



**Politecnico
di Torino**

Politecnico di Torino

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale
A.a. 2025/2026
Sessione di Laurea Marzo/Aprile 2026

Manifattura virtuale di materiali compositi con sensori piezoelettrici embedded

Relatore

Prof. Enrico Zappino

Correlatore

Prof. Marco Petrolo

Candidato

Luca Bentivegna

Indice

Indice	i
Introduzione	1
1 Processo di manifattura di componenti realizzati in materiale composito	3
1.1 Introduzione	3
1.2 Fibre	4
1.3 Matrici	4
1.4 Deposizione del materiale	7
1.5 Ciclo di cura in autoclave	8
1.6 Difetti, tensioni residue, deformazioni	11
1.7 Structural Health Monitoring (SHM) di strutture in composito	12
1.7.1 Sensori piezoelettrici	14
1.7.1.1 Specifiche, requisiti tecnici e tecniche di inclusione	16
1.7.1.2 Connessione elettrica tra i conduttori e il sensore	18
2 Approccio numerico al processo di manifattura	19
2.1 Introduzione	19
2.2 Modello cinematico di riferimento	21
2.3 Ipotesi cinematiche	22
2.4 Modelli per le funzioni di espansione: TE vs LE	23
2.4.1 Taylor Expansion (TE)	23
2.4.1.1 Euler-Bernoulli Beam Theory (EBBT)	23
2.4.1.2 Timoshenko Beam Theory (TBT)	25
2.4.1.3 Complete linear expansion case	25
2.4.2 Lagrange Expansion (LE)	27
2.4.3 Calcolo del numero di gradi di libertà: TE vs LE	29
2.5 Equazioni di governo	30
2.6 Tecnica di assemblaggio delle matrici di rigidità attraverso la CUF	30
2.7 CUF come approccio unico per strutture 1D, 2D e 3D	33

3	Assessment del modello numerico	37
3.1	Assessment 1	37
3.2	Assessment 2	41
3.2.1	Assessment 2.1	46
3.3	Assessment 3	50
4	Analisi di strutture con inclusioni	65
4.1	Introduzione	65
4.2	Problema multiscala: accoppiamento elettro-meccanico	66
4.2.1	Equazioni di governo	67
4.2.2	Variatione della capacitance in sensori piezoelettrici	70
4.2.3	Trave bimorfa in PVDF - caso attuatore	71
4.2.4	Laminato composito a 6 strati	75
4.3	Analisi del processo di cura	80
4.3.1	Pannello composito a 8 strati	83
4.3.2	Laminato composito a 12 strati	88
4.3.2.1	Laminato senza sensore	90
4.3.2.2	Laminato con sensore	96
4.3.2.3	Laminato con sensore + resin pocket	107
4.3.2.4	Confronto tra i modelli	118
	Conclusioni	123
	Bibliografia	125

Introduzione

L'industria aerospaziale rappresenta un settore alla costante ricerca di innovazione ed efficienza in ogni suo componente. In tale prospettiva riveste una grande importanza la presenza di componenti strutturali affidabili, costituiti da materiali che abbiano delle proprietà e delle caratteristiche ottimali, che riescano a soddisfare tutti i requisiti che il progetto strutturale del velivolo richiede.

A partire soprattutto dagli anni 2000, le principali case produttrici di aeromobili hanno investito un apprezzabile quantitativo di risorse economiche per la realizzazione di componenti strutturali in materiale composito, visti i vantaggi che l'utilizzo di tali materiali permette di avere, essendo in grado di garantire elevata resistenza e leggerezza. Negli ultimi anni si sono visti realizzare velivoli che sono costituiti per più del 50 % da componenti realizzati in composito.

Il seguente lavoro di tesi ha lo scopo di andare a trattare, tramite uno studio virtuale, il processo di manifattura di materiali compositi con sensori piezoelettrici incorporati, con particolare attenzione rivolta al processo di cura a cui vengono sottoposti i suddetti componenti. La presenza del sensore permette il monitoraggio del ciclo stesso, oltre al monitoraggio del componente durante la sua successiva vita operativa. Altrettanto importante è però l'analisi dell'impatto che la presenza del sensore ha sulle caratteristiche finali del componente e sulla redistribuzione delle tensioni al suo interno.

Si andrà quindi innanzitutto a vedere una panoramica introduttiva sulle caratteristiche dei materiali compositi e sulle varie fasi di produzione del componente realizzato in composito, partendo dalla scelta iniziale del materiale e del processo di produzione, fino ad arrivare alla realizzazione del componente finale. Si focalizzerà soprattutto l'attenzione sulla fase di produzione legata al processo di cura cui viene sottoposto il componente, andando a vedere come funziona il processo ed analizzando i parametri di processo principali che vanno tenuti in considerazione durante questa fase.

Successivamente, si andrà a vedere l'approccio numerico e il modello matematico che possono essere adottati per andare ad analizzare numericamente il processo di manifattura. In particolare, si andrà a vedere la possibilità di creare dei modelli discretizzati attraverso l'utilizzo di una particolare formulazione che va sotto il nome di CUF (Carrera Unified Formulation). L'implementazione di tale formulazione e l'analisi di tali modelli è permessa dall'utilizzo di un codice di calcolo sviluppato dal gruppo di ricerca MUL2 del Politecnico di Torino, che va appunto sotto il nome di MUL2 code.

Seguirà successivamente una sezione dedicata ad alcuni assessment utilizzati per prendere confidenza con il funzionamento del codice, valutando la bontà della discretizzazione dei modelli e il corretto funzionamento del codice, con successiva rappresentazione dei risultati ottenuti. In particolare, il codice si compone di una serie di file di input attraverso i quali è possibile definire le caratteristiche del modello, quali la geometria, la discretizzazione della struttura, il materiale, le condizioni al contorno ecc. Lanciando il codice, è poi possibile visualizzare il 3D del modello creato attraverso il software ParaView e i risultati ottenuti attraverso degli appositi file di output.

Si andrà infine a vedere come variano l'approccio numerico ed il modello matematico nel momento in cui si va a considerare la presenza di sensori piezoelettrici incorporati all'interno del materiale, poichè si ha la presenza di un accoppiamento elettro-meccanico. Verranno dapprima proposti dei modelli che hanno lo scopo di andare a valutare come il codice va ad analizzare delle strutture aventi al proprio interno materiali piezoelettrici. Successivamente, verranno proposti dei modelli nei quali viene applicato un determinato ciclo di cura e, attraverso il MUL2 code, sarà possibile visualizzare lo stato delle caratteristiche meccaniche del componente in diversi step temporali, secondo la logica del modello CHILE (Cure Hardening Instantaneously Linear Elastic). In particolare, si andranno ad analizzare strutture con discretizzazioni via via più complesse, concentrandosi in maniera particolare sulla distribuzione degli stress nella zona in cui è presente il sensore, così da valutare l'impatto che la presenza di quest'ultimo ha sul componente. In particolare, si andranno a valutare le caratteristiche finali del componente successivamente alla sua rimozione dallo stampo (tool).

Processo di manifattura di componenti realizzati in materiale composito

1.1 Introduzione

Il processo di manifattura di materiali compositi per uso aerospaziale coinvolge la produzione di materiali formati da due o più costituenti con proprietà fisiche o chimiche significativamente differenti. Tali materiali sono progettati in modo tale da raggiungere delle proprietà che i singoli costituenti da soli non sarebbero in grado di raggiungere.

Il processo di manifattura coinvolge diverse fasi: si parte dalla fase di lay-up in cui si ha la deposizione del materiale all'interno dello stampo, si passa poi al processo di cura (tipicamente in autoclave), per poi infine arrivare alle fasi di post-processing quali la finitura superficiale e l'ispezione della qualità del componente.

Durante questo avanzato processo di manifattura si ha la necessità di avere una profonda conoscenza del comportamento del materiale in diverse condizioni, e l'abilità di progettare e produrre componenti che siano in grado di sopportare gli elevati stress e le dure temperature che si incontreranno nell'ambiente aerospaziale.

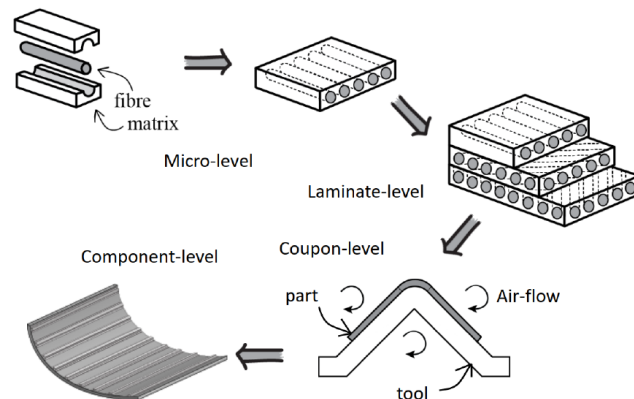


Figura 1.1: Processo di manifattura sottoforma di problema multiscala [1][2].

1.2 Fibre

Uno dei principali costituenti del materiale composito è rappresentato dalle fibre di rinforzo immerse all'interno della matrice. Le fibre rappresentano l'elemento primario che sopporta il carico cui è soggetto il materiale composito, infatti il materiale ha forti proprietà di robustezza e rigidità soltanto lungo la direzione delle fibre stesse. I componenti realizzati in materiale composito possono essere progettati in modo tale che l'orientazione delle fibre produca delle ottimali proprietà meccaniche.

I materiali compositi attualmente in uso non possono prescindere dall'utilizzo di fibre ad alte prestazioni. Tra le tipologie di fibre più diffuse abbiamo [3][4]:

- **Fibra di carbonio:** molto utilizzata per strutture primarie del velivolo quali fusoliera ed ali, molto rigida e robusta lungo la sua direzione, con un'alta resistenza alla corrosione, ma poco resistente agli impatti e caratterizzata da un costo elevato. Una caratteristica della fibra di carbonio riguarda il fatto di essere caratterizzata da un coefficiente di espansione termica (CTE) negativo in direzione longitudinale, cioè se la fibra viene riscaldata tende a ritirarsi lungo la sua direzione longitudinale;
- **Fibra di vetro:** spesso utilizzata per strutture secondarie del velivolo, da 3 a 10 volte meno rigida rispetto alla fibra di carbonio, ma caratterizzata da un costo tendenzialmente più basso rispetto alle altre tipologie di fibra;
- **Kevlar:** resistente agli impatti, ma debole nei carichi di compressione ed igroscopici;
- **Fibra ceramica:** utilizzata per applicazioni ad alte temperature;
- **Fibra di boro:** molto rigida e robusta sia a trazione che a compressione, ma caratterizzata da un costo molto elevato.

Le fibre possono essere caratterizzate al loro interno dalla presenza di difetti ed imperfezioni che possono andarne ad intaccare l'integrità e l'efficienza. La teoria di Griffith ci dice che la tensione di rottura dipende dalla dimensione delle imperfezioni, ed in particolare:

- Più sottile è la fibra, più piccole saranno le imperfezioni al suo interno;
- Più piccole saranno le imperfezioni, più alta sarà la tensione critica che la fibra può sopportare.

1.3 Matrici

La matrice, meno rigida e più debole delle fibre, ha una geometria continua ed ha il compito di dare la forma al materiale composito ed agire da agente legante tra le fibre. Le tipologie di matrici più diffuse sono [5][6]:

- **Matrici polimeriche:** si dividono a loro volta in matrici termoplastiche (TP) e matrici termoindurenti (o thermoset, TS);
- **Matrici metalliche:** più resistenti delle matrici polimeriche ma allo stesso tempo più difficili da lavorare;

- **Matrici ceramiche:** utilizzate per applicazioni che richiedono alte temperature.

Le matrici prevalentemente utilizzate in ambito aerospaziale sono le matrici polimeriche termoindurenti (o thermoset, TS), tra le più diffuse vi sono ad esempio le resine epossidiche. I polimeri termoindurenti, a differenza dei polimeri termoplastici, non tollerano ripetuti cicli termici, si trovano allo stato liquido viscoso a temperatura ambiente e man mano che la temperatura aumenta tendono ad assumere uno stato viscoelastico, fino a solidificarsi una volta raggiunta la cosiddetta temperatura di transizione vetrosa. Se il polimero termoindurente allo stato solido viene nuovamente riscaldato si degrada chimicamente fino a carbonizzarsi.

Il processo termico che porta alla creazione dei legami delle catene polimeriche prende il nome di processo di polimerizzazione, o processo di cura, e si tratta di un processo endotermico durante il quale viene rilasciato una certa quantità di calore. Durante la polimerizzazione le matrici termoindurenti attraversano diverse fasi, Figura 1.2 [5][6].

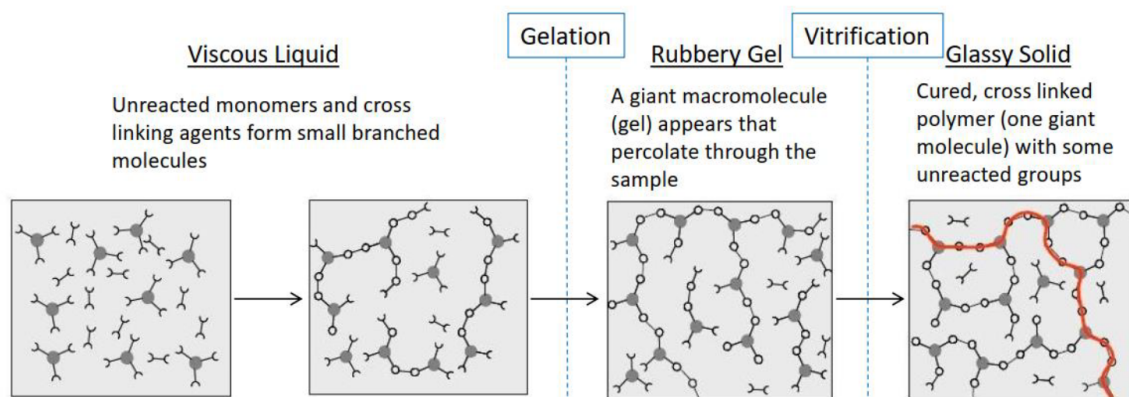


Figura 1.2: Processo di polimerizzazione di matrici thermoset [5][6].

Il grado di polimerizzazione, o grado di cura (Degree Of Cure, DOC), è un indicatore dell'avanzamento del processo di polimerizzazione, cioè della creazione dei legami chimici all'interno del polimero. Il DOC può assumere valori compresi tra 0 e 1 (0 % - 100 %). Per DOC = 1 la matrice è completamente polimerizzata, ma tendenzialmente si riescono a raggiungere valori di polimerizzazione intorno al 90 %. Più alto è il grado di cura che si riesce a raggiungere, migliori saranno le proprietà meccaniche del componente finale.

Durante il processo di cura la resina diminuisce in volume causando il cosiddetto "shrinkage", e questo fenomeno può favorire la creazione di tensioni interne che possono portare alla rottura del componente durante la fase di produzione o ad avere deformazioni finali del componente. Inoltre, durante il ciclo di cura, la resina subisce trasformazioni chimico-fisiche molto più critiche da controllare rispetto alle fibre.

In Figura 1.3 viene rappresentato graficamente l'andamento dei parametri termici e del DOC di un tipico ciclo di cura.

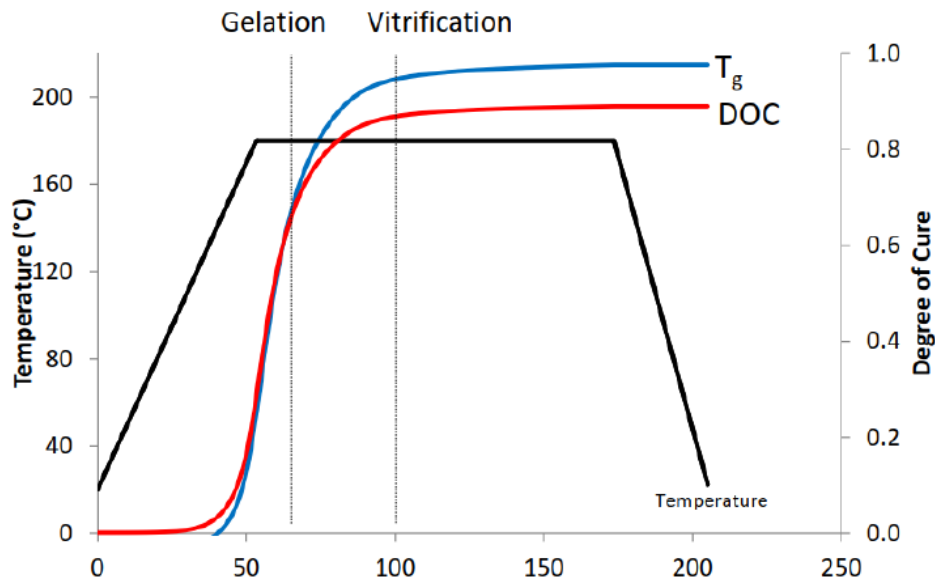


Figura 1.3: Ciclo di cura [5][6].

In Figura 1.4 viene rappresentato graficamente l'andamento delle caratteristiche meccaniche del materiale durante il ciclo di cura.

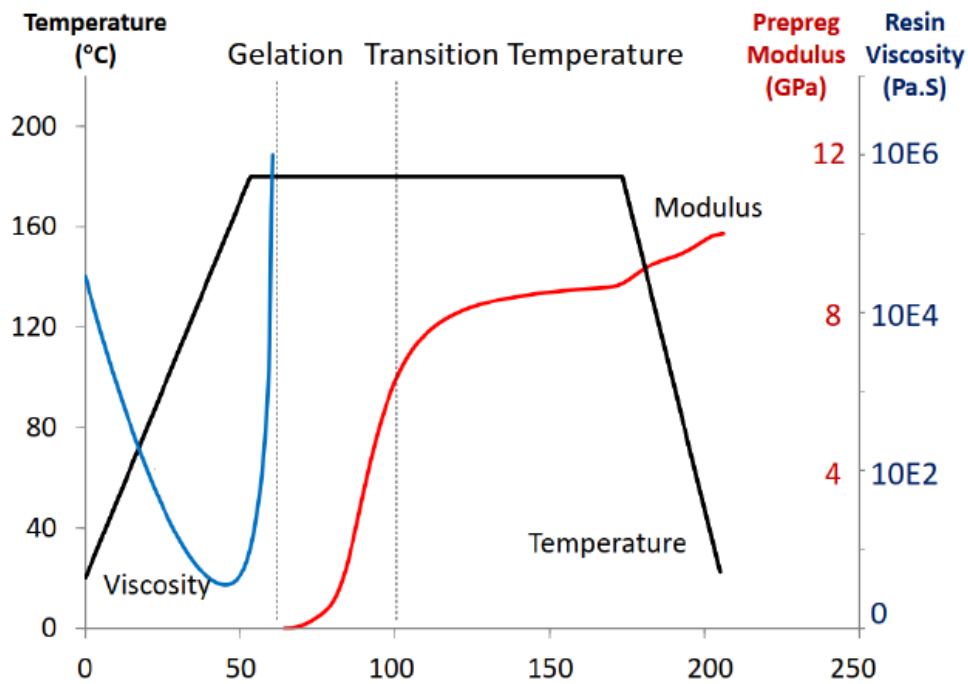


Figura 1.4: Andamento delle caratteristiche meccaniche del materiale durante il ciclo di cura [5][6].

Come è possibile vedere dai due grafici precedenti, si possono distinguere, andando da sinistra verso destra, tre diverse zone con tre diversi comportamenti del materiale (indicheremo con α il DOC del materiale, con T la temperatura esterna, con T_g la temperatura di transizione vetrosa del materiale) [5][6]:

- $\alpha < \alpha_{gel}$ and $T + 25 > T_g$, **comportamento viscoso**: la prima zona si estende dalla temperatura ambiente iniziale fino ad arrivare al gelation point, cioè il punto di transizione tra il comportamento viscoso ed il comportamento viscoelastico del materiale. Si può vedere come la resina a temperatura ambiente sia altamente viscosa e man mano che la temperatura aumenta la viscosità diminuisce fino a crescere nuovamente una volta che inizia a svilupparsi il DOC del materiale, per poi infine tendere ad infinito una volta arrivati al gelation point. Nel frattempo la temperatura esterna T cresce fino a stabilizzarsi ad un certo valore costante e cresce anche la temperatura di transizione vetrosa del materiale T_g ;
- $\alpha > \alpha_{gel}$ and $T + 25 > T_g$, **comportamento viscoelastico**: la seconda zona si estende dal gelation point fino al punto di transizione vetrosa. Il gelation point è il punto in cui la resina passa da uno stato liquido ad uno stato gelatinoso e corrisponde ad un DOC pari a circa 0.5-0.6, ed è da questo punto che inizia a svilupparsi il modulo elastico della resina e si iniziano a formare i veri legami tra la resina e le fibre. Nel frattempo continuano a crescere sia il DOC che la temperatura di transizione vetrosa del materiale T_g , mentre la temperatura esterna T viene mantenuta costante;
- $\alpha > \alpha_{gel}$ and $T + 25 < T_g$, **comportamento elastico**: la terza zona si estende dal punto di transizione vetrosa fino al raggiungimento del DOC finale. Nel punto di transizione vetrosa la resina passa da uno stato gelatinoso ad uno stato solido. Il rateo di crescita del DOC e del modulo elastico diminuiscono significativamente poichè il materiale ha già quasi raggiunto le sue caratteristiche finali. Si ha infine la fase di cool-down in cui decresce man mano la temperatura esterna e si raggiunge il DOC finale.

1.4 Deposizione del materiale

Esistono tre metodi principali per unire la resina e la fibra da depositare all'interno di uno stampo [7][8].

- **Wet processes**: processi in cui si ha resina liquida che viene miscelata a fibre asciutte direttamente nello stampo. Sono i processi più economici ma non garantiscono la stessa precisione degli altri processi. Il processo inizia con la stesura delle fibre, che fungeranno da rinforzo strutturale del materiale composito, su una superficie di lavoro. Attraverso un pennello viene poi depositata la resina sulle fibre, e durante questa fase le fibre possono già trovarsi all'interno dello stampo oppure trovarsi al di fuori dello stampo, nel secondo caso il materiale viene trasferito all'interno dello stampo dopo che le fibre sono già state miscelate con la resina. Si ha infine la cura del componente finale attraverso processi che coinvolgono l'uso di sacche a vuoto;
- **Liquid Composite Molding (LCM) processes**: processi in cui si ha resina liquida che viene miscelata a fibre asciutte attraverso un gradiente di pressione che può essere il vuoto, iniezione di pressione, o una combinazione delle due. Nel caso in cui si utilizzi il vuoto si ha il cosiddetto Vacuum Infusion Process (VIP), si hanno le fibre stese nello stampo e viene

applicato il vuoto per rimuovere l'aria all'interno, la resina viene inserita successivamente usando proprio il vuoto all'interno per infiltrarsi. Nel caso in cui si utilizzi un'iniezione a pressione si ha il cosiddetto Resin Transfer Molding (RTM), si hanno le fibre stese nello stampo e viene iniettata la resina all'interno dello stampo chiuso ad una determinata pressione, che può essere alta nel caso dell'High Pressure Resin Transfer Molding (HP-RTM) oppure più bassa nel caso del Light Resin Transfer Molding (LRTM);

- **Prepreg processes:** processi in cui si utilizzano dei tessuti "pre-impregnati" in cui la resina e la fibra sono già combinati. L'utilizzo dei "pre-impregnati" ci permette di avere molta precisione e controllo, e anche di avere la conoscenza del contenuto della quantità di fibra e matrice all'interno del materiale, però sono i più costosi. Una tecnica molto utilizzata nell'ambito dei prepreg è l'Automated Fiber Placement (AFP), si tratta di un processo in cui il materiale viene automaticamente depositato su uno stampo o su una superficie per creare componenti complessi. La deposizione può avvenire o attraverso un braccio robotico equipaggiato con una testa di deposizione in cui viene direttamente stoccato il materiale, oppure attraverso un sistema a cavalletto che permette alla testa di muoversi in più direzioni più velocemente con le fibre che sono stoccate al lato della macchina e poi portate alla testa quando necessario.

1.5 Ciclo di cura in autoclave

Come visto precedentemente, Figura 1.3, il DOC è funzione della temperatura esterna e del tempo trascorso. La polimerizzazione della matrice polimerica termoindurente può dunque essere accelerata attraverso l'utilizzo di forni o autoclavi che aumentano la temperatura esterna, Figura 1.5 [5][6].

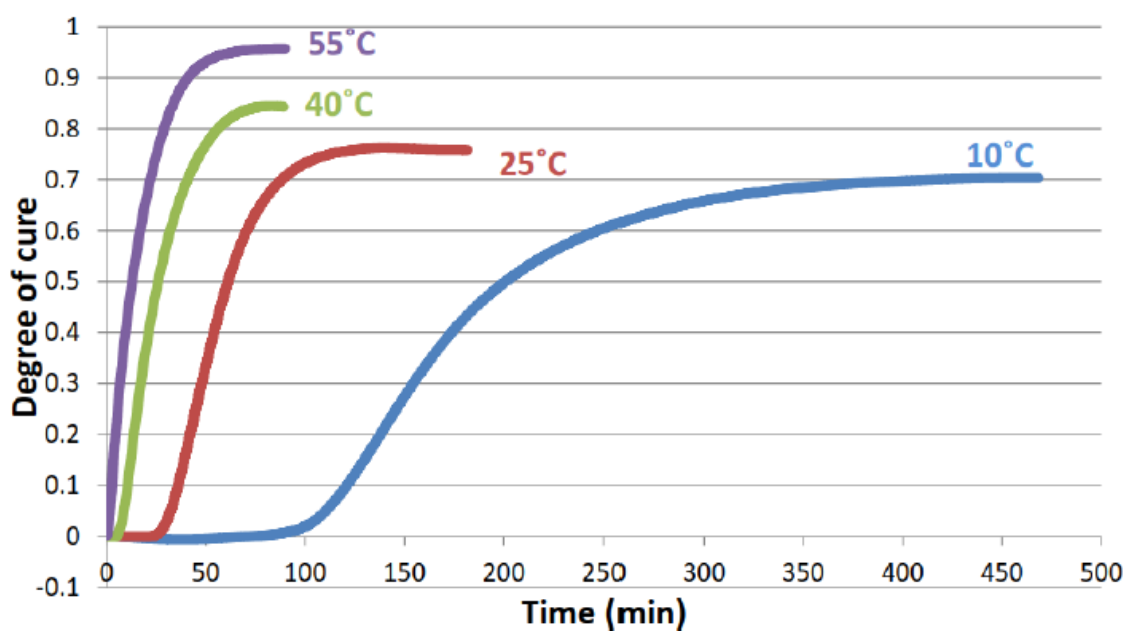


Figura 1.5: Andamento del DOC al variare della temperatura esterna [5][6].

Gli obiettivi principali del ciclo di cura in autoclave sono:

- Rimuovere vuoti ed agenti volatili all'interno del materiale e consolidare la struttura del laminato attraverso l'utilizzo del vuoto e della pressione;
- Trasformare monomeri della resina a basso peso molecolare in macromolecole altamente reticolate attraverso un processo di polimerizzazione;
- Raggiungere il più alto grado di cura del materiale.

L'autoclave ha il compito di fornire la giusta pressione e temperatura attraverso l'utilizzo del ricircolo di un gas inerte pressurizzato. I principali elementi dell'autoclave sono [9][10]:

- Le pareti dell'autoclave, hanno il compito di contenere la pressione, le sorgenti che riscaldano il flusso e farlo circolare uniformemente all'interno dell'autoclave stessa;
- Il sottosistema che applica il vuoto alle parti coperte da sacche a vuoto;
- Il sottosistema che controlla i parametri operativi;
- Il sottosistema che permette di caricare il componente nello stampo all'interno dell'autoclave.

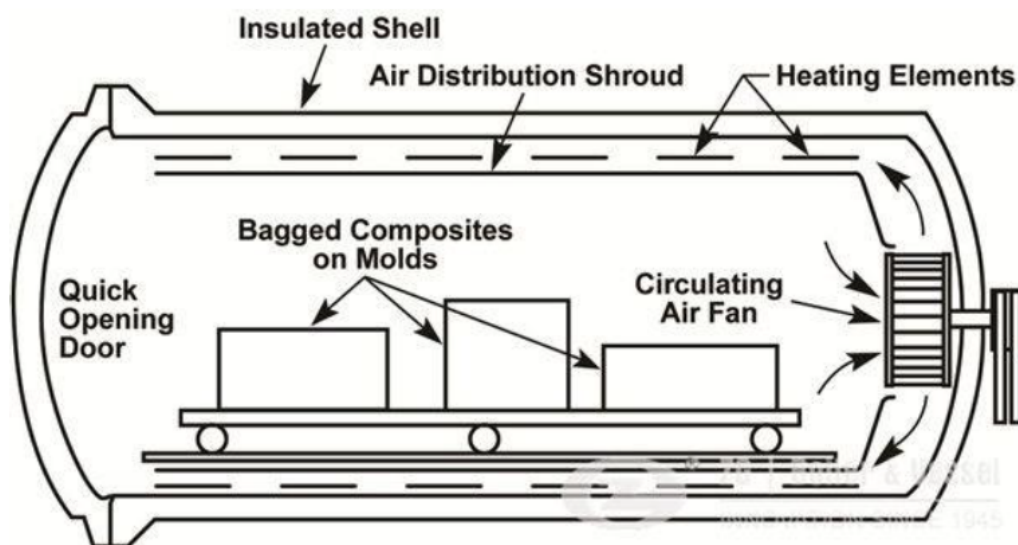


Figura 1.6: Tipica configurazione di un'autoclave [9][10].



Figura 1.7: Immissione del componente all'interno dell'autoclave [9][10].

L'utilizzo di sacche a vuoto in autoclave è un aspetto molto importante che permette di assicurare qualità ed integrità strutturale. Infatti, l'utilizzo di sacche a vuoto permette di compattare i laminati e rimuovere eventuali vuoti o agenti volatili presenti tra i vari layer, assicurando che la resina si mescoli bene con le fibre. Permette inoltre di ottimizzare l'intero processo sul materiale e sulla resa finale stessa di quest'ultimo, dal momento che il materiale all'interno dell'autoclave risulta isolato e protetto dall'atmosfera esterna, e quindi da eventuali agenti contaminanti che possono contaminare la superficie del materiale, questo assicura anche che il calore venga distribuito uniformemente sulla superficie del materiale.

Si posiziona di solito una ventola "fan" nella parte posteriore dell'autoclave che genera l'indirizzamento del flusso d'aria, e si possono avere due configurazioni, Figura 1.8 [9][10]:

- **Configurazione ad anello:** in questo caso il gas caldo si muove assialmente canalizzato all'interno di due condotti, uno sopra e uno sotto, fino a raggiungere la porta frontale dell'autoclave, da qui il gas ritorna indietro verso il fan attraversando la camera dell'autoclave, si crea così un ricircolo;
- **Configurazione a pavimento:** in questo caso si utilizzano dei condotti a pavimento che canalizzano il gas caldo direttamente dal pavimento alla porta frontale, da qui il gas ritorna indietro verso il fan attraversando la camera dell'autoclave, si crea così un ricircolo.

Spesso all'interno dell'autoclave si fa utilizzo di diffusori che aiutano a rendere il ricircolo del gas il più uniforme possibile.

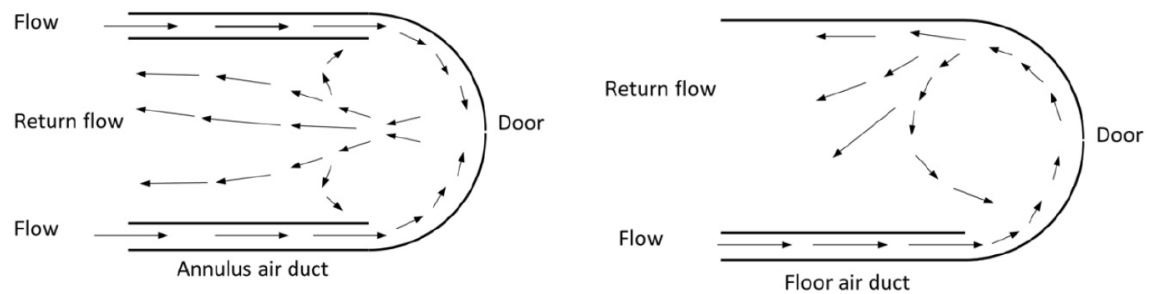


Figura 1.8: Configurazione ad anello (a sinistra), configurazione a pavimento (a destra) [9][10].

1.6 Difetti, tensioni residue, deformazioni

Si possono avere diverse tipologie di difetti, tra le principali abbiamo [7][11]:

- **Difetti legati alla fase di deposizione e cura del materiale:** presenza di vuoti, porosità, delaminazione, disallineamento delle fibre;
- **Difetti legati alla geometria:** disbonding, angolo di spring-in, finitura superficiale;
- **Difetti legati alle fasi di post-processing:** errori di lavorazione, errori di assemblaggio.

Tra i difetti legati alla geometria, uno dei principali riguarda la formazione del cosiddetto angolo di spring-in, si verifica cioè un'alterazione della geometria del componente in termini di angolo tra la geometria iniziale attesa e quella che invece si genera durante la rimozione del pezzo dal tool. Questo succede perchè, come detto in precedenza, durante il ciclo di cura la resina tende a ritirarsi e diminuire in volume, dunque nel momento in cui il componente viene rimosso dal tool tende a ritirarsi leggermente verso l'interno, Figura 1.9. Questo fenomeno può essere affrontato in diversi modi, aggiungendo ad esempio degli elementi aggiuntivi che vanno a compensare il design, oppure andando a modificare la geometria dello stampo creando un tool già pronto a compensare eventuali deformazioni previste, oppure andando ad ottimizzare tutte le varie fasi del processo produttivo.

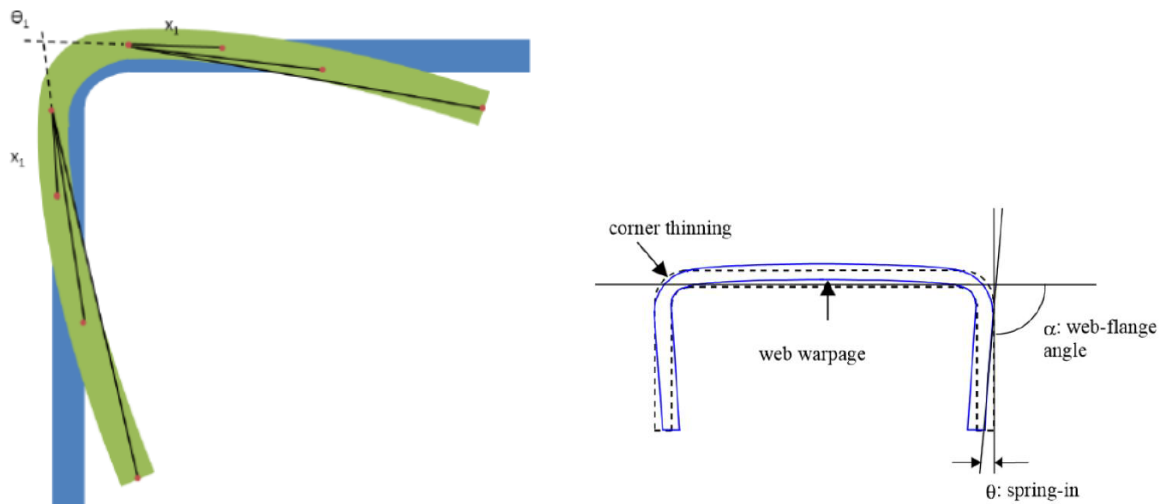


Figura 1.9: Angolo di spring-in [7][11].

Durante il ciclo di cura si possono formare delle tensioni interne residue legate ad esempio ad una differenza di CTE tra resina e fibra o ad una differenza di CTE tra resina ed il tool stesso.

1.7 Structural Health Monitoring (SHM) di strutture in composito

Il monitoraggio dell'integrità strutturale (Structural Health Monitoring, SHM) consiste nella valutazione dei carichi a cui è soggetta la struttura, degli ambienti operativi e di eventuali risposte critiche della struttura in modo tale da valutare e tracciare eventuali danni ed anomalie che possono andare ad intaccare l'affidabilità, l'operatività e la sicurezza della struttura stessa. Dunque, le principali funzioni dei sistemi di monitoraggio sono quelle di registrare l'attività di una struttura durante la sua vita operativa, fornire informazioni riguardanti eventuali rischi che possono influenzarne il rendimento, così da avere una comprensione in tempo reale del comportamento della struttura, e dunque migliorare la sicurezza della struttura stessa [12].

Gli ultimi decenni hanno visto una crescita nell'uso dei materiali compositi in diversi settori industriali per via delle loro interessanti proprietà. Le strutture composite che vengono prodotte devono soddisfare strettamente i requisiti richiesti dai clienti poichè durante la loro vita operativa dovranno essere esposte a dure condizioni ambientali, come ad esempio la corrosione esterna, l'invecchiamento termico, le radiazioni, varie tipologie di carichi fisici ecc. Di conseguenza, i produttori devono avere piena confidenza nella qualità dei componenti da loro prodotti, e successivamente gli utilizzatori devono possedere degli strumenti efficienti ed affidabili al fine di poter regolarmente valutare se i componenti sono ancora adatti ad operare adempiendo alle loro funzioni [13].

Per avere un'idea sulla qualità dei componenti che vengono prodotti, attraverso un monitoraggio in tempo reale del processo di manifattura, possono essere utilizzate delle tecniche basate su test non distruttivi (Non-Destructive Testing, NDT). Gli NDT sono metodi utilizzati per monitorare l'integrità del materiale andando a valutare le condizioni metallurgiche del materiale e la presenza di eventuali difetti sia superficiali che interni al materiale stesso. Il vantaggio di

tali metodi è la possibilità di andare a valutare l'integrità del materiale senza la necessità di distruggere il materiale e senza andare a compromettere la sua idoneità nello svolgere le sue funzioni. Esistono vari metodi basati su tecniche di tipo non distruttivo e possono essere utilizzati sia da soli che combinati. Successivamente alla produzione dei componenti, essi necessitano di un costante monitoraggio strutturale per valutare l'evoluzione della loro integrità durante la loro vita operativa, in modo tale da sapere se essi sono ancora adatti o meno per applicazioni industriali [13].

