



## Politecnico di Torino

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

A.A. 2025/2026  
Sessione di Laurea Marzo 2026

# Analisi parametrica di traiettorie di escape attraverso un flyby lunare

**Relatori:**  
Prof. Lorenzo Casalino

**Candidati:**  
Antonio Consalvo



# Abstract

Space missions require fuel to be expended, and every kilogram of propellant represents a trade-off with payload capacity and mission feasibility. The ability to optimize spacecraft trajectories by minimizing fuel consumption is crucial for extending mission capabilities and enabling more ambitious objectives. Lunar gravity assist maneuvers offer a unique opportunity to achieve high-energy Earth orbits with reduced propellant requirements, making them valuable for escape trajectories beyond low Earth orbit.

The purpose of this thesis is to investigate escape maneuvers with lunar gravity assist through parametric trajectory analysis. A Fortran code originally developed by Professor Lorenzo Casalino of the Mechanics and Aerospace Department (DIMEAS) at Politecnico di Torino is employed to solve the trajectory design problem. The code, initially formulated for impulsive thrust maneuvers, has been modified to accommodate continuous thrust propulsion, enabling a comparative analysis between impulsive and finite-burn maneuvers.

The spacecraft under consideration has an initial mass of 10.000 kg and is equipped with a finite-thrust chemical propulsion system providing 8N of thrust. An indirect approach based on optimal control theory is adopted to solve the resulting boundary value problem. The trajectory is designed to reach a final orbit, defined by its inclination and orbital energy.

Three parametric analyses are conducted: the first examines variations in final orbital radius at fixed inclination, the second investigates the effect of thrust magnitude on a selected orbit configuration, and the third repeats the first study with doubled orbital inclination. Results show that increasing orbital inclination significantly raises propellant requirements while reducing the influence of final orbital radius on total mission cost. The comparison between impulsive and finite-burn maneuvers reveals the impact of gravity losses on mission performance. The study provides a general overview of the interplay between key mission parameters and propellant consumption for lunar-assisted escape trajectories, offering a foundation for mission design and trade-off analysis in high-energy Earth orbit applications.

The thesis first introduces fundamental concepts of space propulsion and orbital mechanics. Subsequently, the mathematical problem formulation and solution methodology are presented. The final chapters illustrate and analyze the obtained results in detail.

## Sommario

Le missioni spaziali richiedono carburante, la cui massa rappresenta un compromesso tra carico utile e successo della missione. Lo studio delle traiettorie per minimizzare il consumo di propellente è cruciale per estendere le capacità operative e rendere possibili obiettivi più ambiziosi. Le manovre di flyby lunare permettono di raggiungere orbite terrestri ad alta energia contenendo i costi propulsivi, rendendole particolarmente preziose per traiettorie di escape dall'orbita terrestre bassa.

L'obiettivo di questa tesi è lo studio di manovre di escape con assist gravitazionale lunare attraverso un'analisi parametrica. Viene impiegato un codice Fortran sviluppato dal Professor Lorenzo Casalino del Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale (DIMEAS) del Politecnico di Torino. Il codice, inizialmente sviluppato per manovre a spinte impulsive, è stato modificato per analizzare anche spinte finite, permettendo un confronto tra le due manovre.

Il satellite considerato ha una massa di 10.000 kg ed è equipaggiato con un propulsore chimico a spinta finita da 8N. La risoluzione del problema determinato avviene tramite la teoria del controllo ottimale. La traiettoria è progettata per raggiungere un'orbita finale definita dalla sua inclinazione e dalla sua energia orbitale.

Il problema viene risolto mediante la teoria del controllo ottimale. La traiettoria è progettata per raggiungere un'orbita finale definita dalla sua inclinazione e dalla sua energia orbitale.

Vengono eseguite tre analisi parametriche: la prima esamina la variazione del raggio finale fissando gli altri due parametri target, la seconda investiga gli effetti del modulo della spinta su una particolare configurazione orbitale, e la terza ripete la prima analisi raddoppiando l'inclinazione orbitale. I risultati dimostrano che aumentare l'inclinazione orbitale aumenta notevolmente i requisiti propulsivi riducendone però l'influenza del raggio finale sul costo totale della missione. Inoltre, il confronto tra spinte impulsive e finite mostra l'impatto delle perdite gravitazionali durante la fase di spinta. Lo studio fornisce una panoramica generale sull'interazione tra i vari parametri chiave di una missione e il consumo di propellente, offrendo una prima base per il design di missione.

La tesi introduce inizialmente i concetti fondamentali della propulsione spaziale e della meccanica orbitale. Successivamente, viene presentata la formulazione del problema matematico e il metodo risolutivo. Infine, vengono illustrati e analizzati i risultati ottenuti.



## Riconoscimenti

Desidero esprimere alcune parole verso chi mi è stato vicino in questi anni.

I miei più sinceri ringraziamenti vanno ai miei genitori, per il loro immancabile supporto.

Un ringraziamento speciale a mio fratello e a mia sorella, perché siamo stati vicini anche nella lontananza.

Ai miei nonni, presenti e non, con affetto.

Infine, desidero ringraziare il Professor Casalino per la guida e la disponibilità dimostrate durante questo lavoro di tesi.



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
1.1	Concetti di dinamica orbitale e propulsione spaziale . . . . .	1
1.2	Manovra di flyby lunare . . . . .	2
1.3	Presentazione del problema e obiettivi dell'analisi . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Fondamenti di Meccanica Orbitale</b>	<b>4</b>
2.0.1	Problema degli N-corpi . . . . .	4
2.1	Problema dei 2-corpi . . . . .	5
2.1.1	L'equazione della traiettoria . . . . .	7
2.2	Parametri orbitali classici . . . . .	9
2.3	Misura del Tempo . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Fondamenti di Propulsione</b>	<b>12</b>
3.1	Fondamenti fisici della propulsione . . . . .	12
3.1.1	Tipi di propulsione . . . . .	14
3.2	Propulsione chimica . . . . .	15
3.2.1	Motori a propellenti liquidi . . . . .	16
3.3	Perdite . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Presentazione del problema</b>	<b>21</b>
4.1	Vettore di stato, incognite del problema e parametri target. . . . .	22
4.2	Grandezze adimensionalizzate . . . . .	22
4.2.1	Valore di riferimento per la distanza . . . . .	22
4.2.2	Valore di riferimento per la velocità . . . . .	23
4.2.3	Valore di riferimento per il tempo . . . . .	23
4.2.4	Valore di riferimento per l'accelerazione . . . . .	23
4.3	Equazioni differenziali . . . . .	23
4.3.1	Condizioni al contorno . . . . .	24
4.4	Creazione del modello a spinta finita . . . . .	25
4.4.1	Modifiche alle incognite . . . . .	25
4.4.2	Equazioni differenziali . . . . .	25
<b>5</b>	<b>Risultati</b>	<b>27</b>
5.1	Introduzione alle soluzioni . . . . .	27
5.2	Confronto tra missione impulsiva e propulsa al variare dell'orbita finale	30
5.3	Confronto sul caso $2_2$ al variare del modulo della spinta . . . . .	34
5.4	Effetto dell'inclinazione orbitale . . . . .	35

**6 Conclusioni**

**42**

# Elenco delle figure

2.1	Problema degli N-corpi . . . . .	4
2.2	Problema dei due corpi . . . . .	6
2.3	Sezione conica e valori eccentricità . . . . .	8
2.4	Parametri orbitali classici . . . . .	9
2.5	Anomalia eccentrica . . . . .	11
3.1	Schema generale di un motore a propellenti liquidi con camera di combustione e ugello . . . . .	16
3.2	Schema generale delle forze agenti su un rocket in movimento nello spazio . . . . .	18
5.1	Traiettorie complete delle quattro missioni, vista 3D. . . . .	28
5.2	Traiettorie complete delle quattro missioni, vista nel piano XY. . . . .	29
5.3	Traiettorie complete delle quattro missioni, vista nel piano YZ. . . . .	29
5.4	Distanza Spacecraft-Luna al momento del flyby. . . . .	31
5.5	Traiettorie di flyby nel sistema di riferimento centrato sulla Luna. Missione propulsa. . . . .	31
5.6	Evoluzione dell'energia orbitale del satellite. Missione impulsiva. . . . .	32
5.7	Evoluzione dell'energia orbitale del satellite. Missione propulsa. . . . .	32
5.8	Evoluzione dell'impulso totale per missione. . . . .	33
5.9	Impulso totale normalizzato rispetto al caso $1_2$ . . . . .	33
5.10	Impulso totale al variare della spinta normalizzato rispetto al caso nominale (8N). . . . .	34
5.11	Traiettorie complete delle quattro missioni, vista 3D. . . . .	35
5.12	Traiettorie di flyby nel sistema centrato sulla Luna. . . . .	36
5.13	Traiettorie complete delle quattro missioni, vista nel piano XY. . . . .	36
5.14	Traiettorie complete delle quattro missioni, vista nel piano YZ. . . . .	37
5.15	Confronto delle traiettorie al variare dell'inclinazione. Vista 3D, caso 4. . . . .	37
5.16	Confronto delle traiettorie al variare dell'inclinazione. Ingradimento zona del flyby. Vista 3D, caso 4. . . . .	38
5.17	Confronto delle traiettorie al variare dell'inclinazione. Piano XY, caso 4. . . . .	38
5.18	Confronto delle traiettorie al variare dell'inclinazione. Piano YZ, caso 4. . . . .	39
5.19	Evoluzione dell'impulso totale con inclinazione raddoppiata. . . . .	40
5.20	Impulso totale normalizzato. . . . .	41

# Elenco delle tabelle

3.1	Valori tipici dei principali sistemi propulsivi . . . . .	15
3.2	Confronto tra diversi propellenti . . . . .	18
5.1	Parametri delle orbite di destinazione. . . . .	28
5.2	Confronto dei parametri delle missioni analizzate. . . . .	30
5.3	Parametri caratteristici delle missioni con spinta finita. . . . .	32
5.4	Analisi parametrica al variare del modulo della spinta per la missione con fase propulsa. . . . .	34
5.5	Confronto dei parametri delle missioni analizzate. . . . .	39
5.6	Parametri caratteristici delle missioni con spinta finita. . . . .	40
5.7	Confronto tra una manovra di cambio di piano e una manovra com- binata in termini di costo propulsivo. . . . .	41

# Capitolo 1

## Introduzione

In questo capitolo introduttivo viene motivato l'interesse per lo studio di traiettorie di escape dall'orbita terrestre impiegando un flyby lunare. Vengono introdotti alcuni concetti fondamentali di meccanica orbitale e di propulsione, necessari alla comprensione della manovra di flyby lunare, che viene successivamente discussa. Infine vengono presentati il metodo risolutivo adottato e le analisi condotte.

### 1.1 Concetti di dinamica orbitale e propulsione spaziale

Un satellite in orbita attorno ad un pianeta segue una traiettoria conica, descritta da sei parametri orbitali (presentati nel paragrafo 2.2). Tra questi parametri sono di particolare importanza il semiasse maggiore e l'inclinazione orbitale.

Il semiasse maggiore è legato all'energia meccanica specifica del satellite e al parametro gravitazionale del sistema  $\mu_i$ . All'aumentare dell'energia aumenta il semiasse maggiore dell'orbita. A seconda del segno dell'energia la traiettoria può essere ellittica, se negativa, parabolica, se nulla, oppure iperbolica, se positiva. L'energia meccanica specifica dipende inoltre dalla velocità del satellite ed un incremento della velocità in un punto dell'orbita comporta un aumento dell'energia e quindi una modifica di uno o più parametri orbitali.

Un altro parametro fondamentale che descrive un'orbita è l'inclinazione, definita come l'angolo tra il piano orbitale e il piano equatoriale del pianeta. La modifica dell'inclinazione, così come l'aumento dell'energia meccanica, richiede l'applicazione di manovre propulsive che comportano consumo di propellente.

La propulsione spaziale si fonda sul principio di azione e reazione, ovvero il veicolo genera spinta espellendo il propellente ad alta velocità in direzione opposta alla direzione di spinta desiderata. Il propellente, a differenza dei velivoli terrestri, non può essere prelevato dall'ambiente esterno ma deve essere portato a bordo fin dalla partenza. Questo comporta che la massa di propellente rappresenta una percentuale importante della massa totale del veicolo. Inoltre la massa di propellente influenza la massa strutturale del veicolo. Maggiore è la massa di propellente e maggiore sarà anche la massa dei sistemi e dei serbatoi, a discapito del carico utile.

Per queste ragioni diminuire il consumo di propellente è un obiettivo fondamentale

nella progettazione di qualsiasi missione spaziale.

Il costo propulsivo di una manovra è quantificato dal  $\Delta V$ , ovvero la variazione di velocità che il propulsore deve fornire al veicolo, perdite comprese. L'equazione di Tsiolkovsky lega il  $\Delta V$  alla massa di propellente consumata attraverso una relazione esponenziale, per cui riuscire a ridurre il  $\Delta V$  anche di qualche punto percentuale si traduce in risparmi significativi di propellente e quindi maggior carico utile.

## 1.2 Manovra di flyby lunare

La manovra di flyby sfrutta il campo gravitazionale di un corpo celeste per modificare la velocità e la traiettoria di un veicolo spaziale senza consumo di propellente. Dal punto di vista fisico, nel sistema di riferimento del corpo celeste la traiettoria del veicolo è un'iperbole e il modulo della sua velocità prima e dopo il flyby rimane invariato. Tuttavia, poiché il corpo celeste è in moto rispetto al sistema inerziale di riferimento rispetto al quale sia il veicolo sia il corpo celeste sono in movimento, la rotazione del vettore velocità si traduce in una variazione della velocità assoluta. In questo modo avviene uno scambio di quantità di moto tra il veicolo e il corpo celeste, che a seconda della modalità di approccio può comportare un incremento o una diminuzione dell'energia meccanica specifica del veicolo.

Un esempio dimostrativo dell'importanza di questo tipo di manovra sono state le missioni *Voyager 1* e *Voyager 2*, le quali, sfruttando una serie di flyby planetari<sup>1</sup>, sono state in grado di raggiungere lo spazio interstellare, impresa che sarebbe stata impossibile con il solo ausilio del propellente a bordo [1, 2].

Una missione che ha sfruttato, in particolare, dei flyby lunari è la missione ARTEMIS<sup>2</sup> (2010) della NASA. Al termine della missione primaria THEMIS<sup>3</sup>, due delle sonde disponevano ancora di propellente residuo, che ha permesso di incrementare progressivamente l'apogeo delle loro orbite fino a raggiungere la distanza lunare. Una volta raggiunta tale regione, una sequenza di flyby lunari ha consentito di sfruttare gli assist gravitazionali della Luna per modificare l'energia orbitale delle sonde ed arrivare ai punti di Lagrange  $L_1$  e  $L_2$  del sistema Terra-Luna[3].

## 1.3 Presentazione del problema e obiettivi dell'analisi

Lo scopo di questa tesi è analizzare traiettorie di escape dall'orbita bassa terrestre ottenute attraverso un flyby lunare, valutandone il costo propulsivo. L'obiettivo è comprendere come alcuni parametri principali della missione influenzino le caratteristiche della missione e i dettagli della traiettoria.

L'analisi viene condotta tramite simulazioni numeriche utilizzando un codice Fortran. Il problema della traiettoria è formulato come un problema determinato e

---

<sup>1</sup> *Voyager 1* ha effettuato flyby di Giove e Saturno, mentre *Voyager 2* ha sorvolato anche Urano e Nettuno.

