



**Politecnico  
di Torino**

**Politecnico di Torino**

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

A.a. 2025/2026

Sessione di Laurea Marzo 2026

# **Ottimizzazione di costellazioni per la navigazione lunare**

Relatori:

Lorenzo Casalino

Candidati:

Davide Igor Tonus



*Ai miei genitori,  
Alessandra e Giuseppe,  
che mi sostengono da sempre.*



---

## Sommario

Il presente lavoro di tesi affronta il problema della progettazione di una costellazione satellitare per la navigazione nella regione del Polo Sud lunare, con l'obiettivo di garantire un servizio di posizionamento continuo e accurato a supporto delle future missioni di esplorazione. Nel contesto del crescente interesse delle agenzie spaziali e di iniziative infrastrutturali come il programma *Moonlight* dell'ESA, lo studio mira a individuare architetture orbitali che massimizzino la qualità del servizio offerto agli utenti al suolo.

La definizione della costellazione è stata formulata come un problema di ottimizzazione globale con vincoli sui parametri orbitali. La funzione obiettivo è stata definita per garantire, da un lato, la copertura ininterrotta dei punti di interesse e, dall'altro, la minimizzazione della Diluizione Geometrica della Precisione (GDOP), assunta come misura sintetica dell'accuratezza del posizionamento. Per esplorare l'ampio spazio delle soluzioni sono state confrontate diverse metaeuristiche, in particolare l'algoritmo genetico e l'ottimizzazione con sciame di particelle, evidenziando come quest'ultima risulti più efficace nel raggiungere minimi di costo migliori in tempi computazionali ridotti.

L'analisi numerica considera molteplici configurazioni orbitali, caratterizzate da diverso numero di satelliti e piani, nonché da vincoli sulla geometria: dalle orbite kepleriane, alle configurazioni a fasatura relativa vincolata (*phased*), fino alle orbite ellittiche lunari congelate (ELFO). In ambiente imperturbato emergono costellazioni capaci di mantenere una copertura costante e contenere i picchi di GDOP entro valori compatibili con un servizio di navigazione di alta qualità.

In una fase successiva, le costellazioni ottime sono state propagate con un modello dinamico ad alta fedeltà che include il campo gravitazionale irregolare lunare e le perturbazioni di Sole e Terra. Questo ha permesso di quantificare il degrado delle prestazioni al crescere del tempo di missione e di valutare l'impatto delle effemeridi sull'accuratezza complessiva. I risultati mettono in evidenza la necessità di integrare esplicitamente la dinamica perturbata e le strategie di mantenimento dell'orbita nei futuri studi di ottimizzazione, al fine di progettare costellazioni intrinsecamente più robuste e sostenibili nel lungo periodo.



# Indice

<b>Sommario</b>	<b>5</b>
<b>Elenco degli acronimi</b>	<b>13</b>
<b>1 Introduzione</b>	<b>15</b>
1.1 Obiettivo della tesi . . . . .	17
1.2 Panoramica della Tesi . . . . .	17
<b>2 Fondamenti di Meccanica Orbitale</b>	<b>19</b>
2.1 Sistemi di riferimento e coordinate . . . . .	19
2.1.1 Sistemi di riferimento non rotanti . . . . .	19
2.1.2 Sistemi di riferimento rotanti e topocentrici . . . . .	20
2.1.3 Sistemi di coordinate . . . . .	20
2.2 Il problema dei due corpi . . . . .	22
2.2.1 Costanti del moto . . . . .	23
2.2.2 Leggi di Keplero . . . . .	23
2.2.3 Equazione della traiettoria . . . . .	24
2.2.4 Elementi orbitali classici . . . . .	24
2.3 Il problema di Keplero . . . . .	26
2.3.1 Equazione di Keplero . . . . .	27
2.4 Orbite lunari perturbate . . . . .	27
2.4.1 Orbite ELFO (Eccentric Lunar Frozen Orbits) . . . . .	28
<b>3 Diluizione di precisione</b>	<b>31</b>
3.1 Determinazione della posizione . . . . .	31
3.1.1 Calcolo della distanza satellite-utente . . . . .	31
3.1.2 Calcolo della posizione dell'utente . . . . .	32
3.2 Definizione delle DOP . . . . .	34
3.3 Geometria della costellazione ideale . . . . .	36
3.4 Implementazione dell'algoritmo . . . . .	37
3.4.1 Calcolo della visibilità . . . . .	37
<b>4 Problema di ottimizzazione</b>	<b>39</b>
4.1 Ottimizzazione Globale . . . . .	39
4.1.1 Ottimi locali e ottimi globali . . . . .	39
4.1.2 Bacini di attrazione . . . . .	39
4.2 Classificazione e Formulazione del Problema . . . . .	40
4.3 Variabili di Ottimizzazione . . . . .	40
4.3.1 Caso Generale . . . . .	40

4.3.2	Caso "phased" (vincolo di fasatura relativa) . . . . .	41
4.3.3	Caso "frozen" (Orbite ELFO) . . . . .	41
4.3.4	Vincoli e Spazio di Ricerca . . . . .	41
4.4	Funzione Obiettivo . . . . .	42
4.5	Algoritmi Utilizzati . . . . .	42
4.5.1	Algoritmo Genetico . . . . .	42
4.5.2	Ottimizzazione con Sciame di Particelle . . . . .	45
4.5.3	Strategie di calcolo e ibridazione . . . . .	47
<b>5</b>	<b>Risultati</b>	<b>49</b>
5.1	Definizione della missione e setup dell'ottimizzazione . . . . .	49
5.2	Orbite imperturbate . . . . .	50
5.2.1	Caso principale: 8 satelliti in 2 piani orbitali . . . . .	50
5.2.2	Analisi di Sensibilità . . . . .	61
5.2.3	Configurazioni Alternative . . . . .	61
5.3	Orbite perturbate . . . . .	67
5.3.1	Orbite ELFO kepleriane . . . . .	67
5.3.2	Confronto con orbite perturbate . . . . .	78
5.4	Sintesi dei risultati . . . . .	85
<b>6</b>	<b>Conclusioni e sviluppi futuri</b>	<b>87</b>
6.1	Conclusioni . . . . .	87
6.2	Sviluppi futuri . . . . .	87
<b>A</b>	<b>Dati delle costellazioni ottime</b>	<b>89</b>

# Elenco delle figure

1.1	Mappa del polo Sud lunare [7] . . . . .	16
2.1	Illustrazione sistemi di riferimento utilizzati . . . . .	22
2.2	Illustrazione degli elementi orbitali $i, \omega, \Omega, \nu$ . . . . .	26
2.3	Relazione tra inclinazione ed eccentricità per orbite congelate . . . . .	29
3.1	Illustrazione dei vettori di posizione . . . . .	31
3.2	geometria ideale con 4 satelliti . . . . .	36
3.3	Illustrazione dell'angolo di elevazione . . . . .	37
4.1	Diagramma di flusso dell'algoritmo genetico implementato nel <i>Global Optimization Toolbox</i> . . . . .	44
4.2	Diagramma di flusso dell'algoritmo PSO implementato nel <i>Global Optimization Toolbox</i> . . . . .	46
5.1	Posizione dei punti di interesse . . . . .	50
5.2	Panoramica delle soluzioni con pesi [1,1] . . . . .	51
5.3	Analisi PSO, durata 00:18:19 . . . . .	53
5.4	Analisi GA, durata 00:49:45 . . . . .	54
5.5	Rappresentazione di un istante temporale in cui la costellazione approssima la configurazione ideale . . . . .	56
5.6	geometria della soluzione pso del punto (2,84; 4,19) di fig.5.2 . . . . .	57
5.7	Asimmetria di distribuzione . . . . .	59
5.8	statistiche della soluzione pso del punto (2,84; 4,19) di fig.5.2 . . . . .	60
5.9	geometria della soluzione "phased" del punto (3,36; 3,48) di fig.5.2 . . . . .	62
5.10	statistiche della soluzione pso del punto (3,36; 3,48) di fig.5.2 . . . . .	63
5.11	geometria del caso con tre piani orbitali . . . . .	65
5.12	statistiche del caso con tre piani orbitali . . . . .	66
5.13	Asimmetria di distribuzione soluzioni ELFO . . . . .	68
5.14	panoramica delle soluzioni ELFO con pesi [1,1] . . . . .	69
5.15	geometria e parametri orbitali del caso 8 sat, 2 piani . . . . .	71
5.16	statistiche del caso 8 sat, 2 piani . . . . .	72
5.17	geometria e parametri orbitali del caso 9 sat, 3 piani, <i>exp</i> . . . . .	74
5.18	statistiche del caso 9 sat, 3 piani, <i>exp</i> . . . . .	75
5.19	geometria e parametri orbitali del caso 8 sat, 4 piani, <i>exp</i> . . . . .	76
5.20	statistiche del caso 8 sat, 4 piani, <i>exp</i> . . . . .	77
5.21	rappresentazione 3D delle orbite perturbate del primo satellite di ogni piano orbitale . . . . .	78

5.22	evoluzione dei parametri orbitali $a, e, i, \Omega, \omega$ del primo satellite di ogni piano orbitale . . . . .	79
5.23	scostamento dei parametri orbitali $a, i, \Omega$ dai valori iniziali del primo satellite di ogni piano orbitale . . . . .	80
5.24	perturbazione del vettore eccentricità del primo satellite di ogni piano orbitale	81
5.25	statistiche GDOP della soluzione perturbata . . . . .	82
5.26	evoluzione giornaliera delle statistiche GDOP . . . . .	83

# Elenco delle tabelle

3.1	Interpretazione dei valori di GDOP [11]	35
5.1	Variazione delle prestazioni GDOP complessive al variare dell'epoca di simulazione.	84
5.2	Sintesi delle prestazioni GDOP delle costellazioni ottime	85
A.1	caso: ga 2 4 [1 1] 5°	89
A.2	caso: pso 2 4 [1 1] 5°	89
A.3	caso: pso 2 4 [1 10] 5°	89
A.4	caso: pso 2 4 [10 1] 5°	90
A.5	caso: pso phased 2 4 [1 1] 5°	90
A.6	caso: pso phased 2 3 [1 1] 5°	90
A.7	caso: pso phased 3 3 [1 1] 5°	90
A.8	caso: pso phased 2 4 [1 1] 15°	90
A.9	caso: pso phased frozen 2 4 [1 1] 15°	91
A.10	caso: pso phased frozen 2 3 [1 1] 15°	91
A.11	caso: pso phased frozen 4 2 [1 1] 15°	91
A.12	caso: pso phased frozen expanded 4 2 [1 1] 15°	91
A.13	caso: pso phased frozen 3 3 [1 1] 15°	92
A.14	caso: pso phased frozen expanded 3 3 [1 1] 15°	92



# Elenco degli acronimi

**COE** Classical Orbital Elements.

**CSPICE** C-language SPICE Toolkit.

**DOP** Dilution of Precision.

**ELFO** Eccentric Lunar Frozen Orbit.

**ENU** East-North-Up.

**ESA** European Space Agency.

**GA** Genetic Algorithm.

**GDOP** Geometric Dilution of Precision.

**GNSS** Global Navigation Satellite System.

**GP** Ground Point.

**HDOP** Horizontal Dilution of Precision.

**ISRU** In-Situ Resource Utilization.

**JAXA** Japan Aerospace Exploration Agency.

**JPL** Jet Propulsion Laboratory.

**LLA** Latitude, Longitude, Altitude.

**MCMF** Moon-Centered Moon-Fixed.

**NaN** Not a Number.

**NASA** National Aeronautics and Space Administration.

**PA** Principal Axis.

**PDOP** Position Dilution of Precision.

**PSO** Particle Swarm Optimization.

**RAAN** Right Ascension of the Ascending Node.

**SPICE** Spacecraft, Planet, Instrument, C-matrix, Events.

**SRP** Solar Radiation Pressure.

**TDOP** Time Dilution of Precision.

**USERE** User Equivalent Range Error.

**VDOP** Vertical Dilution of Precision.

# Capitolo 1

## Introduzione

Il Polo Sud lunare è uno degli obiettivi principali dei programmi di esplorazione delle maggiori agenzie spaziali e di società private. L'interesse per questa regione deriva dalla combinazione di fattori ambientali, strategici e scientifici.

La caratteristica più distintiva di questa zona è l'illuminazione solare radente, causata dall'inclinazione dell'asse di rotazione lunare rispetto all'eclittica. La luce solare non raggiunge il fondo dei crateri più profondi, creando regioni perennemente in ombra con temperature inferiori allo zero. In queste condizioni si è accumulato ghiaccio che è possibile sfruttare. L'acqua può essere scissa per elettrolisi in idrogeno e ossigeno, producendo propellente e aria respirabile direttamente in loco (In-Situ Resource Utilization, ISRU) e riducendo la dipendenza dai lanci dalla Terra. Al contempo, le vette e i bordi craterici ricevono luce solare quasi costante, rendendo queste zone idonee all'utilizzo dei pannelli solari per fornire energia.

La regione presenta anche un interesse geologico: parte del bacino Polo Sud-Aitken, una delle strutture d'impatto più estese del sistema solare, espone materiale proveniente dalla crosta e dal mantello lunare. L'analisi di questi campioni consentirebbe di migliorare i modelli di formazione del sistema solare interno.

Le missioni previste in questa regione nei prossimi decenni richiedono servizi di comunicazione e navigazione che le comunicazioni dirette con la Terra non sono in grado di fornire in modo continuativo. Per rispondere a questa esigenza, l'Agenzia Spaziale Europea (ESA) ha avviato il programma *Moonlight*, in collaborazione con un consorzio industriale guidato da Telespazio. Il programma prevede il dispiegamento di una costellazione di cinque satelliti su orbite lunari ellittiche congelate (ELFO): quattro dedicati alla navigazione e al posizionamento, uno alle telecomunicazioni. Il programma Moonlight è progettato per operare secondo le specifiche *LunaNet*, il framework di interoperabilità concordato con NASA e JAXA per la creazione di un'infrastruttura di comunicazione lunare unificata. L'obiettivo è creare un'infrastruttura standardizzata che permetta a satelliti, lander, rover e basi umane di comunicare tra loro e con la Terra in modo efficiente. [1–6]



## 1.1 Obiettivo della tesi

L'obiettivo della ricerca consiste nell'identificare architetture orbitali ottime in grado di garantire un servizio di navigazione ininterrotto per un insieme di punti di interesse distribuiti nella regione del Polo Sud lunare.

Considerando la non linearità e l'elevata dimensionalità del problema, la definizione dei parametri orbitali è stata formalizzata come un problema di ottimizzazione globale con vincoli di limite. Lo studio punta non solo a individuare la configurazione orbitale che minimizza la diluizione geometrica della precisione (GDOP), massimizzando quindi l'accuratezza geometrica della costellazione, ma si prefissa anche l'obiettivo di confrontare l'efficacia e la solidità di algoritmi metaeuristici integrati. L'ottimizzatore così costruito esplora l'ampio spazio delle soluzioni, valutando come i parametri di missione e i vincoli di ottimizzazione influenzino la costellazione finale.

## 1.2 Panoramica della Tesi

- Il Capitolo 2 presenta i fondamenti della meccanica orbitale, definendo i sistemi di riferimento e i modelli matematici utilizzati per descrivere il moto dei satelliti.
- Il Capitolo 3 introduce il concetto di diluizione di precisione (DOP), con la relativa derivazione matematica, l'interpretazione geometrica e gli algoritmi implementati per il calcolo.
- Il Capitolo 4 descrive la formulazione del problema di ottimizzazione, comprese le variabili decisionali, i vincoli, la funzione obiettivo e le metaeuristiche utilizzate.
- Il Capitolo 5 presenta i risultati delle ottimizzazioni, analizzando le prestazioni degli algoritmi e delle costellazioni generate e discutendo l'effetto dei parametri di ottimizzazione.
- Il Capitolo 6 riassume il lavoro svolto e presenta alcune considerazioni sui possibili sviluppi futuri.



## Capitolo 2

# Fondamenti di Meccanica Orbitale

### Notazione

Nel corso della trattazione verrà adottata la seguente notazione convenzionale: le grandezze vettoriali sono indicate in grassetto (es.  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{V}$ ), mentre i corrispettivi moduli o grandezze scalari in corsivo semplice (es.  $r$ ,  $V$ ). I versori, o vettori unitari, sono indicati in grassetto con il simbolo cappuccio (es.  $\hat{\mathbf{r}}$ ). La norma euclidea di un vettore è indicata con la doppia barra verticale  $\|\cdot\|$ .

### 2.1 Sistemi di riferimento e coordinate

#### 2.1.1 Sistemi di riferimento non rotanti

Per descrivere correttamente il moto di un satellite e la posizione di un utente sulla superficie lunare, è necessario definire dei sistemi di riferimento. Un sistema di riferimento inerziale è un sistema in cui è valida la legge di inerzia; in astrodinamica, tali sistemi sono approssimati da terne che non ruotano rispetto alle stelle fisse e che hanno un'origine non accelerata, ovvero possono avere velocità non nulle ma accelerazioni trascurabili.

In questo lavoro vengono utilizzati dei sistemi quasi-inerziali, poiché solidali con il centro di massa lunare.

#### J2000

Il sistema di riferimento J2000 è definito come il sistema dell'equatore e dell'equinozio medio *terrestre* all'epoca standard J2000.0. Esso è definito geometricamente come segue:

- L'asse  $+X$  punta verso l'equinozio vernale medio all'epoca J2000.0 (intersezione tra piano equatoriale ed eclittica).
- L'asse  $+Z$  è ortogonale al piano dell'equatore medio terrestre all'epoca J2000.0, diretto verso il Polo Nord celeste.
- L'asse  $+Y$  completa la terna destrorsa ( $Y = Z \times X$ ).

Tale sistema costituisce il riferimento standard per il toolkit SPICE/CSPICE e per le effemeridi planetarie JPL [8]. Esso è stato adottato in questa tesi come sistema di riferimento globale per la propagazione numerica delle orbite nel modello perturbato ad alta fedeltà sviluppato in ambiente Simulink.

### **Moon Principal Axis - Inertial at Epoch**

Questo sistema di riferimento è selenocentrico e quasi-inerziale. L'origine coincide con il centro di massa della Luna, mentre gli assi sono allineati con gli assi principali d'inerzia della Luna congelati a un'epoca di riferimento specifica. A differenza del sistema *PA*, questo riferimento non ruota solidalmente con il corpo celeste, mantenendo un orientamento fisso nello spazio.

In questo lavoro di tesi, tale sistema è stato preferito per la definizione dei parametri orbitali delle costellazioni e dei relativi vincoli di ottimizzazione. La scelta è motivata dalla sua intuitività geometrica rispetto alla superficie lunare: in questo riferimento, infatti, il piano fondamentale coincide con il piano equatoriale lunare all'epoca di riferimento. Di conseguenza, un'inclinazione orbitale di  $90^\circ$  corrisponde esattamente a un'orbita polare.

### **2.1.2 Sistemi di riferimento rotanti e topocentrici**

#### **Moon Fixed (Principal Axis Rotating)**

Noto anche come sistema *Moon Centered Moon Fixed (MCMF)* o *Principal Axis (PA)*, è un sistema *non inerziale* solidale con la rotazione della Luna.

- L'origine è nel centro di massa della Luna.
- L'asse *Z* coincide con l'asse di rotazione della Luna, puntando verso il Polo Nord celeste lunare.
- L'asse *X* giace nel piano equatoriale lunare e punta mediamente verso la Terra (nel meridiano primo).
- L'asse *Y* completa la terna destrorsa.

Questo sistema è utilizzato per definire le coordinate dei *Ground Points (GP)* sulla superficie lunare, come discusso nel Capitolo 3.

#### **ENU (East-North-Up)**

Il sistema *East-North-Up* è un sistema *non inerziale* topocentrico locale, definito rispetto a un punto osservatore sulla superficie:

- Il piano fondamentale è il piano tangente locale all'ellissoide di riferimento nel punto dell'osservatore.
- L'asse *E* (East) punta verso est locale.
- L'asse *N* (North) punta verso il nord locale.
- L'asse *U* (Up) è ortogonale al piano tangente, diretto verso lo zenith.

Tale sistema è fondamentale per valutare la visibilità dei satelliti rispetto all'orizzonte locale.

### **2.1.3 Sistemi di coordinate**

Una volta definito il sistema di riferimento, la posizione di un punto può essere espressa mediante diverse coordinate.

### Coordinate cartesiane

La posizione è definita dal vettore  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ . Queste sono le coordinate naturali per l'integrazione numerica delle equazioni del moto.

### Coordinate sferiche

La posizione relativa dei satelliti rispetto ai punti sulla superficie può essere espressa in coordinate sferiche topocentriche:

- *Range* ( $\rho$ ): distanza euclidea tra l'osservatore e il satellite.
- *Azimuth* ( $Az$ ): angolo misurato nel piano orizzontale dal Nord in senso orario.
- *Elevation* ( $El$ ): angolo tra il vettore posizione e il piano orizzontale locale.

Per garantire il collegamento tra un utente al suolo e il satellite, è necessario che l'angolo di elevazione sia superiore a una soglia minima (maschera di elevazione), tipicamente da  $0^\circ$  a  $15^\circ$

### Coordinate LLA

Le coordinate selenografiche (Latitude, Longitude, Altitude) definiscono la posizione rispetto a un ellissoide di riferimento che approssima la forma della Luna. Un modello accurato della Luna considera un ellissoide con uno schiacciamento (*flattening*) pari a [9]:

$$f = \frac{R_{eq} - R_{pol}}{R_{eq}} \approx 0.0012 \quad (2.1)$$

dove  $R_{eq}$  e  $R_{pol}$  sono rispettivamente il raggio equatoriale e polare.

Le coordinate sono così definite:

- *Latitudine* ( $\varphi$ ): angolo tra la normale alla superficie dell'ellissoide di riferimento e il piano equatoriale.
- *Longitudine* ( $\lambda$ ): angolo misurato lungo l'equatore dal meridiano primo.
- *Altitudine* ( $h$ ): distanza misurata lungo la normale dalla superficie dell'ellissoide al punto considerato.

In ambiente MATLAB, la conversione dalle coordinate cartesiane alle coordinate geodetiche viene effettuata tramite la funzione `ecef2lla`, specificando i parametri dell'ellissoide lunare (raggio equatoriale e flattening).

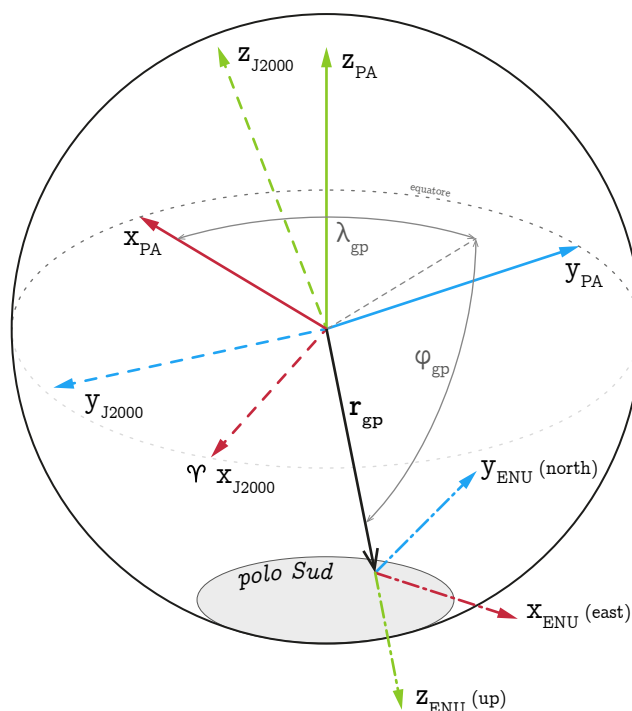


Figura 2.1: Illustrazione sistemi di riferimento utilizzati

## 2.2 Il problema dei due corpi

Il problema dei due corpi costituisce il fondamento analitico della meccanica orbitale. Si consideri un sistema composto da due corpi,  $M$  (corpo primario, la Luna) e  $m$  (satellite), soggetti unicamente alla reciproca attrazione gravitazionale newtoniana [10]. La formulazione classica si basa sulle seguenti ipotesi semplificative:

1. La massa del satellite è trascurabile rispetto a quella del corpo primario ( $m \ll M$ ), cosicché il centro di massa del sistema coincide con il centro del corpo primario.
2. Il sistema di coordinate adottato per descrivere il moto è inerziale.
3. Sia il corpo centrale sia il satellite possiedono simmetria sferica e distribuzione di massa uniforme, e possono pertanto essere trattati come masse puntiformi.
4. L'unica forza agente sul sistema è la mutua attrazione gravitazionale; non sono presenti altre forze esterne.

Sotto tali ipotesi, a partire dalla seconda legge di Newton applicata al moto relativo e dalla legge di gravitazione universale, si dimostra che l'equazione del moto del satellite rispetto al corpo primario, espressa in un sistema di riferimento non rotante con origine nel centro di massa del primario, assume la forma:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} \quad (2.2)$$

dove:

- $\mathbf{r}$  è il vettore posizione del satellite rispetto al centro della Luna;
- $r = \|\mathbf{r}\|$  è la distanza tra i due corpi;

- $\mu = G(M + m) \approx GM$  è il parametro gravitazionale del corpo primario (per la Luna,  $\mu_{\text{Luna}} \approx 4902.8 \text{ km}^3/\text{s}^2$ ).

L'approssimazione  $\mu \approx GM$  è giustificata dalla condizione  $M \gg m$ , che consente di identificare il centro di massa del sistema con il centro del corpo primario. Il segno negativo indica che la forza è sempre diretta verso il centro attrattore, ovvero è una forza centrale.

### 2.2.1 Costanti del moto

L'equazione (2.2) ammette integrali primi fondamentali, ovvero grandezze che si conservano lungo il moto [10]:

1. **Momento angolare specifico ( $\mathbf{h}$ ):** definito come il prodotto vettoriale tra posizione e velocità,

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} \quad (2.3)$$

Poiché la forza gravitazionale è centrale, la coppia risultante rispetto al centro attrattore è nulla e il momento angolare si conserva. La direzione costante di  $\mathbf{h}$  implica che il moto avviene interamente su un piano fisso nello spazio inerziale (piano orbitale), perpendicolare a  $\mathbf{h}$ .

2. **Energia meccanica specifica ( $\mathcal{E}$ ):** ottenuta moltiplicando scalarmente l'equazione del moto per  $\mathbf{v}$  e integrando, si dimostra che la quantità

$$\mathcal{E} = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} \quad (2.4)$$

rimane costante. Per orbite ellittiche, l'energia è legata al semiasse maggiore  $a$  dalla relazione  $\mathcal{E} = -\mu/(2a)$ .

### 2.2.2 Leggi di Keplero

Le tre leggi di Keplero, formulate empiricamente da Johannes Keplero all'inizio del XVII secolo sulla base delle osservazioni astronomiche di Tycho Brahe, descrivono la cinematica del moto planetario e costituiscono il fondamento della meccanica orbitale. Esse possono essere derivate rigorosamente dall'equazione del moto (2.2) e dalle sue costanti del moto.

1. **Prima Legge (legge delle orbite):** ogni corpo orbitante descrive un'orbita ellittica, con il corpo attrattore situato in uno dei due fuochi dell'ellisse.
2. **Seconda Legge (legge delle aree):** il raggio vettore che congiunge il corpo attrattore al satellite spazza aree uguali in intervalli di tempo uguali. Ciò implica che la velocità orbitale non è uniforme: il satellite si muove più rapidamente in prossimità del periapside e più lentamente all'apoapside. Questa legge è una diretta conseguenza della conservazione del momento angolare.
3. **Terza Legge (legge dei periodi):** il quadrato del periodo orbitale  $T$  è proporzionale al cubo del semiasse maggiore  $a$  dell'orbita:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\mu} a^3 \quad (2.5)$$

Questa relazione lega direttamente la dimensione dell'orbita al tempo necessario per percorrerla.

### 2.2.3 Equazione della traiettoria

Dalla Prima Legge di Keplero, l'orbita è una sezione conica. Utilizzando le costanti del moto, è possibile ricavare l'equazione della traiettoria in forma polare:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \nu} \quad (2.6)$$

dove  $p = h^2/\mu$  è il *semilatus rectum* e  $\nu$  è l'anomalia vera, ovvero l'angolo misurato nel piano orbitale tra la direzione del periapside e il vettore posizione. L'equazione (2.6) rappresenta una sezione conica con un fuoco nell'origine, in accordo con la Prima Legge di Keplero.

La natura della conica è determinata dal valore dell'eccentricità  $e$ , che a sua volta è correlata all'energia meccanica specifica  $\mathcal{E}$ :

- **Orbita circolare** ( $e = 0, \mathcal{E} < 0$ ): caso particolare di ellisse con raggio costante  $r = p$ . La velocità orbitale è costante e pari a  $v_c = \sqrt{\mu/r}$ .
- **Orbita ellittica** ( $0 < e < 1, \mathcal{E} < 0$ ): traiettoria chiusa e periodica. Il corpo primario occupa uno dei due fuochi dell'ellisse. La distanza varia tra il raggio di periapside  $r_p = a(1 - e)$  e il raggio di apoapside  $r_a = a(1 + e)$ .
- **Orbita parabolica** ( $e = 1, \mathcal{E} = 0$ ): traiettoria aperta che rappresenta la condizione limite di fuga. Il satellite raggiunge l'infinito con velocità residua nulla.
- **Orbita iperbolica** ( $e > 1, \mathcal{E} > 0$ ): traiettoria aperta in cui il satellite si allontana all'infinito con una velocità residua positiva, detta velocità iperbolica in eccesso  $v_\infty$ .

