

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale



**Politecnico
di Torino**

Tesi di Laurea Magistrale

Ottimizzazione delle trasferte Terra-Marte tramite metodi indiretti nel periodo 2030-2040

Relatore
Prof. Lorenzo Casalino

Candidato
Valentín Bianco

Luglio 2026

Abstract

L'esplorazione di Marte rappresenta uno degli obiettivi principali dell'ingegneria aerospaziale e richiede la capacità di progettare traiettorie interplanetarie efficienti dal punto di vista energetico, così da massimizzare la massa utile disponibile. Questo lavoro analizza diverse trasferte Terra-Marte nel decennio 2030-2040, con l'obiettivo di individuare le configurazioni che massimizzano la massa finale dello spacecraft, equivalenti alla minimizzazione del ΔV totale richiesto.

La tesi introduce i fondamenti della dinamica orbitale e delle manovre che regolano il moto dei corpi celesti, descrive le caratteristiche delle trasferte interplanetarie e le condizioni geometriche che ne determinano la configurazione. Infine, vengono applicati i metodi indiretti della teoria del controllo ottimale per risolvere il problema di ottimizzazione della traiettoria nella fase eliocentrica.

Per ciascuna delle finestre di lancio del 2031, 2033, 2035, 2037 e 2039 è stata analizzata la traiettoria variando la velocità di eccesso iperbolico di partenza e la durata della trasferta. I risultati mostrano variazioni significative: la finestra del 2031 risulta la più efficiente in termini di ΔV ma presenta velocità di arrivo elevate, con un costo di cattura maggiore; quella del 2035 mostra invece valori di ΔV maggiori ma velocità finali più favorevoli; la finestra del 2033 rappresenta un compromesso tra le finestre di lancio 2031 e 2035.

Infine, le finestre del 2037 e 2039 risultano le meno vantaggiose poiché l'arrivo avviene in prossimità dell'afelio marziano, il che richiede una velocità maggiore e perciò un costo propulsivo più elevato.

Il confronto tra le diverse finestre di lancio e la variazione dei parametri di trasferimento mette in evidenza gli elementi che orientano la definizione delle traiettorie nelle future missioni marziane.

Ringraziamenti

Ringrazio il Professor Casalino per la sua disponibilità, il suo contributo e per avermi concesso l'opportunità di sviluppare questo lavoro di tesi.

Como siempre, con pocas palabras, agradezco a mi familia por haberme soportado y por el apoyo durante todos estos años.

Gracias.

Indice

1	Introduzione	10
1.1	Perchè Marte?	10
1.2	Missioni passate verso Marte	10
1.3	Come si raggiunge Marte?	11
1.4	Obiettivo del lavoro	12
2	Dinamica Orbitale e Trasferimenti Interplanetari	14
2.1	Problema dei due corpi	14
2.2	Parametri orbitali classici	16
2.3	Classificazione delle coniche	17
2.4	Manovre orbitali e orbite di trasferimento	19
2.4.1	Manovre ad un impulso	19
2.4.2	Manovre a N-impulsi	24
3	Trasferte Interplanetarie	28
3.1	Problema degli N-corpi	28
3.2	Missione Interplanetaria	30
3.2.1	Fase Eliocentrica	31
3.2.2	Planetary Departure	32
3.2.3	Planetary Arrival	35
3.3	Problema del fasamento	35
3.4	Orbite planetarie reali	37
4	Teoria del Controllo Ottimale e Metodi di Ottimizzazione	39
4.1	Teoria del Controllo Ottimale	40
4.1.1	Ottimizzazione tramite metodi indiretti	42
4.1.2	Procedura di risoluzione	47
5	Risultati	50
5.1	Finestra di lancio 2031	51

5.2	Finestra di lancio 2033	54
5.3	Finestra di lancio 2035	56
5.4	Finestra di lancio 2037	58
5.5	Finestra di lancio 2039	60
5.6	Confronto e discussione dei risultati	63
6	Considerazioni Finali	66
6.1	Sintesi del lavoro svolto	66
6.2	Considerazioni sul modello	66
6.2.1	Punti di forza	66
6.2.2	Limiti del modello	67
6.2.3	Limiti dell'analisi svolta	67
6.3	Sviluppi futuri	68
	Bibliografia	71
A	Figure aggiuntive	72
A.1	Analisi 2031	72
A.2	Analisi 2033	76
A.3	Analisi 2035	78
A.4	Analisi 2037	80
A.5	Analisi 2039	81

Elenco delle figure

1.1	Traiettorie interplanetarie di Tipo 1	12
2.1	Sistemi di riferimento [3]	15
2.2	Parametri orbitali [9]	17
2.3	e in funzione di p/r_1 a r_2/r_1 fissato	25
2.4	Trasferta di Hohmann tra due orbite circolari	27
3.1	Traiettorie iperboliche fissati V_∞ e r_p [9]	34
3.2	Orbite di Terra e Marte	38
4.1	Porkchop Plot per trasferta Terra-Marte	48
5.1	Traiettoria 2031 per $V_\infty = 2.8 \text{ km/s}$	52
5.2	Traiettoria 2033 per $V_\infty = 2.8 \text{ km/s}$	55
5.3	Traiettoria 2035 per $V_\infty = 2.8 \text{ km/s}$	56
5.4	Traiettoria 2037 per $V_\infty = 2.8 \text{ km/s}$	58
5.5	Traiettoria 2039 per $V_\infty = 2.8 \text{ km/s}$	61

Elenco delle tabelle

5.1	Caratteristiche principali del propulsore	50
5.2	Valori iniziali	51
5.3	Risultati per $\Delta t = 197.7$ giorni	52
5.4	Risultati per partenza 31 gennaio 2031 al variare di V_∞ e Δt .	53
5.5	Risultati per $\Delta t \approx 197.7$ giorni	54
5.6	Risultati per la finestra di lancio 2033 al variare di V_∞ e Δt . .	55
5.7	Risultati per $\Delta t \approx 197.7$ giorni	56
5.8	Risultati per la finestra di lancio 2035 al variare di V_∞ e Δt . .	57
5.9	Risultati per $\Delta t \approx 197.7$ giorni	58
5.10	Risultati per la finestra di lancio 2037 al variare di V_∞ e Δt . .	59
5.11	Risultati per 2039 al variare di V_∞ e data di partenza.	60
5.12	Distanza lineare tra Terra (a t_0) e Marte (a t_f)	62
5.13	Analisi 2039 con partenza 5 ottobre 2039 al variare di Δt e V_∞	62
5.14	Risultati per 2039 con $V_\infty = 4.2$ km/s al variare di Δt	63
5.15	Prime 15 migliori missioni in ordine di ΔV crescente	65

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Perché Marte?

L'esplorazione di Marte rappresenta uno degli obiettivi più ambiziosi dell'ingegneria aerospaziale date le numerose analogie con la Terra: dimensioni simili, durata del giorno comparabile, presenza di stagioni, un passato geologico complesso e, soprattutto, la sua posizione all'interno della fascia abitabile del Sistema Solare che rende plausibile la presenza di acqua liquida in passato e, potenzialmente, di forme di vita primitive. Per queste ragioni Marte è diventato il principale laboratorio naturale per comprendere l'evoluzione dei pianeti terrestri e per preparare future missioni con equipaggio.

1.2 Missioni passate verso Marte

L'esplorazione marziana iniziò negli anni '60 con il programma *Mariner* della National Aeronautics and Space Administration (NASA). Le prime sonde *Mariner 3* e *Mariner 4* effettuarono semplici fly-by ma permisero di ottenere le prime immagini ravvicinate di un altro pianeta; *Mariner 6* e *Mariner 7* ampliarono la copertura fotografica e con *Mariner 9* (1971), per la prima volta un veicolo entrò in orbita attorno a Marte, aprendo la strada a missioni più complesse.

Negli anni '70 le missioni *Viking 1* e *Viking 2* rappresentarono un salto di qualità: entrambe combinarono una fase orbitale con un modulo di atterraggio, fornendo le prime immagini della superficie e conducendo esperimenti per la ricerca di vita microbica.

Negli anni successivi l'esplorazione divenne progressivamente più ambiziosa: nel 1996 la missione *Mars Pathfinder* (1996) portò sul pianeta il primo rover, *Sojourner*, dimostrando la fattibilità dell'esplorazione mobile e aprendo la

strada a una nuova generazione di missioni robotiche. A questa seguirono missioni orbitali fondamentali come *Mars Odyssey* (2001), *Mars Reconnaissance Orbiter* (2005) e *MAVEN* (2013), che hanno studiato la superficie, l'atmosfera e il clima marziano con un livello di dettaglio senza precedenti. Parallelamente, i rover *Spirit* e *Opportunity* (2003), *Curiosity* (2011) e *Perseverance* (2020) hanno esplorato diverse regioni del pianeta, contribuendo alla comprensione della sua storia geologica e della possibile presenza di ambienti abitabili.

1.3 Come si raggiunge Marte?

Raggiungere Marte richiede una pianificazione accurata poiché la Terra e il Pianeta Rosso si muovono lungo orbite diverse e si trovano in posizioni in costante cambiamento. Per questo motivo, le missioni devono essere lanciate all'interno di finestre temporali specifiche, nelle quali la geometria tra le orbite è favorevole.

Le traiettorie utilizzate nelle missioni reali sono generalmente trasferimenti balistici che collegano la posizione della Terra al momento del lancio con quella di Marte al momento dell'arrivo. Sebbene il principio generale sia comune a tutte le missioni, ogni trasferimento presenta caratteristiche proprie, determinate dagli obiettivi scientifici, dal profilo di missione e dalle esigenze operative.

La maggior parte delle missioni robotiche ha utilizzato le cosiddette traiettorie di tipo 1, nelle quali la sonda percorre un arco ellittico inferiore a 180° attorno al Sole. Questo tipo di trasferimento rappresenta un buon compromesso tra efficienza energetica e durata del viaggio. Missioni come *Mars Pathfinder* (1996, Figura 1.1a) e *Mars Odyssey* (2001, Figura 1.1b) ne sono esempi rappresentativi: entrambe hanno seguito un arco balistico eliocentrico relativamente regolare, con una singola manovra di iniezione interplanetaria e una serie di manovre correttive (TCM - Trajectory Correction Maneuver) distribuite lungo il tragitto.

Esistono anche traiettorie di *tipo 2*, nelle quali la sonda percorre un arco superiore a 180° attorno al Sole. Queste soluzioni comportano tempi di volo più lunghi ma possono risultare vantaggiose in alcune configurazioni geometriche o quando la finestra di lancio non consente un trasferimento di tipo 1 ottimale.

In casi particolari, alcune missioni possono adottare profili più complessi, come traiettorie con fly-by di Venere o trasferimenti a bassa energia: sebbene meno comuni, queste strategie permettono di ottenere condizioni di arrivo specifiche o di ridurre il costo energetico complessivo, a scapito però di una

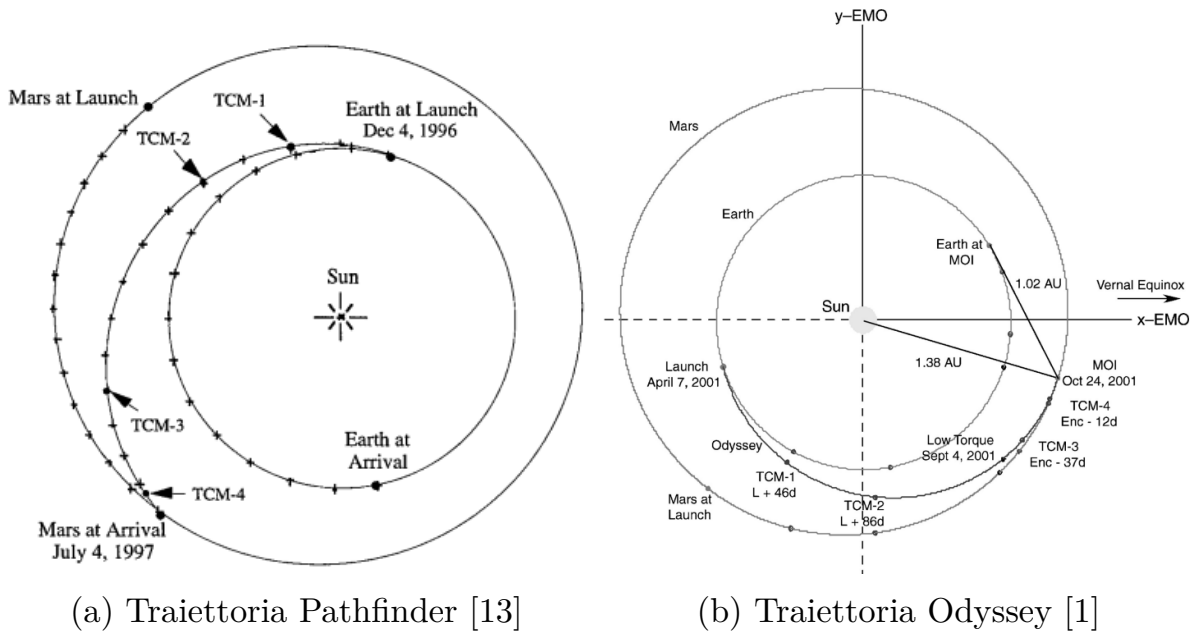


Figura 1.1: Traiettorie interplanetarie di Tipo 1

maggior durata e complessità operativa.

Nel complesso, le traiettorie di tipo 1 rappresentano la scelta più diffusa per le missioni verso Marte e costituiscono il riferimento principale anche per il lavoro presentato in questa tesi.

1.4 Obiettivo del lavoro

In questo contesto, diventa fondamentale disporre di strumenti in grado di studiare e ottimizzare le traiettorie interplanetarie, poiché la scelta del percorso e del momento di partenza condiziona in modo decisivo l'efficienza della missione. Le missioni verso Marte richiedono di rispettare vincoli energetici stringenti, massimizzare la massa utile e contenere la durata del viaggio entro limiti compatibili con le capacità del sistema di bordo e con la sicurezza dell'equipaggio nelle missioni umane future.

L'obiettivo di questo lavoro è studiare diverse trasferte Terra-Marte con propulsione chimica, valutando l'influenza di:

- **Velocità iperbolica:** cioè la velocità (e quindi l'energia) con la quale lo spacecraft lascia la sfera di influenza terrestre. Questo parametro determina il costo energetico iniziale della missione.

- **Durata della missione:** indica il tempo necessario per la trasferta interplanetaria. La sua scelta comporta compromessi tra efficienza propulsiva, esposizione alle radiazioni, consumi di bordo e vincoli operativi.
- **Finestra di lancio,** è determinata dalla configurazione orbitale Terra-Marte e identifica i periodi in cui è possibile avviare una missione con un trasferimento energeticamente favorevole.

Per raggiungere questo obiettivo, la tesi è strutturata in modo da introdurre progressivamente gli strumenti teorici e numerici necessari. Si parte dalla dinamica orbitale e dalle principali manovre che regolano il moto dei corpi celesti (Capitolo 2), per poi passare allo studio delle trasferte interplanetarie e delle condizioni geometriche che ne determinano la fattibilità (Capitolo 3). Su queste basi vengono quindi introdotti i fondamenti della teoria del controllo ottimale e dei metodi indiretti impiegati per la risoluzione del problema di ottimizzazione (Capitolo 4) e concludendo il lavoro con l'analisi dei risultati ottenuti per le finestre di lancio comprese tra il 2030 e il 2040 (Capitolo 5).

Capitolo 2

Dinamica Orbitale e Trasferimenti Interplanetari

Per affrontare il problema di ottimizzazione di una traiettoria interplanetaria è indispensabile partire dai concetti fondamentali della dinamica orbitale: gli elementi che caratterizzano un'orbita, le principali tipologie orbitali e i parametri che ne definiscono la dinamica. Questi strumenti costituiscono la base teorica su cui si fonda la progettazione delle missioni spaziali, poiché permettono di descrivere in modo rigoroso il moto dei corpi celesti e delle sonde, di prevederne l'evoluzione e di valutare l'effetto delle manovre propulsive.

2.1 Problema dei due corpi

Un primo passo consiste nell'analizzare il moto di un corpo di massa m soggetto unicamente alla gravità di un corpo centrale avente massa $M \gg m$, noto anche come problema dei due corpi.

Dato un sistema di riferimento inerziale (X', Y', Z') e un sistema di coordinate non rotante (X, Y, Z) centrato sul corpo centrale, si avrà che la posizione relativa del corpo m è data da:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_m - \mathbf{r}_M \quad (2.1.1)$$

Applicando ora la legge di Newton della gravitazione universale otteniamo:

$$\begin{aligned} \bullet \quad m\ddot{\mathbf{r}}_m &= -G \frac{mM}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \\ \bullet \quad M\ddot{\mathbf{r}}_M &= G \frac{mM}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \end{aligned}$$

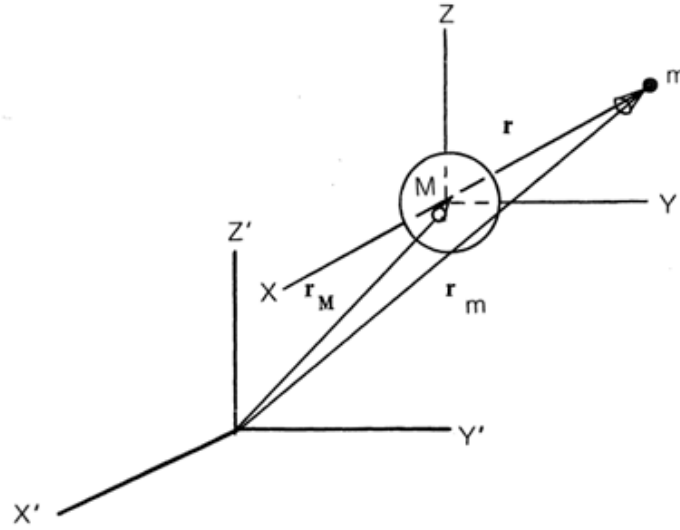


Figura 2.1: Sistemi di riferimento [3]

Semplificando le equazioni e sottraendo $\ddot{\mathbf{r}}_M$ a $\ddot{\mathbf{r}}_m$ otteniamo:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -G \frac{m + M}{r^3} \mathbf{r} \quad (2.1.2)$$

Imponendo l'ipotesi $M \gg m$ otteniamo:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -G \frac{M}{r^3} \mathbf{r} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} \quad (2.1.3)$$

Con $\mu = GM$ detto parametro gravitazionale.

Da questa relazione possono essere ottenute due relazioni fondamentali:

- **Conservazione dell'energia meccanica:** moltiplicando scalarmente la relazione 2.1.3 per $\dot{\mathbf{r}}$ si ottiene:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r} \right) = 0 \quad (2.1.4)$$

In cui il primo termine rappresenta l'energia cinetica per unità di massa mentre il secondo termine è l'energia potenziale per unità di massa, perciò:

$$E = \frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \text{costante} \quad (2.1.5)$$

L'energia meccanica specifica di un corpo m è costante lungo la sua orbita attorno al corpo centrale M . Osserviamo che, data un'orbita,

più il corpo si trova vicino al corpo centrale (r piccolo) più la sua velocità dovrà aumentare; inversamente, più il corpo si trova lontano dal corpo centrale (r grande) e più la sua velocità dovrà essere piccola;

- **Conservazione del momento angolare:** prendendo il prodotto vettoriale dell'equazione 2.1.3 con $\mathbf{r}$ otteniamo:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = 0 \quad (2.1.6)$$

Perciò il momento angolare specifico $\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ rimarrà costante lungo la sua orbita. Poiché il vettore del momento angolare è costante, il raggio vettore $\mathbf{r}$ e il vettore velocità $\dot{\mathbf{r}}$ saranno confinati in un piano fisso nello spazio, detto piano orbitale.

2.2 Parametri orbitali classici

Integrando le equazioni del moto:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{V} \\ \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} \end{cases} \quad (2.2.1)$$

Otteniamo che la soluzione è sempre una traiettoria conica avente:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \nu} \quad (2.2.2)$$

In cui r è la distanza tra corpo centrale M e il corpo m , p è il semilato retto, e è l'eccentricità e ν è l'anomalia vera della conica. Questa espressione descrive la forma generale della traiettoria ma non consente ancora di individuare un'orbita specifica poiché per ogni coppia di valori (p , e) esiste un numero infinito di coniche possibili. Per caratterizzare in modo univoco un'orbita, è necessario introdurre un insieme di parametri, detti parametri orbitali classici. Questi sono:

- $\mathbf{a}$, semiasse della conica. Qualora la conica non avesse un semiasse si può utilizzare il semilato retto p ;
- e , eccentricità della conica;
- i , inclinazione della conica rispetto ad un piano di riferimento;
- Ω , ascensione retta del nodo ascendente, cioè l'angolo tra la direzione di riferimento e la linea dei nodi (che punta verso il nodo ascendente);

- ω , argomento del periastro, cioè l'angolo tra la linea dei nodi e il vettore eccentricità;
- ν , anomalia vera all'epoca, cioè l'angolo tra il vettore eccentricità e la posizione del corpo ad un determinato istante di tempo;

Definendo questi sei parametri possiamo identificare l'unica orbita che il corpo compie attorno al corpo centrale.

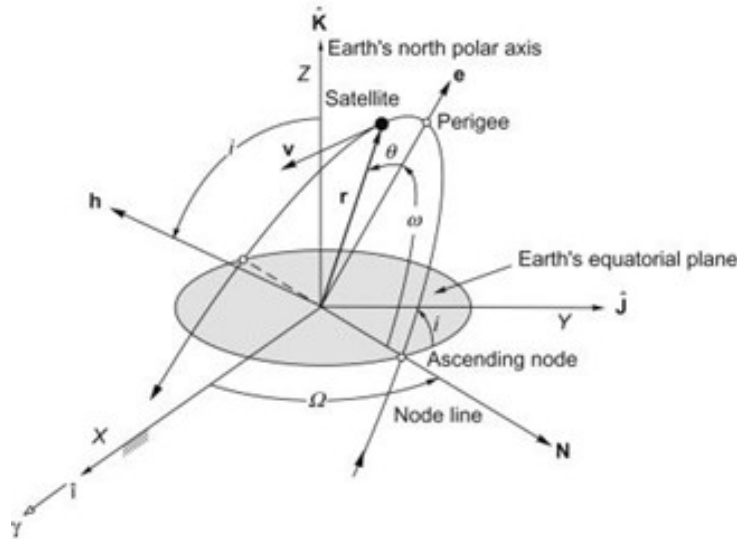


Figura 2.2: Parametri orbitali [9]

2.3 Classificazione delle coniche

Avendo definito le relazioni fondamentali delle orbite (conservazione dell'energia meccanica specifica, conservazione del momento angolare, equazione della conica, parametri orbitali), possiamo fare qualche considerazione a riguardo. Utilizzando la conservazione del momento angolare, possiamo riscriverla come:

$$h = rV \cos \theta \quad (2.3.1)$$

Dove θ è il flight path angle, cioè l'angolo tra la direzione della traiettoria e l'orizzonte locale. Sapendo che nel periastro il raggio vettore e il vettore velocità sono perpendicolari tra loro abbiamo che:

$$h = r_p V_p \quad (2.3.2)$$

ricordando che il momento angolare si conserva, possiamo sostituire questa relazione all'interno della conservazione dell'energia e, dopo alcune semplificazioni, otteniamo:

$$E = \frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \frac{\mu}{2a} \quad (2.3.3)$$

Otteniamo quindi che l'energia meccanica specifica di un'orbita è direttamente legata alla sua geometria. Possiamo dunque classificare le orbite in:

- **Orbite chiuse**, sono traiettorie che si ripetono periodicamente e possono essere:

- **Orbite circolari**, hanno eccentricità pari a zero;
- **Orbite ellittiche**, hanno eccentricità $0 < e < 1$;

riprendendo la relazione fondamentale tra energia meccanica e semiasse, notiamo che per tutte le orbite chiuse $a > 0$ perciò si avrà che necessariamente $E < 0$;

- **Orbite aperte**, sono traiettorie che, a differenza di quelle chiuse, non si richiudono su sé stesse; perciò, un corpo in un'orbita chiusa non ritornerà più nel punto di partenza (a meno che non si intervenga sulla sua traiettoria); queste possono essere:

- **Orbite paraboliche**, hanno eccentricità pari a $e = 1$ e semiasse che tende all'infinito $a \rightarrow \infty$, perciò si avrà che l'energia meccanica dell'orbita sarà pari a $E = 0$;
- **Orbite iperboliche**, hanno eccentricità $e > 1$ e semiasse $a < 1$, perciò otteniamo che l'energia meccanica sarà $E > 0$.

