



**Politecnico  
di Torino**

**Politecnico di Torino**

**Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccanica**

A.A. 2025/2026

Sessione di Laurea marzo 2026

**Identificazione numerica e  
sperimentale di sistemi non lineari**

**Relatrice:**

Prof.ssa Cecilia Surace

**Candidato:**

Paolo Lorefice Matr. s323092

**Correlatori:**

Prof. Rosario Ceravolo

Dott.ssa Linda Scussolini

Dott.ssa Valeria Cavanni





*Un ringraziamento a me  
per non aver mai  
mollato, a rollinox per  
avermi aiutato nei  
momenti di difficoltà,  
alla mia famiglia e a chi  
ci ha sempre creduto...*



# Abstract

In generale, l'identificazione dei sistemi dinamici può essere definita come l'ambito di ricerca in cui i dati (ad esempio i segnali di risposta) vengono adattati ai modelli. La scelta di un modello adeguato, utile a rappresentare il sistema dinamico, pone diverse problematiche soprattutto quando la risposta presenta caratteristiche non lineari, che possono manifestarsi attraverso fenomeni differenti. Uno di questi fenomeni, ossia la bistabilità, può essere convenientemente sfruttato a fini di dissipazione energetica. Se opportunamente eccitati, i sistemi bistabili mostrano un salto nella risposta, dovuto all'attivazione dello *snap-through* tra due posizioni stabili, attraversando un punto instabile.

Sebbene, se correttamente formulato, il problema di identificazione non lineare possa fornire buoni risultati con un'ottima efficienza, anche nel caso di non linearità bistabili ad alta ampiezza, la sua applicazione in ambito sperimentale introduce incertezze significative. Fattori quali la variabilità intrinseca dei materiali e il rumore di misura rendono le tecniche deterministiche tradizionali di stima dei parametri inadeguate per una caratterizzazione completa del sistema.

Inoltre, in molti scenari pratici, i parametri del sistema possono variare nel tempo, richiedendo metodologie in grado di effettuarne una stima istantanea. Di conseguenza, una transizione verso una stima istantanea di tipo probabilistico è essenziale per quantificare rigorosamente l'incertezza.

In questo contesto, la presente tesi indaga l'identificazione numerica e sperimentale di un sistema dinamico bistabile, modellato come un oscillatore di Duffing bistabile a un grado di libertà, con l'obiettivo di stimare i parametri non lineari e quantificare gli intervalli di fiducia ad essi associati. Integrando un campionamento locale tramite Markov Chain Monte Carlo (MCMC) all'interno dell'Unscented Kalman Filter (UKF), il metodo proposto, denominato UKF-MCMC, fornisce distribuzioni posteriori raffinate per i parametri variabili nel tempo. Tale approccio viene validato su dati sperimentali, ottenuti da prove condotte su un campione bistabile realizzato mediante stampa 3D, tramite una macchina di prova costruita appositamente per questo scopo.



# Sommario

1	Introduzione .....	1
2	Identificazione non lineare di sistemi dinamici .....	3
2.1	Il concetto dell'identificazione.....	3
2.1.1	Procedura di identificazione nei sistemi.....	4
2.2	Identificazione non lineare .....	8
2.2.1	Fasi dell'identificazione non lineare .....	9
2.3	Tipologie di sistemi non lineari.....	10
2.3.1	Rigidezza cubica.....	11
2.3.2	Rigidezza o smorzamento bilineare.....	12
2.3.3	Rigidezza lineare a tratti .....	13
2.3.4	Smorzamento non lineare .....	14
2.3.5	Attrito di Coulomb .....	15
3	Identificazione non lineare con filtri Bayesiani .....	17
3.1	Kalman Filter .....	17
3.1.1	Principali proprietà del filtro di Kalman .....	23
3.2	Extended Kalman Filter .....	24
3.2.1	Linearizzazione del filtro di Kalman .....	24
3.2.2	Formulazione teorica dell'Extended Kalman Filter a tempo discreto .....	26
3.3	Unscented Kalman Filter.....	29
3.3.1	Unscented Transformation .....	30
3.3.2	Formulazione teorica dell'Unscented Kalman Filter a tempo discreto .....	34
4	Identificazione probabilistica.....	39
4.1	Statistica Bayesiana.....	39
4.1.1	Cenni su variabili aleatorie .....	39
4.1.2	Teorema di Bayes e cenni sull'inferenza frequentista.....	41
4.2	L'inferenza Bayesiana nell'identificazione di un sistema .....	46
4.3	Metodo Monte Carlo .....	49
4.3.1	Enunciato .....	49
4.3.2	Obiettivi e metodi di campionamento .....	50
4.3.2.1	Uniform Sampling .....	51

4.3.2.2 Importance Sampling.....	52
4.3.2.3 Rejection Sampling.....	54
4.4 Markov Chain Monte Carlo .....	55
4.4.1 Catene di Markov .....	55
4.4.2 Metodo Metropolis Hastings.....	58
4.5 Applicazione numerica del metodo UKF-MCMC combinato .....	60
5 Sistemi bistabili.....	63
5.1 Descrizione della dinamica bistabile.....	63
5.2 Realizzazione della dinamica bistabile .....	67
5.2.1 Stampa 3D .....	70
6 Validazione numerica .....	73
6.1 Validazione modello UKF .....	73
6.2 Validazione MCMC .....	76
6.3 Validazione modello combinato UKF-MCMC.....	79
7 Descrizione macchinario e prove sperimentali .....	83
7.1 Descrizione banco prova .....	83
7.2 Validazione sperimentale .....	86
7.2.1 Analisi energetica .....	92
8 Conclusioni .....	97

# Lista delle abbreviazioni

NMSE: Normalized Mean Square Error  
ARX: AutoRegressive with eXogenous input  
NARX: Nonlinear AutoRegressive with eXogenous input  
PDF: Probability Density Function  
FRF: Function Frequency Response  
NARMAX: Nonlinear AutoRegressive Moving Average with eXogenous input  
MCMC: Markov Chain Monte Carlo  
SDOF: Single Degree Of Freedom  
MDOF: Multiple Degrees Of Freedom  
EKF: Extended Kalman Filter  
UKF: Unscented Kalman Filter  
MMSE: Minimum Mean Square Error  
UT: Unscented Transformation  
SR: Square Root  
CDF: Cumulative Distribution Function  
ML: Maximum Likelihood  
MAP: Maximum a Posteriori Estimate  
DIC: Deviance Information Criterion  
AIC: Akaike Information Criterion  
MC: Monte Carlo  
MH: Metropolis Hastings  
FDM: Fused Deposition Modeling  
ABS: Acrilonitrile Butadiene Stirene  
CI: Credible Interval  
RK4: Runge-Kutta del quarto ordine  
KDE: Kernel Density Estimate  
PSD: Position Sensitive Detector



# 1 Introduzione

L'identificazione di sistemi dinamici a partire da misure sperimentali è un passaggio fondamentale per costruire modelli matematici capaci di descrivere in modo realistico il comportamento di un sistema fisico e utilizzabili in fase di simulazione, progetto e controllo. In particolare, nel caso di sistemi meccanici non lineari, la corretta determinazione dei parametri del modello assume un ruolo cruciale, in quanto piccole variazioni parametriche possono produrre effetti significativi sulla dinamica complessiva del sistema. In questi scenari, una stima puntuale dei parametri può risultare insufficiente, poiché è importante disporre anche di una misura dell'incertezza. Per questa ragione, negli ultimi anni ha assunto crescente importanza un approccio di tipo probabilistico all'identificazione dei parametri. In tale contesto, l'identificazione viene impostata come un problema probabilistico, in cui i parametri non vengono stimati mediante un valore puntuale, ma attraverso distribuzioni di probabilità che consentono di quantificare in modo rigoroso l'incertezza associata alle condizioni al contorno della sperimentazione. Ciò permette di ottenere non solo una stima dei valori più plausibili, ma anche intervalli di fiducia, fornendo così strumenti più completi per interpretare la qualità dell'identificazione e la capacità del modello di rappresentare il comportamento del sistema reale.

Negli ultimi anni, i sistemi non lineari di tipo bistabile sono stati oggetto di ricerca data le loro proprietà vantaggiose, sia nella dissipazione che nell'assorbimento dell'energia. Essi sono caratterizzati dalla presenza di due configurazioni di equilibrio stabile separate da una barriera energetica, che rende la loro risposta dinamica più complessa rispetto a quella dei sistemi lineari tradizionali. Al variare della sollecitazione esterna, il sistema può infatti evolvere attorno a uno dei due stati stabili oppure transitare tra essi, dando luogo a differenti regimi di moto.

Alla luce di queste considerazioni, questa tesi si propone di testare una procedura di identificazione di parametri non lineari che combina l'approccio probabilistico con la stima istantanea di sistemi tempo-varianti. Da un lato, la stima degli stati in presenza di non linearità e rumore viene affrontata tramite una tipologia aumentata di filtro Bayesiano, ovvero l'Unscented Kalman Filter (UKF), che permette di ottenere una stima istante per istante non solo degli stati, ma anche dei parametri non lineari. Dall'altro lato, l'inferenza sui parametri viene formulata in termini probabilistici e viene eseguita tramite metodi Markov Chain Monte Carlo (MCMC), tra cui il Metropolis Hastings (MH), che permettono di esplorare lo spazio dei parametri e ottenere una distribuzione a posteriori. In questo modo, oltre al valore più probabile, si ricavano intervalli di fiducia e correlazioni tra parametri, elementi utili per interpretare la qualità dell'identificazione.

Il contributo centrale del lavoro è l'integrazione in un approccio combinato dei due metodi UKF ed MCMC. L'UKF viene impiegato per gestire la stima ricorsiva degli stati del sistema modellato come un Duffing a un grado di libertà, mentre l'MCMC

utilizza questa informazione per costruire la distribuzione a posteriori dei parametri. La metodologia viene prima validata numericamente, confrontando i risultati ottenuti con UKF, con MCMC e con la versione combinata, evidenziando benefici e limiti in termini di accuratezza. Infine, l'algoritmo combinato viene applicato a dati provenienti da una sperimentazione ad hoc su un campione di tipo bistabile.

Il Capitolo 2 inquadra il problema dell'identificazione non lineare e richiama le principali tipologie di non linearità rilevanti. Il Capitolo 3 introduce i filtri Bayesiani per sistemi dinamici e le estensioni al caso non lineare, con focus sull'UKF. Il Capitolo 4 presenta i fondamenti dell'identificazione probabilistica, i metodi Monte Carlo e l'MCMC, arrivando alla formulazione del metodo combinato UKF-MCMC. Il Capitolo 5 descrive i sistemi bistabili dal punto di vista teorico e spiega come vengono usati ai fini dell'applicazione svolta. Il Capitolo 6 riporta la validazione numerica e il confronto tra i vari approcci. Il Capitolo 7 descrive la macchina utilizzata durante le prove sperimentali e riporta i risultati in modo analogo a quelli mostrati nel capitolo precedente, con l'aggiunta di un'analisi dal punto di vista energetico sulla dissipazione dell'energia e della potenza del sistema.

## 2 Identificazione non lineare di sistemi dinamici

Nella pratica ingegneristica molti modelli matematici sono spesso ottenuti partendo da ipotesi di linearità, che consentono di descrivere la risposta del sistema mediante la classica equazione del moto in campo lineare, con tutti i benefici che ne conseguono. Tuttavia, nelle applicazioni reali, ad esempio con grandi ampiezze, contatti, giochi, attriti o non linearità geometriche e del materiale, gli effetti non lineari non sono più trascurabili e l'adozione di modelli lineari può introdurre scostamenti marcati rispetto alla risposta reale.

Lo scopo di questo capitolo è fornire il quadro teorico-bibliografico di riferimento per lo studio della dinamica non lineare e della sua identificazione, ponendo le basi per le metodologie che verranno sviluppate e applicate nei capitoli successivi.

Nella sezione 2.1 viene introdotto il problema generale dell'identificazione di sistemi dinamici, con particolare attenzione al ruolo dei dati sperimentali e alle fasi tipiche del processo identificativo. La sezione 2.2 è dedicata in maniera specifica all'identificazione non lineare: vengono discussi i principali sintomi di non linearità nei sistemi strutturali, le difficoltà aggiuntive rispetto al caso lineare e le principali famiglie di metodi proposte in letteratura. Infine, nella sezione 2.3 si propone una classificazione delle diverse tipologie di non linearità nei sistemi dinamici non lineari.

### 2.1 Il concetto dell'identificazione

Con *modello* (ipotesi, leggi della natura, paradigmi, ecc.) si intende una rappresentazione – più o meno formale – che cerca di organizzare i dati all'interno di uno schema coerente [1].

In termini generali, un sistema è un oggetto in cui variabili di diverso tipo interagiscono tra loro nel tempo producendo segnali osservabili  $y$  di *output* mentre i segnali esterni  $w$  ed  $u$  che possono essere gestiti dall'osservatore sono chiamati *input*. Oltre a questi, sono presenti in genere dei disturbi  $v(t)$  che per semplicità possiamo considerare indipendenti dal tempo, dovuti a effetti non modellati o eccitazioni non controllabili. Alcuni disturbi possono essere misurati e trattati come ingressi aggiuntivi, altri sono invece osservabili solo indirettamente attraverso la loro influenza sull'uscita.

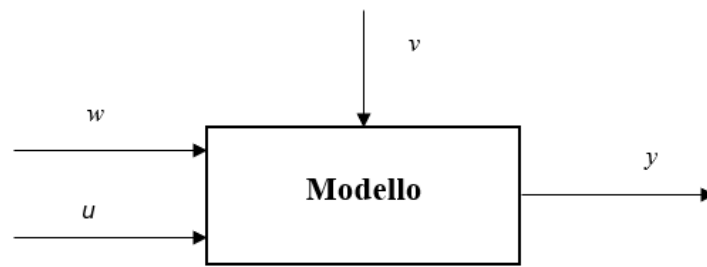


Figura 1: Sistema con ingresso  $u$ , disturbo misurato  $w$ , disturbo non misurato  $v$  e uscita  $y$

L'identificazione si pone quindi il problema di trovare, a partire da queste osservazioni, un modello matematico che descriva in modo sufficientemente accurato il comportamento dinamico del sistema reale per lo scopo applicativo considerato (predizione, controllo, diagnostica, [1]).

### 2.1.1 Procedura di identificazione nei sistemi

Il processo di passaggio dai dati osservati al modello matematico è fondamentale nella scienza e nell'ingegneria. Nell'ambito del controllo, questo processo è stato definito *Identificazione di Sistema* e l'obiettivo è quindi quello di trovare modelli dinamici (equazioni differenziali o alle differenze) a partire dai segnali di ingresso e di uscita osservati. La costruzione di un modello a partire dai dati può essere raggruppata, in prima approssimazione, in quattro blocchi fondamentali [2]:

1. Possedere un set di *dati osservati*  $Z^N$  contenente i segnali di ingresso e uscita registrati in  $N$  istanti temporali. I dati di input-output, molte delle volte risultano essere il risultato di un esperimento di identificazione, in cui l'utente può determinare quali segnali misurare e quando misurarli, e può anche scegliere i segnali di input. L'obiettivo della progettazione dell'esperimento è quello di effettuare delle scelte in modo che i dati siano il più possibile informativi, soggetti a vincoli che possono essere presenti. In altri casi, i dati possono provenire dal normale funzionamento del sistema perché l'utente potrebbe non avere la possibilità di influenzare l'esperimento (eccitazioni disponibili, ecc.).
2. L'insieme dei *modelli proposti* (struttura del modello). La scelta della classe dei modelli candidati si ottiene specificando all'interno di quale famiglia di modelli si cercherà quello adatto. Questa è senza dubbio la scelta più importante e, allo stesso tempo, la più difficile dell'intera procedura di identificazione del sistema. È qui che la conoscenza a priori, l'intuizione e l'esperienza ingegneristica devono essere combinate con le proprietà formali dei modelli al fine di ottenere un modello che esprima in maniera coerente i

risultati sperimentali. In alcuni casi, il modello deriva da una modellazione fisica dettagliata e contiene parametri con chiaro significato strutturale (rigidezze, smorzamenti, masse, ecc.): si parla allora di modelli *white-box* o *grey-box*. In altri casi si utilizzano strutture puramente matematiche (quali i modelli ARX, NARX, reti neurali, ecc.), in cui i parametri non hanno un'interpretazione fisica diretta: questi modelli sono spesso indicati come *black-box*.

Nel seguente paragrafo, vengono discussi in maniera esaustiva alcune tipologie di modelli, con qualche esempio per i sistemi non lineari.

In generale, la struttura del modello definisce una mappatura parametrica che, a partire dagli ingressi e dalle uscite passate, determina l'uscita del modello:

$$\hat{y}(t|\theta) = g(\theta, Z^{t-1})$$

Eq. 2. 1

dove  $Z^{t-1}$  raccoglie le misure fino all'istante  $t - 1$  e  $\theta$  è il vettore (a dimensione finita) dei parametri che definiscono il modello utilizzato.

3. Il *criterio di adattamento (fit)* e il *metodo di identificazione*. La valutazione della qualità del modello si basa tipicamente su come i modelli si comportano quando tentano di riprodurre i dati misurati. Una volta fissata la classe di modelli, è necessario valutare quale modello, all'interno di questa classe, descriva meglio i dati. Si introduce quindi un criterio di adattamento (o funzione costo), come ad esempio un errore quadratico tra uscite misurate e uscite del modello, oppure una funzione di verosimiglianza in un contesto probabilistico.

Il metodo di identificazione è l'algoritmo numerico che, a partire dai dati  $Z^N$ , cerca i parametri  $\hat{\theta}_N$  che minimizzano (o massimizzano) il criterio scelto. In questo modo si ottiene il modello migliore secondo la misura di qualità definita. Il problema dell'identificazione di sistemi è in realtà una variante del seguente problema archetipico nella scienza e nell'apprendimento umano [1]. Si prende in considerazione un insieme di osservazioni:

$$Z^N = \{[y(t); \varphi(t)], \quad t = 1, 2, \dots, N\}$$

Eq. 2. 2

dove  $y(t)$  rappresenta la grandezza da prevedere (*output*) e  $\varphi(t)$  raccoglie le informazioni disponibili al tempo  $t$  (ad esempio *input* e *output* passati). Questo insieme di coppie costituisce il cosiddetto *training set*.

L'obiettivo è costruire una legge che, a partire da un nuovo valore  $\varphi(N + 1)$ , fornisca una previsione  $\hat{y}(N + 1)$  dell'*output* corrispondente.

La variabile  $t$  può essere pensata come il tempo, ma potrebbe anche assumere un altro significato. I vettori  $y(t)$  e  $\varphi(t)$  possono assumere valori in insiemi qualsiasi (finiti o sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^n$ ) e la dimensione di  $\varphi(t)$  può anche dipendere da  $t$  (e potrebbe non essere limitata). Questa formulazione copre la maggior parte dei problemi di classificazione e di costruzione di modelli.

Nel contesto dell'identificazione di sistemi, tale legge consiste nel costruire una funzione  $\hat{g}_N(t, \varphi(t))$  basata sul *training set* e nell'usare questa funzione per associare  $y(t)$  ai nuovi  $\varphi(t)$ :

$$\hat{y}(t) = \hat{g}_N(t, \varphi(t))$$

Eq. 2. 3

La ricerca della funzione  $g$  viene effettuata in una famiglia di funzioni parametrizzata in termini di un numero finito di parametri, cioè una struttura di modello. Confrontando quindi il valore misurato  $y(t)$  con il candidato  $g(t, \theta, \varphi(t)) = \hat{y}(t | \theta)$  si ottiene:

$$y(t) = \hat{y}(t|\theta) + v(t)$$

Eq. 2. 4

dove  $v(t)$  è il termine di disturbo legato all'effetto degli ingressi non misurati che influenzano il sistema.

Per poter determinare  $\theta$  a partire dai dati  $Z^N$  è necessario specificare in che modo si intende "misurare" lo scostamento tra modello e osservazioni, ossia definire un criterio di adattamento. In pratica, il criterio stabilisce come valutare la qualità delle predizioni  $\hat{y}(t|\theta)$  rispetto ai dati  $y(t)$ . La scelta del criterio è fortemente legata alle ipotesi formulate sul termine di disturbo  $v(t)$ . Nella pratica vi sono due approcci di base:

- *Non probabilistico*: consiste nel vincolare in qualche modo l'insieme dei possibili segnali di disturbo  $v(t)$ , ad esempio:

$$|v(t)| \leq c \quad \forall t$$

Eq. 2. 5

oppure, più in generale,  $v \in V(\theta)$ , dove  $V(\theta)$  rappresenta un insieme di segnali compatibili con il modello e con le specifiche

dell'applicazione.

- *Probabilistico*: il disturbo  $v(t)$  viene modellato come un processo stocastico con una distribuzione di probabilità nota o eventualmente parametrizzata:

$$v \text{ has pdf } p_v(\cdot, \theta)$$

Eq. 2. 6

4. *Validazione del modello*. Il modello ottenuto non viene mai accettato automaticamente come rappresentazione “vera” del sistema, ma deve essere sottoposto a una fase di validazione. Dopo aver scelto in prima istanza il modello che descrive al meglio i dati secondo il criterio scelto, resta da verificare (con dei test) se quel modello è valido per il suo scopo. Tali test sono noti come validazione del modello. Un comportamento carente del modello, sotto determinati aspetti, ci porta a rifiutarlo, mentre buone prestazioni svilupperanno una certa fiducia in esso. È molto probabile, tuttavia, che il modello ottenuto per primo non superi i test di validazione. Il modello potrebbe essere carente per una serie di motivi:

- La procedura numerica non è riuscita a trovare il modello migliore secondo il criterio scelto.
- Il criterio non è stato scelto correttamente.
- Il set di modelli non era appropriato in quanto non conteneva una descrizione "sufficientemente buona" del sistema reale.
- Il set di dati non era sufficientemente informativo da fornire indicazioni nella selezione di buoni modelli.

In pratica, la procedura di identificazione del sistema è quasi sempre un processo iterativo: si parte da una scelta iniziale dei dati (raccolgimento), si sceglie un set di modelli, poi da questa famiglia di modelli si sceglie il migliore, in seguito si ottiene una prima stima e infine si valida il modello. Successivamente, in base ai risultati ottenuti, si modificano eventualmente i passi precedenti fino a ottenere una descrizione del sistema che sia adeguata, sia in termini di accuratezza che di complessità.

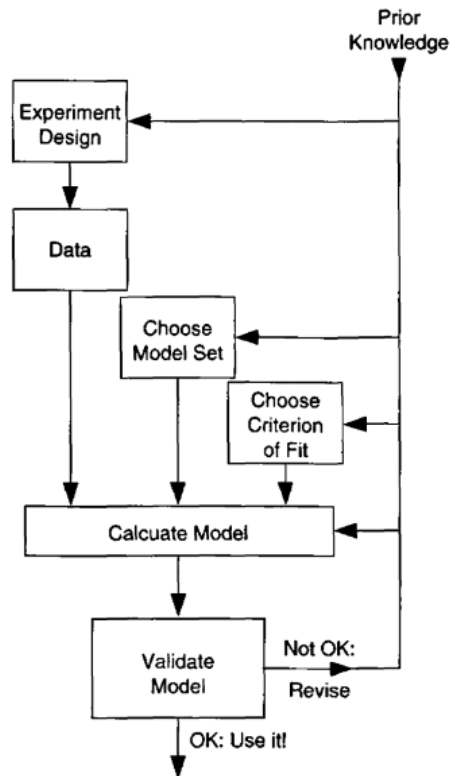


Figura 2: Il ciclo di identificazione di un sistema [1]

## 2.2 Identificazione non lineare

L'identificazione non lineare può essere vista come l'estensione della sua controparte lineare. Nella pratica, è probabile che tutte le strutture ingegneristiche presentino, almeno in parte, un comportamento non lineare dovuto da una combinazione di diversi fattori, come giunti strutturali in cui sono presenti caratteristiche di allentamento o attrito, condizioni al contorno che impongono vincoli di rigidità variabili, materiali che dipendono dall'ampiezza o componenti come ammortizzatori, isolatori di vibrazioni, cuscinetti, collegamenti o attuatori la cui dinamica dipende dall'*input*. Quando tali effetti diventano rilevanti, i modelli lineari non sono più in grado di descrivere in modo accurato la risposta e si ricorre quindi all'identificazione non lineare, intendendo con ciò la costruzione di modelli dinamici che includono esplicitamente termini non lineari e la stima dei relativi parametri a partire dai dati sperimentali.

## 2.2.1 Fasi dell'identificazione non lineare

L'identificazione di modelli strutturali non lineari è descritta come uno schema a tre fasi [3]:

1. *Rilevamento*: accertare se nel comportamento strutturale è presente una non linearità.
2. *Caratterizzazione*: Dove? Cosa? Come?
  - a. Localizzare la non linearità.
  - b. Determinare il tipo di non linearità.
  - c. Scegliere la forma funzionale della non linearità.
3. *Stima dei parametri*: si calcolano i coefficienti del modello di non linearità e se ne quantifica l'incertezza (ad esempio in senso probabilistico).

Nella fase di *rilevamento* ci si chiede innanzitutto se la risposta del sistema sia effettivamente incompatibile con un modello lineare (ad esempio si osservano la presenza di armoniche e subarmoniche, la dipendenza della FRF dall'ampiezza, fenomeni di non reciprocità). Una volta accertata la presenza di non linearità, la fase di *caratterizzazione* mira a individuare dove tali non linearità sono localizzate nella struttura (giunti, appoggi, dispositivi di smorzamento, ecc.) e quale forma esse assumono: rigidità cubica, comportamento bilineare, attrito di Coulomb, smorzamento quadratico, isteresi, e così via.

Il passo più importante nel processo di identificazione è decidere una struttura del modello, ovvero un insieme di modelli candidati all'interno del quale cercare la descrizione più adatta. Le strutture dei modelli non lineari possono essere organizzate secondo delle vere e proprie "sfumature di grigio", in cui si va dai modelli completamente fisici (*white models*) ai modelli puramente *data-driven* (*black models*). Le sfumature intermedie (*off-white*, *smoke-grey*, *steel-grey*, *slate-grey*) corrispondono a situazioni in cui il modello è in parte guidato dalla fisica e in parte dalla struttura matematica scelta per adattare i dati, come ad esempio modelli con parametri fisici incerti o modelli semi-fisici ottenuti tramite trasformazioni non lineari dei dati [4].

Tali categorie, per semplicità, vengono raggruppate in tre grandi famiglie:

- *White/grey-box*: quando si ha una conoscenza fisica delle proprietà del sistema da identificare, le non linearità vengono introdotte direttamente nelle equazioni del moto che descrivono il sistema. La maggior parte di queste vengono poi riassunte in una forma di spazio di stato in cui i parametri sono costanti fisiche sconosciute nella descrizione. Il processo di identificazione consiste quindi nella stima di queste costanti.
- *Black-box*: quando non si dispone di informazioni sufficienti per definire a priori la forma della non linearità si usano ad esempio modelli NARX/NARMAX, reti neurali, modelli a funzioni di base. In questo caso i parametri non hanno un significato fisico immediato e servono essenzialmente

ad adattare il modello ai dati. I vantaggi principali sono la grande flessibilità e la capacità di descrivere fenomeni complessi, mentre uno svantaggio è che questi modelli richiedono in genere quantità maggiori di dati.

- *Modelli ibridi*: in cui una parte della dinamica è descritta da un modello strutturale e la non linearità è rappresentata tramite blocchi statici o funzioni polinomiali.

La terza fase, quella di *stima dei parametri*, è il cuore dell'identificazione non lineare ed è quella su cui si concentra principalmente il lavoro svolto. Fissata una struttura di modello, si tratta di stimare il vettore di parametri  $\theta$  in modo che le predizioni del modello riproducano nel modo più fedele possibile i dati sperimentali, tenendo conto del rumore di misura e delle incertezze.

## 2.3 Tipologie di sistemi non lineari

Nella sezione precedente l'attenzione è stata rivolta agli aspetti metodologici dell'identificazione non lineare, con particolare riferimento alla scelta del modello e alle procedure di stima parametrica. Prima di applicare tali strumenti a casi reali, è però utile disporre di un quadro sintetico delle principali tipologie di non linearità che possono manifestarsi nelle strutture.

In questa sezione si propone una classificazione delle principali tipologie di non linearità rilevanti in dinamica, mettendo in evidenza le loro caratteristiche meccaniche e matematiche.

Nei test dinamici sui componenti meccanici, le forme di non linearità che si incontrano più frequentemente sono riconducibili, in prima approssimazione, a effetti di rigidità e smorzamento polinomiali, giochi, impatti, attrito e fenomeni di saturazione. Nella pratica queste non linearità sono spesso dipendenti dall'ampiezza, dalla velocità e, talvolta, dalla frequenza della risposta. Tuttavia, ai fini dell'analisi e dell'identificazione, è usuale ricondurle a modelli semplificati in cui il contributo non lineare è espresso come una forza di smorzamento  $f_d(\dot{y})$  e/o di rigidità  $f_s(y)$  aggiunta all'equazione del moto di un oscillatore SDOF o di un sistema multigrado (MDOF). L'equazione del moto di un sistema a  $n$  gradi di libertà, in cui vi siano  $J$  non linearità localizzate, può essere scritta nella forma [5]:

$$[m]\{\ddot{y}(t)\} + [c]\{\dot{y}(t)\} + [k]\{y(t)\} + \sum_{j=1}^J [A_j]\{y_j(t)\} = \{f(t)\}$$

Eq. 2.7

dove il termine non lineare è espresso dalla somma di  $J$  componenti, ciascuna delle quali dipende da un vettore non lineare  $\{y_j(t)\}$  e una matrice di coefficienti  $[A_j]$ . Tali modelli elementari consentono di rappresentare in modo compatto il legame forza–spostamento o forza–velocità associato alle diverse non linearità e di studiarne l'effetto sulle funzioni di risposta in frequenza, che possono mostrare distorsioni significative se tali fenomeni non vengono riconosciuti.