Dall'equazione dell'energia (2.4) e dalla relazione  $\mathcal{E} = -\mu/(2a)$  si ricava l'equazione della vis-viva, che lega la velocità orbitale alla posizione lungo l'orbita:

$$v^2 = \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad (2.7)$$

Questa relazione è valida per qualsiasi tipo di orbita conica ed è di grande utilità pratica in astrodinamica.

### 2.2.4 Elementi orbitali classici

Lo stato dinamico di un satellite nel problema dei due corpi è completamente determinato dalla conoscenza del vettore posizione  $\mathbf{r}$  e del vettore velocità  $\mathbf{v}$  a un dato istante. Tuttavia, per una descrizione più intuitiva e compatta dell'orbita, si utilizza un insieme equivalente di sei parametri scalari noti come *Classic Orbital Elements* (COE).

È utile definire il vettore linea dei nodi:

$$\mathbf{n} = \hat{\mathbf{K}} \times \mathbf{h} \quad (2.8)$$

dove  $\hat{\mathbf{K}}$  è il versore dell'asse  $Z$  del sistema di riferimento. Il vettore  $\mathbf{n}$  è diretto verso il nodo ascendente ( $\Omega$ ) e giace nell'intersezione tra il piano orbitale e il piano di riferimento.

I sei elementi orbitali classici sono:

- **Semiassse maggiore ( $a$ )**: definisce la dimensione dell'orbita. È legato all'energia meccanica specifica dalla relazione  $a = -\mu/(2\mathcal{E})$  e determina il periodo orbitale  $T = 2\pi\sqrt{a^3/\mu}$ .

- **Eccentricità ( $e$ ):** definisce la forma dell'orbita, quantificando lo scostamento dalla circolarità. Insieme al semiasse maggiore  $a$ , determina la distanza del periapside  $r_p$  e dell'apoapside  $r_a$

$$r_p = a(1 - e)$$

$$r_a = a(1 + e)$$

- **Inclinazione ( $i$ ):** angolo compreso tra  $0^\circ$  e  $180^\circ$  tra il vettore  $\mathbf{h}$  e l'asse  $\hat{\mathbf{K}}$ , che definisce l'orientamento del piano orbitale rispetto al piano di riferimento:

$$\cos i = \frac{h_z}{h} \quad (2.9)$$

Orbite con  $i < 90^\circ$  sono dette prograde (o dirette), mentre quelle con  $i > 90^\circ$  sono retrograde. Il caso  $i = 90^\circ$  corrisponde a un'orbita polare.

- **Ascensione Retta del Nodo Ascendente - RAAN ( $\Omega$ ):** angolo misurato sul piano di riferimento, in senso antiorario visto dal polo positivo, dalla direzione dell'equinozio vernale ( $\Upsilon$ ) al nodo ascendente ( $\delta\Omega$ ), ovvero al punto in cui il satellite attraversa il piano di riferimento passando dall'emisfero sud a quello nord. Corrisponde all'angolo tra il versore  $\hat{\mathbf{I}}$  e il vettore  $\mathbf{n}$ .
- **Argomento del Periapside ( $\omega$ ):** angolo misurato nel piano orbitale, dal nodo ascendente ( $\delta\Omega$ ) alla direzione del periapside (vettore  $\mathbf{e}$ ), nella direzione del moto. Questo parametro orienta l'orbita all'interno del suo piano.
- **Anomalia Vera ( $\nu$ ):** angolo misurato nel piano orbitale dal periapside alla posizione corrente del satellite, nella direzione del moto. È l'unico elemento che varia nel tempo per un'orbita kepleriana non perturbata.

I primi cinque elementi ( $a, e, i, \Omega, \omega$ ) sono costanti nel problema dei due corpi e descrivono completamente la geometria e l'orientamento dell'orbita nello spazio. L'anomalia vera  $\nu$  indica la posizione istantanea del satellite lungo la traiettoria. La conversione biunivoca tra lo stato cartesiano ( $\mathbf{r}, \mathbf{v}$ ) e gli elementi orbitali ( $a, e, i, \Omega, \omega, \nu$ ) è un'operazione fondamentale in meccanica orbitale.

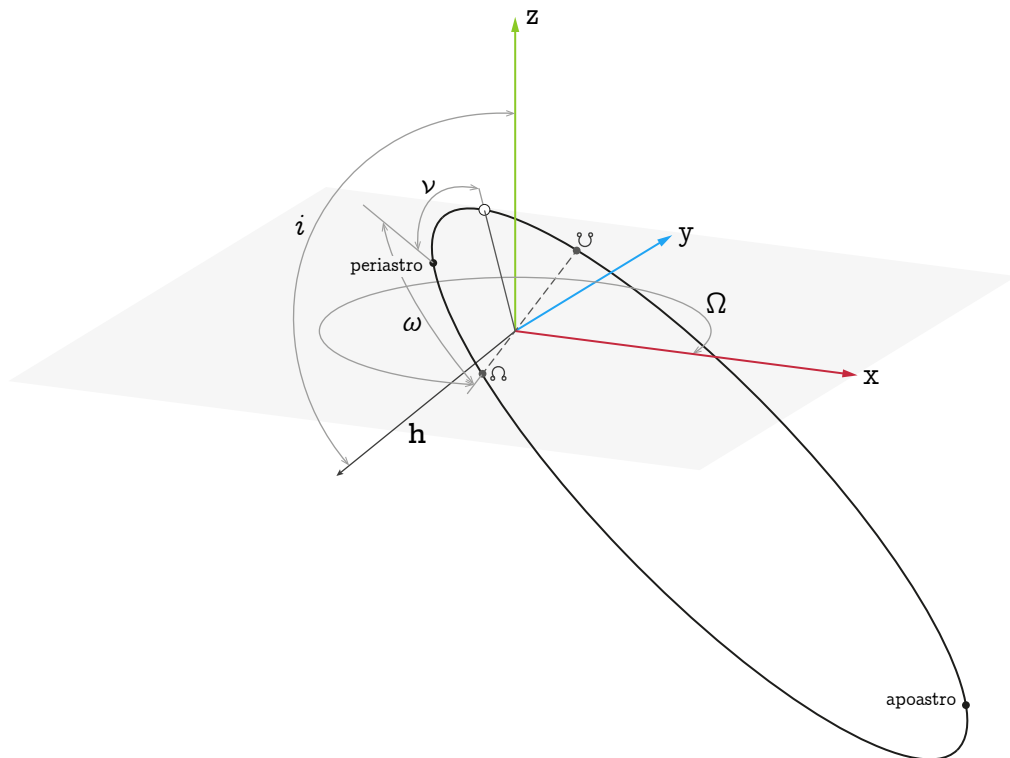


Figura 2.2: Illustrazione degli elementi orbitali  $i, \omega, \Omega, \nu$

## 2.3 Il problema di Keplero

Il problema di Keplero consiste nel determinare la posizione di un corpo orbitante a un generico istante di tempo  $t$ , nota la sua posizione iniziale e gli elementi dell'orbita. In altre parole, si tratta di stabilire la relazione tra il tempo e la posizione angolare lungo l'orbita [10].

Come stabilito dalla Seconda Legge di Keplero, la velocità angolare del satellite lungo l'orbita ellittica non è uniforme: il raggio vettore spazza aree uguali in tempi uguali, il che comporta una velocità maggiore al periapside e minore all'apoapside. Inoltre, dalla Terza Legge di Keplero (equazione (2.5)) è possibile determinare il periodo orbitale a partire dal semiasse maggiore, e definire il moto medio  $n = 2\pi/T = \sqrt{\mu/a^3}$ , che rappresenta la velocità angolare media del satellite lungo l'orbita. Per descrivere l'evoluzione temporale del moto, si introducono tre grandezze angolari:

- **Anomalia Vera ( $\nu$ ):** è l'angolo, misurato nel piano orbitale, tra la direzione del periapside e la posizione corrente del satellite, con vertice nel fuoco occupato dal corpo attrattore. Descrive direttamente la posizione geometrica, ma la sua evoluzione nel tempo non è uniforme.
- **Anomalia Eccentrica ( $E$ ):** è un angolo ausiliario definito rispetto a una circonferenza di raggio  $a$  (cerchio ausiliario) circoscritta all'ellisse orbitale. La costruzione geometrica che la definisce consiste nel proiettare la posizione del satellite sul cerchio ausiliario lungo una direzione perpendicolare alla linea degli apside. La relazione con l'anomalia vera è:

$$\tan \frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2} \quad (2.10)$$

- **Anomalia Media ( $M$ ):** è un angolo fittizio che cresce linearmente nel tempo proporzionalmente al moto medio  $n$ :

$$M = n(t - t_p) \quad (2.11)$$

dove  $t_p$  è l'istante di passaggio al periapside e  $n = \sqrt{\mu/a^3} = 2\pi/T$  è il moto medio, con  $T$  il periodo orbitale.

### 2.3.1 Equazione di Keplero

La relazione tra anomalia media e anomalia eccentrica è espressa dall'Equazione di Keplero:

$$M = E - e \sin E \quad (2.12)$$

Questa equazione, derivata integrando la legge delle aree, stabilisce il collegamento tra il tempo trascorso e la posizione lungo l'orbita. Poiché l'equazione (2.12) è trascendente in  $E$ , non ammette soluzione analitica in forma chiusa e deve essere risolta numericamente.

Il metodo iterativo più diffuso per la soluzione è il metodo di Newton-Raphson, che a partire da una stima iniziale  $E_0$  (tipicamente  $E_0 = M$ ) aggiorna la soluzione secondo:

$$E_{k+1} = E_k - \frac{E_k - e \sin E_k - M}{1 - e \cos E_k} \quad (2.13)$$

La convergenza è rapida per valori moderati di eccentricità e richiede generalmente poche iterazioni.

Una volta determinata l'anomalia eccentrica  $E$ , l'anomalia vera  $\nu$  si ricava dalla relazione (2.10) e la distanza dal corpo attrattore è data da:

$$r = a(1 - e \cos E) \quad (2.14)$$

La sequenza completa per la propagazione temporale dell'orbita è quindi: dato il tempo  $t$ , si calcola  $M$  (lineare nel tempo), si risolve l'equazione di Keplero per ottenere  $E$ , e infine si determinano  $\nu$  e  $r$ .

## 2.4 Orbite lunari perturbate

Nell'ambiente orbitale lunare, il modello kepleriano dei due corpi non è sufficiente per descrivere il moto dei satelliti con la precisione richiesta. L'equazione del moto perturbato assume la forma:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} + \mathbf{a}_p \quad (2.15)$$

dove  $\mathbf{a}_p$  include le accelerazioni non kepleriane. Le principali fonti di perturbazione sono:

- **Non sfericità del potenziale gravitazionale:** causata dalla distribuzione irregolare di massa della Luna. Oltre al termine di schiacciamento  $J_2$ , sono rilevanti le forti anomalie locali note come *mascon* (concentrazioni di massa), che richiedono modelli armonici ad alta risoluzione.
- **Perturbazioni di terzo corpo:** l'attrazione gravitazionale di qualsiasi altro corpo celeste agisce sul satellite. Nel sistema lunare, l'attrazione gravitazionale della Terra e del Sole è predominante e particolarmente significativa a causa della massa della Luna relativamente bassa.
- **Pressione di radiazione solare (SRP):** la forza non gravitazionale esercitata dall'interazione dei fotoni solari con le superfici del satellite, il cui effetto cumulativo è rilevante, specialmente per satelliti con un elevato rapporto area/massa.

### 2.4.1 Orbite ELFO (Eccentric Lunar Frozen Orbits)

Le orbite ELFO (*Eccentric Lunar Frozen Orbits*) rappresentano una classe di soluzioni orbitali vantaggiose per le missioni al Polo Sud lunare [4]. Un'orbita congelata (*frozen orbit*) è definita come un'orbita in cui i valori medi dell'eccentricità  $\bar{e}$  e dell'argomento del periapside  $\bar{\omega}$  rimangono costanti nel tempo, a meno di oscillazioni di corto periodo. Formalmente, le condizioni di congelamento richiedono che le derivate secolari di questi elementi si annullino:  $\dot{\bar{e}} = 0$  e  $\dot{\bar{\omega}} = 0$ .

Le variazioni secolari degli elementi orbitali possono essere descritte dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial a}{\partial t} &= 0 \\
 \frac{\partial e}{\partial t} &= -\frac{15}{8} n e^2 \sin^2 i \sin(2\omega) \\
 \frac{\partial i}{\partial t} &= -\frac{15}{16} n e^2 \sin(2i) \sin(2\omega) \\
 \frac{\partial \Omega}{\partial t} &= -\frac{15}{8} n e^2 \cos i \left( 1 + \frac{5}{2} \cos^2 i \right) \sin(2\omega) \\
 \frac{\partial \omega}{\partial t} &= \frac{15}{16} n e^2 \left( 3 + \frac{5}{2} \cos^2 i \right) - \frac{15}{8} n e^2 \left( 1 - \frac{5}{2} e^2 \right) \cos(2\omega)
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

dove  $n_3$  è un parametro che dipende dal moto medio del sistema Terra-Luna e dalla distanza tra i due corpi.

Le condizioni di congelamento si ricavano analizzando il sistema (2.16), ottenendo una relazione tra eccentricità e inclinazione:

$$e = \sqrt{1 - \frac{5}{3} \cos^2(i)} \tag{2.17}$$

Soluzioni stabili esistono per valori dell'inclinazione superiori a una soglia critica:

$$i_{\text{critica}} \approx 39.23^\circ \tag{2.18}$$

Per ogni valore di inclinazione  $i > i_{\text{critica}}$ , esiste un valore di eccentricità che soddisfa la condizione di congelamento. Al crescere dell'inclinazione, l'eccentricità di equilibrio aumenta, fino al valore massimo per l'orbita polare.

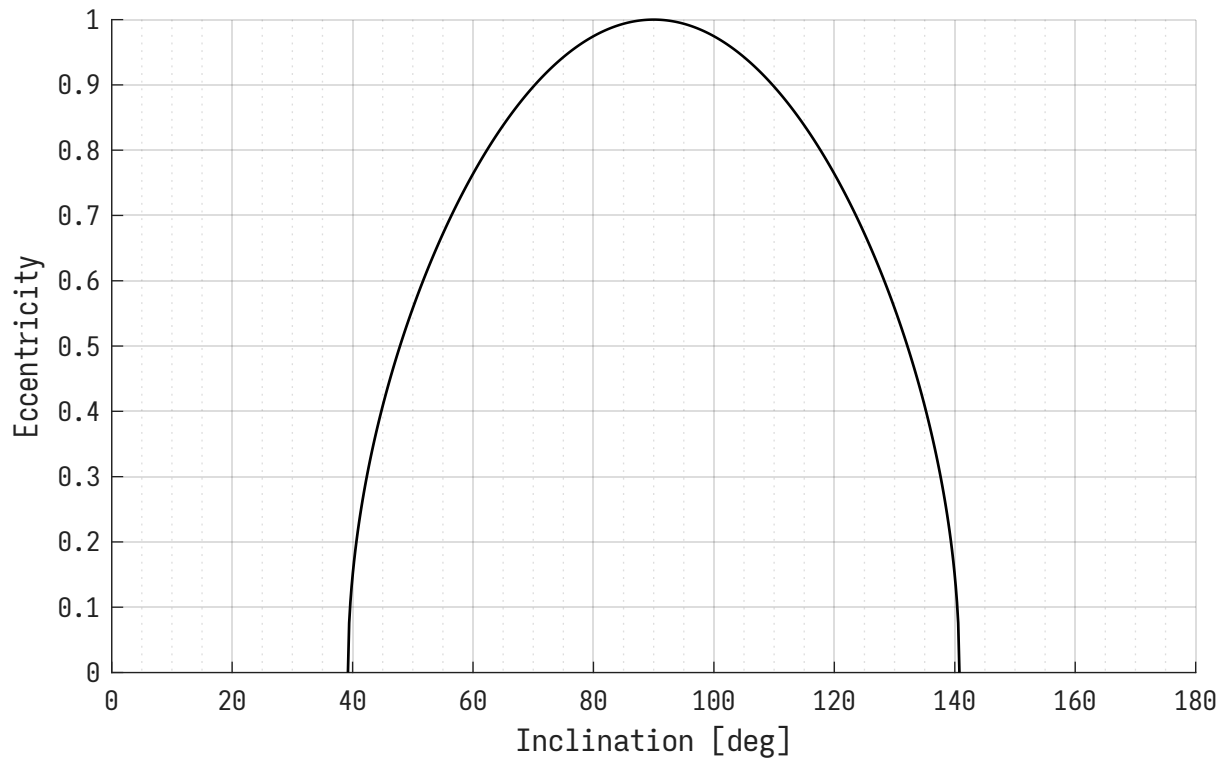


Figura 2.3: Relazione tra inclinazione ed eccentricità per orbite congelate

Queste orbite presentano vantaggi operativi significativi:

- La stabilità dell'argomento del periapside garantisce che la direzione del periapside rimanga fissa. Con  $\omega = 90^\circ$ , l'apoapside si mantiene sull'emisfero sud, consentendo di rimanere più a lungo sopra la regione di interesse.
- La stabilità dell'eccentricità previene la variazione eccessiva del raggio del periapside, evitando il rischio di impatto con la superficie lunare.
- La riduzione delle manovre di *station keeping* necessarie si traduce in un significativo risparmio di propellente e in un prolungamento della vita operativa della missione.



## Capitolo 3

# Diluizione di precisione

### 3.1 Determinazione della posizione

#### 3.1.1 Calcolo della distanza satellite-utente

Come illustrato nella figura seguente, si vuole determinare il vettore incognito  $\mathbf{u} = (x_u, y_u, z_u)$ , che definisce la posizione dell'utente nel sistema di riferimento MCMF (Moon Centered Moon Fixed). Il vettore  $\mathbf{r} = (x_r, y_r, z_r)$  descrive la posizione relativa del satellite rispetto all'utente, mentre il satellite si trova nel punto  $\mathbf{s} = (x_s, y_s, z_s)$  dello stesso sistema di riferimento.

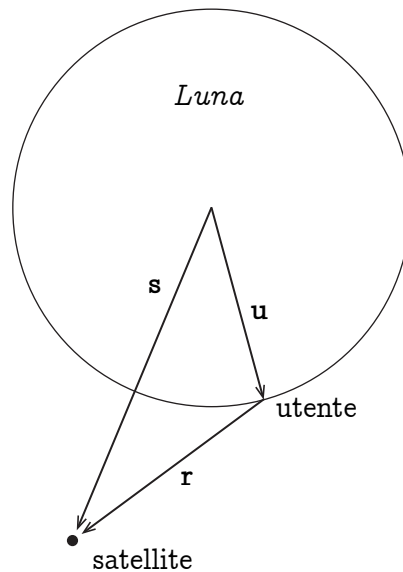


Figura 3.1: Illustrazione dei vettori di posizione

La distanza tra il satellite e l'utente è data da:

$$r = \|\mathbf{s} - \mathbf{u}\| \quad (3.1)$$

Questa grandezza viene derivata misurando il tempo di propagazione  $\Delta t$  impiegato dal segnale per viaggiare dal satellite al ricevitore. In uno scenario ideale, in cui gli orologi di satellite e ricevitore sono perfettamente sincronizzati, la distanza geometrica vera sarebbe pari a:

$$r = c(T_u - T_s) = c\Delta t$$

Nella realtà, tuttavia, l'oscillatore del ricevitore non è sincronizzato con l'ora di sistema e introduce un errore di bias. Di conseguenza, la distanza ottenuta dal processo di misurazione prende il nome di *pseudodistanza*  $\rho$ . Questo termine indica che la misura è ottenuta moltiplicando la velocità della luce  $c$  per la differenza temporale letta da due orologi non allineati. La pseudodistanza comprende quindi la distanza geometrica reale, più gli errori dovuti allo scostamento dell'orologio dell'utente e di quello del satellite rispetto all'ora di sistema. La relazione si esprime come:

$$\begin{aligned}\rho &= c[(T_u + t_u) - (T_s + \delta t)] \\ &= c(T_u - T_s) + c(t_u - \delta t) \\ &= r + c(t_u - \delta t)\end{aligned}\tag{3.2}$$

dove:

- $T_s$ : ora di sistema al momento dell'emissione del segnale;
- $T_u$ : ora di sistema al momento della ricezione;
- $\delta t$ : errore dell'orologio del satellite rispetto all'ora di sistema;
- $t_u$ : errore dell'orologio del ricevitore rispetto all'ora di sistema.

Assumendo che il ricevitore sia in grado di correggere l'errore noto  $\delta t$  dell'orologio satellitare (trasmesso nei dati di navigazione), l'equazione (3.1) può essere semplificata in:

$$\|\mathbf{s} - \mathbf{u}\| = \rho - ct_u\tag{3.3}$$

### 3.1.2 Calcolo della posizione dell'utente

Per risolvere le quattro incognite del sistema, ovvero le tre coordinate spaziali dell'utente  $\mathbf{u} = (x_u, y_u, z_u)$  e il bias dell'orologio  $t_u$ , è necessario disporre di misurazioni di pseudodistanza da almeno quattro satelliti. Indicando con  $\mathbf{s}_i = (x_i, y_i, z_i)$  la posizione dell' $i$ -esimo satellite, l'equazione per la relativa pseudodistanza è:

$$\begin{aligned}\rho_i &= \|\mathbf{s}_i - \mathbf{u}\| + ct_u \\ \rho_i &= \sqrt{(x_i - x_u)^2 + (y_i - y_u)^2 + (z_i - z_u)^2} + ct_u \\ \rho_i &= f(x_u, y_u, z_u, t_u)\end{aligned}\tag{3.4}$$

Si tratta di un sistema di equazioni non lineari. Per ricavare le coordinate del ricevitore, si procede linearizzando il sistema attorno a una posizione stimata iniziale. Supponiamo di conoscere una posizione approssimata dell'utente  $(\tilde{x}_u, \tilde{y}_u, \tilde{z}_u)$  e un bias temporale stimato  $\tilde{t}_u$ . Le vere coordinate possono essere espresse come la somma delle stime e di un termine correttivo (lo spostamento):

$$\begin{aligned}x_u &= \tilde{x}_u + \Delta x_u \\ y_u &= \tilde{y}_u + \Delta y_u \\ z_u &= \tilde{z}_u + \Delta z_u \\ t_u &= \tilde{t}_u + \Delta t_u\end{aligned}\tag{3.5}$$

Sostituendo queste espressioni, la funzione della pseudodistanza diventa:

$$f(x_u, y_u, z_u, t_u) = f(\tilde{x}_u + \Delta x_u, \tilde{y}_u + \Delta y_u, \tilde{z}_u + \Delta z_u, \tilde{t}_u + \Delta t_u)$$

Sviluppando in serie di Taylor attorno al punto approssimato e troncando ai termini lineari, si ottiene:

$$\tilde{\rho}_i = \rho_i - \frac{x_i - \tilde{x}_u}{\tilde{r}_i} \Delta x_u - \frac{y_i - \tilde{y}_u}{\tilde{r}_i} \Delta y_u - \frac{z_i - \tilde{z}_u}{\tilde{r}_i} \Delta z_u + c t_u \quad (3.6)$$

Riorganizzando i termini, l'equazione linearizzata si presenta come:

$$\Delta \rho_i = a_{xi} \Delta x_u + a_{yi} \Delta y_u + a_{zi} \Delta z_u - c \Delta t_u \quad (3.7)$$

In questa equazione:

- $\Delta \rho_i = \tilde{\rho}_i - \rho_i$  rappresenta lo scarto tra la pseudodistanza calcolata nel punto stimato e quella effettivamente misurata;
- $\hat{\mathbf{a}}_i = \left( \frac{x_i - \tilde{x}_u}{\tilde{r}_i}, \frac{y_i - \tilde{y}_u}{\tilde{r}_i}, \frac{z_i - \tilde{z}_u}{\tilde{r}_i} \right) = (a_{xi}, a_{yi}, a_{zi})$  identificano i coseni direttori del versore che punta dalla posizione stimata dell'utente verso il satellite  $i$ -esimo.

Il problema si riduce quindi a trovare le quattro incognite  $\Delta x_u, \Delta y_u, \Delta z_u$  e  $\Delta t_u$ . Con quattro satelliti disponibili, il sistema lineare risolutivo è:

$$\begin{aligned} \Delta \rho_1 &= a_{x1} \Delta x_u + a_{y1} \Delta y_u + a_{z1} \Delta z_u - c \Delta t_u \\ \Delta \rho_2 &= a_{x2} \Delta x_u + a_{y2} \Delta y_u + a_{z2} \Delta z_u - c \Delta t_u \\ \Delta \rho_3 &= a_{x3} \Delta x_u + a_{y3} \Delta y_u + a_{z3} \Delta z_u - c \Delta t_u \\ \Delta \rho_4 &= a_{x4} \Delta x_u + a_{y4} \Delta y_u + a_{z4} \Delta z_u - c \Delta t_u \end{aligned} \quad (3.8)$$

In notazione matriciale compatta:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \Delta \rho_1 \\ \Delta \rho_2 \\ \Delta \rho_3 \\ \Delta \rho_4 \end{pmatrix}}_{\Delta \rho} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{x1} & a_{y1} & a_{z1} & 1 \\ a_{x2} & a_{y2} & a_{z2} & 1 \\ a_{x3} & a_{y3} & a_{z3} & 1 \\ a_{x4} & a_{y4} & a_{z4} & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}} \underbrace{\begin{pmatrix} \Delta x_u \\ \Delta y_u \\ \Delta z_u \\ -c \Delta t_u \end{pmatrix}}_{\Delta \mathbf{x}}$$

dove:

- $\Delta \rho$  è il vettore delle differenze tra le misure delle pseudodistanze del punto linearizzato e quelle esatte;
- $\mathbf{H}$  è la matrice delle derivate parziali delle pseudo-distanze rispetto alle incognite;
- $\Delta \mathbf{x}$  è un vettore di 4 componenti: le prime tre sono l'offset di posizione dell'utente dal punto linearizzato; la quarta è l'offset del bias temporale dell'utente dal bias ipotizzato nel punto linearizzato;

L'equazione finale è:

$$\Delta \rho = \mathbf{H} \Delta \mathbf{x} \quad (3.9)$$

la cui soluzione diretta è:

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{H}^{-1} \Delta \rho \quad (3.10)$$

Nel caso in cui il numero di satelliti visibili sia superiore al minimo necessario ( $n > 4$ ), il sistema risulta sovradeterminato:

$$\begin{pmatrix} \Delta\rho_1 \\ \Delta\rho_2 \\ \vdots \\ \Delta\rho_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{a}}_1 & 1 \\ \hat{\mathbf{a}}_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \hat{\mathbf{a}}_n & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_u \\ \Delta y_u \\ \Delta z_u \\ -c\Delta t_u \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

In questo scenario, la soluzione ottimale viene calcolata applicando il metodo dei minimi quadrati:

$$\Delta\mathbf{x} = \underbrace{(\mathbf{H}^T\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^T}_{\mathbf{K}} \Delta\rho \quad (3.12)$$

La matrice  $\mathbf{K}$  definisce la relazione tra gli errori presenti nelle misurazioni di pseudodistanza ( $d\rho$ ) e gli errori risultanti nella stima della posizione e del tempo ( $d\mathbf{x}$ ). Questa matrice, di dimensione  $4 \times n$ , dipende esclusivamente dalla geometria relativa tra l'utente e i satelliti in vista. Considerando gli errori di pseudodistanza come variabili casuali indipendenti e identicamente distribuite, con varianza pari al quadrato dell'*User Equivalent Range Error* (UERE), la matrice di covarianza dell'errore di stima è data da:

$$\text{cov}(d\mathbf{x}) = \underbrace{(\mathbf{H}^T\mathbf{H})^{-1}}_{\mathbf{Q}} \sigma_{uere}^2 \quad (3.13)$$

dove  $\sigma_{uere}$  rappresenta il contributo statistico complessivo degli errori di misurazione. In base a queste assunzioni, la covarianza degli errori sulla posizione calcolata è un multiplo scalare della matrice  $\mathbf{Q} = (\mathbf{H}^T\mathbf{H})^{-1}$ . La matrice  $\mathbf{Q}$  quantifica il modo in cui la geometria della costellazione amplifica gli errori di misura sulle diverse componenti della soluzione:

$$\text{cov}(d\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \sigma_{x_u}^2 & \sigma_{x_u y_u}^2 & \sigma_{x_u z_u}^2 & \sigma_{x_u c_{t_b}}^2 \\ \sigma_{x_u y_u}^2 & \sigma_{y_u}^2 & \sigma_{y_u z_u}^2 & \sigma_{y_u c_{t_b}}^2 \\ \sigma_{x_u z_u}^2 & \sigma_{y_u z_u}^2 & \sigma_{z_u}^2 & \sigma_{z_u c_{t_b}}^2 \\ \sigma_{x_u c_{t_b}}^2 & \sigma_{y_u c_{t_b}}^2 & \sigma_{z_u c_{t_b}}^2 & \sigma_{c_{t_b}}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}\sigma_{uere}^2 & Q_{12}\sigma_{uere}^2 & Q_{13}\sigma_{uere}^2 & Q_{14}\sigma_{uere}^2 \\ Q_{21}\sigma_{uere}^2 & Q_{22}\sigma_{uere}^2 & Q_{23}\sigma_{uere}^2 & Q_{24}\sigma_{uere}^2 \\ Q_{31}\sigma_{uere}^2 & Q_{32}\sigma_{uere}^2 & Q_{33}\sigma_{uere}^2 & Q_{34}\sigma_{uere}^2 \\ Q_{41}\sigma_{uere}^2 & Q_{42}\sigma_{uere}^2 & Q_{43}\sigma_{uere}^2 & Q_{44}\sigma_{uere}^2 \end{bmatrix}$$

## 3.2 Definizione delle DOP

Nel GNSS, la "diluizione della precisione" (DOP) è un indice che esprime quanto la configurazione geometrica dei satelliti influenzi l'errore di posizionamento finale. Matematicamente, rappresenta il rapporto tra l'incertezza sulla posizione calcolata e l'incertezza sulla misura della distanza. Si assume che la geometria sia istantaneamente fissa e che le variazioni  $d\mathbf{x}$  siano espresse in un sistema di coordinate locale (ENU).

