


Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccanica

A.A.: 2025/2026

Sessione di Laurea Settembre 2026

Tesi di Laurea Magistrale

# Modellazione Interazione Rotore-Cuscinetto per la Progettazione di Macchine Rotanti

Relatori:

Prof. Eugenio Brusa

M. Eng. Luca Giraudo

Candidato:

William Arduino (matr.: 344182)

*Alla mia famiglia.*
*A tutti coloro che combattono con la propria mente.*

# Indice

**Elenco delle figure** **V**

**Elenco delle tabelle** **IX**

**1 Introduzione** **1**

**2 Stato dell'arte** **3**
2.1 Modelli di cuscinetti volventi . . . 3
2.1.1 Modelli quasi-statici . . . 4
2.1.2 Modelli dinamici . . . 6
2.1.3 Modelli FEM . . . 8
2.2 Modelli sistemi rotore-cuscinetto . . . 9
2.2.1 Modelli rotore analitici . . . 10
2.2.2 Modelli rotore numerici . . . 15

**3 Richiami teorici** **21**
3.1 Dinamica dei rotori . . . 21
3.1.1 Vibrazioni dei rotori . . . 22
3.1.2 Rotore di Jeffcott . . . 27
3.1.3 Rotore a 4 gradi di libertà . . . 38
3.2 Cuscinetti volventi . . . 48
3.2.1 Contatto Hertziano . . . 53
3.2.2 Modello di Stribeck . . . 57
3.3 Metodo degli elementi finiti . . . 58
3.3.1 Funzioni di forma e matrici elementali . . . 59
3.3.2 Elemento trave di Eulero-Bernoulli . . . 61
3.3.3 Elemento trave di Timoshenko . . . 69
3.3.4 Seconda formulazione elemento trave di Timoshenko . . . 71
3.3.5 Dinamica dei rotori e metodo FEM . . . 73
3.3.6 Integrazione nel tempo con metodo di Newmark-$\beta$ . . . 74
3.4 Modellazione multi-body . . . 76

**4 Sviluppo modello sistema rotore-cuscinetto** **79**
4.1 Banco prova cuscinetti . . . . . 79
4.2 Modello FEM rotore . . . . . 82
4.3 Modello *multibody* cuscinetto . . . . . 86
4.4 Modello sistema rotore-cuscinetto . . . . . 93

**5 Risultati di simulazione e relativa analisi** **99**
5.1 Analisi modale rotore . . . . . 99
5.2 Co-simulazione sistema rotore-cuscinetto . . . . . 102

**6 Conclusioni e sviluppi futuri** **117**

**Bibliografia** **125**

# Elenco delle figure


2.1 Diagramma di corpo libero della j-esima sfera [8]. . . . . 4
2.2 Flow-chart implementazione modello quasi-statico cuscinetto in modello rotore. . . . . 11
2.3 Combinazione tra modello dinamico cuscinetto e modello analitico rotore. . . . . 12
2.4 Combinazione modello FEM rotore con modello dinamico cuscinetto. 17

3.1 Diagramma di Campbell di un generico rotore. . . . . 23
3.2 *Decay rate plot* di un generico rotore. . . . . 24
3.3 Eccentricità $\varepsilon$ tra il centro geometrico $C$ e il centro di massa $P$ del rotore. . . . . 25
3.4 Velocità critiche di un generico rotore. . . . . 26
3.5 Visualizzazione piano $xy$ rotore di Jeffcott libero non smorzato. . . . 27
3.6 Diagramma di Campbell rotore di Jeffcott libero non smorzato. . . . 29
3.7 Visualizzazione piano $xy$ rotore di Jeffcott sbilanciato non smorzato. . 30
3.8 Diagramma di Campbell rotore di Jeffcott sbilanciato non smorzato. . 31
3.9 Ampiezza relativa $z_0/\varepsilon$ dell'orbita del moto di precessione rotore di Jeffcott sbilanciato non smorzato. . . . . 33
3.10 Configurazione deformata rotore di Jeffcott sbilanciato non smorzato durante rotazione a transitorio estinto. . . . . 34
3.11 Ampiezza relativa e fase dell'orbita rotore di Jeffcott sbilanciato smorzato. . . . . 37
3.12 Configurazioni deformate rotore di Jeffcott sbilanciato smorzato: a) regime subcritico, b) alla velocità critica, c) regime supercritico. . . . 38
3.13 Visualizzazione piano $xy$ rotore 4GDL sbilanciato non smorzato. . . . 39
3.14 Visualizzazione errore angolare $\chi$ tra asse di simmetria e asse di rotazione del rotore. . . . . 39
3.15 Rotazioni dei sistemi di riferimento rotore 4GDL. . . . . 41
3.16 Rotazione associata all'errore angolare $\chi$ rotore 4GDL. . . . . 42
3.17 Ampiezza e fase relative dell'orbita rotore 4GDL sbilanciato non smorzato. . . . . 46
3.18 Diagramma di Campbell rotore 4GDL sbilanciato non smorzato. . . . 47
3.19 Vista esplosa cuscinetto volvente [113]. . . . . 48

3.20 Corpo volvente sfera [113]. . . . . 49
3.21 Corpo volvente rullo [113]. . . . . 49
3.22 Cuscinetti assiali [113]. . . . . 50
3.23 Cuscinetti radiali [113]. . . . . 50
3.24 Cuscinetto obliquo a sfere [113]. . . . . 51
3.25 Cuscinetto a rulli conici [113]. . . . . 51
3.26 Cuscinetto orientabile a rulli [113]. . . . . 52
3.27 Compensazione disallineamento cuscinetti orientabili [113]. . . . . 52
3.28 Contatto tra corpi generici [114]. . . . . 54
3.29 Ellisse di contatto tra corpi generici [115]. . . . . 55
3.30 Rettangolo di contatto tra corpi cilindrici [115]. . . . . 56
3.31 Zona di carico modello di Stribeck. . . . . 57
3.32 Elemento trave. . . . . 62
3.33 Rappresentazione rotazione locale della sezione, trave di Eulero-Bernoulli. 62
3.34 Analisi comportamento assiale elemento trave. . . . . 64
3.35 Funzioni di forma comportamento assiale elemento trave. . . . . 65
3.36 Analisi comportamento flessionale nel piano $xz$ elemento trave. . . . . 67
3.37 Rappresentazione rotazione locale della sezione, trave di Timoshenko. 70
3.38 Sistemi di riferimento modellazione *multibody*. . . . . 76

4.1 Visione d'insieme banco prova cuscinetti. . . . . 80
4.2 Vista in sezione scatola metallica. . . . . 81
4.3 Distribuzione percorsi di carico banco prova cuscinetti. . . . . 81
4.4 Albero banco prova cuscinetti. . . . . 82
4.5 Discretizzazione albero banco prova cuscinetti. . . . . 82
4.6 Modello *multibody* cuscinetto SKF® 22240 CCK/W33. . . . . 86
4.7 Cinematica giunto *inline primitive* [120]. . . . . 87
4.8 Cinematica giunto *parallel primitive* [120]. . . . . 88
4.9 Rappresentazione entità *vector* [120]. . . . . 90
4.10 Modello Simulink® sistema rotore-cuscinetto. . . . . 94
4.11 Valore eccentricità $\varepsilon$ in funzione del grado di sbilanciamento $G$ e della velocità di rotazione $\Omega$ [1]. . . . . 95
4.12 *Subsystem* forza di sbilanciamento. . . . . 96
4.13 *Subsystem* forze spingitori. . . . . 97

5.1 Diagramma di Campbell rotore. . . . . 100
5.2 Forme modali uniche piano $xz$. . . . . 101
5.3 Forme modali uniche piano $yz$. . . . . 101
5.4 Spostamento direzione $x$ in funzione del tempo nodo 4 rotore, modello FEM. . . . . 102
5.5 Spostamento direzione $x$ in funzione del tempo nodo 4 rotore, co-simulazione. . . . . 103

5.6 Spostamento direzione $y$ in funzione del tempo nodo 4 rotore, modello FEM. . . . . 104
5.7 Spostamento direzione $y$ in funzione del tempo nodo 4 rotore, co-simulazione. . . . . 105
5.8 Orbita normalizzata nel piano $xy$ del nodo 4 del rotore. . . . . 106
5.9 Orbite nodi rotore, modello FEM. . . . . 107
5.10 Orbite nodi rotore, co-simulazione. . . . . 107
5.11 Spettro di frequenza, modello FEM. . . . . 108
5.12 Spettro di frequenza, co-simulazione. . . . . 109
5.13 Confronto spostamento nodo 4 rotore e forza di contatto cuscinetto MB in direzione $x$ nel tempo. . . . . 111
5.14 Confronto spostamento nodo 4 rotore e forza di contatto cuscinetto MB in direzione $y$ nel tempo. . . . . 111
5.15 Penetrazione corpo volvente-anello interno modello MB cuscinetto. . . 112
5.16 Confronto penetrazione corpo volvente-anello interno modello MB cuscinetto e modello di Stribeck ($\varepsilon = 0{,}5$). . . . . 113
5.17 Confronto penetrazione corpo volvente-anello interno modello MB cuscinetto e modello di Stribeck adattato ($\varepsilon = 0{,}82$). . . . . 114
5.18 Penetrazione corpo volvente-anello esterno modello MB cuscinetto. . 115
5.19 Confronto penetrazione corpo volvente-anello esterno modello MB cuscinetto e modello di Stribeck ($\varepsilon = 0{,}5$). . . . . 115
5.20 Confronto penetrazione corpo volvente-anello esterno modello MB cuscinetto e modello di Stribeck adattato ($\varepsilon = 0{,}82$). . . . . 116

# Elenco delle tabelle

2.1 Classificazione modelli di cuscinetti volventi. . . . . 3
2.2 Classificazione modelli sistemi rotore-cuscinetto. . . . . 10

4.1 Coefficienti di rigidezza cuscinetti di banco. . . . . 84
4.2 Caratteristiche geometriche disco. . . . . 84
4.3 Posizioni aggiunta contributi d'inerzia anelli interni e bussole coniche cuscinetti in prova. . . . . 85
4.4 Parametri di simulazione modello *multibody* cuscinetto. . . . . 92
4.5 Parametri di simulazione algoritmo di Newmark-$\beta$ semi-esplicito. . . . 98

5.1 Velocità critiche rotore risonanze flessionali piano $xy$. . . . . 100
5.2 Frequenze proprie rotore utilizzate nell'analisi dei risultati. . . . . 109

# Capitolo 1

# Introduzione

Fin dall'antichità, l'uomo impiega i rotori nei contesti più svariati, dalle applicazioni domestiche fino agli ambiti industriali. Secondo la normativa ISO, un rotore è definito come un corpo sospeso tramite due cerniere cilindriche o cuscinetti, i quali ne consentono la rotazione libera attorno a un asse fissato nello spazio [1]. La dinamica dei rotori è la disciplina che si occupa della progettazione e dell'analisi di tali sistemi.

In ambito industriale, questi componenti costituiscono il cuore delle macchine rotanti, affiancati dagli elementi preposti al loro supporto, ovvero i cuscinetti. La combinazione di tali elementi prende comunemente il nome di "sistema rotore-cuscinetto". Lo studio della dinamica di questi assiemi è di vitale importanza per caratterizzarne correttamente il comportamento in condizioni operative. Infatti, la risposta dinamica del sistema può talvolta compromettere il funzionamento dei macchinari, ad esempio a causa dell'insorgere di fenomeni di risonanza o di vibrazioni con ampiezze eccessive. Per questo motivo, risulta fondamentale sviluppare un modello matematico del sistema in esame che permetta di condurre simulazioni e valutazioni predittive, sia in fase di progettazione che durante l'esercizio.

Sebbene l'argomento sia ampiamente trattato in letteratura fin dal secolo scorso, vi è una continua ricerca volta a migliorare gli strumenti di analisi. Con questo obiettivo, il presente lavoro di tesi propone lo sviluppo di un modello combinato che unisce il metodo degli elementi finiti (*Finite Element Method*, FEM), utilizzato per la trattazione del rotore, e l'approccio di modellazione *multibody* (MB), applicato ai cuscinetti. Tale sinergia risulta particolarmente vantaggiosa per ottenere una descrizione precisa e realistica del comportamento dinamico globale. Questo approccio permette, inoltre, di includere nell'analisi i complessi fenomeni di interazione, anche non lineari, che si instaurano tra il rotore, i supporti e gli eventuali componenti circostanti durante il funzionamento.

# Capitolo 2

# Stato dell'arte

In letteratura sono presenti numerosi modelli sviluppati per simulare la dinamica dei sistemi rotore-cuscinetto. Essi possono essere suddivisi in più categorie a seconda della combinazione tra modello del rotore e modello del cuscinetto volvente. Per una più chiara e completa comprensione della struttura, i modelli di cuscinetti volventi vengono inizialmente analizzati in una sezione apposita e successivamente viene riportata l'analisi dei modelli relativi ai sistemi rotore-cuscinetto.

## 2.1 Modelli di cuscinetti volventi

I cuscinetti volventi sono componenti di vitale importanza per il funzionamento delle macchine rotanti e rappresentano la fonte principale di fenomeni e sollecitazioni non-lineari che agiscono sul sistema [2]. Considerato il loro ruolo cruciale, essi sono stati oggetto di numerose ricerche nel corso degli anni. Il loro comportamento dinamico è stato ampiamente analizzato sia nel caso di cuscinetto sano [3–5], sia in presenza di difetti [6, 7]. I modelli di cuscinetto possono essere principalmente suddivisi in quasi-statici, dinamici e FEM (Tab. 2.1), i quali si differenziano per l'approccio e le ipotesi adottati nello sviluppo del modello stesso.

| **Modello cuscinetto** | **References** |
|---|---|
| Quasi-statico | [8–17] |
| Dinamico | [18–33] |
| FEM | [34–40] |

Tabella 2.1: Classificazione modelli di cuscinetti volventi.

### 2.1.1 Modelli quasi-statici

I modelli quasi-statici si basano sullo studio delle forze e dei momenti agenti sui componenti del cuscinetto, trascurando parzialmente l'inerzia delle parti analizzate [5]. Per tale motivo, le formulazioni quasi-statiche possono essere utilizzate soltanto nel caso in cui il sistema venga considerato nelle sue condizioni stazionarie o di regime [4]. Tuttavia, poiché tale analisi rende molto semplice il calcolo della rigidezza dei cuscinetti, i modelli quasi-statici vengono principalmente utilizzati nello studio delle proprietà meccaniche di tali componenti.

Nel caso di cuscinetti a sfere, una delle formulazioni di maggiore rilevanza è quella di Jones [8], all'interno della quale viene eseguita una valutazione dell'equilibrio di forze e momenti agenti su ciascuna sfera (Fig. 2.1).

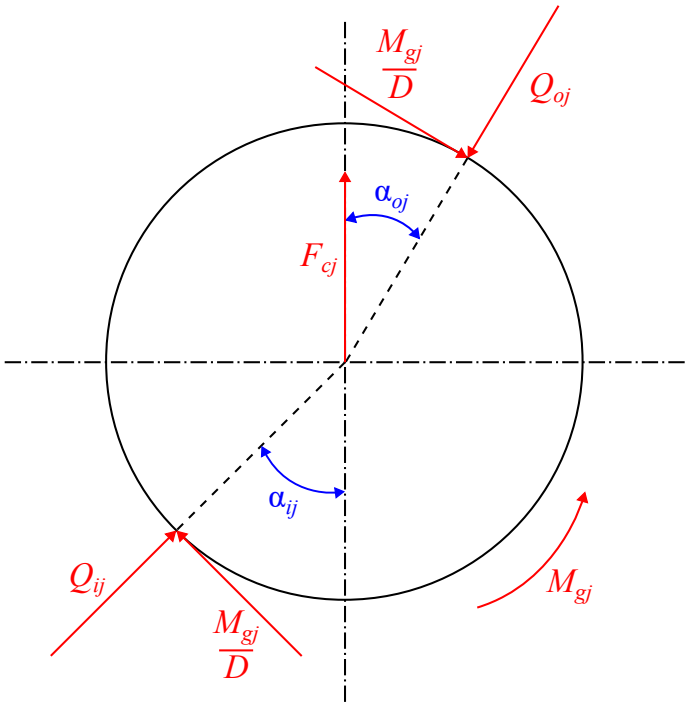



Figura 2.1: Diagramma di corpo libero della j-esima sfera [8].

Le equazioni di equilibrio relative alla j-esima sfera possono essere scritte come segue:

$$\begin{cases} Q_{ij}\sin\alpha_{ij} - Q_{oj}\sin\alpha_{oj} - \dfrac{M_{gj}}{D}\left(\lambda_{ij}\cos\alpha_{ij} - \lambda_{oj}\cos\alpha_{oj}\right) = 0 \\ Q_{ij}\cos\alpha_{ij} - Q_{oj}\cos\alpha_{oj} - \dfrac{M_{gj}}{D}\left(\lambda_{ij}\sin\alpha_{ij} - \lambda_{oj}\sin\alpha_{oj}\right) + F_{cj} = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

dove $Q_{ij}$ e $Q_{oj}$ rappresentano le forze di contatto tra sfera e, rispettivamente, anello interno ed esterno, $\alpha_{ij}$ e $\alpha_{oj}$ rappresentano gli angoli di contatto della sfera con, rispettivamente, anello interno ed esterno, $M_{gj}$ è il momento giroscopico, $\lambda_{ij}$ e $\lambda_{oj}$

sono i parametri di controllo rispettivamente per anello interno ed anello esterno e $F_{cj}$ è la forza centrifuga. Jones sviluppò tale modello utilizzando l'ipotesi di controllo generato dalle piste, secondo cui il corpo volvente rotola su una pista senza rotazione attorno al proprio asse, la quale invece si genera rispetto all'altra pista. Dal momento che all'interno delle equazioni figurano le sollecitazioni centrifughe e giroscopiche agenti sul componente, il modello di Jones è in grado di analizzare gli effetti dovuti alle alte velocità di rotazioni a cui il sistema è sottoposto.

La formulazione proposta da Jones è stata successivamente ripresa da Harris [9], il quale inserì all'interno del modello il contributo legato all'attrito coulombiano generato nel cuscinetto, che permise all'autore di scartare l'ipotesi di controllo legato alle piste. Tale modello è stato migliorato da Harris e Mindel [10], i quali studiarono l'equilibrio dei corpi volventi considerando numerosi fattori di carico, tra cui i contributi legati alla presenza del lubrificante, ed estesero la trattazione ai cuscinetti a rulli.

In letteratura, la caratteristica meccanica dei cuscinetti maggiormente studiata tramite i modelli quasi-statici è la rigidezza. Dai diversi studi emerge che essa è influenzata da molteplici fattori come meccanismi di pre-carico differenti e deformazioni elastiche dell'anello interno [11], come anche dalla velocità di rotazione, dal gioco interno e dai parametri geometrici dei cuscinetti quali il diametro delle sfere e la curvatura delle piste [12]. Il calcolo della rigidezza e del livello di precarico è stato, inoltre, effettuato considerando configurazioni di montaggio con più cuscinetti accoppiati [13], riscontrando che un opportuno valore di pre-carico permette di ottenere una migliore uniformità della distribuzione dei carichi interni e un incremento della vita utile del cuscinetto, mentre un valore troppo basso può favorire la separazione tra corpi volventi e piste [14]. In aggiunta, i contatti tra questi ultimi sono notevolmente influenzati dalla presenza del lubrificante, in particolare gli effetti non-lineari della teoria della lubrificazione elasto-idrodinamica (*ElastoHydrodynamic Lubrication*, EHL) condizionano significativamente le caratteristiche di rigidezza e smorzamento delle interazioni all'interno del cuscinetto, rendendo necessario includere gli effetti tribologici all'interno delle simulazioni per ottenere risultati più accurati [15].

I modelli quasi-statici sono stati altresì impiegati per analizzare i cuscinetti in presenza di difetti o disallineamenti. In presenza di un danno localizzato sulla pista esterna, la variazione dell'estensione circonferenziale del difetto modifica fortemente gli angoli di contatto e la distribuzione dei carichi nel cuscinetto, mentre l'aumento della velocità di rotazione provoca un progressivo spostamento dei carichi verso la pista esterna [16]. Per quanto riguarda, invece, i cuscinetti soggetti a disallineamento, è stato riscontrato che esso provoca una distribuzione di carico non uniforme tra i corpi volventi e modifica sia la posizione del carico massimo di contatto, sia la rigidezza del componente [17].

### 2.1.2 Modelli dinamici

A differenza dei modelli quasi-statici, i modelli dinamici di cuscinetto consentono una valutazione più completa del comportamento dinamico del componente. Essi, infatti, non si basano sulle equazioni di equilibrio delle forze, ma su equazioni differenziali del moto, le quali vengono integrate nel tempo per ottenere la risposta dinamica, e al cui interno figura l'inerzia del cuscinetto, oltre ai parametri relativi a rigidezza e smorzamento [5]. In letteratura sono presenti numerosi modelli dinamici di cuscinetto; tuttavia, non tutti garantiscono lo stesso livello di dettaglio. È possibile, infatti, riscontrare modelli che considerano il cuscinetto come un unico corpo, a cui è associata un'unica massa (che può essere quella di una delle piste o dei corpi volventi) ed eventualmente un'unica inerzia alla rotazione, così come valori unici di smorzamento e rigidezza derivati dalle interazioni del cuscinetto con gli altri componenti. In tali modelli, le equazioni del moto sono scritte per il cuscinetto nella sua interezza lungo le diverse direzioni del sistema di riferimento preso in considerazione. Altri modelli, invece, considerano il cuscinetto formato dall'unione dei suoi componenti (o alcuni di essi), quali pista interna, pista esterna, gabbia e corpi volventi, ognuno dei quali è caratterizzato da propri valori di caratteristiche dinamiche, così come da proprie equazioni del moto. È indubbio che quest'ultima tipologia di modelli consente una rappresentazione più accurata e realistica del comportamento dinamico del cuscinetto.

Uno dei primi modelli dinamici di cuscinetto è stato sviluppato da Gupta [18–21] sia nel caso di cuscinetti a rulli, sia nel caso di cuscinetti a sfere, ed è ampiamente adottato all'interno della letteratura. La formulazione prevede una modellazione completa di ogni parte del cuscinetto, all'interno della quale vengono divisi il moto traslazionale e il moto rotazionale di ciascun componente. Per questo motivo, ogni parte del cuscinetto è dotata di sei gradi di libertà e il modello consente un'accurata rappresentazione delle interazioni tra elementi volventi, gabbia, piste e lubrificante. I contatti tra elemento volvente e piste sono modellati tramite contatto Hertziano non lineare, mentre gli effetti del lubrificante sono descritti mediante la teoria della lubrificazione elasto-idrodinamica (teoria EHL). Le simulazioni numeriche hanno evidenziato come fenomeni quali *skidding*, *skewing*, collisioni della gabbia e instabilità dinamiche siano fortemente influenzati da precarico, giochi geometrici, disallineamenti e caratteristiche tribologiche del lubrificante. In particolare, elevati carichi radiali producono significative variazioni della distribuzione di carico sugli elementi volventi, generando zone di scarico completo associate a elevate velocità di strisciamento e a forti oscillazioni della gabbia e degli elementi volventi.

La possibilità di descrivere a fondo il comportamento dinamico ha fatto sì questa tipologia di modelli sia stata utilizzata per numerose analisi di cuscinetti in diverse condizioni operative, con particolare attenzione posta sulla gabbia. La gabbia rappresenta un componente cruciale all'interno del cuscinetto, infatti una sua frattura comporta un forte aumento delle forze di impatto sopracitate con nascita di significative componenti impulsive nella risposta dinamica del cuscinetto [22]. La presenza

di gioco tra corpi volventi e tasche della gabbia ha ripercussioni notevoli sia sulla risposta transitoria che sulle forze di impatto all'interno del cuscinetto [23]. Sempre in [23] è stato dimostrato che, tali forze d'impatto dipendono anche dalla rigidezza circonferenziale della gabbia e dalla velocità di rotazione, per cui considerare nel modello la deformabilità strutturale della gabbia permette di ottenere interazioni dinamiche più realistiche tra la stessa e i corpi volventi. Il comportamento dinamico della gabbia è condizionato dallo squilibrio dei corpi volventi, il quale aumenta significativamente il livello vibrazionale della gabbia stessa che può essere mitigato mediante giochi radiali ridotti e appropriati valori di gioco tra corpi volventi e tasche della gabbia [24]. Durante il funzionamento, la gabbia potrebbe essere soggetta a moti vorticosi correlati al grado complessivo di scorrimento relativo (*skidding*) del cuscinetto, mentre l'aumento del carico radiale tende a generare instabilità del componente [25]. Infine, la dinamica della gabbia è fortemente influenzata dalle proprietà tribologiche del lubrificante, le quali comportano modifiche alla traiettoria del centro di massa, alla stabilità e al livello di slittamento [26].

Una consistente parte della letteratura si è focalizzata sullo studio dei cuscinetti in presenza di difetti localizzati. Il modello sviluppato da Gupta [18–21] è stato utilizzato in [27] per analizzare il comportamento vibrazionale di cuscinetti a rulli cilindrici in presenza di difetti localizzati singoli, multipli, e combinati. Le simulazioni hanno dimostrato che difetti multipli e combinati generano risposte dinamiche più complesse rispetto ai difetti singoli, con presenza di nuove componenti spettrali e fenomeni di modulazione. Numerosi studi hanno posto l'attenzione sulla modellazione della presenza dei difetti all'interno dei cuscinetti. Nel caso di danneggiamenti sulla pista esterna, la tradizionale rappresentazione dei difetti tramite eccitazioni di spostamento tempo-dipendenti (*time-dependant displacement excitations*, TDDEs) è stata estesa in [28] mediante la definizione di funzioni a tratti, le quali permettono una descrizione più realistica della geometria dei difetti e delle loro interazioni con i corpi volventi. Nello stesso anno, Qin et al. [29] hanno proposto un nuovo modello di cuscinetto in cui le eccitazioni da impatto tra corpo volvente e difetto sono rappresentate mediante una funzione semi-seno (*half-sine function*) che considera contemporaneamente gli effetti di accoppiamento tra corpi volventi e la segmentazione della risposta durante l'attraversamento del danno. I risultati hanno mostrato che l'accoppiamento tra corpi volventi genera impatti simultanei nella zona danneggiata, incrementando notevolmente l'ampiezza delle accelerazioni del componente. Il modello presentato in [30] consente di rappresentare i difetti sulle piste considerando simultaneamente l'eccitazione dovuta alla deformazione variabile nel tempo (*time-varying deflection excitation*) e la variazione nel tempo della rigidezza di contatto generata dal passaggio attraverso il difetto. Un altro approccio alla rappresentazione dei difetti nei cuscinetti pone l'attenzione sulla modellazione della geometria e morfologia dei danni. Per superare le rappresentazioni convenzionali tramite cavità rettangolari a spigoli vivi, Liu et al [31] hanno introdotto nuove funzioni temporali per descrivere la progressiva estensione dei bordi del difetto e differenti morfologie di superficie danneggiata. Dai risultati si è riscontrato che la forma del difetto e la

progressiva modifica dei suoi bordi influenzano fortemente i picchi di accelerazione generati durante ingresso ed uscita dei corpi volventi dalla zona danneggiata.

Infine, una significativa parte della letteratura ha implementato nell'analisi dei cuscinetti un approccio basato sulla modellazione multi-body del componente. Tale formulazione consente di descrivere in modo accurato la dinamica di ciascun componente del cuscinetto e di simulare la presenza di difetti mantenendo una rappresentazione realistica delle proprietà inerziali e delle interazioni cinematiche tra le varie parti [32]. In particolare, il difetto localizzato può essere introdotto nel modello direttamente nei vincoli geometrici di contatto, consentendo una descrizione più realistica dell'interazione tra sfere e piste e un'analisi più completa degli effetti che il danno ha sulla distribuzione dei carichi, sulle forze di contatto e sulle collisioni tra corpi volventi e gabbia [33].

### 2.1.3 Modelli FEM

Nell'ambito della modellazione numerica dei cuscinetti volventi, il metodo degli elementi finiti (*Finite Element Method*, FEM) è indubbiamente l'approccio maggiormente utilizzato. Tale formulazione permette di discretizzare i vari componenti del cuscinetto in elementi di dimensioni ridotte, ciascuno dotato di proprie caratteristiche dinamiche quali massa, rigidezza e smorzamento, esprimibili mediante le rispettive matrici. La combinazione delle matrici relative ai singoli elementi permette di ottenere le matrici globali del cuscinetto che sono inserite all'interno delle equazioni del moto. L'ampio impiego del metodo FEM è dovuto alla possibilità di ottenere risultati più accurati rispetto ai modelli analitici, anche nel caso dello studio di geometrie e condizioni operative complesse.

La possibilità di discretizzare le superfici delle parti del cuscinetto in elementi di dimensioni inferiori è stata utilizzata in [34] per migliorare la descrizione e l'analisi dei contatti all'interno dei cuscinetti volventi. Il modello è stato applicato sia a cuscinetti a sfere, riproducendo correttamente l'ellisse di contatto tra sfera e piste, sia a cuscinetti a rulli, mostrando come la bombatura dei rulli possa eliminare efficacemente i carichi ai loro bordi (*edge-loads*) e uniformare la pressione di contatto. L'analisi dei cuscinetti a rulli è stata successivamente approfondita in [35], implementando nel modello il contatto simultaneo di più rulli, le deformazioni strutturali e gli errori di disallineamento. I risultati hanno confermato che la presenza di bombatura sui rulli riduce fortemente gli *edge-loads*, i quali raggiungerebbero altrimenti valori significativi, uniformando quindi il contatto. La scelta ottimale del valore di bombatura permette, inoltre, di ridurre le tensioni massime di contatto, le quali vengono fortemente influenzate congiuntamente alla distribuzione dei carichi dalla presenza di disallineamenti. Un modello tridimensionale agli elementi finiti sviluppato in ambiente ANSYS LS-DYNA è stato impiegato in [36] per lo studio dei cuscinetti a sfere a contatto obliquo per sistemi rotanti ad alta velocità, includendo i contatti tra corpi volventi, piste e gabbia. In particolare, il modello è stato utilizzato per caratterizzare la rigidezza dinamica equivalente dei cuscinetti, la quale

si è rivelata essere direttamente proporzionale al pre-carico applicato ai cuscinetti stessi.

Numerosi studi si sono concentrati sull'analisi dei cuscinetti in presenza di difetti localizzati. Questi ultimi sono stati modellati mediante eccitazioni di spostamento (*displacement excitations*) e combinate con il modello FEM del cuscinetto per la valutazione della flessibilità globale e con formulazioni analitiche per la determinazione delle deformazioni locali [37]. Tale modello si è rivelato comparabile a livello di precisione con modelli FEM completi, riducendo però il costo computazionale dell'analisi. I risultati hanno mostrato che l'aumento della dimensione dei difetti incrementa le ampiezze e la durata delle variazioni improvvise della rigidezza del cuscinetto nel tempo. Il software ANSYS LS-DYNA è stato anche utilizzato in [38] per la simulazione della risposta vibrazionale di cuscinetti volventi in presenza di difetti localizzati sulla pista esterna. L'implementazione nel modello della deformabilità dei componenti del cuscinetto ha permesso di avere un'elevata capacità di riproduzione sia degli impulsi a bassa frequenza legati all'ingresso del corpo volvente nel difetto, sia degli impulsi ad alta frequenza generati dall'uscita del corpo volvente dalla zona danneggiata. Per quanto riguarda invece i cuscinetti a rulli conici affetti da difetti multipli, è stato dimostrato che le dimensioni dei danni, il carico radiale e la velocità di rotazione influenzano significativamente le tensioni di contatto e l'ampiezza delle vibrazioni della risposta dinamica del cuscinetto [39]. Infine, il metodo degli elementi finiti ha consentito di studiare il comportamento dinamico dei cuscinetti in presenza di flessibilità della gabbia e usura delle sue tasche (*ball-pocket wear loss*), il cui aumento si è rivelato determinante nella modifica del moto vorticoso della gabbia stessa [40].

## 2.2 Modelli sistemi rotore-cuscinetto

Come detto in precedenza, la modellistica riguardante i sistemi rotore-cuscinetto può essere suddivisa in base alla combinazione utilizzata tra modello del rotore e modello del cuscinetto [5]. All'interno del presente lavoro di tesi si è deciso di realizzare la categorizzazione su due livelli, il primo relativo al tipo di modello del rotore e il secondo relativo al tipo di modello del cuscinetto, come riportato in Tabella (2.2).

| Modello rotore | Modello cuscinetto | References |
|---|---|---|
| Analitico | Quasi-statico | [41–47] |
| | Dinamico | [48–68] |
| | Molla-smorzatore | [69–78] |
| Numerico | Quasi-statico | [79–86] |
| | Dinamico | [87–104] |
| | Molla-smorzatore | [105–111] |

Tabella 2.2: Classificazione modelli sistemi rotore-cuscinetto.

### 2.2.1 Modelli rotore analitici

All'interno dei modelli analitici le equazioni del moto vengono definite svolgendo l'equilibrio delle forze mediante le leggi di Newton, oppure applicando le equazioni di Lagrange. In tali formulazioni le caratteristiche inerziali del rotore vengono assunte come concentrate in uno o più punti strategici della struttura ai quali sono assegnati i gradi di libertà del sistema, mentre i contributi di rigidezza e smorzamento sono principalmente riferiti all'albero e ai dispositivi preposti al sostenimento del rotore. Le equazioni del moto del rotore vengono, infine, completate inserendo le proprietà relative ai cuscinetti. Tramite tali modelli è possibile descrivere il comportamento dinamico di rotori con diversi gradi di libertà e di complessità variabile (ad esempio rotori di Jeffcott, rotori a 4 gradi di libertà o altre formulazioni) ottenendo una buona approssimazione dei risultati, sicuramente influenzata dalla trattazione semplificata riguardante le proprietà dinamiche del sistema.

#### Modelli cuscinetto quasi-statici

La combinazione di un modello quasi-statico del cuscinetto con un modello analitico del rotore può essere realizzata sostanzialmente seguendo due approcci distinti. Partendo dalla valutazione dell'equilibrio delle forze agenti sul cuscinetto è possibile ricavare la sua rigidezza, la quale viene di seguito utilizzata per:

- Definire la matrice di rigidezza del cuscinetto: tale matrice verrà poi combinata con la matrice di rigidezza relativa al rotore all'interno delle equazioni del moto;
- Calcolare le forze di reazione del cuscinetto: tali forze verranno poi inserite all'interno del vettore delle forze agenti sul sistema.

L'implementazione dei modelli di cuscinetto quasi-statici nella dinamica dei rotori può essere riassunta come riportato in Figura (2.2)

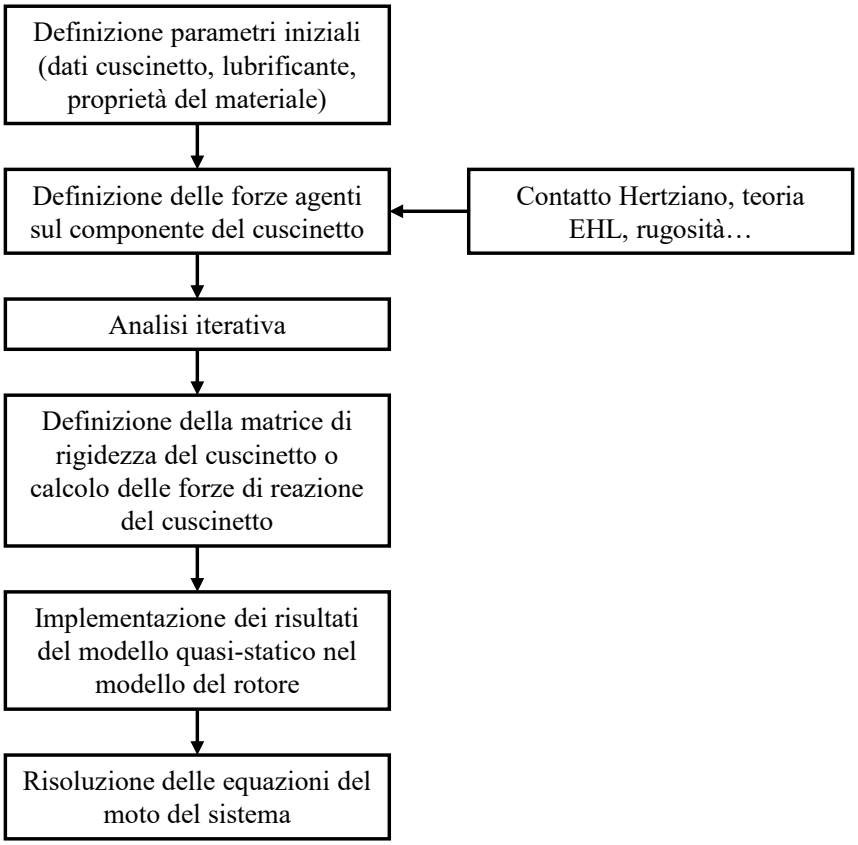



Figura 2.2: Flow-chart implementazione modello quasi-statico cuscinetto in modello rotore.

Con riferimento ai sistemi rotore-cuscinetto, i modelli di cuscinetto quasi-statici sono stati prevalentemente utilizzati per studiare l'influenza dei cuscinetti sulla risposta vibrazionale del sistema. L'ondulazione delle superfici di contatto del cuscinetto genera una variazione periodica delle rigidezze equivalenti e produce eccitazioni parametriche in grado di modificare la stabilità del sistema [41]. Tale tipo di eccitazioni possono nascere anche a causa del numero discreto di corpi volventi (*varying compliance*), generando possibili zone di instabilità dinamica, la cui ampiezza è fortemente influenzata dallo squilibrio del rotore, mentre la posizione è condizionata dall'entità dei carichi assiali e radiali [42]. Inoltre, è stato dimostrato che durante la progettazione è fondamentale considerare le variazioni dell'angolo di contatto dei corpi volventi dei cuscinetti a sfere, le quali comportano uno spostamento delle regioni di risonanza verso velocità di rotazione inferiori [43]. Il mancato inserimento di tale parametro all'interno della modellazione potrebbe portare a una sottostima delle vibrazioni flessionali del rotore, mentre la sua inclusione permette di rendere più evidenti le componenti associate alla frequenza di passaggio dei corpi volventi e alle sue combinazioni con la frequenza di rotazione. La combinazione tra modello di rotore analitico e modello di cuscinetto quasi-statico è stata successivamente utiliz-

zata per investigare la risposta dinamica del sistema rotore-cuscinetto in presenza di lubrificazione elasto-idrodinamica (EHL) nei cuscinetti [44], pre-carico [45] e disallineamento delle piste [46]. Un incremento del pre-carico produce una riduzione delle ampiezze vibrazionali delle frequenze associate al numero discreto di corpi volventi e uno spostamento della frequenza naturale del sistema verso valori più elevati [44]. Le frequenze proprie sono altresì influenzate dalla presenza di disallineamento, il quale, tuttavia, può migliorare la vita a fatica nel caso di cuscinetti con carico combinato [45]. Infine, l'approccio quasi-statico è stato adottato per migliorare il calcolo delle deformazioni di contatto all'interno del cuscinetto sotto l'influenza di vari fattori come pre-carico, ondulazione e EHL [47].

### Modelli cuscinetto dinamici

I modelli di cuscinetto dinamici permettono una rappresentazione più accurata del comportamento dinamico del componente in quanto tengono in considerazione anche la sua inerzia. Come detto in precedenza, tali modelli possono assumere una singola massa come rappresentativa dell'intero cuscinetto, oppure considerare la massa di ciascuna parte del cuscinetto. In entrambi i casi il collegamento con il modello del rotore viene realizzato mediante l'utilizzo di sistemi molla-smorzatore, i quali modellano il contatto tra le varie parti del sistema (Figura (2.3)).

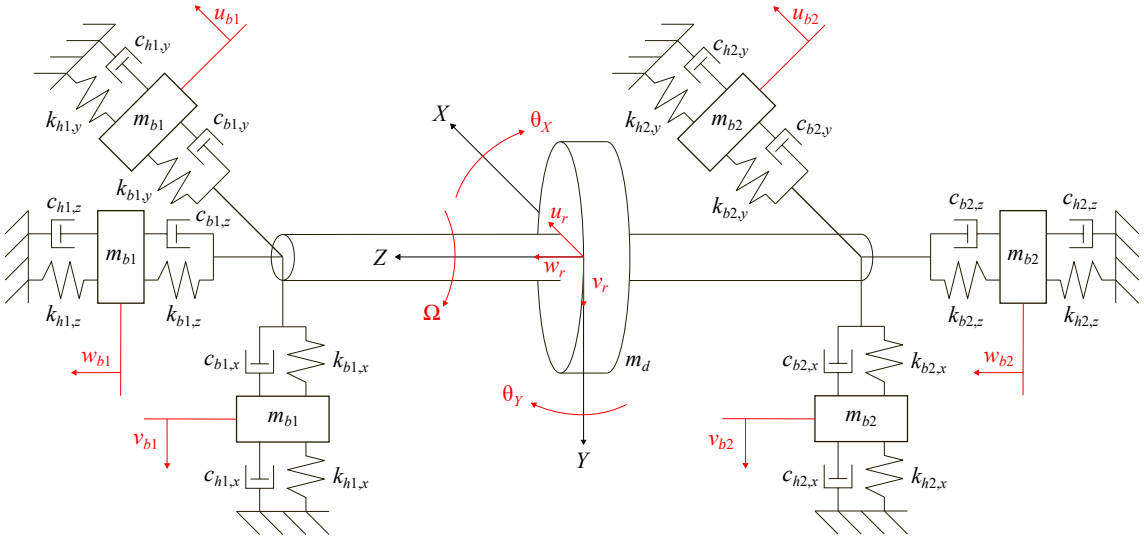



Figura 2.3: Combinazione tra modello dinamico cuscinetto e modello analitico rotore.

Tale combinazione di modelli è stata ampiamente utilizzata per l'analisi delle vibrazioni sistemi rotore-cuscinetto considerando l'influenza di vari fattori. Un'opportuna scelta del pre-carico e del numero di corpi volventi può portare a una riduzione significativa delle ampiezze vibrazionali del sistema [48], mentre, al contrario,

il contenuto armonico delle vibrazioni aumenta nel caso in cui ci siano variazioni dimensionali nei corpi volventi del cuscinetto (per esempio dovuti a tolleranze di produzione), le quali producono eccitazioni aggiuntive associate alla velocità di rotazione della gabbia, modificando sensibilmente la risposta dinamica [49]. Il comportamento del sistema è, inoltre, fortemente condizionato dall'ondulazione delle superfici di contatto dei cuscinetti, la quale introduce nuove componenti nello spettro di frequenza generando talvolta forti amplificazioni delle vibrazioni [50, 51]. Infine, sono stati analizzati gli effetti di numerosi parametri non-lineari dei cuscinetti come le deformazioni dovute al contatto Hertziano, il gioco interno radiale, la velocità di rotazione del sistema e i giochi presenti tra cuscinetti e alloggiamenti, i quali sono risultati molto influenti sulla risposta dinamica del sistema [52–54].

Parallelamente alla trattazione dei sistemi sani, parte della letteratura si è concentrata sull'analisi dei sistemi danneggiati. I danni possono essere riferiti sia ai soli cuscinetti, sia al sistema rotore-cuscinetto nel suo complesso. Per quanto riguarda i difetti localizzati all'interno dei cuscinetti, è noto che la loro presenza vada a influenzare fortemente la dinamica del sistema, in particolare introducendo nuove componenti vibrazionali a certe frequenze caratteristiche [55] e, talvolta, causando comportamenti fortemente non-lineari dei cuscinetti stessi, come il comportamento a doppio impulso (*dual-impulse behavior*) [56]. Inoltre, il comportamento dinamico del sistema è condizionato dalla deformazione aggiuntiva sui bordi affilati dei difetti [57], così come dalle dimensioni dei difetti stessi e dalle variazioni nel tempo della rigidezza di contatto dovute all'interazione tra corpi volventi e danni [58]. Cheng et al. hanno sviluppato un modello di sistema rotore-cuscinetto per studiare il suo comportamento dinamico in presenza di numerosi parametri non-lineari come il numero discreto di corpi volventi, il gioco radiale, lo sfregamento rotore-statore, i difetti sulle piste e l'ondulazione delle superfici di contatto dei cuscinetti [59]. Si è dimostrato che essi hanno forte impatto anche sulla distribuzione del carico e sul numero di corpi volventi caricati, oltre che sulla risposta in frequenza e sulla stabilità del sistema.

Infine, i modelli di cuscinetto dinamici sono stati impiegati per migliorare la rappresentazione dell'interazione tra corpo volvente e difetti localizzati. Liu et al. [60] hanno proposto una nuova rappresentazione mediante eccitazione di forza tempo-dipendente (*time-dependant force excitation*, TFE), la quale tiene anche conto delle variazioni della zona di contatto durante il passaggio dei corpi volventi nell'area danneggiata, permettendo di ottenere risultati più accurati. Un altro approccio, invece, prevede di realizzare la modellazione ponendo l'attenzione sulla morfologia dei difetti. Zhang et al. [61] hanno presentato una formulazione ottenuta dalla combinazione di eccitazioni di spostamento tempo-dipendenti (*time-dependant displacement excitations*, TDDEs), caratteristiche morfologiche dei danni e l'espansione dei loro bordi. La morfologia superficiale può generare impatti multipli ed eccitare componenti di frequenza associate alle frequenze caratteristiche dei difetti, mentre sia la lunghezza che la profondità del danno hanno forti effetti sulle vibrazioni del sistema. La morfologia dei danni è stata anche implementata nel modello presente in [62], dimostrando

come essa sia un parametro di fondamentale importanza da incorporare durante la modellazione e osservando che velocità di rotazione e carico applicato possono influenzare la traiettoria dei corpi volventi durante il passaggio nella regione difettosa. Per quanto riguarda, invece, i difetti dell'intero sistema rotore-cuscinetto è stato riscontrato che lo sfregamento porta alla formazione di forti vibrazioni torsionali [63] e alla comparsa di componenti di frequenza combinata negli spettri del sistema proporzionali alla velocità di rotazione [64]. Anche la presenza di disallineamenti genera complesse risposte in frequenza del sistema, causando istantanee variazioni della rigidezza che comportano eccitazioni ad alta frequenza [65]. L'eventuale combinazione tra sfregamento e disallineamento genera la comparsa di frequenze multiple e combinate negli spettri del sistema [66], considerando che il disallineamento ha una scarsa influenza sulle frequenze naturali associate allo sfregamento, mentre lo sfregamento influenza maggiormente quelle associate al disallineamento [67]. È possibile mitigare gli effetti negativi legati alla presenza di condizioni di danneggiamento miste sfregamento-disallineamento mediante una scelta appropriata dei parametri relativi agli smorzatori a film comprimibile (*squeeze-film dampers*, SFDs) [68].

### Modelli cuscinetto molla-smorzatore

La categoria dei modelli di cuscinetto molla-smorzatore è stata realizzata, sia nel caso di rotore analitico che numerico come si vedrà in seguito, per differenziare il livello di dettaglio e importanza attribuito al cuscinetto all'interno della modellazione. All'interno di questa suddivisione rientrano quegli approcci dove i cuscinetti sono rappresentati tramite:

- Elemento elastico (sia esso una molla lineare, Hertziana o non-lineare);
- Unione di elemento elastico ed elemento dissipatore;
- Caratteristiche di rigidezza o di rigidezza-smorzamento equivalenti direttamente inserite all'interno delle equazioni del moto.

Sebbene la scelta di non includere la massa del cuscinetto renda più difficile la corretta approssimazione della dinamica del componente stesso, tale formulazione è ampiamente utilizzata in quanto permette una rappresentazione semplice e computazionalmente efficiente dei cuscinetti, senza perdite di accuratezza nella previsione del comportamento dell'intero sistema.

Analizzando la dinamica generale dei sistemi rotore-cuscinetto, la presenza di supporti anisotropi accentua la nascita di moti di precessione (*whirling motions*) in avanti e all'indietro sia in regime stazionario, che nella risposta transiente in presenza di squilibrio, generando risposte in frequenza diverse nelle due direzioni perpendicolari all'asse di rotazione in termini di ampiezza e numero di picchi [69]. Le ampiezze delle vibrazioni e delle orbite di tali moti di precessione possono essere ridotte applicando opportuni meccanismi di modulazione esterna, come la modulazione della

velocità di rotazione ad alta frequenza [70], oppure la modulazione combinata di rigidezza e accelerazione del sistema [71].

I modelli di cuscinetto molla-smorzatore sono stati inoltre utilizzati per l'analisi di sistemi rotore-cuscinetto danneggiati. La presenza di un danno sull'albero del sistema può alterare significativamente la dinamica dello stesso, comportando una forte variazione della rigidezza e dello smorzamento del rotore [72]. Nel caso di cuscinetti danneggiati, è stato dimostrato che le armoniche di ordine superiore dello spettro delle frequenze sono più affidabili delle armoniche fondamentali nel processo di individuazione dei danni [73]. Ciò è dovuto al fatto che le frequenze di eccitazione dovute al numero discreto di corpi volventi dei cuscinetti in un sistema sano sono molto simili alle frequenze caratteristiche dei cuscinetti danneggiati, portando a potenziali interpretazioni errate. Nell'ambito della rappresentazione dei difetti localizzati nei cuscinetti, Yang et al. [74] hanno migliorato il precedente modello proposto da Sunnersjö [112] per effettuare un confronto tra modellazione incentrata sulla geometria dei difetti (*geometrical boundary models*) e modellazione mediante forze impulsive (*pulse force models*). I risultati mostrano che il secondo tipo di approccio permette di ottenere equazioni relative al sistema maggiormente idonee all'implementazione numerica e all'analisi non-lineare.