### 2.3.1 Rigidezza cubica

Un caso molto studiato è quello della rigidezza cubica, dove la caratteristica forza–spostamento ha la seguente forma:

$$f_s(y) = ky + k_3y^3$$

Eq. 2. 8

Il coefficiente  $k_3$  può assumere sia valori positivi che negativi. Se  $k_3 > 0$ , ad alti livelli di eccitazione, la forza di ripristino sarà maggiore di quella prevista dal solo termine lineare. L'entità di questo eccesso aumenterà all'aumentare del livello di forzante e infatti, per questo motivo, tali sistemi hanno una caratteristica di indurimento (*hardening*). Se  $k_3 < 0$ , la rigidezza effettiva diminuisce all'aumentare del livello di eccitazione e tali sistemi sono definiti come ammorbidenti (*softening*). Si noti che i sistemi cubici ammorbidenti non sono fisici, nel senso che la forza di ripristino cambia segno a una certa distanza dall'equilibrio e inizia a spingere il sistema verso l'infinito. I sistemi con tali caratteristiche presentano sempre termini polinomiali di ordine superiore nella rigidezza, con coefficienti positivi che prevalgono ad alti livelli e ne garantiscono la stabilità [6].

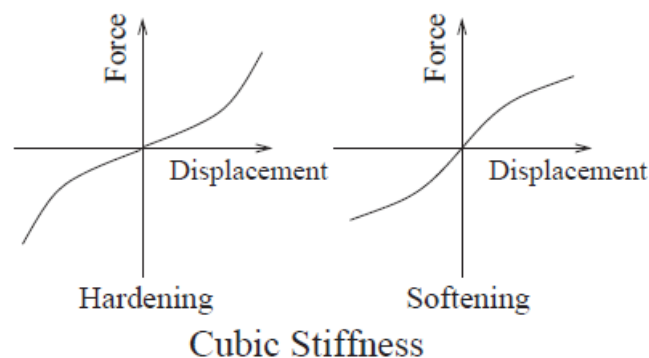


Figura 3: Non linearità strutturale di tipo cubica [6]

L'equazione del moto dell'oscillatore SDOF con smorzamento lineare  $c$  e rigidzze  $k$  e  $k_3$  è chiamata equazione di Duffing [6]:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky + k_3y^3 = f(t)$$

*Eq. 2. 9*

che rappresenta uno dei modelli non lineari più utilizzati in ingegneria, perché pur essendo molto semplice è in grado di riprodurre numerosi fenomeni tipici dei sistemi strutturali non lineari.

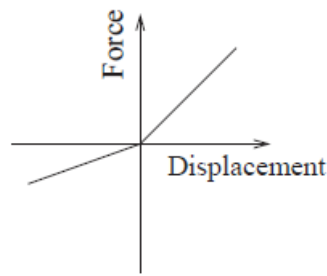
### 2.3.2 Rigidezza o smorzamento bilineare

Un'altra forma semplice ma molto diffusa di non linearità è la rigidezza bilineare, in cui la pendenza della caratteristica forza–spostamento cambia al passaggio per una certa posizione (tipicamente l'equilibrio). In questo caso, la caratteristica di rigidezza ha la forma:

$$f_s(y) = \begin{cases} k_1y & \text{se } y > 0 \\ k_2y & \text{se } y < 0 \end{cases}$$

*Eq. 2. 10*

dove  $k_1$  e  $k_2$  sono due costanti di rigidezza diverse. La struttura si comporta quindi come una molla lineare con una certa rigidezza per spostamenti positivi e con una rigidezza differente per spostamenti negativi. L'esempio più estremo di un sistema bilineare è l'oscillatore d'impatto, in cui  $k_1 = 0$  e  $k_2 = \infty$ . Tali sistemi possono mostrare un comportamento estremamente complesso con bruschi cambiamenti di pendenza nella risposta e possibili fenomeni di impatto ripetuto. Un sistema che si avvicina a un sistema di smorzamento bilineare è l'ammortizzatore o lo smorzatore standard per autoveicoli, progettato per avere diverse costanti di smorzamento in compressione e in estensione.



### Bilinear Stiffness

Figura 4: Non linearità strutturale di tipo bilineare [6]

### 2.3.3 Rigidezza lineare a tratti

La forma della funzione di rigidezza in questo caso è:

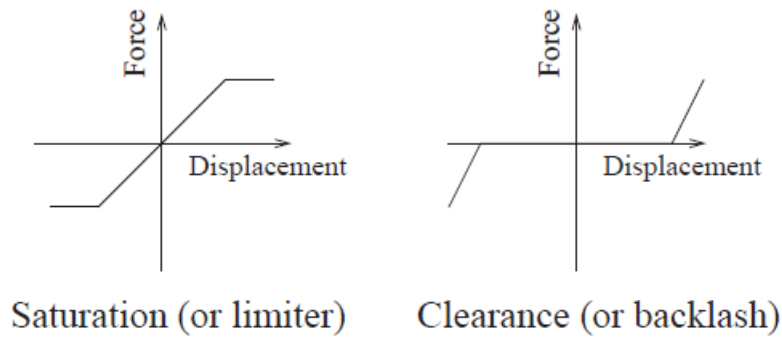
$$f_s(y) = \begin{cases} k_2 y + (k_1 - k_2) & y > d \\ k_1 y & |y| < d \\ k_2 y - (k_1 - k_2)d & y < -d \end{cases}$$

Eq. 2. 11

dove  $k_1$  è la rigidezza “centrale”, valida per piccoli spostamenti  $|y| < d$ , mentre  $k_2$  è la rigidezza che si manifesta al di sopra della soglia  $\pm d$ . In questo modo la caratteristica è costituita da tre tratti rettilinei continui: vicino alla posizione di equilibrio il sistema si comporta come una molla lineare con rigidezza  $k_1$ , mentre oltre la soglia, la pendenza cambia e la rigidezza effettiva diventa  $k_2$ . A seconda del rapporto tra  $k_1$  e  $k_2$  si possono modellare comportamenti indurenti o ammorbidenti al crescere dell’ampiezza dello spostamento. Diversi tipi di non linearità pratiche possono essere ricondotti a questa forma:

- La saturazione (*limiter*) si ottiene ponendo  $k_2 = 0$ . Al di fuori dell’intervallo  $|y| < d$  la forza di ripristino rimane pressoché costante e la caratteristica presenta due rami quasi orizzontali.
- La *clearance (backlash)* corrisponde invece al caso  $k_1 = 0$ , in cui la rigidezza è nulla in un intorno dell’equilibrio e diventa  $k_2$  solo quando lo spostamento supera la soglia  $\pm d$ .

In dinamica strutturale non linearità di tipo lineare a tratti possono derivare, ad esempio, dalla presenza di finecorsa meccanici, giochi in giunti o cuscinetti.



*Figura 5: Non linearità strutturale di tipo a tratto [6]*

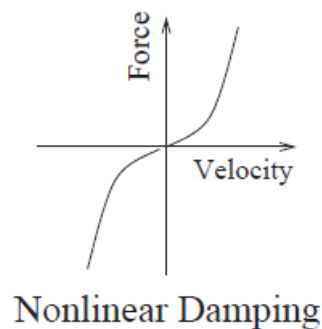
### 2.3.4 Smorzamento non lineare

La forma più comune di smorzamento polinomiale è quadratica:

$$f_d(\dot{y}) = c_2 \dot{y} |\dot{y}|$$

*Eq. 2. 12*

in cui la forza dissipativa dipende in modo polinomiale dalla velocità (il termine in valore assoluto serve a garantire che la forza sia sempre opposta alla velocità). A differenza dello smorzamento viscoso lineare ( $f_d = c_1 \dot{y}$ ), l'intensità della forza cresce più rapidamente con l'ampiezza della velocità, rendendo lo smorzamento particolarmente efficace ai grandi livelli di eccitazione.



*Figura 6: Non linearità strutturale di tipo dissipativo con smorzamento [6]*

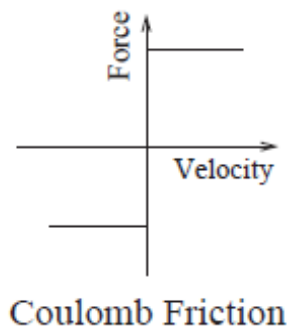
### 2.3.5 Attrito di Coulomb

Un'ulteriore forma di smorzamento non lineare è l'attrito di Coulomb, in cui la forza dissipativa è approssimata come costante in modulo ed è sempre opposta al verso del moto:

$$f_d(\dot{y}) = c_F \text{sgn}(\dot{y})$$

*Eq. 2.13*

dove  $c_F$  rappresenta il valore della forza di attrito e  $\text{sgn}(\dot{y})$  è la funzione segno. La caratteristica forza-velocità risulta quindi costituita da due rami quasi orizzontali di uguale modulo e segno opposto. Questo tipo di non linearità è tipico di tutte le situazioni in cui è presente movimento relativo tra superfici a contatto, ad esempio in giunti bullonati, appoggi, connessioni smontabili. In questo tipo di struttura, l'attrito si verifica spesso in combinazione con le non linearità di gioco. Una caratteristica peculiare dell'attrito di Coulomb è che i suoi effetti risultano più marcati ai bassi livelli di eccitazione mentre a livelli di eccitazione più elevati, l'attrito si "interrompe" e il sistema si comporta in modo quasi lineare.



*Figura 7: Non linearità strutturale di tipo dissipativo con attrito [6]*



## 3 Identificazione non lineare con filtri Bayesiani

In questo capitolo si introducono i filtri Bayesiani, largamente presenti in letteratura, usati principalmente per l'approccio all'identificazione di sistemi dinamici non lineari, nell'elaborazione dei segnali e nella teoria del controllo.

L'idea di base consiste nel descrivere lo stato del sistema come una variabile aleatoria e nell'aggiornare in modo ricorsivo la sua evoluzione man mano che nuove misure diventano disponibili. In questa prospettiva, l'identificazione degli stati e, se opportunamente formulata, dei parametri, viene posta come un problema di filtraggio Bayesiano:

“dato l'insieme delle misure acquisite fino all'istante  $k$ , si vuole ottenere la distribuzione a posteriori  $p(x_k|y_{1:k})$  dello stato  $x_k$ ”. L'insieme delle misure viene impiegato per la stima delle variabili indipendenti del sistema come funzione inversa, cercando di eliminare quanto più possibile il rumore, ossia gli errori dai quali le misure possono essere affette. Da ciò, infatti, deriva il termine filtro.

Per sistemi lineari affetti da rumore Gaussiano, la soluzione esatta di questo problema è fornita dal filtro di Kalman, che rappresenta il punto di partenza per lo sviluppo dei filtri Bayesiani non lineari quali l'*Extended Kalman Filter* (EKF) e l'*Unscented Kalman Filter*. Nel caso in cui la dinamica o la relazione di misura risultino appunto non lineari, la distribuzione a posteriori non è in generale calcolabile in forma chiusa e si deve ricorrere a delle approssimazioni con differenti compromessi tra accuratezza, robustezza numerica e complessità computazionale.

Nel seguito si richiama brevemente la formulazione del filtro di Kalman a tempo discreto per il caso lineare (Paragrafo 3.1), si presentano quindi le due varianti non lineari EKF (Paragrafo 3.2) e UKF (Paragrafo 3.3). Quest'ultimo verrà poi impiegato per l'identificazione del sistema non lineare analizzato nei capitoli successivi.

### 3.1 Kalman Filter

Nel seguito si introduce il filtro di Kalman nel caso discreto e lineare, che costituisce il riferimento teorico essenziale per comprendere le estensioni non lineari esposte nei paragrafi successivi. Il filtro di Kalman nasce dall'idea di propagare nel tempo la media e la covarianza dello stato di un sistema dinamico, aggiornandole ogni volta che una misura diventa disponibile.

La derivazione del filtro si basa su un modello di sistema lineare affetto da rumore bianco Gaussiano nei processi e nelle misure. In questo contesto, la stima dello stato coincide con la media della sua distribuzione a posteriori, mentre la covarianza ne quantifica l'incertezza. Il filtro realizza quindi un algoritmo ricorsivo che combina in modo ottimale le informazioni provenienti dal modello e dalle osservazioni,

minimizzando la varianza dell'errore di stima.

Per lo sviluppo della trattazione teorica del filtro, è stato preso come riferimento [7].

Il filtro di Kalman opera su un modello del sistema espresso in forma di spazio di stato discreta nel tempo:

$$\begin{aligned}x_k &= F_{k-1}x_{k-1} + G_{k-1}u_{k-1} + w_{k-1} \\y_k &= H_k x_k + v_k\end{aligned}$$

Eq. 3.1

dove la prima equazione della 3.1 è detta equazione di stato mentre la seconda è l'equazione di misura. I termini che compongono le seguenti equazioni sono:

- $u_k$  è il vettore di ingresso. Rappresenta gli *input* agenti sul sistema e che si assumono noti, perché imposti o misurati (forze esterne, tensioni applicate, comandi di controllo, ecc.).
- $y_k$  è il vettore di uscita. Rappresenta le quantità che il sensore effettivamente misura e che vengono fornite al filtro di Kalman.
- $F_k$  è la matrice di transizione di stato. Descrive come lo stato evolve da un istante al successivo in assenza di ingresso, cioè come  $x_k$  dipende da  $x_{k-1}$ . È determinata dalla dinamica del sistema (ad esempio dalla discretizzazione del modello continuo).
- $G_k$  è la matrice di ingresso o di controllo. Descrive come l'ingresso  $u_k$  influenza l'evoluzione dello stato. Se un certo ingresso non agisce su una componente dello stato, l'elemento corrispondente di  $G_k$  è nullo.
- $H_k$  è la matrice di misura o di osservazione. Mette in relazione lo stato con le grandezze misurate: indica quali componenti di  $x_k$  vengono osservate e come contribuiscono a formare il vettore delle uscite  $y_k$ . Se, ad esempio, si misura solo una parte dello stato,  $H_k$  conterrà 1 nelle posizioni delle componenti misurate e 0 altrove.
- $w_k$  è il rumore di processo. Rappresenta le incertezze sul modello (disturbi non modellati, approssimazioni, ecc.).
- $v_k$  è il rumore di misura. Rappresenta gli errori introdotti dai sensori.

I processi  $\{w_k\}$  e  $\{v_k\}$  sono rumori bianchi, a media nulla, indipendenti tra di loro e con matrici di covarianze note rispettivamente denominate  $Q_k$  e  $R_k$ :

$$\begin{aligned}
w_k &\sim (0, Q_k) \\
v_k &\sim (0, R_k) \\
\mathbb{E}[w_k w_j^T] &= Q_k \delta_{k-j} \\
\mathbb{E}[v_k v_j^T] &= R_k \delta_{k-j} \\
\mathbb{E}[v_k w_j^T] &= 0
\end{aligned}$$

Eq. 3. 2

dove  $\delta_{k-j}$  è la funzione di Kronecker, definita come segue:

$$\begin{cases} \delta_{k-j} = 1 & \text{se } k = j \\ \delta_{k-j} = 0 & \text{se } k \neq j \end{cases}$$

Eq. 3. 3

L'obiettivo è stimare lo stato  $x_k$  utilizzando il modello e le misure disponibili  $y_k$  fino all'istante  $k$ . Se si suppone di avere tutte le misure disponibili fino all'istante  $k$ , è possibile effettuare e prevedere la forma della stima dello stato del sistema  $x_k$ , denominata stima a posteriori  $\hat{x}_k^+$ , condizionata da tutte le misure disponibili fino all'istante  $k$  applicando la definizione di valore atteso:

$$\hat{x}_k^+ = \mathbb{E}[x_k | y_1, y_2, \dots, y_k]$$

Eq. 3. 4

In modo analogo, se non si hanno a disposizione le misurazioni fino all'istante  $k$  (escluso), è possibile formulare una stima a priori del sistema, denominata con  $\hat{x}_k^-$ , condizionata da tutte le misurazioni prima dell'istante  $k$ :

$$\hat{x}_k^- = \mathbb{E}[x_k | y_1, y_2, \dots, y_{k-1}]$$

Eq. 3. 5

Se invece si posseggono tutte le misurazioni dopo l'istante  $k$ , è possibile calcolare una stima dello stato  $x_k$ , chiamata *smoothed*, condizionata da tutte le misurazioni disponibili:

$$\hat{x}_{k|k+N} = \mathbb{E}[x_k | y_1, y_2, \dots, y_k, \dots, y_{k+N}]$$

Eq. 3. 6

dove  $N$  è un numero intero positivo il cui valore dipende dal problema specifico che si sta risolvendo. Se si vuole trovare la migliore previsione dello stato con più di un passo temporale in anticipo, rispetto alle misurazioni disponibili, occorre formulare una stima “predetta”. Un modo per formulare la stima dello stato predetto è calcolare il valore atteso di  $x_k$  condizionato a tutte le misurazioni disponibili:

$$\hat{x}_{k|k-M} = \mathbb{E}[x_k | y_1, y_2, \dots, y_{k-M}]$$

Eq. 3. 7

La relazione tra queste stime è rappresentata in Figura 8:

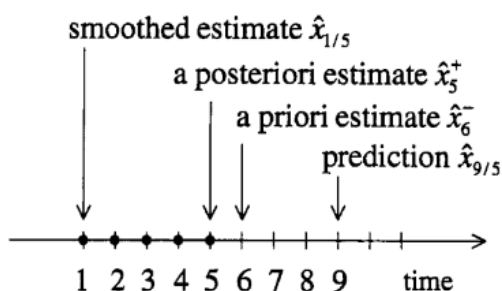


Figura 8: Linea temporale che mostra la relazione tra le stime di stato a posteriori, a priori, lisce e previste [7]

Adesso si definisce la covarianza dell'errore sulla stima con  $P_k$ ,  $P_k^-$  denota la covarianza dell'errore sulla stima dello stato  $\hat{x}_k^-$  e analogamente si fa per  $P_k^+$ :

$$P_k^- = \mathbb{E}[(x_k - \hat{x}_k^-)(x_k - \hat{x}_k^-)^T]$$

$$P_k^+ = \mathbb{E}[(x_k - \hat{x}_k^+)(x_k - \hat{x}_k^+)^T]$$

Eq. 3. 8

L'algoritmo inizia assumendo una stima iniziale dello stato, indicata con  $\hat{x}_0^+$ , che rappresenta la migliore informazione disponibile su  $x_0$ . A partire da tale valore, il filtro deve fornire una previsione dello stato al passo successivo. Poiché la previsione corrisponde al valore atteso dello stato  $\hat{x}_0^+ = \mathbb{E}(x_0)$  (Eq. 3.4), e considerando che il

modello dinamico lineare definisce la propagazione della sua media, la stima a priori al tempo  $k = 1$  si ottiene applicando il modello di transizione:

$$\hat{x}_1^- = F_0 \hat{x}_0^+ + G_0 u_0$$

Eq. 3. 9

L'equazione 3.9 mostra in modo esplicito come si ricava la predizione del primo passo. Lo stesso ragionamento può essere generalizzato, ottenendo l'espressione ricorsiva valida per ogni istante temporale  $k$ :

$$\hat{x}_k^- = F_{k-1} \hat{x}_{k-1}^+ + G_{k-1} u_{k-1}$$

Eq. 3. 10

chiamata *time-update equation* della stima dello stato. Tra un istante  $(k-1)^+$  e l'istante  $k^-$ , la stima si propaga esattamente come si propaga la media dello stato secondo il modello dinamico. A questo punto è necessario determinare anche l'equazione di propagazione della covarianza dell'errore di stima. Si indica con  $P_0^+$  la covarianza associata alla stima iniziale. Se lo stato iniziale fosse perfettamente noto si avrebbe  $P_0^+ = 0$ , mentre al contrario, un'incertezza molto elevata sarebbe rappresentata da un valore molto grande di  $P_0^+$ . In generale, la covarianza iniziale è definita come:

$$P_0^+ = \mathbb{E}[(x_0 - \hat{x}_0^+)(x_0 - \hat{x}_0^+)^T]$$

Eq. 3. 11

Utilizzando le proprietà di propagazione delle covarianze per sistemi lineari discreti, la covarianza a priori per il passo successivo è data da:

$$P_1^- = F_0 P_0^+ F_0^T + Q_0$$

Eq. 3. 12

Anche in questo caso, l'equazione 3.12 può essere generalizzata nella forma ricorsiva:

$$P_k^- = F_{k-1} P_{k-1}^+ F_{k-1}^T + Q_{k-1}$$

Eq. 3. 13

questa è la *time-update equation* della covarianza in cui la diffusione dell'incertezza segue la dinamica lineare e include l'effetto del rumore di processo.

Una volta disponibile la nuova misura  $y_k$ , il filtro deve combinare la predizione  $(\hat{x}_k^-, P_k^-)$  con l'informazione fornita dal sensore, ottenendo così la stima a posteriori. Il peso assegnato alla misura rispetto al modello è determinato dal guadagno di Kalman, definito come:

$$K_k = P_k^- H_k^T (H_k P_k^- H_k^T + R_k)^{-1}$$

Eq. 3. 14

Questo guadagno bilancia l'incertezza della predizione e quella della misura. La stima a posteriori dello stato diventa quindi:

$$\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + K_k (y_k - H_k \hat{x}_k^-)$$

Eq. 3. 15

Infine, la covarianza a posteriori è aggiornata tramite:

$$P_k^+ = (I - K_k H_k) P_k^-$$

Eq. 3. 16

Le espressioni precedenti costituiscono le *measurement-update equations*, ossia la fase di correzione del filtro di Kalman. Durante questa fase la stima viene affinata grazie alla misura, mentre la covarianza si riduce, riflettendo l'aumento di informazione disponibile.

Il filtro di Kalman può essere formulato come un algoritmo ben definito nelle seguenti fasi:

1. Definizione delle equazioni del modello dinamico del sistema su cui è applicato il filtro (Eq. 3.1 e 3.2).
2. Inizializzazione del filtro (Eq. 3.4 e 3.11).
3. Loop di predizione (*'time update'*) e correzione (*'measurement update'*): nella prima fase, le equazioni di interesse propagano in avanti la stima e la relativa incertezza dello stato sulla base del modello dinamico mentre nella seconda fase, quando vi è la nuova misura  $y_k$ , viene calcolato il guadagno di Kalman e di conseguenza viene aggiornata la stima e la covarianza dello stato.

In sintesi, l'equazione di stato descrive come il sistema si "muove" nel tempo sotto l'effetto dell'ingresso e dei disturbi, mentre l'equazione di misura descrive come lo

stato interno viene visto dai sensori. Il filtro di Kalman utilizza queste due equazioni per combinare in modo ottimale il modello (tramite  $F_k$  e  $G_k$ ) e le misure (tramite  $H_k$ ), con l'obiettivo di ottenere una stima ricorsiva dello stato  $x_k$  e della sua incertezza.

### 3.1.1 Principali proprietà del filtro di Kalman

Un aspetto importante da valutare è innanzitutto l'errore di stima, definito come differenza tra lo stato reale e lo stato stimato  $\tilde{x}_k = x_k - \hat{x}_k$ . Poiché lo stato è descritto tramite un modello stocastico, anche l'errore è una variabile aleatoria e di conseguenza il problema della stima viene formulato come la ricerca di un filtro che minimizzi una misura media di tale errore. In particolare, si considera il valor medio del quadrato pesato dell'errore,  $\min \mathbb{E}[\tilde{x}_k^T S_k \tilde{x}_k]$ , dove  $S_k$  è una matrice definita positiva scelta dall'utente. La matrice di peso consente di attribuire importanza diversa alle singole componenti dello stato, ma l'obiettivo rimane quello di ridurre il più possibile la potenza media dell'errore di stima.

Se il rumore di processo e il rumore di misura sono Gaussiani, a media nulla, bianchi e reciprocamente non correlati, il filtro di Kalman fornisce la soluzione ottima al problema sopra descritto (Par. 3.1): la stima prodotta  $\hat{x}_k$  è quella che minimizza il valore atteso dell'errore quadratico e risulta ottimale nel senso del *minimum mean square error* (MMSE). Se invece i rumori non sono Gaussiani, ma rimangono bianchi e non correlati, il filtro perde la sua efficacia ma mantiene un'importante proprietà: tra tutti gli stimatori lineari, è quello che garantisce il minimo errore quadratico medio, cioè il miglior stimatore lineare possibile. In presenza di rumori correlati il filtro standard non è più direttamente applicabile, ma le equazioni possono essere opportunamente modificate per tener conto anche di questi effetti [8].

Un altro concetto fondamentale è quello dell'innovazione, definita come differenza tra la misura e la sua predizione ( $y_k - H_k \hat{x}_k^-$ ). Questa quantità rappresenta la nuova informazione contenuta nella misura corrente rispetto a quanto già previsto dal modello; successivamente il filtro la utilizza, pesata tramite il guadagno di Kalman, per aggiornare la stima dello stato. In condizioni ideali, l'innovazione risulta un processo bianco, e questa proprietà può essere sfruttata per valutare la bontà del modello e delle ipotesi sui rumori. Si noti che le prestazioni del filtro dipendono in modo critico dalla corretta scelta delle covarianze  $Q$  e  $R$ , e più in generale, dalla validità del modello dinamico, infatti se tali quantità sono scelte in modo non realistico o se il modello è significativamente errato, la stima può perdere accuratezza e in alcuni casi può portare alla divergenza.

Le limitazioni del filtro di Kalman lineare in presenza di non linearità motivano l'introduzione delle sue estensioni più comuni, l'Extended Kalman Filter e l'Unscented Kalman Filter, che non sono più esatte ma forniscono approssimazioni pratiche della soluzione di filtraggio non lineare, le quali vengono descritte nei paragrafi successivi.

## 3.2 Extended Kalman Filter

Il filtro di Kalman discusso nel paragrafo 3.1 è rigorosamente valido solo per sistemi lineari affetti da rumori Gaussiani. Come ben noto, nella pratica comune, i sistemi ingegneristici raramente sono lineari, anzi, la maggior parte dei modelli presenta non linearità strutturali. Dunque, nella maggior parte dei casi, si approssima il comportamento del sistema come se fosse lineare soltanto in un intorno ristretto di un punto di lavoro e in tali condizioni le tecniche di stima lineari forniscono risultati soddisfacenti, ma l'accuratezza degrada rapidamente non appena il sistema si allontana dal comportamento ideale. Quando le non linearità non possono più essere trascurate e diventano rilevanti per il caso in esame, è necessario ricorrere a metodi di filtraggio non lineari. A differenza del caso lineare, per il quale il filtro di Kalman fornisce una soluzione esatta in forma chiusa e ben definita, il filtraggio non lineare è un ambito molto più complesso e meno affermato dal punto di vista teorico, infatti non esiste ancora oggi un algoritmo unico che fornisca la soluzione ottimale del problema per qualunque modello non lineare. Per questo motivo, negli ultimi decenni sono state proposte diverse estensioni del filtro di Kalman, che forniscono approssimazioni più o meno accurate della soluzione Bayesiana esatta.

Tra queste, l'Extended Kalman Filter rappresenta la tecnica storicamente più utilizzata e ancora oggi una delle più diffuse. L'idea di base consiste nel sostituire il sistema non lineare con un modello lineare ottenuto mediante la linearizzazione delle equazioni di stato e di misura attorno alla stima corrente dello stato (Paragrafo 3.2.1). In questo modo è possibile applicare, ad ogni passo temporale, le stesse equazioni del filtro di Kalman lineare utilizzando le Jacobiane del modello non lineare al posto delle matrici costanti del caso lineare. L'EKF consente quindi di affrontare problemi di stima in presenza di non linearità con un costo computazionale relativamente contenuto, al prezzo però di introdurre un errore di approssimazione che può diventare significativo in presenza di forti non linearità o di modelli poco accurati. Nei paragrafi seguenti vengono presentati in dettaglio sia la linearizzazione del filtro sia il modello non lineare con le equazioni ricorsive che lo compongono.

### 3.2.1 Linearizzazione del filtro di Kalman

Si consideri un sistema dinamico non lineare a tempo discreto dal seguente modello nello spazio dello stato [9]:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= f(x_k, u_k) + w_k \\ y_k &= h(x_k) + v_k\end{aligned}$$

*Eq. 3.17*

dove  $x_k$  è il vettore di stato,  $u_k$  è l'ingresso noto,  $y_k$  è il vettore delle misure, mentre  $w_k$  e  $v_k$  rappresentano rispettivamente il rumore di processo e di misura, modellati come rumori bianchi a media nulla con covarianze  $Q_k$  e  $R_k$ . In presenza di non linearità nelle funzioni  $f(\cdot)$  e  $h(\cdot)$ , il filtro di Kalman lineare introdotto nel Paragrafo 3.1 non è direttamente applicabile, poiché le ipotesi di linearità del modello non sono soddisfatte.

Un approccio classico per poter comunque sfruttare la struttura del filtro di Kalman consiste nel linearizzare il modello non lineare attorno a una traiettoria di riferimento  $\bar{x}_k$  [10]. Definendo le deviazioni rispetto a tale traiettoria come:

$$\Delta x_k = x_k - \bar{x}_k$$

$$\Delta y_k = y_k - \bar{y}_k$$

*Eq. 3. 18*

ed effettuando uno sviluppo di Taylor di primo ordine delle funzioni  $f(\cdot)$  e  $h(\cdot)$  attorno al punto  $\bar{x}_k$ , si ottiene il seguente modello approssimato:

$$\Delta x_{k+1} \approx F_k \Delta x_k + w_k$$

$$\Delta y_k \approx H_k \Delta x_k + v_k$$

*Eq. 3. 19*

dove  $F_k$  e  $H_k$  sono le matrici Jacobiane di  $f(\cdot)$  e  $h(\cdot)$  rispetto allo stato, valutate lungo la traiettoria nominale:

$$F_k = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}_k, u=u_k}$$

$$H_k = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}_k}$$

*Eq. 3. 20*

Il sistema così ottenuto è lineare nelle variabili di deviazione  $\Delta x_k$  e  $\Delta y_k$  e soddisfa le ipotesi per l'applicazione del filtro di Kalman discreto. L'algoritmo opera quindi sulle deviazioni rispetto alla traiettoria di riferimento, fornendo una stima  $\widehat{\Delta x}_k$ . La stima dello stato originale si ricava come:

$$\hat{x}_k = \bar{x}_k + \widehat{\Delta x}_k$$

Eq. 3. 21

Questa procedura è indicata come filtro di Kalman linearizzato. La sua accuratezza dipende dalla bontà della traiettoria di riferimento e dalla limitatezza delle deviazioni: se il sistema si discosta significativamente dal punto di linearizzazione, l'approssimazione di primo ordine può risultare insufficiente e la qualità della stima degrada. Nella pratica, la traiettoria nominale non è quasi mai nota con precisione oppure dipende essa stessa da parametri incerti. Una soluzione naturale, proposta nella letteratura sul filtraggio non lineare, consiste nel sostituire la traiettoria di riferimento con la stima corrente dello stato fornita dal filtro. Ad ogni passo temporale, il modello viene linearizzato attorno alla stima a priori e le equazioni del filtro di Kalman vengono applicate al sistema linearizzato. In questo modo si ottiene un algoritmo ricorsivo in cui la stima determina il punto di linearizzazione e, a sua volta, il modello linearizzato determina l'aggiornamento della stima. Tale procedura porta alla formulazione del filtro di Kalman esteso a tempo discreto, descritta in dettaglio nel paragrafo seguente.

