



# POLITECNICO DI TORINO

*Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Matematica*

*Tesi di Laurea Magistrale*

## Applicazione di modelli di ottimizzazione per portafogli di asset finanziari

Candidato

Enrico Trogolo

Relatori

Prof. Franco Pellerey

Prof. Franco Varetto

Marzo 2018

# Indice

<b>Sommario</b>	<b>3</b>
<b>1 La teoria di portafoglio di Markowitz</b>	<b>6</b>
1.1 Approccio media-varianza . . . . .	7
<b>2 Problemi con la teoria di Markowitz</b>	<b>16</b>
2.1 Instabilità del portafoglio . . . . .	17
2.2 Non-normalità . . . . .	20
2.3 Asimmetria . . . . .	23
2.4 Matrice di varianza-covarianza . . . . .	26
2.5 Volatilità . . . . .	29
<b>3 Il modello di Black-Litterman</b>	<b>31</b>
3.1 Il modello . . . . .	31
3.2 Le views . . . . .	39
<b>4 Distribuzioni dei rendimenti</b>	<b>43</b>
4.1 Distribuzione di Pareto . . . . .	43
4.2 Distribuzione di Pareto generalizzata . . . . .	45
<b>5 Misure di rischio finanziario</b>	<b>49</b>
5.1 Definizione di misura di rischio . . . . .	50
5.2 Volatility Index (VIX) . . . . .	53
5.3 Value at Risk (VaR) . . . . .	54
5.4 Conditional Value at Risk (CVaR) . . . . .	61

<b>6</b>	<b>Copule</b>	<b>67</b>
6.1	Definizione e proprietà . . . . .	67
6.2	Il teorema di Sklar . . . . .	69
6.3	Famiglie di copule . . . . .	71
6.3.1	Ellittiche . . . . .	72
6.3.2	Archimedee . . . . .	78
6.4	Vine Copulas . . . . .	85
6.4.1	Canonical Vine (C-Vine) . . . . .	89
6.4.2	Drawable Vine (D-Vine) . . . . .	91
6.4.3	Inferenza sulle Vine . . . . .	94
6.4.4	Selezione della struttura . . . . .	95
<b>7</b>	<b>Applicazione ad un portafoglio di asset finanziari</b>	<b>97</b>
7.1	Modello di Markowitz . . . . .	104
7.2	Modello di Black-Litterman . . . . .	109
7.3	Modello avanzato . . . . .	113
7.3.1	Variante: Value at Risk . . . . .	121
7.3.2	Variante: vendita allo scoperto (short selling) . . . . .	122
7.3.3	Variante: fondo 130/30 . . . . .	125
7.4	Modello avanzato con le copule Vine . . . . .	127
7.5	Analisi su un secondo paniere di asset . . . . .	134
7.6	Implementazione in Matlab . . . . .	141
7.7	Implementazione in R . . . . .	155
	<b>Ringraziamenti</b>	<b>157</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>158</b>

# Sommario

L'obiettivo di ogni gestore finanziario o, più in generale, di ogni investitore è quello di far rendere al meglio il proprio capitale attraverso la compravendita di strumenti finanziari, quotati presso le borse valori. Nel corso del XX secolo molti economisti, matematici, statistici hanno formulato varie teorie relative all'ambito finanziario, con lo scopo di individuare, nel migliore dei modi, gli investimenti maggiormente profittevoli.

Nel 1952 Harry Markowitz propose una teoria per selezionare gli asset da inserire in un portafoglio d'investimento in base al rendimento medio e alla rischiosità avuti in passato. Questa teoria si basava sull'analisi storica dei titoli, calcolando il rendimento medio ottenuto in passato e la rispettiva volatilità dei prezzi, che ne rappresentava la rischiosità. L'obiettivo consisteva nel massimizzare il rendimento atteso una volta fissato il livello di rischio, o, viceversa, nel minimizzare il livello di rischio, dato il rendimento atteso. In questo modo il portafoglio veniva composto con gli asset caratterizzati dal minor rapporto rischio-rendimento. Questa teoria, che valse il premio Nobel per l'economia a Markowitz, è stata ampiamente adottata da molti gestori finanziari nella seconda metà del Novecento.

Nel corso dei decenni, la pratica dei mercati finanziari ha tuttavia evidenziato alcune criticità riguardanti gli assiomi su cui è basato il modello sviluppato da Markowitz. Innanzitutto non sempre è possibile paragonare il passato al futuro, soprattutto per le singole società azionarie, perché quello che è successo decenni fa non è confrontabile allo stesso modo con quanto può essere accaduto negli ultimi mesi. Negli anni '60 Benoit Mandelbrot e Eugene

Fama evidenziarono il fatto che i rendimenti degli asset finanziari non sono distribuiti secondo una distribuzione Gaussiana [1].

Ripetendo il processo di ottimizzazione di Markowitz ogni qualvolta si voglia, ci si accorge che i pesi dei titoli in portafoglio variano piuttosto repentinamente, comportando per il gestore finanziario costi elevati per le transazioni di acquisto/vendita, nonché difficoltà operative per riallocare portafogli di consistenti dimensioni.

Il modello di Black-Litterman, ideato agli inizi degli anni '90 da due analisti di Goldman Sachs da cui prende il nome, si pone l'obiettivo di risolvere questo problema. Esso parte dal presupposto che, a differenza della quantificazione del livello di rischio, i rendimenti futuri siano molto difficili da predire. L'innovazione consiste in un miglioramento del modello di Markowitz attraverso l'aggiunta delle views, ovvero di previsioni sui futuri andamenti dei titoli da parte di figure autorevoli del mondo finanziario, che intervengono sull'allocatione del portafoglio. In questo modo si ottengono dei pesi molto più stabili che nel tempo variano con gradualità, rendendo la gestione del portafoglio più agevole per un fondo d'investimento. Il modello di Black-Litterman, però, non si rivelò un rimedio agli altri punti deboli della teoria di Markowitz. Anche l'utilizzo della volatilità come misura del rischio si rivelò inefficace, in quanto non fa distinzioni tra la varianza positiva, oscillazioni dei prezzi al rialzo, e quella negativa, oscillazioni al ribasso. Infine, nonostante questa teoria si ponga l'obiettivo di diversificare l'allocatione del portafoglio, si è dimostrato che nella pratica tale diversificazione risulta invece minima, in quanto, minimizzando il rapporto rischio-rendimento, si finisce spesso per investire su pochissimi asset, vanificando il principio stesso.

Nella parte centrale di questa tesi verranno mostrate alcune soluzioni per i problemi sopraelencati al fine di ottimizzare al meglio l'allocatione di portafoglio. Verranno introdotte delle misure di rischio come il Value at Risk (VaR), che analizza quale sia la perdita massima, ad un dato livello di confidenza, in un orizzonte temporale predefinito, e il Conditional Value at Risk (CVaR), in grado di calcolare la perdita media a cui si va incontro, ad un dato livello di

confidenza, in un orizzonte temporale predefinito, fornendo una stima ancora più dettagliata del livello di rischiosità dello strumento finanziario. Accantonate le distribuzioni gaussiane, o normali, verrà presentata la distribuzione di Pareto generalizzata che, dotata di code più spesse per prestare la dovuta attenzione agli eventi meno frequenti, risolve anche il problema dell'asimmetria delle distribuzioni marginali dei singoli asset. Infine, dopo aver scartato la matrice di varianza-covarianza per via dell'inadeguatezza del coefficiente di correlazione lineare, verrà presentata la copula, un oggetto matematico in grado di stimare le relazioni di dipendenza tra diversi strumenti finanziari. A differenza del classico coefficiente di Pearson, in grado di catturare solamente la correlazione lineare tra due variabili, una copula è in grado di analizzare più in dettaglio la dipendenza tra due o più variabili aleatorie. In questo modo si eviterà di comporre il proprio portafoglio con strumenti fortemente dipendenti tra di loro che produrrebbero un aumento del rischio complessivo. Grazie a tutti questi accorgimenti, si è ottenuto un modello ben più preciso ed efficiente di quello originario, in grado di fornire valide indicazioni su quali siano gli strumenti finanziari più promettenti su cui allocare il proprio capitale.

Presentati i due modelli e i vari affinamenti proposti, si passa ad analizzare in concreto quanto questi siano efficaci nell'asset allocation. Verranno quindi analizzate le performance di due diversi portafogli: il primo avrà 14 asset a disposizione per la composizione del portafoglio, mentre il secondo soltanto 6 strumenti finanziari. Saranno presentate le differenze tra il modello di Markowitz originario e quello più avanzato, che fa uso dei miglioramenti che sono stati elencati in precedenza, in termini di rendimento totale, massima perdita sofferta e variabilità dei rendimenti.

Dopodiché si passerà ad analizzare le differenze tra il modello di Black-Litterman e quello di Markowitz più avanzato, mettendo in evidenza le differenze in termini di variabilità dei pesi.

Per sviluppare il lavoro, si è fatto ampio utilizzo dei software *R* e *Matlab*, risultando particolarmente utili in numerosi processi di calcolo.

# Capitolo 1

## La teoria di portafoglio di Markowitz

Nel primo capitolo viene presentata la teoria di Harry Markowitz, il quale nel 1952 pubblicò un articolo intitolato Portfolio Selection che in seguito gli sarebbe valso il premio Nobel per l'economia [1].

L'obiettivo di questa teoria consiste nell'allocazione di portafoglio attraverso gli strumenti finanziari con il massimo rapporto rendimento-rischio. Fino a quel momento gli studi di tipo finanziario erano stati riferiti ai soli andamenti dei singoli titoli ed avevano avuto come unico scopo il miglioramento del rendimento per l'investitore. Questa teoria evidenzia anzitutto che per ridurre il rischio legato a ciascuno strumento finanziario è opportuno distribuire l'investimento su vari strumenti, mostrando che non è sufficiente considerare soltanto le caratteristiche individuali dei titoli, ma che è invece necessario considerare anche le correlazioni tra di essi.

Questa teoria è stata adottata da moltissime banche e gestori finanziari durante lo scorso secolo, da cui sono seguite varie estensioni come la post-modern portfolio theory [2] e il modello di Black-Litterman [3].

## 1.1 Approccio media-varianza

Il sogno di ogni investitore è quella di trovare strumenti finanziari che abbiano un elevato rendimento associato ad un rischio relativamente basso. Come è facile immaginare, questo tipo di strumenti è piuttosto raro, pertanto occorre analizzare i vari titoli disponibili sul mercato per cercare quelli più promettenti in termini di rendimento, ma con un livello di rischio non troppo elevato. Il rischio non è altro che l'incertezza legata al valore futuro di uno strumento finanziario o, più in generale, di un qualsiasi investimento. Per valutare correttamente un rischio finanziario si fa uso di particolari strumenti che aiutano l'investitore a capire meglio quale sia il portafoglio più adatto alle sue esigenze. Negli ultimi decenni sono state costruite apposite misure di rischio per cercare di analizzare in modo sempre più dettagliato e preciso quale sia l'effettivo livello di rischio di un asset finanziario. Per misurare il rischio di un titolo finanziario, in questa teoria, viene utilizzata la volatilità storica dei prezzi.

Immaginiamo che un investitore abbia un capitale  $C_0$  al tempo  $t = 0$ , e stia cercando di investire sul mercato finanziario in titoli rischiosi. L'obiettivo dell'investitore è quello di incrementare il proprio capitale al tempo  $t = 1$  con un rendimento superiore a quello che avrebbe ottenuto investendo in asset privi di rischio, come ad esempio i titoli di stato di un Paese con un rating AAA.

Come affermato in Drake e Fabozzi [4] un portafoglio viene definito efficiente quando fornisce all'investitore il massimo rendimento per un determinato livello di rischio. Per costruire un portafoglio di questo tipo, è necessaria un'importante assunzione sul comportamento dell'investitore: che sia avverso al rischio, vale a dire che tra due portafogli aventi il medesimo rendimento atteso, egli sceglierà quello con il minor rischio. Analogamente, a parità di rischio, tale investitore sceglierà il portafoglio con il rendimento atteso più elevato.

Iniziamo a definire il rendimento atteso del portafoglio. Indicando rispettivamente con  $w_i$  e  $R_i$  con  $i = 1, \dots, n$  il peso e il rendimento atteso relativi

all'asset  $i$ -esimo, il rendimento atteso del portafoglio è definito come:

$$E[R_p] = w_1 R_1 + w_2 R_2 + \dots + w_n R_n$$

Prendiamo ad esempio un semplice portafoglio composto da due titoli, un indice azionario e un titolo obbligazionario. Se i rendimenti attesi sono rispettivamente del 10% e del 3%, con il 30% del portafoglio allocato sul primo asset e la restante parte sul secondo, abbiamo che il rendimento atteso è dato da:

$$E[R_p] = 0.3 \cdot 0.1 + 0.7 \cdot 0.03 = 0.051 = 5.1\%$$

Si noti che il rendimento atteso non corrisponde al tasso di rendimento effettivo che si otterrà in futuro ad una data prestabilita, ma ci fornisce solamente una stima in base a quanto successo in passato.

Definiamo ora con  $n$  il numero di asset che un investitore ha a disposizione, ed indichiamo con  $V$  la soglia massima di rischio che è disposto a tollerare. Come detto in precedenza, per misurare il rischio in questo modello viene utilizzata la volatilità, pertanto quello che si vuole ottenere è un portafoglio che non sia soggetto ad elevate variazioni di prezzo. Sia  $R = (R_1, \dots, R_n)$  il vettore costituito dalla media dei rendimenti storici per i rispettivi  $n$  asset al tempo  $t = 0$ , e  $\Sigma$  la corrispondente matrice di varianza-covarianza dei rendimenti. Il problema di ottimizzazione media-varianza di Markowitz si può scrivere come:

$$\begin{aligned} \max_w \quad & \sum_{i=1}^n w_i R_i \\ \text{subject to} \quad & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{i,j} w_i w_j \leq V \\ & \sum_{i=1}^n w_i = 1 \\ & w_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{1.1}$$

dove  $\sigma_{i,j}$  è l'elemento  $(i, j)$  della matrice di varianza-covarianza  $\Sigma$  e  $w_i$  denota

il peso che viene allocato all'asset  $i$ -esimo.

Ricordiamo inoltre che la covarianza tra 2 titoli è così definita:

$$Cov(i, j) = \Sigma_{i,j} = \rho_{i,j} \sigma_i \sigma_j \quad \forall i, j = 1, \dots, n$$

dove  $\sigma_i$  indica la deviazione standard del titolo  $i$ .

In questo modo il portafoglio viene allocato in modo da ottenere il miglior rendimento possibile, data una soglia massima di rischio. Facendo variare della soglia di rischio  $V$ , si ottiene un luogo di punti noti come frontiera efficiente di portafoglio, vale a dire una curva che ci mostra i rendimenti massimi per i vari livelli di rischio. Fissato il livello di rischio dell'investitore, oppure il rendimento atteso, il portafoglio ottimo è dato dalla composizione corrispondente al punto sulla frontiera efficiente.

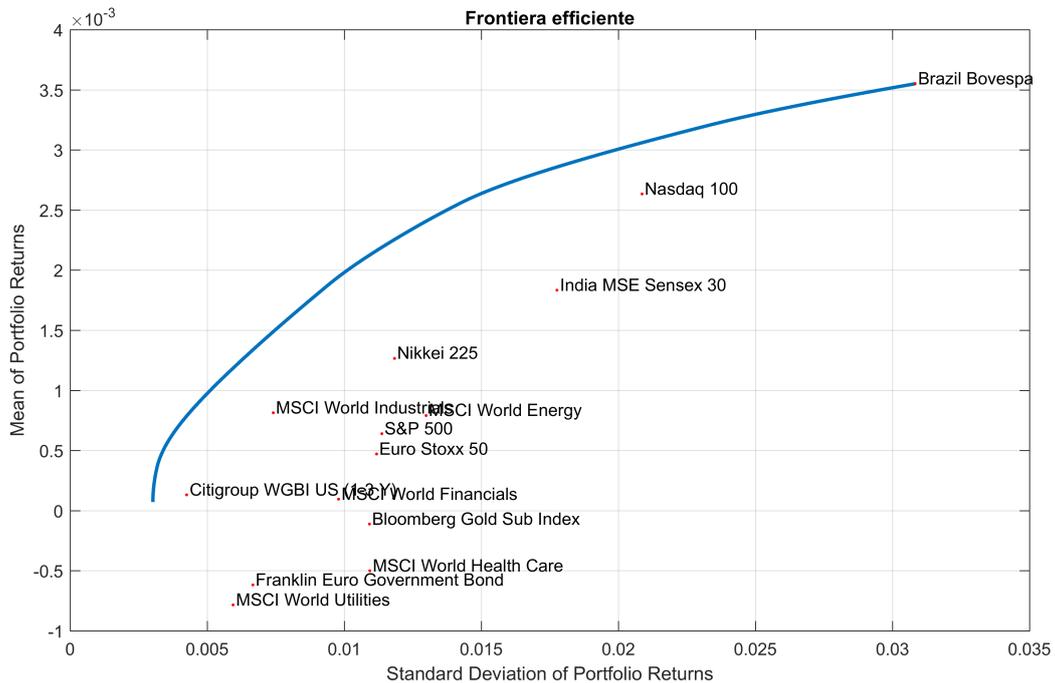


Figura 1.1: Frontiera efficiente

Uno dei vantaggi più evidenziati di questa teoria è sicuramente la diversificazione di portafoglio. All'interno del processo di ottimizzazione, vengono analizzate anche le correlazioni lineari tra i vari asset, in modo da costruire un portafoglio che non sia composto da titoli fortemente correlativi positivamente, riducendo così il rischio complessivo per l'investitore. Notiamo che i singoli titoli vengono tutti collocati più in basso rispetto alla frontiera efficiente, mostrando quanto sia inefficiente la scelta di comporre il portafoglio unicamente con un singolo asset, ad eccezione dell'indice brasiliano Bovespa. Questo titolo, infatti, risulta essere proprio sulla frontiera efficiente. Ciò significa che l'unico modo per ottenere un rendimento così elevato è investire tutto il proprio capitale in quell'unico titolo. Quest'osservazione può essere facilmente verificata nella figura che segue, in cui ad una soglia di rischio massima per la frontiera efficiente corrisponde un peso uguale ad 1 per il titolo in questione.

Soltanto con un'attenta diversificazione dei titoli disponibili attraverso l'approccio media-varianza si riesce a trovare una combinazione di asset ottimale, ottenendo così rendimenti attesi migliori e valori di rischio minori. All'aumentare della soglia di rischio, corrispondente alla varianza, i pesi degli asset in portafoglio saranno sempre più esposti verso quelli più volatili, come si può osservare nella figura seguente, in cui sono stati riportati i pesi da assegnare ai vari asset, corrispondenti a 200 punti equidistanti sulla frontiera efficiente.

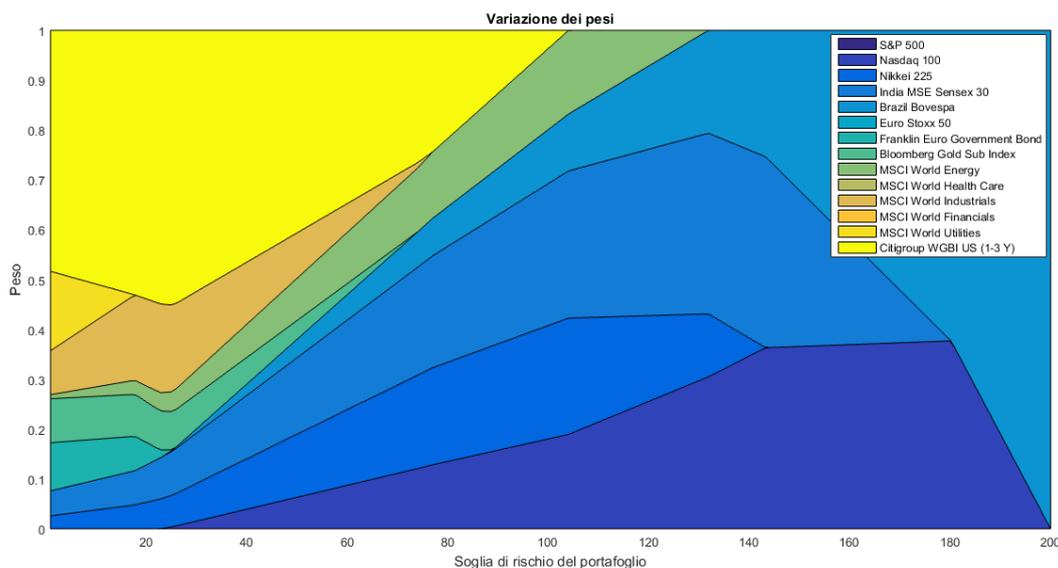


Figura 1.2: Variazione dei pesi lungo la frontiera efficiente

Questo problema di ottimizzazione, però, può essere riscritto in modo da trovare un portafoglio di strumenti finanziari che minimizzi il rischio, ad un dato livello di rendimento desiderato. Denotato quindi con  $\mu$  il rendimento desiderato, è possibile determinare il luogo dei portafogli che minimizzano la varianza tramite la risoluzione del seguente problema di ottimizzazione:

$$\begin{aligned}
 \min_w \quad & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{i,j} w_i w_j \\
 \text{subject to} \quad & \sum_{i=1}^n w_i R_i = \mu \\
 & \sum_{i=1}^n w_i = 1 \\
 & w_i \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, n
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

In questo modo si ottengono i rispettivi pesi degli  $n$  asset in cui allocare il proprio capitale.

Per quanto riguarda i fondamenti, Markowitz ha basato la sua teoria sui

seguenti assiomi:

- gli investitori sono avversi al rischio e cercano di massimizzare il rendimento finale basando le proprie decisioni su rendimenti storici e varianza dei titoli;
- il periodo di investimento è uniperiodale;
- le compravendite di titoli eseguite dagli investitori non influenzano l'andamento generale del mercato, pertanto non esistono manipolatori del mercato;
- i rendimenti degli asset seguono una distribuzione Gaussiana e sono indipendenti ed identicamente distribuiti;
- le imposte sui guadagni e i costi per le transazioni di acquisto/vendita degli strumenti finanziari sono nulli;
- gli asset sono perfettamente divisibili.

Supponiamo ora di essere un investitore che al primo gennaio del 2000 abbia a disposizione 14 asset in cui investire il proprio capitale e sia disposto a rischiare non più del 2% del capitale investito. I titoli a disposizione sono così suddivisi: sei indici azionari, cinque indici settoriali a livello globale, due indici obbligazionari e un titolo che replica l'andamento dell'oro. Per semplicità d'uso, tutti gli asset sono denominati in dollari americani. L'investitore ritiene inoltre che l'ultimo anno di dati sia il periodo più significativo per definire quali titoli sia meglio acquistare, ed ha intenzione di mantenere inalterato il proprio portafoglio per i successivi 6 mesi.

In base a quanto abbiamo visto, generiamo la frontiera efficiente secondo la teoria di Markowitz. Inserendo i nostri dati nel problema di ottimizzazione (1.1), otteniamo i seguenti risultati. Precisiamo che questi risultati sono stati ottenuti attraverso uno script in *Matlab*.

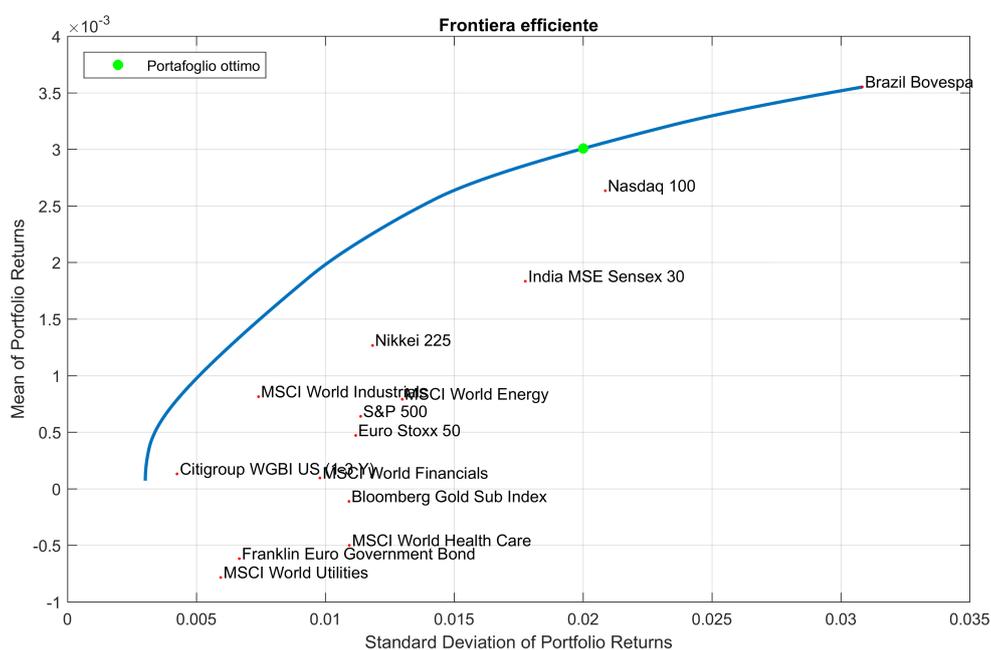


Figura 1.3: Frontiera efficiente

Nome Asset	Peso
S&P 500	0
Nasdaq 100	0,3727
Nikkei 225	0
India MSE Sensex 30	0,1177
Brazil Bovespa	0,5096
Euro Stoxx 50	0
Franklin Euro Government Bond	0
Bloomberg Gold Sub Index	0
MSCI World Energy	0
MSCI World Health Care	0
MSCI World Industrials	0
MSCI World Financials	0
MSCI World Utilities	0
Citigroup WGBI US (1-3 Y)	0

Secondo l'approccio media-varianza di Markowitz, i titoli che massimizzano il rendimento sono il Nasdaq 100, il cui peso è del 37,27%, l'indice India MSE Sensex 30, con peso 11,77% e l'indice Brasiliano Bovespa, con un peso del 50,96%.

Osservando le quotazioni di questi asset sei mesi dopo l'acquisto, notiamo che il valore del portafoglio è cresciuto del 8,18%. Quindi mettendo a rischio una parte ridotta del proprio capitale, l'investitore è riuscito ad ottenere un rendimento più che soddisfacente, considerando anche l'orizzonte temporale dell'investimento piuttosto limitato. Ma in termini relativi, questo rendimento è stato davvero così elevato?

In quello stesso periodo storico, i titoli di stato elvetici con scadenza a 6 mesi, aventi un rating AAA, considerati quindi privi di rischio, avevano un rendimento del 2% circa, quindi il premio per il rischio è stato del 6,18%, confermando quindi che si tratta di un rendimento molto elevato. Bisogna però precisare che questo criterio per la scelta dei titoli da acquistare non è generalmente adottato dalla maggior parte degli investitori.

Un altro approccio, generalmente adottato dalle persone comuni per la sua semplicità, è quello di acquistare tutti gli asset in ugual misura, ritenendo così di diversificare meglio il rischio, mediando le eventuali perdite che si otterrebbero su alcuni titoli con i guadagni degli altri. Se il nostro investitore avesse seguito questo approccio, avrebbe ottenuto un rendimento molto inferiore, vale a dire il 3,24%, con un corrispondente premio per il rischio del 1,24%.

Una tecnica di cui si servono frequentemente i gestori finanziari è quella di acquistare in ugual misura soltanto gli asset maggiormente promettenti. Pertanto, in questo caso, per ciascuno dei tre titoli sopra elencati si sarebbe investito un terzo del proprio capitale, ottenendo così un rendimento del 6,24%, o il 4,24% in più rispetto al tasso privo di rischio.

Nell'esempio considerato l'approccio media-varianza ha fornito risultati migliori rispetto a quelli di metodi più comunemente utilizzati, ma, come è facile intuire, questo potrebbe essere solo un caso isolato. Nel Capitolo 7

saranno analizzate le performance ottenibili impiegando i medesimi asset per un periodo di gran lunga maggiore (dal 1999 a ottobre 2017), dove sarà possibile concludere se effettivamente il modello di Markowitz risulti essere il più efficace per la composizione di portafoglio tra i metodi sopra elencati.

## Capitolo 2

# Problemi con la teoria di Markowitz

In questo capitolo verranno presentati gli aspetti problematici della teoria di Markowitz. Nonostante dal punto di vista finanziario potrebbe sembrare che la teoria sia completa, dal punto di vista matematico essa presenta invece alcune lacune in varie parti, che sono state messe in risalto nel corso dei decenni successivi.

Già negli anni Sessanta, Benoit Mandelbrot e Eugene Fama dimostrarono come l'assunzione che i rendimenti siano distribuiti secondo una distribuzione gaussiana fosse errata [5]. Altre importanti assunzioni, come ad esempio l'utilizzo della varianza come misura del rischio, e una diversificazione del rischio soltanto apparente, data la scarsa affidabilità del coefficiente di correlazione lineare di Pearson, saranno alcuni dei problemi più evidenti della teoria di Markowitz.

## 2.1 Instabilità del portafoglio

Uno dei problemi principali dell'ottimizzazione media-varianza risiede nel fatto che la composizione del portafoglio ottimo può risultare molto instabile: Questo comporta che a piccole variazioni dei dati in ingresso, corrispondano significativi cambiamenti nell'allocazione del portafoglio. Di conseguenza, piccole variazioni degli input, dovute ad esempio all'aggiunta di nuove osservazioni, che comportano il ricalcolo della frontiera efficiente, possono tradursi in una modifica significativa dei pesi da assegnare ai vari asset. A sostegno del problema dell'instabilità del portafoglio ottimo, Best e Grauer [6] dimostrarono quanto i pesi siano "sensibili" alle variazioni dei rendimenti degli asset.

Nella pratica, ciò comporta l'acquisto e la vendita di elevate quantità di titoli in occasione di ogni verifica periodica del portafoglio per ottenere il nuovo portafoglio ottimo, facendo aumentare i costi complessivi, a causa delle commissioni per le transazioni di acquisto-vendita. Vediamo ora un esempio.

Riprendiamo il problema dell'investitore visto nel Capitolo 1, dove si cercava di allocare il proprio capitale nel miglior modo possibile prendendo in esame i prezzi di 14 asset negli ultimi 12 mesi a partire dal primo gennaio 2000, e variamo all'1% la soglia del rischio che siamo disposti a sopportare. Calcoliamo la frontiera efficiente e troviamo i pesi relativi alla nostra soglia di rischio, che sono riportati nella tabella più in basso. A questo punto, facciamo variare il rendimento storico del terzo titolo incrementandolo del 20%, vale a dire che il rendimento annuale passa dallo 0,32% allo 0,38%, e ricalcoliamo la frontiera efficiente e i nuovi pesi.

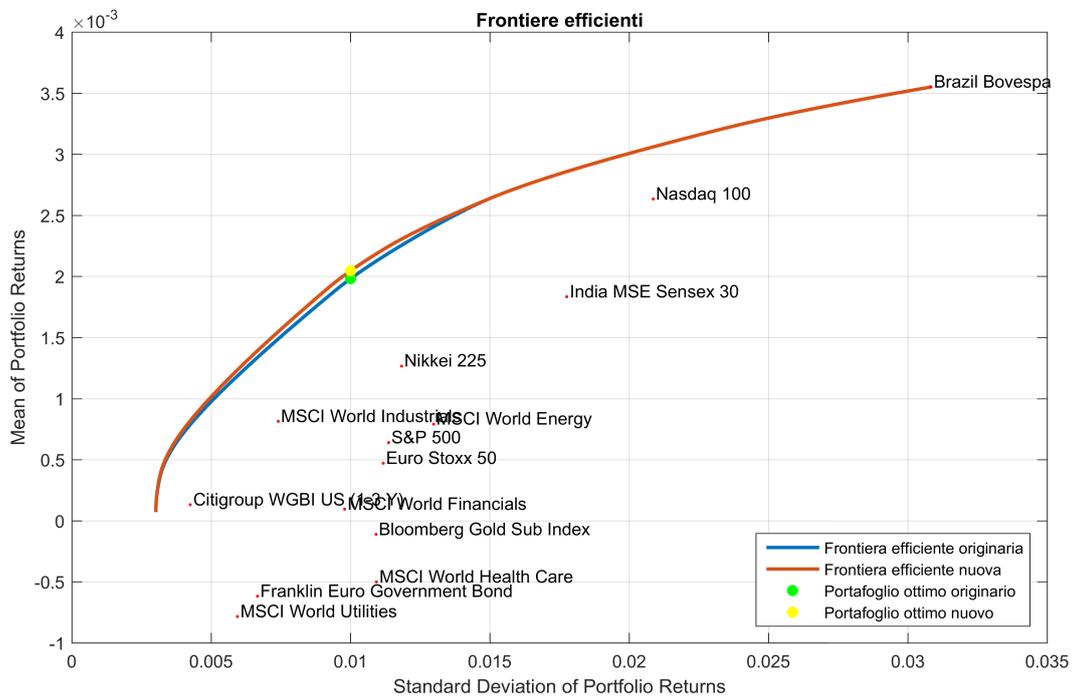


Figura 2.1: Frontiere efficienti

Come si può notare dalla figura, le due frontiere efficienti sono molto vicine, ciò significa che il rapporto rendimento-rischio è rimasto quasi inalterato. Nonostante questo però, i pesi ottimi per la nostra soglia di rischio differiscono significativamente.

Nome asset	Peso originario	Peso nuovo	Differenza
S&P 500	0	0	0
Nasdaq 100	0,2147	0,1939	-0,0208
Nikkei 225	0,2098	0,3010	0,0912
India MSE Sensex 30	0,3101	0,2907	-0,0194
Brazil Bovespa	0,1345	0,1357	0,0012
Euro Stoxx 50	0	0	0
Franklin Euro Gov Bond	0	0	0
Bloomberg Gold Sub Index	0	0	0
MSCI World Energy	0,1309	0,0787	-0,0522
MSCI World Health Care	0	0	0
MSCI World Industrials	0	0	0
MSCI World Financials	0	0	0
MSCI World Utilities	0	0	0
Citigroup WGBI US (1-3 Y)	0	0	0

Questo dimostra quanto possano essere instabili i pesi trovati per il portafoglio ottimo.

Ad aumentare l'instabilità di portafoglio contribuisce anche un altro tipo di problema: durante il processo di ottimizzazione, si tende ad allocare eccessivamente il proprio capitale negli asset più convenienti, venendo meno all'obiettivo della diversificazione. Questo, a differenza degli altri problemi della teoria di Markowitz, non è facilmente risolvibile e verrà risolto soltanto attraverso il modello di Black-Litterman, che esamineremo in dettaglio nel terzo capitolo.

## 2.2 Non-normalità

Un altro problema della teoria di Markowitz, evidenziato fin dalla metà degli anni '60 del secolo scorso, consiste nell'assunzione della normalità della distribuzione dei rendimenti storici. La distribuzione gaussiana, sebbene non rappresenti correttamente i rendimenti, viene frequentemente utilizzata per definire le distribuzioni marginali, perché risulta piuttosto semplice da gestire. Per cogliere le deviazioni dalla normalità della distribuzione è sufficiente paragonarla alla distribuzione empirica.

Negli anni è stato ampiamente criticato questo assioma della teoria di Markowitz poiché nei periodi di crollo finanziario questa assunzione si rivela del tutto insensata [7]. Va tuttavia precisato che l'assunzione di normalità della distribuzione dei rendimenti non desta particolari preoccupazioni nel caso in cui ci si trovi durante i periodi di stabilità dei mercati finanziari, dove non sono presenti forti discese dei prezzi.

Al contrario, ciò a cui questa critica fa riferimento è legata all'incapacità di definire correttamente le probabilità di forti contrazioni degli asset che, secondo la distribuzione normale, dovrebbero risultare essere molto più rari di quanto invece accada.

Ciò si traduce in una sottostima del rischio che si sta correndo, in quanto vengono considerati come estremamente rari eventi che in realtà sono molto più frequenti di quanto stimato. Da ciò consegue che il modello di media-varianza, essendo basato sulla distribuzione gaussiana, produce risultati del tutto inadeguati nei periodi di forti correzioni dei prezzi. Questo problema è noto come "code sottili" o "code pesanti", cioè le code della distribuzione tendono a zero troppo rapidamente. Come si vedrà più avanti, una corretta stima della probabilità di rendimenti fortemente negativi è di fondamentale importanza nell'analisi di quanto un asset sia rischioso, quindi la ricerca di distribuzioni marginali corrette risulta cruciale per l'affidabilità del modello.

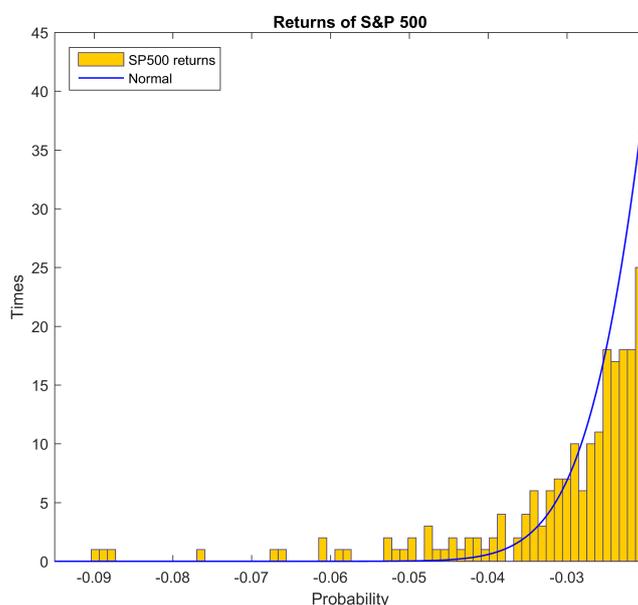


Figura 2.2: Frequenze dei rendimenti dell'indice S&P 500

Nella figura sopra riportata viene mostrata la parte negativa della funzione di densità di una normale che cerca di approssimare al meglio i rendimenti giornalieri dell'indice americano S&P 500 dal 01/01/1999 al 31/10/2017. Secondo la distribuzione trovata, la probabilità che si verifichi un rendimento inferiore al -4% è esattamente dello 0,0378%. Ciò significa che nei nostri dati, 4898 osservazioni, dovrebbe comparire 2 volte (1,89 volte per la precisione). In realtà, invece, sono state ben 29 le volte in cui il titolo è sceso al di sotto di tale soglia, ciò mostra quanto questo tipo di distribuzione non sia in grado di stimare correttamente la probabilità di una perdita elevata. Cercando, invece, di predire per quanti giorni ci sarà un rendimento del -5% o inferiore, la distribuzione ci indica che in tutti i nostri dati questa performance non dovrebbe mai comparire, in quanto, in media, quest'evento dovrebbe verificarsi circa una volta ogni 77000 giorni di borsa, vale a dire una volta ogni 300 anni. Inutile dire che questa stima è del tutto sbagliata, basti pensare ai crolli che si sono verificati nelle fasi più acute delle crisi del 2000 e del 2008, e questa tesi è confermata dai nostri dati che ci indicano che il numero di

giorni in cui l'indice è sceso al di sotto del -5% sono stati ben 14.

Un modo semplice ma efficace per verificare se la distribuzione empirica sia approssimabile con una distribuzione gaussiana è quello di paragonare i quantili delle due distribuzioni attraverso il quantile-quantile plot, o Q-Q plot. Il Q-Q plot si basa sul fatto che, una volta che i dati sono stati ordinati in modo crescente, cioè tali che  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ , il valore  $x_i$  rappresenta una stima del  $\frac{i-\alpha}{n+1-2\alpha}$  quantile dei nostri dati, con  $\alpha \in [0, 1]$ , cioè che  $x_i$  stima  $F^{-1}\left(\frac{i-\alpha}{n+1-2\alpha}\right)$ .

Questo tipo di grafico confronta quindi i quantili di una distribuzione. Se la variabile osservata presenta una distribuzione normale, i punti si addenseranno sulla diagonale tracciata in rosso nel grafico sottostante, mentre se presenta una distribuzione differente si distanzierà dalla suddetta linea.

Come è facile notare, a meno dei punti sufficientemente vicini alla media, gli altri punti sono distanti dalla retta rossa. Questo grafico permette di comprendere in modo chiaro il tipo di deviazioni dalla normalità che sono presenti nel campione di dati.

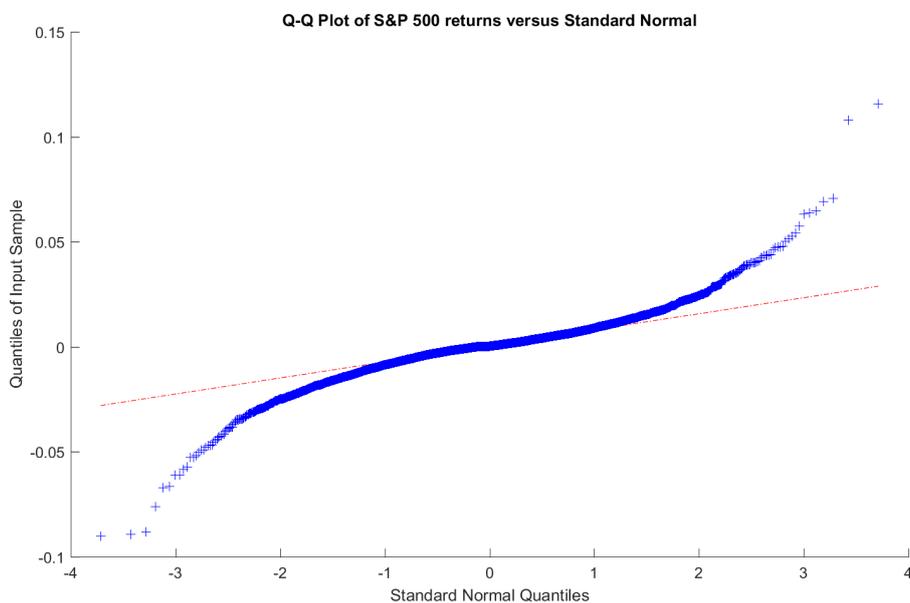


Figura 2.3: Q-Q plot dei rendimenti dell'indice S&P 500

Per avere un'ulteriore verifica, possiamo però utilizzare il test di Jarque-Bera [8], ma prima è necessario specificare cosa sono la simmetria, o skewness, e la curtosi di una distribuzione.

Poiché il problema della distribuzione gaussiana sembra essere circoscritto alle code troppo "sottili", si può presumere che con una distribuzione simile ma dotata di code più "spesse", come ad esempio la distribuzione di Cauchy o, più in generale, la distribuzione t di Student, si riesca a risolvere il problema legato alla corretta stima delle distribuzioni marginali. Come vedremo nel paragrafo successivo, in queste ultime distribuzioni si riscontra un altro tipo di problema: la simmetria della distribuzione.

## 2.3 Asimmetria

La skewness, o asimmetria, fornisce una misura di quanto una distribuzione di probabilità sia simmetrica rispetto alla sua media. Condizione necessaria, ma non sufficiente, affinché una distribuzione sia simmetrica è avere un valore di skewness nullo, pertanto ogni distribuzione simmetrica ha un valore di skewness pari a zero, mentre esistono distribuzioni non simmetriche aventi una skewness nulla.

**Definizione 2.1.** *Una distribuzione di probabilità si dice simmetrica quando la sua funzione di densità  $f$  è simmetrica rispetto ad un valore  $x_0$ :*

$$f(x_0 + t) = f(x_0 - t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

**Definizione 2.2.** *Data una variabile casuale  $X$  avente media  $\mu$  e deviazione standard  $\sigma$ , la skewness di una variabile casuale  $X$  è definita come:*

$$\gamma(X) = E \left[ \left( \frac{X - \mu}{\sigma} \right)^3 \right]$$

Una distribuzione asimmetrica a favore di valori al di sotto della media avrà un valore negativo, mentre se la distribuzione è asimmetrica a favore di valori

al di sopra della media la skewness risulterà positiva. Pertanto, distribuzioni come la normale e la *t* di Student avranno una skewness pari a zero, in quanto perfettamente simmetriche.

