

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale  
in Ingegneria Aerospaziale

Tesi di Laurea Magistrale

**Progettazione statica del cassone alare  
di un velivolo Business Jet  
con rivestimento in composito**



**Relatore:**  
Prof. Marco Di Sciuva

.....

**Candidato:**  
Raffaele Rizzo

.....

A.A. 2017/2018



*Ad Olindo, padre saggio e collega;  
A Mary, madre piena di consigli e fiducia;  
Ed a Silvia, da sempre mio unico amore.*



## Ringraziamenti

In primis vorrei ringraziare per la stesura di questo lavoro di tesi il Prof. Di Sciuva Marco, Relatore, che mi ha seguito durante questi mesi mettendomi a disposizione tutta la sua esperienza.

Un enorme ringraziamento va all'azienda SIPAL S.p.A. e all'Ing. Fegatelli Remigio, Direttore Tecnico, che mi ha dato la possibilità di crescere come ingegnere ancor prima di terminare il mio percorso di studi.

Vorrei anche ringraziare l'Ing. Rossi Raffaele, Stress Engineer e Tutor Aziendale, che ha seguito la mia preparazione, mettendola alla prova quando necessario, sia durante il periodo di tirocinio che durante lo sviluppo della tesi di laurea, guidandomi con la sua decennale esperienza nel settore aerospaziale e senza il cui supporto questa tesi non esisterebbe.

Non posso non ringraziare i miei genitori e la mia famiglia che in questi anni hanno seguito il mio percorso passo per passo dandomi il loro supporto, la loro fiducia e la libertà di crescere come persona; con un pensiero rivolto anche verso i miei nonni presenti e non, le 4 colonne portanti della mia educazione e dei miei principi di vita.

Invece alla mia fidanzata Silvia, che da quasi 11 anni è al mio fianco, rivolgo il mio ringraziamento più caloroso, perché con tanta pazienza e calma ha affrontato il mio percorso di studi quasi come fosse il suo, senza mai risparmiarsi, dedicandomi ogni suo singolo pensiero, venendo in mio aiuto quando le difficoltà lo richiedevano e gioendo insieme a me per i traguardi raggiunti.

Vorrei infine ricordare e ringraziare in un unico abbraccio tutti gli amici che sono con me fin dagli anni delle scuole superiori (Gabriele, Gigi, Raffo e Salvo) e con i quali continuo a condividere attimi spensierati; l'amico e collega Simone che ormai da anni mi ascolta e mi consiglia; tutti i colleghi universitari (Carlo, Christian, Gennaro, Lucio, Mattia e Nicola) con i quali ho condiviso tutto il percorso di studi sia all'interno dell'università che al di fuori e tutti gli amici della sede SIPAL dell'Aeroporto di Grottaglie che mi hanno accolto come facessi parte della loro famiglia facendomi sentire a casa.

Grazie a tutti di cuore!



## Sommario

In questo lavoro di tesi si sono ripercorsi gli *step* necessari alla progettazione statica di una struttura primaria in versione *baseline* con componenti in lega di alluminio (Al7050-T7451) e rivestimento in materiale composito (CFRP) per un velivolo della categoria Business Jet.

Nel Capitolo 1 – Analisi di mercato è stata svolta una preliminare analisi della situazione attuale del mercato e dei suoi sviluppi futuri, al fine di valutare attraverso dati numerici l'effettiva utilità di investimento nella realizzazione di un nuovo modello di velivolo.

Nel Capitolo 2 – Progettazione del cassone alare, attraverso uno studio statistico dei modelli già operativi, si sono determinate le specifiche preliminari del velivolo, quali il numero dei passeggeri, il peso al decollo e all'atterraggio, la velocità, la quota di crociera e l'autonomia.

Si è definita la configurazione dell'ala, con apertura alare, lunghezza delle corde alla radice e all'estremità, angolo di freccia, angolo di diedro e profili alari e successivamente la struttura del cassone alare e dei suoi componenti.

Noti questi dati è stato possibile, facendo riferimento alla normativa CS-25, ottenere l'involuppo di volo del velivolo al fine di individuare il punto di maggior criticità che identificasse il *Load Case* più gravoso per l'intera struttura.

Nel Capitolo 3 – Progettazione del laminato in composito si sono studiate le orientazioni degli strati di CFRP e le percentuali di strati a tali orientazioni che potessero costituire un laminato che approssimasse al meglio le caratteristiche meccaniche della lega Al7050-T7451 usata in tutti gli altri componenti, studio che ha portato all'implementazione del Metodo Grafico di Miki, un metodo approssimato che definisce il legame tra orientazioni, frazioni volumetriche di strati e caratteristiche meccaniche desiderate.

Nel Capitolo 4 – Modello FEM globale, per completezza di presentazione, è stato descritto il modello FEM e gli elementi che lo compongono.

Nel Capitolo 5 – Criteri di Resistenza sono stati descritti tutti i criteri di resistenza per materiali metallici (*isotropi*) e compositi (*anisotropi*) ma dei quali solo 2 sono stati scelti al fine di verificare e validare il progetto strutturale:

- Criterio di Von Mises per i componenti metallici;
- Criterio di Tsai-Hill per i componenti compositi.

Nel Capitolo 6 – Risultati delle analisi e verifica strutturale sono stati presentati i risultati delle analisi svolte sul modello e sono stati applicati i criteri di verifica sulla sezione più sollecitata di ogni singolo componente al fine di verificarne e validarne la resistenza strutturale alla situazione di carico più critica.

Infine, nell'ultimo capitolo, *Conclusioni e sviluppi futuri* si sono presentati i vantaggi, gli svantaggi e i limiti che la progettazione con questo tipo di materiali pone e si sono dati degli spunti per un ulteriore sviluppo progettuale.

## Indice

<b>Capitolo 1 – Analisi di Mercato</b> .....	13
<b>1.1 – <i>PIL Mondiale</i> come indicatore di mercato</b> .....	14
<b>1.2 – Cicli di mercato</b> .....	14
<b>1.3 – Evoluzione del mercato B.J. nel periodo 2017-2026</b> .....	16
<b>1.4 – <i>BuyBack</i> come indicatore di mercato</b> .....	17
<b>1.5 – Conclusioni</b> .....	18
<b>Capitolo 2 – Progettazione del Cassone Alare</b> .....	21
<b>2.1 – Analisi statistica</b> .....	23
<b>2.2 – Analisi aerodinamica</b> .....	27
<b>2.2.1 – Scelta del profilo alare</b> .....	27
<b>2.2.2 – Risultati dell’analisi con XFRL5</b> .....	29
<b>2.3 – Involuppo di volo</b> .....	31
<b>2.3.1 – Diagramma di manovra</b> .....	32
<b>2.3.2 – Diagramma di raffica</b> .....	34
<b>2.3.3 – Involuppo di volo</b> .....	35
<b>2.4 – Definizione dei carichi</b> .....	36
<b>2.5 – Configurazione finale</b> .....	38
<b>Capitolo 3 – Progettazione del Laminato in Composito</b> .....	41
<b>3.1 – Generalità sui materiali compositi</b> .....	42
<b>3.2 – Generalità sulla meccanica dei compositi</b> .....	45
<b>3.3 – Teoria delle piastre a più strati di Mindlin e di Kirchhoff</b> .....	46
<b>3.4 – Tipi di laminati di uso frequente</b> .....	55
<b>3.4.1 – Laminati disaccoppiati</b> .....	56
<b>3.4.2 – Laminati bilanciati</b> .....	56
<b>3.4.3 – Laminati <i>angle-ply</i></b> .....	57
<b>3.4.4 – Laminati <i>cross-ply</i></b> .....	58
<b>3.4.5 – Laminati quasi-isotropi</b> .....	58
<b>3.5 – Procedura Grafica di Miki (<i>Miki’s Graphical Procedure</i>)</b> .....	58
<b>3.5.1 – Premesse</b> .....	58
<b>3.5.2 – Introduzione dei parametri di laminazione</b> .....	59
<b>3.5.3 – Il metodo di Miki</b> .....	62

3.6 – Progettazione del laminato e risultati della progettazione .....	69
<b>Capitolo 4 – Modello FEM Globale .....</b>	<b>77</b>
4.1 – Disegno CAD.....	79
4.2 – Creazione della mesh .....	79
4.3 – Elementi finiti del modello FEM .....	81
4.3.1 – ROD .....	81
4.3.2 – BAR.....	82
4.3.3 – QUAD4 e TRIA3 .....	84
<b>Capitolo 5 – Criteri di Resistenza .....</b>	<b>89</b>
5.1 – Criteri di resistenza per materiali isotropi.....	91
5.1.1 – Criterio di Tresca (Massima Tensione Tangenziale) .....	91
5.1.2 – Criterio di Von Mises (Massima Energia di Distorsione).....	92
5.1.3 – Criterio di Galileo-Rankine (Massima Tensione Normale) .....	94
5.1.4 - Criterio di Grashof-S. Venant (Massima Deformazione Normale) .....	95
5.2 – Criteri di resistenza per materiali anisotropi.....	96
5.2.1 – Criterio della Tensione Massima.....	96
5.2.2 – Criterio della Deformazione Massima .....	97
5.2.3 – Criterio di Tsai-Hill.....	98
5.2.4 – Criterio di Hoffman.....	100
5.2.5 – Criterio di Tsai-Wu .....	101
<b>Capitolo 6 – Risultati delle Analisi e Verifica Strutturale.....</b>	<b>103</b>
6.1 – Spostamenti del modello FEM globale.....	105
6.2 – Stress del modello FEM globale .....	106
6.3 – Verifica strutturale del longherone anteriore .....	107
6.3.1 – Freebody Loads nella sezione più sollecitata.....	107
6.3.2 – Sforzi sulla sezione più sollecitata .....	109
6.3.3 – Applicazione del Criterio di Von Mises.....	110
6.4 – Verifica strutturale del longherone posteriore .....	111
6.5 – Verifica strutturale del longherone ausiliario .....	114
6.6 – Verifica strutturale delle centine .....	117
6.7 – Verifica strutturale del rivestimento .....	120
6.7.1 – Premesse.....	120

## Indice

6.7.2 – Processo di ottimizzazione .....	122
6.7.3 – Applicazione del Criterio di Tsai-Hill.....	126
<b>Conclusioni e Sviluppi Futuri</b> .....	129
<b>Indice delle figure</b> .....	131
<b>Indice delle tabelle</b> .....	135
<b>Bibliografia</b> .....	137



# Capitolo 1 – Analisi di Mercato <sup>1</sup>

La progettazione di un velivolo non può essere avviata se non dopo un'analisi preliminare di mercato, motivo per cui questo primo capitolo si occuperà di analizzare il mercato dei velivoli Business Jet al fine di sottolineare il vantaggio di investire su questo segmento dell'aviazione civile.

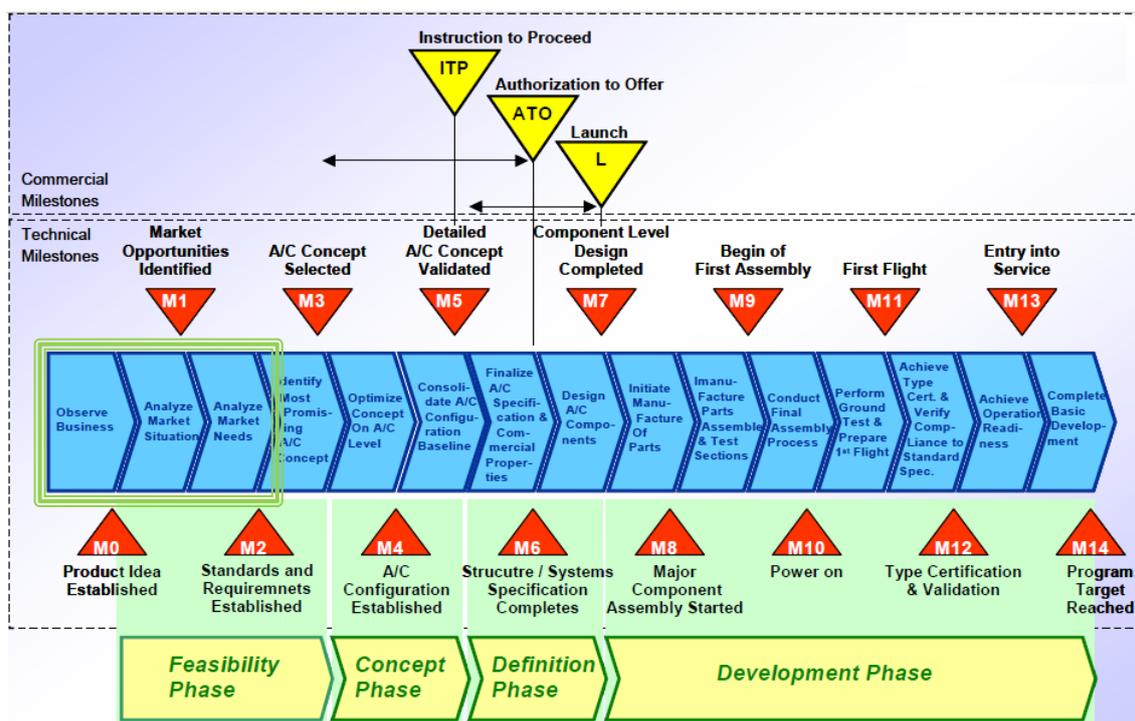


Figura 1.1: Programma di sviluppo di un velivolo – Analisi di mercato

L'analisi di mercato è una previsione a lungo termine del volume di traffico aereo e della domanda di velivoli, sia per un incremento della flotta delle compagnie aeree, sia per la sostituzione di velivoli che verranno ritirati durante il periodo al quale l'analisi è riferita.

Quindi l'analisi di mercato viene effettuata perché aiuta a programmare la strategia di produzione e la pianificazione commerciale di lungo periodo.

L'analisi a lungo termine considera gli effetti delle forze di mercato per lo sviluppo dell'industria dell'aviazione; diversi sono i fattori principali, tra cui il prezzo del carburante, lo sviluppo di infrastrutture e i mercati emergenti, ma un parametro fondamentale è la crescita economica misurata in termini di Prodotto Interno Lordo (PIL) o Gross Domestic Product (GDP).

<sup>1</sup> Il materiale del capitolo si riferisce alla voce [1] della bibliografia.

## 1.1 – *PIL Mondiale* come indicatore di mercato

Utilizzando il periodo 1994-2016 e l'anno 1944 come anno di riferimento è stata testata l'efficacia della variabile generale *PIL Mondiale* come indicatore dei singoli velivoli prodotti, venduti e consegnati.

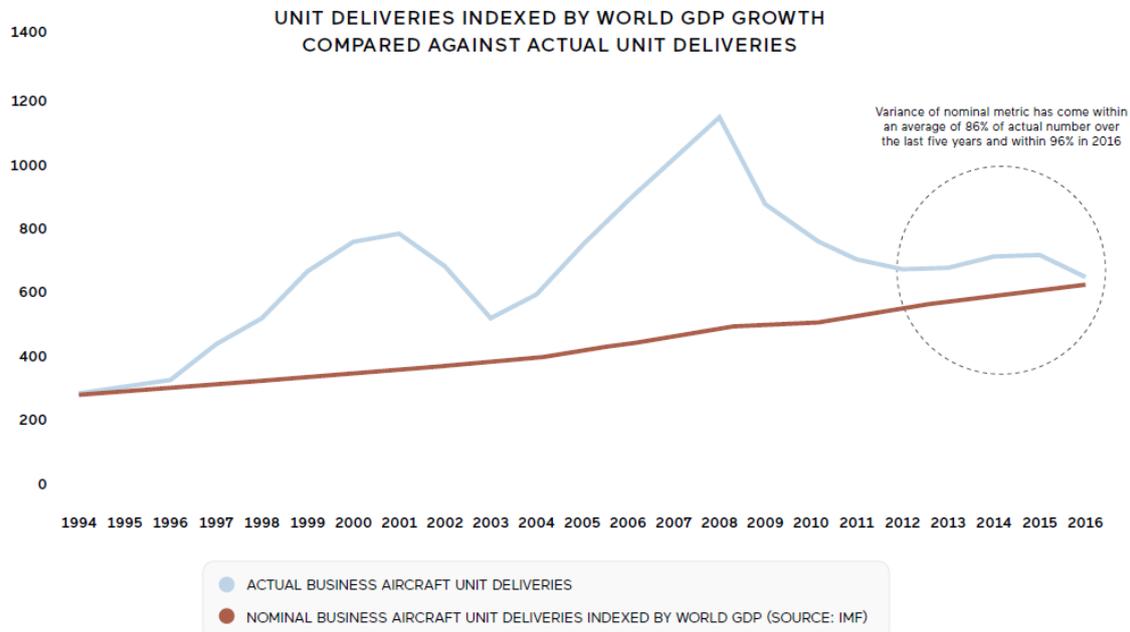


Figura 1.2: Andamento del mercato B.J. in relazione al *PIL Mondiale*

La somma totale delle consegne nominali derivate dall'indicizzazione delle unità attraverso il *PIL Mondiale* ha generato un numero di 9897 aerei consegnati, cioè 5518 unità in meno rispetto alle consegne effettive a causa del fatto che la variabile usata sottostima le unità consegnate durante i periodi di significativa espansione economica, cioè dal 1998 al 2001 e dal 2003 al 2008.

Invece durante i periodi di crescita lenta, la variabile *PIL mondiale* ha stimato molto bene la richiesta di velivoli avuta sul mercato.

Quindi, poiché la proiezione per l'economia globale richiede un'espansione più lenta ma stabile nel breve-medio termine, si considera il *PIL Mondiale* un buon indicatore della del futuro andamento della richiesta di mercato per i velivoli della categoria Business Jet.

## 1.2 – Cicli di mercato

Mettendo l'attuale ciclo di mercato (2017-2016) a confronto con i due precedenti (1995-2003 e 2004-2016) è possibile distinguere i vari cicli e confrontarli con il Tasso di Crescita Annuale Composto (o Compound Annual Growth Rate CAGR) registrato negli stessi periodi, evidenziando:

- *Ciclo Dot-Com* con una crescita annua del CAGR del 17% ed una brusca flessione successiva, 7 anni di crescita hanno portato a 2 anni di recessione;

## Analisi di Mercato

- *Ciclo dei mercati emergenti* con una crescita annua del CAGR pari a quella del ciclo precedente ma una recessione più lunga e netta, conclusasi nel 2008 con la fine del periodo di recessione e l'inizio di un periodo di transizione stabilizzato dai cambiamenti subiti dai mercati;
- *Ciclo 2017-2026* con una crescita più piatta con menò unità vendute ma maggiori ricavi

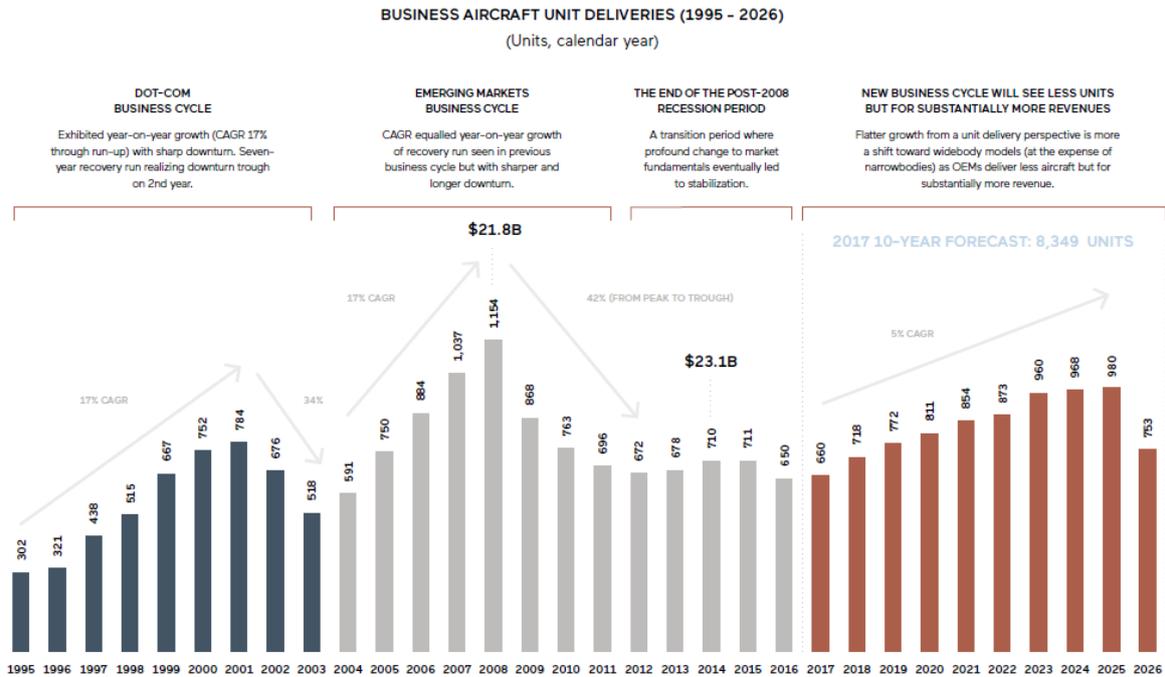


Figura 1.3: Andamento dei cicli di mercato 1995-2003, 2004-2016 e previsioni del ciclo 2017-2026

I maggiori ricavi sono dovuti al fatto che solo negli ultimi 10 anni il prezzo medio unitario del velivolo è aumentato del 56% e nel corso del periodo di previsione, si prevede un ulteriore aumento del 16% rispetto al prezzo medio unitario attuale.

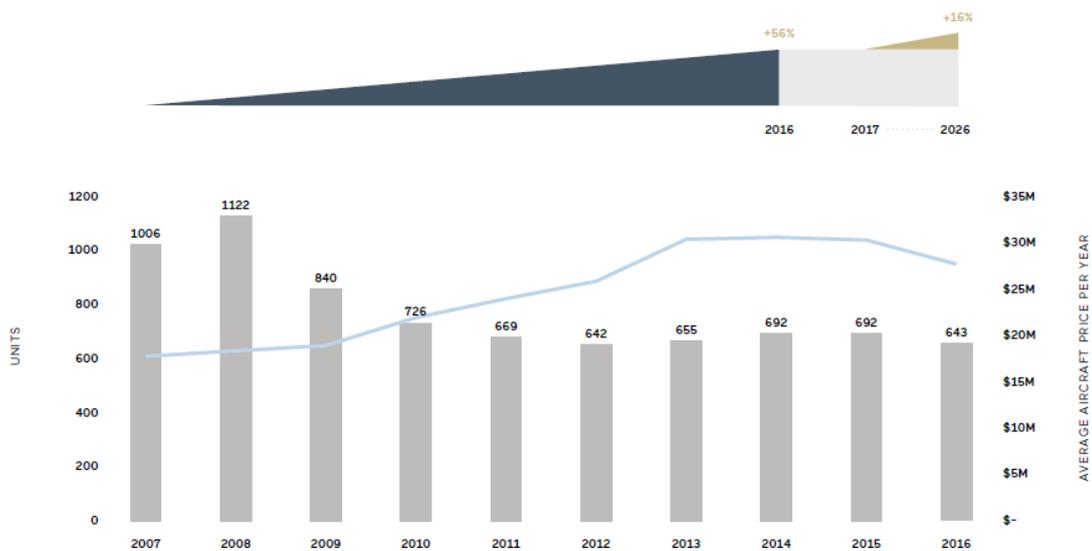


Figura 1.4: Andamento del mercato B.J. in relazione al costo medio dell'aeromobile per anno

### 1.3 – Evoluzione del mercato B.J. nel periodo 2017-2026

Il mercato dell'aviazione Business Jet nel corso del periodo di previsione porterà un aumento delle unità operative del 3,3%, con un aumento di velivoli del segmento medio (*Medium*) e grande (*Large*) a danno dei modelli del segmento piccolo (*Small*).

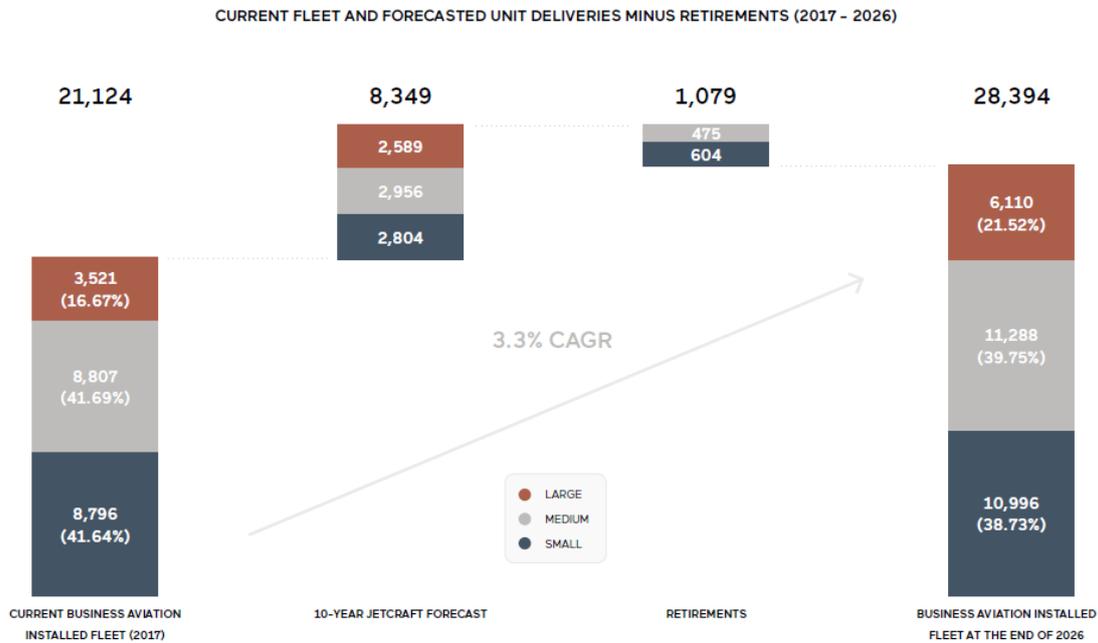


Figura 1.5: Flotta B.J. attuale + Nuove unità consegnate (2017-2026) – Ritiri dal servizio (2017-2026)

Ciò è dovuto in parte al maggior sviluppo dei modelli widebody a svantaggio dei narrowbody ed in parte al tasso di diminuzione del 5% dovuto al ritiro di modelli con più anni di servizio esclusivamente nei segmenti di piccole e medie dimensioni.

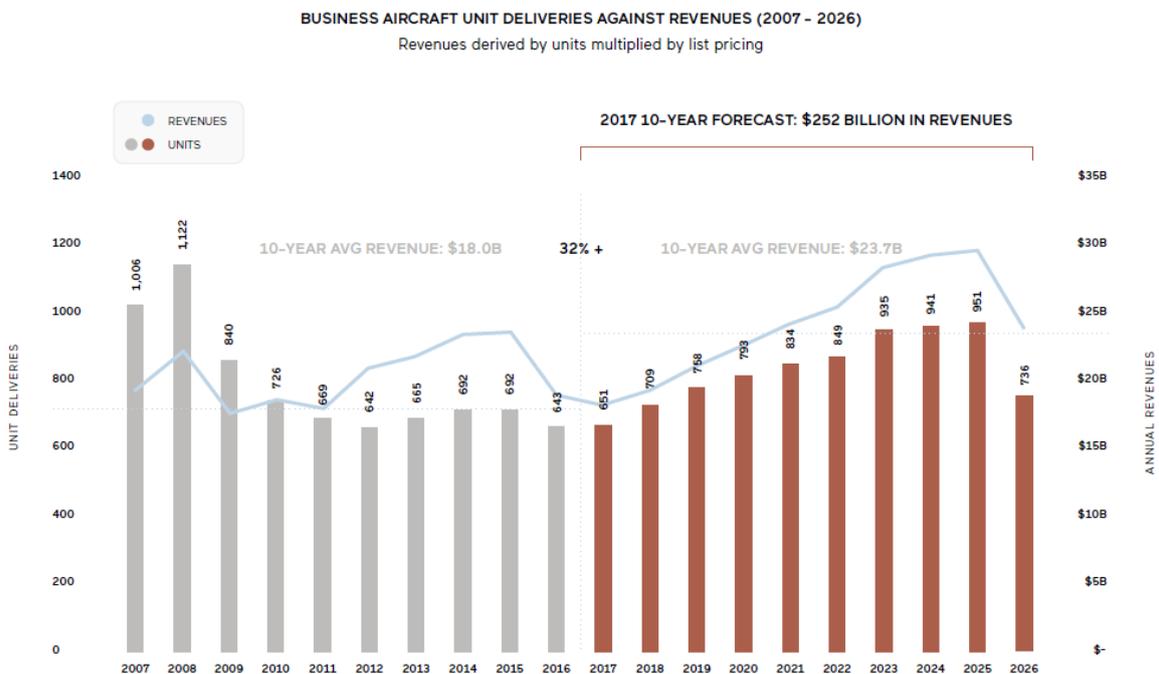


Figura 1.6: Andamento del mercato B.J. in relazione al fatturato annuale

### 1.4 – BuyBack come indicatore di mercato

In passato il monitoraggio dell'espansione economica attraverso la crescita del PIL o i profitti aziendali erano indicatori sufficiente per valutare lo stato del mercato, ma la recessione del 2008 ha influenzato sull'acquisto di aerei soprattutto da parte delle aziende pubbliche, rendendo inadeguati gli indicatori utilizzati in passato e costringendo le aziende a comprendere meglio le dinamiche di acquisto delle società acquisendo una migliore comprensione di come le aziende utilizzano i propri capitali.

Ci sono essenzialmente cinque modi in cui le società usano le loro riserve di liquidità: effettuano riacquisti di azioni (*BuyBack*), emettono dividendi, acquistano altre società (M&A), investono in ricerca e sviluppo e migliorano attrezzature e impianti.

Il problema è che l'attività di *BuyBack* di azioni proprie sta spostando la liquidità disponibile dal capitale spendibile (dove si presume risiedono i budget per gli acquisti di aeromobili).

Anche se l'attività di *BuyBack* sia ancora praticata, la quota annuale finanziata dal debito è diminuita dal 2015 al 2016 tendendo verso il livello medio finale degli ultimi cinque anni. Invece nel 2017 la tendenza generale del *BuyBack* è diminuita del 17% rispetto allo stesso periodo dell'anno scorso. Se la tendenza di *BuyBack* continua a diminuire, i riacquisti delle azioni finanziati dal debito dovrebbero seguire lo stesso andamento, consentendo alle società di spostare la loro attenzione sulle operazioni di acquisto.

Questa tendenza insieme alla diminuzione dell'indice di volatilità aziendale sta favorendo la stabilità del mercato nel suo complesso.

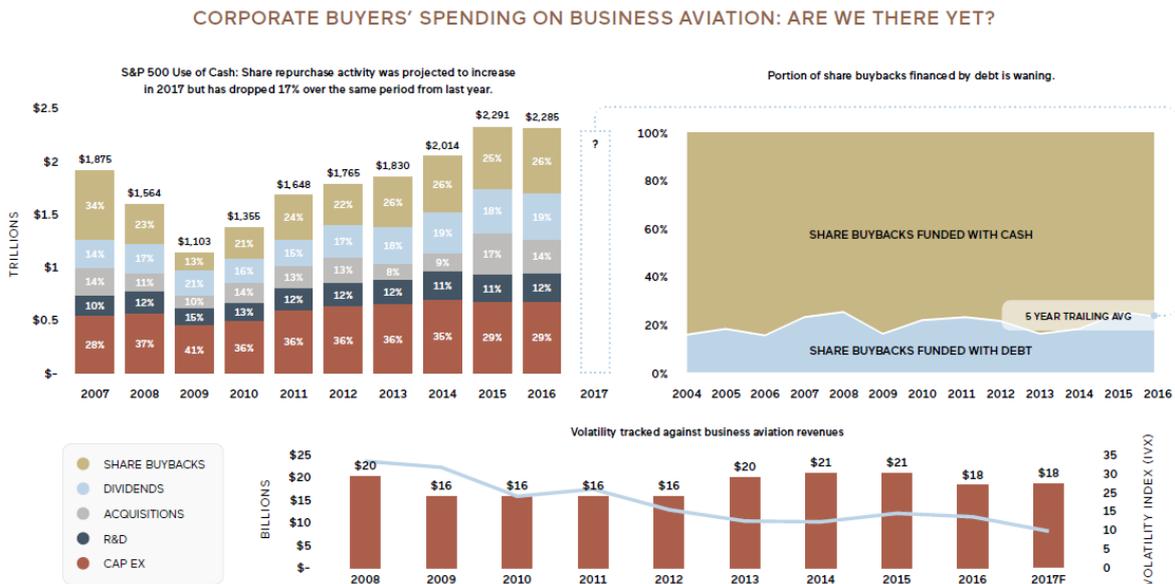


Figura 1.7: Andamento del fenomeno BuyBack

## 1.5 – Conclusioni

Le previsioni di mercato per il 2017 prevedono la consegna di 8349 nuove unità, per un valore di 252 miliardi \$US di ricavi (in base ai prezzi del 2017), da realizzare nei prossimi 10 anni. Passando da una flotta mondiale di 21000 aeromobili ad una flotta di aerei commerciali che supererà le 28000 unità (al netto dei ritiri) nel 2026.

La preferenza del mercato va verso modelli di aerei widebody più costosi con il prezzo di listino per aeromobile che aumenta del 56% durante questo ciclo di mercato e si prevede che tale tendenza continui ed il prezzo medio di listino per aeromobile aumenterà di un ulteriore 16% nel periodo di previsione.

Dal punto di vista del cliente, l'attuale tasso di partecipazione al mercato equamente diviso tra le società e gli *Ultra high-net-worth individuals (UHNWIs)*, definiti come coloro che possiedono un patrimonio netto di minimo 30 milioni \$US, presuppone una potenziale di crescita da entrambe le parti. Il modello di mercato prevede un aumento del numero di transazioni proveniente da società pubbliche quando la loro tendenza al *BuyBack* diminuirà ed aumenterà l'attenzione verso le spese di capitale.

Per quanto riguarda gli *UHNWIs*, le prospettive di creazione di ricchezza continueranno a crescere nel periodo di previsione, specialmente in Asia e la partecipazione al mercato dell'aviazione B.J. sarà ulteriormente sostenuta dalla continua, anche se rallentata, migrazione dai mercati emergenti verso regioni più consolidate e con uno consolidato sviluppo dell'aviazione commerciale.

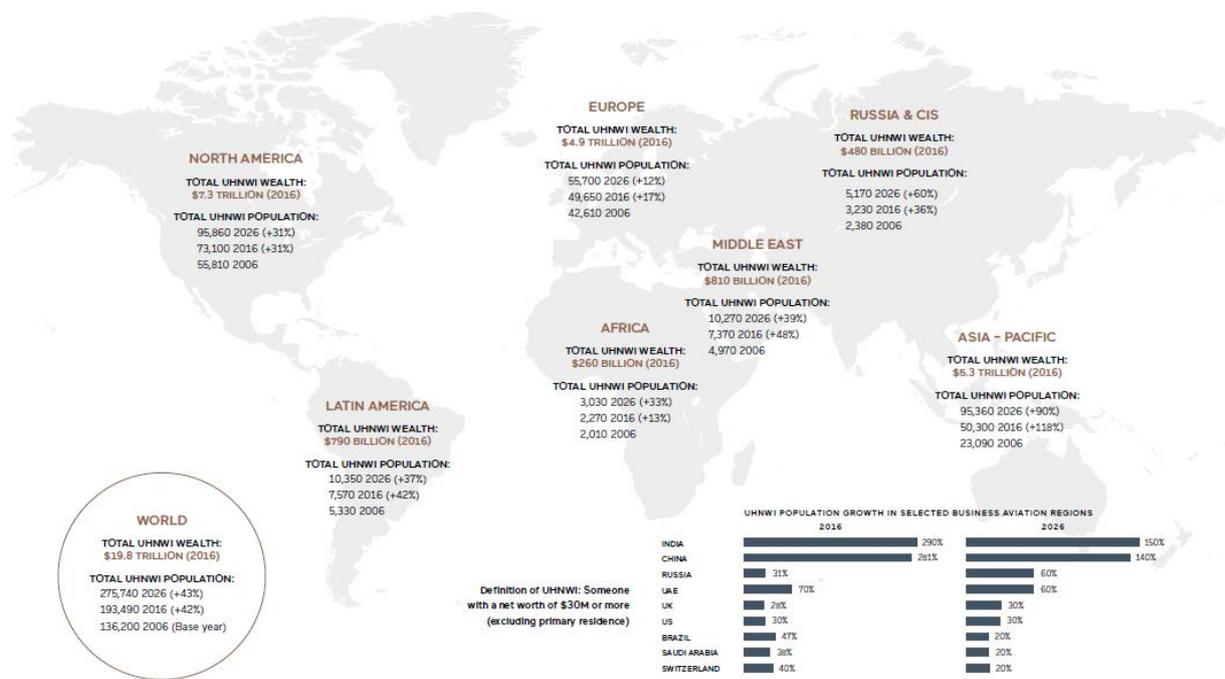


Figura 1.8: Andamento dell'indice UHNWI per regione geografica

Mentre l'impatto di alcuni eventi geopolitici ed economici, come ad esempio la Brexit, le crisi migratorie europee, la politica monetaria sono stati considerati nelle ipotesi del modello previsionale ma continuano a costruire un rischio per la previsione complessiva.

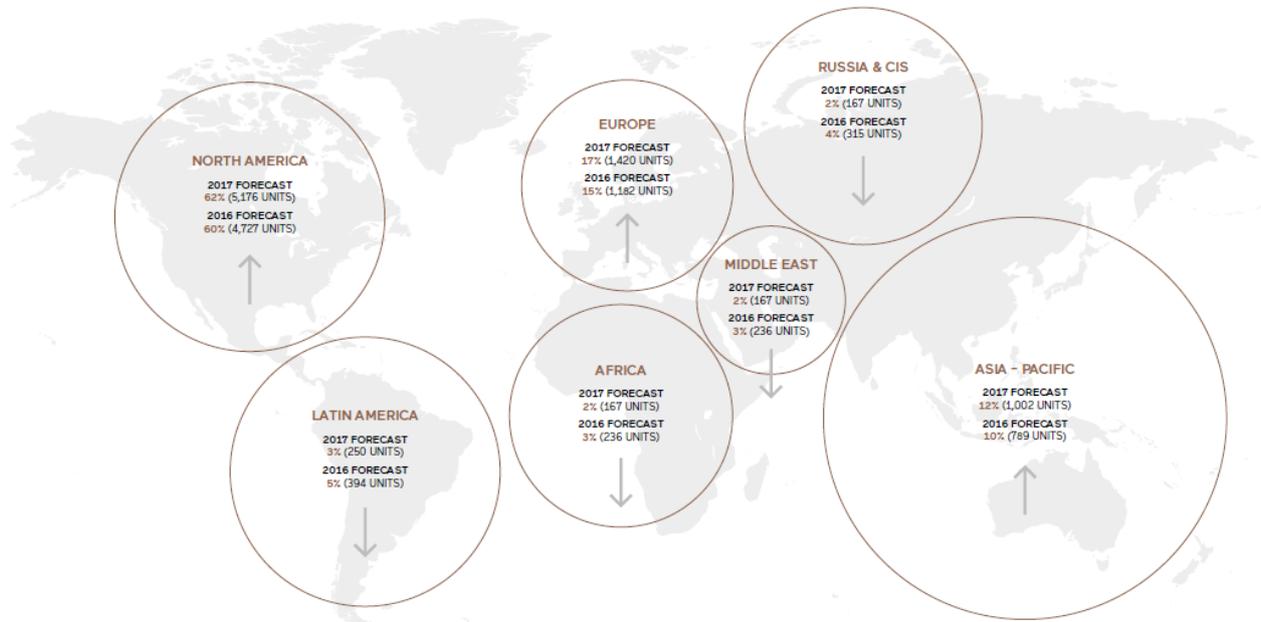


Figura 1.9: Distribuzione per regione geografica delle 8349 unità per il periodo 2017-2026



## Capitolo 2 – Progettazione del Cassone Alare <sup>2</sup>

Successivamente all'analisi di mercato, con la quale si dimostra come la riuscita progettazione di un nuovo velivolo della classe Business Jet possa essere remunerativa per l'azienda costruttrice e di interesse per il mercato futuro, si sviluppa in questo capitolo il prodotto ala, soffermandosi in particolare sul dimensionamento e la verifica del cassone alare.

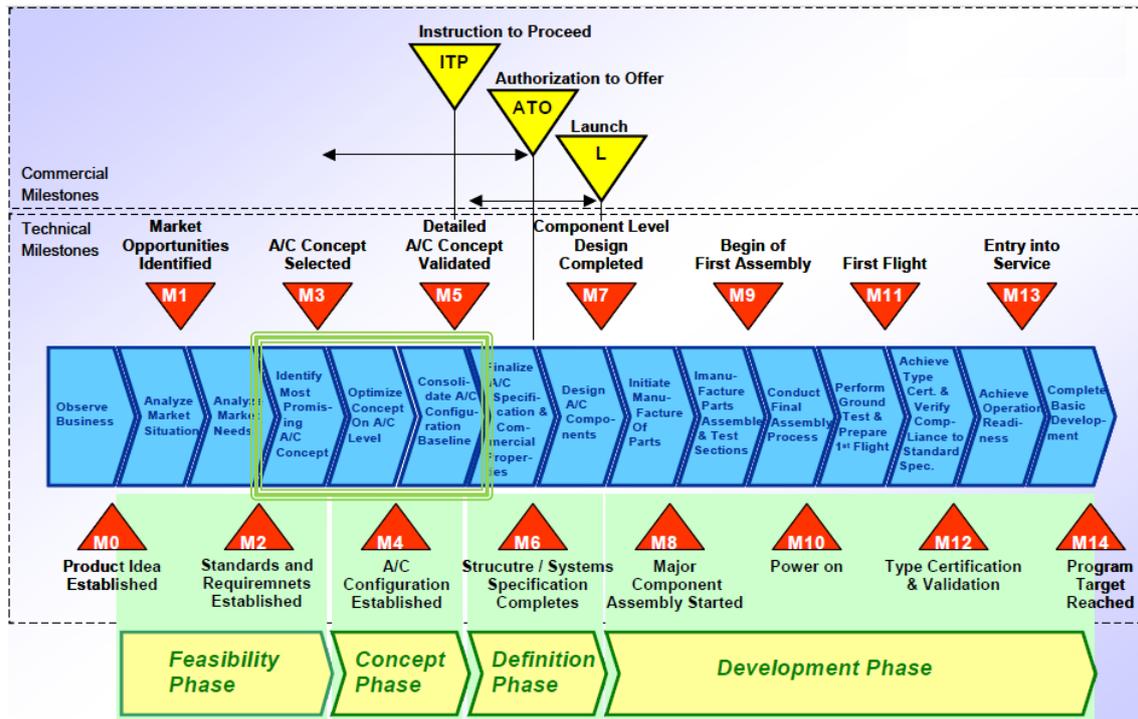


Figura 2.1: Programma di sviluppo di un velivolo – Progettazione del cassone alare

Infatti la corretta progettazione del cassone alare è un requisito fondamentale nel processo di progettazione.

Il cassone alare è il principale componente strutturale di un'ala in quanto riproduce la geometria interna di un'ala e soprattutto è il componente che ha il compito di resistere alle forze aerodinamiche di flessione e torsione a cui è soggetta tutta l'ala durante la sua vita operativa.

Il capitolo si sviluppa partendo da un'analisi statistica delle caratteristiche alari e prestazionali dei velivoli facenti parte della classe Business Jet, al fine di determinare le dimensioni preliminari dell'ala e la configurazione del prodotto in versione *baseline*.

Arrivando, infine, ad uno studio semplificato dei carichi, indispensabili in fase di simulazione, a cui la stessa ala è soggetta nella condizione di volo più critica.

<sup>2</sup> Il materiale del capitolo si riferisce alla voce [2] della bibliografia.

L'involuppo di volo, tracciato secondo la normativa EASA CS-25, è utile per determinare la condizione di volo più critica nella quale devono essere calcolati i carichi aerodinamici a cui è soggetta la struttura indispensabili in fase di simulazione.

## 2.1 – Analisi statistica

L'obiettivo principale dell'analisi statistica è quello di raccogliere un sufficiente numero di dati da esaminare, al fine di determinare le caratteristiche geometriche e prestazionali dei velivoli esistenti e individuare le tendenze dei principali parametri di progetto.

I dati statistici ricavati in questo paragrafo verranno utilizzati nei paragrafi successivi, per compiere un dimensionamento preliminare del prodotto ala e cassone alare in versione *baseline*.

Il progetto preliminare anche se svolto in modo semplificato richiede l'utilizzo di più parametri e variabili utili per la definizione della configurazione e l'ottimizzazione della stessa.

Infatti la procedura solitamente utilizzata per lo svolgimento di un progetto è quella di basarsi su progetti simili, come strumento di riferimento.

La progettazione di un nuovo aeromobile è un'attività complessa, non lineare e multidisciplinare, in cui i diversi ambiti di design sono caratterizzati da esigenze che potrebbero essere in conflitto tra loro, quindi al fine di soddisfarle tutte in maniera compatibile con i vincoli progettuali è necessario trovare dei compromessi ed effettuare una serie di *trade-off*.

A causa di questa complessità, una strategia per realizzare un progetto è proprio quella di avviare nelle prime fasi una ricerca e raccolta di dati statistici su velivoli già presenti sul mercato e successivamente avviare lo sviluppo di soluzioni ingegneristiche che portano alla progettazione e all'introduzione nel mercato di un nuovo prodotto.

I velivoli esaminati in questo paragrafo fanno parte delle case costruttrici:

- Bombardier;
- Dassault;
- Embraer;
- Gulfstream.

Analizzando questi modelli di interesse si sono ottenuti dei dati utilizzabili come parametri di progetto quali il numero di passeggeri, il *Maximum take-Off Weight* (MTOW), le caratteristiche geometriche dell'ala come apertura alare, lunghezza delle corde, angolo di freccia e dietro, velocità di crociera e quota di volo.

I dati ottenuti da questa attività di ricerca sono riassunti all'interno della tabella 2.1 (pagina seguente) e tramite quest'analisi, effettuata per mezzo della loro interpolazione, si sono potuti individuare i principali parametri di progetto e prestazionali dell'aeromobile, consentendo una stima preliminare di geometria e configurazione.

	Bombardier			Dassault			Embraer			Gulfstream		
	Global 5000	Global 6000	Global 7000	Global 8000	Falcon 7X	Falcon 8X	Lineage 1000	G550	G550	G600	G650	G650ER
Capacity [pass]	19	17	19	17	16	16	19	19	19	19	19	19
Wing span [m]	28.70	28.70	31.70	31.70	26.21	26.29	28.72	26.30	28.50	28.90	30.36	30.36
Wing area [m <sup>2</sup> ]	94.80	94.80			70.70	70.70	92.50	88.30	105.60		119.20	119.20
Root Chord [m]	6.28	6.44	7.39	7.53	5.17		5.50		6.05	7.11	7.20	7.77
Tip Chord [m]	1.37	1.30	1.35	1.41	1.10		1.50		1.65	1.50	1.40	1.62
Sweep angle $\Lambda$ [°]	37	38	38	39	42		27		30	41	42	42
Dihedral angle $\Gamma$ [°]	8	8	9	8	6		11		3	2	6	6
Max. takeoff weight [kg]	41957	45132	48194	47536	31751	33113	54500	36106	41277	42910	45178	46992
Max. zero-fuel weight [kg]	26308	26308	28350	27216	18598	18598	36500	23632	24721	26055	27442	27442
Basic operating weight [kg]	23070	23691	25764	24630	16600	16357	32133	21251	21909	23347	24494	2948
Max. fuel weight [kg]	17804	20434	21523	22203	14488	15830	21871	13721	18733	18929	20049	21863
Max speed [Mach]	0.89	0.89	0.93	0.93	0.90	0.90	0.82	0.93	0.89	0.93	0.93	0.93
Cruise speed [Mach]	0.85	0.85	0.85	0.85	0.80	0.80		0.85	0.80	0.85	0.85	0.85
Range [km]	9630	11112	13705	14631	11019	11945	8519	12964	12501	12038	12964	13890
Max. operating altitude [m]	15545	15545	15545	15545	15545	15545	12000	15545	15545	15545	15545	15545

Tabella 2.1: Dati per analisi statistica

## Progettazione del Cassone Alare

Per una esposizione più chiara delle analisi svolte sui dati raccolti, rispetto alla tabella precedente, si riportano qui di seguito i grafici dei dati in relazione al numero di passeggeri, in quanto il dato passeggeri è il parametro guida di questa progettazione ed è il meno soggetto ad incertezze.

Nei grafici è rappresentata anche la retta di regressione ( $y = ax + b$ ) e la sua equazione utilizzata nella determinazione delle caratteristiche di progetto.

