

POLITECNICO DI TORINO

Collegio di Ingegneria Meccanica, Aerospaziale e dell'Autoveicolo

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccanica

**Analisi modale dei band-gap in metamateriali meccanici
periodici: contributi modali, modi evanescenti e meccanismi
fisici di attenuazione in una catena discreta.**



**Politecnico
di Torino**

Relatore

Dott. Alessandro Daga

Candidato

Tommaso Galli

Anno Accademico 2025/2026

Questa tesi propone un'analisi modale dei meccanismi fisici alla base dei band-gap in una catena periodica discreta di masse e molle, con cella unitaria a quattro masse ripetuta sei volte lungo la struttura. Il metodo consiste nella decomposizione modale della trasmissibilità: separando i contributi dei 24 modi di vibrare frequenza per frequenza, si individua come le forme modali agli estremi della catena si combinano per produrre cancellazione al numeratore o amplificazione al denominatore, generando l'attenuazione osservata in ciascuno dei tre gap. Questo approccio modale permette di andare oltre la semplice individuazione dei gap: in ciascuno di essi è presente un modo evanescente, la cui forma modale non è prevista dalla teoria di Bloch per il sistema infinito, ma emerge nel sistema finito grazie alle condizioni al contorno libere. Il confronto tra i risultati ottenuti sul sistema finito e il diagramma di dispersione ricavato dal teorema di Bloch conferma la posizione dei tre gap, ma non ne spiega la profondità di attenuazione: è proprio la scomposizione modo per modo a rivelare che questa dipende dalle proprietà specifiche di ciascun modo evanescente. I tre gap, pur generati dalla stessa cella unitaria, operano attraverso meccanismi distinti: nel Gap 1 il modo evanescente amplifica il denominatore della trasmissibilità; nel Gap 2 la cancellazione coinvolge collettivamente più modi; nel Gap 3 i due meccanismi agiscono insieme, producendo l'attenuazione massima del sistema.

Sommario

1) Introduzione	1
2) Descrizione del sistema e identificazione dei band-gap	3
2.1 Scelta e descrizione del sistema	3
2.2 Costruzione delle matrici di massa e rigidezza	4
2.3 Frequenze naturali e modi di vibrare	5
2.4 Trasmissibilità	6
2.5 Teorema di Bloch e diagramma di dispersione	7
2.6 Identificazione dei tre band-gap.....	9
2.7 Convergenza con il numero di celle.....	9
3) Analisi dei band-gap	11
3.1 Metodo di analisi.....	11
3.1.1 La trasmissibilità come rapporto di recettanze	11
3.1.2 L'espansione modale	12
3.1.3 Il significato fisico di A_r e B_r	13
3.1.4 Indipendenza del rapporto A_r/B_r dalla frequenza.....	13
3.1.5 Il cambio di segno e il meccanismo dei Gap	14
3.1.6 Struttura dell'analisi	14
3.2 Classificazione dei modi di vibrare.....	14
3.2.1 Modi simmetrici.....	14
3.2.2 Modi antisimmetrici.....	15
3.2.3 Modi evanescenti	16
3.2.4 Conseguenze sulla trasmissibilità	17
3.3 Analisi del Gap 1	18
3.3.1 Zona passante prima del Gap 1: $\omega = 7,503 \text{ rad/s}$	19

3.3.2	Risonanza del modo 6 antisimmetrico: $\omega = 8,123 \text{ rad/s}$	20
3.3.3	Bordo inferiore del Gap 1: $\omega = 8,912 \text{ rad/s}$	21
3.3.4	Risonanza del modo evanescente 7: $\omega = 9,277 \text{ rad/s}$	23
3.3.5	Centro geometrico del Gap 1: $\omega = 10,120 \text{ rad/s}$	24
3.3.6	Minimo assoluto di T nel Gap 1: $\omega = 10,309 \text{ rad/s}$	26
3.3.7	Bordo superiore del Gap 1: $\omega = 11,335 \text{ rad/s}$	27
3.3.8	Risonanza del modo 8: $\omega = 12,056 \text{ rad/s}$	29
3.3.9	Zona passante dopo il Gap 1: $\omega = 12,505 \text{ rad/s}$	30
3.4	Analisi del Gap 2.....	31
3.4.1	Zona passante prima del Gap 2: $\omega = 15,500 \text{ rad/s}$	31
3.4.2	Risonanza del modo 12: $\omega = 16,402 \text{ rad/s}$	32
3.4.3	Bordo inferiore del Gap 2: $\omega = 16,707 \text{ rad/s}$	34
3.4.4	Risonanza del modo evanescente 13: $\omega = 17,318 \text{ rad/s}$	36
3.4.5	Centro geometrico del Gap 2: $\omega = 19,237 \text{ rad/s}$	38
3.4.6	Minimo assoluto di T nel Gap 2: $\omega = 19,906 \text{ rad/s}$	40
3.4.7	Bordo superiore del Gap 2: $\omega = 21,767 \text{ rad/s}$	41
3.4.8	Risonanza del modo 14: $\omega = 21,971 \text{ rad/s}$	42
3.4.9	Zona passante dopo il Gap 2: $\omega = 23,003 \text{ rad/s}$	42
3.5	Analisi del Gap 3.....	43
3.5.1	Zona passante prima del Gap 3: $\omega = 23,003 \text{ rad/s}$	44
3.5.2	Risonanza del modo 18: $\omega = 23,905 \text{ rad/s}$	44
3.5.3	Bordo inferiore del Gap 3: $\omega = 24,021 \text{ rad/s}$	45
3.5.4	Centro geometrico del Gap 3: $\omega = 26,286 \text{ rad/s}$	46
3.5.5	Minimo assoluto di T nel Gap 3: $\omega = 26,551 \text{ rad/s}$	46

3.5.6	Risonanza del modo evanescente 19: $\omega = 28,528 \text{ rad/s}$	47
3.5.7	Bordo superiore del Gap 3: $\omega = 28,543 \text{ rad/s}$	48
3.5.8	Risonanza del modo 20: $\omega = 28,587 \text{ rad/s}$	49
3.5.9	Zona passante dopo il Gap 3: $\omega = 29,081 \text{ rad/s}$	50
4)	Conclusioni	51
5)	Bibliografia	53

Indice Figure

Figura 1.1 - Schema di una catena periodica discreta di masse e molle. Fonte: Jensen, J.S., Journal of Sound and Vibration, 2003.....	1
Figura 1.2 - Confronto tra trasmissibilità misurata sperimentalmente e calcolata numericamente	2
Figura 2.1 - Cella unitaria costituita da 4 masse e 4 molle	3
Figura 2.2 - Trasmissibilità del sistema con $N = 6$ celle in funzione della frequenza angolare, con frequenze naturali del sistema evidenziate e band-gap	6
Figura 2.3 - Diagramma di dispersione.....	8
Figura 2.4 - Confronto fra Diagramma di dispersione e Trasmissibilità	8
Figura 2.5 - Confronto Trasmissibilità per $N=2$, $N=3$, $N=6$ numero di celle	10
Figura 3.1 – Recettanze $\alpha_{end,1}$ e $\alpha_{1,1}$ in funzione di ω	12
Figura 3.2 - Modi 1, 3, 5, 9 simmetrici	15
Figura 3.3 - Modi 2, 4, 6, 8 antisimmetrici	16
Figura 3.4 - Forme modali dei tre modi evanescenti a confronto	17
Figura 3.5 - Trasmissibilità Gap 1 con le 9 frequenze evidenziate	18
Figura 3.6 - Confronto spostamenti $\omega = 7,503 \text{ rad/s}$ vs $\omega = 8,128 \text{ rad/s}$	21
Figura 3.7 - Forma modale modo 7.....	23
Figura 3.8 - Spostamenti 24 masse a $\omega = 9,277 \text{ rad/s}$ con decadimento 0,749 per cella	24
Figura 3.9 - Confronto spostamenti normalizzati $\omega = 9,277 \text{ rad/s}$ vs $\omega = 10,120 \text{ rad/s}$	26
Figura 3.10 - Spostamenti a $\omega = 11,342 \text{ rad/s}$	28
Figura 3.11 - Forme modali modo 7 e modo 8 sovrapposte	28
Figura 3.12 - Spostamenti delle 24 masse alla risonanza del modo 8 ($\omega_8 = 12,056 \text{ rad/s}$).....	29
Figura 3.13 - Spostamenti 24 masse a $\omega = 12,505 \text{ rad/s}$	30
Figura 3.14 - Trasmissibilità Gap 2 con le 9 frequenze evidenziate	31
Figura 3.15 - Confronto spostamenti $\omega = 15,500 \text{ rad/s}$ vs $\omega = 16,402 \text{ rad/s}$	34

Figura 3.16 - Forma modale modo 13 con $\varphi_1^{(13)}$ evidenziato	35
Figura 3.17 - Spostamenti 24 masse a $\omega = 17,318 \text{ rad/s}$	37
Figura 3.18 - Confronto tra la forma modale normalizzata del modo 13 e gli spostamenti normalizzati a $\omega = 17,321 \text{ rad/s}$	38
Figura 3.19 - Spostamenti normalizzati a $\omega = 19,237 \text{ rad/s}$	40
Figura 3.20 - Trasmissibilità Gap 3 con 9 frequenze evidenziate	43

Indice Tabelle

Tabella 2.1 - Frequenze naturali del sistema	5
Tabella 2.2 - Intervalli Band-gap , trasmissibilità minima, frequenza del minimo e centro geometrico	9
Tabella 3.1 – Frequenze di interesse Gap 1 con ΣA , ΣB , T	19
Tabella 3.2 - Ar e Br per $\omega = 7,503 \text{ rad/s}$	20
Tabella 3.3 - Ar e Br per $\omega = 8,128 \text{ rad/s}$	21
Tabella 3.4 - Ar e Br per $\omega = 8,913 \text{ rad/s}$	22
Tabella 3.5 - Ar e Br per $\omega = 9,277 \text{ rad/s}$	24
Tabella 3.6 - Ar e Br per $\omega = 10,120 \text{ rad/s}$	25
Tabella 3.7 - Ar e Br per $\omega = 10,309 \text{ rad/s}$	27
Tabella 3.8 - Ar e Br per $\omega = 15,500 \text{ rad/s}$	32
Tabella 3.9 - Ar e Br per $\omega = 16,402 \text{ rad/s}$	33
Tabella 3.10 - Ar e Br per $\omega = 16,707 \text{ rad/s}$	35
Tabella 3.11 - Ar e Br per $\omega = 17,318 \text{ rad/s}$	36
Tabella 3.12 - Ar e Br per $\omega = 19,237 \text{ rad/s}$	39
Tabella 3.13 - Ar e Br per $\omega = 19,906 \text{ rad/s}$	41
Tabella 3.14 - Ar e Br per $\omega = 23,905 \text{ rad/s}$	45
Tabella 3.15 - Ar e Br per $\omega = 24,021 \text{ rad/s}$	45
Tabella 3.16 - Ar e Br per $\omega = 26,286 \text{ rad/s}$	46
Tabella 3.17 - Ar e Br per $\omega = 26,551 \text{ rad/s}$	47
Tabella 3.18 - Ar e Br per $\omega = 28,528 \text{ rad/s}$	47
Tabella 3.19 - Ar e Br per $\omega = 28,543 \text{ rad/s}$	49
Tabella 3.20 - Ar e Br per $\omega = 28,587 \text{ rad/s}$	49

1) Introduzione

I metamateriali sono strutture artificiali le cui proprietà dipendono dalla geometria della struttura interna invece che dalla composizione chimica. La cella unitaria, ripetuta periodicamente nello spazio, determina il comportamento macroscopico del materiale; questo li distingue dai materiali convenzionali, dove le proprietà sono fissate dalla natura degli atomi che li compongono: progettare la geometria significa quindi progettare le proprietà.

Nel campo dell'elettromagnetismo i metamateriali mostrano fenomeni come la rifrazione negativa, impossibili nei materiali naturali. Un analogo meccanico esiste per le onde elastiche e acustiche: i cristalli fononici sono strutture periodiche che controllano la propagazione delle onde meccaniche attraverso la geometria della cella unitaria. Il fenomeno più rilevante per le applicazioni è l'apertura di band-gap, intervalli di frequenza in cui le onde non possono propagarsi attraverso la struttura. Una struttura con queste proprietà si comporta come un filtro passivo che blocca le vibrazioni in una certa banda di frequenza [2].

I band-gap si formano attraverso due meccanismi distinti. Il primo è la diffusione di Bragg, generata dalla periodicità della struttura e dall'interferenza distruttiva delle onde diffuse dalle inclusioni. Il secondo è la risonanza locale, in cui risonatori interni alla cella unitaria bloccano la propagazione indipendentemente dalla periodicità [3]. Il Teorema di Bloch fornisce lo strumento per calcolare il diagramma di dispersione di una struttura periodica infinita e identificare le bande proibite [2] (si veda *Figura 2.3*).

I cristalli fononici e i metamateriali meccanici trovano impiego in diversi ambiti pratici: dall'isolamento delle vibrazioni nelle strutture aerospaziali, al controllo del rumore, fino all'attenuazione delle onde sismiche negli edifici. Una rassegna di queste applicazioni, con particolare attenzione alle proprietà meccaniche insolite di questi materiali e al loro uso nel controllo passivo delle vibrazioni, è presentata in [3].

Il modello più semplice per studiare questi fenomeni è una catena discreta di masse e molle, l'analogo monodimensionale di un cristallo fononico. Jensen [1] ha mostrato che strutture periodiche a masse e molle in una e due dimensioni presentano band-gap analoghi a quelli dei sistemi continui, con un'analisi esatta del problema agli autovalori. La validità del modello discreto è confermata dal confronto con misure sperimentali, come mostrato in *Figura 1.2*: la trasmissibilità calcolata riproduce con buona approssimazione quella ottenuta in laboratorio.

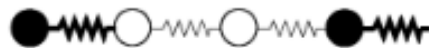


Figura 1.1 - Schema di una catena periodica discreta di masse e molle. Fonte: Jensen, J.S., Journal of Sound and Vibration, 2003.

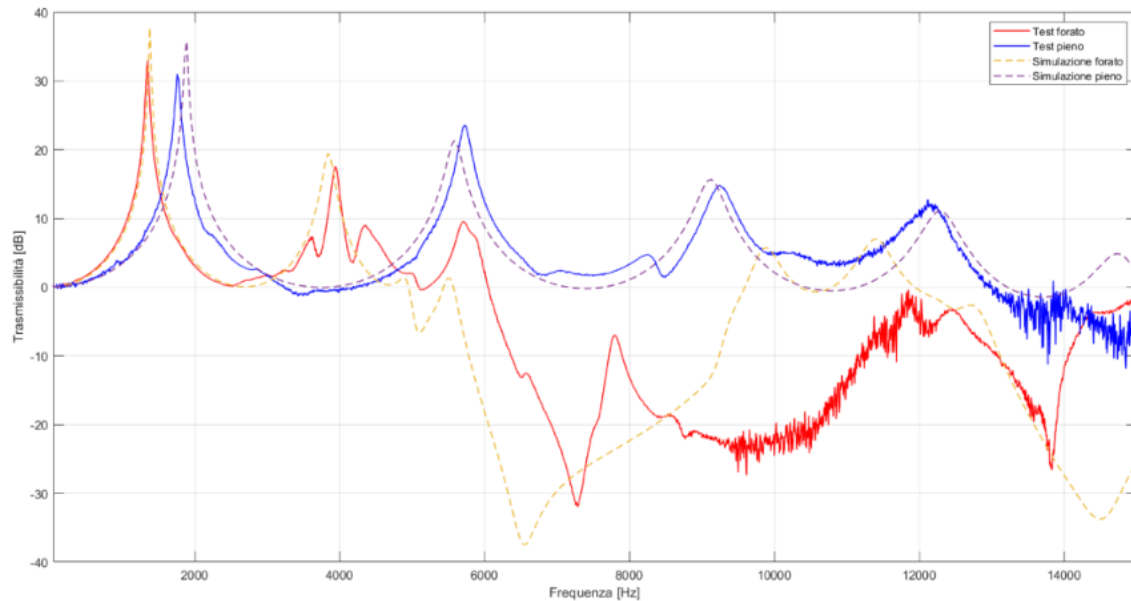


Figura 1.2 - Confronto tra trasmissibilità misurata sperimentalmente e calcolata numericamente

La letteratura sui cristalli fononici si concentra prevalentemente sull'analisi del sistema infinito attraverso il diagramma di dispersione, che identifica le bande proibite ma non spiega i meccanismi fisici che producono l'attenuazione nel sistema finito. Nei sistemi finiti le condizioni al contorno ai bordi della catena permettono l'esistenza di modi di vibrare all'interno dei band-gap, noti come modi evanescenti: modi con ampiezza massima ai bordi della catena e decadimento esponenziale verso l'interno del sistema. La letteratura esistente descrive questi modi attraverso il numero d'onda complesso del sistema infinito, ma non analizza sistematicamente come i loro contributi modali si combinano con quelli degli altri modi per determinare la trasmissibilità del sistema finito.

Questa tesi analizza i meccanismi fisici alla base dei band-gap in una catena periodica discreta a sei celle con cella unitaria a quattro masse, attraverso la decomposizione modale della trasmissibilità. Separando i contributi dei 24 modi di vibrare frequenza per frequenza è possibile seguire come i singoli contributi si combinano per produrre attenuazione in ciascun gap. I tre gap del sistema mostrano meccanismi fisicamente distinti, legati alle diverse proprietà del modo evanescente presente in ciascuno di essi.

2) Descrizione del sistema e identificazione dei band-gap

2.1 Scelta e descrizione del sistema

Il sistema analizzato nel lavoro di tesi è una catena periodica monodimensionale discreta composta da masse e molle. Il motivo di questa scelta è legato alla trattabilità del modello; dal punto di vista analitico una catena discreta permette la costruzione delle matrici di massa e rigidità in forma esplicita, la risoluzione del problema agli autovalori in modo esatto e il calcolo della trasmissibilità con dettaglio sufficiente per un'analisi modale dei meccanismi di attenuazione, a patto che il numero di celle sia adeguatamente elevato.

L'obiettivo di questa tesi è spiegare i risultati ottenuti analiticamente, partendo dalle proprietà delle forme modali e dai parametri del sistema che definiscono la fisica del modello. Una struttura con cella unitaria a quattro masse presenta tre band-gap distinti, ognuno con il proprio meccanismo di formazione; attraverso l'analisi di questi meccanismi è possibile creare un confronto fra i comportamenti che generano queste zone dove non si ha trasmissione e cogliere in maniera sistematica differenze e analogie di risposta all'interno della struttura. Un ulteriore vantaggio del modello scelto è che permette un confronto con la teoria di Bloch, la quale si basa sull'individuazione di band-gap in catene periodiche: si ha dunque una comparazione diretta fra i risultati ottenuti su un sistema finito e il diagramma di dispersione ottenuto a partire dal sistema infinito.

La cella unitaria presa in esame è composta da 4 masse e da 4 molle (*Figura 2.1*), con valori numerici scelti arbitrariamente:

$$m_{cell} = [1, 0.5, 1, 1] \text{ (kg)} \quad (2.1)$$

$$k_{cell} = [100, 200, 150, 200] \text{ (N/m)} \quad (2.2)$$

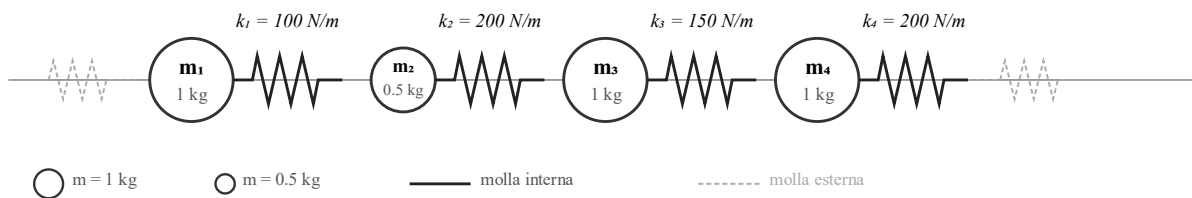


Figura 2.1 - Cella unitaria costituita da 4 masse e 4 molle

I valori non uniformi di massa e rigidità sono alla base dell'apertura dei band-gap: la differenza fra masse e rigidità crea una riflessione parziale dell'onda che innesca un meccanismo di interferenza distruttiva. Anche il numero di band-gap dipende dalla composizione della cella, infatti nel diagramma di dispersione con n masse si hanno n rami e quindi $n - 1$ band-gap. Infine anche la posizione e l'ampiezza in frequenza dei band-gap dipendono dai parametri delle celle.

La struttura finita presa in esame è ottenuta dalla ripetizione della cella unitaria $N = 6$ volte in serie. La scelta di $N = 6$ è motivata dal compromesso tra due esigenze contrastanti (sezione 2.7): da una parte è necessario avere un numero di celle sufficientemente elevato in modo tale da poter approssimare il comportamento del sistema infinito previsto dalla teoria di Bloch (sezione 2.5),

dall'altra un numero eccessivo di celle renderebbe il sistema troppo grande per compiere un'analisi dettagliata dei singoli contributi modali alle diverse frequenze di interesse.

Il numero totale di gradi di libertà del sistema è:

$$N_{DOF} = N \times n_{cell} = 6 \times 4 = 24 \quad (2.3)$$

Le estremità della catena sono libere e questa condizione al contorno ha importanti conseguenze sulla distribuzione dei modi di vibrare e inoltre permette la stabilizzazione di modi evanescenti all'interno dei gap: si tratta di forme modali che divergono nel sistema infinito, ma esistenti e protagoniste dei meccanismi di attenuazione nel sistema reale.

La forzante è applicata al primo grado di libertà del sistema (prima massa della catena) ed ha ampiezza unitaria e frequenza variabile, la risposta viene invece misurata all'ultimo grado di libertà. Si sta dunque prendendo in analisi la capacità della struttura di trasmettere vibrazioni da un'estremità all'altra, comportamento tipico dei filtri vibrazionali passivi, in cui la sorgente vibrazionale è posta a un'estremità, mentre il sistema da proteggere si trova all'estremità opposta.

2.2 Costruzione delle matrici di massa e rigidezza

Le matrici di massa e rigidezza sono costruite assemblando i contributi di tutte e 6 le celle. Per prima cosa si individuano i vettori delle masse e delle rigidezze, dati dalle $N = 6$ ripetizione dei vettori della cella unitaria:

$$m_{vec} = [m_{cell}, m_{cell}, \dots, m_{cell}] \in R^{24} \quad (2.4)$$

$$k_{vec} = [k_{cell}, k_{cell}, \dots, k_{cell}] \in R^{24} \quad (2.5)$$

La matrice di massa M si ottiene ponendo gli elementi di m_{vec} sulla diagonale principale:

$$M = diag(m_{vec}) \in R^{24 \times 24} \quad (2.6)$$

La matrice di rigidezza K è tridiagonale simmetrica e viene costruita a partire dal principio di equilibrio dinamico applicato ad ogni massa della catena:

$$m_i \ddot{x}_i = -k_{i-1}(x_i - x_{i-1}) - k_i(x_i - x_{i+1}) \quad (2.7)$$

Il passo successivo è quello di ottenere i coefficienti della matrice di rigidezza:

$$K_i = k_{i-1} + k_i \quad (2.8)$$

$$K_{i,i-1} = K_{i-1,i} = -k_{i-1} \quad (2.9)$$

$$K_{i,i+1} = K_{i+1,i} = -k_i \quad (2.10)$$

Per quanto detto riguardo i bordi liberi, si impongono condizioni al contorno libere alle estremità $k_0 = 0$ e $k_{24} = 0$, ne risulta:

$$K_{11} = k_1 \quad (2.11)$$

$$K_{24,24} = k_{23} \quad (2.12)$$

Si può notare come la prima e la ultima massa siano collegate ad una sola molla a differenza di tutte le altre masse.

2.3 Frequenze naturali e modi di vibrare

Le frequenze naturali e le forme modali del sistema si ottengono dalla risoluzione del problema agli autovalori associato alle matrici M e K :

$$K \cdot \phi^{(r)} = \omega_r^2 \cdot M \cdot \phi^{(r)} \quad r = 1, 2, \dots, 24 \quad (2.13)$$

Le frequenze naturali ω_r e le forme modali $\phi^{(r)}$ si ottengono proprio dalle 24 coppie di autovalori e autovettori. Nella *Tabella 2.1* sono riportate le 24 frequenze naturali del sistema ordinate in modo crescente.