Il parametro più generale è la *Diluizione Geometrica della Precisione* (GDOP), definita come:

$$\begin{aligned} \text{GDOP} &= \frac{\sqrt{\sigma_{x_u}^2 + \sigma_{y_u}^2 + \sigma_{z_u}^2 + \sigma_{c_{t_b}}^2}}{\sigma_{uere}} \\ \text{GDOP} &= \sqrt{Q_{11} + Q_{22} + Q_{33} + Q_{44}} = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{Q})} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Questa relazione può essere interpretata come:

$$(\text{errore posizione}) = (\text{fattore geometrico}) \times (\text{errore di misura})$$

$$\sqrt{\sigma_{x_u}^2 + \sigma_{y_u}^2 + \sigma_{z_u}^2 + \sigma_{c_{ib}}^2} = \text{GDOP} \times \sigma_{uere} \quad (3.15)$$

Per isolare il contributo dell'errore su diverse componenti, si definiscono specifici fattori DOP:

- **PDOP** (*Position DOP*): indica l'accuratezza della posizione 3D nello spazio.

$$\sqrt{\sigma_{x_u}^2 + \sigma_{y_u}^2 + \sigma_{z_u}^2} = \text{PDOP} \times \sigma_{uere} \quad (3.16)$$

$$\text{PDOP} = \sqrt{Q_{11} + Q_{22} + Q_{33}} \quad (3.17)$$

- **HDOP** (*Horizontal DOP*): si riferisce alla precisione nel piano orizzontale ( $x, y$ ).

$$\sqrt{\sigma_{x_u}^2 + \sigma_{y_u}^2} = \text{HDOP} \times \sigma_{uere} \quad (3.18)$$

$$\text{HDOP} = \sqrt{Q_{11} + Q_{22}} \quad (3.19)$$

- **VDOP** (*Vertical DOP*): riguarda esclusivamente l'errore sulla componente verticale (altitudine  $z$ ).

$$\sigma_{z_u} = \text{VDOP} \times \sigma_{uere} \quad (3.20)$$

$$\text{VDOP} = \sqrt{Q_{33}} \quad (3.21)$$

- **TDOP** (*Time DOP*): stima l'impatto della geometria sull'accuratezza temporale.

$$\sigma_{c_{ib}} = \text{TDOP} \times \sigma_{uere} \quad (3.22)$$

$$\text{TDOP} = \sqrt{Q_{44}} \quad (3.23)$$

Una sintesi dell'interpretazione dei valori di GDOP è riportata nella seguente tabella.

Valore DOP	Qualità
1	Ideale
2-4	Eccellente
4-6	Buono
6-8	Moderato
8-20	Discreto
20-50	Scarso

Tabella 3.1: Interpretazione dei valori di GDOP [11]

### 3.3 Geometria della costellazione ideale

La configurazione geometrica ideale è quella che massimizza il volume del poliedro formato dai vettori unitari che collegano l'utente ai satelliti. Nel caso minimo di 4 satelliti, tali vettori definiscono un tetraedro. Maggiore è il volume di questo solido, migliore è la geometria e, di conseguenza, minore sarà il valore GDOP. Per un ricevitore situato sulla superficie terrestre, il minimo teorico di GDOP (pari a circa 1.732) si ottiene con:

1. Un satellite esattamente allo zenit (perpendicolare sopra l'utente, elevazione  $90^\circ$ );
2. Gli altri tre satelliti disposti sull'orizzonte, equispaziati di  $120^\circ$  in azimut.

Al contrario, se i satelliti sono raggruppati in una piccola porzione di cielo o allineati tra loro, il volume del tetraedro tende ad annullarsi. In queste condizioni, i valori di DOP aumentano drasticamente, degradando la precisione del posizionamento.

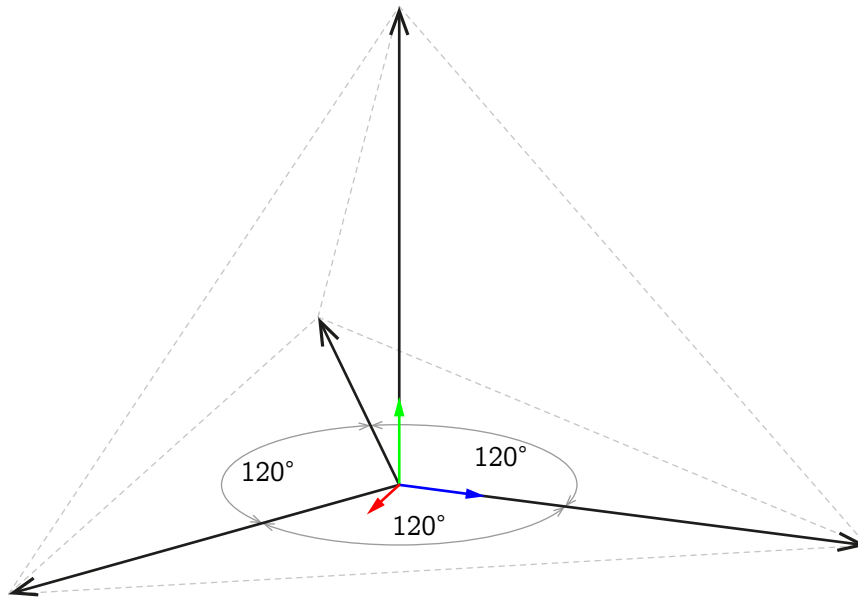


Figura 3.2: geometria ideale con 4 satelliti

### 3.4 Implementazione dell'algoritmo

#### 3.4.1 Calcolo della visibilità

Prima di costruire la matrice geometrica  $Q$ , viene eseguita una verifica di visibilità. Un satellite è considerato visibile se il suo angolo di elevazione  $\varepsilon$  rispetto all'orizzonte locale supera una soglia minima  $\varepsilon_{min}$ . Questa maschera tiene conto degli ostacoli naturali tipicamente presenti all'orizzonte.

$$\varepsilon = \arcsin \left( \frac{\mathbf{r}_{rel} \cdot \mathbf{u}_{zenith}}{\|\mathbf{r}_{rel}\|} \right)$$

Se in un dato istante il numero di satelliti visibili è inferiore a 4, il valore GDOP viene impostato a NaN (*Not a Number*), segnalando una mancanza di copertura sufficiente.

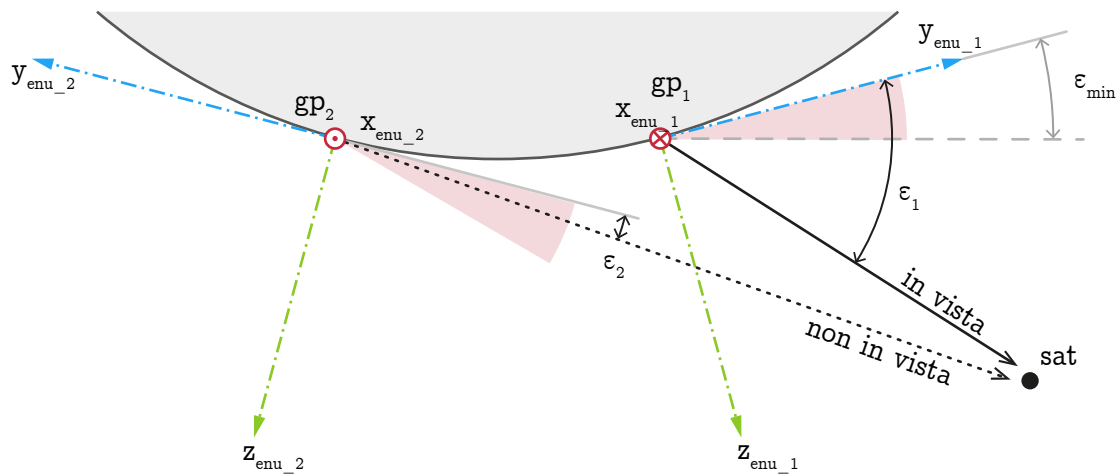


Figura 3.3: Illustrazione dell'angolo di elevazione



## Capitolo 4

# Problema di ottimizzazione

### 4.1 Ottimizzazione Globale

L'ottimizzazione globale è il processo computazionale volto a individuare il punto  $\mathbf{x}^*$  dello spazio ammissibile in cui la funzione obiettivo raggiunge il valore minore o uguale a quello assunto in qualsiasi altro punto ammissibile. A differenza dei tradizionali approcci di ottimizzazione locale, che si limitano a trovare l'ottimo confinato all'interno del bacino di attrazione del punto di partenza, i solutori di ottimizzazione globale sono progettati per esplorare simultaneamente molteplici bacini di attrazione.

#### 4.1.1 Ottimi locali e ottimi globali

Data una funzione  $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , un punto  $\mathbf{x}_L^*$  è un *minimo locale* se esiste un intorno  $\mathcal{N}(\mathbf{x}_L^*)$  tale che

$$f(\mathbf{x}_L^*) \leq f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{x}_L^*) \cap \mathcal{D}.$$

Un punto  $\mathbf{x}_G^*$  è invece un *minimo globale* se

$$f(\mathbf{x}_G^*) \leq f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}.$$

Per funzioni convesse i due concetti coincidono; tuttavia la funzione obiettivo del presente problema è fortemente non convessa, multimodale e discontinua. Di conseguenza essa presenta molteplici minimi locali (bacini di attrazione distinti), e l'impiego di un solutore locale fornirebbe un risultato fortemente dipendente dal punto di partenza, senza garanzie di prossimità all'ottimo globale.

#### 4.1.2 Bacini di attrazione

Un *bacino di attrazione* è la regione iniziale dello spazio delle variabili dalla quale un algoritmo locale converge verso un determinato minimo locale. I solutori locali, basati sul gradiente o su pattern di ricerca, sono in grado di esplorare un unico bacino alla volta; pertanto la qualità della soluzione è totalmente legata alla scelta del punto iniziale.

Gli algoritmi stocastici *population-based* superano questa limitazione generando un insieme di punti di partenza distribuiti nell'intero spazio ammissibile: se la popolazione iniziale è sufficientemente dispersa, diversi bacini di attrazione vengono visitati simultaneamente, aumentando in modo significativo la probabilità di individuare il minimo globale. Questa è la motivazione fondamentale per l'adozione, nel presente lavoro, degli algoritmi genetici (GA)

e dell'ottimizzazione con sciame di particelle (PSO) implementati nel *Global Optimization Toolbox* di MATLAB.

## 4.2 Classificazione e Formulazione del Problema

La definizione della costellazione di navigazione lunare è stata affrontata come un problema di ottimizzazione che, secondo la tassonomia del *Global Optimization Toolbox* di MATLAB, rientra nella classe dei problemi **non lineari, con vincoli di bound, a variabili continue** (*bound-constrained nonlinear optimization*).

Il problema può essere formalizzato come la minimizzazione di una funzione di costo scalare  $J(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , soggetta a vincoli di disuguaglianza sui limiti delle variabili decisionali:

$$\min_{\mathbf{x}} J(\mathbf{x}) \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{x}_{lb} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_{ub} \quad (4.1)$$

dove  $\mathbf{x}_{lb}$  e  $\mathbf{x}_{ub}$  rappresentano rispettivamente i limiti inferiori e superiori dello spazio di ricerca. Le caratteristiche del problema sono:

- **Non linearità:** la funzione obiettivo dipende in modo altamente non lineare dalle variabili orbitali, a causa della propagazione kepleriana e della geometria di visibilità.
- **Multimodalità:** la superficie di fitness presenta numerosi minimi locali; configurazioni orbitali qualitativamente diverse possono fornire valori di GDOP comparabili.
- **Non differenziabilità:** la metrica di copertura (conteggio dei satelliti visibili) introduce discontinuità che impediscono il calcolo di gradienti analitici.
- **Elevata dimensionalità:** il vettore  $\mathbf{x}$  comprende fino a 18 variabili nel caso non vincolato, producendo uno spazio combinatoriale vasto.

## 4.3 Variabili di Ottimizzazione

Il vettore delle variabili decisionali  $\mathbf{x}$  definisce completamente la geometria della costellazione. Per semplificare l'imposizione dei vincoli geometrici relativi all'altitudine e garantire la stabilità delle orbite, si è scelto di utilizzare i raggi degli apsidi ( $r_p$  e  $r_a$ ) come variabili primarie al posto della classica coppia semiasse maggiore ed eccentricità ( $a, e$ ).

### 4.3.1 Caso Generale

Nel caso di riferimento con due piani orbitali e un totale di  $N_{tot}$  satelliti, il vettore  $\mathbf{x}$  è composto da variabili che definiscono la forma del piano e la posizione dei satelliti su di esso:

- **Parametri dei piani orbitali (5 per piano):** Per ciascuno dei piani  $j$  si definiscono:
  - $r_{p,j}$ : Raggio di periapside.
  - $r_{a,j}$ : Raggio di apoapside.
  - $i_j$ : Inclinazione orbitale.
  - $\Omega_j$ : Ascensione retta del nodo ascendente (RAAN).
  - $\omega_j$ : Argomento del periapside.

- **Fasatura dei satelliti ( $N_{tot}$  variabili):** L'anomalia vera iniziale  $\nu_k$  per ogni singolo satellite  $k = 1 \dots N_{tot}$  della costellazione.

Per una costellazione di 8 satelliti su 2 piani, il problema presenta quindi un totale di  $2 \times 5 + 8 = 18$  gradi di libertà:

$$\mathbf{x} = [r_{p,1}, r_{a,1}, i_1, \Omega_1, \omega_1, r_{p,2}, r_{a,2}, i_2, \Omega_2, \omega_2, \nu_1, \dots, \nu_8]$$

### 4.3.2 Caso "phased" (vincolo di fasatura relativa)

Per ridurre la dimensionalità del problema e favorire soluzioni geometricamente simmetriche, è stata introdotta una variante denominata *phased*. In questa configurazione, la posizione relativa dei satelliti su uno stesso piano orbitale è vincolata in modo rigido. Invece di ottimizzare l'anomalia vera di ogni singolo satellite, si impone che le anomalie medie ( $M$ ) siano equispaziate lungo l'orbita. Per un piano con  $N_{sat/piano}$  satelliti, l'anomalia media del  $k$ -esimo satellite è definita come:

$$M_k = M_{phase} + k \cdot \frac{360^\circ}{N_{sat/piano}}, \quad k = 0, \dots, N_{sat/piano} - 1$$

In questo caso, le variabili di ottimizzazione per le anomalie si riducono a una sola variabile di fase  $M_{phase}$  per piano, riducendo significativamente lo spazio di ricerca (es. da 18 a 12 variabili per il caso 4+4).

### 4.3.3 Caso "frozen" (Orbite ELFO)

Per la ricerca di configurazioni orbitali a lungo termine che richiedano minori manovre per il mantenimento dell'orbita, è stata implementata una variante per le orbite ELFO. In questo scenario, le variabili di ottimizzazione subiscono un'ulteriore riduzione:

- **L'argomento del periapside ( $\omega$ )** viene rimosso dalle variabili di ricerca e fissato al valore costante di  $90^\circ$ .
- **L'eccentricità** non è una variabile libera, ma è calcolata a valle della scelta dell'inclinazione  $i$ , in modo da rispettare la condizione analitica di congelamento (Eq. 2.17).

In questa configurazione, le variabili primarie tornano a essere di tipo kepleriano: l'algoritmo ottimizza il semiasse maggiore  $a$ , l'inclinazione  $i$  e l'ascensione retta del nodo ascendente  $\Omega$ . I gradi di libertà per ogni piano orbitale scendono così a tre ( $a, i, \Omega$ ), definendo implicitamente i raggi al periapside e all'apoapside. I vincoli fisici sui raggi minimo e massimo vengono poi gestiti tramite una funzione di penalità aggiunta direttamente al valore della fitness, scartando le configurazioni non ammissibili.

### 4.3.4 Vincoli e Spazio di Ricerca

Lo spazio di ricerca è delimitato da vincoli fisici e operativi:

- **Raggi ( $r_p, r_a$ ):** Vincolati tra un minimo di 2000 km (per garantire un margine di sicurezza sopra la superficie lunare ed evitare collisioni) e un massimo di 15000 km (per limitare le perdite di segnale e il ritardo di propagazione).

- **Angoli:** Le inclinazioni possono variare tra  $0^\circ$  e  $180^\circ$  (permettendo orbite retrograde), la RAAN e le anomalie coprono l'intero intervallo  $0^\circ - 360^\circ$ . L'argomento del periapside  $\omega$  è stato ristretto all'intervallo  $0^\circ - 180^\circ$  (emisfero sud) data la localizzazione dei punti di interesse al Polo Sud.

Un vincolo logico importante riguarda la condizione geometrica  $r_p \leq r_a$ . Anziché imporre un vincolo lineare esplicito che complicherebbe lo spazio di ricerca per il solutore, tale condizione è gestita internamente dalla funzione obiettivo: se l'algoritmo seleziona un raggio di periapside maggiore dell'apoapside, i due valori vengono automaticamente scambiati prima della valutazione orbitale.

## 4.4 Funzione Obiettivo

La funzione di fitness  $J(\mathbf{x})$  è progettata per guidare l'ottimizzatore verso soluzioni che offrano precisione e continuità. È definita come una somma pesata (scalarizzazione) di tre metriche prestazionali:

$$J(\mathbf{x}) = w_{median} \cdot \widetilde{GDOP}_{max} + w_{max} \cdot GDOP_{max} + w_{cov} \cdot N_{NaN} \quad (4.2)$$

dove:

- $\widetilde{GDOP}_{max}$  è il valore massimo tra le mediane temporali della GDOP calcolate per ogni punto di interesse. Rappresenta la prestazione "tipica" nel caso peggiore geografico.
- $GDOP_{max}$  è il picco assoluto di GDOP registrato durante l'intera simulazione.
- $N_{NaN}$  è il numero di istanti temporali in cui la copertura è insufficiente (meno di 4 satelliti visibili).

I pesi  $w$  sono calibrati per guidare l'ottimizzazione. In particolare, a  $w_{cov}$  viene assegnato un valore molto elevato ( $10^6$ ) per penalizzare drasticamente le soluzioni che non garantiscono una visibilità continua.

## 4.5 Algoritmi Utilizzati

Le caratteristiche multimodali e la non differenziabilità della funzione obiettivo richiedono l'uso di algoritmi di ottimizzazione globale *population-based*, ossia metodi che operano su un insieme (popolazione o sciame) di soluzioni candidate, evolvendole iterativamente senza richiedere il calcolo del gradiente.

### 4.5.1 Algoritmo Genetico

L'algoritmo genetico (ga) è un metodo metaeuristico ispirato al processo di selezione naturale di Darwin. L'algoritmo opera su una *popolazione* di individui, ciascuno dei quali codifica una possibile soluzione  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , e la fa evolvere iterativamente attraverso operatori ispirati alla biologia: selezione, incrocio (*crossover*) e mutazione.

### Inizializzazione della Popolazione

La popolazione iniziale è un insieme di  $N_p$  punti generati stocasticamente all'interno dei limiti  $[\mathbf{x}_{lb}, \mathbf{x}_{ub}]$ . Una popolazione iniziale sufficientemente ampia e uniformemente distribuita garantisce che più bacini di attrazione vengano campionati fin dalla prima generazione.

### Ciclo Generazionale

Ad ogni generazione, l'algoritmo esegue le seguenti operazioni:

1. **Ridimensionamento della fitness:** i valori grezzi della funzione obiettivo vengono convertiti in "valori attesi" (*expectation values*).
2. **Selezione:** gli individui vengono selezionati come genitori con probabilità legata al loro valore di fitness.
3. **Élite:** i  $N_e$  individui con la fitness migliore (*elite count*) vengono copiati inalterati nella generazione successiva, garantendo che il miglior valore di fitness sia monotonamente non crescente attraverso le generazioni.
4. **Crossover:** l'operatore di incrocio combina le informazioni genetiche di due genitori per produrre nuovi individui figli. La frazione di individui non élite generati per crossover è regolata dal parametro `CrossoverFraction`.
5. **Mutazione:** introduce perturbazioni casuali nel genotipo di un individuo, mantenendo la diversità della popolazione e impedendo la convergenza prematura su minimi locali. Gli individui rimanenti, non élite e non prodotti per crossover, sono generati per mutazione.

La nuova popolazione viene quindi valutata e il processo si ripete fino al soddisfacimento di un criterio di arresto (numero massimo di generazioni, stallo della fitness o tempo limite).

### Schema Operativo Complessivo

La Figura 4.1 riassume il flusso operativo dell'algoritmo genetico. La popolazione iniziale viene generata e valutata; ad ogni generazione successiva, la fitness viene scalata, i genitori selezionati, e i nuovi individui prodotti combinando élite, crossover e mutazione. La nuova popolazione viene quindi valutata e il miglior individuo aggiornato, prima di verificare i criteri di arresto.

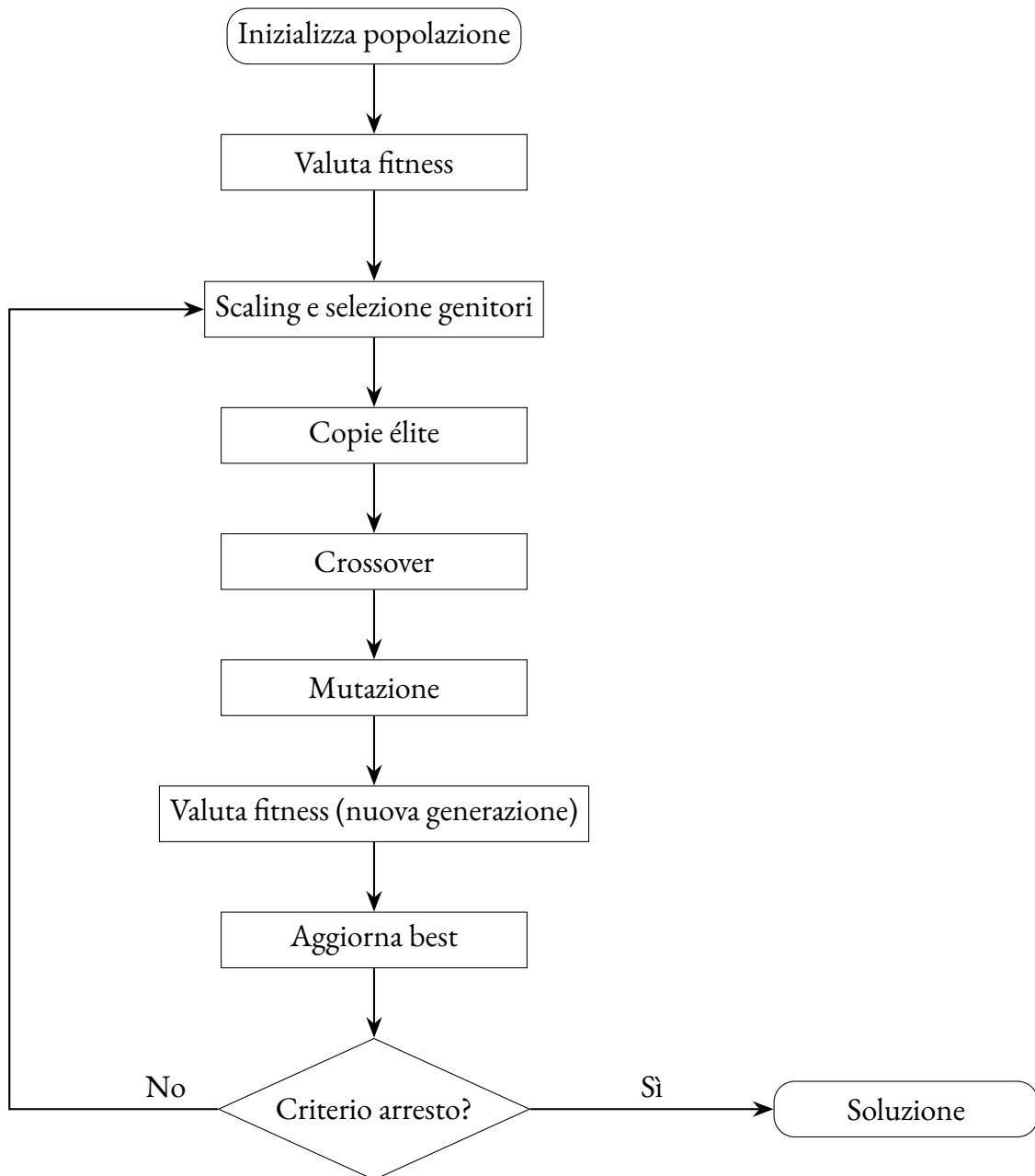


Figura 4.1: Diagramma di flusso dell'algoritmo genetico implementato nel *Global Optimization Toolbox*.

## 4.5.2 Ottimizzazione con Sciame di Particelle

L'*Particle Swarm Optimization* (particleswarm) è un algoritmo metaeuristico ispirato al comportamento sociale di organismi che si muovono in gruppo, come stormi di uccelli o banchi di pesci. A differenza del GA, il PSO non utilizza operatori evolutivi (selezione, crossover, mutazione), bensì aggiorna la posizione di ciascuna particella in base a tre influenze: la propria inerzia, la memoria individuale e la conoscenza collettiva dello sciame.

### Inizializzazione dello Sciame

Lo sciame è costituito da  $N_s$  particelle, ciascuna inizializzata con una posizione  $\mathbf{x}_i^0$  campionata uniformemente nello spazio  $[\mathbf{x}_{lb}, \mathbf{x}_{ub}]$  e con una velocità iniziale  $\mathbf{v}_i^0$  nulla o casuale. Per ciascuna particella vengono memorizzate la migliore posizione personale  $\mathbf{p}_{best,i}$  e la migliore posizione dell'intero sciame  $\mathbf{g}_{best}$ .

### Aggiornamento della Velocità e della Posizione

Ad ogni iterazione  $k$ , la velocità e la posizione di ciascuna particella  $i$  vengono aggiornate secondo le equazioni fondamentali:

$$\mathbf{v}_i^{k+1} = \underbrace{w \cdot \mathbf{v}_i^k}_{\text{Inerzia}} + \underbrace{c_1 \mathbf{r}_1 \odot (\mathbf{p}_{best,i} - \mathbf{x}_i^k)}_{\text{Componente Cognitiva}} + \underbrace{c_2 \mathbf{r}_2 \odot (\mathbf{g}_{best} - \mathbf{x}_i^k)}_{\text{Componente Sociale}} \quad (4.3)$$

$$\mathbf{x}_i^{k+1} = \mathbf{x}_i^k + \mathbf{v}_i^{k+1} \quad (4.4)$$

dove il simbolo  $\odot$  indica il prodotto elemento per elemento e:

- $w$  è il **peso inerziale**, che regola la tendenza della particella a proseguire lungo la traiettoria corrente. Un valore elevato favorisce l'esplorazione globale, uno basso favorisce lo sfruttamento locale.
- $c_1$  è il **coefficiente di accelerazione cognitivo** (*self-adjustment weight*), che governa l'attrazione verso  $\mathbf{p}_{best,i}$ , la migliore posizione visitata dalla singola particella.
- $c_2$  è il **coefficiente di accelerazione sociale** (*social-adjustment weight*), che governa l'attrazione verso  $\mathbf{g}_{best}$ , la migliore posizione trovata dall'intero sciame.
- $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \in [0, 1]^n$  sono vettori casuali uniformi rigenerati ad ogni iterazione, che introducono la stocasticità necessaria all'esplorazione.

Nella configurazione predefinita del toolbox MATLAB i parametri valgono  $c_1 = 1.49$  e  $c_2 = 1.49$ . Il peso inerziale  $w$  viene regolato automaticamente dall'algoritmo mediante una strategia adattiva che bilancia esplorazione e sfruttamento in funzione dell'andamento della fitness.