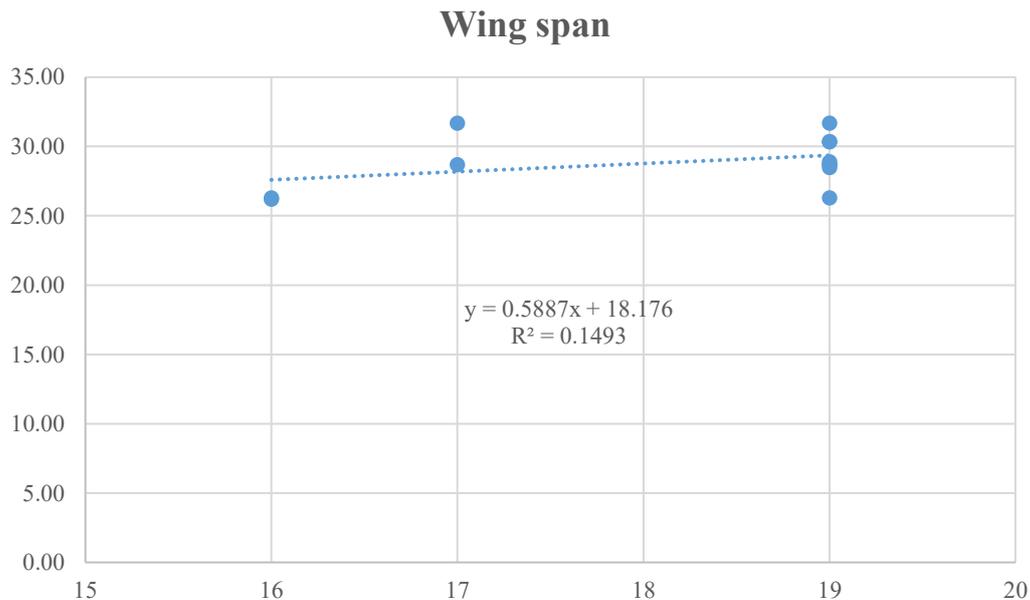


Figura 2.2: Apertura alare

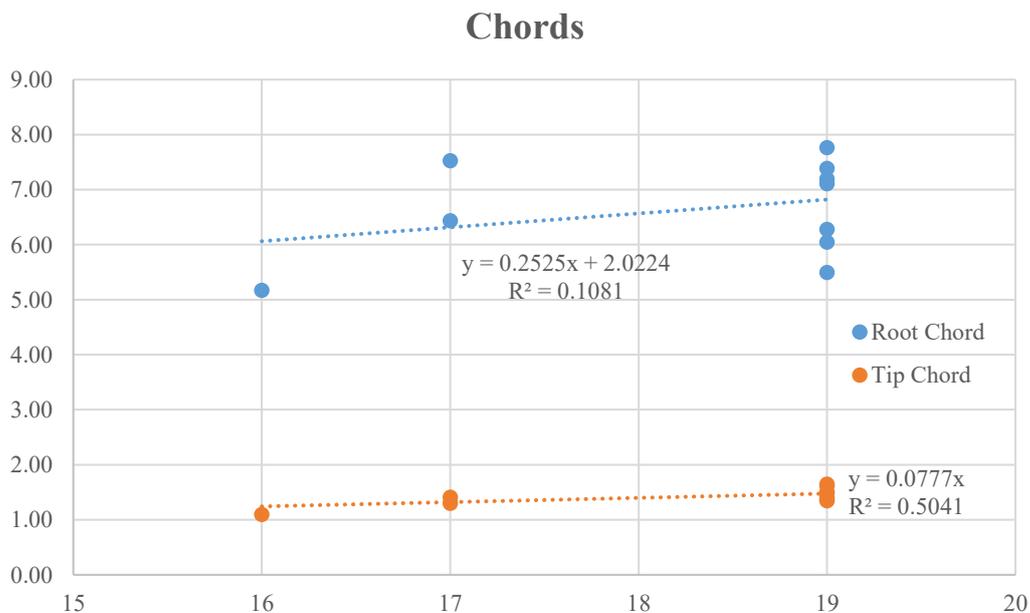


Figura 2.3: Corde dei profili alla radice (root) all'estremità (tip)

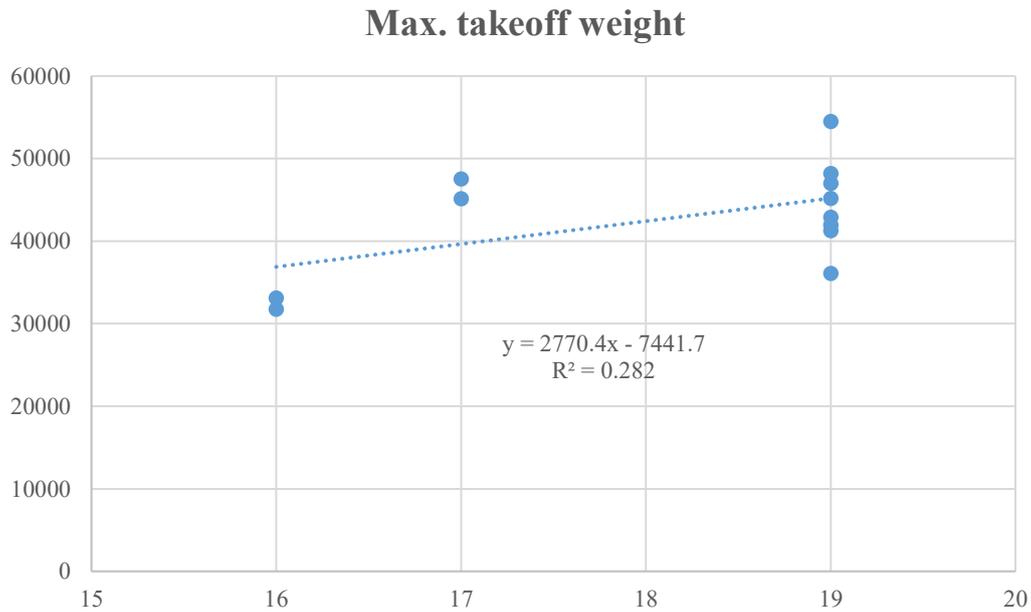


Figura 2.4: Massimo peso al decollo (MTOW)

Per concludere, nella tabella 2.2 , si espone una ricapitolazione di tutti i dati stimati attraverso l'analisi statistica che saranno il punto di partenza della progettazione dell'ala e che successivamente si riveleranno utili nelle fasi di progettazione del cassone alare, del suo rivestimento in composito e in fase di simulazione su Patran/Nastran.

<b>Passeggeri</b>	13
<b>MTOW [Kg]</b>	19750.00
<b>Apertura alare [m]</b>	20.43
<b>Corda alla radice [m]</b>	5.219
<b>Corda all'estremità [m]</b>	1.019
<b>Angolo di freccia [°]</b>	33.00
<b>Angolo di diedro [°]</b>	2.00
<b>Velocità di crociera [Mach]</b>	0.82
<b>Quota di volo [m]</b>	13715.00

Tabella 2.2: Dati stimati

## 2.2 – Analisi aerodinamica

La fase di progettazione aerodinamica ha l'obiettivo di determinare le forze e momenti aerodinamici che agiscono sulle superfici del velivolo.

In questa fase di analisi sarebbe opportuno considerare tutti i componenti del velivolo ma è sicuramente l'ala ad avere impatto più significativo, infatti le sue dimensioni e la sua forma forniscono il maggiore contributo alla portanza e alla resistenza.

Bisogna notare come il comportamento dell'ala è determinato dal comportamento di tutte le sezioni che la compongono, quindi oltre ad un'analisi tridimensionale è anche necessaria un'analisi dei singoli dei singoli profili, poiché la scelta di un profilo influenzerà l'intero progetto dell'ala e determinerà i carichi a cui il cassone alare sarà soggetto.

Pertanto si determinano le specifiche del progetto aerodinamico e quindi si procede ad una analisi bidimensionale dei profili per stimare successivamente il comportamento tridimensionale dell'ala.

Bisogna ora definire due proprietà geometriche fondamentali:

- Profilo alare;
- Forma in pianta dell'ala.

Le specifiche di un profilo richiedono la definizione della corda geometrica, del inarcamento, dello spessore massimo e del raggio di curvatura al bordo d'attacco.

Va considerato anche il fatto che il profilo alare varia lungo l'apertura per fornire condizioni di flusso liscio e continuo su tutte le sezioni dell'ala.

Nell'effettuare le scelte progettuali preliminari è necessario considerare tre requisiti fondamentali richiesti all'ala:

- Deve essere efficiente nelle condizioni di crociera poiché costituisce la fase più lunga della missione;
- Deve essere in grado di fornire la giusta portanza sia al decollo che all'atterraggio;
- Deve avere la minor resistenza possibile nella fase critica di salita.

### 2.2.1 – Scelta del profilo alare

La definizione dei profili alari è stata effettuata scegliendo 3 profili supercritici poiché sono adatti a velivoli con velocità di volo ad alto regime subsonico, garantiscono una bassa resistenza e quindi una diminuzione del consumo di combustibile.

I profili supercritici sono profili transonici caratterizzati da un flusso turbolento in grado di spostare il Mach di *Drag Divergence* (MDD) verso valori più alti ampliando così il campo di velocità in cui il velivolo può volare senza riscontrare un aumento di

resistenza dovuto al generarsi di onde d'urto e sono anche in grado di mantenere in un range di valori accettabili il coefficiente di portanza a basse velocità posticipando il fenomeno dello stallo.

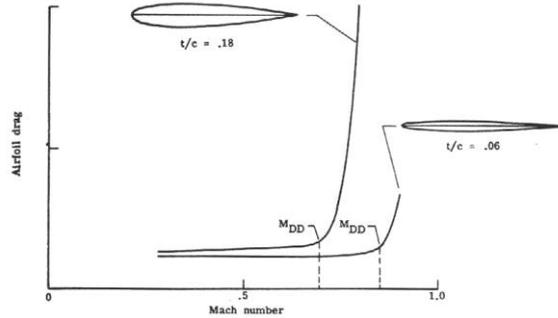


Figura 2.5: Confronto del  $M_{DD}$  al variare dello spessore

Quando questo tipo di profilo è investito da una corrente transonica la velocità sul dorso diventa localmente supersonica a causa dell'accelerazione data al flusso dallo spessore, a differenza di un profilo convenzionale, dove questa regione di flusso supersonico finisce a circa metà della corda alare con un onda d'urto.

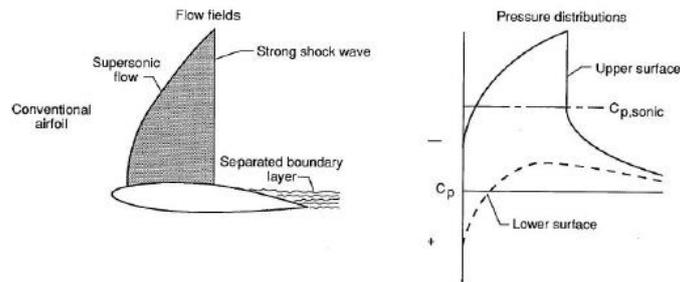


Figura 2.6: Distribuzione del  $C_p$  lungo un profilo convenzionale in regime transonico

Questa onda d'urto è seguita da una decelerazione del flusso, con aumento della pressione, che può causare separazione dello strato limite, con aumento della resistenza, diminuzione del coefficiente di pressione e nascita di fenomeni di instabilità.

In un profilo supercritico invece l'onda d'urto sul dorso è spostata verso il bordo d'uscita aumentando la regione in cui la corrente è supersonica.

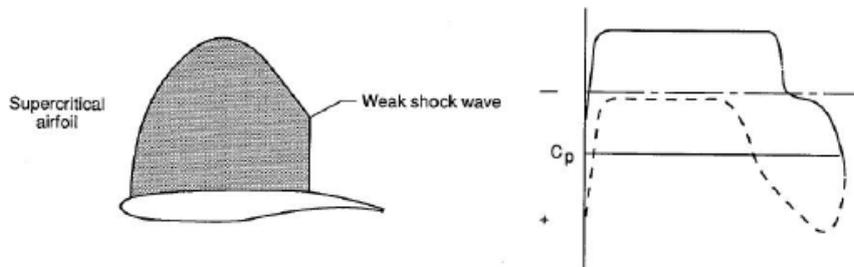
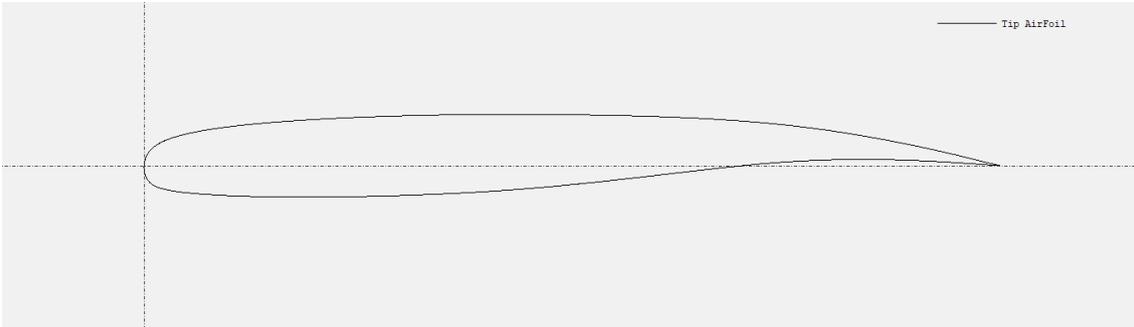
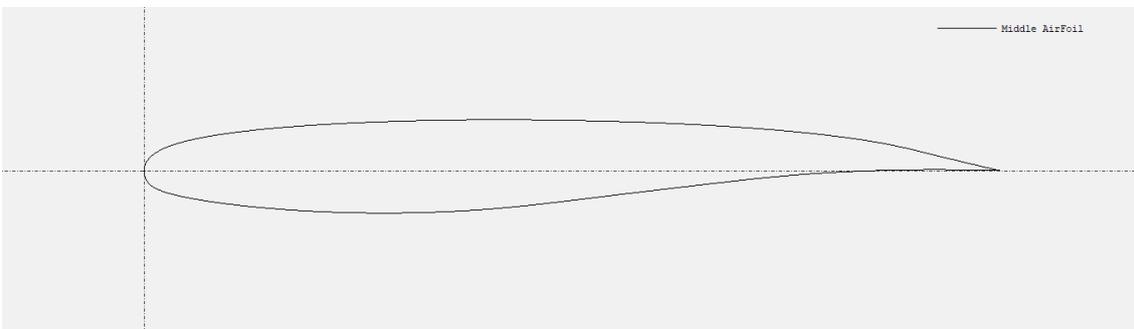


Figura 2.7: Distribuzione del  $C_p$  lungo un profilo convenzionale in regime transonico

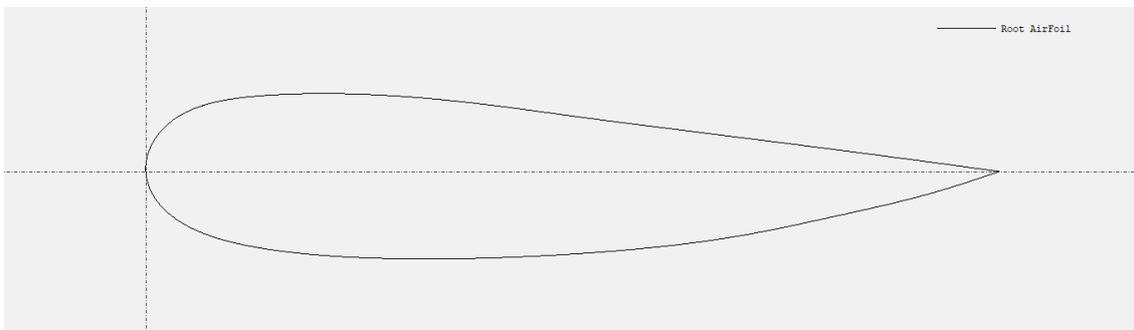
Considerando queste premesse i 3 profili scelti sono:



*Figura 2.8: Profilo all'estremità alare*



*Figura 2.9: Profilo intermedio*



*Figura 2.10: Profilo alla radice*

### 2.2.2 – Risultati dell'analisi con XFRL5

Essendo l'obiettivo di questa analisi la determinazione dei carichi a cui l'ala è soggetta al fine di poter impostare correttamente l'analisi FEM, si è utilizzato il software XFRL5 v6.39 per modellare l'ala e ricavare l'andamento del coefficiente di portanza  $C_L$  e i carichi che agiscono sull'ala.

XFRL5 v6.39 è un tool per l'analisi di profili alari e ali che include al suo interno le capacità di analisi diretta e inversa di XFOIL e in aggiunta la possibilità di modellare ed analizzare ali attraverso la Teoria della Linea Portante, il *Vortex Lattice Method* ed il Metodo 3D dei Pannelli.

Tramite XFLR5 v6.39 è stato strutturato il modello dell'ala, riportato di seguito, poiché la geometria è proprio uno dei parametri di *input* necessari per avviare l'analisi.

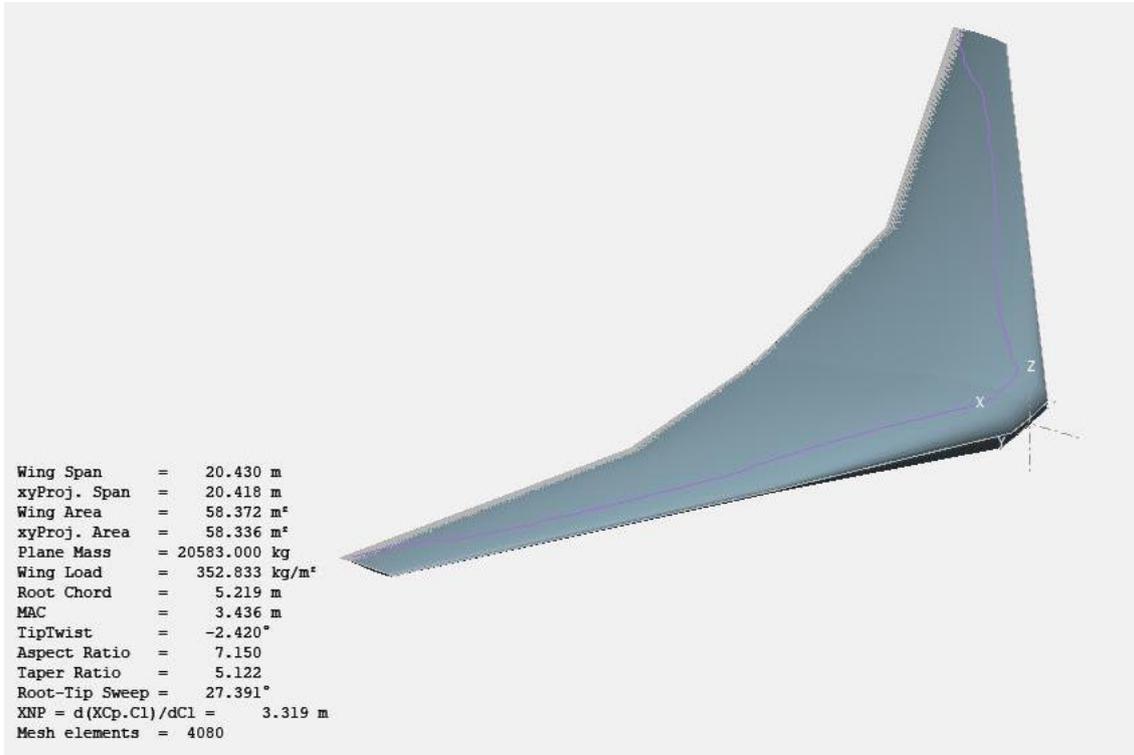


Figura 2.11: Modello dell'ala su XFLR5

I restanti parametri sono stati definiti per il volo a quota di crociera:

- Densità  $\rho = 0.237 \frac{Kg}{m^3}$ ;
- Viscosità dinamica  $1.43 \cdot 10^{-5} \frac{N}{ms}$ ;
- Viscosità cinematica  $6.03 \cdot 10^{-5} \frac{m^2}{s}$

ma a velocità superiore a quella di crociera, secondo quanto riportato dalla normativa EASA CS-25:

- Velocità  $V = 1.25 \cdot V_{cruise}$ .

Da questa analisi è stato possibile ricavare l'andamento del  $C_L$  necessario per la definizione dei diagrammi di manovra e raffica al fine di determinare l'involuppo di volo e di conseguenza la condizione di carico più critica.

Se la condizione di carico più critica dovesse essere diversa da quella utilizzata nella precedente analisi, si dovranno modificare i parametri, effettuare nuovamente l'analisi per ricavare la curva  $C_L$  con le nuove condizioni e conseguentemente correggere l'involuppo di volo.

Si capisce come già nella fase di progettazione della configurazione di ala e cassone alare i procedimenti di calcolo siano iterativi e come sia necessario ripeterli in sequenza più e più volte al fine di determinare la corretta soluzione del problema.

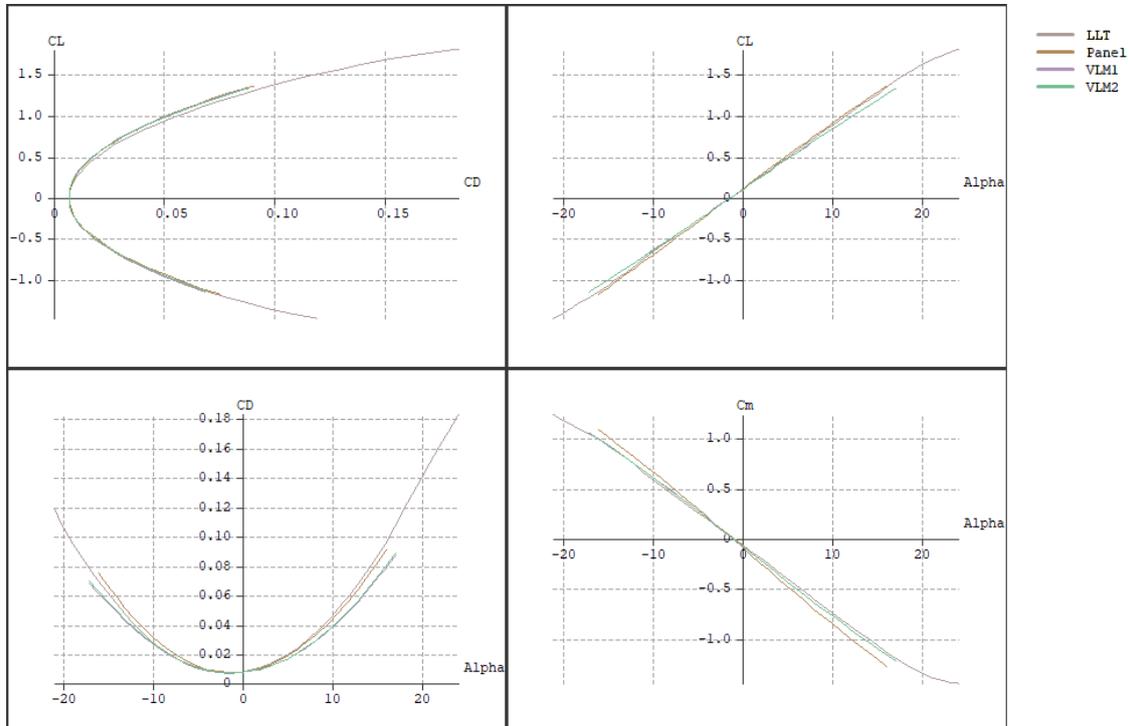


Figura 2.12: Andamento  $C_L$ - $\alpha$

### 2.3 – Involuppo di volo

Successivamente all'analisi aerodinamica e prima di poter iniziare il disegno strutturale bisogna conoscere i carichi che la struttura del cassone alare dovrà sopportare durante ogni missione.

I carichi, considerati per svolgere l'analisi e definire i diagrammi di manovra e raffica, sono quelli di volo, questi ci serviranno per un dimensionamento strutturale dell'ala, che come già detto più volte è il componente strutturale che sopporta la maggior parte dei carichi aerodinamici.

In questa fase quindi si definiscono proprio i diagrammi di manovra e di raffica che determinano i limiti delle accelerazioni che la struttura del cassone alare deve sopportare come minimo ed entrambi sono definiti da normativa.

Questi diagrammi sovrapposti ed interpretati definiscono l'involuppo di volo all'interno del quale la struttura deve essere sicura e definiscono due parametri:

- Il fattore di carico  $n_z$  definito come il rapporto tra la forza agente sul velivolo ed il peso del velivolo stesso;

- La velocità di volo equivalente  $V_{EAS}$  definita come quella velocità che a livello del mare darebbe la stessa pressione dinamica della velocità effettiva in volo  $V_{TAS}$ .

Per determinare questi due diagrammi si fa riferimento alla normativa EASA CS-25.

### 2.3.1 – Diagramma di manovra

La normativa EASA CS-25 richiede un fattore di carico a contingenza definito come:

- (b) The positive limit manoeuvring load factor 'n' for any speed up to  $V_D$  may not be less than  $2.1 + \left(\frac{24\,000}{W+10\,000}\right)$  except that 'n' may not be less than 2.5 and need not be greater than 3.8 – where 'W' is the design maximum take-off weight (lb).
- (c) The negative limit manoeuvring load factor –
- (1) May not be less than  $-1.0$  at speeds up to  $V_C$ ; and
  - (2) Must vary linearly with speed from the value at  $V_C$  to zero at  $V_D$ .
- (d) Manoeuvring load factors lower than those specified in this paragraph may be used if the aeroplane has design features that make it impossible to exceed these values in flight.

Figura 2.13: Limiti del fattore di carico di manovra

Esprimendo il Maximum Take-off Weight in libbre si ottiene un fattore di carico a contingenza (il fattore di carico massimo ammissibile dalla struttura):

$$n_+ = 2.1 + \left(\frac{24000}{W + 10000}\right) = 2.548 > 2.5$$

invece  $n_-$  non deve essere minore di  $-1$  fino a  $V_C$  per poi variare linearmente con la velocità tra  $V_C$  e  $V_D$ .

- (c) Design manoeuvring speed,  $V_A$ . For  $V_A$ , the following apply:
- (1)  $V_A$  may not be less than  $V_{S_1} \sqrt{n}$  where –
    - (i) n is the limit positive manoeuvring load factor at  $V_C$ ; and
    - (ii)  $V_{S_1}$  is the stalling speed with wing-flaps retracted.
  - (2)  $V_A$  and  $V_S$  must be evaluated at the design weight and altitude under consideration.
  - (3)  $V_A$  need not be more than  $V_C$  or the speed at which the positive  $C_{Nmax}$  curve intersects the positive manoeuvre load factor line, whichever is less.

Figura 2.14:  $V_A$  velocità di manovra di progetto

## Progettazione del Cassone Alare

Per la velocità di manovra di progetto  $V_A$  si ottiene:

$$V_A = V_{S1} \sqrt{n_+} = 94.76 \frac{m}{s}$$

Per la velocità di progetto  $V_C$ :

$$V_C = V_{CTAS} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} = 106.47 \frac{m}{s}$$

con  $V_{CTAS} = 242 \frac{m}{s}$

Per la velocità di progetto *never exceed*  $V_D$ :

$$V_D = V_{DTAS} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} = 133.09 \frac{m}{s}$$

con  $V_{DTAS} = 1.25 \cdot V_{CTAS} = 302.5 \frac{m}{s}$

Ottenendo il diagramma di manovra seguente:

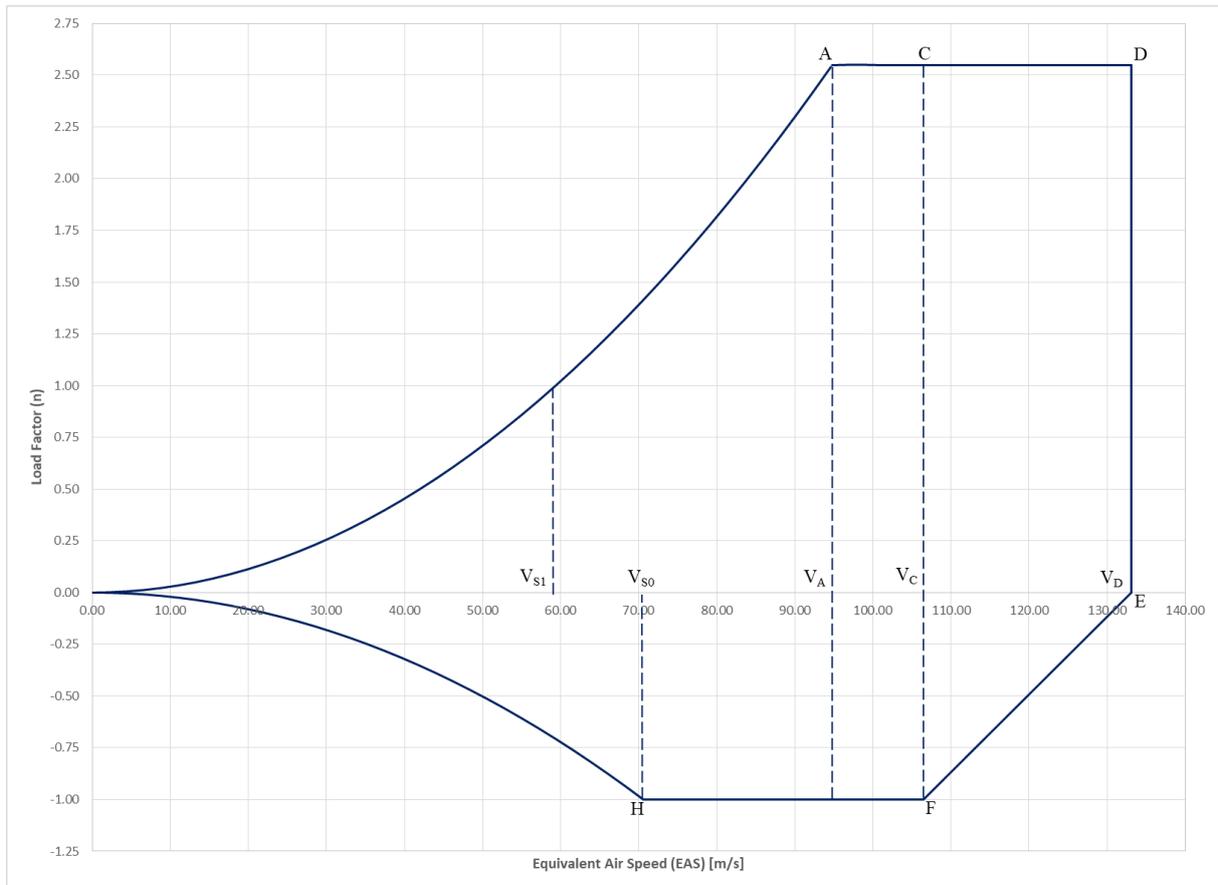


Figura 2.15: Diagramma di manovra

### 2.3.2 – Diagramma di raffica

Il diagramma di raffica è un diagramma complesso da trattare perché bisogna tener conto di diversi aspetti che caratterizzano la modellizzazione della raffica, infatti il suo studio richiede sia una trattazione aerodinamica instazionaria che aeroelastica.

Bisogna sottolineare che le raffiche e la turbolenza atmosferica sono dei carichi non deterministici e che quindi dovrebbero essere studiati con un approccio statistico e probabilistico.

La normativa prevede dei valori dedotti da una lunga esperienza di voli e misurazioni che dovrebbero essere sufficienti a simulare in maniera soddisfacente ciò che potrebbe accadere in volo.

Quindi in questo studio si adotterà il modello semplificato previsto dalla normativa CS-25.341.

Per il calcolo del fattore di carico  $n$  dovuto alla raffica alle varie velocità di volo si usa la formula presente in normativa:

$$n = 1 + \frac{\rho_0 V C_L' u}{2 \frac{W}{S}} F_g$$

con:

- $\rho_0$  = densità dell'aria al livello del mare =  $1.225 \frac{kg}{m^3}$ ;
- $V = V_{EAS}$ ;
- $\frac{W}{S}$  = carico alare del velivolo;
- $C_L'$  = derivata del coefficiente di portanza rispetto all'incidenza del velivolo;
- $u$  = velocità di raffica;
- $F_g$  = fattore di attenuazione della raffica.

(5) The following reference gust velocities apply:

(i) At aeroplane speeds between  $V_B$  and  $V_C$ : Positive and negative gusts with reference gust velocities of 17.07 m/s (56.0 ft/s) EAS must be considered at sea level. The reference gust velocity may be reduced linearly from 17.07 m/s (56.0 ft/s) EAS at sea level to 13.41 m/s (44.0 ft/s) EAS at 4572 m (15 000 ft). The reference gust velocity may be further reduced linearly from 13.41 m/s (44.0 ft/s) EAS at 4572 m (15 000 ft) to 6.36 m/s (20.86 ft/sec) EAS at 18288 m (60 000 ft).

(ii) At the aeroplane design speed  $V_D$ : The reference gust velocity must be 0.5 times the value obtained under CS 25.341(a)(5)(i).

(6) The flight profile alleviation factor,  $F_g$ , must be increased linearly from the sea level value to a value of 1.0 at the maximum operating altitude defined in CS 25.1527. At sea level, the flight profile alleviation factor is determined by the following equation.

$$F_g = 0.5 (F_{gs} + F_{gma})$$

where –

## Progettazione del Cassone Alare

where -

$$F_{gz} = 1 - \frac{Z_{mo}}{76200}; \quad (F_{gz} = 1 - \frac{Z_{mo}}{250000})$$

$$F_{gma} = \sqrt{R_2 \tan\left(\pi R_1/4\right)}$$

$$R_1 = \frac{\text{Maximum Landing Weight}}{\text{Maximum Take-off Weight}};$$

$$R_2 = \frac{\text{Maximum Zero Fuel Weight}}{\text{Maximum Take-off Weight}};$$

$Z_{mo}$  maximum operating altitude (metres (feet))  
defined in CS 25.1527.

Ottenendo il diagramma di raffica seguente:

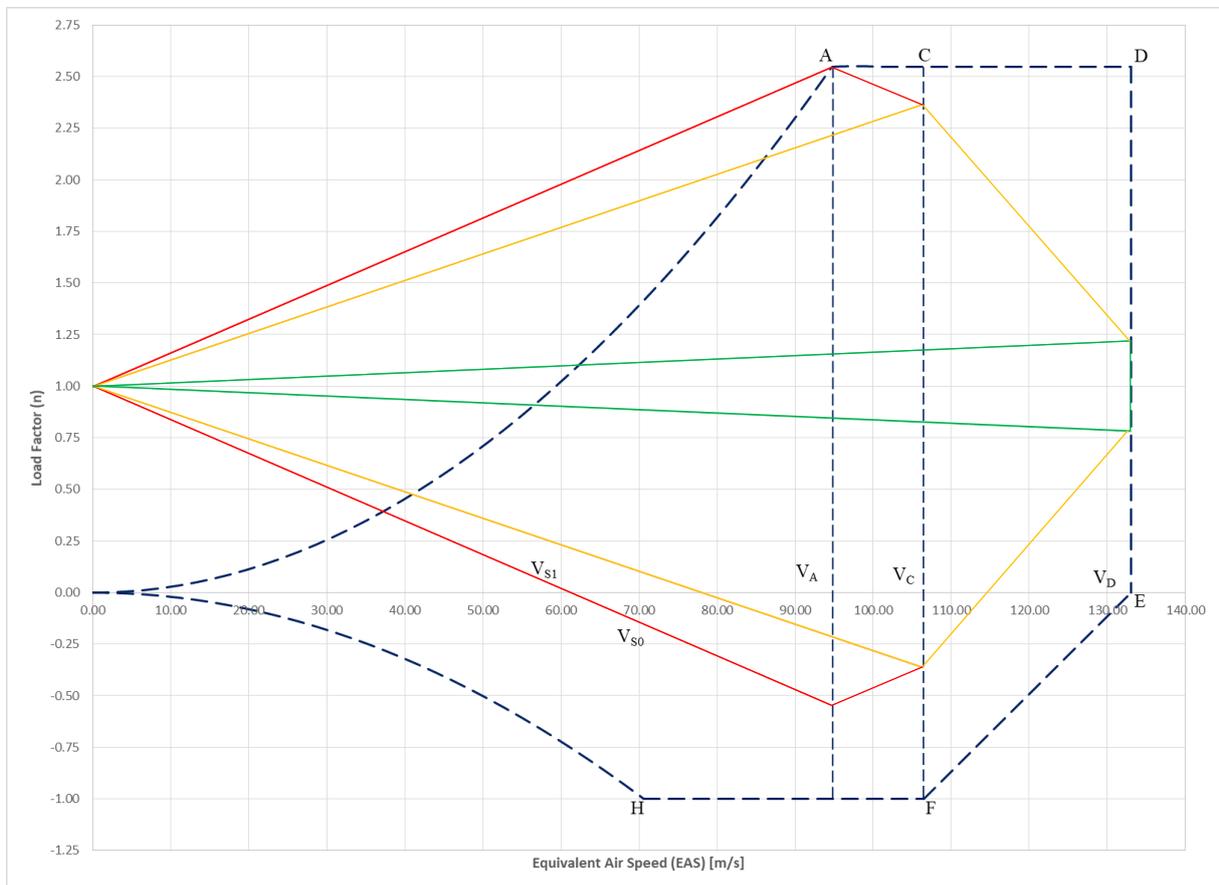


Figura 2.16: Diagramma di raffica

### 2.3.3 – Involuppo di volo

L'involuppo di volo è dato dalle condizioni più critiche individuate dai diagrammi di raffica e manovra, sarà preso come riferimento nella applicazione dei carichi nell'analisi strutturale ed è possibile ricavarlo sovrapponendo i diagrammi di manovra e raffica.

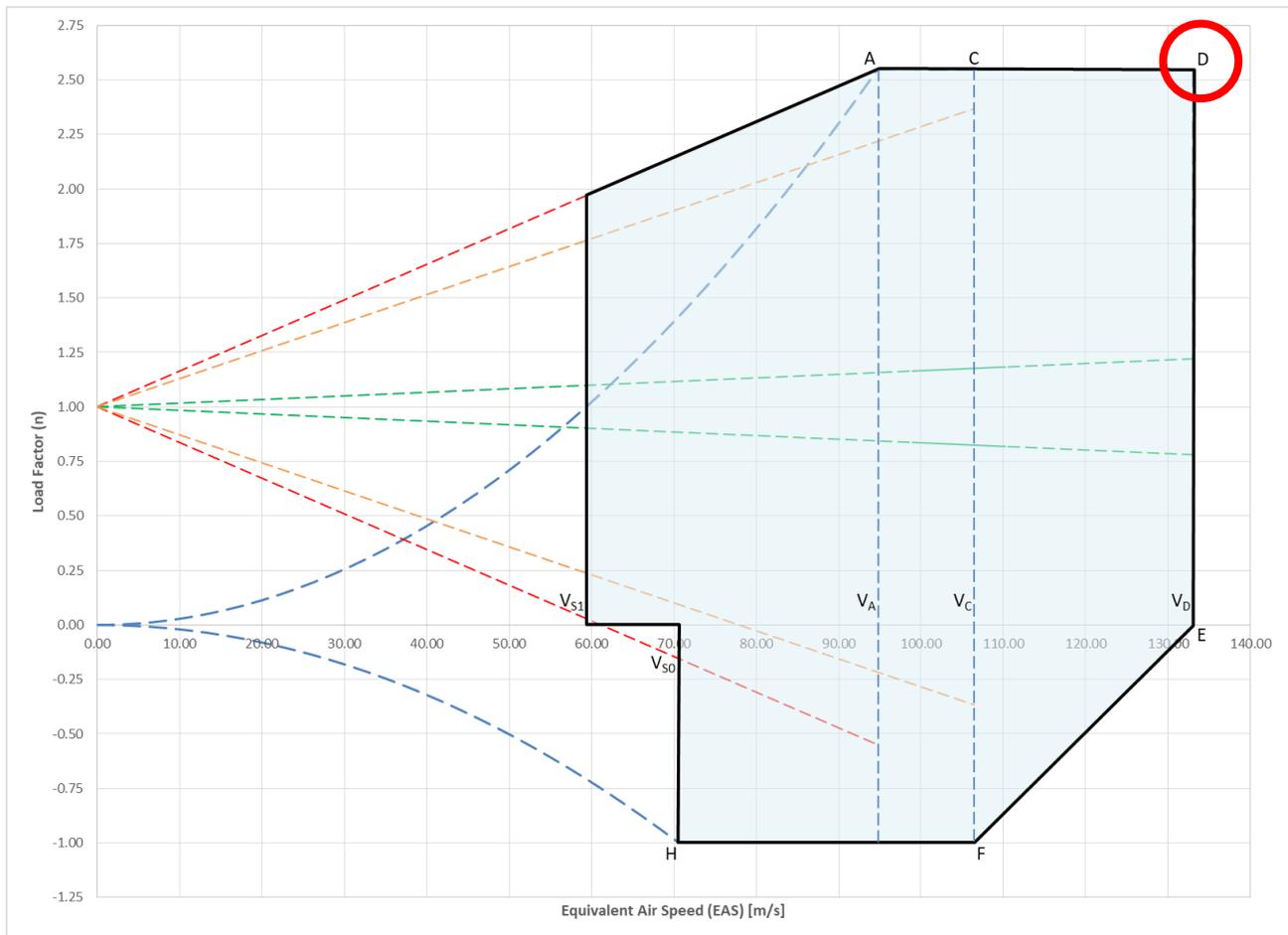


Figura 2.17: Involuppo di volo

Dal diagramma dell'involuppo di volo è possibile notare come la condizione di volo più critica corrisponde al punto D del grafico ed è il volo a quota di crociera a velocità  $V_D$  never exceed.

Questo dato porta quindi ad una correzione dell'analisi svolta con XFLR5 poiché era stata effettuata supponendo una velocità massima di volo corrispondente a  $V_C$  velocità di progetto.

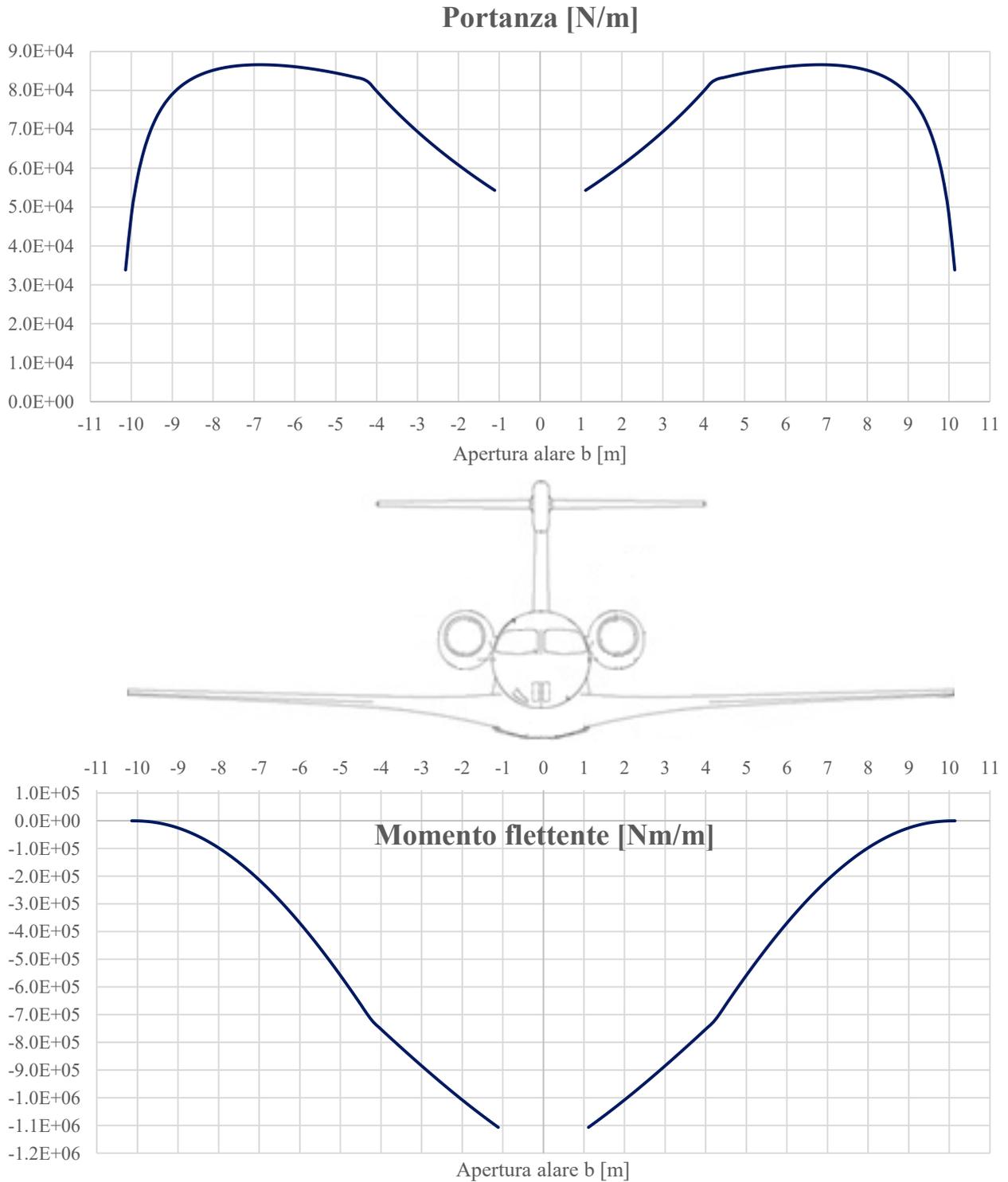
## 2.4 – Definizione dei carichi

La correzione dell'analisi dovuta alla definizione del punto più critico dell'involuppo di volo porta all'ultima definizione dei carichi agenti sull'ala che sono il punto di partenza per le analisi FEM svolte su Patran/Nastran.

La loro assoluta necessità è legata al fatto che dai carichi a cui l'ala è soggetta è possibile determinare sia le deformazioni che i livelli di stress a cui tutti i componenti del cassone alare sono soggetti consentendo di verificare attraverso i criteri di resistenza, ad analisi ultimate, se la struttura sia in grado di resistere ai carichi senza subire deformazioni

## Progettazione del Cassone Alare

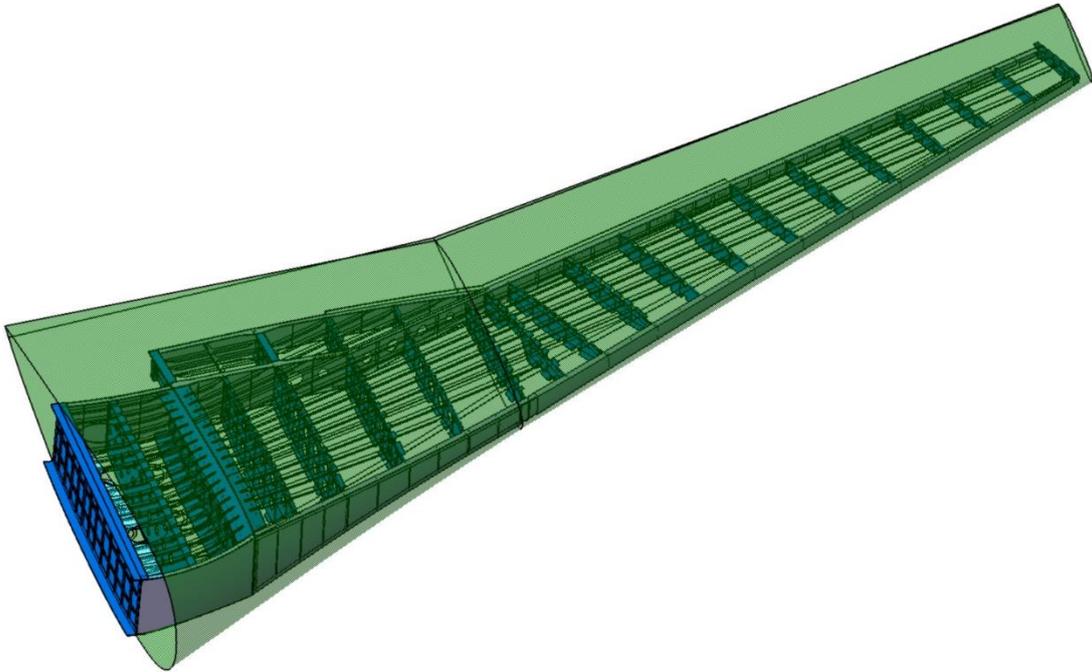
plastiche, per i componenti metallici, e senza arrivare a rottura, per i componenti compositi.



*Figura 2.19: Portanza e momento flettente lungo l'apertura alare*

## 2.5 – Configurazione finale

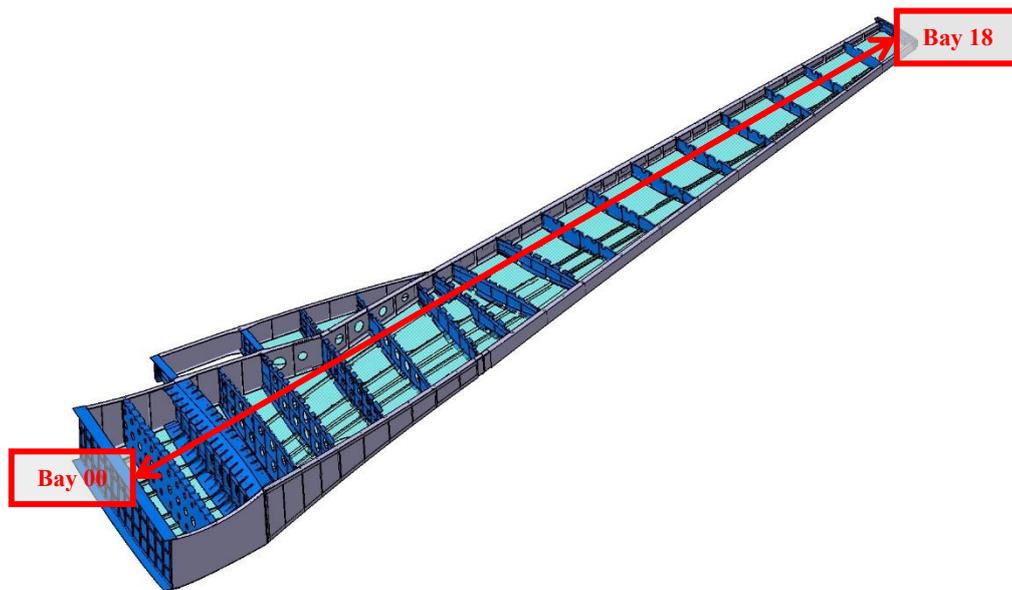
In questo ultimo paragrafo si presentano ala e cassone alare in configurazione finale *baseline* disegnati tramite il software CAD CATIA v5.



*Figura 2.20: Configurazione finale dell'ala*

Le caratteristiche che risaltano subito all'occhio sono:

- Angolo di freccia, al fine di ritardare la formazione delle onde d'urto e il conseguente aumento di resistenza aerodinamica causato dalla comprimibilità del fluido nei regimi transonici.  
Infatti quando un aereo entra nel campo transonico, con  $0.8 < M < 1.2$ , le onde di pressione associate al volo subsonico convergono comprimendo l'aria e causando la resistenza d'onda.
- Angolo di diedro, al fine di garantire stabilità trasversale al velivolo provocando, in conseguenza ad una traslazione laterale, un momento di rollio tale da inclinare il velivolo in modo che la portanza abbia una componente orizzontale sufficiente ad annullare la derapata.
- Angolo di svergolamento, cioè progressivo cambiamento di angolazione delle corde dei profili alari al fine di avere un'incidenza inferiore in prossimità delle estremità alari poiché sono le sezioni che, a parità di angolo di attacco, stallano per prime.



*Figura 2.21: Configurazione finale del cassone alare*

Il cassone alare invece è caratterizzato da:

- 3 longheroni;
- 39 centine;
- 2 rivestimenti con correnti.

I longheroni sono 3:

- Anteriore;
- Posteriore;
- Ausiliario.

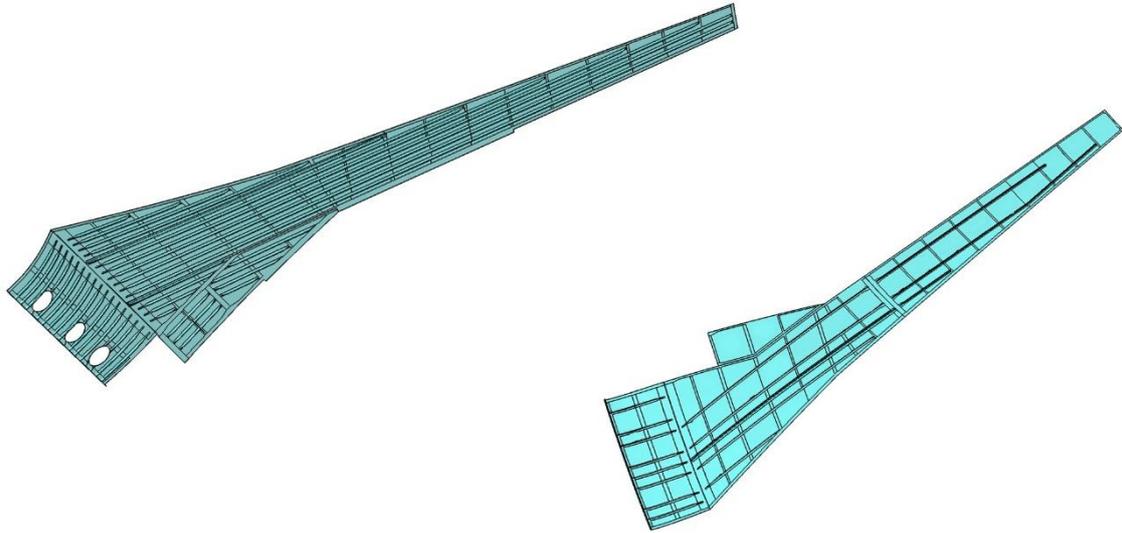
Progettati in lega di alluminio A17050-T7451, hanno una sezione a doppio T, in modo che le tensioni tangenziali  $\tau$  dell'anima si opporranno alle sollecitazioni di taglio T e le tensioni  $\sigma$  delle flange di opporranno al momento flettente, e presentano delle zone di rinforzo verticale lungo l'apertura al fine di garantire sia una maggior resistenza ai carichi, grazie all'aumento della sezione dell'anima, sia la presenza di una zona che consentisse il collegamento delle centine.