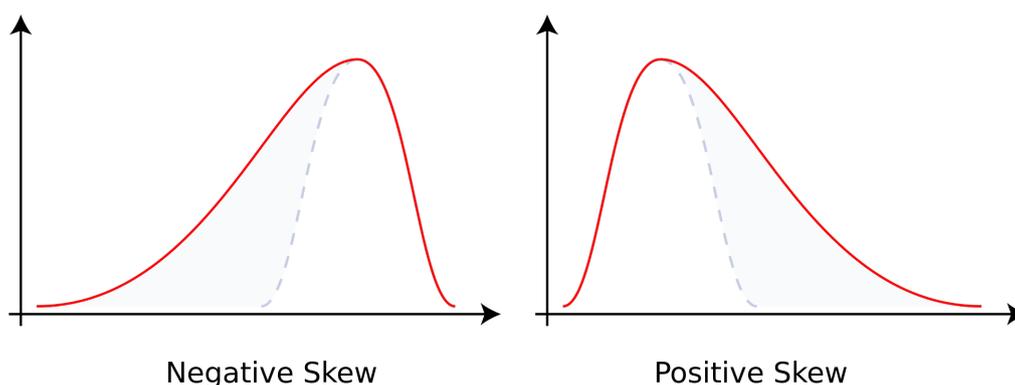


Figura 2.4: Skewness negativa e positiva

Come abbiamo visto nel paragrafo precedente, uno degli assiomi della teoria di Markowitz è l'utilizzo della distribuzione normale per i rendimenti degli asset. Ciò implica quindi l'utilizzo di una distribuzione che sia simmetrica rispetto alla media e quindi con un valore di skewness pari a zero. Calcolando, però, questo valore per la distribuzione empirica dei rendimenti dei nostri asset, notiamo che la maggior parte dei risultati sono ben distanti dallo zero. Questo ci spinge a pensare che le distribuzioni marginali possano non essere simmetriche. Di conseguenza, oltre alla distribuzione gaussiana, anche la distribuzione di Cauchy o la *t* di Student presentano lo stesso tipo di problema.

Nel dettaglio, nella nostra analisi riscontriamo valori di skewness molto distanti da zero per il Nasdaq 100, avente un valore di 0.391, per l'indice brasiliano Bovespa, dove si arriva addirittura a 1.253, mentre altri indici come il MSCI World Energy o il MSCI World Industrials, la skewness è negativa, con valori di -0.233 e -0.226.

**Definizione 2.3.** Sia  $X$  una variabile casuale con media  $\mu$  e deviazione standard  $\sigma$ . La curtosi  $\kappa$  viene definita come:

$$\kappa(X) = E \left[ \left( \frac{X - \mu}{\sigma} \right)^4 \right] = \frac{E [(X - \mu)^4]}{(E [(X - \mu)^2])^2}$$

La curtosi misura quindi l'allontanamento della distribuzione empirica rispetto alla distribuzione normale rispetto alla quale si può verificare un maggiore appiattimento o un maggiore allungamento. La curtosi di qualsiasi distribuzione normale è 3. Un valore inferiore a questo riferimento, invece, indica una distribuzione platicurtica, cioè avente code più "sottili" della normale, e che quindi converge asintoticamente a zero più velocemente della distribuzione gaussiana. La distribuzione uniforme, ad esempio, è una platicurtica. Al contrario una distribuzione con una curtosi superiore a 3 è detta leptocurtica, che si traduce in una distribuzione con code più "spesse" della normale, convergendo asintoticamente a zero più lentamente rispetto a quella di riferimento. A questa categoria fanno parte la  $t$  di Student, la Poisson, l'esponenziale e la logistica.

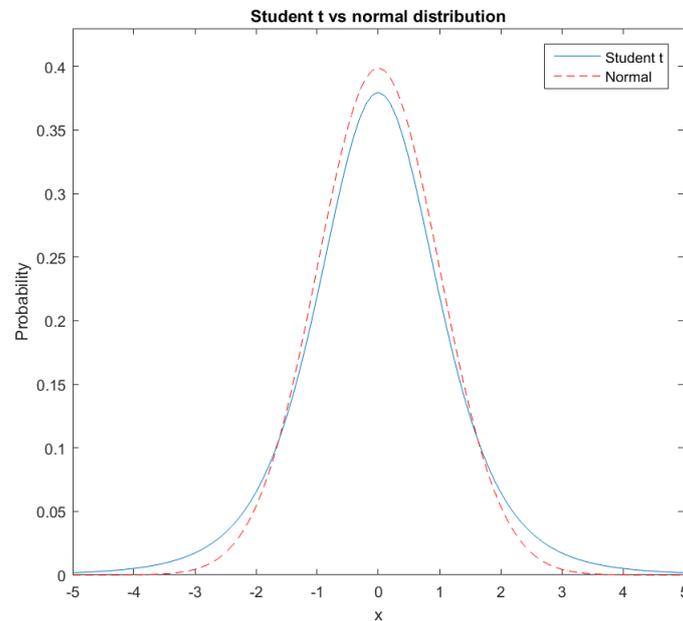


Figura 2.5: Confronto tra la distribuzione normale e la  $t$  di Student

In sintesi la curtosi ci indica se gli eventi rari vengono espressi meglio o peggio rispetto alla distribuzione normale, quindi ci si aspetta di utilizzare una distribuzione leptocurtica per la nostra analisi.

Il test di Jarque-Bera è un test statistico per la verifica dell'ipotesi di normalità, che si basa sulla misura dell'asimmetria e della curtosi della distribuzione.

Il test di Jarque-Bera è definito come:

$$JB = \frac{n}{6} \left[ \gamma^2 + \frac{1}{4} (\kappa - 3)^2 \right]$$

dove con  $n$  viene indicato il numero di osservazioni, con  $\gamma$  la skewness, con  $\kappa$  la curtosi.

L'ipotesi nulla di questo test è che la nostra distribuzione dei rendimenti sia di tipo gaussiano. Il livello di confidenza che richiediamo è del 99% perché, avendo molti dati, vogliamo essere sicuri di non commettere errori.

Come risultato otteniamo che per tutti e 14 gli asset in questione la distribuzione dei rendimenti non è di tipo normale, confermando quanto trovato precedentemente.

Siamo pertanto distanti dall'ipotesi di normalità e di simmetria della distribuzione dei rendimenti, portandoci ad utilizzare distribuzioni non simmetriche come marginali per un'analisi di portafoglio.

## 2.4 Matrice di varianza-covarianza

La corretta stima della matrice di varianza-covarianza risulta essere fondamentale per una corretta diversificazione di portafoglio. Di conseguenza il coefficiente di correlazione lineare  $\rho$ , gioca un ruolo centrale. Ogni elemento di questa matrice è composto nel seguente modo:

$$\Sigma_{i,j} = \rho_{i,j} \sigma_i \sigma_j$$

dove con  $i$  e  $j$  vengono indicati il titolo  $i$  ed il titolo  $j$ , mentre con  $\sigma_i$  la deviazione standard del titolo  $i$ .

Il coefficiente di correlazione  $\rho$  è stato definito da Pearson [9] ed è una misura di dipendenza lineare. Esso ammette le seguenti proprietà:

- assume valori compresi tra  $-1 \leq \rho_{i,j} \leq 1$
- se  $i$  e  $j$  sono indipendenti allora  $\rho_{i,j} = 0$
- è invariante per trasformazioni strettamente crescenti
- è simmetrico, quindi  $\rho_{i,j} = \rho_{j,i}$

La correlazione lineare è molto utilizzata come misura di dipendenza, spesso anche in maniera errata. Essa si presta molto bene nel caso in cui le due variabili aleatorie abbiano distribuzione congiunta di tipo ellittico. Se viene impiegata in situazioni di dipendenza non lineare produce però risultati fuorvianti. Vediamo quali sono i limiti dell'approccio di Pearson.

Innanzitutto, non è sempre possibile costruire una funzione di distribuzione congiunta, partendo dalle marginali per qualsiasi valore  $-1 \leq \rho_{i,j} \leq 1$ . Inoltre, proprio per il fatto che il coefficiente cattura solamente la dipendenza lineare, presi  $X_1 \sim N(0, 1)$  e  $X_2 \sim (X_1)^2$  si ha che  $\rho_{i,j} = 0$ , quando la relazione di dipendenza è evidente, ma non lineare. Infine, è possibile solamente calcolare la dipendenza tra due variabili, mentre in parecchi campi di applicazione, come la finanza, ne entrano in gioco molte di più.

Un altro problema di fondamentale importanza è che permette di analizzare soltanto la correlazione tra due variabili, e non di quelle due rispetto alle altre. Pertanto sapremo (approssimativamente) come è correlato il titolo  $i$  con il titolo  $j$ , senza tener conto delle correlazioni di questi due asset con tutti gli altri a disposizione. Si ottiene quindi una visione soltanto parziale della dipendenza tra i titoli.

Inoltre è importante ricordare come, nei periodi di crisi finanziaria, la maggior parte degli indici borsistici e, di conseguenza, dei titoli azionari, risulti essere estremamente correlata. Per una corretta allocazione del proprio capitale sarebbe quindi opportuno analizzare come si comportano gli asset in questi periodi per agire di conseguenza.

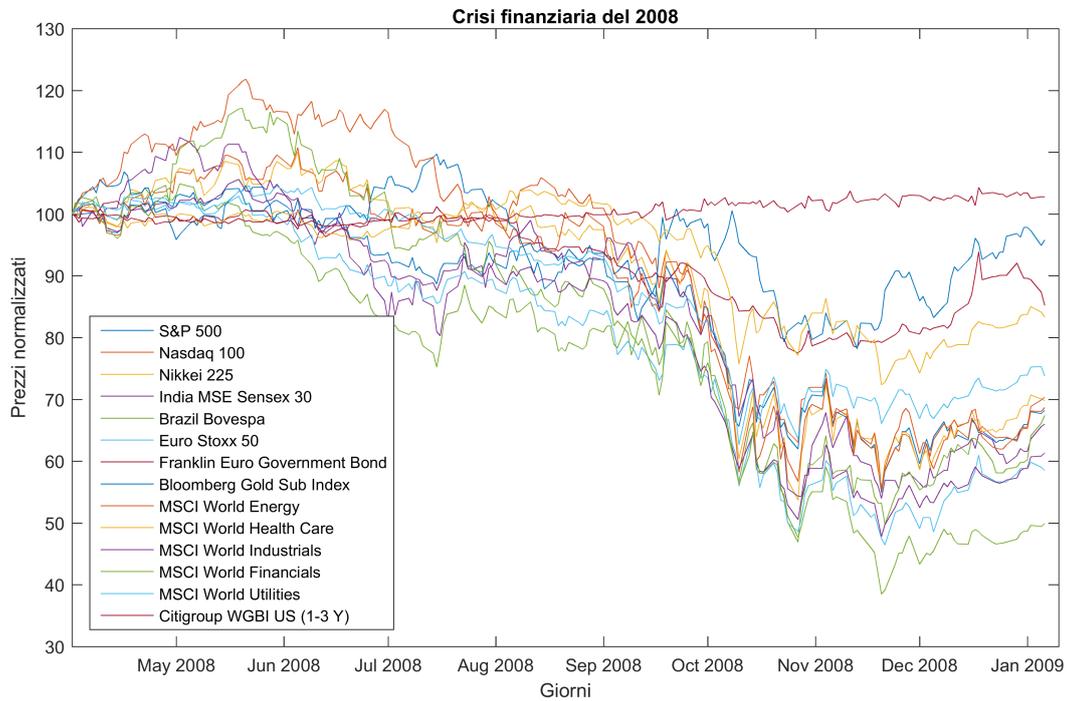


Figura 2.6: Crisi finanziaria del 2008

Risulta pertanto necessario l'utilizzo un altro strumento che sostituisca la matrice di varianza-covarianza per i problemi legati al coefficiente di correlazione lineare di Pearson, in quanto del tutto inadatto per una corretta diversificazione di portafoglio.

## 2.5 Volatilità

Nel primo capitolo abbiamo visto che nel modello di Markowitz per misurare il rischio di un asset si utilizzi la sua volatilità. Come hanno mostrato Elliot e Kopp [10] e [11], la volatilità è la misura di rischio più semplice da utilizzare, ma non necessariamente la più indicata per questo tipo di analisi. In finanza la volatilità non viene considerata una buona misura di rischio, in quanto non fa distinzioni tra la deviazione standard positiva, favorevole all'investitore, e quella negativa, che rappresenta il vero rischio per l'investitore. La volatilità  $\sigma$  viene infatti calcolata come distanza dei rendimenti dalla loro media:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^n (R_i - \mu)^2}$$

dove  $R_i$  rappresenta il rendimento  $i$ -esimo,  $N$  è il numero di rendimenti e  $\mu$  il rendimento atteso.

La volatilità è una misura della variazione dei prezzi di un asset finanziario o di un portafoglio. Più la volatilità è alta, più la variazione dei prezzi in un periodo fissato è elevata. Un titolo molto volatile è generalmente sconsigliato per un investitore avverso al rischio. Supponiamo ora di avere un titolo che alterni fasi di relativa stabilità e fasi con una crescita molto rapida. Nonostante l'acquisto di questo asset dovrebbe essere caldamente consigliato, secondo l'approccio media-varianza di Markowitz potrebbe non essere messo in portafoglio venendo considerato come rischioso, per via dell'elevata volatilità.

Questo mette in evidenza quanto un approccio basato sulla volatilità possa risultare inadeguato e per un modello più efficiente sia necessaria una misura di rischio alternativa.

L'ultima osservazione di questo capitolo riguarda la selezione dei dati da considerare per calcolare il portafoglio ottimale. Ciò significa che se l'orizzonte temporale per cui si prevede di mantenere le posizioni è di un mese,

non ha senso considerare cosa sia successo dieci o più anni prima allo stesso modo di ciò che è accaduto negli ultimi mesi. Si può quindi decidere di pesare l'importanza dei dati in base a quanto essi siano recenti, in modo che a quelli più recenti venga allocato un peso elevato, e un peso più ridotto per i dati più vecchi. In alternativa, è possibile prendere in esame soltanto gli ultimi  $N$  periodi di osservazione rispetto alla data in cui viene effettuata l'analisi, considerando quindi solo gli avvenimenti più recenti, più significativi per l'andamento del titolo. In questo modo, se un asset in passato è stato molto promettente, mentre negli ultimi mesi ha realizzato una performance particolarmente negativa, non verrà inserito in portafoglio, in quanto la media dei rendimenti degli ultimi mesi risulta negativa e il rischio, in qualunque modo lo si calcoli, medio-alto. Al contrario, se viene analizzata tutta la serie storica del titolo, la media dei rendimenti sarà positiva, quindi risulterà più probabile un suo acquisto.

In questo modo si evita il problema di stimare in modo errato il rischio e/o il rendimento storico di un asset, indipendentemente dalla misura di rischio che viene utilizzata.

# Capitolo 3

## Il modello di Black-Litterman

In questo capitolo verrà presentato il modello sviluppato nei primi anni '90 da Fischer Black e Robert Litterman [12], due analisti di Goldman Sachs. Questo modello cerca di superare alcuni dei problemi di cui soffre la teoria di Markowitz quando viene applicata in pratica. Invece di affidarsi solamente all'analisi di quanto accaduto in passato, si cercano di inserire nel modello anche le opinioni future sui rendimenti dei vari asset finanziari delle figure di rilievo nell'ambito bancario, sotto forma di "views". In questo modo si ottengono dei pesi dei vari titoli finanziari molto più stabili nel tempo, un risultato molto più adatto alla gestione effettuata da un fondo d'investimento.

### 3.1 Il modello

Il modello di Black-Litterman, esattamente come quello di Markowitz, ha come obiettivo quello di massimizzare il rendimento a parità di rischio o, viceversa, quello di minimizzare il rischio a parità di rendimento. Differentemente da quest'ultimo, però, vengono utilizzate anche le opinioni degli investitori al fine di fornire dei risultati più validi. Il modello parte dall'assunzione che mentre è possibile calcolare la matrice di varianza-covarianza, non si può fare la stessa cosa per i rendimenti futuri. Ciò determina quindi

una ricerca di quali potranno essere i rendimenti a posteriori, conoscendo quanto accaduto in passato e le views. Pertanto, si cerca di combinare le opinioni che hanno gli investitori riguardo ai rendimenti attesi dei vari asset finanziari, con il vettore dei rendimenti impliciti all'equilibrio di mercato ottenendo così una stima migliore dei rendimenti futuri. Di conseguenza viene impiegato un approccio bayesiano, dove i rendimenti impliciti corrispondono alla distribuzione a priori. Più sono affidabili le views, più influenza avranno nella scelta finale degli asset da acquistare, quindi una corretta stima è cruciale. Il loro grado di affidabilità viene definito attraverso la matrice di confidenza, la cui definizione formale viene data più avanti.

Così facendo, se le views espresse divergono da quanto stimato attraverso i rendimenti impliciti, che si basano sulle serie storiche, l'allocazione finale dei pesi dei vari asset sarà diversa da quella ottenuta con Markowitz. Il risultato è un'allocazione di portafoglio avente pesi molto più stabili nel tempo rispetto al modello tradizionale, dove accade frequentemente che si vendano tutti i titoli che si hanno in portafoglio per comprarne altri, comportando così elevati costi di transazione. In sintesi, questo modello suggerisce di:

- Trovare i rendimenti impliciti a priori
- Formulare le views degli investitori
- Determinare i rendimenti attesi a posteriori
- Trovare l'allocazione di portafoglio ottimale

Prima di definire i rendimenti impliciti all'equilibrio di mercato, è necessario introdurre il coefficiente di implicita avversione al rischio  $\lambda$ . Indicati con  $R_P$  e  $\sigma_P$  rispettivamente il rendimento e la deviazione standard dell'indice maggiormente rappresentativo tra quelli a disposizione, con  $r_f$  il tasso d'interesse per titoli privi di rischio, o risk-free, abbiamo [13]:

$$\lambda = \frac{(R_P - r_f)}{\sigma_P^2}$$

Il parametro  $\lambda$  rappresenta quindi un valore di riferimento per il rapporto tra rendimento e rischio.

Seguendo quanto visto in He e Litterman [14], Satchell e Scowcroft [15], Idzorek [16] e Walters [17], consideriamo un mercato composto da  $N$  asset finanziari, i cui rendimenti sono distribuiti secondo una normale:

$$X \sim N(\mu, \Sigma)$$

La matrice  $\Sigma$ , come detto in precedenza, corrisponde alla matrice di varianza-covarianza e può essere facilmente calcolata a partire dai rendimenti giornalieri. Per quanto riguarda il vettore dei rendimenti attesi  $\mu$ , invece, poiché non è possibile conoscerlo con certezza, lo si può vedere come una variabile aleatoria, la cui varianza rappresenta il grado di incertezza nella stima. Quindi, il modello di Black-Litterman definisce che il vettore  $\mu$  è distribuito secondo una distribuzione normale:

$$\mu \sim N(\pi, \tau\Sigma)$$

dove  $\pi$  rappresenta il vettore dei rendimenti impliciti e  $\tau$  è uno scalare. In genere  $\tau = 0.05$  [16].

La distribuzione di probabilità appena descritta viene chiamata distribuzione dei rendimenti a priori poiché focalizza l'attenzione solamente su quanto accaduto in passato. Il vettore  $\pi$ , invece, costituisce il punto di partenza del modello di Black-Litterman e viene definito attraverso la seguente:

$$\pi = \lambda \cdot \Sigma \cdot \omega$$

dove  $\omega$  indica il peso di ogni asset in base alla capitalizzazione di mercato. Per quanto riguarda le views, invece, esse vengono definite mediante una matrice  $P$  di dimensione  $K \times N$ , dove  $K$  corrisponde al numero delle views che vengono definite, mentre  $N$  è il numero di asset utilizzati. Come detto in precedenza, poiché ogni view necessita di un relativo valore che ne specifichi il grado di affidabilità, risulta necessario avere una matrice di incertezza  $\Omega$ . Questa matrice può essere determinata in diversi modi; un approccio

talvolta utilizzato è fissare un valore di confidenza di ogni views, oppure si può determinare basandosi sulla matrice di varianza-covarianza dei nostri dati come in Meucci [18] e [19], attraverso la seguente:

$$\Omega = \tau P \Sigma P^t \quad (3.1)$$

Il secondo approccio è maggiormente utilizzato sia nella letteratura che nella pratica, ottenendo una matrice diagonale i cui valori sono proporzionali alla varianza della distribuzione a priori. Al di fuori della diagonale non sono presenti valori perché ogni view è indipendente da tutte le altre, quindi la correlazione è nulla. Più il valore della confidenza è elevato, più la views sarà determinante, in quanto più affidabile, nel processo di stima dei rendimenti a posteriori [16]. Viceversa, una view con confidenza  $\omega_i = 0$  corrisponde ad una view completamente inaffidabile e quindi non avrà alcun impatto sulla stima dei rendimenti attesi a posteriori.

Una volta definiti quali sono i titoli finanziari interessati dalle views e la confidenza di queste, è necessario definire un vettore  $v$  in cui indichiamo gli extra rendimenti che ci aspettiamo di ottenere per gli asset in questione, in aggiunta quindi al rendimento storico calcolato con il vettore  $\pi$ . In questo modo otteniamo che la distribuzione delle views è data dalla seguente [20]:

$$P\mu \sim N(v, \Omega) \quad (3.2)$$

Ora che abbiamo analizzato la distribuzione dei rendimenti a priori e la distribuzione delle views, possiamo definire la formula di Black-Litterman per il calcolo del vettore dei rendimenti attesi a posteriori.

Per prima cosa, cominciamo col riscrivere la densità di probabilità della distribuzione dei rendimenti attesi  $\mu$ . Non dimentichiamo che  $\mu$  corrisponde alla media dei rendimenti futuri degli asset, e quindi non è nota. Sappiamo, però, che  $\mu \sim N(\pi, \tau\Sigma)$  e pertanto:

$$f_\mu(\mu) = \frac{|\tau\Sigma|^{-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\mu-\pi)^t(\tau\Sigma)^{-1}(\mu-\pi)}$$

Inoltre, secondo quanto visto in (3.2), possiamo riscrivere il vettore degli extra rendimenti  $v$  attraverso la seguente:

$$v \stackrel{d}{=} P\mu + Z$$

dove  $Z \sim N(0, \Omega)$ .

Pertanto, il vettore  $v$  lo possiamo interpretare come una variabile aleatoria  $V$ , la cui distribuzione, condizionata al parametro  $\mu$ , è data da:

$$V|\mu \sim N(P\mu, \Omega)$$

Per determinare la distribuzione dei rendimenti a posteriori  $\mu$  data  $V$ , applichiamo il teorema di Bayes:

$$f_{\mu|v}(\mu) = \frac{f_{\mu,v}(\mu, v)}{f_V(v)} = \frac{f_{V|\mu}(v)f_{\mu}(\mu)}{\int f_{V|\mu}(v)f_{\mu}(\mu) d\mu} \quad (3.3)$$

Il nostro obiettivo è quello di arrivare a scrivere la distribuzione di  $\mu|(v, \Omega)$  che definisce i rendimenti giornalieri a posteriori dei nostri asset finanziari. A questo scopo possiamo mostrare che il numeratore della precedente equazione come  $f_{V|\mu}$  per una costante. La funzione di densità di  $V|\mu$  è data da:

$$f_{V|\mu}(v) = \frac{|\Omega|^{-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{K}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (v - P\mu)^t \Omega^{-1} (v - P\mu) \right\}$$

Di conseguenza, possiamo scrivere il numeratore dell'equazione (3.3) come:

$$\begin{aligned} f_{\mu,v}(\mu, v) &= f_{V|\mu}(v) \cdot f_{\mu}(\mu) \\ &\propto |(\tau\Sigma)|^{-\frac{1}{2}} |\Omega|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} [(\mu-\pi)^t (\tau\Sigma)^{-1} (\mu-\pi) + (v-P\mu)^t \Omega^{-1} (v-P\mu)]} \end{aligned}$$

Definita questa funzione di densità, seguiamo il ragionamento descritto in Meucci [20], per ottenere la distribuzione dei rendimenti a posteriori.

Riscriviamo la distribuzione dei rendimenti giornalieri, che ricordiamo essere una normale di media  $\mu$  e varianza  $\Sigma$ , come  $X \stackrel{d}{=} \mu + Z$ , dove  $Z \sim N(0, \Sigma)$ . Sappiamo, inoltre, che la distribuzione dei rendimenti attesi a posteriori è data da:

$$\mu|v, \Omega \sim N(\mu_{BL}, \Sigma_{BL}^{\mu})$$

dove:

$$\mu_{BL} = [(\tau\Sigma)^{-1} + P^t \Omega^{-1} P]^{-1} \cdot [(\tau\Sigma)^{-1} \pi + P^t \Omega^{-1} v] \quad (3.4)$$

$$\Sigma_{BL}^\mu = [(\tau\Sigma)^{-1} + P^t \Omega^{-1} P]^{-1} \quad (3.5)$$

Di conseguenza abbiamo che la distribuzione dei rendimenti a posteriori si può ottenere attraverso la seguente:

$$X|(v, \Omega) \stackrel{d}{=} \mu|(v, \Omega) + Z$$

Assumendo che  $\mu$  e  $Z$  siano indipendenti è facile vedere che:

$$\Sigma_{BL} = \Sigma + \Sigma_{BL}^\mu$$

Possiamo quindi finalmente scrivere la distribuzione a posteriori dei rendimenti come:

$$X|(v, \Omega) \sim N(\mu_{BL}, \Sigma_{BL})$$

dove  $\mu_{BL}$  e  $\Sigma_{BL}$  sono stati definiti in (3.4) e (3.5).

Pertanto nella distribuzione a posteriori viene tenuto conto sia della distribuzione a priori dei rendimenti impliciti sia della distribuzione delle views. Questo permette di utilizzare i rendimenti storici congiuntamente alle informazioni sui futuri andamenti dei mercati finanziari che possono riuscire a prevedere gli analisti finanziari al fine di ottenere una migliore stima di quali potranno essere gli asset più redditizi in cui investire il proprio capitale.

Siamo quindi giunti a definire quale sia la distribuzione a posteriori dei rendimenti attesi. In questo modo, è possibile calcolare i rendimenti  $\mu_{BL}$  e la varianza  $\Sigma_{BL}$  e inserire questi dati nel problema di ottimizzazione già visto per il modello di Markowitz. Così facendo, si riescono ad ottenere risultati molto più affidabili nel tempo, in grado di ridurre in modo significativo le perdite che si possono ottenere rispetto al modello di Markowitz. Nel Capitolo 7, infatti, verranno effettuate delle analisi storiche su due tipologie di portafogli, al fine di mostrare, dati alla mano, quanto il modello di Black-Litterman riesca a fornire previsioni più attendibili su quali potranno essere

gli asset più promettenti in futuro.

Di conseguenza, l'effetto di questo modello è quello di aumentare la diversificazione del proprio portafoglio. Questo risultato si può facilmente verificare attraverso un grafico che mostra come variano i pesi dei titoli finanziari all'aumentare della soglia di rischio della frontiera efficiente. Come si può vedere dalle due figure di seguito riportate, per il modello di Black-Litterman le variazioni sono molto più "lisce" rispetto a quelle più brusche del modello di Markowitz. Inoltre, il numero di asset che viene messo in portafoglio è quasi sempre in numero superiore, testimoniando un aumento della diversificazione.

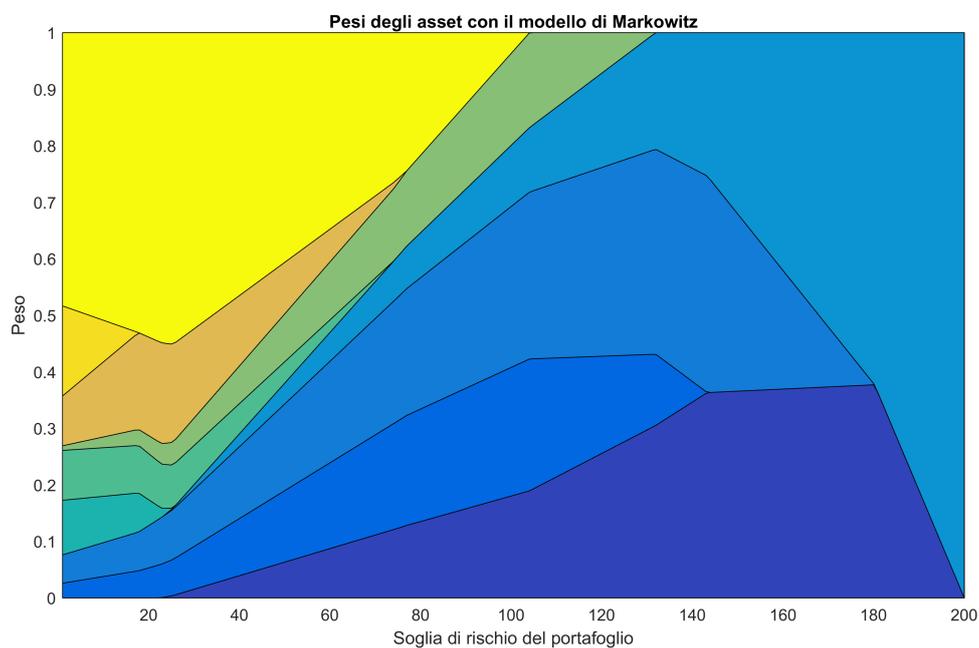


Figura 3.1: Pesi degli asset nel modello di Markowitz.

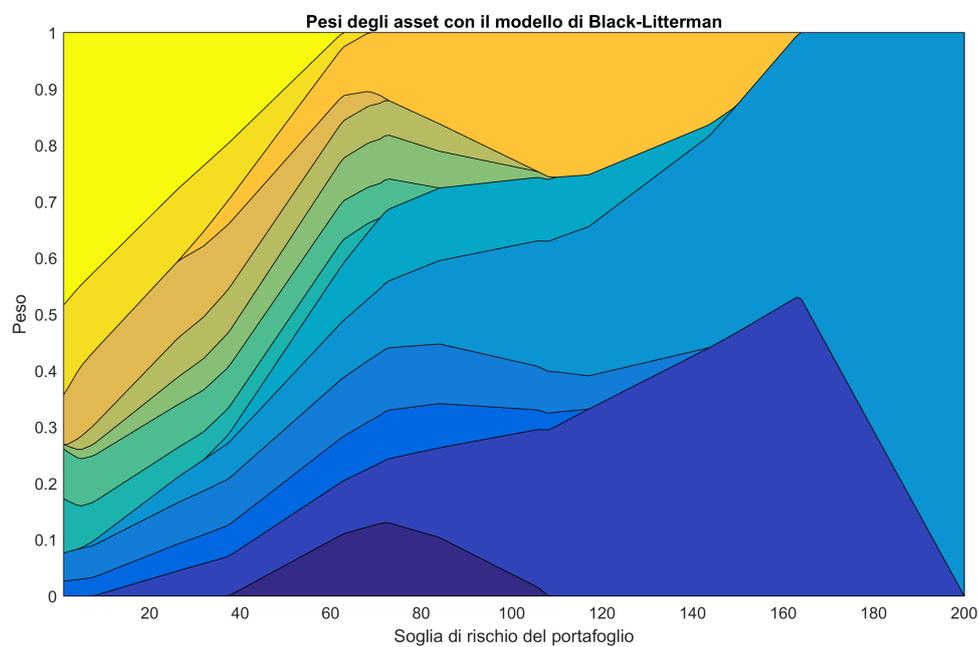


Figura 3.2: Pesi degli asset nel modello di Black-Litterman.

## 3.2 Le views

Come abbiamo visto nel modello di Black-Litterman le views hanno un ruolo centrale nel processo di ottimizzazione. In questo modello queste opinioni possono essere espresse in termini assoluti, cioè confrontando un singolo asset rispetto a tutti gli altri, oppure relative, riferendosi pertanto al fatto che un determinato titolo potrà avere un rendimento superiore rispetto ad un altro. Vediamo ora un esempio per comprendere meglio come inserire le views nel modello.

Supponendo di avere a disposizione 14 asset finanziari, definiamo ora due opinioni secondo quanto detto:

- "L'asset 4 avrà un rendimento del 2% più elevato rispetto a tutti gli altri titoli" (opinione assoluta)
- "L'asset 7 avrà un rendimento del 5% più elevato rispetto all'asset 10" (opinione relativa)

Intuitivamente, una volta terminato il processo di ottimizzazione, ci si aspetta di mettere in portafoglio l'asset 4 e, quasi sicuramente, anche l'asset 7 poiché ci aspettiamo che questi titoli otterranno una buona performance.

In base a quanto visto nel paragrafo precedente, per formalizzare le due opinioni costruiamo il vettore  $v$  e le relative matrici  $P$  e  $\Omega$ . Poiché si hanno due views, la matrice  $P$  avrà dimensione  $2 \times 14$ , vale a dire una riga per ciascuna view. Per la stessa ragione,  $v$  e  $\Omega$  avranno, rispettivamente, dimensione  $2 \times 1$  e  $2 \times 2$ . Ogni cella della matrice  $P$  può avere soltanto valori,  $P_{i,j} \in \{-1, 0, 1\}$  [15]. Se la view  $i$ -esima è relativa,  $P_{i,j}$  avrà valore 1 se l'asset  $j$ -esimo è interessato dalla view e questa ha opinione positiva nei suoi confronti, quindi ci aspettiamo che il rendimento sia superiore rispetto ad un altro titolo, 0 se non è interessato dalla view, -1 se è interessato dalla view ma ha opinione negativa. In altre parole, se ci aspettiamo che l'asset  $j$  otterrà una performance superiore al titolo  $k$ , metteremo 1 nella colonna  $j$  e -1 nella colonna  $k$ .

Nel caso in cui la view sia assoluta, invece, solo nella colonna corrispondente all'asset a cui è riferita la view avrà valore 1, mentre nel resto della riga si ha 0. Nel nostro caso, pertanto, abbiamo:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per il vettore  $v$ , invece, è sufficiente inserire, per ciascuna view, l'ammontare dell'extra rendimento che ci aspettiamo, mentre la matrice  $\Omega$  viene costruita come descritto nell'equazione (3.1):

$$Q = \begin{pmatrix} 0.02 \\ 0.05 \end{pmatrix} \quad \Omega = \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & \omega_2 \end{pmatrix}$$

Adesso, attraverso le formule viste in questo capitolo, è possibile calcolare  $\Omega$  e  $\Pi$ , riuscendo così a determinare la distribuzione dei rendimenti a posteriori e quindi  $\mu_{BL}$  e  $\Omega_{BL}$ .

Infine, per ottenere il portafoglio ottimale, i rendimenti  $\mu_{BL}$  e la matrice di varianza-covarianza  $\Omega_{BL}$  dovranno essere inseriti come input all'interno del processo di ottimizzazione di Markowitz presentato nel primo capitolo.

Come già anticipato in precedenza, da questo tipo di ottimizzazione i pesi che si otterranno saranno molto più stabili, quindi senza le brusche variazioni che caratterizzano molto spesso i risultati del modello di Markowitz.

Per mostrare quanto detto, riprendiamo il problema introdotto nel primo capitolo relativo all'investitore che dispone di 14 asset in cui investire e fissiamo la soglia di rischio a 0.01.

Ricordiamo che i dati a nostra disposizione vanno da inizio 1999 fino a fine ottobre 2017 e che il modello analizza gli ultimi 250 giorni di borsa, corrispondenti ad un anno solare, e mantiene le posizioni per i sei mesi successivi. In base a quanto visto in questo capitolo, calcoliamo per ogni periodo i pesi ottimali, prima utilizzando il modello di Markowitz originario e poi con il modello di Black-Litterman.

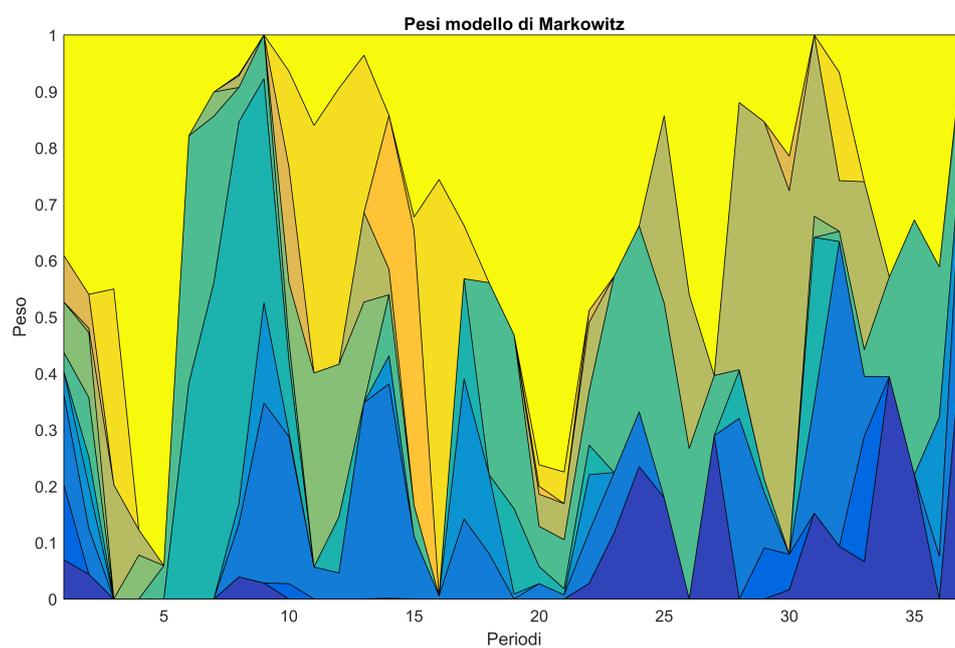


Figura 3.3: Pesi degli asset nel modello di Markowitz.

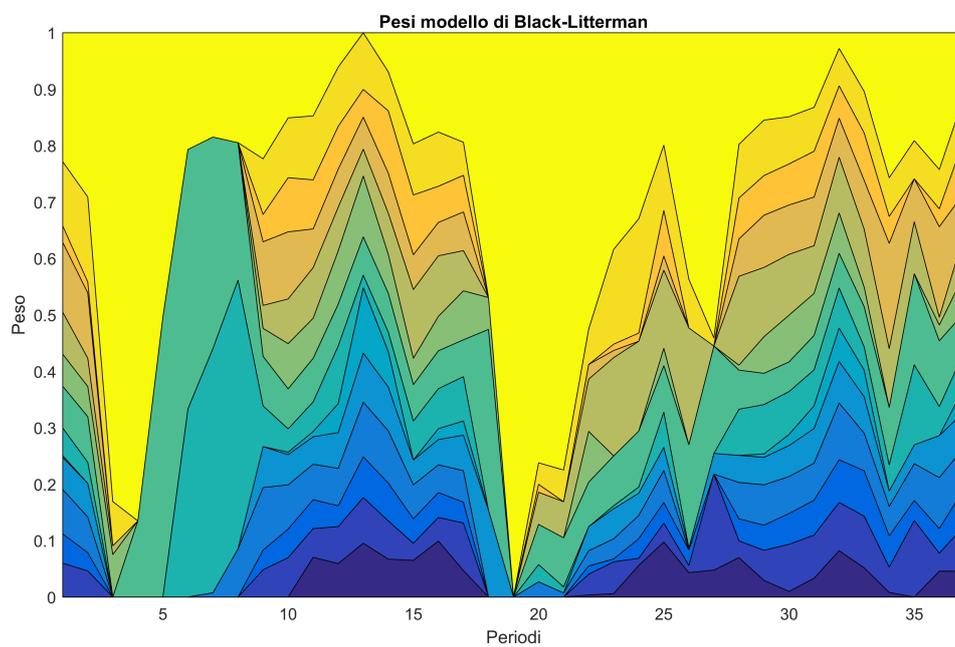


Figura 3.4: Pesi degli asset nel modello di Black-Litterman.

Confrontando i due grafici qui sopra riportati, si vede chiaramente come nella seconda figura, cioè utilizzando il modello di Black-Litterman, le variazioni siano molto più lievi e quanto la diversificazione sia più marcata.

Nel primo grafico, infatti, il numero di asset detenuti in ogni periodo è piuttosto ridotto e capita di frequente che buona parte dei titoli in portafoglio vengano venduti per far spazio ad altri, comportando elevatissimi costi di transazione, ma non solo. Nel caso in cui sia un fondo d'investimento ad operare con questa politica, questi si ritroverebbe spesso a vendere sul mercato grossissime quantità di titoli, per via dell'elevata mole di denaro che generalmente hanno in gestione. Questo si tradurrebbe in un crollo del prezzo di vendita per i titoli da rimuovere dal portafoglio e, al contrario, in un forte aumento del prezzo di acquisto per i titoli da acquistare. Se poi si tratta di titoli non molto scambiati ecco che i problemi diventano complicati. Di conseguenza il modello di Markowitz, oltre a tutti i vari problemi che abbiamo visto nel secondo capitolo, possiede anche un problema di scarsa applicabilità al mondo reale.

Al contrario, invece, nella seconda figura si vede chiaramente che le quantità di titoli scambiati si riducono notevolmente. Solo durante i periodi delle crisi finanziarie del 2000, corrispondente grossomodo ai periodi 2-3, e del 2008, periodi 19-21, l'allocation tende a spostarsi verso un titolo obbligazionario sui bond americani, corrispondente in figura al colore giallo. Ma questo per via dell'instabilità degli asset nel periodo di riferimento, mentre per tutti gli altri periodi la diversificazione è evidente.

# Capitolo 4

## Distribuzioni dei rendimenti

Come abbiamo visto nel Paragrafo 2.2, la distribuzione gaussiana non è in grado di stimare correttamente la distribuzione dei rendimenti degli asset finanziari, per via delle code troppo sottili e per il fatto che la distribuzione è simmetrica. Quindi si è pensato di utilizzare la distribuzione  $t$  di Student che ha code più spesse, ma anch'essa è una distribuzione simmetrica.

In questo capitolo verranno presentate due distribuzioni alternative, la Pareto e la Pareto generalizzata (GPD), in grado approssimare molto più dettagliatamente i rendimenti giornalieri in entrambe le code della distribuzione.

### 4.1 Distribuzione di Pareto

Un modo per identificare le tipologie di distribuzioni che sono in grado di simulare correttamente gli eventi rari è analizzare la velocità con cui la funzione di densità decresce quando ci si allontana dalla sua media. La distribuzione normale, ad esempio, decresce con velocità esponenziale. La distribuzione di Pareto, invece, tende a zero con velocità polinomiale, indicandoci che potrebbe essere adatta a risolvere questo problema. Sviluppata dall'economista italiano Vilfredo Pareto al fine di descrivere la distribuzione della ricchezza tra la popolazione [21], è frequentemente utilizzata nelle situazioni in cui si ha una coda destra della distribuzione molto lunga. Nell'analisi di Pareto,

era piuttosto evidente che in ogni società la maggior parte della ricchezza era detenuta da una piccola percentuale di persone. Vediamo ora com'è definita questa distribuzione.

