro rigidità flessionale e l'equilibrio si instabilizza nella configurazione adiacente (Figura 1.14):

$$\frac{1}{2} \frac{F}{\sin \alpha} = N_{CR,EB} = \pi^2 \frac{EI}{L^2} \quad (1.13)$$



**Figura 1.13:** a. Instabilità Euleriana dell'arco di Von Mises b. Configurazione generica di equilibrio durante un'analisi a controllo di spostamento, identificata da  $F^*$  e  $\phi^*$  [12]

Di conseguenza:

$$F_{CR,EB} = 2\pi^2 \frac{EI}{L^2} \sin \alpha \quad (1.14)$$

Per determinare la condizione di carico più gravosa, questo carico deve essere uguagliato al carico d'instabilità per snap-through:

$$F = 2EA \sin \varphi \left(1 - \frac{\cos \alpha}{\cos \varphi}\right) \quad (1.15)$$

Si considera una configurazione del sistema individuata dalla coppia  $(\varphi^*, F^*)$ , la quale è situata prima del punto limite (Figura 1.13 b).

L'equilibrio in questa configurazione implica che il valore della forza assiale è pari a:

$$N = \frac{1}{2} \frac{F^*}{\sin \varphi^*} \quad (1.16)$$

da cui:

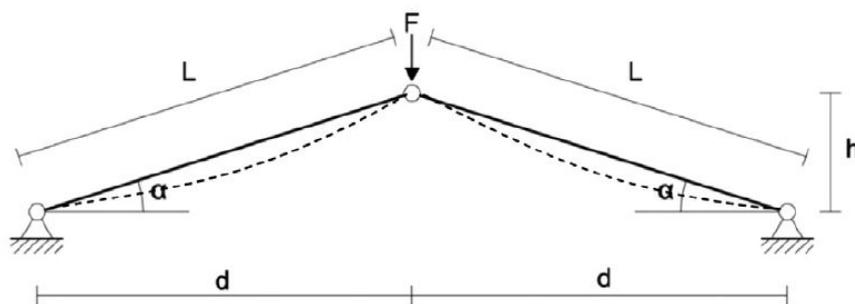
$$F^* = 2N \sin \varphi^* \quad (1.17)$$

La natura del problema è tale che lo sforzo assiale sia maggiore nella configurazione deformata e che questo cresca non linearmente con il carico esterno.

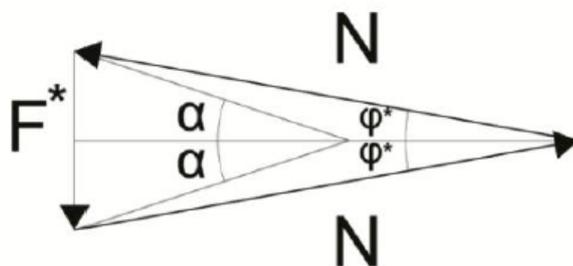
Sostituendo la (1.15) nella (1.17) si ottiene:

$$N = EA \left(1 - \frac{\cos \alpha}{\cos \varphi}\right) \quad (1.18)$$

Il cui andamento è rappresentato in Figura 1.16. Quando lo sforzo normale rag-



**Figura 1.14:** Instabilità Euleriana dell'arco di Von Mises e configurazione adiacente (linea tratteggiata) [13]



**Figura 1.15:** Equilibrio delle forze [12]

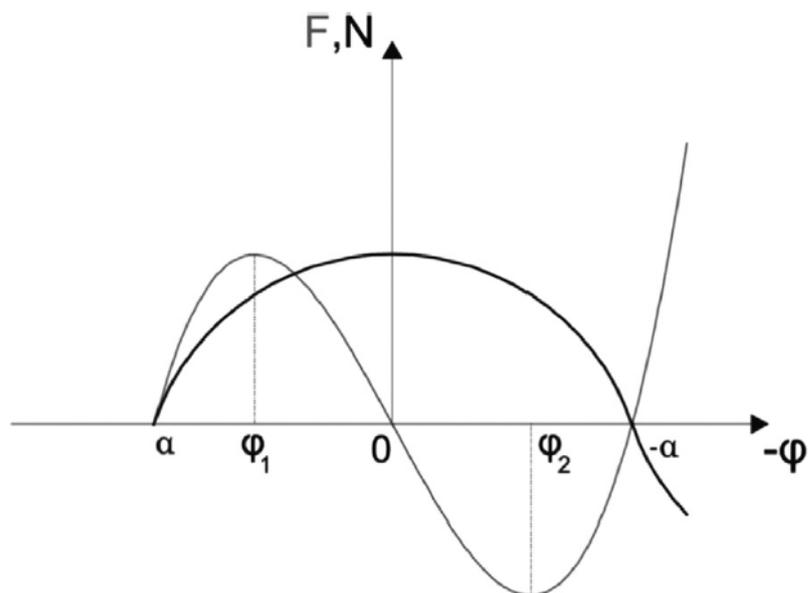
giunge il valore critico Euleriano  $N_{CR,EB}$ , prima del punto limite, il sistema avrà biforcazione dell'equilibrio.

La biforcazione si verifica quando il percorso di equilibrio primario, dato dall'equazione (1.15), interseca il percorso di equilibrio fornito dalla seguente equazione:

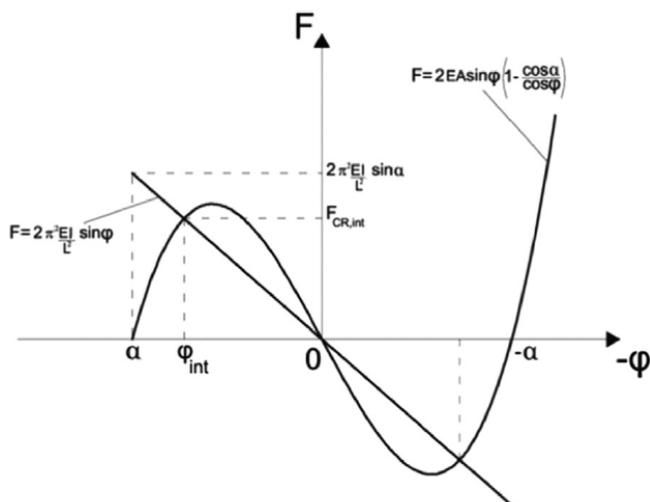
$$F_{CR,EB} = 2\pi^2 \frac{EI}{L^2} \sin \varphi \quad (1.19)$$

Il dominio in cui si verifica l'intersezione (Figura 1.17) è dato dall'intervallo  $[-\alpha; \alpha]$  e all'interno di quest'ultimo la porzione di senoide (Eq. (1.19)) può essere considerata una retta a causa dei piccoli valori dell'angolo di ribassamento  $\alpha$ .

Nel punto d'intersezione si è in una situazione di biforcazione instabile. Il ramo di biforcazione è decrescente e una piccola perturbazione porta la struttura a scattare verso una nuova configurazione di equilibrio non adiacente. Mentre se si considera una prova a spostamento controllato, la perturbazione porta il sistema ad abbandonare il percorso di equilibrio primario verso quello ramificato e segue quest'ultimo



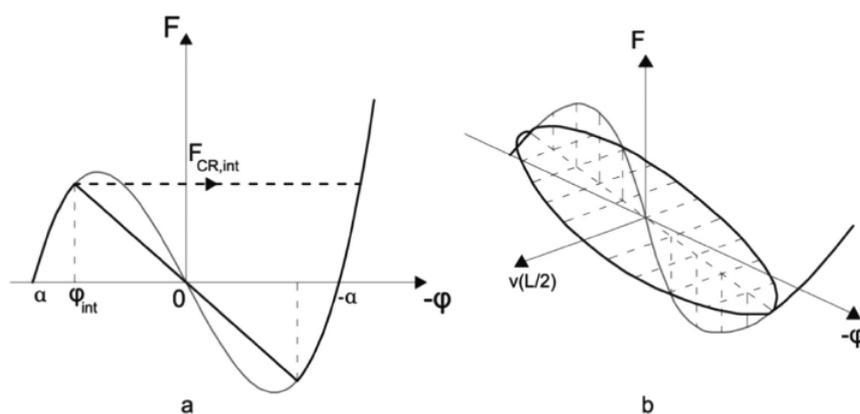
**Figura 1.16:** Andamento dello sforzo assiale lungo il percorso di equilibrio e il relativo percorso d'equilibrio dello snap-through [12]



**Figura 1.17:** Intersezione tra il percorso d'equilibrio relativo all'instabilità Euleriana e il percorso d'equilibrio primario relativo allo Snap-Through [12]

fino ad intersecare di nuovo il percorso primario (Figura 1.18 a).

La Figura 1.18 b mette in risalto lo spostamento in mezzeria, al netto di quello dovuto al percorso principale, e mostra come questo sia presente solo lungo la biforcazione dove le aste non si trovano più in equilibrio in una configurazione rettilinea.



**Figura 1.18:** a. Interazione tra il percorso di equilibrio e un ramo di biforcazione instabile b. Spostamento verticale in mezzera lungo il ramo di biforcazione non lineare [13]

### 1.3.4 Curva d'interazione

L'interazione tra le due tipologie d'instabilità si verifica solo se l'intersezione è situata prima del punto corrispondente al carico critico di snap-through. I percorsi di equilibrio possono assumere quattro possibili configurazioni, e solo due di questi presentano un'interazione.

Laddove l'intersezione è situata dopo il picco non si verifica l'interazione tra i due fenomeni. Inoltre non si ha interazione quando il carico d'instabilità euleriana è considerevole rispetto a quello di snap-through in quanto la pendenza del percorso di equilibrio è tale da non permettere l'intersezione.

Il fenomeno dell'interazione dipende da due parametri che definiscono il comportamento strutturale: la snellezza delle aste  $\lambda$  e il grado di ribassamento della struttura  $h/d$ .

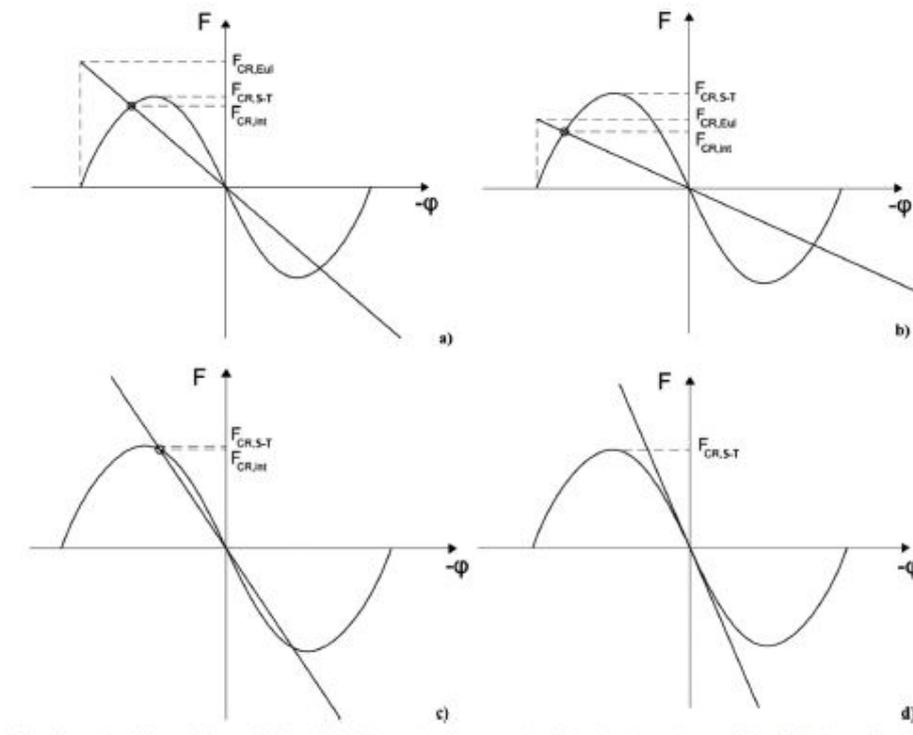
$$\lambda = \sqrt{\frac{AL^2}{I}} \quad (1.20)$$

$$\tan \alpha = h/d \quad (1.21)$$

Noto lo sforzo assiale (1.18), è possibile confrontarlo con lo sforzo critico euleriano delle aste, e si ha che:

$$1 - \frac{\cos \alpha}{\cos \varphi} = \frac{\pi^2}{\lambda^2} \quad (1.22)$$

Sostituendo l'angolo  $\varphi$  critico dato dalla 1.11 si impone che l'intersezione si verifica quando si raggiunge il carico critico di snap-through. Da questa condizione si ha la



**Figura 1.19:** Possibili configurazioni dei percorsi di equilibrio [13]

seguinte equazione definita come curva d'interazione (Fig. 1.20):

$$\alpha = \arccos \left( 1 - \frac{\pi^2}{\lambda^2} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (1.23)$$

la quale fornisce il valore della snellezza  $\lambda$  tale che, per un dato grado di ribassamento  $\alpha$ , l'instabilità euleriana e lo snap-through si verificano contemporaneamente.

Allo stesso modo, dalla (1.22), è possibile ottenere l'angolo  $\varphi_{int}$  per cui si verifica l'interazione:

$$\varphi_{int} = \arccos \left( \frac{\cos \alpha}{1 - \frac{\pi^2}{\lambda^2}} \right) \quad (1.24)$$

L'interazione tra instabilità euleriana e snap-through comporta un valore del carico critico minore rispetto ai carichi critici ottenuti da analisi condotte separatamente sui due fenomeni.

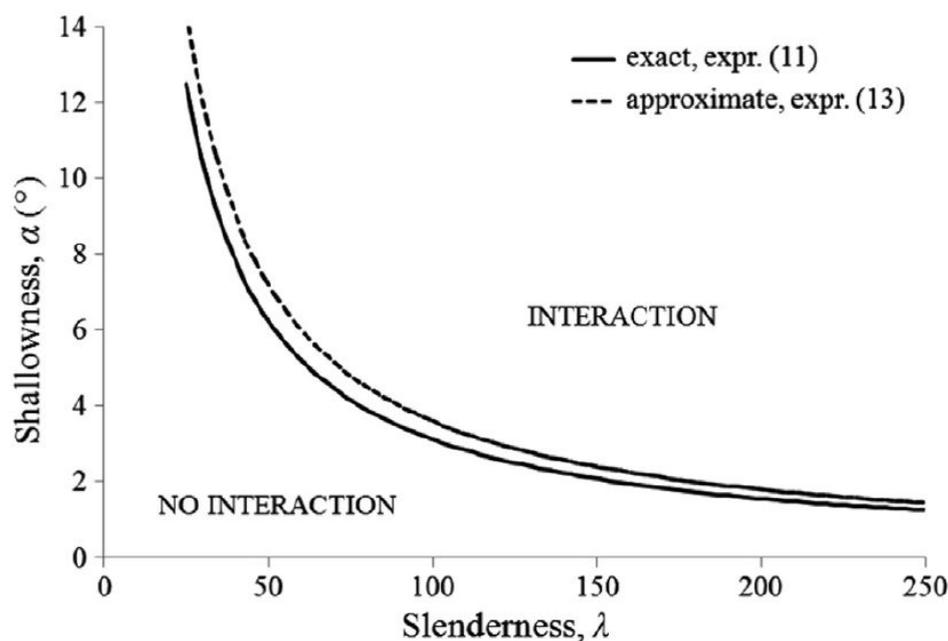


Figura 1.20: Curva d'interazione [13]

### 1.3.5 Effetto delle imperfezioni sull'interazione

Nelle analisi svolte finora si sono considerati solo sistemi perfetti, ma le strutture reali presentano inevitabilmente delle imperfezioni dovute alla geometria oppure connesse ad eccentricità di carico che fanno sì che si generano dei percorsi diramati nelle vicinanze del ramo post-critico.

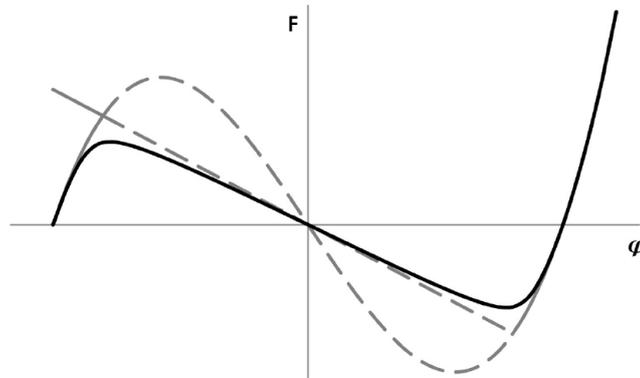
Considerando l'arco di Von Mises, l'imperfezione viene introdotta applicando una curvatura iniziale ad ogni asta. Per la rappresentazione di una configurazione imperfetta solitamente viene utilizzata una funzione sinusoidale. Questa configurazione è proporzionale al primo modo d'instabilizzarsi Euleriano.



Figura 1.21: Possibili configurazioni imperfette dell'arco di Von Mises [12]

In studi svolti precedentemente [13] si è dimostrato che il percorso di equilibrio per una struttura reale si discosta da quello ideale e la biforcazione degenera in un punto limite, questo è possibile vederlo effettuando un'analisi a spostamento controllato di snap-through. Il punto limite è il carico critico reale del sistema, il quale assume sempre un valore minore rispetto al carico critico relativo alla sola interazione.

Quindi il reale percorso di equilibrio risulta traslato verso il basso rispetto al ramo d'instabilità elastica.



**Figura 1.22:** Percorso di equilibrio di un sistema reale vs. percorso di snap-through (linea grigia) e il percorso elastico di buckling (linea tratteggiata) di un sistema perfetto [12]

# Capitolo 2

## Modelli numerici

### 2.1 Descrizione del modello

Le analisi esposte nel capitolo precedente sono state validate attraverso modelli numerici utilizzando un software ad elementi finiti FEM, Lusas 15.1. Il modello utilizzato, nelle analisi numeriche, consiste nell'arco di Von Mises, costituito da due aste incernierate al vertice. Sfruttando la simmetria geometrica, si è scelto di modellare solo metà struttura. La simmetria è stata rispettata inserendo come vincolo al colmo del semiarco un carrello che permette la traslazione verticale (Figura 2.1). Le simulazioni numeriche sono state condotte in controllo di spostamento applicando uno spostamento verticale incrementale in corrispondenza di tale vincolo.

L'asta è costituita da una barra di materiale isotropo e ha sezione rettangolare 40x10 mm, le cui proprietà vengono riportate nella Tabella 2.1. Si è scelta tale sezione per escludere il verificarsi di possibili instabilità fuori dal piano in cui è posizionata l'asta.

La mesh è stata definita in modo tale da avere un passo delle suddivisioni dell'elemento di 1 cm.

#### 2.1.1 Elemento BTS3

L'elemento utilizzato nella modellazione è un elemento trave geometricamente non lineare, BTS3. Questo elemento fa riferimento alla teoria della trave di Timoshenko in quanto sono incluse le deformazioni a taglio.

E' un elemento tridimensionale che ha due nodi all'estremità ed un terzo nodo che serve per definire il piano locale x-y nel quale è contenuto ed, è formulato in modo

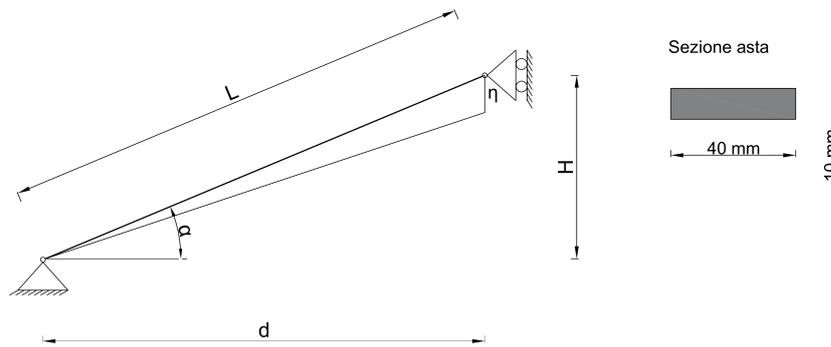


Figura 2.1

Tabella 2.1: Caratteristiche della sezione dell'asta

Area [ $m^2$ ]	$A = bh$	0.0004
Inerzia [ $m^4$ ]	$I = bh^3/12$	3.3334e-09
Modulo di Young [ $GPa$ ]	$E$	64
Coefficiente di Poisson	$\nu$	0,34
Densità [ $kg/m^3$ ]	$\rho$	2700

semplice utilizzando funzioni di forma lineari e gradi di libertà standard, si hanno 6 gradi di libertà per ogni nodo: 3 spostamenti  $u$ ,  $v$ ,  $w$  e 3 rotazioni  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  e  $\theta_z$ . Le variazioni degli spostamenti e delle rotazioni sono lineari lungo l'elemento mentre le forze interne e i momenti sono costanti [14] [15].