Il longherone posteriore è anche stato dotato di fori che consentissero l'alloggiamento dei serbatoi di carburante.

Le centine in totale sono 38, disposte circa ogni 500mm lungo l'apertura alare, hanno sezione a doppio T e a C e anch'esse presentano delle zone di rinforzo sia lungo la corda che lungo l'altezza al fine di garantire una maggior resistenza ai carichi.

Ogni coppia di centine divide il cassone alare in baie che sono state numerate da 00 alla radice fino a 18 all'estremità.

Le centine dalla baia 00 alla baia 07 sono state dotate di fori che consentissero come per il longherone posteriore l'alloggiamento dei serbatoi di carburante.



*Figura 2.22: Rivestimento superiore (a sinistra) e inferiore (a destra)*

I due rivestimenti superiore ed inferiore sono stati progettati in materiale composito con stati di base in CFRP (*Carbon Fiber Reinforced Polymer*)

Entrambi, a causa della natura fragile del materiale di cui sono sostituiti ed a causa degli elevati livelli di stress a cui sono soggetti, sono stati dotati di correnti con sezione a T.

Bisogna notare come il rivestimento superiore presenti una distribuzione più fitta di correnti rispetto al rivestimento inferiore, questo perché la natura dei carichi a cui è soggetto il cassone alare fa sì che il rivestimento inferiore lavori prevalentemente a trazione rispetto al rivestimento superiore che lavora prevalentemente a compressione e quindi è più soggetto all'instabilità causata dal carico.

### Capitolo 3 – Progettazione del Laminato in Composito<sup>3</sup>

In questo capitolo si presenta lo studio che è alla base di questo lavoro di tesi, cioè la progettazione di un laminato in composito.

Quindi, dopo una presentazione delle generalità dei materiali compositi, si introdurrà la teoria alla base delle piastre a più strati arrivando a presentare i metodi classici di progettazione del laminati, soffermandosi infine sul Metodo di Miki o Procedura Grafica di Miki.

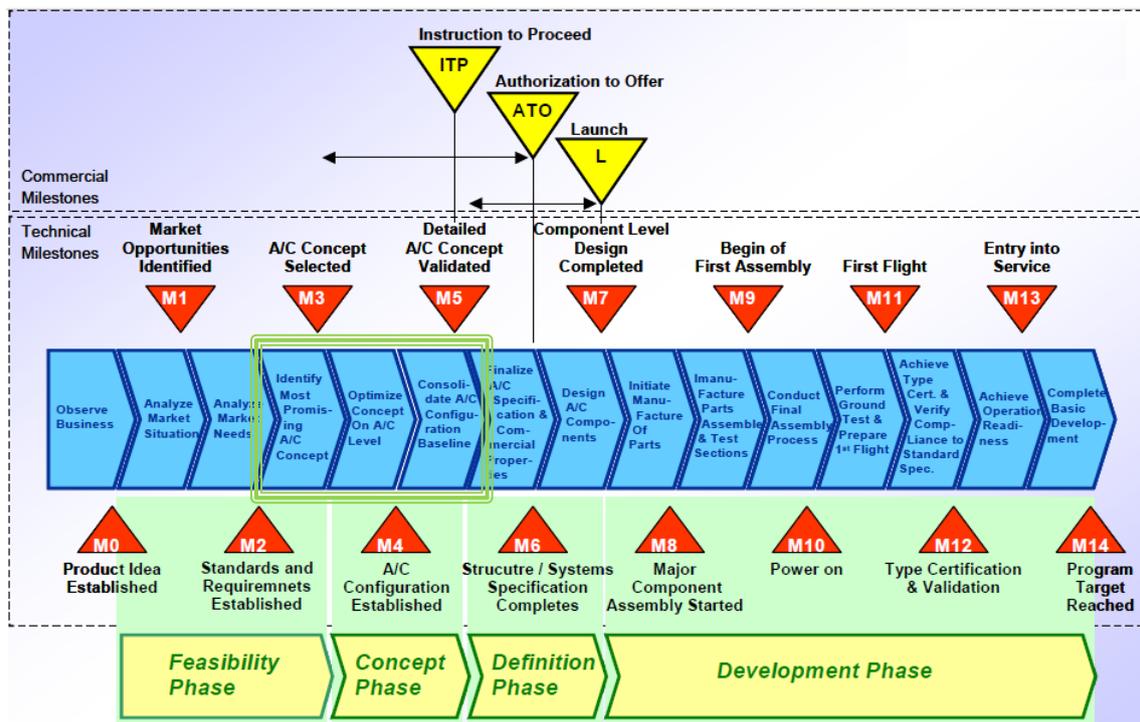


Figura 3.1: Programma di sviluppo di un velivolo – Progettazione dei componenti in CFRP

Infatti Miki ha proposto per primo, nel 1982, un metodo generale, grafico e analitico, basato sull'uso dei parametri di laminazione e che concerne la progettazione di laminati a strati identici, bilanciati e simmetrici.

<sup>3</sup> Il materiale del capitolo si riferisce alla voce [3], [4], [5], [6] della bibliografia.

### 3.1 – Generalità sui materiali compositi

Un materiale composito è un materiale costituito dall'unione di due o più costituenti (le fasi) distinte in:

- Matrice;
- Fibre;
- Additivi o cariche.

Il concetto alla base dei materiali compositi è quello di unire due o più materiali con qualità diverse, che da soli non presentano delle caratteristiche meccaniche utili ad una progettazione strutturale ma che uniti esaltano le loro proprietà.

Infatti le fibre di rinforzo utilizzate in questi materiali hanno proprietà meccaniche migliori sia in termini di resistenza che di rigidità rispetto al materiale massivo, perché la diminuzione delle dimensioni caratteristiche porta ad un miglioramento delle prestazioni meccaniche dovuto sia al fatto che la fibra presenta, grazie al suo processo produttivo, una struttura interna migliore rispetto al materiale massivo, sia perché diminuisce la probabilità di trovare dei grossi difetti in corpi di piccole dimensioni.

I materiali compositi vengono impiegati nel settore aeronautico sotto forma di corpi bidimensionali, lastre o gusci e si dividono in:

- *Compositi a fibra corta*, in cui le fibre sono disperse in modo casuale in una matrice isotropa e che quindi presentano un comportamento meccanico macroscopico e globalmente isotropo;
- *Compositi a fibra lunga*, in cui le fibre sono disposte in modo ordinato e orientato in una matrice isotropa e che quindi presentano un comportamento meccanico macroscopico e globalmente anisotropo.

Questi materiali vengono poi assemblati per costituire:

- *Laminati*, ottenuti per mezzo di sovrapposizione di lamine orientate con angoli diversi tra loro;
- *Sandwich*, cioè pannelli costruiti per impieghi in flessione, che hanno generalmente un comportamento macroscopico isotropo nel piano.

I principali costituenti dei compositi sono essenzialmente due, la matrice e le fibre.

La matrice è costituita da:

- Resine *epossidiche*;
- Resine *poliuretatiche*;
- Resine *poliammidiche*;
- Resine *fenoliche*.

Le fibre invece possono essere in:

- *Vetro*;
- *Carbonio*;
- *Kevlar*;
- *Boro*;
- *Berillio*.

I principali vantaggi nell'uso di questi materiali sono:

- Leggerezza;
- Resistenza;
- Rigidezza;
- Resistenza all'impatto;
- Buon comportamento a fatica;
- Possibilità di progettare il materiale secondo le necessità.

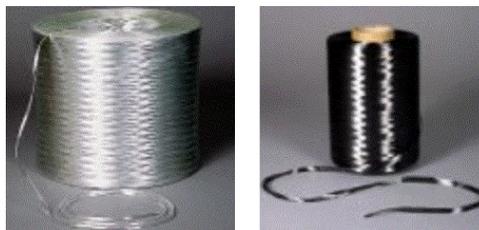
Gli svantaggi sono:

- Costo
- Dal punto di vista meccanico, il comportamento a rottura che è in genere fragile;
- Difficoltà di applicazione di carichi concentrati;
- Difficoltà di collegamento con altre parti strutturali che richiede l'utilizzo di inserti metallici;
- Bassa rigidezza al taglio trasversale.

L'industria produce una serie di prodotti di base e di semilavorati con i quali successivamente vengono assemblati i vari prodotti finali.

I prodotti di base sono:

- *Fibre*  
Sono il costituente base del rinforzo dei compositi e vengono filate in bobine come un filo qualunque.



*Figura 3.2: Bobbine di fibra di vetro (sinistra) e carbonio (destra)*

- *Mats*  
Sono strati di fibre non tessute, disposte casualmente e sono forniti secchi oppure già impregnati di resina.

Il loro comportamento meccanico macroscopico è isotropo ed in generale sono usati da un lato nei casi in cui si ha necessità di leggerezza e di risposta isotropa, dall'altro quando le caratteristiche meccaniche richieste non sono eccezionali, poiché i *mats* non hanno delle prestazioni elevate, né in rigidità né in resistenza. I vantaggi nel loro impiego risiedono nella facilità di messa in opera e di adattabilità alle forme più diverse e nel loro costo, più contenuto rispetto ai pannelli a fibre orientate.

- *Tessuti*  
Con cui generalmente vengono forniti i rinforzi;

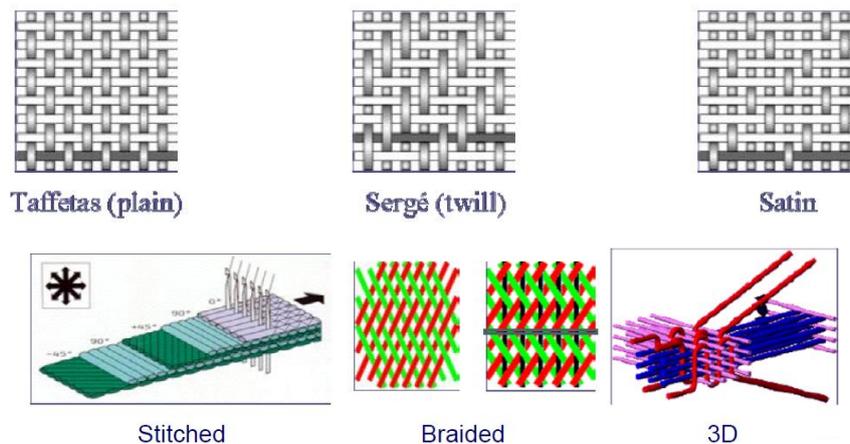


Figura 3.3: Tipi di tessuti

- *Lamine pre-impregnate (pre-preg)*  
Sono semilavorati composti da fibre e resina da polimerizzare in diversi modi, nelle quali le fibre possono essere disposte in una sola direzione o tessute ed il loro comportamento è sempre anisotropo. L'uso delle *lamine pre-impregnate* è riservato alla fabbricazione dei laminati o degli strati esterni dei pannelli sandwich poiché porta a dei vantaggi come le elevate prestazioni meccaniche e la buona risposta al processo di fabbricazione. Generalmente è con l'uso di tecniche che impiegano *pre-impregnati* che si ottengono i migliori risultati in termini di assenza di difetti di fabbricazione.

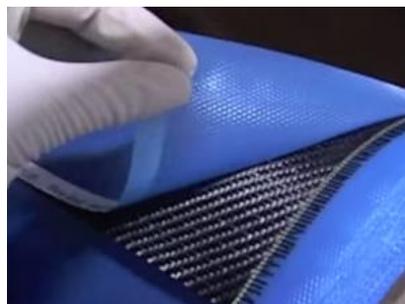
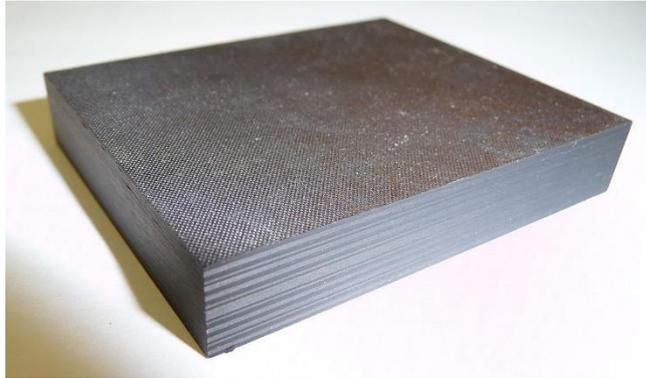


Figura 3.4: Pre-preg carbon fiber

I semi-lavorati, che a volte sono proprio il prodotto finale, sono:

- *Laminati*

Sono ottenuti attraverso la sovrapposizione di lamine con di verse orientazioni, il loro assemblaggio avviene con polimerizzazione o incollaggio e vengono utilizzati come materiali strutturali nel caso in cui ci sia necessità di elevate prestazioni meccaniche di resistenza, rigidità e basso peso.



*Figura 3.5: Laminato*

- *Sandwich*

Sono la generalizzazione di una trave a doppio T; in cui le facce, equivalenti alle flange supportano le tensioni normali, mentre il cuore, equivalente all'anima e riempito con un materiale leggero, solitamente reticolo a nido d'ape, sopporta le tensioni tangenziali e impedisce alle facce di andare in instabilità.



*Figura 3.6: Sandwich*

### 3.2 – Generalità sulla meccanica dei compositi

Come detto nel paragrafo precedente, i materiali *compositi a fibre lunghe*, sui quali si basa lo studio svolto, sono dei materiali che vanno necessariamente progettati in modo tale da garantire la risoluzione dei problemi strutturali dove le proprietà di resistenza e di rigidità devono abbinarsi perfettamente alla necessità di leggerezza.

Quindi osservando attentamente un materiale composito è possibile affermare che esso è:

- Eterogeneo, essendo costituito da due fasi;
- Anisotropo, poiché l'orientazione del rinforzo determina la direzionalità delle proprietà meccaniche di rigidità e resistenza e quindi la risposta meccanica del materiale dipende dalla direzione di sollecitazione.

Lo scopo della progettazione diventa quello di recuperare, dalla conoscenza delle proprietà dei singoli componenti e dalla geometria del composito, quelle leggi che ne descrivono il comportamento a livello macro meccanico come materiale omogeneo, cioè si cercano delle leggi di omogeneizzazione.

Le principali difficoltà progettuali sono dovute a:

- Anisotropia che ha come conseguenza una forte dipendenza delle caratteristiche di resistenza dalla direzione; l'impossibilità di disaccoppiare in parte sferica e deviatorica l'energia elastica, rendendo anche impossibile l'utilizzo del criterio di von Mises; una non coassialità di tensore degli sforzi e delle deformazioni;
- Eterogeneità che può influenzare la rottura locale in diversi modi: con il fenomeno del Pull-out, cioè sfilamento delle fibre dalla matrice; con l'instabilità locale delle fibre in compressione; con l'influenza sulla propagazione delle fessure; con una differente resistenza in trazione e compressione;
- Tipo di carico;
- Difetti di fabbricazione.

### 3.3 – Teoria delle piastre a più strati di Mindlin e di Kirchhoff

Dopo aver introdotto i materiali compositi e la loro meccanica, si sviluppa ora la teoria delle piastre a più strati in modo da fornire quelle che sono le basi teoriche con le quali effettuare la progettazione di un laminato in composito.

Infatti le lamine in composito non sono mai utilizzate da sole, ma sotto forma di laminati, quindi piastre ottenute sovrapponendo più strati, poiché le caratteristiche meccaniche di rigidità e di resistenza degli strati impiegati li rendono inutilizzabili nella forma di singole lamine, a causa di:

- Forte anisotropia della risposta elastica;
- Bassa resistenza in direzione trasversale;
- Piccolo spessore.

Quindi le lamine vengono utilizzate per creare dei laminati sovrapponendo un numero di strati sufficiente a soddisfare i bisogni progettuali di resistenza e rigidità.

Tutto questo rende il laminato un materiale complesso completamente da progettare.

La teoria che meglio risponde alle richieste progettuali e di simulazione mediante elementi finiti è la *teoria delle piastre a più strati di Mindlin*.

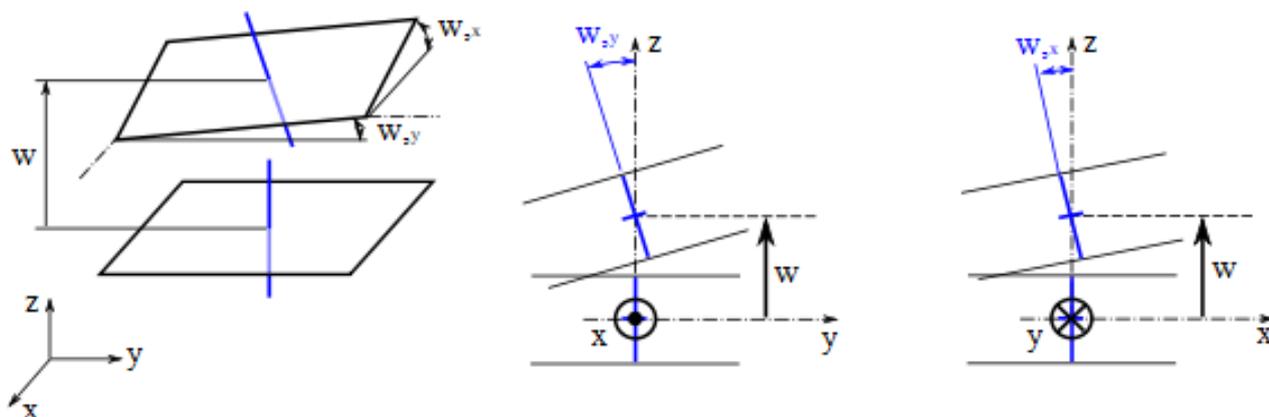


Figura 3.7: Mindlin plate theory

Le ipotesi della *teoria di Mindlin* sono:

- Variazione lineare dello spostamento lungo lo spessore della piastra;
- Tensione normale lungo lo spessore trascurabile (stato di tensione piano);
- Tensione di flessione lineare lungo lo spessore;
- Tensione di taglio costanti lungo lo spessore.

Queste ipotesi postano ad una situazione in cui gli spostamenti lungo lo spessore non sono necessariamente lineari e quindi lo spessore della piastra può cambiare durante la deformazione.

È così possibile definire il sistema di equazioni del campo di spostamenti:

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u^{(0)}(x, y) - z\phi_x(x, y) \\ v(x, y, z) = v^{(0)}(x, y) - z\phi_y(x, y) \\ w(x, y, z) = w^{(0)}(x, y) \end{cases}$$

dal quale è possibile ricavare il campo di deformazioni:

$$\begin{cases} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{,x}^{(0)} \\ v_{,y}^{(0)} \\ u_{,y}^{(0)} + v_{,x}^{(0)} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \phi_{x,x} \\ \phi_{y,y} \\ \phi_{x,y} + \phi_{y,x} \end{Bmatrix} \rightarrow \{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{\gamma p}^{(0)}\} + z\{k\} \\ \begin{cases} \gamma_{xz}^{(0)} = \phi_x + w_{,x}^{(0)} \\ \gamma_{yz}^{(0)} = \phi_y + w_{,y}^{(0)} \end{cases} \rightarrow \{\gamma\} = \{\gamma^{(0)}\} \end{cases}$$

Ora l'obiettivo è quello di passare al campo delle tensioni ottenendo:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_k \rightarrow \{\sigma\}_k = [Q_p]_k \{\varepsilon_\gamma\}_k$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{44} & Q_{45} \\ Q_{45} & Q_{55} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}_k \rightarrow \{\tau\}_k = [Q_\tau]_k \{\gamma\}_k$$

che infine consentono di ricavare le risultanti di tensioni e momenti e le equazioni costitutive della piastra:

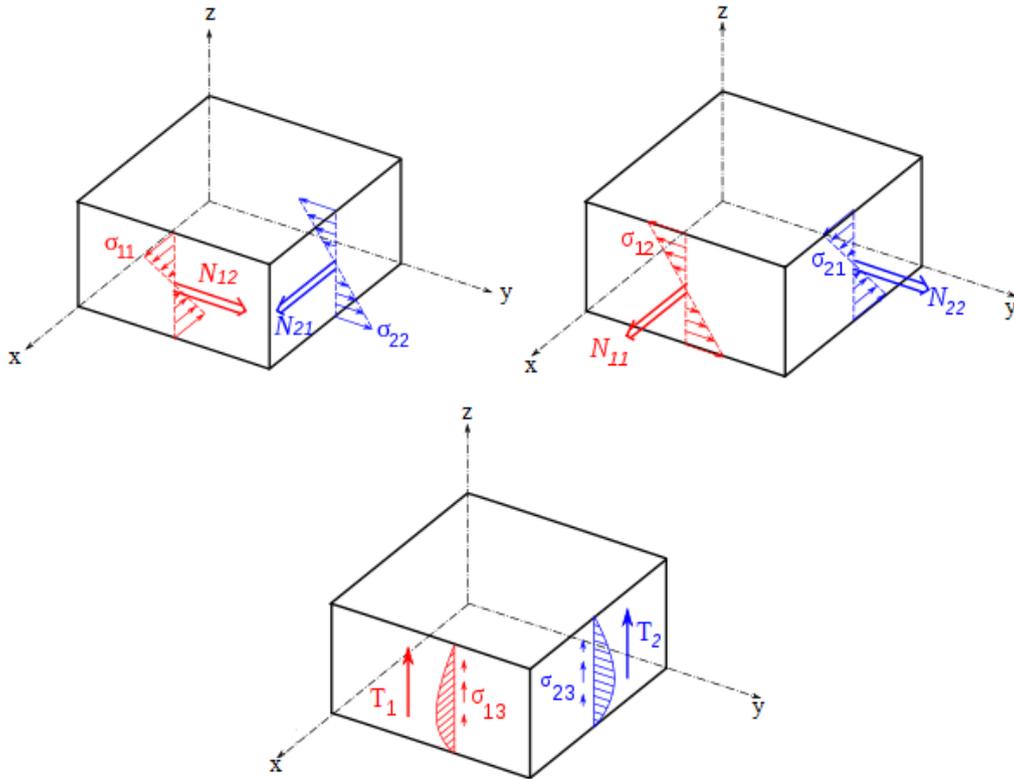


Figura 3.8: Risultanti di tensioni e momenti

$$\begin{aligned} \{N\} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{\sigma\} dz = [A] \{\varepsilon_{\gamma p}^{(0)}\} + [B] \{k\} \\ \{M\} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \{\sigma\} dz = [B] \{\varepsilon_{\gamma p}^{(0)}\} + [D] \{k\} \rightarrow \\ \{V\} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{\tau\} dz = [A_\tau] \{\gamma^{(0)}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [A] &= \langle [Q_p] \rangle \\ [B] &= \langle z [Q_p] \rangle \\ [D] &= \langle z^2 [Q_p] \rangle \\ [A_\tau] &= \langle \chi [Q_\tau] \rangle \end{aligned}$$

con  $\langle \dots \rangle = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\dots) dz$  ed  $h =$  spessore dello strato.

Questa teoria viene poi ricondotta alla *teoria classica dei laminati*, la *teoria delle piastre a più strati di Kirchhoff*, con lo scopo di ottenere un modello matematico capace di fornire la risposta elastica di un laminato come se fosse costituito da un solo strato equivalente, questo rende il processo progettuale un processo di omogeneizzazione, sullo spessore della piastra, delle caratteristiche meccaniche macroscopiche di rigidità.

Le ipotesi della *teoria di Kirchhoff* sono:

- Piastre costituite da un numero arbitrario di strati in materiale ortotropico perfettamente legati tra loro e nelle quali gli assi ortotropici di simmetria del singolo strato non devono necessariamente coincidere con gli assi  $x - y$  della piastra;
- Strati con spessore costante;
- Materiale degli strati che obbedisce alla legge di Hooke ed è trasversalmente isotropico;
- Spostamento trasversale  $w$  è indipendente dalla coordinata  $z$ , cioè  $\varepsilon_z$  è trascurabile;
- Spostamenti nel piano  $u$  e  $v$  funzioni lineari della coordinata  $z$  e distribuiti linearmente lungo lo spessore della piastra;
- Sforzi di taglio  $\gamma_{xz}$  e  $\gamma_{yz}$  trascurabili.;
- Spostamenti della piastra piccoli rispetto allo spessore della stessa;
- Tensioni nel piano della piastra piccole rispetto all'unità.

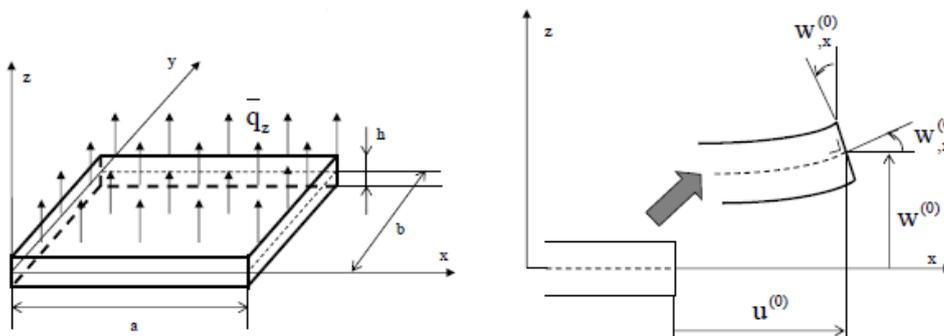


Figura 3.9: Teoria classica dei laminati

Queste ipotesi portano al sistema di equazioni del campo di spostamenti:

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u^{(0)}(x, y) - zw_{,x}^0(x, y) \\ v(x, y, z) = v^{(0)}(x, y) - zw_{,y}^0(x, y) \\ w(x, y, z) = w^{(0)}(x, y) \end{cases}$$

dal quale è possibile ricavare le deformazioni, ricordando che il campo di deformazioni è piano perché per ipotesi  $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ :

$$\{\varepsilon_\gamma\} = \{\varepsilon_\gamma^{(0)}\} + z\{k_\gamma\}$$

con:

- Sforzi totali  $\{\varepsilon_\gamma\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ u_{,y} + v_{,x} \end{Bmatrix}$
- Sforzi membranali  $\{\varepsilon_\gamma^{(0)}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(0)} \\ \varepsilon_y^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{,x}^{(0)} \\ v_{,y}^{(0)} \\ u_{,y}^{(0)} + v_{,x}^{(0)} \end{Bmatrix}$
- Sforzi dovuti alle curvature  $\{k_\gamma\} = \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} w_{,xx}^{(0)} \\ w_{,yy}^{(0)} \\ 2w_{,xy}^{(0)} \end{Bmatrix}$

Che in notazione tensoriale diventa:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ \frac{1}{2}(u_{,y} + v_{,x}) \end{Bmatrix} \rightarrow \{\varepsilon_\gamma\} = [T]\{\varepsilon\} \quad \text{con } [T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Si può notare come la conoscenza del campo di deformazioni permette di risalire, tramite il calcolo delle tensioni, alla risultante delle azioni interne legando quest'ultime alle deformazioni; questo è lo scopo principale della teoria classica dei laminati.

Ora l'obiettivo è quello di passare al campo delle tensioni.

Ricordando le ipotesi iniziali di tensioni di taglio trasversali  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$  e tensione normale  $\sigma_z$  trascurabili si ottiene la legge che governa lo stato di tensione piano:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \rightarrow \{\sigma\} = [Q]\{\varepsilon_\gamma\}$$

con  $[Q]$  = matrice delle rigidezze ridotte.

È necessario ora ricavare le espressioni dei coefficienti di rigidezza ridotta  $Q_{ij}$  e per farlo ci rifacciamo alla legge di Hooke, per uno strato di materiale ortotropico, riferita ai suoi assi di ortotropia ma in questo caso con le fibre parallele ad uno degli assi del sistema di riferimento globale o  $x$  o  $y$ , ottenendo:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

che sotto le ipotesi di  $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$  e quindi  $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$  diventa:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

Esplicitando ora l'ipotesi di  $\sigma_z = 0$  dalla terza equazione del sistema si ottiene:

$$\begin{cases} \sigma_x = C_{11}\varepsilon_x + C_{12}\varepsilon_y + C_{13}\varepsilon_z \\ \sigma_y = C_{12}\varepsilon_x + C_{22}\varepsilon_y + C_{23}\varepsilon_z \\ \sigma_z = C_{13}\varepsilon_x + C_{23}\varepsilon_y + C_{33}\varepsilon_z = 0 \end{cases}$$

$$\varepsilon_z = -\frac{C_{13}}{C_{33}}\varepsilon_x - \frac{C_{23}}{C_{33}}\varepsilon_y$$

che sostituita nelle prime due porta a:

$$\sigma_x = \left( C_{11} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}} \right) \varepsilon_x + \left( C_{12} - \frac{C_{12}C_{23}}{C_{33}} \right) \varepsilon_y$$

$$\sigma_y = \left( C_{12} - \frac{C_{13}C_{23}}{C_{33}} \right) \varepsilon_x + \left( C_{22} - \frac{C_{23}^2}{C_{33}} \right) \varepsilon_y$$

Quindi alla fine si sono definiti tutti i coefficienti della matrice delle rigidezze ridotte:

$$Q_{ij} \equiv C_{ij} - \frac{C_{i3}C_{j3}}{C_{33}} \text{ con } i, j = 1, 2$$

$$Q_{66} = C_{66}$$

$$Q_{16} = Q_{26} = 0$$

ma sono stati ricavati nel sistema di riferimento di ortotropia della lamina e ora vanno riportati nel sistema di riferimento globale del materiale.

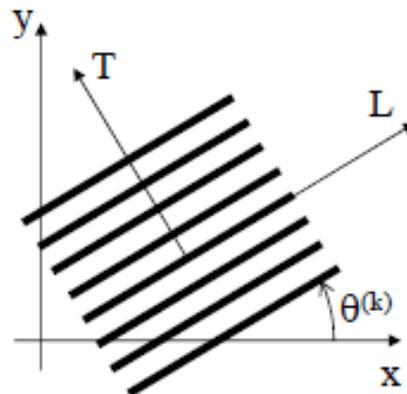


Figura 3.10: Sistema di riferimento globale  $(x, y)$  e di ortotropia  $(L, T)$

Per effettuare questa rotazione nota la matrice delle rigidezze ridotte della singola lamina:

$$[Q_p] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} & \frac{\nu_{LT}E_T}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} & 0 \\ \frac{\nu_{LT}E_T}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} & \frac{E_T}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{LT} \end{bmatrix}$$

con  $E_L$  e  $E_T$  moduli di Young lungo le direzioni principali di ortotropia,  $\nu_{LT}$  e  $G_{LT}$  coefficiente di Poisson e modulo di taglio nel piano di ortotropia ( $L, T$ ) e  $\nu_{TL} = \nu_{LT} \frac{E_T}{E_L}$ ,

e nota la matrice di rotazione  $[\Lambda^{(k)}]$  con  $(k)$  k-esima lamina:

$$[\Lambda^{(k)}] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix}$$

con  $s = \sin \theta^{(k)}$  e  $c = \cos \theta^{(k)}$ ,

è possibile riscrivere le leggi precedenti nel seguente modo:

$$\{\varepsilon_p\} = [\Lambda^{(k)}]\{\varepsilon\}$$

$$\{\sigma_p\} = [\Lambda^{(k)}]\{\sigma\}$$

Ricordando l'equazione dell'energia di deformazione:

$$E_\varphi = \frac{1}{2}\{\sigma\}^T\{\varepsilon\} = \frac{1}{2}\{\varepsilon\}^T [Q]\{\varepsilon\}$$

che inoltre può essere riscritta nella forma:

$$E_\varphi = \frac{1}{2}\{\sigma_p\}^T\{\varepsilon_{\gamma p}\} = \frac{1}{2}\{\varepsilon_{\gamma p}\}^T [Q_p]\{\varepsilon_{\gamma p}\}$$

e tenendo conto che:

$$\{\varepsilon_{\gamma p}\} = [T]\{\varepsilon_p\} = [T][\Lambda]\{\varepsilon\} = [T][\Lambda][T]^{-1}\{\varepsilon\} = [\Lambda^{-1}]^T\{\varepsilon\}$$

si ottiene:

$$E_\varphi = \frac{1}{2}\{\varepsilon_{\gamma p}\}^T [Q_p]\{\varepsilon_{\gamma p}\} = \frac{1}{2}\{\varepsilon\}^T [\Lambda^{-1}][Q_p][\Lambda^{-1}]^T\{\varepsilon\}$$

confrontandola infine con la prima si osserva come:

$$[Q] = [\Lambda^{-1}][Q_p][\Lambda^{-1}]^T$$

A questo punto è possibile ricavare le risultanti di tensioni e momenti per la singola lamina:

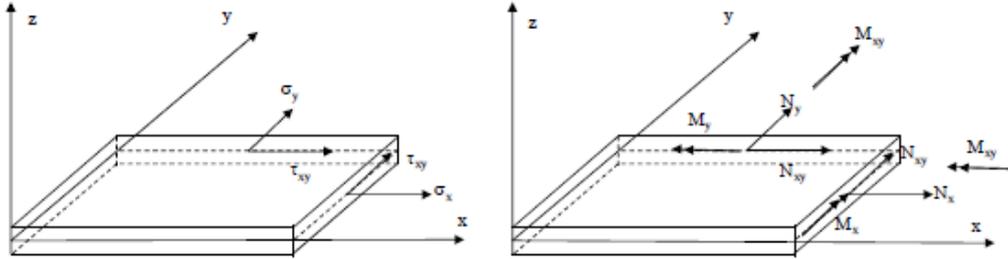


Figura 3.11: Risultanti di tensioni e momenti

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \left\langle \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \right\rangle = \langle \{\sigma_p\} \rangle$$

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \left\langle z \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \right\rangle = \langle z\{\sigma_p\} \rangle$$

con  $\langle \dots \rangle = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\dots) dz$  ed  $h$  = spessore dello strato.

Arrivando alle equazioni costitutive della piastra:

$$\{N\} = [A]\{\varepsilon_V^{(0)}\} + [B]\{k_V\}$$

$$\{M\} = [B]\{\varepsilon_V^{(0)}\} + [D]\{k_V\}$$

con  $[A]$  matrice delle rigidzze membranali e  $NS$  numero di strati:

$$\begin{aligned} [A] &= \langle [Q_p] \rangle = \sum_{k=1}^{NS} \int_{z^{(k)-}}^{z^{(k)+}} [Q_p^{(k)}] dz = \sum_{k=1}^{NS} [Q_p^{(k)}] \int_{z^{(k)-}}^{z^{(k)+}} dz = \\ &= \sum_{k=1}^{NS} [Q_p^{(k)}] \left( \frac{z^{(k)+} - z^{(k)-}}{1} \right) = \sum_{k=1}^{NS} [Q_p^{(k)}] h^{(k)} \end{aligned} \quad (3-1)$$

con  $[B]$  matrice delle rigidzze di accoppiamento e  $NS$  numero di strati:

$$\begin{aligned} [B] &= \langle z[Q_p] \rangle = \sum_{k=1}^{NS} \int_{z^{(k)-}}^{z^{(k)+}} z [Q_p^{(k)}] dz = \sum_{k=1}^{NS} [Q_p^{(k)}] \int_{z^{(k)-}}^{z^{(k)+}} z dz = \\ &= \sum_{k=1}^{NS} [Q_p^{(k)}] \left( \frac{z^{(k)+2} - z^{(k)-2}}{2} \right) \end{aligned} \quad (3-2)$$

con  $[D]$  matrice delle rigidezze flesso-torsionali e  $NS$  numero di strati:

$$\begin{aligned}
 [D] = \langle z^2 [Q_p] \rangle &= \sum_{k=1}^{NS} \int_{z^{(k)-}}^{z^{(k)+}} z^2 [Q_p^{(k)}] dz = \sum_{k=1}^{NS} [Q_p^{(k)}] \int_{z^{(k)-}}^{z^{(k)+}} z^2 dz = \\
 &= \sum_{k=1}^{NS} [Q_p^{(k)}] \left( \frac{(z^{(k)+})^3 - (z^{(k)-})^3}{3} \right) \quad (3-3)
 \end{aligned}$$

Da queste ultime equazioni è possibile notare come le matrici  $[A]$ ,  $[B]$  e  $[D]$  sono delle matrici 3x3 simmetriche, a causa della simmetria di  $[Q]$ ; la matrice  $[A]$  dipende solo dal numero di strati e non dalla loro posizione lungo lo spessore; le matrici  $[B]$  e  $[D]$  invece dipendono dal numero di strati, dalla loro posizione rispetto allo spessore e dal materiale di cui sono costituiti.

Particolare attenzione è da porre sulla matrice  $[B]$  poiché se il laminato è un laminato simmetrico si avrà  $[B] = 0$  e le equazioni costitutive della piastra saranno:

$$\{N\} = [A] \{\varepsilon_\gamma^{(0)}\}$$

$$\{M\} = [D] \{k_\gamma\}$$

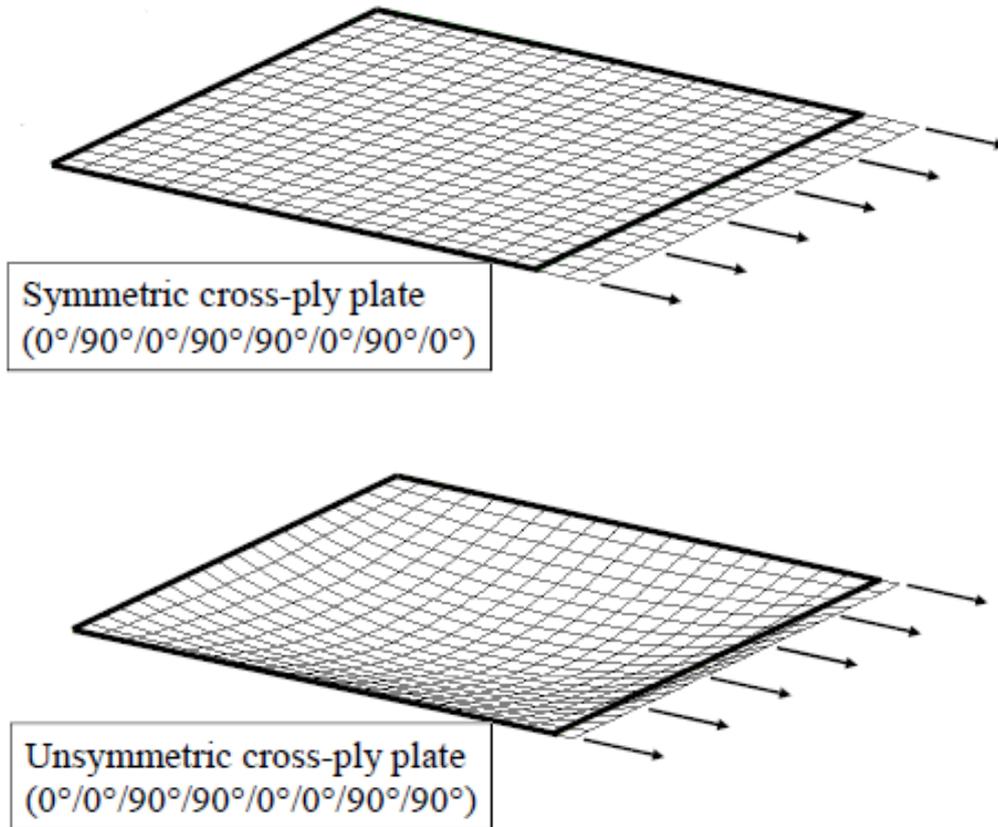


Figura 3.12: Effetti di  $[B] = 0$  (in alto), di  $[B] \neq 0$

da cui si deduce che adottare questo tipo di laminati garantisce un disaccoppiamento degli effetti membranali e flessio-torsionali così che  $\{N\}$  introduca solo deformazioni membranali e  $\{M\}$  solo deformazioni flessio-torsionali.

Inoltre la maggior parte dei laminati sono composti da strati identici cioè costituiti dallo stesso materiale con lo stesso spessore. Infatti è solo in ipotesi di strati identici che si ottengono delle regole generali sul comportamento e la progettazione dei laminati.

Avere strati identici comporta delle semplificazioni nei risultati trovati fin ora poiché la numerazione degli strati  $z^{(k)}$  può essere riformulata in:

$$z^{(k)} = \frac{h}{2} + k \frac{h}{n} = \frac{2k - n}{2n} h$$

con  $h$  spessore dello strato,  $k$  numero di strato e  $n$  strati totali

che se sostituita nelle formule (3-1), (3-2) e (3-3) mi permette di ricavare:

$$[A] = \frac{h}{n} \sum_{k=1}^{NS} [Q_p^{(k)}] \quad (3-4)$$

$$[B] = \frac{1}{2} \frac{h^2}{n^2} \sum_{k=1}^{NS} b_k [Q_p^{(k)}] \quad (3-5)$$

$$[D] = \frac{1}{12} \frac{h^3}{n^3} \sum_{k=1}^{NS} d_k [Q_p^{(k)}] \quad (3-6)$$

con i coefficienti dati da  $\begin{cases} b_k = 2k - n - 1 \\ d_k = 12k(k - n - 1) + 4 + 3n(n + 2) \end{cases}$

Questa trattazione ha così portato alla definizione di un requisito fondamentale per un laminato cioè *laminato simmetrico a strati identici*.

Infatti l'adozione di questa classe di laminati da un lato li rende facilmente progettabili, semplificando il problema e garantendo al progettista la possibilità di avere a disposizione delle leggi di omogeneizzazione, dall'altro lato garantisce dei vantaggi dal punto di vista del comportamento meccanico del materiale.

### 3.4 – Tipi di laminati di uso frequente

In questo paragrafo, dopo essere giunti al primo requisito fondamentale per la progettazione di un laminato, si considerano alcuni tipi di laminati di uso frequente che mantengono fisso il requisito di laminati a strati identici, poiché in questo modo è possibile definire delle regole generali sulle proprietà elastiche e la loro progettazione.

Infatti si è visto come il comportamento di un laminato a strati identici è caratterizzato dalle proprietà elastiche dello strato di base, dalla sequenza degli strati e dalla loro orientazione.

Ora ci si concentra proprio su un altro punto chiave del laminato cioè le orientazioni, poiché i vari strati sono orientati in modo diverso e, come visto nelle formule precedenti, che definiscono i tensori che descrivono il comportamento di un laminato, i tensori di rigidità degli strati devono essere ruotati nel riferimento globale del laminato.

Questo implica che la progettazione di un laminato con orientazioni degli strati variabili è un problema complicato e con una soluzione non unica che ha portato nel tempo a sviluppare delle regole pratiche di progettazione al fine di ottenere dei laminati con determinate caratteristiche meccaniche, ma queste regole, solitamente semplici ed intuitive, sono solo delle condizioni sufficienti, ma non necessarie, per ottenere una determinata proprietà.

### 3.4.1 – Laminati disaccoppiati

La proprietà più ricercata, come dimostrato al paragrafo 3.3 – Teoria delle piastre a più strati, in un laminato è il disaccoppiamento elastico cioè  $[B] = 0$ .

Quindi una condizione sufficiente per avere  $[B] = 0$  è quella di disporre gli strati in modo simmetrico rispetto al piano medio.

Questa regola è quella seguita nella quasi totalità dei casi, ma bisogna tenere presente che è una regola sufficiente e non necessaria per il disaccoppiamento elastico, che porta con se lo svantaggio di a raddoppiare il numero degli strati, cioè l'utilizzo delle sequenze simmetriche nella progettazione al fine di ottenere le caratteristiche meccaniche volute porta a definire un numero di strati superiore a quello minimo con cui si sarebbero potute ottenere le stesse proprietà.

### 3.4.2 – Laminati bilanciati

I laminati bilanciati (*balanced*) sono quei laminati in cui ad ogni strato orientato con angolo  $\theta$  corrisponde uno strato orientato con angolo  $-\theta$  e si tratta quindi di laminati a numero pari di strati.

L'interesse in questa classe di laminati è dovuto al fatto che hanno comportamento ortotropo in membrana

Infatti, richiamando la formula (3-4), questa può essere riscritta nella forma:

$$[A] = \frac{h}{n} \sum_{k=1}^{NS} [Q_p^{(k)}] = \frac{h}{n} \sum_{k=1}^{\frac{NS}{2}} [Q_p(\theta^{(k)}) + Q_p(-\theta^{(k)})]$$

e ricordando che:

$$\begin{aligned} Q_{16}(-\theta^{(k)}) &= -Q_{16}(\theta^{(k)}) = 0 \\ Q_{26}(-\theta^{(k)}) &= -Q_{26}(\theta^{(k)}) = 0 \end{aligned}$$

si ricava immediatamente che in  $[A]$ :

$$A_{16} = A_{26} = 0$$

cioè il laminato è ortotropo in membrana nel riferimento globale della piastra.

Quanto detto non è però valido in flessione, poiché:

$$[D] = \frac{1}{12} \frac{h^3}{n^3} \sum_{k=1}^{NS} d_k [Q_p^{(k)}]$$

e la presenza del coefficiente  $d_k$  non permette di ottenere l'ortotropia in flessione, a meno che non si vada a considerare un laminato antisimmetrico, infatti con sequenza antisimmetrica sarà  $d_k = d_{-k}$  cioè  $\theta^{(-k)} = -\theta^{(k)}$  ottenendo:

$$\begin{aligned} d_{-k} Q_{16}(\theta^{(-k)}) &= -d_k Q_{16}(\theta^{(k)}) \\ d_{-k} Q_{26}(\theta^{(-k)}) &= -d_k Q_{26}(\theta^{(k)}) \end{aligned}$$

che nella matrice  $[D]$  mi consente di ricavare:

$$\begin{aligned} D_{16} &= \frac{1}{12} \frac{h^3}{n^3} \sum_{k=1}^{NS} d_k Q_{16}(\theta^{(k)}) = \frac{1}{12} \frac{h^3}{n^3} \sum_{k=1}^{\frac{NS}{2}} d_k [Q_{16}(\theta^{(k)}) - Q_{16}(\theta^{(k)})] = 0 \\ D_{26} &= \frac{1}{12} \frac{h^3}{n^3} \sum_{k=1}^{NS} d_k Q_{26}(\theta^{(k)}) = \frac{1}{12} \frac{h^3}{n^3} \sum_{k=1}^{\frac{NS}{2}} d_k [Q_{26}(\theta^{(k)}) - Q_{26}(\theta^{(k)})] = 0 \end{aligned}$$

cioè il laminato è ortotropo in flessione e in membrana.

Tutto questo dimostra come i laminati bilanciati possano essere di due tipi:

- Simmetrici, con il vantaggio di essere disaccoppiati  $[B] = 0$  e ortotropi in membrana  $A_{16} = A_{26} = 0$  ma non in flessione  $D_{16} \neq 0$  e  $D_{26} \neq 0$
- Antisimmetrici, con il vantaggio di essere ortotropi in membrana  $A_{16} = A_{26} = 0$  e in flessione  $D_{16} = D_{26} = 0$  ma non disaccoppiati  $[B] \neq 0$  (classe di laminati che contraddice la ricerca della proprietà di disaccoppiamento data da  $[B] = 0$ ).

### 3.4.3 – Laminati *angle-ply*

Il laminato *angle-ply* è un caso particolare di laminato bilanciato in cui si ha una sola orientazione delle lamine  $\theta^{(k)}$  e la sua opposta  $-\theta^{(k)}$ .

A questa classe di laminati competono le stesse regole della classe di laminati bilanciati, cioè ortotropi in membrana, ma disaccoppiati se simmetrici o ortotropi in flessione se antisimmetrici.

### 3.4.4 – Laminati *cross-ply*

Il laminato *cross-ply* è un laminato in cui si adottano per gli strati solo orientazioni  $0^\circ$  e  $90^\circ$ , che porta ad avere assi di ortotropia coincidenti con quelli del sistema di riferimento globale del laminato.

L'adozione di questa classe di laminati porta ad ottenere, nella teoria, un comportamento ortotropo in membrana  $A_{16} = A_{26} = 0$ , in flessione  $D_{16} = D_{26} = 0$  e in accoppiamento  $B_{16} = B_{26} = 0$  e se simmetrico garantisce anche il disaccoppiamento  $[B] = 0$ .

### 3.4.5 – Laminati quasi-isotropi

Il laminato quasi-isotropo è un laminato in cui si adottano per gli strati solo orientazioni  $0^\circ \pm 45^\circ$  e  $90^\circ$  ed in aggiunta il numero di strati orientati a  $+45^\circ$  deve essere uguale a quello degli strati orientati a  $-45^\circ$

Questo garantisce comportamento ortotropo in membrana che diventa isotropo se si ha lo stesso numero di strati in ogni direzione, ma quanto detto non vale per il comportamento in flessione.

Questo tipo laminati sono molto usati in aeronautica perché offrono uniformità in rigidità e resistenza secondo tutte le direzioni con un buon contrasto alla propagazione delle fessure.

## 3.5 – Procedura Grafica di Miki (*Miki's Graphical Procedure*)

### 3.5.1 – Premesse

Nel paragrafo precedente sono state espresse alcune caratteristiche meccaniche dei laminati:

- Accoppiamento membrana-flessione;
- Comportamento in membrana e inflessione;
- Caratteristiche dipendenti dal orientazione degli strati.

Si è così giunti alla conclusione che un laminato è un materiale da progettare.

Infatti per un materiale metallico classico il solo dato di progetto di una piastra e lo spessore, mentre in un laminato si devono definire tre tipi di dati:

- Numero degli strati;
- Orientazione degli strati;
- Materiale degli strati.

Come dimostrato finora, queste 3 variabili possono essere ridotte a 2, se si considera come ipotesi di partenza un laminato a strati identici.

Ma anche con questa semplificazione, il numero delle variabili di progetto rimane elevato, infatti questa affermazione è confermata dalle formule di composizione dei tensori  $[A]$ ,  $[B]$  e  $[D]$  e dalle formule di rotazione, poiché le variabili di progetto e le orientazioni degli strati appaiono nelle componenti dei tensori all'interno dell'argomento di funzioni circolari.

Inoltre si vuole che il laminato rispetti alcuni requisiti elastici riconducibili tutti ad una simmetria elastica, in modo tale da avere ortotropia in membrana  $A_{16} = A_{26} = 0$  e/o inflessione  $D_{16} = D_{26} = 0$  e disaccoppiamento  $[B] = 0$ .

Quindi il progetto di un laminato è un'operazione per la quale non esistono ancora dei metodi universalmente validi.

Proprio a causa di queste difficoltà questo studio si è soffermato sul cercare delle soluzioni per una classe di laminati capaci di garantire i requisiti di disaccoppiamento  $[B] = 0$  e ortotropia in membrana  $A_{16} = A_{26} = 0$ .