Infine, modelli di rotore analitici e modelli di cuscinetto molla-smorzatore sono stati notevolmente utilizzati per studiare sistemi con configurazioni più complesse. Per quanto riguarda i bi-rotori (*dual-rotors*), importante è stato il lavoro di Gao et al. [75–78], i quali hanno posto l'attenzione sul cuscinetto inter-albero (*inter-shaft bearing*). Inizialmente, è stato riscontrato che la presenza di difetti localizzati sulle piste del cuscinetto inter-albero comporta la nascita di risonanze anomale all'interno della risposta in frequenza, la cui ampiezza dipende fortemente dalla profondità e dall'estensione dei difetti [75]. Successivamente, il modello è stato utilizzato per l'analisi della dinamica del rotore in presenza di forzanti a doppia frequenza [76] e per l'analisi termica del cuscinetto inter-albero, combinando dinamica non-lineare e trasferimento di calore [77, 78]. La temperatura e il comportamento termico del cuscinetto sono risultati molto condizionati dalla velocità di rotazione [77], con significativo aumento del livello termico del componente nelle zone di risonanza [78]. Infine, è stato dimostrato che la generazione di calore nelle zone di risonanza è maggiormente influenzata dai carichi applicati, mentre nelle altre zone dello spettro di frequenze è maggiormente correlata alla viscosità del lubrificante [78].

### 2.2.2 Modelli rotore numerici

All'interno dei modelli di rotore numerici, il rotore viene discretizzato in più elementi, ciascuno dotato di proprie caratteristiche dinamiche quali massa, rigidezza e smorzamento. Anche in questo caso, l'approccio maggiormente utilizzato in letteratura per realizzare la discretizzazione è il metodo degli elementi finiti (*Finite Element Method*, FEM) e proprio per questo motivo la seguente parte di analisi

bibliografica includerà esclusivamente modelli di sistemi rotore-cuscinetto in cui il rotore è modellato mediante FEM.

I modelli di rotore numerici, a differenza dei modelli analitici, permettono l'analisi di geometrie molto complicate con ottime approssimazioni del comportamento dinamico del sistema. Inoltre, varie sorgenti di fenomeni non-lineari complessi, quali ad esempio giochi radiali, errori di montaggio, difetti localizzati, possono essere inclusi facilmente nello sviluppo del modello, permettendo di ottenere risultati di analisi molto più fedeli a ciò che è il reale comportamento del sistema in esame.

### Modelli cuscinetto quasi-statici

Come detto precedentemente per i modelli di rotore analitici, i modelli di cuscinetto quasi-statici sono utilizzati essenzialmente per ottenere la matrice di rigidezza del cuscinetto (che in questo caso è combinata con la matrice di rigidezza del rotore ottenuta dalla discretizzazione), oppure per ottenere le forze di reazione dei cuscinetti agenti sul rotore (le quali sono implementate nel vettore delle forze presente nelle equazioni del moto). Il procedimento di combinazione tra i due modelli è il medesimo riportato in Figura (2.2).

Il modello FEM di un rotore, basato sulla teoria di Timoshenko, è stato accoppiato con un modello di cuscinetto quasi-statico nel lavoro di Cao e Altintas [79] per ottenere un metodo generale di modellazione di sistemi rotore-cuscinetto. Tale modello permette di realizzare un'analisi della rigidezza dei cuscinetti e dei carichi ad essi applicati, oltre che ottenere le frequenze naturali del sistema e le sue risposte dinamiche nel dominio del tempo e della frequenza. Nello stesso anno, Li e Shin [80, 81] presentarono un nuovo modello di sistema rotore-cuscinetto più completo per valutare contemporaneamente il comportamento dinamico e termico del sistema, tenendo conto delle modifiche subite dal pre-carico e dalla rigidezza dei cuscinetti a causa delle espansioni termiche generate dall'aumento di temperatura dovuto all'attrito. Successivamente sono state sviluppate ricerche sul comportamento dinamico di sistemi rotore-cuscinetto sotto l'influenza di diversi parametri come squilibrio e carichi esterni complessi [82]. Inoltre, è stato mostrati che l'aumento della temperatura del sistema comporta una diminuzione delle principali componenti della matrice di rigidezza, con conseguente diminuzione delle frequenze naturali e riduzione delle ampiezze delle risposte dinamiche [83]. Infine, la matrice di rigidezza dei cuscinetti e le frequenze naturali del sistema sono molto influenzate anche dai carichi esterni e dalla velocità di rotazione [84].

In aggiunta, parte della letteratura si è concentrata sui sistemi rotore-cuscinetto affetti da disallineamento. In particolare, è stato riscontrato che tale danneggiamento provoca un comportamento anisotropo nei cuscinetti con riduzione della loro rigidezza e delle frequenze naturali del sistema [85], oltre che una forte modifica delle tensioni di contatto tra corpi volventi e piste [86], con potenziali nascite di regioni di deformazioni nelle piste stesse [85].

### Modelli cuscinetto dinamici

L'unione tra modello FEM del rotore e modello dinamico del cuscinetto permette di ottenere la valutazione più completa e affidabile del comportamento dinamico di un sistema rotore-cuscinetto. Infatti, considerando la massa del cuscinetto all'interno del modello (Figura (2.4)) è possibile analizzare tutte le forze agenti sul sistema in qualsiasi condizione operativa, ottenendo contemporaneamente informazioni accurate sulla dinamica di ogni suo componente.

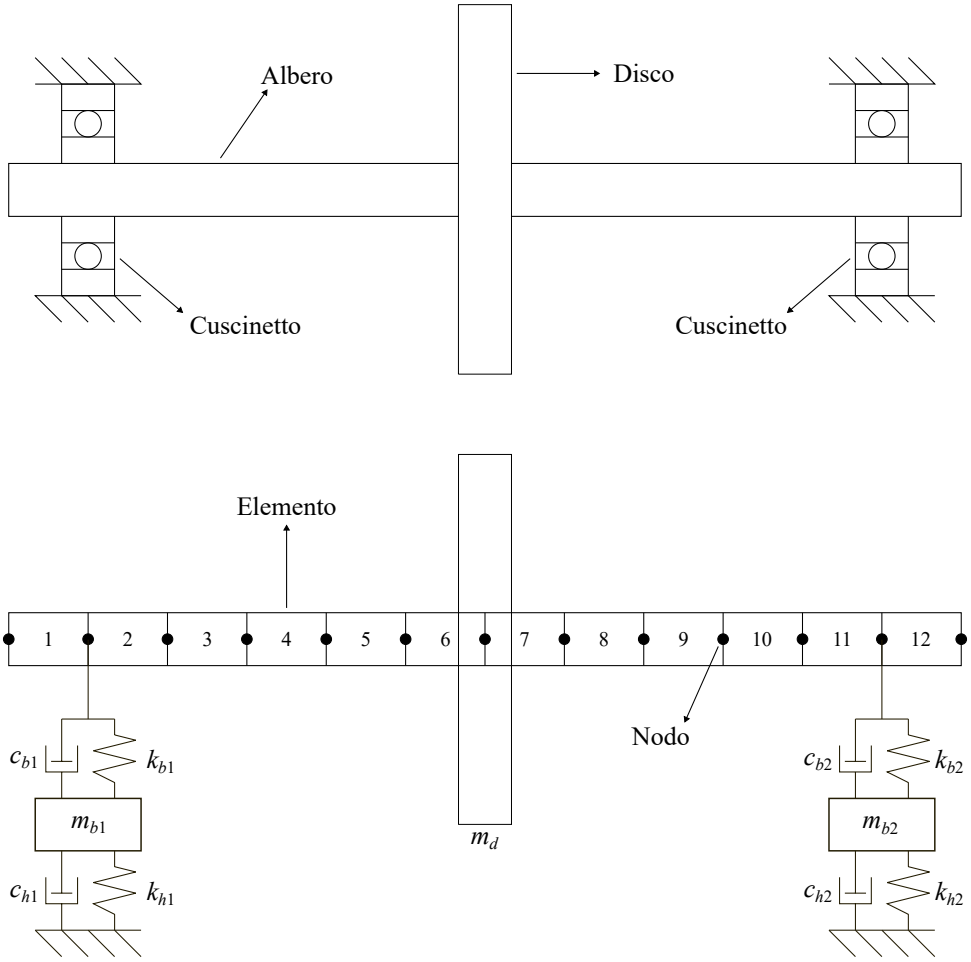



Figura 2.4: Combinazione modello FEM rotore con modello dinamico cuscinetto.

Con l'obiettivo di svolgere l'analisi dinamica di un sistema rotore-cuscinetto ad alta velocità, Jalali et al. [87] hanno costruito un modello discretizzando il rotore tramite il metodo degli elementi finiti, sia con elementi monodimensionali, che tridimensionali. I risultati delle simulazioni hanno avuto ottimo riscontro con quelli sperimentali, sottolineando l'affidabilità dei modelli FEM nello studio dei sistemi rotore-cuscinetto. Successivamente, la dinamica di tali sistemi è stata analizzata introducendo nella formulazione del modello alcuni parametri non-lineari. L'aumento

del gioco radiale nei cuscinetti è responsabile dell'aumento delle forze di contatto e di ampiezze di accelerazioni maggiori causando una maggiore instabilità del sistema [88]. Il gioco presente tra cuscinetti e alloggiamento può, invece, comportare un disallineamento del cuscinetto stesso, con conseguente riduzione delle forze di reazione [89]. Infine, è stato osservato che la velocità di rotazione, in combinazione con il gioco dei cuscinetti, può influenzare la stabilità del sistema con potenziale nascita di comportamenti caotici [90].

L'associazione dei modelli di cuscinetto dinamici ai modelli FEM del rotore è stata molto importante per l'analisi dei sistemi danneggiati. Infatti, è stato riscontrato che, nel caso di cuscinetti danneggiati, il valore delle loro frequenze caratteristiche dipende dalla geometria del cuscinetto e dalla velocità di rotazione, mentre le ampiezze delle vibrazioni legate a tali frequenze dipendono dal gioco iniziale presente nel componente e dalla posizione dei difetti [91]. La presenza di danneggiamenti sull'albero del sistema provoca una riduzione delle frequenze naturali [92] e può causare una sovrapposizione delle caratteristiche dei danni nel caso ci compresenza con difetti nei cuscinetti, con forte influenza sulla risposta in frequenza del sistema [93]. Molto significativo è il lavoro di Vashisht et al. [94], i quali hanno osservato che le non-linearità presenti all'interno dei sistemi rotanti rendono le tecniche di rilevamento delle cricche basate sull'analisi in condizioni stazionarie poco affidabili, mentre tale effetto negativo non è stato riscontrato nelle tecniche di individuazione basate sulla risposta dinamica transitoria. Inoltre, è stato confermato che la presenza di disallineamento nel sistema comporta il peggioramento della risposta vibratoria, causando modifiche delle tensioni di contatto tra corpi volventi e piste [95] con la nascita di potenziali regioni di deformazione plastica nei componenti del cuscinetto [96].

Parte della letteratura ha posto il focus sull'analisi dinamica di sistemi con geometrie più complesse come i bi-rotori. Tali sistemi sono stati ampiamente studiati tramite la valutazione delle loro strutture topologiche [97], oppure mediante l'analisi del loro comportamento dinamico in presenza di sfregamento e disallineamento [98]. Inoltre, la risposta dinamica è influenzata da altri parametri non-lineari come il gioco tra cuscinetti e alloggiamenti, il quale, così come la velocità di rotazione, contribuisce in maniera significativa alla trasmissione delle vibrazioni tra i componenti del sistema [99]. Invece, la presenza di difetti localizzati nel cuscinetto inter-albero può generare fenomeni simil-caotici come le vibrazioni parossistiche (*paroxysmal vibrations*) [100, 101] ed è stato riscontrato che le basse velocità di rotazione sono più favorevoli alla diagnosi dei danni sulle piste del componente [102].

Infine, numerosi modelli rotore-cuscinetto adottano il modello dinamico di cuscinetto sviluppato da Gupta [18–21]. Tale formulazione è stata combinata con discretizzazioni FEM di rotori per analizzare la dinamica dei sistemi rotore-cuscinetto in presenza di gioco radiale nei cuscinetti [103], il quale comporta un aumento dell'ampiezza delle vibrazioni e una maggiore complessità degli spettri di frequenza, così come l'influenza degli effetti legati alla lubrificazione e alla presenza della gabbia sul comportamento dinamico [104].

### Modelli cuscinetto molla-smorzatore

Come precedentemente detto, anche per quanto riguarda i rotori numerici si è deciso di realizzare una categoria apposita per quei modelli di cuscinetto in cui il componente viene rappresentato mediante un semplice elemento elastico, oppure dall'unione di un elemento elastico e un elemento dissipatore. Nell'ipotesi in cui il rotore in esame sia discretizzato mediante il metodo degli elementi finiti, in questo caso le caratteristiche di rigidezza e smorzamento dei cuscinetti presenti nel sistema vengono inserite all'interno delle rispettive matrici relative al rotore, nelle posizioni corrispondenti ai nodi a cui il cuscinetto è assegnato.

Questa combinazione di modelli è stata utilizzata in [105] per sviluppare un metodo avanzato di similitudine parziale per la previsione del comportamento dinamico di sistemi rotanti mediante modelli in scala, con significativi miglioramenti nell'analisi delle frequenze critiche e delle risposte vibrazionali rispetto ai metodi tradizionali di similitudine parziale. Successivamente, gli effetti della EHL sono stati analizzati in [106] evidenziando che la presenza del film di lubrificante incrementa notevolmente la rigidezza equivalente del cuscinetto rispetto al contatto a secco e modifica sensibilmente la risposta dinamica del sistema. Tali effetti risultano essere particolarmente marcati nel caso di rotori bilanciati, mentre tendono a ridursi in presenza di elevati livelli di squilibrio. Inoltre, è stato rilevato che la presenza di disallineamento nei cuscinetti influenza in modo significativo il comportamento dinamico del sistema a basse velocità di rotazione, con variazioni periodiche dell'angolo di contatto, del gioco radiale e della velocità di rivoluzione delle sfere [107].

La combinazione tra modello di rotore numerico e modello di cuscinetto molla-smorzatore è stata ampiamente utilizzata nello studio dei bi-rotori. Jin et al. [108] hanno implementato una riduzione dell'ordine del modello di sistema rotore-cuscinetto basata sulla combinazione della *Component Mode Synthesis* (CMS) e della *Proper Orthogonal Decomposition* (POD) con l'obiettivo di ridurre il costo computazionale della simulazione. I risultati hanno evidenziato che è possibile ottenere una significativa riduzione dei tempi computazionali senza compromettere l'accuratezza delle simulazioni nonostante l'analisi di un basso numero di gradi di libertà del sistema. La tecnica della CMS è stata, inoltre, implementata in [109] per l'analisi di un sistema bi-rotore affetto da impatti accidentali tra rotore di alta pressione e rotore di bassa pressione. Tale fenomeno genera un forte accoppiamento dinamico tra i due rotori, generando nuovi regimi di contatto e influenzando significativamente gli spettri di frequenza con la nascita di nuove frequenze di risonanza. Invece, la tecnica della POD è stata impiegata per la riduzione del modello in [110] utilizzato per lo studio di un sistema affetto da disallineamento, il quale provoca la nascita di nuove frequenze caratteristiche, armoniche superiori e frequenze combinate negli spettri del rotore. Infine, sono state analizzate le vibrazioni generate da un bi-rotore affetto da fenomeni di sfregamento tra pale e carcassa [111]. La presenza dello sfregamento genera carichi impulsivi che provocano un brusco incremento delle vibrazioni del sistema e una significativa modifica degli spettri di frequenza della carcassa.

# Capitolo 3

# Richiami teorici

All'interno del presente capitolo verranno effettuati alcuni richiami teorici utili per una migliore comprensione delle modalità di sviluppo del modello del sistema rotore-cuscinetto.

## 3.1 Dinamica dei rotori

Come detto precedentemente, un rotore è definito, secondo la normativa ISO, come un corpo sospeso tramite due cerniere cilindriche o cuscinetti che consentono la rotazione libera attorno ad un asse fissato nello spazio [1]. Prendendo in considerazione un generico corpo posto in rotazione, definendo un sistema di riferimento inerziale $xyz$, fissato nello spazio tridimensionale, e un sistema di riferimento $\xi\eta\zeta$ solidale al corpo stesso, le sei equazioni di equilibrio dinamico del corpo sotto l'azione di una generica forza $\vec{F}$ e un generico momento $\vec{M}$ possono essere scritte nel seguente modo

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x \\ m\ddot{y} = F_y \\ m\ddot{z} = F_z \end{cases} \qquad \begin{cases} M_\xi = \dot{\Omega}_\xi J_\xi + \Omega_\eta \Omega_\zeta (J_\zeta - J_\eta) \\ M_\eta = \dot{\Omega}_\eta J_\eta + \Omega_\xi \Omega_\zeta (J_\xi - J_\zeta) \\ M_\zeta = \dot{\Omega}_\zeta J_\zeta + \Omega_\xi \Omega_\eta (J_\eta - J_\xi) \end{cases} \tag{3.1}$$

dove $m$ è la massa del corpo, $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$ e $F_x$, $F_y$, $F_z$ sono rispettivamente le accelerazioni e le componenti del vettore forza lungo gli assi del sistema di riferimento inerziale, $M_\xi$, $M_\eta$, $M_\zeta$ e $J_\xi$, $J_\eta$, $J_\zeta$ sono rispettivamente le componenti del momento e i momenti d'inerzia del corpo lungo gli assi del sistema di riferimento solidale al corpo stesso e, infine, $\Omega_\xi$, $\Omega_\eta$, $\Omega_\zeta$ e $\dot{\Omega}_\xi$, $\dot{\Omega}_\eta$, $\dot{\Omega}_\zeta$ sono rispettivamente le componenti della velocità di rotazione e le componenti dell'accelerazione angolare del corpo lungo gli assi del sistema di riferimento solidale al corpo stesso.

Si può notare che tale formulazione è non-lineare rispetto alla velocità di rotazione $\vec{\Omega}$, tuttavia è possibile eseguire alcune semplificazioni che permettono di linearizzare la trattazione. Infatti, nel caso in cui il rotore sia in configurazione indeformata, l'asse di rotazione coincide con uno degli assi principali baricentrici d'inerzia. Questa condizione è, in ogni caso, verificata solo nel caso in cui il rotore

sia perfettamente bilanciato, ma esisterà sempre una quota di squilibrio che fa deviare il comportamento reale del sistema da quello ideale. Nella maggior parte dei casi, lo squilibrio associato al rotore è di piccola entità, per cui le perturbazioni che esso ha sulla dinamica del sistema risultano essere piccole di conseguenza. L'ipotesi di piccolo squilibrio, in unione all'ipotesi di piccoli spostamenti lineari e angolari (ad eccezione dello spostamento angolare relativo all'asse di rotazione che può essere assunto imposto dal sistema di comando), permette di ottenere una formulazione delle Equazioni (3.1) simile alla trattazione classica impiegata nell'analisi della dinamica dei sistemi meccanici. Ipotizzando di avere un rotore assial-simmetrico rispetto al proprio asse di rotazione e rotante ad una velocità angolare $\Omega$ costante, le equazioni del moto linearizzate possono essere scritte in generale nel seguente modo

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}(t)\} + ([\mathbf{C}] + \Omega[\mathbf{G}])\{\dot{\mathbf{q}}(t)\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}(t)\} = \{\mathbf{f}(t)\} \tag{3.2}$$

dove $\{\mathbf{q}(t)\}$ è il vettore delle coordinate generalizzate (spostamenti) relative al sistema di riferimento inerziale, $\{\dot{\mathbf{q}}(t)\}$ e $\{\ddot{\mathbf{q}}(t)\}$ le sue derivate nel tempo (rispettivamente velocità e accelerazioni), $[\mathbf{M}]$ è la matrice di massa (simmetrica), $[\mathbf{C}]$ è la matrice di smorzamento (simmetrica), $[\mathbf{G}]$ è la matrice giroscopica (anti-simmetrica), $[\mathbf{K}]$ è la matrice di rigidezza (simmetrica) e $\{\mathbf{f}(t)\}$ è il vettore delle forze agenti sul sistema nel tempo.

Da questo punto in avanti, la trattazione teorica sarà incentrata esclusivamente sui rotori assial-simmetrici.

### 3.1.1 Vibrazioni dei rotori

Assumendo l'Equazione (3.2) come rappresentativa di un rotore posto in vibrazione, la soluzione generale di tale equazione può essere scritta nella forma

$$\{\mathbf{q}(t)\} = \{\mathbf{q}_0\}e^{i\omega t} \tag{3.3}$$

dove

$$\omega = \omega_R + i\omega_I \tag{3.4}$$

è definita frequenza complessa; pertanto, la risposta può anche essere scritta come

$$\{\mathbf{q}(t)\} = \{\mathbf{q}_0\}e^{i(\omega_R + i\omega_I)t} = \{\mathbf{q}_0\}e^{-\omega_I t} + \{\mathbf{q}_0\}e^{i\omega_R t} \tag{3.5}$$

dove il primo termine della somma è il contributo legato allo smorzamento del sistema e il secondo termine della somma è il contributo legato al fenomeno vibrante. All'interno della frequenza complessa $\omega$, $\omega_R$ rappresenta la frequenza naturale del sistema, mentre $\omega_I$ rappresenta il tasso di decadimento (*decay rate*), cioè quanto velocemente l'ampiezza della riposta decresce o cresce nel tempo. Nel caso in cui $\omega_I$ sia positiva si ha un comportamento stabile del sistema (il contributo nella risposta è un termine esponenziale decrescente), le cui vibrazioni diminuiscono nel tempo,

mentre un valore negativo di $\omega_I$ è collegato ad un comportamento instabile del rotore (il contributo nella risposta è un termine esponenziale crescente).

Dal momento che il rotore è posto in rotazione ad una velocità angolare $\Omega$, è lecito supporre che entrambi i contributi $\omega_R$ e $\omega_I$ della frequenza complessa dipendano da $\Omega$. Per questo motivo è molto utile realizzare due diagrammi distinti per descrivere il comportamento delle due grandezze al variare della velocità di rotazione. I due grafici utilizzati sono:

- Diagramma di Campbell

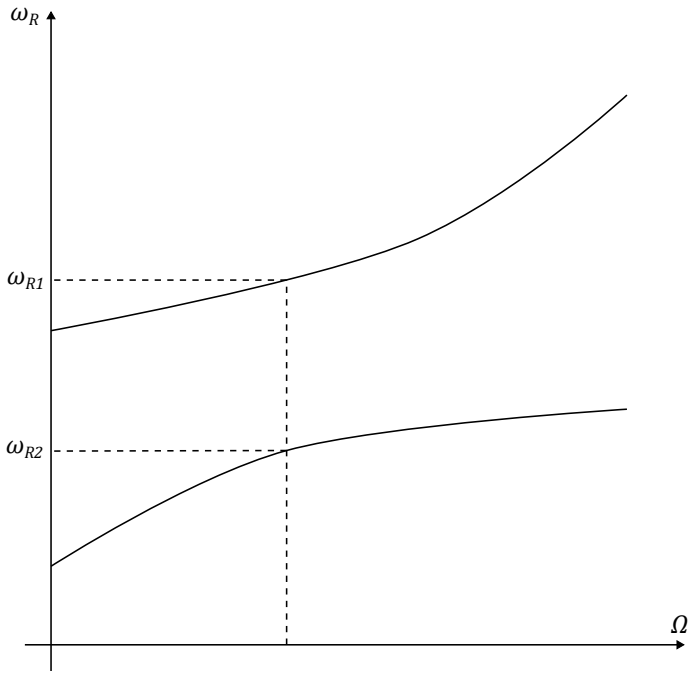



Figura 3.1: Diagramma di Campbell di un generico rotore.

Permette di descrivere come variano le frequenze naturali $\omega_R$ del rotore in funzione della velocità di rotazione. Fissando una determinata velocità di rotazione $\Omega$ (in rpm o rad/s) è possibile ricavare le frequenze naturali $\omega_R$ (in Hz o rad/s) del sistema a quella determinata velocità di rotazione;

- *Decay rate plot*

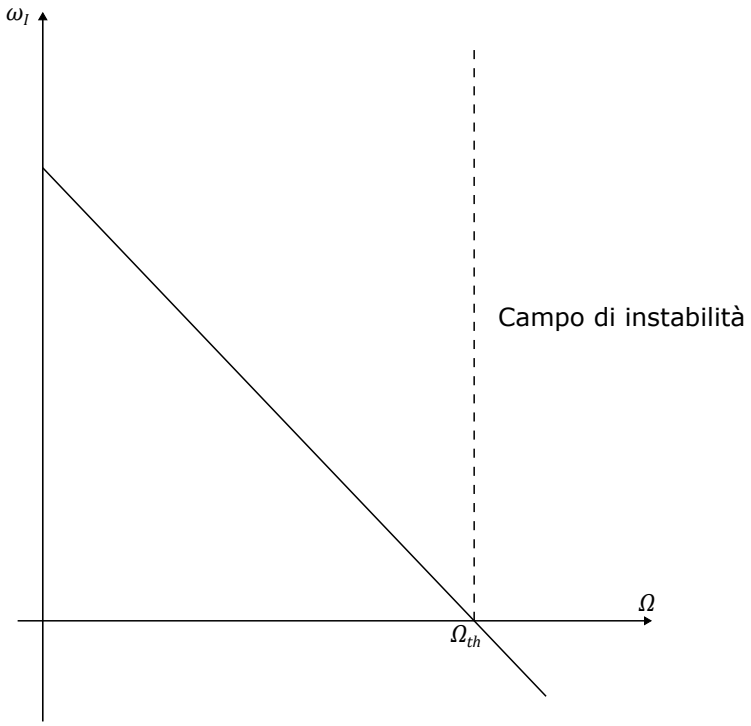



Figura 3.2: *Decay rate plot* di un generico rotore.

Permette di descrivere come varia il *decay rate* $\omega_I$ del sistema in funzione della velocità di rotazione $\Omega$. Dall'intersezione della curva relativa ad $\omega_I$ con l'asse delle ascisse è possibile definire una velocità di rotazione di soglia $\Omega_{th}$ oltre cui si ha il campo di instabilità del sistema.

Nella maggior parte delle situazioni, i rotori sono soggetti a forzanti armoniche. Tra esse, la più importante è la forza di squilibrio, collegata allo squilibrio che il rotore possiede a causa delle tolleranze di lavorazione, per cui il centro di massa $P$ del rotore non coincide perfettamente con il centro geometrico $C$, generando una certa eccentricità $\varepsilon$ come si vede in Figura (3.3).

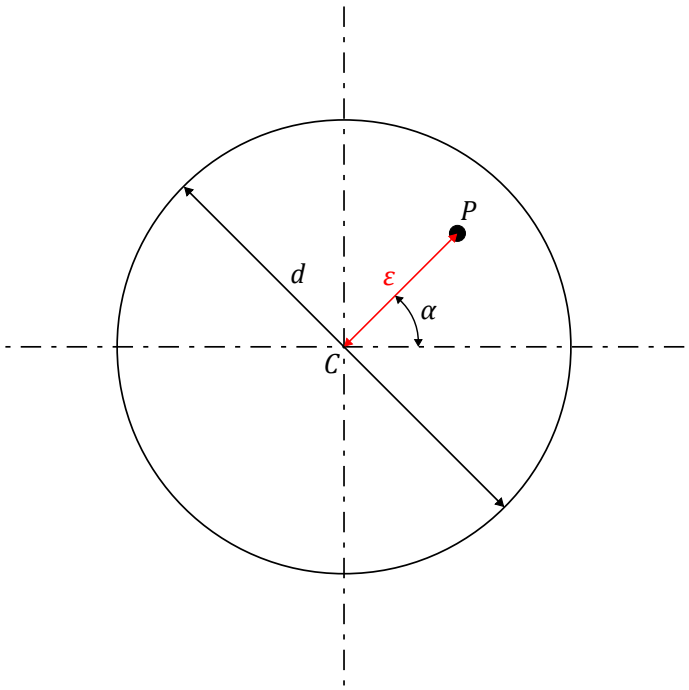



Figura 3.3: Eccentricità $\varepsilon$ tra il centro geometrico $C$ e il centro di massa $P$ del rotore.

Dal momento che il sistema possiede velocità angolare $\Omega$, la forza di squilibrio può essere rappresentata da un vettore rotante a velocità angolare $\Omega$, per cui ha una frequenza $\omega = \Omega$. Considerando il diagramma di Campbell, tale relazione può essere rappresentata mediante una retta di inclinazione 45° come mostrato in Figura (3.4). Intersecando la retta relativa alla forza di squilibrio con le curve che descrivono l'andamento delle frequenze naturali del sistema è possibile ottenere il valore delle velocità critiche $\Omega_{cr}$ del rotore, che rappresentano quei valori della velocità di rotazione per cui l'ampiezza delle vibrazioni del sistema aumenta e il sistema entra in risonanza. Considerando una determinata velocità critica, è possibile definire range sub-critico quei valori di velocità di rotazione inferiori ad essa e range super-critico quei valori superiori ad essa.

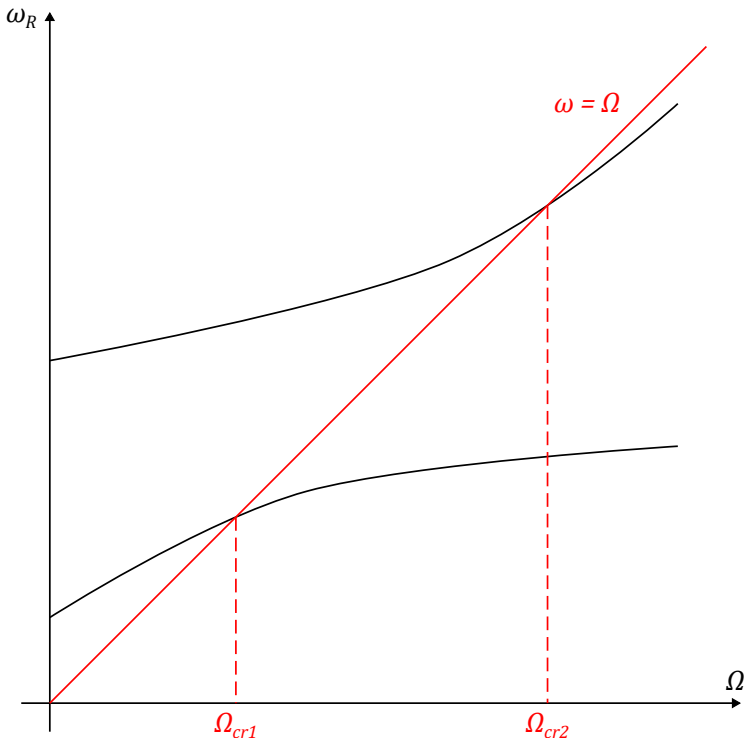



Figura 3.4: Velocità critiche di un generico rotore.

È importante distinguere tra loro le caratteristiche relative alle velocità critiche e al campo di instabilità del rotore:

- Velocità critiche
  - Rappresentano valori precisi della velocità di rotazione;
  - L'ampiezza delle vibrazioni cresce linearmente nel tempo;
  - L'ampiezza delle vibrazioni dipende dall'entità della perturbazione agente sul sistema.
- Campo di instabilità
  - È formato da tutte le velocità di rotazione che eccedono la velocità di soglia $\Omega_{th}$;
  - La velocità di rotazione di soglia è solitamente collocata nel range super-critico;
  - L'ampiezza delle vibrazioni cresce esponenzialmente nel tempo.

### 3.1.2 Rotore di Jeffcott

Il rotore di Jeffcott è il modello di rotore più semplice presente in letteratura e può essere rappresentato mediante due gradi di libertà nelle coordinate reali, oppure mediante un grado di libertà nelle coordinate complesse. Il passaggio dalle coordinate reali alle coordinate complesse è possibile soltanto nel caso in cui il rotore sia assial-simmetrico rispetto al proprio asse di rotazione.

#### Risposta libera non smorzata

Per l'analisi del comportamento libero non smorzato del sistema si suppone che il centro di massa $P$ coincida con il centro geometrico $C$ del rotore, il quale a causa delle vibrazioni non è posizionato nel centro $O$ del sistema di riferimento inerziale, ma descrive una certa traiettoria attorno ad esso. Il sistema è posto in rotazione ad una velocità angolare $\Omega$ costante attorno all'asse $z$ e si assume una massa concentrata nel punto $P$, il quale si trova sempre nel piano $xy$ (non c'è accoppiamento tra comportamento assiale e flessionale). La situazione in esame può essere rappresentata nel piano $xy$ (con asse $z$ uscente) come in Figura (3.5).

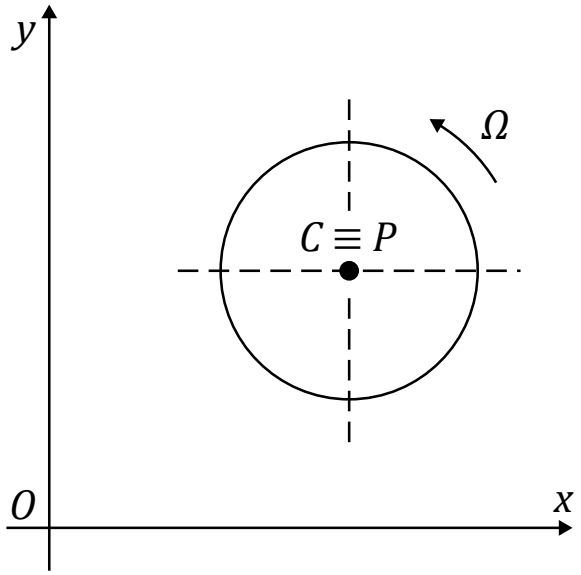



Figura 3.5: Visualizzazione piano $xy$ rotore di Jeffcott libero non smorzato.

Considerando $x$ e $y$ come coordinate del punto $P$, le equazioni del moto del sistema sono

$$\begin{cases} m\ddot{x} + kx = 0 \\ m\ddot{y} + ky = 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

dove $k$ rappresenta la rigidezza equivalente del sistema data dalla combinazione della rigidezza dei supporti e dell'albero del rotore.

Ciascuna equazione descrive le vibrazioni libere non smorzate di un sistema a 1 grado di libertà con pulsazione

$$\omega_n = \pm\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{3.7}$$

per cui, per un osservatore solidale con il sistema di riferimento inerziale $xyz$, il moto del punto $P$ è dato dalla combinazione di due moti armonici lungo gli assi $x$ e $y$, i quali possiedono la stessa frequenza naturale $\omega_n$, chiamata frequenza naturale dell'albero non rotante. La combinazione dei due moti genera la traiettoria del punto $P$ attorno al punto $O$, la quale può essere circolare, ellittica o lineare in funzione delle condizioni iniziali.

Considerando le coordinate complesse, è possibile definire

$$z = x + iy \tag{3.8}$$

per cui si può scrivere una sola equazione del moto nella forma

$$m\left(\ddot{x} + i\ddot{y}\right) + k\left(x + iy\right) = 0 \tag{3.9}$$

e quindi

$$m\ddot{z} + kz = 0 \tag{3.10}$$

La soluzione dell'Equazione (3.10) è nella forma

$$z = z_0 e^{i\omega t} \tag{3.11}$$

dove $z$ è un vettore rotante ad una velocità angolare $\omega$ nel piano $xy$. A questo punto è possibile scrivere

$$(-m\omega^2 + k) z_0 e^{i\omega t} = 0 \tag{3.12}$$

la cui soluzione non banale si ottiene solo se

$$\omega = \pm\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{3.13}$$

In generale, la soluzione dell'Equazione (3.10) è del tipo

$$z = Z_1 e^{\,i\sqrt{\frac{k}{m}}\,t} + Z_2 e^{-\,i\sqrt{\frac{k}{m}}\,t} \tag{3.14}$$

con $Z_1$ e $Z_2$ che dipendono dalle condizioni iniziali. Da questa scrittura si può notare che il primo contributo della soluzione rappresenta un vettore rotante nel piano $xy$ ad una frequenza $+\sqrt{\frac{k}{m}}$, per cui il moto di precessione ad esso collegato è nella stessa direzione della velocità di rotazione $\Omega$ ed è detto di precessione in avanti (*forward whirling motion*). Al contrario, il secondo contributo della soluzione rappresenta un vettore rotante nel piano $xy$ ad una frequenza $-\sqrt{\frac{k}{m}}$ e il moto ad esso collegato è di precessione all'indietro (*backward whirling motion*). Dal momento che $z$ rappresenta

la posizione del punto $P$ nel piano $xy$, si può concludere che essa sia il risultato della combinazione di un moto di precessione nella direzione della velocità di rotazione e di un moto di precessione in direzione opposta ad $\Omega$.

Analizzando i risultati ottenuti, si può concludere che per un rotore di Jeffcott libero e non smorzato le frequenze naturali sono indipendenti dalla velocità di rotazione $\Omega$. Riportando tali considerazioni nel diagramma di Campbell, le frequenze naturali del rotore sono rappresentate da due rette parallele all'asse delle ascisse, una relativa al moto di precessione in avanti, l'altra relativa al moto di precessione all'indietro (Fig. 3.6).

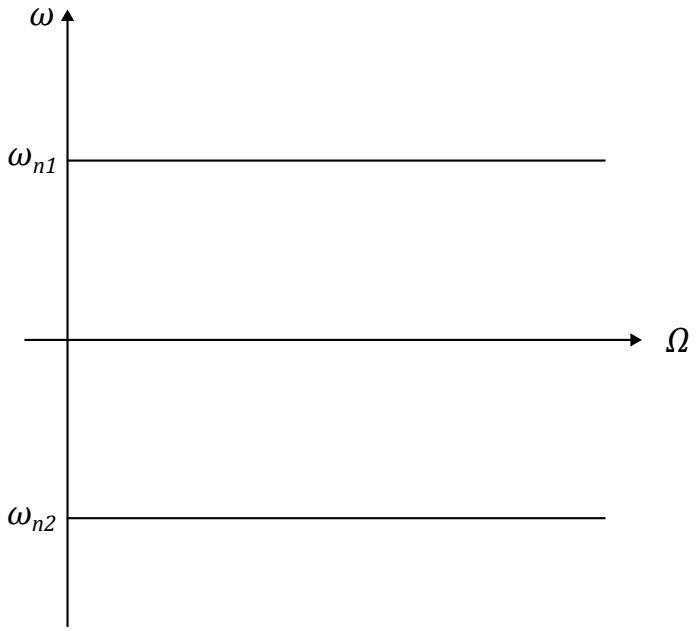



Figura 3.6: Diagramma di Campbell rotore di Jeffcott libero non smorzato.

### Risposta allo squilibrio non smorzata

Come precedentemente detto, nelle situazioni reali il centro di massa $P$ non coincide mai con il centro geometrico $C$ del rotore a causa delle tolleranze di lavorazione, generando una eccentricità $\varepsilon$ coincidente con la distanza $\overline{CP}$. Ipotizzando che il rotore sia soggetto ad una velocità di rotazione $\Omega$ costante, nella situazione appena descritta il centro di massa $P$ risulterà posto in rotazione attorno al centro geometrico $C$ ad una velocità angolare pari a $\Omega$, mentre, a causa del moto vibrazionale del sistema, il centro geometrico $C$ descriverà una traiettoria di precessione attorno all'origine $O$ del sistema di riferimento inerziale ad una velocità angolare $\omega$, come mostrato in Figura (3.7).

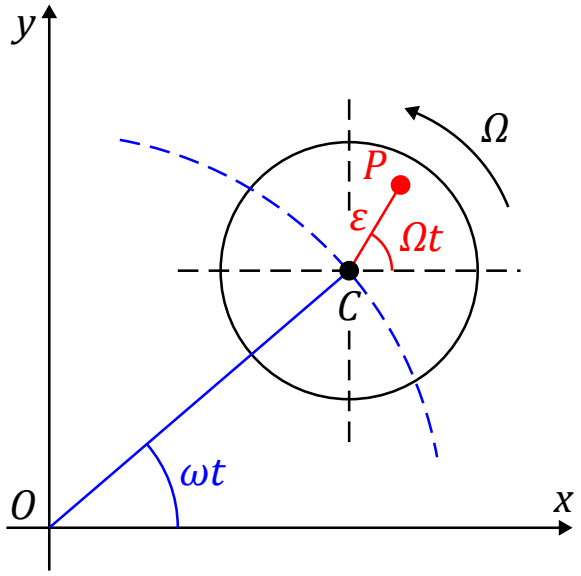



Figura 3.7: Visualizzazione piano $xy$ rotore di Jeffcott sbilanciato non smorzato.

Definendo lo squilibrio come $m \cdot \varepsilon$, dove $m$ è la massa concentrata nel punto $P$, e assumendo $x$ e $y$ come coordinate del punto $P$, è possibile scrivere

$$\{\overline{PO}\} = \begin{pmatrix} x + \varepsilon \cos\theta \\ y + \varepsilon \sin\theta \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

$$\{\dot{\overline{PO}}\} = \{v_P\} = \begin{pmatrix} \dot{x} - \varepsilon\dot{\theta} \sin\theta \\ \dot{y} + \varepsilon\dot{\theta} \cos\theta \end{pmatrix} \tag{3.16}$$

A questo punto, assumendo $x$ e $y$ come coordinate generalizzate, è possibile ottenere le equazioni del moto del sistema applicando l'equazione di Lagrange di seguito riportata

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial U}{\partial q_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i \tag{3.17}$$

dove $q_i$ è l'i-esima coordinata generalizzata, $T$ è l'energia cinetica del sistema, $U$ è l'energia potenziale del sistema e $Q_i$ è l'i-esima componente del vettore delle forze generalizzate. L'energia cinetica e potenziale del rotore in analisi possono essere scritte rispettivamente come

$$T = \frac{1}{2}m\left[\dot{x}^2 + \left(\varepsilon\dot{\theta}\right)^2 \sin\theta - 2\varepsilon\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta + \dot{y}^2 + \left(\varepsilon\dot{\theta}\right)^2 \cos\theta + 2\dot{y}\varepsilon\dot{\theta}\cos\theta\right] \tag{3.18}$$

$$U = \frac{1}{2}k\left(x^2 + y^2\right) \tag{3.19}$$

per cui applicando l'Equazione (3.17) si ottengono le seguenti equazioni del moto

$$\begin{cases} m\left(\ddot{x} - \varepsilon\ddot{\theta}\sin\theta - \varepsilon\dot{\theta}^2\cos\theta\right) + kx = 0, \\ m\left(\ddot{y} + \varepsilon\ddot{\theta}\cos\theta - \varepsilon\dot{\theta}^2\sin\theta\right) + ky = 0. \end{cases} \tag{3.20}$$

A questo punto, ricordando l'Equazione (3.8) è possibile trasformare l'Equazione (3.20) in

$$m\ddot{z} + kz = m\varepsilon \left(\dot{\theta}^2 - i\ddot{\theta}\right) e^{i\theta} \tag{3.21}$$

e, ricordando che la velocità di rotazione $\Omega$ è costante, ancora in

$$m\ddot{z} + kz = m\varepsilon\Omega^2 e^{i\Omega t} \tag{3.22}$$

Dall'Equazione (3.22) si può vedere che il sistema è affetto da una forzante esterna che deriva dalla sua energia cinetica. In particolare, la rotazione del centro di massa $P$ attorno al centro geometrico $C$ è la causa della nascita di una eccitazione esterna dentro alla dinamica interna del rotore. La forzante esterna che agisce sul sistema è direttamente proporzionale allo squilibrio $m \cdot \varepsilon$, al quadrato della velocità di rotazione $\Omega$ e ruota con una frequenza $\omega = \Omega$. Riportando questi risultati sul diagramma di Campbell, si ottiene

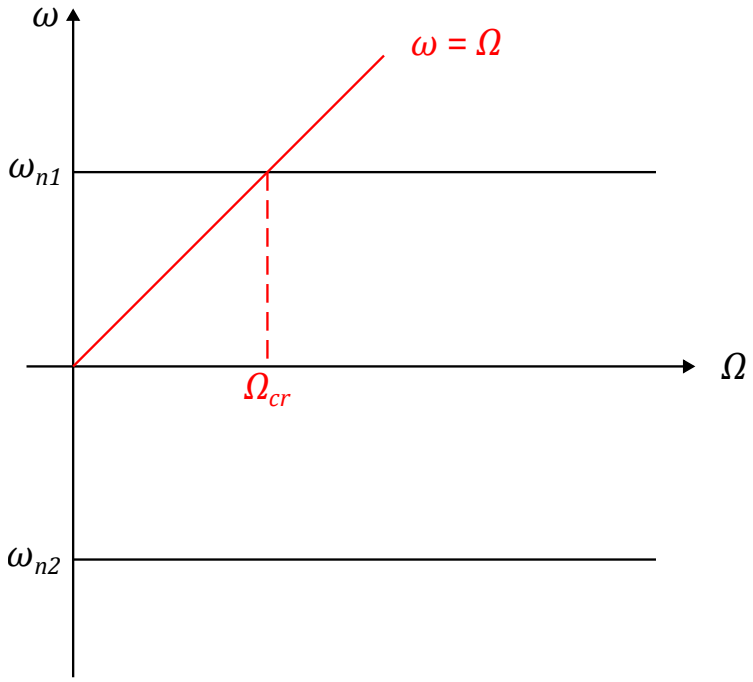



Figura 3.8: Diagramma di Campbell rotore di Jeffcott sbilanciato non smorzato.

La soluzione dell'Equazione (3.22) è esprimibile nella forma

$$z = z_0 e^{i\Omega t} \tag{3.23}$$

per cui è possibile scrivere

$$\left(-m\Omega^2 + k\right) z_0 = m\varepsilon\Omega^2 \tag{3.24}$$

da cui si ricava l'ampiezza $z_0$ dell'orbita del punto $C$ espressa come

$$z_0 = \varepsilon \frac{\Omega^2}{\frac{k}{m} - \Omega^2} \tag{3.25}$$

Osservando il diagramma di Campbell in Figura (3.8) e ricordando che per il rotore di Jeffcott non smorzato le frequenze naturali hanno il valore riportato nell'Equazione (3.13), si può concludere che nel caso della forzante legata allo squilibrio la velocità critica del rotore vale

$$\Omega_{cr} = \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{3.26}$$

per cui, l'Equazione (3.25) può anche essere riscritta come

$$z_0 = \varepsilon \frac{\Omega^2}{\Omega_{cr}^2 - \Omega^2} = \varepsilon \frac{1}{\left(\frac{\Omega_{cr}}{\Omega}\right)^2 - 1} \tag{3.27}$$

Considerando quest'ultima relazione e graficando l'andamento della quantità $z_0/\varepsilon$ in funzione di $\Omega/\Omega_{cr}$ (Fig. 3.9) si possono trarre alcune conclusioni:

- Dal momento che $z_0$ possiede soltanto una parte reale si ha che $z = \overline{CO}$ è un vettore rotante a velocità angolare $\Omega$ nel piano $xy$ ed è sempre allineato con $\overline{CP}$;
- Dal momento che non si ha smorzamento, si ha un forte salto tra la situazione $\Omega < \Omega_{cr}$ in cui l'angolo di fase è nullo alla situazione $\Omega > \Omega_{cr}$ in cui l'angolo di fase vale 180° (Fig. 3.9);
- Nel caso in cui $\Omega >> \Omega_{cr}$ si ha che $z_0$ tende al valore $\varepsilon$, per cui l'ampiezza dell'orbita diventa molto piccola e si ha il fenomeno dell'autocentramento (*self centering*) (Fig. 3.9).

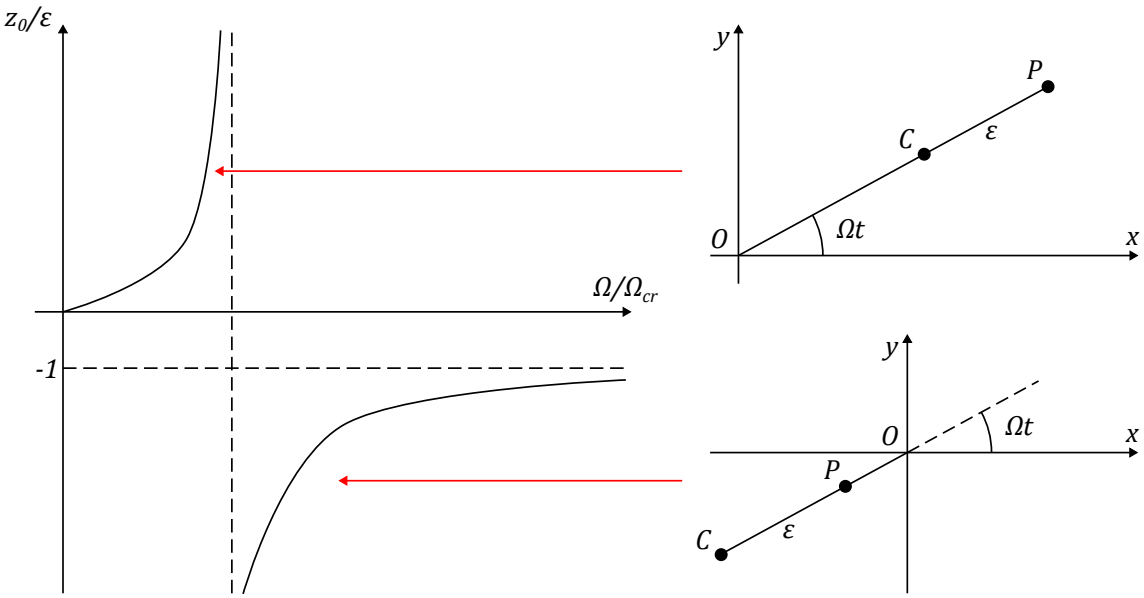



Figura 3.9: Ampiezza relativa $z_0/\varepsilon$ dell'orbita del moto di precessione rotore di Jeffcott sbilanciato non smorzato.

In conclusione, si può scrivere che la posizione del punto $C$ nel tempo è la somma del comportamento libero e forzato del rotore esprimibile come

$$z = Z_1 e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} + Z_2 e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t} + \varepsilon \frac{\Omega^2}{\frac{k}{m} - \Omega^2} \tag{3.28}$$

Considerando l'Equazione (3.28) si può affermare che la risposta libera non è influenzata dalla velocità di rotazione $\Omega$ e dipende dalle condizioni iniziali, mentre la risposta forzata è influenzata dalla velocità di rotazione $\Omega$ ed è costante nel tempo. Una volta estinto il transitorio iniziale, la risposta libera del sistema si estingue anch'essa e la dinamica del punto $C$ è rappresentata esclusivamente dalla risposta forzata. Dal momento che nella risposta forzata i punti $P$ e $C$ sono sempre allineati, ciò significa che, a regime, il rotore possiede un moto di precessione attorno all'origine $O$ caratterizzato dalla stessa configurazione deformata (Figura (3.10)). Per questo motivo, il materiale del rotore non è soggetto a danneggiamento per fatica, mentre i componenti statorici del sistema sono soggetti ad eccitazioni armoniche e vibrazioni derivanti dal rotore.

