

# POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale in  
Ingegneria Aerospaziale (LM-20)

Tesi di Laurea

## Sviluppo di un Algoritmo SEA per l'Analisi Strutturale di una Superficie Alare



### Relatori

Prof. Marco Esposito  
Prof. Marco Gherlone

### Candidato

Antonino Paolo Gambera

Anno Accademico 2025-2026

# Sommario

Questa tesi di laurea magistrale presenta lo sviluppo e la validazione di un algoritmo per la ricostruzione continua dei campi di deformazione a partire da misurazioni puntuali di strain. Vengono analizzati nel dettaglio i due metodi impiegati: la SEA (Smoothing Element Analysis), il cui obiettivo è ottenere il campo continuo di deformazione, e l'i-FEM (inverse Finite Element Method), che a partire da tale campo consente di ricavare informazioni utili come gli spostamenti e, eventualmente, la distribuzione delle tensioni. L'algoritmo di estrapolazione è descritto in modo approfondito, partendo dal caso monodimensionale fino ad arrivare al caso bidimensionale, di principale interesse per il presente lavoro, analizzando inoltre l'influenza dei diversi parametri sull'accuratezza del metodo. La ricerca integra approcci sperimentali e numerici, combinando prove di laboratorio e simulazioni agli elementi finiti, per poi concentrarsi sull'obiettivo finale della tesi, ovvero l'estrapolazione delle deformazioni lungo delle linee specifiche di un profilo alare, confrontando i risultati ottenuti dalla SEA con quelli ricavati tramite la fibra ottica. L'algoritmo proposto rappresenta una possibile soluzione alle limitazioni tecniche associate all'impiego della fibra ottica, che, nonostante permetta di ottenere un grande numero di misurazioni, può introdurre fluttuazioni significative ed errori nei risultati se utilizzata per la rilevazione di deformazioni in fenomeni dinamici. Il metodo mostra, infine, un potenziale rilevante per applicazioni nel monitoraggio strutturale e nell'analisi integrata dei materiali, aprendo la possibilità di un utilizzo anche nel monitoraggio in tempo reale di strutture aeronautiche.

# Ringraziamenti

# Indice

<b>Elenco delle tabelle</b>	5
<b>Elenco delle figure</b>	7
<b>1 Introduzione</b>	10
1.1 Contesto . . . . .	10
1.2 Obiettivo della Tesi . . . . .	12
<b>2 iFEM &amp;SEA</b>	13
2.1 Inverse Finite Element Method (iFEM) . . . . .	13
2.1.1 FEM vs iFEM . . . . .	14
2.2 Formulazione Matematica dell'iFEM . . . . .	17
2.2.1 Definizione delle Deformazioni Sperimentali . . . . .	17
2.2.2 Definizione delle Deformazioni Numeriche . . . . .	18
2.2.3 Funzionale dell'Errore . . . . .	21
2.2.4 Assemblaggio del sistema globale . . . . .	23
2.3 Smoothing Element Analysis (SEA) . . . . .	25
2.3.1 Caso 1D . . . . .	25
2.3.2 Caso d'interesse: caso 2D . . . . .	30
<b>3 Formulazione e validazione del codice SEA sull'analisi numerica di una piastra piana</b>	35
3.1 Descrizione della prova . . . . .	35
3.2 Preparazione alla SEA . . . . .	37
3.2.1 Func_report . . . . .	38
3.2.2 alpha e beta . . . . .	39
3.2.3 bdf . . . . .	39
3.2.4 extrap_rep . . . . .	42
3.2.5 eps_desired . . . . .	43
3.3 Funzionamento del codice . . . . .	43
3.3.1 Inizializzazione degli input. . . . .	43
3.3.2 Corpo della funzione . . . . .	45
3.4 Risultati . . . . .	52
3.4.1 Influenza della mesh di estrapolazione . . . . .	57

3.4.2	Influenza della mesh triangolare . . . . .	61
3.4.3	Influenza di $\alpha$ . . . . .	63
3.5	Confronto con un'altra prova numerica . . . . .	65
3.5.1	Influenza della mesh triangolare . . . . .	68
3.5.2	Influenza di $\alpha$ . . . . .	69
<b>4</b>	<b>Analisi di una semiala</b> . . . . .	<b>71</b>
4.1	Descrizione dell'apparato sperimentale e obiettivo dell'estrapolazione . . . . .	71
4.1.1	Prova sperimentale e modello FEM . . . . .	71
4.1.2	Obiettivo dell'estrapolazione . . . . .	76
4.2	Modello FEM . . . . .	76
4.3	Estrapolazione SEA: algoritmo di ottimizzazione genetico . . . . .	80
4.4	Analisi dei risultati . . . . .	83
4.4.1	Superficie superiore . . . . .	84
4.4.2	Superficie inferiore . . . . .	87
4.5	Influenza di $\alpha$ nell'errore . . . . .	91
4.6	Paragone delle estrapolazioni sull'intera ala . . . . .	94
4.6.1	Estrapolazione usando le 3 fibre intere . . . . .	95
4.6.2	Estrapolazione usando le disposizioni ottimali di sensori . . . . .	96
4.6.3	Applicazione del GA all'ala intera . . . . .	97
4.7	Confronto col modello reale . . . . .	98
4.7.1	Analisi dei risultati sperimentali . . . . .	99
4.7.2	Applicazione della SEA ai dati sperimentali . . . . .	100
4.7.3	Ottimizzazione dei sensori al caso sperimentale . . . . .	102
4.7.4	Conclusioni . . . . .	107
4.8	Applicazione e valutazione dell'iFEM . . . . .	109
4.8.1	Rilevazioni sperimentali e iFEM con 6 linee di dati . . . . .	109
4.8.2	Utilizzo della configurazione ottimale di sensori . . . . .	110
<b>5</b>	<b>Considerazioni finali e sviluppi futuri</b> . . . . .	<b>113</b>

# Elenco delle tabelle

3.1	Listato degli errori nel caso piastra a 10 sensori . . . . .	54
3.2	Errori tra l'estrapolazione e la deformazione reale . . . . .	55
3.3	Errori tra l'estrapolazione e la deformazione reale nel caso di mesh FEM fitta . . . . .	58
3.4	Indici di errore . . . . .	59
3.5	Valori di RMSE, RMSE% ed errore percentuale per i vari modelli BDF. . . . .	61
3.6	Indici di errore al variare del .BDF per $\alpha = 10^4$ . . . . .	62
3.7	Valori di RMSE, RMSE% ed errore percentuale al variare di $\alpha$ . . . . .	63
3.8	Errori tra l'estrapolazione e la deformazione reale . . . . .	66
3.9	Indici di errore per la piastra con carico distribuito . . . . .	67
3.10	Valori di RMSE, RMSE% ed errore percentuale per i vari modelli BDF. . . . .	68
3.11	Valori di RMSE, RMSE% ed errore percentuale al variare di $\alpha$ . . . . .	69
4.1	Coordinate x-y dei sensori utilizzati per la prima linea della superficie superiore . . . . .	84
4.2	Coordinate x-y dei sensori utilizzati per la seconda linea della superficie superiore . . . . .	86
4.3	Coordinate x-y dei sensori utilizzati per la terza linea della superficie superiore . . . . .	86
4.4	Coordinate x-y dei sensori utilizzati per la prima linea della superficie inferiore . . . . .	87
4.5	Coordinate x-y dei sensori utilizzati per la seconda linea della superficie inferiore . . . . .	88
4.6	Coordinate x-y dei sensori utilizzati per la terza linea della superficie inferiore . . . . .	89
4.7	Confronto tra i risultati ottenuti ottimizzando e non $\alpha$ . . . . .	93
4.8	Errori ottenuti dalla SEA . . . . .	102
4.9	Confronto tra la configurazione ottimale di sensori trovata sul FEM e quella ottenuta sperimentalmente per la prima linea della superficie superiore . . . . .	103
4.10	Confronto tra la configurazione ottimale di sensori trovata sul FEM e quella ottenuta sperimentalmente per la seconda linea della superficie superiore . . . . .	103
4.11	Confronto tra la configurazione ottimale di sensori trovata sul FEM e quella ottenuta sperimentalmente per la terza linea della superficie superiore . . . . .	104
4.12	Confronto tra la configurazione ottimale di sensori trovata sul FEM e quella ottenuta sperimentalmente per la prima linea della superficie inferiore . . . . .	105
4.13	Confronto tra la configurazione ottimale di sensori trovata sul FEM e quella ottenuta sperimentalmente per la seconda linea della superficie inferiore . . . . .	106
4.14	Confronto tra la configurazione ottimale di sensori trovata sul FEM e quella ottenuta sperimentalmente per la terza linea della superficie inferiore . . . . .	107

4.15	Evoluzione dell'errore riapplicando il GA . . . . .	108
4.16	Evoluzione del numero di sensori ottimali riapplicando il GA . . . . .	108
4.17	Misure iFEM e rispettivo errore percentuale . . . . .	110
4.18	Errori percentuali per le due diverse applicazioni dell'iFEM e della SEA . .	111

# Elenco delle figure

2.1	FEM e iFEM a confronto . . . . .	14
2.2	Esempio di distribuzione dei sensori . . . . .	17
2.3	Rappresentazione degli elementi finiti 1D (nero) e delle misurazioni effettuate (blu). . . . .	25
2.4	Estrapolazione della funzione $f(x)$ . . . . .	26
2.5	Esempio di estrapolazione della funzione $f^s(x)$ senza imporre la continuità della derivata prima. . . . .	28
2.6	Esempio di estrapolazione della funzione $f^s(x)$ imponendo la continuità della derivata prima. . . . .	28
2.7	Sistema di riferimento globale (blu) e locale (rosso). . . . .	32
3.1	Rappresentazione della piastra . . . . .	35
3.2	Rappresentazione tramite elementi finiti della piastra. . . . .	36
3.3	Rappresentazione dei vincoli e dei carichi applicati sulla mesh della piastra. . . . .	36
3.4	Spostamenti della piastra . . . . .	37
3.5	Distribuzione degli strain. . . . .	37
3.6	Disposizione degli elementi sensorizzati. . . . .	39
3.7	Mesh a 2 elementi triangolari. . . . .	40
3.8	Mesh a 8 elementi triangolari. . . . .	40
3.9	Mesh a 64 elementi triangolari . . . . .	40
3.10	Mesh a 200 elementi triangolari . . . . .	41
3.11	Mesh a 400 elementi triangolari . . . . .	41
3.12	Mesh a 468 elementi triangolari . . . . .	41
3.13	Disposizione dei punti dove si effettua l'estrapolazione. . . . .	42
3.14	Inizializzazione delle coordinate locali e delle misure di strain . . . . .	45
3.15	Ricerca di punti di misura o estrapolazione all'interno dell'elemento . . . . .	47
3.16	Rappresentazione dell'associazione tra punto ed elemento . . . . .	48
3.17	Parte del codice atta a ricavare $[K]$ e $\{F\}$ . . . . .	50
3.18	Ottenimento dei gradi di libertà del sistema . . . . .	51
3.19	Divisione dei contributi del vettore dof_SEA . . . . .	51
3.20	Estrapolazione del campo di deformazioni . . . . .	52
3.21	Disposizione dei sensori sul piano x-y . . . . .	53
3.22	Rilevazioni dei sensori . . . . .	53
3.23	Campo di deformazioni continuo ricavato con la SEA . . . . .	54
3.24	Distribuzione delle deformazioni sul piano x-y . . . . .	55

3.25	Distribuzione dell'errore percentuale sulla piastra	56
3.26	Distribuzione dell'errore assoluto sulla piastra	57
3.27	Mesh fitta e nuova disposizione sensori	58
3.28	Estrapolazione SEA successivamente alla variazione della mesh	58
3.29	Distribuzione dell'errore percentuale sulla piastra	59
3.30	Distribuzione dell'errore assoluto sulla piastra	60
3.31	Distribuzione dell'errore percentuale scartando gli estremi	60
3.32	Estrapolazione ricavata utilizzando il file .bdf "Modello_4x20_S.bdf"	62
3.33	Iterazione del ciclo su vari valori di $\alpha$	63
3.34	Estrapolazione SEA per $\alpha = 10^{-8}$	64
3.35	Estrapolazione SEA per $\alpha = 10^4$	64
3.36	Estrapolazione SEA per $\alpha = 10^8$	64
3.37	Distribuzioni della deformazione $\varepsilon_x$	65
3.38	Estrapolazione SEA	66
3.39	Estrapolazione SEA sul piano x-y	66
3.40	Distribuzione dell'errore percentuale	67
3.41	Estrapolazione utilizzando il modello 2x8	68
3.42	Estrapolazione utilizzando il modello 1x1	68
3.43	Estrapolazione utilizzando $\alpha = 10^{-8}$	70
3.44	Estrapolazione utilizzando $\alpha = 10^8$	70
4.1	Immagine del glider in questione	71
4.2	Superficie alare	72
4.3	Sistema di carico utilizzato nella prova sperimentale	73
4.4	Disposizione della fibra sull'ala. Nell'immagine, si intravede anche il sistema di vincolo che simula l'incastro (a sinistra)	74
4.5	Dettaglio della superficie superiore.	74
4.6	Sensore di spostamento laser utilizzato	75
4.7	Superficie inferiore con superfici riflettenti (evidenziate in giallo)	75
4.8	Modello a elementi finiti della semiala analizzata	77
4.9	Posizione dei longheroni	77
4.10	Mesh Quad della superficie superiore (sinistra) e inferiore (destra). Gli elementi evidenziati in arancione discretizzano le linee di fibra su cui si concentrerà l'analisi	78
4.11	MPC utilizzato per simulare il sistema di carico	79
4.12	Distribuzione di $\varepsilon_{xx}$ sulla superficie alare superiore	79
4.13	Mesh triangolare delle linee sensorizzate disposte sulla superficie superiore (sinistra) e inferiore (destra)	80
4.14	Estrapolazione della deformazione $\varepsilon_{xx}$ per la prima linea della superficie superiore	84
4.15	Estrapolazione della deformazione $\varepsilon_{xx}$ per la seconda linea della superficie superiore	85
4.16	Estrapolazione della deformazione $\varepsilon_{xx}$ per la terza linea della superficie superiore	86
4.17	Estrapolazione della deformazione $\varepsilon_{xx}$ per la prima linea della superficie inferiore	87

4.18	Estrapolazione della deformazione $\varepsilon_{xx}$ per la seconda linea della superficie inferiore . . . . .	88
4.19	Estrapolazione della deformazione $\varepsilon_{xx}$ per l'ultima linea della superficie inferiore . . . . .	89
4.20	Andamento dell'errore RMSE% al variare del parametro $\alpha$ . . . . .	91
4.21	Distribuzione corretta degli strain sull'ala . . . . .	95
4.22	Campo di deformazioni ottenuto utilizzando interamente le 3 linee di fibra . . . . .	95
4.23	Campo di deformazioni ottenuto utilizzando, per ogni linea, la configurazione ottimale di sensori. . . . .	96
4.24	Estrapolazione ottenuta utilizzando esclusivamente le misure di $\varepsilon_{xx}$ discrete . . . . .	97
4.25	Estrapolazione ottenuta applicando il GA all'intera ala . . . . .	97
4.26	Deformazioni rilevate dalla fibra sulle 6 linee . . . . .	100
4.27	Estrapolazione SEA utilizzando la configurazione ottenuta dal FEM. L'estrapolazione SEA è rappresentata dalla linea rossa, i sensori utilizzati dai punti blu e il campo di deformazione corretto dalla linea tratteggiata nera . . . . .	101
4.28	Estrapolazione della prima linea superiore utilizzando la configurazione ottimale di sensori. . . . .	102
4.29	Estrapolazione della seconda linea superiore utilizzando la configurazione ottimale di sensori. . . . .	103
4.30	Estrapolazione della terza linea superiore utilizzando la configurazione ottimale di sensori. . . . .	104
4.31	Estrapolazione della prima linea inferiore utilizzando la configurazione ottimale di sensori. . . . .	105
4.32	Estrapolazione della seconda linea inferiore utilizzando la configurazione ottimale di sensori. . . . .	106
4.33	Estrapolazione della terza linea inferiore utilizzando la configurazione ottimale di sensori. . . . .	106
4.34	Plot degli spostamenti ottenuti con l'iFEM . . . . .	110
4.35	Spostamenti ottenuti dall'iFEM utilizzando la configurazione ottimale ricavata sul FEM . . . . .	111

# Capitolo 1

## Introduzione

### 1.1 Contesto

L'analisi delle strutture aerospaziali rappresenta un aspetto cruciale della fase di progetto e richiede, principalmente per motivi legati alla sicurezza, un'attenzione particolare. L'insieme delle metodologie, delle tecniche e delle tecnologie impiegate per il monitoraggio dello stato di salute di una struttura prende il nome di Structural Health Monitoring (SHM).

L'obiettivo primario della SHM è la rilevazione precoce dell'insorgenza di danni, al fine di valutare l'integrità e stimare la vita residua del componente analizzato. Nel settore aerospaziale, ciò si traduce nella necessità di acquisire, idealmente in modo continuo nel tempo, un numero significativo di informazioni strutturali, concentrandosi principalmente sui campi di deformazione (strain) e di tensione (stress). Nota la distribuzione di tali grandezze sulla struttura, è possibile valutarne lo stato di salute e di conseguenza programmare eventuali interventi di manutenzione o ispezioni mirate.

Di conseguenza, rispetto a filosofie di progetto tradizionali come il criterio Safe-life, la SHM consente di ottimizzare e gestire in maniera più efficiente il ciclo di vita di un velivolo, ottenendo benefici sia in termini di costi operativi, sia di sicurezza strutturale.

Gli strumenti impiegati al fine di ottenere le informazioni citate precedentemente sono molteplici e dipendono strettamente dalla tipologia di struttura analizzata, dalle condizioni operative in cui essa è impiegata e dalla grandezza fisica rilevata; nel caso delle deformazioni, i principali strumenti impiegati per la misurazione sono:

- Estensimetri a resistenza elettrica [1]. Grazie alla loro precisione, economicità e facilità di installazione, rappresentano lo standard industriale per le misure puntuali di deformazione. Tuttavia, il loro utilizzo richiede un cablaggio complesso che, qualora essi siano usati in quantità elevata, può andare a perturbare l'apparato sperimentale e, di conseguenza, i risultati ottenuti.
- Sensori a fibra ottica a reticolo di Bragg (FBG). Questa tecnologia sfrutta la modulazione periodica dell'indice di rifrazione nel core di una fibra ottica, che riflette

selettivamente una specifica lunghezza d'onda (lunghezza di Bragg  $\lambda_B$ ) [2]. Una deformazione della fibra ne altera la periodicità, producendo una variazione nella lunghezza d'onda riflessa. Successivamente, il multiplexer, traduce tale variazione di lunghezza d'onda a un punto specifico della fibra e alla sua relativa deformazione. Il principale vantaggio risiede nella capacità di multiplexare molti sensori su un'unica fibra, riducendo notevolmente il cablaggio e consentendo un elevato numero di misurazioni, seppur il campo ottenuto non sia continuo, come quello ottenuto tramite le fibre di Rayleigh.

- Sensori a fibra ottica basati su scattering di Rayleigh. Questa tecnologia si basa sull'analisi della retro-diffusione Rayleigh della luce che si propaga all'interno di una fibra ottica [3]. Tale fenomeno deriva da microscopiche variazioni casuali dell'indice di rifrazione lungo il core della fibra, che generano un segnale di retro-diffusione univoco per ogni tratto. Una deformazione meccanica o una variazione di temperatura modifica localmente la distribuzione di queste micro irregolarità, determinando una variazione del segnale retro-diffuso. È poi possibile correlare tali variazioni con la deformazione o la temperatura lungo l'intera lunghezza della fibra, ottenendo una misura distribuita e ad alta risoluzione spaziale. Il principale vantaggio di questa tecnologia risiede nella possibilità di monitorare in modo continuo e senza soluzione di continuità l'intera struttura, senza necessità di sensori discreti o punti di misura dedicati.

Nonostante i decisivi vantaggi in termini di cablaggio e di quantità di dati, l'adozione dei sensori a scattering di Rayleigh in ambito aeronautico per test dinamici risulta tuttora limitata. Questa restrizione è principalmente dovuta alle limitazioni intrinseche delle tecniche di interrogazione ottica attualmente disponibili, che presentano una frequenza di acquisizione relativamente bassa rispetto alle esigenze dei fenomeni strutturali ad alta dinamica. Nei test aeronautici, dove le deformazioni possono variare rapidamente nel tempo a causa di eccitazioni aerodinamiche, vibrazioni o manovre impulsive, è essenziale acquisire segnali con frequenze di campionamento elevate. Gli attuali sistemi Rayleigh, pur garantendo un elevatissimo numero di misurazioni a bassa frequenza, presentano un rapido calo delle prestazioni a frequenze più elevate [4]. Di conseguenza, gli estensimetri elettrici rimangono la scelta privilegiata nei test dinamici, grazie alla loro elevata frequenza di acquisizione, affidabilità e costo contenuto. Tuttavia, questa preferenza comporta la rinuncia al vantaggio principale offerto dalle fibre ottiche: la possibilità di ottenere un profilo di deformazione continuo e distribuito lungo l'intera struttura, con un'impronta di cablaggio minima e un'elevata immunità ai disturbi elettromagnetici.

Il presente lavoro di tesi si propone di colmare questa lacuna, esplorando soluzioni e strategie per espandere il campo degli strain, ottenendo una densità di informazioni paragonabile a quella ottenuta tramite le fibre di Rayleigh, a partire però da una quantità discreta di misurazioni. In questo modo, utilizzando sensori alternativi come estensimetri o FBG, si è in grado di combinare l'elevata risoluzione spaziale tipica delle fibre ottiche con le frequenze che contraddistinguono i test aeronautici di tipo dinamico.

## **1.2 Obiettivo della Tesi**

Come anticipato precedentemente, la tesi si pone l'obiettivo di progettare e valutare un metodo in grado di ottenere, a partire da dei valori discreti, una distribuzione continua delle deformazioni dell'apertura alare di un velivolo. Per fare ciò si ricorre a un metodo di estrapolazione degli strain noto come Smoothing Element Analysis (SEA). Questa tecnica permette di estrapolare e rendere continui i dati discreti, ottenendo una distribuzione delle deformazioni comparabile a quella ottenibile con sensori a fibra ottica, ma a partire da una rete di sensori più semplice ed economica.

Oltre alla SEA, verrà analizzato anche un altro metodo, noto come metodo agli elementi finiti inverso (iFEM); a partire dal campo continuo degli strain ottenuto dalla SEA, utilizzando l'iFEM si è in grado di ricostruire il campo degli spostamenti, ricavando un'altra informazione essenziale per l'analisi e lo Structural Health Monitoring di una struttura aerospaziale.

L'integrazione tra questo metodo e la SEA sarà valutata nella fase finale del lavoro, durante lo studio del caso d'interesse della tesi.

Nelle sezioni successive vengono descritti nel dettaglio i due metodi citati.

# Capitolo 2

## iFEM & SEA

### 2.1 Inverse Finite Element Method (iFEM)

Negli ultimi decenni, il settore aerospaziale ha visto una nuova grande rivoluzione, l'avvento dei materiali compositi. La loro introduzione, però, ha portato alla presenza di condizioni di carico e deformazione sempre più estreme e difficili da modellare, essendo tali materiali sia più resistenti, ma anche, spesso, caratterizzati da proprietà fortemente direzionali, che di conseguenza rendono la struttura del velivolo anisotropa.

Nasce quindi il bisogno di andare a stimare le caratteristiche di tali materiali, che spesso sono estremamente dipendenti dal processo di fabbricazione utilizzato, per via della loro composizione costituita da fibra-matrice. Inoltre, una minima variazione delle condizioni al contorno o la presenza di piccole imperfezioni (come sfibratura o porosità) portano le proprietà a variare in maniera molto significativa.

Oltre ai problemi legati a questi nuovi materiali, vi è inoltre la solita difficoltà nello stimare le condizioni di carico di una struttura aeronautica; salvo le prove in laboratorio (statiche o comunque controllate), è infatti difficile andare a determinare con certezza i carichi a cui è sottoposta una struttura durante la vita operativa, e spesso essi sono stimati in maniera statistica analizzando le varie fasi di missione caratteristiche del velivolo.

Data quindi la difficoltà legata alla stima delle proprietà di certi materiali e alla conoscenza precisa delle condizioni operative, è necessario un metodo che, nonostante l'assenza di tali informazioni, sia in grado di ricavare la risposta strutturale del sistema analizzato. Tale procedura è l'Inverse Finite Element Method, un metodo in grado di ottenere gli spostamenti a cui è soggetta una struttura, a partire dalle deformazioni che si sviluppano su di essa.

## 2.1.1 FEM vs iFEM

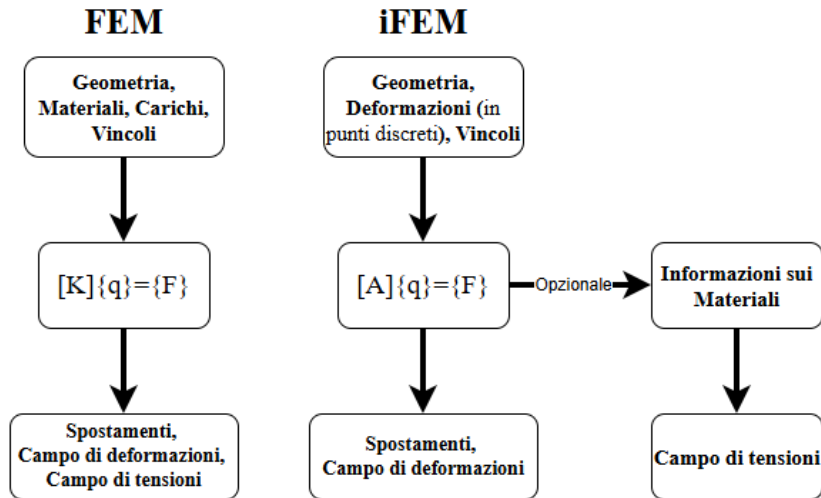


Figura 2.1: FEM e iFEM a confronto

Come si evince anche dal nome, il metodo agli elementi finiti inverso è un metodo che deriva dal FEM classico.

Seppur entrambi siano basati sull'approssimazione di una data struttura tramite elementi finiti più o meno complessi, FEM e iFEM sviluppano l'analisi a partire da input diversi, come è mostrato nella Figura 2.1:

- FEM:
  - Geometria, ovvero la mesh di elementi finiti che approssima la struttura d'interesse.
  - Materiali, input che descrive le proprietà dei materiali che compongono la struttura, come Modulo di Young ( $E$ ), numero di Poisson ( $\nu$ ) e rigidità a taglio ( $G$ ).
  - Carichi, l'insieme di fattori che descrivono come la struttura viene sollecitata.
  - Vincoli, che mostrano come la struttura è vincolata, quindi quali gradi di libertà di quali nodi sono bloccati.

- iFEM:

Anche per l'iFEM si vede la presenza tra gli input di Geometria e Vincoli; la grande differenza con il FEM sta nell'assenza, almeno in primis, di carichi e materiali tra gli input, informazioni che come era stato già anticipato, non sono necessarie per l'applicazione del metodo. Al loro posto si trovano invece:

- Deformazioni, che, come mostrato in figura, devono essere raccolte su un numero discreto di punti della struttura. La possibilità di utilizzare misure discrete

invece che continue semplifica il processo di ottenimento delle deformazioni, che possono essere rilevate tramite sensori semplici come gli estensimetri.

Facendo sempre riferimento alla Figura 2.1, si evince che vi è un'ulteriore, seppur sottile, differenza per quanto riguarda il corpo dei due metodi. Nel FEM classico si osserva infatti che il metodo è incentrato sulla risoluzione del problema algebrico:

$$[K] \{q\} = \{F\} \quad (2.1)$$

che rappresenta l'equilibrio globale tra sollecitazioni esterne e reazioni interne della struttura discretizzata. Ciascun termine di questa equazione ha un preciso significato fisico e matematico:

- La Matrice di Rigidezza  $[K]$  esprime la relazione tra le forze applicate e gli spostamenti nodali. Essa racchiude le proprietà elastiche del materiale (fondamentali, come visto, per il FEM), la geometria e la connettività degli elementi. È ottenuta assemblando le matrici di rigidezza elementari  $[k_e]$ , calcolate per ciascun elemento finito a partire dalla legge costitutiva del materiale e dalle funzioni di forma:

$$[k_e] = \int_V [B]^T [D] [B] dV$$

dove:

- $[B]$  è la matrice che lega le deformazioni agli spostamenti nodali (matrice di forma delle deformazioni),
- $[D]$  è la matrice costitutiva del materiale (contenente, ad esempio,  $E$  e  $\nu$ ),
- $V$  è il volume, o l'area nel caso bidimensionale, dell'elemento.
- Il Vettore degli Spostamenti Nodali  $\{q\}$  contiene le incognite primarie del problema FEM, ossia gli spostamenti dei nodi della mesh rispetto ai vari gradi di libertà. Una volta note le condizioni al contorno (vincoli e spostamenti imposti),  $\{q\}$  può essere calcolato risolvendo il sistema lineare.
- Il Vettore delle Forze Nodali  $\{F\}$  raccoglie le forze esterne applicate ai nodi del modello.

Per quanto riguarda l'iFEM, il corpo centrale del metodo non è composto dall'equazione algebrica vista nella formula 2.1, ma da un'equazione simile:

$$[A] \{q\} = \{F\} \quad (2.2)$$

e, come nel caso del FEM, si possono distinguere:

- Matrice di Pseudo-Rigidezza  $[A]$ , chiamata così perché ha esattamente la stessa funzione che aveva la matrice  $[K]$  nell'equazione di equilibrio della struttura, ma non è propriamente una matrice di rigidezza, poiché non dipende dalle proprietà elastiche della struttura, bensì dalle relazioni cinematiche e dalla disposizione dei punti di misura. La sua costruzione verrà affrontata nel dettaglio nella sezione successiva.

- Il Vettore degli Spostamenti Nodali  $\{q\}$  è esattamente identico alla controparte del metodo agli elementi finiti tradizionale, e anche in questo caso rappresenta il vettore contenente i DOF della struttura, incognite del problema in questione.
- Il Vettore delle Pseudo-Forze  $\{F\}$  non rappresenta propriamente le forze applicate alla struttura, non necessarie per il metodo iFEM, ma è un vettore costruito a partire dalle misurazioni discrete di deformazione, e rappresenta l'effetto di tali misure all'interno della formulazione inversa. Anch'esso verrà sviscerato meglio in seguito.

Infine, facendo riferimento per un'ultima volta al grafico riportato in Figura 2.1, si vuole analizzare la differenza in termini di output:

- il FEM, oltre al vettore  $\{q\}$ , ovvero agli spostamenti della struttura, riesce anche a restituire valori precisi dei campi di deformazioni e tensioni. Note tutte queste grandezze, si può valutare come una determinata struttura reagisce alla condizione di carico analizzata e, di conseguenza, si possono ricavare caratteristiche molto importanti di quest'ultima, come carico di rottura, rigidità, resistenza, ecc. Questo rende il FEM un processo ampiamente utilizzato soprattutto nelle fasi di design, dove ricavare queste proprietà è fondamentale per andare a concepire e progettare un velivolo, a patto di adoperare materiali noti e che possiedano un'ampia gamma di documentazione a cui attingere, essendo le caratteristiche dei materiali un'informazione fondamentale per utilizzare il metodo.
- l'iFEM è diverso; il metodo riesce infatti a trovare  $\{q\}$ , come nel FEM tradizionale, ma anche a espandere il campo di deformazioni dal discreto (che era stato fornito in input) al continuo utilizzando a ritroso gli spostamenti ricavati in precedenza. Qualora fossero note le caratteristiche meccaniche della struttura, sarebbe inoltre possibile ricavare il campo di tensioni, sebbene ciò ridurrebbe uno dei principali vantaggi del metodo: l'assenza della conoscenza approfondita dei materiali. Questi aspetti rendono quindi l'iFEM un processo innovativo, ed esso trova grandi applicazioni soprattutto per quanto riguarda:
  1. Monitoraggio in tempo reale della vita strutturale di un sistema. Tramite dei sensori si possono infatti analizzare le deformazioni e, ottenuti gli spostamenti che esse causano, valutare quanto essi si avvicinino al valore critico.
  2. Indagine dei danni, usando nuovamente delle deformazioni discrete e ottenendo il loro profilo continuo, si possono ricercare eventuali irregolarità nel campo e successivamente studiarne le cause in maniera più precisa e localizzata.
  3. Analisi e gestione di morphing structure, ovvero strutture in grado di variare la propria forma, sempre più impiegate nel settore aerospaziale. In questo caso, è sufficiente disporre sensori sulle superfici deformabili, così da poter monitorare, dopo l'attuazione, quanto gli spostamenti ottenuti si avvicinino a quelli desiderati ed eventualmente correggerli.

## 2.2 Formulazione Matematica dell'iFEM

L'Inverse Finite Element Method (iFEM) consente di ricostruire gli spostamenti nodali e la deformata di una struttura a partire dalle deformazioni misurate sperimentalmente su un numero discreto di punti. Come detto in precedenza, a differenza del FEM classico, l'iFEM non richiede la conoscenza delle condizioni di carico né delle proprietà elastiche del materiale: il metodo si basa esclusivamente sulla geometria della struttura, sulle condizioni al contorno e sulle misure di deformazione acquisite.

Per poter funzionare, il metodo si fonda sul principio dei minimi quadrati, in cui il campo di spostamenti è determinato minimizzando la differenza tra le deformazioni numeriche e quelle sperimentali, unite all'interno di un funzionale  $\Phi$ , la cui definizione verrà viste nelle sezioni successive.

L'obiettivo del metodo è quindi quello di ottenere una distribuzione di spostamenti il più possibile coerente con le deformazioni acquisite dai sensori.

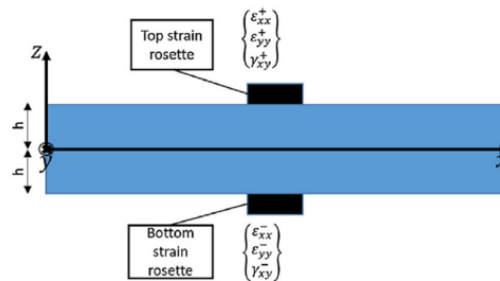


Figura 2.2: Esempio di distribuzione dei sensori

Facendo riferimento alla Figura 2.2, tradizionalmente l'iFEM, per funzionare, necessita di misure di deformazioni relative ad entrambe le superfici dell'elemento studiato. Talvolta però, applicando il metodo a prove sperimentali, è complesso o addirittura impossibile installare sensori su entrambe le facce della struttura in analisi.

Per ovviare a questa limitazione, la formulazione utilizzata in questo lavoro di tesi è la Single Sensor Based iFEM (SSB-iFEM) [5], ovvero una variante del metodo che permette di ricavare gli spostamenti a partire da misurazioni di deformazioni relative ad un'unica superficie dell'elemento finito.

### 2.2.1 Definizione delle Deformazioni Sperimentali

Prima di esporre la formulazione matematica del metodo, è importante comprendere la notazione utilizzata per indicare le diverse componenti di deformazione; in questa sezione si definiscono le varie deformazioni ottenute sperimentalmente.

Facendo riferimento alla Figura 2.2, si immagina un elemento strutturale semplice (nel caso in analisi una piastra) caratterizzato dalla presenza, sulla superficie inferiore e/o su quella superiore, di sensori di deformazione, come estensimetri o sensori a fibra ottica.

Poichè, come anticipato in precedenza, la formulazione utilizzata (SSB-iFEM) ammette l'utilizzo di misurazioni di deformazione provenienti da un'unica superficie dell'elemento analizzato, le grandezze utilizzate saranno direttamente quelle rilevate dai sensori. Nello specifico, è possibile definire:

$$\varepsilon_p^+ = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^+ \\ \varepsilon_{yy}^+ \\ \gamma_{xy}^+ \end{Bmatrix} \quad \varepsilon_p^- = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^- \\ \varepsilon_{yy}^- \\ \gamma_{xy}^- \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

Qualora si fosse utilizzata la formulazione classica dell'iFEM, che quindi prevede l'utilizzo delle deformazioni di entrambe le superfici dell'elemento finito analizzato, si sarebbero dovute definire delle ulteriori grandezze ( $e_{ij}$  e  $k_{ij}$ ) fondamentali per unire, all'interno di un'unica variabile, entrambi i campi di strain misurati.

La deformazione di taglio  $g^\varepsilon$ , relativa agli effetti di taglio trasversale, può essere considerata trascurabile, data la difficoltà legate alla misurazione sperimentale di tale grandezza.

## 2.2.2 Definizione delle Deformazioni Numeriche

Oltre alle deformazioni ricavate sperimentalmente, è importante comprendere come vengono ottenute le altre informazioni necessarie per applicare il metodo. Come esposto in precedenza infatti, l'iFEM, per funzionare, paragona le deformazioni misurate in modo sperimentale con quelle ottenute tramite il calcolo numerico, al fine di determinare quali sono gli spostamenti in grado di generare una risposta compatibile con gli strain rilevati.

Per ciascun elemento inverso si definisce un sistema di riferimento locale  $(x, y, z)$  con origine nel baricentro dell'elemento e con  $z \in [-h, +h]$ . Una matrice di trasformazione consente di passare dalle coordinate globali  $(X, Y, Z)$  a quelle locali.