La differenza tra queste due orbite può essere riassunta nel seguente modo: un'orbita parabolica rappresenta il caso limite per cui il corpo possiede esattamente l'energia necessaria per sfuggire dal campo gravitazionale del corpo centrale, e quindi la sua velocità all'infinito è nulla. Un'orbita iperbolica, invece, corrisponde a un moto di fuga con energia meccanica positiva, per cui il corpo non solo abbandona il campo gravitazionale, ma mantiene una velocità all'infinito maggiore di zero.

2.4 Manovre orbitali e orbite di trasferimento

La classificazione delle orbite mostra come la geometria del moto sia determinata dall'energia meccanica specifica e dal momento angolare. Queste grandezze sono fondamentali non solo per descrivere un'orbita, ma rappresentano degli strumenti attraverso cui è possibile modificarla.

In una missione spaziale, infatti, il problema non è solo caratterizzare un'orbita, ma passare da un'orbita iniziale a un'orbita finale mediante opportune variazioni di energia. È quindi naturale, dopo aver introdotto la dinamica kepleriana, analizzare le principali manovre orbitali.

Per modificare un'orbita è necessario alterare almeno una delle grandezze che la determinano, cioè l'energia meccanica specifica e/o il momento angolare specifico. Poiché entrambe dipendono dal vettore velocità e dalla posizione, una variazione orbitale richiede necessariamente una variazione del vettore velocità. La posizione, infatti, non può essere modificata istantaneamente: non è possibile “spostare” il corpo su un'altra orbita senza prima modificarne la velocità. Ne consegue che qualsiasi cambiamento orbitale, a meno di perturbazioni esterne, deve essere ottenuto tramite una variazione di velocità, che agisce modificando il modulo e/o la direzione della velocità e quindi l'energia e/o il momento angolare.

2.4.1 Manovre ad un impulso

Per spiegare i seguenti modelli di manovre orbitali applicheremo le seguenti due assunzioni:

- **La variazione di velocità è istantanea**, cioè la manovra deve essere impulsiva; da questo ne consegue che la posizione non cambia durante l'impulso e quindi il corpo rimane nello stesso punto dell'orbita mentre cambia solo il vettore velocità. Questa assunzione è necessaria perché altrimenti, durante la variazione graduale di velocità, il corpo contemporaneamente si muove sull'orbita; di conseguenza l'orbita non è più una conica kepleriana ma una traiettoria che evolve continuamente nel tempo. In questo caso il problema diventa molto più complesso, poiché non esiste più una soluzione analitica semplice e il moto deve essere descritto tramite integrazione numerica;
- La seconda assunzione deriva direttamente dalla natura impulsiva della manovra: affinché sia possibile modificare l'orbita con un solo impulso,

l'orbita iniziale e quella finale devono intersecarsi in almeno un punto;

Date queste due assunzioni possiamo avere due categorie di manovre: manovre in-plane e manovre out-of-plane.

Le manovre in-plane sono eseguite all'interno dello stesso piano orbitale: il piano orbitale dell'orbita iniziale coincide con quello dell'orbita finale, e quindi anche la variazione di velocità si svilupperà sullo stesso piano. Le manovre out-of-plane, invece, comportano un cambiamento del piano orbitale.

Questa classificazione, però, non è in grado di stabilire l'efficacia delle manovre; dobbiamo quindi ritornare all'equazione di moto del problema dei due corpi. In genere, possiamo scrivere l'equazione come:

$$m \frac{d\mathbf{V}}{dt} = m\mathbf{g} + \mathbf{T} + \mathbf{L} + \mathbf{D} \quad (2.4.1)$$

Dove T, L e D rappresentano rispettivamente la Spinta, Portanza e Resistenza sviluppata dal corpo mentre $m\mathbf{g}$ è la forza gravitazionale che il corpo subisce per la presenza del corpo centrale. Poiché ci interessa solo il moto del corpo nello spazio, la relazione può essere semplificata annullando i termini di portanza e resistenza; inoltre, dividendo per la massa otteniamo:

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{\mathbf{T}}{m} + \mathbf{g} \quad (2.4.2)$$

Assumendo che la velocità relativa sia parallela alla velocità assoluta, otteniamo che:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{T}{m} \cos \alpha - g \sin \varphi \quad (2.4.3)$$

dove α è l'angolo tra il vettore spinta e il vettore velocità mentre φ è l'angolo tra il vettore velocità e l'orizzonte. Riscrivendo il primo termine e integrando nel tempo (tra il tempo iniziale e il tempo finale) otteniamo:

$$V_f - V_i = \int \frac{T}{m} dt - \int \frac{T}{m} (1 - \cos \alpha) dt - \int g \sin \varphi dt \quad (2.4.4)$$

Il termine a sinistra indica la variazione di velocità effettiva, cioè la variazione di velocità che effettivamente subisce il corpo; il termine a destra, invece, è composto da tre termini:

- il primo termine indica la variazione di velocità ideale, cioè la variazione di velocità che il corpo avrebbe se la spinta fosse parallela alla velocità e non ci fossero perdite;

- il secondo termine rappresenta le perdite per disallineamento, cioè le perdite di velocità dovute al disallineamento tra la spinta del propulsore e la velocità; queste perdite si annullerebbero solo se la spinta fosse perfettamente parallela alla velocità, condizione che però non può essere soddisfatta per tutte le manovre;
- il terzo termine rappresenta le perdite per gravità, ossia le perdite associate alla presenza del campo gravitazionale, che agisce continuamente verso il corpo centrale; possiamo riscrivere questo termine come:

$$\int \frac{g}{V} V \sin \varphi dt = \left(\frac{g}{V} \right)_{avg} V_z \quad (2.4.5)$$

L'integrale mostra che le perdite gravitazionali dipendono sia dal rapporto g/V sia dalla componente verticale della velocità V_z . Da questa relazione si osservano due effetti importanti: 1) quando la velocità orbitale è elevata, il rapporto g/V diventa più piccolo. Poiché la velocità è maggiore quando il corpo si trova vicino al corpo centrale (per la conservazione dell'energia meccanica), le perdite gravitazionali risultano minori nelle regioni basse dell'orbita. 2) Quando l'ascesa dell'orbita è lenta, cioè quando la componente verticale della velocità V_z è piccola, la quantità di spinta necessaria a contrastare la gravità diminuisce.

Avendo analizzato le perdite, possiamo concludere che, per massimizzare l'efficienza delle manovre orbitali conviene applicare l'impulso a quote basse e mantenere la spinta il più possibile parallela alla velocità. In questo modo si riducono sia le perdite per gravità sia quelle dovute al disallineamento della spinta. Tuttavia, questa configurazione non è sempre realizzabile: alcune manovre richiedono necessariamente una componente spinta non tangenziale: un esempio tipico è il cambiamento di piano orbitale, in cui la spinta deve essere diretta fuori dal piano dell'orbita.

Dopo aver introdotto le manovre impulsive e i principi che ne regolano l'efficienza, è possibile estendere la trattazione a due casi di particolare interesse per le missioni interplanetarie: le manovre di escape e le manovre di cambiamento di piano. Le prime rappresentano il caso limite in cui l'impulso non serve più a modificare un'orbita legata ma a lasciare definitivamente il campo gravitazionale del corpo centrale, introducendo le traiettorie aperte e la velocità di eccesso V_∞ . Le seconde, invece, riguardano la variazione del piano orbitale e richiedono una gestione accurata della direzione dell'impulso, poiché comportano costi energetici significativamente più elevati rispetto alle manovre in-plane.

Manovre di Escape

Le manovre di escape sono manovre che permettono al veicolo di lasciare definitivamente il campo del corpo centrale: in termini energetici, l'escape corrisponde al passaggio da un'orbita legata, caratterizzata da un'energia meccanica specifica negativa, a un'orbita aperta per la quale l'energia è nulla o positiva. Poiché non è richiesto un ritorno verso il corpo centrale, la traiettoria deve necessariamente essere un'orbita aperta, cioè che non si richiude su sé stessa: ciò implica che l'orbita di trasferimento sia parabolica o iperbolica. Per analizzare le manovre di escape è utile considerare la conservazione dell'energia meccanica specifica tra un punto iniziale della manovra (ad esempio un'orbita LEO) e un punto finale posto a distanza infinita dal corpo centrale. A tale distanza, infatti, l'attrazione gravitazionale del corpo centrale diventa trascurabile e il termine potenziale tende a zero, permettendo di caratterizzare l'orbita unicamente attraverso l'energia cinetica residua. In questo modo, risulta immediato distinguere tra orbite paraboliche e iperboliche, che corrispondono rispettivamente ai casi di energia meccanica specifica nulla o positiva e presentano differenze fisiche ben definite:

- **Orbite paraboliche**, come già detto, queste orbite sono caratterizzate da energia meccanica specifica nulla; perciò, avremo che:

$$\frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r} = 0 \quad (2.4.6)$$

Da cui si ricava la velocità necessaria per immettersi in un'orbita parabolica:

$$V = \sqrt{\frac{2\mu}{r}} \quad (2.4.7)$$

In questo caso, la velocità all'infinito è nulla ($V_\infty = 0$), poiché il veicolo raggiunge il limite del campo gravitazionale con energia cinetica nulla. Ad esempio, partendo da un'orbita circolare LEO di circa 200 km di altitudine, la velocità di escape risulta pari a $V_{esc} \approx 11 \text{ km/s}$, il che richiede una variazione di velocità di circa $\Delta V = 3.22 \text{ km/s}$ rispetto alla velocità orbitale iniziale.

- **Orbite iperboliche**, sono caratterizzate da energia meccanica positiva, perciò utilizzando la conservazione dell'energia meccanica, si ha che (dove ∞ indica la condizione a distanza infinita):

$$\frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \frac{V_\infty^2}{2} - \frac{\mu}{r_\infty} \quad (2.4.8)$$

Poiché ci troviamo ad una distanza infinita dal corpo centrale il termine gravitazionale tenderà a zero, $\mu/r_\infty \rightarrow 0$, e perciò possiamo definire:

$$V_\infty = \sqrt{V^2 - \frac{2\mu}{r}} \quad (2.4.9)$$

Velocità di eccesso iperbolico V_∞ , cioè la velocità residua che il veicolo avrà una volta uscito dal campo gravitazionale del corpo centrale.

In un'orbita iperbolica l'energia meccanica è positiva e ciò implica che il semiasse risulti negativo. Il corpo centrale occupa uno dei due fuochi dell'iperbole e la traiettoria presenta un'asse di simmetria che passa per il periastro. La geometria dell'iperbole è quindi completamente determinata da due elementi: il periastro e l'eccentricità. Da questi parametri deriva anche l'angolo di semiapertura dell'iperbole, definito come:

$$\beta = \cos^{-1} \left(\frac{1}{e} \right) \quad (2.4.10)$$

Che rappresenta l'angolo tra l'asintoto e l'asse di simmetria della traiettoria. Questo angolo è fondamentale perché determina l'orientazione dell'asintoto e quindi la direzione della velocità di eccesso iperbolico.

Cambiamento di Piano

Le manovre di cambio di piano rivestono un ruolo fondamentale nella dinamica orbitale poiché permettono di modificare l'inclinazione dell'orbita quando questa non coincide con quella desiderata. Durante il lancio, ad esempio, l'inclinazione ottenibile è limitata dalla latitudine del sito di lancio: lanciando da Cape Canaveral (latitudine $\delta \approx 28^\circ$), l'inclinazione minima ottenibile è pari alla latitudine stessa.

Per modificare l'inclinazione è necessario applicare una variazione di velocità pari a:

$$\Delta V = 2V \sin \left(\frac{\Delta \Psi}{2} \right) \quad (2.4.11)$$

Dove $\Delta \Psi$ è la variazione dell'angolo del vettore velocità. Poiché il costo della manovra è proporzionale alla velocità al momento dell'esecuzione, essa risulta più efficiente se effettuata quando la velocità è minima, cioè in prossimità dell'apoastro.

Un esempio numerico mostra quanto queste manovre siano onerose: partendo da un'orbita LEO di 200 km ottenuta da Cape Canaveral, il ΔV necessario per ottenere un'orbita equatoriale risulta superiore al ΔV richiesto per l'escape parabolico dalla Terra. Per variazioni di inclinazione superiori a circa 50° , risulta addirittura più conveniente, almeno teoricamente, effettuare

un'orbita di escape, modificare l'inclinazione a distanza infinita (dove la velocità tende a zero e il costo è trascurabile) e rientrare successivamente su un'orbita parabolica.

Questo esempio mette in evidenza come le manovre di cambio di piano siano tra le più costose in termini di ΔV .

2.4.2 Manovre a N-impulsi

Fino a questo punto si sono fatte le assunzioni di variazione di velocità istantanea e intersezione tra orbita iniziale e finale. Questa seconda assunzione, però, risulta essere molto restrittiva: in generale, non sempre è possibile passare da un'orbita a un'altra con un unico impulso se le due orbite non si incontrano nello spazio. Un esempio immediato è il trasferimento da un'orbita circolare a un'altra orbita circolare più esterna (o interna). Un corpo in orbita circolare attorno alla Terra, o la stessa Terra attorno al Sole (in prima approssimazione), non può raggiungere direttamente un'orbita circolare più alta con un solo impulso, perché le due orbite non hanno punti in comune.

Le manovre a N-impulsi costituiscono quindi una strategia generale per collegare due orbite che non si intersecano direttamente. In questi casi si introduce una o più orbite di trasferimento che fungono da collegamento tra l'orbita iniziale e quella finale. Ogni orbita intermedia è scelta in modo da intersecare la successiva, così da poter applicare un impulso in ciascun punto di intersezione. In questo modo si costruisce una sequenza di trasferimenti parziali che permette di raggiungere l'orbita finale anche quando un singolo impulso non sarebbe sufficiente.

Una volta riconosciuto che un singolo impulso non è sufficiente a collegare due orbite che non hanno punti in comune, il passo successivo naturale è considerare manovre a due impulsi. Due impulsi sono geometricamente sufficienti per costruire la sequenza minima di trasferimento: il primo impulso porta il veicolo su un'orbita intermedia che interseca quella finale mentre il secondo consente l'inserzione nell'orbita di arrivo. Per orbite kepleriane ideali, quindi, le manovre a due impulsi rappresentano la soluzione più semplice ed energeticamente vantaggiosa per realizzare un trasferimento orbitale.

Per una trasferta a due impulsi tra due orbite circolari di raggio r_1 e r_2 con $r_1 < r_2$, è necessario che l'orbita di trasferimento abbia periastro $r_p \leq r_1$ e apoastro $r_a \geq r_2$: queste due condizioni sono necessarie per far sì che l'orbita di trasferimento intersechi le due orbite circolari. Date queste due condizioni, possiamo utilizzare l'equazione della conica ricordando che al periastro

$\nu = 0^\circ$ e all'apoastro $\nu = 180^\circ$, ottenendo così:

$$\begin{cases} r_1 \geq \frac{p}{1+e} \\ r_2 \leq \frac{p}{1-e} \end{cases} \quad (2.4.12)$$

Isolando l'eccentricità otteniamo:

$$\begin{cases} e \geq \frac{p}{r_1} - 1 \\ e \leq 1 - \frac{p}{r_2} \end{cases} \quad (2.4.13)$$

quindi tracciando le due rette $p/r_1 - 1$ e $1 - p/r_2$ otteniamo che l'eccentricità deve essere maggiore di queste due. Prendendo come esempio due orbite circolari aventi rapporto dei raggi $r_2/r_1 = 1.52$ (si è utilizzato questo rapporto poiché è pari al rapporto tra le distanze medie dal Sole di Terra e Marte) otteniamo il seguente grafico:

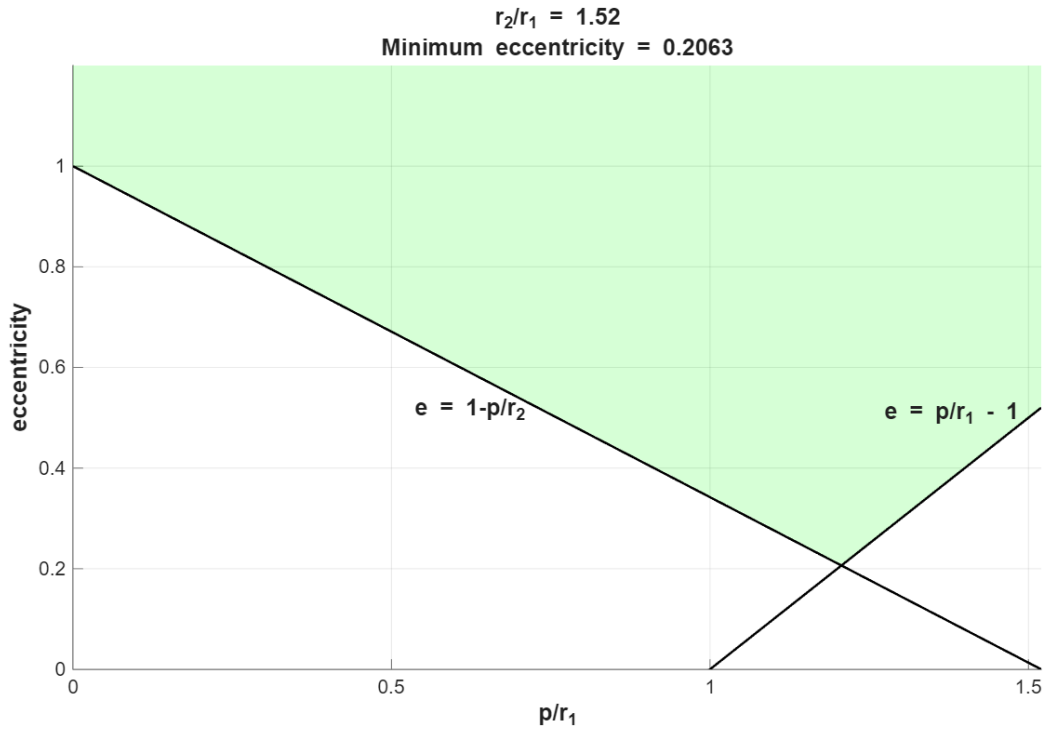


Figura 2.3: e in funzione di p/r_1 a r_2/r_1 fissato

La zona evidenziata in verde identifica le orbite che hanno eccentricità e e rapporto p/r_1 che rispettano i vincoli prestabiliti: per $e < 1$ avremo orbite

ellittiche, per $e = 1$ orbite paraboliche e per $e > 1$ orbite iperboliche. Il grafico mostra quindi l'insieme delle orbite geometricamente ammissibili per collegare r_1 a r_2 ma non fornisce informazioni sul costo della manovra.

Trasferta di Hohmann

Il problema dell'individuare, tra tutte queste orbite ammissibili, quella che minimizza il ΔV fu affrontato da Walter Hohmann nel 1925. Egli dimostrò che la soluzione a costo minimo è proprio l'orbita ellittica con eccentricità minima compatibile con i vincoli di intersezione, cioè l'ellisse che ha periastro esattamente pari a r_1 e apoastro esattamente pari a r_2 . Questa scelta garantisce che l'energia orbitale dell'ellisse sia la più bassa possibile tra tutte le orbite di trasferimento e quindi che il ΔV necessario sia minimo.

L'intuizione alla base della sua efficienza è semplice: l'ellisse di Hohmann fornisce esattamente l'energia necessaria a raggiungere r_2 e non di più; inoltre, le variazioni di velocità risultano parallele alle velocità circolari iniziale e finale, riducendo le perdite dovute al disallineamento della spinta.

Nel caso di una trasferta da un'orbita interna a una più esterna, il trasferimento avviene applicando un primo impulso nel punto di periastro dell'ellisse di Hohmann, così da immettere il veicolo sull'orbita di trasferimento. Il veicolo percorre quindi metà dell'ellisse fino a raggiungere l'apoastro, dove un secondo impulso consente l'inserzione nell'orbita circolare di raggio r_2 , imponendo la velocità orbitale a tale quota.

Come già discusso, la trasferta di Hohmann è ottimale solo nel caso di orbite complanari e circolari. Se le due orbite non giacciono sullo stesso piano, è necessario introdurre un ΔV aggiuntivo per il cambio di piano, oppure combinare quest'ultimo con uno dei due impulsi della manovra. Analogamente, se almeno una delle due orbite non è circolare, la soluzione di Hohmann non garantisce più il minimo ΔV e occorre valutare configurazioni alternative. Un ulteriore aspetto da considerare è che l'ottimalità della trasferta di Hohmann viene meno quando il rapporto r_2/r_1 diventa molto elevato: per trasferimenti molto ampi, infatti, esistono manovre più efficienti, come le manovre bi-ellittiche, che pur richiedendo un impulso aggiuntivo, possono ridurre significativamente il costo totale.

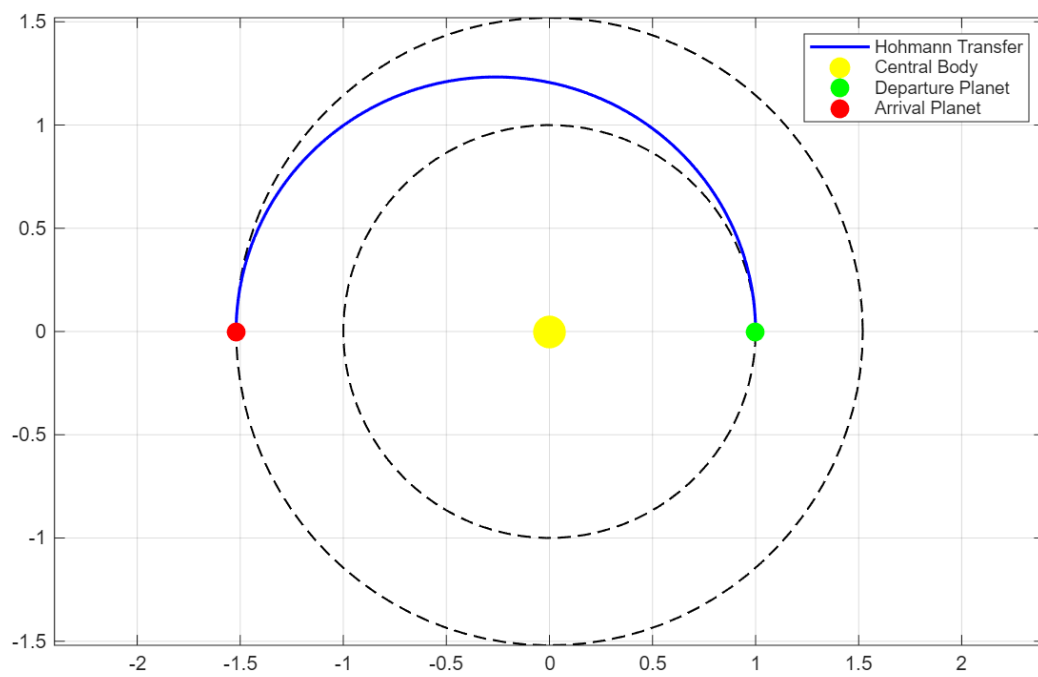


Figura 2.4: Trasferta di Hohmann tra due orbite circolari

Capitolo 3

Trasferte Interplanetarie

Una volta analizzate le manovre di trasferimento attorno ad un singolo corpo, è necessario estendere la trattazione al caso in cui l'obiettivo non sia più raggiungere un'orbita circolare o ellittica ma lasciare completamente il campo gravitazionale del corpo primario. Questo introduce il concetto di manovra di escape, che consente al veicolo di inserirsi in un'orbita eliocentrica e avviare la trasferta interplanetaria.

La dinamica di una missione interplanetaria, tuttavia, non può essere descritta tramite il solo problema dei due corpi: il veicolo è infatti soggetto all'azione simultanea del Sole, del pianeta di partenza, del pianeta di arrivo e di eventuali altri corpi. Per gestire questa complessità, si introdurranno modelli semplificativi, e valutando opportunamente fattori come il fasamento, la finestra di lancio e l'efficienza energetica, ci permetteranno di ottenere una soluzione analitica approssimata al nostro problema.

