

Politecnico di Torino

in collaborazione con

ZHAW Zurich University of Applied Sciences

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

A.a. 2025/2026

Sessione di Laurea Settembre 2026

Progettazione di un sistema di controllo latero-direzionale per l'F-16 mediante assegnazione dell'autostruttura

Relatori:
Prof.ssa Elisa Capello
Prof. Pierluigi Capone

Candidato:
Mauro Bono

Indice

1 Introduzione **3**

2 Fondamenti teorici dell'assegnazione dell'autostruttura **5**
2.1 Sistemi dinamici lineari 5
2.2 Risposta transitoria e rappresentazione modale 6
2.3 Assegnazione dell'autostruttura 7
2.3.1 Feedback completo di stato 7
2.3.2 Feedback di uscita e assegnabilità degli autovettori 8
2.3.3 Calcolo del guadagno di feedback 10
2.3.4 Constrained Output Feedback 10

3 Descrizione del modello **13**
3.1 Trim (Ricerca dell'equilibrio) 14
3.2 Linearizzazione 16
3.3 Dinamica longitudinale e latero-direzionale 17

4 Specifiche di progetto e scelte di assegnazione **19**
4.1 Obiettivi del controllore per l'analisi modale 19
4.2 Obiettivi per la simulazione di rollio prolungato 20

5 Progettazione, simulazione e analisi del controllore **22**
5.1 Condizione di trim e modello linearizzato a catena aperta 22
5.2 Sintesi delle leggi di controllo e architetture di feedback 24
5.2.1 Architetture di feedback considerate 24
5.2.2 Progetto del canale di FeedForward 26
5.2.3 Strategia di Gain Scheduling (GS) 27
5.3 Analisi modale ad anello chiuso e confronto delle architetture 28
5.3.1 Richiamo del sistema ad anello aperto e dei requisiti 28
5.3.2 Architettura EA base 29
5.3.3 Architettura EA + K (Guadagno in cascata) 30
5.3.4 Architettura EA INy (Integrale di stato) 31

5.3.5 Architettura EA INy CO (Constrained Output) 32
5.4 Simulazioni non lineari della risposta di rollio 34
5.4.1 Test a velocità longitudinale bloccata 34
5.4.2 Test a velocità libera e validazione del Gain Scheduling . . . 37
5.5 Discussione critica dei risultati e delle scelte architetturali 42
5.5.1 Validazione modale e trade-off ingegneristici 42
5.5.2 Impatto delle non-linearità e necessità del Gain Scheduling . 43

6 Conclusioni **44**
6.1 Sintesi del lavoro svolto 44
6.2 Risultati ottenuti 44
6.3 Limiti della soluzione proposta 45
6.4 Possibili sviluppi futuri 46

A Matrici del modello linearizzato a Mach 0.40 **47**

B Matrici del modello linearizzato a Mach 0.50 **51**

Capitolo 1

Introduzione

I sistemi di controllo di volo nascono con l'obiettivo di rendere più semplice il pilotaggio dei velivoli militari, la loro evoluzione ha modificato in modo profondo il rapporto tra il pilota e il velivolo. Partendo dai primi sistemi sperimentali che miglioravano la stabilità dei velivoli, si è proseguito con sistemi più complessi che hanno ridefinito il concetto stesso di comando, per poi passare a sistemi autonomi di navigazione e di protezione dell'inviluppo di volo. Negli anni quindi tra l'azione del pilota e il movimento effettivo delle superfici mobili si è progressivamente inserito un sistema di controllo capace di interpretare, filtrare e modulare tali comandi.

Un Controllore di Volo o *Flight Controller*, all'interno del quale vengono definite le leggi di controllo e cuore anche dei sistemi più complessi, non si limita quindi a trasmettere il comando del pilota agli attuatori, ma lo elabora sulla base dello stato corrente del velivolo. Attraverso le misure fornite dai sensori, il sistema di controllo genera i comandi da inviare a elevatore, alettoni, timone, manetta ed eventuali altre superfici mobili. La progettazione di tali sistemi rimane tuttora un tema di notevole interesse, poiché richiede di conciliare stabilità, prontezza di risposta, robustezza, limiti degli attuatori e riduzione degli accoppiamenti indesiderati tra le diverse variabili dinamiche.

Tra le tecniche utilizzate per la progettazione dei controllori di volo rientra l'assegnazione dell'autostruttura o *eigenstructure assignment*. Questa tecnica ha una grossa applicazione sui modi propri del moto dei velivoli, a differenza del semplice assegnamento dei poli, questa tecnica permette di intervenire non solo sugli autovalori del sistema chiuso, ma anche sugli autovettori associati. Gli autovalori descrivono le caratteristiche temporali e frequenziali dei modi naturali, quali frequenza, smorzamento e rapidità di decadimento; gli autovettori, invece, determinano il modo in cui ciascun modo dinamico si manifesta nelle variabili fisiche del sistema, definendone ampiezze relative e fasi. In questo senso, l'assegnazione dell'autostruttura offre al progettista un grado di libertà aggiuntivo: non solo modificare la posizione dei modi, ma anche modellarne la distribuzione sulle

grandezze osservate.

Il primo a mettere in pratica e dimostrare l'utilità dell'assegnazione dell'autostruttura per la dinamica laterodirezionale di un velivolo fu Srinathkumar nel 1978 [10], successivamente Andry e Sobel ne approfondirono l'applicazione e ne studiarono delle varianti [2] [8]. I primi studi pubblici riguardo l'utilizzo del metodo su un modello di F-16 sono frutto del lavoro di Albonstan, che si è concentrato sulla robustezza e il disaccoppiamento dei modi, il cui modello non lineare è frutto di dati raccolti in galleria del vento e approssimazioni per quanto riguarda attuatori e sensori [1].

Il presente studio si colloca in continuità con questi contributi, il modello utilizzato è l'F-16 Simulation Model impiegato presso il Centre for Aviation (ZAV) della ZHAW (Zurich University of Applied Sciences) e implementato in ambiente MATLAB/Simulink. Il modello include anche routine di trim e linearizzazione, punti fondamentali della metodologia adottata. Questi permettono di ottenere il modello linearizzato del velivolo negli scenari più disparati, utilizzato in primo luogo per l'analisi modale e successivamente per l'assegnazione dell'autostruttura. Dopo aver soddisfatto i requisiti di smorzamento e disaccoppiamento, si è rivolta l'attenzione in particolare al miglioramento della risposta a un comando prolungato di *rollio*.

Le leggi di controllo ottenute sono poi implementate nel modello e valutate attraverso due livelli di verifica: da un lato, la verifica diretta dell'assegnazione modale sul modello nuovamente linearizzato; dall'altro, la simulazione non lineare della risposta del velivolo a comandi di rollio. In questo modo è possibile valutare non solo la correttezza matematica dell'assegnazione, ma anche l'effettivo miglioramento del comportamento dinamico del velivolo durante una manovra più realistica.

Capitolo 2

Fondamenti teorici dell'assegnazione dell'autostruttura

L'assegnazione dell'autostruttura si fonda sulla formulazione stato-spazio dei sistemi dinamici lineari e sulla loro analisi modale. In questo capitolo vengono richiamati dapprima il modello matematico e le proprietà strutturali necessarie alla base del metodo; successivamente si introduce il procedimento, le varianti e l'applicabilità.

2.1 Sistemi dinamici lineari

Nella formulazione di Kalman, un sistema dinamico lineare, reale, a dimensione finita e a tempo continuo può essere rappresentato dalle equazioni

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = F(t)\boldsymbol{x}(t) + G(t)\boldsymbol{u}(t), \tag{2.1}$$

$$\boldsymbol{y}(t) = H(t)\boldsymbol{x}(t), \tag{2.2}$$

definite per $t \in \mathbb{R}$. Il vettore $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ descrive lo stato del sistema, $\boldsymbol{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ rappresenta l'ingresso e $\boldsymbol{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ l'uscita; le matrici $F(t)$, $G(t)$ e $H(t)$ sono funzioni continue del tempo di dimensioni compatibili [6]. Lo stato raccoglie quindi l'informazione sufficiente a determinare l'evoluzione futura del sistema una volta assegnati l'istante iniziale e l'ingresso.

Nel seguito si considerano sistemi lineari tempo-invarianti, per i quali le matrici non dipendono esplicitamente dal tempo. Adottando la notazione più comune, le equazioni precedenti diventano

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}(t), \tag{2.3}$$

$$\boldsymbol{y}(t) = C\boldsymbol{x}(t), \tag{2.4}$$

dove $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è la matrice dinamica, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ descrive l'azione degli ingressi e $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ definisce le grandezze osservate.

Due proprietà strutturali assumono particolare rilievo. Il sistema è completamente controllabile se

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n, \tag{2.5}$$

mentre è completamente osservabile se

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n. \tag{2.6}$$

La controllabilità assicura che l'ingresso possa influenzare tutti i modi del sistema; l'osservabilità garantisce invece che ogni modo sia ricostruibile attraverso le uscite. Queste condizioni costituiscono la base delle formulazioni di feedback considerate da Andry, Shapiro e Chung [2].

2.2 Risposta transitoria e rappresentazione modale

Per mettere in evidenza il ruolo dell'autostruttura si considera inizialmente il sistema autonomo

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = G\boldsymbol{x}(t), \qquad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0, \tag{2.7}$$

la cui soluzione è

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathrm{e}^{Gt}\boldsymbol{x}_0. \tag{2.8}$$

Si supponga che G possieda n autovalori distinti λ_i e i corrispondenti autovettori destri $\boldsymbol{v}_i$, definiti da

$$G\boldsymbol{v}_i = \lambda_i \boldsymbol{v}_i, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{2.9}$$

Gli autovettori, linearmente indipendenti, possono essere raccolti nella matrice modale

$$M = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \end{bmatrix}. \tag{2.10}$$

Introducendo le coordinate modali $\boldsymbol{z} = M^{-1}\boldsymbol{x}$, si ottiene

$$\dot{\boldsymbol{z}}(t) = M^{-1}GM\boldsymbol{z}(t) = \Lambda\boldsymbol{z}(t), \qquad \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \tag{2.11}$$

e pertanto

$$\boldsymbol{x}(t) = M\mathrm{e}^{\Lambda t}M^{-1}\boldsymbol{x}_0. \tag{2.12}$$

Indicando con $\boldsymbol{\ell}_i^\mathsf{T}$ la i-esima riga di M^{-1} e ponendo $\alpha_i = \boldsymbol{\ell}_i^\mathsf{T}\boldsymbol{x}_0$, la risposta può essere espressa come somma dei contributi modali:

$$\boldsymbol{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{e}^{\lambda_i t}\boldsymbol{v}_i. \tag{2.13}$$

Questa forma rende immediata l'interpretazione della risposta transitoria. Gli autovalori determinano la rapidità di decadimento o crescita e, nel caso di coppie complesse coniugate, la frequenza e lo smorzamento delle oscillazioni. Gli autovettori definiscono invece la forma di ciascun modo, cioè le ampiezze relative e le fasi con cui le variabili di stato vi partecipano. Infine, i coefficienti α_i, dipendenti dalla condizione iniziale, stabiliscono il grado con cui ogni modo viene eccitato [2]. Ne consegue che un feedback progettato per modificare la risposta transitoria deve considerare non soltanto la posizione degli autovalori, ma anche la struttura degli autovettori.

2.3 Assegnazione dell'autostruttura

Con *assegnazione dell'autostruttura* si indica la scelta congiunta degli autovalori e degli autovettori del sistema ad anello chiuso. Rispetto al solo posizionamento dei poli, questa impostazione permette di agire sulla distribuzione dei modi tra le variabili fisiche e quindi, entro i gradi di libertà disponibili, di ridurre accoppiamenti indesiderati [2].

2.3.1 Feedback completo di stato

Nel caso si abbia accesso diretto alle variabili di stato si può agire esclusivamente sull'equazione 2.3.

Si consideri la legge di controllo

$$\boldsymbol{u}(t) = K\boldsymbol{x}(t), \tag{2.14}$$

che conduce alla matrice in anello chiuso $A+BK$. Per assegnare la coppia desiderata di autovalore e autovettore corrispondente $(\lambda_i, \boldsymbol{v}_i)$ deve valere

$$(A + BK)\boldsymbol{v}_i = \lambda_i \boldsymbol{v}_i, \tag{2.15}$$

ovvero

$$(\lambda_i I - A)\boldsymbol{v}_i - BK\boldsymbol{v}_i = 0. \tag{2.16}$$

esprimibile nella forma

$$\begin{bmatrix}\lambda_i I - A & B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{v}_i \\ -K\boldsymbol{v}_i\end{bmatrix} = 0. \tag{2.17}$$

Definita la matrice

$$S_{\lambda_i} = \begin{bmatrix} \lambda_i I - A & B \end{bmatrix}, \tag{2.18}$$

si scelga una base del suo spazio nullo nella forma composta

$$R_{\lambda_i} = \begin{bmatrix} N_{\lambda_i} \\ M_{\lambda_i} \end{bmatrix}, \qquad S_{\lambda_i} R_{\lambda_i} = 0. \tag{2.19}$$

Un autovettore assegnabile associato a λ_i deve appartenere allo spazio generato dalle colonne di N_{λ_i}; esiste quindi un vettore di parametri $\boldsymbol{z}_i$ tale che

$$\boldsymbol{v}_i = N_{\lambda_i} \boldsymbol{z}_i, \qquad K\boldsymbol{v}_i = -M_{\lambda_i} \boldsymbol{z}_i. \tag{2.20}$$

Raccogliendo gli autovettori in $V = [\boldsymbol{v}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{v}_n]$ e i termini corrispondenti in $W = [-M_{\lambda_1}\boldsymbol{z}_1 \ \cdots \ -M_{\lambda_n}\boldsymbol{z}_n]$, il guadagno è

$$K = WV^{-1}. \tag{2.21}$$

La matrice V deve essere non singolare. Inoltre, per ottenere un guadagno reale in presenza di autovalori complessi, autovalori e autovettori desiderati devono essere scelti in coppie coniugate. La controllabilità garantisce la possibilità di assegnare gli autovalori, ma la scelta degli autovettori rimane vincolata dai sottospazi determinati da A e B [2].