Una variabile aleatoria  $X$  è distribuita secondo una distribuzione di Pareto avente scale parameter  $K > 0$  e shape parameter  $\alpha > 0$  se e solo se la sua funzione di densità è data da:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha K^\alpha}{x^{\alpha+1}} & \text{se } x \geq K \\ 0 & \text{se } x < K \end{cases}$$

Mentre la funzione di ripartizione è data dalla seguente:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{K}{x}\right)^\alpha & \text{se } x \geq K \\ 0 & \text{se } x < K \end{cases}$$

Pertanto  $K$  è il valore minimo per  $X$ . Se  $0 < \alpha \leq 1$  il valore atteso di  $X$  è infinito, mentre se  $\alpha > 1$  il valore atteso è dato da:

$$E[X] = \frac{\alpha K}{\alpha - 1}$$

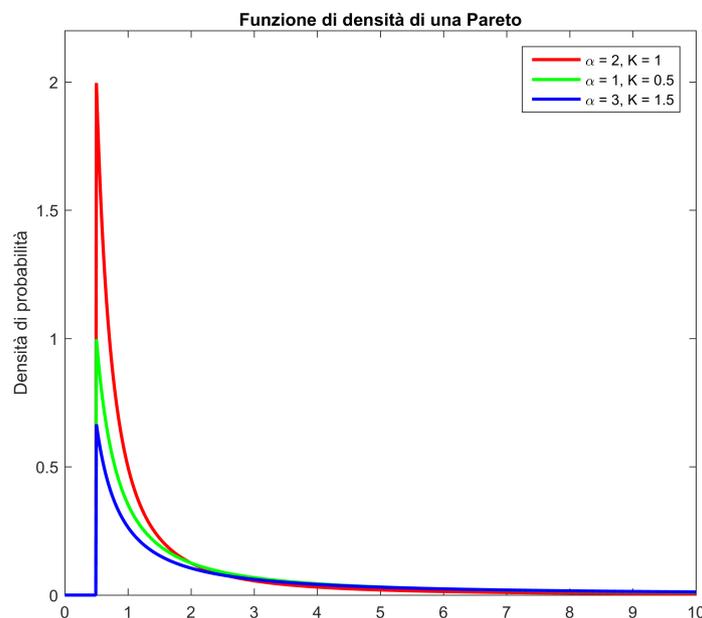


Figura 4.1: Funzione di densità della distribuzione Pareto

Questa distribuzione viene impiegata in moltissimi settori, fra i quali è utile nell'analisi di:

- Dimensione dei file sulla rete Internet (molti piccoli file, pochi grandi file) [22]
- Errori degli hard disk [23]
- Riserve presenti nei giacimenti petroliferi
- Rendimenti di titoli finanziari [22]
- Dimensione delle particelle di sabbia

## 4.2 Distribuzione di Pareto generalizzata

Rispetto alla distribuzione di Pareto che abbiamo appena visto, la distribuzione di Pareto generalizzata (spesso abbreviata con GPD), dispone di tre parametri [24]. Oltre ai parametri di scale  $K$  e shape  $\alpha$ , possiede anche un location parameter  $\mu$ . La funzione di ripartizione di una variabile aleatoria  $X$  avente come distribuzione una Pareto generalizzata è data dalla seguente:

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \alpha \frac{x - \mu}{K}\right)^{-\frac{1}{\alpha}} & \text{se } \alpha \neq 0 \\ 1 - \exp\left(-\frac{x - \mu}{K}\right) & \text{se } \alpha = 0 \end{cases}$$

Con  $x \geq \mu$  quando  $\alpha \geq 0$  e  $\mu \leq x \leq \mu - \frac{K}{\alpha}$  quando  $\alpha < 0$ .

Se  $\alpha < 1$ , il valore atteso di  $X$  è dato da:

$$E[X] = \mu + \frac{K}{1 - \alpha}$$

È facile vedere che ponendo  $\alpha > 0$  e  $\mu = \frac{K}{1 - \alpha}$  si ottiene la distribuzione di Pareto vista nel paragrafo precedente, caso particolare della versione generalizzata. Inoltre è possibile ricondursi alla distribuzione esponenziale, semplicemente fissando i parametri di shape e di location a zero.

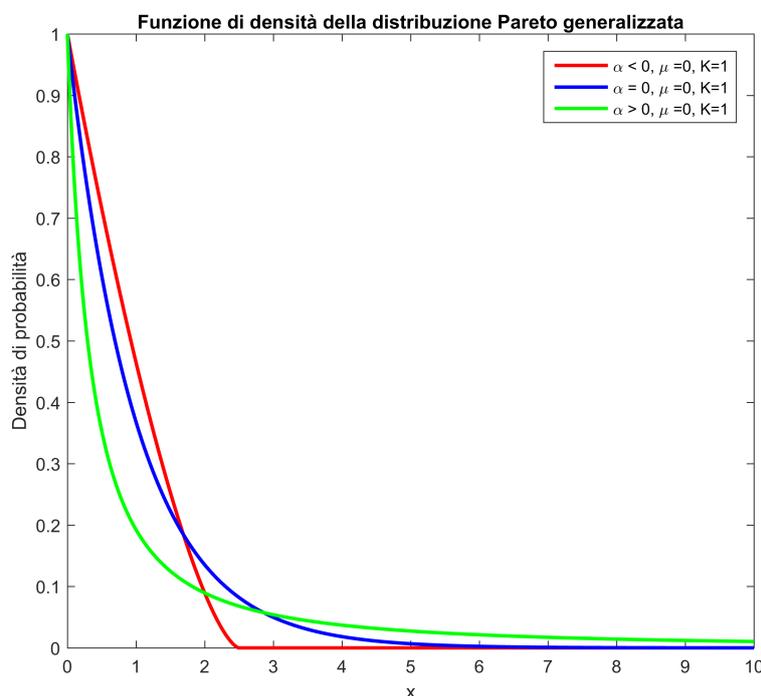


Figura 4.2: Funzione di densità della distribuzione Pareto generalizzata

Come in ambito finanziario, anche in numerosi problemi ingegneristici, è importante stimare adeguatamente gli eventi rari. Nel nostro caso ci troviamo a dover stimare, al meglio delle nostre capacità, le probabilità di sedute di borsa particolarmente negative. Proprio per il fatto che sono eventi rari non sempre è possibile stimare con precisione la coda negativa della distribuzione. Inoltre, mentre la stima delle code viene eseguita attraverso un metodo parametrico, per l'analisi della parte centrale della distribuzione ci si può servire della funzione di ripartizione empirica, oppure attraverso il kernel. Come per la distribuzione di Pareto, anche in questo caso si cerca di trovare una coda che decresca con velocità polinomiale. Chiaramente risulta cruciale la scelta del valore da cui far partire la distribuzione. Non bisogna sceglierlo troppo elevato, altrimenti si rischia di non avere abbastanza dati per una stima valida della coda, ma sufficientemente grande per ottenere un comportamento omogeneo oltre questa soglia.

Vediamo ora in pratica quanto questa distribuzione sia più precisa della normale utilizzata nel modello di Markowitz. Prendiamo in esame i rendimenti giornalieri dell'indice Nasdaq 100 dall'inizio di gennaio del 1999 fino al 31 ottobre 2017 e stimiamo i parametri della distribuzione di Pareto generalizzata e della gaussiana.

Nel primo caso, per modellare la parte centrale utilizzeremo il kernel, mentre per le due code useremo due diverse Pareto generalizzate. Come parametro di riferimento per le code, utilizziamo il 10% dei dati a disposizione. Pertanto, per stimare la coda destra, si ordinano i rendimenti giornalieri in modo decrescente e si analizza il primo 10%, quindi il primo decile, e si ripete lo stesso procedimento per la coda sinistra. Ciò che otteniamo è quindi una distribuzione che possiamo definire ibrida, in quanto è formata da due GPD e da una terza distribuzione per la parte centrale.

Per il confronto con la distribuzione normale, possiamo calcolare la skewness e la curtosi della distribuzione empirica, ottenendo rispettivamente 0.391 e 10.41, valori che ci confermano subito l'inefficacia della distribuzione normale. Dopo aver stimato i parametri di quest'ultima distribuzione, vediamo in un grafico un confronto di quanto le due distribuzioni siano in grado di approssimare correttamente i nostri dati.

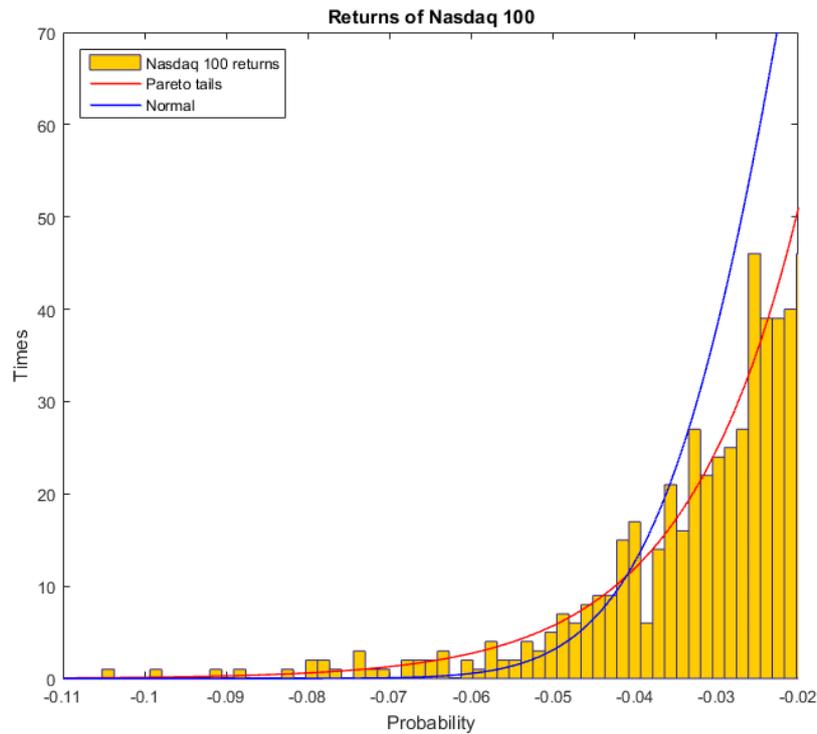


Figura 4.3: Rendimenti dell'indice Nasdaq 100

Come si vede in figura, la distribuzione ibrida che si serve delle Pareto generalizzate approssima molto meglio i nostri dati rispetto alla normale. In questo caso è stata riportata solamente la parte negativa della distribuzione, in quanto corrisponde alla parte più problematica per un investitore, vale a dire la probabilità di ottenere perdite elevate dall'asset in questione. Questa migliore approssimazione si traduce in una stima molto più accurata dell'effettiva rischiosità dell'asset, soprattutto per le perdite pesanti. Quindi, una corretta stima della coda sinistra della distribuzione è essenziale per comprendere il corretto livello di rischio che possiede quel determinato titolo finanziario, in modo da tenerne conto durante il processo di ottimizzazione del portafoglio.

Nel Capitolo 7, quando si cercherà di allocare in modo ottimale un portafoglio, verrà fatto ampio uso di questo tipo di distribuzione.

# Capitolo 5

## Misure di rischio finanziario

In questo capitolo verranno presentate alcune tra le più importanti misure di rischio finanziario. Come abbiamo visto nel secondo capitolo, il modello di Markowitz prevede l'utilizzo della volatilità come misura di rischio, ma questa non risulta essere efficiente, poiché non fa distinzioni tra la volatilità positiva, favorevole all'investitore, e quella negativa, che ne rappresenta il vero problema.

Una corretta valutazione di rischio di un asset risulta cruciale in molte situazioni, ad esempio:

- I regolatori finanziari cercano di evitare che una società finanziaria collassi e, nel caso in cui questo accada, di minimizzarne l'impatto sulle altre. Per questo scopo vengono applicate delle restrizioni alle tipologie ed alle quantità di transazioni permesse come, ad esempio, delle limitazioni sulla vendita allo scoperto;
- I risparmiatori sono interessati a diversificare i propri investimenti per evitare che nei periodi di discesa dei mercati si trovino eccessivamente esposti su pochi asset;
- I risk manager delle società di investimento spesso impongono restrizioni sulle operazioni che può fare ogni singolo trader, per evitare che questa si trovi molto esposta su alcune tipologie d'investimento, che,

sotto particolari condizioni di mercato, si possono tradurre in una grossa perdita. Un esempio di questo problema è il caso di Jérôme Kerviel, un trader di Société Générale che nel gennaio 2008 accusò una perdita di circa 4,9 miliardi di euro a causa di operazioni rischiose da lui occupate, per un totale nozionale di circa 50 miliardi di euro. Un'altra perdita record è invece stata causata da Howie Hubler, un trader di Morgan Stanley, quando nel 2008 vendette 16 miliardi di dollari di Credit Default Swap (CDS), che fungono da garanzia, su tranche AAA di una collateralized debt obligation (CDO), composta principalmente da mutui subprime. Quando questi ultimi iniziarono ad andare in default il prezzo del CDO crollò e di conseguenza i CDS vennero esercitati con una perdita per Morgan Stanley di oltre 9 miliardi di dollari.

Dopo aver illustrato due misure di rischio, sarà possibile riformulare il problema di ottimizzazione di Markowitz, utilizzando questi strumenti in sostituzione alla volatilità.

## 5.1 Definizione di misura di rischio

Una misura di rischio gioca un ruolo chiave nel processo di selezione degli asset da inserire in portafoglio, per il quale l'obiettivo è di massimizzare il rendimento atteso, dato un determinato livello di rischio [25]. In questo paragrafo vengono descritte le proprietà che una buona misura di rischio deve avere, mentre successivamente verranno presentate due tra le misure di rischio più utilizzate in ambito finanziario, che sono il Value at Risk (VaR) e il Conditional Value at Risk (CVaR), anche noto come Expected Shortfall. In Hult et al. [26], viene presentata la teoria su cui si basano le misure di rischio. Vengono quindi definite le proprietà che una misura di rischio deve soddisfare affinché sia considerata coerente. Indichiamo ora con  $\rho(X)$  una funzione in grado di misurare il rischio di una variabile aleatoria  $X$ .

**Proprietà 1. Invarianza per traslazioni.**

Se ad un portafoglio  $X$  viene aggiunta una quantità di denaro  $k$  investita ad un tasso risk-free  $R_0$ , il rischio complessivo viene ridotto di  $k$ .

$$\rho(X + kR_0) = \rho(X) - k \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

**Proprietà 2. Monotonicità.**

Siano  $X_1$  e  $X_2$  due diversi portafogli. Una variabile aleatoria  $X_2$  si dice stocasticamente dominante rispetto a  $X_1$ , se per qualsiasi funzione monotona  $f$  si ha:

$$E[f(X_1)] \leq E[f(X_2)]$$

Se il portafoglio  $X_2$  è stocasticamente dominante rispetto al portafoglio  $X_1$ , allora il rischio del portafoglio 2 sarà minore rispetto a quello del portafoglio 1.

$$\text{Se } X_1 \preceq_{SD} X_2 \text{ allora } \rho(X_1) \geq \rho(X_2)$$

dove con  $X_1 \preceq_{SD} X_2$  viene indicata la dominanza stocastica di  $X_2$  su  $X_1$ .

**Proprietà 3. Sub-additività.**

Siano  $X_1$  e  $X_2$  due diversi portafogli. Il rischio complessivo dei due portafogli non può essere maggiore della somma dei rischi dei due portafogli presi singolarmente.

$$\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2)$$

Questa proprietà è anche nota come principio di diversificazione.

**Proprietà 4. Convessità.**

Siano  $X_1$  e  $X_2$  due diversi portafogli e  $\lambda \in [0, 1]$ .

La misura del rischio premia la diversificazione: è meglio ripartire l'investimento su tante posizioni rischiose piuttosto che concentrare l'investimento su pochi strumenti finanziari.

$$\rho(\lambda X_1 + (1 - \lambda)X_2) \leq \lambda\rho(X_1) + (1 - \lambda)\rho(X_2)$$

**Proprietà 5. Normalizzazione.**

Se non ho nessun asset in portafoglio il suo rischio è nullo.

$$\rho(0) = 0$$

**Proprietà 6. Omogeneità.**

Incrementare di un fattore  $\lambda$  la dimensione del portafoglio aumenta proporzionalmente il suo rischio. Preso  $\lambda \geq 0$ ,

$$\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X)$$

Una misura di rischio che soddisfa le prime due proprietà (invarianza per traslazioni e monotonicità), è detta misura di rischio monetario ed è sufficiente per sostituire la varianza come misura di rischio nel modello di Markowitz. Se oltre a queste due proprietà una misura di rischio soddisfa anche quella di convessità, essa viene chiamata misura di rischio convessa. Infine, qualora vengano soddisfatte tutte le sei proprietà sopra elencate, si ha una misura di rischio coerente.

Nei paragrafi successivi verranno mostrate due misure di rischio largamente utilizzate in ambito finanziario: il Value at Risk e il Conditional Value at Risk, spesso chiamato anche Expected Shortfall.

## 5.2 Volatility Index (VIX)

Una misura di rischio utilizzata sin dagli anni '90 per analizzare la volatilità dei mercati finanziari è il Volatility Index, o VIX, che viene calcolata dal Chicago Board Options Exchange (CBOE). Già sul finire degli anni '80 del secolo scorso alcuni analisti avevano inventato un indice molto simile, al fine di predire quale fosse la volatilità degli indici finanziari ed evitare di esporsi eccessivamente nel caso in cui la volatilità fosse alta.

Il calcolo del VIX è basato sulla volatilità delle opzioni call e put con scadenza a 30 giorni sull'indice americano S&P 500, corrispondente al valore delle 500 società a maggior capitalizzazione degli Stati Uniti, spesso identificato come il più importante indice borsistico al mondo. Indicato con  $r$  il rendimento di un titolo risk-free e con  $T$  la scadenza delle opzioni (in genere è 30 giorni), il calcolo del VIX è dato dalla seguente formula [27]:

$$\sigma_T^2 = \frac{2}{T} \sum_{i=1}^n \frac{\Delta K_i}{K_i^2} e^{rT} O(K_i) - \frac{1}{T} \left( \frac{F}{K_0} - 1 \right)^2$$

dove  $O(K_i)$  è il prezzo di un'opzione call o put out-of-the-money con strike price  $K_i$ ,  $F$  è il prezzo attuale del forward costruito sui prezzi delle opzioni sottostanti, e  $K_0$  è il valore di strike price più elevato ma inferiore ad  $F$  e  $\Delta K_i$  è l'intervallo tra due strike prices.

Come è facile notare, questa misura di rischio fa affidamento sulle attuali aspettative dei prezzi dell'indice S&P 500, determinandone la volatilità implicita. Nel corso degli anni sono state sviluppate molte altre misure simili a questa per determinare in modo semplice quale fosse la volatilità implicita per i vari mercati finanziari. Chiaramente durante i periodi di crollo dei listini si avrà un significativo aumento degli indici di volatilità in questione con una conseguente avversione all'investimento in quel determinato asset.

Per via dell'elevato successo che ha avuto, nei primi anni 2000 sono stati creati dapprima i futures aventi come sottostante l'indice VIX e, a partire dal 2006, sono state create le opzioni e infine anche gli Exchange-Traded Funds (ETF) nel 2009. Questa misura di rischio viene interpretata ancora

oggi come "indice della paura" ma, come è stato ampiamente precisato nel secondo capitolo, la volatilità non è solamente legata alle oscillazioni al ribasso, ma anche a quelle al rialzo, senza fare distinzione tra le due tipologie. Di conseguenza il VIX avrà un valore basso solamente quando gli investitori non percepiranno né potenziali rischi di discesa né rialzi imminenti delle quotazioni.

Nonostante questo indice sia stato creato sui principali indici azionari di tutto il mondo, non è possibile crearlo in maniera efficiente su ogni titolo azionario, quindi non è facilmente adattabile a qualsiasi asset finanziario. Il VIX è utile quindi solamente per avere un'idea generale della volatilità sui mercati finanziari ma non è in grado di determinare l'effettivo rischio di uno specifico titolo. Un investitore può servirsi del suo valore per avere un'idea di quale sia il rischio in quel determinato mercato e di conseguenza definire quanto esporre il proprio capitale, ma non può avere una misurazione precisa di quale sia il rischio che comporta investire negli asset per cui non esiste un indice di questo tipo. Per questo motivo nella nostra analisi abbiamo utilizzato misure di rischio più opportune come il Value at Risk ed il Conditional Value at Risk, che verranno ora analizzate in dettaglio.

### 5.3 Value at Risk (VaR)

Sviluppato nel 1994 da alcuni analisti della JP Morgan [28], il Value at Risk (VaR) fornisce una stima della massima perdita possibile per un portafoglio composto da vari titoli finanziari, in un arco temporale definito, ad un certo livello di confidenza. Secondo le proprietà descritte nel paragrafo precedente, corrisponde ad una misura di rischio monetario, in grado quindi di sostituire la volatilità nel problema di ottimizzazione di Markowitz [29]. Dal punto di vista statistico, invece, si tratta del quantile, relativo all'intervallo di confidenza desiderato, della distribuzione teorizzata dei rendimenti di un titolo.

**Definizione 5.1** (Value at Risk). *Sia  $X$  una variabile aleatoria rappresentante la distribuzione dei rendimenti di un portafoglio di  $n$  titoli finanziari. Si definisce Value at Risk (VaR) ad un livello di confidenza  $1 - \alpha$ , il valore*

$$VaR_\alpha = \inf \{x \in \mathbb{R} | P[X > x] \leq 1 - \alpha\} = \inf \{x \in \mathbb{R} | P[X \leq x] \geq \alpha\}$$

dove in genere  $\alpha = 0.05$  o  $\alpha = 0.01$ .

La prima parte della formula indica che la probabilità di avere un rendimento superiore ad  $x$  (solitamente  $x$  è negativa) è minore  $1 - \alpha$ , mentre la seconda parte significa che la probabilità di avere una perdita superiore ad  $x$  è almeno  $\alpha$ .

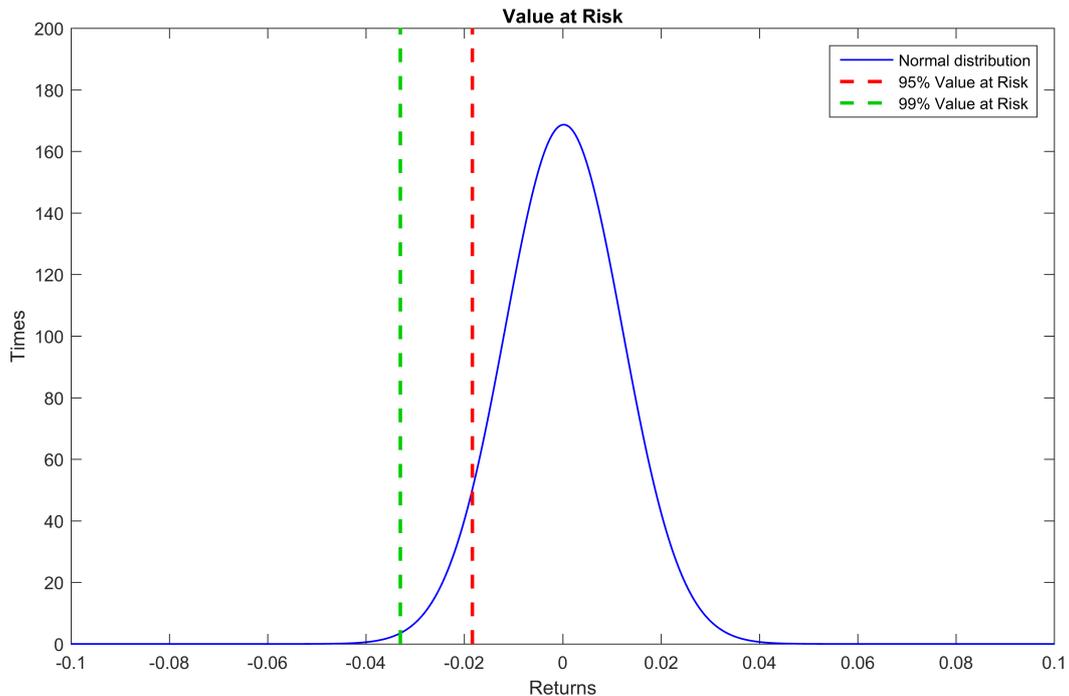


Figura 5.1: Value at Risk

Il VaR funge quindi da indicatore per confrontare le diverse tipologie di strumenti finanziari presenti in un portafoglio, al fine di conoscerne la perdita potenziale. Questa misura di rischio, basata sul concetto di quantile, è in

grado di aggregare in un solo numero diverse componenti di rischio di mercato a cui può essere esposto un portafoglio, ad esempio, il rischio di tasso d'interesse, il rischio della variazione del prezzo dei titoli azionari e il rischio di cambio valutario.

Rispetto alla volatilità, che non faceva distinzione tra volatilità positiva e negativa, il Value at Risk analizza solamente la coda sinistra della distribuzione dei rendimenti di un titolo finanziario, riuscendo così a fornire una stima molto migliore riguardo alla sua rischiosità.

Nonostante questa misura di rischio sia estremamente più significativa della volatilità, bisogna però osservare che essa fornisce soltanto un valore di soglia per cui è raro ottenere un rendimento inferiore. In altre parole, sappiamo con una confidenza di  $1 - \alpha$ , che non otterremo un rendimento inferiore ad  $x$ , ma non conosciamo la perdita a cui potremmo andare incontro nell' $\alpha$  percento dei casi peggiori. Vediamo ora due casi in cui il VaR non è sufficiente per calcolare correttamente il rischio.

Supponiamo di essere un dipendente dell'area rischi di una compagnia assicurativa e di essere interessati a valutare una nuova polizza contro i rischi ambientali, quali terremoti, alluvioni, eccetera. Utilizzando un modello di rischio basato sul VaR per definire il prezzo della nuova polizza ed analizzando i casi in cui questa viene esercitata, otterremo un elevato livello di probabilità di dover risarcire importi moderati, nei casi in cui l'alluvione o il terremoto abbiano provocato danni di lieve entità, e una probabilità molto piccola di dover sborsare cifre molto ingenti, cioè nei casi di eventi particolarmente intensi, causando la completa distruzione dell'abitazione. Visto che da questa analisi si deduce che la società di assicurazioni corre un rischio relativamente basso, il costo della polizza per chi si vuole assicurare sarà conseguentemente basso. Nel caso in cui si verificasse, però, un evento naturale di portata eccezionale, la società rischierebbe di andare in default, in quanto non riuscirebbe a far fronte a tutte le richieste di danni dei clienti. Questo perché è stata considerata solamente della probabilità che un evento si possa presentare, e non della portata che avrebbe avuto. Non si è quindi tenuto

conto che, anche se con una probabilità molto ridotta, l'entità del danno da ripagare sarebbe stata molto alta.

Prendiamo ora il caso di un trader di una società finanziaria che è interessato a mostrare ai suoi superiori quanto sia ridotta la sua esposizione a potenziali rischi di mercato. Poiché il VaR analizza solamente il valore del  $1 - \alpha$  quantile dei rendimenti del portafoglio, il trader potrebbe approfittarne per "nascondere" gli investimenti rischiosi rendendo le perdite più estreme, in modo che la perdita potenziale finisca maggiormente nella parte più sottile della coda della distribuzione e non venga individuata dal Value at Risk. In questo modo, portafogli molto rischiosi potrebbero sembrare accettabili in termini di rischio, esponendo la società a scenari di perdite estremamente elevati. Sebbene le probabilità di questi eventi siano relativamente piccole, l'effetto a cui si andrebbe incontro potrebbe rivelarsi sarebbe catastrofico, comportando magari anche il fallimento della società. Un esempio è quanto detto in precedenza riguardo al trader Howie Hubler, dove per un'errata valutazione del rischio a cui stava andando incontro il suo portafoglio di CDS, si sono persi 9 miliardi di dollari.

Il trader in questione ed il suo team focalizzavano le proprie analisi sulle obbligazioni ipotecarie che erano composte principalmente da mutui immobiliari. A differenza della maggior parte degli altri dipendenti, però, aveva notato che, nonostante il rating di queste obbligazioni fosse di tipo investment grade, queste non erano tutte uguali e, in base a come erano state composte, alcune avevano probabilità molto superiori di fallire rispetto ad altre. Una volta definite quali fossero le obbligazioni ipotecarie che più probabilmente sarebbero andate in default, si passava a stipulare un contratto di tipo assicurativo su di esse (con un CDS). Purtroppo, però, per la natura dei contratti assicurativi finché l'obbligazione non fosse andata in default Morgan Stanley avrebbe dovuto pagare un premio assicurativo mensile, e poiché questo significava una momentanea perdita per la banca, per finanziare i costi dei premi Howie decise di vendere dei CDS, quindi fare da garanzia, su tranche AAA di obbligazioni ipotecarie.

Contrariamente a quanto si aspettava, quando queste obbligazioni iniziarono ad andare in default vennero seguite a ruota dalle tranche AAA in quanto i mutui al loro interno erano estremamente correlati tra loro. Poiché i costi di assicurazione per una tranche AAA sono circa 10 volte quelli di una tranche BBB, questo ha comportato una perdita di circa 9 miliardi di dollari per Morgan Stanley. In questo caso il trader non aveva considerato che se queste obbligazioni fossero diventate insolventi, la società sarebbe stata messa in serio pericolo. Questo perché la probabilità di default per una tranche AAA è molto bassa, quindi si ha la possibilità di esporsi a rischi molto elevati senza che il Value at Risk sia in grado di individuarli correttamente.

Nonostante il Value at Risk potesse sembrare a prima vista una misura di rischio monetario piuttosto efficace, si è visto che anch'essa è soggetta ad alcune problematiche. Se paragonata alla volatilità sicuramente risulta molto valida, ma in termini assoluti soffre ancora di alcuni problemi, poiché non fornisce alcuna stima sull'entità delle perdite potenziali oltre il livello di confidenza, ovvero quando si verificano gli scenari peggiori.

Inoltre, risulta essere una misura di rischio coerente solo quando è riferito a distribuzioni normali, mentre per quelle non-normali, il Value at Risk [30] e [31]:

- Non è una misura di rischio coerente perché non verifica la proprietà sub-additività, quindi il VaR del portafoglio potrebbe essere superiore rispetto alla somma dei VaR dei singoli asset, contraddicendo il principio di diversificazione
- Non è lineare [32]
- Non è convesso rispetto alle posizioni in portafoglio
- Ha più estremi locali [33]

A conferma di quanto detto, nel 2008, in un dibattito tra i due noti finanziari Aaron Brown e David Einhorn, quest'ultimo paragonò il Value at Risk ad "un airbag che funziona per tutto il tempo, tranne nel momento in cui si ha un incidente d'auto" [34].

Per verificare che il VaR non è sub-additivo, possiamo servirci di un esempio. Consideriamo due variabili aleatorie  $X$  e  $Y$  indipendenti ed identicamente distribuite che analizzano le perdite di un particolare asset. Ognuna di queste ha valore:

$$X = Y = \begin{cases} 0 & \text{con probabilità } p = 0.997 \\ 100 & \text{con probabilità } 1 - p = 0.003 \end{cases}$$

Se calcoliamo il Value at Risk ad un livello di confidenza del 99.5% di ogni distribuzione otterremo 0 in entrambi i casi. Poiché esse sono IID, invece, il VaR del portafoglio formato da  $X$  e da  $Y$  avrà un valore di 0 con probabilità  $p' = 0.994$ . Pertanto, quantificando il VaR del portafoglio al 99.5% troviamo che questo è superiore a zero e quindi:

$$VaR(X + Y) > VaR(X) + VaR(Y)$$

Ma questo va contro la proprietà di sub-additività descritta nel Paragrafo 5.1, quindi il Value at Risk non è sub-additivo. Ulteriori esempi sono presentati in Hull [35].

In questo esempio viene mostrato che ci sono casi in cui il VaR può portare a scoraggiare la diversificazione. Di conseguenza ottimizzare un portafoglio utilizzando il VaR come misura di rischio, potrebbe portare ad allocare il proprio capitale su pochi asset.

Inoltre, per dimostrare che il VaR non è una misura di rischio convessa, possiamo servirci del seguente esempio. Consideriamo un investimento in due obbligazioni societarie, ciascuna in grado di fornire un rendimento  $\hat{r} \in (r, 1 + 2r)$ , dove  $r \geq 0$  è il rendimento di un titolo risk-free, come ad esempio i titoli di Stato AAA. Se calcoliamo il valore delle due obbligazioni al tempo attuale, quindi tenendo conto della svalutazione del capitale che ci sarà tra

$t = 0$ , ossia il momento dell'acquisto dei titoli, e la loro scadenza, otteniamo:

$$X_i = \begin{cases} -C & \text{in caso di default} \\ \frac{1}{1+r} \cdot C(1+\hat{r}) - C = \frac{C(\hat{r}-r)}{1+r} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove  $C$  corrisponde al capitale iniziale investito e  $i = 1, 2$ .

Supponiamo che le due obbligazioni vadano in default in modo indipendente l'una dall'altra con una probabilità  $p \leq \lambda$ , allora:

$$P \left[ X_1 + \left( -\frac{C(\hat{r}-r)}{1+r} \right) < 0 \right] = P \left[ X_2 + \left( -\frac{C(\hat{r}-r)}{1+r} \right) < 0 \right] = p \leq \lambda$$

Pertanto se prendiamo  $m < -\frac{C(\hat{r}-r)}{1+r}$ , abbiamo che:

$$P[X_1 + m < 0] = P[X_2 + m < 0] = 1 > \lambda$$

Quindi per definizione di Value at Risk:

$$VaR_\lambda(X_1) = VaR_\lambda(X_2) = -\frac{C(\hat{r}-r)}{1+r} < 0$$

Scegliendo di diversificare il portafoglio, possiamo investire metà del nostro capitale in ognuno dei due bond. Avremo quindi un portafoglio composto da  $Y = \frac{X_1 + X_2}{2}$ , il cui valore sarà negativo nel caso in cui almeno uno dei due bond vada in default. Di conseguenza la probabilità di perdere parte del capitale con questo investimento è data da:

$$P[Y < 0] = P[X_1 < 0] + P[X_2 < 0] - P[X_1 < 0, X_2 < 0] = 2p - p^2$$

Prendiamo ora  $\lambda \in [p, 2p - p^2)$ , in base a quanto detto in precedenza:

$$P \left[ Y + \frac{C}{2} \left( 1 - \frac{\hat{r}-r}{1+r} \right) < 0 \right] = p^2 < p \leq \lambda$$

e per ogni  $m < \frac{C}{2} \left( 1 - \frac{\hat{r}-r}{1+r} \right)$ ,

$$P[Y + m < 0] \geq P[Y < 0] = 2p - p^2 > \lambda$$

e pertanto

$$VaR_\lambda(Y) = \frac{C}{2} \cdot \frac{1 + 2r - \hat{r}}{1 + r} > 0$$

Ma questo va contro la condizione di convessità (Proprietà 4), in quanto:

$$VaR_\lambda(Y) = VaR_\lambda\left(\frac{X_1 + X_2}{2}\right) > 0 > -\frac{C(\hat{r} - r)}{1 + r} = \frac{1}{2} VaR_\lambda(X_1) + \frac{1}{2} VaR_\lambda(X_2)$$

Con questi esempi abbiamo visto come il Value at Risk non sia una misura di rischio convessa e quindi sia necessario introdurre qualcosa di più affidabile del VaR.

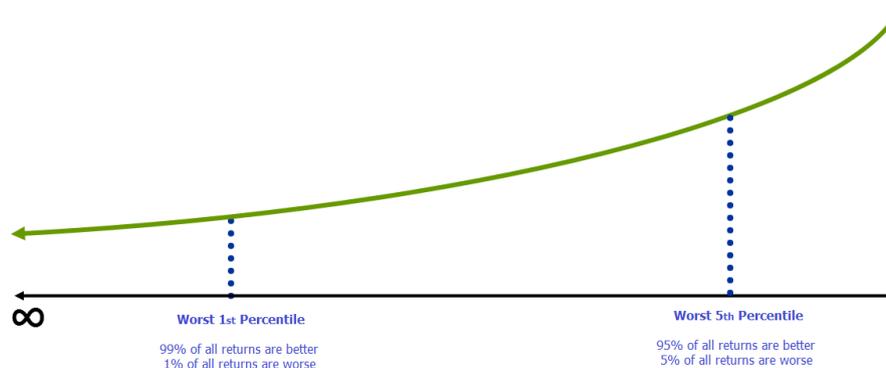


Figura 5.2: Value at Risk con il 95% ed il 99% di confidenza.

## 5.4 Conditional Value at Risk (CVaR)

Una misura di rischio migliore del Value at Risk, in grado di esaminare anche la media delle perdite nella coda sinistra della distribuzione, è il Conditional Value at Risk. Derivata dal VaR, questa misura di rischio soddisfa tutte le proprietà viste nel Paragrafo 5.1 e risulta pertanto essere una misura di rischio coerente.

**Definizione 5.2** (Conditional Value at Risk). *Sia  $X$  una variabile aleatoria rappresentante la distribuzione dei rendimenti di un portafoglio di  $n$  titoli*

finanziari. Si definisce *Conditional Value at Risk (CVaR)* ad un livello di confidenza  $1 - \alpha$ , il valore

$$CVaR_{1-\alpha}(X) = \frac{1}{\alpha} \int_{1-\alpha}^1 VaR_u(X) du$$

oppure, indicando con  $L$  la perdita,

$$CVaR_\alpha(L) = \frac{E[\max(L - VaR_{1-\alpha}; 0)]}{P[L \leq VaR]}$$

dove in genere  $\alpha = 0.05$  o  $\alpha = 0.01$ .

Il CVaR è una misura di rischio coerente, quindi soddisfa le sei proprietà viste nel Paragrafo 5.1. Le proprietà 1, 5 e 6 seguono direttamente dalla definizione di CVaR, mentre non sono immediate le altre tre. Vediamo quindi una dimostrazione di queste ultime per maggiore completezza.

**Monotonicità.** Siano  $X_1$  e  $X_2$  due variabili aleatorie indicanti la perdita di un investimento. Se  $X_2$  è stocasticamente dominante rispetto a  $X_1$ , cioè  $E[f(X_1)] \leq E[f(X_2)]$  per qualsiasi funzione monotona  $f$ , allora:

$$CVaR_\alpha(X_1) \preceq_{SD} CVaR_\alpha(X_2)$$

Per dimostrare che questa proprietà è valida per il CVaR, è prima necessario dimostrarla per il Value at Risk. Ricordiamo che:

$$VaR_\alpha(L) = \inf \{l \in \mathbb{R} | P[X > l] \leq 1 - \alpha\}$$

Se  $X_2$  è stocasticamente dominante rispetto a  $X_1$  allora evidentemente avremo che:

$$P[X_1 > l] \leq P[X_2 > l] \quad l \in \mathbb{R}$$

Quindi, se  $l \in \{l \in \mathbb{R} | P[X_2 > l] \leq 1 - \alpha\}$ , allora  $l \in \{l \in \mathbb{R} | P[X_1 > l] \leq 1 - \alpha\}$ .

Di conseguenza, possiamo affermare che:

$$\inf \{l \in \mathbb{R} | P[X_1 > l] \leq 1 - \alpha\} \leq \inf \{l \in \mathbb{R} | P[X_2 > l] \leq 1 - \alpha\}$$

Ma questo vuol dire che

$$VaR_\alpha(X_1) \preceq_{SD} VaR_\alpha(X_2)$$

Di conseguenza, per la definizione di CVaR, questa proprietà vale anche per quest'ultima misura di rischio.

**Sub-additività.** Prima di iniziare a dimostrare questa proprietà, riscriviamo la definizione di CVaR come:

$$CVaR_{1-\alpha}(X) = -\frac{1}{1-\alpha} E[X \cdot \mathbb{1}_{X \leq x_{1-\alpha}}]$$

Come viene approfondito in [36], prendiamo due portafogli  $X$  e  $Y$  e verifichiamo che vale la seguente:

$$CVaR_{1-\alpha}(X + Y) \leq CVaR_{1-\alpha}(X) + CVaR_{1-\alpha}(Y)$$

Per dimostrare questa proprietà, possiamo chiamare con  $Z = X + Y$  ottenendo che:

$$\begin{aligned} (1-\alpha) \cdot [CVaR_{1-\alpha}(X) + CVaR_{1-\alpha}(Y) - CVaR_{1-\alpha}(Z)] &= \\ &= E[Z \cdot \mathbb{1}_{Z \leq z_{1-\alpha}} - X \cdot \mathbb{1}_{X \leq x_{1-\alpha}} - Y \cdot \mathbb{1}_{Y \leq y_{1-\alpha}}] = \\ &= E[X(\mathbb{1}_{Z \leq z_{1-\alpha}} - \mathbb{1}_{X \leq x_{1-\alpha}}) + Y(\mathbb{1}_{Z \leq z_{1-\alpha}} - \mathbb{1}_{Y \leq y_{1-\alpha}})] \geq \\ &\geq x_{1-\alpha} \cdot E[\mathbb{1}_{Z \leq z_{1-\alpha}} - \mathbb{1}_{X \leq x_{1-\alpha}}] + y_{1-\alpha} \cdot E[\mathbb{1}_{Z \leq z_{1-\alpha}} - \mathbb{1}_{Y \leq y_{1-\alpha}}] = \\ &= x_{1-\alpha} [(1-\alpha) - (1-\alpha)] + y_{1-\alpha} [(1-\alpha) - (1-\alpha)] = 0 \end{aligned}$$

Quindi si può concludere che vale la proprietà di sub-additività per il CVaR.

**Convessità.** Siano  $Y_1$  e  $Y_2$  due diversi portafogli e  $\lambda \in [0, 1]$ . Il CVaR premia la diversificazione, cercando di ripartire l'investimento in più posizioni rispetto che allocare il proprio capitale su pochi asset finanziari.

$$CVaR_{1-\alpha}(\lambda Y_1 + (1-\lambda)Y_2) \leq \lambda \cdot CVaR_{1-\alpha}(Y_1) + (1-\lambda) \cdot CVaR_{1-\alpha}(Y_2)$$

Per la dimostrazione si veda Rockafellar [37].

In letteratura questa misura di rischio viene denominata anche in molti altri modi: Expected Shortfall (ES) [38], Average Value at Risk (AVaR), Expected Tail Loss (ETL), Tail Value at Risk (TVaR), Tail Conditional Expectation (TCE) [39], Excess Wealth.

Il CVaR, pertanto, non analizza soltanto qual è il rendimento minimo che si otterrà con una confidenza di  $1 - \alpha$  in un certo orizzonte temporale, ma fornisce una stima della perdita media a cui andiamo incontro negli scenari peggiori. In altri termini, l'Expected Shortfall rappresenta la perdita media nella coda della distribuzione che va oltre al livello indicato dal VaR, quindi nell' $\alpha$  % dei casi. Come prima, vediamo ora due esempi per una migliore comprensione.