Dal momento che l'utilizzo dei materiali compositi permette di avere un'apprezzabile riduzione del peso senza andare ad intaccare sensibilmente le proprietà meccaniche, per assicurare l'affidabilità del componente durante la sua vita operativa non è vantaggioso basarsi sull'avere dei componenti che vengono sovradimensionati durante la loro fase di progettazione, dunque questo è uno dei motivi per cui si ricorre a tecniche di tipo non distruttivo. Tuttavia, nonostante tali tecniche siano molto utili ed efficaci nel rilevare eventuali difetti sia interni che esterni alla struttura, presentano degli ostacoli. Infatti, poichè si tratta di tecniche esterne, necessitano di una strumentazione che deve essere posta sulla superficie del componente o anche al di fuori di esso, con una conseguente possibilità di avere poca maneggevolezza e poca compatibilità con le parti funzionanti. Di conseguenza, spesso accade che la struttura che deve essere esaminata venga messa fuori servizio, con conseguente consumo di tempo e denaro. Inoltre, questi test spesso non forniscono informazioni riguardo all'esatto momento di inizio del danno o alla propagazione del danno stesso, poichè essi vengono fatti durante dei periodi specifici e non costantemente. Tutti questi fattori hanno portato ad un grande aumento nella ricerca di tecniche di monitoraggio strutturale cosiddette "in-situ". Le tecniche di monitoraggio in-situ sono meno ingombranti e permettono un costante monitoraggio della struttura attraverso l'utilizzo di sensori che diventano parte integrante della struttura stessa e che consentono a quest'ultima di raccogliere informazioni su se stessa in modo automatico. Un ulteriore vantaggio delle tecniche di monitoraggio in-situ è che i sensori possono essere protetti dall'ambiente esterno attraverso il loro incapsulamento all'interno del materiale. L'incorporamento del sensore all'interno del materiale, sin dalla fase di manifattura, permette anche di effettuare un monitoraggio del processo di manifattura per valutare la bontà del processo e la qualità del componente prodotto. Tuttavia, anche le tecniche di monitoraggio in-situ presentano degli svantaggi, ad esempio maggiori difficoltà nella manifattura per via della necessità di integrare il sensore all'interno del materiale, oppure rischi legati al fatto che l'incorporamento del sensore all'interno del materiale può andare ad intaccare le proprietà meccaniche della struttura da monitorare [13].

Tra le principali criticità che coinvolgono i materiali compositi vi è la loro vulnerabilità ai carichi dinamici da impatto. Tali carichi possono variare sia da un punto di vista energetico che cinetico e possono creare delle problematiche legate alla durabilità del materiale, dunque avere una conoscenza globale sull'effetto che tali impatti possono avere sul materiale è di vitale importanza dal punto di vista del monitoraggio strutturale. Una casistica molto insidiosa è quella legata ai carichi da impatto a bassa velocità, che possono creare i cosiddetti Barely Visible Impact Damage (BVID), cioè si tratta di quei casi in cui il materiale può risultare apparentemente integro da un'ispezione visiva, ma in realtà si possono avere dei danneggiamenti interni che possono provocare ad esempio una delaminazione del materiale stesso. Tali danni, se non rilevati, possono estendersi all'interno del materiale e portare ad importanti cedimenti strutturali. La presenza di sensori incorporati all'interno del materiale, che rilevano immediatamente la risposta del materiale quando sottoposto a carichi da impatto, può essere utile a mitigare questa problematica [14].

Il posizionamento dei sensori all'interno del composito varia in base agli specifici requisiti di

monitoraggio che si vogliono soddisfare. Alcuni sensori sono integrati all'interno del composito nella sezione media, creando così un punto centrale vantaggioso per il rilevamento di deformazioni o danni interni. Questa tipologia di locazione dei sensori si mostra particolarmente efficace nel rilevamento di problematiche quali la delaminazione o la presenza di cricche all'interno della matrice che si possono propagare in profondità all'interno del materiale [14].

Altri sensori vengono invece posizionati in prossimità della superficie del composito, permettendo un tempestivo rilevamento di impatti o abrasioni superficiali. Tale posizionamento dei sensori diventa essenziale in applicazioni dove forze esterne o interazione con eventuali detriti sono elementi di primario interesse. Infine, i sensori possono essere incorporati in prossimità degli strati finali del composito o in prossimità di strati più interni, in posizione strategica per il monitoraggio di danni o deformazioni che si propagano dagli strati più esterni, in particolare in quelle situazioni in cui le facce del composito sono esposte a impatti o stress da entrambi i lati [14].

La presenza dei sensori incorporati consente di avere a disposizione una mole di dati che si rivela essere molto importante per la comprensione della salute strutturale dei materiali compositi. L'utilizzo di modelli analitici gioca un ruolo chiave nell'interpretazione di questi dati, trasformando le letture rilevate dal sensore in dettagliate informazioni riguardanti la condizione del materiale. Tali modelli utilizzano avanzate tecniche di elaborazione del segnale per decodificare le cariche elettriche provenienti dal piezoelettrico, fornendo informazioni dettagliate sulla natura e sul posizionamento dei cambiamenti strutturali. Questo approccio di tipo analitico permette agli ingegneri di prendere corrette decisioni riguardo la manutenzione e la riparazione, assicurando che gli interventi necessari vengano effettuati in modo tempestivo ed efficace. Attraverso un costante monitoraggio e una costante analisi dei dati forniti dai sensori, tali modelli sono molto utili nel mantenere ottimale l'integrità delle strutture e nel migliorare la durata della loro vita, e dunque questi modelli si rivelano essere molto preziosi in quei settori in cui la presenza di danneggiamenti del materiale rappresenta un rischio molto importante [14].

Tra le principali tipologie di sensori abbiamo [15]:

- **Sensori piezoelettrici:** il loro funzionamento si basa sulla produzione di cariche elettriche indotte dall'applicazione di carichi esterni;
- **Sensori piezoresistivi:** il loro funzionamento si basa sulla produzione di una variazione di resistenza indotta dall'applicazione di carichi esterni;
- **Sensori a fibra ottica:** il loro funzionamento si basa su perturbazioni fisiche alle fibre illuminate che cambiano le proprietà della luce, dunque è possibile sfruttare questa sensibilità per correlare le caratteristiche ottiche alla deformazione o alla temperatura applicate.

Il presente lavoro di tesi propone l'utilizzo di sensori piezoelettrici legati alla manifattura virtuale di materiali compositi.

1.7.1 Sensori piezoelettrici

Scoperto da Pierre e Jacques Curie nel 1880, l'effetto piezoelettrico si basa su un accoppiamento multifisico. Effettuando dei test su alcuni materiali cristallini, i fratelli Curie scoprirono che quando essi venivano sottoposti ad una forza meccanica diventavano elettricamente polarizzati. La tensione e la compressione generavano voltaggi di polarità opposta, in modo proporzionale alla forza applicata. Tale comportamento venne dunque definito come effetto piezoelettrico

diretto. Ulteriori test invece portarono alla scoperta dell'effetto piezoelettrico inverso: quando una corrente elettrica veniva applicata a questi materiali cristallini, essi si allungavano o accorciavano in base alla polarità del campo, in modo proporzionale alla loro robustezza. Questi due effetti combinati creano così un accoppiamento elettro-meccanico [13].

L'accoppiamento elettro-meccanico può essere utilizzato su dispositivi che possono fungere sia da sensore (effetto piezoelettrico diretto) che da attuttore (effetto piezoelettrico inverso), come è possibile osservare dalla rappresentazione in Figura 1.10 [16].

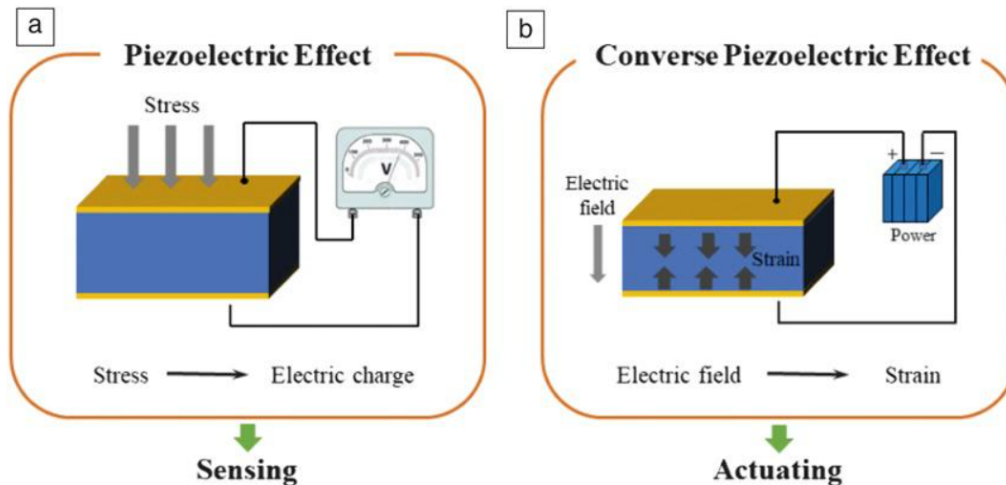


Figura 1.10: Effetto piezoelettrico diretto (a sinistra) ed effetto piezoelettrico inverso (a destra) [16].

Possono essere utilizzate diverse tipologie di materiali che presentano delle proprietà piezoelettriche. Tra questi abbiamo sia materiali polimerici (tra i più diffusi abbiamo il Polivinilidene fluoruro, PVDF) che ceramici (tra i più diffusi abbiamo il Lead Zirconate Titanate o Piombo-Zirconato di Titanio, LZT o PZT), e possono avere diverse forme (pellicole, dischi, lastre sottili, fibre, polveri, ecc). In Figura 1.11 è possibile osservare un esempio di funzionamento dell'effetto piezoelettrico attraverso l'utilizzo di un sensore in PZT [17]. Questi sensori vengono poi inseriti all'interno della struttura composita per monitorarne lo stato di salute utilizzando diverse tipologie di misurazione, ad esempio valutando la piezoresistività, l'impedenza, le onde di Lamb o le emissioni acustiche [13].

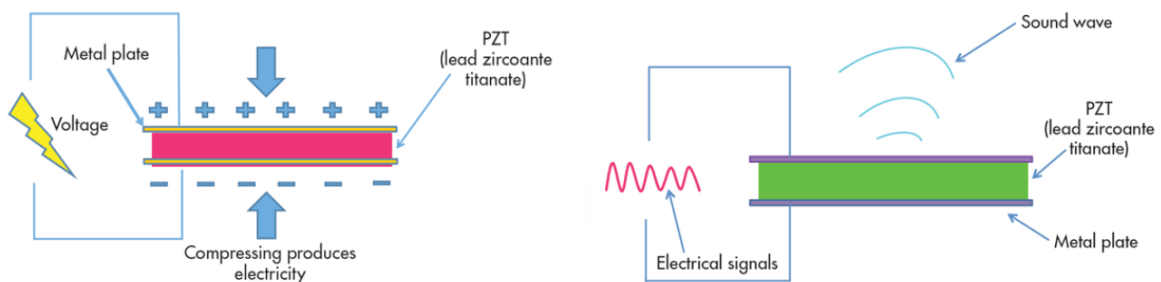


Figura 1.11: Effetto piezoelettrico diretto (a sinistra) e inverso (a destra) attraverso l'utilizzo di un sensore in PZT [17].

1.7.1.1 Specifiche, requisiti tecnici e tecniche di inclusione

Durante il processo di manifattura viene solitamente incorporato un determinato set di sensori all'interno della struttura composita. Per garantire l'efficienza dei sensori e preservare le proprietà della geometria e del materiale della struttura ospitante, sono state identificate diverse problematiche che possono avere un impatto sul processo di manifattura, tra queste abbiamo [18]:

- Connettere elettricamente un grande numero di sensori così da poter avere un controllo sull'intera struttura;
- Rendere ogni sensore elettricamente indipendente;
- Accoppiare in modo accurato il sensore con il materiale composito così da garantire l'efficienza del sensore stesso e ridurre i rischi di delaminazione o altri tipi di problematiche;
- Controllare in modo accurato il posizionamento del sensore all'interno della struttura così da creare una rete di sensori distribuiti in modo simmetrico;
- Limitare l'interferenza reciproca tra i vari sensori. Questo solitamente viene fatto definendo una distanza minima tra due sensori;
- Limitare la variazione di spessore dovuta alla presenza del sensore;
- Creare strutture con delle forme specifiche per adattare a un ampio range di applicazioni reali;
- Creare un forte collegamento con l'ambiente esterno così da poter fornire energia o modificare il controllo o il comportamento della struttura in tempo reale;
- Includere all'interno del processo di manifattura gli aspetti riguardanti il riciclaggio e/o lo smaltimento finale della struttura.

I sensori piezoelettrici utilizzati per le applicazioni citate dal presente lavoro di tesi presentano solitamente un alto aspect ratio per via del loro spessore molto piccolo rispetto alle dimensioni caratteristiche del componente in cui vengono incorporati. Lo spessore così ridotto serve a limitare l'intrusività del sensore nei confronti della struttura composita ospitante. Nella maggior parte dei casi i sensori hanno uno spessore inferiore a quello di un singolo strato del composito (tipicamente inferiore a 0.3 mm). Nei casi in cui il sensore abbia uno spessore maggiore, è necessario utilizzare delle tecniche di inclusione specifiche per rispettare i requisiti tecnici riguardanti la limitazione nelle variazioni di spessore della struttura composita ospitante. L'area del sensore è tipicamente abbastanza limitata rispetto all'area della struttura composita ospitante. L'obiettivo è quello di creare strutture dalla forma complessa evitando la presenza di stress concentrati causati dall'irrigidimento locale provocato dalla presenza del sensore [18].

L'importanza delle tecniche di inclusione è legata al modo in cui il sensore piezoelettrico viene incorporato all'interno della struttura composita. Il metodo più semplice consiste nel collocare il sensore direttamente nello spazio tra due strati, dunque lo spessore del sensore in tal caso deve essere sottile rispetto agli spessori tipici di un singolo strato, così da poter garantire anche una continuità tra i vari strati. Durante il processo di inclusione si possono creare ai bordi del sensore delle cosiddette "resin pockets" (Figura 1.12), che possono creare una debolezza strutturale che può portare all'inizio di una delaminazione. Inoltre, se il collocamento del sensore non viene

accuratamente definito, l'elemento piezoelettrico potrebbe muoversi durante la compattazione portando ad una fuoriuscita di resina, dunque per evitare che ciò accada è necessario incollare il sensore allo strato su cui poggia con una colla che sia compatibile con la resina [18].

Un altro metodo consiste nell'utilizzare uno strato che presenta un cosiddetto "cut-out", cioè una sorta di ritaglio che deve avere l'esatta geometria del sensore. Questo permette di avere un volume di "resin pocket" molto limitato e uno spessore della struttura ben controllato (Figura 1.13). Tuttavia, possono comunque essere presenti delle discontinuità lungo le fibre e, per strutture molto complesse, non è semplice ottenere un "cut-out" e un posizionamento del sensore accurati [18].

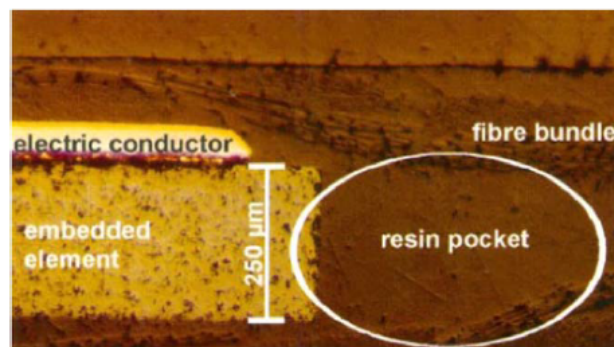


Figura 1.12: Sezione trasversale di un sensore piezoelettrico incorporato senza l'utilizzo del "cut-out" [18].

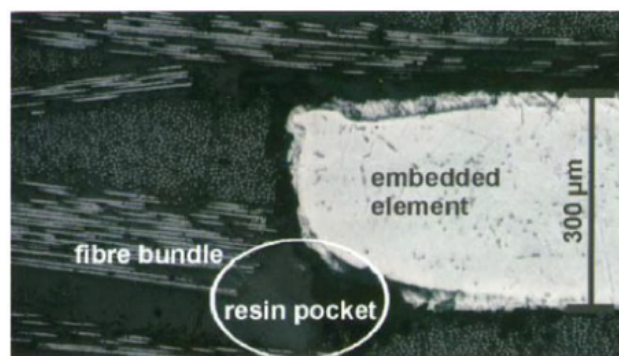


Figura 1.13: Sezione trasversale di un sensore piezoelettrico incorporato con l'utilizzo del "cut-out" [18].

Un'ulteriore complicazione legata alle suddette tecniche di inclusione è che esse si adattano bene per i materiali compositi elettricamente isolanti, ma possono essere difficili da utilizzare per strutture composite rinforzate in fibra di carbonio che presentano delle proprietà conduttive. Si può ovviare a tale problematica attraverso l'utilizzo di prodotti semilavorati che possono fornire un buon isolamento elettrico, poichè in questo caso i sensori non sono più inseriti direttamente durante il processo di manifattura, ma sono già contenuti all'interno di due strati isolanti. Sostanzialmente dopo l'impregnazione viene creato un prodotto semilavorato che viene inserito tra due strati di fibre. Inoltre, la resina del prodotto semilavorato deve essere compatibile con quella della struttura composita finale [18].

1.7.1.2 Connessione elettrica tra i conduttori e il sensore

La connessione elettrica tra i conduttori e il sensore rappresenta un elemento chiave delle tecniche di inclusione. L'affidabilità delle strutture composite smart dipende molto dalla qualità e dalla durabilità di queste connessioni, che devono resistere al processo di manifattura e alle condizioni operative della struttura finale. Il modo più semplice per ottenere le connessioni è quello di saldare direttamente i conduttori elettrici sulla superficie del sensore. Nel caso della saldatura bisogna però essere in grado di controllare ottimamente il volume e il posizionamento dei punti di saldatura, poichè un eccessivo volume del punto di saldatura può agire da cuneo meccanico e portare così alla rottura del sensore piezoelettrico durante la compattazione del materiale. Per evitare tale problematica sono state sviluppate delle tecniche di connessione alternative, ad esempio la connessione diretta dei fili al sensore attraverso l'utilizzo di una colla non conduttiva oppure l'utilizzo di prodotti semilavorati attraverso dei percorsi conduttivi che possono essere stampati e connessi direttamente ai sensori. Si possono utilizzare in diretta connessione coi sensori anche nastri di alluminio e nastri o lamine di rame, ma nel caso dell'utilizzo di nastri o lamine vi è la possibilità che ci sia una perdita del contatto elettrico a causa dello scorrimento della resina non conduttiva tra gli elementi conduttivi, dunque per evitare che ciò accada è possibile utilizzare un tessuto conduttivo per mantenere il contratto tra il sensore e i fili, poichè la porosità del tessuto garantisce la validità del contatto elettrico dopo l'impregnamento e la compattazione [18].

Bisogna infine stabilire anche un forte collegamento tra la struttura e l'ambiente esterno. In Figura 1.14 viene rappresentato un esempio di una struttura composita in GFRP (Glass Fiber Reinforced Polymer) in cui il sensore piezoelettrico, collegato ad un circuito elettronico di gestione della potenza, fornisce un microcontrollore con un sensore di temperatura, un ricetrasmittitore radio e un'antenna [18].

Il sensore piezoelettrico può anche essere accoppiato con una bobina, ed in quel caso la trasmissione dei dati avviene attraverso un accoppiamento induttivo tra una sonda di ispezione e la struttura composita [18].

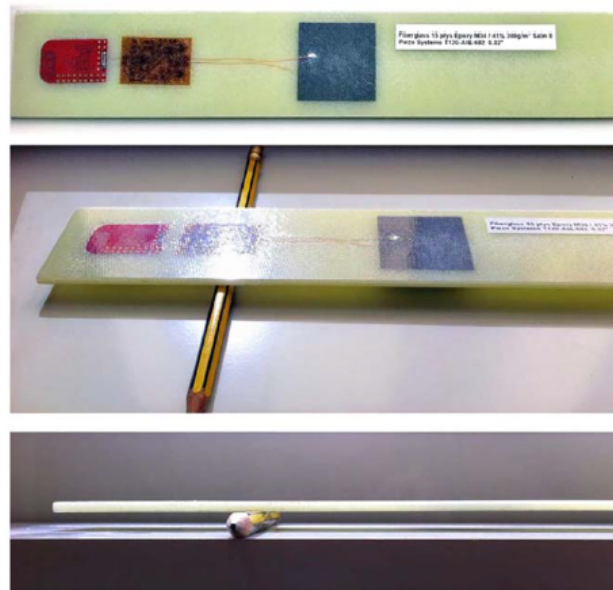


Figura 1.14: Sistema integrato di monitoraggio strutturale wireless di una trave in GFRP [18].

Capitolo 2

Approccio numerico al processo di manifattura

2.1 Introduzione

I materiali compositi, grazie alle loro superiori proprietà meccaniche specifiche, sono ampiamente utilizzati in applicazioni strutturali che richiedono alte performance. La possibilità, attraverso l'utilizzo di tali materiali, di produrre strutture monolitiche complesse, li rende molto ricercati per diverse applicazioni.

Durante il processo di manifattura, le parti in composito sono soggette a dei cicli ad alta pressione e temperatura che possono portare alla nascita di deformazioni libere. La presenza di queste deformazioni libere all'interno del materiale, accoppiate con l'evoluzione delle sue proprietà meccaniche, può portare alla formazione di stress residui e di conseguenza anche a cambiamenti dimensionali della parte in composito che è stata sottoposta al ciclo di cura. I cambiamenti dimensionali indotti dal processo di manifattura possono portare alla riduzione delle prestazioni meccaniche del materiale e creare dunque delle problematiche durante le fasi di assemblaggio dei componenti. Ulteriori complessità nascono nel momento in cui si vanno a considerare le proprietà ortotrope del materiale e l'interazione tra il componente e il tool in determinate geometrie, come ad esempio geometrie con forma ad L e con forma a C [19].

Per tipici laminati con configurazione cross-ply o quasi-isotropi, le deformazioni nel piano sono trascurabili rispetto a quelle che si hanno lungo lo spessore, e questo porta alla formazione, attorno agli angoli curvi del componente, di stress residui che creano dei cambiamenti dimensionali. Durante le prime fasi del processo di cura, e fin quando il modulo a taglio attraverso lo spessore è molto minore della rigidità flessionale del laminato, gli stress residui sono per la maggior parte scaricati attraverso deformazione a taglio trasversale. Nel momento in cui il modulo a taglio inizia a crescere, si crea un disallineamento delle deformazioni libere che porta alla formazione di stress residui. Gli stress residui che si formano vengono in parte rilasciati nel momento in cui il componente viene rimosso dal tool, creando così delle deformazioni come ad esempio la formazione di angoli di spring-in, Figura 2.1 [19].

Negli ultimi decenni sono stato condotti diversi studi per cercare di analizzare e prevedere i cambiamenti dimensionali attraverso delle soluzioni analitiche semplificate o attraverso delle accurate simulazioni agli elementi finiti. Per ottenere le soluzioni analitiche si fa spesso uso di assunzioni semplificate riguardo al comportamento del materiale o alla fisica che governa

il problema. Inizialmente, si sono sviluppati dei modelli matematici che trascuravano l'effetto del taglio trasversale basandosi sul disaccoppiamento tra le deformazioni nel piano e le deformazioni attraverso lo spessore. Successivamente, si sono sviluppati dei modelli che tenevano conto dell'effetto del taglio trasversale considerando una rappresentazione delle proprietà del materiale basata su un modello costitutivo pseudo-viscoelastico denominato Cure Hardening Instantaneously Linear Elastic (CHILE) [19].

Diversi modelli numerici, ad esempio quelli basati sui metodi agli elementi finiti, sono stati più volte utilizzati per simulare il processo di cura di materiali compositi a matrice polimerica. Recentemente è stato possibile sviluppare dei modelli in grado di includere gli effetti viscoelastici del problema, anche per componenti con geometrie complesse. Le classiche formulazioni strutturali, basate ad esempio su elementi trave o piastra, necessitano dell'uso di elementi continui tridimensionali, a discapito di un importante costo computazionale nella risoluzione del problema.

Nel seguente lavoro di tesi viene preso in considerazione un affinato modello cinematico mono-dimensionale sviluppato all'interno della Carrera Unified Formulation (CUF) [20]. Lo scopo è quello di ottenere un'accurata predizione delle deformazioni e degli stress residui a cui è sottoposto il componente durante il processo di cura, usando il modello CHILE per effettuare l'analisi del processo.

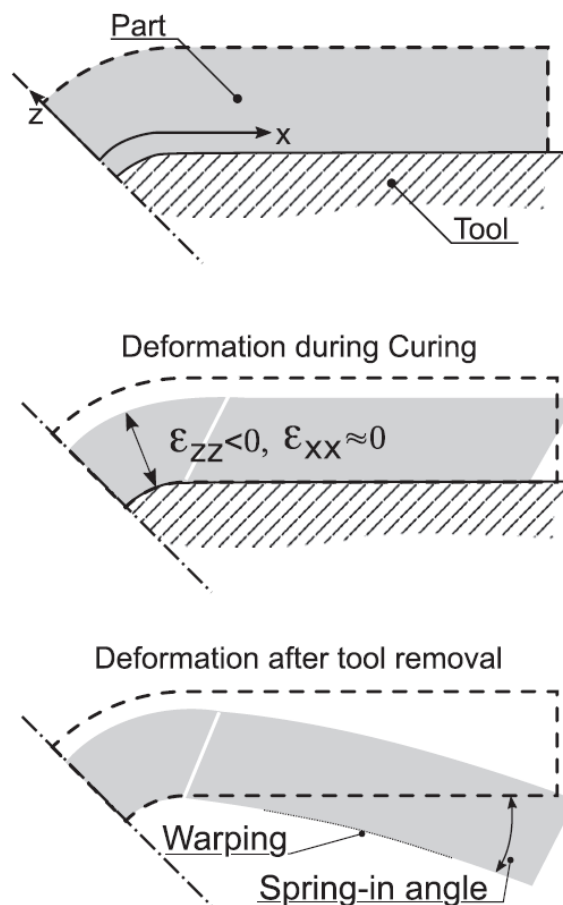


Figura 2.1: Cambiamenti dimensionali a cui è soggetto il componente in composito durante il ciclo di cura e dopo la rimozione dal tool [19].

2.2 Modello cinematico di riferimento

Il modello cinematico di riferimento è un affinato modello mono-dimensionale sviluppato all'interno della Carrera Unified Formulation (CUF). La CUF permette di derivare le matrici e i vettori agli elementi finiti sottoforma di *nuclei fondamentali* [20].

Si adotta un modello trave in cui l'asse y è allineato con l'asse del componente e gli assi x e z giacciono sulla sezione trasversale del componente, Figura 2.2 [19][20].

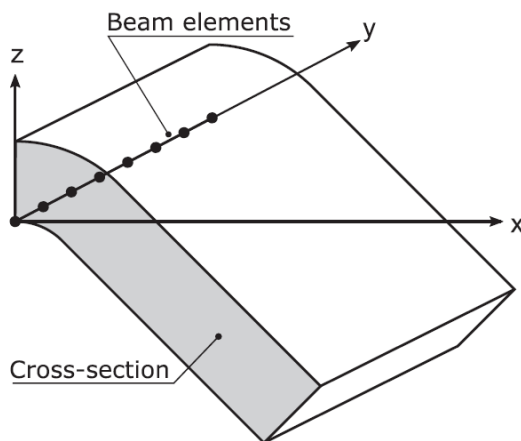


Figura 2.2: Sistema di coordinate di riferimento [19].

Il vettore degli spostamenti viene scritto come:

$$\mathbf{u}^T = (u_x, u_y, u_z) \quad (2.1)$$

dove u_x , u_y , u_z sono le tre componenti di spostamento.

I vettori delle deformazioni e degli stress vengono definiti come:

$$\boldsymbol{\epsilon}^T = (\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \epsilon_{xz}, \epsilon_{yz}, \epsilon_{xy}) \quad (2.2)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^T = (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{xy}) \quad (2.3)$$

Le deformazioni e gli spostamenti possono essere messi in relazione attraverso la seguente equazione geometrica:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (2.4)$$

dove \mathbf{D} è una matrice di operatori differenziali lineari.

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Gli stress e le deformazioni possono essere messi in relazione attraverso la legge di Hooke:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\epsilon} \quad (2.6)$$

dove \mathbf{C} è la matrice dei coefficienti di rigidità del materiale.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

2.3 Ipotesi cinematiche

Nel caso in cui lo spostamento assiale, u_y , venga considerato costante lungo la sezione trasversale e si vada così a trascurare lo spostamento in direzione trasversale, si avrebbero delle limitazioni nel modello. Per superare queste limitazioni, lo spostamento assiale deve essere considerato come un campo tri-dimensionale [19][20]:

$$u_y(y) \rightarrow u_y(x, y, z) \quad (2.8)$$

Lo stesso ragionamento chiaramente va fatto anche per le altre due componenti di spostamento, u_x e u_z , dal momento che $\mathbf{u}^T = (u_x, u_y, u_z)$.

Il campo degli spostamenti lungo l'asse può così essere scritto come:

$$u_y(x, y, z) = N_i(y)u_{yi}(x, z) \quad (2.9)$$

dove $N_i(y)$ sono le funzioni di forma utilizzate per approssimare gli spostamenti lungo l'asse y , ed i coefficienti u_{yi} sono adesso funzioni delle coordinate della sezione trasversale. I termini $u_{yi}(x, z)$ possono essere approssimati introducendo un'espansione generica per la sezione trasversale. In generale, $u_{yi}(x, z)$ può essere scritto come somma di generiche funzioni $F_\tau(x, z)$:

$$u_{yi}(x, z) = F_\tau(x, z)u_{y\tau i} = F_1(x, z)u_{y1i} + F_2(x, z)u_{y2i} + \dots + F_\tau(x, z)u_{y\tau i} + \dots + F_M(x, z)u_{yMi} \quad (2.10)$$

dove M rappresenta il numero di termini dell'espansione.

Sostituendo l'Eq. (2.10) nell'Eq. (2.9) si ottiene il campo di spostamenti completo:

$$u_y(x, y, z) = N_i(y)u_{yi}(x, z) = N_i(y)F_\tau(x, z)u_{y\tau i} \quad (2.11)$$

Utilizzando gli indici "s" e "j" al posto rispettivamente degli indici "τ" e "i", è possibile introdurre la variazione virtuale:

$$\delta u_y(x, y, z) = N_j(y)F_s(x, z)\delta u_{ysj} \quad (2.12)$$

Considerando tutte e tre le variabili di spostamento, u_x , u_y , u_z , il campo di spostamenti può essere così scritto in forma compatta:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{i\tau}N_i(y)F_\tau(x, z), \quad \tau = 1, \dots, M \quad i = 1, \dots, N_n \quad (2.13)$$

La variazione virtuale del campo di spostamenti può così essere scritta come:

$$\delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{u}_{sj} N_j(y) F_s(x, z) \quad (2.14)$$

Sfruttando le relazioni (2.4) e (2.6) è adesso possibile scrivere il vettore degli stress e il vettore delle deformazioni nella seguente forma:

$$\boldsymbol{\epsilon}(x, y, z) = \mathbf{D} \mathbf{u}_{i\tau} N_i(y) F_\tau(x, z) \quad (2.15)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(x, y, z) = \mathbf{C} \mathbf{D} \mathbf{u}_{i\tau} N_i(y) F_\tau(x, z) \quad (2.16)$$

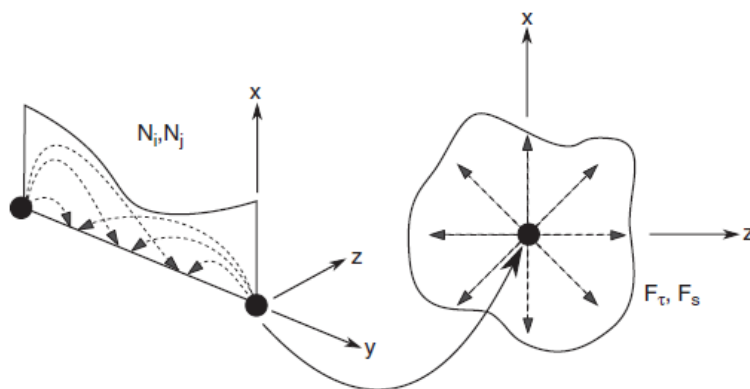


Figura 2.3: Rappresentazione dell'approssimazione lungo l'asse (attraverso l'uso di N_i ed N_j), e dell'espansione sulla sezione trasversale (attraverso l'uso di F_τ ed F_s) [20].

2.4 Modelli per le funzioni di espansione: TE vs LE

Il campo di spostamenti della sezione trasversale può essere scritto come un'espansione di funzioni di diverso tipo, tra le più utilizzate abbiamo le funzioni di espansione di Taylor (Taylor Expansion, TE) e le funzioni di espansione di Lagrange (Lagrange Expansion, LE). La scelta dell'espansione genera differenti modelli cinematici [20][21].

2.4.1 Taylor Expansion (TE)

Nella seguente sezione verranno rappresentate le teorie classiche basate sui modelli trave di Eulero-Bernoulli e di Timoshenko, e successivamente verrà rappresentato il caso dell'espansione lineare completa basato sull'utilizzo di polinomi di Taylor.

2.4.1.1 Euler-Bernoulli Beam Theory (EBBT)

La teoria della trave di Eulero-Bernoulli (Figura 2.4) si basa sulle seguenti assunzioni [20][21]:

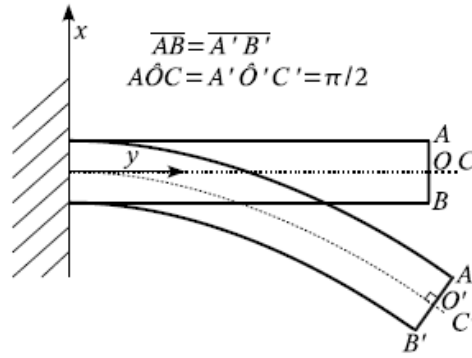


Figura 2.4: Modello trave di Eulero-Bernoulli [20][21].

1. La sezione trasversale rimane rigida sul suo piano, cioè mantiene invariata la sua altezza a deformazione avvenuta.

$$\begin{cases} \epsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = u_{x,x} = 0 \\ \epsilon_{zz} = u_{z,z} = 0 \\ \gamma_{xz} = u_{x,z} + u_{z,x} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} u_x(x, y, z) = u_{x_1}(y) \\ u_z(x, y, z) = u_{z_1}(y) \end{cases} \quad (2.17)$$

2. La sezione trasversale ruota attorno ad una superficie neutra rimanendo piana a deformazione avvenuta.

$$u_y(x, y, z) = u_{y_1}(y) + \phi_z(y)x + \phi_x(y)z \quad (2.18)$$

dove ϕ_z e ϕ_x sono rispettivamente gli angoli di rotazione rispetto all'asse z e all'asse x.

3. La sezione trasversale rimane perpendicolare alla superficie neutra a deformazione avvenuta.

La terza assunzione equivale a trascurare le deformazioni a taglio, $\gamma_{yz} = \gamma_{yx} = 0$.

$$\begin{cases} \gamma_{xy} = u_{y,x} + u_{x,y} = \phi_z + u_{x_1,y} = 0 \\ \gamma_{yz} = u_{y,z} + u_{z,y} = \phi_x + u_{z_1,y} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \phi_z = -u_{x_1,y} \\ \phi_x = -u_{z_1,y} \end{cases} \quad (2.19)$$

Il campo di spostamenti dato dalla teoria della trave di Eulero-Bernoulli assume dunque la seguente forma:

$$\begin{cases} u_x = u_{x_1} \\ u_y = u_{y_1} - u_{x_1,y} x - u_{z_1,y} z \\ u_z = u_{z_1} \end{cases} \quad (2.20)$$

2.4.1.2 Timoshenko Beam Theory (TBT)

La teoria della trave di Timoshenko (Figura 2.5) si basa sulle seguenti assunzioni [20][21]:

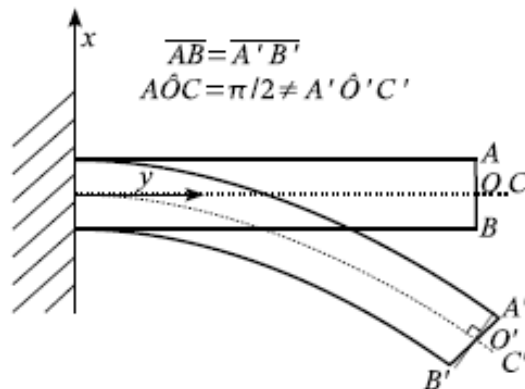


Figura 2.5: Modello trave di Timoshenko [20][21].

1. La sezione trasversale rimane rigida sul suo piano, cioè mantiene invariata la sua altezza a deformazione avvenuta.
2. La sezione trasversale ruota attorno ad una superficie neutra rimanendo piana a deformazione avvenuta.

Dunque, a differenza del modello trave di Eulero-Bernoulli, nel modello trave di Timoshenko la sezione trasversale non è più vincolata a rimanere perpendicolare alla superficie neutra. Ne segue che adesso devono essere tenute in considerazione anche le componenti di deformazione a taglio γ_{yz} e γ_{xy} .