3.1 Problema degli N-corpi

Il problema dei due corpi descrive il moto di un satellite attorno a un corpo centrale assumendo che esistano solo due masse che interagiscono gravitazionalmente e che entrambe siano perfettamente sferiche. In questo scenario ideale, l'equazione del moto è semplice e porta alle orbite kepleriane, cioè alle traiettorie ellittiche, paraboliche o iperboliche. Nella realtà, però, il moto del satellite non può essere descritto da un modello così elementare; il veicolo è immerso in un ambiente dinamico in cui agiscono simultaneamente diverse forze: oltre all'attrazione del corpo centrale, intervengono infatti le influenze gravitazionali di altri corpi celesti, come il Sole e la Luna, e una serie di effetti non gravitazionali legati alla forma irregolare della Terra, alla presenza dell'atmosfera e all'interazione con la radiazione solare. Tutti questi contributi

fanno sì che l'orbita reale si discosti progressivamente da quella kepleriana ideale.

Per tenere conto di tali effetti, l'equazione del moto viene quindi modificata introducendo un termine aggiuntivo che rappresenta la somma delle perturbazioni agenti sul veicolo:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} + \mathbf{p} \quad (3.1.1)$$

Dove $\mathbf{p}$ rappresenta la somma di tutte le perturbazioni subite dal veicolo. Queste perturbazioni sono forze deboli ma continue, capaci di modificare lentamente i parametri orbitali e di determinare l'evoluzione dell'orbita nel lungo periodo. Alcune derivano da caratteristiche del corpo centrale, come l'oblateness terrestre o il drag atmosferico, e tendono a influenzare solo determinate fasi della missione, in particolare quelle in orbita bassa. Altre, invece, sono dovute da sorgenti esterne, come la gravità di altri corpi celesti e la pressione solare, e possono agire durante l'intera missione oppure manifestarsi solo in particolari fasi.

Tra tutte, le perturbazioni più significative per le missioni interplanetarie sono quelle dovute alla radiazione solare e quelle gravitazionali di terzo corpo. La pressione di radiazione solare nasce dall'urto dei fotoni sulla superficie del veicolo: una forza estremamente debole ma continua, diretta radialmente verso l'esterno e dipendente dal rapporto tra area esposta e massa del satellite. Anche se piccola, questa pressione può modificare progressivamente i parametri orbitali e introdurre variazioni periodiche legate all'entrata e all'uscita dall'ombra del corpo centrale: nelle missioni interplanetarie, dove l'esposizione al Sole è costante il suo effetto è particolarmente rilevante.

Un ruolo altrettanto importante è svolto dalle perturbazioni gravitazionali di un terzo corpo, che derivano dall'attrazione esercitata su un satellite da corpi diversi da quello centrale, come il Sole, la Luna o i pianeti. Poiché la configurazione geometrica tra satellite, corpo centrale e terzo corpo varia continuamente, anche la direzione e l'intensità della forza perturbativa cambiano nel tempo. Questo mette in evidenza un aspetto fondamentale della dinamica reale: il campo gravitazionale a cui è soggetto il veicolo non è generato da un'unica massa ma è il risultato della combinazione delle attrazioni di più corpi celesti, ciascuno con un contributo che varia nel tempo.

La presenza simultanea di più sorgenti gravitazionali porta naturalmente a considerare il problema degli n -corpi, nel quale il moto del veicolo è influenzato da più masse. In questo caso, l'equazione del moto assume la forma:

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = -G \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{m_j}{r_{ij}^3} \mathbf{r}_{ij} \quad (3.1.2)$$

Il problema degli n -corpi rappresenta la formulazione più completa della dinamica orbitale poiché descrive il moto di un veicolo soggetto simultaneamente all'attrazione gravitazionale di più corpi celesti. Tuttavia, Poincaré dimostrò nel 1892 che, per $N > 2$, non esiste una soluzione analitica generale: le equazioni del moto diventano un sistema accoppiato di equazioni differenziali non lineari, la cui soluzione richiede integrazione numerica e non consente una descrizione semplice del moto come nel problema dei due corpi.

In una missione interplanetaria, questa complessità è inevitabile: il veicolo è influenzato dal Sole, dal pianeta di partenza, dal pianeta di arrivo e da eventuali altri corpi. Tuttavia, non tutti questi contributi hanno la stessa importanza, è quindi necessario introdurre un criterio che permetta di stabilire quale corpo domina la dinamica di una certa regione di spazio.

A questo scopo si definisce la sfera di influenza (SOI-Sphere Of Influence), cioè la regione in cui la gravità di un corpo celeste risulta dominante rispetto a quella di tutti gli altri corpi del sistema. Nel caso del Sistema Solare, ad esempio, la SOI di un pianeta identifica la zona in cui l'attrazione gravitazionale planetaria supera quella del Sole, permettendo di approssimare il moto del veicolo come un problema dei due corpi.

L'introduzione della SOI permette quindi di suddividere la traiettoria in regioni dinamicamente distinte: all'interno della SOI del pianeta di partenza o arrivo, il moto può essere approssimato come un problema dei due corpi pianeta-veicolo; al di fuori di tali regioni, invece, la dinamica è dominata dal Sole e può essere trattata come un problema dei due corpi Sole-veicolo. In questo modo, l'effetto gravitazionale degli altri corpi celesti viene trattato come una perturbazione secondaria, spesso sufficientemente piccola da poter essere trascurata nella modellazione di primo livello, semplificando notevolmente l'analisi.

Questa idea costituisce la base del Patched Conics Method, nel quale la traiettoria interplanetaria viene costruita unendo insieme più archi kepleriani, ciascuno valido nella regione in cui un singolo corpo domina la dinamica. I modelli a due corpi rappresentano uno strumento essenziale per la fase preliminare di mission design, poiché consentono una descrizione analitica semplice che può essere successivamente raffinata introducendo progressivamente gli effetti perturbativi del modello n -corpi.

3.2 Missione Interplanetaria

Una missione interplanetaria può essere descritta come una sequenza di fasi dinamicamente distinte, ciascuna dominata dall'attrazione gravitazionale di

un singolo corpo celeste. Questo approccio è alla base del Patched Conics Method, che permette di modellare la traiettoria mediante archi kepleriani successivi, raccordati nei punti in cui il corpo dominante cambia. Nel seguito, tale metodologia verrà applicata al caso specifico della trasferta Terra-Marte, che costituisce l'oggetto del presente lavoro.

Per applicare questo metodo si adottano le seguenti ipotesi semplificative:

- Suddivisione dello spazio tramite le sfere di influenza (SOI): lo spazio attorno a ciascun pianeta è suddiviso in regioni in cui la sua gravità risulta predominante. All'interno della SOI si utilizza il modello a due corpi pianeta-veicolo; al di fuori, il moto è dominato dal Sole e viene trattato come un problema dei due corpi Sole-veicolo.
- Orbite planetarie complanari e circolari: per ottenere una formulazione analitica della trasferta, si assume che le orbite di Terra e Marte siano complanari e approssimabili come circolari. Questa ipotesi verrà successivamente confrontata con le orbite reali.

Sulla base di queste assunzioni, la missione Terra-Marte viene suddivisa in tre fasi principali:

1. Planetary departure: il veicolo parte da un'orbita attorno alla Terra e viene portato fino al limite della sua sfera di influenza.
2. Fase eliocentrica: una volta usciti dalla SOI terrestre, il moto è dominato dal Sole e la traiettoria viene descritta come un'orbita kepleriana eliocentrica che conduce verso Marte.
3. Planetary arrival: avvicinandosi a Marte, il veicolo entra nella sua SOI e il moto torna a essere dominato dalla gravità planetaria, permettendo di definire le condizioni di arrivo.

Questa suddivisione consente di analizzare separatamente ciascuna fase, applicando in ognuna il modello dinamico più semplice compatibile con il corpo dominante e raccordando le soluzioni nei punti di transizione tra le SOI.

La valutazione complessiva della missione richiede il calcolo del ΔV associato a ciascuna fase, poiché la somma di tali contributi determina il costo energetico totale della trasferta Terra-Marte.

3.2.1 Fase Eliocentrica

Poiché la fase eliocentrica è quella in cui il veicolo trascorre la maggior parte del tempo ed è quindi la fase principale della missione, iniziamo analizzando

questo tratto della traiettoria. Nel sistema eliocentrico, le dimensioni fisiche della Terra e di Marte, e delle rispettive sfere di influenza, sono trascurabili rispetto ai raggi delle loro orbite. Di conseguenza, i due pianeti possono essere modellati come punti adimensionali che si muovono su orbite circolari attorno al Sole; ciò permette di identificare il punto di partenza della trasferta con la posizione eliocentrica della Terra.

Le velocità orbitali dei due pianeti risultano quindi pari a (denotiamo con $\oplus$ la Terra e con $\oslash$ Marte):

$$V_{\oplus} = \sqrt{\frac{\mu_{\odot}}{R_{\oplus}}} \quad V_{\oslash} = \sqrt{\frac{\mu_{\odot}}{R_{\oslash}}} \quad (3.2.1)$$

Come discusso in precedenza, per passare da un'orbita circolare a un'altra il metodo energeticamente più efficiente è la trasferta di Hohmann. Possiamo quindi calcolare il ΔV_1 necessario all'immissione nella Hohmann e il ΔV_2 necessario alla circolarizzazione nell'orbita di Marte tramite la conservazione dell'energia meccanica. L'energia dell'orbita di trasferimento è:

$$E_H = -\frac{\mu_{\odot}}{2a_H} = \frac{V^2}{2} - \frac{\mu_{\odot}}{R} \quad \text{con} \quad a_H = \frac{R_{\oplus} + R_{\oslash}}{2} \quad (3.2.2)$$

Da cui si ricavano le variazioni di velocità ai due estremi della trasferta:

$$\Delta V_1 = V_{H,1} - V_{\oplus} = \sqrt{2\mu_{\odot} \left(-\frac{1}{R_{\oplus} + R_{\oslash}} + \frac{1}{R_{\oplus}} \right)} - V_{\oplus} \quad (3.2.3)$$

$$\Delta V_2 = V_{\oslash} - V_{H,2} = V_{\oslash} - \sqrt{2\mu_{\odot} \left(-\frac{1}{R_{\oplus} + R_{\oslash}} + \frac{1}{R_{\oslash}} \right)} \quad (3.2.4)$$

Questi valori rappresentano rispettivamente la variazione di velocità necessaria per l'immissione nella traiettoria eliocentrica di trasferimento e quella richiesta per la circolarizzazione nell'orbita di Marte.

3.2.2 Planetary Departure

A questo punto, tramite il Patched Conics Method, è necessario raccordare la fase eliocentrica con la fase planetocentrica. Il valore di ΔV_1 calcolato nel sistema eliocentrico rappresenta la velocità relativa che il veicolo deve possedere al momento dell'uscita dalla sfera di influenza terrestre. Nel sistema eliocentrico, infatti, il veicolo e la Terra orbitano con la stessa velocità $V_{\oplus}$; ciò equivale ad assumere che, nel sistema geocentrico, il veicolo raggiunga la SOI con velocità relativa nulla.

Occorre quindi determinare come ottenere tale condizione partendo da un'orbita attorno alla Terra; per farlo è necessario ricorrere a una manovra di escape. Come visto in precedenza, esistono due possibilità: un'orbita parabolica o un'orbita iperbolica.

L'escape parabolico corrisponde al caso in cui il veicolo raggiunge la SOI con velocità relativa nulla, condizione compatibile con l'interpretazione appena descritta. Tuttavia, questa soluzione richiede due impulsi: un primo impulso in orbita bassa per raggiungere la parabolica e un secondo impulso, applicato idealmente a distanza infinita, per fornire la variazione di velocità ΔV_1 necessaria all'immissione nella trasferta eliocentrica.

Una soluzione più efficiente consiste invece nell'utilizzare un'orbita iperbolica. In questo caso, l'intera variazione di velocità può essere fornita con un unico impulso in orbita bassa, imponendo al veicolo una velocità tale che la sua V_∞ coincida con la velocità relativa richiesta dalla fase eliocentrica. Questa scelta risulta sempre vantaggiosa, poiché l'impulso viene applicato a quote basse, dove la velocità orbitale è maggiore e le perdite gravitazionali sono minori.

Di conseguenza, l'escape iperbolico rappresenta la soluzione energeticamente più efficiente per raccordare la fase planetocentrica con la fase eliocentrica della trasferta Terra-Marte.

Sapendo che la velocità di eccesso iperbolico coincide con la variazione di velocità eliocentrica richiesta dalla trasferta, $V_\infty = \Delta V_1$, e che il veicolo viene tipicamente inserito in un'orbita di parcheggio circolare dalla quale viene eseguita la manovra di escape, è possibile analizzare in modo completo la geometria dell'iperbole di partenza. In questo contesto, il punto in cui si applica l'impulso coincide con il periastro dell'iperbole, per cui il raggio dell'orbita di parcheggio è pari a r_p . Una volta fissati V_∞ e r_p , risultano determinati tutti i parametri dell'iperbole. In particolare, la variazione di velocità necessaria per l'immissione nella traiettoria iperbolica e la sua eccentricità sono:

$$\Delta V = V_{iperb} - V_{circ} = \sqrt{V_\infty^2 + \frac{2\mu_\oplus}{r_p}} - \sqrt{\frac{\mu_\oplus}{r_p}} = V_{circ} \left(\sqrt{2 + \left(\frac{V_\infty}{V_{circ}} \right)^2} - 1 \right) \quad (3.2.5)$$

$$e = 1 + \frac{r_p V_\infty^2}{\mu_\oplus} \quad (3.2.6)$$

Con l'eccentricità nota, si può determinare l'angolo di semiapertura dell'iperbole:

$$\beta = \cos^{-1} \left(\frac{1}{e} \right) \quad (3.2.7)$$

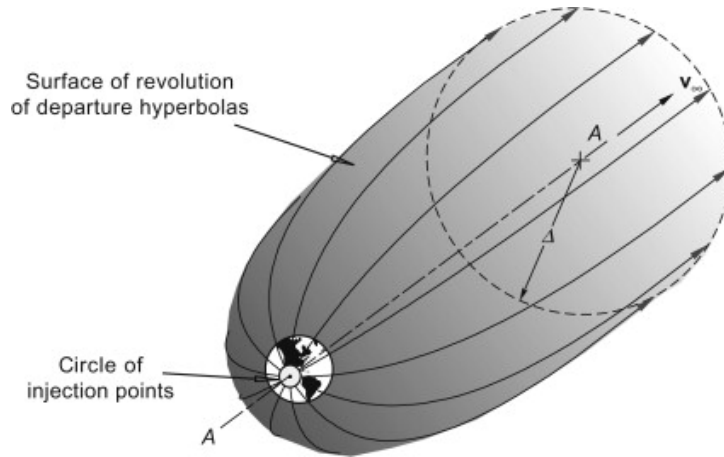


Figura 3.1: Traiettorie iperboliche fissati V_∞ e r_p [9]

Questo angolo definisce l'orientazione dell'asintoto dell'iperbole rispetto al suo asse di simmetria e quindi la direzione della velocità V_∞ .

Una volta fissati il periastro r_p e il modulo di V_∞ , la forma dell'iperbole è completamente determinata. L'unico vincolo sull'orientazione della traiettoria è che il piano dell'iperbole contenga sia il centro del pianeta sia il vettore V_∞ , poiché quest'ultimo ne definisce la direzione asintotica. All'interno di questo vincolo, l'iperbole può essere ruotata attorno a una linea passante per il centro del pianeta e parallela a V_∞ , generando una superficie che raccoglie tutte le possibili traiettorie di escape con le stesse caratteristiche dinamiche. In questa rotazione, il periastro descrive un cerchio di raggio $r = r_p \sin \beta$ che rappresenta il locus di tutti i punti di iniezione compatibili con la stessa energia orbitale e con la stessa velocità di eccesso iperbolico.

In pratica, esiste un'intera famiglia di iperboli equivalenti e la scelta del punto di iniezione dipende dalla geometria dell'orbita di parcheggio e dalla posizione del sito di lancio (figura 3.1).

Infine, la direzione dell'asintoto dell'iperbole, e quindi di V_∞ , deve essere coerente con la variazione di velocità eliocentrica richiesta dalla missione:

- Per missioni verso pianeti più esterni, V_∞ deve essere orientata nella stessa direzione della velocità orbitale del pianeta, così da aumentare la velocità eliocentrica del veicolo.
- Per missioni verso pianeti più interni, V_∞ deve essere orientata in direzione opposta, così da ridurre la velocità eliocentrica.

3.2.3 Planetary Arrival

L'arrivo al pianeta di destinazione presenta una dinamica concettualmente analoga a quella della partenza ma con processo inverso: una volta raggiunta la sfera di influenza del pianeta, il veicolo entra in un'orbita iperbolica di arrivo, caratterizzata da una velocità di eccesso iperbolico $V_{\infty, arr}$ determinata dalla fase eliocentrica della missione e dalla posizione relativa tra il veicolo il pianeta al momento dell'ingresso della SOI.

Data l'elevata energia orbitale del veicolo, per ottenere la cattura gravitazionale è necessario applicare un impulso frenante al periastro, così da ridurre la velocità e trasformare l'iperbole in un'orbita chiusa attorno al pianeta. Poiché questa manovra può risultare particolarmente costosa in termini di ΔV , in alcuni casi è possibile sfruttare l'atmosfera del pianeta per dissipare parte dell'energia tramite aerobraking o aerocattura, riducendo progressivamente la velocità dello spacecraft.

Se non viene applicata nessuna variazione di velocità, il veicolo continuerà a seguire l'iperbole di arrivo, uscendo nuovamente dalla SOI del pianeta e proseguendo lungo una nuova traiettoria eliocentrica. Questa configurazione corrisponde al fly-by, nel quale il passaggio ravvicinato al pianeta viene sfruttato per modificare la direzione e l'energia della traiettoria, consentendo al veicolo di dirigersi verso altre destinazioni.

3.3 Problema del fasamento

Fino a questo punto abbiamo implicitamente assunto che, al termine della trasferta di Hohmann, il veicolo incontri Marte nella posizione corretta per effettuare la cattura. Tuttavia, ciò non avviene per un generico istante si lancio: affinché l'arrivo del veicolo coincida con la posizione del pianeta, è necessario che, all'inizio della fase eliocentrica, Marte si trovi nella configurazione angolare appropriata rispetto alla Terra.

Questa condizione prende il nome di angolo di fasatura ψ : esso rappresenta la differenza angolare tra Marte e la Terra al momento della trasferta, tale per cui, dopo il tempo di volo della Hohmann, il veicolo e il pianeta si trovino nello stesso punto dell'orbita marziana.

Per determinarlo, si calcola inizialmente il tempo di volo della trasferta, pari a metà del periodo dell'orbita di Hohmann:

$$t_H = \frac{T_H}{2} = \pi \sqrt{\frac{a_H^3}{\mu_{\odot}}} \quad (3.3.1)$$

Durante questo intervallo, il veicolo percorre un angolo di 180° mentre Marte avanza lungo la propria orbita con il suo moto medio:

$$n_{\mathcal{S}} = \sqrt{\frac{\mu_{\odot}}{r_{\mathcal{S}}^3}} \quad (3.3.2)$$

Affinché il veicolo e Marte si trovino nello stesso punto al tempo t_H , la differenza angolare iniziale deve soddisfare:

$$\psi = \pi - n_{\mathcal{S}} t_H \quad (3.3.3)$$

Sostituendo le espressioni note:

$$\psi = \pi - \sqrt{\frac{\mu_{\odot}}{r_{\mathcal{S}}^3}} \pi \sqrt{\frac{a_H^3}{\mu_{\odot}}} = \pi \left(1 - \sqrt{\frac{a_H^3}{r_{\mathcal{S}}^3}} \right) \approx 44.15^\circ \quad (3.3.4)$$

Il risultato indica che, per una trasferta di Hohmann, Marte deve trovarsi “in avanti” rispetto alla Terra al momento del lancio. Questo perché Marte, trovandosi su un’orbita più esterna, ha un moto medio più lento: durante il tempo di volo della Hohmann, il pianeta avanza meno della Terra e quindi deve partire “in anticipo” per trovarsi nel punto di incontro al momento giusto.

Nel caso di trasferta verso un pianeta interno, il ragionamento si inverte: il pianeta di arrivo, avendo un moto medio maggiore, deve trovarsi in ritardo rispetto alla Terra al momento della partenza.

Durante la trasferta, la configurazione angolare favorevole tra Terra e Marte non è sempre disponibile: una volta effettuato un lancio in condizioni di fasatura corretta, occorre attendere un certo intervallo prima che la stessa configurazione si ripresenti. Questo intervallo prende il nome di periodo sinodico τ_S ed esprime il tempo necessario affinché i due pianeti ritornino nella posizione relativa lungo le rispettive orbite.

Per determinarlo, si considera il moto medio dei due pianeti; il periodo sinodico è il tempo τ_S necessario affinché Marte compia un giro completo relativamente alla Terra, cioè:

$$n_{\oplus} \tau_S = n_{\mathcal{S}} \tau_S \pm 2\pi \quad (3.3.5)$$

Nel caso di un pianeta esterno, come Marte, si utilizza il segno positivo poiché la Terra ha un moto medio maggiore e “raggiunge” Marte lungo l’orbita. Da questa relazione si ricava:

$$\tau_S = \frac{2\pi}{|n_{\oplus} - n_{\mathcal{S}}|} \quad (3.3.6)$$

Sostituendo i valori orbitali dei due pianeti si ottiene:

$$\tau_S \approx 780 \text{ giorni} \approx 2.13 \text{ anni} \quad (3.3.7)$$

Il risultato indica che una finestra di lancio ottimale per una trasferta di Hohmann Terra-Marte si ripresenta approssimativamente ogni due anni e due mesi.

3.4 Orbite planetarie reali

Nelle sezioni precedenti si è assunto, per semplicità, che le orbite di Terra e Marte fossero perfettamente circolari e complanari. Questa ipotesi consente di ottenere una prima stima del trasferimento ma non descrive con accuratezza la dinamica reale del sistema. Le orbite dei due pianeti presentano infatti eccentricità e inclinazioni non trascurabili, che influenzano in modo significativo la geometria del trasferimento e il costo energetico.

La Terra percorre un'orbita con eccentricità $e = 0.0167$ mentre Marte presenta un'eccentricità molto più elevata, pari a $e = 0.0935$. Sebbene tali valori possano sembrare piccoli, la loro influenza sulla distanza eliocentrica è tutt'altro che trascurabile: nel caso di Marte, la differenza tra perielio e afelio supera i 40 milioni di chilometri. Come mostrato in Figura 3.2, anche un leggero aumento di eccentricità (come nel caso di Marte) comporta variazioni significative nella distanza dal Sole e dall'orbita della Terra.

Oltre all'eccentricità, anche l'inclinazione dell'orbita rispetto al piano dell'eclittica ($i = 1.85^\circ$) introduce ulteriori complessità: sebbene la differenza di inclinazione sia ridotta, un cambiamento di piano in un riferimento eliocentrico (come può essere un trasferimento Terra-Marte) avviene a velocità dell'ordine di 30 km/s e, applicando l'Equazione 2.4.11, si ottiene che la variazione angolare di soli 1.85° comporta un costo dell'ordine di 1 km/s . Ciò rende evidente come l'ipotesi di orbite complanari non sia adeguata quando si desidera modellare con precisione una trasferta interplanetaria.

Per descrivere correttamente la dinamica reale è quindi necessario utilizzare le effemeridi planetarie, che forniscono le posizioni effettive dei pianeti nel tempo lungo le loro orbite ellittiche e inclinate.