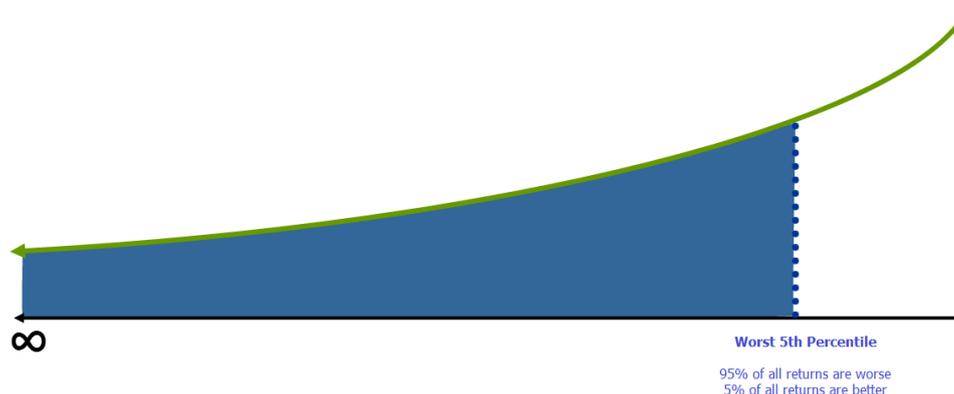


Figura 5.3: Conditional Value at Risk con il 95% di confidenza

Supponiamo di avere gli ultimi 100 rendimenti giornalieri di un asset e di voler capire quanto questo titolo possa essere rischioso. Se ordiniamo i rendimenti in modo crescente, in modo da avere le perdite maggiori nei primi valori e i maggiori guadagni negli ultimi, possiamo calcolare il VaR e il CVaR dello strumento, in modo da evidenziarne le differenze operative. Ipotizziamo che i due peggiori rendimenti siano rispettivamente  $-10\%$  e  $-8\%$  e calcolando le due misure di rischio con una confidenza del  $95\%$  si ottengano, rispettivamente, il  $-3,50\%$  e  $-4,50\%$ . Se però andiamo ad alterare i due ren-

dimenti peggiori, modificandoli in -50% e -40% (o qualsiasi numero inferiore a -3,50%), e ricalcoliamo i valori delle due misure di rischio, otteniamo che il CVaR riporta correttamente un valore più alto di prima, mentre il VaR è rimasto inalterato. Questo mette in evidenza quanto il CVaR sia più efficiente e reattivo.

Analizziamo ora il caso di due obbligazioni  $B_1$  e  $B_2$  aventi ciascuna un prezzo di mercato di 90,9 euro che dopo un anno, se non diventano insolventi, vengono rimborsate a 100 euro, con un conseguente rendimento del 10%. Ognuna delle due obbligazioni può andare in default in due modi diversi, chiamati  $S_1$  e  $S_2$ , ma è impossibile che entrambe vadano in default. Questi ultimi hanno una probabilità di verificarsi, del 4% e dell'1%, nei quali il valore di recupero è, rispettivamente, di 50 e 85 euro. Analizziamo quindi quali sono gli eventi possibili alla scadenza delle due obbligazioni, se acquistiamo l'obbligazione  $B_1$ , l'obbligazione  $B_2$  o entrambe.

Eventi	Probabilità	Perdita $B_1$	Perdita $B_2$	Perdita $B_1+B_2$
1	4%	40.9	0	31.8
2	1%	5.9	0	0
3	4%	0	40.9	31.8
4	1%	0	5.9	0
5	90%	0	0	0

Calcoliamo quindi il rischio dell'investimento attraverso il Value at Risk e il Conditional Value at Risk. Per il VaR basta fare riferimento alla tabella precedente, mentre per il CVaR è necessario calcolarle tutti i casi. Vediamo in dettaglio il caso in cui si acquisti l'obbligazione  $B_1$ :

$$CVaR_{95\%}(B_1) = 0.04 \cdot 40.9 + 0.01 \cdot 5.9 = 33.9$$

Estendendo il ragionamento anche agli altri casi si ottiene:

	<b>Perdita <math>B_1</math></b>	<b>Perdita <math>B_2</math></b>	<b>Perdita <math>B_1+B_2</math></b>
VaR 95%	5.9	5.9	31.8
CVaR 95%	33.9	33.9	31.8

Abbiamo quindi che:

$$\begin{aligned} VaR_{95\%}(B_1 + B_2) &\not\leq VaR_{95\%}(B_1) + VaR_{95\%}(B_2) \\ CVaR_{95\%}(B_1 + B_2) &\leq CVaR_{95\%}(B_1) + CVaR_{95\%}(B_2) \end{aligned}$$

Questo mostra come il CVaR rispetta il principio di diversificazione, a differenza del Value at Risk.

Sarykalin et al. [40] hanno definito questa misura come più robusta del VaR, in quanto:

- È una misura di rischio coerente, rispetta quindi il principio di diversificazione;
- È applicabile a distribuzioni non simmetriche;
- Può essere implementata con la programmazione lineare, permettendo così un'ottimizzazione su portafogli con migliaia di asset a disposizione senza grosse difficoltà computazionali;
- È convessa rispetto alle posizioni in portafoglio;
- Tiene conto del rischio oltre al VaR, risultando così una misura più conservativa.

Come conseguenza l'Expected Shortfall riesce ad affrontare con successo i problemi della società di assicurazioni e del trader visti nel paragrafo precedente, in quanto mette in evidenza la perdita media a cui si va incontro nei casi peggiori. Notiamo, inoltre, che il valore del CVaR è sempre superiore a quello del VaR.

# Capitolo 6

## Copule

In questo capitolo viene presentata la funzione di copula con le relative proprietà, che permette di superare i problemi illustrati nel secondo capitolo relativi alla correlazione tra variabili aleatorie. Dopo aver definito gli aspetti matematici delle copule, per una migliore comprensione si analizzano le più importanti famiglie di copule, evidenziandone le diverse strutture di dipendenza e la loro elevata flessibilità. Vengono infine presentate le vine copulas, che consistono in una struttura di copule in grado di analizzare in modo più dettagliato le dipendenze tra variabili aleatorie, rivelandosi determinanti in presenza di un numero elevato di variabili.

### 6.1 Definizione e proprietà

Prima di dare una definizione di copula, è necessario introdurre un paio di concetti su cui essa è basata.

**Teorema 6.1** (Trasformazione integrale di probabilità). *Sia  $X$  una variabile aleatoria in uno spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , con funzione di ripartizione  $F_X$ . Se  $F_X$  è assolutamente continua allora  $F_X(X)$  è uniformemente distribuita su  $[0, 1]$  e  $F_X(X)$  si dice trasformazione integrale di probabilità.*

*Dimostrazione.* Ponendo  $Y = F_X(X)$ , è facile vedere che:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P[Y \leq y] = P[F_X(X) \leq y] \\ &= P[X \leq F_X^{-1}(y)] \\ &= F_X(F_X^{-1}(y)) = y \end{aligned}$$

□

Si ottiene quindi che  $Y = F_X(X)$  ha distribuzione uniforme su  $[0, 1]$ . Tale trasformazione integrale di probabilità permette di convertire valori descritti come variabili casuali di una qualsiasi distribuzione continua, in variabili casuali aventi distribuzione uniforme.

**Proposizione 6.1.** *Siano  $X_1$  e  $X_2$  due variabili aleatorie continue con funzioni di ripartizione  $F_1$  e  $F_2$  rispettivamente. Come visto nella precedente definizione, abbiamo  $U_1 = F_1(X_1)$  e  $U_2 = F_2(X_2)$ , con  $U_1$  e  $U_2$  uniformemente distribuite su  $[0, 1]$ . La loro distribuzione congiunta si può scrivere come:*

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2) &= P[X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2] \\ &= P[F_1(X_1) \leq F_1(x_1), F_2(X_2) \leq F_2(x_2)] \\ &= P[U_1 \leq F_1(x_1), U_2 \leq F_2(x_2)] \\ &= C(F_1(x_1), F_2(x_2)) \end{aligned}$$

dove  $C$  è la funzione di ripartizione congiunta di  $(U_1, U_2) = (F_1(X_1), F_2(X_2))$ , che prende il nome di copula.

**Definizione 6.1** (Copula). *Una funzione  $C : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$  si dice copula  $d$ -dimensionale, o più semplicemente  $d$ -copula, se  $C$  è una funzione di ripartizione congiunta di un vettore di variabili aleatorie  $(X_1, X_2, \dots, X_d)$  avente dimensione  $d$ , le cui marginali sono delle distribuzioni uniformi su  $[0, 1]$ .*

Una copula  $C$  è dotata delle seguenti proprietà:

- È  $d$ -crescente, pertanto  $C(u, 1) = u$  e  $C(1, v) = v$ ;
- Le sue marginali sono la funzione identità sull'intervallo unitario, cioè  $C_i(u) = u$  per  $i = 1, 2, \dots, d$  e  $u \in [0, 1]$ ;
- Il suo grafico è sempre all'interno del cubo  $d$ -dimensionale, in quanto  $0 \leq C(u, v) \leq 1, \forall (u, v) \in I$ .

Una copula, pertanto, è una distribuzione multivariata le cui marginali sono delle distribuzioni uniformi, ed è in grado di definire la dipendenza tra le variabili aleatorie che ha come argomento [41] e [42]. La teoria delle copule è principalmente basata sul lavoro di Sklar [43], di cui ne introduciamo ora il teorema legato alle distribuzioni marginali.

## 6.2 Il teorema di Sklar

Il teorema di Sklar afferma che ogni copula è una funzione di distribuzione congiunta, avente come argomenti le distribuzioni marginali. Inoltre vale anche il contrario: ogni distribuzione congiunta ha una copula e, se le marginali sono continue, essa è unica.

**Teorema 6.2** (Sklar). *Sia  $(X_1, X_2, \dots, X_d)$  un vettore aleatorio e denotiamo con  $F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_d(x_d)$  le rispettive distribuzioni marginali. Se chiamiamo  $H$  la distribuzione congiunta del vettore di variabili aleatorie, allora esiste un'unica copula  $C$  tale che:*

$$H(x_1, x_2, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_d(x_d))$$

Viceversa, se chiamiamo con  $F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_d(x_d)$  le distribuzioni marginali e con  $C$  una copula, allora la funzione  $H$  sopra definita, è una distribuzione congiunta avente come marginali  $F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_d(x_d)$  definita

in  $\text{Im}(F_1) \times \text{Im}(F_1) \times \dots \times \text{Im}(F_d)$ , che corrisponde al prodotto cartesiano dell'immagine delle distribuzioni marginali.

Per la dimostrazione di questo teorema si veda Sklar [44].

Questo teorema prova che esiste una corrispondenza biunivoca tra le copule e le funzioni di ripartizione. Pertanto per costruire una distribuzione multivariata è necessario prima definire quali siano le distribuzioni marginali di ogni variabile aleatoria, in modo da ottenere, a partire da esse, la funzione di copula corrispondente. In base alla misura di dipendenza che si sceglie di utilizzare, la copula è in grado di definire la struttura di dipendenza tra le variabili aleatorie. Di conseguenza, dopo aver specificato quali siano le distribuzioni marginali, per definire correttamente la relativa distribuzione multivariata è sufficiente scegliere la copula che meglio descrive la struttura di dipendenza tra le variabili casuali. Questo significa che le distribuzioni marginali e la dipendenza tra esse siano stimate separatamente.

Infine, le copule assolutamente continue consentono una definizione di densità. In particolare, se  $C$  è una copula  $d$ -dimensionale, la sua densità  $c(u_1, u_2, \dots, u_d)$  è data da:

$$c(u_1, u_2, \dots, u_d) = \frac{\partial^d C(u_1, u_2, \dots, u_d)}{\partial u_1 \partial u_2 \dots \partial u_d} \quad \forall (u_1, u_2, \dots, u_d) \in [0, 1]^d$$

Questo permette di definire la densità di probabilità della distribuzione congiunta vista sopra, attraverso la densità della copula:

$$h(x_1, x_2, \dots, x_d) = c\left(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_d(x_d)\right) \prod_{i=1}^n f_i(x_i)$$

dove  $f_i(x_i)$  è la funzione di densità per la variabile  $X_i$ .

Da quest'ultima formula è facile vedere che la log-likelihood della densità congiunta può essere scomposta in  $n$  componenti focalizzate sulle distribuzioni marginali più una incentrata sui parametri della copula.

### 6.3 Famiglie di copule

In base a quanto visto nel paragrafo precedente, vediamo il caso più semplice in cui due variabili aleatorie  $X$  e  $Y$  definite sul quadrato unitario  $[0, 1]^2$  sono indipendenti. Per definizione di indipendenza, la loro distribuzione congiunta è data da:

$$H(x, y) = F(x) \cdot G(y)$$

dove  $F(x)$  e  $G(y)$  sono rispettivamente le distribuzioni marginali univariate di  $X$  e di  $Y$ .

Abbiamo quindi che:

$$H(x, y) = F(x) \cdot G(y) = C(F(x), G(y)) \quad \text{con } C(x, y) = x \cdot y$$

Questo significa che le due variabili aleatorie sono indipendenti se e solo se la copula che cattura la dipendenza è quella specificata qui sopra, che denotiamo con  $\Pi$ . In altre parole,

$$X \text{ e } Y \text{ sono indipendenti} \Leftrightarrow C(x, y) = \Pi_2(x, y) = x \cdot y$$

Introduciam ora altri due tipi di copule, quella di minimo e quella di massimo, indicate rispettivamente con  $W_d$  e  $M_d$ , che insieme alla copula  $\Pi_d$  vista prima, fanno parte dell'insieme delle copule di Fréchet. Ricordiamo che quando due variabili aleatorie hanno perfetta dipendenza positiva, esse sono dette comonotone, mentre se possiedono perfetta dipendenza negativa, esse di dicono contromonotone. Inoltre, il seguente teorema consente di porre il limite superiore e inferiore ad una copula.

**Teorema 6.3** (Limiti di Fréchet-Hoeffding). *Sia  $C$  una copula qualsiasi e  $u = (u_1, u_2, \dots, u_d)$  un vettore di dimensione  $d$ . Allora  $C$  soddisfa la seguente disuguaglianza:*

$$\max(u_1 + \dots + u_d - 1, 0) \leq C(u) \leq \min(u_1, \dots, u_d) \quad \forall (u_1, \dots, u_d) \in I^d$$

Indicando con  $W_d$  la copula corrispondente alla massima dipendenza negativa, o della contromonotonia, e con  $M_d$  quella con la massima dipendenza positiva, o della comonotonia, è possibile riscrivere l'enunciato precedente come:

$$W_d(u_1, u_2, \dots, u_d) \leq C(u_1, u_2, \dots, u_d) \leq M_d(u_1, u_2, \dots, u_d)$$

I due limiti trovati, sono quelli migliori possibili, nel senso che:

$$\inf_{C \in \Omega} C(u) = W_d(u) \quad e \quad \sup_{C \in \Omega} C(u) = M_d(u)$$

Nota: il limite inferiore non rispetta la definizione di copula per  $d > 2$ .

Finora abbiamo esaminato le copule  $W$  (contromonotonia),  $\Pi$  (indipendenza) e  $M$  (comonotonia), che sono le tre più semplici da gestire. Verranno ora analizzate altre famiglie di copule: quelle ellittiche e quelle archimedee.

### 6.3.1 Ellittiche

Le copule ellittiche più comunemente utilizzate sono la gaussiana e la  $t$  di Student. Le differenze principali tra le copule ellittiche e non ellittiche sono che le prime hanno la possibilità di specificare il livello di correlazione tra le marginali, e sono simmetriche, contrariamente alle seconde. Quelle ellittiche, però, hanno il difetto di non modellare bene i valori estremi delle distribuzioni multivariate, e sono composte da distribuzioni di tipo ellittico.

#### 6.3.1.1 Gaussiana

La copula gaussiana ha come funzione di distribuzione congiunta una normale, a patto che le marginali siano delle normali standard, aventi quindi media nulla e varianza uguale a 1. Inoltre, a partire dai primi anni 2000 e fino alla crisi dei mutui immobiliari del 2008 è stata ampiamente utilizzata in ambito economico per modellare la dipendenza tra asset finanziari, al fine di fornire una maggior accuratezza nella valutazione della gestione del rischio.

**Definizione 6.2** (Copula gaussiana). *Siano  $\varphi(x)$  e  $\varphi(y)$  due funzioni di distribuzioni normali univariate, quindi con funzione di ripartizione:*

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

*Supponiamo che la funzione di ripartizione congiunta  $H(x, y)$  sia una normale bivariata con coefficiente di correlazione  $\theta \in [-1, 1]$ .*

$$\int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\theta^2}} \exp\left[-\frac{s^2 - 2\theta st + t^2}{2(1-\theta^2)}\right] ds dt \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

*Ora, usufruendo del teorema di Sklar (Teorema 6.2), possiamo definire la copula gaussiana, o normale bivariata, avente parametro  $\theta \in [-1, 1]$ , come:*

$$\begin{aligned} C_\theta(u, v) &= H(\varphi^{-1}(u), \varphi^{-1}(v)) = \\ &= \int_{-\infty}^{\varphi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\varphi^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\theta^2}} \exp\left[-\frac{s^2 - 2\theta st + t^2}{2(1-\theta^2)}\right] ds dt \end{aligned}$$

*dove  $\varphi^{-1}$  denota l'inversa della distribuzione normale univariata.*

Notiamo, inoltre, che la copula ellittica coincide con le copule della famiglia di Fréchet quando:

$$C_{-1} = W \quad C_0 = \Pi \quad C_1 = M$$

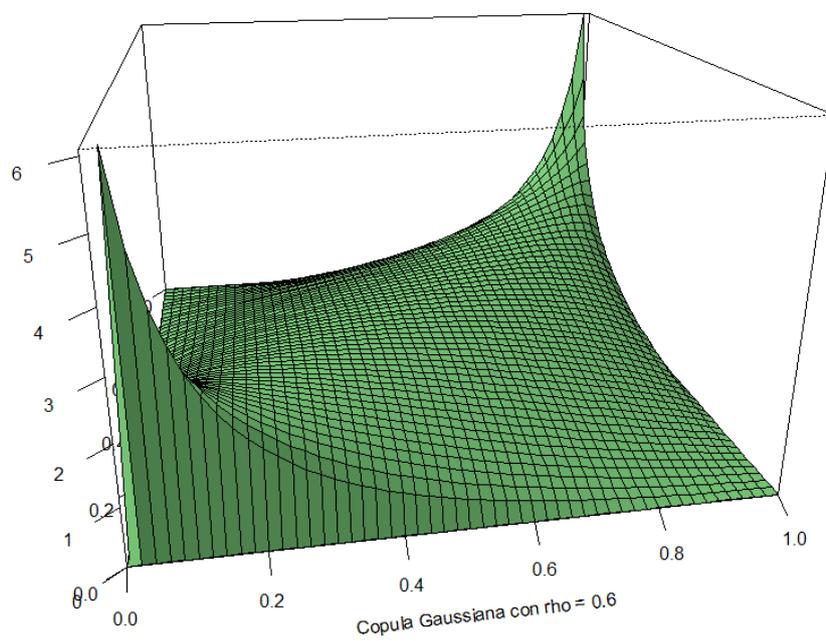


Figura 6.1: Copula Gaussiana con  $\rho = 0.6$

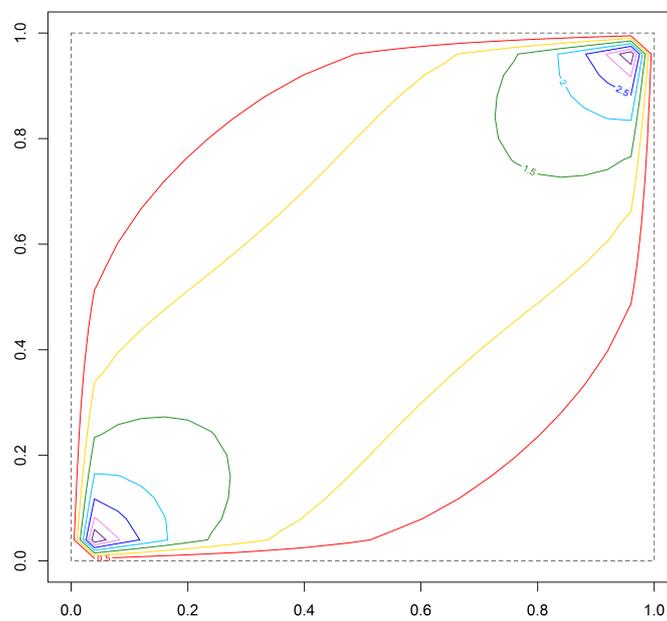


Figura 6.2: Curve di livello di una copula Gaussiana con  $\rho = 0.6$

### 6.3.1.2 T di Student

Un'altra copula di tipo ellittico è la  $t$  di Student. Come la copula gaussiana è molto utilizzata in finanza per interpretare al meglio la dipendenza tra i prezzi degli asset finanziari, in modo da interpretare correttamente, ad esempio, la rischiosità tra due asset.

A differenza della copula gaussiana, però, questa dà maggior peso ai valori estremi, similmente a quanto visto per le code della distribuzione  $t$  di Student nel secondo capitolo. Questa particolarità risulta utile nelle situazioni di eventi rari ma non rarissimi, cioè nelle situazioni di crollo dei mercati finanziari. Rispetto alla copula gaussiana, la  $t$  di Student, attribuisce maggiore importanza alle code, approssimando in modo più adeguato i fenomeni reali migliorando l'accuratezza della previsione.

**Definizione 6.3** (Copula  $t$  di Student). *Siano  $t_d(x)$  e  $t_d(y)$  due funzioni di distribuzioni  $t$  di Student univariate con  $d$  gradi di libertà, aventi quindi funzione di ripartizione:*

$$t_d(x) = \frac{Z}{\sqrt{\frac{C_d}{d}}} = \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\sqrt{d\pi}} \int_{-\infty}^x \left(1 + \frac{x^2}{d}\right)^{-\left(\frac{d+1}{2}\right)} dz \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$$

dove  $Z$  è una variabile aleatoria normale standard,  $C_d$  è una chi-quadro con  $d$  gradi di libertà e  $\Gamma$  rappresenta la funzione gamma di Eulero.

Supponiamo che la funzione di distribuzione congiunta  $H_{d,\theta}(x, y)$  sia una  $t$  di Student bivariata con parametro  $\theta \in [-1, 1]$  che indica il grado di correlazione. Allora  $\forall d \in \mathbb{N}$  e  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$  abbiamo:

$$H_{d,\theta}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\theta^2}} \left[1 + \frac{s^2 - 2\theta st + t^2}{d(1-\theta^2)}\right]^{-\left(\frac{d+2}{2}\right)} ds dt$$

Infine, per definire la copula, ci serviamo del teorema di Sklar (Teorema 6.2). La copula di una funzione di distribuzione  $t$  di Student bivariata con  $d > 2$

gradi di libertà, avente parametro  $\theta \in [-1, 1]$ , viene chiamata copula di  $t$  di Student, ed è data da:

$$\begin{aligned} C_{\theta,d}(u,v) &= H(t_d^{-1}(u), t_d^{-1}(v)) = \\ &= \int_{-\infty}^{t_d^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{t_d^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\theta^2}} \left[ -\frac{s^2 - 2\theta st + t^2}{2(1-\theta^2)} \right] ds dt \end{aligned}$$

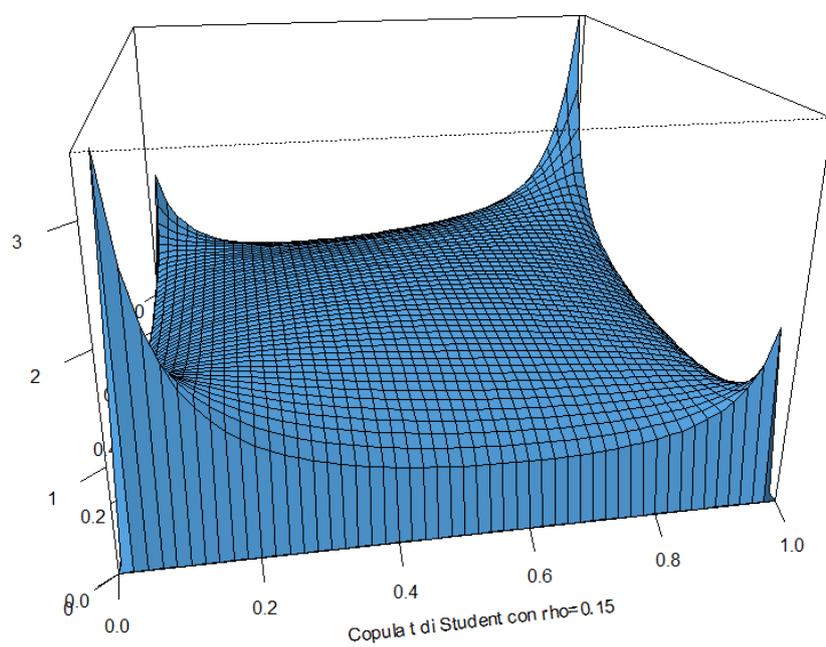
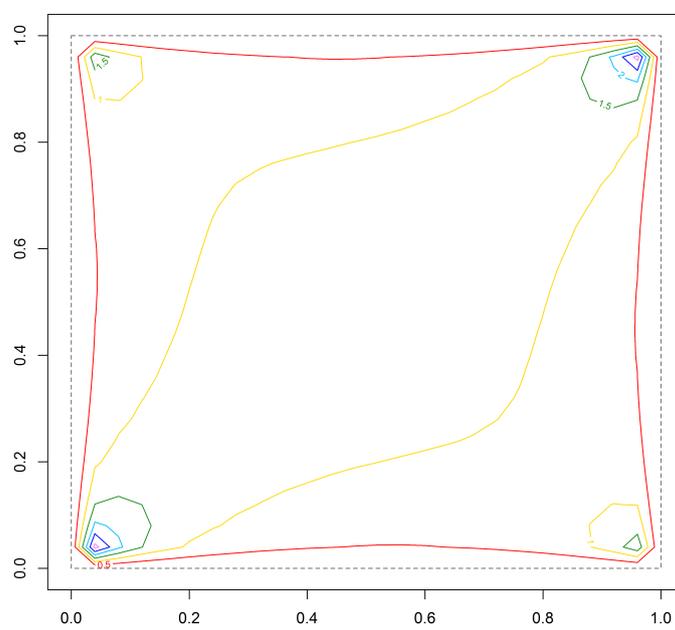
dove  $t_d^{-1}$  denota l'inversa della distribuzione  $t$  di Student univariata con  $d$  gradi di libertà.

Si può dimostrare che la densità della distribuzione  $t$  di Student, al crescere di  $d$ , converge a quella della normale standard. Similmente, per la copula  $t$ , si può dimostrare che essa converge ad una copula gaussiana, quando il grado di libertà  $d \rightarrow \infty$ . Inoltre, per  $d > 2$  e per ogni marginale avente varianza finita, i coefficienti  $\frac{d}{d-2}$  e  $\theta$  possono essere interpretati come coefficienti di correlazione lineare.

Come abbiamo visto, la famiglia di copule  $t$  è caratterizzata da due parametri, diversamente dalla gaussiana che ne ha uno solo, ma, come quest'ultima, comprende anche i limiti di Fréchet-Hoeffding, infatti:

$$C_{-1,d}(u,v) = W(u,v) \quad C_{1,d}(u,v) = M(u,v)$$

Pertanto, indipendentemente dai gradi di libertà, più elevata è la correlazione, più sono concordanti le loro distribuzioni marginali, indicate con  $\varphi(x)$  e  $\varphi(y)$  per la gaussiana, e con  $t_d(x)$  e  $t_d(y)$  per la  $t$  di Student.

Figura 6.3: Copula t di Student con  $\rho = 0.15$  e  $d = 2$ Figura 6.4: Curve di livello di una copula t di Student con  $\rho = 0.15$  e  $d = 2$

### 6.3.2 Archimedee

Le copule Archimedee, dal punto di vista computazionale, hanno il vantaggio di avere un solo parametro per rappresentare la struttura di dipendenza. Purtroppo, però, se si hanno grosse quantità di dati, questa caratteristica comporta una limitata flessibilità di adattamento, con la conseguente scarsità di precisione.

Come abbiamo visto nei paragrafi precedenti, le copule ellittiche, essendo simmetriche, danno la stessa importanza ai valori di concordanza positiva e a quelli di concordanza negativa. Nelle fasi di crollo dei mercati finanziari, le correlazioni tra i vari asset crescono significativamente e le copule ellittiche spesso non sono sufficienti per determinare correttamente la struttura di dipendenza tra i vari titoli. Le copule Archimedee, invece, hanno strutture differenti e sono in grado di ovviare a questi problemi. Inoltre, come vedremo, esse non derivano da distribuzioni multivariate composte mediante il teorema di Sklar.

Dopo aver definito la copula Archimedeana, verranno trattate le principali copule di questa classe, come la Gumbel, la Frank e la Clayton, che permettono strutture di dipendenza molto differenti. La famiglia di copule di Archimede, per essere costruita, necessita di una funzione generatrice o generatore  $\varphi$ .

**Definizione 6.4** (Generatore). *Sia  $\varphi$  una funzione  $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, 1]$  decrescente tale che:*

- $\varphi(0) = 1$ ;
- $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0$
- $\varphi$  sia strettamente decrescente su  $\left[0, \inf_{t \in \mathbb{R}^+} \varphi(t) = 0\right]$ .

Inoltre, per convenzione:

$$\varphi(\infty) = 0 \quad e \quad \varphi^{-1}(0) = \inf_{t \in \mathbb{R}^+} \varphi(t) = 0$$

dove con  $\varphi^{-1}$  viene denotata la pseudoinversa di  $\varphi$ .

**Definizione 6.5** (Copula Archimedeana). *Sia  $\varphi$  un generatore e  $\varphi^{-1}$  la sua pseudoinversa. Una copula Archimedeana, o di Archimede, con generatore  $\varphi$  è una mappa  $d$ -dimensionale  $C_\varphi$  definita come:*

$$C_\varphi(u_1, \dots, u_d) = \varphi(\varphi(u_1)^{-1}, \dots, \varphi(u_d)^{-1}) \forall (u_1, \dots, u_d) \in [0, 1]^d$$

Più avanti verranno introdotte le principali copule, partendo proprio da questa definizione. Notiamo che il modo in cui è stata definita è completamente diverso dalle copule gaussiane che invece si basavano sulle distribuzioni multivariate costruite a partire dalle marginali.

Tra le molte famiglie di copule presenti nella classe delle Archimedee, le più importanti in campo applicativo sono la Gumbel, la Frank e la Clayton. Incominciamo ad introdurre le varie famiglie con particolare attenzione alle varie struttura di dipendenza. La copula Gumbel [45] ha come generatore la funzione  $\varphi(t) = \exp\left[-t^{\frac{1}{\theta}}\right]$ , con  $\theta \in [1, \infty]$ .

La famiglia di copule Archimedee formulate con il precedente generatore, è chiamata famiglia di copule di Gumbel-Hougaard, e si scrive come:

$$C_\theta(u_1, u_2, \dots, u_d) = \exp\left\{-\left[\sum_{i=1}^d (-\ln(u_i))^\theta\right]^{\frac{1}{\theta}}\right\} \quad \theta \in [1, \infty)$$

Se fissiamo  $\theta = 1$  otteniamo, come caso particolare, la copula di indipendenza  $\Pi_d$ , cioè  $C_1(\mathbf{u}) = \Pi_d(\mathbf{u})$ , mentre per  $\theta \rightarrow \infty$  la Gumbel assume la struttura della copula di comonotonicità, cioè:

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} C_\theta(u_1, u_2, \dots, u_d) = M(u_1, u_2, \dots, u_d)$$

Pertanto la famiglia delle copule Gumbel viene generalmente utilizzata per variabili aventi forte dipendenza positiva e bassa dipendenza negativa, con i due casi particolari in cui vi è indipendenza o perfetta dipendenza. Pertanto, ad esempio, se fossimo interessati a simulare dei dati fortemente correlati per valori elevati, ma, allo stesso tempo, debolmente correlati per bassi valori, la copula Gumbel sarebbe sicuramente una scelta appropriata.

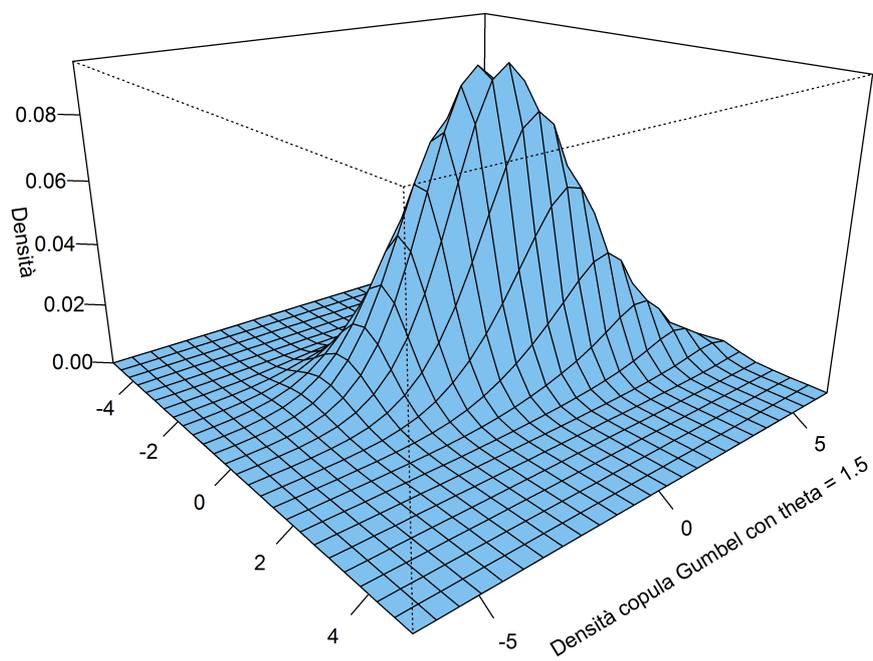


Figura 6.5: Copula Gumbel con  $\theta = 1.5$

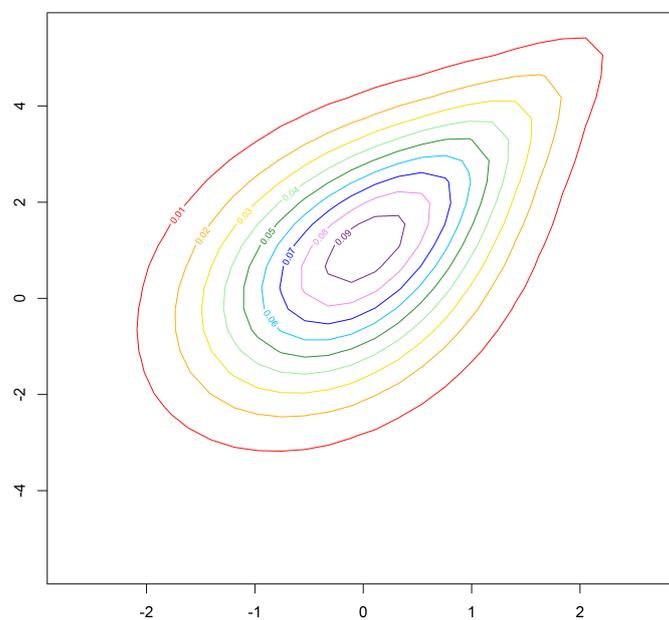


Figura 6.6: Curve di livello di una copula Gumbel con  $\theta = 1.5$

Un'altra famiglia di copule Archimedee è la Frank [46], la quale ha come funzione generatore  $\varphi(t) = -\frac{1}{\theta} \ln [1 - (1 - e^{-\theta}) e^{-t}]$ , definita  $\forall \theta \in \mathbb{R}$ , dove  $\theta$  indica il parametro di dipendenza.

La famiglia di copule Archimedee associata al precedente generatore è chiamata Frank e la sua funzione di copula è definita come:

$$C_{\theta}(u_1, u_2, \dots, u_d) = -\frac{1}{\theta} \ln \left[ 1 + \frac{\prod_{i=1}^d e^{-\theta u_i} - 1}{(-\theta - 1)^{d-1}} \right]$$

È facile vedere che se in questa formula poniamo  $\theta = 0$ , ci si ritrova la copula di indipendenza  $\Pi_d$ , e, in maniera simile, i limiti di Fréchet-Hoeffding (definiti con il Teorema 6.3), che identificano le copule aventi perfetta dipendenza:

$$\begin{aligned} \text{negativa} \quad & \lim_{\theta \rightarrow -\infty} C_{\theta}(u_1, u_2, \dots, u_d) = W_d(u_1, u_2, \dots, u_d) \\ \text{positiva} \quad & \lim_{\theta \rightarrow +\infty} C_{\theta}(u_1, u_2, \dots, u_d) = M_d(u_1, u_2, \dots, u_d) \end{aligned}$$

La famiglia di copule Frank è parecchio utilizzata per alcuni aspetti non trascurabili. In primo luogo, differentemente da altre copule, permette dipendenza negativa per le marginali. Inoltre, la dipendenza è simmetrica in entrambe le code, quindi come la gaussiana e la t di Student. La varietà delle strutture di dipendenza possibili è la più ampia possibile, arrivando fino ai limiti di Fréchet-Hoeffding, vale a dire che è in grado di spaziare su qualsiasi forma di correlazione. Di conseguenza, la copula di Frank può essere utilizzata, almeno in teoria, per modellare qualsiasi forma di dipendenza, dalla dipendenza positiva a quella negativa. L'unico problema riguarda le code, che sono ancora più sottili della copula gaussiana, pertanto la copula Frank è adatta soprattutto in situazioni di bassa dipendenza nelle code.

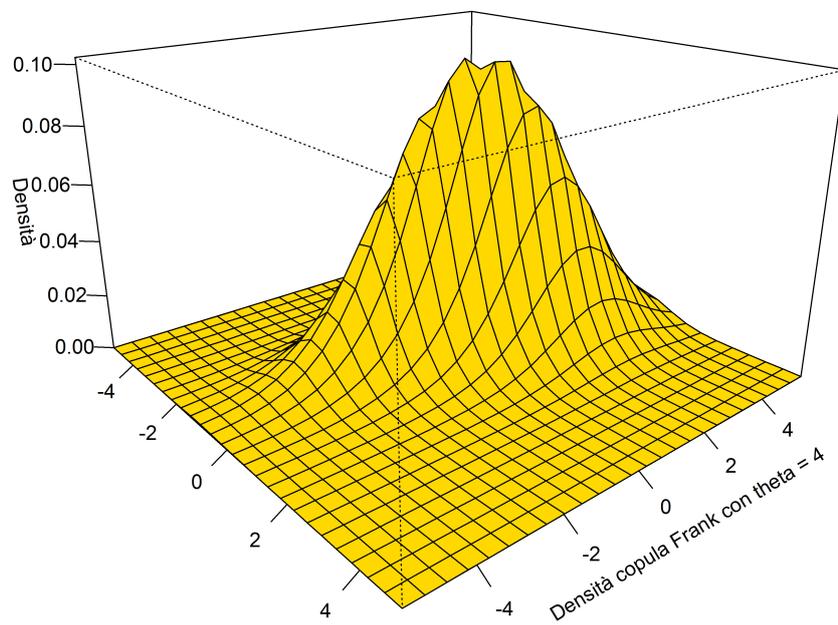


Figura 6.7: Copula Frank con  $\theta = 4$

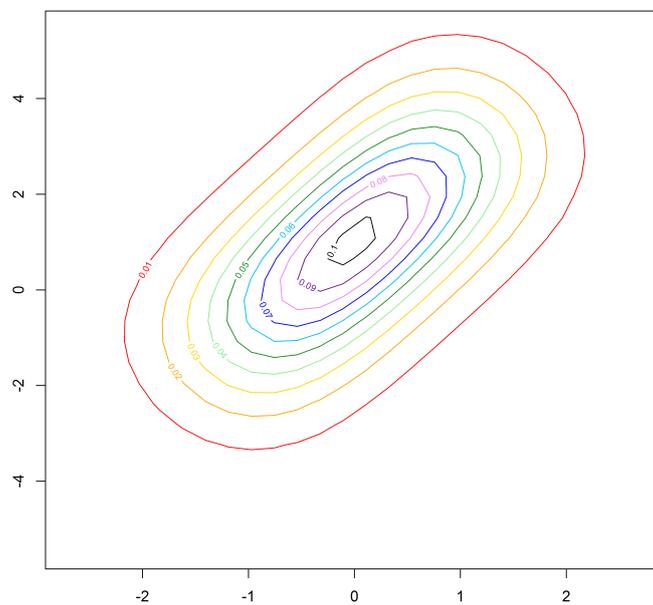


Figura 6.8: Curve di livello di una copula Frank con  $\theta = 4$

L'ultima famiglia di copule Archimedee che esaminiamo è la Clayton [47]. Innanzitutto definiamo la sua funzione generatore come  $\varphi(t) = (1 + \theta t)^{-\frac{1}{\theta}}$ , dove  $\theta$  indica il consueto parametro di dipendenza.

Questa famiglia di copule di Archimede associata al precedente generatore è detta Clayton, mentre la sua funzione di copula è definita come:

$$C_{\theta}(u_1, \dots, u_d) = \max \left\{ \left[ \sum_{i=1}^d u_i^{-\theta} - (d-1) \right]^{-\frac{1}{\theta}} ; 0 \right\} \quad \theta > -\frac{1}{d-1}, \theta \neq 0$$

Ponendo in questa formula  $\theta = -1$ , otteniamo la copula di contromonotonicità, o copula di minimo,  $C_{-1}(u_1, \dots, u_d) = W(u_1, \dots, u_d)$ . In maniera analoga, si trova quella di indipendenza e il limite superiore di Fréchet-Hoeffding (Teorema 6.3):

$$\begin{aligned} \text{indipendenza} \quad & \lim_{\theta \rightarrow 0} C_{\theta}(u_1, u_2, \dots, u_d) = \Pi_d(u_1, u_2, \dots, u_d) \\ \text{dipendenza positiva} \quad & \lim_{\theta \rightarrow \infty} C_{\theta}(u_1, u_2, \dots, u_d) = M_d(u_1, u_2, \dots, u_d) \end{aligned}$$

A differenza delle altre due famiglie precedentemente introdotte, la Clayton possiede una significativa dipendenza di coda nell'angolo in basso a destra del quadrato unitario  $[0, 1]$ .

Osservando la coda sinistra della copula di Clayton notiamo che è significativamente più spessa se paragonata alla coda destra, risultando quindi più indicata nel modellare situazioni in cui vi siano perdite elevate su entrambe le variabili. Per questa motivazione viene frequentemente impiegata in campo finanziario per studiare la correlazione durante i crolli dei mercati finanziari. Insieme alle copule ellittiche, queste tre classi di copule archimedee permettono di rappresentare al meglio le strutture di dipendenza tra i vari asset finanziari.

