POLITECNICO DI TORINO

Corso di LAUREA MAGISTRALE in INGEGNERIA MECCANICA



Tesi di LAUREA MAGISTRALE

Modellazione delle sezioni di overlap di una catenaria ferroviaria

Relatori

Prof. Stefano MARCHESIELLO

Prof. Dario ANASTASIO

Candidato

Tommaso CAPPELLETTI

Settembre 2026

MODELLAZIONE DELLE SEZIONI DI OVERLAP DI UNA CATENARIA FERROVIARIA

Tommaso Cappelletti

Sommario

La captazione della corrente nei sistemi ferroviari elettrificati avviene attraverso lo strisciamento del pantografo sulla catenaria: la qualità di questo contatto, misurata dalla forza di interazione, è critica per l'affidabilità dell'esercizio, poiché le sue fluttuazioni possono causare distacchi, archi elettrici e usura accelerata. Il fenomeno si accentua nelle sezioni di overlap, in cui il pantografo transita a contatto con due fili che si sovrappongono per garantire la continuità dell'alimentazione.

Il presente lavoro sviluppa un modello agli elementi finiti per la simulazione dell'interazione dinamica pantografo-catenaria, con particolare attenzione proprio a tali sezioni. Il modello è costruito in maniera incrementale, partendo da una formulazione a un solo filo per estenderla poi al sistema a due fili collegati da pendini. I conduttori sono discretizzati con elementi trave di Eulero-Bernoulli, i pendini come aste unilaterali attive solo in trazione e il contatto con il pantografo secondo il metodo penalty; la configurazione statica di partenza è ricavata risolvendo un problema di shape-finding, mentre la risposta dinamica è ottenuta tratmite integrazione diretta seguendo il metodo di Newmark.

I risultati delle simulazioni confermano che la zona di overlap costituisce il punto più critico della linea.

Alla mia famiglia

Indice

1 Introduzione **1**

2 Modello a un filo **6**
2.1 Il modello 6
2.2 Discretizzazione 7
2.3 Assemblaggio e statica 9
2.4 Contatto 11
2.5 Accoppiamento 13
2.6 Integrazione numerica con Newmark 14

3 Modello a due fili con pendini **18**
3.1 Modello esteso e ipotesi 18
3.2 Geometria e discretizzazione 19
3.2.1 Struttura del sistema modellato 19
3.2.2 Vincoli e condizioni al contorno 20
3.2.3 Discretizzazione 21
3.2.4 Aggancio dei pendini 22
3.3 Modellazione dei pendini 22
3.3.1 Il pendino come elemento asta unilaterale 22
3.3.2 Trattamento *lagged* del calcolo dello stato 24
3.4 Configurazione statica iniziale accoppiata 25
3.4.1 Il profilo target 26
3.4.2 Formulazione del problema inverso 26
3.4.3 Gestione dell'unilateralità 27
3.4.4 Iterazione sul peso proprio dei pendini 28
3.4.5 Uso della configurazione statica nella dinamica 29
3.5 Adattamento dell'integrazione numerica 29
3.5.1 Condizioni iniziali e struttura delle matrici globali 30
3.5.2 Ciclo di Newmark: modifiche al passo $n+1$ 31

4 Simulazioni e risultati **32**
4.1 Parametri delle simulazioni 32

4.2 Convergenza sulla rigidezza di contatto 34
4.3 Risultati del modello a un filo 36
4.3.1 Risultati $v = 100\ km/h$ 37
4.3.2 Risultati $v = 275\ km/h$ 39
4.4 Confronto della configurazione statica 41
4.5 Risultati del modello a due fili 42
4.5.1 Risultati a 1 campata di overlap 42
4.5.1.1 Risultati $v = 150\ km/h$, 1 campata di overlap . 43
4.5.1.2 Risultati $v = 275\ km/h$, 1 campata di overlap . 46
4.5.2 Risultati a 2 campate di overlap 49
4.5.2.1 Risultati $v = 150\ km/h$, 2 campate di overlap . 50
4.5.2.2 Risultati $v = 275\ km/h$, 2 campate di overlap . 53

5 Conclusione **56**

Bibliografia **58**

Elenco delle figure

1.1 Schema sistema pantografo-catenaria, adattato da [1] 1
1.2 Arco elettrico scoccato tra filo e pantografo 2
1.3 Schema delle varie tipologie di catenaria 3
1.4 Schema di una sezione di overlap, da [2] 3

2.1 Schema del filo simulato 6
2.2 Elemento trave di Eulero-Bernoulli 7
2.3 Schema dell'assemblaggio della matrice rigidezza. 10
2.4 Esempio di coupling tramite funzioni di forma 14
2.5 Diagramma di flusso del processo di integrazione numerica, adattato da [16]. 17

3.1 Schema della geometria del modello di una campata a due fili . 18
3.2 Schema della geometria del modello con sezione di overlap . . . 20
3.3 Schema del pendino come molla concentrata 23
3.4 Valori target di presag per una campata semplice da [3] 26

4.1 Forza di contatto e gap tra pantografo e filo al variare della rigidezza di contatto k_c. 35
4.2 Schema della configurazione statica sotto peso proprio del modello a un filo 36
4.3 Forze di contatto, non filtrate e filtrate 37
4.4 Forze di contatto nella zona di overlap, non filtrate e filtrate. . . 38
4.5 Forze di contatto, non filtrate e filtrate. 39
4.6 Forze di contatto nella zona di overlap, non filtrate e filtrate. . . 40
4.7 Schema della configurazione statica del modello a due fili a una campata di overlap. I triangoli rappresentano la posizione dei pendini 42
4.8 Forze di contatto, non filtrate e filtrate. 43
4.9 Forze di contatto nella zona di overlap, non filtrate e filtrate. . . 44
4.10 Andamento delle tensioni nei pendini di una campata normale, una di overlap uscente e una di overlap entrante 45
4.11 Forze di contatto, non filtrate e filtrate. 46

4.12 Forze di contatto nella zona di overlap, non filtrate e filtrate. . . 47
4.13 Andamento delle tensioni nei pendini di una campata normale, una di overlap uscente e una di overlap entrante 48
4.14 Schema della configurazione statica del modello a due fili a due campate di overlap. I triangoli rappresentano la posizione dei pendini 49
4.15 Forze di contatto, non filtrate e filtrate. 50
4.16 Forze di contatto nella zona di overlap, non filtrate e filtrate. . . 51
4.17 Andamento delle tensioni nei pendini di una campata normale, una di overlap uscente e una di overlap entrante 52
4.18 Forze di contatto, non filtrate e filtrate. 53
4.19 Forze di contatto nella zona di overlap, non filtrate e filtrate. . . 54
4.20 Andamento delle tensioni nei pendini di una campata normale, una di overlap uscente e una di overlap entrante 55

Elenco delle tabelle

4.1 Parametri del modello a un filo (Capitolo 2). 32
4.2 Parametri del modello a due fili (Capitolo 3). 33
4.3 Confronto tra il la lunghezza dalla norma EN 50318 e quello ottenuto dal modello per i nove pendini di una campata. 41

Capitolo 1

Introduzione

L'alimentazione elettrica dei convogli ferroviari e tranviari avviene, nella grande maggioranza delle linee elettrificate, tramite un sistema di captazione costituito da due elementi principali: la catenaria (o linea aerea di contatto), una struttura di conduttori sospesi al di sopra del binario, e il pantografo, un dispositivo articolato montato sul tetto (*imperiale*) del veicolo che, a contatto con la catenaria, raccoglie la corrente durante il moto. Il contatto elettrico tra i due avviene attraverso lo strisciamento continuo del pantografo mentre il treno avanza.

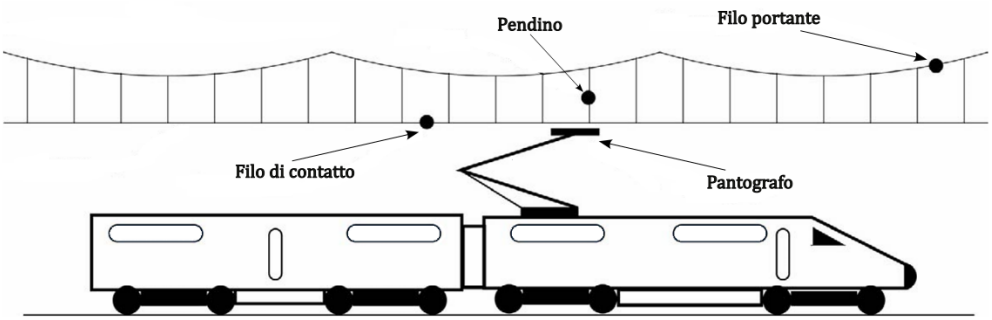


Figura 1.1: Schema sistema pantografo-catenaria, adattato da [1]

Solitamente la catenaria non è costituita da un unico filo ma da due sovrapposti. I componenti principali sono i seguenti:

- il filo di contatto (*contact wire*): è il conduttore inferiore, quello su cui effettivamente striscia il pantografo. È realizzato in lega di rame e mantenuto in tensione meccanica costante;
- il filo portante (*messenger wire*): è il filo superiore, che sostiene il filo di contatto. Non interagisce elettricamente con il pantografo ma ha funzione strutturale;

- i pendini (*droppers*): sono i fili di collegamento verticale tra il filo di contatto al filo portante. Sono solitamente distribuiti uniformemente lungo la campata e la loro lunghezza è dimensionata in modo che il filo di contatto abbia un andamento più regolare possibile. Anche loro svolgono solo la funzione di supporto meccanico.

I fili sono sostenuti da pali di sostegno e la distanza tra due pali successivi definisce la campata, tipicamente compresa tra 50 e 80 metri.

Durante il moto sia la catenaria sia il pantografo hanno un comportamento oscillatorio dovuto a molti fattori (comportamento dinamico della catenaria, propagazione delle onde meccaniche lungo i fili, irregolarità della linea), con il risultato che la forza di contatto non è costante ma oscilla continuamente. L'ampiezza di tali oscillazioni può fare sì che la forza si annulli temporaneamente, causando un breve distacco con conseguente formazione di un arco elettrico: una scarica tra il filo e il pantografo, con erosione localizzata di entrambe le superfici e sviluppo di temperature elevate.



Figura 1.2: Arco elettrico scoccato tra filo e pantografo

Esistono diverse configurazioni oltre alla catenaria semplice descritta precedentemente:

- la catenaria *stitched* (o *Y-stitched*) aggiunge in prossimità di ciascun palo di sostegno un breve tratto di fune ausiliaria (*stitch wire*) teso tra i due lati della portante, a cui vengono agganciati i primi pendini. Questo accorgimento uniforma la rigidezza flessionale verticale della linea in prossimità dei supporti, dove altrimenti sarebbe massima;

- la catenaria *compound* (*compound catenary*) estende la fune ausiliaria rendendola un terzo filo distinto, interposto tra portante e contatto. La portante sostiene l'ausiliaria tramite una prima serie di pendini e l'ausiliaria sostiene il filo di contatto tramite una seconda serie.

Il presente lavoro si concentra sulla catenaria semplice.

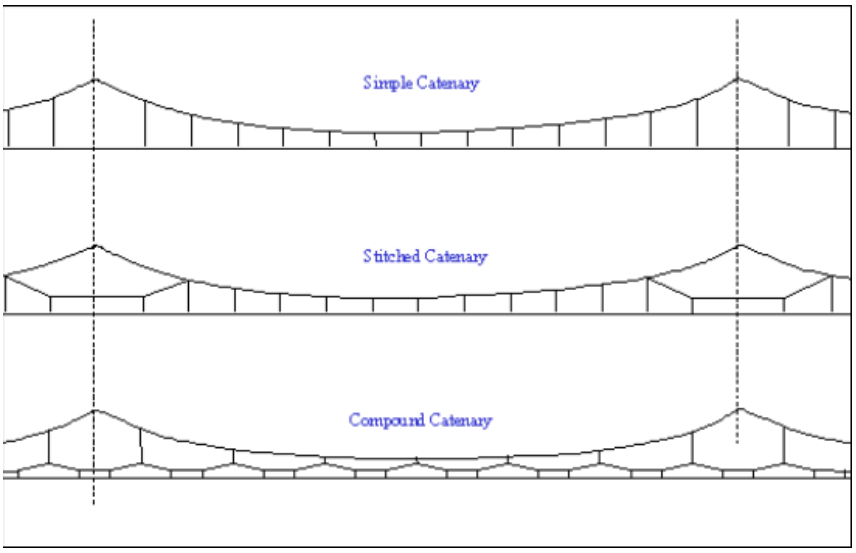


Figura 1.3: Schema delle varie tipologie di catenaria

L'intero sistema catenaria è pensato per mantenere il contatto quanto più costante e uniforme possibile, tanto che i fili stessi non sono esattamente paralleli all'asse dei binari ma procedono "a zig-zag" (*stagger*) per far si che il pantografo si usuri in maniera uniforme.

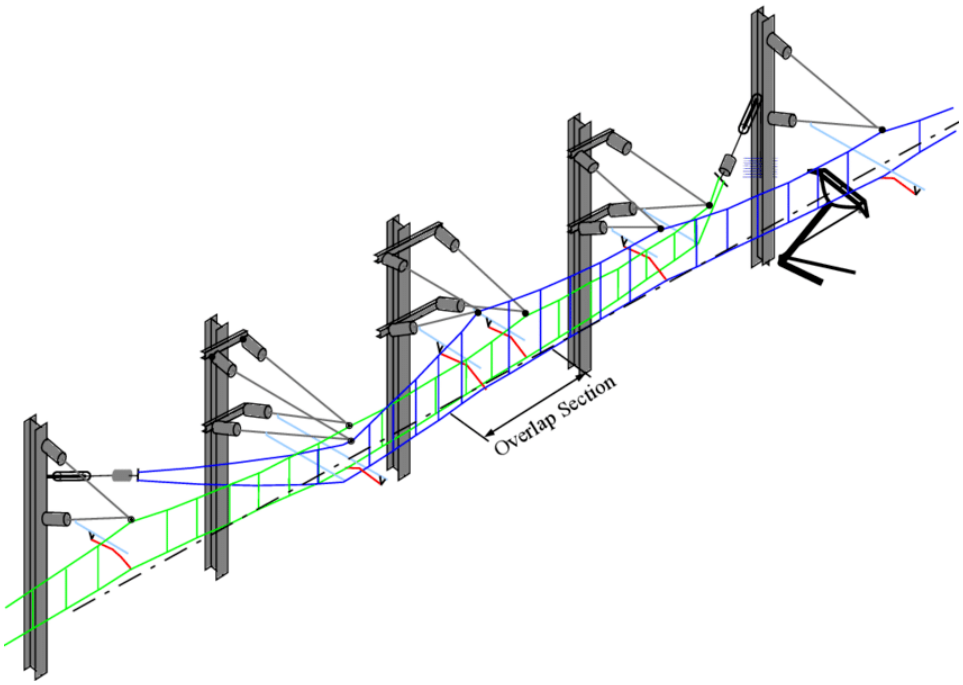


Figura 1.4: Schema di una sezione di overlap, da [2]

Le funi non possono tuttavia estendersi all'infinito: ciascuna sezione ha lunghezza limitata, tipicamente 1 - 1.5 km, delimitata alle estremità da dispositivi di tensionamento (contrappesi e carrucole) che garantiscono una tensione

meccanica costante sui fili. Il passaggio da una sezione di alla successiva non può avvenire con un'interruzione netta, poiché la fornitura di energia elettrica deve essere garantita continuamente: esso viene quindi realizzato attraverso una sezione di overlap (sovrapposizione). Prima che si arrivi alla fine di una sezione già partono i fili della nuova. Il filo di contatto della sezione uscente viene progressivamente sollevato al di sopra della portata del pantografo, mentre quello della sezione entrante viene abbassato dall'alto fino all'altezza di lavoro. Per un breve periodo il pantografo tocca contemporaneamente due fili e quindi transita in modo continuo senza mai perdere il contatto.

Lo studio dell'interazione dinamica pantografo-catenaria vanta una letteratura piuttosto ampia, soprattutto riguardo metodi di simulazione agli elementi finiti. La maggior parte di questi lavori si concentra però sul comportamento nelle campate normali di una sezione, dove la geometria è regolare e ripetitiva. La stessa normativa EN50318 [3] specifica esplicitamente di riferirsi alle campate centrali, ignorando completamente quelle di transizione. La letteratura dedicata *specificamente* alle sezioni di overlap è molto più contenuta e di sviluppo relativamente recente. Di seguito se ne presentano allcuni contributi.

Una constatazione comune dalla letteratura è che la sezione di overlap costituisce un punto anomalo della linea in cui la qualità del contatto peggiora. Nell'overlap si sommano infatti diversi fattori destabilizzanti: la presenza simultanea di due fili di contatto, la variazione di altezza del filo di contatto e la disuniformità di elasticità della linea [4]. Yao et al. [5] hanno mostrato che al passaggio del pantografo attraverso l'overlap la forza di contatto massima, la sua deviazione standard e lo spostamento verticale del filo aumentano in misura significativa rispetto alle campate normali, mentre la forza di contatto minima diminuisce. L'overlap è dunque, insieme ai supporti, il luogo in cui si registrano i picchi di sollecitazione del sistema.

Gregori et al. [6] hanno lavorato soprattutto sull'alta velocità, studiando l'influenza sul comportamento dinamico di elementi accessori e confrontando configurazioni di overlap a quattro e cinque campate.

Song et al.[4] hanno studiato l'influenza dell'altezza del punto di incrocio (*crossing point*), cioé il punto in cui i due fili di contatto si intersecano nella zona di transizione, mostrando una dipendenza del comportamento dinamico da tale altezza e dalla velocità del convoglio.

Wang et al. un hanno evidenziato una sensibilità non solo all'altezza del punto di incrocio ma anche a quella del secondo palo di transizione [7].

Jiang et al [8] hanno osservato sperimentalmente che il pantografo non entra in contatto con il secondo filo esattamente in corrispondenza del punto di incrocio statico, ma a una certa distanza prima di esso: da questa distanza di

transizione dipende l'impulso di forza sul secondo filo e quindi la probabilità di distacco e arco elettrico.

La maggior parte dei contributi citati si concentra su catenarie ad alta velocità con architetture complesse e su analisi di ottimizzazione o controllo. Il presente lavoro si colloca a un livello più fondamentale: lo sviluppo, a partire dalle equazioni di base, di un modello agli elementi finiti in grado di rappresentare la sezione di overlap in una catenaria semplice. L'obiettivo non è l'ottimizzazione di una configurazione specifica, ma la costruzione e la comprensione di uno strumento di simulazione di cui siano note e controllabili tutte le ipotesi di modellazione. Il modello verrà sviluppato gradualmente, partendo da una configurazione grossolana per arrivare a una rappresentazione più completa del sistema (per quanto ancora semplificata).

Nel capitolo 2 si presenta la formulazione agli elementi finiti del modello a un solo filo: vi si introducono l'elemento di trave adottato, l'assemblaggio del sistema, il modello di contatto e lo schema di integrazione temporale. Il capitolo 3 estende il modello al caso a due fili con pendini, aggiungendo il filo portante, la modellazione dei pendini e la procedura di determinazione della configurazione statica di riferimento. Infine nel capitolo 4 si presentano i risultati delle simulazioni.

Capitolo 2

Modello a un filo

2.1 Il modello

In un primo momento si è scelto di considerare un sistema semplificato, trascurando l'esistenza della fune portante e dei pendini e concentrandosi solo sul comportamento dei fili di contatto e la loro interazione con il pantografo. Poiché il modello adottato è bidimensionale, lo *stagger* della catenaria non viene considerato

Nel sistema reale il filo di contatto è composto da una successione di segmenti che si sovrappongono per una certa lunghezza per garantire la continuità del contatto elettrico. Nel modello in questione esso è rappresentato da due fili che si sovrappongono per una certa lunghezza.

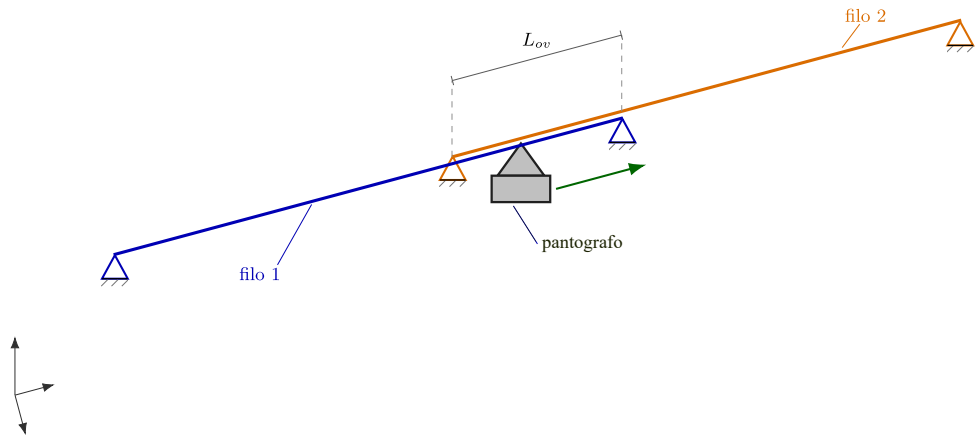


Figura 2.1: Schema del filo simulato

Il problema dinamico è descritto dall'equazione del moto:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{K}\mathbf{v} = \mathbf{f} \tag{2.1}$$

In cui:

- **M** è la matrice di massa del sistema;
- **C** è la matrice di smorzamento del sistema, modellata come smorzamento proporzionale di Rayleigh
- **K** è la matrice di rigidezza del sistema;
- **v** è il vettore delle coordinate generalizzate;
- **f** è il vettore delle forze esterne al sistema. Questo comprende la forza di pretensionamento e la forza peso propria dei fili stessi.