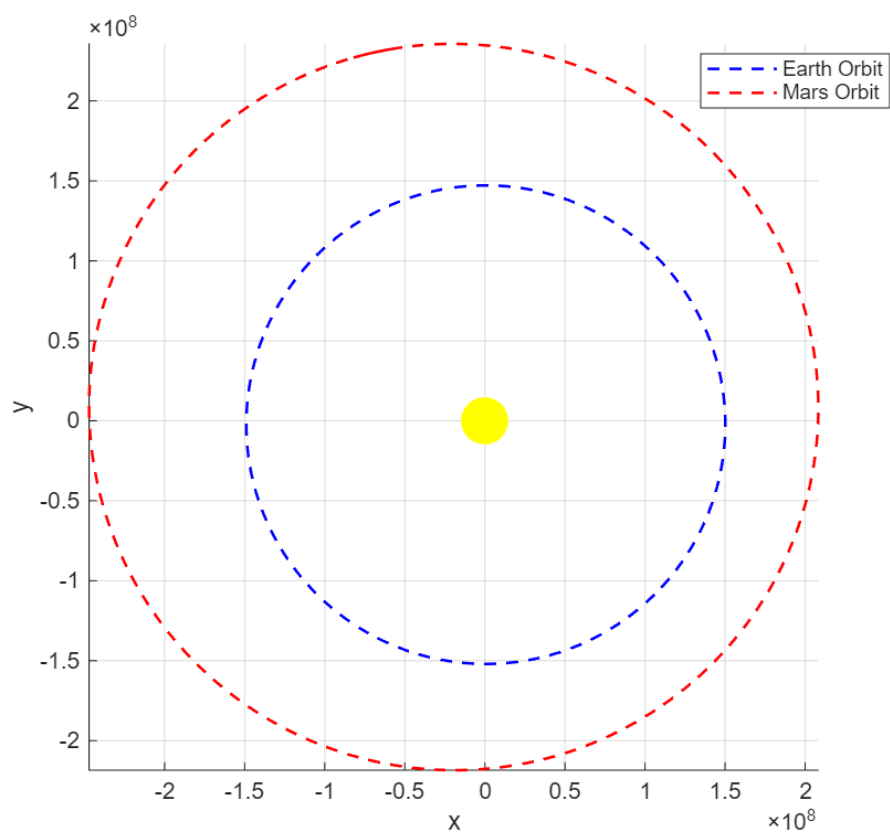


Figura 3.2: Orbite di Terra e Marte

Capitolo 4

Teoria del Controllo Ottimale e Metodi di Ottimizzazione

La determinazione di una traiettoria interplanetaria non può essere affrontata limitandosi alle soluzioni ideali della meccanica orbitale classica, come il trasferimento di Hohmann o le traiettorie Hohmann-Like. Queste soluzioni rappresentano configurazioni teoricamente ottimali in un contesto fortemente semplificato: due orbite circolari complanari, manovre impulsive istantanee e assenza di perturbazioni. Tuttavia, una missione reale si discosta profondamente da questo scenario ideale: le orbite planetarie sono ellittiche e non complanari, le finestre di lancio impongono condizioni iniziali non arbitrarie e la presenza di vincoli operativi, come limiti di massa, potenza e durata della missione, rende impossibile applicare manovre impulsive perfette. Inoltre, la scelta della tipologia di propulsione (chimica o elettrica) influenza enormemente la struttura del problema di traiettoria: la propulsione chimica consente manovre (quasi) impulsive, modellabili come variazioni di velocità istantanee, mentre la propulsione elettrica fornisce spinte di bassa intensità ma applicate per lunghi intervalli di tempo, trasformando il problema in un controllo continuo della spinta.

In questo contesto, la traiettoria non è più il risultato di una costruzione geometrica, ma l'esito di una scelta di controllo: la direzione e l'intensità della spinta devono essere determinate nel tempo in modo da soddisfare gli obiettivi della missione, come minimizzare il consumo di propellente, ridurre il tempo di volo o raggiungere condizioni finali specifiche. Le equazioni del moto introdotte nei capitoli precedenti definiscono il sistema dinamico da governare, mentre la propulsione fornisce il controllo attraverso cui modificare l'evoluzione dello stato.

La teoria del controllo ottimale offre il quadro matematico per affrontare questo problema in modo rigoroso: essa consente di formulare la determinazione

della traiettoria come un problema di ottimizzazione vincolata, in cui lo stato del sistema è descritto dalla dinamica orbitale e il controllo è rappresentato dalla spinta. Attraverso i principi di ottimizzazione, è possibile derivare le condizioni necessarie di ottimo e calcolare traiettorie che rispettino i vincoli fisici operativi della missione.

Nei paragrafi seguenti verranno introdotti i fondamenti della teoria del controllo ottimale, le principali formulazioni dei problemi di traiettoria e i metodi numerici utilizzati per risolverli con particolare attenzione alle applicazioni nel contesto della propulsione chimica e della determinazione delle traiettorie interplanetarie ottimizzate.

4.1 Teoria del Controllo Ottimale

La progettazione di una traiettoria spaziale può essere formulata come un problema di controllo in cui l'obiettivo è determinare la legge di controllo che rende massimo o minimo un indice di prestazione. Nel contesto della propulsione chimica, questo indice è spesso legato alla massa di propellente necessaria o, in modo equivalente, alla massa finale del veicolo: minimizzare il consumo di propellente significa massimizzare la massa utile all'arrivo. Quindi, la scelta della legge di controllo, cioè alla sequenza delle manovre impulsive e le loro caratteristiche, determina direttamente l'efficienza della missione.

Il problema centrale diventa dunque la ricerca dell'ottimo: tra tutte le possibili strategie di manovra compatibili con la dinamica orbitale e i vincoli della missione, occorre individuare quella che minimizza la massa di propellente impiegata (o massimizza la massa finale). Questa formulazione porta a modellare la determinazione della traiettoria come un problema di ottimizzazione vincolata, in cui lo stato del sistema evolve secondo le equazioni del moto e il controllo agisce attraverso variazioni di velocità impulsive.

Nella maggior parte dei casi, questo problema non ammette soluzione analitica: la complessità della dinamica, la presenza di vincoli operativi e la natura non lineare delle equazioni rendono impossibile derivare espressioni chiuse per la legge di controllo ottimale. La determinazione di soluzioni significative impone quindi di affrontare il problema tramite soluzioni approssimate o l'utilizzo di metodi numerici. Questi ultimi si suddividono tradizionalmente in due categorie:

- **I Metodi Diretti**, affrontano il problema di controllo ottimale discretizzando direttamente il problema primario, cioè le equazioni di stato e il funzionale di costo. La traiettoria e i controlli vengono parametrizzati su una griglia temporale e le equazioni differenziali che descrivono

la dinamica vengono sostituite da relazioni algebriche che approssimano l'evoluzione dello stato tra due punti della griglia temporale. In questo modo il problema continuo diventa un problema di programmazione non lineare (NLP) di dimensione finita. La convergenza del metodo dipende perciò dalla qualità della discretizzazione temporale: una griglia troppo grossolana può produrre soluzioni poco precise mentre una discretizzazione molto fine aumenta sensibilmente la dimensione del problema e il costo computazionale. In altre parole, i metodi diretti garantiscono grande flessibilità e affidabilità ma richiedono un compromesso tra precisione, complessità numerica e tempo di calcolo.

- **I Metodi Indiretti**, affrontano il problema partendo direttamente dal problema continuo, cioè dalle equazioni differenziali che descrivono l'evoluzione dello stato del sistema. L'idea di base è ricavare, a partire dalla funzione di costo e dalle equazioni del moto, un insieme di condizioni necessarie di ottimalità che la traiettoria deve soddisfare; queste condizioni assumono la forma di un sistema di equazioni differenziali, accompagnato da condizioni al contorno che coinvolgono sia l'inizio sia la fine della traiettoria. Il risultato è un problema differenziale ai limiti (Boundary Value Problem, BVP): una parte dei valori iniziali non è nota e deve essere determinata in modo tale che, integrando il sistema lungo tutta la traiettoria, vengano soddisfatte le condizioni al contorno. La soluzione numerica richiede una procedura iterativa: si ipotizzano dei valori iniziali, si integra il sistema lungo tutti i sottointervalli della traiettoria, si valuta l'errore sulle condizioni al contorno e si correggono progressivamente i valori iniziali fino a ottenere convergenza. Di conseguenza, il successo del metodo dipende in modo critico dalla scelta dei valori iniziali ipotizzati: se questi sono troppo lontani da quelli che consentono di soddisfare le condizioni al contorno, l'algoritmo può non convergere. È quindi necessario che la stima iniziale sia sufficientemente vicina alla soluzione, così da guidare il processo iterativo verso il punto di convergenza.

In questo approccio, la traiettoria non viene discretizzata in anticipo come nei metodi diretti e ciò permette di ottenere soluzioni molto accurate ma richiede una buona stima iniziale e può risultare numericamente delicato, soprattutto se sono presenti discontinuità o vincoli complessi.

4.1.1 Ottimizzazione tramite metodi indiretti

La formulazione indiretta dei problemi di controllo ottimale si basa sui principi del calcolo variazionale. In questo contesto, l'evoluzione di un sistema dinamico viene descritta da un vettore di stato $\mathbf{x}(t)$, la cui dinamica è governata da un insieme di equazioni differenziali del tipo:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (4.1.1)$$

Dove $\mathbf{u}(t)$ rappresenta il vettore dei controlli e t la variabile indipendente tempo.

Quando la traiettoria può presentare discontinuità, ad esempio in corrispondenza di manovre impulsive, continue o cambi di regime dinamico, risulta conveniente suddividere la traiettoria in più archi. Ogni arco è delimitato da due istanti consecutivi, indicati con $t_{(j-1)+}$ e t_{j-} , che rappresentano rispettivamente i valori assunti immediatamente dopo e immediatamente prima del punto j considerato. In tali punti possono essere imposte condizioni al contorno di tipo generale, espresse come:

$$\boldsymbol{\chi}(\mathbf{x}_{(j-1)+}, \mathbf{x}_{j-}, t_{(j-1)+}, t_{j-}) = 0 \quad \text{per } j = 1, \dots, n \quad (4.1.2)$$

L'obiettivo dell'ottimizzazione è rendere estrema un funzionale che combina contributi valutati ai contorni interni (delimitati dal tempo iniziale e finale di ogni arco) ed esterni (delimitati dal tempo iniziale e finale), e un termine integrale lungo la traiettoria:

$$J = \varphi(\mathbf{x}_{(j-1)+}, \mathbf{x}_{j-}, t_{(j-1)+}, t_{j-}) + \sum_j \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt \quad \text{per } j = 1, \dots, n \quad (4.1.3)$$

Per incorporare in modo coerente sia le equazioni di stato sia i vincoli ai contorni, si introduce un funzionale ausiliario tramite moltiplicatori di Lagrange: costanti $\boldsymbol{\mu}$ associate ai vincoli ai contorni e variabili aggiunte $\boldsymbol{\lambda}$ associate alle variabili di stato. Il nuovo funzionale assume la forma:

$$J^* = \varphi + \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\chi} + \sum_j \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} (\Phi + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{f} - \dot{\mathbf{x}})) dt \quad \text{per } j = 1, \dots, n \quad (4.1.4)$$

Per eliminare la dipendenza del funzionale dalle derivate $\dot{\mathbf{x}}$, si integra per parti il termine $\boldsymbol{\lambda}^T \dot{\mathbf{x}}$, in questo modo si ottiene un'espressione equivalente che coinvolge soltanto $\mathbf{x}$, $\boldsymbol{\lambda}$ e i controlli. Quando le equazioni di stato e i vincoli sono soddisfatti, il valore di J^* coincide con quello del funzionale J .

La variazione prima del funzionale porta, infine, alla definizione dell'Hamiltoniano del sistema:

$$H = \Phi + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f} \quad (4.1.5)$$

La condizione di ottimalità richiede che il funzionale sia stazionario rispetto a tutte le variazioni ammissibili delle variabili di stato, dei controlli e del tempo, sia ai contorni interni sia a quelli esterni. Questa stazionarietà può essere garantita scegliendo opportunamente le costanti e le variabili aggiunte, in modo che ogni termine della variazione prima si annulli. Imporre $\delta J^* = 0$ conduce così alle equazioni differenziali che governano l'evoluzione delle variabili aggiunte e alle condizioni di ottimalità dei controlli:

$$\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} = - \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \quad (4.1.6)$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \right)^T = 0 \quad (4.1.7)$$

Quando un controllo è soggetto a vincoli (come accade, per esempio, per il modulo della spinta, che può variare solo tra 0 e T_{max}) la condizione $\partial H / \partial u = 0$ non è sufficiente a determinare il valore ottimale. In questi casi si applica il principio di Pontryagin: il controllo deve assumere, tra quelli ammissibili, il valore che rende l'Hamiltoniano estremale (massimo o minimo, a seconda del problema). Se il valore ottenuto dalla condizione $\partial H / \partial u = 0$ rientra nel dominio consentito, esso è accettabile; altrimenti il controllo si "spinge" verso uno degli estremi.

Quando l'Hamiltoniano dipende linearmente da un controllo vincolato, la situazione è ancora più netta: il controllo non compare esplicitamente nella condizione $\partial H / \partial u = 0$ e quindi non può essere ricavato come soluzione interna. In questo caso il segno del coefficiente del controllo nell'Hamiltoniano determina direttamente quale valore adottare: se tale coefficiente è positivo, il controllo assume il valore massimo; se è negativo, assume il valore minimo. Questa modalità di funzionamento, in cui il controllo commuta istantaneamente tra i suoi estremi, prende il nome di controllo bang-bang.

Una volta determinate le equazioni differenziali per le variabili aggiunte e le condizioni di ottimalità sui controlli, resta da considerare le condizioni al contorno. L'introduzione dei moltiplicatori di Lagrange comporta infatti che, oltre alle equazioni di stato e alle leggi di controllo, è necessario che siano soddisfatte ulteriori condizioni ai punti di giunzione tra gli archi della traiettoria.

Queste condizioni si ottengono imponendo che la variazione prima del funzionale si annulli rispetto alle variazioni dei valori assunti dalle variabili di

stato e dalla variabile indipendente ai contorni interni ed esterni, ottenendo:

$$-\lambda_{j-}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}_{j-}} + \boldsymbol{\mu}^T \left[\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{x}_{j-}} \right] = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (4.1.8)$$

$$\lambda_{j+}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}_{j+}} + \boldsymbol{\mu}^T \left[\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{x}_{j+}} \right] = 0 \quad j = 0, \dots, n-1 \quad (4.1.9)$$

$$H_{j-} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{j-}} + \boldsymbol{\mu}^T \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t_{j-}} = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (4.1.10)$$

$$-H_{j+} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{j+}} + \boldsymbol{\mu}^T \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t_{j+}} = 0 \quad j = 0, \dots, n-1 \quad (4.1.11)$$

Dalle equazioni 4.1.8-4.1.11 si ricavano quindi le condizioni di ottimalità ai contorni; eliminando le costanti aggiunte $\boldsymbol{\mu}$, esse possono essere espresse nella forma:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}_{j+}, \mathbf{x}_{j-}, \lambda_{j+}, \lambda_{j-}, t_{j+}, t_{j-}) = 0 \quad (4.1.12)$$

Queste condizioni, insieme alle equazioni di stato, alle equazioni aggiunte e alle leggi di controllo, completano il sistema necessario per determinare la soluzione ottima.

Utilizzando dunque la teoria del controllo ottimale, viene sviluppato un nuovo sistema di equazioni differenziali ai limiti (Boundary Value Problem - BVP) composto dalle equazioni di stato (4.1.1), dalle equazioni delle variabili aggiunte (4.1.6), dai controlli (4.1.7) e dalle condizioni al contorno imposte (4.1.2) e di ottimo (4.1.12). La soluzione consiste nel determinare i valori iniziali delle variabili di stato e delle variabili aggiunte che soddisfano le condizioni, integrando il sistema e correggendo iterativamente le condizioni iniziali fino a soddisfare le condizioni al contorno.

La struttura teorica appena delineata può ora essere applicata al caso specifico in esame. Il primo passo consiste nel definire il modello dinamico del veicolo, descritto dalle seguenti equazioni del moto:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{V} \\ \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{g} + \frac{\mathbf{T}}{m} + \frac{\mathbf{D}}{m} + \frac{\mathbf{L}}{m} \\ \frac{dm}{dt} = -\frac{T}{c} \end{cases} \quad (4.1.13)$$

- La prima equazione definisce la cinematica del moto: la variazione della posizione nel tempo coincide con la velocità del corpo;

- La seconda equazione definisce la dinamica del moto: l'accelerazione è data dalla somma delle forze agenti sul veicolo per unità di massa; nel caso considerato, il moto del veicolo avviene nello spazio e le forze aerodinamiche di portanza e resistenza possono essere trascurate, riducendo la dinamica alle sole componenti gravitazionali e propulsive;
- La terza equazione governa la variazione della massa nel tempo ed è legata al consumo di propellente. Poiché la massa non è costante nel tempo, e compare esplicitamente nell'equazione della dinamica, è necessario introdurre un'equazione che ne descriva l'evoluzione nel tempo. Questa relazione si ottiene dal bilancio della quantità di moto: espellendo una massa infinitesima di propellente con velocità di scarico c , il veicolo riceve una variazione di quantità di moto pari a:

$$m dV = dm_{prop} c \quad (4.1.14)$$

Passando ad una formulazione continua, la relazione precedente diventa:

$$m \frac{dV}{dt} = \frac{dm_{prop}}{dt} c \quad (4.1.15)$$

Poiché la spinta è definita come la variazione di quantità di moto nel tempo, per cui:

$$T = m \frac{dV}{dt} = \frac{dm_{prop}}{dt} c \quad (4.1.16)$$

Da quest'ultima espressione si ricava:

$$\frac{dm_{prop}}{dt} = \frac{T}{c} \quad (4.1.17)$$

Infine, poiché la massa del veicolo diminuisce al crescere della massa espulsa, la variazione della massa totale è data da:

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{T}{c} \quad (4.1.18)$$

Da questo sistema ricaviamo che le variabili di stato $\mathbf{x}$ sono i vettori $\mathbf{r}$, $\mathbf{V}$ e la massa m . In un sistema di riferimento cartesiano inerziale il vettore di stato può quindi essere scritto come:

$$\mathbf{x} = [r_x, r_y, r_z, V_x, V_y, V_z, m] \quad (4.1.19)$$

L'unico elemento del sistema su cui è possibile intervenire per modificare l'evoluzione del moto è la spinta $\mathbf{T}$; per questo motivo, il vettore delle variabili di controllo è costituito dalle sue componenti cartesiane:

$$\mathbf{u} = [T_x, T_y, T_z] \quad (4.1.20)$$

Il cui modulo sarà vincolato nell'intervallo $0 \leq T \leq T_{max}$. Infine, la variabile indipendente è il tempo t .

Stabilite le variabili del problema, si può formulare l'obiettivo dell'ottimizzazione, che consiste nel massimizzare la massa residua al termine della manovra. Per trattare questo obiettivo, come spiegato precedentemente, viene introdotto inizialmente il funzionale J e successivamente il funzionale J^* tramite l'introduzione dei moltiplicatori di Lagrange. In particolare, il vettore delle variabili aggiunte assume la forma:

$$\boldsymbol{\lambda} = [\boldsymbol{\lambda}_r, \boldsymbol{\lambda}_V, \lambda_m] \quad (4.1.21)$$

dove $\boldsymbol{\lambda}_r$ e $\boldsymbol{\lambda}_V$ sono vettori contenenti le componenti lungo i tre assi.

Sostituendo le equazioni del moto nel funzionale J^* e differenziando, si ottiene l'Hamiltoniano:

$$H = \boldsymbol{\lambda}_r^T \mathbf{V} + \boldsymbol{\lambda}_V^T \mathbf{g} + \frac{\boldsymbol{\lambda}_V^T \mathbf{T}}{m} - \frac{T}{c} \lambda_m \quad (4.1.22)$$

Si osserva immediatamente che l'Hamiltoniano dipende in modo lineare dalla variabile di controllo T . Raccogliendo il modulo della spinta, si ottiene:

$$H = \boldsymbol{\lambda}_r^T \mathbf{V} + \boldsymbol{\lambda}_V^T \mathbf{g} + T \left(\frac{\boldsymbol{\lambda}_V^T \mathbf{T}}{Tm} - \frac{\lambda_m}{c} \right) = \boldsymbol{\lambda}_r^T \mathbf{V} + \boldsymbol{\lambda}_V^T \mathbf{g} + T S_F \quad (4.1.23)$$

dove:

$$S_F = \frac{\boldsymbol{\lambda}_V^T \mathbf{T}}{Tm} - \frac{\lambda_m}{c} \quad (4.1.24)$$

è la Switching Function. Come osservato in precedenza, questa dipendenza lineare tra H e il modulo della spinta comporta un modello di controllo bang-bang in cui:

- Se $S_F < 0$, la spinta ottimale è nulla;
- Se $S_F > 0$, la spinta ottimale è pari a T_{max} .

Determinato il valore del modulo, resta da stabilire in quale direzione applicare la spinta. Poiché l'obiettivo è massimizzare la massa finale, la legge di controllo deve massimizzare l'Hamiltoniano in ogni istante: dato che i primi due termini non dipendono dal controllo, questo comporta la massimizzazione della Switching Function. Tale contributo risulta massimo quando la direzione della spinta è parallela al vettore $\boldsymbol{\lambda}_V$.

A questo punto, il problema di ottimizzazione è completamente definito: sono note le equazioni di stato, le equazioni aggiunte, la legge di controllo ottimale e le condizioni al contorno. La soluzione della manovra ottima si ottiene formulando il problema come un BVP, in cui alcuni valori iniziali delle variabili aggiunte sono incogniti. Integrando il sistema e correggendo iterativamente fino a soddisfare tutte le condizioni al contorno, è possibile determinare la traiettoria e la legge di controllo ottimali per il veicolo.

4.1.2 Procedura di risoluzione

Come discusso nella sezione precedente, la soluzione di un problema di controllo ottimale tramite metodi indiretti richiede la risoluzione di un problema BVP. Una caratteristica ben nota di questo approccio è la sua elevata sensibilità alle condizioni iniziali: una scelta non adeguata dei valori iniziali delle variabili aggiunte può impedire la convergenza del metodo. Inoltre, l'impiego di un sistema propulsivo chimico introduce ulteriori difficoltà nella risoluzione poiché la spinta è concentrata in archi temporali molto brevi, rendendo complessa l'individuazione dei punti in cui il controllo deve commutare tra le modalità *on* e *off*.

Per affrontare queste problematiche, la procedura di risoluzione viene suddivisa in tre fasi principali:

1. **Soluzione al problema di Lambert**
2. **Prima approssimazione della traiettoria e del controllo**
3. **Risoluzione del problema ai limiti**

Questa procedura consente di combinare l'elevata accuratezza del metodo indiretto con una strategia robusta per la scelta delle condizioni iniziali, garantendo la convergenza del BVP anche in presenza di archi di spinta molto brevi.

Problema di Lambert

La prima fase della procedura consiste nel risolvere il problema di Lambert, che fornisce una stima iniziale della traiettoria balistica e delle velocità richieste in partenza e in arrivo. Tale soluzione costituisce il punto di partenza per la definizione delle condizioni iniziali necessarie al metodo indiretto.

Il teorema di Lambert afferma che il tempo di trasferta tra due punti di un'orbita conica è determinato univocamente dalla somma delle distanze dal corpo centrale (r_1 e r_2), dalla distanza lineare che li separa (c) e dal semiasse maggiore a della conica percorsa:

$$\Delta t = f(a, r_1 + r_2, c) \quad (4.1.25)$$

Conoscendo il punto di partenza, il punto di arrivo e il tempo della trasferta, è possibile determinare completamente l'orbita che collega i due punti. Nel contesto delle trasferte interplanetarie, possiamo fissare il punto di partenza nella posizione della Terra alla data iniziale e il punto di arrivo nella posizione di Marte alla data finale: in questo modo risultano noti r_1 , r_2 , la distanza c

tra i due pianeti e il tempo di volo TOF .

Il problema di Lambert consente quindi di determinare il semiasse maggiore a della conica che collega i due pianeti e, di conseguenza, tutte le caratteristiche dell'orbita di trasferimento. In particolare, la soluzione fornisce le velocità richieste in partenza e in arrivo, che nel modello coincidono con le velocità di eccesso iperbolico V_∞ nella Terra e a Marte.

Variando la data di partenza e di arrivo (variando quindi TOF , r_1 , r_2 e c), è possibile costruire i cosiddetti *porkchop plots* (Figura 4.1), nei quali è rappresentato l'andamento del parametro energetico $C3$ al variare delle due date.