Il campo di spostamenti dato dalla teoria della trave di Timoshenko assume dunque la seguente forma:

$$\begin{cases} u_x = u_{x_1}(y) \\ u_y = u_{y_1}(y) + \phi_z(y)x + \phi_x(y)z \\ u_z = u_{z_1}(y) \end{cases} \quad (2.21)$$

2.4.1.3 Complete linear expansion case

La TE, nel caso di ordine di espansione di grado $N=1$, descrive il campo di spostamenti della sezione trasversale nel seguente modo [20][21]:

$$\begin{cases} u_x = u_{x_1} + x u_{x_2} + z u_{x_3} \\ u_y = u_{y_1} + x u_{y_2} + z u_{y_3} \\ u_z = u_{z_1} + x u_{z_2} + z u_{z_3} \end{cases} \quad (2.22)$$

Il modello trave dato da questo campo di spostamenti ha dunque 9 incognite di spostamento. Chiaramente in questo caso per quanto riguarda le funzioni di espansione F_τ , avremo: $F_{\tau=1} = 1$, $F_{\tau=2} = x$, $F_{\tau=3} = z$. Utilizzando la notazione $\mathbf{u} = F_\tau \mathbf{u}_\tau$, possiamo riscrivere il campo di spostamenti nella seguente forma:

$$\begin{cases} u_x = F_1 u_{x_1} + F_2 u_{x_2} + F_3 u_{x_3} = F_\tau u_{x_\tau} \\ u_y = F_1 u_{y_1} + F_2 u_{y_2} + F_3 u_{y_3} = F_\tau u_{y_\tau} \\ u_z = F_1 u_{z_1} + F_2 u_{z_2} + F_3 u_{z_3} = F_\tau u_{z_\tau} \end{cases} \quad (2.23)$$

E' chiaramente possibile estendere l'espansione ad ordini superiori come rappresentato in Figura 2.6.

N	M	F_τ
0	1	$F_1 = 1$
1	3	$F_2 = x \quad F_3 = z$
2	6	$F_4 = x^2 \quad F_5 = xz \quad F_6 = z^2$
3	10	$F_7 = x^3 \quad F_8 = x^2z \quad F_9 = xz^2 \quad F_{10} = z^3$
\vdots	\vdots	\vdots
N	$(N+1)(N+2)/2$	$F_{(N^2+N+2)/2} = x^N \quad \dots \quad F_{(N+1)(N+2)/2} = z^N$

Figura 2.6: Espansione di Taylor [20].

L'utilizzo di un'espansione di Taylor porta ad avere modelli Equivalent Single Layer (ESL).

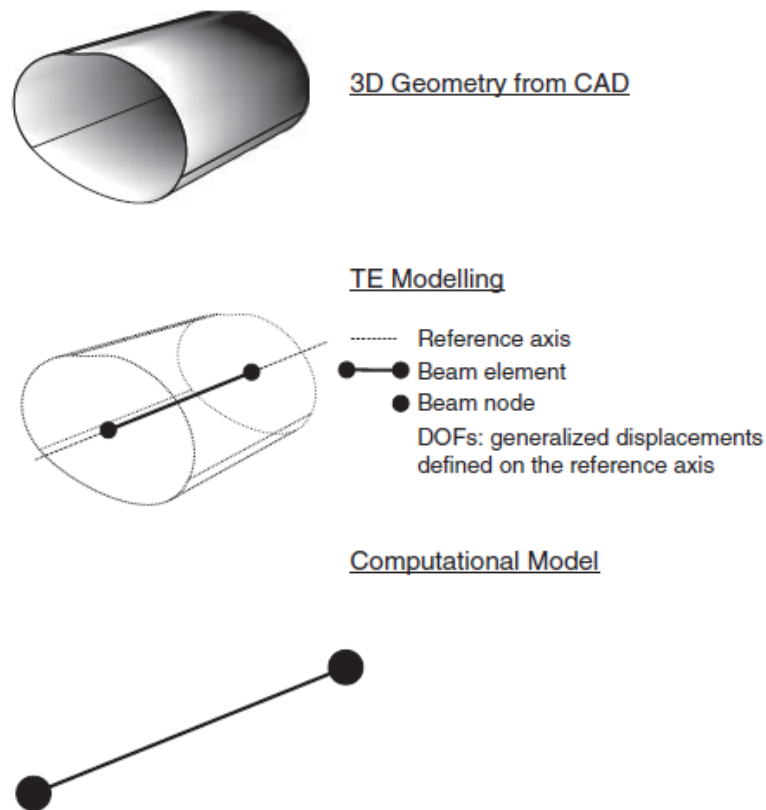


Figura 2.7: Esempio di modellazione geometrica basata su un approccio TE [20].

2.4.2 Lagrange Expansion (LE)

Passando invece all'espansione di Lagrange, i modelli 1D basati sulla LE hanno le seguenti caratteristiche [20]:

- Le variabili e le condizioni al contorno nei modelli LE possono essere localizzati direttamente sulla superficie fisica della struttura;
- Le variabili incognite del problema sono definite come pure componenti di spostamento. Non sono presenti rotazioni o variabili di ordine superiore necessarie ad andare a descrivere il campo di spostamenti;
- Si possono andare a definire facilmente dei modelli locali dal momento che i polinomi di Lagrange possono essere arbitrariamente estesi sulla sezione trasversale.

In forma generale il campo di spostamenti può essere scritto come [19]:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_\tau(y)F_\tau(x, z), \quad \tau = 1, \dots, M \quad (2.24)$$

dove $F_\tau(x, z)$ rappresenta la funzione di espansione sulla sezione trasversale, $\mathbf{u}_\tau(y)$ rappresenta il vettore degli spostamenti incogniti lungo l'asse delle trave, ed M rappresenta il numero di termini nelle funzioni di espansione $F_\tau(x, z)$.

Se la sezione trasversale fosse, ad esempio, descritta da un elemento di Lagrange a 4 nodi (L4), il campo di spostamenti assumerebbe la seguente forma:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1L_1 + \mathbf{u}_2L_2 + \mathbf{u}_3L_3 + \mathbf{u}_4L_4 \quad (2.25)$$

dove le funzioni di espansione vengono denotate con "L" piuttosto che con "F" per sottolineare che si tratta di polinomi di Lagrange. Nelle Figure 2.8 e 2.9 si può vedere un esempio di discretizzazione con l'uso di elementi di Lagrange [19][20].

L'utilizzo di un'espansione di Lagrange porta ad avere modelli Layer-Wise (LW).

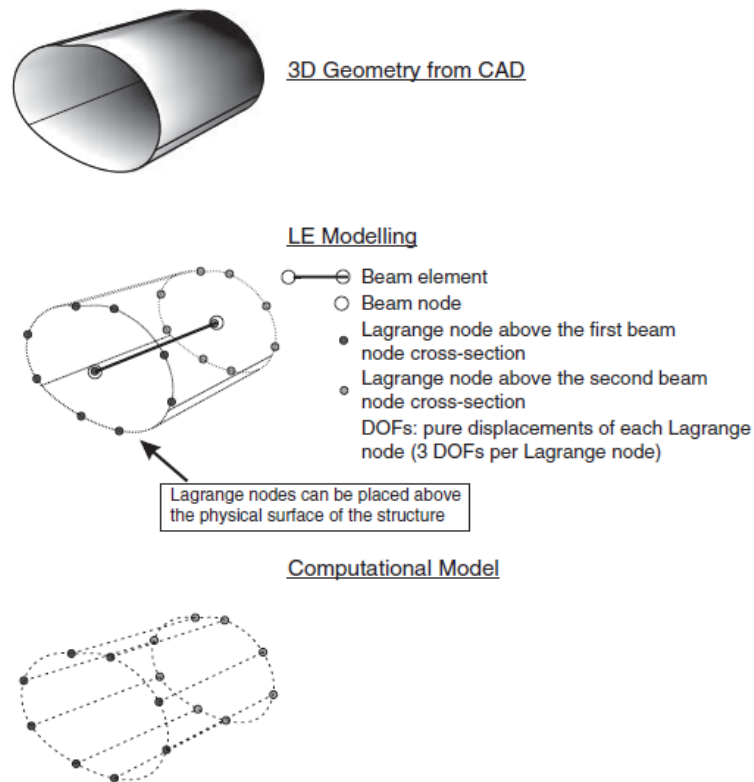


Figura 2.8: Esempio di modellazione geometrica basata su un approccio LE [20].

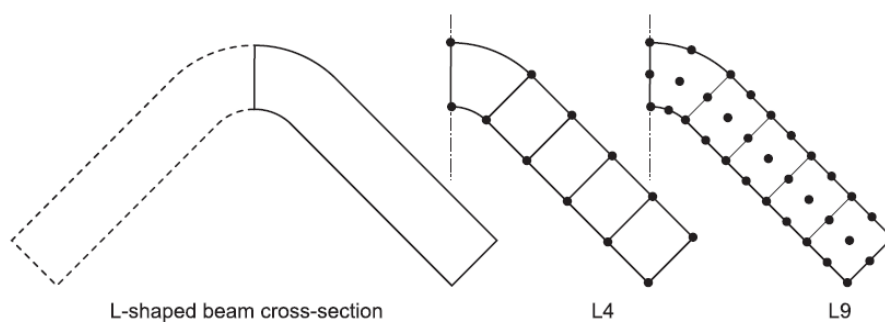


Figura 2.9: Esempio di discretizzazione di una sezione trasversale con elementi di Lagrange lineari (L4) e quadratici (L9) [19].

In Figura 2.10 è possibile osservare la differenza tra l'approccio TE e l'approccio LE. Si può facilmente notare come l'approccio tramite modellazione TE introduce delle entità fittizie che vanno a rappresentare il modello geometrico [20].

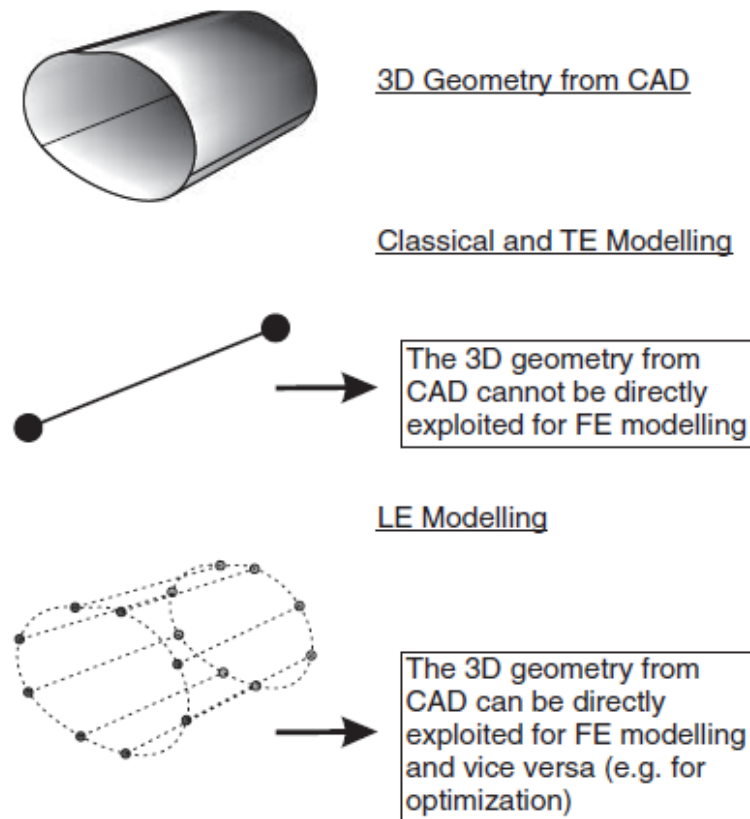


Figura 2.10: TE vs LE [20].

2.4.3 Calcolo del numero di gradi di libertà: TE vs LE

Il numero totale dei gradi di libertà del modello strutturale è in generale dato dalla seguente formula [20][21]:

$$DOFs = (3 \times M) \times [(N_{NE} - 1) \times N_{BE} + 1] \quad (2.26)$$

dove:

- $(3 \times M)$ rappresenta il numero dei gradi di libertà di ciascun nodo. In particolare il termine M dipende dal tipo di espansione scelta:
 - Nel caso della TE, il termine M dipende esclusivamente dall'ordine dell'espansione ($N=1 \rightarrow M=3$, $N=2 \rightarrow M=6$, ecc...);
 - Nel caso della LE, il termine M dipende dal numero di nodi presenti sulla sezione, in base agli elementi di Lagrange scelti (L4, L9, ecc...) ed in base ad eventuali suddivisioni della sezione in un certo numero di sottosezioni.
- N_{NE} rappresenta il numero di nodi di ciascun elemento (lungo la lunghezza della trave);
- N_{BE} rappresenta il numero totale di elementi trave.

2.5 Equazioni di governo

Le equazioni di governo possono essere ottenute attraverso il principio degli spostamenti virtuali (Principle of Virtual Displacements, PVD) [19][20]:

$$\delta L_{int} = \delta L_{ext} \quad (2.27)$$

dove L_{int} rappresenta l'energia di deformazione, L_{ext} rappresenta il lavoro delle forze esterne, e δ rappresenta la variazione virtuale.

La variazione virtuale dell'energia di deformazione può essere espressa come:

$$\delta L_{int} = \int_V \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV \quad (2.28)$$

Introducendo le equazioni costitutive e le relazioni geometriche, ed introducendo il campo di spostamenti definito dall'Eq. (2.13), l'Eq. (2.28) diventa:

$$\delta L_{int} = \delta \mathbf{u}_{sj}^T \int_V [N_j F_s \quad \mathbf{D}^T \quad \mathbf{C} \quad \mathbf{D} \quad F_\tau N_i] dV \mathbf{u}_{\tau i} = \delta \mathbf{u}_{sj}^T \mathbf{k}^{ij\tau s} \mathbf{u}_{\tau i} \quad (2.29)$$

dove $\mathbf{k}^{ij\tau s}$ rappresenta una matrice di rigidezza 3x3 con una forma invariante che prende il nome di *nucleo fondamentale*, $\mathbf{u}_{\tau i}$ rappresenta il vettore delle incognite nodali e $\delta \mathbf{u}_{sj}$ rappresenta la sua prima variazione.

I carichi esterni, nel caso della simulazione di un processo di cura, sono forze generate dal campo termico e dallo shrinkage chimico a cui è soggetta la matrice polimerica. La variazione virtuale del lavoro delle forze esterne può essere espressa come:

$$\delta L_{ext} = \int_V \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\beta} \Delta T dV + \int_V \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon}_s dV \quad (2.30)$$

dove ΔT rappresenta l'incremento di temperatura, $\boldsymbol{\beta}$ rappresenta il vettore dei coefficienti di espansione termica, ed $\boldsymbol{\epsilon}_s$ rappresenta il vettore delle deformazioni dovute allo shrinkage chimico.

Considerando il campo di spostamenti definito dall'Eq. (2.13), l'Eq. (2.30) diventa:

$$\delta L_{ext} = \delta \mathbf{u}_{sj}^T \int_V N_j F_s \mathbf{D}^T \mathbf{C} (\boldsymbol{\beta} \Delta T + \boldsymbol{\epsilon}_s) dV = \delta \mathbf{u}_{sj}^T \mathbf{f}^{js} \quad (2.31)$$

dove \mathbf{f}^{js} rappresenta un vettore colonna con 3 componenti e si riferisce al nucleo fondamentale del vettore dei carichi.

2.6 Tecnica di assemblaggio delle matrici di rigidezza attraverso la CUF

L'uso della CUF rende l'assemblaggio delle matrici una procedura piuttosto semplice. L'assemblaggio della matrice si basa su un processo iterativo attraverso quattro loop sugli indici i , j , τ , s , e viene così calcolato un nucleo fondamentale per ciascuna combinazione di questi indici. In Figura 2.11 viene mostrato come è possibile costruire una matrice di rigidezza del nodo, una matrice di rigidezza dell'elemento, ed infine la matrice di rigidezza globale attraverso l'utilizzo del nucleo fondamentale [20].

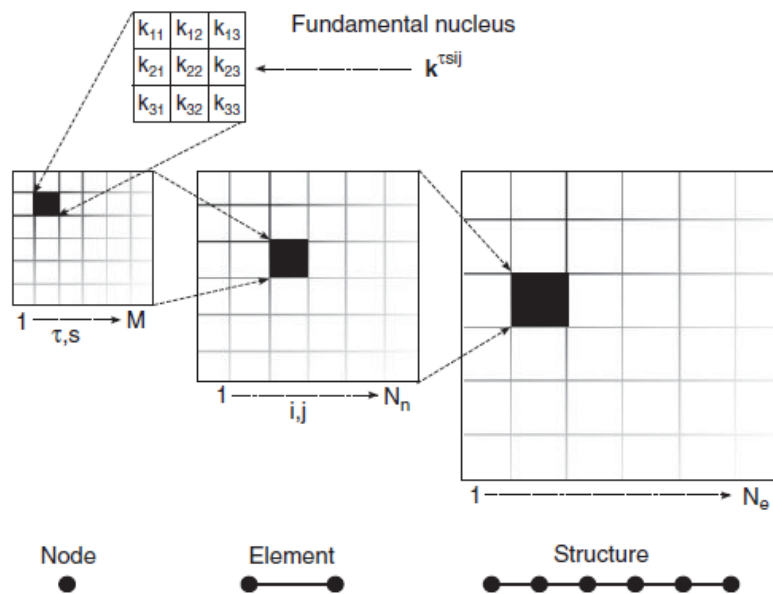


Figura 2.11: Rappresentazione della procedura di assemblaggio [20].

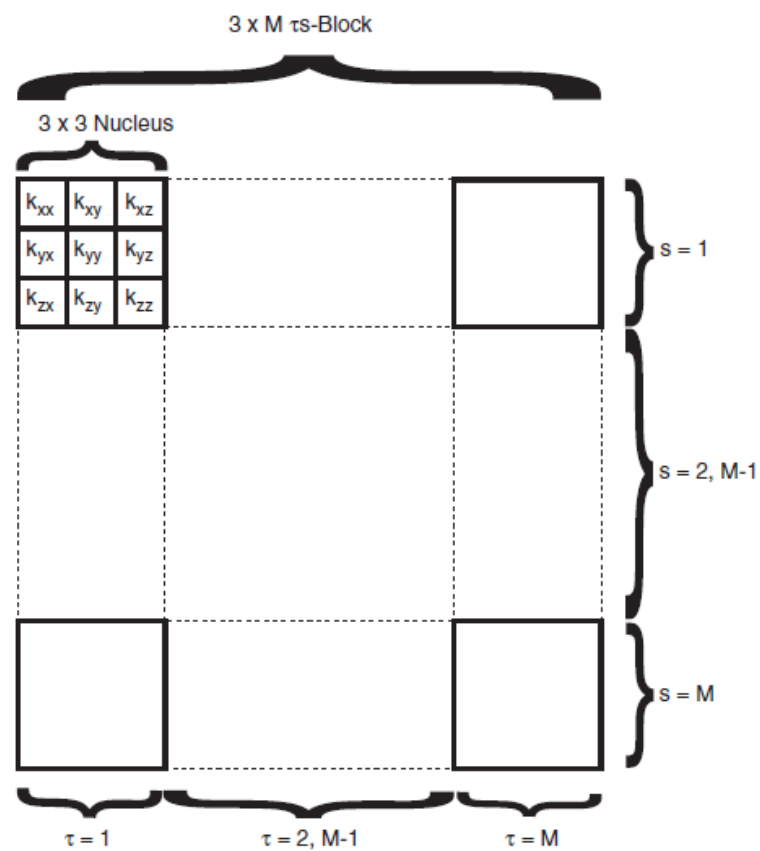


Figura 2.12: Schema di assemblaggio della matrice di rigidezza del nodo [20].

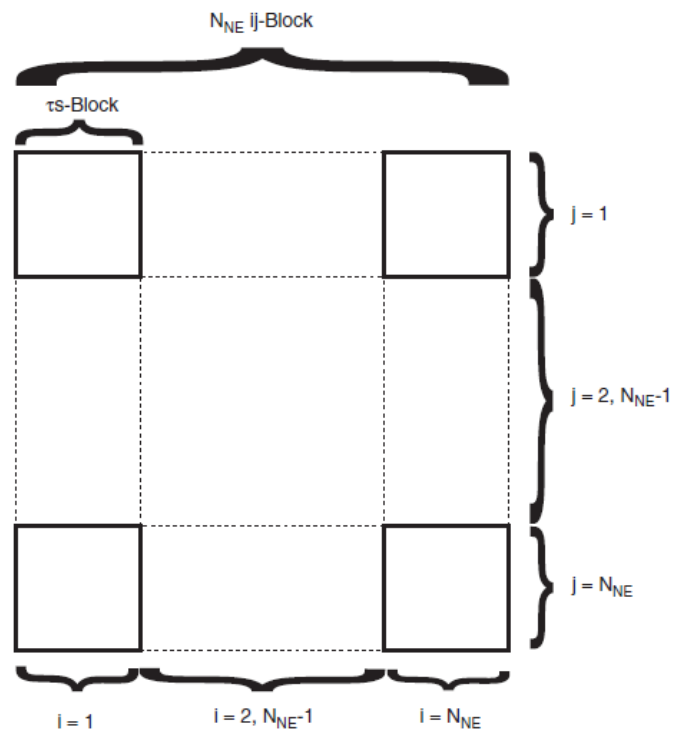


Figura 2.13: Schema di assemblaggio della matrice di rigidezza dell'elemento [20].

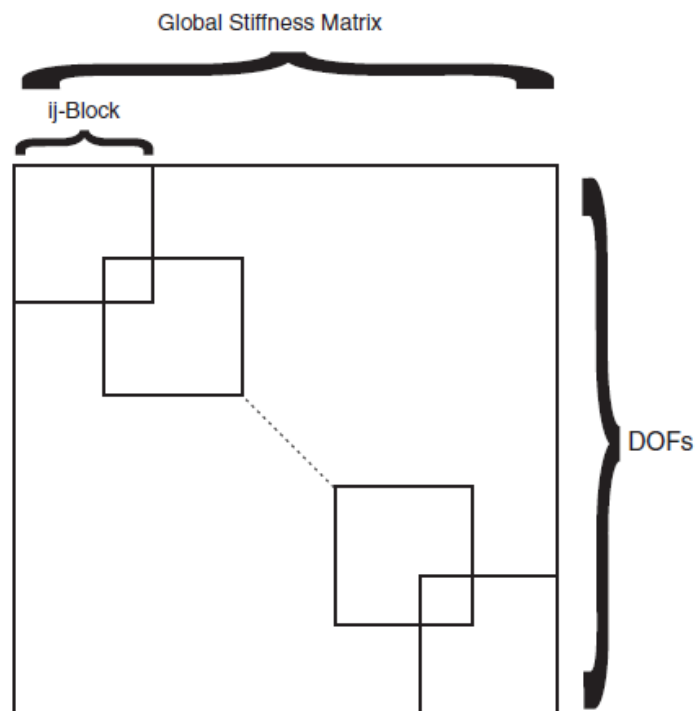


Figura 2.14: Schema di assemblaggio della matrice di rigidezza globale [20].

In Figura 2.15 viene mostrato un esempio del posizionamento dell'elemento $\mathbf{k}^{\tau s i j} = \mathbf{k}_{xx}^{2212}$ all'interno della matrice di rigidezza dell'elemento.

i = 1				i = 2					
$\tau = 1$	$\tau = 2$	$\tau = 3$	$\tau = 4$	$\tau = 1$	$\tau = 2$	$\tau = 3$	$\tau = 4$		
								s = 1	j = 1
								s = 2	
								s = 3	
								s = 4	
								s = 1	j = 2
								s = 2	
								s = 3	
								s = 4	

Figura 2.15: Rappresentazione elemento \mathbf{k}_{xx}^{2212} [20].

2.7 CUF come approccio unico per strutture 1D, 2D e 3D

Abbiamo in precedenza visto come il campo di spostamenti di un modello 1D possa essere descritto utilizzando un classico approccio agli elementi finiti basato sulle funzioni di forma, $N_i(y)$, lungo l'asse della struttura, ed un approccio basato sulle funzioni di espansione, $F_\tau(x, z)$, sulla sezione trasversale:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{i\tau} N_i(y) F_\tau(x, z) \quad (2.32)$$

La formulazione indiciale introdotta dalla CUF ha la possibilità di essere estesa a qualsiasi altra teoria strutturale, come ad esempio nei modelli piastra o guscio [20].

Le funzioni di forma, N_i , introdotte dal modello FEM, possono essere utilizzate, oltre che per domini 1D, anche per approssimare domini 2D e 3D:

$$\begin{cases} 1D \rightarrow N_i(y) \\ 2D \rightarrow N_i(x, y) \\ 3D \rightarrow N_i(x, y, z) \end{cases} \quad (2.33)$$

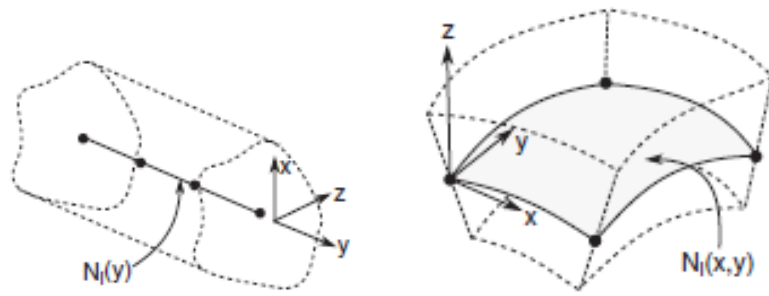


Figura 2.16: Esempio di modello FEM 1D (a sinistra) e di modello FEM 2D (a destra) [20].

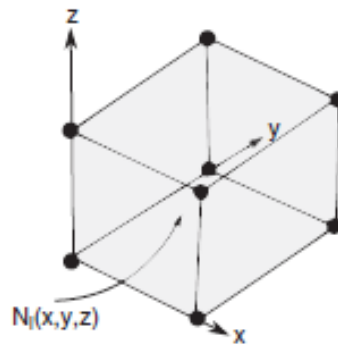


Figura 2.17: Esempio di modello FEM 3D [20].

Le funzioni di espansione, F_τ , possono anche loro essere utilizzate, oltre che per domini 1D, per domini 2D e 3D:

$$\begin{cases} 1D \rightarrow F_\tau(x, z) \\ 2D \rightarrow F_\tau(z) \\ 3D \rightarrow 1 \end{cases} \quad (2.34)$$

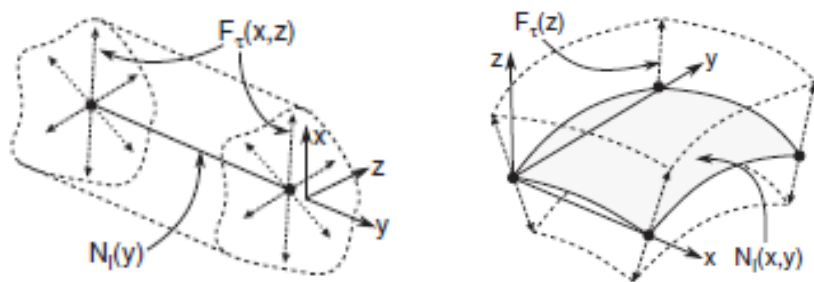


Figura 2.18: Esempio di modello trave 1D (a sinistra) e di modello piastra/guscio 2D (a destra) [20].

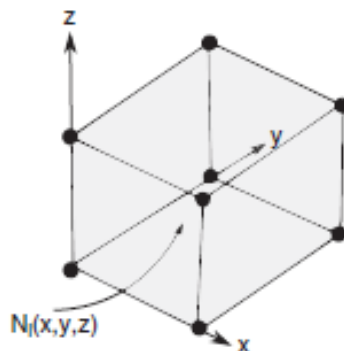


Figura 2.19: Esempio di modello solido 3D [20].

La combinazione del FEM e della teoria delle strutture porta dunque a 3 differenti formulazioni per i casi 1D, 2D e 3D [20]:

$$\begin{cases} 1D \rightarrow \mathbf{u}(x, y, z) = N_i(y)F_\tau(x, z) \\ 2D \rightarrow \mathbf{u}(x, y, z) = N_i(x, y)F_\tau(z) \\ 3D \rightarrow \mathbf{u}(x, y, z) = N_i(x, y, z) \end{cases} \quad (2.35)$$

Nell'approccio 1D, il FEM è utilizzato per approssimare il problema lungo l'asse y , attraverso le funzioni di forma $N_i(y)$, mentre lo spostamento sulla sezione trasversale è approssimato attraverso le funzioni di espansione $F_\tau(x, z)$. Qualsiasi modello trave può essere ottenuto attraverso questa formulazione, e i modelli classici, quali ad esempio il modello trave di Eulero-Bernoulli (Euler-Bernoulli Beam Theory, EBBT) ed il modello trave di Timoshenko (Timoshenko Beam Theory, TBT), possono essere ottenuti come casi particolari.

Nell'approccio 2D, il FEM è utilizzato per risolvere il problema su una superficie di riferimento, attraverso le funzioni di forma $N_i(x, y)$, mentre lo spostamento lungo lo spessore dell'elemento è approssimato attraverso le funzioni di espansione $F_\tau(z)$. Qualsiasi elemento piastra o guscio può essere ottenuto attraverso questa formulazione.

Nell'approccio 3D, il FEM è utilizzato per approssimare l'intero dominio del problema, attraverso le funzioni di forma $N_i(x, y, z)$, mentre le funzioni di espansione F_τ non vengono utilizzate.

E' importante notare come, attraverso la CUF, qualunque sia il modello e l'approccio utilizzato, il campo di spostamenti mantiene sempre una formulazione 3D.

Capitolo 3

Assessment del modello numerico

Nel seguente capitolo vengono presentati alcuni test effettuati su modelli mono-dimensionali nei quali si sfruttano i principi della CUF per andare a trattare la discretizzazione della struttura. In particolare, viene utilizzato un codice di calcolo sviluppato in ambiente Fortran dal gruppo di ricerca MUL2 del Politecnico di Torino, guidato dal prof. Erasmo Carrera. Tale codice, attraverso l'utilizzo di una serie di file di input, permette di definire vari parametri che vanno a definire il modello, quali la sua geometria, il materiale, le condizioni al contorno, la discretizzazione della struttura, il tipo di analisi da effettuare ecc.

3.1 Assessment 1

Il primo assessment tiene in considerazione un modello trave caratterizzato dalla presenza di un cambio di sezione lungo la sua lunghezza. Laddove si ha il cambio di sezione, vi è una sovrapposizione di due diversi materiali. In Figura 3.1 si può vedere la trave con la distinzione tra i due materiali, materiale 1 in blu e materiale 2 in rosso. Il materiale in blu è un alluminio, ($E = 73 \cdot 10^9$ Pa, $\nu = 0.3$, $\rho = 2700 \frac{kg}{m^3}$) mentre il materiale in rosso è un acciaio ($E = 210 \cdot 10^9$ Pa, $\nu = 0.3$, $\rho = 7800 \frac{kg}{m^3}$). La trave è incastrata ad un'estremità (lato sinistro in figura) e la sezione 2 inizia a partire da 5 cm dall'incastro e si estende per 1 cm.

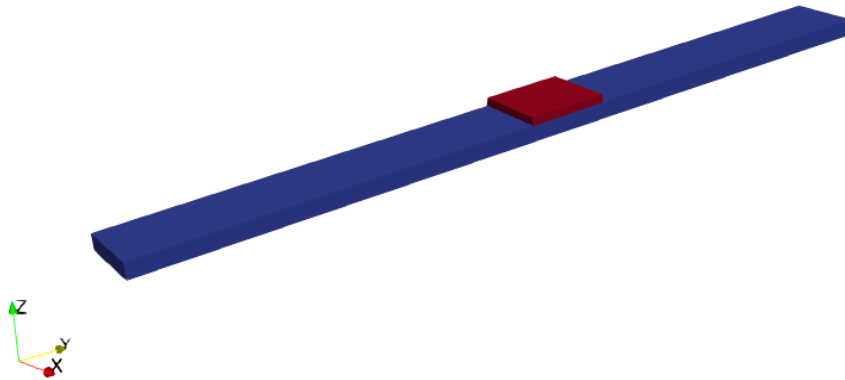


Figura 3.1: Assessment 1.

Vengono rappresentati in Tabella 3.1 i valori delle caratteristiche geometriche della trave.

Caratteristica geometrica	Dimensione [m]
Lunghezza della trave L	0.1
Larghezza della trave b	0.01
Spessore sezione 1 h_1	0.002
Spessore sezione 2 h_2	0.003
Lunghezza sezione 2 L_2	0.01

Tabella 3.1: Caratteristiche geometriche della trave.

Per la discretizzazione della struttura si è fatto uso delle seguenti assunzioni:

- Asse della trave \rightarrow FEM \rightarrow 10 elementi B4 \rightarrow 31 nodi totali lungo l'asse della trave;
- Sezione trasversale 1 \rightarrow CUF \rightarrow 1 elemento Q9 \rightarrow 9 nodi totali sulla sezione trasversale 1;
- Sezione trasversale 2 \rightarrow CUF \rightarrow 2 elementi Q9 \rightarrow 15 nodi totali sulla sezione trasversale 2.

Nel caso di un accoppiamento di più elementi, come avviene nella sezione trasversale 2 del presente assessment, la connectivity dei nodi viene definita con la convenzione rappresentata in Figura 3.2 [20], si va cioè a definire ciascun elemento con una numerazione dei nodi in senso antiorario. Nella figura sottostante viene rappresentato un esempio di assemblaggio di due elementi Q4, ma ragionamento equivalente vale per gli elementi Q9 che vengono utilizzati nel nostro assessment. Questo è l'approccio che verrà utilizzato anche nei successivi assessment.

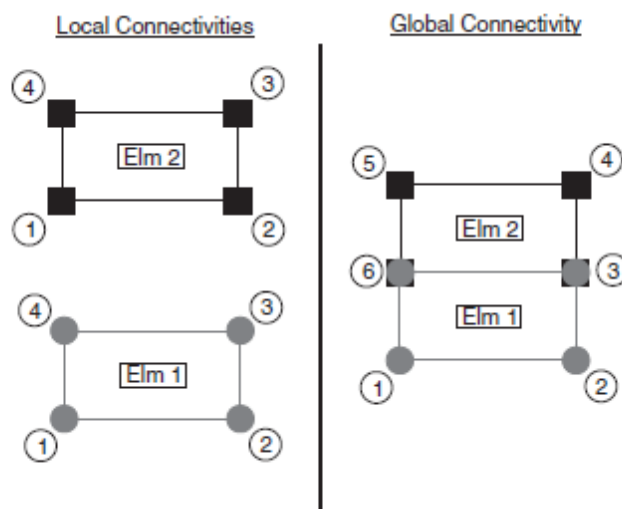


Figura 3.2: Esempio di assemblaggio della connectivity di due elementi Q4 [20].

Le condizioni al contorno prevedono la presenza di un incastro ad $y=0$, e di un carico concentrato da 1000 N rivolto verso il basso posizionato all'estremità libera della trave.

Si effettua un'analisi statica (SOL 101) e attraverso l'utilizzo del software ParaView si vanno a visualizzare i risultati dell'analisi al variare del tipo di espansione utilizzata.

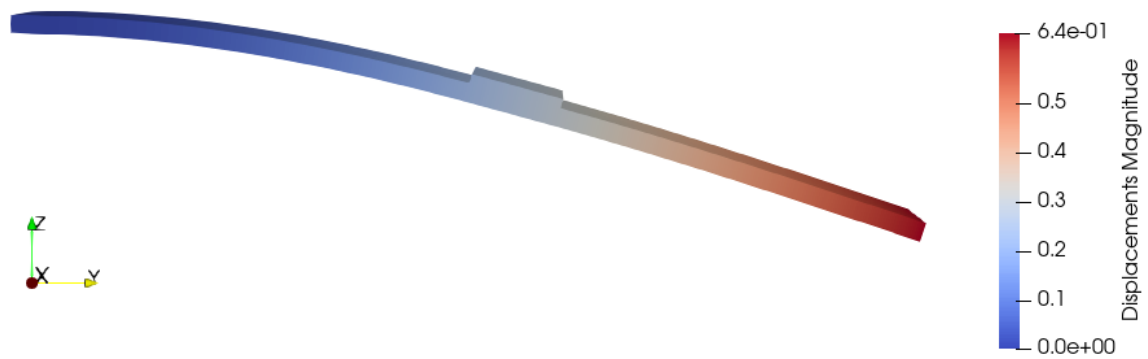


Figura 3.3: Spostamento della trave - Espansione di Lagrange (LE).

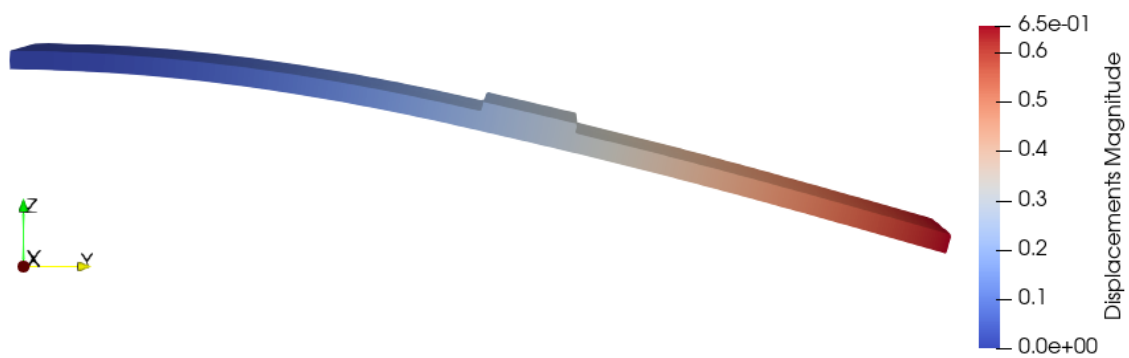


Figura 3.4: Spostamento della trave - Espansione di Taylor ordine N=1 (TE1).