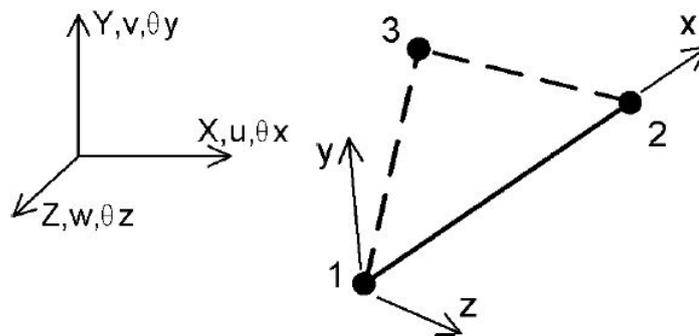


Figura 2.2: Elemento BTS3

### 2.1.2 Analisi geometricamente non lineare, GNIA

L'instabilità per snap-through è un fenomeno che contempla non linearità geometriche e quindi occorre introdurre nel modello sia gli effetti dei grandi spostamenti che l'effetto dello stato di sollecitazione, perciò è necessario eseguire un'analisi geometricamente non lineare (GNIA, Geometric Non Linear Instability Analysis).

Un'analisi lineare, al contrario, si basa sull'ipotesi di piccoli spostamenti e il calcolo delle sollecitazioni avviene sulla geometria della configurazione indeformata.

Nel caso in esame non è possibile trascurare gli spostamenti della struttura; inoltre attraverso un'analisi FEM non lineare è possibile considerare l'incremento o la riduzione di rigidità dovuta allo stato di sollecitazione [16]. Attraverso l'ausilio del software Lusas è stata sviluppata un'analisi non lineare iterativa, dove ad ogni incremento del parametro di controllo viene verificata la convergenza. La procedura iterativa di equilibrio è nota come Metodo di Newton-Raphson.

La formulazione utilizzata per la risoluzione del problema è una formulazione *Co-Rotational*, che permette il calcolo delle tensioni e deformazioni in un sistema di riferimento locale che segue le rotazioni della struttura.

## 2.2 Imperfezioni

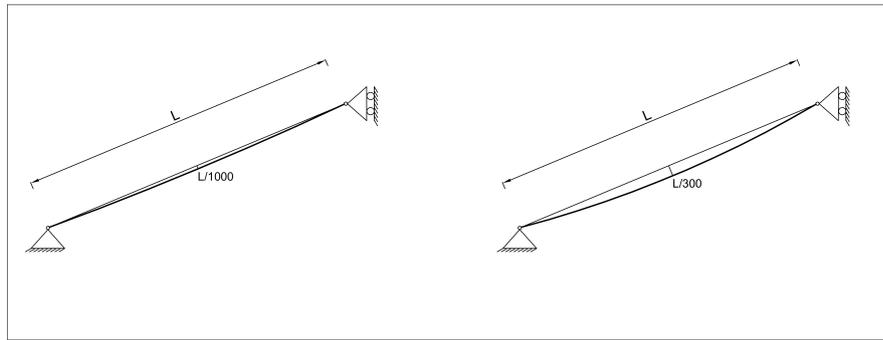
Le strutture reali sono sede inevitabile di imperfezioni, per questo motivo è necessario valutare l'influenza che queste hanno sui carichi che la struttura può sopportare. In letteratura esistono diversi approcci teorici per tenerne in conto, ad esempio i metodi perturbativi [1].

Nelle analisi effettuate sono state seguite le indicazioni fornite dalla Normativa italiana per le strutture in acciaio, la quale suggerisce di considerare le imperfezioni delle strutture reali applicando uno scostamento in mezziera della linea d'asse della trave [17].

Le imperfezioni sono state introdotte nel modello FEM considerando una deformata proporzionale al primo modo di buckling. Quindi, si sono adottati due differenti schemi di imperfezioni Fig.2.3 [13], considerando:

1. deformata con eccentricità massima in mezziera dell'asta pari a  $L/1000$ ;
2. deformata con eccentricità massima in mezziera dell'asta pari a  $L/300$ ;

Successivamente è stata eseguita l'analisi non lineare in controllo di spostamento su queste configurazioni deformate. L'instabilità per questi sistemi avviene non più per biforcazione ma al punto limite.



**Figura 2.3:** Schemi di imperfezioni:  $e=L/1000$  ed  $e=L/300$

## 2.3 Risultati

Le analisi sono state eseguite su differenti configurazioni strutturali al variare dei parametri che influenzano il comportamento strutturale: snellezza e grado di ribassamento.

L'intervallo di snellezze  $\lambda$  adottato va da 20 a 200 mentre il grado di ribassamento  $h/d$  varia tra 0,02 a 0,30.

L'output delle analisi sono i percorsi di equilibrio, ossia le curve carico  $F_y$  - spostamento  $\eta$ . Inoltre noto il carico massimo sia della configurazione strutturale senza imperfezioni che della medesima struttura in presenza di imperfezioni è stato possibile, interpolando i risultati, ricostruire dei domini utili a predire la riduzione di carico per qualsiasi sistema.

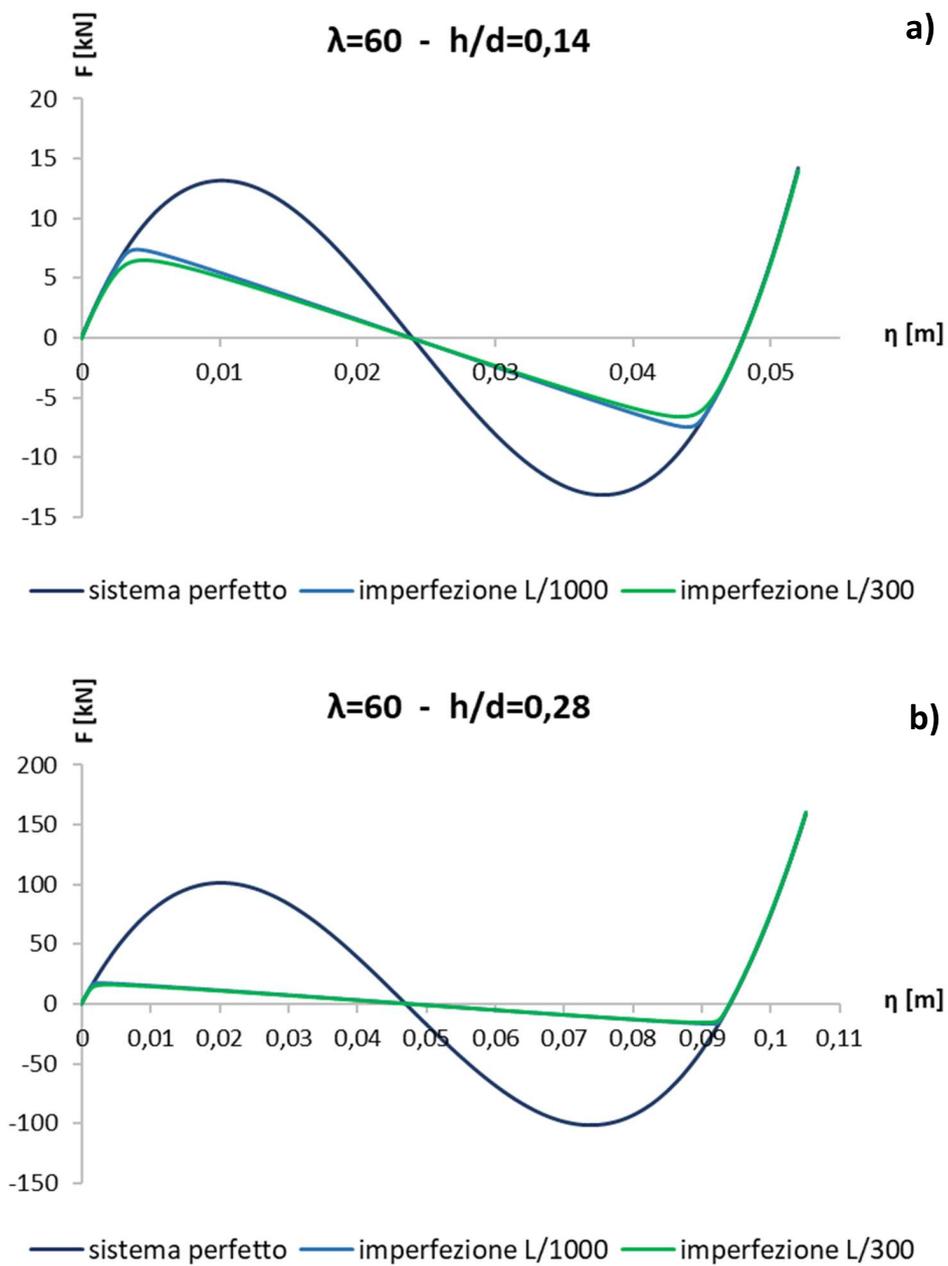
### 2.3.1 Percorsi d'equilibrio $F$ - $\eta$

La figura 2.4 riporta i percorsi di equilibrio di due differenti configurazioni strutturali aventi snellezza 60. Essendo entrambi i sistemi interessati dal fenomeno dell'interazione tra instabilità euleriana e snap-through, si ha che le imperfezioni vanno a ridurre sensibilmente il valore del carico critico. La riduzione è tanto maggiore quanto più la struttura è rialzata come è possibile notare dai grafici 2.4 a) e b).

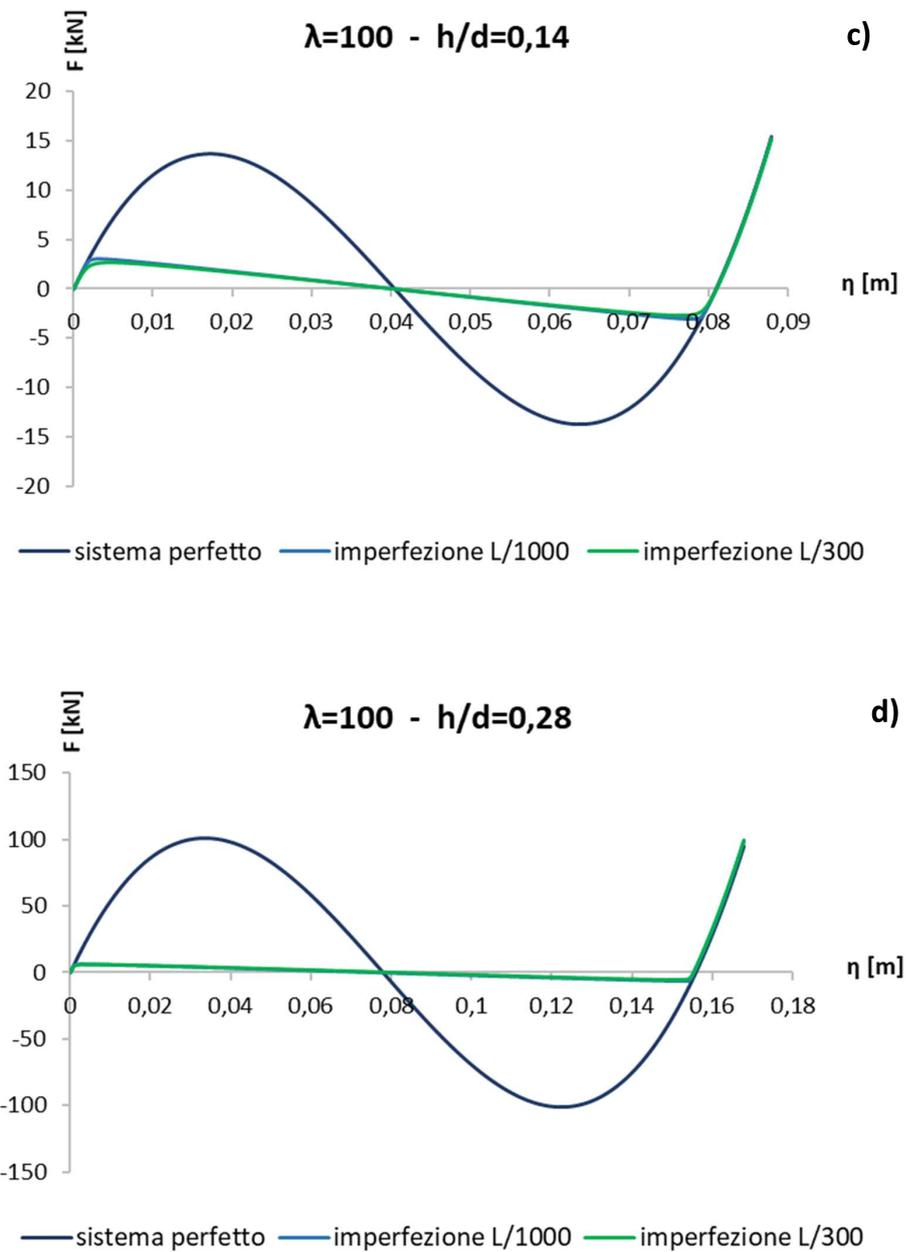
E' interessante notare come raddoppiando il grado di ribassamento  $h/d$  si ha che il carico massimo aumenta di un ordine di grandezza.

Procedendo con l'aumentare della snellezza il comportamento rimane invariato. In Figura 2.5 e in Figura 2.6 sono riportati i percorsi d'equilibrio rispettivamente di configurazioni strutturali aventi snellezza 100 e 200.

Si nota come per snellezze elevate la riduzione del carico è indipendente dall'entità dell'imperfezione.



**Figura 2.4:** Percorsi d'equilibrio di due sistemi aventi  $\lambda=60$



**Figura 2.5:** Percorsi d'equilibrio di due sistemi aventi  $\lambda=100$

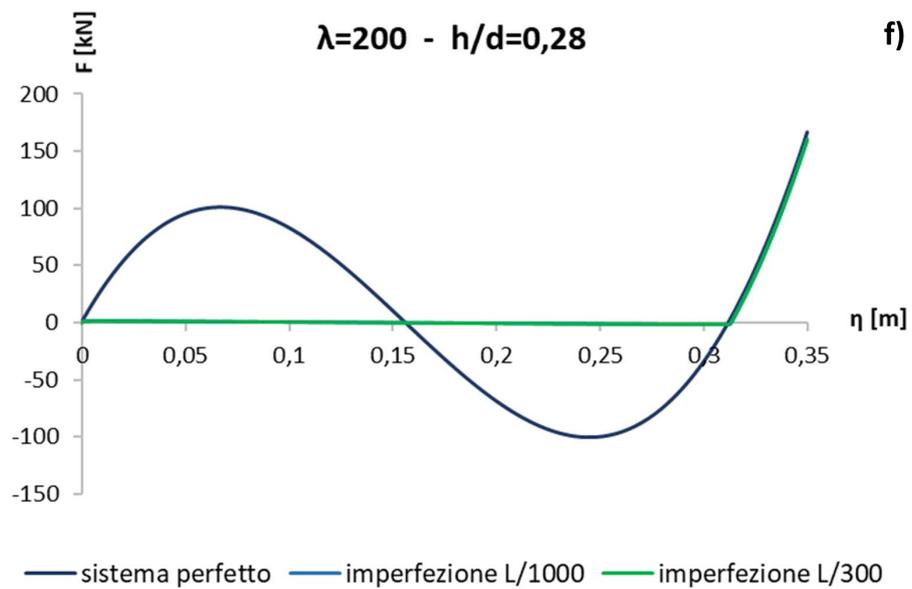
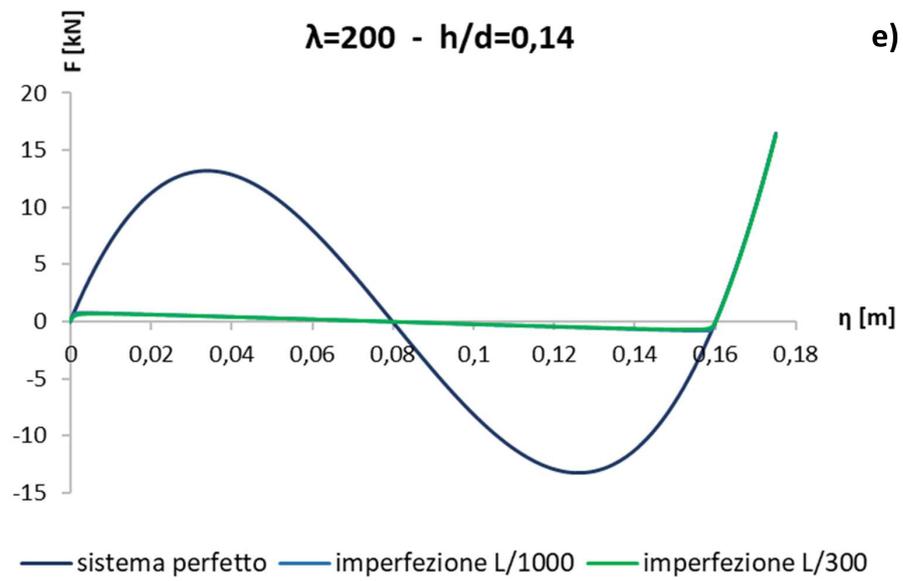


Figura 2.6

### 2.3.2 Riduzioni di carico

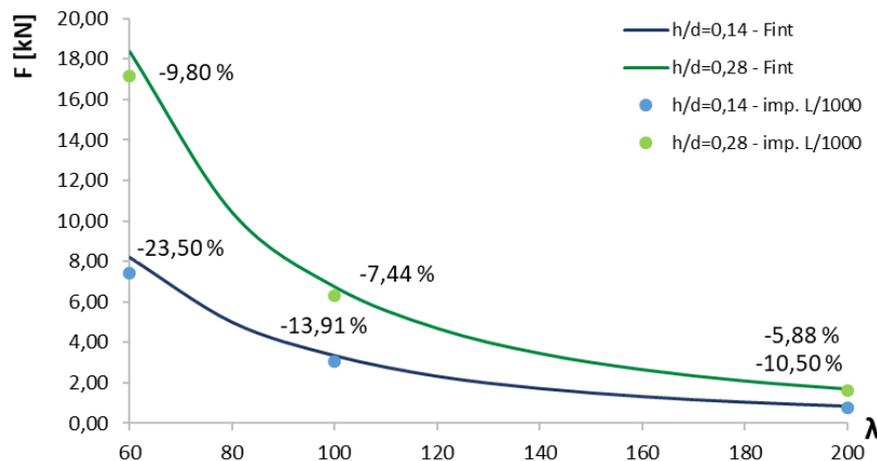
Il fenomeno dell'interazione, come già visto nel paragrafo precedente, comporta una riduzione drastica del carico, e così ad una valutazione errata del carico massimo consentito se le analisi d'instabilità vengono condotte separatamente senza tenere in conto la mutua interazione.

Un'ulteriore riduzione del carico è data dalla presenza delle imperfezioni, queste ultime fanno sì che i percorsi di equilibrio si discostano da quello ideale.

I valori delle forze massime dei sistemi analizzati sono stati riportati nella Tabella 2.2. Successivamente è stata calcolata la variazione tra i carichi dei sistemi imperfetti rispetto al carico d'instabilità di snap-through del sistema ideale. Questa variazione aumenta al crescere dei parametri: snellezza e grado di ribassamento.

Inoltre, maggiore è l'ampiezza dell'imperfezione, ossia la curvatura iniziale dell'asta, più grande sarà la riduzione del carico ma il rapporto tra questi non è lineare.

Considerando due valori di ribassamento, 0,14 e 0,28, si è riportato nel grafico 2.7 l'andamento del carico d'interazione per un intervallo di snellezze che va da 60 a 200. Per le sei configurazioni strutturali, delle quali si sono riportati i percorsi d'equilibrio, si è valutata la riduzione del carico con imperfezione  $L/1000$  rispetto al carico euleriano. Dal grafico 2.7 si evidenzia come al raddoppiare del grado di ribassamento, la riduzione del carico reale rispetto all'effettivo meccanismo di collasso (instabilità euleriana) viene dimezzata.