Il contatto è stato modellato secondo il metodo *"Penalty function"* mentre per la risoluzione si è scelto un metodo di integrazione diretta secondo lo schema di integrazione di Newmark.

2.2 Discretizzazione

Si è scelto di discretizzare le funi della catenaria come un certo numero di travi di Eulero - Bernoulli e si sono assunte matrici di massa in forma consistent.

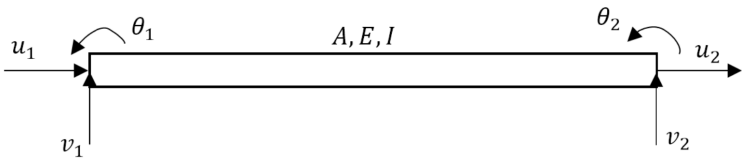


Figura 2.2: Elemento trave di Eulero-Bernoulli

Poiché l'elemento scelto ha tre GDL per nodo e due nodi per elemento, le coordinate sono nella forma:

$$\boldsymbol{v} = [u_1 \; v_1 \; \theta_1 \; u_2 \; v_2 \; \theta_2]^T \tag{2.2}$$

La scelta di partire direttamente da un modello agli elementi finiti e non da uno continuo come in [9] [10] è dovuta alla mancanza di una soluzione analitica nota per il caso in esame: se infatti per una trave semplice sottoposta a un carico mobile tale soluzione è disponibile in letteratura [11], lo stesso non può dirsi per il caso con overlap.

Gli elementi in questione presentano funzioni di forma:

$$\begin{aligned} &N_1 = 1 - \zeta \quad N_2 = 1 - 3\zeta^2 + 2\zeta^3 \quad N_3 = l\zeta(1 - 2\zeta + \zeta^2) \\ &N_4 = \zeta \quad N_5 = \zeta(3\zeta - 2\zeta^2) \quad N_6 = l\zeta(-\zeta + \zeta^2) \\ &\text{con} \quad \zeta = \frac{x(t)}{l}, \quad l = \text{lunghezza elemento}, \quad 0 \leq x \leq l \end{aligned} \tag{2.3}$$

Tali funzioni possono essere raccolte in $\mathbf{N}$. Esso è un vettore nella forma:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & N_5 & N_6 \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

del quale le funzioni di forma sono le colonne. Tali funzioni, valutate nei punti di contatto, verranno utilizzate nel punto 2.4 per ripartire il carico mobile dovuto al pantografo sui vari nodi.

Le matrici di massa e rigidezza elementari sono:

$$\boldsymbol{M_{el}} = \frac{\rho A l}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22l & 0 & 54 & -13l \\ 0 & 22l & 4l^2 & 0 & 13l & -3l^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13l & 0 & 156 & -22l \\ 0 & -13l & -3l^2 & 0 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

$$\boldsymbol{K_{el}} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

A quest'ultima vanno aggiunti i cosiddetti contributi di rigidezza geometrica [12], tenendo cioé conto del fatto che i cavi sono sempre pretensionati e si comportano quindi come se fossero più rigidi rispetto al caso normale. Tenendo conto di questi contributi la rigidezza diventa:

$$\boldsymbol{K_{el}} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{36T_0}{30l} + \frac{12EI}{l^3} & \frac{3T_0}{30} + \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{-36T_0}{30l} - \frac{12EI}{l^3} & \frac{3T_0}{30} + \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{3T_0}{30} + \frac{6EI}{l^2} & \frac{4lT_0}{30} + \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{3T_0}{30} - \frac{6EI}{l^2} & -\frac{lT_0}{30} + \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-36T_0}{30l} - \frac{12EI}{l^3} & -\frac{3T_0}{30} - \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{36T_0}{30l} + \frac{12EI}{l^3} & -\frac{3T_0}{30} - \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{3T_0}{30} + \frac{6EI}{l^2} & -\frac{lT_0}{30} + \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{3T_0}{30} - \frac{6EI}{l^2} & \frac{4lT_0}{30} + \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

In cui:

- ρ è la densità del materiale;
- E è il modulo di Young;

- A e I sono rispettivamente l'area e il momento di inerzia della sezione trasversale;
- l è la lunghezza del singolo elemento;
- T_0 è lo sforzo normale (tensione assiale) che agisce sulla trave;

Nel caso in esame si sono utilizzati i parametri di smorzamento $\alpha_s = 0.0125$ e $\beta_s = 10^{-4}$ presi dalla EN50318 [3] e matrice di smorzamento proporzionale:

$$\boldsymbol{C_{el}} = \alpha_s \boldsymbol{M_{el}} + \beta_s \boldsymbol{K_{el}} \tag{2.8}$$

2.3 Assemblaggio e statica

Nell'assemblaggio classico le matrici vengono assemblate "a cascata", generando una matrice complessiva "a bande" per via della sovrapposizione di un certo numero di GDL agli estremi di ogni elemento. In questo caso i singoli elementi hanno ognuno tre GDL in comune con l'elemento successivo, dunque le loro matrici di rigidezza $\mathbf{K_{el}}$ si intersecano nell'assemblaggio della prima trave. Ciò si verifica analogamente anche per l'assemblaggio della seconda trave.
I due estremi di ciascuna delle due travi sono stati vincolati come cerniere ($u, v = 0, \theta$ libero). Operativamente ciò si realizza sostituendo i termini della rigidezza corrispondenti ai GDL vincolati lungo la diagonale (in questo caso i primi due, penultimo e terzultimo di ciascun filo) con delle rigidezze arbitrare molto grandi rispetto ai valori caratteristici del sistema.

Nella zona di overlap in cui la prima trave termina e la seconda inizia le due travi sono fisicamente indipendenti, occupano semplicemente la stessa coordinata longitudinale. Questo significa che gli elementi della prima e della seconda trave non hanno GDL comune. Di conseguenza le matrici $\mathbf{K^{(1)}}$ e $\mathbf{K^{(2)}}$ della prima e della seconda trave non si intersecano nell'assemblaggio della rigidezza complessiva. La figura 2.3 illustra graficamente la struttura delle matrici dopo l'assemblaggio.
La procedura e le osservazioni finora descritte per l'assemblaggio delle matrici di rigidezza si applicano analogamente per massa e smorzamento. Si ottengono infine delle matrici nella forma:

$$\mathbf{M_a} = \begin{bmatrix} \mathbf{M^{(1)}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M^{(2)}} \end{bmatrix} \; \mathbf{C_a} = \begin{bmatrix} \mathbf{C^{(1)}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C^{(2)}} \end{bmatrix} \; \mathbf{K_a} = \begin{bmatrix} \mathbf{K^{(1)}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K^{(2)}} \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

In cui:

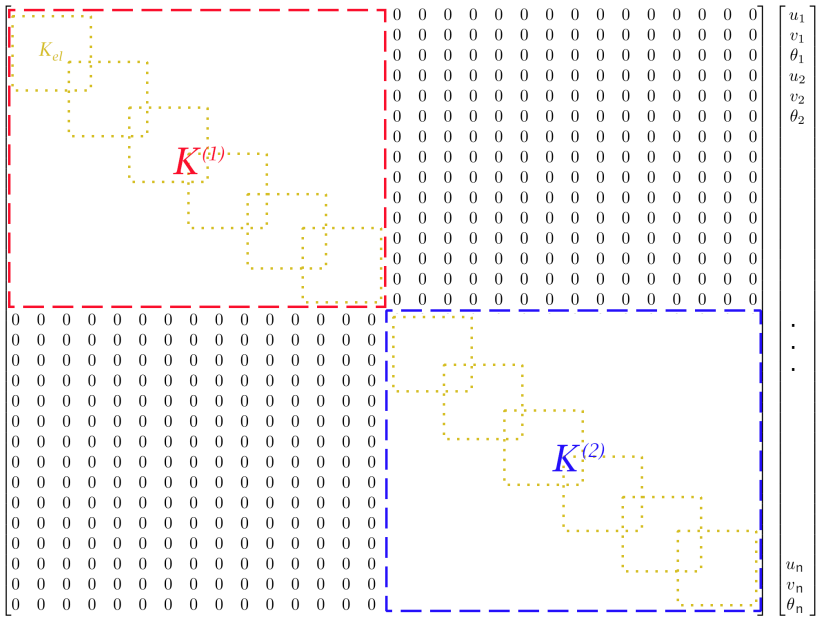


Figura 2.3: Schema dell'assemblaggio della matrice rigidezza.

- $\mathbf{M^{(1)}}$, $\mathbf{C^{(1)}}$, $\mathbf{K^{(1)}}$ sono rispettivamente le matrici di massa, smorzamento e rigidezza del primo filo, assemblate a partire dalle matrici elementari precedentemente presentate;
- $\mathbf{M^{(2)}}$, $\mathbf{C^{(2)}}$, $\mathbf{K^{(2)}}$ sono analogamente le matrici di massa, smorzamento e rigidezza del secondo filo.

Il vettore $\mathbf{f}$ deve contenere i contributi di pretensionamento e peso dei fili.Il peso in particolare essendo un carico distribuito va ripartito come carico nodale equivalente [13]. I contributi per ogni singolo elemento hanno la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{f_{el,tensione}} &= \{-T_0 \quad 0 \quad 0 \quad T_0 \quad 0 \quad 0\}^T \\ \mathbf{f_{el,peso}} &= \left\{0 \quad \frac{pl}{2} \quad \frac{pblue^2}{l}12 \quad 0 \quad \frac{pblue}{l}2 \quad -\frac{l^2}{12}\right\}^T \\ \mathbf{f_{el}} &= \mathbf{f_{el,tensione}} + \mathbf{f_{el,peso}} \end{aligned} \tag{2.10}$$

In cui:

- T_0 è la forza di pretensionamento applicata ai fili;
- p, l sono rispettivamente la forza peso e la lunghezza di un singolo elemento.

I vettori elementari risultanti vengono poi assemblato coerentemente alle altre matrici ottenendo così il vettore delle forze assemblato $\mathbf{f_a}$

Dopo avere effettuato l'assemblaggio è possibile calcolare la configurazione statica iniziale. Essa si ricava dal sistema statico

$$\mathbf{K_a v_0} = \mathbf{f_a} \tag{2.11}$$

derivato da (2.1) imponendo velocità e accelerazioni nulle. Si ricava il vettore $\mathbf{v_0}$ della deformata di partenza dei fili. Questa sarà importante poiché fornisce le condizioni iniziali per l'integrazione numerica che sarà svolta successivamente.

2.4 Contatto

Il contatto viene modellato secondo il metodo *penalty function*, comunemente utilizzato in letteratura. Tale metodo si basa sul modellare l'appoggio del pantografo sul filo come un vincolo elastico con una rigidezza di contatto molto grande, che forza quindi lo spostamento relativo tra filo e massa a tendere a zero. Dunque la forza di contatto viene ricavata dall'equazione:

$$f_c = f_c^{(1)} + f_c^{(2)} = k_c(u_p - u_c^{(1)}) + k_c(u_p - u_c^{(2)}) \tag{2.12}$$

In cui:

- f_c è la forza di contatto complessiva che il pantografo vede;
- $f_c^{(1)}$ e $f_c^{(2)}$ sono le forze di contatto agenti rispettivamente sul primo e secondo filo;
- k_c è la rigidezza di contatto;
- u_p è lo spostamento verticale del pantografo nel punto di contatto;
- $u_c^{(1)}$ e $u_c^{(2)}$ sono gli spostamenti verticali nel punto di contatto rispettivamente del primo e secondo filo;

Un valore di primo tentativo accettabile della rigidezza di contatto è secondo la EN 50318 $k_c = 5 \cdot 10^4$ N/m. Sebbene il metodo preveda la possibilità di considerare anche uno smorzamento di contatto, lo si è qui considerato nullo. Tale parametro è infatti solitamente impiegato per fare sì che la forza di contatto abbia un comportamento più regolare, ma ha poco significato fisico.
Il contatto è unilaterale (il pantografo si appoggia sui fili dal basso), quindi la forza di contatto si attiva solo quando il gap $u_p - u_c$ è positivo. Nella pratica vuol dire porre la rigidezza k_c pari a zero quando la (2.12) darebbe una forza

negativa priva di significato fisico.

$$k_c(t) = \begin{cases} k_c & \text{se } u_p^{(i)}(t) \geq u_c^{(i)}(t) \\ 0 & \text{se } u_p^{(i)}(t) < u_c^{(i)}(t) \end{cases} \quad i = 1, 2 \tag{2.13}$$

I due fili di contatto sovrapposti sono rappresentati da travi distinte con i propri gradi di libertà. Per gestire la zona di overlap le due forze di contatto $f_c^{(1)}$ e $f_c^{(2)}$ della (2.12) vengono trattate in modo indipendente usando due rigidezze di contatto distinte $k_c^{(1)}$ e $k_c^{(2)}$, di uguale valore numerico ma riferite rispettivamente al primo e al secondo filo.

Ognuna delle due rigidezze è attiva solo quando il pantografo si trova in una posizione longitudinale in cui il filo corrispondente è effettivamente presente. Dato che i fili si sovrappongono solo nel tratto di overlap ma esistono separatamente, la posizione $x_p(t)$ del pantografo determina con quale filo (o quali) esso possa entrare in contatto:

- prima della zona di overlap esiste solo il primo filo: $k_c^{(1)}$ è attiva, $k_c^{(2)} = 0$;
- nella zona di overlap esistono entrambi i fili: $k_c^{(1)}$ e $k_c^{(2)}$ sono entrambe attive e la forza di contatto complessiva viene dalla (2.12);
- dopo la zona di overlap esiste solo il secondo filo: $k_c^{(2)}$ è attiva, $k_c^{(1)} = 0$.

Nella zona di overlap, in cui entrambe le rigidezze sono attive, il pantografo è simultaneamente in contatto con entrambi i fili.

Il pantografo è stato modellato come una massa puntiforme in movimento lungo la direzione del filo. Esso viene trattato come un GDL aggiuntivo, assemblato nelle matrici generali all'ultima riga, ottenendo le seguenti:

$$\begin{gathered} \tilde{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \mathbf{M_a} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & m_p \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C_a} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & c_p \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K_a} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & k_p \end{bmatrix} \\ \tilde{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ v_p \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} \mathbf{f_a} \\ f_{up} - m_p g \end{pmatrix} \end{gathered} \tag{2.14}$$

In cui:

- m_p è la massa concentrata del pantografo;
- $k_p, c_p = 0$ avendo modellato il pantografo come una singola massa puntiforme;
- v_p è la coordinata verticale del pantografo;
- f_{up} è la forza di precarico che spinge il pantografo contro i fili.

2.5 Accoppiamento

L'accoppiamento è stato implementato seguendo una versione semplificata del metodo di Cho [14][9]. La principale differenza rispetto a una classica trave incastrata è che la matrice di rigidezza $\mathbf{K}$ (e, in generale, anche lo smorzamento $\mathbf{C}$) non sono costanti nel tempo ma sono composte da una parte costante ($\tilde{\mathbf{K}}$ e $\tilde{\mathbf{C}}$) e una che varia. Alle matrici del sistema (2.14) vanno sommati a ogni istante contributi dovuti all'accoppiamento del pantografo con la struttura tramite il contatto *penalty*. Tali contributi si trovano in posizione diversa in ogni istante seguendo la posizione del pantografo e vengono raccolti nelle matrici di accoppiamento:

$$\mathbf{K}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{K_a} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & k_p \end{bmatrix}}_{\text{costante}} + \underbrace{\mathbf{K_{couple}}}_{\text{variabile nel tempo}} \quad \mathbf{C}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C_a} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & c_p \end{bmatrix}}_{\text{costante}} + \underbrace{\mathbf{C_{couple}}}_{\text{variabile nel tempo}}$$

$$\mathbf{K_{couple}} = k_c^{(i)} \begin{bmatrix} \mathbf{N}^T(\zeta)\mathbf{N}(\zeta) & -\mathbf{N}^T(\zeta) \\ -\mathbf{N}(\zeta) & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C_{couple}} = c_c^{(i)} \begin{bmatrix} \mathbf{N}^T(\zeta)\mathbf{N}(\zeta) & -\mathbf{N}^T(\zeta) \\ -\mathbf{N}(\zeta) & 1 \end{bmatrix}$$

$$i = 1, 2 \tag{2.15}$$

Dove x_p è l'attuale posizione del carico mobile e $\mathbf{N}$ sono le funzioni di forma della (2.4), valutate alla posizione locale dell'elemento x corrispondente alla posizione globale attuale x_p. Le funzioni di forma servono a ripartire il contribuo tra due nodi quando la posizione del pantografo non coincide esattamente con quella di un nodo. Uno schema dell'accoppiamento è visibile in 2.4.

Si osserva che le matrici di accoppiamento non hanno le stesse dimensioni delle matrici del sistema ma dipendono dal tipo di elemento impiegato (in questo caso 7x7).

Anche se in generale lo smorzamento riceverebbe un contributo dovuto all'accoppiamento come espresso nella (2.15), nel caso in esame avendo considerato uno smorzamento di contatto nullo la matrice di smorzamento è effettivamente costante nel tempo.

Analogamente a quanto fatto nella sezione precedente, le matrici di accoppiamento relative ai fili vengono trattate indipendentemente usando le rigidezze distinte $k_c^{(1)}$e $k_c^{(2)}$ e anche queste rigidezze vengono annullate quando il carico si trova fuori dalla lunghezza del filo corrispondente. Quindi anche le matrici di accoppiamento sono nulle fuori dal filo corrispondente e contribuiscono effettivamente entrambe solo nella sezione di overlap.

Poiché non ci sono state modifiche alla matrice di massa né ai vettori delle

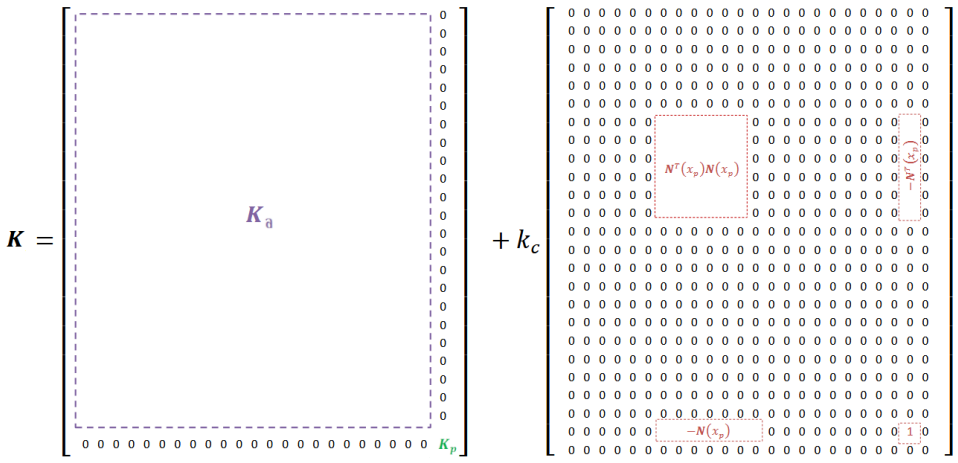


Figura 2.4: Esempio di coupling tramite funzioni di forma

coordinate e dei carichi nel corso dell'accoppiamento, si impone:

$$\mathbf{M} = \tilde{\mathbf{M}},\ \mathbf{v} = \tilde{\mathbf{v}},\ \mathbf{f} = \tilde{\mathbf{f}} \tag{2.16}$$

per mantenere la notazione coerente con la (2.1), che rimane l'equazione del moto da risolvere sapendo che la matrice rigidezza varia nel tempo:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{K}(t)\mathbf{v} = \mathbf{f} \tag{2.17}$$

2.6 Integrazione numerica con Newmark

L'equazione del moto del sistema accoppiato (2.17) è un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine a coefficienti variabili nel tempo per via della matrice di accoppiamento $\mathbf{K}_{\mathbf{couple}}(t)$. Per questo viene risolta per integrazione numerica diretta tramite metodo di Newmark.

Si tratta di uno schema implicito a passo costante ampiamente adottato nella dinamica strutturale, in cui due parametri γ e β regolano il modo in cui le accelerazioni vengono "pesate" tra inizio e fine dell'intervallo $[t_n, t_{n+1}]$ nella ricostruzione di velocità e spostamento. In questo lavoro si è scelta la variante con

$$\gamma = \frac{1}{2}, \qquad \beta = \frac{1}{4} \tag{2.18}$$

che prende il nome di variante a *accelerazione media costante*.

Questa particolare scelta di parametri gode della proprietà di stabilità incondizionata per sistemi lineari:ciò significa che il passo temporale Δt può essere scelto arbitrariamente sulla base di sole considerazioni di accuratezza, senza vincoli legati alla stabilità. Questo è un buon vantaggio rispetto a altri

schemi, considerato che l'entità della rigidezza di contatto potrebbe imporre un Δt critico molto piccolo.

Si osserva che tecnicamente la stabilità incondizionata è dimostrata rigorosamente per sistemi lineari a coefficienti costanti [15]. Inoltre tale proprietà non garantisce nulla sull'accuratezza del metodo.