L'elemento inverso iQS4 (utilizzato in questa formulazione) è un elemento a quattro nodi basato sulla teoria di Mindlin, con 24 gradi di libertà complessivi (6 per ciascun nodo: tre traslazioni  $u, v, w$  e tre rotazioni  $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ ). Il modello di spostamento adottato è quindi costruito in maniera tale da prendere in considerazione casi più generali rispetto a quelli analizzati dalla teoria di Kirchoff, che invece non tiene in considerazione le deformazioni trasversali e le tensioni di taglio. Analogamente alla teoria di Kirchoff, viene mantenuta l'ipotesi di piastra sottile a spessore costante.

Le deformazioni sviluppate sulla struttura possono essere trovate utilizzando la formula:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ u_{,y} + v_{,x} \\ \theta_{y,x} \\ -\theta_{x,y} \\ \theta_{y,y} - \theta_{x,x} \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

Definendo:

$$[Z_{\varepsilon_p}(z)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & z \end{bmatrix} = [ I \quad zI ] \quad (2.5)$$

$$m(u) = \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ u_{,y} + v_{,x} \end{Bmatrix} \quad k(u) = \begin{Bmatrix} \theta_{y,x} \\ -\theta_{x,y} \\ \theta_{y,y} - \theta_{x,x} \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

La Formula 2.4 può essere riscritta in forma compatta come:

$$\varepsilon_p(z, u) = [Z_{\varepsilon_p}(z)] \begin{Bmatrix} m(u) \\ k(u) \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

Le componenti di spostamento utilizzate per la definizione delle deformazioni analitiche possono essere trovate tramite le seguenti sommatorie sui 4 nodi:

$$u = \sum_{q=1}^4 N_q u_q + \sum_{q=1}^4 L_q \theta_{zq}, \quad v = \sum_{q=1}^4 N_q v_q + \sum_{q=1}^4 M_q \theta_{zq}, \quad w = \sum_{q=1}^4 N_q w_q - \sum_{q=1}^4 L_q \theta_{xq} - \sum_{q=1}^4 M_q \theta_{yq}$$

$$\theta_x = \sum_{q=1}^4 N_q \theta_{xq}, \quad \theta_y = \sum_{q=1}^4 N_q \theta_{yq}$$

Dove con  $N_q$  si intendono le funzioni di forma bilineari, mentre con  $M_q$  e  $L_q$  quelle paraboliche.

Esse sono fondamentali per poter ricavare il campo di spostamenti non solo ai nodi, ma in tutti i punti compresi all'interno dell'elemento finito.

Per ricavarle è fondamentale spostarsi nel sistema di riferimento naturale  $(\xi, \eta) \in [-1, 1]$  e trovare:

1. Le funzioni di forma standard  $N_q$  [6] :

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) & N_5 &= \frac{1}{16}(1 - \xi^2)(1 - \eta) \\ N_2 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) & N_6 &= \frac{1}{16}(1 + \xi)(1 - \eta^2) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) & N_7 &= \frac{1}{16}(1 - \xi^2)(1 + \eta) \\ N_4 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) & N_8 &= \frac{1}{16}(1 - \xi)(1 - \eta^2) \end{aligned}$$

2. Note le varie  $N_q$ , si possono derivare prima rispetto a una variabile naturale, poi rispetto all'altra, per ricavare le funzioni di forma  $L_q$  e  $M_q$ :

$$\begin{aligned} L_1 &= y_{14}N_8 - y_{21}N_5 & M_1 &= x_{41}N_8 - x_{12}N_5 \\ L_2 &= y_{21}N_5 - y_{32}N_6 & M_2 &= x_{12}N_5 - x_{23}N_6 \\ L_3 &= y_{32}N_6 - y_{43}N_7 & M_3 &= x_{23}N_6 - x_{34}N_7 \\ L_4 &= y_{43}N_7 - y_{14}N_8 & M_4 &= x_{34}N_7 - x_{41}N_8 \end{aligned}$$

dove, considerando  $\alpha = 1,2,3,4$  e  $\beta = 1,2,3,4$ :

$$\begin{aligned}x_{\alpha\beta} &= x_\alpha - x_\beta \\y_{\alpha\beta} &= y_\alpha - y_\beta\end{aligned}$$

Una volta note le funzioni di forma appena descritte, si procede al calcolo del Jacobiano, che nel caso in questione assume la forma:

$$[J] = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & x_{,\eta} \\ y_{,\xi} & y_{,\eta} \end{bmatrix},$$

Grazie al Jacobiano, si può passare agilmente dal sistema di riferimento naturale al globale, e si possono quindi ricavare gli ultimi ingredienti necessari alla formulazione delle matrici cinematiche:

$$\begin{bmatrix} (\cdot)_{q,x} \\ (\cdot)_{q,y} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} (\cdot)_{q,\xi} \\ (\cdot)_{q,\eta} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Note queste derivate, si possono finalmente trovare le 3 matrici cinematiche [7], che sono fondamentali per esprimere le varie deformazioni numeriche:

- Matrice cinematica membranale, che quindi serve per ottenere le deformazioni nel piano medio della piastra:

$$[B_m^{(q)}] = \begin{bmatrix} N_{q,x} & 0 & 0 & 0 & 0 & L_{q,x} \\ 0 & N_{q,y} & 0 & 0 & 0 & M_{q,x} \\ N_{q,y} & N_{q,x} & 0 & 0 & 0 & L_{q,y} + M_{q,x} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

- Matrice cinematica di curvatura, che considera gli effetti della flessione della struttura:

$$[B_b^{(q)}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & N_{q,x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -N_{1,y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -N_{q,x} & N_{q,y} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

- Matrice cinematica di taglio trasversale, atta a considerare gli effetti delle deformazioni di taglio, integrati, come anticipato in precedenza, all'interno dalla teoria di Mindlin:

$$[B_s^{(q)}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_{q,x} & -L_{q,x} & -M_{q,x} + N_q & 0 \\ 0 & 0 & N_{q,y} & -L_{q,y} - N_q & -M_{q,y} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

In realtà, le formule appena viste (2.9, 2.10 e 2.11) servono a ricavare le sottomatrici tipiche di ogni nodo che definisce l'elemento che definisce il FEM della struttura. Nel caso in analisi, ovvero un elemento a 4 nodi, la generica matrice cinematica  $[B_i]$  sarà costruita come:

$$[B_i] = [B_i^{(1)} \ B_i^{(2)} \ B_i^{(3)} \ B_i^{(4)}], \quad (2.12)$$

con  $i = m, b, s$ .

Noto come ricavare le varie matrici cinematiche, si può riscrivere l'Equazione 2.4 nella forma:

$$\varepsilon_p(z, \mathbf{u}^e) = [Z_{\varepsilon_p}(z)] \begin{bmatrix} [B_m] \\ [B_b] \end{bmatrix} \mathbf{u}^e = [Z_{\varepsilon_p}(z)][B_{mb}]\mathbf{u}^e \quad (2.13)$$

$$\gamma_s = [B_s]\mathbf{u}^e \quad (2.14)$$

dove  $[B_m]$ ,  $[B_b]$  e  $[B_s]$ , come mostrato nelle definizioni precedenti, sono le matrici cinematiche dell'elemento, associate rispettivamente alle deformazioni di membrana, di flessione e di taglio trasversale, mentre  $\mathbf{u}^e$  rappresenta il vettore degli spostamenti nodali dell'elemento  $e$ , ed è composto dai vari gradi di libertà dei nodi, come riportato in seguito:

$$\mathbf{d}_q = \begin{Bmatrix} u_q \\ v_q \\ w_q \\ \theta_{xq} \\ \theta_{yq} \\ \theta_{zq} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{u}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{d}_3 \\ \mathbf{d}_4 \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

### 2.2.3 Funzionale dell'Errore

Definito il legame tra deformazioni e spostamenti (Formula 2.13), si procede ad analizzare la differenza tra strain ricavati sperimentalmente e strain ottenuti tramite la formulazione numerica; per farlo, si definisce, per ogni elementi finito inverso, il funzionale dell'errore  $\Psi$ :

$$\Psi^e(\mathbf{u}^e) = \lambda_p^+ \Psi_p^+(\mathbf{u}^e) + \lambda_p^- \Psi_p^-(\mathbf{u}^e) + \lambda_g \Psi_g(\mathbf{u}^e) \quad (2.16)$$

All'interno della Formula 2.16, si possono distinguere le grandezze  $\Psi_p^+$ ,  $\Psi_p^-$  e  $\Psi_g$ , che rappresentano i vettori contenenti le singole componenti del funzionale dell'errore tipico dell'elemento considerato.

Sono inoltre presenti 3 contributi,  $\lambda_p^+$ ,  $\lambda_p^-$  e  $\lambda_g$ , che rappresentano dei vettori di penalizzazione, ovvero dei fattori che, moltiplicati per le rispettive componenti del funzionale dell'errore, regolano l'importanza dei singoli contributi sugli altri.

Essi sono particolarmente utili quando non sono disponibili sensori in un determinato elemento oppure quando è presente una misura di deformazione su un'unica superficie dell'elemento finito, comportamento previsto dal SSB-iFEM; in tal caso, al relativo contributo mancante viene assegnato un peso molto piccolo (ad esempio  $10^{-4}$ ) per ridurre l'influenza sul risultato finale. Se invece l'elemento possiede almeno una misura di deformazione il loro contributo è posto pari a 1.

Analizzata la formula che definisce il funzionale, si procede a definire, in forma esplicita, le varie componenti di  $\Psi$  viste in precedenza:

$$\Psi_p^+ = \left\{ \begin{array}{c} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{array} \right\} = \frac{1}{A^e} \int_{A^e} [\varepsilon_p(z^+, \mathbf{u}^e) - \varepsilon_p^+]^2 dA^e \quad (2.17)$$

$$\Psi_p^- = \left\{ \begin{array}{c} \Psi_4 \\ \Psi_5 \\ \Psi_6 \end{array} \right\} = \frac{1}{A^e} \int_{A^e} [\varepsilon_p(z^-, \mathbf{u}^e) - \varepsilon_p^-]^2 dA^e \quad (2.18)$$

$$\Psi_g = \left\{ \begin{array}{c} \Psi_7 \\ \Psi_8 \end{array} \right\} = \frac{1}{A^e} \int_{A^e} \gamma_s(\mathbf{u}^e)^2 dA^e = \frac{1}{A^e} \int_{A^e} \mathbf{g}(\mathbf{u}^e)^2 dA^e \quad (2.19)$$

Dove:

- $\varepsilon_p(z^+, \mathbf{u}^e)$  e  $\varepsilon_p(z^-, \mathbf{u}^e)$  rappresentano rispettivamente le deformazioni numeriche calcolate nello stesso punto del piano x-y, ma a coordinate z differenti (rispettivamente a  $z^+ = +t$  e  $z^- = -t$ )
- $\varepsilon_p^+$  e  $\varepsilon_p^-$  rappresentano invece le deformazioni ricavate in maniera sperimentale, nei medesimi punti di quelle trovate analiticamente.
- $\gamma_s(\mathbf{u}^e) = g(\mathbf{u}^e)$  rappresentano la deformazione a taglio trasversale. Nel caso in analisi, data l'impossibilità di misurare questo tipo di deformazione, si trascura il suo contributo nel funzionale. Per fare ciò, si pone un valore molto basso al contributo di penalizzazione  $\lambda_g$  ( $\lambda_g = \{10^{-4}, 10^{-4}\}$ ), per far sì che l'influenza di tale grandezza sul funzionale sia praticamente nulla.

Definiti i singoli contributi che costituiscono il funzionale, si inserisce la Formula 2.13 all'interno delle Formule 2.17 e 2.18 e la Formula 2.14 all'interno della 2.19. Inserendo ciò che si ottiene all'interno della 2.16, infine, si osserva immediatamente come il valore del funzionale dipenda esclusivamente dal vettore degli spostamenti nodali dell'elemento  $\mathbf{u}^e$ . Nella sezione successiva, si mostrerà come, al fine di trovare gli spostamenti a cui è sottoposta la struttura, si andrà a minimizzare tale funzionale proprio rispetto ai DOF degli elementi analizzati.

L'assemblaggio avverrà per ogni elemento finito presente all'interno del modello discretizzato; si evince quindi che il metodo risulta essere più preciso quando è in grado di valutare un numero maggiore di confronti tra rilevazioni sperimentali e formulazioni matematiche, e quindi quando il numero di sensori si avvicina al numero di elementi finiti. È quindi fondamentale condurre degli studi preliminari sulla densità dei sensori e sulla mesh impiegata nell'iFEM, al fine di massimizzare, nei limiti imposti dall'apparato sperimentale, il numero di elementi effettivamente sensorizzati.

Dal punto di vista pratico, tuttavia, ottenere una densità di misurazioni che permetta di avere un sensore per ogni elemento finito del modello discretizzato risulta essere estremamente complesso; per questo motivo, la pre-elaborazione dei dati di deformazione mediante tecniche di estrapolazione (come la SEA) rappresenta spesso un passaggio fondamentale per garantire una copertura adeguata della struttura.

Relativamente alla densità delle deformazioni, è opportuno specificare che, a seconda della

mesh utilizzata, si possono trarre benefici diversi. Una mesh più grossolana, ad esempio, può contribuire a migliorare la distribuzione dei sensori sugli elementi e la qualità della ricostruzione. Al contrario, una mesh più fitta permette una discretizzazione più accurata della struttura, risultando quindi vantaggiosa soprattutto per geometrie più complesse. Anche per questo aspetto, quindi, è necessario valutare attentamente la prova analizzata e determinare successivamente la mesh più adeguata per il caso di studio.

### 2.2.4 Assemblaggio del sistema globale

Sostituendo all'interno del funzionale i valori di  $z^+$  e  $z^-$ , corrispondenti nel caso analizzato a metà spessore del elemento finito ( $z^+ = t/2$  e  $z^- = -t/2$ ), si vuole definire il valore degli spostamenti che minimizza la differenza tra la deformazione misurata e la deformazione numerica. Si ricerca quindi il minimo valore del funzionale, che come detto in precedenza, rappresenta proprio tale errore; per fare ciò, si studia la derivata prima di  $\Psi^e$  rispetto al vettore degli spostamenti nodali  $\mathbf{u}^e$ , unica variabile del problema, e si pone tale derivata pari a zero:

$$\frac{\partial \Psi^e(\mathbf{u}^e)}{\partial \mathbf{u}^e} = 0 \quad (2.20)$$

si ottiene quindi il sistema lineare globale:

$$[K']^e \{\mathbf{u}^e\} = (f')^e \quad (2.21)$$

All'interno della Formula 2.21 si osservano la matrice  $[K']^e$  e il vettore  $(f')^e$ , definiti come:

$$[K']^e = [K_p^+]^e + [K_p^-]^e + [K_g]^e \quad (2.22)$$

$$(f')^e = (f_p^+)^e + (f_p^-)^e + (f_g)^e \quad (2.23)$$

I singoli contributi presenti all'interno delle Formule 2.22 e 2.23 possono essere ricavati risolvendo gli integrali riportati in seguito:

$$[K_p^+]^e = \frac{1}{A^e} \int_{A^e} \left\{ [B_{mb}]^T [Z_{\varepsilon_p}(z^+)]^T \text{diag}(\lambda_p^+) [Z_{\varepsilon_p}(z^+)] [B_{mb}] \right\} dA^e \quad (2.24)$$

$$[K_p^-]^e = \frac{1}{A^e} \int_{A^e} \left\{ [B_{mb}]^T [Z_{\varepsilon_p}(z^-)]^T \text{diag}(\lambda_p^-) [Z_{\varepsilon_p}(z^-)] [B_{mb}] \right\} dA^e \quad (2.25)$$

$$[K_g]^e = \frac{1}{A^e} \int_{A^e} \left\{ [B_s]^T \text{diag}(\lambda_g) [B_s] \right\} dA^e \quad (2.26)$$

$$(f_p^+)^e = \frac{1}{A^e} \int_{A^e} \left\{ [B_{mb}]^T [Z_{\varepsilon_p}(z^+)]^T \text{diag}(\lambda_p^+) \varepsilon_p^+ \right\} dA^e \quad (2.27)$$

$$(f_p^-)^e = \frac{1}{A^e} \int_{A^e} \left\{ [B_{mb}]^T [Z_{\varepsilon_p}(z^-)]^T \text{diag}(\lambda_p^-) \varepsilon_p^- \right\} dA^e \quad (2.28)$$

$$(f_g)^e = \frac{1}{A^e} \int_{A^e} \left\{ [B_s]^T \text{diag}(\lambda_g) g^\varepsilon \right\} dA^e = 0 \quad (2.29)$$

Definiti tutti gli elementi che definiscono il problema caratteristico di un singolo elemento (Formula 2.21), si procede all'assemblaggio sull'intera mesh di elementi.

Si ottiene quindi il seguente set globale di equazioni algebriche lineari, rappresentato in forma matriciale come:

$$[K']\mathbf{U} = \mathbf{F}' \quad (2.30)$$

Dove  $\mathbf{U}$  rappresenta il vettore contenente i gradi di libertà (spostamenti e rotazioni) nodali di tutta la struttura discretizzata;  $[K']$  e  $\mathbf{F}'$  rappresentano rispettivamente la matrice di pseudo-rigidità globale e il vettore delle pseudo-forze globale.

Poiché la matrice di pseudo-rigidità  $[K']$  è singolare si impongono le condizioni al contorno per evitare l'insorgenza di moti di corpo rigido della struttura; di conseguenza, si risolve il sistema solo sui gradi di libertà non vincolati (o liberi), indicati nella formula seguente con il pedice  $(\cdot)_F$ :

$$[K'_{FF}]\mathbf{U}_F = \mathbf{F}'_F \quad \mathbf{U}_F = [K'_{FF}]^{-1}\mathbf{F}'_F \quad (2.31)$$

Dalla Formula 2.31 è possibile osservare il punto di forza del metodo; i gradi di libertà nodali ( $\mathbf{U}_F$ ), che successivamente all'inversione della matrice  $[K'_{FF}]$  rappresentano l'incognita del problema, sono infatti ricavata a partire da  $[K'_{FF}]$ , che dipende esclusivamente dalla posizione dei sensori, e da  $\mathbf{F}'_F$ , che invece dipende anche dal valore di deformazione misurato.

Come detto precedentemente, una volta determinati i gradi di libertà nodali, è possibile ricavare le deformazioni e, se necessario, le tensioni, attraverso le relazioni cinematiche e costitutive, ricordando che per ricavare le seconde, è necessario però inserire all'interno del metodo le caratteristiche dei materiali di cui è composta la struttura.

## 2.3 Smoothing Element Analysis (SEA)

In precedenza, alla sezione 2.2.3, si era parlato dell'importanza di avere un elevato numero di misurazioni di deformazioni ( $\varepsilon_p^+$  e  $\varepsilon_p^-$ ), per far sì che il funzionale  $\Psi^e$  fosse in grado di trovare una soluzione precisa degli spostamenti per tutti gli elementi della mesh iFEM. Realisticamente, è però impossibile andare a sensorizzare una struttura in maniera tale da ottenere una tale densità di misurazioni senza andarne a perturbare l'accuratezza. Per questo motivo, si utilizzano dei metodi, chiamati algoritmi di estrapolazione, come la Smoothing Element Analysis (SEA).

Il metodo SEA è una tecnica di post-processing che opera sui risultati delle misurazioni sperimentali di deformazioni. Il suo obiettivo è mitigare l'effetto delle discontinuità intrinseche in tali risultati, effettuando un'estrapolazione dei dati forniti in input al fine di ottenere un campo di deformazioni privo di discontinuità.

In pratica, il metodo ricostruisce un campo di deformazioni continuo e più accurato interpolando i valori nodali discreti ottenuti dall'apparato sperimentale, effettuando un paragone tra le misure fornite in input in uno specifico punto e il valore numerico ricavato tramite una formulazione precisa, similmente a quanto visto in precedenza per l'iFEM.

### 2.3.1 Caso 1D

Per comprendere il funzionamento della SEA, può essere usato un caso semplice, ovvero un modello monodimensionale.

Si faccia riferimento allo schema in Figura 2.3:

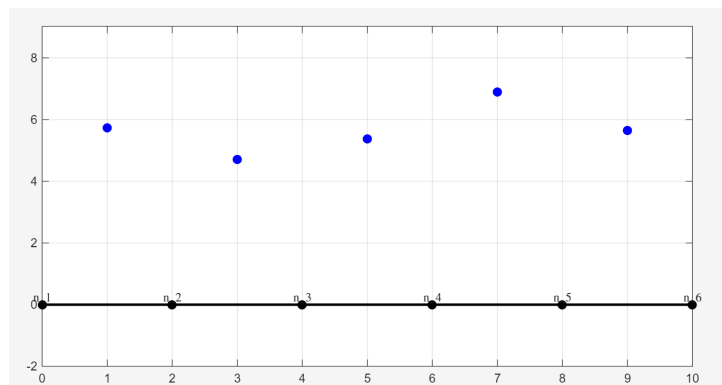


Figura 2.3: Rappresentazione degli elementi finiti 1D (nero) e delle misurazioni effettuate (blu).

Applicare il metodo, che non si limita alle deformazioni ma può essere utilizzato per una qualunque funzione  $f(x)$ , vuol dire trovare delle informazioni aggiuntive, basandosi sui valori noti (punti blu), così da ottenere delle misurazioni anche dove non sono presenti sensori.

Successivamente all'applicazione della SEA si ottiene, per esempio, l'estrapolazione mostrata in Figura 2.4:

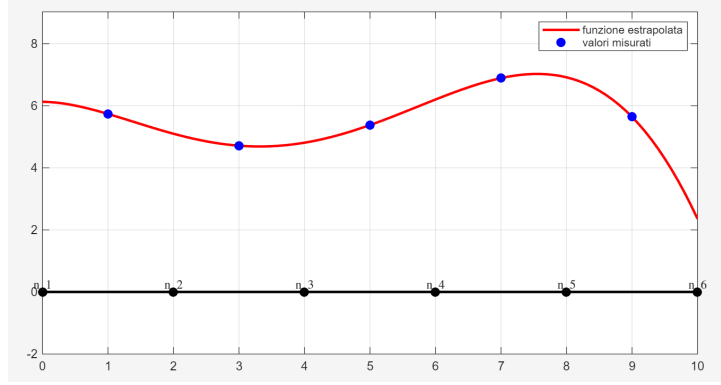


Figura 2.4: Estrapolazione della funzione  $f(x)$

È importante specificare che il metodo, funziona sia per funzioni  $f(x) \in C^0$ , quindi continue su tutto il dominio, sia su funzioni  $f(x) \in C^1$ , quindi con anche la derivata prima continua sul dominio. Successivamente, verrà analizzata tale differenza, e quale è il parametro atto a regolare questo aspetto.

Si immagini a questo punto di avere una funzione  $f(x)$ , di cui si vogliono estrapolare i valori sul dominio  $x$ , a partire da delle misurazioni  $f_i^M$ ; per fare ciò si utilizza una discretizzazione a elementi finiti:

$$f^S(x) = [L_1(x) \quad L_2(x) \quad P_1(x) \quad P_2(z)] \begin{Bmatrix} f_1^S \\ f_2^S \\ d_1^S \\ d_2^S \end{Bmatrix} = [P(x)] \{q^s\} \quad (2.32)$$

Dove:

- $[P(x)]$  rappresenta la matrice d'interpolazione dell'elemento finito, usata per ricavare  $f^S(x)$ .
- $\{q^s\}$  definisce il vettore dei gradi di libertà dell'elemento finito considerato, in questo caso 2 valori di  $f_i^s$  e due valori di  $d_i^s$ .
- $f_i^s$  rappresenta il valore della funzione estrapolata ai nodi dell'elemento.
- $d_i^s$  costituisce una variabile ausiliaria usata per garantire la continuità  $C^1$ . È definita come:

$$d^s(x) = [0 \quad 0 \quad L_1^s(x) \quad L_2^s(x)] \{q^s\} = [L(x)] \{q^s\} \quad (2.33)$$

Qualora la  $C^1$  non fosse richiesta il termine può essere omissso.

- $L_i(x)$  rappresenta una funzione lineare in  $x$ , che moltiplica i valori  $f_i^s$ . È definita come:

$$L_1(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{l_e}\right) \quad (2.34)$$

$$L_2(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{l_e}\right) \quad (2.35)$$

- $P_i(x)$  è una funzione quadratica in  $x$ , che moltiplica la variabile ausiliaria  $d_i^s$ . È definita come:

$$P_1(x) = \frac{l_e}{8} \left(1 - \frac{x^2}{l_e^2}\right) \quad (2.36)$$

$$P_2(x) = \frac{l_e}{8} \left(1 + \frac{x^2}{l_e^2}\right) \quad (2.37)$$

Si osserva come vi siano 2 valori sia di  $P_i(x)$  che di  $L_i(x)$ , essendo relativi rispettivamente al primo e al secondo nodo dell'elemento 1D utilizzato per effettuare l'estrapolazione.

- $l_e$  è la lunghezza dell'elemento finito considerato.

Osservando la matrice  $[P(x)]$  ci si rende conto che al suo interno sono racchiuse sia funzioni lineari che paraboliche; in questo caso, si parla quindi di formulazione anisoparametrica, perché per interpolare grandezze diverse su uno stesso elemento vengono utilizzate funzioni con grado differente.

Nota la nomenclatura utilizzata, si procede a esporre il principio di funzionamento della SEA 1D, che ovviamente è, seppur semplificato, estremamente simile al principio dietro il caso bidimensionale, d'interesse per la tesi.

Come per l'iFEM, per confrontare la grandezza ricavata con quella fornita in input, viene utilizzato un funzionale  $\Phi$ , definito come:

$$\Phi = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[ f^s(x_i) - f_i^M \right]^2 + \alpha l_e \int_0^{l_e} \left[ f_{,x}^s(x) - d^s(x) \right]^2 dx \quad (2.38)$$

Il primo termine di  $\Phi$  (da  $\frac{1}{N}$  al  $+$ ) rappresenta l'errore nell'estrapolazione di  $f^s(x)$ . Tale fattore, infatti, calcola la differenza tra il valore ottenuto con la SEA e il valore misurato nel medesimo punto  $x_i$ , utilizzando il metodo dei minimi quadrati.

Il secondo termine del funzionale (da  $\alpha$  a  $dx$ ) rappresenta invece un paragone tra la derivata della funzione estrapolata ( $f_{,x}^s(x)$ ) e la variabile ausiliaria ( $d^s(x)$ ), e serve a garantire che, qualora fosse richiesto, si abbia  $f^s(x) \in C^1$ .

L'importanza di questo secondo termine può essere compresa utilizzando i due casi seguenti:

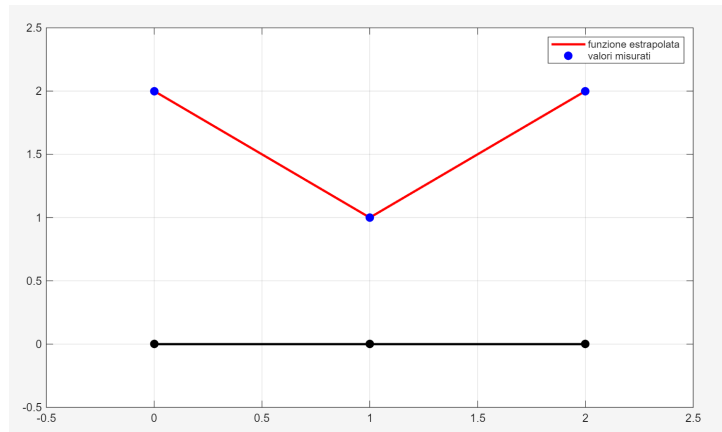


Figura 2.5: Esempio di estrapolazione della funzione  $f^s(x)$  senza imporre la continuità della derivata prima.

- Come si osserva dalla Figura 2.5, in questo caso, la ricostruzione della funzione  $f(x)$  è effettuata senza utilizzare, all'interno del funzionale descritto dalla 2.38, il secondo termine. Un risultato identico si ottiene utilizzando la forma completa di  $\Phi$  ma inserendo al suo interno un valore di  $\alpha$  molto inferiore a 1 ( $\alpha \leq 10^{-5}$ ). In questo caso, si ottiene naturalmente una funzione più "spigolosa", essendo le derivate diverse tra un tratto e l'altro, ma si alleggerisce il costo computazionale richiesto dal metodo; è quindi opportuno analizzare bene il singolo problema, per determinare eventualmente la necessità di avere una  $f^s(x) \in C^1$  o se ci si può accontentare semplicemente di una funzione continua.

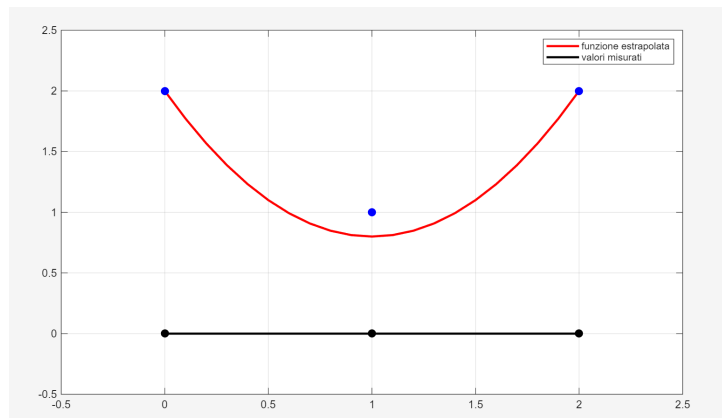


Figura 2.6: Esempio di estrapolazione della funzione  $f^s(x)$  imponendo la continuità della derivata prima.

- Facendo riferimento alla Figura 2.6 si osserva che, a differenza del caso precedente, è imposta la continuità della  $f_{,x}^s(x)$ . La curva ottenuta infatti, che rappresenta la funzione estrapolata, è sicuramente più "liscia" rispetto a quella vista in Figura 2.5. La continuità della derivata, e di conseguenza quanto i valori ottenuti siano "lisciati", dipende dal valore di  $\alpha$ , che, nel caso descritto dalla Figura 2.6 è molto maggiore di 1 ( $\alpha \approx 10^6$ ). Garantendo la continuità  $C^1$ , inoltre, si registra spesso una discrepanza maggiore tra i vari  $f^s(x_i)$  e  $f_i^M$  (si osservi il secondo punto blu della figura), perché il termine del funzionale  $\Phi$  che valuta la differenza tra le misurazioni e i dati numerici risulta avere sempre meno peso sull'errore rispetto al termine che controlla la continuità della derivata prima. Si ottiene quindi un'amplificazione dell'errore ottenuto, che generalmente aumenta all'aumentare del fattore  $\alpha$ .

È fondamentale quindi, per una corretta applicazione del metodo, effettuare un trade-off tra quanto continui si vogliano i risultati e quanto sia importante avere una funzione estrapolata fedele ai dati forniti in input [8].

Tornando al funzionale, è possibile esprimerlo inserendo all'interno della 2.38 le equazioni 2.32 e 2.33. Si ottiene quindi una nuova espressione di  $\Phi$ :

$$\begin{aligned} \Phi = & \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[ \left( [P_i(x)]\{q^s\} - f_i^M \right)^T \left( [P_i(x)]\{q^s\} - f_i^M \right) \right] + \\ & + \alpha l_e \int_0^{l_e} \left\{ ([P_{,x}(x)] - [L(x)]\{q^s\})^T ([P_{,x}(x)] - [L(x)]\{q^s\}) \right\} dx \end{aligned} \quad (2.39)$$

Effettuando i prodotti tra le parentesi tonde della Formula 2.39, si ottiene l'espressione finale del funzionale:

$$\begin{aligned} \Phi = & \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \{q^s\}^T [P_i(x)]^T [P_i(x)]\{q^s\} - 2[P_i(x)]^T f_i^M \{q^s\} + f_i^{M^2} \right) + \\ & + \alpha l_e \int_0^{l_e} \{q^s\} ([P_{,x}(x)] - [L(x)]\{q^s\})^T ([P_{,x}(x)] - [L(x)]\{q^s\}) dx \end{aligned} \quad (2.40)$$

Come detto nella sezione 2.2.4, il metodo consiste nel trovare i valori di  $f^s(x)$  che più si avvicinano alle misurazioni date in input.

Poiché l'errore tra  $f^s(x_i)$  e  $f_i^M$  rappresenta gran parte del valore del funzionale (per valori contenuti di  $\alpha$ ), trovare la  $f^s(x)$  che minimizza tale errore consiste nel trovare un punto di minimo del funzionale stesso, e di conseguenza nel trovare i valori estrapolati che ne azzerano la derivata prima:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \{q^s\}} \stackrel{!}{=} 0 \quad (2.41)$$

Derivando il funzionale rispetto al vettore dei gradi di libertà  $\{q^s\}$  e imponendo l'annullamento di tale derivata, si ottiene:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [P_i(x)]^T [P_i(x)] + \alpha l_e \int_0^{l_e} ([P_{,x}(x)] - [L(x)]\{q^s\})^T ([P_{,x}(x)] - [L(x)]\{q^s\}) dx \right] \{q^s\} \\ & = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [P_i(x)]^T f_i^M \end{aligned} \quad (2.42)$$

Che può essere scritto in forma matriciale come:

$$[A^e]\{q^s\} = \{b^e\} \quad (2.43)$$

con:

- $[A^e]$ : Matrice di pseudo-rigidezza dell'elemento, detta così perché, nonostante non sia composta da termini che descrivono le caratteristiche del sistema, ha il medesimo ruolo di una matrice di rigidezza classica. È stata già vista nella sezione relativa all'iFEM.
- $\{q^s\}$  è il vettore dei gradi di libertà dell'elemento considerato.
- $\{b^e\}$  è il vettore contenente le misurazioni fornite in input relative all'elemento  $e$  considerato.

Prima di risolvere il problema, e quindi ottenere il vettore dei gradi di libertà dell'intero modello, è necessario assemblare i vari contributi, ottenendo quindi le corrispettive matrici e i corrispettivi vettori globali. Teoricamente, per ogni elemento può essere utilizzata una diversa formulazione del funzionale, andando a modulare i valori di  $\alpha$  punto per punto, ma nel caso in questione si utilizza un valore costante per l'intera struttura.

Dopo aver eseguito la procedura d'assemblaggio e aver ottenuto la matrice  $[A]$  e il vettore  $\{b\}$  globali, si può finalmente ricavare l'incognita del problema  $\{q^s\}$ :

$$\{q^s\} = [A]^{-1}\{b\} \quad (2.44)$$

Nota  $\{q^s\}$ , utilizzando la 2.32, si ricava facilmente la funzione estrapolata  $f^s(x)$  ovunque nel dominio.

Quanto visto vale per il caso 1D, ma il ragionamento per il caso d'interesse della tesi, ovvero il caso bidimensionale, è del tutto analogo e verrà sviscerato nella sezione successiva.

### 2.3.2 Caso d'interesse: caso 2D

Nella sezione 2.3.1 è stata analizzata la formulazione monodimensionale della SEA, applicando il metodo ad una generica funzione  $f^S(x)$ . In questa sezione, si esporrà invece la formulazione bidimensionale, che, nonostante sia estremamente simile al caso 1D, mostra comunque alcune differenze.

Essendo la SEA 2D il metodo effettivamente impiegato durante il presente lavoro, si sceglie di introdurlo facendo riferimento alla grandezza fisica d'interesse della tesi: il campo di deformazioni.

Seguendo ragionamenti del tutto analoghi a quelli già visti in precedenza, si arriva alla formulazione del funzionale, riportato nella Formula 2.45:

$$\begin{aligned} \Phi^e = & \frac{1}{N} \sum_{q=1}^{n^e} \left[ \varepsilon_q^e - \varepsilon(\mathbf{x}_q) \right]^2 + \alpha \int_{A^e} \left[ (\varepsilon_{,x} - \theta_x)^2 + (\varepsilon_{,y} - \theta_y)^2 \right] dA^e \\ & + \beta A^e \int_{A^e} \left[ (\theta_{x,x})^2 + (\theta_{y,y})^2 + \frac{1}{2}(\theta_{x,y} + \theta_{y,x})^2 \right] dA^e \end{aligned} \quad (2.45)$$

All'interno della formula 2.45, possono essere distinti 3 contributi:

$$\frac{1}{N} \sum_{q=1}^{n^3} [\varepsilon_q^\varepsilon - \varepsilon(\mathbf{x}_q)]^2$$

1. Funzionale ai minimi quadrati, normalizzato rispetto al numero di dati in input dal contributo  $\frac{1}{N}$ . Questo termine assicura la coerenza tra il campo continuo delle deformazioni ottenuto dalla SEA e le misurazioni fornite in input, garantendo l'aderenza tra i dati registrati in un punto dal sensore ( $\varepsilon_q^\varepsilon$ ), e il rispettivo valore ottenuto tramite formulazione numerica ( $\varepsilon(\mathbf{x}_q)$ ).

$$\alpha \int_{A^e} [(\varepsilon_{,x} - \theta_x)^2 + (\varepsilon_{,y} - \theta_y)^2] dA^e$$

2. Funzione di penalità. Questo contributo, fortemente dipendente dal parametro adimensionale  $\alpha$ , assicura la continuità  $C^1$  del campo di deformazione ottenuto, minimizzando, nei limiti concessi, la discrepanza tra il termine derivato di deformazione rispetto a una direzione ( $\varepsilon_{,i}$ ) e la corrispettiva rotazione del campo ottenuto tramite la SEA ( $\theta_i$ ). Si assume il valore di  $\alpha$  costante su tutto la mesh utilizzata dalla SEA.

$$\beta A^e \int_{A^e} \left[ (\theta_{x,x})^2 + (\theta_{y,y})^2 + \frac{1}{2} (\theta_{x,y} + \theta_{y,x})^2 \right] dA^e$$

3. Funzione di regolarizzazione. Come il termine precedente, questo contributo serve a lisciare ulteriormente il campo continuo ottenuto, introducendo un ulteriore vincolo, stavolta alle derivate delle rotazioni ( $\theta_{i,j}$ ). Anche in questo caso si verifica una forte dipendenza dal parametro adimensionale e costante  $\beta$ , il quale si assume non vari per l'intera estensione della mesh.