### 3.2.2 Formulazione teorica dell'Extended Kalman Filter a tempo discreto

L'Extended Kalman Filter rappresenta una generalizzazione del filtro di Kalman lineare a sistemi non lineari, ottenuta applicando l'idea di linearizzazione in modo ricorsivo attorno alla stima corrente dello stato. Si esegue la discretizzazione della dinamica del modello [11] e si considera nuovamente il seguente modello non lineare discreto:

$$x_k = f_{k-1}(x_{k-1}, u_{k-1}, w_{k-1})$$

$$y_k = h_k(x_k, v_k)$$

$$w_k \sim (0, Q_k)$$

$$v_k \sim (0, R_k)$$

Eq. 3. 22

L'obiettivo è stimare lo stato  $x_k$  e la relativa covarianza a partire dalle misure  $y_k$ , aggiornate man mano che nuove osservazioni diventano disponibili. Il primo passo consiste nel linearizzare l'equazione di stato con l'obiettivo di ottenere la stima a priori

dello stato  $x_k$  al tempo  $k$ ; per far ciò, si esegue uno sviluppo di Taylor del primo ordine della funzione di stato rispetto  $x_{k-1}$  e  $w_{k-1}$ , attorno al punto  $(\hat{x}_{k-1}^+, u_{k-1}, 0)$ :

$$\begin{aligned}
x_k &= f_{k-1}(\hat{x}_{k-1}^+, u_{k-1}, 0) + \left. \frac{\partial f_{k-1}}{\partial x} \right|_{\hat{x}_{k-1}^+} (x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}^+) + \left. \frac{\partial f_{k-1}}{\partial w} \right|_{\hat{x}_{k-1}^+} w_{k-1} = \\
&= f_{k-1}(\hat{x}_{k-1}^+, u_{k-1}, 0) + F_{k-1}(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}^+) + L_{k-1}w_{k-1} = \\
&= F_{k-1}x_{k-1} + [f_{k-1}(\hat{x}_{k-1}^+, u_{k-1}, 0) - F_{k-1}\hat{x}_{k-1}^+] + L_{k-1}w_{k-1} = \\
&= F_{k-1}x_{k-1} + \tilde{u}_{k-1} + \tilde{w}_{k-1}
\end{aligned}$$

Eq. 3. 23

dove i segnali  $\tilde{u}_k$  e  $\tilde{w}_k$  sono definiti come segue:

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_k &= f_k(\hat{x}_k^+, u_k, 0) - F_k\hat{x}_k^+ \\
\tilde{w}_k &\sim (0, L_k Q_k L_k^T)
\end{aligned}$$

Eq. 3. 24

Analogamente, si esegue una linearizzazione dell'equazione di misura:

$$\begin{aligned}
y_k &= h_k(\hat{x}_k^-, 0) + \left. \frac{\partial h_k}{\partial x} \right|_{\hat{x}_k^-} (x_k - \hat{x}_k^-) + \left. \frac{\partial h_k}{\partial v} \right|_{\hat{x}_k^-} v_k = \\
&= h_k(\hat{x}_k^-, 0) + H_k(x_k - \hat{x}_k^-) + M_k v_k = \\
&= H_k x_k + [h_k(\hat{x}_k^-, 0) - H_k \hat{x}_k^-] + M_k v_k = H_k x_k + z_k + \tilde{v}_k
\end{aligned}$$

Eq. 3. 25

dove il segnale  $z_k$  e il rumore  $\tilde{v}_k$  sono definiti come segue:

$$\begin{aligned}
z_k &= h_k(\hat{x}_k^-, 0) - H_k \hat{x}_k^- \\
\tilde{v}_k &\sim (0, M_k R_k M_k^T)
\end{aligned}$$

Eq. 3. 26

Adesso, definite le due equazioni che compaiono in Eq. 3.26, che rappresentano rispettivamente lo spazio di stato lineare e la misura lineare, è possibile utilizzare le

classiche equazioni del filtro di Kalman (Paragrafo 3.1) per stimare lo stato, ottenendo questi risultati:

$$\begin{aligned}
 P_k^- &= F_{k-1} P_{k-1}^+ F_{k-1}^T + L_{k-1} Q_{k-1} L_{k-1}^T \\
 K_k &= P_k^- H_k^T (H_k P_k^- H_k^T + M_k R_k M_k^T)^{-1} \\
 \hat{x}_k^- &= f_{k-1}(\hat{x}_{k-1}^+, u_{k-1}, 0) \\
 z_k &= h_k(\hat{x}_k^-, 0) - H_k \hat{x}_k^- \\
 \hat{x}_k^+ &= \hat{x}_k^- + K_k (y_k - H_k \hat{x}_k^- - z_k) = \hat{x}_k^- + K_k [y_k - h_k(\hat{x}_k^-, 0)] \\
 P_k^+ &= (I - K_k H_k) P_k^-
 \end{aligned}$$

Eq. 3. 27

Di seguito si riporta uno pseudo algoritmo che descrive in maniera compatta le fasi del filtro esteso:

#### EKF Algorithm

Nota la dinamica del sistema e il modello di misura...

Input del modello:

$f_{k-1}(\cdot), h_k(\cdot)$  Funzioni non lineari

$Q_{k-1}, R_k$  Covarianze dei rumori

$\{u_k\}, \{y_k\}$  Ingressi e misure

Inizializzazione:

$\hat{x}_0^+ = E(x_0)$  Stima iniziale dello stato

$P_0^+ = E[(x_0 - \hat{x}_0^+)(x_0 - \hat{x}_0^+)^T]$  Matrice di covarianza iniziale

For k = 1, ..., N

$F_{k-1} = \left. \frac{\partial f_{k-1}}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_{k-1}^+, u=u_{k-1}, w=0}$  Linearizzazione della dinamica (calcolo Jacobiani)

$L_{k-1} = \left. \frac{\partial f_{k-1}}{\partial w} \right|_{x=\hat{x}_{k-1}^+, u=u_{k-1}, w=0}$

$\hat{x}_k^- = f_{k-1}(\hat{x}_{k-1}^+, u_{k-1}, 0)$  Prediction (stato e covarianza a priori)

$P_k^- = F_{k-1} P_{k-1}^+ F_{k-1}^T + L_{k-1} Q_{k-1} L_{k-1}^T$

$H_k = \left. \frac{\partial h_k}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_k^-, v=0}$  Linearizzazione della dinamica (calcolo Jacobiani)

$M_k = \left. \frac{\partial h_k}{\partial v} \right|_{x=\hat{x}_k^-, v=0}$

Fase di correzione (aggiornamento)

$S_k = H_k P_k^- H_k^T + M_k R_k M_k^T$  Matrice innovazione

$K_k = P_k^- H_k^T S_k^{-1}$  Guadagno di Kalman

$\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + K_k [y_k - h_k(\hat{x}_k^-, 0)]$  Stima dello stato a posteriori

$P_k^+ = (I - K_k H_k) P_k^-$  Covarianza a posteriori

End

Queste equazioni (Eq. 3.27) hanno la stessa struttura del filtro di Kalman lineare, ma le matrici  $F_k$  e  $H_k$  dipendono in modo non lineare dalla stima dello stato tramite le Jacobiane. Dal punto di vista teorico, l'EKF non è più ottimo nel senso MMSE, poiché la linearizzazione introduce un errore di modellazione e la distribuzione a posteriori dello stato non rimane, in generale, Gaussiana. Tuttavia, quando le non linearità non sono eccessivamente marcate e il modello è sufficientemente accurato, l'EKF fornisce prestazioni soddisfacenti con un costo computazionale contenuto, motivo per cui è ampiamente utilizzato nelle applicazioni reali.

Nonostante la larga diffusione, l'EKF presenta alcune limitazioni note in letteratura. Poiché è basato su una linearizzazione locale del modello, le prestazioni decadono in presenza di non linearità marcate e gli errori di approssimazione possono essere interpretati come errori di modello che, in casi sfavorevoli, conducono anche alla divergenza del filtro [8]. Inoltre, il metodo è limitato a modelli con rumori Gaussiani e funzioni di stato e misura differenziabili, il che richiede il calcolo esplicito delle matrici Jacobiane, operazione che può risultare complessa e soggetta a errori. Esempi numerici mostrano anche una forte sensibilità alla scelta del passo di campionamento e delle covarianze dei rumori: se i dati sono troppo rumorosi o scarsamente informativi, l'EKF può fornire stime inaccurate o instabili. Per affrontare questi problemi sono stati proposti filtri di ordine superiore e metodi alternativi, come l'UKF e il *Particle Filter* [12], che mirano a ridurre gli errori di linearizzazione a costo di una maggiore complessità computazionale. Nel paragrafo successivo verrà introdotto l'Unscented Kalman Filter, che adotta una strategia diversa per trattare le non linearità e supera alcuni dei limiti fisici dell'EKF.

### 3.3 Unscented Kalman Filter

Come discusso nel paragrafo precedente, le prestazioni dell'EKF possono degradare significativamente in presenza di non linearità marcate, poiché l'approccio si basa su una linearizzazione locale del modello. In tali condizioni, l'errore introdotto dalla linearizzazione può compromettere la corretta propagazione della media e della covarianza dello stato, fino a causare fenomeni di instabilità o divergenza della stima. Per superare questi limiti si ricorre all'Unscented Kalman Filter, che adotta una strategia concettualmente differente basata sulla propagazione statistica della distribuzione dello stato.

Il principio fondamentale dell'UKF è la cosiddetta *Unscented Transformation* (UT), che consente di propagare una variabile aleatoria Gaussiana attraverso una trasformazione non lineare senza ricorrere a sviluppi di Taylor. I *sigma points* vengono scelti in modo da riprodurre esattamente la media e la covarianza dello stato a priori e una volta propagati attraverso la dinamica e la funzione di misura non lineari, le statistiche dei nuovi punti forniscono una stima della media e della covarianza a posteriori.

Dal punto di vista numerico, l'UKF mantiene la stessa struttura del filtro di Kalman classico, articolata in una fase di predizione e una di aggiornamento della misura ma in entrambe le fasi, la propagazione dell'informazione statistica avviene tramite i *sigma points* anziché tramite matrici Jacobiane. Questa caratteristica rende l'UKF particolarmente adatto a modelli fortemente non lineari o non differenziabili e ne favorisce l'impiego in problemi di identificazione di sistemi non lineari e di stima di stati e parametri.

### 3.3.1 Unscented Transformation

Nei problemi di stima non lineari, una delle principali difficoltà consiste nella propagazione di una variabile aleatoria attraverso una trasformazione non lineare. Sia  $x$  una variabile aleatoria a valori reali con distribuzione Gaussiana, caratterizzata da media  $m$  e matrice di covarianza  $P$ , e sia data una trasformazione non lineare del tipo:

$$y = g(x)$$

Eq. 3. 28

In generale, anche se  $x$  è distribuita in modo Gaussiano, la variabile trasformata  $y$  non lo è. Tuttavia, in molti contesti di filtraggio Bayesiano e di identificazione di sistemi, si è interessati ad una approssimazione Gaussiana della distribuzione di  $y$ , descritta unicamente da media e covarianza.

L'*Unscented Transformation* nasce proprio da questa osservazione fondamentale: è spesso più semplice e accurato approssimare la trasformazione di una distribuzione di probabilità piuttosto che approssimare direttamente la funzione non lineare. In altre parole, invece di cercare una rappresentazione lineare di  $g(\cdot)$ , l'UT mira a stimare direttamente i primi due momenti della variabile trasformata  $y$ , sfruttando una rappresentazione deterministica della distribuzione di partenza.

L'idea centrale dell'UT consiste nel rappresentare la distribuzione Gaussiana di  $x$  mediante un insieme finito di punti deterministici, detti *sigma points*. Questi punti vengono successivamente propagati attraverso la trasformazione non lineare  $g(\cdot)$ , e le statistiche dei punti trasformati vengono utilizzate per ricostruire una stima della media e della covarianza di  $y$ . A differenza di un approccio Monte Carlo, in cui i campioni sono estratti casualmente, nell'UT i *sigma points* sono scelti in modo deterministico e il loro numero è fissato a priori. Essi sono selezionati in modo tale da preservare le principali caratteristiche statistiche della distribuzione di partenza, rendendo il metodo efficiente e riproducibile da un punto di vista computazionale. In Figura 9 si riporta un esempio dell'UT, dove una distribuzione inizialmente concentrata nello spazio dello stato (a) viene trasformata in modo non lineare in una distribuzione fortemente distorta e non Gaussiana (b). In tali condizioni, una semplice linearizzazione locale può fornire

una descrizione inadeguata della distribuzione trasformata, mentre un approccio basato sulla propagazione di punti rappresentativi della distribuzione consente di catturarne meglio le caratteristiche statistiche principali. In Figura 10 si riporta l'approssimazione Gaussiana ottenuta propagando i *sigma points* attraverso la non linearità, dove la media e la covarianza vengono stimate dai *sigma points* trasformati. La distribuzione reale è rappresentata dalla linea tratteggiata blu mentre la linea continua rossa rappresenta l'approssimazione.

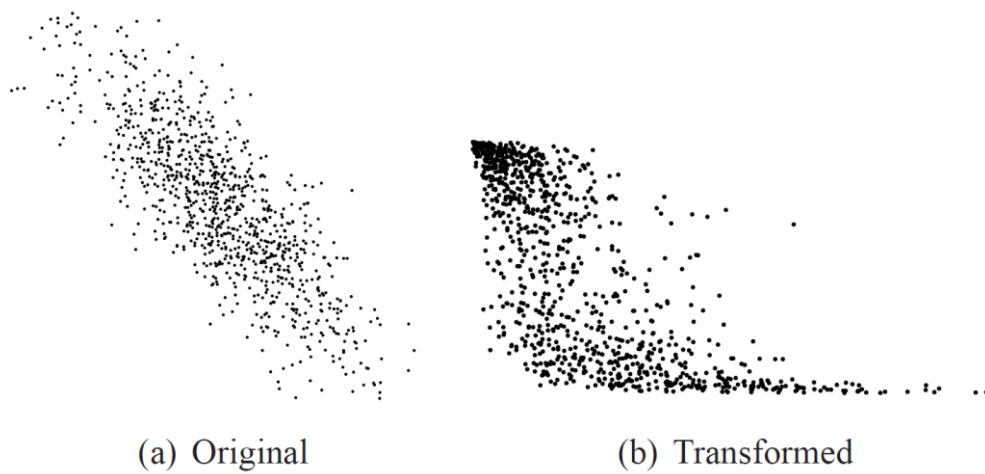


Figura 9: Esempio di applicazione di una trasformazione non lineare a una variabile casuale a sinistra, che produce la variabile casuale a destra [9]

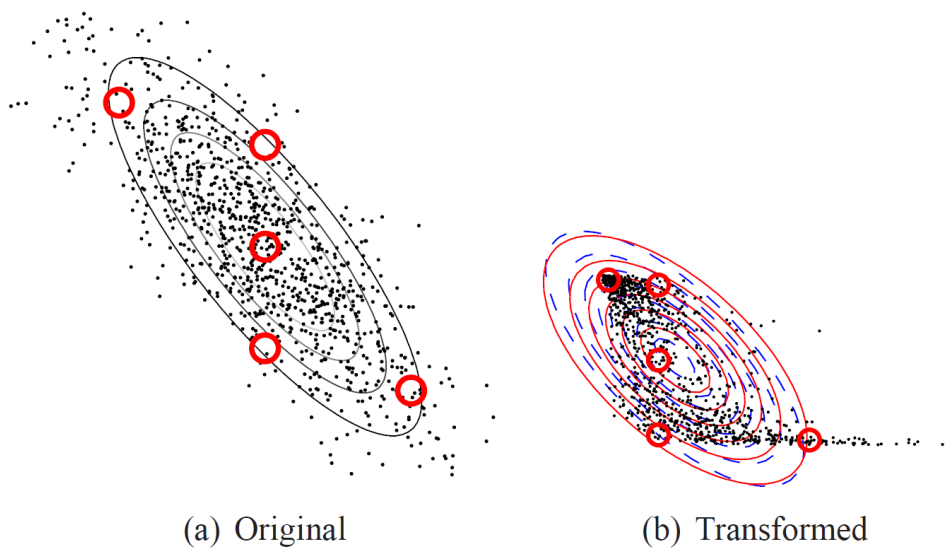


Figura 10: Illustrazione della Unscented Transformation basata sulla trasformazione della Fig.9 [9]

Sia dunque  $x \in \mathbb{R}^n$  una variabile aleatoria con distribuzione:

$$x \sim \mathcal{N}(m, P)$$

Eq. 3. 29

l'UT associa a tale distribuzione un insieme di  $2n + 1$  *sigma points*  $\chi^{(i)}$ , definiti come:

$$\begin{aligned}\chi^{(0)} &= m \\ \chi^{(i)} &= m + \sqrt{n + \lambda} [\sqrt{P}]_i \quad i = 1, \dots, n \\ \chi^{(i+n)} &= m - \sqrt{n + \lambda} [\sqrt{P}]_i \quad i = 1, \dots, n\end{aligned}$$

Eq. 3. 30

dove  $[\sqrt{P}]_i$  indica l' $i$ -esima colonna della radice matriciale di  $P$ , tipicamente ottenuta mediante una fattorizzazione di Cholesky [13], mentre  $\lambda$  è un parametro di scala che controlla la dispersione dei *sigma points* attorno alla media. Il parametro  $\lambda$  è definito come:

$$\lambda = \alpha^2(n + \kappa) - n$$

Eq. 3. 31

dove  $\alpha$  e  $\kappa$  sono parametri dell'algorithmo scelti dall'utente. In particolare,  $\alpha$  determina la dispersione dei *sigma points* attorno al valore medio dello stato. Generalmente è un piccolo valore positivo. I valori più piccoli corrispondono a *sigma points* più vicini allo stato medio. Il parametro di scala  $\kappa$  agisce come parametro di regolazione secondario, che di solito è impostato a 0. Valori più piccoli corrispondono a *sigma points* più vicini allo stato medio e la dispersione è proporzionale alla radice quadrata di  $\kappa$ . Un ulteriore parametro,  $\beta$ , viene introdotto per incorporare informazioni a priori sulla forma della distribuzione; per distribuzioni Gaussiane, una scelta ottimale comunemente adottata è  $\beta = 2$  [14].

Una volta definiti i *sigma points* nello spazio dello stato, essi vengono propagati attraverso la trasformazione non lineare:

$$y^{(i)} = g(\chi^{(i)}), i = 0, \dots, 2n$$

Eq. 3. 32

I punti  $y^{(i)}$  rappresentano un insieme deterministico di campioni nello spazio di uscita, che approssima la distribuzione della variabile trasformata  $y$ . La media e la covarianza di  $y$  vengono quindi approssimate come combinazioni pesate dei *sigma points* trasformati:

$$\mu_y \approx \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(m)} y^{(i)}$$

$$P_y \approx \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(c)} (y^{(i)} - \mu_y)(y^{(i)} - \mu_y)^T$$

Eq. 3. 33

dove  $W_i^{(m)}$  e  $W_i^{(c)}$  sono rispettivamente i pesi associati alla stima della media e della covarianza, definiti come:

$$W_0^{(m)} = \frac{\lambda}{n + \lambda}, W_0^{(c)} = \frac{\lambda}{n + \lambda} + (1 - \alpha^2 + \beta)$$

$$W_i^{(m)} = W_i^{(c)} = \frac{1}{2(n + \lambda)}, i = 1, \dots, 2n$$

Eq. 3. 34

Un aspetto rilevante dell'UT è che, per ingressi Gaussiani, essa consente di approssimare la media e la covarianza della variabile trasformata con un'accuratezza superiore rispetto alla linearizzazione di primo ordine. In particolare, è stato dimostrato che l'UT cattura esattamente i momenti fino al secondo ordine e fornisce una stima accurata dei momenti fino al terzo ordine nell'espansione di Taylor della trasformazione non lineare [15]. Questo risultato spiega perché, in molti casi pratici, l'approccio *Unscented* produca stime più accurate e stabili rispetto a metodi basati su linearizzazione locale.

L'Unscented Transformation costituisce il mattone fondamentale dell'Unscented Kalman Filter. Applicando l'UT in modo ricorsivo alle fasi di predizione e di aggiornamento della misura del filtro di Kalman, è possibile ottenere un algoritmo di stima che mantiene la struttura del filtro di Kalman classico, ma sostituisce le approssimazioni per linearizzazione con una propagazione statistica basata sui *sigma points*. La formulazione completa dell'UKF a tempo discreto viene presentata in modo dettagliato nel paragrafo seguente.

### 3.3.2 Formulazione teorica dell'Unscented Kalman Filter a tempo discreto

In questa sezione viene trattato l'UKF a tempo discreto dal punto di vista teorico sia per la stima dello stato sia per l'estrazione dei parametri di interesse (*parameter estimation*). Sulla base dell'Unscented Transformation descritta nel paragrafo precedente, è possibile formulare l'Unscented Kalman Filter a tempo discreto come un algoritmo ricorsivo di stima dello stato. Analogamente al filtro di Kalman classico e alle sue estensioni non lineari, l'UKF mira a stimare la distribuzione a posteriori dello stato  $x_k$  condizionata alle misure disponibili fino all'istante  $k$ . Poiché la distribuzione esatta può risultare non Gaussiana, l'UKF fornisce un'approssimazione Gaussiana della distribuzione filtrata, descritta unicamente dalla sua media e dalla sua matrice di covarianza:

$$p(x_k | y_1, \dots, y_k) \approx \mathcal{N}(m_k, P_k)$$

Eq. 3. 35

dove  $m_k$  e  $P_k$  rappresentano rispettivamente la stima dello stato e l'incertezza associata, calcolate in modo ricorsivo dall'algoritmo.

L'algoritmo mantiene la struttura a due fasi del filtro di Kalman, articolata in una fase di predizione e in una fase di aggiornamento della misura, sostituendo le operazioni di propagazione lineare con la propagazione dei *sigma points*. Nel seguito si riportano le varie fasi e le rispettive equazioni utilizzate nell'UKF a tempo discreto, nella formulazione standard per modelli con rumori additivi:

1. Fase di predizione:
  - a) Formazione dei *sigma point*:

$$\begin{aligned} \chi_{k-1}^{(0)} &= m_{k-1} \\ \chi_{k-1}^{(i)} &= m_{k-1} + \sqrt{n + \lambda} [\sqrt{P_{k-1}}]_i \\ \chi_{k-1}^{(i)} &= m_{k-1} - \sqrt{n + \lambda} [\sqrt{P_{k-1}}]_i \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Eq. 3. 36

dove il parametro  $\lambda$  è definito nell'equazione 3.31.

- b) Propagazione dei *sigma point* attraverso la dinamica del modello:

$$\hat{\chi}_k^{(i)} = f(\chi_{k-1}^{(i)}) \quad i = 0, \dots, 2n$$

Eq. 3. 37

c) Calcolo della predizione di media  $m_k^-$  e covarianza  $P_k^-$ :

$$m_k^- = \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(m)} \hat{\chi}_k^{(i)}$$

$$P_k^- = \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(c)} (\hat{\chi}_k^{(i)} - m_k^-) (\hat{\chi}_k^{(i)} - m_k^-)^T + Q_{k-1}$$

Eq. 3. 38

dove i pesi  $W_i^{(m)}$  e  $W_i^{(c)}$  sono definiti nell' equazione 3.34.

2. Fase di aggiornamento:

a) Formazione dei *sigma point*:

$$\chi_k^{-(0)} = m_k^-$$

$$\chi_k^{-(i)} = m_k^- + \sqrt{n + \lambda} [\sqrt{P_k^-}]_i$$

$$\chi_k^{-(i+n)} = m_k^- - \sqrt{n + \lambda} [\sqrt{P_k^-}]_i \quad i = 1, \dots, n$$

Eq. 3. 39

b) Propagazione dei *sigma point* attraverso l'equazione di misura del modello:

$$\hat{Y}_k^{(i)} = h(\chi_k^{-(i)}) \quad i = 0, \dots, 2n$$

Eq. 3. 40

c) Calcolo la predizione della media  $\mu_k$ , la predizione della covarianza delle misurazioni  $S_k$  e la cross-covarianza dello stato e delle misurazioni  $C_k$ :

$$\begin{aligned}\mu_k &= \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(m)} \hat{Y}_k^{(i)} \\ S_k &= \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(c)} (\hat{Y}_k^{(i)} - \mu_k) (\hat{Y}_k^{(i)} - \mu_k)^T + R_k \\ C_k &= \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(c)} (\chi_k^{-(i)} - m_k^-) (\hat{Y}_k^{(i)} - \mu_k)^T\end{aligned}$$

Eq. 3. 41

- d) Calcolo del guadagno del filtro di Kalman  $K_k$ , la media  $m_k$  e la covarianza  $P_k$  dello stato filtrato condizionate dalle misurazioni disponibili  $y_k$ :

$$\begin{aligned}K_k &= C_k S_k^{-1} \\ m_k &= m_k^- + K_k [y_k - \mu_k] \\ P_k &= P_k^- - K_k S_k K_k^T\end{aligned}$$

Eq. 3. 42

L'Unscented Kalman Filter si differenzia dall'Extended Kalman Filter perché evita la linearizzazione locale delle equazioni del modello. Invece di approssimare la dinamica tramite uno sviluppo di Taylor, l'UKF utilizza un insieme deterministico di punti (*sigma points*) che viene propagato attraverso le trasformazioni non lineari, consentendo una stima più fedele della distribuzione a posteriori. Un ulteriore vantaggio è che non richiede il calcolo delle matrici Jacobiane, rendendo l'approccio applicabile anche quando le funzioni di stato e di misura non sono facilmente differenziabili. A fronte di tali benefici, l'UKF presenta in genere un costo computazionale leggermente maggiore rispetto all'EKF, dovuto alla propagazione di più punti e alle operazioni associate.

Un aspetto particolarmente rilevante dell'UKF è la possibilità di estendere l'algoritmo alla stima di parametri incerti del modello, ciò si ottiene introducendo una formulazione a stato aumentato, in cui i parametri da identificare vengono trattati come stati aggiuntivi. In questo modo, l'UKF consente di effettuare una stima congiunta di stato e parametri, mantenendo la stessa struttura ricorsiva del classico algoritmo [16]. Tale approccio è molto conveniente e ampiamente utilizzato nei problemi di identificazione non lineare ed è adottato anche nel presente lavoro di tesi per stimare i parametri di interesse descritti nel Capitolo 6.

Infine, in applicazioni pratiche, e in particolare nei problemi di stima congiunta di stato e parametri, l'aggiornamento ricorsivo della matrice di covarianza può essere numericamente delicato, con il rischio di perdita di simmetria o di positività definita a causa di errori di arrotondamento. Per migliorare la robustezza numerica, in letteratura, è stata proposta una variante dell'Unscented Kalman Filter in forma *Square-Root* (SR-UKF), nella quale non viene propagata direttamente la covarianza  $P_k$ , ma una sua radice (tipicamente il fattore di Cholesky)  $S_k$  tale che  $P_k = S_k S_k^T$ . In questo modo, la positività definita della covarianza è preservata per costruzione e l'algoritmo risulta più stabile dal punto di vista numerico. Inoltre, la formulazione *SR* consente di evitare fattorizzazioni ripetute della covarianza, poiché la radice viene aggiornata direttamente tramite operazioni di algebra lineare (ad esempio aggiornamenti di Cholesky e decomposizioni QR), mantenendo una complessità computazionale comparabile a quella dell'UKF standard ma con migliori proprietà numeriche [17].



## 4 Identificazione probabilistica

In ambito meccanico, conoscere con precisione le caratteristiche fisiche di un sistema come la rigidità, lo smorzamento o le costanti non lineari, è essenziale per poter predire il comportamento del sistema.

Tradizionalmente, le tecniche di identificazione si basano su approcci deterministici, che mirano a individuare un set di parametri in grado di minimizzare una funzione di errore. Questi metodi, pur fornendo una soluzione puntuale, non tengono conto dell'incertezza associata alle misure, ai modelli o ai rumori di processo.

Negli ultimi decenni, l'evoluzione della capacità di calcolo e l'avanzamento delle tecniche statistiche hanno favorito lo sviluppo di approcci probabilistici all'identificazione dei sistemi. In tali metodi, i parametri del modello non sono più considerati quantità deterministiche ma variabili aleatorie casuali descritte da distribuzioni di probabilità. Questo tipo di approccio permette di quantificare esplicitamente l'incertezza delle stime, fornendo non solo il valore medio dei parametri, ma anche la loro distribuzione a posteriori in base alle osservazioni dei dati disponibili.

### 4.1 Statistica Bayesiana

L'identificazione probabilistica dei parametri di un sistema si fonda su concetti di probabilità e statistica che permettono di descrivere in modo rigoroso l'incertezza associata sia ai dati sperimentali sia ai parametri del modello. In questo contesto, la probabilità non è intesa esclusivamente come frequenza relativa di un evento, ma come una misura del grado di plausibilità di una proposizione, espressa tramite un numero reale compreso nell'intervallo  $[0,1]$ .