2.3.2 Feedback di uscita e assegnabilità degli autovettori

Quando le variabili di stato sono accessibili, si può adottare la legge

$$\boldsymbol{u}(t) = F\boldsymbol{y}(t) = FC\boldsymbol{x}(t), \tag{2.22}$$

da cui si ottiene

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = (A + BFC)\boldsymbol{x}(t), \tag{2.23}$$

per la quale la matrice in anello chiuso è $A + BFC$. La coppia $(\lambda_i, \boldsymbol{v}_i)$ deve soddisfare

$$(A + BFC)\boldsymbol{v}_i = \lambda_i \boldsymbol{v}_i. \tag{2.24}$$

Assumendo che λ_i non sia un autovalore di A e definendo $\boldsymbol{m}_i = FC\boldsymbol{v}_i$, si ricava

$$\boldsymbol{v}_i = (\lambda_i I - A)^{-1} B\boldsymbol{m}_i = L_i \boldsymbol{m}_i, \qquad L_i \coloneqq (\lambda_i I - A)^{-1} B. \tag{2.25}$$

Poiché il prodotto tra una matrice e un vettore è sempre una combinazione lineare delle colonne della matrice, un autovettore è esattamente assegnabile soltanto se appartiene al sottospazio generato dalle colonne della matrice L_i (o $\mathrm{im}(L_i)$). La dimensione di tale sottospazio non può superare il rango di B e quindi il numero

di ingressi indipendenti. La matrice C introduce un'ulteriore limitazione: sotto le ipotesi di controllabilità, osservabilità e rango pieno di B e C. Il risultato richiamato da Andry, Shapiro e Chung afferma che possono essere parzialmente assegnati $\max(m, p)$ autovalori e i corrispondenti autovettori, prescrivendo arbitrariamente $\min(m, p)$ componenti di ciascun autovettore [2]. In termini progettuali, ciò significa che non è generalmente possibile imporre arbitrariamente l'intera autostruttura.

Autovettore migliore possibile

Se l'autovettore desiderato $\boldsymbol{v}_i^d$ non appartiene a $\mathrm{im}(L_i)$, si ricerca l'autovettore assegnabile $\boldsymbol{v}_i^a = L_i \boldsymbol{z}_i$,dove il parametro $\boldsymbol{z}_i$ è più vicino nel senso dei minimi quadrati:

$$\min_{\boldsymbol{z}_i} \; J_i, \qquad J_i = \left\| \boldsymbol{v}_i^d - L_i \boldsymbol{z}_i \right\|^2 . \tag{2.26}$$

Se L_i ha rango di colonna pieno, la soluzione è

$$\boldsymbol{z}_i = (L_i^* L_i)^{-1} L_i^* \boldsymbol{v}_i^d, \tag{2.27}$$

$$\boldsymbol{v}_i^a = L_i (L_i^* L_i)^{-1} L_i^* \boldsymbol{v}_i^d, \tag{2.28}$$

dove $(\cdot)^*$ indica la trasposta coniugata e $\boldsymbol{v}_i^a$ è la proiezione ortogonale di $\boldsymbol{v}_i^d$ sul sottospazio degli autovettori assegnabili [2].

Specifica parziale

Spesso il progettista è interessato soltanto ad alcune componenti dell'autovettore, ad esempio quelle associate alle variabili che si desidera disaccoppiare. Sia $\boldsymbol{l}_i$ il vettore costituito dagli elementi da specificare dell'autovettore $\boldsymbol{v}_i$, allora si introduce un operatore che riordina gli elementi come segue:

$$\{\boldsymbol{v}_i^d\}^{R_i} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{l}_i \\ \boldsymbol{d}_i \end{bmatrix}, \tag{2.29}$$

Di conseguenza si riordinano le righe della matrice L_i:

$$\{(\lambda_i I - A)^{-1} B\}^{R_i} = \begin{bmatrix} \tilde{L}_i \\ D_i \end{bmatrix} \tag{2.30}$$

Da cui si ottiene la soluzione

$$\boldsymbol{z}_i = (\tilde{L}_i^* \tilde{L}_i)^{-1} \tilde{L}_i^* \boldsymbol{l}_i, \tag{2.31}$$

$$\boldsymbol{v}_i^a = L_i (\tilde{L}_i^* \tilde{L}_i)^{-1} \tilde{L}_i^* \boldsymbol{l}_i, \tag{2.32}$$

La specifica parziale consente di concentrare i gradi di libertà disponibili sulle componenti dinamicamente più importanti, senza imporre vincoli non necessari alle rimanenti [2].

2.3.3 Calcolo del guadagno di feedback

Una volta selezionate le coppie assegnabili, occorre determinare la matrice F. Seguendo il procedimento illustrato da Andry [2],si introduce una trasformazione non singolare T tale che

$$\widetilde{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} I_m \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{2.33}$$

e si definiscono

$$\widetilde{A} = T^{-1}AT, \qquad \widetilde{C} = CT, \qquad \tilde{\boldsymbol{v}}_i = T^{-1}\boldsymbol{v}_i. \tag{2.34}$$

In ciò che segue si assume che tutte le matrici e autovettori siano trasformati, sopprimendo la notazione $(\tilde{\cdot})$.

Partizionando le grandezze trasformate come

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_i \\ \boldsymbol{w}_i \end{bmatrix}, \tag{2.35}$$

l'equazione si riscrive nella forma

$$\begin{bmatrix} \lambda_i I_m - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & \lambda_i I_{n-m} - A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_i \\ \boldsymbol{w}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m \\ 0 \end{bmatrix} FC \begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_i \\ \boldsymbol{w}_i \end{bmatrix} \tag{2.36}$$

la parte superiore dell'equazione fornisce

$$\lambda_i \boldsymbol{z}_i - A_1 \boldsymbol{v}_i = FC\boldsymbol{v}_i, \qquad A_1 = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \end{bmatrix}. \tag{2.37}$$

Considerando un insieme di r coppie autovalore-autovettore e ponendo

$$V = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \cdots & \boldsymbol{v}_r \end{bmatrix}, \qquad Z = \begin{bmatrix} \lambda_1 \boldsymbol{z}_1 & \cdots & \lambda_r \boldsymbol{z}_r \end{bmatrix}, \tag{2.38}$$

si ottiene l'espressione in forma matriciale:

$$(A_1 + FC)V = Z. \tag{2.39}$$

Se CV è quadrata e non singolare, il guadagno risulta

$$F = (Z - A_1 V)(CV)^{-1}. \tag{2.40}$$

2.3.4 Constrained Output Feedback

L'assegnazione dell'autostruttura offre notevoli gradi di libertà nella progettazione dei sistemi di controllo. Tuttavia, come evidenziato da Andry *et al.* (1983) [2], la classica retroazione delle uscite (*output feedback*) genera tipicamente una matrice

di guadagno densa, la quale implica il collegamento fisico di ogni sensore a ciascun attuatore. Per ridurre la complessità circuitale del controllore e incrementarne l'affidabilità, è possibile ricorrere al *constrained output feedback*, imponendo che determinati elementi della matrice di guadagno siano strutturalmente nulli oppure assumano specifici valori prefissati.

Si consideri nuovamente l'equazione 2.39 nella forma:

$$(A_1^{m\times n} + F^{m\times r}C^{r\times n})V^{n\times n} = Z^{m\times n} \tag{2.41}$$

dove gli apici indicano le dimensioni delle rispettive matrici. Al fine di isolare la matrice di guadagno F, si introducono le matrici ausiliarie Ω e Ψ:

$$\Omega^{r\times n} = CV \tag{2.42}$$

$$\Psi^{m\times n} = Z - A_1V \tag{2.43}$$

Sostituendo tali espressioni all'interno della formulazione iniziale, si ottiene un'equazione matriciale semplificata:

$$I_m^{m\times m}F^{m\times r}\Omega^{r\times n} = \Psi^{m\times n} \quad \longrightarrow \quad F\Omega = \Psi \tag{2.44}$$

Nel contesto del *constrained output feedback*, l'analisi prende le mosse da quest'ultima relazione. Al fine di operare sui singoli elementi di F, risulta conveniente riscrivere l'uguaglianza in forma vettoriale. A tale scopo, si applica l'operatore di vettorizzazione per righe (o *stacking*), indicato con $S(\cdot)$, alla matrice di guadagno F. Contestualmente, si definisce una matrice a blocchi avente Ω^T sulla diagonale principale e matrici nulle O_m altrove.

Mediante le proprietà del prodotto di Kronecker, l'equazione matriciale può essere rigorosamente riformulata come segue:

$$[I_m \otimes \Omega^T]^{(m\times n)\times(m\times r)}S(F)^{(m\times r)\times 1} = S(\Psi)^{(m\times n)\times 1} \tag{2.45}$$

Espandendo l'operatore, il sistema assume la seguente struttura a blocchi:

$$\begin{bmatrix} \Omega^T & O_m & \dots & O_m \\ O_m & \Omega^T & \dots & O_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_m & O_m & \dots & \Omega^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1^T \\ f_2^T \\ \vdots \\ f_m^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1^T \\ \psi_2^T \\ \vdots \\ \psi_m^T \end{bmatrix} \tag{2.46}$$

dove f_i rappresenta la i-esima riga della matrice F, e ψ_i la i-esima riga della matrice Ψ.

Tale rappresentazione vettoriale preserva inalterato il significato matematico del sistema originario, riorganizzandone tuttavia gli elementi in un singolo vettore colonna. Il principale vantaggio di questa riformulazione risiede nel completo

disaccoppiamento delle righe della matrice di guadagno. Dalla struttura a blocchi emerge infatti che, per ogni $i = 1, \ldots, m$, sussiste l'equazione indipendente:

$$\Omega^T f_i^T = \psi_i^T \tag{2.47}$$

In assenza di vincoli, la soluzione per la singola riga è calcolabile mediante la pseudo-inversa di Moore-Penrose, ovvero $f_i^T = (\Omega^T)^+ \psi_i^T$. Qualora, invece, si necessiti di imporre vincoli architetturali sul controllore, è necessario operare un partizionamento del sistema. Fissata la riga i-esima, si definiscono due insiemi di indici per gli elementi del vettore f_i^T:

- c (*constrained*): indici relativi agli elementi vincolati, a cui è imposto un valore noto a priori;
- nc (*not constrained*): indici relativi agli elementi liberi, che costituiscono le effettive incognite del problema.

Conseguentemente, il vettore colonna delle incognite viene suddiviso nei sottovettori $(f_i^T)_c$ e $(f_i^T)_{nc}$. Analogamente, la matrice dei coefficienti Ω^T viene partizionata nelle sottomatrici colonna corrispondenti Ω_c^T e Ω_{nc}^T. Il sistema lineare per la singola riga assume pertanto la forma:

$$\Omega_{nc}^T (f_i^T)_{nc} + \Omega_c^T (f_i^T)_c = \psi_i^T \tag{2.48}$$

Poiché il vettore $(f_i^T)_c$ contiene valori costanti e prefissati, il prodotto $\Omega_c^T (f_i^T)_c$ rappresenta il contributo dinamico già fornito dai guadagni vincolati. Traslando tale termine al secondo membro, si isolano i gradi di libertà residui:

$$\Omega_{nc}^T (f_i^T)_{nc} = \psi_i^T - \Omega_c^T (f_i^T)_c \tag{2.49}$$

Il membro di destra funge così da termine noto compensato. La risoluzione di tale sistema ridotto nel senso dei minimi quadrati, data da:

$$(f_i^T)_{nc} = (\Omega_{nc}^T)^+ \left[\psi_i^T - \Omega_c^T (f_i^T)_c \right] \tag{2.50}$$

consente di ricavare gli elementi liberi del controllore capaci di approssimare al meglio la dinamica desiderata, garantendo al contempo il rigoroso rispetto dei vincoli architetturali. Si osservi, infine, che qualora i vincoli imposti siano esclusivamente di annullamento ($(f_i^T)_c = \mathbf{0}$), il termine compensativo si annulla e la procedura si riconduce alla mera elisione delle relative colonne dalla matrice originaria.

Capitolo 3

Descrizione del modello

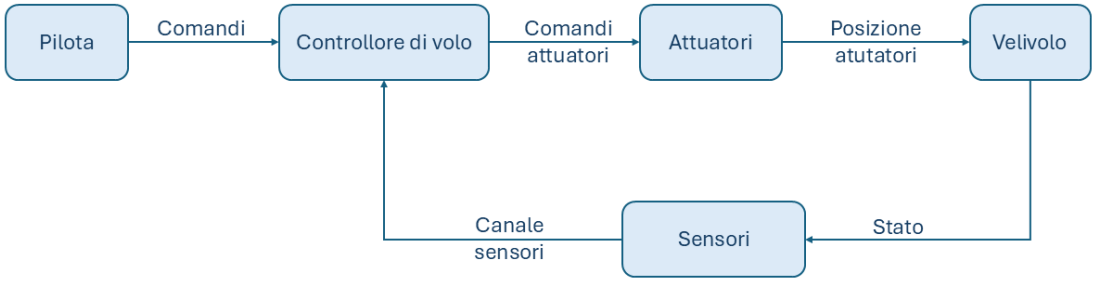


Figura 3.1: Diagramma a blocchi modello F-16

Il modello di simulazione impiegato, noto come F16 ZHAW/ZAV Simulation Model, rappresenta l'intero velivolo attraverso un'architettura modulare in ambiente MATLAB/Simulink. Da un punto di vista logico e di flusso dei segnali, il sistema si divide nei seguenti blocchi funzionali:

- **Controllore di volo:** riceve le richieste di manovra e, applicando le leggi di controllo, calcola i comandi necessari da inviare alle superfici mobili. Il componente il cui progetto è l'obiettivo del presente studio.
- **Attuatori:** ricevono i segnali elettrici dal controllore e simulano il movimento fisico e idraulico delle superfici aerodinamiche, includendo dinamiche di ritardo, inerzie e limiti di saturazione. IL modello deriva da publicazioni della NASA successive a test di volo su F-16[5].
- **Dinamica del velivolo:** costituisce il nucleo del modello. Le equazioni dinamiche e cinematiche, insieme al modello del motore derivano da una pub-

blicazione della Delft University of Technology [9]. Il database aerodinamico è estratto da test in galleria del vento condotti dalla NASA [5][7].

- **Sensori:** rilevano lo stato cinematico e dinamico del velivolo e lo traducono in segnali che, una volta filtrati, vengono re-inoltrati al controllore, chiudendo così l'anello di retroazione.

3.1 Trim (Ricerca dell'equilibrio)

L'identificazione di una condizione di equilibrio stazionario, nota come condizione di trim, rappresenta una fase fondamentale per l'analisi e il controllo del velivolo. Dato un sistema descritto da un modello non lineare, le equazioni del moto possono essere scritte nella forma di equazioni differenziali ordinarie non lineari:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \tag{3.1}$$

$$\boldsymbol{y} = g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \tag{3.2}$$

dove $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ rappresentano, rispettivamente, i vettori di ingresso, di stato e di uscita. Per definire una condizione di regime stazionario, si impone matematicamente che le derivate temporali del vettore di stato siano nulle ($\dot{\boldsymbol{x}} = 0$). Di conseguenza, la funzione vettoriale deve soddisfare la condizione $f(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}_0) = 0$.