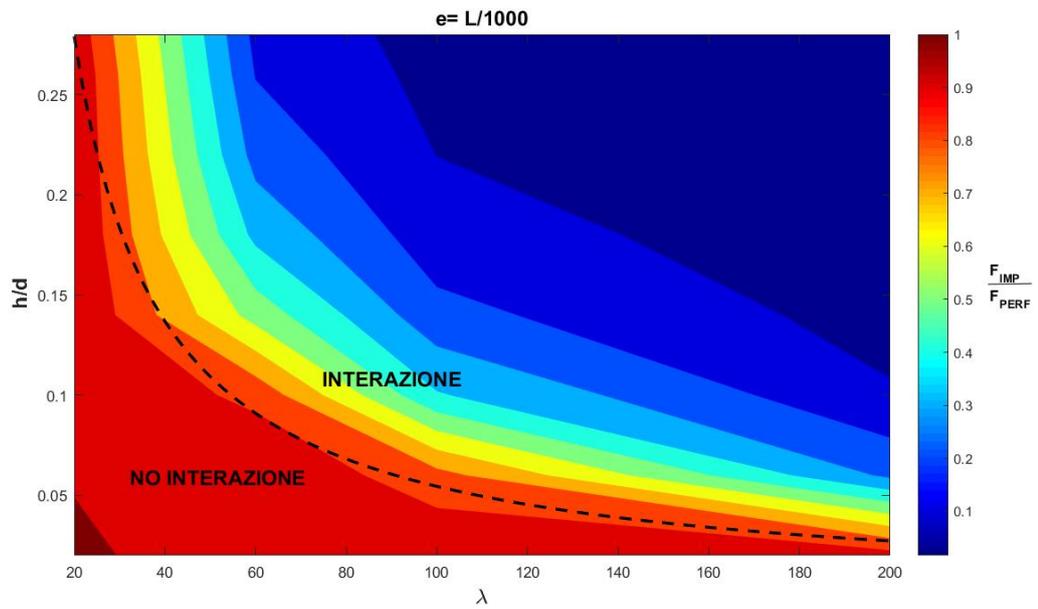
**Figura 2.7:** Andamento del carico d'interazione e riduzione del valore di carico del sistema imperfetto rispetto al carico critico euleriano  $F_{EB}$

Tabella 2.2: Valori di carico per differenti sistemi

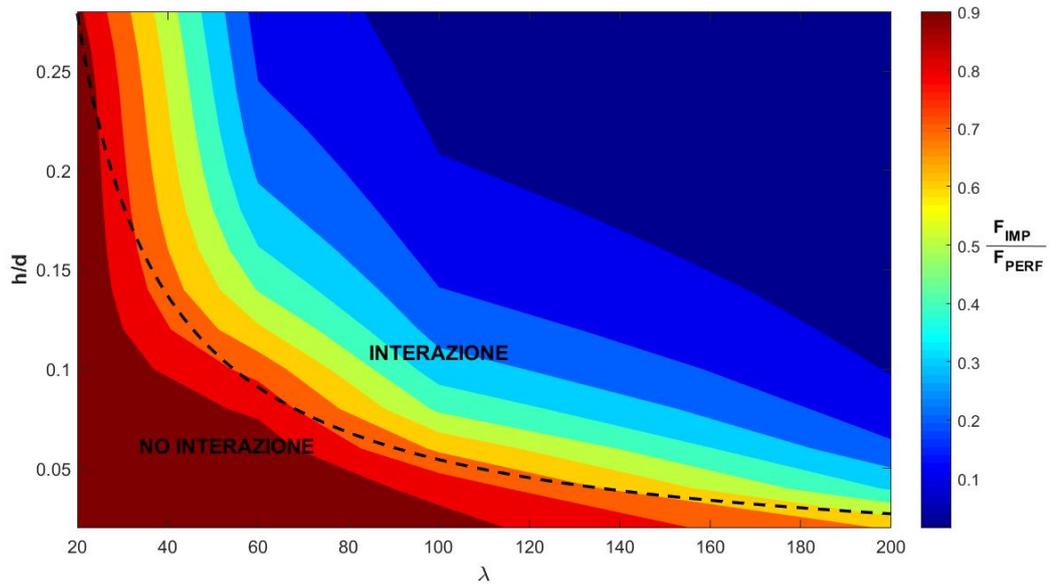
		<b>F</b> [kN]	<b>Variazione</b> [%]
<b><math>\lambda=60</math></b> <b><math>h/d=0,14</math></b>	Sistema Perfetto	13,26	-
	Carico d'interazione	8,25	
	Imperfezione L/1000	7,42	-43,48
	Imperfezione L/300	6,55	-50,12
<b><math>\lambda=60</math></b> <b><math>h/d=0,28</math></b>	Sistema Perfetto	100,26	-
	Carico d'interazione	18,25	
	Imperfezione L/1000	17,15	-83,14
	Imperfezione L/300	15,87	-84,39
<b><math>\lambda=100</math></b> <b><math>h/d=0,14</math></b>	Sistema Perfetto	13,26	-
	Carico d'interazione	3,32	
	Imperfezione L/1000	3,05	-77,76
	Imperfezione L/300	2,69	-80,41
<b><math>\lambda=100</math></b> <b><math>h/d=0,28</math></b>	Sistema Perfetto	100,26	-
	Carico d'interazione	6,73	
	Imperfezione L/1000	6,32	-93,73
	Imperfezione L/300	5,85	-94,20
<b><math>\lambda=200</math></b> <b><math>h/d=0,14</math></b>	Sistema Perfetto	13,26	-
	Carico d'interazione	0,86	
	Imperfezione L/1000	0,78	-94,08
	Imperfezione L/300	0,69	-94,79
<b><math>\lambda=200</math></b> <b><math>h/d=0,28</math></b>	Sistema Perfetto	100,26	-
	Carico d'interazione	1,70	
	Imperfezione L/1000	1,61	-98,41
	Imperfezione L/300	1,49	-98,52

I risultati delle analisi, effettuate mediante l'ausilio del software ad elementi finiti Lusas 15.1, sono stati rappresentati mediante dei contour plot per una visualizzazione efficace dei dati. Si è riportato il rapporto tra  $F_{imp}/F_{perf}$  considerando le due ampiezze d'imperfezione.

Per i sistemi situati lungo la curva d'interazione, nel caso d'imperfezione L/1000 (Figura 2.8) si ha che il carico reale è circa l'80 % di quello corrispondente al sistema perfetto mentre per valori di imperfezioni pari a L/300 si ha una riduzione del carico maggiore ossia di circa il 30 %.



**Figura 2.8:** Riduzioni di carico per sistemi con imperfezione  $e=L/1000$  rispetto ai sistemi perfetti

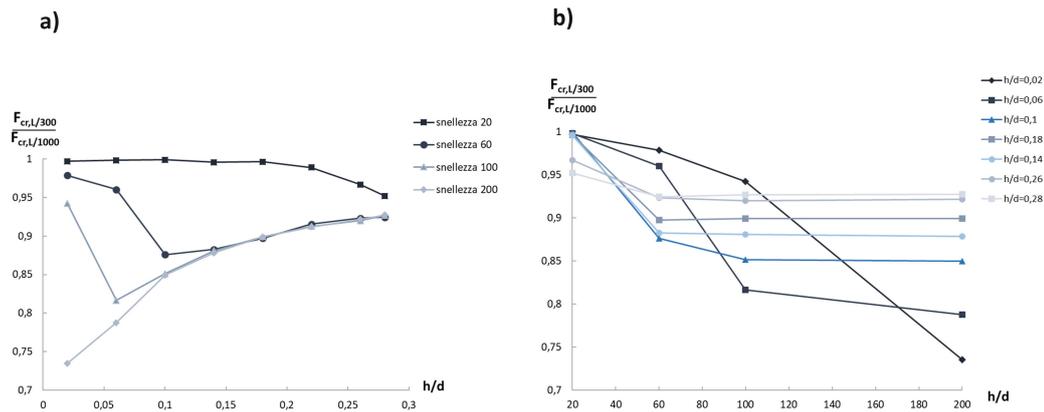


**Figura 2.9:** Riduzioni di carico per sistemi con imperfezione  $e=L/300$  rispetto ai sistemi perfetti

Nel grafico 2.10 è stato riportato l'andamento del rapporto tra i carichi con imperfezione  $L/300$  e quelli derivanti da sistemi con imperfezione  $L/1000$ . E' interessante notare che per sistemi soggetti ad interazione si ha il medesimo comportamento indipendentemente dalla snellezza. Per tali sistemi il rapporto tra i due carichi è

circa 0,9, questo significa che non è tanto l'entità dell'imperfezione ad influire sulla riduzione del carico quanto la loro presenza.

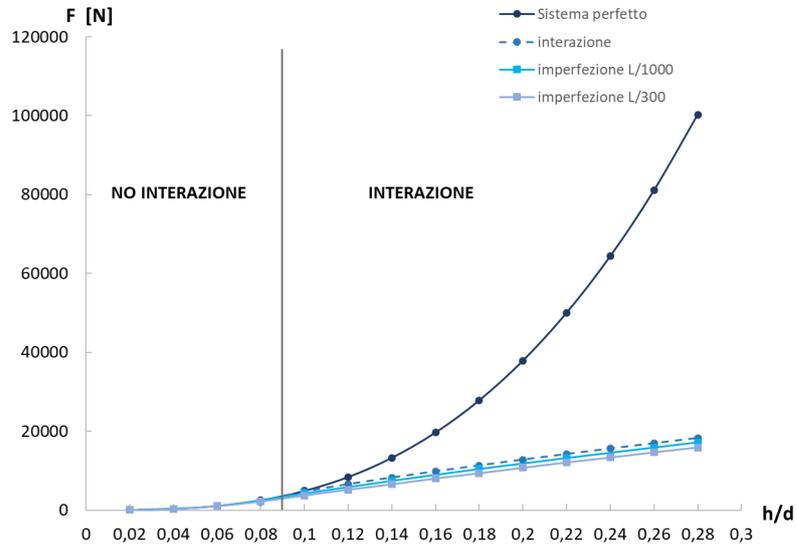
L'ampiezza dell'imperfezione è del tutto irrilevante se non è presente l'interazione tra le due instabilità.



**Figura 2.10:** a) Rapporto tra i carichi critici di sistemi con imperfezioni al variare di  $h/d$ ; b) Rapporto tra i carichi critici di sistemi con imperfezioni al variare di  $\lambda$

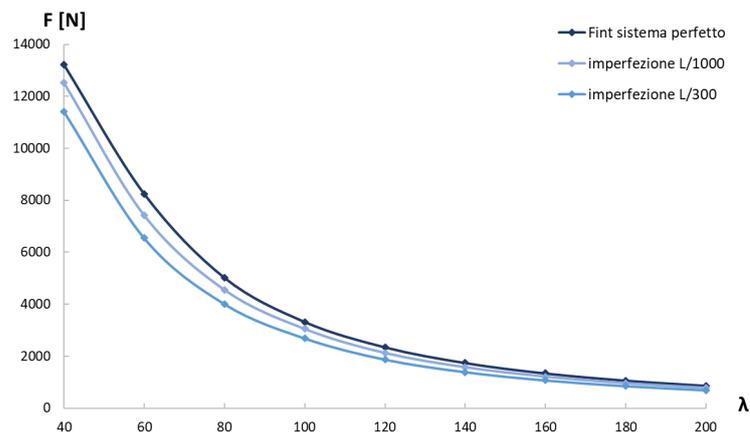
### 2.3.3 Influenza dei parametri $h/d$ e $\lambda$

Fissando un valore di snellezza pari a 60 sono stati calcolati i valori delle forze massime, a cui è soggetto il sistema, al variare del ribassamento della struttura. Nota la snellezza  $\lambda$ , dall'equazione (1.23) si è valutato il grado di ribassamento minimo per cui si ha interazione; e si è visto che per valori maggiori, come si evidenzia dal grafico 2.11, si ha una variazione lineare del carico. Inoltre viene rimarcato il concetto che l'ampiezza dell'imperfezione è ininfluyente sulla riduzione del carico per snellezze considerevoli.



**Figura 2.11:** Carichi di sistemi aventi snellezza 60 all'aumentare del grado di ribassamento

Al contrario, se si considera un valore fisso di  $h/d$ , ad esempio 0,14, si ha che il carico non varia linearmente con la snellezza.



**Figura 2.12:** Andamento dei carichi al variare della snellezza per un sistema avente  $h/d=0,14$

## 2.4 Osservazioni

Le analisi numeriche hanno validato il problema dell'interazione evidenziando che la transizione dal comportamento instabile per snap-through puro a quello in cui il percorso d'equilibrio principale interseca un ramo di equilibrio secondario è governata dai parametri strutturali quali snellezza delle aste e grado di ribassamento dell'arco. Da queste analisi è possibile dedurre alcuni risultati interessanti:

- Le aste reali presentano delle imperfezioni che influenzano la risposta strutturale poichè causano una riduzione del carico critico;
- Per quanto riguarda i vincoli, come è stato dimostrato in studi precedenti [18], hanno un'incidenza sul verificarsi o meno dell'instabilità per snap-through poichè se aumenta la rigidità dei vincoli si è notato, dai percorsi d'equilibrio, che lo snap-through tende a non manifestarsi;
- L'interazione tra l'instabilità euleriana e lo snap-through gestisce il comportamento instabile della struttura portando ad una riduzione del carico critico.

# Capitolo 3

## Aspetti energetici e dinamici

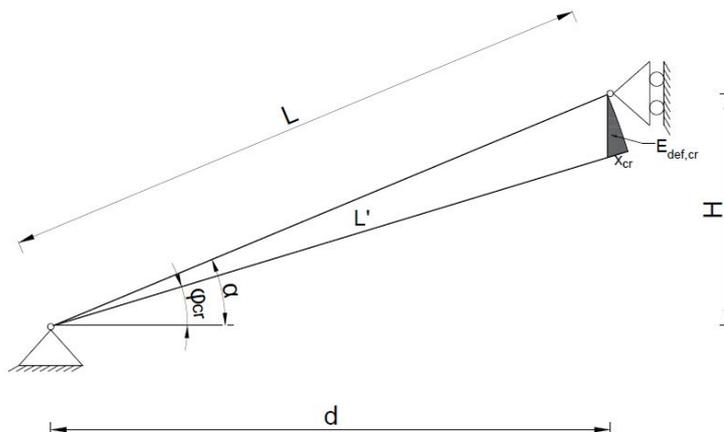
### 3.1 Introduzione

Una delle caratteristiche che contraddistingue le strutture leggere è la capacità di poter assorbire una grande quantità di energia di deformazione membranale, questo perchè la rigidità membranale è più elevata di diversi ordini di grandezza rispetto a quella flessionale [19]. La deformabilità membranale è, invece, non trascurabile per le strutture ribassate a guscio e ad arco, in quanto queste sono soggette ad instabilità per snap-through. Per tale motivo, in questo capitolo, viene definito un parametro critico in termini di energia di deformazione. Successivamente viene analizzato il comportamento della struttura da un punto di vista dinamico sia nella fase pre-critica che nella fase post-buckling.

### 3.2 Analisi d'instabilità: Energia di deformazione critica

Lo scopo dell'analisi è quello di ricercare un'energia di deformazione critica associata all'instabilità per snap-through ossia l'energia potenziale del sistema necessaria per assumere una nuova configurazione di equilibrio.

La struttura analizzata da questo punto di vista è l'arco di Von Mises; si è scelto di studiarne metà struttura per ragioni di simmetria (Fig. 3.1). Il lavoro di deformazione della struttura può essere valutato utilizzando il teorema di Clapeyron [20], il quale è fondato sull'ipotesi che il processo di deformazione a cui è sottoposta una struttura è puramente meccanico ossia tutto il lavoro delle forze esterne viene trasformato in energia di deformazione. Infatti alla base di questo bilancio di



**Figura 3.1:** Semiarco di Von Mises

energia vi è l'assunzione che le forze siano applicate "staticamente", in modo tale da escludere dissipazioni di energia provocati dagli effetti dinamici. Questa ipotesi nella fase pre-critica si può ritenere valida.

L'energia di deformazione critica è fornita dalla seguente relazione:

$$E_{def,cr} = \int_0^{x_{cr}} N dx = \int_0^{x_{cr}} k x dx = \frac{1}{2} k x_{cr}^2 \quad (3.1)$$

dove  $k$  è la rigidezza assiale dell'asta, in particolare  $k = \frac{EA}{l}$  e  $x_{cr}$  è l'accorciamento subito dall'asta durante il processo di deformazione:

$$x_{cr} = L - L' = \frac{d}{\cos \alpha} - \frac{d}{\cos \varphi_{cr}} \quad (3.2)$$

Sostituendo nell'eq. (3.1) si ottiene:

$$E_{def,cr} = \frac{1}{2} k x_{cr}^2 = \frac{1}{2} \frac{EA}{L} d^2 \left( \frac{1}{\cos \alpha} - \frac{1}{\cos \varphi_{cr}} \right)^2 \quad (3.3)$$

essendo  $d = L \cos \alpha$ , si ha:

$$E_{def,cr} = \frac{1}{2} EA L \cos^2 \alpha \left( \frac{1}{\cos \alpha} - \frac{1}{\cos \varphi_{cr}} \right)^2 \quad (3.4)$$

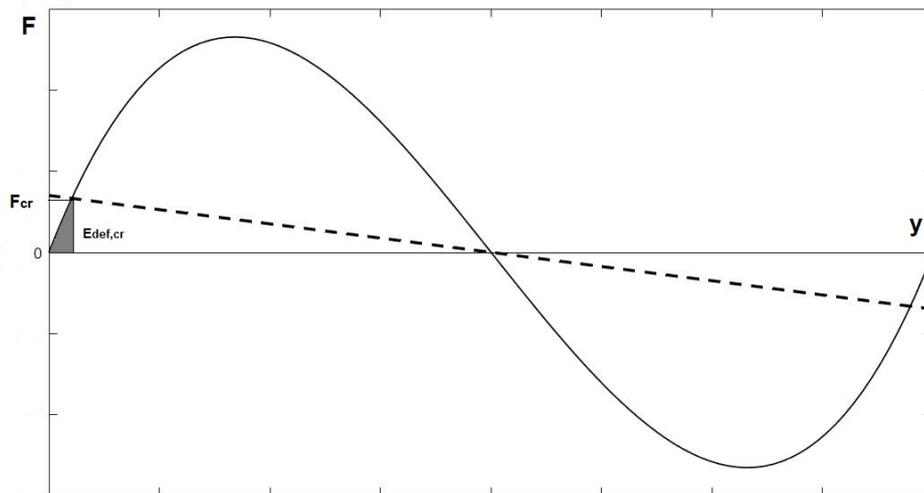
Inoltre per i sistemi soggetti all'interazione tra l'instabilità euleriana e lo snap-through, essendo noto il valore dell'angolo critico per cui il sistema scatta:

$$\varphi_{int} = \arccos \left( \frac{\cos \alpha}{1 - \frac{\pi^2}{\lambda^2}} \right) \quad (3.5)$$

Sostituendo la 3.5 all'interno dell'eq. (3.4) si ottiene:

$$\begin{aligned}
 E_{def,cr int} &= \frac{1}{2} EAL \cos^2 \alpha \left( \frac{1}{\cos \alpha} - \frac{1}{\cos \left( \arccos \left( \frac{\cos \alpha}{1 - \frac{\pi^2}{\lambda^2}} \right) \right)} \right)^2 = \\
 &= \frac{1}{2} EAL \cos^2 \alpha \left( \frac{1}{\cos \alpha} - \frac{1}{\frac{\cos \alpha}{1 - \frac{\pi^2}{\lambda^2}}} \right)^2 = \\
 &= \frac{1}{2} EA L \frac{\pi^4}{\lambda^4}
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

La 3.6 mostra come, in presenza d'interazione, l'energia di deformazione critica dipende non dal grado di ribassamento della struttura  $h/d$  bensì dalla snellezza  $\lambda$ . Tale energia è stata poi confrontata con il lavoro compiuto dal sistema fino allo scatto, rappresentato in (Fig. 3.2) dall'area sottesa alla curva carico-spostamento  $F$ - $y$ , fino al punto d'intersezione con il percorso di equilibrio elastico secondario. L'integrale della funzione è stato valutato mediante le formule interpolatorie di Newton-Cotes, in particolare con il metodo dei trapezi.



**Figura 3.2:** Lavoro eseguito dal sistema fino al carico critico

### 3.2.1 Fenomeno dell'interazione

La struttura analizzata è il semiarco di Von Mises realizzato da una barra di alluminio, con modulo di Young  $E=64$  GPa, e sezione rettangolare,  $40 \times 10$  mm. I parametri utilizzati nei calcoli sono stati riassunti nella Tabella 3.1.

Si è valutato il valore dell'energia di deformazione critica al variare della snellezza

per sistemi interessati dal fenomeno dell'interazione. I valori ottenuti dai calcoli sono stati riportati in Tabella 3.2.

**Tabella 3.1:** Parametri del sistema strutturale

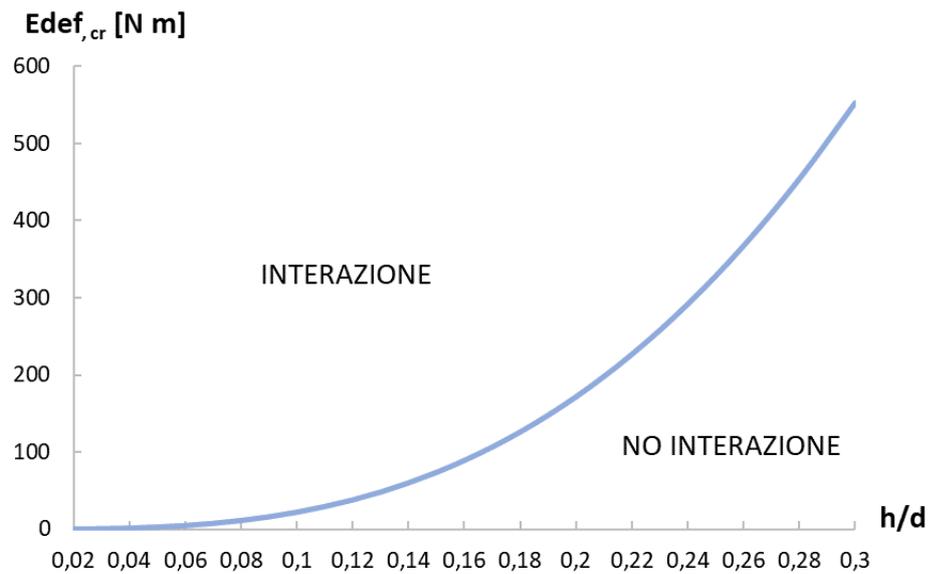
<b>Area</b> [ $m^2$ ]	$A = bh$	0.0004
<b>Inerzia</b> [ $m^4$ ]	$I = bh^3/12$	3.3334e-09
<b>Lunghezza</b> [ $m$ ]	$L = \sqrt{I\lambda^2/A}$	

**Tabella 3.2:** Valori critici per sistemi soggetti ad interazione

$\lambda$	$E_{\text{def,cr}}$ [N m]	Lavoro [N m]	Variazione [%]
20	449,9133	452,86	0,66
40	56,2392	56,3476	0,19
60	16,6635	16,6784	0,09
80	7,0299	7,0335	0,05
100	3,5993	3,6005	0,03
120	2,0829	2,0834	0,02
140	1,3117	1,3119	0,01
160	0,8787	0,8788	0,01
180	0,6172	0,6172	0,01
200	0,4499	0,4500	0,02

Dal confronto tra l'energia ottenuta attraverso l'eq.(3.6) e il lavoro eseguito fino al carico critico si è osservato una variazione massima tra i due valori di circa lo 0,6% come riportato in Tabella 3.2.