Ad ogni iterazione, una frazione  $\alpha$  delle particelle (detta *MinNeighborsFraction*, default 0.25) definisce il vicinato minimo di ciascuna particella. Il valore  $\mathbf{g}_{best}$  nell'Eq. (4.3) si riferisce in realtà al migliore del vicinato, non necessariamente dell'intero sciame. Quando lo sciame non migliora, il vicinato viene progressivamente espanso fino a includere l'intero sciame ( $\alpha \rightarrow 1$ ), recuperando il comportamento globale classico. Questa strategia rallenta l'omologazione delle particelle e preserva la diversità nelle fasi iniziali.

L'iterazione prosegue fino al soddisfacimento di un criterio di arresto, analogamente al GA.

**Schema Operativo Complessivo**

La Figura 4.2 illustra il flusso operativo dell'algoritmo PSO.

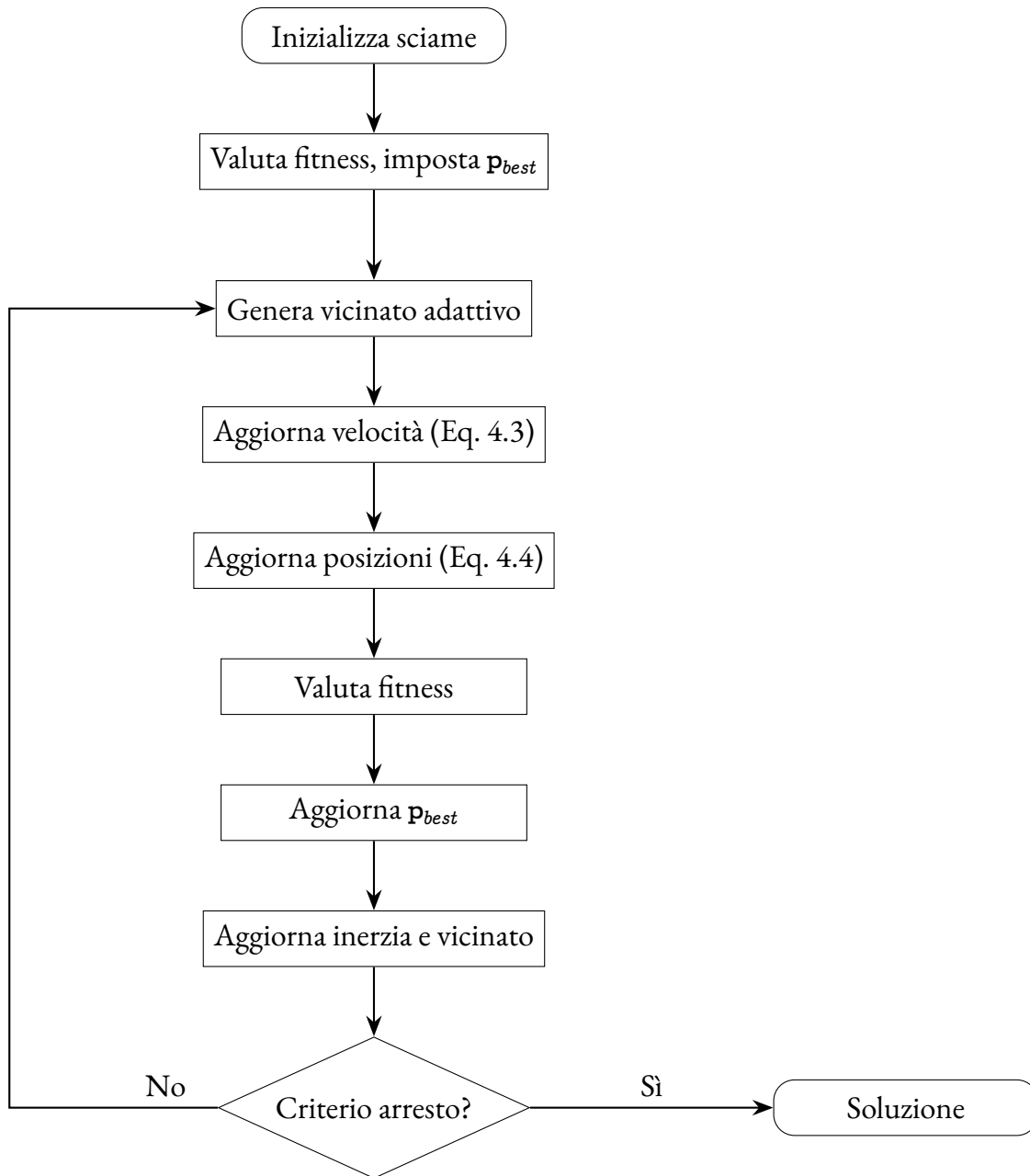


Figura 4.2: Diagramma di flusso dell'algoritmo PSO implementato nel *Global Optimization Toolbox*.

### 4.5.3 Strategie di calcolo e ibridazione

Per migliorare l'efficienza e l'accuratezza dell'ottimizzazione, sono state adottate due strategie computazionali complementari:

1. **Calcolo Parallelo:** impostando `UseParallel = true` nelle opzioni del solutore, la valutazione della funzione obiettivo viene distribuita sui core disponibili della CPU tramite il *Parallel Computing Toolbox*, riducendo i tempi di esecuzione.
2. **Ibridazione (Hybrid Function):** al termine delle iterazioni dell'algoritmo globale (GA o PSO), la migliore soluzione trovata viene passata come punto iniziale a un algoritmo di ricerca locale, il `patternsearch`. Quest'ultimo, essendo un metodo di ricerca diretta che non richiede il calcolo del gradiente, è in grado di raffinare la soluzione all'interno del bacino di attrazione individuato dall'algoritmo globale, migliorando la precisione numerica del risultato finale. In questo modo si combinano le capacità esplorative degli algoritmi stocastici con la capacità di convergenza fine di un solutore locale.



# Capitolo 5

## Risultati

In questo capitolo vengono presentati i risultati delle ottimizzazioni svolte per la progettazione della costellazione lunare. Vengono confrontate le prestazioni degli algoritmi utilizzati e analizzate diverse configurazioni orbitali, valutando l'impatto dei parametri di ottimizzazione e dei requisiti di missione.

Per ogni caso analizzato sono state svolte 10 ottimizzazioni.

### 5.1 Definizione della missione e setup dell'ottimizzazione

Le simulazioni sono state condotte configurando uno scenario di missione lunare con i seguenti parametri:

- **Periodo della simulazione:** definisce la durata della simulazione. La simulazione copre un arco temporale di 30 giorni.
- **Passo di integrazione (step):** determina ogni quanti secondi viene calcolata la GDOP. Nel caso principale è impostato a 600 secondi (10 minuti).
- **Numero di satelliti per ogni orbita:** Il caso principale prevede 4 satelliti in ognuno dei due piani orbitali.
- **Soglia di visibilità:** è l'angolo di elevazione minimo per il quale i satelliti diventano visibili. Nel caso principale è impostato a  $5^\circ$ .
- **Punti di Interesse (Ground Points):** sono stati definiti 20 punti sulla superficie lunare attorno al Polo Sud, distribuiti a latitudini comprese tra  $-75^\circ$  e  $-90^\circ$ .
- **Pesi fitness:** sono pesi assegnati ai contributi della funzione di fitness. Di default sono impostati a  $[1, 1]$ .

Lo script di ottimizzazione si occupa inizialmente di caricare i kernel SPICE e configurare le strutture dati della missione. Successivamente definisce il vettore delle variabili di ottimizzazione  $\mathbf{x}$ . Vengono quindi impostati i limiti superiori e inferiori dello spazio di ricerca (bounds). Infine, lo script lancia il solver di ottimizzazione e, a convergenza avvenuta, esegue una simulazione di verifica per estrarre e salvare le metriche di prestazione finali.

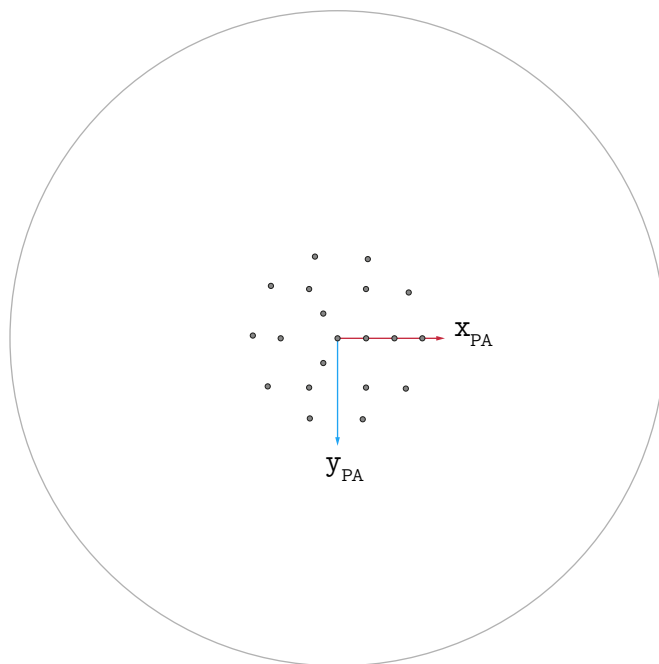


Figura 5.1: Posizione dei punti di interesse

## 5.2 Orbite imperturbate

### 5.2.1 Caso principale: 8 satelliti in 2 piani orbitali

La configurazione iniziale analizzata prevede una costellazione di 8 satelliti, divisi equamente in due piani orbitali distinti.

#### Panoramica delle soluzioni

La figura 5.2, nella pagina seguente, rappresenta le 10 soluzioni di ogni caso analizzato. Il grafico rappresenta i contributi principali del punteggio di fitness e il valore della soluzione. In tutti i casi la copertura risulta costante, quindi  $N_{NaN}$  è stato omesso. Diverse ottimizzazioni sono andate a convergenza allo stesso punteggio e risultano avere gli stessi parametri orbitali; non sono state trovate configurazioni diverse aventi le stesse prestazioni.

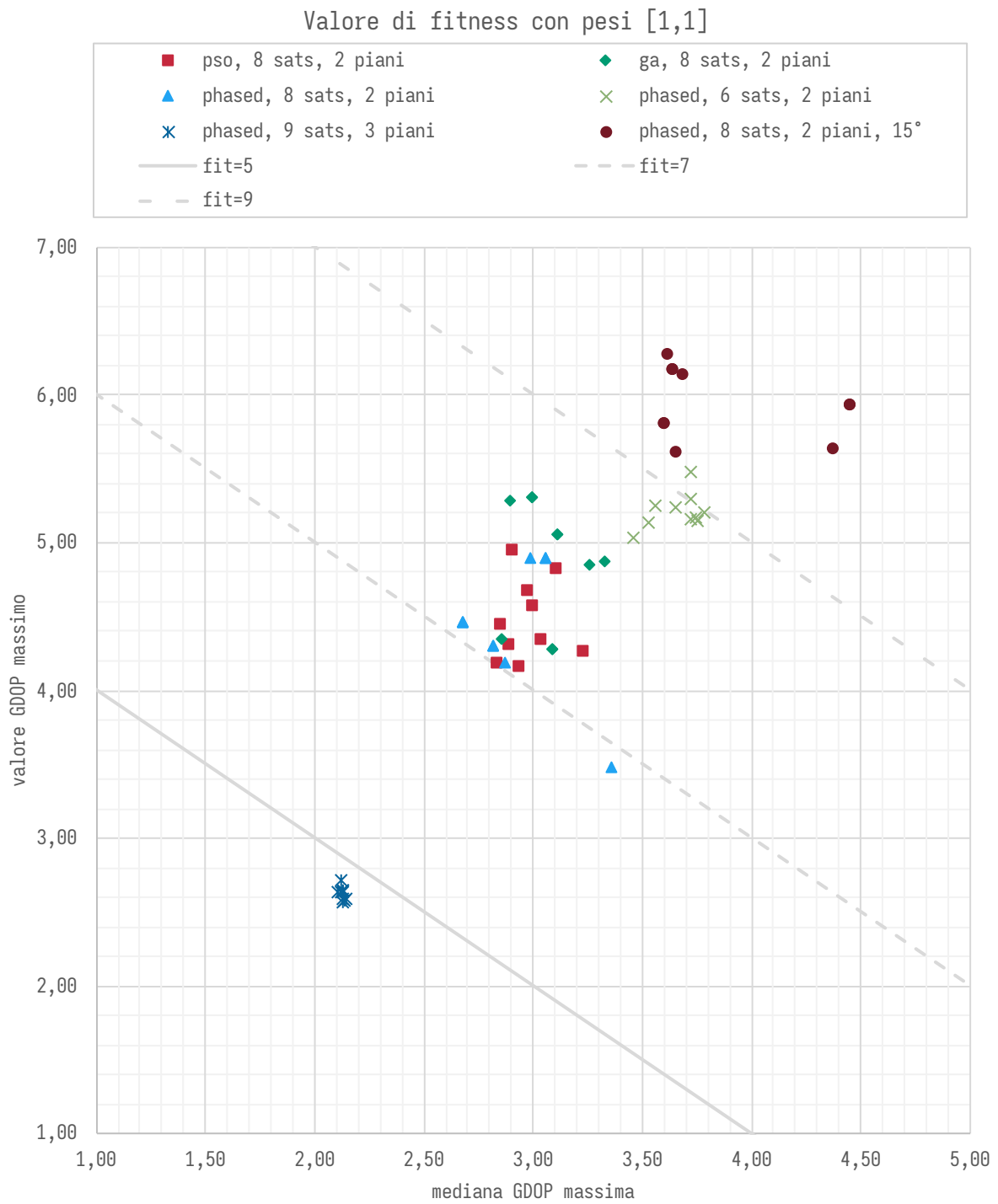


Figura 5.2: Panoramica delle soluzioni con pesi [1,1]

### Prestazioni degli algoritmi

Per quanto riguarda l'algoritmo genetico (ga), sono stati variati numerosi parametri per migliorarne la convergenza e ridurre il tempo computazionale. I risultati migliori, in termini di fitness finale e velocità di esecuzione, sono stati ottenuti con la seguente configurazione:

```

1 opts = optimoptions('ga', ...
2   CreationFcn = [], ...
3   CrossoverFcn = [], ...
4   MutationFcn = 'mutationuniform', ...
5   SelectionFcn = [], ...
6   PopulationSize = 300, ...
7   EliteCount = 0.05*300, ...
8   CrossoverFraction = 0.5, ...
9   FunctionTolerance = 1e-6, ...
10  MaxStallGenerations = 75, ...
11  MaxGenerations = 300, ...
12  Display = 'diagnose', ...
13  PlotFcn = 'gaplotbestf', ...
14  UseParallel = true, ...
15  HybridFcn = 'patternsearch');

```

Listing 5.1: opzioni ga

Nonostante la regolazione dei parametri dell'algoritmo genetico, `particleswarm` si è dimostrato significativamente più performante. Anche utilizzando le opzioni di default di MATLAB, `particleswarm` ha converso verso soluzioni con valori di fitness migliori in tempi di calcolo inferiori rispetto a `ga` (fig. 5.3 e 5.4). La natura del problema, caratterizzata da molti minimi locali, sembra favorire l'approccio dello sciame rispetto a quello evolutivo per questa specifica applicazione. La configurazione di `particleswarm` utilizzata è:

```

1 opts = optimoptions('particleswarm', ...
2   SwarmSize = 100, ...
3   MaxIterations = 350, ...
4   MaxStallIterations = 150, ...
5   FunctionTolerance = 1e-6, ...
6   InertiaRange = [0.2 0.9], ...
7   SelfAdjustmentWeight = 1.5, ...
8   SocialAdjustmentWeight = 1.5, ...
9   PlotFcn = 'pswplotbestf', ...
10  Display = 'iter', ...
11  UseParallel = true, ...
12  HybridFcn = 'patternsearch');

```

Listing 5.2: opzioni particleswarm

**Tempi di calcolo** La singola analisi di una costellazione dura circa *0,25 secondi*. Le funzioni più onerose sono il calcolo della norma dei vettori, l'applicazione della logica di visibilità alla variabile delle posizioni relative e l'inversione della matrice  $\mathbf{H}^T\mathbf{H}$ .

Per quanto riguarda le ottimizzazioni, i tempi di calcolo dipendono dalle specifiche del computer: il grado di parallelizzazione e l'eventuale utilizzo della GPU variano infatti con il numero di core disponibili e con le prestazioni della scheda grafica. Le seguenti immagini riportano due analisi svolte con le configurazioni descritte precedentemente. L'ottimizzazione con *particleswarm* è durata 00:18:19, mentre l'ottimizzazione con *ga* è durata 00:49:45.

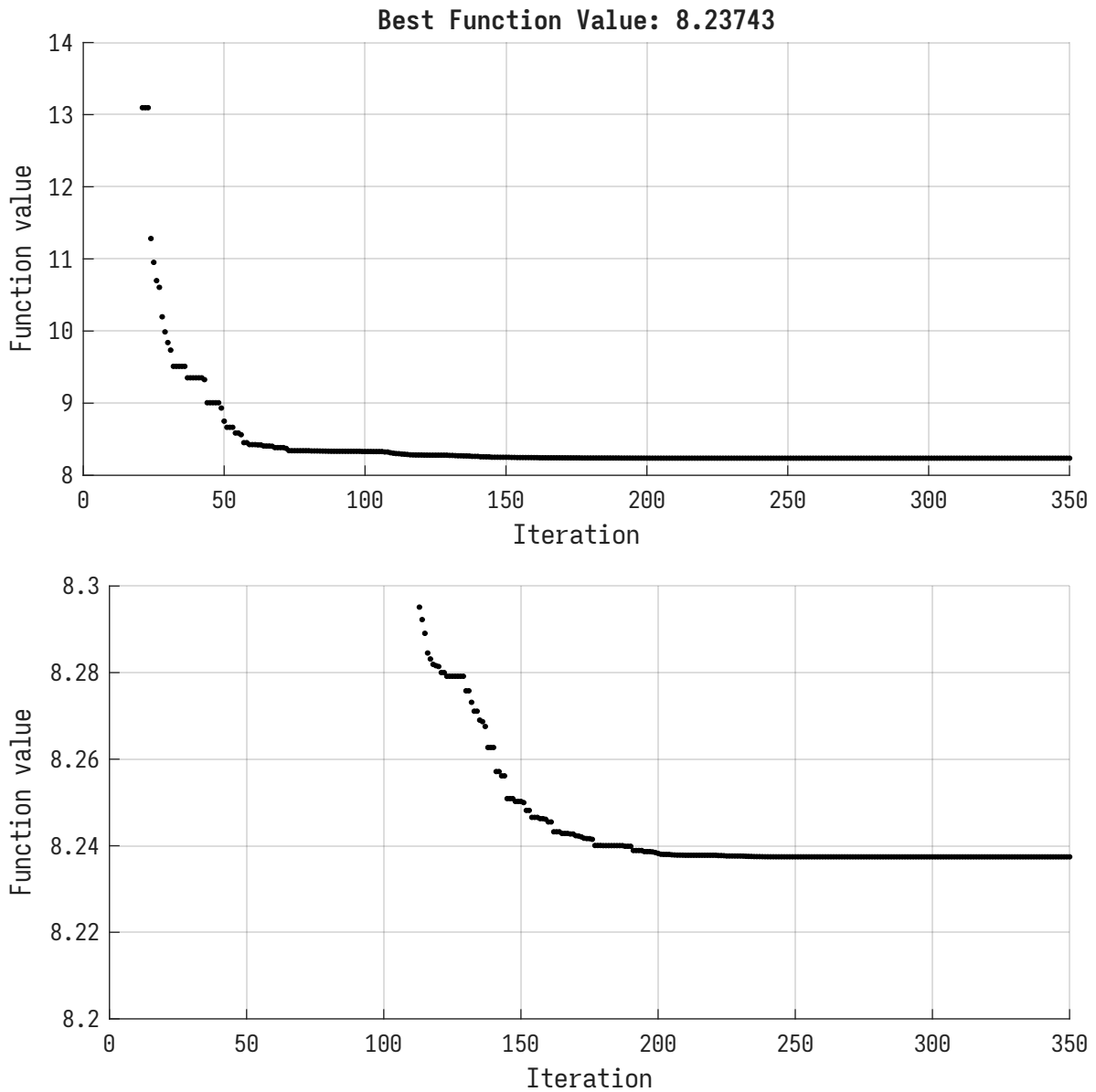


Figura 5.3: Analisi PSO, durata 00:18:19

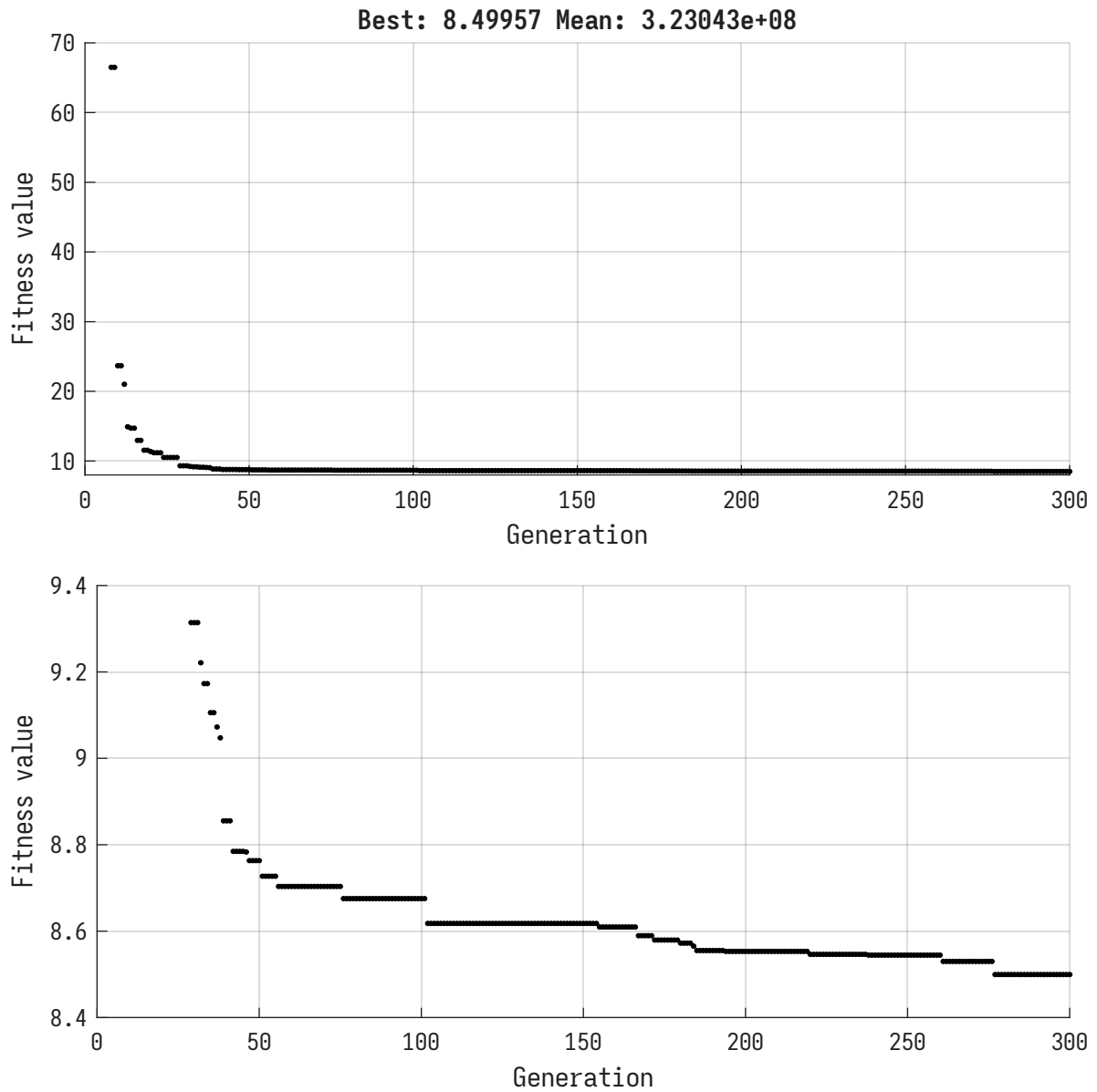


Figura 5.4: Analisi GA, durata 00:49:45

### **Considerazioni sulla copertura**

Le soluzioni ottime garantiscono una copertura ininterrotta per l'intero arco temporale analizzato durante l'ottimizzazione (30 giorni). Analisi di sensibilità sul passo di tempo (step) hanno mostrato che passi troppo ampi (15-20 minuti) possono mascherare picchi di GDOP di breve durata e brevi interruzioni di copertura; utilizzando un passo di 10 minuti per le simulazioni, si è trovato un equilibrio tra tempo computazionale e qualità delle soluzioni.

Generalmente, l'ottimizzazione su un periodo di 30 giorni casuali genera una costellazione robusta che mantiene le prestazioni anche quando simulata per tempi di missione elevati (perché si sono ottimizzate orbite imperturbate).

### **Considerazioni sulla geometria**

Si può notare che le orbite presentano un'eccentricità elevata e argomento del periapside vicino a  $90^\circ$ . Questi valori sono ragionevoli, in quanto minimizzano il tempo speso nelle regioni di non visibilità.

La geometria risultante con due piani orbitali richiama la forma di un tetraedro ideale, massimizzando la separazione angolare tra i satelliti visti dall'utente al Polo Sud. La seguente figura rappresenta un istante temporale della soluzione (2,84; 4,19) di fig.5.2, in cui ci sono 6 satelliti visibili su 8 e la GDOP per il punto selezionato è 2.72.

Prendendo come riferimento una soglia di visibilità di  $5^\circ$ , la GDOP minima ottenuta risulta inferiore a quella teorica ideale calcolabile per una visibilità di esattamente 4 satelliti. Questo avviene perché, nella soluzione ottimizzata, la costellazione garantisce spesso la visibilità simultanea di un numero di satelliti superiore a 4 (fino a 8 in alcuni istanti), migliorando la geometria complessiva e riducendo il valori GDOP.