Nel presente studio, come si vedrà in seguito, si assumerà che il contributo della funzione di regolazione sia trascurabile ( $\beta \ll 0$ ), al fine di alleggerire il costo computazionale del processo. La sua incidenza sull'estrapolazione, infatti, risulta essere minore rispetto a quella degli altri fattori presenti all'interno del funzionale [9].

È opportuno specificare che le direzioni x e y a cui si fa riferimento nel funzionale (Formula 2.45), si riferiscono a un sistema di riferimento locale solidale con i singoli elementi shell della mesh SEA, come riportato nella Figura 2.7:

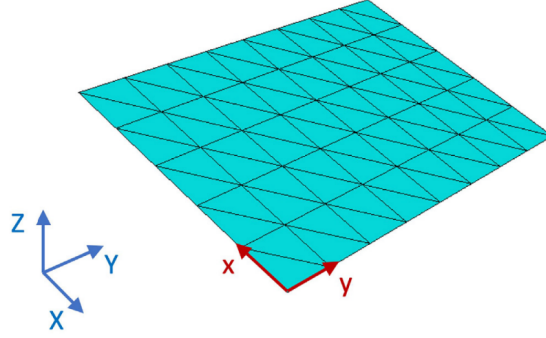


Figura 2.7: Sistema di riferimento globale (blu) e locale (rosso).

Avendo citato, nei punti 2 e 3, il fatto che la SEA utilizzi una mesh, si evince che, come nel caso dell'iFEM e del FEM, anche questo metodo utilizzi elementi finiti per svolgere l'estrapolazione richiesta.

Tale mesh, è strettamente dipendente dall'apparato sperimentale e dalla disposizione e dal tipo di sensori utilizzati, ma tendenzialmente, si utilizzano mesh ad elementi triangolari, sia cross-patterned che structured [10]. Per mesh abbastanza fitte, come già visto per il metodo agli elementi finiti inverso, si ottengono risultati migliori.

Naturalmente, va effettuato un trade-off tra fittezza della mesh e il numero di sensori disponibili, entrambi aspetti strettamente legati alla complessità della struttura analizzata. Sulla mesh appena descritta, l'estrapolazione delle deformazioni avviene tramite un'interpolazione anisoparametrica, analogamente a quanto già detto per la SEA monodimensionale.

La formulazione utilizzata è:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \{P\}\{s\} + \{M\}\{s_x\} + \{L\}\{s_y\} \\ \theta_x &= \{P\}\{s_x\} \\ \theta_y &= \{P\}\{s_y\}\end{aligned}\tag{2.46}$$

Dove:

- $\{s\} = \{s_1, s_2, s_3\}^T$  è il vettore dei gradi di libertà contenente i valori di deformazione sui 3 nodi dell'elemento.
- $\{s_x\} = \{\theta_{x1}, \theta_{x2}, \theta_{x3}\}^T$  è il vettore dei gradi di libertà con all'interno le derivate di  $\{s\}$  rispetto all'asse x.
- $\{s_y\} = \{\theta_{y1}, \theta_{y2}, \theta_{y3}\}^T$  è il vettore dei gradi di libertà contenente le derivate di  $\{s\}$  rispetto all'asse y.
- $\{P\} = \{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3\}$
- $\{M\} = \{M_1, M_2, M_3\}$  con  $M_i = \frac{1}{2}(a_k \zeta_i \zeta_j - a_j \zeta_i \zeta_k)$
- $\{L\} = \{L_1, L_2, L_3\}$  con  $L_i = \frac{1}{2}(b_k \zeta_i \zeta_j - b_j \zeta_i \zeta_k)$

I parametri  $\zeta_i$  (con  $i=1,2,3$ ), da cui dipendono tutti i fattori che moltiplicano i vari vettori dei gradi di libertà, sono detti coordinate area-parametriche, e hanno la seguente definizione:

$$\zeta_i = \frac{c_i + b_i x + a_i y}{2A} \quad (2.47)$$

dove a, b e c sono definiti come:

$$a_i = x_k - x_j \quad b_i = y_j - y_k \quad c_i = x_j y_k - x_k y_j \quad (2.48)$$

Tutti i fattori definiti precedentemente sono ottenuti permutando gli indici  $i, j$  e  $k$  seguendo l'ordine:  $i = 1,2,3, j = 2,3,1, k = 3,1,2$ .

Dopo aver inserito la Formula 2.46 all'interno della definizione del funzionale (2.45), si procede a minimizzarlo rispetto al vettore dei gradi di libertà, come visto precedentemente per il caso monodimensionale.

Si impone quindi che:

$$\frac{\partial \Phi^e}{\partial \{d^e\}} \stackrel{!}{=} 0 \quad (2.49)$$

La minimizzazione della derivata prima del funzionale dell'elemento  $e$ , permette di riscrivere il problema in forma matriciale:

$$[K^e] \{d^e\} = \{F^e\} \quad (2.50)$$

Dove i contributi  $[K^e]$ ,  $\{d^e\}$  e  $\{F^e\}$  sono rispettivamente la matrice di rigidità dell'elemento considerato, il vettore contenente i nove gradi di libertà dell'elemento e un vettore legato alle deformazioni fornite in input.

### Assemblaggio del sistema e risoluzione del problema

Per ottenere la formulazione finale del problema è opportuno definire bene vettori e matrici descritti precedentemente.

La matrice di rigidità  $[K^e]$  è una matrice 9x9 ed è definita come segue:

$$\begin{aligned} [K^e] &= [K_t^e] + [K_\alpha^e] + [K_\beta^e] = \\ &= \sum_{q=1}^{n^e} [N_q]^T [N_q] + \alpha \int_{A^e} [B_\alpha]^T [B_\alpha] dA^e + \beta A^e \int_{A^e} [B_\beta]^T [D] [B_\beta] dA^e \end{aligned} \quad (2.51)$$

Dove:

$$\begin{aligned} [N_q] &= \left[ [P], [M], [L] \right] \\ [B_\alpha] &= \begin{bmatrix} [P_{,x}] & [M_{,x}] - [P] & [L_{,x}] \\ [P_{,y}] & [M_{,y}] & [L_{,y}] - [P] \end{bmatrix} \\ [B_\beta] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \zeta_{1,x} & \zeta_{2,x} & \zeta_{3,x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta_{1,y} & \zeta_{2,y} & \zeta_{3,y} \\ 0 & 0 & 0 & \zeta_{1,y} & \zeta_{2,y} & \zeta_{3,y} & \zeta_{1,x} & \zeta_{2,x} & \zeta_{3,x} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Analogamente, il vettore  $\{d^e\}$  è un vettore  $9 \times 1$ , e racchiude al suo interno tutti i gradi di libertà tipici di ciascun elemento:

$$\{d^e\} = \{s_1 \quad s_2 \quad s_3 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{x2} \quad \theta_{x3} \quad \theta_{y1} \quad \theta_{y2} \quad \theta_{y3}\}^T \quad (2.52)$$

Infine, il vettore  $\{F^e\}$  è definito come:

$$\{F^e\} = \frac{1}{N} \sum_{q=1}^{n^e} \varepsilon_q [N_q]^T \quad (2.53)$$

Dopo aver ottenuto i componenti descritti dalle equazioni 2.51 e 2.53, si procede all'assemblaggio della matrice di rigidità globale  $[K]$  e del vettore globale dei dati in input  $\{F\}$ , unendo insieme tutte le componenti relative a ciascun elemento del sistema. Analogamente a quanto visto per iFEM e per la SEA 1D, si ottiene il problema seguente:

$$[K]\{d\} = \{F\} \quad (2.54)$$

A questo punto, può finalmente essere ricavata l'incognita del problema, ovvero il vettore globale dei gradi di libertà  $\{d\}$ , che è facilmente ottenibile, come visto nel caso monodimensionale (2.44) tramite l'inversione della matrice di rigidità:

$$\{d\} = [K]^{-1}\{F\} \quad (2.55)$$

Noto il vettore dei gradi di libertà, e quindi le singole componenti  $s_i$ ,  $\theta_{xi}$  e  $\theta_{yi}$ , si può facilmente ricavare il campo di deformazioni continuo utilizzando le relazioni riportate nelle equazioni 2.46.

Nel capitolo successivo, si analizzerà un caso d'applicazione semplificato dei metodi descritti finora. Si vedrà l'applicazione della SEA a una piastra rettangolare, al fine di analizzare l'incidenza dei vari fattori e di validare il metodo prima di applicarlo al caso di interesse della tesi.

## Capitolo 3

# Formulazione e validazione del codice SEA sull'analisi numerica di una piastra piana

Dopo aver visto le formulazioni matematiche dei metodi e la teoria su cui essi si basano, si procede a, basandosi su quanto detto precedentemente, scrivere il codice ed analizzare i risultati ottenuti.

### 3.1 Descrizione della prova

In questa prima applicazione, ci si concentrerà su una piastra, di lunghezza pari a 20 mm, larghezza pari a 5 mm e spessore pari a 1 mm, come quella riportata nella Figura 3.1:

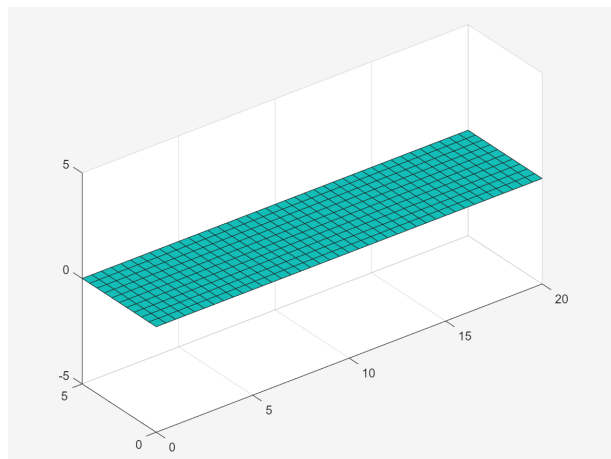


Figura 3.1: Rappresentazione della piastra

Come visto nella sezione 2.3.2, al fine di poter applicare la SEA e l'iFEM, è fondamentale rappresentare la superficie utilizzando degli elementi finiti. In un primo momento, si rappresenta la superficie tramite una mesh ad elementi quadrati poco fitta, costituita da elementi di dimensioni 1 mm x 1mm (Figura 3.2).

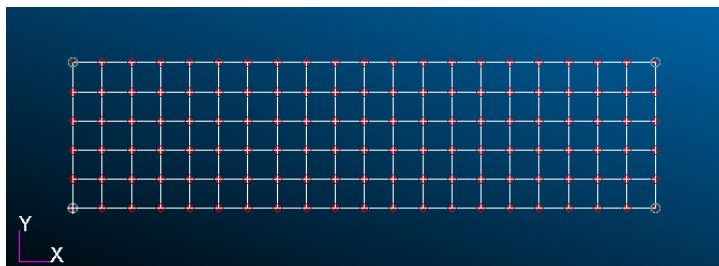


Figura 3.2: Rappresentazione tramite elementi finiti della piastra.

Dopo aver discretizzato la struttura in analisi, si procede a definire la prova di carico. Per esporre il metodo, si inizia da un caso molto semplice, ovvero la piastra soggetta a flessione. Nello specifico, sulla mesh sono imposti (Figura 3.3):

- Sul lato corto a sinistra ( $x=0$ ), un vincolo di incastro, andando quindi a bloccare le traslazioni e le rotazioni rispetto a tutti e tre gli assi ( $x$ ,  $y$  e  $z$ ) seguendo il sistema di riferimento mostrato in 3.2.
- Sull'estremo opposto (lato a  $x=20$  mm), un carico di molto basso ( $1.5 \cdot 10^{-3}$  N), distribuito uniformemente sul lato e con direzione  $z$ , verso il basso.

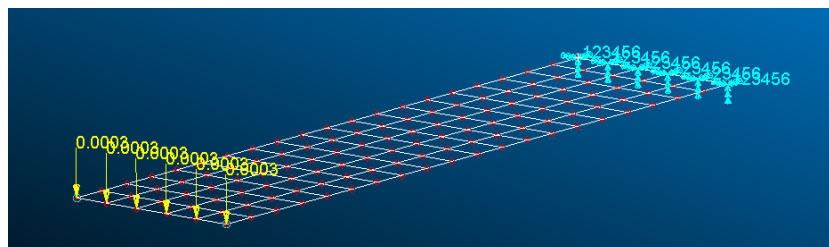


Figura 3.3: Rappresentazione dei vincoli e dei carichi applicati sulla mesh della piastra.

È opportuno precisare la natura del carico applicato; infatti nonostante la piastra abbia dimensioni ridotte, l'intensità del carico è comunque volutamente molto bassa. Questa scelta deriva dal fatto che il materiale assegnato alla mesh è stato modellato come isotropo, con modulo di Young  $E = 1$  MPa e numero di Poisson  $\nu = 0.3$ . Come discusso in precedenza, il materiale risulta infatti del tutto ininfluenza per i metodi considerati (SEA e iFEM).

Di conseguenza, come si vedrà, si ottengono deformazioni e spostamenti elevati anche in presenza di un carico minimo; ciò permette tuttavia di svincolare completamente le

analisi svolte dal materiale impiegato, concentrandosi esclusivamente sul comportamento del metodo.

Dopo aver impostato carichi e vincoli della piastra, si procede a svolgere un'analisi lineare utilizzando il software NASTRAN, specificando, tra gli output richiesti al programma, anche le deformazioni (nel caso in analisi, saranno utilizzate le deformazioni di Von Mises). Si ottengono allora gli spostamenti e il campo degli strain rappresentati in Figura 3.4 e 3.5:

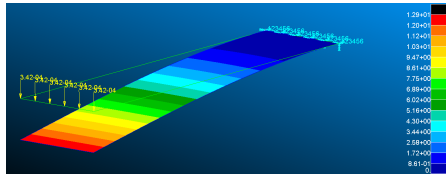


Figura 3.4: Spostamenti della piastra

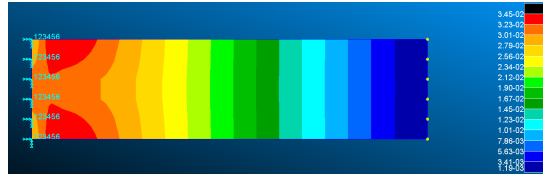


Figura 3.5: Distribuzione degli strain.

Ricavate le misure di deformazione, fondamentali per utilizzare la SEA, si procede ora ad analizzare effettivamente il metodo, sviscerando il suo funzionamento e l'influenza dei vari parametri sui risultati ottenuti.

## 3.2 Preparazione alla SEA

La Smoothing Element Analysis è stata implementata utilizzando un codice MATLAB. Nello specifico, la funzione che permette l'utilizzo del metodo è:

```
[extrap_eps_values, eps_desired] = SEA_tria_desired(func_report,
alpha, beta, bdf_file, sens, extrap_rep, extrap_select, tol);
```

All'interno di essa si possono distinguere gli output in blu, e gli input in verde; essi rappresentano:

- INPUT:
  - `func_report` rappresenta il documento contenente i valori misurati della funzione da estrapolare (nel caso in analisi deformazioni) e il punto in cui essa è stata rilevata.
  - `alpha` e `beta` rappresentano rispettivamente i parametri  $\alpha$  e  $\beta$ , descritti precedentemente nella sezione 2.3.2.
  - `bdf_file` è il file .bdf con all'interno la mesh triangolare utilizzata per effettuare la SEA.
  - `sens` rappresenta quante e quali misurazioni, tra quelle fornite all'interno di "func\_report" devono essere utilizzate per l'estrapolazione. Se `func_report` è un file contenente misurazioni provenienti da 10 sensori, e `sens` è un vettore che va da 1 a 10, allora vorrà dire che tutti i valori di deformazione rilevati verranno utilizzati ai fini dell'estrapolazione.

- `extrap_rep` contenente le coordinate dei punti presso i quali va effettuata l'extrapolazione. Naturalmente tali coordinate devono rispettare le dimensioni della struttura meshata fornita da `bdf_file`.
- `extrap_select` è l'analogo di "sens" per i punti d'extrapolazione; anche in questo caso, l'input definisce su quali punti, tra quelli forniti da "extrap\_rep" va effettuata l'extrapolazione della funzione.
- `tol` rappresenta un valore di tolleranza, utilizzato per considerare l'eventualità che un punto su cui va effettuata l'extrapolazione risulti essere poco fuori la mesh triangolare fornita in input. Se la mesh racchiude perfettamente tutti i punti su cui si vuole applicare la SEA, allora la tolleranza può essere impostata a 0.

- OUTPUT:

- `extrap_eps_values` è vettore contenente il valore della funzione estrapolata nei nodi della mesh triangolare su cui si svolge la SEA.
- `eps_desired` è il vettore contenente il valore della funzione estrapolata nei punti di interesse, ovvero quelli contenuti in `extrap_rep`.

Nelle sezioni successive, si procederà a descrivere alcuni di questi fattori nel dettaglio

### 3.2.1 Func\_report

Per quanto riguarda il primo input descritto, è importante specificare la posizione dei sensori; nel caso in analisi, si fornisce alla funzione un file avente la struttura riportata nel Listing 3.1:

Listing 3.1: File `func_report` fornito in input.

1	0.5000	4.5000	0	0.0316
2	2.5000	4.5000	0	0.0333
3	19.5000	4.5000	0	0.0013
4	0.5000	2.5000	0	0.0324
5	6.5000	2.5000	0	0.0258
6	11.5000	2.5000	0	0.0164
7	19.5000	2.5000	0	0.0014
8	0.5000	0.5000	0	0.0316
9	2.5000	0.5000	0	0.0333
10	19.5000	0.5000	0	0.0013

Il file è suddiviso in 5 colonne: la prima indica l'ID del sensore, la seconda la sua coordinata  $x$ , la terza la coordinata  $y$ , la quarta la coordinata  $z$  e la quinta la misurazione di deformazione ottenuta dal FEM (o misurata sperimentalmente).

Nel caso mostrato si considerano 10 sensori, disposti come riportato in Figura 3.6.

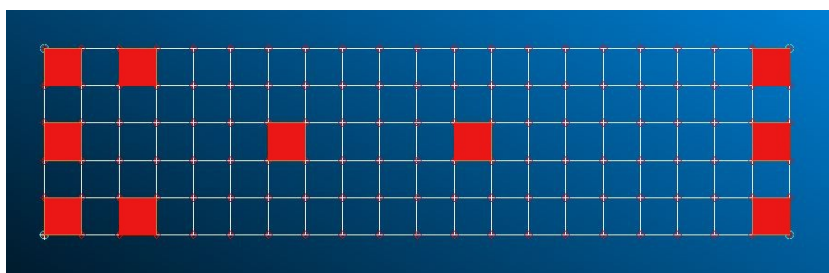


Figura 3.6: Disposizione degli elementi sensorizzati.

Si assume che le informazioni relative alla deformazione siano rilevate in corrispondenza del centroide degli elementi.

Come evidente dalla Figura 3.6, la maggior parte degli elementi sensorizzati è posizionata in prossimità degli estremi della piastra. Questa scelta è dovuta al fatto che, come mostrato in Figura 3.5, proprio agli estremi si localizzano i valori minimi e massimi di strain: disporre più sensori in tali regioni consente di ottenere informazioni maggiori e quindi un'estrapolazione più affidabile.

### 3.2.2 alpha e beta

alpha e beta rappresentano rispettivamente i valori di  $\alpha$  e  $\beta$  descritti nella sezione 2.3.2. Verranno analizzati diversi valori di  $\alpha$ , al fine di determinare come essi influiscano sulla ricostruzione delle deformazioni, ricordando che a un valore maggiore, corrisponde una maggiore importanza della continuità della derivata della funzione approssimata, e di conseguenza una forma più "liscia" dell'estrapolazione.

Per quanto riguarda  $\beta$ , il suo valore sarà sempre considerato molto basso ( $\beta = 10^{-6}$ ), rendendo di conseguenza trascurabile il suo contributo all'interno del funzionale su cui si basa il metodo (Formula 2.45).

### 3.2.3 bdf

La mesh triangolare utilizzata per svolgere l'analisi è di fondamentale importanza. Essa viene fornita in input al codice sotto forma di un file .bdf (formato proprietario di NASTRAN).

Come per gli input precedenti, verranno analizzate mesh diverse, sia per confrontare come il numero di elementi tria influisca sull'estrapolazione, sia per analizzare come, a parità di elementi, le diverse configurazioni (Structured e Cross-Pattern) portino a risultati differenti.

Le mesh su cui si concentrerà l'analisi sono:

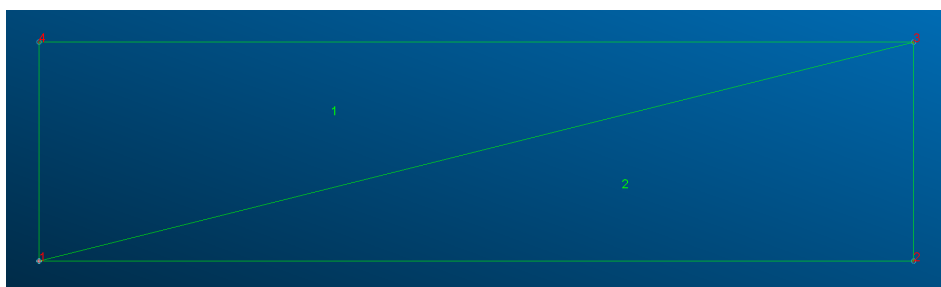


Figura 3.7: Mesh a 2 elementi triangolari.

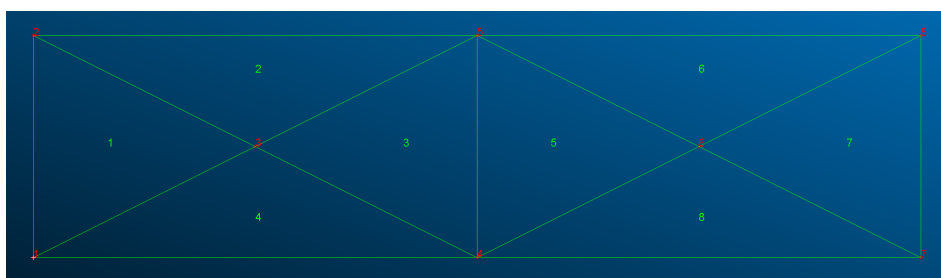


Figura 3.8: Mesh a 8 elementi triangolari.

- Queste mesh (Figura 3.7 e Figura 3.8) vengono utilizzate esclusivamente per analizzare come, nonostante il numero minimo di elementi, il valore di  $\alpha$  possa far ottenere comunque un risultato soddisfacente, a patto di una ricostruzione che talvolta non rappresenta fedelmente la fisica del problema.

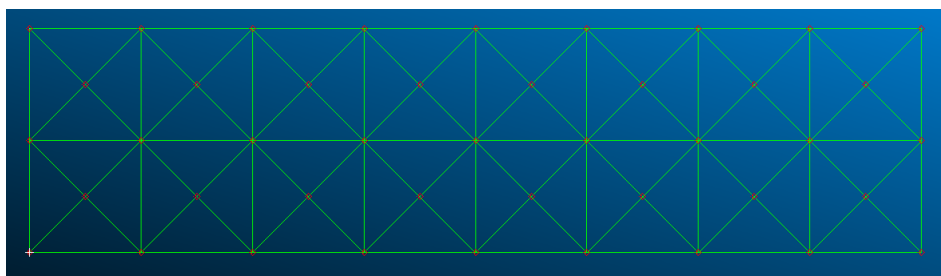


Figura 3.9: Mesh a 64 elementi triangolari

- Nel caso della mesh in Figura 3.9, si inizia ad intravedere un trade-off tra fittezza della mesh e valore dei parametri considerati. Nonostante la mesh non sia assolutamente composta da molti elementi, andando a modificare il valore di  $\alpha$  e degli altri parametri in input si potrebbero comunque ottenere risultati compatibili alle misure fornite in input, con vantaggio di una potenza di calcolo richiesta molto inferiore rispetto a mesh più fitte. Successivamente si vedrà infatti come, un minor numero di elementi

della mesh, vada ad alleggerire notevolmente il costo computazionale richiesto dal metodo e le iterazioni che esso svolge per arrivare al risultato richiesto.

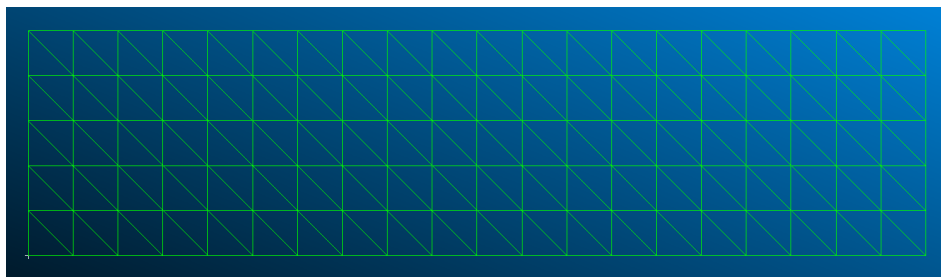


Figura 3.10: Mesh a 200 elementi triangolari

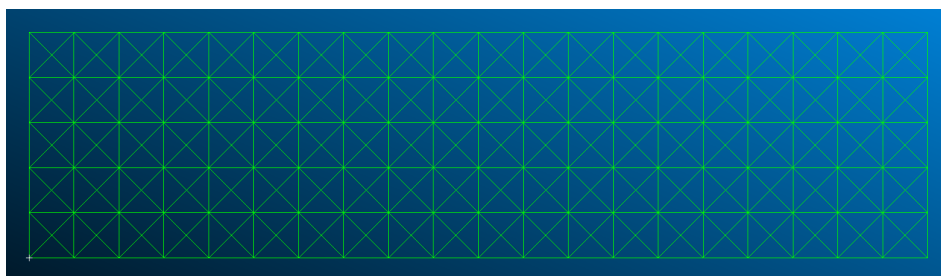


Figura 3.11: Mesh a 400 elementi triangolari

- Le due mesh in Figura 3.10 e 3.11 vengono utilizzate per analizzare l'incidenza del tipo di mesh sull'errore ottenuto. Dal punto di vista teorico, le mesh di tipo "structured", come quella in (Figura 3.10) dovrebbero fornire estrapolazioni peggiori rispetto a quelle "cross-pattern", e ricade tra gli obiettivi dello studio analizzare questo aspetto.

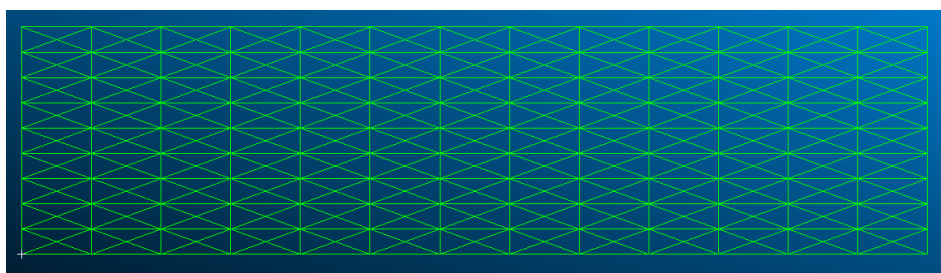


Figura 3.12: Mesh a 468 elementi triangolari

- L'ultima mesh trattata, rappresentata in Figura 3.12, serve per analizzare se (e in tal caso di quanto) variano i risultati quando, la mesh cross-pattern è eccessivamente fitta e/o non composta da elementi triangolari delle stesse dimensioni.

### 3.2.4 extrap\_rep

Per poter portare avanti l'estrapolazione, è necessario avere informazioni su dove andare a effettuarla, ovvero sui punti dove si vuole conoscere il valore della deformazione ricavata tramite la SEA.

A questo scopo, si fornisce alla funzione il file "extrap\_rep", che ha una struttura simile a quella di func\_report:

Listing 3.2: Struttura del file extrap\_rep

1	0.0	5.0	0.0
2	0.5	5.0	0.0
3	1.0	5.0	0.0
4	1.5	5.0	0.0
...			
451	20.0	0.0	0.0

La prima colonna indica l'id del punto dove si effettua l'estrapolazione, mentre le colonne dalla seconda alla quarta indicano rispettivamente la coordinata x, y e z di suddetto punto.

Nel caso in analisi, l'esempio di file mostrato nel Listing 3.2 fa riferimento ai punti mostrati in Figura 3.13:

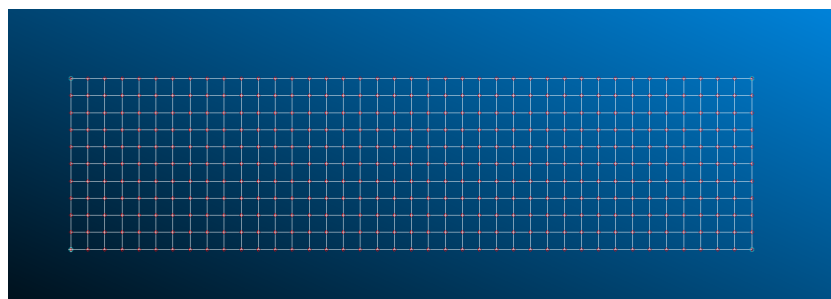


Figura 3.13: Disposizione dei punti dove si effettua l'estrapolazione.

La figura rappresenta la griglia di nodi in cui avviene l'estrapolazione. Tendenzialmente, si opta per avere una griglia d'estrapolazione più fitta della mesh triangolare usata dalla SEA, per far sì che per ogni elemento della mesh vi sia almeno un punto ove viene ricavata la deformazione.

Inoltre, è importante sottolineare come la mesh sia più fitta di quella mostrata in Figura 3.6; infatti, in questo modo, si garantisce che, per ogni centroide della mesh dove vengono effettuate le misurazioni, sia presente un nodo nella griglia di estrapolazione. Questo fa sì che i risultati SEA e risultati sperimentali possano essere confrontati sul medesimo

punto, invece che adottare una tolleranza per misurare punti vicini ma non perfettamente corrispondenti.

### 3.2.5 eps\_desired

L'output eps\_desired è un vettore contenente i valori della funzione estrapolata nei punti d'interesse. La struttura è del tipo:

Listing 3.3: Esempio di matrice con valori nodali

```
eps_desired = [0.0307 0.0309 0.0311 ... 0.00042]
```

La dimensione del vettore è pari al numero di punti dove si vuole effettuare l'estrapolazione, e i valori della funzione estrapolata sono ordinati seguendo gli id dei nodi presenti in extrap\_rep.

## 3.3 Funzionamento del codice

Dopo aver chiarito il significato dei vari input e output, si procede ad analizzare il funzionamento effettivo della funzione SEA\_tria\_desired.m.

La funzione si divide in tre parti principali:

- Inizializzazione degli input.
- Definizione del sistema lineare.
- Ottenimento e formattazione dell'output.

### 3.3.1 Inizializzazione degli input.

Il codice si apre con una serie di righe atte ad ottenere informazioni fondamentali per poter utilizzare la funzione.

Alcuni fattori sono ottenuti tramite comandi implementati da MATLAB, ad esempio:

```
meas_strains = load(func_report);  
meas_strains = meas_strains(ismember(meas_strains(:,1), sens), :);
```

estrapola la matrice delle misurazioni fornita in input e, confrontandole con il vettore sens, estrae esclusivamente le deformazioni che si vanno effettivamente ad utilizzare per effettuare la SEA.

Altre informazioni sono ricavate da ulteriori funzioni implementate all'interno del codice, come:

- Tramite la funzione "read\_new\_v4", si estrapolano le informazioni sul modello FEM, utilizzando il file .bdf fornito in input.

```
[gcoord, gcoord_index, ~, tria3, ~, ~, ~, ~, shell,
shell_index] = readbdf_new_v4(bdffile);
```

Nello specifico si ottengono:

- Le coordinate dei nodi (gcoord) e i loro indici (gcoord\_index).
- "tria3" rappresenta la matrice che descrive la mesh composta da elementi tria. Essa contiene l'id di ogni elemento, un numero che identifica le proprietà e i tre id dei nodi che lo compongono. Eliminando dalla matrice tria3 la seconda colonna, ovvero quella atta a descrivere le proprietà di ogni elemento, si ottiene la matrice connectivity (Cne):

```
Cne(index_tria,1:4)=tria3(index_tria,[1 3:5]);
```

- "shell" e "shell\_index" servono a descrivere le proprietà degli elementi.

```
shell = [1 1 1]
```

Seppur all'interno di "shell", siano presenti gli id delle proprietà applicate agli elementi (primo valore) e dei materiali di cui sono composti (secondo valore), nel caso in analisi, dove queste informazioni sono superflue, si userà soltanto il terzo indice, che rappresenta lo spessore dell'elemento (in questo caso pari a 1 mm).

- Tramite la funzione "elm\_coord" si estrapola il sistema di riferimento locale dell'elemento, che potrebbe essere diverso rispetto al sistema di riferimento globale della struttura (Coord 0).

```
mcoord=elm_coord(nEle,gcoord_index,Cne,Pnn,coordSys,[],[],
index_tria,tria3,[]);
```

l'output "mcoord" della funzione rappresenta la matrice tridimensionale contenente, per ogni elemento, la matrice di rotazione ("Rot") che permette di passare dal sistema di riferimento globale a quello locale.

- La funzione "sea3\_elm\_ver3\_desired" calcola il funzionale visto precedentemente (Formula 2.45) su cui si basa la SEA:

```
[ea,ev,P,M,L]=sea3_elm_ver3_desired(X,Y,str_elm,alpha,beta,
desired);
```

fornendo in input le coordinate dei nodi dell'elemento (X e Y), il valore dell'eventuale misurazione al suo interno e, qualora ne sia presente uno all'interno dell'elemento analizzato, il punto dove si vuole effettuare l'estrapolazione, si ottengono oltre alle matrici [P], [M] e [L], la matrice di rigidezza [K<sup>e</sup>] (indicata con "ea" tra gli output) e il vettore delle deformazioni {F<sup>e</sup>} ("ev").

Noti questi due elementi, si può scrivere il problema algebrico caratteristico dell'elemento considerato, visto in precedenza nella Formula 2.50.

Dopo aver introdotto le principali funzioni che permettono al codice di estrapolare e gestire i dati, si analizza il funzionamento effettivo della funzione "SEA\_tria\_desired", al fine di comprendere come essa è in grado di assemblare le varie matrici e i vari vettori tipici dei singoli elementi, generando e risolvendo il problema visto nella Formula 2.54, per ottenere la funzione estrapolata.

### 3.3.2 Corpo della funzione

La funzione che permette di effettuare la SEA opera in maniera piuttosto semplice. Prima di tutto, vengono definiti i vari input necessari all'analisi, formattandoli secondo le specifiche richieste.

Successivamente, si estrapolano le matrici relative alle misurazioni, alle posizioni d'estrapolazione (dai file .rpt) e alle informazioni sulla mesh e sul modello, utilizzando la funzione "readbdf\_new\_v4" descritta precedentemente.

Fatto ciò, si definiscono i sistemi di riferimento locali tramite la costruzione delle matrici di rotazione, utilizzando come anticipato la funzione "elm\_coord". A questo punto, definito, sempre grazie al file .bdf, il numero totale di elementi (nEle), si itera su ognuno di essi, al fine di costruire la matrice globale  $[K]$ , chiamata nel codice  $[A]$  e il vettore  $\{F\}$ , nel codice noto come  $\{b\}$ , fondamentali per scrivere e successivamente risolvere il sistema lineare già descritto nella parte teorica (Formula 2.55).

```

for i=1:nEle

    gloccount = Pnn(gccount_index(Cne(i,2:4)),:);
    Rot=mccount(:, :, i);
    locCoord = gloccount * Rot';

    X = locCoord(:,1);
    Y = locCoord(:,2);
    Z = locCoord(1,3);

    locMeas = meas_strains(:,2:4) * Rot';

    x_meas = locMeas(:,1);
    y_meas = locMeas(:,2);
    z_meas = locMeas(:,3);

    locRef = ref_meas(:,2:4) * Rot';

    x_ref = locRef(:,1);
    y_ref = locRef(:,2);
    z_ref = locRef(:,3);

```

Figura 3.14: Inizializzazione delle coordinate locali e delle misure di strain

Per prima cosa, come mostrato nella sezione di codice riportata in Figura 3.14, si procede alla definizione del sistema di riferimento locale caratteristico dell'elemento i analizzato.

Noto cosa rappresenta "gcoord" dalla sezione precedente, si definisce la matrice "Pnn" come la matrice contenente esclusivamente le coordinate dei nodi degli elementi tria descritti nel file .bdf, senza citarne gli indici.