Per operare su un sistema lineare e ricavare con precisione le esatte condizioni iniziali di equilibrio $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}_0)$, si procede con una linearizzazione iniziale delle equazioni del moto nell'intorno della condizione di trim ipotizzata. Questa operazione restituisce la seguente rappresentazione:

$$\Delta\dot{\boldsymbol{x}} = A\Delta\boldsymbol{x} + B\Delta\boldsymbol{u} \tag{3.3}$$

$$\Delta\boldsymbol{y} = C\Delta\boldsymbol{x} + D\Delta\boldsymbol{u} \tag{3.4}$$

Questo sistema può essere riscritto in una forma matriciale esplicita che evidenzia gli scostamenti rispetto al punto di equilibrio:

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} - \dot{\boldsymbol{x}}_0 \\ \boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 \\ \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_0 \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

Tale formulazione costituisce un metodo eccellente per il calcolo della condizione iniziale $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}_0)$ e rappresenta il cuore matematico dell'algoritmo iterativo di Newton-Raphson, impiegato per la risoluzione del problema.

In questo contesto, i vettori classici che descrivono un aeromobile includono lo stato $\boldsymbol{x}$ (posizioni x, y, h, velocità u, v, w, ratei angolari p, q, r e angoli di Eulero ϕ, θ, ψ), l'ingresso $\boldsymbol{u}$ (comandi di manetta δ_{Thr}, alettoni δ_{Ail}, equilibratore δ_{Ele} e

timone δ_{Rud}) e l'uscita $\boldsymbol{y}$ (che comprende variabili come $V_{TAS}, \alpha, \beta, \gamma$ e i fattori di carico N_y, N_z).

La logica della procedura di trim richiede di suddividere queste variabili in due insiemi operativi:

- **Variabili *Freeze* (Congelate):** grandezze cinematiche o di controllo il cui valore è noto e mantenuto fisso.
- **Variabili *Float* (Libere):** grandezze incognite che l'algoritmo deve determinare interattivamente.

Congelare un elemento della derivata di stato costringe l'algoritmo a utilizzare la riga corrispondente del sistema di equazioni per la risoluzione. Analogamente, congelare un elemento del vettore di stato o di ingresso equivale a eliminare una colonna dalla matrice del sistema, rimuovendo di fatto tale variabile dal novero delle incognite.

Nel presente lavoro di tesi, tale metodologia è applicata alla condizione di volo rettilineo livellato. In questo specifico assetto, i vincoli operativi (*Freeze*) vengono impiegati per forzare a zero le componenti cinematiche latero-direzionali e l'angolo di rampa e per fissare la velocità di crociera e la quota ai valori desiderati. Tale impostazione riduce il problema al calcolo del puro asse longitudinale, lasciando come incognite libere (*Float*) i parametri necessari al bilanciamento delle forze, l'angolo di beccheggio, la deflessione dell'equilibratore e la spinta della manetta.

Di conseguenza, l'algoritmo elabora il sistema trattando le restanti grandezze aerodinamiche e propulsive non vincolate come l'angolo di beccheggio θ, l'equilibratore δ_{Ele} e la spinta della manetta δ_{Thr}) in qualità di incognite *Float*.

Una volta definite le variabili, il calcolo dei valori *Float* procede sfruttando la matrice a blocchi precedentemente definita. La relazione risolutiva per ottenere la stima delle incognite di stato e ingresso è data da:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{Float} \\ \boldsymbol{u}_{Float} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{0_{Float}} \\ \boldsymbol{u}_{0_{Float}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}_{Freeze} \\ \boldsymbol{y}_{Freeze} \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

I valori così calcolati per $\boldsymbol{u}_{Float}$ e $\boldsymbol{x}_{Float}$ vengono combinati con le variabili *Freeze* (mantenute ai loro valori prefissati) per formare i vettori stimati completi $\boldsymbol{x}_e$ e $\boldsymbol{u}_e$. L'algoritmo procede quindi alla valutazione dell'errore per verificare se la condizione di equilibrio è stata effettivamente raggiunta. L'errore, che rappresenta lo scostamento tra le derivate calcolate con le equazioni non lineari e i valori teorici imposti dai vincoli, è definito dalla norma:

$$e = \left\| \begin{matrix} \dot{\boldsymbol{x}}_{Freeze} - f_{Freeze}(\boldsymbol{x}_e, \boldsymbol{u}_e) \\ \dot{\boldsymbol{y}}_{Freeze} - g_{Freeze}(\boldsymbol{x}_e, \boldsymbol{u}_e) \end{matrix} \right\| \tag{3.7}$$

Se tale errore risulta superiore a una tolleranza prefissata, i vettori stimati $\boldsymbol{x}_e$ e $\boldsymbol{u}_e$ vengono assunti come nuova condizione iniziale e il processo iterativo riparte: le equazioni vengono nuovamente linearizzate attorno al nuovo punto e i passaggi matematici si ripetono fino alla completa convergenza a zero dell'errore e, confermando l'individuazione dell'esatto punto di trim.

3.2 Linearizzazione

La derivazione di un modello lineare equivalente a partire dal modello non lineare è un passaggio fondamentale per la sintesi e la validazione delle leggi di controllo. Un errore nel processo di linearizzazione produrrebbe un sistema incapace di replicare fedelmente la risposta transitoria del velivolo reale anche nell'intorno del punto di equilibrio, invalidando di fatto l'utilizzo e l'efficacia delle leggi di controllo ottenute.

Il metodo adottato in questa sede è la *Linearizzazione Classica* (Classical Linearization). Esso si basa sulla selezione di vettori di perturbazione per gli stati e per gli ingressi, definiti come $\{\Delta\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{u}\}$, applicati nell'intorno della condizione operativa di trim nominale $\{\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}_0\}$.

Per ottenere effettivamente il sistema linearizzato — descritto dalle matrici jacobiane A, B, C, D —, l'algoritmo di calcolo valuta le derivate parziali delle funzioni non lineari $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ e $g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ ricorrendo al metodo numerico delle differenze finite centrate. Imponendo perturbazioni simmetriche e di uguale ampiezza attorno al punto di lavoro, ovvero $\Delta x^+ = -\Delta x^-$, i coefficienti del sistema LTI vengono estratti applicando rigorosamente le seguenti relazioni:

$$A_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \approx \frac{f_i(\boldsymbol{x}_0 + \Delta x_j, \boldsymbol{u}_0) - f_i(\boldsymbol{x}_0 - \Delta x_j, \boldsymbol{u}_0)}{2\Delta x_j} \tag{3.8}$$

$$B_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial u_j} \approx \frac{f_i(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}_0 + \Delta u_j) - f_i(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}_0 - \Delta u_j)}{2\Delta u_j} \tag{3.9}$$

$$C_{ij} = \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \approx \frac{g_i(\boldsymbol{x}_0 + \Delta x_j, \boldsymbol{u}_0) - g_i(\boldsymbol{x}_0 - \Delta x_j, \boldsymbol{u}_0)}{2\Delta x_j} \tag{3.10}$$

$$D_{ij} = \frac{\partial g_i}{\partial u_j} \approx \frac{g_i(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}_0 + \Delta u_j) - g_i(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}_0 - \Delta u_j)}{2\Delta u_j} \tag{3.11}$$

Per manovre a piccole ampiezze, questo metodo restituisce ottimi risultati richiedendo uno sforzo minimo nella parametrizzazione; tipicamente, è sufficiente impostare l'entità della perturbazione pari a una piccola percentuale del fondo scala della variabile di interesse.

Nel caso del calcolo del trim, il processo di linearizzazione circoscrive il dominio al solo modello del velivolo e dei relativi sensori; al contrario, la linearizzazione completa coinvolge l'aeromobile nella sua interezza, comprendendo il controllore di

volo e gli attuatori. Tale marcata differenza architetturale richiede inevitabilmente che le ampiezze delle perturbazioni utilizzate nelle due fasi vengano differenziate, al fine di garantire la corretta accuratezza dei rispettivi modelli lineari.

L'obiettivo fondamentale è calibrare le ampiezze di tali perturbazioni in modo tale che la risposta temporale transitoria generata dal modello lineare si sovrapponga con la massima fedeltà possibile a quella prodotta dalla simulazione del sistema non lineare. Quando questa sovrapposizione è verificata, il modello linearizzato ottenuto viene considerato matematicamente e fisicamente valido per le successive fasi di analisi e di assegnazione modale.

3.3 Dinamica longitudinale e latero-direzionale

La linearizzazione permette quindi di ricavare un modello lineare fedele all'originale attorno alle condizioni iniziali. Il sistema ottenuto partendo dalla condizione di volo rettilineo livellato può essere distinto in due sotto-dinamiche indipendenti: la longitudinale e la latero-direzionale.

La **dinamica longitudinale** governa il moto nel piano di simmetria del velivolo, controllando velocità, quota e beccheggio. È dominata da due modi propri fondamentali:

- **Corto Periodo (Short Period):** un moto oscillatorio rapido e smorzato dominato dall'angolo di incidenza e dal rateo di beccheggio.
- **Fugoide (Phugoid):** un moto oscillatorio a bassissima frequenza legato al continuo scambio energetico tra velocità e quota.

La **dinamica latero-direzionale**, oggetto specifico della progettazione proposta in questa tesi, descrive invece i moti asimmetrici (traslazione laterale) e le rotazioni fuori dal piano di simmetria (rollio e imbardata).

Analizzando la matrice dinamica di questo sotto-sistema, è possibile identificare i tre modi propri caratteristici dell'assegnazione latero-direzionale:

- **Modo Spirale (Spiral Mode):** un modo reale, aperiodico e molto lento, che quantifica la tendenza del velivolo a mantenere la stabilità laterale o a convergere gradualmente verso un angolo di rollio sempre più accentuato.
- **Modo di Rollio (Roll Mode):** un modo reale, aperiodico e molto veloce. Esprime la rapidità con la quale l'aereo raggiunge un rateo di rollio di regime a seguito di un comando sugli alettoni, essendo dominato dall'inerzia al rollio e dallo smorzamento aerodinamico generato dalle ali.

- **Dutch Roll:** un modo oscillatorio complesso derivante dal forte accoppiamento dinamico tra il moto di sbandamento (derapata laterale) e il moto di rollio, si presenta spesso come una sgradevole oscillazione poco smorzata.

Capitolo 4

Specifiche di progetto e scelte di assegnazione

La sintesi del controllore latero-direzionale mediante assegnazione dell'autostruttura richiede di tradurre i requisiti fisici e le specifiche di qualità di volo (Flying Qualities) in target numerici che le leggi di controllo dovranno tentare di soddisfare.

4.1 Obiettivi del controllore per l'analisi modale

I requisiti imposti sui modi propri latero-direzionali mirano a garantire prontezza di risposta ai comandi, un livello di smorzamento adeguato per attenuare le oscillazioni, e un corretto disaccoppiamento cinematico tra le manovre.

Nella definizione dell'autostruttura target, è necessario prescrivere vincoli sia sugli autovalori (le cui posizioni nel piano complesso determinano le caratteristiche temporali e la stabilità del transitorio) sia sui corrispondenti autovettori (la cui struttura fissa il grado di disaccoppiamento tra le diverse variabili fisiche di stato).

Le specifiche modali richieste per i tre modi latero-direzionali (Rollio, Spirale e Dutch Roll) e relative alle variabili cinematiche prioritarie (velocità laterale v, rateo di rollio p, rateo di imbardata r e angolo di banco ϕ) sono riassunte nella Tabella 4.1. All'interno della matrice che definisce la struttura autovettoriale target, il simbolo $*$ indica i gradi di libertà liberi (le componenti che il controllore non è obbligato a vincolare), mentre i valori 0 e 1 indicano i target specifici assegnati per forzare il disaccoppiamento desiderato. La scelta degli elementi degli autovettori da assegnare è suggerita in un tecnical memorandum pubblicato dalla NASA [3].

Tabella 4.1: Requisiti dell'autostruttura target per la dinamica latero-direzionale

	Roll (Rollio)	**Spiral (Spirale)**	**Dutch Roll**
Autovalore (λ)	$-5 < \lambda_R < -1$	$\lambda_S > -0.01$	$\zeta_{DR} \geq 0.7$
Angolo di rollio (ϕ)	$*$	1	0
Velocità laterale (v)	0	0	1
Rateo di imbardata (r)	$*$	$*$	$*$
Rateo di rollio (p)	1	$*$	$*$

- **Modo di Rollio (Roll):** si esige un decadimento rapido (all'interno di limiti attuativi ragionevoli) e si struttura l'autovettore affinché l'eccitazione del modo generi puramente rollio ($p = 1$), inibendo l'insorgenza di velocità laterale parassita ($v = 0$).
- **Modo Spirale (Spiral):** l'obiettivo è gestire il comportamento a lungo termine della stabilità laterale. Si accetta una stabilità ridotta ($\lambda_S > -0.01$), concentrando la risposta modale sull'angolo di rollio ($\phi = 1$) e impedendo che interagisca con la traslazione laterale ($v = 0$).
- **Modo Dutch Roll:** per sopprimere l'effetto oscillatorio e garantire un comfort adeguato, il vincolo prioritario riguarda lo smorzamento intrinseco della radice complessa ($\zeta_{DR} \geq 0.7$) [3]. La forma dell'autovettore è progettata per confinare la dinamica sulla sola imbardata/sbandamento ($v = 1$) mantenendola disaccoppiata dall'angolo di rollio ($\phi = 0$).

4.2 Obiettivi per la simulazione di rollio prolungato

Al di fuori della verifica matematica per l'assegnazione modale condotta in ambito lineare, si verifica anche la risposta ad un comando di rollio attraverso simulazione.

L'obiettivo è la minimizzazione delle oscillazioni dell'accelerazione laterale (il fattore di carico lungo l'asse Y del velivolo), N_y, poiche strettamente legato allo sbandamento, che quindi sporca la manovra, e alla sua percezione da parte del pilota.

Il flight controller dovrà sopprimere al massimo tale fenomeno. La sua valutazione prestazionale avverrà analizzando la risposta temporale di N_y e si focalizzerà su due risultati:

1. **Minimizzazione dell'escursione:** ottenere i valori della differenza quantitativa che separa il picco massimo dal valore minimo di N_y registrati ad ogni ciclo nel corso dell'intera evoluzione della manovra.

2. **Controllo del valore medio:** garantire il mantenimento di un fattore di carico laterale medio quanto più vicino allo zero (0 g), indicatore di una manovra equilibrata.

Capitolo 5

Progettazione, simulazione e analisi del controllore

In questo capitolo viene presentata l'applicazione pratica della metodologia di progetto del controllore dell'F-16. Il percorso logico parte dall'estrazione del modello lineare nell'intorno di una condizione di volo nominale, prosegue con la sintesi e il confronto di diverse architetture di controllo basate sull'assegnazione dell'autostruttura, e si conclude con la validazione in simulazione non lineare.