Come visto in 2.5 il metodo di Newmark si esprime attraverso le due relazioni di aggiornamento:

$$\dot{\mathbf{v}}_{n+1} = \dot{\mathbf{v}}_n + (1-\gamma)\,\Delta t\,\ddot{\mathbf{v}}_n + \gamma\,\Delta t\,\ddot{\mathbf{v}}_{n+1} \tag{2.19}$$

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \Delta t\,\dot{\mathbf{v}}_n + \left(\tfrac{1}{2} - \beta\right)\Delta t^2\,\ddot{\mathbf{v}}_n + \beta\,\Delta t^2\,\ddot{\mathbf{v}}_{n+1} \tag{2.20}$$

che stimano spostamento e velocità al passo $n+1$ in funzione dello stato al passo n e dell'accelerazione al passo $n+1$, inizialmente non nota.

In una prima fase di predizione si calcolano le stime iniziali di spostamento e velocità utilizzando solo le informazioni note al passo n:

$$\mathbf{v}^*_{n+1} = \mathbf{v}_n + \Delta t\,\dot{\mathbf{v}}_n + \left(\tfrac{1}{2} - \beta\right)\Delta t^2\,\ddot{\mathbf{v}}_n \tag{2.21}$$

$$\dot{\mathbf{v}}^*_{n+1} = \dot{\mathbf{v}}_n + (1-\gamma)\,\Delta t\,\ddot{\mathbf{v}}_n \tag{2.22}$$

L'accelerazione al passo $n+1$ viene poi determinata risolvendo l'equazione:

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{v}}_{n+1} = \mathbf{f}_{n+1} - \mathbf{C}\dot{\mathbf{v}}^*_{n+1} - \mathbf{K}\mathbf{v}^*_{n+1} \tag{2.23}$$

dove $\mathbf{A}$ è la *matrice effettiva* o *matrice operatore* di Newmark, che raccoglie i contributi inerziali, dissipativi e elastici:

$$\mathbf{A} = \mathbf{M} + \gamma\,\Delta t\,\mathbf{C} + \beta\,\Delta t^2\,\mathbf{K}(t_{n+1}) \tag{2.24}$$

In una seconda fase di correzione lo stato al passo $n+1$ è finalmente completato utilizzando l'accelerazione appena calcolata per aggiornare spostamenti e velocità:

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}^*_{n+1} + \beta\,\Delta t^2\,\ddot{\mathbf{v}}_{n+1} \tag{2.25}$$

$$\dot{\mathbf{v}}_{n+1} = \dot{\mathbf{v}}^*_{n+1} + \gamma\,\Delta t\,\ddot{\mathbf{v}}_{n+1} \tag{2.26}$$

L'aspetto computazionalmente più rilevante e caratteristico del problema pantografo-catenaria è che la matrice di rigidezza $\mathbf{K}(t)$ non è costante nel tempo. Come stabilito precedentemente, nel modello a un filo essa si divide in una parte costante e in una parte variabile nel tempo:

$$\mathbf{K_{tot}}(t) = \tilde{\mathbf{K}} + \mathbf{K_{couple}}(t) \tag{2.27}$$

dove $\tilde{\mathbf{K}}$ contiene i contributi strutturali dei fili (indipendenti dal tempo) e $\mathbf{K}_{\mathbf{couple}}(t)$ è il blocco di accoppiamento, che dipende dalla posizione del pantografo istante per istante attraverso il vettore delle funzioni di forma $\mathbf{N}(x(t))$. Anche la matrice effettiva $\mathbf{A}$ deve dunque essere ricostruita a ogni passo temporale. Le matrici $\mathbf{M}$ e $\mathbf{C}$ sono invece indipendenti dal tempo.

Operativamente, il ciclo di risoluzione che implementa Newmark si articola nei seguenti passi per ogni istante t_{n+1}:

1. Determinare la posizione del pantografo $x(t_{n+1})$ e identificare l'elemento (o gli elementi, nelle zone di overlap) attraversato in tale istante.

2. Calcolare le funzioni di forma valutate nella coordinata locale corrispondente all'interno dell'elemento (o degli elementi) in questione e costruire il blocco di accoppiamento $\mathbf{K}_{\mathbf{couple}}(t_n)$ secondo la (2.15).

3. Ricavare $\mathbf{K}_{\mathrm{tot},\,n}$ sommando $\mathbf{K}_{\mathbf{couple}}(t_n)$ a $\tilde{\mathbf{K}}$ e ricavare la *matrice effettiva* di Newmark $\mathbf{A}$.

4. Stimare $\dot{\mathbf{v}}^*_{n+1}$ e $\mathbf{v}^*_{n+1}$ tramite (2.21) e (2.22) e il sistema lineare ricavato da (2.23) per ottenere $\ddot{\mathbf{v}}_{n+1}$.

5. Aggiornare velocità $\dot{\mathbf{v}}_{n+1}$ e accelerazioni $\ddot{\mathbf{v}}_{n+1}$ tramite (2.25) e (2.26).

6. Verificare che la forza di contatto risultante sia positiva. In caso contrario, ilcontatto non è attivo (si è verificato un distacco): si setta $k_c = 0$ e si ripete la soluzione dal passo 2.

7. Passare all'istante temporale successivo l'istante temporale

La condizione iniziale al primo passo è fornita dalla configurazione statica calcolata precedentemente, mentre velocità e accelerazioni iniziali sono assunte nulle.

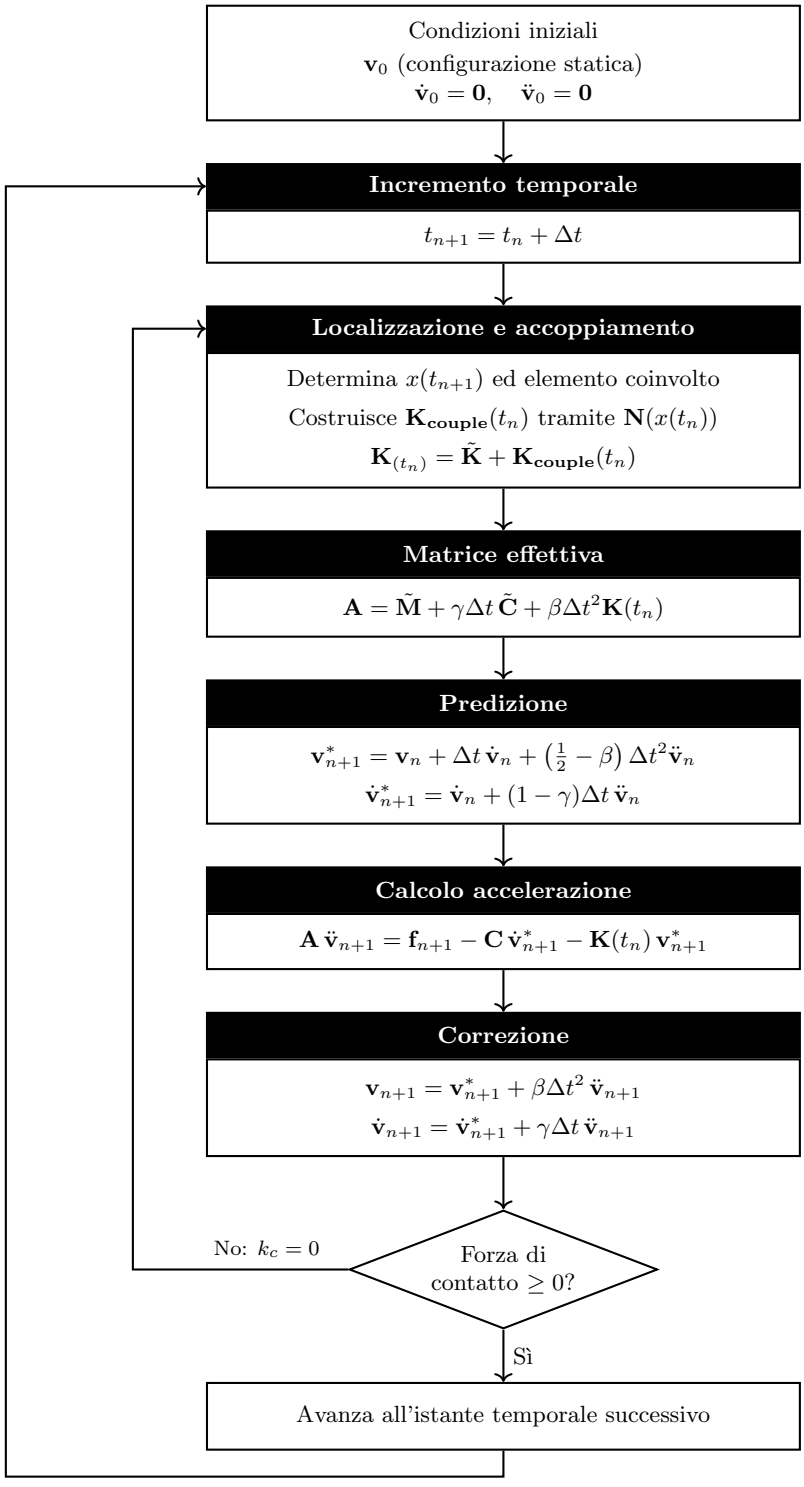


Figura 2.5: Diagramma di flusso del processo di integrazione numerica, adattato da [16].

Capitolo 3

Modello a due fili con pendini

3.1 Modello esteso e ipotesi

Il modello sviluppato nel capitolo 2 descrive l'interazione dinamica tra un pantografo e il filo di contatto, trascurando il filo portante e i pendini che sostengono il filo di contatto in una catenaria reale. In questo capitolo si estende il modello semplificato, aggiungendo due nuovi elementi:

- il filo portante (*messenger wire*) discretizzato con la stessa formulazione adottata per il filo di contatto (elemento trave di Eulero-Bernoulli, contributo di rigidezza geometrica per la pretensione) e con la stessa disposizione a due travi sovrapposte in corrispondenza delle zone di overlap tra campate successive;
- i pendini (*droppers*) discretizzati come elementi asta verticali che collegano il filo portante al filo di contatto in un certo numero di punti lungo ogni campata. Sono trattati come elementi *tension-only*: hanno rigidezza positiva solo in trazione, mentre in compressione si considerano inattivi.

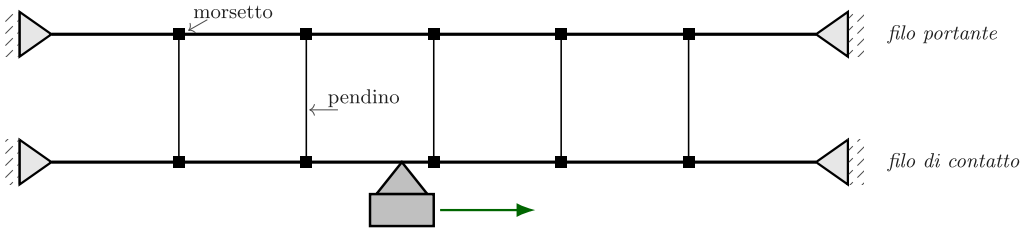


Figura 3.1: Schema della geometria del modello di una campata a due fili

Si osserva che il pantografo interagisce solamente con il filo di contatto, mentre il portante ha funzione strutturale e sente l'interazione dinamica solo per via dei pendini che accoppiano i due fili.

Nella modellazione sono state fatte alcune ipotesi:

- si sono modellati i pendini come elementi asta di rigidezza k_d assegnata: come verrà mostrato più avanti la matrice di rigidezza di un elemento asta di sezione A_d, modulo elastico E_d e lunghezza nominale l_d è praticamente identica a quella ricavata da una rigidezza concentrata, se si assume $k_d = \frac{E_d A_d}{l_d}$;

- si sono trascurati gli effetti inerziali (masse) dovuti ai pendini. Tuttavia i carichi (pesi) dovuti sia ai pendini sia ai morsetti (*clamps*) che li ancorano ai due fili sono stati considerati;

- si sono supposte zone di overlap contemporanee tra il filo di contatto e il portante, cioé che dove inizia il nuovo filo di contatto inizi anche il nuovo portante. Questa è un'assunzione comune in letteratura.

Il resto del modello (equazione del moto, modello di contatto tra pantografo e filo *penalty*, pantografo assemblato come GDL aggiuntivo in fondo alle matrici del sistema con matrice di accoppiamento $\mathbf{K}_{couple}(t)$, schema di integrazione di Newmark a accelerazione media costante con predittore e correttore) segue la formulazione del capitolo 2 opportunamente adattati. I metodi usati rimangono gli stessi, ma da qui in poi ci si concentrerà sulle novità dovute all'aggiunta del secondo filo e dei pendini.

3.2 Geometria e discretizzazione

3.2.1 Struttura del sistema modellato

Il sistema modellato riproduce due campate successive di una catenaria semplice, con il filo portante posto superiormente e il filo di contatto posto inferiormente. I fili sono connessi da un certo numero di pendini verticali disposti a intervalli regolari lungo le campate. Come già detto nel capitolo 2, il filo di contatto è composto da più segmenti in successione, sovrapposti per una certa lunghezza per garantire la continuità del contatto elettrico tra sezioni successive.

Nel modello ogni segmento è rappresentato da una trave per un totale di quattro travi nelle campate con overlap, due per il filo portante e due per il filo di contatto come illustrato in figura 3.2, nella quale:

- h_0 è la distanza nominale in corrispondenza del primo vincolo della campata e quindi la distanza nominale tra i fili in configurazione non deformata;

- L_{ov} è la lunghezza del tratto di overlap, in cui coesistono due fili di contatto e due fili portanti.

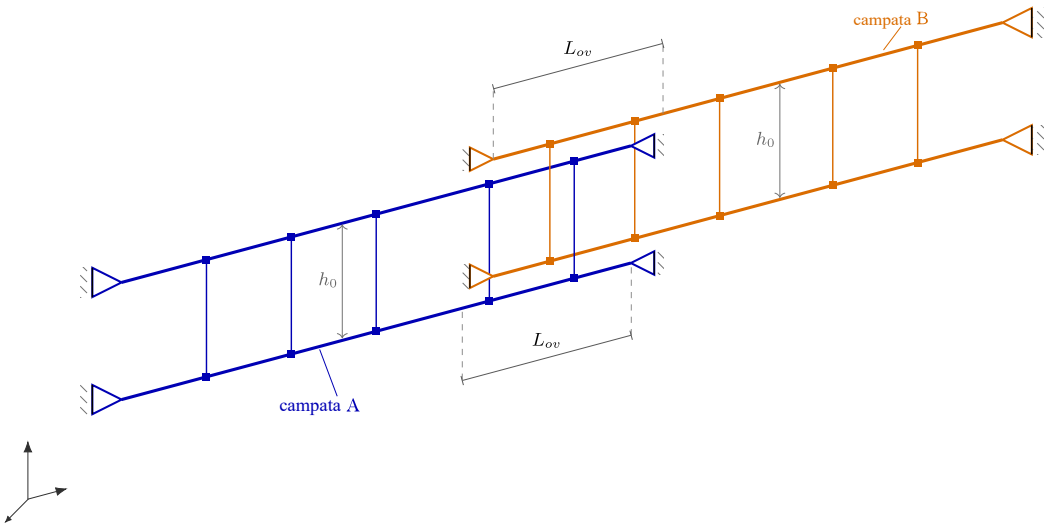


Figura 3.2: Schema della geometria del modello con sezione di overlap

Nella figura 3.2 e nel punto precedente si è presentato uno schema a due campate per semplicità di esposizione, ma il modello è facilmente generalizzabile e il numero di campate ne è in realtà un parametro.

Le zone di overlap dei due fili sono contemporanee, cioè avvengono nello stesso intervallo di coordinata longitudinale: qui entrambe le coppie di travi (portante e di contatto) occupano lo stesso spazio ma restano fisicamente separate a livello di GDL, come discusso nella sezione 2.3. Questo significa che le matrici del sistema assumeranno nuovamente una forma "a blocchi" come mostrato in (3.1).

3.2.2 Vincoli e condizioni al contorno

Rispetto al modello a un filo del capitolo 2, in cui tutti gli estremi dei fili erano vincolati allo stesso modo, il modello a due fili adotta condizioni al contorno diverse per il filo portante e per il filo di contatto. La scelta è motivata dall'obiettivo di riprodurre il più fedelmente possibile il sistema di riferimento del benchmark della normativa EN 50318 [3], in modo da rendere confrontabili i risultati delle simulazioni.

Il filo portante è sostenuto in ciascun supporto da un vincolo elastico verticale di rigidezza k_{mess}: esso blocca la traslazione orizzontale, lascia libera la rotazione e contrasta elasticamente la traslazione verticale. Tale vincolo è applicato a tutti i supporti del portante, sia agli estremi assoluti sia (nel caso di simulazione di più campate) ai supporti interni.

Il filo di contatto è vincolato in due modi diversi a seconda che il punto in questione sia una terminazione di un tratto di filo o un supporto intermedio attraversato dal filo (nel caso di simulazione di più campate):

- nei punti in cui un tratto di filo di contatto inizia o termina (gli estremi assoluti del sistema e le due terminazioni interne alla zona di overlap, dove il filo uscente va a morire e quello entrante ha origine) si è mantenuta la cerniera già usata nel modello a un filo;

- nei supporti intermedi che un tratto di filo attraversa senza interrompersi, si è modellato l'effetto del braccio di poligonazione (*steady arm*), l'elemento che nella realtà fissa la posizione del filo di contatto in corrispondenza dei pali. Poiché il modello è bidimensionale si considera solo l'effetto verticale, rappresentato da un vincolo elastico di rigidezza k_{steady} applicato al grado di libertà verticale del nodo.

3.2.3 Discretizzazione

Ogni filo è discretizzato con elementi trave di Eulero-Bernoulli esattamente come quelli descritti nel capitolo 2.2: tre gradi di libertà per nodo (u, v, θ), matrici di rigidezza e massa consistenti, contributo di rigidezza geometrica dovuto alla pretensione.

I parametri fisici dei due fili (modulo di Young, sezione, momento di inerzia, densità, tiro di pretensionamento) in generale sono diversi tra portante e contatto.

Le matrici del sistema vengono assemblate a partire da quelle elementari con una procedura analoga a quella della sezione 2.3 per ottenere le matrici dei vari fili, ma questa volta esse sono quattro e non due, disposte in fila lungo la diagonale. I fili e quindi le loro matrici sono fisicamente indipendenti e verranno poi collegate tramite i pendini. Le matrici del sistema assemblate hanno la forma:

$$\mathbf{M_a} = \begin{bmatrix} \mathbf{M_c^{(1)}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M_c^{(2)}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M_m^{(1)}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M_m^{(2)}} \end{bmatrix} \quad \mathbf{C_a} = \begin{bmatrix} \mathbf{C_c^{(1)}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C_c^{(2)}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C_m^{(1)}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C_m^{(2)}} \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K_a} = \begin{bmatrix} \mathbf{K_c^{(1)}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K_c^{(2)}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K_m^{(1)}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K_m^{(2)}} \end{bmatrix} \quad \mathbf{f_a} = \begin{pmatrix} \mathbf{f_c^{(1)}} \\ \mathbf{f_c^{(2)}} \\ \mathbf{f_m^{(1)}} \\ \mathbf{f_m^{(2)}} \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

dove:

- $\mathbf{M_c^{(1)}}$, $\mathbf{C_c^{(1)}}$, $\mathbf{K_c^{(1)}}$, $\mathbf{f_c^{(1)}}$ sono rispettivamente le matrici di massa, smorzamento, rigidezza e il vettore di carichi del primo filo di contatto;

- $\mathbf{M_c^{(2)}}$, $\mathbf{C_c^{(2)}}$, $\mathbf{K_c^{(2)}}$, $\mathbf{f_c^{(2)}}$ sono analogamente le matrici di massa, smorzamento, rigidezza e il vettore dei carichi del secondo filo di contatto;
- $\mathbf{M_m^{(1)}}$, $\mathbf{C_m^{(1)}}$, $\mathbf{K_m^{(1)}}$, $\mathbf{f_m^{(1)}}$ sono rispettivamente le matrici di massa, smorzamento, rigidezza e il vettore dei carichi del filo portante corrispondente al primo filo di contatto;
- $\mathbf{M_m^{(2)}}$, $\mathbf{C_m^{(2)}}$, $\mathbf{K_m^{(2)}}$, $\mathbf{f_m^{(2)}}$ sono analogamente le matrici di massa, smorzamento, rigidezza e il vettore dei carichi del filo portante corrispondente al secondo filo di contatto.

Il pantografo viene aggiunto in fondo alle matrici come grado di libertà aggiuntivo esattamente come nel caso a un filo, ottenendo così le matrici $\tilde{\mathbf{M}}$, $\tilde{\mathbf{C}}$, $\tilde{\mathbf{K}}$ e i vettori $\tilde{\mathbf{v}}$, $\tilde{\mathbf{f}}$ nella stessa forma vista in (2.14).

3.2.4 Aggancio dei pendini

Ogni pendino connette due nodi sulla stessa verticale: uno sul filo di contatto e uno sul filo portante. Sono presenti un numero costante di pendini per campata, equidistanti tra loro. La discretizzazione dei fili (in particolare la dimensione del singolo elemento e quindi il numero di elementi per filo) è stata scelta in modo da far corrispondere esattamente le posizioni dei pendini con quelle di un nodo. Nelle zone di overlap i pendini collegano comunque solo i fili della stessa campata.