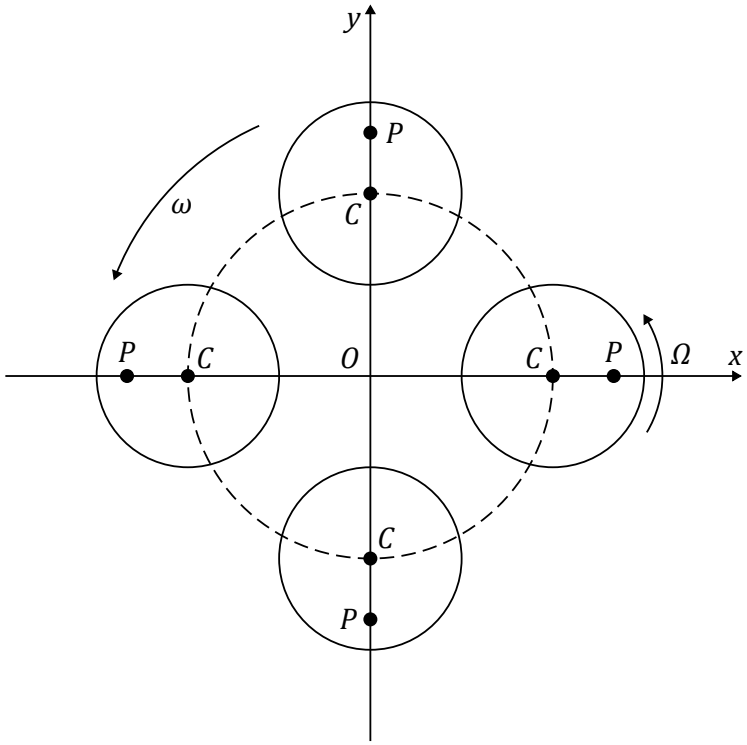



Figura 3.10: Configurazione deformata rotore di Jeffcott sbilanciato non smorzato durante rotazione a transitorio estinto.

### Risposta libera smorzata

Per includere lo smorzamento all'interno del comportamento dinamico del rotore è innanzitutto necessario distinguere i suoi due possibili contributi:

- Smorzamento non-rotante
  - È lo smorzamento relativo alle parti statoriche del sistema;
  - Ha sempre un effetto stabilizzante;
  - Può essere modificato per raggiungere il livello di stabilità desiderato o per controllare l'ampiezza delle vibrazioni.
- Smorzamento rotante
  - È lo smorzamento relativo alle parti rotanti del sistema;
  - Ha un effetto stabilizzante nel range sub-critico, mentre genera instabilità nel range super-critico.

L'implementazione dello smorzamento all'interno delle equazioni del moto viene eseguita definendo un coefficiente di smorzamento non-rotante $c_n$ e un coefficiente di smorzamento rotante $c_r$. Considerando le coordinate complesse, l'equazione del

moto relativa ad un rotore di Jeffcott soggetto ad una velocità di rotazione $\Omega$ costante e non affetto da squilibrio è esprimibile come

$$m\ddot{z} + (c_n + c_r)\,\dot{z} + (k - i\dot{\theta}\,c_r)z = 0 \tag{3.29}$$

La soluzione dell'equazione è la medesima riportata nell'Equazione (3.11), per cui è possibile scrivere

$$\left[-\omega^2 m + i\omega\,(c_n + c_r) + (k - i\Omega c_r)\right] z_0 = 0 \tag{3.30}$$

È possibile notare che la parte immaginaria dell'Equazione (3.30) è uguale a $c_n \cdot \omega + c_r \cdot (\omega - \Omega)$, per cui è possibile dimostrare che lo smorzamento non-rotante ha sempre un effetto stabilizzante, mentre lo smorzamento rotante ha effetto stabilizzante solo nel regime sub-critico e non ha effetto nel caso di precessione sincrona caratterizzata da $\omega = \Omega$. Le radici dell'Equazione (3.30) possono essere espresse come

$$\omega = i\,\frac{c_r + c_n}{2m} \pm \sqrt{\frac{-(c_r + c_n)^2 + 4m(k - i\Omega c_r)}{4m^2}} \tag{3.31}$$

Definendo la quantità

$$\Gamma = \frac{k}{m} - \frac{(c_r + c_n)^2}{4m^2} \tag{3.32}$$

e separando la parte reale e immaginaria dell'Equazione (3.31), le radici possono essere riscritte nella forma

$$\begin{aligned} \omega = \pm &\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\Gamma + \sqrt{\Gamma^2 + \left(\frac{\Omega c_r}{m}\right)^2}}\right] + \\ &+ i\left[\frac{c_r + c_n}{2m} \mp \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-\Gamma + \sqrt{\Gamma^2 + \left(\frac{\Omega c_r}{m}\right)^2}}\right] \end{aligned} \tag{3.33}$$

Da quest'ultima equazione si può notare che per ciascun valore della velocità di rotazione $\Omega$ si hanno due soluzioni che non sono complesse coniugate. La parte reale dell'equazione rappresenta la frequenza naturale del sistema relativa al moto di precessione in avanti nel caso di segno positivo, oppure relativa al moto di precessione all'indietro nel caso di segno negativo. La parte immaginaria dell'equazione rappresenta, invece, il tasso di decadimento della risposta, il quale deve avere segno positivo per produrre un effetto stabilizzante sul sistema. Osservando la parte immaginaria delle radici è possibile concludere che, nel caso si abbia segno positivo il valore del tasso di decadimento è positivo, mentre si può dimostrare che nel caso si abbia segno negativo il valore del tasso di decadimento risulta essere positivo solo se

$$\Omega < \sqrt{\frac{k}{m}}\left(1 + \frac{c_n}{c_r}\right) \tag{3.34}$$

Il secondo membro della disuguaglianza rappresenta la velocità di rotazione di soglia $\Omega_{th}$ per un rotore di Jeffcott in presenza di smorzamento. Si può notare che tale valore aumenta se aumenta lo smorzamento non-rotante e se diminuisce lo smorzamento rotante. Si può quindi concludere che, a parità di smorzamento rotante, un incremento dello smorzamento non-rotante migliori la stabilità del sistema, mentre a parità di smorzamento non-rotante, un aumento dello smorzamento rotante incrementa il rischio di instabilità del rotore.

### Risposta allo squilibrio smorzata

Nel caso in cui il rotore smorzato sia soggetto a squilibrio e ruoti ad una velocità angolare $\Omega$ costante, l'equazione del moto in coordinate complesse può essere scritta come

$$m\ddot{z} + (c_n + c_r)\,\dot{z} + (ki\dot{\theta}\,c_r)z = m\varepsilon\Omega^2 e^{i\Omega t} \tag{3.35}$$

Considerando che la soluzione di tale equazione coincide con l'Equazione (3.23) si ottiene

$$\left[-m\Omega^2 + i\Omega c_n + k\right] z_0 = m\varepsilon\Omega^2 \tag{3.36}$$

da cui si può osservare che non si ha più contributo dello smorzamento rotante, in quanto lo squilibrio produce una precessione sincrona caratterizzata da $\omega = \Omega$. Per questo motivo, il rotore sviluppa il moto di precessione mantenendo sempre la stessa configurazione deformata e il suo materiale non è soggetto a danneggiamento per fatica.

Dall'Equazione (3.36) si può ricavare l'ampiezza $z_0$ dell'orbita del centro geometrico $C$

$$z_0 = \frac{m\varepsilon\Omega^2}{k + i\Omega c_n - m\Omega^2} \tag{3.37}$$

esprimibile, a seguito di alcuni passaggi matematici, in termini di modulo e fase come

$$|z_0| = \varepsilon\,\frac{\Omega^{*2}}{\sqrt{\left(1-\Omega^{*2}\right)^2 + 4{\zeta_n}^2\Omega^{*2}}} \qquad \phi = \arctan\left(\frac{-2\Omega^*\zeta_n}{1-\Omega^{*2}}\right) \tag{3.38}$$

dove

$$\Omega^* = \frac{\Omega}{\Omega_{cr}} \qquad \zeta_n = \frac{c_n}{2\sqrt{km}} \tag{3.39}$$

A livello grafico è possibile rappresentare le quantità $|z_0|/\varepsilon$ e $\phi$ in funzione di $\Omega^*$ nel seguente modo

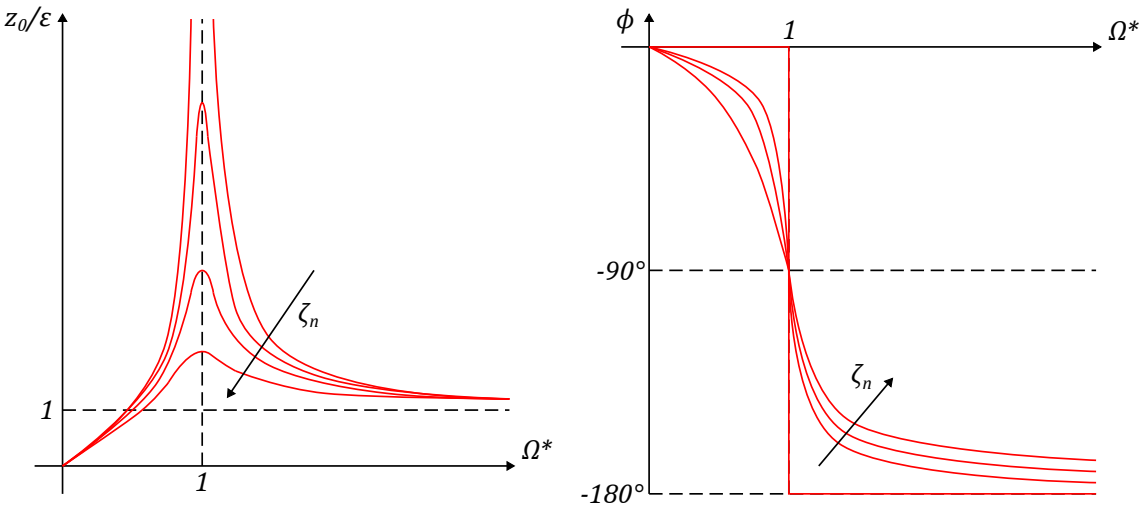



Figura 3.11: Ampiezza relativa e fase dell'orbita rotore di Jeffcott sbilanciato smorzato.

Dai diagrammi in Figura (3.11) è possibile determinare il comportamento dinamico del sistema a transitorio estinto, infatti nel regime sub-critico l'angolo di fase tra i segmenti $\overline{CO}$ e $\overline{CP}$ è minore di 90°, alla velocità critica l'angolo di fase vale 90° e nel regime super-critico esso è maggiore di 90° (Figura (3.12)). Infine, si può notare come nel regime super-critico, per una velocità di rotazione $\Omega$ molto maggiore della velocità critica, l'ampiezza dell'orbita del sistema tenda al valore dell'eccentricità $\varepsilon$ determinando il fenomeno dell'autocentramento.

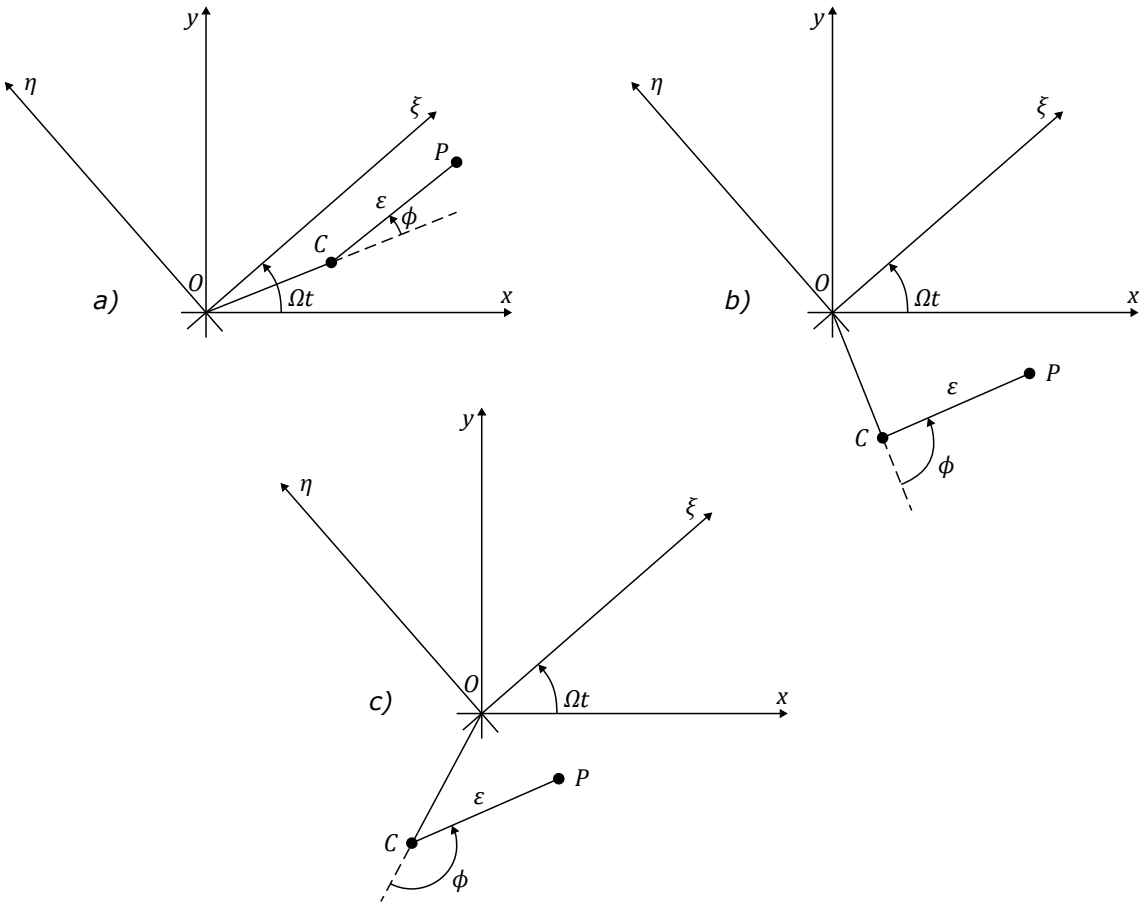



Figura 3.12: Configurazioni deformate rotore di Jeffcott sbilanciato smorzato: a) regime subcritico, b) alla velocità critica, c) regime supercritico.

### 3.1.3 Rotore a 4 gradi di libertà

Il modello del rotore di Jeffcott permette di ottenere una buona analisi della dinamica del sistema in esame, tuttavia non è il modello più accurato che si può trovare in letteratura. Infatti, la considerazione della sola massa come caratteristica inerziale del rotore esclude dalla trattazione alcuni contributi dinamici molto importanti quali le caratteristiche giroscopiche del rotore. Per questo motivo, una formulazione più realistica utilizzata per studiare il comportamento dinamico dei sistemi rotanti è il modello di rotore a 4 gradi di libertà (GDL). Questo tipo di trattazione prende in considerazione anche i momenti d'inerzia del rotore, in particolare il momento d'inerzia polare $J_p$ e il momento d'inerzia trasversale $J_t$. Assumendo il rotore assialsimmetrico si ha che il momento d'inerzia trasversale $J_t$ è uguale per ogni direzione diametrale, per cui si può assumere che il corpo rotante sia concentrato nel centro di massa $P$ e caratterizzato da massa $m$, momento d'inerzia polare $J_p$ e momento d'inerzia trasversale $J_t$, come mostrato in Figura (3.13).

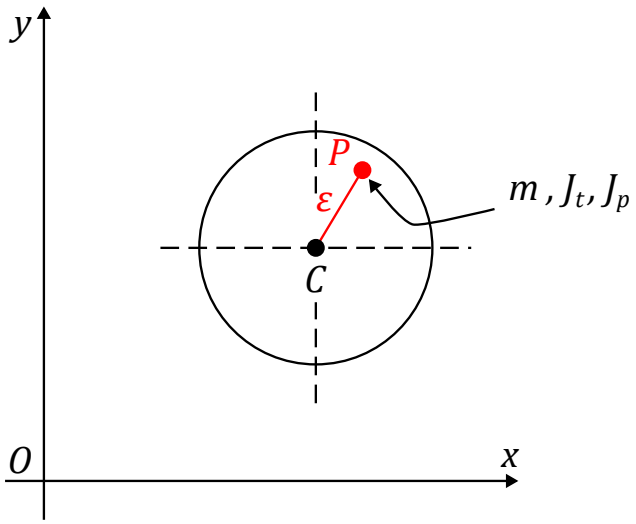



Figura 3.13: Visualizzazione piano $xy$ rotore 4GDL sbilanciato non smorzato.

Nella configurazione mostrata nell'immagine soprastante, il rotore possiede tre assi principali d'inerzia, di cui uno coincide con l'asse $z$ quando il rotore è nella configurazione indeformata. Il momento principale d'inerzia relativo all'asse $z$ risulta essere quindi il momento d'inerzia polare $J_p$, mentre il momento d'inerzia relativo ad un qualsiasi asse del piano di rotazione $xy$ è il momento d'inerzia trasversale $J_t$.

Nel rotore di Jeffcott si è tenuto conto del fatto che l'eccentricità $\varepsilon$ presente tra il centro geometrico $C$ e il centro di massa $P$ del rotore genera una forza di squilibrio durante la dinamica del sistema. Nel rotore a 4 GDL, considerando i momenti d'inerzia, si tiene conto anche della coppia di squilibrio, generata dal fatto che esiste un certo errore angolare $\chi$ tra l'asse di simmetria e l'asse di rotazione del rotore (Figura (3.14)).

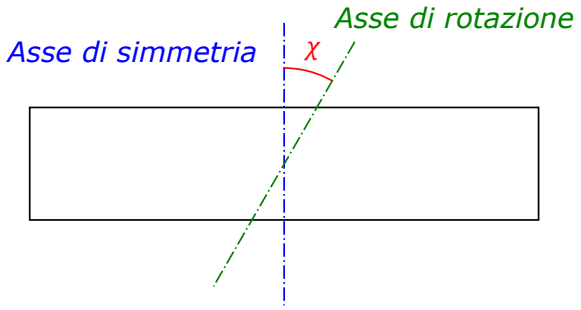



Figura 3.14: Visualizzazione errore angolare $\chi$ tra asse di simmetria e asse di rotazione del rotore.

Con l'obiettivo di scrivere le equazioni del moto, si assume che i comportamenti assiale, flessionale e torsionale del rotore siano tra loro disaccoppiati, in modo da considerare solamente quattro gradi di libertà per la descrizione della dinamica. Per

poter tenere conto di tutti i contributi nell'analisi è necessario definire alcuni sistemi di riferimento (Figura (3.15)):

- Sistema di riferimento $OXYZ$
  È il sistema di riferimento inerziale;

- Sistema di riferimento $O\Xi HZ$
  È un sistema di riferimento che ruota attorno all'asse $Z$ descrivendo un angolo $\theta$ (se la velocità di rotazione del sistema è costante si può assumere $\theta = \Omega t$ e $\dot{\theta} = \Omega$);

- Sistema di riferimento $CX'Y'Z'$
  È un sistema di riferimento posizionato nel centro geometrico $C$ del rotore con gli assi $X'Y'Z'$ allineati rispettivamente a $XYZ$;

- Sistema di riferimento $Cxyz$ È un sistema di riferimento posizionato nel centro geometrico $C$ del rotore con l'asse $z$ coincidente con l'asse di rotazione nella configurazione deformata.

Per passare da un sistema di riferimento all'altro è necessario applicare alcune rotazioni mediante opportune matrici di rotazione:

- Il sistema di riferimento $CX'Y'Z'$ è ruotato attorno all'asse $X'$ di un angolo $\phi_{X'}$ fino a che l'asse $Y'$ coincida con l'asse $y$, quindi il rotore è nella configurazione deformata e l'asse $Z'$ diventa l'asse $z^*$ (Figura (3.15)). La matrice di rotazione che permette di esprimere le componenti di un vettore in $CX'yz^*$ rispetto a $CX'Y'Z'$ è la seguente

$$[\mathbf{R}_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi_{X'}) & \sin(\phi_{X'}) \\ 0 & -\sin(\phi_{X'}) & \cos(\phi_{X'}) \end{bmatrix} \tag{3.40}$$

- Il sistema di riferimento $CX'yz^*$ è ruotato rispetto all'asse $y$ di un angolo $\phi_y$ fino a che l'asse $X'$ coincida con l'asse $x$, quindi il rotore è nella configurazione deformata e l'asse $z^*$ diventa l'asse $z$ (Figura (3.15)). Così facendo l'asse $z$ coincide con l'asse di simmetria del corpo nella configurazione deformata, a meno dell'errore angolare $\chi$, e il sistema di riferimento $Cxyz$ segue il moto di precessione del rotore. La matrice di rotazione che permette di esprimere le componenti di un vettore in $Cxyz$ rispetto a $CX'yz^*$ è la seguente

$$[\mathbf{R}_2] = \begin{bmatrix} \cos(\phi_y) & 0 & -\sin(\phi_y) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\phi_y) & 0 & \cos(\phi_y) \end{bmatrix} \tag{3.41}$$

- Il sistema di riferimento $Cxyz$ è ruotato rispetto all'asse $z$ di un angolo $\theta = \Omega t$ per tenere conto della velocità di rotazione (Figura (3.15)). Così facendo gli assi $x$ e $y$ diventano coincidenti con gli assi $\xi$ e $\eta$ del sistema di riferimento $C\xi\eta z$ fissato nel centro geometrico $C$ e solidale al rotore. La matrice di rotazione che permette di esprimere le componenti di un vettore in $C\xi\eta z$ rispetto a $Cxyz$ è la seguente

$$[\mathbf{R}_3] = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.42}$$

  Nel caso in cui l'eccentricità $\varepsilon$ non fosse allineata con l'asse $\xi$ è necessario aggiungere un angolo $\alpha$ all'angolo $\theta$, definendo la matrice di rotazione $[\mathbf{R}'_3]$;

- Il sistema di riferimento $C\xi\eta z$ è ruotato rispetto all'asse $\eta$ di un angolo $\chi$ per tenere conto dell'errore angolare (Figura (3.14)). In questo modo è possibile passare dal sistema di riferimento del rotore al sistema di riferimento dell'asse principale d'inerzia del corpo. La matrice associata a questa rotazione è la seguente

$$[\mathbf{R}_4] = \begin{bmatrix} \cos(\chi) & 0 & -\sin(\chi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\chi) & 0 & \cos(\chi) \end{bmatrix} \tag{3.43}$$

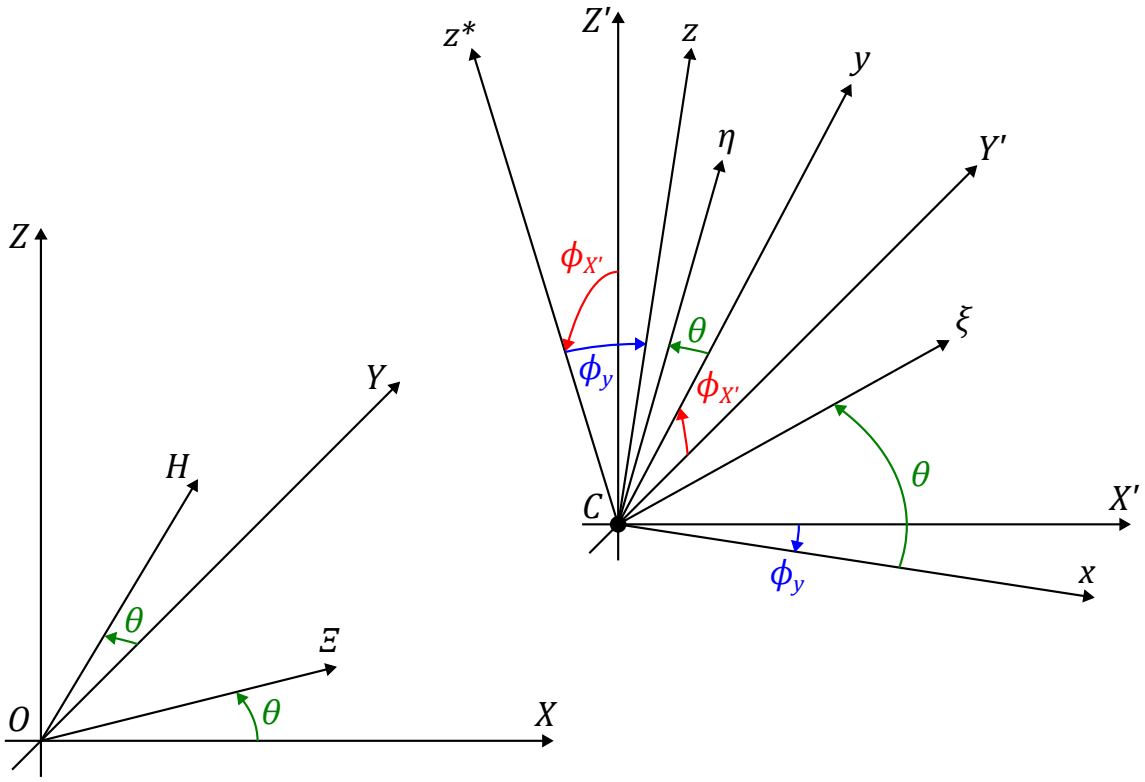



Figura 3.15: Rotazioni dei sistemi di riferimento rotore 4GDL.

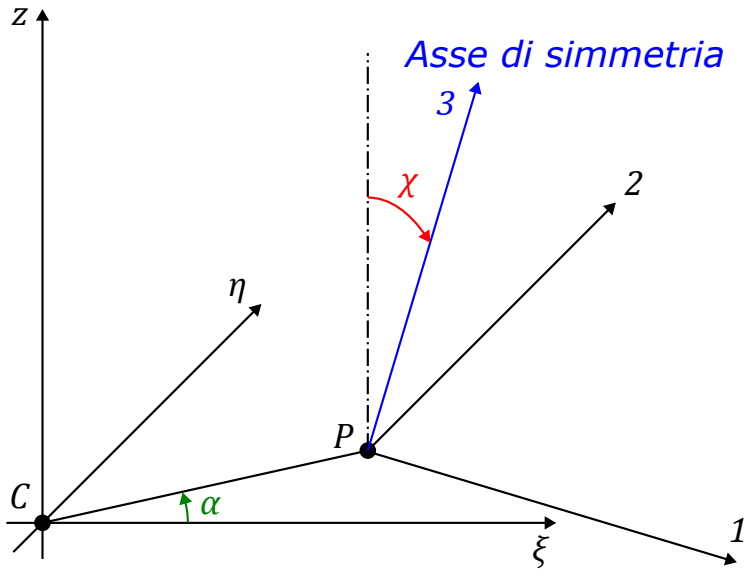



Figura 3.16: Rotazione associata all'errore angolare $\chi$ rotore 4GDL.

A questo punto si può affermare che la cinematica del corpo rotante può essere completamente definita prendendo in considerazione le coordinate $X_C$, $Y_C$, $Z_C$ (spostamenti del centro geometrico $C$) e le rotazioni $\phi_{X'}$, $\phi_y$ e $\theta$. Si assume che tutti i valori siano piccoli ad eccezione dell'angolo $\theta$, il quale è associato alla rotazione del rotore che si suppone imposta dall'esterno.

Per ricavare le equazioni del moto del sistema è necessario esprimere le energie cinetica e potenziale del rotore. A tal proposito, la posizione del centro di massa $P$ nel sistema di riferimento inerziale $OXYZ$ può essere scritta come

$$\begin{aligned}\left\{\overline{\mathbf{PO}}\right\} = \begin{Bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} X_C \\ Y_C \\ Z_C \end{Bmatrix} + [\mathbf{R}_1]^T [\mathbf{R}_2]^T [\mathbf{R}_3']^T \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} X_C + \varepsilon \cos(\theta + \alpha) \\ Y_C + \varepsilon \sin(\theta + \alpha) \\ Z_C + \varepsilon \left[\phi_{X'} \sin(\theta + \alpha) - \phi_Y \cos(\theta + \alpha)\right] \end{Bmatrix}\end{aligned} \tag{3.44}$$

È possibile assumere che le quantità $\varepsilon\phi_{X'}$ e $\varepsilon\phi_y$ siano molto piccole e trascurabili, per cui si ottiene

$$\left\{\overline{\mathbf{PO}}\right\} = \begin{Bmatrix} X_C + \varepsilon \cos(\theta + \alpha) \\ Y_C + \varepsilon \sin(\theta + \alpha) \\ Z_C \end{Bmatrix} \tag{3.45}$$

Di conseguenza, la velocità del punto P può essere espressa come

$$\{\mathbf{v_P}\} = \begin{Bmatrix} \dot{X}_C - \varepsilon\dot{\theta} \sin(\theta + \alpha) \\ \dot{Y}_C + \varepsilon\dot{\theta} \cos(\theta + \alpha) \end{Bmatrix} \tag{3.46}$$

e quindi l'energia cinetica traslazionale del punto P come

$$T_t = \frac{1}{2} m \left[ \dot{X}_C^2 + \dot{Y}_C^2 + 2\varepsilon\dot{\theta} \left( -\dot{X}_C \sin(\theta + \alpha) + \dot{Y}_C \cos(\theta + \alpha) \right) \right] \tag{3.47}$$

avendo trascurato il contributo $\varepsilon^2\dot{\theta}^2$.

Per ricavare l'energia cinetica rotazionale del sistema è necessario esprimere la velocità angolare $\Omega$ rispetto al sistema di riferimento coincidente con l'asse principale d'inerzia del rotore. Considerando che $\dot{\phi_{X'}}$, $\dot{\phi_y}$ e $\dot{\theta}$ sono le velocità angolari relative rispettivamente agli assi $X'$, $y$ e $z$, le componenti della velocità angolare $\Omega$ lungo l'asse principale d'inerzia del rotore possono essere espresse come

$$\begin{aligned} \{\boldsymbol{\Omega}\} &= [\mathbf{R}_4][\mathbf{R}_3][\mathbf{R}_2] \begin{Bmatrix} \dot{\phi}_{X'} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + [\mathbf{R}_4][\mathbf{R}_3] \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\phi}_y \\ 0 \end{Bmatrix} + [\mathbf{R}_4] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} \dot{\phi}_{X'} \cos\theta + \dot{\phi}_Y \sin\theta - \chi\dot{\theta} \\ -\dot{\phi}_{X'} \sin\theta + \dot{\phi}_y \cos\theta \\ \dot{\phi}_{X'}(\chi \cos\theta + \phi_y) + \dot{\phi}_y \chi \sin\theta + \dot{\theta} \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{3.48}$$

L'energia cinetica rotazionale del rotore può essere quindi espressa come

$$T_r = \frac{1}{2} \left( J_t \Omega_1^2 + J_t \Omega_2^2 + J_p \Omega_3^2 \right) \tag{3.49}$$

che trascurando i prodotti dei termini di piccola entità può essere riscritta come

$$T_r = \frac{1}{2} \left\{ J_t \left( \dot{\phi}_{X'}^2 + \dot{\phi}_y^2 \right) + J_p \dot{\theta} \left( \dot{\theta} + 2\dot{\phi}_{X'} \phi_y \right) + 2\chi\dot{\theta} \left( J_p - J_t \right) \left( \dot{\phi}_{X'} \cos\theta + \dot{\phi}_y \sin\theta \right) \right\} \tag{3.50}$$

Dall'Equazione (3.50) è possibile notare che:

- I termini $J_t\dot{\phi}_{X'}^2$ e $J_t\dot{\phi}_y^2$ generano i momenti d'inerzia legati al moto di precessione;
- Il termine $J_p\dot{\theta}^2$ non coinvolge gradi di libertà del sistema, per cui è legato all'energia cinetica relativa alla rotazione indotta dall'esterno;
- Il termine $2J_p\dot{\theta}\dot{\phi}_{X'}\phi_y$ genera il momento giroscopico;
- Il termine $2\chi\dot{\theta} \left( J_p - J_t \right) \left( \dot{\phi}_{X'} \cos\theta + \dot{\phi}_y \sin\theta \right)$ genera la coppia di squilibrio.

A questo punto, applicando l'equazione di Lagrange (Equazione (3.17)) considerando come coordinate generalizzate $X_C$, $Y_C$, $\phi_{X'}$ e $\phi_y$ si ottengono le seguenti equazioni del moto

$$\begin{cases} m\ddot{X}_C + m\varepsilon\Omega^2 \cos(\Omega t + \alpha) = F_{X_C} \\ m\ddot{Y}_C + m\varepsilon\Omega^2 \sin(\Omega t + \alpha) = F_{Y_C} \\ J_t\ddot{\phi}_{X'} + J_p\Omega\dot{\phi}_y + \chi\Omega^2(J_t - J_p)\sin(\Omega t) = M_{X'} \\ J_t\ddot{\phi}_y - J_p\Omega\dot{\phi}_{X'} - \chi\Omega^2(J_t - J_p)\cos(\Omega t) = M_y \end{cases} \tag{3.51}$$

Dalle ultime due equazioni del sistema soprastante è possibile osservare che la velocità di rotazione $\Omega$ in combinazione con il momento d'inerzia polare $J_p$ accoppia tra loro il comportamento flessionale nel piano $xz$ e il comportamento flessionale nel piano $yz$. Dal momento che le uniche forze e gli unici momenti agenti sul rotore sono le reazioni elastiche dell'albero caratterizzate da un comportamento lineare, è possibile scrivere

$$\begin{Bmatrix} F_{X_C} \\ M_y \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_C \\ \phi_y \end{Bmatrix} \tag{3.52}$$

$$\begin{Bmatrix} F_{Y_C} \\ M_{X'} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{11} & -k_{12} \\ -k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_C \\ \phi_{X'} \end{Bmatrix} \tag{3.53}$$

per cui le equazioni del moto si riscrivono come

$$\begin{cases} m\ddot{X}_C + k_{11}X_C + k_{12}\phi_Y = m\varepsilon\Omega^2\cos(\Omega t + \alpha) \\ m\ddot{Y}_C + k_{11}Y_C - k_{12}\phi_{X'} = m\varepsilon\Omega^2\sin(\Omega t + \alpha) \\ J_t\ddot{\phi}_{X'} + J_p\Omega\dot{\phi}_Y - k_{12}Y_C + k_{22}\phi_{X'} = -\chi\Omega^2(J_t - J_p)\sin(\Omega t) \\ J_t\ddot{\phi}_y - J_p\Omega\dot{\phi}_{X'} + k_{12}X_C + k_{22}\phi_y = \chi\Omega^2(J_t - J_p)\cos(\Omega t) \end{cases} \tag{3.54}$$

Risulta utile passare dalle coordinate reali alle coordinate complesse definendo le seguenti relazioni

$$z = X_C + iY_C \qquad \phi = \phi_y - \phi_{X'} \tag{3.55}$$

per cui le equazioni del moto possono essere riscritte in forma complessa come

$$\begin{cases} m\ddot{z} + k_{11}z + k_{12}\phi = m\varepsilon\Omega^2 e^{i(\Omega t + \alpha)} \\ J_t\ddot{\phi} - iJ_p\Omega\dot{\phi} + k_{12}z + k_{22}\phi = \chi\Omega^2(J_t - J_p)e^{i\Omega t} \end{cases} \tag{3.56}$$

e ancora in forma matriciale come

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J_t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{z} \\ \ddot{\phi} \end{Bmatrix} - i\Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & J_p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{z} \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m\varepsilon e^{i\alpha} \\ \chi(J_t - J_p) \end{Bmatrix} \Omega^2 e^{i\Omega t} \tag{3.57}$$

**Risposta libera non smorzata**

Per analizzare la risposta libera non smorzata è necessario considerare le equazioni omogenee associate alle equazioni del moto del rotore, cioè

$$\begin{cases} m\ddot{z} + k_{11}z + k_{12}\phi = 0 \\ J_t\ddot{\phi} - iJ_p\Omega\dot{\phi} + k_{12}z + k_{22}\phi = 0 \end{cases} \tag{3.58}$$

Le soluzioni delle due uguaglianze sono del tipo

$$\begin{cases} z = z_0 e^{i\omega t} \\ \phi = \phi_0 e^{i\omega t} \end{cases} \tag{3.59}$$

per cui sostituendo nelle Equazioni (3.58) si ottiene

$$\begin{cases} z_0 \left(-m\omega^2 + k_{11}\right) + \phi_0 k_{12} = 0 \\ z_0 k_{12} + \phi_0 \left(-J_t\omega^2 + J_p\Omega\omega + k_{22}\right) = 0 \end{cases} \tag{3.60}$$

L'equazione caratteristica che permette il calcolo della risposta libera è quindi

$$\det \begin{bmatrix} -m\omega^2 + k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & -J_t\omega^2 + J_p\Omega\omega + k_{22} \end{bmatrix} = 0 \tag{3.61}$$

anche esprimibile come

$$\omega^4 - \Omega\omega^3 \frac{J_p}{J_t} - \omega^2 \left(\frac{k_{11}}{m} + \frac{k_{22}}{J_t}\right) + \omega\Omega \frac{k_{11}J_p}{mJ_t} + \frac{k_{11}k_{22} - k_{12}^2}{mJ_t} = 0 \tag{3.62}$$

È possibile osservare che l'Equazione (3.62) possiede 4 radici reali dal momento che non è presente lo smorzamento, di cui 2 descrivono i moti di precessione in avanti e 2 i moti di precessione all'indietro. Di conseguenza, il moto di precessione complessivo a cui è soggetto il rotore è la somma di 4 moti di precessione distinti. Inoltre, con riferimento al momento giroscopico, è possibile affermare che esso:

- Genera differenze tra i valori delle frequenze di precessione in avanti e all'indietro;
- Accoppia il comportamento nei piani passanti per l'asse di rotazione;
- Impedisce al sistema di esibire moti ellittici o rettilinei (in quanto tali moti sono possibili solo se gli autovalori hanno stesso modulo e segno opposto);
- Rende le frequenze di precessione dipendenti dalla velocità di rotazione $\Omega$.

**Risposta allo squilibrio non smorzata**

Per l'analisi della risposta allo squilibrio non smorzata è necessario considerare le equazioni del moto complete espresse come nell'Equazione (3.54). La soluzione di tali equazioni è del tipo

$$\begin{cases} z = z_0 e^{i\Omega t} \\ \phi = \phi_0 e^{i\Omega t} \end{cases} \tag{3.63}$$

dove $z_0$ e $\phi_0$ sono in generale termini complessi dal momento che solitamente l'eccentricità $\varepsilon$ e l'errore angolare $\chi$ non giacciono sullo stesso piano (cioè $\alpha \neq 0$. Assumendo $\alpha = 0$ e sostituendo le soluzioni nelle Equazioni (3.54) è possibile ottenere la risposta alla forza di squilibrio

$$\begin{cases} z_0 = m\varepsilon\Omega^2 \dfrac{(J_p - J_t)\Omega^2 + k_{22}}{\Delta} \\ \phi_0 = -m\varepsilon\Omega^2 \dfrac{k_{12}}{\Delta} \end{cases} \tag{3.64}$$

e la risposta alla coppia di squilibrio

$$\begin{cases} z_0 = \chi\Omega^2(J_p - J_t)\dfrac{k_{12}}{\Delta} \\ \phi_0 = \chi\Omega^2(J_p - J_t)\dfrac{m\Omega^2 - k_{11}}{\Delta} \end{cases} \tag{3.65}$$

dove

$$\Delta = -m(J_p - J_t)\Omega^4 + [k_{11}(J_p - J_t) + mk_{22}]\,\Omega^2 + k_{11}k_{22} - k_{12}^2 \tag{3.66}$$

Un possibile andamento delle grandezze $z_0/\varepsilon$, $\phi_0/\varepsilon$, $z_0/\chi$ e $\phi_0/\chi$ in funzione della velocità di rotazione $\Omega$ si può osservare in Figura (3.17).

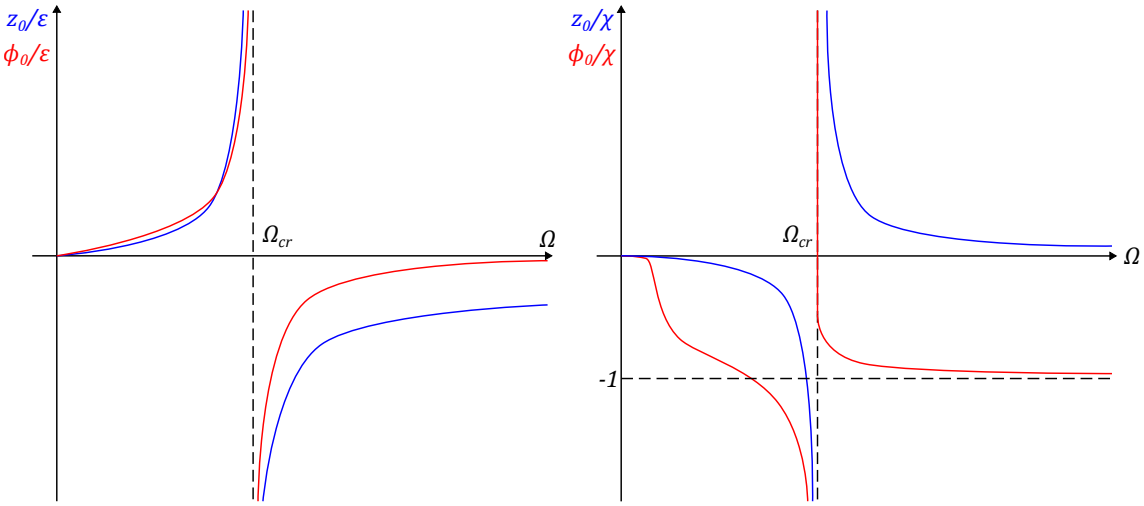



Figura 3.17: Ampiezza e fase relative dell'orbita rotore 4GDL sbilanciato non smorzato.

Nel caso in cui si volessero calcolare le velocità critiche relative allo squilibrio è necessario imporre la condizione $\omega = \Omega$ all'interno dell'Equazione (3.62) ottenendo

$$\Omega^4 m(J_p - J_t) - \Omega^2\left[(J_p - J_t)k_{11} - mk_{22}\right] - k_{11}k_{22} + k_{12}^2 = 0 \tag{3.67}$$

Introducendo la quantità

$$\delta = \frac{J_p - J_t}{m} \tag{3.68}$$

si possono ottenere le velocità critiche come

$$\Omega_{cr} = \frac{1}{\sqrt{2m}}\sqrt{k_{11} + \frac{k_{22}}{\delta} \pm \sqrt{\left(k_{11} + \frac{k_{22}}{\delta}\right)^2 - 4\,\frac{k_{12}^2}{\delta}}} \tag{3.69}$$

Dall'Equazione (3.69) si possono avere due possibilità:

- $\delta < 0$, cioè $J_p < J_t$, quindi due velocità critiche distinte;
- $\delta > 0$, cioè $J_p > J_t$, quindi una sola velocità critica.

Un tipico diagramma di Campbell di un rotore a 4GDL soggetto a squilibrio è riportato in Figura (3.18).

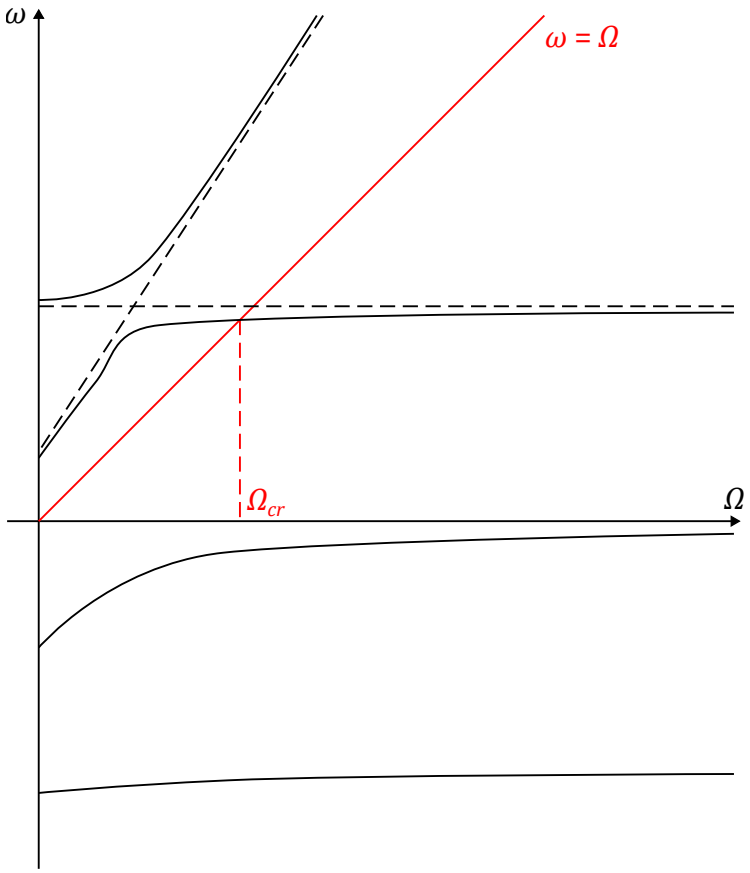



Figura 3.18: Diagramma di Campbell rotore 4GDL sbilanciato non smorzato.

## 3.2 Cuscinetti volventi

I cuscinetti volventi sono componenti meccanici utilizzati all'interno delle macchine per supportare gli elementi rotanti, permettere la rotazione relativa tra due superfici con il minimo attrito e trasferire i carichi tra le parti del macchinario. Essi sono ampiamente utilizzati nelle applicazioni con elevate velocità di rotazione in quanto consentono di ottenere alta precisione e una significativa riduzione di livelli di rumorosità, calore, consumo di energia e usura.

In generale, i cuscinetti volventi sono formati da quattro elementi principali (Figura (3.19)), quali gli anelli interno ed esterno che vengono solitamente montati rispettivamente su rotore e statore, i corpi volventi, che consentono la trasmissione del carico tra i due anelli tramite il rotolamento sulle piste, e la gabbia, che ha lo scopo di mantenere distanziati i copri volventi durante il funzionamento per evitare possibili collisioni. Infine è possibile che essi siano dotati di tenute per trattenere il lubrificante.

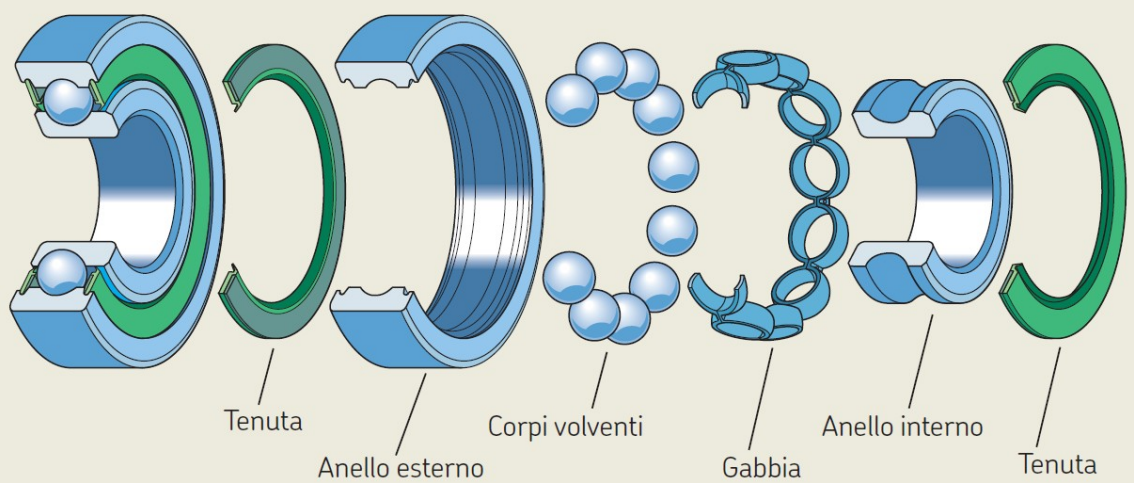



Figura 3.19: Vista esplosa cuscinetto volvente [113].

La classificazione dei cuscinetti volventi può essere eseguita in base alla tipologia di corpo volvente, oppure in base alla tipologia di carico sopportabile dal componente. Prendendo in considerazione la tipologia di corpo volvente, i cuscinetti possono essere suddivisi in:

- Cuscinetti a sfere
  La sfera a contatto con le piste genera un'area di contatto puntiforme, la quale diventa ellittica con l'aumento del carico sul cuscinetto (Figura (3.20)). Le dimensioni ridotte dell'area di contatto permettono di avere basso attrito di rotolamento, con conseguente possibilità di operare a velocità elevate, ma con limitata capacità di carico;

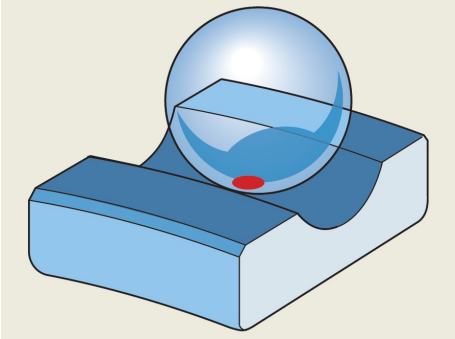


Figura 3.20: Corpo volvente sfera [113].

- Cuscinetti a rulli
  Il rullo a contatto con le piste genera un'area di contatto lineare, la quale diventa rettangolare con l'aumento del carico (Figura (3.21)). La maggiore ampiezza dell'area di contatto consente al cuscinetto di sopportare carichi più elevati, ma a velocità di rotazione inferiore rispetto ai cuscinetti a sfere.