L'approccio Bayesiano fornisce un quadro teorico coerente per aggiornare la conoscenza sui parametri di un modello alla luce delle osservazioni sperimentali, combinando l'informazione disponibile prima dell'esperimento con quella contenuta nei dati. Prima di introdurre formalmente il teorema di Bayes, è utile richiamare alcuni concetti fondamentali relativi alle variabili aleatorie e alle distribuzioni di probabilità [18], che costituiscono la base matematica dell'inferenza Bayesiana, i quali verranno brevemente discussi nel seguente sottoparagrafo.

#### 4.1.1 Cenni su variabili aleatorie

Una variabile casuale continua  $X$  può essere interpretata come una funzione che associa a ogni possibile esito di un esperimento aleatorio un numero reale. Ad essa si associa una funzione di densità di probabilità  $f_X$ , la quale descrive come la probabilità

si distribuisce lungo i valori possibili della variabile. La funzione di distribuzione cumulativa (CDF)  $F_X(x)$  rappresenta invece la probabilità che  $X$  assuma un valore minore o uguale a  $x$ , ed è definita come:

$$F_X(x) \equiv P_X(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$$

Eq. 4. 1

Il suo inverso viene detto *quantile* di ordine  $\alpha$  (con  $0 \leq \alpha \leq 1$ ) ed esprime il valore  $x$  tale che la frazione  $\alpha$  della distribuzione di probabilità sia minore o uguale ad  $x$ , ovvero:

$$F_X^{-1}(\alpha) = \inf\{x : F_X(x) \geq \alpha\}$$

Eq. 4. 2

Per una variabile casuale continua si può scrivere la probabilità come un integrale della densità di probabilità:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx$$

Eq. 4. 3

Tali concetti possono essere generalizzati al caso di un vettore casuale N-dimensionale  $X = (X_1, X_2, \dots, X_N)$ . Se si prende in considerazione una sola componente  $X_i$ , integrando la distribuzione congiunta  $f_X(x)$ , è possibile definire una funzione di distribuzione marginale di  $X_i$ :

$$f_{X_i}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_N f_X(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_N)$$

Eq. 4. 4

Se si considerano due variabili casuali continue  $X$  e  $Y$  con distribuzioni congiunte  $f_{XY}(x, y)$  e marginalizzate  $f_X(x)$  e  $f_Y(y)$ , è possibile definire le seguenti grandezze:

- **Valore di aspettazione**  $X$ :  $E[X] = \mu_X = \int x f_X(x) dx$
- **Varianza** di  $X$ :  $Var(X) = \sigma_X^2 = E[(X - E[X])^2] = \int (x - \mu_X)^2 f_X(x) dx$

- **Covarianza** di  $X$  e  $Y$ :  $Cov(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] =$   

$$= \int (x - \mu_X) (y - \mu_Y) f_{XY}(x) dx dy$$
- **Correlazione** di  $X$  e  $Y$ :  $\rho_{XY} = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$

Generalizzando il concetto precedentemente introdotto,  $X$  e  $Y$  sono variabili casuali indipendenti se la probabilità congiunta soddisfa:

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y) \quad \forall (x, y)$$

*Eq. 4. 5*

il che implica  $Cov(X, Y) = 0$  e  $\rho_{XY} = 0$ .

#### 4.1.2 Teorema di Bayes e cenni sull'inferenza frequentista

Il teorema di Bayes consente, alla luce delle frequenze osservate, di aggiustare la probabilità a priori, per arrivare alla probabilità a posteriori. Essendo basata su un'informazione a priori, non è una probabilità assoluta, ma sempre condizionata (alla conoscenza pregressa).

È possibile definire, prima di enunciare il teorema di Bayes, la probabilità condizionata  $P(A|B)$  (ossia la probabilità di  $A$  noto  $B$ ):

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

*Eq. 4. 6*

dove  $P(A, B) = P(A \cap B)$  è chiamata probabilità congiunta mentre  $P(A \cup B)$  è detta probabilità disgiunta. L'obiettivo dell'identificazione Bayesiana è quindi quello di caratterizzare la distribuzione a posteriori  $p(\vartheta|y)$ , che racchiude tutta l'informazione disponibile sui parametri dopo aver osservato i dati.

A differenza di un approccio deterministico, la stima non si riduce a un singolo valore, ma a una distribuzione che può essere analizzata in termini di media, varianza, intervalli di fiducia o altre metriche statistiche.

La base teorica dell'identificazione probabilistica è rappresentata dal teorema di

Bayes, formulato nel XVIII secolo dal matematico Thomas Bayes (1763). Il principio fondamentale è espresso come:

$$p(\vartheta | y) = \frac{p(y | \vartheta) p(\vartheta)}{p(y)}$$

Eq. 4. 7

dove:

- $p(\vartheta | y)$  è la distribuzione a posteriori dei parametri, ossia la probabilità che i parametri assumano determinati valori dato l'insieme delle osservazioni  $y$ .
- $p(y | \vartheta)$  è la verosimiglianza (*likelihood*), che misura quanto i dati osservati sono compatibili con il modello parametrizzato da  $\vartheta$ .
- $p(\vartheta)$  è la distribuzione a priori, che rappresenta la conoscenza dei parametri prima dell'acquisizione dei dati.
- $p(y)$  è un termine di normalizzazione, indipendente da  $\vartheta$ , che assicura che la probabilità totale sia unitaria.

Nel contesto dell'identificazione strutturale o meccanica, il vettore dei parametri  $\vartheta$  può includere grandezze fisiche come rigidità, smorzamenti o coefficienti non lineari. Le osservazioni  $y$  sono invece costituite da misure di spostamento, velocità o accelerazione, affette da rumore.

Il teorema di Bayes ci permette quindi di ottenere una stima a posteriori dei parametri, sfruttando sia la conoscenza pregressa (*prior*) sia le informazioni osservate (*likelihood*). Questa statistica è utile in quanto permette di aggiornare le probabilità a posteriori man mano che si ottengono nuovi dati.

La scelta dei *prior* è fondamentale nella statistica Bayesiana perché può influenzare in modo significativo i risultati. Essa descrive la conoscenza iniziale o l'incertezza che si ha sui parametri di un modello prima di osservare i dati sperimentali.

L'idea alla base di questo approccio è che i parametri non siano valori fissi e sconosciuti ma bensì variabili casuali descritte da una distribuzione di probabilità.

Nella pratica esistono varie famiglie di distribuzioni a priori che vengono scelte in base alla natura del problema da risolvere e al livello di informazione disponibile.

- *Prior non informativi*: vengono utilizzati quando non si possiede alcuna conoscenza pregressa sui parametri. L'obiettivo è quello di introdurre un'informazione minima, lasciando che siano i dati a determinare la forma della distribuzione a posteriori.

Un esempio classico è la distribuzione uniforme, in cui ogni valore del parametro è considerato ugualmente probabile entro un certo intervallo:

$$p(\vartheta) = \text{costante per } \vartheta \in [a, b]$$

Eq. 4. 8

In casi più complessi si utilizzano *prior* “debolmente informativi”, come la distribuzione normale con varianza molto grande, che assegna una probabilità quasi uniforme ma mantiene comunque una struttura matematica più stabile. Questi *prior* sono spesso usati nelle fasi iniziali di identificazione o quando l’interesse è quello di evitare che il modello sia troppo influenzato da assunzioni arbitrarie.

- *Prior informativi*: incorporano conoscenza pregressa sui parametri, provenienti da esperimenti precedenti, dati storici o considerazioni fisiche. In tali casi, la distribuzione a priori riflette l’esperienza accumulata o le aspettative sul comportamento del sistema. Un esempio comune è la distribuzione normale, utilizzata quando si ritiene che il parametro oscilli attorno a un valore medio noto con una certa incertezza:

$$\vartheta \sim \mathcal{N}(\mu_0, \sigma_0^2)$$

Eq. 4. 9

dove  $\mu_0$  rappresenta la stima iniziale del parametro e  $\sigma_0^2$  misura il grado di fiducia in tale stima.

Questo tipo di *prior* è ampiamente usato nei modelli lineari e nella stima di parametri fisici che si conoscono già con un certo margine di errore.

- *Prior coniugati*: una distribuzione a priori  $p(\vartheta)$  è coniugata rispetto a una verosimiglianza  $p(\mathcal{D}|\vartheta)$  se la distribuzione a posteriori  $p(\vartheta|\mathcal{D})$  appartiene alla stessa famiglia di distribuzioni del *prior*. In altre parole, la forma funzionale della distribuzione si conserva anche dopo l’aggiornamento Bayesiano. Questa proprietà semplifica notevolmente i calcoli, poiché permette di derivare analiticamente la distribuzione a posteriori. Alcuni esempi classici di *prior* coniugati sono:

- Distribuzione Beta come *prior* coniugato della distribuzione Bernoulliana o Binomiale:

$$\vartheta \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$$

Eq. 4. 10

- Distribuzione Gamma come *prior* coniugato della distribuzione di Poisson o Esponenziale:

$$\lambda \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$$

Eq. 4. 11

- Distribuzione Normale come *prior* coniugato della verosimiglianza normale con varianza nota:

$$\mu \sim \mathcal{N}(\mu_0, \sigma_0^2)$$

Eq. 4. 12

I *prior* coniugati sono particolarmente utili nei modelli lineari e nei problemi dove è necessario aggiornare le stime in modo ricorsivo, come nei filtri di Kalman.

Dal teorema di Bayes, la funzione  $p(y)$  viene detta evidenza o *likelihood* marginale:

$$p(x) = p(x) \int p(\vartheta|x)d\vartheta = \int p(x)p(\vartheta|x)d\vartheta = \int \mathcal{L}(\vartheta)p(\vartheta)d\vartheta$$

Eq. 4. 13

Per la stima dei parametri, essa è semplicemente una costante che normalizza la probabilità e può essere tranquillamente ignorata, mentre diventa di cruciale importanza quando si vogliono confrontare modelli diversi.

L'inferenza statistica è il procedimento mediante il quale si ricavano informazioni sulle caratteristiche di una popolazione a partire dall'osservazione di un suo sottoinsieme, detto campione. L'obiettivo principale di tale disciplina è stimare, sulla base dei dati osservati, i parametri incogniti di un modello probabilistico, interpretando i risultati di un esperimento alla luce della teoria della probabilità.

In termini concettuali, si può dire che l'inferenza statistica rappresenta una sorta di "inversione" del processo probabilistico: mentre nella probabilità classica si parte da un modello noto per calcolare la probabilità di determinati eventi, nell'inferenza si parte invece dai dati osservati per ricostruire la distribuzione di probabilità o i parametri che meglio la descrivono.

Lo scopo ultimo è dunque quello di valutare la plausibilità di un'ipotesi o di un modello rispetto alle osservazioni sperimentali disponibili.

Quando si dispone di un modello di probabilità che dipende da un insieme di parametri

$\vartheta$ , la probabilità dei dati osservati può essere vista come una funzione di tali parametri. Questa funzione è detta funzione di verosimiglianza. Dato un insieme di misure:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$$

Eq. 4. 14

la distribuzione di probabilità dei dati è espressa da  $f(x|\vartheta)$ , dove  $\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_M)$  è il vettore dei parametri del modello. La funzione di verosimiglianza si ottiene valutando la funzione di densità di probabilità nei punti osservati considerandola come funzione dei soli parametri:

$$\mathcal{L}(\vartheta) = f(x|\vartheta)$$

Eq. 4. 15

Nel caso in cui le osservazioni  $x_i$  siano indipendenti e identicamente distribuite, la probabilità congiunta dei dati è data dal prodotto delle probabilità individuali:

$$\mathcal{L}(x; \vartheta) = f(x_1 | \vartheta) f(x_2 | \vartheta) \dots f(x_N | \vartheta) = \prod_{i=1}^N f(x_i | \vartheta) dx_i$$

Eq. 4. 16

La funzione di verosimiglianza associa ad ogni possibile configurazione dei parametri il grado di compatibilità tra il modello e i dati sperimentali.

Uno dei metodi più diffusi per stimare i parametri di un modello è il metodo della massima verosimiglianza (*Maximum Likelihood*, ML).

L'idea di base è quella di scegliere, tra tutti i possibili valori di  $\vartheta$ , quello che rende i dati osservati più probabili, ovvero che massimizza la funzione di verosimiglianza.

Il valore stimato dei parametri, detto stimatore di ML, è quindi definito come:

$$\hat{\vartheta} = \arg \max_{\vartheta} \mathcal{L}(\vartheta)$$

Eq. 4. 17

Poiché il logaritmo naturale è una funzione monotona crescente, è spesso conveniente lavorare con la log-verosimiglianza, definita come  $\ell(\vartheta) = \log \mathcal{L}(\vartheta)$ .

In tal modo, il prodotto delle probabilità diventa una somma di logaritmi, semplificando notevolmente il calcolo.

Le condizioni necessarie per la massimizzazione della log-verosimiglianza sono espresse dal sistema di equazioni:

$$\frac{\partial \ell(\vartheta)}{\partial \vartheta_j} = 0 \quad j = 1, \dots, M$$

Eq. 4. 18

dove le soluzioni  $\hat{\vartheta}$  di questo sistema rappresentano gli stimatori di massima verosimiglianza dei parametri  $\vartheta_j$ .

Nell'approccio frequentista, i parametri  $\vartheta$  sono considerati valori fissi ma sconosciuti, mentre i dati osservati costituiscono le variabili casuali.

Questo punto di vista si contrappone a quello Bayesiano, nel quale i parametri vengono invece trattati come variabili aleatorie descritte da una distribuzione a priori, successivamente aggiornata in base alle osservazioni.

Nonostante questa differenza concettuale, il metodo della massima verosimiglianza rimane uno degli strumenti più efficaci e ampiamente utilizzati per la stima dei parametri e per l'identificazione dei modelli statistici, grazie alla sua solidità teorica e alla semplicità applicativa.

## 4.2 L'inferenza Bayesiana nell'identificazione di un sistema

L'identificazione di un sistema dinamico consiste nel determinare un modello matematico capace di descrivere e prevedere il comportamento di un sistema fisico a partire da dati sperimentali. Noto un set di dati campionati  $D = \{(x_i, y_i), i = 1, \dots, N\}$  di *input*  $x_i$  e *output*  $y_i$ , se si assume che non ci sia rumore di misura e che la struttura del modello sia nota, l'applicazione di un algoritmo di identificazione produrrà (supponendo che il problema sia ben condizionato) una stima deterministica dei parametri del sistema  $\underline{w}$ :

$$\underline{w} = id(D)$$

Eq. 4. 19

dove la funzione  $id$  rappresenta l'applicazione dell'algoritmo di identificazione per il set di dati  $D$ . Ad esempio, per un sistema di tipo Duffing (Eq. 2.9), il vettore dei parametri da stimare è  $w = [m, c, k, k_3]^T$  [19]. Nella pratica sperimentale, le misure sono inevitabilmente affette da rumore  $\epsilon(t)$  e da errori sistematici, il che implica che

i parametri stimati non possono essere considerati deterministici, ma devono essere trattati come variabili aleatorie condizionate ai dati disponibili. In questo contesto, l'obiettivo non è più trovare una stima puntuale del singolo valore di  $\underline{w}$ , ma descrivere la distribuzione di probabilità che meglio rappresenta le possibili configurazioni dei parametri coerenti con i dati osservati:

$$\underline{w} \sim p(\underline{w}|D, M)$$

Eq. 4. 20

dove M rappresenta la scelta del modello (nel nostro caso l'oscillatore di Duffing). Conoscere la distribuzione completa dei parametri significa che è possibile costruire intervalli di confidenza per le stime dei parametri. Questo è uno dei grandi vantaggi dal punto di vista probabilistico.

Se si vuole una stima puntuale dei parametri, la procedura usuale è quella di scegliere quella che massimizza la probabilità a posteriori  $p(\underline{w}|D)$ . Poiché i dati D sono una costante del problema, si può direttamente massimizzare il numeratore del teorema di Bayes (Eq. 4.7). Spesso si sceglie un *prior*  $p(\vartheta)$  costante non informativo, questa scelta riduce il problema a massimizzare  $p(y|\vartheta)$ , ovvero la funzione di verosimiglianza. La stima massima a posteriori (MAP) diventa quindi la massima verosimiglianza.

L'obiettivo principale dell'identificazione è quello di fornire un modello predittivo, ovvero un modello in grado di stimare o prevedere gli output  $\underline{y}^*$  del sistema qualora venisse fornito un nuovo input  $\underline{x}^*$ . Nel contesto probabilistico si può determinare una distribuzione predittiva:

$$\underline{y}^* \sim p(\underline{y}^*|\underline{x}^*, \underline{w}, D, M)$$

Eq. 4. 21

la cui media fornirebbe le stime "migliori" per le previsioni e la covarianza permetterebbe di stabilirne gli intervalli di confidenza. In pratica, si potrebbe utilizzare il valore  $\underline{w}$  corrispondente alla media o alla moda della distribuzione dei parametri a posteriori. Tuttavia, un punto di vista veramente Bayesiano sulla previsione richiederebbe di marginalizzare le stime dei parametri, ovvero di derivare:

$$p(\underline{y}^*|\underline{x}^*, D, M) = \int p(\underline{y}^*|\underline{x}^*, \underline{w}, M)p(\underline{w}|D, M) d\underline{w}$$

Eq. 4. 22

ma nella pratica, ci sono notevoli problemi nell'implementare l'approccio Bayesiano completo, ovvero nel calcolare l'integrale precedente.

Un altro importante vantaggio dell'approccio Bayesiano risiede nella sua capacità di fornire un quadro coerente per la selezione e il confronto tra modelli.

In molti problemi pratici, non è noto a priori quale struttura di modello rappresenti in modo più adeguato il fenomeno in esame; è quindi necessario disporre di un criterio per valutare quantitativamente l'evidenza dei dati a favore di diversi modelli alternativi. Questo problema è noto in letteratura come *structure detection* o *model selection*.

Se si considera di avere un insieme finito di modelli plausibili  $\{M_1, M_2, \dots, M_M\}$ , l'obiettivo consiste nel determinare quale modello sia più probabile alla luce delle osservazioni sperimentali  $D$ . In ottica Bayesiana, questa informazione è contenuta nella probabilità a posteriori del modello  $p(M_i|D)$ . Idealmente, se tale quantità fosse disponibile, sarebbe possibile scegliere direttamente il modello che massimizza la probabilità a posteriori.

Il calcolo della distribuzione a posteriori può essere svolto mediante il teorema di Bayes e nel caso in cui si assumano *prior* uniformi sui modelli, ossia  $P(M_i) = P(M_j)$ , il confronto può essere effettuato mediante il fattore di Bayes definito come segue:

$$B_{ij} = \frac{P(M_i|D)}{P(M_j|D)} = \frac{p(D|M_i)}{p(D|M_j)}$$

Eq. 4. 23

Il fattore di Bayes rappresenta dunque un indicatore quantitativo dell'evidenza fornita dai dati a favore del modello  $M_i$  rispetto al modello  $M_j$ . Un valore di  $B_{ij} > 1$  indica che i dati supportano maggiormente il modello  $M_i$ , mentre un valore inferiore a 1 suggerisce una preferenza per  $M_j$ .

Il termine cruciale per la valutazione del fattore di Bayes è la verosimiglianza marginale (Eq. 4.13), tale espressione corrisponde a un'integrazione della verosimiglianza sui possibili valori dei parametri, pesata secondo la loro distribuzione a priori.

In generale, questo integrale non è risolvibile in forma chiusa e la sua valutazione numerica può avere un costo computazionale molto oneroso, specialmente per modelli ad alta dimensionalità.

Per superare tali difficoltà, vengono spesso adottati criteri di confronto approssimati ma con un costo computazionale più efficiente, come il *Deviance Information Criterion* (DIC) e l'*Akaike Information Criterion* (AIC) che forniscono misure alternative della bontà del modello penalizzando al contempo la complessità parametrica [20].

Nonostante l'uso di indicatori approssimati possa essere utile in molti contesti

applicativi, un approccio più generale e rigoroso per l'analisi Bayesiana dei modelli e dei parametri è rappresentato dal campionamento *Markov Chain Monte Carlo*.

Questa tecnica consente di stimare in modo numerico le distribuzioni a posteriori e di approssimare integrali in spazi di alta dimensione, rendendo quindi possibile un'analisi completa anche in presenza di modelli complessi.

Il metodo Monte Carlo è approfondito nella sezione successiva, in quanto costituisce uno degli strumenti fondamentali per l'identificazione probabilistica dei parametri nel presente lavoro.

## 4.3 Metodo Monte Carlo

Il metodo Monte Carlo è un'ampia classe di metodi computazionali basati sul campionamento casuale per ottenere risultati numerici ed è il metodo usato per trarre stime attraverso simulazioni. Le sue origini risalgono alla metà degli anni 40, nell'ambito del Progetto Manhattan [21].

La simulazione Monte Carlo calcola una serie di realizzazioni possibili del fenomeno in esame, con il peso proprio della probabilità di tale evenienza, cercando di esplorare in modo denso tutto lo spazio dei parametri del fenomeno. Una volta calcolato questo campione casuale, la simulazione esegue delle "misure" delle grandezze di interesse su tale campione. La simulazione Monte Carlo è ben eseguita se il valore medio di queste misure sulle realizzazioni del sistema converge al valore vero.

Il metodo Monte Carlo è un metodo numerico utilizzato per trovare le soluzioni di problemi matematici a molte variabili e che non possono essere risolti in modo analitico attraverso simulazioni numeriche basate su campionamenti casuali. L'idea chiave è quella di rappresentare processi fisici mediante sequenze di numeri casuali e poi utilizzare tali simulazioni per stimare soluzioni numeriche di problemi deterministici. L'efficienza di questo metodo aumenta rispetto agli altri metodi quando la dimensione del problema cresce.

### 4.3.1 Enunciato

Il metodo Monte Carlo consente di stimare il valore atteso di una variabile aleatoria  $X$  avente densità di probabilità  $p(x)$ .

Sia  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione misurabile, allora  $f(X)$  è anch'essa una variabile aleatoria, e il suo valore atteso è definito come:

$$\mathbb{E}[f(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) p(x) dx$$

Eq. 4. 24

Nel metodo Monte Carlo, tale integrale viene approssimato mediante la media campionaria di  $n$  realizzazioni indipendenti della variabile  $X$ :

$$\mathbb{E}[f(X)] \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i) \text{ per } n \rightarrow \infty$$

Eq. 4. 25

dove  $X_i$  rappresentano campioni indipendenti e identicamente distribuiti estratti secondo la distribuzione di  $X$ . In pratica, si generano numerosi campioni casuali dalla distribuzione  $p(x)$  e si utilizza la media dei valori  $f(X_i)$  come stima numerica del valore atteso.

### 4.3.2 Obiettivi e metodi di campionamento

I principali obiettivi dei metodi MC [22] sono di risolvere i seguenti problemi:

1. Generare campioni  $\{x^{(r)}\}_{r=1}^R$  da una data distribuzione di probabilità  $P(x)$ .
2. Stimare le aspettative di funzioni sotto questa distribuzione.

Una volta risolto il problema del campionamento, è possibile affrontare anche il secondo problema utilizzando i campioni casuali  $\{x^{(r)}\}_{r=1}^R$  per costruire lo stimatore:

$$\hat{\Phi} = \frac{1}{R} \sum_r \phi(x^{(r)})$$

Eq. 4. 26

Se i vettori  $\{x^{(r)}\}_{r=1}^R$  sono generati da  $P(x)$ , allora l'aspettativa di  $\hat{\Phi}$  coincide con quella di  $\phi$ .

Inoltre, all'aumentare del numero di campioni  $R$ , la varianza di  $\hat{\Phi}$  decresce come  $\sigma^2/R$ , dove  $\sigma^2$  è la varianza di  $\phi$ :

$$\sigma^2 = \int d^N x P(x) (\phi(x) - \Phi)^2$$

*Eq. 4. 27*

Una delle proprietà principali dei metodi MC è che l'accuratezza della stima Monte Carlo dipende solo dalla varianza di  $\phi$ , e non dalla dimensionalità dello spazio campionato. Pertanto, indipendentemente dalla dimensionalità di  $x$ , può accadere che anche solo una dozzina di campioni indipendenti  $\{x^{(r)}\}$  sia sufficiente per stimare  $\phi$  in modo esaustivo.

Generalmente, nella pratica si assume che la densità dalla quale si vogliono estrarre i campioni  $P(x)$ , possa essere valutata almeno a una costante moltiplicativa, ovvero si può valutare una funzione  $P^*(x)$  tale che:

$$P(x) = \frac{P^*(x)}{Z}$$

*Eq. 4. 28*

Ottenere campioni indipendenti da una distribuzione data  $P(x)$  non è un compito semplice per due difficoltà principali. La prima è che tipicamente non si conosce la costante di normalizzazione:

$$Z = \int d^N x P^*(x)$$

*Eq. 4. 29*

la seconda è che, anche se  $Z$  fosse nota, il problema di generare campioni da  $P(x)$  rimarrebbe comunque complesso (specialmente in spazi ad alta dimensione) poiché non esiste un modo diretto per estrarre campioni da  $P$  senza valutarne la totalità, o almeno una grande parte, dei possibili stati.

### 4.3.2.1 Uniform Sampling

Questo metodo consiste nel campionare campioni casuali  $\{x^{(r)}\}_{r=1}^R$  uniformemente dallo spazio degli stati e valutando  $P^*(x)$  in tali punti. Sebbene intuitivo, questo approccio risulta efficiente solo in bassa dimensione mentre per spazi di grande dimensionalità, la probabilità che un campione uniforme cada nella regione di alta

densità della distribuzione  $P^*(x)$  diventa trascurabile. Introducendo una costante di normalizzazione  $Z_R$  così definita:

$$Z_R = \sum_{r=1}^R P^*(x^{(r)})$$

Eq. 4. 30

e mediante lo stimatore:

$$\hat{\Phi} = \frac{\sum_{r=1}^R \phi(x^{(r)})P^*(x^{(r)})}{Z_R}$$

Eq. 4. 31

si stima:

$$\Phi = \int d^N x \phi(x)P(x)$$

Eq. 4. 32

Poiché una distribuzione ad alta dimensione è spesso concentrata in una piccola regione dello spazio degli stati nota come insieme tipico, e se quasi tutta la massa di probabilità è localizzata in questa piccola regione, allora il valore di  $\Phi$  sarà quasi completamente determinato dai valori che  $\phi(x)$  assume all'interno della regione. Pertanto, un campionamento uniforme avrà solo una minima possibilità di fornire una stima accurata, a meno che il numero di campioni  $R$  non sia sufficientemente grande da garantire che almeno uno cada nell'insieme tipico.

### 4.3.2.2 Importance Sampling

L'*Importance Sampling* è una tecnica che consente di stimare il valore atteso di una variabile aleatoria quando la distribuzione di probabilità da cui essa proviene risulta complessa o difficile da campionare direttamente. L'idea di base consiste nel sostituire la distribuzione originale con una distribuzione alternativa più semplice, detta distribuzione di campionamento, rispetto alla quale i campioni possono essere generati in modo più agevole.

L'*Importance Sampling* diventa particolarmente utile quando il metodo Monte Carlo

standard risulta inefficiente a causa della complessità della distribuzione originale. La scelta accurata della nuova distribuzione non solo semplifica il campionamento, ma può anche ridurre la varianza della stima. Un vantaggio notevole di questa tecnica è quello di diminuire la dispersione dei risultati delle simulazioni, portando a stime più precise del valore atteso. Ridurre la varianza è cruciale nelle simulazioni Monte Carlo, poiché permette di ottenere risultati accurati con un numero ridotto di campioni, migliorando l'efficienza computazionale e riducendo il costo delle simulazioni.

Si consideri di avere una distribuzione target  $P(x)$  (Eq. 4.28) e di poterla valutare in qualsiasi punto  $x$  a meno di una costante moltiplicativa. Poiché  $P(x)$  è una funzione molto complicata da poter campionare, si assume di avere una distribuzione più semplice  $Q(x)$  chiamata densità di campionamento da cui generare campioni e che può essere valutata anch'essa a meno di una costante moltiplicativa tale per cui:

$$Q(x) = \frac{Q^*(x)}{Z_Q}$$

*Eq. 4. 33*

Poiché in realtà i campioni vengono generati da  $Q$ , i punti dove  $Q(x)$  è maggiore di  $P(x)$  saranno sovra-rappresentati nello stimatore, mentre i punti dove  $Q(x)$  è minore di  $P(x)$  saranno sottorappresentati. Per compensare questa distorsione e tenere conto del fatto che la distribuzione di campionamento differisce da quella target, si introduce un fattore correttivo, definito come:

$$\omega_r = \frac{P^*(x^{(r)})}{Q^*(x^{(r)})}$$

*Eq. 4. 34*

e di conseguenza si corregge l'importanza di ciascun campione nello stimatore:

$$\hat{\phi} = \frac{\sum_r \omega_r \phi(x^{(r)})}{\sum_r \omega_r}$$

*Eq. 4. 35*

Questo approccio permette di stimare quantità attese anche nel caso in cui non sia possibile campionare direttamente dalla distribuzione target.

La bontà del metodo dipende dalla scelta della distribuzione  $Q(x)$ : se essa è ben calibrata rispetto a  $P(x)$ , la varianza dello stimatore si riduce e la convergenza risulta più rapida mentre se  $Q(x)$  differisce significativamente da  $P(x)$ , pochi campioni con

pesi elevati possono dominare la stima, pertanto il metodo risulta instabile o inefficiente.

### 4.3.2.3 Rejection Sampling

Il *rejection sampling* (campionamento per rigetto) è una tecnica Monte Carlo impiegata per generare campioni casuali da una distribuzione di probabilità complessa, a partire da una distribuzione più semplice dalla quale sia possibile estrarre facilmente campioni.

Si suppone di avere una distribuzione monodimensionale  $P(x)$  (Eq. 4.28) che è troppo complessa per poter essere campionata direttamente.

L'idea alla base del metodo consiste nel costruire una distribuzione ausiliaria  $Q(x)$ , detta distribuzione di proposta, che approssima la distribuzione target  $P(x)$  ma dalla quale sia possibile generare campioni in modo diretto.

Inoltre, si assuma una costante  $c > 0$  dal valore noto tale che:

$$c Q^*(x) > P^*(x) \quad \forall x$$

Eq. 4. 36

dove  $P^*(x)$  e  $Q^*(x)$  rappresentano le funzioni non normalizzate delle rispettive distribuzioni.