3.3 Modellazione dei pendini

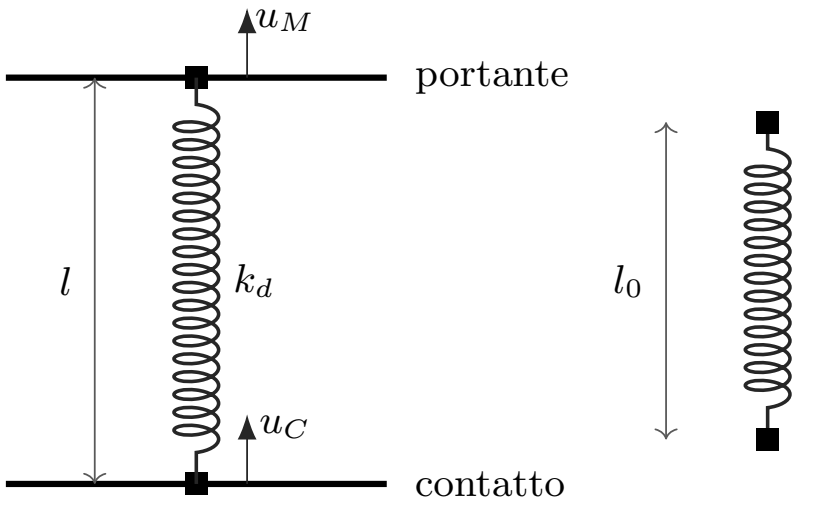
3.3.1 Il pendino come elemento asta unilaterale

Ogni pendino collega un nodo del filo portante a un nodo del filo di contatto sulla stessa verticale. Essi si comportano come delle molle *tension-only*: hanno una certa rigidezza in trazione ma rigidezza nulla (nella realtà sono effettivamente dei fili che hanno bisogno di essere tesi per lavorare) se sollecitati in compressione.

Si supponga in un primo momento che il pendino sia una molla concentrata, essa ha tensione interna:

$$T = k_d \, \Delta l = k_d \, (l_1 - l_0) \tag{3.2}$$

con k_d rigidezza della molla che modellizza il pendino, l_0 lunghezza indeformata e l_1 lunghezza sotto carico. La lunghezza deformata è pari alla distanza nominale tra i fili in non deformati h_0 più eventuali spostamenti dei fili u_m



(a) pendino deformato (b) pendino a riposo

Figura 3.3: Schema del pendino come molla concentrata

e u_c (rispettivamente spostamento del filo portante e spostamento del filo di contatto):

$$l_1 = h_0 + u_m - u_c \tag{3.3}$$

I segni sono dovuti al fatto che un sollevamento del filo portante allunga il pendino mentre un sollevamento del filo di contatto lo accorcia. L'espressione della tensione diventa:

$$T = k_d\,(h_0 + u_m - u_c - l_0) = k_d(u_m - u_c) + k_d(h_0 - l_0) \tag{3.4}$$

Si osserva come il blocco $k_d(h_0 - l_0)$ non dipenda dagli spostamenti mentre invece il blocco $k_d(u_m - u_c)$ si. Nella pratica questo significa che il blocco costante contribuirà al vettore delle forze $\mathbf{f}$ nell'equazione del moto (2.1), mentre il blocco dipendente dagli spostamenti forma il contributo che andrà nella matrice di rigidezza.

Isolando solo la parte che dipende dagli spostamenti si ottengono le forze imposte dal pendino sui nodi dei fili di contatto e portante, rispettivamente F_c e F_m, uguali e opposte:

$$\begin{aligned} F_c &= k_d\,u_m - k_d\,u_c = -k_d\,u_c + k_d\,u_m, \\ F_m &= -k_d\,u_m + k_d\,u_c = +k_d\,u_c - k_d\,u_m. \end{aligned} \tag{3.5}$$

In forma matriciale le equazioni diventano:

$$\begin{bmatrix} F_c \\ F_m \end{bmatrix} = -\, k_d \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c \\ u_m \end{bmatrix}. \tag{3.6}$$

Da cui si ricava la matrice di rigidezza del pendino:

$$\mathbf{K}_{drop} = k_d \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.7}$$

questa matrice di rigidezza ottenuta dall'ipotesi di una molla concentrata ha la stessa forma di quella di un elemento asta se si suppone $k_d = \frac{EA}{l}$. Un elemento asta si comporta dunque come una rigidezza concentrata con di tale valore.

Detto n_{drop} il numero di pendini per campata, si otterrano n_{drop} matrici come la precedente. Guardando le (3.7) e (3.6), i nodi dei fili di contatto e portante a cui è fissato il pendino si trovano nella matrice assemblata $\mathbf{K_a}$ rispettivamente in posizioni $(dofC, dofC)$ e $(dofM, dofM)$.

I membri di ogni matrice $\mathbf{K_{drop}}$ vanno aggiunti alla matrice di rigidezza in posizioni:

$$\begin{aligned} (dofC, dofC) &\to +k \qquad (dofM, dofM) \to +k \\ (dofC, dofM) &\to -k \qquad (dofM, dofC) \to -k \end{aligned} \tag{3.8}$$

Il blocco costante $k_d(h_0 - l_0)$ dell'equazione (3.4) va sommato nel vettore dei carichi esterni assemblato $\mathbf{f_a}$ nelle posizioni $dofC$ e $dofM$ con segni opposti:

$$\begin{gathered} (dofC) \to +c_0 \qquad (dofM) \to -c_0 \\ c_0 = k_{d,i}(h_0 - l_{0,i}) \end{gathered} \tag{3.9}$$

In generale le lunghezze a riposo e le rigidezze possono essere diverse per ogni pendino, da cui le diciture $k_{d,i}$, $l_{0,i}$, rigidezza e lunghezza a riposo dell'i-esimo pendino. Questo contributo va sommato separatamente per ogni pendino. Il non includere questo questo contributo nel vettore delle forze vorrebbe dire supporre $c_0 = 0$, cioé che la lunghezza l_0 del pendino a riposo sia esattamente pari alla distanza h_0 tra i supporti dei fili.

3.3.2 Trattamento *lagged* del calcolo dello stato

Il comportamento *tension-only* dei pendini viene implementato "disattivando" i pendini se dovessero risultare in compressione, secondo una logica simile al controllo della rigidezza di contatto in (2.13).

Lo stato in tensione o meno dei pendini dipende a ogni istante tramite l' equazione (3.4) dagli spostamenti verticali dei nodi di aggancio u_m e u_c, ma questi sono a loro volta le incognite del sistema nell'istante temporale in questione.

In questo lavoro si è scelto di gestire il calcolo dello stato dei pendini con una strategia *lagged*, calcolando lo stato di attivazione o meno dei pendini "in ritardo" di uno step temporale: dopo avere calcolato la configurazione iniziale, lo stato al passo $n+1$ viene valutato stimando le tensioni usando gli spostamenti noti al passo n precedente:

$$T_{i,stima}^{(n+1)} \approx k_{d,i} \left(u_{m,i}^{(n)} - u_{c,i}^{(n)} \right) \tag{3.10}$$

Dal segno di queste stime si determina se un pendino è in tensione o in compressione al passo attuale.

L'approssimazione introdotta è accettabile se il passo Δt è sufficientemente piccolo: se la variazione degli spostamenti tra passi consecutivi è piccola rispetto alla scala di attivazione dei pendini, lo stato calcolato al passo n è una buona stima dello stato al passo $n + 1$. Nel caso in questione, con $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4} s$, questa condizione è soddisfatta.

3.4 Configurazione statica iniziale accoppiata

L'integrazione dinamica del sistema tramite lo schema di Newmark introdotto nel Capitolo 2 richiede una configurazione iniziale $\mathbf{u}_0$ da cui partire. Nel modello a un filo tale configurazione era ottenuta risolvendo un semplice sistema statico sollecitato da peso proprio, pretensione e vincoli agli estremi. Nel modello a due fili la statica è più delicata: i pendini collegano i due fili esercitando forze di trazione che dipendono dagli spostamenti nodali ma contribuiscono anche a determinarli.

Questo è un problema di *shape-finding* e si tratta di una situazione vicina a un tipico caso di progetto: si vuole raggiungere come target una certa configurazione statica (tipicamente filo di contatto piatto o con un certo profilo di *presag* noto a priori). Determinare la configurazione statica equivale quindi a risolvere un problema inverso: assegnata la forma obiettivo del filo di contatto, si determinano le tensioni di precarico T_0 nei pendini che la producono sotto peso proprio del sistema.

Il metodo adottato è ispirato all'approccio TCUD (*Target Configuration Under Dead Load*) e riduce il problema a un sistema con incognite le tensioni dei pendini.

3.4.1 Il profilo target

Il profilo obiettivo può essere piatto o con un certo *presag* scelto. Il *presag* è una piccola freccia verso il basso del filo di contatto, imposta agli n_{drop} nodi di aggancio dei pendini in ogni campata. Si riporta per esempio in figura 3.4 i valori assegnati per il benchmark per una catenaria semplice dalla normativa EN 50318-2018.

Table A.2 — AC – Simple - overhead contact line model – Geometry and elasticity of droppers

	support	1	2	3	4	5	6	7	8	9	support
X [m]	0	4,50	10,25	16,0	21,75	27,50	33,25	39,00	44,75	50,50	55
presag [mm]	0	0	24	41	52	55	52	41	24	0	0

Figura 3.4: Valori target di presag per una campata semplice da [3]

Il profilo è tipicamente simmetrico rispetto al centro della campata, nullo alle estremità e con freccia massima al centro.

Detti dof_C i gradi di libertà verticali dei nodi di aggancio del filo di contatto e $\mathbf{y}_{\text{target}}$ il vettore dei corrispondenti spostamenti target, il vincolo di forma si scrive come

$$\mathbf{u}(\text{dof}_C) = \mathbf{y}_{\text{target}} \tag{3.11}$$

3.4.2 Formulazione del problema inverso

Nella statica accoppiata, i pendini sono trattati come forze concentrate incognite sui nodi di aggancio e non come molle elastiche. Solitamente nella realtà progettuale infatti le rigidezze sono fissate a priori e la parte di interesse sono le lunghezze dei pendini, e quindi le loro tensioni interne.

Il sistema statico si scrive dunque come:

$$\mathbf{K}_w \, \mathbf{u} = \mathbf{f}_g + \mathbf{B} \, T_0 \tag{3.12}$$

dove:

- $\mathbf{K}_w$ è la matrice di rigidezza delle sole travi (portante e contatto, con vincoli agli estremi), senza pendini né pantografo;
- $\mathbf{u}$ è il vettore degli spostamenti delle travi;
- $\mathbf{f}_g$ è il vettore dei carichi gravitazionali: peso proprio dei fili, contributo dei morsetti concentrati e, come si vedrà nella sezione 3.4.4, peso proprio dei pendini;

- T_0 è il vettore delle tensioni di precarico incognito e raccoglie sia il contributo costante sia quello dipendente dallo spostamento visti nell'equazione (3.4);
- $\mathbf{B}$ è una matrice di dimensioni $ndof \times ndrop$ che descrive come le tensioni sono distribuite sui nodi di aggancio, è definita tale che la colonna j-esima abbia $+1$ nel DOF verticale del nodo del contatto e -1 nel DOF verticale del nodo del portante per il pendino j-esimo.

Il termine $\mathbf{B}\,T_0$ trasforma le tensioni scalari in forze nodali: ciascun pendino esercita $+T_{0,i}$ verso l'alto sul nodo del contatto e $-T_{0,i}$ verso il basso sul nodo del portante.

Risolvendo per $\mathbf{u}$ si ottiene:

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}_w^{-1}\,\mathbf{f}_g + \mathbf{K}_w^{-1}\;\mathbf{B}T_0 \tag{3.13}$$

Rinominando i membri, si ottiene:

$$\mathbf{u}_G = \mathbf{K}_w^{-1}\,\mathbf{f}_g, \qquad \mathbf{G} = \mathbf{K}_w^{-1}\,\mathbf{B} \tag{3.14}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_G + \mathbf{G}\,T_0$$

Il primo termine $\mathbf{u}_G$ è la deformata del sistema sotto solo peso proprio (cioé se non avessi pendini o se fossero tutti non attivi); il secondo termine $\mathbf{G}\,T_0$ è la correzione dovuta alle tensioni.

Estraendo dalla (3.14) le sole righe corrispondenti ai nodi di aggancio del filo di contatto e imponendo gli spostamenti obiettivo (3.11), si ottiene:

$$\mathbf{J}\,T_0 = \mathbf{y}_{\text{target}} - \mathbf{u}_G(\text{dof}_C) \tag{3.15}$$

dove $\mathbf{J} = \mathbf{G}(\text{dof}_C, :)$ è la sottomatrice quadrata di $\mathbf{G}$ contenente solo le righe dei DOF verticali del filo di contatto. Il numero di equazioni (una per pendino, dal target sul contatto) è pari al numero di incognite (le tensioni).

Se la soluzione $T_0 = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{y}_{\text{target}} - \mathbf{u}_G(\text{dof}_C))$ risulta interamente positiva, essa è la tensione di precarico cercata. Se alcune componenti risultano negative sono necessari altri passaggi descritti nel paragrafo seguente.

3.4.3 Gestione dell'unilateralità

Le tensioni ottenute dalla (3.15) possono essere negative in alcuni pendini, il che è fisicamente impossibile: un pendino può solo tirare, non spingere. Oltretutto se un pendino risulta in compressione verosimilmente non sarà possibile raggiungere il target in tale punto (si ricorda che come osservato al punto 3.4.1 il profilo obiettivo è piatto o incurvato verso il basso).

Si ovvia a questo problema risolvendo l'equazione (3.15) solo per i pendini che risultano in trazione. Nella pratica questo vuol dire creare un vettore logico $\mathcal{A}$ di lunghezza *ndrop* che contiene l'insieme dei pendini correntemente ritenuti attivi, quindi usarlo per determinare in quali punti risolvere l'equazione secondo la procedura:

1. inizializzare $\mathcal{A} = \{1, 1 \ldots, 1\}$ (tutti i pendini attivi);
2. risolvere il sistema (3.15) solo per i pendini attivi, cioè per le righe j_{act} in cui $\mathcal{A}(j_{act}) = 1$ (alla prima iterazione equivale a risolvere l'intero sistema):

$$\mathbf{J}(j_{act}, :)\, T_0(j_{act}) = \mathbf{y}_{\text{target}}(j_{act}) - \mathbf{u}_G(\text{dof}_C(j_{act})) \tag{3.16}$$

   ponendo $T_{0,i} = 0$ per le righe tralasciate;
3. se tutte le tensioni ottenute sono positive, terminare il ciclo. Altrimenti, rimuovere da $\mathcal{A}$ i pendini con $T_{0,i} < 0$ e ricominciare dal passo 2.

3.4.4 Iterazione sul peso proprio dei pendini

Un ulteriore livello di non-linearità è dato dal peso proprio dei pendini. Dette μ_d la massa per unità di lunghezza dei pendini e g l'accelerazione di gravità, il contributo di ognuno a $\mathbf{f}_g$, cioè la sua forza peso, è proporzionale alla sua lunghezza indeformata:

$$P_{d,i} = g\mu_d l_{0,i} \tag{3.17}$$

Ma la lunghezza del pendino non è nota a priori ma viene calcolata dalla soluzione statica, che a sua volta dipende dal vettore $\mathbf{f}_g$. Questa dipendenza rende necessario iterare fino a convergenza per risolvere, secondo il ciclo:

1. si inizializzano le lunghezze dei pendini a dei valori indeformati di primo tentativo, $l_i^{(0)} = h_0$;
2. si calcola il peso proprio dei pendini tramite la (3.17) usando le lunghezze correnti $l_i^{(j)}$ e aggiornare $\mathbf{f}_g^{(j)}$ aggiungendo questi contributi ai nodi di aggancio (metà peso per ciascuno dei due nodi);
3. ricalcolare $\mathbf{u}_G^{(j)}$ e $\mathbf{G}^{(j)}$ della (3.14) ;
4. ricavare le tensioni $T_{0,i}^{(j)}$ risolvendo la (3.15) per i valori appena calcolati con la procedura della sezione 3.4.3;
5. calcolare lo spostamento aggiornato tramite la (3.13) e la lunghezza deformata $l_{i,def}^{(j+1)} = h_0 + u_m^{(j+1)} - u_c^{(j+1)}$;

6. calcolare la lunghezza non deformata $l_i^{(j+1)} = l_{i,def}^{(j+1)} - \frac{T_{0,i}^{(j)}}{k_{d,i}}$;

7. se il più grande tra gli scarti $\left| l_i^{(k+1)} - l_i^{(k)} \right|$ dei vari pendini è piìù piccolo della tolleranza voluta terminare; altrimenti tornare al passo 2 e ripetere usando la lunghezza indeformata appena calcolata.

Poiché il peso proprio dei pendini è di alcuni ordini di grandezza inferiore al peso proprio dei fili, la variazione di $\mathbf{f}_g$ tra un'iterazione e la successiva è contenuta e la convergenza avviene in due o tre iterazioni.

3.4.5 Uso della configurazione statica nella dinamica

Al termine della procedura si sono ricavati:

- il vettore T_0 delle tensioni di precarico dei pendini;
- la deformata statica $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_G + \mathbf{G}\, T_0$, che diventerà la condizione iniziale $\mathbf{u}(t = 0) = \mathbf{u}_0$ dell'integrazione dinamica di Newmark con velocità e accelerazioni iniziali sono poste a zero.

Nella dinamica è importante distinguere tra forze costanti e forze variabili nel tempo, quindi il pendino torna a essere considerato come molla elastica di rigidezza $k_{d,i}$(sezione 3.3) che reagisce agli spostamenti nodali totali $u_m(t)$, $u_c(t)$. Esso deve esercitare esattamente una forza $T_{0,i}$ nella configurazione statica di riferimento $(u_{M,i,0}, u_{C,i,0})$per cui riprendendo la (3.4) e la (3.9) si scrive, a partire dagli elementi di T_0:

$$c_{0,i} = T_{0,i} - k_{d,i} \left(u_{m,i,0} - u_{c,i,0} \right) \tag{3.18}$$

dove $c_{0,i}$ è il termine costante che appariva nelle equazioni dei pendini nella sezione 3.3.

Arrivati a questo punto si dispone di tutto il necessario per svolgere l'integrazione numerica.

3.5 Adattamento dell'integrazione numerica

Lo schema di integrazione temporale del sistema a due fili è sostanzialmente lo stesso descritto nel Capitolo 2: metodo di Newmark implicito nella variante ad accelerazione media costante, con predittore-correttore e riassemblaggio della matrice di rigidezza a ogni passo temporale. In questa sezione si descrivono soltanto le modifiche che la presenza del secondo filo, dei pendini e delle masse concentrate introduce nella struttura delle matrici globali e nel ciclo operativo.

3.5.1 Condizioni iniziali e struttura delle matrici globali

Le condizioni iniziali per l'integrazione dinamica sono fornite dalla configurazione statica calcolata nella sezione 3.4, tramite la procedura TCUD e esplicitate successivamente in 3.4.5.

Rispetto al capitolo 2, la matrice di massa globale $\mathbf{M}$ è più grande come già discusso nel punto 3.2.3, ma funzionalmente non ha differenze ai fini dell'integrazione numerica. $\mathbf{M}$ resta indipendente dal tempo, e viene assemblata una sola volta all'inizio della simulazione.

La matrice di rigidezza globale al passo corrente si divide questa volta in tre contributi invece dei due del capitolo 2:

$$\mathbf{K}_{tot}(t) = \tilde{\mathbf{K}} + \mathbf{K}_{\mathbf{drop}}(t) + \mathbf{K}_{\mathbf{couple}}(t) \tag{3.19}$$

dove $\tilde{\mathbf{K}}$ raggruppa la rigidezza strutturale di tutti e quattro i tratti di trave (fili portanti A/B, fili di contatto A/B) e il GDL aggiuntivo del pantografo come nel caso del capitolo 2. Questa è la parte indipendente dal tempo e quindi può essere assemblata una sola volta in fase iniziale.

Le altre due componenti sono variabili nel tempo ma per ragioni diverse:

- $\mathbf{K}_{\mathbf{couple}}(t)$ è il blocco di accoppiamento del pantografo e risulta variabile nel tempo per via della posizione istantanea $x_c(t)$ del carico mobile che si sposta, con la stessa struttura derivata nella sezione 2.5. Il pantografo è striscia solo sul filo di contatto, quindi il blocco $\mathbf{K}_{couple}$ agisce solo sui GDL dei nodi del filo di contatto, mentre il filo portante non riceve alcun contributo diretto.

- $\mathbf{K}_{\mathbf{drop}}(t)$ dipende dallo stato di attivazione dei pendini all'istante corrente, che come discusso nella sezione 3.3.2 è valutato in ritardo di uno step temporale utilizzando gli spostamenti del passo precedente. Essa contiene i contributi di rigidezza dei pendini considerati attivi attualmente, nella forma esposta al punto 3.3.1;

La matrice di smorzamento $\mathbf{C}$ mantiene la formulazione di Rayleigh introdotta nel capitolo 2. È possibile applicarla all'intero sistema strutturale (fili + pendini attivi + masse clamp) oppure in alternativa, essendo $\mathbf{K}_{drop}(t)$ variabile, si può scegliere di applicare Rayleigh solo alla parte costante $\tilde{\mathbf{K}}$ per evitare che $\mathbf{C}$ debba essere aggiornata a sua volta a ogni passo. Qui si è adottata questa seconda scelta, con l'ipotesi quindi che i pendini non contribuiscano allo smorzamento del sistema.

