

Politecnico di Torino

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

Tesi di Laurea Magistrale



**Politecnico
di Torino**

**Analisi di missioni per il raggiungimento
di asteroidi near-Earth mediante
propulsione chimica**

Relatore

Prof. Lorenzo CASALINO

Candidato

Daniel DIVERIO

A.a. 2025/2026

Abstract

La presente tesi riporta l'analisi di missioni per il raggiungimento di dieci asteroidi near-Earth mediante propulsione chimica, utilizzando simulazioni numeriche basate su soluzioni preliminari a bassa spinta. Le convergenze ottenute attraverso il regime a bassa spinta sono state impiegate come punto di partenza per la determinazione delle corrispondenti soluzioni chimiche, attraverso la definizione di una struttura iniziale di accensione e spegnimento derivata dalla switching function e l'incremento progressivo del coefficiente di spinta fino al valore unitario. Le soluzioni chimiche ad alta spinta così ottenute risultano caratterizzate da una struttura bang-bang con archi di spinta di durata ridotta rispetto alla durata complessiva del trasferimento, risultando come profili quasi impulsivi dal punto di vista temporale. Per ciascun asteroide sono stati determinati tempo di partenza, durata, ΔV e massa finale. Il confronto con le soluzioni a bassa spinta evidenzia differenze generalmente contenute in termini di costo energetico, massa finale e durata del trasferimento, fornendo quindi un'analisi coerente del comportamento delle soluzioni nel passaggio dal regime a bassa spinta al caso ad alta.

Sommario

Abstract	2
1 Introduzione.....	5
2 Fondamenti teorici.....	7
2.1 Meccanica Orbitale	7
2.1.1 Parametri orbitali.....	7
2.1.2 Energia specifica	7
2.1.3 ΔV	8
2.1.4 v_∞	8
2.2 Formulazione del problema di controllo ottimo.....	9
2.3 Modello propulsivo e regimi di spinta	12
2.3.1 Regime a bassa spinta.....	13
2.3.2 Regime ad alta spinta.....	13
2.4 Metodo numerico	13
2.4.1 Formulazione del BVP.....	13
2.4.2 Risoluzione numerica	15
2.5 Asteroidi	16
3 Metodologia	18
3.1 Convergenze a bassa spinta	18
3.2 Costruzione della struttura ON/OFF	18
3.3 Convergenze ad alta spinta.....	18
3.4 Caratterizzazione delle soluzioni finali.....	19
4 Risultati	20
4.1 Panoramica generale	20
2012 LA	22
2017 BN93.....	27
2011 BL45	32
2025 SC.....	36
2016 RD34.....	41
2008 EA9	45
2019 FV2	50
2014 KF39	54

2019 KJ2	58
2022 OB5	62
5 Conclusioni.....	66

1 Introduzione

Negli ultimi decenni, l'interesse nell'esplorazione spaziale è cresciuto significativamente, con un numero sempre maggiore di missioni dirette verso obiettivi interplanetari. Basti pensare che nel 2025 il numero di lanci spaziali ha raggiunto un nuovo record, superando i 300, con motivazioni sia di interesse scientifico, sia di sviluppo tecnologico. Un corpo celeste di particolare interesse sono gli asteroidi, frammenti rimanenti del processo di formazione del sistema solare, nonché alcuni dei responsabili della modifica della biosfera terrestre nel passato. Studiarli porta molteplici vantaggi, quali informazioni sulla storia dell'universo, in particolar modo relativi alla composizione chimica e alle condizioni attraverso le quali la Terra si è formata 4.6 miliardi di anni fa. Sono inoltre di particolare interesse per lo sviluppo tecnologico, sia in termini di materiali estraibili, sia come obiettivo di prima colonizzazione per la creazione di avamposti.

Lo studio della fattibilità di una missione di esplorazione spaziale è uno degli aspetti chiave per il suo successo: la determinazione del costo energetico, in termini di ΔV , e della durata del trasferimento, costituiscono un passaggio fondamentale. Il parametro chiave risulta essere proprio il ΔV necessario, dal quale è possibile stimare la massa di propellente necessaria e, di conseguenza, l'architettura propulsiva e la stima della massa di payload trasportabile.

Sebbene la propulsione elettrica abbia assunto un ruolo centrale nelle missioni di esplorazione dello spazio profondo grazie all'elevato impulso specifico e alla possibilità di realizzare profili di spinta continui, la propulsione chimica continua a rappresentare una tecnologia consolidata, caratterizzata da elevati livelli di spinta e da un profilo di spinta modellato come impulso. Queste caratteristiche permettono in generale di ridurre notevolmente la durata necessaria al compimento della missione rispetto al caso a bassa spinta. L'analisi delle soluzioni chimiche risulta pertanto essere ben contestualizzata nella progettazione preliminare di missioni verso asteroidi NEO.

Questa tesi verte sulla determinazione e sull'analisi di soluzioni chimiche coerenti per il raggiungimento di dieci asteroidi near-Earth. Per mantenere coerenza, sono state innanzitutto ricercate soluzioni nel caso a bassa spinta. Queste sono state in seguito sfruttate per generare un primo valore di tentativo per la ricerca delle soluzioni numeriche nel caso ad alta spinta, sia in termini di struttura del guess, (fasi di accensione e spegnimento), sia in termini di parametri iniziali di stato e costato. Questo ha permesso di ottenere soluzioni caratterizzate da una struttura bang-bang, le cui convergenze sono state trovate iterativamente modificando dei parametri chiave, quali il coefficiente di spinta, la durata, il tempo di partenza e la v_{∞} .

L'obiettivo della tesi è determinare tali convergenze chimiche, analizzarne le soluzioni valutando i principali parametri di missione (ΔV , massa finale, durata) e studiarne la sensibilità al variare del tempo di partenza.

La tesi è organizzata come segue:

- Il capitolo 2 introduce la formulazione del problema e il background teorico
- Il capitolo 3 descrive la procedura di determinazione delle convergenze per le soluzioni chimiche
- Il capitolo 4 riporta i risultati e l'analisi dei dieci asteroidi studiati
- Il capitolo 5 riassume le conclusioni principali di questa tesi

2 Fondamenti teorici

2.1 Meccanica Orbitale

2.1.1 Parametri orbitali

I sei parametri orbitali kepleriani consentono di descrivere completamente la traiettoria di un corpo soggetto al problema dei due corpi. Si suddividono in parametri che definiscono forma e dimensione dell'orbita e parametri che ne determinano orientamento e posizione nello spazio.

In particolare:

- il semiasse maggiore a , che definisce la dimensione dell'orbita;
- l'eccentricità e , che ne caratterizza la forma
- l'inclinazione i , che definisce l'angolo tra il piano orbitale e il piano di riferimento;
- l'ascensione retta del nodo ascendente Ω , che individua l'orientamento del piano orbitale spaziale;
- l'argomento del periastro ω , che definisce l'orientamento dell'orbita all'interno del piano orbitale;
- l'anomalia vera ν , che individua la posizione del corpo lungo l'orbita.

Nello studio del raggiungimento degli asteroidi risulta spesso conveniente utilizzare l'anomalia media M anziché quella vera perché, evolvendo linearmente nel tempo, risulta maggiormente adatta alle simulazioni numeriche e ai problemi di ottimizzazione. Inoltre, insieme agli altri parametri orbitali, costituisce un insieme di variabili naturalmente indipendenti e differenziabili.

2.1.2 Energia specifica

Nel problema dei due corpi, l'energia meccanica specifica di un corpo orbitante è definita come la somma di energia cinetica e potenziale gravitazionale per unità di massa:

$$E_m = \frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r} \quad (1)$$

dove V rappresenta il modulo della velocità del corpo, r la distanza dal centro attrattore e μ il parametro gravitazionale del corpo centrale.

Per un'orbita kepleriana, l'energia specifica può essere espressa in funzione del semiasse maggiore a come:

$$E = -\frac{\mu}{2a} \quad (2)$$

Tale relazione evidenzia come l'energia meccanica specifica dipenda esclusivamente dal semiasse maggiore dell'orbita. In assenza di perturbazioni, l'energia specifica si conserva lungo la traiettoria, risultando costante per un'orbita chiusa o aperta.

La variazione di energia orbitale risulta quindi in una modifica del semiasse maggiore e della geometria dell'orbita.

2.1.3 ΔV

Il ΔV , espresso generalmente in km/s , rappresenta la variazione di velocità cui è sottoposto il velivolo mediante la propulsione. Nel modello impulsivo tale variazione viene idealmente applicata in un intervallo di tempo trascurabile, consentendo di trattare la manovra come istantanea, mantenendo invariata la posizione del velivolo durante l'impulso.

In ambito propulsivistico viene trattata come il costo energetico necessario per eseguire una manovra orbitale, essendo direttamente collegabile alla massa di propellente necessaria attraverso l'equazione di Tsiolkovsky, o equazione del razzo, ottenuta assumendo assenza di forze esterne oltre la spinta, spinta parallela alla velocità e velocità efficace dei gas di scarico costante:

$$\Delta V = c \ln \left(\frac{m_0}{m_f} \right) \quad (3)$$

$$\frac{m_f}{m_0} = e^{-\frac{\Delta v}{c}} \quad (4)$$

dove c rappresenta la velocità efficace dei gas di scarico, m_0 la massa iniziale e m_f la massa finale del velivolo.

Tale relazione evidenzia come il costo energetico di una manovra sia direttamente collegato al rapporto tra la massa iniziale e finale, costituendo uno strumento fondamentale per la valutazione preliminare della fattibilità di una missione

2.1.4 v_∞

La velocità all'infinito identifica la velocità relativa tra due corpi quando la distanza tende a infinito, ossia quando l'influenza gravitazionale di un corpo risulta trascurabile rispetto al moto.

Nel caso di un'orbita parabolica, è direttamente collegata all'energia specifica dell'orbita secondo la relazione

$$E = \frac{v_\infty^2}{2} \quad (5)$$

dove E è l'energia meccanica specifica positiva delle orbite iperboliche.

Nel contesto delle missioni verso asteroide NEO, il trasferimento può essere descritto come un moto iperbolico relativo al corpo target nella fase di arrivo, e la v_∞ risulta essere il residuo iperbolico di velocità.

2.2 Formulazione del problema di controllo ottimo

Nell'analisi e nella determinazione di traiettorie orbitali ha un peso notevole la quantità di propellente necessaria ai fini del completamento della missione. Per questo motivo, minimizzare il consumo di propellente, o in alternativa, massimizzare la massa finale risulta essere uno dei punti centrali nello studio di fattibilità di una missione. Andare a massimizzare o minimizzare un parametro prestazionale consiste nel risolvere un problema di ottimizzazione con leggi di controllo, effettuato attraverso metodi numerici.

In questa tesi, i risultati presentati sono ottenuti attraverso metodi numerici indiretti, ossia metodi che sfruttano i principi del calcolo variazionale offrendo un'elevata precisione numerica e permettendo il raggiungimento di soluzioni ottimali modificando un numero limitato di parametri. In particolare, viene utilizzata la teoria del controllo ottimale.

La teoria del controllo ottimale studia la determinazione di una legge di controllo che, agendo su di un sistema differenziale, ottimizza una funzione costo, nel rispetto dei vincoli dinamici e delle condizioni al contorno.

Formalmente, quindi, un problema di controllo ottimale consiste nel determinare un funzionale J tale che

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), u(t), t) \quad (6)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (7)$$

minimizzi, o massimizzi, una funzione obiettivo del tipo

$$J = \varphi(x(t_f), t_f) + \int_0^{t_f} \Phi(x(t), u(t), t) dt \quad (8)$$

dove $x(t)$ è il vettore di stato, $u(t)$ il controllo, Φ il costo istantaneo, φ quello terminale.

Modellandola nel caso di trasferite orbitali, si suddivide la traiettoria in un numero n di sotto-intervalli, definiti archi. Preso in considerazione un generico arco, o j -esimo, il tempo iniziale sarà $t_{(j-1)_+}$, quello finale t_{j_-} , con variabili che, agli estremi, rispettivamente assumono valori $x_{(j-1)_+}$ e x_{j_-} . Così facendo, sono prese in considerazione le possibili

discontinuità delle variabili che si applicano agli estremi di un arco, dove vengono applicati i vincoli, mentre all'interno le variabili sono continue.

Le condizioni al contorno vengono applicate sia ai contorni esterni sia a quelli interni, sono genericamente non lineari ed espresse come

$$\chi(x_{(j-1)_+}, x_{j_-}, t_{(j-1)_+}, t_{j_-}) = 0 \quad j = 1, \dots, n$$

e il funzionale J assume forma

$$J = \varphi(x_{(j-1)_+}, x_{j_-}, t_{(j-1)_+}, t_{j_-}) + \sum_j \int_{t_{(j-1)_+}}^{t_{j_-}} \Phi(x(t), u(t), t) dt \quad j = 1, \dots, n \quad (9)$$

e può essere visto come la somma di due contributi: la funzione φ , che dipende dai valori che le variabili assumono ai contorni, e l'integrale esteso a tutta la traiettoria della funzione Φ che dipende dai valori assunti in ogni punto dalle variabili e dai controlli.

Per tenere conto delle equazioni differenziali e delle condizioni al contorno, il funzionale viene riscritto introducendo i moltiplicatori di Lagrange: costanti aggiunte μ , associate alle condizioni al contorno, e variabili aggiunte λ , o *costati*, associate a ciascuna variabile di stato. In questo modo si passa da un problema vincolato ad uno variazionale non vincolato e si riscrive il funzionale come

$$J^* = \varphi + \mu^T \chi + \sum_j \int_{t_{(j-1)_+}}^{t_{j_-}} (\Phi + \lambda^T (f - \dot{x})) dt \quad j = 1, \dots, n \quad (10)$$

Integrando per parti, così da eliminare la dipendenza dalle derivate delle variabili \dot{x} , e differenziando, si ottiene la variazione prima del funzionale stesso

$$\begin{aligned} \delta J^* = & \left(-H_{(j-1)_+} + \frac{d\varphi}{dt_{(j-1)_+}} + \mu^T \frac{d\chi}{dt_{(j-1)_+}} \right) \delta t_{(j-1)_+} + \\ & + \left(H_{j_-} + \frac{d\varphi}{dt_{j_-}} + \mu^T \frac{d\chi}{dt_{j_-}} \right) \delta t_{j_-} + \\ & + \left(\lambda_{(j-1)_+}^T + \frac{d\varphi}{dx_{(j-1)_+}} + \mu^T \left[\frac{d\chi}{dx_{(j-1)_+}} \right] \right) \delta x_{(j-1)_+} + \\ & + \left(-\lambda_{j_-}^T + \frac{d\varphi}{dx_{j_-}} + \mu^T \left[\frac{d\chi}{dx_{j_-}} \right] \right) \delta x_{j_-} + \\ & + \sum_j \int_{t_{(j-1)_+}}^{t_{j_-}} \left[\left(\frac{dH}{dx} + \lambda^T \right) \delta x + \frac{dH}{du} \delta u \right] dt \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (11)$$

dove H rappresenta l'Hamiltoniano del sistema ed è definito come

$$H = \Phi + \lambda^T f \quad (12)$$

La condizione necessaria di ottimo si verifica quando il funzionale è stazionario e cioè quando si annulla per una qualsiasi scelta di variazioni $\delta x, \delta u, \delta x_{(j-1)+}, \delta x_{j-}, \delta t_{(j-1)+}, \delta t_{j-}$.

Inoltre, l'introduzione di variabili e costanti aggiunte consente di annullare contemporaneamente il coefficiente di ciascuna delle variazioni, assicurando quindi la stazionarietà del funzionale e conducendo ad un sistema costituito dalle equazioni di stato e dei costati, e dalla condizione di ottimo rispetto al controllo.

In particolar modo le condizioni di stazionarietà assumono forma compatta

$$\frac{d\lambda}{dt} = - \left(\frac{dH}{dx} \right)^T \quad (13)$$

$$\left(\frac{dH}{du} \right)^T = 0 \quad (14)$$

Mentre la condizione di ottimo dipende dalla presenza o meno di un controllo soggetto a vincolo: se questo è presente, si ricercano i massimi di J o i minimi di H in accordo con il principio di massimo di Pontryagin.

Il problema di controllo ottimale risulta equivalente alla risoluzione di un sistema accoppiato di equazioni differenziali per stati e costati soggetto a condizioni al contorno, la cui soluzione fornisce la traiettoria e la legge di controllo ottimali.

Applicando la formulazione generale del controllo ottimale al problema del trasferimento orbitale, si utilizza il modello dei due corpi assumendo un sistema di riferimento inerziale eliocentrico.

Il vettore di stato è costituito da posizione, velocità e massa del velivolo e le equazioni del moto sono:

$$\frac{dr}{dt} = V \quad (15)$$

$$\frac{dV}{dt} = g + \frac{T}{m} \quad (16)$$

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{T}{c} \quad (17)$$

dove r rappresenta il vettore posizione, v quello velocità, m la massa.

Introducendo poi il vettore dei costati, associato allo stato, come

$$\lambda = (\lambda_r, \lambda_v, \lambda_m)^T$$

Si può definire l'hamiltoniano del sistema come

$$H = \lambda_r^T V + \lambda_v^T g + T S_F \quad (18)$$

dove S_F rappresenta il coefficiente della spinta (o switching function) ed è definito come

$$S_F = \frac{\lambda_v^T T}{mT} - \frac{\lambda_m}{c} \quad (19)$$

Dal momento che la direzione della spinta e il suo modulo sono le variabili di controllo che devono andare a minimizzare H in accordo con il PMP, si impone la spinta parallela a λ_v definendo così la come

$$S_F = \frac{\lambda_v}{m} - \frac{\lambda_m}{c} \quad (20)$$

e si ottiene quindi la legge di controllo

$$T = \begin{cases} T_{max} & \text{con } S_f > 0 \\ 0 & \text{con } S_f < 0 \end{cases}$$

E arco singolare quando $s=0$.

Si definisce questa forma come controllo bang-bang, ad indicare che la spinta assume unicamente valori nulli o massimi, e la sequenza di archi ON/OFF è determinata dal segno della switching function.

Questa struttura è alla base delle soluzioni numeriche discusse nei capitoli successivi: al variare del livello di spinta, il controllo rimane bang-bang ma si modifica la distribuzione degli archi di spinta e quindi la distribuzione delle fasi di accensione e spegnimento dei propulsori.

2.3 Modello propulsivo e regimi di spinta

Si introduce ora il modello propulsivo preso in considerazione nella ricerca delle soluzioni riportate nei capitoli successivi. In questa tesi viene considerato un unico modello di propulsione chimica, analizzato tuttavia in due differenti regimi di spinta: un regime a bassa spinta e uno ad alta spinta.

Il problema di controllo ottimo introdotto nel capitolo precedente è indipendente dal livello di spinta, ed è quindi stato applicato ad entrambi i regimi. In altre parole, sia il regime a bassa spinta, sia quello ad alta, condividono la stessa struttura di controllo. Tuttavia, essendo differenti i valori massimi di spinta ottenibili con i due regimi, il profilo temporale degli archi di spinta presenta differenze ben marcate.

2.3.1 Regime a bassa spinta

Nel regime a bassa spinta la forza propulsiva è relativamente ridotta rispetto alla massa del velivolo, producendo accelerazioni di valore contenuto ma applicate per intervalli di tempo relativamente lunghi. Nel modello adottato in questa tesi, la dinamica del velivolo viene quindi descritta considerando una spinta applicata in modo continuo lungo la traiettoria.

In questa configurazione, gli archi di spinta risultano generalmente estesi lungo gran parte del trasferimento orbitale. Partendo da una soluzione iniziale con spinta continua, il codice numerico individua progressivamente la struttura ottima del controllo attraverso l'analisi della switching function, determinando la sequenza di archi di accensione e spegnimento lungo la traiettoria.

Le soluzioni a bassa spinta ottenute rappresentano quindi un passaggio preliminare nella costruzione delle soluzioni ad alta spinta. In particolare, l'andamento della switching function ottenuto in questo regime viene utilizzato per definire una prima struttura di controllo di tipo ON/OFF che funge da soluzione iniziale per le successive convergenze.

2.3.2 Regime ad alta spinta

Nel regime ad alta spinta, il livello di spinta applicabile risulta molto più elevato rispetto al caso precedente. Questo comporta accelerazione più intense e, di conseguenza, una durata molto ridotta degli archi di accensione necessari per ottenere le variazioni di velocità richieste.

All'aumentare del livello di spinta, gli archi attivi tendono a contrarsi sempre più nel tempo, fino ad assumere una durata molto inferiore rispetto alla durata complessiva del trasferimento. Il comportamento della soluzione tende quindi al limite impulsivo classico, nel quale le variazioni di velocità vengono applicata istantaneamente.

Dal punto di vista numerico, la presenza di archi di spinta molto brevi rende la ricerca delle soluzioni particolarmente delicata, in quanto la convergenza del metodo dipende fortemente dalla scelta di una struttura iniziale adeguata.

Per questo motivo le soluzioni ad alta spinta vengono ottenute tramite un metodo di continuazione a partire dalle soluzioni a bassa spinta. In questo modo, la struttura degli archi di spinta individuata nel regime a bassa spinta viene progressivamente adattata al caso ad alta spinta aumentando gradualmente il valore della spinta applicata.

2.4 Metodo numerico

2.4.1 Formulazione del BVP

Come introdotto precedentemente, la determinazione delle traiettorie è stata effettuata mediante metodo indiretto, basato sulla formulazione del problema come sistema di equazioni differenziali accoppiate per stati e costati e, nel caso in esame, si ottiene un sistema di 14 equazioni differenziali.

Le prime sei definiscono lo stato del velivolo in termini di posizione e velocità; a queste sono associate altrettante equazioni per i relativi costati. Infine, le ultime due equazioni sono date dalla massa e dal relativo costato.

Per convenienza, si adottano coordinate sferiche in un sistema di riferimento inerziale basato sul piano equatoriale, descrivendo quindi la posizione tramite il raggio r , la longitudine θ e la latitudine ϕ , e la velocità dalle componenti radiali u , v e w in un riferimento locale.