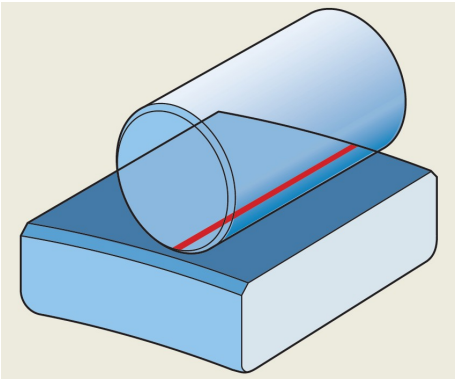
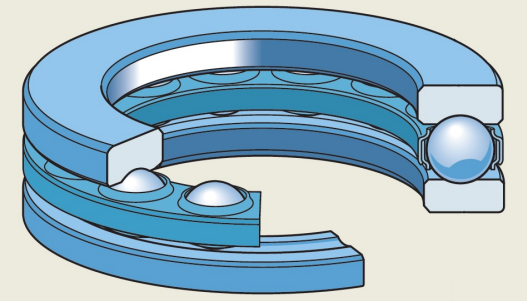


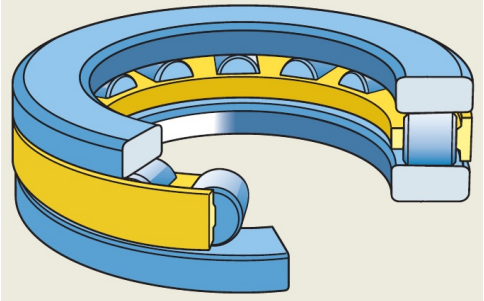
Figura 3.21: Corpo volvente rullo [113].

Considerando invece la tipologia di carico sopportabile, i cuscinetti volventi possono essere suddivisi in:

- Cuscinetti assiali
  I cuscinetti assiali a sfere (Figura (3.22a)) e a rulli (Figura (3.22b)) sono in grado di sopportare carichi che agiscono prevalentemente lungo l'asse di rotazione. Data la loro configurazione, questo tipo di cuscinetti non può operare alle stesse velocità dei cuscinetti radiali delle stesse dimensioni;



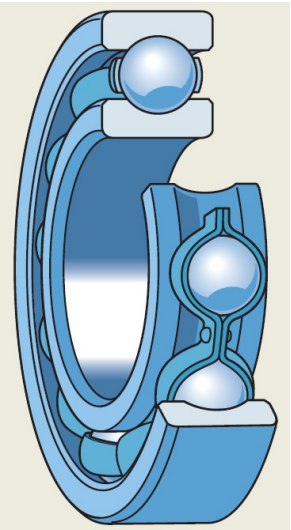
(a) Cuscinetto assiale a sfere.



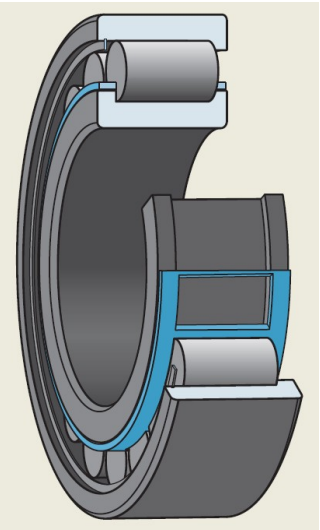
(b) Cuscinetto assiale a rulli.

Figura 3.22: Cuscinetti assiali [113].

- Cuscinetti radiali
  I cuscinetti radiali a sfere (Figura (3.23a)) e a rulli (Figura (3.23b)) sono in grado di sopportare carichi che agiscono prevalentemente in direzione ortogonale all'asse di rotazione;



(a) Cuscinetto radiale a sfere.



(b) Cuscinetto radiale a rulli.

Figura 3.23: Cuscinetti radiali [113].

- Cuscinetti obliqui a sfere
  I cuscinetti obliqui a sfere sono in grado di sopportare carichi combinati che agiscono sia in direzione assiale che radiale grazie alla forma delle proprie piste (Figura (3.24)).

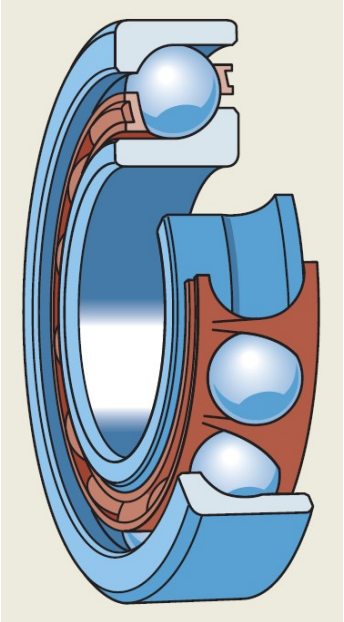


Figura 3.24: Cuscinetto obliquo a sfere [113].

- Cuscinetti a rulli conici
  Come i cuscinetti obliqui a sfere, anche i cuscinetti a rulli conici, grazie alla forma dei rulli stessi, sono realizzati per sopportare carichi combinati in direzione assiale e radiale (Figura (3.25));

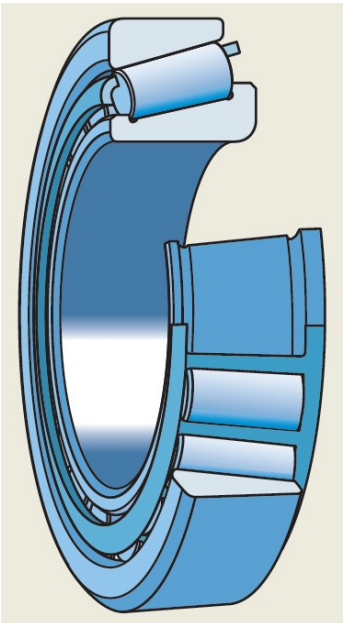


Figura 3.25: Cuscinetto a rulli conici [113].

- Cuscinetti orientabili
  I cuscinetti orientabili (in Figura (3.26) è riportato un cuscinetto orientabile a rulli) sono in grado di compensare il possibile disallineamento dell'albero su cui sono calettati tramite la forma arrotondata della pista esterna (Figura (3.27)), la quale garantisce loro proprietà di auto-allineamento.

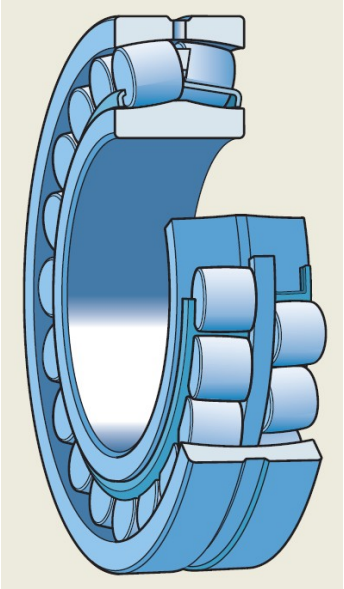
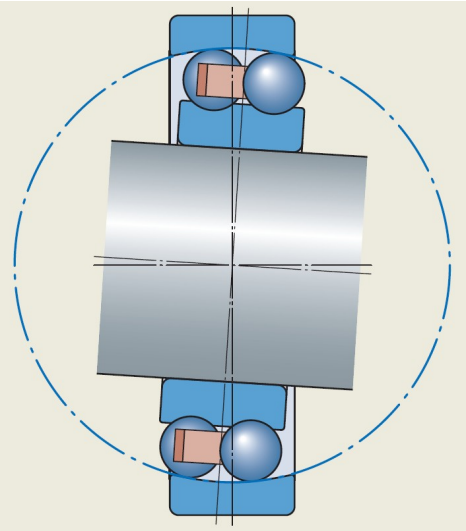
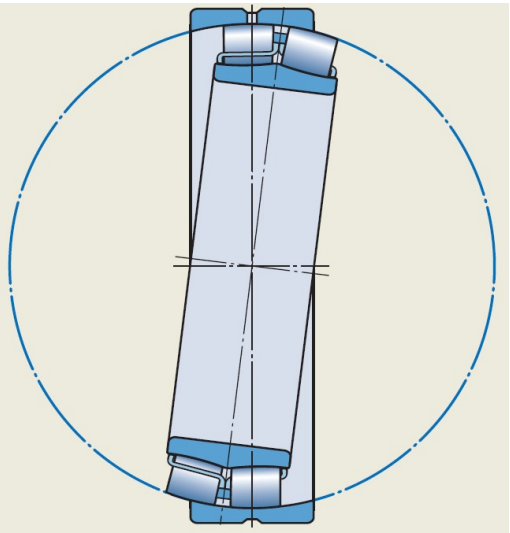


Figura 3.26: Cuscinetto orientabile a rulli [113].



(a) Compensazione disallineamento cuscinetto orientabile a sfere.



(b) Compensazione disallineamento cuscinetto orientabile a rulli.

Figura 3.27: Compensazione disallineamento cuscinetti orientabili [113].

### 3.2.1 Contatto Hertziano

Si è detto che i cuscinetti volventi permettono di supportare gli elementi rotanti all'interno dei macchinari, per cui essi esercitano delle forze di reazione su tali elementi, solitamente denominate reazioni vincolari in quanto i cuscinetti fungono da vincoli ai GDL del sistema rotante. Supponendo che i cuscinetti in analisi siano assimilabili a corpi elastici, la forza di reazione da loro generata può essere espressa come legame forza-spostamento come segue

$$F_b = k_b \cdot \delta^n \tag{3.70}$$

dove $k_b$ rappresenta la rigidezza del cuscinetto, $\delta$ rappresenta lo spostamento derivante dalla deformazione dei corpi volventi e delle piste e $n$ vale $\frac{3}{2}$ per i cuscinetti a sfera e $\frac{10}{9}$ per i cuscinetti a rulli. È facilmente intuibile che tale relazione si basa principalmente sui contatti che si creano tra i componenti del cuscinetto (soprattutto tra corpi volventi ed anelli) nel momento in cui essi reagiscono ad una sollecitazione esterna. La caratterizzazione di tali contatti e, quindi, dei termini dell'Equazione (3.70) si può effettuare mediante la teoria di Hertz [114, 115].

La teoria di Hertz si concentra sullo studio di corpi posti a contatto tra di loro in un punto (contatto tra corpi assimilabili sfere) o lungo una linea (contatto tra corpi assimilabili cilindri). La trattazione si basa su alcune ipotesi semplificative:

- Le superfici dei corpi a contatto sono topograficamente lisce, cioè si trascura la finitura superficiale;
- Le superfici dei corpi a contatto sono continue;
- Le superfici dei corpi a contatto sono non conformi, cioè il contatto avviene in zone delimitate dei corpi e non su tutta la loro superficie;
- Si trascura l'attrito;
- I materiali dei corpi a contatto sono omogenei, cioè la distribuzione delle proprietà è la stessa in tutti i punti del volume dei corpi;
- I materiali dei corpi a contatto sono isotropi, cioè le proprietà meccaniche ed elastiche sono le stesse lungo qualsiasi direzione di misurazione;
- Le deformazioni sono elastiche;
- Le aree di contatto sono piccole rispetto ai raggi di curvatura dei corpi a contatto;
- Il contatto iniziale avviene in un punto o su una linea.

Innanzitutto, è necessario definire i parametri legati alle curvature dei corpi a contatto. Considerando due generici corpi a contatto (Figura (3.28)), è possibile definire un sistema di riferimento formato da due piani coordinati, rispetto a cui è possibile determinare le curvature dei corpi come l'inverso dei raggi di curvatura, cioè

$$\rho_{i,1} = \frac{1}{r_{i,1}} \quad \rho_{i,2} = \frac{1}{r_{i,2}} \tag{3.71}$$

dove il pedice $i = I, II$ rappresenta il corpo in analisi.

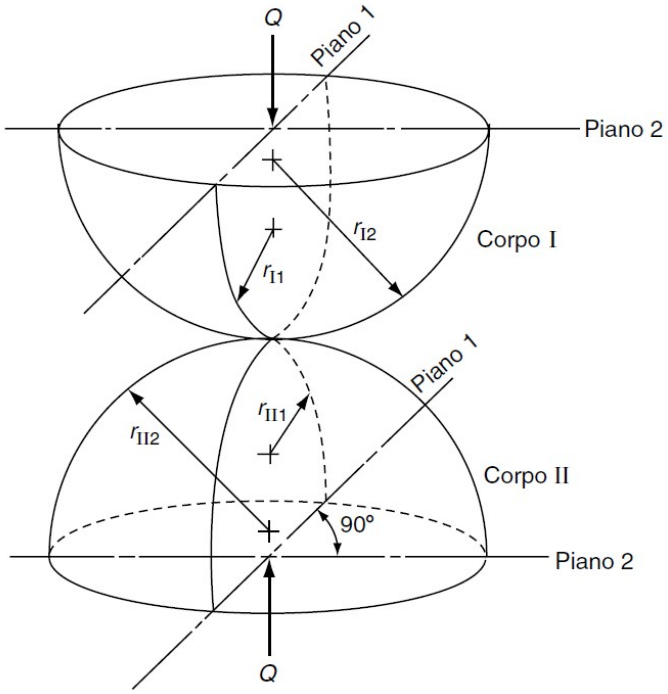



Figura 3.28: Contatto tra corpi generici [114].

È importante porre l'attenzione sul fatto che le curvature dei corpi possiedono una convenzione di segno, in particolare nel caso in cui il corpo sia convesso (in un piano) la curvatura è positiva (nello stesso piano), mentre se il corpo è concavo (in un piano) la curvatura è negativa (nello stesso piano). Si possono quindi definire i parametri di somma delle curvature

$$\Sigma\rho = \frac{1}{r_{I,1}} + \frac{1}{r_{I,2}} + \frac{1}{r_{II,1}} + \frac{1}{r_{II,2}} \tag{3.72}$$

e differenza delle curvature (sempre positiva)

$$F(\rho) = \frac{(\rho_{I,1} - \rho_{I,2}) + (\rho_{II,1} - \rho_{II,2})}{\Sigma\rho} \tag{3.73}$$

Sulla base di tali parametri è possibile ricavare la soluzione del problema di contatto tra corpi elastici, la cui trattazione teorica è riportata in [115]. In generale, si può dimostrare che l'area di contatto che si genera su due generici corpi in accostamento relativo ha la forma di un'ellisse (Figura (3.29)).

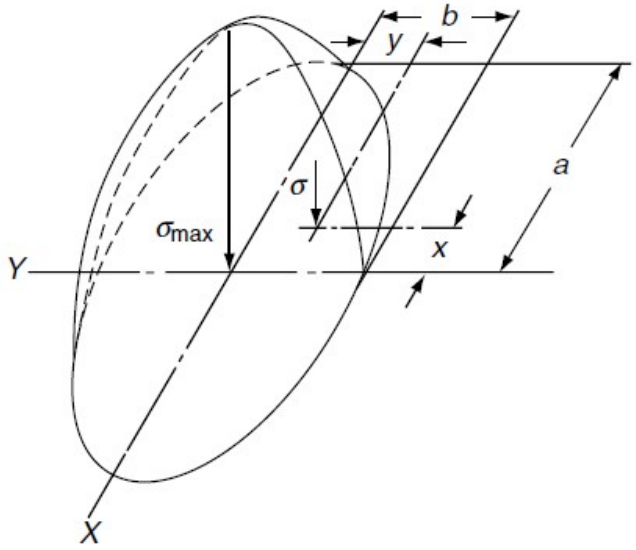



Figura 3.29: Ellisse di contatto tra corpi generici [115].

La misura dei semiassi $a$ e $b$ dell'ellisse di contatto si può calcolare come

$$\begin{aligned} a &= a^* \left[ \frac{3Q}{2\sum\rho} \left( \frac{1-\nu_I^2}{E_I} + \frac{1-\nu_{II}^2}{E_{II}} \right) \right]^{\frac{1}{3}} \\ b &= b^* \left[ \frac{3Q}{2\sum\rho} \left( \frac{1-\nu_I^2}{E_I} + \frac{1-\nu_{II}^2}{E_{II}} \right) \right]^{\frac{1}{3}} \end{aligned} \tag{3.74}$$

mentre la deformazione $\delta$ subita dai corpi si può determinare come

$$\delta = \delta^* \left[ \frac{3Q}{2\sum\rho} \left( \frac{1-\nu_I^2}{E_I} + \frac{1-\nu_{II}^2}{E_{II}} \right) \right]^{\frac{2}{3}} \frac{\sum\rho}{2} \tag{3.75}$$

dove $Q$ è il carico applicato ai corpi a contatto, $\nu_i$ e $E_i$ sono rispettivamente il modulo di Poisson e il modulo elastico dei materiali dei corpi, mentre $a^*$, $b^*$ e $\delta^*$ sono parametri adimensionali ricavati da grafico in funzione di $F(\rho)$ [115].

La trattazione appena descritta è applicabile nel caso dei cuscinetti volventi a sfere, per cui ricordando l'Equazione (3.70), è possibile definire la rigidezza di contatto del cuscinetto come

$$k_b = \left[ \frac{3}{2\sum\rho} \left( \frac{1-\nu_I^2}{E_I} + \frac{1-\nu_{II}^2}{E_{II}} \right) \right]^{-1} \left[ \delta^* \frac{\sum\rho}{2} \right]^{-\frac{3}{2}} \tag{3.76}$$

Nel caso in cui il cuscinetto volvente in esame sia un cuscinetto a rulli, la trattazione subisce alcune modifiche. Il contatto tra rulli può essere assimilato a un contatto tra due cilindri che si sviluppa lungo una linea di lunghezza $l$ pari alla lunghezza della zona di contatto determinabile a priori. All'aumentare del carico, la zona di contatto aumenta le proprie dimensioni assumendo una forma rettangolare (Figura (3.30))

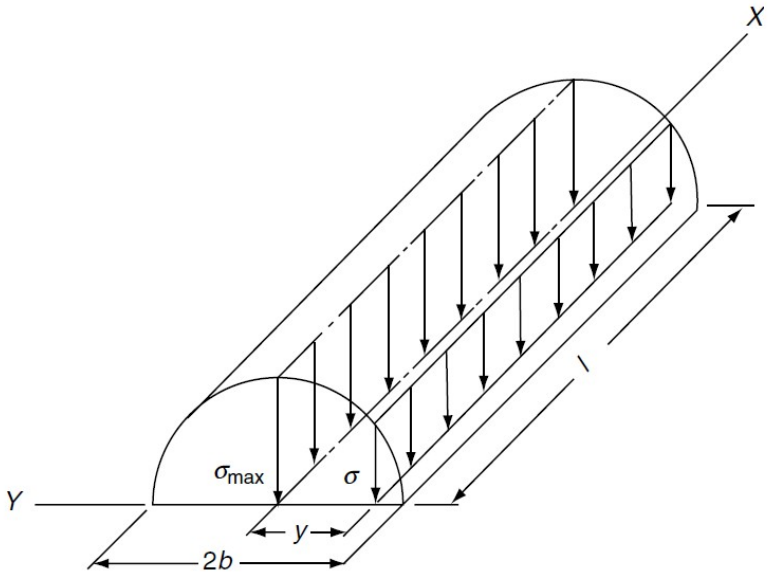



Figura 3.30: Rettangolo di contatto tra corpi cilindrici [115].

la cui semi-larghezza $b$ si può determinare come

$$b = \left[\frac{4Q}{\pi L \sum \rho}\left(\frac{1-\nu_I^2}{E_I} + \frac{1-\nu_{II}^2}{E_{II}}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.77}$$

dove $Q$ è il carico applicato ai corpi a contatto, $\nu_i$ e $E_i$ sono rispettivamente il modulo di Poisson e il modulo elastico dei materiali dei corpi e $l$ è la lunghezza di contatto. Nel caso in cui i due corpi a contatto siano entrambi in acciaio, la determinazione della deformazione $\delta$ di contatto può avvenire tramite la formula empirica presentata da Palmgren et al. [116]

$$\delta = 3{,}84 \cdot 10^{-5} \frac{Q^{0,9}}{l^{0,8}} \tag{3.78}$$

dove $Q$ è la forza di contatto espressa in $[N]$ e $l$ è la lunghezza dell'area di contatto espressa in $[mm]$. A questo punto, per un cuscinetto a rulli per cui vale l'Equazione (3.78), ricordando l'Equazione (3.70) è possibile definire la rigidezza di contatto del cuscinetto come

$$k_b = \left[\frac{l^{0,8}}{3{,}84 \cdot 10^{-5}}\right]^{\frac{10}{9}} \tag{3.79}$$

### 3.2.2 Modello di Stribeck

Durante il funzionamento, ciascun corpo volvente opera in condizioni di compressione tra le piste del cuscinetto. Tale condizione, però, non si sviluppa lungo tutta la circonferenza delle piste, ma in una precisa area del cuscinetto denominata zona di carico. Per questo motivo, la forza di reazione effettiva che esprime ciascun corpo volvente alla compressione non è sempre costante, ma varia da un valore nullo all'ingresso e all'uscita della zona di carico, passando per un valore massimo in corrispondenza della direzione di applicazione del carico esterno. Inoltre, si può dimostrare che l'ampiezza della zona di carico in esame dipende fortemente dal gioco radiale presente all'interno del cuscinetto. In particolare, un gioco radiale positivo diminuisce l'ampiezza della zona di carico, mentre un gioco radiale negativo (cioè lo sviluppo di una penetrazione) aumenta l'ampiezza.

Stribeck formulò una legge per descrivere il valore del carico sopportato da un corpo volvente compresso tra le piste, in funzione della posizione angolare $\psi$ rispetto alla direzione del carico esterno [117] (Figura (3.31)).

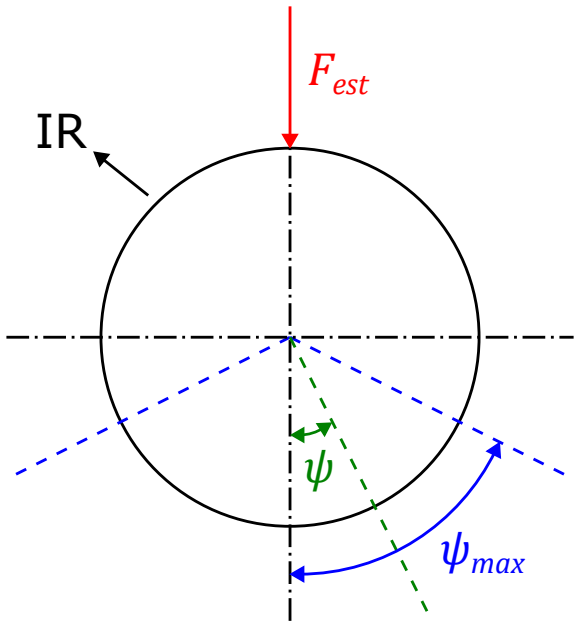



Figura 3.31: Zona di carico modello di Stribeck.

Tale valore può essere espresso come

$$Q(\psi) = \begin{cases} Q_0 \left(1 - \frac{1}{2\varepsilon}(1 - \cos(\psi))\right)^n & -\psi_{\max} \leq \psi \leq \psi_{\max} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \tag{3.80}$$

dove $Q_0$ è il carico massimo assoluto sopportato dal corpo volvente in asse con il carico (per $\psi = 0$), $n$ è l'esponente della teoria di Hertz che vale $\frac{3}{2}$ per i cuscinetti

a sfere e $\frac{10}{9}$ per i cuscinetti a rulli, $\psi_{max}$ è l'ampiezza massima della zona di carico (Figura (3.31)) calcolabile come

$$\psi_{max} = cos^{-1}\left(\frac{g_r\ cos(\alpha)}{\delta_r}\right) \tag{3.81}$$

e $\varepsilon$ è il fattore di estensione della zona di carico calcolabile come

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{g_r\ cos(\alpha)}{\delta_r}\right) \tag{3.82}$$

All'interno delle Equazioni (3.81) e (3.82) $g_r$ rappresenta il gioco radiale all'interno del cuscinetto, $\alpha$ è l'angolo di contatto tra corpi volventi e piste e $\delta_r$ è lo scostamento radiale totale definito come la somma degli scostamenti radiali di anello interno ($\delta_{IR}$) ed esterno ($\delta_{OR}$) rispetto alla loro posizione concentrica, cioè

$$\delta_r = \delta_{IR} + \delta_{OR} \tag{3.83}$$

Osservando l'Equazione (3.81), si può notare che per un gioco radiale $g_r$ nullo si ottiene un valore massimo dell'ampiezza $\psi_{max}$ pari a 90°, per cui l'ampiezza effettiva della zona di carico è pari a 180°specchiando tale angolo rispetto alla direzione del carico esterno. Tale valore di ampiezza è caratterizzato da un valore di $\varepsilon$ pari a 0,5 ottenuto dall'Equazione (3.82) ponendo $g_r = 0$.

## 3.3 Metodo degli elementi finiti

In generale, la maggior parte dei fenomeni fisici sono descritti mediante equazioni differenziali alle derivate parziali (*Partial Differential Equations*, PDEs), la cui soluzione in forma chiusa è possibile esclusivamente nel caso di geometrie semplici e un numero limitato di condizioni al contorno. Il metodo degli elementi finiti (*Finite Element Method*, FEM) è una soluzione numerica in forma integrale su un dominio finito discretizzato di un problema fisico-matematico descritto tramite equazioni differenziali alle derivate parziali. La formulazione del metodo degli elementi finiti prevede la divisione della struttura in esame in "elementi finiti", cioè parti di dimensioni ridotte, in modo tale da consentire il passaggio dalle equazioni differenziali alle derivate parziali alle equazioni differenziali ordinarie (*Ordinary Differential Equations*, ODEs). Tali elementi possiedono dei punti di estremo chiamati nodi tramite cui possono interfacciarsi con altri elementi a loro vicini. L'insieme di tutti gli elementi utilizzati per suddividere la struttura forma la *mesh* della discretizzazione.

Ipotizzando di considerare un generico elemento, gli spostamenti dei suoi punti possono essere scritti nello spazio tridimensionale come un vettore di ordine 3 (se sono analizzate solo le traslazioni), oppure 4, 5 o 6 (se sono analizzate rispettivamente anche 1, 2 o 3 rotazioni). Nel metodo degli elementi finiti, tali spostamenti

vengono definiti sulla base degli spostamenti dei nodi dell'elemento stesso, mediante la relazione

$$\{\mathbf{u}(x,y,z,t)\} = [\mathbf{N}(x,y,z)]\,\{\mathbf{q}(t)\} \tag{3.84}$$

dove $\{\mathbf{u}(x,y,z,t)\}$ rappresenta il vettore degli spostamenti di un generico punto all'interno dell'elemento, $[\mathbf{N}(x,y,z)]$ è la matrice delle funzioni di forma e $\{\mathbf{q}(t)\}$ è il vettore degli spostamenti nodali. Le funzioni di forma contenute in $[\mathbf{N}(x,y,z)]$ sono delle espressioni matematiche che collegano gli spostamenti del generico punto dell'elemento agli spostamenti nodali. Considerando la formulazione appena descritta, è importante sottolineare che i risultati dell'analisi svolta mediante FEM sono tanto più accurati rispetto alla soluzione esatta (delle ODEs) tanto più la dimensione degli elementi della discretizzazione è piccola. Ciò significa che, ipoteticamente, la soluzione esatta del problema può essere raggiunta solamente con una dimensione degli elementi nulla, per cui al termine dell'analisi si otterrà sempre un errore chiamato residuo che è necessario minimizzare.

### 3.3.1 Funzioni di forma e matrici elementali

Le funzioni di forma hanno come obiettivo descrivere la fisica del problema. La loro scelta è del tutto arbitraria, tuttavia devono rispettare alcune condizioni:

- Devono essere funzioni continue, differenziabili fino ad un certo ordine in base al tipo di elemento;
- Devono rappresentare il moto rigido;
- Devono rappresentare uno stato di deformazione costante;
- Devono garantire la continuità tra elementi adiacenti;
- Devono essere isotrope.

Il tipo di funzione scelto per l'applicazione del metodo FEM sono le funzioni polinomiali, in modo tale che, anche non conoscendo il risultato finale, le incognite del problema in analisi diventano i coefficienti del polinomio, i quali devono quindi essere determinati. A seconda delle dimensioni del campo di spostamenti studiato, le funzioni di forma assumono scritture differenti:

- Campo di spostamenti monodimensionale

$$u_x = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + ... \tag{3.85}$$

- Campo di spostamenti bidimensionale

$$\begin{cases} u_x = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy + ... \\ u_y = b_1 + b_2 x + b_3 y + b_4 xy + ... \end{cases} \tag{3.86}$$

- Campo di spostamenti tridimensionale

$$\begin{cases} u_x = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 z + ... \\ u_y = b_1 + b_2 x + b_3 y + b_4 z + ... \\ u_z = c_1 + c_2 x + c_3 y + c_4 z + ... \end{cases} \tag{3.87}$$

Le funzioni di forma sono anche utilizzate per descrivere le tensioni e le deformazioni che si generano all'interno della struttura a seguito di una sollecitazione. Infatti, vale la relazione

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}(x,y,z,t)\} = [\mathbf{B}(x,y,z)]\{\mathbf{q}(t)\} \tag{3.88}$$

dove la matrice $[\mathbf{B}(x,y,z)]$ è la matrice delle derivate delle funzioni di forma che collega le deformazioni $\{\boldsymbol{\varepsilon}(x,y,z,t)\}$ agli spostamenti nodali. Ipotizzando che il materiale sia caratterizzato da comportamento lineare tra tensioni e deformazioni e che non sia soggetto a tensioni o deformazioni iniziali, è possibile scrivere

$$\{\boldsymbol{\sigma}(x,y,z,t)\} = [\mathbf{E}(x,y,z)]\{\boldsymbol{\varepsilon}(x,y,z,t)\} = [\mathbf{E}(x,y,z)][\mathbf{B}(x,y,z)]\{\mathbf{q}(t)\} \tag{3.89}$$

dove $[\mathbf{E}(x,y,z)]$ è la matrice costitutiva del materiale, che lega tra loro le tensioni $\{\boldsymbol{\sigma}(x,y,z,t)\}$ e le deformazioni $\{\boldsymbol{\varepsilon}(x,y,z,t)\}$.

A questo punto, avendo definito gli spostamenti, le tensioni e le deformazioni all'interno di un elemento, è possibile ricavare le matrici elementali di rigidezza e di massa. A tal proposito, l'energia potenziale dell'elemento si può esprimere come

$$U = \frac{1}{2}\int_V \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^T\{\boldsymbol{\sigma}\}\,dV = \frac{1}{2}\{\mathbf{q}\}^T\left(\int_V [\mathbf{B}]^T[\mathbf{E}][\mathbf{B}]\,dV\right)\{\mathbf{q}\} \tag{3.90}$$

da cui è possibile definire la matrice di rigidezza dell'elemento finito come

$$[\mathbf{K}] = \int_V [\mathbf{B}]^T[\mathbf{E}][\mathbf{B}]\,dV \tag{3.91}$$

Considerando, invece, l'energia cinetica dell'elemento, essa si può scrivere come

$$T = \frac{1}{2}\int_V \rho\,\{\dot{\mathbf{u}}\}^T\{\dot{\mathbf{u}}\}\,dV = \frac{1}{2}\{\dot{\mathbf{q}}\}^T\left(\int_V \rho\,[\mathbf{N}]^T[\mathbf{N}]\,dV\right)\{\dot{\mathbf{q}}\} \tag{3.92}$$

da cui è possibile definire la matrice di massa dell'elemento come

$$[\mathbf{M}] = \int_V \rho\,[\mathbf{N}]^T[\mathbf{N}]\,dV \tag{3.93}$$

La matrice appena ottenuta è chiamata matrice di massa consistente, perché è consistente con la formulazione utilizzata per ottenere la matrice di rigidezza, ed è una matrice completa (a differenza di quella che si ottiene con la formulazione a parametri concentrati che è una matrice diagonale).

Infine, supponendo che l'elemento sia soggetto ad una forza distribuita $\{\mathbf{f}(x,y,z,t)\}$, è possibile esprimere il lavoro virtuale infinitesimo sull'elemento come

$$\delta L = \int_V \delta\{\mathbf{u}\}^T \{\mathbf{f}(x,y,z,t)\}\, dV = \int_V \delta\{\mathbf{q}\}^T [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{f}(x,y,z,t)\}\, dV \tag{3.94}$$

da cui è possibile definire il vettore delle forze esterne agenti sull'elemento nel tempo come

$$\{\mathbf{f}(t)\} = \int_V [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{f}(x,y,z,t)\}\, dV \tag{3.95}$$

In conclusione, l'equazioni del moto del singolo elemento finito possono essere scritte in forma matriciale come

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}(t)\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}(t)\} = \{\mathbf{f}(t)\} \tag{3.96}$$

ottenendo così un sistema di equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine. Se si conoscono le proprietà delle matrici $[\mathbf{M}]$ e $[\mathbf{K}]$ ed è possibile ricavare il vettore delle forze esterne $\{\mathbf{f}(t)\}$, allora si può risolvere il sistema di ODEs come nel caso dell'approccio a parametri concentrati e calcolare gli spostamenti nodali $\{\mathbf{q}(t)\}$. A questo punto è poi possibile ottenere gli spostamenti, le deformazioni e le tensioni all'interno dell'elemento rispettivamente mediante le Equazioni (3.84), (3.88) e (3.89).

### 3.3.2 Elemento trave di Eulero-Bernoulli

Un corpo può essere definito trave nel caso in cui una delle sue tre dimensioni sia molto maggiore rispetto alle altre due e, quindi, il suo comportamento può essere approssimato con il comportamento del suo asse mediano. Nella seguente trattazione teorica sull'elemento trave si effettuano alcune ipotesi:

- L'elemento ha sezione prismatica (cioè ha sezione trasversale planare);
- L'elemento è omogeneo (cioè possiede proprietà meccaniche costanti);
- L'elemento è isotropo (cioè le proprietà meccaniche non dipendono dalla direzione considerata);
- La lunghezza è la dimensione principale;
- L'elemento possiede 1 nodo ad ogni estremità, ciascuno caratterizzato da 6 gradi di libertà (3 traslazioni e 3 rotazioni).

Una rappresentazione dell'elemento trave è riportata in Figura (3.32).

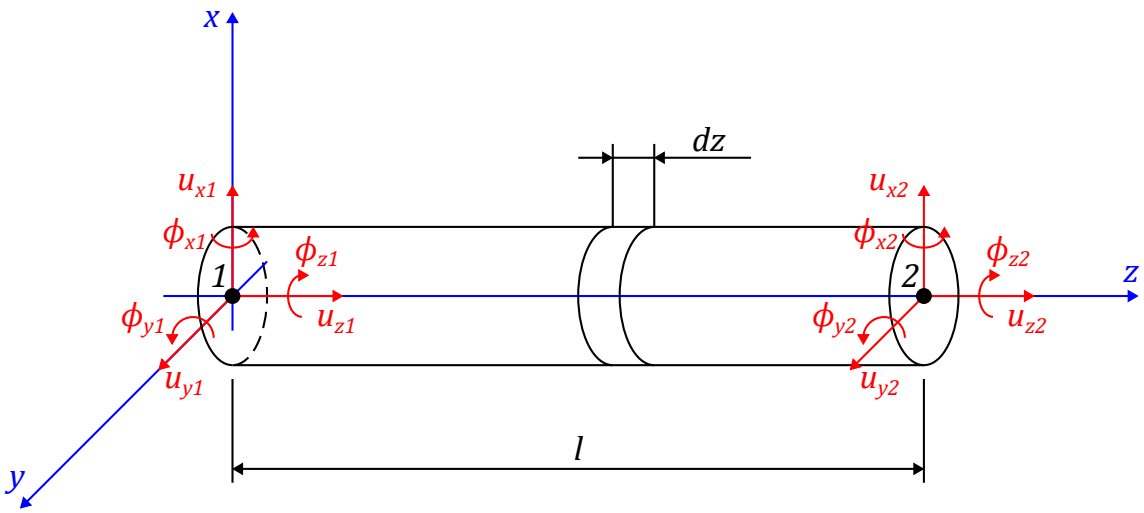



Figura 3.32: Elemento trave.

In aggiunta alle ipotesi appena descritte, si aggiunge l'ipotesi della trave di Eulero-Bernoulli secondo cui, durante la deformazione flessionale, la sezione trasversale della trave rimane sempre perpendicolare al suo asse mediano, come mostrato in Figura (3.33).

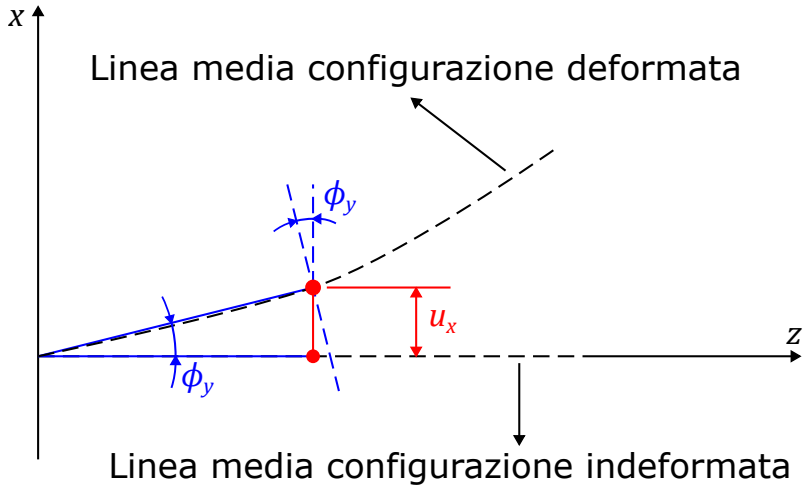



Figura 3.33: Rappresentazione rotazione locale della sezione, trave di Eulero-Bernoulli.

La perpendicolarità della sezione trasversale rispetto all'asse mediano permette, nel caso di piccoli spostamenti radiali, di definire la rotazione locale della sezione $\phi$ come la derivata parziale di tale spostamento rispetto alla coordinata assiale. Nell'esempio della Figura (3.33), si può quindi scrivere che

$$\phi_y = \frac{\partial u_x}{\partial z} \tag{3.97}$$

Dal momento che ciascun nodo dell'elemento è caratterizzato da 6 GDL, il vettore degli spostamenti nodali si può scrivere come

$$\{\mathbf{q}\} = \begin{bmatrix} u_{x1} & u_{y1} & u_{z1} & \phi_{x1} & \phi_{y1} & \phi_{z1} & u_{x2} & u_{y2} & u_{z2} & \phi_{x2} & \phi_{y2} & \phi_{z2} \end{bmatrix}^T \tag{3.98}$$

Supponendo che la trave sia caratterizzata da piccoli spostamenti e piccole rotazioni è possibile ipotizzare che il moto lungo ciascuna direzione sia disaccoppiato rispetto alle altre direzioni. Se ciò è valido, allora si possono definire 4 vettori degli spostamenti nodali come segue

$$\begin{aligned} \{\mathbf{q_A}\} &= \begin{Bmatrix} u_{z1} \\ u_{z2} \end{Bmatrix} \qquad \{\mathbf{q_T}\} = \begin{Bmatrix} \phi_{z1} \\ \phi_{z2} \end{Bmatrix} \\ \{\mathbf{q_{F_1}}\} &= \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ \phi_{y1} \\ u_{x2} \\ \phi_{y2} \end{Bmatrix} \qquad \{\mathbf{q_{F_2}}\} = \begin{Bmatrix} u_{y1} \\ \phi_{x1} \\ u_{y2} \\ \phi_{x2} \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{3.99}$$

i quali rappresentano rispettivamente il comportamento assiale, il comportamento torsionale, il comportamento flessionale nel piano $xz$ e il comportamento flessionale nel piano $yz$. A questo punto è possibile riordinare il vettore degli spostamenti nodali nel seguente modo

$$\{\mathbf{q}\} = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{q_A}\}^T & \{\mathbf{q_T}\}^T & \{\mathbf{q_{F_1}}\}^T & \{\mathbf{q_{F_2}}\}^T \end{Bmatrix}^T \tag{3.100}$$

e esprimere gli spostamenti di un generico punto all'interno dell'elemento come

$$\{\mathbf{u}(z,t)\} = \begin{Bmatrix} u_z \\ \phi_z \\ u_x \\ \phi_y \\ u_y \\ \phi_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{N_A}] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [\mathbf{N_T}] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [\mathbf{N_{F_1}}] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [\mathbf{N_{F_2}}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\mathbf{q_A}\} \\ \{\mathbf{q_T}\} \\ \{\mathbf{q_{F_1}}\} \\ \{\mathbf{q_{F_2}}\} \end{Bmatrix} \tag{3.101}$$

Si può notare che gli spostamenti del generico punto interno alla trave $\{\mathbf{u}(z,t)\}$ dipendono solamente da $z$ e da $t$ in quanto l'elemento trave è considerato un elemento mono-dimensionale, per cui l'attenzione è posta sulle posizioni dei punti lungo il suo asse.

### Comportamento assiale

Nel presente paragrafo verrà trattata nel dettaglio l'analisi del comportamento assiale dell'elemento trave. Dal momento che la risoluzione dei comportamenti torsionale e flessionale (nei piani $xz$ e $yz$) segue la stessa logica matematica, nel seguito la trattazione di tali comportamenti includerà solamente i passi fondamentali e i risultati dell'analisi.

La situazione analizzata può essere rappresentata come in Figura (3.34).

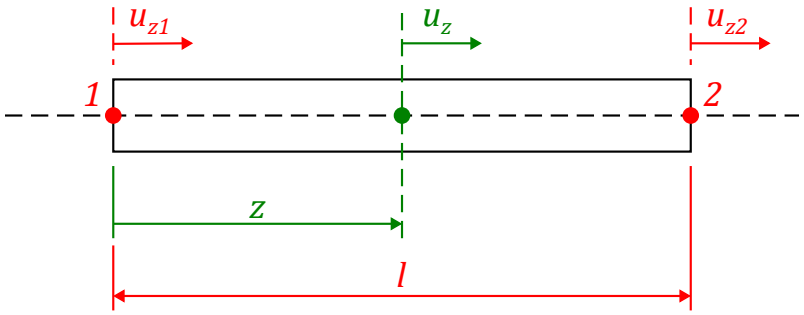



Figura 3.34: Analisi comportamento assiale elemento trave.

Supponendo valida l'ipotesi di disaccoppiamento dei vari comportamenti dell'elemento trave, gli spostamenti assiali di un generico punto interno ad esso possono essere espressi come

$$u_z(z,t) = \begin{bmatrix} N_{A1}(z) & N_{A2}(z) \end{bmatrix} \{\mathbf{q_A}\} = \begin{bmatrix} N_{A1}(z) & N_{A2}(z) \end{bmatrix}_A \begin{Bmatrix} u_{z1}(t) \\ u_{z2}(t) \end{Bmatrix} \tag{3.102}$$

Per ottenere tali spostamenti è necessario innanzitutto definire le funzioni di forma $N_{11}(z)$ e $N_{12}(z)$. L'elemento in analisi possiede 2 nodi alle estremità, i quali possono muoversi solamente lungo la direzione $z$, per cui il campo di spostamenti considerato è mono-dimensionale e di conseguenza la funzione di forma ad esso associata sarà del tipo

$$u_z = a_1 + a_2 z \tag{3.103}$$

che riscritta in forma matriciale diventa

$$u_z(z) = \begin{bmatrix} 1 & z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \tag{3.104}$$

Si può facilmente verificare che tale funzione di forma rispetta tutte le condizioni precedentemente descritte affinché essa sia valida. A questo punto si applica la funzione di forma ai nodi dell'elemento, per cui è possibile scrivere

$$\begin{Bmatrix} u_{z1} \\ u_{z2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \tag{3.105}$$

Dal momento che gli spostamenti nodali $u_{z1}$ e $u_{z2}$ sono quantità note, è possibile ottenere i coefficienti $a_1$ e $a_2$ semplicemente invertendo la matrice presente all'interno dell'equazione, per cui

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & l \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} u_{z1} \\ u_{z2} \end{Bmatrix} \tag{3.106}$$

A questo punto è possibile sostituire l'espressione dei coefficienti dell'Equazione (3.106) all'interno dell'Equazione (3.104), ottenendo

$$u_z(z) = \begin{bmatrix} 1 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & l \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} u_{z1} \\ u_{z2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{z}{l} & \frac{z}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{z1}(t) \\ u_{z2}(t) \end{Bmatrix} \tag{3.107}$$

Dall'Equazione (3.107) è possibile definire le funzioni di forma

$$N_{A1}(z) = 1 - \frac{z}{l} \qquad N_{A2}(z) = \frac{z}{l} \tag{3.108}$$

la cui rappresentazione è quindi mostrata in Figura (3.35).

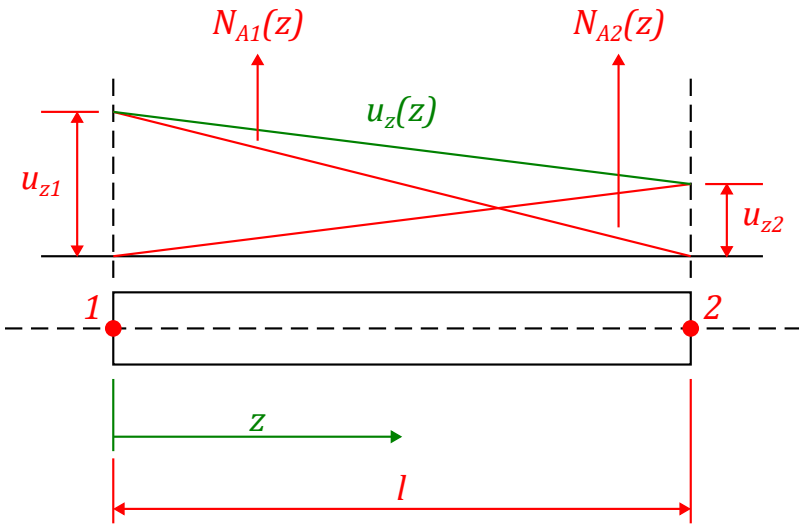



Figura 3.35: Funzioni di forma comportamento assiale elemento trave.

La combinazione delle funzioni di forma $N_{A1}(z)$ e $N_{A2}(z)$ permette quindi di descrivere l'andamento degli spostamenti all'interno dell'elemento trave sulla base degli spostamenti nodali $u_{z1}$ e $u_{z2}$, come riportato in Figura (3.35).

Infine, per concludere l'analisi è necessario procedere al calcolo delle matrici di massa e di rigidezza associate al comportamento assiale. Per quanto riguarda la matrice di massa, applicando la definzione dell'Equazione (3.93) e sostituendo al suo interno l'espressione delle funzioni di forma dell'Equazione (3.108), si ottiene

$$[\mathbf{M}] = \rho A \int_0^l \left( \begin{bmatrix} 1 - \frac{z}{l} \\ \frac{z}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \frac{z}{l} & \frac{z}{l} \end{bmatrix} \right) dz = \frac{\rho A l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{3.109}$$

dove $\rho$ rappresenta la densità del materiale dell'elemento trave e $A$ la sua sezione trasversale. Per quanto riguarda, invece, la matrice di rigidezza è necessario

innanzitutto calcolare le deformazioni all'interno dell'elemento. È noto che la deformazione assiale di un elemento trave può essere definita come la derivata parziale degli spostamenti assiali rispetto alla coordinata assiale, per cui si ottiene

$$\varepsilon_z(z) = \frac{\partial u_z(z)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\alpha_1 + \alpha_2 z\right) = \alpha_2 \tag{3.110}$$

da cui è possibile scrivere

$$\varepsilon_z(z) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \tag{3.111}$$

Ricordando l'Equazione (3.106) è quindi possibile scrivere

$$\varepsilon_z(z) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & l \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} u_{z1} \\ u_{z2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{z1} \\ u_{z2} \end{Bmatrix} \tag{3.112}$$

e di conseguenza è possibile definire la matrice

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} \tag{3.113}$$

In conclusione, ricordando l'Equazione (3.91) è possibile scrivere che

$$[\mathbf{K}] = A \int_0^l \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} \\ \frac{1}{l} \end{bmatrix} E \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} dz = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.114}$$

È possibile verificare che tale risultato è conforme alla teoria delle travi, anche se la trattazione ha avuto come punto di partenza funzioni di forma scelte in modo arbitrario.

### Comportamento torsionale

Dal momento che le condizioni al contorno e le proprietà del materiale rimangono invariate, la trattazione del comportamento torsionale è la medesima svolta per il comportamento assiale. Le funzioni di forma utilizzate per descrivere il campo degli spostamenti sono

$$[\mathbf{N_T}] = \begin{bmatrix} 1 - \frac{z}{l} & \frac{z}{l} \end{bmatrix} \tag{3.115}$$

mentre le matrici di massa e di rigidezza sono rispettivamente

$$[\mathbf{M}] = \frac{\rho I_p l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{3.116}$$

$$[\mathbf{K}] = \frac{G I_p}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.117}$$

dove $G$ è il modulo di elasticità tangenziale del materiale e $I_p$ è il momento d'inerzia di superficie polare della sezione.

### Comportamento flessionale

Si considera il comportamento flessionale della trave nel piano $xz$, come rappresentato nella Figura (3.36).

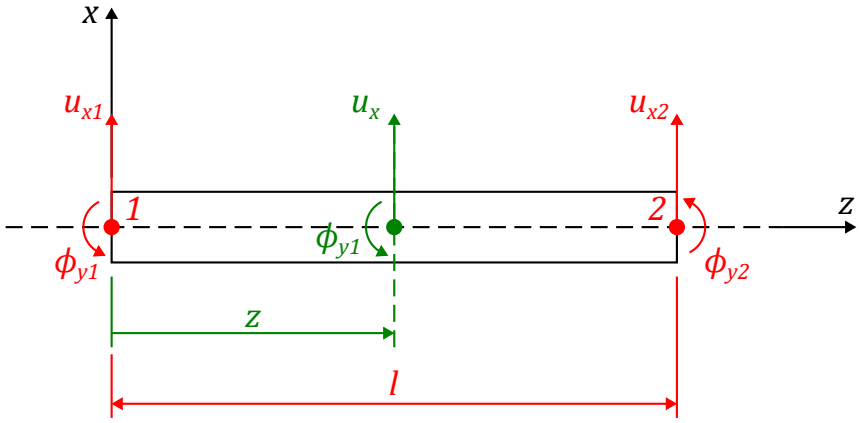



Figura 3.36: Analisi comportamento flessionale nel piano $xz$ elemento trave.