<sup>2</sup> *Acceleration, Reconnection, Turbulence and Electrodynamics of the Moon's Interaction with the Sun.*

<sup>3</sup> *Time History of Events and Macroscale Interactions during Substorms.*

risolto mediante la teoria del controllo ottimale. Al fine di fornire una visione più completa della missione, le simulazioni vengono eseguite sia adottando un modello di spinta impulsiva, sia un modello di spinta finita, in modo da confrontare il comportamento di un sistema propulsivo ideale con uno più realistico.

Il problema viene formulato imponendo al codice numerico di seguire una traiettoria che, sfruttando un flyby lunare, consenta di raggiungere una determinata energia orbitale finale e una specifica inclinazione dell'orbita.

A partire da queste condizioni vengono condotte diverse analisi parametriche per studiare il comportamento della missione. In particolare, viene analizzato come la variazione dell'energia orbitale finale e dell'inclinazione influenzi la durata della missione, la massa finale del veicolo e il  $\Delta V$  richiesto per il trasferimento.

Viene inoltre studiato l'effetto del modulo della spinta, al fine di valutare l'impatto delle perdite gravitazionali sulla missione e di osservare le differenze tra un modello di spinta impulsiva e un modello di spinta finita.

# Capitolo 2

## Fondamenti di Meccanica Orbitale

In questa sezione è presentata una introduzione generale alla teoria della meccanica orbitale. In particolare vengono discussi il problema dei due corpi e il problema degli  $N$  corpi. Vengono introdotti i parametri orbitali classici e le trasformazioni di coordinate necessarie per descrivere il moto dei corpi. Inoltre, viene affrontato il problema del tempo attraverso l'impiego delle leggi di Keplero. Ciò che viene discusso in questa sezione si basa principalmente su [4].

### 2.0.1 Problema degli $N$ -corpi

Nel corso della sua traiettoria, lo spacecraft è soggetto all'attrazione gravitazionale di più corpi e ad ulteriori azioni perturbative quali, per esempio resistenza aerodinamica e pressione di radiazione solare.

Per descrivere il moto di un generico spacecraft consideriamo un sistema di  $N$  corpi ( $m_1, m_2, \dots, m_N$ ) all'interno di un sistema di riferimento inerziale. Indichiamo con  $m_i$  il corpo che vogliamo studiare.

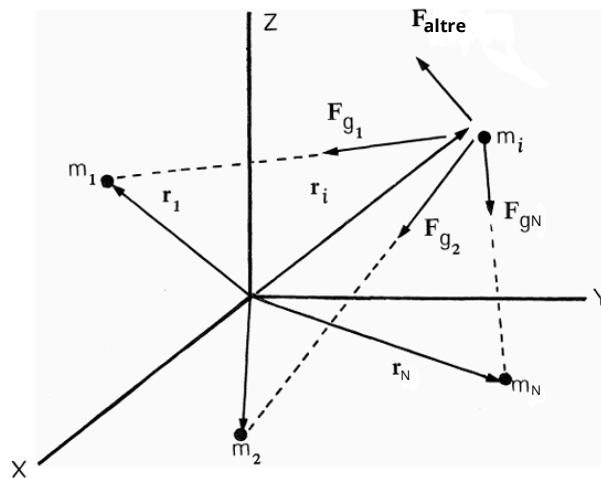


Figura 2.1: Problema degli  $N$ -corpi [4].

La somma vettoriale di tutte le forze, gravitazionali e non, determina l'equazione del moto:

$$\vec{F}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n G \frac{m_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) + \vec{F}_{\text{altre}}, \quad (2.1)$$

dove  $\vec{F}_{\text{altre}}$  rappresenta eventuali altre forze esterne come la resistenza atmosferica o la pressione di radiazione.

Dividendo per  $m_i$ , si ottiene l'equazione del moto del corpo  $i$  soggetto alle forze gravitazionali degli altri corpi e ad eventuali forze esterne.

$$\ddot{\vec{r}}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N G \frac{m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} (\vec{r}_j - \vec{r}_i) + \frac{\vec{F}_{\text{altre}}}{m_i} \quad (2.2)$$

## 2.1 Problema dei 2-corpi

Dopo aver descritto in modo generale il problema degli N-corpi e aver ricavato l'equazione del moto di un corpo perturbato dalla presenza di altri corpi, risulta utile considerare un modello semplificato a due soli corpi.

Il passaggio dal problema degli N-corpi al problema dei due corpi richiede l'introduzione di due ipotesi fondamentali:

- i corpi considerati sono sfericamente simmetrici, consentendo di trattarli come masse concentrate nei rispettivi centri;
- sul sistema non agiscono forze diverse dalla forza gravitazionale, che agisce lungo la congiungente dei centri dei due corpi.

Prima di poter scrivere le equazioni del moto è necessario specificare un sistema di riferimento inerziale, quindi non accelerato e non rotante, indicato con  $(X', Y', Z')$ , rispetto al quale è possibile applicare la seconda legge di Newton.

Si introduce successivamente un sistema di coordinate  $(X, Y, Z)$ , non rotante e con assi paralleli al sistema inerziale precedente, con origine nel centro del corpo di massa  $M$ . Tale sistema è non inerziale, tuttavia, poiché non rotante rispetto al sistema inerziale, i moduli e le direzioni dei vettori  $\vec{r}$  e  $\vec{f}$ , risultano invariati nel passaggio dal sistema inerziale, e consente di descrivere in modo più facile il moto relativo tra i due corpi.

Pertanto, una volta ricavata l'equazione del moto nel sistema inerziale, è possibile esprimere posizione, velocità e accelerazione nel sistema  $(X, Y, Z)$  senza introdurre termini dovuti alla rotazione del riferimento.

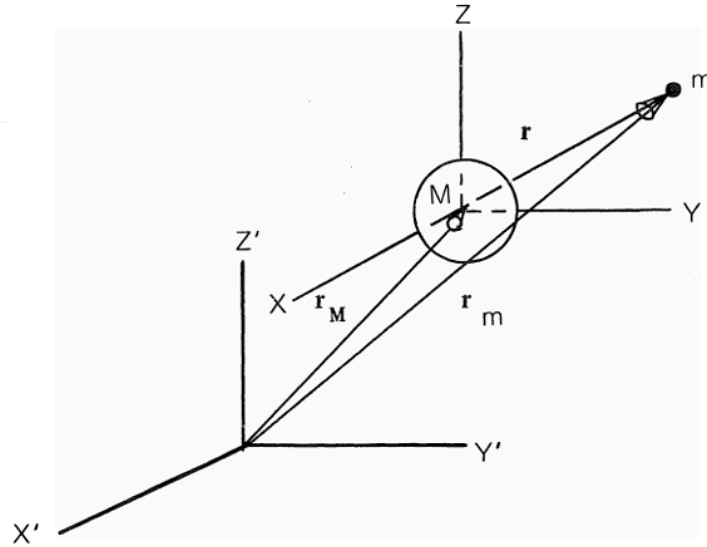


Figura 2.2: Problema dei due corpi [4].

In Figura 2.2 è rappresentato il sistema appena descritto, al quale si applica la legge gravitazionale di Newton tra i corpi  $m$  e  $M$ :

$$\begin{cases} \ddot{\vec{r}}_m = -\frac{GM}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \\ \ddot{\vec{r}}_M = \frac{Gm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \end{cases} \quad (2.3)$$

Sottraendo la seconda equazione alla prima in (2.3), si ottiene l'equazione del moto nel problema dei due corpi:

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{G(M+m)}{r^3} \vec{r}, \quad (2.4)$$

dove  $\vec{r} = \vec{r}_m - \vec{r}_M$ . Nel nostro contesto, dove la massa del corpo orbitante è molto inferiore rispetto al corpo centrale ( $M \gg m$ ), per cui  $G(M+m) \approx GM$ . Si definisce la costante gravitazionale:

$$\mu = GM.$$

Con quest'ultima assunzione, il problema diventa noto come problema dei due corpi ristretto, e l'equazione del moto si riduce a:

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r}. \quad (2.5)$$

### Conservazione dell' energia meccanica

Il campo gravitazionale è conservativo, pertanto un corpo che si muove sotto l'azione della sola forza gravitazionale non perde né acquista energia meccanica, ma scambia continuamente energia cinetica con energia potenziale e viceversa.

Riprendendo la (2.5), moltiplichiamo scalarmente per  $\dot{\vec{r}}$ :

$$\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}} \cdot \frac{\mu}{r^3} \vec{r} = 0.$$

Svolgendo il prodotto scalare e rielaborando i termini, questa equazione diventa:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} \right) = 0.$$

Ne segue che l'energia meccanica specifica di un satellite, definita come somma dell'energia cinetica specifica e dell'energia potenziale specifica, si conserva lungo l'orbita. Si può quindi scrivere:

$$E = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r}. \quad (2.6)$$

### Conservazione del momento angolare

Poichè la forza gravitazionale agisce sempre radialmente verso il corpo centrale, non vi è alcuna componente tangenziale in grado di modificare il momento angolare del satellite, che quindi rimane costante.

Moltiplichiamo l'equazione (2.5) vettorialmente per  $\vec{r}$ :

$$\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} + \vec{r} \times \frac{\mu}{r^3} \vec{r} = 0.$$

Il secondo termine risulta nullo<sup>1</sup>, mentre il primo termine può essere riscritto come:

$$\frac{d}{dt} (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{v}) = 0.$$

Il prodotto  $r \times v$  prende il nome di momento angolare specifico  $\vec{h}$ . Si può concludere con:

$$\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v}. \quad (2.7)$$

Il momento angolare specifico di un satellite rimane costante lungo la sua orbita. Tale moto è quindi confinato in un piano fisso nello spazio, denominato piano orbitale.

### 2.1.1 L'equazione della traiettoria

L'equazione del moto (2.5) ricavata è formalmente semplice, ma ottenere una soluzione completa non lo è. È tuttavia possibile ricavare una soluzione parziale, sufficiente a determinare la dimensione e la forma dell'orbita.

Richiamando l'equazione (2.5) e moltiplicando vettorialmente per  $\vec{h}$  si ottiene:

$$\ddot{\vec{r}} \times \vec{h} = \frac{\mu}{r^3} (\vec{h} \times \vec{r})$$

L'equazione appena scritta si può riscrivere come:

$$\frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}} \times \vec{h}) = \mu \frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{r}}{r} \right)$$

---

<sup>1</sup>Il prodotto vettoriale tra vettori paralleli è nullo.

Integrando nel tempo si ottiene:

$$\dot{\vec{r}} \times \vec{h} = \mu \left( \frac{\vec{r}}{r} \right) + \vec{B}$$

Dove  $\vec{B}$  è il vettore costante di integrazione. Moltiplicando scalarmente per  $\vec{r}$ :

$$\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} \times \vec{h} = \vec{r} \cdot \mu \left( \frac{\vec{r}}{r} \right) + \vec{r} \cdot \vec{B}$$

Dalla quale si ricava:

$$h^2 = \mu r + rB \cos \nu.$$

L'angolo  $\nu$  è definito come l'angolo compreso tra i vettori  $\vec{B}$  e  $\vec{r}$ .

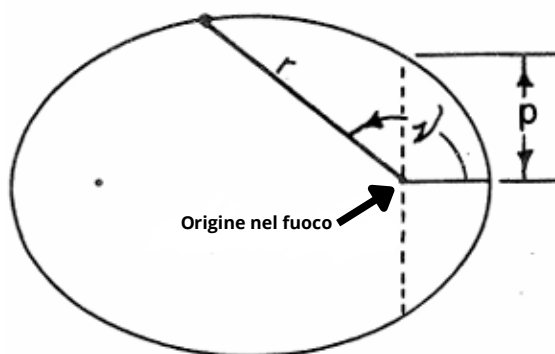
Riscrivendo l'ultima equazione ed esplicitando per  $r$ , si ricava l'equazione della traiettoria in coordinate polari:

$$r = \frac{h^2/\mu}{1 + \left(\frac{B}{\mu}\right) \cos \nu}. \quad (2.8)$$

L'equazione (2.8) coincide formalmente con l'equazione generale di una sezione conica espressa in coordinate polari, con origine posta in uno dei fuochi:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \nu}. \quad (2.9)$$

Si ottiene così la formulazione matematica della prima legge di Keplero<sup>2</sup>. In questa espressione, il parametro  $p$  prende il nome di *semilatus rectum*, mentre  $e$  rappresenta l'eccentricità, la quale determina la natura geometrica della conica.



Eccentricità	Forma conica
$e = 0$	Cerchio
$0 < e < 1$	Ellisse
$e = 1$	Parabola
$e > 1$	Iperbole

Figura 2.3: Sezione conica e valori eccentricità [4].

<sup>2</sup>I pianeti descrivono orbite ellittiche con il Sole in uno dei fuochi.

## 2.2 Parametri orbitali classici

I parametri orbitali classici che descrivono un'orbita kepleriana sono i seguenti:

1.  $a$ , semiasse maggiore, definisce la dimensione dell'orbita conica.  
Il semiasse maggiore è legato all'energia meccanica specifica  $E$  dalla relazione:

$$a = -\frac{\mu}{2E}. \quad (2.10)$$

Per orbite ellittiche  $a > 0$  ed  $E < 0$ , mentre per orbite iperboliche si ha  $a < 0$  ed  $E > 0$ .

2.  $e$ , eccentricità, definisce la forma dell'orbita;
3.  $i$ , inclinazione, definita come l'angolo tra il vettore del momento angolare  $\vec{h}$  e il versore  $\hat{K}$  dell'asse di riferimento;
4.  $\Omega$ , longitudine del nodo ascendente, definita come l'angolo, misurato sul piano fondamentale<sup>3</sup>, tra il versore  $\hat{I}$  e la direzione del nodo ascendente;
5.  $\omega$ , argomento del periastro, definito nel piano orbitale come l'angolo tra il nodo ascendente e il periastro, misurato nel senso di moto del satellite.
6.  $\nu$ , anomalia vera al tempo  $t$ , definita nel piano orbitale come l'angolo tra il raggio vettore del satellite e il periastro.

Uno schema dettagliato dei parametri orbitali è presentato in Figura 2.4.

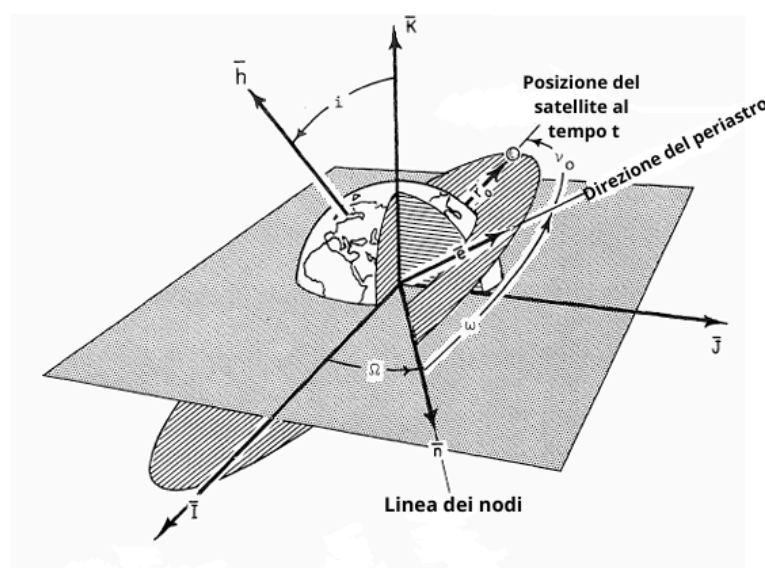


Figura 2.4: Parametri orbitali classici [4].