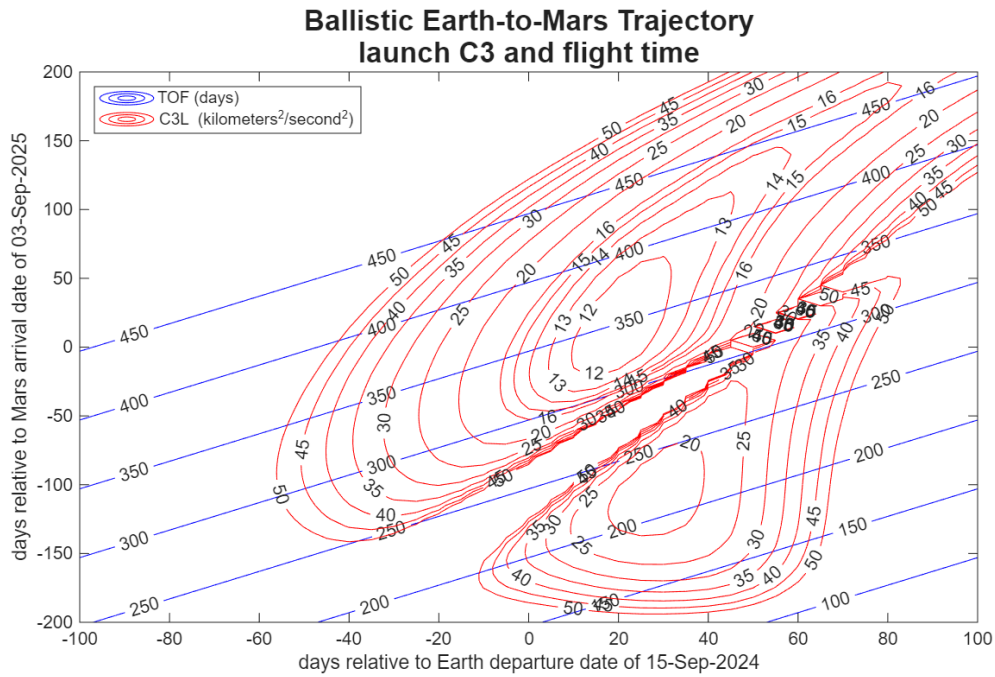


Figura 4.1: Porkchop Plot per trasferta Terra-Marte

In tali grafici emergono tipicamente due regioni di minimo:

- Traiettorie di **Tipo 1**: un minimo a tempo di volo ridotto, associato a trasferimenti con estensione angolare inferiore a 180° ;
- Traiettorie di **Tipo 2**: un minimo a tempo di volo maggiore, corrispondente a trasferimenti con estensione superiore a 180° .

L'individuazione di questi minimi è essenziale per la selezione preliminare delle finestre di lancio poiché consente di identificare le combinazioni di date che richiedono il minor costo energetico e che costituiscono il punto di partenza per l'ottimizzazione della traiettoria.

Prima approssimazione e soluzione del BVP

Poiché la propulsione chimica genera archi di spinta molto brevi, è necessario disporre di una stima iniziale accurata della struttura di controllo. A partire dalla soluzione balistica ottenuta tramite il problema di Lambert, si calcola la Switching Function lungo la traiettoria e si individuano gli istanti in cui essa cambia segno: tali punti rappresentano una prima stima dei tempi di accensione e spegnimento del propulsore. Allo stesso tempo, si ottiene una prima approssimazione dei valori iniziali delle variabili incognite, necessaria per avviare il processo iterativo.

Una volta definite le approssimazioni iniziali, il sistema completo viene integrato numericamente attraverso un processo iterativo di *multiple shooting*: i valori iniziali delle variabili vengono corretti fino a soddisfare tutte le condizioni al contorno imposte. Al termine dell'iterazione, si ottengono la traiettoria ottima e il profilo di controllo corrispondente.

Capitolo 5

Risultati

In questo capitolo vengono presentati i risultati dell'ottimizzazione della traiettoria Terra-Marte ottenuti tramite il metodo indiretto descritto nel capitolo precedente.

L'analisi è stata condotta considerando uno spacecraft equipaggiato con un propulsore chimico, le cui caratteristiche principali sono riportate nella tabella seguente:

Parametro	Valore
Massa iniziale $[m_0]$	2376 kg
Spinta massima $[T_{\max}]$	400 N
Impulso specifico $[I_{sp}]$	315 s

Tabella 5.1: Caratteristiche principali del propulsore

Il propulsore è modellato con un sistema chimico a spinta quasi impulsiva: la spinta viene applicata in archi temporali molto brevi, coerentemente con la struttura *bang-bang* derivata dalle condizioni di ottimalità. Questo modello permette di rappresentare in modo realistico le manovre di correzione e di inserzione orbitale tipiche delle missioni interplanetarie con propulsione chimica.

L'obiettivo dell'analisi è determinare per ciascuna finestra di lancio compresa nel decennio 2030-2040, la traiettoria che massimizza la massa finale dello spacecraft (in modo equivalente, minimizza il ΔV totale richiesto). Per ogni finestra di lancio sono stati inizialmente selezionati valori plausibili della velocità di eccesso iperbolico in uscita dalla Terra V_∞ e della durata della missione Δt , riportati in Tabella 5.2. La scelta di V_∞ è stata guidata dalle capacità dei lanciatori attualmente disponibili, come Ariane 6, mentre la durata della

missione è stata fissata a un valore inferiore al tempo di volo del trasferimento di Hohmann (pari a 258 giorni), in modo da esplorare trasferimenti più rapidi e potenzialmente più efficienti.

Parametro	Valore
Velocità di eccesso iperbolico V_∞	$2.7 - 2.8 \text{ km/s}$
Durata della missione Δt	198 giorni

Tabella 5.2: Valori iniziali

L'analisi presentata in questo capitolo considera esclusivamente la fase interplanetaria del trasferimento Terra-Marte: le fasi di uscita dalla sfera di influenza terrestre e di ingresso in quella marziana non vengono modellate, e il moto è descritto interamente nel dominio eliocentrico.

Le finestre di lancio analizzate sono state determinate sommando iterativamente il periodo sinodico del sistema Terra-Marte (circa 2 anni e 2 mesi): la prima opportunità utile si presenta nel 2031, le successive risultano nel 2033, 2035, 2037 e 2039.

Questa procedura fornisce una stima approssimativa della collocazione temporale delle finestre, individuandone il mese ma non il giorno esatto. Per determinare con precisione la data di partenza, all'interno di ciascun intervallo è stato quindi risolto il problema di Lambert su un insieme di date, selezionando quella che minimizza il parametro energetico $C3$. Tale data viene assunta come punto di partenza per l'analisi di ottimizzazione della traiettoria.

Per ciascuna di queste finestre è stata eseguita un'analisi di ottimizzazione indipendente, risolvendo il problema di ottimizzazione con le condizioni iniziali così determinate.

5.1 Finestra di lancio 2031

Seguendo la procedura di risoluzione descritta nel capitolo precedente, la prima finestra utile del decennio si colloca tra gennaio-febbraio 2031. All'interno di questo intervallo, la risoluzione del problema di Lambert (Figura A.1) mostra un minimo del parametro energetico $C3$ attorno al 31 gennaio 2031, assunto come data di partenza per l'ottimizzazione.

I risultati dell'analisi preliminare per questa configurazione sono riportati nella Tabella 5.3.

La Tabella 5.3 riporta la sequenza delle fasi di spinta (1 - Motore acceso, 0 - Motore spento), il ΔV richiesto, la variazione di inclinazione necessaria, la

Δt [Giorni]	Data arrivo	V_∞ [km/s]	Fasi	ΔV [km/s]	$V_{\text{rel, end}}$ [km/s]	Δi [°]	m_f/m_0
197.7	17/8/2031	2.7	1-0-1-0	0.3738	4.8562	0.3103	0.8860
		2.8	1-0-1-0	0.2738	4.8562	0.2348	0.9152

Tabella 5.3: Risultati per $\Delta t = 197.7$ giorni

velocità relativa all'arrivo su Marte e rapporto massa finale su massa iniziale. Oltre ai parametri scalari, l'ottimizzazione fornisce anche la traiettoria nello spazio eliocentrico, l'andamento della Switching Function e l'evoluzione delle variabili dinamiche: questi risultati sono mostrati in nelle Figure 5.1-A.2-A.3.

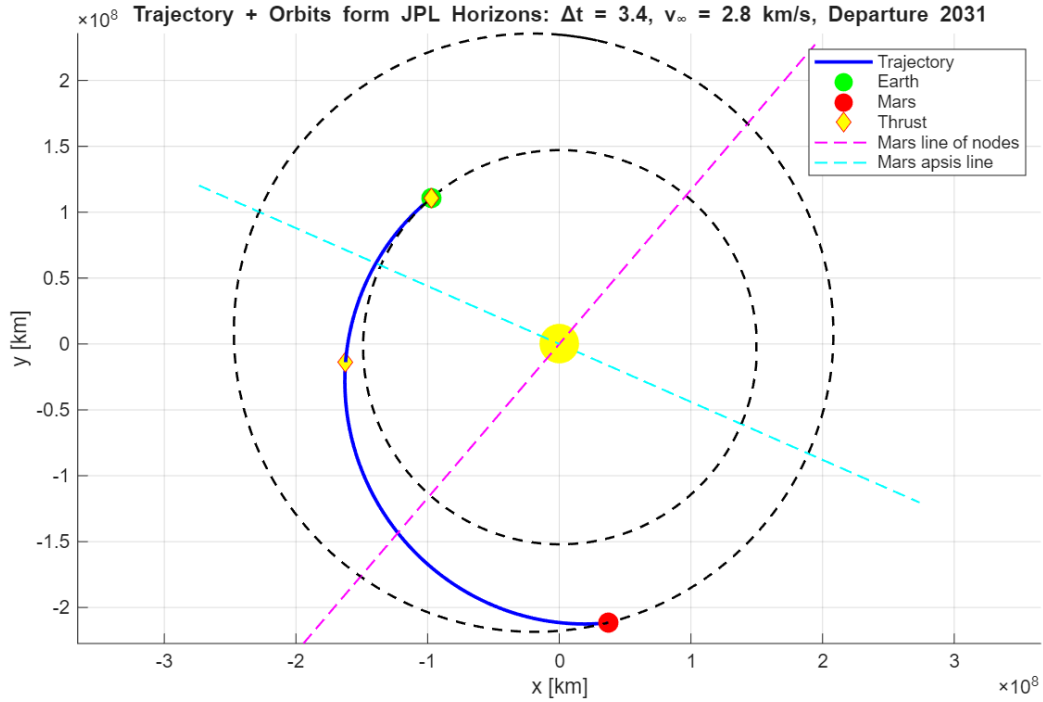


Figura 5.1: Traiettoria 2031 per $V_\infty = 2.8 \text{ km/s}$.

Osservando i valori riportati in Tabella 5.3, si nota che i risultati ottenuti sono già soddisfacenti: con $V_\infty = 2.8 \text{ km/s}$ la massa finale raggiunge il 91.5% della massa iniziale, a fronte di un ΔV relativamente contenuto.

Per migliorare ulteriormente la soluzione è possibile intervenire su tre parametri: la data di partenza, la velocità di eccesso iperbolico e la durata della missione. Concentrandoci inizialmente su V_∞ e Δt , l'analisi della traiettoria

eliocentrica (Figura 5.1) mostra che l'arrivo avviene in prossimità del perielio di Marte. In questa configurazione la distanza da percorrere è minore rispetto ad altre posizioni orbitali, suggerendo che una riduzione di V_∞ o Δt potrebbe portare a soluzioni più efficienti.

Sulla base di queste considerazioni, sono state esplorate diverse combinazioni di V_∞ e Δt , mantenendo fissa la data di partenza al 31 gennaio 2031. I risultati ottenuti sono riportati in Tabella 5.4.

Δt [days]	Data arrivo	V_∞ [km/s]	Fasi	ΔV [km/s]	$V_{rel,end}$ [km/s]	Δi [°]	m_f/m_0
197.7	17/8/2031	2.7	1-0-1-0	0.3738	4.8562	0.3103	0.8860
		2.8	1-0-1-0	0.2738	4.8562	0.2348	0.9152
191.8	11/8/2031	2.5	1-0	0.5334	5.1833	0.3870	0.8414
		2.6	1-0	0.4334	5.1833	0.3136	0.8691
		2.7	1-0	0.3334	5.1833	0.2405	0.8977
		2.8	1-0	0.2334	5.1833	0.1679	0.9272
186.0	5/8/2031	2.5	1-0	0.5258	5.5393	0.3325	0.8435
		2.6	1-0	0.4258	5.5393	0.2685	0.8712
		2.7	1-0	0.3258	5.5393	0.2048	0.8999
		2.8	1-0	0.2258	5.5393	0.1416	0.9295
180.2	31/7/2031	2.5	1-0	0.5517	5.9451	0.3017	0.8365
		2.6	1-0	0.4516	5.9451	0.2463	0.8640
		2.7	1-0	0.3516	5.9451	0.1912	0.8924
		2.8	1-0	0.2516	5.9451	0.1364	0.9218

Tabella 5.4: Risultati per partenza 31 gennaio 2031 al variare di V_∞ e Δt

Dalla Tabella 5.4 emergono le seguenti osservazioni:

- la diminuzione della V_∞ corrisponde ad un rispettivo aumento del ΔV ; infatti, se per una determinata V_∞ è necessario un certo ΔV , una riduzione della velocità iperbolica richiede una maggiore spinta lungo la traiettoria per mantenere invariato il tempo di volo;
- diminuendo la durata della missione, il ΔV necessario inizialmente diminuisce per poi aumentare nuovamente: si osserva quindi un minimo locale per $\Delta t = 186$ giorni (Figura A.4) ;
- la velocità relativa all'arrivo $V_{rel,end}$ tende ad aumentare al diminuire di Δt : tempi più brevi comportano traiettorie che intercettano Marte sempre più in anticipo lungo l'orbita di trasferimento; ciò implica che l'incontro avviene quando la velocità dello spacecraft è ancora elevata, con un conseguente $V_{rel,end}$ maggiore. Tale incremento della velocità

relativa può tradursi in un costo più elevato per le eventuali manovre di cattura in orbita marziana.

La soluzione ottimale per la finestra del 2031 è ottenuta con $\Delta t = 186$ giorni e $V_\infty = 2.8 \text{ km/s}$, che garantisce il miglior compromesso tra efficienza propulsiva e condizioni di arrivo.

5.2 Finestra di lancio 2033

All'interno della finestra del 2033, l'analisi del parametro $C3$ ottenuta dal problema di Lambert (Figura A.5) per i mesi di marzo-aprile, indica un minimo intorno al 13 aprile 2033, scelto come data di partenza per l'ottimizzazione. I risultati preliminari sono riportati in Tabella 5.5.

Δt [days]	Data arrivo	V_∞ [km/s]	Fasi	ΔV [km/s]	$V_{\text{rel, end}}$ [km/s]	Δi [°]	m_f/m_0
197.7	27/10/2033	2.7	1-0-1-0	0.2754	3.3201	0.2815	0.9147
		2.8	0-1-0	0.1755	3.3219	0.1953	0.9448

Tabella 5.5: Risultati per $\Delta t \approx 197.7$ giorni

I risultati mostrano una soluzione già efficiente, con valori di ΔV e m_f/m_0 comparabili a quelli ottenuti per la finestra del 2031. L'analisi della traiettoria eliocentrica (Figura 5.2) evidenzia che l'arrivo avviene in prossimità del perielio di Marte.

Ciò suggerisce, come nel caso precedente, che una riduzione della durata della missione possa condurre a soluzioni più vantaggiose. Non si è ridotto V_∞ poichè una sua diminuzione comporterebbe un aumento del ΔV richiesto. Sono state quindi analizzate diverse combinazioni tramite la riduzione di Δt (come nel caso precedente si è ridotto o aumentato Δt di ≈ 1 settimana) mantenendo fissa la data di partenza. I risultati ottenuti sono riportati in Tabella 5.6:

Dalla tabella, si osserva un comportamento analogo al 2031: al diminuire di Δt , il ΔV presenta un minimo locale per $\Delta t = 186$ giorni (Figura A.6).

Come già detto, la configurazione orbitale è simile rispetto al caso precedente ma la finestra del 2033 presenta due vantaggi principali:

- il valore minimo di ΔV è inferiore, permettendo di raggiungere Marte con una massa finale pari al 94.7% della massa iniziale;
- la velocità relativa all'arrivo è significativamente più bassa, rendendo meno onerose le eventuali manovre di cattura in orbita marziana.

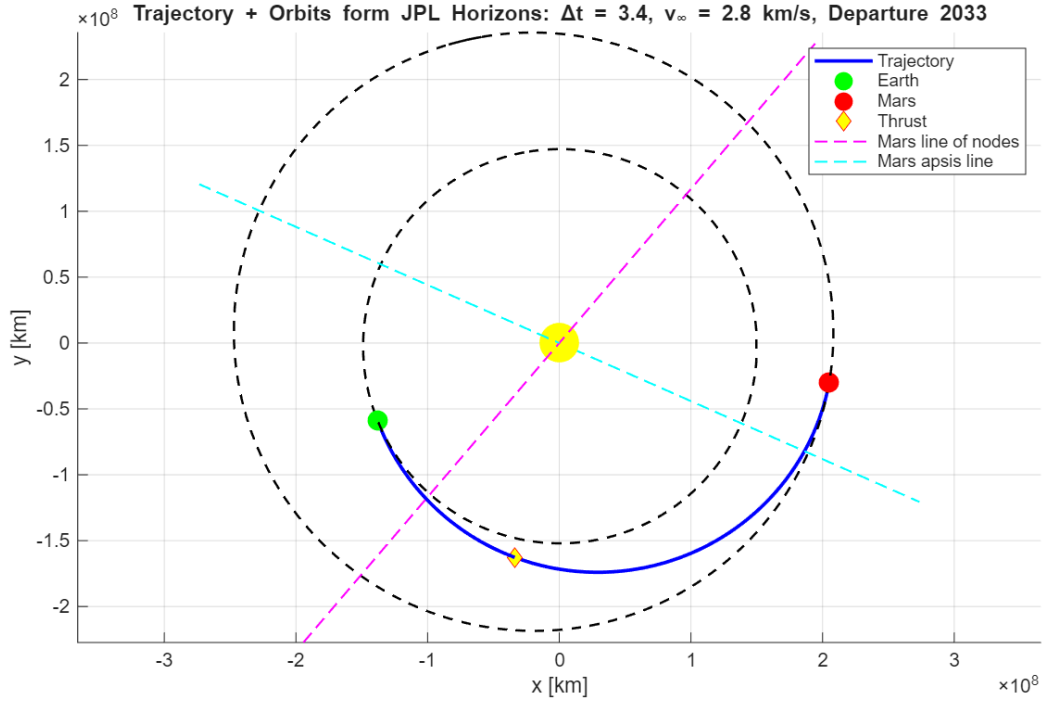


Figura 5.2: Traiettorie 2033 per $V_{\infty} = 2.8 \text{ km/s}$.

Δt [days]	Data arrivo	V_{∞} [km/s]	Fasi	ΔV [km/s]	$V_{\text{rel, end}}$ [km/s]	Δi [°]	m_f/m_0
203.5	02/11/2033	2.7	0-1-0	0.2758	3.2730	0.2927	0.9146
		2.8	0-1-0	0.1842	3.2881	0.1737	0.9421
197.7	27/10/2033	2.7	1-0-1-0	0.2754	3.3201	0.2815	0.9147
		2.8	0-1-0	0.1755	3.3219	0.1953	0.9448
191.8	21/10/2033	2.7	1-0-1-0	0.2683	3.4055	0.2419	0.9168
		2.8	1-0-1-0	0.1683	3.4055	0.1552	0.9470
186.0	16/10/2033	2.7	1-0	0.2605	3.5052	0.2195	0.9191
		2.8	1-0	0.1605	3.5052	0.1349	0.9494
180.2	10/10/2033	2.7	1-0	0.2640	3.6435	0.2118	0.9181
		2.8	1-0	0.1640	3.6435	0.1312	0.9483

Tabella 5.6: Risultati per la finestra di lancio 2033 al variare di V_{∞} e Δt

In conclusione, la finestra del 2033 presenta un ottimo per $\Delta t = 186$ giorni e $V_{\infty} = 2.8 \text{ km/s}$, con un ΔV inferiore al caso 2031 e una velocità relativa all'arrivo più contenuta.

5.3 Finestra di lancio 2035

Per la finestra di lancio giugno-luglio 2035, il problema di Lambert (Figura A.7) individua il minimo $C3$ attorno al 26 giugno 2035. L'analisi iniziale è riportata in Tabella 5.7:

Δt [days]	Data arrivo	V_∞	Fasi	ΔV	$V_{\text{rel, end}}$	Δi [°]	m_f/m_0
197.7	7/1/2036	2.7	1-0	0.4864	2.6637	0.0851	0.8543
		2.8	1-0	0.3864	2.6637	0.0675	0.8824

Tabella 5.7: Risultati per $\Delta t \approx 197.7$ giorni

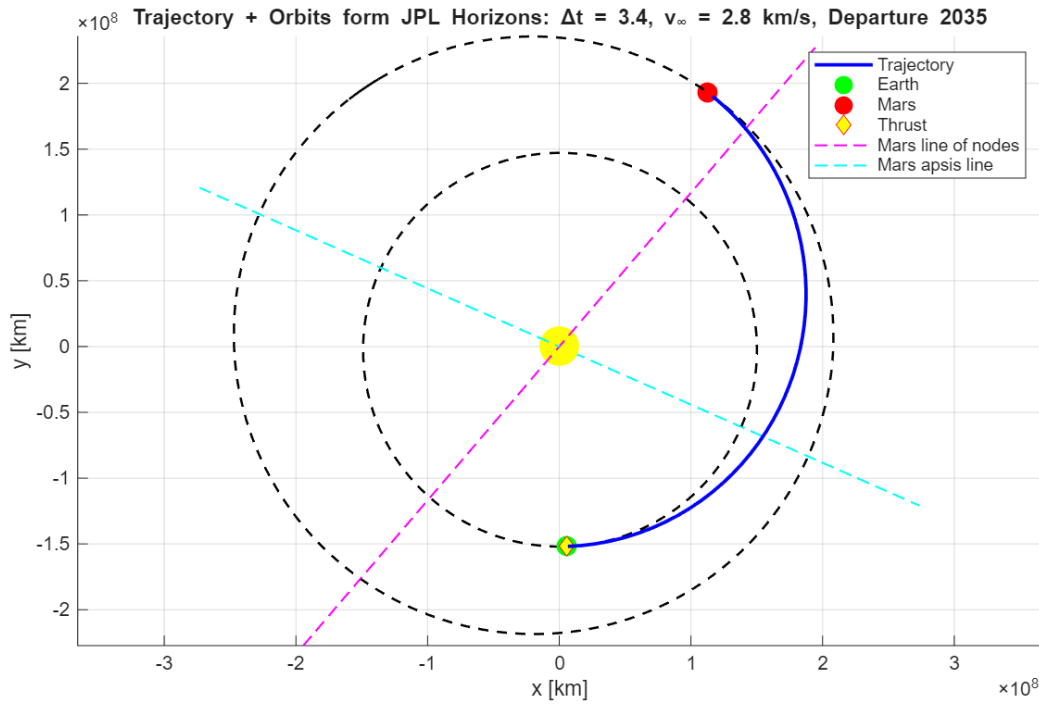


Figura 5.3: Traiettoria 2035 per $V_\infty = 2.8 \text{ km/s}$.

L'analisi della traiettoria eliocentrica (Figura 5.3) mostra che, all'arrivo, Marte si trova in una regione intermedia tra perielio e afelio, in prossimità del nodo ascendente.

Per questo motivo si è inizialmente variata la durata della missione, aumentando e diminuendo il Δt rispetto al valore preliminare, per verificare la

presenza di un eventuale minimo locale (Figura A.8).
I risultati ottenuti sono riportati in Tabella 5.8.

Δt [days]	Data arrivo	V_∞ [km/s]	Fasi	ΔV [km/s]	$V_{\text{rel, end}}$ [km/s]	Δi [°]	m_f/m_0
203.5	13/1/2036	2.7	1-0	0.4982	2.6422	0.1242	0.8510
		2.8	1-0	0.3983	2.6423	0.0989	0.8790
		2.9	1-0	0.2983	2.6423	0.0738	0.9080
		3.0	1-0	0.1983	2.6423	0.0489	0.9378
197.7	7/1/2036	2.7	1-0	0.4864	2.6637	0.0851	0.8543
		2.8	1-0	0.3864	2.6637	0.0675	0.8824
		2.9	1-0	0.2864	2.6637	0.0499	0.9115
		3.0	1-0	0.1864	2.6637	0.0324	0.9414
191.8	2/1/2036	2.7	1-0	0.4877	2.7163	0.0544	0.8539
		2.8	1-0	0.3877	2.7163	0.0431	0.8820
		2.9	1-0	0.2877	2.7163	0.0319	0.9111
		3.0	1-0	0.1877	2.7163	0.0207	0.9410
186.0	27/12/2035	2.7	1-0	0.5004	2.8002	0.0281	0.8504
		2.8	1-0	0.4004	2.8002	0.0224	0.8784
		2.9	1-0	0.3004	2.8002	0.0168	0.9073
		3.0	1-0	0.2004	2.8002	0.0111	0.9372

Tabella 5.8: Risultati per la finestra di lancio 2035 al variare di V_∞ e Δt

Si osserva che la variazione di Δt non migliora i valori di ΔV , che mantengono il loro minimo locale in corrispondenza di $\Delta t = 197.7$ giorni.