Grazie a questa matrice si estraggono le coordinate x, y e z dei 3 nodi che compongono l'elemento i (glocoord), e si trasformano nel sistema di riferimento locale dell'elemento tramite la moltiplicazione tra le coordinate globali e la matrice di rotazione "Rot".

Successivamente, si definiscono:

- Coordinate X, Y, Z: vettori 3x1 con al loro interno rispettivamente le coordinate x, y e z dei 3 nodi che compongono l'elemento i secondo il sistema di riferimento locale.
  
- Coordinate "\_meas": vettori colonna con dimensione pari al numero di sensori (nel caso in analisi 10x1). Al loro interno sono contenute le coordinate x, y e z di ogni sensore, secondo il sistema di riferimento locale.
  
- Coordinate "\_ref": vettori colonna di lunghezza pari al numero di punti dove si deve effettuare l'extrapolazione. Come nel caso precedente, al loro interno sono contenute le coordinate x, y e z di ogni punto, secondo il sistema di riferimento locale.

```

for i=1:nEle
    ...
    str_elm=[];
    index=1;
    aind=find(x_meas>=min(X) & x_meas<=max(X) & y_meas>=min(Y) & y_meas<=max(Y));

    for j=1:size(aind,1)    % CHECK SENSORI

        if inpolygon(x_meas(aind(j)),y_meas(aind(j)),X,Y) && ...
            ((z_meas(aind(j))>=Z-(thk(i)+tol)) && (z_meas(aind(j))<=Z+(thk(i)+tol)))

            str_elm(index,:)= [meas_strains(aind(j),1) x_meas(aind(j)) y_meas(aind(j))
                               meas_strains(aind(j),5)];

            index=index+1;
        end
    end

    if ~exist('extrap_matrices','var') % CHECK PUNTI D'ESTRAPOLAZIONE

        index_res=1;
        desired=[];
        idx=[];
        bind=find(x_ref>=min(X)-tol & x_ref<=max(X)+tol & y_ref>=min(Y)-tol ...
            & y_ref<=max(Y)+tol);

        for j=1:size(bind,1)

            if inpolygon(x_ref(bind(j)),y_ref(bind(j)),X,Y) && ...
                ((z_ref(bind(j))>=Z-(thk(i)+tol)) && (z_ref(bind(j))<=Z+(thk(i)+tol)))

                desired(index_res,:)= [x_ref(bind(j)) y_ref(bind(j))];
                idx(index_res)=bind(j);
                index_res=index_res+1;
            end
        end
    end
end
    ...
end

```

Figura 3.15: Ricerca di punti di misura o estrapolazione all'interno dell'elemento

Dopo aver definito le varie coordinate necessarie all'analisi, si va a ricercare se all'interno dell'elemento i considerato siano presenti sensori e/o punti d'estrapolazione. Questa operazione è svolta tramite il frammento di codice riportato in Figura 3.15

I due controlli vengono inseriti all'interno dello stesso ciclo for per comodità, al fine di alleggerire la funzione dal punto di vista del costo computazionale ed evitare una doppia iterazione su tutti gli elementi.

Per prima cosa, in entrambi i casi, prima di effettuare effettivamente il controllo tramite il ciclo if, avviene la definizione di una variabile: "aind" nel caso dei sensori e "bind" nel caso dei punti di estrapolazione:

- "aind": vettore che contiene al suo interno tutti gli indici dei punti di misurazione che potrebbero trovarsi all'interno dell'elemento considerato. Questa prima scrematura è fatta andando a trovare tutti i sensori con coordinate comprese tra i valori massimi

e i valori minimi delle coordinate che descrivono l'elemento. Il controllo successivo è necessario perché la definizione di "aind" non assicura che il punto si trovi all'interno dell'elemento triangolare, ma garantisce che esso si trovi nel rettangolo descritto dalle sue coordinate massime e minime.

- "bind": vettore formato dagli indici dei punti di estrapolazione che si potrebbero trovare all'interno dell'elemento. Il ragionamento utilizzato è del tutto identico a quello già descritto per "aind".

Dopo aver effettuato questa prima scrematura, la funzione MATLAB "inpolygon" controlla se il punto identificato dalle variabili "aind" e "bind" si trova all'interno del poligono (nel caso in questione un triangolo) definito tra i nodi di coordinate X e Y (terzo e quarto input della funzione).

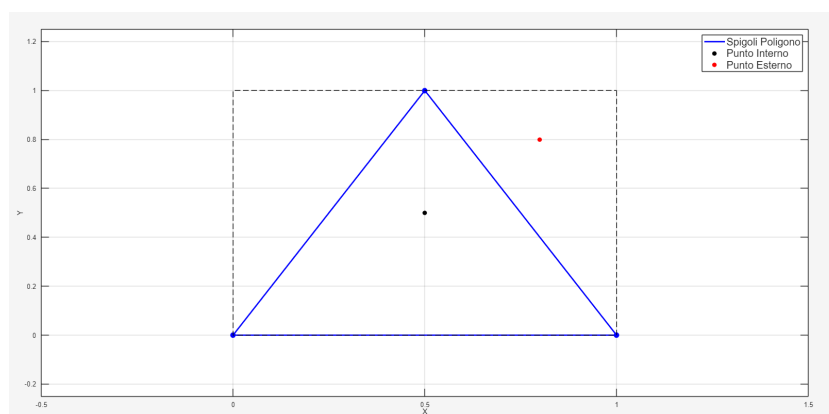


Figura 3.16: Rappresentazione dell'associazione tra punto ed elemento

Facendo riferimento alla Figura 3.16, il vettore X e il vettore Y descrivono l'elemento finito triangolare rappresentato (blu). Le coordinate dei punti analizzati,  $i\_meas$  per i sensori e  $i\_ref$  per i punti d'extrapolazione, identificano diversi punti.

Il punto nero, che si trova all'interno del poligono, farà sì che la funzione "inpolygon" restituisca TRUE (1) come risultato, permettendo al ciclo di eseguire le linee di codice racchiuse all'interno degli if, se invece il punto risulta essere all'esterno (punto rosso), la funzione da esito negativo e, dopo aver eseguito le linee rimanenti, si procede con l'iterazione successiva.

Sempre dalla Figura 3.16 si evince quanto il controllo effettuato tramite la funzione "inpolygon" sia fondamentale, senza potersi limitare alla definizione di "aind" e "bind"; infatti, il punto rosso, seppur fosse presente all'interno del vettore "bind", in realtà dopo un'analisi più approfondita non risulta essere contenuto all'interno dell'elemento finito triangolare. Allo stesso tempo, però, andare a effettuare una scrematura dei punti da analizzare tramite la definizione di queste 2 variabili, permette un utilizzo molto più contenuto della funzione "inpolygon", che viene utilizzata solo su un set di punti localizzati in prossimità dell'elemento, e di conseguenza porta ad abbassare il costo computazionale della funzione.

Tornando al codice, qualora sia confermata la presenza di qualsivoglia punto di interesse all'interno dell'elemento `i` considerato, sia per i sensori che per i punti d'estrapolazione vi è un ulteriore check, ovvero il controllo, a meno di una tolleranza, della coordinata `z`, per assicurarsi che il punto all'interno dell'elemento sia effettivamente tale e non appartenente a una superficie superiore o inferiore. Seppur il ragionamento alla base dell'associazione sia assolutamente il medesimo, si distinguono successivamente due cicli `if` differenti, a seconda se si stanno controllando i sensori o i punti d'estrapolazione:

- Nel caso dei sensori, se una misura di deformazione viene associata all'interno di un elemento (vertici e spigoli compresi grazie alla presenza del "=" all'interno della definizione di `"aind"`) si procede con la creazione di una matrice `"str_elm"` che contiene al suo interno tutte le informazioni, in termini di coordinate del sensore e deformazione misurata, avvenute all'interno dell'elemento `i` considerato. All'interno di un unico elemento `i` possono essere presenti più sensori, e quindi le dimensioni della matrice `"str_elm"`, teoricamente, possono variare per ogni elemento considerato. Questa matrice, successivamente, verrà utilizzata per effettuare l'estrapolazione, essendo uno degli input della funzione citata precedentemente `"sea3_elm_ver3_desired"`.

- Nel caso dei punti d'estrapolazione invece, se con la funzione `inpolygon` risulta che il punto (o i punti) dove si vuole ricavare la deformazione si trova all'interno dell'elemento, le sue coordinate vengono aggiunte all'interno della matrice `"desired"`, la quale verrà citata successivamente, sempre da `"sea3_elm_ver3_desired"`, per ottenere la funzione estrapolata.

Si osservi pure come, in questo caso, il ciclo `if` che si occupa di effettuare il check sia a sua volta all'interno di un ulteriore ciclo `if`.

Questo, permette di accedere al check e, come vedremo successivamente, alla SEA vera e propria, solo se la variabile `"extrap_matrices"` non è salvata in memoria. Essa rappresenta una matrice che permette di velocizzare di molto il processo di estrapolazione, poiché al suo interno contiene già le matrici `P`, `M` e `L` globali, e gli elementi a cui sono associati sensori e punti d'estrapolazione. Teoricamente, potrebbe essere fornita come input opzionale alla funzione `"SEA_tria_desired"` per velocizzare l'esecuzione dell'analisi.

In questo caso, come si evince dagli input della funzione citati nella Sezione 3.2, tale matrice non è fornita in input, quindi è fondamentale ricavare tutte le matrici citate e le associazioni tra punti ed elementi.

Dopo aver indagato, per l'elemento `i` analizzato, la presenza o meno di sensori e/o punti di estrapolazione, la parte di codice in Figura 3.17:

```

for i=1:nEle
    ...
    if ~exist('extrap_matrices','var')
        ...

        [ea,ev,P,M,L]=sea3_elm_ver3_desired(X,Y,str_elm,alpha,beta,desired);

        R12 = Rot(1:2, 1:2);
        T_2=blkdiag(kron(eye(3), R12));
        matric=[M(:,1) L(:,1) M(:,2) L(:,2) M(:,3) L(:,3)]*T_2;
        M=matric(:,1:2:6);
        L=matric(:,2:2:6);
        P_desired = [P_desired ; P];
        M_desired = [M_desired ; M];
        L_desired = [L_desired ; L];
        n_desired(i) = size(P,1);
        index_point = [index_point idx];
    else
        [ea,ev]=sea3_elm_ver3(X,Y,str_elm,alpha,beta);
    end

    R12 = Rot(1:2, 1:2);

    T_nodo = eye(3);
    T_nodo(2:3, 2:3) = R12;

    T = blkdiag(kron(eye(3), T_nodo));

    ea=T'*ea*T;
    ev=T'*ev;
    A=assembla2(gcoord_index(Cne(i,2:4))',3,ea,A);
    b=assembla3(gcoord_index(Cne(i,2:4))',3,ev,b);

end

```

Figura 3.17: Parte del codice atta a ricavare  $[K]$  e  $\{F\}$

Considerando sempre l'assenza dell'input "extrap\_matrices", svolti i vari check, si utilizza la funzione già descritta "sea\_elm\_ver3\_desired" per ottenere le matrici P, M, L ed ea, e il vettore ev.

Come si è già visto nella sezione teorica, le matrici  $[P]$ ,  $[M]$  e  $[L]$  sono tipiche di ciascun elemento. Dopo averle ricavate per l'elemento i considerato, si procede a ruotare  $[M]$  e  $[L]$ , e a iniziare, elemento per elemento, l'assemblaggio delle matrici globali (P\_desired, M\_desired e L\_desired). La rotazione delle ultime due prima dell'assemblaggio è fondamentale per far sì che tutte le matrici si riferiscano al medesimo sistema di riferimento.

Dopo la chiusura del ciclo if, infine si procede alla rotazione (sempre per motivi legati al SR globale) dei vettori ea ed ev, e successivamente, utilizzando rispettivamente le funzioni "assembla2" e "assembla3", si uniscono tra loro per creare (rifacendosi alla Formula 2.55) le matrici di pseudo-rigidità globale  $[K]$  (A) e il vettore delle deformazioni  $\{F\}$  (b).

Ottenuti questi elementi, la funzione esce dal ciclo for e procede a risolvere il sistema

lineare (Figura 3.18), essendo la matrice  $A$  globale, per costruzione, facilmente invertibile:

```
dof_SEA = A\b;
```

Figura 3.18: Ottenimento dei gradi di libertà del sistema

Il vettore "dof\_SEA", è l'insieme globale dei singoli vettori  $\{d^e\}$ , già definiti per nella Formula 2.52. Al suo interno, quindi, saranno presenti i valori relativi alla deformazione  $s$ , e alle sue derivate rispetto a  $x$  e  $y$ , per ogni nodo della mesh tria fornita in input. Prima di procedere con la parte finale del codice, è necessario dividere queste tre contributi del vettore dof\_SEA in tre diverse variabili (Figura 3.19)

```
eps_SEA = dof_SEA(1:3:end);  
dx_SEA = dof_SEA(2:3:end);  
dy_SEA = dof_SEA(3:3:end);  
  
% ROTAZIONE DEI VETTORI PER APPLICAZIONI SUCCESSIVE  
  
extrap_eps_values = eps_SEA';  
extrap_dx_values = dx_SEA';  
extrap_dy_values = dy_SEA';
```

Figura 3.19: Divisione dei contributi del vettore dof\_SEA

Ottenute queste informazioni, resta però ancora da ottenere l'estrapolazione della deformazione nei punti richiesti, invece che semplicemente sui nodi della mesh. Per fare ciò, si utilizzano le funzioni di forma  $[P]$ ,  $[M]$  e  $[L]$ , calcolate precedentemente, e le equazioni presenti all'interno del sistema 2.46, come si osserva dalla Figura 3.20:

```

if ~exist('extrap_matrices','var')
    index_res=1;
    for e=1:nEle
        eps = extrap_eps_values(gcoord_index(Cne(e,2:4)));
        dx = extrap_dx_values(gcoord_index(Cne(e,2:4)));
        dy = extrap_dy_values(gcoord_index(Cne(e,2:4)));
        for j=1:n_desired(e)
            eps_desired(index_res,1) = P_desired(index_res,:)*eps' + ...
                M_desired(index_res,:)*dx' + L_desired(index_res,:)*dy';

            index_res=index_res+1;
        end
    end
else
    load(extrap_matrices);
    eps = extrap_eps_values(eps_ind);
    dx = extrap_dx_values(eps_ind);
    dy = extrap_dy_values(eps_ind);

    eps_desired = P_glob*eps' + M_glob*dx' + L_glob*dy';
end
eps_desired(index_point,1) = eps_desired;
end

```

Figura 3.20: Estrapolazione del campo di deformazioni

Si ottengono così le deformazioni nei punti richiesti. Come già detto in precedenza, non avendo tra gli input la variabile "extrap\_matrices", il codice svolgerà solo il corpo centrale dell'if, senza entrare mai all'interno dell'else. Anche in questo caso, il codice sarebbe molto più rapido, possedendo a priori le matrici contenenti le funzioni di forma globali dell'intero modello FEM. Ricavate le deformazioni, esse vengono ordinate rispettando l'ordine degli elementi analizzati, grazie all'ultima riga del codice e alla variabile "index\_point".

Dopo aver spiegato in maniera approfondita il codice che gestisce la SEA, nella sezione successiva si analizzano i risultati ottenuti:

## 3.4 Risultati

In questa sezione, si analizzeranno i risultati ottenuti utilizzando alcuni dati già descritti nella Sezione 3.2, nello specifico:

- La disposizione dei sensori (10) sarà quella descritta nella Figura 3.6.
- Il modello .bdf utilizzato sarà quello più fitto in composizione cross-pattern (Figura 3.11).
- La disposizione dei punti d'estrapolazione sarà quella a 451 nodi, descritta dalla Figura 3.13.

- $\alpha$  e  $\beta$  avranno rispettivamente valori pari a  $10^6$  e  $10^{-6}$ , quindi come già anticipato, il contributo di  $\beta$  sarà trascurabile.

Si utilizzano questi input in quanto permettono di ottenere una distribuzione accurata di deformazioni, successivamente però si studierà l'influenza di ciascuno di essi sulla definizione del campo continuo degli strain, variando principalmente i dati relativi ai sensori, alla mesh tria usata e ad  $\alpha$ .

In Figura 3.21 e 3.22 sono rappresentate rispettivamente la disposizione di sensori sul piano x-y e le deformazioni di Von Mises misurate da ognuno di essi:

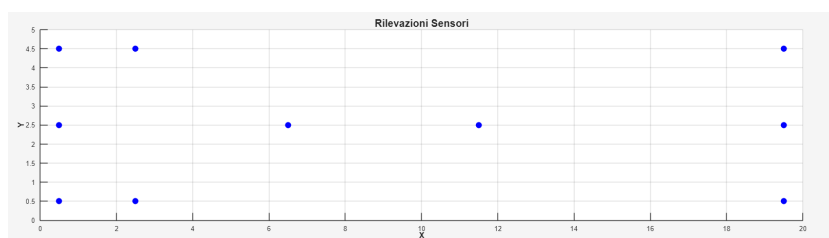


Figura 3.21: Disposizione dei sensori sul piano x-y

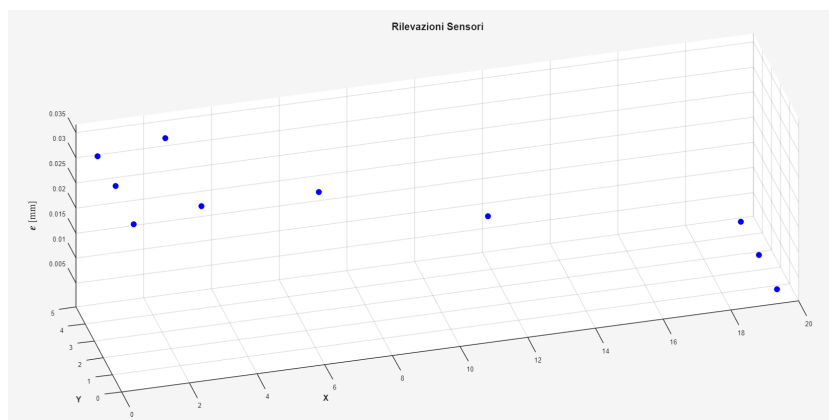


Figura 3.22: Rilevazioni dei sensori

Effettuata la SEA, si ottiene la distribuzione mostrata in Figura 3.23:

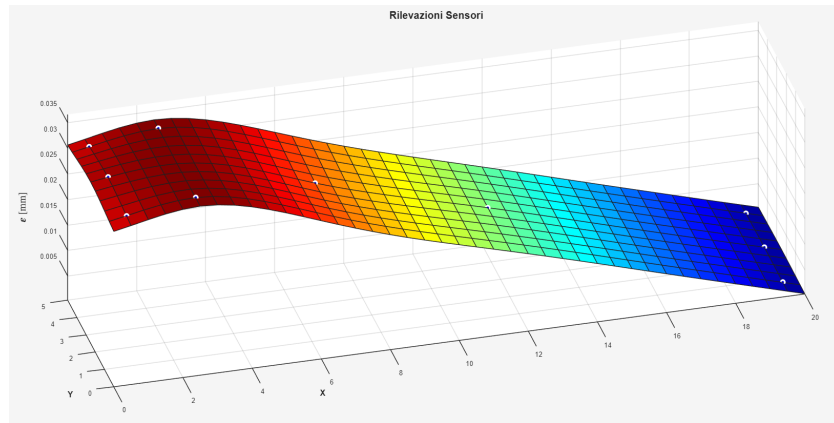


Figura 3.23: Campo di deformazioni continuo ricavato con la SEA

In Figura 3.23 si possono osservare sia la distribuzione di deformazioni sul piano tridimensionale (superficie colorata) sia, nuovamente, le misurazioni rilevate dai sensori (punti bianchi).

Per prima cosa, si può calcolare l'errore che vi è tra la misura rilevata dai sensori e l'estrapolazione effettuata dalla SEA nei medesimi punti, ottenendo i risultati mostrati in Tabella 3.1:

Sensore	X [mm]	Y [mm]	Err. Assoluto	Err. Percentuale [%]
1	0.5	4.5	2.390197e-09	0.000008
2	2.5	4.5	6.131375e-10	0.000002
3	19.5	4.5	1.860120e-08	0.001410
4	0.5	2.5	1.392846e-09	0.000004
5	6.5	2.5	1.658649e-09	0.000006
6	11.5	2.5	3.039180e-09	0.000019
7	19.5	4.5	1.786937e-08	0.001240
8	0.5	2.5	2.471838e-09	0.000008
9	2.5	2.5	2.530445e-09	0.000008
10	19.5	0.5	1.866513e-08	0.001415

Tabella 3.1: Errori assoluti e percentuali per ogni sensore.

Analizzando la Tabella 3.1 e la rappresentazione grafica dell'estrapolazione (Figura 3.23), si osserva come la SEA approssimi in maniera quasi perfetta le deformazioni nei punti in cui sono presenti i sensori. Tale risultato non è da considerarsi scontato: infatti, nella Sezione 2.3, è stato evidenziato come, all'aumentare del parametro  $\alpha$ , l'aderenza dell'estrapolazione ai dati di input non sia necessariamente garantita, poiché viene attribuita una priorità sempre maggiore alla continuità  $C^1$ . Nel caso in analisi però, la prova analizzata è molto semplice e l'andamento delle deformazioni è poco complesso, quindi la funzione riesce ad ottenere un profilo molto liscio ( $\alpha = 10^6$ ), rispettando contemporaneamente con grande aderenza i dati forniti in input.

Osservando la distribuzione di deformazioni sul piano x-y, è possibile effettuare un confronto qualitativo paragonando tale distribuzione con la deformazione effettiva della piastra calcolata con FEM (Figura 3.5).

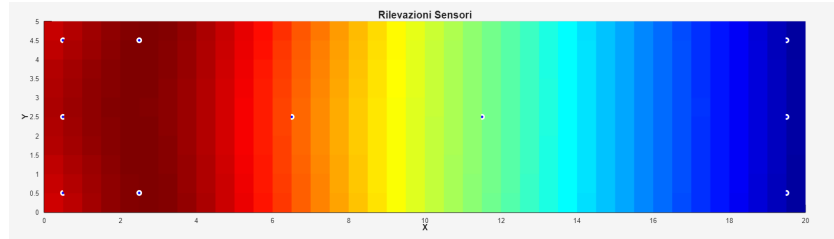


Figura 3.24: Distribuzione delle deformazioni sul piano x-y

Confrontando le due immagini, la distribuzione ottenuta con la SEA (Figura 3.24) sembra assolutamente coerente con il modello FEM. Per verificare questo aspetto numericamente, poiché si dispone del modello FEM, è possibile effettuare un confronto punto per punto tra i dati estrapolati e i valori di deformazioni ricavati da NASTRAN direttamente sull'intera mesh.

Inserendo quindi le misurazioni ottenute sui 451 punti, localizzati nelle stesse posizioni dei punti di estrapolazione in Figura 3.13, si effettua il confronto, e si ottengono i risultati mostrati in Tabella 3.2:

	<b>E.A. Max</b>	<b>E.A. Min</b>	<b>E.P. Max [%]</b>	<b>E.P. Min [%]</b>
Valore	0.003189	0.000001	70.819677	0.006621
x-y:	0.0-0.0	20.0-0.0	19.0-5.0	7.0-4.0

Tabella 3.2: Errori tra l'extrapolazione e la deformazione reale

Dove con E.A. ed E.P. si fa riferimento rispettivamente all'errore assoluto e l'errore percentuale.

Nonostante il valore molto elevato dell'errore percentuale massimo, è importante specificare che, su 451 punti analizzati, solo 6 presentano un errore maggiore del 60%. Infatti, complessivamente, si ricava che:

- L'errore percentuale medio è del 3.69%.
- Il Root Mean Squared Error (RMSE), definito come:

$$RMSE = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{(\varepsilon_i^{real} - \varepsilon_i^{SEA})^2}{n}} \quad (3.1)$$

è pari a  $8.38 \cdot 10^{-4}$ .

- L'RMSE% percentuale, ovvero l'indice di errore definito come:

$$RMSE\% = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{(\varepsilon_i^{real} - \varepsilon_i^{SEA})^2}{n}}}{\varepsilon_{max}^{SEA}} \cdot 100\% \quad (3.2)$$

è di 2.43.

Questo indice, nel caso delle deformazioni, è molto utile per capire l'accuratezza del metodo; essendo infatti le grandezze analizzate molto piccole in modulo, RMSE semplice non è in grado di fornire una misura dell'errore facilmente interpretabile. Adimensionalizzando rispetto al valore massimo, si ha una stima dell'errore indipendente dalla grandezza delle misure, e avere un valore percentuale pari al 2.45% corrisponde ad avere un metodo preciso.

Graficamente, la distribuzione degli errori percentuali punto per punto, sulla superficie è riportata in Figura 3.25.

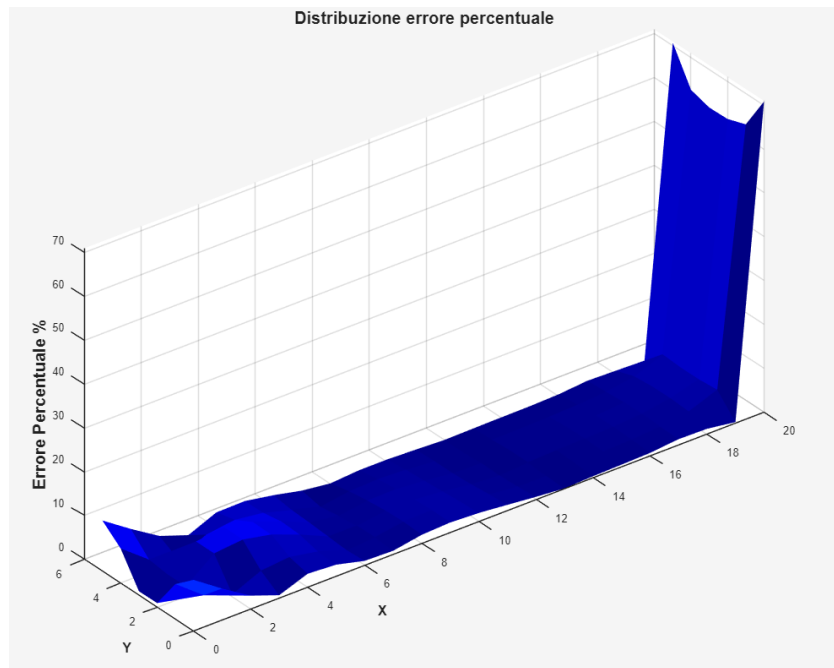


Figura 3.25: Distribuzione dell'errore percentuale sulla piastra

Come si deduce dalla figura, tutti i punti problematici citati precedentemente sono localizzati in prossimità dell'estremo destro. Per chiarire la natura di tali errori è opportuno analizzare anche la distribuzione degli errori assoluti, riportata in Figura 3.26.

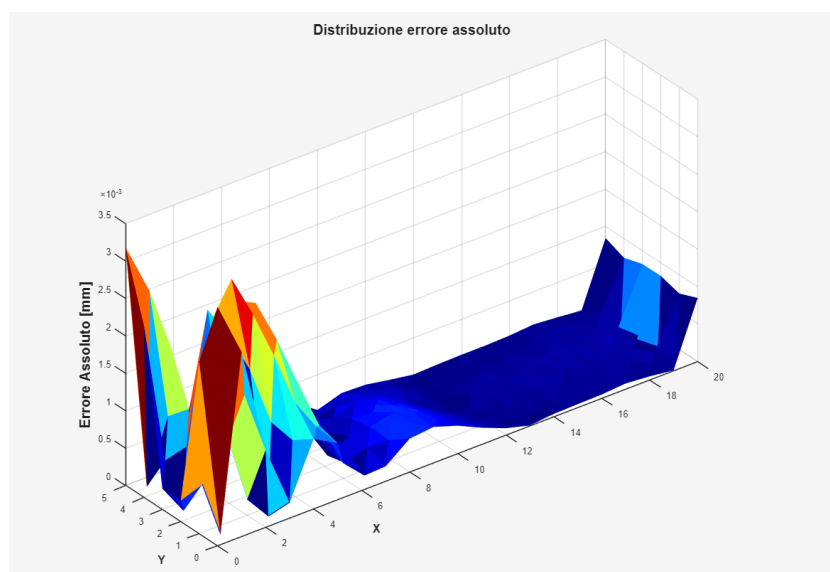


Figura 3.26: Distribuzione dell'errore assoluto sulla piastra

Come si vede dalla Figura 3.26, l'errore assoluto in corrispondenza dell'estremo destro è coerente con la distribuzione degli errori assoluti sul resto della piastra; si evince quindi che il picco di errore percentuale in corrispondenza di questa zona della piastra è sicuramente una conseguenza del fatto che, andando verso l'estremo destro, il valore delle deformazioni estrapolate e misurate decresce fino a valori molto piccoli, portando l'errore percentuale (che divide il valore nominale della deformazione) ad aumentare in maniera significativa. In genere sarà quindi opportuno utilizzare un maggior numero di sensori nelle zone dove ci si aspetta valori massimi e minimi di deformazione, o nelle zone dove l'andamento della funzione da estrapolare risulta essere poco lineare.

Si deduce inoltre che, salvo un'accurata conoscenza della prova sperimentale analizzata, l'errore percentuale non è un indice a cui fare affidamento, poiché largamente influenzato dal modulo delle grandezze estrapolate. Per questo motivo, per casi più complessi, si determinerà l'accuratezza del metodo basandosi sul RMSE%.

### 3.4.1 Influenza della mesh di estrapolazione

È possibile valutare come il numero e la densità dei punti di estrapolazione, e quindi anche dei punti su cui si effettua il confronto, vada a influenzare l'errore tra misurazioni reali e risultati ottenuti tramite la SEA. La prova sul modello finito sarà esattamente la stessa di quella descritta fin'ora, a variare sarà la fittezza della mesh FEM utilizzata, che sarà come quella descritta in Figura 3.27:

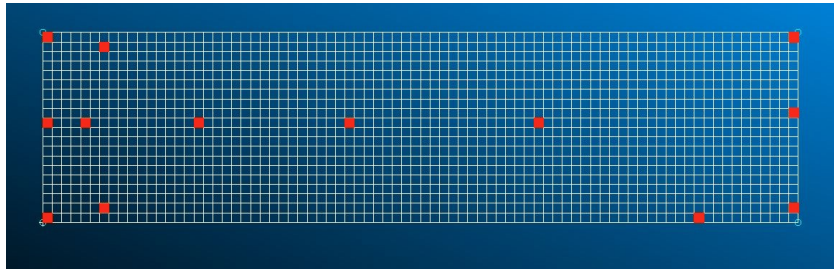


Figura 3.27: Mesh fitta e nuova disposizione sensori

Oltre alla mesh visibilmente più fitta (rispetto a quella riportata in Figura 3.13), è possibile osservare che il numero di elementi sensorizzati, rappresentati in rosso, è aumentato. Infatti, a seguito delle considerazioni fatte precedentemente, si è deciso di modificare il numero e la disposizione dei sensori, al fine di poter creare una configurazione più fitta in prossimità degli estremi della piastra, luoghi caratterizzati da un errore d'estrapolazione maggiore (Figura 3.26).

Per questo motivo, invece che i 10 sensori utilizzati alla Sezione 3.4, si utilizzerà una configurazione a 13 sensori.

Si ottengono i risultati mostrati in Figura 3.28:

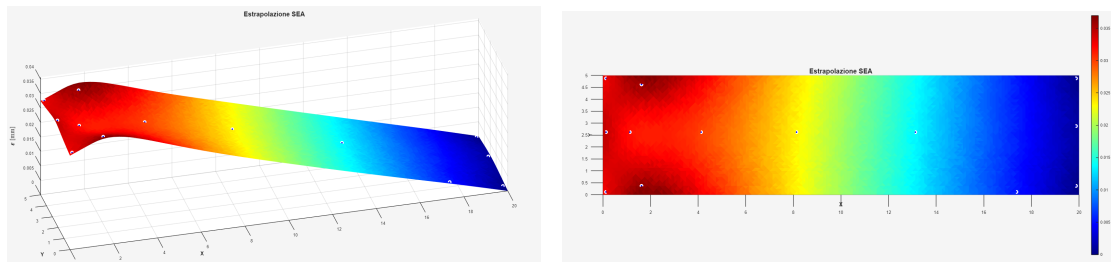


Figura 3.28: Estrapolazione SEA successivamente alla variazione della mesh

Naturalmente la forma dell'estrapolazione è assolutamente coerente con quella ricavata precedentemente (Figura 3.23). Il modulo delle deformazioni misurate e, di conseguenza, di quelle estrapolate cambia leggermente, essendo la prova FEM svolta su un modello più fitto. Gli errori ricavati con tale mesh sono:

	<b>E.A. Max</b>	<b>E.A. Min</b>	<b>E.P. Max [%]</b>	<b>E.P. Min [%]</b>
Valore	0.006326	0.000000	104.722842	0.000001
x-y:	0.0-4.8	20.0-0.0	17.4-0.1	13.1-2.6

Tabella 3.3: Errori tra l'estrapolazione e la deformazione reale nel caso di mesh FEM fitta

Inoltre:

	<b>RMSE</b>	<b>RMSE% [%]</b>	<b>E.P. Medio [%]</b>
Valore	$4.582 \cdot 10^{-4}$	1.266	1.9333

Tabella 3.4: Indici di errore

Confrontando la Tabella 3.3 e la Tabella 3.2 si osserva un aumento nel valore massimo degli errori; nonostante questo, va però evidenziato che tutti gli altri indici d'errore riportati in Tabella 3.4 siano minori rispetto al caso visto precedentemente. Analizzando l'output degli errori, inoltre, si registra che su un totale di 3300 analisi d'errore, solo 42 riportano un errore percentuale superiore al 10%, e tra essi, solo 1 (ovvero il punto dove viene registrato l'errore percentuale massimo) risulta essere superiore al 100%. Analizzando la distribuzione dell'errore percentuale (Figura 3.29) e di quello assoluto (Figura 3.30), si cerca di determinare la posizione sulla piastra dei punti più critici:

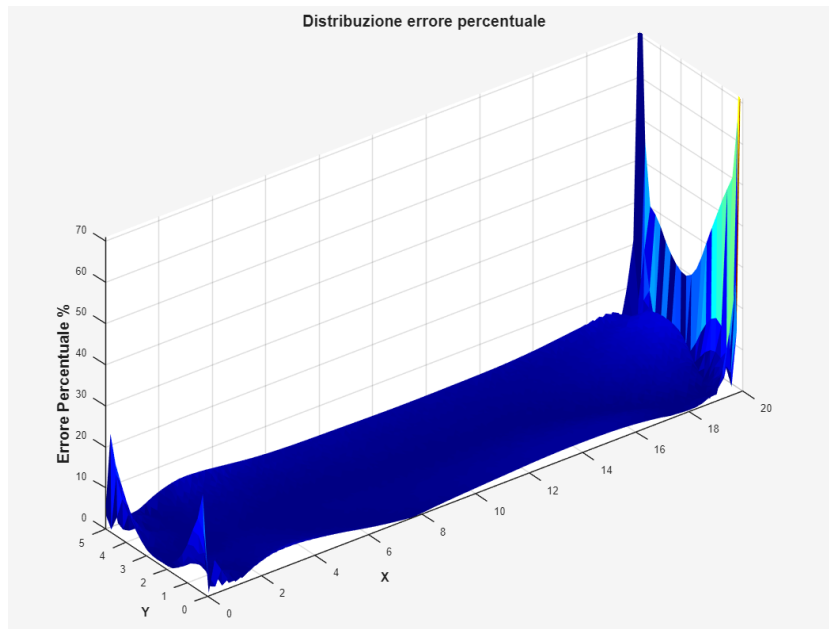


Figura 3.29: Distribuzione dell'errore percentuale sulla piastra

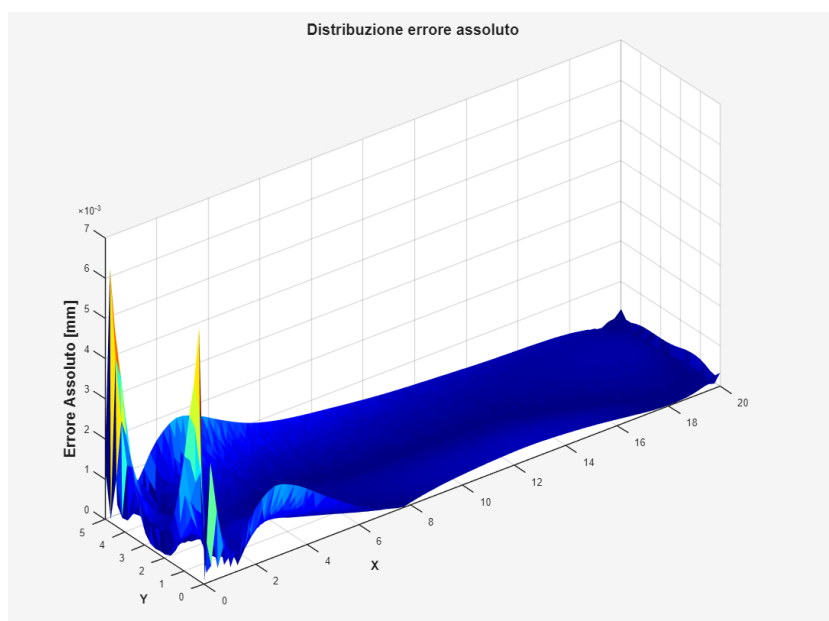


Figura 3.30: Distribuzione dell'errore assoluto sulla piastra

Nuovamente la distribuzione dei punti di massimo errore percentuale si trova in corrispondenza dell'estremo destro, come conseguenza del valore basso delle deformazioni in corrispondenza di tale zona della piastra. Escludendo i bordi dalla rappresentazione grafica, la distribuzione dell'errore percentuale risulta essere soddisfacente:

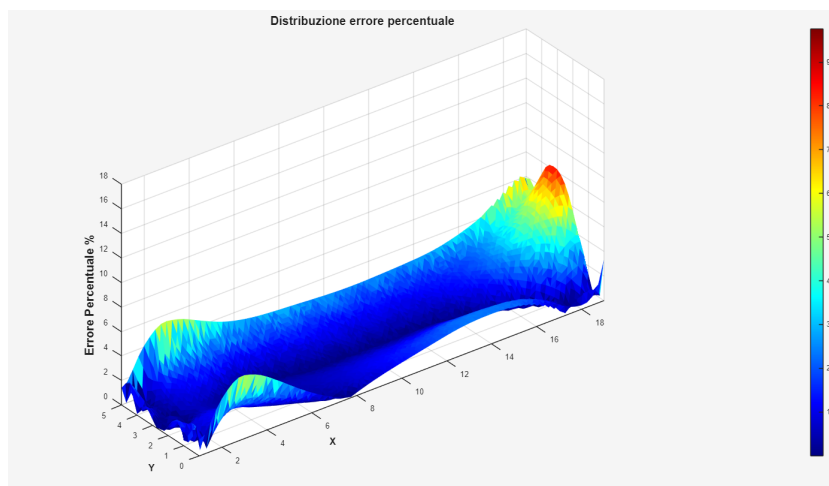


Figura 3.31: Distribuzione dell'errore percentuale scartando gli estremi

Il maggior numero di punti d'estrapolazione permette di determinare, osservando la Figura 3.31, che anche in prossimità degli estremi sull'asse y (bordi in alto e in basso) è presente un errore percentuale più elevato, seppur contenuto, di quello registrato nella

zona centrale della piastra. Si ricava quindi che, oltre a sensorizzare gli elementi della mesh dove ci si aspetta massimi e minimi della funzione estrapolata, è anche opportuno infittire i bordi.