Le equazioni differenziali che definiscono lo stato sono

$$\frac{dr}{dt} = u \quad (21)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{r \cos\phi} \quad (22)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{w}{r} \quad (23)$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{r^2} + \frac{v^2}{r} + \frac{w^2}{r} + \frac{T}{m} \sin\gamma_T \quad (24)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{uv}{r} + \frac{vw}{r} \tan\phi + \frac{T}{m} \cos\gamma_T \cos\psi_T \quad (25)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{uw}{r} - \frac{v^2}{r} \tan\phi + \frac{T}{m} \cos\gamma_T \sin\psi_T \quad (26)$$

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{T}{c} \quad (27)$$

E le equazioni differenziali per le variabili aggiunte sono

$$\dot{\lambda}_r = \frac{1}{r^2} \left[\lambda_\theta \frac{v}{\cos\phi} + \lambda_\phi w + \lambda_u \left(-\frac{2}{r} + v^2 + w^2 \right) + \lambda_v (-uv + v w \tan\phi) + \lambda_w (-uw - v^2 \tan\phi) \right] \quad (28)$$

$$\dot{\lambda}_\theta = 0 \quad (29)$$

$$\dot{\lambda}_\phi = \frac{1}{r \cos^2\phi} (-\lambda_\theta v \sin\phi - \lambda_v v w + \lambda_w v^2) \quad (30)$$

$$\dot{\lambda}_u = \frac{1}{r} (-\lambda_r r + \lambda_v v + \lambda_w w) \quad (31)$$

$$\dot{\lambda}_v = \frac{1}{r} \left[-\lambda_\theta \frac{1}{\cos\phi} - 2\lambda_u v + \lambda_v (u - w \tan\phi) + 2\lambda_w v \tan\phi \right] \quad (32)$$

$$\dot{\lambda}_w = \frac{1}{r} (-\lambda_\phi - 2\lambda_u w - \lambda_v v \tan\phi + \lambda_w u) \quad (33)$$

$$\dot{\lambda}_m = \frac{T}{m^2} \lambda_v \quad (34)$$

Definito il sistema di equazioni differenziali è ora necessario definire le condizioni al contorno iniziali e finali. Nella presente tesi le traiettorie sono definite con partenza dalla Terra e arrivo all'asteroide target. Di conseguenza, le condizioni al contorno impongono che lo stato iniziale del velivolo coincida con quello della Terra al tempo di partenza, mentre lo stato finale deve coincidere con quello dell'asteroide target al tempo di arrivo:

$$x(r, v)_{t_0} = x(r, v)_{Terra} \quad (35)$$

$$x(r, v)_{t_f} = x(r, v)_{Asteroide} \quad (36)$$

2.4.2 Risoluzione numerica

La risoluzione numerica del sistema è stata effettuata mediante l'approccio iterativo "Newton rilassato", in cui il vettore delle incognite viene aggiornato secondo la relazione

$$x_{k+1} = x_k - \alpha J^{-1}(x_k) F(x_k) \quad (37)$$

dove $F(x_k)$ rappresenta il vettore dei residui, $J(x_k)$ la matrice Jacobiana e α un parametro introdotto per migliorare la stabilità della convergenza, rendendo il metodo più robusto rispetto alla scelta del guess iniziale.

Questo approccio è stato utilizzato sia nella ricerca delle soluzioni nel regime a bassa spinta, sia in quelle ad alta. Tuttavia, la sensibilità del metodo rispetto alle condizioni iniziali ha reso necessario un approccio differente nell'aumento del coefficiente di spinta nei due regimi considerati.

Nel regime a bassa spinta, per il quale il metodo è più robusto, il coefficiente di spinta è stato fatto evolvere da un valore iniziale prossimo a quello finale unitario attraverso incrementi decimali. Questo è stato possibile in quanto gli archi di accensione risultano più estesi nel tempo. In questa configurazione, infatti, il problema risulta numericamente più stabile e il codice è in grado di individuare automaticamente la struttura ottima di controllo anche a partire da soluzione di tentativo relativamente semplici.

La determinazione delle traiettorie ottimali nel regime ad alta spinta presenta invece difficoltà numeriche più significative, in quanto la struttura ottima della soluzione è caratterizzata da archi di spinta molto brevi rispetto alla durata complessiva del trasferimento. Questo comportamento, che tende al limite impulsivo, rende la convergenza del metodo numerico particolarmente sensibile alla scelta della soluzione iniziale.

Per superare tale difficoltà è stato adottato un approccio basato su un metodo di continuazione: l'idea consiste nello sfruttare le soluzioni ottenute nel regime a bassa

spinta come soluzioni di tentativo iniziali per il regime ad alta. Il passaggio tra i due regimi viene quindi effettuato aumentando progressivamente il valore di spinta tramite un coefficiente moltiplicativo applicato alla spinta nominale del modello.

La spinta nominale assume quindi valori differenti per i due regimi: in quello a bassa spinta è pari a 1 N, mentre in quello ad alta ha valore pari a 400 N. Di conseguenza, uno stesso livello di spinta reale corrisponde a coefficienti differenti nei due casi.

Ad esempio, il valore di spinta pari a 1 N nel regime a bassa, che corrisponde quindi a un coefficiente moltiplicativo unitario, corrisponde, nel regime ad alta spinta, ad un coefficiente pari a

$$\frac{1}{400} = 0.0025$$

Per questo motivo, nel caso ad alta spinta la continuazione viene effettuata partendo da valori di coefficiente di spinta significativamente inferiori rispetto al caso a bassa, in modo tale da mantenere la struttura della soluzione individuata inizialmente. Questo approccio permette così di guidare il metodo numerico verso la soluzione desiderata evitando problemi di divergenza e garantendo la convergenza anche in presenza di archi di spinta molto brevi.

2.5 Asteroidi

Gli asteroidi sono corpi celesti di piccole dimensioni che orbitano attorno al Sole. La loro composizione è prevalentemente rocciosa, sebbene siano presenti anche asteroidi ricchi di carbonio e metalli. A differenza dei pianeti, essi presentano generalmente forma irregolare e dimensioni contenute, variabili da pochi metri fino a qualche centinaio di chilometri per gli oggetti più grandi.

Gli asteroidi rappresentano una delle popolazioni più numerose del Sistema Solare: il numero di oggetti catalogati supera le centinaia di migliaia, con la maggior parte di essi localizzata nella fascia principale compresa tra le orbite di Marte e Giove.

Una particolare classe di interesse è costituita dai Near-Earth Asteroids (NEA), ossia asteroidi le cui orbite si avvicinano o intersecano quella terrestre. Tali oggetti sono caratterizzati da parametri orbitali simili a quelli della Terra, con semiasse maggiore dell'ordine dell'unità astronomica e distanza dal Sole generalmente inferiore a circa 1.3 AU.

In questa tesi vengono analizzate missioni di trasferimento verso dieci asteroidi appartenenti a questa categoria, selezionati sulla base della loro accessibilità dinamica.

L'interesse verso gli asteroidi è legato a diversi fattori. Dal punto di vista scientifico, essi rappresentano corpi primitivi che non hanno subito i processi geologici tipici dei pianeti e conservano quindi informazioni sulla composizione originaria del Sistema Solare. Inoltre, gli asteroidi costituiscono potenziali fonti di risorse, come metalli e materiali volatili, di interesse per future attività di sfruttamento spaziale.

Un ulteriore aspetto rilevante riguarda la difesa planetaria: alcuni NEA presentano orbite che intersecano quella terrestre e possono quindi rappresentare un potenziale rischio di impatto con il nostro pianeta.

Negli ultimi anni, diverse missioni spaziali sono state dedicate allo studio e all'esplorazione di questi corpi. Tra le più rilevanti si ricordano:

- OSIRIS-REx (NASA): missione di sample return dall'asteroide Bennu, con raccolta di campioni nel 2020 e rientro a Terra nel 2023;
- DART (NASA): prima missione di difesa planetaria, conclusasi nel 2022 con l'impatto controllato su Dimorphos e la conseguente modifica della sua orbita;
- NEAR Shoemaker (NASA): prima missione a orbitare e successivamente atterrare su un asteroide (Eros) nel 2001.

Dal punto di vista della progettazione delle missioni, la raggiungibilità di un asteroide dipende principalmente dai suoi parametri orbitali, in particolare semiasse maggiore, eccentricità e inclinazione. Asteroidi con orbite simili a quella terrestre richiedono generalmente variazioni di energia più contenute e risultano quindi più accessibili.

La selezione degli asteroidi considerati in questa tesi è stata effettuata tenendo conto di tali aspetti, privilegiando target che consentissero di ottenere soluzioni convergenti e confrontabili in termini di costo energetico del trasferimento.

3 Metodologia

3.1 Convergenze a bassa spinta

Come discusso nel capitolo precedente, per determinare le soluzioni nel regime ad alta spinta si è utilizzato come soluzione iniziale quella ottenuta per il medesimo asteroide target nel regime a bassa spinta.

Per ottenere queste prime convergenze è stato fatto crescere il coefficiente di spinta da un valore iniziale di 0.5, modificando in parallelo alcuni parametri di input quali durata totale del trasferimento, tempo di partenza t_0 e velocità all'infinito v_∞ . In particolare, il coefficiente di spinta è stato aumentato, dopo ogni iterazione con convergenza, di un valore pari a 0.1. Il risultato per le soluzioni a bassa spinta è stato ritenuto accettabile nel momento in cui il codice ha prodotto una soluzione a coefficiente unitario che andasse a rispettare sia le tolleranze sui residui dei parametri (stati e costati), sia sul vincolo legato alla massa finale, ossia un valore superiore al 50% della massa iniziale.

Nel regime a bassa spinta è stato imposto un livello di spinta massima dell'ordine di 1 N e una massa iniziale pari a 2000 kg.

Per ciascuno dei dieci asteroidi considerati, il codice numerico ha fornito una soluzione caratterizzata da una struttura di controllo continua e dalla relativa switching function.

3.2 Costruzione della struttura ON/OFF

A partire dal file OUT relativo alle convergenze nel regime a bassa spinta, è stata quindi analizzata la switching function lungo la traiettoria, che ha permesso la costruzione della struttura iniziale in accordo con il controllo bang-bang definito nel capitolo 2.2.

In particolare, ai valori positivi della switching function è stato assegnato il valore 1, ad indicare una fase di accensione, mentre per quelli negativi il valore 0, ad intendere spinta assente. È stato inoltre riportato il tempo in cui si ha il passaggio da una fase all'altra, mantenendo tuttavia un certo grado di arrotondamento per facilitare la ricerca della prima convergenza nel caso chimico.

Questo passaggio ha quindi permesso di costruire il guess iniziale per la ricerca delle soluzioni nel regime ad alta spinta, ossia un file `.txt` contenente la struttura delle fasi, i tempi a cui si ha accensione e spegnimento, la durata del trasferimento, il ΔV necessario e la massa finale stimata.

3.3 Convergenze ad alta spinta

Come precedentemente introdotto, per ottenere convergenze nel regime ad alta spinta coerenti con la struttura definita, è stata adottata una strategia di continuità sul coefficiente di spinta. Per ogni asteroide, la prima iterazione nel regime ad alta spinta è stata impostata con un coefficiente di spinta pari a 0.001, inferiore al valore corrispondente alla spinta nominale del modello a bassa, in modo da mantenere il

problema vicino al regime a bassa spinta e facilitare la convergenza numerica. Successivamente il coefficiente è stato incrementato progressivamente fino al valore unitario. Questo ha permesso una transizione graduale dal regime a bassa spinta a quello ad alta, riducendo il rischio di divergenza numerica.

Parallelamente all'incremento del coefficiente di spinta, sono stati modificati i medesimi parametri di input del caso a bassa spinta, che, sempre per facilitare la prima convergenza numerica, sono stati mantenuti uguali a quelli ottenuti nella soluzione finale del caso a bassa spinta.

Nel codice numerico utilizzato per la ricerca delle soluzioni ad alta spinta sono stati modificati sia il livello di spinta massima, pari ora a 400N, sia la massa iniziale, incrementata a 2371 kg.

Le convergenze sono state considerate accettabili quando la soluzione prodotta a coefficiente di spinta unitario presenta residui di ordine pari o inferiore a 10^{-7} per ogni stato e costato, massa finale superiore al 50% della massa iniziale e assenza di errori sulla switching function.

3.4 Caratterizzazione delle soluzioni finali

Le soluzioni chimiche ottenute risultano caratterizzate da una struttura bang-bang composta da un numero limitato di archi di spinta. Pur trattandosi formalmente di archi a durata finita, la durata delle fasi ON risulta significativamente inferiore rispetto alla durata complessiva del trasferimento, dimostrando un comportamento quasi impulsivo dal punto di vista temporale. Questo comportamento risulta coerente con la struttura bang-bang prevista dalla teoria del controllo ottimo.

Per ciascun asteroide sono stati determinati:

- tempo iniziale t_0
- durata totale del trasferimento
- ΔV richiesto
- massa finale
- struttura temporale delle fasi di spinta

Questi risultati costituiscono la base per l'analisi comparativa e lo studio della sensibilità temporale riportati nei capitoli successivi.

4 Risultati

4.1 Panoramica generale

Gli asteroidi considerati in questo lavoro appartengono alla classe dei Near-Earth-Asteroids (NEA), ossia asteroidi le cui orbite intersecano o si avvicinano all'orbita terrestre. Questi oggetti rappresentano un interesse crescente nell'ambito dell'esplorazione spaziale sia per motivi scientifici sia per possibili applicazioni future, come sfruttamento di risorse o difesa planetaria.

Dal punto di vista dinamico, il costo energetico necessario per raggiungere un asteroide dipende fortemente dai suoi parametri orbitali. In particolare, missioni con consumo di propellente relativamente contenuto risultano possibili quando l'asteroide presenta caratteristiche orbitali simili a quelle della Terra.

Per questo motivo, nella selezione degli asteroidi analizzati sono stati favoriti quelli caratterizzati da semiasse maggiore prossimo a 1 AU, eccentricità relativamente ridotte, inclinazioni orbitali moderate e posizione angolare favorevole rispetto alla Terra nel periodo di missione considerato.

Queste caratteristiche consentono di ridurre le variazioni di energia orbitale necessarie per il trasferimento e facilitano l'individuazione di traiettorie con consumo di propellente contenuto.

I parametri orbitali degli asteroidi analizzati sono riportati nella tabella seguente, riferiti all'epoca 61000, ossia il 21 novembre 2025.

ASTEROIDE	a [AU]	e	i [deg]	ω [deg]	Ω [deg]	M [deg]
2012 LA	1.0404379	0.02157403	3.1589534	79.50646	234.07673	190.3313689
2017 BN93	1.0444025	0.05146972	2.12105	23.39227	315.76495	235.4538396
2011 BL45	1.0378508	0.02095698	3.04798	155.24853	134.75672	204.1312195
2025 SC	1.0053562	0.10130618	2.97940	279.24765	171.93735	337.9078206
2016 RD34	1.0462289	0.03470914	1.95729	11.02689	349.56980	201.9040869
2008 EA9	1.0490817	0.07403311	0.44129	343.72863	124.02366	168.5820873
2019 FV2	1.0528818	0.02224917	3.74465	250.66964	10.93930	346.7968691
2014 KF39	1.0417068	0.07913717	3.64195	95.46384	235.62834	209.3444329
2019 KJ2	1.0571233	0.02652255	3.14364	252.46594	61.66407	282.1610209

2022 OB5	1.0034632	0.05557353	2.08777	99.48817	300.20264	14.6544158
-----------------	-----------	------------	---------	----------	-----------	------------

Tabella 1: Parametri orbitali degli asteroidi scelti

Di seguito viene riportata una panoramica generale dei risultati ottenuti per gli asteroidi in esame. La tabella mostra i parametri di missione principali determinati nel regime ad alta spinta, che verranno successivamente discussi in dettaglio.

ASTEROIDE	T_0	T_f	$V_{inf}[\text{km/s}]$	$\Delta V[\text{km/s}]$	$\% m_f$	Struttura
2012 LA	200	213	1.5	1.539713153	60.7480581	010101
2017 BN93	200	213	1	1.173504015	68.3939337	01010
2011 BL45	205.03	219.53	1.7	1.094753747	70.1599141	010101
2025 SC	206.25	222.25	1.6	1.181550381	68.2160153	010
2016 RD34	200.25	215.25	1	1.009850236	72.1149981	0101010
2008 EA9	206	223	1	0.526721721	84.3234609	0101
2019 FV2	205.25	219.75	1.45	1.150335737	68.9088181	0101
2014 KF39	205.53	214.53	1.1	1.906169007	53.9526191	0101010
2019 KJ2	206.53	220.03	1.4	1.122123784	69.5410281	0101
2022 OB5	200.75	219.75	1	0.776786194	77.7663952	0101010

Tabella 2: Migliori risultati per ogni asteroide

I tempi di partenza e di arrivo riportati in tabella sono espressi nell'unità di tempo utilizzata nel codice di calcolo. Il valore di conversione è pari a circa 58.13 giorni per unità di tempo, con $t = 200$ corrispondente al 31 ottobre 2031. I tempi riportati sono quindi stati convertiti nel calendario gregoriano attraverso questa scala.

Per facilitare la ricerca delle convergenze nel regime ad alta spinta, le soluzioni preliminari a bassa spinta sono state ricercate in modo tale che la switching function risultasse negativa sia all'inizio sia alla fine della traiettoria. Questa scelta consente di ottenere una struttura caratterizzata da fasi di spinta assente alla partenza e all'arrivo, permettendo una maggior flessibilità nella ricerca delle convergenze per il caso ad alta spinta.

Il valore della velocità all'infinito v_∞ considerato nelle soluzioni è relativamente contenuto rispetto alle prestazioni massime teoricamente raggiungibili dal razzo vettore, così da contenere il costo energetico della missione e quindi il consumo di propellente.

Di seguito vengono presentate e discusse le soluzioni ottenute per ciascuno degli asteroidi analizzati

2012 LA

Parametri orbitali di 2012 LA osservati all'epoca 61000, ossia 21 novembre 2025

a [AU]	1.0404
e	0.02157
i [deg]	3.158953
w [deg]	79.5064
Ω [deg]	234.0767
M [deg]	190.3313

Tabella 3: Parametri orbitali di 2012 LA

La prima soluzione accettabile ha portato i seguenti risultati

ASTEROIDE	T_0	T_f	V_{inf} [km/s]	ΔV [km/s]	% m_f	Struttura
2012 LA	199.25	212.25	1.5	1.814628491	55.5753457	0101010

Tabella 4: Risultati ottenuti per 2012 LA a t_0

Le date di partenza e di arrivo corrispondono rispettivamente al 17 settembre 2031 e al 12 ottobre 2033, portando dunque la missione ad avere una durata di poco più di due anni.

La soluzione nel regime ad alta spinta prevede tre archi di spinta per poter raggiungere l'asteroide target partendo dalla terra. La durata degli archi è di 59 minuti per il primo, 25 minuti per il secondo e infine 52 minuti per il terzo, risultando quindi in una durata decisamente inferiore rispetto a quella totale, traducendosi, come anticipato, in un comportamento quasi impulsivo.

Questo comportamento è anche ben visibile attraverso il seguente grafico, che riporta le variazioni di semiasse a , apogeo r_a , perigeo r_p dell'orbita al variare del tempo, espresso in giorni.

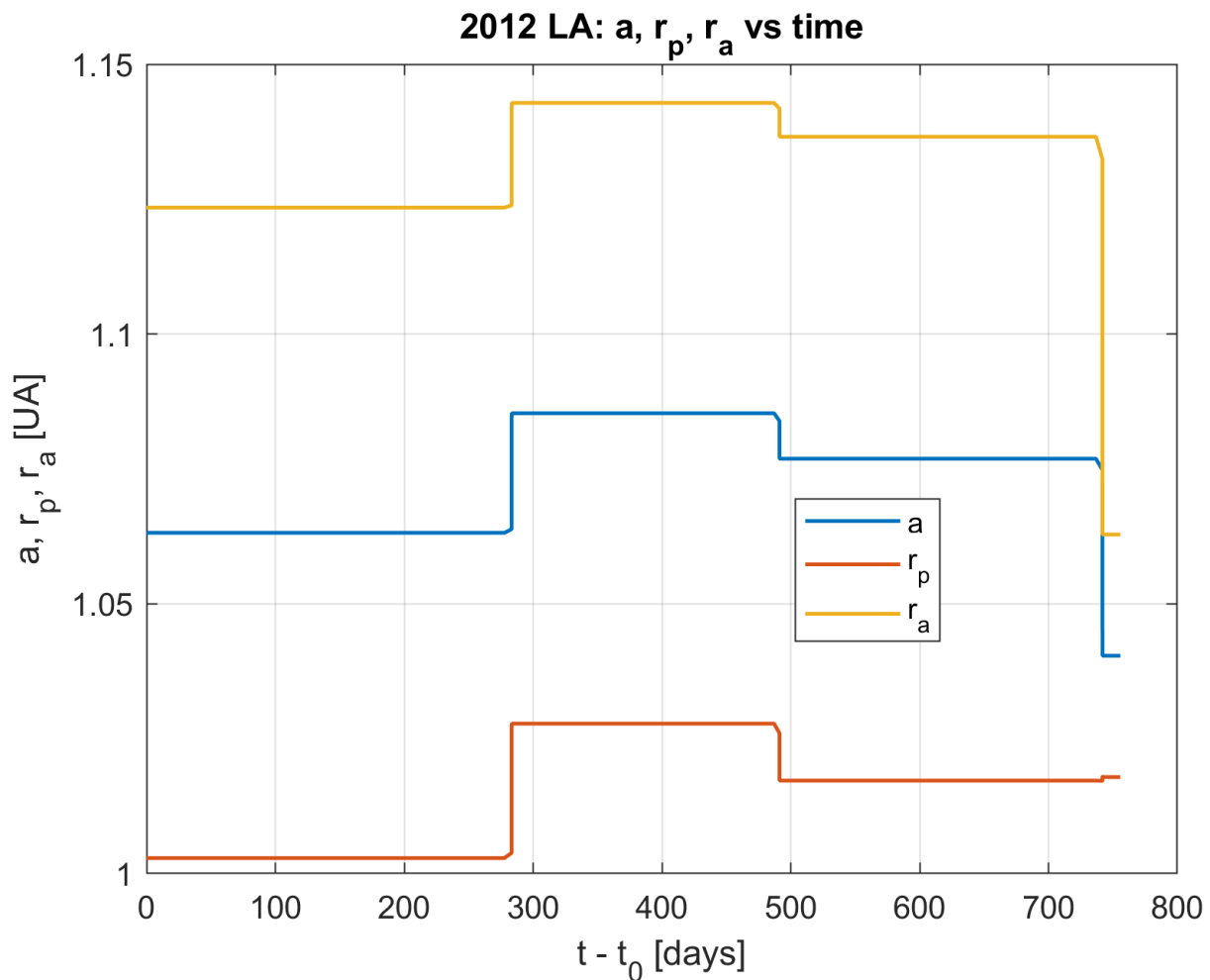


Figura 1: andamento di semiasse, afelio e perielio al variare del tempo per l'asteroide 2012 LA

Come si può notare dal grafico, la trasferta necessita di tre cambi di semiasse, in particolare un incremento a 280 giorni di missione, e due riduzioni a 490 e 755 giorni, portando infine al matching con l'asteroide.

Considerando quindi una massa iniziale pari a 2371 kg, la soluzione ottenuta porta ad avere una massa finale pari a 1317.7 kg, corrispondente ad una frazione residua del 55.58% circa, mentre il ΔV necessario al completamento della missione è 1.814628491 km/s.

È stata inoltre analizzata una soluzione con partenza posticipata di un anno, calcolata aggiungendo al t_0 precedente un valore pari a 6.28.