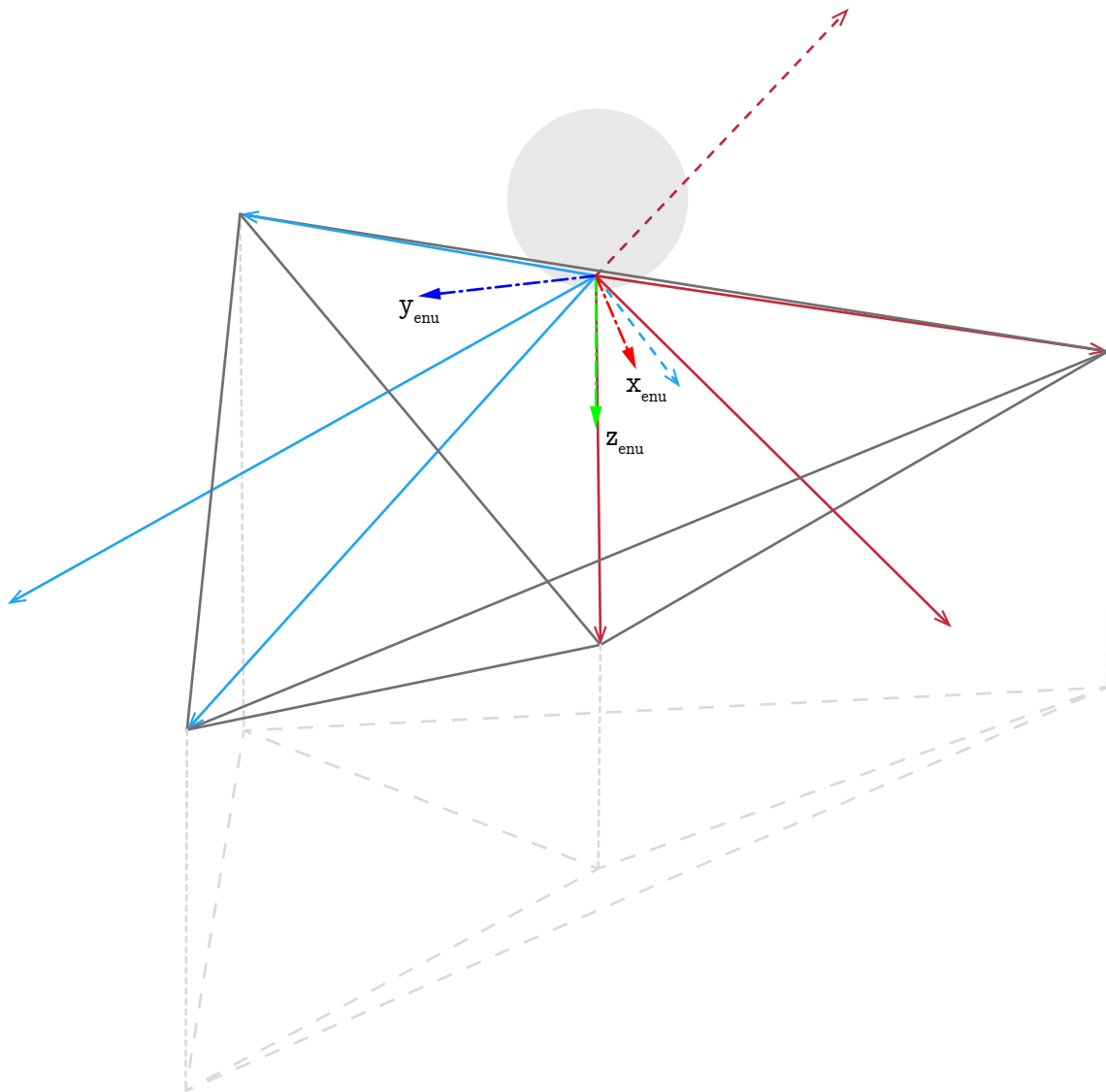
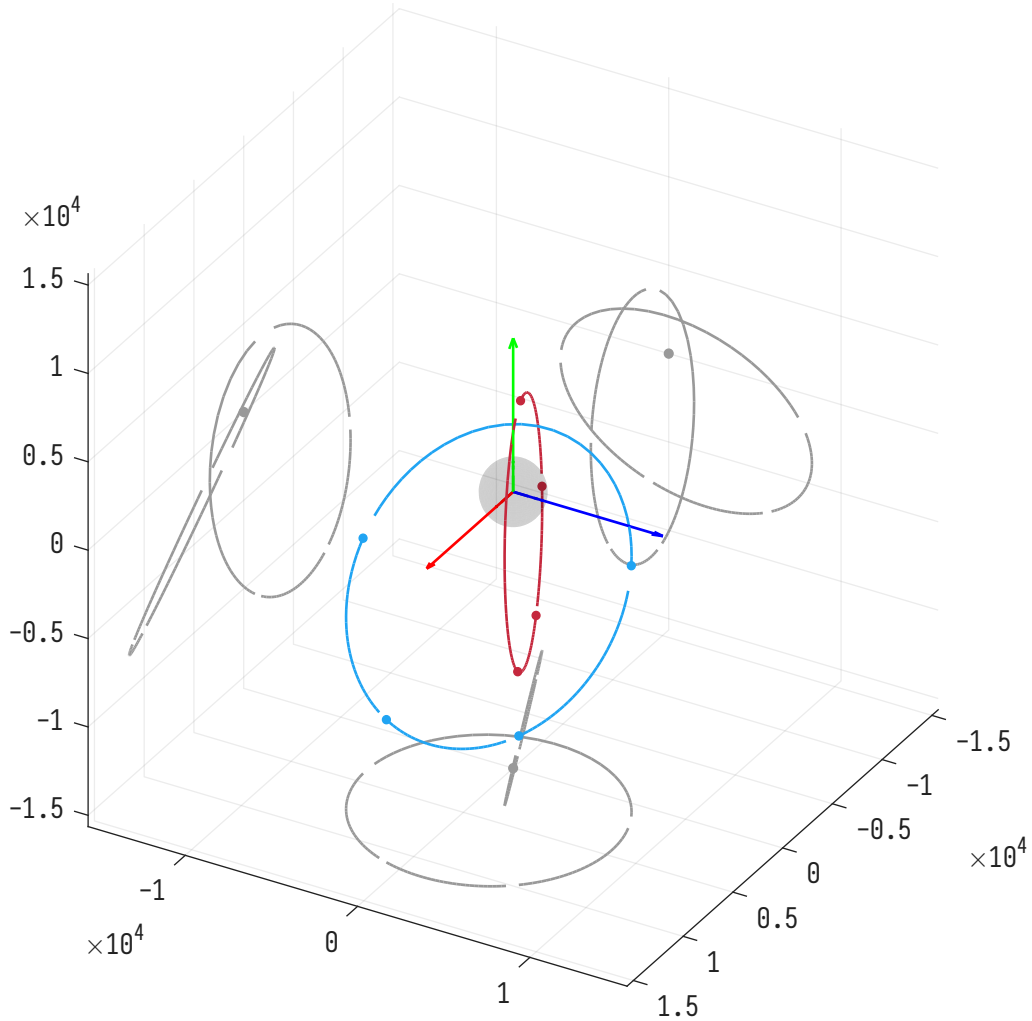


Figura 5.5: Rappresentazione di un istante temporale in cui la costellazione approssima la configurazione ideale



Orbit 1:  $a=8940.9$  km,  $e=0.586$ ,  $i=145.4^\circ$ ,  $\Omega=277.4^\circ$ ,  $\omega=84.9^\circ$  (T=21:04:23)  
 Orbit 2:  $a=8941.0$  km,  $e=0.677$ ,  $i=89.5^\circ$ ,  $\Omega=203.1^\circ$ ,  $\omega=131.0^\circ$  (T=21:04:24)

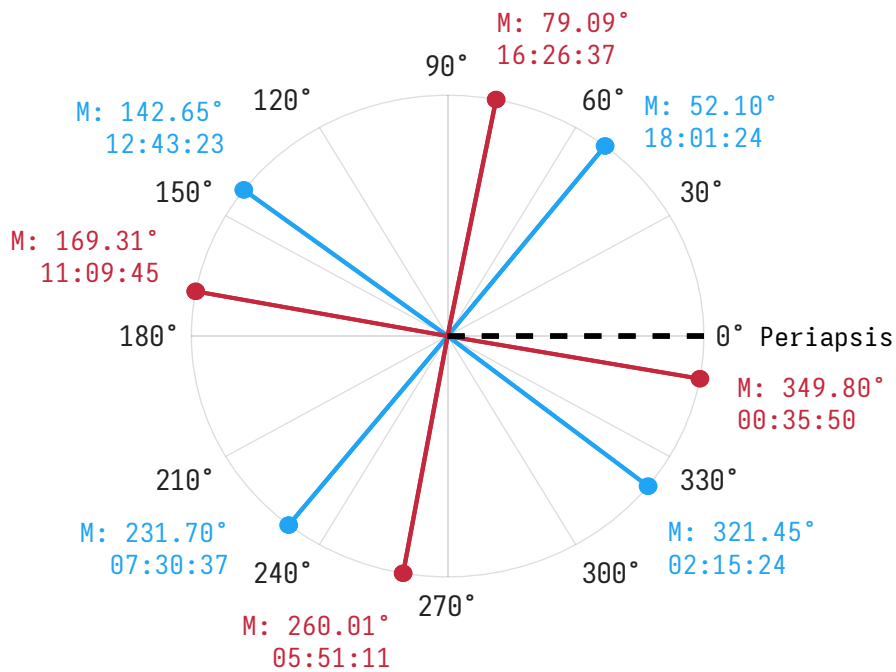


Figura 5.6: geometria della soluzione pso del punto (2,84; 4,19) di fig.5.2

### **Distribuzione statistica della GDOP**

Analizzando le distribuzioni dei valori di GDOP, nel grafico seguente, si nota un'asimmetria. La distribuzione in generale non è gaussiana, ma presenta una coda verso i valori alti. Questo andamento è confermato dai box-plot generati per i vari GP, che mostrano come la maggior parte del tempo la GDOP sia molto bassa, con rari picchi (outliers) che determinano la qualità del servizio nei casi peggiori.

Si può anche notare che le prestazioni migliorano all'aumentare della latitudine. Il punto al polo Sud ha le statistiche più basse nella maggior parte delle analisi svolte.

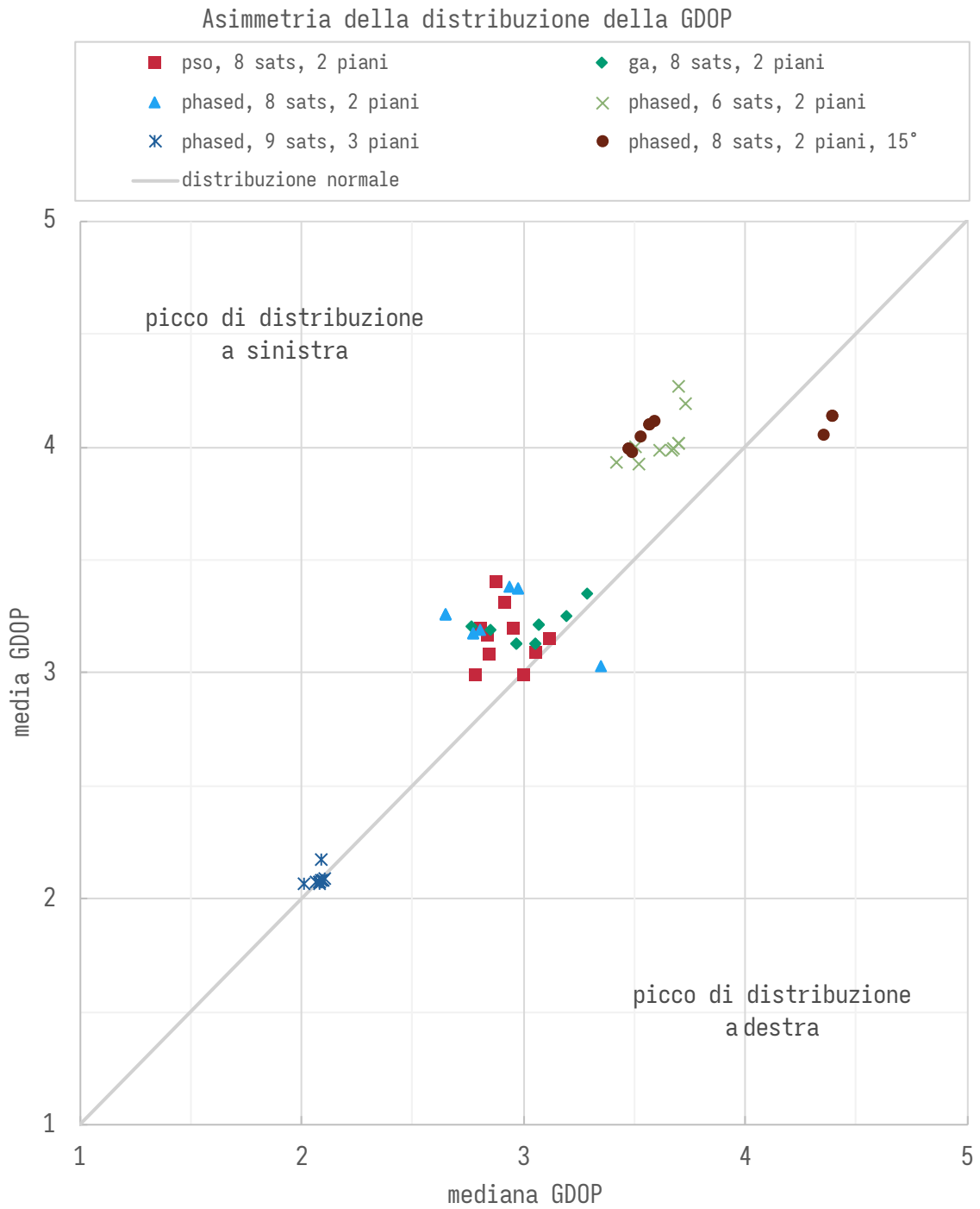


Figura 5.7: Asimmetria di distribuzione

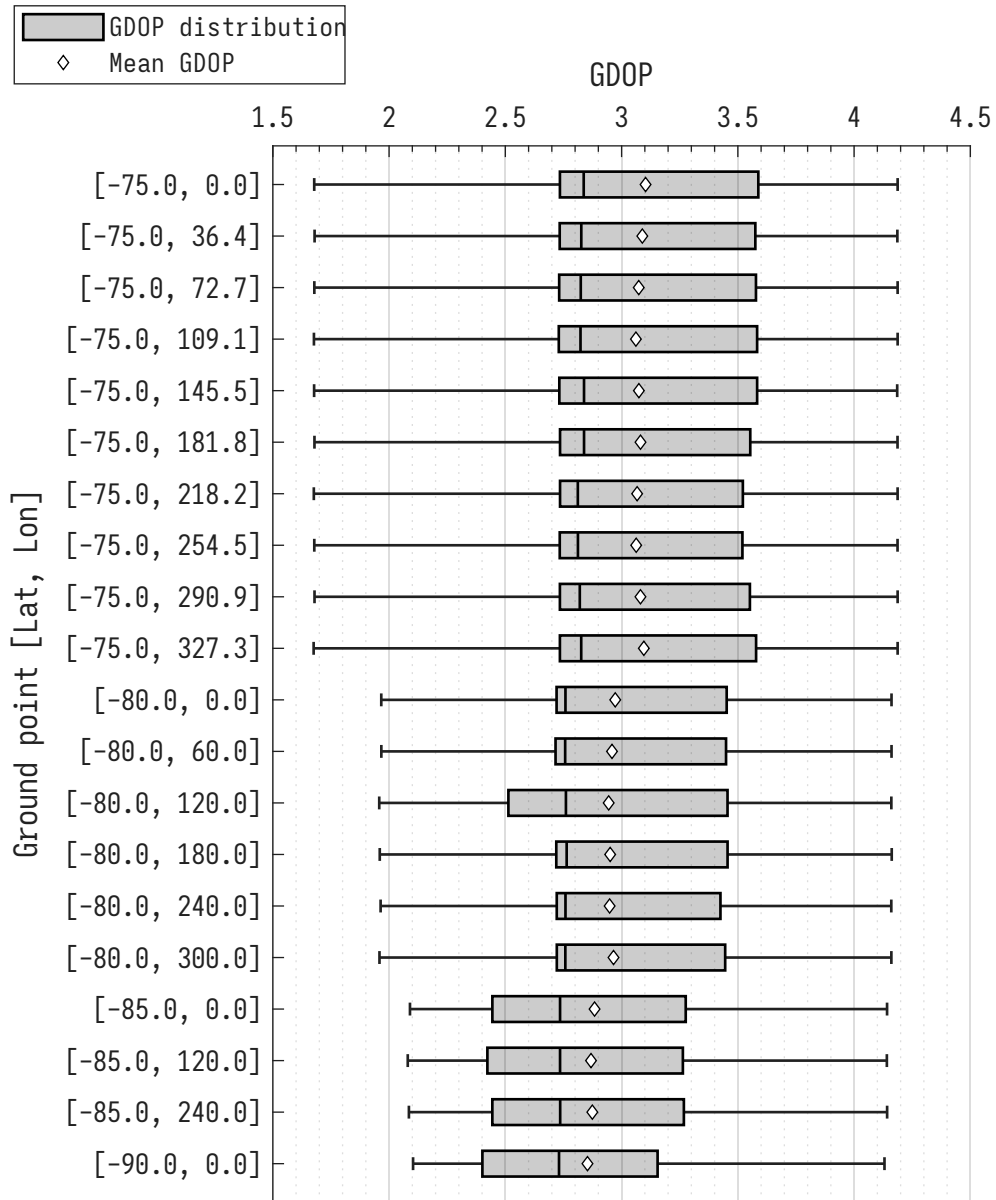


Figura 5.8: statistiche della soluzione pso del punto (2,84; 4,19) di fig.5.2

## 5.2.2 Analisi di Sensibilità

### Variatione dei pesi dei contributi al punteggio di fitness

Sono stati testati diverse combinazioni di pesi  $w = [w_{median}, w_{max}]$  per valutare la risposta dell'ottimizzatore.

- **Enfasi sulla Mediana** ( $w = [10, 1]$ ): Aumentando il peso della mediana, l'algoritmo converge verso soluzioni che minimizzano maggiormente  $\widehat{GDOP}_{max}$ . Nel caso con pesi  $[10, 1]$ , si osserva una mediana delle soluzioni generalmente inferiore rispetto al caso  $[1, 1]$ .
- **Enfasi sul Massimo** ( $w = [1, 10]$ ): Tentando di forzare la riduzione del picco massimo aumentando il peso relativo del termine, l'ottimizzatore non riesce a trovare geometrie significativamente migliori. Le prestazioni non migliorano apprezzabilmente, suggerendo limiti fisici della configurazione 4+4 satelliti.

### Variatione della Soglia di Visibilità

Un'ottimizzazione più conservativa è stata condotta aumentando la soglia di visibilità minima da  $5^\circ$  a  $15^\circ$ . Questo scenario simula condizioni operative in zone montagnose o all'interno di crateri profondi. Come previsto, la GDOP degrada rispetto al caso a  $5^\circ$ . Poiché lo spazio di cielo visibile è ridotto, la separazione angolare massima possibile è limitata, alzando il limite inferiore teorico della GDOP. Nonostante ciò, i risultati confermano la robustezza dell'approccio: sebbene la GDOP sia più alta, la copertura viene mantenuta costante.

## 5.2.3 Configurazioni Alternative

### Vincolo della posizione relativa dei satelliti

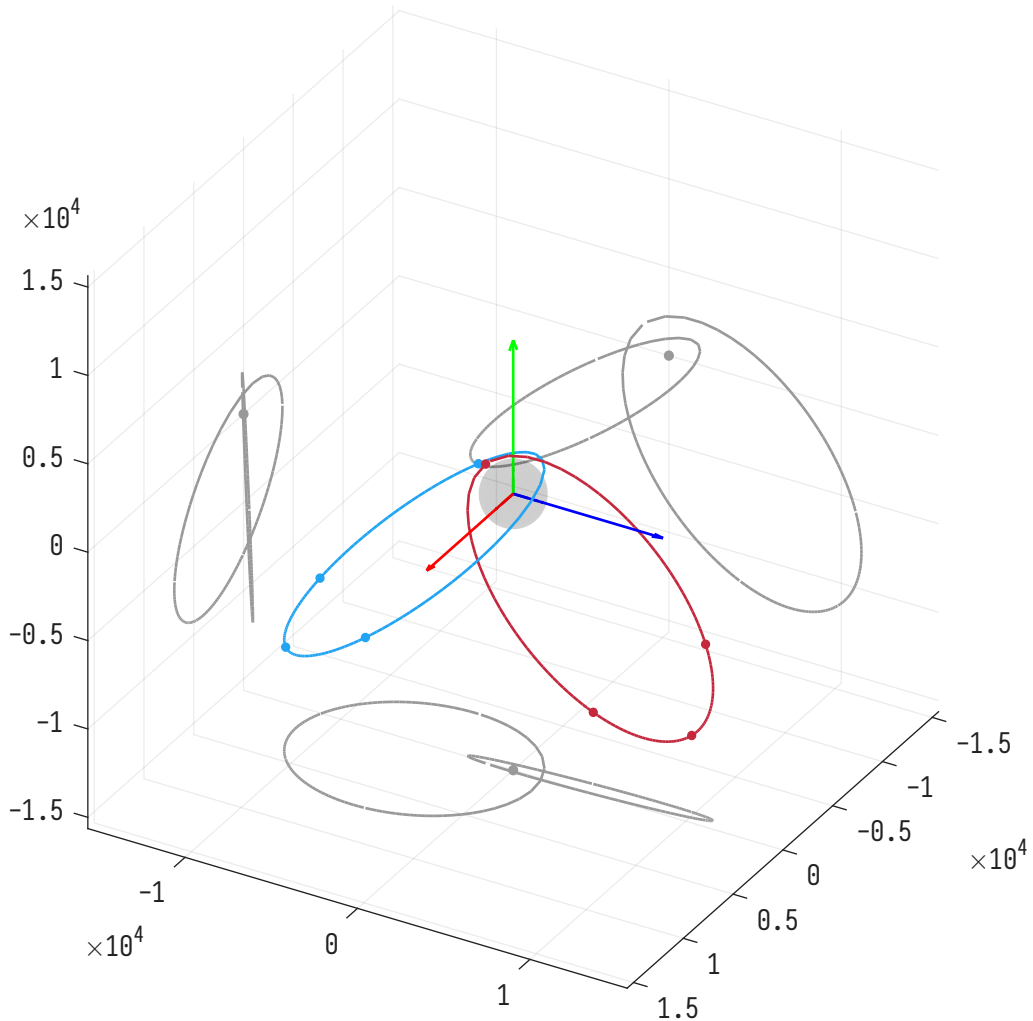
Nelle ottimizzazioni identificate come "phased", si è scelto di ridurre lo spazio di ricerca vincolando la posizione relativa dei satelliti sullo stesso piano orbitale. Invece di ottimizzare l'anomalia vera di ogni singolo satellite indipendentemente, si è imposto che le anomalie medie ( $M$ ) fossero equispaziate. Questo approccio garantisce che i satelliti siano distribuiti temporalmente in modo uniforme, passando per il periapside a intervalli di tempo costanti.

Per un piano con  $N$  satelliti, l'anomalia media del  $k$ -esimo satellite è definita come:

$$M_k = M_{phase} + k \cdot \frac{360^\circ}{N}, \quad k = 0, \dots, N - 1$$

dove  $M_{phase}$  è una variabile di ottimizzazione che rimpiazza le  $N$  anomalie vere. Nel caso 4+4, si riducono le variabili di ottimizzazione da 18 a 12.

Di seguito vengono riportati i risultati dell'ottimizzazione del punto (3, 36; 3, 48). Questa soluzione ha il punteggio di fitness più basso: 6.84. Questo minimo locale è caratterizzato da un valore massimo inferiore, compensato però dalla mediana più elevata tra tutte le soluzioni. Come si può notare in fig. 5.10 (pag. 63), la vicinanza della mediana al valore massimo indica una distribuzione dei risultati fortemente concentrata verso GDOP alte.



Orbit 1:  $a=8499.9$  km,  $e=0.765$ ,  $i=140.9^\circ$ ,  $\Omega=209.2^\circ$ ,  $\omega=99.2^\circ$  ( $T=19:32:00$ )  
 Orbit 2:  $a=8499.9$  km,  $e=0.765$ ,  $i=86.3^\circ$ ,  $\Omega=271.1^\circ$ ,  $\omega=49.2^\circ$  ( $T=19:32:00$ )

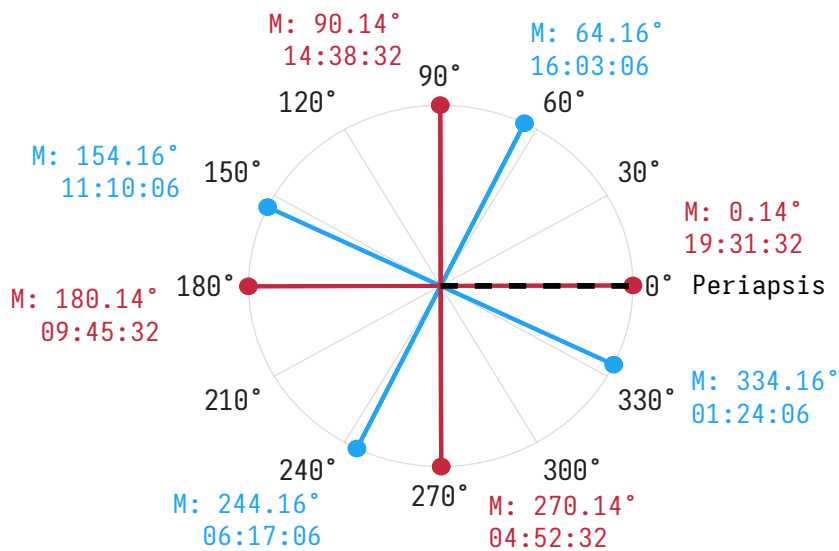


Figura 5.9: geometria della soluzione "phased" del punto (3,36; 3,48) di fig.5.2

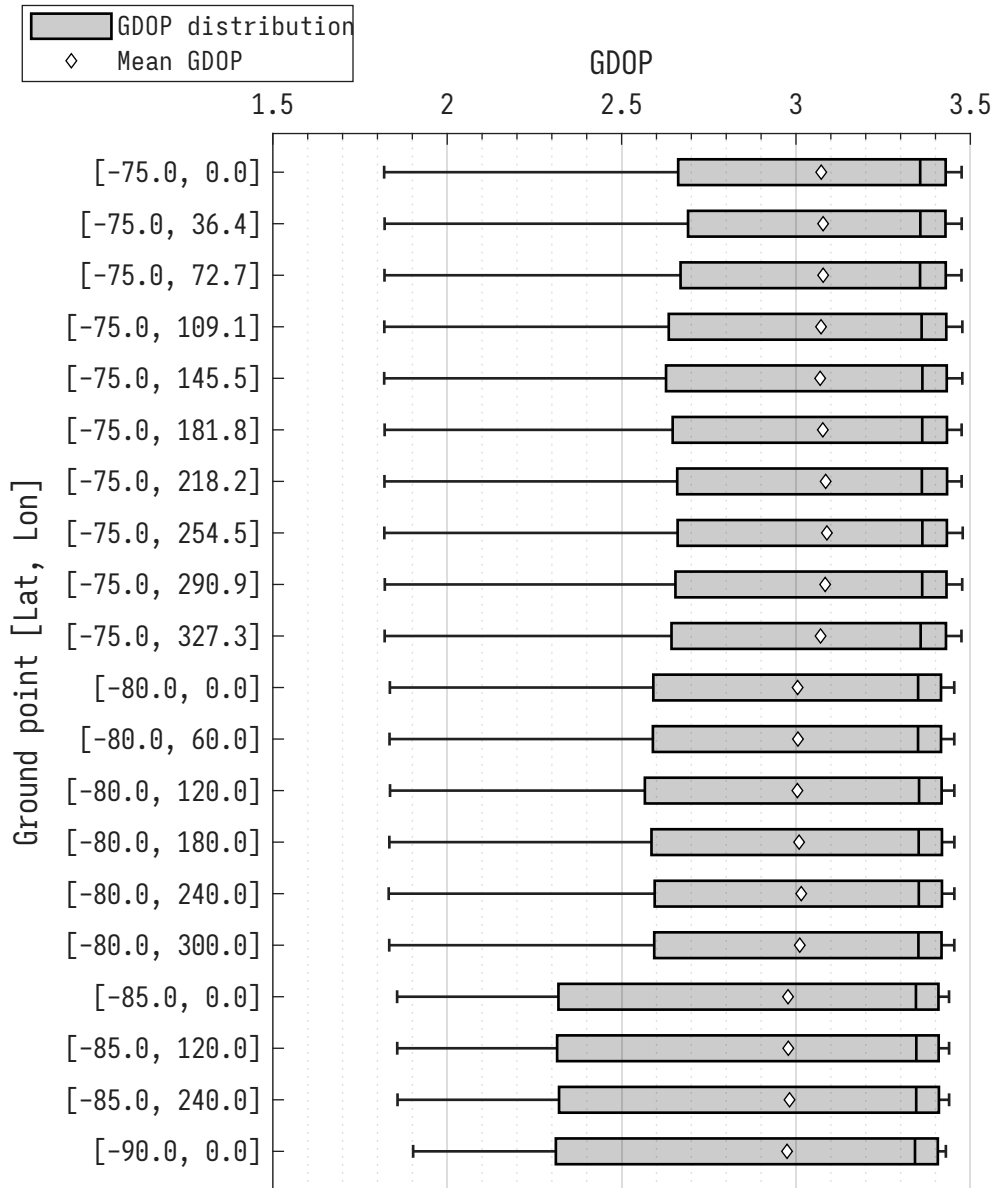


Figura 5.10: statistiche della soluzione pso del punto (3,36; 3,48) di fig.5.2

### **Ottimizzazione con 6 satelliti in 2 piani orbitali**

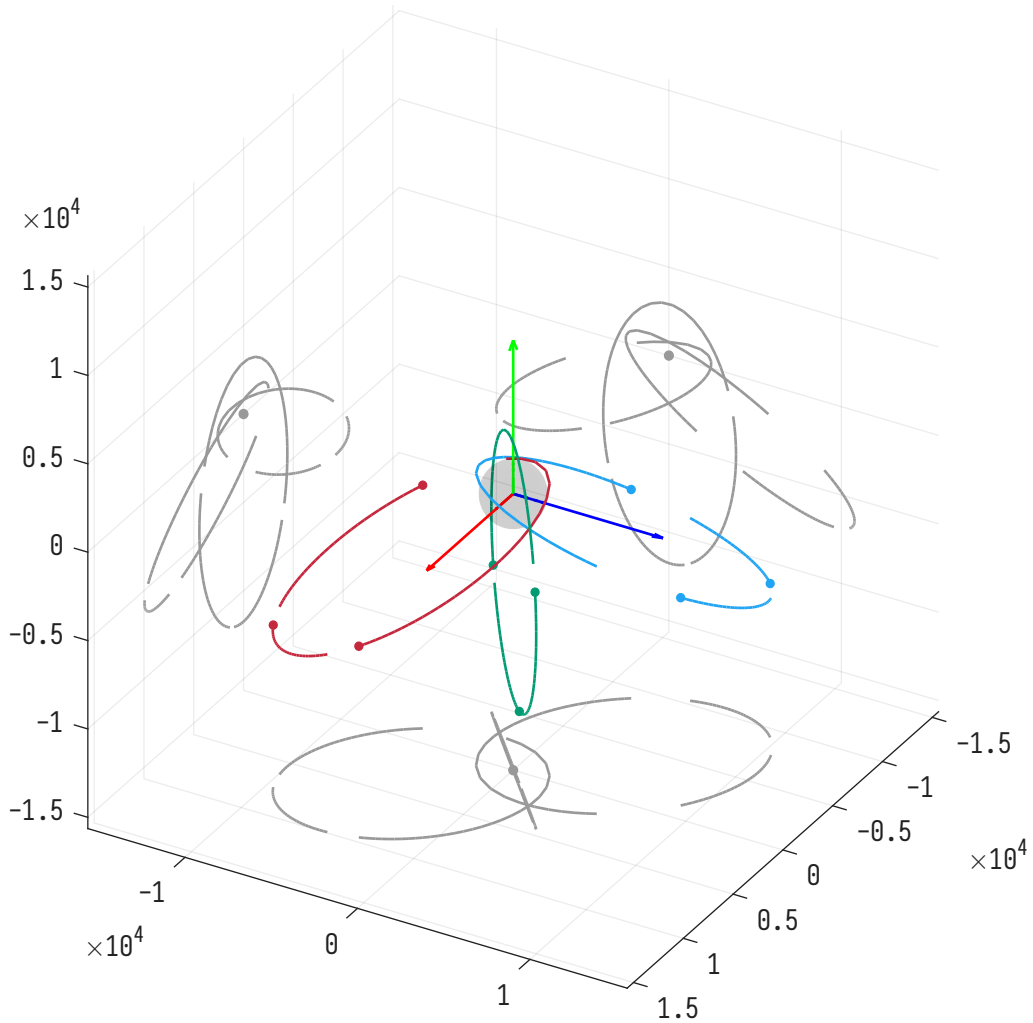
Si è testata una configurazione ridotta con 6 satelliti su 2 piani, utilizzando l'approccio "phased". Intuitivamente, la rimozione di due satelliti peggiora la GDOP, in quanto pur trovando una geometria che garantisce copertura costante, il numero medio di satelliti visibili è minore. Ridurre ulteriormente il numero di satelliti non permette di garantire una copertura costante.