Poiché la variazione di Δt non produce un minimo significativo di ΔV , l'unico margine di miglioramento consiste nell'aumentare leggermente la V_∞ a valori di 2.9–3.0 km/s, che permettono di ottenere ΔV comparabili con quelli delle finestre precedenti, mantenendo velocità relative finali contenute. Anche in questo caso emerge una relazione inversa tra V_∞ e ΔV : incrementare la velocità iperbolica riduce l'impulso richiesto lungo la traiettoria. Si tratta dello stesso comportamento osservato nella finestra del 2031 ma applicato alla variazione opposta del parametro.

Inoltre, è possibile notare che questa configurazione è favorevole dal punto di vista della variazione di inclinazione, come confermato dai valori bassi di Δi , ma non consente di sfruttarne le condizioni geometriche vantaggiose osservate nelle finestre del 2031 e 2033 dove l'arrivo avveniva in prossimità del perielio marziano. Di conseguenza, la distanza da percorrere lungo la traiettoria risulta maggiore e ciò si riflette, a parità di V_∞ , in valori di ΔV più elevati.

In conclusione, la finestra del 2035 risulta meno favorevole rispetto ai casi

precedenti, con valori di ΔV più elevati. La soluzione migliore si ottiene per $V_\infty = 3.0 \text{ km/s}$ e $\Delta t = 197.7$ giorni.

5.4 Finestra di lancio 2037

Nel caso della finestra del 2037, la data di partenza ottimale è individuata attorno al 22 agosto 2037. I risultati iniziali ottenuti per questa configurazione sono riportati in Tabella 5.9:

Δt [days]	Data arrivo	V_∞	Fasi	ΔV	$V_{\text{rel, end}}$	Δi [°]	m_f/m_0
197.7	8/3/2038	2.7	1-0	1.4285	3.3037	0.8397	0.6298
		2.8	1-0	1.3285	3.3037	0.7786	0.6505

Tabella 5.9: Risultati per $\Delta t \approx 197.7$ giorni

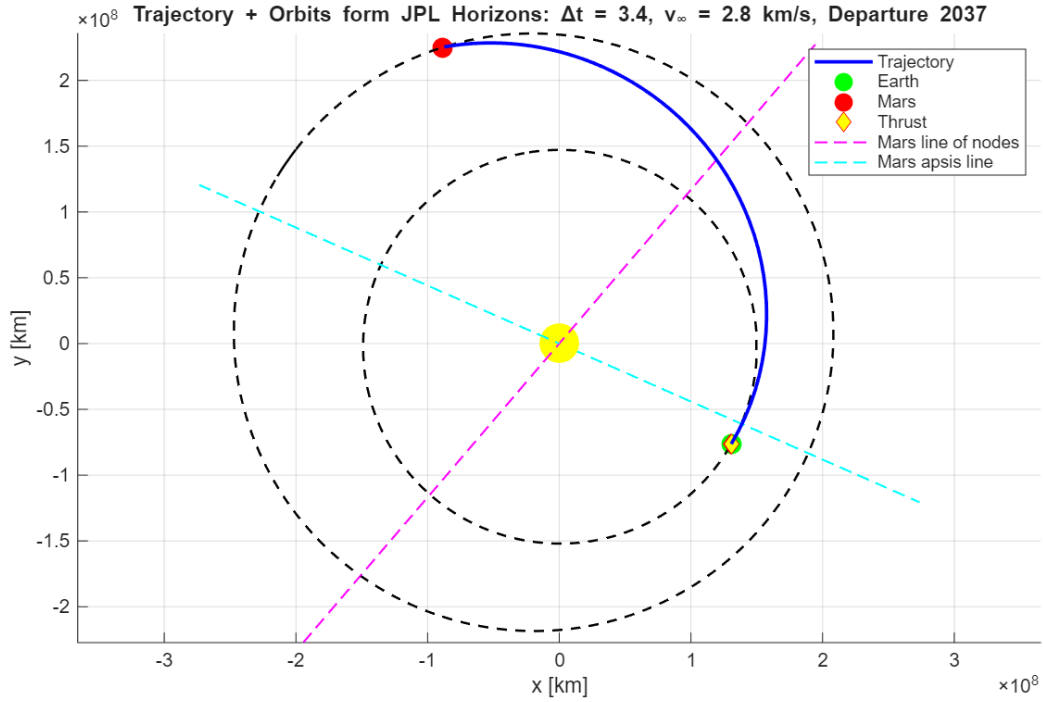


Figura 5.4: Traiettorie 2037 per $V_\infty = 2.8 \text{ km/s}$.

I valori di ΔV risultano nettamente superiori rispetto alle finestre di lancio precedenti, infatti, analizzando la traiettoria eliocentrica (Figura 5.4) è pos-

sibile osservare la causa principale: l'arrivo avviene quando Marte si trova in prossimità del suo afelio. In questa configurazione la velocità necessaria per raggiungere l'orbita di Marte è maggiore e ciò si traduce in un costo propulsivo significativamente più elevato.

Oltre alla maggiore distanza da percorrere, un ulteriore elemento che contribuisce all'aumento del costo propulsivo è la variazione di inclinazione richiesta: come mostrato in Tabella 5.9, i valori di Δi risultano fino ad un ordine di grandezza superiori rispetto alle finestre precedenti. Ciò è dovuto al fatto che Marte si trova in prossimità della sua latitudine orbitale massima, quindi significativamente fuori dal piano dell'eclittica. Una variazione di inclinazione più elevata comporta quindi un incremento del ΔV necessario.

Per tentare di ridurre il costo propulsivo, si è proceduto ad aumentare V_∞ e a variare la durata della missione. I risultati ottenuti sono riportati in Tabella 5.10.

Δt [days]	Data arrivo	V_∞	Fasi	ΔV	$V_{\text{rel, end}}$	Δi [°]	m_f/m_0
209.3	20/3/2038	2.7	1-0	1.4585	3.0066	1.0233	0.6237
		2.8	1-0	1.3585	3.0066	0.9533	0.6442
		3.2	1-0	0.9585	3.0066	0.6767	0.7332
		3.4	1-0	0.7585	3.0066	0.5409	0.7823
		3.5	1-0	0.6585	3.0066	0.4735	0.8080
203.5	14/3/2038	2.7	1-0	1.4352	3.1438	0.9188	0.6284
		2.8	1-0	1.3352	3.1438	0.8524	0.6491
		3.2	1-0	0.9352	3.1438	0.5902	0.7388
		3.4	1-0	0.7352	3.1438	0.4614	0.7882
		3.5	1-0	0.6352	3.1438	0.3974	0.8141
197.7	8/3/2038	2.7	1-0	1.4285	3.3037	0.8397	0.6298
		2.8	1-0	1.3285	3.3037	0.7786	0.6505
		3.2	1-0	0.9285	3.3036	0.5379	0.7404
		3.4	1-0	0.7284	3.3036	0.4196	0.7899
		3.5	1-0	0.6284	3.3036	0.3609	0.8159
191.8	2/3/2038	2.7	1-0-1-0	1.4377	3.4914	0.7748	0.6279
		2.8	1-0-1-0	1.3376	3.4914	0.7188	0.6485
		3.2	1-0-1-0	0.9376	3.4914	0.4980	0.7382
		3.4	1-0-1-0	0.7376	3.4914	0.3895	0.7876
		3.5	1-0-1-0	0.6376	3.4914	0.3357	0.8135

Tabella 5.10: Risultati per la finestra di lancio 2037 al variare di V_∞ e Δt

Sebbene l'aumento di V_∞ riduca progressivamente il ΔV , anche in condizioni più favorevoli il costo propulsivo rimane elevato: nel migliore dei casi si ottiene infatti un ΔV superiore a 0.6 km/s , con un minimo locale per $\Delta t = 197.7$

giorni (Figura A.10).

In conclusione, la finestra del 2037 risulta poco favorevole: la posizione di Marte in prossimità dell'afelio e la variazione di inclinazione elevata determinano ΔV molto più elevati rendendo questa configurazione poco efficiente.

5.5 Finestra di lancio 2039

Per la finestra del 2039, la stima ottenuta tramite il periodo sinodico suggerisce una data di partenza compresa tra fine ottobre e inizio novembre. Tuttavia, la valutazione del parametro $C3$ tramite il problema di Lambert (Figura A.11) mostra un minimo che si colloca circa un mese prima rispetto all'intervallo previsto. Come si osserverà dell'analisi della traiettoria, questo scostamento è dovuto al moto non uniforme di Marte lungo la sua orbita eccentrica.

Per individuare con precisione la data di partenza ottimale, è stata quindi esplorata una gamma più ampia di date, sia anticipate sia posticipate rispetto alla finestra stimata. I risultati ottenuti da questa prima analisi sono riportati in Tabella 5.11.

Data partenza	Data arrivo	V_∞ [km/s]	Fasi	ΔV [km/s]	$V_{\text{rel, end}}$ [km/s]	Δi [°]	m_f/m_0
23/9/2039	8/4/2040	2.7	0-1-0	1.7620	5.0994	1.1885	0.5653
		2.8	0-1-0	1.6630	5.0985	1.1300	0.5837
5/10/2039	19/4/2040	2.7	1-0	1.6990	4.5319	0.9843	0.5770
		2.8	1-0	1.5989	4.5319	0.9238	0.5959
16/10/2039	1/5/2040	2.7	1-0	2.1390	4.0266	0.9972	0.5003
		2.8	1-0	2.0389	4.0266	0.9483	0.5168
28/10/2039	12/5/2040	2.7	1-0	3.0708	3.5760	1.0819	0.3701
		2.8	1-0	2.9706	3.5760	1.0449	0.3823
8/11/2039	24/5/2040	2.7	1-0	4.3509	3.2679	1.1408	0.2445
		2.8	1-0	4.2507	3.2679	1.1132	0.2526

Tabella 5.11: Risultati per 2039 al variare di V_∞ e data di partenza.

Dalla Tabella 5.11 si osserva che il minimo del ΔV si ottiene con partenza il 5 ottobre 2039, circa 25 giorni prima della data prevista dal periodo sinodico. I valori di ΔV risultano tuttavia molto elevati, superiori a 1.5 km/s , con variazioni di inclinazione dell'ordine del grado.

L'analisi della traiettoria eliocentrica (Figura 5.5) mostra che, come nel caso

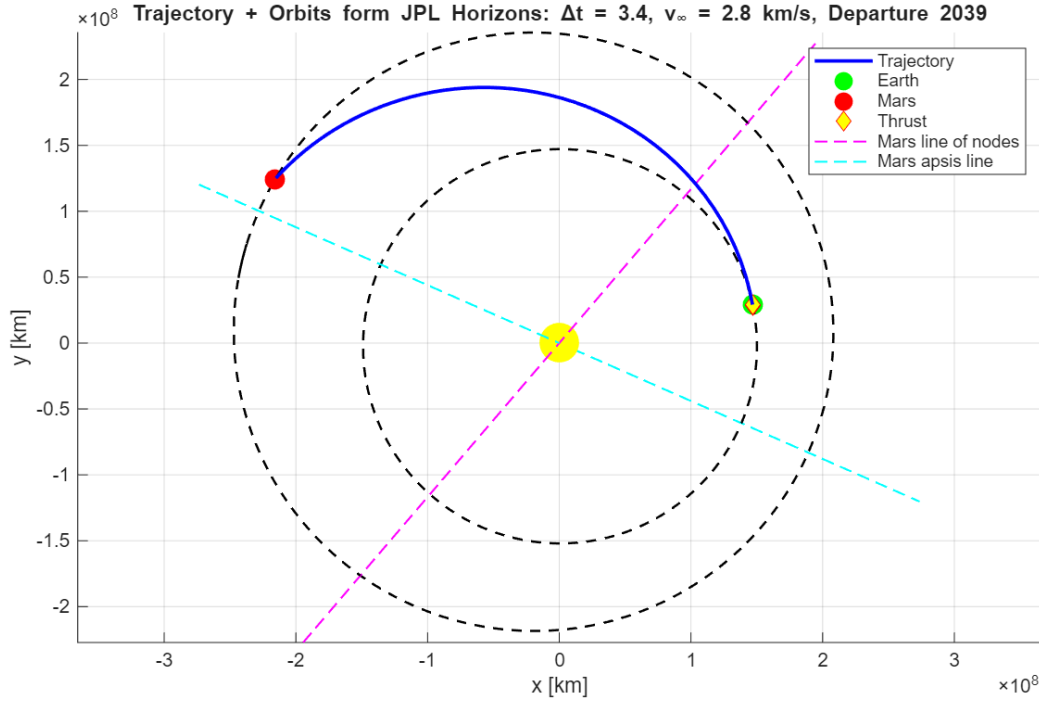


Figura 5.5: Traiettorie 2039 per $V_{\infty} = 2.8 \text{ km/s}$.

della finestra del 2037, lo spacecraft incontra Marte in prossimità del suo afelio. Questa configurazione produce due effetti principali:

- **anticipazione dell'allineamento ottimale:** in prossimità dell'afelio, Marte si muove più lentamente rispetto al moto medio e ciò fa sì che la configurazione geometrica favorevole con la Terra si presenti con alcune settimane di anticipo rispetto alla previsione sinodica;
- **aumento della distanza da percorrere:** come riportato in Tabella 5.12, la distanza lineare tra la posizione della Terra al tempo di partenza e quella di Marte al tempo di arrivo supera i $370 \times 10^6 \text{ km}$, circa 31 milioni di chilometri in più rispetto alla finestra del 2033, con un conseguente incremento del costo energetico.

Un ulteriore contributo all'aumento del ΔV deriva dalla variazione di inclinazione richiesta: anche nel 2039, infatti, Marte si trova vicino alla sua latitudine orbitale massima, quindi significativamente fuori dal piano dell'eclittica. Ciò comporta valori di Δi elevati, che si traducono in un costo propulsivo aggiuntivo.

Anno	Distanza Terra–Marte [$10^6 km$]
2039	374.97
2037	372.95
2035	361.41
2033	344.27
2031	349.17

Tabella 5.12: Distanza lineare tra Terra (a t_0) e Marte (a t_f)

Definita la data di partenza ottimale al 5 ottobre 2039, è stata condotta un’analisi al variare della durata della missione Δt e della V_∞ . I risultati sono riportati in Tabella 5.13.

Δt [days]	Data arrivo	V_∞ [km/s]	Fasi	ΔV [km/s]	$V_{\text{rel, end}}$ [km/s]	Δi [°]	m_f/m_0
197.7	19/4/2040	2.7	1–0	1.6990	4.5319	0.9843	0.5770
		2.8	1–0	1.5989	4.5319	0.9238	0.5959
		3.2	1–0	1.1988	4.5319	0.6849	0.6784
		3.3	1–0	1.0988	4.5319	0.6261	0.7007
203.5	25/4/2040	2.7	1–0	1.6711	4.2532	1.0190	0.5822
		2.8	1–0	1.5710	4.2531	0.9523	0.6014
		3.2	1–0	1.1709	4.2531	0.7044	0.6845
		3.3	1–0	1.0709	4.2531	0.6425	0.7070
209.3	1/5/2040	2.7	1–0	1.6563	3.9977	1.0190	0.5840
		2.8	1–0	1.5563	3.9977	0.9523	0.6042
		3.2	1–0	1.1562	3.9977	0.7321	0.6878
		3.3	1–0	1.0562	3.9977	0.6670	0.7104
215.1	7/5/2040	2.7	1–0	1.6541	3.7652	1.1181	0.5853
		2.8	1–0	1.5540	3.7652	1.0477	0.6047
		3.2	1–0	1.1540	3.7652	0.7697	0.6883
		3.3	1–0	1.0540	3.7652	0.7012	0.7109
220.9	12/5/2040	2.7	1–0	1.6645	3.5558	1.1866	0.5834
		2.8	1–0	1.5645	3.5558	1.1124	0.6026
		3.2	1–0	1.1644	3.5558	0.8194	0.6860
		3.3	1–0	1.0644	3.5558	0.7470	0.7085

Tabella 5.13: Analisi 2039 con partenza 5 ottobre 2039 al variare di Δt e V_∞

Da tali valori, emerge un minimo locale un minimo locale del ΔV per $\Delta t = 215$ giorni (Figura A.12) ma il costo della trasferta rimane comunque superiore a $1 km/s$.

Per ottenere valori di ΔV comparabili con quelli delle finestre precedenti è necessario aumentare in modo significativo la velocità di eccesso iperbolico. La Tabella 5.14 riporta i risultati ottenuti con $V_\infty = 4.2 \text{ km/s}$.

Δt [days]	Data arrivo	V_∞ [km/s]	Fasi	ΔV [km/s]	$V_{\text{rel, end}}$ [km/s]	Δi [°]	m_f/m_0
197.7	19/4/2040	4.2	1-0	0.1986	4.5318	0.1104	0.9487
203.5	25/4/2040	4.2	1-0	0.1707	4.2531	0.0999	0.9462
209.3	1/5/2040	4.2	1-0	0.1560	3.9977	0.0961	0.9452
215.1	7/5/2040	4.2	1-0	0.1538	3.7652	0.0999	0.9541
220.9	12/5/2040	4.2	1-0	0.1643	3.5558	0.1126	0.9487

Tabella 5.14: Risultati per 2039 con $V_\infty = 4.2 \text{ km/s}$ al variare di Δt .

In questo caso, il ΔV scende a valori dell'ordine di $0.15\text{--}0.20 \text{ km/s}$ ma tale riduzione è ottenuta a fronte di un costo energetico iniziale più elevato. In conclusione, la finestra del 2039 risulta la meno favorevole dell'intero decennio. L'arrivo in prossimità dell'afelio marziano, la distanza elevata da percorrere e la variazione di inclinazione significativa determinano valori di ΔV nettamente superiori rispetto alle altre finestre analizzate. Solo un sostanziale aumento della velocità di eccesso iperbolico consente di ottenere costi propulsivi comparabili ai casi precedenti a scapito, però, di un maggiore costo energetico di partenza.

5.6 Confronto e discussione dei risultati

L'analisi delle cinque finestre di lancio comprese tra il 2031 e 2039 mette in evidenza un comportamento fortemente dipendente dalla configurazione orbitale di Marte al momento dell'arrivo. Sebbene per ciascun anno siano state esplorate combinazioni differenti di durata della missione Δt e velocità di eccesso iperbolico V_∞ , emergono alcune tendenze comuni che permettono di confrontare in modo organico le diverse opportunità di trasferimento.

Confronto delle prestazioni propulsive

Per una valutazione completa delle diverse finestre di lancio non è sufficiente considerare il solo costo propulsivo della fase interplanetaria ottimizzata, è infatti necessario tenere conto anche del costo associato al raggiungimento della velocità di eccesso iperbolico V_∞ e, soprattutto, del costo richiesto per l'immissione in orbita marziana una volta raggiunta la sfera di influenza del pianeta.

Il primo contributo può essere trascurato in prima approssimazione: assumendo l'impiego di un lanciatore, sarà quest'ultimo a fornire il ΔV necessario per raggiungere la V_∞ desiderata, senza gravare direttamente sul budget propulsivo dello spacecraft. Diversa è la situazione per quanto riguarda la cattura in orbita marziana: una volta raggiunta la SOI del pianeta, il ΔV richiesto per l'inserzione orbitale dipende in modo diretto dalla velocità relativa all'arrivo $V_{rel,end}$, che rappresenta quindi un parametro critico per la valutazione complessiva della finestra di lancio.

Osservando missioni passate, la velocità relativa all'arrivo tipica per un inserimento orbitale efficiente è compresa tra 2 e 3.5 km/s. Valori significativamente superiori comportano costi di cattura molto più elevati che ricadono interamente sul sistema propulsivo.

In questo contesto, le differenze tra le finestre analizzate risultano particolarmente rilevanti: la finestra del 2031, pur consentendo valori di ΔV interplanetario estremamente bassi (un leggero aumento della V_∞ a 3.0 km/s può consentire valori di ΔV pari a 0.02 km/s), presenta velocità relative all'arrivo superiori a 5 km/s; al contrario, la finestra del 2035 garantisce $V_{rel,end}$ molto contenuti (circa 2.5 km/s) a fronte però di un ΔV interplanetario più elevato. La finestra del 2033 si colloca in una posizione intermedia: mantiene ΔV bassi, comparabili al 2031, ma con velocità relative più contenute (circa 3.5 km/s), pur non raggiungendo i valori minimi osservati nel 2035.

Le finestre del 2037 e del 2039 sono invece nettamente le meno favorevoli. In entrambi i casi, l'arrivo avviene in prossimità dell'afelio marziano, condizione che comporta due effetti principali: un aumento significativo della distanza Terra-Marte e una variazione di inclinazione più elevata poiché Marte si trova vicino alla latitudine orbitale massima. Questi fattori determinano valori di ΔV molto più alti rispetto alle finestre precedenti. In questi due casi è possibile ottenere valori di ΔV comparabili con quelli delle finestre più favorevoli, a scapito però di un costo energetico iniziale più elevato.

A completamento dell'analisi, la Tabella 5.15 riporta le quindici soluzioni più efficienti in termini di ΔV , ordinate in modo crescente. Essa costituisce il riferimento numerico da cui derivano le considerazioni comparative discusse in questa sezione.

Conclusioni del confronto

Limitando l'analisi alla sola fase interplanetaria, la finestra del 2033 risulta la più favorevole: il costo di ΔV è tra i più bassi, la velocità di eccesso iperbolico richiesta rientra nei valori tipici per questo tipo di trasferimento e la velocità relativa all'arrivo, pur non essendo minima, rimane entro i valori compatibili con un'eventuale cattura orbitale.

N°	Data partenza	Δt [days]	V_∞ [km/s]	Fasi	ΔV [km/s]	$V_{\text{rel, end}}$ [km/s]	Δi [°]	m_f/m_0
1	13/4/2033	186.0	2.8	1-0	0.1605	3.5052	0.1349	0.9494
2	13/4/2033	180.2	2.8	1-0	0.1640	3.6435	0.1312	0.9483
3	13/4/2033	191.8	2.8	1-0-1-0	0.1683	3.4055	0.1552	0.9448
4	13/4/2033	197.7	2.8	0-1-0	0.1755	3.3219	0.1953	0.9448
5	13/4/2033	203.5	2.8	0-1-0	0.1842	3.2881	0.1737	0.9478
6	24/6/2035	197.7	3.0	1-0	0.1864	2.6637	0.0324	0.9414
7	24/6/2035	191.8	3.0	1-0	0.1877	2.7163	0.0207	0.9410
8	24/6/2035	203.5	3.0	1-0	0.1983	2.6423	0.0489	0.9378
9	24/6/2035	186.0	3.0	1-0	0.2004	2.8002	0.0111	0.9372
10	31/1/2031	186.0	2.8	1-0	0.2258	5.5393	0.1416	0.9295
11	31/1/2031	191.8	2.8	1-0	0.2334	5.1183	0.1679	0.9272
12	31/1/2031	180.2	2.8	1-0	0.2516	5.9451	0.1364	0.9218
13	13/4/2033	186.0	2.7	1-0	0.2605	3.5052	0.2195	0.9191
14	13/4/2033	180.2	2.7	1-0	0.2640	3.6435	0.2118	0.9181
15	13/4/2033	191.8	2.7	1-0-1-0	0.2683	3.4055	0.2419	0.9168

Tabella 5.15: Prime 15 migliori missioni in ordine di ΔV crescente

È tuttavia importante ricordare che questa valutazione riguarda esclusivamente il trasferimento eliocentrico: una scelta definitiva della finestra di lancio richiede di integrare i contributi non modellati oltre agli obiettivi specifici della missione. Inoltre, in questa analisi sono state considerate soltanto soluzioni con durata della missione Δt inferiore a quella del trasferimento di Hohmann. A seconda dei requisiti operativi, potrebbe essere opportuno esplorare anche trasferimenti più lunghi o architetture alternative, come traiettorie fly-by di Venere, che in alcuni casi possono offrire soluzioni più efficienti dal punto di vista energetico.