Dal momento che in questo caso si hanno 2 gradi di libertà per nodo, l'espressione della funzione di forma riferita allo spostamento radiale $u_x$ sarà

$$u_x(z) = a_1 + a_2 z + a_3 z^2 + a_4 z^3 \tag{3.118}$$

Ricordando che per una trave di Eulero-Bernoulli vale la relazione espressa dall'Equazione (3.97), allora è possibile scrivere

$$\phi_y(z) = a_2 + 2a_3 z + 3a_4 z^2 \tag{3.119}$$

È possibile concludere quindi che, per una trave di Eulero-Bernoulli, il comportamento flessionale in un piano può essere descritto mediante soli 4 coefficienti. Le funzioni di forma possono essere riscritte in forma matriciale come

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ \phi_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & z & z^2 & z^3 \\ 0 & 1 & 2z & 3z^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \tag{3.120}$$

A questo punto, dopo aver applicato le funzioni di forma ai nodi e aver ricavato l'espressione dei coefficienti in funzione degli spostamenti nodali, è possibile ottenere gli spostamenti di un generico punto all'interno della trave come

$$\begin{Bmatrix} u_x(z,t) \\ \phi_y(z,t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & z & z^2 & z^3 \\ 0 & 1 & 2z & 3z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} u_{x1}(t) \\ \phi_{y1}(t) \\ u_{x2}(t) \\ \phi_{y2}(t) \end{Bmatrix} \tag{3.121}$$

da cui si può definire la matrice delle funzioni di forma

$$[\mathbf{N_{F1}}] = \begin{bmatrix} 1-3\xi^2+2\xi^3 & l(\xi-2\xi^2+\xi^3) & 3\xi^2-2\xi^3 & l(-\xi^2+\xi^3) \\ \frac{1}{l}(-6\xi+6\xi^2) & 1-4\xi+3\xi^2 & \frac{1}{l}(6\xi-6\xi^2) & -2\xi+3\xi^2 \end{bmatrix} \tag{3.122}$$

dove $\xi = \frac{z}{l}$.

Ricordando che per una trave con comportamento flessionale la deformazione assiale corrisponde alla curvatura, assumendo che dopo la deformazione la sezione trasversale sia ancora piana e perpendicolare all'asse, si può scrivere che

$$\varepsilon(z) = \frac{1}{R}(z) = \frac{\partial \phi_y}{\partial z} \tag{3.123}$$

dove $R$ è il raggio di curvatura dell'asse della trave. Dopodiché, procedendo allo stesso modo visto per il comportamento assiale, è possibile ottenere la matrice delle derivate delle funzioni di forma

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} -\frac{6}{l^2}+\frac{12z}{l^3} & -\frac{4}{l}+\frac{6z}{l^2} & \frac{6}{l^2}-\frac{12z}{l^3} & -\frac{2}{l}+\frac{6z}{l^2} \end{bmatrix} \tag{3.124}$$

con cui, tramite l'Equazione (3.91), è possibile ottenere la matrice di rigidezza della trave associata al comportamento flessionale nel piano $xz$, che vale

$$[\mathbf{K}] = \frac{EI_y}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \tag{3.125}$$

dove $I_y$ è il momento d'inerzia di superficie trasversale relativo all'asse $y$.

Per quanto riguarda la matrice di massa, l'energia cinetica dell'elemento trave è formata da due contributi, uno relativo alla traslazione lungo l'asse $x$ e uno relativo alla rotazione rispetto all'asse $y$. Essa è pertanto esprimibile come

$$\begin{aligned} T = &\frac{1}{2}\rho A \{\dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{F_1}}\}^T \left( \int_0^l [\mathbf{N}(1,:)]^T [\mathbf{N}(1,:)]\, dz \right) \{\dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{F_1}}\} \\ &+ \frac{1}{2}\rho I_y \{\dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{F_1}}\}^T \left( \int_0^l [\mathbf{N}(2,:)]^T [\mathbf{N}(2,:)]\, dz \right) \{\dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{F_1}}\} \end{aligned} \tag{3.126}$$

da cui il contenuto della prima parentesi tonda restituisce la matrice di massa relativa alla traslazione

$$[\mathbf{M}_1] = \frac{\rho A l}{420} \begin{bmatrix} m_1 & lm_2 & m_3 & -lm_4 \\ lm_2 & l^2 m_5 & lm_4 & -l^2 m_6 \\ m_3 & lm_4 & m_1 & -lm_2 \\ -lm_4 & -l^2 m_6 & -lm_2 & l^2 m_5 \end{bmatrix} \tag{3.127}$$

dove $m_1 = 156$, $m_2 = 22$, $m_3 = 54$, $m_4 = 13$, $m_5 = 4$ e $m_6 = 3$, mentre il contenuto della seconda parentesi tonda restituisce la matrice di massa relativa alla rotazione

$$[\mathbf{M}_2] = \frac{\rho I_y}{30\,l} \begin{bmatrix} m_7 & lm_8 & -m_7 & lm_8 \\ lm_8 & l^2 m_9 & -lm_8 & -l^2 m_{10} \\ -m_7 & -lm_8 & m_7 & -lm_8 \\ lm_8 & -l^2 m_{10} & -lm_8 & l^2 m_9 \end{bmatrix} \tag{3.128}$$

dove $m_7 = 36$, $m_8 = 3$, $m_9 = 4$ e $m_{10} = 1$. La matrice di massa totale dell'elemento riferita al comportamento flessionale nel piano $xz$ è data dalla somma delle due matrici di massa.

Per quanto riguarda il comportamento flessionale nel piano $yz$, la trattazione è analoga a quanto appena affrontato per il piano $xz$. L'unica modifica da apportare è un segno negativo ai valori delle rotazioni, in modo tale da mantenere il sistema di riferimento dell'elemento consistente, cioè i gradi di libertà in questo caso saranno $u_y(z)$ e $-\phi_x(z)$. Ciò comporta che le matrici di rigidezza e di massa siano esattamente uguali a quelle delle Equazioni (3.125), (3.127) e (3.128) cambiando però il segno dei termini nelle posizioni di indici 1-2, 1-4, 2-3 e 3-4 (il primo numero indica la riga, il secondo la colonna).

### 3.3.3 Elemento trave di Timoshenko

L'utilizzo dell'elemento trave di Eulero-Bernoulli può avvenire solamente nel caso in cui la trave in analisi sia snella e quindi vale la relazione dell'Equazione (3.97). Nella situazione in cui, invece, la trave sia tozza, le tensioni di taglio non possono più essere trascurate e, di conseguenza, durante la deformazione la sezione trasversale non è più perpendicolare all'asse della trave, ma presenta una certa deformazione angolare $\gamma$ rispetto a tale configurazione.

Ipotizzando di analizzare il comportamento flessionale della trave nel piano $xz$, come mostrato nella Figura (3.37) si può notare che, durante la deformazione, la sezione trasversale della trave subisce una rotazione locale $\phi_y$ minore rispetto a quella che la porterebbe ad essere perpendicolare all'asse.

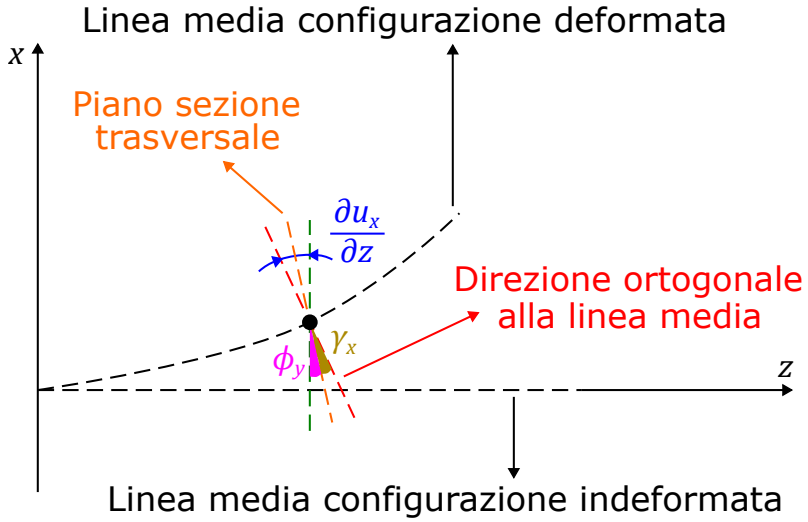



Figura 3.37: Rappresentazione rotazione locale della sezione, trave di Timoshenko.

La riduzione del valore della rotazione è dovuto al fatto che esiste una deformazione angolare $\gamma_x$ che influenza le varie sezioni della trave bloccandone il movimento. È possibile definire la deformata della trave come la somma tra la deformazione della sezione trasversale e la deformazione di taglio

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = \phi_y + \gamma_x \tag{3.129}$$

La presenza della deformazione di taglio nella definizione della deformata fa si che i gradi di libertà che caratterizzano l'elemento non siano più direttamente legati tra loro, per cui è necessario utilizzare coefficienti differenti per le funzioni di forma che descrivono $u_x$ e $\phi_y$

$$u_x = a_1 + a_2 z \qquad \phi_y = a_3 + a_4 z \tag{3.130}$$

Ripetendo esattamente gli stessi passaggi matematici svolti nel caso della trave di Eulero-Bernoulli, è possibile dimostrare che la matrice delle funzioni di forma per una trave di Timoshenko è la seguente

$$[\mathbf{N}(z)] = \begin{bmatrix} 1 - \dfrac{z}{l} & 0 & \dfrac{z}{l} & 0 \\ 0 & 1 - \dfrac{z}{l} & 0 & \dfrac{z}{l} \end{bmatrix} \tag{3.131}$$

le cui componenti coincidono con le funzioni di forma della trave di Eulero-Bernoulli.

Nel calcolo delle deformazioni, è importante osservare che in questo caso la deformazione totale sarà data da due contributi distinti, cioè

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}(z)\} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \phi_y}{\partial z} \\ \gamma_x \end{Bmatrix} \tag{3.132}$$

Ricordando le relazioni espresse dalle Equazioni (3.129) e (3.131) si può quindi ricavare che

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_y}{\partial z} &= a_4 \\ \gamma_x &= a_2 - a_3 - a_4 z \end{aligned} \tag{3.133}$$

Si ottiene quindi che la curvatura della trave è costante, mentre la deformazione di taglio varia linearmente lungo l'asse $z$.

Il risultato appena ottenuto non è però soddisfacente, infatti considerando la teoria delle travi di De Saint-Venant, una trave caricata solamente nei suoi nodi dovrebbe mostrare lungo $z$ un andamento della curvatura lineare e una deformazione di taglio costante, mentre nel caso di carico distribuito un andamento della curvatura quadratico e una deformazione di taglio che varia linearmente. Inoltre, si può facilmente osservare che la trave di Eulero-Bernoulli è una semplificazione della trave di Timoshenko, in quanto non considera la deformazione di taglio $\gamma_x$, e per questo motivo la trattazione di Timoshenko può essere applicata anche ad una trave snella. Osservando le espressioni dell'Equazione (3.133) e considerando la valutazione delle funzioni di forma nei nodi (non riportata) svolta per la definizione delle funzioni di forma stesse, è possibile verificare che vale la relazione

$$\gamma_x = \frac{u_{x2} - u_{x1}}{l} - \phi_{y1} - \frac{\phi_{y2} - \phi_{y1}}{l} z = \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) - \phi_{y1} - \left( \frac{\partial \phi_y}{\partial z} \right) z \tag{3.134}$$

Nel caso di una trave snella si ha che la deformazione di taglio $\gamma_x$ tende a 0, per cui si deve avere che la differenza tra i primi due valori dell'equazione soprastante tenda a 0, così come il valore $\dfrac{\partial \phi_y}{\partial z}$. Ricordando che vale $\dfrac{\partial \phi_y}{\partial z} = \dfrac{1}{R}$, se tale rapporto tende a 0 significa che la curvatura $R$ della trave tende ad infinito, per cui la trave non ha curvatura e la rotazione della sezione trasversale risulta bloccata, anche se in realtà la sezione della trave ha subito una rotazione. Tale situazione prende il nome di fenomeno del *locking* ed è causato dal fatto che le funzioni di forma utilizzate per descrivere i gradi di libertà sono troppo semplici e non possono essere collegate tra loro a causa della deformazione di taglio $\gamma_x$.

### 3.3.4 Seconda formulazione elemento trave di Timoshenko

Con l'obiettivo di superare i problemi legati alla prima formulazione, in accordo con la teoria delle travi di De Saint-Venant, è necessario assumere che la deformazione di taglio $\gamma_x$ sia costante lungo tutta la trave. Ipotizzando di analizzare il comportamento flessionale nel piano $xz$, la nuova definizione della deformazione di taglio $\gamma_x$ diventa

$$\gamma_x = \left( \frac{u_{x2} - u_{x1}}{l} - \frac{\phi_{y1} - \phi_{y2}}{l} \right) \frac{\Phi}{1 + \Phi} \tag{3.135}$$

dove

$$\Phi = \frac{12 E I_y \chi}{G A l^2} \tag{3.136}$$

rappresenta il rapporto tra la flessibilità di taglio $\frac{\chi}{GA}$ e la flessibilità flessionale $\frac{l^2}{12EI_y}$ della trave. Nell'Equazione (3.136) si ha che $E$ è il modulo elastico lineare del materiale, $I_y$ è il momento d'inerzia di superficie trasversale rispetto all'asse $y$, $G$ è il modulo di elasticità tangenziale del materiale, $A$ è la sezione trasversale, $l$ è la lunghezza della trave e $\chi$ è il fattore di taglio che dipende dalla forma della sezione trasversale.

Tenendo conto delle modifiche appena descritte, le nuove funzioni di forma per un elemento trave di Timoshenko possono essere scritte come

$$\begin{aligned} u_x(z) &= a_1 + a_2 z + a_3 z^2 + a_4 z^3 \\ \phi_y(z) &= \frac{\partial u_x}{\partial z} - \gamma_x = a_2 + 2a_3 z + 3a_4 z^2 - \gamma_x \end{aligned} \tag{3.137}$$

Svolgendo gli stessi passaggi matematici eseguiti nelle precedenti trattazioni teoriche, si può dimostrare che la nuova matrice delle funzioni di forma per un elemento trave di Timoshenko vale

$$[\mathbf{N}(z)] = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} & N_{14} \\ N_{21} & N_{22} & N_{23} & N_{24} \end{bmatrix} \tag{3.138}$$

con

$$\begin{aligned} N_{11} &= \frac{1 + \Phi(1-\xi) - 3\xi^2 + 2\xi^3}{1+\Phi} & N_{12} &= l\,\frac{\xi + \xi\frac{\Phi(1-\xi)}{2} - 2\xi^2 + \xi^3}{1+\Phi} \\ N_{13} &= \frac{\Phi\xi + 3\xi^2 - 2\xi^3}{1+\Phi} & N_{14} &= l\,\frac{-\xi\frac{\Phi(1-\xi)}{2} - \xi^2 + \xi^3}{1+\Phi} \\ N_{21} &= \frac{1}{l}\,\frac{-6\xi + 6\xi^2}{1+\Phi} & N_{22} &= \frac{1 - 4\xi + 3\xi^2 + \Phi(1-\xi)}{1+\Phi} \\ N_{23} &= \frac{1}{l}\,\frac{6\xi - 6\xi^2}{1+\Phi} & N_{24} &= \frac{-2\xi + 3\xi^2 + 3\Phi}{1+\Phi} \end{aligned}$$

dove $\xi = \frac{z}{l}$. Si può notare che, nel caso in cui si abbia $\Phi = 0$ si ottengono le funzioni di forma di un elemento trave di Eulero-Bernoulli.

Infine, è possibile dimostrare che le matrici di rigidezza e di massa di un elemento trave di Timoshenko relative al comportamento flessionale nel piano $xz$ valgono rispettivamente

$$[\mathbf{K}] = \frac{EI_y}{l^3(1+\Phi)} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & (4+\Phi)l^2 & -6l & (2-\Phi)l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & (2-\Phi)l^2 & -6l & (4+\Phi)l^2 \end{bmatrix} \tag{3.139}$$

$$[\mathbf{M}] = \frac{\rho A l}{420(1+\Phi)^2}\begin{bmatrix} m_1 & lm_2 & m_3 & -lm_4 \\ lm_2 & l^2m_5 & lm_4 & -l^2m_6 \\ m_3 & lm_4 & m_1 & -lm_2 \\ -lm_4 & -l^2m_6 & -lm_2 & l^2m_5 \end{bmatrix} + \frac{\rho I_y}{30l(1+\Phi)^2}\begin{bmatrix} m_7 & lm_8 & -m_7 & lm_8 \\ lm_8 & l^2m_9 & -lm_8 & -l^2m_{10} \\ -m_7 & -lm_8 & m_7 & -lm_8 \\ lm_8 & -l^2m_{10} & -lm_8 & l^2m_9 \end{bmatrix} \tag{3.140}$$

dove

$$\begin{aligned} m_1 &= 156 + 294\Phi + 140\Phi^2 & m_2 &= 22 + 38.5\Phi + 17.5\Phi^2 \\ m_3 &= 54 + 126\Phi + 70\Phi^2 & m_4 &= 13 + 31.5\Phi + 17.5\Phi^2 \\ m_5 &= 4 + 7\Phi + 3.5\Phi^2 & m_6 &= 3 + 7\Phi + 3.5\Phi^2 \\ m_7 &= 36 & m_8 &= 3 - 15\Phi \\ m_9 &= 4 + 5\Phi + 10\Phi^2 & m_{10} &= 1 + 5\Phi - 5\Phi^2 \end{aligned}$$

Per ottenere le matrici relative al comportamento flessionale nel piano $yz$, come detto precedentemente, è sufficiente modificare il segno dei componenti di indici 1-2, 1-4, 2-3 e 3-4 delle matrici appena definite.

### 3.3.5 Dinamica dei rotori e metodo FEM

Il metodo degli elementi finiti risulta molto conveniente nel caso in cui il rotore in analisi sia formato da molti gradi di libertà. Si ricorda che l'equazione del moto di un rotore, rotante ad una velocità angolare $\Omega$ costante, soggetto ad una forzante generica $\{\mathbf{f}(t)\}$, si può scrivere come

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}(t)\} + ([\mathbf{C}] + \Omega[\mathbf{G}])\{\dot{\mathbf{q}}(t)\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}(t)\} = \{\mathbf{f}(t)\} \tag{3.141}$$

Ipotizzando di avere $n$ gradi di libertà che caratterizzano il rotore, all'interno dell'Equazione (3.141) si avranno matrici di dimensione $n \times n$ e vettori di dimensione $n \times 1$. Supponendo che il rotore sia discretizzato mediante elementi trave, è necessario popolare le matrici del sistema globale con le matrici dei singoli elementi trave, ponendo l'attenzione sulla giusta corrispondenza di righe e colonne con i gradi di libertà del rotore.

Nel caso in cui si consideri l'elemento trave di Timoshenko, la matrice di rigidezza completa dell'elemento che tiene conto dei comportamenti assiale, torsionale e flessionale nei due piani ortogonali all'asse di rotazione sarà data dalla combinazione delle matrici delle Equazioni (3.114), (3.117) e (3.139), con quest'ultima considerata una seconda volta con i segni modificati. Per quanto riguarda, invece, la matrice di massa completa dell'elemento trave allo stesso modo sarà data dalla combinazione delle matrici delle Equazioni (3.109), (3.116) e (3.140), con quest'ultima considerata una seconda volta con i segni modificati.

Infine, è necessario tenere conto del fatto che l'asse di rotazione non coincide con l'asse di simmetria dell'elemento trave, per cui si genera un contributo giroscopico. Considerando la trattazione presente in [1], nel caso in cui il rotore sia assial-simmetrico è possibile dimostrare che la matrice giroscopica di base del singolo elemento trave è pari al doppio della matrice di massa relativa derivante dall'energia cinetica rotazionale

$$[\mathbf{G}_0] = \frac{\rho I_y}{15l(1+\Phi)^2}\begin{bmatrix} m_7 & lm_8 & -m_7 & lm_8 \\ lm_8 & l^2m_9 & -lm_8 & -l^2m_{10} \\ -m_7 & -lm_8 & m_7 & -lm_8 \\ lm_8 & -l^2m_{10} & -lm_8 & l^2m_9 \end{bmatrix} \tag{3.142}$$

Dal momento che l'effetto giroscopico si ottiene esclusivamente considerando l'accoppiamento tra GDL relativi a piani di analisi opposti (i GDL riferiti al piano $xz$ influiscono sui GDL riferiti al piano $yz$ e viceversa), la matrice giroscopica elementale deve essere necessariamente definita considerando le rotazioni dell'elemento trave in due piani ortogonali distinti ($xz$ e $yz$ appunto) [1]. Secondo tali considerazioni, la matrice giroscopica elementale viene definita come

$$[\mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 0 & [\mathbf{G}_0] \\ -[\mathbf{G}_0] & 0 \end{bmatrix} \tag{3.143}$$

### 3.3.6 Integrazione nel tempo con metodo di Newmark-$\beta$

Considerando l'Equazione (3.141), la soluzione di tale equazione del moto necessita di un algoritmo di integrazione temporale. Così facendo è possibile realizzare una discretizzazione della variabile tempo e risolvere l'equazione per passi temporali $\Delta t$. Uno degli approcci impliciti maggiormente utilizzati per lo svolgimento dell'integrazione è il metodo di Newmark-$\beta$.

L'Equazione (3.141) può essere riscritta in forma più compatta al k-esimo istante temporale $t_k$ come

$$[\mathbf{M}]_{\mathbf{eq}}\{\ddot{\mathbf{q}}\}_k + [\mathbf{C}]_{\mathbf{eq}}\{\dot{\mathbf{q}}\}_k + [\mathbf{K}]_{\mathbf{eq}}\{\mathbf{q}\}_k = \{\mathbf{F}\}_k \tag{3.144}$$

dove lo stato del sistema è definito dal vettore degli spostamenti nodali $\{\mathbf{q}\}_k$, dal vettore delle velocità nodali $\{\dot{\mathbf{q}}\}_k$ e dal vettore delle accelerazioni nodali $\{\ddot{\mathbf{q}}\}_k$. L'obiettivo dell'integrazione temporale è definire lo stato del sistema all'istante temporale successivo $t_{k+1}$, cioè progredendo nel tempo di un passo temporale $\Delta t$ e risolvendo l'equazione del moto

$$[\mathbf{M}]_{\mathbf{eq}}\{\ddot{\mathbf{q}}\}_{k+1} + [\mathbf{C}]_{\mathbf{eq}}\{\dot{\mathbf{q}}\}_{k+1} + [\mathbf{K}]_{\mathbf{eq}}\{\mathbf{q}\}_{k+1} = \{\mathbf{F}\}_{k+1} \tag{3.145}$$

Il metodo di Newmark-$\beta$ si basa sulla definizione dello spostamento all'istante futuro $\{\mathbf{q}\}_{k+1}$ e della velocità all'istante futuro $\{\dot{\mathbf{q}}\}_{k+1}$ tramite sviluppi in serie arrestati al secondo ordine. In particolare, lo spostamento all'istante $t_{k+1}$ è definito come

$$\{\mathbf{q}\}_{k+1} = \{\mathbf{q}\}_k + \Delta t\{\dot{\mathbf{q}}\}_k + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\Delta t^2\{\ddot{\mathbf{q}}\}_k + \beta\Delta t^2\{\ddot{\mathbf{q}}\}_{k+1} \tag{3.146}$$

mentre la velocità all'istante $t_{k+1}$ è definita come

$$\{\dot{\mathbf{q}}\}_{k+1} = \{\dot{\mathbf{q}}\}_k + (1-\gamma)\Delta t\{\ddot{\mathbf{q}}\}_k + \gamma\Delta t\{\ddot{\mathbf{q}}\}_{k+1} \tag{3.147}$$

dove $\gamma$ e $\beta$ rappresentano i parametri del metodo, solitamente posti rispettivamente uguali a 0,5 e 0,25 per ottenere una algoritmo incondizionatamente stabile. È possibile, tuttavia, inserire all'interno dell'integrazione temporale un valore di smorzamento temporale $\eta$ in termini percentuali per modificare la stabilità dell'algoritmo. In questo caso i parametri $\gamma$ e $\beta$ si definiscono come

$$\gamma = 0{,}5 + \eta \qquad \beta = \frac{(\gamma + 0{,}5)^2}{4} \tag{3.148}$$

A questo punto, dall'Equazione (3.146) è possibile ricavare l'accelerazione all'istante $t_{k+1}$ come

$$\{\ddot{\mathbf{q}}\}_{k+1} = \frac{1}{\beta\Delta t^2}\left(\{\mathbf{q}\}_{k+1} - \{\mathbf{q}\}_k\right) - \frac{1}{\beta\Delta t}\{\dot{\mathbf{q}}\}_k - \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\{\ddot{\mathbf{q}}\}_k \tag{3.149}$$

che è possibile sostituire nell'Equazione (3.147) ottenendo

$$\{\dot{\mathbf{q}}\}_{k+1} = \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\left(\{\mathbf{q}\}_{k+1} - \{\mathbf{q}\}_k\right) + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)\{\dot{\mathbf{q}}\}_k + \Delta t\left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)\{\ddot{\mathbf{q}}\}_k \tag{3.150}$$

Per semplicità di notazione, è possibile definire i coefficienti dei termini delle Equazioni (3.149) e (3.150) nel seguente modo

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\beta\Delta t^2} \quad a_1 = \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \quad a_2 = \frac{1}{\beta\Delta t} \\ a_3 &= \frac{1}{2\beta} - 1 \quad a_4 = 1 - \frac{\gamma}{\beta} \quad a_5 = \Delta t\left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right) \end{aligned} \tag{3.151}$$

per cui le due equazioni possono essere riscritte come

$$\begin{aligned} \{\ddot{\mathbf{q}}\}_{k+1} &= a_0\left(\{\mathbf{q}\}_{k+1} - \{\mathbf{q}\}_k\right) - a_2\{\dot{\mathbf{q}}\}_k - a_3\{\ddot{\mathbf{q}}\}_k \\ \{\dot{\mathbf{q}}\}_{k+1} &= a_1\left(\{\mathbf{q}\}_{k+1} - \{\mathbf{q}\}_k\right) + a_4\{\dot{\mathbf{q}}\}_k + a_5\{\ddot{\mathbf{q}}\}_k \end{aligned} \tag{3.152}$$

Queste ultime due equazioni vengono quindi sostituite all'interno dell'equazione del moto all'istante $t_{k+1}$ (Equazione (3.145)), per cui, supponendo di conoscere lo stato del sistema all'istante $t_k$, gli spostamenti nodali dell'istante futuro restano l'unica incognita all'interno di tale equazione ed è possibile ottenere la seguente formulazione del problema

$$[\mathbf{K}]_{\mathbf{eff}}\{\mathbf{q}\}_{k+1} = \{\mathbf{F}\}_{\mathbf{eff}} \tag{3.153}$$

dove

$$[\mathbf{K}]_{\mathbf{eff}} = [\mathbf{K}]_{\mathbf{eq}} + a_0[\mathbf{M}]_{\mathbf{eq}} + a_1[\mathbf{C}]_{\mathbf{eq}} \tag{3.154}$$

e

$$\begin{aligned}\{\mathbf{F}\}_{\mathbf{eff}} =&\{\mathbf{F}\}_{k+1} + [\mathbf{M}]_{\mathbf{eq}}(a_0\{\mathbf{q}\}_k + a_2\{\dot{\mathbf{q}}\}_k + a_3\{\ddot{\mathbf{q}}\}_k)+\\ &+ [\mathbf{C}]_{\mathbf{eq}}(a_1\{\mathbf{q}\}_k + a_4\{\dot{\mathbf{q}}\}_k + a_5\{\ddot{\mathbf{q}}\}_k)\end{aligned} \tag{3.155}$$

A questo punto è possibile ottenere gli spostamenti nodali all'istante $t_{k+1}$ come

$$\{\mathbf{q}\}_{k+1} = [\mathbf{K}]_{\mathbf{eff}}{}^{-1}\{\mathbf{F}\}_{\mathbf{eff}} \tag{3.156}$$

i quali verranno successivamente sostituiti nelle Equazioni (3.147) e (3.149) per ottenere rispettivamente le velocità e le accelerazioni nodali all'istante $t_{k+1}$.

## 3.4 Modellazione multi-body

La modellazione *multibody* (MB) permette di descrivere il comportamento di un sistema reale, composto da corpi che interagiscono tra loro mediante vincoli e soggetto all'effetto di forze esterne. Ciascun corpo è descritto mediante coordinate generalizzate, cioè coordinate cartesiane che permettono di rappresentare i moti di traslazione e rotazione rispetto al sistema di riferimento inerziale. Facendo riferimento alla Figura (3.38), per caratterizzare la posizione e l'orientamento del corpo rispetto al sistema di riferimento inerziale $XYZ$, ad esso viene associato un sistema di riferimento locale $x'y'z'$, i cui assi sono definiti da versori $f$, $g$, e $h$ mutuamente perpendicolari.

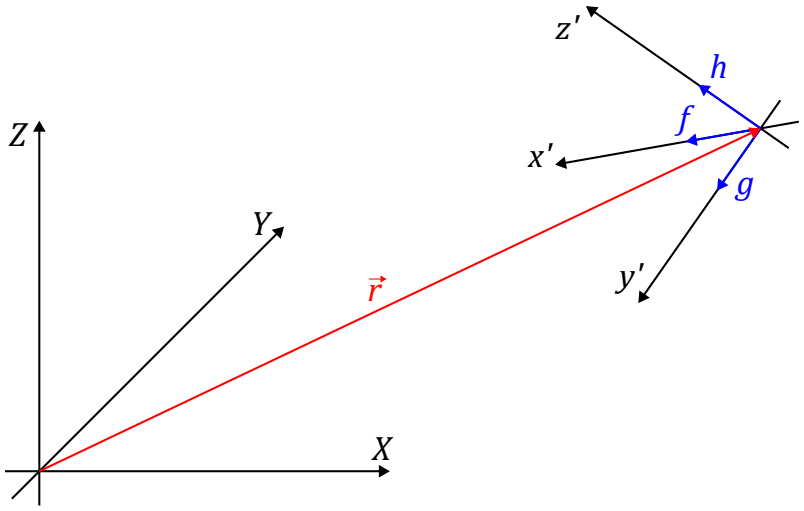



Figura 3.38: Sistemi di riferimento modellazione *multibody*.

Per trasformare le coordinate dal sistema di riferimento locale del corpo al sistema di riferimento inerziale si utilizza la matrice di trasformazione $[\mathbf{A}]$ definita come

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} f_x & g_x & h_x \\ f_y & g_y & h_y \\ f_z & g_z & h_z \end{bmatrix} \tag{3.157}$$

All'interno dei sistemi *multibody*, la dinamica viene descritta mediante il principio dei lavori virtuali (Equazione (3.158)), secondo il quale il lavoro virtuale totale delle forze agenti sul corpo $\delta W$ è nullo per qualsiasi spostamento virtuale $\delta\mathbf{q}$ compatibile con i vincoli cinematici

$$\delta W = \delta\{\mathbf{q}\}^T(m\{\ddot{\mathbf{q}}\} - \{\mathbf{f}\}) \tag{3.158}$$

Prendendo in considerazione un singolo corpo, l'Equazione (3.158) si modifica presentando al proprio interno il prodotto tra la matrice di massa $[\mathbf{M}]$ e il vettore delle accelerazioni $\{\ddot{\mathbf{q}}\}$, bilanciato dal vettore delle forze generalizzate $\{\mathbf{Q}\}$ agenti sul corpo in analisi. Nel caso in cui il sistema sia formato da $n$ corpi distinti, sommando i contributi dei singoli corpi è possibile ottenere la formulazione di un sistema *multibody* come

$$\sum_{i=1}^{n} \delta\{\mathbf{q}_i\}^T \left([\mathbf{M}_i]\{\ddot{\mathbf{q}}_i\} - \{\mathbf{Q}_i\}\right) = 0 \tag{3.159}$$

A questo punto, è necessario introdurre all'interno della formulazione i vincoli che descrivono le relazioni cinematiche tra i corpi all'interno del sistema. Tale implementazione viene eseguita mediante il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, tramite cui si ha un'integrazione diretta delle equazioni di vincolo nel sistema dinamico. In generale, le condizioni di vincolo possono essere descritte mediante la relazione

$$\{\boldsymbol{\phi}(\{\mathbf{q}\},t)\} = 0 \tag{3.160}$$

la quale modifica l'Equazione (3.159) come segue

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + \{\boldsymbol{\phi}_\mathbf{q}\}^T\{\boldsymbol{\lambda}\} - \{\mathbf{Q}\} = 0 \tag{3.161}$$

dove $\{\boldsymbol{\lambda}\}$ rappresentano i moltiplicatori di Lagrange. Combinando quest'ultima equazione con la seconda derivata temporale dell'Equazione (3.160) è possibile ottenere la formulazione definitiva per un sistema *multibody*, che in forma matriciale diventa

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{M}] & \{\boldsymbol{\phi}_\mathbf{q}\}^T \\ \{\boldsymbol{\phi}_\mathbf{q}\}^T & \{0\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\ddot{\mathbf{q}}\} \\ \{\boldsymbol{\lambda}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{\mathbf{Q}\} \\ \{\boldsymbol{\gamma}\} \end{bmatrix} \tag{3.162}$$

dove $\{\boldsymbol{\gamma}\}$ rappresenta il vettore delle velocità dell'equazione di vincolo.

Dall'Equazione (3.162) si ottiene un sistema di equazioni differenziali e algebriche, al cui interno le equazioni del moto e le equazioni di vincolo vengono risolte simultaneamente. Una volta terminata la risoluzione, i moltiplicatori di Lagrange permettono di calcolare direttamente le forze e i momenti vincolari agenti sui vari corpi, i quali sono applicati ai sistemi di riferimento locali dei corpi stessi, nei punti dove i vincoli sono definiti.

# Capitolo 4

# Sviluppo modello sistema rotore-cuscinetto

Nel presente capitolo vengono riportati i procedimenti seguiti per la realizzazione dei modelli FEM del rotore e *multibody* del cuscinetto. Il modello completo riproduce un sistema rotore-cuscinetto reale appartenente ad un banco prova cuscinetti sito nei laboratori del Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale (DIMEAS) del Politecnico di Torino. Per tale motivo viene realizzata, innanzitutto, una sezione apposita per la descrizione del banco prova e, successivamente, si riporta la modellazione dei singoli elementi. Viene, infine, descritto il procedimento di accoppiamento dei modelli per la realizzazione della co-simulazione.

È importante sottolineare che, dal momento che l'obiettivo primario del presente lavoro di tesi è di realizzare l'accoppiamento tra i due approcci di modellazione, la tecnica *multibody* viene implementata nella rappresentazione di uno solo dei quattro cuscinetti in prova, mentre i restanti tre sono rappresentati direttamente mediante la forza radiale applicata loro dai rispettivi spingitori. Tale scelta è effettuata principalmente per ridurre i tempi di simulazione del modello completo del sistema, i quali altrimenti risulterebbero eccessivamente elevati, impedendo di ottenere risultati nel breve periodo e, di conseguenza, di porre il focus dell'analisi sulla corretta rappresentazione e ottimizzazione dell'interazione rotore-cuscinetto.

## 4.1 Banco prova cuscinetti

Il banco prova cuscinetti in analisi è un macchinario con un organo rotante ad asse orizzontale, il quale è posto in rotazione da un motore asincrono trifase SIEMENS® da 30 kW. Esso comprende degli attuatori idraulici in grado di generare carichi assiali e radiali su due coppie di cuscinetti in prova inseriti all'interno di una scatola metallica. L'albero su cui sono calettati i cuscinetti è connesso al motore elettrico tramite un giunto elastico Periflex, in modo da minimizzare le vibrazioni ricevute dall'albero stesso durante la rotazione, ed è sostenuto da due cuscinetti di banco

autolubrificanti a bagno d'olio. Completano la struttura la centralina di lubrificazione SKF® per la gestione dell'olio all'interno della scatola metallica e l'armadio elettrico per l'azionamento generale e dei singoli componenti elettrici. Una visione d'insieme del banco prova è riportata in Figura (4.1).

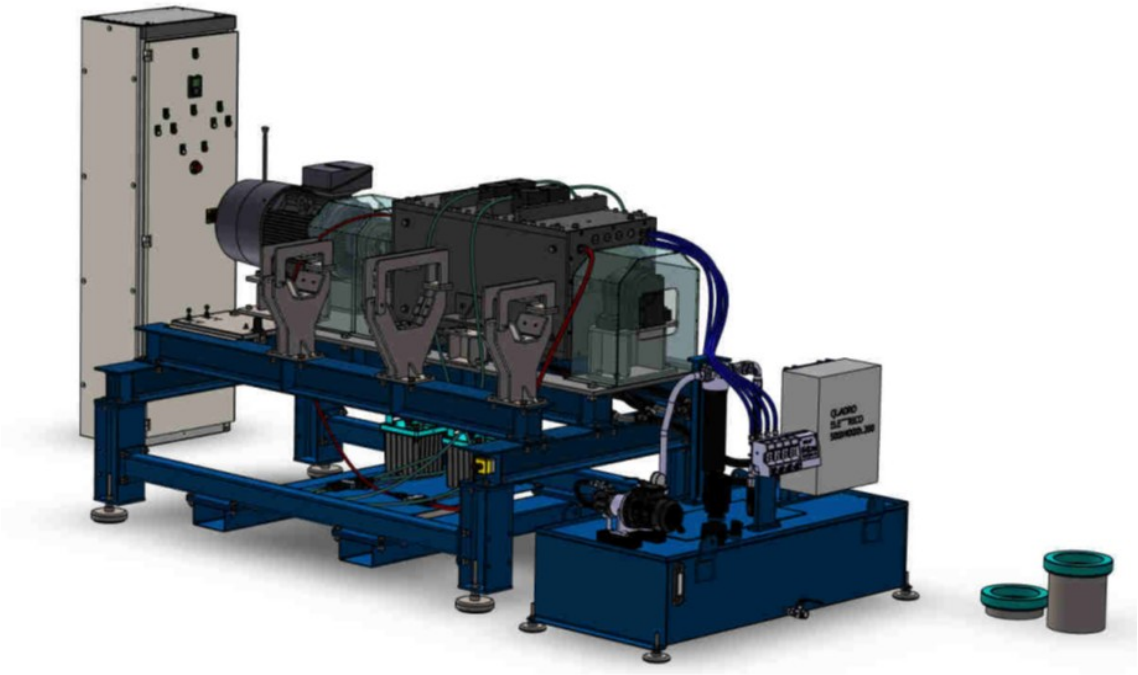


Figura 4.1: Visione d'insieme banco prova cuscinetti.

L'interno della scatola metallica è raffigurato nella vista in sezione presente in Figura (4.2). In tale vista si possono riconoscere i quattro cuscinetti SKF® orientabili a rulli 22240 CCK/W33 in prova (in verde), gli spingitori assiali (in rosso), gli adattori assiali (in arancione), gli adattatori radiali (in blu) e gli spingitori radiali (in giallo ocra). Inoltre, è possibile distinguere i due cusicnetti di banco esterni alla scatola, in particolare a destra è presente un cuscinetto SKF® toroidale a rulli CARB C 2218 K, in grado di sopportare solamente carichi radiali ma capace di gestire il disallineamento e l'espansione termica dell'albero, mentre a sinistra (lato del collegamento al motore elettrico) è presente un cusicnetto SKF® orientabile a rulli 22218 EK, capace di sopportare elevati carichi radiali e assiali in presenza di disallineamenti e deformazioni dell'albero. Il percorso di carico che si sviluppa nel banco prova durante le condizioni operative è riportato in Figura (4.3), mentre la risposta vibrazionale del sistema viene acquisita mediante appositi accelerometri posizionati su ciascun adattatore radiale presente all'interno della scatola.

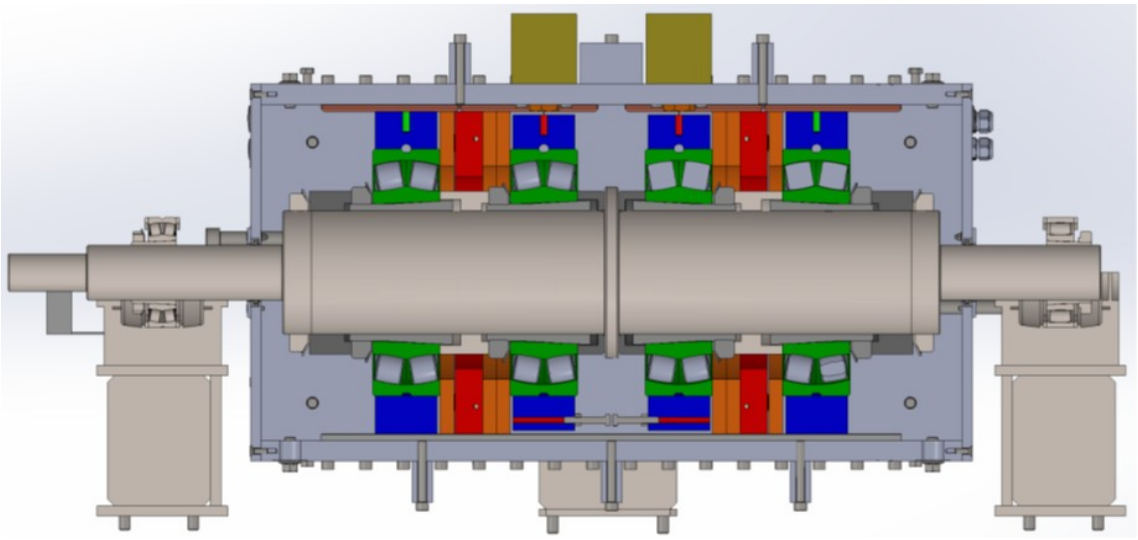


Figura 4.2: Vista in sezione scatola metallica.

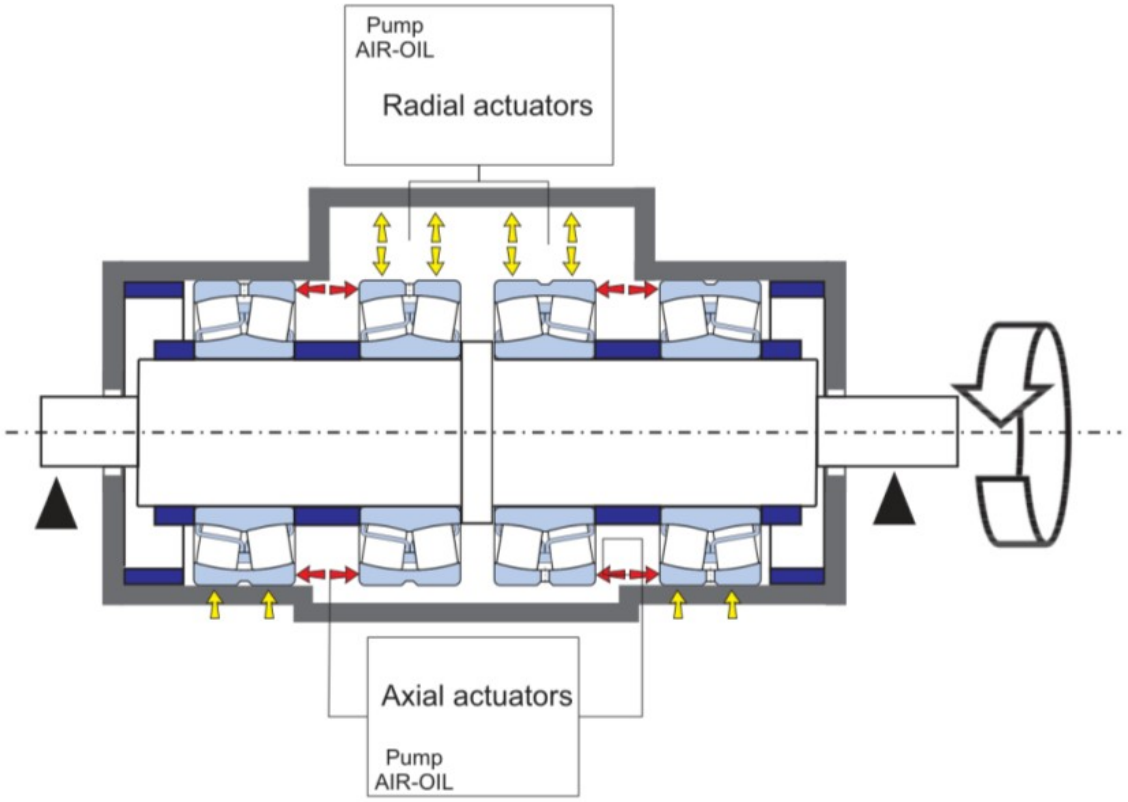



Figura 4.3: Distribuzione percorsi di carico banco prova cuscinetti.

È possibile ottenere una descrizione più approfondita e ulteriori dettagli sul funzionamento del banco prova cuscinetti nel lavoro di Brusa et al. [118].

## 4.2 Modello FEM rotore

Il modello FEM del rotore è costruito mediante la definizione di una funzione MATLAB® basata sulla formulazione presente in [1] e considera al proprio interno sia l'albero, sia i cuscinetti di banco rappresentati come molle lineari. L'albero, la cui vista laterale si può osservare in Figura (4.4), ha una lunghezza complessiva di 1591 $mm$ e presenta quattro diverse misure di diametro: sui tratti di misura 80 $mm$ sono calettati i cuscinetti di banco, sui tratti di misura 180 $mm$ sono calettati i cuscinetti in prova, il tratto di misura 250 $mm$ serve come spallamento per il calettamento, mentre il tratto di 55 $mm$ serve per l'accoppiamento con il giunto Periflex. Considerando le posizioni assiali dei cuscinetti e degli spallamenti, l'albero è stato diviso in 11 elementi trave di Timoshenko (seguendo la seconda formulazione riportata nel Capitolo 3), ciascuno con 2 nodi alle estremità, per un totale di 12 nodi (Figura (4.5)). I cuscinetti di banco sono posizionati nei nodi 2 e 10, mentre i cuscinetti in prova sono posizionati nei nodi 4, 5, 7 e 8. Il tratto di albero di diametro 250 $mm$ e lunghezza 20 $mm$ è modellato come un disco calettato sull'albero stesso e posizionato nel nodo 6 della discretizzazione. Tale scelta è effettuata per evitare di ottenere un elemento trave eccessivamente tozzo che potrebbe influenzare negativamente i risultati.

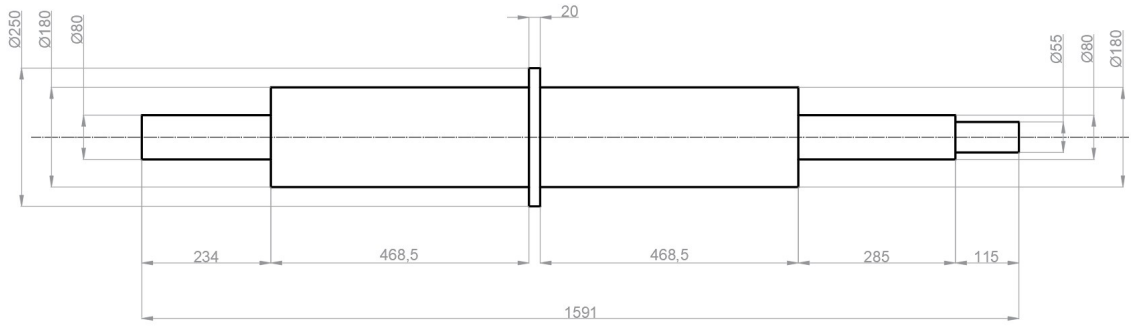



Figura 4.4: Albero banco prova cuscinetti.

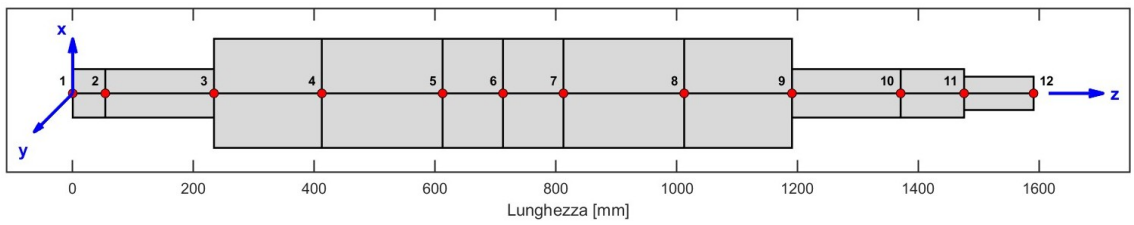



Figura 4.5: Discretizzazione albero banco prova cuscinetti.

Definendo un sistema di riferimento cartesiano inerziale $xyz$ posizionato nel nodo 1 e con l'asse $z$ coincidente con l'asse del rotore, ciascun nodo presenta 5 gradi di

libertà composti da 3 traslazioni $u_x$, $u_y$ e $u_z$ lungo rispettivamente gli assi $x$, $y$ e $z$ del sistema di riferimento e 2 rotazioni $\phi_x$ e $\phi_y$ rispettivamente attorno agli assi $x$ e $y$. La rotazione attorno all'asse $z$ non è stata considerata in quanto supposta imposta dall'esterno mediante l'accoppiamento con il motore elettrico. L'albero possiede complessivamente, quindi, 60 GDL e il vettore degli spostamenti nodali dei singoli nodi è definito come

$$\{\mathbf{q}\} = \begin{Bmatrix} u_z \\ u_x \\ u_y \\ \phi_y \\ \phi_x \end{Bmatrix} \tag{4.1}$$

All'interno della funzione la discretizzazione dell'albero viene eseguita tramite la definizione delle coordinate assiali dei nodi. Successivamente, a ciascun elemento vengono assegnate le proprie caratteristiche geometriche quali diametro, lunghezza, sezione, momenti d'inerzia di superficie e coefficiente $\Phi$.