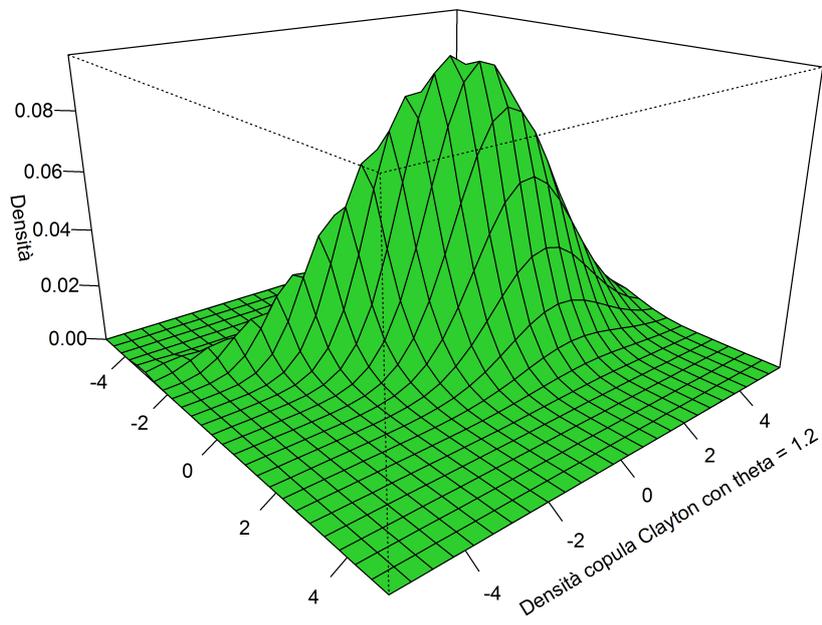


Figura 6.9: Copula Clayton con  $\theta = 1.2$

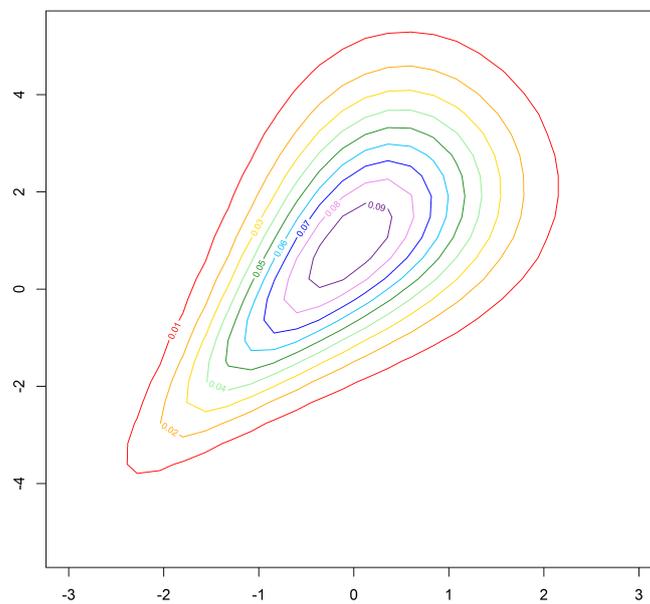


Figura 6.10: Curve di livello di una copula Clayton con  $\theta = 1.2$

## 6.4 Vine Copulas

Le copule bivariate viste nei paragrafi precedenti sono in grado di descrivere la struttura di dipendenza tra due variabili aleatorie. Come si è visto, si dispone inoltre di una buona varietà di tipi, che ne permettono l'applicazione in differenti ambiti. Queste tipologie di copule bivariate, pur essendo cruciali quando si è in due dimensioni, rivelano però una mancanza di flessibilità quando il numero di dimensioni diventa elevato. Se proviamo ad estendere il concetto di copula bivariate in  $d$  dimensioni, e stimiamo i parametri della copula che approssima meglio i nostri dati, ci accorgiamo che la copula multivariata corrispondente si dimostra poco precisa. Di conseguenza, le copule multivariate, sia ellittiche che archimedee, non riescono a modellare correttamente la dipendenza tra le variabili. Inoltre, quando si hanno 4 o più variabili aleatorie, capita frequentemente di ricadere nella scelta della copula gaussiana o della  $t$  di Student, fornendo risultati simili a quelli ottenuti attraverso una matrice di varianza-covarianza, rivelandosi inappropriati, come si è visto in precedenza.

Oltre a questo problema, le copule multivariate ne presentano uno di importanza ancora maggiore: non permettono l'utilizzo di molteplici strutture di dipendenza tra le coppie di variabili. Ciò significa che tutte le variabili aleatorie verranno analizzate contemporaneamente per la scelta della copula ed il rispettivo parametro, causando un'enorme perdita di informazione, da cui consegue un errore di stima piuttosto elevato. Se prendiamo, ad esempio, 10 variabili aleatorie, e stimiamo la loro dipendenza con una copula multivariata, otterremo una struttura molto approssimativa, poiché tra esse possono esservi strutture di dipendenza molto differenti.

Poiché le copule bivariate costituiscono un eccellente strumento per analizzare le dipendenze tra due variabili, intuitivamente si potrebbero calcolare le  $\frac{d(d-1)}{2}$  copule bivariate dei  $d$  asset e creare un modello basato su di esse.

Purtroppo, però, questo non è possibile poiché per definire il peso di un titolo del nostro portafoglio è necessario considerare la dipendenza che questo ha con tutti gli altri. Pertanto le bivariate non sono sufficienti e, come detto

in precedenza, le multivariate non forniscono un risultati soddisfacenti. Le "vine copulas", invece, si prestano bene a questo tipo di problema e sono dotate di una struttura differente in grado di superare questi ostacoli ottenendo risultati molto più precisi.

Introdotte da Harry Joe [48] sul finire degli anni '90, e sviluppate in seguito da Bedford e Cooke [49] e da Kurowicka e Cooke [50], le vine copulas sono strutture molto flessibili, adatte a descrivere le dipendenze tra più variabili attraverso l'utilizzo di una serie di copule bivariate, chiamate anche pair-copulas. Come vedremo più avanti, la funzione di densità multivariata viene riscritta come prodotto tra le densità delle pair-copulas e le densità delle marginali. Ciò permette un'elevata adattabilità nella stima delle strutture di dipendenza, combinando i vantaggi della copula multivariata, come la separazione delle distribuzioni marginali dalla struttura di dipendenza, e la flessibilità delle copule bivariate. Alcuni grossi contributi riguardo alle tecniche di inferenza statistica sono stati forniti da Aas, Czado, Frigessi e Bakken [51], che hanno definito due classi di copule vine: la Canonical-Vine (o C-Vine) e la Drawable-Vine (o D-Vine).

Prima di esaminare dare una vedere in dettaglio la struttura di queste due classi di copule vine, vediamo com'è definita una pair-copula in  $d = 3$  dimensioni.

Sia  $X = (X_1, X_2, X_3)$  un vettore di variabili aleatorie e chiamiamo con  $F$  la corrispondente distribuzione congiunta. Siano inoltre  $F_1, F_2, F_3$  le corrispondenti distribuzioni marginali. Una possibile decomposizione di  $f(x_1, x_2, x_3)$  è data da:

$$f(x_1, x_2, x_3) = f(x_1) \cdot f(x_2|x_1) \cdot f(x_3|x_1, x_2)$$

Indicando con  $c_{a,b}$  la densità della copula tra le variabili aleatorie  $X_a$  e  $X_b$ , per il teorema di Sklar, sappiamo che:

$$\begin{aligned} f(x_2|x_1) &= \frac{f(x_1, x_2)}{f_1(x_1)} = \frac{c_{1,2}(F_1(x_1), F_2(x_2)) \cdot f_1(x_1) \cdot f_2(x_2)}{f_1(x_1)} \\ &= c_{1,2}(F_1(x_1), F_2(x_2)) \cdot f_2(x_2) \end{aligned}$$

e quindi:

$$\begin{aligned} f(x_3|x_1, x_2) &= \frac{f(x_2, x_3|x_1)}{f(x_2|x_1)} \\ &= \frac{c_{2,3|1}(F(x_2|x_1), F(x_3|x_1)) \cdot f(x_2|x_1) \cdot f(x_3|x_1)}{f(x_2|x_1)} \\ &= c_{2,3|1}(F(x_2|x_1), F(x_3|x_1)) \cdot f(x_3|x_1) \\ &= c_{2,3|1}(F(x_2|x_1), F(x_3|x_1)) \cdot c_{1,3}(F_1(x_1), F_3(x_3)) \cdot f_3(x_3) \end{aligned}$$

dove  $c_{1,2}$ ,  $c_{1,3}$  e  $c_{2,3|1}$  sono le funzioni di densità delle rispettive copule bivariate.

Pertanto, la densità congiunta  $f(x_1, x_2, x_3)$  può essere riscritta come prodotto delle copule bivariate  $C_{1,2}$ ,  $C_{1,3}$  e  $C_{2,3|1}$ , che prendono il nome di pair-copulas, così da poterne stimare la famiglia e i relativi parametri in modo indipendente, ottenendo di conseguenza un'ampia varietà di strutture di dipendenza.

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdot f_3(x_3) && \text{marginali} \\ &= c_{1,2}(F_1(x_1), F_2(x_2)) \cdot c_{1,3}(F_1(x_1), F_3(x_3)) && \text{unconditional pairs} \\ &= c_{2,3|1}(F(x_2|x_1), F(x_3|x_1)) && \text{conditional pair} \end{aligned}$$

Possiamo generalizzare questo concetto attraverso la seguente definizione.

**Definizione 6.6** (Pair-copulas). *Sia  $(X_1, \dots, X_d)$  un vettore di variabili aleatorie e indichiamo con  $F$  la corrispondente distribuzione congiunta. Siano inoltre  $f_1, \dots, f_d$  le corrispondenti densità marginali. Una possibile decomposizione di  $f(x_1, \dots, x_d)$  è data da [52]:*

$$f(x_1, \dots, x_d) = \prod_{j=1}^{d-1} \prod_{i=1}^{d-j} c_{((i,i+j)|i+1, \dots, i+j-1)} \cdot \prod_{k=1}^d f_k(x_k)$$

con

$$c_{((i,j)|i_1, \dots, i_k)} = c_{((i,j)|i_1, \dots, i_k)}(F(x_i, |x_{i_1}, \dots, x_{i_k}), F(x_j, |x_{i_1}, \dots, x_{i_k}))$$

con  $i < j$  e  $i_1 < \dots < i_k$

È importante sottolineare che la decomposizione descritta non è unica.

Per una migliore comprensione, Bedford e Cooke [49] hanno introdotto una visualizzazione grafica ad albero chiamata regular vine (R-Vine), in modo da analizzare come vengono definite le dipendenze tra variabili aleatorie. Graficamente, l'esempio visto prima utilizzando tre variabili, si può rappresentare nel seguente modo:

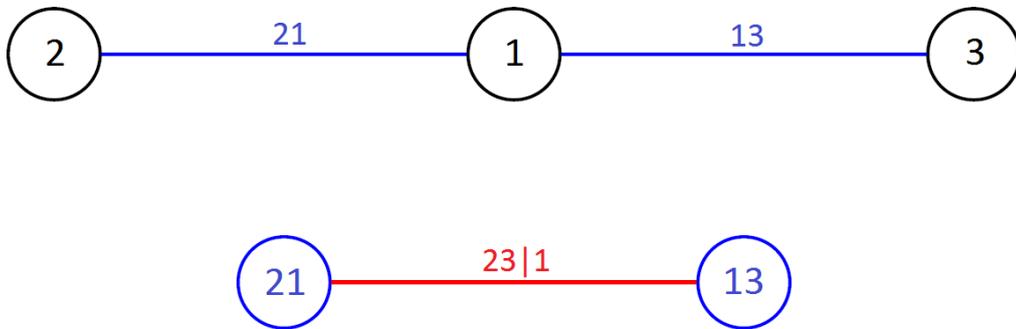


Figura 6.11: R-Vine in tre dimensioni

Come visto in precedenza, vengono stimate due copule bivariate, dette anche unconditional pairs, la prima tra le variabili 1 e 2, e la seconda tra la 1 e la 3. Successivamente viene creata una copula, detta conditional pair, tra le variabili 2 e 3 condizionatamente alla variabile 1.

### 6.4.1 Canonical Vine (C-Vine)

Come abbiamo visto, la decomposizione della distribuzione congiunta descritta nel paragrafo precedente non è unica. Negli anni seguenti, pertanto, sono state sviluppate alcune classi di copule vine, tra cui la canonical vine, o C-Vine.

La struttura canonical vine è formata anch'essa da più alberi, ma in questo caso in ogni albero tutti i nodi presenti, cioè le variabili, possiedono un arco che li collega (edge) con un nodo fissato. Ciò significa che le copule bivariate che vengono stimate sono tra un asset fissato e tutti gli altri.

Supponendo di avere a disposizione  $d$  titoli finanziari, nel primo albero della C-Vine si costruiranno  $d - 1$  edges tra un asset fissato, chiamato anche nodo radice, e tutti gli altri, calcolando quindi  $d - 1$  copule bivariate. Per semplicità, ipotizziamo che la variabile fissata sia stata la 1. Dopodiché, condizionatamente alla variabile precedentemente fissata, vengono calcolate le dipendenze tra un secondo nodo radice ed i rimanenti  $d - 2$  asset finanziari. Successivamente, questo procedimento viene ripetuto condizionando rispetto ai nodi radice precedenti, fissando una nuova variabile e calcolando le rispettive copule bivariate. Come detto in precedenza, la decomposizione non è unica, infatti estendendo questo ragionamento si hanno  $d \cdot (d - 1) \cdot \dots \cdot 3 = \frac{d!}{2}$  strutture differenti. È facile intuire che la forma di ognuno di questi alberi sia a stella, con al centro il nodo radice. Brechmann e Schepsmeier [53] hanno utilizzato questo tipo di decomposizione per costruire la libreria *CDVine* per il software *R*, impiegata per la parte applicativa di questa tesi, come vedremo nel Capitolo 7.

La densità multivariata di una canonical vine avente  $d$  nodi è descritta dalla seguente formula [51]:

$$f(x) = \prod_{j=1}^{d-1} \prod_{i=1}^{d-j} c_{((j,j+i)|1,\dots,j-1)} [F(x_j|x_1, \dots, x_{j-1}), F(x_{j+i}, |x_1, \dots, x_{j-1})] \cdot \prod_{k=1}^d f_k(x_k)$$

Vediamo ora graficamente come avviene questo processo. Supponiamo di avere a disposizione 4 variabili aleatorie, cioè  $d = 4$ , e analizziamo la loro struttura di dipendenza mediante una canonical vine. Sviluppando la formula della densità della C-Vine appena vista, si ottiene:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdot f_3(x_3) \cdot f_4(x_4) && \text{nodi in } T_1 \\
 &= c_{1,2}(F_1, F_2) \cdot c_{1,3}(F_1, F_3) \cdot c_{1,4}(F_1, F_4) && \text{edge in } T_1, \text{ nodi in } T_2 \\
 &= c_{2,3|1}(F(x_2|x_1), F(x_3|x_1)) \cdot c_{2,4|1}(F(x_2|x_1), F(x_4|x_1)) && \text{edge in } T_2, \text{ nodi in } T_3 \\
 &= c_{3,4|1,2}(F(x_3|x_1, x_2), F(x_4|x_1, x_2)) && \text{edge in } T_3
 \end{aligned}$$

dove con  $T_i$  viene indicato l'albero  $i$ -esimo.

La relativa struttura ad albero si può descrivere come:

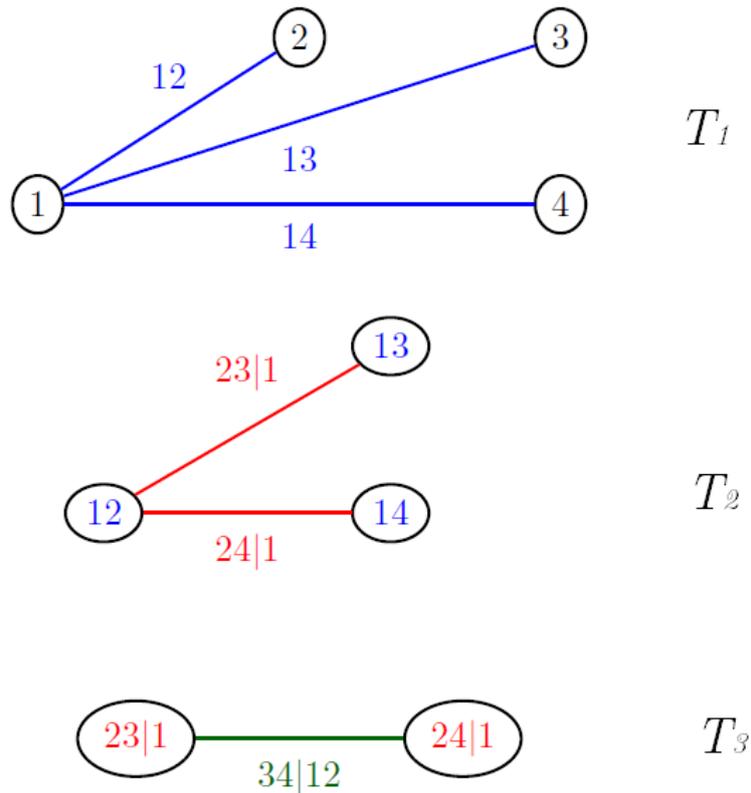


Figura 6.12: C-Vine con 4 variabili

Pertanto, la Canonical Vine ci fornisce una struttura molto dettagliata delle dipendenze tra gli asset, in cui per ogni edge di ogni albero si ha la copula bivariata più indicata con il relativo parametro.

### 6.4.2 Drawable Vine (D-Vine)

Similmente alle canonical vine, anche le drawable vine vengono costruite scegliendo le variabili secondo uno specifico ordine. In questo caso le dipendenze che vengono calcolate attraverso le copule bivariate sono quelle tra la variabile  $i$  e la successiva  $i + 1$ . Come prima, la struttura della D-Vine è formata da più alberi.

Avendo a disposizione  $d$  variabili aleatorie, in questo caso, nel primo albero verranno stimate le copule bivariate tra il titolo 1 ed il titolo 2, tra il 2 ed il 3, tra il 3 ed il 4, eccetera. Nel secondo albero, invece, si calcolano le dipendenze tra la variabile 1 e la 3 condizionatamente alla variabile 2, che viene indicata con  $(1, 3|2)$ , tra la variabile 2 e la variabile 4 condizionatamente alla variabile 3, indicata con  $(2, 4|3)$ , eccetera. Generalizzando, le dipendenze tra la variabile "a" e la "b" sono modellate tramite gli alberi, condizionando, ad ogni passo, sulle variabili che si trovano tra la variabile "a" e la "b" nel primo albero. Ad esempio, prendendo  $d = 5$  nell'albero 4 otterremo che la struttura di dipendenza tra la variabile 1 e la 5 è condizionata rispetto alla 2, 3 e 4, in sintesi abbiamo  $(1, 5|2, 3, 4)$ . La struttura che otteniamo dell'albero  $i$ -esimo è una linea di lunghezza  $i - 1$ .

Come per la canonical Vine, anche in questo caso la decomposizione non è unica, infatti per una drawable Vine  $d$ -dimensionale esistono  $d!$  possibili modi per ordinare le variabili nel primo albero  $T_1$ . Poiché gli edges sono undirected, cioè  $e_{i,j} = e_{j,i}$  per tutte le coppie  $(i, j)$ , possibile invertire l'ordine delle variabili nel primo albero  $T_1$ , senza che venga modificata la copula D-Vine corrispondente. Di conseguenza, questo implica che il numero di D-Vine distinte con  $d$  nodi sia  $\frac{d!}{2}$ , vale a dire la stessa cardinalità delle canonical vines, viste prima.

Osserviamo, inoltre, che in ciascun albero  $T_j$  con  $j \in 1, \dots, d - 1$  di una

copula D-Vine nessun nodo è connesso con più di due edge, e quindi non esiste nessun nodo con grado superiore a 2. Nella canonical Vine, invece, se prendiamo un albero  $T_j$  c'è un unico nodo connesso con  $d - j$  edge agli altrettanti nodi, mentre tutti gli altri nodi hanno grado 1. Per comprendere meglio quanto detto, si vedano le figure (6.12) e (6.13).

Anche questo tipo di copula è stato implementato nella libreria *CDVine* del software *R* da Brechmann e Schepsmeier [53].

La densità multivariata di una drawable vine si può scrivere scomponendola nelle sue  $d$  dimensioni, attraverso la seguente formula [49]:

$$f(x) = \prod_{j=1}^{d-1} \prod_{i=1}^{d-j} c_{((i,i+j)|i+1,\dots,i+j-1)} [F(x_i|x_{i+1}, \dots, x_{i+j-1}), F(x_{i+j}, |x_{i+1}, \dots, x_{i+j-1})] \cdot \prod_{k=1}^d f_k(x_k)$$

Come per il paragrafo precedente, vediamo ora una rappresentazione grafica di una drawable vine avente 4 variabili, quindi con  $d = 4$ . Sviluppando la formula della densità della D-Vine, si ottiene:

$$\begin{aligned} f(x) &= f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdot f_3(x_3) \cdot f_4(x_4) && \text{nodi in } T_1 \\ &= c_{1,2}(F_1, F_2) \cdot c_{2,3}(F_2, F_3) \cdot c_{3,4}(F_3, F_4) && \text{edge in } T_1, \text{ nodi in } T_2 \\ &= c_{1,3|2}(F(x_1|x_2), F(x_3|x_2)) \cdot c_{2,4|3}(F(x_2|x_3), F(x_4|x_3)) && \text{edge in } T_2, \text{ nodi in } T_3 \\ &= c_{1,4|2,3}(F(x_1|x_2, x_3), F(x_4|x_2, x_3)) && \text{edge in } T_3 \end{aligned}$$

dove con  $T_i$  viene indicato l'albero  $i$ -esimo.

La struttura ad albero di questa D-Vine si può descrivere come:

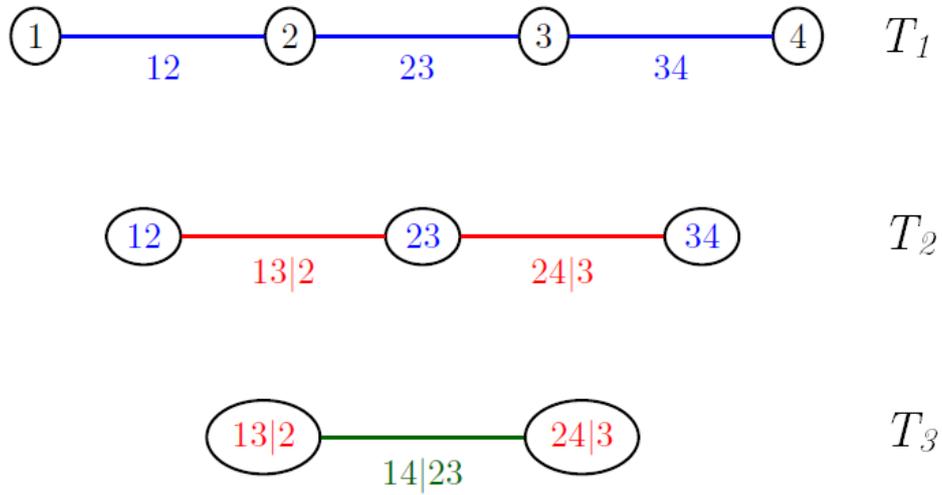


Figura 6.13: D-Vine con 4 variabili

Attraverso queste due classi di copule è possibile scomporre una densità  $d$ -dimensionale come prodotto delle sue marginali e delle densità delle copule bivariate, che sono rappresentabili graficamente attraverso una serie di alberi. In questo modo viene costruita la struttura del modello, grazie a cui verranno poi analizzate le varie copule ellittiche ed archimedee trovando, per ognuno degli edge di ciascun albero, la copula più adatta ed il relativo parametro.

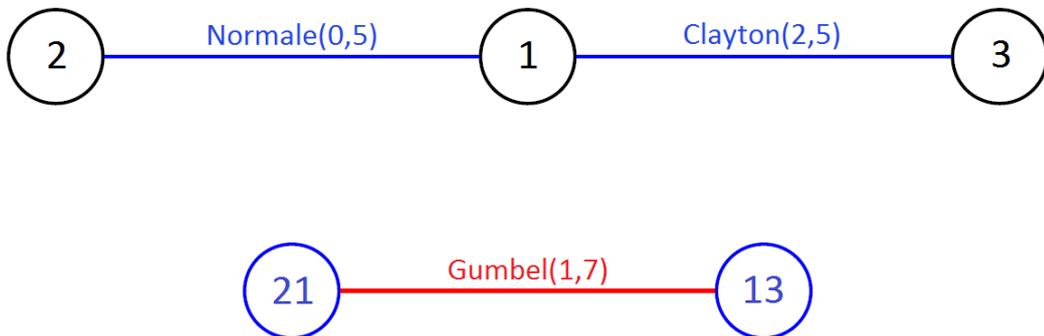


Figura 6.14: D-Vine con 3 variabili

### 6.4.3 Inferenza sulle Vine

Analizziamo ora più in dettaglio come fare inferenza su una particolare decomposizione di una copula Vine, con l'obiettivo di cercare la decomposizione che fitta al meglio la dipendenza dei nostri dati. In questo paragrafo verrà quindi approfondito come possono essere stimati i parametri di una canonical Vine e di una drawable Vine. Questo fattore è essenziale per poter definire i parametri delle copule Vine che sono stati inseriti nella figura precedente.

Assumiamo di voler calcolare la struttura di dipendenza di  $d$  variabili avendo a disposizione  $T$  valori nel tempo, ad esempio immaginiamo di avere  $d$  titoli finanziari e, per ognuno di essi, abbiamo  $T$  dati giornalieri (opportunamente trasformati in variabili uniformi tra  $[0, 1]$ ). Di conseguenza per ciascun asset abbiamo un vettore  $x_i = (x_{i,1}, \dots, x_{i,T})$ , con  $i = 1, \dots, d$  che rappresenta i rendimenti giornalieri del titolo  $i$ -esimo.

Per quanto riguarda la copula canonical vine, possiamo calcolare la sua log-likelihood, o massima verosimiglianza, in modo da riuscire a determinare quanto questa copula sia in grado di spiegare la struttura di dipendenza dei nostri dati. Possiamo quindi calcolare la log-likelihood per mezzo della seguente:

$$\sum_{j=1}^{d-1} \sum_{i=1}^{d-j} \sum_{t=1}^T \log [c_{(j,j+i)|1,\dots,j-1} [F(x_{j,t}|x_{1,t}, \dots, x_{j-1,t}), F(x_{j+i,t}|x_{1,t}, \dots, x_{j-1,t})]]$$

Per ciascuna delle copule presenti nella formula appena descritta vi è almeno un parametro che deve essere determinato. Il loro numero dipende chiaramente da quale tipo di copule viene utilizzato. Chiamiamo con  $\Theta_{j,i}$  l'insieme dei parametri della corrispondente funzione di densità della copula  $c_{(j,j+i)|1,\dots,j-1}$ . Indichiamo inoltre con  $L(x, v, \Theta)$  la log-likelihood della copula bivariata selezionata con parametri  $\Theta$ , avendo come dati  $x$  e  $v$ :

$$L(x, v, \Theta) = \sum_{t=1}^T \log [c(x_t, v_t, \Theta)]$$

dove  $c(u, v, \Theta)$  è la densità di una copula bivariata con parametri  $\Theta$ .

Per quanto riguarda la drawable vine, invece, possiamo calcolare la sua funzione di massima verosimiglianza attraverso la seguente:

$$\sum_{j=1}^{d-1} \sum_{i=1}^{d-j} \sum_{t=1}^T \log [c_{(i,i+j)|i+1,\dots,i+j-1} [F(x_{i,t}|x_{i+1,t}, \dots, x_{i+j-1,t}), F(x_{i+j,t}|x_{i+1,t}, \dots, x_{i+j-1,t})]]$$

Vediamo ora brevemente un esempio su come determinare i parametri di una copula C-Vine. Immaginiamo di avere  $d = 3$  variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite secondo una distribuzione uniforme tra  $[0, 1]$ . Il calcolo della log-likelihood viene ridotto a:

$$\sum_{t=1}^T [\log c_{1,2}(x_{1,t}, x_{2,t}, \Theta_{11}) + c_{2,3}(x_{2,t}, x_{3,t}, \Theta_{12}) + c_{1,3|2}(v_{1,t}, v_{2,t}, \Theta_{21})]$$

dove  $v_{1,t} = F(x_{1,t}|x_{2,t})$  e  $v_{2,t} = F(x_{3,t}|x_{2,t})$ .

In questo caso, i parametri che vengono stimati sono  $\Theta = (\Theta_{11}, \Theta_{12}, \Theta_{21})$ , dove  $\Theta_{j,i}$  è l'insieme dei parametri della corrispondente densità di copula  $c_{(i,i+j)|i+1,\dots,i+j-1}$ . Seguendo la procedura che abbiamo descritto in precedenza per la canonical vine, prima vengono esaminati i parametri delle tre copule bivariate attraverso una procedura sequenziale e in seguito si massimizza la log-likelihood  $L(x, v, \Theta)$ .

#### 6.4.4 Selezione della struttura

Nel paragrafo appena terminato abbiamo visto come fare inferenza su una specifica decomposizione di una copula Vine. Questo, però, risolve solo una parte del nostro problema, in quanto rimane da definire come selezionare la struttura più idonea tra le  $\frac{d!}{2}$  possibili.

Nel caso in cui si abbiano poche variabili, ad esempio 3 o 4, si può decidere di stimare tutte le possibili decomposizioni utilizzando la procedura descritta nel paragrafo precedente e confrontare i valori ottenuti dalle log-likelihood [54].

Come è facile dedurre, però, questo non è possibile se abbiamo molte variabili

in quanto il tempo computazionale sarebbe troppo elevato, visto che cresce molto rapidamente all'aumentare del numero della dimensione  $d$ .

Possiamo però cercare di determinare quali siano le relazioni di dipendenza più rilevanti e utilizzare soltanto queste per determinare quali decomposizioni stimare. Teniamo presente che le D-Vine sono più flessibili delle C-Vine [51], poiché per queste ultime vengono descritte solamente le relazioni tra una variabile fissata e tutte le altre, mentre nella struttura della D-Vine possiamo selezionare con più autonomia quali coppie di variabili analizzare.

Proprio per l'elevata flessibilità si può ipotizzare che la drawable Vine possa spiegare meglio le relazioni di dipendenza presenti tra gli asset con cui dovrà essere composto il portafoglio ottimo. Questo punto verrà analizzato più in dettaglio nel settimo capitolo, quando verrà creato un modello di previsione basato sulle due tipologie di copule Vine in modo da determinare empiricamente quale sia il migliore.

## Capitolo 7

# Applicazione ad un portafoglio di asset finanziari

Dopo aver illustrato la teoria di selezione di portafoglio di Markowitz, il modello di Black-Litterman e tutti i miglioramenti che abbiamo descritto nei capitoli precedenti, vediamo ora un'applicazione di queste metodologie per verificare in pratica quanto correttamente siano in grado di predire quali siano i titoli più promettenti da inserire nel portafoglio. Secondo quanto visto, apportando tutte le modifiche ed i suggerimenti proposti, si dovrebbero ottenere delle stime molto più valide, intuendo meglio quali siano gli asset da acquistare e in quale misura. Bisogna però dimostrare se e quanto questi accorgimenti diano realmente un vantaggio.

È importante sottolineare che il problema che si ha di fronte, vale a dire quello di ottenere elevati rendimenti in borsa senza rischiare eccessivamente, è di primaria importanza nel mondo finanziario, sia per le società operanti nella finanza, quali banche, fondi d'investimento, società di gestione del risparmio (SGR), ecc, sia per i singoli risparmiatori, intenti a sfuggire alla svalutazione del proprio denaro a causa dell'inflazione. Di tutta risposta, questo problema risulta essere estremamente complicato, perché nessuno può dire con certezza quali titoli aumenteranno di valore e quali ne perderanno.

## CAPITOLO 7. APPLICAZIONE AD UN PORTAFOGLIO DI ASSET FINANZIARI 98

In questa tesi si è scelto di analizzare due gruppi distinti di asset, in modo da poter verificare i risultati prodotti su due differenti casi. Nella prima analisi si hanno a disposizione 14 titoli finanziari per trovare l'allocazione ottimale del portafoglio, mentre nella seconda soltanto 6.

Cercando di impiegare gli asset più rappresentativi dell'economia globale, nella prima analisi sono stati scelti i più importanti indici azionari, i maggiori indici settoriali, due indici obbligazionari, uno riferito agli Stati Europei e uno agli Stati di tutto il mondo, e un indice che replica l'andamento dell'oro.

<b>Nome Asset</b>	<b>Asset class</b>
S&P 500	Azionario USA
Nasdaq 100	Azionario USA
Nikkei 225	Azionario Giappone
India MSE Sensex 30	Azionario India
Brazil Bovespa	Azionario Brasile
Euro Stoxx 50	Azionario Europa
Franklin Euro Government Bond	Obbligazionario Europa
Bloomberg Gold Sub Index	Commodity
MSCI World Energy	Settoriale
MSCI World Health Care	Settoriale
MSCI World Industrials	Settoriale
MSCI World Financials	Settoriale
MSCI World Utilities	Settoriale
Citigroup WGBI US (1-3 Y)	Obbligazionario Mondiale

Nel portafoglio ridotto utilizzato per la seconda analisi, invece, sono stati utilizzati soltanto sei dei titoli sopra elencati, prendendo quelli più significativi. In questo caso sono stati selezionati tre indici azionari, uno statunitense, uno europeo ed uno giapponese, i due indici obbligazionari visti prima, e l'indice settoriale composto dalle società finanziarie.

<b>Nome Asset</b>	<b>Asset class</b>
S&P 500	Azionario USA
Nikkei 225	Azionario Giappone
Euro Stoxx 50	Azionario Europa
Franklin Euro Government Bond	Obbligazionario Europa
MSCI World Financials	Settoriale
Citigroup WGBI US (1-3 Y)	Obbligazionario Mondiale

Gli indici azionari selezionati sono tra i più importanti al mondo e permettono di avere un quadro completo dell'andamento dell'economia globale. Per quanto riguarda i due indici obbligazionari, invece, il primo è focalizzato sui titoli di Stato dei Paesi Europei di tipo investment grade, vale a dire che per poter essere acquistato il rating creditizio minimo del bond deve essere pari o superiore a BBB- secondo quanto definito dall'agenzia di rating Standard Poor's. Anche il secondo indice obbligazionario è focalizzato sui titoli di Stato con rating investment grade, ma come dice la sigla WGBI (World Government Bond Index), lo Stato di riferimento non è circoscritto alla sola Europa. Inoltre, questo particolare indice considera soltanto obbligazioni con scadenza tra uno e tre anni. Gli indici settoriali, invece, sono riferiti alle maggiori società di tutto il mondo operanti in quella categoria e servono per analizzare come si evolve il valore delle aziende del comparto. Vediamo, come esempio, quali sono le dieci maggiori società che compongono l'indice MSCI World Energy [55] e il MSCI World Financials [56].

CAPITOLO 7. APPLICAZIONE AD UN PORTAFOGLIO DI ASSET FINANZIARI 100

<b>Energy - Top 10</b>	<b>Capitalizz. (mld USD)</b>	<b>Peso (%)</b>
Exxon Mobil Corp	354.39	13.85
Chevron Corp	237.24	9.27
Royal Dutch Shell A	151.32	5.92
British Petroleum (BP)	139.67	5.46
Total	131.35	5.13
Royal Dutch Shell B	127.1	4.97
Schlumberger	93.64	3.66
ConocoPhillips	66.80	2.62
Enbridge	64.57	2.52
EOG Resources	62.31	2.44
<b>Totale</b>	<b>1428.39</b>	<b>55.84</b>

<b>Financials - Top 10</b>	<b>Capitalizz. (mld USD)</b>	<b>Peso (%)</b>
JP Morgan Chase & Co.	376.32	5.14
Bank of America Corp	295.86	4.04
Wells Fargo & Co.	286.11	3.91
Berkshire Hathaway	251.16	3.43
HSBC Holdings	208.52	2.85
Citigroup	202.73	2.77
Royal Bank of Canada	119.44	1.63
Commonwealth Bank of AUS	108.83	1.49
Toronto-Dominion Bank	108.36	1.48
Banco Santander	106.28	1.45
<b>Totale</b>	<b>2063.61</b>	<b>28.18</b>

Per convenzione e semplicità d'uso, tutti gli indici sono denominati in dollari americani (USD).

I dati a nostra disposizione vanno dal 01/01/1999 al 31/10/2017, consentendo un'analisi su un periodo di quasi 19 anni e, poiché in un anno solare sono presenti all'incirca 252 giorni di borsa, abbiamo un totale di 4899 giorni. Dato che le serie storiche sono così lunghe, è stato possibile osservare ciò che si è verificato durante i periodi di crisi finanziaria. Tra le più importanti vi sono sicuramente la crisi delle dot-com del 2000 legata alle società dell'informatica e la crisi legata ai mutui subprime del 2008. In questo modo sarà possibile confrontare direttamente, anche nei momenti di crisi finanziaria, gli andamenti dei vari indici rispetto al portafoglio ottimizzato. Chiaramente non ci si aspetta che quest'ultimo riesca a guadagnare nei periodi di crisi, ma si auspica che sia in grado di perdere meno della maggior parte degli asset a disposizione. Nel grafico qui sotto vengono riportate le quotazioni dei 14 asset, normalizzate a 100 per uniformità.

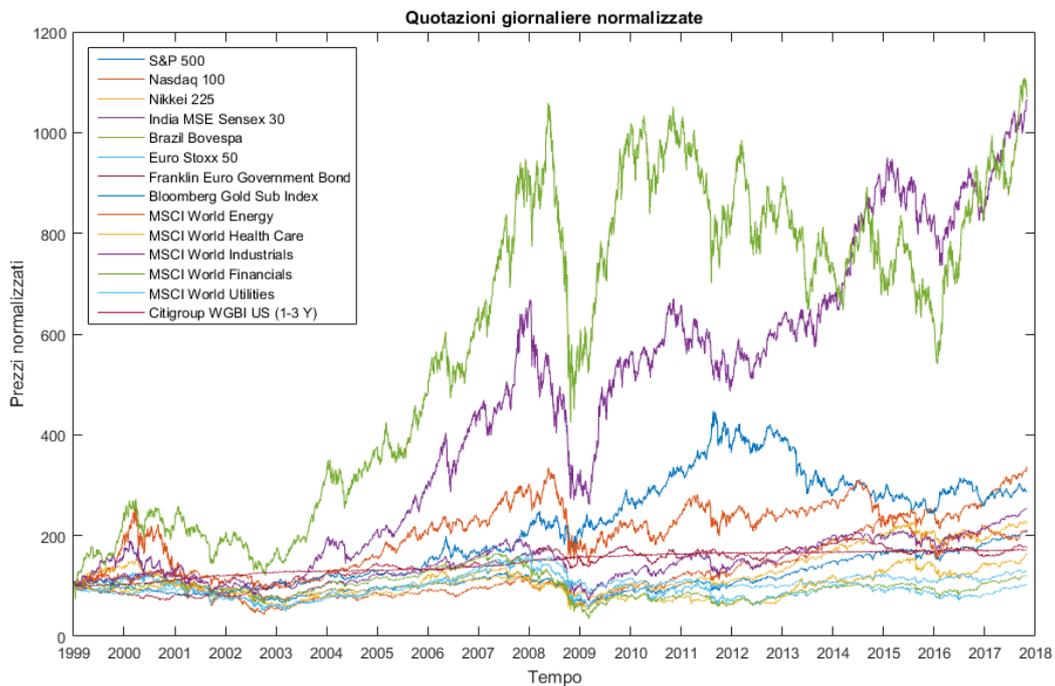


Figura 7.1: Andamento delle quotazioni dei 14 indici.

Per ognuno dei modelli che verranno presentati in questo capitolo, è stato utilizzato un sistema dinamico, in modo da prendere in esame solamente le ultime  $N$  osservazioni rispetto al giorno di riferimento, che fungono da training set, e mantenere tale allocazione per i successivi  $M$  giorni, corrispondenti al test set. Pertanto, se vogliamo capire in che modo allocare il portafoglio al 01/07/2005 per i successivi 4 mesi, utilizzando i dati degli ultimi 6 mesi, tralascieremo tutta la serie storica precedente al 01/01/2005 e ripeteremo l'analisi il 01/11/2005, poi il 01/03/2006, eccetera.

Dal punto di vista computazionale, per sviluppare i modelli si è utilizzato principalmente il software *Matlab*, supportato da *R* nella simulazione delle Vine Copulas.

In totale i modelli che verranno presentati nei paragrafi successivi sono quattro:

- Modello di Markowitz
- Modello di Black-Litterman
- Modello di Markowitz "avanzato"
- Modello di Markowitz "avanzato" con le copule Vine

Negli ultimi due modelli è stata considerata anche la possibilità di vendita allo scoperto dei titoli a disposizione, pratica nota anche come short-selling, al fine di vendere allo scoperto i titoli meno promettenti per avere più liquidità a disposizione ed acquistare ancora più quote degli asset indicati dal processo di ottimizzazione come profittevoli. Infine è stata esaminata anche la variante 130/30 in cui è possibile investire a leva un ulteriore 30% della liquidità disponibile e vengono vendute allo scoperto posizioni fino al 30% del valore. Per una maggiore flessibilità, in ciascuno dei modelli sopra elencati è possibile eseguire il processo di ottimizzazione sia in base al rendimento che si vuole ottenere, sia in base al rischio che si è disposti tollerare.

In sintesi, il procedimento che è stato seguito per implementare i vari modelli si può riassumere con:

1. Definizione del train e del test set iniziali
2. Determinazione delle distribuzioni marginali degli asset
3. Simulazione per aumentare la dimensione del train set
4. Definizione della soglia di rischio dinamica (solo per i modelli avanzati)
5. Ottenimento dei pesi da allocare a ciascun asset attraverso la risoluzione del problema di ottimizzazione
6. Calcolo del rendimento del portafoglio al termine del test set
7. Aggiornamento di train e test set con i dati successivi al periodo esaminato
8. Ripetizione dei punti precedenti, dal 2 al 7, fino al termine dei dati a disposizione

Poiché il modello di Markowitz non fornisce indicazioni circa le dimensioni del train set e del test set, i cui valori sono determinanti per il calcolo del rendimento complessivo nel periodo 1999-2017, è stato necessario verificare sperimentalmente diverse combinazioni di essi. Dal lavoro svolto si deduce che tali valori non sono costanti e validi in generale, bensì dipendenti dagli asset a nostra disposizione, come confermano i risultati ottenuti nelle due analisi.

Inoltre, come vedremo più avanti, un livello costante di rischio tollerabile in ogni periodo temporale non risulta efficace. Una valida alternativa consiste nel definire la soglia di rischio relativa al futuro in base al livello di rischio che è stato calcolato per il train set. In questo modo, il modello diventa adattivo in funzione del mercato e consente di cogliere migliori risultati nei periodi favorevoli (o meno rischiosi), proteggendosi viceversa nei periodi maggiormente turbolenti.

Iniziamo a vedere come è stato implementato il modello di Markowitz e quali risultati sono stati ottenuti.

## 7.1 Modello di Markowitz

Il primo modello che viene proposto è il modello di Markowitz originario, presentato nel 1952. Attraverso l'implementazione di questo modello sono state rispettate tutte le assunzioni che abbiamo descritto nel primo capitolo. Partendo dai primi dati a nostra disposizione, sono state selezionate le prime  $N$  osservazioni di cui il modello si servirà per individuare gli asset più promettenti per i futuri  $M$  giorni successivi. Il valore dei parametri  $N$  ed  $M$  verrà discusso in seguito, per il momento è sufficiente ipotizzare che  $N$  sia all'incirca un multiplo di  $M$  poiché, per definire se un asset è allettante oppure no, sono necessari molti più giorni rispetto al periodo per cui si decide di mantenerlo in portafoglio. Inoltre, con il trascorrere del tempo rispetto al momento della scelta del portafoglio, la validità delle previsioni decresce sempre di più.

Dai valori giornalieri degli asset sono stati calcolati i rendimenti, e poiché il modello di Markowitz si basa sull'assioma che questi siano distribuiti secondo una distribuzione gaussiana, sono state calcolate le medie e le covarianze campionarie dei rendimenti dei vari titoli a disposizione.