<sup>3</sup>Il piano fondamentale è il piano di riferimento del sistema inerziale adottato; per orbite terrestri, nel sistema geocentrico, coincide con il piano equatoriale.

Di questi sei elementi, i primi cinque determinano la geometria e l'orientazione dell'orbita nello spazio, mentre l'anomalia vera determina istantaneamente la posizione del satellite lungo l'orbita.

### Casi particolari

In alcune orbite particolari gli elementi orbitali classici non si possono definire:

- per orbite circolari ( $e = 0$ ) l'argomento del periastro  $\omega$  risulta indefinito;
- per orbite equatoriali ( $i = 0$ ) la longitudine del nodo ascendente  $\Omega$  risulta indefinita.

In tali casi si fa utilizzo di parametri orbitali alternativi.

## 2.3 Misura del Tempo

L'equazione (2.9) fornisce la forma e la dimensione dell'orbita, ma non fornisce alcuna informazione sulla legge temporale con cui il corpo percorre l'orbita. Per ottenere questa informazione è necessario stabilire la relazione tra la posizione del satellite lungo l'orbita e il tempo trascorso.

Dalla relazione (2.7):

$$\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v} \longrightarrow |\vec{h}| = r^2 \dot{\nu}.$$

Poiché la velocità areolare è definita come

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\nu},$$

dalla relazione precedente segue che

$$\frac{dA}{dt} = \frac{h}{2} = \text{costante}.$$

Il raggio vettore spazza dunque aree uguali in tempi uguali, in accordo con la seconda legge di Keplero. Dalla relazione  $|\vec{h}| = r^2 \dot{\nu}$  si ricava:

$$\dot{\nu} = \frac{d\nu}{dt} = \frac{h}{r^2} = \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} (1 + e \cos \nu)^2. \quad (2.11)$$

Esplicitando per  $dt$  e integrando entrambi i termini, sostituendo con le relazioni ottenute in (2.8) e (2.9) si ottiene:

$$\Delta t = \int_{\nu_0}^{\nu_e} \frac{r^2(\nu)}{h} d\nu = \sqrt{\frac{p^3}{\mu}} \int_{\nu_0}^{\nu_e} \frac{1}{(1 + e \cos \nu)^2} d\nu. \quad (2.12)$$

L'integrale in (2.12) può essere risolto per orbite paraboliche, ellittiche e iperboliche. Tuttavia, nei casi ellittico e iperbolico, la risoluzione risulta algebricamente complessa. Per semplificare il problema si introducono due angoli ausiliari: l'anomalia eccentrica  $E$  e l'anomalia iperbolica  $H$ .



# Capitolo 3

## Fondamenti di Propulsione

In questa sezione è presentata una introduzione generale ai principi fondamentali della propulsione spaziale, con particolare riferimento alla propulsione chimica. Vengono discussi i principi fisici della generazione della spinta e introdotti i principali parametri prestazionali utilizzati. Vengono classificati i propulsori tipici e presentati i propellenti attualmente in uso. Infine viene discussa, poiché di interesse per la trattazione, la distinzione tra spinta impulsiva e spinta finita, introducendo le perdite principali. Ciò che viene discusso in questa sezione si basa principalmente su [5] e [6].

### 3.1 Fondamenti fisici della propulsione

Come visto nel capitolo precedente, un corpo nello spazio, in assenza di forze diverse da quella gravitazionale, descrive un'orbita conica definita dalla sua energia meccanica specifica. Un sistema propulsivo agisce come una forza esterna, modificando la velocità del satellite e, di conseguenza, la sua energia meccanica specifica.

La propulsione spaziale si basa sul terzo principio della dinamica, secondo cui, quando un corpo esercita una forza su un secondo corpo, quest'ultimo esercita sul primo una forza uguale e contraria.

Poiché un veicolo spaziale opera nel vuoto, l'unico modo per generare spinta è espellere massa (propellente) ad alta velocità in direzione opposta a quella della spinta desiderata. La massa del veicolo è pertanto una quantità variabile nel tempo.

Consideriamo, all'istante  $t$ , un veicolo di massa  $m$  che si muove con velocità  $\vec{v}$  in un sistema di riferimento inerziale. In un intervallo infinitesimo  $dt$ , il veicolo espelle una massa di propellente  $dm_p > 0$ . La massa del veicolo diventa quindi  $m - dm_p$  e la sua velocità varia di una quantità infinitesima  $d\vec{v}$ .

Assumendo il sistema isolato nell'intervallo  $dt$  e trascurando forze esterne, si applica la conservazione della quantità di moto:

$$m\vec{v} = (m - dm_p)(\vec{v} + d\vec{v}) + dm_p(\vec{v} - \vec{v}_e). \quad (3.1)$$

Nel sistema di riferimento inerziale considerato, la velocità assoluta della massa espulsa risulta  $\vec{v} - \vec{v}_e^1$ , essendo l'espulsione diretta in verso opposto alla spinta.

---

<sup>1</sup> $v_e$  è la velocità del propellente nella sezione di uscita.

Svolgendo l'equazione (3.1) e trascurando gli infinitesimi di ordine superiore si ottiene:

$$m d\vec{v} = dm_p \vec{v}_e.$$

Esprimendo  $dm_p$  come la portata di propellente  $\dot{m}_p$  ricaviamo:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{m}_p \vec{v}_e. \quad (3.2)$$

Il termine a sinistra rappresenta il prodotto tra massa e accelerazione, ovvero una forza, ne consegue che anche il termine a destra ha le dimensioni di una forza, che prende il nome di spinta. In generale, la spinta generata da un propulsore include anche un contributo dovuto alla differenza di pressione nella sezione di uscita dell'ugello:

$$\vec{T} = \dot{m}_p \vec{v}_e + A_e(p_e - p_0). \quad (3.3)$$

Per semplicità si introduce la velocità efficace di scarico  $\vec{c}$  che è definita come

$$\vec{c} = \vec{v}_e + \frac{A_e(p_e - p_0)}{\dot{m}_p} \quad (3.4)$$

la quale permette di scrivere  $\vec{T} = \dot{m}_p \vec{c}$ . Nel vuoto  $p_0$  è nulla e il termine legato alla pressione atmosferica si annulla, inoltre se parliamo di ugello espanso ottimamente  $p_e = p_0$  e tutto il termine di pressione si annulla, portando a scrivere  $c = v_e$ . Integrando tra l'istante iniziale  $t_0$  e quello finale  $t_f$  si ottiene:

$$\Delta V = \int_{t_0}^{t_f} \frac{T}{m} dt. \quad (3.5)$$

Poiché la massa del veicolo diminuisce nel tempo, vale  $dm = -dm_p = -\dot{m}_p dt$ . Assumendo la velocità efficace di scarico costante, si ricava:

$$\Delta V = c \int_{m_f}^{m_0} \frac{dm}{m}. \quad (3.6)$$

Da cui segue l'equazione di Tsiolkovskij:

$$\Delta V = c \ln \frac{m_0}{m_f} \iff m_f = m_0 e^{-\frac{\Delta V}{c}}. \quad (3.7)$$

Definiti i passaggi principali è possibile introdurre ulteriori grandezze caratteristiche del contesto propulsivo. Si può definire come potenza della spinta, l'energia necessaria per accelerare il propellente alla velocità  $c$  tale da produrre la spinta  $T$ :

$$P_T = \frac{1}{2} T c = \frac{1}{2} \dot{m}_p c^2.$$

L'integrale della spinta sull'intera fase propulsa prende il nome di impulso totale  $I_t$

$$I_t = \int_{t_0}^{t_f} T dt.$$

L'impulso totale per unità di massa del propellente prende il nome di impulso specifico  $I_{sp}$ :

$$I_{sp} = \frac{I_t}{m_p g_0}. \quad (3.8)$$

Nel caso di spinta e portata costanti, tale definizione si riduce a:

$$I_{sp} = \frac{T}{\dot{m}_p g_0} = \frac{c}{g_0}. \quad (3.9)$$

L'impulso specifico è il principale parametro prestazionale di un sistema propulsivo. Esso rappresenta l'impulso ottenibile per unità di peso di propellente consumato, è facilmente intuibile che è desiderabile avere un valore più alto possibile di  $I_{sp}$ . Dal punto di vista dimensionale si misura in secondi. Come si evince dalla (3.9) è esplicito il legame, a meno di una costante, con la velocità efficace di scarico.

### 3.1.1 Tipi di propulsione

Nel paragrafo precedente è stato descritto il meccanismo fisico attraverso cui viene generata la spinta, evidenziando il ruolo della velocità di scarico e della portata massica. Resta tuttavia da chiarire in che modo il propellente venga accelerato fino alle velocità richieste. Le differenti tecnologie propulsive si distinguono proprio per l'origine dell'energia che viene trasferita al propellente. In Tabella 3.1 sono riportati i valori tipici dei sistemi propulsivi attuali. In termini generali, è possibile classificare i sistemi di propulsione spaziale nelle seguenti categorie:

- **Propulsione chimica:** utilizza l'energia chimica immagazzinata nel propellente che, mediante combustione, viene trasformata prima in energia termica e successivamente in energia cinetica attraverso l'espansione in un ugello. Questi propulsori sono caratterizzati da elevati livelli di spinta e rappresentano l'unica tecnologia operativa in grado di effettuare l'ascesa in orbita in quanto riescono a generare le accelerazioni richieste;
- **Propulsione elettrica:** utilizza energia elettrica, generata a bordo tramite pannelli solari o altri sistemi di accumulo, per accelerare il propellente mediante processi termici, elettrostatici o elettromagnetici. Rispetto alla propulsione chimica, è caratterizzata da velocità di scarico e impulsi specifici significativamente più elevati, a fronte di valori di spinta molto contenuti. Le ridotte spinte comportano accelerazioni modeste e richiedono tempi di accensione prolungati per ottenere  $\Delta V$  significativi.
- **Propulsione nucleare:** utilizza l'energia termica rilasciata da reazioni nucleari prodotte all'interno di un reattore per riscaldare, generalmente, idrogeno liquido, che viene poi espanso in un ugello. Le prestazioni teoriche sono notevolmente superiori<sup>2</sup> rispetto alla propulsione chimica, tuttavia la complessità tecnologica e di integrazione, unite ai requisiti di sicurezza, hanno finora impedito l'applicazione operativa di questi sistemi.

---

<sup>2</sup>In termini di impulso specifico.

Sistema	$I_{sp}$ [s]	$T$ [N]
Monopropellente liquido	200-250	0.01 - 100
Bipropellente liquido	300-450	0.01 - $10^7$
Propellente solido	200-300	$1-10^6$
Propellente ibrido	250-350	$1-10^6$
Resistogetti	200-350	0.2-0.3
Arcoggetti	400-1000	0.2-1
Propulsori ionici	2000-5000	$< 0.2$
Propulsori ad effetto Hall	1500-2000	$< 2$
Propulsori PPT	600-2000	$< 0.01$
Propulsori MPD	2000-5000	$< 2$

Tabella 3.1: Valori tipici dei principali sistemi propulsivi [5].

## 3.2 Propulsione chimica

In questa sezione vengono introdotti i principi generali della propulsione chimica, con particolare riferimento ai motori a propellente liquido. Dopo averne richiamato il funzionamento fisico, saranno discusse prestazioni e caratteristiche.

Il funzionamento di un propulsore chimico si basa sulla conversione dell'energia chimica del propellente in energia termica mediante combustione in un'apposita camera. I prodotti della reazione di combustione raggiungono alta temperatura e pressione. Una successiva espansione in un ugello permette la conversione in energia cinetica. Sotto l'ipotesi di gas perfetto e trasformazione isentropica nell'ugello, è possibile ricavare la velocità di uscita:

$$v_e = \sqrt{2c_p T_c \left( 1 - \frac{1}{\beta_e^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \right)} \quad (3.10)$$

Questa equazione evidenzia come la prestazione del propulsore dipenda dalla temperatura di combustione  $T_c$ , dalla composizione chimica del propellente utilizzato ( $c_p$ ,  $\gamma$ ) e dal rapporto di espansione  $\beta_e = p_c/p_e$ . La temperatura massima raggiungibile in camera dipende da alcuni limiti tecnologici e quindi è vincolata ad alcuni valori. La composizione chimica dei propellenti è legata al  $c_p$ , il quale dipende in particolare dalla massa molare. Anche in questo caso raggiungere valori superiori rispetto a quanto ottenibile con i propellenti disponibili rappresenta un ulteriore vincolo tecnologico. Infine il rapporto di espansione è solitamente fissato a priori e non può essere aumentato arbitrariamente anche per evidenti limitazioni strutturali. I propulsori chimici si dividono in due principali categorie in funzione dello stato fisico del propellente. L'utilizzo di propellenti liquidi identifica la classe dei *Liquid Rocket Engine*, mentre l'impiego di propellenti solidi definisce i *Solid Rocket Motor*. Una combinazione delle due soluzioni dà origine agli *Hybrid Rocket Engine*. La differenza fondamentale tra la categoria dei propellenti liquidi e i propellenti solidi è la

possibilità di regolare la spinta variando la portata di propellente, nonché la possibilità di spegnere e riaccendere il motore, funzioni non possibili con propellenti solidi poiché una volta innescata la reazione di combustione non è possibile spegnerla né modularne la portata. Nel seguito si farà riferimento ai motori a propellente liquido, in quanto rappresentano la tecnologia in uso per la trattazione.

### 3.2.1 Motori a propellenti liquidi

I motori a propellente liquido sono caratterizzati dallo stoccaggio dei propellenti in serbatoi dedicati e dalla loro successiva immissione in camera di combustione mediante un opportuno sistema di alimentazione. In Figura 3.1 è descritta l'infrastruttura di un propulsore bipropellente.

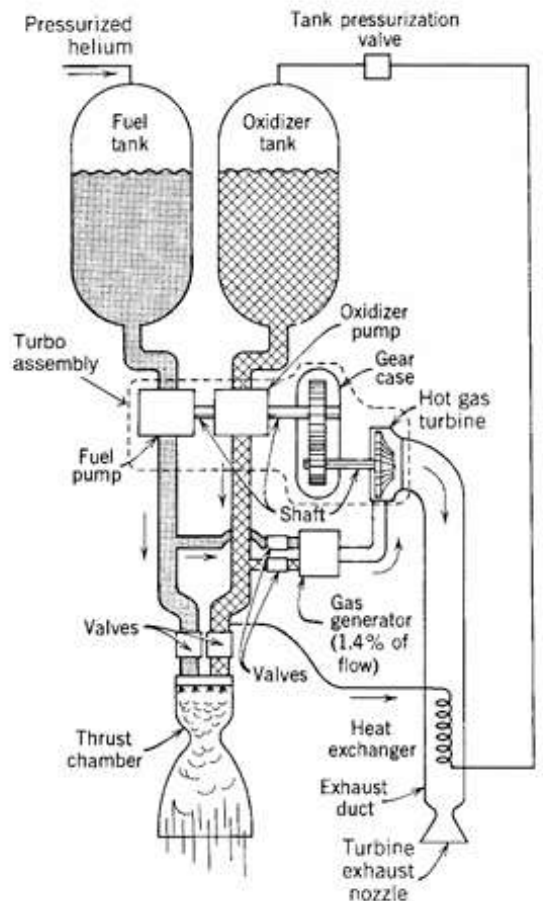


Figura 3.1: Schema generale di un motore a propellenti liquidi con camera di combustione e ugello [6].

