

Politecnico di Torino

Tesi di laurea magistrale

Manovre spaziali per rifornimento di carburante in
orbite geostazionarie



**Politecnico
di Torino**

Matricola

Joe Picchiottino 334247

Relatore

Lorenzo Casalino

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale - A.A.
2025/2026

Indice

1	Abstract	6
2	Introduzione	7
3	Evoluzione storica delle orbite geostazionarie	7
4	Caratteristiche dinamiche dell'orbita geostazionaria	9
5	Refueling Stations: architetture e funzionamento	9
5.1	Missioni dimostrative di rifornimento in orbita	10
5.2	Tianzhou-1	10
5.3	NASA's Orbital Express	11
5.4	Mission Extension Vehicle (MEV)	12
6	Richiami di meccanica del volo spaziale	13
6.1	Sistemi di riferimento	13
6.1.1	Sistema di riferimento eliocentrico	13
6.1.2	Sistema geocentrico equatoriale (ECI)	14
6.1.3	Sistema di riferimento perifocale	15
6.2	Elementi orbitali classici	16
6.2.1	Casi particolari	17
6.3	Problema del tempo	17
6.4	Derivazione del tempo di volo tramite la seconda legge di Keplero	18
6.5	Relazione tra area spazzata e tempo	18
6.5.1	Determinazione dell'area tramite l'anomalia eccentrica	19
6.5.2	Espressione finale del tempo di volo	20
6.5.3	Problema diretto	21
6.5.4	Calcolo del tempo tramite l'anomalia eccentrica	21
6.6	Il problema inverso del tempo: equazione di Keplero	21
6.6.1	Formulazione del problema	22
6.6.2	Risoluzione numerica tramite il metodo di Newton	22
6.7	Calcolo dell'anomalia vera	23
7	Manovre orbitali	24
7.1	Equazione di Tsiolkovskij	24
7.1.1	Derivazione	24
7.1.2	Osservazioni e collegamento con gli obiettivi della tesi	25

7.2	Cambio di piano	26
7.3	Rifasamento a due impulsi	27
7.3.1	Calcolo del Δv necessario	28
7.4	Rifasamento a quattro impulsi	28
7.5	Manovre di rifasamento a quattro impulsi basate su trasferimenti di tipo Hohmann	29
7.5.1	Calcolo del Δv per il rifasamento a quattro impulsi	31
8	Metodi Metaeuristici	32
8.1	Algoritmi Genetici	32
8.1.1	Procedura	32
8.2	Particle Swarm Optimization	34
8.2.1	Equazioni di aggiornamento	35
8.2.2	Procedura	35
8.3	Confronto tra GA e PSO	36
9	Analisi dei risultati e validazione degli algoritmi di ottimizzazione	37
10	Metodologia e struttura del codice MATLAB	37
10.1	Schema generale della manovra e scelta degli impulsi	37
10.2	Inserimento dei parametri orbitali iniziali e finali	37
10.3	Conversione dei parametri orbitali e sistema di riferimento	38
10.4	Propagazione orbitale e applicazione degli impulsi intermedi	38
10.5	Definizione della funzione di costo	38
10.6	Vettore delle variabili di ottimizzazione	39
11	Casi analitici di riferimento	39
11.1	Rifasamento: caso analitico	39
11.1.1	Calcolo analitico per $\Delta\nu = 90^\circ$	40
11.2	Variazione di inclinazione: caso analitico	41
12	Risultati degli algoritmi genetici	41
12.1	Rifasamento di $\pi/2$	42
12.2	Cambio di inclinazione di 5°	45
12.3	Manovra combinata: $\Delta i = 5^\circ$ e $\Delta\nu = \pi/2$	46
13	Confronto tra risultati analitici e algoritmi metaeuristici	48
14	Variazione combinata di eccentricità, inclinazione e rifasamento con RAAN variabile	49

14.1	Analisi degli impulsi ottimali	50
14.2	Variazione dei parametri orbitali nel tempo	51
14.3	Traiettorie ottimizzate e interpretazione geometrica	52
14.4	Sintesi dei risultati	54
15	Risultati del rendez-vous multitarget	55
15.1	Introduzione al problema	55
15.2	Parametri orbitali dei satelliti target	55
15.3	Distribuzione spaziale dei satelliti target	55
15.4	Modello fisico della fuel station	56
15.5	Scelta del primo target	57
15.6	Algoritmo greedy per la determinazione della sequenza	57
15.7	Risultati dell'ottimizzazione	57
15.8	Discussione dei risultati	58
15.9	Limiti dell'approccio greedy	58
16	Conclusioni	59
16.1	Sintesi dei risultati ottenuti	59
16.2	Punti di forza della metodologia sviluppata	60
16.3	Limiti del lavoro	60
17	Sviluppi futuri	61
18	Considerazioni finali	61

Elenco delle figure

1	Rappresentazione del satellite Syncom.	8
2	Confronto tra orbite geosincrone e geostazionarie.	9
3	La navicella cargo Tianzhou-1 in orbita.	10
4	Tianzhou-1 attraccata alla stazione Tiangong-2	11
5	Schema della missione Orbital Express	11
6	Il Mission Extension Vehicle durante una fase di attracco.	12
7	Sistema di riferimento eliocentrico.	13
8	Sistema di riferimento geocentrico equatoriale (ECI).	14
9	Sistema di riferimento perifocale.	15
10	Parametri orbitali classici.	16
11	Rappresentazione geometrica dei parametri orbitali.	17

12	Area spazzata dal raggio vettore secondo la seconda legge di Keplero.	18
13	Definizione geometrica dell'anomalia eccentrica.	19
14	Cambio di piano.	26
15	Fuel station e target desiderato.	28
16	Diagramma di flusso dell'algoritmo genetico.	34
17	Schema del movimento delle particelle nel PSO: ogni particella si muove con velocità v_i influenzata dalla propria migliore posizione p_i e dall'ottimo globale g [4].	36
18	Variazione del Δv in funzione dell'angolo di rifasamento $\Delta\nu$	40
19	Variazione del Δv in funzione dell'angolo di cambio di inclinazione.	41
20	Parametri orbitali finali ottenuti tramite GA per rifasamento di $\pi/2$ in un periodo orbitale.	42
21	Componenti RTN degli impulsi ottimizzati – rifasamento in un periodo.	42
22	Δv totale ottenuto tramite GA – rifasamento in un periodo.	42
23	Traiettoria ottimizzata e vettori impulso nel sistema RTN – rifasamento di $\pi/2$ in un periodo.	43
24	Parametri orbitali finali ottenuti tramite GA per rifasamento di $\pi/2$ in due periodi orbitali.	44
25	Componenti RTN degli impulsi ottimizzati – rifasamento in due periodi.	44
26	Δv totale ottenuto tramite GA – rifasamento in due periodi.	44
27	Parametri orbitali finali ottenuti tramite GA per $\Delta i = 5^\circ$	45
28	Componenti RTN degli impulsi ottimizzati – cambio di inclinazione 5°	45
29	Δv totale ottenuto tramite GA – cambio di inclinazione 5°	45
30	Traiettoria ottimizzata nel sistema ECI – cambio di inclinazione 5°	46
31	Parametri orbitali finali per la manovra combinata $\Delta i = 5^\circ$, $\Delta\nu = \pi/2$	47
32	Componenti RTN degli impulsi ottimizzati – manovra combinata.	47
33	Δv totale ottenuto tramite GA – manovra combinata.	47
34	Confronto tra Δv analitici e numerici con percentuali di errore relativo.	48
35	Parametri orbitali finali per la manovra combinata con $\Delta i = 5^\circ$, $\Delta\nu = \pi/2$ e RAAN variabile.	50
36	Componenti RTN degli impulsi ottimizzati per i tre valori di RAAN.	50
37	Δv totale ottenuto per i tre valori di RAAN.	50
38	Evoluzione temporale di $a(t)$, $e(t)$, $i(t)$ e $\nu(t)$ per i tre valori di RAAN.	51
39	Traiettoria ottimizzata per $\Omega = 0$. Il punto finale è indicato con una stella.	52
40	Traiettoria ottimizzata per $\Omega = \pi/2$	53
41	Traiettoria ottimizzata per $\Omega = \pi$	53
42	Distribuzione tridimensionale dei dieci satelliti target nel sistema ECI.	56

Elenco delle tabelle

1	Confronto tra Algoritmo Genetico e Particle Swarm Optimization.	36
2	Coefficienti di penalità della funzione di costo J	39
3	Parametri orbitali dei dieci satelliti target.	55
4	Δv parziali, consumo di propellente e massa residua per la sequenza greedy. . .	58

1 Abstract

La presente tesi si propone di sviluppare una strategia ottimizzata per la riduzione del costo propulsivo nelle operazioni di rifornimento in orbita geostazionaria, analizzando il problema del rendez-vous tra una *fuel station* e una costellazione di dieci satelliti con parametri orbitali differenti. In una prima fase viene studiato il rendez-vous con un singolo satellite, considerando tre manovre elementari: rifasamento, cambio di inclinazione e variazione di eccentricità. Per ciascun caso si confrontano i risultati analitici con quelli ottenuti tramite algoritmi metaeuristici, in particolare *Genetic Algorithms* (GA) e *Particle Swarm Optimization* (PSO). Successivamente, viene sviluppato un codice **MATLAB** in grado di determinare la sequenza ottimale di rendez-vous multi-target, minimizzando il consumo totale di carburante necessario alla missione. I risultati ottenuti mostrano come gli algoritmi evolutivi siano in grado di riprodurre e generalizzare le soluzioni analitiche, fornendo una metodologia efficace per la pianificazione di missioni di rifornimento in orbita GEO.

2 Introduzione

A partire dalla seconda metà del XX secolo, la crescente attenzione verso l'esplorazione spaziale ha portato allo sviluppo di tecnologie sempre più avanzate per le telecomunicazioni, l'osservazione della Terra e la gestione delle infrastrutture orbitali. In questo contesto, la necessità di garantire continuità di servizio, copertura globale e stabilità delle comunicazioni ha reso fondamentale l'individuazione di orbite in grado di soddisfare tali requisiti operativi.

Tra queste, l'orbita geostazionaria (GEO) si è affermata come una delle soluzioni più rilevanti, grazie alla possibilità di mantenere un satellite in una posizione apparente fissa rispetto alla superficie terrestre. Tale proprietà ha rivoluzionato il settore delle telecomunicazioni e ha permesso la nascita di servizi globali di broadcasting, meteorologia e sicurezza.

Uno dei principali limiti dei satelliti geostazionari è la quantità finita di propellente disponibile a bordo, necessaria sia per il mantenimento dell'orbita (*station-keeping*) sia per il controllo dell'assetto. L'esaurimento del carburante determina la fine della vita operativa del satellite e il suo trasferimento in orbita cimitero, con conseguenti costi elevati e un aumento del rischio di detriti spaziali.

Negli ultimi anni, grazie all'evoluzione delle tecnologie di *On-Orbit Servicing* (OOS), è diventato possibile estendere la vita operativa dei satelliti tramite operazioni di rifornimento in orbita, aprendo la strada a nuove architetture di manutenzione e gestione delle infrastrutture spaziali. Il presente lavoro di tesi si inserisce in questo contesto e si propone di analizzare e ottimizzare le manovre di rendez-vous tra una *fuel station* e un satellite in orbita geostazionaria, mediante l'applicazione di algoritmi metaeuristici quali *Particle Swarm Optimization* (PSO) e *Genetic Algorithms* (GA).

3 Evoluzione storica delle orbite geostazionarie

L'evoluzione delle orbite geostazionarie rappresenta un capitolo fondamentale nella storia delle telecomunicazioni e nello sviluppo delle infrastrutture spaziali moderne. Ripercorrere le tappe principali che hanno portato alla definizione e allo sfruttamento sistematico dell'orbita GEO è utile per comprendere appieno le motivazioni tecniche ed economiche che oggi spingono verso le tecnologie di rifornimento in orbita.

L'idea di utilizzare questa regione dello spazio risale al 1945, quando Arthur C. Clarke propose l'impiego di tre satelliti equidistanti lungo un'orbita circolare equatoriale con periodo pari alla rotazione terrestre. Tale tipo di configurazione avrebbe consentito una copertura globale continua delle comunicazioni.

Il primo passo avvenne nel 1963 con il lancio di **Syncom 2**, il primo satellite a raggiungere un'orbita quasi geostazionaria. Pur non essendo perfettamente stazionario, Syncom 2 dimostrò la fattibilità tecnica di operare in una regione orbitale sincrona, segnando un punto di svolta nella storia delle telecomunicazioni.



Figura 1: Rappresentazione del satellite Syncom.

Nel 1964, **Syncom 3** consolidò definitivamente l'importanza dell'orbita GEO, rendendo possibile la prima trasmissione televisiva intercontinentale in diretta durante le Olimpiadi di Tokyo .

Nel 1965, con il lancio di **Intelsat I** (*Early Bird*), ebbe inizio l'era delle telecomunicazioni commerciali globali: il satellite permise collegamenti telefonici e televisivi transatlantici regolari, con una capacità di 240 canali telefonici .

Nel corso dei decenni successivi, l'orbita GEO è diventata una delle regioni più affollate dello spazio circumterrestre. La crescente congestione della fascia geostazionaria e la limitata disponibilità di propellente a bordo dei satelliti hanno evidenziato la necessità di soluzioni innovative per estendere la vita operativa dei veicoli e mitigare il rischio di detriti. È in questo contesto che si colloca l'interesse contemporaneo verso le tecnologie di *On-Orbit Servicing*.

4 Caratteristiche dinamiche dell'orbita geostazionaria

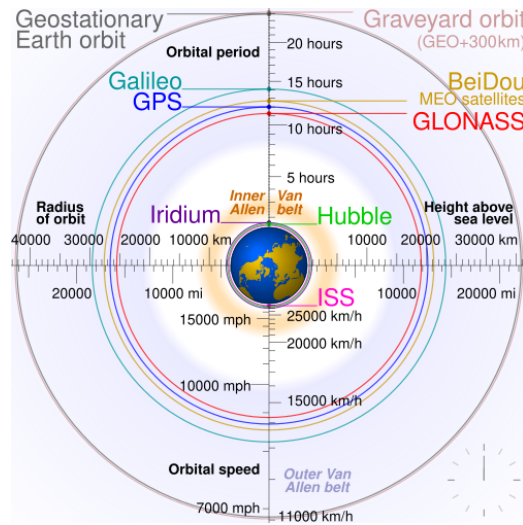


Figura 2: Confronto tra orbite geosincrone e geostazionarie.

L'orbita geostazionaria è un'orbita circolare equatoriale con semiasse maggiore pari a circa 42 164 km, inclinazione nominalmente nulla ed eccentricità trascurabile. Il suo periodo orbitale di 23 h 56 min 4 s coincide con il periodo di rotazione siderale terrestre, consentendo a un satellite di mantenere la stessa longitudine apparente rispetto a un osservatore a Terra.

Tale caratteristica rende l'orbita GEO ideale per applicazioni che richiedono continuità di servizio, come telecomunicazioni, broadcasting, meteorologia e monitoraggio ambientale. Tuttavia, mantenere un satellite nella posizione nominale richiede correzioni periodiche dell'orbita, rese necessarie dall'azione di diverse perturbazioni:

- **Non-sfericità terrestre:** il rigonfiamento equatoriale della Terra genera un gradiente gravitazionale che tende a spostare il satellite verso due punti di equilibrio stabile.
- **Attrazione lunisolare:** le perturbazioni gravitazionali della Luna e del Sole inducono una deriva dell'inclinazione orbitale di circa $0.75^\circ/\text{anno}$, richiedendo manovre periodiche di correzione (*north-south station-keeping*).
- **Pressione di radiazione solare:** esercita una forza perturbatrice che aumenta gradualmente l'eccentricità dell'orbita, richiedendo correzioni periodiche (*east-west station-keeping*).

5 Refueling Stations: architetture e funzionamento

Per molti anni, la vita operativa dei satelliti geostazionari è stata determinata quasi esclusivamente dalla quantità di propellente disponibile a bordo. L'evoluzione delle tecnologie di *On-Orbit Servicing* ha introdotto un cambiamento sostanziale in questo scenario, rendendo possibile estendere la vita operativa dei satelliti attraverso operazioni di rifornimento eseguite da veicoli dedicati, noti come *Servicing Vehicles* o *Fuel Stations*.

Le refueling stations sono infrastrutture orbitali progettate per immagazzinare e trasferire propellente a satelliti già operativi. La loro architettura comprende generalmente: serbatoi per

propellenti mono e bipropellenti, sistemi di pompaggio e controllo della pressione, interfacce meccaniche e fluidiche compatibili con diversi modelli di satellite, sistemi di attracco autonomo e strutture robotiche per operazioni in microgravità [?].

L'idea di rifornire i veicoli direttamente nello spazio risale agli anni Sessanta, ma solo negli ultimi due decenni, grazie ai progressi nei materiali, nei sistemi di controllo e nelle tecnologie criogeniche, il concetto ha iniziato a prendere forma concreta.

5.1 Missioni dimostrative di rifornimento in orbita

Lo sviluppo delle tecnologie di OOS è stato reso possibile da una serie di missioni dimostrative che hanno permesso di validare procedure e sistemi in condizioni operative reali. Le missioni descritte di seguito rappresentano le tappe più significative di questo percorso, con approcci tecnici differenti che riflettono la varietà delle soluzioni oggi disponibili.

5.2 Tianzhou-1

Tianzhou-1, lanciata il 20 aprile 2017 dal centro spaziale di Wenchang mediante un vettore *Long March 7*, è stata progettata come veicolo cargo automatico per supportare la futura stazione spaziale cinese Tiangong . Con una massa al lancio di circa 13 tonnellate, rappresenta il più grande veicolo logistico mai sviluppato dalla Cina.



Figura 3: La navicella cargo Tianzhou-1 in orbita.

L'obiettivo principale della missione era dimostrare la capacità di trasferire propellente in microgravità, un'operazione che richiede un controllo accurato della pressione, della temperatura e della distribuzione del fluido nei serbatoi. Tianzhou-1 ha effettuato tre attracchi autonomi con il laboratorio orbitale Tiangong-2, trasferendo complessivamente oltre 1.5 tonnellate di propellente in più cicli di pompaggio .



Figura 4: Tianzhou-1 attraccata alla stazione Tiangong-2 .

Gli esperimenti hanno riguardato la gestione dei fluidi in assenza di gravità, la stabilità termica dei propellenti e lo studio dei fenomeni di capillarità e stratificazione che influenzano il comportamento dei liquidi in microgravità. Rispetto alle missioni occidentali, Tianzhou-1 si distingue per la scala operativa del trasferimento e per la piena integrazione in un programma di stazione spaziale permanente.

5.3 NASA's Orbital Express

La missione *Orbital Express*, realizzata nel 2007 dalla DARPA in collaborazione con Boeing, è considerata una delle più rilevanti nel campo dell'OOS autonomo. Il suo obiettivo era dimostrare che due veicoli spaziali potessero eseguire in modo completamente autonomo operazioni quali attracco, trasferimento di propellente e sostituzione di componenti avionici, operazioni fino ad allora eseguite esclusivamente da astronauti in attività extraveicolare.