Tabella 2.1 - Frequenze naturali del sistema

Modo	ω (rad/s)	Modo	ω (rad/s)	Modo	ω (rad/s)
1	0	9	13,294	17	23,547
2	1,712	10	14,525	18	23,899
3	3,409	11	15,606	19	28,531
4	5,074	12	16,398	20	28,592
5	6,676	13	17,321	21	28,709
6	8,123	14	21,975	22	28,854
7	9,273	15	22,465	23	28,985
8	12,056	16	23,037	24	29,074

Dalle frequenze naturali riportate in *Tabella 2.1* si notano tre salti nella sequenza dei valori:

- Il primo è tra $\omega_6 = 8,123 \text{ rad/s}$ e $\omega_8 = 12,056 \text{ rad/s}$, con $\omega_7 = 9,273 \text{ rad/s}$ unica frequenza nel Gap 1.
- Il secondo è tra $\omega_{12} = 16,398 \text{ rad/s}$ e $\omega_{14} = 21,975 \text{ rad/s}$, con $\omega_{13} = 17,321 \text{ rad/s}$ interna al Gap 2.
- Il terzo è tra $\omega_{18} = 23,899 \text{ rad/s}$ e $\omega_{20} = 28,592 \text{ rad/s}$, con $\omega_{19} = 28,531 \text{ rad/s}$ unica frequenza all'interno del Gap 3.

Questi tre salti corrispondono ai tre band-gap del sistema, la cui posizione esatta verrà confermata dal diagramma di dispersione ricavato dall'analisi di Bloch.

La *Figura 2.2* rende questa distribuzione immediatamente visibile attraverso la rappresentazione grafica delle 24 frequenze naturali.

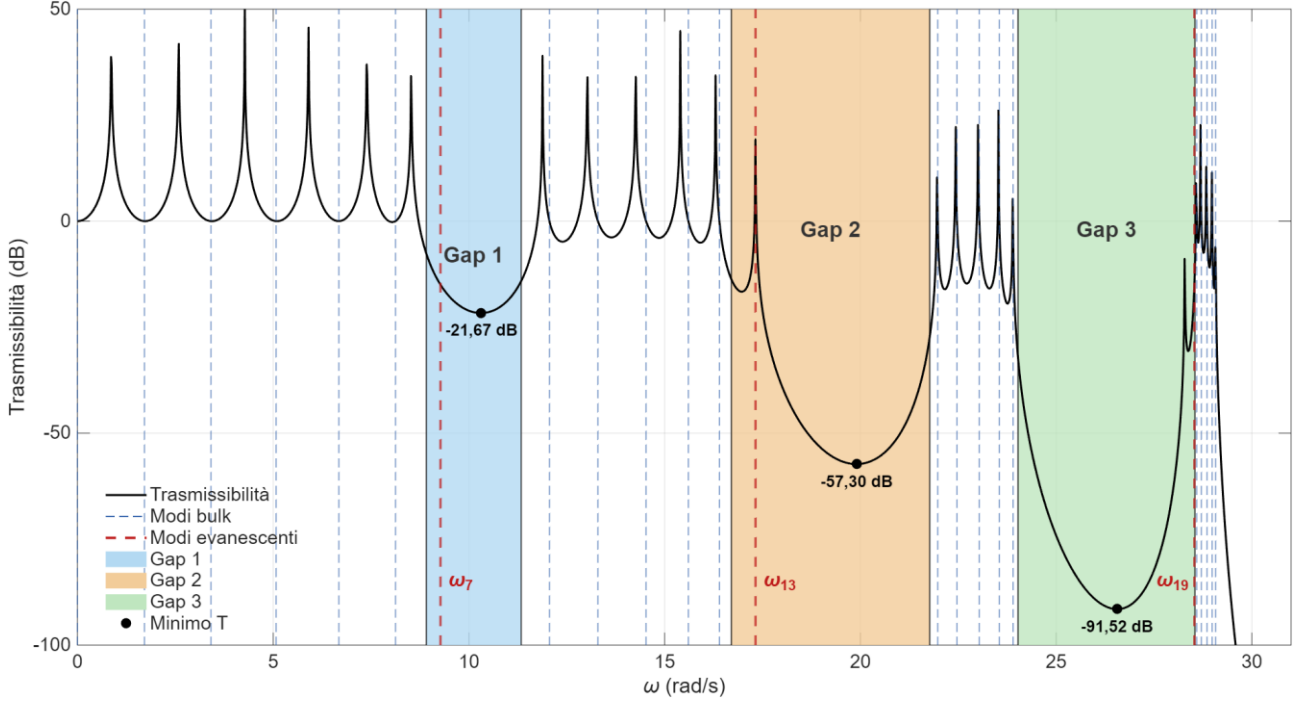


Figura 2.2 - Trasmissibilità del sistema con $N = 6$ celle in funzione della frequenza angolare, con frequenze naturali del sistema evidenziate e band-gap

2.4 Trasmissibilità

La trasmissibilità è la grandezza centrale di questa tesi: la sua decomposizione modale permette di identificare i meccanismi fisici alla base della formazione dei band-gap. Viene calcolata come rapporto tra i moduli della recettanza $\alpha_{end,1}(\omega)$, spostamento dell'ultima massa per effetto della forzante applicata alla prima massa del sistema e dell'autorecettanza $\alpha_{1,1}(\omega)$, spostamento della prima massa per effetto della forzante applicata a questa stessa massa:

$$T(\omega) = \left| \frac{\alpha_{end,1}(\omega)}{\alpha_{1,1}(\omega)} \right| = \left| \frac{\sum_{r=1}^{24} \frac{\phi_{24}^{(r)} \cdot \phi_1^{(r)}}{\omega_r^2 - \omega^2}}{\sum_{r=1}^{24} \frac{[\phi_1^{(r)}]^2}{\omega_r^2 - \omega^2}} \right| \quad (2.14)$$

Per valutare la trasmissibilità viene usata una griglia con 4000 punti di frequenza equidistanti nell'intervallo $[0, 2 \cdot \omega_{max}]$. I punti di campionamento non coincidono esattamente con le frequenze naturali del sistema né con i bordi teorici dei band-gap: le frequenze analizzate nel capitolo “*Analisi dei band-gap*” sono i punti della griglia più vicini a quelle di interesse fisico, con scarti dell'ordine di 10^{-2} rad/s .

Nella *Figura 2.2* è rappresentata la trasmissibilità in decibel in funzione della frequenza; si può notare come nella zona di banda passante la trasmissibilità oscilla con dei minimi locali che toccano $T = 0 \text{ dB}$. Le frequenze naturali dei modi del sistema si trovano (a parte alcune eccezioni rappresentate dai modi evanescenti trattati nella sezione 3.2.3) nei pressi di $T = 0 \text{ dB}$ poiché numeratore e denominatore della (2.14) divergono nella stessa misura e si ha $T \approx 1$. Per quanto riguarda i picchi di trasmissibilità questi si generano tra risonanze contigue dal momento in cui il denominatore $\alpha_{1,1}$ ha un minimo locale dato dalla combinazione dei contributi modali: la massa 1 risponde alla forzante molto meno della massa 24 (la trasmissibilità sale sopra l'unità). Nei band-gap è invece visibile il fenomeno ricercato, ovvero una forte attenuazione: si raggiungono $T = -21,67 \text{ dB}$ nel Gap 1, $T = -57,30 \text{ dB}$ nel Gap 2 e $T = -91,52 \text{ dB}$ nel Gap 3 e le cause sono proprio l'oggetto di studio di questa tesi.

2.5 Teorema di Bloch e diagramma di dispersione

Il diagramma di dispersione (*Figura 2.3*) si ottiene a partire dal Teorema di Bloch applicato alla cella unitaria. Si risolve il problema agli autovalori della matrice di rigidità (2.15) per ciascun valore del numero d'onda adimensionale ζ in $[0, \pi]$, imponendo le condizioni di periodicità (2.16 e 2.17) tra l'ultima massa della cella e la prima massa della cella successiva:

$$K(\zeta) \cdot \phi = \omega^2 \cdot M_{cell} \cdot \phi \quad (2.15)$$

$$K(1, n_{cell}) = -k_{end} \cdot e^{i\zeta} \quad (2.16)$$

$$K(n_{cell}, 1) = -k_{end} \cdot e^{-i\zeta} \quad (2.17)$$

Si ottengono 4 soluzioni per ciascun valore di ζ (campionato su 100 punti) e ognuna di queste fornisce i 4 rami del diagramma di dispersione. Tra il massimo di un ramo e il minimo del ramo successivo si hanno zone in cui non esistono valori reali di ζ che soddisfino l'equazione di dispersione e sono proprio i band-gap; si può notare chiaramente nella *Figura 2.4*, ottenuta sovrapponendo il diagramma di dispersione a quello di trasmissibilità, come queste zone (i band-gap) trovate analizzando il sistema periodico infinito coincidano con gli intervalli di frequenze in cui la trasmissibilità ha dei minimi negativi.

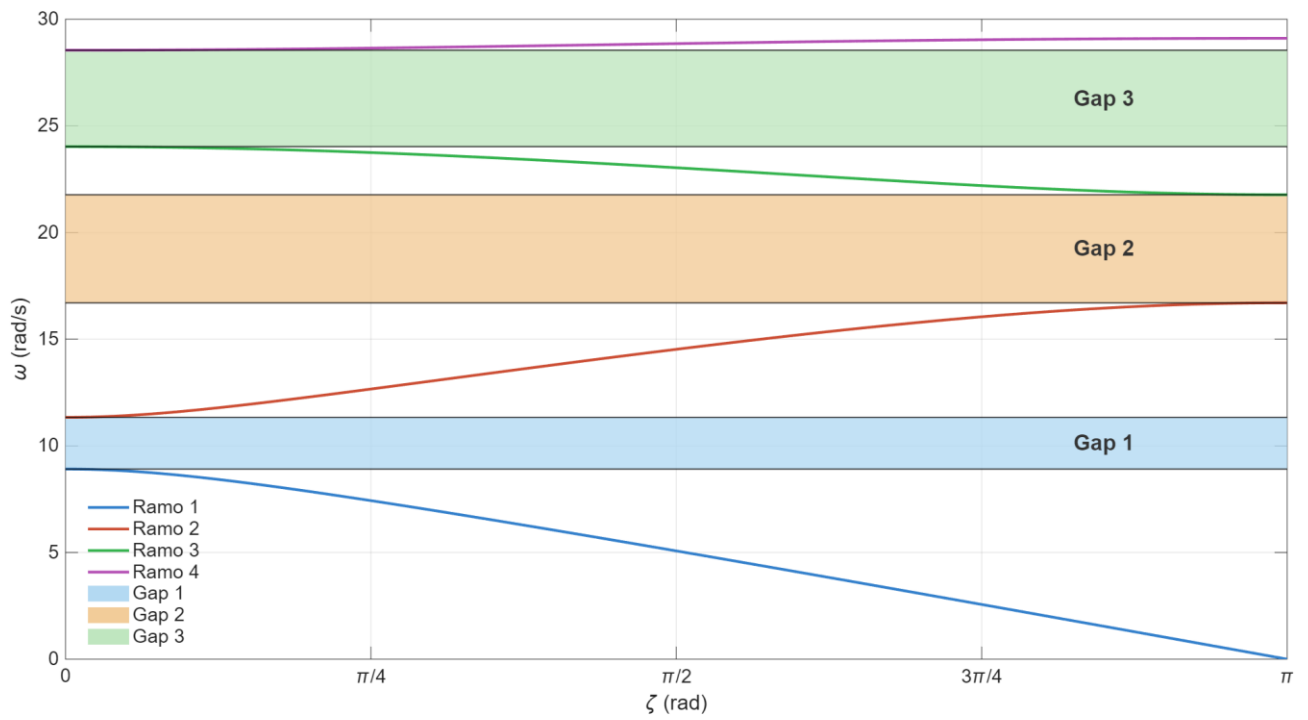


Figura 2.3 - Diagramma di dispersione

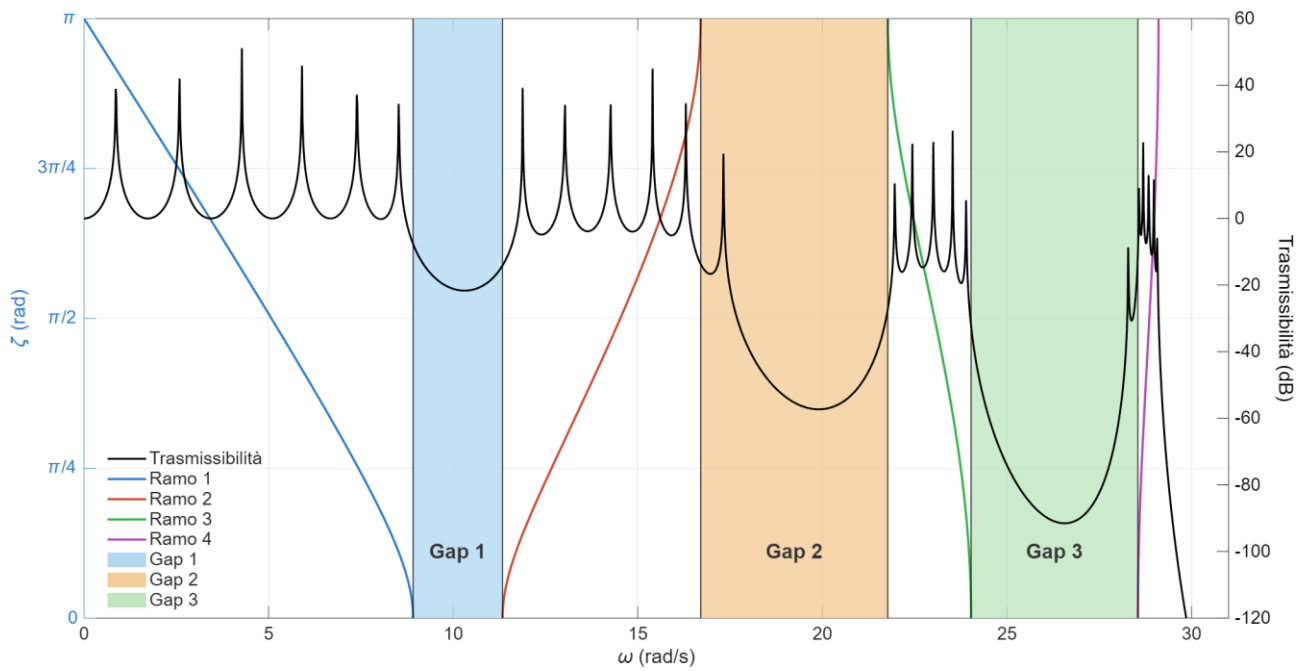


Figura 2.4 - Confronto fra Diagramma di dispersione e Trasmissibilità

2.6 Identificazione dei tre band-gap

Gli intervalli corrispondenti ai tre band-gap ottenuti dal Teorema di Bloch e confermati dalla trasmissibilità sono riportati nella *Tabella 2.2*, insieme alla trasmissibilità minima, alla frequenza del minimo e alla frequenza del centro geometrico.

Tabella 2.2 - Intervalli Band-gap , trasmissibilità minima, frequenza del minimo e centro geometrico

Band-gap	Bordo inferiore (rad/s)	Bordo superiore (rad/s)	Ampiezza (rad/s)	$T_{min}(dB)$	$\omega_{min}(rad/s)$	Centro geometrico (rad/s)
Gap 1	8,912	11,335	2,423	-21,67	10,309	10,051
Gap 2	16,703	21,770	5,067	-57,30	19,906	19,069
Gap 3	24,026	28,545	4,519	-91,52	26,551	26,188

A partire dai valori contenuti nella *Tabella 2.2* si possono fare considerazioni che giustificano l'analisi svolta nel capitolo "Analisi dei band-gap".

In ciascun gap è presente un modo definito evanescente (ω_7 nel Gap 1, ω_{13} nel Gap 2, ω_{19} nel Gap 3); questo non contraddice la teoria di Bloch, infatti i band-gap escludono, come già detto, soluzioni con numero d'onda reale, non quelle con numero complesso e quindi il sistema finito con bordi liberi può presentare dei modi evanescenti la cui forma modale è distinta da quella di un'onda propagante.

Un altro aspetto è legato alla differenza nella profondità di attenuazione nei 3 gap, i minimi sono infatti: $T = -21,67 dB$ nel Gap 1, $T = -57,30 dB$ nel Gap 2 e $T = -91,52 dB$ nel Gap 3. Nonostante le celle siano identiche, i tre modi evanescenti hanno rapporti φ_{end}/φ_1 diversi tra loro, il che cambia il modo in cui i contributi modali si combinano nel numeratore e nel denominatore della trasmissibilità. Nel Gap 1 la cancellazione nel numeratore coinvolge principalmente due modi, incluso quello evanescente. Nel Gap 2 il modo evanescente ha $\varphi_1^{(13)} \approx 0$ e la cancellazione diventa collettiva, coinvolgendo più modi. Nel Gap 3 entrambi i meccanismi operano simultaneamente generando in questo intervallo un'attenuazione più profonda.

Il terzo aspetto è la posizione del minimo di trasmissibilità dentro ciascun gap:

- Nel Gap 1 il minimo è a $\omega = 10,309 rad/s$, mentre il centro geometrico è a $\omega = 10,051 rad/s$.
- Nel Gap 2 il minimo è a $\omega = 19,906 rad/s$ e il centro a $\omega = 19,069 rad/s$.
- Nel Gap 3 il minimo è a $\omega = 26,551 rad/s$ e il centro a $\omega = 26,286 rad/s$.

In tutti e tre i casi il minimo è spostato verso frequenze più alte rispetto al centro geometrico per asimmetria dovuta all'evoluzione del rapporto $|\Sigma A/\Sigma B|$ al variare della frequenza dentro il gap; l'analisi dettagliata di questo effetto è sviluppata nel capitolo successivo.

2.7 Convergenza con il numero di celle

Per verificare che $N = 6$ numero di celle sia sufficiente per gli scopi di questa tesi la trasmissibilità è stata calcolata per $N = 2$, $N = 3$ e $N = 6$ celle ed è stato fatto un confronto con i band-gap ottenuti dal diagramma di dispersione (*Figura 2.5*).

Con $N = 2$ celle il sistema ha 8 gradi di libertà, i tre band-gap sono già identificabili nella trasmissibilità, ma le attenuazioni massime sono limitate e inoltre i bordi non sono ben definiti in corrispondenza degli intervalli definiti con Bloch.

Con $N = 3$ celle i gap si manifestano nella trasmissibilità in modo più marcato, ma con profondità di attenuazione limitata rispetto al caso $N = 6$ e con bordi ancora non ben definiti. Si può notare come a livello qualitativo la trasmissibilità inizi ad essere confrontabile con il diagramma di dispersione, tuttavia non si hanno abbastanza dati per un'analisi modale dettagliata della formazione dei band-gap.

Con $N = 6$ celle i tre band-gap sono chiaramente visibili con profondità di attenuazione significativa e bordi che corrispondono con buona approssimazione a quelli previsti dal diagramma di dispersione. L'attenuazione infatti cresce esponenzialmente con l'aumentare di N numero di celle.

La scelta di $N = 6$ è dunque giustificata sia dalla qualità dell'approssimazione del sistema infinito sia dal buon numero di dati necessario a svolgere un'analisi modale della formazione dei band-gap soddisfacente.

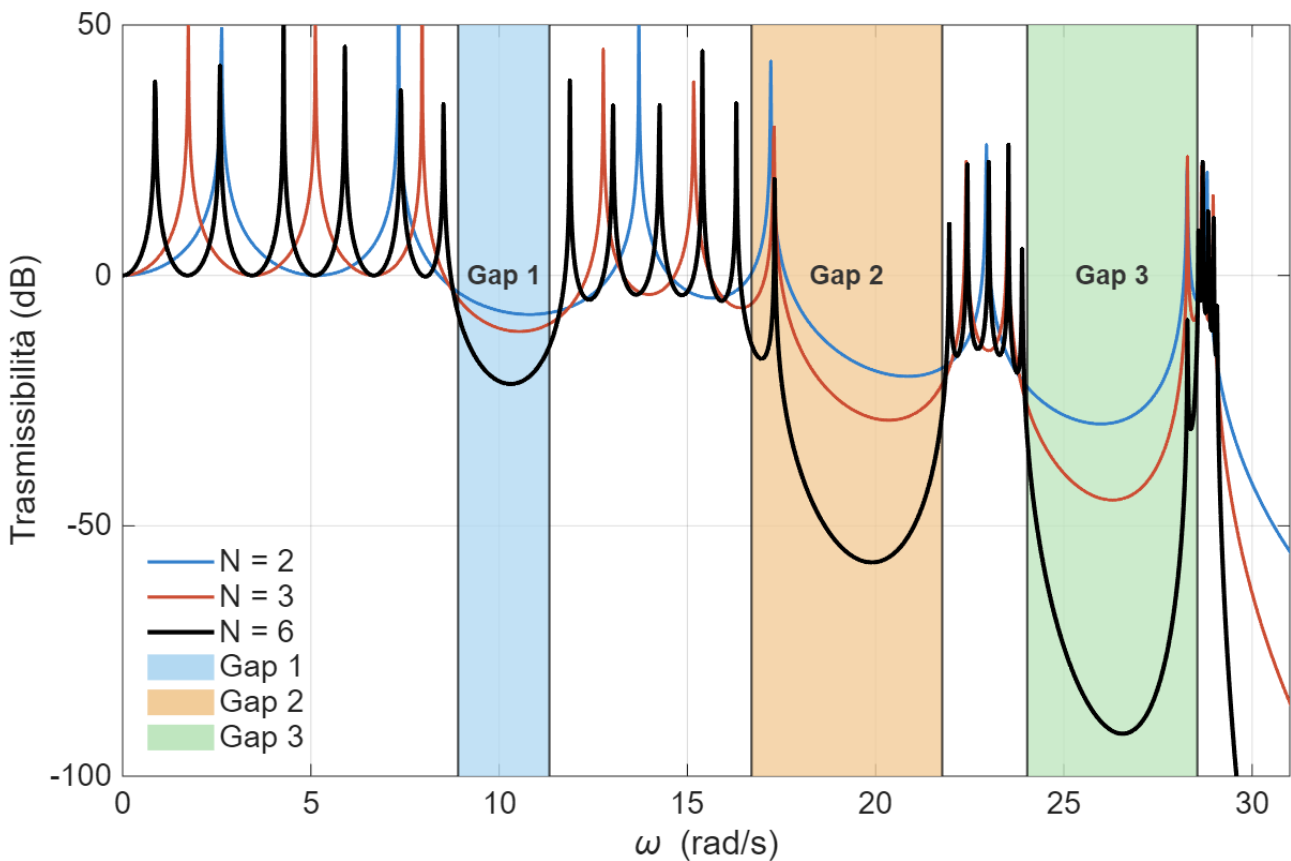


Figura 2.5 - Confronto Trasmissibilità per $N=2$, $N=3$, $N=6$ numero di celle

3) Analisi dei band-gap

3.1 Metodo di analisi

Nel corso del capitolo precedente sono stati evidenziati i 3 diversi band-gap del sistema con la loro profondità di attenuazione:

- $T = -21,67 \text{ dB}$ nel Gap 1
- $T = -57,30 \text{ dB}$ nel Gap 2
- $T = -91,52 \text{ dB}$ nel Gap 3

Fra il Gap 1 e il Gap 3 ci sono quasi 70 dB di differenza, nonostante siano generati dalla stessa cella unitaria con gli stessi parametri, ripetuta per 6 volte. Il diagramma di dispersione ricavato dall'analisi del sistema infinito mostra dove si aprono i gap, ma non spiega perché le profondità differiscono così tanto. La risposta sta nelle combinazioni modali, oggetto dell'analisi sviluppata in questo capitolo.

Per svolgere un'analisi efficace è stata utilizzata la decomposizione modale: partendo dall'equazione della trasmissibilità (2.14), i 24 contributi modali sono separati modo per modo e frequenza per frequenza, permettendo di identificare quali modi favoriscono la trasmissione e quali producono cancellazione nel numeratore o incremento nel denominatore.

3.1.1 La trasmissibilità come rapporto di recettanze

La trasmissibilità è definita nella sezione 2.4 come $\left| \frac{\alpha_{end,1}(\omega)}{\alpha_{1,1}(\omega)} \right|$, dove $\alpha_{end,1}$ è la recettanza incrociata tra massa 24 e massa 1 e $\alpha_{1,1}$ è l'autorecettanza alla massa 1.