La configurazione del sistema propulsivo e la scelta del propellente dipendono dal profilo temporale della missione e dai requisiti operativi. Le scelte più comuni sono:

- Idrazina ( $\text{N}_2\text{H}_4$ ), utilizzata come monopropellente, si decompone esotermicamente a contatto con un catalizzatore. Non è necessaria una combustione e quindi nemmeno un sistema di accensione poiché l'energia termica è fornita dalla reazione esotermica. Garantisce una relativa affidabilità dovuta alla sua semplicità strutturale, richiedendo un singolo serbatoio di stoccaggio e un sistema di alimentazione relativamente semplice. L'idrazina è altamente tossica e cancerogena e la sua gestione operativa richiede procedure di sicurezza rigorose. È un propellente storable a temperatura ambiente. Queste caratteristiche lo rendono utile per missioni di lunga durata.
- La coppia NTO-MMH<sup>3</sup> è una soluzione composta da un combustibile derivato dell'idrazina e da un ossidante. Entrambi i propellenti sono tossici e richiedono di essere maneggiati con rigore. La miscela è ipergolica, ovvero i due componenti si accendono spontaneamente al contatto senza la necessità di un sistema di accensione. È storable a temperatura ambiente e garantisce prestazioni superiori rispetto all'idrazina monopropellente. Rispetto a quest'ultima richiede, però, due serbatoi separati e un impianto più complesso. È comunque una miscela di elevata affidabilità operativa.
- La miscela RP1 –  $\text{H}_2\text{O}_2$ <sup>4</sup> è una soluzione storable caratterizzata da elevata densità e relativa semplicità operativa. Per concentrazioni elevate (> 85%) di  $\text{H}_2\text{O}_2$  è ipergolica. È storable a temperatura ambiente e non tossica. Garantisce prestazioni inferiori ad altre miscele bipropellenti. Oggi non è più diffusa poiché altre soluzioni offrono un compromesso migliore tra prestazioni e affidabilità.
- $\text{LH}_2$  – LOX è una soluzione criogenica che offre le migliori prestazioni tra i propellenti liquidi, grazie alla bassa massa molare dei prodotti di combustione. Il problema principale di questa miscela è che l'idrogeno liquido ha una bassa temperatura di ebollizione e richiede sistemi per limitare le perdite per *boil off*. Questo problema rende questa miscela poco adatta a missioni di lunga durata. Richiede un sistema di accensione.
- La coppia RP1 – LOX è una miscela in cui solo il LOX è criogenico, risultando quindi di più semplice gestione rispetto a  $\text{LH}_2$  – LOX. L'elevata densità del RP1 consente l'impiego di serbatoi più compatti e un'infrastruttura più semplice. Rispetto alla miscela precedente presenta prestazioni inferiori. Richiede un sistema di accensione.

---

<sup>3</sup>NTO: tetrossido di azoto; MMH: monometilidrazina

<sup>4</sup>RP1 è un derivato raffinato del cherosene;  $\text{H}_2\text{O}_2$  è perossido di idrogeno.

Un riepilogo dei propellenti appena descritti è presentato in Tabella 3.2.

Propellente	Categoria	$I_{sp}$	Caratteristiche
Idrazina ( $N_2H_4$ )	Monopropellente	230	Tossico Storable Affidabile
NTO – MMH	Bipropellente	290	Tossico Ipergolico Affidabile Storable
RP1 – $H_2O_2$	Bipropellente	270	Non tossico Ipergolico Affidabile Storable
RP1 – LOX	Bipropellente LOX criogenico	300	Combustibile denso Accensione richiesta Strutturalmente semplice
$LH_2$ – LOX	Bipropellente Criogenico	400	Alte prestazioni Bassa densità

Tabella 3.2: Confronto tra diversi propellenti. L'impulso specifico è calcolato assumendo equilibrio chimico a circa 70 bar ed espansione ottima a 1 bar [7].

### 3.3 Perdite

Il  $\Delta V$  ricavato con la (3.7) rappresenta il costo propulsivo della manovra. In presenza di forze esterne tuttavia, parte di questo  $\Delta V$  viene dissipata dalle perdite, riducendo la variazione di velocità effettivamente ottenuta. Un diagramma delle forze agenti su uno spacecraft è riportato in Figura 3.2.

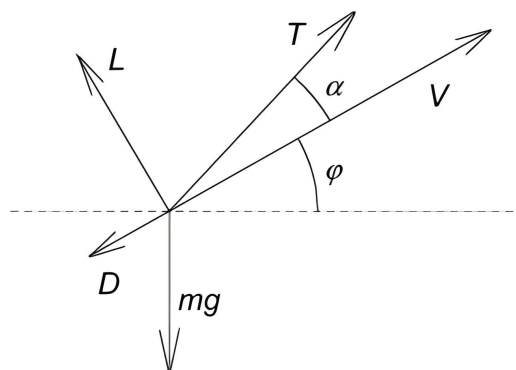


Figura 3.2: Schema generale delle forze agenti su un rocket in movimento nello spazio [8].

Considerando il diagramma delle forze appena mostrato, dividendo per la massa, si arriva a:

$$\frac{F}{m} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\vec{T}}{m} + \frac{\vec{L} + \vec{D}}{m} + \vec{g}.$$

Proiettando nella direzione della velocità<sup>5</sup> si ottiene:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{T}{m} \cos \alpha - \frac{D}{m} - g \sin \phi.$$

Manipolando l'equazione appena trovata e integrando nel tempo si giunge all'equazione:

$$V_f - V_i = \int_{t_i}^{t_f} \frac{T}{m} dt - \int_{t_i}^{t_f} \frac{T}{m} (1 - \cos \alpha) dt - \int_{t_i}^{t_f} \frac{D}{m} dt - \int_{t_i}^{t_f} g \sin \phi dt.$$

Il termine a sinistra rappresenta la variazione di velocità che si vuole ottenere mentre a destra troviamo, rispettivamente, il costo propulsivo da spendere che si ottiene con la formula di Tsiolkovsky, le perdite per disallineamento, le perdite aerodinamiche e le perdite per gravità. L'equazione si può riscrivere in forma compatta come:

$$\Delta V_{propulsivo} = (V_f - V_i) + \text{Perdite.} \quad (3.11)$$

È possibile analizzare e discutere singolarmente i tre tipi di perdite:

- Le perdite per disallineamento si annullano solo per  $\alpha = 0$  ovvero sarebbe necessario spingere nella direzione della velocità. Questo però realmente non si fa poiché introdurre un determinato angolo  $\alpha$  permette di ridurre le perdite per gravità.
- Le perdite aerodinamiche dipendono dalla resistenza aerodinamica, definita come:

$$D = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_D$$

Quindi per diminuire questo tipo di perdita conviene prima salire di quota, affinché  $\rho$  diminuisca, e poi accelerare.

- Le perdite per gravità si possono riformulare e scrivere come:

$$\int_{t_i}^{t_f} g \sin \phi dt = \left( \frac{g}{v} \right)_{\text{avg}} \Delta r$$

Le perdite per gravità possono essere riscritte come il prodotto tra  $\left( \frac{g}{v} \right)_{\text{avg}}$  che rappresenta il valor medio del rapporto tra l'accelerazione gravitazionale e la velocità del veicolo e la differenza di quota che si vuole ottenere. Questa equazione evidenzia che è conveniente raggiungere la quota desiderata nel minor tempo possibile, più tempo viene impiegato per farlo e più aumentano le perdite di gravità. In termini di grandezze, fissato il  $\Delta V$ , aumentando la spinta le perdite diminuiscono, discorso contrario diminuendo la spinta<sup>6</sup>.

<sup>5</sup>Si assume che la velocità relativa del veicolo rispetto all'atmosfera sia parallela alla velocità assoluta, ipotesi valida in assenza di atmosfera rotante.

<sup>6</sup>La relazione tra spinta e perdite gravitazionali è di tipo non lineare, per cui, per esempio raddoppiare la spinta non implica dimezzare le perdite.

Aver introdotto le perdite permette di descrivere due modelli di spinta, adottati entrambi in questa trattazione:

- Modello di **spinta impulsiva**: il  $\Delta V$  è applicato in maniera istantanea, senza una vera fase di spinta. Essendo la durata della spinta nulla, le perdite tendono a zero. Ne consegue che questo è un modello ideale.
- Modello a **spinta finita**: prevede una fase di spinta costante di durata finita, durante la quale le perdite sono presenti e non trascurabili. Il  $\Delta V$  è quindi maggiore rispetto al modello impulsivo, ed è un modello più fedele alla realtà.

# Capitolo 4

## Presentazione del problema

In questo capitolo viene presentata la formulazione matematica del problema affrontato. La soluzione è ottenuta mediante un codice numerico sviluppato in linguaggio *Fortran*, che integra le equazioni del moto attraverso una procedura iterativa. A partire da una soluzione di tentativo, il codice aggiorna il vettore delle variabili simulando la traiettoria. Ad ogni iterazione il risolutore aggiorna la soluzione di tentativo finché la traiettoria descritta non giunge alla soluzione richiesta.

La dinamica del sistema è formulata in coordinate sferiche, per cui la posizione del veicolo è descritta attraverso:

$$\rho = \begin{bmatrix} r \\ \theta \\ \phi \end{bmatrix}$$

dove  $r$  è la distanza dal centro della Terra,  $\theta$  è la longitudine e  $\phi$  è la latitudine. Il vettore velocità è definito attraverso le componenti locali

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

dove  $u$  è la componente diretta lungo la direzione radiale,  $v$  è diretta nel senso di longitudine crescente e  $w$  è diretta nel senso di latitudine crescente. Un generico vettore in questo sistema di riferimento locale può essere descritto dal suo modulo e dagli angoli  $\gamma$  e  $\psi$ , detti rispettivamente *flight path angle* e *heading angle*, che rappresentano l'angolo formato tra il vettore e il piano dell'orizzonte locale, e l'angolo formato dalla proiezione del vettore sul piano dell'orizzonte locale con la direzione di longitudine crescente.

Nei paragrafi seguenti vengono presentati nel dettaglio il vettore di stato, le incognite del problema e i parametri target della traiettoria. Vengono inoltre definite le adimensionalizzazioni adottate, le equazioni differenziali del moto e le condizioni al contorno imposte. Il capitolo si conclude con un paragrafo in cui sono descritte le modifiche introdotte per passare da un modello a spinta impulsiva ad un modello a spinta finita.

## 4.1 Vettore di stato, incognite del problema e parametri target.

La dinamica del sistema è descritta dal vettore di stato  $\mathbf{x}$ , definito come:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} r \\ \theta \\ \phi \\ u \\ v \\ w \\ m \end{bmatrix}$$

Oltre alle variabili di stato, che il codice calcola per simulare la traiettoria, il problema presenta quattro incognite che vengono aggiornate iterativamente al fine di raggiungere la soluzione definita dai parametri target.

Le quattro incognite utilizzate sono:

- l'istante in cui viene raggiunta la distanza minima dalla Luna durante il flyby  $t_2$ ;
- l'istante finale della simulazione, in cui viene raggiunta l'energia finale  $t_3$ ;
- le due componenti dell'impulso applicato;

Queste incognite costituiscono i valori di tentativo utilizzati dal codice ad ogni iterazione. A partire da tali valori, il risolutore calcola ad ogni iterazione gli errori e la derivata degli errori rispetto al risultato trovato utilizzando questi valori, successivamente aggiorna i valori di tentativo e ripete il processo fino alla convergenza della soluzione definita dai parametri target.

I parametri target, come già anticipato in precedenza, sono:

1. il raggio finale, che insieme ad una condizione al contorno sulla velocità finale, impone sostanzialmente un valore di energia orbitale finale;
2. l'inclinazione dell'orbita finale.

## 4.2 Grandezze adimensionalizzate

In questo paragrafo vengono definiti i valori di riferimento utilizzati per trasformare il problema in forma adimensionale. Vengono definiti i valori usati per le grandezze principali quali distanza, velocità, tempo e accelerazione.

### 4.2.1 Valore di riferimento per la distanza

Come distanza di riferimento viene utilizzato il raggio equatoriale medio della Terra

$$R_E = 6378.1363 \text{ km.}$$

L'uso di questa grandezza consente di esprimere le distanze coinvolte nel problema tramite valori adimensionali di ordine di grandezza moderato, invece che con valori dell'ordine di centinaia di migliaia di chilometri. Pertanto, la distanza di riferimento adottata è

$$r_{conv} = R_E.$$

### 4.2.2 Valore di riferimento per la velocità

Il valore di riferimento per la velocità è definito a partire dalla costante gravitazionale terrestre e da  $r_{conv}$  come:

$$v_{conv} = \sqrt{\frac{\mu_T}{r_{conv}}}$$

dove  $\mu_T = 398600.4415 \text{ km}^3/\text{s}^2$  rappresenta il parametro gravitazionale della Terra. Sostituendo il valore della distanza di riferimento si ottiene

$$v_{conv} = \sqrt{\frac{\mu_T}{R_E}} \approx 7.9 \text{ km/s}.$$

### 4.2.3 Valore di riferimento per il tempo

Il valore di riferimento per il tempo è definito a partire dalla distanza e dalla velocità di riferimento come

$$t_{conv} = \frac{r_{conv}}{v_{conv}} \approx 807s.$$

### 4.2.4 Valore di riferimento per l'accelerazione

Il valore di riferimento per l'accelerazione è definito come

$$a_{conv} = \frac{v_{conv}^2}{r_{conv}} \approx 9.8 \text{ m/s}^2.$$

Si osserva che questo valore di riferimento è circa pari all'accelerazione di gravità sulla superficie terrestre.

## 4.3 Equazioni differenziali

In questo paragrafo vengono mostrate le equazioni differenziali del moto. Si introducono i seguenti termini per rappresentare gli effetti perturbativi:

- $J_u, J_v, J_w$  dovuti al potenziale gravitazionale terrestre. La Terra non è una sfera perfetta, bensì un geode con un rigonfiamento all'equatore e uno schiacciamento ai poli, di conseguenza il campo gravitazionale non è uniforme e il potenziale reale si discosta dalla forma  $1/r$ . Questa distribuzione di massa non omogenea genera variazioni secolari e periodiche, come la precessione del nodo ascendente e dell'argomento del perigeo<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Parametri orbitali visti nel paragrafo 2.2.

- $P_u, P_v, P_w$  dovuti all'attrazione gravitazionale di Sole e Luna. Tali corpi esercitano comunque un'azione gravitazionale non trascurabile sul satellite. Poiché però anche la Terra è soggetta a queste stesse forze, l'effetto perturbativo risulta dalla differenza tra l'accelerazione gravitazionale agente sul satellite e quella agente sulla Terra. Anche questo contributo genera variazioni secolari e periodiche degli elementi orbitali.

Ricordando che il problema considerato è determinato e non un problema di ottimizzazione, le equazioni differenziali si riducono al solo vettore di stato, poiché le equazioni associate alle variabili aggiunte risultano nulle.