3.5.2 Ciclo di Newmark: modifiche al passo $n+1$

Il ciclo operativo di Newmark descritto nella sezione 2.6 resta valido nella sua struttura generale. Rispetto al modello a un filo ci sono però due novità: l'aggiunta di uno step per l'aggiornamento dello stato dei pendini e la modifica dello step di assemblaggio della matrice effettiva $\mathbf{A}$, che deve ora includere anche il contributo $\mathbf{K}_{drop}(t_{n+1})$.

Nel dettaglio, tra la fase di predittore e la risoluzione del sistema lineare, si aggiunge una fase di valutazione dello stato dei pendini:

(a) Utilizzando gli spostamenti al passo n (approccio *lagged*), si calcolano le tensioni stimate $T_i^{(n+1)} = k_{d,i}\,(u_{m,i}^{(n)} - u_{c,i}^{(n)})$ di ciascun pendino.

(b) Si determina l'insieme dei pendini attivi $\mathcal{A}(t_{n+1}) = \{i : T_i^{(n+1)} > 0\}$.

(c) Si assembla la matrice $\mathbf{K}_{drop}(t_{n+1})$ sommando i contributi dei soli pendini attivi.

La matrice effettiva di Newmark è:

$$\mathbf{A} = \mathbf{M} + \gamma\,\Delta t\,\mathbf{C} + \beta\,\Delta t^2\,\mathbf{K}(t_{n+1}) \tag{3.20}$$

esattamente come nel caso a un filo ma con $\mathbf{K}_{tot}(t_{n+1})$ definita dalla (3.19). Il resto del ciclo — soluzione del sistema lineare per l'accelerazione $\ddot{\mathbf{v}}_{n+1}$, verifica di eventuale distacco del contatto con ricalcolo se è avvenuto, correttore — resta identico a quanto descritto nel capitolo 2.

Capitolo 4

Simulazioni e risultati

4.1 Parametri delle simulazioni

Si riportano di seguito i parametri geometrici, meccanici e numerici adottati nelle simulazioni.

Tabella 4.1: Parametri del modello a un filo (Capitolo 2).

Grandezza	Valore
Filo di contatto	
Modulo di Young	20 GPa
Area sezione	150 mm^2
Massa per unità lungh.	1.35 kg/m
Pretensionamento meccanico	20 kN
Geometria	
Lunghezza campata	80 m
Lunghezza overlap	40 m
Pantografo e contatto	
Massa pantografo	3 kg
Forza di sollevamento	50 N
Rigidezza di contatto	700 kN/m
Parametri numerici	
Coefficiente Rayleigh (massa)	0.0125
Coefficiente Rayleigh (rigidezza)	0.0001
Passo temporale	0.0005 s
Passo spaziale (mesh)	70 mm

I parametri del modello a due fili dove possibile sono stati scelti coerentemente con il modello di riferimento della normativa EN 50318 [3] per consentire il confronto.

Il passo spaziale viene scelto sottomultiplo della distanza tra i pendini in modo che nella discretizzazione essi risultino esattamente in corrispondenza di un nodo.

Tabella 4.2: Parametri del modello a due fili (Capitolo 3).

Grandezza	Valore
Filo di contatto	
Modulo di Young	100 GPa
Area sezione	150 mm^2
Massa per unità lungh.	1.35 kg/m
Pretensionamento meccanico	22 kN
Fune portante	
Modulo di Young	100 GPa
Area sezione	150 mm^2
Massa per unità lungh.	1.35 kg/m
Pretensionamento meccanico	22 kN
Geometria	
Distanza nominale ai supporti	1.20 m
Lunghezza campata	55 m
Lunghezza overlap	55 m / 110 m
Pendini	
Numero per campata	9
Spaziatura	3.75 m
Massa morsetto sup.	0.15 kg
Massa morsetto inf.	0.1 kg
Pantografo e contatto	
Massa pantografo	3 kg
Forza di sollevamento	143 N
Rigidezza di contatto	700 kN/m
Vincoli	
Rigidezza vincolo portante	500 kN/m
Rigidezza steady arm	6 kN/m
Parametri numerici	
Coefficiente Rayleigh (massa)	0.0125
Coefficiente Rayleigh (rigidezza)	0.0001
Passo temporale	0.0005 s
Passo spaziale (mesh)	0.375 m

4.2 Convergenza sulla rigidezza di contatto

Il metodo a penalità adottato per il contatto illustrato in sezione 2.4 richiede la scelta di una rigidezza di contatto k_c sufficientemente elevata da approssimare un vincolo rigido. Non esiste un unico valore universalmente riconosciuto, ma la normativa indica come accettabili valori nel range $2 \cdot 10^4 - 5 \cdot 10^5\ N/m$.

Si sono svolte alcune simulazioni sul modello a un filo rimuovendo l'overlap, con una velocità di percorrenza di 300 km/h con diversi valori della rigidezza di contatto, osservando gli andamenti della forza di contatto e del gap tra massa e filo (distanza normalmente presente a causa della formulazione *penalty*).

Si presentano di seguito i risultati filtati a 20 Hz. Si osserva come le forze tendano a convergenza all'aumentare della rigidezza di penalità mentre la distanza residua tra massa e trave diminuisce come previsto. Oltre il valore di 700 kN/m le differenze tra le forze di contatto diventano trascurabili. Il gap diminuisce ma non si annulla mai coerentemente alla formulazione *penalty* adottata, che richiederebbe una rigidezza infinita perché ciò si verifichi.

Si osserva che per valori molto alti della rigidezza di contatto si palesino problemi di natura numerica. In particolare per da $k_c = 2 \cdot 10^6\ N/m$ la forza inizia a oscillare molto rapidamente attorno al proprio valore. Questo non è indicativo di un nuovo fenomeno fisico ma è dovuto alla natura numerica del problema: la scelta di una rigidezza di contatto troppo alta introduce frequenze troppo alte, che non riescono a essere trattate in maniera appropriata con la discretizzazione temporale scelta.

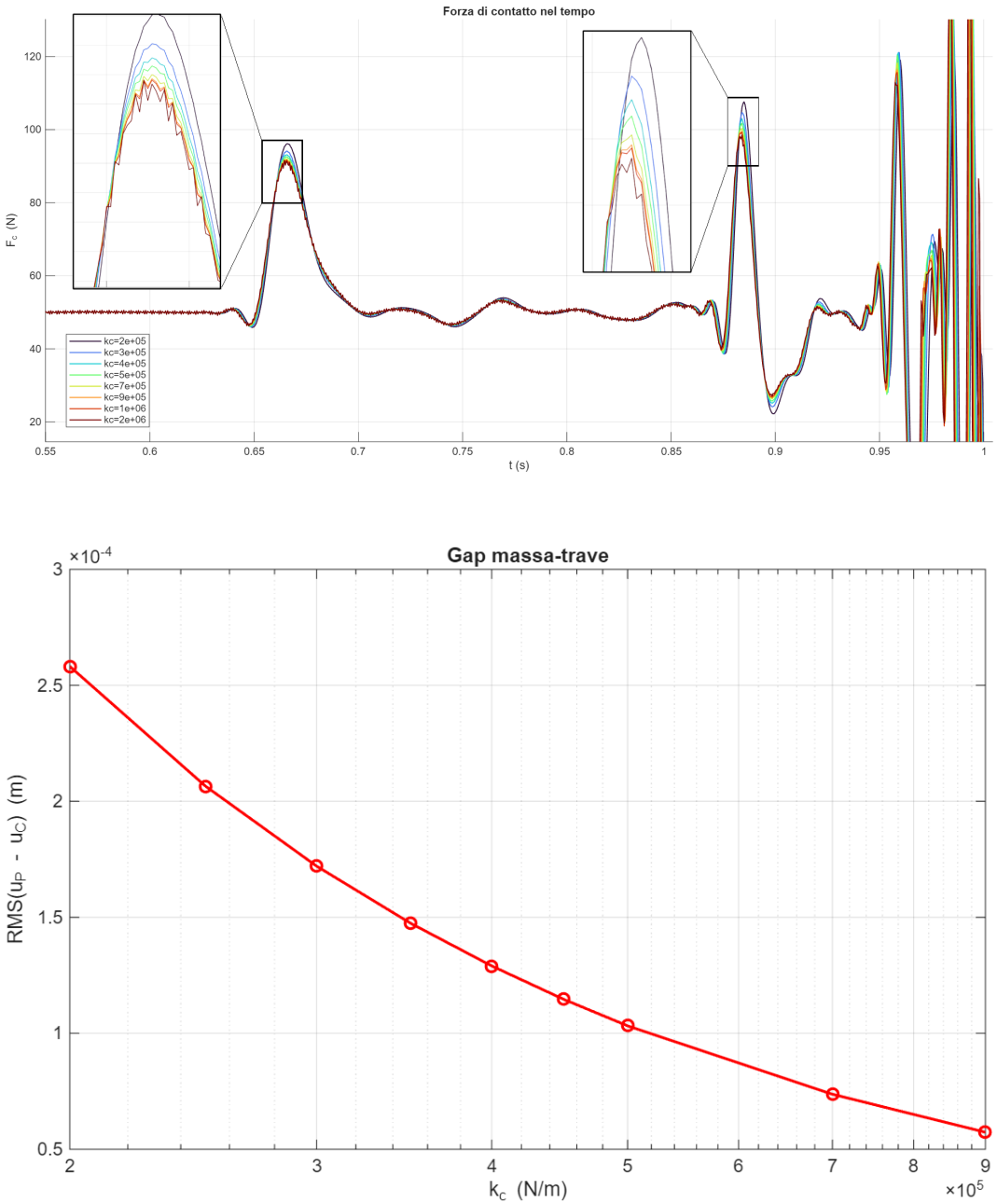


Figura 4.1: Forza di contatto e gap tra pantografo e filo al variare della rigidezza di contatto k_c.

4.3 Risultati del modello a un filo

Si riportano di seguito in forma grafica i risultati dei calcoli svolti con il modello sviluppato, con focus sulla zona di overlap.

Vengono mostrate le forze di contatto alla posizione del pantografo sia così come calcolate dal modello, sia quelle filtrate a 20 Hz. In figura 4.2 è mostrata una rappresentazione schematica della configurazione statica del modello a 1 filo.

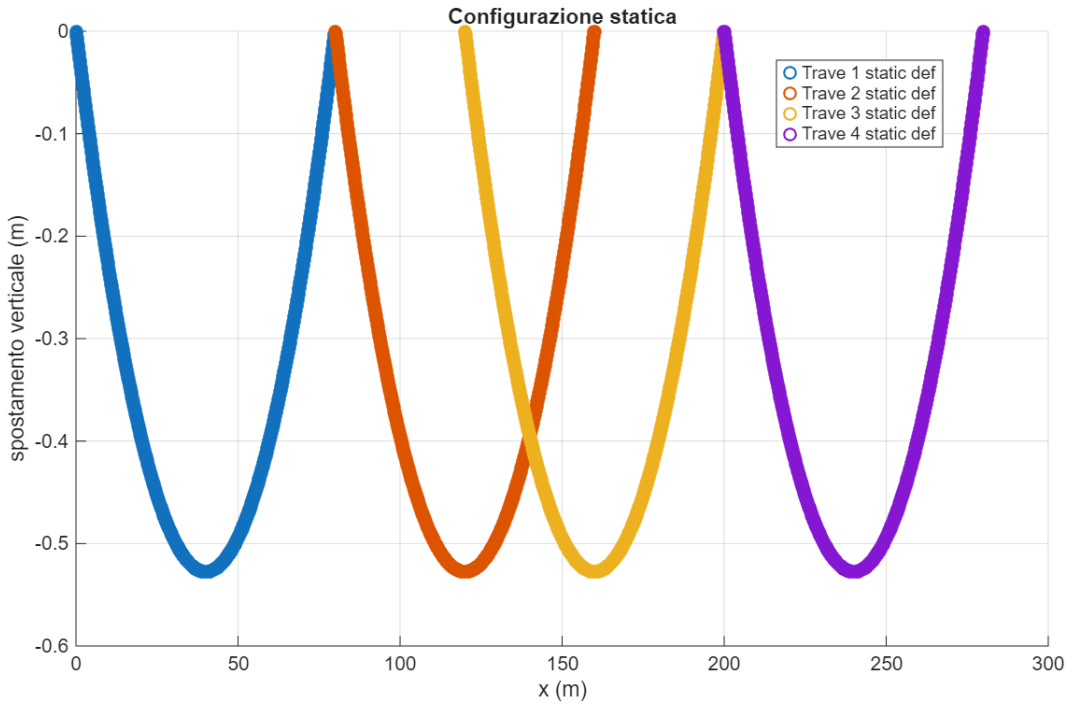


Figura 4.2: Schema della configurazione statica sotto peso proprio del modello a un filo

Come si vede la zona di overlap qui considerata è estremamente ridotta e non molto verosimile. Cionondimeno, si tratta comunque di un punto di partenza che permette di evidenziare alcuni disturbi che avvengono nel momento in cui il pantografo ingaggia il secondo filo.

Si ricorda infine che per via della formulazione a penalità esposta nel capitolo 2.4, la forza di contatto calcolata può essere al più nulla ma mai negativa. Valori negativi della forza filtrata sono artefatti numerici dovuti al filtro stesso e non hanno significato fisico.

4.3.1 Risultati $v = 100\ km/h$

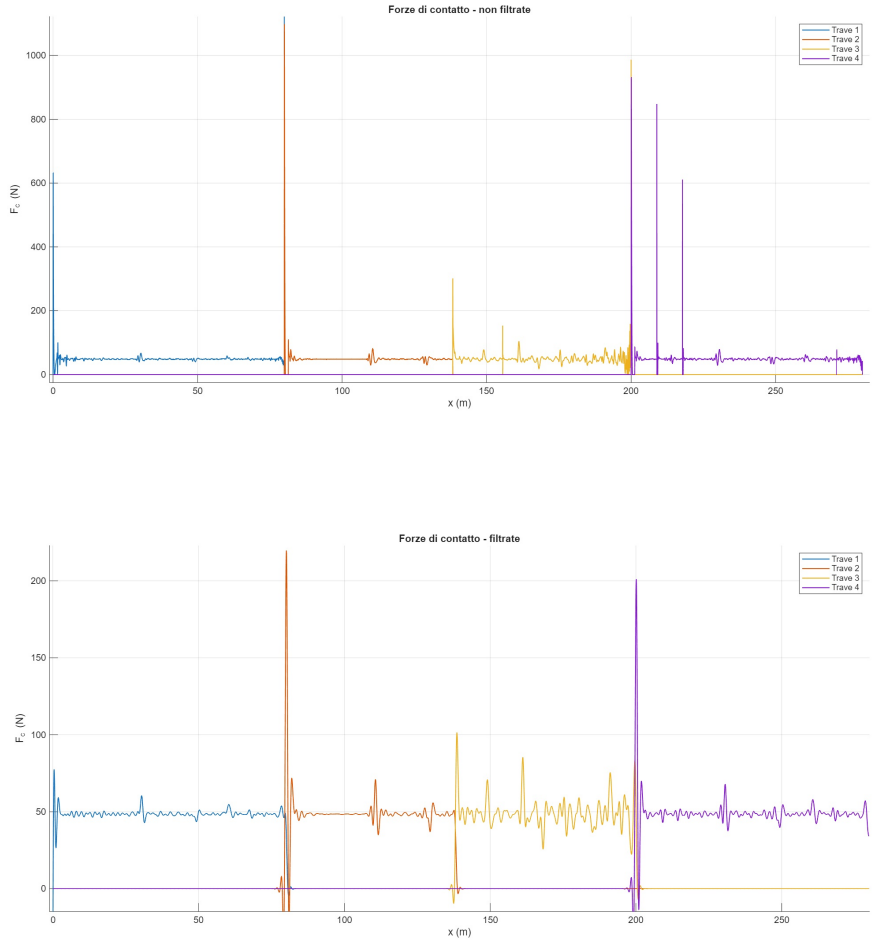


Figura 4.3: Forze di contatto, non filtrate e filtrate

.

Si osservano picchi notevoli al passaggio sui supporti tra una campata e la successiva a 80 e 200 metri. Questi sono artefatti numerici dovuti alla formulazione del vincolo e vengono notevolmente attenuati all'applicazione del filtro.

Risulta evidente come, dopo le perturbazioni al passaggio dei vincoli, la zona dell'overlap sia la più turbolenta: a partire da 140 metri (posizione in cui il pantografo tocca per la prima volta il secondo filo) la forza inizia a avere un comportamento oscillatorio che si protrae ben oltre la fine dell'overlap (situata a 160 metri).

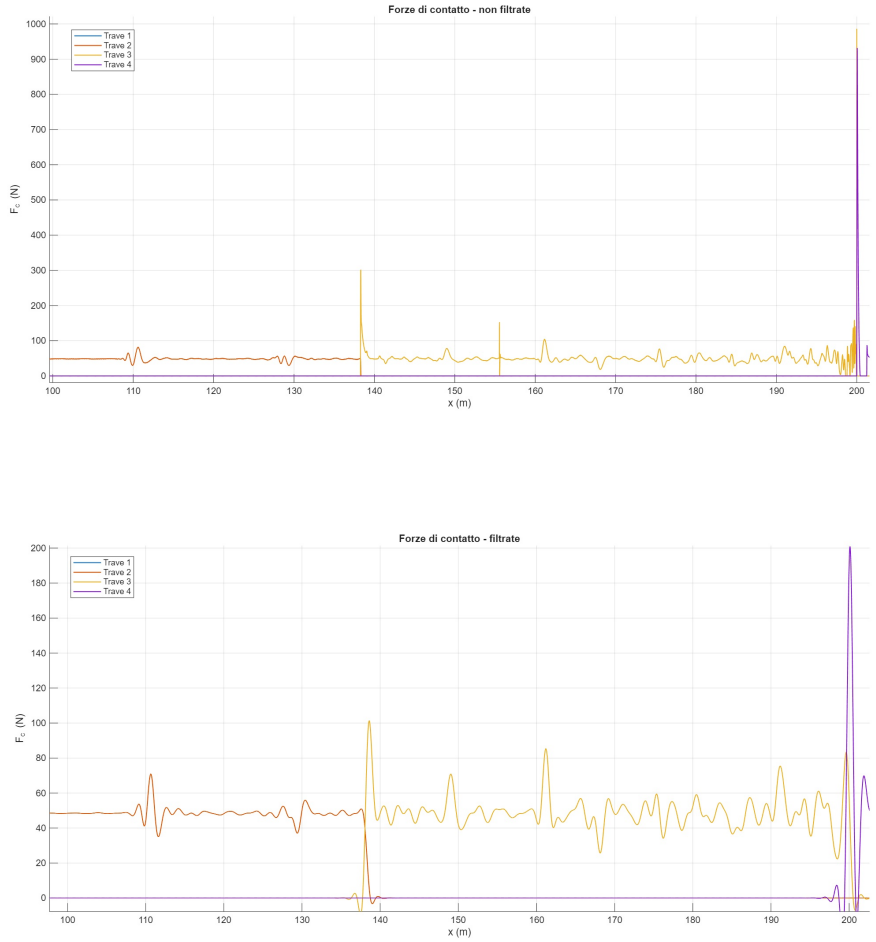


Figura 4.4: Forze di contatto nella zona di overlap, non filtrate e filtrate.

Nell'ingrandimento si può inoltre apprezzare come sebbene il filo nascente (numero tre, giallo) si incroci con il morente (numero 2, arancione) alla posizione a 140 metri come da figura 4.2, il filo giallo inizia a sentire una forza di contatto leggermente prima della posizione di incrocio statico, come già osservato sperimentalmente da Jiang et al. [8].