5.1 Condizione di trim e modello linearizzato a catena aperta

La fase preliminare della progettazione richiede la determinazione di una condizione operativa di trim. Procedendo secondo la metodologia, precedentemente descritta per il volo rettilineo livellato, il calcolo dell'equilibrio stazionario viene impostato definendo a priori i parametri di quota e velocità di crociera desiderati:

- Numero di Mach: 0.40
- Quota: 800 m

A valle del raggiungimento dell'equilibrio, si ottengono il vettore di stato e il vettore di ingresso che soddisfano le condizioni imposte. Successivamente, si procede con la linearizzazione, da cui si ricava il modello lineare del velivolo. Il risultato è un sistema composto da un vettore di stato di 48 elementi, 49 uscite e 4 ingressi (manetta, timone, alettoni ed equilibratore).

Dal sistema completo è stato estratto il sottosistema latero-direzionale, ridotto selezionando gli ingressi $u = [\delta_a, \delta_r]^T$ e le uscite dei sensori $y = [p, r, sin(\phi), N_y]^T$. Si ottiene, di conseguenza, un vettore di stato costituito non solo dalle variabili

cinematiche che governano il moto latero-direzionale $x = [v, p, r, \phi]^T$, ma che comprende anche la posizione reale delle superfici mobili e gli stati relativi alle dinamiche dei sensori (le matrici complete in Appendice A).

L'analisi modale del sistema ad anello aperto in questa condizione di volo rivela la seguente autostruttura per i modi latero-direzionali:

Tabella 5.1: Autostruttura cociera Mach 0.4

	Dutch Roll	Spirale	Rollio
λ	$-0.4478 \pm 3.160i$	-0.01524	-2.923
ϕ	$0.01236 \mp 0.009238i$	1	-0.3431
v	1	0.5468	-0.5626
r	$-0.0002914 \pm 0.02012i$	0.07034	0.03924
p	$-0.03471 \mp 0.03641i$	-0.02046	1

Dall'esame degli autovalori, emerge come unicamente il modo di Rollio rispetti intrinsecamente i requisiti di qualità di volo illustrati nel Capitolo 4. Nello specifico, la radice associata alla cinematica di rollio si traduce in una costante di tempo $\tau_R = -1/\lambda_R \approx 0.34$ s, indice di un'elevata prontezza di risposta aerodinamica.

Al contrario, sia il modo Spirale che il modo *Dutch Roll* presentano criticità evidenti. Il modo Spirale, pur essendo naturalmente stabile ($\lambda_S < 0$), possiede un autovalore pari a -0.0152, il quale vìola il limite imposto dalle specifiche di progetto ($\lambda_S > -0.01$). Un posizionamento eccessivamente stabile, tende infatti a causare un peggioramento delle qualità di volo percepite dal pilota.

Parallelamente, il modo *Dutch Roll* è penalizzato da uno smorzamento intrinseco estremamente ridotto ($\zeta_{DR} \approx 0.14$). Un valore così basso è inaccettabilè per le qualità di pilotaggio.

Per quanto concerne gli autovettori, si osserva che questi non soddisfano i requisiti di disaccoppiamento cinematico imposti in fase di progetto.

Tali carenze strutturali giustificano appieno la necessità di progettare un sistema di controllo, gli obiettivi modali sarano: incrementare lo smorzamento del Dutch Roll al valore target $\zeta_{DR} \geq 0.70$, ricondurre l'autovalore del modo Spirale entro i margini di tolleranza prescritti e, contestualmente, disaccoppiare il rollio e l'imbardata nei modi.

5.2 Sintesi delle leggi di controllo e architetture di feedback

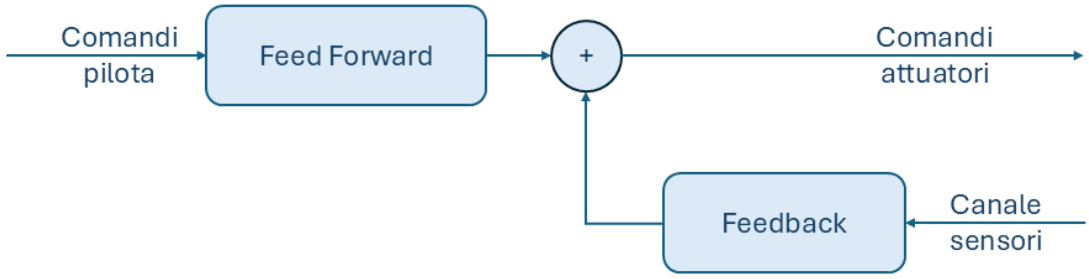


Figura 5.1: Schema controllore di volo

Al fine di soddisfare congiuntamente i requisiti modali dettati dall'autostruttura e quelli sul fattore di carico laterale (N_y) durante manovre prolungate, sono state investigate quattro distinte varianti architetturali del sistema di controllo.

5.2.1 Architetture di feedback considerate

1. **Assegnazione dell'autostruttura base (EA):** Implementazione standard della tecnica di *output feedback* calcolata sulle uscite dei sensori $p, r, \sin(\phi)$ ed N_y. L'assegnazione consiste nel riposizionare i poli associati al modo Dutch Roll e al modo Spirale, mantenendo inalterato il polo naturale di rollio e garantendo, contestualmente, un rigoroso disaccoppiamento cinematico attraverso un'assegnazione mirata degli elementi degli autovettori.

2. **Assegnazione base con guadagno integrale in cascata ($EA + k_{INy}$):** Questa architettura prevede un approccio sequenziale: in un primo momento si calcola la matrice di Feedback tramite l'assegnazione dell'autostruttura, per poi sommare a valle un'azione integrale su N_y agente direttamente sul comando del timone. La taratura di tale guadagno addizionale viene effettuata per via iterativa: il valore finale rappresenta un compromesso fondamentale tra l'ottenimento della miglior risposta possibile in simulazione e la necessità di non alterare eccessivamente la dinamica dei poli ad anello chiuso. L'introduzione di questo guadagno, infatti, sposta gli autovalori precedentemente assegnati; di conseguenza, assume un'importanza cruciale il corretto posizionamento iniziale del polo spirale, affinché lo spostamento indotto dal guadagno non faccia uscire il sistema dai requisiti di progetto.

3. **EA con canale integrale ($EA\ INy$):** Al fine di preservare il pieno controllo sull'intero spettro degli autovalori, a differenza della configurazione in cascata, si sceglie di inglobare il canale integrale del fattore di carico laterale direttamente nell'assegnazione dell'autostruttura. Di conseguenza, i guadagni integrali applicati ai comandi del timone e degli alettoni non vengono imposti a posteriori, bensì derivano analiticamente come soluzione esatta dell'algoritmo di assegnazione modale.

4. **EA Constrained Output con canale integrale ($EA\ INy\ CO$):** Per superare le limitazioni intrinseche alle architetture precedenti, questa configurazione integra in modo sinergico le metodologie adottate utilizzando il *Constrained Output*. La sintesi della matrice di *feedback* si realizza vincolando analiticamente l'algoritmo di assegnazione dell'autostruttura, in modo da imporre che il guadagno associato all'azione integrale del fattore di carico laterale sul comando del timone assuma un valore di progetto definito iterativamente. A differenza della configurazione precedente, in cui l'algoritmo godeva di totale libertà, l'imposizione di un vincolo fisso su un guadagno comporta una inevitabile perdita di gradi di libertà e, conseguentemente, una minore autorità dell'algoritmo nell'assegnazione. Pertanto, la ricerca iterativa di tale valore rappresenta un compromesso ancora più delicato: si seleziona il guadagno che massimizza le prestazioni in simulazione prestando però la massima attenzione agli autovalori. Sebbene questi vengano calcolati e assegnati la ridotta autorità della matrice di feedback rende imperativo assicurarsi che la conseguente riallocazione dei poli rispetti limiti imposti dalle specifiche modali.

5.2.2 Progetto del canale di FeedForward

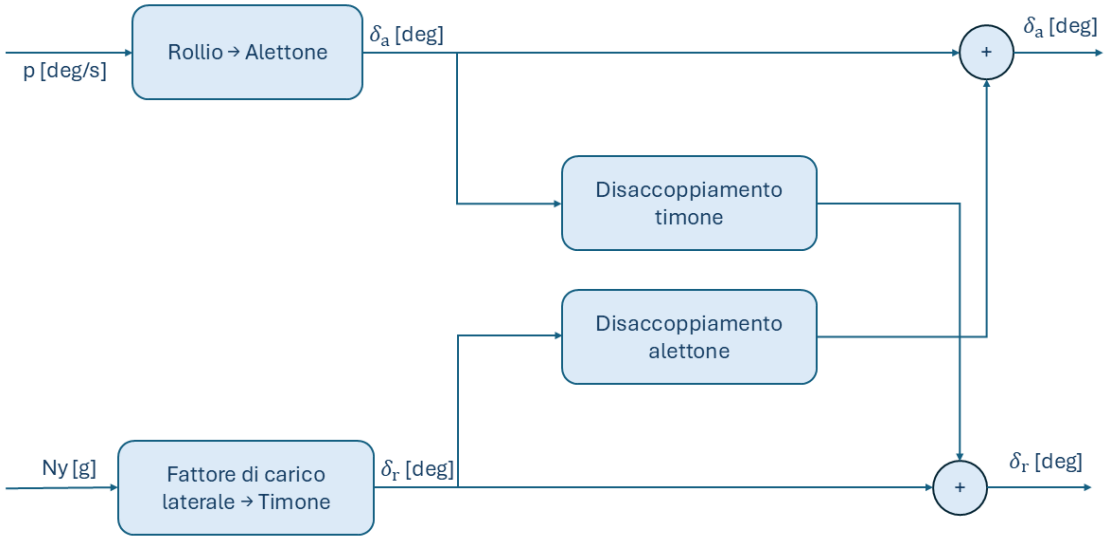


Figura 5.2: Schema FeedForward

La sintesi del canale di *feedforward* viene effettuata a valle della chiusura dell'anello di retroazione, operando pertanto sul sistema già compensato tramite l'assegnazione dell'autostruttura. La procedura di taratura si articola attraverso una campagna di simulazioni non lineari sollecitando l'impianto con comandi a gradino, applicati singolarmente agli alettoni e al timone. L'ampiezza di tali comandi è stata discretizzata all'interno di una griglia di deflessioni normalizzate compresa tra 0.1 e 1 (dove 1 corrisponde al 100% dell'escursione massima consentita della superficie).

L'obiettivo primario di questa prima fase è l'ottenimento di un disaccoppiamento incrociato ottimale in fase transitoria. Per ogni valore di deflessione degli alettoni imposto dalla griglia, si determina tramite simulazione l'esatta deflessione del timone necessaria a compensare l'accoppiamento indesiderato sul fattore di carico laterale. Il criterio di calibrazione adottato impone che il fattore di carico laterale N_y si annulli esattamente a un secondo di distanza dall'applicazione del comando. In questo modo, si garantisce che l'azione sugli alettoni governi esclusivamente il rollio. La medesima procedura iterativa viene ripetuta per il fattore di carico laterale: per ogni gradino di timone, si calcola la deflessione compensativa degli alettoni richiesta per sopprimere la velocità angolare di rollio indotta, imponendo anche in questo caso l'azzeramento della variabile cinematica parassita a un secondo dall'inizio della manovra.

Una volta definiti i parametri di disaccoppiamento incrociato, è necessario

passare da comandi espressi come frazioni di deflessione delle superfici a comandi fisici, velocità angolare di rollio p_{cmd} e fattore di carico laterale. A tale scopo, si esegue una seconda serie di simulazioni a gradino, questa volta effettuate sul sistema in cui è già attivo il disaccoppiamento appena calcolato. Mantenendo la medesima griglia di esplorazione da 0.1 a 1, si ricavano le funzioni di trasferimento statiche che legano l'ampiezza della grandezza fisica comandata alla deflessione nominale richiesta.

Acquisiti questi dati stazionari, l'architettura finale della catena viene implementata a monte del blocco di controllo. Essa si compone di due stadi in serie:

1. **Traduzione del comando:** Un primo blocco logico che, ricevendo in ingresso la richiesta del pilota, restituisce in uscita la corretta deflessione della superficie primaria, basandosi sulla mappatura precedentemente ricavata.

2. **Disaccoppiamento incrociato:** Un secondo blocco posto a valle che, leggendo la deflessione comandata al punto precedente, calcola e inietta automaticamente la deflessione sull'altra superficie mobile (alettone o timone) strettamente necessaria a compensare e annullare la variabile cinematica non desiderata.

5.2.3 Strategia di Gain Scheduling (GS)

Le caratteristiche aerodinamiche dell'F-16 dipendono fortemente dalla pressione dinamica [9]. Poiché il processo di linearizzazione restituisce un modello matematico la cui validità è rigorosamente confinata all'intorno del punto di equilibrio analizzato, un controllore ottimizzato per un'unica condizione nominale (ad esempio Mach 0.40) perde progressivamente efficacia qualora il velivolo acceleri o deceleri significativamente, allontanandosi da tale intorno.

Per sopperire a questa limitazione intrinseca e garantire che l'aereo rispetti i criteri di *handling qualities* sull'intero inviluppo operativo, si rende necessaria l'implementazione del *Gain Scheduling*. Questa tecnica permette di compensare l'allontanamento dal punto di lavoro nominale transitando, mediante un'approssimazione lineare, dalle leggi di controllo calcolate per uno specifico assetto a quelle calibrate per un assetto adiacente.

Dal punto di vista procedurale, la stesura di tale architettura impone di ripetere iterativamente l'intero processo di sintesi per ogni singolo nodo della griglia di progetto (nello specifico Mach 0.4 e 0.5): per ciascuna velocità è stato necessario ricercare la nuova condizione di trim, estrarre il relativo modello linearizzato e ricalcolare le matrici di controllo.

Operativamente, le matrici di feedback calcolate tramite assegnazione dell'autostruttura (EA) e i guadagni di *Feed Forward* sono stati inseriti all'interno di logiche

di controllo che interpolano linearmente i parametri in tempo reale. In questo modo, istante per istante e in stretta dipendenza dalla velocità misurata, il sistema adatta dinamicamente la sensibilità degli attuatori, assicurando una transizione continua e prestazioni ottimali su tutto lo spettro delle velocità esplorate.

5.3 Analisi modale ad anello chiuso e confronto delle architetture

Al fine di comprendere l'evoluzione della sintesi del controllore e giustificare la scelta dell'architettura finale, in questa sezione vengono analizzati i risultati modali ottenuti per ciascuna configurazione. Per fornire una corretta chiave di lettura, vengono dapprima richiamati l'autostruttura del sistema a catena aperta e i requisiti di progetto imposti dalle *Flying Qualities*.