Inoltre, avendo modellato una spinta impulsiva, non vi è una fase temporale in cui avviene consumo di propellente, di conseguenza anche la derivata temporale della massa risulta nulla.

$$\frac{dr}{dt} = u \quad (4.1)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{r \cos \phi} \quad (4.2)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{w}{r} \quad (4.3)$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{T}{m} \sin \gamma_T + \frac{1}{r^2} - \frac{v^2}{r} - \frac{w^2}{r} + J_u + P_u \quad (4.4)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{T}{m} \cos \gamma_T \cos \psi_T + \frac{vw}{r} \tan \phi - \frac{uv}{r} + J_v + P_v \quad (4.5)$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{T}{m} \cos \gamma_T \sin \psi_T - \frac{v^2}{r} \tan \phi - \frac{uw}{r} + J_w + P_w \quad (4.6)$$

$$\frac{dm}{dt} = 0 \quad (4.7)$$

dove  $\gamma_T$  e  $\psi_T$  sono il *flight path angle* e l'*heading angle* riferiti al vettore spinta.

### 4.3.1 Condizioni al contorno

Per risolvere questo sistema di equazioni differenziali, vengono definite delle condizioni al contorno che permettono di determinare completamente la traiettoria. Il problema ha quattro incognite, pertanto, oltre alle condizioni iniziali note, vengono imposte quattro condizioni al contorno indipendenti. Questo sistema di condizioni è così caratterizzato:

1. Nel punto 1, dove effettuiamo l'impulso, il vettore di stato è noto.

2. Nel punto 2, dove eseguiamo il flyby imponiamo che il veicolo si trovi al punto di distanza minima relativa rispetto alla Luna. Questo è realizzato imponendo che il prodotto scalare tra il vettore della posizione relativa  $\mathbf{r}_{rel}$  e il vettore della velocità relativa  $\mathbf{v}_{rel}$  sia nullo;
3. Nel punto 3, il punto finale della simulazione, imponiamo 3 condizioni:
  - il raggio;
  - il modulo della velocità<sup>2</sup>;
  - l'inclinazione

## 4.4 Creazione del modello a spinta finita

Questo paragrafo illustra le modifiche, rispetto al modello precedentemente descritto, fatte per passare da un modello a spinta impulsiva ad uno a spinta finita.

### 4.4.1 Modifiche alle incognite

Il vettore di stato  $\mathbf{x}$  e i parametri target rimangono invariati. Cambiano invece le incognite del problema, che diventano:

- $t_2$  e  $t_3$  diventano rispettivamente  $t_3$  e  $t_4$ , mantenendo invariato il loro significato;
- $t_2$  rappresenta ora l'istante in cui termina la fase di spinta;
- l'angolo di spinta  $\Psi$ .

### 4.4.2 Equazioni differenziali

Viene adottato un modello di spinta vincolato nel piano  $r-\phi$ , per cui la componente della spinta lungo la direzione  $\theta$  risulta nulla. Il vettore spinta può quindi essere espresso come:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_r \\ T_\theta \\ T_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \cos \Psi \\ 0 \\ T \sin \Psi \end{bmatrix}$$

dove  $\Psi$  rappresenta l'angolo di spinta, definito come l'angolo tra il vettore spinta e la direzione radiale nel piano  $r-\phi$ .

---

<sup>2</sup>Si noti che imponendo il valore del raggio e della velocità l'energia è automaticamente determinata.

Le equazioni differenziali diventano:

$$\frac{dr}{dt} = u \quad (4.8)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{r \cos \phi} \quad (4.9)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{w}{r} \quad (4.10)$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{T}{m} \cos \Psi + \frac{1}{r^2} - \frac{v^2}{r} - \frac{w^2}{r} + J_u + P_u \quad (4.11)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{vw}{r} \tan \phi - \frac{uv}{r} + J_v + P_v \quad (4.12)$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{T}{m} \sin \Psi - \frac{v^2}{r} \tan \phi - \frac{uw}{r} + J_w + P_w \quad (4.13)$$

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{T}{c} \quad (4.14)$$

$$(4.15)$$

### Condizioni al contorno

Si osserva infine che le condizioni al contorno rimangono invariate rispetto al caso a spinta impulsiva. In particolare, si continuano a imporre le medesime quattro condizioni indipendenti, mentre il vettore di stato iniziale è completamente noto.

# Capitolo 5

## Risultati

In questo capitolo vengono presentati i risultati delle simulazioni numeriche relative alle orbite di destinazione. Sono state analizzate quattro orbite differenti, confrontando per ciascuna la soluzione con spinta impulsiva e la soluzione con spinta costante.

Prima di entrare nel dettaglio delle soluzioni viene definita la struttura del capitolo. Nella prima sezione sono presentate le missioni analizzate.

La seconda sezione è dedicata alla presentazione e al confronto dei risultati.

Nella terza sezione viene condotta un'analisi parametrica su una delle orbite al fine di indagare l'effetto della variazione del modulo della spinta.

Infine, nell'ultima sezione, viene ripetuta l'analisi effettuata nella seconda sezione, ma raddoppiando l'inclinazione e confrontando i risultati ottenuti nelle due configurazioni.

### 5.1 Introduzione alle soluzioni

Vengono considerate quattro manovre di fly-by lunare, caratterizzate da differenti valori del raggio finale  $r_f$ , mantenendo, in questa prima fase di analisi, invariata la restante geometria orbitale.

Il valore di  $r_f$  viene assegnato insieme all'inclinazione come target del risolutore numerico. Come mostrato nelle condizioni al contorno del problema il valore di  $v_f$  è imposto e diverso da zero. Questa condizione implica che  $r_f$  non è un punto notevole dell'orbita, bensì solamente il punto raggiunto al termine della simulazione numerica, rappresentato dalla coppia  $(r_f, v_f)$ , la quale definisce una precisa energia orbitale specifica adimensionale:

$$E_f = \frac{v_f^2}{2} - \frac{1}{r_f}.$$

I parametri finali delle orbite ricercate sono riportati nella Tabella 5.1. Nel seguito, per riferirsi alla soluzione con manovra impulsiva, il numero dell'orbita sarà seguito dal pedice 1 (ad esempio  $1_1$ ), mentre per la soluzione con spinta costante verrà utilizzato il pedice 2.

Orbita		1	2	3	4
Raggio finale	[-]	103.06	123.06	143.06	163.06
	[Km]	$6.57 \times 10^5$	$7.85 \times 10^5$	$9.12 \times 10^5$	$1.04 \times 10^6$
$V_{\text{finale}}$	[m/s]	632.4			
Inclinazione	[rad]	0.2567			

Tabella 5.1: Parametri delle orbite di destinazione.

È necessario anche introdurre i parametri utilizzati per lo spacecraft:

- Impulso specifico di 220 s;
- massa iniziale di 10000 Kg;
- Spinta di 8N.

Le traiettorie complete delle quattro missioni, per il caso di spinta costante, sono riportate nelle Figure 5.1, 5.2 e 5.3.

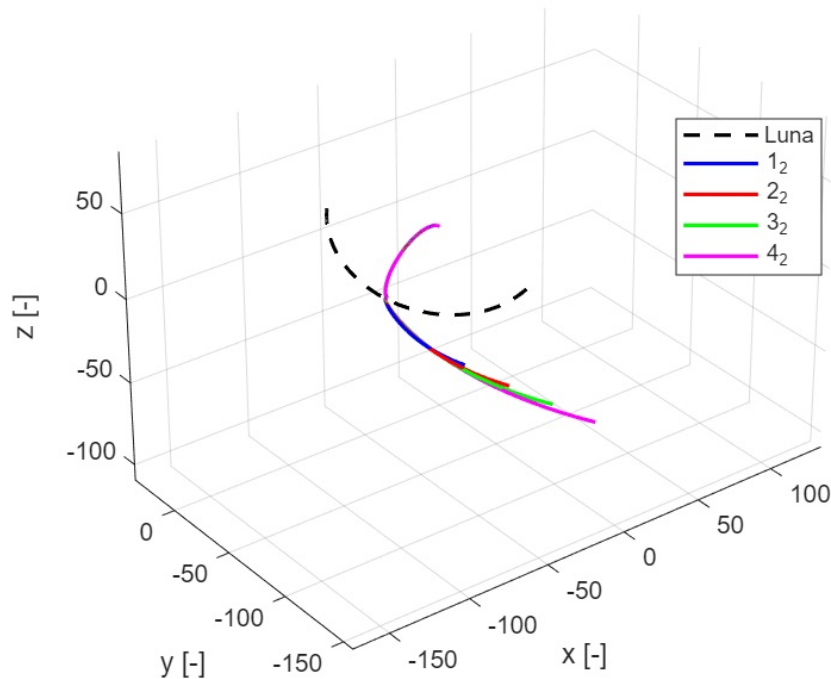


Figura 5.1: Traiettorie complete delle quattro missioni, vista 3D.

Le viste proposte forniscono una panoramica delle traiettorie delle missioni considerate. In queste immagini sono mostrate esclusivamente le traiettorie relative al caso di spinta costante, in quanto, dal punto di vista geometrico, le soluzioni sono pressochè coincidenti, rendendo non apprezzabili differenze a livello visivo.

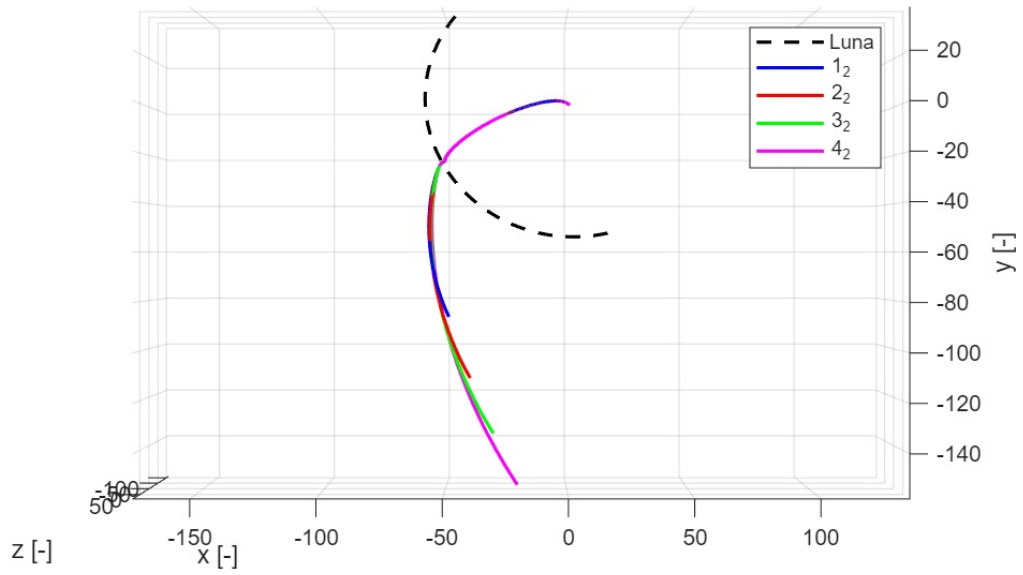


Figura 5.2: Traiettorie complete delle quattro missioni, vista nel piano XY.

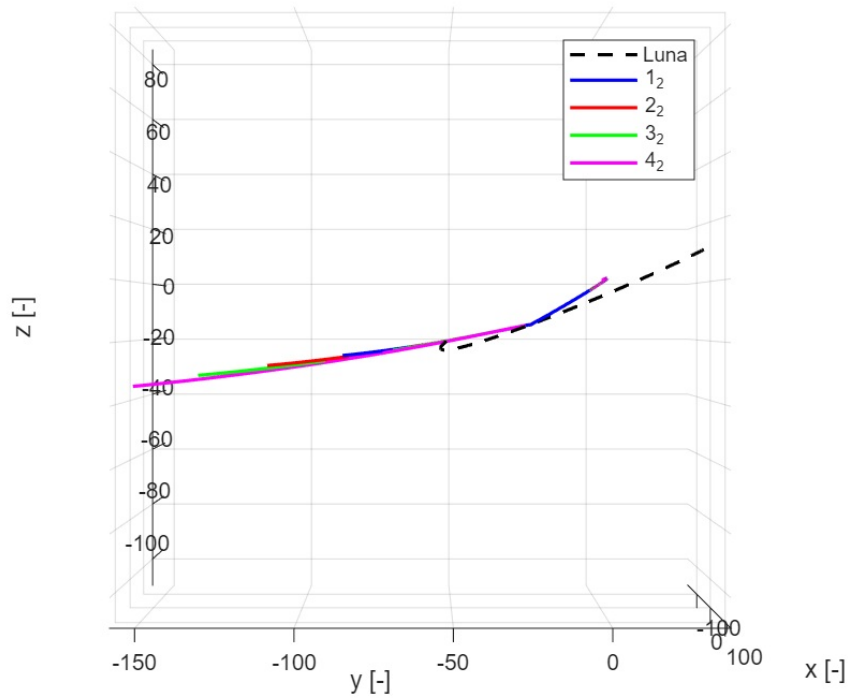


Figura 5.3: Traiettorie complete delle quattro missioni, vista nel piano YZ.

## 5.2 Confronto tra missione impulsiva e propulsa al variare dell'orbita finale

Al fine di confrontare le diverse missioni, è giusto ricordare la suddivisione temporale che il codice fa della missione:

- $T_0$ , inizio della manovra, tale istante è fissato a 13.4468 ore;
- $T_1$ , fine della fase propulsa; nel caso di manovra impulsiva risulta  $T_1 = T_0$ .
- $T_2$ , istante del fly-by lunare;
- $T_3$ , istante finale della simulazione.

In Tabella 5.2 sono mostrati i risultati numerici delle soluzioni. Nella penultima colonna è esposto l'angolo di spinta, mentre, nell'ultima colonna è indicata la distanza minima tra lo spacecraft e la Luna al momento del fly-by.

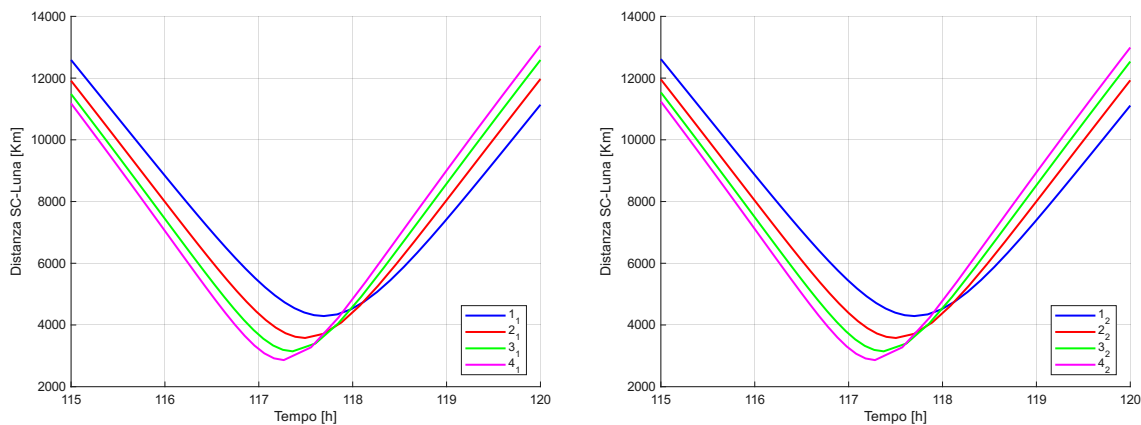
	<b>T1 [h]</b>	<b>T2 [h]</b>	<b>T3 [h]</b>	<b><math>\Delta V</math> [m/s]</b>	<b><math>\Psi</math> [°]</b>	<b>Distanza Fb [Km]</b>
1 <sub>1</sub>	/	117.6926	259.6512	6.9	19.1171	$4.2893 \times 10^3$
1 <sub>2</sub>	15.9117	117.7000	259.6581	7.1	18.2459	$4.2893 \times 10^3$
2 <sub>1</sub>	/	117.4928	311.2751	8.2	18.8377	$3.5788 \times 10^3$
2 <sub>2</sub>	16.4082	117.5033	311.2837	8.5	17.8220	$3.5788 \times 10^3$
3 <sub>1</sub>	/	117.3604	360.0296	9.1	19.3294	$3.1463 \times 10^3$
3 <sub>2</sub>	16.7394	117.3732	360.0390	9.5	18.1887	$3.1457 \times 10^3$
4 <sub>1</sub>	/	117.2657	408.0343	9.7	20.4858	$2.8625 \times 10^3$
4 <sub>2</sub>	16.9836	117.2805	408.0454	10.2	19.2104	$2.8625 \times 10^3$

Tabella 5.2: Confronto dei parametri delle missioni analizzate.