La *Figura 3.1* mostra i moduli delle due recettanze in scala logaritmica. Nelle zone di banda passante le due curve sono vicine e oscillano attorno agli stessi valori. Nei tre band-gap $\alpha_{end,1}$ scende nettamente perché la massa 24 quasi non risponde, mentre $\alpha_{1,1}$ rimane finita perché la massa 1 continua a oscillare anche quando l'onda non si propaga verso l'uscita. Il rapporto tra $\alpha_{end,1}$ e $\alpha_{1,1}$ produce l'attenuazione osservata nel grafico della trasmissibilità (*Figura 2.2*).

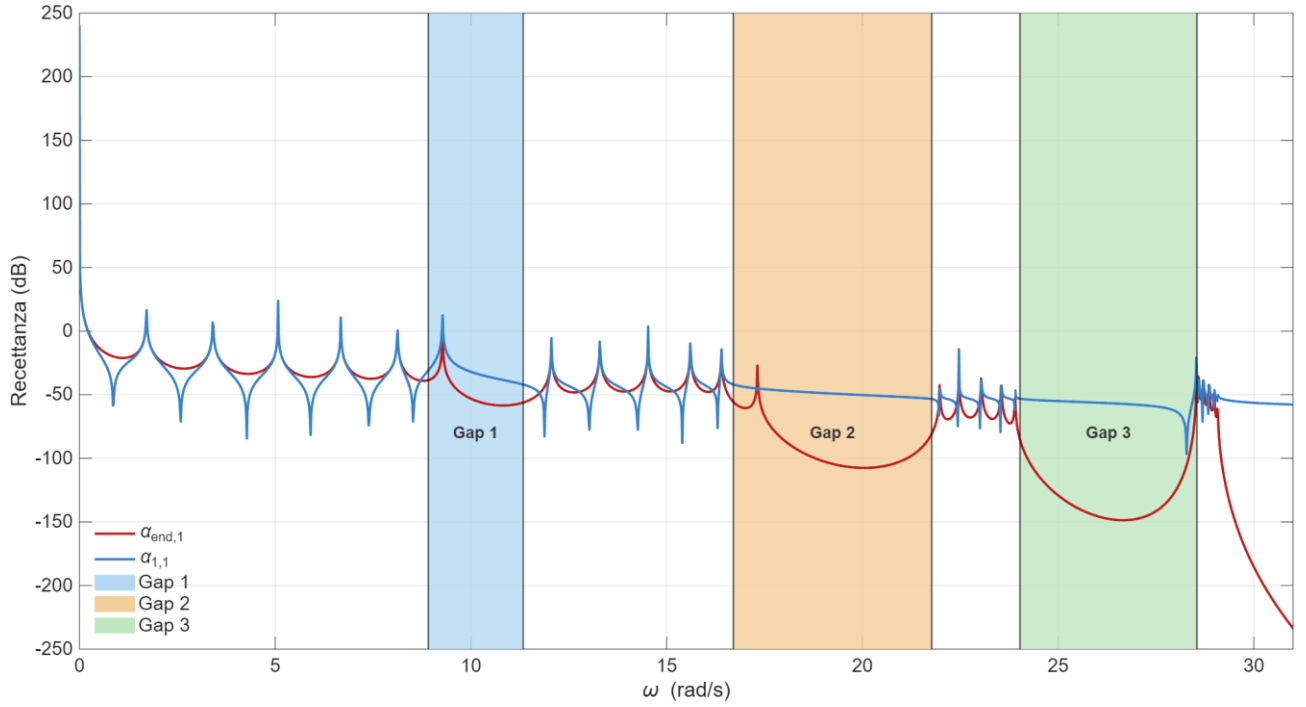


Figura 3.1 – Recettanze $\alpha_{end,1}$ e $\alpha_{1,1}$ in funzione di ω

3.1.2 L'espansione modale

Per calcolare le recettanze si utilizza l'espansione modale: i modi di vibrare $\phi^{(r)}$ formano una base completa dello spazio degli spostamenti e quindi ogni spostamento del sistema può essere scritto come combinazione lineare dei modi. La recettanza tra il punto p e il punto q di applicazione della forza si calcola:

$$\alpha_{pq}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{\phi_p^{(r)} \cdot \phi_q^{(r)}}{\omega_r^2 - \omega^2} \quad (3.1)$$

Il numeratore è il prodotto delle componenti della forma modale nei due punti di interesse, mentre il denominatore è la differenza tra il quadrato della frequenza naturale e il quadrato della frequenza di eccitazione; quest'ultimo è positivo finché non si raggiunge la risonanza, zero alla risonanza stessa, negativo oltre. Il cambio di segno del denominatore è il meccanismo elementare che, combinato con i contributi di tutti gli altri modi, produce i band-gap.

Applicando la formula alle due recettanze del sistema si ottiene:

$$\alpha_{end,1}(\omega) = \sum_{r=1}^{24} \frac{\phi_{24}^{(r)} \cdot \phi_1^{(r)}}{\omega_r^2 - \omega^2} = \sum_{r=1}^{24} A_r(\omega) \quad (3.2)$$

$$\alpha_{1,1}(\omega) = \sum_{r=1}^{24} \frac{[\phi_1^{(r)}]^2}{\omega_r^2 - \omega^2} = \sum_{r=1}^{24} B_r(\omega) \quad (3.3)$$

La trasmissibilità diventa:

$$T(\omega) = \left| \frac{\sum_{r=1}^{24} A_r(\omega)}{\sum_{r=1}^{24} B_r(\omega)} \right| \quad (3.4)$$

I termini A_r e B_r sono le grandezze fondamentali dell'analisi:

- A_r è il contributo del modo r allo spostamento della massa 24
- B_r è il contributo del modo r allo spostamento della massa 1

3.1.3 Il significato fisico di A_r e B_r

Il termine A_r ha al numeratore il prodotto $\phi_{24}^{(r)} \cdot \phi_1^{(r)}$, rappresentativo di quanto il modo r riesce a trasportare movimento dalla massa 1 alla massa 24. Se una delle due componenti modali è quasi nulla, il prodotto è piccolo; la conseguenza è che il modo non trasmette verso l'uscita, anche se ci si trova relativamente vicini alla sua risonanza.

Il termine B_r ha al numeratore $[\phi_1^{(r)}]^2$ (sempre positivo) che esprime quanto la forzante applicata alla massa 1 riesce a eccitare il modo r . Un $\phi_1^{(r)}$ elevato indica che la massa 1 partecipa fortemente a quel modo: la forza lo eccita bene, l'autorecettanza cresce e la prima massa risponde con ampiezza elevata. Un valore di $\phi_1^{(r)}$ vicino a zero significa che quel modo quasi non viene eccitato dalla forzante, a qualsiasi frequenza. Questo fenomeno è rilevabile con il modo 13, in cui $\phi_1^{(13)} = -0.008$ produce un B_{13} quasi nullo in tutto il range del Gap 2, anche alla risonanza, dove il denominatore $\omega_r^2 - \omega^2$ va a zero, ma lo fa anche il numeratore $[\phi_1^{(r)}]^2$ lasciando B_{13} trascurabile.

3.1.4 Indipendenza del rapporto A_r/B_r dalla frequenza

Una proprietà che sarà usata nell'analisi è l'indipendenza del rapporto A_r/B_r dalla frequenza:

$$\frac{A_r(\omega)}{B_r(\omega)} = \frac{\phi_{24}^{(r)} \cdot \phi_1^{(r)}}{[\phi_1^{(r)}]^2} = \frac{\phi_{24}^{(r)}}{\phi_1^{(r)}} \quad (3.5)$$

La differenza $\omega_r^2 - \omega^2$ si cancella tra numeratore e denominatore, rimane dunque solo il rapporto tra le componenti della prima e dell'ultima forma modale. Il modo r contribuisce al numeratore e al denominatore della trasmissibilità sempre con la stessa proporzione, qualunque sia la frequenza di eccitazione.

Questa proprietà ha una conseguenza immediata: quando un singolo modo domina la risposta del sistema la trasmissibilità coincide con il rapporto delle forme modali agli estremi, ne deriva:

$$T(\omega) \approx \left| \frac{A_r}{B_r} \right| = \left| \frac{\phi_{24}^{(r)}}{\phi_1^{(r)}} \right| \quad (3.6)$$

3.1.5 Il cambio di segno e il meccanismo dei Gap

Il denominatore $\omega_r^2 - \omega^2$ è positivo quando $\omega < \omega_r$ e negativo quando $\omega > \omega_r$. Ogni volta che la frequenza di eccitazione supera la frequenza naturale di un modo, i contributi A_r e B_r di quel modo cambiano entrambi segno; il segno del denominatore cambia, ma non quello del numeratore, legato alle forme modali del modo in esame.

Questo cambio di segno è il meccanismo fisico elementare che genera i band-gap. Quando due modi hanno cambiato segno a frequenze diverse i loro contributi al numeratore ΣA possono avere segni opposti e cancellarsi quasi perfettamente. Se la cancellazione è efficace, $\Sigma A \approx 0$ mentre ΣB rimane finito e la trasmissibilità scende significativamente. Nei tre band-gap del sistema questo meccanismo opera in modi fisicamente distinti a causa delle diverse proprietà dei modi evanescenti presenti in ciascun gap, come verrà mostrato nelle sezioni “Analisi del Gap 1”, “Analisi del Gap 2” e “Analisi del Gap 3”.

3.1.6 Struttura dell'analisi

Per ciascun band-gap sono state scelte 9 frequenze di interesse fisico:

- Nella zona passante prima del gap tutti i modi contribuiscono liberamente alla risposta.
- La risonanza del modo bulk che precede il gap è il punto dove la trasmissibilità vale $T \approx 1$ perché domina questo modo.
- Il bordo inferiore del gap è il punto dove l'attenuazione inizia, con il meccanismo che varia da gap a gap.
- La risonanza del modo evanescente nel gap è un punto anomalo: la trasmissibilità ha un comportamento particolare che dipende dal tipo di modo evanescente.
- Il centro geometrico non coincide con il minimo assoluto di T . La cancellazione nel numeratore infatti evolve in modo asimmetrico rispetto ai bordi del gap.
- Il minimo assoluto è il punto di massima attenuazione.
- Il bordo superiore mostra come la cancellazione nel numeratore si deteriora all'avvicinarsi della risonanza del modo bulk successivo, riducendo l'attenuazione.
- Alla risonanza del primo modo bulk dopo il gap la trasmissibilità torna a $T \approx 1$.
- La zona passante successiva mostra il comportamento del sistema dopo il gap.

Per ciascuno di questi punti vengono riportati i valori ottenuti di ΣA e ΣB , la trasmissibilità T risultante e i contributi A_r e B_r dei modi dominanti, con la spiegazione dei fenomeni principali legati ai meccanismi di trasmissione e attenuazione.

3.2 Classificazione dei modi di vibrare

Il sistema ha 24 gradi di libertà e presenta 24 modi di vibrare con caratteristiche diverse tra loro, classificati in simmetrici, antisimmetrici ed evanescenti, in base al rapporto $\phi_{24}^{(r)} / \phi_1^{(r)}$.

3.2.1 Modi simmetrici

I modi simmetrici hanno $\phi_{24}^{(r)} / \phi_1^{(r)} = +1$ esatto: la massa 1 e la massa 24 si muovono nella stessa direzione con la stessa ampiezza. Nel sistema analizzato i modi simmetrici sono: 1, 3, 5, 9, 11, 15,

17, 21, 23. Come si vede dalla *Figura 3.2*, le masse 1 e 24 hanno sempre la stessa ampiezza e lo stesso segno.

Per questi modi $A_r = B_r$ a qualsiasi frequenza, poiché il prodotto $\phi_{24}^{(r)} \cdot \phi_1^{(r)}$ è uguale a $[\phi_1^{(r)}]^2$ dato che $\phi_{24}^{(r)} = \phi_1^{(r)}$. Alla loro risonanza la trasmissibilità vale esattamente $T = 1$, perché il modo domina sia ΣA che ΣB con lo stesso valore.

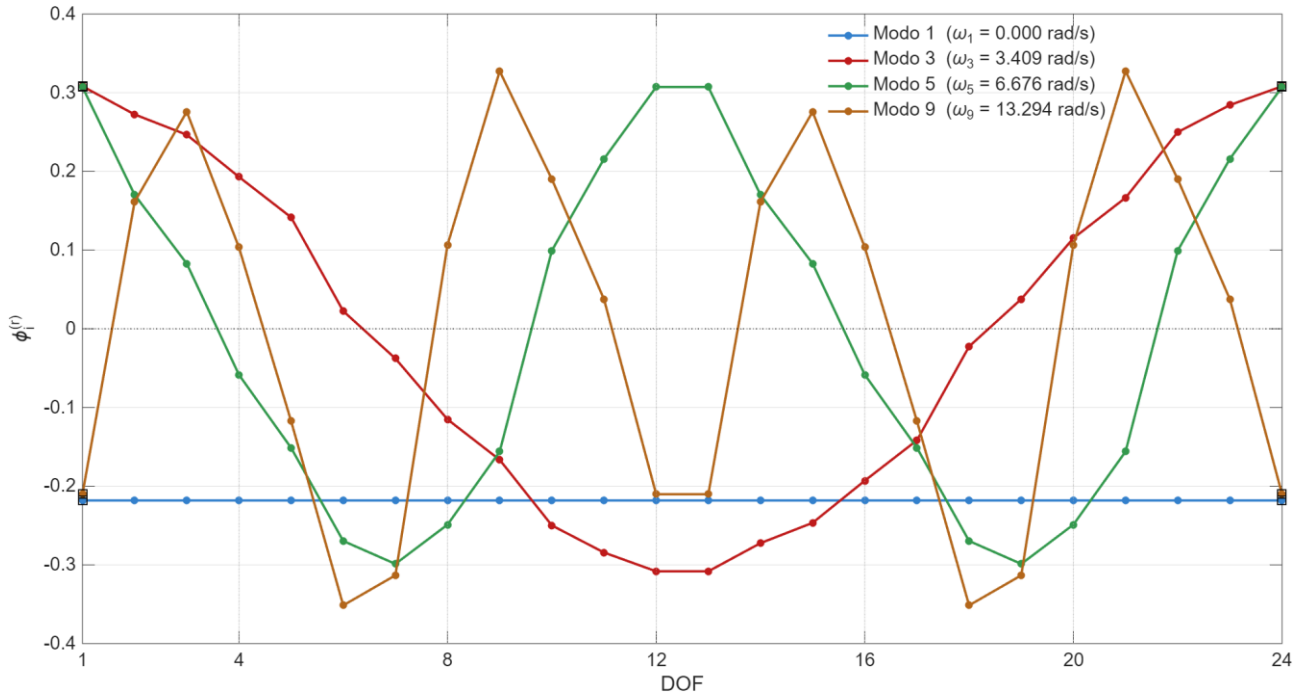


Figura 3.2 - Modi 1, 3, 5, 9 simmetrici

3.2.2 Modi antisimmetrici

I modi antisimmetrici hanno $\phi_{24}^{(r)} / \phi_1^{(r)} = -1$ esatto: la massa 1 e la massa 24 si muovono in direzioni opposte con la stessa ampiezza quando il sistema vibra in questo modo. Nel sistema analizzato i modi antisimmetrici sono: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24. Come si vede dalla *Figura 3.3*, le masse 1 e 24 hanno sempre la stessa ampiezza, ma segno opposto.

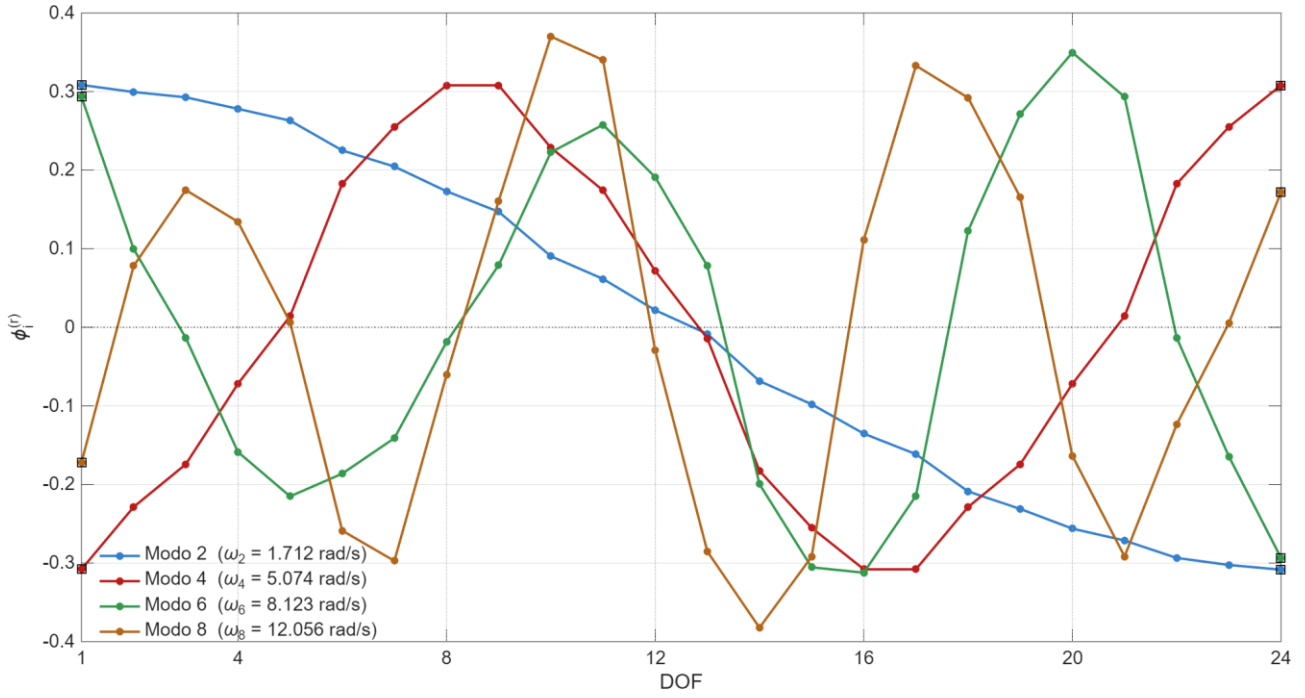


Figura 3.3 - Modi 2, 4, 6, 8 antisimmetrici

Per questi modi $A_r = -B_r$ a qualsiasi frequenza e alla loro risonanza la trasmissibilità vale $T = 1$, indipendentemente dall'ampiezza assoluta della risposta in risonanza. Vale la pena notare che i modi bulk che delimitano i gap sono modi antisimmetrici poiché le soluzioni di Bloch impongono che celle adiacenti si muovano in direzioni opposte, condizione che corrisponde esattamente a $\phi_1^{(r)} = -\phi_{24}^{(r)}$.

3.2.3 Modi evanescenti

I tre modi evanescenti, uno per gap, sono quelli con $|\phi_{24}^{(r)}/\phi_1^{(r)}| \neq 1$. Le loro proprietà sono diverse da quelle dei modi bulk.

Il modo 7 ha $\omega_7 = 9,273 \text{ rad/s}$, $\phi_1^{(7)} = -0,519$ e $\phi_{24}^{(7)} = -0,092$, con rapporto $\phi_{24}/\phi_1 = +0,178$. È un modo evanescente decrescente: l'ampiezza della forma modale è massima alla massa 1 e decade progressivamente verso la massa 24 con un fattore (0,749) costante per cella. Matematicamente questo significa che $\phi_5^{(7)}/\phi_1^{(7)} \approx 0,749$, $\phi_9^{(7)}/\phi_5^{(7)} \approx 0,749$ e così via fino a $\phi_{24}^{(7)}/\phi_{21}^{(7)} \approx 0,749$. Il prodotto di sei fattori 0,749 dà esattamente $0,749^6 = 0,178 = \phi_{24}/\phi_1$.

Il modo 13 ha $\omega_{13} = 17,321 \text{ rad/s}$, $\phi_1^{(13)} = -0,008$ e $\phi_{24}^{(13)} = -0,522$, con rapporto $\phi_{24}^{(13)}/\phi_1^{(13)} = 64$. È un modo evanescente crescente: l'ampiezza quasi nulla alla massa 1 cresce progressivamente verso la massa 24. La forma modale alla massa 1 $\phi_1^{(13)} \approx 0$ riflette il fatto che la massa 1 si trova all'estremità opposta rispetto a quella dove il modo è più intenso.

Il modo 19 ha $\omega_{19} = 28,531 \text{ rad/s}$, $\phi_1^{(19)} = -0,109$ e $\phi_{24}^{(19)} = -0,019$, con rapporto $\phi_{24}^{(19)}/\phi_1^{(19)} = +0,178$. È un modo evanescente decrescente con lo stesso rapporto del modo 7; il fattore di decadimento è una proprietà legata ai parametri specifici della cella unitaria analizzata.

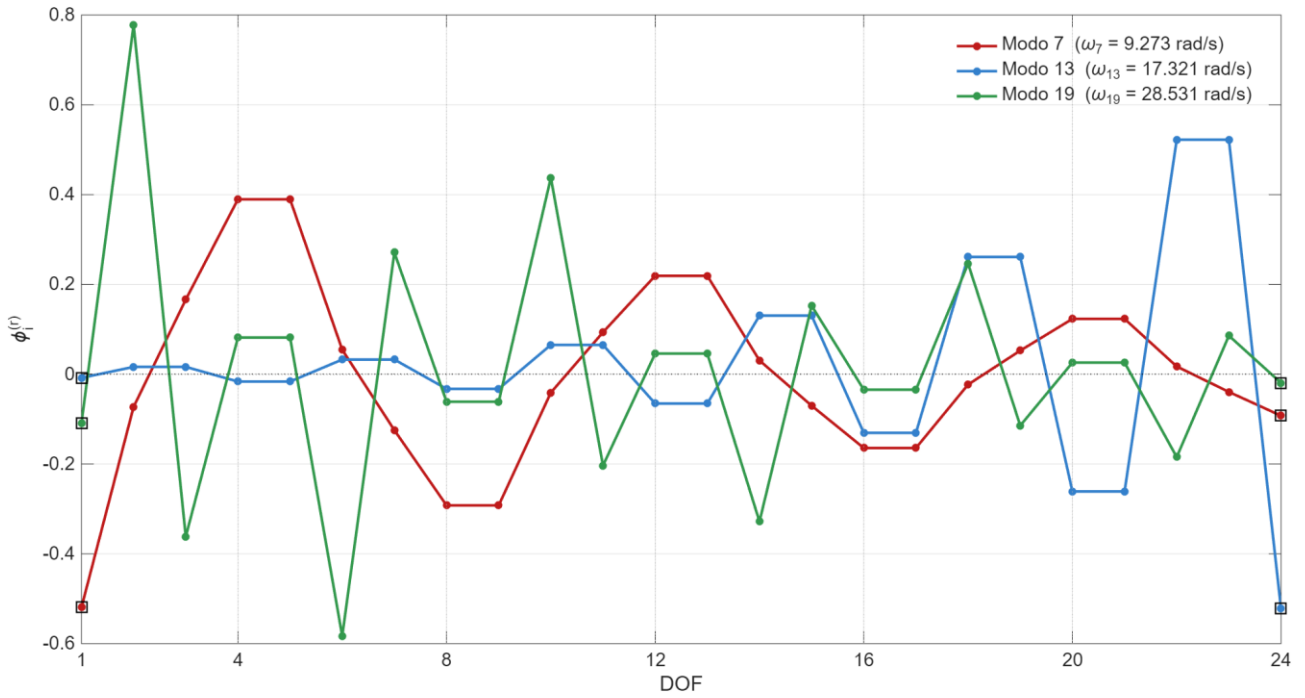


Figura 3.4 - Forme modali dei tre modi evanescenti a confronto

3.2.4 Conseguenze sulla trasmissibilità

La classificazione dei modi è fondamentale per comprendere il comportamento della trasmissibilità. Alla risonanza di un modo bulk il numeratore e il denominatore crescono nella stessa misura $A_r/B_r = \pm 1$ e la trasmissibilità vale $T \approx 1$. Alla risonanza di un modo evanescente invece $A_r \neq \pm B_r$: numeratore e denominatore crescono in misura diversa e questo squilibrio produce l'attenuazione. Lontano dalla risonanza di qualsiasi modo invece la trasmissibilità dipende dalla combinazione collettiva di tutti i contributi modali.

Per il modo 7, ad esempio, si ha $A_7/B_7 = 0,178$: il denominatore è 5,6 volte più grande del numeratore. Quando questo modo è vicino alla risonanza, domina la risposta e il denominatore ΣB di T viene gonfiato molto più del numeratore con un conseguente crollo della trasmissibilità. È proprio questo il meccanismo dominante nel Gap 1.