ASTEROIDE	T_0	T_f	$V_{inf} \left[\frac{km}{s} \right]$	$\Delta V \left[\frac{km}{s} \right]$	% m_f	Struttura
2012 LA	205.53	219.53	1.7	2.0525882652	51.4549917	0101010

Tabella 5: Risultati per 2012 LA con partenza posticipata di un anno

Si nota come la modifica del tempo di partenza vada a impattare sulla nuova traiettoria, producendo infatti un risultato con ΔV e massa finale differenti. La differenza con la soluzione precedente è anche osservabile in termini di energia e semiasse dell'orbita, visibile andando a visionare il grafico di semiasse a , apogeo r_a , perigeo r_p dell'orbita al variare del tempo, che per la nuova soluzione risulta essere

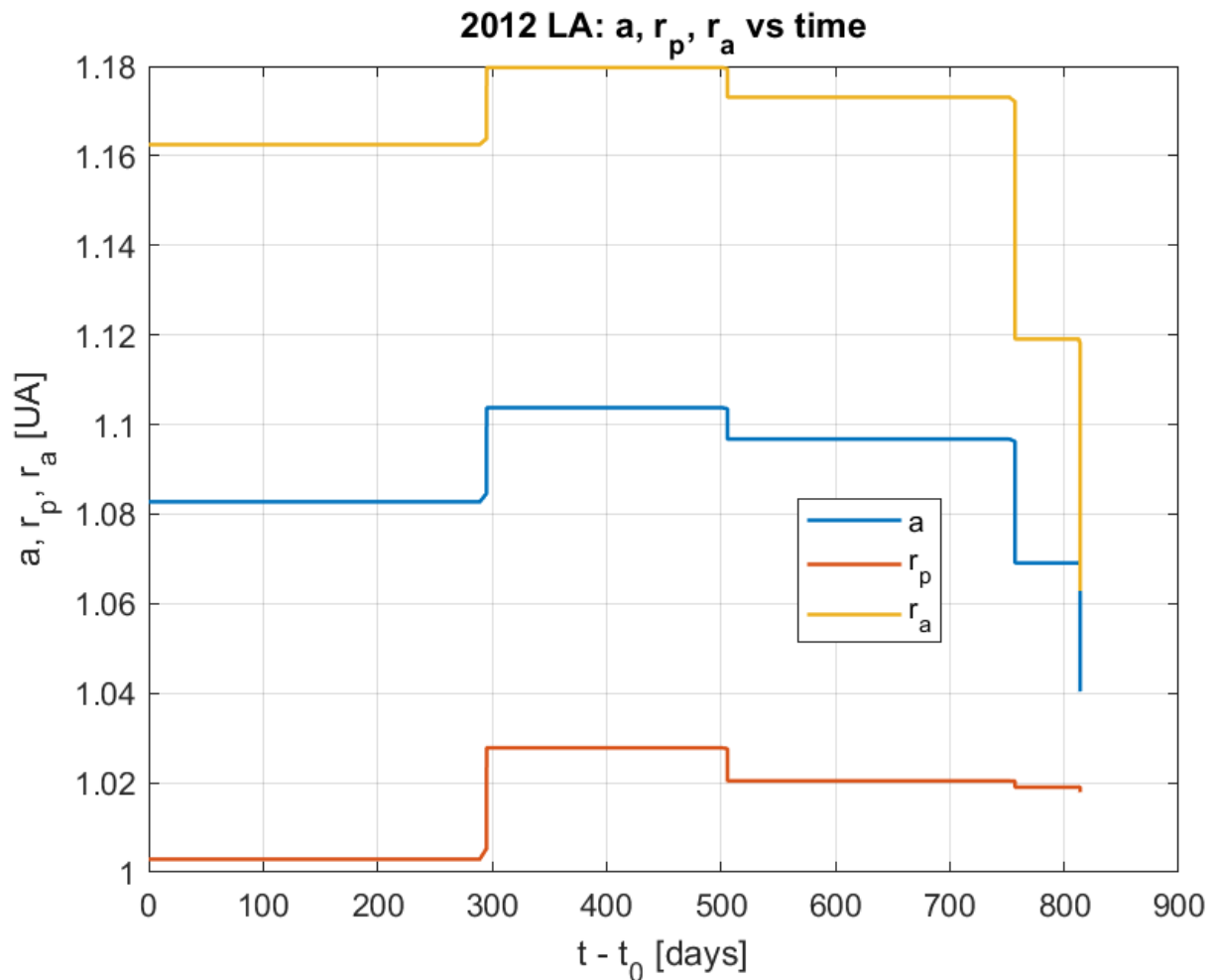


Figura 2: andamento di semiasse, afelio e perielio al variare del tempo a t_0+1

Viene di seguito riportata una tabella contenente un confronto diretto tra le due soluzioni, in cui la variazione percentuale è stata calcolata come

$$\frac{(x_{new} - x_{old})}{x_{old}} * 100$$

ASTEROIDE	ΔV assoluto $\left[\frac{km}{s}\right]$	ΔV [%]	m_f [%]
2012 LA	0.237959	13.1134	-7.4139

Tabella 6: confronto dei risultati per 2012 LA

Per l'asteroide preso in esame notiamo come l'aumento di t_0 abbia prodotto una soluzione peggiore rispetto al caso precedente, dovuto ad una fasatura ancor più sfavorevole tra spacecraft e asteroide rispetto al caso precedente. Si nota infatti come sia necessario alzare il semiasse a un valore superiore a 1.1 UA per poi doverlo ridurre tre volte per

portarsi al matching con l'asteroide. Questo è dovuto al fatto che l'asteroide si allontana ulteriormente rispetto alla prima partenza considerata, portando a un aumento del ΔV necessario alla missione e quindi una massa finale minore.

Si vuole ora andare a raffinare la soluzione più promettente tra le due trovate attraverso un'analisi di sensibilità sul tempo di partenza, ottenuta variando il tempo di partenza t_0 in un intervallo compreso tra $t_0 - 1$ e $t_0 + 1$, utilizzando un passo di 0.25, che per l'asteroide in esame rappresentano un range temporale che va dal 7 luglio 2031 al 31 ottobre 2031.

Di seguito sono riportate le variazioni per cui si ha convergenza senza errori

t_0	ΔV [km/s]
199.5	1.72037038046178
199.75	1.61203363950288
200	1.53971315335953

Tabella 7: Ricerca del t_0 ottimale per 2012LA

Mentre non risultano esserci convergenze a date di partenza precedenti la prima considerata, si hanno invece miglioramenti notevoli andando a posticipare la data di partenza. La soluzione migliore tra quelle individuate risulta essere quella per cui si ha partenza il 31 ottobre 2031, in quanto risulta avere ΔV inferiore, pari a circa 1.54 km/s, e massa finale maggiore, pari a 1443.4 kg.

Viene di seguito presentato il grafico di semiasse a , apogeo r_a , perigeo r_p dell'orbita al variare del tempo per la soluzione a ΔV inferiore.

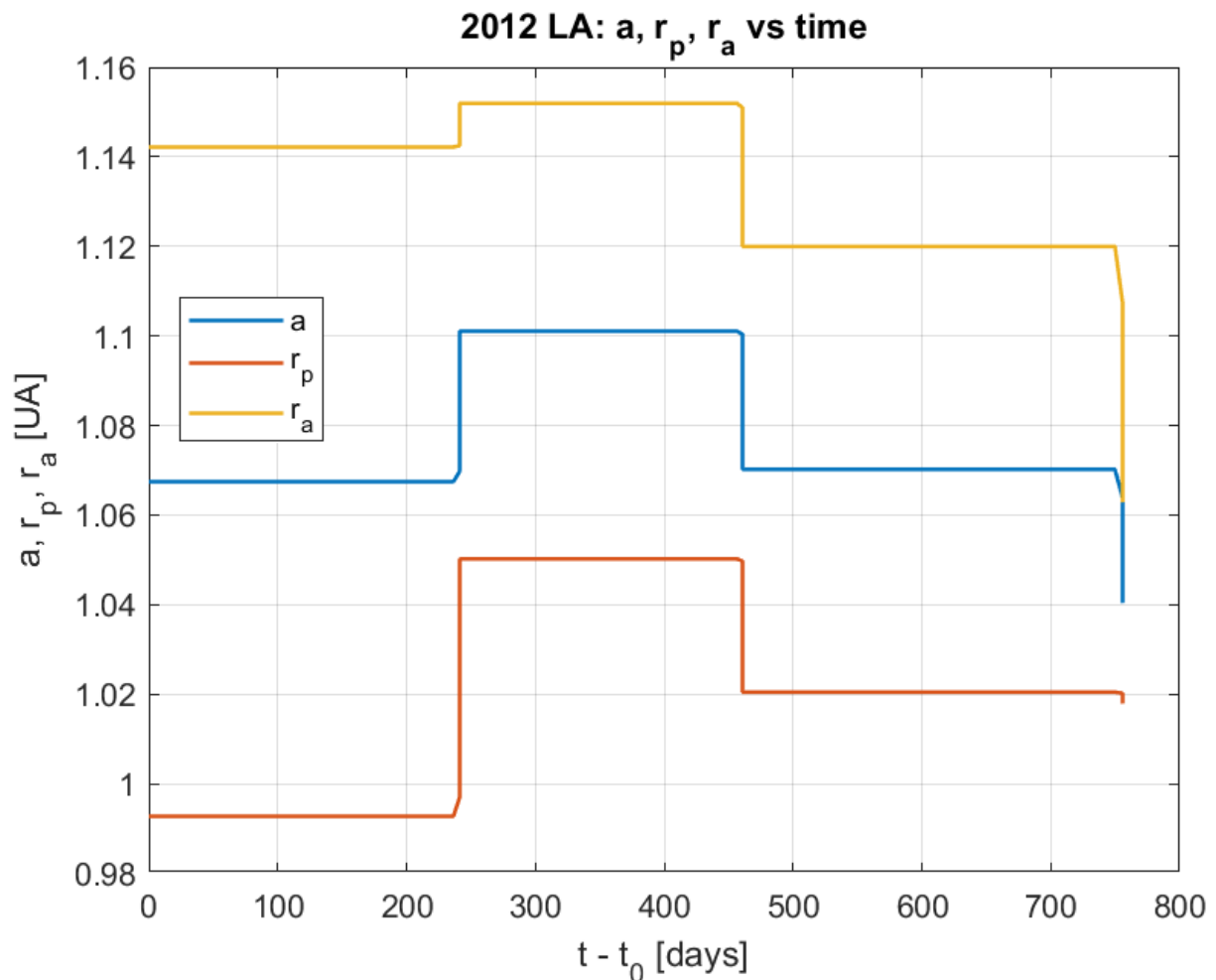


Figura 3: Andamento di semiasse, afelio e perielio al variare del tempo per la soluzione migliore di 2012LA

Per l'asteroide 2012 LA il consumo di propellente risulta relativamente elevato, in quanto è necessario effettuare un significativo cambio di fase tra lo spacecraft e il target.

Come si può osservare dal grafico precedente, per ottenere la corretta fasatura lo spacecraft deve modificare il proprio periodo orbitale aumentando il semiasse maggiore dell'orbita fino a circa 1.1 AU. Questa variazione consente di adattare la velocità angolare della sonda rispetto a quella dell'asteroide.

Successivamente il semiasse viene ridotto mediante ulteriori manovre per riportare l'orbita a valori compatibili con quella del target, fino a soddisfare la condizione finale di matching.

Tale sequenza di variazioni del semiasse comporta un aumento del costo energetico del trasferimento, poiché richiede sia l'innalzamento iniziale dell'orbita sia le successive manovre necessarie a ridurre nuovamente l'energia orbitale.

L'andamento non monotono del semiasse evidenzia quindi come una parte significativa del ΔV sia impiegata per la gestione della fasatura orbitale piuttosto che per il solo trasferimento verso l'orbita dell'asteroide.

2017 BN93

Parametri orbitali di 2017 BN93 osservati all'epoca 61000, ossia 21 novembre 2025

a [AU]	1.0444
e	0.05146
i [deg]	2.12105
w [deg]	23.3922
Ω [deg]	315.7649
M [deg]	235.4538

Tabella 8: Parametri orbitali di 2017 BN93

La prima soluzione accettabile ha portato i seguenti risultati

ASTEROIDE	T_0	T_f	V_{inf} [km/s]	ΔV [km/s]	% m_f	Struttura
2017 BN93	200	213	1	1.173504015	68.3939337	01010

Tabella 9: Risultati ottenuti per 2017 BN93 a t_0

Le date di partenza e di arrivo corrispondono rispettivamente al 31 ottobre 2031 e al 25 novembre 2033, portando dunque la missione ad avere una durata di poco più di due anni.

La soluzione nel regime ad alta spinta prevede due archi di spinta per poter raggiungere l'asteroide target partendo dalla terra. La durata degli archi è 16.5 minuti per il primo e 80 minuti per il secondo, risultando quindi in una durata decisamente inferiore rispetto a quella totale, traducendosi, come anticipato, in un comportamento quasi impulsivo.

Questo comportamento è anche ben visibile attraverso il seguente grafico, che riporta le variazioni di semiasse a , apogeo r_a , perigeo r_p dell'orbita al variare del tempo, espresso in giorni.

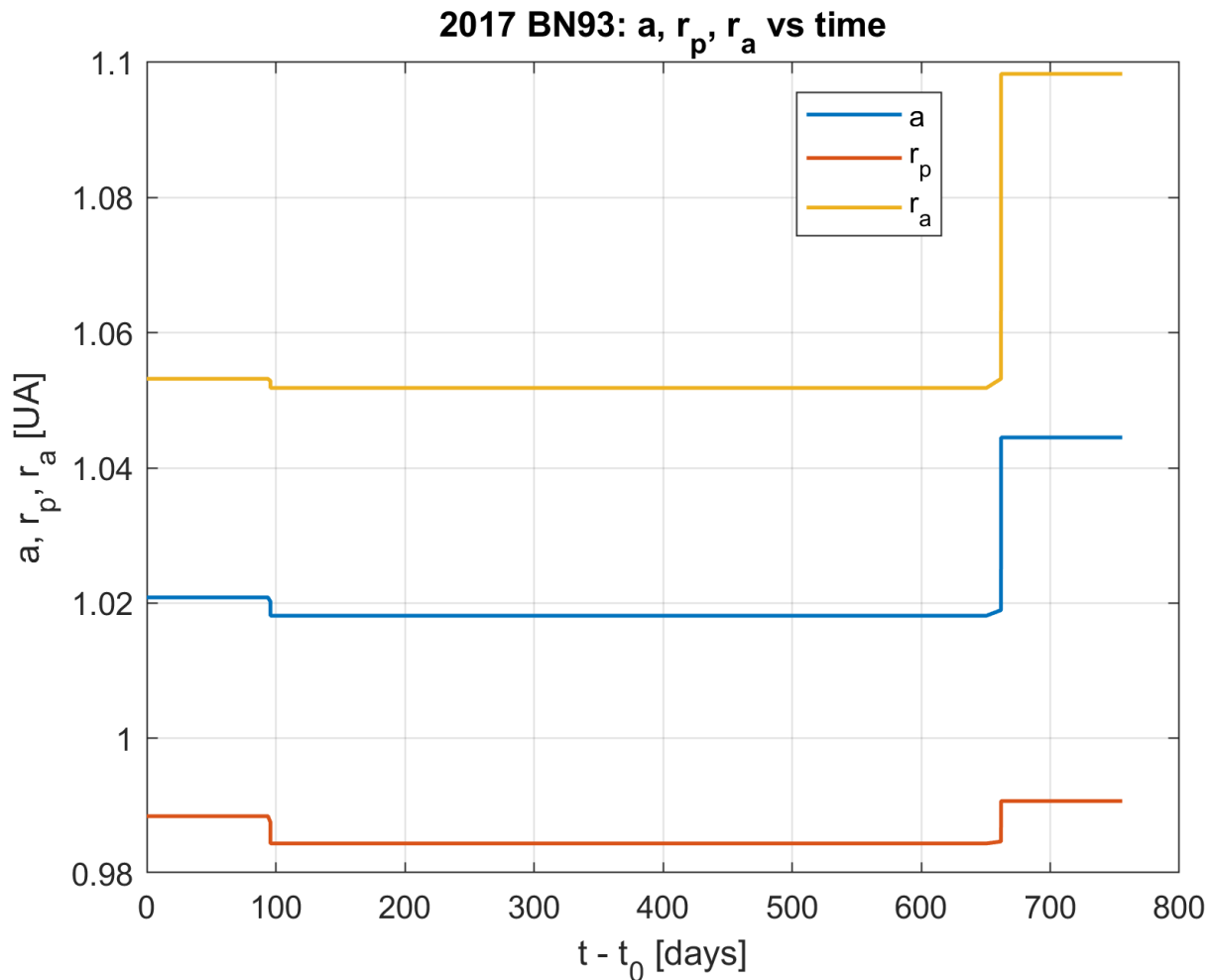


Figura 4: Andamento di semiasse, afelio e perielio nel tempo per 2017 BN93 a t_0

Come si può notare dal grafico, la trasferta necessita di due cambi di semiasse, in particolare un decremento a 95 giorni di missione, e un incremento al 660-esimo giorno di missione, portandolo al valore di matching con l'asteroide.

Considerando quindi una massa iniziale pari a 2371 kg, la soluzione ottenuta porta ad avere una massa finale pari a 1621.62 kg, corrispondente ad una frazione residua del 68.4% circa, mentre il ΔV necessario al completamento della missione è 1.1735 km/s.

È stata inoltre analizzata una soluzione con partenza posticipata di un anno, calcolata aggiungendo al t_0 precedente un valore pari a 6.28.

ASTEROIDE	T_0	T_f	$V_{inf} \left[\frac{km}{s} \right]$	$\Delta V \left[\frac{km}{s} \right]$	% m_f	Struttura
2017 BN93	206.28	219.28	1	1.2009512083	67.7889324	01010

Tabella 10: Risultati ottenuti per 2017 BN93 a t_0+1

Si nota come la modifica del tempo di partenza vada a impattare sulla nuova traiettoria, producendo infatti un risultato con ΔV e massa finale differenti. La differenza con la soluzione precedente è anche osservabile in termini di energia e semiasse dell'orbita, visibile andando a visionare il grafico di semiasse a , apogeo r_a , perigeo r_p dell'orbita al variare del tempo, che per la nuova soluzione risulta essere

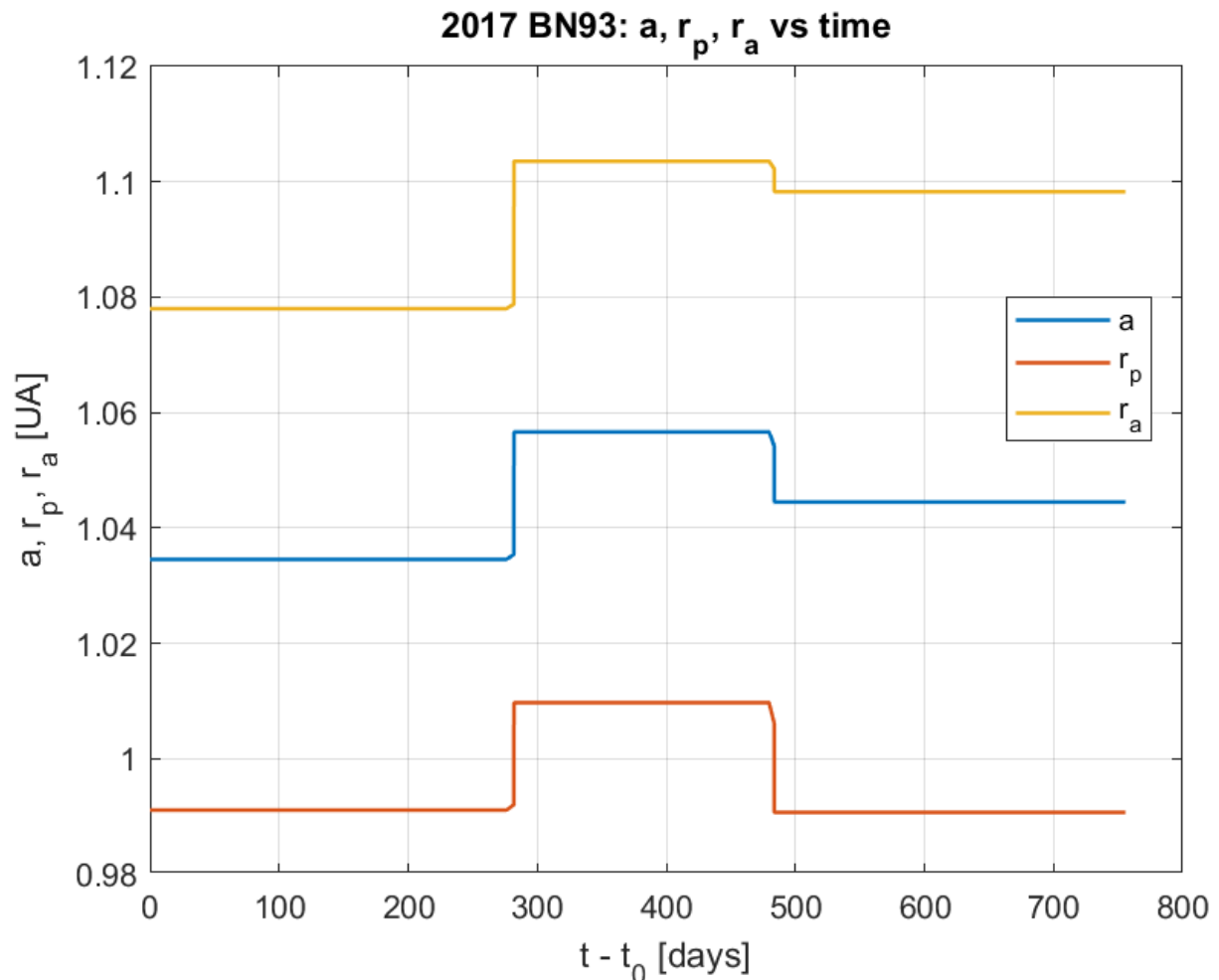


Figura 5: Andamento di semiasse, afelio e perielio al variare del tempo per 2017 BN93 a t_0+1

Viene di seguito riportata una tabella contenente un confronto diretto tra le due soluzioni, in cui la variazione percentuale è stata calcolata come

$$\frac{(x_{new} - x_{old})}{x_{old}} * 100$$

ASTEROIDE	ΔV assoluto $\left[\frac{km}{s}\right]$	ΔV [%]	m_f [%]
2017 BN93	0.027447	2.3386	-0.8846

Tabella 11: Confronto dei risultati per 2017 BN93

Per l'asteroide preso in esame notiamo come l'aumento di t_0 abbia prodotto una soluzione peggiore rispetto al caso precedente. Come si può notare dal grafico, posticipando la partenza di un anno peggiora la fasatura tra lo spacecraft e 2017 BN93, rendendo necessario un incremento del semiasse, che poi deve essere ridotto per soddisfare le

condizioni di matching. Si perde dunque l'andamento quasi monotono che caratterizza invece la partenza iniziale, rendendo quindi necessario spostarsi su di un'orbita esterna per una porzione della missione. Questo porta ad un aumento del ΔV necessario alla missione e quindi una massa finale minore.

Si vuole ora andare a raffinare la soluzione più promettente tra le due trovate attraverso un'analisi di sensibilità sul tempo di partenza. Per l'asteroide 2017 BN93 si è trovata un'unica soluzione con convergenza senza errori ad un tempo di partenza precedente quello inizialmente riportato.

t_0	ΔV [km/s]
199.75	1.134948883887

Tabella 12: Raffinamento di t_0 per 2017 BN93

Anticipare la missione al 16 ottobre 2031 permette di ridurre il costo energetico necessario al raggiungimento dell'asteroide target.

Viene di seguito presentato il grafico di semiasse a , apogeo r_a , perigeo r_p dell'orbita al variare del tempo per la soluzione a ΔV inferiore.