Analizzando i risultati proposti emerge assoluta coerenza tra i due tipi di missione. Il  $\Delta V$  associato alla manovra impulsiva risulta leggermente minore rispetto al caso propulso. Questo risultato era atteso poiché la manovra impulsiva è una manovra ideale che non tiene conto di diversi fattori come le perdite legate ad una manovra reale.

Possiamo notare in Tabella 5.2 e nelle Figure 5.4 e 5.5 come, per raggiungere orbite a maggiore energia orbitale, lo spacecraft anticipi il Flyby e passi più vicino alla Luna. Questo è normale poiché l'incremento energetico richiesto dal flyby è maggiore e quindi richiede un flyby più vicino.

Nelle Figure 5.6 e 5.7 è riportata l'evoluzione dell'energia orbitale lungo la traiettoria. Tali valori restano comunque sempre negativi, indicando che le orbite finali risultano di tipo ellittico. Nel caso della manovra impulsiva si osserva una discontinuità dell'energia in corrispondenza dell'applicazione del  $\Delta V$ , mentre nella missione con spinta costante l'energia varia in modo continuo durante l'intera fase propulsa.



(a) Missione impulsiva.

(b) Missione propulsa.

Figura 5.4: Distanza Spacecraft-Luna al momento del flyby.

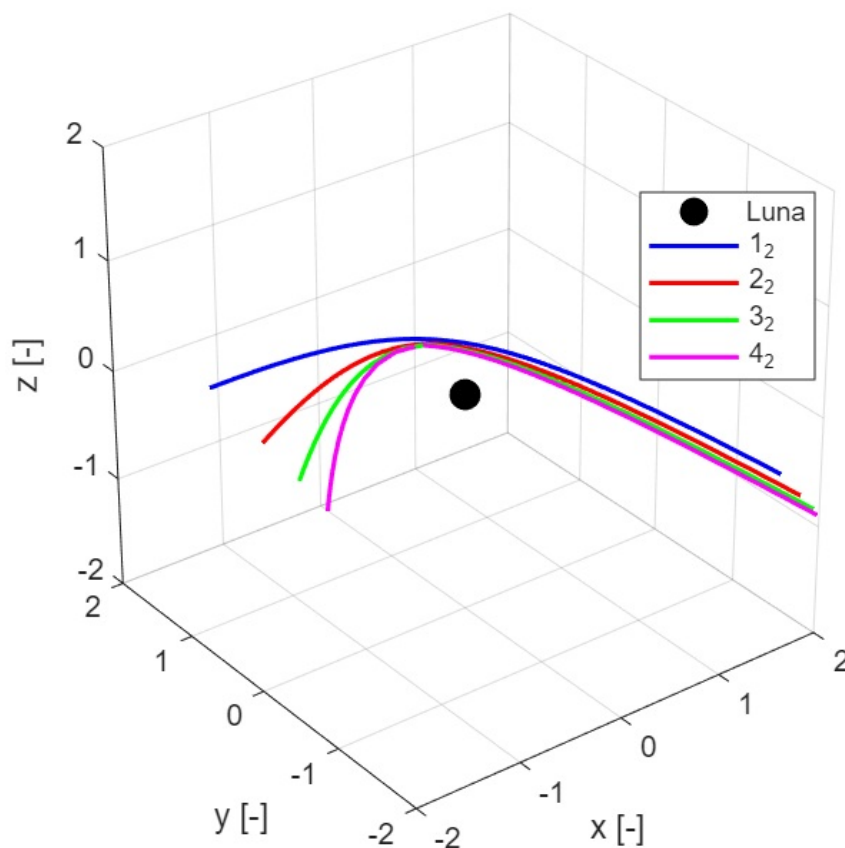
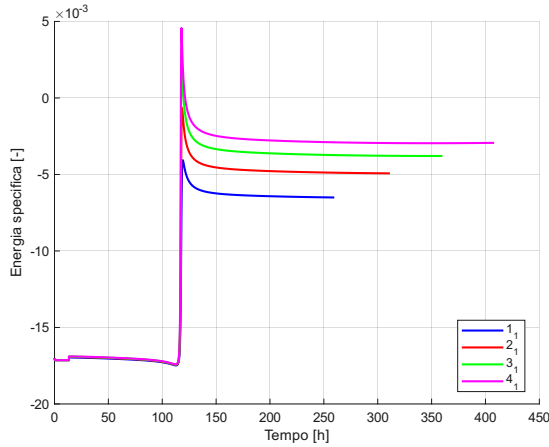
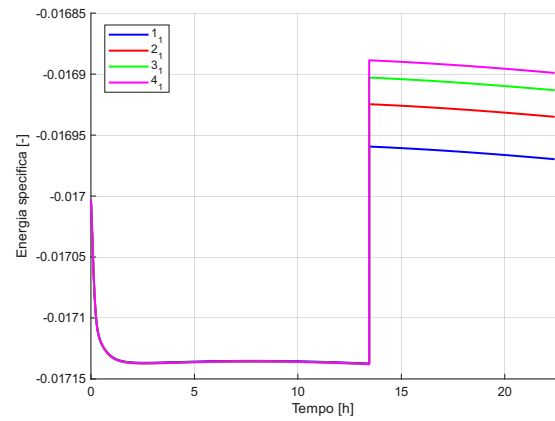


Figura 5.5: Traiettorie di flyby nel sistema di riferimento centrato sulla Luna. Missione propulsa.

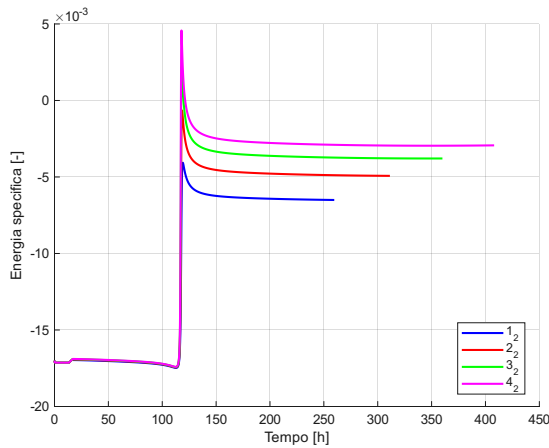


(a) Missione completa.

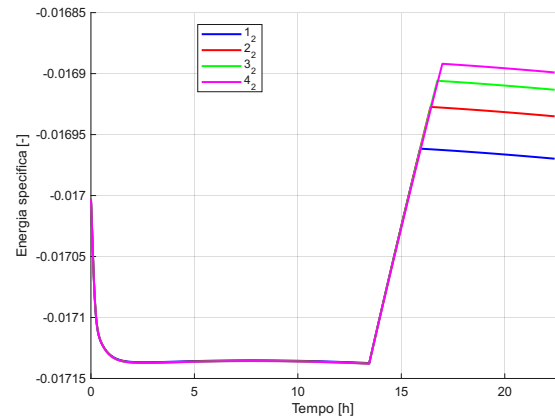


(b) Dettaglio fase di spinta.

Figura 5.6: Evoluzione dell'energia orbitale del satellite. Missione impulsiva.



(a) Missione completa.



(b) Dettaglio fase di spinta.

Figura 5.7: Evoluzione dell'energia orbitale del satellite. Missione propulsa.

Nella Tabella 5.3 sono riportati i parametri caratteristici delle missioni con fase propulsa. Si noti che l'energia specifica e il semiasse maggiore sono definiti anche nel modello impulsivo ma vengono presentati qui al fine di contestualizzarne il costo propulsivo<sup>1</sup>.

	<b>Durata spinta [h]</b>	<b><math>I_{TOT}</math> [N·s]</b>	<b>Massa finale [kg]</b>	<b>Energia specifica [km<sup>2</sup>/s<sup>2</sup>]</b>	<b>Semiasse maggiore [km]</b>
1 <sub>2</sub>	2.4648	$7.10 \times 10^4$	9967.0970	-0.4064	$0.4904 \times 10^6$
2 <sub>2</sub>	2.9614	$8.53 \times 10^4$	9960.4688	-0.3079	$0.6474 \times 10^6$
3 <sub>2</sub>	3.2925	$9.48 \times 10^4$	9956.0480	-0.2369	$0.8414 \times 10^6$
4 <sub>2</sub>	3.5368	$1.02 \times 10^5$	9952.7878	-0.1833	$1.0874 \times 10^6$

Tabella 5.3: Parametri caratteristici delle missioni con spinta finita.

<sup>1</sup>In termini di impulso totale.

Nelle figure seguenti viene mostrata l'evoluzione dell'impulso totale richiesto al variare dell'orbita finale. Come si osserva dalla pendenza della curva in Figura 5.8, l'incremento di impulso totale necessario diminuisce all'aumentare dell'energia orbitale. Questo comportamento è ulteriormente evidenziato nella Figura 5.9. Possiamo ulteriormente confrontare con la Tabella 5.3 e notiamo che il semiasse maggiore tra il caso  $1_2$  e il caso  $4_2$  aumenta di circa il 122% a fronte di un costo propulsivo che aumenta soltanto del 44%.

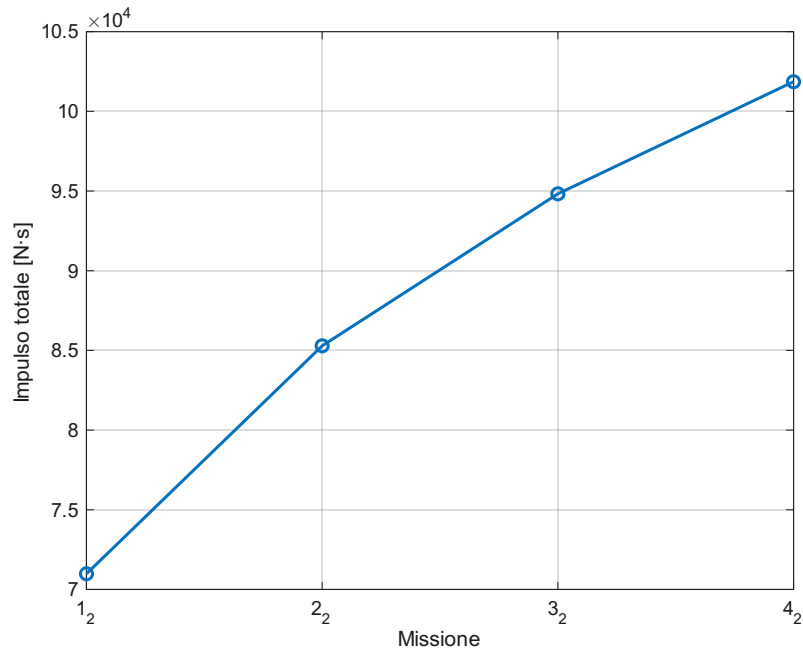


Figura 5.8: Evoluzione dell'impulso totale per missione.

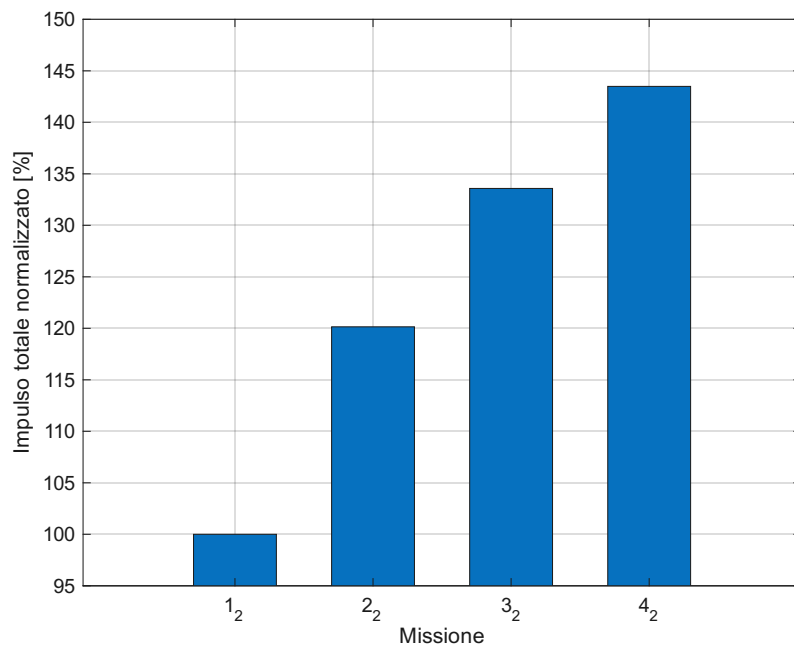


Figura 5.9: Impulso totale normalizzato rispetto al caso  $1_2$ .

### 5.3 Confronto sul caso $2_2$ al variare del modulo della spinta

Rispetto ai casi precedentemente analizzati, in questa sezione viene effettuata un'analisi parametrica sul modulo della spinta con riferimento al caso  $2_2$ .

Nella Tabella 5.4 sono riportati i principali parametri delle missioni, mentre nella Figura 5.10 viene mostrato l'impulso totale richiesto, normalizzato rispetto al caso nominale.

Dalla figura si osserva che, sebbene la variazione percentuale sia contenuta, una riduzione del modulo della spinta comporta un aumento dell'impulso totale maggiore rispetto alla diminuzione ottenuta aumentando il modulo. Questo è dovuto al fatto che, con un modulo inferiore, la durata della spinta si allunga, aumentando il tempo in cui lo spacecraft è soggetto a perdite.

Spinta [N]	$T_2 - T_1$ [h]	$I_{TOT}$ [N·s]	Massa finale [Kg]	$\Delta V$ [m/s]	$\Psi$ [°]
4	6.17	$8.89 \times 10^4$	9958.8023	8.91	16.9173
6	4.00	$8.65 \times 10^4$	9959.9240	8.66	17.5091
7.2	3.30	$8.57 \times 10^4$	9960.2885	8.59	17.7157
8	2.96	$8.53 \times 10^4$	9960.4688	8.55	17.8220
8.8	2.68	$8.49 \times 10^4$	9960.6158	8.51	17.9092
10	2.35	$8.46 \times 10^4$	9960.7917	8.48	18.0145
12	1.95	$8.41 \times 10^4$	9961.0048	8.43	18.1460

Tabella 5.4: Analisi parametrica al variare del modulo della spinta per la missione con fase propulsa.