Per quanto riguarda il modo 13, si ha $A_{13}/B_{13} = 64$, ma, come conseguenza di $\phi_1^{(13)} \approx 0$, entrambi A_{13} e B_{13} sono molto piccoli. Nel Gap 2 il modo evanescente 13 non gonfia il denominatore della trasmissibilità, come avviene con il modo 7, proprio perché questo modo non viene eccitato dalla forzante. Ne consegue che ΣB rimane piccolo e la cancellazione nel numeratore dovuta agli altri contributi modali produce attenuazioni molto più profonde.

Per il modo 19, si ha nuovamente $A_{19}/B_{19} = 0,178$ (stesso rapporto del modo 7), ma nel Gap 3 questo modo opera insieme a un meccanismo di cancellazione collettiva nel numeratore; il meccanismo alla base degli effetti sulla trasmissibilità nel Gap 3 può essere visto come una combinazione dei due meccanismi evidenziati per il Gap 1 e per il Gap 2 ed è per questo che si ha l'attenuazione massima del sistema proprio in questa zona.

3.3 Analisi del Gap 1

Il Gap 1 occupa l'intervallo di frequenze $\omega = [8,912 - 11,335] \text{ rad/s}$ e presenta un'attenuazione massima raggiunta di $T = -21,67 \text{ dB}$ a $\omega = 10,309 \text{ rad/s}$. Il centro geometrico del gap che cade a $\omega = 10,124 \text{ rad/s}$ si trova a circa $0,2 \text{ rad/s}$ rispetto al minimo.

All'interno del gap è presente il modo $\omega_7 = 9,273 \text{ rad/s}$, più vicino al bordo inferiore ($\omega = 8,912 \text{ rad/s}$) che a quello superiore ($\omega = 11,335 \text{ rad/s}$); questa asimmetria è alla base dei vari effetti all'interno del gap. L'analisi del gap è stata effettuata prendendo in esame 9 frequenze di interesse:

- $\omega = 7,503 \text{ rad/s}$, zona passante prima del Gap 1.
- $\omega = 8,123 \text{ rad/s}$, risonanza del modo 6.
- $\omega = 8,912 \text{ rad/s}$, bordo inferiore del Gap 1.
- $\omega = 9,277 \text{ rad/s}$, risonanza del modo 7 evanescente.
- $\omega = 10,120 \text{ rad/s}$, centro geometrico del Gap 1.
- $\omega = 10,309 \text{ rad/s}$, minimo assoluto di $T = -21,67 \text{ dB}$.
- $\omega = 11,335 \text{ rad/s}$, bordo superiore del Gap 1.
- $\omega = 12,056 \text{ rad/s}$, risonanza del modo 8.
- $\omega = 12,505 \text{ rad/s}$, zona passante dopo il Gap 1.

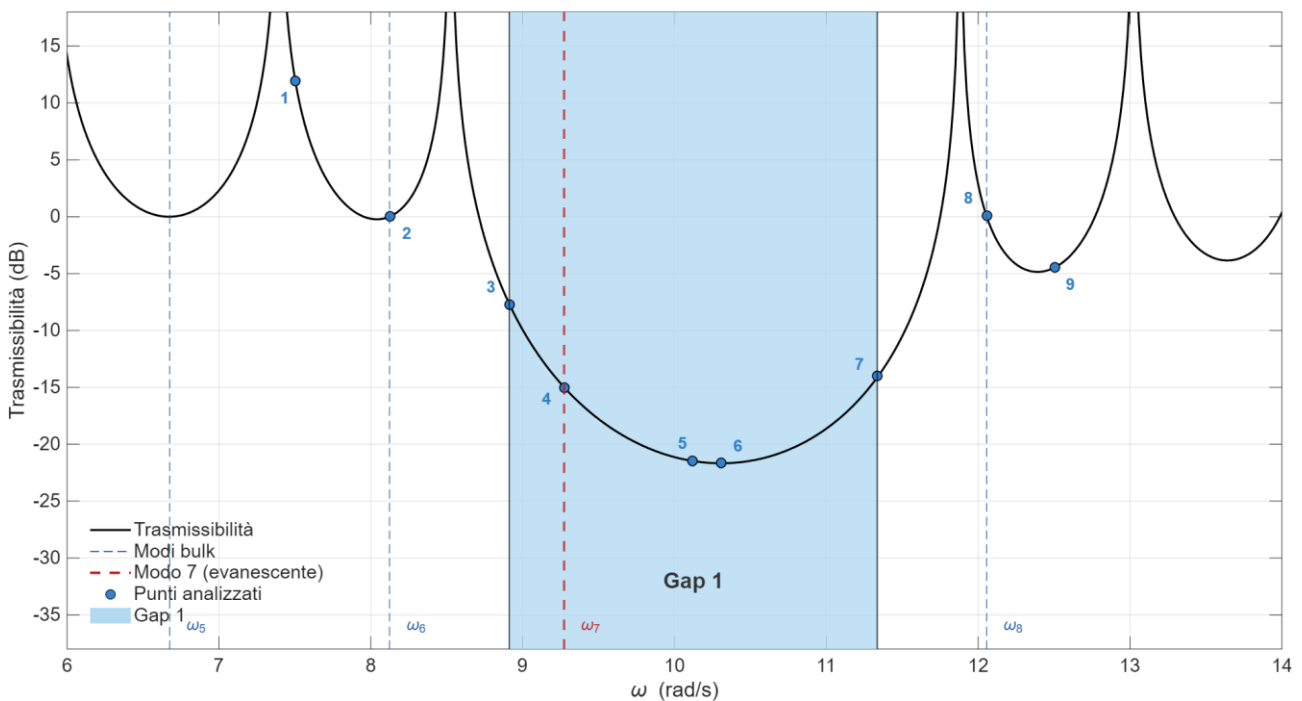


Figura 3.5 - Trasmissibilità Gap 1 con le 9 frequenze evidenziate

Tabella 3.1 – Frequenze di interesse Gap 1 con ΣA , ΣB , T

ω (rad/s)	Evento	ΣA	ΣB	T (dB)
7,503	zona passante	-0,013545	+0,003429	+11,93
8,128	risonanza modo 6	+1,061527	-1,057968	+0,03
8,913	bordo inferiore	+0,011840	+0,028761	-7,71
9,277	risonanza modo 7	-0,734559	-4,151611	-15,04
10,120	centro geometrico	-0,001852	-0,021943	-21,47
10,309	minimo T	-0,001502	-0,018205	-21,67
11,342	bordo superiore	-0,001569	-0,007869	-14,01
12,054	risonanza modo 8	-0,543092	+0,537506	+0,09
12,505	zona passante	+0,004123	-0,006889	-4,46

3.3.1 Zona passante prima del Gap 1: $\omega = 7,503$ rad/s

La frequenza in esame si trova fra le frequenze naturali del modo 5 e del modo 6:

- $\omega_5 = 6,676$ rad/s
- $\omega = 7,503$ rad/s
- $\omega_6 = 8,123$ rad/s

La risonanza del modo 5 è stata superata, quindi A_5 e B_5 hanno già cambiato segno, mentre A_6 e B_6 no, perché $\omega < \omega_6$.

I valori numerici ottenuti sono:

- $\Sigma A = -0,013545$
- $\Sigma B = +0,003429$
- $T = +11,93$ dB

Il modo 5 è simmetrico con $\varphi_1^{(5)} = \varphi_{24}^{(5)} = +0,307$. Dato che $\omega > \omega_5$, il denominatore $\omega_5^2 - \omega^2$ è negativo, il prodotto $\varphi_{24}^{(5)} \cdot \varphi_1^{(5)} = +0,094$ è invece positivo; ne risulta: $A_5 = +0,094/(\omega_5^2 - \omega^2) =$ *valore negativo*. Per la simmetria del modo 5 si ha $B_5 = A_5$, entrambi negativi.

Il modo 6 è antisimmetrico con $\varphi_1^{(6)} = +0,294$ e $\varphi_{24}^{(6)} = -0,294$. Dato che sotto $\omega < \omega_6$, il denominatore $(\omega_6^2 - \omega^2)$ è positivo. Il prodotto $\varphi_{24}^{(6)} \cdot \varphi_1^{(6)} = -0,086$ è negativo. $A_6 = -0,086/(\omega_6^2 - \omega^2) =$ *valore negativo*. Per asimmetria del modo si ha $-B_6 = A_6$.

Si ottiene che A_5 e A_6 sono entrambi negativi, ma per ragioni fisiche diverse.

La sommatoria $\Sigma A = -0,013545$ è dominata da A_5 e A_6 , si può notare dalla *Tabella 3.2* come gli altri contributi modali siano trascurabili rispetto ai due appena analizzati.

Tabella 3.2 - A_r e B_r per $\omega = 7,503 \text{ rad/s}$

Modo r	$\omega_r \text{ (rad/s)}$	A_r	B_r
1-4	0 - 5,074	$\Sigma = +0,001916$	$\Sigma = -0,007860$
5	6,676	-0,008054	-0,008054
6	8,123	-0,008889	+0,008889
7	9,273	+0,001617	+0,009083
8-24	12,056 - 29,074	$\Sigma = -0,000134$	$\Sigma = +0,001370$
Σ totale	-	-0,013545	+0,003429

Il denominatore $\Sigma B = +0,003429$ è in modulo più piccolo del numeratore $\Sigma A = -0,013545$. I contributi negativi dei modi 1-5, già superati, valgono circa $\Sigma A_{1-5} = -0,006138$. Il modo 6 e il modo 7 vibrano a una frequenza naturale più grande rispetto a $\omega = 7,503 \text{ rad/s}$ e contribuiscono al denominatore con $B_6 = +0,008889$ e $B_7 = +0,009083$. Questi due contributi positivi vanno a compensare quasi completamente quelli negativi, lasciando $\Sigma B = +0,003429$ piccolo.

Applicando la formula della trasmissibilità (3.5) si ottiene $T = |\Sigma A / \Sigma B| = 0,01355 / 0,00343 = 3,95$, ovvero $T = +11,93 \text{ dB}$. L'uscita si muove quasi quattro volte più dell'ingresso non perché il numeratore sia grande, ma perché il denominatore è piccolo: a $\omega = 7,503 \text{ rad/s}$ i contributi modali positivi e negativi su α_{11} si cancellano quasi completamente e la massa 1 risponde pochissimo alla forzante.

3.3.2 Risonanza del modo 6 antisimmetrico: $\omega = 8,123 \text{ rad/s}$

Dato che si sta valutando una frequenza presa da un campionamento, la frequenza in esame non coincide perfettamente con $\omega_6 = 8,123 \text{ rad/s}$. Si ha $\omega_6^2 - \omega^2 = 8,123^2 - 8,128^2 = -0,081$, quasi zero e negativo.

I valori numerici ottenuti sono:

- $\Sigma A = +1,061527$
- $\Sigma B = -1,057968$
- $T = +0,03 \text{ dB}$

Come è lecito aspettarsi, si può notare dalla *Tabella 3.3* che il modo 6 domina con $A_6 = +1,062270$ e $B_6 = -1,062270$. Il modulo è identico, ma il segno è opposto dal momento in cui il modo 6 è antisimmetrico. Nel rapporto $|\Sigma A / \Sigma B|$ il modo 6 si cancella quasi completamente e ciò che rimane è il residuo degli altri 23 modi dal quale si ottiene lo scarto trascurabile: $T = +0,03 \text{ dB}$.

Tabella 3.3 - A_r e B_r per $\omega = 8,128 \text{ rad/s}$

Modo r	$\omega_r \text{ (rad/s)}$	A_r	B_r
1-4	0 - 5,074	$\Sigma = +0,001394$	$\Sigma = -0,006325$
5	6,676	-0,004392	-0,004392
6	8,123	+1,062270	-1,062270
7	9,273	+0,002409	+0,013538
8-24	12,056 - 29,074	$\Sigma = -0,000155$	$\Sigma = +0,001481$
Σ totale	-	+1,061527	-1,057968

A $\omega = 7,503 \text{ rad/s}$ le ampiezze assolute erano dell'ordine di 10^{-2} , a $\omega = 8,128 \text{ rad/s}$, in piena risonanza, $\Sigma A \approx +1,06$ e $\Sigma B \approx -1,06$, circa 78 volte più grandi. Dalla Figura 3.6 emerge il confronto fra gli spostamenti delle 24 masse a $\omega = 7,503 \text{ rad/s}$ e a $\omega = 8,128 \text{ rad/s}$; le ampiezze in risonanza sono circa 78 volte più grandi rispetto alla banda passante, ma la trasmissibilità non cambia in modo proporzionale: a $\omega = 7,503 \text{ rad/s}$ valeva $T = +11,93 \text{ dB}$ per via del denominatore piccolo, qui vale $T = +0,03 \text{ dB}$ perché il modo 6 antisimmetrico produce A_6 e B_6 di modulo identico e segno opposto, che si cancellano nel rapporto.

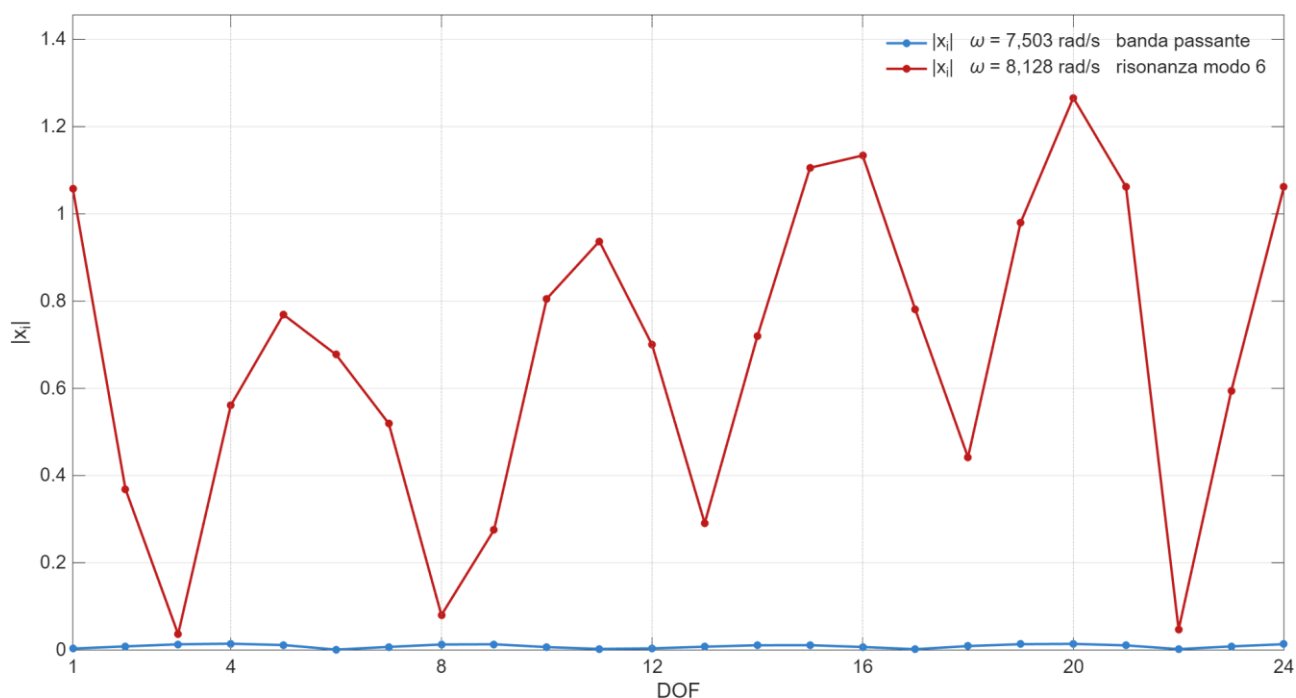


Figura 3.6 - Confronto spostamenti $\omega = 7,503 \text{ rad/s}$ vs $\omega = 8,128 \text{ rad/s}$

3.3.3 Bordo inferiore del Gap 1: $\omega = 8,912 \text{ rad/s}$

La frequenza in esame è la prima all'interno del Gap 1 ed è compresa fra la frequenza di risonanza del modo 6 e quella del modo 7:

- $\omega_6 = 8,123 \text{ rad/s}$
- $\omega = 8,913 \text{ rad/s}$

- $\omega_7 = 9,273 \text{ rad/s}$

I valori numerici ottenuti sono:

- $\Sigma A = +0,011840$
- $\Sigma B = +0,028761$
- $T = -7,71 \text{ dB}$

Rispetto al punto precedente cambia il segno di A_6 , infatti $\omega = 8,913 > \omega_6$ e quindi il denominatore cambia segno e diventa negativo, mentre $\varphi_{24} \cdot \varphi_1 = -0,086$ resta negativo; si ha dunque: $A_6 = \varphi_{24} \cdot \varphi_1 / (\text{denominatore negativo}) = (\text{valore positivo})$.

Dalla *Tabella 3.4*:

- $A_6 = +0,006400, B_6 = -0,006400$
- $A_7 = +0,007334, B_7 = +0,041206$

Tabella 3.4 - A_r e B_r per $\omega = 8,913 \text{ rad/s}$

Modo r	$\omega_r \text{ (rad/s)}$	A_r	B_r
1-4	0 - 5,074	$\Sigma = +0,001010$	$\Sigma = -0,005010$
5	6,676	-0,002707	-0,002707
6	8,123	+0,006400	-0,006400
7	9,273	+0,007334	+0,041206
8-24	12,056 - 29,074	$\Sigma = -0,000196$	$\Sigma = +0,001672$
Σ totale	-	+0,011840	+0,028761

A_6 e A_7 hanno lo stesso segno positivo, non si cancellano ancora. La cancellazione avviene solo quando ω supera $\omega_7 = 9,273 \text{ rad/s}$. Per ora si sommano: $\Sigma A = +0,011840$ è ancora positivo e relativamente grande. Il denominatore $\Sigma B = +0,028761$ è dominato da $B_7 = +0,041206$, che vale il 143% della somma totale perché i contributi negativi dei modi ΣB_{1-6} , già superati, vengono più che compensati da B_7 . B_7 è già grande perché il modo 7 ha ampiezza massima alla massa 1 $\varphi_1^{(7)} = -0,519$ (*Figura 3.7*). Anche lontano dalla risonanza, il numeratore $[\varphi_1^{(7)}]^2 = 0,269$ mantiene B_7 significativo rispetto agli altri contributi.

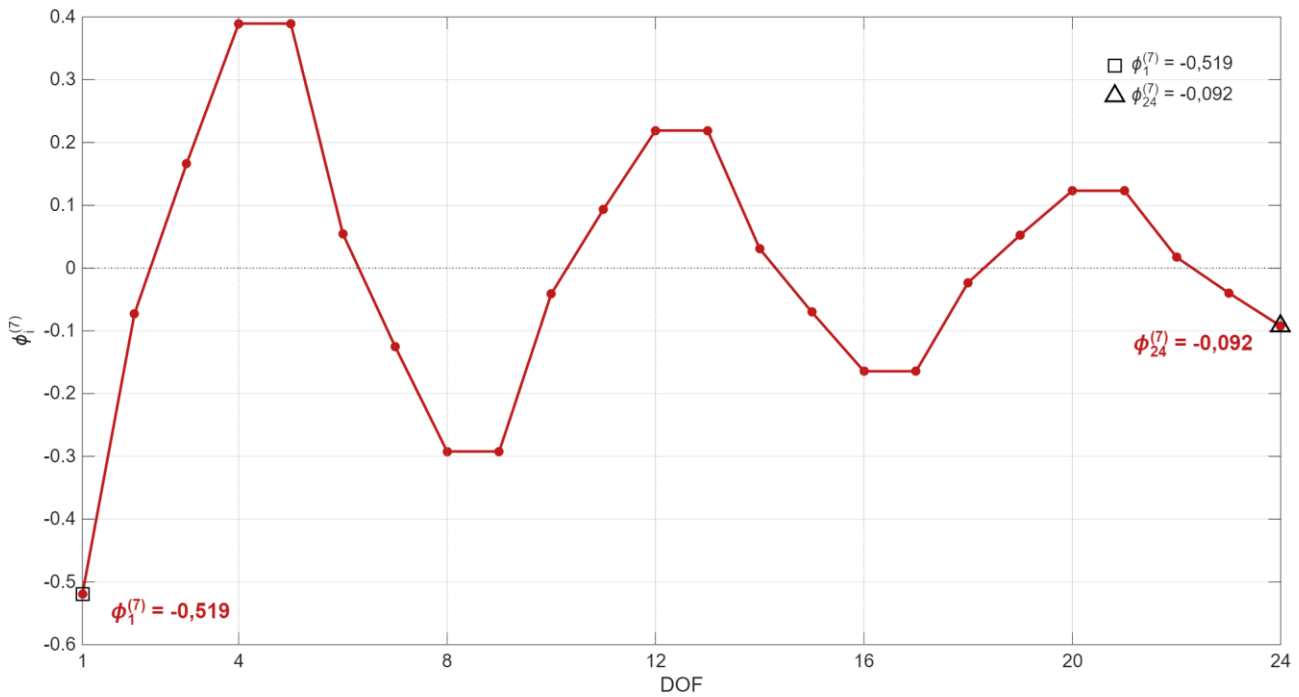


Figura 3.7 - Forma modale modo 7

La trasmissibilità vale $T = |\Sigma A / \Sigma B| = 0,011840 / 0,028761 = 0,412$, ovvero $T = -7,71 \text{ dB}$. Inizia ad esserci attenuazione, ma è ancora moderata poiché A_6 e A_7 .

3.3.4 Risonanza del modo evanescente 7: $\omega = 9,277 \text{ rad/s}$

La quarta frequenza presa dal campionamento è la più vicina alla risonanza del modo 7 evanescente. Il denominatore $\omega_7^2 - \omega^2 = 9,273^2 - 9,277^2 = -0,065$ è quasi zero e negativo, poiché $\omega > \omega_7$.

I valori numerici ottenuti sono:

- $\Sigma A = -0,734559$
- $\Sigma B = -4,151611$
- $T = -15,04 \text{ dB}$

Il modo 7 domina entrambe le somme con $A_7 = -0,737238$ e $B_7 = -4,142285$. Si può notare come il rapporto $|\Sigma A / \Sigma B| = 0,178$ coincida con $\phi_{24} / \phi_1 = 0,092 / 0,519 = 0,178$, come discusso nella sezione 3.1.4: alla risonanza di un modo evanescente la trasmissibilità si approssima al rapporto tra le componenti modali agli estremi.

Dalla *Tabella 3.5* si può vedere che A_7 è cambiato di segno rispetto alla *Tabella 3.4*: è passato da $A_7 = +0,007334$ a $A_7 = -0,737238$, conseguenza del fatto che il denominatore $\omega_7^2 - \omega^2$, che era positivo, ora è negativo. Alla frequenza d'interesse $A_6 = +0,004292$ e $A_7 = -0,737238$ hanno segni opposti.

Tabella 3.5 - A_r e B_r per $\omega = 9,277 \text{ rad/s}$

Modo r	$\omega_r(\text{rad/s})$	A_r	B_r
1-4	0 - 5,074	$\Sigma = +0,000888$	$\Sigma = -0,004547$
5	6,676	-0,002276	-0,002276
6	8,123	+0,004292	-0,004292
7	9,273	-0,737238	-4,142285
8	12,056	-0,000499	+0,000499
9-24	13,294 - 29,074	$\Sigma = +0,000274$	$\Sigma = +0,001290$
Σ totale	-	-0,734559	-4,151611

La risposta del sistema alla risonanza del modo 7 è quasi interamente determinata dal modo 7 stesso, questo comportamento prevale ad esempio sul fenomeno di attenuazione dovuto alla cancellazione tra A_6 e A_7 . Gli spostamenti delle masse seguono la forma modale del modo 7 amplificata e la forma modale decade con fattore 0,749 per cella per definizione, come confermato dalla *Figura 3.8*. Il prodotto $0,749^6 = 0,178$ coincide con φ_{24}/φ_1 .