Il sistema era composto da due veicoli: **ASTRO**, il servicer dotato di bracci robotici e sistemi di navigazione autonoma, e **NEXTSat**, il satellite cliente progettato per ricevere propellente e componenti sostitutivi . ASTRO era equipaggiato con sensori ottici e lidar per manovre di avvicinamento con precisione centimetrica.



Figura 5: Schema della missione Orbital Express .

Durante la missione furono eseguite con successo oltre dieci sequenze di rendez-vous, con livello crescente di autonomia e complessità: trasferimento controllato di idrazina, sostituzione robotica di batterie e moduli avionici, ripetute manovre di separazione e ri-aggancio. A differenza di Tianzhou-1, focalizzata sul trasferimento di massa, Orbital Express ha validato

principalmente la catena tecnologica dell'autonomia decisionale e della sostituzione modulare di componenti.

5.4 Mission Extension Vehicle (MEV)

Il *Mission Extension Vehicle* (MEV), sviluppato da Northrop Grumman, è stato il primo veicolo commerciale progettato per estendere la vita operativa di satelliti geostazionari . A differenza delle missioni precedenti, MEV non trasferisce propellente, ma si aggancia al satellite cliente e ne assume direttamente il controllo di assetto e orbita, costituendo quindi un approccio complementare al rifornimento tradizionale.

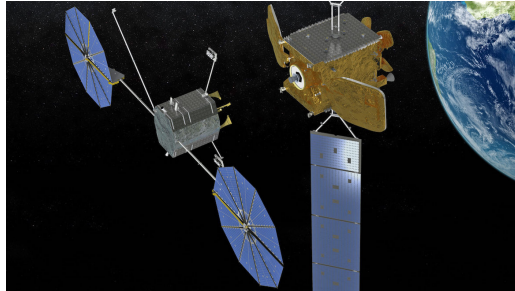


Figura 6: Il Mission Extension Vehicle durante una fase di attracco.

MEV-1, lanciato nel 2019, ha effettuato il primo attracco operativo con il satellite Intelsat-901, precedentemente spostato in un'orbita di parcheggio. L'aggancio avviene tramite un meccanismo che si inserisce nel cono del motore di apogeo del satellite, soluzione che consente di operare su piattaforme non progettate per il servicing .

MEV-2, lanciato nel 2020, ha dimostrato capacità ancora più avanzate effettuando l'attracco direttamente in orbita geostazionaria operativa, senza necessità di spostare il satellite cliente. Le capacità dimostrate includono: controllo condiviso dell'assetto, mantenimento della posizione GEO e un'estensione della vita operativa stimata tra 5 e 10 anni . MEV ha inaugurato un mercato commerciale del servicing orbitale, dimostrando la sostenibilità economica di queste operazioni.

6 Richiami di meccanica del volo spaziale

Il secondo capitolo ha l'obiettivo di introdurre i principali concetti di meccanica del volo spaziale necessari per affrontare il problema analizzato in questa tesi. La definizione dei sistemi di riferimento, dei parametri orbitali e delle relazioni cinematiche fondamentali costituisce infatti la base teorica indispensabile per comprendere le manovre di rendez-vous tra una *fuel station* e un satellite in orbita geostazionaria.

6.1 Sistemi di riferimento

La descrizione accurata della posizione e della velocità di un veicolo spaziale richiede la definizione di un sistema di riferimento appropriato. Un sistema di riferimento è costituito da:

- un'origine;
- un piano fondamentale;
- una triade di assi ortogonali;
- una convenzione temporale.

La scelta del sistema di riferimento dipende dal tipo di missione e dal fenomeno che si intende descrivere. Nel contesto del rifornimento orbitale, è essenziale distinguere tra sistemi inerziali e non inerziali, e tra sistemi centrati sul Sole, sulla Terra o sull'orbita del satellite.

6.1.1 Sistema di riferimento eliocentrico

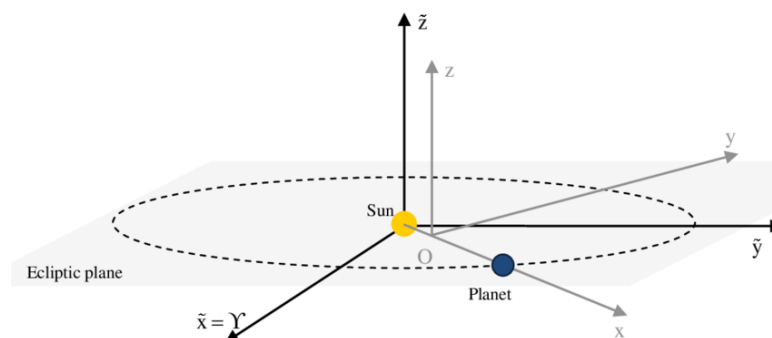


Figura 7: Sistema di riferimento eliocentrico.

Il sistema di riferimento eliocentrico ha origine nel centro del Sole e utilizza come piano fondamentale il piano dell'eclittica, ovvero il piano dell'orbita terrestre. È il sistema di riferimento tipicamente impiegato per lo studio delle missioni interplanetarie e per il metodo delle *patched conics*.

Gli assi sono definiti come segue:

- l'asse X punta verso il punto gamma dell'equinozio di primavera, ovvero l'intersezione tra il piano equatoriale terrestre e il piano dell'eclittica;

- l'asse Z è perpendicolare al piano dell'eclittica e orientato verso l'emisfero contenente Polaris;
- l'asse Y completa la terna destrorsa.

6.1.2 Sistema geocentrico equatoriale (ECI)

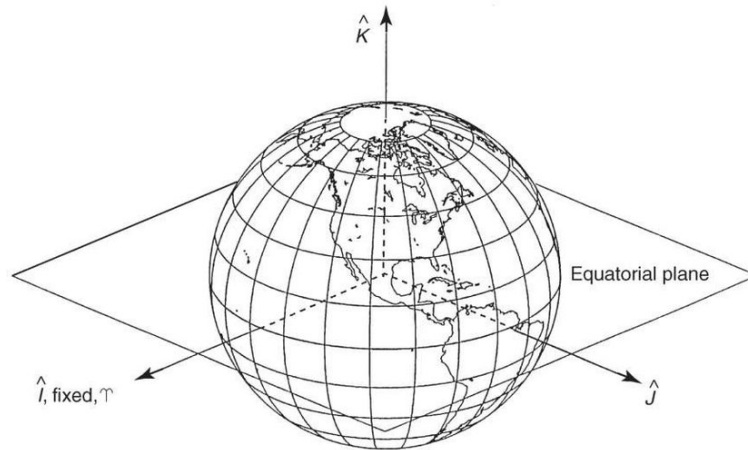


Figura 8: Sistema di riferimento geocentrico equatoriale (ECI).

Il sistema geocentrico equatoriale, o ECI (*Earth-Centered Inertial*), ha origine nel centro della Terra ed è utilizzato per descrivere il moto dei satelliti in orbita terrestre. Il piano fondamentale è il piano equatoriale terrestre.

Gli assi sono definiti come:

- I : parallelo all'asse X del sistema eliocentrico;
- K : perpendicolare al piano equatoriale e orientato verso Polaris;
- J : completa la terna destrorsa.

Sebbene venga spesso trattato come inerziale, l'ECI non è perfettamente tale, poiché la Terra non è un corpo rigidamente inerziale. Tuttavia, per la maggior parte delle applicazioni orbitali, esso può essere considerato un sistema inerziale con ottima approssimazione.

Il sistema ECI può essere descritto anche tramite coordinate polari, definite da:

- α : ascensione retta, angolo misurato verso est dall'asse X ;
- δ : declinazione, angolo tra il piano equatoriale e la direzione dell'oggetto;
- r : distanza dal centro della Terra.

Le coordinate cartesiane risultano:

$$x = r \cos \delta \cos \alpha, \quad y = r \cos \delta \sin \alpha, \quad z = r \sin \delta.$$

6.1.3 Sistema di riferimento perifocale

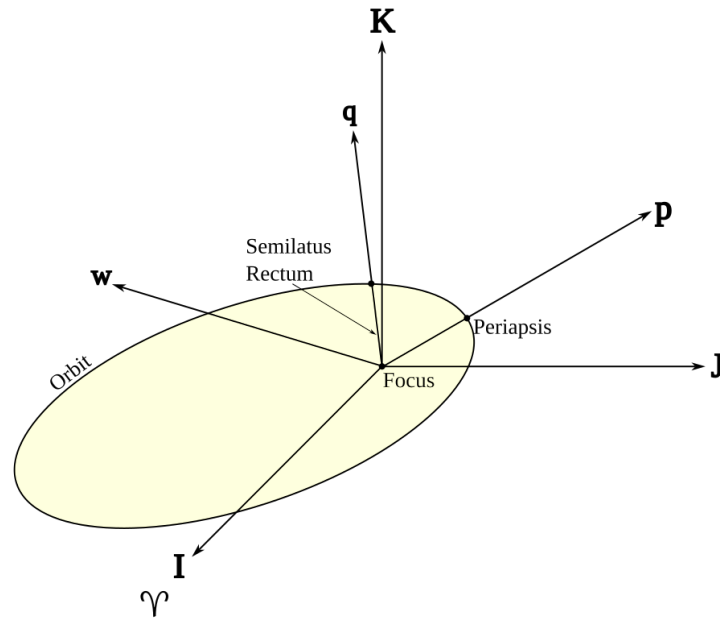


Figura 9: Sistema di riferimento perifocale.

Il sistema perifocale è centrato nel fuoco dell'orbita (per le orbite terrestri, il centro della Terra) e ha come piano fondamentale il piano orbitale del satellite. È il sistema più naturale per descrivere il moto kepleriano.

Gli assi sono definiti come:

- \hat{p} : diretto verso il perigeo;
- \hat{q} : ortogonale a \hat{p} nel piano orbitale, nella direzione del moto;
- \hat{w} : normale al piano orbitale.

Posizione e velocità nel sistema perifocale

La posizione nel sistema perifocale è descritta dal seguente vettore :

$$\mathbf{r}_{pqw} = \begin{bmatrix} r \cos \nu \\ r \sin \nu \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Mentre la velocità può essere descritta nel seguente modo :

$$\mathbf{v}_{pqw} = \begin{bmatrix} -\sqrt{\frac{\mu}{p}} \sin \nu \\ \sqrt{\frac{\mu}{p}} (e + \cos \nu) \\ 0 \end{bmatrix} .$$

6.2 Elementi orbitali classici

Gli elementi orbitali classici possono essere definiti come un set di 6 parametri utilizzati per poter individuare correttamente l'orbita percorsa dallo spacecraft e la sua traiettoria. Di questi 6 parametri, i primi 5 descrivono la forma e l'orientamento dell'orbita mentre il sesto determina la posizione del satellite lungo la traiettoria.

a	Semiassse maggiore	Viene definito come la distanza dal centro dell'ellisse che forma l'orbita fino al punto più distante sul bordo, passando per un fuoco.
e	Eccentricità	E' definita come il rapporto tra la distanza dal centro dell'ellisse al fuoco e la lunghezza del semiassse maggiore. Essa può variare tra 0 (orbita circolare) e 1 (orbita parabolica)
i	Inclinazione	Si riferisce all'inclinazione del piano orbitale rispetto al piano fondamentale. L'angolo viene misurato dal vettore unità \bar{K} fino al vettore momento angolare \bar{h}
Ω	Longitudine del nodo ascendente (RAAN)	Si riferisce all'angolo formato dal piano fondamentale e il nodo ascendente, ovvero il punto in cui lo spacecraft incrocia il piano fondamentale mentre si muove verso nord.
ω	Argomento del periasse	Si riferisce all'angolo del piano orbitale formato tra il nodo ascendente e il periasse. Si misura in direzione del moto dello spacecraft.
v	Anomalia vera	Si riferisce all'angolo sul piano orbitale tra il periasse e la posizione del satellite riferito ad un periodo particolare definito "Epoca"

Figura 10: Parametri orbitali classici.

Di seguito, si osserva la rappresentazione geometrica dei parametri orbitali di un'orbita satellitare :

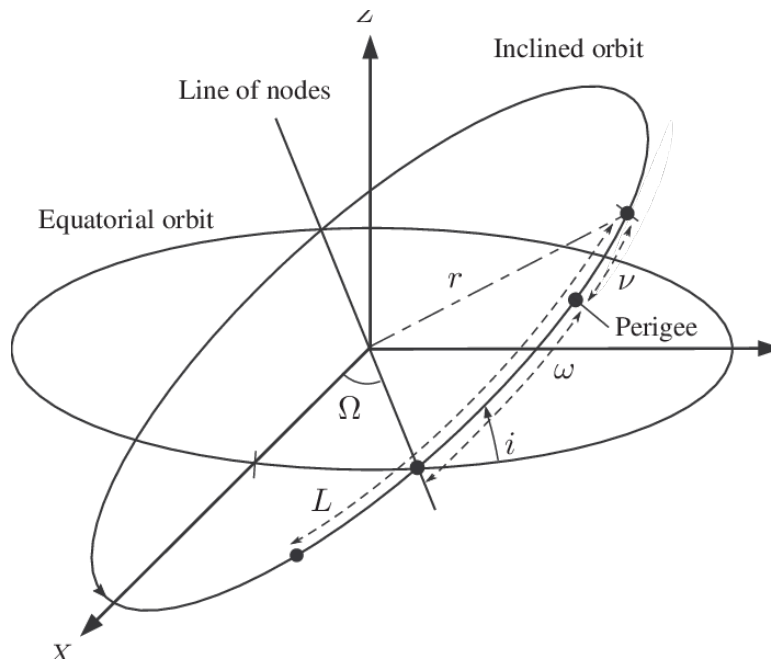


Figura 11: Rappresentazione geometrica dei parametri orbitali.

6.2.1 Casi particolari

Orbita equatoriale

Per un'orbita equatoriale ($i = 0^\circ$), RAAN e argomento del perigeo non sono definiti. Si introduce quindi la *longitudine del periasse*:

$$\Pi = \Omega + \omega.$$

Orbita circolare

Per un'orbita circolare ($e = 0$), argomento del perigeo e anomalia vera non sono definiti. Si introduce l'*argomento della latitudine*:

$$u = \omega + \nu.$$

Orbita equatoriale e circolare

Se entrambe le condizioni precedenti sono soddisfatte, si definisce la *longitudine vera*:

$$l = \Omega + \omega + \nu.$$

6.3 Problema del tempo

Per poter svolgere accuratamente l'ottimizzazione delle manovre di rendez-vous e di rifornimento, è fondamentale definire il tempo di volo di un satellite tra 2 punti della sua orbita. Il problema del tempo consiste proprio nel determinare la relazione tra la posizione del satellite lungo l'orbita e il tempo trascorso dall'inizio della stessa. Esso si divide in due problemi :

1. Il primo problema, detto anche problema diretto, consiste nel conoscere la posizione iniziale e quella finale del satellite sapendo i valori di anomalia vera iniziale e finale e di andare a calcolare il tempo necessario per il trasferimento.
2. Il secondo problema, detto problema inverso, consiste invece nel conoscere il tempo di trasferimento necessario e di voler andare a calcolare l'anomalia vera finale del satellite.

6.4 Derivazione del tempo di volo tramite la seconda legge di Keplero

Per determinare il tempo necessario affinché un satellite si sposti da un punto iniziale dell'orbita a un punto generico successivo, è possibile partire dalla seconda legge di Keplero. Tale legge afferma che il raggio vettore che unisce il satellite al centro della Terra spazza aree uguali in tempi uguali. Ne consegue che la velocità areolare è costante lungo l'intera orbita.

In forma differenziale, la legge può essere espressa come:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\nu} = \frac{h}{2} = \text{costante} \quad (4.1)$$

dove A è l'area spazzata, r la distanza dal fuoco dell'ellisse, ν l'anomalia vera e h il momento angolare specifico.

Questa relazione costituisce il punto di partenza per ricavare il tempo di volo tra due posizioni dell'orbita.

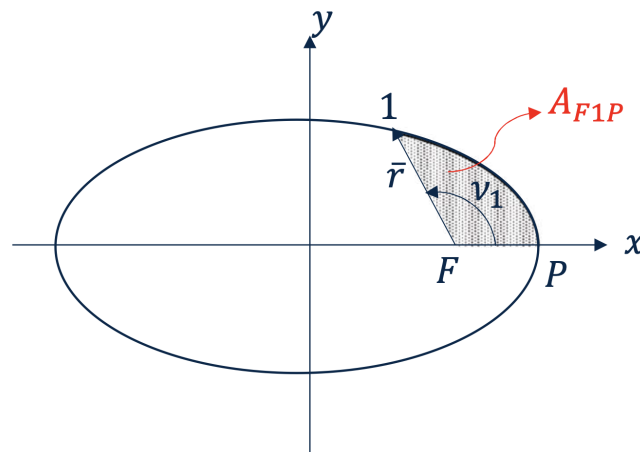


Figura 12: Area spazzata dal raggio vettore secondo la seconda legge di Keplero.

6.5 Relazione tra area spazzata e tempo

Poiché la velocità areolare è costante, è possibile stabilire una proporzione diretta tra l'area spazzata e il tempo trascorso. Indicando con A_E l'area totale dell'ellisse e con τ_E il periodo orbitale, si ha:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{A_E}{\tau_E}$$

Generalizzando per una porzione dell'orbita compresa tra il perigeo e un punto generico 1, l'area spazzata A_{F_1P} risulta proporzionale al tempo impiegato:

$$\frac{A_{F_1P}}{t_{1P}} = \frac{A_E}{\tau_E}.$$

Da cui:

$$t_{1P} = \frac{A_{F_1P}}{A_E} \tau_E. \quad (4.3)$$

Ricordando che l'area dell'ellisse è:

$$A_E = \pi ab,$$

e che il periodo orbitale è dato da:

$$\tau_E = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}, \quad (4.4)$$

il problema si riduce alla determinazione dell'area A_{F_1P} .

6.5.1 Determinazione dell'area tramite l'anomalia eccentrica

Per calcolare l'area spazzata tra il perigeo e il punto 1, si introduce l'anomalia eccentrica E . Essa rappresenta l'angolo che il satellite avrebbe percorso se l'orbita fosse stata circolare anziché ellittica, ed è definita geometricamente tramite la costruzione del cerchio circoscritto all'ellisse.

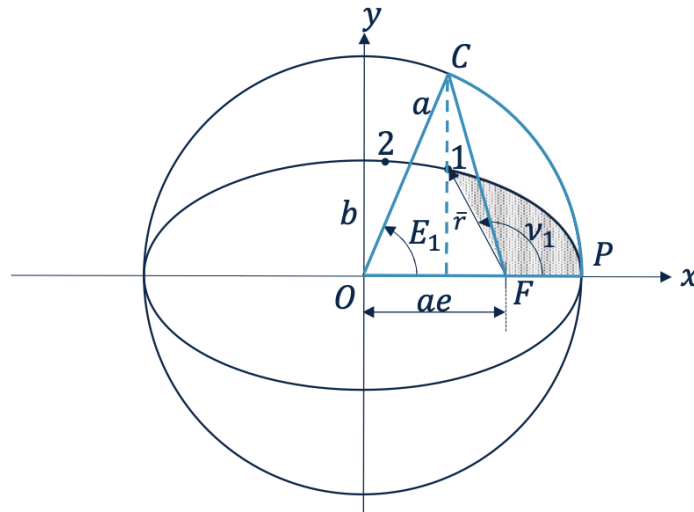


Figura 13: Definizione geometrica dell'anomalia eccentrica.