### **Ottimizzazione con 9 satelliti in 3 piani orbitali**

Infine, è stata analizzata una configurazione con 3 piani orbitali (approccio "phased"). Le geometrie delle 10 ottimizzazioni svolte risultano essere simili, indicando un minimo globale ben definito. La geometria migliore presenta:

- Un piano orbitale centrale verticale (inclinato a circa  $90^\circ$ );
- Due piani laterali simmetrici con inclinazione relativa di circa  $\pm 61,3^\circ$ .
- Linee dei nodi ravvicinate.

Avendo un piano orbitale in più, i satelliti sono meglio distribuiti spazialmente e la GDOP, rispetto al caso con due piani, migliora significativamente. La GDOP massima raggiunta è 2.71, una riduzione del 45% rispetto a 4.90 del caso phased con 8 satelliti in due piani. Lo svantaggio di questa configurazione risiede nell'utilizzo di 9 satelliti totali anziché 8, aumentando complessità e costi.



Orbit 1:  $a=8517.5$  km,  $e=0.761$ ,  $i=152.5^\circ$ ,  $\Omega=42.7^\circ$ ,  $\omega=88.8^\circ$  ( $T=19:35:37$ )  
 Orbit 2:  $a=7996.1$  km,  $e=0.750$ ,  $i=151.9^\circ$ ,  $\Omega=222.9^\circ$ ,  $\omega=88.6^\circ$  ( $T=17:49:21$ )  
 Orbit 3:  $a=7335.1$  km,  $e=0.601$ ,  $i=90.3^\circ$ ,  $\Omega=41.1^\circ$ ,  $\omega=90.5^\circ$  ( $T=15:39:32$ )

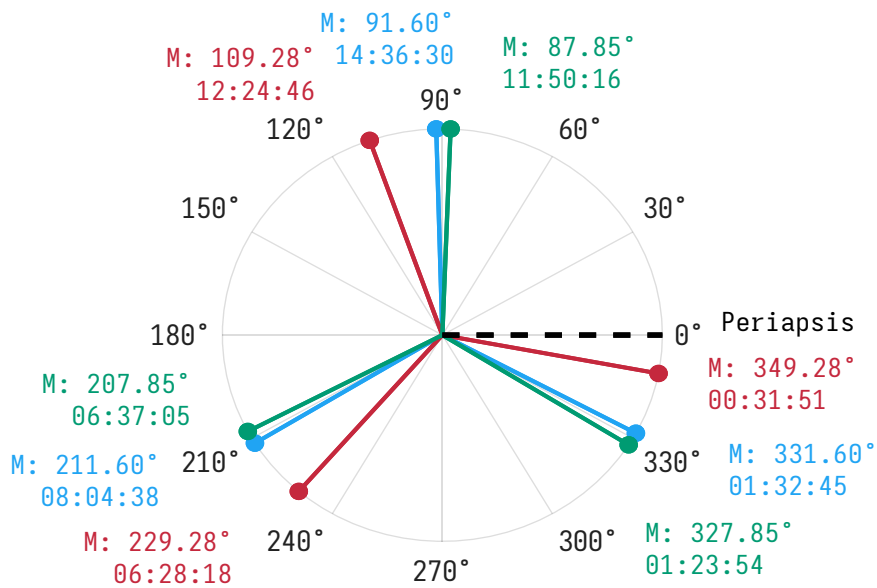


Figura 5.11: geometria del caso con tre piani orbitali

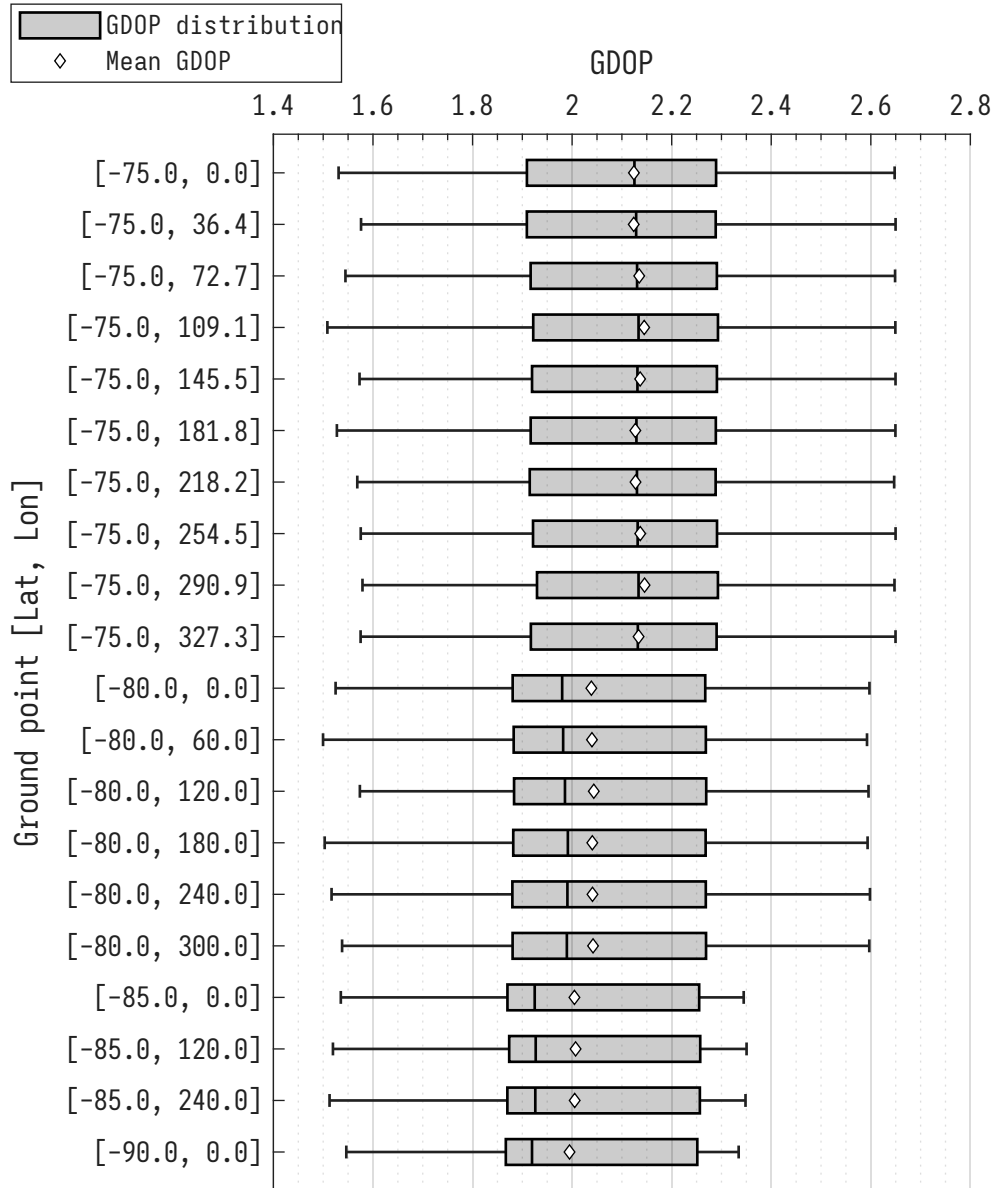


Figura 5.12: statistiche del caso con tre piani orbitali

## 5.3 Orbite perturbate

### 5.3.1 Orbite ELFO kepleriane

Come evidenziato dall'equazione 2.17 e dalla figura 2.3, l'inclinazione e l'eccentricità di un'orbita ELFO sono analiticamente legate tra loro. Di conseguenza, per permettere all'algoritmo di esplorare inclinazioni più elevate, è necessario garantire eccentricità maggiori, che si ottengono innalzando il limite superiore imposto sul raggio di apoapside. Questa maggiore libertà nello spazio di ricerca si traduce in miglioramenti prestazionali. Al fine di distinguere tali analisi, le soluzioni in cui il limite dell'apoapside è innalzato a 30000 km sono identificate dalla sigla *exp* (da *expanded*), in contrapposizione al limite standard di 15000 km. Si precisa, inoltre, che per l'intera fase di analisi sulle orbite ELFO è stato imposto il vincolo di fasatura relativa per l'anomalia (configurazioni di tipo *phased*).

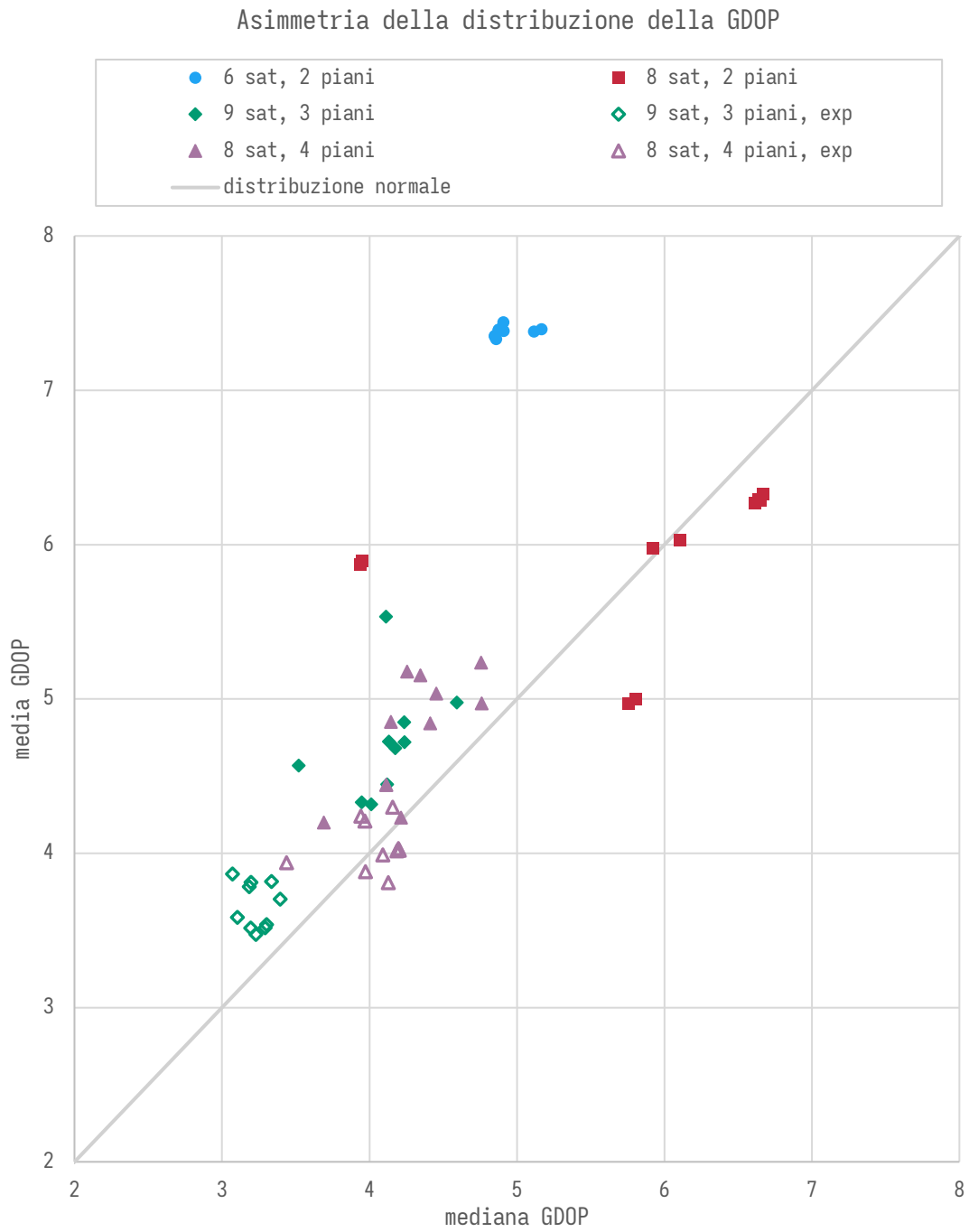


Figura 5.13: Asimmetria di distribuzione soluzioni ELFO

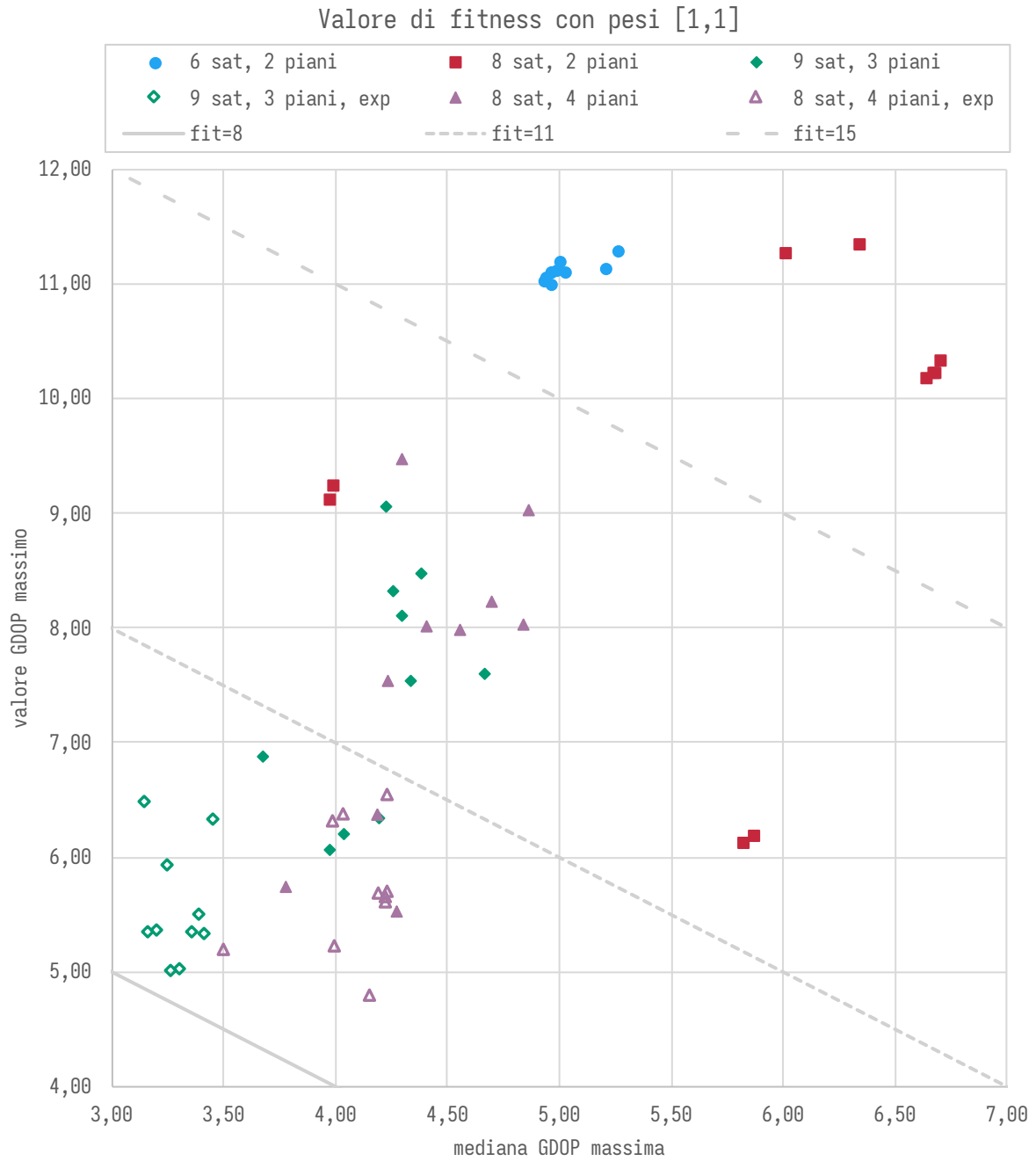


Figura 5.14: panoramica delle soluzioni ELFO con pesi [1,1]

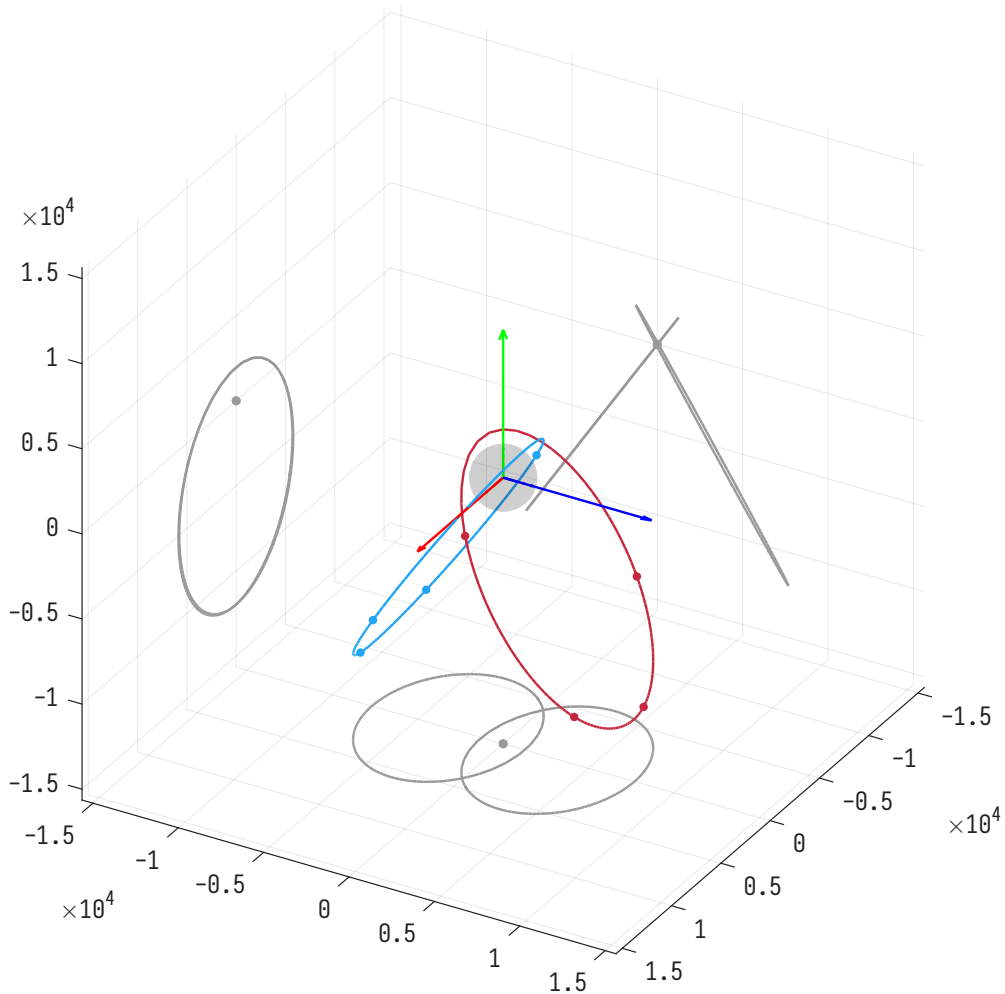
### Casi con due piani

Per i casi con 8 e 6 satelliti, le costellazioni ottime trovate presentano le seguenti caratteristiche:

- sfasamento delle anomalie medie di circa  $45^\circ$  tra i satelliti dei due piani orbitali;
- linee dei nodi coincidenti;
- inclinazioni tali per cui l'angolo di apertura tra i piani è compreso tra  $60^\circ$  e  $70^\circ$ .

Le due inclinazioni rappresentano le soluzioni ammissibili per un unico valore di eccentricità. Avendo eccentricità e semiasse maggiore praticamente uguali nei due piani, anche il periodo orbitale e gli apoapsidi risultano identici.

Le soluzioni però faticano a trovare una distribuzione bilanciata, più simile a una distribuzione normale, rispetto alle costellazioni ideali. Soprattutto per le costellazioni con 6 satelliti, la media ( $\sim 7.4$ ) risulta essere più elevata della mediana ( $\sim 5$ ).



Orbit 1:  $a=8286.5$  km,  $e=0.717$ ,  $i=57.3^\circ$ ,  $\Omega=359.9^\circ$ ,  $\omega=90.0^\circ$  (T=18:48:08)  
 Orbit 2:  $a=8286.5$  km,  $e=0.716$ ,  $i=122.7^\circ$ ,  $\Omega=358.7^\circ$ ,  $\omega=90.0^\circ$  (T=18:48:08)

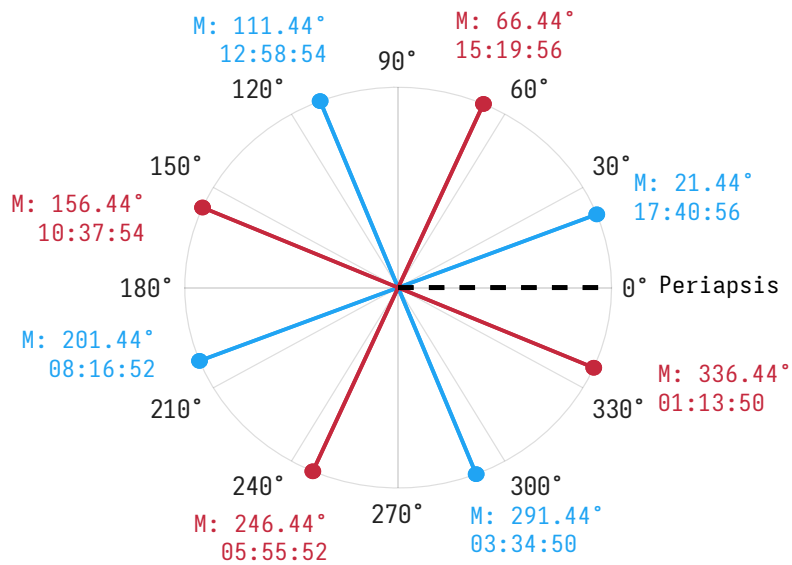


Figura 5.15: geometria e parametri orbitali del caso 8 sat, 2 piani

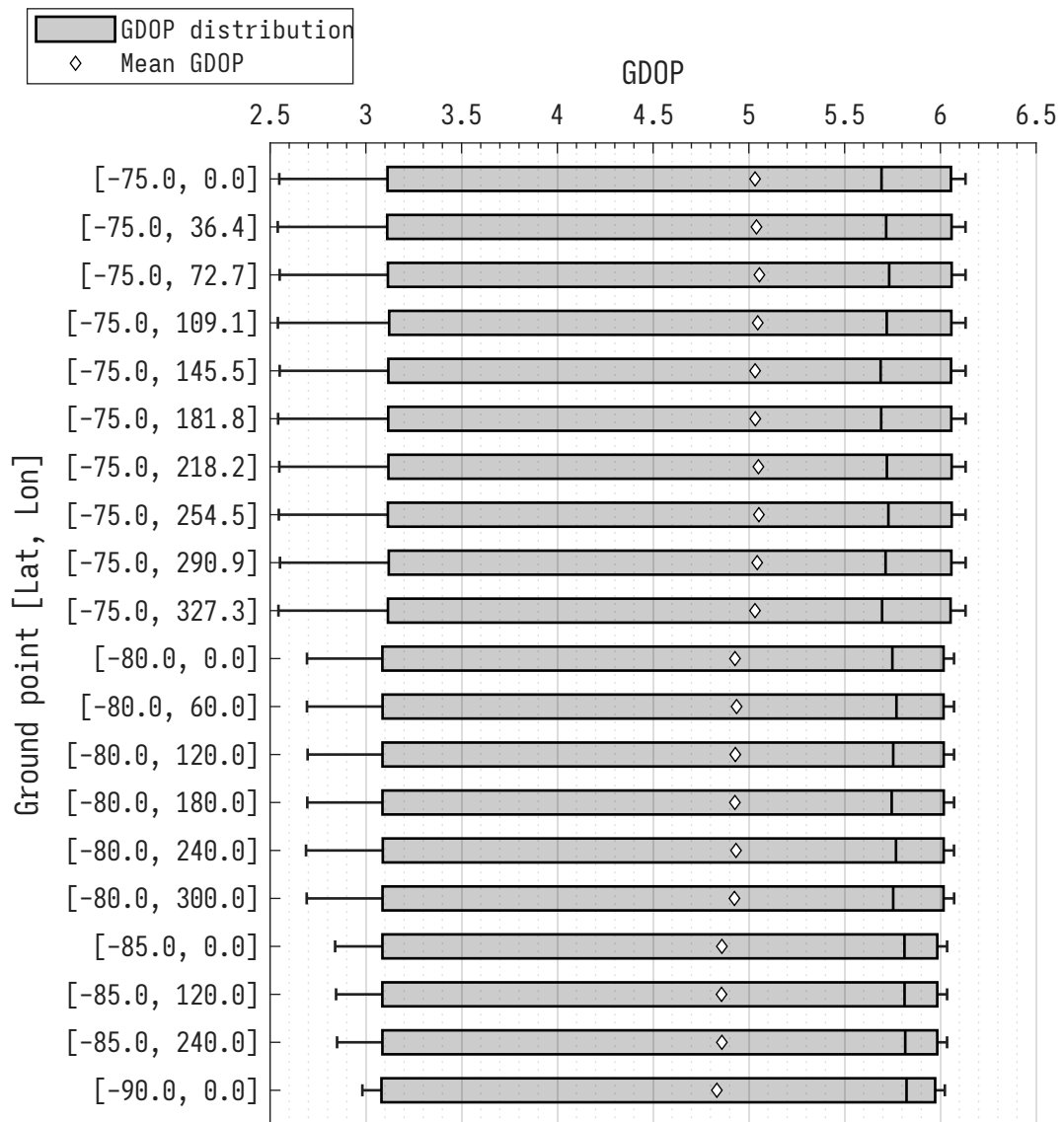


Figura 5.16: statistiche del caso 8 sat, 2 piani

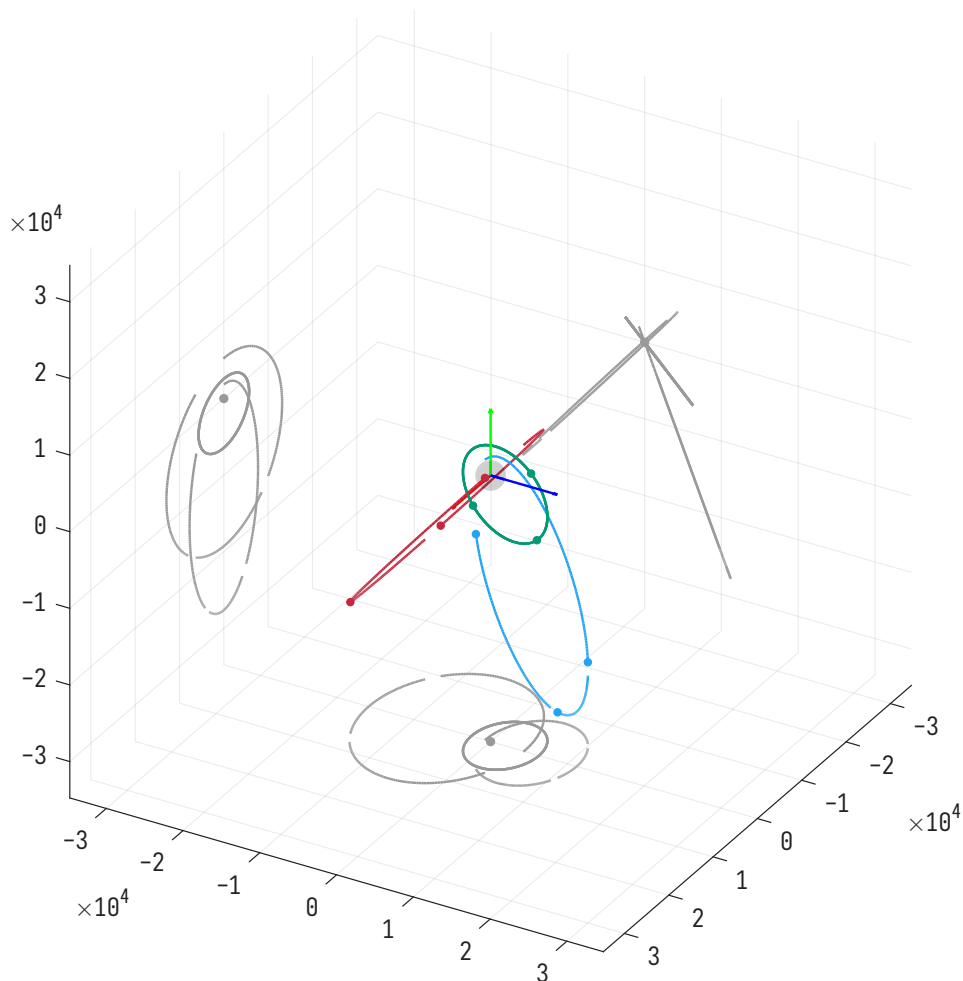
### **Casi con tre e quattro piani**

Il caso con 9 satelliti distribuiti su 3 piani orbitali si discosta notevolmente dalla configurazione ideale analizzata nella sezione precedente. Questo comportamento è dovuto alla condizione di congelamento orbitale. La geometria risultante è simile a quella con due piani, con l'aggiunta di un terzo piano orbitale caratterizzato da orbite con periodo più breve.