Inoltre valutando l'energia di deformazione per i sistemi che ricadono lungo la curva d'interazione si è definito un dominio d'interazione in termini di energia di deformazione critica.



**Figura 3.3:** Dominio d'interazione: Energia di deformazione critica

### 3.2.2 Effetto della snellezza e del grado di ribassamento

Al fine di valutare l'effetto dei parametri snellezza e grado di ribassamento è stata implementata l'equazione (3.4) per diversi sistemi, aventi sempre sezione rettangolare 40x10 mm come riportato nella Tabella 3.3.

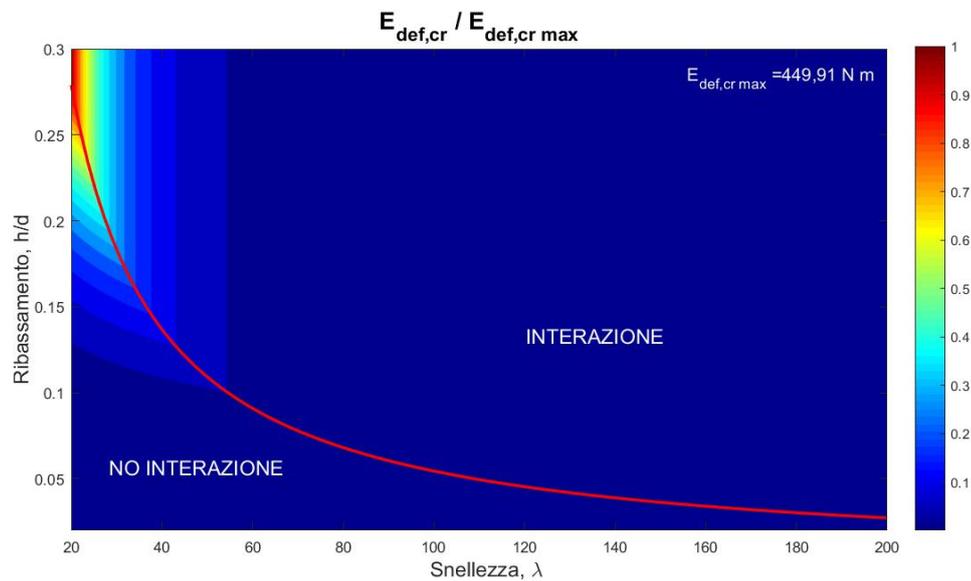
**Tabella 3.3:** Parametri delle differenti configurazioni strutturali

<b>Snellezza</b>	$\lambda$	20 – 200
<b>Grado di Ribassamento</b>	$h/d = \tan \alpha$	0,02 – 0,30
<b>Lunghezza [m]</b>	$L = \sqrt{I\lambda^2/A}$	0,058 – 0,577

I risultati ottenuti sono stati riportati nel piano snellezza versus grado di ribassamento  $h/d$ , in modo tale da poter evidenziare la presenza del fenomeno d'interazione. I valori dell'energia di deformazione critica sono stati adimensionalizzati rispetto al valore massimo ottenuto, come è possibile vedere in Figura 3.4. L'energia di deformazione critica massima è relativa ad un sistema che ha snellezza  $\lambda=20$  e ribassamento  $h/d=0,3$  e il valore è di circa 500 N m.

E' possibile notare come, nel caso in cui ci sia interazione, per un fissato valore di  $\lambda$ , l'energia di deformazione critica è indipendente dal valore del grado di ribassamento

$h/d$ . Infatti, nella regione d'interazione la variazione di  $E_{def,cr}$  è a bande verticali. Il grafico mette in evidenza che i sistemi con snellezza elevata hanno un'energia di deformazione esigua confermando quanto ritrovato nel Capitolo 2 ossia che all'aumentare della snellezza si ha una riduzione del carico limite di snap-through.



**Figura 3.4:** Dominio d'interazione energetico di un semiarco costituito da un'asta in alluminio 40x10 mm

L'andamento dell'energia, al variare dei parametri considerati, può essere visualizzato attraverso una superficie in una rappresentazione tridimensionale come riportato in Figura 3.5.

Inoltre si è esaminato il comportamento strutturale per un set di valori del grado di ribassamento per valutare l'incidenza di tale parametro, il cui andamento è stato riportato nel grafico 3.6. Si nota che l'energia aumenta fin quando non si raggiunge la snellezza, relativa ad un determinato grado di ribassamento, che è interessata dal fenomeno d'interazione, dopodichè l'energia inizia a decrescere e le curve dopo il picco mostrano il medesimo andamento. Questo a prova del fatto che il grado di ribassamento non ha influenza sull'energia di deformazione della struttura se il sistema è soggetto ad interazione.

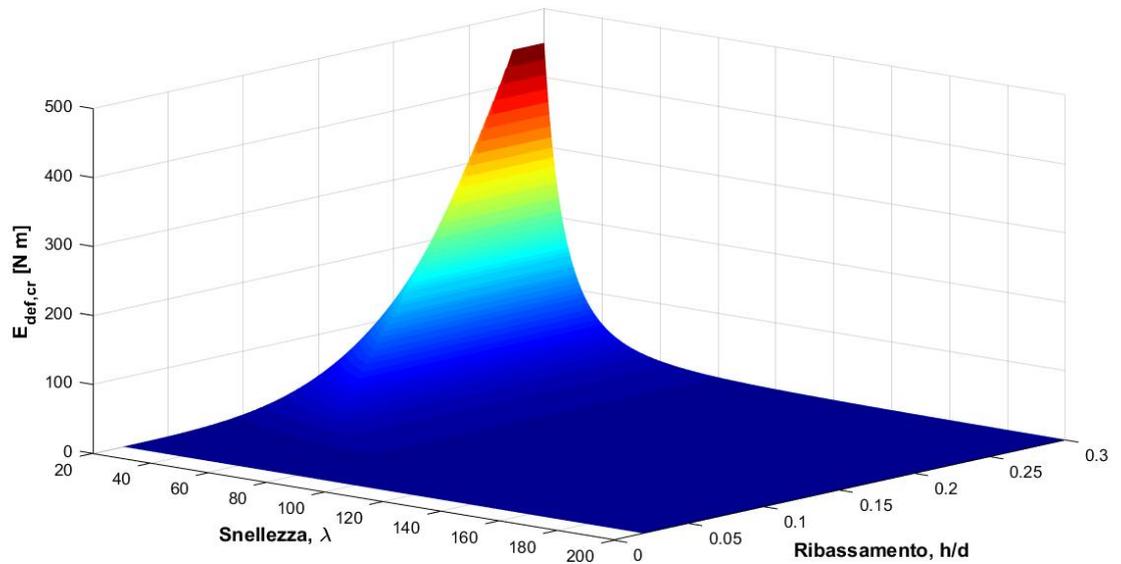


Figura 3.5: Dominio 3D dell'energia di deformazione critica

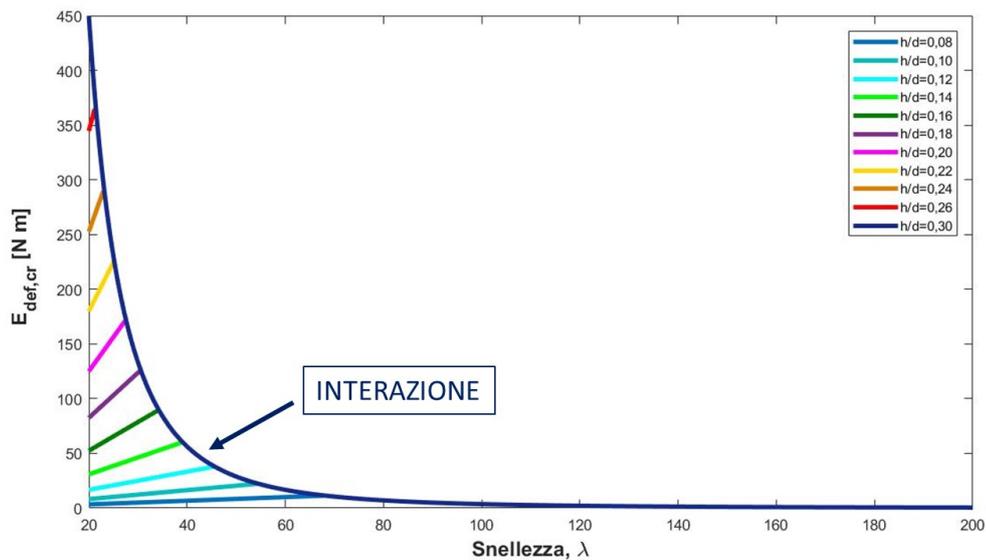


Figura 3.6: Andamento dell'energia critica di deformazione al variare della snellezza per sistemi con differenti ribassamenti

### 3.3 Analisi dinamica pre-critica

Il collasso di una struttura è un processo dinamico, per tale ragione è sicuramente più realistico studiare la stabilità di una struttura in termini dinamici. Si è utilizzato il principio di d'Alembert, secondo il quale la condizione di moto in ogni istante

temporale può essere considerata come uno stato di equilibrio meccanico come proposto da Bazant in [21].

L'equazione del moto di una colonna può essere ottenuta dall'equazione differenziale dell'equilibrio andando ad includere nel carico trasversale applicato la forza d'inerzia trasversale per unità di lunghezza dell'asta:

$$(EI w^{II})^{II} + (P w^I)^I = p \quad (3.7)$$

dove:

$$p = -\mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \beta \frac{\partial w}{\partial t} \quad (3.8)$$

w è l'inflessione,  $\mu$  è la massa per unità di lunghezza della colonna e  $\beta$  è un coefficiente di smorzamento.

Sostituendo l'eq. (3.8) nella (3.7) si ha:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( P \frac{\partial w}{\partial x} \right) = -\mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \beta \frac{\partial w}{\partial t} \quad (3.9)$$

in cui P è il carico assiale.

Ipotizzando, per semplicità, che il carico assiale P, la rigidezza flessionale EI, la densità lineare  $\mu$  e il coefficiente  $\beta$  siano costanti, si ottiene:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2b \frac{\partial w}{\partial t} \right) \quad (3.10)$$

Il coefficiente b è un parametro di smorzamento che vale  $b = \frac{\beta}{2\mu}$ .

L'equazione 3.10 può essere vista come l'equazione della linea elastica con effetti del secondo ordine in regime dinamico in cui sono presenti la forza di richiamo elastica, la forza viscosa e la forza d'inerzia.

L'equazione differenziale viene risolta attraverso il metodo di separazione delle variabili e sfruttando il principio di sovrapposizione degli effetti:

$$w(x, t) = Y(x) \cdot f(t) \quad (3.11)$$

La soluzione dipendente dallo spazio, essendo i coefficienti dell'eq.(3.10) costanti, può essere rappresentata come serie trigonometrica:

$$Y(x) = \sum \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (3.12)$$

Le condizioni al contorno per un'asta incernierata agli estremi corrispondono a momento e abbassamento nulli agli estremi:

$$w = 0 \quad w'' = 0 \quad \text{per} \quad x = 0 \quad \text{ed} \quad x = l$$

Queste vengono soddisfatte dall'eq. 3.12.

La soluzione temporale può essere assunta:

$$f_n(t) = A_n \cdot e^{\lambda_n t} \quad (3.13)$$

Considerando le soluzioni 3.12 e 3.13, l'equazione (3.10) diventa:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( EI \frac{n^2 \pi^2}{l^2} - P \right) \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \right] + \mu \lambda_n^2 + 2b \mu \lambda_n = 0 \quad (3.14)$$

Il carico critico euleriano per una colonna semplicemente appoggiata, come già discusso nel precedente capitolo, vale:

$$n^2 \frac{EI \pi^2}{l^2} = n^2 P_E = P_{cr,EBn} \quad (3.15)$$

Sostituendo:

$$(P_{cr} - P) \frac{n^2 \pi^2}{l^2} + \mu \lambda^2 + 2b \mu \lambda_n = 0 \quad (3.16)$$

Dividendo per la massa  $\mu$  si ottiene:

$$(1 - P) \frac{n^4 \pi^4 EI}{l^4 \mu} + \lambda^2 + 2b \lambda_n = 0 \quad (3.17)$$

Nel caso in esame si trascura lo smorzamento quindi si ha  $b=0$ .

Le soluzioni dell'eq. (3.17) sono:

$$\lambda_n = \pm i \omega_n \quad (3.18)$$

$$\omega_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}} \sqrt{1 - \frac{P}{P_{cr,EB}}} \quad (3.19)$$

### 3.3.1 Interazione tra Snap-Through e Buckling Euleriano

L'obiettivo è quello di studiare l'instabilità in termini dinamici tenendo conto del fenomeno dell'interazione tra il Buckling Euleriano EB e l'instabilità per Snap-Through ST; anche in questo caso l'interazione viene considerata accoppiando i due problemi: flessionale e membranale.

Il carico critico del sistema strutturale corrispondente al collasso per snap-through vale:

$$F_{ST} = EA \sin \varphi_{ST} \left( 1 - \frac{\cos \alpha}{\sin \varphi_{ST}} \right) \quad (3.20)$$

Lo sforzo assiale relativo a tale carico è:

$$P_{ST} = \frac{F_{ST}}{\sin \varphi_{ST}} \quad (3.21)$$

Considerando la variazione dello sforzo assiale che si ha nell'asta fino all'istante in cui il sistema si instabilizza si possono valutare le frequenze del sistema:

$$\omega_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}} \sqrt{1 - \frac{P_{ST}}{P_{cr,EB}}} \quad (3.22)$$

Lo studio delle frequenze proprie di una struttura è fondamentale sia per la progettazione di nuove strutture, al fine di evitare fenomeni di risonanza, e sia come strumento di monitoraggio per le strutture esistenti.

### 3.3.2 Analisi numerica

Fissando i parametri geometrici snellezza e grado di ribassamento, è possibile per un sistema strutturale tracciare l'andamento della frequenza all'incrementare dello sforzo assiale nell'asta.

Il comportamento globale delle varie configurazioni strutturali in termini di frequenze è possibile generalizzarlo adimensionalizzando i valori di frequenza e sforzo assiale rispetto ai corrispondenti valori massimi.

L'andamento di  $\omega$  per una qualsiasi configurazione strutturale è stato riportato nel grafico 3.7; inoltre diagrammando il quadrato delle frequenze si nota che queste variano linearmente con lo sforzo assiale. In realtà, studi sperimentali hanno dimo-

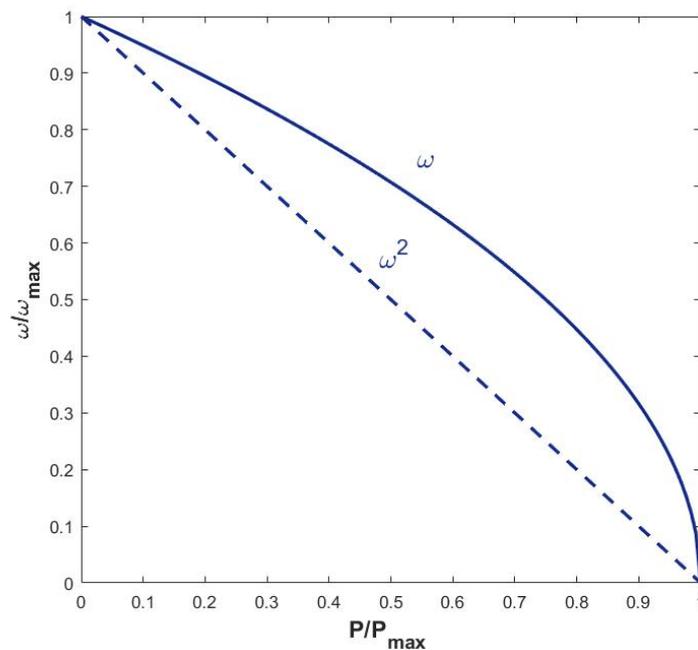
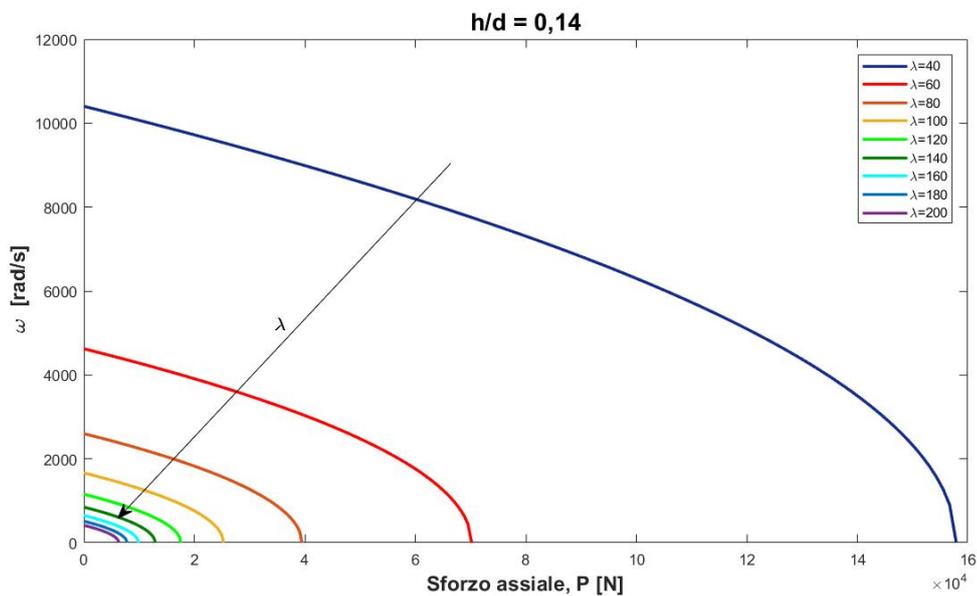


Figura 3.7

strato che l'andamento qualitativo della frequenza fondamentale mostra una diminuzione fino ad un minimo, dopodiché la frequenza naturale inizia ad aumentare notevolmente mostrando un irrigidimento (stiffening) [22].

### 3.3.3 Effetto della snellezza sulle frequenze

L'andamento delle frequenze è stato tracciato per un grado di ribassamento pari a 0,14 per un range di snellezze che va da 40 a 200. I sistemi che rientrano in questo intervallo sono interessati dall'interazione quindi al raggiungimento dello sforzo assiale euleriano nell'asta si ha un annullamento della frequenza.



**Figura 3.8:** Andamento frequenze del semiarco di Von Mises per  $\lambda$  variabile

Dal grafico 3.8 si nota come al crescere della snellezza si ha una riduzione drastica delle frequenze proprie della struttura. Quindi l'aumento della snellezza implica, oltre che una riduzione del carico di instabilità, anche un decremento delle frequenze dato dalla maggiore flessibilità della struttura.

### 3.3.4 Validazione FEM

Le frequenze ottenute attraverso l'analisi dinamica teorica sono state validate attraverso il software ad elementi finiti Lusas 15.1. La struttura è stata modellata prendendo in considerazione gli effetti del secondo ordine. Si è esaminato il comportamento della struttura fino al raggiungimento dello spostamento critico del colmo dell'arco, oltre il quale il sistema scatta in una configurazione deformata non adiacente. Quindi, si sono considerati dieci frames della struttura prima del collasso a partire dalla configurazione indeformata.

La struttura è costituita da un elemento trave BTS3, vincolata mediante cerniere e soggetta allo sforzo assiale  $P$  relativo alla configurazione deformata analizzata ad ogni step. Nell'ultimo step il vincolo al colmo è sostituito da un carrello in modo tale da ripristinare la condizione reale prima dello scatto e, anziché lo sforzo assiale nell'asta, si è applicata la forza al colmo dell'arco.

Le frequenze sono state ottenute eseguendo un'analisi modale in seguito ad un'analisi non lineare in controllo di forza utilizzando la formulazione co-rotational del risolutore.