Quindi viene avviato il processo di ottimizzazione descritto attraverso la (1.1) e la (1.2) per determinare la frontiera efficiente ed individuare, dato il livello di propensione al rischio oppure il rendimento che si vuole ottenere, l'allocation ottimale del proprio portafoglio. Fissando  $N = 100$  e scegliendo come soglia di rischio il 2%, otteniamo la seguente frontiera efficiente:

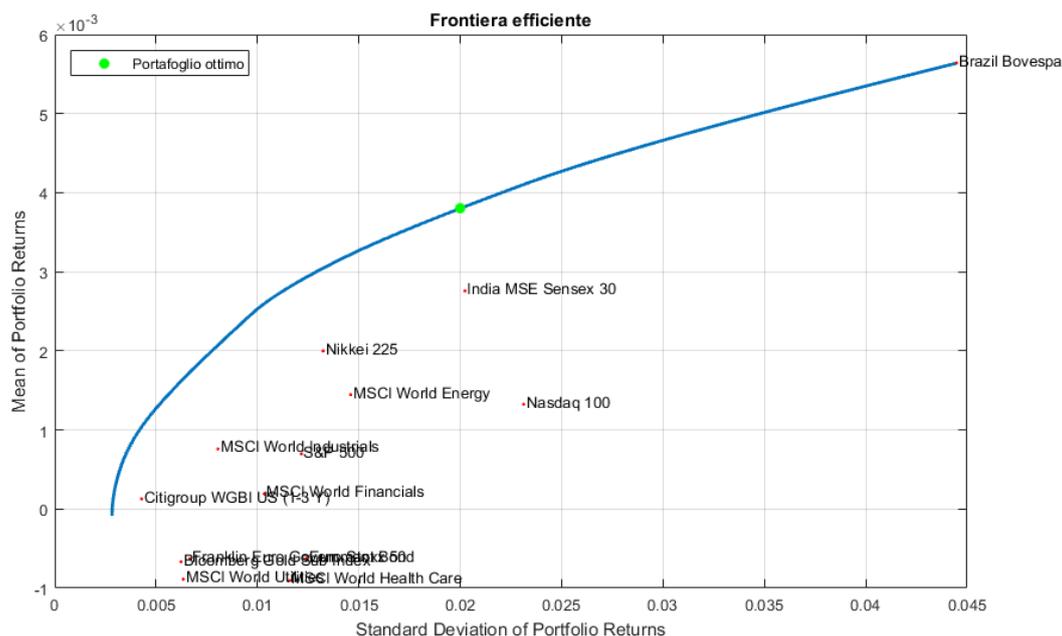


Figura 7.2: Frontiera efficiente.

Otteniamo quindi i pesi relativi ad ogni asset per l'allocazione ottimale del primo periodo, nel nostro caso investiremmo il nostro capitale negli indici Nikkei 225 (11.31%), Sensex 30 (49.41%) e Bovespa (39.28%). Definiti i titoli da acquistare, si passa ad analizzare quanto questa scelta abbia reso negli  $M$  giorni successivi, in modo da verificare se la scelta effettuata si sia rivelata efficace o meno. Questo processo viene ripetuto per ogni periodo a nostra disposizione, in modo da valutare quanto avremmo guadagnato seguendo questa procedura. Questo processo, però, deve essere ripetuto facendo variare i valori dei parametri  $N$  ed  $M$ , in modo da trovare sperimentalmente la loro combinazione ottimale, visto che non esiste un metodo non empirico. Come è possibile vedere dai grafici che seguono, utilizzando  $N = 250$  ed  $M = 100$ , che d'ora in avanti verranno indicati semplicemente con 250-100, si ottiene un buon rendimento, senza rischiare eccessivamente.

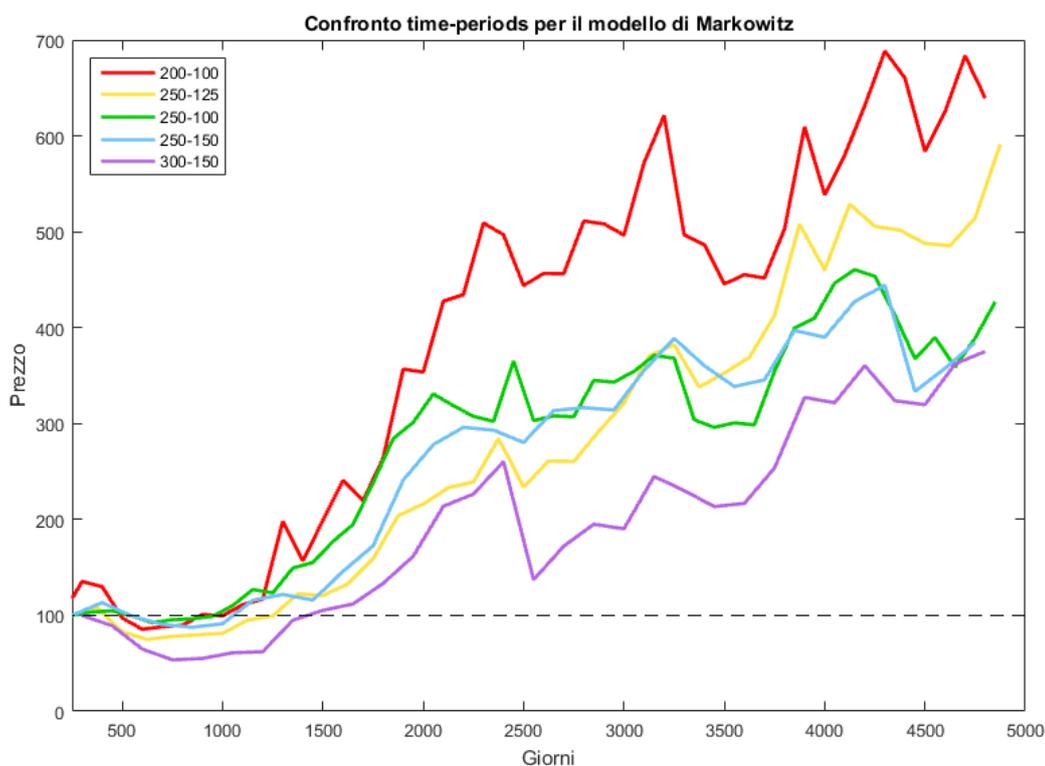


Figura 7.3: Confronto risultati per il modello di Markowitz.

Notiamo che nel caso in cui si scelga la combinazione 200-100, il rendimento finale del portafoglio sarebbe è più elevato rispetto alla scelta 250-100, ma in questo caso i rendimenti cumulati sarebbero molto più instabili. Ciò significa che, nonostante complessivamente si ottenga un rendimento migliore, si andrà incontro ad oscillazioni più elevate nei rendimenti.

Questo elemento gioca un ruolo molto importante sulla psicologia dell'investitore. Difficilmente una persona continuerà a servirsi di un metodo che sulla carta è molto efficace ma che, proprio per averlo seguito scrupolosamente, ha appena perso il 20% o più del proprio investimento. Come dimostrato dagli studi del premio Nobel per l'Economia Daniel Kahneman, in genere le perdite pesano sensibilmente di più dei guadagni: nelle nostre scelte quindi preferiamo limitare le perdite piuttosto che massimizzare i guadagni, alme-

no finché il potenziale guadagno non è pari a circa il doppio della possibile perdita [57].

Di conseguenza, è essenziale che il nostro modello non abbia avuto perdite significative nei periodi simulati. Nel grafico sottostante viene riportata la perdita massima tra tutti i periodi, per ognuno dei parametri precedentemente utilizzati, da cui si conclude che la scelta 250-100 sia la più idonea.

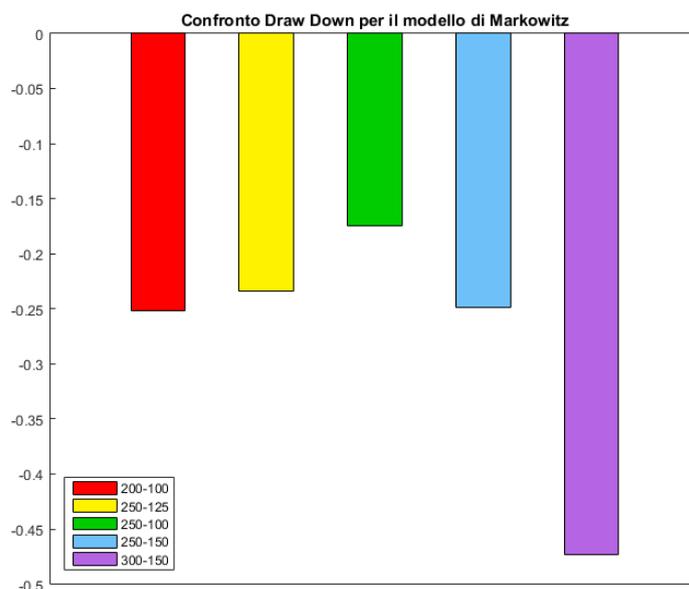


Figura 7.4: Confronto draw down per il modello di Markowitz.

Sebbene sia stata scelta la composizione meno rischiosa, ci troviamo comunque a dover far fronte, nel peggiore dei casi, ad una perdita di oltre il 17% del capitale, un valore piuttosto alto. Già da questi due grafici è possibile apprezzare come spesso il modello di Markowitz fornisca in alcuni casi risultati non molto validi, con conseguenti rendimenti negativi.

Quello che più ci interessa verificare è se il modello di Markowitz ha avuto un risultato complessivo migliore rispetto ad un portafoglio equipesato. Perché nel caso in cui, dopo aver utilizzato questa ottimizzazione, si ottenga un rendimento complessivo inferiore tanto valeva acquistare "a caso" gli asset, allocando a ciascuno di essi lo stesso peso. Non dimentichiamo che quest'ulti-

mo approccio è quello maggiormente adottato dalle persone comuni, le quali, una volta definiti gli asset in cui investire, spesso suddividono equamente il proprio capitale tra gli asset scelti.

Infine, è strettamente necessario che il rendimento ottenuto sia migliore di quello che si sarebbe ottenuto investendo il capitale in titoli di stato elvetiche con scadenza a sei mesi, aventi rating AAA, quindi considerati privi di rischio. Nonostante quest'ultima osservazione possa sembrare scontata, si tenga presente che l'indice Eurostoxx 50, che raggruppa le 50 aziende europee a maggiore capitalizzazione, che chiaramente non è privo di rischio, nel periodo considerato ha ottenuto un rendimento di appena +2,36%.

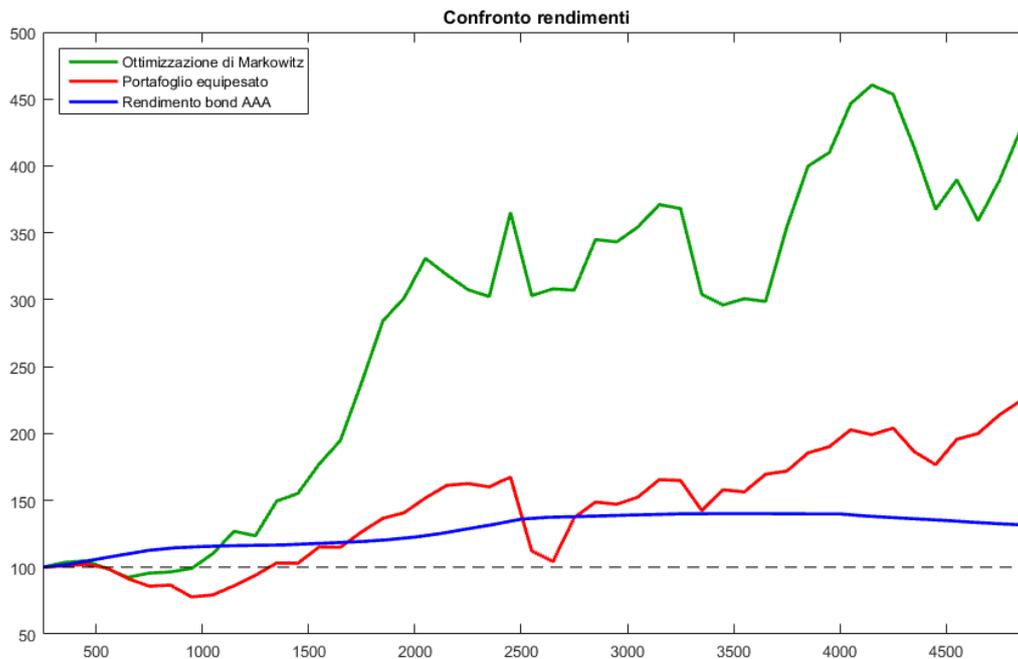


Figura 7.5: Confronto dei rendimenti ottenuti con il modello di Markowitz.

Come è possibile dedurre dalla figura, il rendimento complessivo ottenuto tramite l'approccio di Markowitz è stato ben superiore rispetto al portafoglio equipesato e ai bond elvetiche. Questo risultato testimonia quanto sia importante, ed efficace, servirsi di un processo di ottimizzazione per allocare

correttamente il proprio capitale. L'investitore che inizialmente aveva un capitale pari a 100, si ritrova quindi, a circa 18 anni di distanza, ad avere 427, contro appena 224 se avesse investito equamente tra gli asset a disposizione e i 132 che avrebbe con il bond elvetico privo di rischio.

## 7.2 Modello di Black-Litterman

Il modello di Black-Litterman, secondo quanto descritto nel terzo capitolo, dovrebbe risolvere i problemi legati all'instabilità dei pesi del portafoglio rendendo più applicabile alla realtà il processo di ottimizzazione. Come nel modello di Markowitz vengono usati un training set ed un test set rispettivamente per istruire il modello e per verificare quanto fossero valide le informazioni acquisite. Poiché i titoli che esaminiamo sono tutti indici ad elevata capitalizzazione che vengono scambiati quotidianamente in grosse quantità, si è deciso di utilizzare dei pesi uniformi per definire i pesi  $\omega$  legati alla capitalizzazione di mercato come indicato in Meucci [58].

Per la scelta delle views, invece, è stato necessario ricorrere ad un espediente. Non potendo conoscere quali fossero nel tempo le opinioni dei manager operanti in ambito finanziario sugli asset a nostra disposizione, si è ipotizzato che nel periodo successivo a quello di riferimento:

- i tre asset che avevano ottenuto il maggior rapporto rendimento-rischio, sarebbero stati più promettenti dei due peggiori;
- l'asset che aveva conseguito il rendimento più elevato avrebbe maturato una performance migliore di tutti gli altri anche nel periodo successivo.

In questo modo è stato possibile automatizzare il processo di definizione delle views e degli asset in esse coinvolti senza doverle definire caso per caso. Pertanto è stato calcolato l'indice di Sharpe per ciascun titolo finanziario,

inventato nel 1994 dall'omonimo economista [59], dato dalla seguente:

$$SR_P = \frac{R_P - r_f}{\sigma_P}$$

dove con  $R_P$  e  $\sigma_P$  vengono indicati rispettivamente i rendimenti ottenuti e la deviazione standard dell'asset  $P$ , mentre con  $r_f$  il tasso di rendimento di un titolo risk-free.

Successivamente i valori ottenuti sono stati ordinati in modo decrescente e sono stati selezionati i primi tre titoli e gli ultimi due in modo da definire la matrice  $P$  delle views. Nella prima riga è stata quindi inserita la view assoluta, riferita al miglior asset, e nelle restanti due sono state definite le due view relative. Chiaramente questa operazione è stata ripetuta per ogni periodo a nostra disposizione, per automatizzare il tutto. Ad esempio, supponiamo che i titoli 2, 12 e 4 abbiano ottenuto i valori più elevati dell'indice di Sharpe e i titoli 14, 8 e 7 i valori peggiori. La corrispondente matrice delle views  $P$  sarebbe stata:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Una volta definite le views, è stata calcolata la matrice  $\Omega$ , legata alla confidenza di ciascuna view, e la matrice di  $Q$  contenente gli extra rendimenti futuri dei titoli più promettenti. Per la view assoluta si è scelto di utilizzare il doppio della differenza tra la il rendimento medio dell'asset più promettente e la media dei rendimenti di tutti gli asset. Per le view relative, invece, sono state confrontate nella stessa maniera le medie dei rendimenti del secondo e del terzo titolo migliore con le peggiori due.

Infine, sono stati calcolati il vettore dei rendimenti attesi e la corrispondente matrice di varianza-covarianza a posteriori incorporando le views, secondo quanto descritto dalle formule al termine del Paragrafo 3.1. A questo punto, i risultati ottenuti sono stati forniti come input al problema di ottimizzazione, come nel caso del modello di Markowitz, e sono state analizzate le performance sulle  $M$  osservazioni successive, facenti parte del test set. Anche in

questo caso sono stati osservati i risultati al variare delle dimensioni del train set e del test set al fine di ottenere la combinazione migliore.

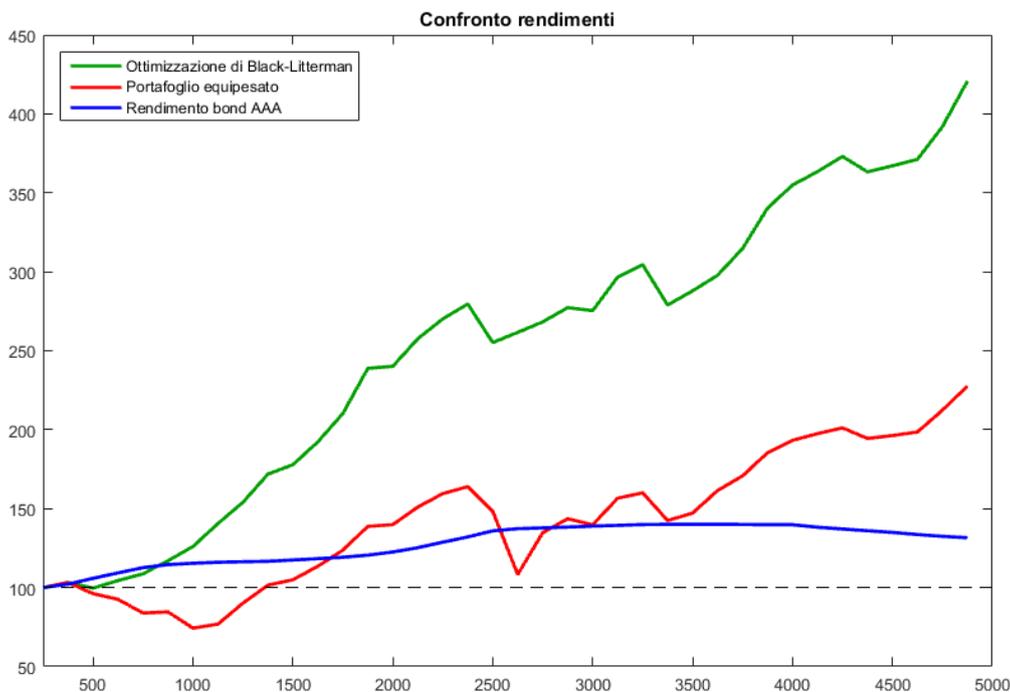


Figura 7.6: Rendimenti ottenuti nel modello di Black-Litterman.

Questo risultato è stato ottenuto utilizzando un intervallo di 250 osservazioni come dimensione del train set e di 125 osservazioni come test set, risultati essere i valori più idonei. Come è stato fatto per il modello di Markowitz, si è cercato di prendere la scelta dei valori di  $N$  ed  $M$  tali da avere un buon rendimento complessivo, senza però essere soggetti a perdite elevate tra un periodo e l'altro. La prima cosa che notiamo è che il rendimento ottenuto in questi 18 anni è estremamente simile a quello ottenuto attraverso il modello di Markowitz. Infatti, assumendo di avere inizialmente un valore pari a 100, ci si ritrova dopo quasi 18 anni con un valore di 421 contro i 427 che si otterrebbero con il modello di Markowitz. La cosa che deve sorprendere, però, è legata alle perdite che ci sono state, e quindi al rischio che si è corso, durante questo periodo. Mentre con il modello di Markowitz, come abbiamo

visto nel paragrafo precedente, nel peggiore dei casi avremmo avuto una perdita del -17.44%, qui la perdita peggiore è contenuta al -8.73%. Questo significa che a parità di guadagno prodotto, il rischio è stato di gran lunga inferiore. Inoltre, come si può vedere dalla figura seguente, i pesi degli asset in portafoglio sono piuttosto stabili implicando una maggiore diversificazione di portafoglio, confermando le aspettative descritte nel terzo capitolo.

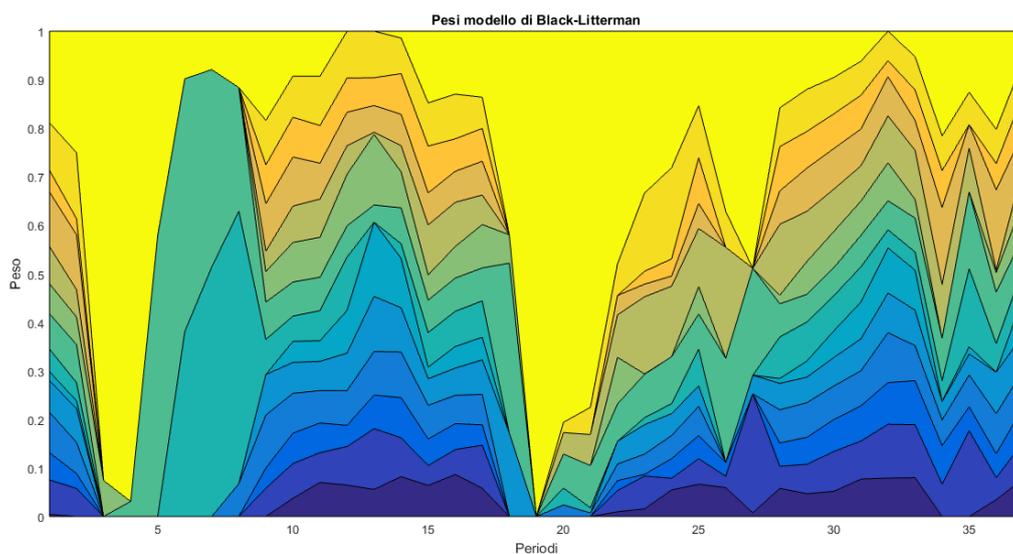


Figura 7.7: Pesi degli asset nel modello di Black-Litterman.

Questo risultato pratico ci evidenzia perché ancora oggi molte società di risparmio gestito adottino questo modello per le loro analisi di portafoglio e quanto sia valido se paragonato al modello di Markowitz, pur utilizzando buona parte delle assunzioni di quest'ultimo. Inoltre, va precisato che grazie alla maggior stabilità dei pesi degli asset in portafoglio, i costi di transazione sarebbero di gran lunga inferiori per le società che operano con grossi capitali. In questo modo queste otterrebbero un doppio vantaggio nell'utilizzo del modello di Black-Litterman, se paragonato al modello di Markowitz: il primo legato al rischio da sostenere e il secondo riguardo ai costi per le transazioni di acquisto/vendita degli asset in portafoglio.

### 7.3 Modello avanzato

In questo paragrafo verrà presentato il modello "avanzato", che adotta buona parte degli accorgimenti proposti nei capitoli visti in precedenza. Pur basandosi sul modello di Markowitz originario, come i modelli precedenti, non possiede tutta quella serie di problematiche che sono state evidenziate nel secondo capitolo.

Questo modello, infatti, utilizza le distribuzioni ibride viste nel Capitolo 4, composte da due Pareto generalizzate per determinare le code delle marginali dei vari asset, fornendo così una maggiore precisione di stima del rischio.

Vengono inoltre utilizzate le copule multivariate per definire la struttura di dipendenza che è presente tra i titoli finanziari ed il Conditional Value at Risk (CVaR) come misura di rischio, in grado di definire più correttamente rispetto al VaR e alla matrice di covarianza il livello di rischiosità degli asset. Come vedremo più avanti, sono state sviluppate tre ulteriori varianti di questo modello:

- la prima utilizza il Value at Risk come misura di rischio al posto del CVaR, in modo da verificare se l'utilizzo di quest'ultimo fornisce effettivamente un beneficio;
- la seconda consente la vendita allo scoperto dei titoli meno promettenti al fine di avere più liquidità da investire;
- la terza utilizza la strategia 130/30, utilizzata da alcune tipologie di fondi d'investimento. In quest'ultima variante è possibile allocare ad ogni asset un peso compreso tra -0.3 e 1.3, quindi è consentita la vendita allo scoperto degli strumenti finanziari, seppure in misura ridotta, ed è possibile utilizzare una leva finanziaria che non può superare di 1.3 volte il valore del portafoglio nel caso in cui vi sia un asset particolarmente promettente.

Tornando al modello, che per identificarlo è stato definito "avanzato", dopo aver trovato i parametri delle distribuzioni di Pareto generalizzate per definire le code delle distribuzioni dei rendimenti dei singoli asset ed aver impiegato il kernel per le parti centrali di queste ultime, si è provveduto a trasformare i dati in distribuzioni uniformi su  $[0, 1]$  al fine di definirne successivamente la struttura di dipendenza mediante una copula. Questo perché, come si è visto nel Capitolo 6, le distribuzioni marginali di una copula sono delle uniformi in  $[0, 1]$ .

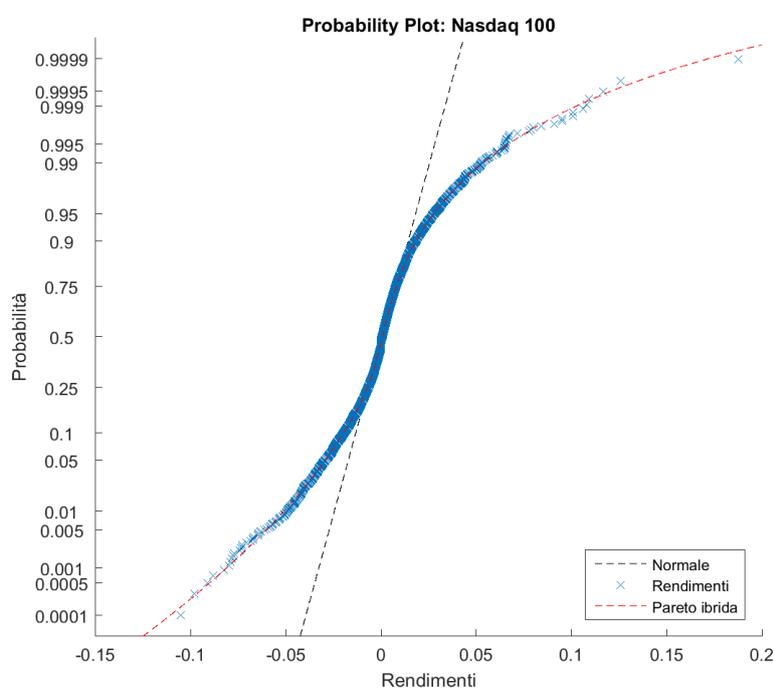


Figura 7.8: Probability Plot per l'indice Nasdaq 100

In questa fase sono stati stimati, con il metodo della massima verosimiglianza, i parametri di tutte le copule ellittiche ed archimedee esaminate nel Paragrafo 6.3, cercando di trovare quella che approssimasse meglio i nostri dati. Da quest'analisi è emerso che la copula  $t$  di Student era la più indicata, pertanto abbiamo utilizzato questo risultato per simulare 10.000 osservazioni

in modo da aumentare la dimensione del nostro campione di dati. Ricordo che quest'analisi viene ripetuta per ogni periodo d'investimento e, poiché per determinare il portafoglio ottimo viene fatto riferimento alle  $N$  osservazioni precedenti, queste ultime risultano essere troppo poche per un'analisi affidabile, da qui la necessità di una simulazione per aumentare il campione di dati.

Rispetto al modello di Markowitz, è stato necessario modificare il problema di ottimizzazione. In genere, quando abbiamo a che fare con un problema di questo tipo, siamo interessati a trovare il punto di minimo assoluto di una funzione che è soggetta ad alcuni vincoli. Un problema di ottimizzazione convessa, invece, ne costituisce un caso particolare in cui la funzione obiettivo è convessa e l'insieme ammissibile è un insieme convesso. Come abbiamo visto nel Paragrafo 5.2, il Conditional Value at Risk è una misura di rischio coerente, e quindi, per definizione, è convessa. Pertanto può essere impiegata in un problema di ottimizzazione convessa, al contrario del VaR che, non soddisfacendo la proprietà della convessità, potrebbe incappare in un minimo locale. Possiamo pertanto riscrivere il nostro problema di ottimizzazione.

Indicata con  $R$  la matrice dei rendimenti simulati, con  $w$  il vettore dei pesi, con  $\mu$  il vettore della media dei rendimenti storici e con  $\theta$  il rendimento minimo che vorremmo ottenere, abbiamo che:

$$\begin{aligned} \min_w \quad & CVaR_{1-\alpha} \left( \sum_{i=1}^n w_i R_i \right) \\ \text{subject to} \quad & \sum_{i=1}^n w_i \mu_i \geq \theta \\ & \sum_{i=1}^n w_i = 1 \\ & w_i \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Precisiamo che con il vincolo  $w_i \geq 0$  si intende la possibilità di acquistare gli asset solamente al rialzo, quindi non è permessa la vendita allo scoperto. Inoltre, come abbiamo specificato in precedenza, i rendimenti  $R_i$  presenti

nella funzione obiettivo sono stati ottenuti attraverso una simulazione che fa riferimento alla struttura di dipendenza definita dalla copula avente come marginali le distribuzioni ibride.

Spesso, però, l'obiettivo di un investitore non è tanto rivolto al rendimento minimo che desidera ottenere, quanto alla massima soglia di rischio tollerabile. Indicando quest'ultima con  $\rho$ , possiamo riscrivere il nostro problema, come è stato fatto in precedenza per il problema di Markowitz, nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \max_w \quad & \sum_{i=1}^n w_i R_i \\ \text{subject to} \quad & CVaR_{1-\alpha} \left( \sum_{i=1}^n w_i R_i \right) \leq \rho \\ & \sum_{i=1}^n w_i = 1 \\ & w_i \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Questa seconda formulazione del problema è quella che verrà utilizzata per i risultati successivi, sebbene il modello creato in *Matlab* permetta di operare con entrambi.

Come ultima osservazione al problema di ottimizzazione, precisiamo che la soglia  $1 - \alpha$  scelta è 0.99 in quanto rappresenta un valido trade-off tra un'eccessiva esposizione al rischio, utilizzando un valore più ridotto ed una prudenza eccessiva, usando un valore superiore.

Arrivati a questo punto si sarebbe potuto utilizzare il processo di ottimizzazione appena descritto, sul campione simulato, utilizzando il CVaR come misura di rischio al posto della volatilità e da qui definire i pesi per una determinata soglia di rischio o per un rendimento atteso prefissato. Sebbene questa strada sia corretta, è importante fare una precisazione al fine di creare un portafoglio che risulti robusto in ogni condizione di mercato.

Impostiamo come soglia di rischio del CVaR al 99% un valore decisamente

basso, ad esempio lo 0.75%, vale a dire che si vuole costruire un portafoglio che solo nell'1% dei casi simulati ha avuto un rendimento giornaliero inferiore al -0.75%. Così facendo si otterrebbe un portafoglio molto valido per i momenti di crisi del 2000 e del 2008, acquistando, correttamente, quasi esclusivamente titoli obbligazionari, riuscendo così a salvaguardare il proprio capitale. Purtroppo, però, questa soglia di rischio si rivela troppo stringente nei momenti di crescita finanziaria con l'effetto di ottenere rendimenti molto bassi, sottoperformando buona parte degli altri asset per essere stati eccessivamente prudenti. Di conseguenza, il modello opererà in modo particolarmente conservativo, come se temesse un'imminente crisi finanziaria, privilegiando le posizioni sui titoli obbligazionari e sull'indice legato all'oro. Al contrario, fissando una soglia di rischio più elevata, ad esempio, il 4%, si otterrà l'effetto opposto. Pertanto, durante i momenti di crescita economica il portafoglio verrà allocato prevalentemente con asset azionari e con indici settoriali, per cercare di ottenere un rendimento più elevato, mentre nelle fasi di contrazione dei mercati, il modello portafoglio non sarà in grado di spostare velocemente il portafoglio sugli asset meno rischiosi per via dell'elevata soglia di rischio impostata.

Per superare questo ostacolo ed ottenere dei buoni rendimenti sia in fase di crescita economica che in fase di crisi finanziaria, è stata ideata una soglia di rischio variabile. L'idea consiste nell'usare una soglia di rischio più ridotta nei periodi di crisi finanziaria e più ampia nei periodi di crescita economica. In questo modo si ottengono dei buoni rendimenti nella prima fase e ci si mette al riparo dai crolli nella seconda. Pertanto, la soglia di rischio non è più fissa come in precedenza, ma viene stabilita in base a quanto è accaduto nei precedenti  $N$  periodi.

Ora, calcolato il CVaR al 99% di un portafoglio equipesato utilizzando le  $N$  osservazioni precedenti al periodo di riferimento, determiniamo la soglia di rischio  $K$  in base a quanto dista il CVaR da un parametro prefissato  $T$ , che, per mantenere una certa uniformità tra i vari modelli, è stato posto a 0.02, valore che è poi risultato essere quello ideale per questo modello. Dopodiché

la soglia di rischio  $K$  è stata definita con la seguente:

$$K = \begin{cases} 0.01 & \text{se } CVaR > 2 \cdot T \\ 0.03 & \text{se } CVaR < 0 \\ T - (CVaR - T) & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (7.1)$$

Così facendo, se il parametro prefissato  $T$  è il 2% e il CVaR che abbiamo calcolato è corrisponde al 1.25%, cioè è stato un periodo senza particolari crolli in borsa, la soglia di rischio  $K$  viene portata al 2.75% in modo da spostare maggiormente l'allocazione del portafoglio verso titoli dal rendimento più elevato. Questo ci permette di avere in ogni periodo una soglia di rischio adeguata in base a ciò che è successo nel recente passato.

Giunti a questo punto, si è proseguito con la costruzione della frontiera efficiente per la determinazione del portafoglio ottimo. Come visto nei due modelli precedenti, anche in questo caso sono stati fatti variare i valori dei parametri  $N$  ed  $M$  corrispondenti alla dimensione del train set e del test set trovando che, come per il modello di Black-Litterman, i valori più appropriati risultano essere rispettivamente 250 e 125.

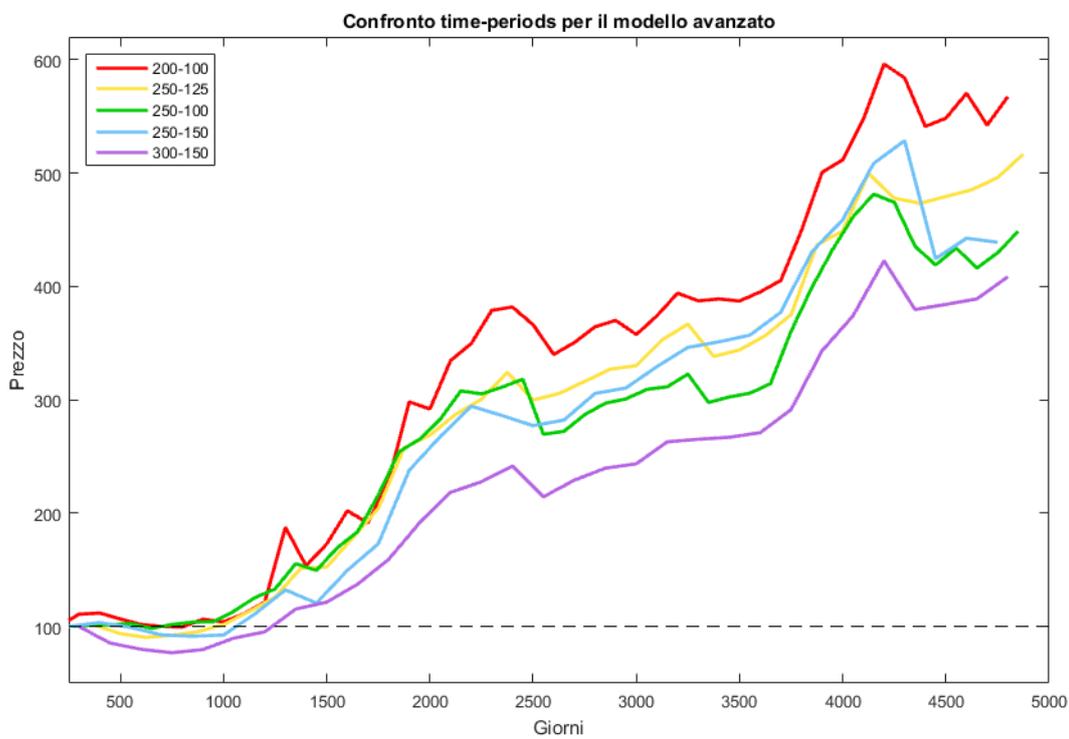


Figura 7.9: Confronto risultati per il modello avanzato.

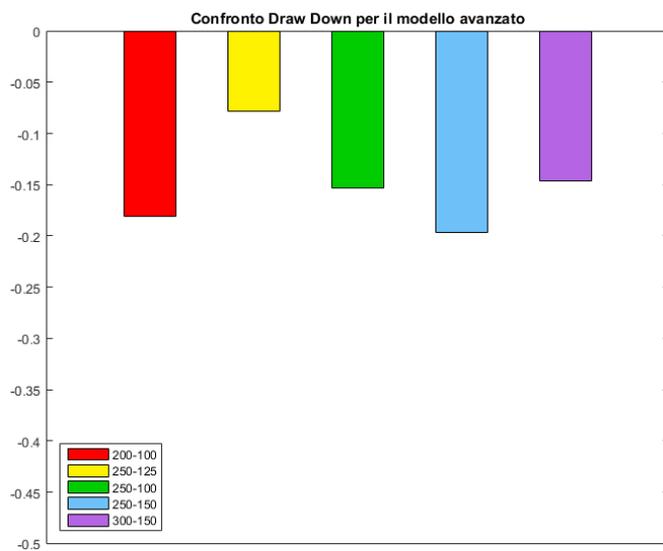


Figura 7.10: Confronto draw down per il modello avanzato.

Come si può vedere dai due grafici, utilizzando i valori 250 e 125 si ottiene un rendimento significativo, con il proprio capitale che raggiungerebbe il valore di 517. Inoltre, nonostante il rendimento sia stato decisamente elevato, la perdita massima a cui si è dovuto far fronte è stata soltanto del -7.78%. Ciò significa che, rispetto al modello di Black-Litterman, si è guadagnato di più rischiando meno. Inoltre, confrontando i valori delle perdite massime per i vari periodi rispetto al modello di Markowitz è possibile apprezzare come le prime siano significativamente più ridotte, confermando la validità di questo modello rispetto a quello originario.

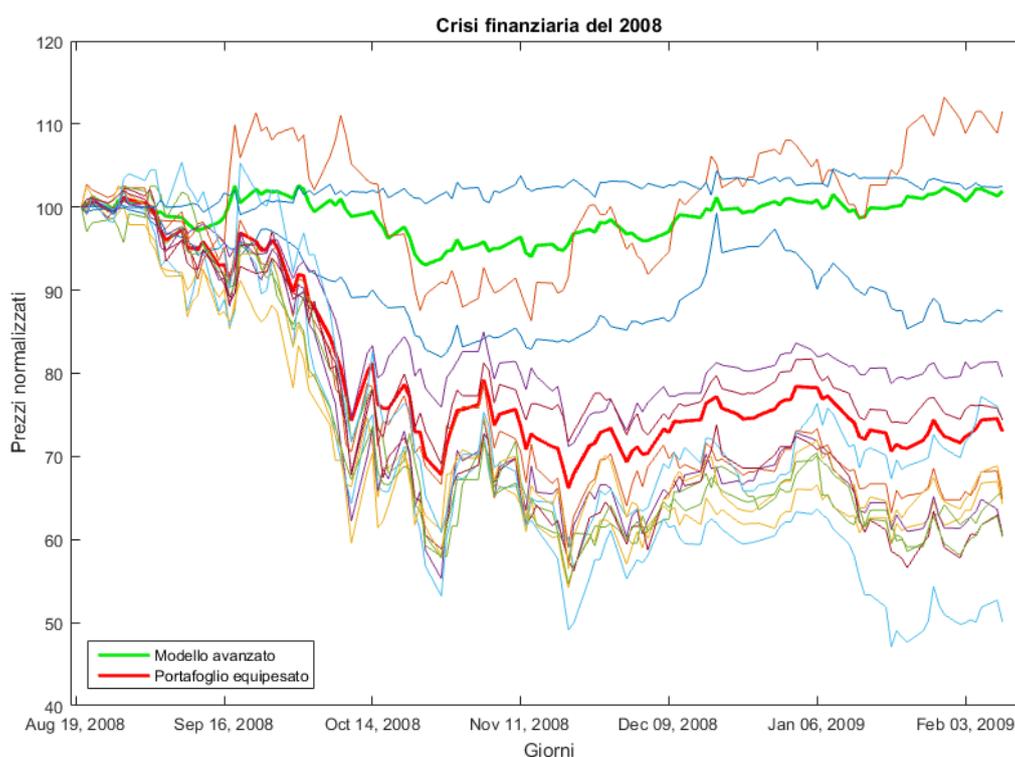


Figura 7.11: Andamento titoli durante la crisi finanziaria del 2008.

Analizzando infine la performance ottenuta dal modello avanzato durante il periodo più acuto della crisi dei mutui immobiliari del 2008, possiamo osservare quanto questo sia stato in grado di allocare correttamente i pesi sugli

asset meno rischiosi, ottenendo una performance incredibilmente positiva. Nel grafico, la linea verde, corrispondente al rendimento conseguito, non è soltanto di gran lunga superiore al portafoglio equipesato, indicato con il colore rosso, ma è addirittura positivo.

È importante precisare che in questo modello non è possibile vendere allo scoperto un titolo per poi ricomprarlo successivamente, in altre parole non è possibile operare in short sugli asset, quindi il rendimento ottenuto deriva proprio dalla corretta individuazione di quali fossero gli asset più validi in quella fase di mercato così negativa. Com'è noto, in quel periodo la stragrande maggior parte dei titoli in borsa perse buona parte del proprio valore e, conseguentemente, quasi la totalità dei gestori finanziari accusò perdite significative a causa dell'estensione di questa crisi che è stata dichiarata la più grande dal Dopoguerra.

Va inoltre sottolineato che solamente due dei 14 asset a disposizione hanno ottenuto un rendimento positivo in questo periodo, ma nonostante questo il modello è stato in grado di allocare correttamente il portafoglio soprattutto su questi due asset riuscendo così ad accrescere il valore del capitale anche in periodo così difficile. In particolare circa il 90% del proprio portafoglio è stato allocato in questi due asset.

### 7.3.1 Variante: Value at Risk

Proviamo ora a modificare la misura di rischio da cui vengono determinati i pesi ottimali utilizzando il Value at Risk. Lasciamo inalterato il resto del modello proprio per capire se la misura di rischio precedentemente adottata sia in grado di fornire qualche beneficio al modello oppure se il merito della validità del modello sia dovuto solamente agli altri ingredienti che abbiamo introdotto. Anche in questo caso utilizziamo una soglia di rischio variabile, che dipende da quanto avvenuto nel train set.

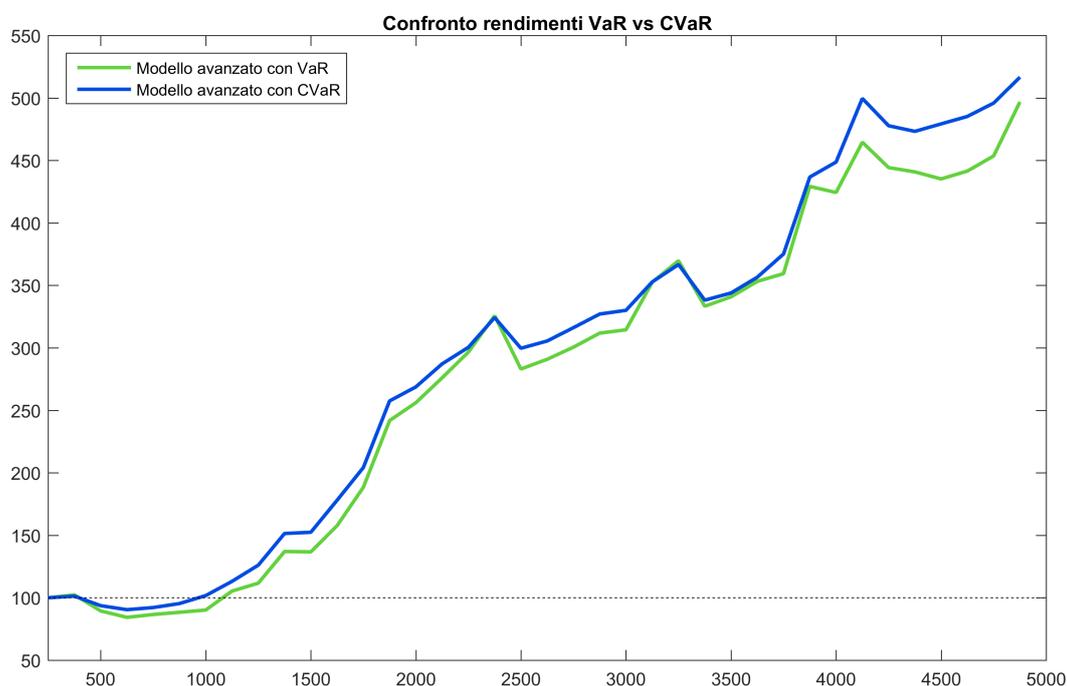


Figura 7.12: Confronto tra VaR e CVaR.