Considerando il cerchio circoscritto, l'area spazzata dal raggio vettore nel cerchio risulta:

$$A_{FCP} = \frac{a^2}{2} (E_1 - e \sin E_1). \quad (4.5)$$

Per ottenere l'area corrispondente nell'ellisse, è necessario scalare opportunamente l'area del cerchio. Si osservi infatti che, confrontando le equazioni cartesiane di ellisse e cerchio:

$$\text{Ellisse: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{Cerchio: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

si ricava che le ordinate sono legate dal rapporto:

$$\frac{y_{\text{ellisse}}}{y_{\text{cerchio}}} = \frac{b}{a}. \quad (4.8)$$

Applicando tale fattore di scala all'area del cerchio, si ottiene l'area effettivamente spazzata nell'ellisse:

$$A_{F1P} = \frac{b}{a} A_{FCP} = \frac{ab}{2} (E_1 - e \sin E_1). \quad (4.9)$$

6.5.2 Espressione finale del tempo di volo

Sostituendo l'espressione dell'area nell'equazione del tempo, si ottiene:

$$t_{1P} = \frac{2\pi\sqrt{a^3/\mu}}{\pi ab} \cdot \frac{ab}{2} (E_1 - e \sin E_1),$$

da cui:

$$t_{1P} = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} (E_1 - e \sin E_1). \quad (4.11)$$

La quantità:

$$M = E - e \sin E$$

è definita come *anomalía media*.

Pertanto, il tempo di volo dal perigeo al punto 1 è semplicemente:

$$t_{1P} = \frac{M_1}{n}, \quad n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}.$$

Se si desidera calcolare il tempo tra due punti generici dell'orbita, 1 e 2, si ottiene:

$$t_{21} = t_{2P} - t_{1P} = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} [(E_2 - e \sin E_2) - (E_1 - e \sin E_1)]. \quad (4.12)$$

Infine, introducendo il moto medio n , l'espressione assume la forma compatta:

$$t_{21} = \frac{M_2 - M_1}{n}.$$

6.5.3 Problema diretto

Per poter determinare il tempo necessario a raggiungere un punto specifico dell'orbita a partire da un istante iniziale, è necessario disporre di una relazione che colleghi l'anomalia vera ν all'anomalia eccentrica E . Infatti, come mostrato nel paragrafo precedente, il tempo di volo lungo un'orbita ellittica può essere ricavato solo tramite l'anomalia eccentrica, attraverso l'anomalia media M .

La derivazione parte da una semplice osservazione geometrica ricavabile dalla costruzione dell'anomalia eccentrica. Dalla figura illustrata in precedenza, si nota che la proiezione del punto orbitale sul cerchio circoscritto soddisfa la relazione:

$$a \cos E = ae + r \cos \nu. \quad (4.13)$$

Sostituendo in questa espressione l'equazione polare dell'orbita ellittica:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \nu}, \quad (4.14)$$

si ottiene una relazione diretta tra anomalia vera e anomalia eccentrica. Inserendo r nell'equazione precedente e semplificando, si ricava:

$$\cos E = \frac{e + \cos \nu}{1 + e \cos \nu}. \quad (4.15)$$

Questa equazione rappresenta il legame fondamentale tra le due anomalie ed è indispensabile per poter passare dalla descrizione geometrica dell'orbita (tramite ν) alla descrizione temporale (tramite E e M).

6.5.4 Calcolo del tempo tramite l'anomalia eccentrica

Una volta determinato il valore di E a partire dall'anomalia vera, è possibile ricavare l'anomalia media M utilizzando la definizione:

$$M = E - e \sin E.$$

L'anomalia media cresce linearmente nel tempo, per cui il tempo trascorso dall'istante iniziale t_0 risulta:

$$t - t_0 = \frac{M}{n}, \quad n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}},$$

dove n è il moto medio dell'orbita.

6.6 Il problema inverso del tempo: equazione di Keplero

Nelle applicazioni pratiche della dinamica orbitale, e in particolare nelle manovre di rendez-vous e nelle strategie di ottimizzazione indiretta, risulta spesso necessario determinare la posizione di un satellite lungo la sua orbita conoscendo il tempo trascorso da un istante iniziale. Questo

problema, noto come *problema inverso del tempo* o *problema di Keplero*, è più complesso rispetto al caso diretto, poiché richiede la risoluzione di un'equazione non lineare.

Nel problema diretto, infatti, si parte dall'anomalia vera ν e si ricava il tempo tramite l'anomalia eccentrica E e l'anomalia media M . Nel problema inverso, invece, la situazione è ribaltata: si conosce l'intervallo temporale e si vuole determinare la posizione orbitale finale del satellite.

6.6.1 Formulazione del problema

Il punto di partenza è l'espressione dell'anomalia media:

$$M = E - e \sin E,$$

che nel problema diretto veniva utilizzata per ricavare il tempo. Nel problema inverso, invece, si conosce M e si vuole determinare E .

L'anomalia media è legata al tempo tramite:

$$M = n(t - t_0), \quad n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}, \quad (4.16)$$

dove n è il moto medio dell'orbita.

Il problema consiste quindi nel risolvere l'equazione:

$$E - e \sin E - M = 0,$$

che non ammette soluzione analitica chiusa a causa della presenza del termine non lineare $e \sin E$.

6.6.2 Risoluzione numerica tramite il metodo di Newton

Per determinare il valore corretto di E si ricorre a un metodo iterativo. Il più utilizzato, grazie alla sua rapidità di convergenza, è il metodo di Newton.

Dato un generico problema di radice:

$$f(x) = 0,$$

il metodo di Newton costruisce una successione di stime:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}. \quad (4.17)$$

Applicando questo metodo all'equazione di Keplero, si definisce:

$$f(E) = E - e \sin E - M, \quad f'(E) = 1 - e \cos E.$$

La formula iterativa diventa quindi:

$$E_{j+1} = E_j - \frac{E_j - e \sin E_j - M}{1 - e \cos E_j}. \quad (4.18)$$

Il processo viene ripetuto fino a quando la differenza tra due iterazioni successive soddisfa una tolleranza prefissata, tipicamente dell'ordine di:

$$|E_{j+1} - E_j| < 10^{-10}.$$

Una volta ottenuto il valore di E , è possibile determinare la posizione orbitale del satellite.

6.7 Calcolo dell'anomalia vera

L'anomalia vera ν può essere ricavata dall'anomalia eccentrica tramite la relazione:

$$\tan\left(\frac{\nu}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan\left(\frac{E}{2}\right). \quad (4.19)$$

Questa formulazione, basata sulla funzione tangente, evita ambiguità di segno e garantisce una determinazione corretta dell'angolo anche in presenza di eccentricità elevate.

7 Manovre orbitali

Le manovre orbitali costituiscono un elemento centrale nell'ambito di questo lavoro di tesi, poiché rappresentano il meccanismo attraverso il quale è possibile modificare in modo controllato la traiettoria di un veicolo spaziale. Nel contesto specifico del rifornimento in orbita geostazionaria, esse assumono un ruolo ancora più rilevante: consentono infatti di pianificare e realizzare il rendez-vous tra la fuel station e il satellite da rifornire, determinando le variazioni di velocità necessarie per garantire un incontro sicuro ed efficiente.

In generale una manovra orbitale può essere definita come l'applicazione di un certo Δv a un satellite in orbita con l'obiettivo di modificarne i parametri orbitali, permettendogli così di raggiungere la posizione desiderata. Il costo di una manovra orbitale è sempre quantificato in termini di Δv , ed è importante stabilire la giusta sequenza di variazioni di velocità al fine di minimizzare il consumo di propellente.

Il modello di riferimento utilizzato è quello di tipo impulsivo, ovvero l'applicazione del Δv solo in determinati punti della traiettoria e non come spinta continua, come avviene nella propulsione elettrica. Per questo lavoro, in particolare, si è deciso di adottare il modello della propulsione chimica.

7.1 Equazione di Tsiolkovskij

Nel contesto delle manovre orbitali analizzate in questa tesi, la stima del consumo di propellente rappresenta un elemento cruciale. L'intero lavoro si basa infatti sulla ricerca di strategie di rendez-vous che minimizzino il costo propulsivo, sia attraverso metodi di ottimizzazione indiretta, sia tramite tecniche numeriche come Particle Swarm Optimization (PSO) e algoritmi genetici. Inoltre, nella parte finale della tesi, l'analisi viene estesa a una sequenza multi-obiettivo in cui si valutano dieci target successivi, rendendo ancora più importante disporre di un modello affidabile per quantificare il propellente consumato.

Per questo motivo, l'equazione di Tsiolkovskij — o *equazione del razzo* — costituisce il riferimento teorico fondamentale. Essa stabilisce il legame tra la variazione di velocità richiesta da una manovra, le caratteristiche del sistema propulsivo e il rapporto tra la massa iniziale e finale del veicolo.

L'equazione si basa sulle seguenti ipotesi semplificative:

- la spinta T è l'unica forza agente sul sistema durante la manovra;
- la spinta è applicata lungo la direzione della velocità del veicolo;
- la velocità di scarico dei gas è costante nel tempo.

Queste assunzioni permettono di ottenere una relazione analitica che, pur idealizzata, fornisce un limite inferiore teorico al consumo di propellente. Tale limite è particolarmente utile nel contesto di questa tesi, poiché consente di confrontare le soluzioni numeriche ottenute tramite metodi di ottimizzazione con i casi analitici ottimali.

7.1.1 Derivazione

La variazione di velocità ideale fornita dal motore è:

$$\Delta v = \int_{t_0}^{t_f} \frac{T}{m} dt.$$

Poiché la spinta può essere espressa come:

$$T = \dot{m} c,$$

si ottiene:

$$\Delta v = \int_{t_0}^{t_f} \frac{\dot{m} c}{m} dt.$$

Effettuando un cambio di variabile dal tempo alla massa:

$$\Delta v = -c \int_{m_0}^{m_f} \frac{dm}{m}.$$

Integrando e assumendo c costante:

$$\Delta v = c \ln \left(\frac{m_0}{m_f} \right).$$

Poiché la velocità efficace di scarico è legata all'impulso specifico tramite:

$$c = I_{sp} g_0,$$

si ottiene la forma più utilizzata dell'equazione del razzo:

$$\frac{m_f}{m_0} = e^{-\frac{\Delta v}{I_{sp} g_0}}.$$

7.1.2 Osservazioni e collegamento con gli obiettivi della tesi

L'equazione di Tsiolkovskij evidenzia come il costo propulsivo di una manovra dipenda in modo esponenziale dal rapporto tra la massa iniziale e quella finale del veicolo. Questo risultato ha implicazioni dirette per gli obiettivi della tesi:

- nei metodi numerici (PSO e algoritmi genetici), la valutazione delle soluzioni candidate richiede una stima accurata del propellente consumato, ottenuta proprio tramite questa equazione;
- nella sequenza multi-target, la propagazione della massa residua dopo ogni manovra è determinata dal rapporto m_f/m_0 , rendendo l'equazione essenziale per valutare la fattibilità dell'intera missione.

La massa di propellente richiesta è:

$$m_p = m_0 - m_f.$$

Poiché la *fuel station* deve raggiungere dieci target successivi partendo da un'orbita iniziale, la minimizzazione del consumo di propellente diventa un obiettivo primario. L'equazione di Tsiolkovskij fornisce quindi il quadro teorico che guida l'intero processo di ottimizzazione sviluppato in questa tesi, permettendo di confrontare le soluzioni numeriche con i limiti teorici e di valutare l'efficienza delle manovre proposte.

7.2 Cambio di piano

Il cambio di piano è una manovra impulsiva che modifica l'inclinazione del piano orbitale variando la direzione del vettore velocità. L'operazione consiste nel ruotare il vettore \vec{v} di un angolo $\Delta\psi$, senza modificarne il modulo: l'energia meccanica e il momento angolare orbitale rimangono invariati, mentre cambia l'orientazione del piano orbitale.

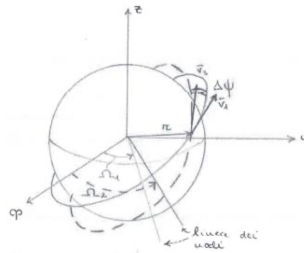


Figura 14: Cambio di piano.

Considerando la scomposizione della velocità nelle componenti radiale e tangenziale, si osserva che la componente radiale rimane invariata, mentre la componente tangenziale cambia direzione mantenendo lo stesso modulo. La variazione impulsiva richiesta è quindi legata alla rotazione del vettore velocità.

Dal triangolo vettoriale che rappresenta la rotazione di \vec{v} di un angolo $\Delta\psi$, si ottiene la relazione trigonometrica:

$$\frac{\Delta v}{2} = v_t \sin\left(\frac{\Delta\psi}{2}\right),$$

da cui segue:

$$\Delta v = 2v_t \sin\left(\frac{\Delta\psi}{2}\right).$$

Poiché la velocità tangenziale è pari a

$$v_t = \frac{\mu}{h} (1 + e \cos \nu),$$

il costo della manovra diventa:

$$\Delta v = \frac{2\mu}{h} (1 + e \cos \nu) \sin\left(\frac{\Delta\psi}{2}\right).$$

Si nota quindi che il cambio di piano è più conveniente nei punti in cui la velocità tangenziale è minima, ossia in prossimità dell'apogeo.

Per collegare la rotazione del vettore velocità alla variazione dell'inclinazione, si può utilizzare la trigonometria sferica. Per un cambio di piano semplice vale:

$$\cos i = \cos \delta \sin \psi,$$

da cui si ricava l'efficienza della manovra isolando $\Delta\psi$:

$$\Delta\psi = \arcsin\left(\frac{\cos(i_1 + \Delta i)}{\cos \delta}\right) - \arcsin\left(\frac{\cos i_1}{\cos \delta}\right).$$

Il rapporto tra $\Delta\psi$ e Δi indica quanto sia conveniente effettuare la manovra a una determinata latitudine. In particolare, per $\delta = 0$ (nodo ascendente o discendente) si ha $\Delta\psi = \Delta i$, e l'efficienza è massima. Ciò implica che il cambio di piano deve essere effettuato in corrispondenza dei nodi per minimizzare il costo propulsivo.

Il Δv necessario per ottenere una variazione di inclinazione Δi è quindi:

$$\Delta v_i = 2v_t \sin\left(\frac{\Delta i}{2}\right),$$

che rappresenta l'espressione classica del costo di un cambio di piano impulsivo.

7.3 Rifasamento a due impulsi

Il rifasamento è una manovra orbitale fondamentale nel contesto del presente studio, in quanto consente di sincronizzare la posizione angolare della *fuel station* con quella dello spacecraft da rifornire. A seconda della posizione relativa del target, la differenza di anomalia vera può essere positiva (target in avanti, $\Delta\nu \in (0^\circ, 180^\circ)$) oppure negativa (target indietro, $\Delta\nu \in (-180^\circ, 0^\circ)$).

Lo scopo della manovra è modificare temporaneamente il periodo orbitale della *fuel station* accelerandola o decelerandola, così da anticipare o ritardare il proprio moto rispetto al target. In entrambi i casi si utilizza una manovra a due impulsi: il primo per trasferirsi su un'orbita di attesa (*waiting orbit*), il secondo per ritornare all'orbita nominale una volta raggiunto il corretto allineamento angolare.

Nel caso di rifasamento per accelerazione, la *fuel station* viene portata su un'orbita con semiasse maggiore più piccolo rispetto a quello iniziale. Ciò comporta una velocità orbitale più elevata e quindi un periodo più breve, permettendo di recuperare il ritardo rispetto al target.

Nel caso opposto, quando è necessario ritardare la *fuel station*, la *waiting orbit* avrà un semiasse maggiore più grande, con conseguente diminuzione della velocità e aumento del periodo orbitale. In questo modo la stazione orbitale perde progressivamente fase fino a raggiungere il target desiderato.

La scelta del semiasse maggiore della *waiting orbit* determina direttamente il tempo necessario per colmare la differenza di fase e, di conseguenza, il costo propulsivo complessivo della manovra.

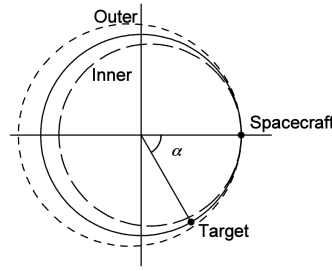


Figura 15: Fuel station e target desiderato.

7.3.1 Calcolo del Δv necessario

Per calcolare il Δv necessario bisogna innanzitutto determinare il periodo dell'orbita geostazionaria:

$$T_{\text{geo}} = 2\pi \sqrt{\frac{a_{\text{geo}}^3}{\mu}},$$

e quello della waiting orbit:

$$T_{\text{wo}} = T_{\text{geo}} + \frac{\lambda}{\omega_{\oplus}},$$

dove λ è la differenza di fase angolare da colmare (in radianti) e ω_{\oplus} è la velocità angolare di rotazione terrestre. Il periodo della waiting orbit deve essere tale da garantire il raggiungimento del target desiderato nel numero di rivoluzioni previsto.

Da qui si ricava il semiasse maggiore della waiting orbit:

$$a_{\text{wo}} = \sqrt[3]{\frac{T_{\text{wo}}^2 \cdot \mu}{4\pi^2}}.$$

Dall'equazione della vis-viva si ricavano la velocità in orbita geostazionaria V_{geo} e la velocità sulla waiting orbit V_{wo} :

$$V_{\text{geo}} = \sqrt{\frac{\mu}{a_{\text{geo}}}}, \quad V_{\text{wo}} = \sqrt{\frac{\mu}{a_{\text{wo}}}}.$$

Il Δv totale da fornire, considerando la manovra simmetrica a due impulsi, risulta:

$$\Delta v = 2 \cdot |V_{\text{wo}} - V_{\text{geo}}|.$$

7.4 Rifasamento a quattro impulsi

Il rifasamento a quattro impulsi rappresenta un'estensione dello schema a due impulsi e si utilizza per ottenere un controllo più accurato della dinamica relativa tra fuel station e target da rifornire. Lo schema a quattro impulsi suddivide la manovra in due fasi distinte.

Inizialmente la fuel station abbandona l'orbita geostazionaria tramite un primo impulso e si inserisce in una prima orbita di trasferimento; un secondo impulso permette poi di raggiungere una waiting orbit intermedia, caratterizzata da un semiasse maggiore opportunamente selezionato per garantire la variazione di fase desiderata. Una volta trascorso il tempo necessario al raggiungimento della corretta differenza di anomalia vera rispetto al target, la manovra viene completata in modo simmetrico mediante altri due impulsi che consentono di lasciare la waiting orbit e rientrare sull'orbita geostazionaria nominale.

Questa configurazione consente di distribuire i Δv complessivi su più impulsi, garantendo una maggiore flessibilità nella scelta dei parametri orbitali intermedi. È inoltre possibile ottimizzare la manovra in funzione di vincoli specifici, quali il tempo di attesa o i requisiti di sicurezza.