Questo tipo di approccio permette di semplificare il problema, con lo svantaggio di non ottenere una ottimizzazione del peso.

### 3.5.2 – Introduzione dei parametri di laminazione

Richiamiamo le formule (3-4), (3-5) e (3-6), ricavate al paragrafo 3.3 – Teoria delle piastre a più strati, per un laminato a strati identici:

$$[A] = \frac{h}{n} \sum_{k=1}^{NS} [Q_p^{(k)}]$$

$$[B] = \frac{1}{2} \frac{h^2}{n^2} \sum_{k=1}^{NS} b_k [Q_p^{(k)}]$$

$$[D] = \frac{1}{12} \frac{h^3}{n^3} \sum_{k=1}^{NS} d_k [Q_p^{(k)}]$$

con i coefficienti dati da  $\begin{cases} b_k = 2k - n - 1 \\ d_k = 12k(k - n - 1) + 4 + 3n(n + 2) \end{cases}$

È possibile osservare che, se gli strati sono identici, le diverse componenti dei tensori dipendono dalle caratteristiche elastiche dello strato di base e da una combinazione di funzioni circolari delle orientazioni.

Questi due fattori possono essere separati poiché, essendo le caratteristiche elastiche di base comuni a tutti gli strati, queste non dipendono dalle sommatorie delle formule dei tensori di rigidezza.

La separazione tra parte elastica e parte geometrica nella rigidezza di un laminato, se il materiale di base è ortotropo e le sue proprietà sono note nel sistema di riferimento del materiale, viene effettuata utilizzando i parametri di Tsai-Pagano.

Ottenendo per le componenti della rigidezza in membrana:

$$\begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{22} \\ A_{12} \\ A_{66} \\ A_{16} \\ A_{26} \end{Bmatrix} = h \begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & \xi_2 & 0 & 0 \\ 1 & -\xi_1 & \xi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_2 & 0 & 1 \\ 0 & -\xi_3/2 & -\xi_4 & 0 & 0 \\ 0 & -\xi_3/2 & \xi_4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{Bmatrix}$$

per le componenti di accoppiamento:

$$\begin{Bmatrix} B_{11} \\ B_{22} \\ B_{12} \\ B_{66} \\ B_{16} \\ B_{26} \end{Bmatrix} = \frac{h^2}{2} \begin{bmatrix} 0 & \xi_5 & \xi_6 & 0 & 0 \\ 0 & -\xi_5 & \xi_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_6 & 0 & 0 \\ 0 & -\xi_7/2 & -\xi_8 & 0 & 0 \\ 0 & -\xi_7/2 & \xi_8 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{Bmatrix}$$

e per le componenti di flessione:

$$\begin{Bmatrix} D_{11} \\ D_{22} \\ D_{12} \\ D_{66} \\ D_{16} \\ D_{26} \end{Bmatrix} = \frac{h^3}{12} \begin{bmatrix} 1 & \xi_9 & \xi_{10} & 0 & 0 \\ 1 & -\xi_9 & \xi_{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_{10} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_{10} & 0 & 1 \\ 0 & -\xi_{11}/2 & -\xi_{12} & 0 & 0 \\ 0 & -\xi_{11}/2 & \xi_{12} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{Bmatrix}$$

con  $U_i$  parametri di Tsai-Pagano:

$$U_1 = \frac{3Q_{11} + 2Q_{12} + 3Q_{22} + 4Q_{66}}{8} \quad U_2 = \frac{Q_{11} - Q_{22}}{2} \quad U_3 = \frac{Q_{11} - 2Q_{12} + Q_{22} - 4Q_{66}}{8}$$

$$U_4 = \frac{Q_{11} + 6Q_{12} + Q_{22} - 4Q_{66}}{8} \quad U_5 = \frac{Q_{11} - 2Q_{12} + Q_{22} + 4Q_{66}}{8}$$

ricordando che, essendo gli strati identici, questi parametri sono delle costanti in un processo di ottimizzazione, una volta scelto il materiale e per questo motivo vengono anche chiamati invarianti.

Invece i parametri  $\xi_i$  sono i parametri di Tsai-Hahn, detti parametri di laminazione (*lamination parameters*), definiti per il comportamento in membrana come:

$$\xi_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \cos 2\theta \, dz = \frac{1}{n} \sum_{k=-p}^p \cos 2\theta^{(k)} \, dz$$

$$\xi_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \cos 4\theta \, dz = \frac{1}{n} \sum_{k=-p}^p \cos 4\theta^{(k)} \, dz$$

$$\xi_3 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sin 2\theta \, dz = \frac{1}{n} \sum_{k=-p}^p \sin 2\theta^{(k)} \, dz$$

$$\xi_4 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sin 4\theta \, dz = \frac{1}{n} \sum_{k=-p}^p \sin 4\theta^{(k)} \, dz$$

per l'accoppiamento come:

$$\xi_5 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \cos 2\theta \, dz = \frac{1}{n^2} \sum_{k=-p}^p b_k \cos 2\theta^{(k)} \, dz$$

$$\xi_6 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \cos 4\theta \, dz = \frac{1}{n^2} \sum_{k=-p}^p b_k \cos 4\theta^{(k)} \, dz$$

$$\xi_7 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sin 2\theta \, dz = \frac{1}{n^2} \sum_{k=-p}^p b_k \sin 2\theta^{(k)} \, dz$$

$$\xi_8 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sin 4\theta \, dz = \frac{1}{n^2} \sum_{k=-p}^p b_k \sin 4\theta^{(k)} \, dz$$

per la flessione come:

$$\xi_9 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 \cos 2\theta \, dz = \frac{1}{n^3} \sum_{k=-p}^p d_k \cos 2\theta^{(k)} \, dz$$

$$\xi_{10} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 \cos 4\theta \, dz = \frac{1}{n^3} \sum_{k=-p}^p d_k \cos 4\theta^{(k)} \, dz$$

$$\xi_{11} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 \sin 2\theta \, dz = \frac{1}{n^3} \sum_{k=-p}^p d_k \sin 2\theta^{(k)} \, dz$$

$$\xi_{12} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 \sin 4\theta \, dz = \frac{1}{n^3} \sum_{k=-p}^p d_k \sin 4\theta^{(k)} \, dz$$

e definiscono completamente l'influenza della geometria sulla rigidità del laminato considerando il numero, la disposizione e l'orientazione degli strati.

### 3.5.3 – Il metodo di Miki

Nel 1982 Miki ha proposto per primo un metodo generale, grafico e analitico basato sull'uso dei parametri di laminazione, questo metodo è un metodo approssimato che riguarda la progettazione delle proprietà di membrana ( $[A]$ ) di laminati a strati identici, bilanciati e simmetrici.

Quindi, ricordando quanto detto nel paragrafo 3.4 – Tipi di laminati di uso frequente, il fatto che il laminato sia bilanciato e simmetrico garantisce che:

$$\begin{aligned} A_{16} = A_{26} &= 0 \\ [B] &= 0 \end{aligned}$$

In questo modo solo i parametri di laminazione  $\xi_1$  e  $\xi_2$  definiscono interamente il progetto in membrana di un laminato disaccoppiato.

Se si suppone che vi siano  $n_g$  gruppi di orientazioni possibili a  $\pm\theta^{(k)}$  con  $n_k$  strati a  $\pm\theta^{(k)}$ , allora i parametri di laminazione  $\xi_1$  e  $\xi_2$  possono essere riscritti come:

$$\begin{cases} \xi_1 = \sum_{k=1}^{n_g} v_k \cos 2\theta^{(k)} dz \\ \xi_2 = \sum_{k=1}^{n_g} v_k \cos 4\theta^{(k)} dz \\ v_k = \frac{n_k}{n} \end{cases}$$

con  $v_k$  frazione di strati del gruppo  $k$ , a orientazione  $\pm\theta^{(k)}$ , sul totale degli strati o detta anche frazione volumetrica degli strati.

Nel metodo di Miki si prendono proprio questi due parametri come variabili libere, quindi si effettua un cambio di variabile nel progetto, che ora viene studiato nello spazio dei parametri di laminazione di dimensione 2 e che ovviamente è uno spazio ridotto rispetto alle dimensioni dello spazio delle autentiche variabili di progetto cioè le orientazioni.

Si considera, come primo caso, un laminato *angle-ply*, cioè un laminato bilanciato con un solo un angolo di orientazione  $\pm\theta^{(k)}$  e quindi con  $n_g = 1$  e  $v_k = 1$ , da queste ipotesi ricavo:

$$\begin{cases} \xi_1 = \cos 2\theta^{(k)} \\ \xi_2 = \cos 4\theta^{(k)} \end{cases} \rightarrow \xi_2 = 2\xi_1^2 - 1$$

quindi i laminati *angle-ply* sono rappresentati nel piano  $\xi_1$ - $\xi_2$  da un arco di parabola delimitato dalla condizione trigonometrica:

$$-1 \leq \xi_1 \leq 1$$

e nel caso in cui si hanno diverse orientazioni possibili  $\pm\theta^{(k)}$  la seconda equazione diventa una condizione limite:

$$\xi_2 \geq 2\xi_1^2 - 1$$

È così possibile definire la regione ammissibile  $\Omega$  del piano  $\xi_1$ - $\xi_2$  delimitata da:

$$\begin{cases} -1 \leq \xi_1 \leq 1 \\ \xi_2 \geq 2\xi_1^2 - 1 \end{cases}$$

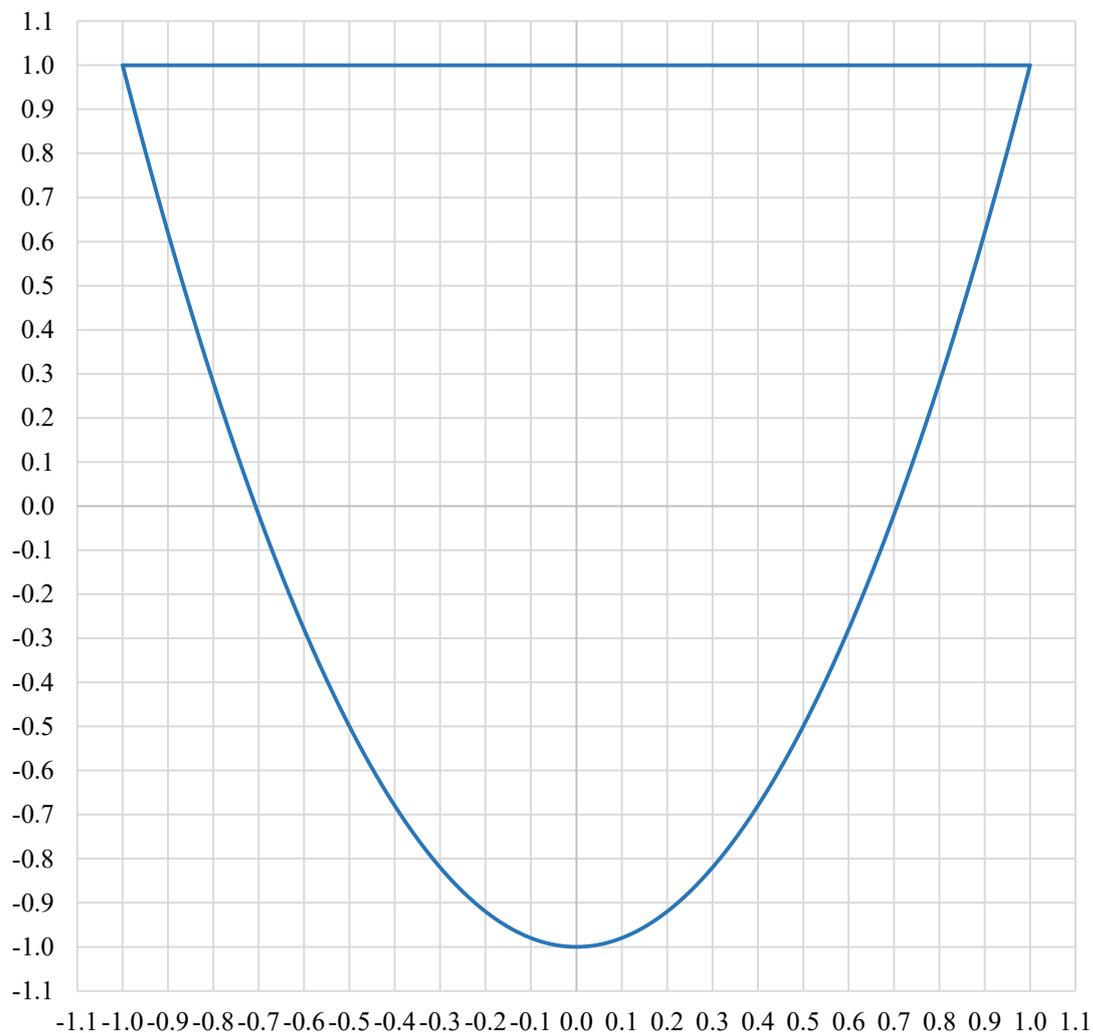


Figura 3.13: Regione ammissibile  $\Omega$  del piano  $\xi_1$ - $\xi_2$

Ogni punto del dominio  $\Omega$  è detto punto di laminazione e ad esso corrisponde una sola coppia  $\{\xi_1, \xi_2\}$  e quindi un solo tensore  $A$ , ma questo stesso punto di laminazione

può essere ottenuto con diverse combinazioni di orientazioni di uno stesso numero, o di un numero diverso, di strati.

Questo spiega come non vi sia corrispondenza biunivoca tra la rigidità e la sequenza degli strati ed è necessario avere un criterio per determinare le orientazioni, se si risolve il problema con i parametri di laminazione.

Come secondo caso si considera un laminato con 2 un angoli di orientazione  $\pm\theta^{(k)}$  e si riscrive il problema nel seguente modo:

$$\begin{cases} \xi_1 = \nu_1 \cos 2\theta^{(1)} + \nu_2 \cos 2\theta^{(2)} \\ \xi_2 = \nu_1 \cos 4\theta^{(1)} + \nu_2 \cos 4\theta^{(3)} \\ \nu_2 = 1 - \nu_1 \end{cases}$$

e si osserva sono 3 i parametri da scegliere per ottenere un laminato corrispondente ad un punto di laminazione di  $\Omega$ ; quindi dal sistema precedente si possono ricavare 2 di questi parametri se se ne fissa il terzo.

Scegliendo di fissare  $\nu_1$  si ottengono le orientazioni come:

$$\begin{aligned} \theta^{(1)} &= \frac{1}{2} \arccos Q_1 \\ \theta^{(2)} &= \frac{1}{2} \arccos Q_2 \end{aligned}$$

con:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{2\nu_1\xi_1 \pm \sqrt{2\nu_1\nu_2(1 + \xi_2 - 2\xi_1^2)}}{2\nu_1} \\ Q_2 &= \frac{\xi_1 - \nu_1 Q_1}{\nu_2} \end{aligned}$$

Come terzo ed ultimo caso, poiché è il caso di interesse, si considera un laminato con 2 un angoli di orientazione  $\pm\theta^{(k)}$  di cui uno è di  $0^\circ$  e si riscrive il problema nel seguente modo:

$$\begin{cases} \xi_1 = \nu_1 \cos 2\theta^{(1)} + \nu_2 \cos 2\theta^{(2)} + \nu_3 \\ \xi_2 = \nu_1 \cos 4\theta^{(1)} + \nu_2 \cos 4\theta^{(2)} + \nu_3 \\ \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = 1 \end{cases} \quad (3-7)$$

e scegliendo di fissare 2 dei 3 parametri di laminazione si ottiene:

$$\begin{aligned} \theta^{(1)} &= \frac{1}{2} \arccos \frac{\xi_1 - \nu_2\theta - \nu_3}{\nu_1} \\ \theta^{(2)} &= \frac{1}{2} \arccos \theta \end{aligned} \quad \text{con} \quad \theta = \frac{-K_b \pm \sqrt{K_b^2 - K_a K_c}}{K_a}$$

con:

$$\begin{cases} K_a = 2\nu_2(\nu_1 + \nu_2) \\ K_b = 2\nu_2(\nu_3 - \xi_1) \\ K_c = 2\nu_3^2 + 2\nu_3(\nu_1 - 2\xi_1) - \nu_1(1 - \xi_2) + 2\xi_1^2 \end{cases}$$

La progettazione è stata effettuata facendo riferimento proprio a questo ultimo caso, poiché sono stati scelti come angoli di orientazione  $\theta^{(1)} = 90^\circ$ ,  $\theta^{(2)} = \pm 45^\circ$  e  $\theta^{(3)} = 0^\circ$ , essendo le orientazioni più utilizzate nel settore aeronautico e poiché, come si vedrà in seguito, garantiscono la maggiore copertura della regione ammissibile  $\Omega$  del piano  $\xi_1$ - $\xi_2$  per la definizione della struttura del laminato che soddisfi i requisiti delle caratteristiche meccaniche richieste.

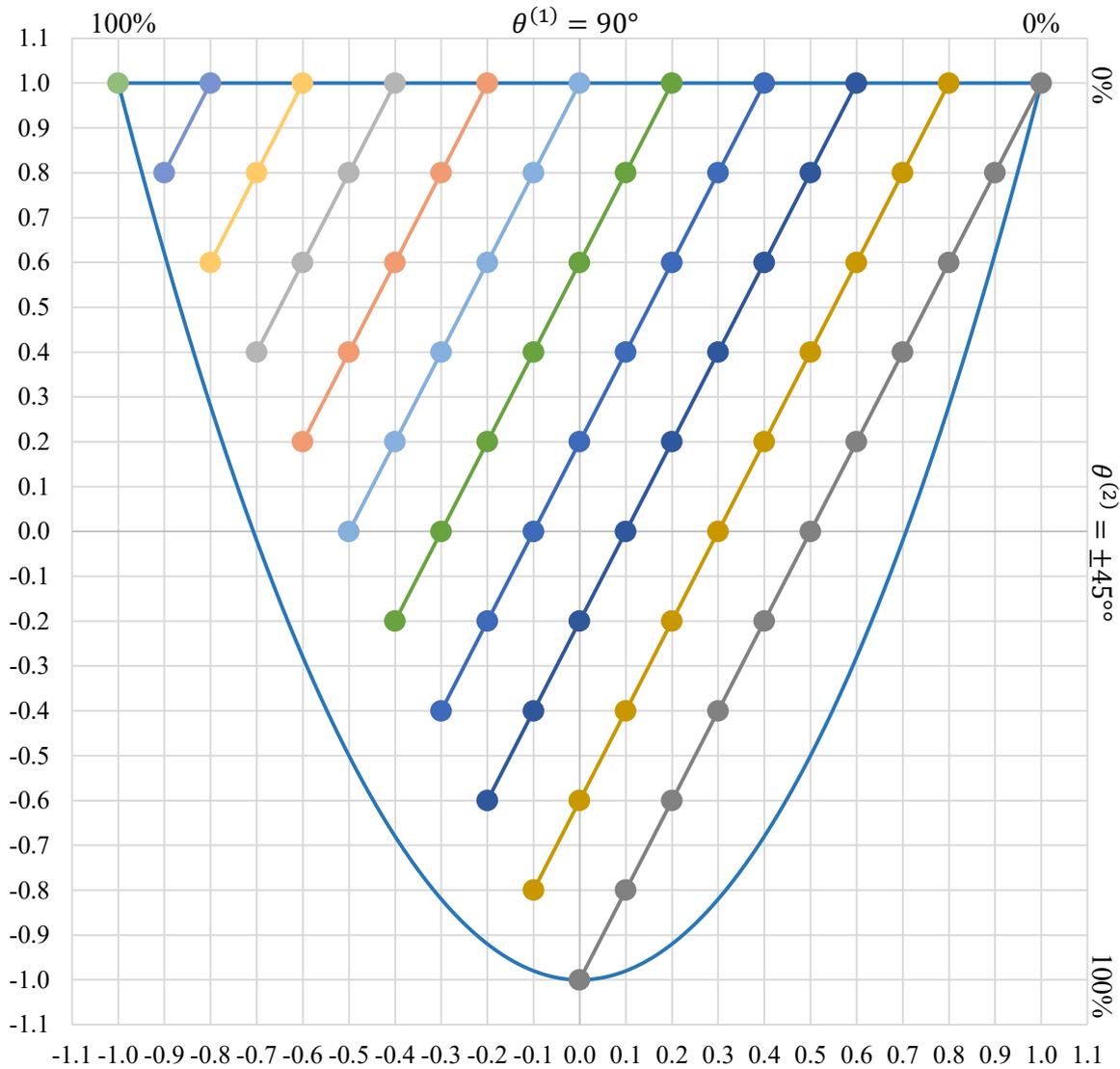


Figura 3.14: Regione ammissibile  $\Omega$  del piano  $\xi_1$ - $\xi_2$  con andamento delle frazioni volumetriche

Richiamando la terza delle equazioni del sistema (3-7):

$$v_1 + v_2 + v_3 = 1$$

si può notare come le 3 frazioni volumetriche rappresentano le percentuali di strati con angoli di orientazione  $\pm\theta^{(k)}$  e se riscritta nel seguente modo:

$$v_1 + v_2 = 1 - v_3$$

è possibile osservare che  $v_3$  è automaticamente definita note  $v_1$  e  $v_2$ .

Quindi noti gli angoli di orientazione degli strati ( $\theta^{(1)} = 90^\circ$ ,  $\theta^{(2)} = \pm 45^\circ$ ,  $\theta^{(3)} = 0^\circ$ ) attraverso una Macro su Excel è stato possibile definire, nella regione ammissibile  $\Omega$  del piano  $\xi_1$ - $\xi_2$ , delle rette che determinassero l'andamento delle frazioni volumetriche ottenendo la regione  $\Omega$  (Figura 3.12 della pagina precedente) in cui è possibile leggere l'andamento delle frazioni volumetriche degli strati con angoli di orientazione  $\theta^{(1)} = 90^\circ$  e  $\theta^{(2)} = \pm 45^\circ$  e che una volta determinate, con la formula precedente, automaticamente definiscono la frazione volumetrica degli strati con angolo di orientazione  $\theta^{(3)} = 0^\circ$ .

Per consentire un rapido confronto si riporta qui di seguito cosa accadrebbe alla copertura della regione ammissibile  $\Omega$  del piano  $\xi_1$ - $\xi_2$  ed alle rette delle frazioni volumetriche se si adottassero come angoli di orientazione degli strati  $\theta^{(1)} = \pm 60^\circ$ ,  $\theta^{(2)} = \pm 35^\circ$  e  $\theta^{(3)} = 0^\circ$

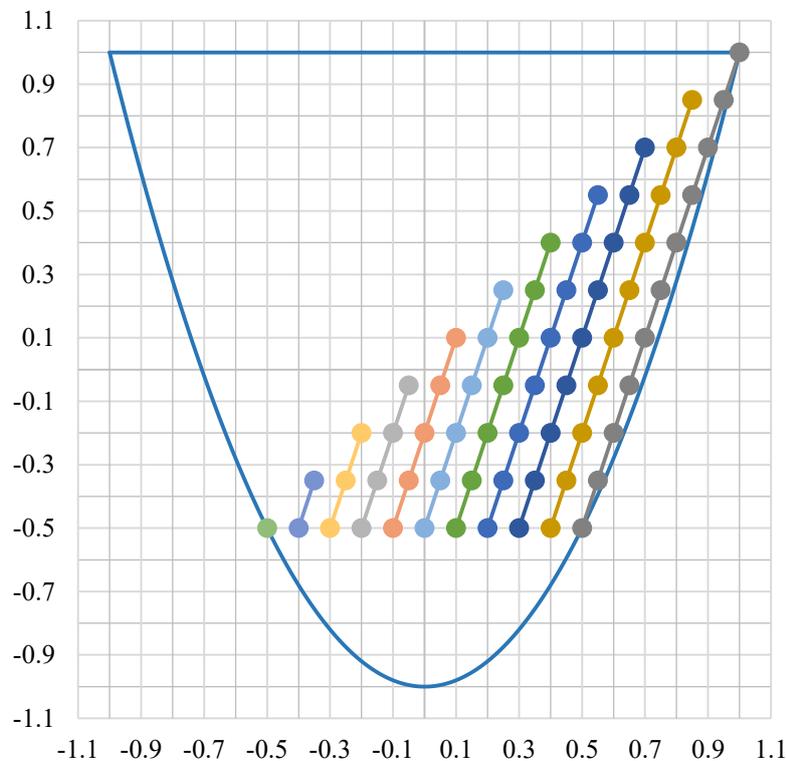


Figura 3.15: Regione ammissibile  $\Omega$  del piano  $\xi_1$ - $\xi_2$  con andamento delle frazioni volumetriche

o ancora come angoli di orientazione  $\theta^{(1)} = 90^\circ$ ,  $\theta^{(2)} = \pm 60^\circ$  e  $\theta^{(3)} = 0^\circ$ .

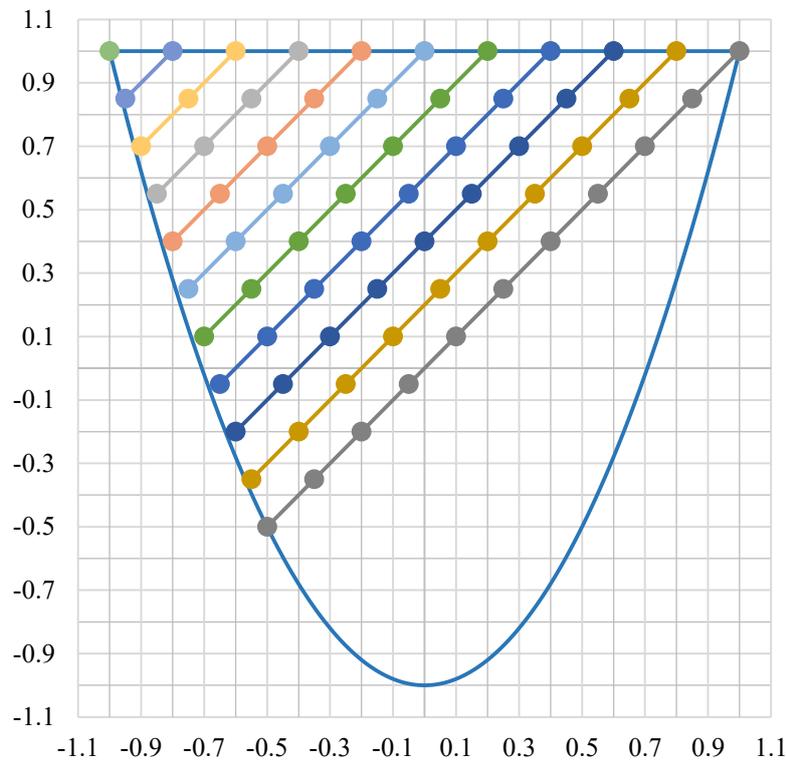


Figura 3.16: Regione ammissibile  $\Omega$  del piano  $\xi_1$ - $\xi_2$  con andamento delle frazioni volumetriche

Si nota come le precedenti combinazioni di angoli di orientazione delimitano una porzione interna della regione ammissibile  $\Omega$  del piano  $\xi_1$ - $\xi_2$  che, come si vedrà in seguito, causa il mancato ottenimento delle caratteristiche meccaniche desiderate.

Infatti ogni coppia di valori  $(\xi_1, \xi_2)$  definisce le frazioni volumetriche ma sullo stesso piano è anche possibile rappresentare con delle curve i moduli di rigidezza in membrana  $E_1^m$ ,  $E_2^m$ ,  $G_{12}^m$  e  $\nu_{12}^m$ .

Quindi il metodo di Miki, per la progettazione di un laminato rispondente ad alcuni criteri riguardanti i moduli di rigidezza in membrana, procede definendo i moduli di rigidezza in membrana:

$$E_1^m = \frac{1}{h} \left( A_{11} - \frac{A_{12}^2}{A_{22}} \right)$$

$$E_2^m = \frac{1}{h} \left( A_{22} - \frac{A_{12}^2}{A_{11}} \right)$$

$$G_{12}^m = \frac{A_{66}}{h}$$

$$\nu_{12}^m = \frac{A_{12}}{A_{22}}$$

che in termini di parametri di laminazione, con i parametri di Tsai-Pagano diventano:

$$E_1^m(\xi_1, \xi_2) = U_1 + \xi_1 U_2 + \xi_2 U_3 - \frac{(U_4 - \xi_2 U_3)^2}{U_1 - \xi_1 U_2 + \xi_2 U_3}$$

$$E_2^m(\xi_1, \xi_2) = U_1 - \xi_1 U_2 + \xi_2 U_3 - \frac{(U_4 - \xi_2 U_3)^2}{U_1 + \xi_1 U_2 + \xi_2 U_3}$$

$$G_{12}^m(\xi_2) = U_5 - \xi_2 U_3$$

$$\nu_{12}^m(\xi_1, \xi_2) = \frac{U_4 - \xi_2 U_3}{U_1 - \xi_1 U_2 + \xi_2 U_3}$$

e che infine invertite portano a definire le curve di isovalori dei moduli con i parametri di Tsai-Pagano:

$$\xi_2 = \frac{U_2 \xi_1^2 - U_2 E_1^m \xi_1 + E_1^m U_1 - U_1^2 + U_4^2}{U_3 (2U_1 + 2U_4 - E_1^m)} \quad \text{Curve isolvaori di } E_1^m$$

$$\xi_2 = \frac{U_2 \xi_1^2 + U_2 E_2^m \xi_1 + E_2^m U_1 - U_1^2 + U_4^2}{U_3 (2U_1 + 2U_4 - E_2^m)} \quad \text{Curve isolvaori di } E_2^m$$

$$\xi_2 = \frac{U_5 - G_{12}^m}{U_3} \quad \text{Curve isolvaori di } G_{12}^m$$

$$\xi_2 = \frac{\nu_{12}^m U_2 \xi_1 - \nu_{12}^m U_1 + U_4}{U_3 (1 + \nu_{12}^m)} \quad \text{Curve isolvaori di } \nu_{12}^m$$

La figura seguente mostra l'andamento qualitativo delle isocurve dei moduli in membrana

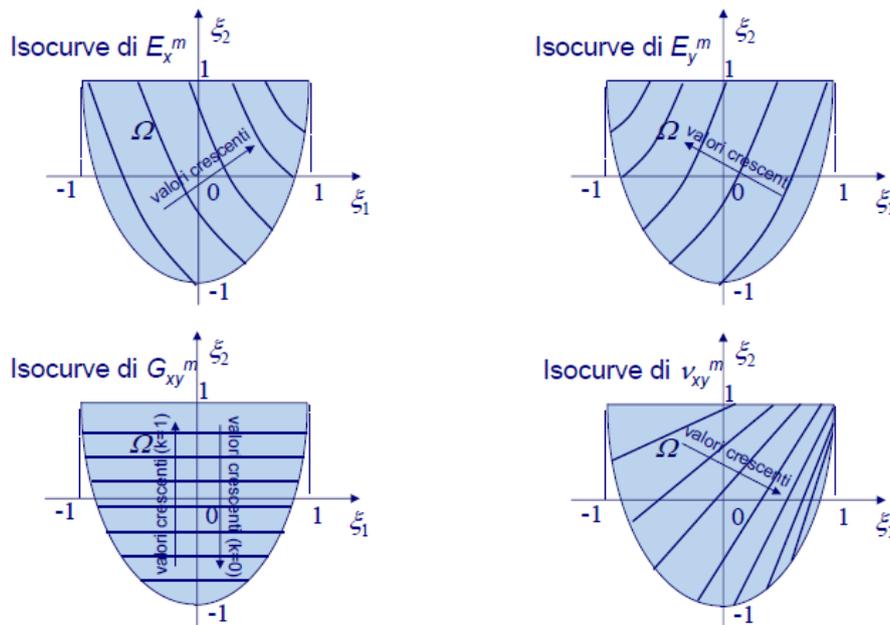


Figura 3.17: Andamento delle isocurve dei moduli in membrana

### 3.6 – Progettazione del laminato e risultati della progettazione

Sono così state sviluppate le basi teoriche usate nella progettazione del laminato in composito e in questo paragrafo se ne espongono i risultati.

Il punto di partenza è la definizione delle caratteristiche meccaniche del singolo strato di CFRP (Carbon Fiber Reinforced Polymer):

	CFRP
$E_1$	207.00 GPa
$E_2$	5.00 GPa
$\nu_{12}$	0.25 GPa
$\nu_{21}$	0.006 GPa
$G_{12}$	2.60 GPa
$X_t$	1.035 GPa
$Y_t$	0.041 GPa
$S$	0.069 GPa
$X_c$	0.689 GPa
$Y_c$	0.117 GPa
$\rho$	1.826 g/cm <sup>3</sup>
$h$	0.198 mm

*Tabella 3.1: Caratteristiche meccaniche del singolo strato di CFRP*

la definizione dei moduli di rigidezza che si vogliono ottenere dalla progettazione del laminato, che nel caso in esame sono i moduli di rigidezza della lega di alluminio Al7050-T7451 con cui sono stati progettati i componenti metallici della struttura:

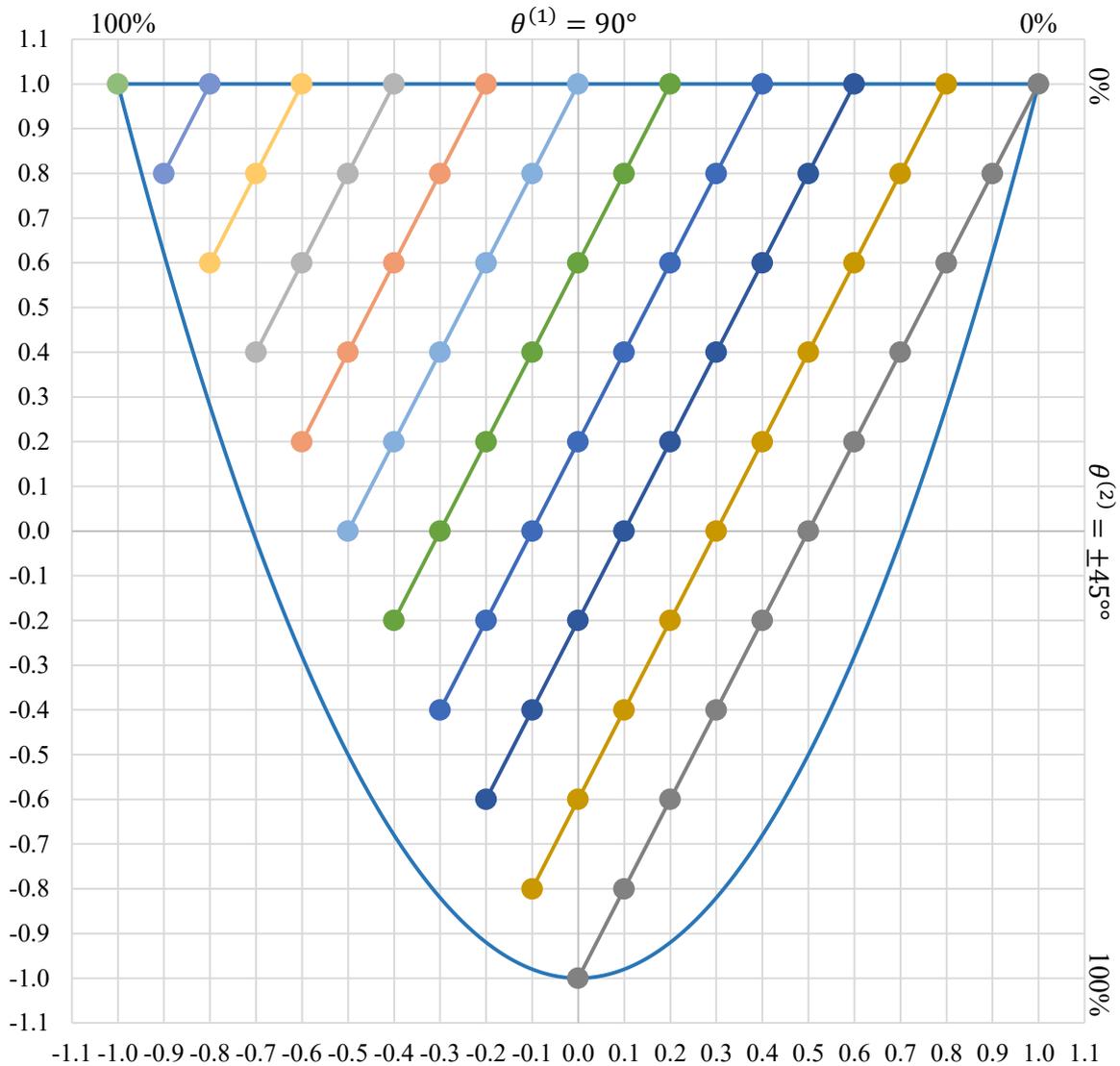
	Al7050-T7451
$E_1$	74.000 GPa
$E_2$	27.000 GPa
$\nu_{12}$	26.900 GPa
$G_{12}$	0.33
$\rho$	2.83 g/cm <sup>3</sup>

*Tabella 3.2: Moduli di rigidezza della lega Al7050-T7451*

ed infine la definizione delle ultime ipotesi necessarie per poter applicare la procedura grafica di Miki precedentemente descritta, cioè gli angoli di orientazione degli strati con i quali si vuole produrre il rivestimento in composito:

$$\begin{aligned}\theta^{(1)} &= 90^\circ \\ \theta^{(2)} &= \pm 45^\circ \\ \theta^{(3)} &= 0^\circ\end{aligned}$$

Avendo definito il set di angoli di orientazione degli strati, attraverso il metodo descritto al paragrafo 3.5.3 – Il metodo di Miki, è possibile tracciare nella regione ammissibile  $\Omega$  del piano  $\xi_1$ - $\xi_2$  le rette tramite le quali si determina l'andamento delle frazioni volumetriche degli strati, ottenendo:



*Figura 3.18: Regione ammissibile  $\Omega$  del piano  $\xi_1$ - $\xi_2$  con andamento delle frazioni volumetriche*

Successivamente si vuole individuare sul piano  $\xi_1$ - $\xi_2$  il punto che definisce la lega di alluminio Al7050-T7451, della quale sono note le caratteristiche meccaniche, cioè il punto di intersezione delle curve isovalori di  $E_1^m$ ,  $G_{12}^m$  e  $\nu_{12}^m$ .

Quindi si devono calcolare in successione:

- $Q_{11}$ ,  $Q_{22}$ ,  $Q_{12}$  e  $Q_{66}$ ;
- $U_1$ ,  $U_2$ ,  $U_3$ ,  $U_4$  e  $U_5$ .

ed infine sostituirli nelle equazioni delle curve isovalari ottenendo:

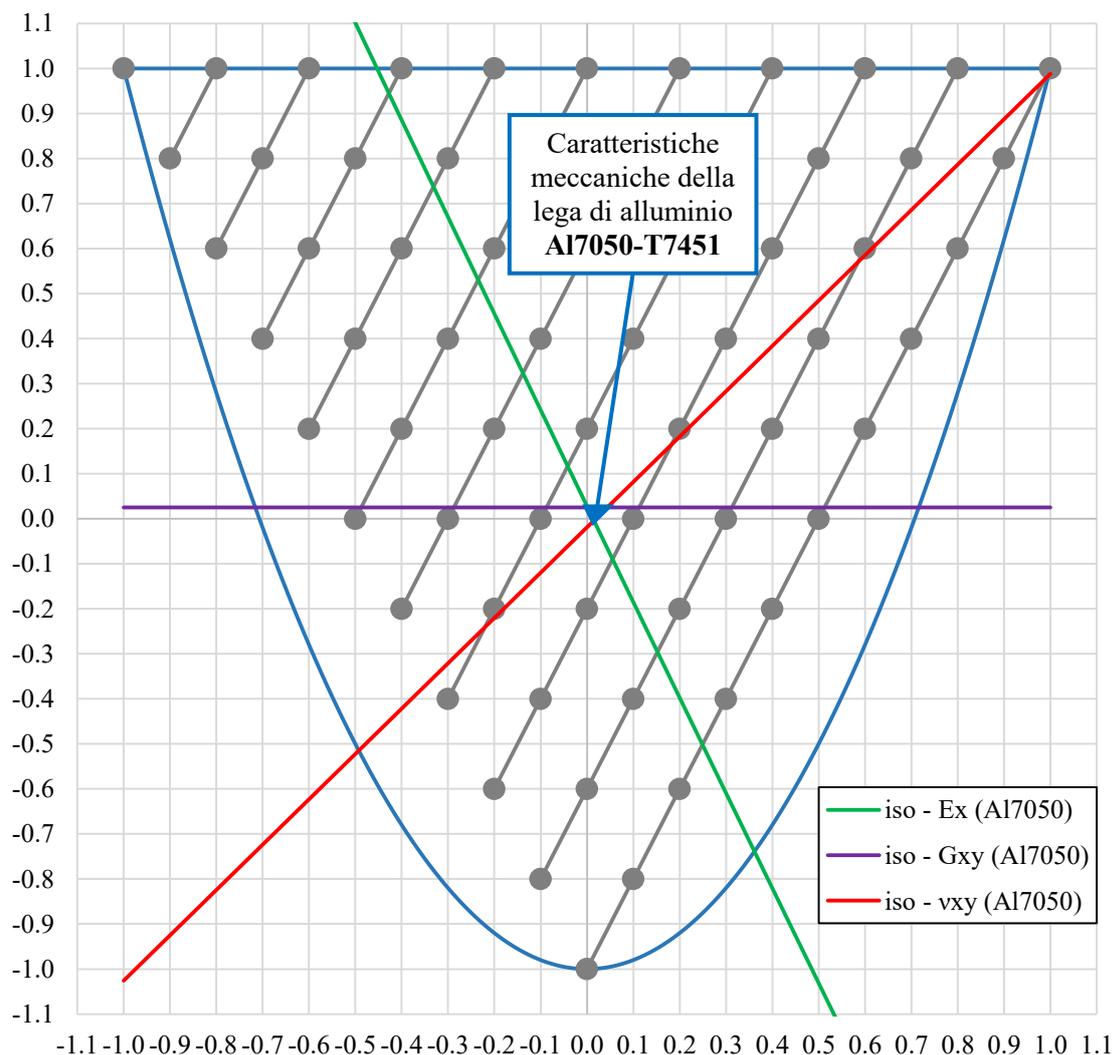


Figura 3.19: Rappresentazioni delle curve isovalori per la lega Al7050-T7451

Dal grafico è possibile notare come le caratteristiche meccaniche della lega Al7050-T7451 non ricadono su una delle rette che definiscono con precisione le frazioni volumetriche degli strati ed è quindi necessario adottare un'approssimazione che consenta

di ottenere le percentuali di strati a data orientazione tali da rendere il laminato progettabile e da consentirne la produzione industriale.

Queste approssimazioni portano allo studio di 2 casi:

- Caso 304030 con il 30% di strati a  $0^\circ$ , il 40% di strati a  $\pm 45^\circ$  ed il 30% di strati a  $90^\circ$ ;
- Caso 305020 con il 30% di strati a  $0^\circ$ , il 50% di strati a  $\pm 45^\circ$  ed il 20% di strati a  $90^\circ$ .

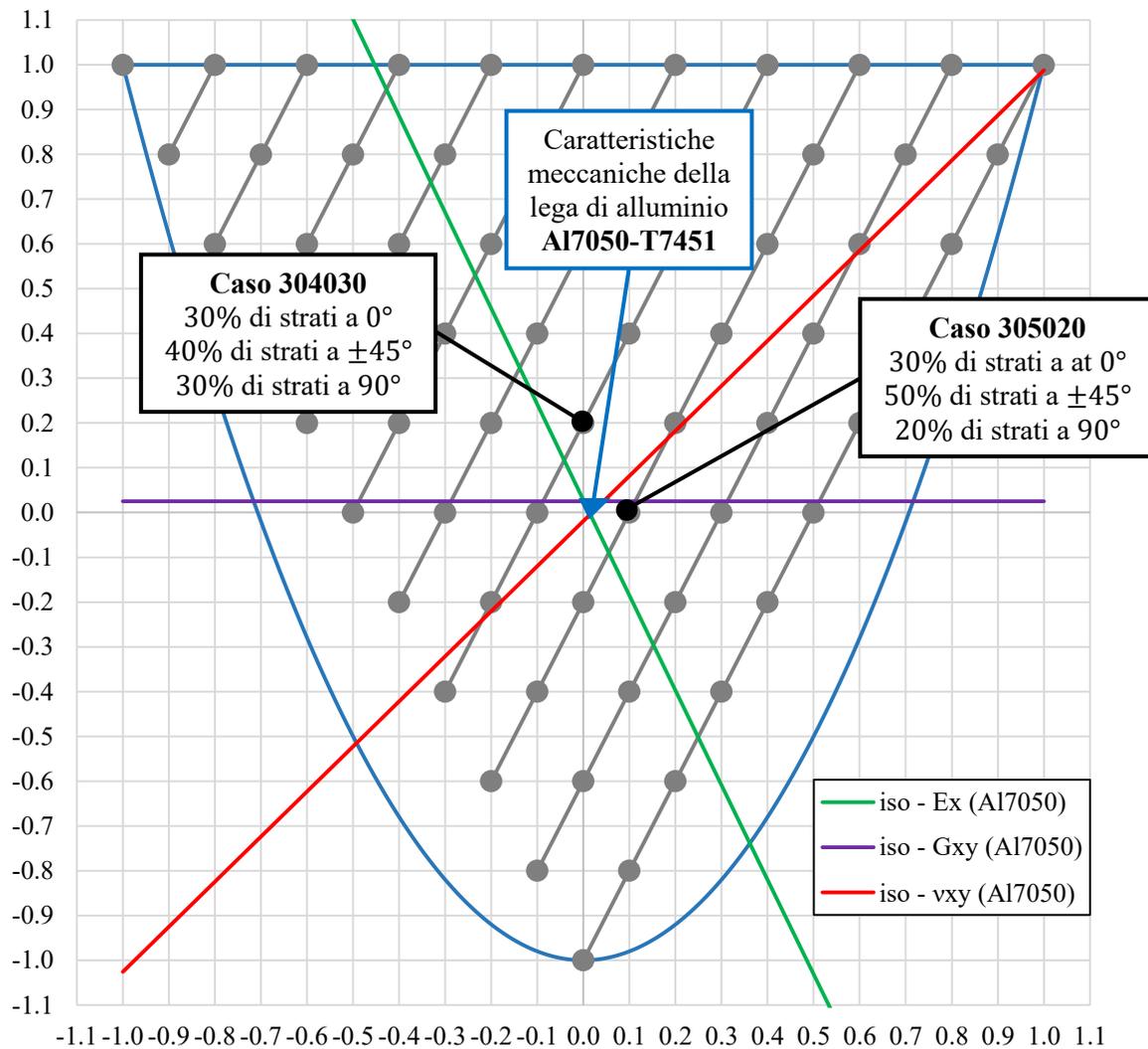


Figura 3.20: Definizione dei 2 casi di laminazione

Quindi, rispettando sia le percentuali definite tramite la Procedura Grafica di Miki quanto i requisiti di laminato simmetrico (tale da garantire che la matrice di accoppiamento membranale-flessionale sia  $B = 0$ ) e, quando possibile, bilanciato (tale da garantire che nella matrice delle rigidità membranali  $A$  i termini  $A_{16} = A_{26} = 0$ ), si

## Progettazione del Laminato in Composito

è stabilita, per entrambi i casi, la sequenza di laminazione in base al numero di strati ottenendo:

n. strati	Sequenza di laminazione (Caso 304030)																																							
38	0	90	0	45	-45	45	90	0	90	0	90	45	-45	-45	45	0	90	45	-45	-45	45	90	0	45	-45	-45	45	90	0	90	0	90	45	-45	45	0	90	0		
36	0	90	0	45	-45	90	0	90	0	90	45	-45	-45	45	0	90	45	-45	-45	45	90	0	45	-45	-45	45	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0		
34	0	90	0	-45	90	0	90	0	90	45	-45	-45	45	0	90	45	-45	-45	45	90	0	45	-45	-45	45	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0			
32	0	90	0	90	0	90	0	90	45	-45	-45	45	0	90	45	-45	-45	45	90	0	45	-45	-45	45	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0		
30	0	90	90	0	90	0	90	45	-45	0	45	0	90	45	-45	-45	45	90	0	45	0	-45	45	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0			
28	0	90	0	90	0	90	45	-45	-45	45	0	90	45	-45	-45	45	90	0	45	-45	-45	45	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0		
26	90	0	90	0	90	45	-45	0	45	0	90	45	-45	-45	45	90	0	45	0	-45	45	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0			
24	0	90	0	90	45	-45	0	90	0	90	45	-45	-45	45	90	0	90	0	-45	45	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0		
22	0	90	0	90	45	-45	0	90	45	-45	0	90	45	-45	-45	45	90	0	0	-45	45	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0			
20	0	90	0	90	45	-45	0	90	45	-45	0	90	45	-45	-45	45	90	0	-45	45	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0		
18	0	90	0	90	45	0	90	45	-45	-45	45	90	0	45	90	0	90	0	45	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0	
16	0	90	45	-45	0	90	45	-45	-45	45	90	0	-45	45	90	0	-45	45	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0		
14	0	90	45	0	90	45	-45	-45	45	90	0	45	90	0	45	90	0	45	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0		
12	0	90	0	90	45	-45	0	90	45	-45	0	90	45	-45	0	90	45	-45	0	90	45	-45	0	90	45	-45	0	90	45	-45	0	90	45	-45	0	90	45	-45	0	
10	0	90	0	90	45	0	90	45	0	90	45	0	90	45	0	90	45	0	90	45	0	90	45	0	90	45	0	90	45	0	90	45	0	90	45	0	90	45	0	
8	0	90	45	-45	-45	45	90	0	90	45	-45	-45	45	90	0	90	45	-45	-45	45	90	0	90	45	-45	-45	45	90	0	90	45	-45	-45	45	90	0	90	45	-45	
6	0	90	45	0	90	45	0	90	45	0	90	45	0	90	45	0	90	45	0	90	45	0	90	45	0	90	45	0	90	45	0	90	45	0	90	45	0	90	45	0

Tabella 3.3: Sequenza di laminazione del Caso 304030

n. strati	Sequenza di laminazione (Caso 305020)																																														
38	0	0	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0						
36	0	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0			
34	0	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0				
32	0	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0					
30	0	0	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0		
28	0	0	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0		
26	0	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0				
24	0	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	
22	0	0	0	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	
20	0	0	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0		
18	0	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0
16	0	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	
14	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0		
12	0	0	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0	45	-45	90	0		
10	0	0	90	45	-45	0	90	45	-45	0	90	45	-45	0	90	45	-45	0	90	45	-45	0	90	45	-45	0	90	45	-45	0	90	45	-45	0	90	45	-45	0	90	45	-45	0	90	45	-45	0	
8	0	90	45	-45	-45	45	90	0	90	45	-45	-45	45	90	0	90	45	-45	-45	45	90	0	90	45	-45	-45	45	90	0	90	45	-45	-45	45	90	0	90	45	-45	-45	45	90	0	90	45	-45	
6	0	90	45	0	90	45	0	90	45	0	90	45	0	90	45	0	90	45	0	90	45	0	90	45	0	90	45	0	90	45	0	90	45	0	90	45	0	90	45	0	90	45	0	90	45	0	

Tabella 3.4: Sequenza di laminazione del Caso 305020

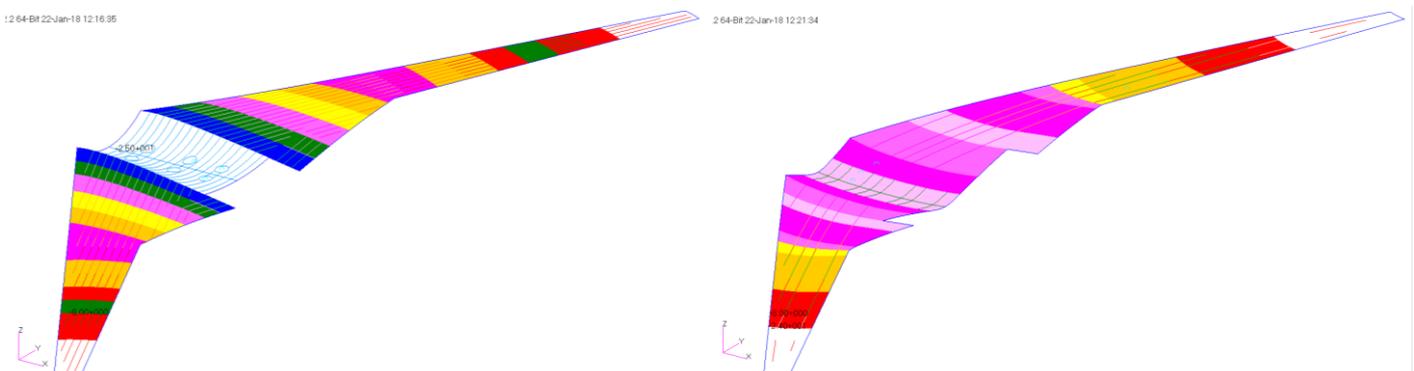
per la laminazione del caso 304030 si può notare:

- Laminazione con 38 strati: simmetrica, non bilanciata;
- Laminazione con 36 strati: simmetrica, bilanciata = equilibrata;
- Laminazione con 34 strati: simmetrica, non bilanciata;
- Laminazione con 32 strati: simmetrica, bilanciata = equilibrata;
- Laminazione con 30 strati: simmetrica, non bilanciata;
- Laminazione con 28 strati: simmetrica, bilanciata = equilibrata;
- Laminazione con 26 strati: simmetrica, non bilanciata;
- Laminazione con 24 strati: simmetrica, bilanciata = equilibrata;

- Laminazione con 22 strati: simmetrica, bilanciata = equilibrata;
- Laminazione con 20 strati: simmetrica, bilanciata = equilibrata;
- Laminazione con 18 strati: simmetrica, non bilanciata;
- Laminazione con 16 strati: simmetrica, bilanciata = equilibrata;
- Laminazione con 14 strati: simmetrica, non bilanciata;
- Laminazione con 12 strati: simmetrica, bilanciata = equilibrata;
- Laminazione con 10 strati: simmetrica, non bilanciata;
- Laminazione con 8 strati: simmetrica, bilanciata = equilibrata;
- Laminazione con 6 strati: simmetrica, non bilanciata.

per la laminazione del caso 305020 si può notare:

- Laminazione con 38 strati: simmetrica, non bilanciata;
- Laminazione con 36 strati: simmetrica, non bilanciata;
- Laminazione con 34 strati: simmetrica, bilanciata = equilibrata;
- Laminazione con 32 strati: simmetrica, bilanciata = equilibrata;
- Laminazione con 30 strati: simmetrica, non bilanciata;
- Laminazione con 28 strati: simmetrica, non bilanciata;
- Laminazione con 26 strati: simmetrica, bilanciata = equilibrata;
- Laminazione con 24 strati: simmetrica, bilanciata = equilibrata;
- Laminazione con 22 strati: simmetrica, non bilanciata;
- Laminazione con 20 strati: simmetrica, non bilanciata;
- Laminazione con 18 strati: simmetrica, bilanciata = equilibrata;
- Laminazione con 16 strati: simmetrica, bilanciata = equilibrata;
- Laminazione con 14 strati: simmetrica, bilanciata = equilibrata;
- Laminazione con 12 strati: simmetrica, non bilanciata;
- Laminazione con 10 strati: simmetrica, bilanciata = equilibrata;
- Laminazione con 8 strati: simmetrica, bilanciata = equilibrata;
- Laminazione con 6 strati: simmetrica, non bilanciata.