A questo punto si costruiscono le matrici di rigidezza, di massa e giroscopica elementali. Ciascuna di esse è una matrice 10×10 al cui interno le componenti sono posizionate con riferimento ai gradi di libertà del vettore degli spostamenti nodali (Equazione (4.1)). La matrice di rigidezza elementale è data dalla combinazione delle matrici delle Equazioni (3.114), (3.139) e la sua corrispettiva nel piano $yz$. La matrice di massa elementale è data dalla combinazione delle matrici delle Equazioni (3.109), (3.140) e la sua corrispettiva nel piano $yz$. La matrice giroscopica elementale è data dalla matrice dell'Equazione (3.143). La combinazione di tutte le matrici elementali, basata sull'associazione delle varie componenti ai GDL dei nodi del sistema, consente di ottenere le matrici di rigidezza, di massa e giroscopica dell'albero, le quali hanno dimensione 60×60. Si precisa che all'interno della modellazione non si è considerata la matrice di smorzamento del rotore con l'obiettivo di rendere più semplice la trattazione e di ridurre i costi computazionali del modello. Per ovviare a tale mancanza, si è deciso di definire uno smorzamento numerico inserito all'interno dell'algoritmo di integrazione temporale come si vedrà in seguito.

Successivamente si modellano i cuscinetti di banco, come detto rappresentati mediante molle lineari. I coefficienti di rigidezza $k_x$, $k_y$, $k_z$ dei cuscinetti di banco sono ricavati dalla documentazione ufficiale del banco prova e riportati in Tabella (4.1). Tali coefficienti sono aggiunti alle componenti delle matrici di rigidezza del rotore relative ai GDL traslazionali dei rispettivi nodi. Ricordando che ogni nodo possiede 5 GDL elencati come nell'Equazione (4.1), i coefficienti $k_x$, $k_y$, $k_z$ sono aggiunti nella matrice di rigidezza del rotore rispettivamente alle componenti di indici 6-6, 7-7 e 8-8 per il cuscinetto SKF® C 2218 K/C3 e alle componenti di indici 46-46, 47-47 e 48-48 per il cuscinetto SKF® 22218 EK.

| **Cuscinetto** | **SKF® C 2218 K/C3** | **SKF® 22218 EK** |
|---|---|---|
| Nodo | 2 | 10 |
| $k_z$ $[N/m]$ | $10^{11}$ | $10^{11}$ |
| $k_x$ $[N/m]$ | $1{,}9 \cdot 10^8$ | $1{,}9 \cdot 10^8$ |
| $k_y$ $[N/m]$ | $1{,}9 \cdot 10^8$ | $1{,}9 \cdot 10^8$ |

Tabella 4.1: Coefficienti di rigidezza cuscinetti di banco.

Dopodiché, il disco rappresentante il tratto di albero di diametro 250 $mm$ e lunghezza 20 $mm$ viene introdotto nel modello. Il disco in questione viene supposto cavo, in quanto nella discretizzazione del rotore il tratto di albero a cui esso è riferito viene supposto continuo e di diametro 180 $mm$. Le caratteristiche geometriche del disco sono riportate in Tabella (4.2).

| | | |
|---|---|---|
| Diametro interno $[mm]$ | $d_i$ | 180 |
| Diametro esterno $[mm]$ | $d_e$ | 250 |
| Spessore $[mm]$ | $s$ | 20 |

Tabella 4.2: Caratteristiche geometriche disco.

Per tale componente si esegue una modellazione a parametri concentrati, definendone le caratteristiche inerziali di massa $m$, momenti d'inerzia trasversali $J_{t,x}$ e $J_{t,y}$ e momento d'inerzia polare $J_p$. Per un disco cavo, tali proprietà si possono definire rispettivamente come

$$m = \rho \cdot A \cdot s \qquad J_{t,x} = J_{t,y} = m \cdot \frac{d_e^2 + d_i^2}{16} \qquad J_p = m \cdot \frac{d_e^2 + d_i^2}{8} \tag{4.2}$$

dove $\rho$ è la densità del materiale e $A$ è la sezione del disco. Dal momento che la modellazione è a parametri concentrati, ricordando l'ordine dei GDL di ciascun nodo (Equazione (4.1)), è possibile definire le matrici di massa $[\mathbf{M}]_d$ e giroscopica $[\mathbf{G}]_d$ del disco come

$$[\mathbf{M}]_d = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{t,y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_{t,x} \end{bmatrix} \qquad [\mathbf{G}]_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_p \\ 0 & 0 & 0 & -J_p & 0 \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

Ricordando che il disco è posizionato nel nodo 6 della discretizzazione, tali matrici sono aggiunte alle matrici globali del rotore nelle posizioni riferite ai GDL del suddetto nodo, cioè alle componenti di indici 26-26, 27-27, 28-28, 29-29 e 30-30 della matrice di massa e alle componenti di indici 29-30 e 30-29 della matrice giroscopica.

In seguito, al modello FEM dell'albero si aggiungono i contributi inerziali degli anelli interni e delle rispettive bussole coniche di calettamento dei cuscinetti in prova non modellati mediante l'approccio *multibody*. Tale aggiunta è eseguita in quanto si suppone che il calettamento dei cuscinetti in prova sull'albero avvenga tramite accoppiamento con interferenza, per cui il moto vibrazionale del rotore è influenzato dall'inerzia degli anelli interni e delle bussole coniche. Per quanto riguarda il cuscinetto MB, invece, tali contributi d'inerzia vengono direttamente considerati all'interno del modello MB stesso. Supponendo di rappresentare l'insieme di anello interno e bussola conica come un elemento a parametri concentrati, le sue matrici di massa e giroscopica seguono la definizione dell'Equazione (4.3), dove i parametri di massa, momento d'inerzia trasversale e momento d'inerzia polare sono ricavati dalla documentazione ufficiale del banco prova e valgono rispettivamente

$$m = 19{,}8\ kg \qquad J_{t,y} = J_{t,x} = 0{,}144\ kg \cdot m^2 \qquad J_p = 0{,}214\ kg \cdot m^2$$

Ricordando che i cuscinetti in prova denominati Cuscinetti 1, 2, 3 e 4 sono posizionati rispettivamente nei nodi 4, 5, 7 e 8 della discretizzazione, e che il Cuscinetto 1 è modellato mediante MB, sulla base della procedura seguita precedentemente per il disco, i contributi inerziali sopra descritti vengono aggiunti alle matrici globali di massa [**M**] e giroscopica [**G**] del rotore nelle posizioni riportate in Tabella (4.3)

| | **Cusc. 2** | | **Cusc. 3** | | **Cusc. 4** | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | [**M**] | [**G**] | [**M**] | [**G**] | [**M**] | [**G**] |
| $m$ | 21-21 | - | 31-31 | - | 36-36 | - |
| | 22-22 | - | 32-32 | - | 37-37 | - |
| | 23-23 | - | 33-33 | - | 38-38 | - |
| $J_{t,y}$ | 24-24 | - | 34-34 | - | 39-39 | - |
| $J_{t,x}$ | 25-25 | - | 35-35 | - | 40-40 | - |
| $J_p$ | - | 24-25 | - | 34-35 | - | 39-40 |
| $-J_p$ | - | 25-24 | - | 35-34 | - | 40-39 |

Tabella 4.3: Posizioni aggiunta contributi d'inerzia anelli interni e bussole coniche cuscinetti in prova.

Infine, il modello del rotore è completato definendo il vettore della forza peso che sarà successivamente utilizzato come contributo per definire la forzante agente sul sistema. Per come è stato definito il sistema di riferimento inerziale (Figura (4.5)), si ipotizza che la forza peso agisca lungo la direzione $-x$. Dal momento che il rotore possiede in totale 60 GDL, il vettore in questione ha dimensioni $60\times1$ (dato che la forza peso è costante per tutto il tempo di analisi) le cui componenti sono tutte nulle ad eccezione di quelle riferite alla traslazione lungo l'asse $x$ dei vari nodi. Tali valori non nulli si definiscono calcolando la forza peso di ogni singolo elemento trave della discretizzazione e applicando metà di tale valore a ciascun nodo alle estremità dell'elemento trave stesso. In conclusione, alla componente del vettore relativa alla traslazione lungo $x$ del nodo 6 si aggiunge il contributo del peso del disco.

## 4.3 Modello *multibody* cuscinetto

La modellazione *multibody* è applicata al cuscinetto in prova SKF® 22240 CCK/W33 calettato sul nodo 4 del rotore FEM e si basa sul modello MB già sviluppato in [119] mediante il software ANSYS® Motion. Tale formulazione è estesa per rendere possibile l'interfaccia con il modello FEM del rotore e modificata per rendere il modello più fedele alla realtà fisica. In generale, il sistema MB è formato da un totale di 41 corpi, di cui 38 corpi volventi, 1 gabbia, 1 anello interno e 1 anello esterno, tutti con asse di rotazione $z$. La direzione della gravità è modificata da $-z$ a $-x$ per coerenza con il modello FEM del rotore precedentemente descritto. In Figura (4.6) è possibile osservare il modello del cuscinetto completo di tutti i corpi in analisi con i rispettivi marker di identificazione.

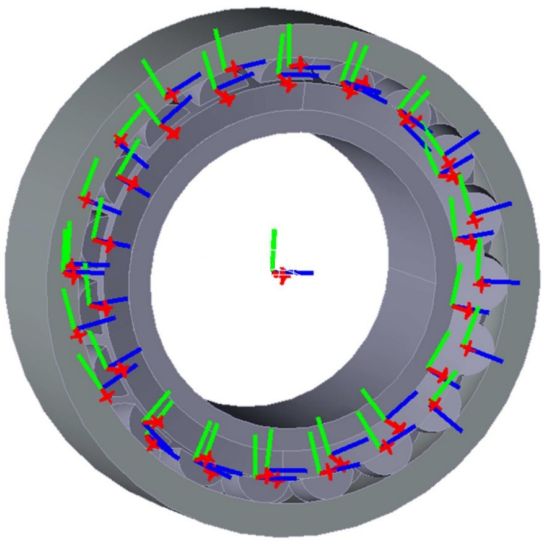


Figura 4.6: Modello *multibody* cuscinetto SKF® 22240 CCK/W33.

La modifica principale effettuata al modello riguarda la tipologia di giunto cinematico utilizzato per definire i gradi di libertà dei corpi volventi all'interno delle tasche della gabbia. Nella precedente formulazione sono presenti dei *cylindrical joints*, i quali consentono la rotazione attorno ad un determinato asse e la traslazione lungo il medesimo asse ($z$ per il modello in analisi). In questo modo, i corpi volventi risultano fissati nella loro posizione radiale, con possibilità di rotazione attorno all'asse $z$ e di traslazione in direzione assiale. Tuttavia, i rulli del cuscinetto hanno la possibilità di traslare in direzione radiale a seguito dei contatti con gli anelli interno ed esterno, data la presenza di giochi tra essi e gli anelli stessi. Per questo motivo, i *cylindrical joints* sono sostituiti dalla combinazione dei giunti *inline primitive* e *parallel primitive* [120]. Il giunto *inline primitive* permette di bloccare 2 GDL traslazionali di un corpo definito *action body* rispetto ad un secondo corpo preso come riferimento e denominato *base body*. Il giunto impone che l'*action body* possa traslare solamente lungo la direzione congiungente esso con il *base body*. Con riferimento alla Figura (4.7), è possibile definire le condizioni di vincolo imposte dall'*inline primitive* come

$$^{T}\mathbf{\Phi} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_b^T \left(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b\right) \\ \mathbf{g}_b^T \left(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b\right) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_b^T \mathbf{d}_{ba} \\ \mathbf{g}_b^T \mathbf{d}_{ba} \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \tag{4.4}$$

dove $\mathbf{f}_b$ e $\mathbf{g}_b$ sono rispettivamente gli assi $x$ e $y$ del marker riferito al *base body*, mentre $\mathbf{r}_a$ e $\mathbf{r}_b$ sono rispettivamente gli spostamenti assoluti dei marker riferiti a *action body* e *base body*.

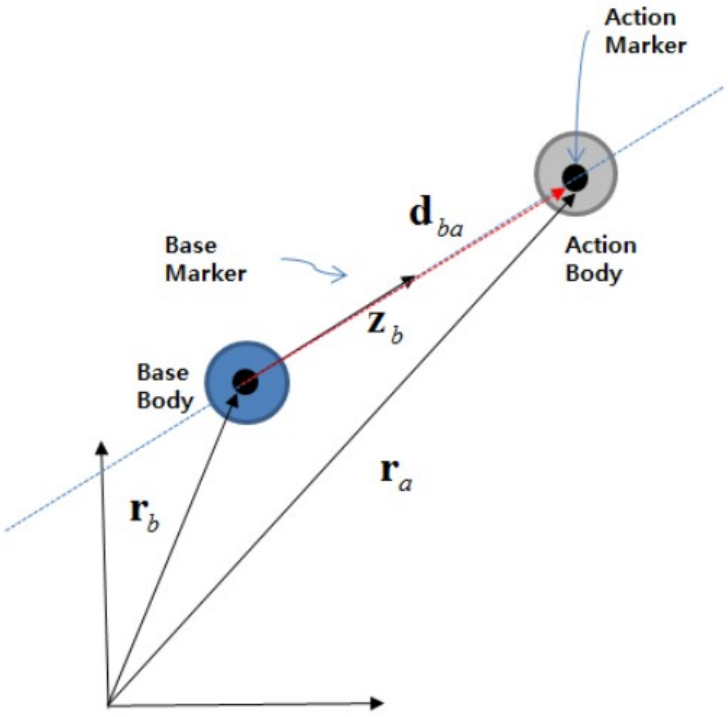



Figura 4.7: Cinematica giunto *inline primitive* [120].

Le reazioni vincolari si possono ottenere tramite i moltiplicatori di Lagrange e possono essere scritte come

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{f}_a \\ \boldsymbol{\tau}_a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} {}^T\boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \tag{4.5}$$

mentre le forze e i momenti scambiati reciprocamente tra *action body* e *base body* si possono esprimere come

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{f}_b \\ \boldsymbol{\tau}_b \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_a \\ \mathbf{d}_{ba}\mathbf{f}_a \end{Bmatrix} \tag{4.6}$$

Il giunto *parallel primitive*, invece, permette di bloccare 2 GDL rotazionali dell'*action body* rispetto al *base body*, fissando nello spazio la direzione dell'asse $z$ riferito all'*action body* (asse attorno a cui è consentita la rotazione). Prendendo come riferimento la Figura (4.8), è possibile definire le condizioni di vincolo imposte da tale giunto come

$${}^R\boldsymbol{\Phi} = \begin{Bmatrix} \mathbf{h}_b^T\mathbf{f}_a \\ \mathbf{h}_b^T\mathbf{g}_a \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \tag{4.7}$$

dove $\mathbf{h}_b$ è l'asse $z$ del marker riferito al *base body*, mentre $\mathbf{f}_a$ e $\mathbf{g}_b$ sono rispettivamente assi $x$ e $y$ del marker riferito all'*action body*.

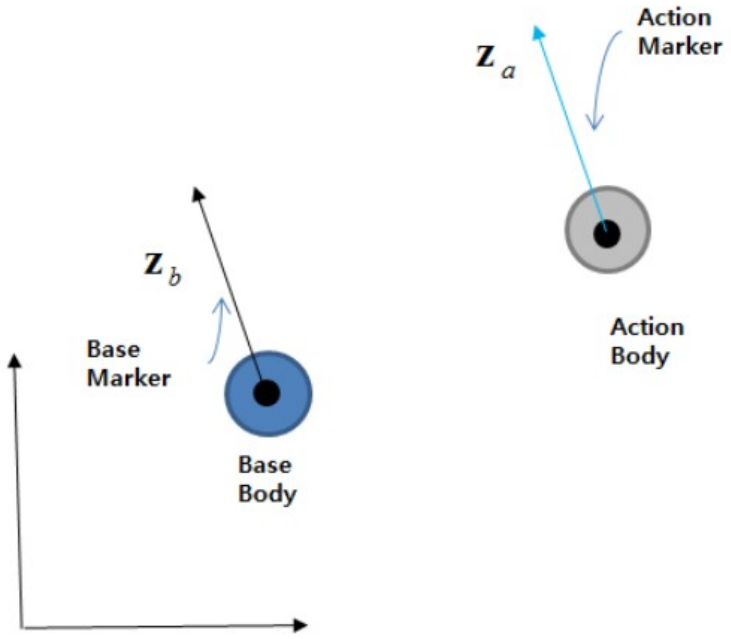



Figura 4.8: Cinematica giunto *parallel primitive* [120].

Le reazioni vincolari si possono ottenere tramite i moltiplicatori di Lagrange e possono essere scritte come

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{f}_a \\ \boldsymbol{\tau}_a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ {}^R\boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix} \tag{4.8}$$

mentre le forze e i momenti scambiati reciprocamente tra *action body* e *base body* si possono esprimere come

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{f}_b \\ \boldsymbol{\tau}_b \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_a \\ \boldsymbol{\tau}_a \end{Bmatrix} \tag{4.9}$$

Ipotizzando di considerare l'interazione tra un singolo corpo volvente e la gabbia, all'interno del modello del cuscinetto il primo è associato all'*action body*, mentre la seconda è associata al *base body*. La definizione del giunto *inline primitive* permette al corpo volvente di traslare unicamente lungo la direzione congiungente tra centro del corpo volvente e centro della gabbia, mentre la definizione del giunto *parallel primitive* permette al corpo volvente di ruotare unicamente attorno al proprio asse $z$, il quale risulta fissato in una certa direzione impedendo le rotazioni di tilt attorno agli altri assi $x$ e $y$.

Una seconda modifica effettuata riguarda le caratteristiche di contatto tra corpi volventi e anelli del cuscinetto. Nella formulazione multibody del presente lavoro di tesi la definizione delle superfici di contatto viene modificata passando da NURBS (*Non-Uniform Rational B-Spline*) a *Facet* con l'aggiunta dello *Smoothing* in modo da rendere la simulazione più scorrevole e ottimizzare il costo computazionale volto al calcolo dei contatti. Inoltre, si modifica la rigidezza di contatto, la quale viene ricalcolata sulla base dello *slicing method* presentato in [121], mediante la seguente formula

$$K_H = \frac{E' R_1^2}{(C1)^{3/2}} \tag{4.10}$$

dove $E'$ è il modulo elastico efficace calcolabile come

$$E' = \frac{2}{\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}} \tag{4.11}$$

con $E_1$, $E_2$ e $\nu_1$ e $\nu_2$ che rappresentano rispettivamente il modulo elastico e il modulo di Poisson dei materiali a contatto, mentre $R_1$ rappresenta il raggio equivalente nella direzione di rotolamento definito dalla relazione

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_{1,I}} + \frac{1}{R_{1,II}} \tag{4.12}$$

dove $R_{1,I}$ e $R_{1,II}$ sono i raggi nella direzione di rotolamento rispettivamente del primo e secondo corpo a contatto. Il parametro $C1$ è invece un parametro empirico definito come

$$C1 = \begin{cases} 1.4586\, R_1(\alpha_r)^{-0.2414} & \text{per } \alpha_r < 122.44 \\ 1.7138\, R_1(\alpha_r)^{-0.2743} & \text{per } 22.44 < \alpha_r < 13576 \end{cases} \tag{4.13}$$

con $\alpha_r$ che è il rapporto tra i raggi equivalenti, definito come

$$\alpha_r = \frac{R_1}{R_2} \tag{4.14}$$

Sostituendo con i valori relativi al cuscinetto SKF® 22240 CCK/W33 si ottiene una rigidezza di contatto di circa $7 \cdot 10^6$ $N/mm$, valido per il contatto tra i corpi volventi con entrambe le piste. Allo stesso tempo, si modifica il coefficiente di smorzamento dei contatti secondo l'approccio presentato in [122] secondo cui lo smorzamento può essere espresso attraverso un coefficiente di proporzionalità pari a $10^{-5}$ rispetto alla rigidezza, per cui si ottiene uno smorzamento di contatto pari a 70 $N \cdot s/mm$.

Successivamente sono inseriti nel modello gli elementi di *input* necessari per interfacciare il cuscinetto MB con il rotore FEM. Dal momento che il calettamento avviene tramite un accoppiamento con interferenza, si assume che l'interazione tra i due modelli si basa sull'uguaglianza tra gli spostamenti nodali del rotore (del nodo 4, su cui il cuscinetto è calettato) e gli spostamenti dell'anello interno del cuscinetto stesso. Per permettere ciò è definito un giunto *six motions*, il quale consente di definire le 3 traslazioni e le 3 rotazioni relative dell'*action body* rispetto al *base body* [120], rispettivamente l'anello interno e il *ground* nel caso in esame. Le traslazioni relative lungo i 3 assi $x$, $y$ e $z$ e le rotazioni relative attorno agli assi $x$ e $y$ permesse dal giunto sono definite rispettivamente mediante funzioni di spostamento e spostamento angolare impostate come *input* al cuscinetto tramite *function expressions*. Tali valori in *input* sono coincidenti agli spostamenti nodali calcolati dal modello FEM del rotore. La rotazione relativa attorno all'asse $z$, invece, è definita mediante una funzione di velocità angolare, impostata anch'essa come *input* tramite *function expressions*, il cui valore è uguale alla velocità di rotazione del sistema. Inoltre, tra gli ingressi al modello MB è inserita anche la forza radiale generata dal relativo spingitore e agente sull'anello esterno del cuscinetto. L'applicazione di tale forza avviene mediante la definizione di un *vector*, che rappresenta un vettore forza di 6 componenti (3 forze e 3 momenti) agenti tra due corpi definiti *action body* e *base body* in un certo punto (Figura (4.9)).

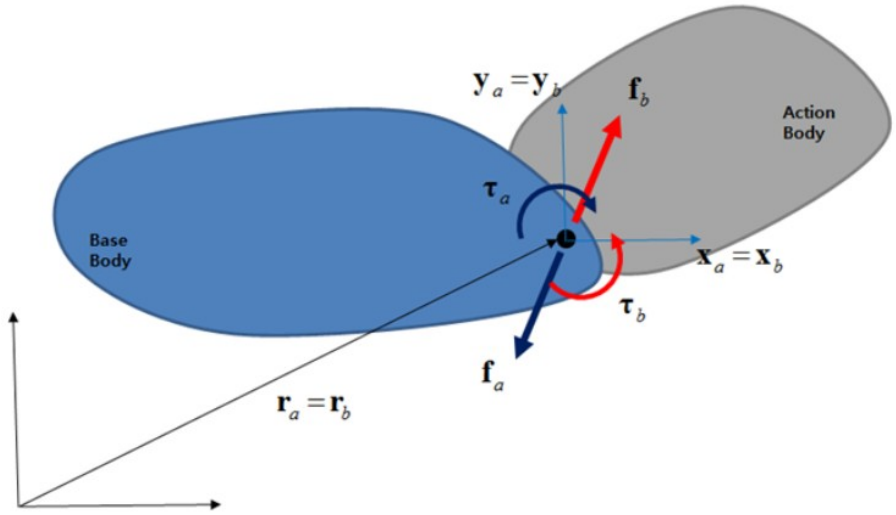



Figura 4.9: Rappresentazione entità *vector* [120].

Nella formulazione l'anello esterno rappresenta l'*action body*, il *ground* rappresenta il *base body* e il valore della forza viene definito tramite *input* esterno mediante *function expressions*.

Infine, sono definiti gli elementi di *output* necessari per l'interazione con il rotore FEM e l'analisi dei risultati di simulazione. Gli spostamenti nodali calcolati dal modello FEM e ricevuti in *input* dal modello del cuscinetto sono utilizzati dal *solver* del software *multibody* per il calcolo delle grandezze di simulazione del cuscinetto stesso. Tra esse figurano l'accelerazione lungo l'asse $x$ dell'anello interno e le accelerazioni lungo gli assi $x$, $y$ e $z$ dell'anello esterno, utili per verificare la stabilità del modello, oltre che le penetrazioni di un corpo volvente con entrambe le piste e le forze di reazione del cuscinetto lungo gli assi $x$, $y$ e $z$. Queste ultime sono calcolate come la somma delle componenti lungo le rispettive direzioni delle forze di contatto tra ogni corpo volvente e l'anello interno.

Tutti gli elementi di *input* e *output* sopra elencati vengono definiti rispettivamente come *S-Input* e *S-Output* del modello MB. Così facendo, durante l'esportazione del file MATLAB® da parte di Motion, utilizzato in seguito per generare il blocco Simulink® del cuscinetto, gli *S-Input* e gli *S-Output* verranno impostati rispettivamente come ingressi ed uscite del blocco stesso.

In Tabella (4.4) vengono riassunti i parametri di simulazione principali implementati nel modello MB del cuscinetto.

| **Parametro** | **Valore** |
|---|---|
| Passo d'integrazione temporale | $1 \cdot 10^{-5}\ s$ |
| Passo d'integrazione temporale iniziale | $1 \cdot 10^{-8}\ s$ |
| Tempo di fine simulazione | $5\ s$ |
| Smorzamento numerico | 1 |
| Rigidezza contatti | $7 \cdot 10^{6}\ N/mm$ |
| Smorzamento contatti | $70\ N \cdot s/mm$ |
| Esponente di penetrazione contatti | 1,5 |
| Forza spingitore radiale | $124800\ N$ |
| Smorzamento contatti | $70\ N \cdot s/mm$ |
| Rigidezza *six motions* traslazione $x$,$y$,$z$ | $1 \cdot 10^{6}\ N/mm$ |
| Smorzamento *six motions* traslazione $x$,$y$,$z$ | $1\ N \cdot s/mm$ |
| Rigidezza *six motions* rotazione attorno $x$,$y$,$z$ | $3{,}5 \cdot 10^{9}\ N \cdot mm/rad$ |
| Smorzamento *six motions* traslazione $x$,$y$,$z$ | $1 \cdot 10^{4}\ N \cdot s \cdot mm/rad$ |
| Rigidezza *bushing* gabbia traslazione $x$,$y$ | $5 \cdot 10^{4}\ N/mm$ |
| Smorzamento *bushing* gabbia traslazione $x$,$y$ | $5\ N \cdot s/mm$ |
| Rigidezza *bushing* OR traslazione $x$,$y$,$z$ | $5 \cdot 10^{4}\ N/mm$ |
| Smorzamento *bushing* OR traslazione $x$,$y$,$z$ | $50\ N \cdot s/mm$ |

Tabella 4.4: Parametri di simulazione modello *multibody* cuscinetto.

## 4.4 Modello sistema rotore-cuscinetto

Dal momento che non si è considerata la matrice di smorzamento del rotore, lo studio della dinamica del sistema rotore-cuscinetto si basa sulla risoluzione della seguente equazione del moto

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}(t)\} + \Omega[\mathbf{G}]\{\dot{\mathbf{q}}(t)\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}(t)\} = \{\mathbf{f}(t)\} \tag{4.15}$$

dove $[\mathbf{M}]$, $[\mathbf{G}]$ e $[\mathbf{K}]$ sono rispettivamente la matrice di massa, giroscopica e di rigidezza del modello FEM del rotore, $\{\ddot{\mathbf{q}}(t)\}$, $\{\dot{\mathbf{q}}(t)\}$ e $\{\mathbf{q}(t)\}$ sono rispettivamente le accelerazioni, le velocità e gli spostamenti nodali del rotore e $\{\mathbf{f}(t)\}$ è il vettore forzante costituito dai contributi di sbilanciamento, peso, forze degli spingitori e forze di reazione del cuscinetto in prova determinate mediante il modello MB. $\Omega$ è la velocità di rotazione del sistema supposta costante e pari a 710 $rpm$. Dal momento che il numero di gradi di libertà del modello FEM del rotore è pari a 60, si richiama che le matrici presenti all'interno del modello hanno dimensione 60×60, mentre i vettori hanno dimensione 60×1.

Il modello FEM del rotore e il modello MB del cuscinetto sono combinati insieme all'interno dell'ambiente Simulink®, il quale rappresenta l'*host* del processo di co-simulazione. Innanzitutto, all'interno dei *callbacks* del modello Simulink®, nella parte denominata *InitFcn*, viene inserito un codice di inizializzazione del modello stesso, il quale viene processato all'inizio di ogni simulazione. In primo luogo, esso esegue il file MATLAB® generato da ANSYS® Motion contenente le informazioni necessarie per costruire il blocco del modello MB da inserire nell'ambiente Simulink®. Dopodiché, esso costruisce il modello FEM del rotore, restituendo le matrici globali di massa $[\mathbf{M}]_{rot}$, di rigidezza $[\mathbf{K}]_{rot}$ e giroscopica $[\mathbf{G}]_{rot}$ del rotore, il vettore della forza peso $\{\mathbf{F}\}_{peso}$, il numero di gradi di libertà $nGDL$, il numero di nodi $nNodi$ e il vettore delle coordinate assiali dei nodi stessi $\{\mathbf{zNodi}\}$. Successivamente vengono definiti i parametri di integrazione temporale, quali il passo di integrazione e il tempo di fine simulazione, utilizzati inoltre per comporre il vettore dei tempi di simulazione. In seguito, viene inizializzata la velocità di rotazione utilizzata durante la simulazione, così come la forza radiale agente sull'anello esterno dei cuscinetti in prova e il vettore per il ritorno al modello FEM delle forze di reazione calcolate dal solver MB. Infine, si definiscono i parametri per il calcolo della forza di sbilanciamento.

La rappresentazione del modello del sistema rotore-cuscinetto in ambiente Simulink® è riportata in Figura (4.10). Si può notare come il modello contenga due blocchi principali, il blocco dell'integrazione temporale sulla sinistra e il blocco del modello MB del cuscinetto generato da Motion in azzurro sulla destra. Analizzando il modello da sinistra verso destra si possono notare innanzitutto quattro blocchi *constant* tramite cui si definiscono le matrici di massa $[\mathbf{M}]_{rot}$, di rigidezza $[\mathbf{K}]_{rot}$ e giroscopica $[\mathbf{G}]_{rot}$ del rotore, così come il passo di integrazione temporale $dt$. Sempre a sinistra si possono osservare due blocchi *ramp* utilizzati per definire la velocità di rotazione $\Omega$ del sistema e la forza degli spingitori radiali. Ciascuno di essi è seguito

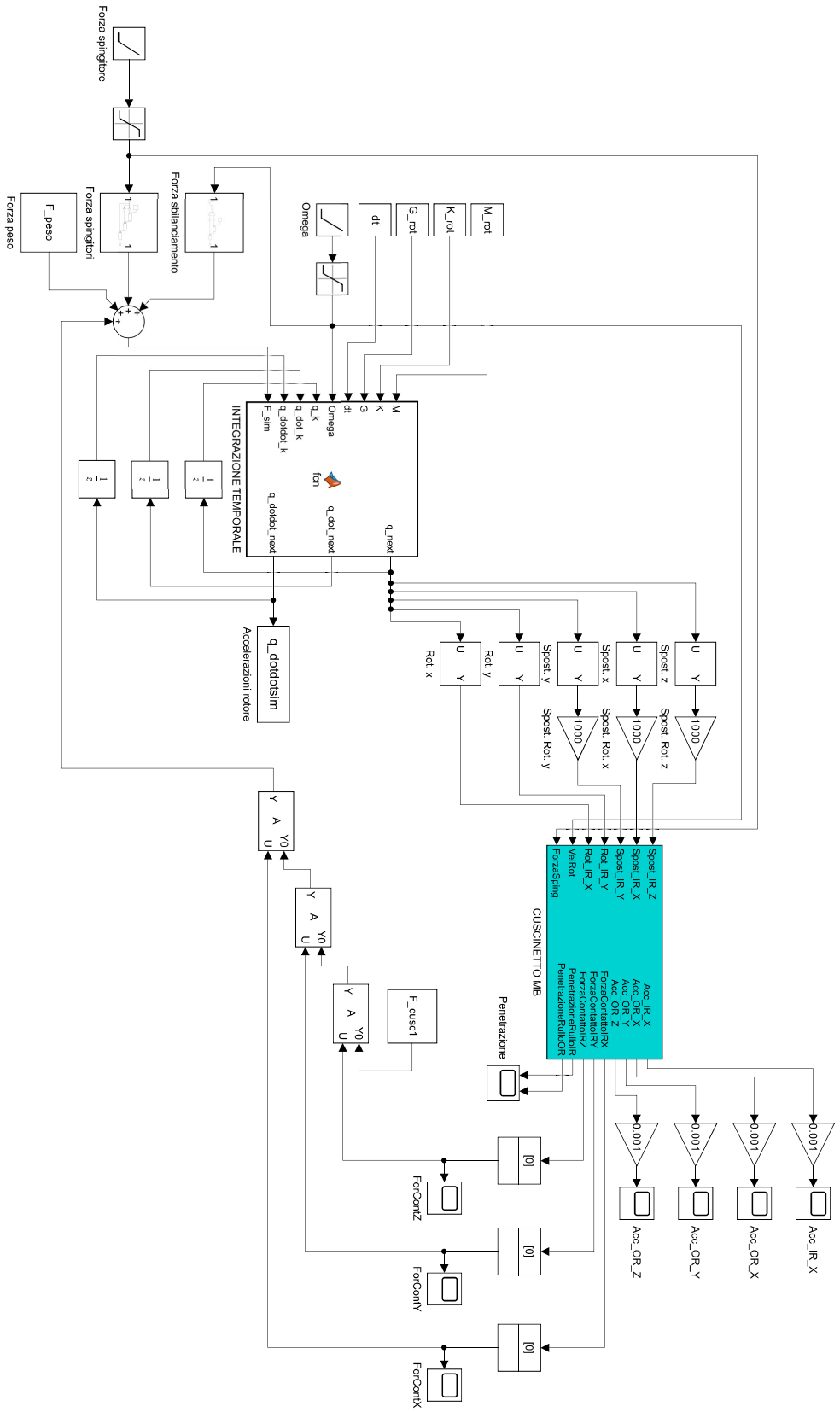



Figura 4.10: Modello Simulink® sistema rotore-cuscinetto.

da un blocco *saturation* per definire il limite superiore da non oltrepassare per le due grandezze. La combinazione di tali blocchi è scelta in modo da ottenere un avvio graduale della rotazione del sistema, così come l'applicazione graduale delle forze degli spingitori con l'obiettivo di minimizzare i contributi impulsivi agenti sul rotore nei primi istanti di simulazione.

In basso a sinistra sono presenti due *subsystems* per la costruzione del vettore della forza di sbilanciamento $\{\mathbf{F}\}_{unb}$ e del vettore della forza degli spingitori $\{\mathbf{F}\}_{sping}$, oltre che ad un ulteriore blocco *constant* contenente il vettore della forza peso $\{\mathbf{F}\}_{peso}$. Per quanto riguarda la forza di sbilanciamento, ricordando la trattazione affrontata nel Capitolo 3, essa può essere scomposta in due componenti $F_{c,x}$ e $F_{c,y}$ agenti rispettivamente lungo gli assi $x$ e $y$ e calcolate come

$$\begin{Bmatrix} F_{c,x} = F_c \cdot \cos(\Omega t) \\ F_{c,y} = F_c \cdot \sin(\Omega t) \end{Bmatrix} \tag{4.16}$$

dove $F_c$ è il modulo di tale forza calcolabile come

$$F_c = m_e \cdot \varepsilon \cdot \Omega^2 \tag{4.17}$$

in cui $m_e$ è il valore della massa eccentrica, $\varepsilon$ è l'eccentricità e $\Omega$ è la velocità di rotazione (costante). La valutazione dell'eccentricità $\varepsilon$ è eseguita tramite il grado di sbilanciamento $G$ [1], il quale è definito come la massima velocità periferica in $mm/s$ del centro di massa del rotore in funzione dello sbilanciamento. Esso si può assumere in base alle caratteristiche del rotore in esame e nel caso in analisi si è optato per il grado $G100$ [1]. Conoscendo la velocità di rotazione è possibile ricavare il valore di eccentricità da assegnare al rotore dal diagramma riportato in Figura (4.11), da cui per $\Omega = 400\ rpm$ si ottiene circa $\varepsilon = 1{,}5\ mm$.

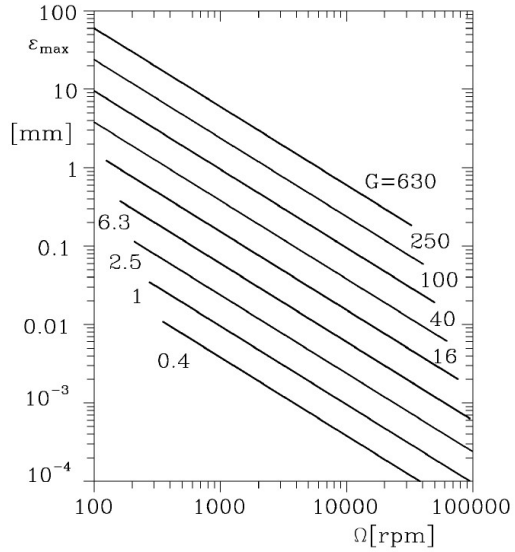



Figura 4.11: Valore eccentricità $\varepsilon$ in funzione del grado di sbilanciamento $G$ e della velocità di rotazione $\Omega$ [1].

Il *subsystem* riguardante la forza di sbilanciamento è visibile in Figura (4.12). Esso presenta un *input* corrispondente alla velocità di rotazione, la quale viene moltiplicata tramite apposito blocco con il tempo definito dal blocco *clock*. Tale prodotto viene inserito come argomento nei blocchi coseno e seno, le cui uscite sono successivamente moltiplicate per il modulo della forza di sbilanciamento $F_c$ per ottenere le componenti rispettivamente lungo gli assi $x$ e $y$ della forza stessa. Questi valori vengono quindi inseriti all'interno del vettore $\{\mathbf{F}\}_{unb}$ mediante due blocchi *assignment* rispettivamente nelle posizioni 27-1 e 28-1, in quanto si è ipotizzato di applicare lo sbilanciamento al nodo 6 del rotore. Il vettore assemblato viene, infine, restituito come *output* del *subsystem*.

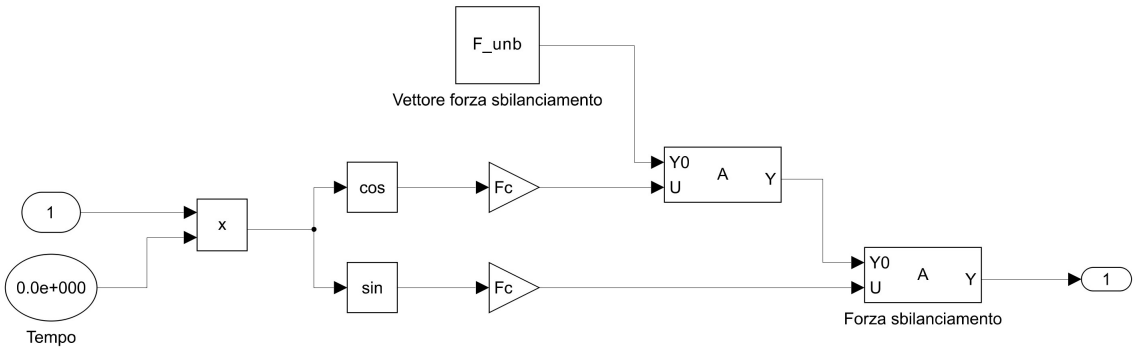



Figura 4.12: *Subsystem* forza di sbilanciamento.

Il *subsystem* riguardante le forze degli spingitori è rappresentato in Figura (4.13). Si ricorda che, tali forze sostituiscono i tre cuscinetti in prova non modellati mediante approccio MB, per cui esse sono applicate ai nodi 5, 7 e 8 del modello FEM. Il sottosistema riceve in ingresso il valore della forza esercitata dagli spingitori pari a 124,8 $kN$, il quale, supponendo che le forze agiscano lungo l'asse $x$, viene assegnato alle posizioni 22-1, 32-1 e 37-1 del vettore $\{\mathbf{F}\}_{sping}$ mediante appositi blocchi *assignment*. È importante sottolineare che i primi due valori assegnati presentano un segno negativo per rispettare la distribuzione dei percorsi di carico del banco prova cuscinetti riportata in Figura (4.3). Il vettore assemblato viene, infine, restituito come *output* del *subsystem*.

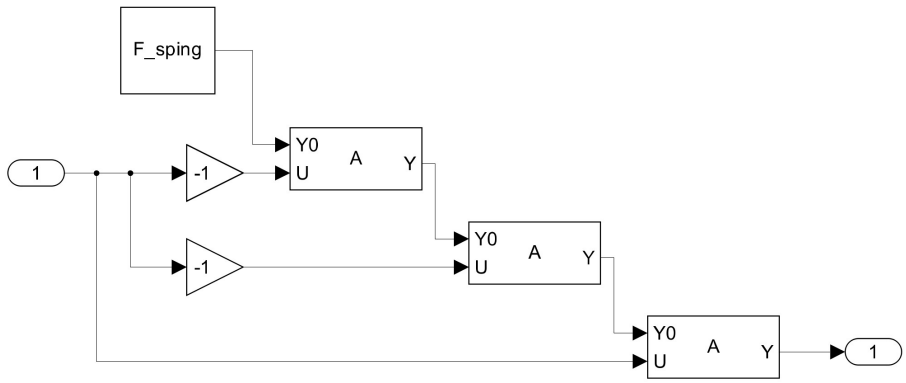



Figura 4.13: *Subsystem* forze spingitori.

Procedendo verso destra si osserva il blocco di integrazione temporale, il quale è una funzione MATLAB® che contiene al proprio interno l'algoritmo di soluzione del modello FEM basato sul metodo di Newmark-$\beta$. Tale blocco restituisce in uscita lo stato del sistema all'istante di tempo $t_{k+1}$ (spostamenti $\{\mathbf{q}\}_{k+1}$, velocità $\{\dot{\mathbf{q}}\}_{k+1}$ e accelerazioni $\{\ddot{\mathbf{q}}\}_{k+1}$), mentre riceve in ingresso le matrici del rotore, il passo di integrazione $dt$, la velocità di rotazione $\Omega$, lo stato del sistema all'istante $t_k$ (spostamenti $\{\mathbf{q}\}_k$, velocità $\{\dot{\mathbf{q}}\}_k$ e accelerazioni $\{\ddot{\mathbf{q}}\}_k$) e il vettore forzante $\{\mathbf{F}\}_{sim}$, il quale è dato da

$$\{\mathbf{F}\}_{sim} = \{\mathbf{F}\}_{unb} + \{\mathbf{F}\}_{peso} + \{\mathbf{F}\}_{sping} + \{\mathbf{F}\}_{cusc} \tag{4.18}$$

dove $\{\mathbf{F}\}_{cusc}$ è il vettore contenente le componenti di reazione calcolate dal modello MB del cuscinetto. È rilevante precisare che, rispetto a quanto esposto nella trattazione dell'algoritmo di Newmark-$\beta$ implicito presente nel Capitolo 3, il metodo di integrazione utilizzato nel presente lavoro di tesi è semi-esplicito in quanto è presente una relazione implicita tra le grandezze in gioco nell'integrazione ad eccezione del vettore forzante $\{\mathbf{F}\}$, il quale viene valutato all'istante $t_k$ anziché $t_{k+1}$. Tale scelta risulta dettata dal fatto che l'interazione tra il rotore e il cuscinetto segue l'ipotesi per cui la forza di reazione del cuscinetto valutata all'istante $t_k$ dipenda strettamente dagli spostamenti nodali del rotore al medesimo istante temporale. Per questo motivo, risulta impossibile calcolare il vettore $\{\mathbf{F}\}_{cusc}$ all'istante $t_{k+1}$ previa determinazione degli spostamenti nodali a tale istante di tempo. I parametri di integrazione temporale dell'algoritmo di Newmark utilizzati per la risoluzione del modello si rifanno alle definizioni riportate nel Capitolo 3 e i rispettivi valori sono riportati in Tabella (4.5).

| **Parametro** | **Valore** |
|---|---|
| Passo d'integrazione temporale | $1 \cdot 10^{-5}$ $s$ |
| Tempo di fine simulazione | 5 $s$ |
| $\eta$ | 0,25 |
| $\gamma$ | 0,75 |
| $\beta$ | 0,390625 |

Tabella 4.5: Parametri di simulazione algoritmo di Newmark-$\beta$ semi-esplicito.

Si può notare che all'interno dell'algoritmo è inserito uno smorzamento numerico $\eta$ con l'obiettivo di rendere più stabile la simulazione e, come detto precedentemente, di compensare l'assenza della matrice di smorzamento del rotore all'interno dell'analisi.

Sotto al blocco di integrazione temporale sono presenti tre blocchi *unit delay*, necessari per riportare le variabili cinematiche del rotore all'ingresso del blocco di integrazione temporale valutate nel corretto istante temporale. Tali blocchi sono essenziali per rompere l'anello algebrico che verrebbe altrimenti a crearsi nell'ambiente Simulink, permettendo fisicamente alla co-simulazione di avanzare senza errori.

Procedendo nell'analisi del modello si può osservare che al ramo degli spostamenti in uscita dal blocco di integrazione temporale sono collegati cinque blocchi *selector*, necessari per estrarre dal vettore degli spostamenti nodali $\{\mathbf{q}\}$ le componenti riferite al nodo 4 della discretizzazione su cui è calettato il cuscinetto MB. Ricordando l'ordine dei GDL nodali (Equazione (4.1)), sono estratte le componenti in posizione 16-1, 17-1, 18-1, 19-1 e 20-1, le quali vengono successivamente inviate in ingresso al modello MB del e costituiscono gli *input* del giunto *six motions* relativo all'anello interno. Il blocco del cuscinetto MB riceve in ingresso anche la velocità di rotazione $\Omega$ e il valore della forza dello spingitore applicata sull'anello esterno. Una volta calcolata la soluzione, il blocco Motion restituisce in *output* l'accelerazione lungo $x$ dell'anello interno, le accelerazioni lungo le tre direzioni $x$, $y$, $z$ dell'anello esterno, le penetrazioni di un corpo volvente con le piste e le tre componenti della forza di reazione del cuscinetto lungo i tre assi. Queste ultime vengono utilizzate per assemblare il vettore della forza di reazione del cuscinetto $\{\mathbf{F}\}_{cusc}$ tramite appositi blocchi *assignment*. I valori delle componenti lungo $z$, $x$ e $y$ vengono inseriti rispettivamente nelle posizioni 16-1, 17-1 e 18-1 del suddetto vettore, il quale viene poi unito agli altri vettori delle forze tramite blocco *sum* per formare il vettore forzante del sistema. Infine, nel percorso dei rami di tali forze è possibile notare tre blocchi *initial condition* che permettono di definire il valore iniziale delle forze stesse, il quale è nullo per tutte le componenti.

# Capitolo 5

# Risultati di simulazione e relativa analisi

All'interno del presente Capitolo sono riportati i risultati ottenuti dalle simulazioni numeriche. Si realizza in primo luogo l'analisi modale relativa al modello FEM del solo rotore, formato dall'unione di albero, cuscinetti di banco, anelli interni dei cuscinetti in prova e relative bussole coniche di calettamento. Successivamente, si riportano i risultati relativi alla co-simulazione del modello combinato FEM-MB e la relativa analisi del comportamento dinamico nel dominio del tempo e della frequenza. Con l'obiettivo di verificare gli effettivi benefici del modello sviluppato, si è deciso di realizzare un confronto tra i risultati ottenuti dalla co-simulazione e i risultati ottenuti dalla simulazione dello stesso modello FEM del rotore a cui sono aggiunte le forze sviluppate dagli spingitori radiali per considerare i contributi dei cuscinetti in prova. Si specifica che tutte le valutazioni sono effettuate considerando una velocità di rotazione del rotore $\Omega$ costante e pari a 400 $rpm$.

## 5.1 Analisi modale rotore

L'analisi modale ha come obiettivo l'individuazione delle frequenze caratteristiche, delle rispettive forme modali e la determinazione delle velocità critiche del sistema in esame. Nel presente lavoro di tesi tale analisi riguarda esclusivamente il modello FEM, per cui essa è relativa all'albero del rotore con la presenza dei cuscinetti di banco modellati come molle lineari e dei contributi inerziali legati ad anelli interni e bussole coniche dei cuscinetti in prova. L'intero processo di calcolo è stato realizzato in ambiente MATLAB®, mediante la scrittura di un codice principale in cui vengono richiamate sistematicamente le funzioni necessarie. Il processo è effettuato mediante il passaggio allo spazio degli stati, la cui formulazione teorica si può trovare in [1].

In Figura (5.1) è possibile osservare il diagramma di Campbell del rotore in esame, in cui si può notare la divisione delle frequenze proprie del sistema in frequenze di precessione in avanti e all'indietro a causa della presenza del contributo giro-

scopico. Le velocità critiche del rotore riferite allo sbilanciamento sono identificate imponendo la condizione $\omega = \Omega$ mediante apposita parte di codice e i valori riferiti ai primi 4 modi di vibrare sono riportati in Tabella (5.1). Si specifica che, dal momento che l'asse del rotore coincide con l'asse $z$ del sistema di riferimento non inerziale, le velocità critiche estratte si riferiscono alle risonanze flessionali le cui vibrazioni e orbite si sviluppano nel piano $xy$ del suddetto sistema di riferimento.