Tutte queste conclusioni dipendono naturalmente dalla configurazione di prova analizzata, e possono variare da caso a caso.

### 3.4.2 Influenza della mesh triangolare

Precedentemente, alla Sezione 3.2.3, era stato annunciato che, data l'importanza della mesh triangolare utilizzata per effettuare la SEA, sarebbe stato opportuno portare avanti un confronto tra diversi modelli, al fine di valutare l'impatto che essi hanno sul risultato finale.

Gli altri parametri, come la fittezza della mesh d'extrapolazione e il valore di  $\alpha$ , resteranno invariati al variare del .bdf, al fine di valutare esclusivamente il suo effetto sugli errori generati. Gli altri parametri forniti in input saranno:

- $\alpha = 10^6$
- I punti d'extrapolazione saranno 3301, nella disposizione già vista nella Sezione 3.4.1.
- I sensori saranno disposti come in Figura 3.27.

Tramite varie iterazioni del ciclo, si ottengono i risultati riportati nella Tabella 3.5:

File .BDF utilizzato	Figura	RMSE	RMSE%	E.P. Medio
Modello_2x8.bdf	3.9	$5.1279 \cdot 10^{-04}$	1.4169	1.6475
Modello_4x20_CP.bdf	3.11	$4.5824 \cdot 10^{-04}$	1.2662	1.9333
Modello_9x13.bdf	3.12	$6.5381 \cdot 10^{-04}$	1.8066	2.1788
Modello_1x1.bdf	3.7	$1.1327 \cdot 10^{-03}$	3.1299	7.5791
Modello_4x20_S.bdf	3.10	$3.1683 \cdot 10^{-03}$	8.7546	16.623
Modello_1x2.bdf	3.8	$4.7624 \cdot 10^{-03}$	13.159	27.791

Tabella 3.5: Valori di RMSE, RMSE% ed errore percentuale per i vari modelli BDF.

Come si evince dalla Tabella 3.5, la mesh triangolare che permette di ottenere il risultato migliore, in termini di errore percentuale medio, è la mesh rappresentata in Figura 3.9. Questo risultato è probabilmente legato alla semplicità della prova di carico analizzata, che, essendo semplicemente una piastra a flessione, non richiede mesh particolarmente fini per ottenere risultati soddisfacenti. Inoltre, data la formulazione della SEA e la presenza limitata di elementi sensorizzati, è preferibile l'utilizzo di una mesh triangolare meno fitta, così da poter associare una misura di deformazione in input a una percentuale maggiore di elementi finiti.

Nonostante ciò, all'aumentare della finezza della mesh, fino al file "Modello\_9x13.bdf", si ottengono estrapolazioni, che, seppur con un errore percentuale leggermente maggiore, sono assolutamente coerenti con le deformazioni reali.

Le mesh riportate in Figura 3.7 e 3.8, come ci si aspetterebbe, forniscono risultati di gran

lunga peggiori, ma ciò è legato sicuramente a una mesh eccessivamente rada (seppur la presenza di  $\alpha$  molto elevato permetta comunque di approssimare in maniera quasi soddisfacente il fenomeno).

Uno dei risultati più significativi è sicuramente quello ricavato utilizzando la mesh triangolare riportata in Figura 3.10. Nonostante sia paragonabile al "Modello\_4x20\_CP.bdf" in termini di fittezza e omogeneità degli elementi finiti, in questo caso, l'utilizzo di tale file .bdf porta a errori estremamente elevati, indice del fatto che, conviene talvolta utilizzare una mesh meno fitta, ma composta da elementi in disposizione cross-pattern (Modello\_2x8.bdf), piuttosto che una mesh fitta ma con elementi structured.

Paragonando l'estrapolazione ottenuta utilizzando la mesh structured, con quella ricavata utilizzando la mesh cross-pattern (Figura 3.28) si conferma l'inesattezza delle deformazioni ricavate:

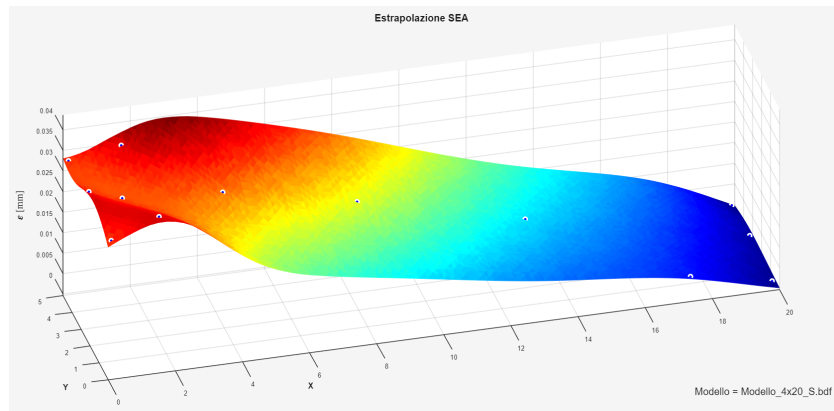


Figura 3.32: Estrapolazione ricavata utilizzando il file .bdf "Modello\_4x20\_S.bdf"

Naturalmente tutti questi risultati, dipendono strettamente dalla prova analizzata, oltre che dagli altri input forniti al metodo; impostando un  $\alpha$  diverso, per esempio  $\alpha = 10^4$ , si ottengono infatti risultati diversi (Tabella 3.6):

File .BDF utilizzato	RMSE	RMSE%	E.P. Medio
Modello_4x20_CP.bdf	$4.3444 \cdot 10^{-04}$	1.2004	1.3817
Modello_2x8.bdf	$5.1337 \cdot 10^{-04}$	1.4185	1.6546
Modello_9x13.bdf	$6.9231 \cdot 10^{-04}$	1.9130	1.9921
Modello_1x1.bdf	$1.1327 \cdot 10^{-03}$	3.1299	7.5790
Modello_4x20_S.bdf	$3.1286 \cdot 10^{-03}$	8.6450	16.381
Modello_1x2.bdf	$4.7625 \cdot 10^{-03}$	13.160	27.791

Tabella 3.6: Indici di errore al variare del .BDF per  $\alpha = 10^4$ .

In questo caso, come si evince dalla Tabella 3.6, la mesh descritta in Figura 3.11 risulta essere la più precisa, mentre la mesh di tipo structured fornisce comunque un pessimo risultato. Gli indici degli errori, eccezion fatta per il primo risultato riportato

in tabella, non variano in maniera significativa al variare di  $\alpha$ .

Si evince quindi che l'influenza di  $\alpha$  sul risultato dipende anche dagli altri input e dalle condizioni al contorno che identificano la prova, come il numero di sensori usati e la fittezza della mesh triangolare. Nella sezione successiva, si cercherà di valutare come tale valore influisce nell'estrapolazione.

### 3.4.3 Influenza di $\alpha$

Come fatto nella sezione 3.4.2, si vuole adesso valutare l'influenza dell'input  $\alpha$  sull'estrapolazione condotta dalla SEA.

Analogamente a quanto fatto prima, gli altri input resteranno gli stessi utilizzati nella sezione 3.4.1, mentre si valuteranno diversi valori di  $\alpha$ :

```

esponente_alpha=-8:1:8;
for index=1:length(esponente_alpha)
    alpha=10^esponente_alpha(index)
    ...
end
    
```

Figura 3.33: Iterazione del ciclo su vari valori di  $\alpha$

Il ciclo riportato in Figura 3.33, quindi, svolgerà diverse estrapolazioni valutando ogni volta i vari indici d'errore, al fine di valutare quale valore di  $\alpha$  riesce ad approssimare meglio il fenomeno analizzato.

Svolgendo l'analisi si ottengono i risultati mostrati in Tabella 3.7:

$\alpha$	RMSE	RMSE%	E.P. Medio
$10^{-6}$	$3.8620 \cdot 10^{-4}$	1.07	1.1688
$10^{-5}$	$4.1800 \cdot 10^{-4}$	1.16	1.3280
$10^{-4}$	$4.3189 \cdot 10^{-4}$	1.19	1.3796
$10^4$	$4.3444 \cdot 10^{-4}$	1.20	1.3817
$10^{-3}$	$4.3408 \cdot 10^{-4}$	1.20	1.3880
$10^3$	$4.3435 \cdot 10^{-4}$	1.20	1.3882
$10^{-2}$	$4.3432 \cdot 10^{-4}$	1.20	1.3889
$10^{-7}$	$4.4366 \cdot 10^{-4}$	1.23	1.4470
$10^5$	$4.3396 \cdot 10^{-4}$	1.20	1.4785
$10^6$	$4.5824 \cdot 10^{-4}$	1.27	1.9333
$10^{-8}$	$5.4265 \cdot 10^{-4}$	1.50	1.9815
$10^7$	$1.4466 \cdot 10^{-3}$	4.00	8.5363
$10^8$	$1.1126 \cdot 10^{-2}$	30.74	88.7679

Tabella 3.7: Valori di RMSE, RMSE% ed errore percentuale al variare di  $\alpha$ .

Osservando la Tabella 3.7, si evince come i risultati ottenuti siano praticamente indipendenti da  $\alpha$ , salvo per valori molto elevati di essa, per cui gli errori raggiungono picchi elevati.

Questo comportamento insolito è probabilmente legato all'overfitting; il fenomeno analizzato è infatti molto semplice, e il suo comportamento, essendo una trave a flessione, è praticamente lineare.

La SEA non ha problemi a gestire casi così semplici, ed essendo la mesh molto fitta, e il numero di sensori non troppo limitato, ottiene risultati soddisfacenti anche per valori minimi di  $\alpha$ , penalizzando quindi la continuità della derivata prima delle deformazioni nel campo estrapolato.

Questo aspetto è individuabile confrontando le estrapolazioni ottenute tramite 3 diversi valori di  $\alpha$ :  $\alpha = 10^{-8}$ ,  $\alpha = 10^4$  e  $\alpha = 10^8$ :

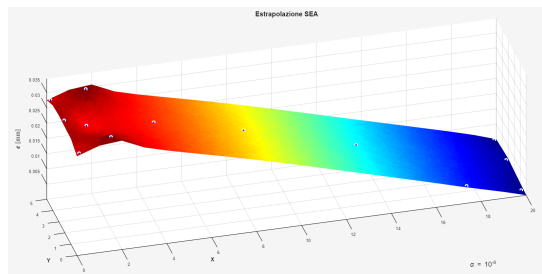


Figura 3.34: Estrapolazione SEA per  $\alpha = 10^{-8}$

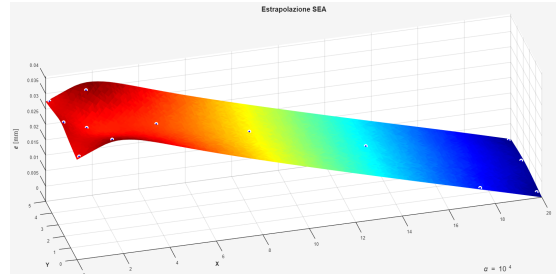


Figura 3.35: Estrapolazione SEA per  $\alpha = 10^4$

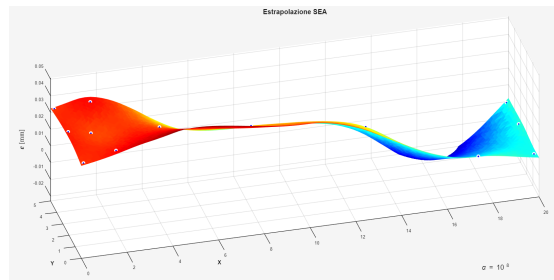


Figura 3.36: Estrapolazione SEA per  $\alpha = 10^8$

In Figura 3.34 l'estrapolazione effettuata sui sensori è molto precisa, ma, avendo un valore di  $\alpha$  molto basso, i risultati presentano varie discontinuità della derivata prima, restituendo una distribuzione molto più spigolosa rispetto agli altri risultati visti precedentemente. In Figura 3.35 si vede una distribuzione molto simile a quella ottenuta nelle sezioni precedenti; la derivata prima della deformazione è continua su tutta la piastra, restituendo un risultato più "liscio" rispetto a quello visto precedentemente. Infine, nella

Figura 3.36, il valore troppo elevato di  $\alpha$  fa sì che il fattore preponderante nel funzionale tipico della SEA sia quello relativo alla continuità  $C^1$ , di conseguenza, si ottengono risultati estremamente errati e una rappresentazione continua delle deformazioni che non rispetta assolutamente la fisica del problema analizzato.

Nonostante in questo caso convenga, a seguito dell'analisi effettuata, scegliere un valore di  $\alpha$  basso, generalmente è opportuno svolgere varie prove al fine di effettuare un trade-off tra accuratezza dell'estrapolazione e rispetto della fisica del problema, essendo tale fattore estremamente dipendente dalla prova sperimentale e dalla grandezza estrapolata d'interesse.

### 3.5 Confronto con un'altra prova numerica

Come detto più volte nella sezione precedente, ogni estrapolazione SEA è estremamente legata al modello e alla prova analizzata. Ciò vuol dire che è impossibile definire universalmente un valore di  $\alpha$  ottimo, come non è possibile conoscere a priori il numero e la posizione dei sensori che restituiscano un risultato soddisfacente.

In questa sezione, si vuole quindi analizzare un'ulteriore prova, al fine di analizzare quanto valgono le conclusioni precedenti, e vedere se possono essere definiti dei criteri generali.

La struttura in analisi è costituita dalla medesima piastra vista precedentemente, ma stavolta essa presenta:

- Un incastro sul lato sinistro, come nella prova precedente.
- Un carrello sul lato opposto, che blocca tutte le traslazioni eccetto quelle lungo l'asse  $x$  e lascia libere le rotazioni.
- Invece che un carico puntuale sul lato, stavolta sarà presente un carico distribuito, localizzato su tutta la faccia superiore della piastra.

Tale condizione di carico è stata scelta in quanto permette di ottenere un andamento delle deformazioni non estremamente semplice (a differenza della prova a flessione), mantenendo però comunque una prova abbastanza semplice da analizzare.

Tramite l'analisi del modello FEM, si ottiene il campo di deformazioni mostrato in Figura 3.37:

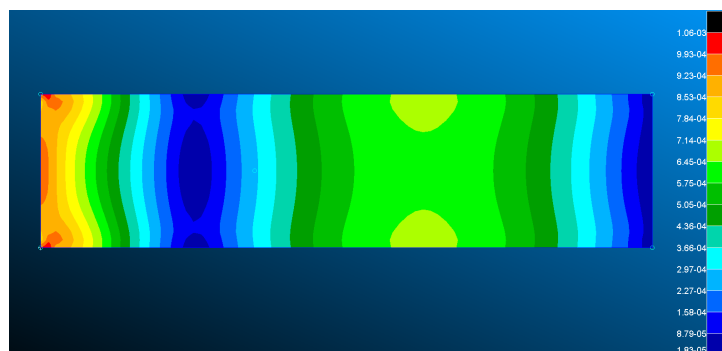


Figura 3.37: Distribuzioni della deformazione  $\varepsilon_x$

Ricavata la deformazione, dopo aver estrapolato le misure d'interesse, si applica la SEA, ottenendo le distribuzioni mostrate nelle Figure 3.38 e 3.39:

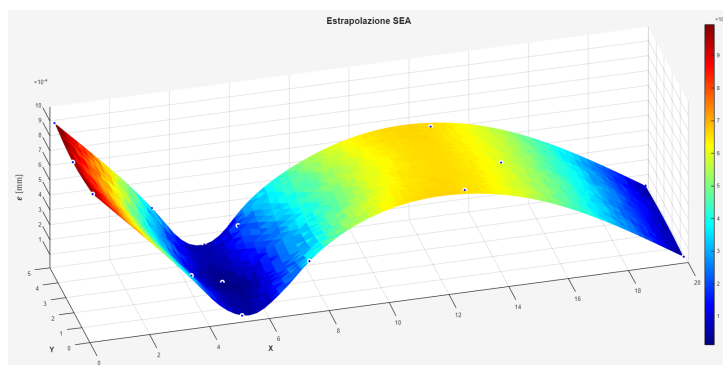


Figura 3.38: Estrapolazione SEA

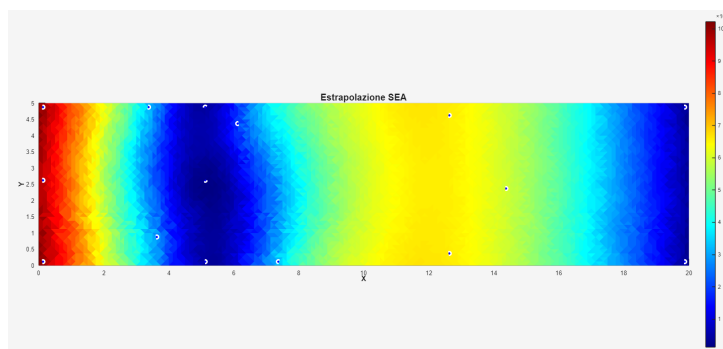


Figura 3.39: Estrapolazione SEA sul piano x-y

Il campo ottenuto è visibilmente più complesso rispetto a quello estrapolato per la piastra a flessione; esso infatti presenta un andamento assolutamente non lineare, con due punti di massimo e di minimo locali ben distinti.

Confrontando visivamente le deformazioni in Figura 3.37 con quelle in Figura 3.39 si deduce che l'andamento ottenuto è sicuramente coerente con quello reale, ovvero quello ricavato con FEM.

Come fatto in precedenza, si procede ora a valutare l'accuratezza del metodo, investigando gli errori punto per punto tra estrapolazione e dati del FEM; si ottengono i risultati in Tabella 3.8:

	<b>E.A. Max</b>	<b>E.A. Min</b>	<b>E.P. Max [%]</b>	<b>E.P. Min [%]</b>
Valore	0.000209	0.000000	72.382078	0.000000
x-y:	0.0-0.2	5.5-2.2	0.1-0.1	0.1-0.1

Tabella 3.8: Errori tra l'estrapolazione e la deformazione reale

Per valutare l'accuratezza del metodo, si utilizzano gli indici già descritti in precedenza; i rispettivi valori sono riportati in Tabella 3.9:

	RMSE	RMSE%	E.P. Medio
Valore	$3.299820 \cdot 10^{-5}$	3.107	9.756

Tabella 3.9: Indici di errore per la piastra con carico distribuito

Osservando la distribuzione dell'errore percentuale, descritta in Figura 3.40, si capisce che questo indice non può essere utilizzato (o almeno non da solo) per valutare la precisione dell'estrapolazione; esso infatti dipende molto dal modulo della grandezza misurata, e anche una piccola zona di picco elevato, come quella rappresentata in figura, porta un grande aumento della sua media.

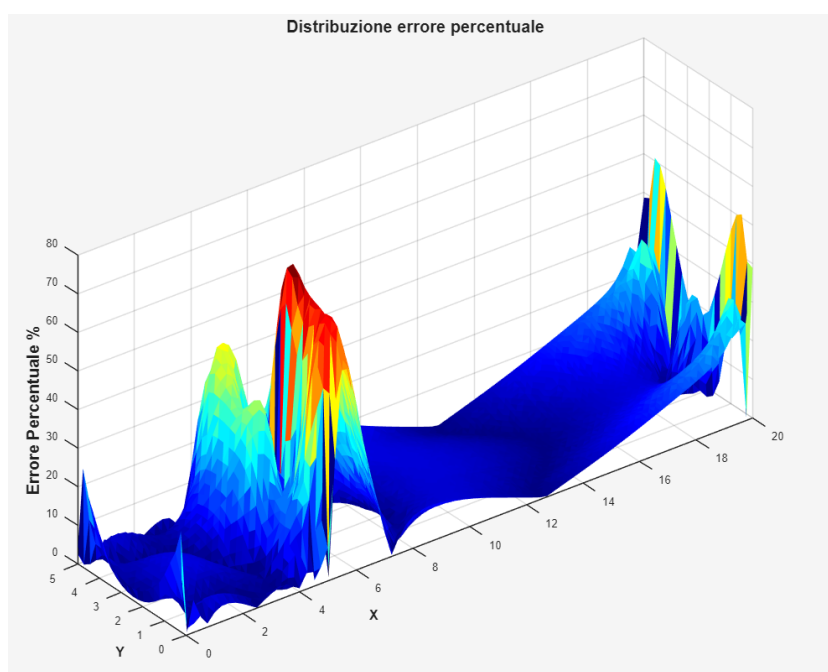


Figura 3.40: Distribuzione dell'errore percentuale

D'altra parte, l'RMSE percentuale, essendo normalizzato rispetto al massimo delle grandezze misurate, è "tarato" sul campo di deformazione in analisi, e rappresenta un valore quindi molto utile per determinare la precisione della SEA.

Rispetto al caso piastra a flessione (Tabella 3.4), gli errori sono leggermente aumentati, come conseguenza del campo di deformazioni più difficile da analizzare, seppure l'aumento non sia eccessivamente significativo.

### 3.5.1 Influenza della mesh triangolare

Come per la prova di carico precedente (sezione 3.4.2), si vuole valutare l'influenza del file .bdf utilizzato per fornire alla funzione la mesh triangolare utilizzata dalla SEA. Variando le varie mesh e lasciando gli altri parametri uguali, si ottengono gli errori rappresentati in Tabella 3.10:

File .BDF utilizzato	Figura	RMSE	RMSE%
Modello_4x20_CP.bdf	$3.2991 \cdot 10^{-5}$	3.1059	9.7545
Modello_9x13.bdf	$4.3934 \cdot 10^{-5}$	4.1361	10.4550
Modello_4x20_S.bdf	$4.5813 \cdot 10^{-5}$	4.3130	12.2165
Modello_1x2.bdf	$1.4266 \cdot 10^{-4}$	13.4310	31.5416
Modello_2x8.bdf	$2.1506 \cdot 10^{-4}$	20.2467	34.4523
Modello_1x1.bdf	$2.5974 \cdot 10^{-4}$	24.4527	99.2149

Tabella 3.10: Valori di RMSE, RMSE% ed errore percentuale per i vari modelli BDF.

Dove i file .bdf a cui si fa riferimento sono i medesimi di quelli utilizzati nel caso piastra a flessione, in Tabella 3.5, e mostrati graficamente nelle Figure della Sezione 3.2.3. Analizzando i risultati si evince che, a differenza del caso precedente, il file .bdf contenente la mesh di tipo structured permette di ottenere un'estrapolazione accettabile, seppur con un'accuratezza inferiore rispetto a quella ottenuta con la mesh cross-pattern.

Data la complessità dell'estrapolazione richiesta, i file contraddistinti da una mesh meno fitta portano ad avere errori molto più elevati, arrivando al caso estremo di mesh a due soli elementi che è contraddistinta da errore percentuale e RMSE% di grande entità.

La Figura 3.41 e 3.42 rappresentano l'estrapolazione con i due modelli peggiori:

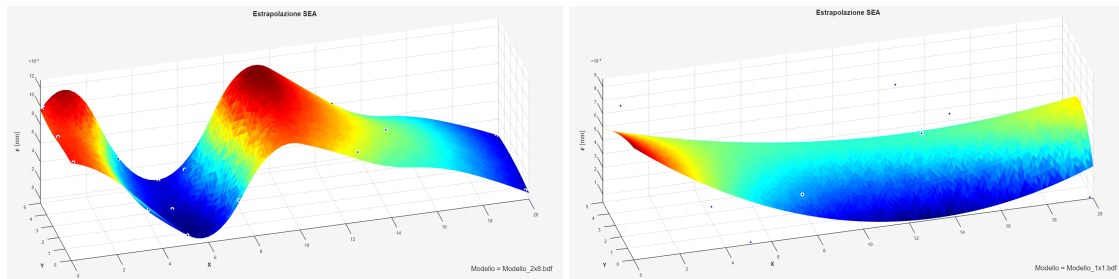


Figura 3.41: Estrapolazione utilizzando il modello 2x8

Figura 3.42: Estrapolazione utilizzando il modello 1x1

In precedenza, è stato detto che è impossibile parlare di leggi generali che regolano l'influenza dei vari parametri della SEA, essendo essa un metodo estremamente influenzato dalla prova e dalla grandezza analizzata. Nonostante ciò, analizzando l'analisi dei vari file .bdf per i due casi visti, è possibile riconoscere delle similarità: tendenzialmente infatti, i risultati migliori sono ottenuti, in entrambi i casi, utilizzando mesh più fitte, ottenendo risultati migliori tramite le mesh formate esclusivamente da elementi tutti uguali tra loro.

Le mesh eccessivamente rade forniscono generalmente i risultati peggiori, anche se, data le nature dei problemi visti, questo fenomeno è molto più evidente nel secondo caso. Per quanto riguarda le mesh di tipo structured, è impossibile definire una regola; il primo caso visto, presentava un'estrapolazione molto peggiore rispetto a quelle ottenute anche con mesh molto meno fitte, mentre, nella seconda analisi, il "Modello\_4x20\_S.bdf" ha fornito risultati molto più accettabili. Nonostante ciò, anche nel secondo caso, la mesh structured produce un'estrapolazione peggiore rispetto a quella ottenuta tramite la cross pattern; per questo motivo, è consigliabile usare sempre mesh di tipo CP, e sarà proprio questo tipo di mesh che verrà impiegato durante l'applicazione della SEA al caso di interesse della tesi.

### 3.5.2 Influenza di $\alpha$

Infine, come fatto nella sezione 3.4.3, si vuole valutare anche l'influenza dell'indice  $\alpha$ . Utilizzando lo stesso codice iterativo visto nella sezione precedente, si ottengono i risultati descritti dalla Tabella 3.11:

$\alpha$	RMSE	RMSE%	E.P. Medio
$10^{-6}$	$3.1606 \cdot 10^{-5}$	2.9755	8.2785
$10^{-5}$	$3.0290 \cdot 10^{-5}$	2.8516	8.8674
$10^{-4}$	$3.2420 \cdot 10^{-5}$	3.0521	9.5961
$10^6$	$3.2938 \cdot 10^{-5}$	3.1009	9.7296
$10^{-3}$	$3.2930 \cdot 10^{-5}$	3.1002	9.7383
$10^{-2}$	$3.2991 \cdot 10^{-5}$	3.1059	9.7544
$10^4$	$3.2991 \cdot 10^{-5}$	3.1059	9.7545
$10^{-1}$	$3.2998 \cdot 10^{-5}$	3.1065	9.7561
$10^3$	$3.2998 \cdot 10^{-5}$	3.1065	9.7561
$10^2$	$3.2998 \cdot 10^{-5}$	3.1066	9.7562
1	$3.2998 \cdot 10^{-5}$	3.1066	9.7562
10	$3.2998 \cdot 10^{-5}$	3.1066	9.7563
$10^5$	$3.3040 \cdot 10^{-5}$	3.1105	9.7632
$10^{-7}$	$4.8433 \cdot 10^{-5}$	4.5597	10.2854
$10^7$	$4.4693 \cdot 10^{-5}$	4.2076	11.4421
$10^{-8}$	$6.3305 \cdot 10^{-5}$	5.9598	15.4916
$10^8$	$1.2800 \cdot 10^{-4}$	12.0500	25.1488

Tabella 3.11: Valori di RMSE, RMSE% ed errore percentuale al variare di  $\alpha$ .

Anche in questo caso è importante sottolineare differenze e similitudini tra la piastra a flessione e il caso analizzato adesso.

- Per entrambe le prove si osserva una preferenza dei valori di  $\alpha$  più bassi;  $10^{-6}$  infatti da il risultato migliore in entrambi i casi e porta a una ricostruzione che, seppur leggermente più spigolosa, segue perfettamente l'andamento delle ricostruzioni ottenute con valori di  $\alpha$  più elevati.

- Come nel caso precedente, non c'è molta differenza tra l'errore ottenuto utilizzando il miglior valore di  $\alpha$  e quello ricavato con gli altri valori. Nel caso in analisi, analizzando, come detto prima, l'RMSE%, la variazione è addirittura minore. Analogamente a quanto visto prima, vi sono solo pochi valori dell'indice analizzato che portano ad un'extrapolazione significativamente peggiore.
- A differenza del caso visto precedentemente, sia i valori troppo elevati di  $\alpha$  ( $10^7$  e  $10^8$ ), ma anche quelli troppo piccoli ( $10^{-7}$  e  $10^{-8}$ ), portano agli errori più elevati. Questo comportamento è sicuramente una conseguenza del fatto che, mentre la prova precedente era praticamente lineare, e quindi anche valori minimi di  $\alpha$  fornivano extrapolazioni coerenti, il caso attualmente in analisi è leggermente più complesso, ed è importante garantire un minimo di continuità della derivata prima della grandezza extrapolata.

Dal confronto tra le Figure 3.44 e 3.43 e l'extrapolazione rappresentata in Figura 3.38 si può osservare visivamente questo fenomeno. Nuovamente, nel caso con  $\alpha$  massimo, la SEA dà la priorità alla continuità  $C^1$  della funzione, andando quindi a trascurare in parte la fedeltà dell'extrapolazione ottenuta al caso in analisi, ottenendo una curva eccessivamente smooth, che non rispetta la fisica del problema.

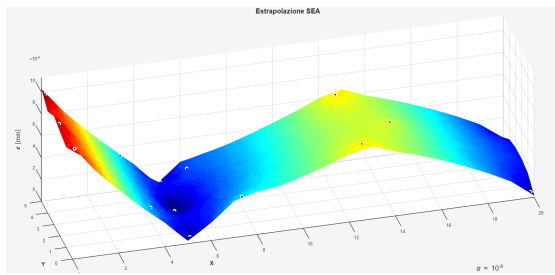


Figura 3.43: Estrapolazione utilizzando  $\alpha = 10^{-8}$

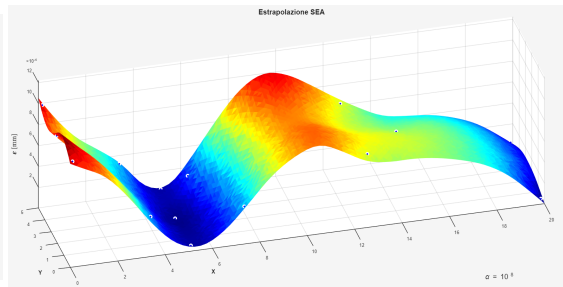


Figura 3.44: Estrapolazione utilizzando  $\alpha = 10^8$

## Capitolo 4

# Analisi di una semiala

Le analisi presentate finora sono state condotte su casi semplificati, scelti con l'obiettivo di valutare al meglio il significato e l'incidenza dei vari input, comprendere il funzionamento del codice che regola la SEA e, in generale, verificare la validità del metodo. In questa sezione, ci si baserà sulle conclusioni ottenute per applicare la Smoothing Element Analysis al vero caso di interesse della tesi.

### 4.1 Descrizione dell'apparato sperimentale e obiettivo dell'estrapolazione

#### 4.1.1 Prova sperimentale e modello FEM

La superficie alare a cui si fa riferimento sarà quella del Robbe Limit Pro, un electric-glider radiocomandato da competizione prodotto dalla Robbe e rappresentato in Figura 4.1.



Figura 4.1: Immagine del glider in questione

Dalla scheda tecnica, si estraggono i seguenti dati:

- Apertura alare: 1700 mm
- Lunghezza: 900 mm

- Peso al decollo: circa 1350 g
- Peso a vuoto: circa 550 g
- Profilo alare: MH-30
- Materiali: fusoliera e ali in fibra di vetro/carbonio

Poichè la SEA, come detto più volte, non richiede informazioni sui materiali di cui è composta la struttura, le uniche informazioni utili per modellare la struttura, e successivamente svolgere l'estrapolazione, saranno l'apertura e il profilo alare, ovvero i dati puramente geometrici.

La prova di carico interesserà esclusivamente l'ala, che sarà vincolata e caricata come riportato nella Figura 4.2 Dove:



Figura 4.2: Superficie alare

- In verde è indicato il punto della struttura alare dove viene simulato l'incastro. Esso è costituito da due piastre d'acciaio, posizionate una sopra l'altra, che vengono tenute insieme da viti e bulloni. Al fine di non danneggiare la struttura, vengono applicati due piccoli strati di silicone all'interfaccia tra l'incastro e la struttura d'interesse. In questo modo l'apparato sperimentale non presenta strane concentrazioni di stress ed è in grado di poter essere utilizzato più volte, ma l'incastro perfetto viene meno, data la grande deformabilità dello strato di silicone. Inoltre, al fine di poter analizzare la maggior parte di ala possibile, la superficie predisposta alla realizzazione dell'incastro è limitata a una piccola porzione della struttura totale; anche questo motivo fa sì che l'incastro non sia perfetto.

- In giallo sono invece indicati i punti dove viene applicato il carico. Per simulare un carico portante concentrato verso la punta dell'ala, la prova è svolta con l'ala sottosopra, e il carico è rivolto di conseguenza verso il basso. Il sistema di carico è costituito da due piastre tenute insieme da viti e rondelle, e anche in questo caso, per evitare fenomeni locali, sono stati utilizzati dei sottili strati di silicone, posizionati all'interfaccia con la struttura alare.

Il gancio in Figura 4.3, al quale viene attaccato il carico sotto forma di pesetti da 0.5 kg l'uno, è inserito all'interno di un profilato Bosh, che consente di determinare con facilità il punto d'applicazione della forza ed eventualmente di modificarlo, facendo scorrere tale gancio all'interno della scanalatura.

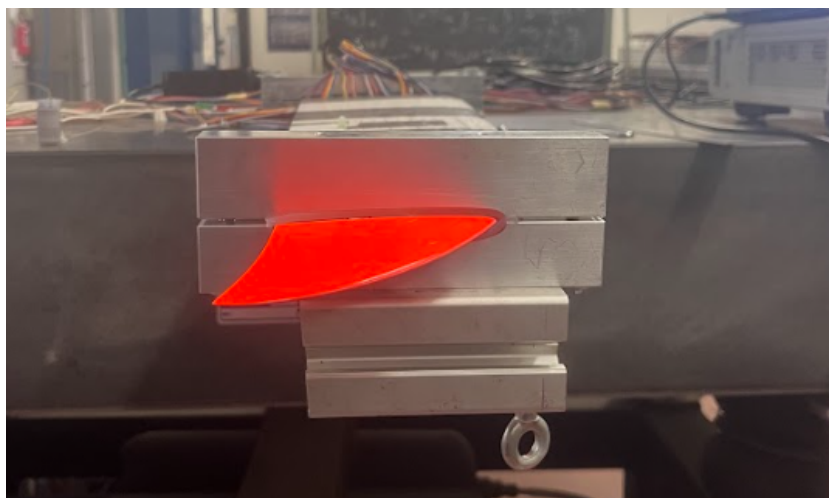


Figura 4.3: Sistema di carico utilizzato nella prova sperimentale

Il sistema di carico così costituito serve a far sì che un carico localizzato venga applicato in maniera uniforme su una nota sezione della struttura, in questo caso l'area sottesa alle piastre da cui è costituito l'apparato.