Come si può vedere dal grafico il rendimento ottenuto, semplicemente utilizzando il VaR come misura di rischio al posto del CVaR, è peggiorato. Inoltre, cosa ben più importante, la perdita peggiore riscontrata nel primo caso si attesta al  $-13.1\%$  contro il  $-7.78\%$ , risultato che mette in evidenza quanto sia determinante l'utilizzo di un'adeguata misura del rischio per ottenere i migliori risultati dal modello.

### 7.3.2 Variante: vendita allo scoperto (short selling)

In questa variante, il modello ha la possibilità di vendere allo scoperto i titoli. La vendita allo scoperto (o short selling) è un'operazione finanziaria che consiste nella vendita di strumenti finanziari non posseduti con successivo riacquisto. Questo tipo di operatività si effettua quando si ritiene che il trend dei prezzi sia ribassista, ovvero, quando si suppone di poter riacqui-

stare successivamente gli strumenti finanziari ad un prezzo inferiore rispetto a quello iniziale. Affinché questo meccanismo sia possibile, l'investitore deve prendere in prestito i titoli oggetto di compravendita da un altro soggetto per il periodo in cui non li possiede. Tale prestito avviene a titolo oneroso per l'investitore, che paga un interesse al prestatore per la durata del prestito. Nella nostra analisi, però, non terremo conto di quest'ultimo aspetto, analogamente a quanto fatto per i costi di transazione per l'acquisto e la vendita degli asset, come abbiamo visto in precedenza.

È importante sottolineare che la vendita di un titolo finanziario, dopo che è stato preso in prestito, produce un incasso immediato e di conseguenza aumenta la liquidità disponibile nel portafoglio. Nel caso in cui il prezzo dell'asset diminuisca, quando lo si acquisterà si otterrà un rendimento positivo da questa operazione; al contrario questo risulterà negativo se il prezzo dello strumento sarà aumentato.

Mentre in precedenza, quando si giungeva alla determinazione della frontiera efficiente, venivano scelti gli asset che sembravano essere più promettenti, in questa variante si ha la possibilità di vendere allo scoperto i titoli che non vengono inseriti in portafoglio. In questo modo, vengono venduti gli asset che il modello reputa essere meno profittevoli, avendo così a disposizione ancora più liquidità da impiegare per acquistare ulteriormente gli asset indicati dal modello come più promettenti. In altre parole, gli asset meno allettanti, che comprendono anche quelli che hanno avuto un rendimento negativo, vengono venduti allo scoperto perché ritenuti non profittevoli e si ipotizza quindi che il loro valore diminuirà nel tempo, o comunque non aumenterà tanto quanto quelli indicati come profittevoli. Con la liquidità ottenuta, quindi, si acquistano ulteriormente gli asset per cui si pensa che in futuro il loro valore crescerà. Nel nostro caso, ogni titolo può avere un peso compreso tra  $[-1, 1]$ . Come misura di rischio ci siamo serviti del Conditional Value at Risk con un livello di confidenza del 99%, utilizzando, come fatto in precedenza, una soglia di rischio variabile (Equazione 7.1), in modo da cercare di ottenere buoni rendimenti nelle fasi di crescita e limitare le perdite nei periodi di recessione.

Sulla scia di quanto indicato per il modello avanzato, anche in questa circostanza le dimensioni più appropriate per il train set ed il test set sono, rispettivamente, di 250 e 125 osservazioni. In questo frangente, i risultati che otteniamo sono sorprendenti.

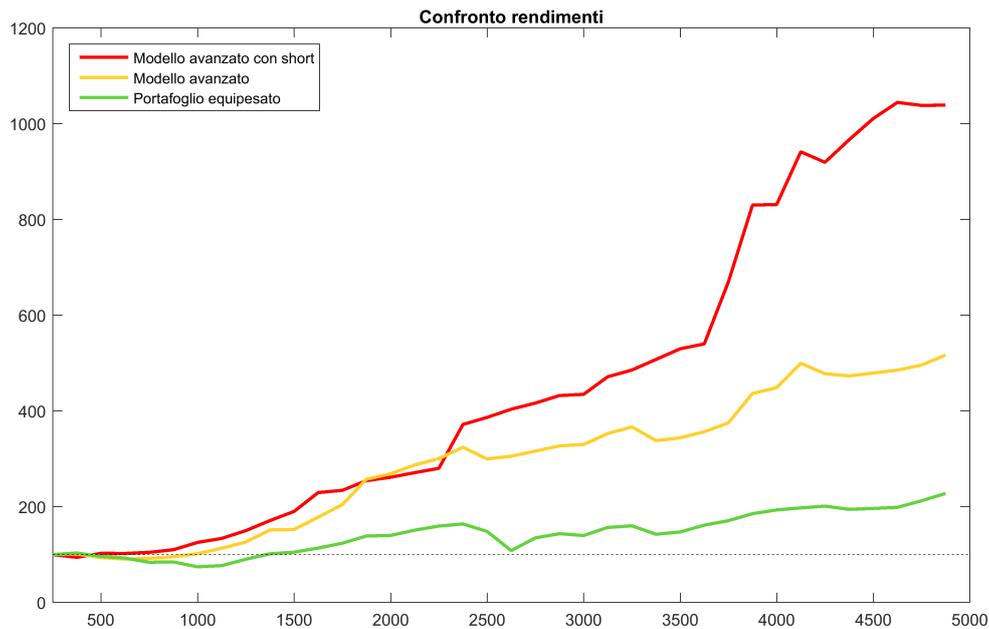


Figura 7.13: Confronto risultati del modello avanzato e dellavariante short.

Dalla figura si deduce che il rendimento ottenuto con questa variante è nettamente il più elevato tra tutti i modelli finora considerati, raggiungendo un valore di 1039 al termine dei periodi esaminati. Nonostante la crescita del capitale sia stata notevole, il rischio sostenuto si è ulteriormente ridotto: il rendimento peggiore, infatti, è sceso al  $-5.84\%$ , il valore più piccolo fin qui trovato. Un altro dato significativo è il numero dei rendimenti negativi che si sono ottenuti: solamente in 4 dei 37 periodi analizzati sono stati chiusi con una contrazione del capitale.

### 7.3.3 Variante: fondo 130/30

In base a quanto visto per la variante che prevede la vendita allo scoperto dei titoli, introduciamo ora una tipologia di allocazione del capitale utilizzata da alcuni fondi d'investimento. La strategia che viene presentata è chiamata 130/30 perché consiste nella possibilità allocare fino al 130%, quindi 1.3 volte, del valore del portafoglio su un singolo asset e nell'utilizzo della vendita allo scoperto fino ad un massimo del 30% del valore del portafoglio.

Per poter investire oltre alla disponibilità del proprio capitale, viene fatto uso della leva finanziaria. Attraverso l'utilizzo della leva finanziaria (o "leverage") si ha la possibilità di acquistare o vendere attività finanziarie per un ammontare superiore al capitale posseduto e, conseguentemente, di beneficiare di un rendimento potenziale maggiore rispetto a quello derivante da un investimento diretto nel sottostante e, di conseguenza, di esporsi al rischio di perdite molto significative. Precisiamo che la somma dei pesi del portafoglio rimane uguale a 1, ma il peso di ogni singolo asset può spaziare in un intervallo  $[-0.3, 1.3]$  più ampio di quello originario: ciò significa che su ogni titolo è possibile un leggero short selling ed una limitata leva finanziaria. Rispetto al modello iniziale, in cui si poteva investire fino al 100% del capitale disponibile su posizioni rialziste, dette anche "long", ovvero solo sperando di guadagnare se i prezzi degli asset sarebbero cresciuti, questa variante prevede la possibilità di investire a leva un ulteriore 30% sempre su posizioni rialziste e fino al 30% su posizioni ribassiste.

Anche in questa variante abbiamo adottato come misura di rischio il CVaR ad un livello di confidenza del 99% e la canonica soglia di rischio variabile (Equazione 7.1).

Quello che ci si aspetterebbe da questo modello è un generale aumento del rischio, in virtù del fatto che vi è la possibilità di utilizzare una leva finanziaria che, com'è noto, espone a rischi maggiori. Ancora una volta, però, l'intuizione si rivela sbagliata in quanto i risultati forniti da questa variante sembrano poter affermare che il rischio sostenuto è ulteriormente diminuito rispetto a quanto ottenuto in precedenza: nel peggiore dei casi, infatti, il ren-

dimento è stato del -2.68%. Inoltre, le performance negative si sono ridotte a due soli periodi (il minimo precedente era 4, rif. Paragrafo 7.3.2). Questo significa che, a meno di 2 casi su 37, il rendimento è sempre stato positivo. Il capitale finale, però, è sceso a 961 risultando inferiore ai 1039 raggiunti dal modello esaminato nel Paragrafo 7.3.2, ma di gran lunga superiore al modello avanzato, il cui rendimento è fermo a 517.

Una strategia piuttosto simile, talvolta utilizzata, consiste nel detenere posizioni rialziste per il 130% della liquidità disponibile e posizioni short per il 30%, ponendo il vincolo non sui singoli pesi, ma sulla loro somma [60]. In questa tesi si è preferito scartare questa variante per il semplice fatto che essa costringe il gestore del portafoglio ad andare short su alcuni asset anche nel caso in cui nessuno di essi sia da vendere allo scoperto.

Tale variante, quindi, aggiungerebbe due ulteriori vincoli al problema di ottimizzazione, vale a dire:

$$\sum_{i=1}^n w_i^- = -0.30 \quad \sum_{i=1}^n w_i^+ = 1.30$$

In conclusione, possiamo dire che il modello avanzato è migliore sia di quello di Black-Litterman che di quello di Markowitz. Come abbiamo visto, abbiamo ottenuto un rendimento decisamente superiore e ridotto sensibilmente il rischio da sostenere. Ricordiamo che, tolta la variante che utilizza il VaR, nel modello avanzato e nelle altre due varianti in cui è permessa la vendita allo scoperto dei titoli, la misura di rischio che viene utilizzata è sempre la stessa, vale a dire il CVaR ad un livello di confidenza del 99%. Questo conferma che i modelli da cui siamo partiti (Markowitz e Black-Litterman) sono significativamente meno efficaci di quelli che sono stati sviluppati in questo lavoro. Terminiamo il paragrafo con un grafico che riassume tutti i risultati fin qui conseguiti.

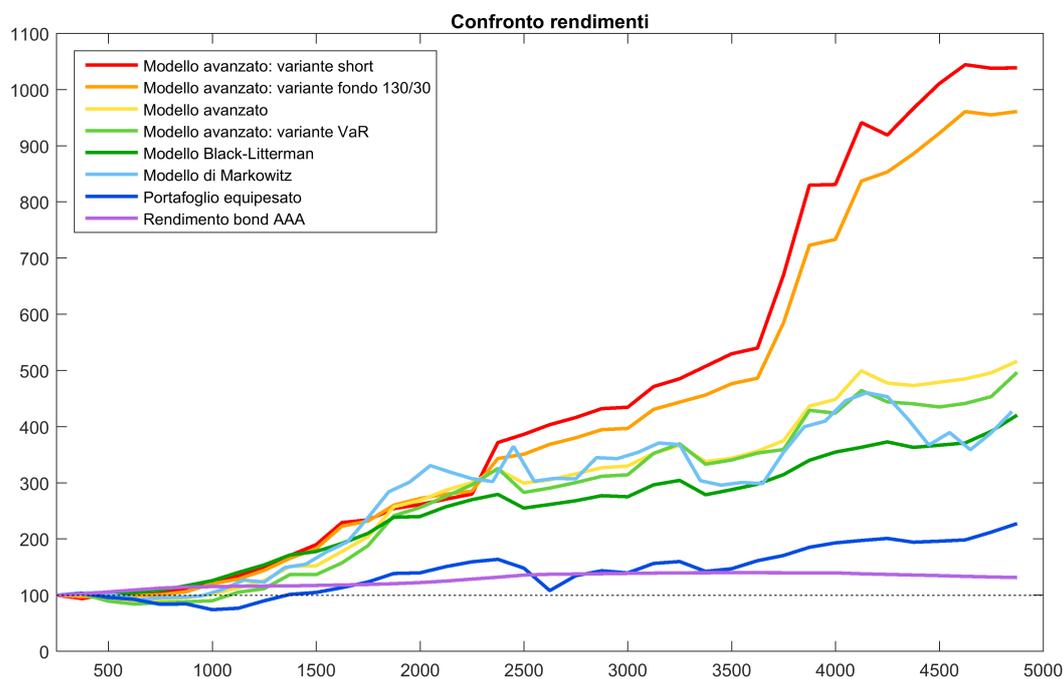


Figura 7.14: Confronto dei risultati ottenuti con i vari modelli.

## 7.4 Modello avanzato con le copule Vine

Il modello che stiamo per presentare è il più avanzato, in grado di utilizzare le copule Vine per la definizione della struttura di dipendenza tra asset finanziari con lo scopo di ottenerne la più accurata stima possibile. Tutte gli ingredienti di cui ci siamo serviti nel modello precedente, vale a dire il CVaR come misura di rischio e l'utilizzo delle distribuzioni ibride aventi come code due Pareto generalizzate per la stima delle marginali, rimangono validi, ma invece di impiegare una copula multivariata, si adotta una copula Vine in virtù della sua maggiore flessibilità nel valutare le dipendenze tra molteplici variabili aleatorie.

Purtroppo, però, in *Matlab* non sono presenti delle funzioni per questo tipo di copula, ma solamente per quelle bivariate. Pertanto, per determinare la struttura di dipendenza ad albero della copula Vine si è ricorso all'utilizzo del

software *R* e, in particolare, alla libreria *CDVine* sviluppata da Brechmann e Schepsmeier [53].

Dopo aver trasformato i dati dei rendimenti degli asset in distribuzioni uniformi su  $[0, 1]$ , si è fatto uso di alcune funzioni presenti nella libreria indicata, in modo da definire la struttura di dipendenza con la copula Canonical Vine e, analogamente, per la copula Drawable Vine.

Successivamente, sono state identificate le tipologie delle  $\frac{14 \cdot (14-1)}{2}$  copule bivariate, ed i relativi parametri, presenti sui vari edge del grafo per ognuna delle due tipologie di copule Vine. Dopodiché è stata effettuata una simulazione di 10.000 osservazioni al fine di aumentare la dimensione del nostro campione di dati, seguendo la logica già adottata nel modello precedente. Poiché il numero di copule ed i relativi parametri da trovare è molto più elevato, il tempo computazionale per definire la struttura della copula Vine, trovarne i relativi parametri ed effettuare la simulazione è cresciuto in maniera significativa. Utilizzando come valori di  $N$  ed  $M$  rispettivamente 250 e 125 osservazioni, per ciascuna delle 37 simulazioni totali, sono necessari circa 42 secondi, mentre nel modello avanzato, quando veniva utilizzata una copula multivariata, il tempo per trovare quale copula fittasse meglio i nostri dati e generare i 10.000 rendimenti simulati per ciascuno dei 14 asset era solamente di 1 secondo. Inoltre, il valore di 42 secondi vale sia per le C-Vine che per le D-Vine, quindi la tipologia della struttura scelta non modifica il costo computazionale.

Questo, pertanto, mette in mostra quanto il tempo computazionale sia aumentato, ma possa ancora ritenersi accettabile. Se, però, avessimo utilizzato molti più titoli finanziari, ad esempio 100, questo fattore sarebbe stato determinante poiché per una corretta stima della dipendenza, sarebbero potute essere necessarie anche alcune ore.

Poiché questo procedimento si sarebbe dovuto ripetere per ogni periodo analizzato, il processo è stato automatizzato attraverso un salvataggio automatico delle osservazioni simulate in un file *.mat*, il cui nome veniva modificato ad ogni iterazione. A questo punto, è stata sostituita in *Matlab* la parte

riguardante la scelta della copula e la relativa simulazione con il caricamento dei file appena descritti, risolvendo così la mancanza delle funzioni legate alle copule Vine.

Come per il modello avanzato, è stata utilizzata una soglia di rischio variabile per cercare di ottenere buoni rendimenti nelle fasi di crescita dei mercati e di limitare le perdite in quelle di crisi finanziaria. Allo stesso modo, sono state analizzate le varianti relative alla possibilità di vendita allo scoperto e del fondo 130/30.

Sperimentalmente si è visto che i risultati ottenuti utilizzando la copula Draggable Vine erano migliori di quelli forniti dalla Canonical Vine. Questa osservazione, al pari di quelle riguardanti la dimensione del train e del test set, non si può generalizzare, in quanto è stata verificata solamente su questi 14 asset. Vediamo ora i risultati ottenuti con questo modello per verificare se effettivamente sono stati migliori rispetto a quello precedente.

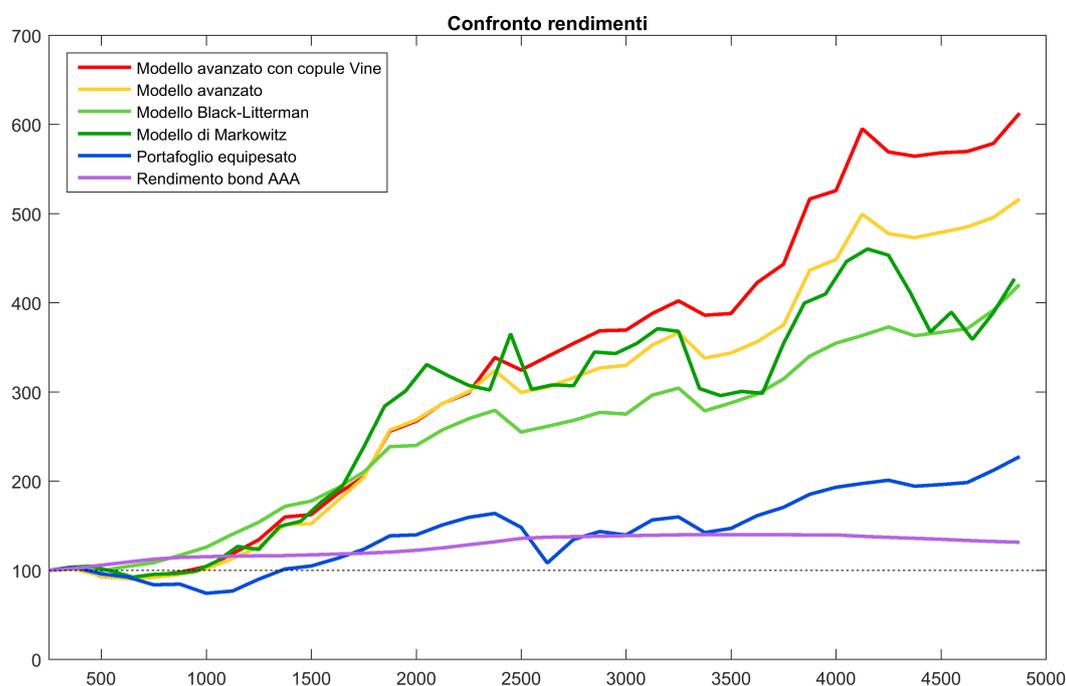


Figura 7.15: Confronto dei risultati ottenuti.

I risultati che abbiamo ottenuto mostrano, anche in questo caso, che all'utilizzo di strumenti sempre più validi dal punto di vista teorico, corrisponde un miglioramento dei risultati. Al termine della simulazione, infatti, il capitale è arrivato a quota 613, il risultato più elevato finora raggiunto con i modelli che possono investire esclusivamente al rialzo (il risultato del modello avanzato, senza copule Vine, era stato 517). Per quanto riguarda il rischio, invece, abbiamo un valore leggermente peggiorativo, in quanto la perdita massima è stata del -8.62%, contro il -7.78% del modello avanzato. La differenza in termini di maggior rischio pertanto è esigua ed è stata ampiamente compensata dal rendimento complessivo. Anche in questo caso abbiamo usato la combinazione 250 e 125 come valori per la dimensione di train e test set.

Abilitando la possibilità della vendita allo scoperto, analogamente a quanto descritto nel Paragrafo 7.3.2, otteniamo come in precedenza una crescita elevatissima del capitale, che raggiunge quota 1272, il valore più elevato in assoluto. La relativa massima perdita è equivalente a quella ottenuta con il modello avanzato senza l'uso delle copule Vine (-5.82% contro -5.86%).

Infine, adottando la strategia 130/30, il valore finale dell'investimento ammonta a 1173 e la perdita peggiore si riduce al -1.93%, confermando che tale strategia risulta particolarmente efficace sia in termini di rendimento che in termini di rischio. Come già osservato per il corrispondente modello avanzato, anche in questo caso il rendimento ottenuto con la strategia 130/30 è risultato leggermente inferiore rispetto al modello short, ma in questo caso il rischio è stato sensibilmente più contenuto: in oltre 18 anni la perdita più elevata è stata inferiore al -2%. Inoltre, il valore dell'investimento si è moltiplicato di quasi 11 volte durante il nostro periodo in analisi, quindi il risultato ottenuto è confortante sia in termini di rischio che di rendimento.

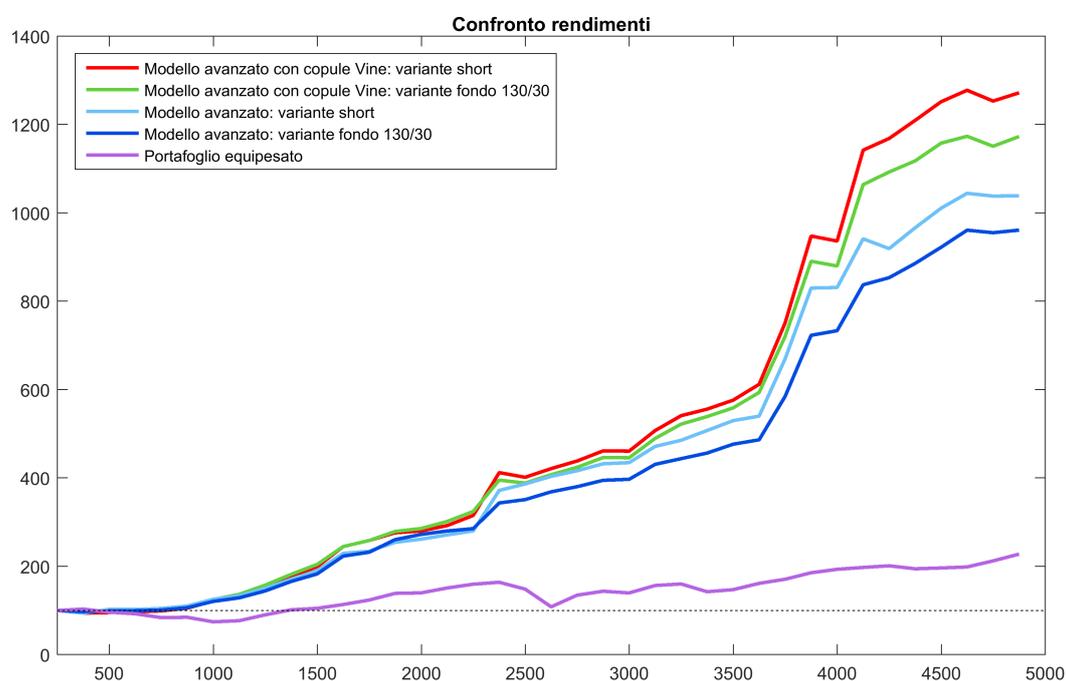


Figura 7.16: Confronto dei risultati ottenuti con i vari modelli.

Ricordiamo infine che tutti i valori riportati sono chiaramente al lordo dei costi delle transazioni di acquisto/vendita, del prestito titoli e della tassazione sui capital gain ottenuti.

Per concludere, confrontiamo attraverso un paio di grafici ed una tabella i valori dei rendimenti del periodo considerato e delle massime perdite sopportate per avere un riscontro visivo dei risultati prodotti dai vari modelli sviluppati nel corso di questo lavoro.

Allocando il capitale in base ai pesi definiti con i vari modelli, la strategia 130/30 basata sul modello avanzato con le copule D-Vine risulta essere quella più indicata. Per quanto riguarda i modelli che permettono solo l'acquisto degli asset senza la vendita allo scoperto, anche in questo caso il modello che fornisce i risultati migliori è quello avanzato basato sulle copule D-Vine, con la classica impostazione 250-125.

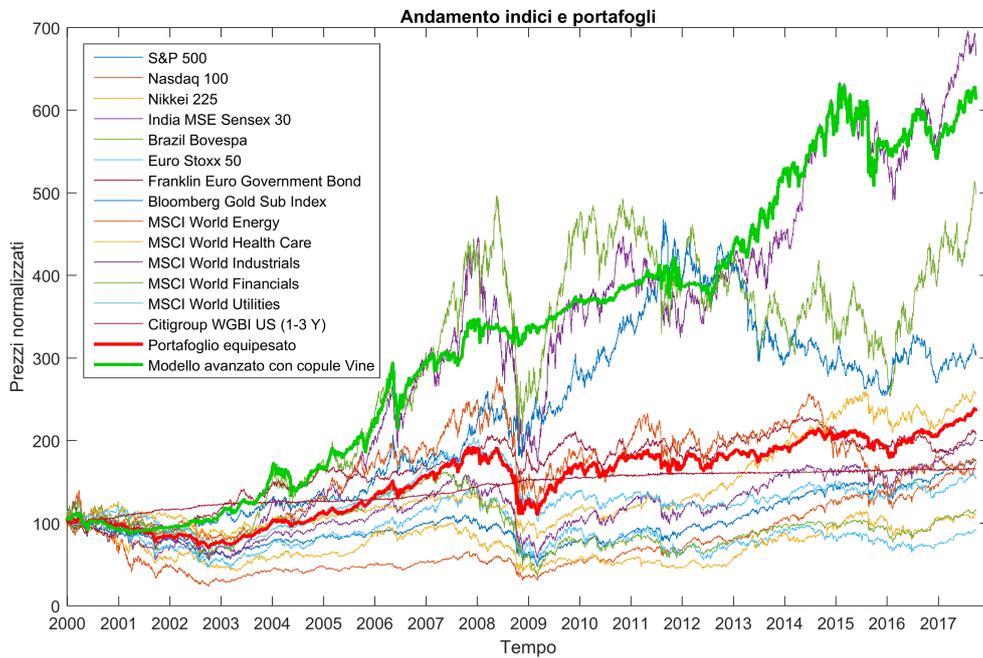


Figura 7.17: Confronto tra il modello avanzato con copule Vine e gli asset.

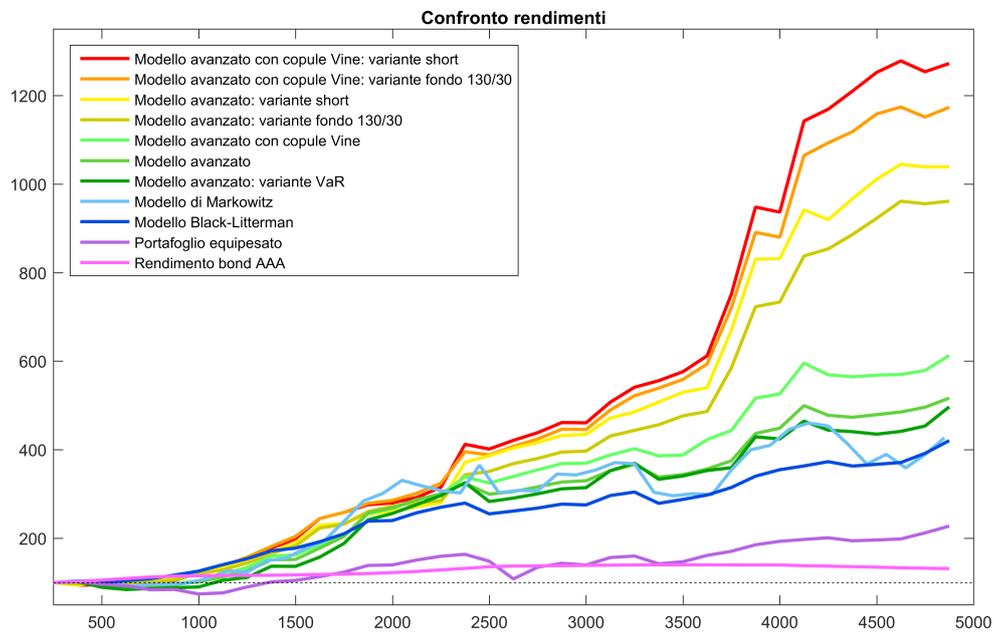


Figura 7.18: Confronto dei risultati ottenuti con i vari modelli.

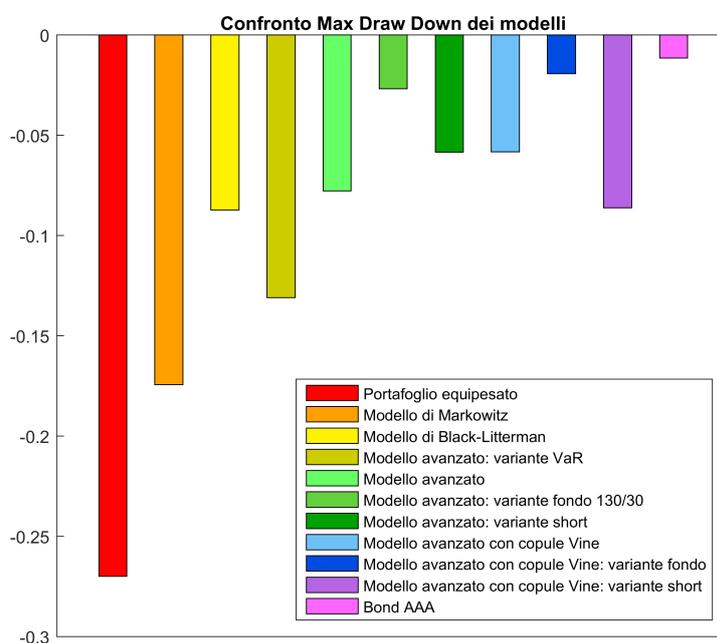


Figura 7.19: Confronto draw down dei vari modelli.

Strumento utilizzato	Capitale	Perdita max.
Bond Svizzero 6-mesi AAA	131.58	-1.15%
Portafoglio equipeso	227.67	-26.99%
Modello di Markowitz	427.02	-17.44%
Modello di Black-Litterman	420.70	-8.73%
Modello avanzato	516.64	-7.78%
Modello avanzato - variante VaR	496.84	-13.09%
Modello avanzato - variante fondo	961.26	-2.68%
Modello avanzato - variante short	1038.93	-5.84%
Modello avanz. con copule Vine	612.92	-5.82%
Modello avanz. con copule Vine - fondo	1173.16	-1.93%
Modello avanz. con copule Vine - short	1272.18	-8.62%

## 7.5 Analisi su un secondo paniere di asset

Ripetiamo ora le medesime analisi che abbiamo descritto nei paragrafi precedenti avendo a disposizione solamente 6 di questi 14 asset, come è stato specificato all'inizio di questo capitolo. Quest'ulteriore analisi viene eseguita al fine di verificare l'effettiva validità delle conclusioni a cui siamo giunti finora. In questo caso abbiamo a disposizione tre indici azionari, due obbligazionari su titoli di Stato investment grade e un indice settoriale relativo alle società finanziarie. Quest'ultimo asset è stato scelto appositamente per verificare l'effettiva robustezza del modello anche durante il periodo di crisi del 2008, in quanto il titolo in questione arrivò a perdere oltre il 75% del proprio valore. Come prima, verranno confrontati i risultati prodotti dai modelli con il portafoglio equipesato e con il bond Svizzero AAA con scadenza a 6 mesi per verificare quali sono stati i benefici dei vari modelli proposti.

Riguardo al confronto tra il modello di Markowitz e quello di Black-Litterman, anche in questo caso il secondo risulta essere migliore, conseguendo un rendimento leggermente superiore, ma con una perdita massima di gran lunga inferiore. Come in precedenza, viene evidenziato il vantaggio prestazionale derivante dall'utilizzo del Conditional Value at Risk rispetto al VaR, non tanto in termini di rendimento realizzato, quanto invece per l'elevata differenza di rischio che si è dovuto sostenere: -6.56% contro -12,55%.

Contrariamente alle aspettative, però, il modello avanzato che fa uso delle copule Vine ha avuto un rendimento meno soddisfacente di quello avanzato basato sulle copule multivariate. Una spiegazione che appare plausibile è che questo fenomeno sia causato dal ridotto numero di asset disponibili nel portafoglio. Non dimentichiamo che le copule multivariate presentano problemi di elevata entità soltanto quando si utilizzano parecchie variabili, situazione in cui le copule Vine risultano indispensabili. Stando ai risultati, è possibile che la copula multivariata sia efficace per via del ridotto numero di asset, poiché, rispetto all'analisi precedente, tutte le altre condizioni sono rimaste invariate. In ogni caso, entrambi i modelli avanzati (con e senza copule Vine) ottengono complessivamente un'ottima performance portando il capitale

investito, avente inizialmente un valore di 100, fino ad oltre 300.

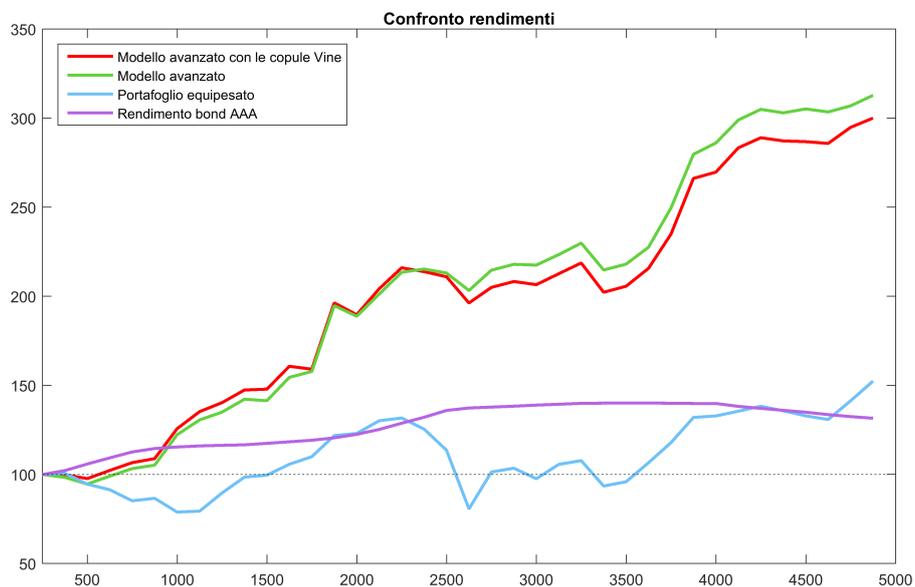


Figura 7.20: Confronto dei risultati ottenuti con i vari modelli.

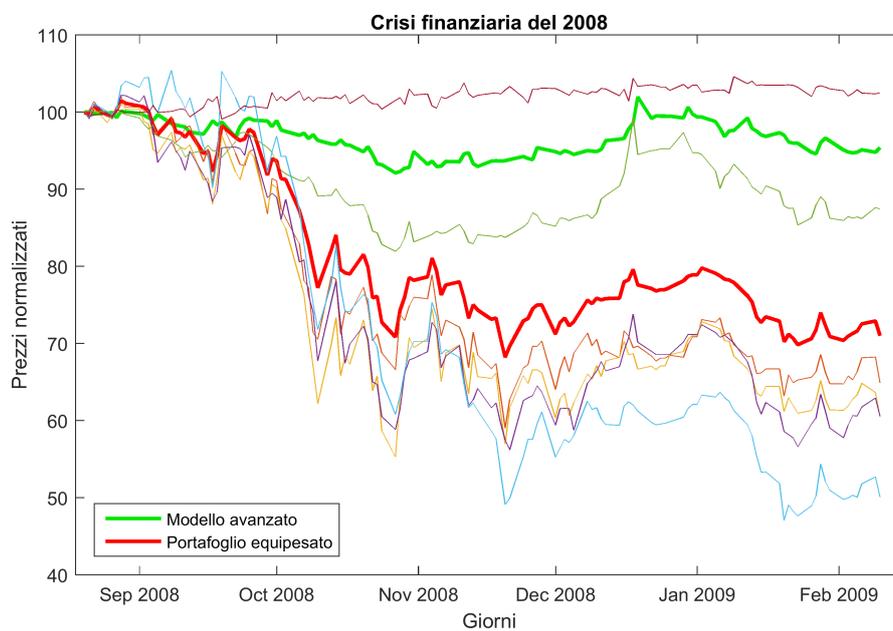


Figura 7.21: Andamento dei titoli durante la crisi finanziaria del 2008.

Inoltre, durante il periodo più acuto della crisi dei mutui immobiliari del 2008, entrambi riescono a limitare la perdita al -5%, mentre l'asset con la miglior performance ha una crescita di appena il 2% ed il rendimento del portafoglio equipesato si aggira intorno al -30%.

Anche i risultati delle rispettive varianti con la strategia 130/30 e la variante con la possibilità della vendita allo scoperto manifestano una crescita molto elevata con un rischio abbastanza contenuto, riuscendo addirittura ad ottenere un rendimento più elevato di tutti i 6 asset a nostra disposizione. Questo significa che anche se avessimo avuto la "palla di cristallo" e avessimo saputo quale asset avrebbe avuto il rendimento più elevato di tutti, il rendimento ottenuto sarebbe stato comunque inferiore a quello ottenuto con questo tipo di ottimizzazione, poiché questa va ad acquistare gli asset più promettenti in ognuno dei periodi di analisi.

È importante sottolineare che nell'analisi con 14 titoli era possibile ottenere una maggiore diversificazione. Di conseguenza venivano inseriti in portafoglio i titoli che si ritenevano maggiormente idonei, potendo contare una base più ampia. Ciò significa che nel caso in cui si abbiano pochi asset, può capitare che nessuno di essi sia davvero promettente, inserendo quindi in portafoglio i titoli "meno peggiori", evento ben più raro se si dispone invece di 14 asset. Questo chiaramente si riflette in un rendimento inferiore ed un rischio generale più elevato.

Un'ulteriore significativa differenza tra l'analisi con 6 asset rispetto alla precedente con 14 asset, è il fatto che i modelli raggiungano risultati ancora più brillanti nel caso di utilizzo di determinati time-periods di durata più breve. Nello specifico, la combinazione 125 e 20 osservazioni come dimensione per train e test set hanno prodotto rendimenti complessivi superiori rispetto ai consueti 250-125, aumentando il valore del capitale fino a superare i 416 con l'utilizzo del modello avanzato. A questo brillante risultato, però, non è conseguita una crescita rilevante per né per la variante short né utilizzando la strategia 130/30. Inoltre, è bene precisare che in questo caso si avrebbero ben 238 periodi di riallocazione del capitale contro i 37 della configurazione

250-125, utilizzata da tutti i modelli rappresentati nella figura che segue.

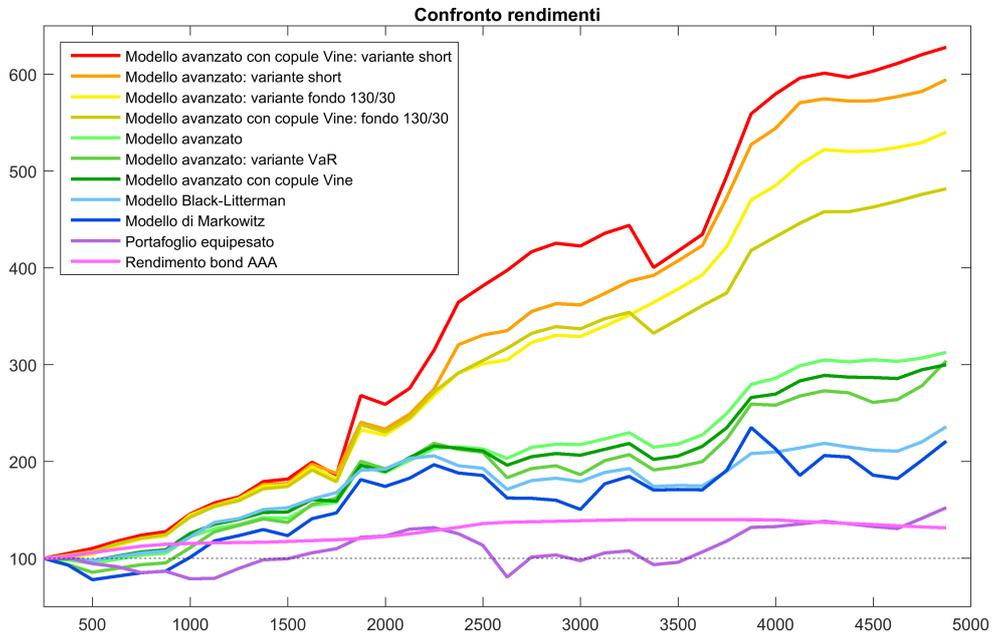


Figura 7.22: Confronto dei risultati ottenuti con i vari modelli.

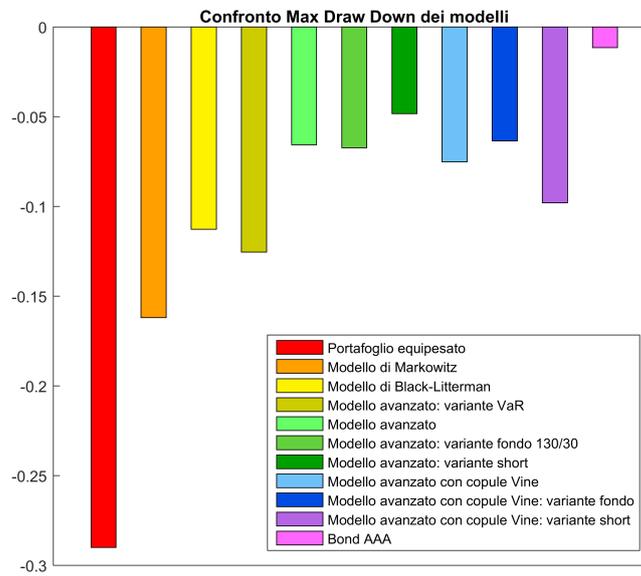


Figura 7.23: Confronto draw down dei vari modelli.

<b>Strumento utilizzato</b>	<b>Capitale</b>	<b>Perdita max.</b>
Bond Svizzero 6-mesi AAA	131.58	-1.15%
Portafoglio equipesato	152.43	-29.00%
Modello di Markowitz	221.07	-16.20%
Modello di Black-Litterman	235.99	-11.28%
Modello avanzato	312.85	-6.56%
Modello avanzato time-periods 125-20	416.50	-8.82%
Modello avanzato - variante VaR	304.14	-12.55%
Modello avanzato - variante fondo	540.55	-6.74%
Modello avanzato - variante short	594.58	-4.84%
Modello avanz. con copule Vine	300.06	-7.52%
Modello avanz. con copule Vine - fondo	481.82	-6.36%
Modello avanz. con copule Vine - short	628.02	-9.81%

In questo capitolo sono stati elencati numerosi risultati di rilievo, mettendo in risalto che l'utilizzo di metodologie più robuste dal punto di vista concettuale producono effetti rilevanti anche nella pratica.