5.3.1 Richiamo del sistema ad anello aperto e dei requisiti

L'analisi modale del sistema a catena aperta, calcolata nell'intorno del punto di trim nominale (Mach 0.40), ha rivelato l'autostruttura riportata in Tabella 5.2. Solo il modo di Rollio rispetta i requisiti di stabilità, mentre la Spirale risulta troppo stabile e il *Dutch Roll* è caratterizzato da uno smorzamento insufficiente. Inoltre, l'accoppiamento cinematico (autovettori) risulta altamente disordinato.

Tabella 5.2: Autostruttura a catena aperta (Mach 0.40)

	Dutch Roll	Spirale	Rollio
λ	$-0.4478 \pm 3.160i$	-0.01524	-2.923
$\boldsymbol{\phi}$	$0.01236 \mp 0.009238i$	1.000	-0.3431
$\boldsymbol{v}$	1.000	0.5468	-0.5626
$\boldsymbol{r}$	$-0.0002914 \pm 0.02012i$	0.07034	0.03924
$\boldsymbol{p}$	$-0.03471 \mp 0.03641i$	-0.02046	1.000

L'obiettivo modale dell'assegnazione, facente parte dei requisiti, è riassunto in Tabella 5.3.

Tabella 5.3: Requisiti dell'autostruttura target (richiamo)

	Rollio	Spirale	Dutch Roll
Autovalore (λ)	$-5 < \lambda_R < -1$	$\lambda_S > -0.01$	$\zeta_{DR} \geq 0.7$
$\boldsymbol{\phi}$	$*$	1	0
$\boldsymbol{v}$	0	0	1
$\boldsymbol{r}$	$*$	$*$	$*$
$\boldsymbol{p}$	1	$*$	$*$

5.3.2 Architettura EA base

In questa prima implementazione, l'algoritmo opera sui comandi di alettoni e timone basandosi unicamente sui sensori standard $(p, r, \sin(\phi), N_y)$. L'autostruttura assegnata impone i 4 poli e relativi autovettori.

Tabella 5.4: Autostruttura assegnata (Target) – EA base

	Dutch Roll	Spirale	Rollio
λ	$-2.266 \pm 2.248i$	-0.0100	-2.923
$\boldsymbol{\phi}$	0	1	$*$
$\boldsymbol{v}$	1	0	0
$\boldsymbol{r}$	$*$	$*$	$*$
$\boldsymbol{p}$	$*$	$*$	1

L'algoritmo centra perfettamente l'obiettivo modale, restituendo l'autostruttura ad anello chiuso riportata in Tabella 5.5.

Tabella 5.5: Autostruttura ad anello chiuso – EA base

	Dutch Roll	Spirale	Rollio
λ	$-2.266 \pm 2.248i$	-0.0100	-2.923
$\boldsymbol{\phi}$	$7 \cdot 10^{-10} \pm 4 \cdot 10^{-9}i$	1.000	-0.3434
$\boldsymbol{v}$	1.000	$-1 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-6}$
$\boldsymbol{r}$	$0.01552 \pm 0.01745i$	0.07127	0.05118
$\boldsymbol{p}$	$-0.001152 \mp 0.001295i$	-0.01529	1.000

Il disaccoppiamento risulta evidende: l'errore incrociato sulle variabili ϕ e v è confinato a ordini di grandezza trascurabili ($10^{-6} \div 10^{-10}$). La matrice di feedback F risultante è:

$$F_{EA} = \begin{bmatrix} -0.0008262 & 0.01285 & -0.05169 & 1.167 \\ -0.001575 & 0.02604 & -0.1287 & -0.6133 \end{bmatrix}$$

5.3.3 Architettura EA + K (Guadagno in cascata)

Per inserire l'azione integrale, viene sommato a valle un guadagno fisso $K_{int} = 0.02$ sul comando del timone. Per mitigare lo spostamento dei poli indotto da tale azione non modellata, l'autostruttura assegnata al controllore EA pre-posiziona il polo Spirale a $\lambda_S = -0.0050$ all'interno dei requisiti, con del margine.

Tabella 5.6: Autostruttura assegnata (Target) – EA + K

	Dutch Roll	Spirale	Rollio
λ	$-2.266 \pm 2.248i$	-0.0050	-2.923
$\boldsymbol{\phi}$	0	1	$*$
$\boldsymbol{v}$	1	0	0
$\boldsymbol{r}$	$*$	$*$	$*$
$\boldsymbol{p}$	$*$	$*$	1

L'autostruttura risultante a seguito della chiusura dell'anello completo (incluso il guadagno in cascata) è riportata in Tabella 5.7.

Tabella 5.7: Autostruttura ad anello chiuso – EA + K

	Dutch Roll	Spirale	Polo Integrale	Rollio
λ	$-2.262 \pm 2.240i$	-0.01396	-0.001035	-2.923
$\boldsymbol{\phi}$	$-6 \cdot 10^{-5} \pm 5 \cdot 10^{-6}i$	1.000	1.000	-0.3435
$\boldsymbol{v}$	1.000	-0.2368	0.1047	0.003016
$\boldsymbol{r}$	$0.01549 \pm 0.01740i$	0.07122	0.07181	0.05124
$\boldsymbol{p}$	$-0.001034 \mp 0.001155i$	-0.01925	-0.006365	1.000

La matrice di feedback (estesa per includere il guadagno integrale imposto) risulta:

$$F_{EA+K} = \begin{bmatrix} -0.0008345 & 0.01284 & -0.05310 & 1.167 & 0 \\ -0.001576 & 0.02604 & -0.1289 & -0.6133 & 0.02000 \end{bmatrix}$$

Questa architettura evidenzia il proprio limite: l'aggiunta del guadagno a posteriori compromette l'assegnazione iniziale. Nonostante il polo Spirale fosse stato assegnato a -0.0050, il sistema ad anello chiuso lo riposiziona a -0.01396, violando il limite di stabilità richiesto ($\lambda_S > -0.01$).

5.3.4 Architettura EA INy (Integrale di stato)

Per riacquisire la totale autorità sui poli, l'integrale del fattore di carico laterale viene inglobato nello stato durante la sintesi modale. Gli autovalori assegnati diventano cinque, così come i modi target. Dall'analisi del caso precedente si evince una marcata affinità strutturale tra le componenti dell'autovettore associato al polo integrale e quelle proprie del modo spirale; conseguentemente, in fase di assegnazione, si è perseguita una strategia di disaccoppiamento analoga per le variabili cinematiche di interesse.

Tabella 5.8: Autostruttura assegnata (Target) – EA INy

	Dutch Roll	Spirale	Polo Integrale	Rollio
λ	$-2.266 \pm 2.248i$	-0.0100	-0.0010	-2.923
$\boldsymbol{\phi}$	0	1	1	$*$
$\boldsymbol{v}$	1	0	0	0
$\boldsymbol{r}$	$*$	$*$	$*$	$*$
$\boldsymbol{p}$	$*$	$*$	$*$	1

L'algoritmo posiziona perfettamente tutti i poli e autovettori, restituendo l'autostruttura di Tabella 5.9.

Tabella 5.9: Autostruttura ad anello chiuso – EA INy

	Dutch Roll	Spirale	Polo Integrale	Rollio
λ	$-2.266 \pm 2.248i$	-0.0100	-0.0010	-2.923
$\boldsymbol{\phi}$	$7 \cdot 10^{-10} \pm 4 \cdot 10^{-9}i$	1.000	1.000	-0.3434
$\boldsymbol{v}$	1.000	$-1 \cdot 10^{-6}$	$-1 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-6}$
$\boldsymbol{r}$	$0.01552 \pm 0.01745i$	0.07127	0.07193	0.05118
$\boldsymbol{p}$	$-0.001152 \mp 0.001295i$	-0.01529	-0.006339	1.000

La cui matrice dei guadagni di retroazione risulta:

$$F_{INy} = \begin{bmatrix} -0.0008252 & 0.01285 & -0.05145 & 1.168 & 0.001928 \\ -0.001575 & 0.02604 & -0.1287 & -0.6132 & 0.0002332 \end{bmatrix}$$

5.3.5 Architettura EA INy CO (Constrained Output)

Questa architettura fonde l'approccio modale libero con la tecnica del *Constrained Output*. Si impone analiticamente che il guadagno integrale associato al timone assuma un valore fisso pari a 0.0400, e contestualmente si richiede all'algoritmo (che opera ora in regime di autorità ridotta) la seguente autostruttura.

Tabella 5.10: Autostruttura assegnata (Target) – EA INy CO

	Dutch Roll	Spirale	Polo Integrale	Rollio
λ	$-2.266 \pm 2.248i$	-0.0050	-0.0047	-2.923
$\boldsymbol{\phi}$	0	1	1	$*$
$\boldsymbol{v}$	1	0	0	0
$\boldsymbol{r}$	$*$	$*$	$*$	$*$
$\boldsymbol{p}$	$*$	$*$	$*$	1

L'autostruttura calcolata è presentata in Tabella 5.11.

Tabella 5.11: Autostruttura ad anello chiuso – EA INy CO

	Dutch Roll	Spirale	Polo Integrale	Rollio
λ	$-2.266 \pm 2.248i$	-0.009747	-0.004700	-2.923
$\boldsymbol{\phi}$	$8 \cdot 10^{-8} \pm 3 \cdot 10^{-9}i$	1.000	1.000	-0.3434
$\boldsymbol{v}$	1.000	-0.1987	$4 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-5}$
$\boldsymbol{r}$	$0.01552 \pm 0.01745i$	0.07150	0.07166	0.05118
$\boldsymbol{p}$	$-0.001152 \mp 0.001295i$	-0.01505	-0.01002	1.000

In questa configurazione, l'algoritmo dimostra un eccellente bilanciamento: duch roll e spirale soddisfano a pieno l'assegnazine, la perdita di autorità legata al *Constrained Output* si osserva sui poli reali a bassa frequenza. Nello specifico, il polo Spirale non rispetta a pieno il disaccoppiamento tra angolo di rollio e velocità laterale, tuttavia si posiziona a -0.009747, un valore molto prossimo al limite ma rigorosamente all'interno delle tolleranze ($\lambda_S > -0.01$).

La matrice di feedback vincolata assume infine la struttura ottima desiderata:

$$F_{CO} = \begin{bmatrix} -0.0008283 & 0.01286 & -0.05189 & 1.170 & 0.004531 \\ -0.001516 & 0.02621 & -0.1174 & -0.5932 & \mathbf{0.04000} \end{bmatrix}$$

Tale compromesso iterativo si rivela il più efficace in assoluto: garantisce autorità integrale tramite il timone nel generale rispetto dei requisiti modali.

5.4 Simulazioni non lineari della risposta di rollio

La validazione delle leggi di controllo è stata condotta sul modello non lineare completo, testando la risposta ad un comando a gradino di rollio prolungato ($p_{cmd} = 100°/s$).

5.4.1 Test a velocità longitudinale bloccata

Al fine di valutare le prestazioni delle quattro architetture nell'intorno esatto del punto di linearizzazione, un primo test è stato eseguito imponendo $\dot{u} = 0$. Questo vincolo impedisce al velivolo di accelerare , mantenendolo nel regime di Mach 0.40.

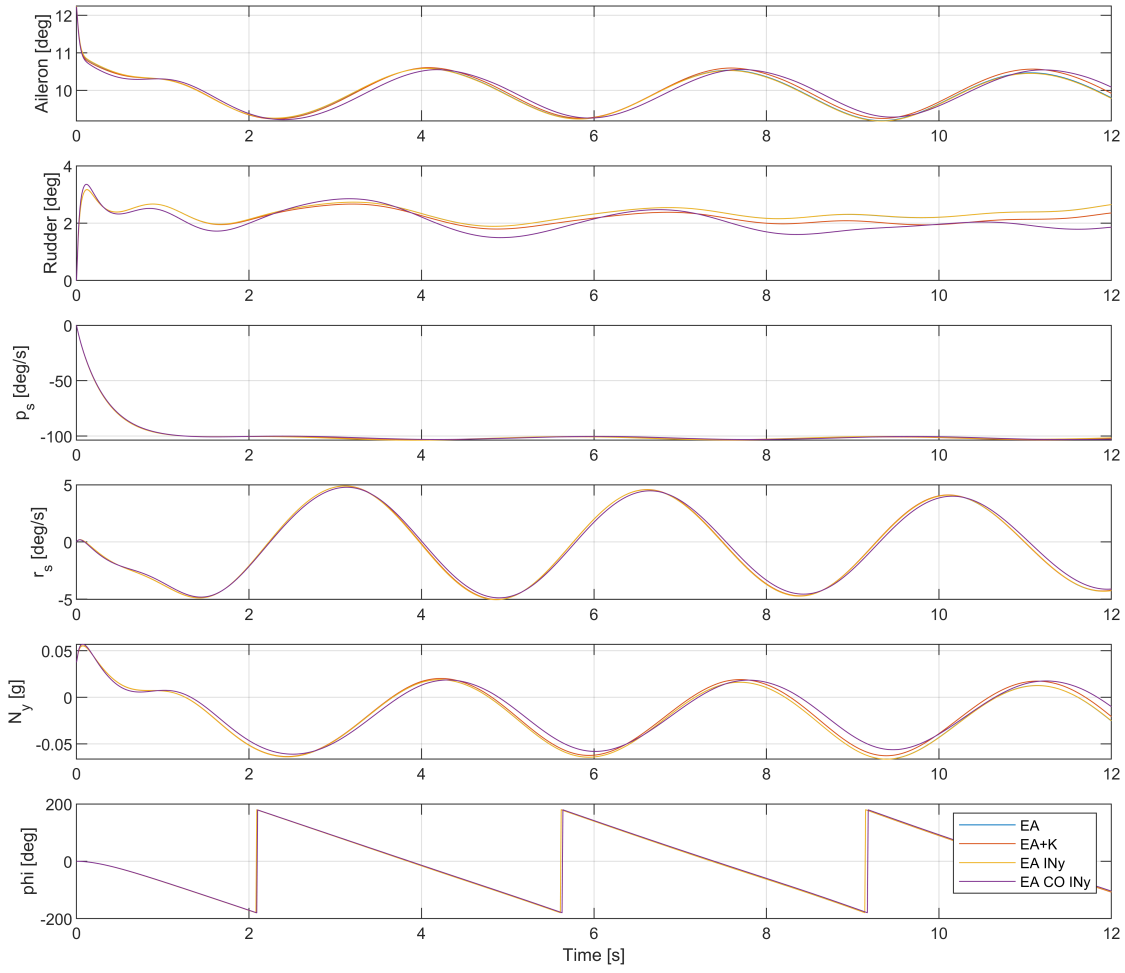


Figura 5.3: Risposta temporale delle variabili laterodirezionali, Mach 0.4, velocità longitudinale bloccata