Infine, nonostante il peso del sistema non sia assolutamente trascurabile, esso non incide sulle misurazioni effettuate in quanto, come vedremo successivamente, si farà attenzione a settare lo zero, e quindi a tarare il sistema di rilevazione, prima di ogni acquisizione di dati.

Oltre ai carichi e vincoli descritti, la prova sperimentale utilizza due diversi sistemi di rilevazione per valutare deformazioni e spostamenti.

- Per quanto riguarda le deformazioni, esse sono misurate utilizzando una fibra a scattering di Rayleigh, dalla lunghezza di 15 m, che percorre l'intera superficie superiore e inferiore della struttura alare. La fibra viene disposta in maniera tale da percorrere ogni superficie analizzata un totale di 7 volte, per ottenere il maggior numero di misurazioni possibili.

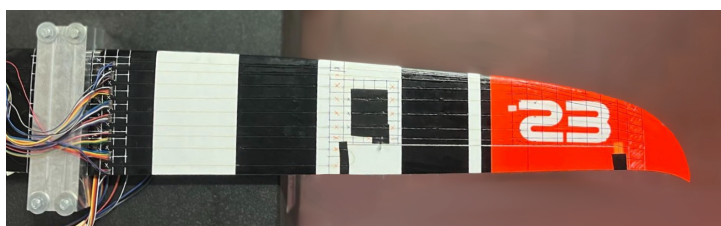


Figura 4.4: Disposizione della fibra sull'ala. Nell'immagine, si intravede anche il sistema di vincolo che simula l'incastro (a sinistra)

In corrispondenza della metà della semiala, è inoltre presente un'apertura, che naturalmente altera il comportamento della struttura. Per far sì di avere una disposizione delle fibre omogenea, si è deciso di far passare la fibra anche sopra tale apertura, coprendola con del nastro adesivo (rettangolo nero al centro della semiala in Figura 4.4). In questo modo si evitano ulteriori avvolgimenti, mantenendo però praticamente immutato il comportamento strutturale della semiala.

Nonostante la presenza di un totale di 7 linee di fibra, solo tre di esse, evidenziate in Figura 4.5, verranno effettivamente utilizzate al fine di effettuare l'estrapolazione SEA:



Figura 4.5: Dettaglio della superficie superiore.

Come si vede dalla Figura 4.4 la fibra ottica percorre l'intera superficie alare a eccezione della superficie mobile. Essa infatti è esclusa dalle analisi effettuate, sia sul modello fisico sia, come si vedrà successivamente, sul FEM.

Dopo i vari avvolgimenti, un'estremità della fibra ottica viene chiusa tramite un apposito terminale, mentre l'altra è connessa al sistema di acquisizione utilizzato per raccogliere il segnale della fibra e trasformare l'informazione in deformazioni.

- Per gli spostamenti, vengono utilizzati 2 sensori laser (optoNCDT ILR2250) posizionati sul pavimento del laboratorio.



Figura 4.6: Sensore di spostamento laser utilizzato

Essi sono puntati verso la superficie inferiore della semiala, e, per garantire una misurazione accurata, il laser è posizionato in corrispondenza di due superfici bianche, essendo esse più riflettenti.



Figura 4.7: Superficie inferiore con superfici riflettenti (evidenziate in giallo)

Tali sensori sono poi connessi al computer che, utilizzando un software rilasciato dall'azienda produttrice, trasforma l'informazione raccolta in distanze.

Essendo i laser posizionati sul pavimento, per capire lo spostamento effettivo della trave ( $d_{eff}$ ) sarà poi necessario sottrarre, alla distanza registrata prima dell'applicazione del carico ( $d_0$ ), le rilevazioni acquisite durante la prova ( $d_{sens}$ ).

$$d_{eff} = d_0 - d_{sens}$$

Essendo la prova di carico simmetrica, ci si aspettano risultati identici sulle due semiali; per tale motivo, i sensori descritti sono posizionati esclusivamente su una di esse e l'analisi

verterà sulla misurazione di strain e displacement della semiala destra (anche se, essendo l'ala sottosopra, in realtà sarebbe la sinistra).

Introdotti vincoli, carichi e i sensori utilizzati, si procede adesso a definire la prova di carico:

1. Montaggio del sistema di carico.
2. Connessione dei sensori ai sistemi d'acquisizione.
3. Taratura dei sensori tramite settaggio dello zero, per evitare che il peso del sistema di carico influisca in alcun modo sulle misurazioni.
4. Rilevazione di deformazioni e spostamenti; il carico viene incrementato ogni volta di 0.5 kg, partendo da 1 kg e finendo con 2 kg, per un totale di 3 step di carico. Per ogni prova, il carico viene lasciato qualche secondo per far sì che le misurazioni si assestino e che le oscillazioni, conseguenze dell'applicazione del carico, non interferiscano con i dati raccolti.
5. Rimozione del carico, seguendo il criterio visto precedentemente ( $2 \rightarrow 1.5 \rightarrow 1$ ). Anche in questo caso si aspetta qualche secondo per permettere alle misure di assestarsi.
6. Analisi ed elaborazione dei dati ottenuti.

#### 4.1.2 Obiettivo dell'estrapolazione

Tali dati raccolti verranno utilizzati per effettuare l'estrapolazione SEA. Nello specifico, si vuole valutare come può essere ridotto il numero di misurazioni su una linea della fibra per far sì che, successivamente all'estrapolazione, la misura ottenuta su tutta la linea sia paragonabile a quella ottenuta durante la prova di laboratorio.

In questo modo, se si riesce a ridurre di molto il numero di misurazioni per linea (che in partenza sono una ogni 1.3 mm) si può pensare, eventualmente, di sostituire la fibra ottica con degli estensimetri, i quali seppur restituiscano una misura puntuale di deformazione, possono essere utilizzati anche per prove di natura dinamica, a differenza della fibra a scattering di Rayleigh (Sezione 1.1).

A questo punto, prima di effettuare la valutazione del metodo sul sistema reale appena descritto, si proverà, nella sezione successiva, a validare il codice utilizzando dei dati raccolti dal modello FEM, al fine di valutare il comportamento della SEA quando vengono forniti ad essa input puramente numerici, quindi sprovvisti di incertezze ed errori riscontrabili talvolta nei dati sperimentali.

## 4.2 Modello FEM

Noti i dati geometrici dell'ala, si crea il modello FEM. Per i motivi legati alla simmetria della prova, visti precedentemente, anche in questo caso ci si concentrerà solo su una semiala.

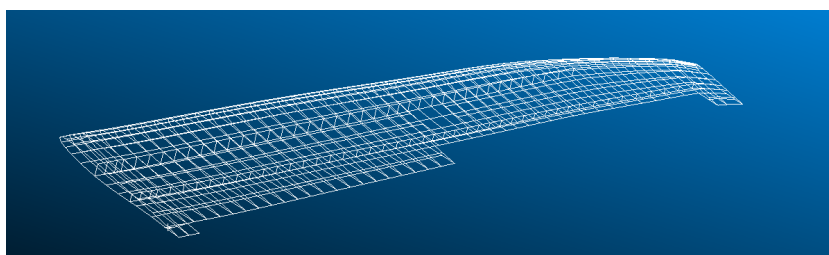


Figura 4.8: Modello a elementi finiti della semiala analizzata

Come si vede dalla Figura 4.8, la superficie mobile non è inserita all'interno del modello, essendo il loro contributo, in termini di rigidità, trascurabile.

Inoltre, la parte della struttura successiva alla zona d'applicazione del carico sarà esclusa dal modello, poiché realisticamente non subisce deformazioni rilevanti.

Modellato il FEM, si definiscono le proprietà seguenti:

- Pannelli esterni (skin):

$$E = 3265 \text{ MPa}, \quad \nu = 0.3, \quad t = 1.45 \text{ mm}$$

- Longherone anteriore:

$$E = 137 \text{ GPa}, \quad \nu = 0.3, \quad t = 4.78 \text{ mm}$$

- Longherone posteriore:

$$E = 3265 \text{ MPa}, \quad \nu = 0.3, \quad t = 3.33 \text{ mm}$$

Si ricorda che le informazioni relative ai materiali da cui è composta la struttura non sono necessarie per applicare la SEA e l'iFEM; tali proprietà verranno utilizzate infatti solo in una fase preliminare dello studio, per ricavare il campo di deformazioni numerico su tutta l'ala.

Tramite Patran, è possibile plottare le proprietà direttamente sul modello, ovvero visualizzare graficamente l'assegnazione delle proprietà agli elementi della mesh. E' possibile in questo modo evidenziare la struttura interna dell'ala (Figura 4.9), distinguendo lo skin, dai longheroni anteriore (in rosso) e posteriore (in blu).

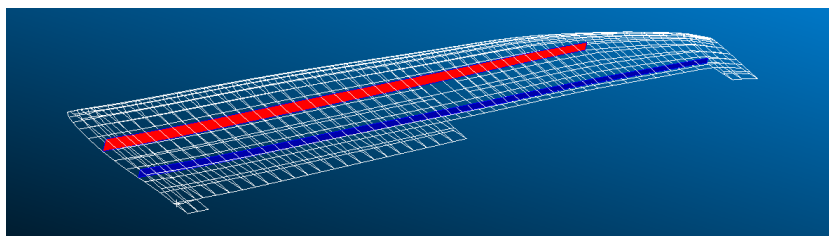


Figura 4.9: Posizione dei longheroni

È importante inoltre individuare gli elementi finiti corrispondenti alle 6 linee di fibra (3 superiori e 3 inferiori) utilizzate durante la prova sperimentale. Esse sono evidenziate nella Figura 4.10.

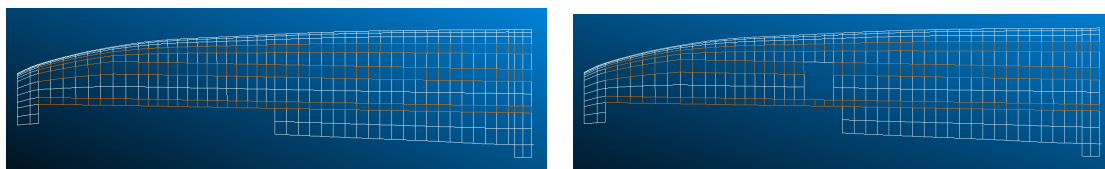


Figura 4.10: Mesh Quad della superficie superiore (sinistra) e inferiore (destra). Gli elementi evidenziati in arancione discretizzano le linee di fibra su cui si concentrerà l'analisi

La fibra ottica disposta sull'ala sensorizza tutti gli elementi evidenziati in Figura 4.10. Evidenziare tali elementi è fondamentale, poiché sarà su di essi che si concentreranno le analisi svolte nelle sezioni successive.

Si vedrà come la conoscenza degli elementi associati alla fibra consenta di costruire le mesh triangolari necessarie, ottenere gli input di deformazione richiesti dal metodo e, allo stesso tempo, definire il campo di strain di riferimento. Quest'ultimo, confrontato con il campo estrapolato, permette di valutare l'accuratezza della SEA.

Ultimato il modello numerico, il metodo verrà applicato su ciascuna delle linee evidenziate, con l'obiettivo di stimare il campo di strain su tutti gli elementi che le compongono, a partire da deformazioni misurate su un sottoinsieme di essi.

Dopo la definizione delle proprietà di ogni elemento strutturale della semiala, è necessario applicare carichi e vincoli; nello specifico, si ricrea una situazione analoga a quella dell'apparato sperimentale:

- A sinistra, la semiala viene vincolata tramite un incastro, vincolando tutte le traslazioni e le rotazioni dell'intero profilo alare.
- A destra, l'ala è soggetta a un carico distribuito, attuato tramite l'applicazione di un multi-point constraint (RBE2) che vincola tutti i nodi all'interno della zona d'applicazione del carico a un unico punto, esterno all'ala, dove viene applicato un carico concentrato di 60 N (Figura 4.11). Utilizzando questo metodo si riesce a rappresentare un apparato di carico simile a quello sperimentale descritto nella sezione precedente.

Inoltre, analizzando la struttura interna dell'ala (Figura 4.9) si nota come la zona d'applicazione del carico sia posizionata al di là di entrambi i longheroni. Ci si aspetteranno quindi deformazioni abbastanza elevate, e spostamenti della struttura non indifferenti (sia sul modello numerico che su quello reale).

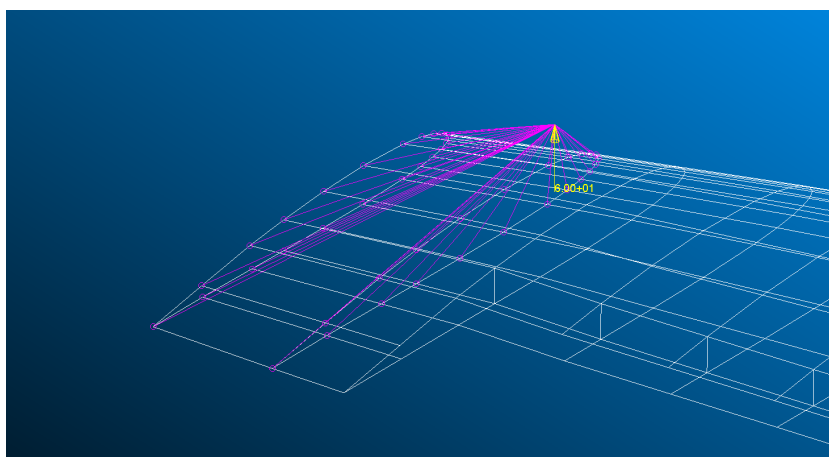


Figura 4.11: MPC utilizzato per simulare il sistema di carico

Definiti carichi e vincoli, si svolge l'analisi tramite NASTRAN e si valutano le deformazioni (Figura 4.12). L'applicazione SEA, si concentrerà sulla componente  $\varepsilon_{xx}$ , ed essa verrà valutata ed estrapolata in corrispondenza della superficie esterna dell'ala.

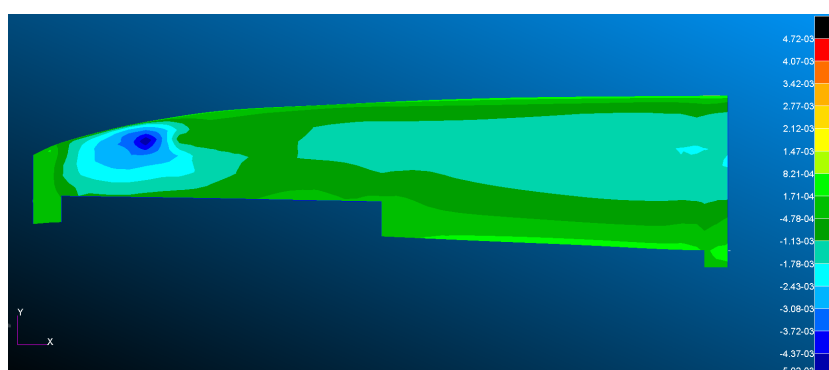


Figura 4.12: Distribuzione di  $\varepsilon_{xx}$  sulla superficie alare superiore

L'ultimo passaggio da fare prima di applicare effettivamente il metodo è modellare le mesh SEA da usare nell'analisi. A seguito delle considerazioni fatte nella sezione 3.5.1, si opterà per l'utilizzo di una mesh di tipo cross pattern, essendosi queste rivelate generalmente più accurate.

A partire dalla mesh QUAD, si è in grado di suddividere ogni elemento finito in 4 sotto elementi TRIA, così da ottenere le mesh triangolari tipiche dei file .bdf visti nelle sezioni precedenti.

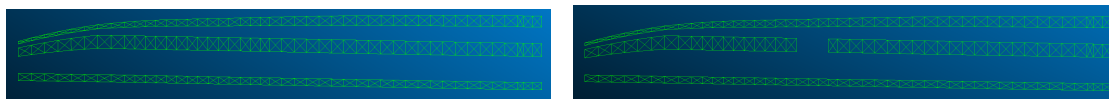


Figura 4.13: Mesh triangolare delle linee sensorizzate disposte sulla superficie superiore (sinistra) e inferiore (destra)

Nonostante siano rappresentate insieme in Figura 4.13, la SEA verrà eseguita singolarmente per ogni linea, per poi determinare qual è il numero di sensori minimo per far sì che le estrapolazioni sulle 6 strisce di fibra siano soddisfacenti.

Per determinare il numero e la distribuzione di questi sensori, si utilizza un algoritmo genetico, descritto nella sezione successiva.

### 4.3 Estrapolazione SEA: algoritmo di ottimizzazione genetico

Per ottimizzare il processo di selezione dei sensori utilizzati, viene integrato, all'interno della SEA, un algoritmo genetico (GA), una tecnica di ottimizzazione ispirata ai meccanismi della selezione naturale [11].

A partire da una popolazione iniziale di soluzioni candidate, il GA analizza ogni individuo ed estrapola le soluzioni migliori tramite la valutazione di una funzione di fitness. Individuate le soluzioni più adatte, esse sono utilizzate per ottenere la popolazione (o generazione) successiva, utilizzando iterativamente operatori di selezione, crossover e mutazione per generare nuove popolazioni sempre migliori. Il processo evolutivo prosegue fino al soddisfacimento dei criteri di arresto, restituendo l'individuo della popolazione che ottimizza l'obiettivo prefissato.

Nel caso in analisi, gli "individui" analizzati e valutati saranno combinazioni diverse di sensori, e la funzione fitness si occuperà di effettuare l'estrapolazione SEA per ogni combinazione e valutarne l'accuratezza tramite un indice d'errore.

La funzione utilizzata è riportata in seguito:

```

function err = fitness_sensori(x,sensori_possibili,A,B,C,D,matrix_sensori,...
    ...matrix_output,matrix_paragone,costo,min_sens)

    indici_attivi = find(x == 1);
    sensori_usati = sensori_possibili(indici_attivi);
    err=0;

    if numel(indici_attivi) < min_sens
        err = 1e6;
        return;
    end

    % ----- Lettura file -----
    strains_report = A;
    bdf_file = B;
    extrap_rep = C;

    extrap_select = 1:length(matrix_output(:,1));
    tol = 0.5;

    % Parametri SEA
    alpha = 1e2;
    beta = 1e-6;

    [extrap_eps_values, eps_desired]=SEA_trial_desired(strains_report,alpha,...
    ...beta,bdf_file,sensori_usati,extrap_rep,extrap_select,tol);

    % ---- Matching tra punti SEA e nodi FEM & stima errore ----

    nodi_SEA_FEM = matching_nodi(matrix_paragone,matrix_output);
    errore_assoluto = abs(matrix_paragone(:,5) - eps_desired(nodi_SEA_FEM));
    RMSE_check_FEM = sqrt(mean(errore_assoluto.^2));
    RMSE_norm = RMSE_check_FEM * 100 / max(abs(matrix_paragone(:,5)));

    % Penalizzazione sul numero di sensori scelti dal GA

    costo_sensore = costo * numel(sensori_usati);

    err =err+ RMSE_norm + costo_sensore;

end

```

La funzione di fitness "fitness\_sensori" funziona nella maniera seguente:

1. La funzione legge il vettore x fornito in input, che ha tanti elementi quanti sono i sensori utilizzati ed è composto esclusivamente da 0 e 1, e, in base a quanti 1 sono presenti, determina quanti e quali (indici\_attivi) sensori sono effettivamente utilizzati nell'individuo in analisi.
2. Successivamente, viene inizializzato l'errore ed esso viene immediatamente posto a un valore elevato qual'ora il numero di sensori utilizzati sia inferiore al numero minimo di sensori accettabile (tendenzialmente questo valore è posto pari a 3).
3. Avviene la lettura dei file A, B, C e D, che sono rispettivamente: il report contenente le rilevazioni di tutti i sensori disponibili (non effettivamente utilizzati), il file .bdf con all'interno la mesh triangolare della linea analizzata, il file .rpt contenente i punti

dove effettuare l'estrapolazione, e il file .rpt con all'interno i valori di strain registrati dal FEM, per valutare l'accuratezza dell'estrapolazione. Nel caso in analisi, essendo tutte le linee interamente sensorizzate, il file D e il file A saranno identici. Successivamente, avviene la SEA vera e propria.

4. Dopo aver effettuato l'analisi, si procede a valutare l'errore. L'indice a cui si sceglie di fare riferimento è l'RMSE%, a cui però va aggiunta un ulteriore componente; infatti, per far sì che l'algoritmo tenda, oltre a minimizzare l'errore, anche a ridurre nei limiti del possibile il numero di sensori è importante aggiungere una penalità ("costo\_sensore") direttamente proporzionale al numero di sensori utilizzati. In questo modo, se un individuo utilizza 6 sensori e ottiene un RMSE% del 5% mentre un altro ne utilizza 5 ma ottiene un RMSE% del 5.5%, l'algoritmo, anche in base al valore di "costo" inserito, tenderà a prediligere la combinazione con meno sensori. L'ultima riga della fitness vede l'assemblaggio di tutte le diverse componenti d'errore all'interno della variabile "err", unico output della funzione.

Noto come la funzione di fitness è in grado di valutare l'errore per ogni individuo della generazione, si procede ad analizzare l'algoritmo genetico e le impostazioni che lo contraddistinguono:

```
FitnessHandle = @(x) fitness_sensori(x, sensori_possibili, A, B, C, D,...
matrix_sensori,matrix_output,matrix_paragone,costo,min_sens,max_sens,display)

options = optimoptions('ga','PopulationType','bitstring','PopulationSize',...
75,'MaxGenerations',500,'MaxStallGenerations',35,'CrossoverFcn',...
@crossoverscattered,'MutationFcn',{@mutationuniform,0.02},...
'SelectionFcn',@selectionstochunif,'Display','iter');

[x_opt, err_opt] = ga(FitnessHandle, Nvars, [], [], [], [], [], [], options);

fprintf('Sensori selezionati (%d):\n ',length(find(x_opt==1)))
disp(find(x_opt==1))
disp('Errore minimo ottenuto:');
disp(err_opt-costo*length(find(x_opt==1)));
```

L'algoritmo è sviluppato tramite la funzione built-in di MATLAB `ga()`. Grazie alla variabile "options" è possibile gestire le singole generazioni e il comportamento generale dell'algoritmo genetico:

- ['PopulationType','bitstring'] è fondamentale per il funzionamento dell'algoritmo nella maniera descritta. Questa opzione sostanzialmente comunica al `ga` che la variabile che descrive l'individuo è presentata nel formato binario 0/1, essendo il vettore "x", descritto precedentemente, definito in tale modo.
- ['PopulationSize',75] indica il numero di individui contenuti all'interno di ogni generazione.

- ['MaxGenerations',500] è uno dei criteri d'arresto. Qualora il ga non trovasse delle configurazioni accettabili e consistenti, allora si arresterebbe all'iterazione numero 500.
- ['MaxStallGenerations',35] secondo criterio d'arresto e criterio a cui mira il ga; così definito, l'algoritmo si arresta quando per 35 generazioni di fila la configurazione migliore risulta essere sempre la stessa.
- ['CrossoverFcn',@crossoverscattered] definisce come i due genitori vengono combinati nella creazione della generazione successiva. Con questa impostazione l'algoritmo sceglie casualmente, per ogni gene di ogni individuo creato, se prendere l'informazione dal genitore 1 o dal genitore 2 [12].
- ['MutationFcn',@mutationuniform, 0.02] definisce le probabilità di mutazione di un gene (2%), ovvero la probabilità che ogni gene che definisce i sensori selezionati venga randomicamente invertito (da 0 a 1 o da 1 a 0) in un individuo. In questo modo si tiene aperta la possibilità di esplorare, a partire da "genitori" scelti dalla generazione precedente, individui comunque leggermente nuovi. Evita che il codice si blocchi a un minimo locale, mantenendo comunque immutato il criterio di selezione/generazione.
- ['SelectionFcn', @selectionstochunif] definisce come vengono scelti gli individui che danno vita alla generazione successiva. Tramite questa impostazione si sceglie di utilizzare un criterio di selezione stocastica, ovvero basato sulla probabilità; un individuo ritenuto buono nella generazione di cui fa parte ha più probabilità di essere selezionato per diventare genitore nella generazione successiva, ma nonostante ciò è possibile che anche gli individui meno soddisfacenti vengano selezionati. Questo fa sì che l'algoritmo non stalli velocemente su delle configurazioni buone ma non ottime, mantenendo diversità per ogni generazione. Poiché non si vanno a modificare i criteri di creazione delle generazioni, è importante specificare che, utilizzando i valori di default, ga, per ogni nuova iterazione, crea: 57 figli utilizzando il crossover dei geni dei due genitori, 14 figli andando a mutare esclusivamente i geni di un unico genitore e 4 individui che sono la copia di 4 individui precedenti, selezionati tra i migliori della generazione genitrice.
- ['Display', 'iter'] è semplicemente un'opzione di formattazione, e fornisce a ga l'informazione su cosa mostrare a schermo. In questo modo, l'algoritmo, per ogni generazione, mostrerà una riga del tipo:

Generazione	Valutazioni fatte	Errore minimo	Errore medio	Generazioni di stallo
1	150	31.16	52.03	0

## 4.4 Analisi dei risultati

In questa sezione vengono analizzati i risultati ottenuti applicando l'algoritmo genetico descritto in precedenza. L'intero processo di estrapolazione SEA viene esaminato linea

per linea, confrontando i dati registrati tramite analisi FEM con quelli ricavati mediante la Smoothing Element Analysis. Per ogni linea di fibra verranno inoltre presentate diverse configurazioni possibili dei sensori: per ciascuna soluzione saranno discusse le prestazioni ottenute, evidenziandone vantaggi e svantaggi e motivando la scelta finale della disposizione ritenuta più appropriata.

#### 4.4.1 Superficie superiore

In questa sezione si espongono i risultati ottenuti per la superficie superiore della semiala analizzata. Per come è stato concepita la prova, il carico risulta essere applicato verso l'alto; di conseguenza la superficie superiore sarà compressa, e quindi ci si aspettano valori di  $\varepsilon_{xx} < 0$ .

Per la prima linea di fibra, ovvero quella localizzata in prossimità del bordo d'attacco, si ottengono le estrapolazioni riportate in Figura 4.14.

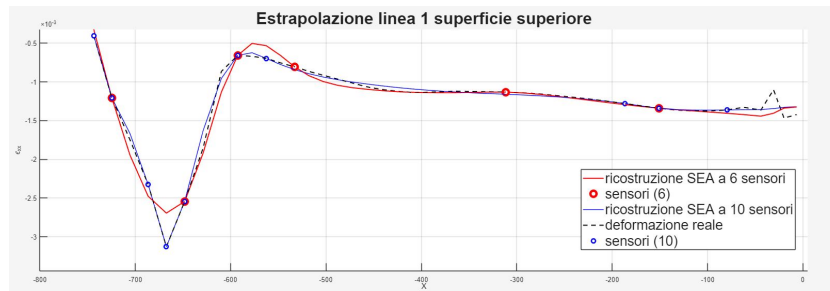


Figura 4.14: Estrapolazione della deformazione  $\varepsilon_{xx}$  per la prima linea della superficie superiore

Nell'immagine si osservano due risultati differenti, ottenuti tramite l'utilizzo di configurazioni diverse di sensori:

- L'estrapolazione rappresentata in rosso, è ottenuta tramite l'utilizzo di 6 sensori, e fornisce un errore RMSE% pari a 3.54%. I sensori utilizzati sono localizzati nelle coordinate riportate nella Tabella 4.1:

ID	10	19	33	37	40	44
x	-150.95	-311.57	-532.7	-592.52	-648.18	-724.53
y	146.87	146.73	143.68	141.47	136.85	122.57

Tabella 4.1: Coordinate x-y dei sensori utilizzati per la prima linea della superficie superiore

- L'estrapolazione rappresentata in blu invece, è ottenuta con una configurazione a 10 sensori. L'errore, pari a 1.98%, non è eccessivamente minore rispetto al caso

precedente, seppur l'utilizzo di un numero così elevato di sensori potrebbe portare a difficoltà legate al cablaggio o alterare la risposta strutturale della semiala.

A differenza della configurazione precedente però, con 10 sensori si è in grado di estrapolare perfettamente il picco localizzato in prossimità del carico, che invece viene leggermente sottostimato nell'estrapolazione ottenuta con 6 sensori.

In entrambe le analisi si osserva un densità maggiore dei sensori in prossimità del picco di deformazione, zona che, caratterizzata da moduli di  $\varepsilon_{xx}$  maggiori, porta l'errore ad aumentare. L'algoritmo genetico utilizzato quindi, rileva misure d'errore elevate in configurazioni dove questa zona della linea non è densa di misurazioni, e tende, generazione dopo generazione, a garantire un numero di rilevazioni elevato nelle zone più critiche.

Essendo l'obiettivo principale quello di minimizzare il numero di sensori, si sceglie come configurazione migliore quella a 6 sensori, nonostante l'errore sia leggermente maggiore.

Per la seconda e terza linea si ottengono risultati del tutto analoghi.

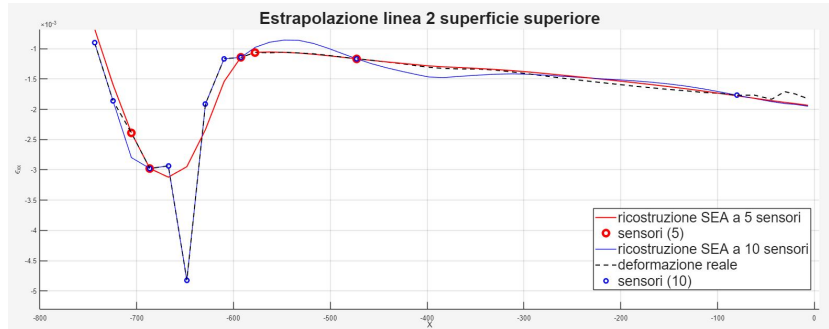


Figura 4.15: Estrapolazione della deformazione  $\varepsilon_{xx}$  per la seconda linea della superficie superiore

In Figura 4.15 sono riportati i risultati ottenuti per la seconda linea di fibra della superficie superiore. La curva blu, che rappresenta nuovamente l'estrapolazione SEA ottenuta utilizzando un numero maggiore di sensori (10), risulta essere graficamente più coerente alla deformazione reale della curva rossa, che invece utilizza solo 5 sensori.

La principale differenza tra le due estrapolazioni sta nell'ottenimento delle deformazioni nella zona critica: mentre con 10 sensori, essendo essi molto densi in prossimità del picco inferiore, si ottengono ottime misurazioni, con la configurazione a 6 elementi sensorizzati si sottostima in maniera importante il minimo assoluto della deformazione. Si osserva però che, nelle zone distanti da tale punto critico, le deformazioni ricavate dalla SEA sono più affidabili per la curva rossa che per la curva blu.

Analizzando i risultati si ottengono errori RMSE% del 6.26% per la configurazione scelta, ovvero quella caratterizzata da 5 sensori, e del 2.39% per la configurazione a densità di rilevazioni maggiore. I sensori della configurazione scelta sono posizionati in corrispondenza dei punti descritti in Tabella 4.2:

ID	29	36	37	42	43
x	-472.7	-577.53	-592.51	-686.38	-705.44
y	113.83	115.79	116.1	112.08	109.6

Tabella 4.2: Coordinate x-y dei sensori utilizzati per la seconda linea della superficie superiore

Per l'ultima linea analizzata si ottengono risultati molto simili (Figura 4.16):

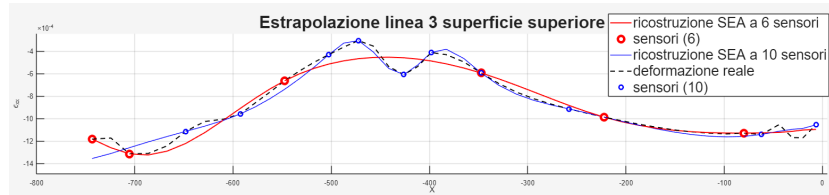


Figura 4.16: Estrapolazione della deformazione  $\varepsilon_{xx}$  per la terza linea della superficie superiore

- La curva ottenuta tramite l'utilizzo di 6 sensori, porta a un RMSE% del 4.75%. Dalla rappresentazione grafica delle deformazioni ottenute si evince come la curva sia estremamente liscia, talmente tanto da non approssimare i due punti di massimo e ottenendo un'estrapolazione che si trova a metà tra questi punti e il punto di minimo locale. I sensori utilizzati sono posizionati alle coordinate (Tabella 4.3):

ID	6	14	21	34	43	45
x	-79.809	-222.46	-347.28	-547.42	-705.25	-743.34
y	54.774	57.341	59.625	63.456	66.034	66.621

Tabella 4.3: Coordinate x-y dei sensori utilizzati per la terza linea della superficie superiore

- La curva blu invece, ottenuta con 10 sensori, estrapola quasi perfettamente la zona della curva discussa precedentemente, ma ottiene errori elevati nell'ottenimento della deformazione a monte e a valle di tale zona. L'errore ottenuto, pari a 3.87%, seppur minore del precedente, non giustifica l'utilizzo di una configurazione con 4 sensori in più della precedente.

È opportuno sottolineare come, entrambe le curve rappresentate non siano caratterizzate dal solito picco localizzato in prossimità del sistema di carico.

Infatti la zona dove la deformazione risulta essere massima, è localizzata circa a metà semiala, in corrispondenza dell'apertura già anticipata nella sezione precedente.

Tale caratteristica strutturale infatti, porta una riorganizzazione degli sforzi, che vanno ad amplificare le deformazioni registrate nelle zone circostanti all'apertura.

Nella sezione successiva, parlando della SEA applicata alla superficie inferiore, si rivedrà tale fenomeno.

Per tutte le configurazioni scelte, si ottiene un errore compreso tra 3.54% e 6.26%, con una riduzione importante delle misurazioni fornite in input, che vanno da 45 (linea di misura interamente sensorizzata) a 5-6 in base alla linea analizzata. Ci si aspettano risultati analoghi per la superficie inferiore.

#### 4.4.2 Superficie inferiore

Per quanto concerne la superficie inferiore, si utilizzerà un approccio del tutto analogo. Ci si aspetta di ottenere risultati e conclusioni coerenti a quelli ottenuti per la superficie superiore, seppur la presenza della cavità possa sicuramente portare a distribuzioni diverse di stress, e di conseguenza, di deformazioni.

Naturalmente, a differenza della superficie precedente, le deformazioni relative alla parte inferiore della struttura saranno positive, essendo la superficie inferiore trazionata invece che compressa.

Le configurazioni di sensori selezionate, per le tre linee di fibra, sono riportate in seguito.

Per la prima linea di fibra, si ottiene una configurazione ottimale a 6 sensori, che permette di ottenere l'estrapolazione mostrata in Figura 4.17.

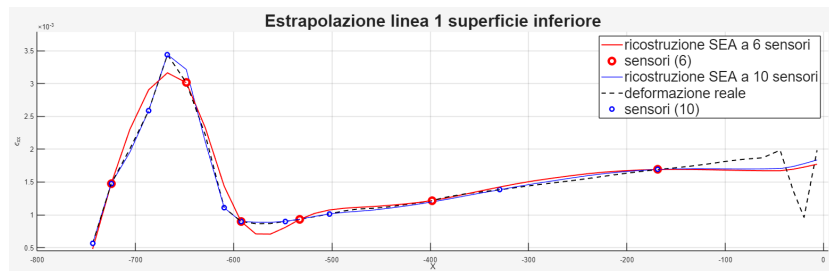


Figura 4.17: Estrapolazione della deformazione  $\varepsilon_{xx}$  per la prima linea della superficie inferiore

Come nei casi descritti in precedenza, anche in questo caso si osserva la rappresentazione di 2 diverse curve:

- Una prima estrapolazione, descritta dalla curva rossa, è ottenuta utilizzando la configurazione ottimale anticipata in precedenza, con i sensori disposti in corrispondenza dei punti descritti in Tabella 4.4:

ID	11	24	33	37	40	44
x	-168.72	-398.31	-532.69	-592.51	-648.18	-724.54
y	147.08	145.8	143.86	141.69	137.04	122.43

Tabella 4.4: Coordinate x-y dei sensori utilizzati per la prima linea della superficie inferiore

In questo caso si ottiene un  $RMSE\%$  pari a 5.18%, leggermente superiore a quello ottenuto per la prima linea della superficie superiore.

- La seconda estrapolazione invece, rappresentata dalla curva blu, corrisponde ai risultati ottenuti utilizzando una configurazione a 10 sensori. In questo caso l' $RMSE\%$  è pari a 4.34%, il che non giustifica, data la poca differenza con l'errore ottenuto precedentemente, l'utilizzo di una configurazione a densità maggiore di sensori.

Come si evince dalla rappresentazione grafica, entrambe le curve estrapolano in maniera coerente le deformazioni registrate dalla fibra. Per entrambi i casi, inoltre, l'errore massimo non è localizzato in prossimità del picco massimo di deformazioni, come visto per i casi precedenti, ma stavolta si trova nella zona di minimo locale di  $\varepsilon_{xx}$ , in corrispondenza dell'incastro della struttura.