Partendo dal modello originario di Markowitz, che costituisce la base di riferimento, sono stati creati dei modelli piuttosto sofisticati, fondati su concetti matematici avanzati e di recente introduzione, mostrandone l'efficacia per mezzo di risultati concreti ed oggettivi. Oltre ad utilizzare gli accorgimenti presentati nei capitoli precedenti per creare un modello più solido dal punto di vista teorico, si è voluto mostrare l'efficacia di questi strumenti anche in pratica su un orizzonte temporale di quasi 18 anni.

Coerentemente con le aspettative, i risultati conseguiti dai vari modelli analizzati sono via via migliorati grazie alla loro maggiore precisione nel valutare gli eventi passati. Dati alla mano, è possibile affermare che i risultati ottenuti con i modelli avanzati sono stati di gran lunga superiori rispetto ad un portafoglio equipesato, usato spesso dai risparmiatori, e al modello di Black-Litterman, impiegato comunemente dalle società di gestione del risparmio. Definito il modello teorico, quindi, ci si è immedesimati in un investitore che,

osservando quanto accaduto negli  $N$  giorni precedenti, abbia seguito diversi modelli possibili su come investire il proprio capitale. Non dimentichiamoci che il problema in questione, come abbiamo scritto ad inizio capitolo, è estremamente complicato poiché nessuno può predire con certezza quali saranno i titoli finanziari che in futuro otterranno le maggiori performance positive e quali invece perderanno maggiormente valore.

Da questo lavoro emerge inoltre che i periodi per i train e test set, problema non affrontato da Markowitz ma piuttosto importante in concreto, non sono definibili a priori: occorre trovarli sperimentalmente con un lavoro di simulazione e, per quanto è stato possibile osservare, sono sembrati dipendenti dalla composizione del portafoglio. Questo risultato, però, non è detto che sia valido in futuro, in quanto le analisi sono state effettuate sui dati a nostra disposizione, quindi sul passato.

Infine il processo è stato altamente automatizzato, in modo tale che modificando semplicemente il file in input con quello contenente i titoli desiderati da un investitore, si ottengono i risultati per il modello selezionato.

Se si volesse utilizzare in futuro un'analisi di questo tipo per adattarla a titoli azionari, è necessario, tra le altre cose, prestare attenzione alle condizioni in cui si trovano le singole società in questione, come la dimensione dell'azienda e gli ultimi bilanci societari.

Per quanto riguarda l'analisi effettuata in questo capitolo, invece, possiamo osservare che il modello in questione è stato in grado di agire in modo preventivo alle fasi di crisi finanziaria, sia in vista della crisi delle dot-com del 2000, sia riguardo la crisi dei mutui subprime del 2008, facendo registrare delle performance di gran lunga superiori rispetto a quelle che si sarebbero ottenute con un portafoglio equipesato, come è stato dimostrato attraverso le simulazioni effettuate.

Concludiamo con un interrogativo: "Se questi modelli hanno funzionato piuttosto bene nei precedenti 18 anni, è possibile che continueranno a farlo in futuro?". Alla fine secondo quanto simulato si otterrebbe un rendimento elevato con rischio relativamente minimo. Come abbiamo scritto all'inizio del Paragrafo 1.1, è il sogno di ogni investitore.

## 7.6 Implementazione in Matlab

```

1
2 %% Main Modello Avanzato (con le sue varianti)
3
4 clear all;
5 clc;
6
7 %% Input %%
8 filename = 'ALL_without_Micex_Shanghai.xls';
9 %filename = 'Major_six_assets.xls';
10
11 expected_return = 0.03/100;
12 window_train = 250;
13 window_test = 125;
14 risk_threshold = 0.02;
15
16 % by = 'r' per ottimizzare in base al rendimento;
17 % by = '0' per il rischio; 'f' per il fondo 130/30
18 by = '0';
19 var = 'n'; %VaR (y/n) come misura di rischio
20 short = 'y'; %Short (y/n)
21 Vine = 'y'; %Copule Vine (y/n)
22 Vine_type = 'd'; %Tipologia copule Vine (C/D)
23 salva_grafici = 'n'; %Salvare i grafici? (y/n)
24 plot_detailed = 'y'; %Grafico dettagliato? (y/n)
25 shift = 0; %Quando vogliamo iniziare a fare le analisi?
26
27 %% Inizializzazione
28 [returns logreturns dates names obs nAsset normPrices]=ReadData(filename);
29
30 cycles = floor((obs-window_train-shift)/window_test);
31 totalreturn = zeros(1,cycles);
32 totalcvar = zeros(1,cycles);
33 optimal_weights = zeros(cycles,nAsset);
34 EW_ret = zeros(1,cycles);
35 EW_cvar = zeros(1,cycles);
36 risks = zeros(1,cycles);
37 minimum_per_period = zeros(1,cycles);
38 history=1;
39 vine_cvar_99 = zeros(1,cycles);
40
41 %% Costruzione del modello avanzato
42 for i=1:cycles
43     disp(i)
44     normPrices_train = Normalize_Prices(normPrices(shift + 1 + (i-1) * window_test : shift + (i-1) * window_test + window_train,:));
45     normPrices_test = Normalize_Prices(normPrices((i-1) * window_test + window_train + shift + 1 : shift + window_train + window_test * i,:));
46     returns_train = returns(shift + 1 + (i-1) * window_test : shift + (i-1) * window_test +

```

## CAPITOLO 7. APPLICAZIONE AD UN PORTAFOGLIO DI ASSET FINANZIARI 142

```

        window_train,:);
47 returns_test = returns((i-1) * window_test + window_train + shift + 1 : shift +
        window_train + window_test * i,:);
48
49 if Vine == 'y'
50     if short == 'y'
51         [wt, weights, ret_BT, ret_equally_weighted, cvar_BT, cvar_equally_weighted, p,
            targetRisk, targetRet, risk, cvar_99] = Model_Generation_SS_with_Vine_Copulas(
                returns_train, names, returns_test, normPrices_train, normPrices_test,
                expected_return, risk_threshold, by, i, Vine_type);
52         vine_cvar_99(i) = cvar_99;
53     else
54         [wt, weights, ret_BT, ret_equally_weighted, cvar_BT, cvar_equally_weighted, p,
            targetRisk, targetRet, risk, cvar_99] = Model_Generation_with_Vine_Copulas(
                returns_train, names, returns_test, normPrices_train, normPrices_test,
                expected_return, risk_threshold, by, i, Vine_type, sel_asset_equal_weights);
55         vine_cvar_99(i) = cvar_99;
56     end
57 else
58     if short=='y'
59         [wt, weights, ret_BT, ret_equally_weighted, cvar_BT, cvar_equally_weighted, p,
            portRisk, portRet, targetRisk, targetRet, risk] = Model_Generation_SS(
                returns_train, names, returns_test, normPrices_train, normPrices_test,
                expected_return, risk_threshold, by);
60     else
61         if var == 'y'
62             [wt, weights, ret_BT, ret_equally_weighted, cvar_BT, cvar_equally_weighted, p,
                risk] = Model_Generation_Var( returns_train, names, returns_test,
                    normPrices_test, expected_return, risk_threshold, by);
63         else
64             [wt, weights, ret_BT, ret_equally_weighted, cvar_BT, cvar_equally_weighted, p,
                targetRisk, targetRet, risk] = Model_Generation(returns_train, names,
                    returns_test, normPrices_test, expected_return, risk_threshold, by,
                    sel_asset_equal_weights);
65         end
66     end
67 end
68
69 totalreturn(i) = ret_BT;
70 totalcvar(i) = cvar_BT;
71 EW_ret(i) = ret_equally_weighted;
72 EW_cvar(i) = cvar_equally_weighted;
73 optimal_weights(i,:) = wt;
74 risks(i) = risk;
75 minimum_per_period(i) = min(normPrices_test*wt);
76
77 if salva_grafici=='y'
78     fig = figure(1);
79     plot(normPrices_test);
80     hold on;

```

```

81     plot(normPrices_test*wt, '-g', 'LineWidth', 2);
82     plot(normPrices_test*weights, '-r', 'LineWidth', 2);
83     xlabel('Giorni');
84     ylabel('Prezzo');
85     saveas(fig, sprintf('Plot%d.png', i));
86     end
87     [values] = Normalize_Time_Series(history, normPrices_test, wt);
88     history = [history; values];
89     end
90
91     temp = 100;
92     rend_equally_weighted = 100;
93
94     for i = 2:cycles+1
95         if totalreturn(i-1)~=0
96             temp(i) = temp(i-1) * totalreturn(i-1);
97             temp_after_taxes(i) = temp(i);
98             rend_equally_weighted(i) = rend_equally_weighted(i-1) * EW_ret(i-1);
99         end
100    end
101
102    if plot_detailed == 'y'
103        normPrices_plot = Normalize_Prices(normPrices(window_train:window_train+cycles*window_test
104            ,:));
105        dates_plot = dates(window_train:window_train+cycles*window_test,:);
106        plot(dates_plot, 100*normPrices_plot);
107        hold on;
108        plot(dates_plot, 100*normPrices_plot*weights, '-r', 'LineWidth', 2);
109        plot(dates_plot, 100*history, 'Color', [0 204 0]/255, 'LineWidth', 2);
110    else
111        normPrices_plot = Normalize_Prices(normPrices(window_train:window_train+cycles*window_test
112            ,:));
113        plot(normPrices_plot*100);
114        hold on;
115        plot([1:window_test:obs-window_train], rend_equally_weighted, '-r', 'LineWidth', 2);
116        plot([1:window_test:obs-window_train], temp, '-g', 'LineWidth', 2);
117    end
118
119    if nAsset == 14
120        leg = {'S&P 500'; 'Nasdaq 100'; 'Nikkei 225'; ...
121            'India MSE Sensex 30'; 'Brazil Bovespa'; 'Euro Stoxx 50'; 'Franklin Euro Government Bond';
122            ...
123            'Bloomberg Gold Sub Index'; 'MSCI World Energy'; 'MSCI World Health Care'; ...
124            'MSCI World Industrials'; 'MSCI World Financials'; 'MSCI World Utilities'; ...
125            'Citigroup WGBI US (1-3 Y)'; 'Portafoglio equipesato'; 'Modello avanzato con copule
126            Vine'};
127    else
128        leg = {'S&P 500'; 'Nikkei 225'; 'Euro Stoxx 50'; 'Franklin Euro Government Bond'; ...
129            'MSCI World Financials'; 'Citigroup WGBI US (1-3 Y)'; 'Portafoglio equipesato'; 'Modello
130            avanzato con copule Vine'};

```

## CAPITOLO 7. APPLICAZIONE AD UN PORTAFOGLIO DI ASSET FINANZIARI 144

```
126 end
127
128 legend(leg, 'Location', 'NorthWest')
129 title('Andamento indici e portafogli');
130 xlabel('Tempo');
131 ylabel('Prezzi normalizzati');
132 xlim([datenum(1999,12,30), datenum(2017,12,30)]);
133 %set(gcf,'PaperUnits','inches','PaperPosition',[0 0 10 6])
134 %print('History super-avanzato','-dpng','-r400')
135
136
137
138 function [ wt, weights, ret_BT, ret_equally_weighted, cvar_BT, cvar_equally_weighted, p, pRisk,
           pRet, risk] = Model_Generation( returns_train, names, returns_test, normPrices_BT,
           expected_return, risk_threshold, by, sel_asset_equal_weights)
139
140 returns = returns_train;
141 nAsset = size(returns,2);
142
143 % Analisi delle distribuzioni marginali
144 [marginal] = FittingMarginals(returns, nAsset, names);
145
146 U = zeros(size(returns));
147
148 % Trasformiamo le marginali in uniformi
149 for i = 1:nAsset
150     U(:,i) = marginal{i}.cdf(returns(:,i));
151 end
152
153 for i=1:size(U,1)
154     for j=1:size(U,2)
155         if U(i,j)<0.00001
156             U(i,j)=0.00001;
157         end
158         if U(i,j)>0.99999
159             U(i,j)=0.99999;
160         end
161     end
162 end
163
164 % Cerco la copula n-dimensionale
165 [rhoT, DoF] = copulafit('t', U, 'Method', 'ApproximateML');
166 nPoints = 10000;
167 rng default
168 R = zeros(nPoints, nAsset);
169 U = copularnd('t', rhoT, DoF, nPoints);
170
171 % trasformo i valori nelle distribuzioni marginali trovate
172 for j = 1:nAsset
173     R(:,j) = marginal{j}.icdf(U(:,j));
```

```

174 end
175
176 weights(1:nAsset) = [1/nAsset]';
177 portReturns = R*weights';
178
179 % Definizione della soglia di rischio variabile
180 var = -prctile(portReturns, 1);
181 cvar = -mean(portReturns(portReturns < -var));
182
183 disp('Copula Value-at-Risk _____');
184 fprintf('99% VaR: %0.2f%\n99% CVaR: %0.2f%\n\n', var * 100, cvar * 100);
185
186 diff = cvar - risk_threshold;
187 if diff >= risk_threshold
188     risk = 0.01;
189 elseif diff < -risk_threshold
190     risk = 0.03;
191 else
192     risk = risk_threshold - diff;
193 end
194 fprintf('Risk: %0.2f%\n', risk*100);
195
196 % Ottimizzazione del portafoglio
197 p = PortfolioCVaR('ProbabilityLevel', .99, 'AssetNames', names);
198 p = p.setScenarios(R);
199 p = p.setDefaultConstraints();
200
201 weights_opt = p.estimateFrontier(2);
202 [weights_opt] = Weight_Optimizer(weights_opt);
203
204 portRisk = p.estimatePortRisk(weights_opt);
205 portRet = p.estimatePortReturn(weights_opt);
206
207 clf
208 visualizeFrontier(p, portRisk, portRet);
209
210 if by=='r' % Ottimizzazione per un dato livello di rendimento
211     wt = p.estimateFrontierByReturn(expected_return);
212     [wt] = Weight_Optimizer(wt);
213     pRisk = p.estimatePortRisk(wt);
214     pRet = p.estimatePortReturn(wt);
215     hold on;
216     h = plot(pRisk, pRet, 'or', 'MarkerFaceColor', 'r');
217     legend(h, 'Portafoglio ottimo');
218
219 else % Ottimizzazione per un dato livello di rischio
220     wt = p.estimateFrontierByRisk(risk);
221     [wt] = Weight_Optimizer(wt);
222     pRisk = p.estimatePortRisk(wt);
223     pRet = p.estimatePortReturn(wt);

```

## CAPITOLO 7. APPLICAZIONE AD UN PORTAFOGLIO DI ASSET FINANZIARI146

```
224     hold on;
225     h = plot(pRisk, pRet, 'og', 'MarkerFaceColor', 'g');
226     legend(h,'Portafoglio ottimo');
227 end
228 hold off;
229
230 % Definito il modello si analizza il rendimento che si ottiene negli
231 % M (trading_days) giorni successivi
232 trading_days = size(normPrices_BT,1);
233 returns_BT = returns_test;
234 [ret_BT, cvar_BT] = back_testing(normPrices_BT, wt, names, trading_days, returns_BT);
235
236 % Analisi per il portafoglio equipesato
237 [ret_equally_weighted, cvar_equally_weighted] = back_testing(normPrices_BT, weights', names,
    trading_days, returns_BT);
238
239 end
240
241 %%% SOLO PER LE COPULE VINE
242 % Da inserire dopo aver utilizzato la funzione FittingMarginals
243 % Carico le simulazioni tramite le copule D-Vine
244 if nAsset == 14
245     if Vine_type == 'c'
246         filename = sprintf('C-Vine_cycle%d.mat',iteration);
247     else
248         filename = sprintf('D-Vine_cycle%d.mat',iteration);
249     end
250 end
251
252 if nAsset == 6
253     if Vine_type == 'c'
254         filename = sprintf('C-Vine_Six_asset_cycle%d.mat',iteration);
255     else
256         if length(returns_train) == 250 && length(returns_test) == 10
257             filename = sprintf('D-Vine_Six_asset_250-10_cycle%d.mat',iteration);
258         elseif length(returns_train) == 125 && length(returns_test) == 20
259             filename = sprintf('D-Vine_Six_asset_125-20_cycle%d.mat',iteration);
260         elseif length(returns_train) == 250 && length(returns_test) == 125
261             filename = sprintf('D-Vine_Six_asset_cycle%d.mat',iteration);
262         end
263     end
264 end
265
266 sim = load(filename);
267 sim = sim.labpcexport;
268
269 %%% FINE VINE
270
271 %%% PER LA VARIANTE CON SHORT SELLING E FONDO 130/30
272
```

```

273 if by=='f' % 130-30 fund
274     AssetBounds = [-0.3, 1.3];
275 else % short
276     AssetBounds = [-1, 1];
277 end
278 p = setBounds(p, AssetBounds(1), AssetBounds(2));
279 weights_opt = estimateFrontier(p,2);
280 portRisk = estimatePortRisk(p,weights_opt);
281 portRet = estimatePortReturn(p,weights_opt);
282
283 %%% FINE SHORT SELLING
284
285
286
287 function [ marginal ] = FittingMarginals( returns, nAsset, names )
288
289 tailFraction = 0.1; % parte dei dati da allocare alle code
290 marginal      = cell(nAsset,1);
291
292 for i = 1:nAsset
293     marginal{i} = paretotails(returns(:,i), tailFraction, 1 - tailFraction, 'kernel');
294     fprintf('Marginal distribution for %s:\n', names{i});
295     disp(marginal{i});
296 end
297
298 index = 2;
299 dist = marginal{index};
300
301 clf
302 probplot(returns(:,index));
303 h = probplot(gca, @dist.cdf);
304 set(h,'Color','r');
305 legend('Normal Distribution', 'Returns', 'Hybrid ParetoTail Distribution', 'Location', 'Best');
306 title(['Probability Plot: ' names(index)])
307
308 end
309
310
311
312 function [ ret_BT, cvar_BT] = back_testing( normPrices_BT, wt, names_BT, trading_days,
      returns_BT)
313
314 normPrices_BT = normPrices_BT(1:trading_days,:);
315 returns_BT = returns_BT(1:trading_days,:);
316
317 portRetDaily = returns_BT * wt;
318 var_BT = -prctile(portRetDaily, 1);
319 cvar_BT = -mean(portRetDaily(portRetDaily < -var_BT));
320
321 endReturn = normPrices_BT(trading_days,:);

```

## CAPITOLO 7. APPLICAZIONE AD UN PORTAFOGLIO DI ASSET FINANZIARI 148

```
322 ret_BT = endReturn * wt;
323
324 end
325
326
327
328 %% Main Modello di Markowitz
329
330 clear all;
331 clc;
332
333 %% Input %%
334 filename = 'ALL_without_Micex_Shanghai.xls';
335 %filename = 'Major_six_assets.xls';
336
337 expected_return = 0.03/100;
338 window_train = 250;
339 window_test = 125;
340 risk_threshold = 0.02;
341 by = '0';
342
343 [returns logreturns dates names obs nAsset normPrices]=ReadData(filename);
344
345 cycles = floor((obs-window_train)/window_test);
346 totalreturn = zeros(1,cycles);
347 optimal_weights = zeros(cycles,nAsset);
348 minimum_per_period = zeros(1,cycles);
349 EW_ret = zeros(1,cycles);
350 history=1;
351
352 for i=1:cycles
353     disp(i)
354     normPrices_train = Normalize_Prices(normPrices(1+(i-1)*window_test : (i-1)*window_test+
355         window_train,:));
356     normPrices_test = Normalize_Prices(normPrices((i-1)*window_test+window_train+1 :
357         window_train+window_test*i,:));
358     returns_train = returns(1+(i-1)*window_test : (i-1)*window_test+window_train,:);
359     returns_test = returns((i-1)*window_test+window_train+1 : window_train+window_test*i,:);
360     [ret_BT, wt, ret_equally_weighted] = MPT_Normalize_Volatilita(returns_train, names,
361         returns_test, normPrices_train, normPrices_test, expected_return, risk_threshold, by);
362     totalreturn(i) = ret_BT;
363     optimal_weights(i,:) = wt;
364     EW_ret(i) = ret_equally_weighted;
365     minimum_per_period(i) = min(normPrices_test*wt);
366     [values] = Normalize_Time_Series(history, normPrices_test, wt);
367     history = [history; values];
368 end
369
370 temp=100;
```

## CAPITOLO 7. APPLICAZIONE AD UN PORTAFOGLIO DI ASSET FINANZIARI 149

```
369 rend_equally_weighted = 100;
370
371 for i = 2:cycles+1
372     if totalreturn(i-1)~=0
373         temp(i) = temp(i-1) * totalreturn(i-1);
374         rend_equally_weighted(i) = rend_equally_weighted(i-1) * EW_ret(i-1);
375     end
376 end
377
378
379 weights(1:nAsset) = [1/nAsset]';
380
381 normPrices_plot = Normalize_Prices(normPrices(window_train>window_train+cycles*window_test,:));
382 dates_plot = dates(window_train>window_train+cycles*window_test,:);
383 plot(dates_plot, 100*normPrices_plot);
384 hold on;
385 plot(dates_plot,100*normPrices_plot*weights','-r','LineWidth',2);
386 plot(dates_plot,100*history,'Color',[0 204 0]/255,'LineWidth',2);
387
388
389
390 function [ret_BT, wt, ret_equally_weighted] = Original_MPT( returns_train, names, returns_test,
    normPrices_train, normPrices_test, expected_return, expected_risk, by)
391
392 returns = returns_train;
393 nAsset = size(returns,2);
394 for i = 1:nAsset
395     pd(i) = fitdist(returns(:,i),'Normal');
396     mu(i) = pd(i).mean;
397     sigma(i) = pd(i).sigma;
398 end
399
400 cor = corr(returns);
401 cov = corr2cov(sigma,cor);
402
403 weights(1:nAsset) = [1/nAsset]';
404
405 %% Ottimizzazione del portafoglio con i dati trovati
406 p = Portfolio();
407 p = p.setAssetList(names);
408 p = p.setDefaultConstraints;
409 p = setAssetMoments(p, mu, cov, nAsset);
410
411 weights_opt = p.estimateFrontier(20);
412 [weights_opt] = Weight_Optimizer(weights_opt);
413
414 portRisk = p.estimatePortRisk(weights_opt);
415 portRet = p.estimatePortReturn(weights_opt);
416
417 plotFrontier(p, portRisk, portRet);
```

```

418
419 if by=='r'
420     wt = p.estimateFrontierByReturn(expected_return);
421     [wt] = Weight_Optimizer(wt);
422     pRisk = p.estimatePortRisk(wt);
423     pRet = p.estimatePortReturn(wt);
424     hold on;
425     h = plot(pRisk, pRet, 'or', 'MarkerFaceColor', 'r'); legend(h,'Desired portfolio');
426 else
427     wt = p.estimateFrontierByRisk(expected_risk);
428     [wt] = Weight_Optimizer(wt);
429     pRisk = p.estimatePortRisk(wt);
430     pRet = p.estimatePortReturn(wt);
431     hold on;
432     h = plot(pRisk, pRet, 'og', 'MarkerFaceColor', 'g'); legend(h,'Desired portfolio');
433 end
434 hold off;
435
436 % Definito il modello si analizza il rendimento che si ottiene negli M (trading_days) giorni
      % successivi
437 trading_days = size(normPrices_test,1);
438 [ret_BT, cvar_BT] = back_testing(normPrices_test, wt, names, trading_days, returns_test);
439
440 [ret_equally_weighted, cvar_equally_weighted] = back_testing(normPrices_test, weights', names,
      trading_days, returns_test);
441
442 end
443
444
445
446 %% Main Modello di Black-Litterman
447
448 clear all;
449 clc;
450
451 %% Input %%
452 filename = 'ALL_without_Micex_Shanghai.xls';
453 %filename = 'Major_six_assets.xls';
454
455 expected_return = 0.03/100;
456 window_train = 250;
457 window_test = 125;
458 risk_threshold = 0.02;
459 by = '0';
460 salva_grafici = 'n';
461
462 [returns logreturns dates names nAsset normPrices]=ReadData(filename);
463 cycles = floor((obs-window_train)/window_test);
464 totalreturn = zeros(1,cycles);
465 optimal_weights = zeros(cycles,nAsset);

```

## CAPITOLO 7. APPLICAZIONE AD UN PORTAFOGLIO DI ASSET FINANZIARI 151

```

466
467 for i=1:cycles
468     disp(i)
469     normPrices_train = Normalize_Prices(normPrices(1+(i-1)*window_test : (i-1)*window_test+
        window_train,:));
470     normPrices_test = Normalize_Prices(normPrices((i-1)*window_test+window_train+1 :
        window_train+window_test*i,:));
471     returns_train = returns(1+(i-1)*window_test : (i-1)*window_test+window_train,:);
472     returns_test = returns((i-1)*window_test+window_train+1 : window_train+window_test*i,:);
473     [ret_BT, wt, variances, Qvalues] = Black_Litterman_Portfolio(returns_train, names,
        returns_test, normPrices_train, normPrices_test, expected_return, risk_threshold, by);
474     totalreturn(i) = ret_BT;
475     optimal_weights(i,:) = wt;
476 end
477
478 temp=100;
479 for i = 2:cycles+1
480     if totalreturn(i-1)~=0
481         temp(i) = temp(i-1) * totalreturn(i-1);
482     end
483 end
484
485 if salva_grafici=='y'
486     fig = figure(1);
487     plot(temp, '-g', 'LineWidth', 2);
488     saveas(fig, sprintf('BL_th=%f_Temp.png', risk_threshold));
489     fig = figure(2);
490     area(optimal_weights);
491     xlim([1 cycles]);
492     ylim([0 1]);
493     legend(names);
494     saveas(fig, sprintf('BL_th=%f_Weights.png', risk_threshold));
495 else
496     figure(1);
497     area(optimal_weights);
498     xlim([1 cycles]);
499     ylim([0 1]);
500     legend(names);
501     xlabel('Periodi');
502     ylabel('Pesi');
503     %set(gcf, 'PaperUnits', 'inches', 'PaperPosition', [0 0 10 6])
504     %print('Pesi BL', '-dpng', '-r400')
505
506     figure(2);
507     normPrices_plot = Normalize_Prices(normPrices(window_train:window_train+cycles*window_test
        ,:));
508     plot(normPrices_plot*100);
509     hold on;
510     plot([1:window_test:obs-window_train], temp, '-g', 'LineWidth', 2);
511     xlim([0 4750]);

```

## CAPITOLO 7. APPLICAZIONE AD UN PORTAFOGLIO DI ASSET FINANZIARI 152

```

512     if nAsset == 14
513         leg = {'S&P 500'; 'Nasdaq 100'; 'Nikkei 225'; ...
514             'India MSE Sensex 30'; 'Brazil Bovespa'; 'Euro Stoxx 50'; 'Franklin Euro Government
                    Bond'; ...
515             'Bloomberg Gold Sub Index'; 'MSCI World Energy'; 'MSCI World Health Care'; ...
516             'MSCI World Industrials'; 'MSCI World Financials'; 'MSCI World Utilities'; ...
517             'Citigroup WGBI US (1-3 Y)'; 'Portafoglio equipesato'; 'Modello avanzato con copule
                    Vine'};
518     else
519         leg = {'S&P 500'; 'Nikkei 225'; 'Euro Stoxx 50'; 'Franklin Euro Government Bond'; ...
520             'MSCI World Financials'; 'Citigroup WGBI US (1-3 Y)'; 'Portafoglio equipesato'; '
                    Modello avanzato con copule Vine'};
521     end
522     legend(leg, 'Location', 'NorthWest')
523     title('Andamento indici e portafogli');
524 end
525
526 [min(totalreturn-1) temp(end)]
527
528
529
530
531 function [ret_BT, wt, variances, Qvalues] = Black_Litterman_Portfolio( returns_train, names,
        returns_test, normPrices_train, normPrices_test, expected_return, expected_risk, by)
532
533 numPort = 20;
534 returns = returns_train;
535 cov_daily = cov(returns);
536 covariance = cov_daily;
537 cor = corr(returns_train);
538
539 obs = length(returns_train);
540 nAsset = size(returns,2);
541 tau = 1/obs;
542 market_weight(1:nAsset,1) = [1/nAsset];
543
544 mu = mean(returns_train);
545 var = -prctile(returns, 1);
546 for i=1:nAsset
547     cvar(i) = -mean(returns(returns < -var(i)));
548 end
549 sharpe_ratio = mu./cvar;
550 [SR_sorted pos] = sort(sharpe_ratio);
551
552 % Matrice delle Views
553 P = zeros(3,nAsset);
554 % View assoluta
555 P(1,pos(end)) = 1;
556 % Views relative
557 P(2,pos(end-1)) = 1;

```

## CAPITOLO 7. APPLICAZIONE AD UN PORTAFOGLIO DI ASSET FINANZIARI 153

```

558 P(3,pos(end-2)) = 1;
559 P(2,pos(1)) = -1;
560 P(3,pos(2)) = -1;
561
562 % Confidenza sulle views
563 Omega = 100*tau*P*covariance*(P');
564 variances = [Omega(1,1) Omega(2,2)]*100;
565
566 for i=1:size(Omega,1)
567     for j=1:size(Omega,2)
568         if i~=j
569             Omega(i,j)=0;
570         end
571     end
572 end
573
574 diff0 = (mu(pos(end))-mean(mu))*2;
575 diff1 = (mu(pos(end-1))-mu(pos(1)))*2;
576 diff2 = (mu(pos(end-2))-mu(pos(2)))*2;
577
578 Q = [diff0 diff1 diff2]';
579 Qvalues = [Q(1,1) Q(2,1)];
580
581 % Definiamo i rendimenti impliciti pi
582 rf = 0;
583 rP_daily = mean(returns(:,1));
584 rP = (rP_daily + 1)^252 - 1;
585 varP = std(returns(:,1))^2;
586 lambda = (rP_daily - rf)/varP;
587
588 pi = ((lambda * (cov_daily)) * market_weight) + rf;
589 pi_excess = pi - rf;
590
591 % Troviamo media e varianza dei rendimenti a posteriori
592 expRet_BL = inv(inv(tau*cov_daily)+P'*inv(Omega)*P)*(inv(tau*cov_daily)*pi_excess + P'*inv(
    Omega)*Q);
593 [expRet_BL pi];
594 Cov_BL = inv(inv(tau*covariance) + P'*inv(Omega)*P);
595 Var_Cov_BL = covariance + Cov_BL;
596
597 %% Ottimizzazione del portafoglio con i dati trovati
598 p = Portfolio();
599 p = p.setAssetList(names);
600 p = p.setDefaultConstraints;
601 AssetBounds = [0, 1];
602 p = setBounds(p, AssetBounds(1), AssetBounds(2));
603 p = setAssetMoments(p, expRet_BL, Var_Cov_BL);
604 portWts = estimateFrontier(p, numPort);
605 [portRisk, portReturn] = estimatePortMoments(p, portWts);
606 plotFrontier(p, portRisk, portReturn);

```

```

607
608 if by=='r'
609     if max(expRet_BL) < expected_return
610         expected_return = max(expRet_BL)-0.00001;
611     end
612     wt = estimateFrontierByReturn(p,expected_return);
613     [wt] = Weight_Optimizer(wt);
614     pRisk = p.estimatePortRisk(wt);
615     pRet = p.estimatePortReturn(wt);
616     hold on;
617     h = plot(pRisk, pRet, 'or', 'MarkerFaceColor', 'r'); legend(h,'Desired portfolio');
618 else
619     wt = p.estimateFrontierByRisk(expected_risk);
620     [wt] = Weight_Optimizer(wt);
621     pRisk = p.estimatePortRisk(wt);
622     pRet = p.estimatePortReturn(wt);
623     hold on;
624     h = plot(pRisk, pRet, 'og', 'MarkerFaceColor', 'g'); legend(h,'Desired portfolio');
625 end
626 hold off;
627
628 % Definito il modello si analizza il rendimento che si ottiene negli M (trading_days) giorni
        successivi
629 trading_days = length(normPrices_test);
630 [ret_BT, cvar_BT] = back_testing(normPrices_test, wt, names, trading_days, returns_test);
631
632 end

```

## 7.7 Implementazione in R

```
### Ricerca delle copule Vine per Matlab ###

setwd("C:/Users/Enrico/Documents/MATLAB/Tesi Magistrale")
library(MASS)
library(copula)
library(VineCopula)
library(gPdttest)
library(CDVine)
library(R.matlab)

## Input ##
data = read.table("ALL_data.txt", sep="\t")
#data = read.table("Major_six_assets.txt", sep="\t")

window_train = 250;
window_test = 125;

nAsset = dim(data)[2]
obs = dim(data)[1]
returns = matrix(0,ncol=nAsset, nrow = obs);

for (j in 1:nAsset) {
  for (i in 2:obs) {
    returns[i,j] = (data[i,j]/data[i-1,j])-1;
  }
}
returns = returns[2:obs,];
cycles = floor((obs-window_train)/window_test)

# Ricerca delle copule C-Vine o D-Vine
start = 1;
end = window_train;

for (j in 1:3) {
```

```

res = matrix(0,nrow = window_train, ncol = nAsset)

for (i in 1:nAsset) {
  dati.mod = rank(returns[start:end,i])/length(returns[start:end,i])
  res[,i] = dati.mod
}

#Cvinecop = CDVineCopSelect(res, type = 1)
Dvinecop = CDVineCopSelect(res, type = 2)

# Simulazione di 10000 nuove osservazioni
#sim = CDVineSim(10000,family = Cvinecop$family, type = 1,
par = Cvinecop$par, par2 = Cvinecop$par2)
sim = CDVineSim(10000,family = Dvinecop$family, type = 2,
par = Dvinecop$par, par2 = Dvinecop$par2)

# Salvataggio delle simulazioni in un file .mat
filename = paste("D-Vine_cycle",j,".mat",sep="");
writeMat(filename, labpcexport = sim)

start = start + window_test;
end = end + window_test;
}

CDVineTreePlot(sim, family = Dvinecop$family, type = 2)

```

# Ringraziamenti

Prima di tutto vorrei ringraziare i miei due relatori, i Professori F. Pellerey e F. Varetto, per l'aiuto ed il supporto che mi hanno fornito durante lo sviluppo della suddetta tesi.

I loro consigli e suggerimenti mi hanno permesso di sviluppare in dettaglio questo lavoro, riuscendo così a confrontare diverse metodologie di modelli finanziari ed utilizzando strumenti matematici evoluti.

Vorrei anche ringraziare i miei compagni ed amici con cui ho passato insieme i miei ultimi anni di Università che mi hanno sempre sostenuto e motivato, senza i quali tutto questo non sarebbe stato possibile. In particolare, un grazie va a: Leonardo, Irene, Cristiana e Dante.

Infine, vorrei ringraziare la mia famiglia che mi ha motivato ed aiutato a conseguire questo titolo di studio anche nei periodi più difficili.

*Enrico Trogolo*

# Bibliografia

- [1] Markowitz H. Portfolio selection. *Journal of Finance*, 7:77–91, 1952.
- [2] McLeavey D.W. Pinto J.E. Maginn J.L., Tuttle D.L. *Managing Investment Portfolios: A Dynamic Process*. Hoboken, Wiley, 3 edition, 2007.
- [3] Litterman R. Black F. Global portfolio optimization. *Financial Analysts Journal*, 48(5):28–43.
- [4] Fabozzi F. J. Drake, P. P. *The Basics of Finance: An Introduction to Financial Markets, Business Finance, and Portfolio Management*. John Wiley Sons, New Jersey, 2010.
- [5] E. Fama. Multiperiod consumption-investment decisions. *The American Economic Review*, (60):163–174, 1970.
- [6] R. Best, M. J. e Grauer. the sensitivity of mean-variance-efficient portfolios to changes in asset means: Some analytical and computational results. *The Review of Financial Studies*, 4(2):315–342, 1991.
- [7] N. Taleb. *The Black Swan: The Impact of the Highly Improbable*. Random House, 2007.
- [8] Bera A.K. Jarque, C.M. Efficient tests for normality, homoscedasticity and serial independence of regression residuals: Monte carlo evidence. *Economics Letters*, (7):313–318, 1981.

- [9] K. Pearson. Notes on regression and inheritance in the case of two parents. *Proceedings of the Royal Society of London*, (58):240–242, 1895.
- [10] Kopp P. E. Elliott, R. J. *Mathematics of Financial Markets*, volume 10. Springer, New York, 2005.
- [11] Myers S. C. Franklin A. Brealey, R. A. *Principles of Corporate Finance*. McGraw-Hill, New York, 2012.
- [12] Litterman R. Black, F. Global portfolio optimization. *Financial Analysts Journal*, 48(5):28–43, 9 1992.
- [13] Kahn R.N. Grinold, R.C. *Active Portfolio Management*. McGraw-Hill, New York, 3 edition, 1999.
- [14] Litterman Robert He, G. The intuition behind black-litterman model portfolios. 10 2002.
- [15] Scowcroft A. Satchell, S. A demystification of the black-litterman model: Managing quantitative and traditional portfolio construction. *Journal of Asset Management*, 1:138–150, 2000.
- [16] T. Idzorek. A step-by-step guide to the black-litterman model: Incorporating user-specified confidence levels. 1 2004.
- [17] J. Walters. The black-litterman model: A detailed exploration. 2008. [www.blacklitterman.org](http://www.blacklitterman.org).
- [18] A. Meucci. Beyond black-litterman in practice: A five-step recipe to input views on non-normal markets. 19, 5 2006.
- [19] A. Meucci. *Risk and Asset Allocation*. Springer, 2005.
- [20] A. Meucci. *The Black-Litterman Approach: Original Model and Extensions, The Encyclopedia of Quantitative Finance*. Wiley, 2010.
- [21] Pareto V. *Cours d'economie Politique: Nouvelle edition par G.H. Bousquet et G. Busino*. Librairie Droz, 1964.

- [22] Jorgensen M. Reed, W. The double pareto-lognormal distribution - a new parametric model for size distributions. 8(33):1733–1753, 05 2004.
- [23] Damouras S. Gill P. Schroeder, B. Understanding latent sector errors and how to protect against them. *Usenix Conference on File and Storage Technologies*, 6(3):9:23, 9 2010.
- [24] R. Noubary. On tail estimation: An improved method. 21:829–842, 01 1989.
- [25] Kopp P. Elliott, R. *Mathematics of Financial Markets*, volume 10. Springer, New York, 2005.
- [26] Lindskog F. Hammarlid O. Rehn C.J. Hult, H. *Risk and Portfolio Analysis: Principles and Methods*. Springer Science Business Media, New York, 2012.
- [27] Mercuri L. Rroji E. Bellini, F. Implicit expectiles and measures of implied volatility. *SSRN Electronic Journal*, 2017.
- [28] JP Morgan. *RiskMetrics, Technical Document*, 1996.
- [29] Delbaen F. Eber S. Heath D. Artzner, P. Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, (9):203–228, 1999.
- [30] Rosen D. Mausser, H. Beyond var: From measuring risk to managing risk. *ALGO Research Quarterly*, (1):5–20, 1999.
- [31] Keefer T. E. McKay, R. is a dangerous technique. *Corporate Finance Searching for Systems Integration*, (30), 1996.
- [32] J.S. Kamdem. Value-at-risk and expected shortfall for linear portfolios with elliptically distributed risk factors. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 8(5):537–551, 2005.
- [33] Pflug G. Gaivoronski, A. Value-at-risk in portfolio optimization: Properties and computational approach. 7:1–31, 2 2005.

- [34] D. Einhorn and A. Brown. Private profits and socialized risk. *Global Association of Risk Professionals*, (42):10–26, 2008.
- [35] J. C. Hull. *Risk Management and Financial Institutions*. Wiley, 4 edition, 2015.
- [36] Tasche D. Acerbi, C. On the coherence of expected shortfall. *Journal of Banking Finance*, (26):1487–1503, 2002.
- [37] Uryasev S. Rockafellar, R.T. Conditional value-at-risk for general loss distributions. *Journal of Banking Finance*, (26):1443–1471, 2002.
- [38] Tasche D. Acerbi, C. On the coherence of expected shortfall. *Journal of Banking Finance*, 7(26):1487–1503, 2002.
- [39] Valdez E. Landsman, Z. Tail conditional expectations for exponential dispersion models. *ASTIN Bulletin*, (35):189–210, 2005.
- [40] Serraino G. Uryasev S. Sarykalin, S. Value-at-risk vs. conditional value-at-risk in risk management and optimization. *Tutorials in Operations Research*, 2008.
- [41] Nelsen R. B. *An introduction to copulas*. Springer, New York, 2 edition, 2006.
- [42] H. Joe. *Multivariate Models and Dependence Concepts*. Champan Hall, London, 1997.
- [43] A. Sklar. *Fonctions de repartition a n dimensions et leurs marges*. Universite de Paris, 1959.
- [44] A. Sklar. Random variables, distribution functions and copulas. *Lecture Notes-Monograph Series*, (28):1–14, 1996.
- [45] E.J. Gumbel. Distributions des valeurs extremes en plusieurs dimensions. *Inst. Statist. Univ. de Paris*, (9):171–173, 1960.

- [46] M.J. Frank. On the simultaneous associativity of  $f(x,y)$  and  $x + y \hat{=} f(x,y)$ . *Aequationes Math*, (19):194–226, 1979.
- [47] D.G. Clayton. A model for association in bivariate life tables and its application in epidemiological studies of familial tendency in chronic disease incidence. *Biometrika*, (65):141–151, 1978.
- [48] H. Joe. Families of  $m$ -variate distributions with given margins and  $(m-1)/2$  bivariate dependence parameters. *Distributions with Fixed Marginals and Related Topics*, pages 120–141, 1996.
- [49] Cooke R.M. Bedford, T. Probability density decomposition for conditionally dependent random variables modeled by vines. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, (32):245–268, 2001.
- [50] Cooke R.M. Kurowicka D. *Uncertainty Analysis with High Dimensional Dependence Modelling*. John Wiley Sons, Chichester, 2006.
- [51] Frigessi A. Bakken H. Aas K., Czado C. Pair-copula constructions of multiple dependence. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2(44):182–198, 2009.
- [52] C. Czado. *Pair-Copula Constructions of Multivariate Copulas*, pages 93–109. 1 2010.
- [53] Schepsmeier U. Brechmann, E.C. Modeling dependence with c- and d-vine copulas. *The R-package CDVine*, 2012.
- [54] Joe H. Aas K. Cooke, R. M. *Dependence Modeling Vine Copula Handbook*. World Scientific Publishing Company, Hackensack, 2011.
- [55] Morgan Stanley Capital International. Prospetto completo al link: <https://goo.gl/DsGkik>.
- [56] Morgan Stanley Capital International. Prospetto completo al link <https://goo.gl/ujNAuZ>.

- [57] Slovic P. Tversky A. Kahneman, D. *Judgment Under Uncertainty: Heuristics and Biases*. New York: Cambridge University Press, 1982.
- [58] A. Meucci. *The Black-Litterman Approach: Original Model and Extensions*. The Encyclopedia of Quantitative Finance, Wiley, 2010.
- [59] W. Sharpe. The sharpe ratio. *The Journal of Portfolio Management*, (21):49–58, 1994.
- [60] Investment insights J.P. Morgan. *Spotlight on: 130/30 strategies*. Prospetto completo al link <https://goo.gl/F5T4V1>.