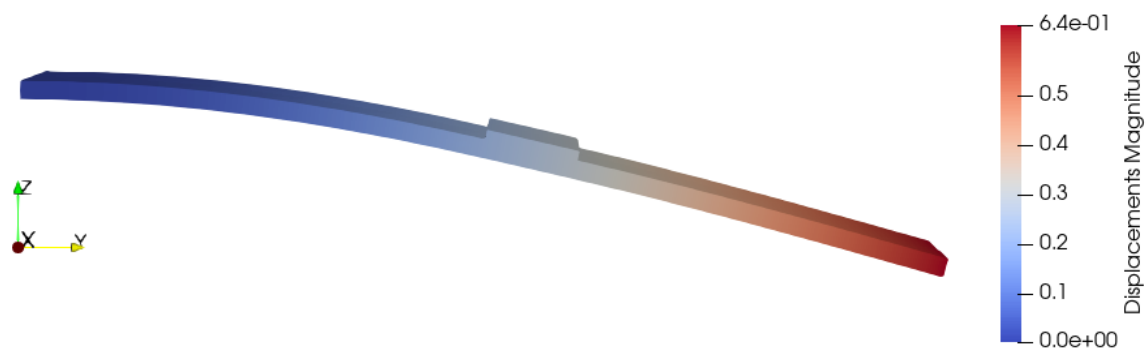


Figura 3.5: Spostamento della trave - Espansione di Taylor ordine N=2 (TE2).

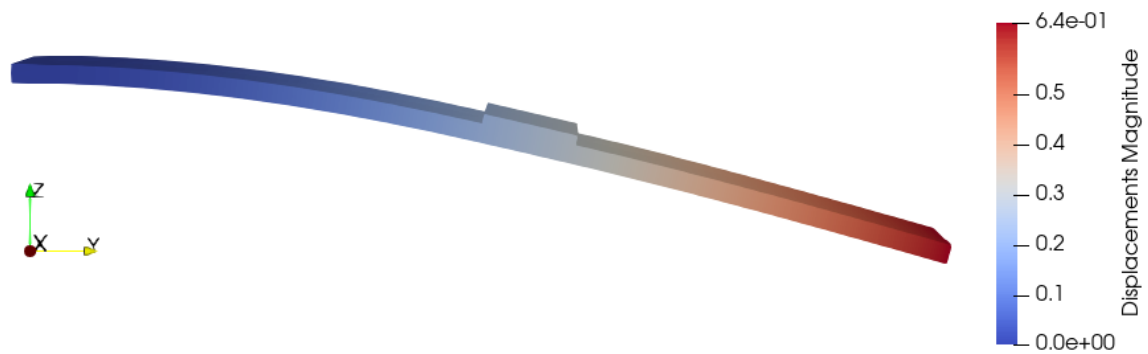


Figura 3.6: Spostamento della trave - Espansione di Taylor ordine $N=3$ (TE3).

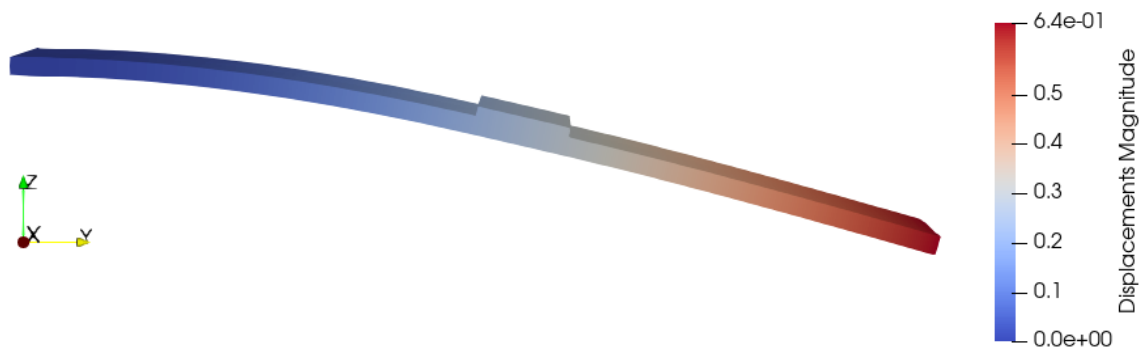


Figura 3.7: Spostamento della trave - Espansione di Taylor ordine $N=4$ (TE4).

In Tabella 3.2 vengono riassunti i valori di spostamento massimo della trave al variare dell'espansione utilizzata.

Modello di espansione	DOF	Spostamento massimo [m]
LE	909	0.6423
TE1	279	0.6511
TE2	558	0.6399
TE3	930	0.6417
TE4	1395	0.6433

Tabella 3.2: Spostamento massimo.

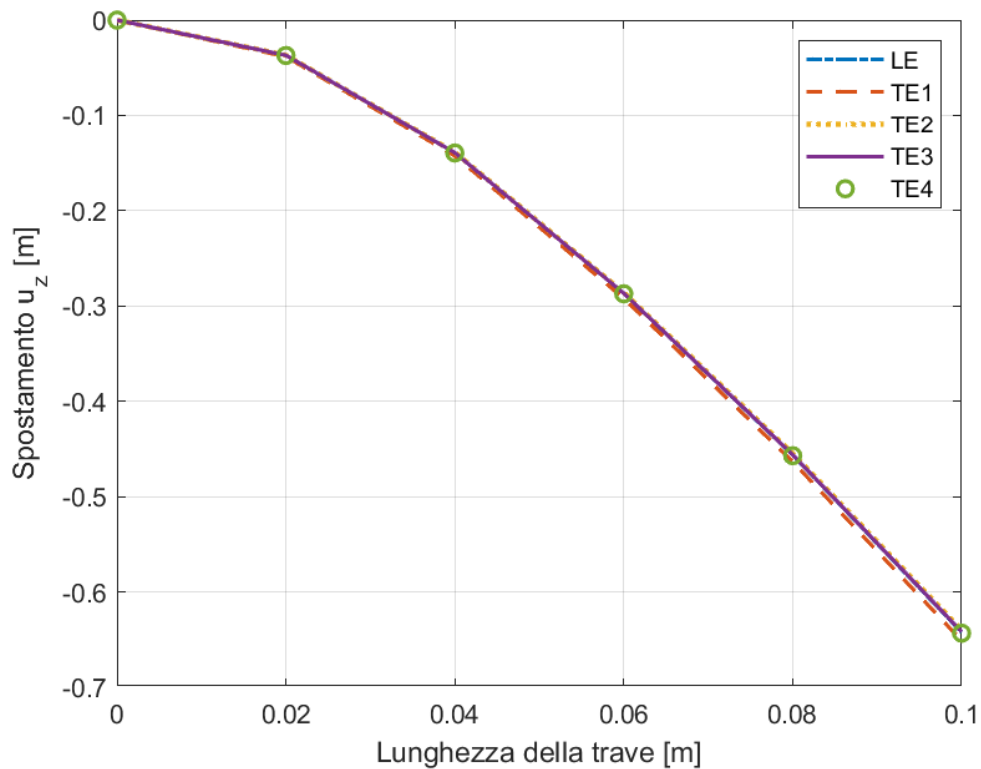


Figura 3.8: Spostamento della trave al variare dell'espansione.

3.2 Assessment 2

Il secondo assessment tiene in considerazione un modello trave con sezione costante lungo la sua lunghezza. In Figura 3.9 si può vedere il modello trave utilizzato. La trave è in alluminio ($E = 73 \cdot 10^9$ Pa, $\nu = 0.3$, $\rho = 2700 \frac{kg}{m^3}$) ed è incastrata ad entrambe le estremità.

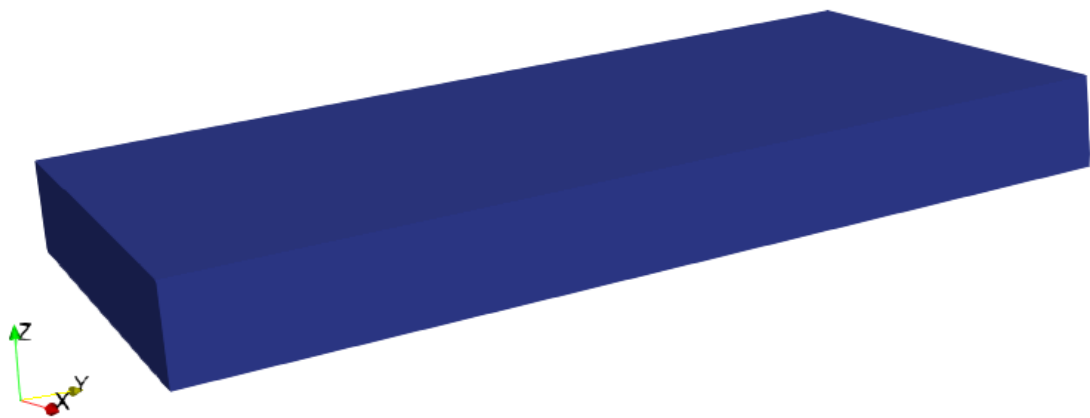


Figura 3.9: Assessment 2.

Vengono rappresentati in Tabella 3.6 i valori delle caratteristiche geometriche della trave.

Caratteristica geometrica	Dimensione [m]
Lunghezza della trave L	0.1
Larghezza della trave b	0.05
Spessore della trave h	0.01

Tabella 3.3: Caratteristiche geometriche della trave.

Per la discretizzazione della struttura si è fatto uso delle seguenti assunzioni:

- Asse della trave \rightarrow FEM \rightarrow 10 elementi B4 \rightarrow 31 nodi totali lungo l'asse della trave;
- Sezione trasversale \rightarrow CUF \rightarrow 1 elemento Q9 \rightarrow 9 nodi totali sulla sezione trasversale.

Le condizioni al contorno prevedono la presenza di un doppio incastro alle due estremità della trave, e di un carico concentrato da 1000 N rivolto verso il basso posizionato al centro della trave.

Si effettua un'analisi statica (SOL 101) e attraverso l'utilizzo del software ParaView si vanno a visualizzare i risultati dell'analisi al variare del tipo di espansione utilizzata.

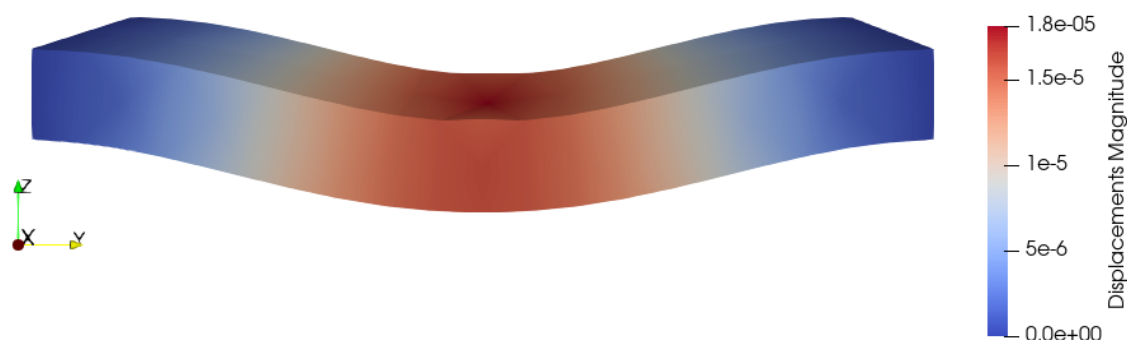


Figura 3.10: Spostamento della trave - Espansione di Lagrange (LE).

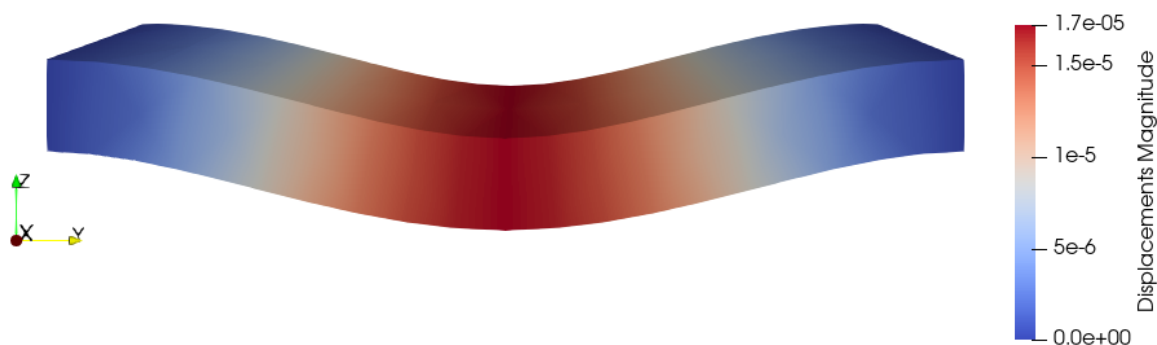


Figura 3.11: Spostamento della trave - Modello di Eulero-Bernoulli (TE -1).

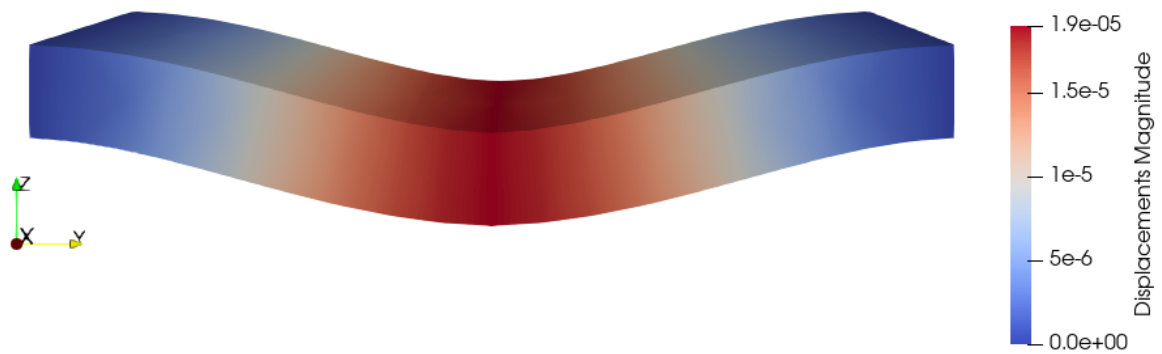


Figura 3.12: Spostamento della trave - Modello di Timoshenko (TE0).

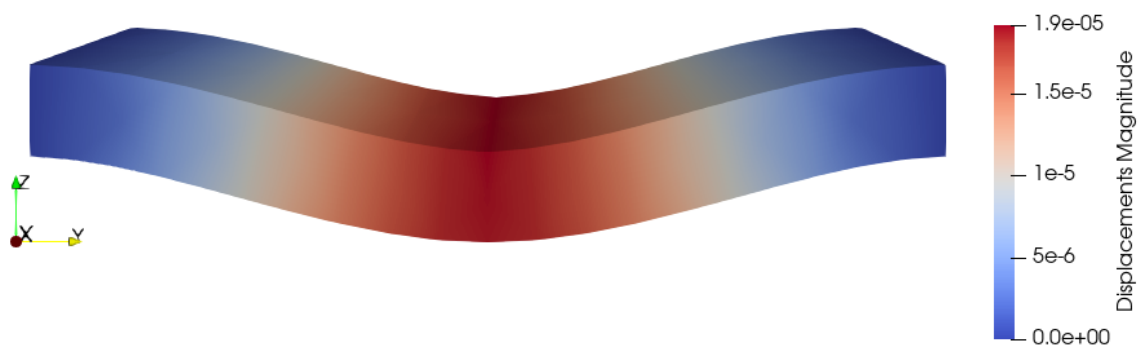


Figura 3.13: Spostamento della trave - Espansione di Taylor ordine N=1 (TE1).

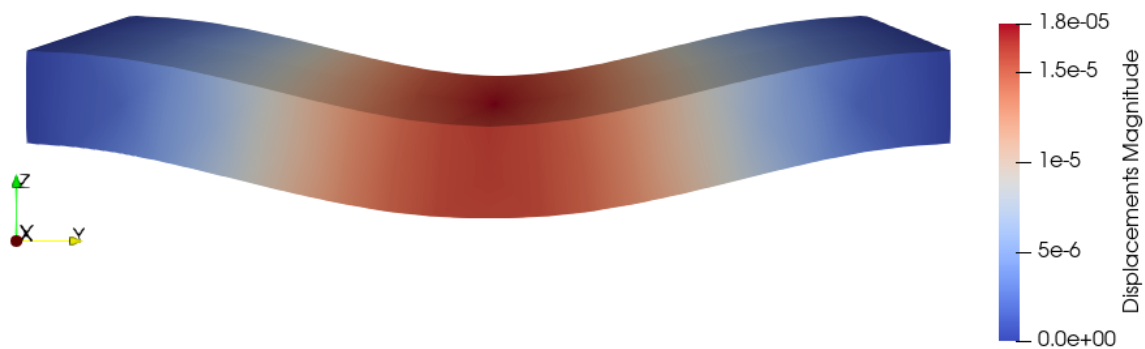


Figura 3.14: Spostamento della trave - Espansione di Taylor ordine N=2 (TE2).

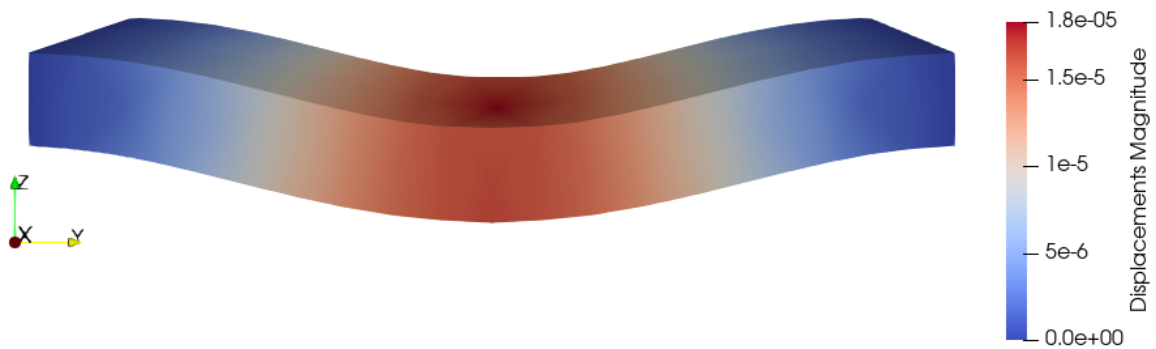


Figura 3.15: Spostamento della trave - Espansione di Taylor ordine $N=3$ (TE3).

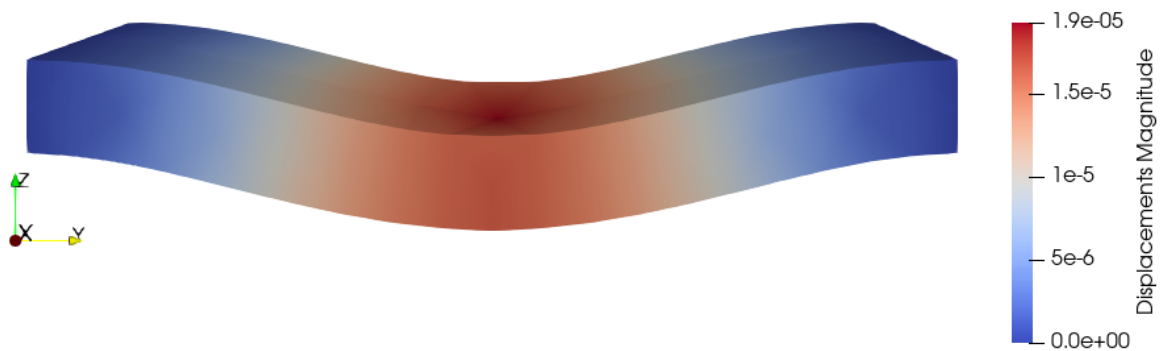


Figura 3.16: Spostamento della trave - Espansione di Taylor ordine $N=4$ (TE4).

In Tabella 3.5 vengono riassunti i valori di spostamento massimo della trave al variare dell'espansione utilizzata.

Modello di espansione	DOF	Spostamento massimo [m]
LE	837	$1.806 \cdot 10^{-5}$
TE -1 (Eulero-Bernoulli)	279	$1.712 \cdot 10^{-5}$
TE0 (Timoshenko)	279	$1.890 \cdot 10^{-5}$
TE1	279	$1.908 \cdot 10^{-5}$
TE2	558	$1.766 \cdot 10^{-5}$
TE3	930	$1.825 \cdot 10^{-5}$
TE4	1395	$1.927 \cdot 10^{-5}$

Tabella 3.4: Spostamento massimo.

Si può andare a valutare la bontà dei risultati ottenuti dal modello numerico, mostrati in precedenza, confrontandoli con il risultato analitico. E' possibile ottenere il risultato analitico, per una trave doppiamente incastrata e caricata al centro, attraverso l'utilizzo della seguente formula [22]:

$$\delta_{max} = \frac{PL^3}{192EI} \quad (3.1)$$

dove:

- δ_{max} è lo spostamento massimo che vogliamo andare a calcolare;
- P è il carico applicato, nel nostro caso $P = 1000$ N;
- L è la lunghezza della trave, nel nostro caso $L = 0.1$ m;
- E è il modulo elastico del materiale, nel nostro caso $E = 73 \cdot 10^9 \frac{N}{m^2}$;
- $I = \frac{bh^3}{12} = \frac{(0.05)(0.01)^3}{12} = 4.16 \cdot 10^{-9} m^4$.

Si ottiene così analiticamente uno spostamento massimo $\delta_{max} = 1.71 \cdot 10^{-5}$ m, corrispondente al risultato ottenuto col modello di Eulero-Bernoulli.

E' possibile vedere in Figura 3.17 l'andamento dello spostamento della trave, al variare del tipo di espansione utilizzata, prendendo in considerazione diversi punti lungo la larghezza della trave in corrispondenza del punto in cui la trave viene caricata.

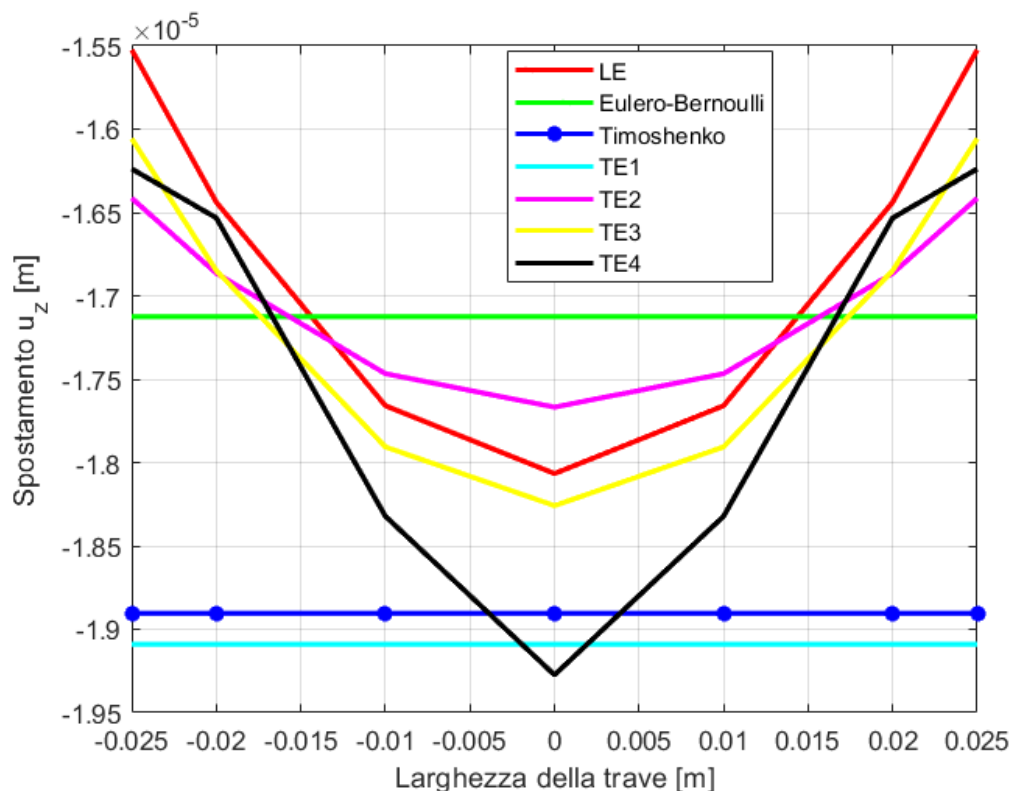


Figura 3.17: Spostamento della trave al variare dell'espansione.

3.2.1 Assessment 2.1

Viene adesso proposto un assessment che tiene in considerazione la stessa trave trattata in precedenza, con il medesimo materiale, le medesime caratteristiche geometriche e le medesime condizioni di vincolo e di carico. Quello che si va a variare sono le assunzioni riguardanti la discretizzazione della sezione trasversale della struttura. In particolare, la sezione trasversale viene adesso modellizzata nel seguente modo:

- Sezione trasversale \rightarrow CUF \rightarrow 4 elementi Q9 \rightarrow 27 nodi totali sulla sezione trasversale.

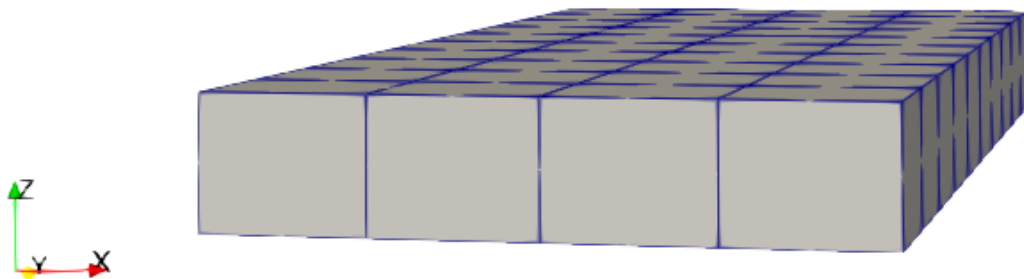


Figura 3.18: Discretizzazione della sezione trasversale con l'utilizzo di 4 elementi.

Si effettua un'analisi statica (SOL 101) e attraverso l'utilizzo del software ParaView si vanno a visualizzare i risultati dell'analisi al variare del tipo di espansione utilizzata.

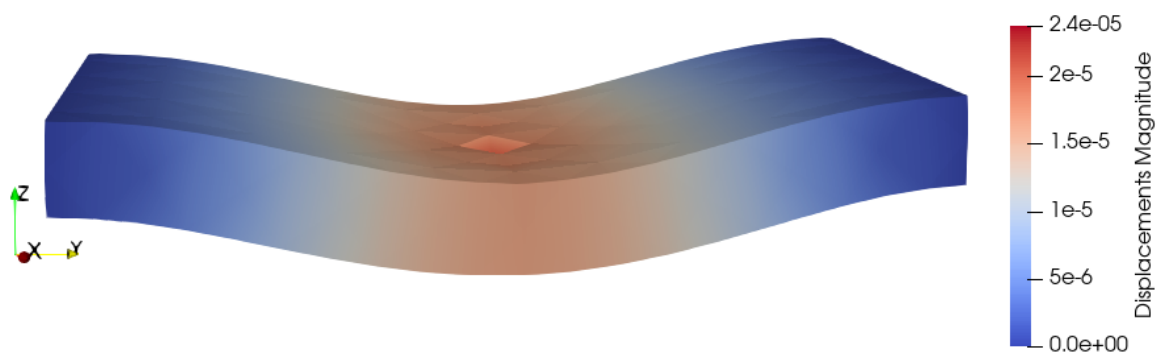


Figura 3.19: Spostamento della trave - Espansione di Lagrange (LE).

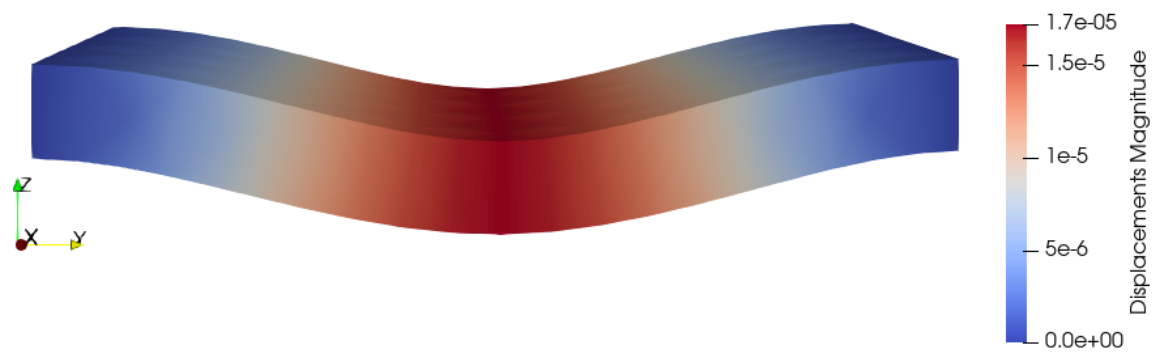


Figura 3.20: Spostamento della trave - Modello di Eulero-Bernoulli (TE -1).

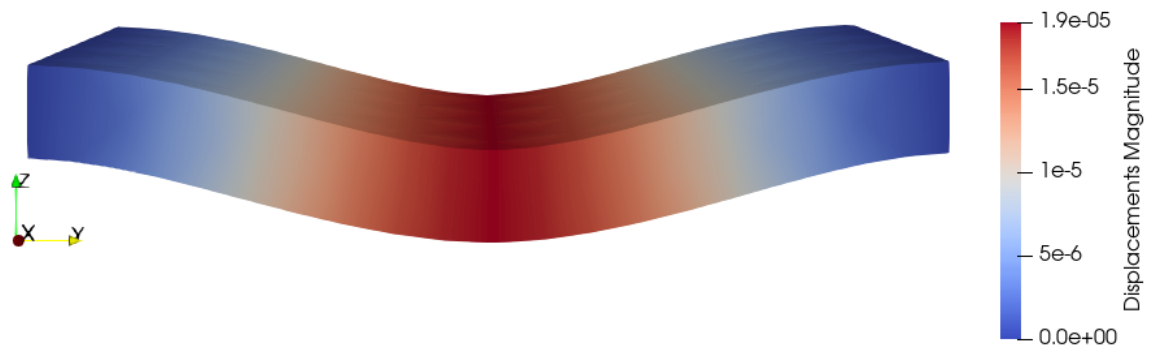


Figura 3.21: Spostamento della trave - Modello di Timoshenko (TE0).

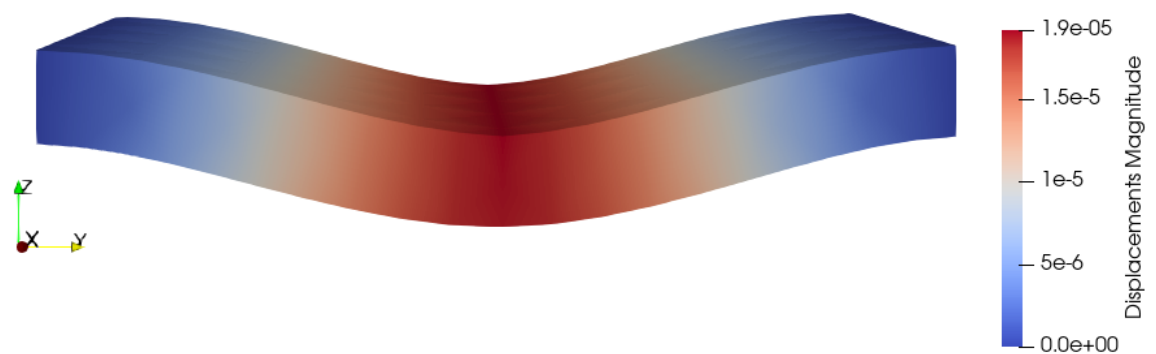


Figura 3.22: Spostamento della trave - Espansione di Taylor ordine N=1 (TE1).

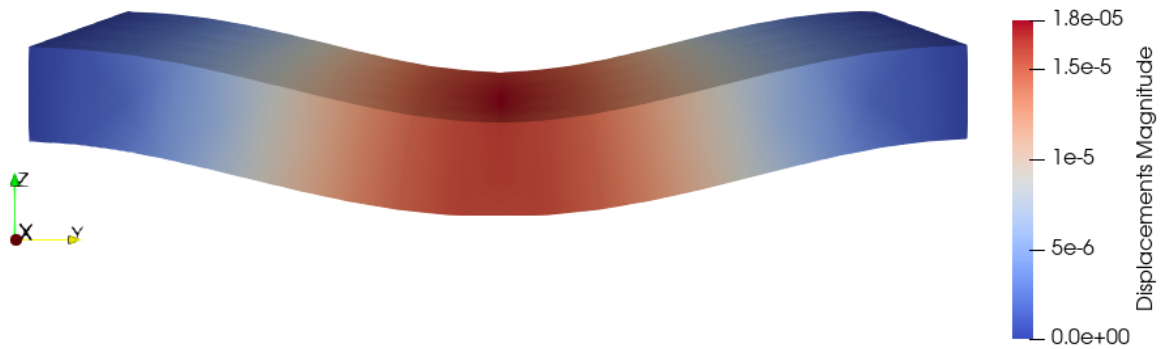


Figura 3.23: Spostamento della trave - Espansione di Taylor ordine $N=2$ (TE2).

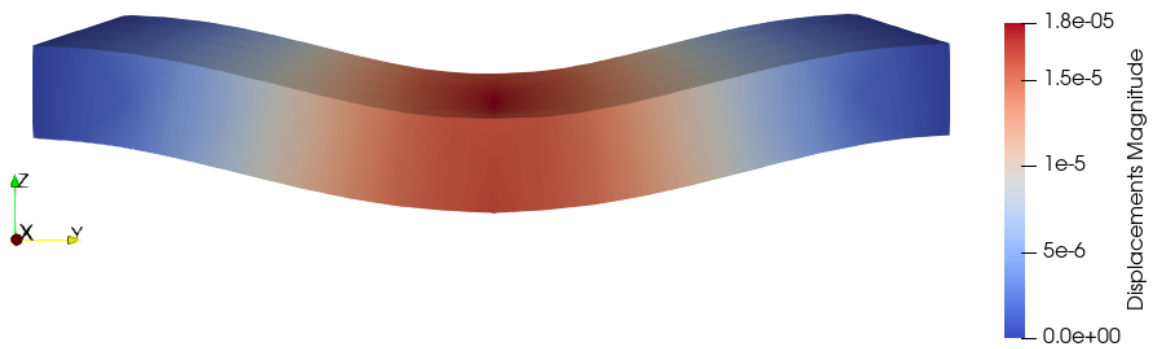


Figura 3.24: Spostamento della trave - Espansione di Taylor ordine $N=3$ (TE3).

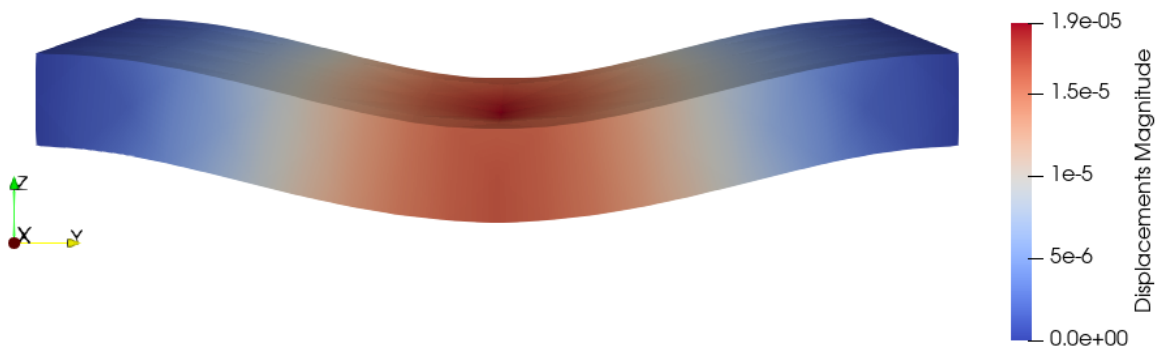


Figura 3.25: Spostamento della trave - Espansione di Taylor ordine $N=4$ (TE4).

In Tabella 3.5 vengono riassunti i valori di spostamento massimo della trave al variare

dell'espansione utilizzata.

Modello di espansione	DOF	Spostamento massimo [m]
LE	2511	$2.363 \cdot 10^{-5}$
TE -1 (Eulero-Bernoulli)	279	$1.712 \cdot 10^{-5}$
TE0 (Timoshenko)	279	$1.890 \cdot 10^{-5}$
TE1	279	$1.908 \cdot 10^{-5}$
TE2	558	$1.766 \cdot 10^{-5}$
TE3	930	$1.825 \cdot 10^{-5}$
TE4	1395	$1.927 \cdot 10^{-5}$

Tabella 3.5: Spostamento massimo.

Avendo mantenuto lo stesso materiale, le stesse caratteristiche geometriche e le stesse condizioni di vincolo e di carico della trave precedente, lo spostamento massimo calcolato analiticamente sarà analogo a quello calcolato in precedenza, cioè $\delta_{max} = 1.71 \cdot 10^{-5} m$.

E' possibile vedere in Figura 3.26 l'andamento dello spostamento della trave, al variare del tipo di espansione utilizzata, prendendo in considerazione diversi punti lungo la larghezza della trave in corrispondenza del punto in cui la trave viene caricata.

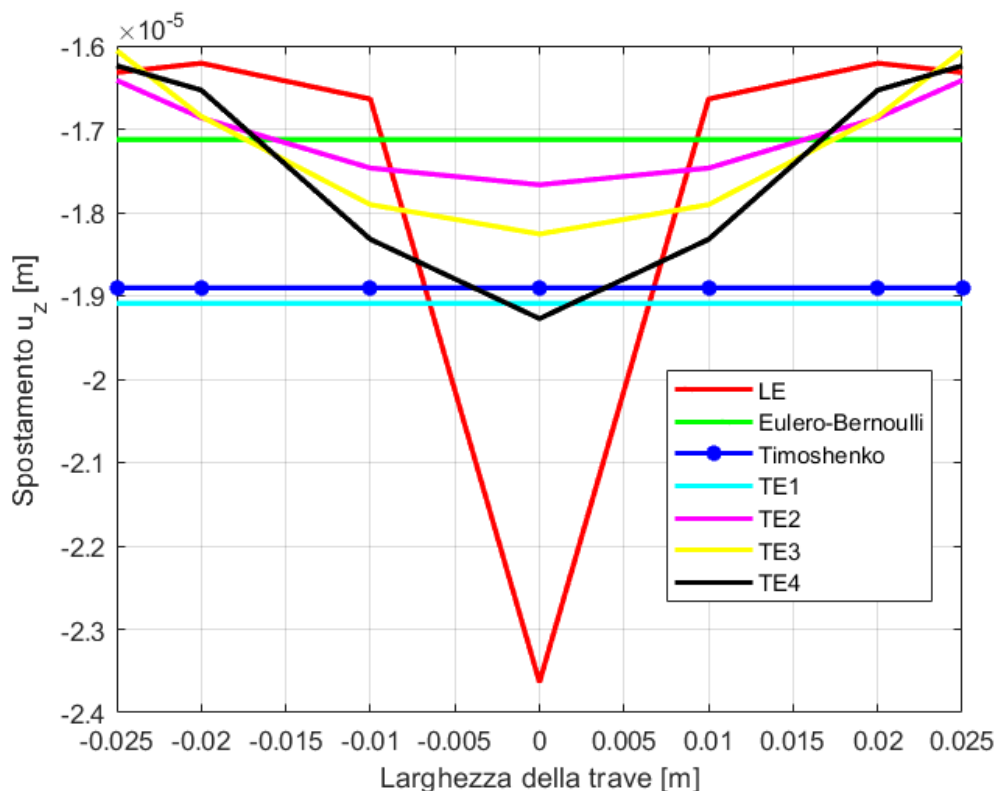


Figura 3.26: Spostamento della trave al variare dell'espansione.