Per la seconda linea di fibra si ottengono i risultati mostrati in Figura 4.18:

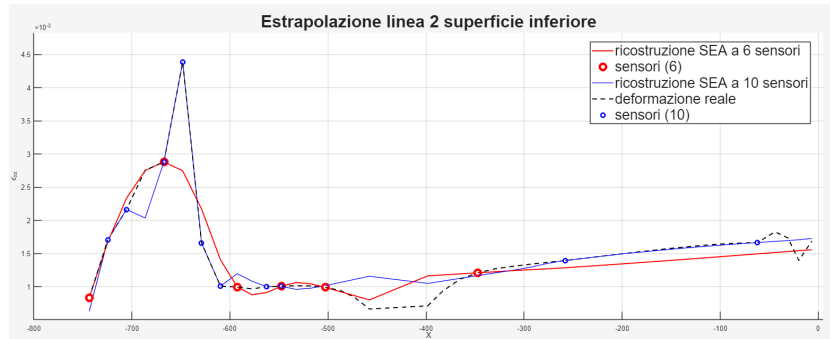


Figura 4.18: Estrapolazione della deformazione  $\varepsilon_{xx}$  per la seconda linea della superficie inferiore

Come per i casi precedenti, la curva rossa descrive l'estrapolazione ottenuta utilizzando la configurazione ottimale, composta da 6 sensori, disposti come riportato nella Tabella 4.5:

ID	21	28	31	34	38	42
x	-347.27	-502.68	-547.59	-592.51	-667.3	-743.41
y	112.27	115.15	115.97	116.9	114.81	103.6

Tabella 4.5: Coordinate x-y dei sensori utilizzati per la seconda linea della superficie inferiore

Utilizzando i sensori rappresentati nella Tabella 4.5, si ottiene un errore  $RMSE\%$  del 7.00%. Se si utilizza una configurazione caratterizzata da un maggior numero di elementi sensorizzati, come quella descritta dalla curva blu, composta da 10 elementi, si ottiene un errore  $RMSE\%$  minore, pari al 4.44%. Nonostante l'errore sia significativamente minore si opta nuovamente per la configurazione che minimizza il numero di elementi sensorizzati.

Per quanto riguarda la linea di fibra in analisi, si può osservare un comportamento nuovo rispetto a quanto visto finora.

Osservando la Figura 4.13, si nota facilmente che la linea analizzata presenta una cavità, evidenziata anche sulla ricostruzione a elementi finiti della superficie alare in Figura 4.10. Proprio per questo motivo, analizzando graficamente le estrapolazioni, si osserva, oltre all'errore già visto in precedenza, localizzato in corrispondenza del picco di deformazione dovuto al punto di applicazione del carico, una seconda zona dove l'errore della SEA risulta essere importante, ovvero la zona a ridosso dell'apertura.

Per l'ultima linea si ottengono risultati del tutto coerenti a quanto visto per linee precedenti.

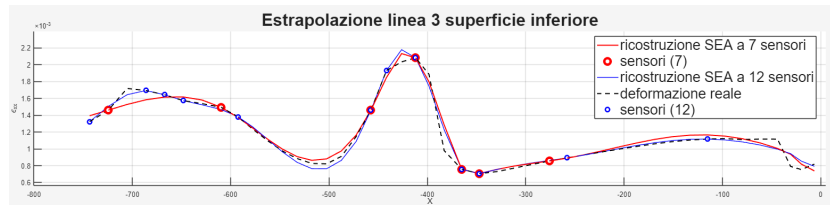


Figura 4.19: Estrapolazione della deformazione  $\varepsilon_{xx}$  per l'ultima linea della superficie inferiore

Analizzando la Figura 4.19, si osserva come, a differenza delle due curve precedenti, il picco di massima deformazione sia localizzato in prossimità della metà dell'ala. Questo comportamento è sicuramente legato alla presenza dell'apertura, che, provocando un aumento degli sforzi nel suo intorno, porta le zone circostanti a registrare deformazioni più elevate.

Un comportamento simile era stato visto in precedenza per la terza linea di fibra della superficie superiore (Figura 4.16) che, seppur più distante dall'apertura rispetto alla linea in analisi, risentiva comunque del fenomeno.

All'estremo sinistro, vicino al punto di applicazione del carico, è comunque presente un massimo locale.

La configurazione selezionata in questo caso porta a un errore del 3.58%, ed è composta da 7 sensori, disposti come riportato in Tabella 4.6:

ID	17	21	22	25	28	38	44
x	-275.91	-347.26	-365.1	-411.96	-457.4	-609.66	-724.27
y	59.061	60.278	60.582	61.374	62.133	64.678	66.594

Tabella 4.6: Coordinate x-y dei sensori utilizzati per la terza linea della superficie inferiore

La curva blu invece costituisce l'estrapolazione utilizzata come metro di paragone. Essa è ottenuta utilizzando 12 sensori, e permette di ottenere un errore RMSE% del 3.07%. Come si evince sia degli errori ottenuti che dalla rappresentazione grafica, entrambe le

curve approssimano in maniera estremamente coerente il fenomeno, eccezion fatta per la parte sinistra della fibra, dove la configurazione a 7 sensori sottostima leggermente le deformazioni. Per questo motivo, la configurazione scelta può essere considerata soddisfacente, permettendo di ottenere un errore molto contenuto (seppur leggermente maggiore), risparmiando contemporaneamente 5 sensori.

Per quanto riguarda le estrapolazioni localizzate sulla faccia inferiore, gli errori ottenuti sono tra il 3.58% e il 7.00%, leggermente maggiori di quelli ottenuti sulla superficie superiore.

Anche in questo caso, questi errori sono accettabili, considerando il fatto che si passa da analisi che richiedono 45 misure di deformazione (una per ogni elemento del FEM) in input a configurazioni che ne richiedono da 5 a 7, in base alla linea considerata.

## 4.5 Influenza di $\alpha$ nell'errore

Le configurazioni ottimali descritte nelle due sezioni precedenti sono state ottenute utilizzando un valore fisso di  $\alpha$ , pari a 100, a seguito delle conclusioni ricavate alla sezione 3. In precedenza era stato detto che tale parametro, che influisce sull'importanza della continuità  $C^1$  del risultato prodotto dalla SEA, è estremamente dipendente dal modello e dalle grandezze analizzate, per cui è fondamentale andare ad analizzare il suo comportamento, e quindi l'influenza sull'errore, per ogni singolo caso.

Iterando, per ogni configurazione selezionata, diversi valori di  $\alpha$ , si ottengono i risultati descritti dalla Figura 4.20:

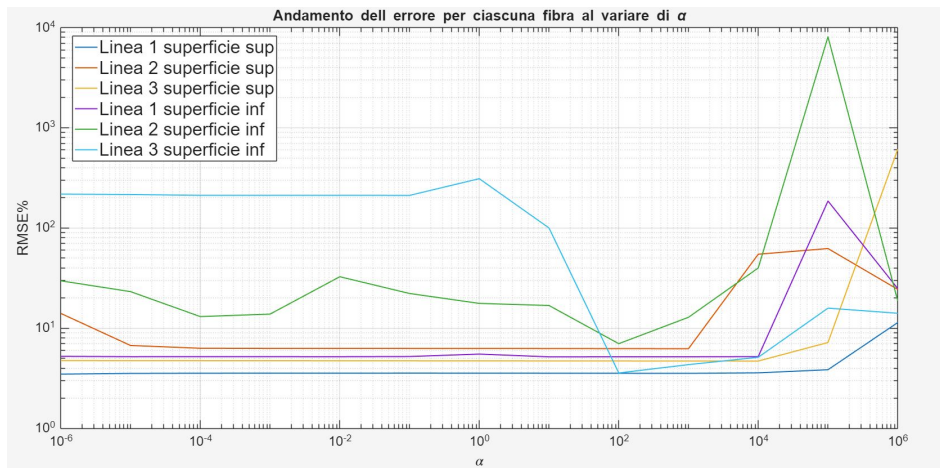


Figura 4.20: Andamento dell'errore RMSE% al variare del parametro  $\alpha$

Osservando le curve e facendo riferimento alla legenda riportata in figura, è possibile determinare come, per la maggior parte delle analisi, il valore di  $\alpha$  sia praticamente irrilevante.

Infatti, le linee di fibra disposte sulla superficie superiore e la prima linea della superficie inferiore mostrano un errore costante per valori di  $\alpha$  compresi tra  $10^{-4}$  e  $10^3$ , per poi vedere un aumento significativo dell'RMSE% per valori eccessivamente elevati del parametro, come visto nelle sezioni precedenti.

Le altre due curve, ovvero quelle che rappresentano la seconda e terza linea di fibra della superficie inferiore, mostrano un comportamento diverso:

- La curva verde, che rappresenta la seconda linea di fibra della faccia inferiore, mostra un comportamento anomalo rispetto alle 4 curve viste precedentemente; essa infatti presenta un errore variabile, che raggiunge più picchi di minimo e massimo locale, senza mai stabilizzarsi.

Tra questi picchi, il punto di minimo assoluto si trova esattamente in corrispondenza del valore di  $\alpha$  utilizzato durante l'applicazione dell'algoritmo ( $\alpha = 100$ ), e, procedendo verso destra a partire da questo punto, si nota un rapido innalzamento dell'RMSE% fino a picchi di quasi il 10000%.

- Per quanto riguarda la terza linea di fibra della superficie inferiore, rappresentata dalla curva azzurra, si osserva un errore molto elevato (circa 200%) e praticamente costante fino ad  $\alpha = 1$ , punto in cui l'RMSE% raggiunge il picco massimo. Successivamente, l'errore scende rapidamente, ottenendo un punto di minimo per  $\alpha = 100$ , valore che era stato adottato durante l'applicazione dell'algoritmo genetico. Infine, dopo questo punto, vi è un ulteriore innalzamento dell'errore, che si stabilizza per valori maggiori rispetto a quanto trovato precedentemente (3.58%) e rimane pressoché costante e pari a circa il 10-11%.

Grazie alle curve descritte è possibile quindi determinare che l'errore minimo è ottenuto per  $\alpha$  pari a 100. Utilizzando questo valore del parametro, si ottengono andamenti delle estrapolazioni SEA con una continuità  $C^1$  importante (come si osserva anche dalle immagini della sezione precedente) e che rispettano allo stesso tempo la fisica del problema. Questo risultato appare coerente con le aspettative: il valore  $\alpha = 100$  era infatti già stato impiegato nella determinazione delle configurazioni ottimali dei sensori e, poiché tali risultati dipendono in modo significativo dal valore del parametro  $\alpha$ , era ragionevole attendersi che l'analisi inversa conducesse allo stesso valore ottimale. Si voleva infatti valutare se, le disposizioni ottimali per  $\alpha = 100$  fossero valide o addirittura migliori per valori diversi del parametro.

Modificando l'algoritmo genetico, è possibile ottimizzare oltre che la configurazione di sensori, anche il valore del parametro  $\alpha$ , inserendo, all'interno della variabile  $x$  vista precedentemente, anche un termine aggiuntivo atto a variare il suo valore per ogni individuo analizzato. Per poter integrare questa variabile aggiuntiva all'interno del GA è importante anche far variare il tipo di popolazione utilizzata; si passerà da una definizione di  $x$  di tipo "bitstring" a una normale. Così facendo  $x$  sarà definita come:

```
lb=[zeros(1,N), 1e1];
ub=[ones(1,N), 1e4];
```

Dove con lb e up, che poi vanno inseriti all'interno della funzione  $ga(\dots)$ , si indicano rispettivamente lower bound e upper bound, ovvero il limite inferiore e superiore di ogni elemento che definisce il vettore  $x$ .

I primi  $N$  elementi, che, come nel caso precedente, indicano quali tra gli  $N$  sensori sono utilizzati, possono avere un valore compreso tra 0 e 1; successivamente, all'interno della funzione fitness, si approssima tale valore decimale al numero intero più vicino (0 o 1), per determinare, esattamente come esposto precedentemente, quali sensori sono selezionati nell'individuo analizzato (1) e quali no (0).

L'ultimo elemento del vettore invece, definisce il parametro  $\alpha$ , e per alleggerire l'ottimizzazione il suo valore viene fatto variare tra 10 e 10000.

Fatto ciò si utilizza nuovamente l'algoritmo genetico e si analizzano le migliori configurazioni per ogni linea, al fine di comprendere se sia possibile, utilizzando un valore di  $\alpha \neq 100$ , ottenere disposizioni di sensori migliori di quelle presentate alla Sezione 4.4.

Si ottengono i risultati mostrati in Tabella 4.7.

Linea	$\alpha$	ID sensori	N. sensori	RMSE%
1 sup	100	10 19 33 37 40 44	6	3,54
	8190	6 16 34 38 40 42	6	3,49
2 sup	100	29 36 37 42 43	5	6,26
	10	35 36 37 42 43	5	6,24
3 sup	100	6 14 21 34 43 45	6	4,75
	8580	8 19 30 38 44	5	4,96
1 inf	100	11 24 33 37 40 44	6	5,18
	6090	12 35 36 40 44	5	5,63
2 inf	100	21 28 31 34 38 42	6	7,00
	9210	10 25 31 34 38 40	6	6,54
3 inf	100	17 21 22 25 28 38 44	7	3,58
	4320	21 22 25 29 38 45	6	4,22

Tabella 4.7: Confronto tra i risultati ottenuti ottimizzando e non  $\alpha$

Analizzando la Tabella 4.7 si può osservare che, i risultati ottenuti con  $\alpha$  pari a 100 sono già estremamente vicini ai risultati ottimali. Infatti, implementando l'ottimizzazione di  $\alpha$  si ottiene soltanto:

- Una piccola riduzione dell'errore, come per le linee 1 e 2 della superficie superiore e la seconda linea della superficie inferiore.  
Si osserva inoltre che, per queste linee, fatta eccezione la prima superiore, vengono utilizzate configurazioni di sensori praticamente identiche a quelle precedenti, indice del fatto che, come visto in Figura 4.20, per il caso analizzato il parametro  $\alpha$  incide poco paragonato alla distribuzione delle deformazioni in input.
- L'eliminazione di un sensore rispetto a quelli utilizzati precedentemente.  
Per le restanti linee infatti, si ottiene un errore leggermente superiore, ma utilizzando meno misurazioni. Come detto nell'osservazione precedente, le nuove configurazioni ricordano molto quelle già ottenute utilizzando  $\alpha$  costante e pari a 100.

I risultati ottenuti, per quanto permettano di apprezzare l'influenza del parametro analizzato, risultano essere molto dispendiosi dal punto di vista computazionale. Eliminando la definizione di variabile come bitstring e introducendo l'ottimizzazione di un ulteriore grandezza, il GA risulta essere molto più lento e spesso le ottimizzazioni non vanno a buon fine, portando a risultati errati. Essendo il guadagno ottenuto, in termine di riduzione dell'errore, comunque limitato, si preferisce optare per uno studio preliminare del valore ottimale di  $\alpha$ , e successivamente ottimizzare esclusivamente le configurazioni sensoriali, come fatto per ottenere i primi risultati descritti.

Infine, è importante sottolineare nuovamente che il valore ottimale di  $\alpha$  è strettamente legato alla natura del problema, ed è largamente dipendente da tutti i parametri che contraddistinguono il fenomeno analizzato. Al variare della mesh utilizzata o della grandezza studiata il valore di  $\alpha$  che permette di raggiungere il minimo errore nell'estrapolazione potrebbe variare significativamente.

## 4.6 Paragone delle estrapolazioni sull'intera ala

Dopo aver analizzato il grado di errore della SEA nell'estrapolazione delle deformazioni a partire da poche misurazioni puntuali, si vuole analizzare un'altra applicazione del metodo.

L'interesse della tesi è quello di comprendere come, a partire da delle linee di fibra, si possano diminuire il numero di input, generando un output paragonabile a quello della fibra stessa. Si vuole ora valutare però il comportamento della Smoothing Element Analysis a superfici più complesse, prendendo stavolta come riferimento l'intera superficie alare.

Si effettueranno diverse valutazioni:

- In prima analisi, si valuterà la precisione del metodo nell'ottenere il campo di deformazioni sull'intera superficie (Figura 4.10), utilizzando interamente le 3 linee sensorizzate (Figura 4.13). Così facendo si valuterà come si comporta la SEA utilizzando un grande set di dati, ma localizzato in punti precisi della superficie.
- Successivamente si effettuerà la stessa analisi, utilizzando però i risultati ottenuti nel corso della Sezione 4.4. In questo modo si possono paragonare questa estrapolazione e la precedente, analizzando come si evolve l'errore ottenuto sulle singole linee quando esse sono utilizzate a loro volta per estrapolare l'ala intera.
- Infine, si applicherà l'algoritmo genetico visto in precedenza per valutare come può essere modificata la disposizione dei sensori sulle tre linee per ottenere, eventualmente, un'estrapolazione migliore.

Tutti e tre i confronti verranno effettuati sulla superficie superiore, in quanto essa non presenta l'apertura che invece caratterizza la superficie inferiore, e di conseguenza ci si aspetta un campo degli strain meno complesso da estrapolare.

I risultati ottenuti saranno poi confrontati con la distribuzione corretta degli strain, riportata in Figura 4.21, ottenuta direttamente dal FEM, e sarà valutato l'errore tra i valori ottenuti tramite l'RMSE%.

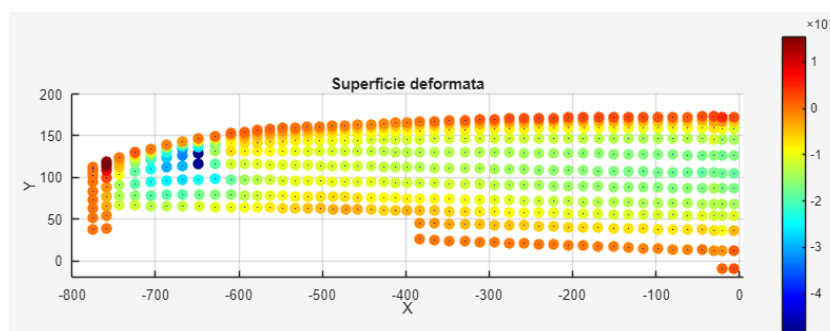


Figura 4.21: Distribuzione corretta degli strain sull'ala

#### 4.6.1 Estrapolazione usando le 3 fibre intere

Utilizzando per intero le 3 linee di fibra si ottiene l'estrapolazione mostrata in Figura 4.22.

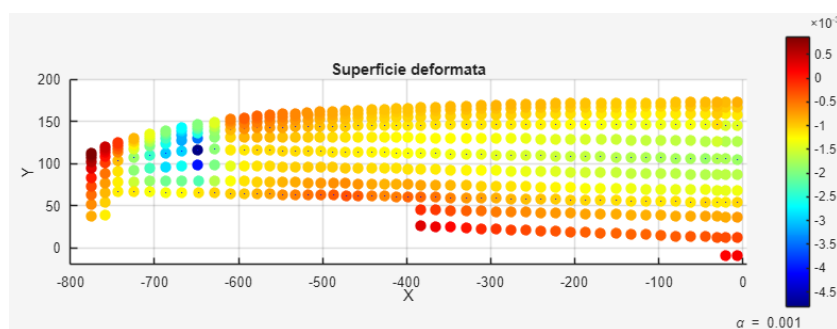


Figura 4.22: Campo di deformazioni ottenuto utilizzando interamente le 3 linee di fibra

Confrontando visivamente la ricostruzione ottenuta con quella effettiva (Figura 4.21), si osserva una somiglianza importante. In prossimità della zona di carico e nella parte centrale dell'ala le deformazioni estrapolate risultano molto coerenti con il campo degli strain ottenuto tramite il FEM; le zone più critiche sono ancora una volta le estremità della struttura, dove la SEA, come si è visto anche per la piastra, tende ad avere difficoltà. Complessivamente, l'RMSE% ottenuto è pari al 9.08%, un risultato accettabile considerando il fatto che si sta approssimando l'intera struttura utilizzando solo tre linee di misurazioni.

Dalla Figura 4.22 si può anche osservare il valore di  $\alpha$  utilizzato durante l'estrapolazione; essendo forniti in input una quantità di dati elevata ed essendo i punti di estrapolazione molto vicini tra loro, la continuità  $C^1$  risulta essere meno importante dell'ottenimento di risultati fedeli al fenomeno analizzato. Tale valore di  $\alpha$  è stato ottenuto iterando diverse volte l'analisi, al fine di trovare il parametro che permettesse di ottenere l'estrapolazione più coerente con il campo reale delle deformazioni.

### 4.6.2 Estrapolazione usando le disposizioni ottimali di sensori

L'estrapolazione trattata in questa sezione è realizzata andando ad utilizzare delle deformazioni in input differenti: invece che prendere direttamente dal FEM le misure di  $\varepsilon_{xx}$  in corrispondenza delle 3 linee viste precedentemente, in questo confronto si utilizzano, per ogni linea, le configurazioni di sensori ricavate in precedenza grazie al GA.

Da tali configurazioni si estrapolano, linea per linea, tutte le informazioni viste alla Sezione 4.4, che poi vanno messe insieme in un file .rpt ed utilizzate per condurre una seconda estrapolazione, stavolta sull'intera ala.

In sintesi, l'estrapolazione sull'ala è realizzata nuovamente inserendo in input le misurazioni rilevate sulle tre linee intere, solo che in questo caso queste informazioni sono a loro volta frutto dell'estrapolazione SEA applicata singolarmente alle 3 linee di fibra, utilizzando le configurazioni di sensori ricavate in precedenza.

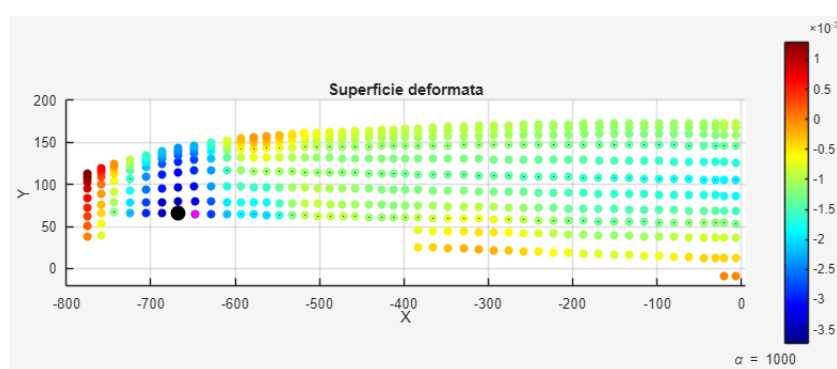


Figura 4.23: Campo di deformazioni ottenuto utilizzando, per ogni linea, la configurazione ottimale di sensori.

L'estrapolazione ottenuta, rappresentata in Figura 4.23 è a prima vista molto differente dalle due ottenute in precedenza.

Analizzando attentamente la colorbar, però, si può notare che, fatta eccezione per la zona in prossimità dell'applicazione del carico e le zone a ridosso del bordo di fuga, i valori sono coerenti con quelli visti in Figura 4.22 e 4.21.

Analizzando l'errore tra i due campi di deformazione, si ricava un RMSE% dell'11.94% rispetto alla distribuzione corretta degli strain, ottenuta tramite il FEM (Figura 4.21). Si deduce quindi che l'errore ottenuto utilizzando le linee estratte direttamente dal FEM, e quello ottenuto tramite la pre-estrapolazione delle linee di fibra sono molto simili tra loro, e ciò dimostra che, nonostante le linee fossero individualmente caratterizzate da errori non bassissimi, complessivamente la ricostruzione su una superficie più complessa risulta, seppur non estremamente precisa, comunque coerente con il fenomeno analizzato.

Anche in questo caso, il valore di  $\alpha = 1000$  osservabile in Figura, è conseguenza di un'ottimizzazione atta a ricavare il valore ottimale del parametro.

Si osserva inoltre che, se non si effettua la pre-estrapolazione delle linee, ma si inseriscono in input alla SEA esclusivamente le informazioni provenienti dalle tre configurazioni

di sensori individuate per le tre linee della superficie superiore, l'errore varia molto. Si ottiene infatti la distribuzione rappresentata in Figura 4.24 che, oltre ad essere caratterizzata da un errore molto più elevato dei precedenti (RMSE%  $\simeq 30\%$ ), non riesce neanche a cogliere la fisica del problema, generando un campo degli strain non compatibile con il fenomeno analizzato.

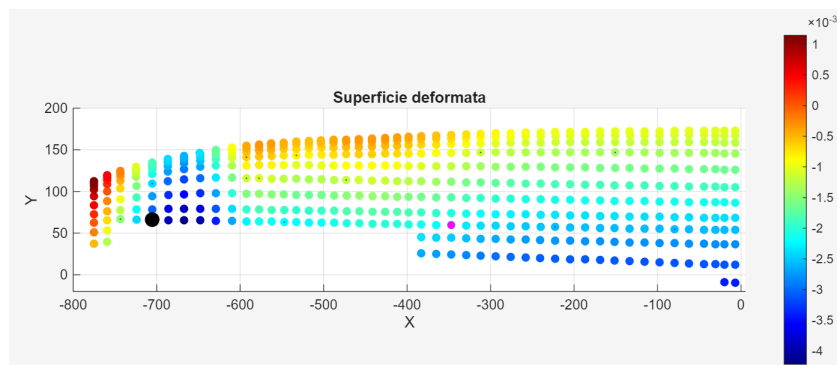


Figura 4.24: Estrapolazione ottenuta utilizzando esclusivamente le misure di  $\varepsilon_{xx}$  discrete

Anche in questo caso, la zona più critica risulta essere quella in prossimità del bordo di fuga.

### 4.6.3 Applicazione del GA all'ala intera

Come ultimo confronto, si applica l'algoritmo genetico, precedentemente utilizzato per le singole linee di fibra, all'intera superficie alare.

In input vengono fornite tutte le misurazioni ricavate dalle tre linee analizzate nel corso di questa sezione, per un totale di 135 misurazioni. Generazione dopo generazione, il GA mira a ridurre il numero di input necessari alla SEA, individuando al contempo una configurazione di sensori in grado di migliorare il risultato ottenuto nelle estrapolazioni precedenti.

Dopo diverse iterazioni, la configurazione migliore permette di ricavare i risultati mostrati in Figura 4.25:

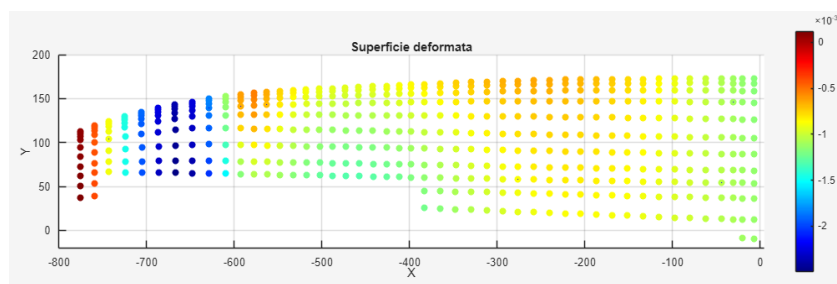


Figura 4.25: Estrapolazione ottenuta applicando il GA all'intera ala

Ancora una volta viene dimostrata l'utilità dell'algoritmo genetico: l'integrazione del GA all'interno della SEA consente una riduzione significativa del numero di sensori utilizzati rispetto all'estrapolazione precedente, passando da 17 a 8 misurazioni necessarie. L'errore, inoltre, non aumenta eccessivamente; l'RMSE% infatti risulta pari al 13,1%, confermando l'efficacia dell'algoritmo di ottimizzazione proposto.

Sebbene la valutazione dell'estrapolazione sull'intera superficie alare non rientri tra gli obiettivi principali della tesi, l'analisi del comportamento della SEA su superfici più complesse e con misurazioni distribuite in maniera meno regolare consente di mettere in evidenza l'utilità e le potenzialità del metodo.

Si è osservato che utilizzando le medesime misurazioni, effettuare o meno la pre-estrapolazione delle singole linee di fibra fa variare significativamente i risultati ottenuti, ottenendo errori molto maggiori quando non avviene la pre-applicazione della SEA.

Inoltre, si è dimostrato che l'applicazione del GA sull'intera superficie alare permette di ottenere risultati accettabili, riducendo il numero di misurazioni necessarie. Nonostante questo fenomeno permetta di comprendere quanto la SEA possa integrare efficacemente gli algoritmi di ottimizzazione genetici, il risultato ha comunque un significato limitato: se si disponesse a priori di tutte le misurazioni, tanto da poter applicare l'algoritmo genetico sulle tre linee di fibra, allora l'applicazione stessa della SEA sarebbe superflua, avendo già a disposizione le informazioni che verrebbero eventualmente estratte. L'ultima estrapolazione, che vedeva appunto l'applicazione del GA all'intera ala, è stata effettuata solo per effettuare un ulteriore confronto, al fine di comprendere ancora meglio il metodo analizzato.

È inoltre fondamentale sottolineare come, in ogni caso analizzato, gli errori ottenuti siano generalmente maggiori di quelli riscontrati per le singole linee di fibra.

Questo fenomeno è sicuramente legato alla maggiore complessità della superficie analizzata, ma anche a una limitazione intrinseca della SEA, dovuta a come essa viene formulata; infatti, la Smoothing Element Analysis è concepita per applicazioni su superfici piane, o dotate di curvature minime rispetto alle grandezze caratteristiche della struttura analizzata.

Nel caso analizzato, nonostante la curvatura non sia eccessiva, la sua presenza non può essere trascurata, e di conseguenza, le estrapolazioni ottenute sono meno affidabili rispetto a quelle ricavate per le singole linee, dove invece la curvatura della struttura poteva essere trascurata.

## 4.7 Confronto col modello reale

Nella Sezione 4.4 sono state effettuate diverse estrapolazioni utilizzando dati ricavati dal FEM, per determinare le varie configurazioni di sensori in grado di far diminuire il numero di rilevazioni effettuate, mantenendo allo stesso tempo una ricostruzione coerente con il campo di deformazioni analizzato.

È opportuno adesso effettuare un confronto tra i risultati ottenuti tramite il modello a elementi finiti e quelli ottenuti sperimentalmente in laboratorio, per verificare l'effettiva applicabilità della SEA a prove effettuate realmente e non tramite i codici commerciali

Patran & NASTRAN.

### 4.7.1 Analisi dei risultati sperimentali

Dopo aver effettuato la prova sperimentale seguendo le modalità descritte nella Sezione 4.1, si analizzano i risultati registrati dalla fibra.

L'output ottenuto è nel formato:

Tempo	Grandezza Misurata	P.1 fibra	P.2 fibra	...	P.N fibra
t	strain	$\varepsilon_{xx1}$	$\varepsilon_{xx2}$	...	$\varepsilon_{xxN}$

Dove con "*P.i* fibra" si intende la distanza, rispetto all'inizio della fibra, in cui avviene la misurazione, mentre con "*t*" l'istante di tempo in cui essa avviene.

Per comodità, si analizzerà esclusivamente la condizione di carico massimo, essendo essa caratterizzata da un carico praticamente statico, che non risente delle fluttuazioni tipiche del processo di carico/scarico.

Dal file .tsv ottenuto dalla fibra, si isola la riga relativa all'istante di tempo che caratterizza la condizione di carico desiderata e, successivamente, si associa a ogni misurazione della fibra (circa 11500 per ogni istante t) il relativo punto sulla superficie alare.

Il confronto è effettuato sulle stesse linee analizzate sul FEM, quindi, dopo aver capito a quale punto della fibra corrisponde ogni elemento della griglia costruita sulla superficie (osservabile nella Figura 4.4), si procede ad estrarre le misurazioni relative alle 6 linee viste precedentemente.

Per una corretta comprensione dei risultati mostrati in questa sezione, è importante ricordare che la convenzione riguardo la superficie superiore e inferiore è opposta rispetto a quella vista nel FEM.

Infatti, durante la prova sperimentale, l'ala è stata volutamente posizionata sottosopra, per andare a simulare un carico portante concentrato. Di conseguenza, quella che nel FEM veniva indicata come superficie inferiore, ovvero la superficie contraddistinta dall'apertura, sarà la superficie superiore dell'apparato sperimentale, e viceversa.

I profili di deformazione ottenuti sono:

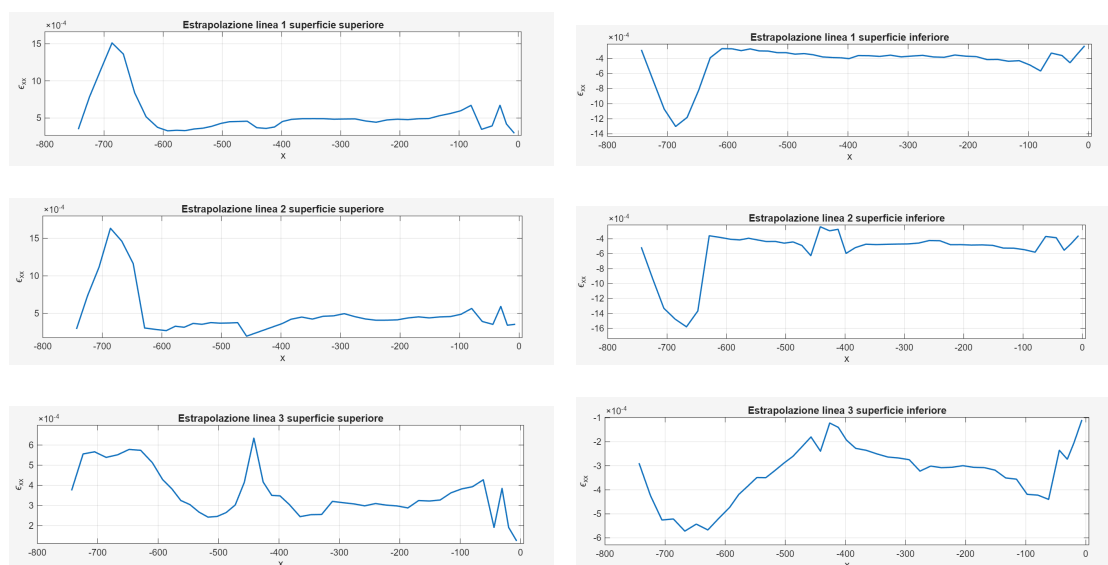


Figura 4.26: Deformazioni rilevate dalla fibra sulle 6 linee

Facendo riferimento alla Figura 4.26 si osservano i 6 campi di deformazione ricavati, in condizioni di pieno carico (2 kg), sulle 6 linee della superficie alare.

Le tre immagini sulla colonna a sinistra rappresentano la superficie superiore; per via della condizione di carico, tale superficie viene trazionata, infatti le deformazioni  $\epsilon_{xx}$  rilevate dalla fibra sono positive. Andando dall'alto verso il basso le immagini rappresentano rispettivamente la prima, la seconda e la terza linea di fibra (Figura 4.5).

La colonna di destra invece, rappresenta la superficie inferiore, che invece è caratterizzata da una compressione ( $\epsilon_{xx} < 0$ ).

Confrontando le immagini riportate in Figura 4.26 con quelle già descritte nella Sezione 4.4, relativa al FEM, si osserva che gli andamenti sono molto coerenti, il che permette di determinare la validità del modello a elementi finiti utilizzato.

## 4.7.2 Applicazione della SEA ai dati sperimentali

Si vuole adesso analizzare il comportamento della Smoothing Element Analysis applicata al caso sperimentale, verificando se le configurazioni di sensori ricavate sul FEM sono applicabili al caso reale ed eventualmente analizzare la qualità dell'estrapolazione ottenuta. Tale verifica è importante in quanto, seppur i campi di deformazione reali siano coerenti con il modello numerico, si osserva facilmente che essi sono caratterizzati da una distribuzione meno regolare, e che presenta un numero maggiore di fluttuazioni rispetto a quelle viste sul FEM. Questo comportamento potrebbe limitare l'applicabilità della SEA, o modificarne i risultati, essendo il metodo estremamente influenzato dalla distribuzione della funzione  $f(x)$  analizzata.

Prendendo per ogni linea analizzata, esclusivamente le misurazioni relative ai punti riportati nelle Tabelle dalla 4.1 alla 4.6, si ottengono le estrapolazioni riportate in Figura 4.27.

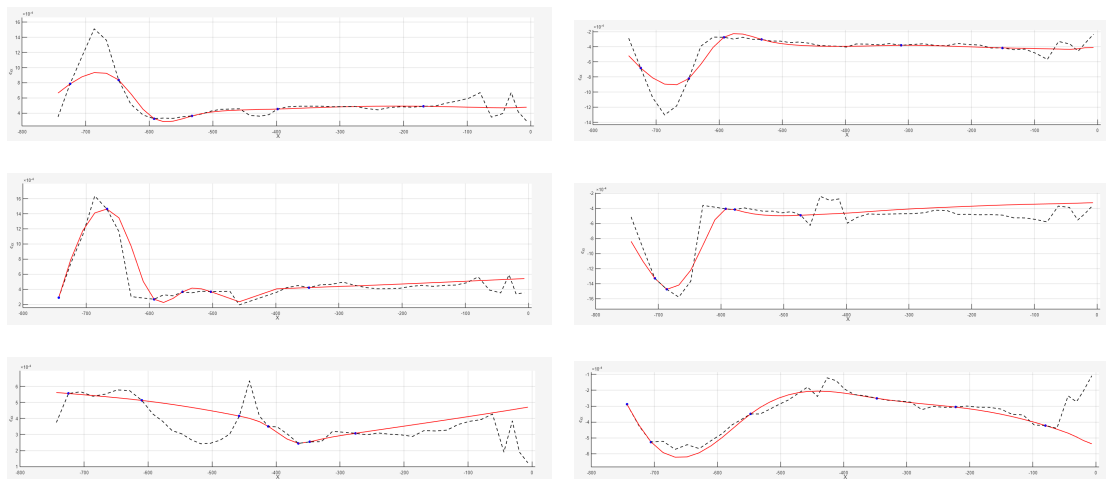


Figura 4.27: Estrapolazione SEA utilizzando la configurazione ottenuta dal FEM. L'estrapolazione SEA è rappresentata dalla linea rossa, i sensori utilizzati dai punti blu e il campo di deformazione corretto dalla linea tratteggiata nera

Per ogni rappresentazione grafica si può osservare l'andamento degli strain effettivo, rappresentato dalla linea tratteggiata nera, la posizione dei sensori utilizzati dalla SEA, in blu, e l'andamento dell'estrapolazione, rappresentato dalla linea continua rossa.