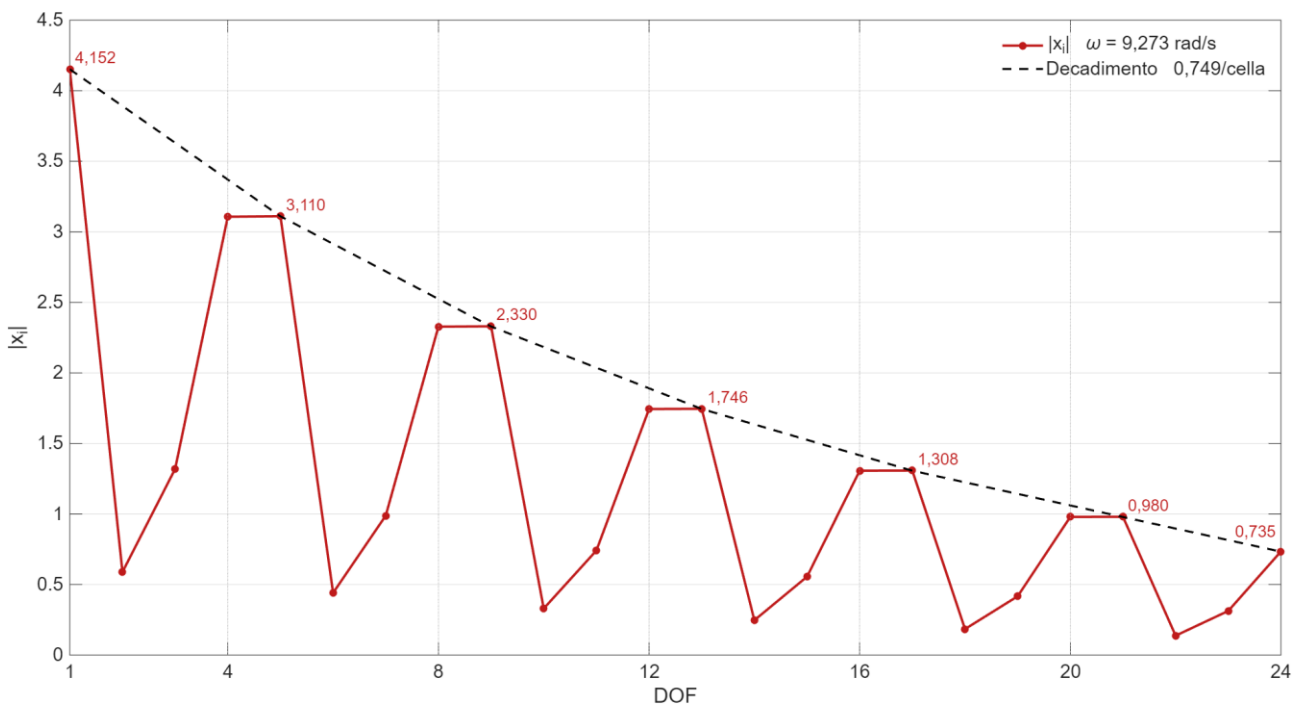


Figura 3.8 - Spostamenti 24 masse a $\omega = 9,277 \text{ rad/s}$ con decadimento 0,749 per cella

3.3.5 Centro geometrico del Gap 1: $\omega = 10,120 \text{ rad/s}$

I valori numerici ottenuti sono:

- $\Sigma A = -0,001852$
- $\Sigma B = -0,021943$
- $T = -21,47 \text{ dB}$

La distanza dalla risonanza dal modo 7 riporta l'attenzione sul fenomeno della cancellazione tra contributi modali, infatti $A_7 = -0,002924$ è circa 252 volte più piccolo di quanto era alla risonanza, il segno rimane negativo poiché $\omega > \omega_7$ e quindi A_7 diventa confrontabile con $A_6 = +0,002365$, di segno opposto; si ha cancellazione fra i due contributi quasi totale: $A_6 + A_7 = +0,002365 + (-0,002924) = -0,000559$. Dalla *Tabella 3.6* si può notare come gli altri 22 modi contribuiscono a portare ΣA a $-0,001852$.

Tabella 3.6 - A_r e B_r per $\omega = 10,120 \text{ rad/s}$

Modo r	$\omega_r \text{ (rad/s)}$	A_r	B_r
1-4	0 - 5,074	$\Sigma = +0,000682$	$\Sigma = -0,003705$
5	6,676	-0,001632	-0,001632
6	8,123	+0,002365	-0,002365
7	9,273	-0,002924	-0,016427
8	12,056	-0,000689	+0,000689
9-24	13,294 - 29,074	$\Sigma = +0,000346$	$\Sigma = +0,001496$
Σ totale	-	-0,001852	-0,021943

Per quanto riguarda il denominatore, $B_7 = -0,016427$ vale il 74.9% di $\Sigma B = -0,021943$, poiché $\varphi_1^{(7)} = -0,519$ è grande e questo prevale sulla distanza da ω_7 .

Il numeratore è quasi zero per cancellazione tra A_6 e A_7 , il denominatore è finito e dominato da B_7 . Il rapporto $|\Sigma A / \Sigma B| = 0,001852 / 0,021943 = 0,0844$, pari a un valore di attenuazione $T = -21,47 \text{ dB}$.

Come si vede dalla *Figura 3.9*, dove gli spostamenti sono normalizzati rispetto alla massa 1, il profilo a $\omega = 10,120 \text{ rad/s}$ si discosta dalla curva di decadimento teorico 0,749 che si ha alla risonanza del modo 7 : il contributo degli altri modi distorce il pattern e il decadimento non è più costante da cella a cella, ma varia tra 0,656 e 0,665.

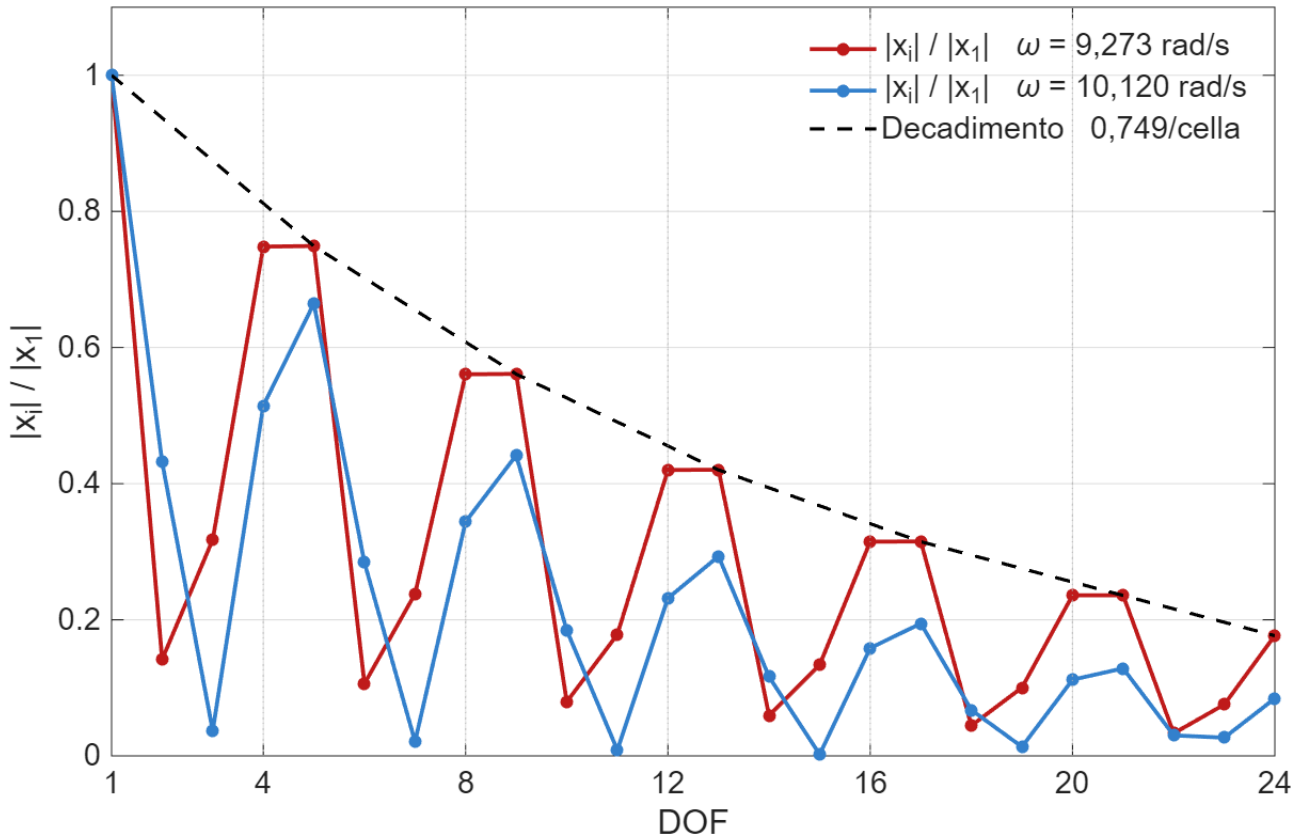


Figura 3.9 - Confronto spostamenti normalizzati $\omega = 9,277$ rad/s vs $\omega = 10,120$ rad/s

3.3.6 Minimo assoluto di T nel Gap 1: $\omega = 10,309$ rad/s

I valori numerici ottenuti sono:

- $\Sigma A = -0,001502$
- $\Sigma B = -0,018205$
- $T = -21,67$ dB

Il minimo non coincide con il centro geometrico del gap, poiché la massima attenuazione dipende dal rapporto $|\Sigma A / \Sigma B|$ e non dal minimo assoluto di ΣA . A $\omega = 10,309$ rad/s sia ΣA che ΣB si sono ridotti rispetto al centro geometrico, ma ΣA si è ridotto proporzionalmente di più: il rapporto è sceso da $T = 0,0844$ a $T = 0,0825$ e questo produce il minimo assoluto. La cancellazione $A_6 + A_7 = -0,000229$ è più efficace rispetto al centro geometrico e il denominatore $B_7 = -0,013299$ è ancora dominante rispetto agli altri.

Tabella 3.7 - A_r e B_r per $\omega = 10,309 \text{ rad/s}$

Modo r	$\omega_r \text{ (rad/s)}$	A_r	B_r
1-4	0 - 5,074	$\Sigma = +0,000647$	$\Sigma = -0,003550$
5	6,676	-0,001530	-0,001530
6	8,123	+0,002138	-0,002138
7	9,273	-0,002367	-0,013299
8	12,056	-0,000758	+0,000758
9-24	13,294 - 29,074	$\Sigma = +0,000368$	$\Sigma = +0,001555$
Σ totale	-	-0,001502	-0,018205

3.3.7 Bordo superiore del Gap 1: $\omega = 11,335 \text{ rad/s}$

Avvicinandosi alla frequenza naturale del modo 8 $\omega_8 = 12,056 \text{ rad/s}$, il suo contributo modale diventa progressivamente dominante e determina la perdita della forte attenuazione osservata al centro del gap, infatti $B_8 = +0,001770$ positivo si oppone a $B_7 = -0,006327$. Allo stesso tempo $A_8 = -0,001770$ aggiunge un contributo negativo al numeratore, che si somma in modulo ad A_7 .

I valori numerici ottenuti sono:

- $\Sigma A = -0,001569$
- $\Sigma B = -0,007869$
- $T = -14,01 \text{ dB}$

La trasmissibilità è risalita da $T = -21,67 \text{ dB}$ a $T = -14,01 \text{ dB}$. ΣA è rimasto simile al minimo ($-0,001569$ contro $-0,001502$), mentre il modulo di ΣB si è ridotto del 57% passando da $-0,018205$ a $-0,007869$; di conseguenza il valore della trasmissibilità aumenta e l'attenuazione si riduce.

Il fattore di decadimento per cella non è costante: varia tra 0,713 e 0,870. Nelle prime quattro celle il fattore è superiore a 0,749, nell'ultima cella scende a 0,713 (sotto il valore teorico). La *Figura 3.10* mostra questo andamento negli spostamenti normalizzati. La *Figura 3.11* ne evidenzia le cause: la

forma modale del modo 8 cresce dalla massa 1 alla massa 24 e il suo contributo locale aumenta procedendo verso destra, alterando progressivamente il profilo di decadimento imposto dal modo 7.

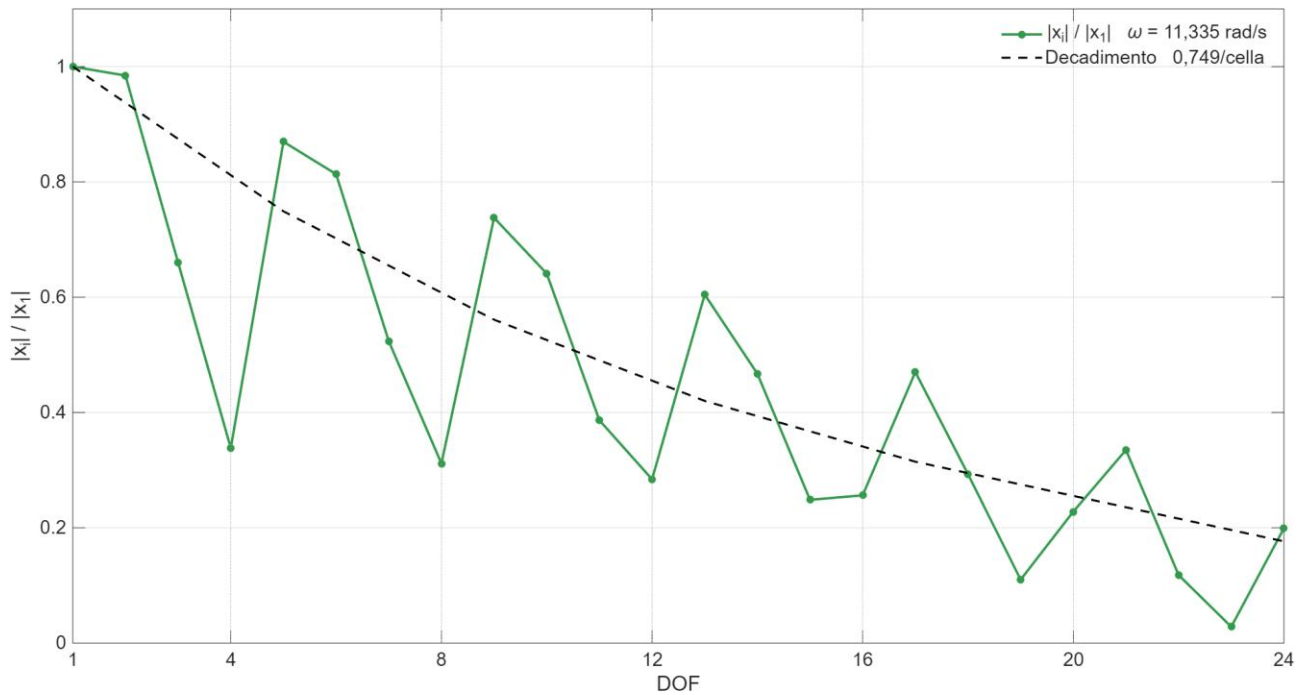


Figura 3.10 - Spostamenti a $\omega = 11,342 \text{ rad/s}$

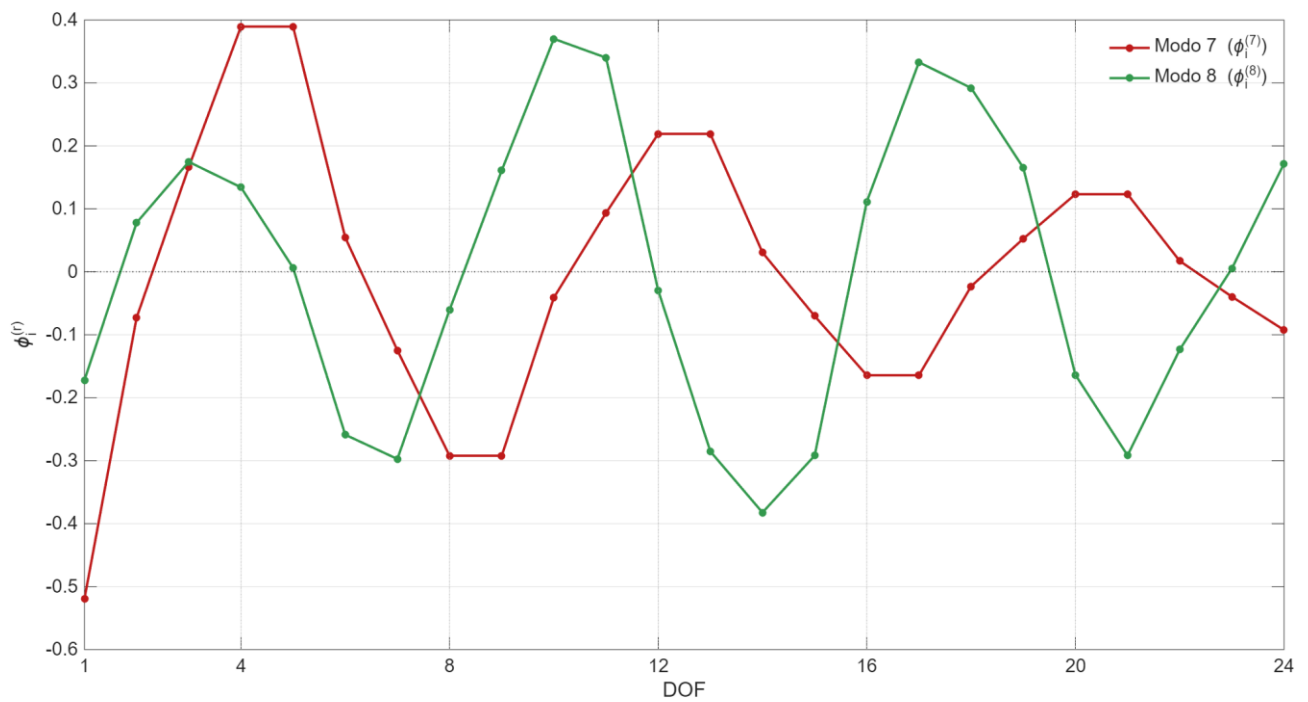


Figura 3.11 - Forme modali modo 7 e modo 8 sovrapposte

3.3.8 Risonanza del modo 8: $\omega = 12,056 \text{ rad/s}$

La frequenza campionata è la più vicina a $\omega_8 = 12,056 \text{ rad/s}$. Il denominatore $\omega_8^2 - \omega^2 = 12,056^2 - 12,054^2 = +0,054$ è quasi zero e positivo.

I valori numerici ottenuti sono:

- $\Sigma A = -0,543092$
- $\Sigma B = +0,537506$
- $T = +0,09 \text{ dB}$

Il modo 8 domina con $A_8 = -0,543819$ e $B_8 = +0,543819$. Il modulo è identico e il segno è opposto perché il modo 8 è antisimmetrico con $\varphi_1^{(8)} = +0,172$ e $\varphi_{24}^{(8)} = -0,172$. Come già trattato nella sezione “Risonanza del modo 6 antisimmetrico: $\omega = 8,123 \text{ rad/s}$ ” i contributi del modo in risonanza compaiono sia al numeratore sia al denominatore con lo stesso modulo e segno opposto; nel rapporto $\Sigma A/\Sigma B$ essi tendono pertanto a compensarsi, mentre lo scostamento della trasmissibilità dall'unità è determinato dalla somma dei contributi degli altri modi. Il profilo degli spostamenti a $\omega = 12,056 \text{ rad/s}$ presenta due nodi:

- Alla massa 5, dove $\varphi_5^{(8)} = -0,006$
- Alla massa 23, dove $\varphi_{23}^{(8)} = -0,005$

La *Figura 3.12* mostra che entrambe le masse si muovono molto meno delle adiacenti: la massa 5 circa 30 volte meno della massa 4 e circa 58 volte meno della massa 6. La posizione dei nodi deriva direttamente dalla forma modale del modo 8: quando un singolo modo domina la risposta, gli spostamenti replicano il suo profilo e i punti dove la forma modale si annulla presentano spostamenti pressoché nulli

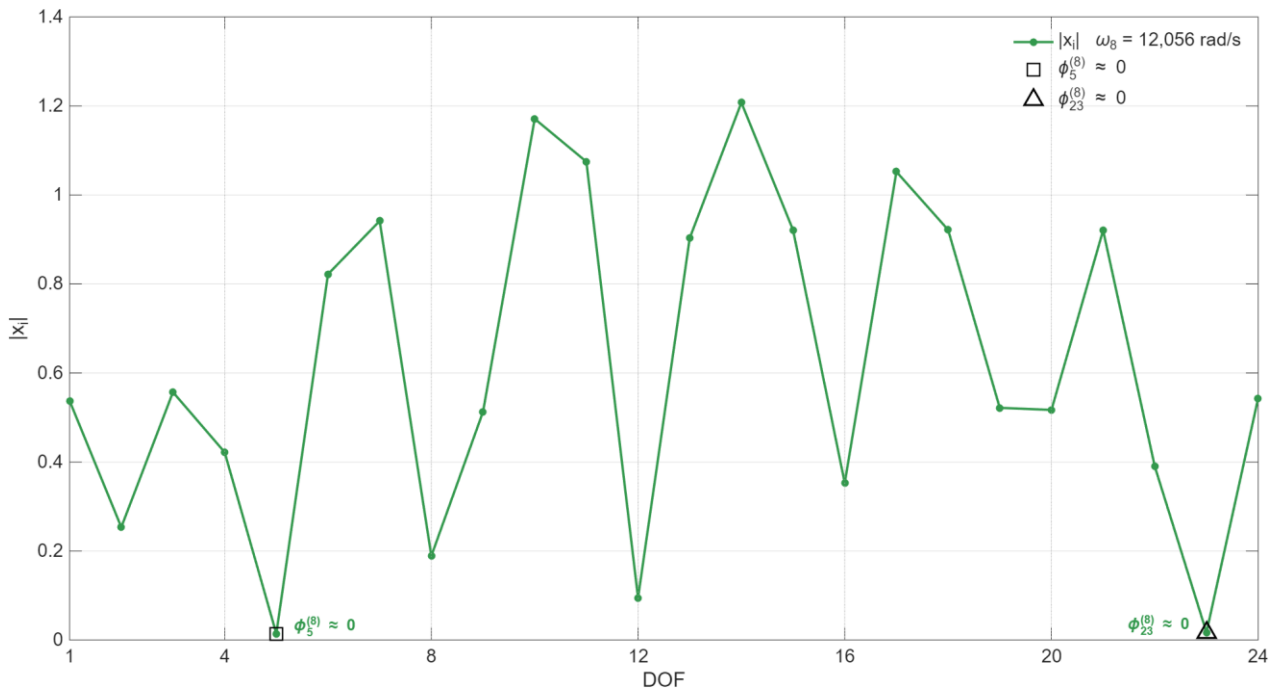


Figura 3.12 - Spostamenti delle 24 masse alla risonanza del modo 8 ($\omega_8 = 12,056 \text{ rad/s}$)

3.3.9 Zona passante dopo il Gap 1: $\omega = 12,505 \text{ rad/s}$

La frequenza si trova nella banda passante oltre il Gap 1, ma la trasmissibilità non ha ancora raggiunto i valori che caratterizzano la zona passante lontana dalle risonanze. I valori numerici ottenuti sono:

- $\Sigma A = +0,004123$
- $\Sigma B = -0,006889$
- $T = -4,46 \text{ dB}$

L'attenuazione residua $T = -4,46 \text{ dB}$ riflette la vicinanza a ω_8 : la frequenza dista solo $0,449 \text{ rad/s}$ dalla risonanza del modo 8 e il suo contributo rimane significativo.

Come si vede dalla *Figura 3.13*, il profilo degli spostamenti mostra un andamento oscillatorio con minimi e massimi localizzati, opposto al decadimento monotono osservato dentro il Gap 1. Le masse 9 e 13 presentano spostamenti ridotti ($0,00248$ e $0,00250$), non per un nodo di un singolo modo ma per cancellazione parziale tra i contributi modali su quelle posizioni.