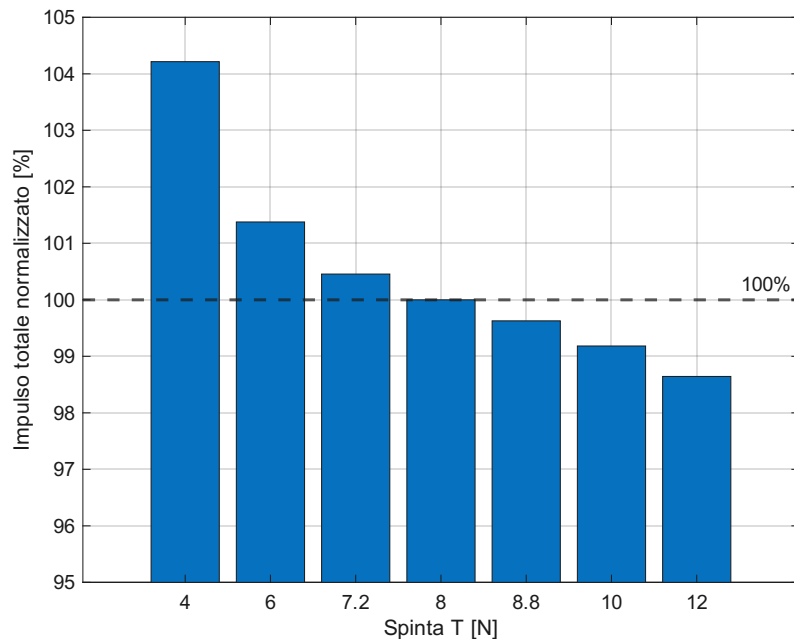


Figura 5.10: Impulso totale al variare della spinta normalizzato rispetto al caso nominale (8N).

## 5.4 Effetto dell'inclinazione orbitale

Rispetto ai casi presentati nella Sezione 5.1, e analizzati nella Sezione 5.2, le simulazioni vengono ripetute raddoppiando l'inclinazione dell'orbita finale, fissando quindi un valore target di 0.5134 rad. Nel seguito, per distinguere questi casi da quelli con inclinazione nominale, la numerazione delle orbite sarà seguita da un asterisco (ad esempio  $1_1^*$ ,  $1_2^*$ ). Le traiettorie di queste quattro missioni sono riportate nelle Figure 5.11, 5.12, 5.13 e 5.14. Un confronto della quarta traiettoria orbitale per i due casi di inclinazione è riportato nelle Figure 5.15, 5.16, 5.17 e 5.18.

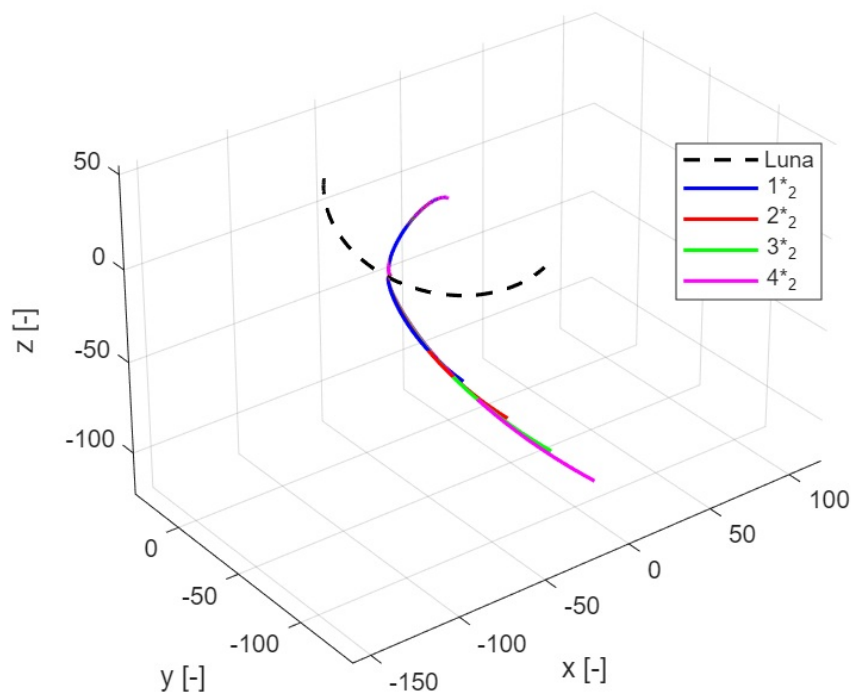


Figura 5.11: Traiettorie complete delle quattro missioni, vista 3D.

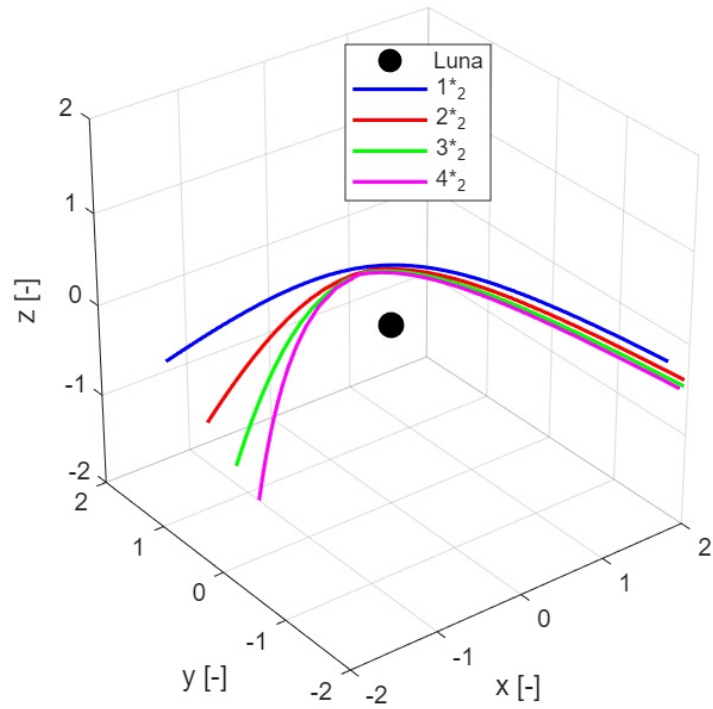


Figura 5.12: Traiettorie di flyby nel sistema centrato sulla Luna.

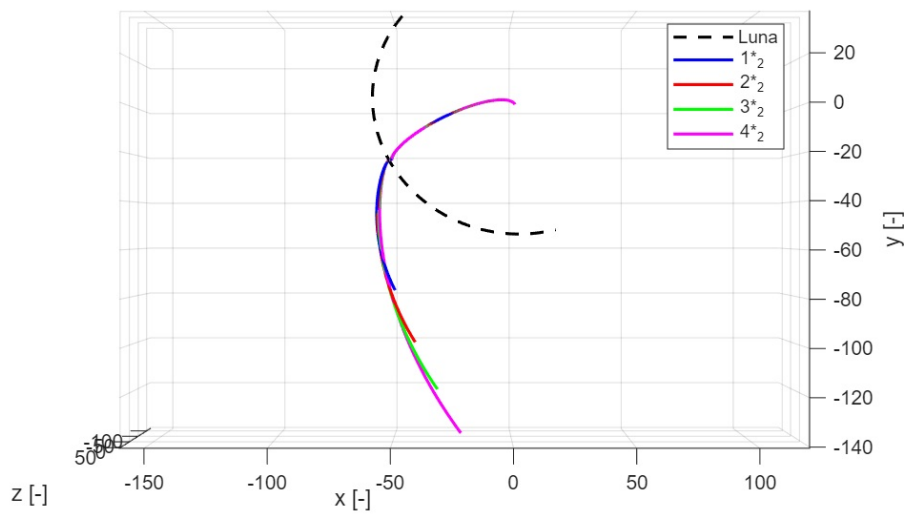


Figura 5.13: Traiettorie complete delle quattro missioni, vista nel piano XY.

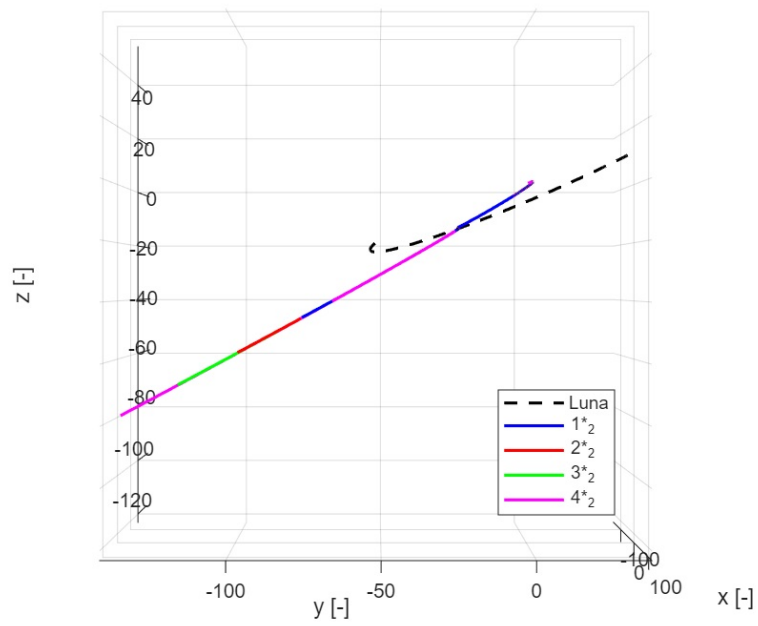


Figura 5.14: Traiettorie complete delle quattro missioni, vista nel piano YZ.

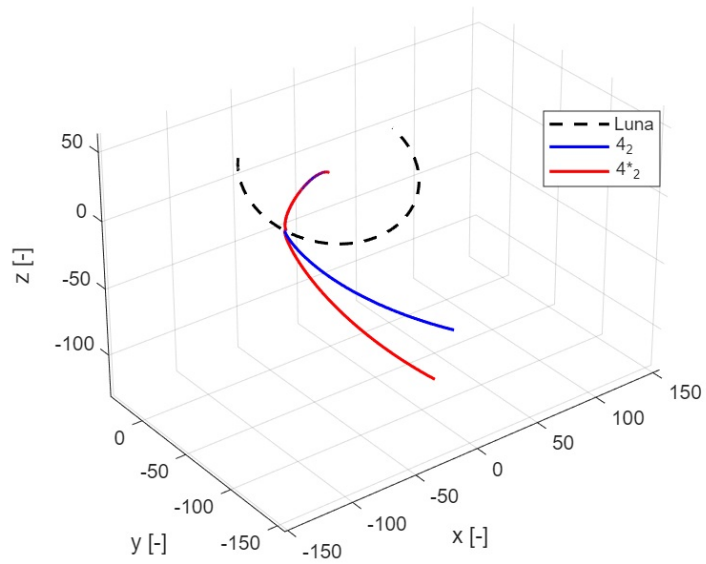


Figura 5.15: Confronto delle traiettorie al variare dell'inclinazione. Vista 3D, caso 4.

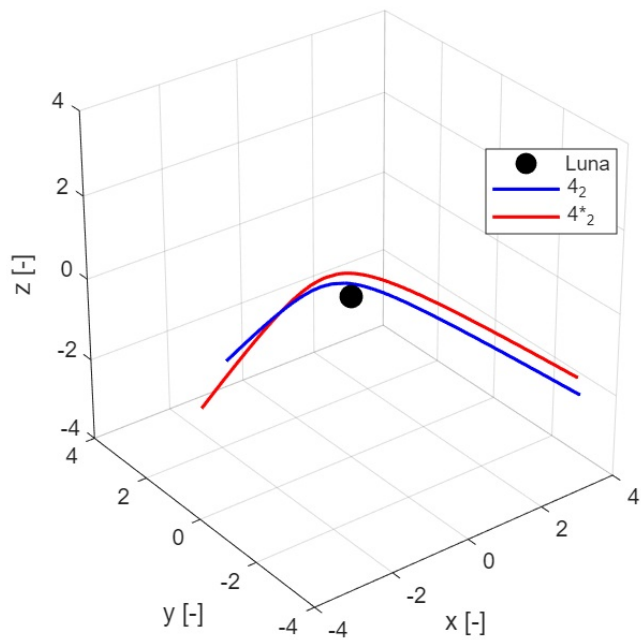


Figura 5.16: Confronto delle traiettorie al variare dell'inclinazione. Ingradimento zona del flyby. Vista 3D, caso 4.

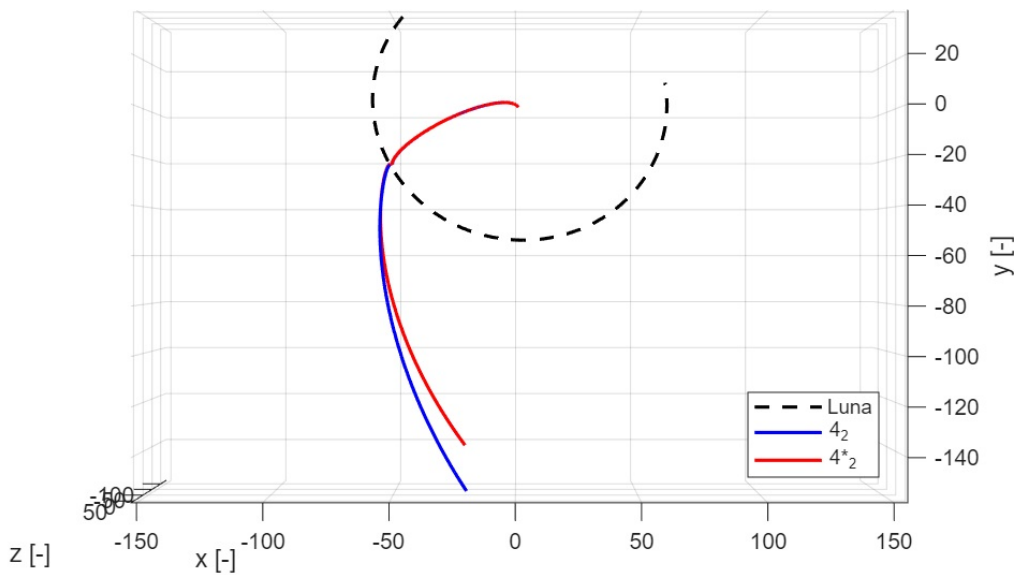


Figura 5.17: Confronto delle traiettorie al variare dell'inclinazione. Piano XY, caso 4.

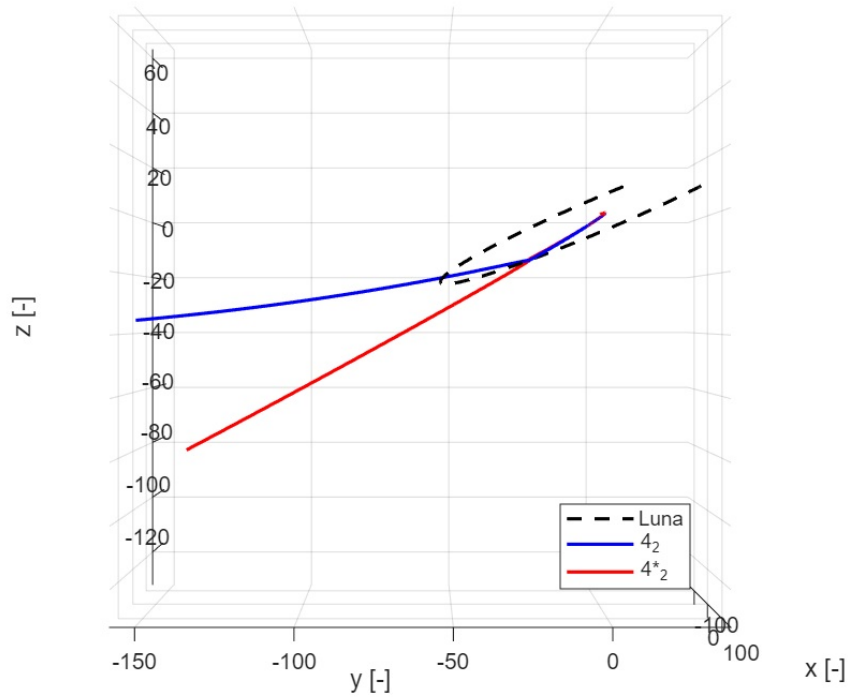


Figura 5.18: Confronto delle traiettorie al variare dell'inclinazione. Piano YZ, caso 4.