Il procedimento di campionamento utilizza due numeri casuali e si articola nei seguenti passaggi:

1. Il primo,  $x$ , viene generato dalla distribuzione di proposta  $Q(x)$ .
2. Si calcola  $c Q^*(x)$  e si genera un secondo numero casuale  $u$  uniformemente distribuito nell'intervallo  $[0, c Q^*(x)]$ .
3. Si calcola  $P^*(x)$  e si accetta o si rifiuta il campione  $x$  confrontando il valore di  $u$  con quello di  $P^*(x)$ :
  - Se  $u > P^*(x)$ , il campione è rifiutato.
  - Se  $u < P^*(x)$ , il campione è accettato e in qual caso si aggiunge  $x$  all'insieme di campioni  $\{x^{(r)}\}$ .

Il campionamento per rigetto elimina tutti i punti che si trovano al di sopra della curva  $P^*(x)$  mentre accetta quelli sotto la curva  $P^*(x)$ , che risultano uniformemente distribuiti nella regione proporzionale a  $P^*(x)$ . Questo implica che i campioni accettati sono effettivamente distribuiti secondo la distribuzione desiderata  $P(x)$ .

L'efficienza del metodo dipende strettamente dalla scelta della distribuzione  $Q(x)$  e dal valore della costante  $c$ . Quanto più  $Q(x)$  è simile a  $P(x)$ , tanto più basso risulta il valore di  $c$ , e quindi maggiore sarà il numero di campioni accettati. Al contrario, se

$Q(x)$  differisce notevolmente da  $P(x)$ , la costante  $c$  dovrà essere molto grande per coprire la regione di probabilità di  $P(x)$ , con conseguente incremento del numero di rigetti e riduzione dell'efficienza. In termini di efficienza computazionale, il tasso di accettazione del metodo è pari a  $1/c$  [22].

## 4.4 Markov Chain Monte Carlo

Nei paragrafi precedenti è stata discussa la formulazione generale dei problemi di inferenza statistica Bayesiana, evidenziando come, nella maggior parte dei casi pratici, risulti difficile o addirittura impossibile ottenere una soluzione analitica esatta per la distribuzione a posteriori dei parametri.

Quando il numero di parametri cresce o la struttura del modello diventa più complessa, la distribuzione a posteriori assume forme irregolari e multimodali, rendendo impraticabile la valutazione diretta degli integrali coinvolti.

In particolare, l'introduzione dei metodi Markov Chain Monte Carlo ha rappresentato una svolta fondamentale, consentendo di approssimare numericamente la distribuzione a posteriori anche nei casi più complessi.

Questi metodi permettono infatti di generare campioni casuali da distribuzioni arbitrarie, sfruttando la costruzione di una catena di Markov il cui stato stazionario coincide con la distribuzione desiderata.

L'idea alla base dei metodi MCMC è di costruire una catena di valori che esplori progressivamente lo spazio dei parametri in modo tale che, dopo un certo numero di iterazioni, la distribuzione dei campioni prodotti coincida con la distribuzione a posteriori di interesse. Si tratta dunque di un processo iterativo e stocastico, in cui ogni nuovo stato della catena dipende solo dallo stato precedente, secondo il principio Markoviano. Grazie a questo approccio, è possibile ottenere una rappresentazione numerica della distribuzione a posteriori senza doverla calcolare esplicitamente.

L'informazione sui parametri viene ricavata direttamente dai campioni generati, infatti da essi si possono stimare valori medi, varianze, intervalli di fiducia e relazioni di dipendenza tra parametri, con un costo computazionale molto inferiore rispetto ai metodi classici di integrazione numerica.

Nei paragrafi successivi verranno presentati i principi teorici alla base delle catene di Markov (Paragrafo 4.4.1) e il metodo Metropolis-Hastings (Paragrafo 4.4.2).

### 4.4.1 Catene di Markov

Le catene di Markov costituiscono il fondamento teorico dei metodi MCMC. Nel contesto dell'inferenza Bayesiana, l'idea principale è costruire una sequenza di punti nello spazio dei parametri tale che la distribuzione stazionaria della catena coincida con la distribuzione a posteriori dei parametri che si desidera analizzare.

In altre parole, invece di calcolare direttamente la distribuzione a posteriori, si genera una catena di campioni che, dopo un certo numero di iterazioni, riproduce la distribuzione richiesta grazie alle proprietà di convergenza delle catene di Markov. Una catena di Markov è una sequenza di variabili aleatorie casuali  $Y_1, Y_2, Y_3, \dots$  caratterizzata dalla seguente proprietà fondamentale chiamata proprietà di Markov:

$$P(Y_{i+1} = y_{i+1} | Y_i = y_i, Y_{i-1}, \dots, Y_1) = P(Y_{i+1} = y_{i+1} | Y_i = y_i)$$

*Eq. 4. 37*

in cui la probabilità dello stato successivo dipende esclusivamente dallo stato corrente e non da come si è giunti ad esso (intera storia della catena).

La probabilità di transizione da uno stato  $y$  allo step  $i$  ad uno stato  $y'$  allo step  $i + 1$  è descritta attraverso la matrice di transizione:

$$T(y, y') = P(Y_{i+1} = y' | Y_i = y)$$

*Eq. 4. 38*

che indica la probabilità di passare da uno stato all'altro.

Per avviare una catena di Markov è necessario specificare una distribuzione iniziale  $\lambda$  tale che:

$$P(Y_0 = y_0) = \lambda(y_0)$$

*Eq. 4. 39*

Una sequenza di numeri che rispetti sia l'equazione 4.38 sia l'equazione 4.39 è una catena di Markov. Successivamente, la distribuzione degli stati evolverà secondo l'equazione di Chapman–Kolmogorov:

$$P(Y_n = y_n) = \sum_{y_{n-1}} P(Y_{n-1} = y_{n-1}) T(y_{n-1}, y_n)$$

*Eq. 4. 40*

Iterando nel tempo la matrice di transizione, la catena esplora progressivamente lo spazio degli stati. Una matrice di transizione si definisce irriducibile quando ogni stato della catena comunica con tutti gli altri.

Al contrario, se per uno stato  $y$  vale  $T(y, y') = 1$  per un unico valore di  $y'$ , quello stato è detto assorbitore, poiché una volta raggiunto la catena non può più uscirne. Nel caso

in cui la probabilità di transizione dipenda unicamente dallo stato corrente e non dal numero di passi già compiuti, la matrice di transizione è costante nel tempo, cioè  $T = T(y, y')$ . Una catena di Markov con questa proprietà è detta omogenea, o anche stazionaria, nel senso che le transizioni non variano con l'indice temporale.

Una distribuzione di probabilità  $\pi(y)$  si dice invariante rispetto alla catena se soddisfa la relazione:

$$\pi(y) = \sum_{y'} \pi(y') T(y', y)$$

Eq. 4. 41

In altre parole, se la catena viene inizializzata secondo la distribuzione  $\pi$ , allora questa resta immutata al procedere delle iterazioni (una volta raggiunta non varia più nel tempo).

Una proprietà strettamente collegata è la reversibilità. Una catena di Markov omogenea è reversibile quando soddisfa la condizione di bilancio dettagliato (*detailed balance*):

$$\pi(y) T(y, y') = \pi(y') T(y', y)$$

Eq. 4. 42

Questa condizione è sufficiente a garantire che  $\pi$  sia una distribuzione invariante. Infatti, sommando su tutti gli stati possibili si ottiene:

$$\sum_{y'} \pi(y') T(y', y) = \sum_{y'} \pi(y) T(y, y') = \pi(y) \sum_{y'} T(y, y') = \pi(y)$$

Eq. 4. 43

che conferma l'invarianza di  $\pi$ . Ogni catena di Markov possiede almeno una distribuzione invariante, ma non è detto che questa sia unica. Per garantire l'unicità dell'equilibrio occorre che la catena sia ergodica, cioè che sia irriducibile e che non presenti periodicità. In questo caso le probabilità degli stati al passo  $i$ , indicate con  $p_i(y)$ , convergono alla distribuzione invariante  $\pi(y)$  indipendentemente dalla distribuzione iniziale  $p_0(y)$ :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} p_i(y) = \pi(y), \forall y$$

Eq. 4. 44

Quando questa condizione è soddisfatta, la catena “dimentica” il punto di partenza e si stabilizza sulla distribuzione di equilibrio.

La generazione di campioni tramite metodi MCMC avviene costruendo catene di Markov la cui distribuzione invariante coincida con la distribuzione a posteriori. Tuttavia, nella pratica, bisogna tenere conto di due aspetti fondamentali. Il primo riguarda la fase iniziale della catena: nelle prime iterazioni la distribuzione degli stati è spesso molto distante dalla distribuzione stazionaria. Per questo motivo si scarta una porzione iniziale della catena, chiamata *burn-in*, affinché gli stati successivi possano essere considerati rappresentativi della distribuzione target. Il secondo aspetto riguarda la presenza di correlazione tra campioni consecutivi. Poiché ogni stato dipende dal precedente, i campioni non sono indipendenti e presentano autocorrelazione, che può ridurre l'efficacia statistica delle stime. Per attenuare questo effetto si può applicare un *thinning* selezionando un campione ogni determinato numero di iterazioni, oppure progettare matrici di transizione che riducano la dipendenza tra campioni. L'efficienza complessiva dell'algoritmo MCMC dipende quindi dalla rapidità con cui la catena raggiunge la stazionarietà (velocità di *burn-in*) e dalla sua capacità di esplorare lo spazio degli stati generando campioni debolmente correlati [18].

#### 4.4.2 Metodo Metropolis Hastings

Il metodo Metropolis–Hastings (MH) è l'algoritmo MCMC più diffuso per generare campioni da una distribuzione target, tipicamente la distribuzione a posteriori in un problema Bayesiano. L'idea principale consiste nel costruire una catena di Markov che abbia come distribuzione stazionaria proprio la distribuzione desiderata, senza la necessità di conoscere la costante di normalizzazione.

Il capitolo precedente ha mostrato come *l'importance sampling* e il *rejection sampling* diventino inefficaci ad alta dimensionalità: essi richiedono che la proposta  $Q(x)$  sia molto simile alla distribuzione target  $P(x)$ , condizione difficile da soddisfare in spazi complessi. A differenza dei metodi Monte Carlo tradizionali, il Metropolis–Hastings utilizza una densità di proposta che dipende dallo stato corrente della catena. Questo accorgimento permette di esplorare efficientemente spazi dei parametri complessi, evitando il crollo di efficienza tipico dei metodi che richiedono una proposta vicina alla distribuzione target in ogni punto dello spazio.

Si consideri un vettore di parametri  $\vartheta$  e la distribuzione a posteriori [18]:

$$\pi(\vartheta) \propto L(\vartheta) p_{\text{prior}}(\vartheta)$$

Eq. 4. 45

dove  $L(\vartheta)$  è la *likelihood* e  $p_{\text{prior}}(\vartheta)$  è il *prior*.

Dallo stato attuale  $\vartheta_i$ , si genera un nuovo candidato  $\vartheta'_{i+1}$  tramite una *proposal density*  $p_{\text{step}}(\vartheta'_{i+1}, \vartheta_i)$ , anche detta *jumping distribution*. Il candidato viene poi accettato secondo la probabilità di accettazione:

$$\alpha_{i,i+1} = \alpha(\vartheta_i, \vartheta'_{i+1}) = \min \left[ 1, \frac{p_{\vartheta'_{i+1}}^0 p_{i+1,i}}{p_{\vartheta_i}^0 p_{i+1,i}} \right]$$

Eq. 4. 46

dove  $p_{\vartheta}^0$  è la densità target non è normalizzata e  $p_{i,j} = p_{\text{step}}(\vartheta_j, \vartheta_i)$ .

Se la proposta è simmetrica, ossia se:

$$p_{\text{step}}(\vartheta', \vartheta) = p_{\text{step}}(\vartheta, \vartheta')$$

Eq. 4. 47

allora il rapporto tra le *proposal* si annulla, e la regola di accettazione si riduce alla ben nota forma del metodo di Metropolis:

$$\alpha(\vartheta_i, \vartheta'_{i+1}) = \min \left[ 1, \frac{\pi(\vartheta'_{i+1})}{\pi(\vartheta_i)} \right]$$

Eq. 4. 48

Con tale scelta, è immediato verificare che l'algorithmo soddisfa la condizione di *detailed balance*:

$$\pi(\vartheta_{i+1}) p_{i+1,i} = \pi(\vartheta_i) p_{i,i+1}$$

Eq. 4. 49

e dunque la distribuzione di equilibrio della catena è proprio la distribuzione target  $\pi(\vartheta)$ .

Il metodo Metropolis–Hastings può essere schematizzato come segue nelle seguenti fasi [23]:

1. **Inizializzazione:** Si sceglie un punto iniziale  $\vartheta_0$  e una densità di proposta  $p_{\text{step}}(\vartheta', \vartheta)$ .
2. **Iterazione:** Ad ogni passo  $i$ :

- a) Si genera un candidato  $\vartheta'_{i+1} \sim p_{\text{step}}(\vartheta'_{i+1}, \vartheta_i)$  per il prossimo campionamento.
- b) Si calcola la probabilità di accettazione:

$$\alpha = \min \left[ 1, \frac{\mathcal{L}(\vartheta'_{i+1})p_{\text{prior}}(\vartheta'_{i+1})}{\mathcal{L}(\vartheta_i)p_{\text{prior}}(\vartheta_i)} \right]$$

Eq. 4. 50

- c) Si estrae un numero casuale  $u \sim U(0,1)$ .
- d) Se  $u < \alpha$ , il nuovo candidato viene accettato e si pone  $\vartheta_{i+1} = \vartheta'_{i+1}$ ; altrimenti il candidato viene rifiutato e si mantiene  $\vartheta_{i+1} = \vartheta_i$ .

Ripetendo questa procedura, si ottiene una sequenza di punti che costituisce una catena di Markov la cui distribuzione stazionaria è la distribuzione target.

La convergenza del metodo Metropolis verso la distribuzione target è garantita quando la densità di proposta assegna probabilità positiva a ogni punto dello spazio degli stati. In queste condizioni, al crescere del numero di iterazioni la distribuzione degli stati della catena tende a quella desiderata  $P(x) = P^*(x)/Z$ . La *proposal* non deve necessariamente essere simile alla distribuzione target, ma è sufficiente che permetta di raggiungere qualsiasi regione dello spazio: questa caratteristica assicura che la catena sia in grado di esplorare completamente l'insieme degli stati e di convergere correttamente.

Il metodo Metropolis–Hastings fornisce un modo semplice ma potente per generare campioni dipendenti dalla distribuzione target, garantendo convergenza [24] grazie alle proprietà delle catene di Markov. La flessibilità nella scelta della *proposal* e la capacità di esplorare lo spazio tramite accettazione-rifiuto rendono questo algoritmo uno degli strumenti fondamentali per l'implementazione dei metodi MCMC.

## 4.5 Applicazione numerica del metodo UKF-MCMC combinato

L'algoritmo proposto combina un UKF con una procedura di campionamento MCMC di tipo Metropolis–Hastings, con l'obiettivo di stimare in tempo reale e in maniera probabilistica la distribuzione a posteriori dei parametri non lineari del sistema.

L'accoppiamento dei due metodi permette di ottenere un approccio UKF–MCMC sequenziale, che produce una distribuzione temporale dei parametri con adattamento automatico dello step MCMC in funzione dell'indice di accettazione.

L'UKF consente di stimare in tempo reale gli stati del sistema, gestendo la non linearità della dinamica, mentre l'MCMC fornisce una stima probabilistica dei

parametri attraverso campionamento sequenziale della loro distribuzione a posteriori. A ogni passo temporale  $k$ , l'UKF predice e corregge lo stato del sistema  $[y_k, \hat{y}_k]$ , mentre i parametri logaritmici  $\phi_1$  e  $\phi_3$  vengono aggiornati tramite una catena MCMC locale, che fornisce una stima della distribuzione posteriore  $p(\phi | y_{1:k})$ .

La media dei campioni accettati viene utilizzata per correggere la stima dei parametri all'interno dell'UKF, in modo da mantenere coerenza tra le due componenti dell'algoritmo.

Di seguito viene riportato uno pseudo-codice che mostra come sono stati combinati i due metodi:

### UKF–MCMC Bayesian identification algorithm

Nota la dinamica del sistema e il modello di misura...

Definizione dello stato UKF:

$$\phi_{1,k} = \log(-k_1(t_k)) \quad \phi_{3,k} = \log(-k_3(t_k)) \quad \text{Log-parametri}$$

$$x_k = [y_k \dot{y}_k \phi_{1,k} \phi_{3,k}]^T \quad \text{Vettore di stato}$$

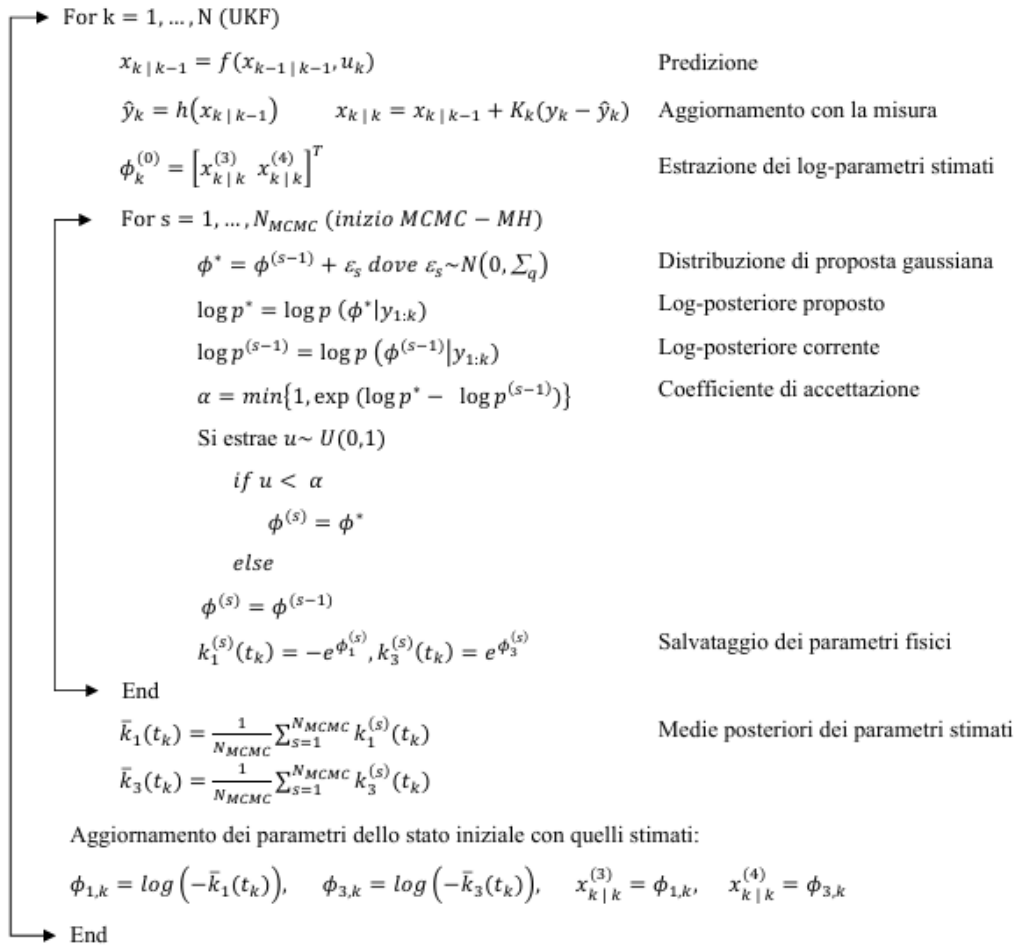
Inizializzazione dei prior sui parametri:

$$\phi = [\phi_1 \phi_2]^T \sim N(\mu_\phi, \sigma_\phi) \quad \text{Prior gaussiano sui log-parametri}$$

$$\log L(\phi) = -\frac{1}{2} \sum_{l=1}^k \left[ \frac{(y_l - y_{pred,l}(\phi))^2}{R} + \log(2\pi R) \right] \quad \text{Funzione di verosimiglianza}$$

Inizializzazione del numero di campioni  $N_{MCMC}$  e della matrice di proposta  $\Sigma_q$  per MCMC...

Definizione dello stato iniziale per far partire la catena di Markov:  $\phi^{(0)} = \phi_k^{(0)}$



In conclusione, l'identificazione probabilistica basata su UKF–MCMC combinato rappresenta un metodo efficace per stimare parametri incerti di sistemi dinamici non lineari. Rispetto a un UKF standard, l'inclusione del campionatore MCMC consente di:

- Ottenere una stima completa della distribuzione a posteriori dei parametri.
- Gestire in modo naturale l'incertezza e la variabilità temporale.
- Migliorare la stabilità numerica mediante l'adattamento automatico dello step.

## 5 Sistemi bistabili

Negli ultimi anni, l'interesse verso i sistemi bistabili è cresciuto in maniera significativa in diversi ambiti dell'ingegneria, in particolare nel campo del controllo delle vibrazioni e della dissipazione di energia. A differenza dei sistemi monostabili, nei quali esiste un solo equilibrio stabile, i sistemi bistabili presentano due configurazioni di equilibrio stabili e una instabile che le separa. Tale caratteristica è associata a un potenziale di energia elastica a “doppio pozzo”, che consente al sistema di transitare da uno stato all'altro attraverso un fenomeno noto come *snap-through*.

Questo meccanismo di *snap-through* rappresenta uno degli aspetti più significativi dei sistemi bistabili. Durante la transizione tra i due stati di equilibrio, il sistema esibisce delle velocità significativamente superiori e di conseguenza, la risposta dinamica dei sistemi bistabili risulta fortemente non stazionaria.

I sistemi bistabili possono manifestare due regimi di oscillazione diversi: *intra-well*, in cui la risposta rimane localizzata attorno a un equilibrio stabile e *inter-well*, in cui l'energia è sufficiente a superare la barriera di potenziale e il sistema transita tra le due configurazioni stabili, a seconda dell'eccitazione e dei parametri del sistema.

Nel contesto di questo lavoro, la bistabilità viene sfruttata per realizzare un campioncino impiegato nella sperimentazione in laboratorio. Tale sistema è modellato come un oscillatore di Duffing a un grado di libertà e di conseguenza, un passaggio fondamentale consiste nell'identificare i parametri di rigidità non lineari, in particolare  $k_1$  e  $k_3$ , a partire dalle misure sperimentali che determinano la forma del potenziale.

Alla luce di queste considerazioni, il presente capitolo è dedicato allo studio dei sistemi bistabili. Nella prima parte viene introdotta la dinamica della bistabilità, illustrando le nozioni teoriche fondamentali. Successivamente, viene discusso il modo in cui tale dinamica può essere realizzata fisicamente in dispositivi reali, descrivendo il passaggio da un oscillatore monostabile non lineare a uno bistabile. Infine, viene accennato come sono stati realizzati i campioni bistabili in questo lavoro di tesi mediante l'ausilio della stampa 3D.

### 5.1 Descrizione della dinamica bistabile

Per introdurre le caratteristiche fondamentali dei sistemi bistabili è utile prendere come riferimento un modello meccanico elementare a un grado di libertà, costituito da una massa collegata a un telaio tramite due molle identiche e vincolata a muoversi lungo una sola direzione (Figura 11). In condizioni di simmetria, la configurazione centrale  $X = 0$ , corrispondente a spostamento nullo, può essere interpretata come stato di equilibrio stabile. Tuttavia, variando opportunamente i parametri geometrici (ad esempio la distanza tra i vincoli rispetto alla lunghezza a riposo degli elementi elastici),

la configurazione centrale può diventare instabile e il sistema sviluppa due nuove configurazioni di equilibrio stabili in  $X = \pm a$ , simmetriche rispetto all'origine. In tal caso, il comportamento è definito bistabile poiché la risposta statica è caratterizzata da due stati di equilibrio stabili separati da una barriera energetica.

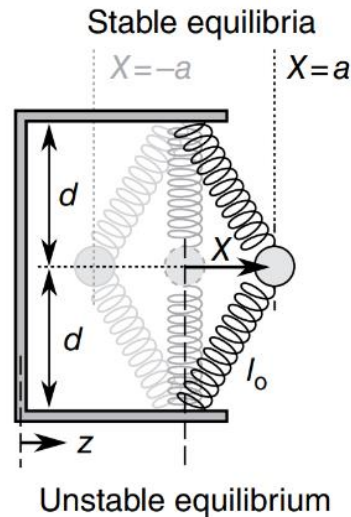


Figura 11: Schema di un sistema bistabile composto da molle, massa e telaio [25]

La bistabilità può essere descritta in modo chiaro osservando l'andamento della forza di richiamo  $F(X)$  e dell'energia potenziale  $U(X)$ , entrambe in funzione dello spostamento  $X$ . In particolare, l'energia potenziale può essere ricavata a partire dalla forza di richiamo tramite la relazione:

$$U(X) = \int F(X) dX$$

Eq. 5.1

In Figura 12a è mostrato l'andamento qualitativo della forza di richiamo  $F(X)$ , mentre in Figura 12b è riportata la forma della corrispondente energia potenziale  $U(X)$ , caratterizzata da due minimi locali separati da una barriera energetica.

In un sistema bistabile, la curva  $F(X)$  presenta un andamento non lineare tale da generare un potenziale  $U(X)$  a doppio pozzo: quando la massa si trova in prossimità della configurazione centrale  $X = 0$ , l'energia potenziale risulta localmente massima e quindi tale configurazione rappresenta un equilibrio instabile mentre in corrispondenza delle due posizioni laterali  $X = \pm a$ ,  $U(X)$  assume due minimi locali, che identificano i due equilibri stabili del sistema.

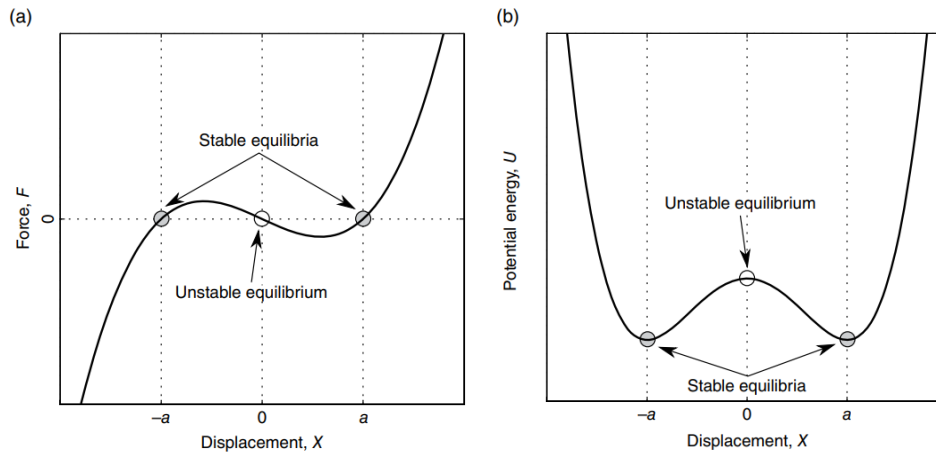


Figura 12: Dipendenza di (a) forza elastica e (b) energia potenziale immagazzinata dalla posizione di spostamento della massa inerziale [25]

Dal punto di vista fisico, una piccola perturbazione attorno alla configurazione centrale non riporta il sistema verso l'origine, ma lo fa evolvere verso uno dei due minimi energetici, cioè verso uno dei due stati stabili. Un'interpretazione equivalente deriva dall'analisi della rigidità efficace locale, definita come  $k_{\text{eff}} = dF/dX$ , dove in prossimità dell'equilibrio instabile il sistema può presentare una rigidità efficace negativa. Ne consegue che la forza risultante, anziché opporsi allo spostamento come nei sistemi lineari, ne favorisce l'allontanamento, innescando la transizione verso uno dei due stati stabili.

Le considerazioni statiche forniscono la base per comprendere il comportamento dinamico dei sistemi bistabili, che può essere descritto mediante modelli dinamici non lineari a un grado di libertà.

I sistemi bistabili si basano su un profilo energetico caratterizzato da pozzi di potenziale separati da una barriera energetica. La transizione tra stati stabili viene innescata quando forze esterne superano questa barriera. Il lavoro fondamentale di Harné [25] si concentra su come questi principi possano migliorare il controllo delle vibrazioni e l'assorbimento di energia. I sistemi bistabili raggiungono elevate prestazioni attraverso configurazioni meccaniche (ad esempio, modelli massa-molla) e metamateriali ingegnerizzati, personalizzati per specifiche esigenze operative. La modellazione dei sistemi bistabili prevede approcci sia analitici che numerici per prevederne il comportamento dinamico. Le equazioni del moto dei sistemi bistabili sono spesso non lineari e la loro soluzione richiede tecniche speciali.

Ad esempio, le equazioni del moto di un sistema bistabile possono essere espresse in forma normalizzata come segue:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \gamma \frac{dx}{d\tau} - x + \beta x^3 = p \cos(\omega\tau)$$

Eq. 5. 2

dove  $x(\tau)$  è lo spostamento del sistema bistabile in funzione del tempo  $\tau$ ,  $\gamma$  è un fattore di smorzamento,  $\beta$  rappresenta un grado di non linearità,  $p$  è il livello di eccitazione e  $\omega$  è la frequenza di eccitazione normalizzata in base alla frequenza naturale del sistema.

La soluzione transitoria dell'equazione sopra riportata dipende fortemente dalle condizioni iniziali dello spostamento  $x(0) = x_0$  e della velocità  $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ . È importante notare che l'equazione modella anche i sistemi bistabili realizzati in domini elettrici dove la coordinata  $x$  può rappresentare una tensione o una corrente normalizzata e i corrispondenti parametri di sistema e di eccitazione ( $p, \omega, \gamma, \beta$ ) possono essere descritti mediante opportune analogie con i componenti elettrici. Tale analogia è molto usata *nell'energy harvesting*, dove a una struttura bistabile viene accoppiato un circuito esterno che può essere di tipo elettrico o magnetico [26].