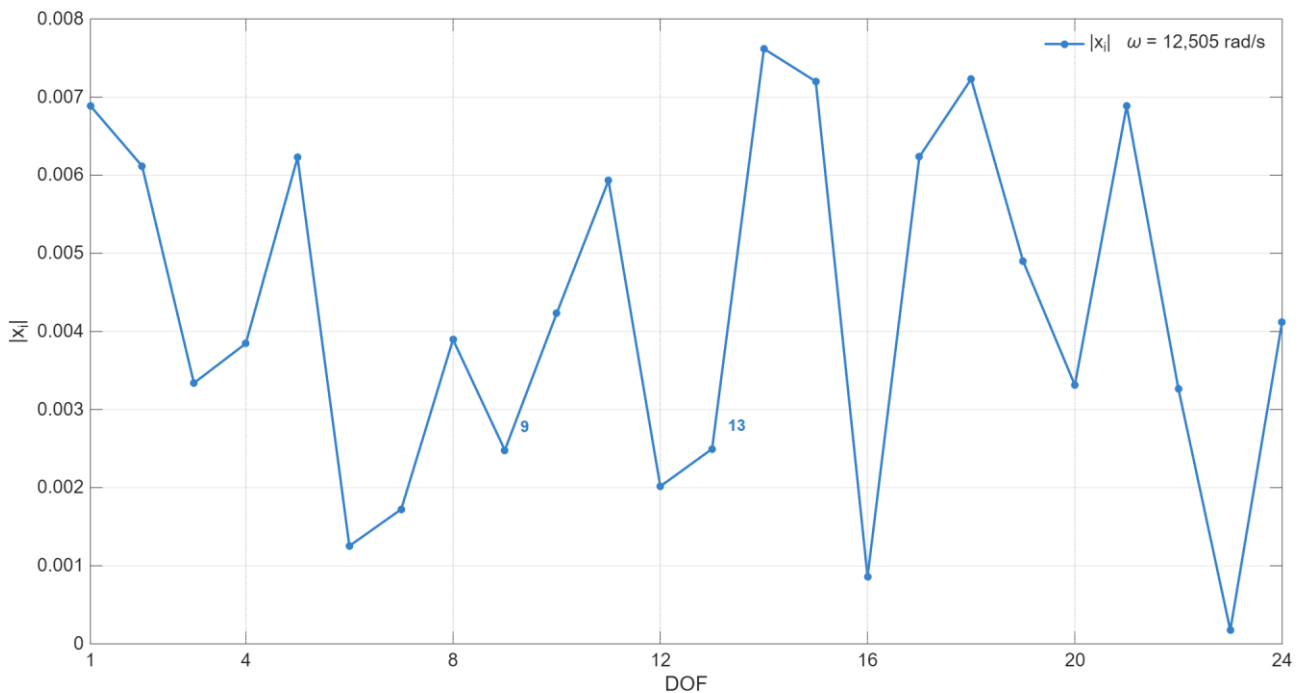


Figura 3.13 - Spostamenti 24 masse a $\omega = 12,505 \text{ rad/s}$

3.4 Analisi del Gap 2

Il Gap 2 occupa l'intervallo $\omega = [16,703 - 21,770] \text{ rad/s}$ e presenta un'attenuazione massima di $T = -57,30 \text{ dB}$ a $\omega = 19,906 \text{ rad/s}$. Il centro geometrico del Gap 2 cade a $\omega = 19,237 \text{ rad/s}$ e si discosta di $0,669 \text{ rad/s}$ dal minimo.

All'interno del Gap 2 è presente il modo evanescente 13 posto a $0,618 \text{ rad/s}$ dal bordo inferiore. Anche l'analisi del Gap 2 è stata effettuata prendendo in esame 9 frequenze di interesse:

- $\omega = 15,500 \text{ rad/s}$, zona passante prima del Gap 2.
- $\omega = 16,402 \text{ rad/s}$, risonanza del modo 12.
- $\omega = 16,707 \text{ rad/s}$, bordo inferiore del Gap 2.
- $\omega = 17,318 \text{ rad/s}$, risonanza del modo 13 evanescente.
- $\omega = 19,237 \text{ rad/s}$, centro geometrico del Gap 2.
- $\omega = 19,906 \text{ rad/s}$, minimo assoluto di T .
- $\omega = 21,767 \text{ rad/s}$, bordo superiore del Gap 2.
- $\omega = 21,971 \text{ rad/s}$, risonanza del modo 14.
- $\omega = 23,003 \text{ rad/s}$, zona passante dopo il Gap 2.

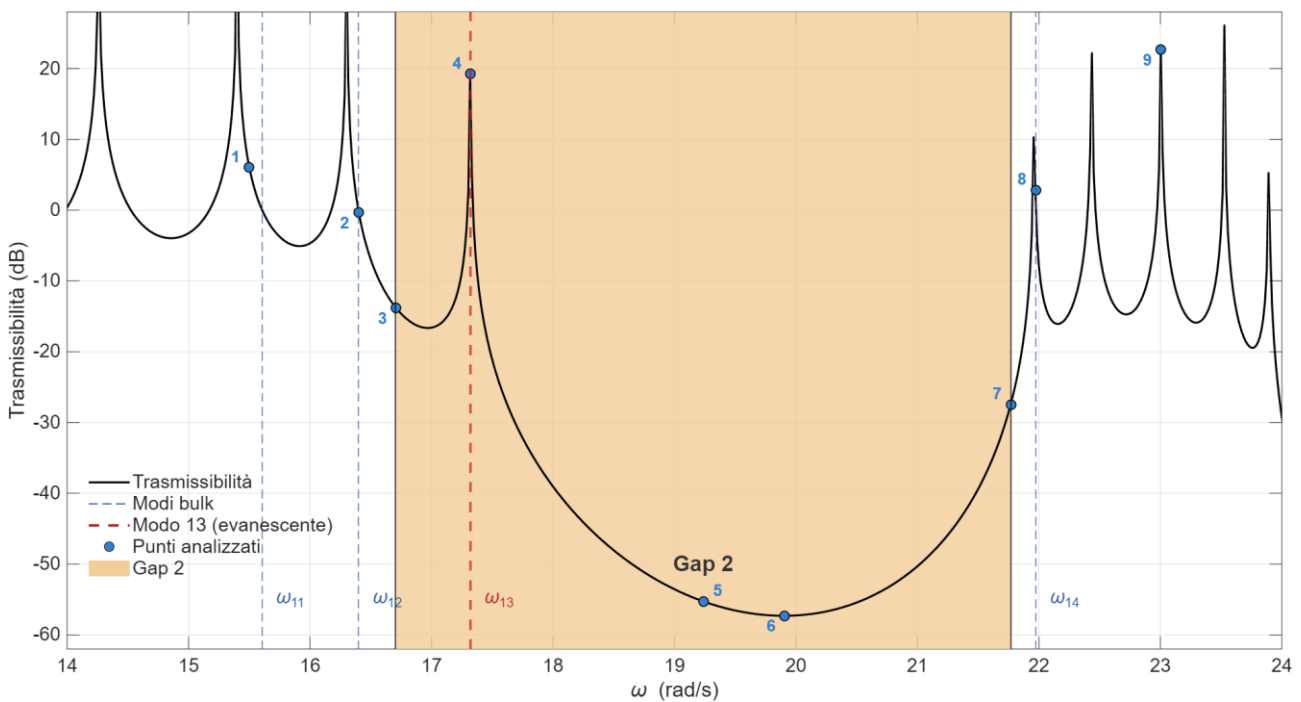


Figura 3.14 - Trasmisibilità Gap 2 con le 9 frequenze evidenziate

3.4.1 Zona passante prima del Gap 2: $\omega = 15,500 \text{ rad/s}$

La frequenza in esame si trova fra le frequenze naturali del modo 11 e del modo 12:

- $\omega_{11} = 15,606 \text{ rad/s}$
- $\omega = 15,500 \text{ rad/s}$
- $\omega_{12} = 16,398 \text{ rad/s}$

La frequenza non ha ancora superato la risonanza del modo 11, quindi A_{11} e B_{11} non hanno ancora cambiato segno.

I valori numerici ottenuti sono:

- $\Sigma A = +0,012674$
- $\Sigma B = +0,006333$
- $T = +6,03 \text{ dB}$

Il modo 11 è simmetrico con $\varphi_1^{(11)} = \varphi_{24}^{(11)} = -0,201$ e, dato che $\omega < \omega_{11}$, il denominatore $\omega_{11}^2 - \omega^2$ è positivo; di conseguenza il prodotto $\varphi_{24}^{(11)} \cdot \varphi_1^{(11)} = +0,040$ è positivo e anche A_{11} è positivo. Per simmetria del modo 11 si ha $B_{11} = A_{11}$.

La sommatoria $\Sigma A = +0,012674$ è quasi completamente determinata da A_{11} , mentre i restanti 23 modi contribuiscono con un residuo piccolo (*Tabella 3.8*).

Tabella 3.8 - A_r e B_r per $\omega = 15,500 \text{ rad/s}$

Modo r	$\omega_r \text{ (rad/s)}$	A_r	B_r
1-9	0 - 13,294	$\Sigma = -0,000454$	$\Sigma = -0,005190$
10	14,525	+0,001573	-0,001573
11	15,606	+0,012250	+0,012250
12	16,398	-0,000766	+0,000766
13	17,321	+0,000071	$\Sigma = +0,000001$
14-24	21,975 - 29,074	$\Sigma = \approx 0$	$\Sigma = +0,000079$
Σ totale	-	+0,012674	+0,006333

Il denominatore $\Sigma B = +0,006333$ è circa la metà di ΣA perché il contributo positivo di $B_{11} = +0,012250$ viene parzialmente ridotto dai contributi negativi dei modi già superati $\Sigma B_{1-10} = -0,006763$. La cancellazione è parziale, non quasi perfetta come nel Gap 1 a $\omega = 7,503 \text{ rad/s}$. Si ottiene per quanto riguarda la trasmissibilità $T = 0,012674/0,006333 = 2,001$, ovvero $T = +6,03 \text{ dB}$.

3.4.2 Risonanza del modo 12: $\omega = 16,402 \text{ rad/s}$

La frequenza analizzata non coincide perfettamente con ω_{12} , poiché deriva dalla discretizzazione della griglia di frequenze utilizzata nell'analisi.. Si ottiene $\omega_{12}^2 - \omega^2 = 16,398^2 - 16,402^2 = -0,131$, quasi zero e negativo.

I valori numerici ottenuti sono:

- $\Sigma A = +0,181723$
- $\Sigma B = -0,189292$
- $T = -0,35 \text{ dB}$

Il modulo di A_{12} e B_{12} è identico, ma il segno è opposto perché il modo 12 è antisimmetrico. Il modo 12 domina con $A_{12} = +0,182673$ e $B_{12} = -0,182673$ (Tabella 3.9), come previsto in prossimità della sua frequenza naturale. La trasmissibilità si discosta leggermente dal valore unitario a causa dei contributi degli altri modi.

Tabella 3.9 - A_r e B_r per $\omega = 16,402 \text{ rad/s}$

Modo r	$\omega_r \text{ (rad/s)}$	A_r	B_r
1-9	0 - 13,294	$\Sigma = -0,000297$	$\Sigma = -0,004331$
10	14,525	+0,000793	-0,000793
11	15,606	-0,001583	-0,001583
12	16,398	+0,182673	-0,182673
13	17,321	+0,000138	+0,000002
14	21,975	-0,000006	+0,000006
15-24	22,465 - 29,074	$\Sigma = +0,000006$	$\Sigma = +0,000079$
Σ totale	-	+0,181723	-0,189292

Le ampiezze degli spostamenti a $\omega = 15,500 \text{ rad/s}$ sono circa 14 volte inferiori rispetto a quelle ottenute in prossimità della risonanza del modo 12. La Figura 3.15 evidenzia questa differenza di scala. Nel Gap 1 alla risonanza del modo 6 le ampiezze erano circa 78 volte maggiori rispetto alla banda passante, con trasmissibilità comunque prossima a 1. Come già indicato nel paragrafo “Indipendenza del rapporto A_r/B_r dalla frequenza” l'ampiezza assoluta della risposta non entra nel calcolo della trasmissibilità, conta solo il rapporto tra uscita e ingresso. Alla risonanza di un modo antisimmetrico A_r e B_r hanno lo stesso modulo e segno opposto e il rapporto vale sempre circa 1 indipendentemente da quanto grande sia la risposta. Il modo 11, che a $\omega = 15,500 \text{ rad/s}$ contribuiva

con $A_{11} = +0,012250$, qui ha cambiato segno diventando $A_{11} = -0,001583$ perché nel frattempo è stata superata la sua risonanza a $\omega_{11} = 15,606 \text{ rad/s}$.

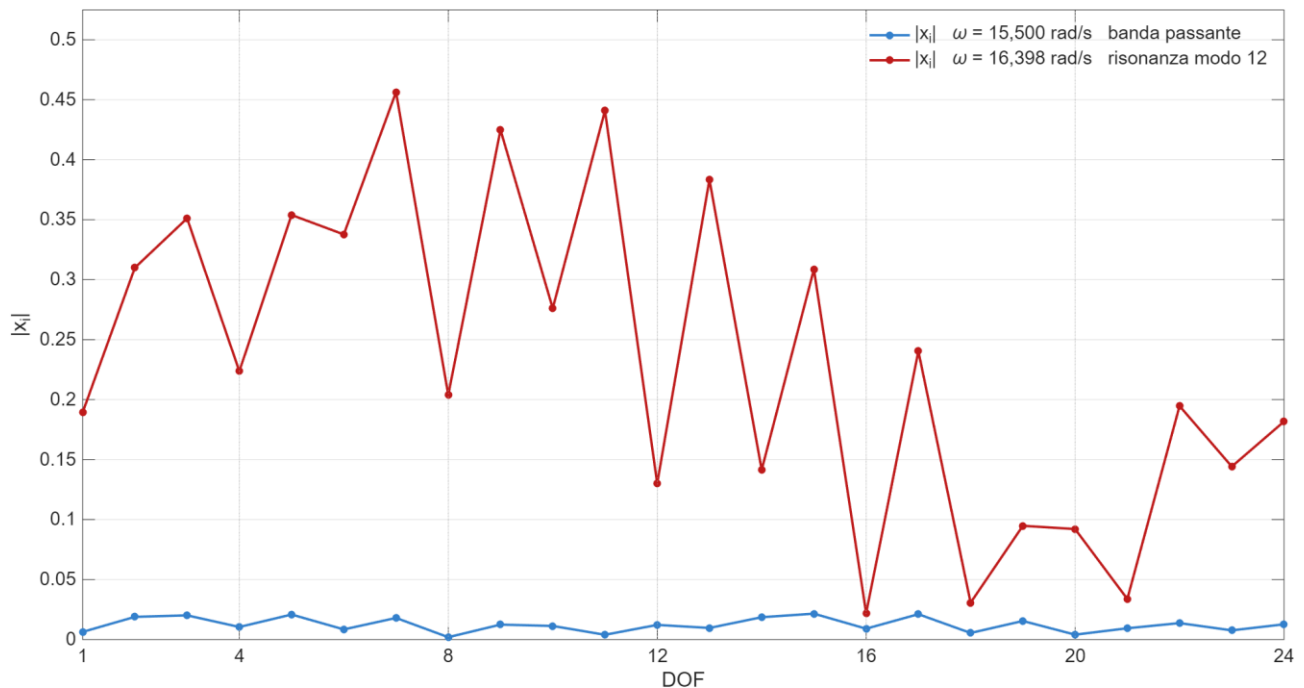


Figura 3.15 - Confronto spostamenti $\omega = 15,500 \text{ rad/s}$ vs $\omega = 16,402 \text{ rad/s}$

3.4.3 Bordo inferiore del Gap 2: $\omega = 16,707 \text{ rad/s}$

La frequenza in esame è la prima all'interno del Gap 2 ed è compresa fra la frequenza di risonanza del modo 12 e quella del modo 13:

- $\omega_{12} = 16,398 \text{ rad/s}$
- $\omega = 16,707 \text{ rad/s}$
- $\omega_{13} = 17,321 \text{ rad/s}$

I valori numerici ottenuti sono:

- $\Sigma A = +0,001626$
- $\Sigma B = -0,007963$
- $T = -13,80 \text{ dB}$

Come nel Gap 1 al bordo inferiore, il cambio di segno di A_{12} dovuto al superamento di ω_{12} porta A_{12} e A_{13} ad avere lo stesso segno positivo; per avere cancellazione tra i due modi sarà necessaria $\omega > \omega_{13}$.

Tabella 3.10 - A_r e B_r per $\omega = 16,707 \text{ rad/s}$

Modo r	$\omega_r \text{ (rad/s)}$	A_r	B_r
1-10	0 - 14,525	$\Sigma = +0,000412$	$\Sigma = -0,004777$
11	15,606	-0,001133	-0,001133
12	16,398	+0,002144	-0,002144
13	17,321	+0,000204	+0,000003
14	21,975	-0,000007	+0,000007
15-24	22,465 29,074	$\Sigma = +0,000006$	$\Sigma = +0,000081$
Σ totale	-	+0,001626	-0,007963

La differenza rispetto al Gap 1 riguarda il denominatore: nel Gap 1 B_7 valeva il 143% di ΣB perché $\phi_1^{(7)} = -0,519$ è grande, per quanto riguarda il Gap 2 $B_{13} = +0,000003$ è quasi zero perché $\phi_1^{(13)} = -0,008$ (Figura 3.16). Sia il numeratore che il denominatore sono più piccoli nel Gap 2, ma il denominatore si è ridotto proporzionalmente di più: $|\Sigma A / \Sigma B| = 0,412$ nel Gap 1 e $|\Sigma A / \Sigma B| = 0,204$ nel Gap 2, con una attenuazione di $T = -13,80 \text{ dB}$ contro $T = -7,71 \text{ dB}$ del Gap 1, poiché il denominatore non viene gonfiato dal modo evanescente.

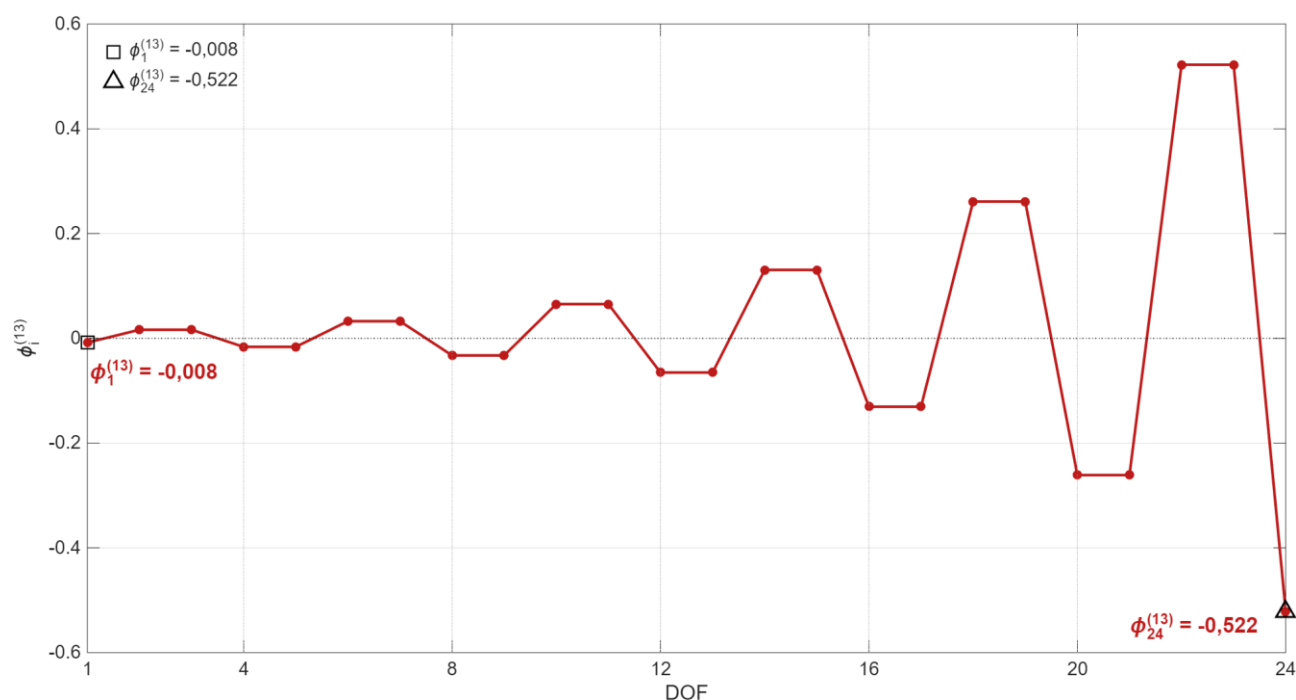


Figura 3.16 - Forma modale modo 13 con $\phi_1^{(13)}$ evidenziato

3.4.4 Risonanza del modo evanescente 13: $\omega = 17,318 \text{ rad/s}$

La quarta frequenza presa dal campionamento per esaminare il Gap 2 è la più vicina alla risonanza del modo evanescente 13. Il denominatore $\omega_{13}^2 - \omega^2 = 17,321^2 - 17,318^2 = +0,096$ è quasi zero e positivo poiché $\omega < \omega_{13}$, a differenza del Gap 1 dove alla risonanza del modo 7 il denominatore era negativo poiché $\omega > \omega_7$.

I valori numerici ottenuti sono:

- $\Sigma A = +0,044505$
- $\Sigma B = -0,004860$
- $T = +19,24 \text{ dB}$

Nel Gap 1 alla risonanza del modo 7 evanescente, la trasmissibilità valeva $T = -15,04 \text{ dB}$, a ω_{13} $T = +19,24 \text{ dB}$: la massa 24 si muove circa 9 volte più della massa 1 nonostante siamo dentro un Gap. Il modo 13 ha proprietà opposte al modo evanescente 7 e per questo nel Gap 2 sono altri i meccanismi che dominano la struttura.

Dalla *Tabella 3.11* si possono notare i valori rilevanti:

- $A_{13} = +0,044211$
- $B_{13} = +0,000691$

Tabella 3.11 - A_r e B_r per $\omega = 17,318 \text{ rad/s}$

Modo r	$\omega_r \text{ (rad/s)}$	A_r	B_r
1-9	0 - 13,294	$\Sigma = -0,000215$	$\Sigma = -0,003704$
10	14,525	+0,000518	-0,000518
11	15,606	-0,000715	-0,000715
12	16,398	+0,000707	-0,000707
13	17,321	+0,044211	+0,000691
14	21,975	-0,000008	+0,000008
15	22,465	+0,000015	+0,000015
16-24	23,037 - 29,074	$\Sigma = -0,000008$	$\Sigma = +0,000071$
Σ totale	-	+0,044505	-0,004860

Vi sono due fattori da evidenziare, entrambi opposti rispetto al Gap 1:

- $A_{13} = +0,044211$ domina $\Sigma A = +0,044505$ grazie a $\varphi_{24}^{(13)} = -0,522$ grande. Nel Gap 1, al contrario, φ_1 è grande.
- $B_{13} = +0,000691$ è quasi zero (14% di ΣB in modulo) perché $\varphi_1^{(13)} = -0,008$ è quasi zero e, anche amplificato dalla risonanza, rimane trascurabile. Nel Gap 1 $B_7 = -4,142285$ gonfiava il denominatore, nel Gap 2 $\Sigma B = -0,004860$ è determinato dagli altri modi. ΣB è circa 854 volte più piccolo in modulo.

Il rapporto $|\Sigma A / \Sigma B| = 0,044505 / 0,004860 = 9,16$, ovvero $T = +19,24 \text{ dB}$. Questo valore non coincide con $|\varphi_{24}^{(13)} / \varphi_1^{(13)}| = 0,522 / 0,008 = 64$, a differenza del Gap 1 dove T alla risonanza del modo 7 coincide con $|\varphi_{24}^{(7)} / \varphi_1^{(7)}| = 0,178$. La ragione è che il modo 13 domina il numeratore, ma non il denominatore e quindi bisogna valutare il contributo degli altri modi.

La *Figura 3.17* mostra il pattern degli spostamenti, crescente, con fattore non costante da cella a cella.