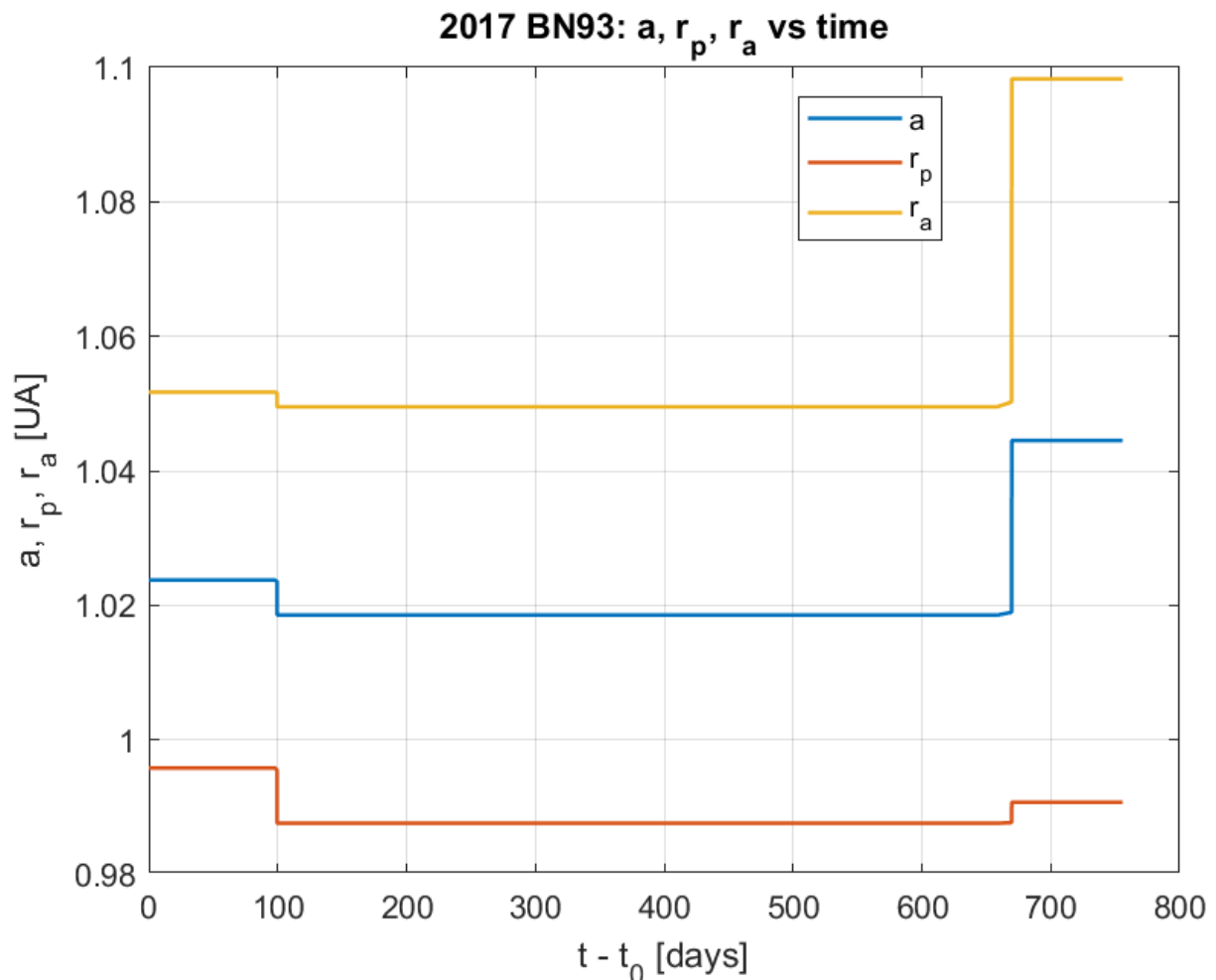


Figura 6: Andamento di semiasse, afelio e perielio di 2017 BN93 al t_0 migliore

Per l'asteroide 2017 BN93 il consumo di propellente risulta contenuto, in quanto la fasatura tra lo spacecraft e l'asteroide target è favorevole.

Come si può osservare dal grafico precedente, la variazione del semiasse maggiore risulta quasi monotona e di entità limitata. In una prima fase si osserva una leggera riduzione del semiasse, che corrisponde al trasferimento su un'orbita leggermente più interna. Questa manovra consente di aumentare la velocità angolare dello spacecraft e quindi di recuperare fase rispetto all'asteroide.

Nella parte finale del trasferimento il semiasse viene invece aumentato per riportare l'orbita dello spacecraft a valori compatibili con quella del target e soddisfare la condizione di matching finale.

Poiché le variazioni dell'energia orbitale risultano contenute e non sono necessari grandi cambi di fase, il costo energetico complessivo della missione risulta significativamente inferiore rispetto ai casi in cui la fasatura iniziale è meno favorevole.

2011 BL45

Parametri orbitali di 2011 BL45 osservati all'epoca 61000, ossia 21 novembre 2025

a [AU]	1.03785
e	0.02095698
i [deg]	3.04798
w [deg]	155.24853
Ω [deg]	134.75672
M [deg]	204.1312195

Tabella 13: Parametri orbitali di 2011 BL45

La prima soluzione accettabile ha portato i seguenti risultati

ASTEROIDE	T_0	T_f	V_{inf} [km/s]	ΔV [km/s]	% m_f	Struttura
2011 BL45	198.9	213.7	1.4	1.147579765	68.9703233	010101

Tabella 14: Risultati di convergenza per 2011 BL45 a t_0

Le date di partenza e di arrivo corrispondono rispettivamente al 28 agosto 2031 e al 4 gennaio 2034, portando dunque la missione ad avere una durata di circa due anni e mezzo.

La soluzione nel regime ad alta spinta prevede tre archi di spinta per poter raggiungere l'asteroide target partendo dalla terra. La durata degli archi è 49 minuti per il primo, 16 minuti per il secondo e infine 30 minuti per il terzo, risultando quindi in una durata decisamente inferiore rispetto a quella totale, traducendosi, come anticipato, in un comportamento quasi impulsivo.

Questo comportamento è anche ben visibile attraverso il seguente grafico, che riporta le variazioni di semiasse a , apogeo r_a , perigeo r_p dell'orbita al variare del tempo, espresso in giorni.

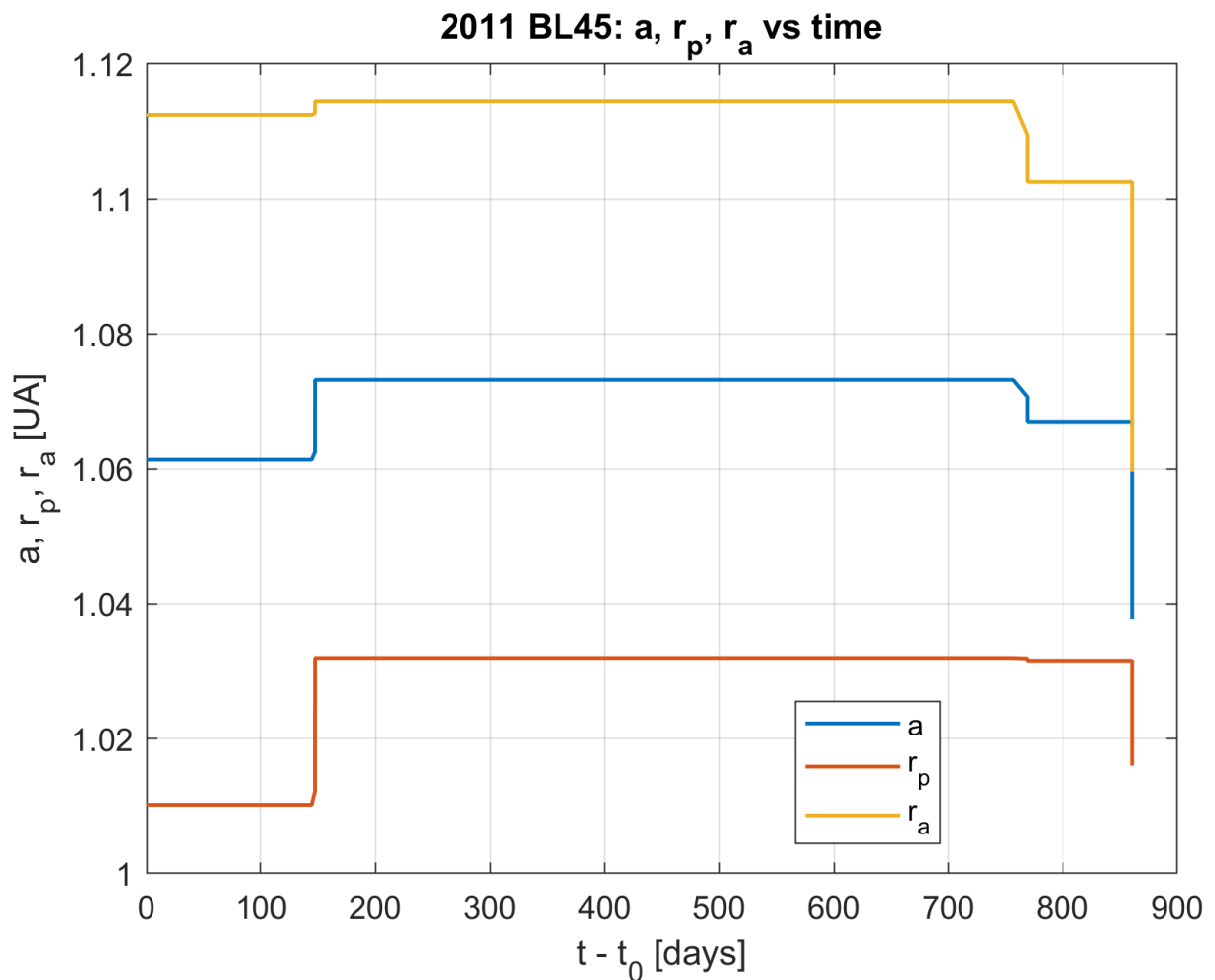


Figura 7: Andamento di semiasse, afelio e perielio di 2011 BL45 a t_0

Come si può notare dal grafico, la trasferta necessita di tre cambi di semiasse, in particolare un incremento a 140 giorni di missione, e due riduzioni a 760 e 860 giorni, portando infine al matching con l'asteroide.

Considerando quindi una massa iniziale pari a 2371 kg, la soluzione ottenuta porta ad avere una massa finale pari a 1635.27 kg, corrispondente ad una frazione residua del 68.97% circa, mentre il ΔV necessario al completamento della missione è 1.14758 km/s.

È stata inoltre analizzata una soluzione con partenza posticipata di un anno, calcolata aggiungendo al t_0 precedente un valore pari a 6.28.

ASTEROIDE	T_0	T_f	$V_{inf} \left[\frac{km}{s} \right]$	$\Delta V \left[\frac{km}{s} \right]$	% m_f	Struttura
2011 BL45	205.03	219.53	1.7	1.0947537479	70.1599141	010101

Tabella 15: Risultati di convergenza di 2011 BL45 a t_0+1

Si nota come la modifica del tempo di partenza vada a impattare sulla nuova traiettoria, producendo infatti un risultato con ΔV e massa finale differenti. La differenza con la soluzione precedente è anche osservabile in termini di energia e semiasse dell'orbita, visibile andando a visionare il grafico di semiasse a , apogeo r_a , perigeo r_p dell'orbita al variare del tempo, che per la nuova soluzione risulta essere

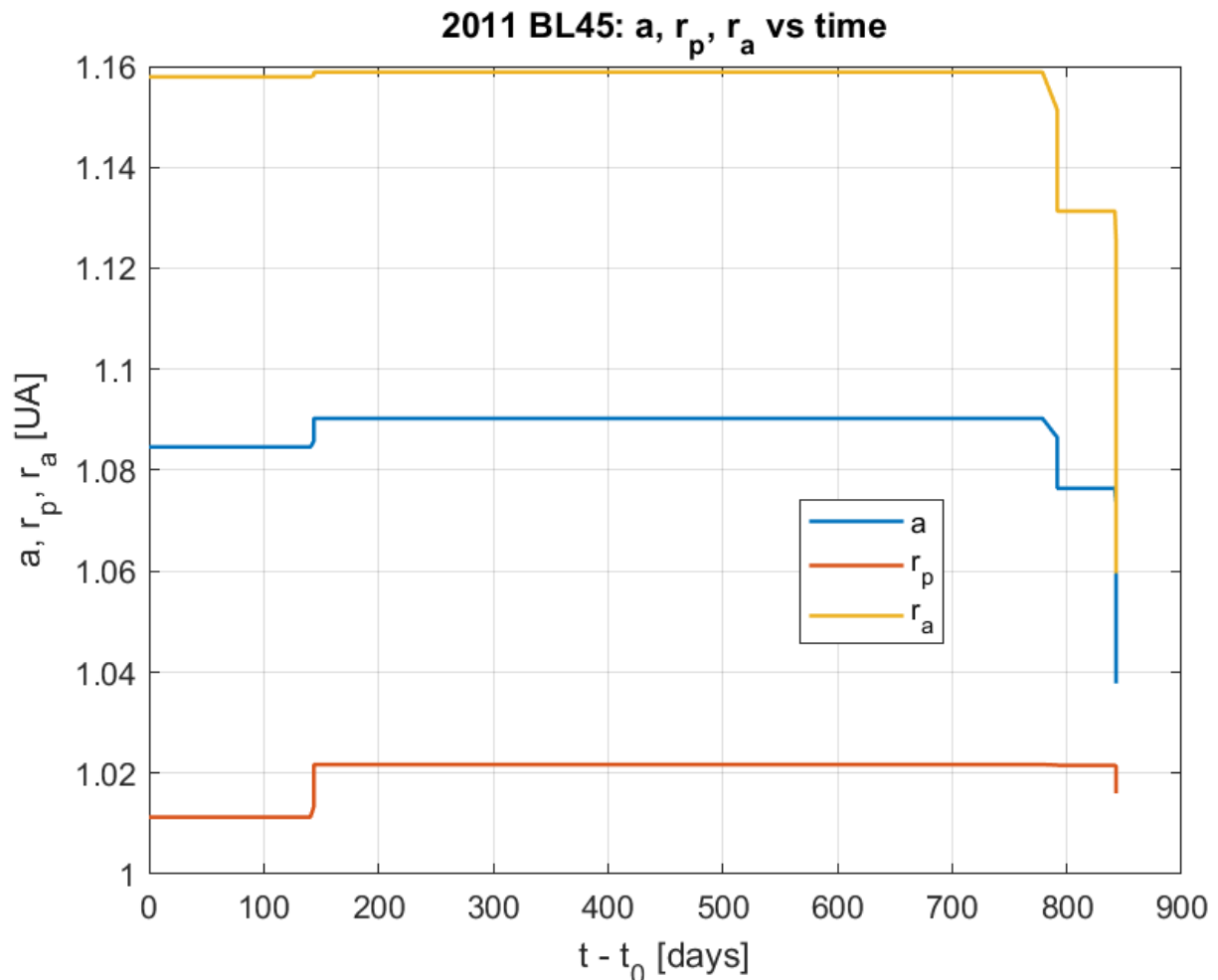


Figura 8: Andamento di semiasse, afelio e perielio di 2011 BL45 a t_0+1

Viene di seguito riportata una tabella contenente un confronto diretto tra le due soluzioni, in cui la variazione percentuale è stata calcolata come

$$\frac{(x_{new} - x_{old})}{x_{old}} * 100$$

ASTEROIDE	ΔV assoluto $\left[\frac{km}{s}\right]$	ΔV [%]	m_f [%]
2011 BL45	-0.052826	-4.6033	1.7248

Tabella 16: confronto risultati per 2011 BL45

Per l'asteroide preso in esame notiamo come l'aumento di t_0 abbia prodotto una soluzione migliore rispetto al caso precedente, in quanto si ha una diminuzione del ΔV necessario alla missione e quindi una massa finale maggiore. Questo è dovuto principalmente al fatto che dopo un anno, l'asteroide si trova più vicino alla terra, ossia ad una fasatura migliore.

Il raffinamento della soluzione, effettuato andando a variare il tempo di partenza rispetto alla soluzione migliore, non ha prodotto risultati accettabili, in quanto presenti errori sulla switching function sia per date precedenti che per quelle successive al 28 agosto 2032. Questo suggerisce che il risultato trovato per la convergenza a $t_0 = 205.03$ con i parametri sopra riportati sia molto prossimo alla soluzione ottimale.

Notiamo infatti come per l'asteroide 2011 BL45 il costo energetico del trasferimento sia esiguo in quanto la fasatura tra lo spacecraft e l'asteroide è favorevole. Come si può notare infatti dal grafico sopra riportato, la variazione del semiasse è pressoché monotona, con riduzione dello stesso nella fase finale del trasferimento così soddisfare la condizione di matching.

2025 SC

Parametri orbitali di 2025 SC osservati all'epoca 61000, ossia 21 novembre 2025

a [AU]	1.0053562
e	0.10130618
i [deg]	2.97940
w [deg]	279.24765
Ω [deg]	171.93735
M [deg]	337.9078206

Tabella 17: Parametri orbitali di 2025 SC

La prima soluzione accettabile ha portato i seguenti risultati

ASTEROIDE	T_0	T_f	V_{inf} $\left[\frac{km}{s}\right]$	ΔV $\left[\frac{km}{s}\right]$	% m_f	Struttura
2025 SC	200.5	216.5	1.4	1.755212351	56.6546371	01010

Tabella 18: Risultati di convergenza per 2025 SC a t_0

Le date di partenza e di arrivo corrispondono rispettivamente al 29 novembre 2031 e al 16 giugno 2034, portando dunque la missione ad avere una durata di due anni e mezzo.

La soluzione nel regime ad alta spinta prevede due archi di spinta per poter raggiungere l'asteroide target partendo dalla terra. La durata degli archi è 71 minuti per il primo e 62 minuti per il secondo, risultando quindi in una durata decisamente inferiore rispetto a quella totale, traducendosi, come anticipato, in un comportamento quasi impulsivo.

Questo comportamento è anche ben visibile attraverso il seguente grafico, che riporta le variazioni di semiasse a , apogeo r_a , perigeo r_p dell'orbita al variare del tempo, espresso in giorni.

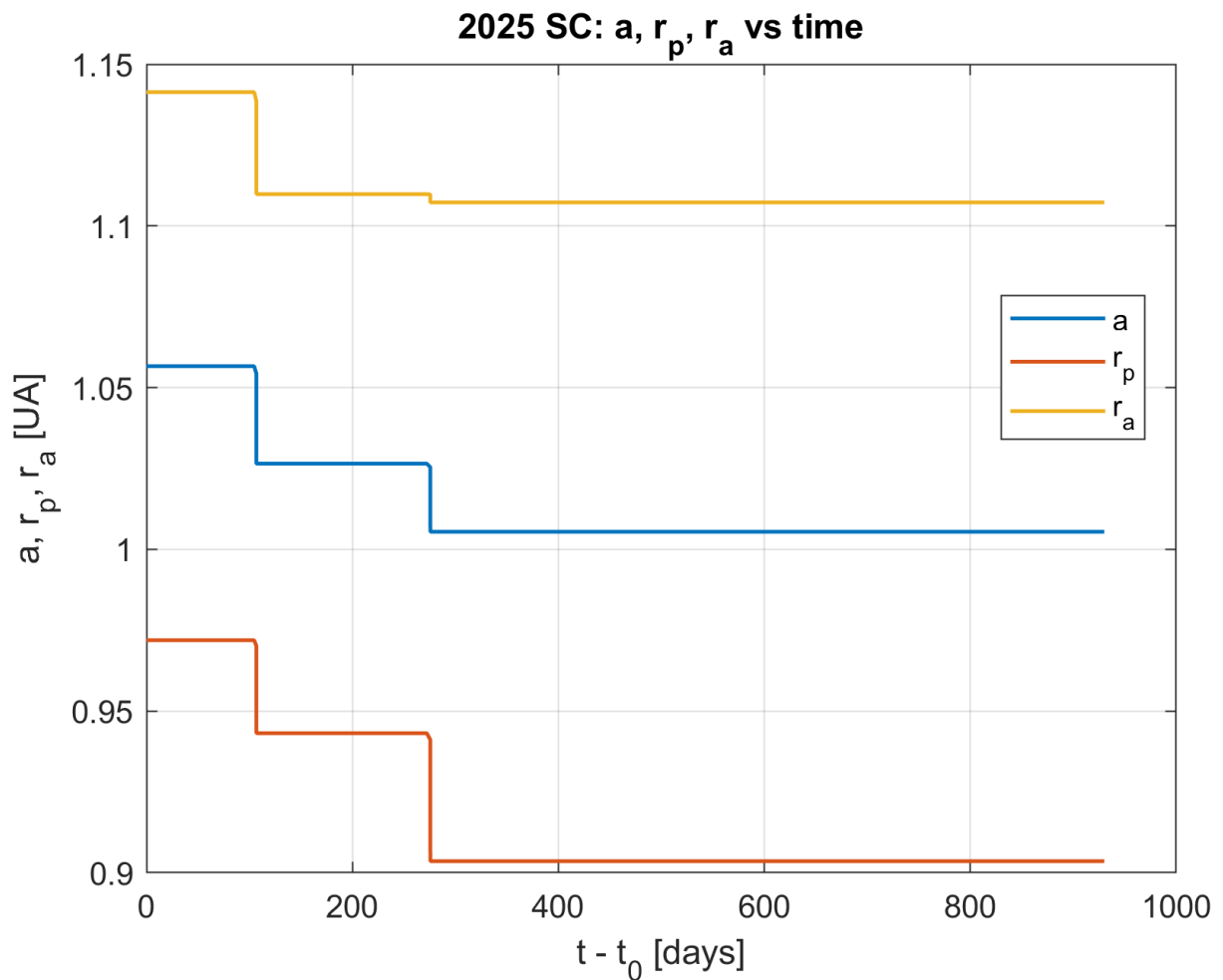


Figura 9: Andamento di semiasse, afelio e perielio di 2025 SC a t_0

Come si può notare dal grafico, la trasferta necessita di due cambi di semiasse, in particolare un decremento a 100 giorni di missione e uno a 280, portandosi sull'orbita dell'asteroide.

Considerando quindi una massa iniziale pari a 2371 kg, la soluzione ottenuta porta ad avere una massa finale pari a 1343.28 kg, corrispondente ad una frazione residua del 56.65% circa, mentre il ΔV necessario al completamento della missione è 1.7552 km/s.

È stata inoltre analizzata una soluzione con partenza posticipata di un anno, calcolata aggiungendo al t_0 precedente un valore pari a 6.28.