Nei sistemi bistabili, a differenza dei sistemi lineari, può inoltre verificarsi la coesistenza di più soluzioni periodiche stabili sotto le medesime condizioni di eccitazione. Ciò implica che risposte dinamiche differenti possono emergere in funzione delle condizioni iniziali, dando luogo a fenomeni di multi-stabilità dinamica. Al variare dei parametri di eccitazione, tali risposte possono subire transizioni improvvise, associate a biforcazioni del sistema dinamico, con passaggi repentini tra regimi a bassa ed alta ampiezza di oscillazione. Questa sensibilità ai parametri di eccitazione rappresenta una caratteristica distintiva dei sistemi bistabili e costituisce la base per molte delle loro applicazioni funzionali.

Oltre alle applicazioni nel mondo del controllo delle vibrazioni, la bistabilità è stata ampiamente sfruttata nella progettazione di attuatori meccanici, grazie alla possibilità di ottenere ampi spostamenti e rapidi cambi di configurazione, con un apporto energetico relativamente contenuto. Nei sistemi attuativi bistabili, il movimento utile non è generato attraverso una deformazione continua come nei sistemi lineari, ma tramite il superamento controllato della barriera energetica che separa i due stati di equilibrio stabili.

Le proprietà dinamiche e statiche descritte rendono i sistemi bistabili particolarmente interessanti anche dal punto di vista applicativo, come evidenziato da numerosi studi su strutture funzionali avanzate [27].

Una panoramica delle principali aree applicative delle strutture bistabili, tra cui attuatori meccanici, sistemi adattivi e strutture programmabili, è mostrata in Figura 13.



bistabile.

La bistabilità emerge quando la forza di richiamo assume una forma tale da rendere instabile la configurazione centrale e da introdurre due posizioni di equilibrio stabili simmetriche. Un modello bistabile può essere descritto da una forza di richiamo del tipo:

$$F(x) = k_1x + k_3x^3$$

*Eq. 5. 3*

che porta a una dinamica governata (in forma non forzata) da:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + k_1x + k_3x^3 = 0$$

*Eq. 5. 4*

Nel caso pratico di interesse, si assume  $k_1 < 0$  e  $k_3 > 0$ . In questa configurazione, il contributo proporzionale allo spostamento introduce una rigidità negativa locale in prossimità dell'origine, rendendo instabile l'equilibrio in  $x = 0$ , mentre il termine cubico positivo garantisce la stabilità globale. La natura bistabile è particolarmente evidente osservando l'energia potenziale associata, ottenuta integrando la forza rispetto allo spostamento:

$$V(x) = \int_0^x F(x) dx$$

*Eq. 5. 5*

Quindi, calcolando l'integrale, il potenziale in funzione dello spostamento risulta essere:

$$V(x) = \frac{1}{2}k_1x^2 + \frac{1}{4}k_3x^4$$

*Eq. 5. 6*

il quale presenta due equilibri stabili non nulli in:

$$x = \pm\sqrt{k_1/k_3}$$

*Eq. 5. 7*

I profili forza-spostamento ed energia potenziale-spostamento sono mostrati rispettivamente nella Figura 15a e 15b. Il profilo forza-spostamento mostra chiaramente che alle tre configurazioni di spostamento corrisponde una reazione nulla della molla. La configurazione di equilibrio statico centrale è caratterizzata da rigidità negativa, ossia da una pendenza negativa nel profilo forza-spostamento,  $\partial F(x)/\partial x < 0$ .

Al contrario, gli equilibri statici circostanti mostrano rigidità positive. L'equilibrio centrale appare come una "cima" mentre gli equilibri circostanti sono "valli" del profilo di energia potenziale. Considerando le equazioni di Lagrange, l'equilibrio statico si verifica dove  $\partial V(x)/\partial x = 0$ . Lagrange osservò che affinché un equilibrio sia localmente stabile, deve essere in un minimo relativo completo dell'energia potenziale totale.

Pertanto, la stabilità di un equilibrio richiede che  $\partial^2 V/\partial x^2 > 0$ . Utilizzando la prospettiva mostrata dalla Figura 15b, la convessità delle "valli" di equilibrio statico positivo e negativo dimostra la loro stabilità, mentre la concavità della configurazione centrale indica che si tratta di una posizione instabile.

Nel caso di un'eccitazione esterna, in particolare un'armonica di base, l'equazione del moto può essere scritta in forma relativa introducendo un termine di forzamento equivalente. La formulazione evidenzia che, rispetto al caso libero, il sistema può manifestare una varietà di risposte molto più ampia. In particolare, in un sistema bistabile eccitato possono comparire:

- Oscillazioni *intra*well, in cui il moto rimane confinato in uno dei due pozzi del potenziale (risposta a singolo pozzo).
- Oscillazioni *inter*well o moti di *snap-through*, in cui la traiettoria attraversa ripetutamente la barriera energetica passando da un pozzo all'altro.
- Risposte periodiche con differenti ampiezze (multi-risposta) e, in alcuni casi, risposte non periodiche o caotiche.

A titolo illustrativo, in Figura 14 sono riportati esempi di risposte *intra*well e *inter*well nel dominio del tempo e nel dominio della frequenza, che evidenziano differenze significative in termini di ampiezza e contenuto armonico.

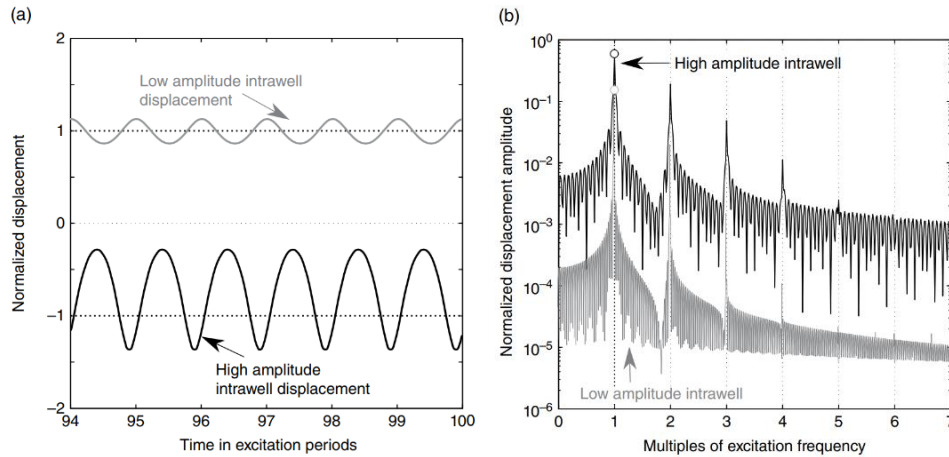


Figura 14: (a) Serie temporali delle risposte di spostamento. Le linee tratteggiate spesse indicano gli equilibri staticamente stabili. (b) Le risposte spettrali dell'ampiezza dello spostamento delle dinamiche intra-pozzetto a bassa e alta ampiezza [25]

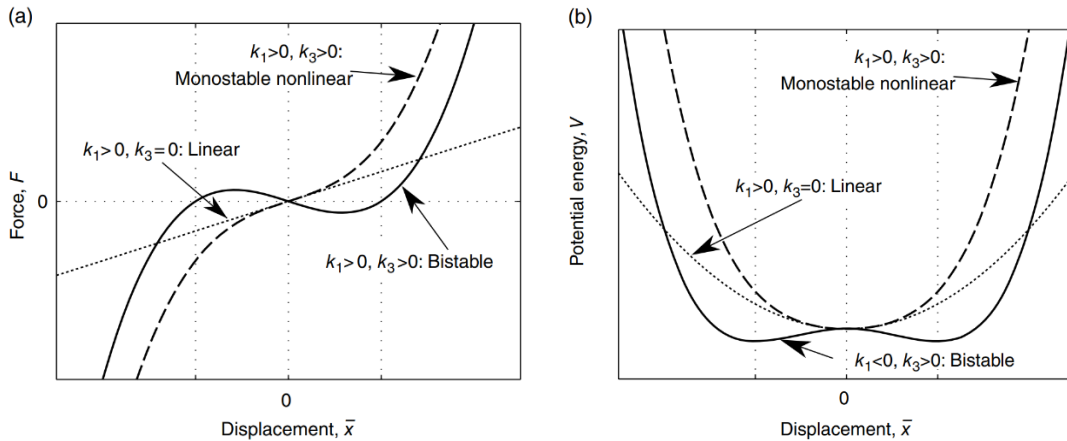


Figura 15: (a) Profili della forza di ripristino della molla per oscillatori lineari, monostabili e bistabili, e (b) corrispondenti energie potenziali [25]

## 5.2.1 Stampa 3D

I campioni bistabili analizzati nel presente lavoro sono stati realizzati mediante stampa 3D a deposizione di filamento fuso (FDM), utilizzando la stampante Bambu Lab X1 Carbon (Figura 16). Le stampanti 3D consentono di ottenere strutture monolitiche in cui elementi rigidi e parti flessibili sono integrati in un unico componente, permettendo di sfruttare la non linearità geometrica per generare un comportamento bistabile senza l'impiego di meccanismi aggiuntivi o assemblaggi complessi.



Figura 16: Stampante 3D, modello Bambu Lab X1 Carbon [29]

Il materiale usato per la creazione del campione (Figura 17) è l'ABS (Acrilonitrile Butadiene Stirene). Le dimensioni geometriche principali del provino sono riportate in Tabella 1 come segue:

h - Altezza della freccia	0.005 m
t - Spessore elemento flessibile	0.0005 m
L - Lunghezza	0.09 m
b - Larghezza	0.02 m
E - Modulo di Young	$2.8 \cdot 10^9$ Pa
m - Massa del componente	0.047 kg

Tabella 1: Dimensioni geometriche del provino

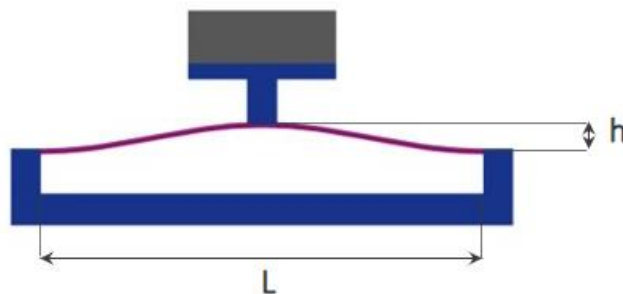


Figura 17: Provino in ABS realizzato mediante stampa 3D

Tali dimensioni sono state scelte in modo da garantire una sufficiente flessibilità della struttura. L'impiego della stampa 3D permette inoltre un'elevata ripetibilità geometrica e una facile variazione dei parametri dimensionali, rendendo possibile l'ottimizzazione del comportamento bistabile attraverso modifiche mirate della geometria. In questo contesto, la stampa FDM rappresenta una soluzione efficace per la costruzione rapida di strutture bistabili e per lo studio sperimentale della loro dinamica non lineare.

## 6 Validazione numerica

Nel capitolo si presenta la validazione numerica delle procedure di identificazione dei parametri del modello SDOF non lineare di tipo Duffing adottate in questo lavoro. A partire dai valori teorici noti, vengono confrontate le stime di  $k_1$  e  $k_3$  ottenute mediante tre approcci differenti:

1. Stima mediante l'Unscented Kalman Filter.
2. Stima a posteriori tramite campionamento Markov Chain Monte Carlo (Metropolis Hastings).
3. Stima mediante un metodo combinato tra UKF e MCMC.

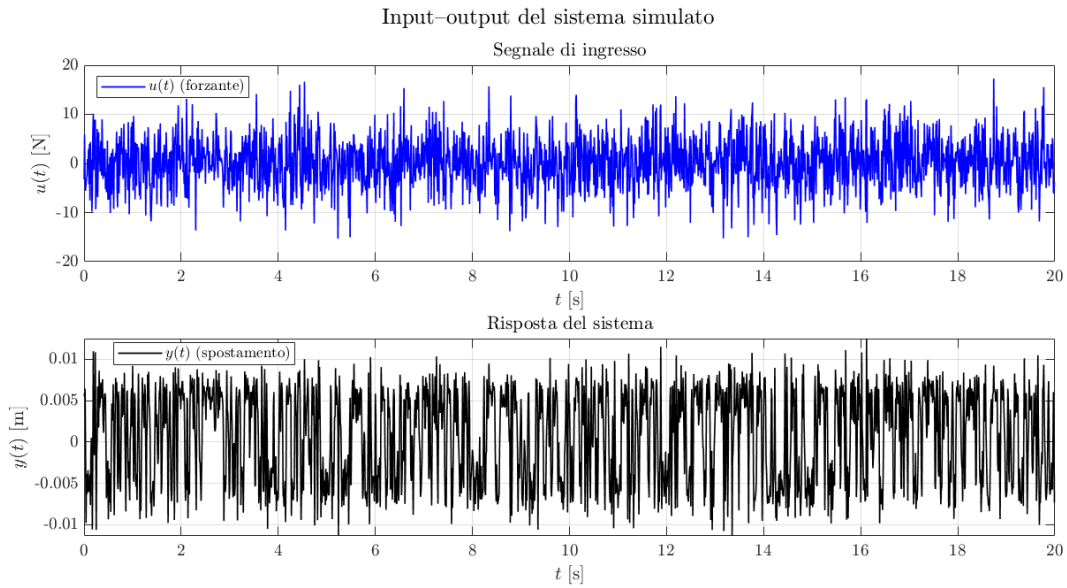
L'accuratezza delle stime è quantificata rispetto ai valori teorici mediante metriche di errori comuni, tra cui l'errore relativo e l'NMSE (*Normalized Mean Squared Error*), così da evidenziare prestazioni e limiti dei metodi considerati.

### 6.1 Validazione modello UKF

In questa sezione si presenta la validazione numerica dell'Unscented Kalman Filter impiegato per l'identificazione dei parametri di interesse.

L'obiettivo è stimare i coefficienti di rigidità  $k_1$  e  $k_3$  a partire dalla misura dello spostamento  $y(t)$  e dalla forzante  $u(t)$ . La validazione viene condotta su un sistema già simulato, per cui i valori teorici dei parametri iniziali sono noti.

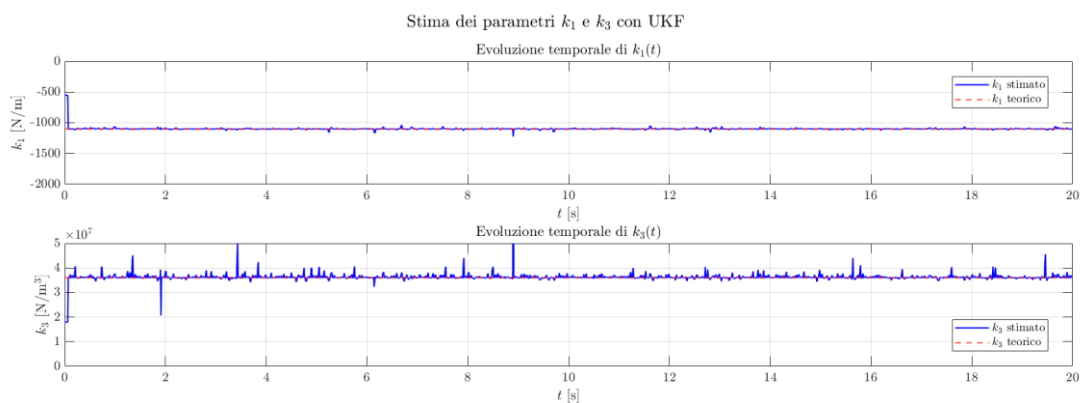
In Figura 18 sono riportati i segnali del sistema simulato: l'ingresso  $u(t)$  e l'uscita  $y(t)$  con ampiezza dell'ordine di  $\pm 10^{-2} m$ . La risposta è sufficientemente ampia da eccitare la non linearità, ma resta confinata in un range realistico di spostamento, rendendo significativo il confronto quantitativo tra modello e riferimento.



*Figura 18: Input e output del sistema simulato*

In Figura 19 è riportata l'evoluzione temporale delle stime  $k_1(t)$  e  $k_3(t)$  prodotte dall'UKF, confrontate con i rispettivi valori teorici (costanti). Entrambe le stime convergono rapidamente verso i valori corretti e rimangono poi confinate attorno ad essi, con oscillazioni residue compatibili con la natura stocastica del filtro. Tuttavia, visivamente emerge una differenza tra i due parametri. In particolare:

- La stima di  $k_1(t)$  si assesta rapidamente attorno al valore reale e presenta una dispersione più contenuta.
- La stima di  $k_3(t)$  presenta una variabilità maggiore ma converge comunque verso il valore corretto.



*Figura 19: Stime dei parametri  $k_1(t)$  e  $k_3(t)$*

Queste osservazioni vengono sintetizzate tramite gli indicatori (errore relativo e NMSE) riportati in Tabella 2:

Parametri da identificare	Valore teorico noto	Valore stimato finale UKF	Errore relativo [%]	NMSE [%]
$k_1$ [N/m]	$-1.099 \cdot 10^3$	$-1.100 \cdot 10^3$	0.108	0.094
$k_3$ [N/m <sup>3</sup> ]	$3.602 \cdot 10^7$	$3.696 \cdot 10^7$	2.593	0.502

Tabella 2: Risultati quantitativi ed errori della stima dell'UKF

Per quanto riguarda  $k_1$ , si ottiene uno scostamento assoluto pari a 1 N/m, che corrisponde a un errore relativo dello 0.108%. Anche l'NMSE risulta estremamente basso (0.094%), confermando che la stima non solo è corretta, ma resta anche molto stabile nel tempo rispetto al valore di riferimento teorico.

Per la rigidità non lineare positiva si ottiene invece uno scostamento assoluto di  $9.4 \cdot 10^5$  N/m<sup>3</sup>, equivalente a un errore relativo rispetto al valore teorico del 2.593%. L'NMSE resta comunque contenuto (0.502%), indicando che, nonostante la maggiore dispersione rispetto a  $k_1$ , la stima di  $k_3$  mantiene una buona aderenza al valore reale e non presenta instabilità o divergenze.

Infine, una volta ottenute le stime dei due parametri, la risposta reale del sistema è stata confrontata con quella ricostruita, integrando il modello dinamico in Matlab mediante la funzione ODE45, utilizzando i valori di  $k_1$  e  $k_3$  stimati dal filtro. Il confronto è riportato in Figura 20.

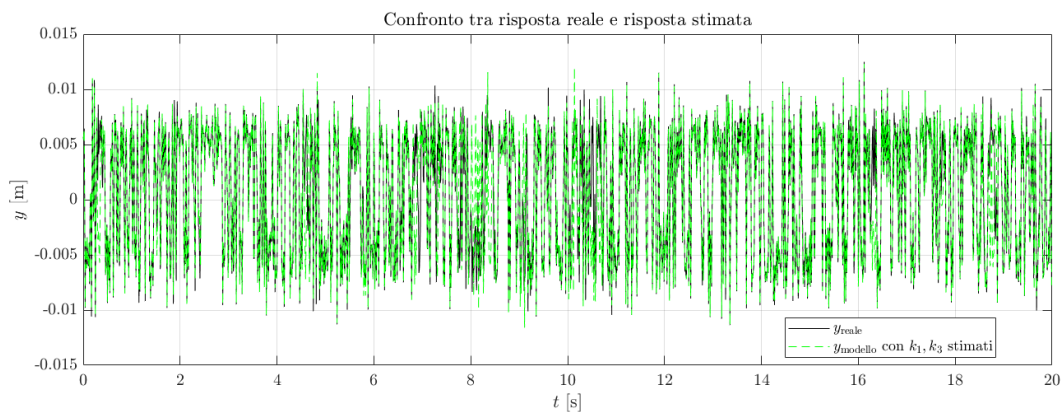


Figura 20: Confronto tra risposta vera del sistema e quella simulata con i parametri stimati

In sintesi, la validazione numerica conferma che l'UKF è in grado di identificare correttamente i parametri del modello: il coefficiente  $k_1$  viene stimato con un'elevata accuratezza (errore < 0.2%), mentre  $k_3$  viene stimato con un errore più elevato ma

comunque limitato ( $\approx 2.6\%$ ), mantenendo NMSE inferiori all'1% per entrambi i parametri. Coerentemente con questi risultati, la risposta ricostruita  $y_{\text{modello}}(t)$  risulta in ottimo accordo con la risposta reale  $y_{\text{reale}}(t)$ .

## 6.2 Validazione MCMC

In questa sezione si presenta la validazione numerica e i risultati ottenuti con il campionamento MCMC (Metropolis Hastings) per l'identificazione dei coefficienti  $k_1$  e  $k_3$  del modello di Duffing. L'MCMC non restituisce solo una stima puntuale, ma l'intera distribuzione a posteriori dei parametri, così da quantificare in modo esplicito l'incertezza dell'identificazione attraverso deviazioni standard e intervalli di fiducia. Il campionamento è eseguito in log-spazio  $\phi = [\log(-k_1), \log(k_3)]$ , così da imporre automaticamente i vincoli fisici  $k_1 < 0$  e  $k_3 > 0$ . Il *prior* è Gaussiano in  $\phi$  e centrato sulla stima UKF finale così da poter consentire all'MCMC di esplorare la regione dei parametri più plausibile secondo l'informazione preliminare fornita dall'UKF.

La simulazione utilizza 30 catene indipendenti e produce un'*acceptance rate* pari al 33.1%, valore coerente con un *random-walk* Metropolis (compromesso adeguato tra esplorazione e probabilità di accettazione). Infatti, un'accettazione troppo bassa avrebbe portato a catene "bloccate", mentre valori troppo alti a un'esplorazione lenta dello spazio dei parametri. Il tempo di esecuzione complessivo è di circa 8.54 s, a conferma del basso onere computazionale della procedura.

La Figura 21 mostra le distribuzioni a posteriori di  $k_1$  e  $k_3$  insieme ai valori teorici e alla stima UKF. Per sintetizzare le posteriori è stata scelta come stima puntuale la mediana. Le stime risultano inoltre sostanzialmente sovrapponibili a quelle dell'UKF, evidenziando che l'MCMC, pur fornendo una descrizione probabilistica, mantiene coerenza con la stima deterministica preliminare.

La parte "*Joint posterior*" della Figura 21 mostra i campioni nel piano  $(k_1, k_3)$ . Si nota come i due parametri non sono stimati in modo indipendente; infatti, la nube è estesa e con una direzione preferenziale, indicando che esistono combinazioni di  $(k_1, k_3)$  differenti che spiegano i dati con probabilità comparabile. Questo aspetto è coerente con l'ampiezza dei rispettivi intervalli di fiducia e contribuisce a giustificare una maggiore dispersione osservata per  $k_3$ .

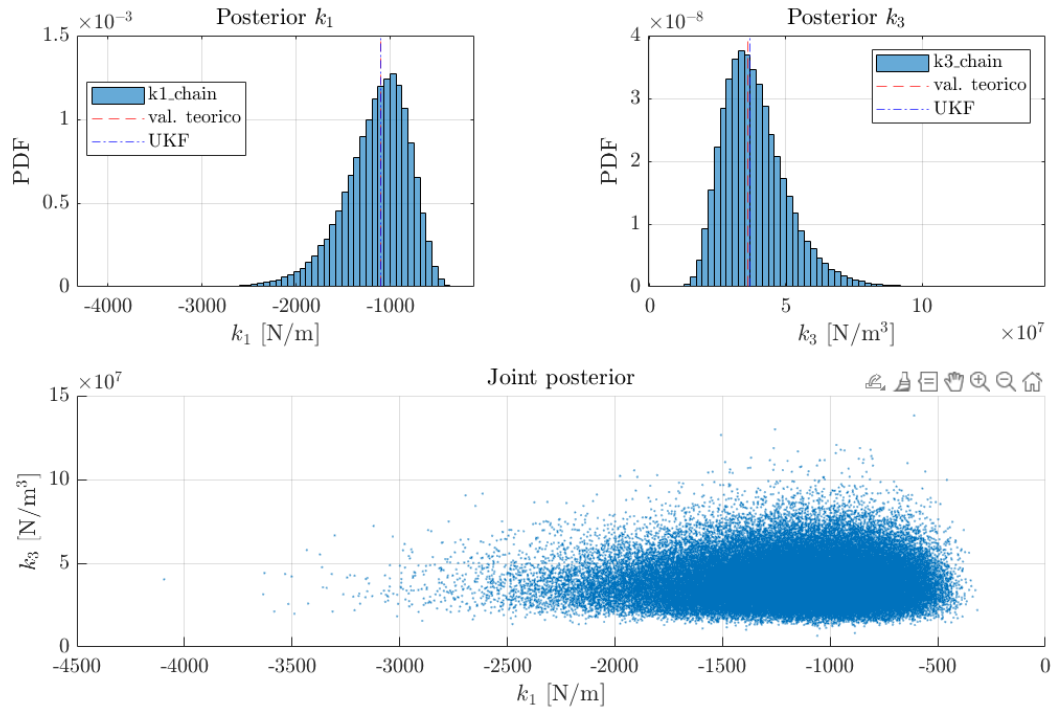


Figura 21: Posterior e distribuzione congiunta dei parametri

La rappresentazione in log-spazio (Figura 22) fornisce una lettura complementare. Le distribuzioni di  $\phi_1 = \log(-k_1)$  e  $\phi_3 = \log(k_3)$  sono ascrivibili ad una Gaussiana vera e propria. Questo si discosta da quanto ottenuto nello spazio fisico, dove i parametri sono rappresentati da una distribuzione log-normale. Anche la nube congiunta in  $(\phi_1, \phi_3)$  risulta più compatta in questa rappresentazione, la quale conferma l'utilità della parametrizzazione logaritmica, sia per imporre i vincoli fisici sia per migliorare la stabilità del campionamento.

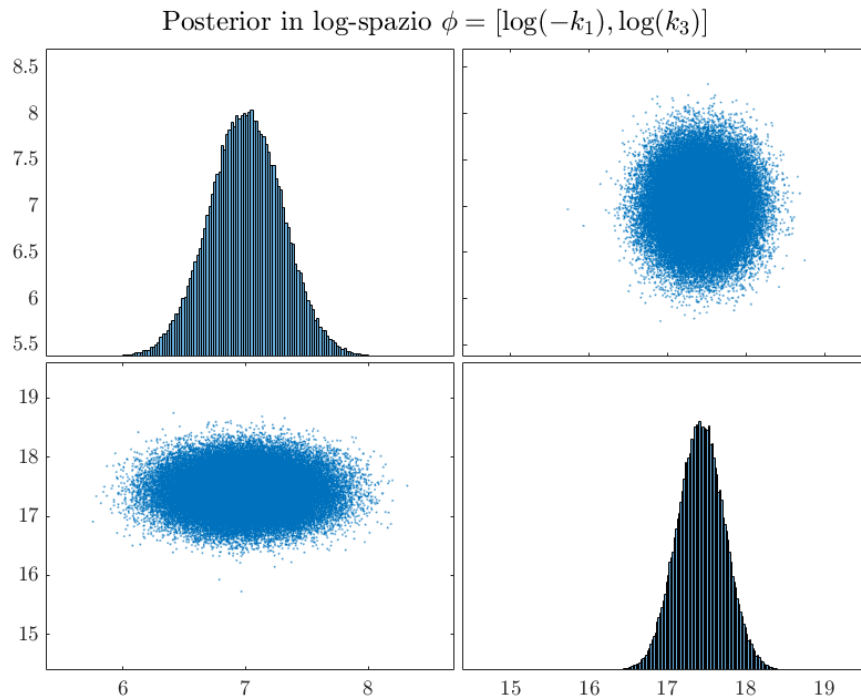


Figura 22: Posterior in log-spazio di  $k_1$  e  $k_3$

In sintesi, come mostrato in Tabella 3, la validazione numerica conferma che la procedura MCMC fornisce stime accurate e soprattutto una quantificazione esplicita dell'incertezza sui parametri. L'analisi evidenzia inoltre che l'incertezza associata a  $k_3$  è significativamente più elevata. Poiché l'UKF e l'MCMC, pur mirando a stimare gli stessi parametri del sistema, producono *output* di natura differente (il primo caso fornisce una stima dinamica dei parametri aggiornando costantemente la fase della predizione man mano che vengono acquisiti nuovi dati mentre l'MCMC produce una distribuzione a posteriori), un confronto basato esclusivamente su metriche parametriche non garantisce una valutazione perfettamente omogenea sulla valutazione congiunta degli errori.

Parametri da identificare	Valore teorico noto	Valore stimato finale MCMC	Deviazione Standard	Intervallo di fiducia	Errore relativo [%]	NMSE [%]
$k_1$ [N/m]	$-1.099 \cdot 10^3$	$-1.101 \cdot 10^3$	$3.532 \cdot 10^3$	$[-1.980 \cdot 10^3, -6.083 \cdot 10^2]$	0.147	$\sim 0$
$k_3$ [N/m <sup>3</sup> ]	$3.602 \cdot 10^7$	$3.699 \cdot 10^7$	$1.185 \cdot 10^7$	$[2.064 \cdot 10^7, 6.663 \cdot 10^7]$	2.687	0.072

Tabella 3: Risultati quantitativi ed errori della stima dell'MCMC

## 6.3 Validazione modello combinato UKF-MCMC

In questa sezione si considera un metodo di identificazione sequenziale che combina un UKF con un campionamento MCMC di tipo MH eseguito ad ogni istante temporale. L'idea principale è quella di sfruttare l'UKF per ottenere una stima ricorsiva dello stato e una prima localizzazione dei parametri, e utilizzare l'MCMC per stimare, in forma probabilistica, la distribuzione a posteriori dei parametri a ciascun istante  $t_k$  [23]. Lo pseudo-codice relativo sviluppato è stato riportato nella Sezione 4.5.

La Figura 23 mostra la stima di  $\hat{p}(k_1 | y_{1:t})$  nel tempo, rappresentata sia come superficie 3D sia come *heatmap*. Durante il transitorio iniziale, ovvero nella parte iniziale in cui il segnale inizia a stimolare il sistema, si osserva una PDF più larga; ciò significa che, a parità di dati, la *likelihood* non vincola ancora in modo deciso il parametro e quindi, in termini statistici, la *posterior* è più dispersa e di conseguenza la stima è meno identificata. Una volta superato il transitorio iniziale (regime), la densità di probabilità si stabilizza attorno a un intorno ben definito vicino a  $-1.1 \cdot 10^3$  N/m in cui l'incertezza si riduce e la stima diventa più consistente nel tempo.