Nel contesto del presente lavoro il rifasamento a quattro impulsi assume un ruolo centrale, poiché costituisce la struttura di base sulla quale viene applicato l'algoritmo di ottimizzazione basato sugli algoritmi genetici, descritti nel capitolo successivo.

7.5 Manovre di rifasamento a quattro impulsi basate su trasferimenti di tipo Hohmann

Nel caso di un rifasamento orbitale a quattro impulsi, è possibile utilizzare una sequenza di due trasferimenti di tipo Hohmann per ottenere la variazione di fase desiderata tra la *fuel station* e il target. Si considerino due orbite circolari complanari: l'orbita iniziale di raggio r_c e la *waiting orbit* di raggio r_w .

Il semiasse maggiore dell'orbita di trasferimento Hohmann risulta:

$$a_H = \frac{r_c + r_w}{2},$$

e il periodo del trasferimento è dato da:

$$T_H = 2\pi \sqrt{\frac{a_H^3}{\mu}}.$$

Durante il trasferimento, lo spacecraft percorre una frazione di orbita pari a

$$1 + \frac{\alpha_w}{360^\circ},$$

mentre il target percorre

$$K + \frac{\alpha + \alpha_w}{360^\circ},$$

dove α è la differenza di anomalia vera iniziale e K è un numero intero che rappresenta il numero di rivoluzioni complete del target.

Si assume $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$. La scelta ottimale di K per minimizzare il Δv è:

$$K = \begin{cases} 0, & \text{orbita interna, } \alpha > 180^\circ, \\ 1, & \text{orbita esterna, } \alpha < 180^\circ. \end{cases}$$

Il tempo totale della manovra è:

$$\Delta t = T_H + T_w \frac{\alpha_w}{360^\circ} = T_c \left[K + \frac{\alpha + \alpha_w}{360^\circ} \right],$$

dove T_c è il periodo dell'orbita circolare iniziale. Da questa relazione si ricava il vincolo:

$$\frac{\alpha_w}{360^\circ} = \frac{\Delta t}{T_c} - K - \frac{\alpha}{360^\circ} \geq 0.$$

Introducendo la variabile adimensionale

$$x = \frac{a_H}{r_c},$$

si ottiene l'equazione da risolvere per determinare l'orbita di trasferimento:

$$\frac{\Delta t}{T_c} = \sqrt{x^3} + \left(\frac{\Delta t}{T_c} - K - \frac{\alpha}{360^\circ} \right) (2x - 1)^{3/2}.$$

Il costo propulsivo normalizzato rispetto alla velocità circolare V_c è:

$$\frac{\Delta V}{V_c} = 2 \left(\sqrt{2 - \frac{1}{x}} - 1 \right) + 2 \left(\sqrt{\frac{1}{2x - 1}} - \sqrt{\frac{1}{x(2x - 1)}} \right).$$

Per quanto riguarda i tempi minimi di trasferimento, si ha:

$$\left(\frac{\Delta t}{T_c} \right)_{\min} = \begin{cases} \max \left(\frac{\alpha}{360^\circ}, \frac{0.53}{2} \right), & \text{orbita interna,} \\ 1 + \frac{\alpha}{360^\circ}, & \text{orbita esterna.} \end{cases}$$

Si osserva inoltre che:

- le traiettorie interne forniscono i tempi di trasferimento più brevi;
- per $\alpha = 180^\circ$ le traiettorie interne risultano preferibili;
- una manovra a due impulsi è più efficiente quando $\Delta t/T_c$ è solo leggermente maggiore di $K + \alpha/360^\circ$;
- per valori elevati di $\Delta t/T_c$ (ad esempio > 5) le differenze tra le soluzioni diventano trascurabili;
- impulsi non tangenziali (trasferimenti non-Hohmann) possono migliorare ulteriormente le prestazioni.

7.5.1 Calcolo del Δv per il rifasamento a quattro impulsi

Nel caso di una manovra a quattro impulsi, la variazione di velocità totale è ottenuta come somma dei contributi dei due trasferimenti Hohmann utilizzati per entrare e uscire dalle orbite intermedie.

Assumendo orbite circolari e impulsi applicati in corrispondenza del raggio r_c , la velocità in orbita circolare iniziale è:

$$V_c = \sqrt{\frac{\mu}{r_c}},$$

mentre la velocità sull'orbita di trasferimento al perigeo risulta:

$$V_{H,p} = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r_c} - \frac{1}{a_H} \right)}.$$

Il primo impulso necessario per lasciare l'orbita geostazionaria è quindi:

$$\Delta v_1 = |V_{H,p} - V_c|.$$

Al termine del primo arco di trasferimento, la velocità al punto opposto dell'orbita è:

$$V_{H,a} = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r_w} - \frac{1}{a_H} \right)},$$

e la velocità circolare sulla *waiting orbit* è:

$$V_w = \sqrt{\frac{\mu}{r_w}}.$$

Il secondo impulso è dunque:

$$\Delta v_2 = |V_w - V_{H,a}|.$$

La manovra viene poi completata in modo simmetrico, per cui gli ultimi due impulsi risultano:

$$\Delta v_3 = \Delta v_2, \quad \Delta v_4 = \Delta v_1.$$

La variazione di velocità totale richiesta dalla manovra a quattro impulsi è quindi:

$$\Delta v_{\text{tot}} = 2(\Delta v_1 + \Delta v_2).$$

Questa formulazione consente di valutare in modo diretto il costo propulsivo della manovra e costituisce la base per l'ottimizzazione tramite algoritmi genetici sviluppata nel presente lavoro.

8 Metodi Metaeuristici

I metodi metaeuristici sono algoritmi di ottimizzazione progettati per affrontare problemi complessi e non lineari, nei quali i metodi analitici tradizionali risultano difficili da applicare. Nel contesto di questa tesi, il loro impiego è fondamentale per risolvere l'ottimizzazione del Δv : l'obiettivo è individuare le manovre di rendez-vous che minimizzano il consumo di propellente e la variazione di velocità totale, problemi altamente non lineari con spazi di ricerca ampi e presenza di minimi locali.

I metodi adottati sono i *Genetic Algorithms* (GA) e la *Particle Swarm Optimization* (PSO). Entrambi appartengono alla famiglia degli algoritmi evolutivi e offrono un approccio capace di esplorare efficacemente lo spazio delle soluzioni, fornendo stime robuste anche in presenza di funzioni obiettivo discontinue o multimodali. La funzione obiettivo comune a entrambi i metodi è:

$$J = \Delta v_{\text{tot}} + k_1(a - a_f)^2 + k_2(e - e_f)^2 + k_3(i - i_f)^2 + k_4(\Omega - \Omega_f)^2 + k_5(\nu - \nu_f)^2.$$

dove il primo termine rappresenta il costo propulsivo totale, ovvero la somma dei moduli di tutti gli impulsi applicati, mentre i termini successivi sono penalità quadratiche sugli errori dei parametri orbitali finali: semiasse maggiore a , eccentricità e , inclinazione i , longitudine del nodo ascendente Ω , argomento del perigeo ω e anomalia vera ν . I coefficienti k_1, \dots, k_6 sono pesi che bilanciano l'importanza relativa del costo propulsivo rispetto alla precisione del rendez-vous: valori elevati penalizzano fortemente le soluzioni che non raggiungono l'orbita target, garantendo che la minimizzazione di J produca manovre fisicamente ammissibili. La minimizzazione di J corrisponde quindi alla ricerca simultanea della manovra più efficiente in termini di Δv e del raggiungimento preciso dei parametri orbitali del satellite da rifornire.

8.1 Algoritmi Genetici

Il primo approccio adottato per risolvere il problema di ottimizzazione è costituito dagli algoritmi genetici (GA). Essi sono un metodo metaeuristico basato sui principi dell'evoluzione biologica: le soluzioni candidate si comportano come individui di una popolazione che evolve nel tempo attraverso meccanismi analoghi alla selezione naturale, al crossover genetico e alla mutazione.

Ogni soluzione rappresenta un individuo descritto da un insieme di parametri — in questo caso le variabili che definiscono la manovra orbitale. La qualità di ogni individuo viene valutata tramite la funzione di fitness J , definita nell'introduzione di questo capitolo. La popolazione iniziale viene generata casualmente per garantire un'ampia copertura dello spazio di ricerca e ridurre il rischio di convergenza verso minimi locali.

8.1.1 Procedura

Di seguito vengono illustrati i passaggi fondamentali del ciclo di un algoritmo genetico, schematizzati anche nel diagramma di flusso in Figura 16.

1) Inizializzazione

Si definisce una popolazione iniziale composta da n individui generati casualmente. Per ciascun individuo viene calcolato il valore della funzione di fitness J_i .

2) Selezione

Gli individui vengono selezionati per la riproduzione con una probabilità proporzionale alla loro fitness. I metodi più comuni sono la *selezione a roulette* (*roulette wheel selection*), in cui la probabilità di selezione è proporzionale al valore di fitness, e la *selezione per torneo* (*tournament selection*), in cui un sottoinsieme casuale di individui compete e viene selezionato il migliore.

3) Generazione di nuove soluzioni

Le nuove soluzioni vengono generate tramite l'applicazione di operatori genetici:

- **Crossover:** due individui genitori combinano parti delle loro informazioni per generare nuovi individui figli. Nella codifica reale, tipicamente utilizzata per problemi di ottimizzazione continua come quello in esame, si combinano linearmente i parametri dei due genitori.
- **Mutazione:** le informazioni di un singolo individuo vengono perturbate casualmente con una certa probabilità p_m . La mutazione è fondamentale per mantenere la diversità della popolazione ed evitare la convergenza prematura verso minimi locali.

Gli operatori genetici possono generare soluzioni non valide. Per gestire tali casi si possono adottare diverse strategie:

1. modificare gli operatori affinché non producano soluzioni non ammissibili;
2. applicare una mutazione forzata per riportare la soluzione nello spazio ammissibile;
3. penalizzare la fitness delle soluzioni non valide.

4) Sostituzione degli individui

La nuova popolazione viene costruita sostituendo parte o tutti gli individui della generazione precedente con quelli appena generati. Nella strategia *elitista*, i migliori individui della generazione corrente vengono sempre preservati nella successiva.

5) Criterio di arresto

L'algoritmo termina quando si raggiunge una delle seguenti condizioni: numero massimo di generazioni, convergenza della popolazione (varianza della fitness inferiore a una soglia prefissata), oppure raggiungimento di un valore di fitness target.



Figura 16: Diagramma di flusso dell’algoritmo genetico.

8.2 Particle Swarm Optimization

Il secondo approccio adottato è la *Particle Swarm Optimization* (PSO), un metodo metaeuristico ispirato al comportamento collettivo degli stormi di uccelli e dei banchi di pesci [4]. A differenza degli algoritmi genetici, il PSO non utilizza operatori di crossover o mutazione, ma si basa su un movimento coordinato di un insieme di particelle che esplorano lo spazio delle soluzioni aggiornando iterativamente la propria posizione e velocità.

Ogni soluzione è rappresentata da una particella caratterizzata da:

- $x_i(t)$: posizione attuale della particella i all’iterazione t ;
- $v_i(t)$: velocità attuale della particella i ;
- p_i : migliore posizione individuale trovata dalla particella i (*personal best*);
- g : migliore posizione trovata dall’intero sciame (*global best*).

A differenza dell’algoritmo genetico, la dimensione della popolazione rimane costante nel tempo: non vi è un rinnovamento degli individui, ma ogni particella aggiorna la propria posizione spostandosi verso la soluzione migliore.

8.2.1 Equazioni di aggiornamento

L'evoluzione collettiva delle particelle è governata dalle seguenti equazioni:

$$v_i(t+1) = \omega v_i(t) + c_1 r_1 (p_i - x_i(t)) + c_2 r_2 (g - x_i(t)),$$

$$x_i(t+1) = x_i(t) + v_i(t+1),$$

dove:

- ω è il **coefficiente di inerzia**, che controlla il peso della velocità precedente. Valori tipici sono compresi nell'intervallo $[0.4, 0.9]$; un valore elevato favorisce l'esplorazione globale, uno basso la convergenza locale;
- c_1 è il **coefficiente cognitivo**, che regola l'attrazione verso la migliore posizione individuale p_i . Valori tipici: $c_1 \approx 2.0$;
- c_2 è il **coefficiente sociale**, che regola l'attrazione verso la migliore posizione globale g . Valori tipici: $c_2 \approx 2.0$;
- $r_1, r_2 \in [0, 1]$ sono numeri casuali generati a ogni iterazione, che introducono stocasticità nel movimento delle particelle.

I tre termini dell'equazione di aggiornamento della velocità rappresentano rispettivamente la componente *inerziale* (memoria della direzione precedente), la componente *cognitiva* (tendenza a tornare verso il proprio ottimo personale) e la componente *sociale* (tendenza ad avvicinarsi all'ottimo globale dello sciame).

8.2.2 Procedura

I passi fondamentali dell'algoritmo PSO sono i seguenti:

1) Inizializzazione

Si genera casualmente uno sciame di N particelle. Per ciascuna particella si inizializzano posizione x_i e velocità v_i in modo casuale all'interno dello spazio di ricerca. Si impostano $p_i = x_i$ e si determina g come la posizione con fitness migliore tra tutte le particelle.

2) Valutazione della fitness

Per ogni particella si calcola J_i . Se $J_i < J(p_i)$, si aggiorna $p_i \leftarrow x_i$. Se $J_i < J(g)$, si aggiorna $g \leftarrow x_i$.

3) Aggiornamento di velocità e posizione

Si applicano le equazioni di aggiornamento a tutte le particelle dello sciame.

4) Criterio di arresto

Il ciclo si ripete fino al raggiungimento del numero massimo di iterazioni o alla convergenza dello sciame (variazione di g inferiore a una soglia prefissata).

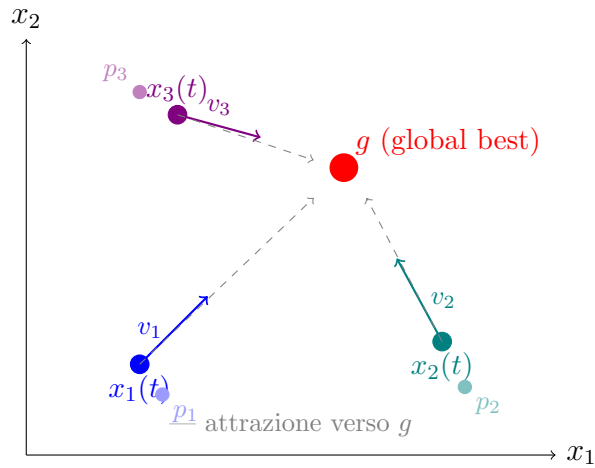


Figura 17: Schema del movimento delle particelle nel PSO: ogni particella si muove con velocità v_i influenzata dalla propria migliore posizione p_i e dall'ottimo globale g [4].

8.3 Confronto tra GA e PSO

I due algoritmi presentano caratteristiche complementari che li rendono adatti a scenari diversi. La Tabella 1 riassume le principali differenze.

Tabella 1: Confronto tra Algoritmo Genetico e Particle Swarm Optimization.

Caratteristica	GA	PSO
Ispirazione	Evoluzione biologica	Comportamento collettivo
Operatori principali	Crossover, Mutazione	Aggiornamento velocità
Dimensione popolazione	Variabile	Costante
Memoria individuale	No	Sì (p_i)
Memoria collettiva	Implicita	Esplicita (g)
Parametri principali	n, p_m, p_c	ω, c_1, c_2
Convergenza tipica	Più lenta	Più rapida

Nel contesto di questa tesi, entrambi i metodi vengono applicati al problema di ottimizzazione delle manovre di rendez-vous e i risultati vengono confrontati con le soluzioni analitiche note, al fine di validare i modelli implementati.

9 Analisi dei risultati e validazione degli algoritmi di ottimizzazione

In questo capitolo vengono presentati e discussi i principali risultati ottenuti tramite gli algoritmi genetici (GA) applicati al problema del rendez-vous orbitale tra una *fuel station* in orbita geostazionaria e una costellazione di satelliti target. L'obiettivo principale è valutare la capacità degli algoritmi metaeuristici di riprodurre le soluzioni analitiche note per manovre di rifasamento, cambio di piano e manovre combinate.

10 Metodologia e struttura del codice MATLAB

10.1 Schema generale della manovra e scelta degli impulsi

Per raggiungere l'obiettivo della missione, ovvero effettuare un rendez-vous tra la *fuel station* e dieci differenti satelliti, la manovra è stata modellata come una sequenza di quattro impulsi. Questa scelta rappresenta un compromesso tra semplicità e flessibilità: rispetto alle classiche manovre a due impulsi, l'introduzione di due impulsi intermedi consente di modulare meglio il valore di Δv necessario e di ottenere una maggiore precisione nel raggiungimento dei parametri orbitali finali.

I quattro impulsi vengono applicati:

- all'inizio della missione, al tempo t_0 ;
- in due istanti intermedi t_1 e t_2 ;
- al tempo finale t_f .

Poiché l'orbita di riferimento è geostazionaria, si impone che il tempo finale della manovra sia pari al tempo iniziale più uno o due giorni, corrispondenti rispettivamente a uno o due periodi orbitali completi:

$$t_f = t_0 + T_{\text{geo}} = t_0 + 86164.09 \text{ s,}$$

oppure

$$t_f = t_0 + 2T_{\text{geo}} = t_0 + 172328.18 \text{ s.}$$

10.2 Inserimento dei parametri orbitali iniziali e finali

Inizialmente vengono inseriti i parametri orbitali della *fuel station* al tempo t_0 :

$$(a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, \nu_0),$$

e i parametri orbitali del satellite target:

$$(a_f, e_f, i_f, \Omega_f, \omega_f, \nu_f).$$

Questi parametri costituiscono le condizioni al contorno del problema di rendez-vous e definiscono lo stato iniziale e quello desiderato al termine della manovra.

10.3 Conversione dei parametri orbitali e sistema di riferimento

I parametri orbitali vengono convertiti in vettori di posizione e velocità $(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)$ nel sistema di riferimento inerziale ECI tramite la funzione `Orb2eci` disponibile in `MATLAB`. Successivamente si effettua il passaggio dal sistema ECI al sistema RTN (Radiale–Tangenziale–Normale), in modo da esprimere gli impulsi in componenti fisicamente interpretabili. Il primo impulso $\Delta\mathbf{v}_0$ viene applicato nel sistema RTN, ottenendo:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 + \Delta\mathbf{v}_0.$$

Tramite la funzione `ECI2orb1` si ricavano quindi i nuovi parametri orbitali associati alla traiettoria risultante.