ASTEROIDE	T_0	T_f	$V_{inf} \left[\frac{km}{s} \right]$	$\Delta V \left[\frac{km}{s} \right]$	% m_f	Struttura
2025 SC	206.78	222.78	1.2	1.7343105416	57.0392804	01010

Tabella 19: Risultati di 2025 SC a t_0+1

Si nota come la modifica del tempo di partenza vada a impattare sulla nuova traiettoria, producendo infatti un risultato con ΔV e massa finale differenti. La differenza con la soluzione precedente è anche osservabile in termini di energia e semiasse dell'orbita, visibile andando a visionare il grafico di semiasse a , apogeo r_a , perigeo r_p dell'orbita al variare del tempo, che per la nuova soluzione risulta essere

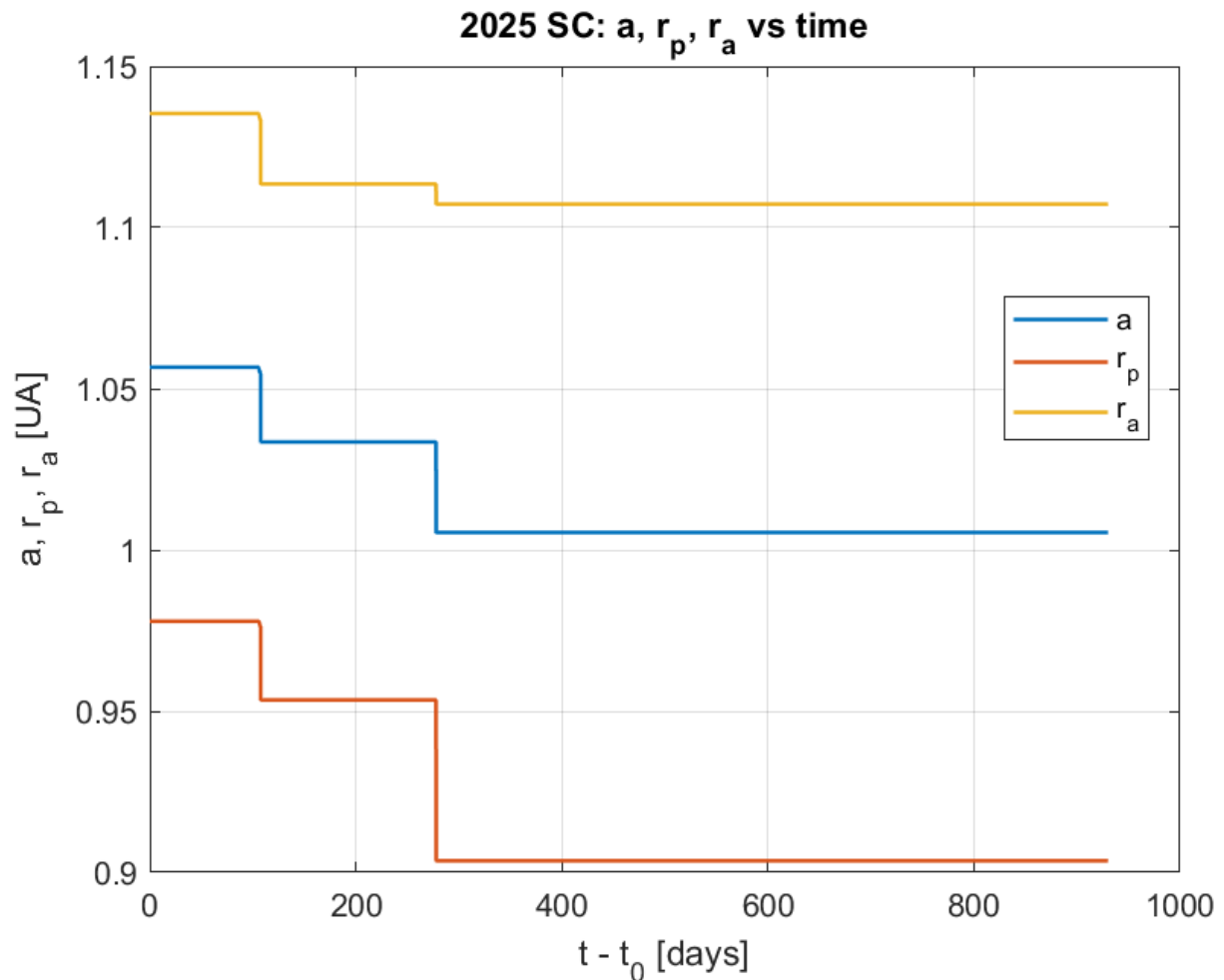


Figura 10: Andamento di semiasse, afelio e perielio di 2025 SC a t_0+1

Viene di seguito riportata una tabella contenente un confronto diretto tra le due soluzioni, in cui la variazione percentuale è stata calcolata come

$$\frac{(x_{new} - x_{old})}{x_{old}} * 100$$

ASTEROIDE	ΔV assoluto $\left[\frac{km}{s}\right]$	ΔV [%]	m_f [%]
2025 SC	-0.020902	-1.1908	0.6789

Tabella 20: Confronto risultati di 2025 SC

Per l'asteroide preso in esame notiamo come l'aumento di t_0 abbia prodotto una soluzione migliore rispetto al caso precedente, in quanto si ha una diminuzione del ΔV necessario alla missione e quindi una massa finale maggiore. Questo è dovuto al fatto che nonostante la variazione di semiasse rispetto alla data di partenza iniziale abbia andamento analogo,

posticipandola si nota come la prima diminuzione porti lo spacecraft ad un'orbita a semiasse con valore superiore, sulla quale rimane maggiormente.

Raffinando ulteriormente la soluzione a ΔV inferiore, è stata trovata una soluzione migliore anticipando la data di partenza a un mese prima, ossia al 28 ottobre 2032

t_0	ΔV [km/s]
206.25	1.18155038064141

Tabella 21: Ricerca di t_0 ottimo per 2025 SC

Per la quale, l'andamento di semiasse a , apogeo r_a , perigeo r_p dell'orbita al variare del tempo risulta essere il seguente

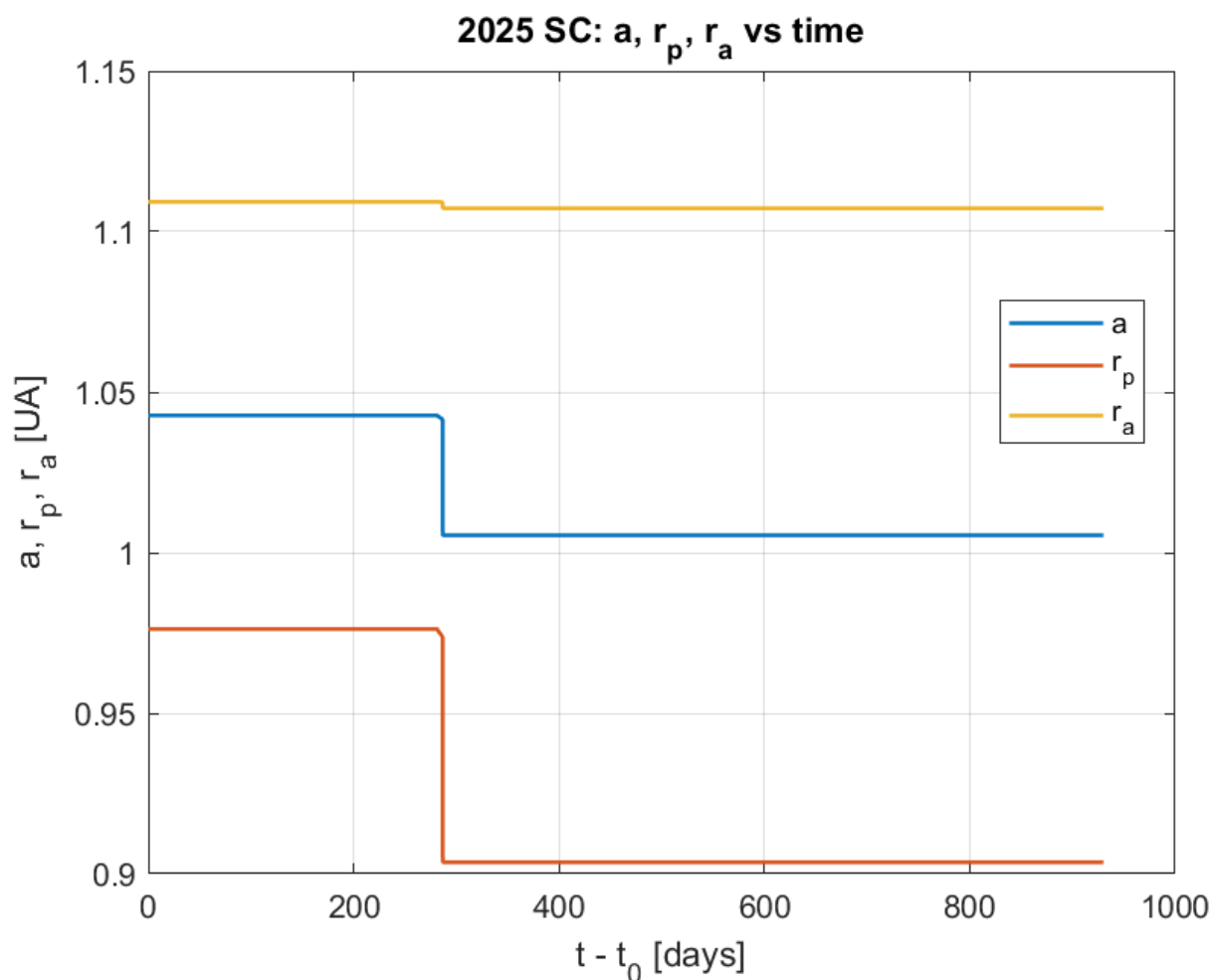


Figura 11: Andamento di semiasse, afelio e perielio di 2025 SC a t_0 migliore

Per l'asteroide 2025 SC il costo energetico risulta estremamente contenuto, in quanto la fasatura tra lo spacecraft e l'asteroide target è ottima.

Come si può notare dal grafico precedente, infatti, la variazione del semiasse maggiore risulta essere perfettamente monotona, con un'unica riduzione necessaria al fine del

raggiungimento dell'orbita dell'asteroide. È dunque necessaria un'unica fase di spinta per soddisfare le condizioni di matching, che si traduce dunque in un consumo basso.

2016 RD34

Parametri orbitali di 2016 RD34 osservati all'epoca 61000, ossia 21 novembre 2025

a [AU]	1.0462289
e	0.03470914
i [deg]	1.95729
w [deg]	11.02689
Ω [deg]	349.56980
M [deg]	201.9040869

Tabella 22: Parametri orbitali di 2016 RD34

La prima soluzione accettabile ha portato i seguenti risultati

ASTEROIDE	T_0	T_f	V_{inf} $\left[\frac{km}{s}\right]$	ΔV $\left[\frac{km}{s}\right]$	% m_f	Struttura
2016 RD34	200.75	216.75	1	1.258852824	66.5301391	0101010

Tabella 23: Risultati di convergenza di 2016 RD34 a t_0

Le date di partenza e di arrivo corrispondono rispettivamente al 14 dicembre 2031 e al 1 luglio 2034, portando dunque la missione ad avere una durata di poco più di due anni e mezzo.

La soluzione nel regime ad alta spinta prevede tre archi di spinta per poter raggiungere l'asteroide target partendo dalla terra. La durata degli archi è 47 minuti per il primo, 42 minuti per il secondo e infine 14 minuti per il terzo, risultando quindi in una durata decisamente inferiore rispetto a quella totale, traducendosi, come anticipato, in un comportamento quasi impulsivo.

Questo comportamento è anche ben visibile attraverso il seguente grafico, che riporta le variazioni di semiasse a , apogeo r_a , perigeo r_p dell'orbita al variare del tempo, espresso in giorni.

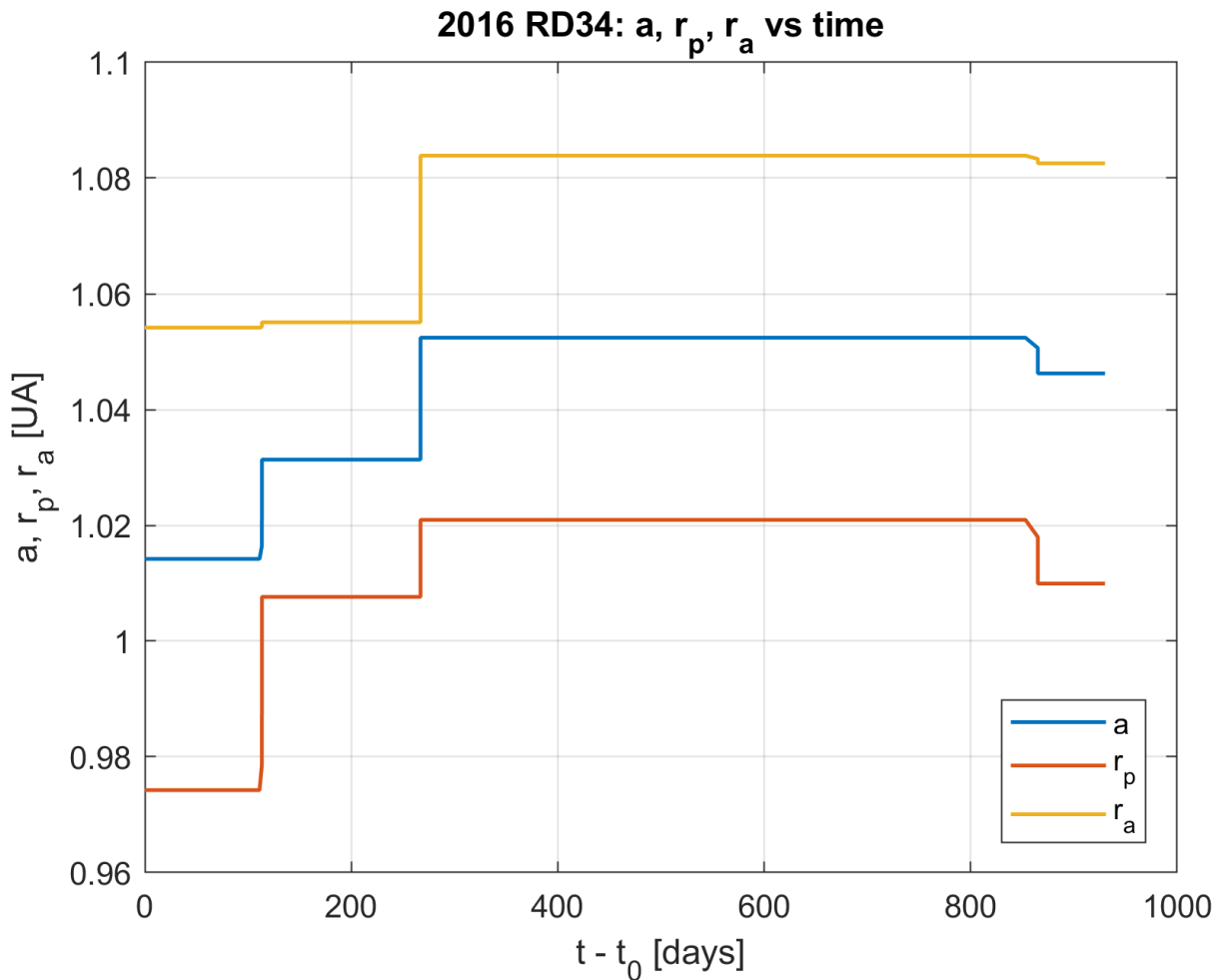


Figura 12: Andamento di semiasse, afelio e perielio di 2016 RD34 a t_0

Come si può notare dal grafico, la trasferta necessita di tre cambi di semiasse, in particolare due incrementi a 110 e 270 giorni di missione, e una riduzione a 860 giorni, portando infine al matching con l'asteroide.

Considerando quindi una massa iniziale pari a 2371 kg, la soluzione ottenuta porta ad avere una massa finale pari a 1577.43 kg, corrispondente ad una frazione residua del 66.53% circa, mentre il ΔV necessario al completamento della missione è 1.25885 km/s.

È stata inoltre analizzata una soluzione con partenza posticipata di un anno, calcolata aggiungendo al t_0 precedente un valore pari a 6.28.

ASTEROIDE	T_0	T_f	$V_{inf} \left[\frac{km}{s} \right]$	$\Delta V \left[\frac{km}{s} \right]$	% m_f	Struttura
2016 RD34	207.28	221.28	1.4	1.5788664571	59.9829546	010101

Tabella 24: Risultati di convergenza di 2016 RD34 a t_0+1

Si nota come la modifica del tempo di partenza vada a impattare sulla nuova traiettoria, producendo infatti un risultato con ΔV e massa finale differenti. La differenza con la

soluzione precedente è anche osservabile in termini di energia e semiasse dell'orbita, visibile andando a visionare il grafico di semiasse a , apogeo r_a , perigeo r_p dell'orbita al variare del tempo, che per la nuova soluzione risulta essere

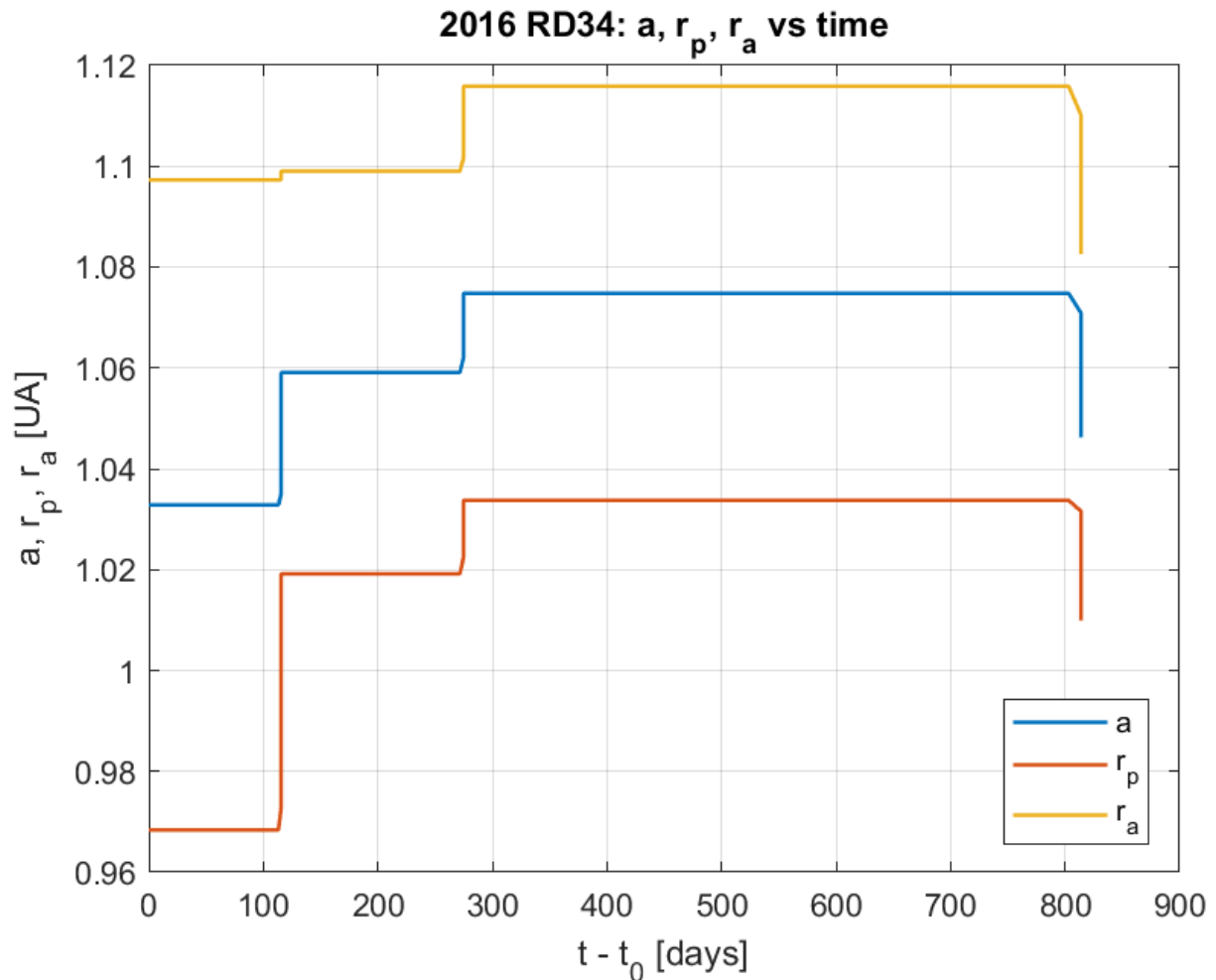


Figura 13: Andamento di semiasse, afelio e perielio di 2016 RD34 a t_0+1

Viene di seguito riportata una tabella contenente un confronto diretto tra le due soluzioni, in cui la variazione percentuale è stata calcolata come

$$\frac{(x_{new} - x_{old})}{x_{old}} * 100$$

ASTEROIDE	ΔV assoluto $\left[\frac{km}{s}\right]$	ΔV [%]	m_f [%]
2016 RD34	0.320013	25.4211	-9.8409

Tabella 25: Confronto risultati per 2016 RD34

Per l'asteroide preso in esame notiamo come l'aumento di t_0 abbia prodotto una soluzione peggiore rispetto al caso precedente, dovuto ad una fasatura peggiore in quanto l'asteroide si trova a distanza maggiore. Questo si può notare dal grafico andando ad osservare il valore del semiasse che deve essere innalzato ad un valore pari a 1.075 UA per poi essere ridotto a quello dell'asteroide target. Questo si traduce in uno spreco di

propellente, che porta quindi a un notevole aumento del ΔV necessario alla missione e quindi una massa finale minore.

Raffinando ulteriormente la soluzione a ΔV inferiore, modificando sia il tempo di partenza, anticipato al 15 novembre 2031, sia la durata, ridotta a 15, è stata ottenuta una soluzione a costo decisamente inferiore

t_0	ΔV [km/s]
200.25	1.00985023655307

Tabella 26: Ricerca di t_0 ottimo per 2016 RD34

Per la quale, l'andamento di semiasse a , apogeo r_a , perigeo r_p dell'orbita al variare del tempo risulta essere la seguente.

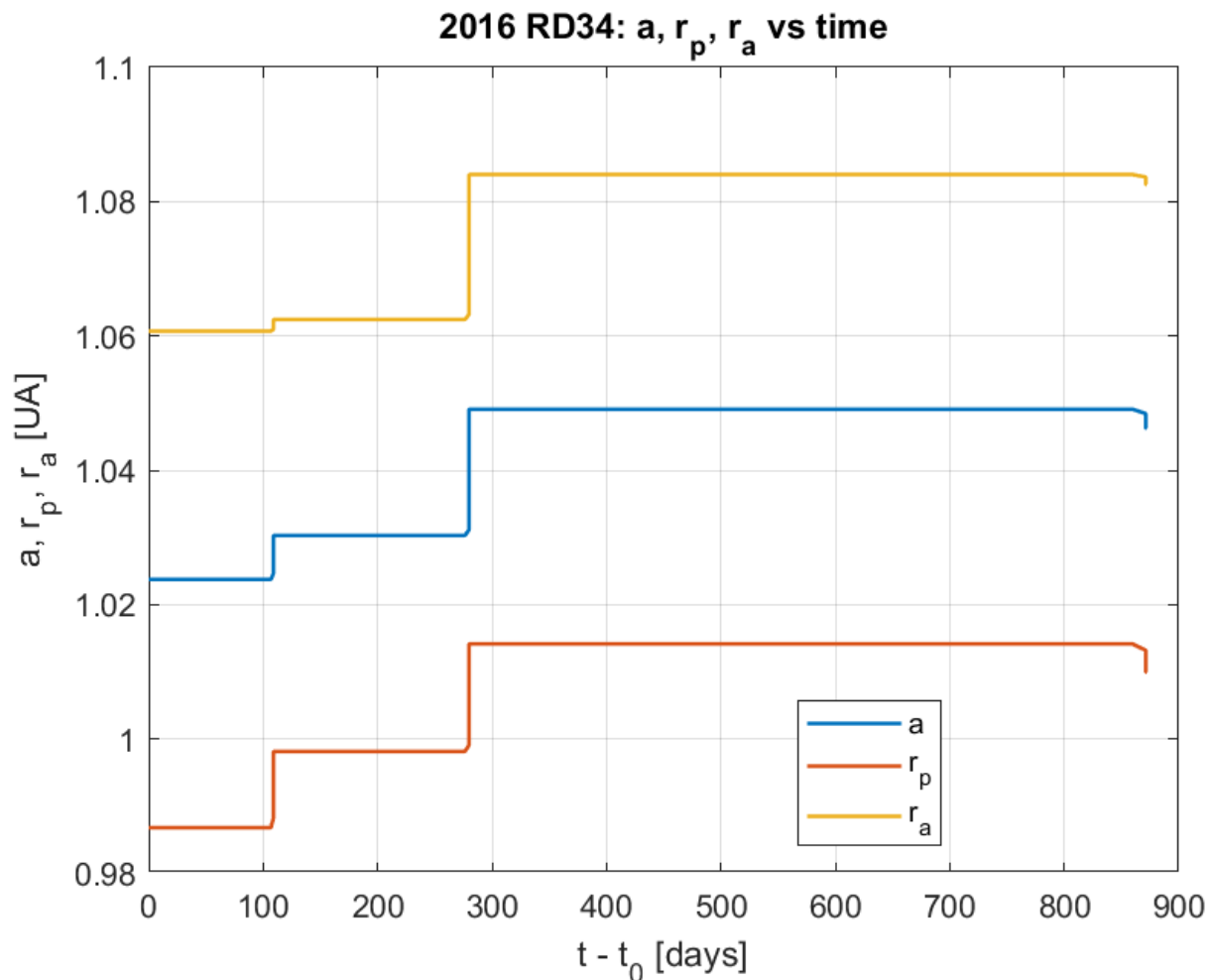


Figura 14: Andamento di semiasse, afelio e perielio di 2016 RD34 a t_0 ottimo

Per l'asteroide 2016 RD34 la variazione di semiasse maggiore risulta essere principalmente monotona crescente, con una riduzione finale del semiasse decisamente inferiore rispetto alle soluzioni precedenti, dovuta al fatto che gli innalzamenti del semiasse sono di entità ridotta. Questo è dovuto al fatto che alla data di partenza considerata, la fasatura tra spacecraft e asteroide risulta decisamente migliore, permettendo quindi una forte riduzione dei costi in termini di ΔV .