3.3 Assessment 3

Il terzo assessment tiene in considerazione un modello trave con sezione costante lungo la sua lunghezza. In Figura 3.27 si può vedere il modello trave utilizzato. La trave è in alluminio ($E = 73 \cdot 10^9$ Pa, $\nu = 0.3$, $\rho = 2700 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$), ma al suo interno vi è un tratto caratterizzato dall'inclusione di un secondo materiale con un modulo elastico differente dall'alluminio. Questo assessment, andando a simulare la presenza di un'inclusione (attraverso l'utilizzo del secondo materiale) all'interno del materiale principale (in questo caso l'alluminio), ha lo scopo di andare a valutare, attraverso l'utilizzo di un carico di trazione, come si distribuiscono gli stress nella zona in cui si ha l'interazione tra i due materiali.

Verranno prese in considerazione tre diverse casistiche riguardanti il modulo elastico E_2 del secondo materiale:

- 1° caso: $E_2 = \frac{1}{4} E_{Alluminio} = 18.25 \cdot 10^9$ Pa;
- 2° caso: $E_2 = \frac{1}{2} E_{Alluminio} = 36.5 \cdot 10^9$ Pa;
- 3° caso: $E_2 = 2 E_{Alluminio} = 146 \cdot 10^9$ Pa.

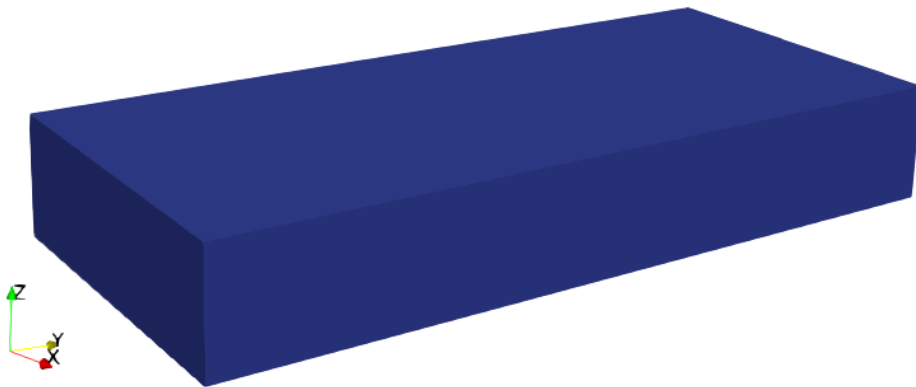


Figura 3.27: Assessment 3.

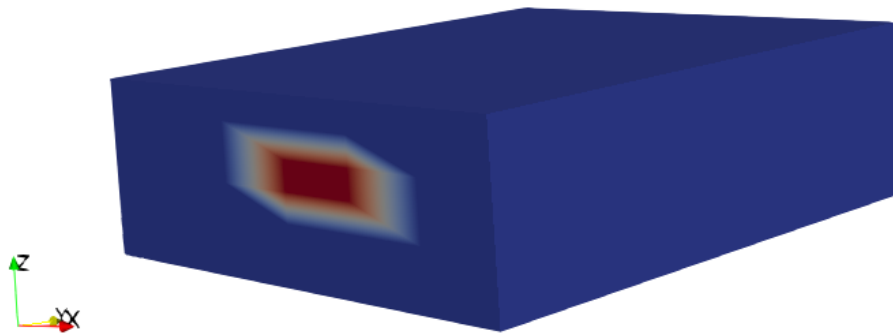


Figura 3.28: Assessment 3 - Dettaglio di un tratto della trave in cui si ha la presenza del secondo materiale.

Vengono rappresentati in Tabella 3.6 i valori delle caratteristiche geometriche della trave.

Caratteristica geometrica	Dimensione [m]
Lunghezza della trave L	0.2
Larghezza della trave b	0.09
Spessore della trave h	0.03

Tabella 3.6: Caratteristiche geometriche della trave.

Per la discretizzazione della struttura si è fatto uso delle seguenti assunzioni:

- Asse della trave \rightarrow FEM \rightarrow 10 elementi B4 \rightarrow 31 nodi totali lungo l'asse della trave;
- Sezione trasversale \rightarrow CUF \rightarrow 9 elementi Q9 \rightarrow 49 nodi totali sulla sezione trasversale.

Il secondo materiale inizia a partire a distanza di 10 cm da $y=0$, e si estende per 2 cm lungo la lunghezza della trave, per 3 cm lungo la larghezza della trave e per 1 cm lungo lo spessore della trave. In Figura 3.29 è possibile osservare il dettaglio della discretizzazione della sezione trasversale con l'utilizzo di 9 elementi, e per il tratto di trave in cui estende anche il secondo materiale, quest'ultimo è rappresentato sulla sezione dall'elemento centrale della discretizzazione 3x3.

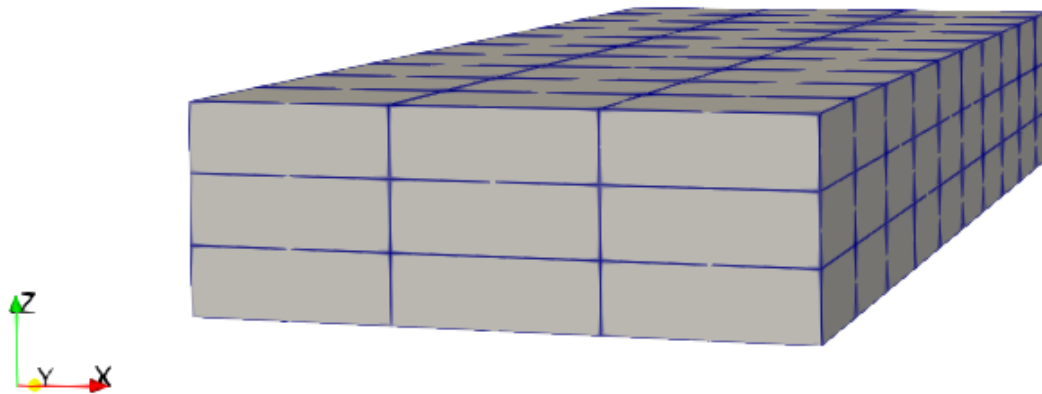


Figura 3.29: Assessment 3 - Discretizzazione della sezione trasversale con l'utilizzo di 9 elementi.

Le condizioni al contorno prevedono la presenza di un doppio carico di trazione da 1000 N in direzione y, con le due forze opposte posizionate al centro dei due estremi liberi della trave.

Si effettua un'analisi statica (SOL 101) e attraverso l'utilizzo del software ParaView si vanno a visualizzare i risultati dell'analisi al variare del tipo di espansione utilizzata.

- 1° caso: $E_2 = \frac{1}{4} E_{Alluminio} = 18.25 \cdot 10^9 \text{ Pa}$

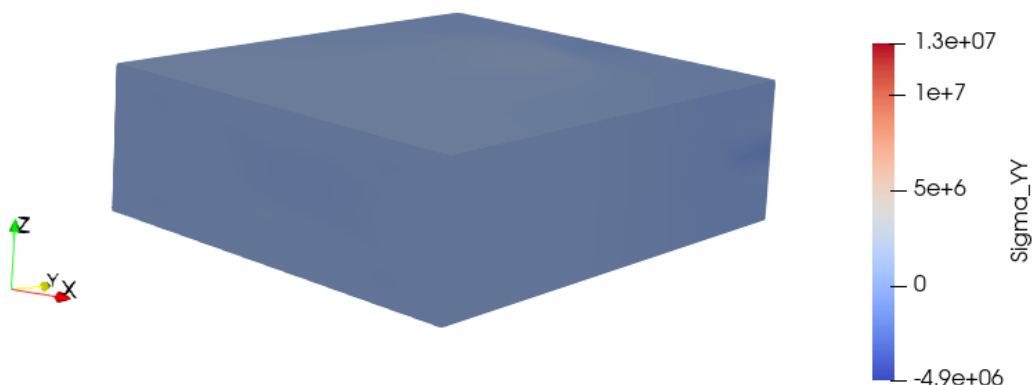


Figura 3.30: Distribuzione σ_{yy} - Espansione di Lagrange (LE).

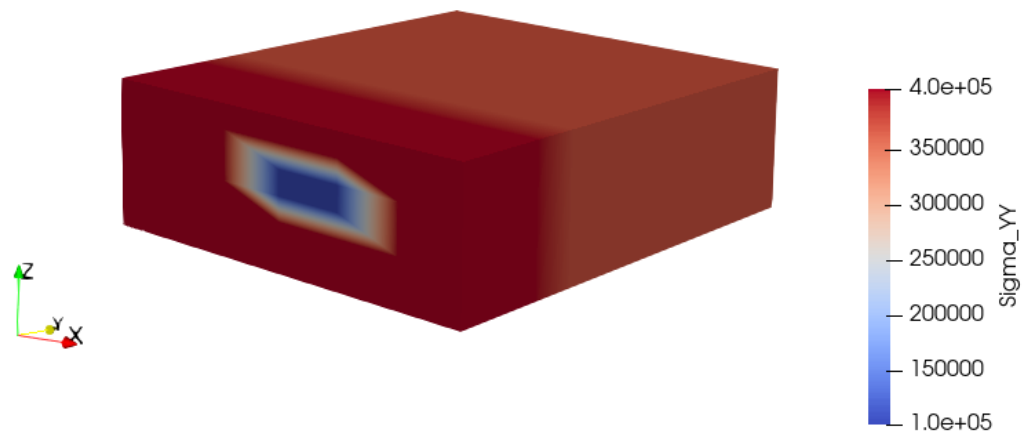


Figura 3.31: Distribuzione σ_{yy} - Espansione di Taylor ordine N=1 (TE1).

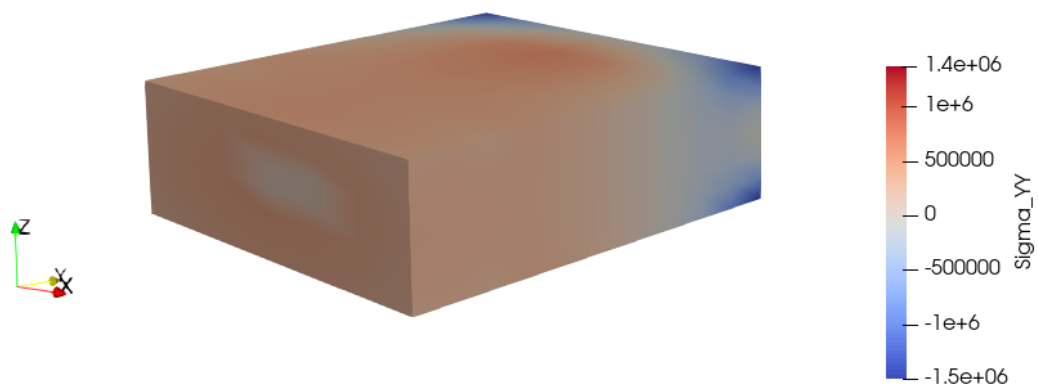


Figura 3.32: Distribuzione σ_{yy} - Espansione di Taylor ordine N=2 (TE2).

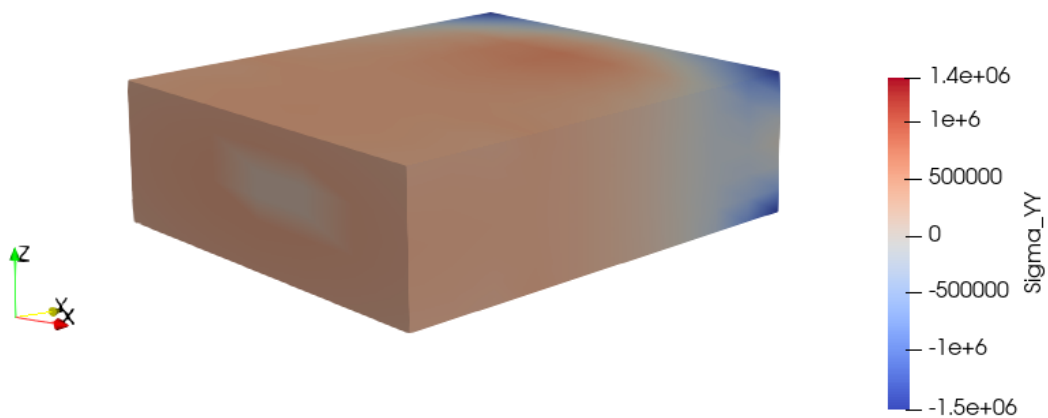


Figura 3.33: Distribuzione σ_{yy} - Espansione di Taylor ordine N=3 (TE3).

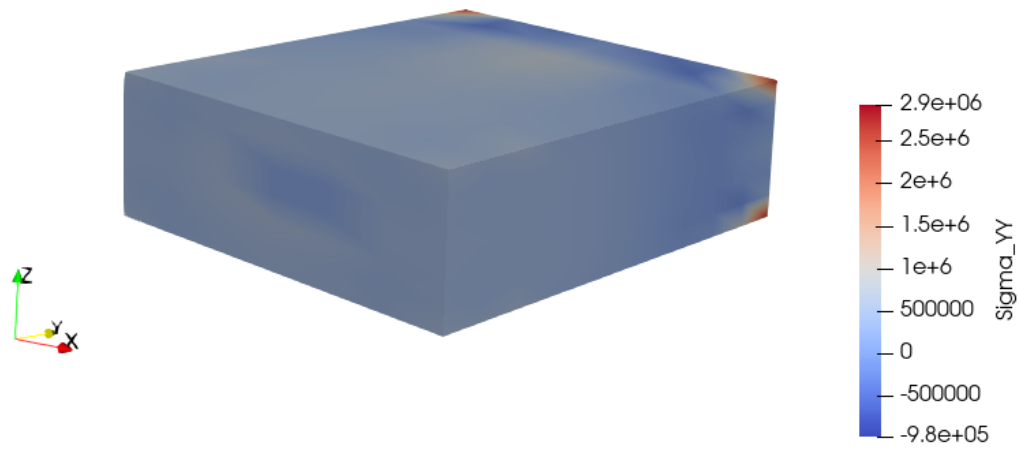


Figura 3.34: Distribuzione σ_{yy} - Espansione di Taylor ordine $N=4$ (TE4).

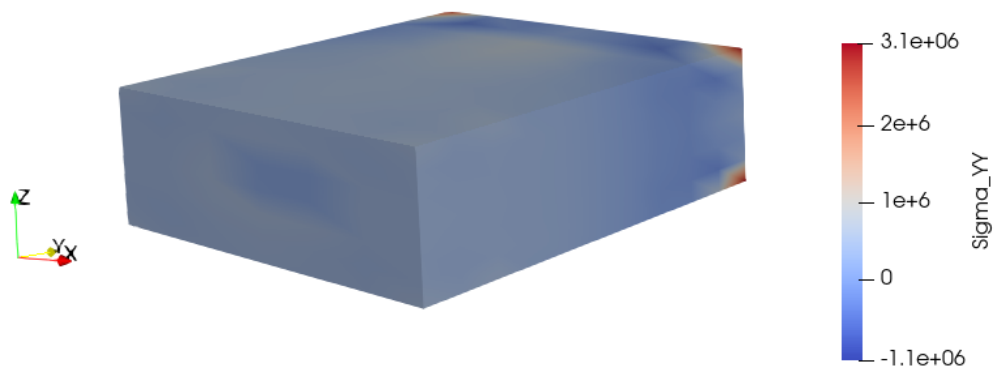


Figura 3.35: Distribuzione σ_{yy} - Espansione di Taylor ordine $N=5$ (TE5).

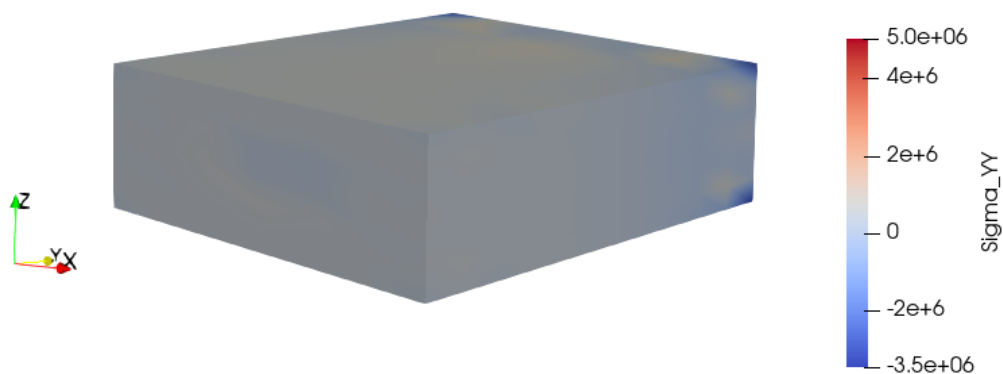


Figura 3.36: Distribuzione σ_{yy} - Espansione di Taylor ordine $N=6$ (TE6).

In Tabella 3.7 vengono riassunti i valori della σ_{yy} , al variare dell'espansione utilizzata, nell'intorno del cambio di materiale, ricordando che il materiale interno si trova compreso nel tratto

tra 10 *cm* e 12 *cm* muovendosi lungo l'asse della trave.

Modello di espansione	Punti lungo l'asse della trave [m]	σ_{yy} [Pa]
LE	0.09999	$0.812 \cdot 10^5$
	0.10001	$1.991 \cdot 10^5$
	0.11	$1.589 \cdot 10^5$
	0.11999	$2.056 \cdot 10^5$
	0.12001	$0.833 \cdot 10^5$
TE1	0.09999	$3.699 \cdot 10^5$
	0.10001	$1.010 \cdot 10^5$
	0.11	$1.010 \cdot 10^5$
	0.11999	$1.010 \cdot 10^5$
	0.12001	$3.699 \cdot 10^5$
TE2	0.09999	$3.490 \cdot 10^5$
	0.10001	$1.190 \cdot 10^5$
	0.11	$1.176 \cdot 10^5$
	0.11999	$1.223 \cdot 10^5$
	0.12001	$3.592 \cdot 10^5$
TE3	0.09999	$3.308 \cdot 10^5$
	0.10001	$1.136 \cdot 10^5$
	0.11	$1.123 \cdot 10^5$
	0.11999	$1.161 \cdot 10^5$
	0.12001	$3.385 \cdot 10^5$
TE4	0.09999	$2.943 \cdot 10^5$
	0.10001	$1.419 \cdot 10^5$
	0.11	$1.312 \cdot 10^5$
	0.11999	$1.475 \cdot 10^5$
	0.12001	$3.075 \cdot 10^5$
TE5	0.09999	$2.845 \cdot 10^5$
	0.10001	$1.396 \cdot 10^5$
	0.11	$1.286 \cdot 10^5$
	0.11999	$1.450 \cdot 10^5$
	0.12001	$2.965 \cdot 10^5$
TE6	0.09999	$2.219 \cdot 10^5$
	0.10001	$1.670 \cdot 10^5$
	0.11	$1.403 \cdot 10^5$
	0.11999	$1.737 \cdot 10^5$
	0.12001	$2.327 \cdot 10^5$

Tabella 3.7: Andamento della σ_{yy} nell'intorno del cambio di materiale - 1° caso.

E' possibile vedere in Figura 3.37 l'andamento della distribuzione della σ_{yy} , al variare del tipo di espansione utilizzata, prendendo in considerazione diversi punti lungo l'asse della trave.

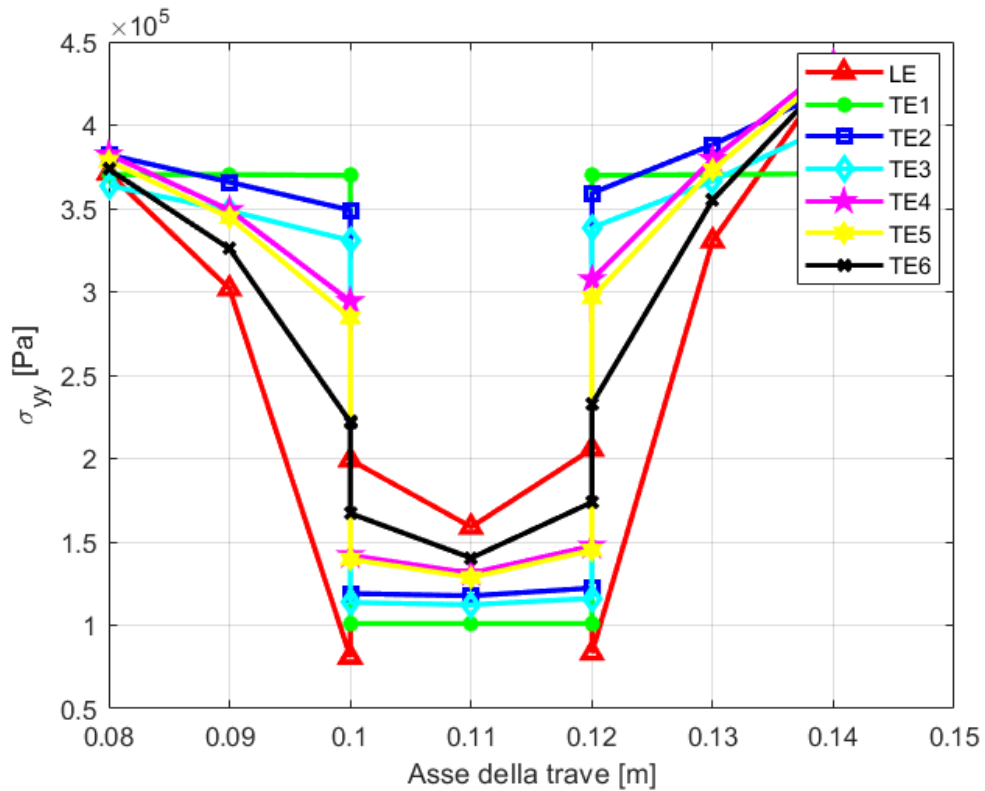


Figura 3.37: Distribuzione σ_{yy} al variare dell'espansione - 1° caso.

- 2° caso: $E_2 = \frac{1}{2} E_{Alluminio} = 36.5 \cdot 10^9$ Pa

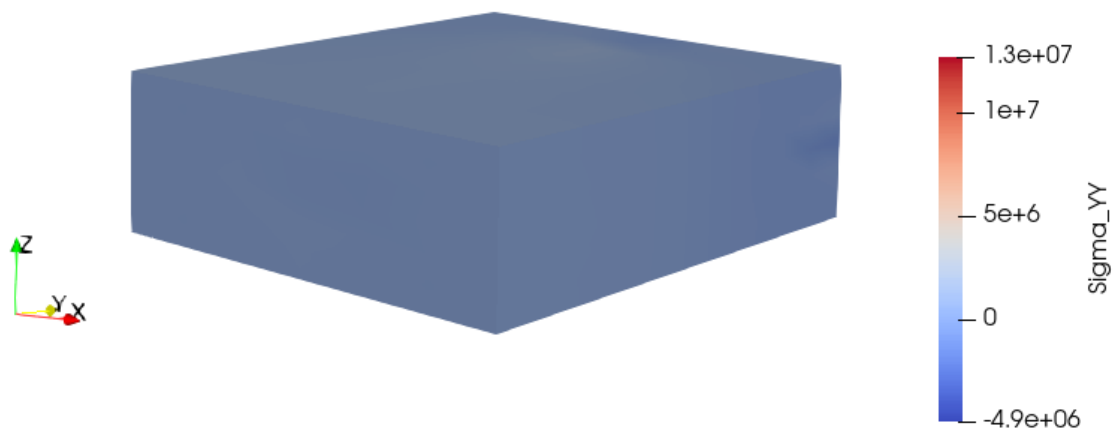


Figura 3.38: Distribuzione σ_{yy} - Espansione di Lagrange (LE).

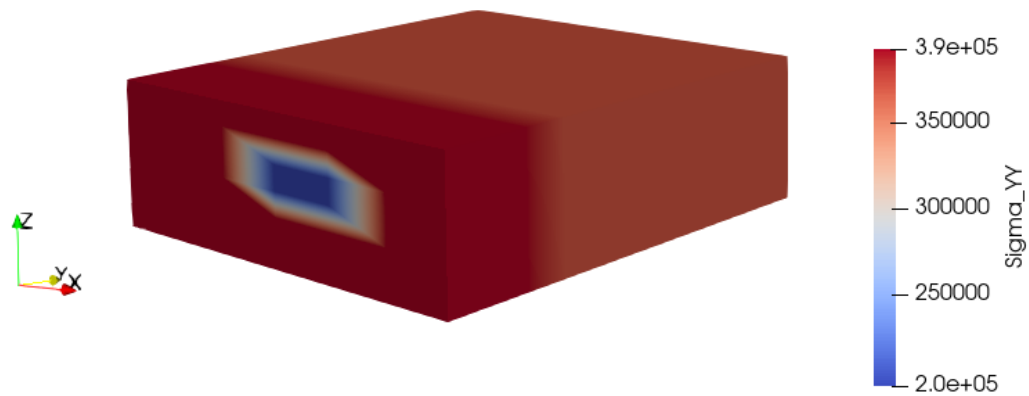


Figura 3.39: Distribuzione σ_{yy} - Espansione di Taylor ordine N=1 (TE1).

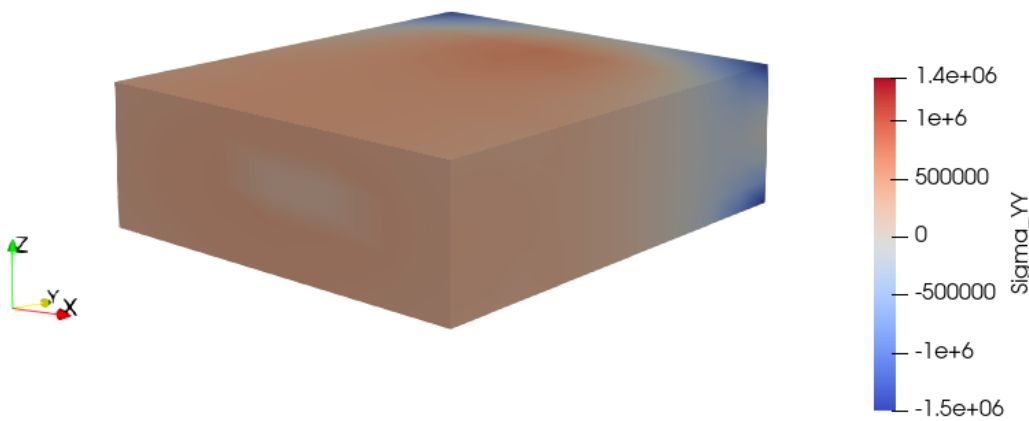


Figura 3.40: Distribuzione σ_{yy} - Espansione di Taylor ordine N=2 (TE2).

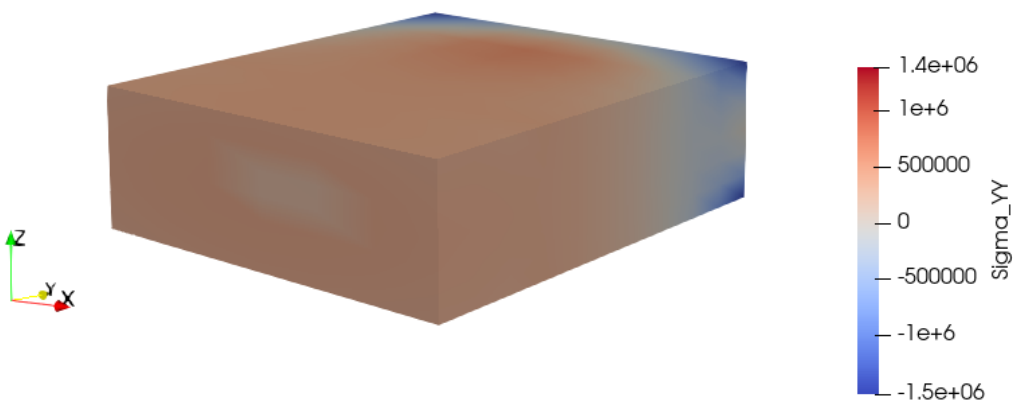


Figura 3.41: Distribuzione σ_{yy} - Espansione di Taylor ordine N=3 (TE3).

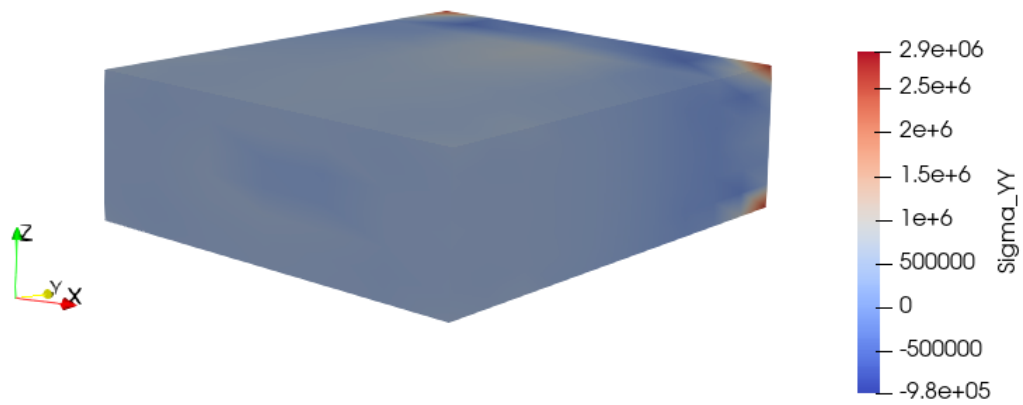


Figura 3.42: Distribuzione σ_{yy} - Espansione di Taylor ordine N=4 (TE4).

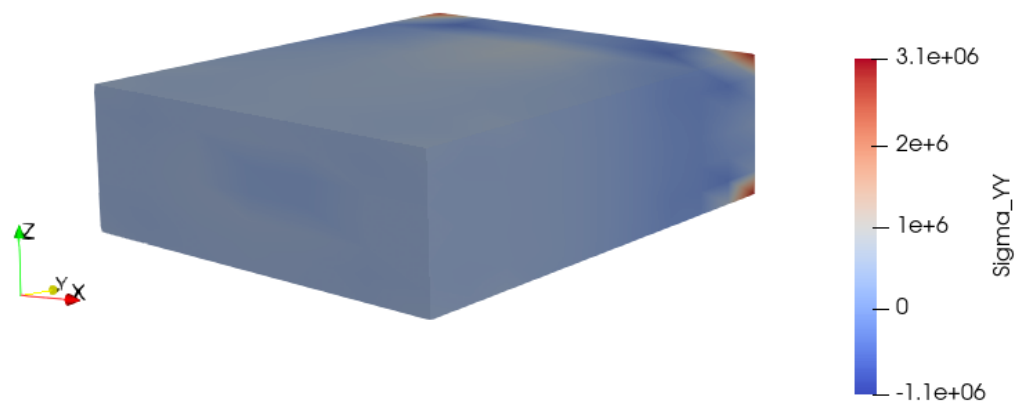


Figura 3.43: Distribuzione σ_{yy} - Espansione di Taylor ordine N=5 (TE5).

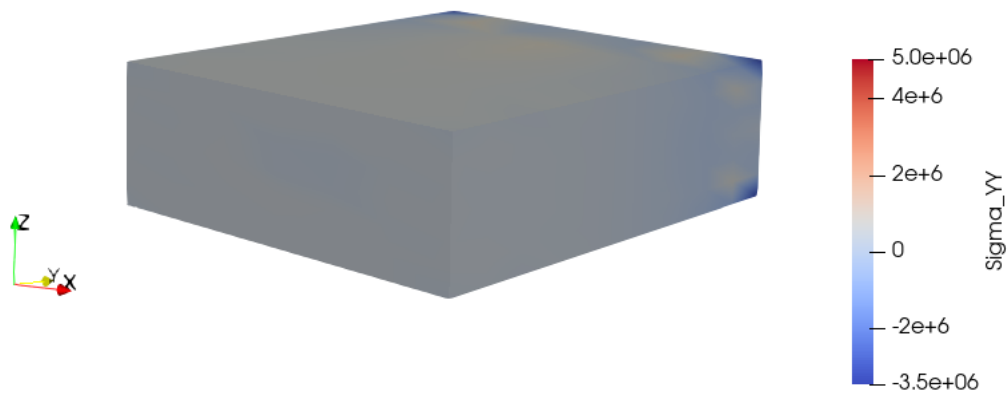


Figura 3.44: Distribuzione σ_{yy} - Espansione di Taylor ordine N=6 (TE6).

In Tabella 3.8 vengono riassunti i valori della σ_{yy} , al variare dell'espansione utilizzata, nell'intorno del cambio di materiale, ricordando che il materiale interno si trova compreso nel tratto tra 10 cm e 12 cm muovendosi lungo l'asse della trave.

Modello di espansione	Punti lungo l'asse della trave [m]	σ_{yy} [Pa]
LE	0.09999	$2.295 \cdot 10^5$
	0.10001	$2.983 \cdot 10^5$
	0.11	$2.612 \cdot 10^5$
	0.11999	$3.086 \cdot 10^5$
	0.12001	$2.377 \cdot 10^5$
TE1	0.09999	$3.700 \cdot 10^5$
	0.10001	$1.960 \cdot 10^5$
	0.11	$1.960 \cdot 10^5$
	0.11999	$1.960 \cdot 10^5$
	0.12001	$3.700 \cdot 10^5$
TE2	0.09999	$3.609 \cdot 10^5$
	0.10001	$2.197 \cdot 10^5$
	0.11	$2.187 \cdot 10^5$
	0.11999	$2.257 \cdot 10^5$
	0.12001	$3.711 \cdot 10^5$
TE3	0.09999	$3.433 \cdot 10^5$
	0.10001	$2.100 \cdot 10^5$
	0.11	$2.088 \cdot 10^5$
	0.11999	$2.144 \cdot 10^5$
	0.12001	$3.511 \cdot 10^5$
TE4	0.09999	$3.302 \cdot 10^5$
	0.10001	$2.449 \cdot 10^5$
	0.11	$2.352 \cdot 10^5$
	0.11999	$2.543 \cdot 10^5$
	0.12001	$3.439 \cdot 10^5$
TE5	0.09999	$3.225 \cdot 10^5$
	0.10001	$2.415 \cdot 10^5$
	0.11	$2.312 \cdot 10^5$
	0.11999	$2.504 \cdot 10^5$
	0.12001	$3.351 \cdot 10^5$
TE6	0.09999	$2.897 \cdot 10^5$
	0.10001	$2.680 \cdot 10^5$
	0.11	$2.452 \cdot 10^5$
	0.11999	$2.782 \cdot 10^5$
	0.12001	$3.019 \cdot 10^5$

Tabella 3.8: Andamento della σ_{yy} nell'intorno del cambio di materiale - 2° caso.

E' possibile vedere in Figura 3.45 l'andamento della distribuzione della σ_{yy} , al variare del tipo di espansione utilizzata, prendendo in considerazione diversi punti lungo l'asse della trave.

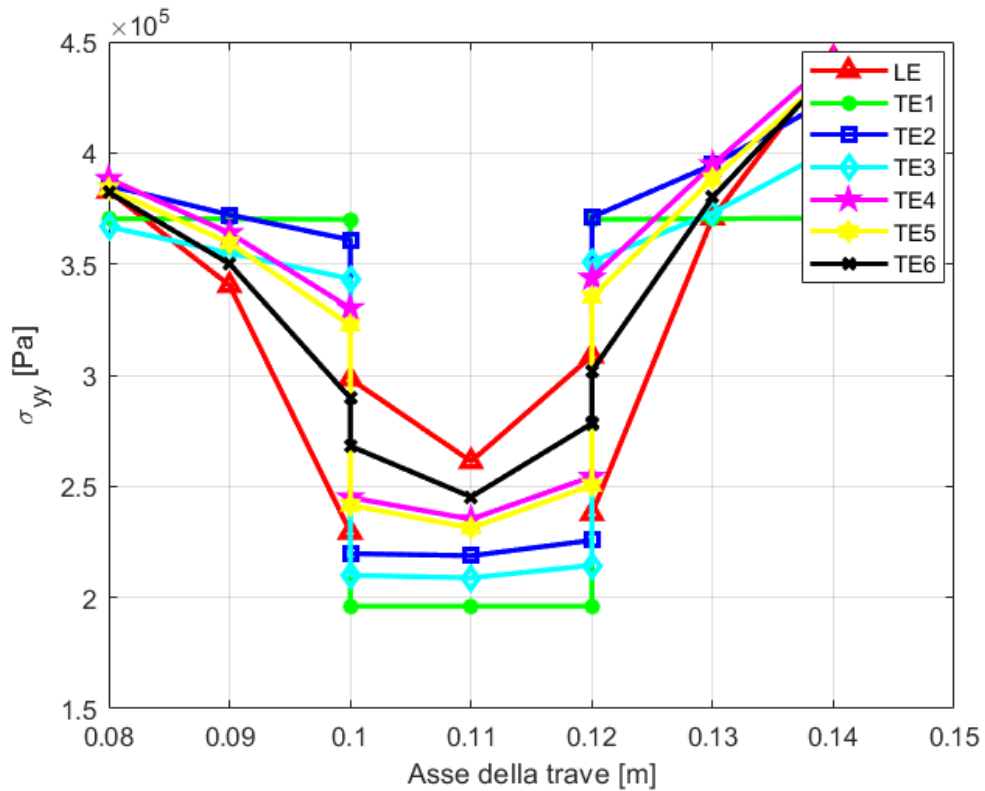


Figura 3.45: Distribuzione σ_{yy} al variare dell'espansione - 2° caso.