È stata inoltre analizzata una configurazione con 4 piani orbitali e due satelliti per orbita, al fine di valutare un ulteriore miglioramento delle prestazioni, mantenendo il numero dei satelliti uguale al caso principale.

Dai risultati emerge che con il limite di 15000 km, le costellazioni con 3 e 4 piani hanno prestazioni simili. alcune soluzioni con due piani riescono ad avere una mediana della GDOP minore o un valore massimo minore. Le prestazioni migliori si trovano, come previsto, con il limite posto a 30000 km.

Complessivamente, la configurazione con 9 satelliti su 3 piani risulta la migliore tra tutti i casi analizzati: oltre a disporre di un numero maggiore di satelliti, ne ottimizza la distribuzione spaziale su più piani orbitali.



Orbit 1:  $a=15901.8$  km,  $e=0.874$ ,  $i=112.1^\circ$ ,  $\Omega=360.0^\circ$ ,  $\omega=90.0^\circ$  (T=49:58:59)  
 Orbit 2:  $a=15895.5$  km,  $e=0.571$ ,  $i=50.5^\circ$ ,  $\Omega=359.0^\circ$ ,  $\omega=90.0^\circ$  (T=49:57:12)  
 Orbit 3:  $a=6309.9$  km,  $e=0.428$ ,  $i=134.4^\circ$ ,  $\Omega=0.3^\circ$ ,  $\omega=90.0^\circ$  (T=12:29:37)

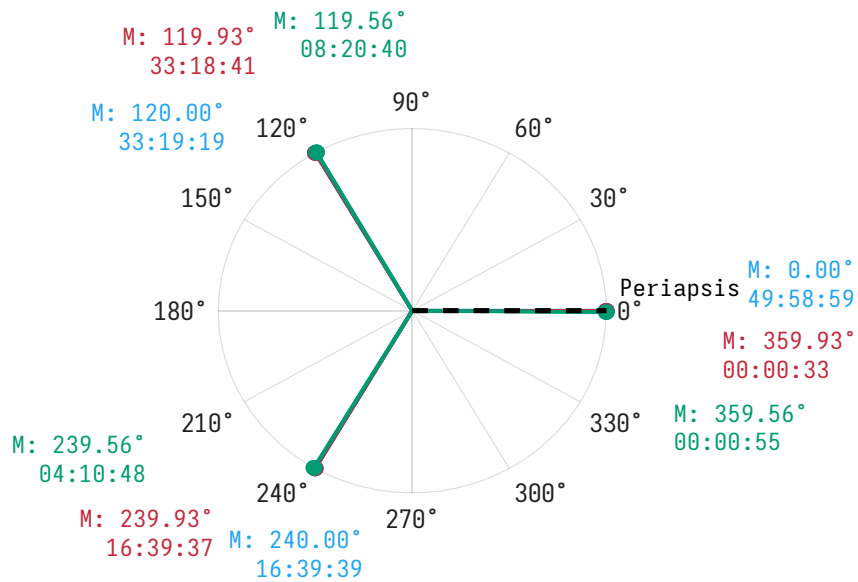


Figura 5.17: geometria e parametri orbitali del caso 9 sat, 3 piani, *exp*

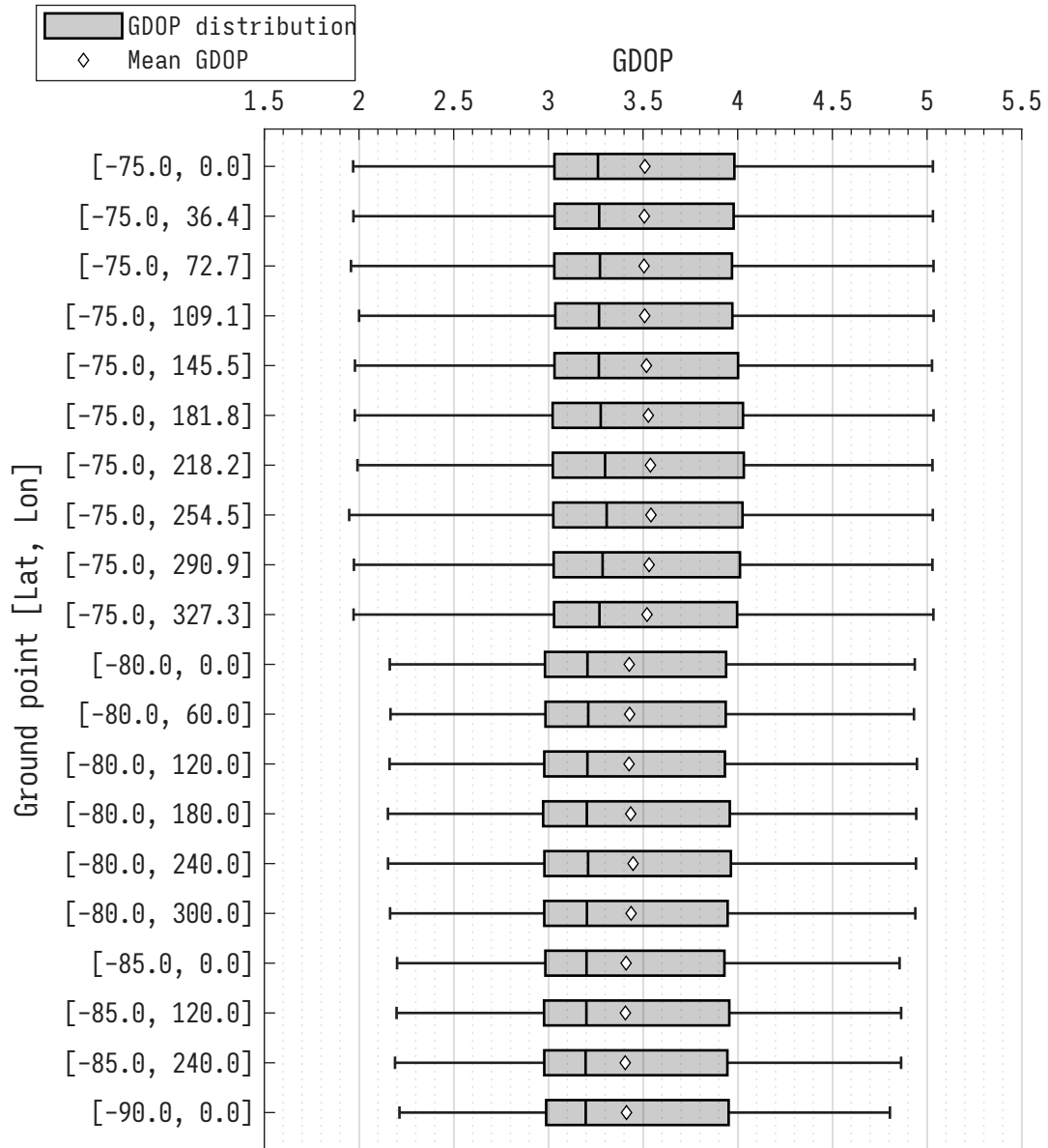
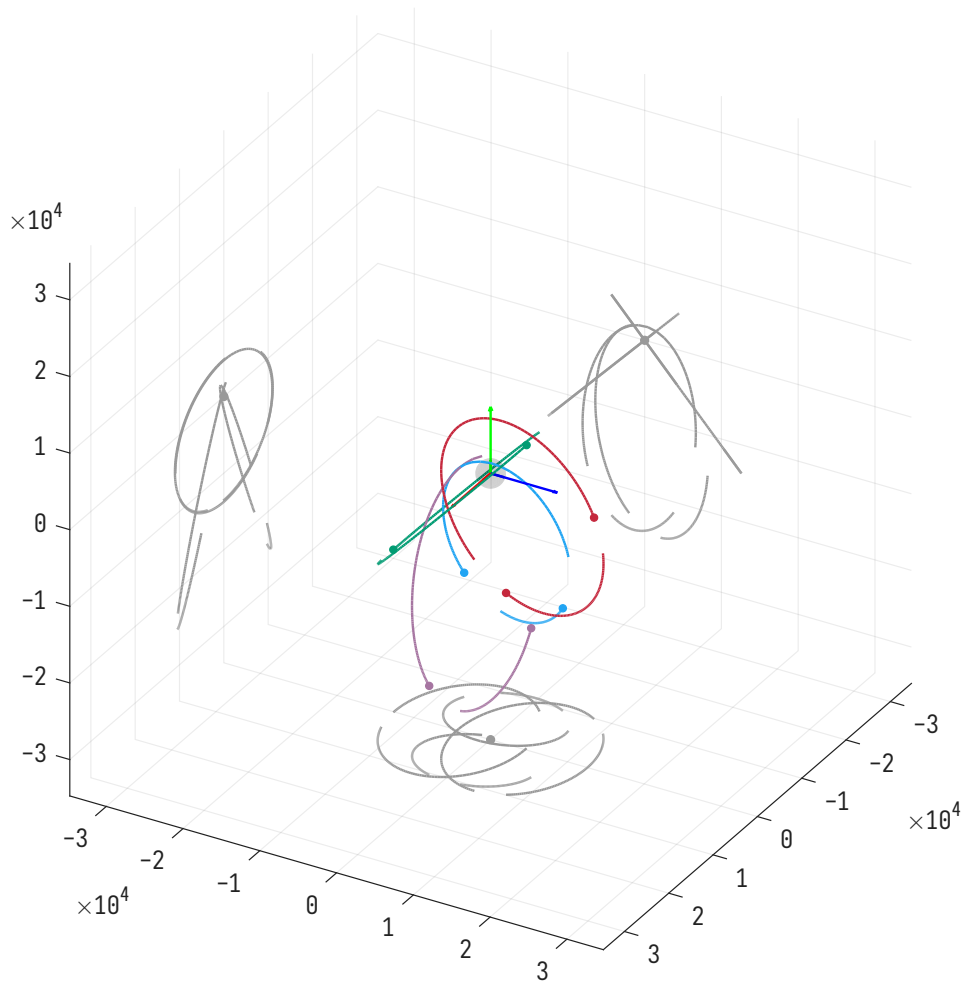


Figura 5.18: statistiche del caso 9 sat, 3 piani, *exp*



Orbit 1:  $a=14666.0$  km,  $e=0.863$ ,  $i=113.0^\circ$ ,  $\Omega=98.2^\circ$ ,  $\omega=90.0^\circ$  (T=44:16:16)  
 Orbit 2:  $a=12531.8$  km,  $e=0.488$ ,  $i=132.6^\circ$ ,  $\Omega=0.0^\circ$ ,  $\omega=90.0^\circ$  (T=34:58:06)  
 Orbit 3:  $a=12532.8$  km,  $e=0.475$ ,  $i=47.0^\circ$ ,  $\Omega=0.0^\circ$ ,  $\omega=90.0^\circ$  (T=34:58:21)  
 Orbit 4:  $a=14667.4$  km,  $e=0.864$ ,  $i=67.0^\circ$ ,  $\Omega=100.7^\circ$ ,  $\omega=90.0^\circ$  (T=44:16:39)

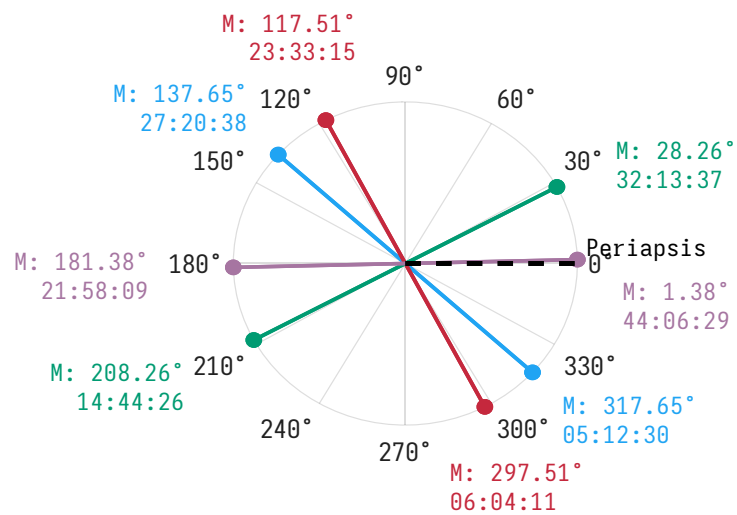


Figura 5.19: geometria e parametri orbitali del caso 8 sat, 4 piani, *exp*

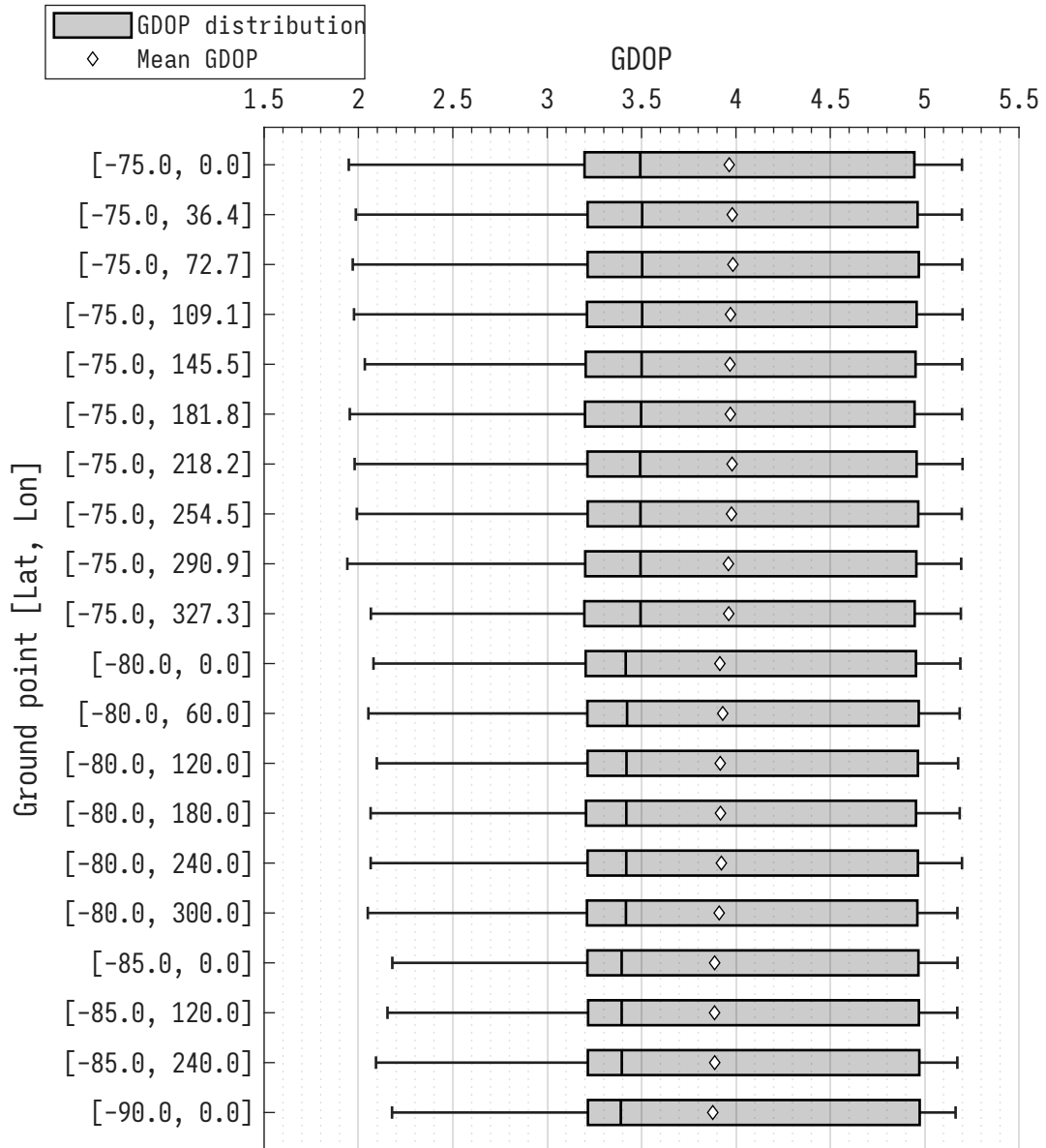


Figura 5.20: statistiche del caso 8 sat, 4 piani, *exp*

### 5.3.2 Confronto con orbite perturbate

In questa sezione si analizza il comportamento di una costellazione ELFO con 8 satelliti su due piani orbitali sotto l'effetto di perturbazioni gravitazionali. Utilizzando i parametri orbitali (della soluzione presentata nella sezione precedente) come stato iniziale, le orbite dei satelliti vengono propagate numericamente includendo diverse accelerazioni perturbanti: la Terra e il Sole come corpi puntiformi e il campo gravitazionale irregolare della Luna. La configurazione dell'integratore in Simulink segue le impostazioni raccomandate, impiegando un integratore a passo variabile e includendo le armoniche del modello LP-165P fino al grado e ordine 60.

Come atteso, la condizione di congelamento limita efficacemente le variazioni secolari dell'eccentricità e dell'argomento del periapside. Tuttavia, il campo gravitazionale irregolare della Luna agisce in modo differente su ciascun satellite, inducendo uno scostamento progressivo dalla geometria ideale della costellazione e un conseguente peggioramento delle prestazioni nel tempo.

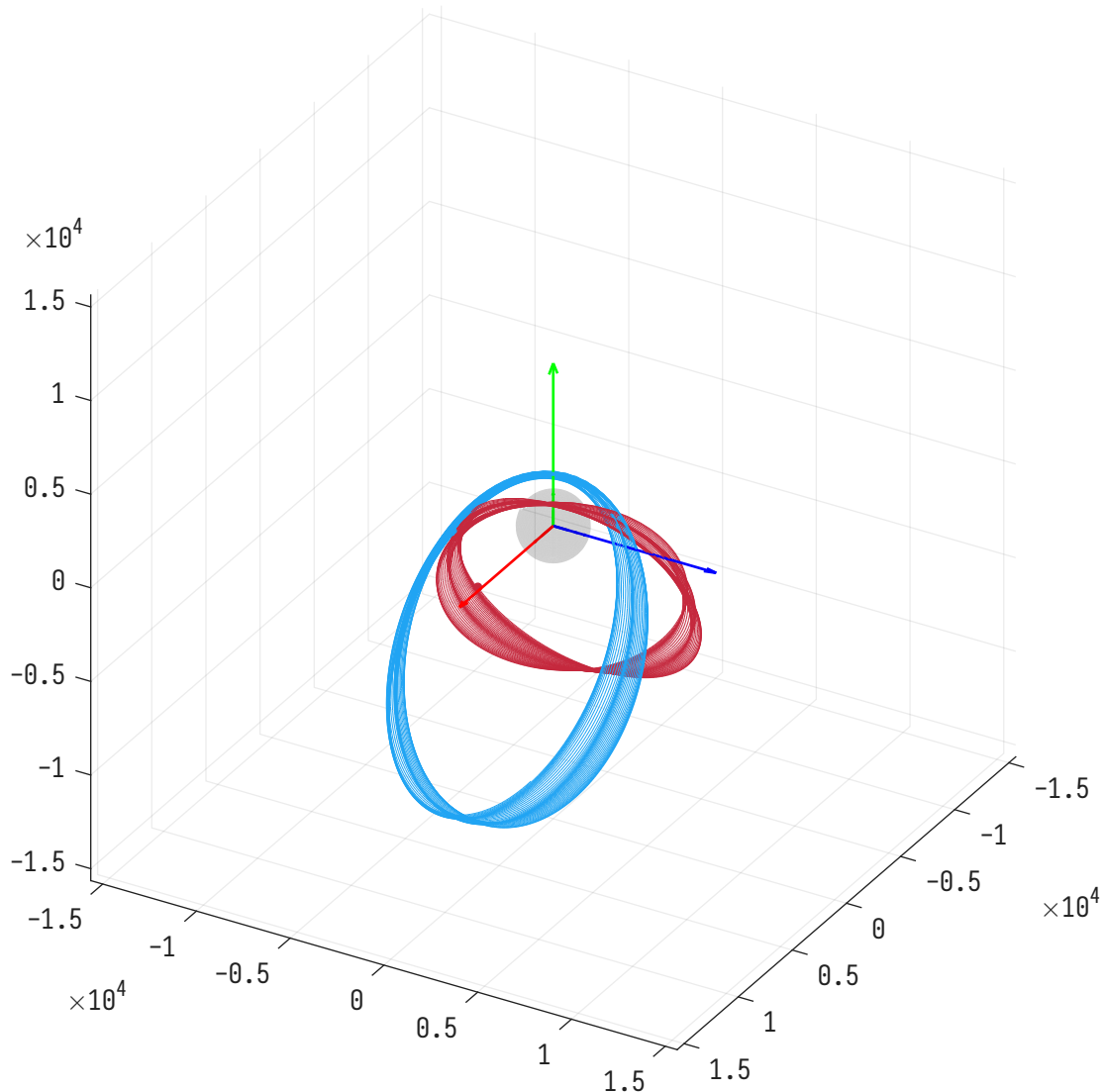


Figura 5.21: rappresentazione 3D delle orbite perturbate del primo satellite di ogni piano orbitale

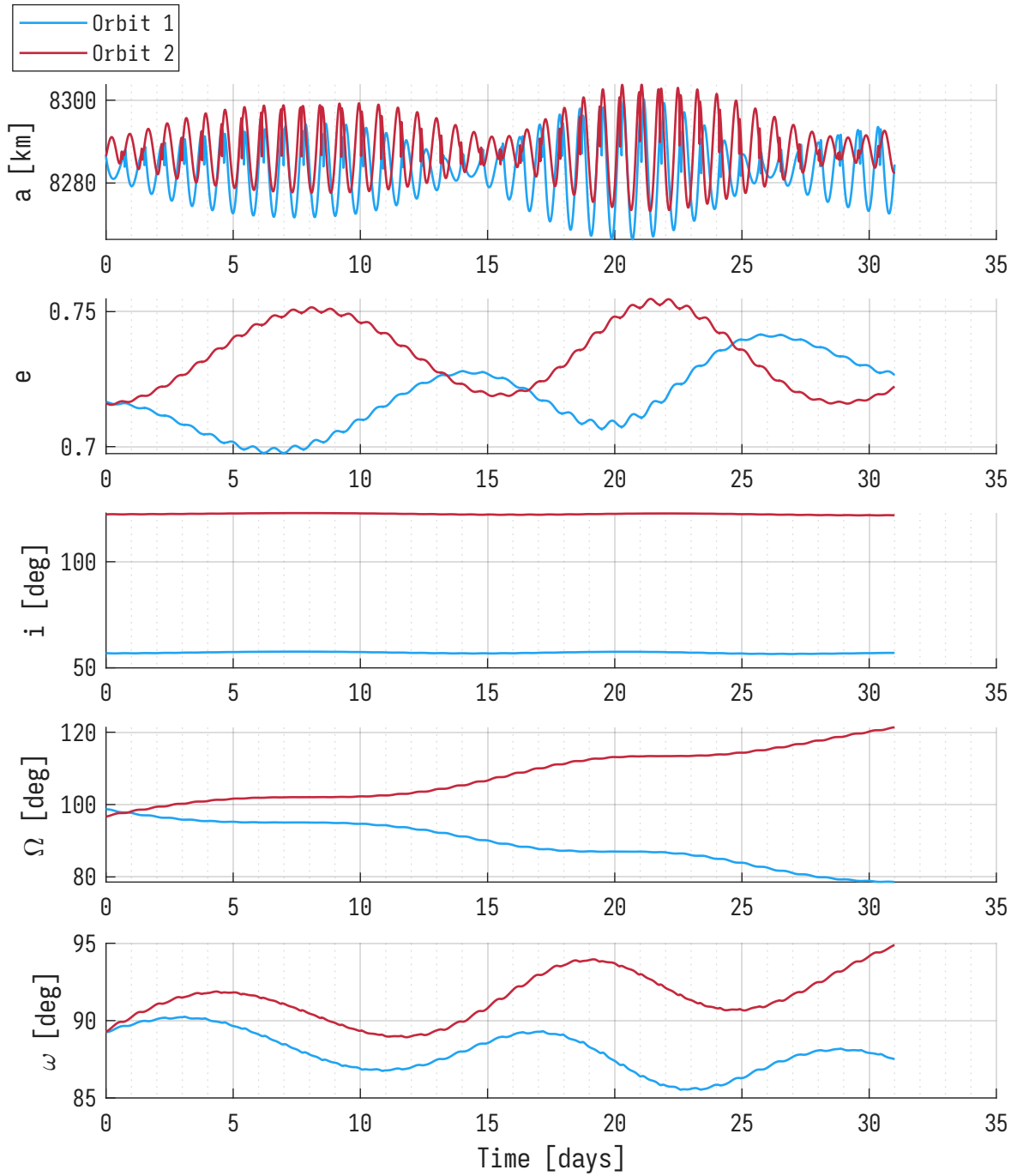


Figura 5.22: evoluzione dei parametri orbitali  $a$ ,  $e$ ,  $i$ ,  $\Omega$ ,  $\omega$  del primo satellite di ogni piano orbitale

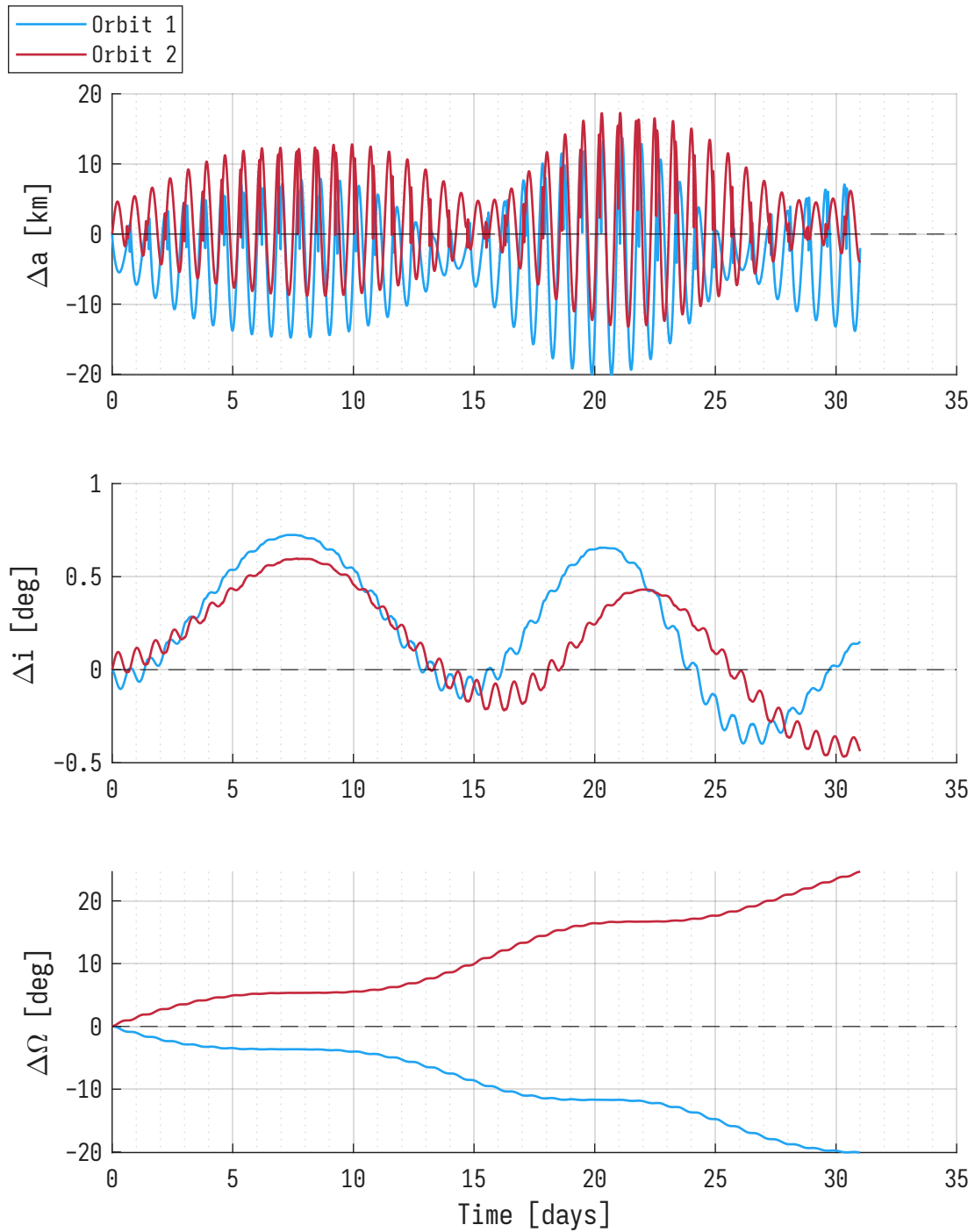


Figura 5.23: scostamento dei parametri orbitali  $a, i, \Omega$  dai valori iniziali del primo satellite di ogni piano orbitale