4.3.2 Risultati $v = 275\ km/h$

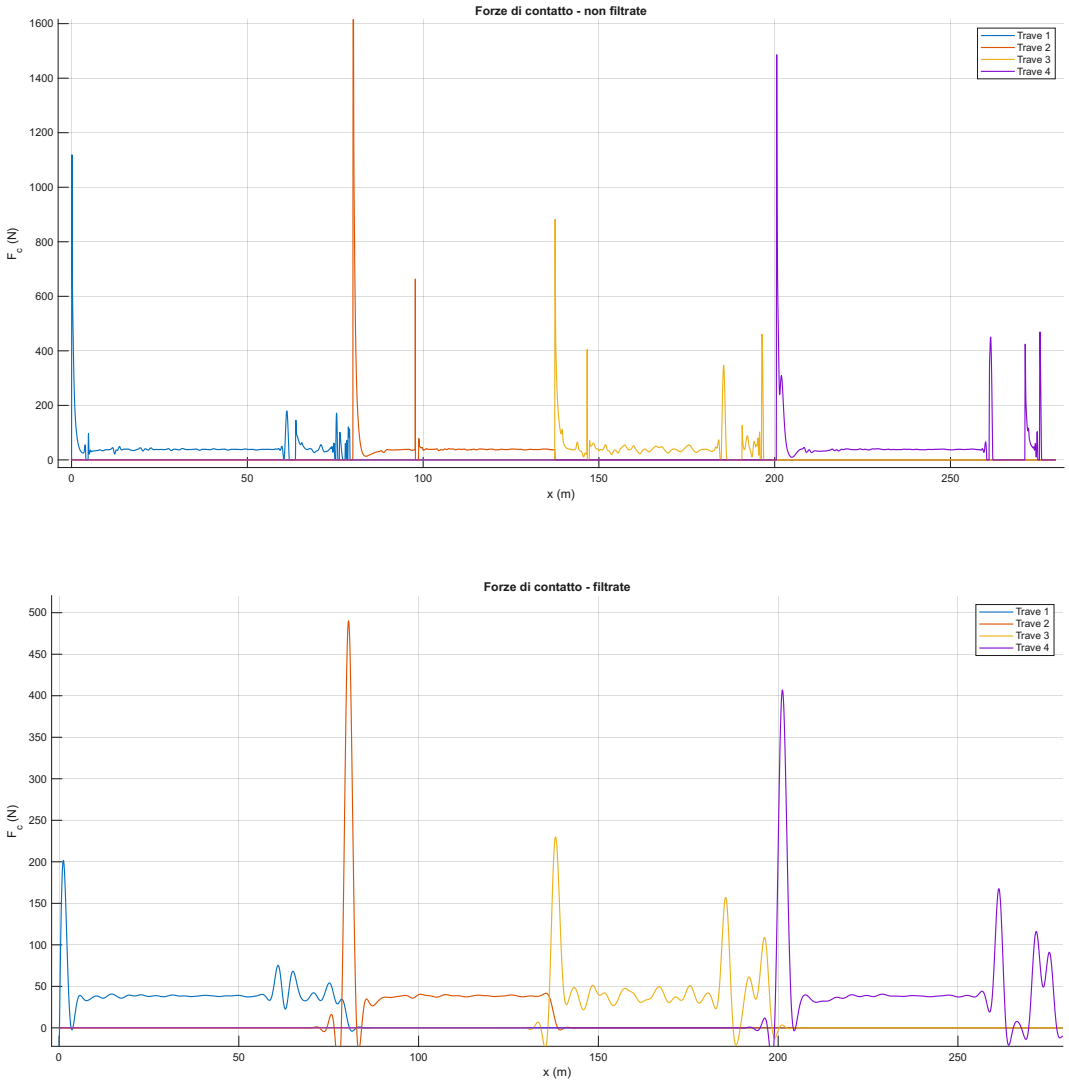


Figura 4.5: Forze di contatto, non filtrate e filtrate.

Si osserva facimente la maggiore ampiezza dei picchi delle forze rispetto al caso a 100 velocità di percorrenza inferiore, coerente con l'osservazione generale in letteratura che l'entità delle perturbazioni cresce all'aumentare della velocità.

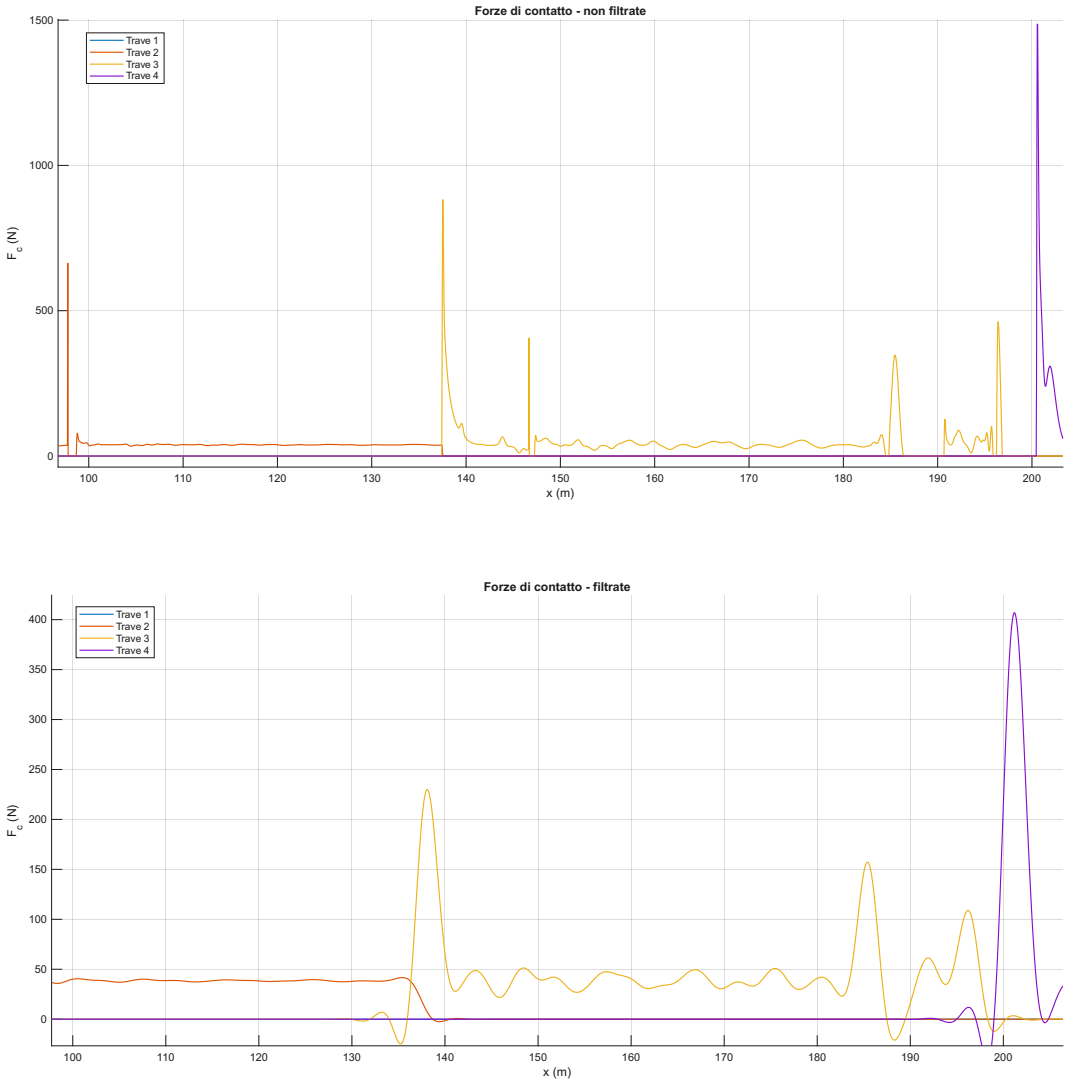


Figura 4.6: Forze di contatto nella zona di overlap, non filtrate e filtrate.

Si fa presente che l'andamento più "regolare", con meno picchi rispetto al caso al caso a 100 km/h è dovuta al fatto che le forze sono plottate seguendo la posizione del pantografo: muovendosi più velocemente arriva a destinazione prima e incontra quindi meno onde riflesse. La bontà del del contatto non è necessariamente migliore, come mostrato dai picchi decisamente più alti e dal fatto che vi sia perdita di contatto poco prima dei 190 metri.

4.4 Confronto della configurazione statica

Per verificare la correttezza della configurazione iniziale del modello a due fili si sono confrontati i risultati del calcolo di tale configurazione con il caso di riferimento definito dalla normativa EN 50318:2018 [3].

Come primo controllo si verifica la configurazione statica. Fissate le rigidezze dei pendini ai valori prescritti dal riferimento, si è verificato che il calcolo della lunghezza producesse risultati compatibili con quelli attesi. La Tabella 4.3 riporta il valore di lunghezza dei pendini (indicato in tabella come l_d) atteso dalla norma EN 50318 e quello ottenuto dal modello.

Tabella 4.3: Confronto tra il la lunghezza dalla norma EN 50318 e quello ottenuto dal modello per i nove pendini di una campata.

Posizione [m]	Presag [mm]	l_d (EN) [mm]	l_d modello [m]
4.50	0	1.023	1.023
10.25	24	0.902	0.904
16.00	41	0.815	0.815
21.75	52	0.764	0.767
27.50	55	0.747	0.750
33.25	52	0.764	0.767
39.00	41	0.815	0.815
44.75	24	0.902	0.907
50.50	0	1.023	1.025

Si osserva come l'asimmetria dei vincoli risulti in una lieve asimmetria della geometria nel caso statico.

4.5 Risultati del modello a due fili

Si presentano qui i risultati dei calcoli svolti con il modello sviluppato per il caso a due fili, impiegando un overlap lungo una campata.

Come nella sezione 4.3 i risultati sono presentati in forma grafica, sia con le forze direttamente risultanti dai conti sia filtrate nel medesimo modo.

Si ricorda nuovamente che come osservato sempre nella sezione 4.3 valori negativi della forza filtrata non hanno significato fisico.

4.5.1 Risultati a 1 campata di overlap

Di seguito un plot della configurazione statica della catenaria calcolata tramite la procedura di shape-finding. La zona di overlap è compresa tra le linee tratteggiate

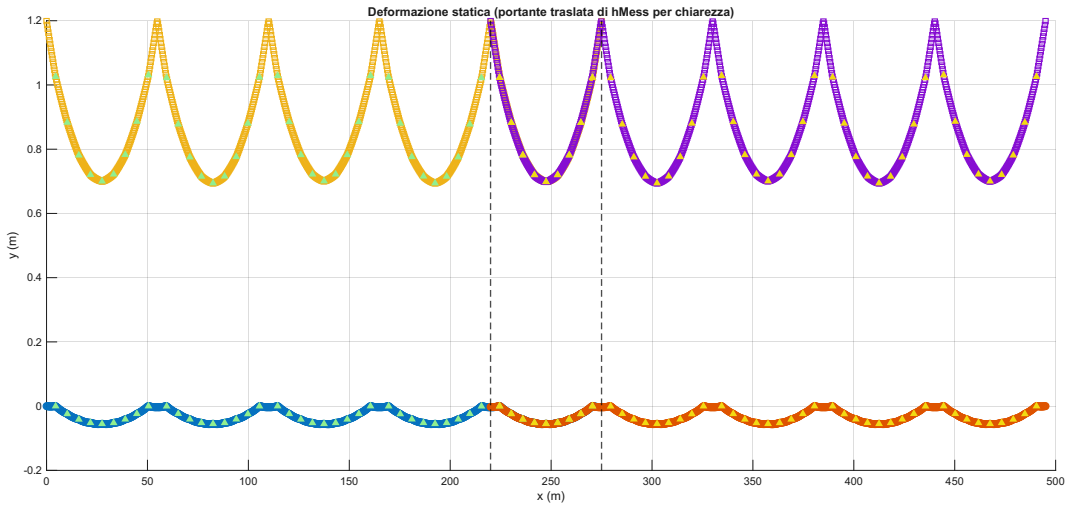


Figura 4.7: Schema della configurazione statica del modello a due fili a una campata di overlap. I triangoli rappresentano la posizione dei pendini

L'immagine 4.7 rappresenta una configurazione con una sola campata di overlap, la centrale, in cui la prima sezione (gialla e blu) esiste contemporaneamente alla seconda (viola e rossa), sovrapposta.

4.5.1.1 Risultati $v = 150\ km/h$, 1 campata di overlap

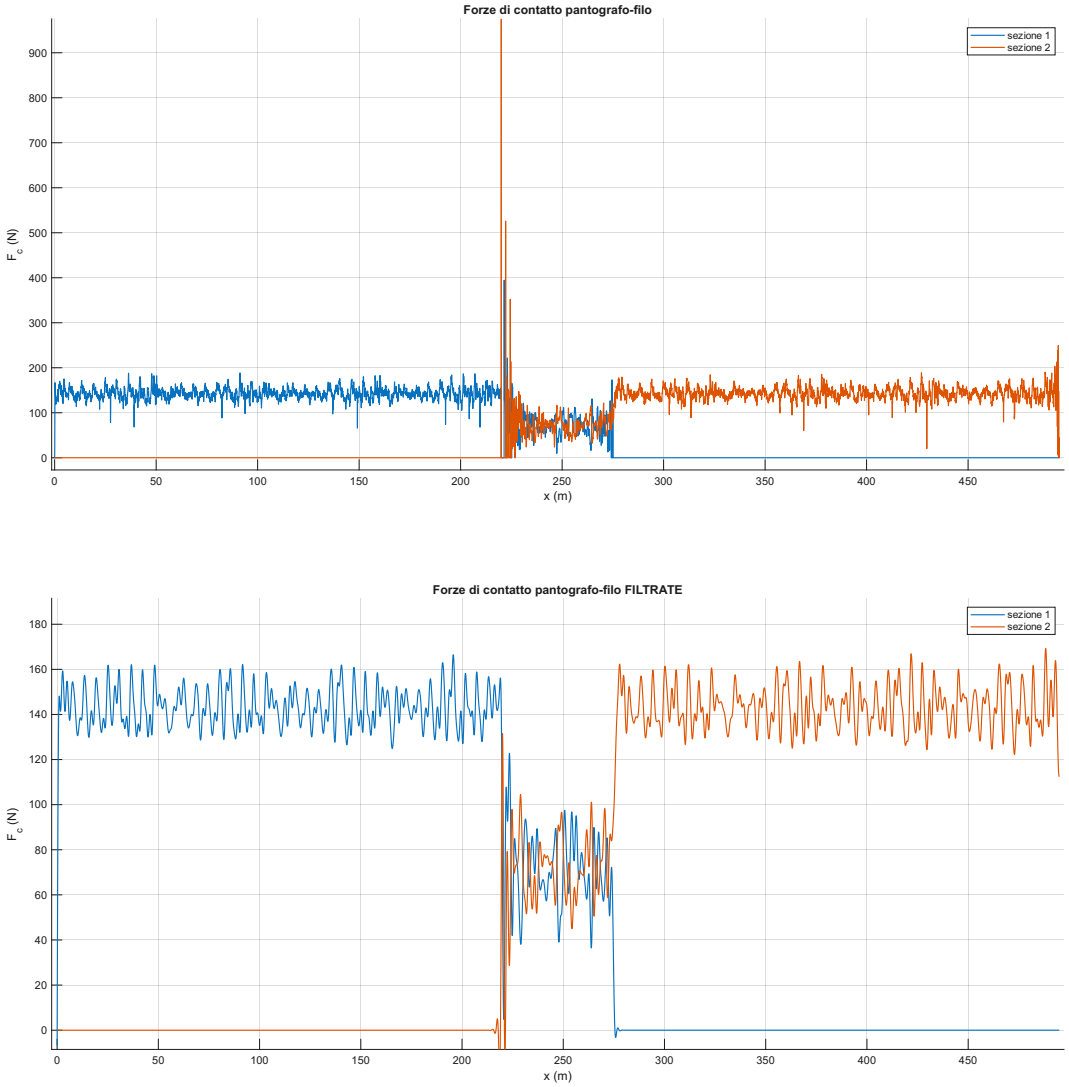


Figura 4.8: Forze di contatto, non filtrate e filtrate.

La forza di contatto si mantiene in un intervallo piuttosto regolare, tranne nello spike (di entità esagerata dalla natura numerica del problema) quando il secondo tratto va a contatto col pantografo.



Figura 4.9: Forze di contatto nella zona di overlap, non filtrate e filtrate.

Il transitorio è caotico, come atteso. Dopo gli spike le due forze continuano a oscillare attorno a un valore di 70 N, circa la metà del valore medio delle singole forze di contatto fuori dall'overlap.

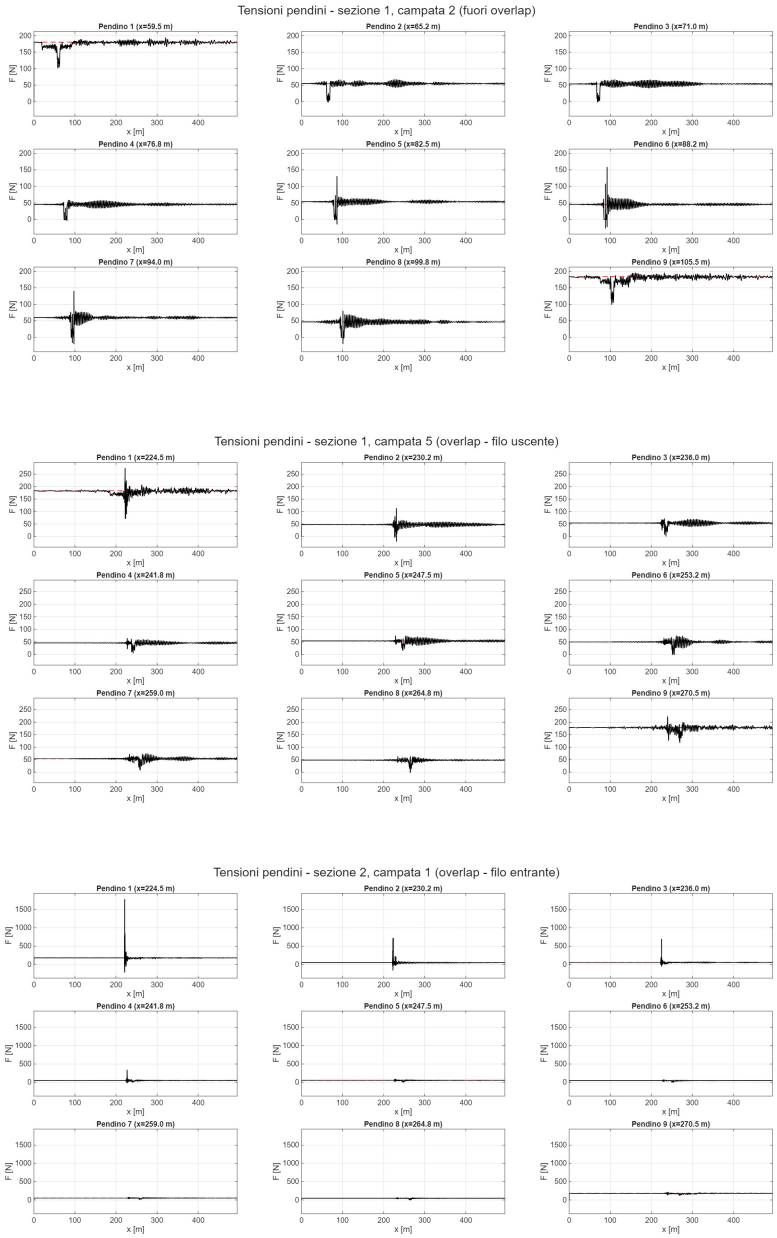


Figura 4.10: Andamento delle tensioni nei pendini di una campata normale, una di overlap uscente e una di overlap entrante

Si osserva come le tensioni nei primi pendini del filo uscente dell'overlap abbiano un andamento simile a quelle della campata normale con picco in corrispondenza del passaggio del pantografo per poi appiattirsi. Nella sezione entrante invece si osserva uno spike notevole dovuto alla vicinanza al supporto. Questi risultati suggeriscono che i primi pendini nella zona di overlap siano i più caricati e quindi i più critici a livello progettuale.

4.5.1.2 Risultati $v = 275\ km/h$, 1 campata di overlap

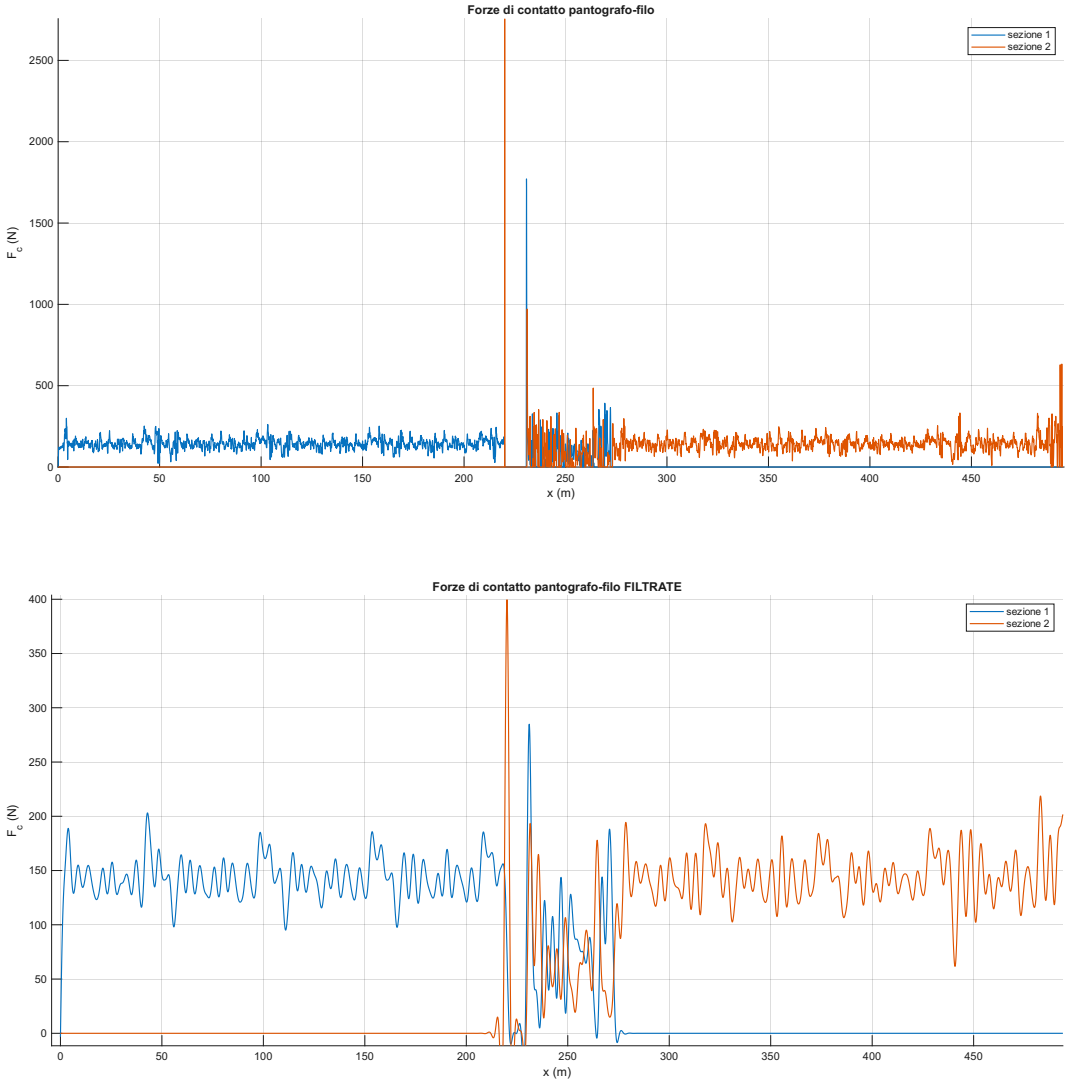


Figura 4.11: Forze di contatto, non filtrate e filtrate.