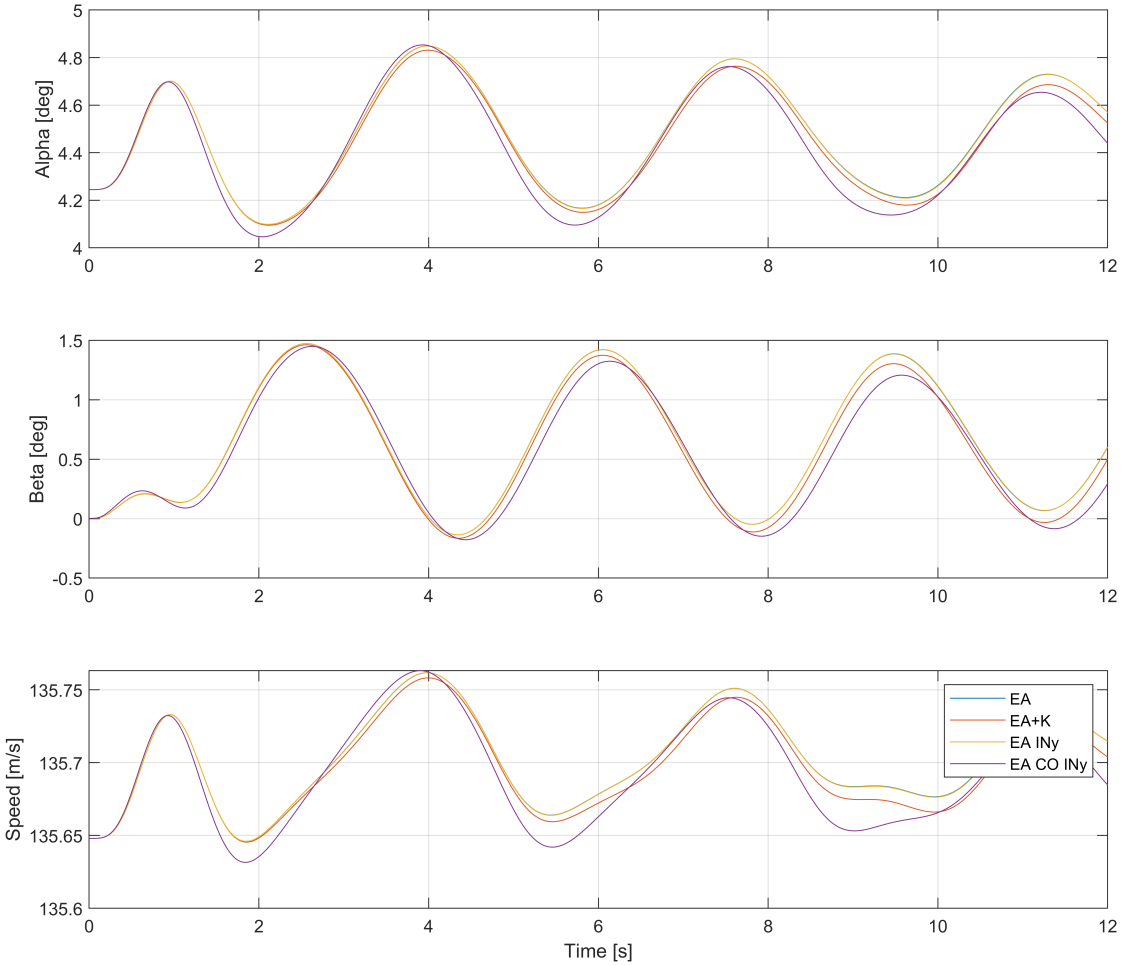


Figura 5.4: Risposta temporale angoli aerodinamici e velocità, Mach 0.4, velocità longitudinale bloccata

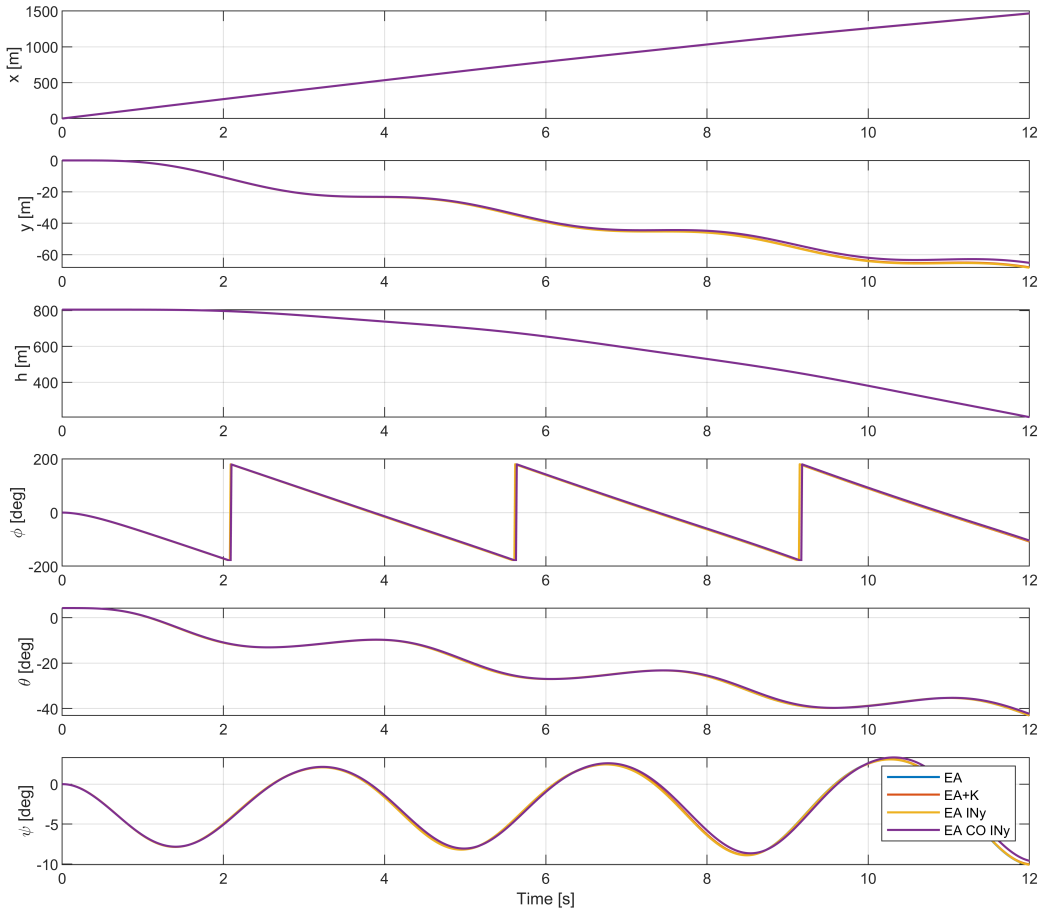


Figura 5.5: Tracciamento della posizione e degli angoli di assetto durante la risposta, Mach 0.4, velocità longitudinale bloccata

Dall'analisi delle evoluzioni temporali emerge che, esaurito il transitorio iniziale, le variabili cinematiche latero-direzionali presentano un'oscillazione stazionaria alla stessa frequenza con cui l'aereo completa un ciclo di rollio (360°). Per quantificare in modo rigoroso le prestazioni e confrontare le stesse fasi evolutive in modo omogeneo, le misurazioni dell'escursione massima e del valore medio sono state allineate basandosi sui cicli stazionari. I risultati misurati per i primi due giri a valle del transitorio sono riassunti in Tabella 5.12.

Tabella 5.12: Escursione massima e valore medio di N_y a velocità bloccata

	1° Giro Stazionario		**2° Giro Stazionario**	
Architettura	Escursione [g]	Media [g]	Escursione [g]	Media [g]
EA	0.0833	-0.0227	0.0825	-0.0238
$EA + K$	0.0839	-0.0214	0.0818	-0.0210
$EA\ IN_y$	0.0833	-0.0227	0.0825	-0.0239
$\boldsymbol{EA\ IN_y\ CO}$	**0.0797**	$\mathbf{-0.0204}$	**0.0765**	$\mathbf{-0.0187}$

Come si evince dai dati, l'introduzione di elementi aggiuntivi nell'architettura di controllo è utile alla riduzione del fattore di carico laterale. Analizzando la configurazione *EA + K*, si osserva che il valore medio dell'accelerazione migliora, avvicinandosi allo zero; tuttavia, l'escursione massima si mantiene molto vicina ai valori registrati con l'architettura *EA* di base. Un andamento pressoché analogo al caso base si riscontra per l'architettura *EA INy*, la quale, a differenza della precedente rientra nei limiti dei requisiti modali. Il processo evolutivo culmina infine nella configurazione *EA INy CO*, che si dimostra in assoluto la più efficace. Quest'ultima architettura riesce a garantire il miglior controllo sul valore medio (avvicinandolo progressivamente e stabilmente allo zero) e restituisce contestualmente la minima escursione assoluta.

5.4.2 Test a velocità libera e validazione del Gain Scheduling

Nelle reali condizioni di volo, il velivolo è soggetto a variazioni di velocità. Eseguendo una manovra di rollio continuo, il valor medio della portanza proiettato sull'asse verticale terrestre risulta nullo al termine di ciascun giro. Pertanto, come nel caso a velocità longitudinale bloccata, l'aeromobile tende a perdere quota. Svincolando però la dinamica longitudinale, l'accelerazione di gravità domina il moto lungo l'asse verticale: il velivolo riduce progressivamente l'angolo di beccheggio innescando una discesa accelerata, transitando nell'arco della simulazione da Mach 0.40 a Mach 0.50.

Al fine di governare questa severa variazione della pressione dinamica, si è scelto di testare in regime di accelerazione l'architettura precedentemente identificata come ottimale (*EA INy CO*). Tale validazione viene condotta impiegando due distinte metodologie. Il primo test impiega un controllore statico a guadagni fissi, sintetizzato esclusivamente nell'intorno del punto di trim nominale a Mach 0.40. Il secondo approccio, volto a superare i limiti di robustezza del modello precedente, prevede invece l'implementazione di una logica di *Gain Scheduling*. Tale sistema si avvale di una seconda condizione operativa calcolata a Mach 0.50 (il cui modello

linearizzato completo, congiuntamente ai guadagni di feedback e all'autostruttura calcolata, è riportato integralmente nell'Appendice B), permettendo al controllore di adattare dinamicamente la propria azione all'effettivo stato cinematico del velivolo.

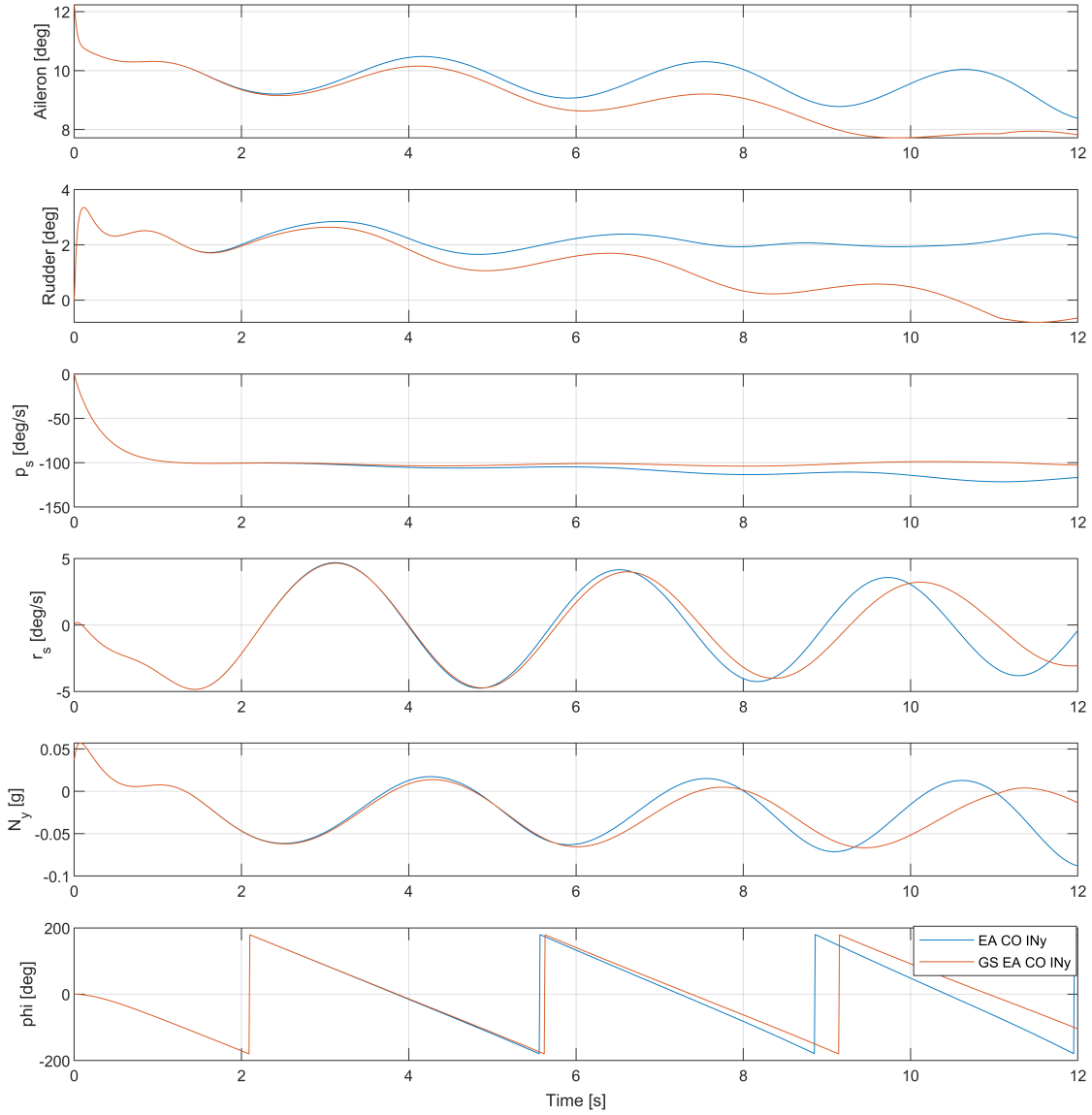


Figura 5.6: Risposta temporale delle variabili laterodirezionali, Mach 0.4, velocità libera