2008 EA9

Parametri orbitali di 2008 EA9 osservati all'epoca 61000, ossia 21 novembre 2025

a [AU]	1.0490817
e	0.07403311
i [deg]	0.44129
w [deg]	343.72863
Ω [deg]	124.02366
M [deg]	168.5820873

Tabella 27: Parametri orbitali di 2008 EA9

La prima soluzione accettabile ha portato i seguenti risultati

ASTEROIDE	T_0	T_f	V_{inf} $\left[\frac{km}{s}\right]$	ΔV $\left[\frac{km}{s}\right]$	% m_f	Struttura
2008 EA9	199.5	216.5	1	0.803818913	77.0888293	0101

Tabella 28: Risultati di convergenza per 2008 EA9 a t_0

Le date di partenza e di arrivo corrispondono rispettivamente al 2 ottobre 2031 e al 16 giugno 2034, portando dunque la missione ad avere una durata di due anni e otto mesi.

La soluzione nel regime ad alta spinta prevede due archi di spinta per poter raggiungere l'asteroide target partendo dalla terra. La durata degli archi è 52.4 minuti per il primo e 17.5 minuti per il secondo, risultando quindi in una durata decisamente inferiore rispetto a quella totale, traducendosi, come anticipato, in un comportamento quasi impulsivo.

Questo comportamento è anche ben visibile attraverso il seguente grafico, che riporta le variazioni di semiasse a , apogeo r_a , perigeo r_p dell'orbita al variare del tempo, espresso in giorni.

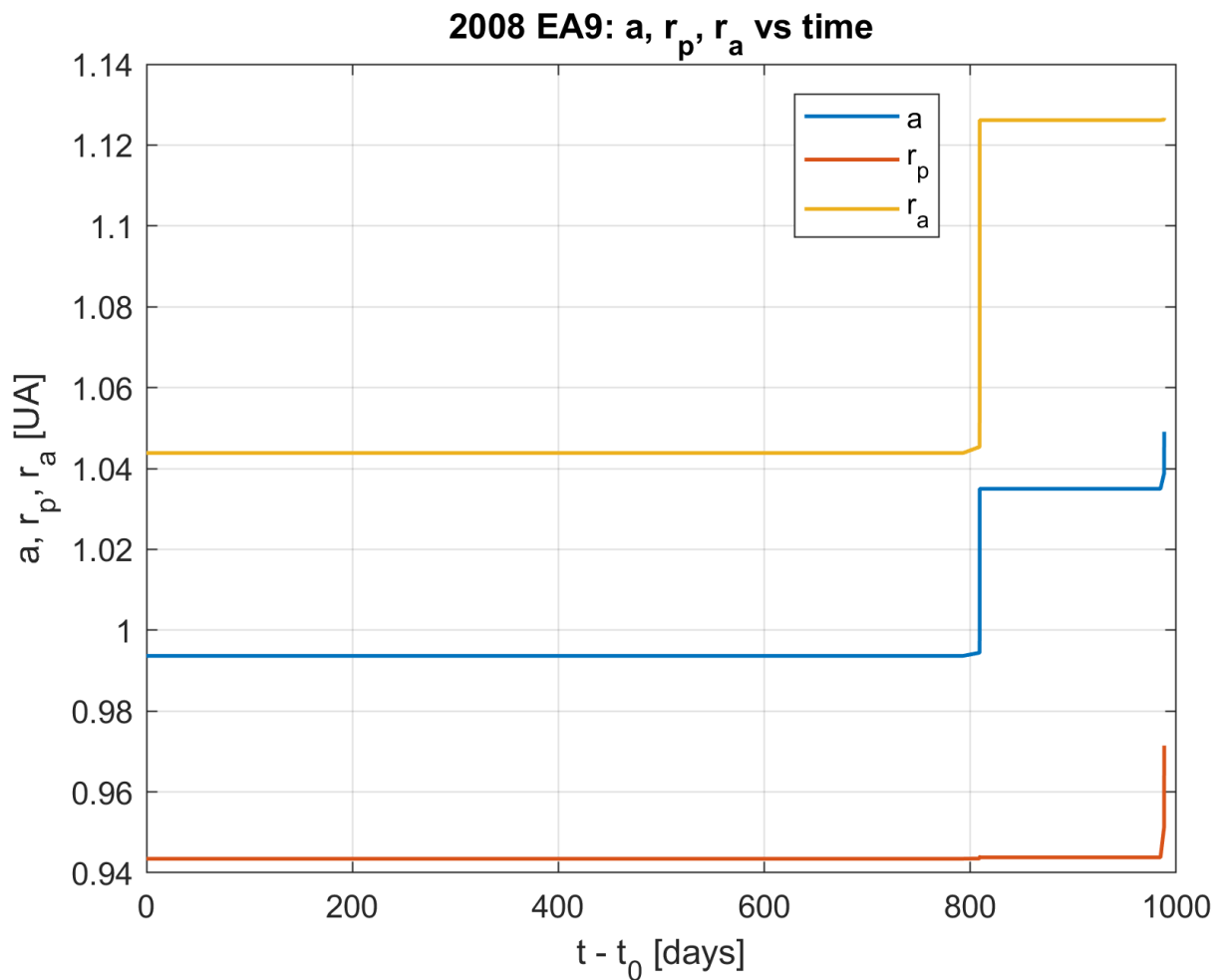


Figura 15: Andamento di semiasse, afelio e perielio di 2008 EA9 a t_0

Come si può notare dal grafico, la trasferta necessita di due cambi di semiasse, entrambi volti a incrementarlo, a 800 e 988 giorni di missione, raggiungendo infine il matching con l'asteroide.

Considerando quindi una massa iniziale pari a 2371 kg, la soluzione ottenuta porta ad avere una massa finale pari a 1827.77 kg, corrispondente ad una frazione residua del 77.1% circa, mentre il ΔV necessario al completamento della missione è 0.8038 km/s.

È stata inoltre analizzata una soluzione con partenza posticipata di un anno, calcolata aggiungendo al t_0 precedente un valore pari a 6.28.

ASTEROIDE	T_0	T_f	$V_{inf} \left[\frac{km}{s} \right]$	$\Delta V \left[\frac{km}{s} \right]$	% m_f	Struttura
2008 EA9	206.28	223.28	1	0.5309770487	84.2073826	0101

Tabella 29: Risultati di 2008 EA9 a t_0+1

Si nota come la modifica del tempo di partenza vada a impattare sulla nuova traiettoria, producendo infatti un risultato con ΔV e massa finale differenti. La differenza con la soluzione precedente è anche osservabile in termini di energia e semiasse dell'orbita, visibile andando a visionare il grafico di semiasse a , apogeo r_a , perigeo r_p dell'orbita al variare del tempo, che per la nuova soluzione risulta essere

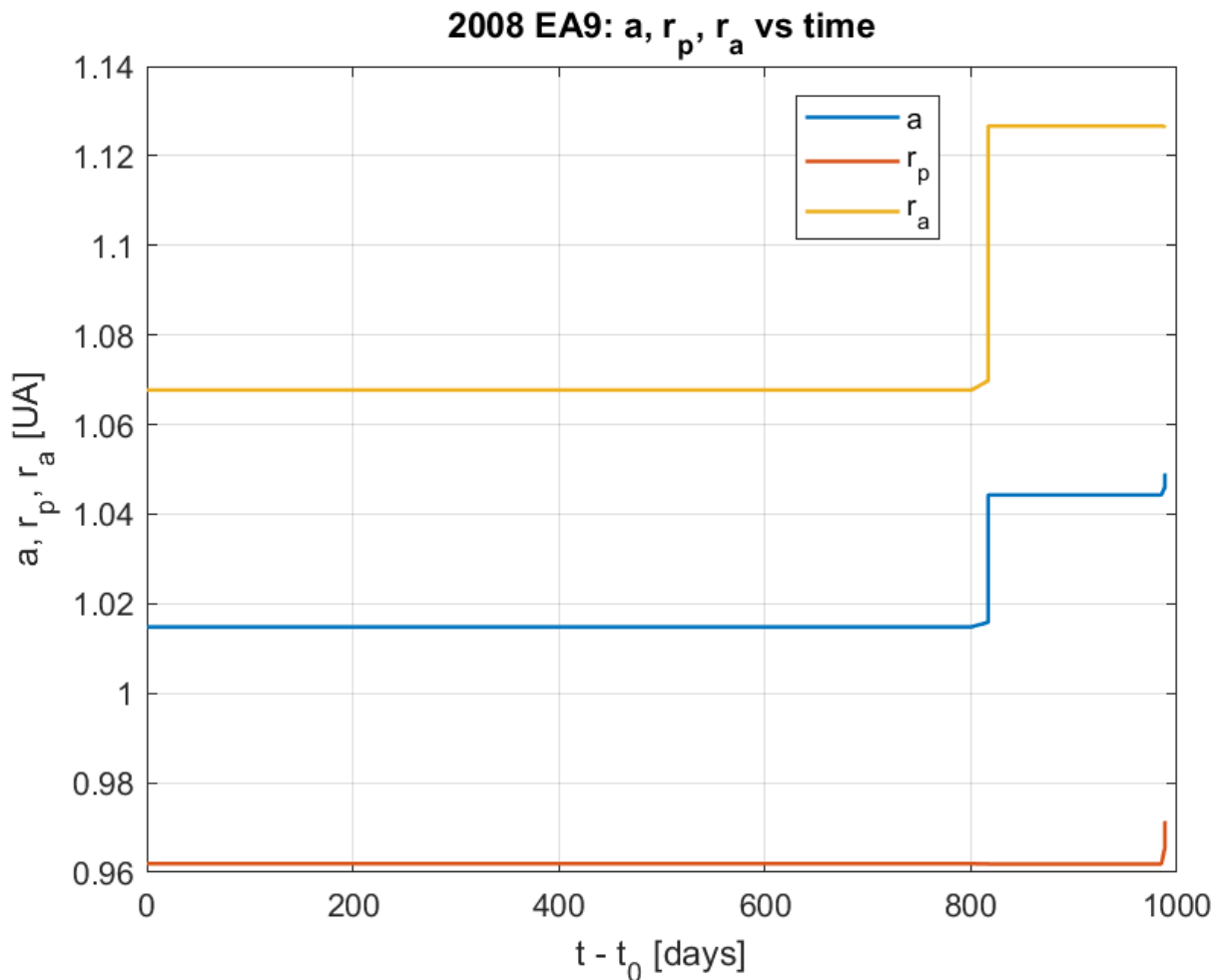


Figura 16: Andamento di semiasse, afelio e perielio di 2008 EA9 a $t_0 + 1$

Viene di seguito riportata una tabella contenente un confronto diretto tra le due soluzioni, in cui la variazione percentuale è stata calcolata come

$$\frac{(x_{new} - x_{old})}{x_{old}} * 100$$

ASTEROIDE	ΔV assoluto $\left[\frac{km}{s}\right]$	ΔV [%]	m_f [%]
2008 EA9	-0.272841	-33.9432	9.2342

Tabella 30: Confronto risultati per 2008 EA9

Per l'asteroide preso in esame notiamo come l'aumento di t_0 abbia prodotto una soluzione notevolmente migliore rispetto al caso precedente, dovuta ad una fasatura decisamente più favorevole tra spacecraft e asteroide, che risulta ora più vicino. Questo porta a una diminuzione del ΔV necessario alla missione e quindi una massa finale maggiore.

Si vuole ora andare a raffinare la soluzione più promettente tra le due trovate attraverso un'analisi di sensibilità sul tempo di partenza, ottenuta variando il tempo di partenza t_0 . Mentre non sono state trovate soluzioni accettabili a date di partenza posteriori, sono stati trovati tre risultati anticipandola, considerando quindi un range temporale che va dal 8 ottobre al 15 ottobre 2032.

Di seguito sono riportate le variazioni per cui si ha convergenza senza errori

t_0	ΔV [km/s]
206.25	0.52891476471733
206	0.52672172146703
205.9	0.53440837948176

Tabella 31: Analisi di t_0 per 2008 EA9

La soluzione migliore tra quelle individuate risulta essere quella per cui si ha partenza il 14 ottobre 2032, per la quale la variazione di semiasse a , apogeo r_a , perigeo r_p dell'orbita al variare del tempo, risulta essere

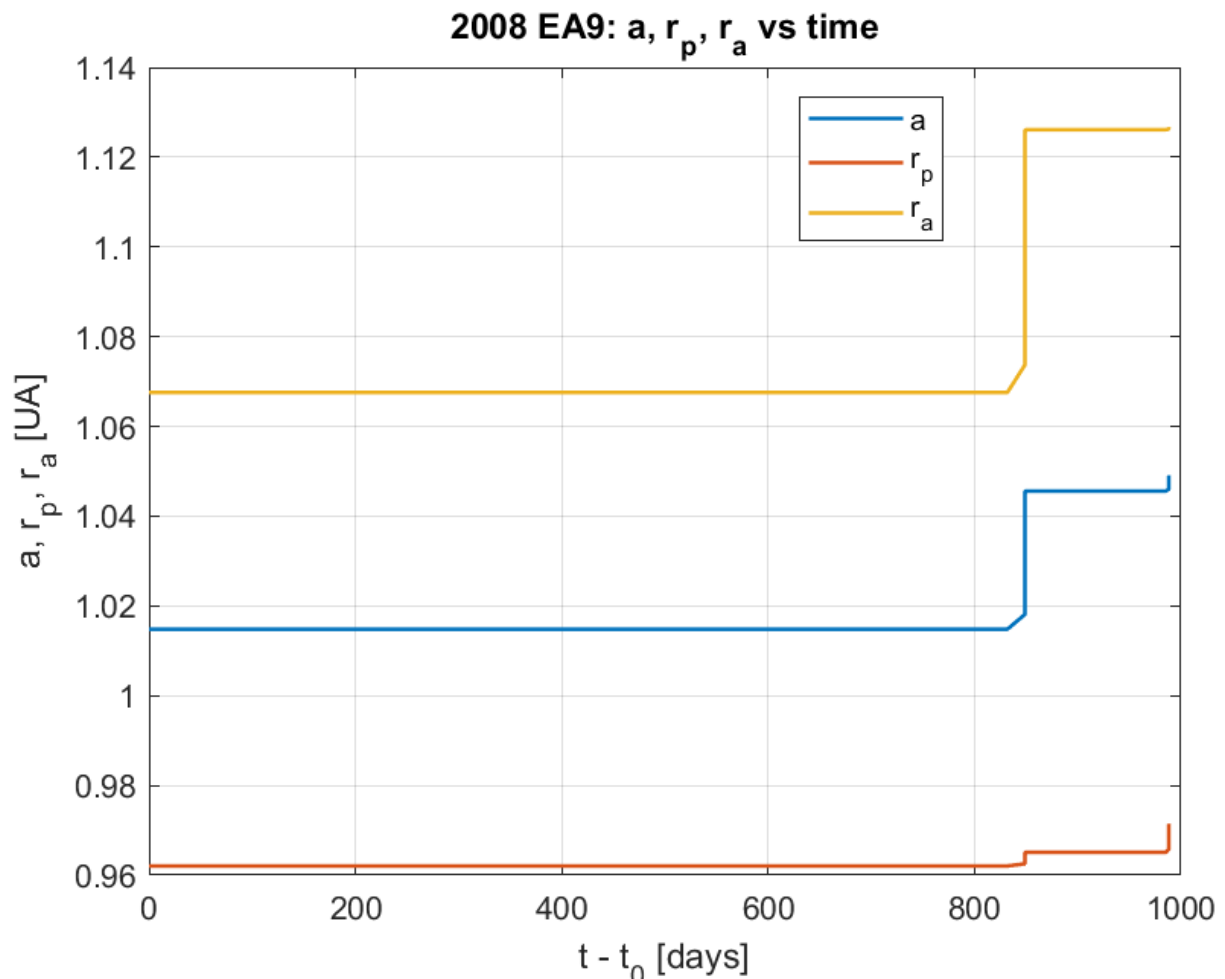


Figura 17: Andamento di semiasse, afelio e perielio di 2008 EA9 a t_0 ottimo

Nel caso dell'asteroide 2008 EA9 il costo energetico del trasferimento risulta particolarmente contenuto, con un ΔV pari a circa 0.5267 km/s, il valore più basso tra quelli ottenuti nell'analisi.

Questo comportamento è coerente con una configurazione dinamica particolarmente favorevole: la fasatura tra spacecraft e asteroide risulta buona e il trasferimento non richiede grandi correzioni energetiche. Come si può osservare dal grafico, la variazione del semiasse maggiore è sostanzialmente monotona, indicando che il raggiungimento della corretta fase orbitale avviene in modo graduale e senza la necessità di inversioni marcate nella strategia di trasferimento.

Di conseguenza, il matching finale con l'orbita dell'asteroide può essere ottenuto con un numero limitato di manovre e con un consumo di propellente molto ridotto.

2019 FV2

Parametri orbitali di 2019 FV2 osservati all'epoca 61000, ossia 21 novembre 2025

a [AU]	1.0528818
e	0.02224917
i [deg]	3.74465
w [deg]	250.66964
Ω [deg]	10.93930
M [deg]	346.7968691

Tabella 32: Parametri orbitali di 2019 FV2

La prima soluzione accettabile ha portato i seguenti risultati

ASTEROIDE	T_0	T_f	$V_{inf} \left[\frac{km}{s} \right]$	$\Delta V \left[\frac{km}{s} \right]$	% m_f	Struttura
2019 FV2	199	214	1	1.378036892	64.0121472	01010

Tabella 33: Risultati di 2019 FV2 a t_0

Le date di partenza e di arrivo corrispondono rispettivamente al 3 settembre 2031 e al 22 gennaio 2034 portando dunque la missione ad avere una durata di poco più di due anni.

La soluzione nel regime ad alta spinta prevede due archi di spinta per poter raggiungere l'asteroide target partendo dalla terra. La durata degli archi è 92 minuti per il primo e 18 minuti per il secondo, risultando quindi in una durata decisamente inferiore rispetto a quella totale, traducendosi, come anticipato, in un comportamento quasi impulsivo.

Questo comportamento è anche ben visibile attraverso il seguente grafico, che riporta le variazioni di semiasse a , apogeo r_a , perigeo r_p dell'orbita al variare del tempo, espresso in giorni.

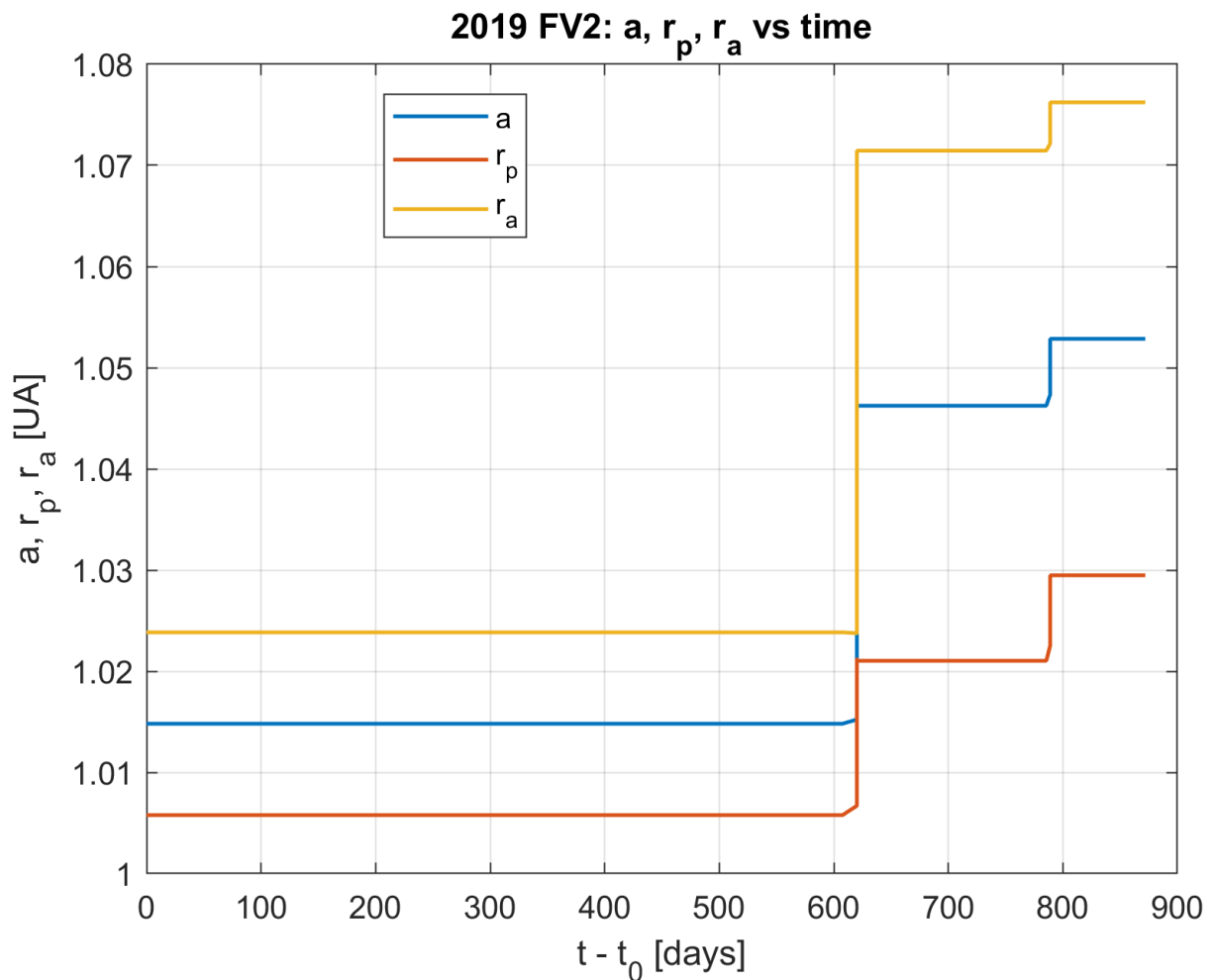


Figura 18: Andamento di semiasse, afelio e perielio di 2019 FV2 a t_0

Come si può notare dal grafico, la trasferta necessita di due cambi di semiasse, in particolare un incremento a 620 giorni di missione e uno a 790, portando infine al matching con l'asteroide.

Considerando quindi una massa iniziale pari a 2371 kg, la soluzione ottenuta porta ad avere una massa finale pari a 1517.72 kg, corrispondente ad una frazione residua del 64% circa, mentre il ΔV necessario al completamento della missione è 1.378 km/s.