- 3° caso: $E_2 = 2 E_{Alluminio} = 146 \cdot 10^9$ Pa

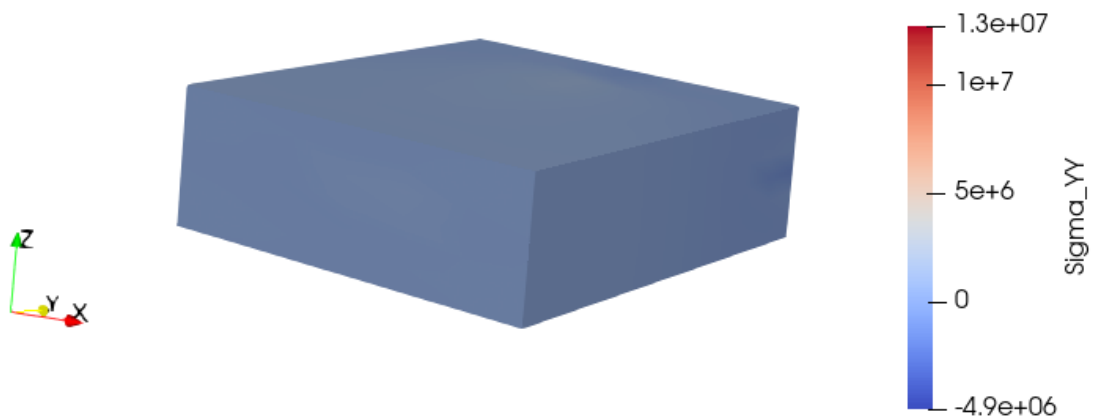


Figura 3.46: Distribuzione σ_{yy} - Espansione di Lagrange (LE).

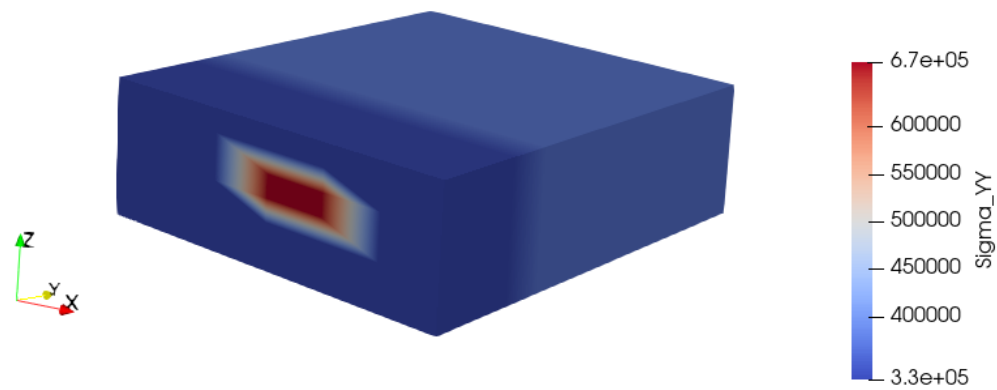


Figura 3.47: Distribuzione σ_{yy} - Espansione di Taylor ordine N=1 (TE1).

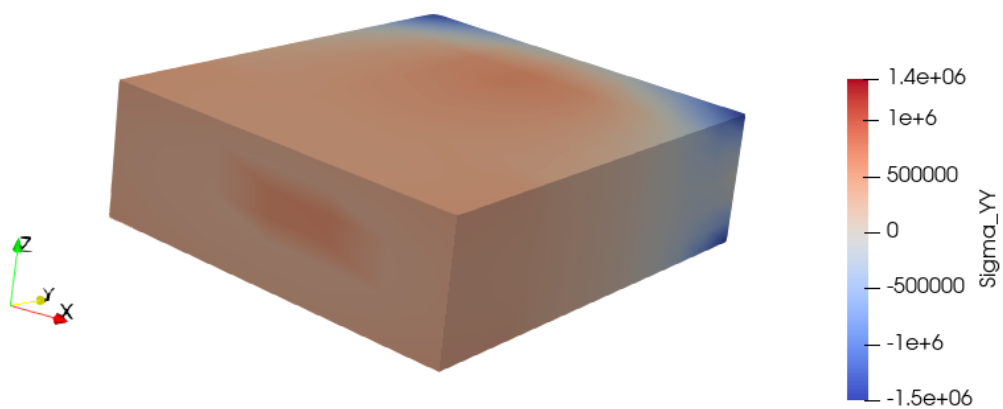


Figura 3.48: Distribuzione σ_{yy} - Espansione di Taylor ordine N=2 (TE2).

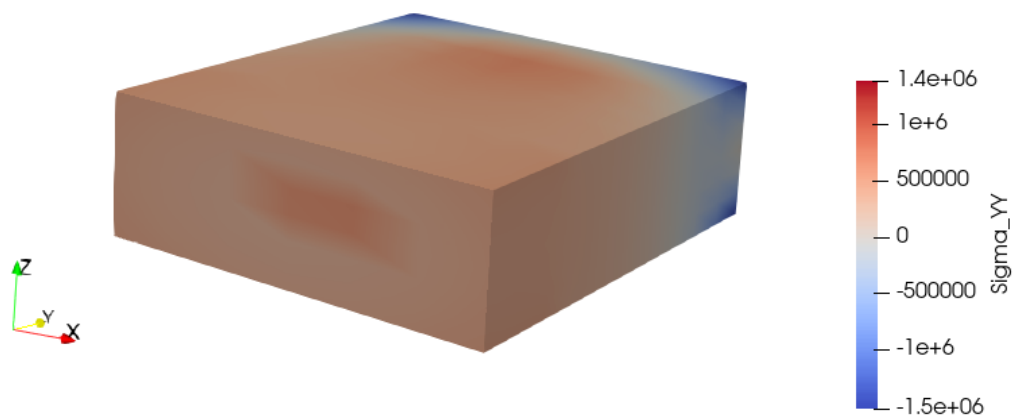


Figura 3.49: Distribuzione σ_{yy} - Espansione di Taylor ordine N=3 (TE3).

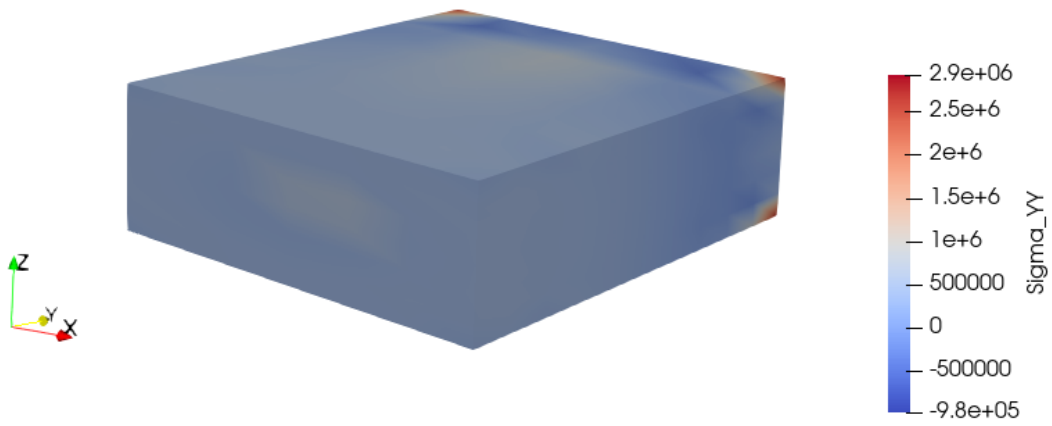


Figura 3.50: Distribuzione σ_{yy} - Espansione di Taylor ordine N=4 (TE4).

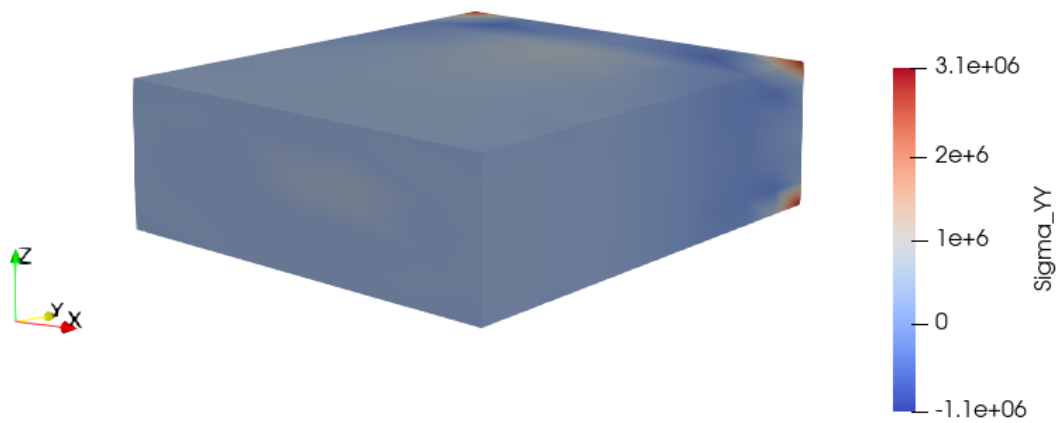


Figura 3.51: Distribuzione σ_{yy} - Espansione di Taylor ordine N=5 (TE5).

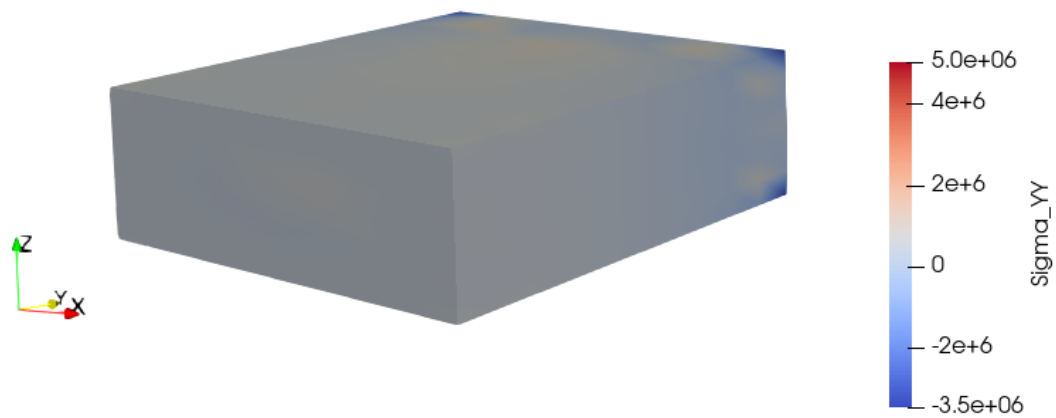


Figura 3.52: Distribuzione σ_{yy} - Espansione di Taylor ordine N=6 (TE6).

In Tabella 3.9 vengono riassunti i valori della σ_{yy} , al variare dell'espansione utilizzata, nell'intorno del cambio di materiale, ricordando che il materiale interno si trova compreso nel tratto tra 10 cm e 12 cm muovendosi lungo l'asse della trave.

Modello di espansione	Punti lungo l'asse della trave [m]	σ_{yy} [Pa]
LE	0.09999	$4.960 \cdot 10^5$
	0.10001	$4.054 \cdot 10^5$
	0.11	$4.986 \cdot 10^5$
	0.11999	$4.234 \cdot 10^5$
	0.12001	$5.176 \cdot 10^5$
TE1	0.09999	$3.709 \cdot 10^5$
	0.10001	$6.666 \cdot 10^5$
	0.11	$6.666 \cdot 10^5$
	0.11999	$6.666 \cdot 10^5$
	0.12001	$3.709 \cdot 10^5$
TE2	0.09999	$4.070 \cdot 10^5$
	0.10001	$5.952 \cdot 10^5$
	0.11	$6.068 \cdot 10^5$
	0.11999	$6.107 \cdot 10^5$
	0.12001	$4.174 \cdot 10^5$
TE3	0.09999	$3.927 \cdot 10^5$
	0.10001	$5.711 \cdot 10^5$
	0.11	$5.818 \cdot 10^5$
	0.11999	$5.819 \cdot 10^5$
	0.12001	$4.005 \cdot 10^5$
TE4	0.09999	$4.464 \cdot 10^5$
	0.10001	$5.207 \cdot 10^5$
	0.11	$5.573 \cdot 10^5$
	0.11999	$5.399 \cdot 10^5$
	0.12001	$4.620 \cdot 10^5$
TE5	0.09999	$4.464 \cdot 10^5$
	0.10001	$5.165 \cdot 10^5$
	0.11	$5.548 \cdot 10^5$
	0.11999	$5.339 \cdot 10^5$
	0.12001	$4.611 \cdot 10^5$
TE6	0.09999	$4.766 \cdot 10^5$
	0.10001	$4.527 \cdot 10^5$
	0.11	$5.147 \cdot 10^5$
	0.11999	$4.693 \cdot 10^5$
	0.12001	$4.933 \cdot 10^5$

Tabella 3.9: Andamento della σ_{yy} nell'intorno del cambio di materiale - 3° caso.

E' possibile vedere in Figura 3.53 l'andamento della distribuzione della σ_{yy} , al variare del tipo di espansione utilizzata, prendendo in considerazione diversi punti lungo l'asse della trave.

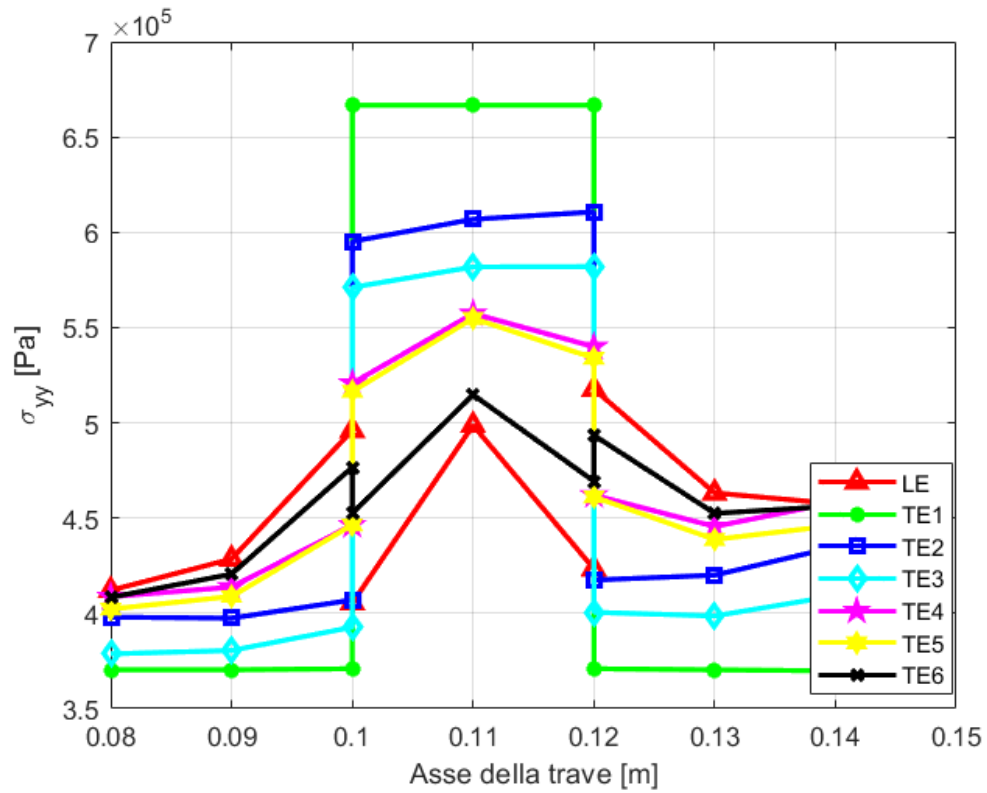


Figura 3.53: Distribuzione σ_{yy} al variare dell'espansione - 3° caso.

Capitolo 4

Analisi di strutture con inclusioni

4.1 Introduzione

Negli ultimi decenni vi è stato un sempre maggiore aumento nell'utilizzo delle capacità, sia attive che passive, dei sensori piezoelettrici nel rilevamento e monitoraggio strutturale di strutture laminate. Tali dispositivi possono essere allocati sia superficialmente sia internamente alla struttura da monitorare (Figura 4.1) [23].

L'uso di sensori posizionati in superficie facilita la loro installazione su strutture nuove o già esistenti, ma rende il sensore maggiormente esposto ad agenti esterni che possono intaccarne l'integrità [23].

Invece, i sensori incorporati internamente alla struttura possono essere inseriti già durante il processo di manifattura e il loro uso porta ad avere una maggiore sensibilità nelle rilevazioni dal momento che sono fortemente collegati alla struttura ospitante e questo rende il sensore maggiormente protetto rispetto alla configurazione superficiale. Dall'altro lato, il processo di manifattura di componenti con sensori incorporati comporta delle sfide maggiori dal momento che la temperatura raggiunta durante il processo di cura non deve superare una temperatura limite, detta temperatura di Curie, del materiale attivo. Inoltre, l'uso di sensori integrati può creare difetti locali e concentrazioni di stress che possono ridurre le prestazioni della struttura ospitante, dunque vi è la necessità di ricorrere a delle specifiche tecniche di manifattura [23].

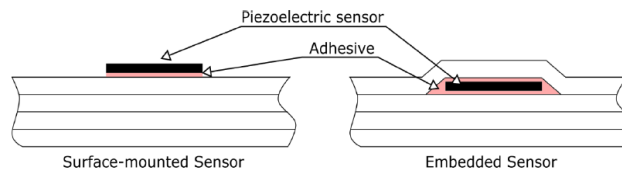


Figura 4.1: Sensore posizionato in superficie (a sinistra) e sensore incorporato (a destra) [23].

Possono essere utilizzate delle appropriate tecniche di modellazione numerica per prevedere le prestazioni di strutture con dispositivi incorporati, preservando così la loro integrità. I modelli strutturali mono-dimensionali e bi-dimensionali non sono totalmente accurati quando vengono utilizzati nell'analisi di strutture smart poichè le loro assunzioni fondamentali non consentono di ottenere previsioni accurate riguardo ai complessi campi di stress e deformazioni. L'uso di modelli tri-dimensionali può portare a dei risultati più accurati ma a discapito di un elevato costo

computazionale. Il professore Erasmo Carrera e il suo gruppo di ricerca hanno così proposto l'uso di una formulazione unificata per lo sviluppo di raffinati modelli per l'analisi di strutture smart tenendo in considerazione anche formulazioni miste. L'uso di questi modelli può portare ad avere dei risultati molto accurati, ma nel caso di strutture grandi viene richiesto anche qui un elevato costo computazionale. Per ridurre il costo computazionale si può ricorrere all'utilizzo di tecniche di modellazione cosiddette "global-local" [23][24].

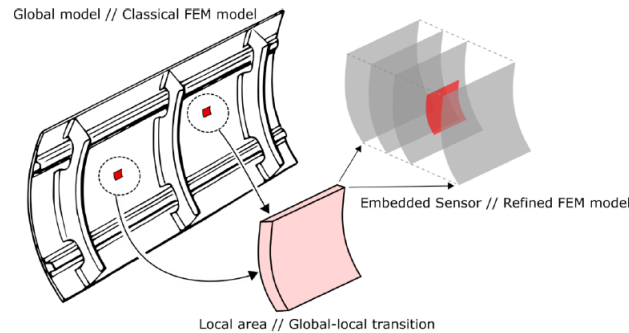


Figura 4.2: Esempio di una struttura aeronautica con sensori piezoelettrici incorporati [23].

4.2 Problema multiscala: accoppiamento elettro-meccanico

I materiali cristallini devono essere polarizzati per poter esprimere un effetto piezoelettrico. Da un punto di vista microscopico esistono dei domini polarizzati, ma le loro direzioni sono distribuite in modo casuale, dunque per attivare il materiale è necessario avere una polarizzazione esterna. Se un campo elettrico sufficientemente elevato, espresso dal potenziale ϕ , viene applicato al materiale cristallino, i domini si riordinano più o meno nella stessa direzione e dunque si ha una polarizzazione a livello macroscopico. Successivamente alla polarizzazione, il materiale ha una polarizzazione e una deformazione residue, come si può vedere dalle curve di isteresi rappresentate in Figura 4.3. In questo stato di attivazione, qualsiasi applicazione di un potenziale inferiore al potenziale di polarizzazione ϕ porta ad una deformazione temporanea e viceversa. L'effetto del campo elettrico sul campo elastico (effetto piezoelettrico inverso) e del campo elastico sul campo elettrico (effetto piezoelettrico diretto) sono in generale assunti essere lineari, dunque l'accoppiamento è rappresentato da fattori lineari che prendono il nome di coefficienti piezoelettrici [25].



Figura 4.3: Isteresi della polarizzazione P (a sinistra) ed isteresi della deformazione S (a destra) [25].

4.2.1 Equazioni di governo

In Figura 4.4 viene rappresentato il sistema di coordinate di riferimento [26].

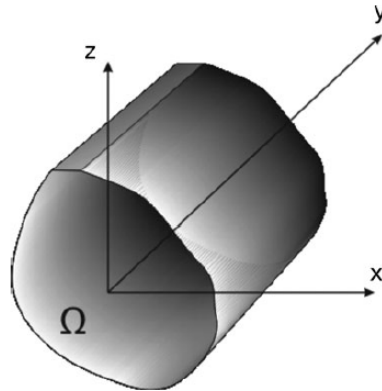


Figura 4.4: Sistema di coordinate di riferimento [26].

In Figura 4.5 vengono rappresentati, per un laminato, il sistema di coordinate del materiale e il sistema di coordinate del problema [26].

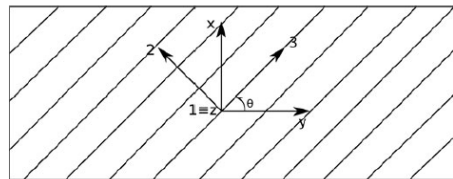


Figura 4.5: Angolo di orientazione delle fibre [26].

Di fondamentale importanza è la scelta di un appropriato sistema di riferimento, poichè in base alla direzione di polarizzazione scelta, i materiali piezoelettrici presentano un differente accoppiamento tra campo elettrico e campo meccanico. Una tipica direzione di polarizzazione è rappresentata in Figura 4.6, dove viene scelta la direzione 3 come direzione di polarizzazione [25][26].

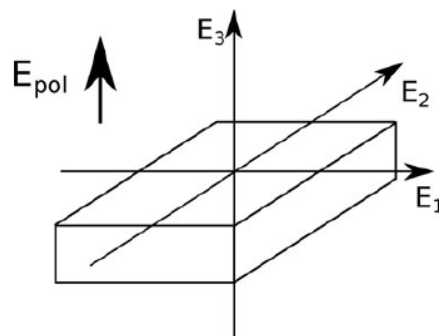


Figura 4.6: Assi di polarizzazione [26].

La soluzione del problema elettro-meccanico accoppiato considera il potenziale elettrico come una variabile primaria del problema [23][26][27]. Il vettore degli spostamenti generalizzato, \mathbf{q} , può essere espresso come:

$$\mathbf{q} = \{u_x, u_y, u_z, \phi\}^T \quad (4.1)$$

Il vettore del campo elettrico, \mathbf{E} , può essere espresso come:

$$\mathbf{E} = \{E_x, E_y, E_z\}^T = \{\partial_x, \partial_y, \partial_z\}^T \phi \quad (4.2)$$

Il vettore degli spostamenti elettrico, \mathbf{D}_e , può essere espresso come:

$$\mathbf{D}_e = \{D_x, D_y, D_z\}^T \quad (4.3)$$

Il vettore degli stress, $\boldsymbol{\sigma}$, può essere espresso come:

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{xy}\}^T \quad (4.4)$$

Il vettore degli stress generalizzato, $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$, può essere espresso come:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{xy}, D_x, D_y, D_z\}^T \quad (4.5)$$

Il vettore delle deformazioni, $\boldsymbol{\epsilon}$, può essere espresso come:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \{\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \epsilon_{xz}, \epsilon_{yz}, \epsilon_{xy}\}^T \quad (4.6)$$

Il vettore delle deformazioni generalizzato, $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$, può essere espresso come:

$$\bar{\boldsymbol{\epsilon}} = \{\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \epsilon_{xz}, \epsilon_{yz}, \epsilon_{xy}, E_x, E_y, E_z\}^T = \bar{\mathbf{D}}\mathbf{q} \quad (4.7)$$

dove $\bar{\mathbf{D}}$ è una matrice di operatori differenziali ed assume la seguente forma:

$$\bar{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Le equazioni costitutive del problema elettro-meccanico possono essere espresse nel seguente modo:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\epsilon} - \mathbf{e}^T \mathbf{E} \\ \mathbf{D}_e = \mathbf{e}\boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\chi}\mathbf{E} \end{cases} \quad (4.9)$$

dove \mathbf{D}_e è il vettore degli spostamenti elettrico $\{D_x, D_y, D_z\}^T$, $\boldsymbol{\sigma}$ è il vettore 6 x 1 degli stress, \mathbf{C} è la matrice 6 x 6 dei coefficienti di rigidezza del materiale, $\boldsymbol{\epsilon}$ è il vettore 6 x 1 delle

deformazioni. Possiamo notare che la matrice di accoppiamento \mathbf{e} compare sia nella prima che nella seconda equazione, nella prima equazione il termine $\mathbf{e}^T \mathbf{E}$ sta ad indicare il funzionamento come attuatore, mentre nella seconda equazione il termine $\mathbf{e} \boldsymbol{\epsilon}$ sta ad indicare il funzionamento come sensore.

$\boldsymbol{\chi}$ è la matrice di permittività dielettrica ed assume la seguente forma:

$$\boldsymbol{\chi} = \begin{bmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} & 0 \\ \chi_{21} & \chi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{33} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

\mathbf{e} è la matrice dei coefficienti piezoelettrici ed assume la seguente forma:

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} & e_{15} & e_{16} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} & e_{25} & e_{26} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} & e_{35} & e_{36} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Nel caso in cui i componenti piezoelettrici siano polarizzati lungo il terzo asse di polarizzazione, la matrice di permittività dielettrica e la matrice dei coefficienti piezoelettrici assumono rispettivamente le seguenti forme:

$$\boldsymbol{\chi} = \begin{bmatrix} \chi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \chi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{33} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Combinando le matrici degli stress e delle deformazioni con le matrici del campo elettrico e degli spostamenti elettrici, è possibile scrivere le equazioni costitutive in maniera compatta e il vettore degli stress generalizzato può così essere espresso come segue:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{H} \bar{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (4.14)$$

dove \mathbf{H} è una matrice 9 x 9 che assume la seguente forma:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} & -e_{11} & -e_{21} & -e_{31} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} & -e_{12} & -e_{22} & -e_{32} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} & -e_{13} & -e_{23} & -e_{33} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 & -e_{14} & -e_{24} & -e_{34} \\ 0 & 0 & 0 & C_{54} & C_{55} & 0 & -e_{15} & -e_{25} & -e_{35} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & 0 & 0 & C_{66} & -e_{16} & -e_{26} & -e_{36} \\ e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} & e_{15} & e_{16} & \chi_{11} & \chi_{12} & 0 \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} & e_{25} & e_{26} & \chi_{21} & \chi_{22} & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} & e_{35} & e_{36} & 0 & 0 & \chi_{33} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

4.2.2 Variazione della capacitanza in sensori piezoelettrici

Un sensore piezoelettrico è un dispositivo che converte lo stress meccanico in carica elettrica o voltaggio, permettendo la misurazione di pressione, accelerazione o forza. Esso può essere considerato come un condensatore dal momento che, sottoposto ad un carico meccanico, produce una concentrazione di cariche positive e negative su elettrodi opposti (Figura 4.7). La quantità di carica che un condensatore può immagazzinare viene definita **capacitanza** e dipende dalle proprietà geometriche del condensatore. Nel caso dei condensatori piezoelettrici, la capacitanza è dipendente dallo stress e può essere utilizzata per generare capacità di rilevamento [28].

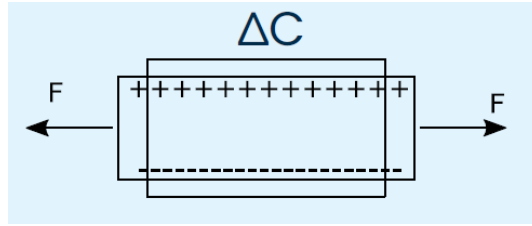


Figura 4.7: Variazione di capacitanza [28].

Reintroduciamo l'Eq. (4.9) relativa alle equazioni costitutive del problema elettro-meccanico:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\epsilon} - \mathbf{e}^T \mathbf{E} \\ \mathbf{D}_e = \mathbf{e}\boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\chi}\mathbf{E} \end{cases} \quad (4.16)$$

Lavorando sul primo termine, possiamo ottenere la seguente equazione [27]:

$$[\mathbf{C}]^{-1}\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\epsilon} - [\mathbf{C}]^{-1}\mathbf{e}^T \mathbf{E} \quad (4.17)$$

che può essere riscritta come:

$$\boldsymbol{\epsilon} = [\mathbf{C}]^{-1}\boldsymbol{\sigma} + [\mathbf{C}]^{-1}\mathbf{e}^T \mathbf{E} \quad (4.18)$$

Sostituendo l'Eq. (4.18) nel secondo termine dell'Eq. (4.16) e raccogliendo i termini, è possibile ottenere la seguente equazione:

$$\mathbf{D}_e = \mathbf{e}[\mathbf{C}]^{-1}\boldsymbol{\sigma} + (\mathbf{e}[\mathbf{C}]^{-1}\mathbf{e}^T + \boldsymbol{\chi})\mathbf{E} \quad (4.19)$$

Mettendo insieme l'Eq. (4.18) e l'Eq. (4.19), è possibile ottenere le equazioni costitutive generali di un problema piezoelettrico:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{s}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{d}^T \mathbf{E} \\ \mathbf{D}_e = \mathbf{d}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\chi}\mathbf{E} \end{cases} \quad (4.20)$$

dove $\boldsymbol{\sigma}$ è il vettore 6 x 1 degli stress, $\boldsymbol{\epsilon}$ è il vettore 6 x 1 delle deformazioni, \mathbf{s} è la matrice 6 x 6 di cedevolezza dei materiali ortotropi trasversali del trasduttore, \mathbf{d} è la matrice 3 x 6 di accoppiamento elettro-meccanico, \mathbf{E} è il vettore 3 x 1 del campo elettrico, \mathbf{D}_e è il vettore 3 x 1 degli spostamenti elettrico, $\boldsymbol{\chi}$ è la matrice 3 x 3 di permittività dielettrica.

Considerando un caso semplificato in cui abbiamo $d_{15} = d_{24} = 0$, e in cui il piezoelettrico è polarizzato solo in direzione 3 e il campo elettrico è diretto solo lungo la direzione dello spessore, la forma espansa dell'Eq. (4.20) si esprime come segue:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 & d_{31} \\ s_{12} & s_{11} & s_{13} & 0 & 0 & 0 & d_{31} \\ s_{13} & s_{13} & s_{33} & 0 & 0 & 0 & d_{33} \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{55} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66} & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & 0 & \chi_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \\ E_3 \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

La capacitanza può essere espressa nella seguente forma [27][28]:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\oint_A D_z dx dy}{V} \quad (4.22)$$

dove Q rappresenta la carica libera.

Sostituendo il valore dello spostamento elettrico dall'espressione (4.21) nell'Eq. (4.22), otteniamo quanto segue:

$$C = \frac{\iint_A (d_{31}\sigma_1 + d_{31}\sigma_2 + d_{33}\sigma_3) + (\chi_{33} \cdot V/t) dx dy}{V} \quad (4.23)$$

dove V rappresenta la differenza di potenziale applicata e t rappresenta lo spessore del piezoelettrico.

È importante notare che nell'Eq. (4.23) il termine responsabile della variazione della variazione di capacitanza è la prima parte dell'integrale, poichè la seconda parte rappresenta la capacitanza libera di un condensatore a piastre parallele, in questo caso un sensore piezoelettrico. Si può dunque ottenere la riduzione di capacitanza F , che se moltiplicata per 100 restituisce la percentuale di riduzione della capacitanza:

$$F = \frac{\iint_A (d_{31}\sigma_1 + d_{31}\sigma_2 + d_{33}\sigma_3) dx dy}{V \cdot \frac{\chi_{33} \cdot A}{t}} \quad (4.24)$$

dove A rappresenta l'area dell'elettrodo sulla superficie del piezoelettrico.

È importante notare che la variazione di capacitanza dipende dagli stress che si sviluppano sulla superficie del piezoelettrico, e tali stress variano linearmente con il voltaggio applicato V . Dunque, nel dominio lineare, il valore del voltaggio applicato non influisce sulla variazione di capacitanza.

4.2.3 Trave bimorfa in PVDF - caso attuatore

Viene di seguito presentato un assessment che prende in considerazione un modello consistente in una trave a sbalzo bimorfa a sezione costante caratterizzata da due strati in Polivinildenfluoruro (PVDF) con polarità opposta. La trave risulta essere incastrata sul lato sinistro e sottoposta all'applicazione di un potenziale elettrico pari a 1 Volt lungo il suo spessore. In Figura 4.8 è possibile osservare la rappresentazione del modello utilizzato.

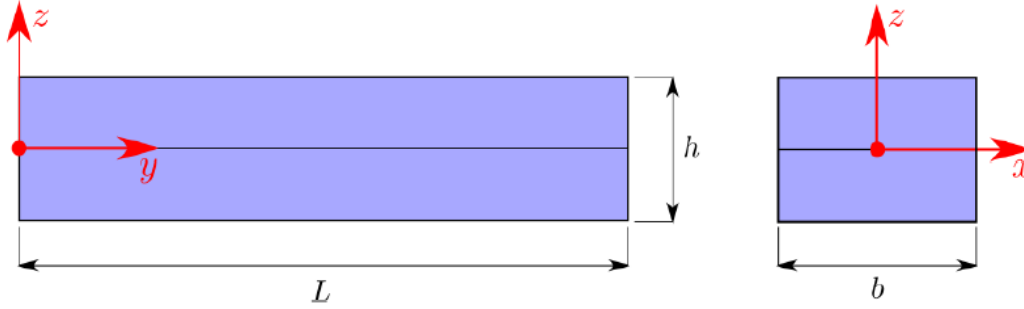


Figura 4.8: Geometria della trave a sbalzo bimorfa [24].

In Tabella 4.1 vengono rappresentati i valori delle proprietà della trave. Si può notare che il modello trave considerato non include i coefficienti piezoelettrici e_{33} ed e_{15} . I valori di e_{31} ed e_{32} sono stati calcolati conoscendo il valore di $d_{31} = 2.2 \cdot 10^{-11} \frac{C}{N}$ ricavato da Hwang et al. [29] e utilizzando la formula $[e] = [d] \times [C]$.

Proprietà	Valore	Unità di misura
Lunghezza della trave L	0.1	m
Larghezza della trave b	0.005	m
Spessore della trave h	0.001	m
Modulo elastico E	$2.00 \cdot 10^9$	Pa
Modulo di taglio G	$7.75 \cdot 10^8$	Pa
Poisson ratio ν	0.29	-
Densità ρ	$1.80 \cdot 10^3$	kg/m^3
e_{31} Piezo	0.057	C/m^2
e_{32} Piezo	0.057	C/m^2
Permittività elettrica χ_{11}	$1.06 \cdot 10^{-10}$	F/m
Permittività elettrica χ_{22}	$1.06 \cdot 10^{-10}$	F/m
Permittività elettrica χ_{33}	$1.06 \cdot 10^{-10}$	F/m

Tabella 4.1: Proprietà della trave [26].

Attraverso l'utilizzo del codice di calcolo sviluppato dal gruppo di ricerca MUL2 del Politecnico di Torino, è possibile procedere alla creazione del modello e alla successiva analisi del comportamento della struttura.

Per la discretizzazione della struttura si è fatto uso delle seguenti assunzioni:

- Asse della trave \rightarrow FEM \rightarrow 10 elementi B4 \rightarrow 31 nodi totali lungo l'asse della trave;
- Sezione trasversale \rightarrow CUF \rightarrow 2 elementi Q9 \rightarrow 15 nodi totali sulla sezione trasversale.

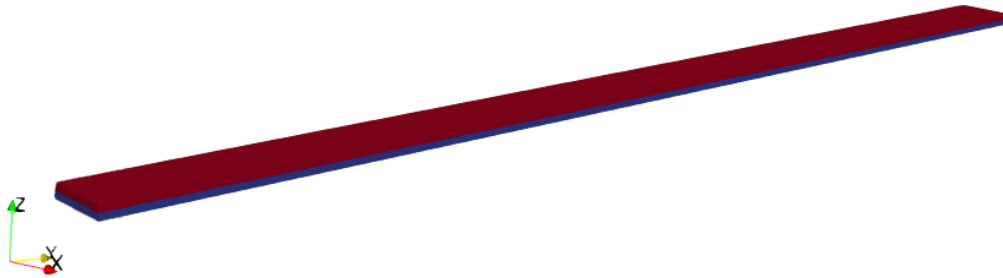


Figura 4.9: Creazione del modello.