*Figura 3.21: Rappresentazione tramite colori del numero di strati per baia (SX rivestimento superiore, DX rivestimento inferiore)*

Successivamente, alla fine della fase progettuale, è stata svolta una serie di analisi in modo iterativo, poiché non si conosceva lo spessore ottimale di ogni baia del rivestimento che avrebbe garantito, per il criterio di Tsai-Hill, dei valori di *Failure Index*  $FI < 1$ , quindi si sono effettuate molteplici analisi in successione per passare prima dal sottodimensionamento al sovradimensionamento del rivestimento e alla fine all'ottimizzazione delle baie che presentavano un *Failure Index*  $FI \ll 1$  che stava ad indicare uno spessore del laminato eccessivamente elevato rispetto ai livelli di stress a cui era sottoposto.

Ottenendo così la seguente configurazione, rappresentata graficamente con colori differenti in figura 3.19, uguale per entrambi i casi:

		Sequenza di laminazione			
		Rivestimento superiore	Correnti superiori	Rivestimento inferiore	Correnti inferiori
<b>Baie</b>	<b>18</b>	6 lamine	8 lamine	6 lamine	-
	<b>17</b>	6 lamine	8 lamine	6 lamine	8 lamine
	<b>16</b>	8 lamine	8 lamine	6 lamine	8 lamine
	<b>15</b>	8 lamine	8 lamine	6 lamine	6 lamine
	<b>14</b>	8 lamine	10 lamine	8 lamine	6 lamine
	<b>13</b>	10 lamine	10 lamine	12 lamine	10 lamine
	<b>12</b>	12 lamine	12 lamine	12 lamine	10 lamine
	<b>11</b>	16 lamine	12 lamine	16 lamine	12 lamine
	<b>10</b>	16 lamine	14 lamine	16 lamine	10 lamine
	<b>09</b>	20 lamine	12 lamine	16 lamine	10 lamine
	<b>08</b>	20 lamine	16 lamine	18 lamine	12 lamine
	<b>07</b>	20 lamine	14 lamine	22 lamine	16 lamine
	<b>06</b>	16 lamine	14 lamine	20 lamine	16 lamine
	<b>05</b>	18 lamine	16 lamine	20 lamine	16 lamine
	<b>04</b>	22 lamine	20 lamine	24 lamine	20 lamine
	<b>03</b>	26 lamine	24 lamine	22 lamine	20 lamine
	<b>02</b>	32 lamine	28 lamine	22 lamine	20 lamine
	<b>01</b>	38 lamine	34 lamine	20 lamine	20 lamine
	<b>00</b>	38 lamine	34 lamine	24 lamine	26 lamine

Tabella 3.5: Tabella riepilogativa del numero di lamine per baia del rivestimento superiore ed inferiore

Dalla stessa tabella si evidenzia che il numero di strati è uguale per entrambi i casi e questo li rende una costante dell'analisi, il che consente di valutare solo l'influenza della variazione di percentuale di strati disposti nei tre angoli di orientazione.



## Capitolo 4 – Modello FEM Globale <sup>4</sup>

In questo capitolo viene analizzato il modello FEM globale che servirà ad analizzare la struttura al fine di ottenere le deformazioni dei componenti e le tensioni a cui i componenti sono soggetti per poi verificarle e validarle attraverso i criteri di resistenza esposti nel capitolo seguente.

Si precisa inoltre che i carichi del *load case* di studio sono i carichi ricavati nel paragrafo 2.4 – Definizione dei carichi.

Per condurre le analisi strutturali agli elementi finiti sono stati utilizzati i programmi Patran (come pre-processore e post-processore) e Nastran (come solutore) della MSC Software.

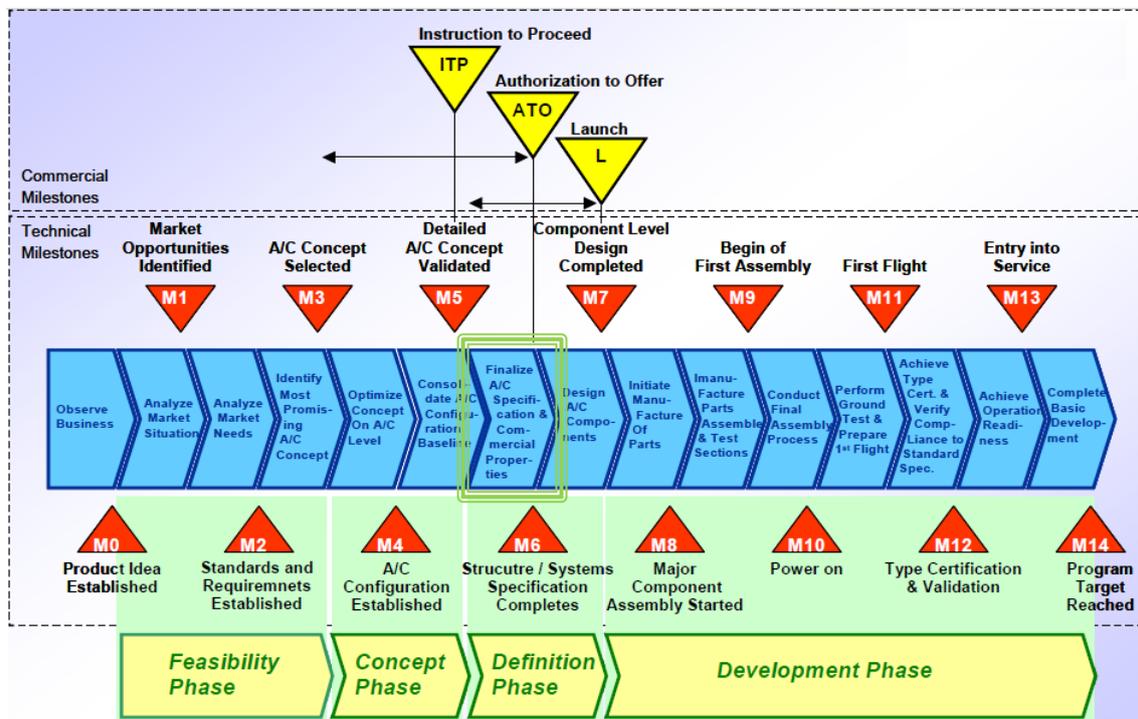


Figura 4.1: Programma di sviluppo di un velivolo – Sviluppo del modello FEM globale

Il metodo FEM (Finite Element Method) è una tecnica numerica che cerca soluzioni approssimate di problemi con equazioni differenziali alle derivate parziali.

Questo metodo si basa sulla discretizzazione del corpo fisico attraverso una mesh di elementi finiti e su ciascun elemento, caratterizzato da una forma elementare, la soluzione è espressa come combinazione lineare di funzioni di base.

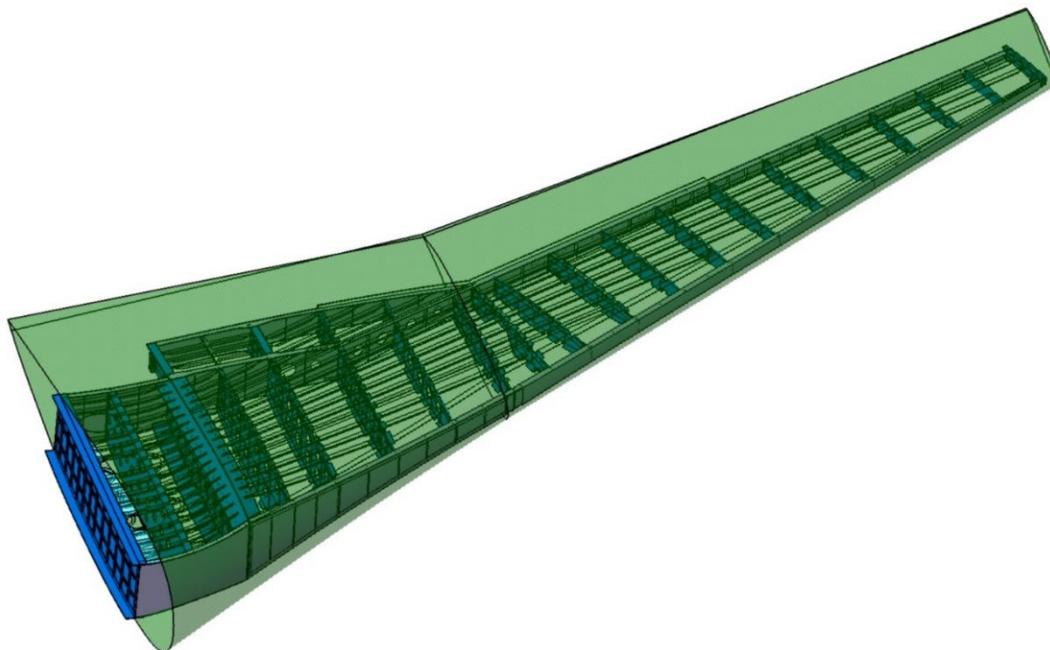
<sup>4</sup> Il materiale del capitolo si riferisce alla voce [4] e [7] della bibliografia.

Cioè il dominio di definizione del problema viene diviso in sottodomini il cui comportamento è definito matematicamente indipendentemente dal problema che si deve risolvere.

Quindi una qualsiasi struttura può essere divisa in sottostrutture per le quali spostamenti, deformazioni e tensioni possono essere calcolate con lo stesso algoritmo in qualunque posizione siano rispetto alla struttura globale poiché ogni elemento viene descritto per mezzo di funzioni interpolatrici, le funzioni di forma.

## 4.1 – Disegno CAD

Il modello di partenza è quello della semiala presentato al paragrafo 2.5 – Configurazione finale e disegnato tramite il software CAD CATIA v5.



*Figura 4.2: Configurazione finale dell'ala*

Poiché l'interesse di questo studio è rivolto unicamente alla progettazione e verifica del cassone alare in fase di modellazione verrà esclusa la superficie data dai profili alari che costituisce l'elemento strutturale e aerodinamico alla base della generazione della portanza.

## 4.2 – Creazione della mesh

La definizione della mesh è stata la fase più lunga e delicata della preparazione del modello poiché tutte le superfici devono essere messe in connessione tra loro in quanto il legame tra forze e spostamenti nel solutore Nastran avviene solo nel caso in cui tutti gli elementi FEM che modellano i componenti della struttura presentino nodi ben collegati con i restanti elementi che li circondano.

Quindi si è iniziato importando il file IGES prodotto con CATIA v5 contenente la geometria e riproducendola per mezzo di *curve* e *surface* su Patran al fine di poter poi creare la mesh con elementi finiti.

Proprio la necessità di congruenza della mesh ha anche portato a doverla modificare in alcuni casi manualmente in modo da far coincidere i nodi dei vari componenti modellati, come ad esempio i nodi del rivestimento con i nodi di centine e longheroni o ancora i nodi delle centine con i nodi dei longheroni.

Arrivando così ad ottenere il modello FEM dell'intero cassone alare:

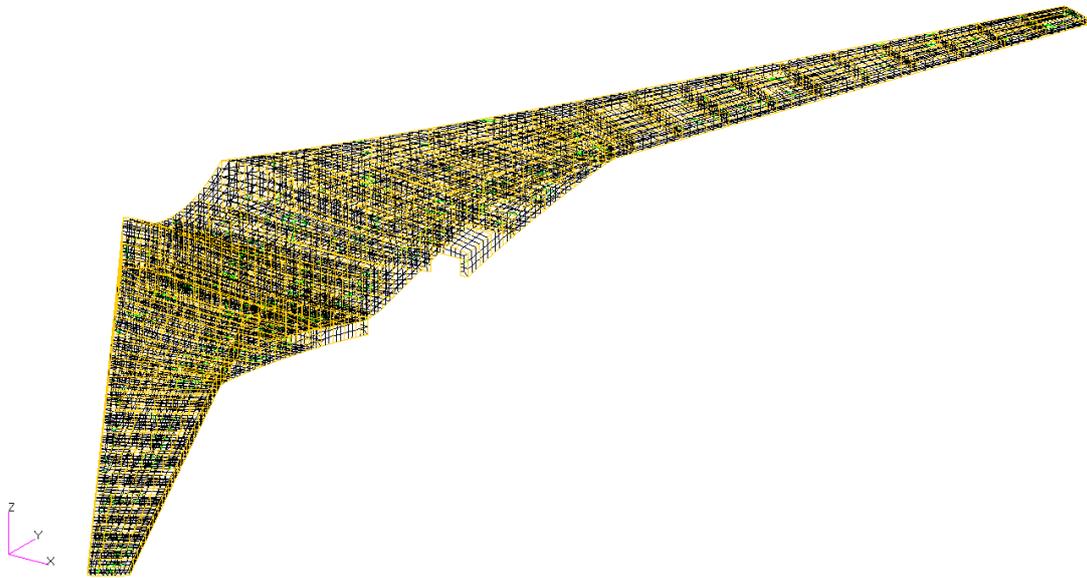


Figura 4.3: Mesh dell'intero cassone alare

Nel quale è possibile distinguere in giallo gli 8292 elementi monodimensionali BAR2 usati per modellare:

- Cap superiori e inferiori delle centine;
- Elementi di irrigidimento (*Stiffner*) delle centine;
- Flange superiori e inferiori dei longheroni;
- Elementi di irrigidimento (*Stiffner*) dei longheroni;
- Correnti (*Stringer*) dei rivestimenti superiore e inferiore.

In blu i 15356 elementi bidimensionali QUAD4 usati per modellare tutte le superfici:

- Anima (*web*) delle centine;
- Anima (*web*) dei longheroni;
- Rivestimento superiore e inferiore.

In verde si possono notare i 909 elementi bidimensionali TRIA3 che è stato necessario introdurre durante la fase di modifica manuale della mesh per ottenetene la congruenza e che comunque non hanno influito negativamente sul modello in quanto lo *Jacobian Ratio* è stato mantenuto inferiore al valore indicativo consigliato di 5.

Infatti bisogna precisare che per ottenere dei risultati è sufficiente la congruenza della mesh ma è anche necessaria una sua uniformità per poter ottenere dei risultati di buona qualità che possano essere ritenuti una buona approssimazione numerica di quello che sarebbe il comportamento reale della struttura.

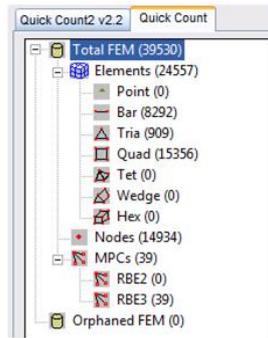


Figura 4.4: Conteggio degli elementi finiti del modello FEM

### 4.3 – Elementi finiti del modello FEM

#### 4.3.1 – ROD

Gli elementi finiti di tipo ROD sono degli elementi monodimensionali 1D con 2 nodi in cui ogni nodo ha i gradi di libertà traslazionali e supportano solo sforzi di trazione e compressione.

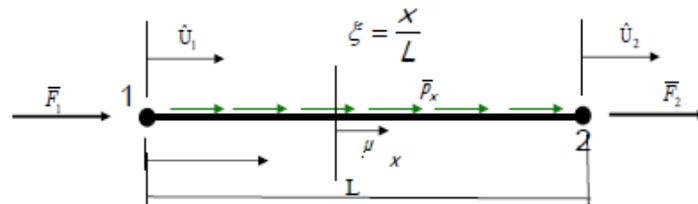


Figura 4.5: Elemento ROD

Sono stati usati per modellare:

- Cap superiori e inferiori delle centine;
- Elementi di irrigidimento (*Stiffner*) delle centine e dei longheroni;
- Correnti (*Stringer*) dei rivestimenti superiore e inferiore.

Questi elementi presentano le seguenti caratteristiche:

- Energia di deformazione

$$U^{(e)} = \frac{1}{2} \int_{L^{(e)}} A^{(e)} E^{(e)} u_{,x}^2 dx$$

con  $[C]^{(e)} = E^{(e)}$

- Energia cinetica

$$E_c^{(e)} = \frac{1}{2} \int_{L^{(e)}} \rho^{(e)} A^{(e)} \dot{u}^2 dx$$

- Vettore dei gradi di libertà nodali

$$\{\hat{q}\}^{(e)} = \begin{Bmatrix} \hat{U}_1 \\ \hat{U}_2 \end{Bmatrix}$$

- Funzioni di forma

$$\begin{aligned} N_1(\xi) = L_1(\xi) = 1 - \xi \\ N_2(\xi) = L_2(\xi) = \xi \end{aligned} \rightarrow [N]^{(e)} = \begin{bmatrix} N_1(\xi) \\ N_2(\xi) \end{bmatrix} \rightarrow [B]^{(e)} = \frac{1}{L^{(e)}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matrice di rigidezza

$$[\hat{K}]^{(e)} = \left(\frac{EA}{L}\right)^{(e)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matrice di massa

$$[\hat{M}]^{(e)} = \left(\frac{\rho AL}{6}\right)^{(e)} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- Vettore dei carichi nodali

$$\{F\}^{(e)} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{F}_2 \end{Bmatrix} = \frac{\bar{p}_x L^{(e)}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

con  $\bar{p}_x$  costante lungo x.

Come è possibile notare dalle formule (presenza della variabile  $A^{(e)}$ ) l'elemento ROD è un elemento che non necessita della definizione della forma della sua sezione ma solo dell'area della sezione, quindi in fase di definizione delle proprietà dell'elemento sarà sufficiente fornire l'area della sezione del componente che l'elemento va a modellare e il suo materiale.

#### 4.3.2 – BAR

Gli elementi finiti di tipo BAR sono degli elementi monodimensionali 1D con 2 nodi in cui ogni nodo ha i gradi di libertà traslazionali e rotazionali quindi supportano anche la deflessione a taglio.

Sono stati usati per modellare:

- Flange superiori e inferiori dei longheroni.

Questi elementi presentano le seguenti caratteristiche:

- Energia di deformazione

$$U^{(e)} = \frac{1}{2} \int_{L^{(e)}} G^{(e)} J_t^{(e)} \theta_{,x}^2 dx$$

con  $[C]^{(e)} = E^{(e)}$

- Energia cinetica

$$E_c^{(e)} = \frac{1}{2} \int_{L^{(e)}} \rho^{(e)} J_p^{(e)} \dot{\theta}^2 dx$$

- Vettore dei gradi di libertà nodali

$$\{\hat{q}\}^{(e)} = \begin{Bmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \end{Bmatrix}$$

- Funzioni di forma

$$\begin{aligned} N_1(\xi) = L_1(\xi) = 1 - \xi \\ N_2(\xi) = L_2(\xi) = \xi \end{aligned} \rightarrow [N]^{(e)} = \begin{bmatrix} N_1(\xi) \\ N_2(\xi) \end{bmatrix} \rightarrow [B]^{(e)} = \frac{1}{L^{(e)}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matrice di rigidezza

$$[\hat{K}]^{(e)} = \left( \frac{GJ_t}{L} \right)^{(e)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matrice di massa

$$[\hat{M}]^{(e)} = \left( \frac{\rho J_p L}{6} \right)^{(e)} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- Vettore dei carichi nodali

$$\{F\}^{(e)} = \begin{Bmatrix} \overline{M}_{t1} \\ \overline{M}_{t2} \end{Bmatrix} = \frac{\overline{m}_{t1} L^{(e)}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

con  $\overline{m}_{t1}$  costante lungo x.

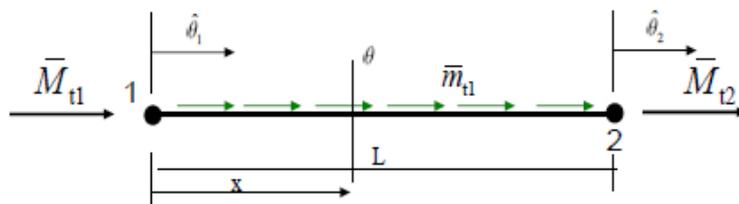


Figura 4.6: Elemento BAR

A differenza dell'elemento ROD, l'elemento BAR richiede la definizione della forma della sua sezione ed è intuibile dalla presenza nelle formule dei termini  $J_t^{(e)}$  e  $J_p^{(e)}$ , quindi in fase di definizione delle proprietà oltre al materiale sarà richiesta la sezione da assegnare all'elemento che potrà essere costruita su Patran tramite l'apposito tool presente nella scheda di definizione della proprietà.

### 4.3.3 – QUAD4 e TRIA3

Gli elementi finiti di tipo QUAD4 sono degli elementi bidimensionali 2D con 4 nodi in cui ogni nodo ha 5 gradi di libertà, 3 traslazionali e 2 rotazionali.

Sono stati usati per modellare:

- Anima (*web*) delle centine;
- Anima (*web*) dei longheroni;
- Rivestimento superiore e inferiore.

Sono elementi *shell* basati sulla teoria di Mindlin, estensione della teoria delle piastre di Kirchhoff, che tiene conto delle deformazioni a taglio lungo lo spessore della piastra.

Questi elementi presentano le seguenti caratteristiche:

- Energia di deformazione

$$U^{(e)} = \frac{1}{2} \int_{A^{(e)}} \left\{ \begin{matrix} \{\varepsilon_{\gamma P}^{(0)}\}^{(e)} \\ \{k\}^{(e)} \end{matrix} \right\}^{(e)T} \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix}^{(e)} \left\{ \begin{matrix} \{\varepsilon_{\gamma P}^{(0)}\}^{(e)} \\ \{k\}^{(e)} \end{matrix} \right\}^{(e)} dA +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{A^{(e)}} \{\gamma^{(0)}\}^{(e)T} [A_\tau]^{(e)} \{\gamma^{(0)}\}^{(e)} dA$$

con

$$\{\varepsilon_{\gamma P}^{(0)}\}^{(e)} = \begin{Bmatrix} u_{,x}^{(0)} \\ v_{,y}^{(0)} \\ u_{,y}^{(0)} + v_{,x}^{(0)} \end{Bmatrix} = [B_\varepsilon]^{(e)} \{q\}^{(e)}, \quad \{k\}^{(e)} = \begin{Bmatrix} \phi_{x,x} \\ \phi_{y,y} \\ \phi_{x,y} + \phi_{y,x} \end{Bmatrix} = [B_k]^{(e)} \{q\}^{(e)},$$

$$\{\gamma^{(0)}\}^{(e)} = \begin{Bmatrix} \phi_x + w_{,x}^{(0)} \\ \phi_y + w_{,y}^{(0)} \end{Bmatrix} = [B_\gamma]^{(e)} \{q\}^{(e)}, \quad [A_\tau]^{(e)} = \langle [Q_\tau]^{(e)} \rangle, \quad [Q_\tau]^{(e)} = \begin{bmatrix} Q_{44} & Q_{45} \\ Q_{45} & Q_{55} \end{bmatrix}$$

- Energia cinetica

$$E_c^{(e)} = \frac{1}{2} \int_{A^{(e)}} \left[ \{\dot{d}_t\}^T \quad \{\dot{d}_r\}^T \right]^{(e)} \begin{bmatrix} [\mu] & [S_\rho] \\ [S_\rho]^T & [J_\rho] \end{bmatrix}^{(e)} \left\{ \begin{matrix} \{\dot{d}_t\} \\ \{\dot{d}_r\} \end{matrix} \right\}^{(e)} dA$$

- Vettore dei gradi di libertà nodali

$$\{d\}^{(e)} = [N]^{(e)} \{q\}^{(e)}$$

con

$$\{d\}^{(e)} = \begin{Bmatrix} u^{(0)} \\ v^{(0)} \\ w^{(0)} \\ \phi_x \\ \phi_y \end{Bmatrix}, \{q\}^{(e)} = \begin{Bmatrix} \{q\}_1^{(e)} \\ \{q\}_2^{(e)} \\ \{q\}_3^{(e)} \\ \{q\}_4^{(e)} \end{Bmatrix}, \{q\}_i^{(e)} = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \\ \phi_{xi} \\ \phi_{yi} \end{Bmatrix}$$

- Funzioni di forma

$$[N]^{(e)} = [N_1[I] \quad N_2[I] \quad N_3[I] \quad N_4[I]]$$

$$\text{con } N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi^{(i)}\xi)(1 + \eta^{(i)}\eta)$$

- Matrice di rigidezza

$$[K]^{(e)} = [K_\varepsilon]^{(e)} + [K_k]^{(e)} + [K_\gamma]^{(e)} = \int_{A^{(e)}} \begin{bmatrix} [B_\varepsilon] \\ [B_k] \end{bmatrix}^{(e)T} \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix}^{(e)} \begin{bmatrix} [B_\varepsilon] \\ [B_k] \end{bmatrix}^{(e)} dA + \int_{A^{(e)}} [B_\gamma]^{(e)T} [A_\tau]^{(e)} [B_\gamma]^{(e)} dA$$

- Matrice di massa

$$[M]^{(e)} = \begin{bmatrix} [M]_{11}^{(e)} & [M]_{12}^{(e)} & [M]_{13}^{(e)} & [M]_{14}^{(e)} \\ [M]_{21}^{(e)} & [M]_{22}^{(e)} & [M]_{23}^{(e)} & [M]_{24}^{(e)} \\ [M]_{31}^{(e)} & [M]_{32}^{(e)} & [M]_{33}^{(e)} & [M]_{34}^{(e)} \\ [M]_{41}^{(e)} & [M]_{42}^{(e)} & [M]_{43}^{(e)} & [M]_{44}^{(e)} \end{bmatrix}$$

con

$$[M]_{ij}^{(e)} = \int_{A^{(e)}} N_i N_j \begin{bmatrix} [\mu] & [S_\rho] \\ [S_\rho]^T & [J_\rho] \end{bmatrix}^{(e)} dA$$

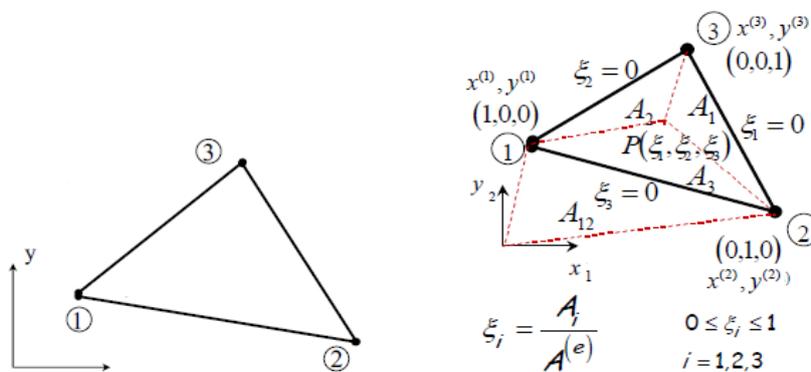


Figura 4.7: Elemento TRIA3 e coordinate di area

Invece gli elementi di tipo TRIA3 sono degli elementi bidimensionali 2D con 3 nodi in cui ogni nodo ha 5 gradi di libertà, 3 traslazionali e 2 rotazionali ed anche essi sono elementi *shell* basati sulla teoria di Mindlin per i quali valgono le formule precedenti con la sola accortezza che i nodi sono 3 non più 4 e che le funzioni di forma saranno le coordinate di area  $N_i = \xi_i = \frac{A_i}{A^{(e)}}$  con  $0 \leq \xi_i \leq 1$  e  $i = 1,2,3$

#### 4.4 – Definizione delle proprietà e dei carichi

L'ultimo passaggio prima di effettuare l'analisi vera e propria consiste nel definire per ogni elemento con cui è stata costruita la mesh le sue proprietà, cioè materiale e, se l'elemento lo richiede, la sezione.

Riguardo al materiale, se fosse necessario assegnare la lega di alluminio all'elemento sarà sufficiente creare un materiale isotropo (*isotropic*) compilando la sua scheda con tutte le caratteristiche meccaniche richieste.

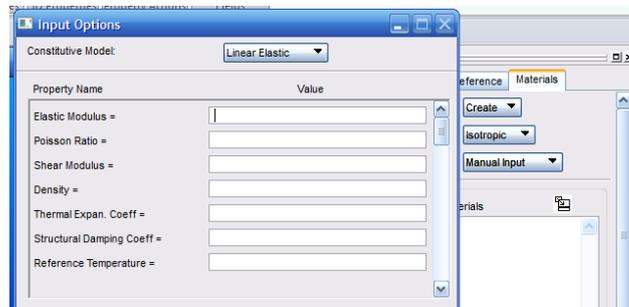


Figura 4.8: Scheda materiale isotropo

Se invece fosse necessario l'inserimento del materiale composito il procedimento sarà un po' più articolato poiché bisognerà prima creare il materiale dello strato di base in CFRP compilando la scheda per un materiale ortotropo (*2D orthotropic*) facendo attenzione a compilare i 2 campi *Linear Elastic* e *Failure* per poter definire il criterio attraverso il quale si vuole ottenere l'andamento dei *Failure Index*.

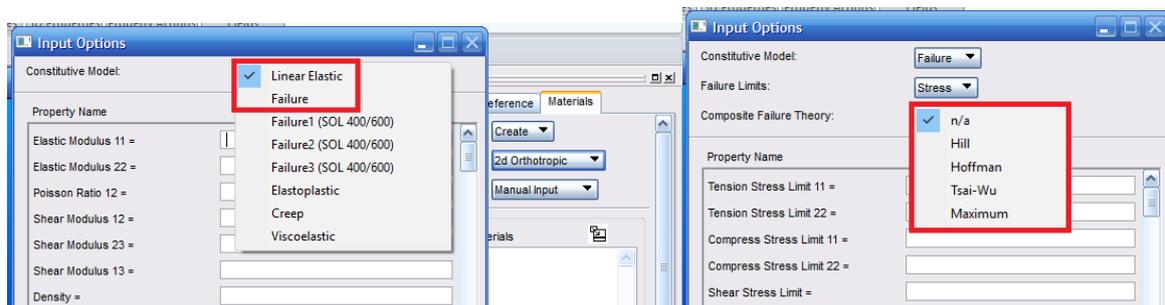


Figura 4.9: Scheda materiale ortotropo

Ed infine si passa alla definizione del laminato attraverso la scheda *Composite-Laminate* inserendo in ogni strato i materiale ortotropo, creato prima, lo spessore dello

strato, che in questo caso è sempre lo stesso e in ultimo l'angolo di orientazione dello strato.

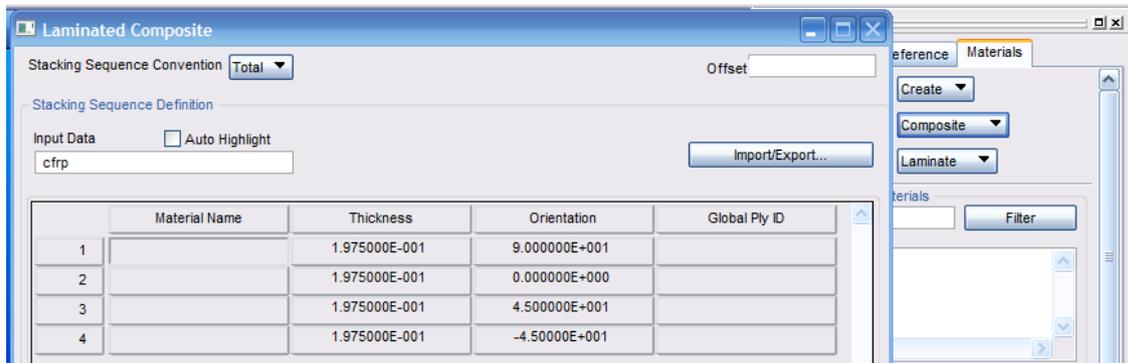


Figura 4.10: Scheda laminato in composito

Riguardo alle proprietà, per gli elementi 1D sia il materiale metallico sia il laminato in composito vengono assegnati normalmente attraverso la relativa scheda di definizione, invece per gli elementi 2D il materiale metallico viene assegnato attraverso l'opzione *Homogeneous* ed laminato in composito attraverso l'opzione *Laminate*.

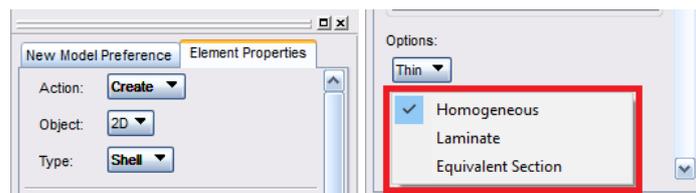


Figura 4.11: Scheda proprietà elemento 2D

Successivamente si impongono vincoli e carichi andando così a caricare il modello; bisogna precisare che questo modello, come si può vedere dalla figura 4.4, ha richiesto l'utilizzo della alla tecnica del *Multi Point Constraint* di tipo RBE3.

I *Rigid Body Elements* o RBE sono usati praticamente per collegare un singolo nodo a più nodi e sono di 2 tipi:

- RBE2, caratterizzato da un nodo indipendente e uno o più nodi dipendenti in modo tale che la posizione relativa delle griglie di nodi dipendenti connesse all'elemento non cambi durante l'analisi;
- RBE3, caratterizzato da un nodo dipendente e uno o più nodi indipendenti in modo tale che nella griglia dei nodi indipendenti i nodi possano essere liberi tra di loro.

Quindi l'elemento RBE2 è usato per rappresentare un collegamento rigido, invece l'elemento RBE3 è usato per distribuire un carico o definire una connessione flessibile.

Essendo quindi il nostro obiettivo quello di caricare il modello con i carichi aerodinamici definiti al paragrafo 2.4 – Definizione dei carichi si utilizzeranno gli elementi RBE3, uno per ogni centina rendendo i nodi esterni della centina indipendenti e liberi tra di loro ma collegati al nodo centrale di applicazione del carico.

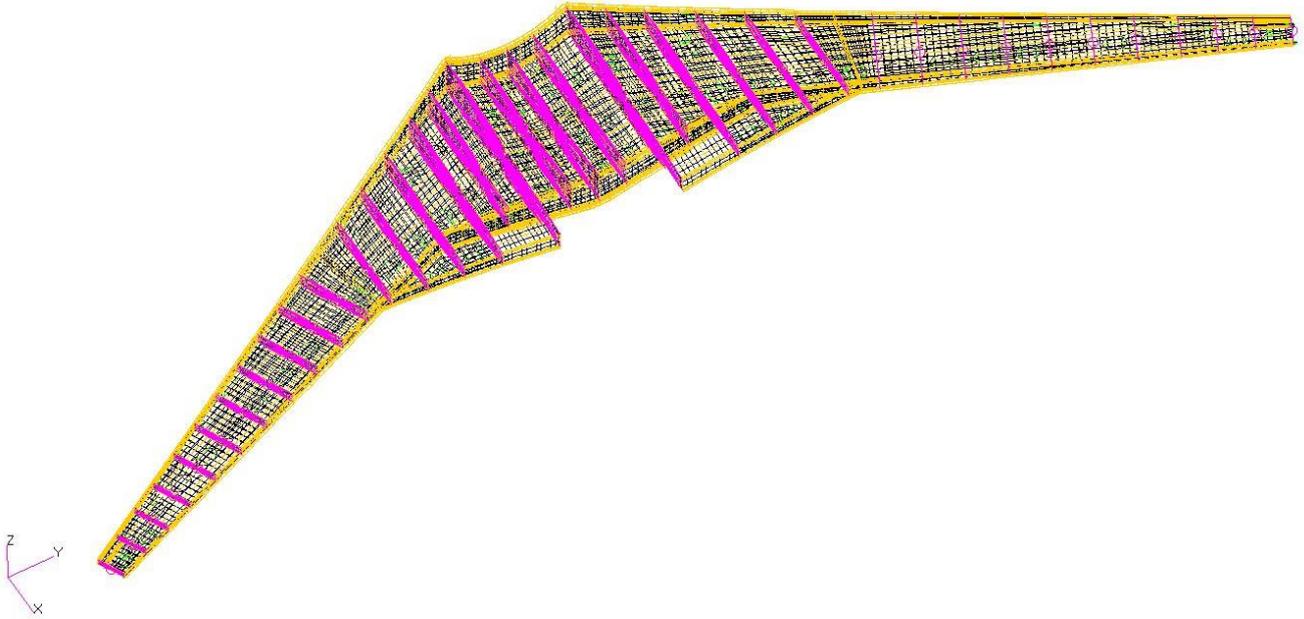


Figura 4.12: Applicazione dei carichi tramite RBE 3

Il modello finale pronto per l'analisi del load case più critico per la struttura sarà:

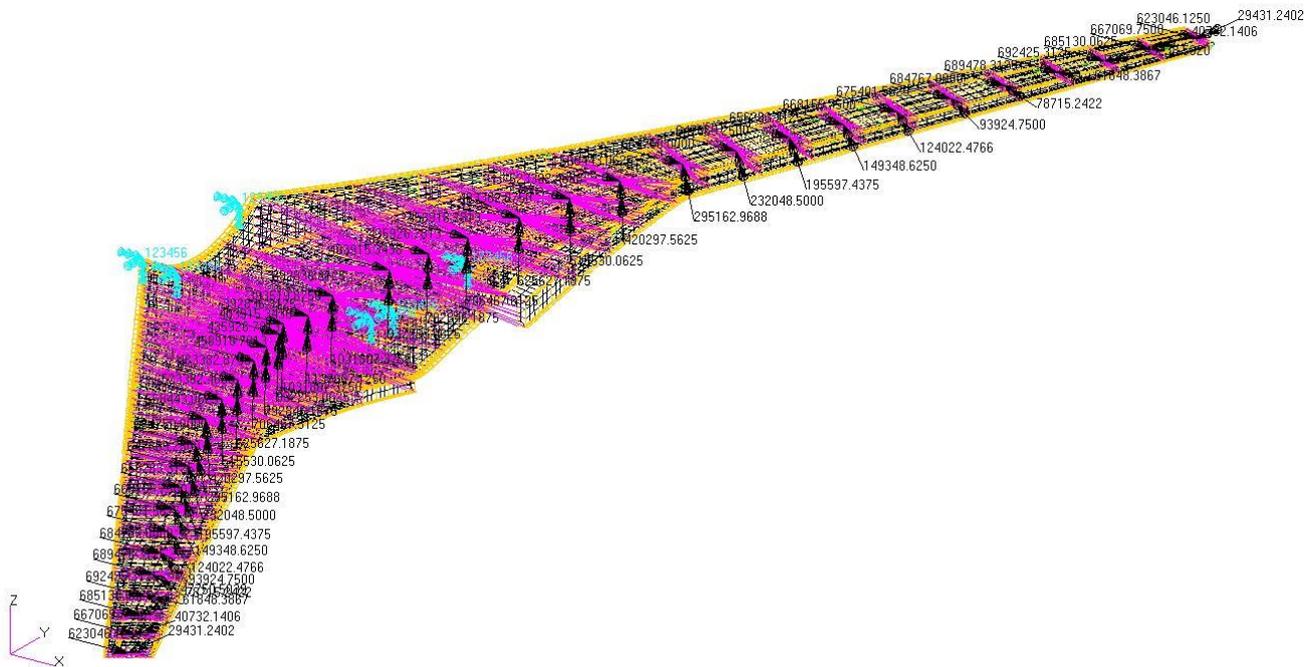


Figura 4.13: Modello FEM finale

## Capitolo 5 – Criteri di Resistenza <sup>5</sup>

Per la verifica e la validazione dei risultati ottenuti attraverso la simulazione con Nastran sul modello FEM globale, è necessario definire quelli i criteri di verifica a resistenza comunemente usati per la verifica di strutture e componenti metallici e compositi.

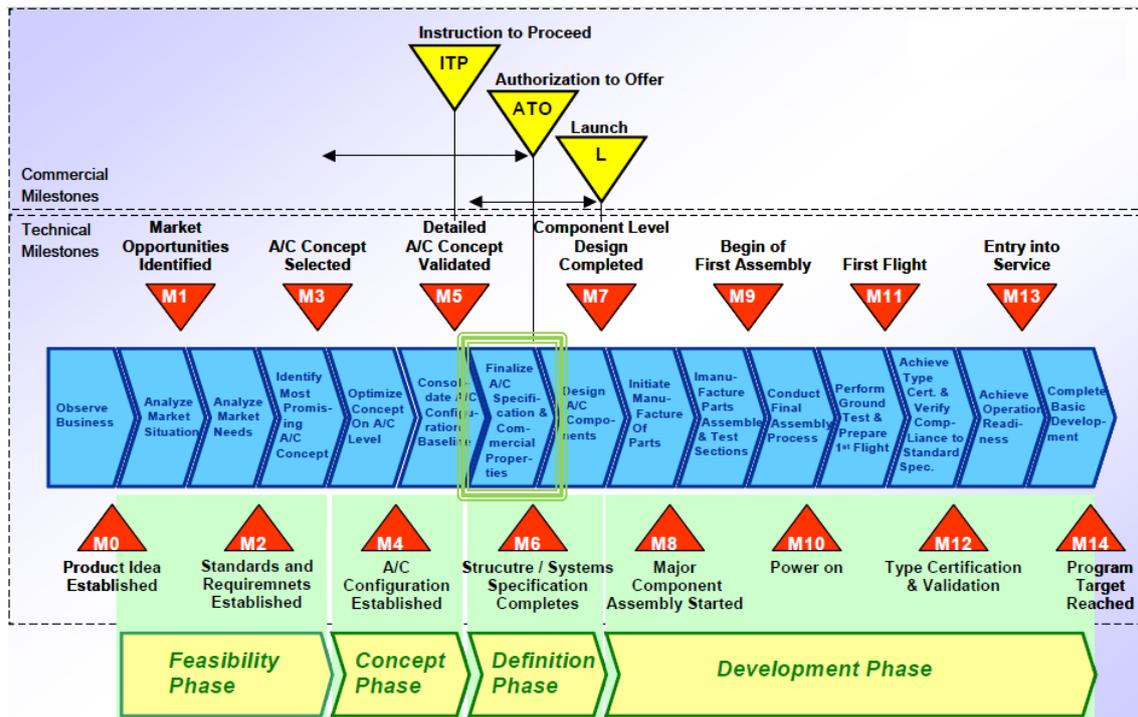


Figura 5.1: Programma di sviluppo di un velivolo

In questo capitolo si dettagliano:

1. I criteri di resistenza per i metalli (*materiali isotropi*):
  - a. Criterio di Tresca o della Massima Tensione Tangenziale;
  - b. Criterio di Von Mises o della Massima Energia di Distorsione;
  - c. Criterio di Galileo-Rankine o della Massima Tensione Normale;
  - d. Criterio di Grashof-S. Venant o della Massima Deformazione Normale.
2. I criteri di resistenza per i compositi (*materiali anisotropi*):
  - a. Criterio della Tensione Massima;
  - b. Criterio della Deformazione Massima;
  - c. Criterio di Tsai-Hill;
  - d. Criterio di Hoffman;
  - e. Criterio di Tsai-Wu.

<sup>5</sup> Il materiale del capitolo si riferisce alla voce [8] e [9] della bibliografia.

Per qualunque materiale si evidenzia l'esistenza di un dominio limitato dei possibili stati tensionali  $\sigma$ .

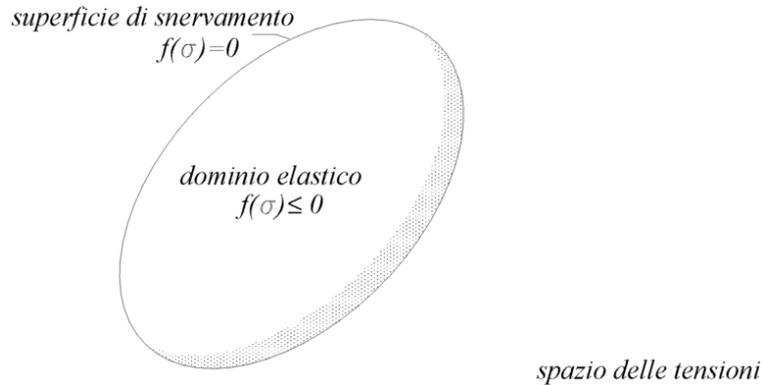


Figura 5.2: Dominio degli stati tensionali

Per i *materiali isotropi* (metalli), a questo dominio, può essere data una rappresentazione del tipo  $f(\sigma) \leq 0$ , dove la frontiera del dominio, definita dalla condizione  $f(\sigma) = 0$ , segna il limite di validità oltre il quale sopraggiungono fenomeni di plasticizzazione per i materiali duttili e rottura per i materiali fragili.

Per i *materiali anisotropi* (compositi), l'analisi della crisi meccanica, elastica o di rottura, del materiale presenta dei problemi sulla formulazione di un criterio di crisi dovuti principalmente alla variazione delle caratteristiche di resistenza con la direzione e alla non coassialità di tensioni e deformazioni poiché nella direzione di massimo sforzo non si ha in genere la direzione di massima deformazione.

Mentre l'eterogeneità, che influenza il fenomeno della rottura, comporta l'insorgere di differenti meccanismi locali di rottura come il *pullout* (sfilamento delle fibre dalla matrice), l'instabilità locale delle fibre in compressione o il danneggiamento della matrice; spesso in maniera vantaggiosa influenza, la propagazione delle fessure e causa una differente resistenza tra trazione e compressione.

Lo scopo dei criteri di resistenza è comunque quello di ottenere delle superfici o curve limite nello spazio delle tensioni, con il quale confrontare lo stato di tensione della struttura o componente; ma nell'utilizzo delle curve o superfici limite si perdono le informazioni sul tipo di crisi che si produce e per questa ragione questi criteri si chiamano anche fenomenologici, poiché sono in grado di cogliere, più o meno bene, il momento della crisi, ma non la sua ragione e il suo meccanismo.

Bisogna anche specificare che, a differenza di quanto accade per i materiali metallici, nei compositi la crisi è sempre una crisi di rottura e quindi i materiali compositi comuni hanno un comportamento fragile, senza fase plastica e le superfici o curve limite sono degli involucri limite di rottura e non di plasticità.

## 5.1 – Criteri di resistenza per materiali isotropi

### 5.1.1 – Criterio di Tresca (Massima Tensione Tangenziale)

Il criterio di Tresca è un criterio di resistenza che riguarda i materiali duttili con la stessa resistenza a trazione e a compressione ed è quindi un criterio di snervamento.

Questo criterio afferma che il cedimento si verifica quando la massima tensione tangenziale nel punto diventa uguale alla massima tensione tangenziale del provino in trazione nel momento dello snervamento e suppone quindi che la crisi del materiale sia dovuta alla sola tensione tangenziale.

In un provino soggetto a trazione semplice la tensione tangenziale massima allo snervamento è data da:

$$\tau_x = \frac{1}{2} \sigma_x$$

In campo elastico, per uno stato di tensione generico, le tensioni di taglio massime agenti nei piani contenenti le direzioni principali sono date da:

$$\tau_{ij} = \frac{1}{2} (\sigma_i - \sigma_j) \quad \text{con } i, j = 1, 2, 3; \text{ e } i \neq j$$

e lo snervamento si verifica quando  $\tau_{max} = \tau_s$  cioè quando:

$$\begin{aligned} \max_{i,j} \left\{ \frac{1}{2} |\sigma_i - \sigma_j| \right\} &= \frac{1}{2} \sigma_s \\ \max_{i,j} \{ |\sigma_i - \sigma_j| \} &= \sigma_s \end{aligned}$$

Quindi la tensione equivalente da confrontare con  $\sigma_{amm} = \frac{\sigma_s}{n}$ , con  $n$  coefficiente di sicurezza, è data da:

$$\begin{cases} \sigma_e = \max\{|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3|\} \\ \sigma_e \leq \sigma_{amm} = \frac{\sigma_s}{n} \end{cases}$$

Nello spazio tridimensionale delle tensioni  $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ , la superficie di snervamento corrisponde ad un prisma retto a base esagonale e tale prisma è circoscritto dal cilindro a base circolare associato al criterio di von Mises.