10.4 Propagazione orbitale e applicazione degli impulsi intermedi

Il satellite viene propagato sulla nuova orbita per un intervallo temporale pari a $t_1 - t_0$. In corrispondenza del tempo t_1 si calcola la nuova anomalia vera e si applica il secondo impulso $\Delta\mathbf{v}_1$. Lo stesso procedimento viene ripetuto per il tempo intermedio t_2 e per il tempo finale t_f , ottenendo i quattro impulsi complessivi:

$$\Delta\mathbf{v}_0, \quad \Delta\mathbf{v}_1, \quad \Delta\mathbf{v}_2, \quad \Delta\mathbf{v}_f.$$

Il costo propulsivo totale è definito come la somma dei moduli dei singoli impulsi:

$$\Delta v_{\text{tot}} = \|\Delta\mathbf{v}_0\| + \|\Delta\mathbf{v}_1\| + \|\Delta\mathbf{v}_2\| + \|\Delta\mathbf{v}_f\|.$$

10.5 Definizione della funzione di costo

Per applicare gli algoritmi genetici (GA) e il PSO, è necessario definire una funzione di costo J che tenga conto sia del costo propulsivo sia della precisione nel raggiungimento dell'orbita finale. La funzione adottata è:

$$J = \Delta v_{\text{tot}} + k_1 (a - a_f)^2 + k_2 (e - e_f)^2 + k_3 (i - i_f)^2 + k_4 (\Omega - \Omega_f)^2 + k_5 (\omega - \omega_f)^2 + k_6 (\nu - \nu_f)^2.$$

I coefficienti k_1, \dots, k_6 sono stati determinati tramite un processo iterativo, con l'obiettivo di bilanciare il costo propulsivo e la precisione nel raggiungimento dei parametri orbitali finali. I valori adottati sono riportati nella Tabella 2.

Tabella 2: Coefficienti di penalità della funzione di costo J .

Coefficiente	Parametro penalizzato	Valore adottato
k_1	Semiasse maggiore a [km]	10^{-4}
k_2	Eccentricità e [-]	10^2
k_3	Inclinazione i [rad]	$5 * 10^3$
k_4	RAAN Ω [rad]	10^1
k_5	Argomento del perigeo ω [rad]	10^2
k_6	Anomalia vera ν [rad]	$5 * 10^2$

Il compromesso ottimale è stato scelto in modo da ottenere soluzioni vicine ai risultati analitici, senza penalizzare eccessivamente il Δv .

10.6 Vettore delle variabili di ottimizzazione

Per applicare correttamente gli algoritmi metaeuristici, è necessario definire un vettore delle incognite contenente tutti i parametri da ottimizzare. Nel caso in esame, il vettore ottimale X_{opt} è composto da 14 variabili:

$$X_{opt} = [t_1, t_2, v_{0T}, v_{0R}, v_{0N}, v_{1T}, v_{1R}, v_{1N}, v_{2T}, v_{2R}, v_{2N}, v_{fT}, v_{fR}, v_{fN}].$$

Gli algoritmi GA e PSO esplorano combinazioni differenti di questi parametri, valutando per ciascuna il valore della funzione di costo J . L'obiettivo è individuare la combinazione che minimizza J , ottenendo:

- i tempi ottimali t_1 e t_2 ;
- le tre componenti RTN di ciascun impulso;
- il valore minimo di Δv_{tot} compatibile con i vincoli orbitali.

Una volta determinati i tempi ottimali, è possibile convertirli nelle corrispondenti anomalie vere, ottenendo una rappresentazione più intuitiva dei punti in cui avvengono gli impulsi intermedi.

11 Casi analitici di riferimento

In questa sezione vengono richiamati i casi analitici utilizzati come riferimento per la validazione degli algoritmi metaeuristici. Essi rappresentano soluzioni note e ben comprese dal punto di vista teorico, rispetto alle quali è possibile valutare l'accuratezza e la coerenza fisica delle soluzioni numeriche.

11.1 Rifasamento: caso analitico

Si considera come caso di studio una manovra di rifasamento tra la *fuel station* e un satellite di riferimento in orbita geostazionaria, caratterizzato dai seguenti parametri orbitali:

$$a = 42164 \text{ km}, \quad e = 0, \quad i = 0, \quad \Omega = 0, \quad \omega = 0, \quad \nu = 0.$$

Si sono analizzati tutti i possibili angoli di rifasamento e si è calcolato il Δv totale corrispondente a ciascuna variazione di anomalia vera. La Figura 18 mostra l'andamento risultante: i valori positivi dell'asse delle ascisse corrispondono a manovre di tipo *outer* (waiting orbit con semiasse maggiore e periodo superiori a quelli GEO), mentre i valori negativi corrispondono a manovre *inner*.

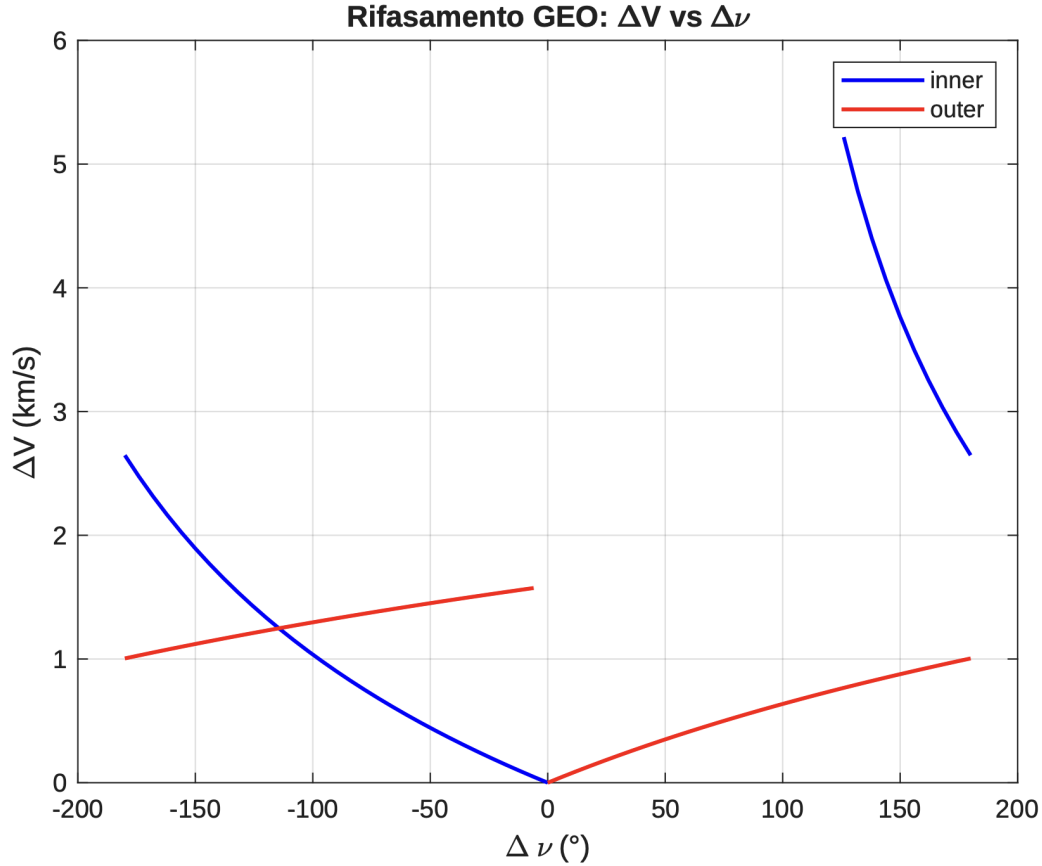


Figura 18: Variazione del Δv in funzione dell'angolo di rifasamento $\Delta \nu$.

11.1.1 Calcolo analitico per $\Delta \nu = 90^\circ$

Per effettuare un confronto diretto con i risultati degli algoritmi evolutivi, si considera una manovra di rifasamento con $\Delta \nu = 90^\circ$. Il tempo necessario affinché il satellite in *waiting orbit* recuperi l'angolo di fase $\lambda = \pi/2$ è:

$$T_{\text{wo}} = T_{\text{geo}} + \frac{\lambda}{\omega_{\oplus}} = 86164.09 + \frac{\pi/2}{7.29 \times 10^{-5}} = 107705 \text{ s},$$

dove $\omega_{\oplus} = 7.29 \times 10^{-5}$ rad/s è la velocità angolare terrestre. Il semiasse maggiore della *waiting orbit* si ricava dalla terza legge di Keplero:

$$a_{\text{wo}} = \left(\frac{T_{\text{wo}}^2 \mu}{4\pi^2} \right)^{1/3} = 48927.15 \text{ km}.$$

Come atteso, $a_{\text{wo}} > a_{\text{geo}} = 42164 \text{ km}$, confermando la natura *outer* della manovra. Le velocità nei due punti di impulso sono:

$$V_{\text{wo}} = \sqrt{-\frac{\mu}{a_{\text{wo}}} + \frac{2\mu}{r_{\text{geo}}}} = 3.280 \text{ km/s}, \quad V_{\text{geo}} = \sqrt{\frac{\mu}{r_{\text{geo}}}} = 3.075 \text{ km/s}.$$

Il Δv totale, simmetrico nei due impulsi, risulta:

$$\Delta v_{\text{analitico}} = 2 |V_{\text{wo}} - V_{\text{geo}}| = 2 \times 0.2056 = 0.4113 \text{ km/s} \quad (1T).$$

Per un tempo di manovra pari a due periodi orbitali il Δv si dimezza:

$$\Delta v_{\text{analitico}} = 0.2056 \text{ km/s} \quad (2T).$$

11.2 Variazione di inclinazione: caso analitico

Per la manovra di cambio di piano si considera la stessa configurazione orbitale, con l'unica differenza di una variazione di inclinazione $\Delta i = 5^\circ$. La Figura 19 mostra l'andamento del Δv al variare dell'angolo di cambio di piano.

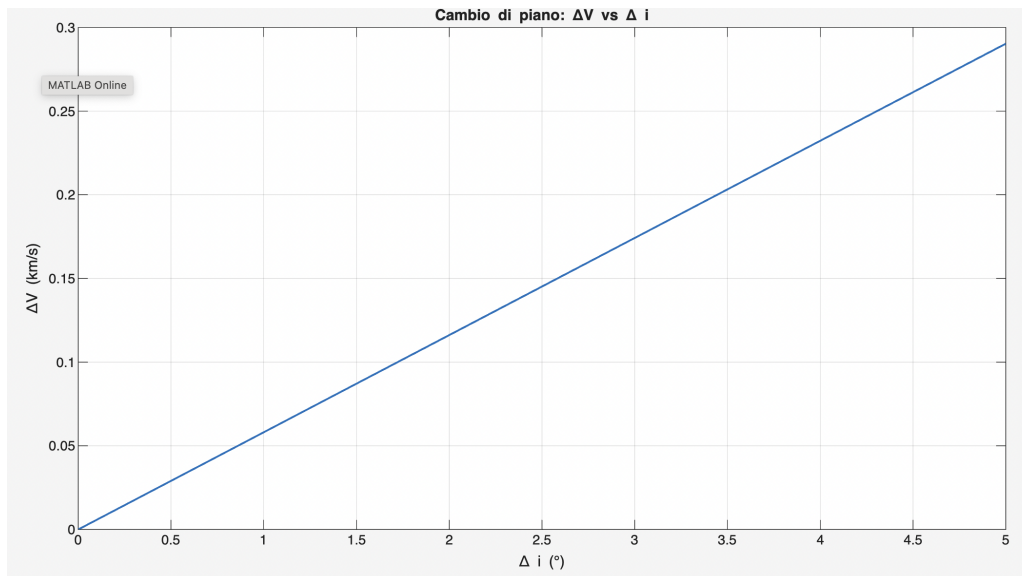


Figura 19: Variazione del Δv in funzione dell'angolo di cambio di inclinazione.

Il Δv ottimale viene applicato in corrispondenza di un nodo orbitale, dove la velocità è interamente tangenziale. La formula analitica fornisce:

$$\Delta v_{\text{analitico}} = 2 V_{\text{geo}} \sin\left(\frac{\Delta i}{2}\right) = 2 \times 3.075 \times \sin(2.5^\circ) = \boxed{0.268 \text{ km/s}}.$$

12 Risultati degli algoritmi genetici

In questa sezione vengono presentati i risultati ottenuti tramite gli algoritmi genetici per i casi di rifasamento, cambio di inclinazione e manovra combinata. L'analisi è focalizzata sia sui parametri orbitali finali sia sulla struttura degli impulsi e sul valore del Δv totale.

12.1 Rifasamento di $\pi/2$

Si considera il caso di rifasamento di $\Delta\nu = \pi/2$, senza variazione degli altri parametri orbitali, in due scenari distinti:

- rifasamento completato in un periodo orbitale ($T = 86164.09$ s);
- rifasamento completato in due periodi orbitali ($T = 172328.18$ s).

Caso 1: rifasamento in un periodo orbitale

Parametri	Orbita Iniziale	Orbita Desiderata	Orbita finale
a [km]	42164	42164	42163.3159152489
e	0	0	0.06373
i [deg]	0	0	0.0005667178
Ω [deg]	0	0	6.36991166e-06
ω [deg]	0	0	-0.00412
ν [deg]	0	90	89.7593832665658

Figura 20: Parametri orbitali finali ottenuti tramite GA per rifasamento di $\pi/2$ in un periodo orbitale.

χ_{ottimo}	
φ_1 [deg]	104.96°
φ_2 [deg]	265.82°
Δv_{0R} [km/s]	3.0423e-06
Δv_{0T} [km/s]	-0.2013
Δv_{0N} [km/s]	-1.4918e-05
Δv_{1R} [km/s]	1.5238e-11
Δv_{1T} [km/s]	-5.1389e-11
Δv_{1N} [km/s]	1.8967e-11
Δv_{2R} [km/s]	-1.0779e-11
Δv_{2T} [km/s]	-2.1006e-11
Δv_{2N} [km/s]	3.2437e-11
Δv_{fR} [km/s]	-0.00605
Δv_{fT} [km/s]	0.1818
Δv_{fN} [km/s]	1.8297e-05

Figura 21: Componenti RTN degli impulsi ottimizzati – rifasamento in un periodo.

Δv_{totale}	0.414806
---------------------	----------

Figura 22: Δv totale ottenuto tramite GA – rifasamento in un periodo.

Dai risultati si osserva che:

- il GA riproduce correttamente la variazione di anomalia vera richiesta, mantenendo gli altri parametri orbitali prossimi ai valori nominali;
- gli impulsi ottimizzati mostrano una struttura coerente con la manovra analitica a due impulsi: il primo e l'ultimo impulso risultano dominanti, mentre i due intermedi compensano piccole deviazioni accumulate durante la propagazione;
- il Δv_{tot} ottenuto è in accordo con il valore analitico $\Delta v_{\text{analitico}} = 0.411 \text{ km/s}$.

La Figura 23 mostra la traiettoria ottimizzata nel piano tridimensionale, con i vettori impulso applicati nei punti ottimali.

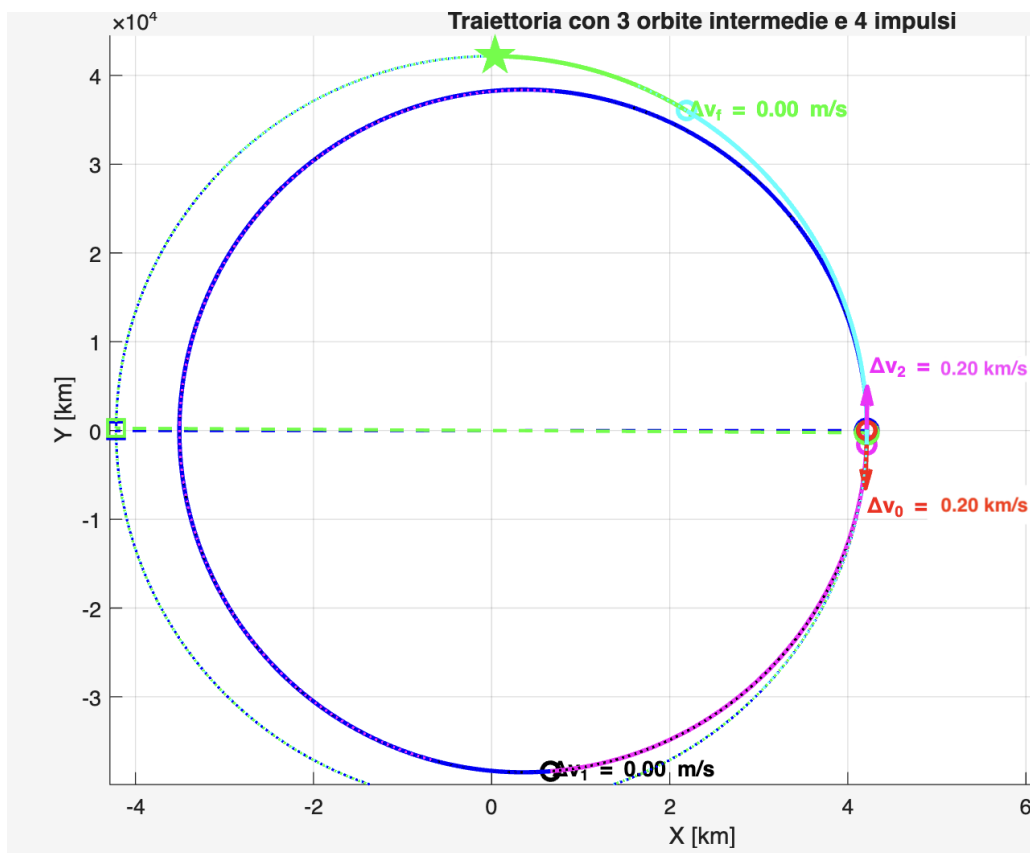


Figura 23: Traiettoria ottimizzata e vettori impulso nel sistema RTN – rifasamento di $\pi/2$ in un periodo.

Caso 2: rifasamento in due periodi orbitali

Parametri	Orbita Iniziale	Orbita Desiderata	Orbita finale
a [km]	42164	42164	42164.0325987925
e	0	0	0.09325107927
i [deg]	0	0	2.03690423e-05
Ω [deg]	0	0	0.009286286
ω [deg]	0	0	0
ν [deg]	0	90	89.4527423

Figura 24: Parametri orbitali finali ottenuti tramite GA per rifasamento di $\pi/2$ in due periodi orbitali.

χ_{ottimo}	
$\varphi 1$ [deg]	105.93°
$\varphi 2$ [deg]	237.059°
Δv_{0R} [km/s]	-4.6004e-06
Δv_{0T} [km/s]	-0.1117
Δv_{0N} [km/s]	-7.0938e-05
Δv_{1R} [km/s]	-3.5969e-08
Δv_{1T} [km/s]	-1.2484e-07
Δv_{1N} [km/s]	-6.0108e-10
Δv_{2R} [km/s]	1.4821e-10
Δv_{2T} [km/s]	-6.7481e-11
Δv_{2N} [km/s]	4.3174e-11
Δv_{fR} [km/s]	-0.0250
Δv_{fT} [km/s]	0.1051
Δv_{fN} [km/s]	8.2813e-05

Figura 25: Componenti RTN degli impulsi ottimizzati – rifasamento in due periodi.

Δv_{totale}	0.224828
---------------------	----------

Figura 26: Δv totale ottenuto tramite GA – rifasamento in due periodi.

Rispetto al caso precedente si osserva che:

- il Δv_{tot} risulta significativamente più basso e prossimo al valore analitico $\Delta v_{analitico} = 0.206$ km/s, confermando che un tempo di rifasamento maggiore consente di utilizzare una *waiting orbit* meno energetica;
- il Δv risulta circa dimezzato rispetto al caso a un solo periodo, in perfetto accordo con la teoria;

- gli impulsi intermedi risultano più piccoli.