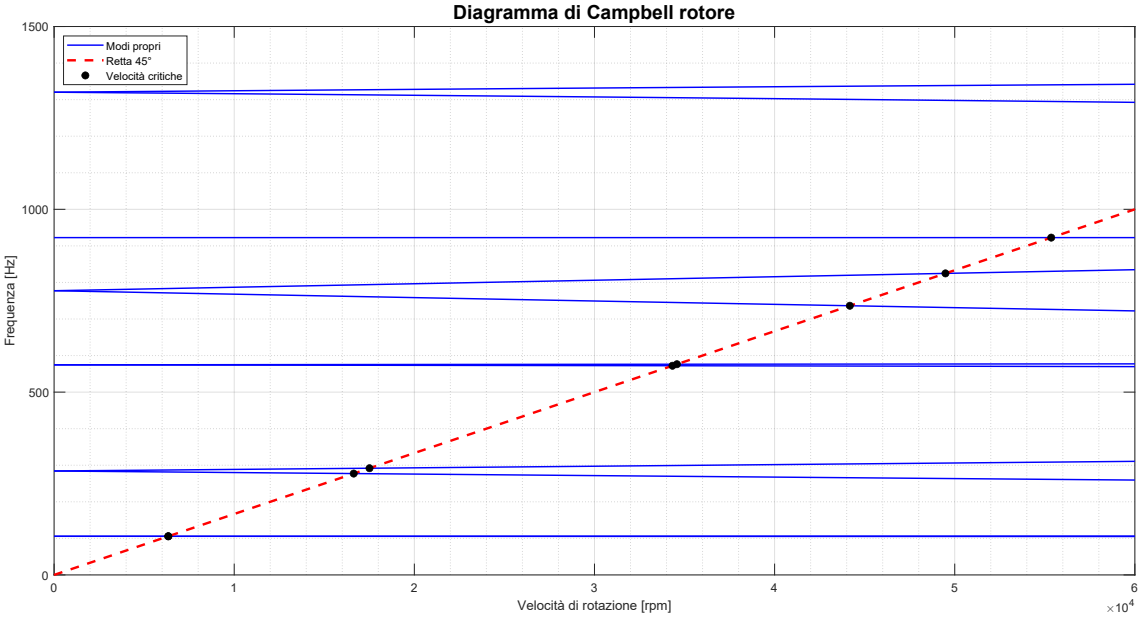



Figura 5.1: Diagramma di Campbell rotore.

| | **Velocità critiche** | |
|---|---|---|
| **Modo 1** | 6336,81 rpm | (105,61 Hz) |
| | 6343,83 rpm | (105,73 Hz) |
| **Modo 2** | 16634,13 rpm | (277,24 Hz) |
| | 17510,01 rpm | (291,83 Hz) |
| **Modo 3** | 34329,53 rpm | (572,16 Hz) |
| | 34577,43 rpm | (576,29 Hz) |
| **Modo 4** | 44176,37 rpm | (736,27 Hz) |
| | 49484,91 rpm | (824,75 Hz) |

Tabella 5.1: Velocità critiche rotore risonanze flessionali piano $xy$.

Nelle Figure (5.2) e (5.3) sono, invece, riportate le forme modali uniche relative rispettivamente al piano $xz$ e al piano $yz$. Si può notare che ciascuna forma modale riferita ad un determinato nodo presenta la stessa forma in entrambi i piani di analisi. Tale risultato coincide con quanto preventivato a livello teorico dal momento che il rotore in esame è assialsimmetrico e i cuscinetti di banco sono assunti isotropi, così come le proprietà inerziali degli anelli interni e delle bussole coniche dei cuscinetti in prova.

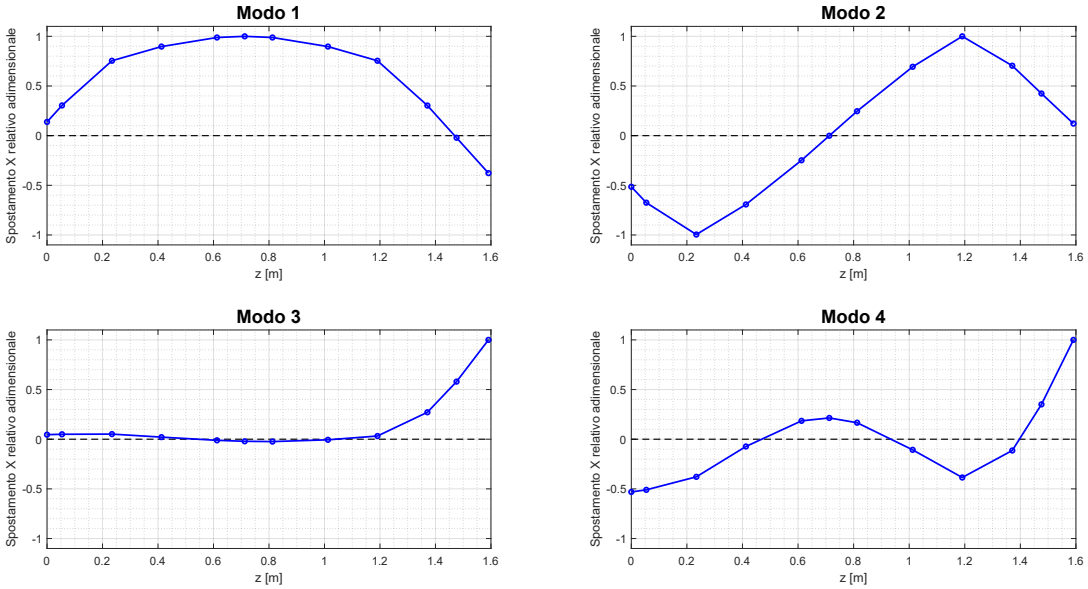



Figura 5.2: Forme modali uniche piano $xz$.

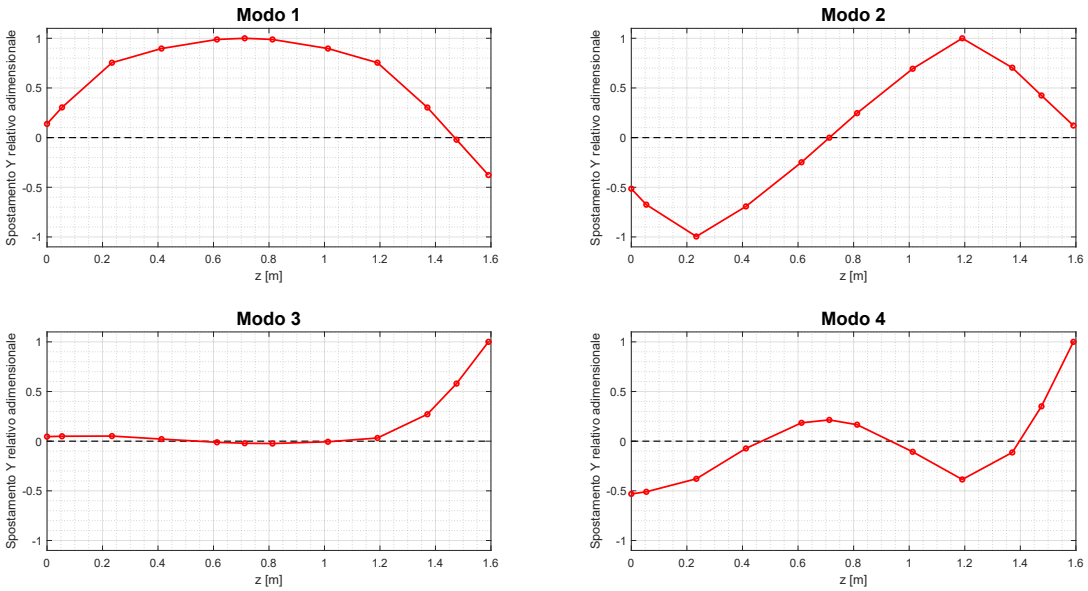



Figura 5.3: Forme modali uniche piano $yz$.

## 5.2 Co-simulazione sistema rotore-cuscinetto

Come detto nell'introduzione del presente Capitolo, in questa sezione verrà presentato un confronto tra i risultati ottenuti dalla co-simulazione e i risultati ottenuti dalla simulazione del modello FEM del rotore in cui i cuscinetti in prova sono modellati mediante le forze che i relativi spingitori radiali applicano loro. Tale confronto si basa sull'analisi del comportamento dinamico nel dominio del tempo e della frequenza del nodo 4 del modello FEM del rotore, nodo su cui è calettato il cuscinetto in prova modellato con formulazione *multibody* nell'approccio combinato. Inoltre, sono riportati i risultati calcolati dal modello MB delle forze di contatto e delle penetrazioni tra corpi volventi e piste che si generano all'interno del cuscinetto.

In Figura (5.4) e (5.5) è riportato lo spostamento del nodo 4 del modello FEM nel tempo lungo la direzione $x$ del sistema di riferimento inerziale. L'asse dei tempi è stato volutamente impostato con visualizzazione tra 1 e 5 secondi (come negli altri grafici nel dominio del tempo) in modo da escludere dall'analisi i possibili contributi transitori legati alla presenza delle rampe di azionamento della velocità di rotazione e delle forze degli spingitori.

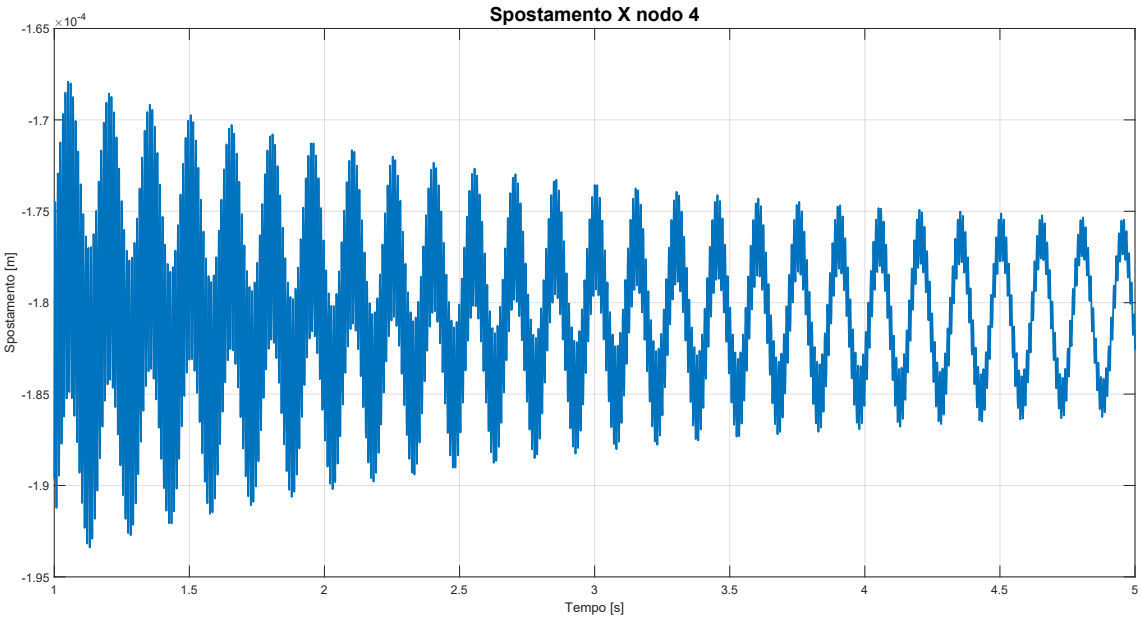



Figura 5.4: Spostamento direzione $x$ in funzione del tempo nodo 4 rotore, modello FEM.

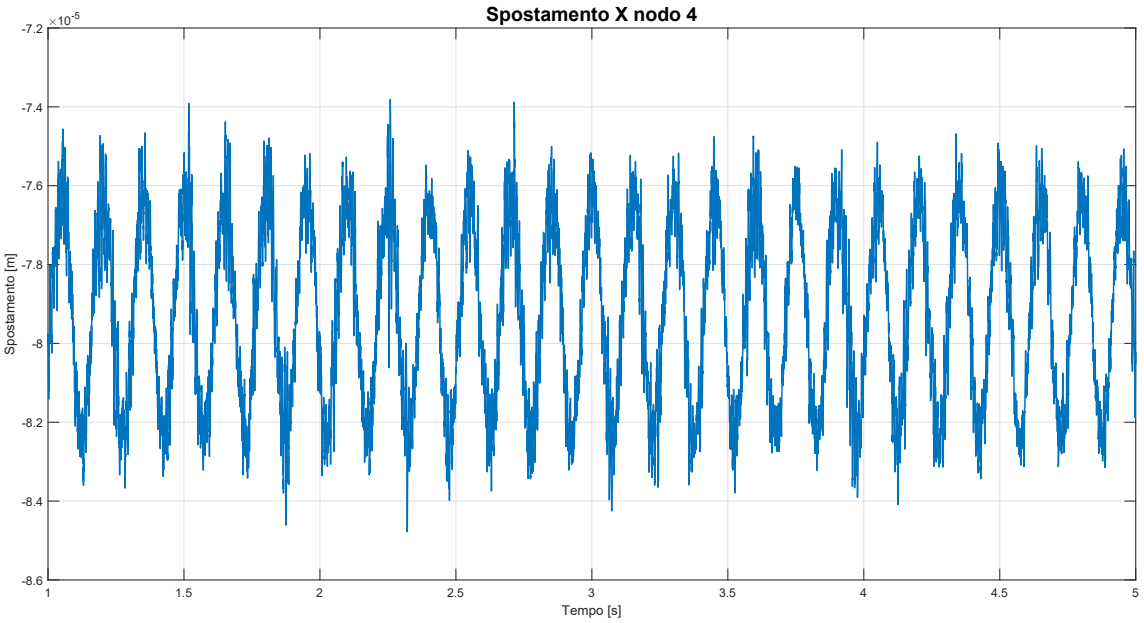



Figura 5.5: Spostamento direzione $x$ in funzione del tempo nodo 4 rotore, co-simulazione.

Innanzitutto, è possibile notare che nel modello FEM il nodo oscilla attorno ad un valore medio di spostamento (*offset* statico) di circa $-1{,}8 \cdot 10^{-4}\ m$, mentre nel modello combinato tale valore medio si assesta attorno a circa $-7{,}8 \cdot 10^{-5}\ m$. In entrambi i casi, il valore medio non risulta nullo in quanto entrambi i modelli sono soggetti all'azione della forza peso e delle forze (costanti) degli spingitori dei cuscinetti in prova. La differenza di circa un ordine di grandezza tra i due modelli può essere ricondotta al fatto che, la modellazione dei cuscinetti in prova come semplici forze fa si che il modello globale risulti più cedevole. Al contrario, la co-simulazione permette di calcolare i contatti che si sviluppano all'interno del cuscinetto tra corpi volventi e piste. Nel caso in analisi, tali contatti sono stati definiti mediante la teoria di Hertz assumendo la rigidezza non-lineare, per cui il sistema risulta molto più rigido, limitando la deformazione dovuta ai carichi statici. Si può osservare, inoltre, che il modello FEM presenta un evidente transitorio con andamento esponenziale, mentre il modello co-simulato si presenta già in regime stazionario con un'ampiezza di oscillazione macroscopica costante. Questa differenza dimostra che all'interno del modello combinato l'energia relativa al transitorio viene dissipata molto più rapidamente, probabilmente attraverso l'attrito dei contatti nel cuscinetto MB e la complessa interazione cinematica tra i suoi corpi volventi e le piste, risultando più fedele a ciò che succede nel sistema fisico. In aggiunta, si può notare che l'oscillazione del modello FEM è un segnale armonico molto più pulito rispetto all'oscillazione del modello FEM-MB, la quale presenta un'evidente modulazione ad alta frequenza. Ciò è dovuto alle interazioni che si sviluppano all'interno del modello *multibody*. Infatti, i contatti discreti che si sviluppano nel cuscinetto e il passaggio dei corpi

volventi producono vibrazioni ad alta frequenza che modificano il contenuto armonico del segnale in uscita. Infine, si può osservare che le due ampiezze (massime) raggiunte dai segnali (considerando il modello FEM nel tratto finale di regime) sono all'incirca uguali e pari a $1 \cdot 10^{-5}\ m$. Ciò significa che, per quanto semplificato, il modello FEM riesce a stimare correttamente la rigidezza dinamica del sistema, così come il modello combinato. Tuttavia, il raggiungimento di tale valore di range per un tempo molto inferiore da parte del modello FEM-MB conferma quanto detto precedentemente riguardo all'*offset* statico, ovvero che il modello combinato permette di replicare più fedelmente la reale rigidezza complessiva del sistema in analisi grazie alla considerazione dei contatti e delle interazioni che si sviluppano all'interno del cuscinetto.

In Figura (5.6) e (5.7) sono riportati rispettivamente lo spostamento lungo $y$ del nodo 4 del modello FEM e del modello combinato.

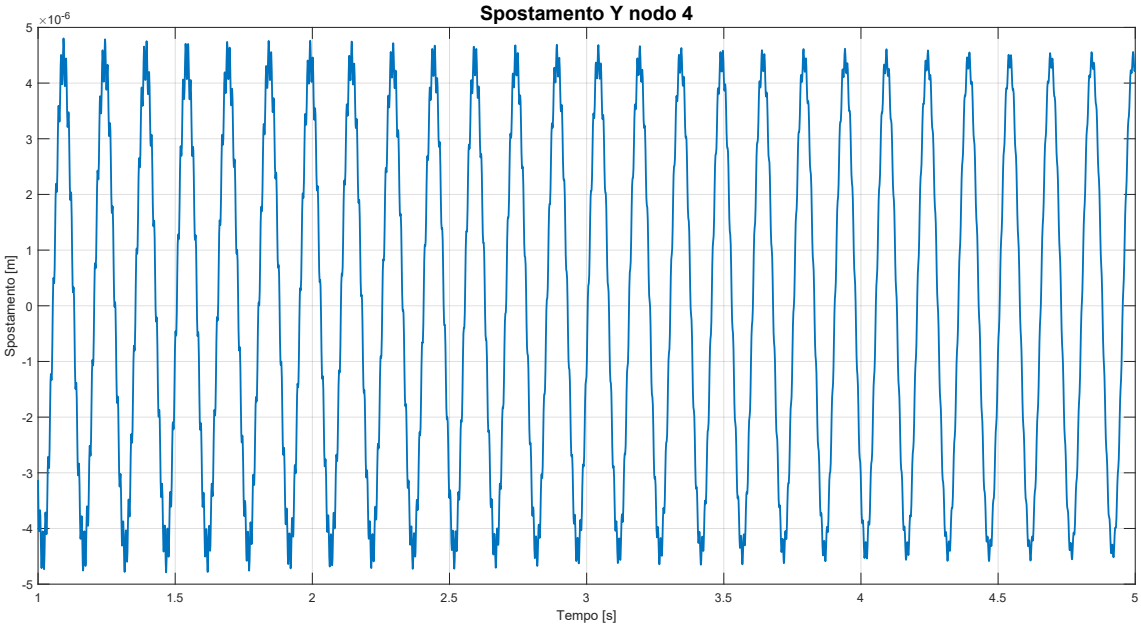



Figura 5.6: Spostamento direzione $y$ in funzione del tempo nodo 4 rotore, modello FEM.

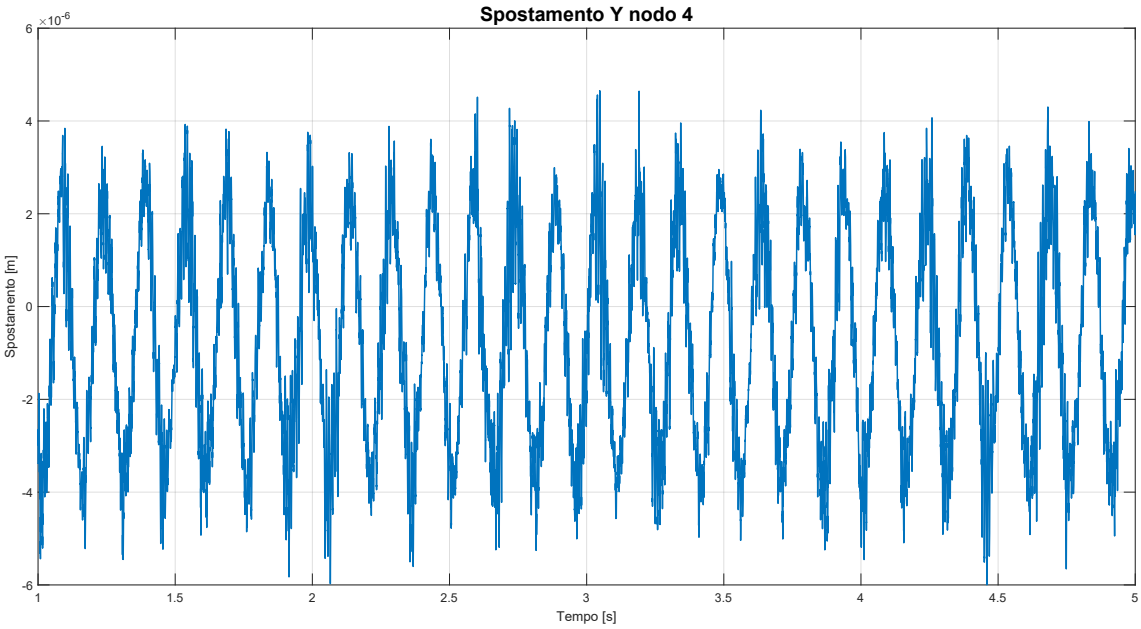
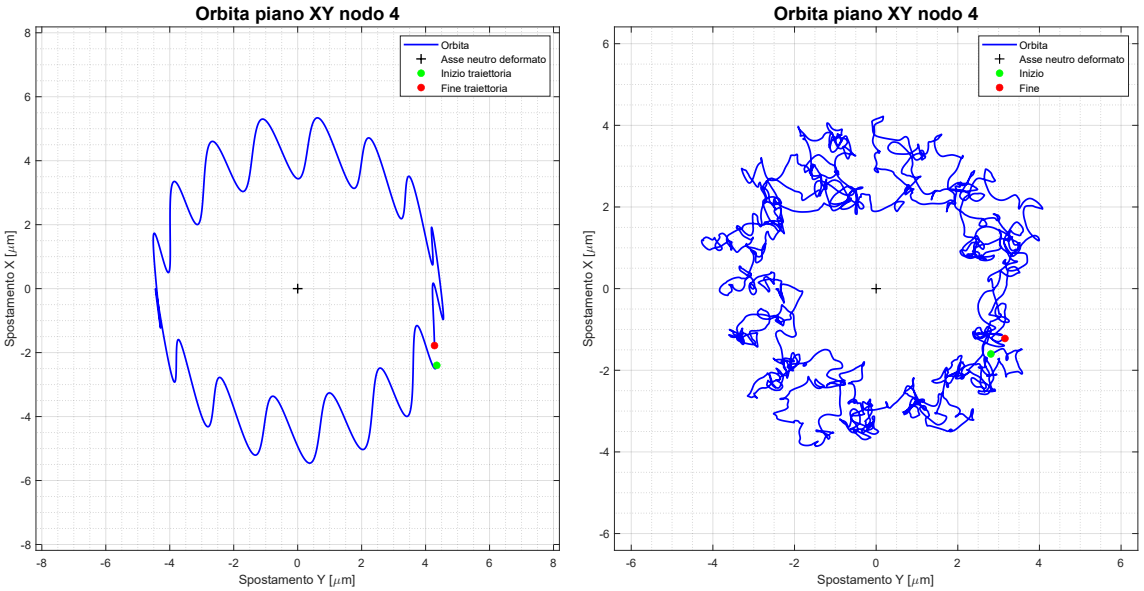



Figura 5.7: Spostamento direzione $y$ in funzione del tempo nodo 4 rotore, co-simulazione.

Anche in questo caso si può notare come il segnale proveniente dalla co-simulazione sia nettamente più complesso rispetto a quello generato dal modello FEM a causa delle interazioni e dei contatti non-lineari che avvengono all'interno del cuscinetto. A differenza della direzione $x$, in questo caso si può osservare che per entrambi i modelli la deformazione statica è praticamente nulla, dovuta al fatto che lungo la direzione $y$ agisce solamente la forza di sbilanciamento, la quale non genera contributi statici.

La maggiore complessità della risposta dinamica del modello combinato dovuta alla presenza dei contatti e delle interazioni non-lineari del cuscinetto può anche essere osservata graficando le orbite dei nodi del sistema. In Figura (5.8a) e (5.8b) è riportata l'orbita 2D nel piano $xy$ del nodo 4 del rotore ottenuta rispettivamente dal modello FEM e dalla co-simulazione. È importante precisare che, per ottenere una scala dei grafici migliore possibile, in entrambi i casi la rappresentazione è stata normalizzata depurandola del contributo di deformazione statica, per cui il centro dell'orbita visibile nelle figure è in realtà relativo all'asse neutro deformato dell'albero.




(a) Modello FEM. (b) Co-simulazione.

Figura 5.8: Orbita normalizzata nel piano $xy$ del nodo 4 del rotore.

Si può osservare come il confronto tra le due orbite confermi quanto detto precedentemente dall'analisi degli spostamenti. Il modello FEM con l'aggiunta delle semplici forze al posto dei cuscinetti in prova genera un'orbita del nodo 4 molto pulita, generata dallo sbilanciamento a cui si sovrappone un'ondulazione relativa probabilmente a una frequenza propria del rotore. Al contrario, l'orbita ottenuta dal modello combinato risulta molto più caotica e frastagliata, con evidenti contributi ad alta frequenza. La presenza del contatto hertziano non-lineare permette di tenere conto delle variazioni di rigidezza che si sviluppano all'interno del cuscinetto dovute al passaggio dei corpi volventi nella zona di carico e alle interazioni con le piste, le quali rendono l'orbita del rotore molto più complessa. Si può inoltre notare che la maggior rigidezza dovuta alla presenza del cuscinetto MB fa si che l'orbita del modello combinato abbia un raggio medio inferiore (circa 3 $\mu m$) rispetto al modello FEM (circa 5 $\mu m$), per cui l'orbita reale del sistema in condizioni operative possiede ampiezza minore di quanto stimato dal semplice modello FEM. Gli effetti relativi alla presenza del cuscinetto *multibody* influenzano non solo l'orbita del rotore su cui esso è calettato, ma anche le orbite degli altri nodi della discretizzazione. In Figura (5.9) e (5.10) sono riportate le orbite dei nodi del rotore ottenute rispettivamente dal modello FEM e dalla co-simulazione. Si specifica che, per rendere più chiara la rappresentazione, le orbite riportate sono in entrambi i casi quelle relative ai nodi 2, 4, 5, 6, 7, 8 e 10, cioè quei nodi su cui è calettato un cuscinetto (sia esso di banco o di prova), più il nodo centrale del rotore.

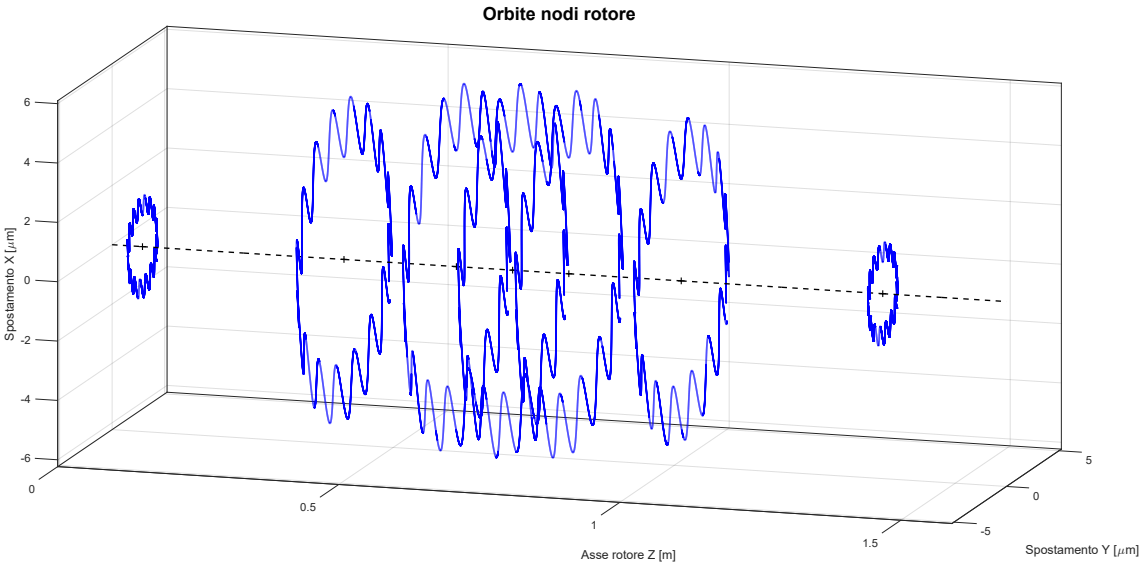



Figura 5.9: Orbite nodi rotore, modello FEM.

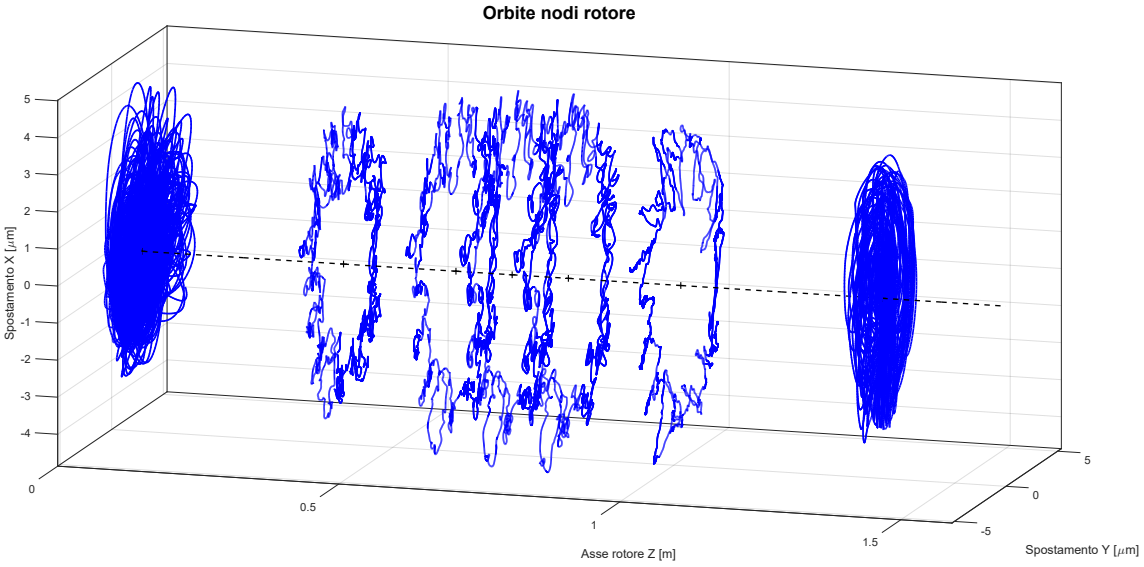



Figura 5.10: Orbite nodi rotore, co-simulazione.

Dalla rappresentazione 3D delle orbite del rotore si può osservare che, come detto, i contatti che si sviluppano nel cuscinetto influiscono su tutto l'albero in analisi. Le orbite di tutti i nodi della discretizzazione presentano un andamento molto caotico dovuto ai contributi ad alta frequenza. Il semplice modello FEM non riesce a catturare questa propagazione lungo tutto il rotore, tuttavia è in grado di stimare abbastanza fedelmente gli ingombri in condizioni operative dei nodi lontani dai vincoli.

I contributi in frequenza contenuti all'interno delle simulazioni possono essere ben visualizzati passando al dominio della frequenza. In Figura (5.11) e (5.12) sono riportati gli spettri di frequenza relativi rispettivamente al modello FEM e al modello combinato, in entrambi i casi riferiti allo spostamento in direzione $x$ del nodo 4. La frequenza di campionamento del segnale è stata posta uguale a $10^5\ Hz$, che corrisponde al reciproco del passo temporale $dt$ utilizzato per realizzare le simulazioni. Si specifica che, anche in questo caso, l'ampiezza dell'asse delle ascisse è stata limitata (da 0 a 1000 $Hz$) per una maggior chiarezza di rappresentazione.

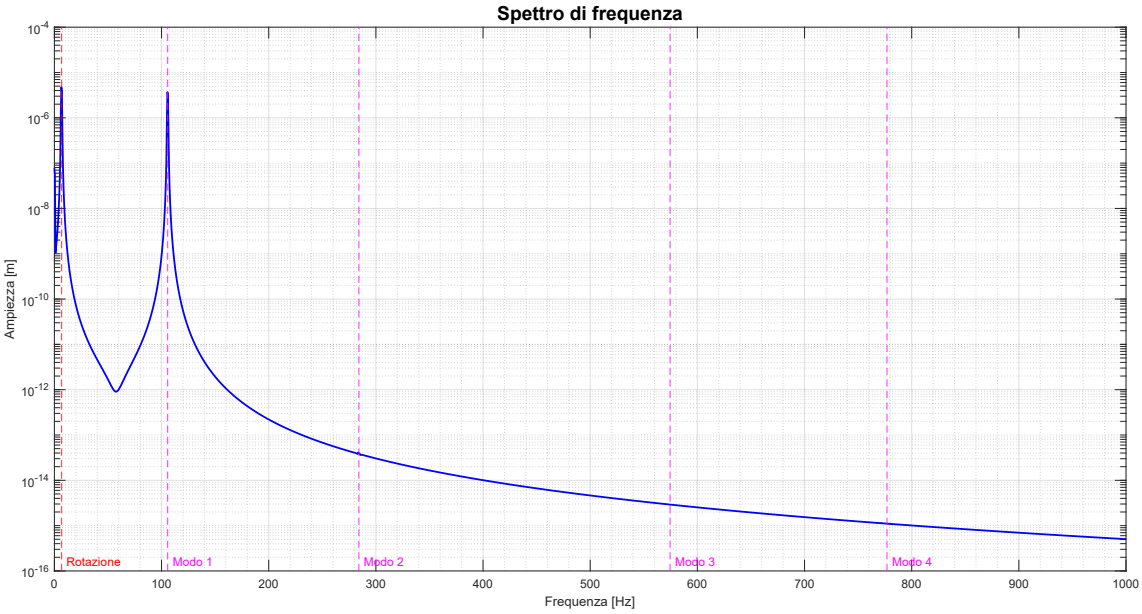



Figura 5.11: Spettro di frequenza, modello FEM.

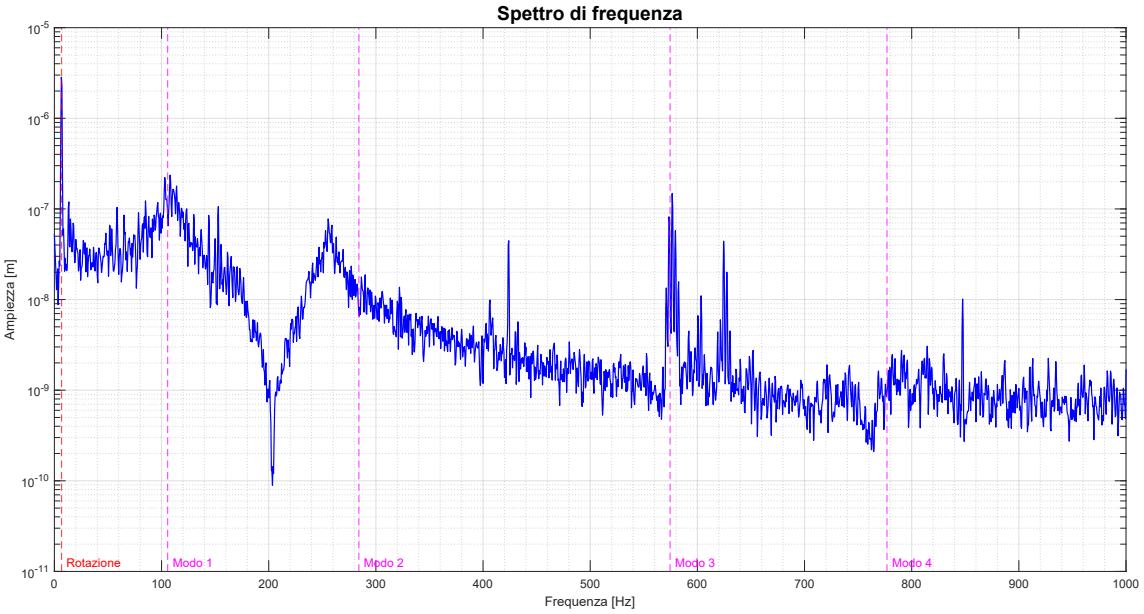



Figura 5.12: Spettro di frequenza, co-simulazione.

Si ricorda che le frequenze proprie del rotore, corrispondenti alle velocità critiche, ottenute dall'analisi modale sono quelle riportate nella Tabella (5.1). Per poter ottenere un valore unico di frequenza propria per ogni modo di vibrare da utilizzare nell'analisi, si è deciso di realizzare la media tra i valori riferiti alla precessione in avanti e all'indietro. Le frequenze proprie considerate sono riportate in Tabella (5.2).

| | **Frequenze proprie analisi risultati** |
|---|---|
| **Modo 1** | 105,67 Hz |
| **Modo 2** | 284,11 Hz |
| **Modo 3** | 574,52 Hz |
| **Modo 4** | 776,96 Hz |

Tabella 5.2: Frequenze proprie rotore utilizzate nell'analisi dei risultati.

A tali valori è importante aggiungere la frequenza di rotazione pari a 6,67 $Hz$, relativa alla velocità angolare di 400 $rpm$. Dai grafici si può osservare come lo spettro del modello FEM con aggiunta delle forze presenti un picco molto ampio in corrispondenza della frequenza di rotazione e della frequenza propria di Modo 1, così come un picco di entità quasi nulla in corrispondenza della frequenza di Modo 2. Ciò significa che il comportamento dinamico di tale modello è dominata prevalentemente dalla risposta sincrona (allo sbilanciamento) con una quota di energia residua non ancora

estinta a causa del transitorio che eccita la prima frequenza propria del rotore. Lo spettro della co-simulazione raffigura correttamente la risonanza in corrispondenza della frequenza di rotazione e della frequenza di primo modo, ma a differenza del grafico del modello FEM presenta un visibile rumore di fondo che rende la risposta in frequenza più complessa. Inoltre, si nota che è presente un picco di risonanza in corrispondenza del Modo 1 (come nel modello FEM), ma sono presenti ulteriori risonanze non rilevate nell'altro spettro. Infatti si osserva un picco molto prominente in corrispondenza del Modo 3, un picco di entità inferiore in corrispondenza del Modo 4 e un picco leggermente spostato a frequenza inferiore rispetto al valore del Modo 2. Ciò conferma che la presenza del cuscinetto MB con annessi contatti hertziani non-lineari e interazioni tra corpi volventi e piste arricchisce le vibrazioni del rotore con contenuti ad alta frequenza, generando una risposta molto più complessa di quella rilevata dal semplice modello FEM. Si possono inoltre notare ulteriori picchi come quelli poco oltre i 400 $Hz$ e tra i 600 e 900 $Hz$, i quali non corrispondono a modi di vibrare del rotore ma probabilmente rappresentano la firma vibratoria (frequenze caratteristiche e rispettive armoniche superiori) del cuscinetto stesso. Infine, osservando l'ampiezza di picco relativa alla frequenza di rotazione, si può affermare che il modello FEM stima correttamente la risposta globale allo sbilanciamento e le rigidezze equivalenti del sistema, ma esso non è in grado di catturare i reali e più complessi fenomeni di interazione tra i componenti del sistema.

A conclusione di questo capitolo di analisi dei risultati, si riportano di seguito due risultati molto significativi ottenuti dal modello *multibody* del cuscinetto, i quali confermano la validità e la corretta rappresentazione dei fenomeni che si instaurano all'interno del componente stesso. In Figura (5.13) e (5.14) sono riportati i confronti tra gli andamenti nel tempo dello spostamento del nodo 4 del rotore e della forza di contatto sviluppata dal cuscinetto, rispettivamente lungo le direzioni $x$ e $y$.

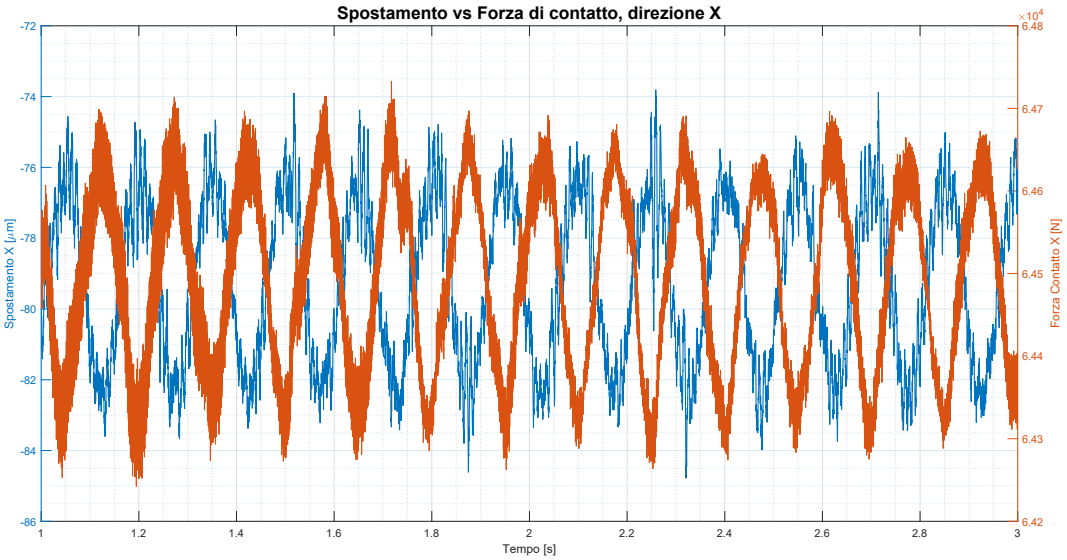



Figura 5.13: Confronto spostamento nodo 4 rotore e forza di contatto cuscinetto MB in direzione $x$ nel tempo.

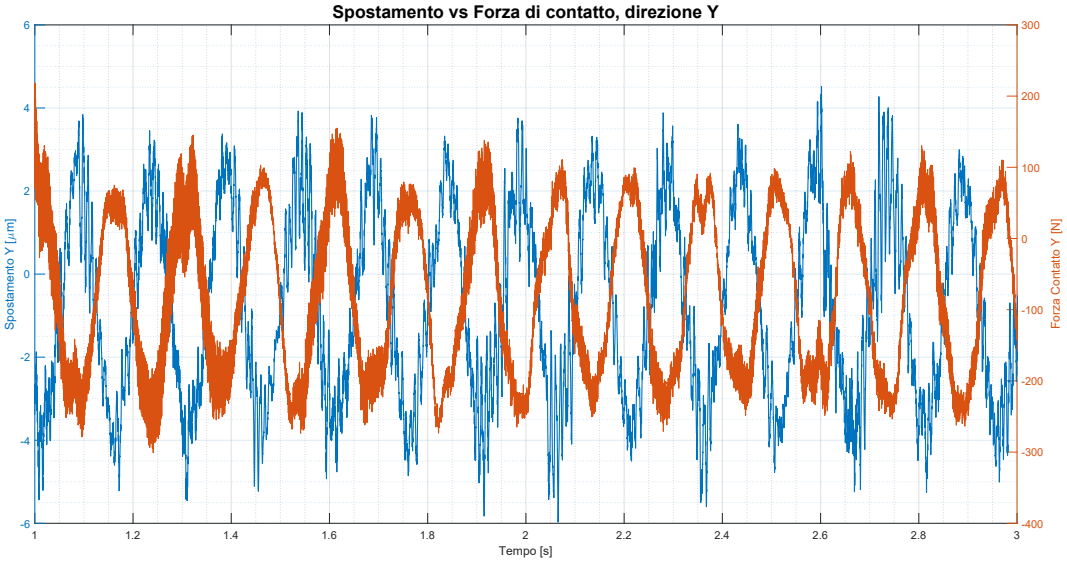



Figura 5.14: Confronto spostamento nodo 4 rotore e forza di contatto cuscinetto MB in direzione $y$ nel tempo.

Si ricorda che l'interazione rotore-cuscinetto analizzata nel presente lavoro di tesi ha come ipotesi fondamentale che gli spostamenti nodali del rotore (del nodo 4) siano equivalenti agli spostamenti imposti all'anello interno del cuscinetto MB. Per questo motivo, il *solver* MB calcola le forze di reazione ad un dato istante temporale sulla base degli spostamenti nodali calcolati dal modello FEM al medesimo istante temporale. Tale ipotesi è ben raffigurata dai confronti riportati nei grafici soprastanti,

dove si può osservare che l'andamento della forza di reazione in entrambe le direzioni è in opposizione di fase rispetto all'andamento dello spostamento nodale nella stessa direzione. I valori di forza di contatto ottenuti dal modello MB sono coerenti con quelli ottenibili dalla teoria di Hertz e si può notare, anche in questo caso, come i valori medi della forza e dello spostamento lungo $x$ non siano prossimi allo 0 (al contrario di ciò che accade lungo la direzione $y$) a causa dei carichi statici di peso e spingitori radiali che agiscono lungo tale direzione. La teoria di Hertz permette di confermare anche i valori di penetrazione tra corpi volventi e piste ottenuti dal modello MB. In Figura (5.15) è riportato l'andamento della penetrazione nel tempo che si sviluppa tra un corpo volvente del cuscinetto e la pista interna.

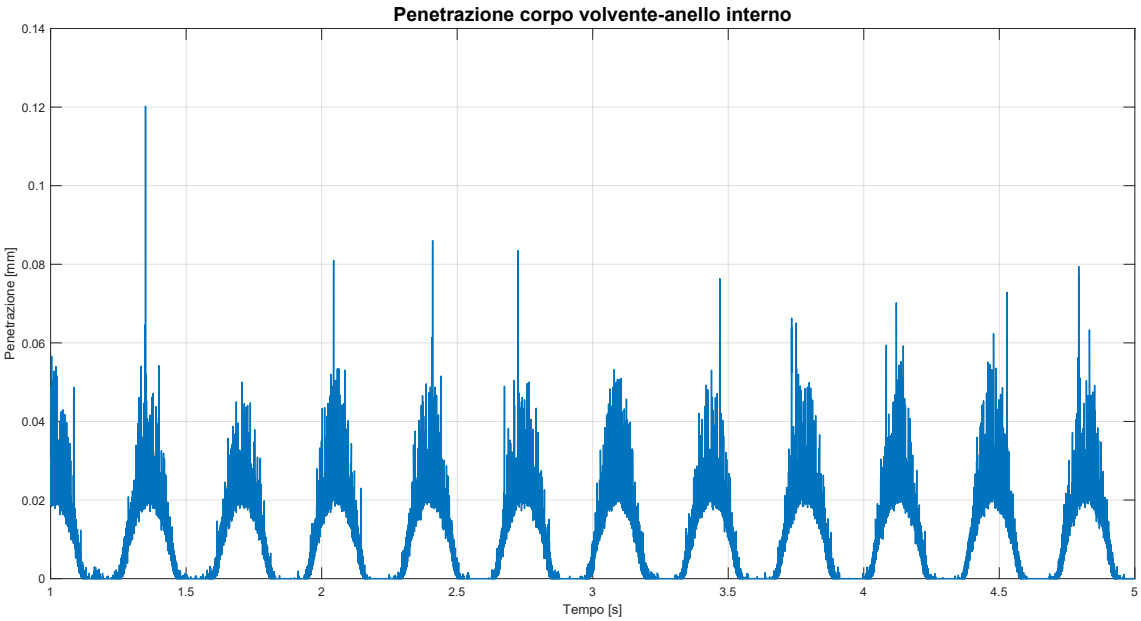



Figura 5.15: Penetrazione corpo volvente-anello interno modello MB cuscinetto.

Si può notare l'andamento ondulatorio della grandezza in analisi dovuto all'ingresso e all'uscita del corpo volvente dalla zona di carico del cuscinetto, come descritto nel Capitolo 3 sui richiami teorici. Focalizzando l'attenzione su una delle onde è possibile realizzare un confronto tra i risultati ottenuti dal modello MB e il modello di Stribeck. In Figura (5.16) è riportato l'andamento di una delle onde della penetrazione, del relativo inviluppo e della curva ideale di Stribeck realizzata con gioco radiale interno nullo (cioé con $\varepsilon = 0{,}5$).

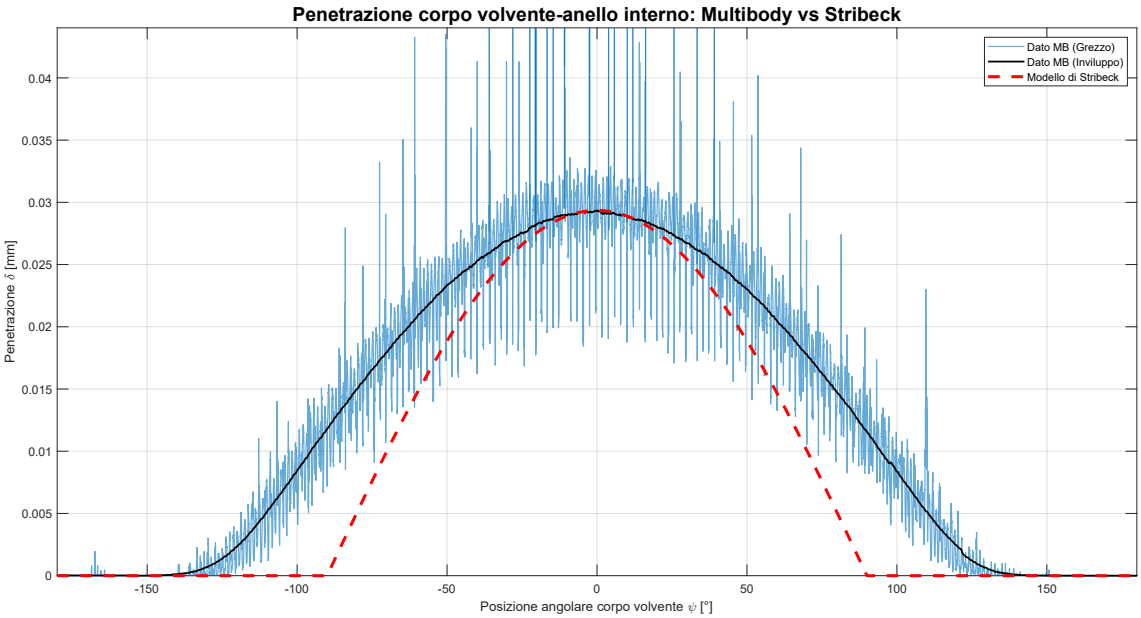



Figura 5.16: Confronto penetrazione corpo volvente-anello interno modello MB cuscinetto e modello di Stribeck ($\varepsilon = 0{,}5$).