In sintesi questo criterio considera solo le tensioni massima e minima trascurando l'effetto di quella intermedia, vale per materiali duttili con comportamento simmetrico, indica che la tensione tangenziale di snervamento è pari alla metà del valore di snervamento a trazione e non è utilizzabile per prevedere la rottura perché in campo plastico il materiale ha un comportamento diverso in base al tipo di sollecitazione.

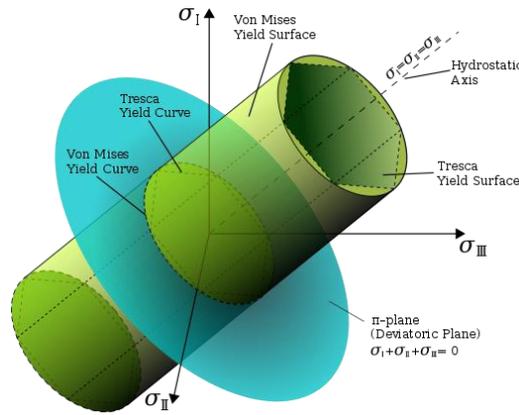


Figura 5.3: Rappresentazione del criterio di Tresca nello spazio 3D delle tensioni principali

### 5.1.2 – Criterio di Von Mises (Massima Energia di Distorsione)

Il criterio di von Mises è un criterio di resistenza che riguarda i materiali duttili, con la stessa resistenza a trazione e a compressione ed è quindi un criterio di snervamento.

Questo criterio afferma che lo snervamento del materiale si verifica quando l'energia elastica di deformazione immagazzinata raggiunge un valore critico, questo valore è pari all'energia di deformazione relativa alla tensione monoassiale di snervamento. Esso è meno semplice da utilizzare rispetto alla teoria della massima tensione tangenziale ma per i materiali duttili è quello che dà i risultati più aderenti alle situazioni reali.

Per ottenere il criterio di von Mises si determina il lavoro di distorsione  $U_d$  come differenza tra il lavoro totale  $U$  e quello che provoca una variazione di volume  $U_v$  e si confronta con quello relativo al caso di trazione semplice.

Il lavoro per unità di volume compiuto dalle tensioni principali è dato da:

$$U_i = \frac{\sigma_i \varepsilon_i}{2} \quad \text{con } i = 1, 2, 3$$

e sostituendo nell'equazione precedente la legge di Hooke, l'energia di deformazione è:

$$U = U_1 + U_2 + U_3 = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)]$$

La sollecitazione agente sul cubetto unitario in ciascuna direzione principale può essere considerata come la somma di una tensione media, definita come:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

e di una tensione  $\sigma'_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), detta tensione ridotta, data dalla differenza tra la tensione effettivamente agente e la tensione media stessa, cioè  $\sigma'_i = \sigma_i - \sigma_m$ , si noti che la  $\sigma_m$  provoca solo una variazione di volume dell'elemento mentre le  $\sigma'_i$  causano una distorsione della forma del cubetto.

L'energia di deformazione dovuta alla sola variazione di volume la si ricava sostituendo la  $\sigma_m$  al posto delle tre tensioni principali presenti in  $U$  ottenendo:

$$U_v = \frac{1}{2E} [3\sigma_m^2 - 6\nu\sigma_m^2] = \frac{(1-2\nu)}{2E} 3\sigma_m^2 = \frac{(1-2\nu)}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$

$$U_v = \frac{1-2\nu}{6E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)]$$

ed infine l'energia di distorsione può essere ricavata svolgendo la sottrazione  $U - U_v$ :

$$U_d = U - U_v = \frac{1+\nu}{3E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)]$$

che nel caso di trazione semplice allo snervamento, con  $\sigma_1 = \sigma_s$  e  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ , l'energia di distorsione risulta:

$$U_d = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_s^2$$

Eguagliando le ultime due equazioni si ottiene:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) = \sigma_s^2$$

dalla quale si arriva alla condizione di snervamento:

$$\sigma_s^2 = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)}$$

Quest'ultima permette di definire la tensione equivalente di von Mises per lo stato di tensione triassiale da confrontare con quella ammissibile  $\sigma_e \leq \sigma_{amm} = \frac{\sigma_s}{n}$ :

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}$$

che generalizzata per un sistema di assi non principale fornisce:

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - (\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z) + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)}$$

e per lo stato tensionale piano, con  $\sigma_3 = 0$ , le precedenti si trasformano in:

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2}$$

In sintesi questo criterio considera tutte le tensioni, vale per materiali duttili con comportamento simmetrico e non è utilizzabile per prevedere la rottura perché basato su grandezze valide in campo elastico.

È possibile notare che il criterio di von Mises, se messo a confronto con il precedente, è meno restrittivo poiché l'ellisse prodotta circoscrive il poligono esagonale associato al criterio di Tresca; tuttavia gli scarti non sono eccessivi ed entrambi i criteri forniscono risultati che approssimano molto bene i risultati sperimentali, ma la maggior semplicità di rappresentazione del dominio elastico fornito dal criterio di von Mises ne favorisce il suo maggior uso nella pratica, soprattutto in fase computazionale di analisi e verifica.

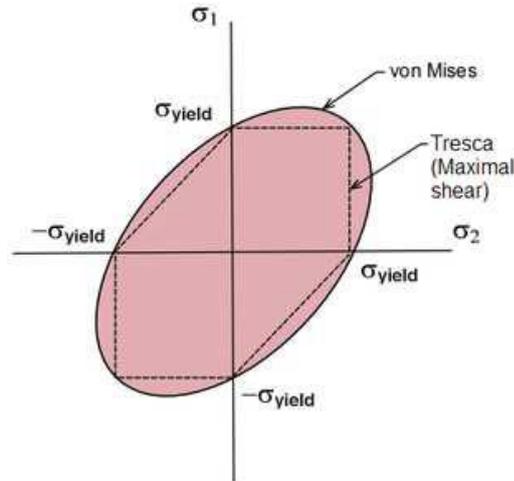


Figura 5.4: Rappresentazione del criterio di von Mises nel piano  $\sigma_1$ - $\sigma_2$  delle tensioni principali

### 5.1.3 – Criterio di Galileo-Rankine (Massima Tensione Normale)

Il criterio di Galileo-Rankine è un criterio di resistenza che riguarda materiali fragili, con resistenza a trazione di molto inferiore rispetto a quella a compressione ed è quindi un criterio di rottura.

Questo criterio afferma che il cedimento si verifica quando la massima tensione principale agente è uguale alla tensione di snervamento o alla tensione di rottura del materiale.

Siano  $\sigma_{st}$  e  $\sigma_{sc}$  le tensioni di snervamento rispettivamente a trazione e a compressione e siano  $\sigma_{rt}$  e  $\sigma_{rc}$  le tensioni di rottura, considerate con segno positivo per quelle di trazione e negativo per quelle di compressione, se  $\sigma_1$  è la maggiore delle tensioni principali e  $\sigma_3$  la minore, il cedimento per snervamento o rottura avviene quando:

$$\sigma_1 = \sigma_{lt} \quad \text{o} \quad \sigma_3 = \sigma_{lc} \quad \text{con } l = s, r$$

Introducendo ora il rapporto tra le tensioni limite a trazione e a compressione:

$$r = \frac{\sigma_{lt}}{\sigma_{lc}}$$

le due condizioni precedenti possono essere sintetizzate come:

$$\max\{\sigma_1, r\sigma_3\} = \sigma_{lc}$$

che consente di definire una tensione equivalente da confrontare con la sola tensione ammissibile a trazione  $\sigma_{amm} = \frac{\sigma_{lt}}{n}$ :

$$\begin{cases} \sigma_e = \max\{\sigma_1, r\sigma_3\} \\ \sigma_e \leq \sigma_{amm} = \frac{\sigma_s}{n} \end{cases}$$

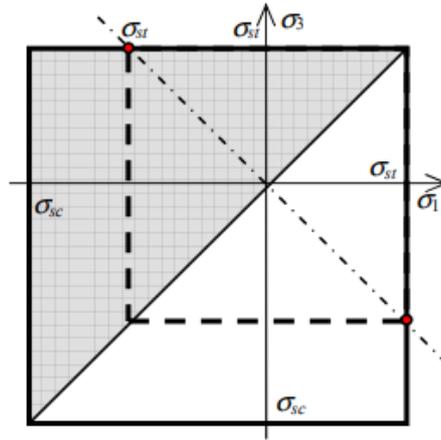


Figura 5.5: Criterio di Rankine nel piano  $\sigma_1$ - $\sigma_3$

Graficamente, considerando le tensioni principali tali che  $\sigma_1$  sia la massima e  $\sigma_3$  sia la minima o viceversa, nel piano  $\sigma_1 - \sigma_3$  gli stati di tensione limite espressi dalle equazioni precedenti sono rappresentati da un quadrato e se il punto rappresentativo dello stato tensionale agente sul materiale si trova all'interno del diagramma, il componente è in sicurezza.

In sintesi questo criterio può essere usato per materiali fragili con comportamento non simmetrico per prevedere sia lo snervamento sia la rottura, considera solo le tensioni massime in valore assoluto trascurando l'effetto di quelle intermedia e minima ed è spesso in contrasto con i dati sperimentali poiché non prevede la rottura nei casi in cui le tensioni  $\sigma_1$  e  $\sigma_3$  sono di segno discorde e la tensione di compressione è maggiore in valore assoluto.

#### 5.1.4 - Criterio di Grashof-S. Venant (Massima Deformazione Normale)

Il criterio di Grashof-S. Venant è un criterio di resistenza che riguarda materiali fragili, con resistenza a trazione di minore di quella a compressione ed è quindi un criterio di rottura.

Questo criterio afferma che la condizione di rottura del materiale viene raggiunta quando la dilatazione normale massima o minima raggiunge i valori limiti  $(\varepsilon_l^+, \varepsilon_l^-)$  rispettivamente di allungamento e di schiacciamento:

$$\varepsilon_l^- \leq \varepsilon_{max} \leq \varepsilon_l^+$$

Con riferimento alle tensioni principali  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  e nel caso di materiali isotropi, osservando che:

$$\varepsilon_l^- = \frac{\sigma_l^-}{E} \quad \text{e} \quad \varepsilon_l^+ = \frac{\sigma_l^+}{E}$$

si ha:

$$\varepsilon_{max} = \left\{ \left| \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\nu(\sigma_2 + \sigma_3)}{E} \right|, \left| \frac{\sigma_2}{E} - \frac{\nu(\sigma_1 + \sigma_3)}{E} \right|, \left| \frac{\sigma_3}{E} - \frac{\nu(\sigma_1 + \sigma_2)}{E} \right| \right\}$$

da cui la condizione limite si traduce nelle seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \sigma_l^- \leq \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq \sigma_l^+ \\ \sigma_l^- \leq \sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3) \leq \sigma_l^+ \\ \sigma_l^- \leq \sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2) \leq \sigma_l^+ \end{cases}$$

nelle quali i valori di tensione limite  $(\sigma_l^+, \sigma_l^-)$  a trazione e compressione sono ricavabili da semplici prove monoassiali.

## 5.2 – Criteri di resistenza per materiali anisotropi

### 5.2.1 – Criterio della Tensione Massima

Il criterio della tensione massima è un criterio di resistenza che si basa sul confronto tra le tensioni effettive e i parametri di resistenza del materiale, ma non considera le interazioni tra i vari meccanismi di rottura.

Per effetto della natura anisotropa del materiale che fa dipendere le caratteristiche dello stesso in base alle direzioni lungo le quali vengono considerate, i parametri di resistenza sono noti solo nelle direzioni di ortotropia, quindi il criterio confronta le tensioni calcolate nel riferimento di ortotropia con i parametri di resistenza del materiale e assume che si sia raggiunto uno stato di crisi se una delle seguenti condizioni non è rispettata:

$$\begin{cases} -X_c \leq \sigma_1 \leq X_t \\ -Y_c \leq \sigma_2 \leq Y_t \\ |\sigma_6| \leq S \end{cases}$$

$X_c$  = tensione limite di compressione nella direzione delle fibre

$X_t$  = tensione limite di trazione nella direzione delle fibre

$Y_c$  = tensione limite di compressione in direzione perpendicolare alle fibre

$Y_t$  = tensione limite di trazione in direzione perpendicolare alle fibre

$S$  = tensione limite a taglio

Si sottolinea il fatto che il confronto si opera nel riferimento di ortotropia perché è l'unico nel quale si conoscono i parametri di resistenza, quindi il passaggio da un riferimento qualsiasi, in cui sono note le tensioni, a quello di ortotropia si effettua con le seguenti formule:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2sc \\ s^2 & c^2 & 2sc \\ sc & -sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{Bmatrix} \quad \text{con } \begin{cases} s = \sin \theta \\ c = \cos \theta \end{cases}$$

così il criterio, in un riferimento qualsiasi, diventa:

$$\begin{cases} -X_c \leq c^2 \sigma_x + s^2 \sigma_y - 2sc \sigma_s \leq X_t \\ -Y_c \leq s^2 \sigma_x + c^2 \sigma_y + 2sc \sigma_s \leq Y_t \\ |sc \sigma_x - sc \sigma_y + (c^2 - s^2) \sigma_s| \leq S \end{cases}$$

### 5.2.2 – Criterio della Deformazione Massima

Il criterio della deformazione massima è un criterio di resistenza come quello della tensione massima ma con la differenza che in questo caso i limiti sono definiti sulle deformazioni:

$$\begin{cases} -X_{\varepsilon c} \leq \varepsilon_1 \leq X_{\varepsilon t} \\ -Y_{\varepsilon c} \leq \varepsilon_2 \leq Y_{\varepsilon t} \\ |\varepsilon_6| \leq S_{\varepsilon} \end{cases}$$

$X_{\varepsilon c}$  = deformazione limite di compressione nella direzione delle fibre

$X_{\varepsilon t}$  = deformazione limite di trazione nella direzione delle fibre

$Y_{\varepsilon c}$  = deformazione limite di compressione in direzione perpendicolare alle fibre

$Y_{\varepsilon t}$  = deformazione limite di trazione in direzione perpendicolare alle fibre

$S_{\varepsilon}$  = defroamzione limite a taglio

Le deformazioni possono ora essere espresse in funzione delle tensioni e si possono scrivere le condizioni precedenti in un riferimento qualsiasi, con le formule di rotazione, ricavando:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & 0 \\ \frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2sc \\ s^2 & c^2 & 2sc \\ sc & -sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{Bmatrix}$$

così il criterio, in un riferimento qualsiasi, diventa:

$$\begin{cases} -X_{\varepsilon c} \leq \frac{1}{E_1} [(c^2 - \nu_{12}s^2)\sigma_x + (s^2 - \nu_{12}c^2)\sigma_y - 2sc(1 + \nu_{12})\sigma_s] \leq X_{\varepsilon t} \\ -Y_{\varepsilon c} \leq \frac{1}{E_2} [(s^2 - \nu_{21}c^2)\sigma_x + (c^2 - \nu_{21}s^2)\sigma_y + 2sc(1 + \nu_{21})\sigma_s] \leq Y_{\varepsilon t} \\ \frac{1}{G_{12}} |sc \sigma_x - sc \sigma_y + (c^2 - s^2) \sigma_s| \leq S_{\varepsilon} \end{cases}$$

poiché il comportamento a rottura dei compositi è soprattutto fragile e quindi la rottura si produce al limite della fase elastica, se si accetta questa ipotesi, è evidente che:

$$X_{\varepsilon c} = \frac{X_c}{E_1} \quad , \quad X_{\varepsilon t} = \frac{X_t}{E_1} \quad , \quad Y_{\varepsilon c} = \frac{Y_c}{E_2} \quad , \quad Y_{\varepsilon t} = \frac{Y_t}{E_2} \quad , \quad S_{\varepsilon} = \frac{S}{G_{12}}$$

e le condizioni limite diventano:

$$\begin{cases} -X_c \leq (c^2 - \nu_{12}s^2)\sigma_x + (s^2 - \nu_{12}c^2)\sigma_y - 2sc(1 + \nu_{12})\sigma_s \leq X_t \\ -Y_c \leq (s^2 - \nu_{21}c^2)\sigma_x + (c^2 - \nu_{21}s^2)\sigma_y + 2sc(1 + \nu_{21})\sigma_s \leq Y_t \\ |sc\sigma_x - sc\sigma_y + (c^2 - s^2)\sigma_s| \leq S \end{cases}$$

### 5.2.3 – Criterio di Tsai-Hill

Il criterio di Tsai-Hill è un criterio di resistenza in cui si prende in considerazione tutta l'energia di deformazione e non solo quella di distorsione, perché nel caso anisotropo non è in possibile separare la parte di energia di distorsione da quella di cambiamento di volume ed è una generalizzazione del criterio di von Mises.

Il criterio di Tsai-Hill nel riferimento di ortotropia è:

$$(G + H)\sigma_1^2 + (F + H)\sigma_2^2 + (F + G)\sigma_3^2 - 2H\sigma_1\sigma_2 - 2G\sigma_1\sigma_3 - 2F\sigma_2\sigma_3 + 2L\sigma_4^2 + 2M\sigma_5^2 + 2N\sigma_6^2 \leq 1$$

dove i coefficienti F, G, H, L, M e N sono i parametri di resistenza di Hill e sono da interpretarsi come valori limite di snervamento per i materiali duttili e di rottura per i materiali fragili.

Tsai ha adattato il calcolo di questi parametri al caso di una lamina ortotropa e per farlo ha semplicemente considerato dei casi di carico particolarmente semplici.

Se  $\sigma_6 \neq 0$  e  $\sigma_i = 0$  con  $i = 1, \dots, 5$  il criterio si riduce a:

$$2N\sigma_6^2 = 1 \quad \rightarrow \quad N = \frac{1}{2\sigma_6^2}$$

ma se si è allo stato limite significa che  $\sigma_6$  prende il suo valore limite  $S_{xy}$  e si ottiene:

$$N = \frac{1}{2S_{xy}^2}$$

in modo analogo, ponendo successivamente  $\sigma_4 \neq 0$  e  $\sigma_5 \neq 0$  con le altre componenti di tensione nulle, si ha:

$$L = \frac{1}{2S_{yz}^2} \quad , \quad M = \frac{1}{2S_{xz}^2}$$

Se  $\sigma_1 \neq 0$  e  $\sigma_i = 0$  con  $i = 2, \dots, 6$  il criterio si riduce a:

$$(G + H)\sigma_1^2 = 1 \rightarrow G + H = \frac{1}{\sigma_1^2}$$

ma se si è allo stato limite significa che  $\sigma_1$  prende il suo valore limite  $X$  e si ottiene:

$$G + H = \frac{1}{X^2}$$

in modo analogo, ponendo successivamente  $\sigma_2 \neq 0$  e  $\sigma_3 \neq 0$  con le altre componenti di tensione nulle, si ha:

$$F + H = \frac{1}{Y^2}, F + G = \frac{1}{Z^2}$$

Mettendo a sistema queste ultime tre condizioni si ricava:

$$F = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{X^2}\right), G = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{Y^2}\right), H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2}\right)$$

in questo modo il criterio di Tsai-Hill può essere riscritto nella seguente forma:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\sigma_1}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{Y}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_3}{Z}\right)^2 - \left(\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2}\right)\sigma_1\sigma_2 - \left(\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{Y^2}\right)\sigma_1\sigma_3 - \\ &- \left(\frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{X^2}\right)\sigma_2\sigma_3 + \left(\frac{\sigma_4}{S_{yz}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_5}{S_{xz}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_6}{S_{xy}}\right)^2 \leq 1 \end{aligned}$$

che nel caso di una lamina piana in stato piano di tensione, cioè  $\sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = 0$ , si riduce a:

$$\left(\frac{\sigma_1}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{Y}\right)^2 - \left(\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2}\right)\sigma_1\sigma_2 + \left(\frac{\sigma_6}{S_{xy}}\right)^2 \leq 1$$

ed infine ricordando che per una lamina in composito  $Z = Y$  e  $S_{xy} = S$  si ottiene:

$$\left(\frac{\sigma_1}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{Y}\right)^2 - \frac{\sigma_1\sigma_2}{X^2} + \left(\frac{\sigma_6}{S}\right)^2 \leq 1$$

Questa equazione è quella che esprime il criterio di Tsai-Hill per una lamina ortotropa in stato piano di tensione, che è il caso di interesse nello studio dei materiali compositi; si può notare come adesso si ha una sola condizione, al posto di cinque, che consente di tracciare la superficie limite nello spazio delle tensioni.

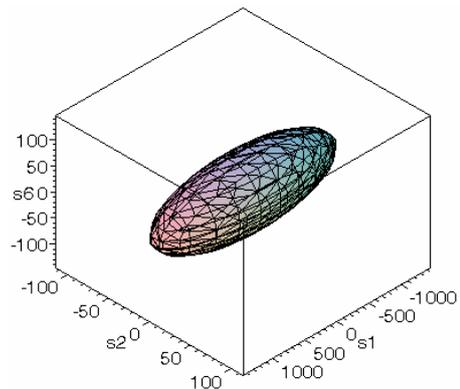


Figura 5.6: Superficie limite secondo il criterio di Tsai-Hill nello spazio delle tensioni per il composito (vetro-epoxy)

Utilizzando nuovamente la formula di rotazione delle tensioni si ottiene l'espressione del criterio in un riferimento qualsiasi:

$$\left(\frac{c^2\sigma_x + s^2\sigma_y - 2sc\sigma_s}{X}\right)^2 + \left(\frac{s^2\sigma_x + c^2\sigma_y + 2sc\sigma_s}{Y}\right)^2 - \frac{(c^2\sigma_x + s^2\sigma_y - 2sc\sigma_s)(s^2\sigma_x + c^2\sigma_y + 2sc\sigma_s)}{X^2} + \left[\frac{sc\sigma_x - sc\sigma_y + (c^2 - s^2)\sigma_s}{S}\right]^2 \leq 1$$

### 5.2.4 – Criterio di Hoffman

Il criterio di Hoffman è un criterio di resistenza che riguarda i materiali anisotropi ed è una generalizzazione del criterio di Hill, in cui si tiene conto della differenza tra la resistenza in trazione e in compressione.

Il criterio di Hoffman nel riferimento di ortotropia è:

$$C_1(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + C_2(\sigma_3 - \sigma_1)^2 + C_3(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + C_4\sigma_1 + C_5\sigma_2 + C_6\sigma_3 + C_7\sigma_4^2 + C_8\sigma_5^2 + C_9\sigma_6^2 \leq 1$$

in cui le 9 costanti  $C_i$  sono determinate in base alle 9 resistenze nelle direzioni di ortotropia,  $X_c, X_t, Y_c, Y_t, Z_c, Z_t, S_{xy}, S_{yz}, S_{xz}$ , con un procedimento simile a quello usato per il criterio di Tsai-Hill, ottenendo:

$$C_1 = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{Y_t Y_c} + \frac{1}{Z_t Z_c} - \frac{1}{X_t X_c} \right], C_2 = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{X_t X_c} + \frac{1}{Z_t Z_c} - \frac{1}{Y_t Y_c} \right], C_3 = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{X_t X_c} + \frac{1}{Y_t Y_c} - \frac{1}{Z_t Z_c} \right]$$

$$C_4 = \frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c}, C_5 = \frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c}, C_6 = \frac{1}{Z_t} - \frac{1}{Z_c}, C_7 = \frac{1}{S_{yz}^2}, C_8 = \frac{1}{S_{xz}^2}, C_9 = \frac{1}{S_{xy}^2}$$

Nel caso di stato piano di tensione la condizione si riduce a:

$$C_1\sigma_2^2 + C_2\sigma_1^2 + C_4\sigma_1 + C_5\sigma_2 + C_9\sigma_6^2 \leq 1$$

e per una lamina piana con  $Z_t = Y_t, Z_c = Y_c, S_{xy} = S$  si arriva all'equazione:

$$\frac{\sigma_2^2}{X_t X_c} + \frac{\sigma_1^2}{Y_t Y_c} + \frac{\sigma_1 \sigma_2}{X_t X_c} + \frac{X_c - X_t}{X_t X_c} \sigma_1 + \frac{Y_c - Y_t}{Y_t Y_c} \sigma_2 + \frac{\sigma_6^2}{S^2} \leq 1$$

Quest'ultima equazione definisce la superficie limite di Hoffmann nello spazio delle tensioni e nel riferimento di ortotropia, si noti come nel caso di uguale resistenza a trazione e compressione il criterio di Hoffmann coincida con quello di Tsai-Hill.

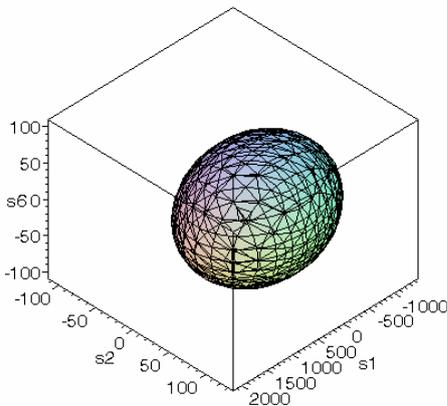


Figura 5.7: Superficie limite secondo il criterio di Hoffman nello spazio delle tensioni per il composito (vetro-epoxy)

### 5.2.5 – Criterio di Tsai-Wu

Il criterio di Tsai-Wu è un criterio di resistenza che riguarda i materiali anisotropi in cui il numero dei parametri di resistenza è superiore a quello dei criteri precedenti, allo scopo di meglio interpolare i dati dell'esperienza ed in cui si introducono due tensori di resistenza,  $f$  e  $F$ , il primo di ordine 2 e il secondo di ordine 4 che hanno simmetrie dell'elasticità.

Il criterio di resistenza, scritto nel riferimento di ortotropia e in notazione di Voigt, ha la forma:

$$f_i \sigma_i + F_{hk} \sigma_h \sigma_k \leq 1 \quad \text{con } i, h, k = 1, \dots, 6$$

che nel caso di una lamina in stato piano di tensione si riduce a:

$$f_i \sigma_i + F_{hk} \sigma_h \sigma_k \leq 1 \quad \text{con } i, h, k = 1, 2, 6$$

$$f_1 \sigma_1 + f_2 \sigma_2 + f_6 \sigma_6 + F_{11} \sigma_1^2 + F_{22} \sigma_2^2 + F_{66} \sigma_6^2 + 2F_{12} \sigma_1 \sigma_2 \leq 1$$

invece parametri  $f_i$  e  $F_{hk}$  si determinano allo stesso modo dei criteri precedenti.

Se  $\sigma_1 \neq 0$  e  $\sigma_i = 0$  con  $i = 2, 6$  il criterio si riduce a:

$$f_1 \sigma_1 + F_{11} \sigma_1^2 \leq 1$$

e poiché allo stato limite  $\sigma_1$  diventa  $X_t$  se la tensione è di trazione e  $X_c$  se è di compressione, considerando questi due casi distinti, si ottengono le due relazioni:

$$f_1 = \frac{1}{X_t} + \frac{1}{X_c}, F_{11} = -\frac{1}{X_t X_c}$$

in modo analogo se  $\sigma_2 \neq 0$  e  $\sigma_i = 0$  con  $i = 1, 6$  si ottiene:

$$f_2 = \frac{1}{Y_t} + \frac{1}{Y_c}, F_{22} = -\frac{1}{Y_t Y_c}$$

e se  $\sigma_6 \neq 0$  e  $\sigma_i = 0$  con  $i = 1, 2$  si ottiene:

$$f_6 = 0, F_{66} = \frac{1}{S^2}$$

La determinazione dell'ultimo termine  $F_{12}$  è più delicata poiché non si dispone di ulteriori test monoassiali e quindi deve essere ricavato tramite un test biassiale in cui  $\sigma_1 \neq 0$  e  $\sigma_2 \neq 0$ .

Solo che non soltanto i test biassiali sono più difficili da essere eseguiti ma di questi test ne esistono molti e diversi a seconda del valore relativo delle due tensioni.

Se ad esempio si prende uno stato di tensione biassiale con  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$  si ottiene la condizione:

$$(f_1 + f_2)\sigma + (F_{11} + F_{22} + 2F_{12})\sigma^2 = 1$$

ed usando le espressioni precedenti ricavate per gli altri parametri si ha:

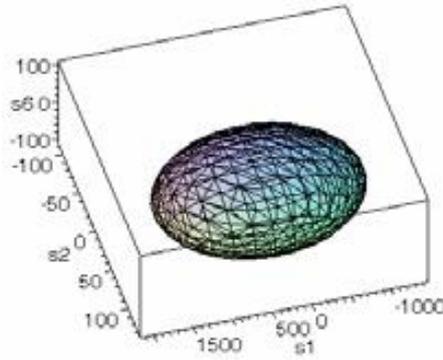
$$F_{12} = \frac{1}{2\sigma^2} \left[ 1 - \left( \frac{1}{X_t} + \frac{1}{X_c} + \frac{1}{Y_t} + \frac{1}{Y_c} \right) \sigma + \left( \frac{1}{X_t X_c} + \frac{1}{Y_t Y_c} \right) \sigma^2 \right]$$

quindi, il valore di  $F_{12}$  dipende non soltanto dal valore degli altri parametri di resistenza, ma anche dal livello di tensione  $\sigma$  con cui si produce la rottura biassiale.

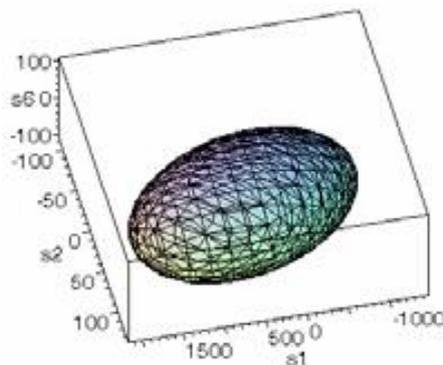
Il criterio di Tsai-Wu viene scritto in genere nel seguente modo:

$$\frac{\sigma_1^2}{X_t X_c} + \frac{\sigma_2^2}{Y_t Y_c} + \frac{X_c - X_t}{X_t X_c} \sigma_1 + \frac{Y_c - Y_t}{Y_t Y_c} \sigma_2 + \frac{\sigma_6^2}{S^2} + 2F_{12}^* \frac{\sigma_1 \sigma_2}{X_t X_c} \leq 1 \quad \text{con } F_{12}^* = F_{12} X_t X_c$$

dalla quale si può osservare che se  $F_{12}^* = -\frac{1}{2}$  il criterio di Tsai-Wu coincide con quello di Hoffmann, che quindi ne è un caso particolare e se inoltre le resistenze a trazione e compressione sono uguali, allora Tsai-Wu coincide con Tsai-Hill.



*Figura 5.8: Superficie limite secondo il criterio di Tsai-Wu nello spazio delle tensioni per il composito (vetro-epoxy) con  $F_{12}^* = -1/2$*



*Figura 5.9: Superficie limite secondo il criterio di Tsai-Wu nello spazio delle tensioni per il composito (vetro-epoxy) con  $F_{12}^* = -5$*

## Capitolo 6 – Risultati delle Analisi e Verifica Strutturale

In quest'ultimo capitolo si espongono i risultati ottenuti in fase di analisi sul modello FEM globale e si effettuano i calcoli necessari alla verifica e alla validazione del progetto strutturale.

Prima di procedere alla lettura di questo report finale è necessario riassumere le ipotesi, sviluppate nei precedenti capitoli, che sono alla base sia della costruzione del modello sia delle impostazioni con le quali l'analisi stessa è stata implementata.

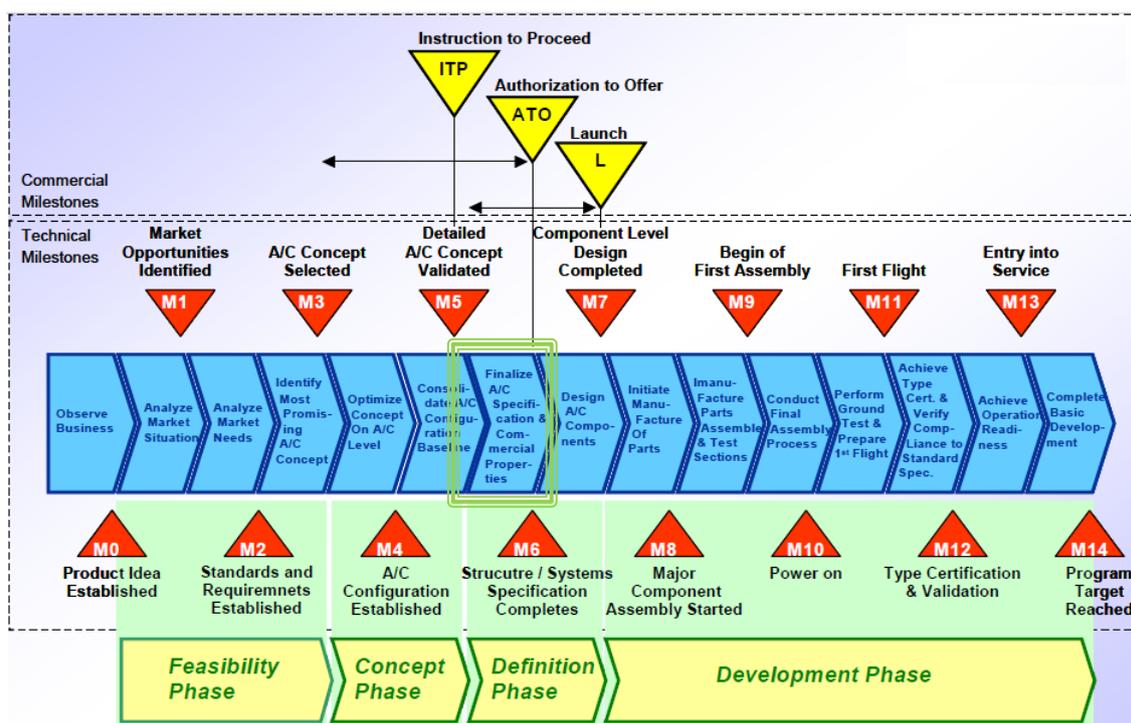


Figura 6.1: Programma di sviluppo di un velivolo – Verifica e validazione dei risultati di simulazione

Nel Capitolo 2 – Progettazione del cassone alare sono state sviluppate le caratteristiche geometriche del prodotto ala e cassone alare nella configurazione *baseline*.

È stato anche ricavato l'involuppo di volo con l'utilizzo dei requisiti dettati dalla normativa CS-25, per mezzo del quale è stato possibile identificare la condizione di carico (*Load Case*) più gravosa per la struttura.

Infine, nota la configurazione *baseline* dell'ala e la condizione di carico più gravosa, con l'uso del software *XFLR5*, è stato possibile ricavare i carichi a cui la struttura è soggetta e per mezzo dei quali si è potuto caricare il modello FEM globale.

Nel Capitolo 3 – Progettazione del laminato in composito è stato sviluppato il laminato che costituisce il rivestimento del cassone alare, partendo da singole lamine di CFRP (*Carbon Fiber Reinforced Polymer*), con l'utilizzo della Procedura Grafica di Miki (*Miki's Graphical Procedure*), è stato possibile determinare la percentuale di lamina a 0°,

$\pm 45^\circ$  e  $90^\circ$  di orientazione, al fine di ottenere un laminato con caratteristiche meccaniche il più possibile simili a quelle della Lega di Alluminio 7050 (*Al7050-T7451*) usata per gli altri componenti e arrivando così a definire i 2 casi su cui sono state effettuate tutte le successive analisi:

1. Caso 304030 con:
  - a. 30% di lamine posizionate a  $\theta = 0^\circ$ ;
  - b. 40% di lamine posizionate a  $\theta = \pm 45^\circ$ ;
  - c. 30% di lamine posizionate a  $\theta = 90^\circ$ ;
2. Caso 305020 con:
  - a. 30% di lamine posizionate a  $\theta = 0^\circ$ ;
  - b. 50% di lamine posizionate a  $\theta = \pm 45^\circ$ ;
  - c. 20% di lamine posizionate a  $\theta = 90^\circ$ .

Nel Capitolo 4 – Modello FEM Globale è stato creato il modello FEM secondo quanto determinato nei capitoli precedenti e sul quale sono state svolte le analisi.

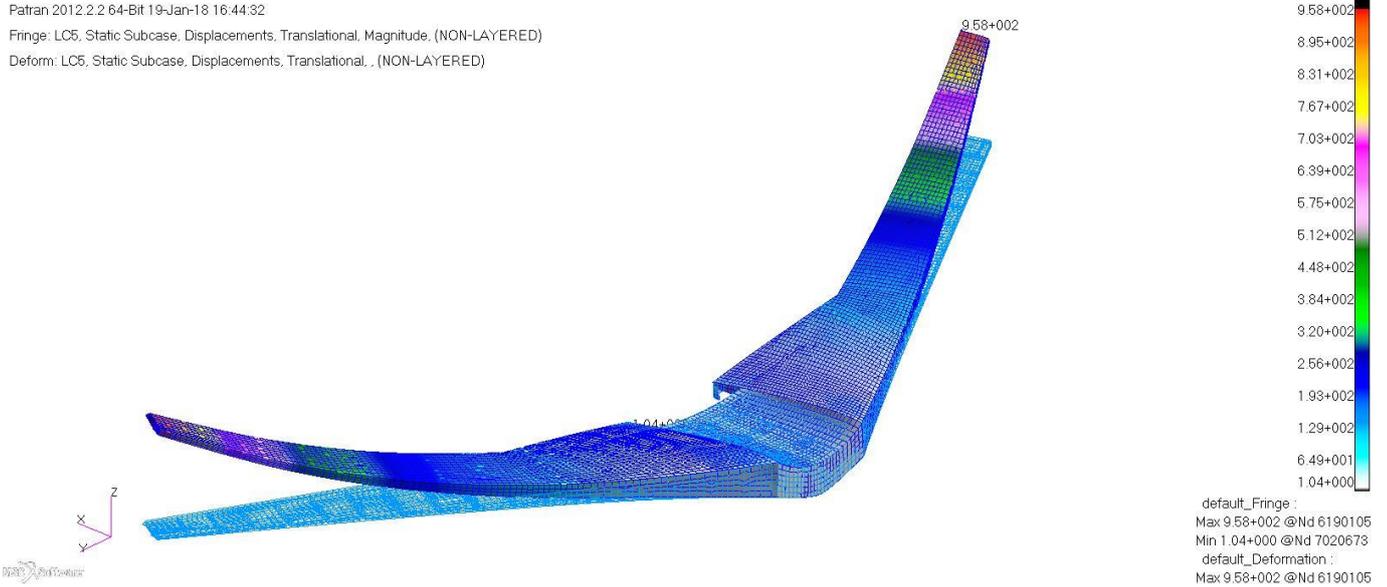
Si precisa che le analisi sono state svolte in modo iterativo, poiché non si conosceva la dimensione e soprattutto lo spessore ottimale di ogni singolo componente, quindi si sono effettuate molteplici analisi per passare prima dal sottodimensionamento al sovradimensionamento dei componenti e alla fine all'ottimizzazione di componenti e rivestimento al fine verificare e validare il modello con i criteri di resistenza.

Nel Capitolo 5 – Criteri di resistenza sono stati descritti tutti i criteri di resistenza per materiali metallici (*isotropi*) e compositi (*anisotropi*) ma dei quali solo 2 sono stati scelti al fine di verificare e validare il progetto strutturale:

1. Criterio di Von Mises per i componenti metallici:
  - a. Longherone anteriore, posteriore e ausiliario;
  - b. Centine;
2. Criterio di Tsai-Hill per i componenti compositi:
  - a. Rivestimento superiore e inferiore;
  - b. Correnti superiori e inferiori.

## 6.1 – Spostamenti del modello FEM globale

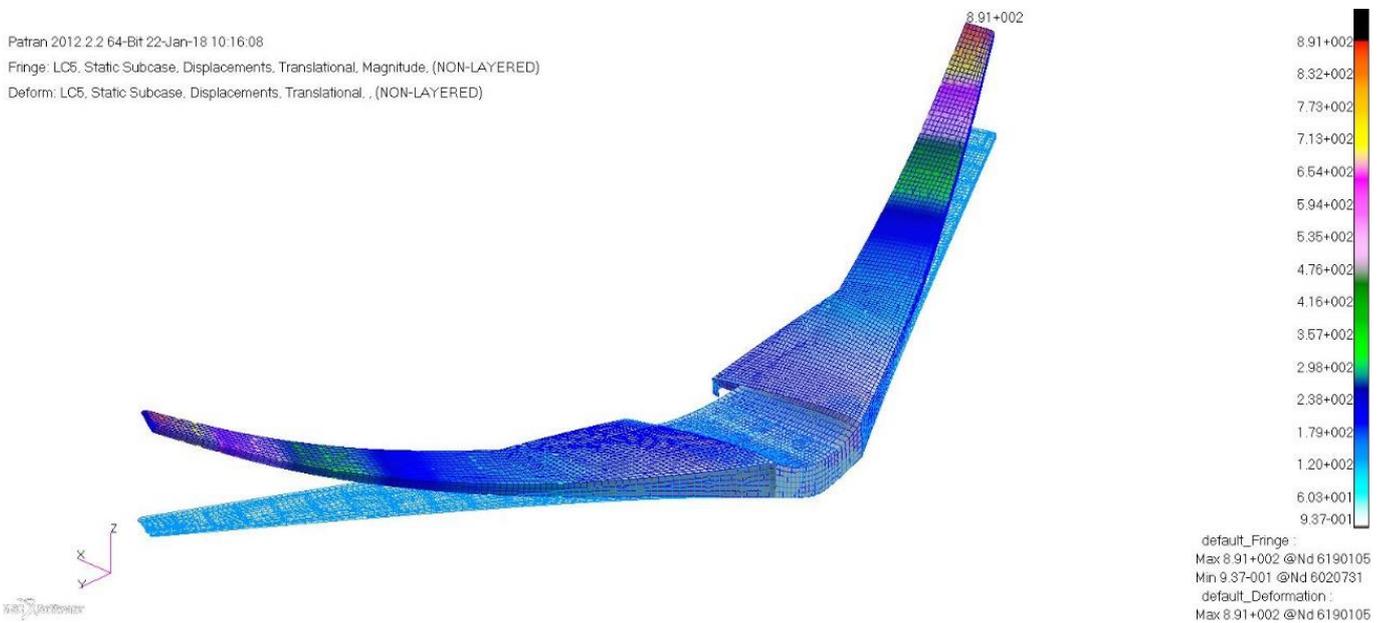
Per il *Caso 304030* gli spostamenti sono:



*Figura 6.2: Spostamenti dell'intero cassone alare nel Caso 304030*

con flessione massima  $w = 0.958 \text{ m}$ .

Per il *Caso 305020* gli spostamenti sono:



*Figura 6.3: Spostamenti dell'intero cassone alare nel Caso 304030*

con flessione massima  $w = 0.891 \text{ m}$ .

## 6.2 – Stress del modello FEM globale

Per il *Caso 304030* gli stress sono:

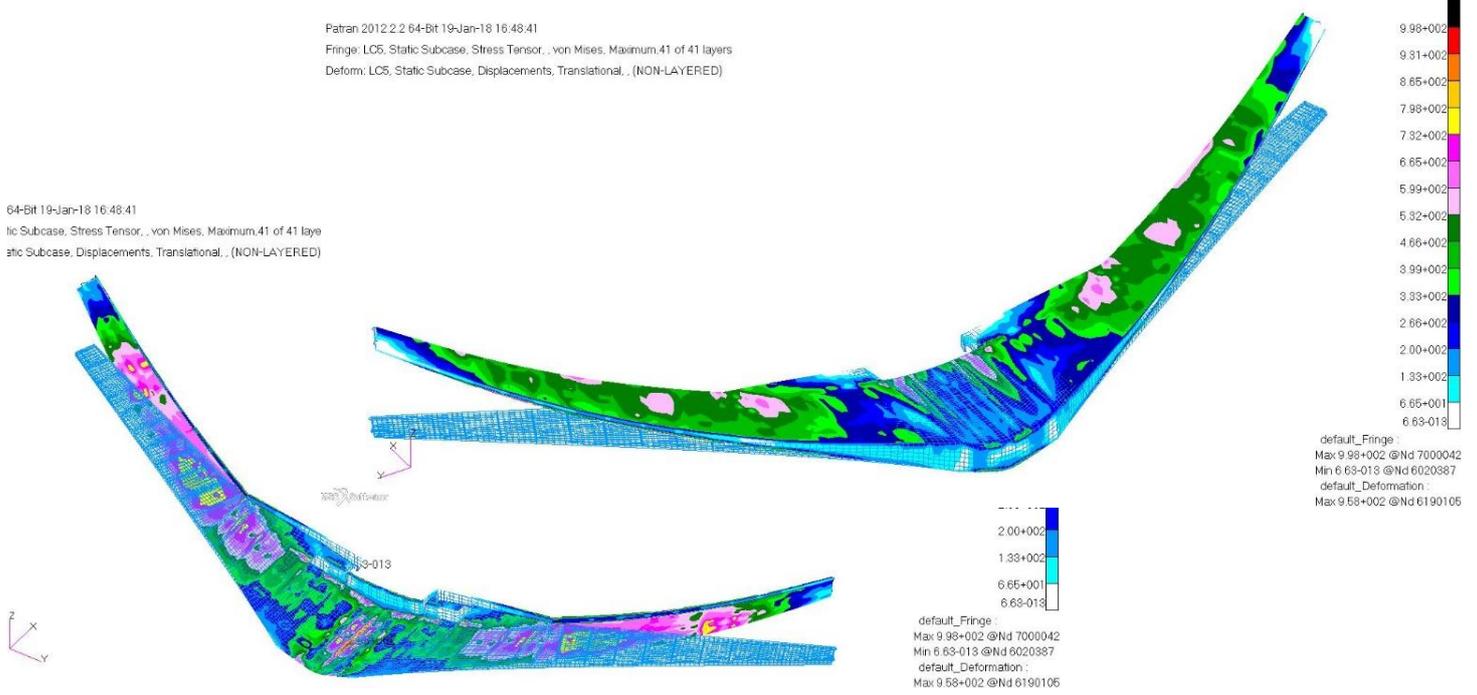


Figura 6.4: Stress sull'intero cassone alare nel Caso 304030

Per il *Caso 305020* gli stress sono:

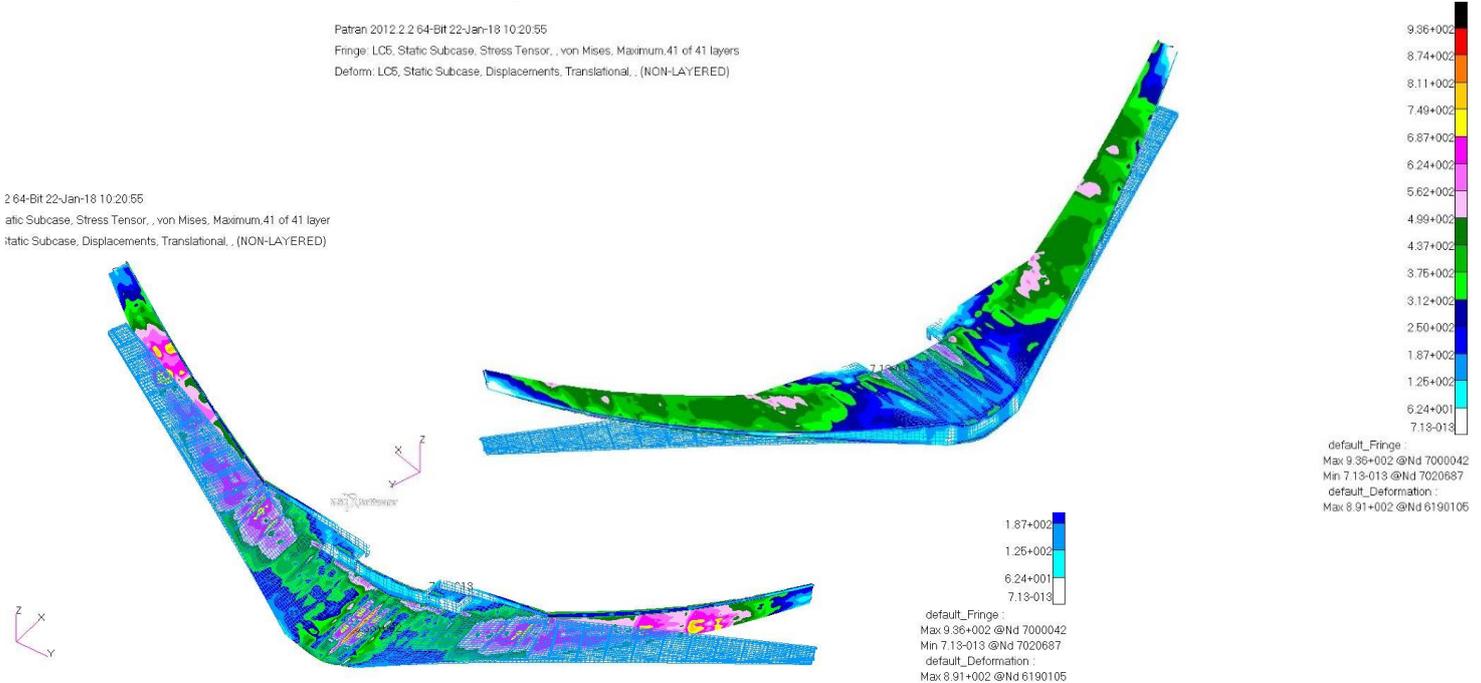
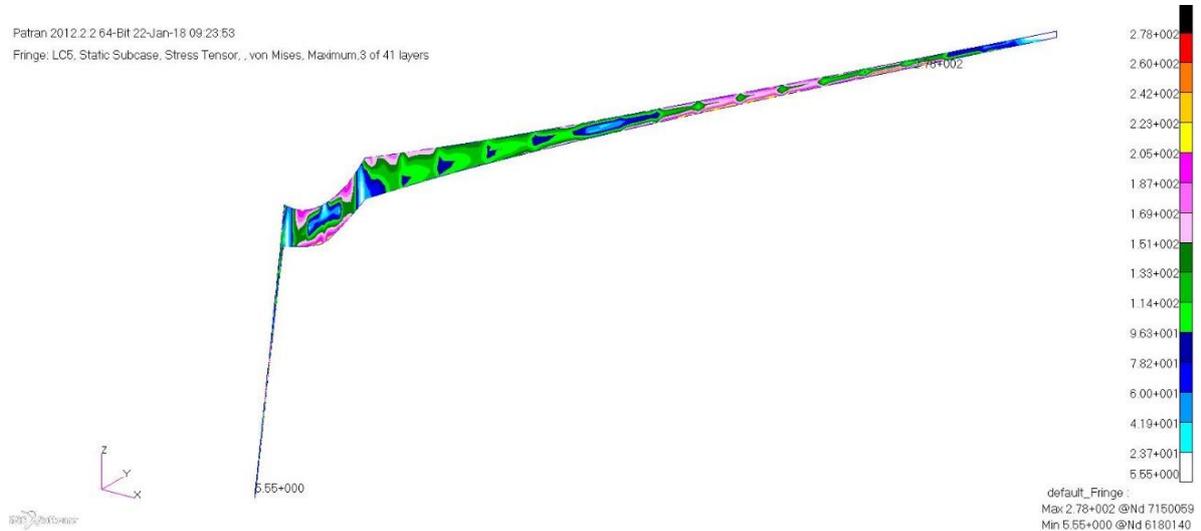