12.2 Cambio di inclinazione di 5°

Si considerano i risultati ottenuti tramite GA per una manovra di cambio di piano $\Delta i = 5^\circ$, con tutti gli altri parametri orbitali invariati. L'obiettivo è verificare la capacità dell'algoritmo di riprodurre il comportamento analitico, che richiede un singolo impulso in corrispondenza di un nodo orbitale.

Parametri	Orbita Iniziale	Orbita Desiderata	Orbita finale
a [km]	42164	42164	42163.921172727
e	0	0	3.60608181e-05
i [deg]	0	5	4.8940795
Ω [deg]	0	0	0
ω [deg]	0	0	0.004831321685608
ν [deg]	0	0	0.057265

Figura 27: Parametri orbitali finali ottenuti tramite GA per $\Delta i = 5^\circ$.

Office on the web Frame		Xottimo
$\varphi 1$ [deg]		158.19°
$\varphi 2$ [deg]		245.3°
$\Delta v 0R$ [km/s]		2.6403e-04
$\Delta v 0T$ [km/s]		-8.7956e-04
$\Delta v 0N$ [km/s]		0.0580
$\Delta v 1R$ [km/s]		3.3979e-04
$\Delta v 1T$ [km/s]		-7.5425e-04
$\Delta v 1N$ [km/s]		0.0868
$\Delta v 2R$ [km/s]		6.0453e-04
$\Delta v 2T$ [km/s]		-4.0890e-04
$\Delta v 2N$ [km/s]		-0.0593
$\Delta v fR$ [km/s]		1.8977e-06
$\Delta v fT$ [km/s]		-7.8859e-04
$\Delta v fN$ [km/s]		-0.0546

Figura 28: Componenti RTN degli impulsi ottimizzati – cambio di inclinazione 5°.

Δv totale	0.258829
-------------------	----------

Figura 29: Δv totale ottenuto tramite GA – cambio di inclinazione 5°.

Dai risultati si osserva che:

- il GA ottiene una variazione di inclinazione prossima ai 5° richiesti, mantenendo gli altri parametri orbitali pressoché invariati;
- la componente normale (N) degli impulsi risulta dominante, in accordo con la teoria del cambio di piano, mentre le componenti radiale e tangenziale assumono valori trascurabili;
- il Δv_{tot} è in accordo con il valore analitico $\Delta v_{analitico} = 0.268$ km/s, confermando la correttezza dell'implementazione.

La Figura 30 mostra la traiettoria ottimizzata nel sistema ECI con i vettori impulso applicati.

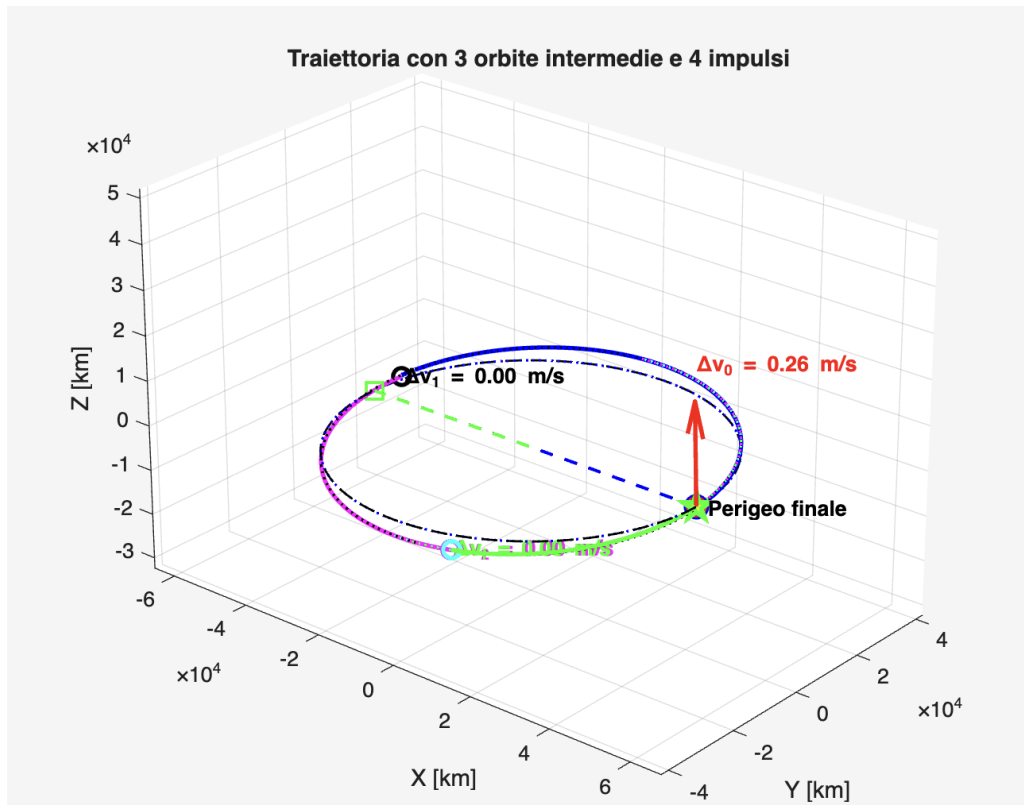


Figura 30: Traiettoria ottimizzata nel sistema ECI – cambio di inclinazione 5° .

12.3 Manovra combinata: $\Delta i = 5^\circ$ e $\Delta \nu = \pi/2$

Dopo aver analizzato separatamente il rifasamento e il cambio di piano, si considera ora una manovra combinata che imponga simultaneamente:

$$\Delta i = 5^\circ, \quad \Delta \nu = \frac{\pi}{2}.$$

Questo caso richiede all'algoritmo di gestire contemporaneamente variazioni nella direzione del vettore velocità (cambio di piano) e nella sua intensità (rifasamento tramite *waiting orbit*).

Parametri	Orbita Iniziale	Orbita Desiderata	Orbita finale
a [km]	42164	42164	42163.8627157
e	0	0	0.0119
i [deg]	0	5	4.92841160475
Ω [deg]	0	0	0
ω [deg]	0	0	0.0338
ν [deg]	90	90	89.931352

Figura 31: Parametri orbitali finali per la manovra combinata $\Delta i = 5^\circ$, $\Delta \nu = \pi/2$.

<u>Xottimo</u>	
$\varphi 1$ [deg]	102°
$\varphi 2$ [deg]	212.31°
Δv_{0R} [km/s]	-0.0176
Δv_{0T} [km/s]	-0.2193
Δv_{0N} [km/s]	-0.2237
Δv_{1R} [km/s]	-2.1845e-10
Δv_{1T} [km/s]	-2.1418e-10
Δv_{1N} [km/s]	-2.6398e-11
Δv_{2R} [km/s]	0.0096
Δv_{2T} [km/s]	0.0182
Δv_{2N} [km/s]	-0.0121
Δv_{fR} [km/s]	-0.0613
Δv_{fT} [km/s]	0.1744
Δv_{fN} [km/s]	0.0522

Figura 32: Componenti RTN degli impulsi ottimizzati – manovra combinata.

<u>Δv totale</u>	0.482531
-------------------------------------	----------

Figura 33: Δv totale ottenuto tramite GA – manovra combinata.

Dai risultati si osserva che:

- il GA soddisfa simultaneamente entrambi gli obiettivi: variazione di inclinazione e rifasamento;
- gli impulsi presentano una combinazione significativa delle componenti tangenziale e normale, come atteso per una manovra mista;
- il Δv_{tot} risulta maggiore rispetto ai casi singoli, in accordo con la natura combinata della manovra; come limite inferiore teorico si può stimare $\Delta v \geq \Delta v_{rif} + \Delta v_{\Delta i} = 0.411 + 0.268 = 0.679$ km/s, con possibili riduzioni derivanti dall'applicazione simultanea degli impulsi.

13 Confronto tra risultati analitici e algoritmi metaeuristici

Per valutare quantitativamente l'affidabilità degli algoritmi metaeuristici, la Figura 34 riporta la tabella riassuntiva che confronta i risultati analitici con quelli numerici per ciascuna manovra studiata.

Caso	Δv totale [km/s]	Δv analitico [km/s]	Errore %	φ_1	φ_2
Rifasatura di $\pi/2$ dopo un giro	0.414806	0.411249	0.8		
Rifasatura di $\pi/2$ dopo due giri	0.214828	0.2056245	4.4		
Cambio di inclinazione e di 5 gradi con $\Omega = 0^\circ$	0.258829	0.268230	3.5	179.2397	(245) $\Delta v=0$
Cambio di inclinazione e di 5 gradi con $\Omega = 90^\circ$	0.258764	0.268230	4	(100.862) $\Delta v=0$	270.21 3

Figura 34: Confronto tra Δv analitici e numerici con percentuali di errore relativo.

Dall'analisi della tabella emergono i seguenti risultati.

1. Accuratezza dei risultati numerici. Le percentuali di errore sui valori di Δv risultano inferiori alla soglia del 5% in tutti i casi considerati. Questo conferma che gli algoritmi metaeuristici sono in grado di riprodurre con elevata precisione le soluzioni analitiche, anche in presenza di vincoli multipli e di una funzione di costo non lineare.

2. Coerenza fisica delle soluzioni. Le soluzioni ottenute sono fisicamente coerenti con la teoria classica delle manovre orbitali:

- nel **cambio di inclinazione**, gli impulsi principali vengono applicati in corrispondenza dei nodi orbitali;
- nel **rifasamento**, la struttura degli impulsi è coerente con la manovra a due impulsi tramite *waiting orbit*;
- nella **manovra combinata**, le componenti tangenziale e normale degli impulsi assumono entrambe valori significativi.

3. Sensibilità al tempo di manovra. Il confronto tra rifasamenti eseguiti in uno o due periodi orbitali mostra che:

$$T_{\text{maggiore}} \Rightarrow \Delta v_{\text{minore}},$$

in perfetto accordo con la teoria delle *waiting orbit*. Gli algoritmi individuano autonomamente questo comportamento senza vincoli aggiuntivi nella funzione di costo.

4. Robustezza della funzione di costo. I coefficienti k_1, \dots, k_6 riportati nella Tabella 2 si dimostrano efficaci: le soluzioni finali rispettano i parametri orbitali desiderati senza introdurre oscillazioni o comportamenti numericamente instabili.

5. Affidabilità complessiva degli algoritmi. I risultati dimostrano che gli algoritmi metaeuristici sono affidabili per la pianificazione di manovre orbitali complesse: l'errore percentuale è trascurabile rispetto alle esigenze operative tipiche delle missioni GEO, la struttura delle soluzioni è fisicamente corretta e l'approccio è sufficientemente robusto da gestire manovre combinate e vincoli multipli.

14 Variazione combinata di eccentricità, inclinazione e rifasamento con RAAN variabile

In questa sezione si analizza un caso più complesso di rendez-vous orbitale, in cui la manovra richiede la variazione simultanea di tre parametri orbitali: eccentricità, inclinazione e fase relativa. L'obiettivo è valutare come la geometria orbitale — e in particolare il valore della RAAN Ω — influenzi la collocazione ottimale degli impulsi e la struttura complessiva della manovra.

Sono stati considerati tre casi distinti:

$$\Omega = 0, \quad \Omega = \frac{\pi}{2}, \quad \Omega = \pi.$$

Per ciascun caso è stata eseguita un'ottimizzazione a quattro impulsi: il primo e l'ultimo sono fissati rispettivamente all'inizio e alla fine della manovra, mentre i due impulsi intermedi sono lasciati liberi di collocarsi lungo l'orbita. L'ottimizzatore ricerca la combinazione di posizioni e direzioni degli impulsi che minimizza il Δv totale, imponendo le variazioni richieste in inclinazione ($\Delta i = 5^\circ$) e anomalia vera ($\Delta \nu = \pi/2$).

Le Figure 35–37 mostrano i parametri orbitali finali, le componenti degli impulsi nel sistema RTN e il valore del Δv per i tre casi di RAAN.

Parametri	Orbita Iniziale	Orbita Desiderata $\Omega=0^\circ$	Orbita finale $\Omega=0^\circ$	Orbita desiderata $\Omega=\pi/2$	Orbita finale $\Omega=\pi/2$	Orbita desiderata $\Omega=\pi$	Orbita finale $\Omega=\pi$
a [km]	42164	42164	42163.7 2166	42164	42163.7 8564	42164	42163.82 166
e	0	0	0.01229	0	0.01266 11	0	0.009229
i [deg]	0	5	4.9541	5	4.86921 25	5	4.86417
ω [deg]	0	0	0.04924 79	0	0.030	0	0.0492
ν [deg]	90	90	89.8075 4	90	89.865	90	89.8775

Figura 35: Parametri orbitali finali per la manovra combinata con $\Delta i = 5^\circ$, $\Delta \nu = \pi/2$ e RAAN variabile.

<i>Xottimo</i>	$\Omega=0^\circ$	$\Omega=\pi/2$	$\Omega=\pi$
$\varphi 1$ [deg]	0.60°	(124.44)	(176.96)
$\varphi 2$ [deg]	359.03	270.002	179.003°
Δv_{0R} [km/s]	-3.0697e-04	0.0437	-0.0390
Δv_{0T} [km/s]	-0.1844	-0.2099	-0.211
Δv_{0N} [km/s]	-0.1573	-0.2295	0.1393
Δv_{1R} [km/s]	0.0013	1.4458e-09	-8.3225e-10
Δv_{1T} [km/s]	-0.0229	2.1611e-10	1.3057e-08
Δv_{1N} [km/s]	0.0205	-1.3916e-08	7.9113e-09
Δv_{2R} [km/s]	0.0158	-0.0061	0.0033
Δv_{2T} [km/s]	0.1273	0.0270	0.0270
Δv_{2N} [km/s]	0.0935	0.0315	0.0208
$\Delta v_f R$ [km/s]	-0.0189	-0.0195	-0.0030
$\Delta v_f T$ [km/s]	0.1744	0.1702	0.1747
$\Delta v_f N$ [km/s]	0.0522	-0.0459	-0.1313

Figura 36: Componenti RTN degli impulsi ottimizzati per i tre valori di RAAN.

	$\Omega=0^\circ$	$\Omega=\pi/2$	$\Omega=\pi$
Δv totale	0.516463	0.512515	0.515349

Figura 37: Δv totale ottenuto per i tre valori di RAAN.

14.1 Analisi degli impulsi ottimali

La soluzione ottenuta è coerente con i principi dell'ottimizzazione orbitale. In tutti i casi analizzati gli impulsi effettivi sono principalmente due, mentre gli altri due assumono valori

quasi nulli e fungono da gradi di libertà per facilitare la convergenza dell'ottimizzatore. Tutti gli impulsi presentano componenti tangenziale e normale significative, necessarie per garantire simultaneamente la variazione di fase, di eccentricità e il cambio di inclinazione. Gli impulsi principali si collocano in prossimità del nodo ascendente o discendente, in accordo con il criterio di minimo costo per il cambio di piano. Un risultato particolarmente significativo è che, per tutti e tre i valori di RAAN, i due impulsi principali tendono a collocarsi in posizioni angolari vicine tra loro.

14.2 Variazione dei parametri orbitali nel tempo

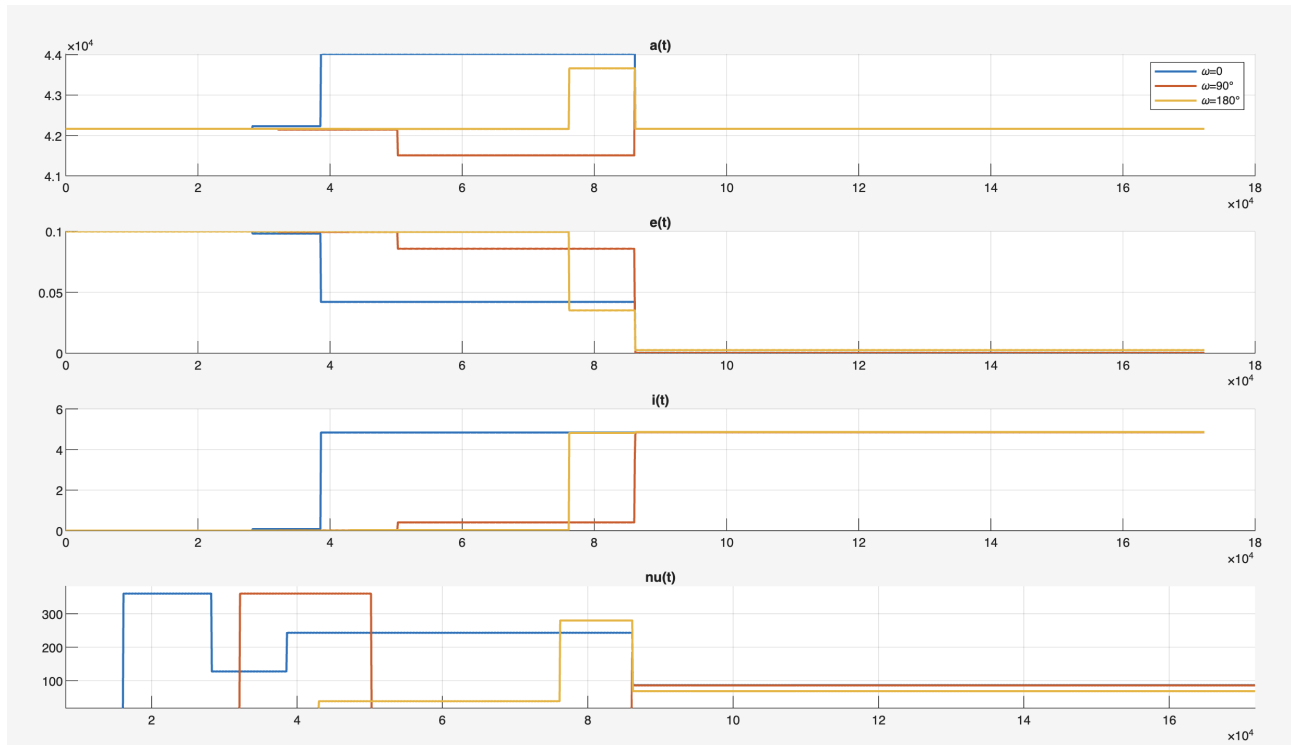


Figura 38: Evoluzione temporale di $a(t)$, $e(t)$, $i(t)$ e $\nu(t)$ per i tre valori di RAAN.

L'evoluzione temporale dei parametri orbitali conferma la struttura della manovra a quattro impulsi e mette in evidenza il ruolo della RAAN nella distribuzione delle variazioni lungo l'orbita. In particolare:

Semiassse maggiore $a(t)$: la variazione è concentrata in corrispondenza degli impulsi energetici. Per $\Omega = 0$ si osserva un incremento netto in un primo impulso seguito da un ritorno verso il valore finale; per $\Omega = \pi/2$ la variazione è di segno opposto ma ugualmente localizzata; per $\Omega = \pi$ il semiassse rimane pressoché costante con una singola correzione finale.