È stata inoltre analizzata una soluzione con partenza posticipata di un anno, calcolata aggiungendo al t_0 precedente un valore pari a 6.28.

ASTEROIDE	T_0	T_f	$V_{inf} \left[\frac{km}{s} \right]$	$\Delta V \left[\frac{km}{s} \right]$	% m_f	Struttura
2019 FV2	205.25	219.75	1.45	1.1503357373	68.9088181	0101

Tabella 34: Risultati di 2019 FV2 a t_0+1

Per l'asteroide in esame, esattamente un anno dopo la partenza iniziale non si ha soluzione, ed è stato quindi necessario aumentare t_0 di un valore inferiore, ossia di 6.25. Si nota come la modifica del tempo di partenza vada a impattare sulla nuova traiettoria, producendo infatti un risultato con ΔV e massa finale differenti. La differenza con la soluzione precedente è anche osservabile in termini di energia e semiasse dell'orbita, visibile andando a visionare il grafico di semiasse a , apogeo r_a , perigeo r_p dell'orbita al variare del tempo, che per la nuova soluzione risulta essere

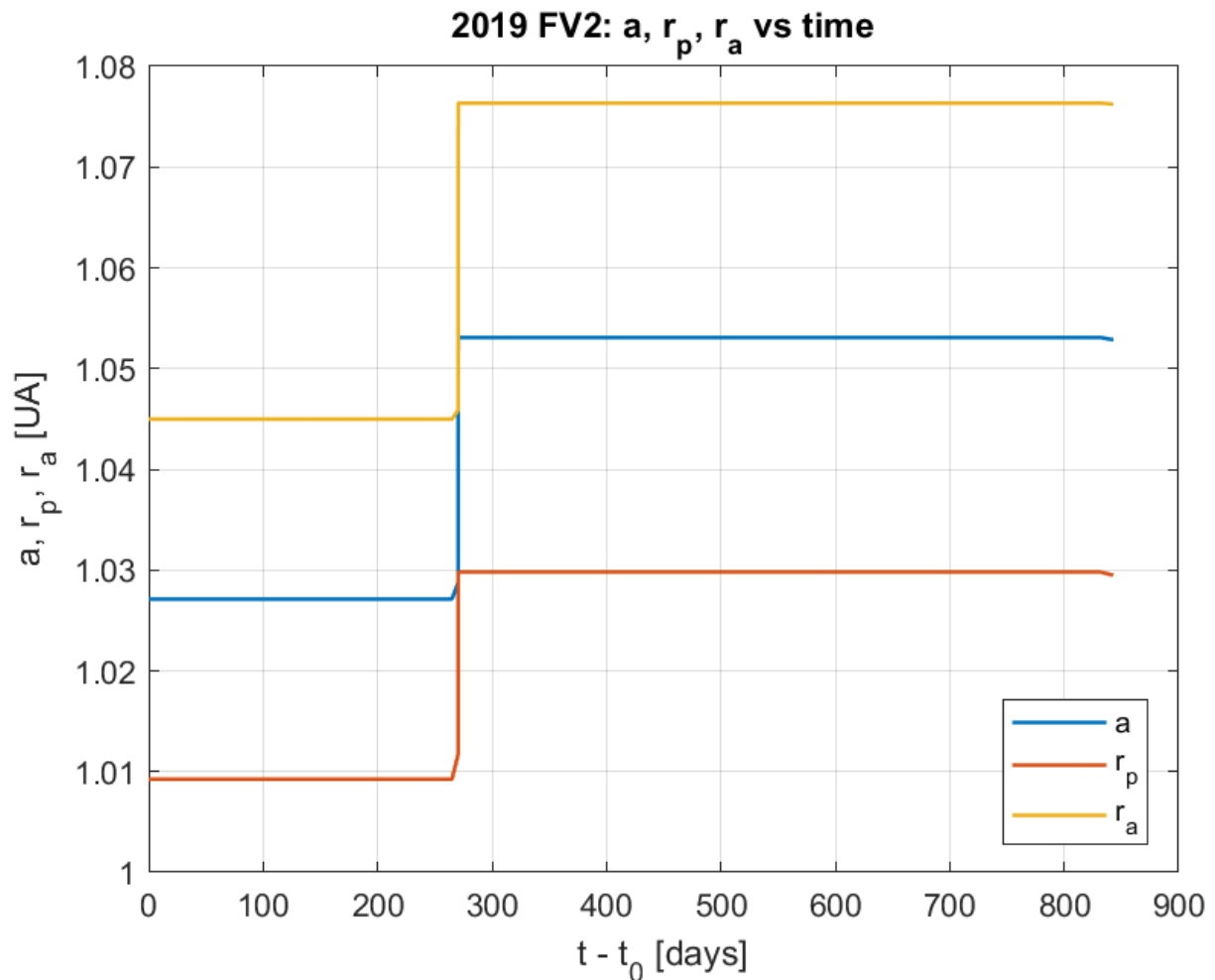


Figura 19: Andamento di semiasse, afelio e perielio di 2019 FV2 a $t_0 + 1$

Viene di seguito riportata una tabella contenente un confronto diretto tra le due soluzioni, in cui la variazione percentuale è stata calcolata come

$$\frac{(x_{new} - x_{old})}{x_{old}} * 100$$

ASTEROIDE	ΔV assoluto $\left[\frac{km}{s}\right]$	ΔV [%]	m_f [%]
2019 FV2	-0.227701	-16.5236	7.6496

Tabella 35: Confronto risultati per 2019 FV2

Per l'asteroide preso in esame notiamo come l'aumento di t_0 abbia prodotto una soluzione migliore rispetto al caso precedente, dovuta al fatto che posticipando la partenza di un

anno, l'asteroide si è avvicinato alla Terra, permettendo infatti il raggiungimento delle condizioni di matching attraverso un solo incremento del semiasse. Questo porta a una diminuzione del ΔV necessario alla missione e quindi una massa finale maggiore.

Il raffinamento di questa soluzione, ricercato variando il tempo di partenza, non ha prodotto soluzioni accettabili, in quanto sia all'aumentare sia al diminuire di t_0 si hanno errori sulla switching function, ad indicare come sia necessaria una modifica della struttura delle fasi. Questo suggerisce che per l'asteroide 2019 FV2, con i parametri sopra riportati, siamo ad una soluzione di ottimo.

Notiamo infatti dal grafico come la fasatura sia estremamente favorevole, rappresentata dall'andamento monotono del semiasse maggiore, che necessità in un solo incremento di entità comunque ridotta, traducendosi quindi in un utilizzo di ΔV volto unicamente al raggiungimento dell'orbita dell'asteroide target.

2014 KF39

Parametri orbitali di 2014 KF39 osservati all'epoca 61000, ossia 21 novembre 2025

a [AU]	1.0417068
e	0.07913717
i [deg]	3.64195
w [deg]	95.46384
Ω [deg]	235.62834
M [deg]	209.3444329

Tabella 36: Parametri orbitali di 2014 KF39

La prima soluzione accettabile ha portato i seguenti risultati

ASTEROIDE	T_0	T_f	V_{inf} $\left[\frac{km}{s}\right]$	ΔV $\left[\frac{km}{s}\right]$	% m_f	Struttura
2014 KF39	199.25	210.25	1	1.954507269	53.1149377	0101010

Tabella 37: Risultati di 2014 KF39 a t_0

Le date di partenza e di arrivo corrispondono rispettivamente al 17 settembre 2031 e al 18 giugno 2033, portando dunque la missione ad avere una durata inferiore ai due anni.

La soluzione nel regime ad alta spinta prevede tre archi di spinta per poter raggiungere l'asteroide target partendo dalla terra. La durata degli archi è 1 ora per il primo, 69 minuti per il secondo e infine 14.2 minuti per il terzo, risultando quindi in una durata decisamente inferiore rispetto a quella totale, traducendosi, come anticipato, in un comportamento quasi impulsivo.

Questo comportamento è anche ben visibile attraverso il seguente grafico, che riporta le variazioni di semiasse a , apogeo r_a , perigeo r_p dell'orbita al variare del tempo, espresso in giorni.

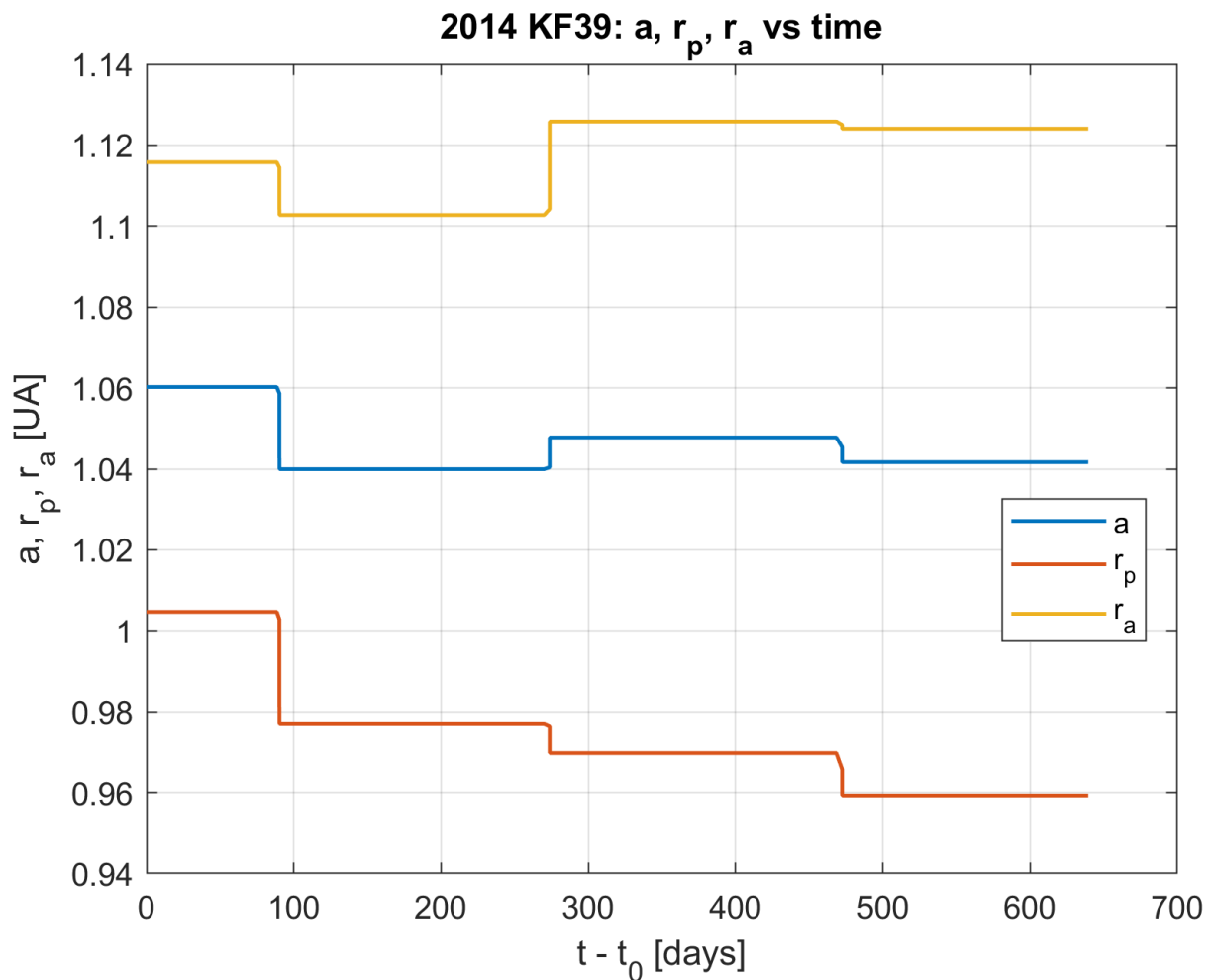


Figura 20: Andamento di semiasse, afelio e perielio di 2014 KF39 a t_0

Come si può notare dal grafico, la trasferta necessita di tre cambi di semiasse, una riduzione a 90 giorni, un incremento a 275 e infine un'ulteriore riduzione a 460 giorni, portando infine al matching con l'asteroide.

Considerando quindi una massa iniziale pari a 2371 kg, la soluzione ottenuta porta ad avere una massa finale pari a 1259.35kg, corrispondente ad una frazione residua del 53.12% circa, mentre il ΔV necessario al completamento della missione è 1.9545 km/s.

È stata inoltre analizzata una soluzione con partenza posticipata di un anno, calcolata aggiungendo al t_0 precedente un valore pari a 6.28.

ASTEROIDE	T_0	T_f	$V_{inf} \left[\frac{km}{s} \right]$	$\Delta V \left[\frac{km}{s} \right]$	% m_f	Struttura
2014 KF39	205.23	214.53	1.1	1.9061690072	53.9526191	0101010

Tabella 38: Risultati di 2014 KF39 a t_0+1

Si nota come la modifica del tempo di partenza vada a impattare sulla nuova traiettoria, producendo infatti un risultato con ΔV e massa finale differenti. La differenza con la soluzione precedente è anche osservabile in termini di energia e semiasse dell'orbita, visibile andando a visionare il grafico di semiasse a , apogeo r_a , perigeo r_p dell'orbita al variare del tempo, che per la nuova soluzione risulta essere

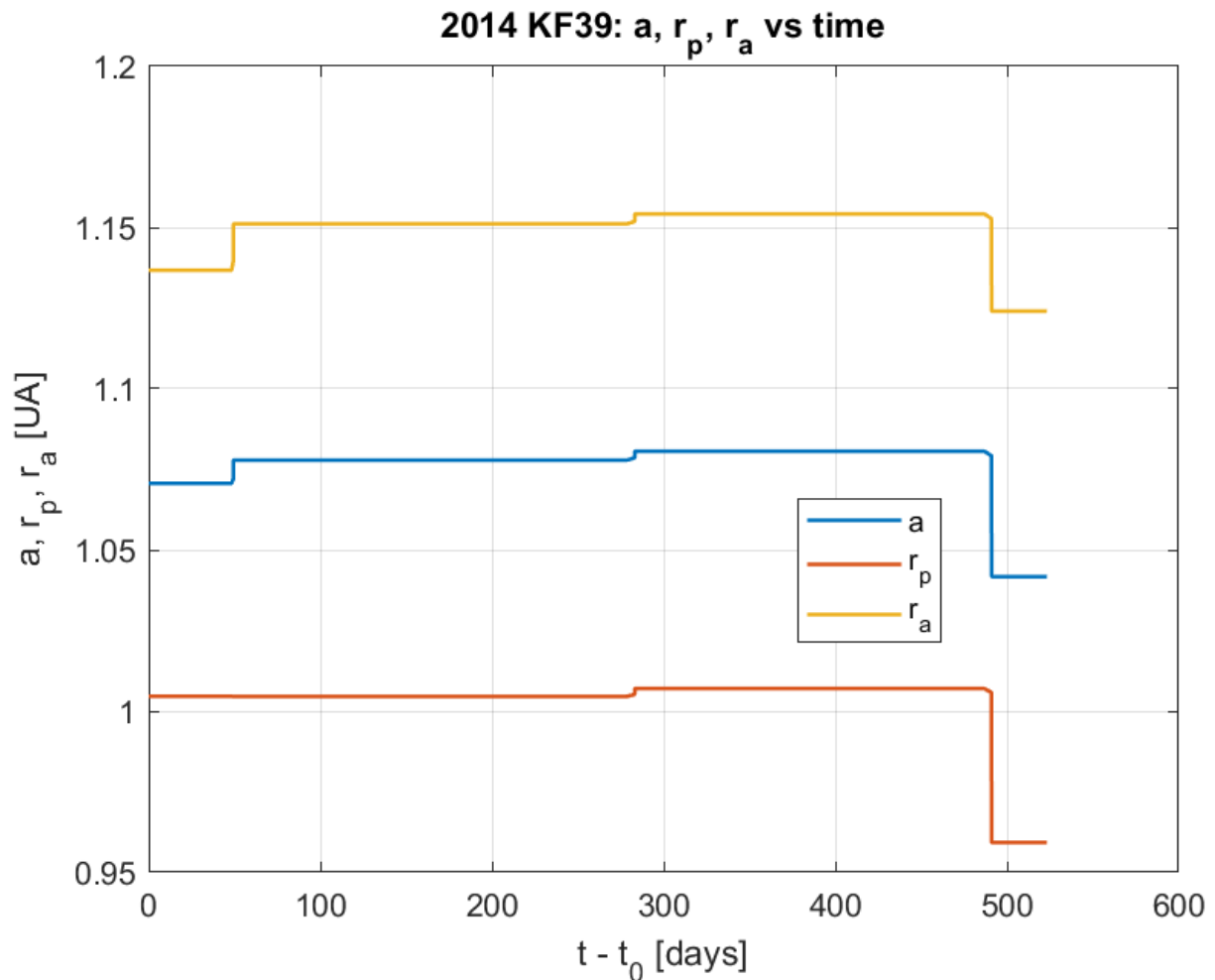


Figura 21: Andamento di semiasse, afelio e perielio di 2014 KF39 a t_0+1

Viene di seguito riportata una tabella contenente un confronto diretto tra le due soluzioni, in cui la variazione percentuale è stata calcolata come

$$\frac{(x_{new} - x_{old})}{x_{old}} * 100$$

ASTEROIDE	ΔV assoluto $\left[\frac{km}{s}\right]$	ΔV [%]	m_f [%]
2014 KF39	-0.048338	-2.4732	1.5771

Tabella 39: Confronto risultati per 2014 KF39

Per l'asteroide preso in esame notiamo come l'aumento di t_0 abbia prodotto una soluzione migliore rispetto al caso precedente, dovuto al miglioramento della fasatura tra lo spacecraft e l'asteroide target, ben visibile andando a confrontare i due grafici sopra riportati. Posticipando la partenza di un anno notiamo infatti come non si abbia più un

andamento del semiasse altalenante, riducendo i consumi e portando quindi a una diminuzione del ΔV necessario alla missione e una massa finale maggiore.

Si vuole ora andare a raffinare la soluzione più promettente tra le due trovate attraverso un'analisi di sensibilità sul tempo di partenza, ottenuta variando il tempo di partenza t_0 .

È stata individuata una soluzione alternativa a quella sopra riportata anticipando la partenza al 15 settembre 2031, che tuttavia risulta avere un costo energetico leggermente superiore a quella del 16 settembre 2031.

t_0	ΔV
205.5	1.90847244887692

Tabella 40: Ricerca di t_0 ottimi per 2014 KF39

Nel caso dell'asteroide 2014 KF39 il costo energetico risulta relativamente elevato nonostante la fasatura iniziale non risulti particolarmente sfavorevole e le variazioni del semiasse maggiore siano complessivamente contenute.

La ragione principale risiede nella durata ridotta del trasferimento, pari circa ad un anno e cinque mesi, significativamente inferiore rispetto a quelle delle altre missioni analizzate, per le quali sono state ricercate soluzioni con durate superiori ai due anni. La minor durata disponibile riduce infatti la libertà nella gestione della fasatura orbitale e rende necessario realizzare le correzioni richieste in tempi minori, con conseguente aumento del ΔV necessario.

2019 KJ2

Parametri orbitali di 2019 KJ2 osservati all'epoca 61000, ossia 21 novembre 2025

a [AU]	1.0571233
e	0.02652255
i [deg]	3.14364
w [deg]	252.46594
Ω [deg]	61.66407
M [deg]	282.1610209

Tabella 41: Parametri orbita di 2019 KJ2

La prima soluzione accettabile ha portato i seguenti risultati

ASTEROIDE	T_0	T_f	$V_{inf} \left[\frac{km}{s} \right]$	$\Delta V \left[\frac{km}{s} \right]$	% m_f	Struttura
2019 KJ2	199.65	213.85	1.05	1.280544868	66.0645918	0101

Tabella 42: Risultati di 2019 KJ2 a t_0

Le date di partenza e di arrivo corrispondono rispettivamente al 11 ottobre 2031 e al 13 gennaio 2034, portando dunque la missione ad avere una durata di poco più di due anni.

La soluzione nel regime ad alta spinta prevede due archi di spinta per poter raggiungere l'asteroide target partendo dalla terra. La durata degli archi è 103 minuti per il primo e 55 secondi per il secondo, risultando quindi in una durata decisamente inferiore rispetto a quella totale, traducendosi, come anticipato, in un comportamento quasi impulsivo.

Questo comportamento è anche ben visibile attraverso il seguente grafico, che riporta le variazioni di semiasse a , apogeo r_a , perigeo r_p dell'orbita al variare del tempo, espresso in giorni.

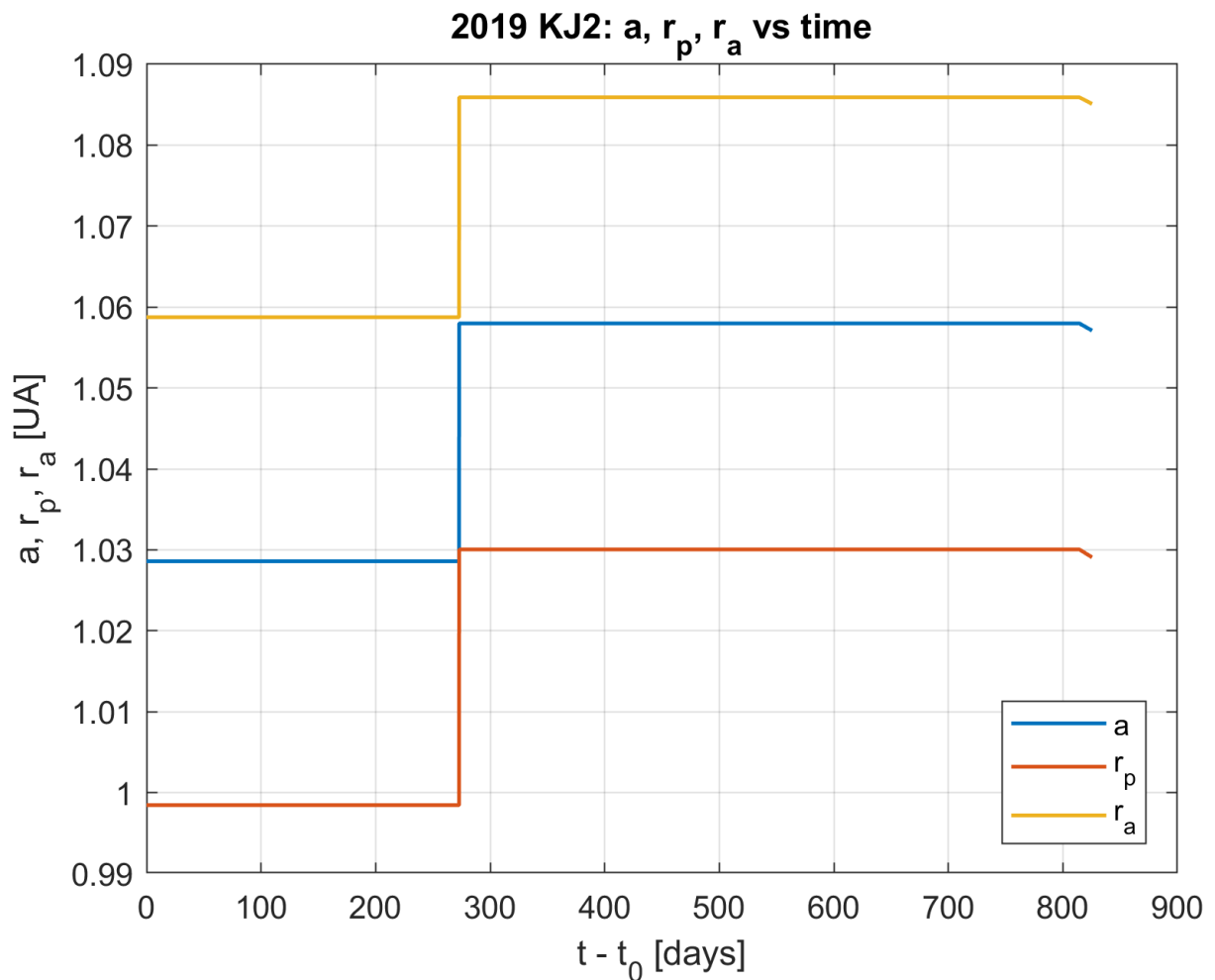


Figura 22: Andamento di semiasse, afelio e perielio di 2019 KJ2 a t_0

Come si può notare dal grafico, la trasferta necessita di due cambi di semiasse, in particolare un incremento a 280 giorni di missione, e una leggera riduzione a 820 giorni, portando infine al matching con l'asteroide.