I valori di frequenza restituiti dalle analisi FEM, condotte sulla configurazione avvenute grado di ribassamento pari a 0,14 e snellezza 100, sono stati riassunti nella Tabella 3.4. Le velocità di oscillazione  $\omega$  fornita dalla 3.22 è legata alla frequenza  $f$  dalla seguente relazione:

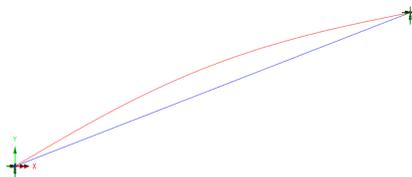
$$\omega = 2\pi f \quad (3.23)$$

**Tabella 3.4:** Analisi FEM

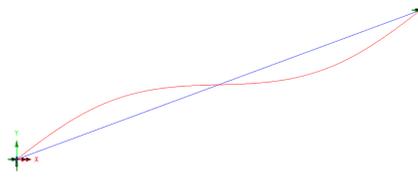
Step	$\eta$ [m]	$P$ [N]	Frequency $f$ Lusas [Hz]	$f_{teo}$ [Hz]
1	0,0000	0	264,174	264,922
2	0,0002	2876,17	248,730	249,388
3	0,0005	5735,12	232,522	232,923
4	0,0007	8576,85	214,860	215,312
5	0,0009	11401,37	195,908	196,248
6	0,0012	14208,69	175,040	175,258
7	0,0014	16998,82	151,466	151,542
8	0,0016	19771,78	123,649	123,540
9	0,0019	22527,56	87,638	87,220
10	0,0021	25266,19	0,000	0,000

L'analisi FEM ha restituito anche i modi di vibrare della struttura, i quali vengono riportati in figura 3.9.

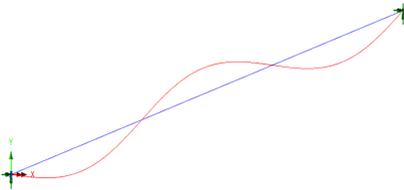
1° MODO



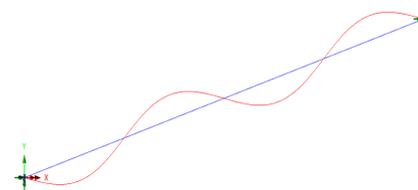
2° MODO



3° MODO

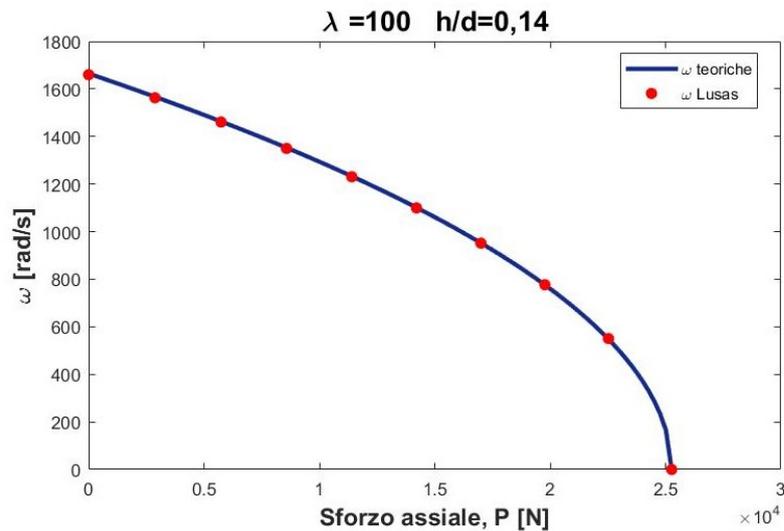


4° MODO



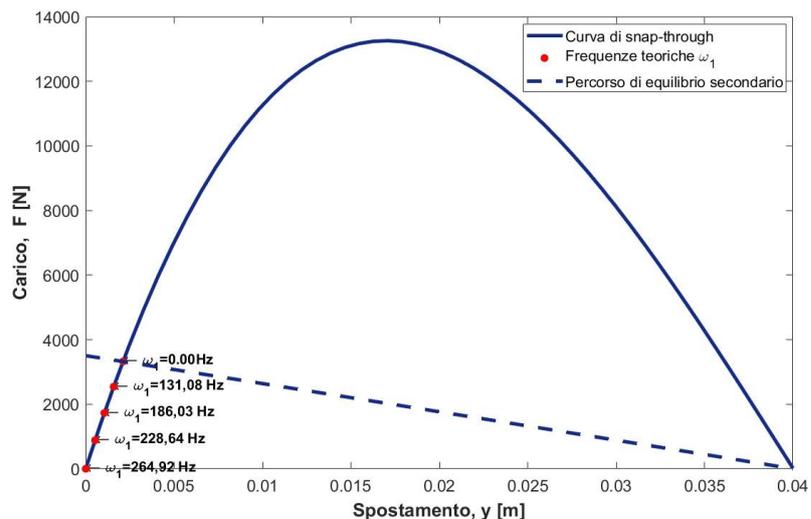
**Figura 3.9:** Deformate modali

L'andamento delle frequenze all'incrementare dello sforzo assiale nell'asta è stato plottato nel grafico 3.10. Si può notare che le frequenze ottenute dall'analisi FEM siano praticamente coincidenti con quelle teoriche. La Figura 3.11 mostra la varia-



**Figura 3.10:** Andamento delle frequenze all'incrementare dello sforzo assiale nell'asta

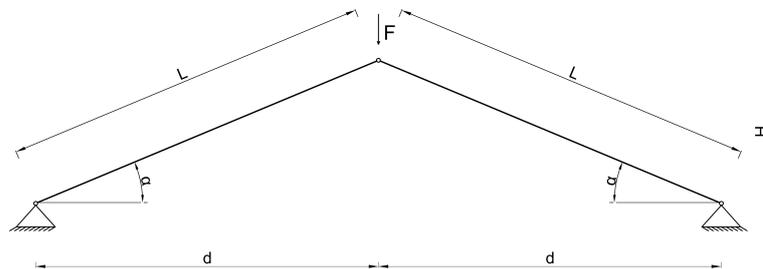
zione delle frequenze lungo il percorso d'equilibrio fino al raggiungimento del punto d'intersezione con il ramo d'equilibrio secondario.



**Figura 3.11:** Evoluzione delle frequenze lungo il percorso di equilibrio fino al punto di biforcazione

### 3.4 Analisi dinamica post-buckling

Il fenomeno dell'instabilità per snap-through ha degli effetti dinamici associati al cambiamento dello stato di equilibrio che comportano grandi quantità di energia. L'energia rilasciata durante lo scatto caratterizza il comportamento post-buckling della struttura. Questo problema è di particolare rilevanza nelle strutture reticolari in quanto ci possono essere delle instabilità locali ma se l'energia rilasciata è considerevole l'instabilità può propagarsi sull'intera struttura. Questo tipo di collasso è definito "collasso progressivo" [23]. Per tale motivo si è indagata la fase post-buckling dell'arco di Von Mises valutando l'energia cinetica rilasciata durante lo scatto. Questa è nota dopo aver definito la curva di snap-through, carico-spostamento, della struttura (Figura 3.13). Nel grafico si hanno due punti significativi corrispondenti ad un medesimo livello di carico: il punto A e il punto B. Il primo punto identifica l'inizio dello scatto mentre il punto B rappresenta la condizione in cui l'arco si trova nella configurazione ribaltata. L'area grigia in Figura 3.13 rappresenta l'energia cinetica rilasciata durante lo scatto [23].



**Figura 3.12**

Un sistema meccanico può essere modellato, in termini dinamici, sia applicando la seconda legge di Newton sia attraverso l'approccio Lagrangiano sfruttando l'energia cinetica e potenziale. In questo caso si è utilizzato il primo approccio [23] che ha consentito di includere la variazione di velocità nel problema.

Il lavoro compiuto dalla forza  $F$  lungo il percorso d'equilibrio, dall'istante iniziale dello scatto A all'istante finale B, può essere espresso:

$$W = \int_A^B F dy \quad (3.24)$$

dove  $dy$  è il vettore spostamento infinitesimale lungo il percorso d'equilibrio.

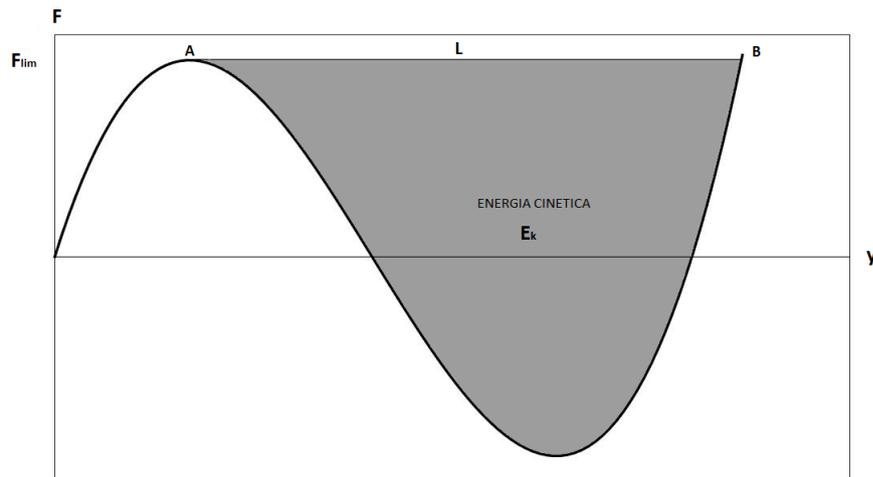


Figura 3.13

Utilizzando la seconda legge del moto di Newton, la forza  $F$  può essere espressa come:

$$F = m a = m \frac{dv}{dt} \quad (3.25)$$

$a$  è l'accelerazione del moto e  $v$  è la velocità del corpo di massa  $m$ .

La velocità è data dalla variazione dello spostamento rispetto al tempo:

$$v = \frac{dy}{dt} \quad (3.26)$$

quindi è possibile scrivere:

$$dy = v dt \quad (3.27)$$

Sostituendo le equazioni 3.25 e 3.27 nella 3.24:

$$W = \int_A^B m \frac{dv}{dt} v dt = \int_A^B m dv v = \int_A^B m \frac{1}{2} d(v v) = \int_A^B m \frac{1}{2} d(v^2) \quad (3.28)$$

Note le velocità dei punti A e B,  $v_1$  e  $v_2$ , l'equazione 3.28 può essere scritta come:

$$W = m \int_{v_1}^{v_2} v dv = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 \quad (3.29)$$

L'eq. 3.29 rappresenta la variazione di energia cinetica:

$$W = \Delta K_e \quad (3.30)$$

Essendo la velocità al punto A nulla, in quanto l'applicazione del carico fino al punto limite può ritenersi 'quasi statica', la velocità del punto B può essere determinata utilizzando l'energia cinetica  $K_e$ :

$$v = \sqrt{\frac{2K_e}{m}} \quad (3.31)$$

dove  $m$  è la massa equivalente associata a  $F_{lim}$  ed è infatti data dal rapporto tra il carico critico e l'accelerazione di gravità  $g$ .

$$m = \frac{F_{lim}}{g} \quad (3.32)$$

Sostituendo l'equazione 3.32 nella 3.31:

$$v = \sqrt{\frac{2 K_e g}{F_{lim}}} \quad (3.33)$$

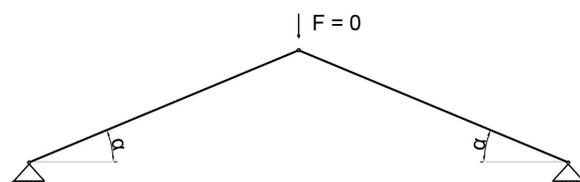
L'effetto del peso della struttura può essere trascurato se paragonato al valore del carico limite.

Riassumendo il fenomeno dello snap-through può essere riassunto attraverso quattro differenti posizioni della struttura nel tempo come riportato in Figura 3.14 [23]:

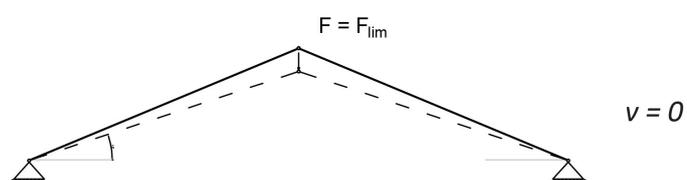
- Posizione 1 (Inizio applicazione carico):  $P=0$  e  $v=0$ ;
- Posizione 2 (Inizio scatto o punto limite):  $P=P_{lim}$  e  $v=0$ ;
- Posizione 3 (Fine dello scatto):  $P=P_{lim}$  e  $v=\sqrt{2K_e g/m}$ ;
- Posizione 4 (Fine snap-through):  $P=P_{lim}$  e  $v=0$ ;

Delle quattro posizioni quella oggetto di studio è la posizione 3 in quanto si è voluto indagare con quale velocità il sistema raggiunge la configurazione di equilibrio non adiacente.

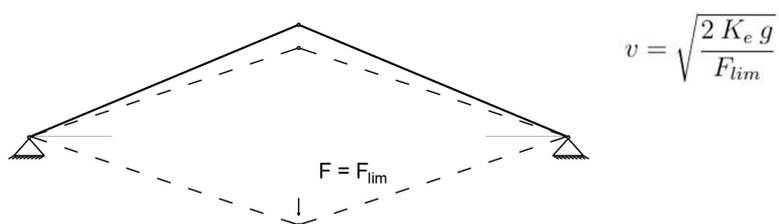
## 1) Inizio applicazione del carico



## 2) Inizio dello scatto



## 3) Fine dello scatto



## 4) Fine del fenomeno "snap-through"

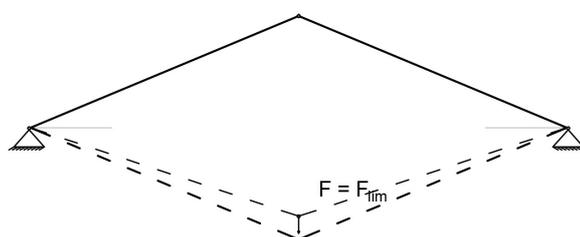


Figura 3.14: Evoluzione del fenomeno dello Snap-Through

### 3.4.1 Effetto dell'interazione

L'analisi ha riguardato nuovamente la condizione limite dei sistemi che ricadono sulla curva d'interazione in modo tale da poter definire un parametro critico anche in termini di energia cinetica e velocità. Dall'equazione della curva d'interazione si è ottenuta la snellezza critica corrispondente al grado di ribassamento considerato:

$$\lambda_{cr} = \sqrt{\frac{\pi^2}{1 - \cos \alpha^{2/3}}} \quad (3.34)$$

Per ogni configurazione descritta dalla coppia di parametri  $(\lambda_{cr}, h/d)$  si è tracciato il percorso d'equilibrio e calcolata l'energia cinetica attraverso un metodo di integrazione numerica, in particolare il metodo dei trapezi.

Le caratteristiche meccaniche dell'arco di Von Mises sono quelle utilizzate anche nelle analisi precedenti riportati in Tab.3.1.

I valori critici dell'energia cinetica sono stati riportati in un grafico  $h/d-E_k$ . In questo modo si è ottenuto una curva d'interazione con riferimento all'energia cinetica. Successivamente per tali configurazioni 'limite' si è valutato il valore della velocità

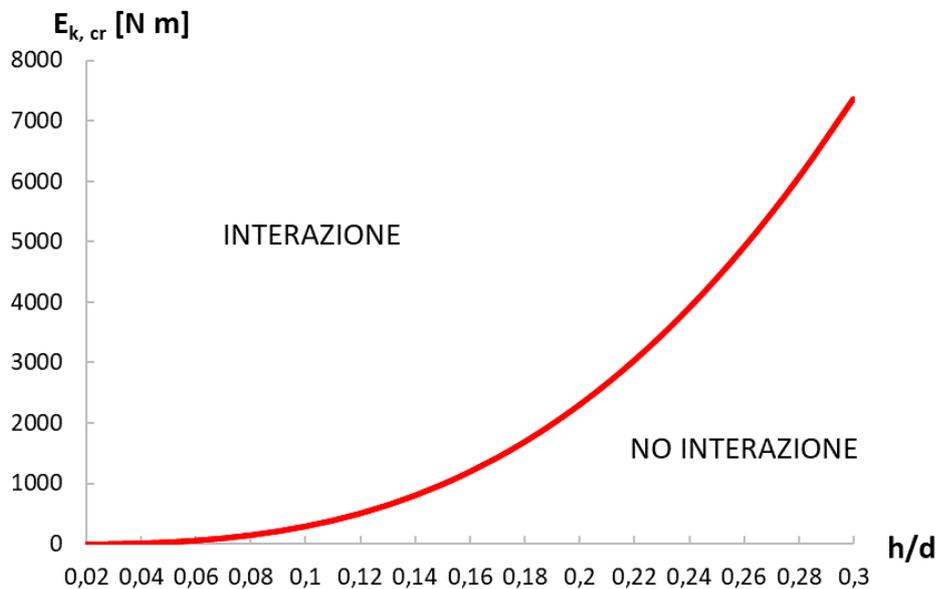


Figura 3.15

mediante la relazione 3.33 con la quale raggiungono la configurazione ribaltata. È interessante notare come ci sia un valore costante di velocità critica, che è indipendente dal grado di ribassamento della struttura. In particolare la velocità critica,

**Tabella 3.5:** Valori critici di energia cinetica e velocità

$h/d$	$\lambda_{cr}$	$E_{k,cr}$ [N m]	$v_{cr}$ [m/s]
0,02	272,11	2,41	0,7749
0,04	136,11	19,27	0,7748
0,06	90,80	64,87	0,7747
0,08	68,16	153,26	0,7745
0,10	54,59	298,08	0,7743
0,12	45,56	512,50	0,7740
0,14	39,12	809,02	0,7737
0,16	34,30	1199,51	0,7733
0,18	30,55	1694,55	0,7729
0,20	27,57	2304,69	0,7724
0,22	25,13	3038,77	0,7719
0,24	23,10	3904,95	0,7713
0,26	21,39	4910,47	0,7707
0,28	19,93	6061,24	0,7701
0,30	18,67	7362,22	0,7694

lungo la curva d'interazione, con cui il sistema scatta nella configurazione ribaltata, è pari a 0,77 m/s.

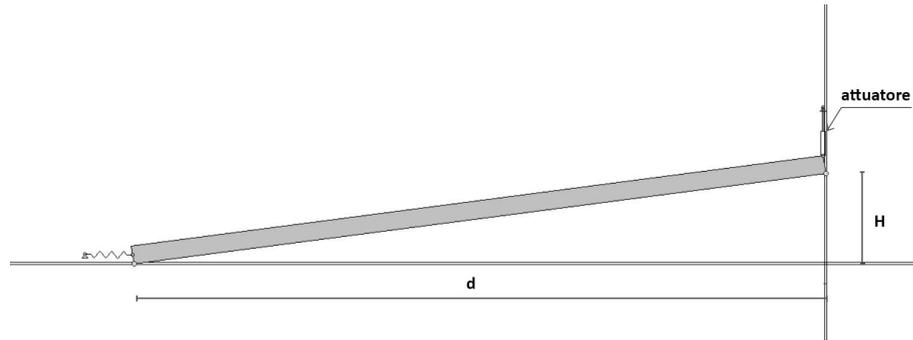
### 3.4.2 Validazione numerica: Working Model 2D

Al fine di verificare l'approccio utilizzato per l'analisi dinamica post-buckling è stato realizzato un modello numerico mediante il software Working Model 2D il quale permette di analizzare sistemi meccanici in movimento ed è basato sulla risoluzione numerica delle equazioni del moto.

La Figura 3.16 mostra una vista del modello, il quale è costituito da un'asta inclinata vincolata mediante una molla avente rigidezza pari a quella dell'asta proiettata in orizzontale, mentre il vincolo al colmo è costituito da una guida che simula un carrello.

Nella prima fase dell'analisi si è calibrato il sistema andando a ricostruire la curva di snap-through. Tale curva si è ottenuta simulando una prova a spostamento controllato attraverso l'applicazione di un'attuatore al colmo dell'arco. La velocità di avanzamento dell'attuatore è pari a 0,1 mm/s.

La curva carico-spostamento è stata confrontata con quella teorica per verificare

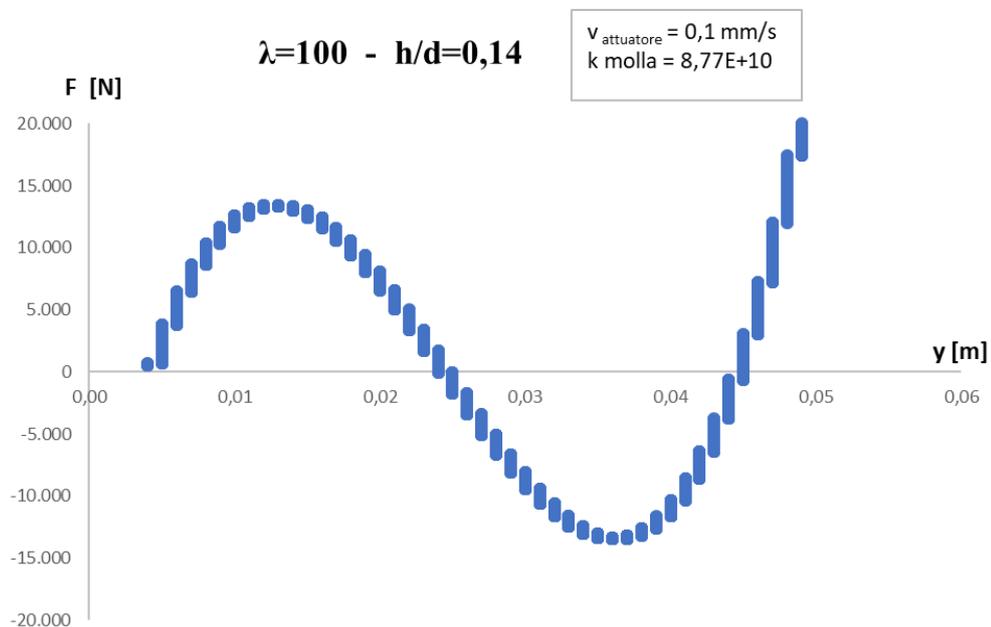


**Figura 3.16:** Modello definito sul programma Working Model 2D

la risposta del sistema. Nota la variazione del carico nel tempo è stato possibile condurre un'ulteriore simulazione in cui l'attuatore rimane attivo fino al carico massimo, ed è stata monitorata la velocità del sistema durante il salto dinamico.