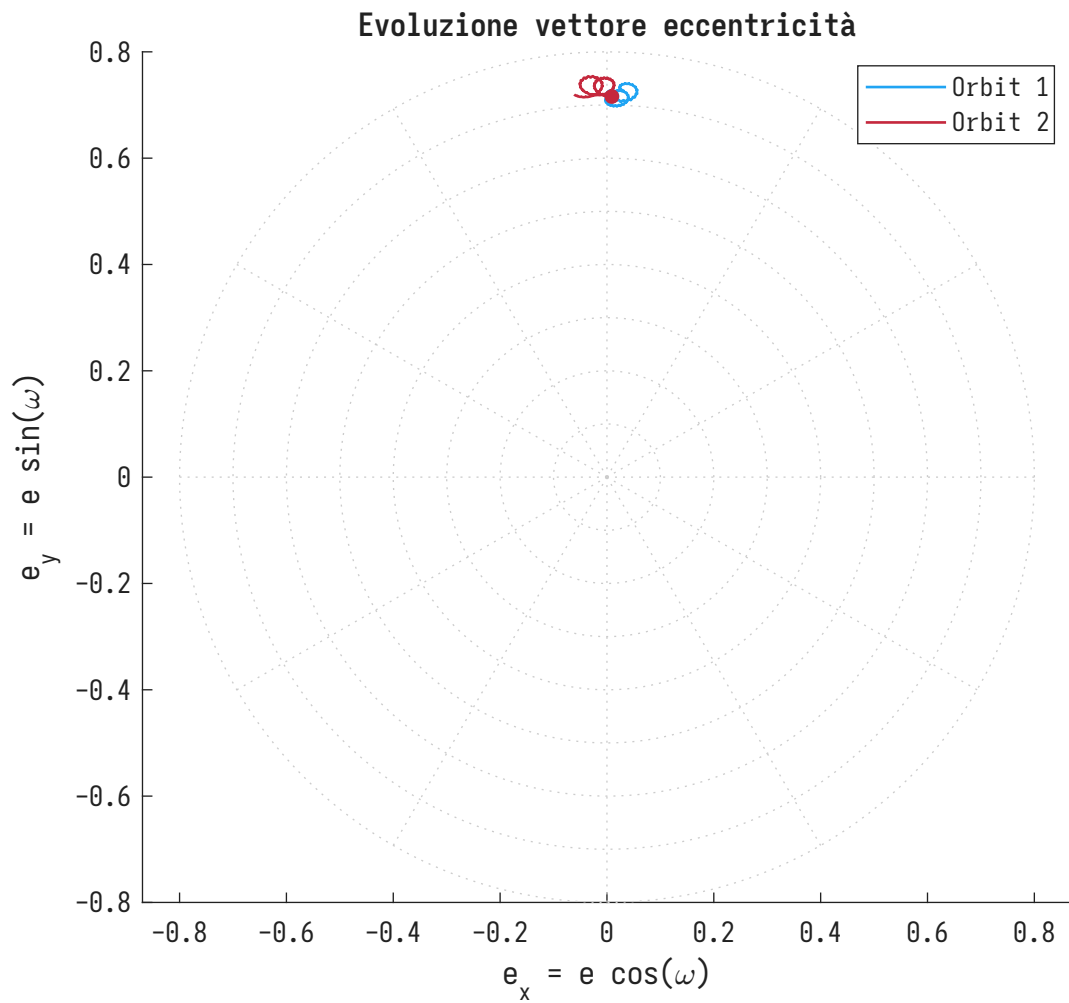


Figura 5.24: perturbazione del vettore eccentricità del primo satellite di ogni piano orbitale

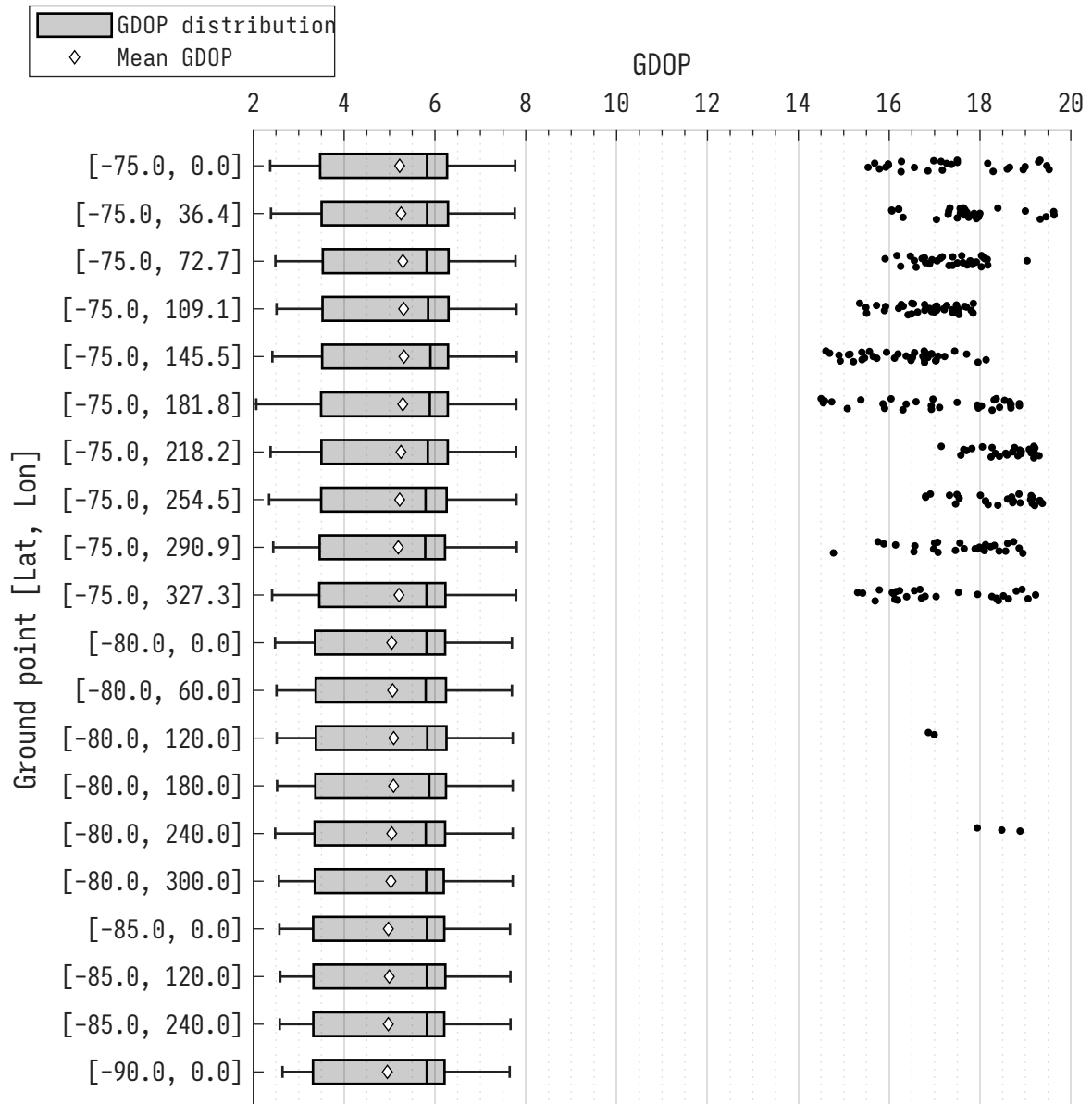


Figura 5.25: statistiche GDOP della soluzione perturbata

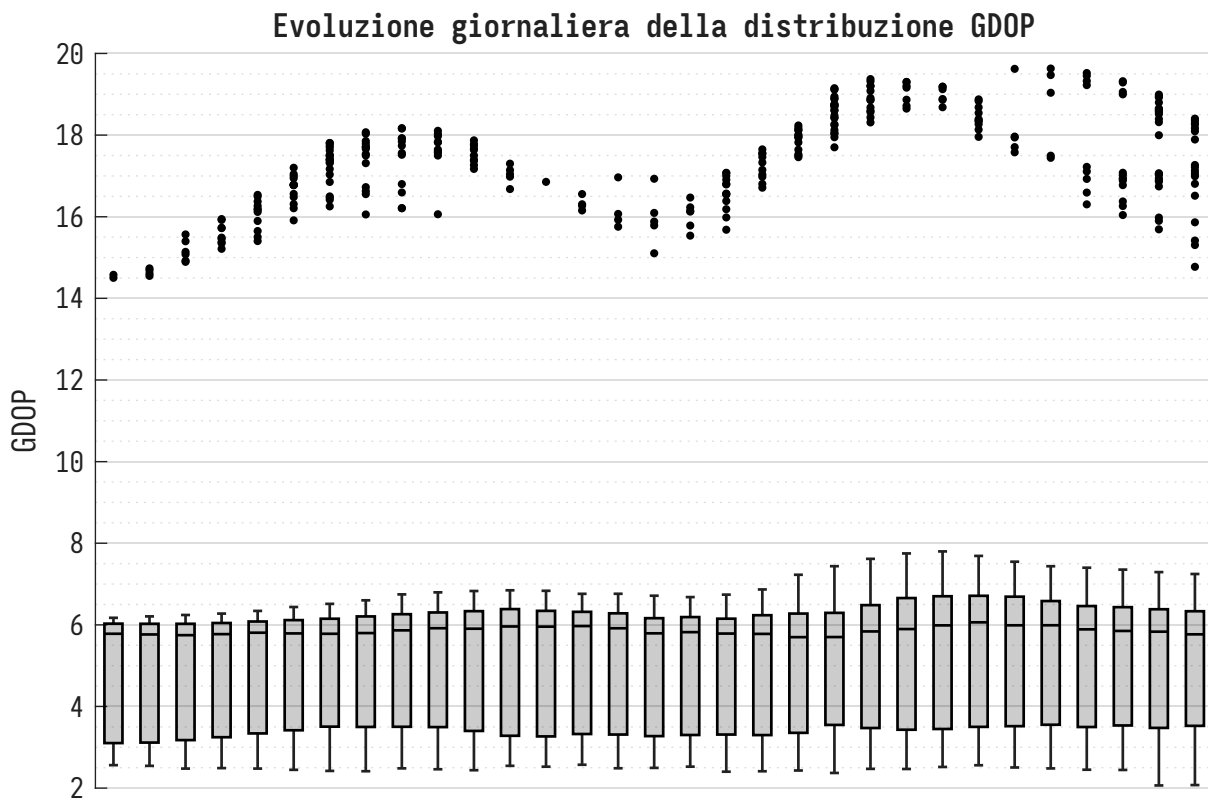


Figura 5.26: evoluzione giornaliera delle statistiche GDOP

In figura 5.26, si può osservare come la mediana della GDOP, calcolata su finestre mobili di 24 ore, tenda a degradare progressivamente con il trascorrere dei giorni. I punti neri rappresentano gli outliers, indicando gli istanti temporali in cui la GDOP si scosta significativamente dal resto della distribuzione.

### Effetto della posizione del Sole e della Terra

L'analisi precedente fa riferimento a una simulazione della durata di 30 giorni, con inizio fissato al 1° Gennaio 2027. Poiché l'intensità e la direzione delle perturbazioni gravitazionali dipendono dalla posizione relativa dei corpi celesti, gli effetti perturbativi variano a seconda dell'epoca di missione.

Per evidenziare questa dipendenza temporale, la medesima costellazione è stata propagata in quattro periodi differenti dell'anno, distanziati di tre mesi l'uno dall'altro. La seguente tabella riporta i valori complessivi della media e della mediana della GDOP per ciascuna finestra temporale considerata.

Periodo di simulazione	Media GDOP	Mediana GDOP
Trimestre 1	5.1418	5.8290
Trimestre 2	5.3260	4.9913
Trimestre 3	5.7128	5.4384
Trimestre 4	5.1569	5.7425

Tabella 5.1: Variazione delle prestazioni GDOP complessive al variare dell'epoca di simulazione.

Come si evince dai risultati, le prestazioni subiscono fluttuazioni apprezzabili nel tempo. Questo comportamento evidenzia la necessità di impiegare modelli di ottimizzazione più avanzati che, tramite l'utilizzo diretto delle effemeridi, consentano di calcolare i parametri orbitali tenendo conto dell'esatta posizione dei corpi celesti, in modo da individuare configurazioni intrinsecamente più stabili.

## 5.4 Sintesi dei risultati

La figura sottostante propone un riepilogo delle prestazioni relative alle migliori costellazioni ottenute per ciascun setup di ottimizzazione. I parametri orbitali completi delle soluzioni ottime sono riportati in modo esteso nell'Appendice A.

minima mediana gdop	minimo gdop max	tipo di ottimizzazione	n° piani orbitali	n° satelliti per piano	pesi fitness	$\epsilon_{\min}$
2,70	4,25	ga	2	4	[1 1]	5°
2,73	4,13	pso	2	4	[1 1]	5°
3,11	4,31	pso	2	4	[1 10]	5°
2,48	4,73	pso	2	4	[10 1]	5°
2,73	4,10	pso phased	2	4	[1 1]	5°
3,38	4,96	pso phased	2	3	[1 1]	5°
1,90	2,31	pso phased	3	3	[1 1]	5°
3,41	5,45	pso phased	2	4	[1 1]	15°
5,69	6,02	pso phased frozen	2	4	[1 1]	15°
4,78	10,81	pso phased frozen	2	3	[1 1]	15°
3,63	5,66	pso phased frozen	4	2	[1 1]	15°
3,39	5,16	pso phased frozen expanded	4	2	[1 1]	15°
3,94	5,89	pso phased frozen	3	3	[1 1]	15°
3,16	4,69	pso phased frozen expanded	3	3	[1 1]	15°

Tabella 5.2: Sintesi delle prestazioni GDOP delle costellazioni ottime



## Capitolo 6

# Conclusioni e sviluppi futuri

### 6.1 Conclusioni

Il presente lavoro di tesi ha affrontato il complesso problema della progettazione e dell'ottimizzazione di una costellazione satellitare per la navigazione lunare, focalizzandosi in modo specifico sulla regione del Polo Sud. Attraverso la formalizzazione di un problema di ottimizzazione globale, sono state ricercate architetture orbitali in grado di minimizzare la diluizione geometrica della precisione e massimizzare la finestra temporale di copertura.

Lo studio ha esplorato e messo a confronto le potenzialità di algoritmi euristici differenti. L'analisi ha evidenziato come l'algoritmo basato sullo sciame di particelle risulti superiore all'algoritmo genetico in questo particolare contesto.

Le simulazioni in ambiente imperturbato restituiscono geometrie ideali coerenti con le impostazioni dei parametri scelti. Altre formulazioni, come quella a posizionamento relativo vincolato *phased*, hanno dimostrato che è possibile ridurre la dimensionalità dello spazio di ricerca preservando al contempo buone metriche prestazionali. I test in scenari geometricamente più limitanti, con maschere di visibilità fino a 15° e vincoli di congelamento, hanno confermato ulteriormente l'adattabilità dell'architettura scelta.

Si è tuttavia riscontrato che, sottoponendo le traiettorie ottime ottenute all'influsso delle perturbazioni gravitazionali, le metriche subiscono un naturale degrado. Questo indica la criticità di integrare una dinamica di volo realistica all'interno dell'ottimizzatore.

### 6.2 Sviluppi futuri

Nonostante la maturità dei risultati presentati, la concezione di una rete di navigazione operativa nello spazio cislunare offre ampi margini per ulteriori affinamenti. I principali filoni di indagine suggeriti per gli sviluppi futuri comprendono:

- **Ottimizzazione in scenari perturbati:** introdurre l'utilizzo diretto di modelli ad alta fedeltà all'interno del loop di ottimizzazione. Ciò permetterebbe di ricavare parametri che bilanciano costantemente le derive naturali, minimizzando il decadimento prestazionale e mantenendo una geometria relativa ottimale nel lungo periodo.
- **Ottimizzazione multiobiettivo orientata allo *station keeping*:** affiancare alla valutazione puramente geometrica (basata su GDOP e visibilità) una figura di merito propulsiva. Un'ottimizzazione multi-obiettivo, che comprende prestazioni del servizio di navigazione e il  $\Delta V$  totale richiesto per le correzioni orbitali, risulta fondamentale per estendere la vita operativa dei satelliti abbassandone i costi.

- **Copertura mirata a finestre temporali definite:** esplorare lo studio di costellazioni ridotte rivolte a scenari di missione specifici, come l'allunaggio umano o missioni robotiche brevi. L'ottimizzazione del servizio limitatamente a precisi istanti temporali permetterebbe di garantire alta precisione ricorrendo a un numero limitato di satelliti, portando a considerevoli risparmi sia di lancio che di gestione.
- **Ottimizzazione specifica per HDOP e VDOP:** differenziare le architetture di navigazione in base alle necessità operative primarie dell'utente. Per gli utenti sulla superficie risulta infatti fondamentale operare con un'ottima precisione orizzontale (minimizzazione dell'HDOP); al contrario, per i lander durante le delicate fasi di discesa l'accuratezza sulla stima dell'altitudine (minimizzazione della VDOP) costituisce il parametro più critico. Progettare costellazioni mirate a questi specifici fattori permetterebbe di massimizzare le prestazioni richieste da ciascun profilo di missione.

# Appendice A

## Dati delle costellazioni ottime

Di seguito vengono elencati nel dettaglio i parametri orbitali delle costellazioni ottime presentate nel documento. La nomenclatura fa riferimento alla tabella 5.2 di pagina 85).

Tabella A.1: caso: ga 2 4 [1 1] 5°

piano n°	sma [km]	ecc	rp [km]	ra [km]	inc [deg]	raan [deg]	aop [deg]
1	8200.886	0.742	2115.986	14285.787	41.077	202.065	86.062
2	8197.980	0.606	3233.279	13162.681	90.569	109.670	39.203
M 1° piano [deg]	132.282	317.907	224.926	45.341			
M 2° piano [deg]	141.665	49.415	319.500	231.332			

Tabella A.2: caso: pso 2 4 [1 1] 5°

piano n°	sma [km]	ecc	rp [km]	ra [km]	inc [deg]	raan [deg]	aop [deg]
1	8940.922	0.586	3700.484	14181.359	145.398	277.386	84.902
2	8940.995	0.677	2883.581	14998.409	89.543	203.091	130.958
M 1° piano [deg]	231.695	142.646	52.100	321.447			
M 2° piano [deg]	349.797	79.089	260.007	169.306			

Tabella A.3: caso: pso 2 4 [1 10] 5°

piano n°	sma [km]	ecc	rp [km]	ra [km]	inc [deg]	raan [deg]	aop [deg]
1	7534.247	0.729	2043.260	13025.235	91.189	220.054	45.690
2	9124.546	0.618	3482.453	14766.638	30.986	317.012	80.979
M 1° piano [deg]	132.020	357.985	227.951	260.763			
M 2° piano [deg]	130.385	310.298	40.231	220.388			

Appendice A. Dati delle costellazioni ottime

Tabella A.4: caso: pso 2 4 [10 1] 5°

piano n°	sma [km]	ecc	rp [km]	ra [km]	inc [deg]	raan [deg]	aop [deg]
1	9322.205	0.609	3645.461	14998.949	141.956	279.854	89.168
2	9323.258	0.609	3646.521	14999.995	84.638	336.578	49.297
M 1° piano [deg]	177.713	267.744	357.583	87.779			
M 2° piano [deg]	1.280	270.924	180.835	90.912			

Tabella A.5: caso: pso phased 2 4 [1 1] 5°

piano n°	sma [km]	ecc	rp [km]	ra [km]	inc [deg]	raan [deg]	aop [deg]
1	8499.926	0.765	2000.000	14999.851	140.891	209.176	99.157
2	8499.913	0.765	2000.119	14999.708	86.257	271.087	49.205
M 1° piano [deg]	64.164	154.164	244.164	334.164			
M 2° piano [deg]	0.141	90.141	180.141	270.141			

Tabella A.6: caso: pso phased 2 3 [1 1] 5°

piano n°	sma [km]	ecc	rp [km]	ra [km]	inc [deg]	raan [deg]	aop [deg]
1	8651.409	0.734	2302.819	15000.000	37.761	136.372	97.356
2	8651.428	0.734	2302.864	14999.992	91.172	236.191	132.780
M 1° piano [deg]	44.876	164.876	284.876				
M 2° piano [deg]	0.284	120.284	240.284				

Tabella A.7: caso: pso phased 3 3 [1 1] 5°

piano n°	sma [km]	ecc	rp [km]	ra [km]	inc [deg]	raan [deg]	aop [deg]
1	7723.313	0.561	3390.846	12055.780	89.173	221.573	88.247
2	8316.318	0.703	2473.205	14159.432	151.434	231.599	101.237
3	8315.713	0.718	2342.411	14289.014	151.934	35.322	83.828
M 1° piano [deg]	117.498	237.498	357.498				
M 2° piano [deg]	56.199	176.199	296.199				
M 3° piano [deg]	6.776	126.776	246.776				

Tabella A.8: caso: pso phased 2 4 [1 1] 15°

piano n°	sma [km]	ecc	rp [km]	ra [km]	inc [deg]	raan [deg]	aop [deg]
1	8500.294	0.765	2000.588	15000.000	45.877	286.578	91.011
2	8501.494	0.706	2500.432	14502.556	89.335	15.462	136.176
M 1° piano [deg]	42.423	132.423	222.423	312.423			
M 2° piano [deg]	76.391	166.391	256.391	346.391			

Tabella A.9: caso: pso phased frozen 2 4 [1 1] 15°

piano n°	sma [km]	ecc	rp [km]	ra [km]	inc [deg]	raan [deg]	aop [deg]
1	7758.295	0.724	2141.329	13375.261	57.702	2.796	90.000
2	7758.282	0.724	2140.870	13375.694	122.295	359.327	90.000
<b>M 1° piano [deg]</b>		41.514	131.514	221.514	311.514		
<b>M 2° piano [deg]</b>		86.494	176.494	266.494	356.494		

Tabella A.10: caso: pso phased frozen 2 3 [1 1] 15°

piano n°	sma [km]	ecc	rp [km]	ra [km]	inc [deg]	raan [deg]	aop [deg]
1	8776.808	0.676	2844.759	14708.857	124.812	144.356	90.000
2	8776.809	0.671	2883.957	14669.661	54.967	144.474	90.000
<b>M 1° piano [deg]</b>		103.761	223.761	343.761			
<b>M 2° piano [deg]</b>		43.765	163.765	283.765			

Tabella A.11: caso: pso phased frozen 4 2 [1 1] 15°

piano n°	sma [km]	ecc	rp [km]	ra [km]	inc [deg]	raan [deg]	aop [deg]
1	10902.962	0.817	2000.239	19805.685	116.562	281.291	90.000
2	7346.807	0.531	3443.382	11250.232	48.988	359.798	90.000
3	7346.834	0.524	3498.028	11195.640	131.285	0.340	90.000
4	10904.114	0.817	2000.580	19807.647	63.437	280.611	90.000
<b>M 1° piano [deg]</b>		145.243	325.243				
<b>M 2° piano [deg]</b>		178.961	358.961				
<b>M 3° piano [deg]</b>		89.469	269.469				
<b>M 4° piano [deg]</b>		31.041	211.041				

Tabella A.12: caso: pso phased frozen expanded 4 2 [1 1] 15°

piano n°	sma [km]	ecc	rp [km]	ra [km]	inc [deg]	raan [deg]	aop [deg]
1	14665.969	0.863	2006.828	27325.109	113.024	98.200	90.000
2	12531.834	0.488	6421.281	18642.388	132.553	0.023	90.000
3	12532.810	0.475	6582.765	18482.855	47.021	0.000	90.000
4	14667.416	0.864	2000.009	27334.822	67.016	100.714	90.000
<b>M 1° piano [deg]</b>		137.647	317.647				
<b>M 2° piano [deg]</b>		117.510	297.510				
<b>M 3° piano [deg]</b>		28.263	208.263				
<b>M 4° piano [deg]</b>		1.379	181.379				

Tabella A.13: caso: pso phased frozen 3 3 [1 1] 15°

piano n°	sma [km]	ecc	rp [km]	ra [km]	inc [deg]	raan [deg]	aop [deg]
1	8518.404	0.358	5468.292	11568.515	136.323	358.996	90.000
2	8518.398	0.635	3109.704	13927.093	53.243	2.861	90.000
3	8517.986	0.761	2035.972	14999.999	120.168	0.561	90.000
M 1° piano [deg]	4.018	124.018	244.018				
M 2° piano [deg]	3.458	123.458	243.458				
M 3° piano [deg]	25.788	145.788	265.788				

Tabella A.14: caso: pso phased frozen expanded 3 3 [1 1] 15°

piano n°	sma [km]	ecc	rp [km]	ra [km]	inc [deg]	raan [deg]	aop [deg]
1	9401.179	0.629	3484.756	15317.602	52.989	1.892	90.000
2	9400.360	0.339	6217.831	12582.888	136.790	359.978	90.000
3	14928.568	0.866	2000.006	27857.130	112.786	0.000	90.000
M 1° piano [deg]	119.528	239.528	359.528				
M 2° piano [deg]	0.375	120.375	240.375				
M 3° piano [deg]	119.803	239.803	359.803				

# Bibliografia

- [1] J. Flahaut et al. «Identification and characterization of science-rich landing sites for lunar lander missions using integrated remote sensing observations». In: *Advances in Space Research* 50.12 (2012). Lunar Exploration - I, pp. 1647–1665. ISSN: 0273-1177. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.asr.2012.05.020>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S027311771200347X>.
- [2] Hengxi Liu et al. «Comprehensive Evaluation of the Lunar South Pole Landing Sites Using Self-Organizing Maps for Scientific and Engineering Purposes». In: *Remote Sensing* 17.9 (2025). ISSN: 2072-4292. DOI: 10.3390/rs17091579. URL: <https://www.mdpi.com/2072-4292/17/9/1579>.
- [3] A. Sesta et al. «ATLAS: Orbit Determination and Time Transfer for a Lunar Radio Navigation System». In: *NAVIGATION: Journal of the Institute of Navigation* 72.2 (2025). ISSN: 0028-1522. DOI: 10.33012/navi.701. eprint: <https://navi.ion.org/content/72/2/navi.701.full.pdf>. URL: <https://navi.ion.org/content/72/2/navi.701>.
- [4] David Folta e David Quinn. «Lunar frozen orbits». In: *AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit*. 2006, p. 6749.
- [5] *Moonlight*. <https://www.telespazio.com/en/business/space-programmes/moonlight>. Consultato: 14/02/2026.
- [6] *ESA's Moonlight programme: Pioneering the path for lunar exploration*. [https://www.esa.int/Applications/Connectivity\\_and\\_Secure\\_Communications/ESA\\_s\\_Moonlight\\_programme\\_Pioneering\\_the\\_path\\_for\\_lunar\\_exploration](https://www.esa.int/Applications/Connectivity_and_Secure_Communications/ESA_s_Moonlight_programme_Pioneering_the_path_for_lunar_exploration). Consultato: 14/02/2026.
- [7] T.M. Hare et al. *Image mosaic and topographic map of the moon*. U.S. Geological Survey Scientific Investigations Map 3316. 2015. URL: <https://dx.doi.org/10.3133/sim3316>.
- [8] *About SPICE*. <https://naif.jpl.nasa.gov/naif/aboutspice.html>. Consultato: 14/02/2026.
- [9] *Moon Fact Sheet*. <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/moonfact.html>. Consultato: 14/02/2026.
- [10] David A Vallado. *Fundamentals of astrodynamics and applications*. Vol. 12. Springer Science & Business Media, 2001.
- [11] Mahdia Tahsin et al. «Analysis of DOP and its preciseness in GNSS position estimation». In: *2015 International Conference on Electrical Engineering and Information Communication Technology (ICEEICT)*. 2015, pp. 1–6. DOI: 10.1109/ICEEICT.2015.7307445.
- [12] Elliott Kaplan e Christopher Hegarty. *Understanding GPS/GNSS: Principles and Applications, Third Edition*. Artech House, 2017.
- [13] Richard B Langley et al. «Dilution of precision». In: *GPS world* 10.5 (1999), pp. 52–59.

- [14] *MATLAB Documentation*. <https://it.mathworks.com/help/matlab/index.html>. Consultato: 14/02/2026.