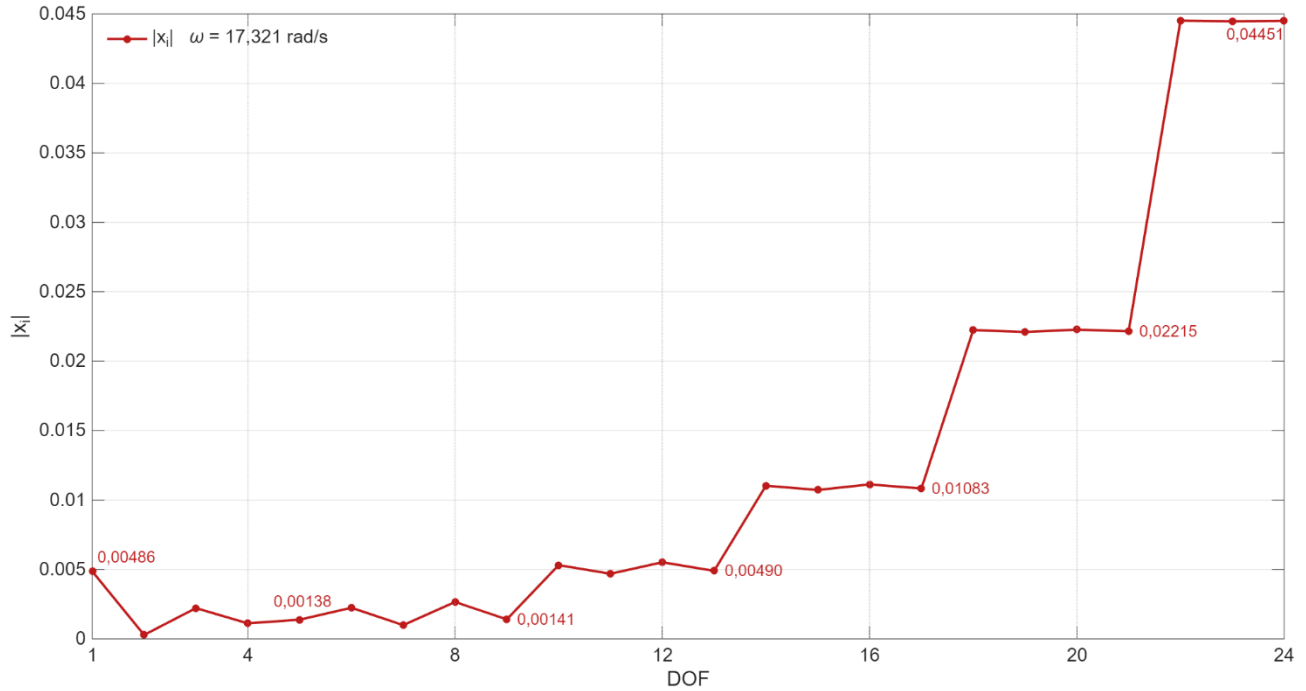


Figura 3.17 - Spostamenti 24 masse a $\omega = 17,318 \text{ rad/s}$

Nelle prime quattro celle il fattore non è costante e varia in modo irregolare: 0,284 tra la prima e la seconda cella, 1,019 tra la seconda e la terza, 3,479 tra la terza e la quarta e 2,211 tra la quarta e la quinta. Solo nelle ultime due celle il modo 13 comincia a dominare e il fattore si stabilizza intorno a 2. Nel Gap 1 il modo 7 dominava completamente la risposta fin dalla prima cella, con decadimento costante di 0,749 per cella. Qui il modo 13 non raggiunge mai la stessa dominanza perché $\varphi_1^{(13)} \approx 0$ limita la sua eccitazione dalla forzante. La *Figura 3.18* mostra il confronto tra la forma modale normalizzata del modo 13 e gli spostamenti normalizzati: nelle prime celle le due curve si discostano significativamente, mentre nelle ultime due convergono, confermando che il modo 13 domina la risposta solo nella parte finale della catena.

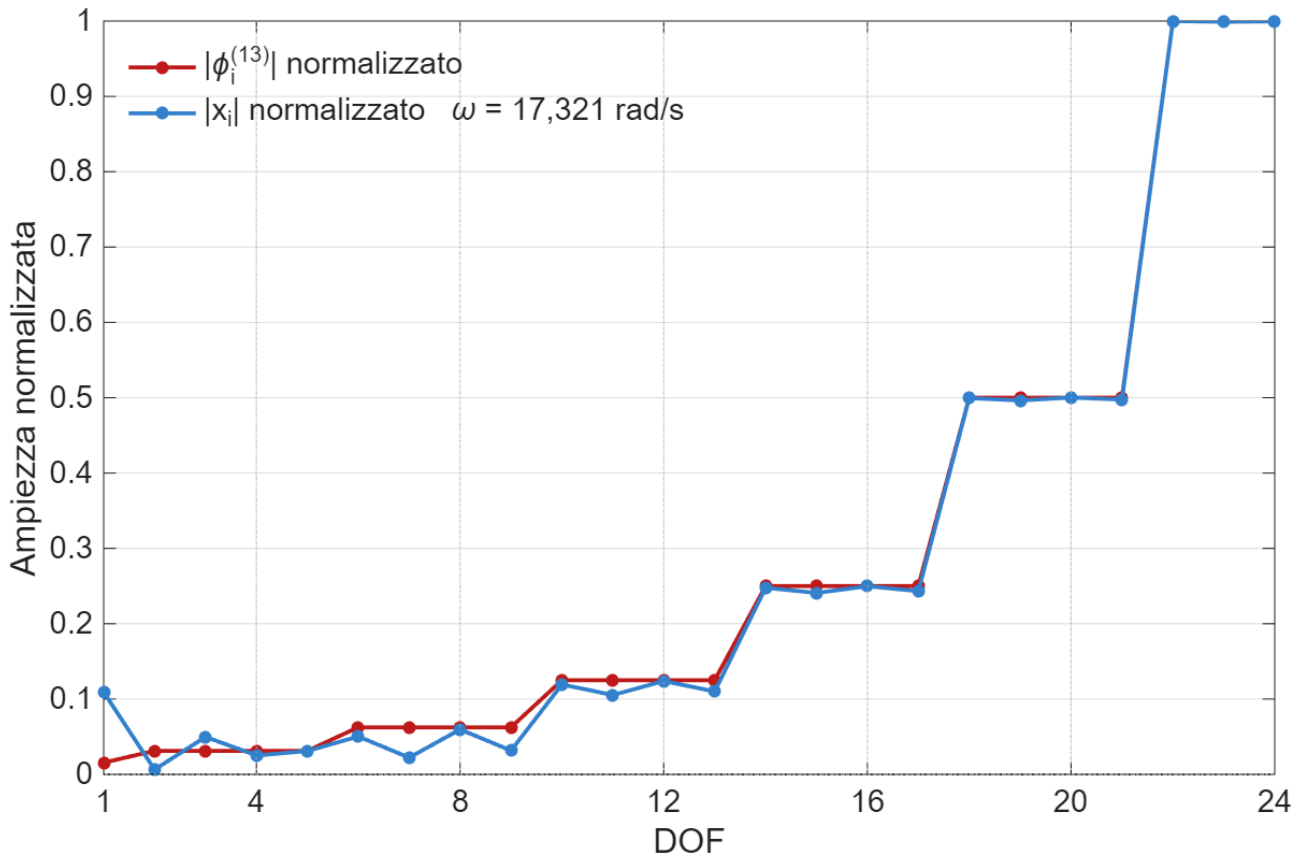


Figura 3.18 - Confronto tra la forma modale normalizzata del modo 13 e gli spostamenti normalizzati a $\omega = 17,321$ rad/s

3.4.5 Centro geometrico del Gap 2: $\omega = 19,237$ rad/s

I valori numerici ottenuti sono:

- $\Sigma A = -0,000006$
- $\Sigma B = -0,003514$
- $T = -55,27$ dB

Mentre nel Gap 1 al centro geometrico la cancellazione nel numeratore avviene principalmente tra $A_6 = +0,002365$ e $A_7 = -0,002924$, nel Gap 2 tutti i contributi modali si bilanciano collettivamente. I modi 1-10 già superati danno $\Sigma A_{1-10} = +0,000158$, i modi 11-24 non ancora superati danno $\Sigma A_{11-24} = -0,000164$. I due gruppi di segno opposto danno come risultato finale $\Sigma A = -0,000006$, quasi zero.

Dalla Tabella 3.12 si può notare come nessun singolo modo domini il numeratore. $A_{11} = -0,000319$ e $A_{12} = +0,000217$ sono in modulo i più grandi, ma hanno comunque segno opposto e insieme agli altri contributi si arriva ad avere un ΣA 306 volte più piccolo rispetto al Gap 1 ($\Sigma A_{\omega=10,120 \text{ rad/s}} = -0,001852$ contro $\Sigma A_{\omega=19,237 \text{ rad/s}} = -0,000006$).

Tabella 3.12 - A_r e B_r per $\omega = 19,237 \text{ rad/s}$

Modo r	$\omega_r \text{ (rad/s)}$	A_r	B_r
1-10	0 - 14,525	$\Sigma = +0,000158$	$\Sigma = -0,003101$
11	15,606	-0,000319	-0,000319
12	16,398	+0,000217	-0,000217
13	17,321	-0,000061	-0,000001
14	21,975	-0,000012	+0,000012
15	22,465	+0,000023	+0,000023
16-24	23,037 - 29,074	$\Sigma = -0,000012$	$\Sigma = +0,000088$
Σ totale	-	-0,000006	-0,003514

Per quanto riguarda il denominatore, $B_{13} = -0,000001$ è completamente trascurabile rispetto a $\Sigma B = -0,003514$. A differenza del Gap 1 dove B_7 vale il 74,9% di ΣB , in questo Gap nessun modo domina il denominatore: è il contributo collettivo dei modi già superati a determinarlo, con una somma parziale di -0,003101 su un totale di $\Sigma A = -0,003514$.

Il rapporto $T = 0,000006/0,003514 = 0,00171$, quindi $T = -55,27 \text{ dB}$. L'attenuazione è molto più profonda rispetto al Gap 1 ($T = -21,47 \text{ dB}$ al centro geometrico) per due ragioni: il numeratore è 306 volte più piccolo e il denominatore non viene gonfiato da nessun modo evanescente.

Il pattern degli spostamenti non segue un decadimento costante, come si vede dalla *Figura 3.19*. Il fattore di decadimento per cella a questa frequenza è circa 0,326 per le prime cinque celle, più basso di 0,749 del Gap 1; nell'ultima cella sale a 0,446.

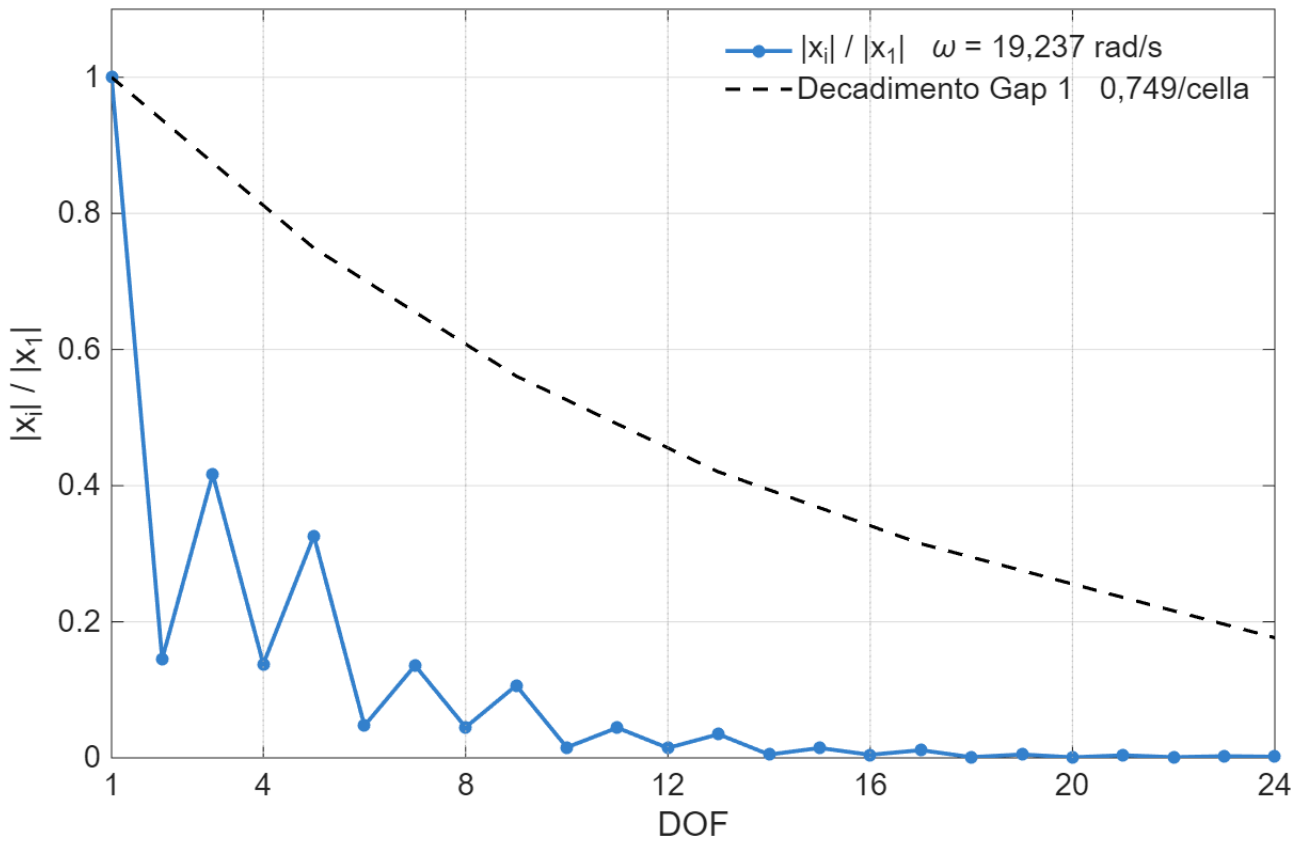


Figura 3.19 - Spostamenti normalizzati a $\omega = 19,237 \text{ rad/s}$

3.4.6 Minimo assoluto di T nel Gap 2: $\omega = 19,906 \text{ rad/s}$

Come nel Gap 1 il minimo non coincide con il centro geometrico del gap perché dipende dal rapporto $|\Sigma A / \Sigma B|$, non dal minimo assoluto di ΣA .

I valori numerici ottenuti sono:

- $\Sigma A = -0,000004$
- $\Sigma B = -0,003126$
- $T = -57,30 \text{ dB}$

Rispetto al centro geometrico ΣA si è ridotto in misura maggiore in confronto a ΣB ; la cancellazione collettiva nel numeratore è più efficace rispetto a quanto avviene a $\omega = 19,237 \text{ rad/s}$: i modi 1-10 danno $\Sigma A_{1-10} = +0,000134$ e i modi 11-24 $\Sigma A_{11-24} = -0,000138$, con differenza finale $\Sigma A = -0,000004$.

Tabella 3.13 - A_r e B_r per $\omega = 19,906 \text{ rad/s}$

Modo r	$\omega_r \text{ (rad/s)}$	A_r	B_r
1-10	0 - 14,525	$\Sigma = +0,000134$	$\Sigma = -0,002832$
11	15,606	-0,000264	-0,000264
12	16,398	+0,000172	-0,000172
13	17,321	-0,000044	-0,000001
14	21,975	-0,000016	+0,000016
15-24	22,465 - 29,074	$\Sigma = +0,000014$	$\Sigma = +0,000127$
Σ totale	-	-0,000004	-0,003126

Al minimo del Gap 1 $\Sigma A = -0,001502$ e $\Sigma B = -0,018205$. Nel Gap 2 ΣA è 352 volte più piccolo, ΣB è circa 5,8 volte più piccolo. Il rapporto $|\Sigma A/\Sigma B|$ risulta circa 60 volte inferiore rispetto al Gap 1, di conseguenza la differenza in attenuazione tra i due minimi è di $35,63 \text{ dB}$.

3.4.7 Bordo superiore del Gap 2: $\omega = 21,767 \text{ rad/s}$

Il modo 14 si sta avvicinando alla sua risonanza $\omega_{14} = 21,975 \text{ rad/s}$, quindi $\omega_{14}^2 - \omega^2 > 0$ è piccolo e dato che è un modo antisimmetrico il suo contributo $A_{14} = -0,000153$ è negativo e si somma agli altri contributi negativi nel numeratore. $B_{14} = +0,000153$ è positivo e si oppone ai contributi negativi nel denominatore causando una riduzione di ΣB in modulo. Il fenomeno di cancellazione collettiva caratteristico del Gap 2 inizia a venir meno proprio per la vicinanza alla risonanza del modo 14, ma l'attenuazione al bordo superiore rimane comunque significativa $T = -27,47 \text{ dB}$ rispetto a $T = -14,01 \text{ dB}$ del Gap 1, nello stesso punto relativo. Il Gap 2 si chiude più lentamente perché la cancellazione collettiva nel numeratore mantiene ΣA a valori molto più bassi rispetto al Gap 1.

I valori numerici ottenuti sono:

- $\Sigma A = -0,000090$
- $\Sigma B = -0,002131$
- $T = -27,47 \text{ dB}$

Rispetto al minimo ΣA è aumentato in modulo da 0,000004 a 0,000090 causando la risalita della trasmissibilità da $T = -57,30 \text{ dB}$ a $T = -27,47 \text{ dB}$. ΣB si è ridotto in modulo da -0,003126 a -0,002131. Entrambe le variazioni causano un aumento del rapporto $|\Sigma A/\Sigma B|$.

Nel Gap 1 il bordo superiore era dominato dall'avvicinarsi del modo 8, che distorceva il profilo di decadimento del modo 7. Qui non esiste un modo evanescente che domina il pattern, la cancellazione è collettiva e il suo deterioramento al bordo superiore avviene in modo più graduale e tutti i modi contribuiscono a questo fenomeno.

3.4.8 Risonanza del modo 14: $\omega = 21,971 \text{ rad/s}$

Ancora una volta la frequenza presa dal campionamento di discosta di poco da quella effettiva di risonanza del modo in esame. Si ottiene $\omega_{14}^2 - \omega^2 = 21,975^2 - 21,971^2 = +0,176$, quasi zero e positivo.

I valori numerici ottenuti sono:

- $\Sigma A = -0,007450$
- $\Sigma B = +0,005380$
- $T = +2,83 \text{ dB}$

Dato che ci troviamo nei pressi della sua risonanza il modo 14 domina con $A_{14} = -0,007545$ e $B_{14} = +0,007545$. Per antisimmetria A_{14} e B_{14} hanno lo stesso modulo e segno opposto questo porta a una cancellazione quasi completa del modo 14 nel rapporto $\Sigma A/\Sigma B$ e lo scarto $\Delta T = 0,3843$ dall'unità si ottiene dal residuo degli altri modi. La trasmissibilità in decibel vale $T = +2,83 \text{ dB}$.

La trasmissibilità ha un valore più grande rispetto a quello valutato alla risonanza del modo 8 appena fuori dal Gap1 perché il modo 14 ha $\varphi_1^{(14)} = -0,037$, più piccolo in modulo rispetto a $\varphi_1^{(8)} = -0,172$; un φ_1 più piccolo significa che il modo domina meno la risposta alla sua risonanza e di conseguenza gli contributi modali hanno un peso percentuale maggiore.

3.4.9 Zona passante dopo il Gap 2: $\omega = 23,003 \text{ rad/s}$

La frequenza in esame si trova fra le frequenze naturali del modo 15 e del modo 16:

- $\omega_{15} = 22,465 \text{ rad/s}$
- $\omega = 23,003 \text{ rad/s}$
- $\omega_{16} = 23,037 \text{ rad/s}$

I valori numerici ottenuti sono:

- $\Sigma A = -0,002066$
- $\Sigma B = -0,000151$
- $T = +22,70 \text{ dB}$

Il denominatore $\Sigma B = -0,000151$ è molto piccolo per cancellazione tra B_{16} e i contributi negativi dei modi già superati. Il modo 16 è antisimmetrico e $\omega < \omega_{16}$: $B_{16} = +0,002033$ è positivo e quasi compensa i contributi negativi dei modi 1-15 già superati, $\Sigma B_{1-15} = -0,002362$. La massa 1 risponde pochissimo alla forzante.

Il numeratore è dominato da $A_{16} = -0,002033$, che vale il 98,4% di $\Sigma A = -0,002066$. $T = 0,002066/0,000151 = 13,68$, ovvero $T = +22,70 \text{ dB}$.

Il meccanismo è analogo a quello del Gap 1 a $\omega = 7,503 \text{ rad/s}$, dove il denominatore era piccolo per cancellazione tra i contributi dei modi vicini. Qui però l'effetto è molto più marcato: $T = +22,70 \text{ dB}$ contro $T = +11,93 \text{ dB}$ del Gap 1. La ragione è che la cancellazione nel denominatore è

più efficace: B_{16} quasi azzerata ΣB lasciando un residuo di soli $-0,000151$, contro i $+0,003429$ del Gap 1 a $\omega = 7,503 \text{ rad/s}$.

3.5 Analisi del Gap 3

Il Gap 3 occupa l'intervallo $\omega = [24,026 - 28,545] \text{ rad/s}$ e presenta un'attenuazione massima di $T = -91,52 \text{ dB}$ a $\omega = 26,551 \text{ rad/s}$. Il centro geometrico cade a $\omega = 26,188 \text{ rad/s}$ e si discosta di $0,363 \text{ rad/s}$ dal minimo.

All'interno del Gap 3 è presente il modo evanescente 19 a $\omega_{19} = 28,531 \text{ rad/s}$, a soli $0,014 \text{ rad/s}$ dal bordo superiore. Questa posizione è opposta rispetto al Gap 1, dove il modo 7 si trovava vicino al bordo inferiore ($0,361 \text{ rad/s}$); nel Gap 3 il modo evanescente occupa quasi l'intera estensione del gap prima di comparire al bordo superiore.

L'analisi del Gap 3 è stata effettuata prendendo in esame 9 frequenze di interesse:

- $\omega = 23,003 \text{ rad/s}$, zona passante prima del Gap 3.
- $\omega = 23,905 \text{ rad/s}$, risonanza del modo 18.
- $\omega = 24,021 \text{ rad/s}$, bordo inferiore del Gap 3.
- $\omega = 26,286 \text{ rad/s}$, centro geometrico del Gap 3.
- $\omega = 26,551 \text{ rad/s}$, minimo assoluto di $T = -91,52 \text{ dB}$.
- $\omega = 28,528 \text{ rad/s}$, risonanza del modo 19 evanescente.
- $\omega = 28,543 \text{ rad/s}$, bordo superiore del Gap 3.
- $\omega = 28,587 \text{ rad/s}$, risonanza del modo 20.
- $\omega = 29,081 \text{ rad/s}$, zona passante dopo il Gap 3.

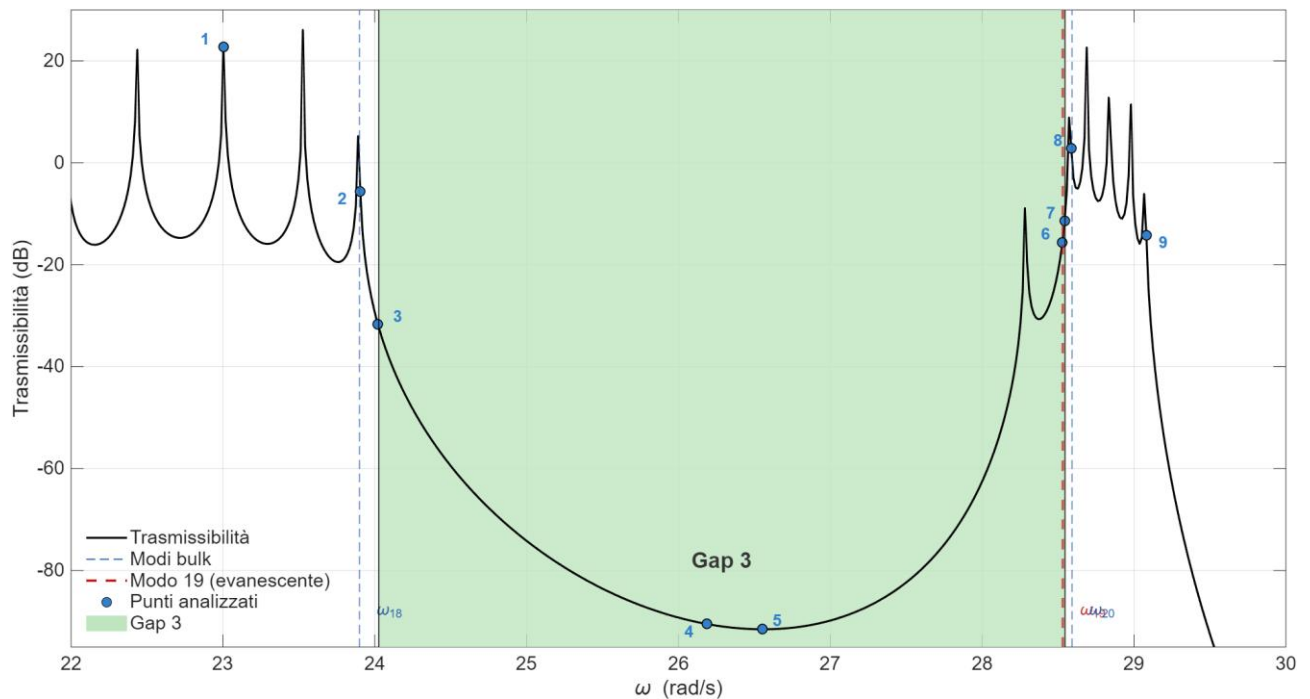


Figura 3.20 - Trasmissibilità Gap 3 con 9 frequenze evidenziate

3.5.1 Zona passante prima del Gap 3: $\omega = 23,003 \text{ rad/s}$

La frequenza $\omega = 23,003 \text{ rad/s}$ è l'unica frequenza di campionamento che si trova chiaramente nella banda passante tra il Gap 2 e il Gap 3. I due gap sono separati da soli $2,256 \text{ rad/s}$ e non ci sono altri punti di campionamento significativi in questo intervallo. Per questo motivo coincide con la zona passante già analizzata nella sezione 3.1.4.