Capitolo 6

Considerazioni Finali

6.1 Sintesi del lavoro svolto

In questo lavoro sono state determinate le traiettorie ottimali di trasferimento Terra-Marte nel periodo 2030-2040 utilizzando una procedura numerica suddivisa in tre fasi principali.

Nella prima fase viene risolto il problema di Lambert, che fornisce una stima iniziale della data di partenza e della durata della trasferta.

La seconda fase consiste nella costruzione di una prima approssimazione della traiettoria e del profilo di controllo, definendo gli archi di spinta in modo coerente con il comportamento del sistema propulsivo e con la forma attesa della soluzione ottimale.

La terza fase prevede la risoluzione del BVP, utilizzando le informazioni ottenute nelle fasi precedenti per risolvere il sistema dinamico e ottenere la soluzione ottimale che minimizza il costo propulsivo per ciascuna configurazione analizzata.

Questa procedura consente di analizzare diverse finestre di lancio e di confrontarne l'efficienza, individuando i principali fattori che influenzano la definizione delle traiettorie interplanetarie nel periodo considerato.

6.2 Considerazioni sul modello

6.2.1 Punti di forza

Il modello utilizzato presenta diversi aspetti positivi che ne rendono efficace l'impiego nello studio preliminare delle trasferte interplanetarie:

- **Utilizzo dei metodi indiretti**, l'impiego dei metodi indiretti garantisce un'elevata accuratezza nella risoluzione del problema ai limiti,

anche in presenza di archi di spinta brevi. Questa formulazione permette di rispettare in modo accurato le condizioni di ottimalità e di ottenere traiettorie compatibili con la dinamica del sistema.

- **Formulazione nel dominio eliocentrico**, il modello analizza solo la fase eliocentrica del trasferimento; questo permette di isolare l'effetto della velocità di eccesso iperbolico e della durata della trasferta sul costo propulsivo complessivo.
- **Confronto tra finestre di lancio**, il modello consente di confrontare in modo efficace diverse finestre di lancio, analizzando come la geometria orbitale Terra-Marte e la variazione dei parametri di trasferimento influenzino il costo propulsivo. Questo permette di evidenziare i compromessi tra durata del volo, efficienza energetica e velocità di arrivo, selezionando le configurazioni ottimali nel periodo considerato.

6.2.2 Limiti del modello

Il modello presenta alcuni limiti legati alla sua formulazione e alle caratteristiche del sistema propulsivo considerato.

- **Necessità di una prima approssimazione della traiettoria**, l'utilizzo di un sistema propulsivo chimico comporta archi di spinta molto brevi, che rendono il BVP particolarmente sensibile alle condizioni iniziali. È necessario dunque costruire una prima approssimazione della traiettoria e del profilo di controllo in modo tale da poter garantire la convergenza del metodo. Questo aspetto introduce un passaggio aggiuntivo nell'analisi, che non sarebbe necessario in presenza di sistemi propulsivi con archi di spinta più lunghi.
- **Perturbazioni non modellate**, la dinamica è stata formulata nel dominio eliocentrico, considerando quindi la sola attrazione gravitazionale del Sole. Non sono stati inclusi effetti di terzi corpi, la pressione di radiazione solare o altre perturbazioni che, pur avendo un impatto limitato sulla fase interplanetaria, possono modificare in modo non trascurabile il costo propulsivo effettivo.

6.2.3 Limiti dell'analisi svolta

L'analisi svolta si concentra esclusivamente sulla fase interplanetaria del trasferimento, lasciando fuori contributi che, in una missione reale, incidono in modo significativo sul budget propulsivo complessivo.

- **Fase di escape dalla Terra**, non è stato modellato il costo necessario per lasciare l'orbita terrestre, Sebbene tale contributo sia fornito dal lanciatore e non ricada direttamente sullo spacecraft, rappresenta comunque un costo reale della missione e deve essere considerato in una valutazione completa.
- **Cattura in orbita marziana**, la fase di cattura e inserzione orbitale su Marte non è stata modellata. Il relativo ΔV dipende fortemente dalla velocità relativa all'arrivo e dall'orbita finale desiderata attorno a Marte, e rappresenta un contributo che ricade interamente sul sistema propulsivo dello spacecraft e può diventare predominante per finestre di lancio caratterizzate da valori elevati di $V_{rel,end}$.

6.3 Sviluppi futuri

La metodologia sviluppata può essere ampliata in diverse direzioni, consentendo di estendere l'analisi e di ottenere una valutazione più completa del costo propulsivo di una missione interplanetaria.

Un primo sviluppo immediato consiste nell'inclusione del costo propulsivo della fase di cattura in orbita marziana: partendo dalle soluzioni ottimali ottenute per la fase interplanetaria, sarebbe possibile calcolare la traiettoria di inserzione fino a un'orbita di parcheggio attorno a Marte, determinando il relativo ΔV e valutando così il costo propulsivo dell'intera missione. Questo permetterebbe di confrontare le diverse finestre di lancio non solo in termini di efficienza del trasferimento eliocentrico ma anche in funzione delle condizioni di arrivo e del costo della manovra di cattura.

Un secondo possibile sviluppo riguarda l'inclusione delle principali perturbazioni gravitazionali e non gravitazionali che agiscono sulla dinamica interplanetaria. Come già detto, il modello non introduce effetti perturbativi; la loro implementazione consentirebbe di ottenere una dinamica più realistica e una stima più accurata del costo propulsivo, pur rappresentando un perfezionamento a modelli di analisi avanzata che non alle fasi preliminari.

Un terzo sviluppo riguarda l'esplorazione di profili di missione alternativi. In questo lavoro si sono analizzate solo le traiettorie di **Tipo 1**; l'analisi potrebbe essere estesa a traiettorie di **Tipo 2** e a traiettorie con fly-by planetari, che in alcune configurazioni geometriche permettono di individuare soluzioni con costo propulsivo minore o di ottenere condizioni di arrivo più favorevoli, pur comportando un incremento sostanziale della durata complessiva della missione.

Nel complesso, l'estensione del modello alle fasi planetarie e l'esplorazione di

profili di missione alternativi rappresentano direzioni di particolare interesse per ottenere una valutazione più completa delle trasferte Terra-Marte.

Bibliografia

- [1] P. G. Antreasian, D. T. Baird, J. S. Border, P. D. Burckhart, E. J. Graat, M. K. Jah, R. A. Mase, T. P. McElrath, and B. M. Portock. 2001 mars odyssey orbit determination during interplanetary cruise. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 42(3):394–405, 2005. doi: 10.2514/1.15222. URL <https://doi.org/10.2514/1.15222>.
- [2] ArianeGroup. Mua-6, issue 2, revision 0. Technical report, ArianeGroup, March 2021. URL https://ariane.group/app/uploads/sites/4/2024/10/Mua-6_Issue-2_Revision-0_March-2021.pdf.
- [3] Roger R. Bate, Donald D. Mueller, and Jerry E. White. *Fundamentals of Astrodynamics*. Dover Books on Aeronautical Engineering. Dover Publications, New York, 1971. ISBN 978-0-486-60061-1.
- [4] Enrico Bertolazzi and Francesco Biral. A direct/indirect approach to optimal control problems. In Yaroslav D. Sergeyev, Dmitri E. Kvasov, and Annabella Astorino, editors, *Numerical Computations: Theory and Algorithms*, pages 47–62, Cham, 2025. Springer Nature Switzerland. ISBN 978-3-031-81244-6.
- [5] Nicholas Bradley and Ryan P. Russell. A continuation method for converting trajectories from patched conics to full gravity models. *The Journal of the Astronautical Sciences*, 61(3):227–254, 2014. ISSN 2195-0571. doi: 10.1007/s40295-014-0017-x. URL <https://doi.org/10.1007/s40295-014-0017-x>.
- [6] Arthur Earl Bryson. *Applied optimal control: optimization, estimation and control*. Routledge, 2018.
- [7] Lorenzo Casalino. Slide del corso “Propulsione Spaziale”, 2026. Materiale didattico.
- [8] Jacobus W Cornelisse, HFR Schoyer, and Karel F Wakker. Rocket propulsion and spaceflight dynamics. *London: Pitman*, 1979.

- [9] Howard D Curtis. *Orbital mechanics for engineering students*. Butterworth-Heinemann, 2019.
- [10] Marshall H. Kaplan. *Modern Spacecraft Dynamics and Control*. Wiley, New York, 1976. ISBN 978-0471472427.
- [11] W Henry Lambright. *Why Mars: NASA and the politics of space exploration*. JHU Press, 2014.
- [12] National Aeronautics and Space Administration (NASA). Technical report title. Technical Report 20060056070, NASA, 2006. URL <https://ntrs.nasa.gov/citations/20060056070>.
- [13] Robin M. Vaughan, Pieter H. Kallemeyn, David A. Spencer, and Robert D. Braun. Navigation flight operations for mars pathfinder. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 36(3):340–347, 1999. doi: 10.2514/2.3476. URL <https://doi.org/10.2514/2.3476>.
- [14] Alexander P. Yefremov and Alexandra A. Vorobyeva. Spacecraft orbital stability vs total solar irradiance. *Acta Astronautica*, 235:759–765, 2025. ISSN 0094-5765. doi: <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2025.06.051>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0094576525004035>.

Appendice A

Figure aggiuntive

A.1 Analisi 2031

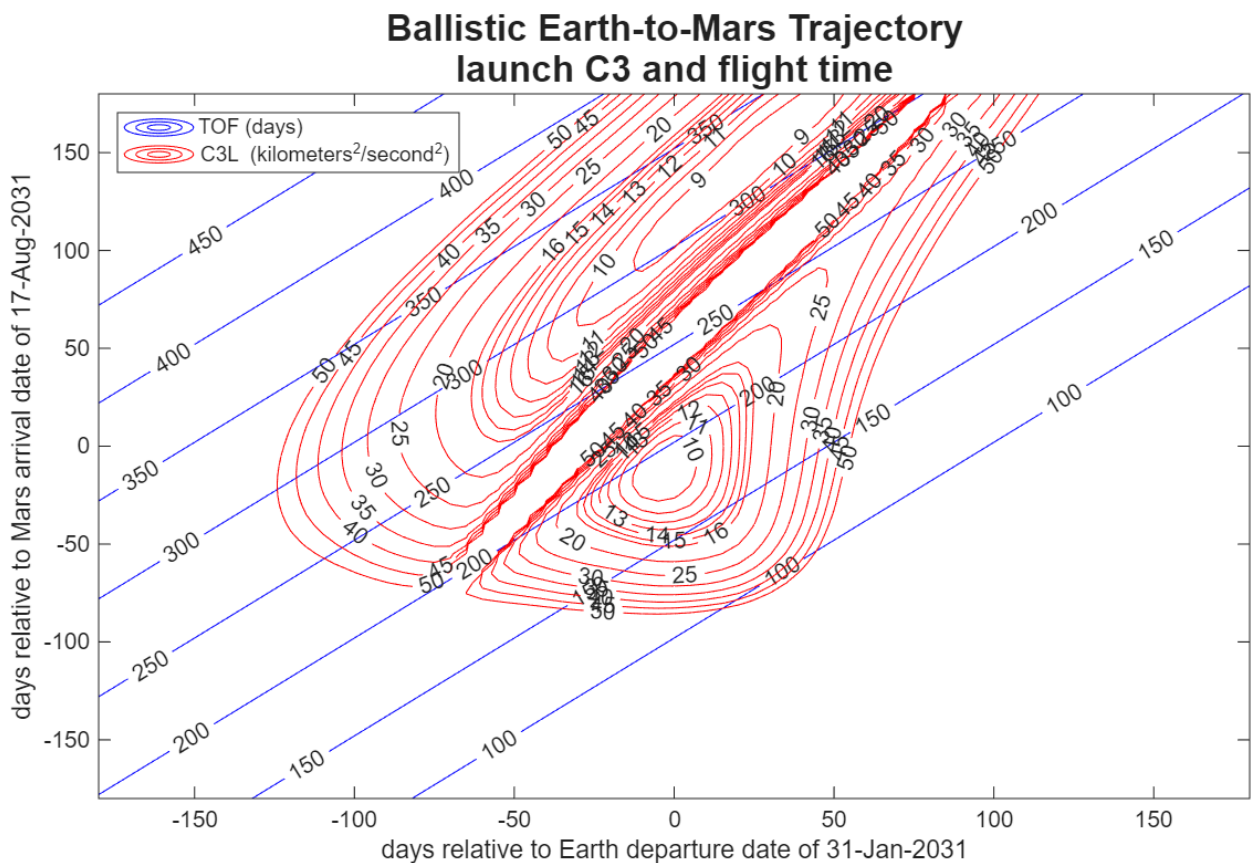


Figura A.1: Porkchop plot: C3 e tempo di volo per trasferimenti Terra-Marte nel 2031.

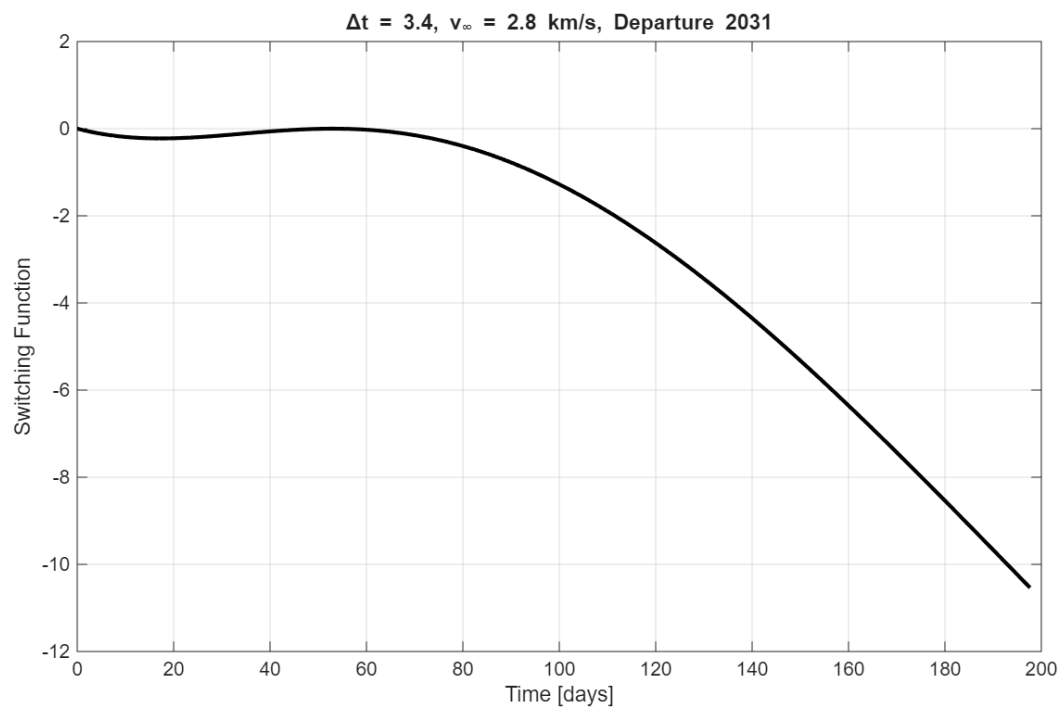


Figura A.2: SF per $V_\infty = 2.8$ km/s

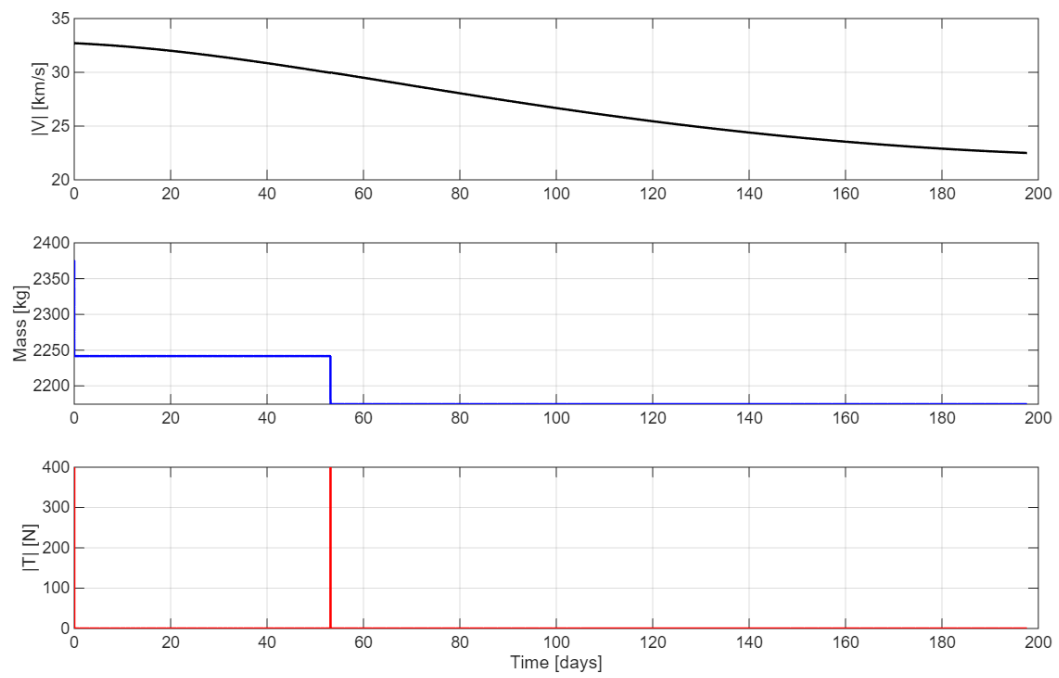


Figura A.3: Dinamica per $V_{\infty} = 2.8 \text{ km/s}$

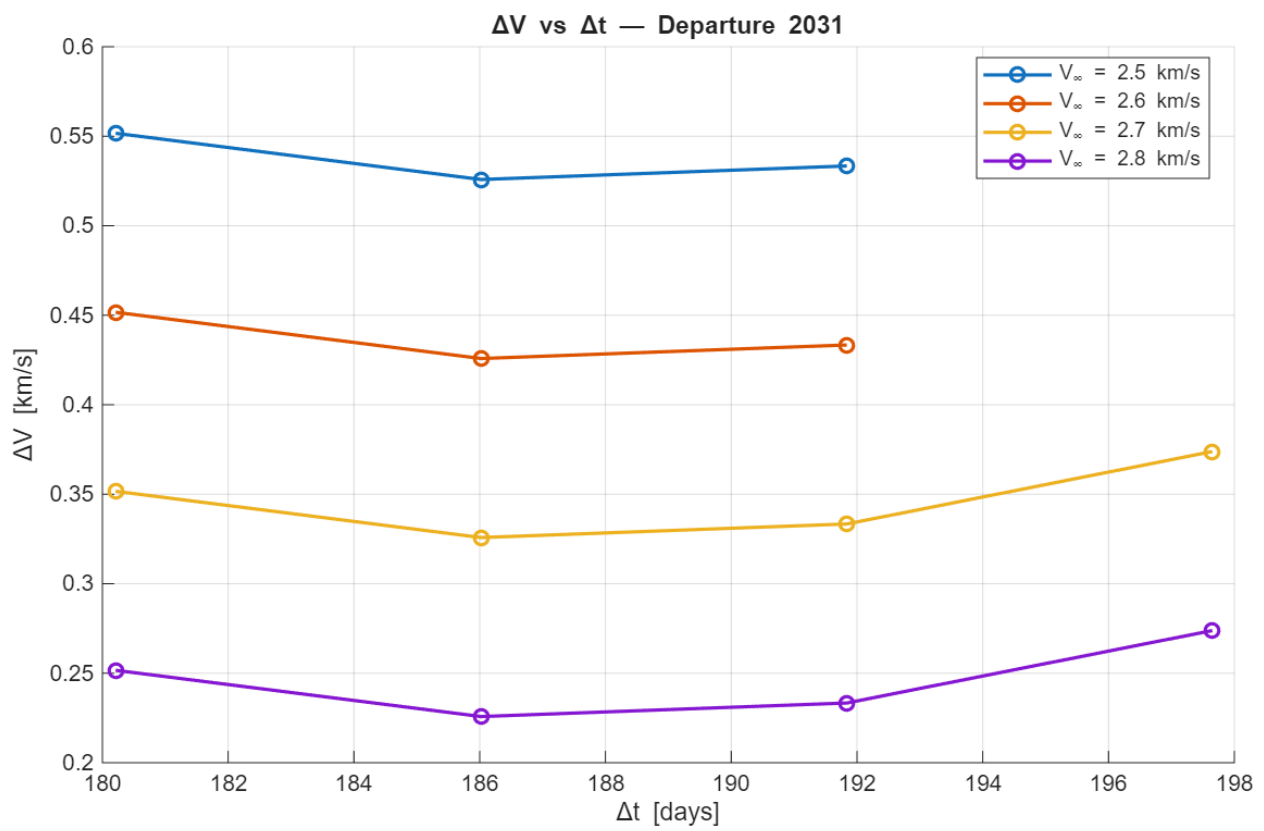


Figura A.4: ΔV in funzione di Δt e V_∞ per 2031

A.2 Analisi 2033

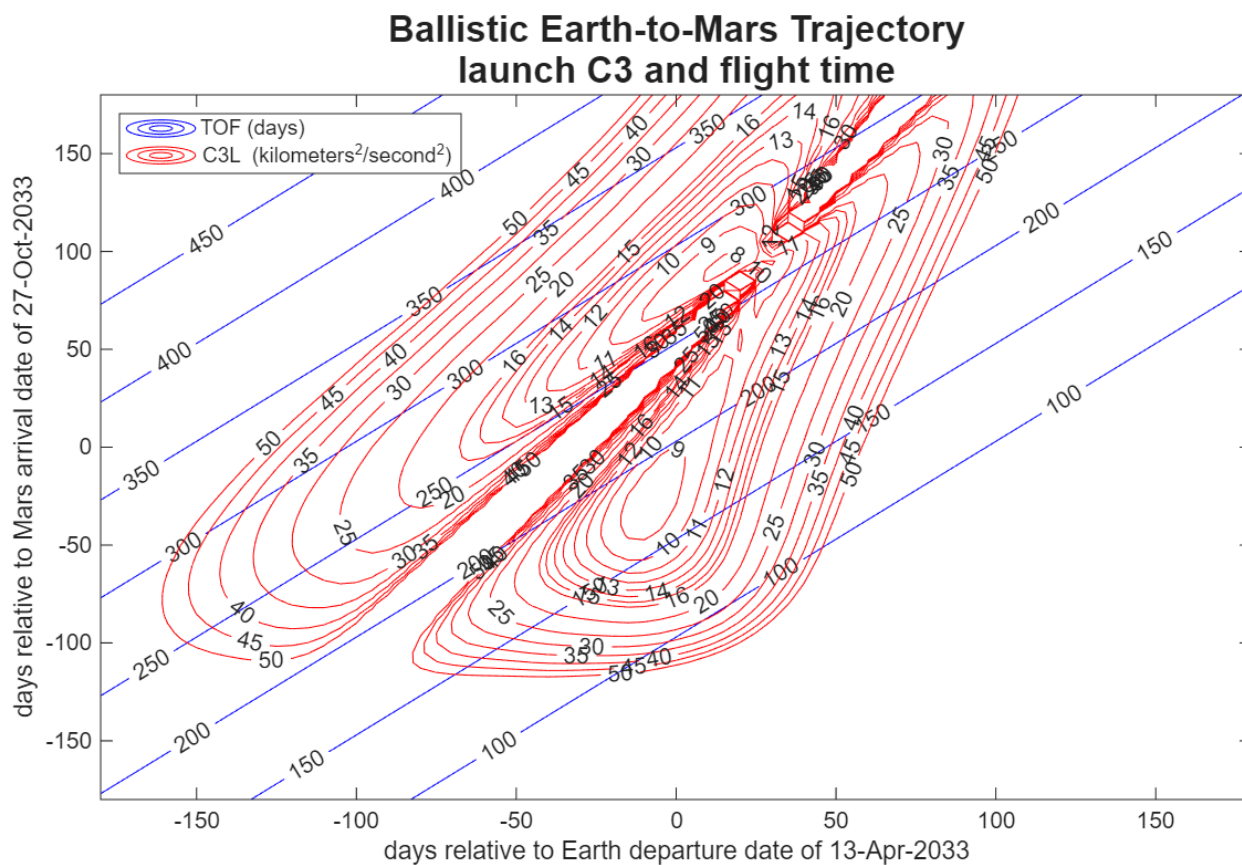


Figura A.5: Porkchop plot: C3 e tempo di volo per trasferimenti Terra-Marte nel 2033.