Considerando quindi una massa iniziale pari a 2371 kg, la soluzione ottenuta porta ad avere una massa finale pari a 1566.4 kg, corrispondente ad una frazione residua del 66.06% circa, mentre il ΔV necessario al completamento della missione è 1.2805 km/s.

È stata inoltre analizzata una soluzione con partenza posticipata di un anno, calcolata aggiungendo al t_0 precedente un valore pari a 6.28.

ASTEROIDE	T_0	T_f	$V_{inf} \left[\frac{km}{s} \right]$	$\Delta V \left[\frac{km}{s} \right]$	% m_f	Struttura
2019 KJ2	206.53	221.53	1.4	1.1221237847	69.5410281	01010

Tabella 43: Risultati di 2019 KJ2 a t_0+1

Si nota come la modifica del tempo di partenza vada a impattare sulla nuova traiettoria, producendo infatti un risultato con ΔV e massa finale differenti. La differenza con la soluzione precedente è anche osservabile in termini di energia e semiasse dell'orbita, visibile andando a visionare il grafico di semiasse a , apogeo r_a , perigeo r_p dell'orbita al variare del tempo, che per la nuova soluzione risulta essere

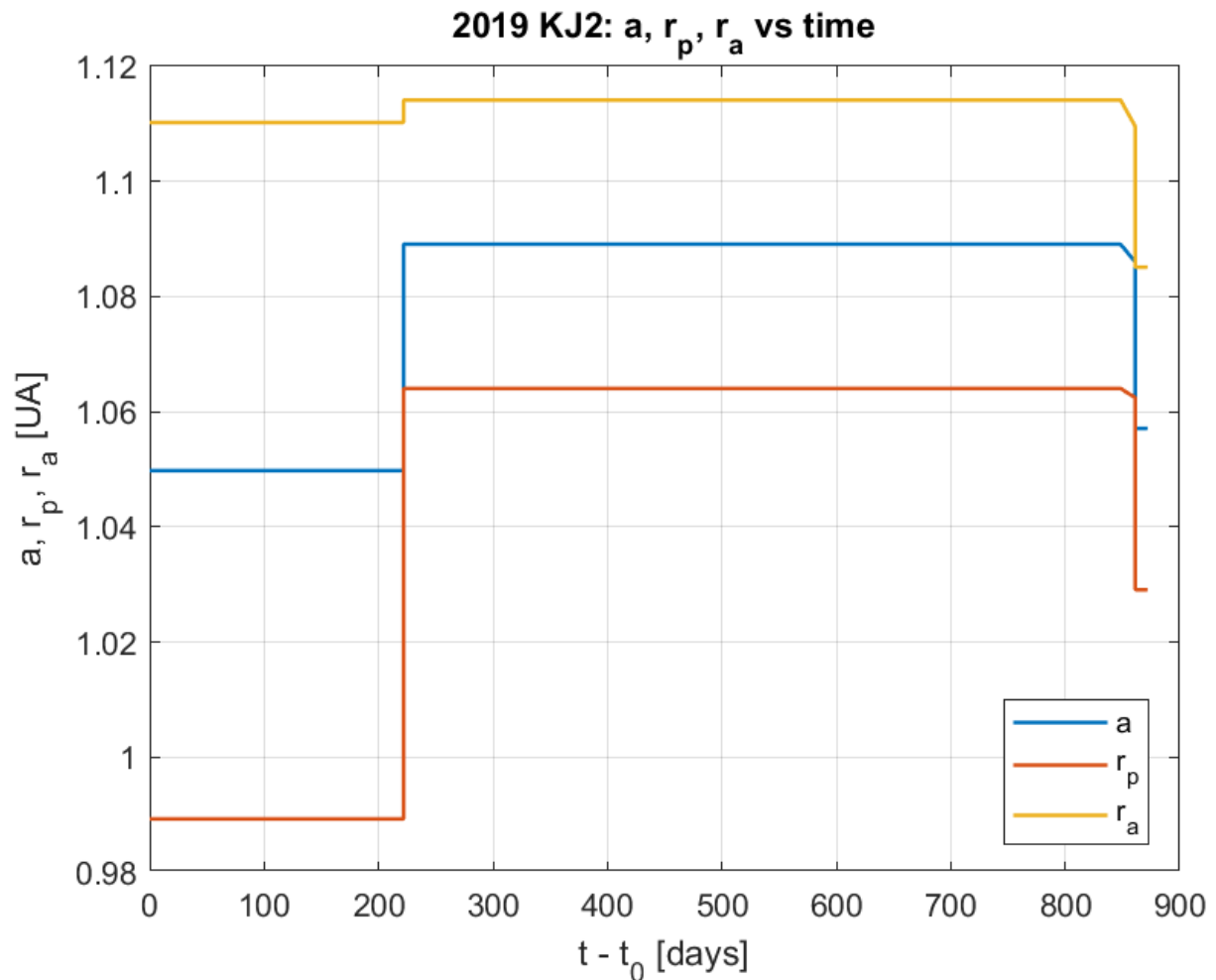


Figura 23: Andamento di semiasse, afelio e perielio di 2019 KJ2 a t_0+1

Viene di seguito riportata una tabella contenente un confronto diretto tra le due soluzioni, in cui la variazione percentuale è stata calcolata come

$$\frac{(x_{new} - x_{old})}{x_{old}} * 100$$

ASTEROIDE	ΔV assoluto $\left[\frac{km}{s}\right]$	ΔV [%]	m_f [%]
2019 KJ2	-0.158421	-12.3714	5.2622

Tabella 44: Confronto risultati di 2019 KJ2

Per l'asteroide preso in esame notiamo come l'aumento di t_0 abbia prodotto una soluzione migliore rispetto al caso precedente, in quanto si ha una diminuzione del ΔV necessario alla missione e quindi una massa finale maggiore.

Il raffinamento di questa soluzione, ricercato variando il tempo di partenza, non ha prodotto soluzioni accettabili, in quanto sia all'aumentare sia al diminuire di t_0 si hanno errori sulla switching function, ad indicare come sia necessaria una modifica della struttura delle fasi.

Nel caso dell'asteroide 2019 KJ2, la soluzione richiede inizialmente un aumento del semiasse maggiore da circa 1.05 AU a 1.09 AU, indicando la necessità di modificare il periodo orbitale dello spacecraft per ottenere la corretta fasatura con il target. Successivamente il semiasse viene riportato a valori prossimi a quelli dell'asteroide per soddisfare la condizione di matching finale.

Nonostante questa variazione iniziale relativamente marcata, il costo energetico della missione rimane contenuto. Questo comportamento è dovuto al fatto che lo spacecraft permane per una parte significativa del trasferimento sull'orbita a semiasse maggiore, consentendo di ottenere il cambio di fase principalmente tramite la naturale evoluzione della posizione angolare piuttosto che attraverso ulteriori manovre energetiche.

2022 OB5

Parametri orbitali di 2022 OB5 osservati all'epoca 61000, ossia 21 novembre 2025

a [AU]	1.0034632
e	0.05557353
i [deg]	2.08777
w [deg]	99.48817
Ω [deg]	300.20264
M [deg]	14.6544158

Tabella 45: Parametri orbitali di 2022 OB5

La prima soluzione accettabile ha portato i seguenti risultati

ASTEROIDE	T_0	T_f	V_{inf} $\left[\frac{km}{s}\right]$	ΔV $\left[\frac{km}{s}\right]$	% m_f	Struttura
2022 OB5	200.75	219.75	1	0.776786194	77.7663952	0101010

Tabella 46: Risultati di 2022 OB5 a t_0

Le date di partenza e di arrivo corrispondono rispettivamente al 14 dicembre 2031 e al 22 dicembre 2034, portando dunque la missione ad avere una durata di tre anni.

La soluzione nel regime ad alta spinta prevede tre archi di spinta per poter raggiungere l'asteroide target partendo dalla terra. La durata degli archi è 9.3 minuti per il primo, 58.5 minuti per il secondo e infine inferiore ad 1 secondo per il terzo, risultando quindi in una durata decisamente inferiore rispetto a quella totale, traducendosi, come anticipato, in un comportamento quasi impulsivo.

Questo comportamento è anche ben visibile attraverso il seguente grafico, che riporta le variazioni di semiasse a , apogeo r_a , perigeo r_p dell'orbita al variare del tempo, espresso in giorni.

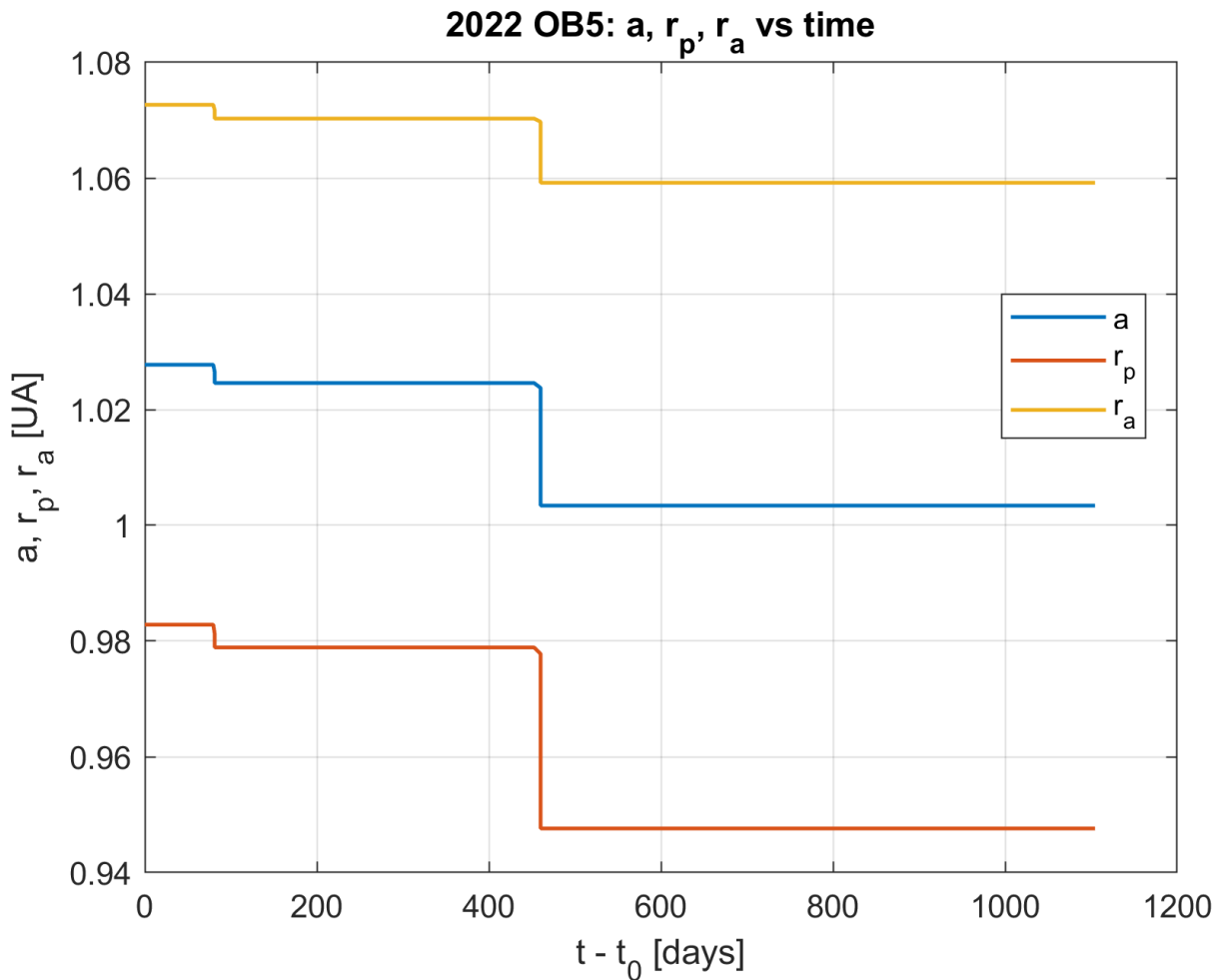


Figura 24: Andamento di semiasse, afelio e perielio di 2022 OB5 a t_0

Come si può notare dal grafico, la trasferta necessita di due cambi di semiasse, entrambi volti a diminuirlo, a 90 e 460 giorni di missione, portando infine al matching con l'asteroide.

Considerando quindi una massa iniziale pari a 2371 kg, la soluzione ottenuta porta ad avere una massa finale pari a 1843.84 kg, corrispondente ad una frazione residua del 77.76% circa, mentre il ΔV necessario al completamento della missione è 0.7767 km/s.

È stata inoltre analizzata una soluzione con partenza posticipata di un anno, calcolata aggiungendo al t_0 precedente un valore pari a 6.28.

ASTEROIDE	T_0	T_f	$V_{inf} \left[\frac{km}{s} \right]$	$\Delta V \left[\frac{km}{s} \right]$	% m_f	Struttura
2022 OB5	207.03	220.03	1	0.7784957313	77.7233704	010

Tabella 47: Risultati di 2022 OB5 a t_0+1

Si nota come la modifica del tempo di partenza vada a impattare sulla nuova traiettoria, producendo infatti un risultato con ΔV e massa finale differenti. La differenza con la

soluzione precedente è anche osservabile in termini di energia e semiasse dell'orbita, visibile andando a visionare il grafico di semiasse a , apogeo r_a , perigeo r_p dell'orbita al variare del tempo, che per la nuova soluzione risulta essere

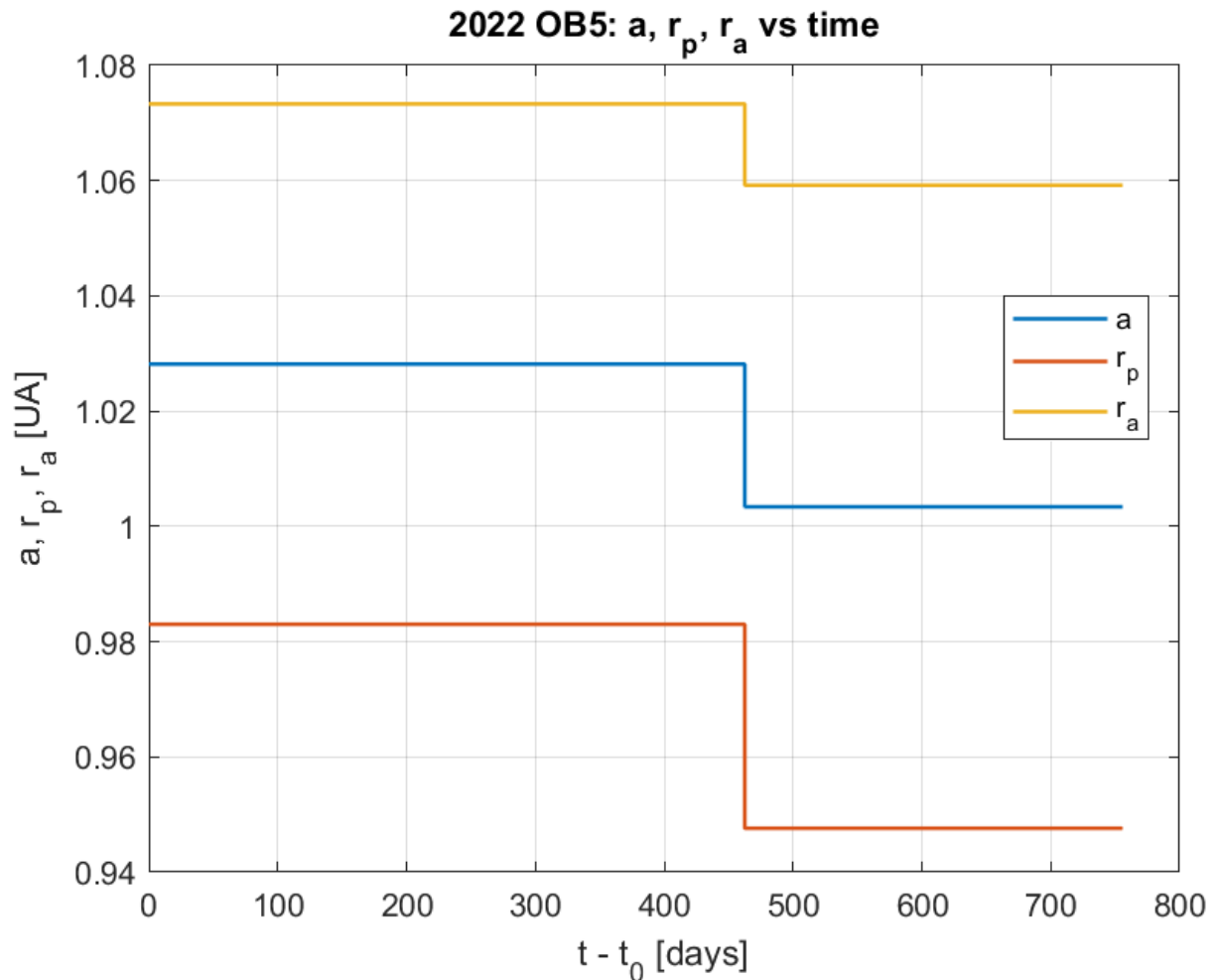


Figura 25: Andamento di semiasse, afelio e perielio di 2022 OB5 a t_0+1

Viene di seguito riportata una tabella contenente un confronto diretto tra le due soluzioni, in cui la variazione percentuale è stata calcolata come

$$\frac{(x_{new} - x_{old})}{x_{old}} * 100$$

ASTEROIDE	ΔV assoluto $\left[\frac{km}{s}\right]$	ΔV [%]	m_f [%]
2022 OB5	0.001709	0.2201	-0.0553

Tabella 48: Confronto risultati di 2022 OB5

Per l'asteroide preso in esame notiamo come l'aumento di t_0 abbia prodotto una soluzione senza differenze marcate dalla precedente, mostrando tuttavia un leggero aumento del ΔV necessario alla missione e massa finale moderatamente minore.

Per questo motivo è stata valutata una variazione del tempo di partenza per entrambi i casi, senza tuttavia portare a risultati accettabili. Le modifiche del tempo di partenza

hanno infatti mostrato errori sulla switching function, ad indicare che sono necessarie modifiche sulla struttura delle fasi di spinta. Oltre a questo, i risultati in termini di ΔV per le soluzioni ricercate hanno mostrato un aumento del costo energetico, portando quindi a non prenderle in considerazione.

Come si può osservare dai grafici precedenti, le soluzioni richiedono una riduzione del semiasse maggiore, che corrisponde al trasferimento su un'orbita leggermente più interna. Questa manovra consente di aumentare la velocità angolare dello spacecraft e di recuperare fase rispetto all'asteroide target. Successivamente il semiasse viene riportato verso valori compatibili con l'orbita dell'asteroide, così da soddisfare la condizione di matching finale.

Poiché le variazioni del semiasse risultano complessivamente limitate e non sono necessari cambi di fase particolarmente marcati, il trasferimento può essere realizzato con un costo energetico molto contenuto.

5 Conclusioni

L'obiettivo della presente tesi è stato quello di analizzare la fattibilità di missioni verso asteroidi near-Earth mediante propulsione chimica, determinando traiettorie ottimali a partire da soluzioni preliminari ottenute nel regime a bassa spinta.

L'approccio adottato si è basato sull'utilizzo di metodi indiretti di controllo ottimale, che hanno permesso di formulare il problema come un sistema accoppiato di equazioni differenziali per stati e costati, soggetto a condizioni al contorno. Le soluzioni sono state ricercate numericamente mediante un metodo iterativo di Newton rilassato applicato alla formulazione del problema.

Per ciascuno dei dieci asteroidi selezionati sono state inizialmente determinate soluzioni nel regime a bassa spinta. Tali soluzioni sono state successivamente utilizzate come punto di partenza per la costruzione delle traiettorie nel caso chimico, sfruttando l'andamento della switching function per individuare una struttura iniziale di controllo di tipo ON/OFF. La transizione tra i due regimi è stata realizzata attraverso una strategia di continuità sul coefficiente di spinta, incrementato progressivamente fino al valore unitario.

Le soluzioni chimiche ottenute risultano caratterizzate da una struttura di controllo di tipo bang-bang composta da un numero limitato di archi di spinta. La durata di tali archi risulta significativamente inferiore rispetto alla durata complessiva della missione, evidenziando un comportamento quasi impulsivo del sistema, in accordo con quanto atteso per regimi di spinta elevati.

Per ciascun asteroide sono stati determinati i principali parametri di missione, tra cui il tempo di partenza ottimale, la durata del trasferimento, il valore di ΔV richiesto e la frazione di massa finale. I risultati ottenuti mostrano come i costi energetici necessari per il raggiungimento degli asteroidi considerati risultino generalmente contenuti, con valori di ΔV compresi indicativamente tra circa 0.5 e 2 km/s e frazioni di massa finale sempre superiori al 50% della massa iniziale.

È stata inoltre condotta un'analisi di sensibilità rispetto al tempo di partenza, valutando l'impatto di variazioni temporali sulla traiettoria ottimale. I risultati evidenziano come anche modifiche relativamente contenute del tempo iniziale possano produrre differenze significative nei parametri di missione, in particolare in termini di ΔV richiesto e massa finale, sottolineando l'importanza della scelta della finestra di lancio nelle missioni verso asteroidi near-Earth.

Nel complesso, il lavoro svolto ha dimostrato come l'utilizzo di soluzioni preliminari a bassa spinta costituisca uno strumento efficace per guidare la ricerca di convergenze nel caso chimico, permettendo di individuare strutture di controllo coerenti e migliorando la robustezza della procedura numerica.

Sviluppi futuri del lavoro potrebbero includere l'estensione del modello dinamico considerando perturbazioni gravitazionali aggiuntive, come l'influenza dei pianeti

maggiori, oppure l'introduzione di vincoli di missione più complessi, quali limiti sulla durata o sull'energia disponibile. Inoltre, l'approccio adottato potrebbe essere esteso all'analisi di missioni multi-target o a strategie di rendez-vous e campionamento di asteroidi.

Bibliografia

- [1] Lorenzo Casalino, Ottimizzazione Indiretta di Traiettorie Spaziali
- [2] Lorenzo Casalino, Equazioni in coordinate sferiche
- [3] NASA JPL Small-Body Database, <https://ssd.jpl.nasa.gov>
- [4] Manuela Battipede, slide del corso di Meccanica del volo spaziale
- [5] Steve L. Brunton, Control Bootcamp
- [6] <https://science.nasa.gov/mission/osiris-apex/>
- [7] <https://science.nasa.gov/mission/dart/>
- [8] <https://science.nasa.gov/mission/near-shoemaker/>
- [9] Howard D. Curtis, Orbital mechanics for engineering students