Seppure il comportamento fuori dall'overlap sia regolare, si osserva uno spike notevolmente più alto, e nemmeno il filtro riesce a abbatterlo

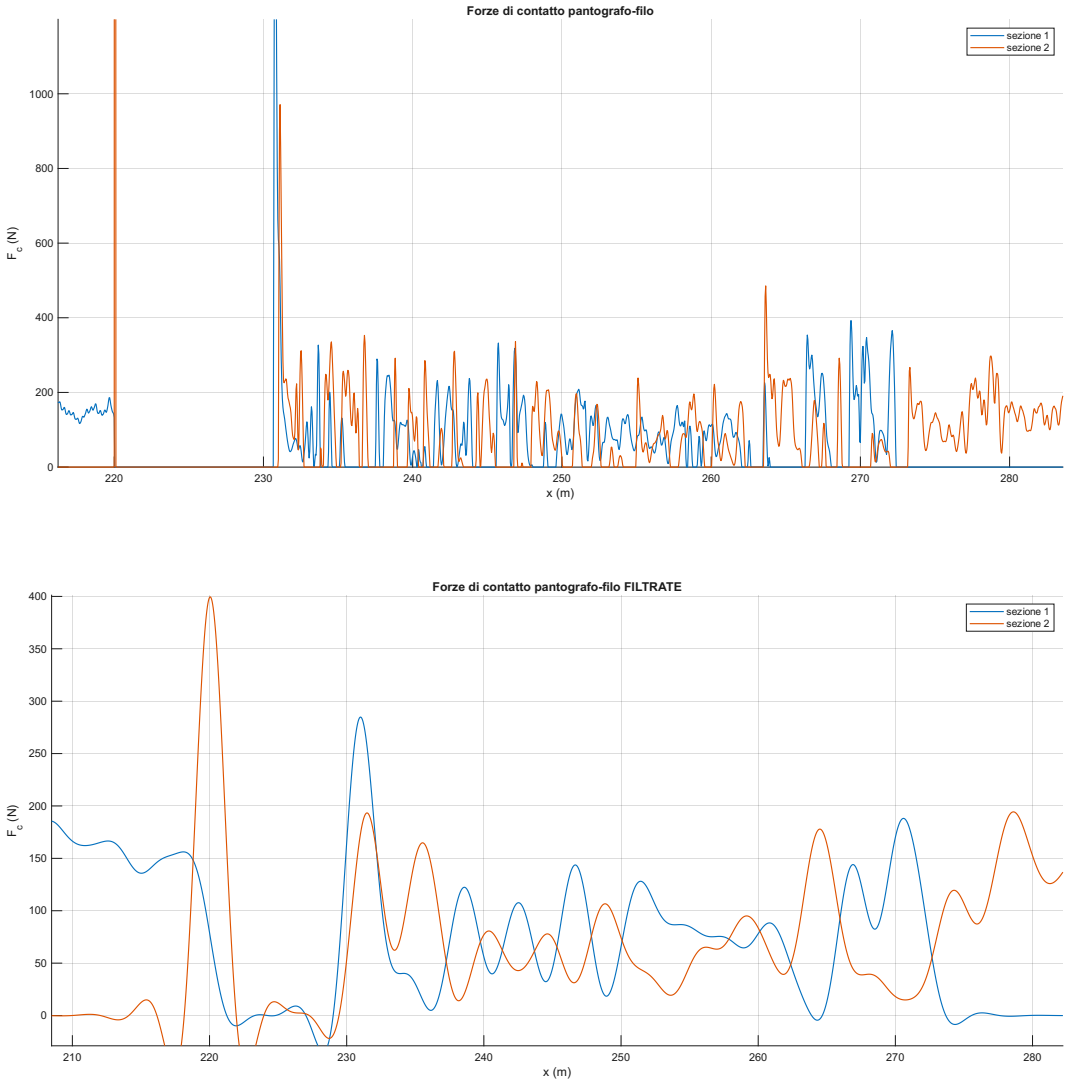


Figura 4.12: Forze di contatto nella zona di overlap, non filtrate e filtrate.

Si evidenzia qui come dopo lo spike iniziale le curve tocchino più volte lo zero, sia in ingresso sia in uscita. Come già visto la velocità peggiora il transitorio, e una sola campata di overlap non sembra essere sufficiente.

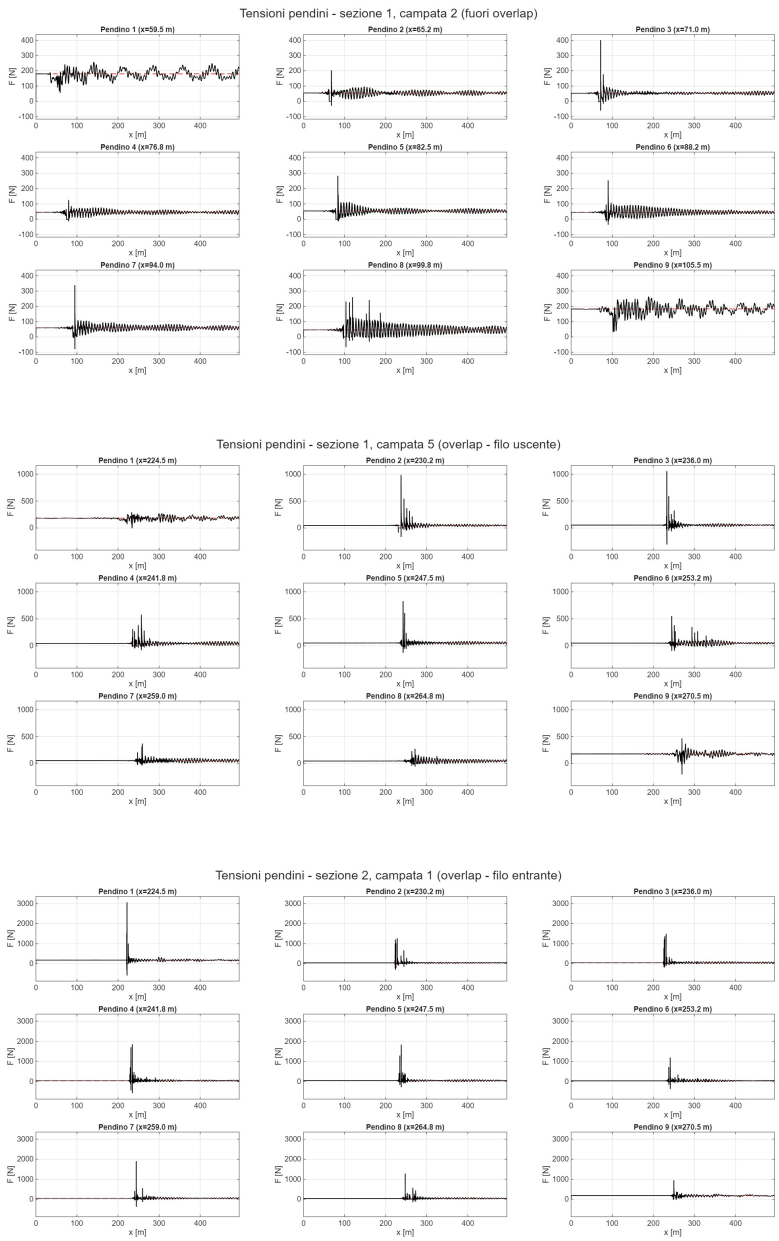


Figura 4.13: Andamento delle tensioni nei pendini di una campata normale, una di overlap uscente e una di overlap entrante

Si osserva come a differenza del caso precedente a velocità maggiori tutti i pendini del filo entrante vengono significativamente sollecitati, anche se i primi rimangono quelli che subiscono l'impatto maggiore.

4.5.2 Risultati a 2 campate di overlap

Di seguito un plot della configurazione statica della catenaria calcolata tramite la procedura di shape-finding, nella configurazione con due campate di overlap.

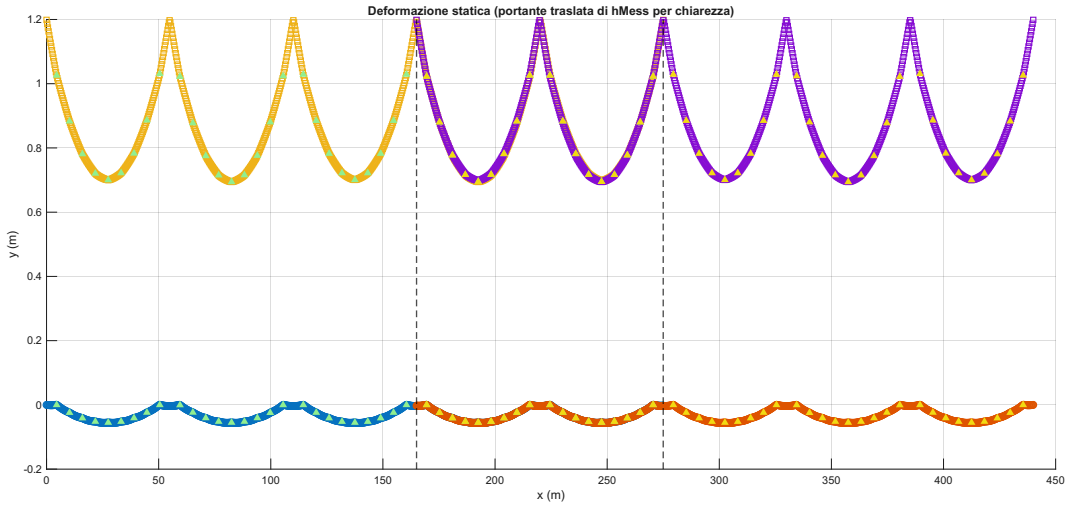


Figura 4.14: Schema della configurazione statica del modello a due fili a due campate di overlap. I triangoli rappresentano la posizione dei pendini

L'immagine 4.14 rappresenta la configurazione con due campate di overlap, in cui come prima coesistono la prima sezione (gialla e blu) e la seconda (viola e rossa), sempre sovrapposte. Come in precedenza la zona di overlap è evidenziata dalle due linee tratteggiate.

4.5.2.1 Risultati $v = 150\ km/h$, 2 campate di overlap

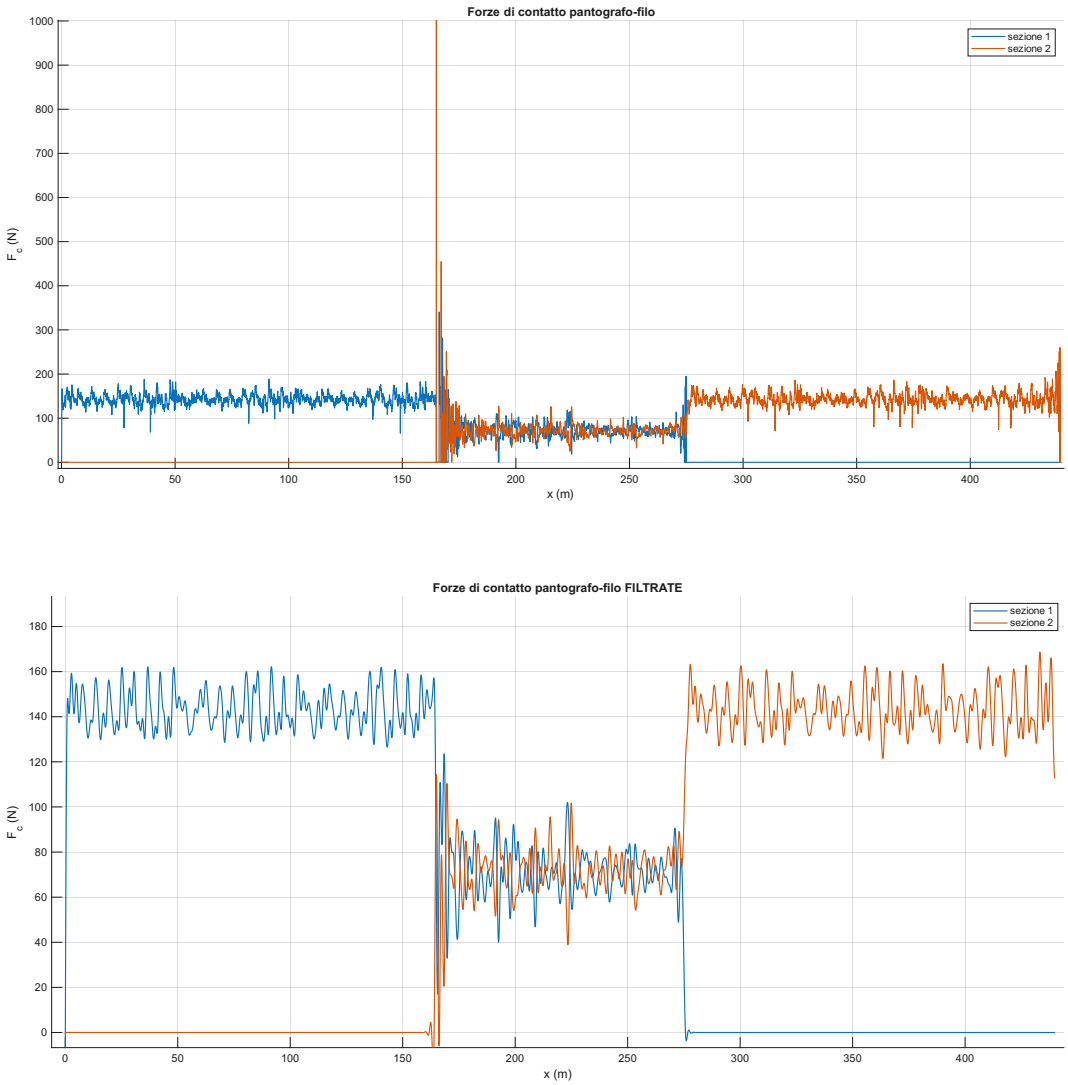


Figura 4.15: Forze di contatto, non filtrate e filtrate.

Come nel caso a una campata di overlap la forza di contatto si mantiene in un intervallo piuttosto regolare a regime, meno il picco quando il secondo filo ingaggia il pantografo.

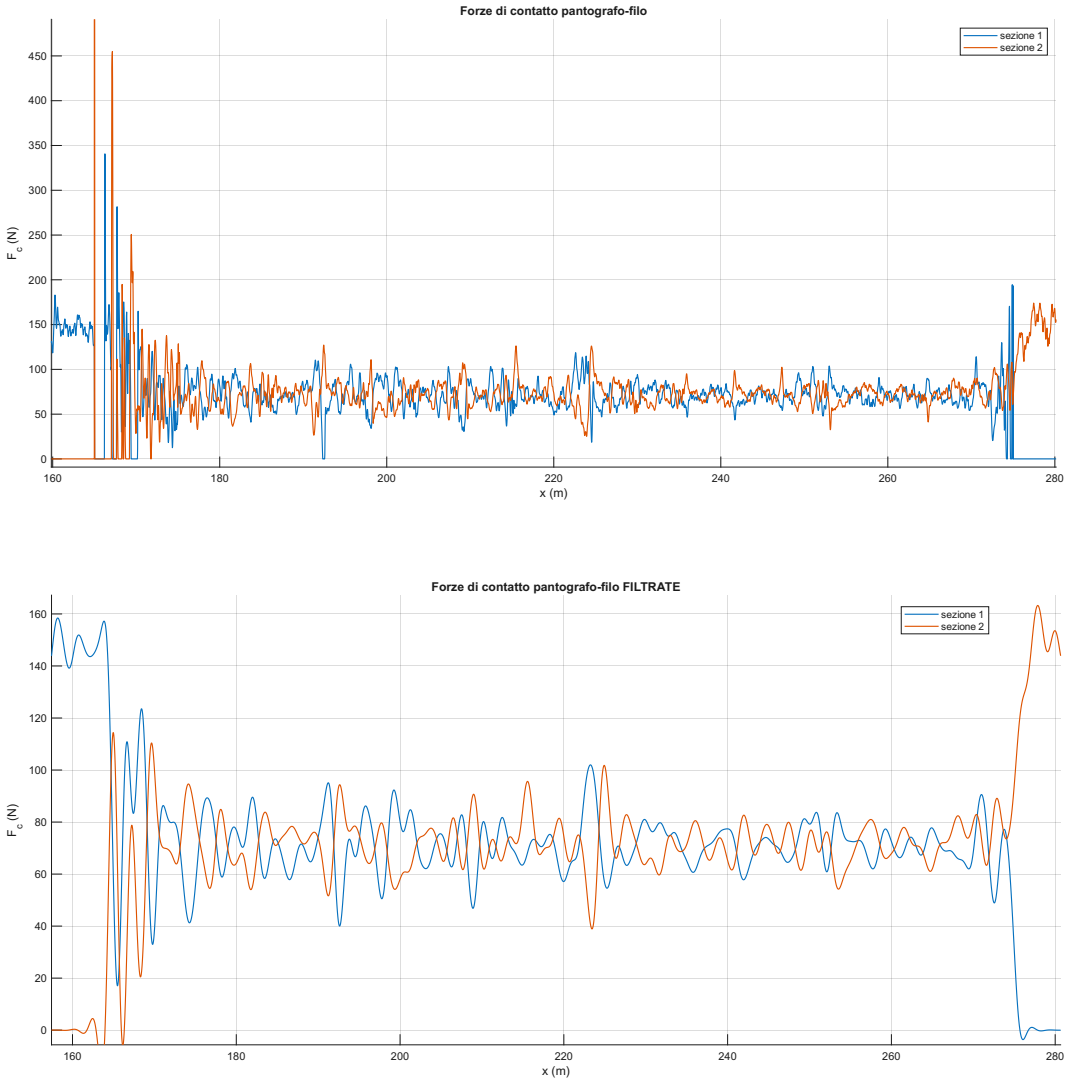


Figura 4.16: Forze di contatto nella zona di overlap, non filtrate e filtrate.

Anche in questo caso il transitorio per quanto caotico si svolge senza problemi. Si osserva che l'apparente distacco intorno a 190 metri in realtà non è tale poiché solo il filo entrante perde il contatto, il filo 2 continua a mantenerlo.

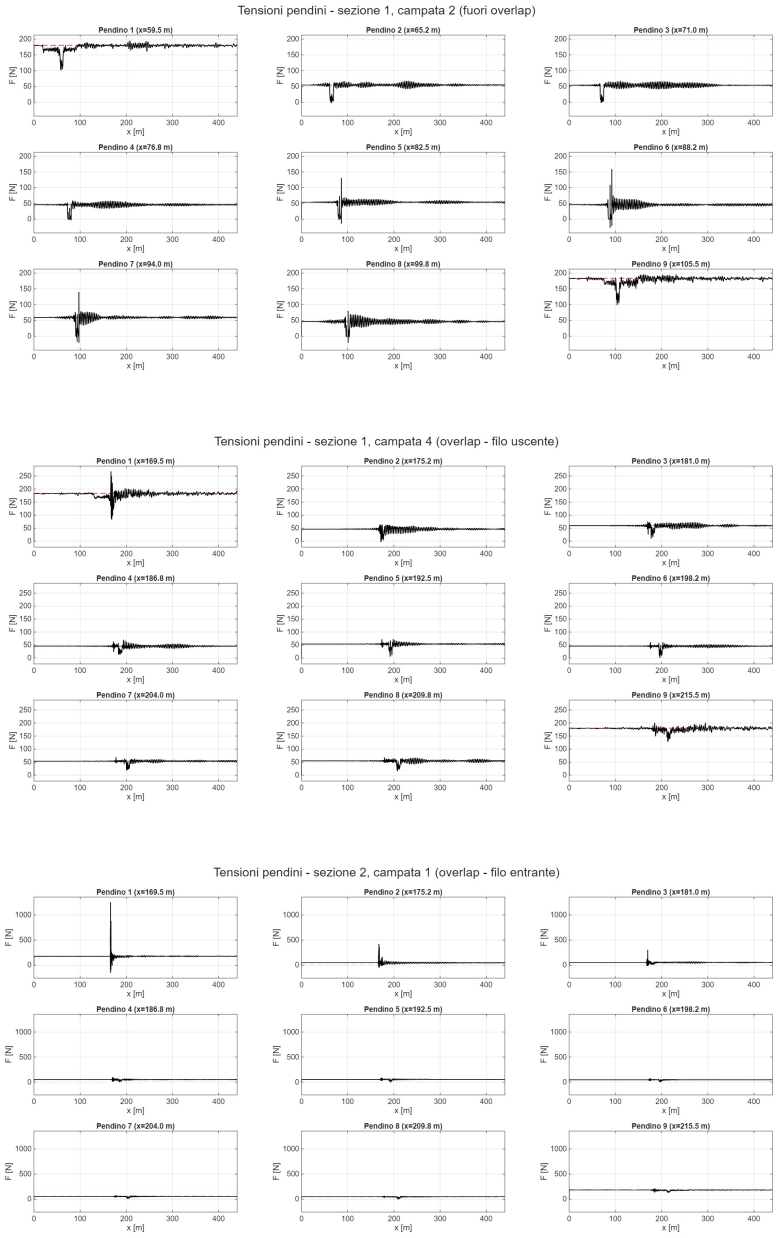


Figura 4.17: Andamento delle tensioni nei pendini di una campata normale, una di overlap uscente e una di overlap entrante

L'andamento nella campata fuori overlap e in quella uscente è identico al punto 4.5.1.1. I picchi in nella campata entrante risultano ridotti: il trasferimento del carico si distribuisce lungo una distanza doppia.