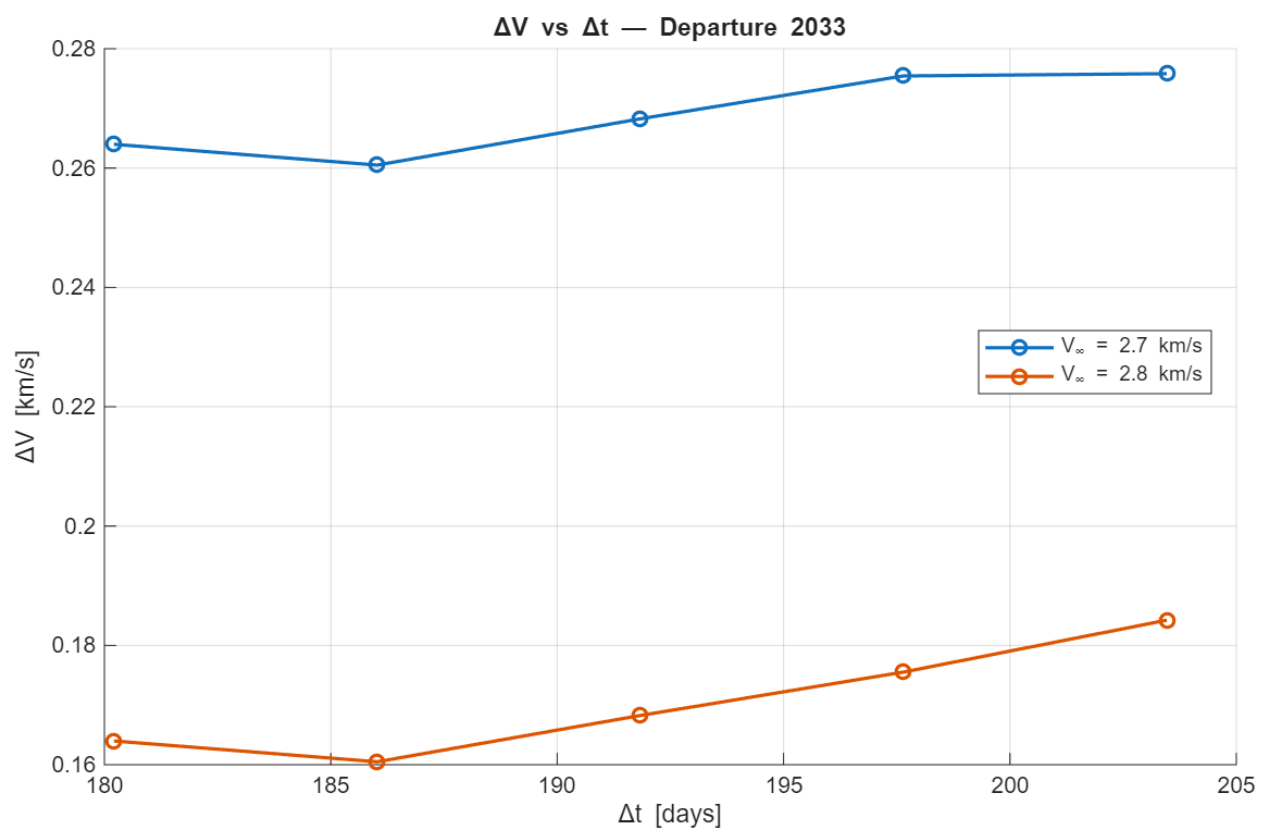


Figura A.6: ΔV in funzione di Δt e V_∞ per 2033

A.3 Analisi 2035

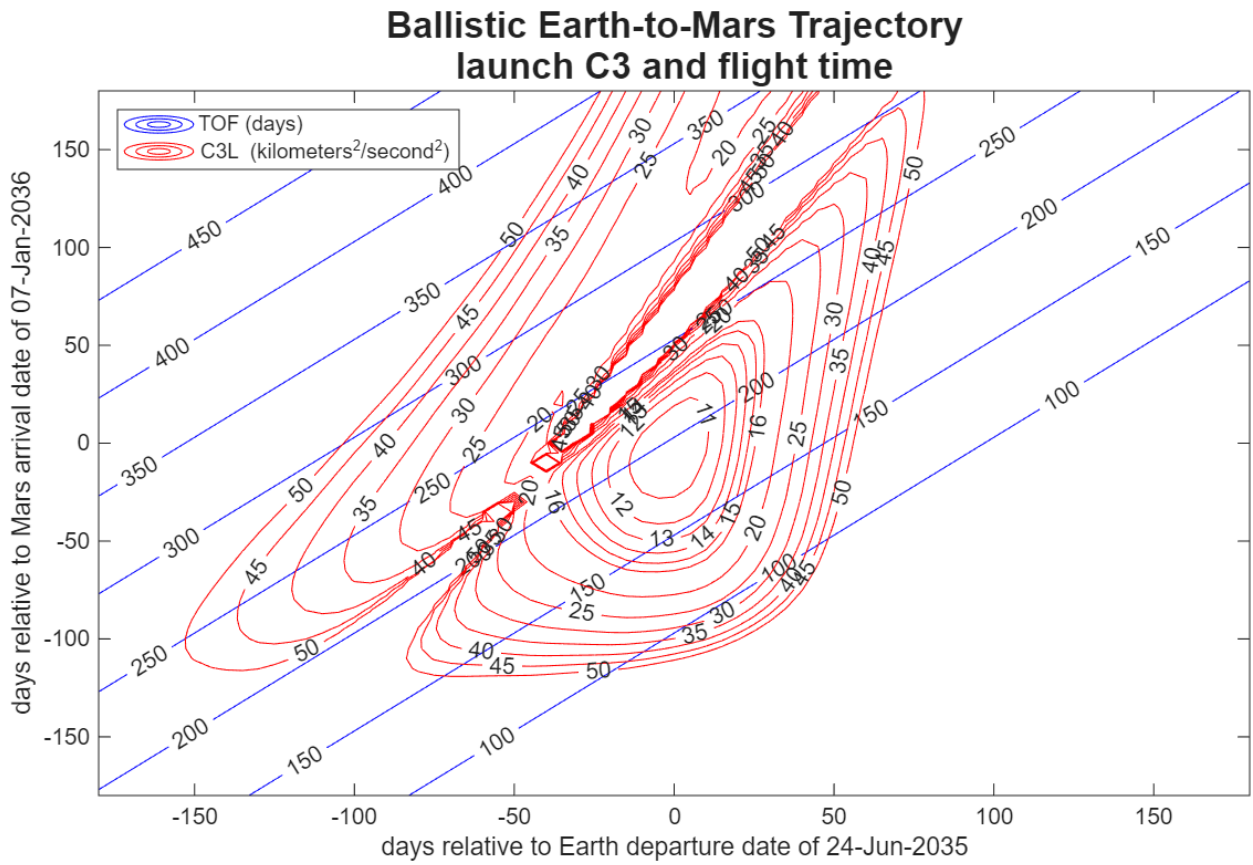


Figura A.7: Porkchop plot: C3 e tempo di volo per trasferimenti Terra-Marte nel 2035.

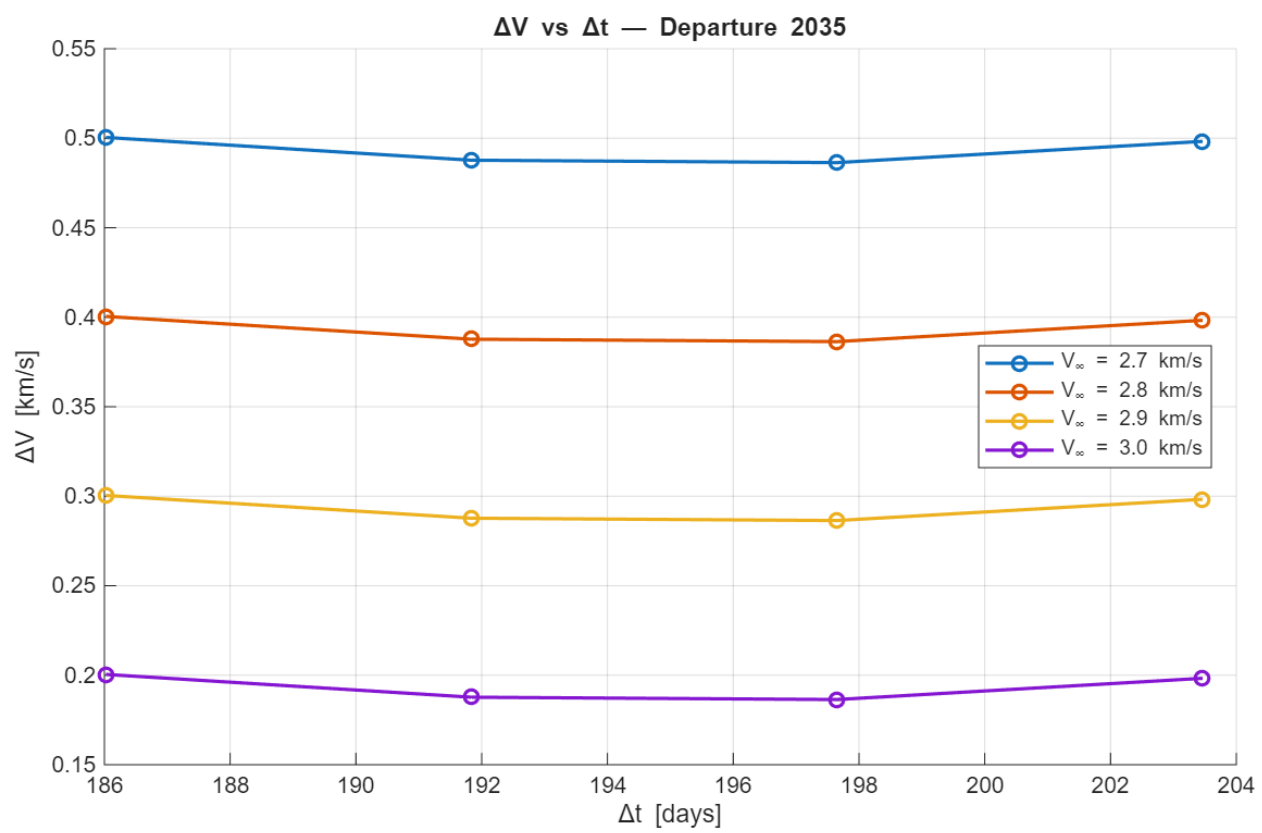


Figura A.8: ΔV in funzione di Δt e V_∞ per 2035

A.4 Analisi 2037

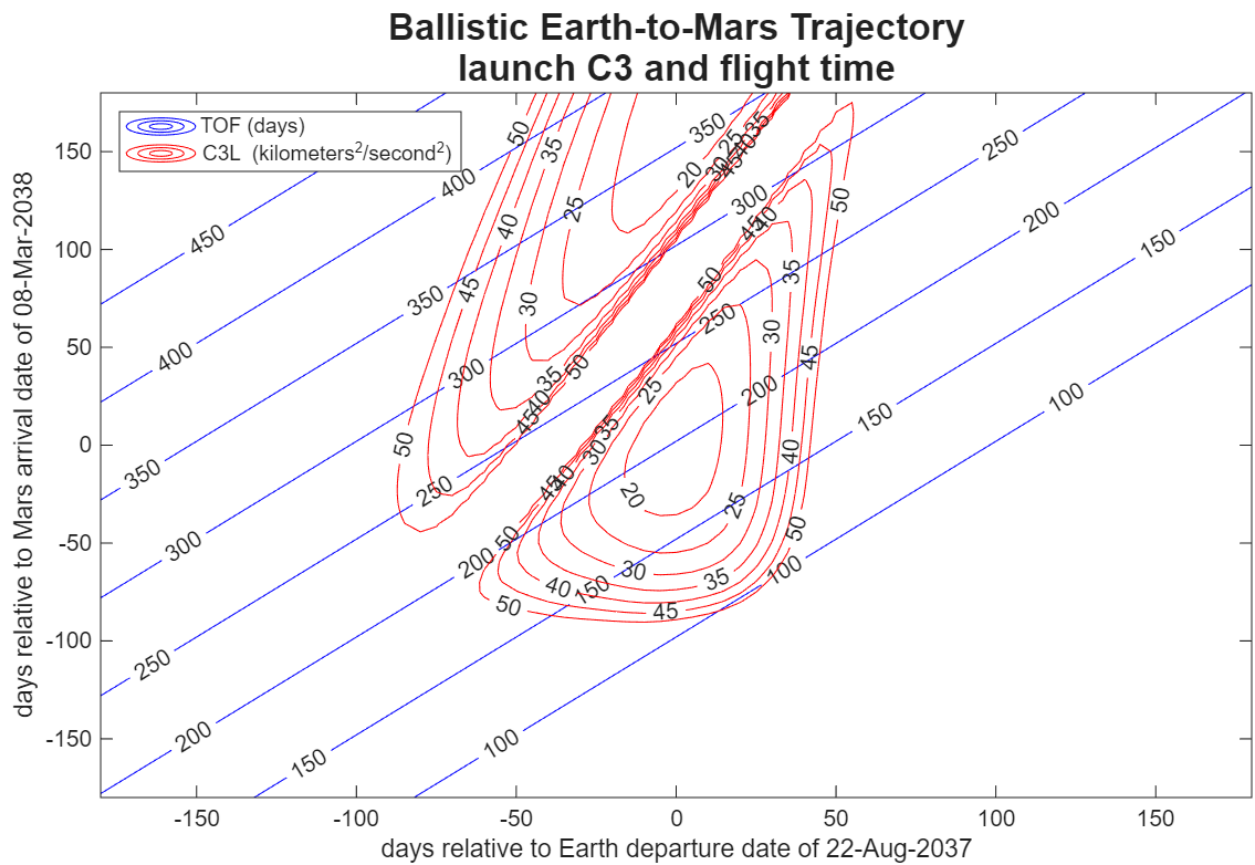


Figura A.9: Porkchop plot: C3 e tempo di volo per trasferimenti Terra-Marte nel 2037.

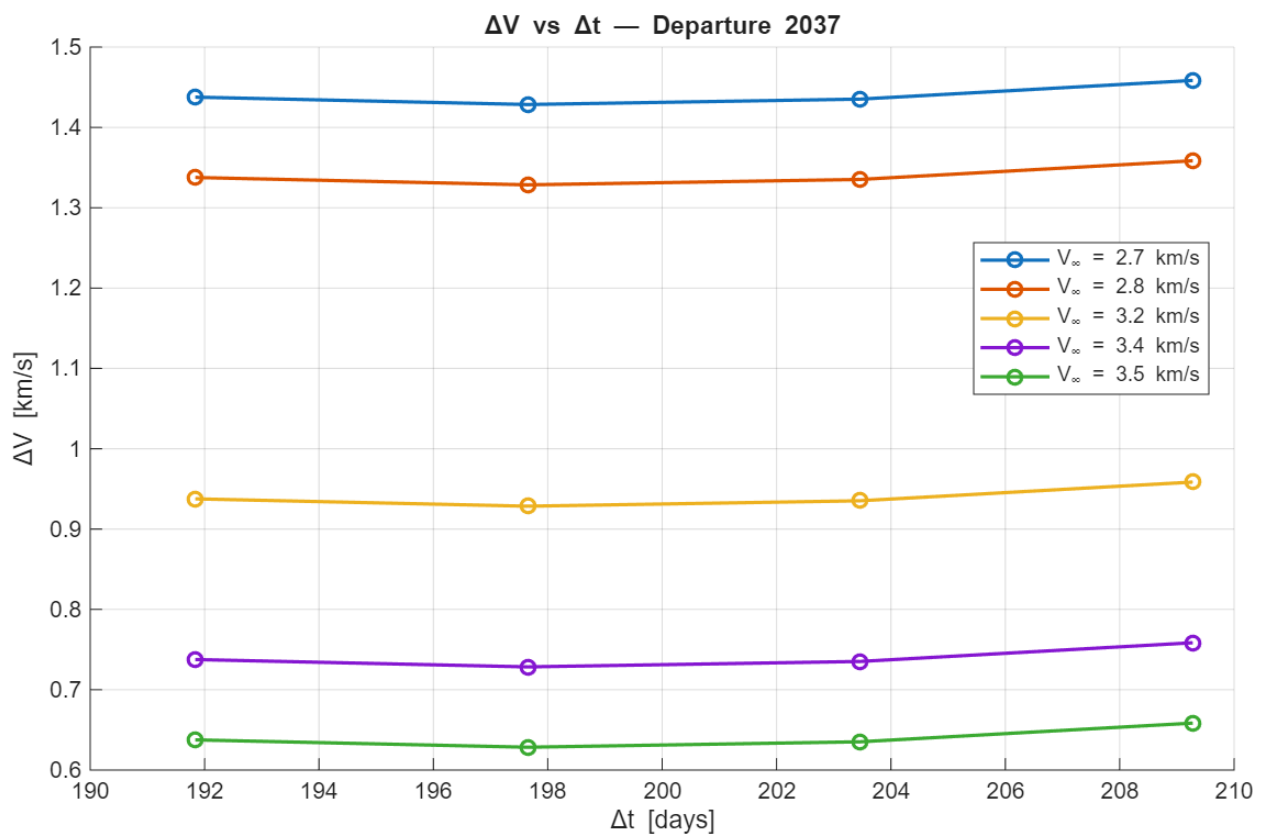


Figura A.10: ΔV in funzione di Δt e V_∞ per 2037

A.5 Analisi 2039

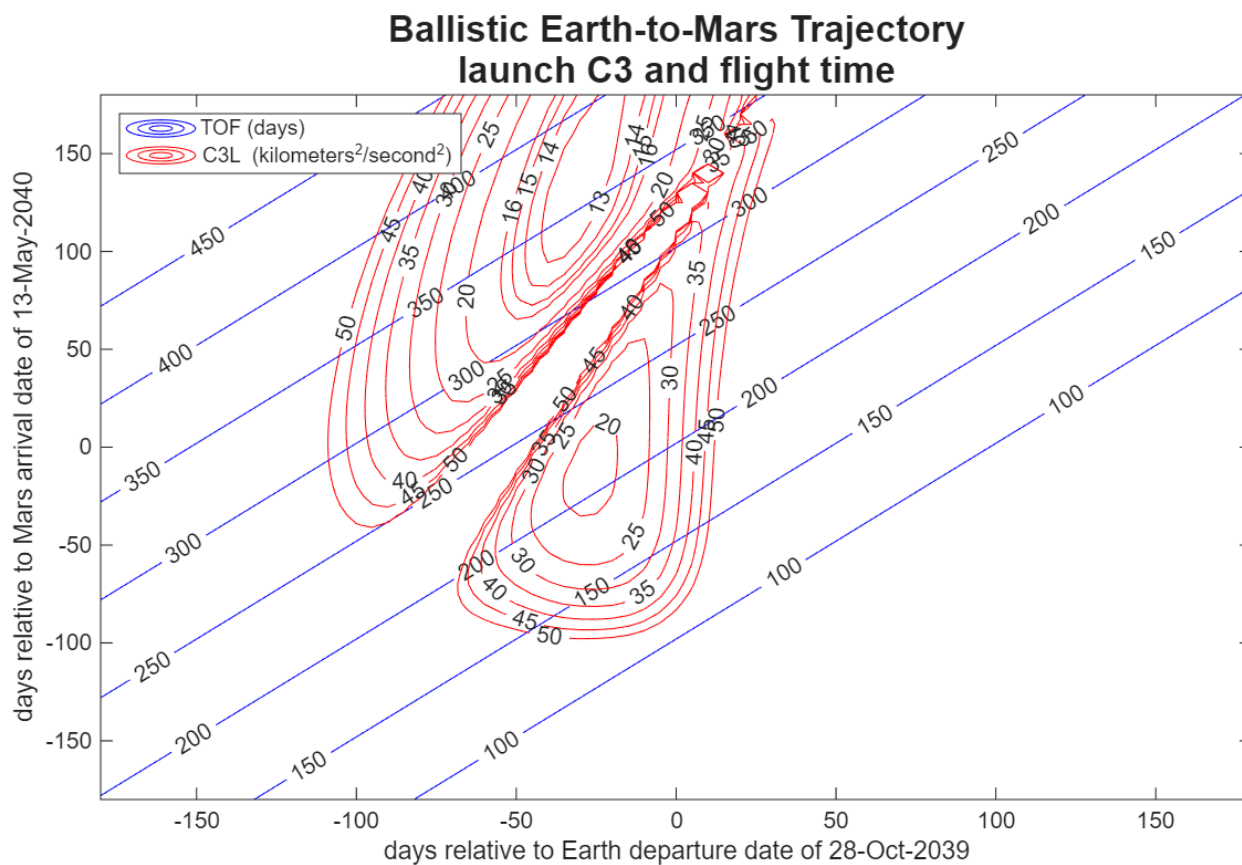


Figura A.11: Porkchop plot: C3 e tempo di volo per trasferimenti Terra-Marte nel 2039.

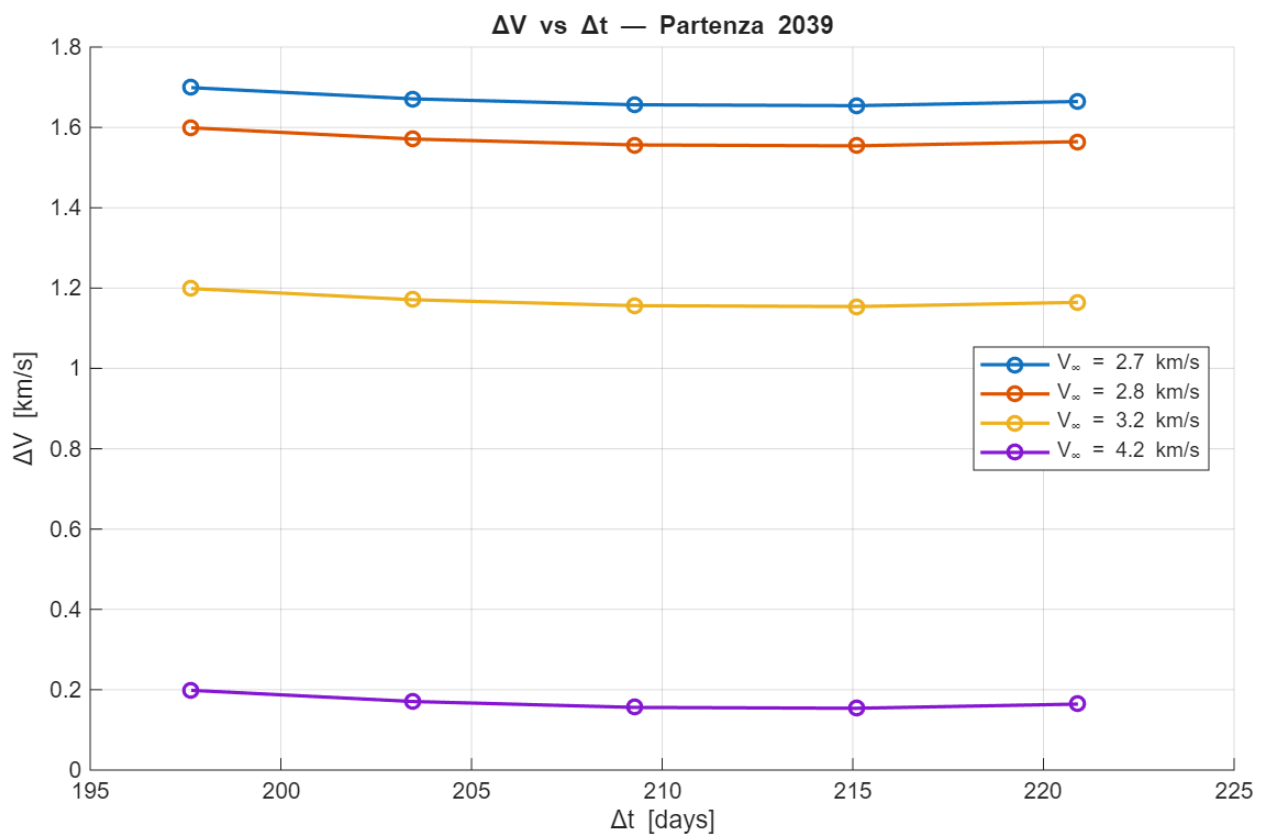


Figura A.12: ΔV in funzione di Δt e V_∞ per 2039