**Esempio:**  $\lambda = 100$  -  $h/d = 0,14$

La configurazione strutturale modellata è un'asta di lunghezza 28,8 cm inclinata di  $7.97^\circ$  rispetto all'orizzontale. Nel grafico 3.17 viene riportata la curva forza-



**Figura 3.17**

spostamento restituita dall'analisi su WM 2D, che mostra un valore di carico massimo a cui la struttura può essere soggetta pari a 13120 N; tale valore differisce da quello teorico dello 0,74 % ( $F_{teo} = 13218N$ ). Il valore della velocità che si ha alla

fine dello scatto per il nodo corrispondente al colmo dell'arco è riportato in Tab.3.6. Tra il valore di velocità teorico e quello derivante dall'analisi numerica si ha una variazione del 3 %.

**Tabella 3.6**

v teorica [m/s]	1,237
v WM 2D [m/s]	1,276

### 3.5 Relazione $E_{def,cr} - E_{k,cr}$

Infine, è stato ricercato un legame tra le due forme di energia: l'energia di deformazione e l'energia cinetica. E' stato possibile constatare che lungo la curva d'interazione tale rapporto rimane invariato come riportato in Tabella 3.7. Quindi

**Tabella 3.7:** Legame tra l'energia di deformazione critica e l'energia cinetica critica

h/d	$\lambda_{cr}$	$E_{def,cr}/E_{k,cr} [-]$
0,02	272, 11	0,148
0,04	136, 11	0,148
0,06	90, 80	0,147
0,08	68, 16	0,148
0,10	54, 59	0,148
0,12	45, 56	0,148
0,14	39, 12	0,149
0,16	34, 30	0,149
0,18	30, 55	0,149
0,20	27, 57	0,149
0,22	25, 13	0,149
0,24	23, 10	0,149
0,26	21, 39	0,150
0,28	19, 93	0,150
0,30	18, 67	0,150

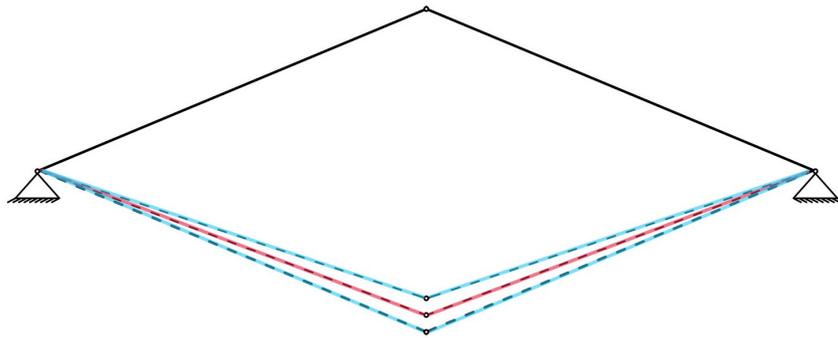
per tali sistemi si ha:

$$E_{def,cr} \approx 0,15 E_{k,cr} \quad (3.35)$$

### 3.6 Oscillazioni post-critiche lineari

Il comportamento delle strutture dinamicamente non lineari è oggetto di continui studi e una delle caratteristiche principali è che la loro risposta non è univoca in quanto dipende anche dalle perturbazioni che la struttura può subire [24] [25].

In questa sezione si è voluto indagare sul comportamento post-buckling dell'arco di Von Mises, tuttavia il problema è stato circoscritto ad un ben preciso stadio del fenomeno d'instabilità che è quello in cui l'arco si ritrova nella configurazione ribaltata. Pertanto sono state studiate le oscillazioni attorno a tale configurazione.



**Figura 3.18**

Per tale ragioni è stato possibile schematizzare la struttura come un sistema ad un grado di libertà SDOF.

L'equazione del moto:

$$m\ddot{y} + k_v y = 0 \quad (3.36)$$

La rigidità verticale del sistema è data da:

$$k_v = 2 \frac{EA}{l_{cr}} \sin \varphi_{cr} \quad (3.37)$$

La soluzione adottata dell'eq. 3.36 è :

$$y(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t \quad (3.38)$$

Le condizioni al contorno sono riferite all'istante in cui il sistema raggiunge la configurazione di equilibrio non adiacente a quella originaria:

$$y(0) = 0 \quad (3.39)$$

$$\dot{y}(0) = v \quad (3.40)$$

Ne deriva che:

$$B = 0 \quad A = \frac{v}{\omega} \quad (3.41)$$

Sostituendo nell'equazione 3.38:

$$y(t) = \frac{v}{\omega} \sin \omega t \quad (3.42)$$

Le incognite del problema sono la velocità che può essere valutata mediante la 3.33 e la frequenza che è data da:

$$\omega^2 = \frac{k_v}{m} = \frac{2 \frac{EA}{l_{cr}} \sin \varphi_{cr}}{m} \quad (3.43)$$

dove  $l_{cr} = \frac{d}{\cos \varphi_{cr}}$

E' stato plottato l'andamento delle oscillazioni lineari post-buckling per quattro differenti configurazioni strutturali dell'arco di Von Mises. Le caratteristiche meccaniche della struttura sono le medesime utilizzate delle analisi precedenti Tab. 2.1. Si può osservare che:

- All'incrementare del grado di ribassamento della struttura aumenta l'ampiezza dell'oscillazione.
- Un aumento della snellezza e quindi della lunghezza delle aste che costituiscono l'arco comporta un periodo maggiore dell'oscillazione.

**Tabella 3.8**

Sistema	v [m/s]	Periodo [s]	Ampiezza [m]
<i>a</i>	1,237	0,0069	0,0169
<i>b</i>	1,725	0,0134	0,0459
<i>c</i>	1,749	0,0097	0,0039
<i>d</i>	2,440	0,0189	0,0919

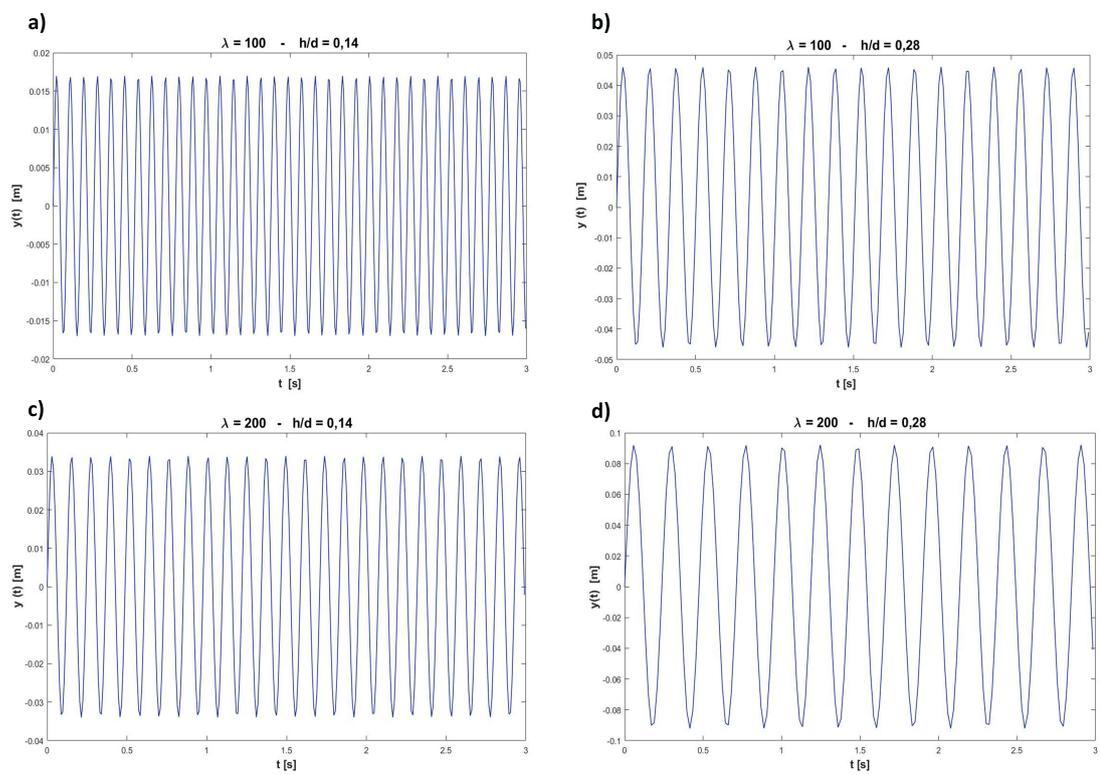


Figura 3.19: Oscillazioni post-buckling di quattro configurazioni strutturali

# Capitolo 4

## Test Sperimentali

### 4.1 Introduzione

L'obiettivo della prova sperimentale è investigare il fenomeno dell'interazione tra l'instabilità Euleriana e lo Snap-Through di una struttura ad arco ribassata per poter validare la formulazione teorica riportata nel Capitolo 1.

Recentemente sono stati effettuati studi su questo tema utilizzando tecniche di monitoraggio innovative [26].

Nell'attività sperimentale svolta sono stati effettuati vari test su una determinata configurazione del semiarco di Von Mises al fine di validare sia i risultati teorici che quelli derivanti dalle analisi non lineari riportate nel Capitolo 2.

### 4.2 Setup sperimentale

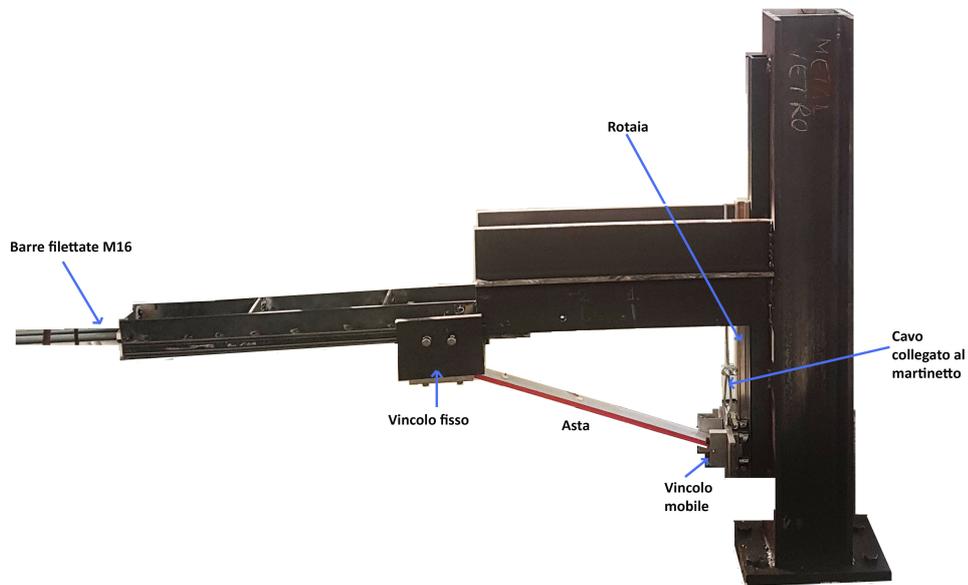
L'esperimento è stato condotto utilizzando barre d'alluminio avente sezione rettangolare 40x10 mm.

La struttura viene identificata attraverso due parametri geometrici: il grado di ribassamento ( $h/d$ ) e la snellezza  $\lambda$ . L'input di tali parametri avviene tramite un sistema di vincoli mobili che permette di realizzare varie configurazioni del semiarco di von Mises.

La figura 4.2 mostra una vista generale del set-up della prova sperimentale.

Lo schema della prova è costituito da un telaio principale formato da una trave verticale, HEB 160, di lunghezza 1100 mm, alla quale sono saldate due lastre lunghe 1400 mm posizionate ad una distanza di 100 mm.

In particolare, la trave verticale che costituisce il telaio è collegata tramite bulloni ad un profilo UPN di base 35 mm ed altezza 50 mm; quest'ultimo fa da supporto ad



**Figura 4.1:** Semiarco installato sul telaio di prova

una rotaia di lunghezza 600 mm che viene posizionata a 188 mm dall'estremità inferiore della trave verticale in modo tale da essere centrata rispetto al vincolo posto sull'elemento metallico orizzontale.

La rotaia permette lo scorrimento di un pattino a sfere in acciaio, il quale costituisce il vincolo mobile dell'arco. La rotaia e il pattino sono realizzati con materiali a basso attrito e ad alta levigazione tale per cui si riesce a realizzare una situazione di scorrimento ad attrito quasi nullo.

Il secondo vincolo, che è posizionato all'estremità libera dell'elemento orizzontale realizzante il telaio, riproduce una cerniera. Viene mantenuto in posizione oltre che dai bulloni anche da due barre filettate M16 che impediscono eventuali spostamenti e quindi dissipazioni di carico. Tale vincolo può essere regolato sul telaio orizzontale al fine di realizzare le varie configurazioni strutturali.

La realizzazione del collegamento tra la barra e i vincoli avviene mediante delle spine d'acciaio. Queste permettono il collegamento dell'asta ai vincoli; infatti la spina attraversa l'asta e si inserisce all'interno di due fori praticati su dei supporti verticali bullonati ad una piastra che viene posizionata sia sul pattino che sul vincolo fisso. Inoltre il vincolo mobile presenta un gancio laterale che permette l'applicazione del carico attraverso un cavo d'acciaio collegato al martinetto.

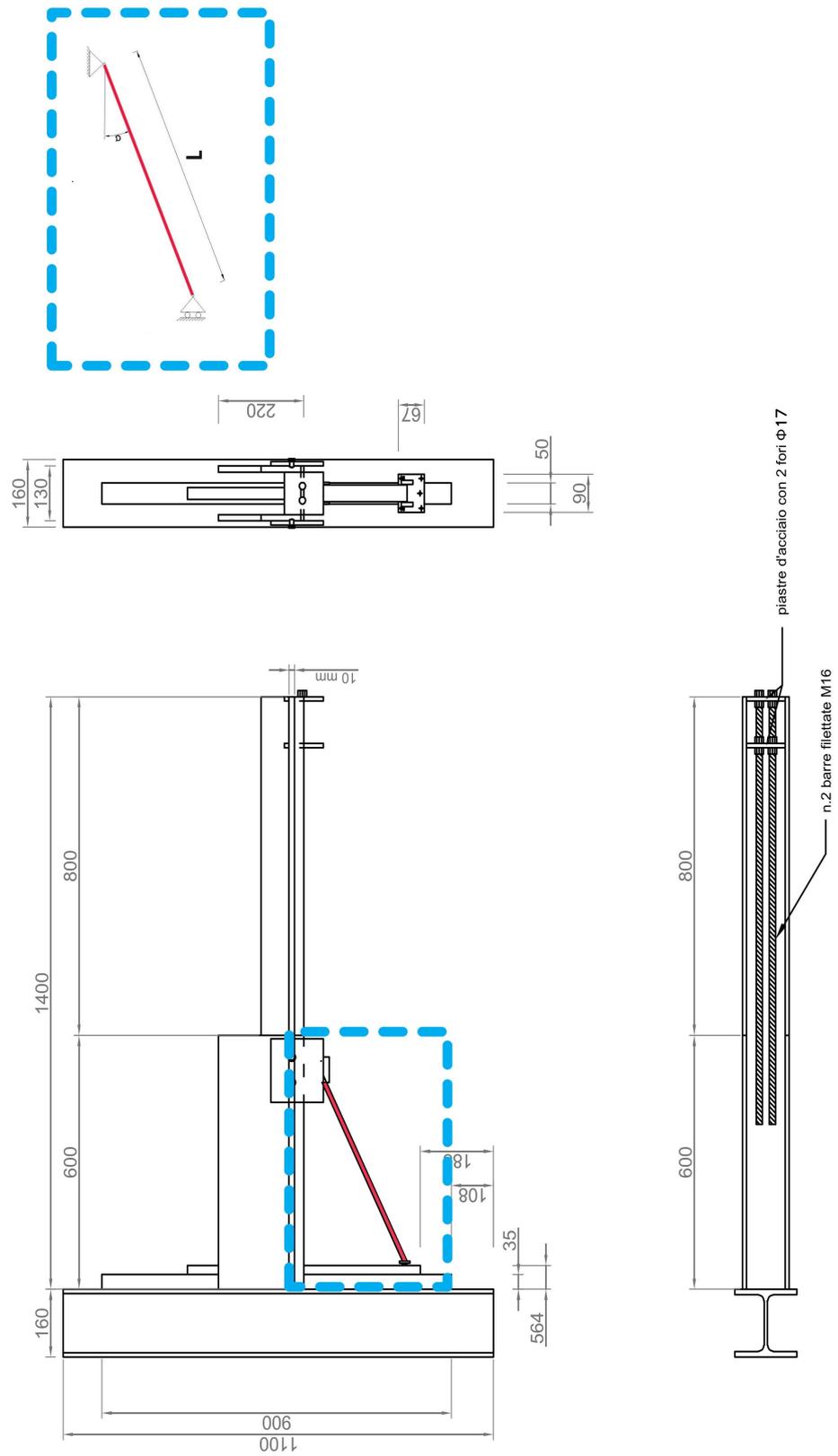


Figura 4.2: Disegno setup sperimentale

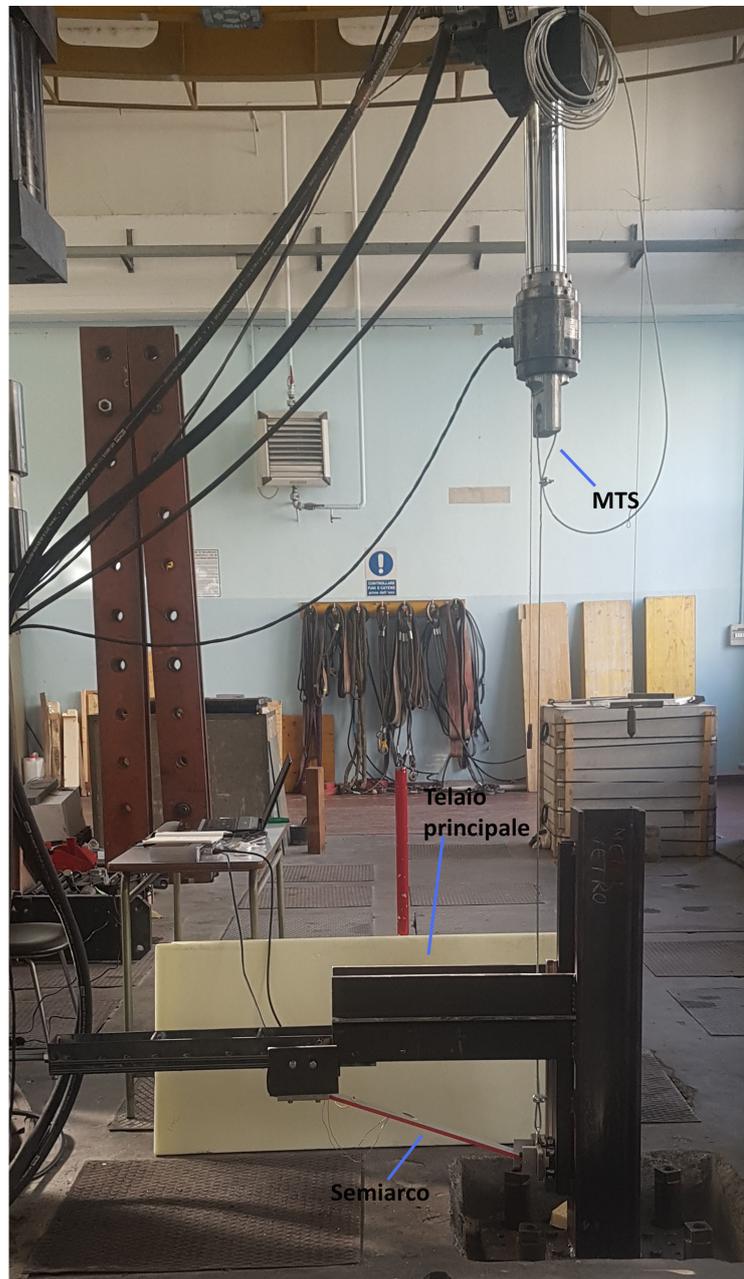


Figura 4.3: Vista generale

La configurazione ribaltata dell'arco è giustificata dalla modalità con cui è stata eseguita la prova in quanto il martinetto è posizionato sopra il telaio su cui è installata l'asta. La base del telaio sul quale viene montata la barra è rigidamente connessa al pavimento attraverso una piastra.

La prova è eseguita in controllo di spostamento, il quale viene applicato al colmo del semiarco mediante un martinetto idraulico che è collegato attraverso un cavo in acciaio al gancio presente lateralmente sul vincolo mobile della barra.