I risultati numerici ottenuti sono invece raccolti nelle Tabelle 5.5 e 5.6.

	<b>T1 [h]</b>	<b>T2 [h]</b>	<b>T3 [h]</b>	<b><math>\Delta V</math> [m/s]</b>	<b><math>\Psi</math> [°]</b>	<b>Distanza Fb [Km]</b>
$1_1^*$	/	117.2847	255.1472	18.6	65.0441	$4.3420 \times 10^3$
$1_2^*$	19.7845	117.3137	255.1369	18.3	63.1996	$4.3384 \times 10^3$
$2_1^*$	/	117.0983	306.3200	19.0	61.7986	$3.6283 \times 10^3$
$2_2^*$	19.9518	117.1312	306.3108	18.8	59.5801	$3.6252 \times 10^3$
$3_1^*$	/	116.9783	355.1138	19.3	59.7415	$3.1942 \times 10^3$
$3_2^*$	20.0796	117.0139	355.1077	19.2	57.2954	$3.1915 \times 10^3$
$4_1^*$	/	116.8967	403.5186	19.5	58.3679	$2.9104 \times 10^3$
$4_2^*$	20.1758	116.9342	403.5115	19.5	55.7733	$2.9079 \times 10^3$

Tabella 5.5: Confronto dei parametri delle missioni analizzate.

Dai risultati emerge nuovamente una sostanziale concordanza tra le due tipologie di missione. Rispetto a quanto osservato precedentemente, il caso reale ha dei valori numerici leggermente inferiori in termini di angolo di elevazione e  $\Delta V$  rispetto al caso ideale. Queste piccole differenze sono plausibilmente attribuibili alla sensibilità della simulazione numerica.

Rispetto alla Tabella 5.2 notiamo un  $\Delta V$  richiesto più elevato, il quale si traduce in una fase di spinta più duratura, mentre i tempi generali della missione rimangono sostanzialmente invariati. Anche l'angolo di elevazione  $\Psi$  risulta maggiore. Queste

differenze sono attribuibili alla maggiore inclinazione orbitale finale. Un'ulteriore aspetto interessante si osserva in Tabella 5.6 e in Figura 5.19: all'aumentare del semiasse dell'orbita finale, la durata della fase propulsiva e l'impulso totale mostrano una crescita molto meno accentuata rispetto al caso visto precedentemente. Per esempio prima per passare dal caso  $1_2$  al caso  $4_2$  era richiesto un incremento di impulso totale del 44% mentre adesso per passare dal caso  $1_2^*$  a  $4_2^*$  richiede un incremento di solamente il 6% circa. Questo indica che, per inclinazioni maggiori, il costo propulsivo è dominato principalmente dal cambio di piano orbitale piuttosto che dall'incremento del raggio.

	Durata spinta [h]	$I_{TOT}$ [N·s]	Massa finale [kg]	Energia specifica [ $\text{km}^2/\text{s}^2$ ]	Semiasse maggiore [km]
$1_2^*$	6.3376	$1.8252 \times 10^5$	9915.3989	-0.4064	$0.4904 \times 10^6$
$2_2^*$	6.5049	$1.8734 \times 10^5$	9913.1659	-0.3079	$0.6474 \times 10^6$
$3_2^*$	6.6328	$1.9102 \times 10^5$	9911.4588	-0.2369	$0.8414 \times 10^6$
$4_2^*$	6.7289	$1.9379 \times 10^5$	9910.1754	-0.1833	$1.0874 \times 10^6$

Tabella 5.6: Parametri caratteristici delle missioni con spinta finita.

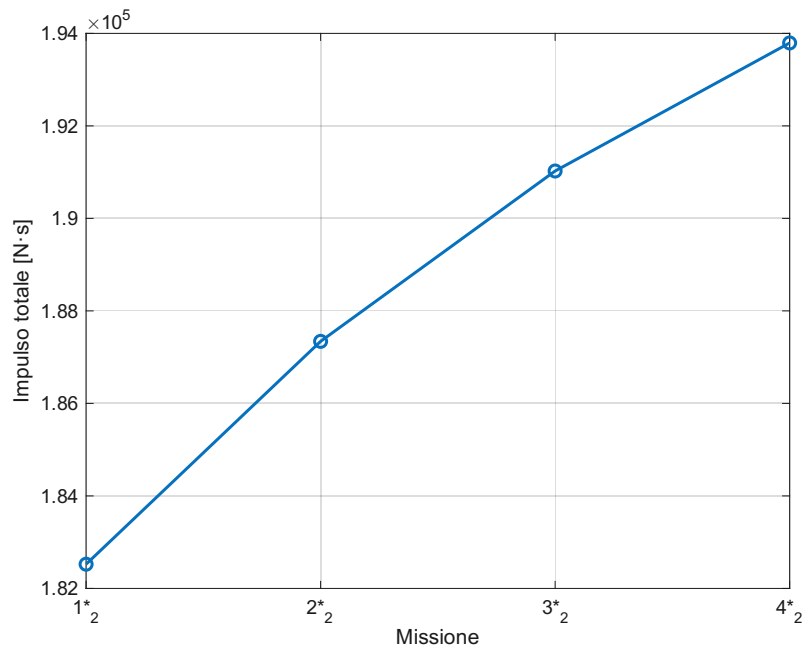


Figura 5.19: Evoluzione dell'impulso totale con inclinazione raddoppiata.

La Figura 5.20 mostra un confronto del costo propulsivo associato all'incremento del semiasse maggiore, presentando gli impulsi totali normalizzati rispetto ai casi  $1_2$  e  $1_2^*$ . Nel caso di inclinazione nominale, l'aumento del semiasse richiede incrementi di impulso compresi tra il 10% e il 20%, mentre per inclinazione doppia gli stessi incrementi di semiasse comportano aumenti di appena 1-2 punti percentuali, evidenziando come il costo sia dominato dal cambio di piano orbitale.

<sup>2</sup>Si ricorda che le orbite confrontate differiscono solamente per l'inclinazione, energia orbitale e semiasse maggiore sono gli stessi.

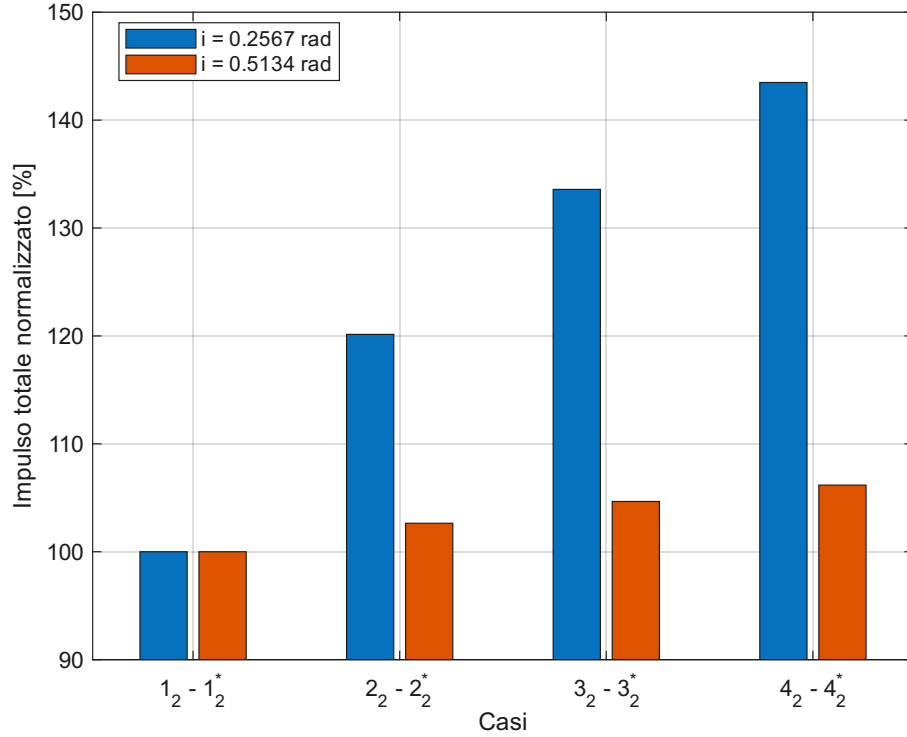


Figura 5.20: Impulso totale normalizzato.

Per meglio valutare i risultati appena presentati, viene calcolato il  $\Delta V$  necessario<sup>3</sup> per effettuare una manovra impulsiva di cambio di piano tra le due inclinazioni nel punto finale delle orbite considerate, confrontandolo con la differenza di  $\Delta V$  tra le due configurazioni.

Il  $\Delta V$  necessario per la manovra di cambio di piano è definito dalla seguente equazione:

$$\Delta V_{\text{richiesto}} = 2V \sin \frac{\Delta i}{2}. \quad (5.1)$$

I risultati sono riportati in Tabella 5.7. Come si può osservare, effettuare un cambio di piano direttamente nel punto finale ha un costo propulsivo nettamente superiore rispetto a modificare l'inclinazione orbitale in modo combinato durante le manovre precedenti, sfruttando il flyby lunare.

	$\Delta V_{\text{richiesto}}$ [m/s]	$\Delta V^* - \Delta V$ [m/s]
Caso 1	161.9	11.2
Caso 2	161.9	10.3
Caso 3	161.9	9.7
Caso 4	161.9	9.3

Tabella 5.7: Confronto tra una manovra di cambio di piano e una manovra combinata in termini di costo propulsivo.

<sup>3</sup>Avendo fissato la  $v_{fin}$  a un determinato valore, il  $\Delta V$  per il cambio di piano risulta uguale per ogni valore di raggio finale.

# Capitolo 6

## Conclusioni

Questo lavoro ha avuto come scopo principale lo studio di una manovra di assist gravitazionale lunare al fine di raggiungere, con un veicolo spaziale, orbite ad energia più elevata, valutandone il costo propulsivo attraverso diverse analisi parametriche. Come evidenziato nel Capitolo 4 le analisi sono state condotte adottando sia un modello di spinta impulsiva sia un modello a spinta finita. In entrambi i casi i modelli includono gli effetti perturbativi del geopotenziale terrestre e le perturbazioni gravitazionali di terzo corpo dovute a Sole e Luna. In questo capitolo viene presentata una sintesi dei risultati ottenuti.

La prima analisi ha riguardato l'effetto dell'energia orbitale finale sulla missione variando il semiasse maggiore da circa 490.000 km fino a circa 1.088.000 km. All'aumentare del semiasse maggiore l'impulso totale cresce ma con incrementi via via decrescenti come osservato in Figura 5.8. Si comprende quindi che raggiungere orbite sempre più lontane attraverso una manovra di flyby lunare diventa progressivamente meno costoso, in termini marginali<sup>1</sup>.

La seconda analisi ha indagato l'effetto del modulo della spinta sull'impulso totale con riferimento all'orbita 2<sub>2</sub>. I risultati dimostrano che ridurre la spinta penalizza la missione, poichè l'impulso totale aumenta visto che una fase di spinta maggiore risulta in maggiori perdite gravitazionali. Dimezzando la spinta, l'impulso totale richiesto aumenta di circa il 4%. Aumentare invece la spinta, e ridurre quindi la fase di spinta, riduce l'impulso totale richiesto. Questa riduzione risulta modesta, per esempio aumentare del 50% la spinta riduce l'impulso totale richiesto di appena l'1%.

La terza analisi ha esteso lo studio della prima raddoppiando l'inclinazione dell'orbita finale. In questa configurazione il costo propulsivo aumenta significativamente rispetto al caso con inclinazione nominale, ma emerge chiaramente dal confronto tra le due analisi che l'influenza del semiasse maggiore sull'impulso totale risulta decisamente ridotta. Questo indica che ad elevate inclinazioni il costo propulsivo è dominato principalmente dal cambio di piano orbitale piuttosto che dall'energia orbitale finale da raggiungere. Dall'analisi emerge inoltre che modificare l'inclinazione in modo combinato con la manovra di flyby risulta notevolmente più efficiente

---

<sup>1</sup>Ogni incremento di semiasse maggiore richiede un aumento di impulso totale sempre minore rispetto al precedente, ovvero il costo propulsivo cresce in modo minore rispetto all'incremento del semiasse maggiore.

rispetto ad eseguire una manovra di cambio di piano diretta nel punto finale dell'orbita.

Parallelamente alla prima e alla terza analisi, è stato possibile osservare una sostanziale concordanza tra i modelli di spinta utilizzati, sia in termini di geometria della traiettoria sia in termini numerici. Nella prima analisi è possibile osservare come il modello a spinta finita richieda un  $\Delta V$  leggermente superiore rispetto al caso impulsivo, a causa delle perdite gravitazionali prodotte durante la fase propulsa.

I risultati ottenuti confermano l'importanza della manovra di flyby lunare come strumento per raggiungere orbite ad alta energia con un costo propulsivo ridotto, fornendo una base di partenza per analisi più approfondite e scenari più complessi. Possibili sviluppi futuri del presente lavoro potrebbero riguardare l'estensione dell'analisi a traiettorie di escape dalla sfera di influenza terrestre, portando l'energia orbitale finale a valori positivi, e lo studio di sequenze di flyby lunari concatenati. Un'ulteriore analisi potrebbe riguardare l'utilizzo di propulsione elettrica, per la quale, considerati i moduli di spinta ridotti, le perdite gravitazionali dovrebbero raggiungere valori più significativi.

# Bibliografia

- [1] NASA. *Voyager 1*. <https://science.nasa.gov/mission/voyager/voyager-1/>.
- [2] NASA. *Voyager 2*. <https://science.nasa.gov/mission/voyager/voyager-2/>.
- [3] NASA. *ARTEMIS Mission*. <https://svs.gsfc.nasa.gov/3682>.
- [4] R.R. Bate, D.D. Mueller e J.E. White. *Fundamentals of Astrodynamics*. Dover Books on Aeronautical Engineering Series. Dover Publications, 1971. ISBN: 9780486600611.
- [5] Lorenzo Casalino. *Generalities of Space Propulsion*. Corso di Propulsione Spaziale, Politecnico di Torino. 2025.
- [6] G.P. Sutton e O. Biblarz. *Rocket Propulsion Elements*. A Wiley Interscience publication. Wiley, 2001. ISBN: 9780471326427.
- [7] Dario Pastrone. *Endoreattori, Liquid Rocket Engines*. Corso di Endoreattori, Politecnico di Torino. 2024.
- [8] Lorenzo Casalino. *Access to space and advanced rockets*. Corso di Endoreattori avanzati, Politecnico di Torino. 2024.