Figura 6.5: Stress sull'intero cassone alare nel Caso 305020

### 6.3 – Verifica strutturale del longherone anteriore

Per il *Caso 304030* gli stress sul longherone anteriore sono:



*Figura 6.6: Stress sul longherone anteriore nel Caso 304030*

con stress massimo  $\sigma_{max} = 278 \text{ MPa}$

Per il *Caso 305020* gli stress sul longherone anteriore sono:



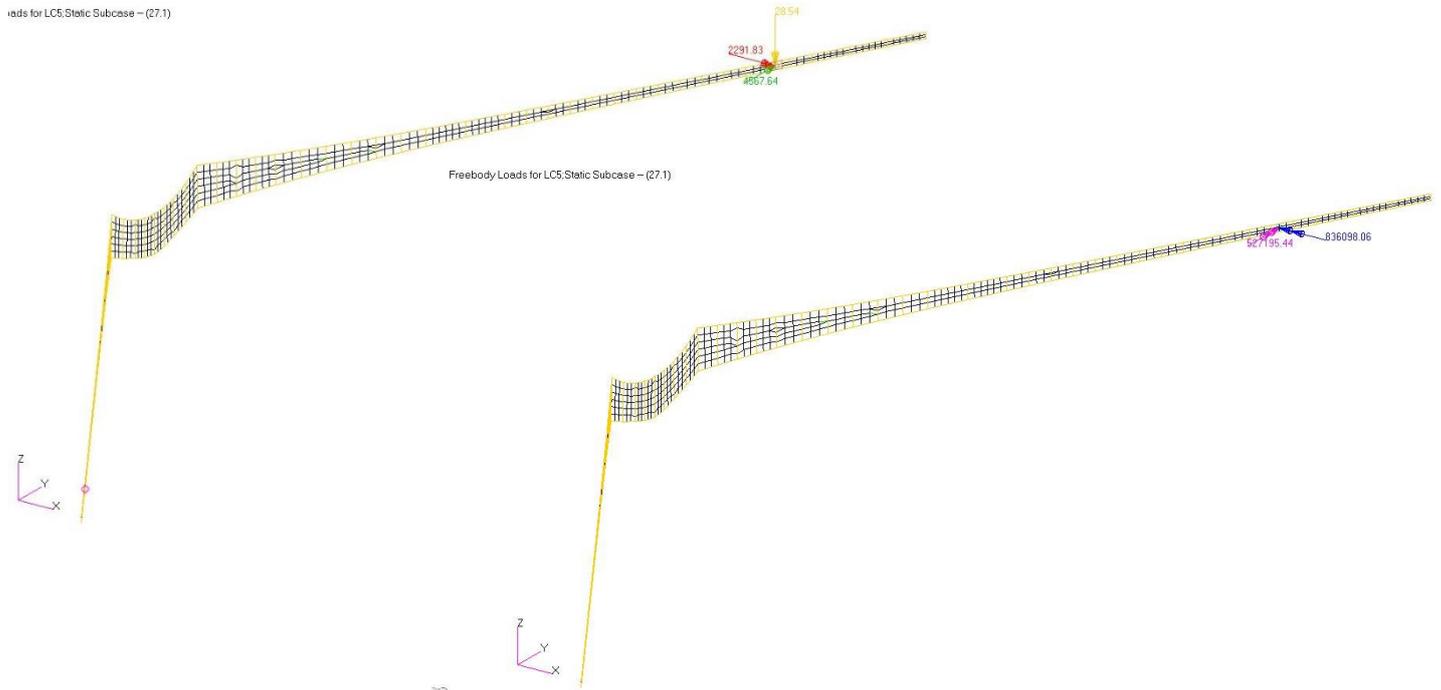
*Figura 6.7: Stress sul longherone anteriore nel Caso 305020*

con stress massimo  $\sigma_{max} = 276 \text{ MPa}$

#### 6.3.1 – Freebody Loads nella sezione più sollecitata

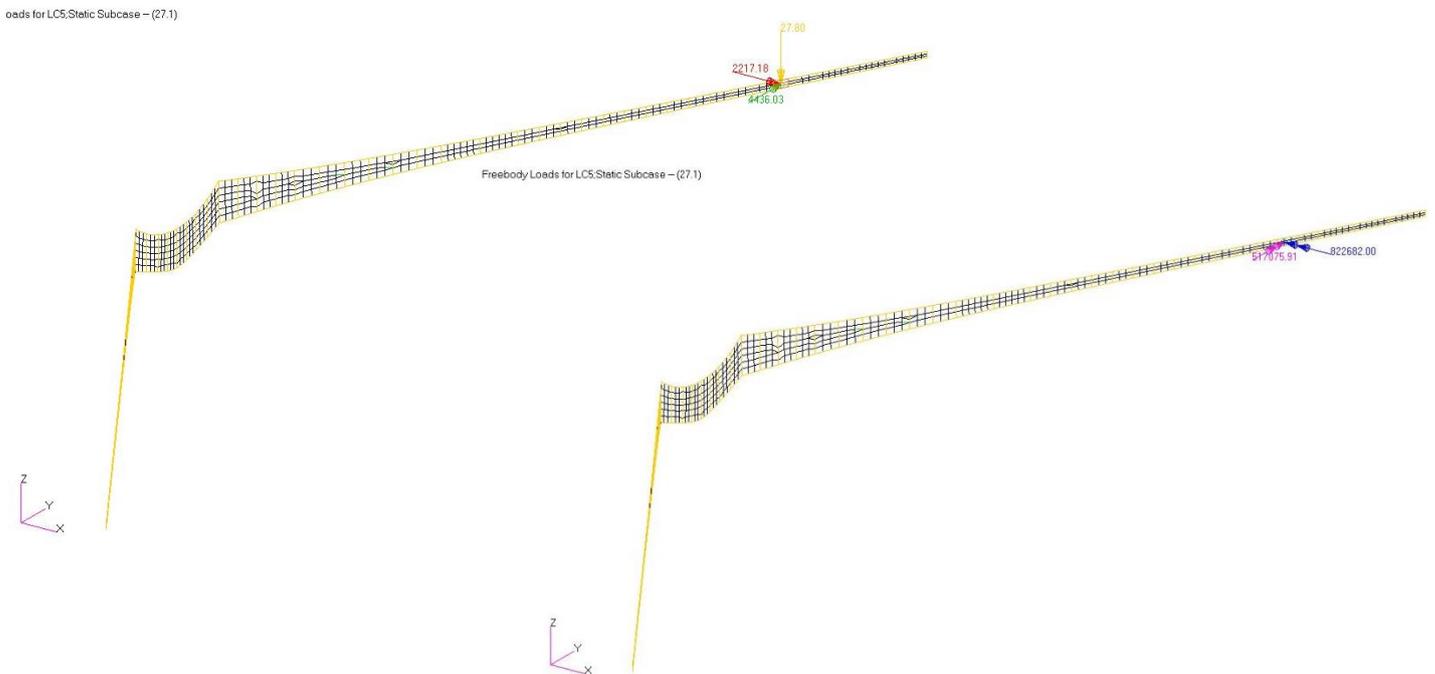
Attraverso la funzione di visualizzazione dei risultati di Patran (*Results»Freebody»Interface*) è così possibile ricavare i *Freebody Loads* nella sezione più sollecitata.

Per il *Caso 304030* i *Freebody Loads* sulla sezione più sollecitata del longherone anteriore sono:



**Figura 6.8:** *Freebody Loads* nella sezione più sollecitata del longherone anteriore nel *Caso 304030*

Per il *Caso 305020* i *Freebody Loads* sulla sezione più sollecitata del longherone anteriore sono:



**Figura 6.9:** *Freebody Loads* nella sezione più sollecitata del longherone anteriore nel *Caso 305020*

Qui di seguito si riassumono in un tabella di più facile lettura i *Freebody Loads* ricavati su Patran nella sezione più sollecitata del longherone anteriore per i 2 casi di analisi:

	Caso 304030		Caso 305020	
	Forze	Momenti	Forze	Momenti
$F_x$	2291.83 [N]	-	2217.18 [N]	-
$F_y$	4567.64 [N]	-	4436.03 [N]	-
$F_z$	-28.54 [N]	-	-27.80 [N]	-
$M_x$	-	-836098.06 [Nmm]	-	-822682.00 [Nmm]
$M_y$	-	527195.44 [Nmm]	-	517075.91 [Nmm]

Tabella 6.1: Freebody Loads nella sezione più sollecitata del longherone anteriore

Trovate le forze ( $F_x, F_y, F_z$ ) e i momenti ( $M_x, M_y$ ) si passa al calcolo degli sforzi ( $\sigma_{max}, \tau_S$ ) che agiscono sulla sezione, al fine di ricavare i valori di stress da usare nella verifica tramite il criterio di Von Mises.

### 6.3.2 – Sforzi sulla sezione più sollecitata

Lo sforzo di taglio  $\tau_S$  è calcolato mediante la formula di Jourawski:

$$\tau_S = \frac{F_t S}{I b} \quad (6-1)$$

con  $F_t$  = forza di taglio,  $S$  = momento statico di una delle due parti di sezione individuate dalla dividente parallela all'asse baricentrico nel punto in cui si vuole calcolare la tensione tangenziale,  $I$  = momento d'inerzia della sezione e  $b$  = larghezza della corda nel punto considerato.

L'ipotesi su cui si basa il calcolo è che in una trave a *doppio T* la parte che maggiormente resiste a taglio è l'anima, questo consente di semplificare la formula precedente in:

$$\tau_S = \frac{3F_t}{2A} \quad (6-2)$$

con  $F_t$  = forza di taglio e  $A$  = area della sezione

in quanto l'anima, se considerata singolarmente, presenta una sezione rettangolare.

Questa ipotesi risulta anche essere un'ipotesi conservativa poiché la sezione su cui si effettua il calcolo è minore rispetto alla reale sezione su cui agisce effettivamente la forza di taglio.

Lo sforzo normale  $\sigma_N$  è calcolato mediante la formula:

$$\sigma_N = \frac{N}{A} \quad (6-3)$$

con  $N$  = forza normale e  $A$  = area della sezione

Lo sforzo dovuto al momento flettente  $\sigma_{M_f}$  è calcolato mediante la formula di Navier:

$$\sigma_{M_f} = \frac{M_f}{I_{xx}} z \quad (6-4)$$

con  $M_f$  = momento flettente,  $I_{xx}$  = momento d'inerzia lungo l'asse neutro e  $z$  = distanza dall'asse neutro.

Eseguendo tutti i calcoli si ottiene:

	Caso 304030	Caso 305020
$\tau_S$	-0.10 [MPa]	-0.10 MPa
$\sigma_N$	7.02 [MPa]	6.82 [MPa]
$\sigma_{M_f}$	-254.03 [MPa]	-249.96 [MPa]
$\sigma_{max} = \sigma_N + \sigma_{M_f}$	-247.01 [MPa]	-243.14 [MPa]

Tabella 6.2: Sforzi sulla sezione più sollecitata del longherone anteriore

### 6.3.3 – Applicazione del Criterio di Von Mises

Ultimo passaggio del processo di verifica e validazione, per il longherone anteriore, è l'applicazione del Criterio di Von Mises con il calcolo della tensione equivalente:

$$\sigma_{(id.VM)} = \sqrt{\sigma_{max}^2 + 3\tau_S^2} \quad (6-5)$$

da confrontare con la tensione di snervamento per la lega di alluminio Al 7050-T7451:

$$\sigma_{(amm,Al7050-T7451)} = 469.00 \text{ MPa}$$

In questo modo è possibile ottenere il valore del *Reserve Factor*  $R$ :

$$R = \frac{\sigma_{(amm,Al7050-T7451)}}{\sigma_{(id.VM)}} \quad (6-6)$$

ed infine il valore del *Margine di Sicurezza MS* che al fine di validare la verifica deve essere  $> 0$ :

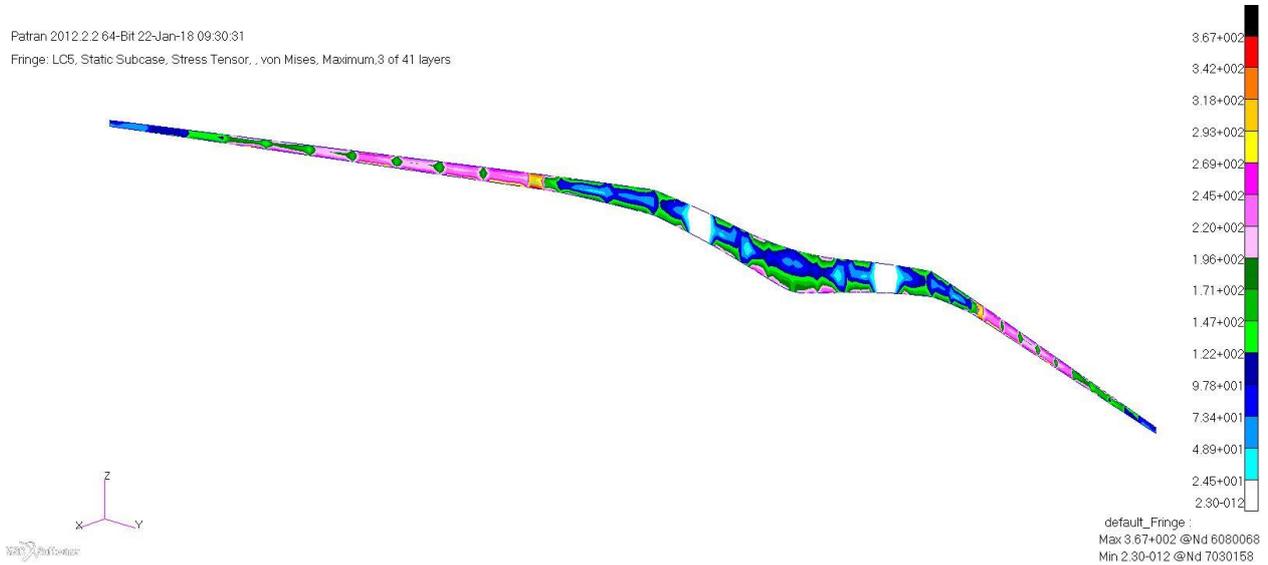
$$MS = R - 1 \quad (6-7)$$

	Caso 304030	Caso 305020
$\sigma_{(id.VM)}$	247.01 [MPa]	243.14 [MPa]
$\sigma_{(amm,Al7050-T7451)}$	469.00 [MPa]	469.00 [MPa]
<b>R</b>	1.90	1.93
<b>MS</b>	<b>0.90</b>	<b>0.93</b>

Tabella 6.3: Margine di Sicurezza del longherone anteriore

## 6.4 – Verifica strutturale del longherone posteriore

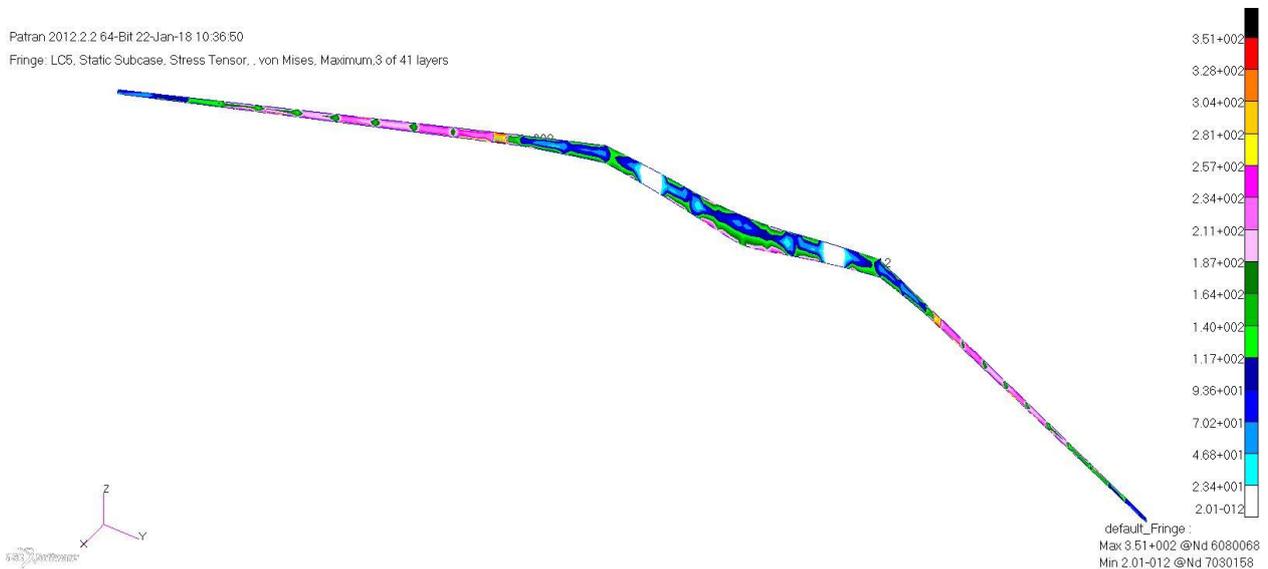
Per il *Caso 304030* gli stress sul longherone posteriore sono:



*Figura 6.10: Stress sul longherone posteriore nel Caso 304030*

con stress massimo  $\sigma_{max} = 367 \text{ MPa}$

Per il *Caso 305020* gli stress sul longherone posteriore sono:



*Figura 6.11: Stress sul longherone posteriore nel Caso 305020*

con stress massimo  $\sigma_{max} = 351 \text{ MPa}$

Attraverso la funzione di visualizzazione dei risultati di Patran (*Results»Freebody»Interface*) è così possibile ricavare i *Freebody Loads* nella sezione più sollecitata.

Per il *Caso 304030* i *Freebody Loads* sulla sezione più sollecitata del longherone posteriore sono:



**Figura 6.12:** *Freebody Loads* nella sezione più sollecitata del longherone posteriore nel *Caso 304030*

Per il *Caso 305020* i *Freebody Loads* sulla sezione più sollecitata del longherone posteriore sono:



**Figura 6.13:** *Freebody Loads* nella sezione più sollecitata del longherone posteriore nel *Caso 305020*

Qui di seguito si riassumono in un tabella di più facile lettura i *Freebody Loads* ricavati su Patran nella sezione più sollecitata del longherone anteriore per i 2 casi di analisi:

	Caso 304030		Caso 305020	
	Forze	Momenti	Forze	Momenti
$F_x$	-1141.50 [N]	-	-693.93 [N]	-
$F_y$	2224.95 [N]	-	503.49 [N]	-
$F_z$	-262.04 [N]	-	-227.93 [N]	-
$M_x$	-	1482034.75 [Nmm]	-	1426232.75 [Nmm]
$M_y$	-	737652.56 [Nmm]	-	740293.06 [Nmm]

Tabella 6.4: Freebody Loads nella sezione più sollecitata del longherone posteriore

Trovate le forze ( $F_x, F_y, F_z$ ) e i momenti ( $M_x, M_y$ ) si passa al calcolo degli sforzi ( $\sigma_{max}, \tau_S$ ) che agiscono sulla sezione, al fine di ricavare i valori di stress da usare nella verifica tramite il criterio di Von Mises.

Poiché il procedimento richiesto è del tutto simile a quello svolto nei paragrafi 6.3.2, 6.3.3 e richiede l'utilizzo delle stesse formule (6-2), (6-3), (6-4), (6-5), (6-6) e (6-7) nel seguito si riportano in tabella solo i risultati dei calcoli svolti.

	Caso 304030	Caso 305020
$\tau_S$	-0.23 [MPa]	-0.20 [MPa]
$\sigma_N$	0.79 [MPa]	0.18 [MPa]
$\sigma_{M_f}$	100.66 [MPa]	96.87 [MPa]
$\sigma_{max} = \sigma_N + \sigma_{M_f}$	101.45 [MPa]	97.05 [MPa]

Tabella 6.5: Sforzi sulla sezione più sollecitata del longherone posteriore

	Caso 304030	Caso 305020
$\sigma_{(id.VM)}$	101.45 [MPa]	97.05 [MPa]
$\sigma_{(amm,Al7050-T7451)}$	469.00 [MPa]	469.00 [MPa]
$R$	4.62	4.83
$MS = R - 1$	<b>3.62</b>	<b>3.83</b>

Tabella 6.6: Margine di Sicurezza del longherone posteriore

## 6.5 – Verifica strutturale del longherone ausiliario

Per il *Caso 304030* gli stress sul longherone ausiliario sono:

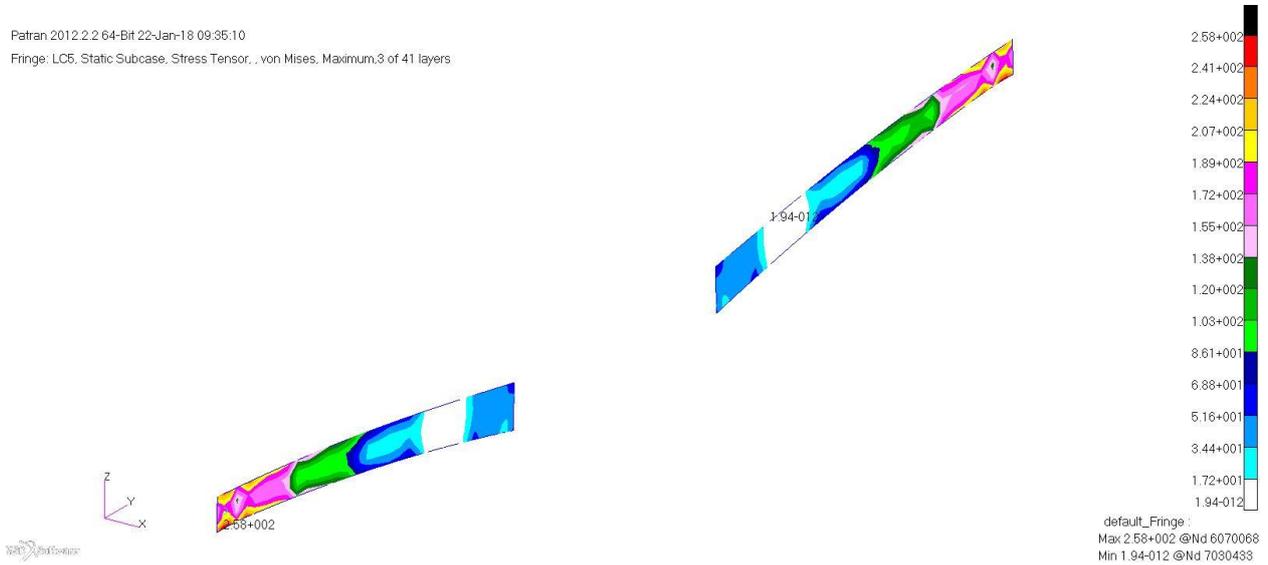


Figura 6.14: Stress sul longherone ausiliario nel Caso 304030

con stress massimo  $\sigma_{max} = 258 \text{ MPa}$

Per il *Caso 305020* gli stress sul longherone ausiliario sono:

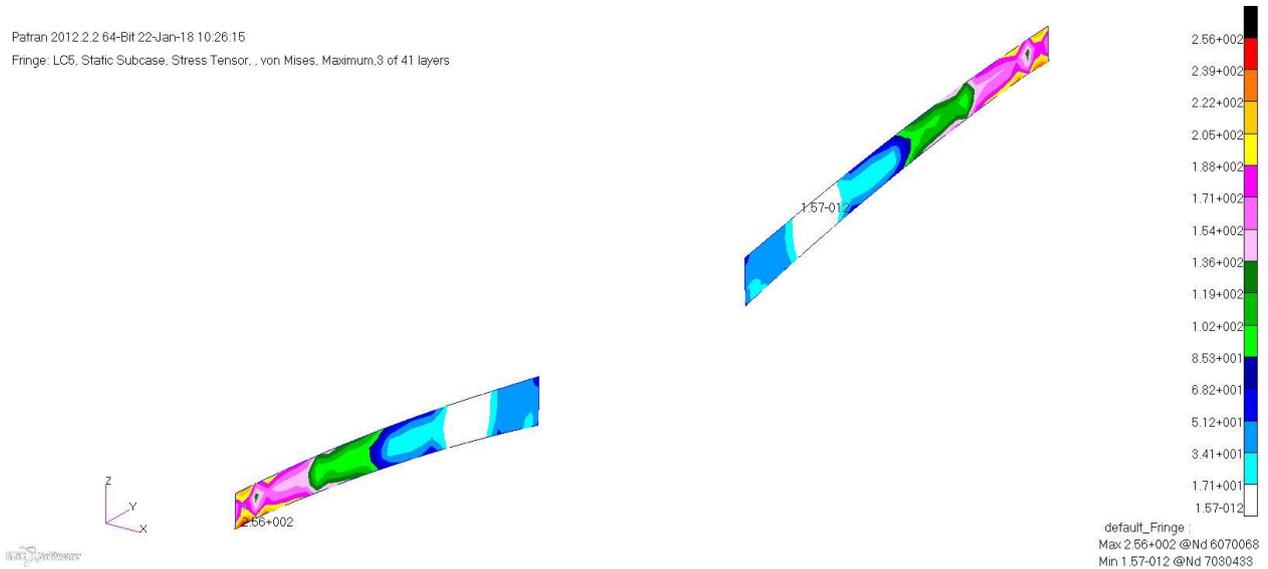


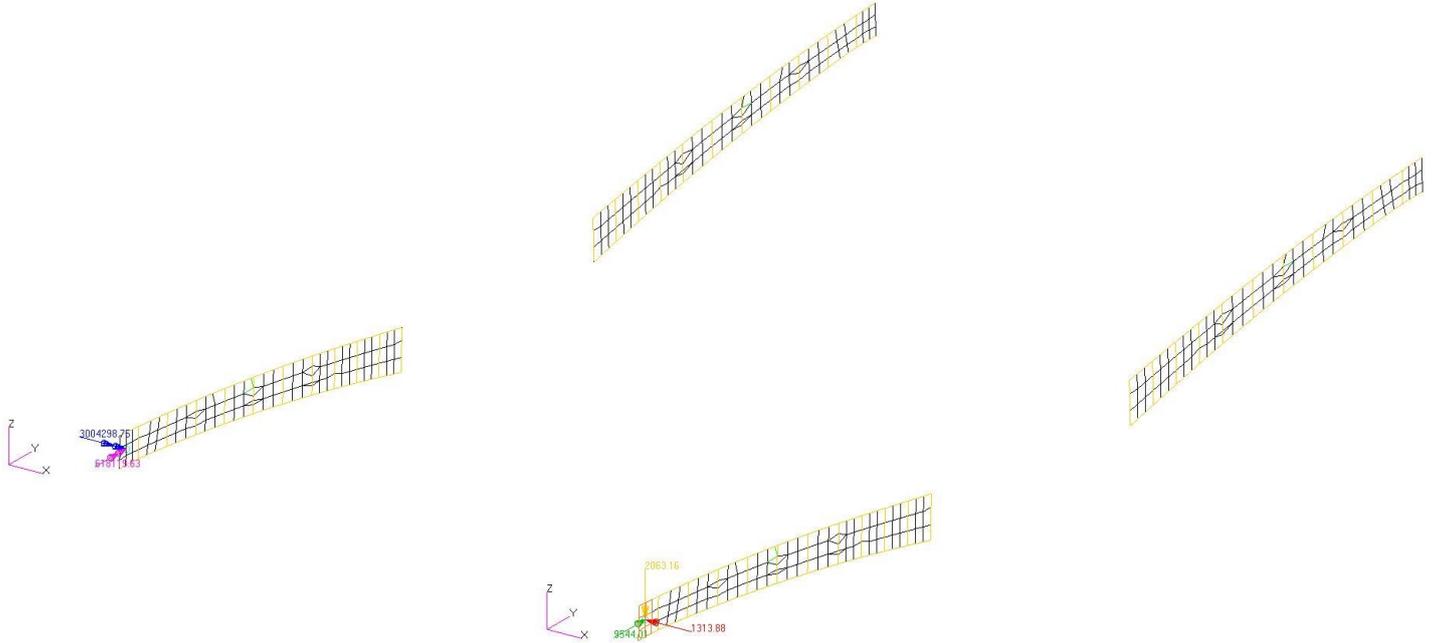
Figura 6.15: Stress sul longherone ausiliario nel Caso 305020

con stress massimo  $\sigma_{max} = 256 \text{ MPa}$

Attraverso la funzione di visualizzazione dei risultati di Patran (*Results»Freebody»Interface*) è così possibile ricavare i *Freebody Loads* nella sezione più sollecitata.

Per il *Caso 304030* i *Freebody Loads* sulla sezione più sollecitata del longherone ausiliario sono:

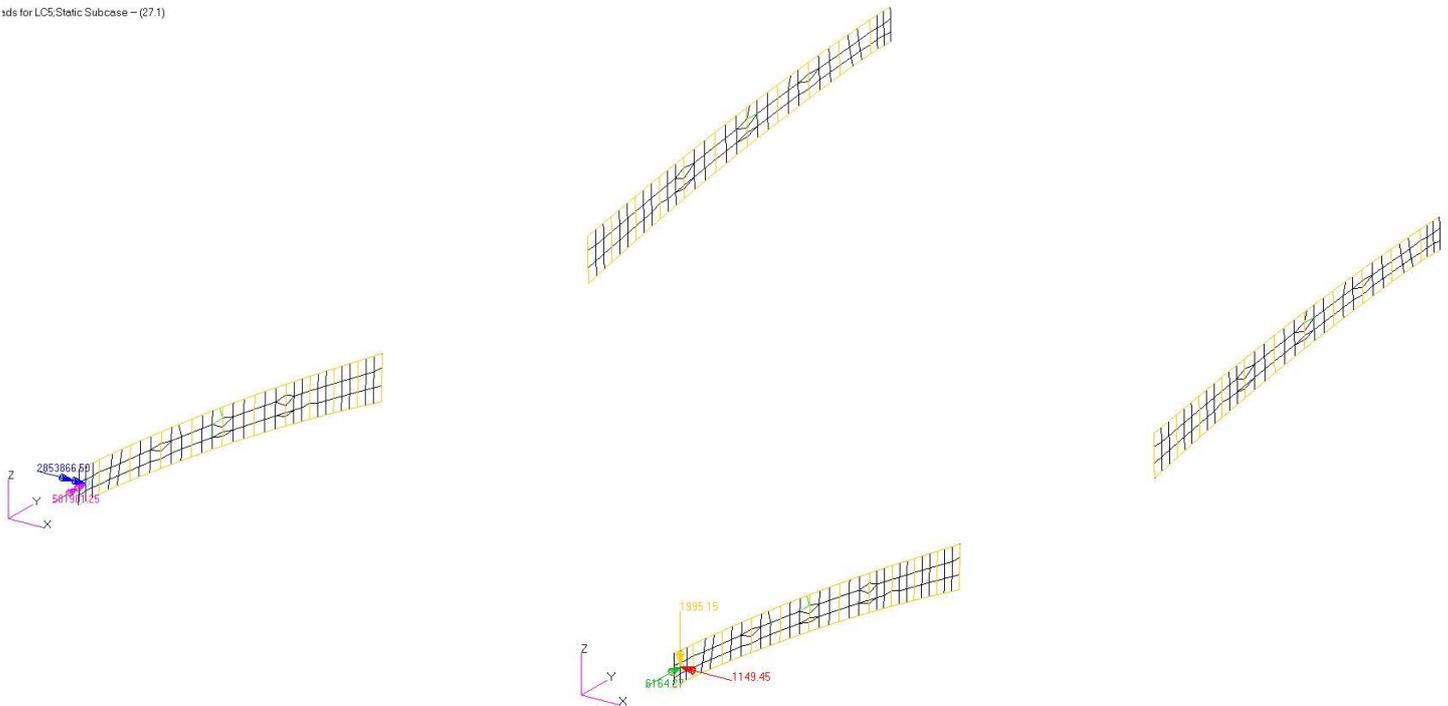
nds for LCS:Static Subcase - (27.1)



*Figura 6.16: Freebody Loads nella sezione più sollecitata del longherone ausiliario nel Caso 304030*

Per il *Caso 305020* i *Freebody Loads* sulla sezione più sollecitata del longherone ausiliario sono:

nds for LCS:Static Subcase - (27.1)



*Figura 6.17: Freebody Loads nella sezione più sollecitata del longherone ausiliario nel Caso 305020*

Qui di seguito si riassumono in un tabella di più facile lettura i *Freebody Loads* ricavati su Patran nella sezione più sollecitata del longherone anteriore per i 2 casi di analisi:

	Caso 304030		Caso 305020	
	Forze	Momenti	Forze	Momenti
$F_x$	-1313.88 [N]	-	-1149.45 [N]	-
$F_y$	9544.01 [N]	-	6164.27 [N]	-
$F_z$	-2063.16 [N]	-	-1995.15 [N]	-
$M_x$	-	3004298.75 [Nmm]	-	2853866.50 [Nmm]
$M_y$	-	618119.63 [Nmm]	-	581901.25 [Nmm]

Tabella 6.7: Freebody Loads nella sezione più sollecitata del longherone ausiliario

Trovate le forze ( $F_x, F_y, F_z$ ) e i momenti ( $M_x, M_y$ ) si passa al calcolo degli sforzi ( $\sigma_{max}, \tau_S$ ) che agiscono sulla sezione, al fine di ricavare i valori di stress da usare nella verifica tramite il criterio di Von Mises.

Poiché il procedimento richiesto è del tutto simile a quello svolto nei paragrafi 6.3.2, 6.3.3 e richiede l'utilizzo delle stesse formule (6-2), (6-3), (6-4), (6-5), (6-6) e (6-7) nel seguito si riportano in tabella solo i risultati dei calcoli svolti.

	Caso 304030	Caso 305020
$\tau_S$	-1.56 [MPa]	-1.51 [MPa]
$\sigma_N$	3.65 [MPa]	2.36 [MPa]
$\sigma_{M_f}$	205.33 [MPa]	195.05 [MPa]
$\sigma_{max} = \sigma_N + \sigma_{M_f}$	208.99 [MPa]	197.41 [MPa]

Tabella 6.8: Sforzi sulla sezione più sollecitata del longherone ausiliario

	Caso 304030	Caso 305020
$\sigma_{(id.VM)}$	209.01 [MPa]	197.43 [MPa]
$\sigma_{(amm,Al7050-T7451)}$	469.00 [MPa]	469.00 [MPa]
$R$	2.24	2.38
$MS = R - 1$	<b>1.24</b>	<b>1.38</b>

Tabella 6.9: Margine di Sicurezza del longherone ausiliario

## 6.6 – Verifica strutturale delle centine

Per il *Caso 304030* gli stress sulle centine sono:

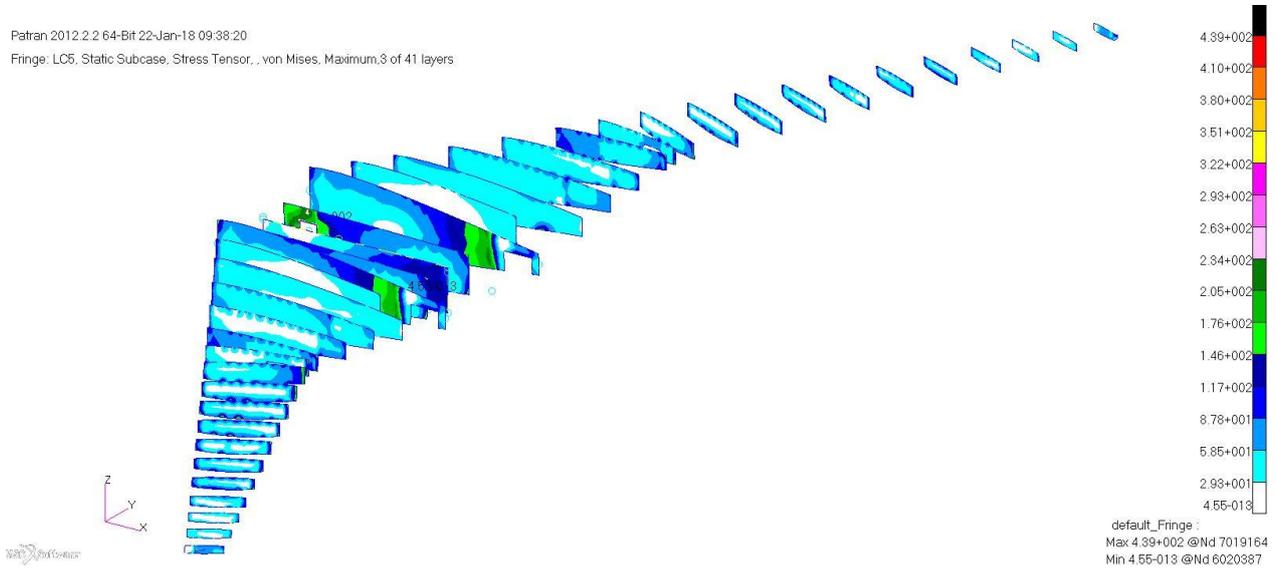


Figura 6.18: Stress sulle centine nel Caso 304030

con stress massimo  $\sigma_{max} = 439 \text{ MPa}$

Per il *Caso 305020* gli stress sulle centine sono:

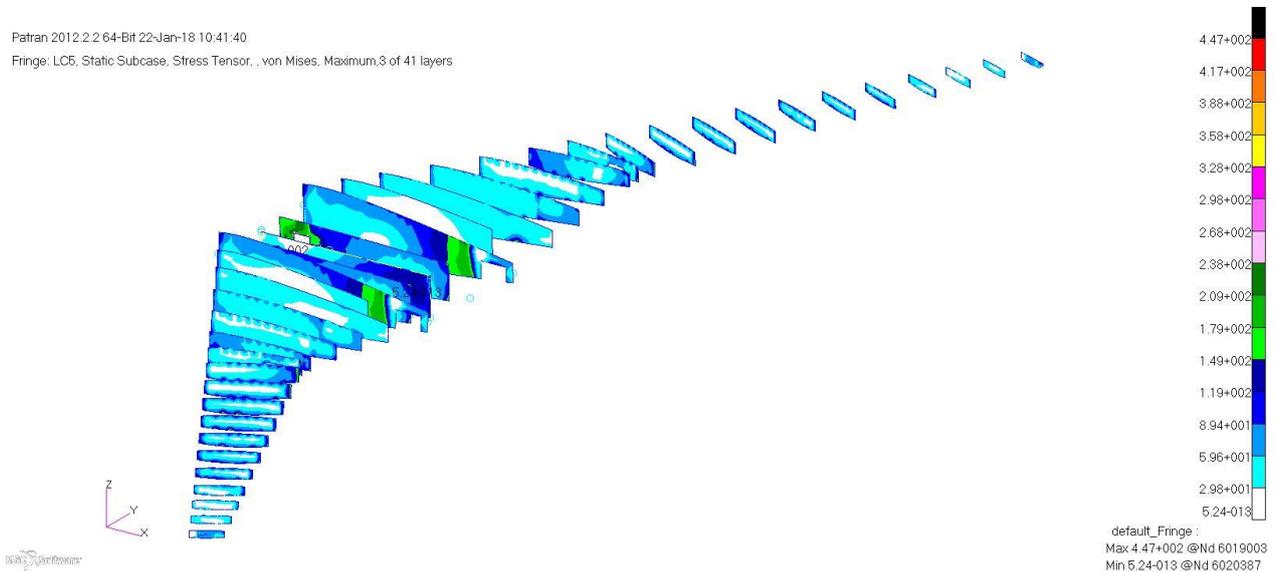


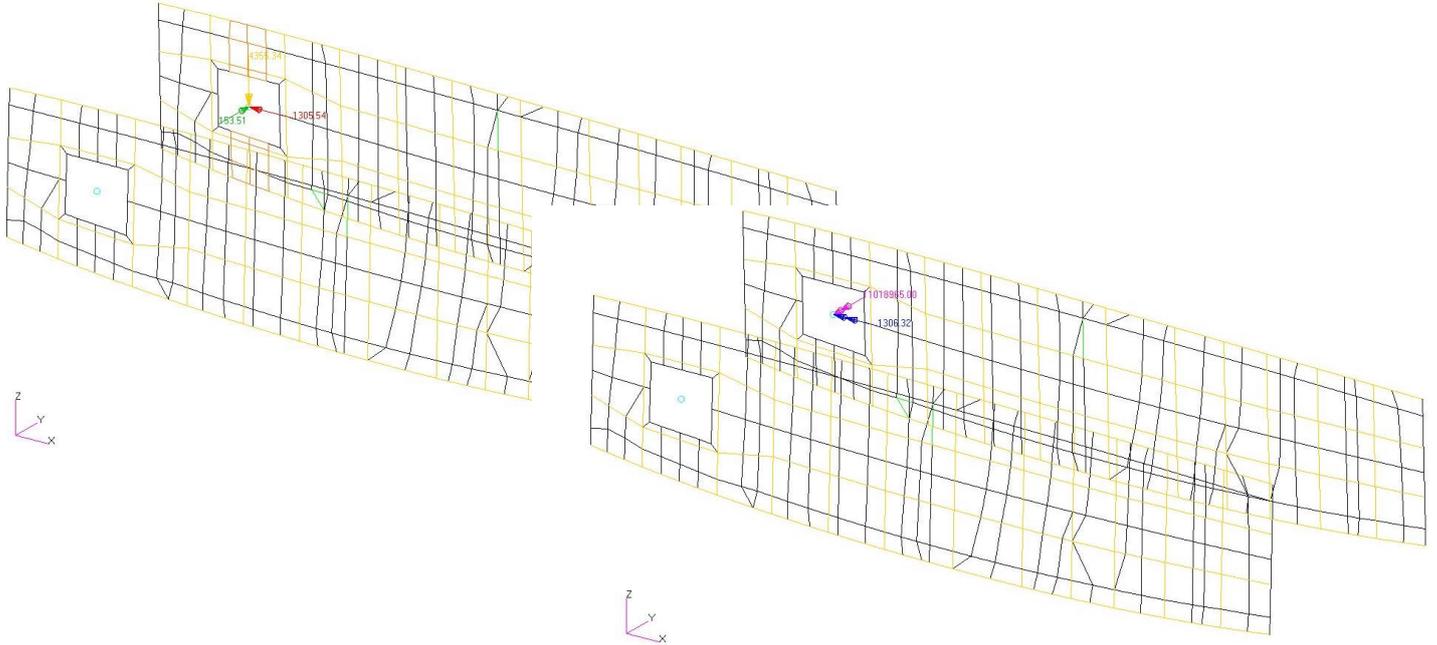
Figura 6.19: Stress sulle centine nel Caso 305020

con stress massimo  $\sigma_{max} = 447 \text{ MPa}$

Attraverso la funzione di visualizzazione dei risultati di Patran (*Results»Freebody»Interface*) è così possibile ricavare i *Freebody Loads* nella sezione più sollecitata.

Per il *Caso 304030* i *Freebody Loads* sulla sezione più sollecitata delle centine sono:

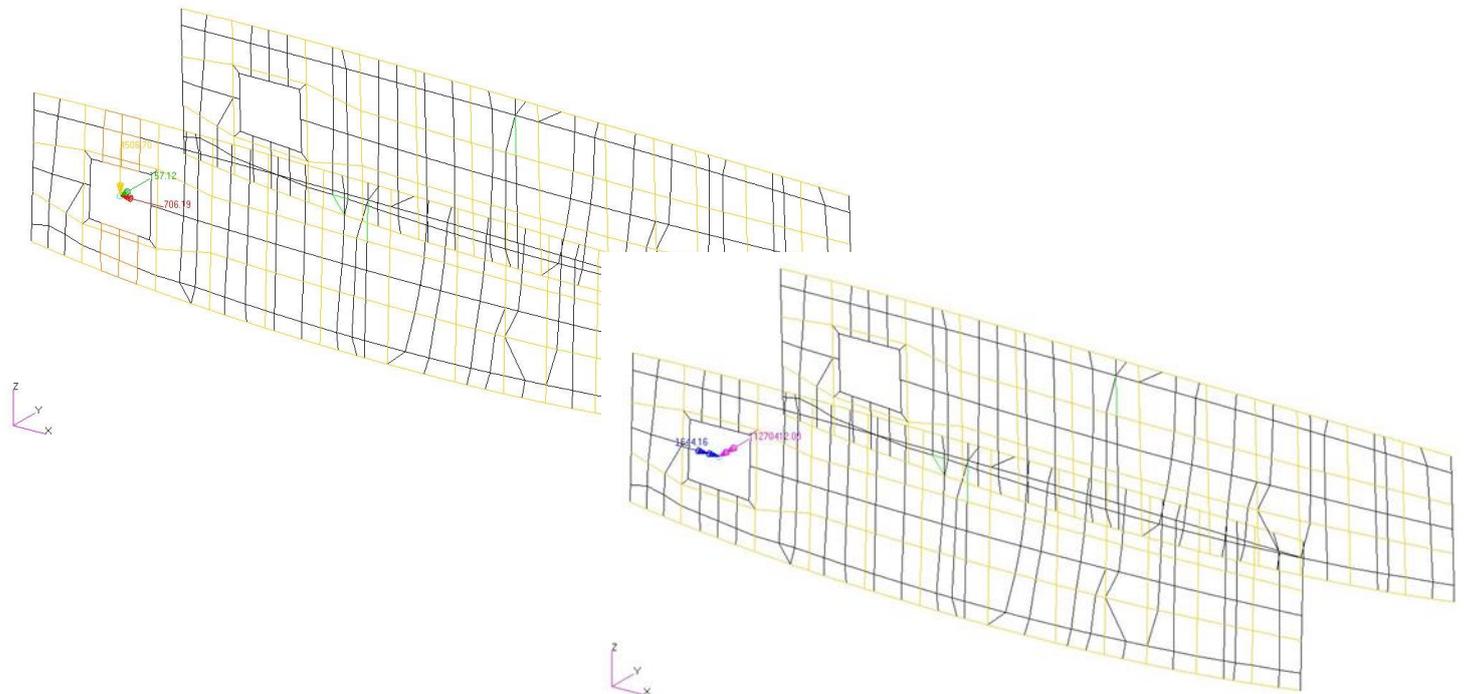
oads for LCS:Static Subcase - (27.1)



**Figura 6.20:** *Freebody Loads* nella sezione più sollecitata delle centine nel *Caso 304030*

Per il *Caso 305020* i *Freebody Loads* sulla sezione più sollecitata delle centine sono:

oads for LCS:Static Subcase - (27.1)



**Figura 6.21:** *Freebody Loads* nella sezione più sollecitata delle centine nel *Caso 305020*

Qui di seguito si riassumono in un tabella di più facile lettura i *Freebody Loads* ricavati su Patran nella sezione più sollecitata del longherone anteriore per i 2 casi di analisi:

	Caso 304030		Caso 305020	
	Forze	Momenti	Forze	Momenti
$F_x$	-1305.54 [N]	-	-706.19 [N]	-
$F_y$	153.51 [N]	-	-157.12 [N]	-
$F_z$	-4355.34 [N]	-	-4506.70 [N]	-
$M_x$	-	-1306.32 [Nmm]	-	1644.16 [Nmm]
$M_y$	-	-11018965.00 [Nmm]	-	-11270412.09 [Nmm]

Tabella 6.10: Freebody Loads nella sezione più sollecitata delle centine

Trovate le forze ( $F_x, F_y, F_z$ ) e i momenti ( $M_x, M_y$ ) si passa al calcolo degli sforzi ( $\sigma_{max}, \tau_S$ ) che agiscono sulla sezione, al fine di ricavare i valori di stress da usare nella verifica tramite il criterio di Von Mises.

Poiché il procedimento richiesto è del tutto simile a quello svolto nei paragrafi 6.3.2, 6.3.3 e richiede l'utilizzo delle stesse formule (6-2), (6-3), (6-4), (6-5), (6-6) e (6-7) nel seguito si riportano in tabella solo i risultati dei calcoli svolti.

	Caso 304030	Caso 305020
$\tau_S$	-0.94 [MPa]	-0.97 [MPa]
$\sigma_N$	-0.18 [MPa]	-0.10 [MPa]
$\sigma_{M_f}$	-163.21 [MPa]	-166.94 [MPa]
$\sigma_{max} = \sigma_N + \sigma_{M_f}$	-163.40 [MPa]	-167.04 [MPa]

Tabella 6.11: Sforzi sulla sezione più sollecitata delle centine

	Caso 304030	Caso 305020
$\sigma_{(id.VM)}$	163.40 [MPa]	167.04 [MPa]
$\sigma_{(amm,Al7050-T7451)}$	469.00 [MPa]	469.00 [MPa]
$R$	2.87	2.81
$MS = R - 1$	<b>1.87</b>	<b>1.81</b>

Tabella 6.12: Margine di Sicurezza delle centine

## 6.7 – Verifica strutturale del rivestimento

### 6.7.1 – Premesse

Prima di presentare i risultati ottenuti dalle analisi sul rivestimento superiore ed inferiore del cassone alare e dalla verifica e validazione per mezzo del criterio di Tsai-Hill, si ripresenta sinteticamente il prodotto rivestimento ottenuto nel paragrafo 3.6 – *Progettazione del laminato e risultati della progettazione* tramite l'utilizzo della Procedura Grafica di Miki (*Miki's Graphical Procedure*).