Eccentricità $e(t)$: la dinamica è complementare a quella del semiassse. Per $\Omega = 0$ e $\Omega = \pi/2$ si osserva una riduzione dell'eccentricità in corrispondenza degli impulsi principali con successivo ripristino; per $\Omega = \pi$ la variazione è più breve e concentrata.

Inclinazione $i(t)$: l'inclinazione mostra salti netti in corrispondenza degli impulsi di cambio di piano. Per $\Omega = 0$ il salto principale avviene nel primo tratto; per $\Omega = \pi/2$ la variazione è più contenuta; per $\Omega = \pi$ il salto è spostato verso la parte finale, evidenziando la dipendenza della collocazione del cambio di piano dalla geometria imposta da Ω .

Anomalia vera $\nu(t)$: la progressione di ν mostra chiaramente il rifasamento. Per $\Omega = 0$ la variazione è distribuita su più impulsi intermedi; per $\Omega = \pi/2$ e $\Omega = \pi$ la variazione principale è concentrata in uno o due eventi distinti.

Nel complesso, la dinamica temporale è qualitativamente simile per i tre valori di Ω : cambia la collocazione degli impulsi lungo l'orbita ma il costo propulsivo complessivo rimane pressoché invariato, indicando che la RAAN influisce sulla geometria della soluzione senza modificarne significativamente il budget di Δv .

14.3 Traiettorie ottimizzate e interpretazione geometrica

Le Figure 39–41 mostrano le traiettorie ottimali ottenute tramite gli algoritmi evolutivi per i tre valori di RAAN. In ciascun grafico sono rappresentati: l'orbita iniziale, le orbite intermedie e quella finale (colori distinti), la linea dei nodi iniziale e finale (verde e blu), i vettori impulso nei punti ottimali e il punto finale evidenziato con una stella verde.

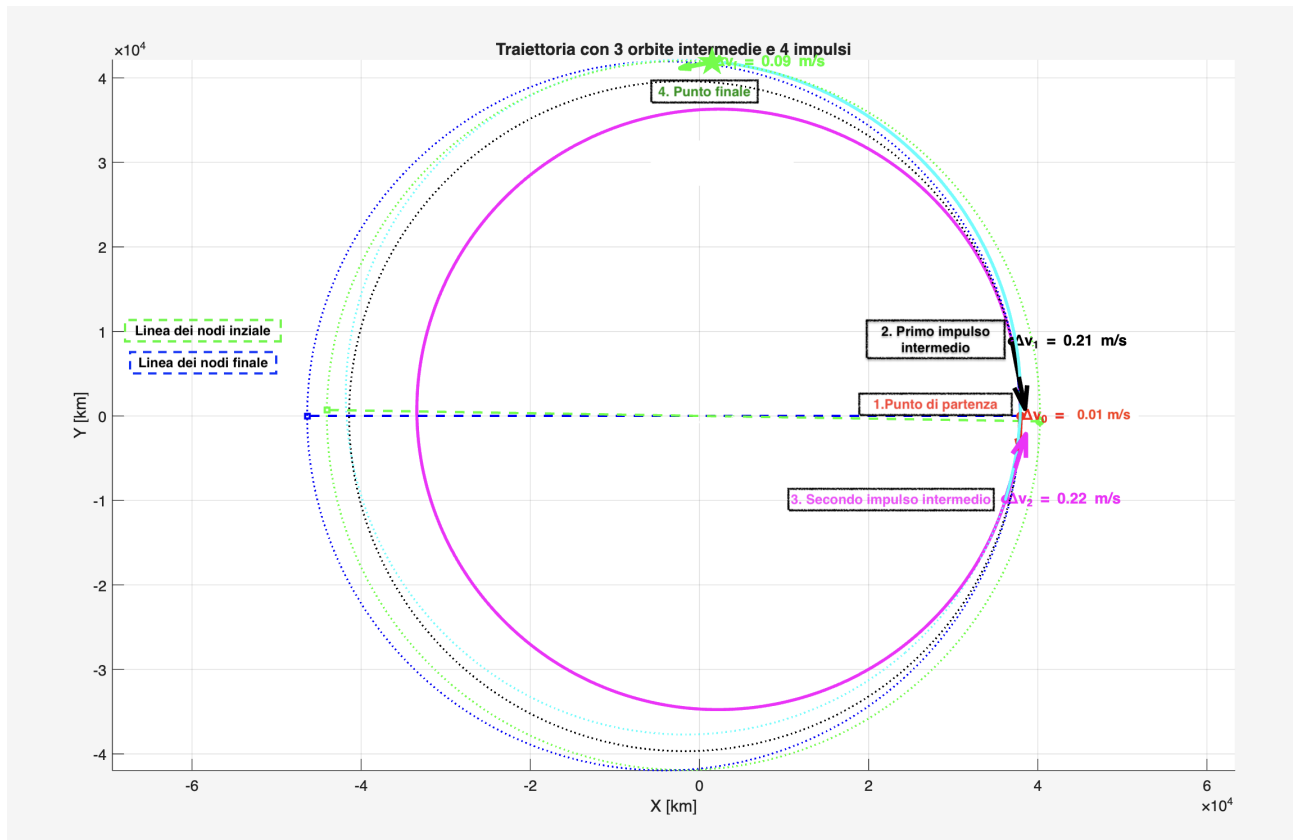


Figura 39: Traiettoria ottimizzata per $\Omega = 0$. Il punto finale è indicato con una stella.

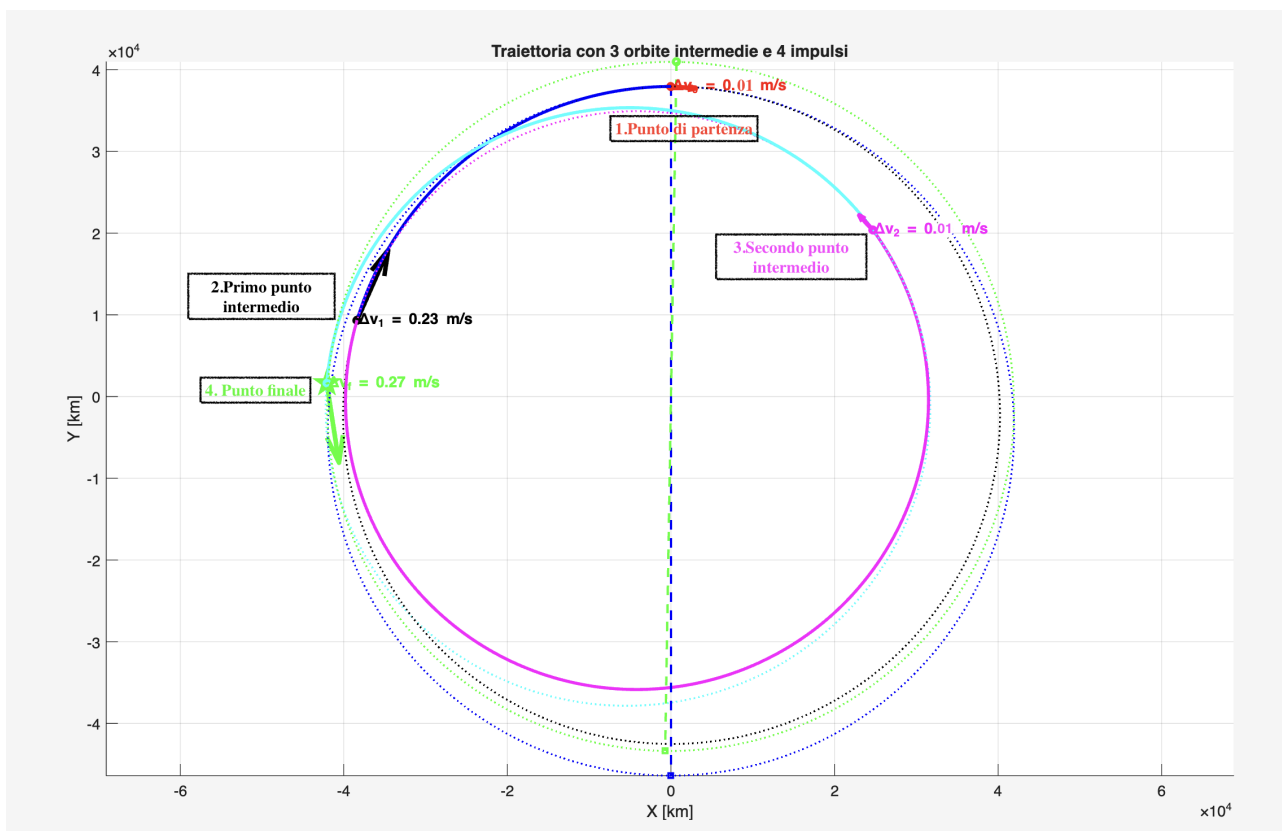


Figura 40: Traiettoria ottimizzata per $\Omega = \pi/2$.

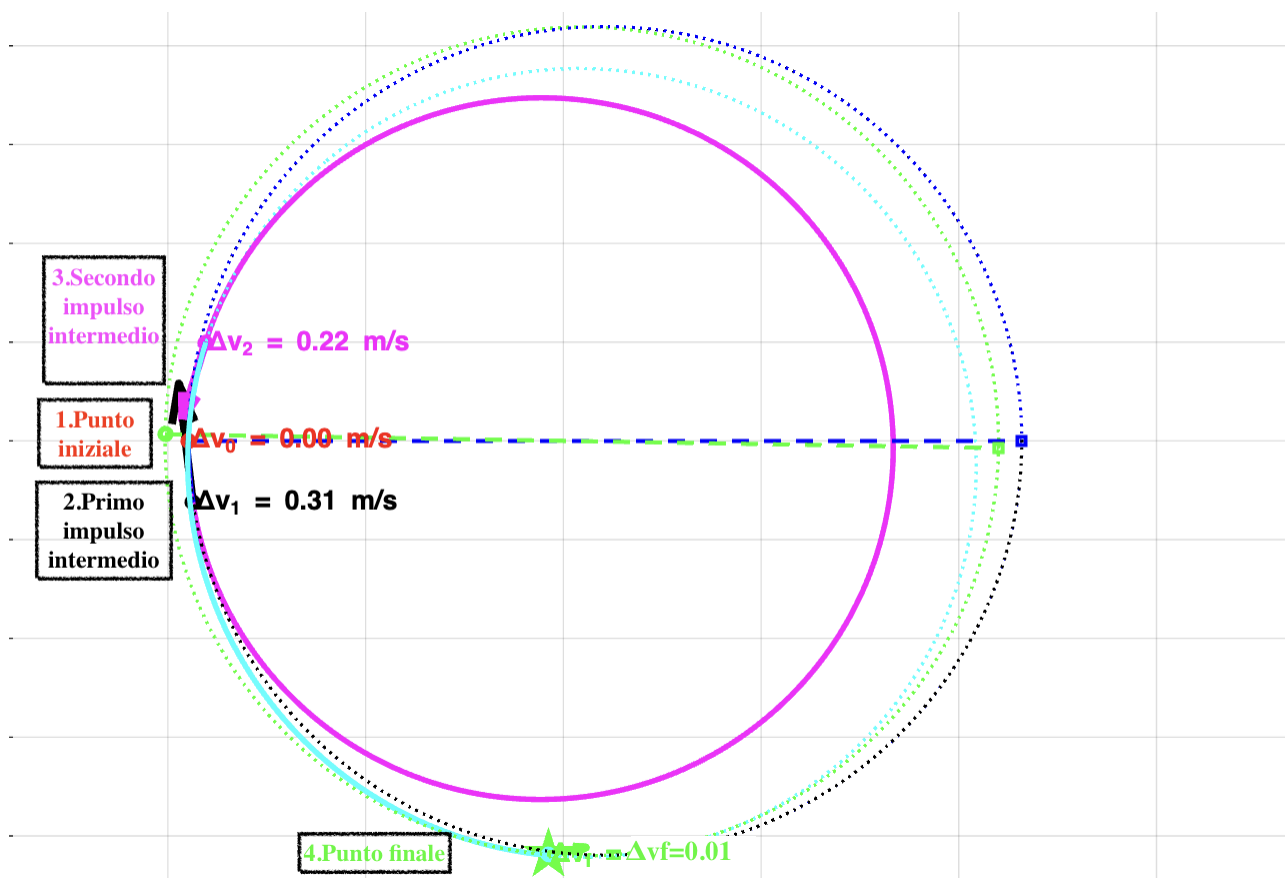


Figura 41: Traiettoria ottimizzata per $\Omega = \pi$.

La traiettoria parte dal punto iniziale (marcatore rosso) e si sviluppa in senso antiorario nel piano X - Y , attraversando tre archi successivi. Poiché l'argomento del perigeo è nullo in tutti i casi, l'anomalia vera iniziale e finale è immediatamente identificabile, rendendo evidente il rifasamento ottenuto.

14.4 Sintesi dei risultati

Dall'analisi congiunta delle traiettorie e dell'evoluzione dei parametri orbitali emergono le seguenti caratteristiche ricorrenti:

- la manovra ottimale richiede soltanto due impulsi effettivi, indipendentemente dal valore della RAAN, mentre gli altri due assumono valori quasi nulli fungendo da gradi di libertà per la convergenza dell'ottimizzatore;
- i due impulsi principali tendono a collocarsi in prossimità dei nodi orbitali (ascendente o discendente), dove la componente normale dell'impulso è perpendicolare al piano orbitale e il cambio di inclinazione risulta energeticamente più efficiente;
- le componenti tangenziali dei medesimi impulsi garantiscono simultaneamente la variazione di eccentricità e il rifasamento richiesto, senza necessità di posizionare gli impulsi in punti angolarmente opposti dell'orbita;
- la RAAN modifica la geometria della soluzione — in particolare la posizione angolare degli impulsi — senza alterare il costo totale della manovra.

Nonostante la diversa geometria imposta dalla RAAN, il costo propulsivo totale rimane pressoché invariato. Ciò suggerisce che la rotazione della linea dei nodi agisce come una trasformazione puramente geometrica del problema, senza alterarne la difficoltà energetica: cambia la geometria, non il costo.

15 Risultati del rendez-vous multitarget

15.1 Introduzione al problema

L'ultimo capitolo della tesi analizza un caso più complesso nel quale si richiede di effettuare un rendez-vous con dieci satelliti target distinti, ciascuno caratterizzato da parametri orbitali differenti. L'obiettivo è minimizzare la quantità di Δv e di propellente necessari all'intera missione.

Per risolvere il problema si era considerata inizialmente un'analisi esaustiva di tutte le possibili sequenze di visita. Tuttavia, il numero di permutazioni possibili è pari a $10! = 3\,628\,800$, rendendo questa strategia computazionalmente impraticabile: stimando un tempo medio di ottimizzazione di circa 30 secondi per trasferimento, l'analisi completa richiederebbe dell'ordine di 10^6 ore di calcolo. Si è pertanto adottato un approccio di tipo *greedy*, che riduce il numero di ottimizzazioni necessarie a soli $\sum_{k=1}^{10} k = 55$ trasferimenti, rendendo il problema risolvibile in tempi compatibili con le risorse disponibili.

Il metodo greedy costruisce la sequenza iterativamente: a ogni passo si seleziona il target non ancora visitato che richiede il minor Δv dall'ultimo satellite raggiunto. Sebbene questo approccio non garantisca l'ottimalità globale, fornisce soluzioni localmente ottime in tempi computazionali ridotti.

15.2 Parametri orbitali dei satelliti target

La Tabella 3 riporta i parametri orbitali dei dieci satelliti target. Si osserva che i satelliti sono caratterizzati da orbite geostazionarie con eccentricità ridotte, piccole variazioni di inclinazione e valori differenti di longitudine del nodo ascendente Ω e anomalia vera ν .

Tabella 3: Parametri orbitali dei dieci satelliti target.

Target	a [km]	e	i [deg]	Ω [deg]	ν [deg]
1	42164	0	0	0	90
2	42164	0	5	0	0
3	42164	0	5	0	90
4	42164	0	5	90	0
5	42164	0.1	0	0	90
6	42164	0.1	5	90	0
7	42164	0.1	5	180	90
8	42164	0.034	1.42	219.4	17.4
9	42164	0.087	4.73	12.7	142.8
10	42164	0.012	0.58	301.9	311.6

15.3 Distribuzione spaziale dei satelliti target

Per visualizzare la configurazione orbitale, è stata realizzata una rappresentazione tridimensionale nel sistema di riferimento ECI delle posizioni dei dieci satelliti target. I parametri orbitali classici sono stati convertiti in coordinate cartesiane (x, y, z) tramite le trasformazioni del sistema perifocale implementate in **MATLAB**.

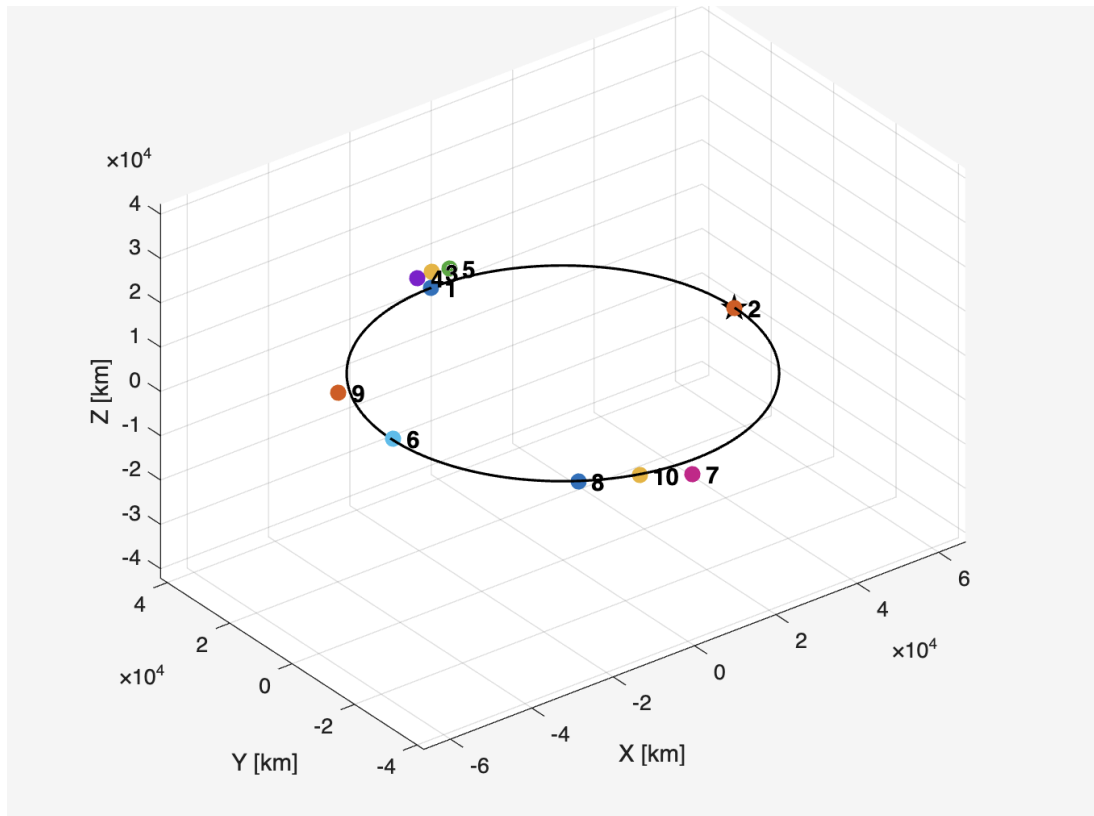


Figura 42: Distribuzione tridimensionale dei dieci satelliti target nel sistema ECI.