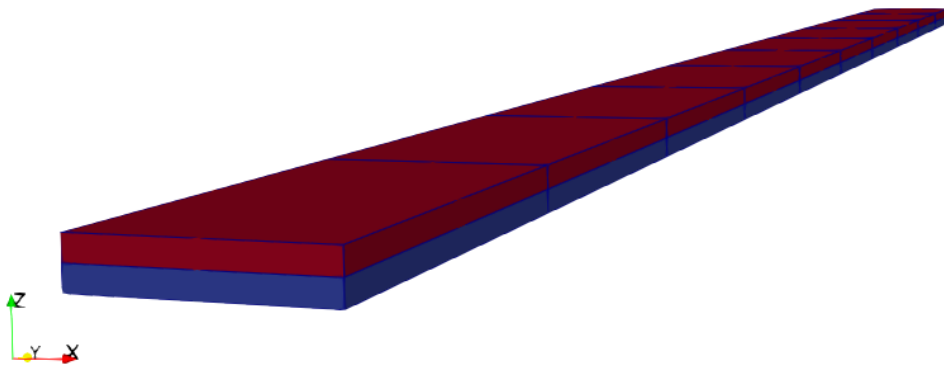


Figura 4.10: Discretizzazione della sezione trasversale con l'utilizzo di 2 elementi.

Si effettua un'analisi piezo-meccanica (SOL 121) e attraverso l'utilizzo del software ParaView è possibile andare a visualizzare i risultati dell'analisi. Si precisa che per questo tipo di analisi si è andati ad utilizzare esclusivamente il modello di espansione di Lagrange.

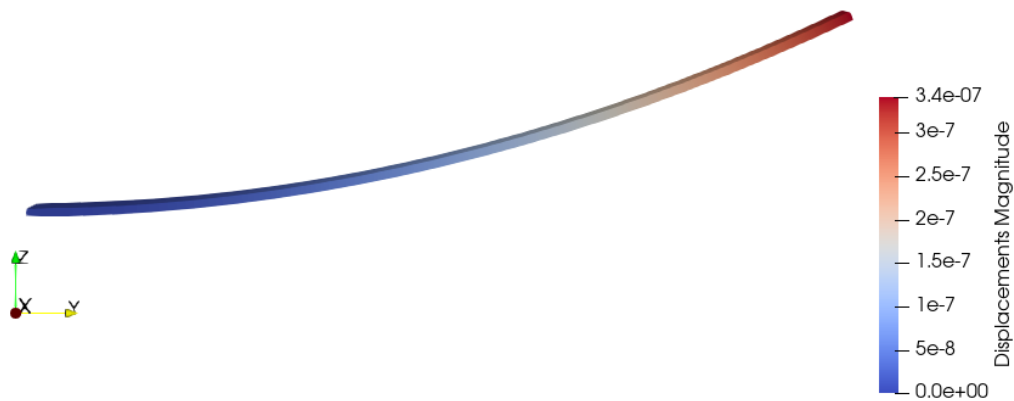


Figura 4.11: Spostamento della trave.

I risultati ottenuti possono essere confrontati con quelli ottenuti da Miglioretti et al. [26] con lo stesso modello, Figura 4.12. Il confronto mostra un'ottima corrispondenza dei risultati.

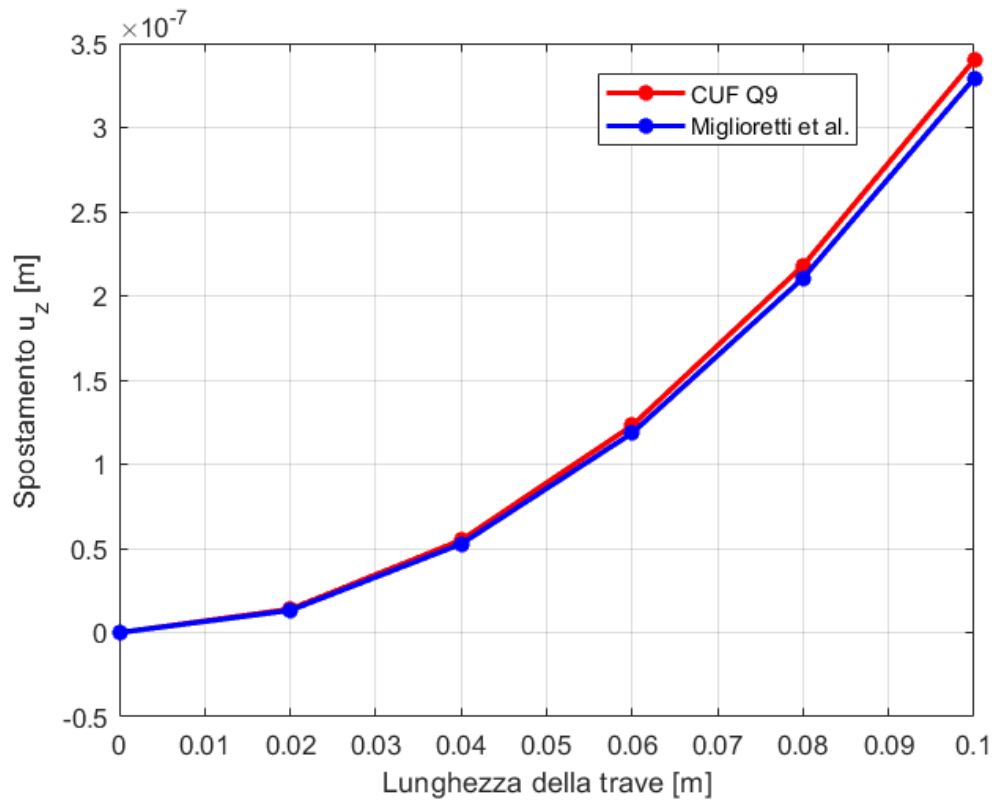


Figura 4.12: Spostamento della trave al variare della lunghezza.

In Tabella 4.2 vengono riassunti i valori di spostamento della trave al variare della lunghezza.

Posizione [m]	Spostamento (CUF) [m]	Spostamento (Miglioretti et al.) [m]
0.00	0.000	0.000
0.02	$1.391 \cdot 10^{-8}$	$1.316 \cdot 10^{-8}$
0.04	$5.496 \cdot 10^{-8}$	$5.266 \cdot 10^{-8}$
0.06	$1.230 \cdot 10^{-7}$	$1.185 \cdot 10^{-7}$
0.08	$2.180 \cdot 10^{-7}$	$2.106 \cdot 10^{-7}$
0.10	$3.400 \cdot 10^{-7}$	$3.292 \cdot 10^{-7}$

Tabella 4.2: Spostamento della trave al variare della lunghezza.

Come si può vedere dalle immagini precedenti, l'applicazione di una differenza di potenziale al materiale piezoelettrico genera una deformazione sottoforma di bending della struttura (effetto piezoelettrico inverso).

4.2.4 Laminato composito a 6 strati

Viene di seguito presentato un assessment che ha lo scopo di andare a valutare gli stress interlaminari che si vanno a creare in un laminato, costituito da una matrice in resina epossidica e un rinforzo in grafite (AS4/3501-6 graphite/epoxy), al cui interno è incorporato un sensore piezoelettrico in materiale ceramico. La laminazione è unidirezionale a 0° . Il laminato completo è costituito da 12 strati e il sensore occupa uno spessore pari a 4 strati. Gli 8 strati interni costituiscono il cuore centrale del laminato e, dividendo a metà il modello, vengono nominati con le lettere A, B, C, D partendo dal top e andando verso la linea di mezzeria del laminato. Per comodità e per questioni di simmetria, viene preso in considerazione solo un quarto del modello completo (Figura 4.13). L'asse x corrisponde alla direzione longitudinale, l'asse z corrisponde alla direzione normale, l'asse y corrisponde alla direzione trasversale.

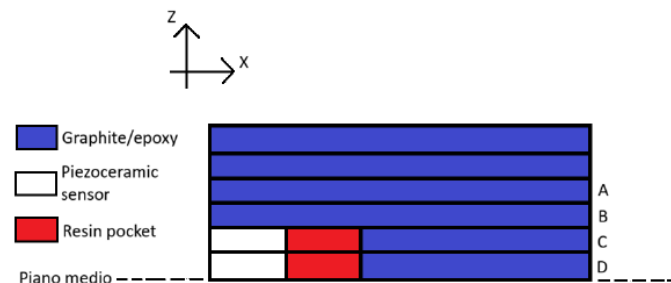


Figura 4.13: Geometria del laminato.

Si può notare come a ridosso del sensore si formino le cosiddette "resin pockets". I vari strati del laminato sono ortotropi mentre la resina relativa alle "resin pockets" è isotropa. Il sensore si estende per una lunghezza pari a 20 volte quella di un singolo strato del laminato, e a sua volta la resina si estende a partire dal sensore per una lunghezza pari nuovamente a 20 volte quella di un singolo strato del laminato. Le condizioni al contorno prevedono che il bottom e un lato del laminato siano fissati, e viene applicato un carico di trazione uniassiale sottoforma di spostamento uniforme in direzione longitudinale.

In Tabella 4.3 vengono riassunti i valori delle caratteristiche geometriche del laminato, e nelle successive tabelle (Tabella 4.4, Tabella 4.5, Tabella 4.6) vengono rappresentati i valori delle caratteristiche relative ai vari materiali.

Caratteristica geometrica	Dimensione [m]
Lunghezza del laminato L	0.0268
Spessore del laminato h	0.000804
Spessore di un singolo strato t_{ply}	0.000134
Larghezza del laminato b	$1 t_{ply}$
Spessore del sensore	$2 t_{ply}$
Spessore della resin pocket	$2 t_{ply}$
Estensione del sensore	$20 t_{ply}$
Estensione della resin pocket	$20 t_{ply}$

Tabella 4.3: Caratteristiche geometriche del laminato [30].

Proprietà	Valore	Unità di misura
Modulo elastico longitudinale E_L	$147.2 \cdot 10^9$	Pa
Modulo elastico trasversale E_T	$9.65 \cdot 10^9$	Pa
Modulo di taglio G	$6.84 \cdot 10^9$	Pa
Poisson ratio ν	0.30	-
Densità ρ	$1.50 \cdot 10^3$	kg/m^3

Tabella 4.4: Proprietà AS4/3501-6 graphite/epoxy unidirectional tape [30].

Proprietà	Valore	Unità di misura
Modulo elastico E	$63 \cdot 10^9$	Pa
Modulo di taglio G	$22 \cdot 10^9$	Pa
Poisson ratio ν	0.30	-
Densità ρ	$7.50 \cdot 10^3$	kg/m^3
e_{31} Piezo	-7.03	C/m^2
e_{32} Piezo	-7.03	C/m^2
e_{33} Piezo	18.5	C/m^2
Permittività elettrica χ_{11}	$1.50 \cdot 10^{-8}$	F/m
Permittività elettrica χ_{22}	$1.50 \cdot 10^{-8}$	F/m
Permittività elettrica χ_{33}	$1.50 \cdot 10^{-8}$	F/m

Tabella 4.5: Proprietà G-1195 lead zirconate titanate piezoceramic [30].

Proprietà	Valore	Unità di misura
Modulo elastico E	$3.5 \cdot 10^9$	Pa
Modulo di taglio G	$1.19 \cdot 10^9$	Pa
Poisson ratio ν	0.30	-
Densità ρ	$1.26 \cdot 10^3$	kg/m^3

Tabella 4.6: Proprietà 3501-6 neat resin [30].

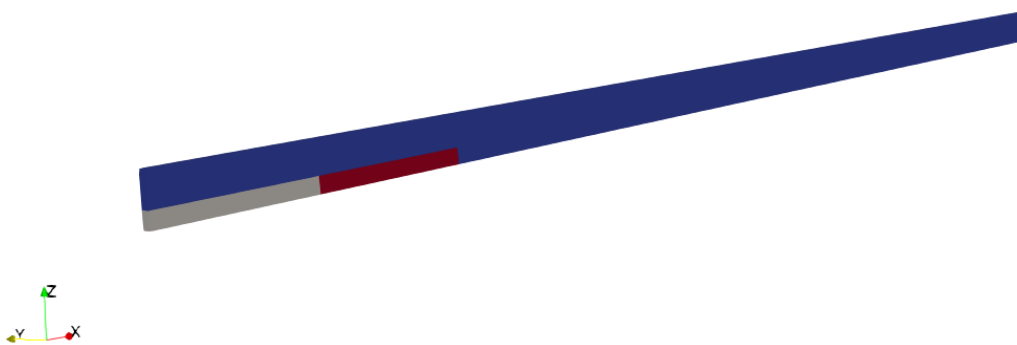


Figura 4.14: Creazione del modello.

Il modello è stato discretizzato utilizzando 1 elemento B4 lungo l'asse y e diverse mesh con elementi Q9, tramite espansione di Lagrange (LE), sulla sezione del laminato nel piano xz . In particolare, si è andati ad effettuare un'analisi di convergenza, raffinando man mano la mesh in direzione x in corrispondenza delle aree in cui sono presenti il sensore, la resin pocket e la zona immediatamente adiacente alla resin pocket, passando da 1 a 2 a 5 ed infine a 10 elementi Q9 in ciascuna area. Nelle Figure 4.15, 4.16, 4.17, 4.18 è possibile vedere il dettaglio di tali discretizzazioni.

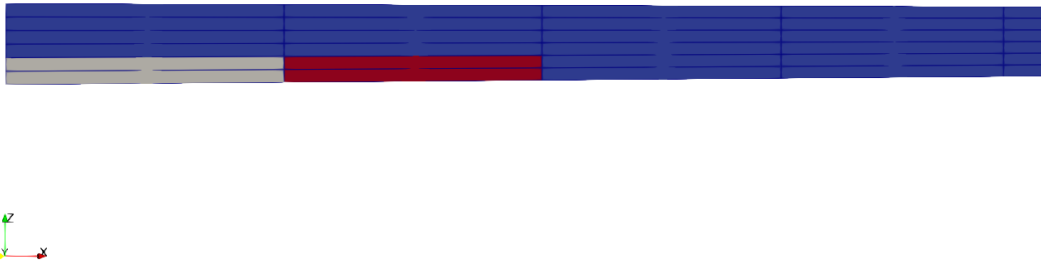


Figura 4.15: Discretizzazione della sezione con 1 elemento Q9.

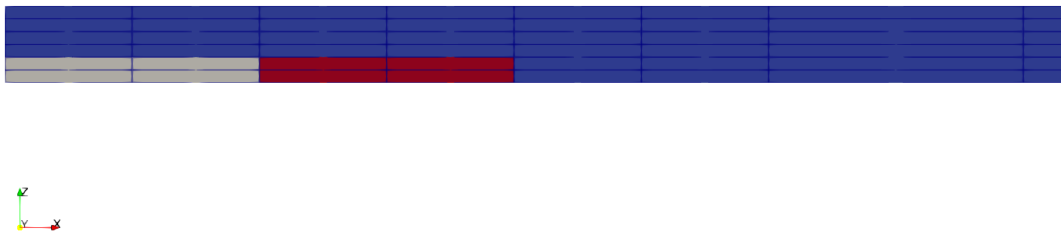


Figura 4.16: Discretizzazione della sezione con 2 elementi Q9.

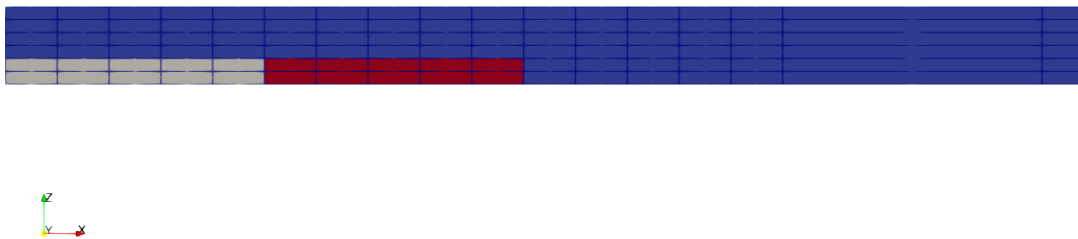


Figura 4.17: Discretizzazione della sezione con 5 elementi Q9.

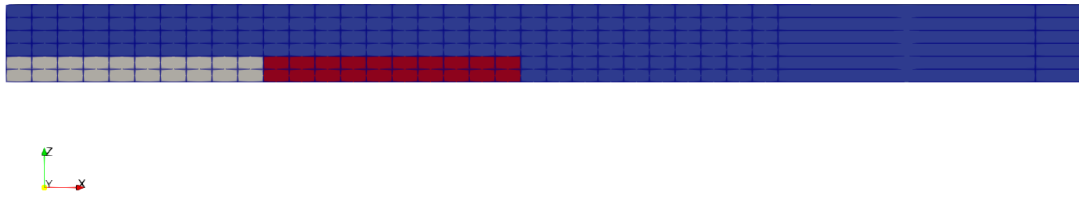


Figura 4.18: Discretizzazione della sezione con 10 elementi Q9.

Si applica uno spostamento uniforme in direzione x pari a $1 t_{ply}$, si effettua un'analisi piezomeccanica (SOL 121) e si vanno a rappresentare i risultati ottenuti con riferimento agli andamenti degli sforzi interlaminari normali e di taglio (σ_{zz} , σ_{xz}). L'andamento delle due tensioni viene valutato nel layer posizionato all'interfaccia superiore con il sensore (upper). Nelle Figure 4.19, 4.20 è possibile osservare gli andamenti della σ_{zz} e della σ_{xz} nella zona del sensore e della resin pocket e nelle Figure 4.21, 4.22 è possibile visualizzare i grafici dei risultati ottenuti. La zona in cui è presente il sensore va da $x/t_{ply} = -20$ a $x/t_{ply} = 0$, mentre la zona in cui è presente la resin pocket va da $x/t_{ply} = 0$ a $x/t_{ply} = 20$. I risultati ottenuti possono essere confrontati con quelli ottenuti da Singh et al. [30] con lo stesso modello. Il confronto mostra una buona corrispondenza nell'andamento dei risultati. Si hanno delle diversità riguardanti i picchi di tensione, ma ciò è giustificato dalla differenza delle mesh utilizzate e dell'ampiezza dello spostamento applicato, oltre al fatto che nell'analisi effettuata da Singh et al. ci si focalizza meno su ciò che avviene all'interfaccia tra il sensore e la resin pocket e all'interfaccia tra la resin pocket e il composito in graphite/epoxy, mentre nel nostro caso siamo interessati a vedere come varia la tensione in corrispondenza di tali cambi di materiale.

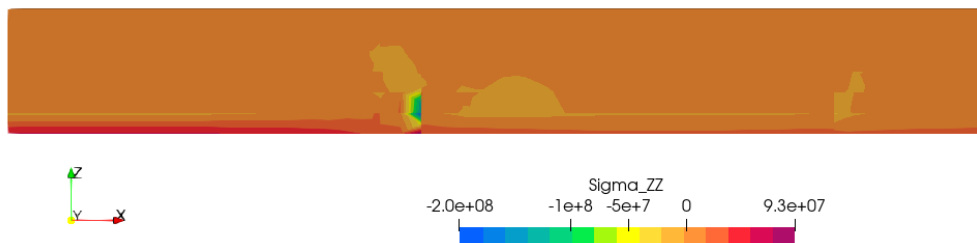


Figura 4.19: Andamento σ_{zz} nella zona sensore + resin pocket.

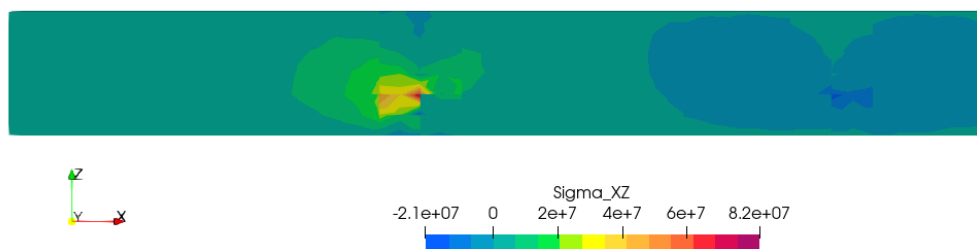


Figura 4.20: Andamento σ_{xz} nella zona sensore + resin pocket.

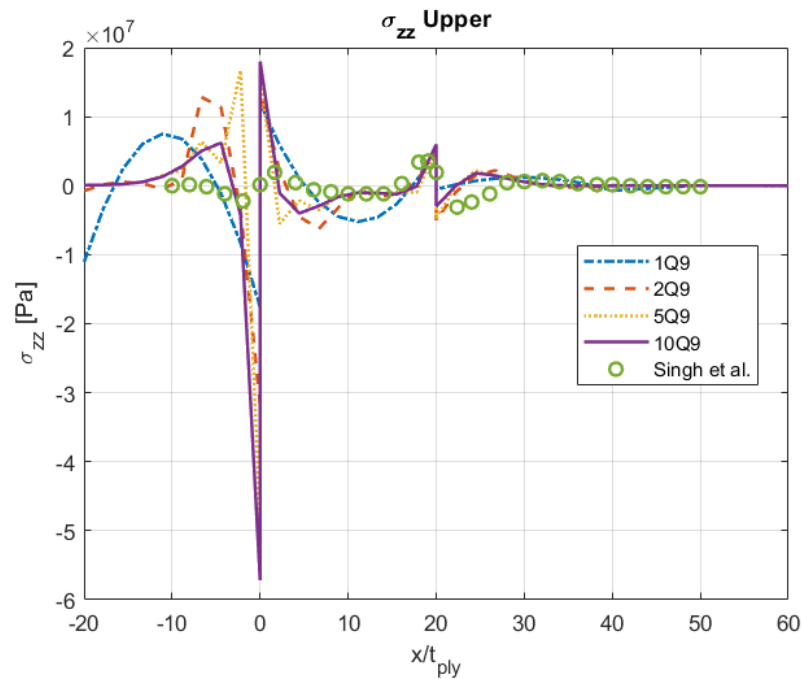


Figura 4.21: Interlaminar normal stress - upper.

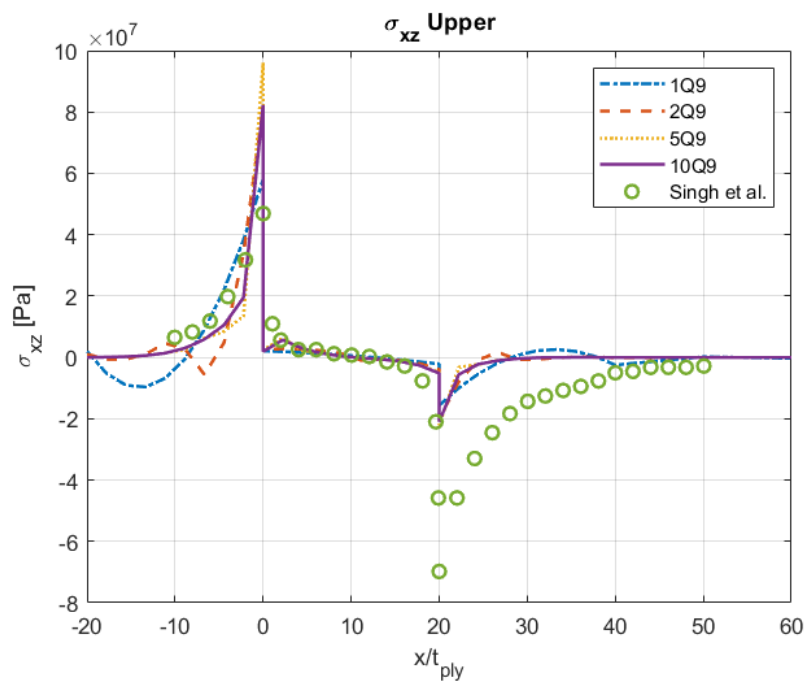


Figura 4.22: Interlaminar shear stress - upper.

Dai grafici ottenuti si può vedere come si abbiano dei picchi di tensione in corrispondenza delle interfaccia dove si hanno i cambi di materiale. In particolare, i picchi più elevati si hanno in corrispondenza dell'interfaccia tra il sensore e la resin pocket.

4.3 Analisi del processo di cura

La simulazione del processo di cura, basata sulla CUF, utilizza il cosiddetto modello CHILE (Cure Hardening Instantaneously Linear Elastic). In questo modello il materiale viene considerato essere elastico e con un modulo costante che cambia solo in funzione della temperatura e del DOC. Si utilizza un numero discreto di step temporali, N_α , viene valutata la deformazione accumulata ad ogni step temporale per via della presenza dei carichi termici e chimici, e la soluzione ottenuta alla fine del processo di cura deriva quindi dalla somma di una serie di soluzioni elastiche istantanee valutate in ciascuno step temporale. L'aumento dello shrinkage chimico, $\Delta\epsilon_s^i$, e delle deformazioni termiche, $\Delta\epsilon_T^i$, vengono utilizzate come carichi esterni all'i-esimo step temporale [19].

In Figura 4.23 si può vedere il diagramma di flusso su cui si basa il modello CHILE.

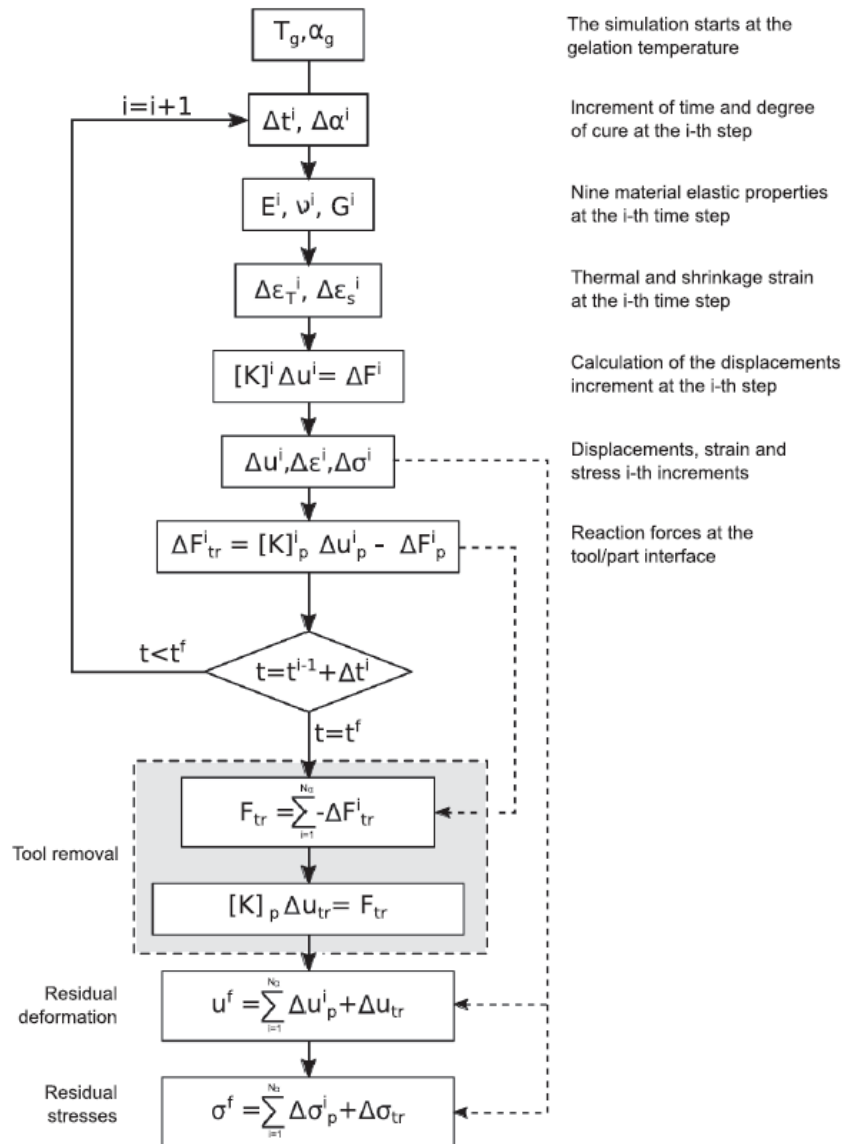


Figura 4.23: Algoritmo utilizzato per l'analisi del processo di cura [19].

In Figura 4.24 viene mostrato un esempio di come viene valutata l'evoluzione del modulo di taglio del materiale all' i -esimo step temporale.

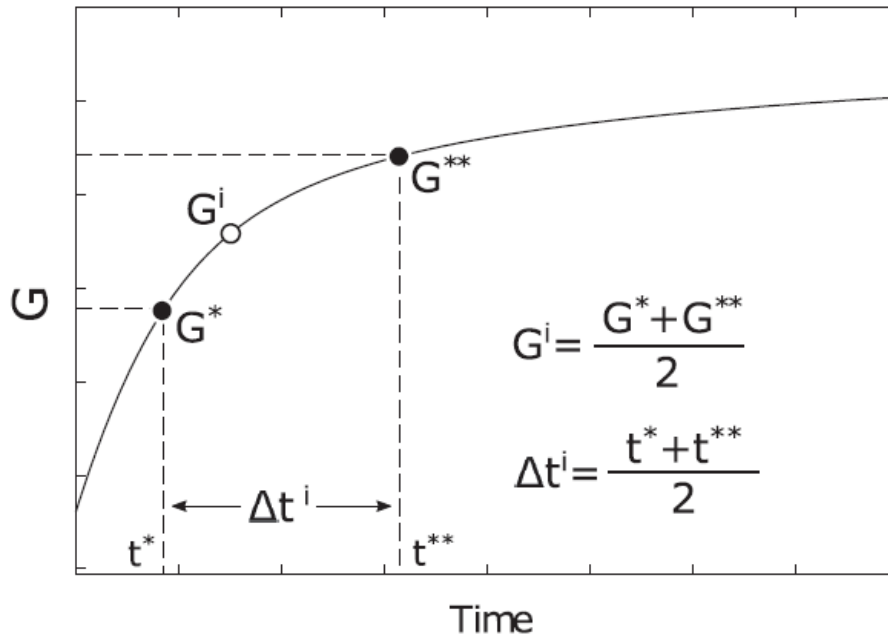


Figura 4.24: Proprietà del materiale all' i -esimo step temporale [19].

Si inizia la simulazione a partire dal gelation point, poichè è da quel punto che inizia effettivamente a svilupparsi il modulo del materiale. Inizialmente, allo step i -esimo, vengono definite le proprietà del materiale e le variazioni di carico, successivamente si può passare alla risoluzione di un problema lineare statico [19]:

$$\mathbf{K}^i \Delta \mathbf{u}^i = \Delta \mathbf{F}^i \quad (4.25)$$

dove \mathbf{K}^i rappresenta la matrice di rigidità dell'intero modello (componente, tool e shear layer di interfaccia) valutata all' i -esimo step temporale, $\Delta \mathbf{F}^i$ rappresenta il vettore dei carichi all' i -esimo step temporale, e $\Delta \mathbf{u}^i$ rappresenta l'incremento della soluzione.

Gli incrementi relativi agli stress e alle deformazioni possono essere valutati attraverso l'utilizzo delle relazioni geometriche e della legge di Hooke:

$$\Delta \boldsymbol{\epsilon}^i = \mathbf{D} \Delta \mathbf{u}^i \quad (4.26)$$

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}^i = \mathbf{C}^i \Delta \boldsymbol{\epsilon}^i \quad (4.27)$$

Le forze di interfaccia tra il tool e il componente possono essere ottenute integrando gli stress all'interfaccia. Tuttavia, per evitare la procedura di integrazione, le forze all'interfaccia possono essere ottenute anche sfruttando le proprietà della matrice di rigidità calcolate negli step precedenti. La matrice di rigidità, \mathbf{K}^i , può infatti essere considerata come composta dalla somma di diversi contributi, come è possibile vedere in Figura 4.25. \mathbf{K}_p^i rappresenta la matrice relativa al componente in composito, \mathbf{K}_t^i rappresenta la matrice di rigidità relativa al tool, \mathbf{K}_{st}^i rappresenta la matrice di rigidità relativa allo shear layer di interfaccia [19].

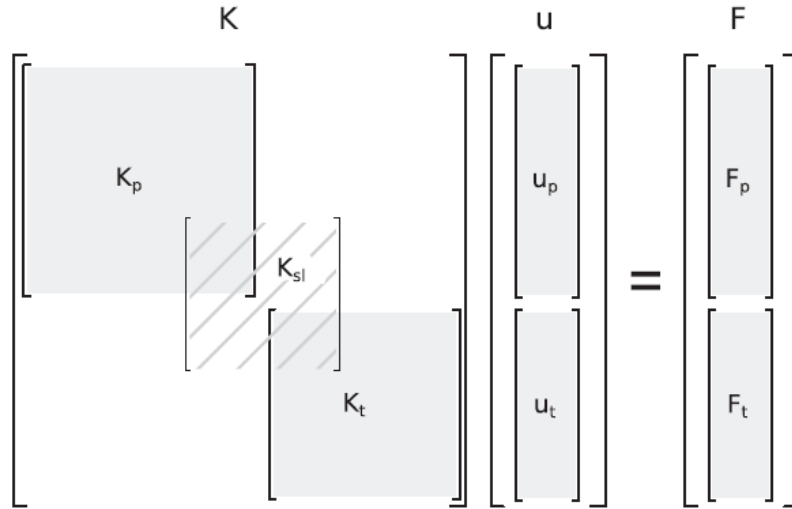


Figura 4.25: Scomposizione della matrice di rigidezza totale [19].

Lo stesso ragionamento fatto per la matrice di rigidezza può essere applicato al vettore degli spostamenti e al vettore delle forze.

Le forze agenti sulla parte in composito, $\Delta \bar{\mathbf{F}}_p^i$, possono essere calcolate come:

$$\Delta \bar{\mathbf{F}}_p^i = \mathbf{K}_p^i \Delta \mathbf{u}_p^i \quad (4.28)$$

dove il vettore $\Delta \bar{\mathbf{F}}_p^i$ include le forze legate allo shrinkage, ai carichi termici, e anche alle forze di interfaccia dal momento che \mathbf{K}_p^i non include la rigidezza del tool e dello shear layer e di conseguenza una certa quantità di forza interna non è bilanciata all'interfaccia.

Il vettore delle forze di interfaccia, dovute alla rimozione del tool, può essere ottenuto all'iesimo step come:

$$\Delta \mathbf{F}_{tr}^i = \Delta \bar{\mathbf{F}}_p^i - \Delta \mathbf{F}_p^i \quad (4.29)$$

Nel momento in cui si conclude la simulazione, è possibile andare a valutare le deformazioni finali indotte dal processo. La forza totale che il tool applica sul componente in composito, \mathbf{F}_{tr} , può essere scritta come:

$$\mathbf{F}_{tr} = \sum_{i=1}^{N_\alpha} \Delta \mathbf{F}_{tr}^i \quad (4.30)$$

L'incremento degli spostamenti $\Delta \mathbf{u}_{tr}$, che si ha come conseguenza della rimozione del tool, può essere calcolato attraverso la risoluzione del seguente sistema lineare:

$$\mathbf{K}_p \Delta \mathbf{u}_{tr} = \mathbf{F}_{tr} \quad (4.31)$$

Ricavando $\boldsymbol{\epsilon}_{tr}$ e $\boldsymbol{\sigma}_{tr}$ attraverso l'utilizzo delle relazioni (2.4) e (2.6), è dunque possibile calcolare gli spostamenti, le deformazioni e gli stress residui dovuti al processo di cura e alla rimozione del tool [19]:

$$\mathbf{u}^f = \sum_{i=1}^{N_\alpha} \Delta \mathbf{u}_p^i + \Delta \mathbf{u}_{tr} \quad (4.32)$$

$$\epsilon^f = \sum_{i=1}^{N_\alpha} \Delta \epsilon_p^i + \Delta \epsilon_{tr} \quad (4.33)$$

$$\sigma^f = \sum_{i=1}^{N_\alpha} \Delta \sigma_p^i + \Delta \sigma_{tr} \quad (4.34)$$

4.3.1 Pannello composito a 8 strati

Viene di seguito proposto un assessment consistente nell'analisi di un modello costituito da un pannello in composito a 8 strati con una matrice in resina epossidica e un rinforzo in carbonio (AS4/8552 carbon/epoxy) con laminazione simmetrica $[0/90/0/90]_s$. All'interno del pannello è incorporato un sensore piezoelettrico (PZT-H5), ed in particolare quest'ultimo è posizionato nei due strati centrali.

Il componente viene sottoposto ad un determinato ciclo di cura, così da poter andare ad analizzare gli effetti che il ciclo ha sulla distribuzione delle tensioni all'interno del componente, in particolare nella zona in cui si ha la presenza del sensore. Viene utilizzato un tool in acciaio con un'altezza di 0.01 m.

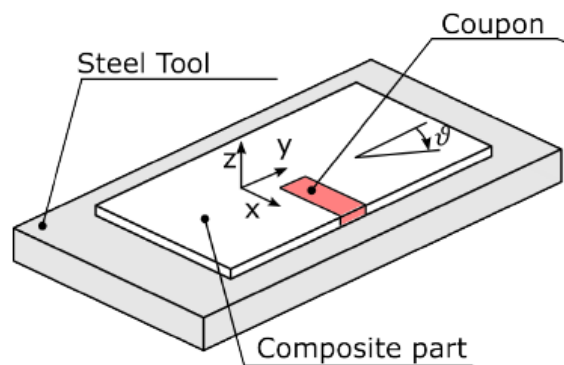


Figura 4.26: Pannello composito [28].

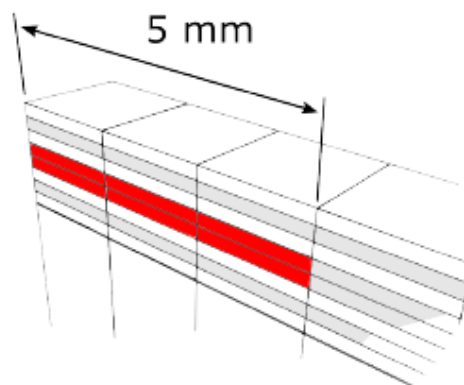


Figura 4.27: Dettaglio del tratto in cui è presente il sensore [28].

In Tabella 4.7 vengono riassunti i valori delle caratteristiche geometriche del pannello, e nelle successive tabelle vengono rappresentati i valori delle caratteristiche relative al sensore piezoelettrico PZT-H5 (Tabella 4.8) e al tool in acciaio (Tabella 4.9). Si precisa che non vengono rappresentate le proprietà del composito AS4/8552 poichè esse evolveranno secondo il ciclo di cura scelto.