4.5.2.2 Risultati $v = 275\ km/h$, 2 campate di overlap

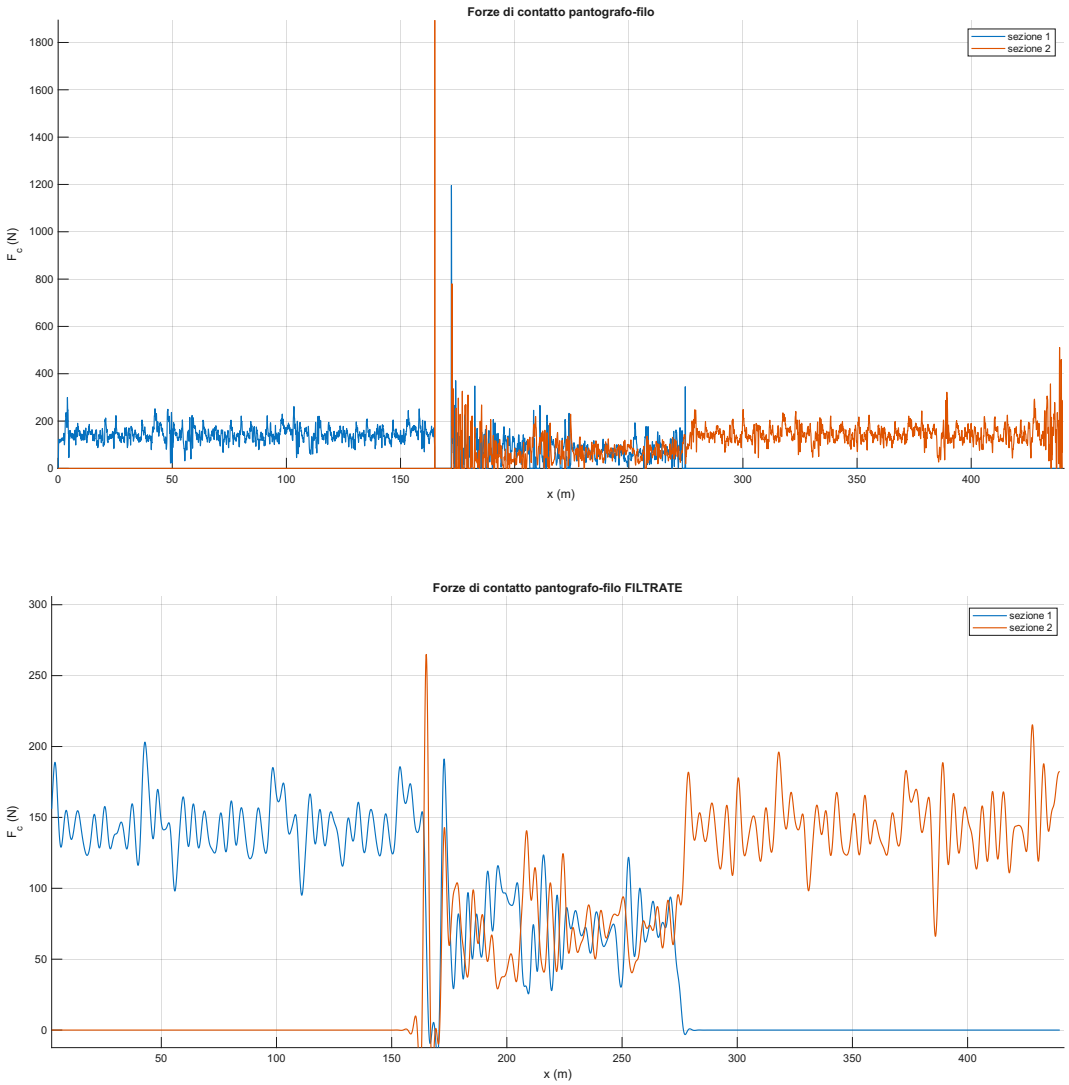


Figura 4.18: Forze di contatto, non filtrate e filtrate.

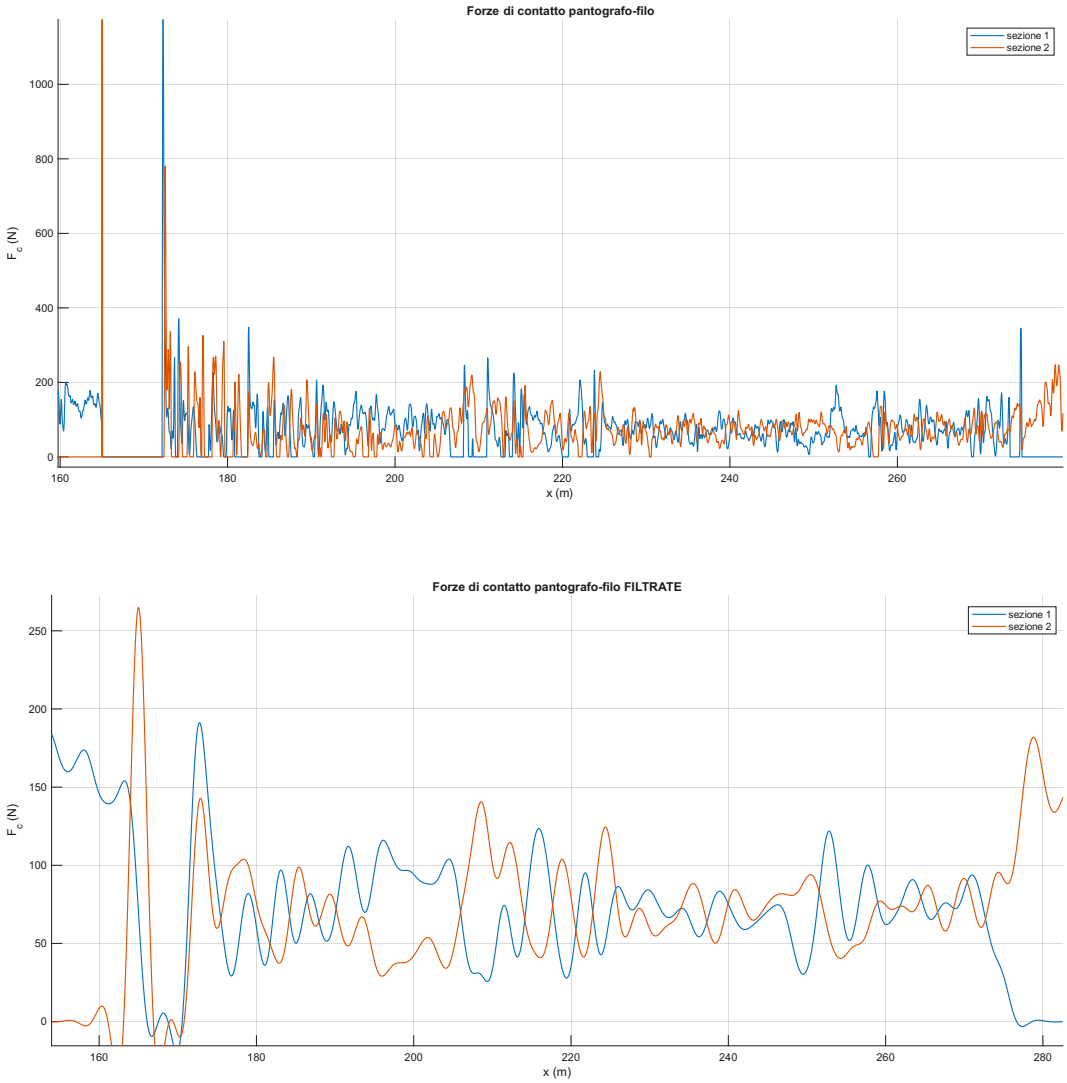


Figura 4.19: Forze di contatto nella zona di overlap, non filtrate e filtrate.

Dopo alcuni distacchi immediatamente successivi allo spike il contatto si stabilizza. I picchi filtrati sono più bassi rispetto al caso con una sola campata di overlap, sempre perché il trasferimento del carico avviene su una distanza maggiore.

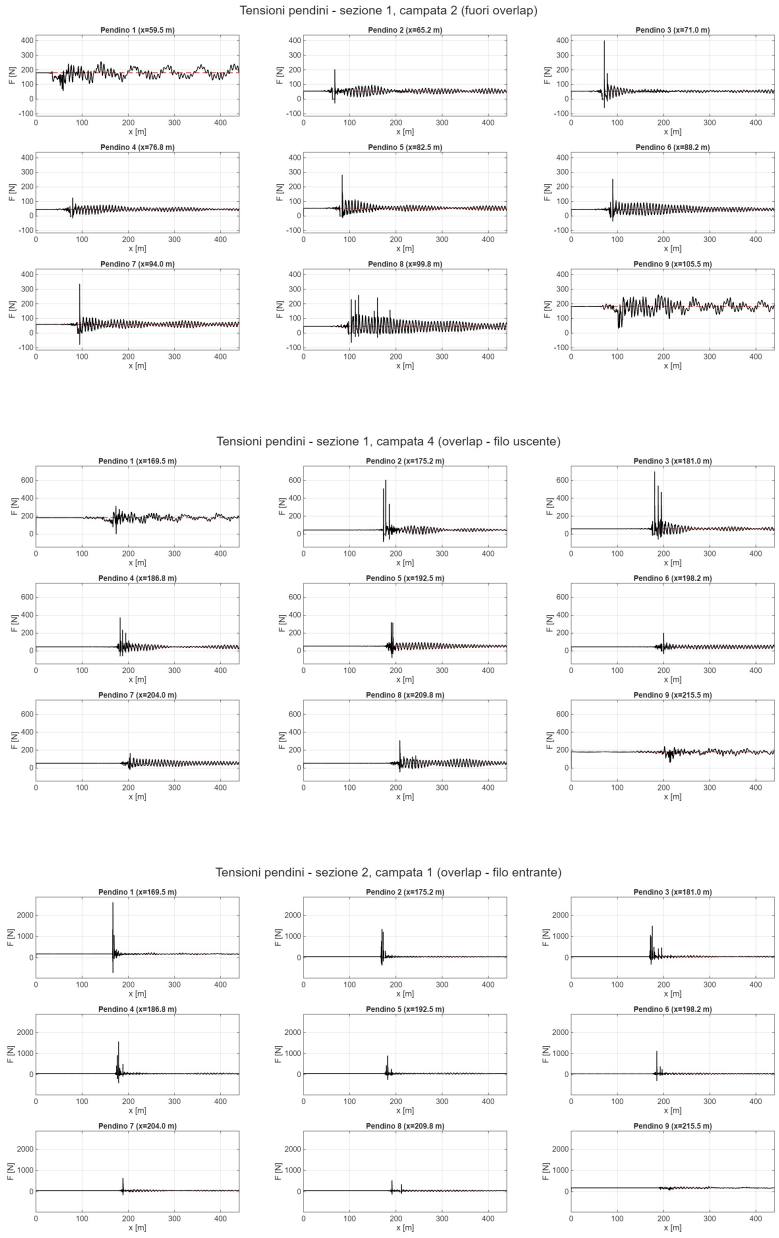


Figura 4.20: Andamento delle tensioni nei pendini di una campata normale, una di overlap uscente e una di overlap entrante

Si osserva anche qui una riduzione dei picchi sia in nella campata entrante sia in quella uscente dall'overlap.

Capitolo 5

Conclusione

Nel presente si è sviluppato a partire dalle equazioni fondamentali un modello agli elementi finiti dell'interazione dinamica pantografo-catenaria in grado di rappresentare la sezione di overlap di una catenaria semplice, privilegiando la trasparenza delle ipotesi di modellazione rispetto all'ottimizzazione di una configurazione particolare.

La costruzione è avvenuta per gradi. Nel capitolo 2 si è formulato un modello preliminare con solo la coppia di fili di contatto sovrapposti, discretizzati con elementi trave di Eulero-Bernoulli e irrigiditi dalla pretensione; il pantografo, ridotto a una massa concentrata, è stato inserito come grado di libertà aggiuntivo e accoppiato alla struttura usando le funzioni di forma valutate nella posizione istantanea del carico, con contatto unilaterale modellato con metodo *penalty* e risoluzione con metodo di Newmark ad accelerazione media costante. Nel capitolo 3 si è estesa questa costruzione al sistema completo aggiungendo il filo portante, i pendini modellati come aste *tension-only* il cui stato di attivazione viene valutato con strategia *lagged* e aggiungendo condizioni al contorno diverse per i due fili. La configurazione di partenza si ricava risolvendo un problema di *shape-finding* seguendo l'approccio TCUD, nel quale le incognite sono le tensioni di precarico che realizzano il profilo desiderato sotto peso proprio, con gestione dell'unilateralità e iterazione esterna sul peso dei pendini stessi.

Nel capitolo 4 si sono raccolti i risultati delle simulazioni. L'analisi sulla rigidezza di contatto ha individuato in $k_c = 700$ kN/m un compromesso soddisfacente: oltre questo valore i benefici si esauriscono e compaiono oscillazioni ad alta frequenza non risolvibili con il passo temporale adottato. Il raffronto della geometria statica con il caso di riferimento della EN 50318 ha restituito lunghezze dei pendini in accordo con quelle prescritte entro pochi millimetri.

Sul piano dinamico i risultati confermano il quadro delineato dalla letteratura. La sovrapposizione si rivela il tratto di linea più critico: l'ingaggio del filo entrante produce un picco di forza di ampiezza molto superiore ai valori di regime, cui segue un transitorio oscillatorio al cui interno il carico si ripartisce

fra i due conduttori. L'incremento della velocità aggravale oscillazioni, con picchi più pronunciati e episodi di distacco. Si è inoltre osservato che il filo nascente avverte una forza di contatto leggermente prima del punto di incrocio statico, in accordo con quanto rilevato sperimentalmente in [8]. L'esame delle tensioni nei pendini individua nei primi elementi del filo, prossimi al supporto, i componenti più sollecitati. Il confrontofra le configurazioni a una e a due campate di overlap mostra infine che allungare la transizione attenua i picchi sia sulla forza di contatto sia sulle tensioni dei pendini.

Nel complesso lo strumento sviluppato, per quanto semplificato, è interamente ispezionabile nelle sue ipotesi ed è una base ancora migliorabile con molteplici aggiunte future:

- **Pantografo a tre gradi di libertà:** la schematizzazione con una massa singola non considera la dinamica interna del pantografo: sostituirla con il consueto modello a tre masse concentrate collegate da molle e smorzatori restituirebbe una dorza di contatto più realistica.

- **Secondo pantografo:** l'aggiunta di un ulteriore carico mobile a distanza fissa consentirebbe di studiare l'interazione fra pantografi successivi, con il secondo che transita su una linea già perturbata dal passaggio del primo. Questa è una condizione piuttosto diffusa nella realà e particolarmente sfavorevole proprio in corrispondenza dell'overlap.

- **Geometria graduale della transizione:** nel modello attuale entrambi i fili di contatto si trovano alla quota di lavoro per l'intera sovrapposizione, il per cui il filo entrante va istantaneamente in contatto e il picco viene amplificato. Introdurre l'abbassamento progressivo del filo nascente e l'innalzamento di quello morente riprodurrebbe meglio il meccanismo reale e permetterebbe di simulare l'influenza della quota del punto di incrocio, un di progetto molto studiato in letteratura.

- **Estensione tridimensionale.** Il passaggio a un modello 3D supererebbe i limiti dell'ipotesi piana. Questo farebbe ternere conto della poligonazione (*stagger*), il punto di contatto percorrerebbe un tracciato non rettilineo con posizione laterale variabile (a "*zig-zag*") e, nella zona di transizione, i due fili risulterebbero effettivamente separati in direzione trasversale anziché coincidenti.

Bibliografia

[1] O. Lopez-Garcia, A. Carnicero e V. Torres. «Computation of the initial equilibrium of railway overheads based on the catenary equation». In: *Engineering Structures* 28.10 (2006), pp. 1387–1394. DOI: https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2006.01.007 (cit. a p. 1).

[2] Olivier Vo Van. «Introduction of variability into pantograph-catenary dynamic simulations». Tesi di dott. Lug. 2016. URL: https://www.researchgate.net/publication/309615524_Introduction_of_variability_into_pantograph-catenary_dynamic_simulations (cit. a p. 3).

[3] *EN 50318:2018*. European Standard. Title: Railway applications - Current collection systems - Validation of simulation of the dynamic interaction between pantograph and overhead contact line. 2018 (cit. alle pp. 4, 9, 20, 26, 32, 41).

[4] Yang Song, Anders Rønnquist, Tengjiao Jiang e Petter Nåvik. «Railway pantograph-catenary interaction performance in an overlap section: Modelling, validation and analysis». In: *Journal of Sound and Vibration* 548 (2023). DOI: 10.1016/j.jsv.2022.117487 (cit. a p. 4).

[5] Yao Yongming, Yang Zhipeng, Wang Jing e Wenxuan Zhang. «Analysis of contact force and uplift of pantograph-catenary system in overlap section based on numerical simulations and experimental tests». In: *Vehicle System Dynamics* 61.10 (2023), pp. 2492–2515. DOI: 10.1080/00423114.2022.2117056 (cit. a p. 4).

[6] Santiago Gregori, J. Gil, Manuel Tur, J. E. Tarancón e F. J. Fuenmayor. «Analysis of the overlap section in a high-speed railway catenary by means of numerical simulations». In: *Engineering Structures* 221 (2020), p. 110963. DOI: 10.1016/j.engstruct.2020.110963 (cit. a p. 4).

[7] Yongming Yao, Jing Wang, Jia Yang, Zhipeng Yang, Weifan Wang, Bin Wang e Meijun Mu. «Research on optimisation of overlapping section of catenary based on simulation and line testing». In: *Vehicle System*

Dynamics 64.7 (2025). Verificare autori, volume e pagine — riferimento molto recente. DOI: 10.1080/00423114.2025.2477835 (cit. a p. 4).

[8] Tengjiao Jiang, Gunnstein T. Frøseth, Petter Nåvik e Anders Rønnquist. «Assessment of pantograph-catenary interaction in a railway overlap section via a novel optical-based method». In: *Mechanism and Machine Theory* 177 (2022). DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2022.104969 (cit. alle pp. 4, 38, 57).

[9] Alessandro Strauss. «Development of numerical models for the dynamic analysis of pantograph-catenary interaction». Tesi di laurea mag. Politecnico di Torino, 2014 (cit. alle pp. 7, 13).

[10] Alessio Germinario. «Sviluppo di un modello semi-analitico per l'analisi dell'interazione dinamica tra pantografo e catenaria». Tesi di laurea mag. Politecnico di Torino, 2021 (cit. a p. 7).

[11] T. Dahlberg. «Moving force on an axially loaded beam—with applications to a railway overhead contact wire». In: *Vehicle System Dynamics: International Journal of Vehicle Mechanics and Mobility* 44.8 (2006), pp. 631–644. DOI: 10.1080/00423110500165523. URL: http://dx.doi.org/10.1080/00423110500165523 (cit. a p. 7).

[12] Henry P. Gavin. *Structural Element. Stiffness, Mass, and Damping Matrice*. 2020. URL: https://people.duke.edu/~hpgavin/StructuralDynamics/StructuralElements.pdf (cit. a p. 8).

[13] A. Gugliotta, N. Zampieri e A. Somà. *Elementi finiti*. Quine, 2022 (cit. a p. 10).

[14] Yong Hieon Cho. «Numerical simulation of the dynamic responses of railway overhead contact lines to a moving pantograph, considering a nonlinear dropper». In: *Journal of Sound and Vibration* 315.3 (2008), pp. 433–454. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.02.024 (cit. a p. 13).

[15] Thomas J. R. Hughes. *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Mineola, NY: Dover Publications, 2000 (cit. a p. 15).

[16] M. Gérardin e D. Rixen. *Mechanical Vibrations – Theory and Application to Structural Dynamics*. John Wiley e Sons, 2015 (cit. a p. 17).