L'inviluppo della curva di penetrazione grezza permette di stimare l'andamento medio della grandezza stessa. Si può notare come la curva analitica standard di Stribeck riesca a stimare correttamente la penetrazione che si instaura tra corpo volvente e pista interna solo per una posizione angolare del corpo volvente nulla, cioè quando esso è lungo la direzione del carico esterno applicato, ma non descrive correttamente la reale ampiezza della zona di contatto all'interno del cuscinetto. Considerando che la curva standard di Stribeck si riferisce a una condizione di gioco radiale interno nullo del cuscinetto e ad una ampiezza della zona di carico di $\pm 90°$, la situazione rappresentata in figura mostra chiaramente che il valore di penetrazione tra corpo volvente e pista interna raggiunge un valore nullo per un'ampiezza della zona di contatto di circa $\pm 130°$. Ciò implica che all'interno del cuscinetto MB sia presente un gioco radiale negativo, dovuto con tutta probabilità alla presenza dell'*offset* statico dato dal peso e dalle forze degli spingitori. Considerando l'Equazione (3.80) è possibile calcolare il fattore di estensione della zona di carico $\varepsilon$ che permette di adattare correttamente la curva del modello di Stribeck all'inviluppo della penetrazione. Considerando che tale equazione rappresenta il valore del carico sopportato da un corpo volvente in funzione della sua posizione angolare $\psi$ rispetto alla direzione del carico esterno, dai risultati della co-simulazione si ha che tale valore si azzera per un'ampiezza massima della zona di carico $\psi_{max} = 130°$. Uguagliando il carico dell'Equazione (3.80) a 0, si può facilmente verificare che il valore di $\varepsilon$ è ottenibile come

$$\varepsilon = \frac{1 - cos(\psi_{max})}{2} \tag{5.1}$$

per cui sostituendo $\psi_{max}$ per l'interazione corpo volvente-anello interno si ottiene $\varepsilon = 0{,}82$. Adattando la il modello di Stribeck con questo nuovo fattore di estensione della zona di carico si ottiene la situazione riportata in Figura (5.17).

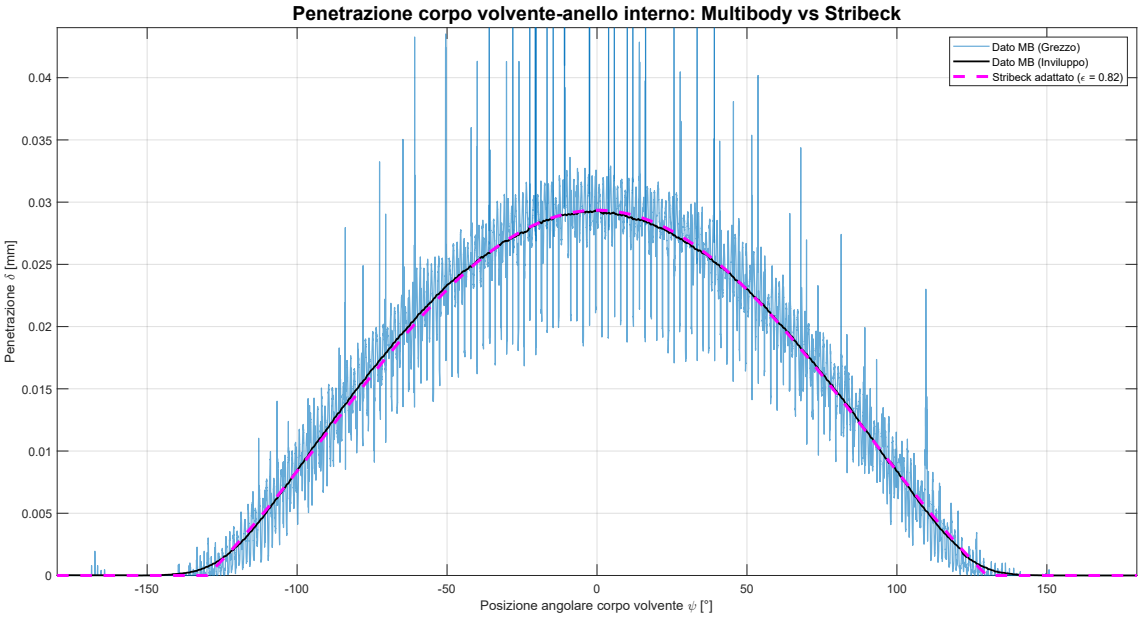



Figura 5.17: Confronto penetrazione corpo volvente-anello interno modello MB cuscinetto e modello di Stribeck adattato ($\varepsilon = 0{,}82$).

Si può osservare che la nuova curva relativa al modello di Stribeck adattato ricalca in maniera quasi perfetta l'inviluppo della penetrazione, dimostrando la validità delle relazioni di contatto hertziano del modello MB del cuscinetto. Le stesse considerazioni svolte per l'interazione corpo volvente-anello interno possono essere riproposte per l'interazione corpo volvente-anello esterno. In Figura (5.18) è riportato l'andamento della penetrazione tra i due componenti in funzione del tempo.

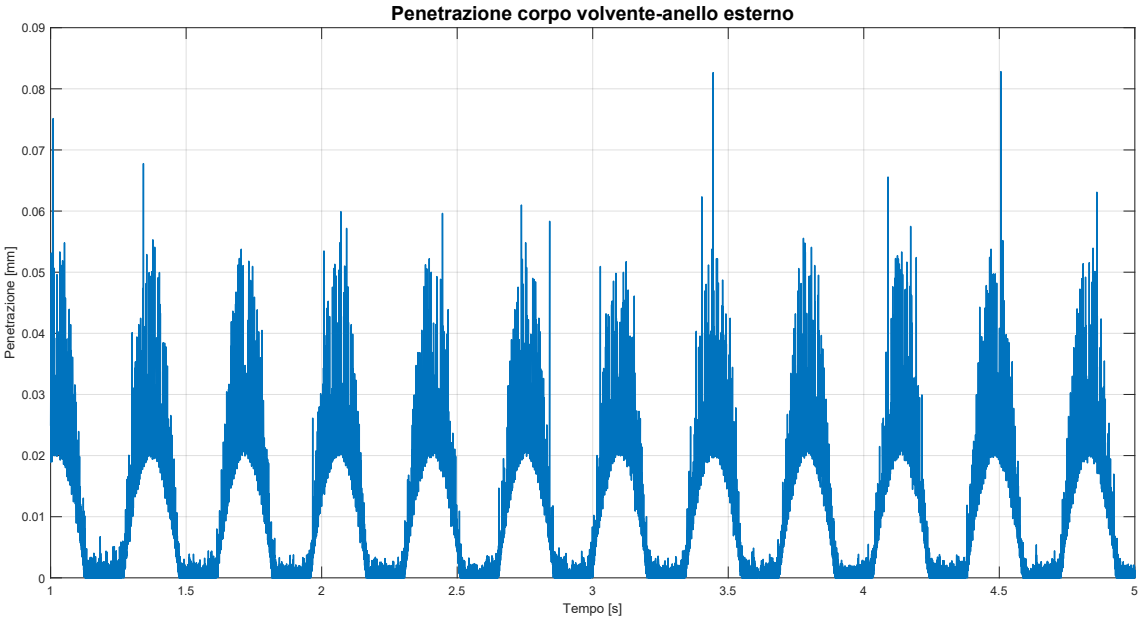



Figura 5.18: Penetrazione corpo volvente-anello esterno modello MB cuscinetto.

Anche in questo caso, isolando una delle onde della penetrazione, è possibile realizzare il confronto con il modello di Stribeck (Figura (5.19)).

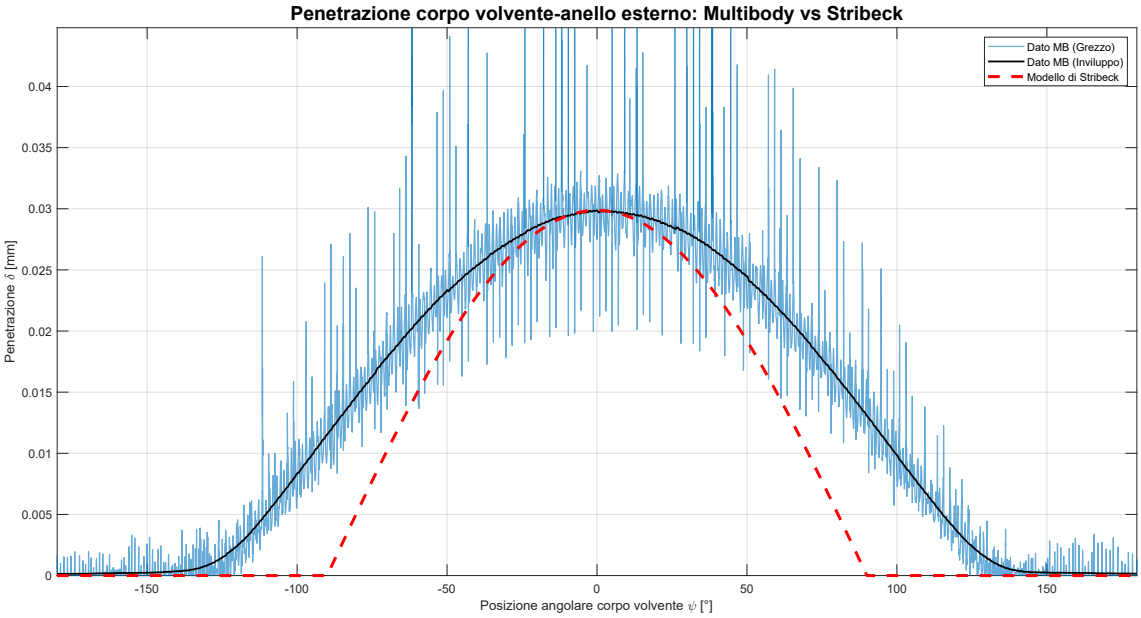



Figura 5.19: Confronto penetrazione corpo volvente-anello esterno modello MB cuscinetto e modello di Stribeck ($\varepsilon = 0{,}5$).

Tale confronto restituisce gli stessi risultati visti precedentemente per la penetrazione relativa all'anello interno, infatti il modello di Stribeck standard consente di

stimare il valore della penetrazione esclusivamente quando il corpo volvente è in asse con il carico esterno applicato. Dal grafico si evince che anche per l'interazione corpo volvente-anello esterno l'ampiezza massima della zona di carico è di circa $\pm 130°$, a cui corrisponde un valore di $\varepsilon = 0{,}82$. Quindi, la presenza di gioco radiale negativo è confermata, così come il *fitting* quasi perfetto della curva relativa al modello di Stribeck adattato rispetto all'inviluppo della penetrazione ottenuta dalla co-simulazione (Figura (5.20)).

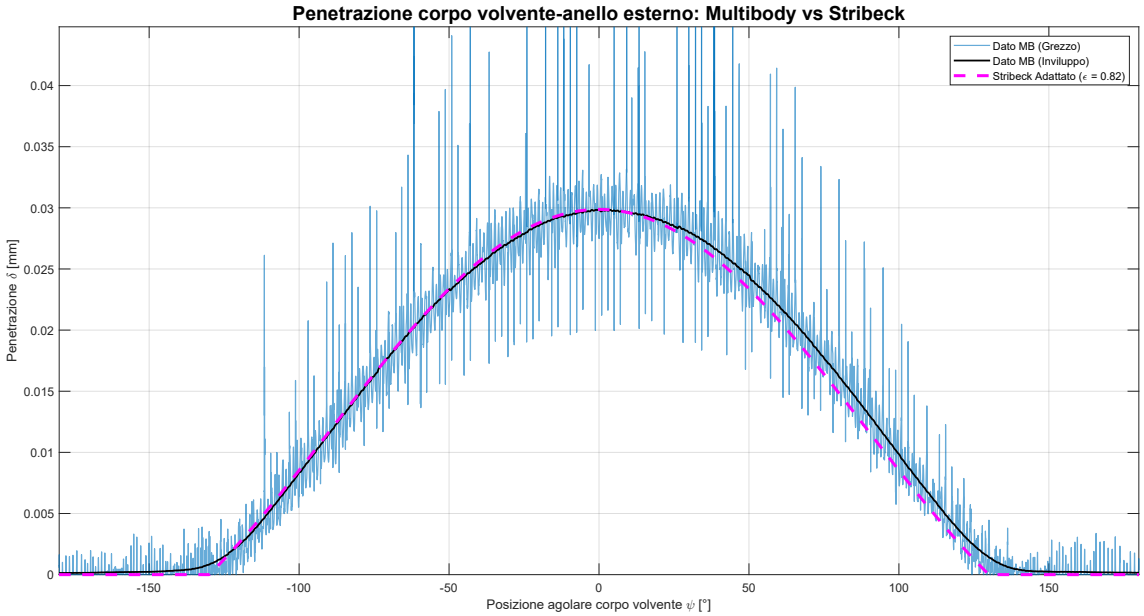



Figura 5.20: Confronto penetrazione corpo volvente-anello esterno modello MB cuscinetto e modello di Stribeck adattato ($\varepsilon = 0{,}82$).

# Capitolo 6

# Conclusioni e sviluppi futuri

L'obiettivo del presente lavoro di tesi è stato lo sviluppo e la validazione di un modello combinato di sistema rotore-cuscinetto che replicasse un banco prova cuscinetti presente nei laboratori del Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale (DIMEAS) del Politecnico di Torino. Il modello sviluppato presenta una formulazione FEM del rotore accoppiata con una trattazione *multibody* di uno dei quattro cuscinetti in prova calettato sull'albero. La co-simulazione dei modelli è stata realizzata in ambiente Simulink® i cui risultati sono stati confrontati con quelli ottenuti dalla simulazione dello stesso sistema in cui il rotore è modellato con metodo FEM e tutti i cuscinetti in prova sono sostituiti dalle forze applicate dai rispettivi spingitori radiali.

I risultati ottenuti permettono di trarre considerazioni fondamentali sia dal punto di vista dell'applicazione ingegneristica, sia sotto il profilo metodologico:

- Il modello FEM semplificato, in cui i cuscinetti sono schematizzati tramite l'imposizione di forze statiche equivalenti sui nodi, si è confermato uno strumento computazionalmente efficiente e affidabile per stime macroscopiche. Tuttavia, esso non è stato in grado di catturare la risposta dinamica del sistema reale, la quale risulta molto più complessa di quella stimata dal suddetto modello;

- Il modello combinato FEM-MB si è dimostrato fondamentale per l'esecuzione di una corretta analisi dettagliata del comportamento dinamico del sistema rotore-cuscinetto. La presenza del modello MB (di anche solo uno dei quattro cuscinetti in prova) ha reso la risposta del sistema molto più caotica, con evidenti contenuti ad alta frequenza non riscontrabili nel modello FEM semplificato. Ciò è dovuto al fatto che il modello MB considera i contatti non-lineari (modellati secondo la teoria di Hertz) che si instaurano tra i vari componenti del cuscinetto e che fungono da eccitazione per le frequenze proprie del rotore;

- La presenza del modello MB del cuscinetto ha permesso una stima precisa della zona di carico che si genera all'interno del cuscinetto, dimostrando che il sistema è soggetto ad un rilevante precarico dovuto all'*offset* statico derivante dai

contributi costanti che agiscono sul sistema. Questa analisi non sarebbe possibile utilizzando modelli con approcci di modellazione del cuscinetto analitici ideali o modelli caratterizzati dalla presenza di rigidezze o forze equivalenti;

- Dal punto di vista metodologico, il lavoro ha raggiunto con successo l'obiettivo di realizzare un ambiente di co-simulazione che permettesse la comunicazione e lo scambio di informazioni e di dati tra i due modelli distinti. La stabilità numerica è stata raggiunta mediante l'allineamento dei passi temporali di risoluzione di tutti i solutori in gioco e dell'integratore temporale, riuscendo a mantenere un'ottima fedeltà rispetto ai parametri fisici del sistema reale.

I risultati conseguiti dalla co-simulazione permettono di porre basi per la prosecuzione dell'attività di ricerca con possibili sviluppi orientati sia al perfezionamento della modellazione, sia all'applicazione della diagnostica industriale:

- Introduzione nella modellazione dei restanti tre cuscinetti in prova non ancora rappresentati mediante approccio MB, per una rappresentazione più fedele del banco prova, con conseguente valutazione dei costi computazionali associati a tale complessità della formulazione;
- Implementazione all'interno del modello MB della teoria EHL per tenere conto degli effetti del lubrificante sulla dinamica del sistema, valutandone l'impatto sulla rigidezza e sullo smorzamento globale;
- Implementazione all'interno del modello MB di difetti localizzati per valutare se il modello combinato permette la realizzazione di diagnostica predittiva (*condition monitoring*), confrontando i risultati ottenuti dalla co-simulazione in presenza di danneggiamenti con i dati sperimentali ottenuti dal banco prova.

# Ringraziamenti

Al termine del presente lavoro di tesi desidero esprimere alcuni ringraziamenti rivolti alle persone che mi hanno accompagnato fino a questo momento nella vita e durante il percorso accademico.

Innanzitutto vorrei rivolgere un sentito grazie al mio relatore Prof. Eugenio Brusa per il supporto costante durante lo svolgimento di questo lavoro e per i consigli che lo hanno sicuramente impreziosito. Un sincero ringraziamento anche alla Prof.ssa Cristiana Delprete per avermi seguito nella realizzazione della tesi e per la totale disponibilità e fiducia dimostratami a partire dal mio secondo anno accademico. Ringrazio inoltre entrambi per avermi dato la possibilità di collaborare con il gruppo di ricerca ISED (*Industrial Systems Engineering and Design*) del Politecnico di Torino, di cui desidero ringraziare l'Ing. Luca Giraudo per la disponibilità e la pazienza con cui mi ha affiancato, seguito e consigliato durante tutto il tempo dedicato alla tesi, dalla realizzazione del modello, alle simulazioni numeriche e alla stesura del presente scritto.

Un caloroso ringraziamento va alla mia famiglia. Ai miei genitori, Cristiana e Massimo, per avermi aperto sempre tutte le porte possibili, per avermi seguito e sostenuto in ogni ambito, per non aver mai dubitato di me. Anche se sono poco estroverso nei vostri confronti, spero che un minimo trapeli quanto mi senta fortunato ed orgoglioso ad avervi come genitori. Un grazie a mio fratello Dennis per il continuo interesse che rivolge nei miei confronti che mi fa sentire apprezzato e perché con la sua solarità mi ricorda che anche anche nei momenti di stress bisogna ricordarsi di essere felici. Un ringraziamento ai miei nonni che mi sono sempre stati vicino dal primo momento, Marisa e Giovanni con cui ho la fortuna di poter condividere questo traguardo, Sergio e Gina che purtroppo non ho più qui con me, ma che spero mi stiano guardando con orgoglio. Infine, un grazie a mio prozio Claudio, a Katia, a Beppe e a Luca per avermi fatto sempre sentire l'affetto che una persona dovrebbe ricevere dalla propria famiglia estesa.

Desidero poi ringraziare i miei amici. Grazie a Paolo per il supporto, per i confronti e per gli svaghi che condividiamo insieme da una vita. Grazie ai miei compagni di squadra vecchi e attuali, che considero una seconda famiglia, per avermi permesso, in palestra, di alleggerire la settimana dagli impegni accademici e dallo studio. Grazie ai "Cavalli", dal primo all'ultimo, con cui da qualche anno a questa parte è nata una splendida amicizia che spero duri nel tempo e che mi permettono

di vivere momenti di serenità e divertimento ogni volta che c'è occasione.

Infine, ultima ma non per importanza, un immenso ringraziamento a Noemi. Grazie per essermi sempre stata accanto e per continuare a farlo senza condizioni. Grazie per l'aiuto e il supporto nei momenti difficili, per la gioia e le emozioni condivise in quelli felici. Grazie per essere il posto sicuro in cui rifugiarmi quando ne ho necessità. Mi auguro che il nostro viaggio prosegua a lungo nel cammino della vita, con la speranza di restituirti almeno in parte l'amore che sento di ricevere da parte tua.

# Bibliografia


[1] G. Genta. *Dynamics of Rotating Systems*. Mechanical Engineering Series. Springer, New York, 2005. ISBN 978-0-387-20936-4.

[2] A. Sharma, N. Upadhyay, P. K. Kankar, and M. Amarnath. Nonlinear dynamic investigations on rolling element bearings: A review. *Advances in Mechanical Engineering*, 10(3):1687814018764148, 2018. DOI: 10.1177/1687814018764148.

[3] P. K. Gupta. Current Status of and Future Innovations in Rolling Bearing Modeling. *Tribology Transactions*, 54(3):394–403, 2011. DOI: 10.1080/10402004.2010.551805.

[4] S. W. Hong and V. C. Tong. Rolling-element bearing modeling: A review. *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing*, 17(12): 1729–1749, 2016. DOI: 10.1007/s12541-016-0200-z.

[5] H. Cao, L. Niu, S. Xi, and X. Chen. Mechanical model development of rolling bearing-rotor systems: A review. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 102:37–58, 2018. DOI: 10.1016/j.ymssp.2017.09.023.

[6] S. Singh, C. Q. Howard, and C. H. Hansen. An extensive review of vibration modelling of rolling element bearings with localised and extended defects. *Journal of Sound and Vibration*, 357:300–330, 2015. DOI: 10.1016/j.jsv.2015.04.037.

[7] J. Liu and Y. Shao. Overview of dynamic modelling and analysis of rolling element bearings with localized and distributed faults. *Nonlinear Dynamics*, 93(4):1765–1798, 2018. DOI: 10.1007/s11071-018-4314-y.

[8] A. B. Jones. A General Theory for Elastically Constrained Ball and Radial Roller Bearings Under Arbitrary Load and Speed Conditions. *Journal of Basic Engineering*, 1960. DOI: 10.1115/1.3662587.

[9] T. A. Harris. Ball Motion in Thrust-Loaded, Angular Contact Bearings With Coulomb Friction. *Journal of Lubrication Technology*, 1971. DOI: 10.1115/1.3451525.

[10] T. A Harris and M. H Mindel. Rolling element bearing dynamics. *Wear*, 23 (3):311–337, 1973. DOI: 10.1016/0043-1648(73)90020-3.

[11] J. Zhang, B. Fang, Y. Zhu, and J. Hong. A comparative study and stiffness analysis of angular contact ball bearings under different preload mechanisms. *Mechanism and Machine Theory*, 115:1–17, 2017. DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2017.03.012.

[12] B. Fang, J. Zhang, K. Yan, J. Hong, and M. Yu Wang. A comprehensive study on the speed-varying stiffness of ball bearing under different load conditions. *Mechanism and Machine Theory*, 136:1–13, 2019. DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2019.02.012.

[13] J. Zhang, B. Fang, J. Hong, S. Wan, and Y. Zhu. A general model for preload calculation and stiffness analysis for combined angular contact ball bearings. *Journal of Sound and Vibration*, 411:435–449, 2017. DOI: 10.1016/j.jsv.2017.09.019.

[14] J. Zhang, B. Fang, J. Hong, and Y. Zhu. Effect of preload on ball-raceway contact state and fatigue life of angular contact ball bearing. *Tribology International*, 114:365–372, 2017. DOI: 10.1016/j.triboint.2017.04.029.

[15] L. Bizarre, F. Nonato, and K. L. Cavalca. Formulation of five degrees of freedom ball bearing model accounting for the nonlinear stiffness and damping of elastohydrodynamic point contacts. *Mechanism and Machine Theory*, 124: 179–196, 2018. DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2018.03.001.

[16] X. Li, K. Yu, H. Ma, L. Cao, Z. Luo, H. Li, and L. Che. Analysis of varying contact angles and load distributions in defective angular contact ball bearing. *Engineering Failure Analysis*, 91:449–464, 2018. DOI: 10.1016/j.engfailanal.2018.04.050.

[17] T. Xu, L. Yang, W. Wu, and K. Wang. Effect of angular misalignment of inner ring on the contact characteristics and stiffness coefficients of duplex angular contact ball bearings. *Mechanism and Machine Theory*, 157:104178, 2021. DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2020.104178.

[18] P. K. Gupta. Dynamics of Rolling-Element Bearings—Part I: Cylindrical Roller Bearing Analysis. *Journal of Lubrication Technology*, 101(3):293–302, 1979. DOI: 10.1115/1.3453357.

[19] P. K. Gupta. Dynamics of Rolling-Element Bearings—Part II: Cylindrical Roller Bearing Results. *Journal of Lubrication Technology*, 101(3):305–311, 1979. DOI: 10.1115/1.3453360.

[20] P. K. Gupta. Dynamics of Rolling-Element Bearings—Part III: Ball Bearing Analysis. *Journal of Lubrication Technology*, 101(3):312–318, 1979. DOI: 10.1115/1.3453363.

[21] P. K. Gupta. Dynamics of Rolling-Element Bearings—Part IV: Ball Bearing Results. *Journal of Lubrication Technology*, 101(3):319–326, 1979. DOI: 10.1115/1.3453364.

[22] J. Tian, P. Wang, H. Xu, H. Ma, and X. Zhao. Nonlinear vibration characteristics of rolling bearing considering flexible cage fracture. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 156:104478, 2023. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2023.104478.

[23] D. Zhao, J. Hong, K. Yan, Q. Zhao, and B. Fang. Dynamic interaction between the rolling element and cage of rolling bearing considering cage flexibility and clearance. *Mechanism and Machine Theory*, 174:104905, 2022. DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2022.104905.

[24] Y. Cui, S. Deng, R. Niu, and G. Chen. Vibration effect analysis of roller dynamic unbalance on the cage of high-speed cylindrical roller bearing. *Journal of Sound and Vibration*, 434:314–335, 2018. DOI: 10.1016/j.jsv.2018.08.006.

[25] S. Gao, Q. Han, N. Zhou, P. Pennacchi, S. Chatterton, T. Qing, J. Zhang, and F. Chu. Experimental and theoretical approaches for determining cage motion dynamic characteristics of angular contact ball bearings considering whirling and overall skidding behaviors. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 168:108704, 2022. DOI: 10.1016/j.ymssp.2021.108704.

[26] W. Zhang, S. Deng, G. Chen, and Y. Cui. Impact of lubricant traction coefficient on cage's dynamic characteristics in high-speed angular contact ball bearing. *Chinese Journal of Aeronautics*, 30(2):827–835, 2017. DOI: 10.1016/j.cja.2016.08.019.

[27] H. Cao, S. Su, X. Jing, and D. Li. Vibration mechanism analysis for cylindrical roller bearings with single/multi defects and compound faults. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 144:106903, 2020. DOI: 10.1016/j.ymssp.2020.106903.

[28] J. Liu, Z. Xu, Y. Xu, X. Liang, and R. Pang. An analytical method for dynamic analysis of a ball bearing with offset and bias local defects in the outer race. *Journal of Sound and Vibration*, 461:114919, 2019. DOI: 10.1016/j.jsv.2019.114919.

[29] Y. Qin, F. Cao, Y. Wang, W. Chen, and H. Chen. Dynamics modelling for deep groove ball bearings with local faults based on coupled and segmented

displacement excitation. *Journal of Sound and Vibration*, 447:1–19, 2019. DOI: 10.1016/j.jsv.2019.01.048.

[30] J. Liu, Z. Shi, and Y. Shao. An analytical model to predict vibrations of a cylindrical roller bearing with a localized surface defect. *Nonlinear Dynamics*, 89(3):2085–2102, 2017. DOI: 10.1007/s11071-017-3571-5.

[31] J. Liu, L. Wang, and Z. Shi. Dynamic modelling of the defect extension and appearance in a cylindrical roller bearing. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 173:109040, 2022. DOI: 10.1016/j.ymssp.2022.109040.

[32] L. Giraudo, L. G. Di Maggio, L. Giorio, and C. Delprete. Dynamic Multibody Modeling of Spherical Roller Bearings with Localized Defects for Large-Scale Rotating Machinery. *Sensors*, 25(8):2419, 2025. DOI: 10.3390/s25082419.

[33] C. Wen, X. Meng, C. Fang, J. Gu, L. Xiao, and S. Jiang. Dynamic behaviors of angular contact ball bearing with a localized surface defect considering the influence of cage and oil lubrication. *Mechanism and Machine Theory*, 162: 104352, 2021. DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2021.104352.

[34] S. Li. A mathematical model and numeric method for contact analysis of rolling bearings. *Mechanism and Machine Theory*, 119:61–73, 2018. DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2017.08.020.

[35] S. Li. Strength analysis of the roller bearing with a crowning and misalignment error. *Engineering Failure Analysis*, 123:105311, 2021. DOI: 10.1016/j.engfailanal.2021.105311.

[36] H. Luo, J. Fu, C. Yu, G. Liu, W. Wang, and P. Wang. Numerical simulation and experimental testing of dynamic stiffness of angular contact ball bearing. *Advances in Mechanical Engineering*, 10(9):1687814018798973, 2018. DOI: 10.1177/1687814018798973.

[37] H. Xu, D. He, H. Ma, K. Yu, X. Zhao, and Y. Yang. A method for calculating radial time-varying stiffness of flexible cylindrical roller bearings with localized defects. *Engineering Failure Analysis*, 128:105590, 2021. DOI: 10.1016/j.engfailanal.2021.105590.

[38] S. Singh, C. Q. Howard, C. H. Hansen, and U. G. Köpke. Analytical validation of an explicit finite element model of a rolling element bearing with a localised line spall. *Journal of Sound and Vibration*, 416:94–110, 2018. DOI: 10.1016/j.jsv.2017.09.007.

[39] P. V. Shinde, R. G. Desavale, S. S. Deshmukh, S. M. Patil, and V. R. Patil. Dynamic Behavior and Numerical Investigation of Contact Characteristics of

Rotor Bearing System using Dimensional Analysis and Finite Element Model. *Journal of Failure Analysis and Prevention*, pages 1–14, 2025. DOI: 10.1007/s11668-025-02191-x.

[40] H. Li, H. Li, Y. Liu, and H. Liu. Dynamic characteristics of ball bearing with flexible cage lintel and wear. *Engineering Failure Analysis*, 117:104956, 2020. DOI: 10.1016/j.engfailanal.2020.104956.

[41] G. H. Jang and S. W. Jeong. Stability Analysis of a Rotating System Due to the Effect of Ball Bearing Waviness. *Journal of Tribology*, 125(1):91–101, 2003. DOI: 10.1115/1.1504090.

[42] X. Zhang, Q. Han, Z. Peng, and F. Chu. Stability analysis of a rotor–bearing system with time-varying bearing stiffness due to finite number of balls and unbalanced force. *Journal of Sound and Vibration*, 332(25):6768–6784, 2013. DOI: 10.1016/j.jsv.2013.08.002.

[43] X. Zhang, Q. Han, Z. Peng, and F. Chu. A new nonlinear dynamic model of the rotor-bearing system considering preload and varying contact angle of the bearing. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 22 (1):821–841, 2015. DOI: 10.1016/j.cnsns.2014.07.024.

[44] H. Bal and N. Aktürk. Vibration modeling of wind turbine shaft as rigid shaft supported by EHL contact ball bearings with overhung disc system. *Tribology International*, 151:106481, 2020. DOI: 10.1016/j.triboint.2020.106481.

[45] H. Bal, K. Ateş, T. Karaçay, and N. Aktürk. Effect of Preload on the Vibrations of EHL Angular Contact Ball Bearings: Theoretical and Experimental Results. *Lubricants*, 10(3), 2022. DOI: 10.3390/lubricants10030046.

[46] Y. Zhang, B. Fang, L. Kong, and Y. Li. Effect of the ring misalignment on the service characteristics of ball bearing and rotor system. *Mechanism and Machine Theory*, 151:103889, 2020. DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2020.103889.

[47] H. Wang, Q. Han, and D. Zhou. Nonlinear dynamic modeling of rotor system supported by angular contact ball bearings. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 85:16–40, 2017. DOI: 10.1016/j.ymssp.2016.07.049.

[48] N. Aktürk, M. Uneeb, and R. Gohar. The Effects of Number of Balls and Preload on Vibrations Associated With Ball Bearings. *Journal of Tribology*, 119(4):747–753, 1997. DOI: 10.1115/1.2833880.

[49] N. Aktürk and R. Gohar. The effect of ball size variation on vibrations associated with ball-bearings. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology*, 212(2):101–110, 1998. DOI: 10.1243/1350650981541921.

[50] N. Aktürk. The Effect of Waviness on Vibrations Associated Witli Ball Bearings. *Journal of Tribology*, 121(4):667–677, 1999. DOI: 10.1115/1.2834121.

[51] C. K. Babu, N. Tandon, and R. K. Pandey. Vibration Modeling of a Rigid Rotor Supported on the Lubricated Angular Contact Ball Bearings Considering Six Degrees of Freedom and Waviness on Balls and Races. *Journal of Vibration and Acoustics*, 134(1):011006, 2012. DOI: 10.1115/1.4005140.

[52] Y. Jin, R. Yang, L. Hou, Y. Chen, and Z. Zhang. Experiments and Numerical Results for Varying Compliance Contact Resonance in a Rigid Rotor–Ball Bearing System. *Journal of Tribology*, 139(041103), 2017. DOI: 10.1115/1.4035339.

[53] A. Smagala and K. Kecik. Nonlinear model and simulation of a rolling bearing. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 710(1):012006, 2019. DOI: 10.1088/1757-899X/710/1/012006.

[54] D. Wu, Q. Han, H. Wang, Y. Zhou, W. Wei, H. Wang, and T. Xie. Nonlinear Dynamic Analysis of Rotor-Bearing-Pedestal Systems With Multiple Fit Clearances. *IEEE Access*, 8:26715–26725, 2020. DOI: 10.1109/ACCESS.2020.2971326.

[55] Z. Zhao, X. Yin, and W. Wang. Effect of the raceway defects on the nonlinear dynamic behavior of rolling bearing. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 33(6):2511–2525, 2019. DOI: 10.1007/s12206-019-0501-0.

[56] M. Luo, Y. Guo, H. Andre, X. Wu, and J. Na. Dynamic modeling and quantitative diagnosis for dual-impulse behavior of rolling element bearing with a spall on inner race. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 158:107711, 2021. DOI: 10.1016/j.ymssp.2021.107711.

[57] J. Liu and Y. Shao. Dynamic modeling for rigid rotor bearing systems with a localized defect considering additional deformations at the sharp edges. *Journal of Sound and Vibration*, 398:84–102, 2017. DOI: 10.1016/j.jsv.2017.03.007.

[58] J. Liu, Y. Xu, and Y. Shao. Dynamic modelling of a rotor-bearing-housing system including a localized fault. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multi-body Dynamics*, 232(3):385–397, 2018. DOI: 10.1177/1464419317738427.

[59] H. Cheng, Y. Zhang, W. Lu, and Z. Yang. Mechanical characteristics and nonlinear dynamic response analysis of rotor-bearing-coupling system. *Applied Mathematical Modelling*, 93:708–727, 2021. DOI: 10.1016/j.apm.2020.12.041.

[60] J. Liu. A dynamic modelling method of a rotor-roller bearing-housing system with a localized fault including the additional excitation zone. *Journal of Sound and Vibration*, 469:115144, 2020. DOI: 10.1016/j.jsv.2019.115144.

[61] X. Zhang, C. Bai, Y. Jin, and J. Wang. Nonlinear vibration characteristics of a rotor bearing system with irregular raceway defect. *Nonlinear Dynamics*, 113(10):11259–11281, 2025. DOI: 10.1007/s11071-024-10689-6.

[62] H. Chi, X. Wang, W. Li, B. Yuan, and Q. Sun. The Improved Dynamics Model of Faulty Bearings Considering Raceway Surface Fatigue Defect Morphology. *Journal of Tribology*, 148(072601), 2026. DOI: 10.1115/1.4070914.

[63] Y. Yang, H. Ouyang, X. Wu, Y. Jin, Y. Yang, and D. Cao. Bending-torsional coupled vibration of a rotor-bearing-system due to blade-casing rub in presence of non-uniform initial gap. *Mechanism and Machine Theory*, 140:170–193, 2019. DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2019.05.025.

[64] N. Wang, D. Jiang, and K. Behdinan. Vibration response analysis of rubbing faults on a dual-rotor bearing system. *Archive of Applied Mechanics*, 87(11): 1891–1907, 2017. DOI: 10.1007/s00419-017-1299-9.

[65] X. Yuan, H. Liu, and H. Zhang. Mathematical modelling analysis of deep groove ball bearing with misalignment. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multi-body Dynamics*, 238(2):153–166, 2024. DOI: 10.1177/14644193241228127.

[66] H. Tang, Y. Ren, J. Xiang, and A. Kumar. Numerical and experimental analysis of rotor-bearing system for axial piston pump with misalignment–rubbing coupling fault. *Journal of Sound and Vibration*, 559:117786, 2023. DOI: 10.1016/j.jsv.2023.117786.

[67] W. Xie, C. Liu, N. Wang, and D. Jiang. Numerical and experimental analysis of rubbing–misalignment mixed fault in a dual-rotor system. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 235(17):3179–3198, 2021. DOI: 10.1177/0954406220968581.

[68] L. Ma, J. Wang, and G. Zhang. The Dynamic Characteristic of a Faulted Rotor System with Multi-Objective Optimization Designed SFD. *Applied Sciences*, 9(17), 2019. DOI: 10.3390/app9173628.

[69] Z. Zeng, D. Zhang, T. He, and H. Wang. Experimental investigation for the dynamic mechanical properties of a vertical anisotropically supported rotor. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 184:109678, 2023. DOI: 10.1016/j.ymssp.2022.109678.

[70] A. AlZibdeh, M. AlQaradawi, and B. Balachandran. Effects of high frequency drive speed modulation on rotor with continuous stator contact. *International Journal of Mechanical Sciences*, 131–132:559–571, 2017. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2017.08.004.

[71] H. Ding, M. Li, H. Fu, and M. Li. The Amplitude Reduction of a Flexible Rotor Passing the Critical Speed by Modulating Acceleration and Stiffness Simultaneously. *Recent Patents on Mechanical Engineering*, 11(3):232–241, 2018. DOI: 10.2174/2212797611666180704145651.

[72] D. K. Roy and R. Tiwari. Estimation of the internal and external damping from the forward and backward spectrum of a rotor with a fatigue crack. *Propulsion and Power Research*, 9(1):62–74, 2020. DOI: 10.1016/j.jppr.2020.01.001.

[73] R. Yang, Y. Jin, L. Hou, and Y. Chen. Study for ball bearing outer race characteristic defect frequency based on nonlinear dynamics analysis. *Nonlinear Dynamics*, 90(2):781–796, 2017. DOI: 10.1007/s11071-017-3692-x.

[74] R. Yang, Y. Jin, L. Hou, and Y. Chen. Advantages of pulse force model over geometrical boundary model in a rigid rotor–ball bearing system. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 102:159–169, 2018. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2018.03.011.

[75] P. Gao, L. Hou, R. Yang, and Y. Chen. Local defect modelling and nonlinear dynamic analysis for the inter-shaft bearing in a dual-rotor system. *Applied Mathematical Modelling*, 68:29–47, 2019. DOI: 10.1016/j.apm.2018.11.014.

[76] P. Gao, Y. Chen, and L. Hou. Bifurcation Analysis for a Simple Dual-Rotor System with Nonlinear Intershaft Bearing Based on the Singularity Method. *Shock and Vibration*, 2020(1):7820635, 2020. DOI: 10.1155/2020/7820635.

[77] P. Gao, Y. Chen, and L. Hou. Nonlinear thermal behaviors of the inter-shaft bearing in a dual-rotor system subjected to the dynamic load. *Nonlinear Dynamics*, 101(1):191–209, 2020. DOI: 10.1007/s11071-020-05753-w.

[78] P. Gao, L. Hou, and Y. Chen. Dynamic load and thermal coupled analysis for the inter-shaft bearing in a dual-rotor system. *Meccanica*, 56(11):2691–2706, 2021. DOI: 10.1007/s11012-021-01410-7.

[79] Y. Cao and Y. Altintas. A General Method for the Modeling of Spindle-Bearing Systems. *Journal of Mechanical Design*, 126(6):1089–1104, 2004. DOI: 10.1115/1.1802311.

[80] H. Li and Y. C. Shin. Integrated Dynamic Thermo-Mechanical Modeling of High Speed Spindles, Part 1: Model Development. *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, 126(1):148–158, 2004. DOI: 10.1115/1.1644545.

[81] H. Li and Y. C. Shin. Integrated Dynamic Thermo-Mechanical Modeling of High Speed Spindles, Part 2: Solution Procedure and Validations. *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, 126(1):159–168, 2004. DOI: 10.1115/1.1644546.

[82] H. Zhang, Z. Li, H. Liu, T. Liu, and Q. Wang. Modeling and Dynamic Analysis of Double-Row Angular Contact Ball Bearing–Rotor–Disk System. *Lubricants*, 12(12):441, 2024. DOI: 10.3390/lubricants12120441.

[83] D. S. Truong, B. S. Kim, and S. K. Ro. An analysis of a thermally affected high-speed spindle with angular contact ball bearings. *Tribology International*, 157:106881, 2021. DOI: 10.1016/j.triboint.2021.106881.

[84] Z. Li, Q. Wang, B. Qin, and W. Shao. Vibration characteristic analysis of flexible rotor-bearing system subjected to external combined loads. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 96:104688, 2022. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2022.104688.

[85] V. C. Tong and S. W. Hong. The effect of angular misalignment on the stiffness characteristics of tapered roller bearings. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 231(4):712–727, 2017. DOI: 10.1177/0954406215621098.

[86] H. Guan, X. Ding, H. Ma, B. Wen, S. Zhou, Q. Mu, Y. Zeng, and Y. Chen. Dynamic characteristics of rotor system with initial bending induced by the misaligned four-point contact ball bearing. *Mechanism and Machine Theory*, 209:106017, 2025. DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2025.106017.

[87] M. H. Jalali, M. Ghayour, S. Ziaei-Rad, and B. Shahriari. Dynamic analysis of a high speed rotor-bearing system. *Measurement*, 53:1–9, 2014. DOI: 10.1016/j.measurement.2014.03.010.

[88] H. Wang, J. Gong, and G. Chen. Characteristics analysis of aero-engine whole vibration response with rolling bearing radial clearance. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 31(5):2129–2141, 2017. DOI: 10.1007/s12206-017-0409-5.

[89] H. Xu, P. Wang, H. Ma, Y. Yang, X. Li, Z. Luo, Q. Han, and B. Wen. Dynamic behaviors and contact characteristics of ball bearings in a multi-supported rotor system under the effects of 3D clearance fit. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 196:110334, 2023. DOI: 10.1016/j.ymssp.2023.110334.

[90] H. M. Zhu, W. F. Chen, R. P. Zhu, L. Zhang, J. Gao, and M. J. Liao. Dynamic analysis of a flexible rotor supported by ball bearings with damping rings based on FEM and lumped mass theory. *Journal of Central South University*, 27 (12):3684–3701, 2020. DOI: 10.1007/s11771-020-4510-z.

[91] Y. Yang, C. Liu, D. Jiang, and K. Behdinan. Nonlinear vibration signatures for localized fault of rolling element bearing in rotor-bearing-casing system. *International Journal of Mechanical Sciences*, 173:105449, 2020. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2020.105449.

[92] C. Ri, Q. Zhao, Z. Zhang, C. Chae, Y. Sin, and K. Ri. Nonlinear Dynamics Simulation Analysis of Rotor-Disc-Bearing System with Transverse Crack. *Journal of Vibration Engineering & Technologies*, 9(7):1433–1445, 2021. DOI: 10.1007/s42417-021-00306-w.

[93] Y. Luo, N. Liu, S. Xiao, and W. Wang. Dynamic behaviors of a rolling bearing-rotor system with bearing extended defect and shaft crack: Simulation and experimental investigation. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 247: 113978, 2026. DOI: 10.1016/j.ymssp.2026.113978.

[94] R. K. Vashisht and Q. Peng. Crack detection in the rotor ball bearing system using switching control strategy and Short Time Fourier Transform. *Journal of Sound and Vibration*, 432:502–529, 2018. DOI: 10.1016/j.jsv.2018.06.061.

[95] H. Xu, Y. Yang, H. Ma, Z. Luo, X. Li, Q. Han, and B. Wen. Vibration characteristics of bearing-rotor systems with inner ring dynamic misalignment. *International Journal of Mechanical Sciences*, 230:107536, 2022. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2022.107536.

[96] X. Miao, J. He, D. Jiang, D. Zhang, P. Pennacchi, and Q. Fei. Research on nonlinear vibration of a dual-rotor system with combined misalignment of cylindrical roller bearing and coupling. *Nonlinear Dynamics*, 113(4):3147–3170, 2025. DOI: 10.1007/s11071-024-10393-5.

[97] Y. Jin, X. Zhou, X. Quan, X. Zhang, K. Lu, and J. Wang. Topological structures of vibration responses for dual-rotor aeroengine. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 208:111053, 2024. DOI: 10.1016/j.ymssp.2023.111053.

[98] K. Lu, H. Cheng, W. Zhang, H. Zhang, K. Zhang, and C. Fu. Nonlinear dynamic behavior of a dual-rotor bearing system with coupling misalignment and rubbing faults. *Measurement Science and Technology*, 34(1):014005, 2022. DOI: 10.1088/1361-6501/ac9639.

[99] K. Liu, D. Wang, X. Shi, and W. Li. Vibration characteristics investigation of a dual rotor-bearing outer ring–pedestal-casing system with clearance fit. *Nonlinear Dynamics*, 112(15):12847–12873, 2024. DOI: 10.1007/s11071-024-09743-0.

[100] T. Gao, S. M. Yuan, Z. Q. Sun, Q. Ma, and S. Q. Cao. Time-delayed dynamic behavior of paroxysmal impulse vibrations in inter-shaft bearings with two or

multiple defects. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 240:113422, 2025. DOI: 10.1016/j.ymssp.2025.113422.

[101] K. N. Song, X. L. Fu, T. Gao, and S. M. Yuan. Amplitude modulation dynamic behavior of paroxysmal shock vibrations in inter-shaft bearings with localized defects. *International Journal of Dynamics and Control*, 13(11):385, 2025. DOI: 10.1007/s40435-025-01908-y.

[102] K. Liu, D. Wang, B. Chen, X. Shi, Y. Feng, and W. Li. Vibration characteristics investigation of a single/dual rotor-bearing-casing system with local bearing defects. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 225:112227, 2025. DOI: 10.1016/j.ymssp.2024.112227.

[103] Y. Li, H. Cao, L. Niu, and X. Jin. A General Method for the Dynamic Modeling of Ball Bearing–Rotor Systems. *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, 137(2):021016, 2015. DOI: 10.1115/1.4029312.

[104] Y. Li, H. Cao, and K. Tang. A general dynamic model coupled with EFEM and DBM of rolling bearing-rotor system. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 134:106322, 2019. DOI: 10.1016/j.ymssp.2019.106322.

[105] L. Li, Z. Luo, F. He, K. Sun, and X. Yan. An improved partial similitude method for dynamic characteristic of rotor systems based on Levenberg–Marquardt method. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 165:108405, 2022. DOI: 10.1016/j.ymssp.2021.108405.

[106] K. Liu, X. Shi, D. Wang, Y. Feng, Y. Jian, and W. Li. A method for the dynamic characteristic analysis of a rotor-rolling bearing system influenced by elastohydrodynamic lubrication. *Journal of Sound and Vibration*, 608:119075, 2025. DOI: 10.1016/j.jsv.2025.119075.

[107] P. Wang, H. Xu, Y. Yang, H. Ma, D. He, and X. Zhao. Dynamic characteristics of ball bearing-coupling-rotor system with angular misalignment fault. *Nonlinear Dynamics*, 108(4):3391–3415, 2022. DOI: 10.1007/s11071-022-07451-1.

[108] Y. Jin, K. Lu, C. Huang, L. Hou, and Y. Chen. Nonlinear dynamic analysis of a complex dual rotor-bearing system based on a novel model reduction method. *Applied Mathematical Modelling*, 75:553–571, 2019. DOI: 10.1016/j.apm.2019.05.045.

[109] P. Yu, C. Wang, L. Hou, and G. Chen. Dynamic characteristics of an aeroengine dual-rotor system with inter-shaft rub-impact. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 166:108475, 2022. DOI: 10.1016/j.ymssp.2021.108475.

[110] K. Lu, Y. Jin, P. Huang, F. Zhang, H. Zhang, C. Fu, and Y. Chen. The applications of POD method in dual rotor-bearing systems with coupling misalignment. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 150:107236, 2021. DOI: 10.1016/j.ymssp.2020.107236.

[111] N. Wang, C. Liu, D. Jiang, and K. Behdinan. Casing vibration response prediction of dual-rotor-blade-casing system with blade-casing rubbing. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 118:61–77, 2019. DOI: 10.1016/j.ymssp.2018.08.029.

[112] C. S. Sunnersjö. Varying compliance vibrations of rolling bearings. *Journal of Sound and Vibration*, 58(3):363–373, 1978. DOI: 10.1016/S0022-460X(78)80044-3.

[113] *Cuscinetti volventi*. SKF Industries, 2021.

[114] T. A. Harris and M. N. Kotzalas. *Essential Concepts of Bearing Technology*. Taylor and Francis Inc., 2006. ISBN 084937183X.

[115] T. A. Harris. *Rolling Bearing Analysis - Third Edition*. Wiley Interscience, 1991. ISBN 9780471513490.

[116] A. Palmgren and G. Palmgren. *Ball and Roller Bearing Engineering*. A cura di SKF Industries Inc., 1959.

[117] R. Stribeck. Ball bearings for various loads. *Transactions of the ASME*, 29: 420–463, 1907.

[118] E. Brusa, C. Delprete, L. Giorio, L. G. Di Maggio, and V. Zanella. Design of an Innovative Test Rig for Industrial Bearing Monitoring with Self-Balancing Layout. *Machines*, 10(54), 2022. DOI: 10.3390/machines10010054.

[119] L. L. R. Gallo. Analisi dinamica e diagnosi di un cuscinetto volvente danneggiato mediante simulazione multibody e machine learning. Master's thesis, Politecnico di Torino, 2026.

[120] *Motion Theory Reference*. ANSYS, Inc., Release 2025 R2.

[121] Abbas Shafiee, Thomas Russell, Farshid Sadeghi, and Matthew G. Wilmer. Analytical Investigation of Roller Skew and Tilt in a Spherical Roller Bearing. *Journal of Tribology*, 144(071201), 2022. DOI: 10.1115/1.4053354.

[122] E. Krämer. *Dynamics of Rotors and Foundations*. Springer Science and Business Media, 2013.