La Figura 24 riporta in modo analogo  $\hat{p}(k_3 | y_{1:t})$ . Anche qui si osserva un comportamento transitorio seguito da una maggiore concentrazione, ma con la differenza fondamentale che la dispersione su  $k_3$  rimane più ampia rispetto a  $k_1$ .

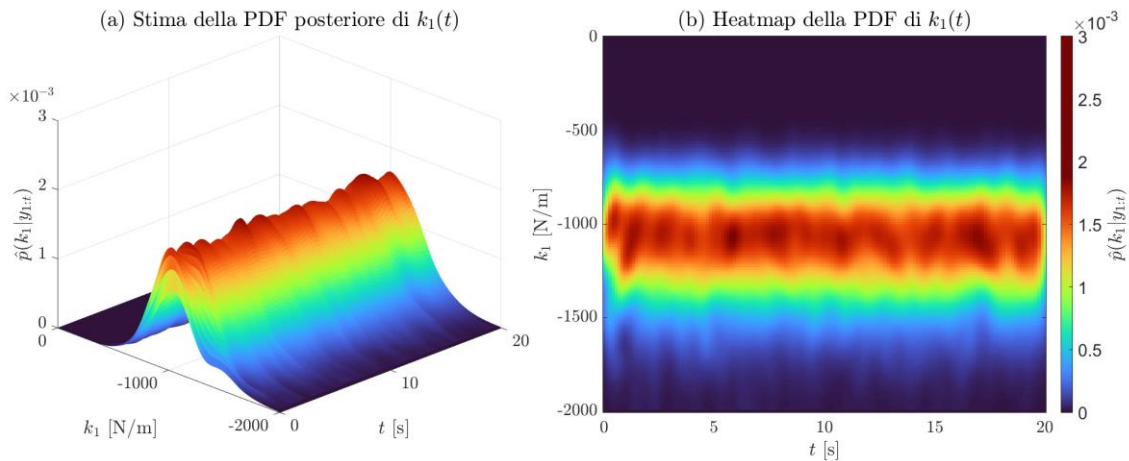


Figura 23: PDF e heatmap per  $k_1(t)$

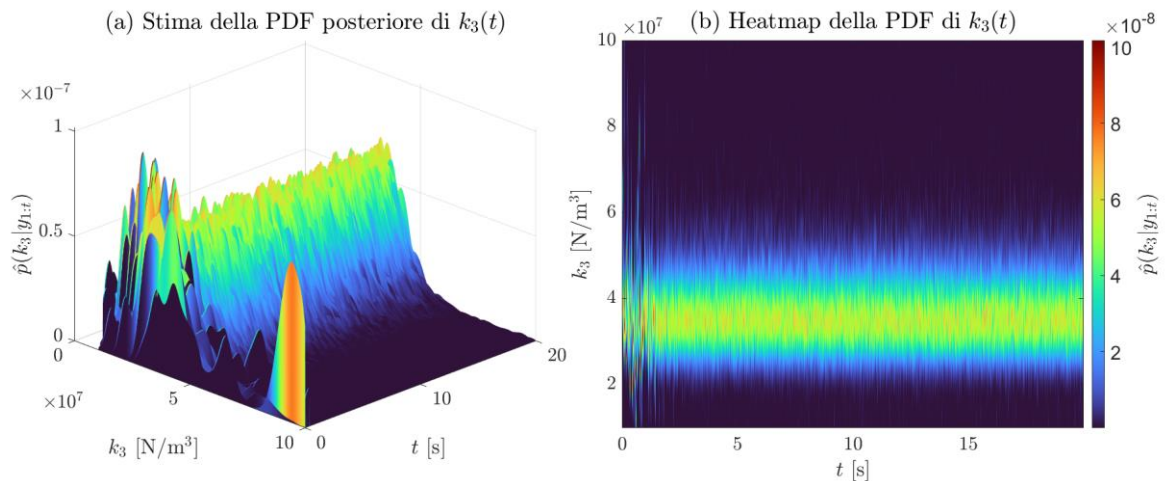


Figura 24: PDF e heatmap per  $k_3(t)$

In Figura 25 si riassume la stima temporale dei due parametri tramite tre componenti essenziali:

- Media a posteriori (linea blu).
- Intervallo di fiducia al 95% (area verdina).
- Valore teorico (linea rossa tratteggiata).

Questo grafico è utile perché rende leggibile, in modo quantitativo, sia la convergenza sia la dispersione nel tempo. In particolare:

- La convergenza si valuta osservando l'allineamento della media a posteriori con il valore teorico.
- La robustezza si valuta verificando se il valore teorico resta all'interno della banda e quanto essa si restringe nel tempo. L'ampiezza della banda  $\pm 2\sigma(t)$  decresce rapidamente nel transitorio iniziale e si assesta a regime, indicando un progressivo aumento della precisione del dato sulla stima parametrica.

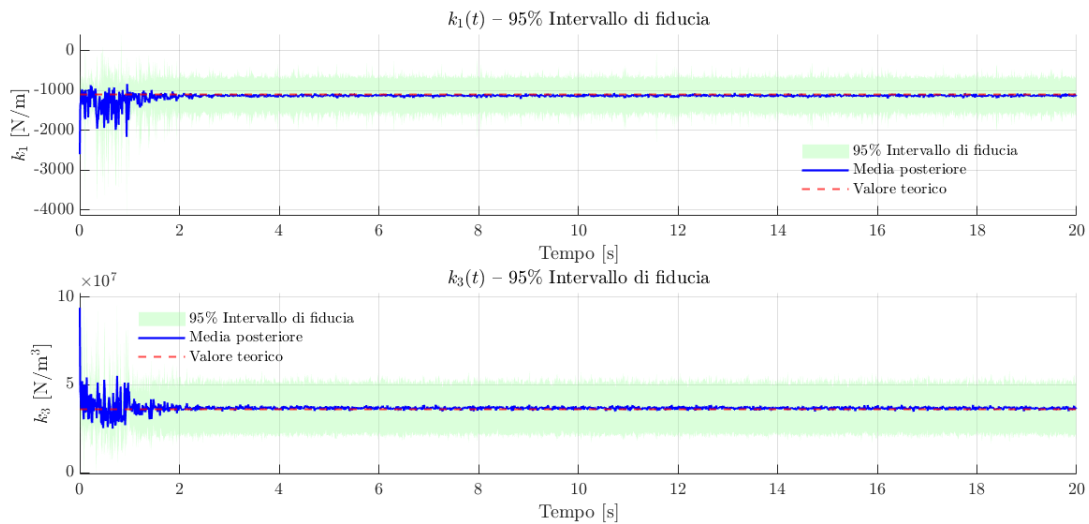


Figura 25: Stima temporale di  $k_1(t)$  e  $k_3(t)$ , valore teorico, media posteriore e intervallo di fiducia

Un'ulteriore analisi riguarda la dinamica di adattamento della proposta MCMC. Lo step viene aggiornato ogni 50 iterazioni in modo da regolare l'ampiezza delle perturbazioni e convergere verso un tasso di accettazione target di circa 36.9%. Dalla Figura 26 si nota che:

- Lo step cresce rapidamente all'inizio e poi resta in una zona quasi stazionaria.
- L'*acceptance rate* scende durante l'aumento dello step e si stabilizza attorno ad un valore praticamente costante.

Questa dinamica è esattamente ciò che ci si aspetta da un adattamento correttamente funzionante, poiché il sistema trova un compromesso tra esplorazione e tasso di accettazione.

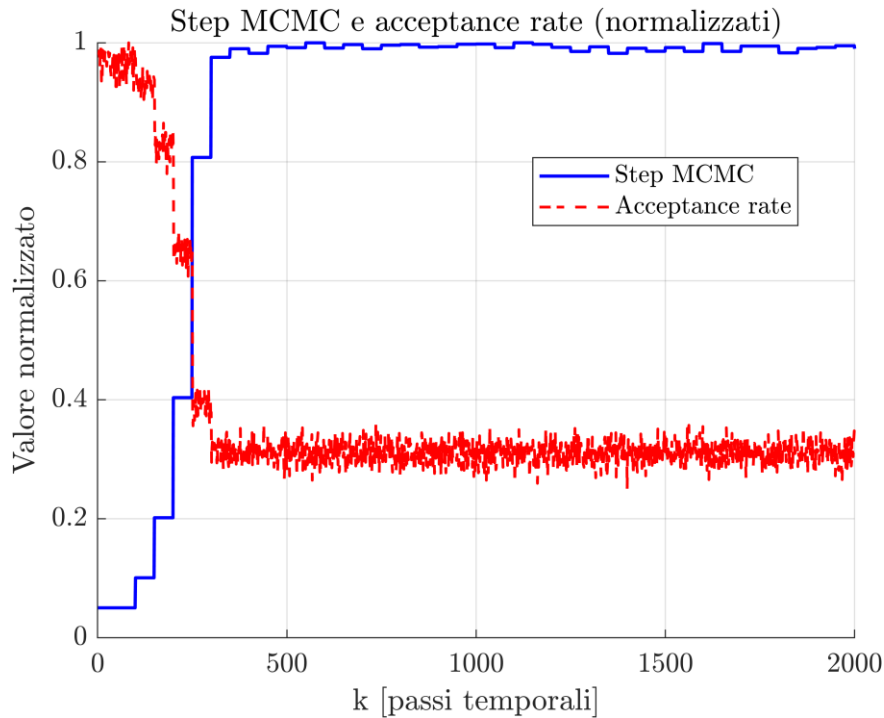


Figura 26: Andamento dello step e dell'acceptance rate del campionatore

Nel complesso, come mostrato in Tabella 4, il metodo combinato UKF-MCMC produce stime finali accurate con errori relativi pari a 1.15% su  $k_1$  e 2.91% su  $k_3$ . La procedura fornisce inoltre una quantificazione dell'incertezza: i CI 95% includono valori ammissibili con ampiezza rispettivamente di circa 936  $N/m$  per  $k_1$  e  $3.29 \cdot 10^7 N/m^3$  per  $k_3$ , evidenziando che la stima del termine cubico è associata a maggiore dispersione. Dal punto di vista temporale, le prestazioni medie risultano coerenti con i valori di NMSE inferiori all'1% (0.758% e 0.449%), mentre il comportamento dello step adattivo e l'assestamento dell'acceptance rate indicano un funzionamento numericamente stabile del campionatore MCMC-MH.

Parametri da identificare	Valore teorico noto	Valore stimato finale UKF+MCMC	Deviazione Standard	Intervallo di fiducia	Errore relativo [%]	NMSE [%]
$k_1 [N/m]$	$-1.099 \cdot 10^3$	$-1.112 \cdot 10^3$	$2.623 \cdot 10^2$	$[-1.673 \cdot 10^3, -7.371 \cdot 10^2]$	1.15	0.758
$k_3 [N/m^3]$	$3.602 \cdot 10^7$	$3.707 \cdot 10^7$	$9.156 \cdot 10^6$	$[2.474 \cdot 10^7, 5.762 \cdot 10^7]$	2.91	0.449

Tabella 4: Risultati quantitativi ed errori della stima del metodo combinato UKF-MCMC con dati teorici

## 7 Descrizione macchinario e prove sperimentali

### 7.1 Descrizione banco prova

Il principale problema nella sperimentazione di sistemi bistabili è la misura diretta degli spostamenti sotto una forza applicata, per due ragioni principali:

1. Gli spostamenti sono le grandezze fondamentali che descrivono il salto tra le due posizioni stabili.
2. Di conseguenza, velocità e accelerazioni si possono ottenere facilmente per derivazione, mentre il processo inverso risulta molto più soggetto a errori numerici.

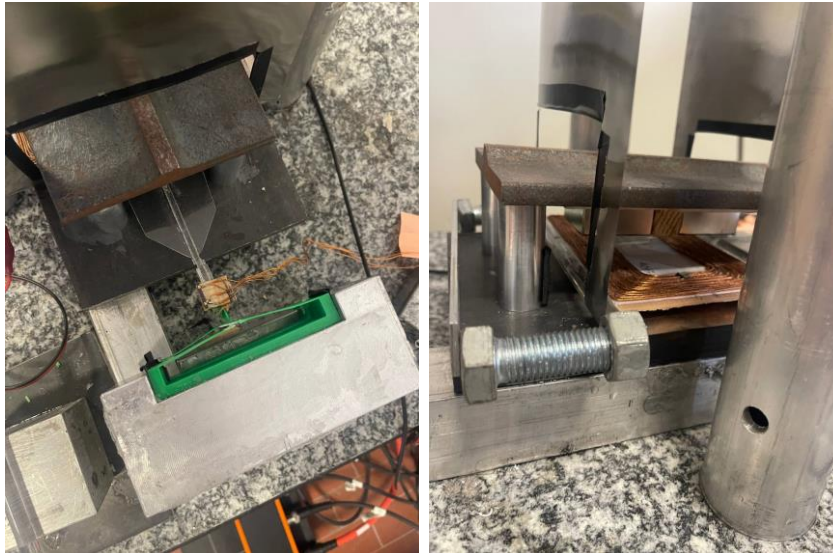
La macchina di prova prototipale è costituita da un sistema di attuazione elettromagnetica che consente una stima a priori abbastanza precisa della forza applicata, e da una misura ottica dello spostamento ad alta precisione mediante un sistema laser, come mostrato in Figura 28. Quest'ultimo impiega un laser HeNe [30], con un fascio di diametro pari a  $0.48\text{ mm}$  e con un rumore di potenza (*Root Mean Square*) inferiore all'1.0%. Il fascio laser viene inizialmente focalizzato tramite una lente cilindrica a barra convergente ( $\phi = 10\text{ mm}$ ) per ottenere un fascio luminoso "piatto" verticale, che viene successivamente reindirizzato da due specchi ( $\phi = 25\text{ mm}$ ) a  $45^\circ$  verso una lente divergente ( $50 \times 50 \times 5\text{ mm}$ ). Tale lente focalizza il fascio piatto su un rivelatore lineare di posizione (PSD, *position-sensitive detector*), al fine di migliorare la risoluzione.

Lo spostamento viene misurato mediante un PSD lungo  $12\text{ mm}$ , posizionato orizzontalmente sulla massa vibrante, che rileva la posizione in cui il fascio colpisce l'area sensibile, consentendo un tracciamento del moto ad alta precisione (si veda Figura 27). Quando un punto luminoso incide sul PSD, genera localmente una carica elettrica proporzionale all'intensità luminosa. Tale carica fluisce in entrambe le direzioni sotto forma di fotocorrente attraverso lo strato resistivo e viene estratta ai due elettrodi di uscita opposti. La corrente si ripartisce tra gli elettrodi in proporzione inversa alla distanza dal punto di incidenza, permettendo la determinazione della posizione. Considerando lo spessore della lama di luce, la linearità del PSD e il rumore generato dalla corrente di buio del PSD e dall'elettronica di interfaccia, si può concludere che l'incertezza sulla posizione calcolata risulta complessivamente inferiore a  $50\text{ }\mu\text{m}$ .

D'altra parte, il sistema di attuazione, rigidamente collegato al provino vincola il sistema contro la rotazione e quindi impedisce l'attivazione di modi di vibrare rotazionali. In tali condizioni, la risposta è dominata dalla dinamica di un oscillatore a un grado di libertà, come descritto in Eq. 2.7.

La lunghezza della lastra in plexiglass è stata scelta appositamente per minimizzare

l'attrazione magnetica tra la massa vibrante in acciaio e i magneti permanenti. L'attuatore è costituito da un supporto in cartone con una bobina di rame sulla faccia superiore e inferiore. Il filo di rame ha diametro pari a  $1\text{ mm}$ , e 20 spire per ciascun lato presentano una resistenza di  $0.2\ \Omega$ , si veda Figura 27b.



*Figure 27: Componenti principali della macchina prototipale*

Per mantenere in asse lo spingitore e ridurre al massimo le oscillazioni trasversali, si è costruito un pendolo apposito come mostrato in Figura 28. Questa soluzione impone un moto prevalentemente lungo la direzione desiderata, limita gli spostamenti trasversali grazie al vincolo geometrico e consente un'eccitazione più controllata, migliorando la stabilità dello spingitore.



Figure 28: Pendolo costruito per ridurre le vibrazioni

La forza generata dallo spingitore è prodotta dall'interazione tra la corrente nella bobina e il campo magnetico di due magneti permanenti. Il campo magnetico può essere facilmente confinato all'interno del circuito. I magneti rettangolari in neodimio (NdFeB) ad altissima forza hanno dimensioni  $30 \times 10 \times 4 \text{ mm}$  e una densità di flusso magnetico pari a 1 T. L'apparato può essere utilizzato sia per prove di decadimento libero (*free-decay*) sia per prove forzate. Infatti, il segnale di ingresso viene generato dal generatore di funzioni integrato nell'oscilloscopio e inviato all'attuatore tramite un amplificatore di corrente capace di erogare una corrente massima di 20 A (Figura 29). Entrambi i sistemi sono ancorati a una base in granito massiccio di dimensioni  $600 \times 600 \times 145 \text{ mm}$ , per garantire stabilità e isolamento dalle vibrazioni. Per fissare il provino si utilizza un supporto di fissaggio in alluminio. La struttura è irrigidita mediante quattro cavi (tiranti) mantenuti in trazione. I cavi aumentano la rigidità globale del telaio, riducono sia flessioni e micro-spostamenti della colonna durante le prove sia eventuali componenti laterali o torsionali del moto. Il pendolo è realizzato tramite un pacco di lastre in acciaio, scelto per ottenere una massa e un momento d'inerzia ben definiti, oltre a un'elevata rigidità flessionale dell'elemento oscillante. Questa soluzione consente di ridurre deformazioni elastiche parassite dell'asta. Inoltre, in presenza dell'attuatore elettromagnetico, l'uso di materiale ferromagnetico può favorire l'interazione con il campo magnetico, incrementando l'efficacia della forza generata e riducendo dispersioni di flusso.



Figura 29: Amplificatori di corrente e oscilloscopio

## 7.2 Validazione sperimentale

Per garantire la stabilità numerica e accelerare la convergenza dell'approccio combinato UKF–MCMC, viene eseguita una stima preliminare dei parametri dinamici del modello. In particolare, si determina un valore iniziale plausibile per il vettore dei parametri  $\theta = [c, k_1, k_3]$ , da utilizzare come punto di partenza sia per l'inizializzazione del filtro sia per impostare regioni di esplorazione ragionevoli nella fase successiva.

A tale scopo si impiega una procedura di ottimizzazione deterministica basata sul confronto tra la risposta misurata e quella simulata dal modello con lo scopo di minimizzare l'errore tra le due risposte. I segnali sperimentali vengono prima pre-processati mediante ricampionamento (da 200 Hz a 100 Hz) per ridurre il carico computazionale e rendere più regolare l'integrazione numerica, mantenendo comunque il contenuto informativo dei dati rilevante per la dinamica del sistema. Le condizioni iniziali  $(y_0, v_0)$  sono ricavate direttamente dai dati:  $y_0$  è assunto pari al primo campione misurato mentre  $v_0$  è stimato tramite una differenza finita sul primo intervallo temporale.

La stima preliminare è formulata come un problema di minimizzazione della seguente funzione costo:

$$J(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_{mis}(t_i) - y_{sim}(t_i; \theta))^2$$

Eq. 7.1

dove  $y_{\text{sim}}$  è ottenuta integrando il modello non lineare forzato tramite uno schema Runge–Kutta del quarto ordine (RK4). Per migliorare la robustezza dell'integrazione, ogni passo di campionamento viene suddiviso in  $q_{\text{sub}}$  sotto intervalli, riducendo gli errori numerici in presenza di non linearità marcate.

Poiché i parametri presentano ordini di grandezza molto differenti e sono soggetti a vincoli fisici ( $c > 0, k_1 < 0, k_3 > 0$ ), l'ottimizzazione viene condotta in uno spazio trasformato dove si utilizza una parametrizzazione logaritmica che consente di rispettare i vincoli tramite limiti inferiori e superiori assegnati. La minimizzazione è eseguita con un metodo senza derivate, selezionando la soluzione che produce il valore minimo della funzione costo.

Infine, la terna dei parametri stimati ( $c, k_1, k_3$ ) viene validata confrontando la simulazione RK4 con una soluzione ottenuta tramite ODE45.

La Figura 31 mostra il confronto tra la risposta misurata  $y_{\text{meas}}$  e la risposta simulata  $y_{\text{sim}}$  ottenuta integrando il modello con i parametri stimati tramite la minimizzazione della funzione costo (Eq. 7.1). Il confronto è riportato sia utilizzando lo schema RK4 (impiegato durante l'ottimizzazione) sia tramite un'integrazione ODE45 eseguita a posteriori a scopo di verifica. Le due simulazioni risultano pressoché sovrapposte lungo l'intera finestra temporale, indicando che l'integrazione RK4 con sotto intervalli è sufficientemente accurata per essere utilizzata all'interno del costo, senza introdurre distorsioni apprezzabili rispetto a un integratore adattativo. I valori ottenuti sono riassunti in Tabella 5.

L'errore calcolato sull'intera storia temporale risulta  $2.593 \cdot 10^{-3} m$  (circa 2.6 mm). Tale indicatore fornisce una misura sintetica della bontà del *fit* ed è influenzato in modo significativo dalle porzioni del segnale in cui sono presenti variazioni rapide o picchi, tipicamente più sensibili a rumore e non idealità sperimentali non modellate.

Questa fase non è intesa come stima finale, ma come inizializzazione per l'identificazione probabilistica: i parametri ( $k_1, k_3$ ) vengono impiegati come punto di partenza nello stato esteso del filtro in forma logaritmica,  $\phi_1 = \log(-k_1)$ ,

$\phi_3 = \log(k_3)$ , mentre  $c$  viene mantenuto costante durante la fase sequenziale per ridurre la dimensionalità del problema. In questo modo si evita un'inizializzazione arbitraria, si riduce il rischio di divergenza dell'UKF nelle prime iterazioni e si migliora l'efficienza della successiva stima probabilistica MCMC (maggiore stabilità della stima nel transitorio iniziale).

In Figura 30 sono riportati i segnali originali del sistema simulato: l'ingresso  $u(t)$  misurato in N, e l'uscita  $y(t)$  con ampiezza dell'ordine di  $\pm 10^{-2} m$ .

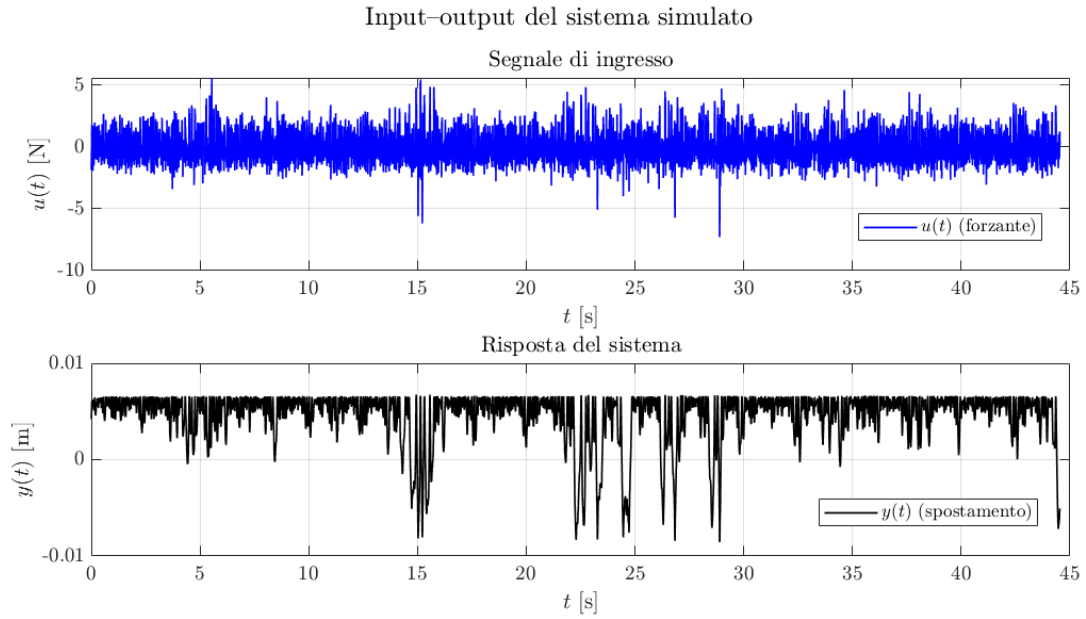


Figura 30: Input e output del sistema simulato con i dati sperimentali

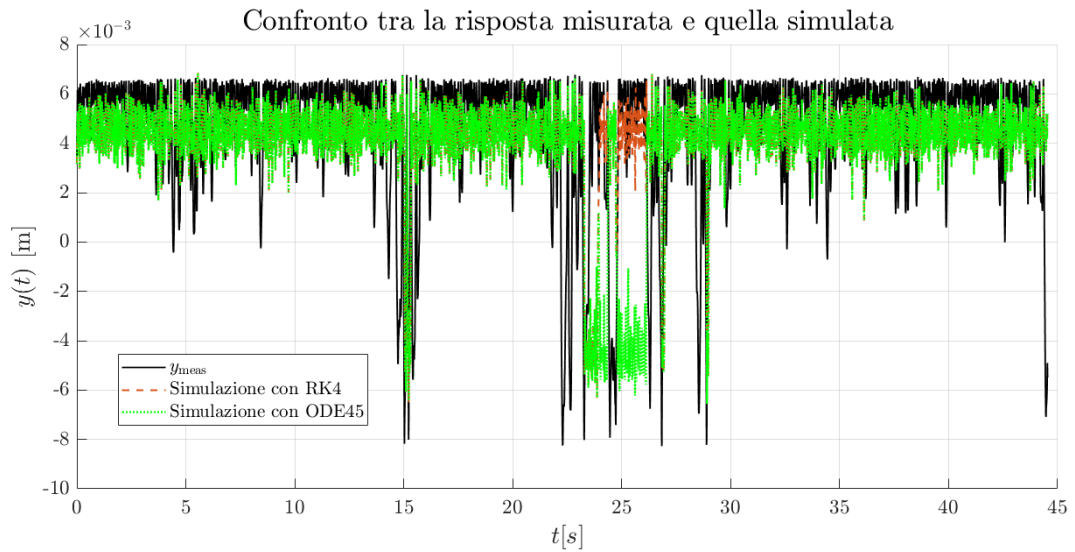


Figura 31: Validazione della stima preliminare

$c$ stimato [Ns/m]	5.03
$k_1$ stimato [N/m]	$-8.302 \cdot 10^2$
$k_3$ stimato [N/m <sup>3</sup> ]	$3.865 \cdot 10^7$
RMSE [m]	$2.593 \cdot 10^{-3}$

Tabella 5: Parametri stimati ed errore minimo

Le Figure 32 e 33 riportano le PDF a posteriori stimate per  $k_1(t)$  e  $k_3(t)$  sia in forma di superficie 3D sia come *heatmap*. Nella fase iniziale la distribuzione risulta più

dispersa, segnalando una limitata precisione dei dati nella stima parametrica durante il transitorio. Al crescere del tempo, la densità tende a concentrarsi attorno a un intervallo più ristretto e la distribuzione si stabilizza intorno a un valore pressoché costante. In particolare, per  $k_1(t)$  la moda della distribuzione resta centrata intorno a valori dell'ordine di  $-8 \cdot 10^2 \text{ N/m}$  lungo tutta la finestra temporale, con una dispersione sostanzialmente costante a regime. In modo analogo,  $k_3(t)$  si concentra attorno a valori dell'ordine di  $4 \cdot 10^7 \text{ N/m}^3$ .

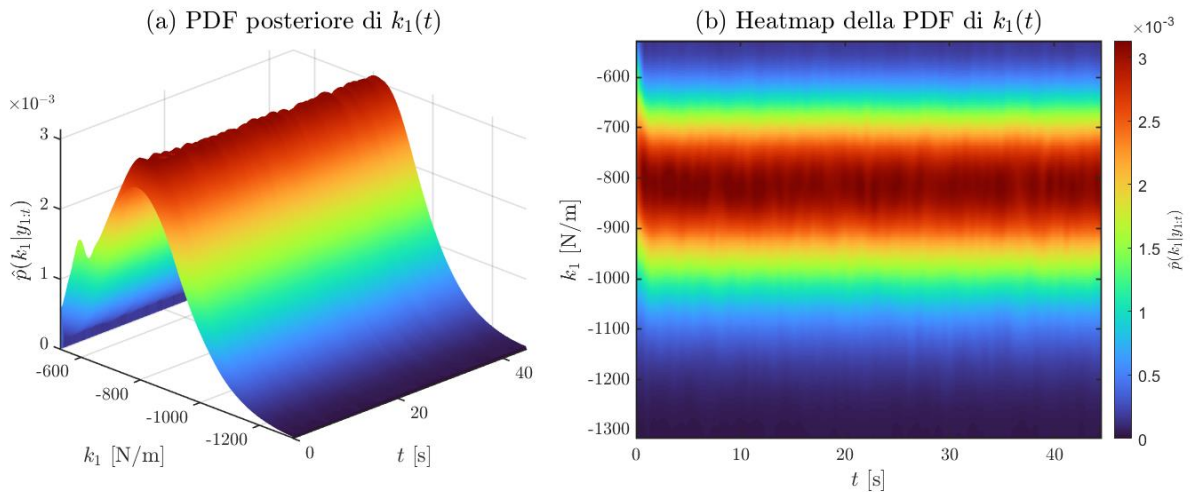


Figura 32: PDF e heatmap per  $k_1(t)$

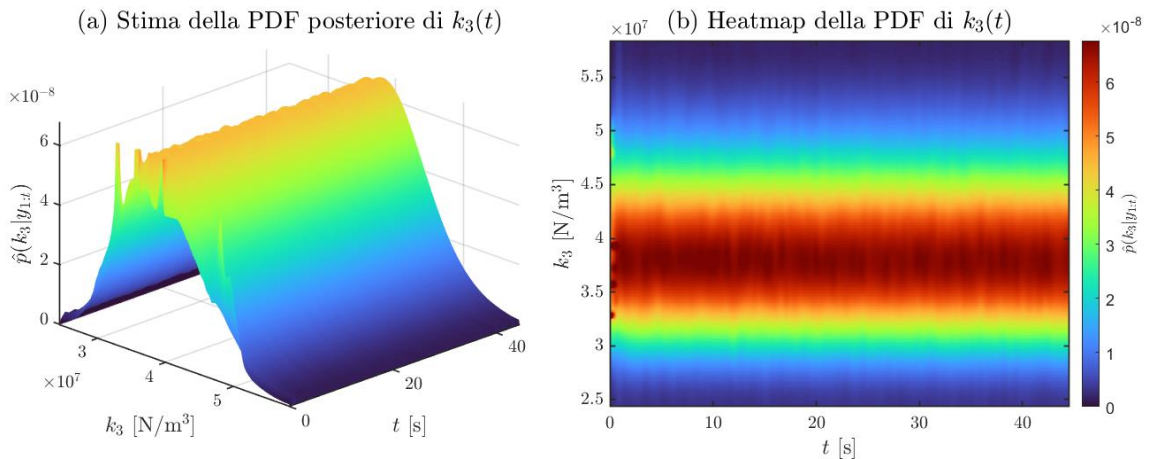


Figura 33: PDF e heatmap per  $k_3(t)$

In modo analogo alla Figura 25, la Figura 34 sintetizza la stima temporale dei parametri. La stima di  $k_3$  tende a presentare una dispersione maggiore rispetto a  $k_1$ . La media si assesta rapidamente e rimane stabile; l'incertezza a regime può essere quantificata direttamente dai valori riassunti in Tabella 5. Le metriche NMSE riportate

in tabella (0.118% per  $k_1$  e 0.036% per  $k_3$ ) confermano che, una volta superato il transitorio iniziale, la stima è numericamente stabile e non presenta derive significative nel tempo.