Analizzando i 6 andamenti si può osservare che:

- Le configurazioni dei sensori trovate per il FEM riescono ad approssimare bene anche gli strain ottenuti tramite la prova sperimentale. Per la superficie inferiore, l'estrapolazione è valida per tutte e tre le linee, mentre per la superficie superiore la SEA ottiene buoni risultati solo sulle prime due. Per la terza linea, probabilmente a causa del picco di  $\varepsilon_{xx}$  localizzato a circa  $x=-450$  mm, si ottiene un'estrapolazione che non coglie le caratteristiche dell'andamento analizzato.
- Come già visto per il FEM, tali disposizioni dei sensori tendono a sottostimare leggermente le deformazioni. Questo fenomeno è amplificato nelle prime linee di entrambe le superfici, in corrispondenza della zona di applicazione del carico.
- Valutando l'errore ottenuto nell'estrapolazione utilizzando sempre RMSE%, si ottengono i valori riportati in Tabella 4.8:

Linea	1 sup	2 sup	3 sup	1 inf	2 inf	3 inf
RMSE%	9,404	8,272	18,741	8,388	9,464	17,034

Tabella 4.8: Errori ottenuti dalla SEA

Tali errori, seppur elevati rispetto ai valori ottenuti per il FEM, sono comunque contenuti, considerando il fatto che la disposizione dei sensori non è stata ottenuta analizzando il fenomeno in questione, ma è stata trasportata dal modello numerico al modello sperimentale.

Nella sezione successiva si confronteranno i risultati appena descritti con quelli ottenuti tramite nuove configurazioni di elementi sensorizzati, ricavate mediante l'applicazione del medesimo algoritmo genetico, utilizzando stavolta il set di dati rilevato sperimentalmente.

### 4.7.3 Ottimizzazione dei sensori al caso sperimentale

Considerata l'inaccuratezza dell'estrapolazione sulla terza linea della superficie superiore, si riapplica l'algoritmo genetico, considerando stavolta in input direttamente i dati sperimentali. Nonostante i risultati ottenuti sulle altre linee risultino complessivamente accettabili, si eseguono ulteriori iterazioni del GA anche sul resto dell'ala, così da valutare il possibile incremento dell'accuratezza dell'estrapolazione e analizzare l'eventuale variazione delle nuove configurazioni ottimali dei sensori.

Si ottengono l'estrapolazione rappresentata in Figura 4.28:



Figura 4.28: Estrapolazione della prima linea superiore utilizzando la configurazione ottimale di sensori.

- Per la prima linea della superficie superiore, la disposizione ottimale ottenuta dal GA è una configurazione a 5 sensori. Tramite le misurazioni ricavate da essi, si ottiene un'estrapolazione con un RMSE% del 4,97

Poiché sia i risultati numerici che quelli sperimentali sono ottenuti a partire dai medesimi file .bdf, e quindi le posizioni dei sensori seguono gli stessi indici, è possibile confrontare l'ID dei sensori selezionati nelle due diverse configurazioni:

FEM (ID)	11	24	33	37	40	44
x coord	-168.7	-398.3	-532.7	-592.5	-648.2	-724.5
Sperimentale (ID)		21	34	40	42	44
x coord		-347.2	-547.6	-648.2	-686.5	-724.5

Tabella 4.9: Confronto tra la configurazione ottimale di sensori trovata sul FEM e quella ottenuta sperimentalmente per la prima linea della superficie superiore

Entrambe le configurazioni presentano un addensamento di misurazioni verso la punta dell'ala. Dato l'andamento molto regolare degli strain lungo la prima parte della linea, la configurazione ricavata sperimentalmente presenta un sensore in meno, andando difatti a eliminare la misurazione che nel FEM serviva ad estrapolare la prima parte della curva.

Nonostante il numero di input sia minore, l'errore diminuisce, quasi dimezzandosi, rendendo l'estrapolazione SEA ottenuta utilizzando la configurazione ricavata tramite i dati sperimentali ad essere globalmente migliore rispetto a quella vista in Figura 4.27.

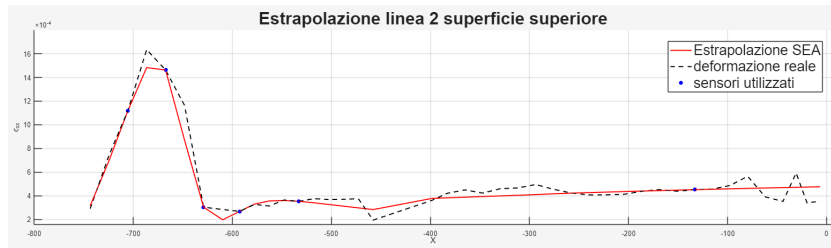


Figura 4.29: Estrapolazione della seconda linea superiore utilizzando la configurazione ottimale di sensori.

- La seconda linea della superficie superiore, rappresentata in Figura 4.29, è rappresentata tramite un'estrapolazione ottenuta utilizzando 6 sensori. L'RMSE% ottenuto è del 4,66%.

Come per la linea precedente, si confrontano le due configurazioni:

FEM (ID)	21	28	31	34	38	42
x coord	-347.3	-502.7	-547.6	-592.5	-667.3	-743.4
Sperimentale (ID)	9	30	34	36	38	40
x coord	-133.3	-532.6	-592.5	-628.9	-667.3	-705.5

Tabella 4.10: Confronto tra la configurazione ottimale di sensori trovata sul FEM e quella ottenuta sperimentalmente per la seconda linea della superficie superiore

In questo caso si ottiene un risultato opposto a quanto visto per la linea analizzata in precedenza; stavolta infatti, la configurazione ottenuta tramite gli strain sperimentali presenta un sensore vicino all'incastro, mentre la configurazione ottenuta con i dati numerici è composta solo da sensori distribuiti tra la metà e la fine della linea. Nonostante questa differenza, entrambe le configurazioni sono composte dallo stesso numero di sensori, ed eccezion fatta per il primo della configurazione sperimentale, entrambe presentano misurazioni molto dense verso il tip dell'ala. L'errore diminuisce in maniera significativa, utilizzando il medesimo numero di informazioni in entrambi i casi.



Figura 4.30: Estrapolazione della terza linea superiore utilizzando la configurazione ottimale di sensori.

- Per la terza linea della superficie superiore (Figura 4.30), si ottiene una configurazione a 8 sensori con un RMSE% pari a 8,42%. La ricostruzione degli strain è estremamente più precisa di quella vista in precedenza (Figura 4.27), e si ottiene un andamento delle deformazioni coerente con quello ricavato sperimentalmente. Nonostante ciò il picco massimo di strain non viene rilevato, e nuovamente, seppur solo localmente, le deformazioni vengono sottostimate. I sensori utilizzati nei 2 casi hanno ID pari a:

FEM (ID)		17	21	22	25	28	38	44
x coord		-275.9	-347.3	-365.1	-412.0	-457.4	-609.7	-724.3
Sperimentale (ID)	2	9	18	22	26	29	43	45
x coord	-19.9	-133.2	-293.8	-365.1	-426.2	-472.4	-705.2	-743.3

Tabella 4.11: Confronto tra la configurazione ottimale di sensori trovata sul FEM e quella ottenuta sperimentalmente per la terza linea della superficie superiore

In questo caso, contrariamente a quanto visto per le altre linee della superficie superiore, le configurazioni ottenute utilizzando i due diversi set di dati sono differenti. Tramite i dati ricavati dalla FEA si era ottenuta una distribuzione di sensori localizzata principalmente al centro della linea, mentre, utilizzando gli strain sperimentali, la configurazione ottimale risulta avere una distribuzione molto più uniforme dei dati forniti in input.

Questa differenza è sicuramente legata all'andamento degli strain, che rispetto al FEM (Figura 4.16), è molto meno "liscio" e presenta un punto di cuspidè assente

nel campo ottenuto tramite il modello numerico. Tale differenza fa sì che le deformazioni, che in Figura 4.27 erano estrapolate in maniera profondamente errata, siano approssimate tramite una curva molto più coerente con il campo analizzato, portando l'errore a diminuire molto, al costo di un sensore aggiuntivo.



Figura 4.31: Estrapolazione della prima linea inferiore utilizzando la configurazione ottimale di sensori.

- Per la prima linea della superficie inferiore (Figura 4.31) si ottiene una configurazione ottimale a 5 sensori, che genera un'extrapolazione con un RMSE% del 3,94%. Confrontando l'ID dei sensori selezionati nelle due diverse configurazioni:

FEM (ID)	10	19	33	37	40	44
x coord	-150.9	-311.6	-532.7	-592.5	-648.2	-724.5
Sperimentale (ID)		28	37	39	42	43
x coord		-458.0	-592.5	-628.9	-686.5	-705.5

Tabella 4.12: Confronto tra la configurazione ottimale di sensori trovata sul FEM e quella ottenuta sperimentalmente per la prima linea della superficie inferiore

Come si intuisce osservando la tabella, entrambe le configurazioni presentano un addensamento di misurazioni verso la punta dell'ala.

Nonostante configurazione ricavata dal FEM sia composta da un sensore in più, applicando nuovamente l'algoritmo genetico ai dati sperimentali si ottiene una configurazione migliore, che riduce l'errore (da 8,39% a 3,94%) e diminuisce il numero di sensori necessari.

- Dalla Figura 4.32 si possono osservare i risultati relativi alla seconda linea della superficie inferiore. Osservando i punti blu si ricava che la configurazione ottimale è composta da 6 sensori che genera un'extrapolazione con un RMSE% del 6,4%. Si confrontano i risultati tra le due estrapolazioni:

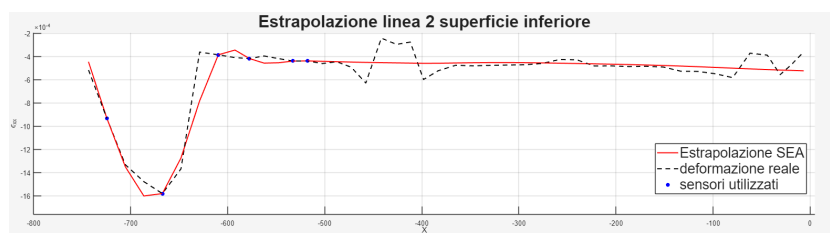


Figura 4.32: Estrapolazione della seconda linea inferiore utilizzando la configurazione ottimale di sensori.

FEM (ID)		29	36	37	42	43
x coord		-472.7	-577.5	-592.5	-686.4	-705.4
Sperimentale (ID)	32	33	36	38	41	44
x coord	-517.6	-532.6	-577.5	-609.6	-667.3	-724.4

Tabella 4.13: Confronto tra la configurazione ottimale di sensori trovata sul FEM e quella ottenuta sperimentalmente per la seconda linea della superficie inferiore

Come per la linea precedente si ottiene un'estrapolazione caratterizzata da un RMSE% minore, a costo però di un sensore aggiuntivo. Il passaggio dell'errore dal 9,5% al 6,4% giustifica l'aumento delle misurazioni fornite in input.

Anche in questo caso si osserva un addensamento delle misurazioni verso l'estremità dell'ala.

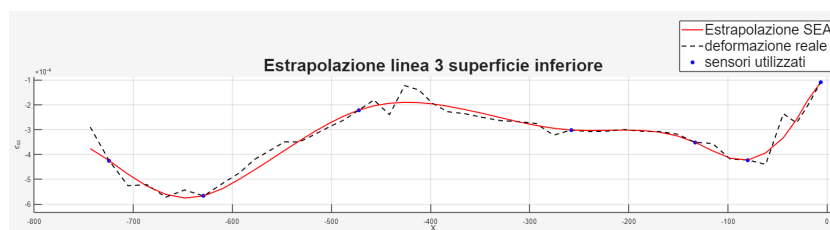


Figura 4.33: Estrapolazione della terza linea inferiore utilizzando la configurazione ottimale di sensori.

- La terza linea della superficie inferiore (Figura 4.33) è caratterizzata da una configurazione composta da 7 sensori che genera un'estrapolazione con un RMSE% del 5,35%.

Nonostante l'errore sia basso, la SEA non è in grado di ottenere un profilo continuo che rappresenti tutte le caratteristiche tipiche del campo reale; infatti, i massimi e il minimo presenti al centro della linea sono approssimati in maniera molto meno precisa rispetto al resto della superficie. Ciò è una conseguenza naturale dell'andare a

ridurre notevolmente le misure da fornire in input, e si osservava il medesimo comportamento anche nelle prove effettuate sul modello FEM. Nuovamente, si confrontano le due configurazioni analizzate:

FEM (ID)		6	14	21	34	43	45
x coord		-79.8	-222.5	-347.3	-547.4	-705.3	-743.3
Sperimentale (ID)	1	6	9	16	29	39	44
x coord	-6.6	-79.8	-133.3	-258.1	-472.3	-628.9	-724.3

Tabella 4.14: Confronto tra la configurazione ottimale di sensori trovata sul FEM e quella ottenuta sperimentalmente per la terza linea della superficie inferiore

Come già visto per la terza linea della superficie superiore, la disposizione ottimale dei sensori è leggermente diversa per i due casi; analizzando il FEM, il GA aveva selezionato dei sensori distribuiti in maniera quasi uniforme sulla superficie analizzata, mentre, fornendo all’algoritmo i dati ricavati sperimentalmente, la distribuzione presenta una densità maggiore di sensori verso l’incastro.

Tale differenza è riconducibile alla distribuzione delle deformazioni rilevate nei due casi: sebbene i campi risultino, come discusso in precedenza, estremamente simili, al punto da osservare lungo il centro della linea il susseguirsi massimo–minimo–massimo già evidenziato (Figura 4.16), le deformazioni presentano comunque differenze, in particolare in corrispondenza degli estremi dell’ala.

Per questo motivo, l’algoritmo richiede un numero maggiore di misurazioni in prossimità delle zone critiche, le quali, a differenza di quanto osservato nel modello FEM, mostrano nel caso sperimentale andamenti meno regolari.

#### 4.7.4 Conclusioni

La Smoothing Element Analysis riesce ad ottenere estrapolazioni valide utilizzando dati provenienti sia da modelli a elementi finiti, sia da prove sperimentali. I primi spesso sono contraddistinti da andamenti più regolari, mentre i secondi presentano spesso fluttuazioni o picchi inaspettati, fenomeni estremamente legati sia alla prova che agli strumenti utilizzati per rilevare le deformazioni.

Effettuare una simulazione preliminare di una prova sperimentale utilizzando la FEA può essere utile per fornire una previsione sul campo degli strain atteso e, applicando la SEA, è possibile verificare l’applicabilità del metodo ed avere una stima del suo grado d’accuratezza, prima di effettuare effettivamente la prova sul modello reale.

Nonostante ciò, le conclusioni ottenute grazie al modello non si trasportano interamente sui risultati sperimentali, ed è sempre opportuno effettuare nuovamente degli studi per comprendere a pieno l’influenza di ogni parametro.

Nel caso in analisi infatti, ricercando nuovamente le configurazioni migliori di sensori, si è ottenuto un netto miglioramento delle prestazioni del metodo (Tabella 4.15):

Linea	1 sup	2 sup	3 sup	1 inf	2 inf	3 inf
RMSE% sensori FEM	9,404	8,272	18,741	8,388	9,464	17,034
RMSE% sensori nuovi	3,947	6,400	5,351	4,968	4,661	8,415

Tabella 4.15: Evoluzione dell'errore riapplicando il GA

Nonostante i risultati migliorino notevolmente, è opportuno sottolineare che, lo scopo principale del metodo è proprio quello di ridurre al minimo i sensori utilizzati. Qualora si disponesse di un numero di misurazioni sperimentali tale da poter riapplicare l'algoritmo genetico, applicare la SEA avrebbe poco senso, in quanto si disporrebbe già di una grande quantità di informazioni corrette.

Il confronto effettuato in questa sezione vuole infatti evidenziare che, per quanto la prova sperimentale possa essere approssimata bene tramite gli elementi finiti, è probabile che, come conseguenza di piccole differenze tra i campi di strain, le configurazioni ottimali di sensori siano differenti. Applicare al modello sperimentale le conclusioni ricavate sul FEM, porta però a dei risultati comunque soddisfacenti, seppur essi non siano caratterizzati dall'errore minimo ricavabile, ottenuto appunto in questa sezione.

Il numero di sensori utilizzato è però quasi identico per entrambe le configurazioni analizzate. Nella Tabella 4.16 vengono paragonati i sensori utilizzati nelle due configurazioni rispetto al numero totale di deformazioni estrapolate; il risparmio percentuale è estremamente simile nei due casi, il che evidenzia come, anche utilizzando la configurazione ottenuta dai dati numerici, si ottenga comunque un risparmio importante in termini di sensori necessari per la ricostruzione di un campo degli strain continuo.

Linea	1 sup	2 sup	3 sup	1 inf	2 inf	3 inf	Tot
N.ro di $\varepsilon_{xx}$ estrapolate	45	42	45	45	45	45	267
N.ro sensori FEM	6	6	7	6	5	6	36
Perc. di sensori utilizzati [%]	13.33	14.29	15.56	13.33	11.11	13.33	13.48
N.ro sensori nuovi	5	6	8	5	6	7	37
Perc. di sensori utilizzati [%]	11.11	14.29	17.78	11.11	13.33	15.56	13.86

Tabella 4.16: Evoluzione del numero di sensori ottimali riapplicando il GA

## 4.8 Applicazione e valutazione dell'iFEM

In questa sezione si vuole analizzare la compatibilità della SEA con il metodo agli elementi finiti inverso, introdotto precedentemente nella Sezione 2.1.

Utilizzando le deformazioni ricavate in laboratorio, si effettuerà l'estrapolazione degli strain linea per linea e, successivamente, si valuterà l'errore tra gli spostamenti ottenuti tramite l'iFEM e quelli misurati, durante la prova sperimentale, dai sensori laser (Figura 4.6).

Come fatto nella Sezione 4.7.3, si effettueranno due analisi diverse:

- Inizialmente, si effettuerà una prima estrapolazione utilizzando la configurazione ottimale di sensori ricavata dai dati numerici. I campi di deformazioni ottenuti sulle 6 linee (Figura 4.27) saranno poi utilizzati come input dell'iFEM per ottenere lo spostamento.
- la seconda applicazione dell'iFEM sarà identica alla prima, solo che l'estrapolazione iniziale tramite la SEA utilizzerà la configurazione ottimale di sensori ricavata direttamente sui dati sperimentali. In questo modo è possibile effettuare il confronto tra i due spostamenti ricavati, valutando l'accuratezza di entrambe le configurazioni di sensori, come si è fatto precedentemente per il campo degli strain.

Per completezza si valuterà anche l'applicazione dell'iFEM sfruttando le 6 linee di fibra per intero, in modo da valutare la precisione dell'iFEM quando esso non prevede la pre-applicazione della SEA.

### 4.8.1 Rilevazioni sperimentali e iFEM con 6 linee di dati

Tramite l'utilizzo dell'apparato sperimentale descritto precedentemente, si è in grado di rilevare gli spostamenti nei 2 punti dell'ala rappresentati in Figura 4.7. Facendo riferimento all'immagine, e indicando con  $d_1$  lo spostamento in prossimità del tip e con  $d_2$  quello più distante dall'estremità alare, si ottengono, applicando un carico pari a 2 kg, i seguenti spostamenti:

$$d_1 = 18.50 \text{ mm} \quad d_2 = 12.50 \text{ mm}$$

Per valutare l'accuratezza dell'iFEM, senza considerare, in un primo momento la SEA, applichiamo il metodo utilizzando un codice scritto in MATLAB.

Fornendo in input tutte le misurazioni ricavate dalle 6 linee, disposte su entrambe le superfici della struttura si ottiene il campo degli spostamenti rappresentato in Figura 4.34:

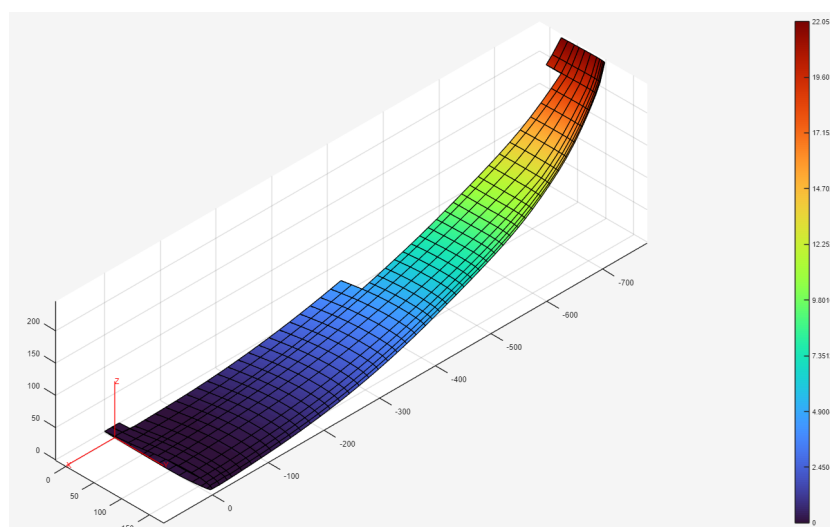


Figura 4.34: Plot degli spostamenti ottenuti con l'iFEM

Per interpretare in maniera corretta l'andamento rappresentato, è opportuno ricordare che il modello FE dell'ala è ribaltato rispetto al modello reale; la faccia superiore del FEM corrisponde alla faccia inferiore dell'apparato sperimentale.

In corrispondenza dei punti studiati sperimentalmente, si registrano spostamenti pari a quelli riportati nella Tabella 4.17:

	Sperimentale [mm]	iFEM [mm]	Err. Perc. [%]
$d_1$	18.50	18.260	-1.30
$d_2$	12.40	12.077	-3.17

Tabella 4.17: Misure iFEM e rispettivo errore percentuale

Come si evince dalla Tabella 4.17, il metodo permette di ricavare una misura accurata, considerando l'utilizzo di una quantità di informazioni comunque limitata rispetto alle misurazioni ricavate sull'intera ala.

Noti i valori che possono essere assunti come corretti, si procede ad effettuare le due applicazioni dell'iFEM introdotte in precedenza.

## 4.8.2 Utilizzo della configurazione ottimale di sensori

Come anticipato all'inizio della sezione, il confronto si concentrerà su due diverse configurazioni di sensori, analogamente a quanto fatto per l'estrapolazione delle deformazioni tramite la SEA.

Utilizzando la configurazione ottimale dei sensori ottenuta dai dati numerici, si effettua

l'estrapolazione SEA delle 6 linee di fibra viste nel corso delle sezioni precedenti. Le deformazioni ricavate, vengono inserite all'interno di un unico file che, dato in input al programma atto ad effettuare l'analisi iFEM [13], permette di ottenere l'andamento degli spostamenti mostrato in Figura 4.35:

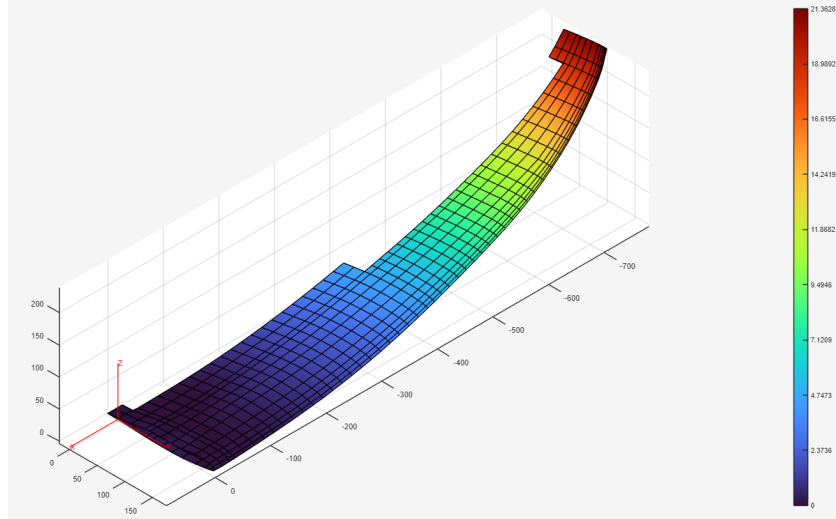


Figura 4.35: Spostamenti ottenuti dall'iFEM utilizzando la configurazione ottimale ricavata sul FEM

L'andamento è estremamente simile a quello ricavato sfruttando per intero le rilevazioni della fibra; i risultati ottenuti sono infatti:

$$d_1 = 17.370 \text{ mm} \quad d_2 = 11.689 \text{ mm}$$

Se invece l'iFEM viene applicato sfruttando, durante l'applicazione della SEA, la configurazione ottimale di sensori ricavata direttamente sui dati sperimentali, si ottengono gli spostamenti riportati in seguito:

$$d_1 = 18.435 \text{ mm} \quad d_2 = 12.129 \text{ mm}$$

L'andamento degli spostamenti è del tutto coerente con quello già riportato in Figura 4.35.

Confrontando gli spostamenti ottenuti con quelli misurati sperimentalmente, si ottengono gli errori mostrati in Tabella 4.18:

	Conf. FEM [mm]	E.P. [%]	Conf. Ottimale [mm]	E.P. [%]	$d$ speriment.
$d_1$	17.370	-6.11	18.435	-0.55	18.50
$d_2$	11.689	-5.73	12.129	-2.19	12.40

Tabella 4.18: Errori percentuali per le due diverse applicazioni dell'iFEM e della SEA

Osservando i risultati ottenuti si evince che l'applicazione dell'iFEM, coadiuvata dalla pre-estrapolazione della SEA, permette di ottenere spostamenti realistici che sono coerenti con il fenomeno analizzato.

Utilizzando la configurazione ottimale di sensori ricavata dal FEM, quindi realisticamente l'unica configurazione di cui si disporrebbe qualora non fossero disponibili dati sperimentali, si ottengono errori superiori rispetto a quelli ottenuti utilizzando le fibre per intero (Tabella 4.17), ma utilizzando complessivamente un numero di misurazioni molto inferiore. Grazie alla pre-estrapolazione SEA infatti, il numero di misurazioni necessarie ad ottenere il risultato scende da 267 (6 fibre utilizzate per intero) a 36, a costo di un errore minore del 7%, che, considerando la complessità della prova sperimentale analizzata, è assolutamente accettabile.

Osservando invece il risultato ottenuto pre-estrapolando tramite l'utilizzo della configurazione ottimale di sensori ricavata direttamente sui dati sperimentali, si osservano risultati molto migliori. Questa differenza è sicuramente una conseguenza del fatto che, come già visto in Figura 4.27, la SEA, soprattutto in corrispondenza della terza linea superiore, ottiene un campo delle deformazioni molto più coerente di quello ottenuto tramite la configurazione FEM 4.30). La mancanza di tale errore nell'estrapolazione, porta ad un risultato dell'iFEM più accurato.

Il fatto che questa configurazione interpretasse meglio gli spostamenti, come avveniva anche per le deformazioni, era prevedibile, utilizzando una pre-estrapolazione studiata ad hoc, si verifica tuttavia un altro fenomeno particolare: questi risultati, risultano essere ancora più accurati di quelli assunti come corretti a priori, ottenuti tramite l'applicazione esclusiva dell'iFEM ai dati raccolti interamente dalle fibre.

Sebbene sia controintuitivo che una funzione estrapolata fornisca risultati migliori della funzione che si voleva estrapolare, il fenomeno è in realtà del tutto sensato; può infatti capitare che, l'inaccuratezza dell'estrapolazione data dalla SEA, vada ad introdurre un'inaccuratezza tale sui dati utili all'iFEM da migliorarne i risultati, ottenendo effettivamente spostamenti ancora più vicini a quelli registrati sperimentalmente di quelli ottenuti senza estrapolazione [14]. Naturalmente, questo avvenimento è casuale, infatti si registra sovente anche un comportamento opposto, ovvero che l'errore prodotto dalla SEA si propaghi portando a risultati iFEM significativamente peggiori.

## Capitolo 5

# Considerazioni finali e sviluppi futuri

Nel corso di questo lavoro di tesi è stata analizzata e implementata la Smoothing Element Analysis per la ricostruzione di campi di deformazione continui a partire da misurazioni discrete. Dopo una fase iniziale di definizione teorica del metodo e della sua formulazione, è stato sviluppato un codice in grado di applicare la SEA a strutture bidimensionali.

Il metodo è stato quindi validato su due casi semplici (Sezione 3.4 e 3.5), al fine di valutarne l'accuratezza e analizzarne la sensibilità rispetto ai vari parametri in input.

Successivamente la SEA è stata applicata al caso d'interesse della tesi: una superficie alare.

Il metodo è stato applicato alla struttura inizialmente in ambiente numerico, utilizzando input provenienti dal FEM, e successivamente su dati sperimentali, al fine di verificare l'accuratezza dell'estrapolazione nei due casi.

Infine, è stata investigata l'integrazione della SEA con l'iFEM, dimostrando come la combinazione dei due metodi consenta di ottenere informazioni più complete sul comportamento strutturale, quali gli spostamenti, a partire dalle deformazioni misurate.

Nel corso della tesi, la Smoothing Element Analysis si è dimostrata uno strumento efficace e versatile, in grado di ottenere buoni risultati sia su modelli numerici che su dati sperimentali. Il metodo possiede inoltre un ampio campo di applicazione; nonostante in questa tesi sia stata utilizzata esclusivamente per l'estrapolazione di deformazioni su superfici bidimensionali, la SEA può essere adoperata anche per ottenere distribuzioni di una generica funzione  $f(x)$ , come nel caso dei gradienti di temperatura.

La capacità di ottenere un campo continuo di misurazioni a partire da un insieme discreto di esse permette inoltre di adoperare, a seconda dell'obiettivo dello studio condotto, una gamma più ampia di sensori; infatti, sarebbe possibile sostituire alla fibra a scattering di Rayleigh, per esempio, dei semplici estensimetri che, seppur forniscano misure puntuali e non continue, sono molto meno disturbati dalla dinamicità delle prove di carico.

Il metodo ha dimostrato inoltre una grande integrabilità con l'iFEM; unendo i due metodi,

che hanno principi di funzionamento simili, è stato possibile, a partire dalla grande mole di dati prodotta dalla SEA, ricavare gli spostamenti dell'ala, ottenendo errori contenuti.

Naturalmente anche questo metodo presenta dei problemi:

- Risulta essere estremamente dipendente dal fenomeno analizzato, la coerenza dei risultati non è sempre garantita e talvolta può portare a estrapolazioni che non rispecchiano assolutamente il vero comportamento della struttura. Per questo motivo, è opportuno utilizzare la SEA per prove di carico relativamente semplici, o comunque già note, così da avere una consolidata conoscenza pregressa del fenomeno.
- Non esiste una regola precisa per ricavare la configurazione ottimale di misurazioni da inserire in input. Ciò rende necessarie analisi preliminari, tipicamente su modelli numerici, per individuare disposizioni plausibili dei sensori. Durante l'analisi della struttura alare, il problema è stato affrontato implementando, all'interno del processo di estrapolazione, un algoritmo di ottimizzazione genetico, il quale ha permesso di esplorare un gran numero di configurazioni e selezionare quelle più accurate. È stato inoltre osservato che le configurazioni ottimali individuate in ambiente numerico, forniscono risultati accettabili anche se applicate ai dati sperimentali, pur non risultando strettamente ottimali.
- Il metodo è influenzato da numerosi parametri. Il parametro  $\alpha$ , la densità della mesh triangolare utilizzata per effettuare l'estrapolazione e l'entità delle grandezze analizzate sono tutti elementi che modificano profondamente i risultati ottenuti tramite la SEA.

Anche in questo caso il problema legato all'influenza di  $\alpha$  è stato risolto sia tramite studi preliminari, sia tramite l'integrazione del parametro all'interno dell'algoritmo genetico. Sebbene ciò comporti un aumento del costo computazionale del processo, implementare la variazione di  $\alpha$  all'interno del GA permette di ottenere il valore ottimale del parametro, oltre a delle configurazioni di sensori ulteriormente ottimizzate e accurate.

Per quanto riguarda la mesh SEA, i risultati ottenuti hanno permesso di determinare che utilizzando mesh triangolari di tipo cross-pattern e caratterizzate da una maggiore uniformità degli elementi, si ottengono estrapolazioni più accurate.

Note le criticità del metodo, è possibile individuare sviluppi futuri in grado di estendere e migliorare l'applicabilità della SEA. In primis, per ottenere un metodo più stabile e facilmente prevedibile, si potrebbero ricercare delle regole empiriche per determinare a priori i valori ottimali dei parametri in input, riducendo la necessità di effettuare le numerose analisi preliminari sviluppate durante la tesi, e rendendo la SEA un processo più immediato e meno dipendente dalle scelte effettuate. Questo potrebbe permettere, a partire da una conoscenza approfondita del sistema analizzato, di determinare a priori le variabili come  $\alpha$  o la mesh triangolare utilizzata.

Un'applicazione innovativa del metodo potrebbe essere sviluppata integrando alla SEA altri metodi d'analisi strutturale. I risultati ottenuti combinando SEA e iFEM mostrano come si possa passare, in maniera efficace, dal campo di deformazione agli spostamenti

della struttura.

Di conseguenza, si potrebbe pensare di estendere l'applicazione del metodo, accoppiando la SEA a metodi di identificazione delle proprietà dei materiali, al fine di stimare le proprietà meccaniche di una struttura a partire dal campo degli strain. Questo approccio risulterebbe particolarmente utile per l'analisi delle strutture composite, per le quali la determinazione sperimentale delle proprietà è spesso complessa.

Oppure, si potrebbe pensare di estendere il metodo applicandolo alla rilevazione in tempo reale delle deformazioni: tramite una griglia pre-individuata di sensori, sarebbe possibile estrarre delle misurazioni, espanderle tramite la SEA, e, applicando l'iFEM, analizzare in tempo reale gli spostamenti della struttura analizzata.

Così facendo, si potrebbe essere in grado, tra le altre cose, di valutare il comportamento delle strutture in fase di testing, invece che analizzarle a posteriori, per capire in tempo reale quali sono i carichi o le condizioni al contorno che portano a comportamenti critici della struttura, ed agire su di essa di conseguenza.

# Bibliografia

- [1] Stefan Keil. *Technology and practical use of strain gages: with particular consideration of stress analysis using strain gages*. John Wiley & Sons, 2017.
- [2] Yun Jiang Rao. *Fiber bragg grating sensors: principles and applications*. 1998.
- [3] Valerii Matveenko and Grigorii Serovaev. Distributed strain measurements based on rayleigh scattering in the presence of fiber bragg gratings in an optical fiber. In *Photonics*, volume 10, page 868. MDPI, 2023.
- [4] Marco Esposito, Matteo Sorrenti, and Marco Gherlone. Experimental shape sensing of a wing structure using ssb-ifem: Static assessment and dynamic wind tunnel test. *Measurement*, 265:120354, 2026.
- [5] Vincenzo Biscotti, Marco Esposito, and Marco Gherlone. A new single sensor based ifem formulation for shape-sensing of thin-walled structures instrumented with single-sided sensor configurations: Formulation, numerical assessment, and experimental validation. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 232:112700, 2025.
- [6] L. Colombo, C. Sbarufatti, and M. Giglio. Definition of a load adaptive baseline by inverse finite element method for structural damage identification. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 120:584–607, 2019.
- [7] Adnan Kefal, Erkan Oterkus, Alexander Tessler, and Jan L. Spangler. A quadrilateral inverse-shell element with drilling degrees of freedom for shape sensing and structural health monitoring. *Engineering Science and Technology, an International Journal*, 19(3):1299–1313, 2016.
- [8] Alexander Tessler, H.Ronald Riggs, Colin E. Freese, and Geoffrey M. Cook. An improved variational method for finite element stress recovery and a posteriori error estimation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 155(1):15–30, 1998.
- [9] A Tessler, H.R Riggs, and S.C Macy. A variational method for finite element stress recovery and error estimation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 111(3):369–382, 1994.

- [10] Daniele Oboe, Luca Colombo, Claudio Sbarufatti, and Marco Giglio. Comparison of strain pre-extrapolation techniques for shape and strain sensing by ifem of a composite plate subjected to compression buckling. *Composite Structures*, 262:113587, 2021.
- [11] The MathWorks Inc. Genetic algorithm options, 2025. Version 25.2 (R2025b).
- [12] D Hakimi, D.O. Oyewola, Y Yahaya, and G Bolarin. Comparative analysis of genetic crossover operators in knapsack problem. *Journal of Applied Sciences and Environmental Management*, 20(3):593–596, Nov. 2016.
- [13] Dimoss – displacement monitoring using strain sensors, 2026. Software di monitoraggio strutturale basato sul metodo dell’iFEM.
- [14] Marco Esposito. Strain pre-extrapolation methods for shape sensing: A comparative study between modal virtual sensor expansion and smoothing element analysis. *Results in Engineering*, 29:109109, 2026.