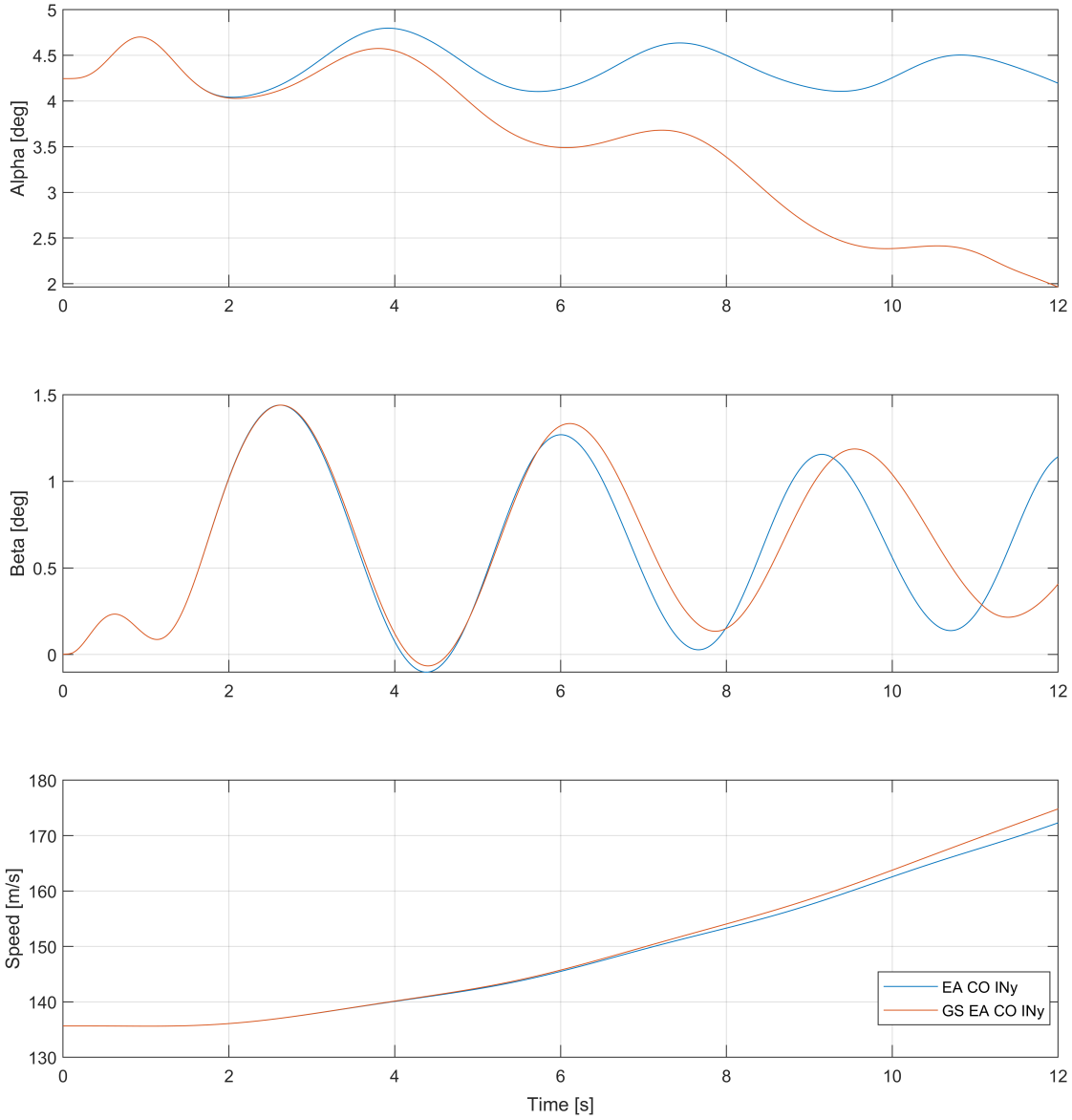


Figura 5.7: Risposta temporale angoli aerodinamici e velocità, Mach 0.4, velocità libera

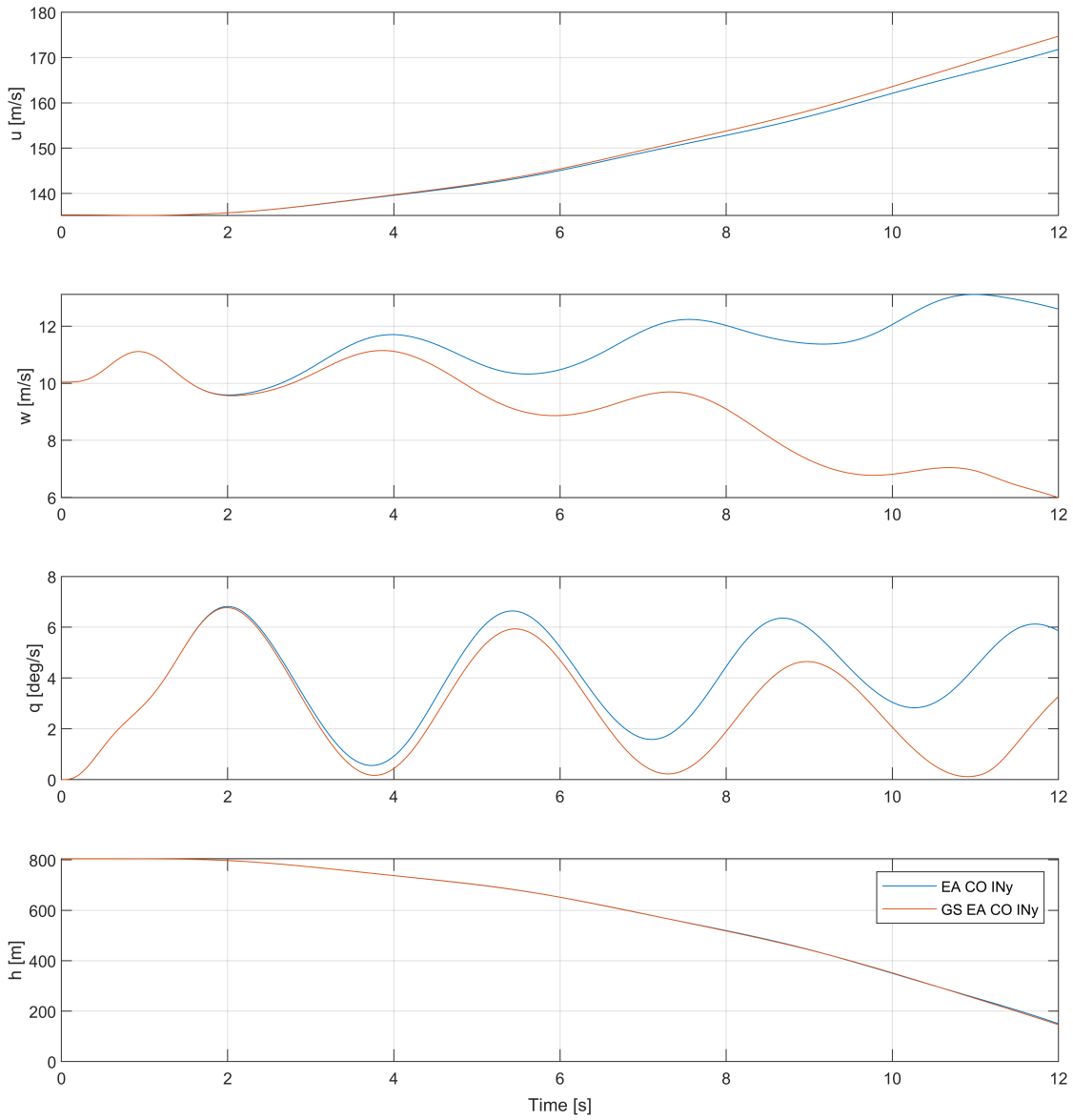


Figura 5.8: Risposta temporale delle variabili laterodirezionali, Mach 0.4, velocità libera

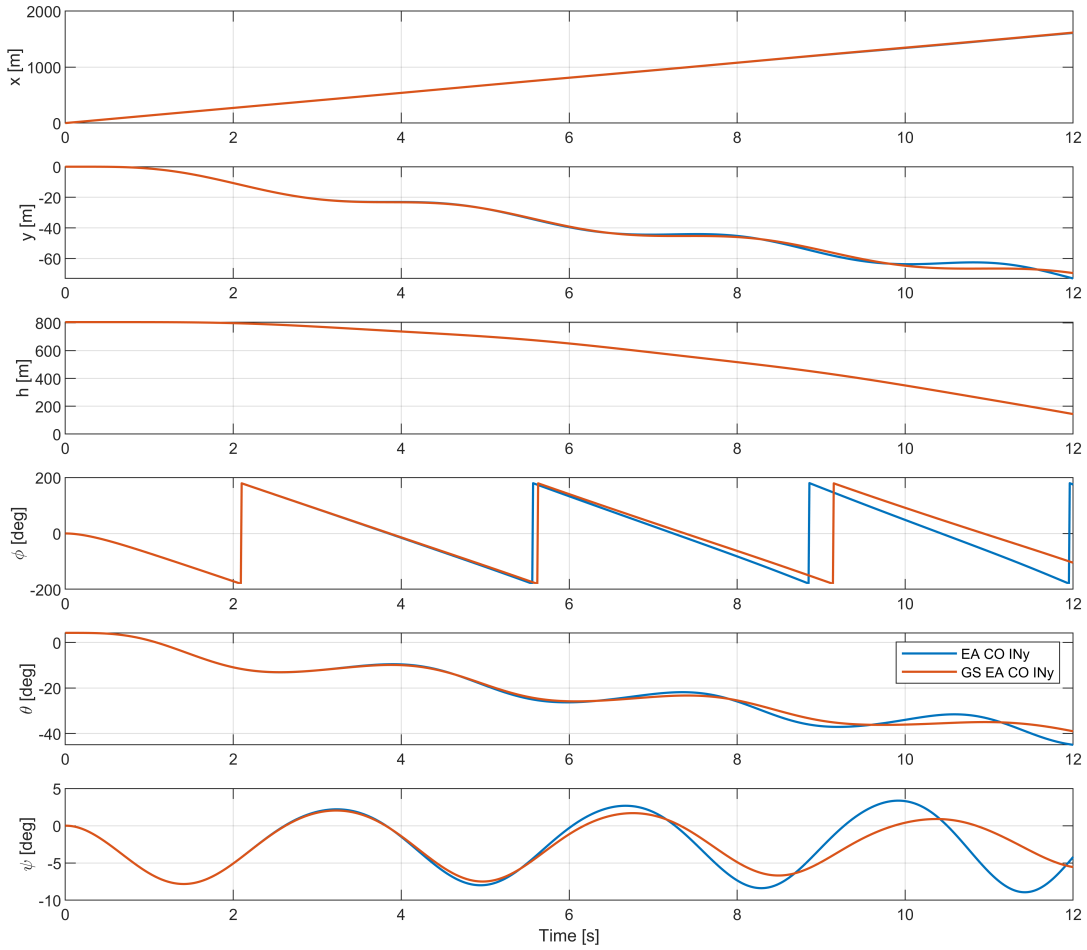


Figura 5.9: Tracciamento della posizione e degli angoli di assetto durante la risposta, Mach 0.4, velocità libera

Nelle prime fasi del moto, le variabili cinematiche e dinamiche di entrambe le configurazioni coincidono perfettamente, poiché il velivolo opera nell'intorno delle condizioni di trim nominali (Mach 0.40). Tuttavia, l'incremento della velocità si traduce in un drastico aumento della pressione dinamica. All'avanzare della simulazione, il modello a guadagni fissi subisce una severa degradazione delle prestazioni: si assiste a un aumento involontario del rateo di rollio, causato dal mancato adattamento della deflessione degli alettoni. Al contrario, il controllore con *Gain Scheduling* adatta dinamicamente il guadagno di *feedforward*: a parità di comando in ingresso, la deflessione richiesta per gli alettoni viene opportunamente ridotta, mantenendo il rateo di rollio perfettamente ancorato al target per l'intera durata della manovra.

Il progressivo disallineamento della velocità angolare di rollio tra i due casi, unito al continuo adattamento di alettoni e timone dettato dal *Gain Scheduling*, rende meno omogeneo il confronto diretto tra le due architetture. Ciononostante, analizzando la Tabella 5.13, si apprezza chiaramente come l'escursione massima nel caso con *Gain Scheduling* si riduca dal primo al secondo giro stazionario. Nella configurazione a guadagni fissi (senza GS), invece, l'oscillazione tende a crescere contestualmente all'incremento del rateo di rollio.

Tabella 5.13: Confronto N_y a velocità libera con e senza Gain Scheduling (Architettura EA INy CO)

	1° Giro Stazionario		**2° Giro Stazionario**	
Logica	Escursione [g]	Media [g]	Escursione [g]	Media [g]
Senza GS	0.0804	−0.0223	0.0865	−0.0252
Con GS	**0.0793**	**−0.0271**	**0.0716**	**−0.0302**

Nonostante il velivolo raggiunga Mach 0.50 in una condizione non stazionaria, lo sfruttamento dell'interpolazione lineare per l'aggiornamento simultaneo del *feedforward* e del *feedback* conferisce al sistema una riduzione dell'escursione del fattore di carico laterale non raggiungibile da un controllore statico.

5.5 Discussione critica dei risultati e delle scelte architetturali

L'analisi delle prestazioni ottenute impone una valutazione critica sull'efficacia dell'assegnazione dell'autostruttura (*Eigenstructure Assignment*, EA) e sulle motivazioni che hanno guidato il progressivo raffinamento architetturale del controllore.

5.5.1 Validazione modale e trade-off ingegneristici

A differenza delle metodologie confinate al mero riposizionamento dei poli, l'assegnazione dell'autostruttura dimostra una notevole versatilità, consentendo il controllo diretto sugli autovettori. L'imposizione dei target modali ha infatti garantito l'isolamento cinematico richiesto dalle *Flying Qualities*, confinando il rollio sulla velocità angolare p e il *Dutch Roll* sul solo piano direzionale.

Tuttavia, il rigore matematico dell'algoritmo EA puro ha evidenziato dei limiti nel controllo del fattore di carico laterale N_y durante la risposta al comando di rollio. Il tentativo di ovviare a tale criticità mediante l'introduzione di un'azione integrale *a posteriori* (Architettura $EA + K$) ha palesato l'impossibilità di operare

sui singoli canali senza degradare il delicato equilibrio multivariabile, conducendo a un'inaccettabile iper-stabilizzazione del polo Spirale ($\lambda_S = -0.0139$).

Per contro, l'integrazione diretta dell'azione integrale nello stato (Architettura *EA INy*) ha assicurato il rigoroso posizionamento dello spettro modale; tuttavia, tale approccio ha comportato un assenza del contenimento del fattore di carico laterale durante le fasi di simulazione.