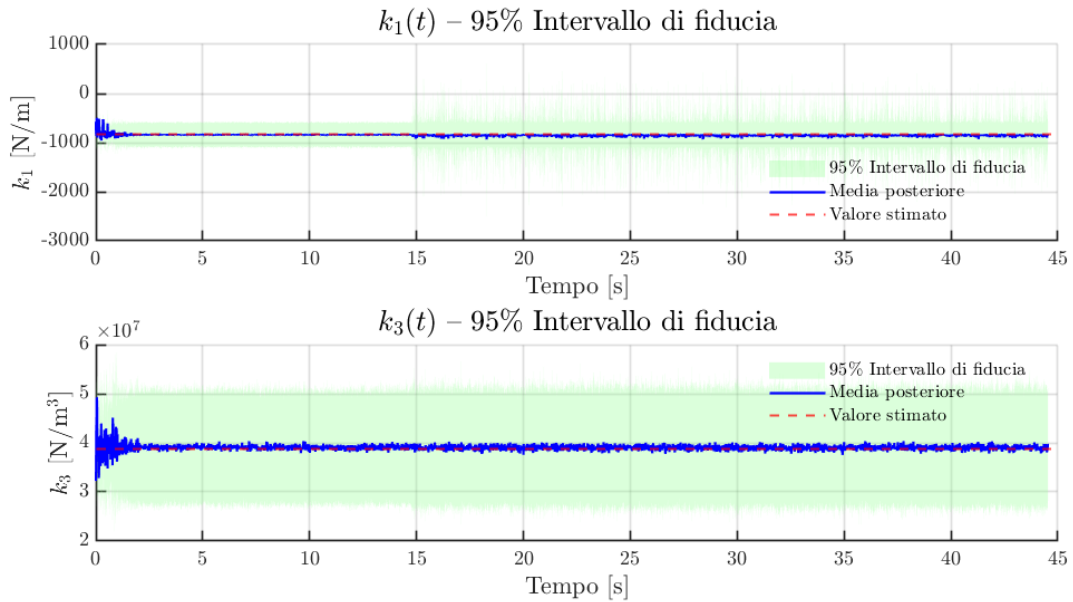


Figura 34: Stima temporale di  $k_1(t)$  e  $k_3(t)$ , valore stimato, media posteriore e intervallo di fiducia

La Figura 35 mostra l'andamento dello step della proposta e dell'*acceptance rate* (normalizzati). Lo step cresce rapidamente nella fase iniziale di adattamento e poi si stabilizza. Parallelamente, l'*acceptance rate* si assesta attorno a un valore medio pari al 32.7% prossimo al target ( $\sim 0.3$ ), indicando un compromesso corretto tra esplorazione e tasso di accettazione, coerente con un campionatore numericamente ben condizionato.

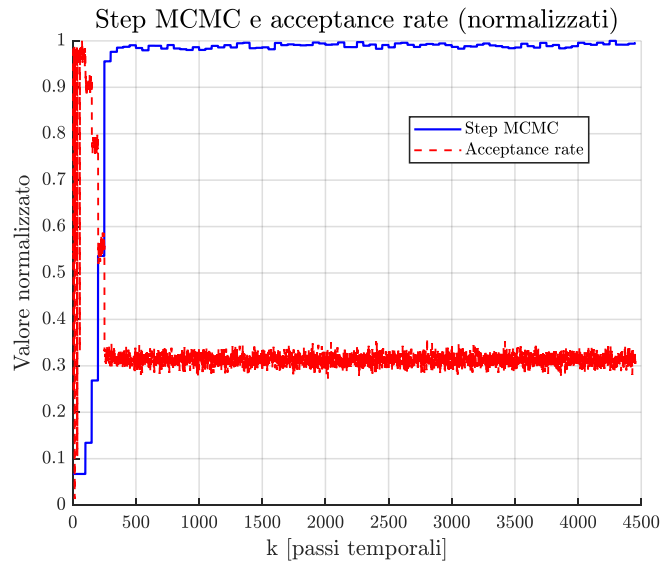


Figura 35: Andamento dello step e dell'acceptance rate del campionatore

Nel complesso, la validazione sperimentale mostra che la stima preliminare fornisce un punto di partenza fisicamente plausibile, mentre l'approccio UKF-MCMC consente di consolidare la stima in modo ricorsivo, quantificare esplicitamente l'incertezza associata ai parametri e fornisce una buona capacità predittiva sul segnale sperimentale, confermando l'efficacia dell'approccio anche in condizioni reali. In questa fase, il coefficiente di smorzamento viscoso  $c$  viene fissato al valore preliminare ( $c = 5.03 \text{ Ns/m}$ ) per contenere la dimensionalità del problema, concentrando l'inferenza probabilistica sui parametri  $k_1$  e  $k_3$ .

La Tabella 6 riassume i risultati quantitativi.

Parametri da identificare	Valore teorico stimato	Valore stimato finale UKF+MCMC	Deviazione Standard	Intervallo di fiducia	Errore relativo [%]	NMSE [%]
$k_1 [N/m]$	$-8.302 \cdot 10^2$	$-8.39 \cdot 10^2$	$1.332 \cdot 10^2$	$[-1.123 \cdot 10^3, -6.2 \cdot 10^2]$	1.05	0.118
$k_3 [N/m^3]$	$3.865 \cdot 10^7$	$3.963 \cdot 10^7$	$5.809 \cdot 10^6$	$[2.857 \cdot 10^7, 5.071 \cdot 10^7]$	2.53	0.036
$c [Ns/m]$	5.03	-	-	-	-	-

Tabella 6: Risultati quantitativi ed errori della stima del metodo combinato UKF-MCMC con dati sperimentali

## 7.2.1 Analisi energetica

Una volta ottenuta la stima probabilistica dei parametri  $\{k_1(t), k_3(t)\}$  mediante UKF-MCMC (con  $c$  fissato al valore stimato), è stato possibile valutare le grandezze energetiche di interesse. In questa sezione si considerano:

- La barriera energetica del potenziale bistabile.
- L'energia dissipata dal termine di smorzamento viscoso, sia nella sua forma deterministica (dalle misure) sia nella forma probabilistica.
- La potenza dissipata dal sistema.

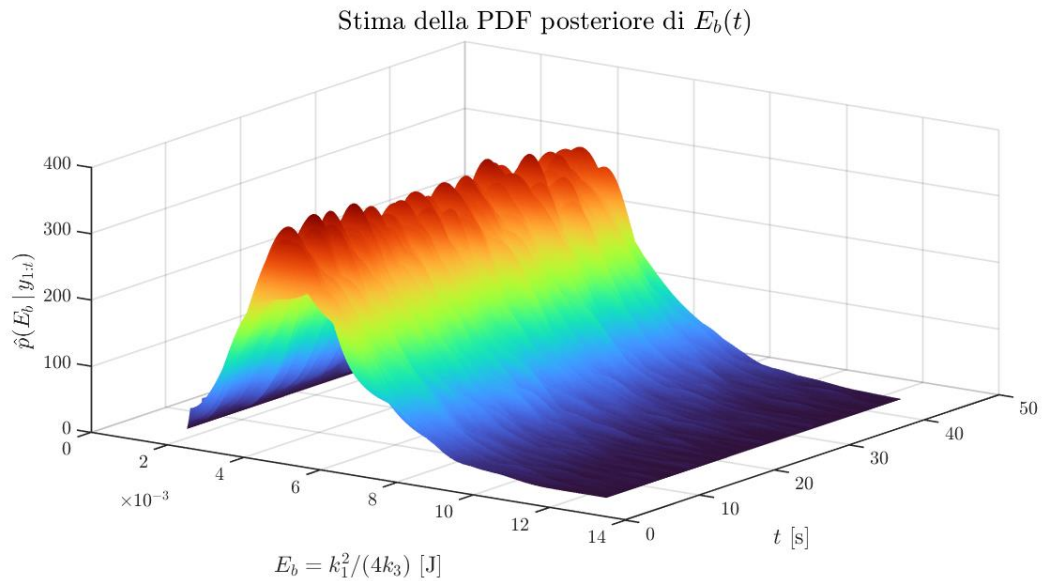
La barriera energetica è la differenza di potenziale tra il massimo (equilibrio instabile, in  $x = 0$ ) e i minimi  $x_M$  (Eq. 5.7) ed è sempre positiva. Riprendendo l'equazione del potenziale per un sistema bistabile (Eq. 5.6) si ottiene:

$$E_b = V(x = 0) - V(x = x_M) = \frac{k_1^2}{4k_3}$$

Eq. 7.2

La distribuzione della barriera energetica  $E_b(t)$  non viene calcolata come una stima puntuale dei parametri, ma campionando direttamente dalle distribuzioni a posteriori dei parametri  $k_1$  e  $k_3$ . Da lì, per ciascuna coppia di parametri si ricava il corrispondente valore di  $E_b$  e successivamente si costruisce una stima della PDF temporale  $\hat{p}(E_b | y_{1:t})$  tramite la funzione di Matlab *ksdensity* (Kernel Density Estimate, KDE). Per stabilizzare la stima si tagliano le code (quantili 0.5% - 99.5%) e si considera esplicitamente una finestra temporale che esclude il primissimo transitorio (il grafico viene mostrato per  $t \geq 5$  s).

Il risultato in Figura 36 è una distribuzione che appare quasi stazionaria nel tempo dove la densità rimane concentrata in un intervallo limitato, con supporto principale nell'intervallo  $\approx [3, 12] \times 10^{-3} J$  e un massimo che si colloca intorno a  $\approx (3-4) \times 10^{-3} J$ . La quasi stazionarietà della distribuzione implica che, una volta raggiunto il regime stazionario, l'incertezza sui parametri  $(k_1, k_3)$  si traduce in una variabilità relativamente costante nel tempo. In altre parole, durante l'intera durata della prova, il comportamento dinamico del sistema, caratterizzato dalla sua bistabilità, rimane coerente.



*Figura 36: Distribuzione della barriera energetica  $E_b(t)$*

L'analisi energetica prosegue poi sulla dissipazione viscosa, calcolata in due modi complementari. Da un lato, si ottiene una stima a partire dai dati misurati: si calcola la velocità  $\dot{x}(t)$  tramite derivazione numerica del segnale e si costruisce la potenza dissipata istantanea.

Per quanto riguarda l'energia dissipata dal sistema (Figura 37), viene calcolata come:

$$E_d = c \int_0^{t_{end}} \dot{x}^2 dt$$

*Eq. 7. 3*

Questa formula fornisce il valore totale dell'energia dissipata da un sistema. Tuttavia, nei sistemi bistabili è particolarmente interessante analizzare come questa energia si evolve nel tempo. In prossimità del salto da una configurazione stabile all'altra, infatti, ci si aspetta un incremento istantaneo dell'energia dissipata: in questa fase il provino attraversa uno stato instabile e le velocità aumentano significativamente. Per questo motivo, in tali casi è utile calcolare anche l'energia dissipata cumulativa. A tal fine, si calcola innanzitutto la potenza dissipata a ogni istante di tempo:

$$P = c \dot{x}^2 t_s$$

*Eq. 7. 4*

dove  $t_s = t(2) - t(1)$  è il tempo di campionamento e successivamente viene calcolata la cumulata:

$$E_{d,cum}(t) = \int_0^t P(t) dt$$

*Eq. 7. 5*

dove si nota l'incremento a pendenza maggiore vuol dire che il provino è nella fase di salto tra le due configurazioni stabili.

Il risultato mostra un andamento monotono crescente di  $E_{d,cum}(t)$  che raggiunge a fine prova un valore di circa  $E_{d,tot} \simeq 0.95 J$  e considerando una durata di circa 45 s, questo corrisponde a una potenza media dell'ordine di:

$$\bar{P} = \frac{0.95 J}{45 s} \simeq 2.1 \times 10^{-2} W$$

*Eq. 7. 6*

Il grafico di  $P(t)$  (Figura 38) evidenzia però una dissipazione fortemente intermittente con picchi che arrivano fino a circa  $0.35 W$ , cioè oltre un ordine di grandezza sopra la potenza media. Tali picchi risultano concentrati in intervalli temporali in cui la risposta presenta oscillazioni più energetiche o rapide (coerentemente con l'andamento a gradini osservabile nella cumulata), indicando che una parte significativa dell'energia dissipata si accumula durante finestre relativamente brevi ma dinamicamente intense.

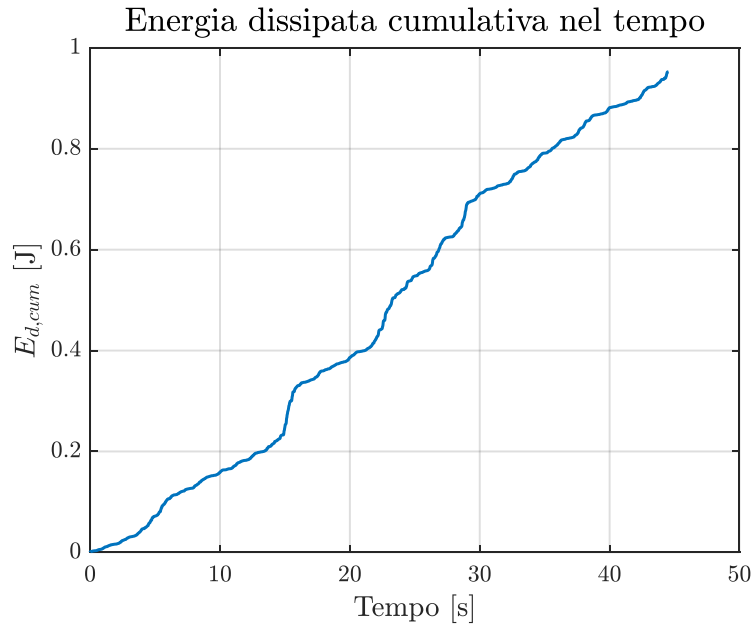


Figura 37: Energia dissipata dal sistema  $E_{d,cum}(t)$

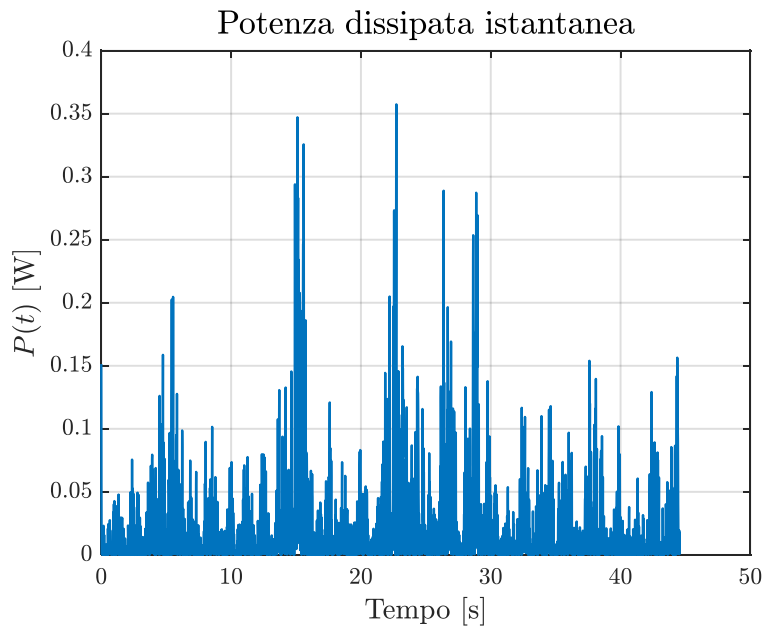


Figura 38: Potenza dissipata istantanea  $P(t)$

Si nota che le velocità del sistema sono influenzate sia dalle rigidità sia dal valore del coefficiente di smorzamento  $\zeta$ . Contrariamente a quanto si potrebbe pensare, un valore elevato di  $\zeta$  non è vantaggioso in questo caso: infatti, uno smorzamento troppo alto ostacola il salto tra le due configurazioni stabili, riducendo così le velocità. Per questo motivo è importante che questi sistemi siano a basso smorzamento (*low damped*). Fissato  $\zeta$  a un valore ridotto, la risposta del sistema varia al variare di  $k_1$  e

$k_3$ . Mantenendo costanti la massa, lo smorzamento e l'input, è quindi possibile analizzare l'effetto che la coppia  $(k_1, k_3)$  ha sull'integrale delle velocità al quadrato e, di conseguenza, sulla dissipazione di energia.

In pratica, vengono estratte  $n_p = 120$  coppie  $(k_1, k_3)$  dalle distribuzioni a posteriori e per ciascuna coppia si integra il sistema con ODE45 (su griglia decimata per contenere i tempi). Per ogni traiettoria simulata si calcola di nuovo l'energia dissipata cumulativa e si ricostruisce una PDF dell'energia a diversi istanti nel tempo. Il risultato è una *heatmap* in cui è riportata anche la moda dell'energia (linea tratteggiata).

La PDF ottenuta (Figura 39) mostra chiaramente l'effetto dell'accumulo: la moda cresce nel tempo e si colloca alla fine della prova intorno a  $\approx 1.7 J$ , mentre la dispersione aumenta progressivamente, con una regione di massa che a fine prova si estende indicativamente tra  $\approx 1.0 J$  e  $\approx 2.4 J$ . Questo allargamento è atteso perché l'energia cumulativa integra nel tempo differenze anche piccole tra traiettorie generate da parametri diversi, ma compatibili con i dati. Inoltre, la mappa evidenzia cambi di pendenza coerenti con le fasi in cui la potenza istantanea mostra pendenze più elevate: i periodi di maggiore dissipazione contribuiscono in modo dominante alla crescita di  $E_{d,cum}(t)$  e amplificano la separazione tra traiettorie.

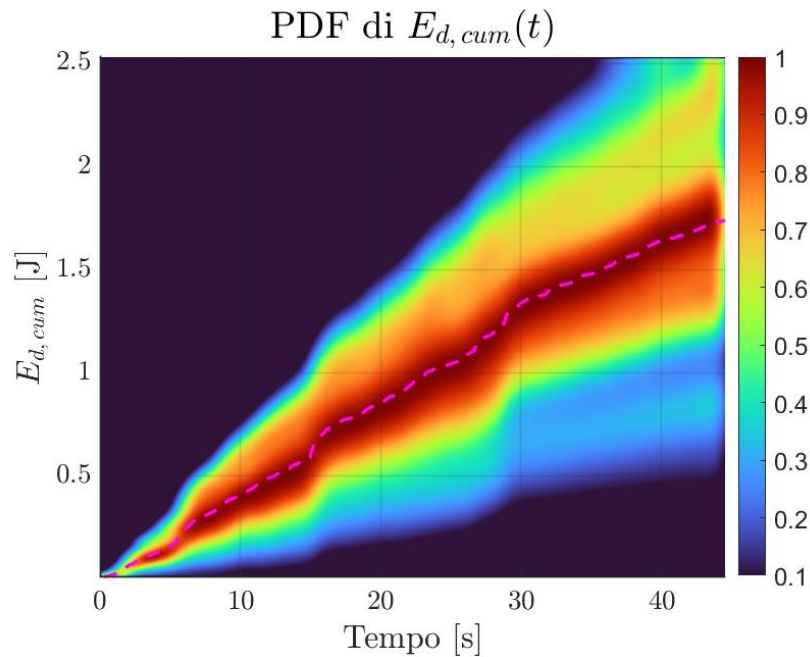


Figura 39: Influenza delle coppie di parametri  $k_1$  e  $k_3$  sull'energia dissipata cumulativa

## 8 Conclusioni

Il presente lavoro ha come obiettivo principale l'identificazione, in termini probabilistici, di due parametri di rigidità di un sistema meccanico a un grado di libertà modellato mediante un oscillatore di Duffing. L'interesse del problema risiede nel fatto che l'identificazione parametrica di sistemi bistabili in condizioni dinamiche rappresenta un tema ancora non ampiamente esplorato, soprattutto dal punto di vista sperimentale e, in particolare, nel caso di componenti realizzati mediante tecnologie di stampa 3D. Per affrontare tale procedura, sono stati utilizzati due metodi principali, l'UKF e l'MCMC-MH. In una prima fase, i due metodi sono stati validati singolarmente in modo analitico mediante dati teorici e successivamente, è stato sviluppato un approccio combinato in grado di stimare le distribuzioni a posteriori dei due parametri incogniti.

La validazione preliminare su dati teorici ha mostrato la coerenza dei tre approcci considerati e a seguito della sperimentazione effettuata, si è validato anche il modello combinato con i dati sperimentali ottenuti con il fine ultimo di valutare il dispendio energetico di tale sistema.

I risultati ottenuti hanno mostrato che tale procedura consente di identificare in modo efficace i parametri del sistema, fornendo non solo una stima dei valori più probabili, ma anche una quantificazione dell'incertezza associata. In particolare, per i dati sperimentali analizzati, le stime finali ottenute sono risultate pari a  $k_1 = -8.39 \cdot 10^2 \text{ N/m}$  e  $k_3 = 3.963 \cdot 10^7 \text{ N/m}^3$ , in buon accordo con i corrispondenti valori teorici stimati dal modello di ottimizzazione. Gli errori relativi contenuti, pari rispettivamente a 1.05% e 2.53%, insieme ai bassi valori di NMSE, confermano la bontà dell'approccio proposto. Inoltre, gli intervalli di confidenza stimati includono i valori stimati di riferimento, mostrando la coerenza della caratterizzazione probabilistica ottenuta.

L'applicazione ai dati sperimentali ha quindi evidenziato la capacità del metodo combinato UKF-MCMC di rappresentare in modo affidabile il comportamento del sistema e di costituire uno strumento utile non solo per l'identificazione parametrica, ma anche per la successiva valutazione della dissipazione energetica.

In particolare, i risultati ottenuti mostrano un'energia dissipata complessiva dal sistema di circa  $0.95 \text{ J}$  con una corrispondente potenza media di circa  $2.1 \times 10^{-2} \text{ W}$ , con picchi che arrivano fino a circa  $0.35 \text{ W}$  nelle zone con maggiori dissipazioni, corrispondenti ai passaggi tra le due configurazioni di equilibrio.

Inoltre, il risultato più importante ottenuto mostra l'andamento dell'energia dissipata nel tempo in funzione delle coppie dei parametri di rigidità. La moda dell'energia ha un andamento crescente nel tempo con un valore a fine prova di circa  $1.7 \text{ J}$ .

Nel complesso, il lavoro svolto conferma la validità dell'approccio proposto per l'analisi probabilistica di sistemi non lineari, mostrando come esso possa fornire sia

una stima affidabile dei parametri incogniti, sia informazioni utili per l'interpretazione energetica della dinamica del sistema.

## Bibliografia

- [1] System Identification Theory for the User Second Edition Lennart Ljung Linköping University Sweden
- [2] System Identification Lennart Ljung, Department of Electrical Engineering, Linköping University, S-581 83 Linköping, Sweden
- [3] Past, present and future of nonlinear system identification in structural dynamics G. Kerschen, K. Worden, A.F. Vakakis, J.C. Golinval, Mech. Syst. Signal Process. 20 (2006) 505–592
- [4] Ljung, Perspectives on system identification Division of Automatic Control, Linköping University, SE-581 83 Linköping, Sweden
- [5] Meccanica delle vibrazioni, Fasana A., Marchesiello S., Clut, 2006
- [6] Non linearity in structural dynamics, Detection, Identification and Modelling, K. Worden and G.R. Tomlinson, Univer
- [7] Optimal State Estimation cap.5, Kalman,  $H_\infty$  and Nonlinear Approaches, Dan Simon, 2006, Cleveland State University
- [8] Optimal State Estimation cap.7, Kalman,  $H_\infty$  and Nonlinear Approaches, Dan Simon, 2006, Cleveland State University
- [9] Bayesian estimation of time-varying systems: Discrete-Time Systems, Simo Särkkä 2009-2011, Version 1.2 (January 22, 2011)
- [10] Linear dynamical models, Kalman filtering and statistics. Lecture notes to IN-ST 259, Erik Bølviken, Nils Christophersen and Geir Storvik, University of Oslo, October 1998
- [11] Optimal State Estimation cap.1, Kalman,  $H_\infty$  and Nonlinear Approaches, Dan Simon, 2006, Cleveland State University
- [12] Particle Filter Made Simple: A Step-by-Step Beginner-friendly Guide, Sahil Rajesh Dhayalkar, 3 November 2025, Arizona State University
- [13] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling and B. P. Flannery. Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing. Cambridge University Press, 2 edition, 1992
- [14] <https://it.mathworks.com/help/ident/ug/extended-and-unscented-kalman-filter-algorithms-for-online-state-estimation.html#bvgiw03>
- [15] Unscented Kalman Filter for nonlinear identification of a new prototype of bidirectional tuned vibration absorber: a numerical investigation, Emiliano Matta, Rosario Ceravolo, Alessandro De Stefano, Antonino Quattrone e Luca Zanotti Fragonara, Politecnico di Torino Italy
- [16] The Unscented Kalman Filter for Nonlinear Estimation Eric A. Wan and Rudolph van der Merwe Oregon Graduate Institute of Science & Technology 20000 NW Walker Rd, Beaverton, Oregon 97006
- [17] The square-root unscented kalman filter for state and parameter-estimation, Rudolph van der Menve and Eric A. Wan, Oregon Graduate

- Institute of Science and Technology 20000 NW Walker Road, Beaverton, Oregon 97006, USA {rvdmeneve,ericwan} @ece.ogi.edu
- [18] Introduzione alla statistica bayesiana Marco Regis\_1 Università degli studi di Torino e Istituto Nazionale di Fisica Nucleare via P. Giuria 1, I {10125 Torino, Italy December 2, 2021}
- [19] A Tutorial on Data-Driven Methods in Nonlinear Dynamics, K. Worden & E.J. Cross Dynamics Research Group, Department of Mechanical Engineering, University of She\_eld Mappin Street, She\_eld S1 3JD, UK
- [20] A. Gelman, J.B. Carlin, H.S. Stern, and D.B. Rubin. Bayesian Data Analysis: Second Edition. Chapman and Hall/CRC, 2004
- [21] [https://it.wikipedia.org/wiki/Metodo\\_Monte\\_Carlo](https://it.wikipedia.org/wiki/Metodo_Monte_Carlo)
- [22] Information Theory, Inference, and Learning Algorithms, David J.C. MacKay, Cambridge University Press 2003
- [23] An offline approach for output-only Bayesian identification of stochastic nonlinear systems using unscented Kalman filtering, Kalil Erazo, Satish Nagarajaiah, Department of Civil and Environmental Engineering, Rice University, Houston, TX 77005, USA 7 March 2017
- [24] Weak convergence and optimal scaling of random walk Metropolis algorithms by G.O. Roberts, A. Gelman and W.R. Gilks, University of Cambridge, Columbia University and Institute of Public Health, Cambridge, Received September 1995; revised October 1996
- [25] Ryan L Harne and Kon-Well Wang. Harnessing bistable structural dynamics: for vibration control, energy harvesting and sensing. John Wiley & Sons, 2017
- [26] A review of the recent research on vibration energy harvesting via bistable systems, R. L. Harne and K.W. Wang, Department of Mechanical Engineering, University of Michigan, Ann Arbor, MI 48109-2125, USA, 25 January 2013
- [27] COB-2019-0431 Dynamical analysis of bistable energy harvester using the finite element method, Virgilio Júnior Caetano, Marcelo Amorim Savi, Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) COPPE – Department of Mechanical Engineering, Center for Nonlinear Mechanics 21.941.972 - Rio de Janeiro – RJ, 25th ABCM International Congress of Mechanical Engineering October 20-25, 2019, Uberlândia, MG, Brazil
- [28] Bistable Structures for Advanced Functional Systems Yunteng, Cao, Masoud Derakhshani, Yuhui Fang, Guoliang Huang, and Changyong Cao, August 2021  
Y. Cao, M. Derakhshani, Y. Fang, C. Cao Laboratory for Soft Machines & Electronics, School of Packaging Michigan State University, East Lansing, MI 48824, USA  
Y. Cao, Department of Civil and Environmental Engineering, Massachusetts Institute of Technology. Cambridge, MA 02139, USA

G. Huang, Department of Aerospace and Mechanical Engineering,  
University of Missouri, Columbia, MO 65211, USA

C. Cao, Departments of Mechanical Engineering, Electrical & Computer  
Engineering, Michigan State University, East Lansing, MI 48824, USA

[29] <https://bambulab.com>

[30] <https://www.thorlabs.com>