La *fuel station* è indicata con una stella, che appare in prossimità del Target 2 poiché i due veicoli condividono gli stessi parametri orbitali ad eccezione dell'inclinazione: nel piano bidimensionale le loro posizioni risultano sovrapposte, ma sono fisicamente distinte nello spazio tridimensionale. L'orbita in nero corrisponde all'orbita iniziale della *fuel station*. Non sono state rappresentate le orbite di tutti i target per mantenere la leggibilità della figura; i Target 3, 4 e 5, pur essendo quasi coincidenti nella rappresentazione, sono stati volutamente separati per consentirne la corretta identificazione visiva.

15.4 Modello fisico della fuel station

Per stimare il consumo di propellente associato a ciascun trasferimento è necessario definire un modello fisico della *fuel station*. In questo lavoro si adottano i seguenti parametri:

$$m_{\text{dry}} = 200 \text{ kg}, \quad m_{\text{prop}} = 800 \text{ kg}, \quad I_{sp} = 300 \text{ s}, \quad m_0 = 1000 \text{ kg}.$$

La massa a secco è rappresentativa di una piccola piattaforma logistica compatta. L'impulso specifico di 300 s corrisponde alle prestazioni tipiche di un sistema propulsivo chimico bipropellente leggero. Si assume che il propellente disponibile venga utilizzato esclusivamente per le manovre di rendez-vous, senza considerare il carburante trasferito ai target durante il rifornimento.

È importante osservare che con propulsione chimica ($I_{sp} = 300 \text{ s}$) e un Δv totale di missione di 3.301 km/s, il mass ratio imposto dall'equazione di Tsiolkovskij è:

$$\frac{m_0}{m_f} = e^{\Delta v_{\text{tot}} / (I_{sp} g_0)} = e^{3.301 / (300 \times 0.00981)} = 3.07,$$

il che implica che il 67.4% della massa iniziale totale viene inevitabilmente consumato come propellente. Questo è un limite fisico della propulsione chimica per missioni ad alto Δv , non un'inefficienza dell'algoritmo di ottimizzazione.

15.5 Scelta del primo target

Il primo passo dell'algoritmo greedy consiste nell'individuare il satellite che richiede il minor costo propulsivo per essere raggiunto dall'orbita iniziale della *fuel station*:

$$\text{Fuel station}_{\text{init}} = [a, e, i, \Omega, \omega, \nu] = [42164 \text{ km}, 0, 0^\circ, 0^\circ, 0^\circ, 0^\circ].$$

Tra i dieci satelliti analizzati, il **Target 8** risulta quello con il costo propulsivo minimo ($\Delta v \approx 0.121 \text{ km/s}$), grazie a una combinazione favorevole di piccola inclinazione ($i = 1.42^\circ$), eccentricità moderata ($e = 0.034$) e posizione angolare vicina a quella iniziale della *fuel station*. Per confronto, altri candidati come il Target 5 richiedono valori significativamente più elevati ($\Delta v \approx 0.51 \text{ km/s}$). Questa differenza conferma l'importanza di una selezione basata su criteri dinamici e non puramente geometrici.

15.6 Algoritmo greedy per la determinazione della sequenza

Una volta individuato il primo target, la sequenza viene costruita iterativamente secondo la seguente procedura:

1. Dall'ultimo target visitato si calcola il Δv per raggiungere ciascun target non ancora visitato, tramite ottimizzazione GA/PSO;
2. Si stima il consumo di propellente tramite l'equazione di Tsiolkovskij, aggiornando la massa residua della *fuel station*;
3. Si seleziona il target che richiede il minor Δv ;
4. Si aggiorna la sequenza e si ripete il processo fino a visitare tutti i dieci target.

15.7 Risultati dell'ottimizzazione

La sequenza determinata dall'algoritmo greedy è:

$$\text{Seq}_{\text{greedy}} = [8, 2, 4, 10, 1, 5, 6, 7, 3, 9].$$

La Tabella 4 riporta i valori di Δv e il consumo di propellente per ciascun trasferimento, insieme alla massa residua della *fuel station* al termine di ogni passo.

Tabella 4: Δv parziali, consumo di propellente e massa residua per la sequenza greedy.

Passo	Trasferimento	Δv [km/s]	Propellente [kg]	Massa residua [kg]
1	Fuel station \rightarrow 8	0.1208	40.207	959.793
2	8 \rightarrow 2	0.2352	73.706	886.087
3	2 \rightarrow 4	0.4171	117.097	768.990
4	4 \rightarrow 10	0.3614	88.869	680.121
5	10 \rightarrow 1	0.6349	131.971	548.150
6	1 \rightarrow 5	0.0206	3.818	544.332
7	5 \rightarrow 6	0.6333	105.385	438.947
8	6 \rightarrow 7	0.3858	53.925	385.021
9	7 \rightarrow 3	0.2184	27.532	357.489
10	3 \rightarrow 9	0.2738	31.757	325.732
Totale		3.301	674.268	

Il Δv totale di missione è **3.301 km/s**, corrispondente a un consumo di propellente di **674.3 kg**, pari all'**84.3%** della dotazione iniziale di 800 kg. La massa residua al termine della missione è di **325.7 kg** (200 kg di struttura + 125.7 kg di propellente residuo), garantendo un margine operativo per eventuali correzioni orbitali successive.

15.8 Discussione dei risultati

La sequenza ottenuta è fisicamente coerente con la distribuzione orbitale dei target. Nonostante il Target 2 sia geometricamente vicino all'orbita iniziale della *fuel station*, non viene selezionato come primo obiettivo a causa della maggiore inclinazione del suo piano orbitale ($i = 5^\circ$), che comporta un costo propulsivo più elevato rispetto al Target 8.

Analogamente, il Target 1, pur essendo vicino in termini di anomalia vera ($\nu = 90^\circ$), richiede un rifasamento orbitale più oneroso. Il Target 8 presenta invece una combinazione favorevole di variazione di inclinazione, eccentricità e fase, risultando il più conveniente come primo trasferimento.

Analizzando i trasferimenti successivi, i costi più elevati sono associati a variazioni significative di piano orbitale: i trasferimenti $10 \rightarrow 1$ e $5 \rightarrow 6$ presentano entrambi $\Delta v > 0.63$ km/s, mentre trasferimenti tra orbite simili come $1 \rightarrow 5$ richiedono costi trascurabili ($\Delta v = 0.021$ km/s). La diminuzione progressiva della massa della *fuel station* comporta inoltre una riduzione del propellente consumato nei trasferimenti finali a parità di Δv , come evidenziato dalla colonna della massa residua in Tabella 4.

15.9 Limiti dell'approccio greedy

L'approccio greedy minimizza il costo locale a ogni passo ma non garantisce l'ottimalità globale della sequenza. Una stima conservativa suggerisce che un algoritmo di ottimizzazione globale sulle permutazioni potrebbe ridurre il Δv totale di una percentuale compresa tra il 5% e il 20% rispetto alla soluzione greedy. Tuttavia, la complessità computazionale di tale approccio lo rende impraticabile senza una semplificazione del modello di costo, come discusso nella sezione degli sviluppi futuri.

16 Conclusioni

Il lavoro svolto all'interno di questa tesi ha affrontato il problema del rendez-vous in orbita geostazionaria, con l'obiettivo di sviluppare una strategia efficace per la pianificazione di missioni di rifornimento multitarget. L'analisi è stata condotta seguendo un percorso progressivo: inizialmente si è studiato il caso di rendez-vous con un singolo satellite, validando i metodi di ottimizzazione basati su Particle Swarm Optimization e algoritmi genetici rispetto a soluzioni analitiche note; successivamente, il modello è stato esteso al caso più complesso di rendez-vous con una costellazione di dieci satelliti con parametri orbitali differenti. Entrambi gli obiettivi dichiarati sono stati raggiunti con risultati coerenti e fisicamente significativi.

16.1 Sintesi dei risultati ottenuti

La prima parte del lavoro ha permesso di verificare la validità degli algoritmi evolutivi nel riprodurre le soluzioni analitiche note per le tre manovre elementari di riferimento: rifasamento, cambio di inclinazione e variazione di eccentricità. I risultati ottenuti mostrano errori percentuali inferiori al 5% rispetto alle soluzioni analitiche in tutti i casi considerati, confermando la correttezza del modello di costo propulsivo implementato. In particolare:

- nel caso di **rifasamento**, si sono ottenuti due impulsi tangenziali agli istanti iniziale e finale, coerentemente con la struttura teorica della manovra tramite *waiting orbit*;
- nel caso di **cambio di inclinazione**, l'algoritmo ha collocato l'impulso principale in corrispondenza del nodo ascendente, come previsto dalla teoria classica, con la componente normale dominante rispetto alle componenti radiale e tangenziale;
- nel caso di **manovra combinata**, GA e PSO hanno gestito simultaneamente variazioni di fase, inclinazione ed eccentricità, producendo soluzioni con impulsi dalle componenti tangenziale e normale entrambe significative, in accordo con la natura mista della manovra.

Successivamente, il modello è stato esteso al caso multi-target, nel quale una fuel station deve visitare dieci satelliti geostazionari con elementi orbitali differenti. La difficoltà combinatoria del problema, pari a $10! = 3\,628\,800$ sequenze possibili, ha reso impraticabile un'analisi esaustiva: stimando un tempo medio di ottimizzazione di circa 30 secondi per trasferimento, l'analisi completa richiederebbe dell'ordine di 10^6 ore di calcolo. Si è pertanto adottato un approccio di tipo greedy, che riduce il numero di ottimizzazioni necessarie a soli 55 trasferimenti ($\sum_{k=1}^{10} k$), rendendo il problema risolvibile in tempi compatibili con le risorse disponibili.

L'algoritmo ha prodotto la sequenza ottimale:

$$\text{Seq}_{\text{greedy}} = [8, 2, 4, 10, 1, 5, 6, 7, 3, 9],$$

con un Δv totale di missione pari a **3.301 km/s** e un consumo di propellente di **674.3 kg**, corrispondente all'84.3% della dotazione iniziale di 800 kg, con una massa residua di 325.7 kg al termine della missione (200 kg di struttura + 125.7 kg di propellente residuo). L'elevato consumo è una conseguenza diretta del mass ratio imposto dall'equazione di Tsiolkovskij con propulsione chimica ($I_{sp} = 300$ s) per una missione con $\Delta v_{\text{tot}} = 3.301$ km/s.

La sequenza risulta fisicamente coerente con la distribuzione orbitale dei target. Il primo satellite selezionato è il Target 8, il quale, pur presentando una piccola inclinazione ($i = 1.42$) e un'eccentricità moderata ($e = 0.034$), offre una configurazione favorevole che limita sia il

cambio di piano che il rifasamento richiesto, risultando il meno costoso dall'orbita iniziale della fuel station ($\Delta v = 0.121$ km/s). I trasferimenti successivi mostrano una progressione logica verso satelliti con elementi orbitali via via più distanti, minimizzando i cambi di piano e le variazioni di eccentricità più onerose.

Il confronto con una sequenza costruita sulla base di sola vicinanza geometrica ha evidenziato come questo criterio non sia un indicatore affidabile del costo propulsivo in ambiente GEO. Ad esempio, il Target 2, pur trovandosi nominalmente vicino alla fuel station in termini di anomalia vera, richiede un cambio di inclinazione di 5 che risulta propulsivamente molto più costoso del trasferimento verso il Target 8. L'approccio greedy, integrando la dinamica orbitale completa, ha quindi prodotto una sequenza più efficiente rispetto a criteri puramente geometrici.

16.2 Punti di forza della metodologia sviluppata

Il lavoro svolto presenta diversi aspetti positivi:

- **Accuratezza del modello di rendez-vous:** il confronto con le soluzioni analitiche ha dimostrato che il modello implementato descrive correttamente la dinamica orbitale e il costo propulsivo delle manovre, con errori sempre inferiori al 5%.
- **Robustezza degli algoritmi evolutivi:** GA e PSO hanno mostrato un'elevata capacità di convergenza verso soluzioni fisicamente plausibili, anche in presenza di spazi di ricerca non lineari e vincoli multipli.
- **Efficienza computazionale dell'approccio greedy:** la strategia adottata ha ridotto drasticamente il numero di ottimizzazioni necessarie, rendendo il problema multi-target risolvibile con le risorse computazionali disponibili.
- **Generalizzabilità del metodo:** la metodologia sviluppata può essere estesa a costellazioni più numerose, a orbite diverse dalla GEO o a scenari operativi con vincoli aggiuntivi.

16.3 Limiti del lavoro

Nonostante i risultati ottenuti siano soddisfacenti, il lavoro presenta alcuni limiti che è opportuno riconoscere esplicitamente:

- **Assenza di ottimalità globale garantita:** l'approccio greedy minimizza il costo locale ad ogni passo, ma non garantisce che la sequenza finale sia la migliore possibile tra tutte le permutazioni. Sulla base di quanto riportato in letteratura per problemi analoghi, una soluzione globale ottimale potrebbe ridurre il Δv totale di una percentuale stimata tra il 5% e il 20%.
- **Costo computazionale del modello completo:** ogni trasferimento richiede un'ottimizzazione tramite GA o PSO, rendendo impraticabile l'utilizzo di algoritmi globali sulle permutazioni senza una preliminare semplificazione del modello.
- **Modello dinamico semplificato:** l'analisi non considera perturbazioni orbitali quali l'effetto dell'appiattimento terrestre (J_2), la pressione di radiazione solare o le perturbazioni lunari/solari, che possono influenzare le manovre su scale temporali più lunghe.

- **Assenza di vincoli operativi reali:** non sono stati considerati vincoli di tempo, finestre di visibilità, limiti di propellente residuo o requisiti di sicurezza per il volo di prossimità.

17 Sviluppi futuri

I risultati ottenuti aprono la strada a numerosi sviluppi futuri:

- **Ottimizzazione globale della sequenza:** l'utilizzo di algoritmi genetici applicati direttamente alle permutazioni, combinati con un modello di costo semplificato per la fase esplorativa e il modello completo per la fase di rifinitura, potrebbe avvicinarsi all'ottimo globale in tempi computazionali accettabili.
- **Integrazione di perturbazioni orbitali:** l'inclusione degli effetti di J_2 e della pressione di radiazione solare renderebbe il modello più realistico, soprattutto per missioni di lunga durata in cui tali perturbazioni accumulano effetti non trascurabili.
- **Vincoli operativi e temporali:** l'aggiunta di finestre temporali, priorità dei target o limiti di durata della missione permetterebbe di avvicinare il modello a scenari reali di on-orbit servicing.
- **Approcci ibridi:** combinare strategie greedy, algoritmi genetici e tecniche di machine learning — ad esempio reti neurali per la stima rapida del Δv — potrebbe migliorare ulteriormente l'efficienza e la qualità delle soluzioni trovate.
- **Validazione ad alta fedeltà:** l'utilizzo di software specializzati di dinamica orbitale, come GMAT o STK, permetterebbe di validare i risultati ottenuti in un ambiente simulativo più realistico.

18 Considerazioni finali

Il lavoro svolto dimostra come l'integrazione tra modelli dinamici accurati, tecniche di ottimizzazione evolutiva e strategie euristiche costituisca un approccio efficace e computazionalmente sostenibile per la pianificazione di missioni di rifornimento in orbita geostazionaria. La metodologia sviluppata è robusta e flessibile, e i risultati ottenuti — con un Δv totale di 3.301 km/s e un consumo di propellente dell'84.3% della dotazione iniziale per visitare dieci target — confermano la sua applicabilità a scenari operativi realistici. Il lavoro rappresenta un contributo allo studio delle operazioni di on-orbit servicing, un settore destinato a rivestire un ruolo sempre più centrale nella gestione sostenibile delle infrastrutture spaziali future.

Riferimenti bibliografici

- [1] Yin, S., Li, C., Fadda, E., Guo, Y., Ran, G., Brandimarte, P. On-orbit refueling robust mission scheduling with uncertain duration for geosynchronous orbit spacecraft. *Chinese Journal of Aeronautics*(2025). DOI: 10.1016/j.cja.2025.103774
- [2] Costigliola, D., Casalino, L. Simplified Maneuvering Strategies for Rendezvous in Near-Circular Earth Orbits. *Aerospace*, 2023.
- [3] L. Casalino, *Space Propulsion*, Dispense del corso, Politecnico di Torino, 2025.
- [4] Kennedy, J., Eberhart, R. Particle Swarm Optimization. *Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks*, Perth, Australia, 1995.
- [5] Clarke, A. C. Extra-Terrestrial Relays. *Wireless World*, Vol. 51, pp. 305–308, 1945.
- [6] L. Casalino, *Propulsion and Spaceflight*, Dispense del corso, Politecnico di Torino, 2009.
- [7] Vallado, D. *Fundamentals of Astrodynamics and Applications*. Microcosm Press, 4th Edition, 2013.
- [8] Curtis, H. *Orbital Mechanics for Engineering Students*. Elsevier, 3rd Edition, 2014.
- [9] Prussing, J., Conway, B. *Orbital Mechanics*. Oxford University Press, 2012.
- [10] Holland, J. *Adaptation in Natural and Artificial Systems*. University of Michigan Press, 1975.
- [11] Wertz, J. R., Everett, D. F., Puschell, J. J. *Space Mission Engineering: The New SMAD*. Microcosm Press, 2011.
- [12] Soop, E. M. *Handbook of Geostationary Orbits*. ESA Publications / Kluwer Academic Publishers, 1994.
- [13] Battipede, M. *Meccanica del volo spaziale (01SRMMT)*. Appunti delle lezioni, Politecnico di Torino, 2024.
- [14] G. Bruno, *Modellizzazione dei Sistemi Logistici – Algoritmi Genetici*, Dispense del corso, Università degli Studi di Napoli Federico II, A.A. 2020–2021.
- [15] China National Space Administration (CNSA). *Tianzhou-1 Mission Overview*. Disponibile su: <https://www.cnsa.gov.cn>.
- [16] DARPA. *Orbital Express Program*. Disponibile su: <https://www.darpa.mil/about-us/timeline/orbital-express>.
- [17] Northrop Grumman. *SpaceLogistics – Mission Extension Vehicle*. Disponibile su: <https://www.northropgrumman.com/what-we-do/space/space-logistics-services>.
- [18] Gunter’s Space Page. *Syncom Series*. Disponibile su: <https://space.skyrocket.de>.
- [19] NASA Space Science Data Center. *Syncom 2 – Spacecraft details*. Disponibile su: <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/nmc/spacecraft/display.action?id=1963-031A>.
- [20] Intelsat. *The History of Intelsat – Early Bird*. Disponibile su: <https://www.intelsat.com>.

- [21] International Telecommunication Union (ITU). *Geostationary Orbit Regulations*.
Disponibile su: <https://www.itu.int/en/ITU-R/space/Pages/default.aspx>.