La necessità di individuare un compromesso tra il pieno controllo dell'autostruttura modale e l'impostazione di un guadagno mirato a ottimizzare la risposta transitoria, ha giustificato il ricorso all'algoritmo *Constrained Output* (Architettura *EA INy CO*). Vincolando esplicitamente il guadagno dell'integrale del fattore di carico sul timone, si è inevitabilmente ridotta l'autorità matematica dell'algoritmo. I risultati, tuttavia, dimostrano l'equilibrio di tale compromesso: il controllore ha preservato l'allocazione dei modi ad alta frequenza e il relativo disaccoppiamento, scaricando la perdita di gradi di libertà esclusivamente sui poli reali lenti. Sebbene il posizionamento del polo Spirale a $\lambda_S = -0.0097$ consenta di rispettare i requisiti di stabilità, tale vincolo comporta come contropartita una riduzione del disaccoppiamento di tale modo.

5.5.2 Impatto delle non-linearità e necessità del Gain Scheduling

La simulazione condotta a velocità sbloccata ha evidenziato la marcata influenza della manovra sulla velocità longitudinale e sulla dinamica complessiva del velivolo.

In un transitorio caratterizzato da un così severo incremento della pressione dinamica, un controllore a guadagni fissi va incontro a un rapido degrado prestazionale, manifestando una evidente divergenza del rateo di rollio. In tale contesto operativo, l'implementazione del *Gain Scheduling* conferma appieno la propria necessità strutturale: già indispensabile per la gestione dell'ampio inviluppo di volo stazionario dell'F-16, esso si rivela cruciale anche per garantire stabilità e prevedibilità durante repentine evoluzioni non stazionarie.

Aggiornando dinamicamente l'autostruttura target e interpolando i relativi parametri, il sistema assimila in tempo reale l'evoluzione dell'inviluppo di volo. L'azione combinata sul canale di *Feed Forward* (mediante l'attenuazione del comando agli alettoni) e sulla matrice di *Feedback* (tramite l'adattamento alla mutata autostruttura) ha neutralizzato con successo l'effetto delle variazioni aerodinamiche.

Capitolo 6

Conclusioni

6.1 Sintesi del lavoro svolto

Il presente lavoro di tesi si è posto l'obiettivo di progettare e validare un sistema di controllo del volo latero-direzionale per un velivolo F-16 altamente manovrabile. Per affrontare la complessità delle dinamiche accoppiate e soddisfare i rigorosi requisiti di *Handling Qualities*, è stata adottata la tecnica dell'assegnazione dell'autostruttura (*Eigenstructure Assignment*, EA), la quale ha permesso di intervenire simultaneamente sugli autovalori e sugli autovettori del sistema ad anello chiuso.

Partendo da un modello non lineare completo, l'ambiente di simulazione è stato impiegato per estrarre le matrici di stato linearizzate nell'intorno di specifiche condizioni di volo. L'architettura di controllo sviluppata non si è limitata alla sola sintesi modale, ma è evoluta in una logica di controllo avanzata. Tale architettura integra nativamente il controllo dell'accelerazione laterale nell'assegnazione modale, imponendo vincoli sulla matrice di retroazione (architettura *EA INy CO*), un canale di *Feed Forward* (FF) per un comando ottimale del pilota, e un sistema di *Gain Scheduling* (GS) per l'adattamento dinamico dei guadagni di retroazione e di feed-forward al variare della velocità.

6.2 Risultati ottenuti

I risultati analitici e le simulazioni non lineari confermano la validità dell'approccio proposto. A livello teorico, l'algoritmo di assegnazione dell'autostruttura ha garantito un discreto disaccoppiamento cinematico per il modo spirale, ottimo negli altri casi, confinando l'energia del modo di Rollio esclusivamente sulla velocità angolare p e quella del *Dutch Roll* sulla velocità laterale v. L'autostruttura desiderata è stata raggiunta assicurando al contempo il target di smorzamento richiesto ($\zeta_{DR} \geq 0.70$).

Sotto il profilo operativo, la simulazione di una manovra di rollio prolungata

ha evidenziato come l'approccio modale puro richieda adeguate integrazioni per governare regimi di volo che si allontanano dall'intorno di linearizzazione. In tale contesto, la configurazione *EA INy CO* si è rivelata la soluzione progettuale ottimale. Integrando il canale integrale direttamente nel calcolo modale e vincolandone al contempo il guadagno mediante la tecnica *Constrained Output*, tale architettura ha assicurato un eccellente bilanciamento tra il rigore del controllo modale e l'efficacia nella risposta al comando. Tale strategia ha permesso di abbattere drasticamente sia l'escursione massima picco-picco, sia il valore medio del fattore di carico laterale N_y, garantendo un'esecuzione della manovra fluida, nel pieno rispetto dei limiti strutturali e dei requisiti di comfort per il pilota.

Infine, sebbene l'implementazione del *Gain Scheduling* sia un requisito primariamente concepito per garantire la stabilità e il rispetto dei target modali sull'intero inviluppo in condizioni di volo stazionario, essa si è rivelata determinante anche durante le manovre transitorie a velocità libera. Pur operando al di fuori di un rigoroso assetto di equilibrio, l'aggiornamento continuo e simultaneo dei canali di *feedback* e *feedforward* ha infatti garantito il costante adattamento del controllore alle repentine variazioni aerodinamiche del velivolo. Questa modulazione dinamica ha permesso di migliorare le prestazioni complessive e mitigare le oscillazioni residue del fattore di carico laterale.

6.3 Limiti della soluzione proposta

Nonostante l'efficacia dimostrata, la soluzione sviluppata presenta alcune limitazioni intrinseche derivanti dall'impostazione metodologica. Il limite principale risiede nella perdita di autorevolezza del controllo qualora ci si allontani eccessivamente dalle condizioni nominali di progetto. Le matrici calcolate garantiscono le prestazioni desiderate solo in un intorno ristretto del punto di trim (nel caso di specie, Mach 0.40 in volo rettilineo livellato). Al di fuori di questa finestra operativa, le marcate non linearità aerodinamiche dell'F-16 degradano inevitabilmente l'efficacia di un feedback a guadagni fissi.

Un'ulteriore criticità emersa durante la fase di sintesi concerne l'adozione congiunta dell'azione integrale e della tecnica *Constrained Output*. La fisiologica riduzione dei gradi di libertà dell'algoritmo impone l'accettazione di un compromesso sull'autostruttura ad anello chiuso. Nel dettaglio, l'autovettore associato al modo spirale ha evidenziato un disaccoppiamento non ottimale, mentre il corrispondente autovalore e la radice introdotta dal polo integrale hanno manifestato una marcata interazione dinamica reciproca. Tale vincolo limita inevitabilmente l'autorità del progettista nella scelta arbitraria dell'assegnazione modale.

6.4 Possibili sviluppi futuri

A partire dalle criticità evidenziate, si delineano diverse prospettive per i futuri sviluppi del progetto. In primo luogo, la limitazione legata all'errore di linearizzazione e all'ampiezza dell'inviluppo operativo può essere mitigata attraverso un infittimento della griglia del *Gain Scheduling*. Aumentare la risoluzione dei punti di design (ad esempio campionando ogni variazione di Mach pari a 0.05 e interpolando contestualmente in funzione della quota) ridurrebbe gli errori di approssimazione lineare, assicurando che le matrici di controllo operino costantemente nel loro intorno di validità ottimale.

Appendice A

Matrici del modello linearizzato a Mach 0.40

In questa appendice vengono riportate le matrici del modello linearizzato latero-direzionale estratto nell'intorno della condizione di volo rettilineo livellato a Mach 0.40. Il sistema a valle è costituito da 20 stati complessivi, 2 ingressi (δ_a, δ_r) e 4 uscite osservate $(p, r, \sin\phi, N_y)$.

Matrice Dinamica (A)

$$
A_{0.40} = \begin{bmatrix}
-31.42 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -31.42 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.0301 & 0.0924 & 9.7797 & 0 & -0.2564 & 0.0742 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0.0240 & -0.0554 & 0 & 0.0615 & -134.22 & -0.5107 & 10.123 & -0.0601 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0.5279 & 0.0947 & 0 & -0.2057 & 0.7119 & -3.0666 & 0 & 0 & -50.27 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 400 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 50.27 & -338.46 & -30.77 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 400 & -400 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 329.63 & -335.94 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0.7312 & -0.7547 & 0 & -5.444 & 1.2116 & -1.5441 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 400 & -400 & -338.46 & -30.77 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6.3165 & 400 & -400 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 329.63 & -335.94 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6.3165 & 400 & -400 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -50.27 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 50.27 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -338.46 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 400 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -30.77 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -400
\end{bmatrix}
$$

Matrice di Ingresso (B) e di Uscita (C)

La matrice di controllo B (20×2) viene riportata nel suo naturale orientamento verticale, mentre la matrice di osservazione C (4×20) è stata ruotata per ragioni di formattazione spaziale.

$$B_{0.40} = \begin{bmatrix} 675.44 & 0 \\ 0 & 942.48 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{A.1}$$

$$C_{0.40} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0696 & -8.1367 & 56.957 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5539 & -8.1367 & 56.957 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0097 & -0.1420 & 0.9941 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0012 & -0.1420 & 0.9941 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Appendice B

Matrici del modello linearizzato a Mach 0.50

In questa appendice vengono riportate le matrici del sistema per la condizione operativa valutata a Mach 0.50 (in cui subentra la logica di *Gain Scheduling*).

Matrice Dinamica (A)

$$
A_{6.50} = \begin{bmatrix}
-31.42 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -31.42 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.0480 & 0.1424 & 9.7995 & 0 & -0.3234 & -168.16 & 6.4301 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0.0390 & -0.0865 & 0 & 0.0795 & -0.6329 & -0.0253 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0.8166 & 0.1512 & 0 & -0.2098 & 0.7032 & -3.8899 & 0 & -50.27 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 400 & 0 & 0 & 0 & 50.27 & 0 & -338.46 & -30.77 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 400 & 0 & -400 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 400 & 0 & 329.63 & -335.94 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1.2242 & -1.2459 & 0 & -6.7073 & 0.2457 & -4.4158 & 0 & 0 & 0 & 400 & 0 & -400 & -338.46 & -30.77 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 400 & 6.3165 & 0 & -400 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 400 & 0 & 329.63 & -335.94 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 400 & 0 & -400 & -338.46 & -30.77 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 400 & 6.3165 & 0 & -400 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 400 & 0 & 50.27 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 400 & -338.46 & -30.77 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 400 & -400
\end{bmatrix}
$$

Matrice di Ingresso (B) e di Uscita (C)

Essendo le matrici B e C puramente dipendenti dalla configurazione fisica e geometrica degli attuatori e dei sensori installati sul velivolo, esse risultano invarianti rispetto alla variazione di pressione dinamica. Di seguito si riportano i risultati dell'analisi modale effettuata sull'architettura *EA INy CO* applicata al modello a Mach 0.50.

Autostruttura a Catena Aperta (Senza controllo)

	Spirale	Dutch Roll	Rollio
λ	-0.0114	$-0.5124 \pm 3.7991i$	-3.8100
$\boldsymbol{\phi}$	1.0000	$0.0083 \pm 0.0067i$	-0.2626
$\boldsymbol{v}$	0.4410	1.0000	-0.3269
$\boldsymbol{r}$	0.0569	$0.0005 \mp 0.0211i$	0.0162
$\boldsymbol{p}$	-0.0135	$-0.0296 \pm 0.0289i$	1.0000

Autostruttura Assegnata (Target)

	Rollio	Spirale	Dutch Roll	Polo Integrale
λ	-3.8100	-0.0030	$-2.7218 \pm 2.6996i$	-0.0027
$\boldsymbol{\phi}$	$*$	1	0	1
$\boldsymbol{v}$	0	0	1	0
$\boldsymbol{r}$	$*$	$*$	$*$	$*$
$\boldsymbol{p}$	1	$*$	$*$	$*$

Autostruttura Ottenuta ad Anello Chiuso (CL)

	Rollio	Dutch Roll	Polo Integrale	Spirale
λ	-3.8100	$-2.7218 \pm 2.6996i$	-0.0027	-0.0066
$\boldsymbol{\phi}$	-0.2627	$1.8 \cdot 10^{-7} \pm 1.1 \cdot 10^{-8}i$	1.0000	1.0000
$\boldsymbol{v}$	$5.3 \cdot 10^{-5}$	1.0000	$1.3 \cdot 10^{-5}$	-0.1281
$\boldsymbol{r}$	0.0234	$0.0149 \mp 0.0168i$	0.0577	0.0577
$\boldsymbol{p}$	1.0000	$-0.0006 \pm 0.0006i$	-0.0049	-0.0088

Matrice dei Guadagni di Feedback ($F_{CO,0.50}$)

$$F = \begin{bmatrix} -0.0002 & 0.0091 & -0.0306 & 0.5400 & 0.0013 \\ -0.0005 & 0.0176 & -0.0508 & -0.5693 & 0.0400 \end{bmatrix} \tag{B.1}$$

Bibliografia

[1] O. Albostan e M. Gökaşan, «Mode decoupling robust eigenstructure assignment applied to the lateral-directional dynamics of the F-16 aircraft», *Aerospace Science and Technology*, vol. 77, pp. 677–687, 2018.

[2] A. N. Andry Jr., E. Y. Shapiro e J. C. Chung, «Eigenstructure Assignment for Linear Systems», *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. AES-19, n. 5, pp. 711–729, 1983.

[3] J. B. Davidson e D. Andrisani II, *Lateral-Directional Eigenvector Flying Qualities Guidelines for High Performance Aircraft*, NASA Technical Memorandum 110306, NASA Langley Research Center, Hampton, Virginia, 1996.

[4] M. C. Fox e D. K. Forrest, *Supersonic Aerodynamic Characteristics of an Advanced F-16 Derivative Aircraft Configuration*, NASA Technical Paper 3355, NASA Langley Research Center, Hampton, Virginia, 1993.

[5] Steven D. Ishmael and Capt. Donald R. McMonagle, *Flight Test Results and Lessons*, (Rif. 87995main_H1206).

[6] R. E. Kalman, «Mathematical Description of Linear Dynamical Systems», *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, Series A: Control*, vol. 1, n. 2, pp. 152–192, 1963.

[7] L. T. Nguyen, M. E. Ogburn, W. P. Gilbert, K. S. Kibler, P. W. Brown e P. L. Deal, *Simulator Study of Stall/Post-Stall Characteristics of a Fighter Airplane With Relaxed Longitudinal Static Stability*, NASA Technical Paper 1538, NASA Langley Research Center, Hampton, Virginia, 1979.

[8] K. M. Sobel, E. Y. Shapiro e A. N. Andry Jr., «Eigenstructure assignment», *International Journal of Control*, vol. 59, n. 1, pp. 13–37, 1994.

[9] L. Sonneveldt, *Nonlinear F-16 Model Description*, Control & Simulation Division, Faculty of Aerospace Engineering, Delft University of Technology, versione 0.3, 2006.

[10] S. Srinathkumar, «Eigenvalue/Eigenvector Assignment Using Output Feedback», *NASA Technical Paper 1118*, 1978.