L'output della prova è rappresentato dalla forza applicata al colmo del semiarco e dal relativo spostamento che vengono forniti dalla MTS, inoltre ulteriori strumenti di monitoraggio utilizzati sono la fotocamera e la termocamera Flir A300. Le proprietà meccaniche delle barre di alluminio utilizzate sono riassunte in Tabella 4.1.

**Tabella 4.1:** Proprietà meccaniche delle aste

<b>Area</b> [ $m^2$ ]	$A = bh$	0.0004
<b>Inerzia</b> [ $m^4$ ]	$I = bh^3/12$	3.3334e-09
<b>Modulo di Young</b> [ $GPa$ ]	$E$	64
<b>Coefficiente di Poisson</b>	$\nu$	0,34
<b>Densità</b> [ $kg/m^3$ ]	$\rho$	2700



**Figura 4.4:** Barre d'alluminio testate

La configurazione strutturale oggetto delle prove di laboratorio è caratterizzata da una snellezza  $\lambda$  pari a 200 e grado di ribassamento  $h/d$  pari a 0,28; le cui caratteristiche geometriche vengono riportate in Tabella 4.2.

Tabella 4.2

Lunghezza asta [mm]	Semiluce arco d [mm]	Altezza arco h [N]
577	556	155,7

### 4.3 Risultati sperimentali

Il sistema strutturale identificato in Tabella 4.2 è stato testato attraverso tre prove sperimentali. Gli output di tali test sono: le curve carico-spostamento, immagini acquisite con termocamera e fotocamera.

#### 4.3.1 Test 1

L'attuatore è stato settato in modo tale che effettuasse rampe da 2 mm di spostamento. Per raggiungere il carico massimo sono stati effettuati 25 step di spostamento imposto. Il carico massimo di 2,02 kN è stato raggiunto per uno spostamento pari a 53,4 mm.

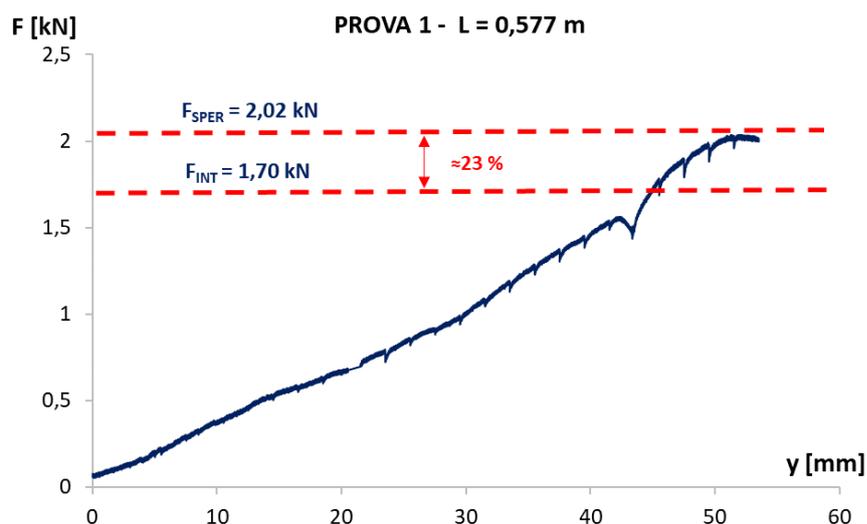
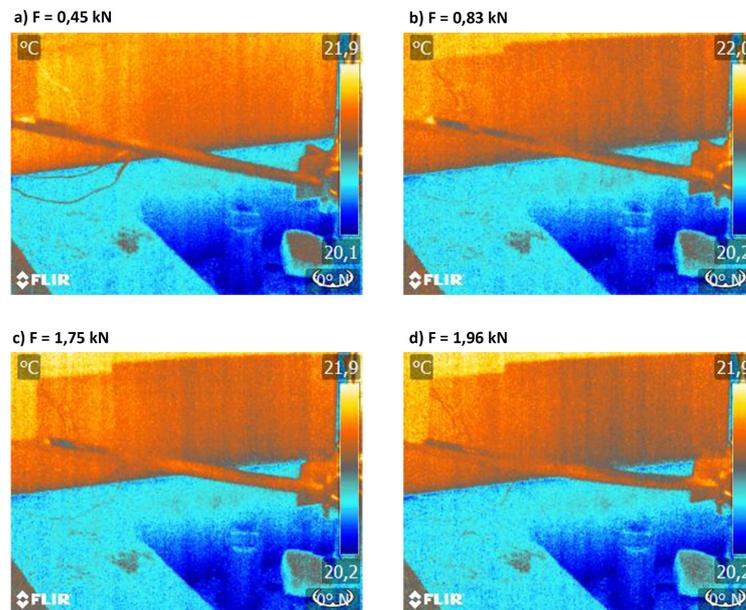


Figura 4.5: Curva carico-spostamento - Test 1

Dalle immagini acquisite con la termocamera si evidenzia un incremento di temperatura in mezzeria della trave all'aumentare degli step di carico.



**Figura 4.6:** Immagini termocamera per vari step di carico

### 4.3.2 Test 2

Il secondo test è stato svolto non più applicando delle rampe di spostamento ma monitorando lo spostamento applicato in continuo. Il carico massimo raggiunto è di 1,94 kN. Dalla curva carico-spostamento si evidenzia che dopo il carico limite si ha un ramo post-critico e non di plasticizzazione in quanto al termine dell'operazione di scarico l'asta non ha presentato delle deformazioni plastiche.

Questo ramo post-critico è influenzato dalle possibili deformazioni del cavo di collegamento al martinetto.

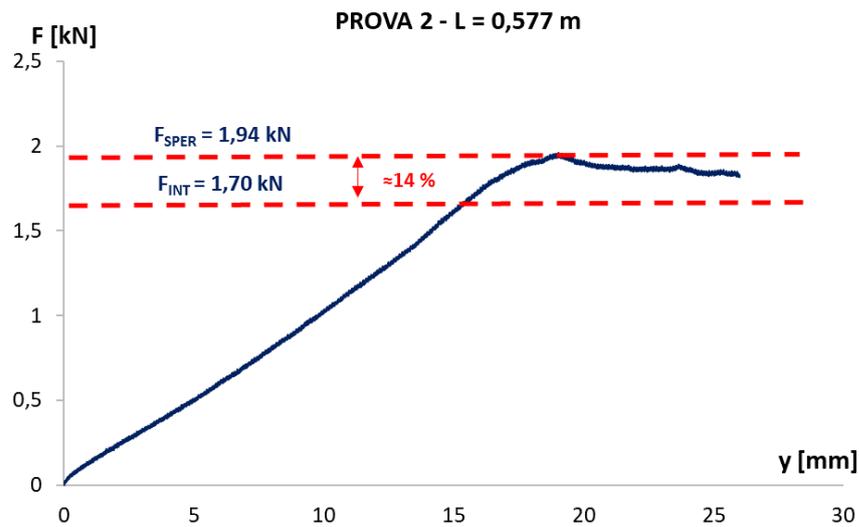


Figura 4.7: Curva carico-spostamento - Test 2

### 4.3.3 Test 3

La terza prova sperimentale, eseguita nuovamente in controllo di spostamento, ha visto l'applicazione di rampe da 3 mm di spostamento fino ad uno spostamento massimo di 34 mm.

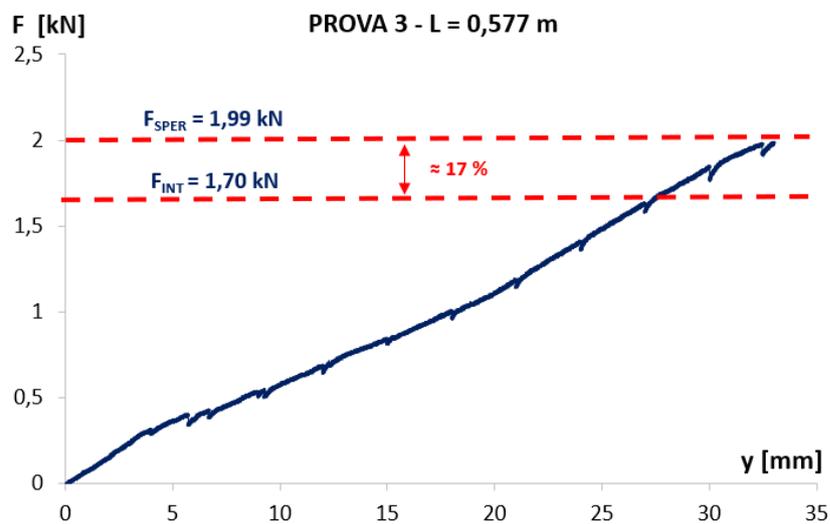
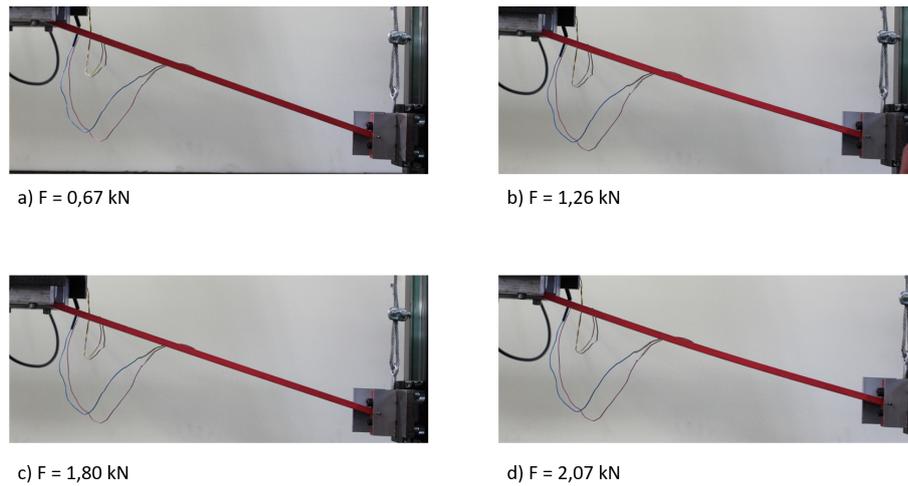


Figura 4.8: Curva carico-spostamento - Test 3

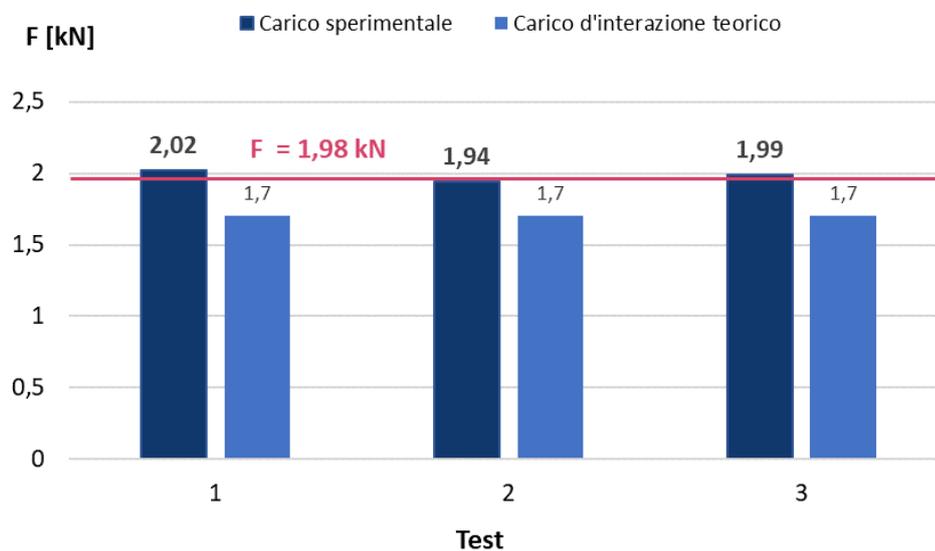
Dal monitoraggio attraverso fotocamera possiamo notare come all'avvicinarsi del carico critico la deformata della struttura è quella relativa al primo modo di buckling euleriano.



**Figura 4.9:** Evoluzione del fenomeno d'instabilità all'incrementare del carico

## 4.4 Osservazioni

Le prove hanno mostrato una ripetibilità nonostante il campione di dati limitato. Il valore medio del carico ottenuto dalle tre prove è di 1,98 kN. Tale valore si discosta da quello valutato attraverso l'approccio teorico in quanto lo supera del 16,47 %.



**Figura 4.10:** Confronto tra i valori di carico ottenuti dai test sperimentali e il carico d'interazione del sistema ( $\lambda=200$  -  $h/d=0,28$ )

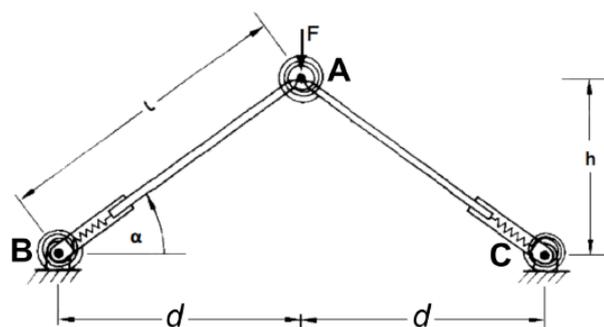
- L'incremento del carico sperimentale può essere dovuto agli attriti che si sono sviluppati all'interno del vincolo fisso; pertanto è venuto meno l'effetto cerniera in quanto il vincolo ha presentato una rigidità rotazionale.

I valori di carico sperimentali sono inferiori di circa un ordine di grandezza rispetto al carico di snap-through del sistema perfetto ( $F_{PERF}=100,26$  kN) Figura 2.6.f; questo è spiegabile, come evidenziato anche dalle immagini acquisite con la fotocamera, dal fatto che nell'asta si ha anche un'instabilità locale di tipo Euleriana che comporta una riduzione del carico critico di Snap-Through. L'instabilità locale indebolisce globalmente la struttura per cui nell'arco si innesca un'instabilità per scatto per una condizione di carico ben minore di quella stimata attraverso un'analisi di instabilità per solo snap-through;

- Un'ulteriore osservazione riguarda gli spostamenti registrati dai test sperimentali che si sono rivelati più grandi rispetto a quelli stimati attraverso le analisi non lineari. Questo perché il cavo che collegava l'asta al martinetto ha giocato un ruolo importante.

#### 4.4.1 Effetto del vincolo

Al fine di valutare l'incidenza della criticità riscontrate nel vincolo si è analizzato il modello proposto da X. Bellini [27] [18] costituito dall'arco di Von Mises con l'aggiunta di molle rotazionali.



**Figura 4.11:** Arco di Von Mises con molle rotazionali, X.Bellini [12] [27]

Il legame carico-spostamento per il semiarco è dato da:

$$F_{cr,ST} = KL \sin \varphi \left( 1 - \frac{\cos \alpha}{\cos \varphi} \right) + \frac{2K_t(\alpha - \varphi)}{L \frac{\cos \alpha}{\cos^2 \varphi}} \quad (4.1)$$

dove  $K_t$  è la rigidezza rotazionale della molla.

Mentre il carico che conduce all'instabilità euleriana dell'asta vincolata con molle rotazionali è fornito dalla seguente relazione:

$$F_{cr,Eu} = \pi^2 \sin \alpha \frac{EI}{L_0^2} \quad (4.2)$$

dove  $l_0$  è la lunghezza libera d'inflessione dell'asta che può essere valutata attraverso la formula di Newmark [28]:

$$\chi = \frac{(0,4 + \mu)^2}{(0,2 + \mu)^2} \quad (4.3)$$

dove:

$$\mu = \frac{EI}{K_t L} \quad (4.4)$$

quindi si ha:

$$F_{cr,Eu} = \chi \pi^2 \sin \alpha \frac{EI}{L^2} \quad (4.5)$$

Dall'intersezione tra i due percorsi d'equilibrio si ottiene il carico massimo per cui il sistema diventa instabile.

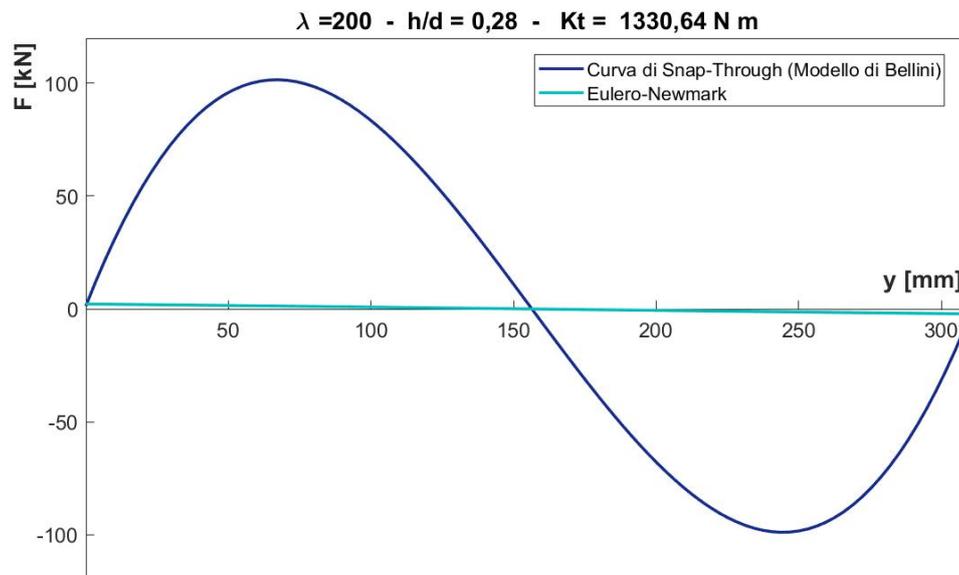
Per stimare la rigidezza rotazionale del vincolo fisso, noto il valore del carico critico dalle prove sperimentali, si è dapprima stimato il parametro  $\chi$  utilizzando la (4.5) e successivamente si è calcolato il valore di  $K_t$  sfruttando la (4.4).

I parametri utilizzati sono riassunti in Tabella 4.3. Dal calcolo si è ottenuto un valore

**Tabella 4.3:** Parametri utilizzati per il calcolo di  $K_t$

$F_{cr}$ [N]	1980
$\alpha$ [rad]	0,27304
E [GPa]	64
I [m <sup>4</sup> ]	3,33E - 9
L [m]	0,577

di  $K_t$  pari a 1330,64 N m. Inoltre si sono rappresentati i due percorsi d'equilibrio ricostruiti attraverso una procedura numerica (grafico 4.12).



**Figura 4.12:** Intersezione tra il percorso di equilibrio dell'arco di Von Mises avente  $K_t = 1330,64 \text{ N m}$  con il percorso di equilibrio secondario di Eulero-Newmark

#### 4.4.2 Effetto del cavo di collegamento al martinetto

Il cavo di collegamento del vincolo mobile con il martinetto ha influito sulla risposta strutturale del sistema in termini di spostamenti.

##### 1) Modello FEM: Validazione carico

Si è analizzato questo effetto attraverso un modello FEM della struttura che includesse la fune di collegamento al martinetto. Il modello, realizzato su Lusas 15.1, è il semiarco di von Mises con imperfezione  $e = L/1000$ , descritto nel Capitolo 2, al quale al vincolo in sommità è stato aggiunto un elemento verticale di lunghezza 1,50 m che simula il cavo.

Per la modellazione del cavo sono state utilizzate le seguenti caratteristiche:

- Mesh: Elementi trave non lineari BTS3
- Materiale: Steel Structural EN1993-1-1:2005 ( $E=210 \text{ GPa}$   $\rho=7849 \text{ kg/m}^3$ )
- Geometria: Sezione circolare avente diametro  $\phi = 8 \text{ mm}$

Mentre i parametri utilizzati per modellare l'asta sono i medesimi utilizzati nelle analisi del Capitolo 2.

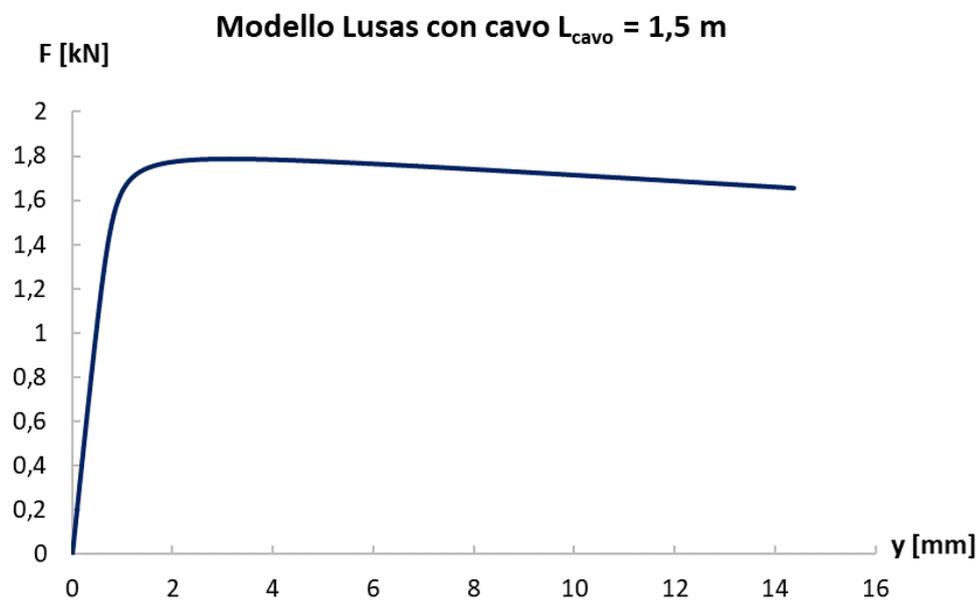
Successivamente è stata eseguita un'analisi non lineare in controllo di spostamento,

il quale è stato applicato all'estremità libera del cavo come effettuato nelle prove sperimentali.