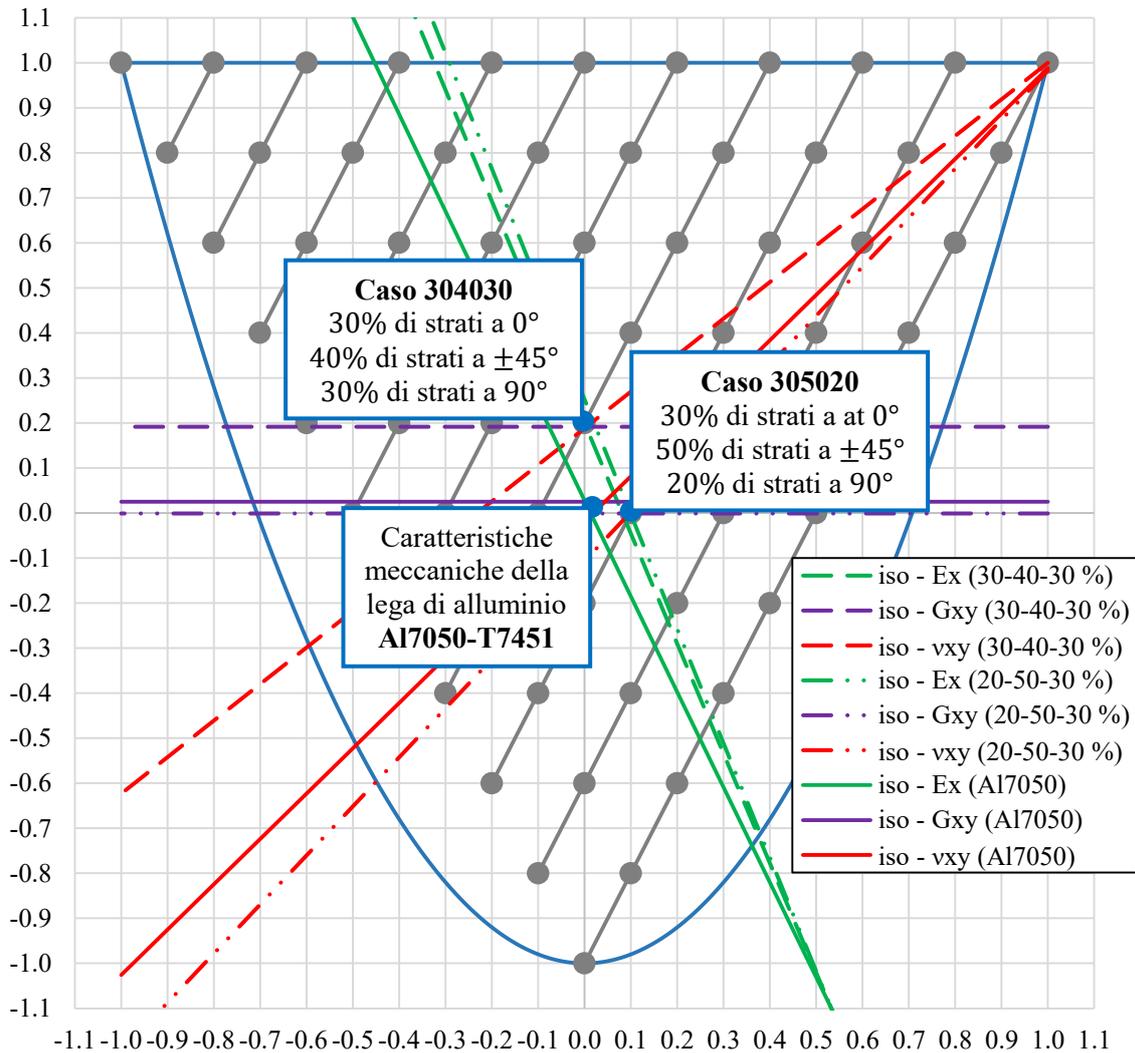


Figura 6.22: Procedura Grafica di Miki

Tramite la procedura sopra descritta è stato possibile determinare la percentuale di strati a 0°, ±45° e 90° che potesse approssimare al meglio le caratteristiche meccaniche della lega di alluminio Al7050-T7451 e che ha portato allo studio del Caso 304030 con il 30% di strati a 0°, il 40% di strati a ±45° ed il 30% di strati a 90° e del Caso 305020 con il 30% di strati a 0°, il 50% di strati a ±45° ed il 20% di strati a 90°.

Quindi, rispettando sia le percentuali definite tramite la Procedura Grafica di Miki quanto i requisiti di laminato simmetrico (tale da garantire che la matrice di accoppiamento membranale-flessionale sia  $B = 0$ ) e, quando possibile, bilanciato (tale da garantire che nella matrice delle rigidezze membranali  $A$  i termini  $A_{16} = A_{26} = 0$ ), si è stabilita, per entrambi i casi, la sequenza di laminazione in base al numero di strati ottenendo:

n. strati	Sequenza di laminazione (Caso 304030)																																						
38	0	90	0	45	-45	45	90	0	90	0	90	45	-45	-45	45	0	90	45	-45	-45	45	90	0	45	-45	-45	45	90	0	90	0	90	45	-45	45	0	90	0	
36	0	90	0	45	-45	90	0	90	0	90	45	-45	-45	45	0	90	45	-45	-45	45	90	0	45	-45	-45	45	90	0	90	0	90	0	90	45	-45	45	0	90	0
34	0	90	0	-45	90	0	90	0	90	45	-45	-45	45	0	90	45	-45	-45	45	90	0	45	-45	-45	45	90	0	90	0	90	0	90	45	-45	45	0	90	0	
32	0	90	0	90	0	90	0	90	45	-45	-45	45	0	90	45	-45	-45	45	90	0	45	-45	-45	45	90	0	45	-45	-45	45	90	0	90	0	90	0	90	0	
30	0	90	90	0	90	0	90	45	-45	0	45	0	90	45	-45	-45	45	90	0	45	0	-45	45	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0		
28	0	90	0	90	0	90	45	-45	-45	45	0	90	45	-45	-45	45	90	0	45	-45	-45	45	90	0	45	-45	-45	45	90	0	90	0	90	0	90	0			
26	90	0	90	0	90	45	-45	0	45	0	90	45	-45	-45	45	90	0	45	0	-45	45	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0				
24	0	90	0	90	45	-45	0	90	0	90	45	-45	-45	45	90	0	90	0	-45	45	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0					
22	0	90	0	90	45	-45	0	90	45	-45	-45	45	90	0	0	-45	45	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0						
20	0	90	0	90	45	-45	0	90	45	-45	-45	45	90	0	-45	45	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0							
18	0	90	0	90	45	0	90	45	-45	-45	45	90	0	45	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0							
16	0	90	45	-45	0	90	45	-45	-45	45	90	0	-45	45	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0							
14	0	90	45	0	90	45	-45	-45	45	90	0	45	90	0	45	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0								
12	0	90	0	90	45	-45	-45	45	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0							
10	0	90	0	90	45	0	90	45	-45	-45	45	90	0	45	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0	90	0							
8	0	90	45	-45	-45	45	90	0	90	45	-45	-45	45	90	0	90	45	-45	-45	45	90	0	90	45	-45	-45	45	90	0	90	45	-45	-45	45	90	0			
6	0	90	45	-45	-45	45	90	0	90	45	-45	-45	45	90	0	90	45	-45	-45	45	90	0	90	45	-45	-45	45	90	0	90	45	-45	-45	45	90	0			

Tabella 6.13: Sequenza di laminazione del Caso 304030

per le quali si può notare:

- Laminazione con 38 strati: simmetrica, non bilanciata;
- Laminazione con 36 strati: simmetrica, bilanciata = equilibrata;
- Laminazione con 34 strati: simmetrica, non bilanciata;
- Laminazione con 32 strati: simmetrica, bilanciata = equilibrata;
- Laminazione con 30 strati: simmetrica, non bilanciata;
- Laminazione con 28 strati: simmetrica, bilanciata = equilibrata;
- Laminazione con 26 strati: simmetrica, non bilanciata;
- Laminazione con 24 strati: simmetrica, bilanciata = equilibrata;
- Laminazione con 22 strati: simmetrica, bilanciata = equilibrata;
- Laminazione con 20 strati: simmetrica, bilanciata = equilibrata;
- Laminazione con 18 strati: simmetrica, non bilanciata;
- Laminazione con 16 strati: simmetrica, bilanciata = equilibrata;
- Laminazione con 14 strati: simmetrica, non bilanciata;
- Laminazione con 12 strati: simmetrica, bilanciata = equilibrata;
- Laminazione con 10 strati: simmetrica, non bilanciata;
- Laminazione con 8 strati: simmetrica, bilanciata = equilibrata;
- Laminazione con 6 strati: simmetrica, non bilanciata.



indicare uno spessore del laminato eccessivamente elevato rispetto ai livelli di stress a cui era sottoposto.

Ottenendo così la seguente configurazione per entrambi i casi:

		Sequenza di laminazione			
		Rivestimento superiore	Correnti superiori	Rivestimento inferiore	Correnti inferiori
<b>Baie</b>	<b>18</b>	6 lamine	8 lamine	6 lamine	-
	<b>17</b>	6 lamine	8 lamine	6 lamine	8 lamine
	<b>16</b>	8 lamine	8 lamine	6 lamine	8 lamine
	<b>15</b>	8 lamine	8 lamine	6 lamine	6 lamine
	<b>14</b>	8 lamine	10 lamine	8 lamine	6 lamine
	<b>13</b>	10 lamine	10 lamine	12 lamine	10 lamine
	<b>12</b>	12 lamine	12 lamine	12 lamine	10 lamine
	<b>11</b>	16 lamine	12 lamine	16 lamine	12 lamine
	<b>10</b>	16 lamine	14 lamine	16 lamine	10 lamine
	<b>09</b>	20 lamine	12 lamine	16 lamine	10 lamine
	<b>08</b>	20 lamine	16 lamine	18 lamine	12 lamine
	<b>07</b>	20 lamine	14 lamine	22 lamine	16 lamine
	<b>06</b>	16 lamine	14 lamine	20 lamine	16 lamine
	<b>05</b>	18 lamine	16 lamine	20 lamine	16 lamine
	<b>04</b>	22 lamine	20 lamine	24 lamine	20 lamine
	<b>03</b>	26 lamine	24 lamine	22 lamine	20 lamine
	<b>02</b>	32 lamine	28 lamine	22 lamine	20 lamine
	<b>01</b>	38 lamine	34 lamine	20 lamine	20 lamine
	<b>00</b>	38 lamine	34 lamine	24 lamine	26 lamine

Tabella 6.15: Tabella riepilogativa del numero di lamine per baia del rivestimento superiore ed inferiore

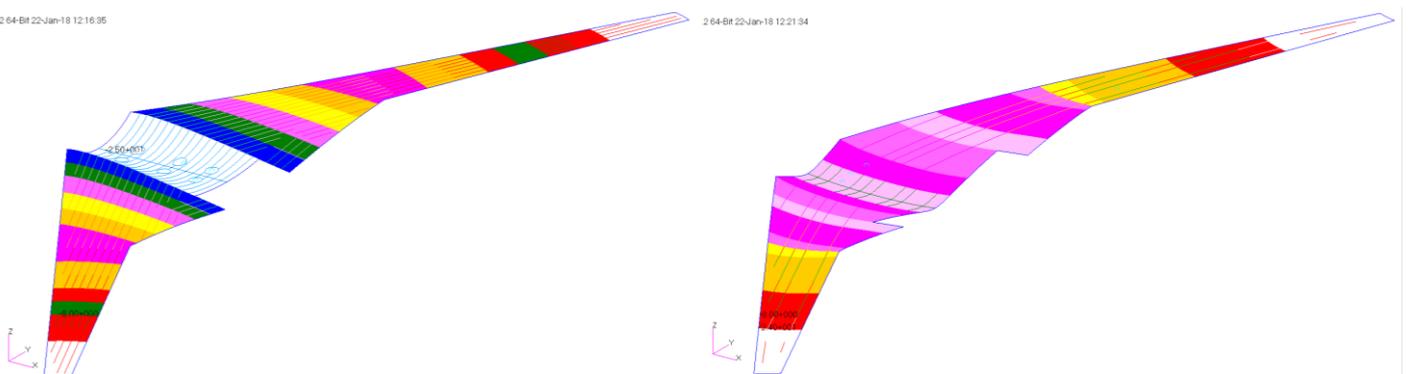


Figura 6.23: Rappresentazione tramite colori del numero di strati per baia (SX rivestimento superiore, DX rivestimento inferiore)

Dalla stessa tabella si evidenzia che il numero di strati è uguale per entrambi i casi e questo li rende una costante dell'analisi, il che consente di valutare solo l'influenza della variazione di percentuale di strati disposti nei tre angoli di orientazione.

Capitolo 6

Per una visualizzazione più chiara ed intuitiva della struttura del laminato, che forma l'intero rivestimento del cassone alare, sono riportate di seguito delle tabelle riassuntive delle orientazioni del rivestimento per ogni baia:

Sequenza di laminazione del rivestimento superiore (Caso 304030)	
Baia 18	0 90 45 45 90 0
Baia 17	0 90 45 45 90 0
Baia 16	0 90 45 -45 -45 45 90 0
Baia 15	0 90 45 -45 -45 45 90 0
Baia 14	0 90 45 -45 -45 45 90 0
Baia 13	0 90 0 90 45 45 90 0 90 0
Baia 12	0 90 0 90 45 -45 -45 45 90 0 90 0
Baia 11	0 90 45 -45 0 90 45 -45 -45 45 90 0 -45 45 90 0
Baia 10	0 90 45 -45 0 90 45 -45 -45 45 90 0 -45 45 90 0
Baia 09	0 90 0 90 45 -45 0 90 45 -45 -45 45 90 0 -45 45 90 0 90 0
Baia 08	0 90 0 90 45 -45 0 90 45 -45 -45 45 90 0 -45 45 90 0 90 0
Baia 07	0 90 0 90 45 -45 0 90 45 -45 -45 45 90 0 -45 45 90 0 90 0
Baia 06	0 90 45 -45 0 90 45 -45 -45 45 90 0 -45 45 90 0
Baia 05	0 90 0 90 45 0 90 45 -45 -45 45 90 0 45 90 0 90 0
Baia 04	0 90 0 90 45 -45 0 90 45 -45 -45 45 90 0 -45 45 90 0 90 0 0
Baia 03	90 0 90 0 90 45 -45 -45 45 0 90 45 -45 -45 45 90 0 45 -45 -45 45 90 0 90 0 90
Baia 02	0 90 0 90 0 90 45 -45 -45 45 0 90 45 -45 -45 45 90 0 45 -45 -45 45 90 0 90 0 90 0 90 0
Baia 01	0 90 0 45 -45 90 0 90 0 90 45 -45 -45 45 0 90 45 -45 -45 45 90 0 45 -45 -45 45 90 0 90 0 90 -45 45 0 90 0
Baia 00	0 90 0 45 -45 45 90 0 90 0 90 45 -45 -45 45 0 90 45 -45 -45 45 90 0 45 -45 -45 45 90 0 90 0 90 45 -45 45 0 90 0

Tabella 6.16: Sequenza di laminazione per baia del rivestimento superiore Caso 304030

Sequenza di laminazione del rivestimento superiore (Caso 304030)	
Baia 18	0 90 45 45 90 0
Baia 17	0 90 45 45 90 0
Baia 16	0 90 45 45 90 0
Baia 15	0 90 45 45 90 0
Baia 14	0 90 45 -45 -45 45 90 0
Baia 13	0 90 0 90 45 45 90 0 90 0
Baia 12	0 90 0 90 45 -45 -45 45 90 0 90 0
Baia 11	0 90 45 -45 0 90 45 -45 -45 45 90 0 -45 45 90 0
Baia 10	0 90 45 -45 0 90 45 -45 -45 45 90 0 -45 45 90 0
Baia 09	0 90 45 -45 0 90 45 -45 -45 45 90 0 -45 45 90 0
Baia 08	0 90 0 90 45 0 90 45 -45 -45 45 90 0 45 90 0 90 0
Baia 07	0 90 0 90 45 -45 0 90 45 -45 -45 45 90 0 0 -45 45 90 0 90 0
Baia 06	0 90 0 90 45 -45 0 90 45 -45 -45 45 90 0 -45 45 90 0 90 0
Baia 05	0 90 0 90 45 -45 0 90 45 -45 -45 45 90 0 -45 45 90 0 90 0
Baia 04	0 90 0 90 45 -45 0 90 0 90 45 -45 -45 45 90 0 90 0 -45 45 90 0 90 0
Baia 03	0 90 0 90 45 -45 0 90 45 -45 -45 45 90 0 0 -45 45 90 0 90 0
Baia 02	0 90 0 90 45 -45 0 90 45 -45 -45 45 90 0 0 -45 45 90 0 90 0
Baia 01	0 90 0 90 45 -45 0 90 45 -45 -45 45 90 0 -45 45 90 0 90 0
Baia 00	0 90 0 90 45 -45 0 90 0 90 45 -45 -45 45 90 0 90 0 -45 45 90 0 90 0

Tabella 6.17: Sequenza di laminazione per baia del rivestimento inferiore Caso 304030

Risultati della verifica strutturale

Sequenza di laminazione del rivestimento superiore (Caso 305020)	
Baia 18	0 90 45 45 90 0
Baia 17	0 90 45 45 90 0
Baia 16	0 90 45 45 90 0
Baia 15	0 90 45 -45 -45 45 90 0
Baia 14	0 90 45 -45 -45 45 90 0
Baia 13	0 0 90 45 -45 -45 45 90 0 0
Baia 12	0 0 -45 0 90 45 -45 -45 45 90 0 -45 0
Baia 11	0 0 45 -45 0 90 45 -45 -45 45 90 0 -45 45 0 0
Baia 10	0 0 45 -45 0 90 45 -45 -45 45 90 0 -45 45 0 0
Baia 09	0 -45 90 0 45 -45 0 90 45 -45 -45 45 90 0 -45 45 0 90 -45 0
Baia 08	0 -45 90 0 45 -45 0 90 45 -45 -45 45 90 0 -45 45 0 90 -45 0
Baia 07	0 -45 90 0 45 -45 0 90 45 -45 -45 45 90 0 -45 45 0 90 -45 0
Baia 06	0 0 45 -45 0 90 45 -45 -45 45 90 0 -45 45 0 0 0
Baia 05	0 0 90 0 45 -45 0 90 45 -45 -45 45 90 0 -45 45 0 90 0 0
Baia 04	0 0 -45 90 0 45 -45 0 90 45 45 45 45 90 0 -45 45 0 90 -45 0 0
Baia 03	0 0 90 0 45 -45 90 0 45 -45 0 90 45 -45 -45 45 90 0 -45 45 0 90 -45 45 0 90 0 0
Baia 02	0 0 45 -45 90 0 45 -45 90 0 45 -45 0 90 45 -45 -45 45 90 0 -45 45 0 90 -45 45 0 90 -45 45 0 0 0
Baia 01	0 -45 90 0 45 -45 90 0 45 -45 0 90 45 -45 -45 45 90 0 -45 45 0 90 -45 45 0 90 -45 45 0 90 -45 0 0
Baia 00	0 0 -45 90 0 45 -45 90 0 45 -45 0 90 45 -45 -45 45 90 0 -45 45 0 90 -45 45 0 90 -45 45 0 90 -45 0 0

Tabella 6.18: Sequenza di laminazione per baia del rivestimento superiore Caso 305020

Sequenza di laminazione del rivestimento inferiore (Caso 305020)	
Baia 18	0 90 45 45 90 0
Baia 17	0 90 45 45 90 0
Baia 16	0 90 45 45 90 0
Baia 15	0 90 45 45 90 0
Baia 14	0 90 45 -45 -45 45 90 0
Baia 13	0 0 90 45 -45 -45 45 90 0 0
Baia 12	0 0 -45 0 90 45 -45 -45 45 90 0 -45 0
Baia 11	0 0 45 -45 0 90 45 -45 -45 45 90 0 -45 45 0 0 0
Baia 10	0 0 45 -45 0 90 45 -45 -45 45 90 0 -45 45 0 0 0
Baia 09	0 0 45 -45 0 90 45 -45 -45 45 90 0 -45 45 0 0 0
Baia 08	0 0 90 0 45 -45 0 90 45 -45 -45 45 90 0 -45 45 0 90 0 0
Baia 07	0 0 -45 90 0 45 -45 0 90 45 45 45 45 90 0 -45 45 0 90 -45 0 0
Baia 06	0 0 -45 90 0 45 -45 0 90 45 45 45 45 90 0 -45 45 0 90 -45 0 0
Baia 05	0 0 -45 90 0 45 -45 0 90 45 45 45 45 90 0 -45 45 0 90 -45 0 0
Baia 04	0 0 45 -45 90 0 45 -45 0 90 45 -45 -45 45 90 0 -45 45 0 90 -45 45 0 0
Baia 03	0 0 -45 90 0 45 -45 0 90 45 45 45 45 90 0 -45 45 0 90 -45 0 0
Baia 02	0 0 -45 90 0 45 -45 0 90 45 45 45 45 90 0 -45 45 0 90 -45 0 0
Baia 01	0 0 -45 90 0 45 -45 0 90 45 45 45 45 90 0 -45 45 0 90 -45 0 0
Baia 00	0 0 45 -45 90 0 45 -45 0 90 45 -45 -45 45 90 0 -45 45 0 90 -45 45 0 0

Tabella 6.19: Sequenza di laminazione per baia del rivestimento inferiore Caso 305020

Le tabelle precedenti danno anche una prima idea del processo industriale richiesto per la produzione del rivestimento, cioè l'orientazione, la lunghezza degli strati di *pre-preg* e l'ordine con cui devono essere impilati prima delle fasi di sacco a vuoto ed autoclave necessari al *curing* del composito.

### 6.7.3 – Applicazione del Criterio di Tsai-Hill

Ultimo passaggio del processo di verifica e validazione per il rivestimento e i correnti è l'applicazione del Criterio di Tsai-Hill, effettuato automaticamente da Patran che restituisce l'andamento del *Failure Index* per l'intero rivestimento superiore ed inferiore e per i correnti del rivestimento.

Per il *Caso 304030* l'andamento del *Failure Index* sul rivestimento è:

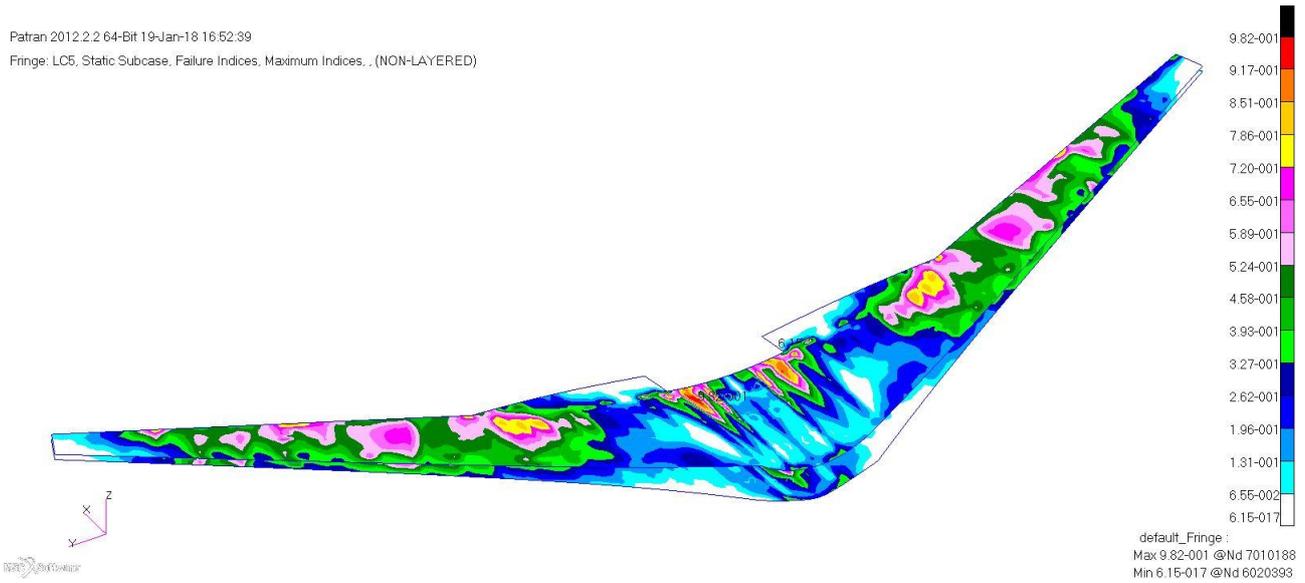


Figura 6.24: Andamento del Failure Index di Tsai-Hill sul rivestimento per il Caso 304030

Per il *Caso 305020* l'andamento del *Failure Index* sul rivestimento è:

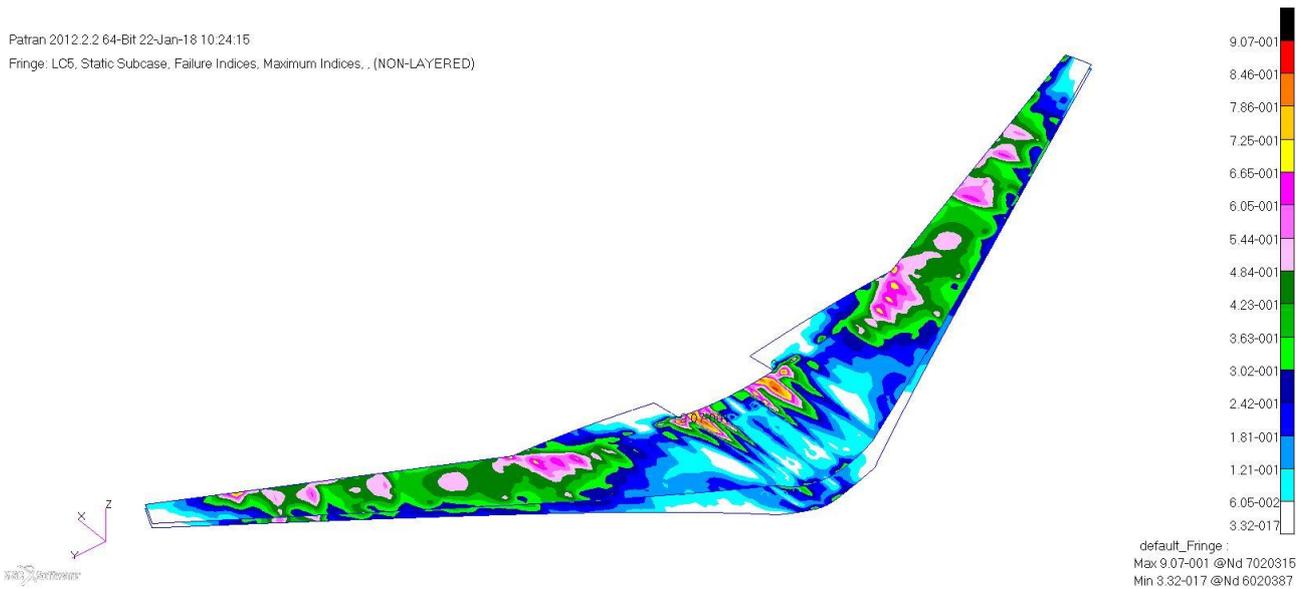
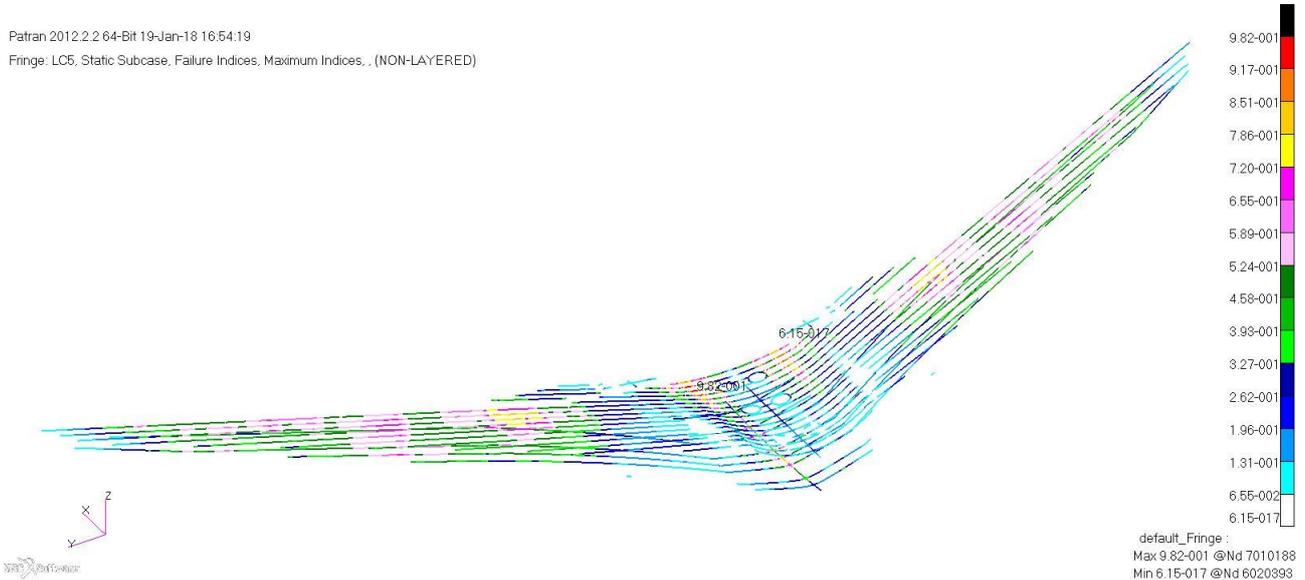


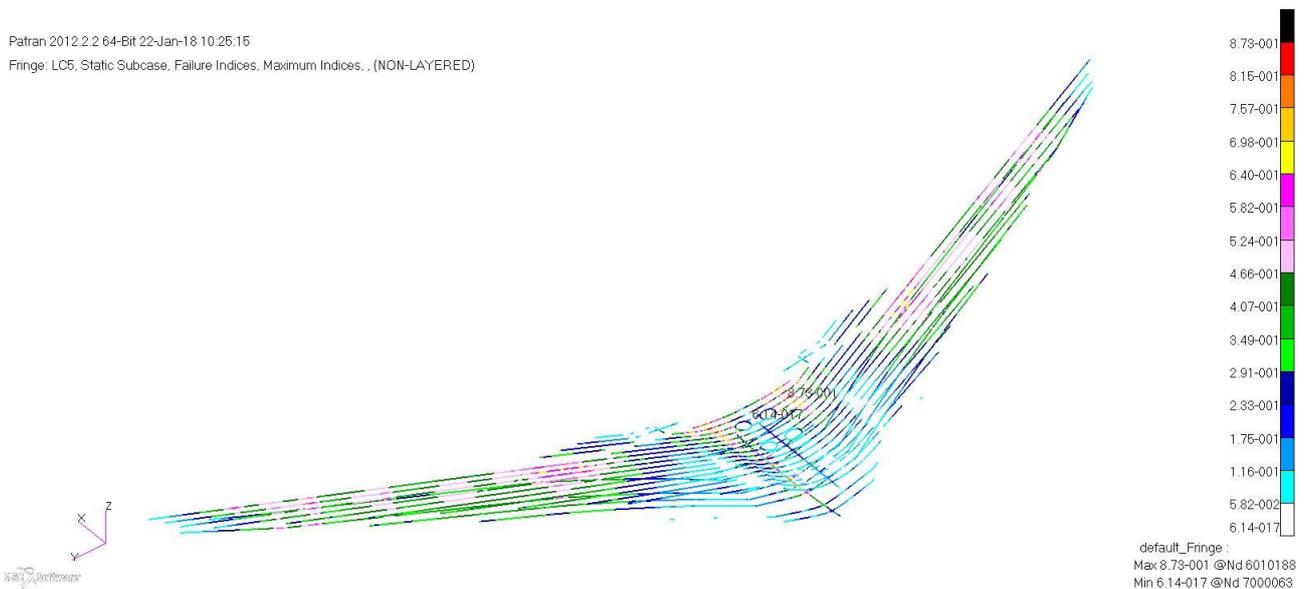
Figura 6.25: Andamento del Failure Index di Tsai-Hill sul rivestimento per il Caso 305020

Per il *Caso 304030* l'andamento del *Failure Index* sui correnti è:



*Figura 6.26: Andamento del Failure Index di Tsai-Hill sui correnti per il Caso 304030*

Per il *Caso 305020* l'andamento del *Failure Index* sui correnti è:



*Figura 6.27: Andamento del Failure Index di Tsai-Hill sui correnti per il Caso 305020*

Ora noto l'andamento dei *Failure Index* e nota la sezione più critica del rivestimento, superiore e inferiore, e dei correnti è possibile applicare il Criterio di Tsai-Hill per passare dai *Failure Index* ai valori del *Margine di Sicurezza MS* che, al fine di validare la verifica, devono essere  $> 0$ :

$$MS = \frac{1}{\sqrt{FI}} - 1$$

Ottenendo i risultati finali così in dettaglio:

	<b>Caso 304030</b>		<b>Caso 305020</b>	
	<b>Tsai-Hill Failure Index FI</b>	<b>Margine di Sicurezza MS</b>	<b>Tsai-Hill Failure Index FI</b>	<b>Margine di Sicurezza MS</b>
<b>Rivestimento superiore</b>	0.982	<b>0.009</b>	0.907	<b>0.05</b>
<b>Rivestimento inferiore</b>	0.932	<b>0.036</b>	0.881	<b>0.065</b>
<b>Correnti superiori</b>	0.982	<b>0.009</b>	0.873	<b>0.07</b>
<b>Correnti inferiori</b>	0.932	<b>0.036</b>	0.819	<b>0.105</b>

*Tabella 6.20: Failure Index e Margine di sicurezza del rivestimento e dei correnti*

## Conclusioni e Sviluppi Futuri

Attraverso questo lavoro di tesi si sono ripercorse tutte le fasi della progettazione di un cassone alare, dalla definizione della configurazione e dei componenti, alla verifica strutturale dello stesso, soffermandosi soprattutto sullo studio del comportamento dei materiali compositi, sulla loro applicazione nel campo aerospaziale e sull'implementazione di una teoria - Procedura Grafica di Miki - che potesse consentire un primo dimensionamento del rivestimento e dei correnti in composito (CFRP).

In particolare attraverso le analisi statiche si è dimostrato che:

- I componenti in Lega di Alluminio (Al7050-T7451) sono in grado di resistere alle condizioni di carico più critiche, definite dal punto D dell'involuppo di volo, senza raggiungere il carico di snervamento ( $\sigma_{(yeld,Al7050-T7451)} = 469.00 \text{ MPa}$ ) tipico del materiale di cui sono costituiti;
- I componenti in composito, con strati di CFRP da  $0.1975 \text{ mm}$  di spessore, sono in grado di resistere alle condizioni di carico più critiche, definite dal punto D dell'involuppo di volo, senza raggiungere il livello critico di tensione ultima di rottura.

	Margini di sicurezza	
	<i>Caso 304030</i>	<i>Caso 305020</i>
<b>Longherone anteriore</b>	0.90	0.93
<b>Longherone posteriore</b>	3.62	3.83
<b>Longherone ausiliario</b>	1.24	1.38
<b>Centine</b>	1.87	1.81
<b>Rivestimento superiore</b>	0.009	0.05
<b>Correnti superiori</b>	0.009	0.07
<b>Rivestimento inferiore</b>	0.036	0.065
<b>Correnti inferiori</b>	0.036	0.105

*Tabella 0.1: Margini di sicurezza dei componenti*

Dall'incremento dei Margini di Sicurezza tra i due casi, osservabile in quest'ultima tabella, è possibile anche notare come, a parità di spessore dei componenti metallici e dei componenti compositi, la laminazione del *Caso 305020*, il 30% di strati a  $0^\circ$ , il 50% di strati a  $\pm 45^\circ$  ed il 20% di strati a  $90^\circ$ , renda il cassone alare più rigido rispetto alla laminazione del *Caso 304030*, 30% di strati a  $0^\circ$ , il 40% di strati a  $\pm 45^\circ$  ed il 30% di strati a  $90^\circ$ ; a conferma di questo, si nota al paragrafo [6.1](#) che la freccia del *Caso 305020*  $w_{305020} = 0.891 \text{ m}$  è minore di quella del *Caso 304030*  $w_{304030} = 0.958 \text{ m}$ .

Invece l'utilizzo del materiale composito (strati di CFRP da 0.1975 mm di spessore) per rivestimento e correnti ha portato sia vantaggi che svantaggi al prodotto finito poiché:

- ✓ Ha ridotto il peso dell'intero cassone alare del 53.59% se confrontato con lo stesso cassone alare prodotto interamente in Lega di Alluminio (Al7050-T7451);

	<b>Peso</b>
	<i>Al 7050-T7451</i>
<b>Longherone anteriore</b>	87.44 [kg]
<b>Longherone posteriore</b>	153.60 [kg]
<b>Longherone ausiliario</b>	120.50 [kg]
<b>Centine</b>	14.93 [kg]

	<i>Al 7050-T7451</i>	<i>CFRP</i>
<b>Rivestimento superiore</b>	379.70 [kg]	80.42 [kg]
<b>Rivestimento inferiore</b>	282.50 [kg]	26.24 [kg]
	<b>1038.67 [kg]</b>	<b>483.13 [kg]</b>

*Tabella 0.2: Confronto tra i pesi dei componenti finali*

- ✗ Ha aumentato i costi di produzione sia per l'elevato costo del materiale sia per l'elevata complessità dei processi produttivi.

Questo lavoro può essere considerato come il primo *step* progettuale e di verifica strutturale per strutture in composito.

Per sviluppi futuri si richiede:

- Un'analisi più approfondita su un modello FEM di dettaglio e non globale al fine di verificare e validare le zone più critiche;
- Una ulteriore ottimizzazione degli spessori dei componenti in seguito ad analisi di instabilità e analisi dinamiche, che richiedono un ulteriore implementazione della Procedura Grafica di Miki per il progetto della rigidità flessionale.

## Indice delle figure

<b>Figura 1.1:</b> Programma di sviluppo di un velivolo – Analisi di mercato .....	13
<b>Figura 1.2:</b> Andamento del mercato B.J. in relazione al PIL Mondiale.....	14
<b>Figura 1.3:</b> Andamento dei cicli di mercato 1995-2003, 2004-2016 e previsioni del ciclo 2017-2026 .....	15
<b>Figura 1.4:</b> Andamento del mercato B.J. in relazione al costo medio dell'aeromobile per anno.....	15
<b>Figura 1.5:</b> Flotta B.J. attuale + Nuove unità consegnate (2017-2026) – Ritiri dal servizio (2017-2026).....	16
<b>Figura 1.6:</b> Andamento del mercato B.J. in relazione al fatturato annuale .....	16
<b>Figura 1.7:</b> Andamento del fenomeno BuyBack .....	17
<b>Figura 1.8:</b> Andamento dell'indice UHNWI per regione geografica .....	18
<b>Figura 1.9:</b> Distribuzione per regione geografica delle 8349 unità per il periodo 2017- 2026 .....	19
<b>Figura 2.1:</b> Programma di sviluppo di un velivolo – Progettazione del cassone alare .	21
<b>Figura 2.2:</b> Apertura alare .....	25
<b>Figura 2.3:</b> Corde dei profili alla radice (root) all'estremità (tip) .....	25
<b>Figura 2.4:</b> Massimo peso al decollo (MTOW) .....	26
<b>Figura 2.5:</b> Confronto del $M_{DD}$ al variare dello spessore .....	28
<b>Figura 2.6:</b> Distribuzione del $C_p$ lungo un profilo convenzionale in regime trensonico	28
<b>Figura 2.7:</b> Distribuzione del $C_p$ lungo un profilo convenzionale in regime trensonico	28
<b>Figura 2.8:</b> Profilo all'estremità alare .....	29
<b>Figura 2.9:</b> Profilo intermedio .....	29
<b>Figura 2.10:</b> Profilo alla radice.....	29
<b>Figura 2.11:</b> Modello dell'ala su XFLR5.....	30
<b>Figura 2.12:</b> Andamento $C_L-\alpha$ .....	31
<b>Figura 2.13:</b> Limiti del fattore di carico di manovra .....	32
<b>Figura 2.14:</b> $V_A$ velocità di manovra di progetto .....	32
<b>Figura 2.15:</b> Diagramma di manovra .....	33
<b>Figura 2.16:</b> Diagramma di raffica .....	35
<b>Figura 2.17:</b> Involuppo di volo .....	36
<b>Figura 2.18:</b> Portanza lungo l'apertura alare .....	37
<b>Figura 2.19:</b> Portanza e momento flettente lungo l'apertura alare .....	37
<b>Figura 2.20:</b> Configurazione finale dell'ala .....	38
<b>Figura 2.21:</b> Configurazione finale del cassone alare .....	39
<b>Figura 2.22:</b> Rivestimento superiore (a sinistra) e inferiore (a destra).....	40
<b>Figura 3.1:</b> Programma di sviluppo di un velivolo – Progettazione dei componenti in CFRP.....	41
<b>Figura 3.2:</b> Bobbine di fibra di vetro (sinistra) e carbonio (destra).....	43
<b>Figura 3.3:</b> Tipi di tessuti .....	44
<b>Figura 3.4:</b> Pre-preg carbon fiber .....	44
<b>Figura 3.5:</b> Laminato .....	45

<b>Figura 3.6:</b> Sandwich .....	45
<b>Figura 3.7:</b> Mindlin plate theory .....	47
<b>Figura 3.8:</b> Risultanti di tensioni e momenti .....	48
<b>Figura 3.9:</b> Teoria classica dei laminati .....	49
<b>Figura 3.10:</b> Sistema di riferimento globale (x,y) e di ortotropia (L,T) .....	51
<b>Figura 3.11:</b> Risultanti di tensioni e momenti .....	53
<b>Figura 3.12:</b> Effetti di $[B] = 0$ (in alto), di $[B] \neq 0$ .....	54
<b>Figura 3.13:</b> Regione ammissibile $\Omega$ del piano $\xi_1$ - $\xi_2$ .....	63
<b>Figura 3.14:</b> Regione ammissibile $\Omega$ del piano $\xi_1$ - $\xi_2$ con andamento delle frazioni volumetriche .....	65
<b>Figura 3.15:</b> Regione ammissibile $\Omega$ del piano $\xi_1$ - $\xi_2$ con andamento delle frazioni volumetriche .....	66
<b>Figura 3.16:</b> Regione ammissibile $\Omega$ del piano $\xi_1$ - $\xi_2$ con andamento delle frazioni volumetriche .....	67
<b>Figura 3.17:</b> Andamento delle isocurve dei moduli in membrana .....	68
<b>Figura 3.18:</b> Regione ammissibile $\Omega$ del piano $\xi_1$ - $\xi_2$ con andamento delle frazioni volumetriche .....	70
<b>Figura 3.19:</b> Rappresentazioni delle curve isovalori per la lega Al7050-T7451 .....	71
<b>Figura 3.20:</b> Definizione dei 2 casi di laminazione.....	72
<b>Figura 3.21:</b> Rappresentazione tramite colori del numero di strati per baia (SX rivestimento superiore, DX rivestimento inferiore).....	74
<b>Figura 4.1:</b> Programma di sviluppo di un velivolo – Sviluppo del modello FEM globale .....	77
<b>Figura 4.2:</b> Configurazione finale dell'ala .....	79
<b>Figura 4.3:</b> Mesh dell'intero cassone alare .....	80
<b>Figura 4.4:</b> Conteggio degli elementi finiti del modello FEM.....	81
<b>Figura 4.5:</b> Elemento ROD.....	81
<b>Figura 4.6:</b> Elemento BAR.....	83
<b>Figura 4.7:</b> Elemento TRIA3 e coordinate di area .....	85
<b>Figura 4.8:</b> Scheda materiale isotropo.....	86
<b>Figura 4.9:</b> Scheda materiale ortotropo .....	86
<b>Figura 4.10:</b> Scheda laminato in composito .....	87
<b>Figura 4.11:</b> Scheda proprietà elemento 2D.....	87
<b>Figura 4.12:</b> Applicazione dei carichi tramite RBE 3 .....	88
<b>Figura 4.13:</b> Modello FEM finale .....	88
<b>Figura 5.1:</b> Programma di sviluppo di un velivolo .....	89
<b>Figura 5.2:</b> Dominio degli stati tensionali.....	90
<b>Figura 5.3:</b> Rappresentazione del criterio di Tresca nello spazio 3D delle tensioni principali.....	92
<b>Figura 5.4:</b> Rappresentazione del criterio di von Mises nel piano $\sigma_1$ - $\sigma_2$ delle tensioni principali.....	94
<b>Figura 5.5:</b> Criterio di Rankine nel piano $\sigma_1$ - $\sigma_3$ .....	95

<b>Figura 5.6:</b> Superficie limite secondo il criterio di Tsai-Hill nello spazio delle tensioni per il composito (vetro-epoxy) .....	99
<b>Figura 5.7:</b> Superficie limite secondo il criterio di Hoffman nello spazio delle tensioni per il composito (vetro-epoxy) .....	100
<b>Figura 5.8:</b> Superficie limite secondo il criterio di Tsai-Wo nello spazio delle tensioni per il composito (vetro-epoxy) con $F_{12}^* = -1/2$ .....	102
<b>Figura 5.9:</b> Superficie limite secondo il criterio di Tsai-Wo nello spazio delle tensioni per il composito (vetro-epoxy) con $F_{12}^* = -5$ .....	102
<b>Figura 6.1:</b> Programma di sviluppo di un velivolo – Verifica e validazione dei risultati di simulazione .....	103
<b>Figura 6.2:</b> Spostamenti dell'intero cassone alare nel Caso 304030.....	105
<b>Figura 6.3:</b> Spostamenti dell'intero cassone alare nel Caso 304030.....	105
<b>Figura 6.4:</b> Stress sull'intero cassone alare nel Caso 304030 .....	106
<b>Figura 6.5:</b> Stress sull'intero cassone alare nel Caso 305020 .....	106
<b>Figura 6.6:</b> Stress sul longherone anteriore nel Caso 304030.....	107
<b>Figura 6.7:</b> Stress sul longherone anteriore nel Caso 305020 .....	107
<b>Figura 6.8:</b> Freebody Loads nella sezione più sollecitata del longherone anteriore nel Caso 304030 .....	108
<b>Figura 6.9:</b> Freebody Loads nella sezione più sollecitata del longherone anteriore nel Caso 305020 .....	108
<b>Figura 6.10:</b> Stress sul longherone posteriore nel Caso 304030 .....	111
<b>Figura 6.11:</b> Stress sul longherone posteriore nel Caso 305020 .....	111
<b>Figura 6.12:</b> Freebody Loads nella sezione più sollecitata del longherone posteriore nel Caso 304030 .....	112
<b>Figura 6.13:</b> Freebody Loads nella sezione più sollecitata del longherone posteriore nel Caso 305020 .....	112
<b>Figura 6.14:</b> Stress sul longherone ausiliario nel Caso 304030 .....	114
<b>Figura 6.15:</b> Stress sul longherone ausiliario nel Caso 305020 .....	114
<b>Figura 6.16:</b> Freebody Loads nella sezione più sollecitata del longherone ausiliario nel Caso 304030 .....	115
<b>Figura 6.17:</b> Freebody Loads nella sezione più sollecitata del longherone ausiliario nel Caso 305020 .....	115
<b>Figura 6.18:</b> Stress sulle centine nel Caso 304030.....	117
<b>Figura 6.19:</b> Stress sulle cetine nel Caso 305020.....	117
<b>Figura 6.20:</b> Freebody Loads nella sezione più sollecitata delle centine nel Caso 304030 .....	118
<b>Figura 6.21:</b> Freebody Loads nella sezione più sollecitata delle centine nel Caso 305020 .....	118
<b>Figura 6.22:</b> Procedura Grafica di Miki .....	120
<b>Figura 6.23:</b> Rappresentazione tramite colori del numero di strati per baia (SX rivestimento superiore, DX rivestimento inferiore).....	123
<b>Figura 6.24:</b> Andamento del Failure Index di Tsai-Hill sul rivestimento per il Caso 304030 .....	126

## Indice delle figure

<b>Figura 6.25:</b> Andamento del Failure Index di Tsai-Hill sul rivestimento per il Caso 305020 .....	126
<b>Figura 6.26:</b> Andamento del Failure Index di Tsai-Hill sui correnti per il Caso 304030 .....	127
<b>Figura 6.27:</b> Andamento del Failure Index di Tsai-Hill sui correnti per il Caso 305020 .....	127

## Indice delle tabelle

<b>Tabella 2.1:</b> Dati per analisi statistica.....	24
<b>Tabella 2.2:</b> Dati stimati .....	26
<b>Tabella 3.1:</b> Caratteristiche meccaniche del singolo strato di CFRP .....	69
<b>Tabella 3.2:</b> Moduli di rigidezza della lega Al7050-T7451 .....	69
<b>Tabella 3.3:</b> Sequenza di laminazione del Caso 304030 .....	73
<b>Tabella 3.4:</b> Sequenza di laminazione del Caso 305020 .....	73
<b>Tabella 3.5:</b> Tabella riepilogativa del numero di lamine per baia del rivestimento superiore ed inferiore .....	75
<b>Tabella 6.1:</b> Freebody Loads nella sezione più sollecitata del longherone anteriore..	109
<b>Tabella 6.2:</b> Sforzi sulla sezione più sollecitata del longherone anteriore .....	110
<b>Tabella 6.3:</b> Margine di Sicurezza del longherone anteriore.....	110
<b>Tabella 6.4:</b> Freebody Loads nella sezione più sollecitata del longherone posteriore	113
<b>Tabella 6.5:</b> Sforzi sulla sezione più sollecitata del longherone posteriore .....	113
<b>Tabella 6.6:</b> Margine di Sicurezza del longherone posteriore .....	113
<b>Tabella 6.7:</b> Freebody Loads nella sezione più sollecitata del longherone ausiliario .	116
<b>Tabella 6.8:</b> Sforzi sulla sezione più sollecitata del longherone ausiliario.....	116
<b>Tabella 6.9:</b> Margine di Sicurezza del longherone ausiliario .....	116
<b>Tabella 6.10:</b> Freebody Loads nella sezione più sollecitata delle centine.....	119
<b>Tabella 6.11:</b> Sforzi sulla sezione più sollecitata delle centine .....	119
<b>Tabella 6.12:</b> Margine di Sicurezza delle centine .....	119
<b>Tabella 6.13:</b> Sequenza di laminazione del Caso 304030 .....	121
<b>Tabella 6.14:</b> Sequenza di laminazione del Caso 305020 .....	122
<b>Tabella 6.15:</b> Tabella riepilogativa del numero di lamine per baia del rivestimento superiore ed inferiore .....	123
<b>Tabella 6.16:</b> Sequenza di laminazione per baia del rivestimento superiore Caso 304030 .....	124
<b>Tabella 6.17:</b> Sequenza di laminazione per baia del rivestimento inferiore Caso 304030 .....	124
<b>Tabella 6.18:</b> Sequenza di laminazione per baia del rivestimento superiore Caso 305020 .....	125
<b>Tabella 6.19:</b> Sequenza di laminazione per baia del rivestimento inferiore Caso 305020 .....	125
<b>Tabella 6.20:</b> Failure Index e Margine di sicurezza del rivestimento e dei correnti ...	128
<b>Tabella 0.1:</b> Margini di sicurezza dei componenti .....	129
<b>Tabella 0.2:</b> Confronto tra i pesi dei componenti finali .....	130



## Bibliografia

- [1] Jetcraft, *10-year Business Aviation Market Forecast 2017 - 2026*, Ottobre 2017.
- [2] EASA, *Certification Specifications for Large Aeroplanes CS-25*, Ottobre 2006
- [3] P. Vannucci, *Capitolo 1 – Generalità sui materiali compositi*, Scuola di Dottorato in Ingegneria, Università di Pisa.
- [4] M. Di Sciuva, *Dispense del corso di Strutture Aeronautiche*, Materiale Didattico del Politecnico di Torino, 2014-2015.
- [5] P. Vannucci, *Capitolo 6 – Tipi di laminati di uso frequente*, Scuola di Dottorato in Ingegneria, Università di Pisa.
- [6] P. Vannucci, *Capitolo 7 – Alcuni metodi classici di progetto dei laminati*, Scuola di Dottorato in Ingegneria, Università di Pisa.
- [7] MSC Software, *MSC Nastran 2012 Quick Reference Guide*, Luglio 2014.
- [8] G. Petrucci, *Lezioni di costruzioni di Macchine*, Università degli Studi di Palermo.
- [9] P. Vannucci, *Capitolo 4 – Criteri di resistenza per i compositi*, Scuola di Dottorato in Ingegneria, Università di Pisa.