I valori numerici ottenuti sono:

- $\Sigma A = -0,002066$
- $\Sigma B = -0,000151$
- $T = +22,70 \text{ dB}$

Il meccanismo è già stato descritto nella sezione 3.1.4: il denominatore è piccolo per cancellazione quasi completa tra $B_{16} = +0,002033$ e la somma dei contributi negativi dei modi già superati $\Sigma B_{1-15} = -0,002362$. La massa 1 risponde pochissimo alla forzante e la trasmissibilità supera l'unità. Questa caratteristica è più marcata rispetto alla zona passante prima del Gap 1 ($T = +11,93 \text{ dB}$) e prima del Gap 2 ($T = +6,03 \text{ dB}$), confermando che la cancellazione nel denominatore diventa progressivamente più efficace all'aumentare della frequenza.

3.5.2 Risonanza del modo 18: $\omega = 23,905 \text{ rad/s}$

La frequenza campionata non coincide perfettamente con $\omega_{18} = 23,899 \text{ rad/s}$. Il denominatore $\omega_{18}^2 - \omega^2 = 23,899^2 - 23,905^2 = -0,245$, quasi zero e negativo poiché $\omega > \omega_{18}$.

I valori numerici ottenuti sono:

- $\Sigma A = +0,002460$
- $\Sigma B = -0,004697$
- $T = -5,62 \text{ dB}$

Il modo 18 è antisimmetrico con $\varphi_1^{(18)} = +0,025$ e $\varphi_{24}^{(18)} = -0,025$ e domina con $A_{18} = +0,002532$ e $B_{18} = -0,002532$. Per antisimmetria $A_{18} = -B_{18}$ e nel rapporto $|\Sigma A / \Sigma B|$ il modo 18 si cancella quasi completamente. Lo scarto dall'unità è determinato dal residuo degli altri modi.

A differenza della risonanza del modo 6 nel Gap 1 e del modo 12 nel Gap 2, dove la trasmissibilità valeva circa 0 dB, qui $T = -5,62 \text{ dB}$. La ragione è che $\varphi_1^{(18)} = 0,025$ è molto piccolo: il modo 18 domina meno la risposta e il residuo degli altri modi pesa di più nel rapporto finale. Le ampiezze a questa frequenza sono solo 1,2 volte più grandi rispetto alla zona passante, molto meno rispetto al Gap 1 (78 volte) e al Gap 2 (14 volte), proprio perché il modo 18 eccita poco la risposta anche alla sua risonanza.

Tabella 3.14 - A_r e B_r per $\omega = 23,905 \text{ rad/s}$

Modo r	$\omega_r \text{ (rad/s)}$	A_r	B_r
1-17	0 - 23,547	$\Sigma = -0,000072$	$\Sigma = -0,002264$
18	23,899	+0,002532	-0,002532
19-24	28,531 - 29,074	$\Sigma \approx 0$	$\Sigma = +0,000099$
Σ totale	-	+0,002460	-0,004697

3.5.3 Bordo inferiore del Gap 3: $\omega = 24,021 \text{ rad/s}$

La frequenza in esame è la prima all'interno del Gap 3 ed è compresa fra la frequenza di risonanza del modo 18 e quella del modo 19:

- $\omega_{18} = 23,899 \text{ rad/s}$
- $\omega = 24,021 \text{ rad/s}$
- $\omega_{19} = 28,531 \text{ rad/s}$

I valori numerici ottenuti sono:

- $\Sigma A = +0,000057$
- $\Sigma B = -0,002203$
- $T = -31,70 \text{ dB}$

Il bordo inferiore del Gap 3 presenta un'attenuazione di $T = -31,70 \text{ dB}$, già molto più profonda rispetto al bordo inferiore del Gap 1 ($T = -7,71 \text{ dB}$) e del Gap 2 ($T = -13,80 \text{ dB}$). La cancellazione nel numeratore è già efficace fin dal bordo: $\Sigma A = +0,000057$ è quasi zero perché i contributi dei modi già superati ($\Sigma A_{1-17} = -0,000049$ e $A_{18} = +0,000107$) quasi si bilanciano con quelli dei modi non ancora superati ($A_{19} = +0,000009$ e $\Sigma A_{20-24} = -0,000009$), come si vede dalla *Tabella 3.15*.

Tabella 3.15 - A_r e B_r per $\omega = 24,021 \text{ rad/s}$

Modo r	$\omega_r \text{ (rad/s)}$	A_r	B_r
1-17	0 - 23,547	$\Sigma = -0,000049$	$\Sigma = -0,002197$
18	23,899	+0,000107	-0,000107
19	28,531	+0,000009	+0,000050
20-24	28,592 - 29,074	$\Sigma = -0,000009$	$\Sigma = +0,000051$
Σ totale	-	+0,000057	-0,002203

Il denominatore $\Sigma B = -0,002203$ è determinato quasi interamente dalla somma $\Sigma B_{1-17} = -0,002197$). $B_{19} = +0,000050$ vale solo il 2,3% di ΣB in modulo. Il modo evanescente 19 ha $\varphi_1^{(19)} = -0,109$, intermedio tra il Gap 1 ($\varphi_1^{(7)} = -0,519$ grande) e il Gap 2 ($\varphi_1^{(13)} = -0,008$ quasi nullo). Il denominatore non viene gonfiato come nel Gap 1, ma la cancellazione collettiva nel

numeratore è già molto efficace. I due meccanismi operano insieme fin dal bordo inferiore, producendo un'attenuazione già significativa prima ancora di raggiungere il centro del gap.

3.5.4 Centro geometrico del Gap 3: $\omega = 26,286 \text{ rad/s}$

I valori numerici ottenuti sono:

- $\Sigma A \approx 0$
- $\Sigma B = -0,001470$
- $T = -90,96 \text{ dB}$

La cancellazione nel numeratore è praticamente completa, infatti $\Sigma A \approx 0$. Come si vede dalla *Tabella 3.16*, $\Sigma A_{1-17} = -0,000005$ e i modi 18-24 contribuiscono con $\Sigma A_{18-24} = +0,000005$: i due gruppi si annullano quasi esattamente. Nessun modo domina il denominatore: B_{19} vale solo il 6,6% di ΣB e la somma 1-17 contribuisce con $\Sigma B_{1-17} = -0,001656$, che determina quasi interamente ΣB .

Tabella 3.16 - A_r e B_r per $\omega = 26,286 \text{ rad/s}$

Modo r	$\omega_r \text{ (rad/s)}$	A_r	B_r
1-17	0 - 23,547	$\Sigma = -0,000005$	$\Sigma = -0,001656$
18	23,899	+0,000005	-0,000005
19	28,531	+0,000017	+0,000096
20-24	28,592 - 29,074	$\Sigma = -0,000017$	$\Sigma = +0,000094$
Σ totale	-	≈ 0	-0,001470

Rispetto al centro geometrico del Gap 2 ($T = -55,27 \text{ dB}$) l'attenuazione è molto più profonda ($T = -90,96 \text{ dB}$) perché la cancellazione nel numeratore è più completa. Nel Gap 2 $\Sigma A = -0,000006$ mentre qui $\Sigma A \approx 0$: la differenza tra i due meccanismi di cancellazione collettiva che operano insieme nel Gap 3 porta a una cancellazione quasi perfetta.

3.5.5 Minimo assoluto di T nel Gap 3: $\omega = 26,551 \text{ rad/s}$

I valori numerici ottenuti sono:

- $\Sigma A \approx 0$
- $\Sigma B = -0,001405$
- $T = -91,52 \text{ dB}$

Come nel Gap 2, il minimo non coincide esattamente con il centro geometrico perché dipende dal rapporto $|\Sigma A/\Sigma B|$ e non dal minimo assoluto di ΣA . La differenza tra i due punti è però minima: $T = -90,49 \text{ dB}$ al centro geometrico contro $T = -91,52 \text{ dB}$ al minimo, uno scarto di soli 1,03 dB. ΣA è quasi nullo in entrambi i punti e piccole variazioni di frequenza non modificano la cancellazione nel numeratore, come confermato dalla *Tabella 3.17*.

Tabella 3.17 - A_r e B_r per $\omega = 26,551 \text{ rad/s}$

Modo r	$\omega_r \text{ (rad/s)}$	A_r	B_r
1-17	0 - 23,547	$\Sigma = -0,000005$	$\Sigma = -0,001615$
18	23,899	+0,000005	-0,000005
19	28,531	+0,000019	+0,000109
20-24	28,592 - 29,074	$\Sigma = -0,000019$	$\Sigma = +0,000105$
Σ totale	-	≈ 0	-0,001405

L'attenuazione di $T = -91,52 \text{ dB}$ è la più profonda del sistema, ben oltre il Gap 1 ($T = -21,67 \text{ dB}$) e il Gap 2 ($T = -57,30 \text{ dB}$). ΣA raggiunge il suo limite numerico di cancellazione e la differenza di $1,03 \text{ dB}$ tra centro geometrico e minimo è determinata unicamente dalla riduzione di ΣB in modulo da -0,001494 a -0,001405, che porta il rapporto $|\Sigma A / \Sigma B|$ a un valore leggermente più basso.

3.5.6 Risonanza del modo evanescente 19: $\omega = 28,528 \text{ rad/s}$

La frequenza campionata è la più vicina alla risonanza del modo evanescente 19. Il denominatore $\omega_{19}^2 - \omega^2 = 28,531^2 - 28,528^2 = +0,133$, quasi zero e positivo poiché $\omega < \omega_{19}$.

I valori numerici ottenuti sono:

- $\Sigma A = +0,014873$
- $\Sigma B = +0,089409$
- $T = -15,58 \text{ dB}$

Il modo 19 domina sia il numeratore che il denominatore, come si vede dalla *Tabella 3.18*. $A_{19} = +0,015829$ vale il 106,4% di ΣA e $B_{19} = +0,088937$ vale il 99,5% di ΣB . Questo comportamento è opposto a quello del modo 13 nel Gap 2, dove $\varphi_1^{(13)} \approx 0$ impediva l'eccitazione del modo evanescente e il denominatore rimaneva determinato dagli altri modi. Qui $\varphi_1^{(19)} = -0,109$ è sufficientemente grande da eccitare il modo 19, che domina la risposta in modo analogo al modo 7 nel Gap 1.

Tabella 3.18 - A_r e B_r per $\omega = 28,528 \text{ rad/s}$

Modo r	$\omega_r \text{ (rad/s)}$	A_r	B_r
1-17	0 - 23,547	$\Sigma = -0,000003$	$\Sigma = -0,001358$
18	23,899	+0,000003	-0,000003
19	28,531	+0,015829	+0,088937
20-24	28,592 - 29,074	$\Sigma = -0,000956$	$\Sigma = +0,001832$
Σ totale	-	+0,014873	+0,089409

Il rapporto $|\Sigma A / \Sigma B| = 0,1664$ è vicino a $|\varphi_{24}^{(19)} / \varphi_1^{(19)}| = 0,178$, confermando quanto discusso nella sezione 3.1.4: alla risonanza di un modo evanescente la trasmissibilità si avvicina al rapporto tra le componenti modali agli estremi. Lo scarto tra 0,166 e 0,178 è dovuto al residuo degli altri

modi: la somma 20-24 contribuisce con $\Sigma A_{20-24} = -0,000956$, che riduce leggermente ΣA rispetto al solo contributo di $A_{19} = +0,015829$.

La trasmissibilità $T = -15,58 \text{ dB}$ è quasi identica a quella alla risonanza del modo 7 nel Gap 1, che vale $T = -15,04 \text{ dB}$. Entrambi i modi hanno $\varphi_{24}/\varphi_1 = 0,178$ e quando dominano la risposta, la trasmissibilità tende allo stesso valore. La differenza di $0,54 \text{ dB}$ è dovuta al fatto che $\varphi_1^{(19)} = -0,109$ è più piccolo di $\varphi_1^{(7)} = -0,519$: il modo 19 eccita meno la risposta rispetto al modo 7 e il residuo degli altri modi pesa proporzionalmente di più nel rapporto finale.

A differenza del Gap 2 alla risonanza del modo 13, dove $T = +19,24 \text{ dB}$ perché il numeratore era dominato da A_{13} mentre il denominatore rimaneva piccolo, qui numeratore e denominatore crescono nella stessa proporzione e T rimane sotto l'unità. Questo conferma che il comportamento alla risonanza del modo evanescente dipende dal valore di φ_1 : grande nel Gap 1 (domina numeratore e denominatore), quasi nullo nel Gap 2 (domina solo il numeratore), intermedio nel Gap 3 (domina sia numeratore che denominatore con la stessa proporzione).

Il profilo degli spostamenti a questa frequenza decade con fattore quasi costante da cella a cella. Il fattore medio è circa 0,735 per cella, leggermente inferiore a 0,749 del Gap 1, per la stessa ragione: $\varphi_1^{(19)}$ è più piccolo di $\varphi_1^{(7)}$ e il contributo degli altri modi distorce leggermente il profilo rispetto alla forma modale pura.

3.5.7 Bordo superiore del Gap 3: $\omega = 28,543 \text{ rad/s}$

I valori numerici ottenuti sono:

- $\Sigma A = -0,004332$
- $\Sigma B = -0,016150$
- $T = -11,43 \text{ dB}$

Il bordo superiore del Gap 3 è il punto più anomalo dei tre gap. $T = -11,43 \text{ dB}$ è inferiore in modulo rispetto al bordo superiore del Gap 1 ($T = -14,01 \text{ dB}$) e molto inferiore al Gap 2 ($T = -27,47 \text{ dB}$). Il gap si chiude bruscamente perché il modo evanescente 19 si trova a soli $0,014 \text{ rad/s}$ dal bordo superiore: la sua risonanza è quasi coincidente con il bordo e la transizione avviene molto rapidamente.

Come si vede dalla *Tabella 3.19*, $A_{19} = -0,003033$ vale il 70% di ΣA e $B_{19} = -0,017039$ vale il 105,5% di ΣB . Il denominatore B_{19} è negativo perché $\omega > \omega_{19}$: il modo 19 ha già superato la sua risonanza. $B_{20} = +0,001619$ si oppone a B_{19} con il 10% di ΣB ma non è sufficiente a ridurlo significativamente. Il numeratore $\Sigma A = -0,004332$ è molto più grande in modulo rispetto al minimo assoluto ($\Sigma A \approx 0$): la cancellazione collettiva si è quasi completamente deteriorata per l'influenza del modo 20 che si sta avvicinando alla sua risonanza.

Tabella 3.19 - A_r e B_r per $\omega = 28,543 \text{ rad/s}$

Modo r	$\omega_r \text{ (rad/s)}$	A_r	B_r
1-17	0 - 23,547	$\Sigma = -0,000003$	$\Sigma = -0,001356$
18	23,899	+0,000003	-0,000003
19	28,531	-0,003033	-0,017039
20	28,592	-0,001619	+0,001619
21-24	28,709 - 29,074	$\Sigma = +0,000319$	$\Sigma = +0,000628$
Σ totale	-	-0,004332	-0,016150

Rispetto al Gap 1, dove il bordo superiore era dominato dall'avvicinarsi del modo 8 che distorceva il profilo di decadimento del modo 7, nel Gap 3 il deterioramento è più brusco. La vicinanza della risonanza del modo 19 al bordo superiore fa sì che la transizione dalla zona di attenuazione alla zona di trasmissione avvenga in un intervallo di frequenza molto ristretto.

3.5.8 Risonanza del modo 20: $\omega = 28,587 \text{ rad/s}$

La frequenza campionata non coincide perfettamente con $\omega_{20} = 28,592 \text{ rad/s}$. Il denominatore $\omega_{20}^2 - \omega^2 = 28,592^2 - 28,587^2 = +0,282$, quasi zero e positivo poiché $\omega < \omega_{20}$.

I valori numerici ottenuti sono:

- $\Sigma A = -0,016116$
- $\Sigma B = +0,011638$
- $T = +2,83 \text{ dB}$

Il modo 20 è antisimmetrico con $\varphi_1^{(20)} = +0,067$ e $\varphi_{24}^{(20)} = -0,067$ e domina il numeratore con $A_{20} = -0,015905$, pari al 98,7% di ΣA . Per antisimmetria $A_{20} = -B_{20}$ e nel rapporto $|\Sigma A / \Sigma B|$ il modo 20 si cancella quasi completamente: lo scarto di +2,83 dB dall'unità è determinato dal residuo degli altri modi, in particolare $A_{19} = -0,000662$ che contribuisce negativamente al numeratore.

Come si vede dalla Tabella 3.20, la somma 1-18 contribuisce con $\Sigma A_{1-18} \approx 0$ al numeratore: la cancellazione collettiva che caratterizza il Gap 3 è ancora parzialmente presente anche in questo punto fuori dal gap.

Tabella 3.20 - A_r e B_r per $\omega = 28,587 \text{ rad/s}$

Modo r	$\omega_r \text{ (rad/s)}$	A_r	B_r
1-18	0 - 23,899	$\Sigma \approx 0$	$\Sigma = -0,001354$
19	28,531	-0,000662	-0,003722
20	28,592	-0,015905	+0,015905
21-24	28,709 - 29,074	$\Sigma = +0,000451$	$\Sigma = +0,000809$
Σ totale	-	-0,016116	+0,011638

Il comportamento è analogo alla risonanza del modo 8 nel Gap 1 e del modo 14 nel Gap 2. In tutti e tre i casi la trasmissibilità alla risonanza del primo modo bulk dopo il gap vale circa 1, perché il modo antisimmetrico domina e si cancella nel rapporto.

3.5.9 Zona passante dopo il Gap 3: $\omega = 29,081 \text{ rad/s}$

La frequenza si trova nella banda passante oltre il Gap 3, compresa fra $\omega_{20} = 28,592 \text{ rad/s}$ e $\omega_{21} = 28,709 \text{ rad/s}$.

I valori numerici ottenuti sono:

- $\Sigma A = +0,000619$
- $\Sigma B = -0,003174$
- $T = -14,20 \text{ dB}$

La trasmissibilità vale $T = -14,20 \text{ dB}$, più attenuata rispetto alla zona passante dopo il Gap 1 dove $T = -4,46 \text{ dB}$ e molto più attenuata rispetto a quella dopo il Gap 2 dove $T = +22,70 \text{ dB}$. La ragione è che a $\omega = 29,081 \text{ rad/s}$ siamo ancora molto vicini alle risonanze dei modi 20, 21, 22 e 23, comprese nell'intervallo $\omega = 28,592 - 28,985 \text{ rad/s}$. I contributi di questi modi non si sono ancora stabilizzati e il denominatore $\Sigma B = -0,003174$ rimane relativamente piccolo.

Il numeratore $\Sigma A = +0,000619$ è piccolo per cancellazione collettiva: la somma 1-19 vale $\Sigma A_{1-19} = -0,000067$, il modo 20 contribuisce con $A_{20} = +0,000159$ e il modo 21 con $A_{21} = -0,000189$. Nessun singolo modo domina e il comportamento è collettivo, analogo a quello osservato dentro il gap.

A differenza della zona passante dopo il Gap 1, dove il denominatore piccolo era dovuto alla vicinanza di una sola risonanza, qui la presenza ravvicinata di quattro risonanze in un intervallo di soli $0,393 \text{ rad/s}$ produce una risposta dove i contributi di numeratore e denominatore si combinano in modo più complesso.

4) Conclusioni

Questa tesi ha analizzato i meccanismi fisici alla base dei tre band-gap di una catena periodica discreta a sei celle con cella unitaria a quattro masse, attraverso la decomposizione modale della trasmissibilità. Separando i contributi dei 24 modi di vibrare frequenza per frequenza è stato possibile seguire come i singoli contributi si combinano per produrre attenuazione in ciascun gap. I risultati mostrano che i tre gap non sono semplicemente tre manifestazioni dello stesso fenomeno, ma operano attraverso meccanismi fisicamente distinti, legati alle proprietà del modo evanescente presente in ciascuno di essi.

Nel Gap 1 il modo evanescente 7 ha $\varphi_1^{(7)} = -0,519$ grande e $\varphi_{24}^{(7)} = -0,092$ piccolo. Questo produce un denominatore B_7 grande che domina ΣB , mentre la cancellazione nel numeratore tra A_6 e A_7 porta ΣA quasi a zero. Il rapporto $|\Sigma A / \Sigma B|$ crolla e la trasmissibilità raggiunge $T = -21,67 \text{ dB}$ al minimo. Il decadimento degli spostamenti dentro il gap è quasi costante da cella a cella con fattore 0,749, perché il modo 7 domina quasi completamente la risposta.

Nel Gap 2 il modo evanescente 13 ha $\varphi_1^{(13)} = -0,008$ quasi nullo e $\varphi_{24}^{(13)} = -0,522$ grande. La forzante alla massa 1 quasi non eccita il modo 13 e il denominatore non viene gonfiato come nel Gap 1. La cancellazione nel numeratore diventa collettiva, coinvolgendo tutti i modi, e il denominatore rimane piccolo perché nessun modo lo domina. Il risultato è un'attenuazione di $T = -57,30 \text{ dB}$ al minimo, più profonda del Gap 1. Il profilo degli spostamenti non segue un decadimento costante perché il modo 13 non domina la risposta.

Nel Gap 3 il modo evanescente 19 ha lo stesso rapporto $\varphi_{24}/\varphi_1 = 0,178$ del modo 7, ma si trova a soli $0,014 \text{ rad/s}$ dal bordo superiore del gap. I due meccanismi del Gap 1 e del Gap 2 operano simultaneamente e producono un'attenuazione di $T = -91,52 \text{ dB}$ al minimo, la più profonda del sistema.

La letteratura sui cristalli fononici analizza i band-gap prevalentemente attraverso il diagramma di dispersione del sistema infinito, che identifica le bande proibite ma non spiega i meccanismi che producono l'attenuazione nel sistema finito. Alcune analisi modali sono state applicate a sistemi periodici finiti per stimare i band-gap attraverso funzioni di risposta in frequenza sperimentali, ma senza scomporre i contributi dei singoli modi alla trasmissibilità. L'approccio adottato in questa tesi, separare modo per modo e frequenza per frequenza i contributi A_r e B_r , permette di identificare quale modo domina il numeratore, quale domina il denominatore e come la cancellazione tra contributi di segno opposto produce l'attenuazione osservata. Questo tipo di analisi non è presente nella letteratura esistente sui sistemi periodici discreti finiti.

Le proprietà del modo evanescente, in particolare il valore di φ_1 , determinano quale tipo di attenuazione si ottiene nel gap. Quando φ_1 è grande il modo evanescente gonfia il denominatore della trasmissibilità e produce un'attenuazione moderata con un profilo di spostamenti regolare. Quando φ_1 è piccolo il modo evanescente non viene eccitato dalla forzante e l'attenuazione dipende dalla cancellazione collettiva di tutti i modi, con risultati molto più profondi. Questi risultati suggeriscono un criterio fisico diretto per la progettazione: celle con forte asimmetria tra φ_1 e φ_{24} del modo evanescente tendono a produrre attenuazioni più profonde. Il passo successivo sarebbe cercare, tra tutte le possibili combinazioni di masse e rigidezze della cella, quelle che producono un modo evanescente con le proprietà desiderate. La decomposizione modale sviluppata in questa tesi permette

di impostare questo problema in modo fisicamente motivato, fornendo un punto di partenza per sviluppi futuri.

L'analisi svolta è limitata a un sistema monodimensionale lineare senza smorzamento. Estensioni naturali riguardano l'introduzione di smorzamento strutturale, che modifica l'ampiezza dei contributi modali senza alterare la struttura della decomposizione e l'applicazione a sistemi bidimensionali o tridimensionali dove la decomposizione modale diventa più complessa ma il principio fisico rimane lo stesso. Un'ulteriore direzione riguarda lo studio di come la decomposizione modale evolve al crescere del numero di celle N : già rispetto a $N = 2$ e $N = 3$ si osserva un incremento dell'attenuazione, ma i meccanismi modali che rendono la cancellazione progressivamente più efficace non sono stati analizzati in questa tesi e costituiscono uno sviluppo diretto del lavoro presentato.

5) Bibliografia

- [1] J.S. Jensen, "Phononic band gaps and vibrations in one- and two-dimensional mass-spring structures," *Journal of Sound and Vibration*, 2003.
- [2] N. Aravantinos-Zafiris, M.M. Sigalas, M. Kafesaki, E.N. Economou, "Phononic crystals and elastodynamics: Some relevant points," 2014.
- [3] J.C. Ji, Q. Luo, K. Ye, "Vibration control based metamaterials and origami structures: A state-of-the-art review," 2021.