**Figura 4.13:** Modello Lusas: asta avente  $\lambda=200$  -  $h/d=0,28$  -  $e=L/1000$  e cavo di collegamento al martinetto

L'analisi FEM, come mostra il grafico 4.14, ha restituito un valore di carico critico pari a 1,79 kN che differisce rispetto al carico sperimentale del 9,6 %.

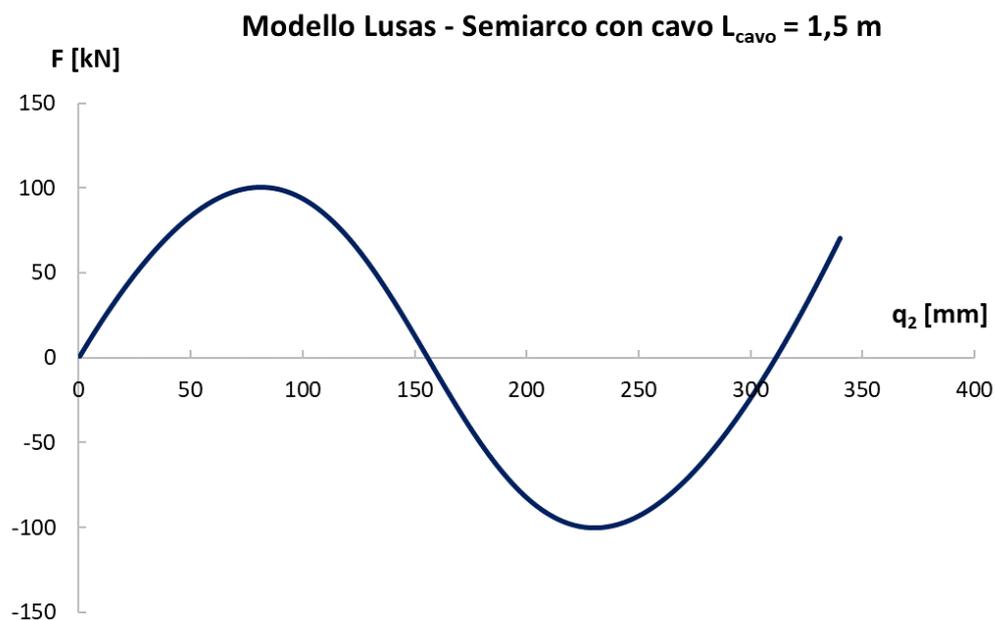


**Figura 4.14:** Curva F-y ottenuta dall'analisi non lineare

## 2) Modello FEM: Validazione spostamenti

Un'ulteriore analisi numerica si è effettuata andando a modellare la struttura precedente senza le imperfezioni, mentre per quanto riguarda il cavo si è considerata solo la deformabilità membranale. utilizzando le seguenti caratteristiche:

- Mesh: Elementi asta BAR
- Materiale: Steel Structural EN1993-1-1:2005 ( $E=210$  GPa  $\rho=7849$   $kg/m^3$ )
- Geometria: Sezione circolare avente diametro  $\phi = 8$  mm



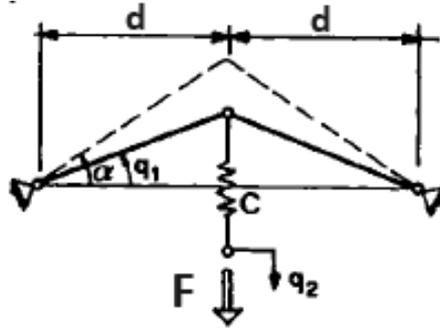
**Figura 4.15:** Percorso di equilibrio ottenuto dall'analisi FEM in controllo di spostamento

L'analisi è stata effettuata in controllo di spostamento, il quale è stato applicato all'estremità libera del cavo. Dalla curva carico-spostamento si evidenziano spostamenti più grandi rispetto a quelli ottenuti dall'analisi precedente, e tali spostamenti sono paragonabili con quelli ottenuti dalle prove sperimentali.

Il valore del carico critico è di 100,294 kN quindi è coincidente con il carico critico d'instabilità per solo snap-through del semiarco  $F_{cr,ST}=100,26$  kN.

### 3) Modello teorico a 2 gradi di libertà

Il modello FEM (2) trova un riscontro teorico nella formulazione di Bazant [21], il quale ha considerato l'arco di Von Mises caricato non direttamente ma attraverso una molla di rigidezza  $C$  come mostrato in Figura 4.16.



**Figura 4.16:** Arco di Von Mises caricato attraverso una molla [21]

L'estensione della molla in seguito all'applicazione del carico vale:

$$q_2 - L(q_1 - \alpha) \quad (4.6)$$

Per ricavare le posizioni di equilibrio è necessario scrivere l'energia potenziale totale della struttura; a differenza dell'arco considerato finora, nel caso in esame deve essere aggiunto al potenziale l'energia di deformazione della molla.

$$W = \frac{EAL}{4}(q_1^2 - \alpha^2)^2 + \frac{C}{2}[q_2 - L(\alpha - q_1)]^2 - Pq_2 \quad (4.7)$$

Imponendo la stazionarietà del potenziale rispetto alle due coordinate generalizzate  $q_1$  e  $q_2$ :

$$\frac{\partial W}{\partial q_1} = EAL(q_1^2 - \alpha^2)q_1 + CL[q_2 - L(\alpha - q_1)] = 0 \quad (4.8)$$

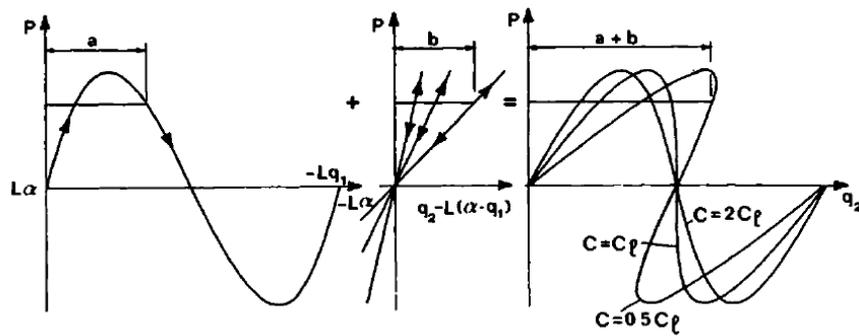
$$\frac{\partial W}{\partial q_2} = C[q_2 - L(\alpha - q_1)] - P = 0 \quad (4.9)$$

Moltiplicando l'equazione (4.9) per la semiluce  $L$  e aggiungendo questa alla (4.8) si ottiene il percorso di equilibrio in funzione della variabile  $q_1$ :

$$P = EA(\alpha^2 - q_1^2)q_1 \quad (4.10)$$

La forza  $F$  non compie lavoro con la coordinata  $q_1$  ma con la quantità  $q_2$  che può essere determinata attraverso l'equazione 4.9:

$$q_2 = \frac{P}{C} + L(\alpha - q_1) \quad (4.11)$$



**Figura 4.17:** Costruzione grafica della curva carico-spostamento [21]

La configurazione strutturale analizzata è quella testata anche sperimentalmente avente snellezza  $\lambda$  pari a 200 ( $l=0,577$  m) e grado di ribassamento  $h/d$  pari a 0,28. La molla di rigidezza  $C$  simula il cavo di collegamento del martinetto pertanto si è assunta una rigidezza pari a  $EA_{cavo}/L_{cavo}$ .

Si è considerato un cavo in acciaio ( $E=210$  GPa) di lunghezza 1,5 m, inoltre sono stati considerati differenti diametri per valutarne l'effetto sul comportamento globale della struttura. Nota la configurazione strutturale utilizzando l'equazione 4.10

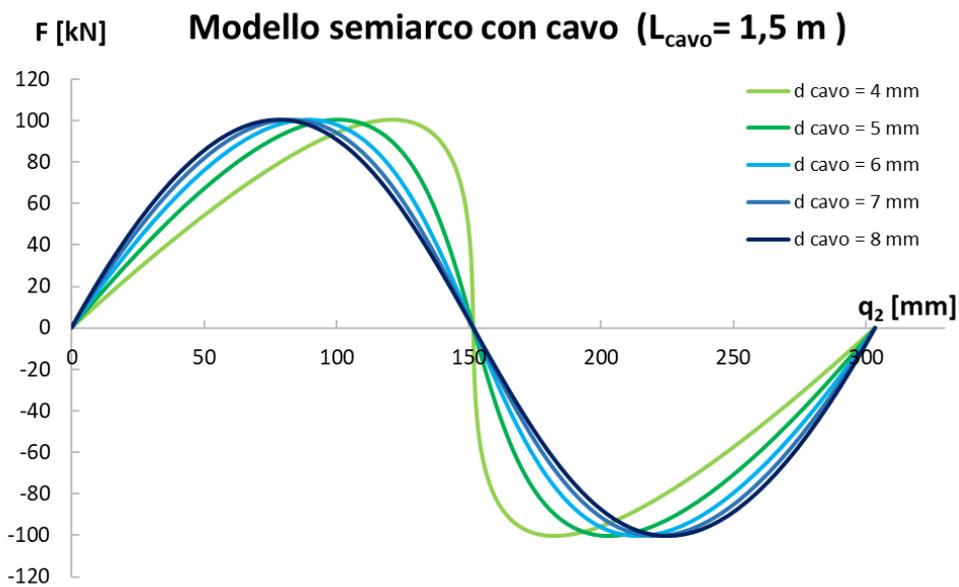
**Tabella 4.4:** Valori del parametro  $C$  al variare del diametro del cavo

Diametro $d$ cavo [mm]	$A$ [ $mm^2$ ]	Rigidezza cavo $C$ [N/m]
4	12,56	1759291,886
5	19,63	2748893,572
6	28,27	3958406,744
7	38,48	5387831,401
8	50,26	7037167,544

si determina il percorso di equilibrio al variare dell'angolo partendo dalla configurazione indeformata fino a raggiungere la configurazione ribaltata. A partire da tali valori si sono determinati gli spostamenti  $q_2$  attraverso la (4.11).

Successivamente è stato plottato l'andamento del carico in funzione dello spostamento  $q_2$  per differenti sistemi in cui si è fatto variare la rigidezza della molla.

E' interessante notare come sia la formulazione di Bazant che l'analisi non lineare FEM riportata nel punto precedente per la configurazione avente diametro  $d = 8$  mm abbia restituito la medesima risposta sia in termini di spostamenti che di carico Tabella (4.5).



**Figura 4.18:** Percorsi di equilibrio per differenti rigidzze della molla

**Tabella 4.5**

	$F_{cr}$ [kN]	Spostamento $q_{2,cr}$ [mm]
Modello teorico	100,24	78,00
Modello FEM	100,29	81,26

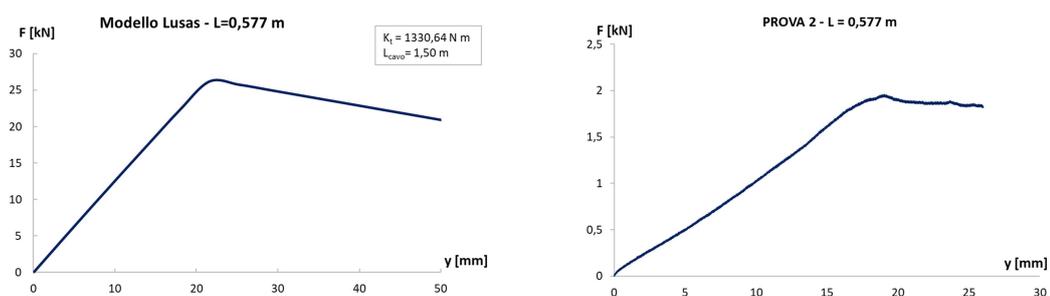
### 4.4.3 Comportamento reale

Si può concludere che il comportamento reale della struttura testata è dato da una sovrapposizione di due effetti:

- a Effetto del vincolo;
- b Effetto del cavo di collegamento del martinetto

Il primo riguarda le perturbazioni flessionali che nascono all'interno del vincolo provocando un lieve incremento di carico rispetto a quello teorico. Il secondo effetto, invece, è relativo al fatto di avere due elementi strutturali che lavorano in serie ossia l'asta e il cavo. La competizione membranale tra i due elementi produce degli spostamenti elevati.

Infine si è analizzato un modello numerico che comprendesse questi due effetti e ha fornito un andamento in termini di spostamenti che riproduce quello ottenuto dal Test 2.



**Figura 4.19:** Confronto tra la curva F-y della configurazione strutturale  $\lambda = 200$  -  $h/d = 0,28$  e la curva sperimentale ottenuta dal test 2

# Capitolo 5

## Conclusioni

L'instabilità dell'equilibrio elastico è un problema rilevante per alcune tipologie strutturali. Nel presente lavoro si è indagato il comportamento strutturale dell'arco di Von Mises, il quale è una struttura elementare riscontrabile in opere civili come le coperture reticolari, ma anche in sistemi elettromeccanici MEMS oppure nanotubi di carbonio.

L'instabilità che coinvolge tale sistema può essere sia un'instabilità locale o Euleriana che interessa le singole aste, sia un'instabilità globale che coinvolge l'intera struttura detta Snap-Through. Quando queste instabilità interagiscono provocano una riduzione del carico critico che porta la struttura ad instabilizzarsi.

È stato analizzato, in particolare, il comportamento dell'arco a tre cerniere costituito da aste di sezione rettangolare d'alluminio.

Dalle analisi numeriche effettuate su tale sistema con l'ausilio del software ad elementi finiti Lusas 15.1, è stato possibile definire dei domini d'interazione, strumenti utili per predire il carico critico di molteplici sistemi al variare della snellezza e del grado di ribassamento.

Inoltre, si è indagato il fenomeno dell'interazione tra Snap-Through ed instabilità Euleriana valutando l'energia di deformazione membranale della struttura attraverso il teorema di Clapeyron; l'interazione tra il problema membranale e quello flessionale si è considerata accoppiando i due problemi.

Alcune importanti conclusioni scaturiscono dall'analisi del comportamento dinamico della struttura sia nella fase antecedente il carico critico che nella fase post-buckling. Analizzando la fase pre-critica si è constatato l'annullamento delle frequenze proprie una volta raggiunto il carico d'interazione, tale risultato può essere utilizzato come strumento di monitoraggio delle strutture esistenti.

Dall'analisi del comportamento post-buckling è stato possibile definire sia un domi-

---

nio d'interazione in termini di energia cinetica, sia un parametro di velocità con la quale il sistema raggiunge la configurazione di equilibrio non adiacente. Quest'ultimo è stato verificato mediante il risolutore Working Model 2D.

Dalle analisi numeriche è stato riscontrato un valore costante di velocità ( $v = 0,77$  m/s) per i sistemi che ricadono lungo la curva d'interazione.

Al fine di validare i risultati ottenuti dalle analisi non lineari si è investigato sperimentalmente il fenomeno dell'interazione effettuando delle prove di laboratorio sul semiarco di von Mises.

Le prove sono state effettuate in controllo di spostamento mediante un martinetto idraulico (MTS) e monitorando la struttura attraverso fotocamera e termocamera. Il carico massimo sperimentale ottenuto dalle curve carico-spostamento è conforme ai risultati numerici in quanto i valori presentano una variazione massima del 23%. Le immagini acquisite, sia mediante fotocamera che termocamera, hanno evidenziato una deformata della struttura corrispondente con il primo modo di buckling per valori di carico prossimi a quello critico. Per tale sistema, infatti, il carico sperimentale differisce da quello di buckling ( $F_{EB} = 1703,13$  N) del 16,25%. L'instabilità euleriana (locale) indebolisce globalmente la struttura attivando lo "scatto" del semiarco per una condizione di carico inferiore sia a quella euleriana che a quella di snap-through.

Le curve carico-spostamento presentano un ramo post-critico instabile in quanto dopo la fase di scarico l'asta non ha riportato deformazioni permanenti.

I risultati sperimentali non sono conformi con quelli numerici in quanto sono state riscontrate alcune criticità durante l'attività sperimentale; queste criticità sono dovute alle perturbazioni flessionali che nascono all'interno del vincolo fisso e all'effetto del cavo di collegamento dal martinetto al vincolo mobile. Infine, tali difformità sono state prese in considerazione mediante opportuni modelli numerici.

# Bibliografia

- [1] John Michael Tutill Thompson and Giles W Hunt. *A general theory of elastic stability*. Wiley, 1973.
- [2] J Roorda. The buckling behaviour of imperfect structural systems. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 13(5):267–280, 1965.
- [3] John Roorda. On the buckling of symmetric structural systems with first and second order imperfections. *International Journal of Solids and Structures*, 4(12):1137 – 1148, 1968.
- [4] Nan Hu and Rigoberto Burgueño. Buckling-induced smart applications: recent advances and trends. *Smart Materials and Structures*, 24(6), 2015.
- [5] Wen-Ming Zhang, Han Yan, Zhi-Ke Peng, and Guang Meng. Electrostatic pull-in instability in mems/nems: A review. *Sensors and Actuators A: Physical*, 214(Supplement C):187 – 218, 2014.
- [6] Raimonds Meija, Stefano Signetti, Arnim Schuchardt, Kerstin Meurisch, Daria Smazna, Matthias Mecklenburg, Karl Schulte, Donats Erts, Oleg Lupan, Bodo Fiedler, et al. Nanomechanics of individual aerographite tetrapods. *Nature Communications*, 8, 2017.
- [7] Victor Gioncu. Buckling of reticulated shells: state-of-the-art. *International Journal of Space Structures*, 10(1):1–46, 1995.
- [8] V. Gioncu. General theory of coupled instabilities. *Thin-Walled Structures*, 19(2):81 – 127, 1994.
- [9] Josef Singer, Johann Arbocz, and Tanchum Weller. *Buckling experiments: experimental methods in buckling of thin-walled structures. Basics Concepts, Columns, Beams, and Plates Vol.1*. Wiley Online Library, 1998.

- 
- [10] Dan Dubina and Viorel Ungureanu. Instability mode interaction: From van der neut model to ecbl approach. *Thin-Walled Structures*, 81(Supplement C):39 – 49, 2014.
- [11] L. Corradi Dell’Acqua. , *Meccanica delle Strutture - Volume 3*. McGraw-Hill Libri Italia, 1994.
- [12] Fabio Bazzucchi. *Shallow-dome structures and interaction between buckling and snap-through*. PhD thesis, Politecnico di Torino, 2017.
- [13] F. Bazzucchi, A. Manuello, and A. Carpinteri. Interaction between snap-through and eulerian instability in shallow structures. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol 88(Supplement C):pp. 11 – 20, 2017.
- [14] LUSAS User’s Manual FEA. Lusas element reference manual.
- [15] LUSAS User’s Manual FEA. Lusas theory manual.
- [16] Francesco Palloni. Le non linerità geometriche e i grandi spostamenti. *Analisi e Calcolo*, n.81, 2017.
- [17] *D.M. 14 Gennaio 2008, “Norme tecniche per le costruzioni,” S.O. 30 alla Gazz. Uff. del 29 Febbraio 2008.*
- [18] Michele Licandro. Interazione tra snap-through ed instabilità elastica al variare dei vincoli in strutture ad arco ribassato, 2016.
- [19] David Bushnell. *Computerized buckling analysis of shells*, volume 9. Springer Science & Business Media, 2012.
- [20] Alberto Carpinteri. *Scienza delle costruzioni 1, Bologna, Pitagora Editrice Bologna, 1995*, volume 1.
- [21] Zdeněk P Bažant and Luigi Cedolin. *Stability of structures: elastic, inelastic, fracture and damage theories*. World Scientific, 2010.
- [22] A. Carpinteri, R. Malvano, A. Manuello, and G. Piana. Fundamental frequency evolution in slender beams subjected to imposed axial displacements. *Journal of Sound and Vibration*, 333(11):2390 – 2403, 2014.
- [23] Karim Abedi. *Propagation of local instabilities in braced domes*. PhD thesis, University of Surrey, 1997.

- 
- [24] JJ Waite, Lawrence N Virgin, and Richard Wiebe. Competing responses in a discrete mechanical system. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 24(01), 2014.
- [25] Lawrence N Virgin. *Vibration of axially-loaded structures*. Cambridge University Press, 2007.
- [26] Fabio BAZZUCCHI, Amedeo MANUELLO, and Alberto CARPINTERI. Instability assessment of a shallow structure through image capturing. 2017.
- [27] Paul X. Bellini. The concept of snap-buckling illustrated by a model. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 7(6):643 – 650, 1972.
- [28] Nicholas Snowden Trahair. *Flexural-torsional buckling of structures*, volume 6. CRC press, 1993.