Caratteristica geometrica	Dimensione [m]
Lunghezza totale del pannello L	0.0183
Spessore totale del pannello h	0.0016
Larghezza totale del pannello b	0.00167
Spessore di un singolo strato t_{ply}	0.0002
Spessore del sensore	$2 t_{ply}$
Estensione del sensore	0.005

Tabella 4.7: Caratteristiche geometriche del pannello [28].

Proprietà	Valore	Unità di misura
Modulo elastico E	$63 \cdot 10^9$	Pa
Poisson ratio ν	0.31	-
Densità ρ	$7.70 \cdot 10^3$	kg/m^3
Coefficiente di espansione termica α	$3.5 \cdot 10^{-6}$	$ppm/^\circ C$

Tabella 4.8: Proprietà PZT-H5 lead zirconate titanate piezoceramic [28].

Proprietà	Valore	Unità di misura
Modulo elastico E	$210 \cdot 10^9$	Pa
Poisson ratio ν	0.30	-
Densità ρ	$7.850 \cdot 10^3$	kg/m^3
Coefficiente di espansione termica α	$12 \cdot 10^{-6}$	$ppm/^\circ C$

Tabella 4.9: Proprietà Steel tool [28].

In Figura 4.28 è possibile visualizzare la creazione del modello completo con la presenza del tool, ed in Figura 4.29 è possibile visualizzare il modello senza la presenza del tool. Si precisa che l'interfaccia tra il tool e il composito viene modellata utilizzando uno shear layer con una ridotta rigidità a taglio così da minimizzare le interazioni nel piano tra i due componenti e permettere così di ridurre l'attrito. Tale modellazione viene effettuata introducendo un generico materiale isotropo tra i due componenti, e quest'ultimo ha tipicamente uno spessore molto ridotto pari a circa 1/10 lo spessore di un singolo strato del composito. In Figura 4.30 è possibile visualizzare un dettaglio del modello in cui si vede la presenza dello shear layer.

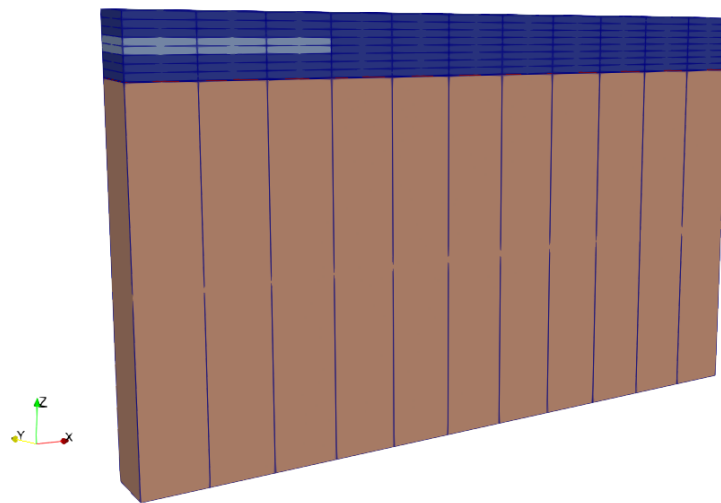


Figura 4.28: Creazione del modello.

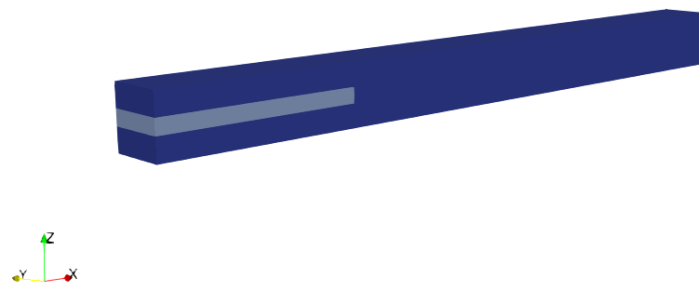


Figura 4.29: Dettaglio del modello senza la presenza del tool.

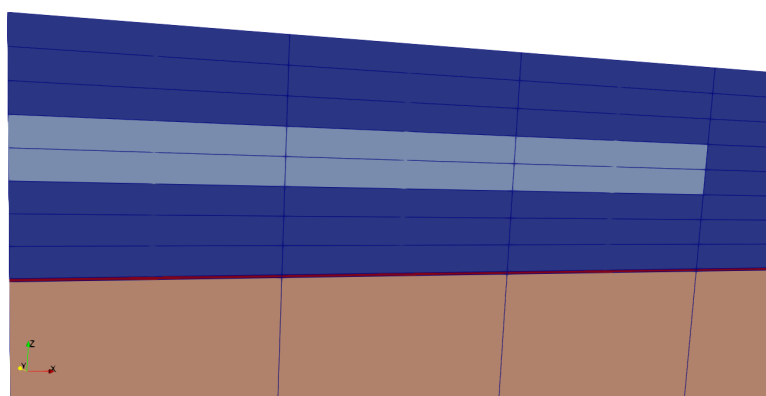


Figura 4.30: Dettaglio del modello - shear layer.

Il modello, comprensivo di tool e shear layer, è stato discretizzato utilizzando 1 elemento B3 lungo l'asse y e una mesh uniforme con un totale di 110 elementi Q16, tramite espansione di

Lagrange (LE), sulla sezione nel piano xz.

Viene scelto un ciclo di cura consistente in una singola holding fase a 180°C. In Figura 4.31 è possibile osservare l'andamento della temperatura e del DOC in funzione del tempo trascorso.

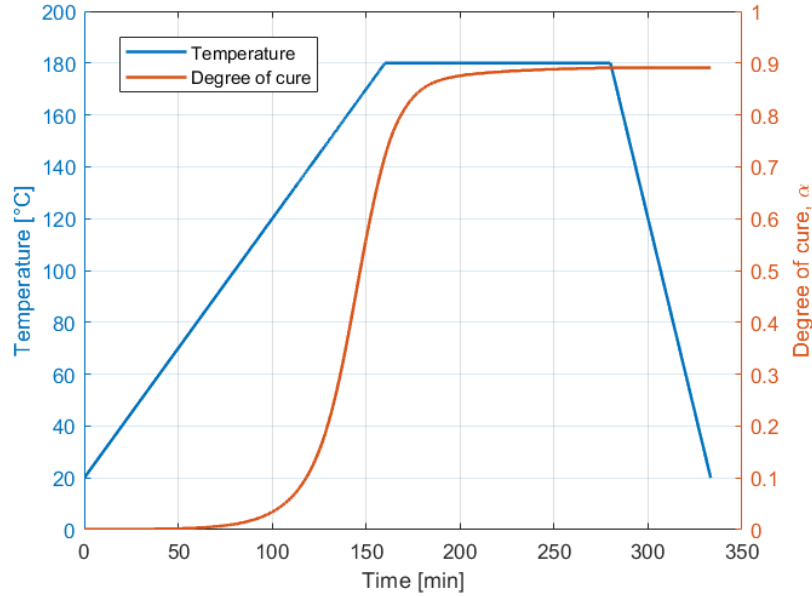


Figura 4.31: Ciclo di cura.

In Tabella 4.10 viene rappresentata l'evoluzione delle proprietà del composito AS4/8852 a partire da un valore del DOC pari a $\text{DOC}=0.540$, poichè tale punto coincide con il gelation point della curva, ed è da quel punto in poi che il materiale inizia a sviluppare le proprie caratteristiche meccaniche.

T [°C]	168.88	171.60	176.71	180.00	180.00	180.00	20.00
DOC	0.54	0.59	0.67	0.74	0.80	0.85	0.89
E_1 [GPa]	119.70	119.70	119.70	119.71	119.85	120.77	121.75
E_2 [MPa]	0.25	1.13	14.56	144.62	1429.67	6689.40	9674.51
E_3 [MPa]	0.25	1.13	14.56	144.62	1429.67	6689.40	9674.51
ν_{12}	0.329	0.329	0.329	0.329	0.324	0.297	0.269
ν_{13}	0.329	0.329	0.329	0.329	0.324	0.297	0.269
ν_{23}	1.000	1.000	0.999	0.991	0.911	0.600	0.441
G_{12} [MPa]	0.06	0.28	3.64	36.50	393.25	2763.29	5163.91
G_{13} [MPa]	0.06	0.28	3.64	36.50	393.25	2763.29	5163.91
G_{23} [MPa]	0.06	0.28	3.64	36.32	373.98	2091.03	3357.54

Tabella 4.10: Evoluzione delle proprietà del composito durante il processo di cura.

In Figura 4.32 viene rappresentato lo spostamento verticale del pannello. Si può osservare come, per via del ciclo di cura, si abbia uno schiacciamento del modello con una conseguente riduzione di spessore. Tale variazione di spessore si riduce man mano che ci si avvicina alla zona in cui è presente il sensore, poichè quest'ultimo non è soggetto allo shrinkage chimico.

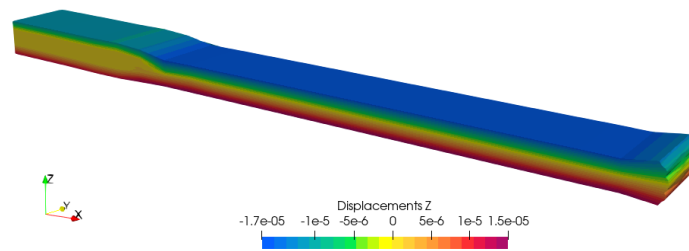


Figura 4.32: Spostamento verticale del pannello.

In Figura 4.33 viene rappresentato l'andamento della σ_{xx} nella zona in cui è presente il sensore. Nelle Figure 4.34, 4.35, 4.36 è possibile osservare l'andamento della σ_{xx} lungo lo spessore in tre diverse zone del pannello. Si può notare l'andamento a zig zag dovuto al cambio di laminazione tra i vari strati. Possiamo inoltre notare come la presenza del sensore vada a creare una perturbazione che modifica significativamente il campo di stress, con tale perturbazione che va progressivamente svanendo man mano che ci allontaniamo dal sensore. Gli andamenti possono essere confrontati con quelli ottenuti da Zappino et al. [28] con lo stesso modello. Il confronto mostra un'ottima corrispondenza nell'andamento dei risultati.

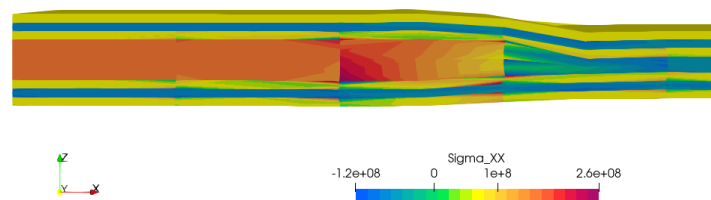


Figura 4.33: Andamento σ_{xx} nella zona del sensore.

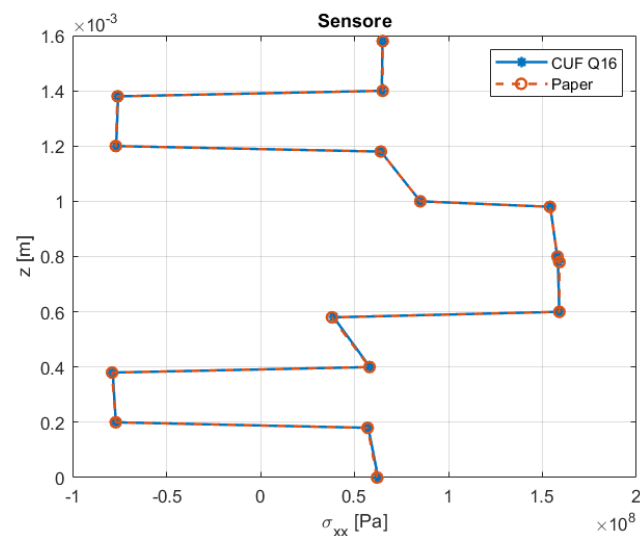


Figura 4.34: Andamento σ_{xx} lungo lo spessore nella zona del sensore.

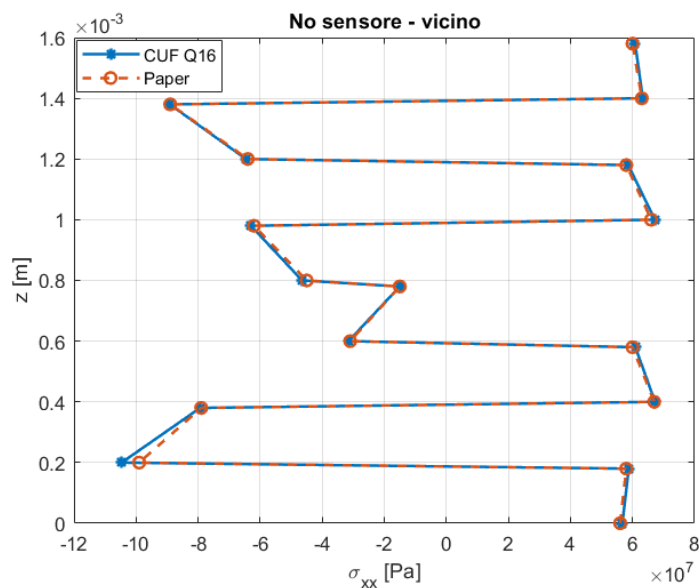


Figura 4.35: Andamento σ_{xx} lungo lo spessore vicino al sensore.

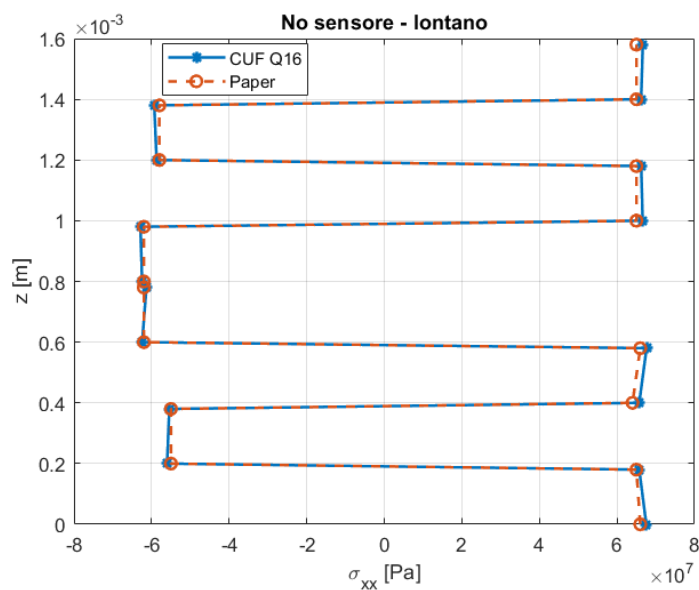


Figura 4.36: Andamento σ_{xx} lungo lo spessore lontano dal sensore.

4.3.2 Laminato composito a 12 strati

Viene di seguito analizzato un modello costituito da un laminato in composito a 12 strati con una matrice in resina epossidica e un rinforzo in carbonio (AS4/8552 carbon/epoxy) con laminazione simmetrica $[0/90/0/90/0/90]_s$.

Il componente viene sottoposto ad un determinato ciclo di cura, così da poter andare ad analizzare gli effetti che il ciclo ha sulla distribuzione delle tensioni all'interno del componente. Viene utilizzato un tool in acciaio con un'altezza di 0.01 m.

Il seguente modello è sostanzialmente una riproposizione del laminato composito visto nella sezione 4.2.4, con la differenza che adesso viene tenuta in considerazione anche la metà inferiore del modello, dunque si va considerare 1/2 del modello completo, e si utilizza un materiale composito differente. Inoltre, in questo caso non si ha più la presenza di tensioni legate ad uno spostamento uniforme in direzione longitudinale, ma si ha la presenza di tensioni che si sviluppano per via del ciclo di cura.

In Tabella 4.11 vengono riassunti i valori delle caratteristiche geometriche del laminato e in Tabella 4.12 vengono rappresentate le caratteristiche relative al tool in acciaio. Si precisa che non vengono rappresentate le proprietà del composito AS4/8552 poichè esse evolveranno secondo il ciclo di cura scelto. L'interfaccia tra il tool e il composito viene modellata utilizzando uno shear layer con una ridotta rigidità a taglio così da minimizzare le interazioni nel piano tra i due componenti e permettere così di ridurre l'attrito.

Viene scelto un ciclo di cura consistente in una singola holding fase a 180°C. Poichè il ciclo di cura scelto e il materiale composito scelto sono uguali a quelli utilizzati nel caso del modello precedente con il pannello a 8 strati, le curve relative al ciclo di cura e la tabella relativa all'evoluzione delle proprietà del composito durante il ciclo di cura, saranno uguali a prima (vedasi Figura 4.31 e Tabella 4.10).

Caratteristica geometrica	Dimensione [m]
Lunghezza del laminato L	0.0268
Spessore del laminato h	0.001608
Spessore di un singolo strato t_{ply}	0.000134
Larghezza del laminato b	1 t_{ply}

Tabella 4.11: Caratteristiche geometriche del laminato [30].

Proprietà	Valore	Unità di misura
Modulo elastico E	$210 \cdot 10^9$	Pa
Poisson ratio ν	0.30	-
Densità ρ	$7.850 \cdot 10^3$	kg/m^3
Coefficiente di espansione termica α	$12 \cdot 10^{-6}$	$ppm/^\circ C$

Tabella 4.12: Proprietà Steel tool [28].

Verranno presentate 3 diverse casistiche relative alla configurazione del laminato:

- laminato senza sensore;
- laminato con sensore;
- laminato con sensore + resin pocket.

I tre diversi modelli, considerando solo il componente senza tool e shear layer, sono stati discretizzati utilizzando 1 elemento B4 lungo l'asse y e diverse mesh con elementi Q9, tramite espansione di Lagrange (LE), sulla sezione del laminato nel piano xz . In particolare, si è andati ad inserire 2 elementi Q9 per ciascun strato in direzione z , e si è andati ad effettuare un'analisi di convergenza andando ad infittire man mano la mesh in direzione x nella zona del laminato in cui saranno presenti le aree del sensore e della resin pocket, passando da 1 a 20 ed infine a 40

elementi Q9 in ciascuna area. Per ciascun modello verranno presentati dei risultati relativi agli andamenti di alcune tensioni che si hanno dopo la rimozione del componente dal tool.

4.3.2.1 Laminato senza sensore

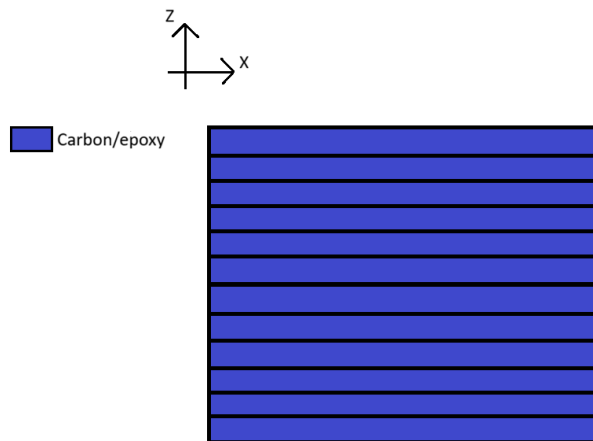


Figura 4.37: Geometria del laminato senza sensore.

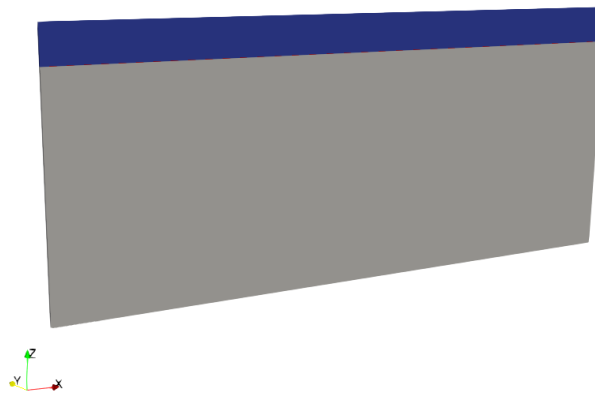


Figura 4.38: Creazione del modello.



Figura 4.39: Dettaglio del modello senza la presenza del tool.

In Figura 4.40 è possibile visualizzare un dettaglio del modello in cui si vede la presenza dello shear layer, ricordando che quest'ultimo ha uno spessore pari a $1/10$ lo spessore di un singolo strato del composito.

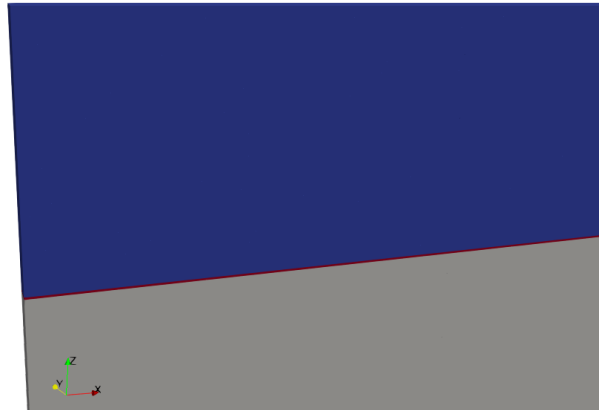


Figura 4.40: Dettaglio del modello - shear layer.

Nelle Figure 4.41, 4.42, 4.43 è possibile vedere il dettaglio delle discretizzazioni con le diverse mesh.



Figura 4.41: Discretizzazione della sezione con 1 elemento Q9.

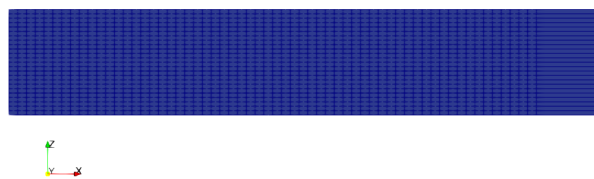


Figura 4.42: Discretizzazione della sezione con 20 elementi Q9.



Figura 4.43: Discretizzazione della sezione con 40 elementi Q9.

In Figura 4.44 viene rappresentato lo spostamento verticale del laminato senza sensore. Si può osservare come, per via del ciclo di cura, si abbia uno schiacciamento del modello con una conseguente riduzione di spessore. Tale variazione di spessore è uniforme lungo tutta la struttura (ad eccezione di alcuni effetti che si hanno al free edge).

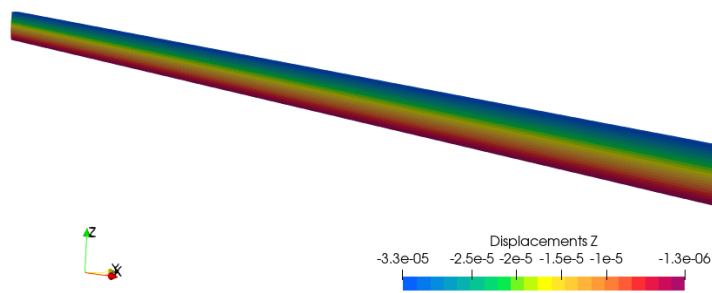


Figura 4.44: Spostamento verticale del laminato senza sensore.

- **Andamento σ_{xx}**

In Figura 4.45 viene rappresentato l'andamento della σ_{xx} lungo tutto il laminato. In Figura 4.46 è possibile osservare l'andamento della σ_{xx} lungo lo spessore del laminato, in particolare si può notare l'andamento a zig zag dovuto al cambio di laminazione tra i vari strati. In Figura 4.47 è possibile osservare l'andamento della σ_{xx} lungo l'asse x. In questo caso, non avendo la presenza di inclusioni, l'andamento è piuttosto uniforme lungo l'intera struttura (ad eccezione di alcuni effetti che si hanno al free edge).

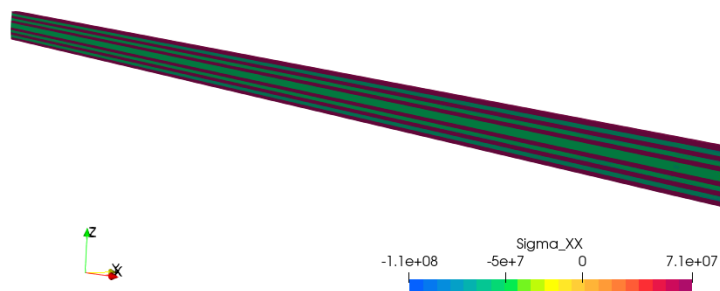


Figura 4.45: Andamento σ_{xx} .

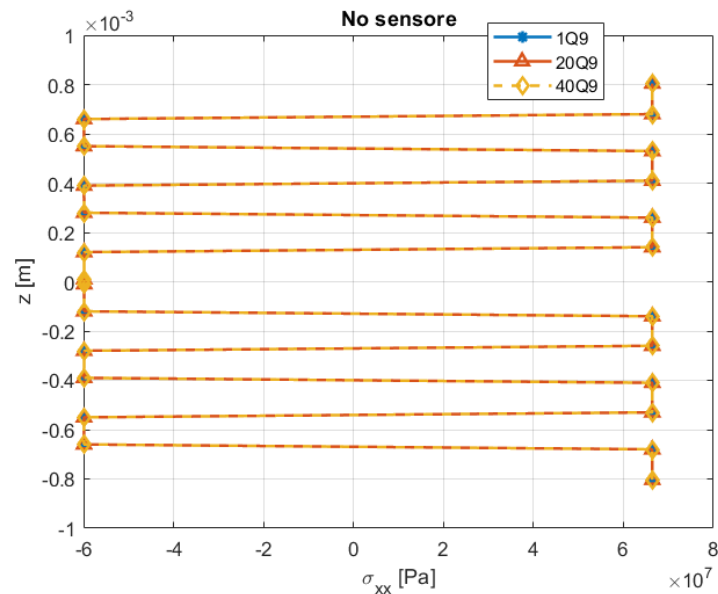


Figura 4.46: Andamento σ_{xx} lungo lo spessore.

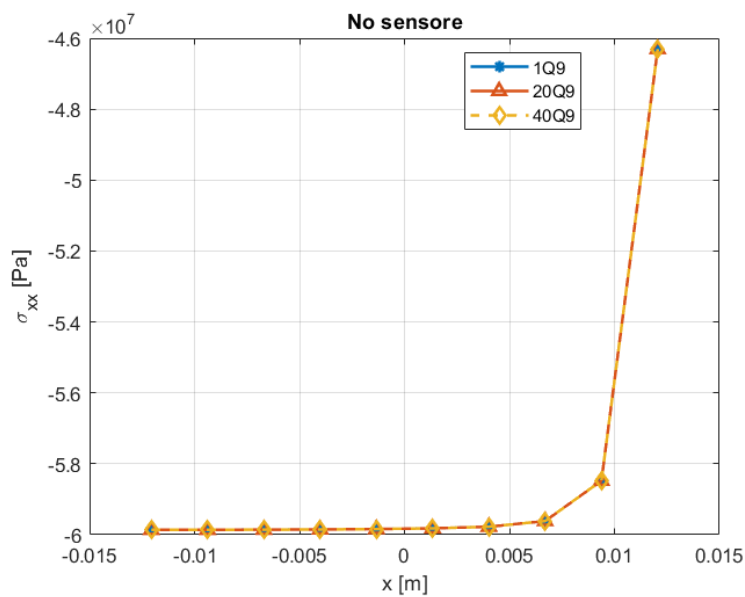


Figura 4.47: Andamento σ_{xx} lungo l'asse x.

• Andamento σ_{zz}

In Figura 4.48 viene rappresentato l'andamento della σ_{zz} lungo tutto il laminato. In Figura 4.49 è possibile osservare l'andamento della σ_{zz} lungo lo spessore del laminato, in particolare si può notare come l'andamento sia pressochè costante lungo l'intero spessore. In Figura 4.50 è possibile osservare l'andamento della σ_{zz} lungo l'asse x. In questo caso, non avendo la presenza di inclusioni, l'andamento è piuttosto uniforme lungo l'intera struttura (ad eccezione di alcuni effetti che si hanno al free edge).

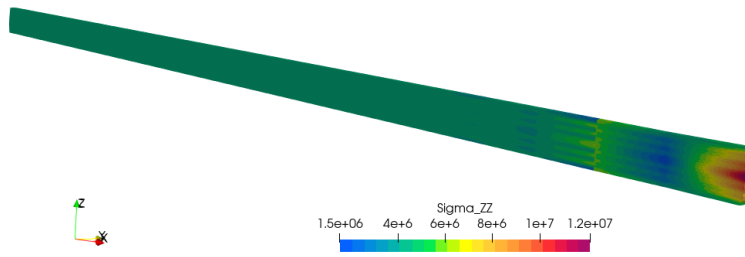


Figura 4.48: Andamento σ_{zz} .

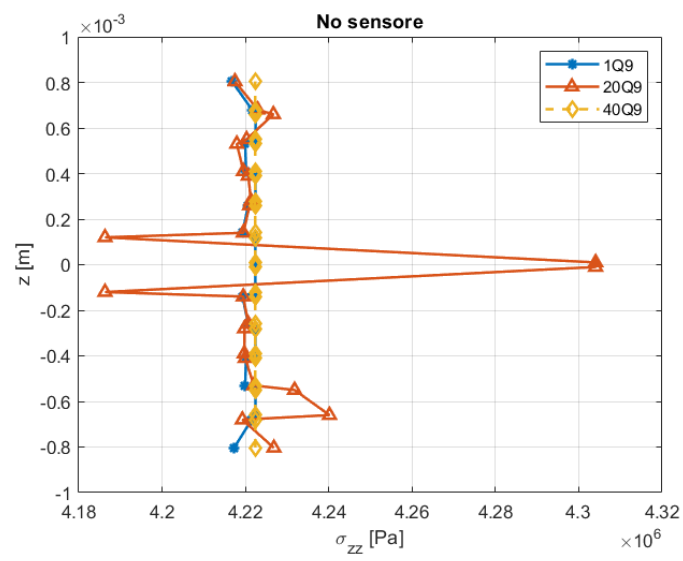


Figura 4.49: Andamento σ_{zz} lungo lo spessore.

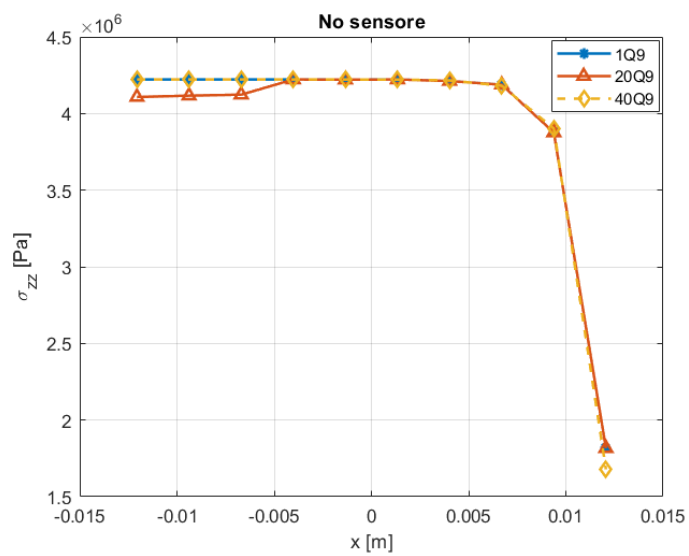


Figura 4.50: Andamento σ_{zz} lungo l'asse x.

- **Andamento σ_{xz}**

In Figura 4.51 viene rappresentato l'andamento della σ_{xz} lungo tutto il laminato. In Figura 4.52 è possibile osservare l'andamento della σ_{xz} lungo lo spessore del laminato, in particolare si può notare come le curve oscillino in modo quasi simmetrico per poi tendere a 0 nell'estremo superiore ed inferiore lungo lo spessore. In Figura 4.53 è possibile osservare l'andamento della σ_{xz} lungo l'asse x. In questo caso, non avendo la presenza di inclusioni, l'andamento è piuttosto uniforme lungo l'intera struttura (ad eccezione di alcuni effetti che si hanno al free edge).

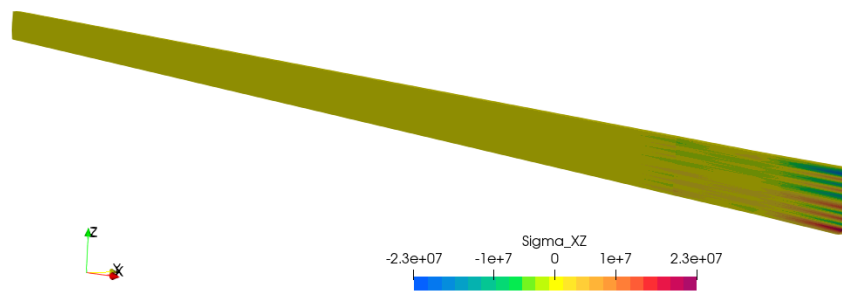


Figura 4.51: Andamento σ_{xz} .

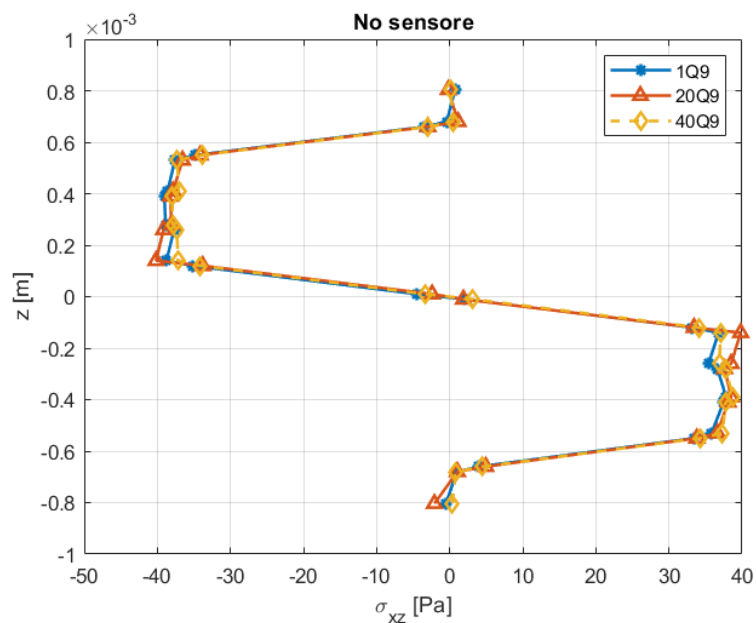


Figura 4.52: Andamento σ_{xz} lungo lo spessore.

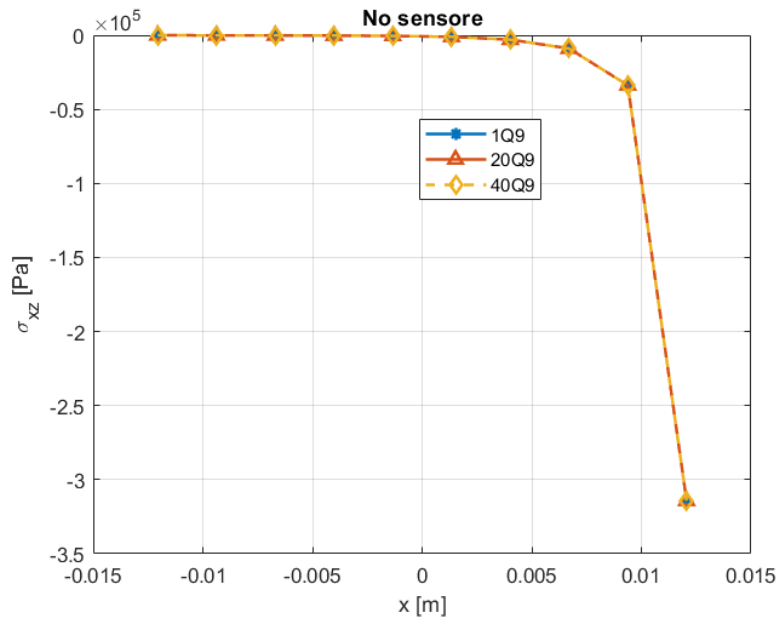


Figura 4.53: Andamento σ_{xz} lungo l'asse x.

4.3.2.2 Laminato con sensore

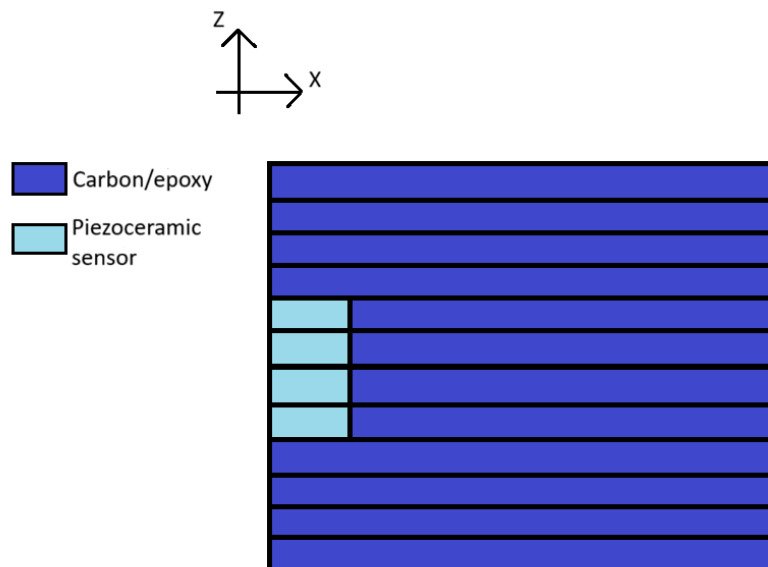


Figura 4.54: Geometria del laminato con sensore.

Nella configurazione con l'introduzione del sensore, si ha la presenza di un sensore piezoelettrico (PZT-G1195) posizionato nei quattro strati centrali del laminato. Esso avrà dunque uno spessore pari a $4 t_{ply}$, e si estende in direzione x per una lunghezza pari a $20 t_{ply}$. In Tabella 4.13 vengono rappresentati i valori delle caratteristiche relative al sensore piezoelettrico PZT-G1195.

Proprietà	Valore	Unità di misura
Modulo elastico E	$63 \cdot 10^9$	Pa
Poisson ratio ν	0.30	-
Densità ρ	$7.50 \cdot 10^3$	kg/m^3
Coefficiente di espansione termica α	$4 \cdot 10^{-6}$	$ppm/^\circ C$

Tabella 4.13: Proprietà G-1195 lead zirconate titanate piezoceramic [30].

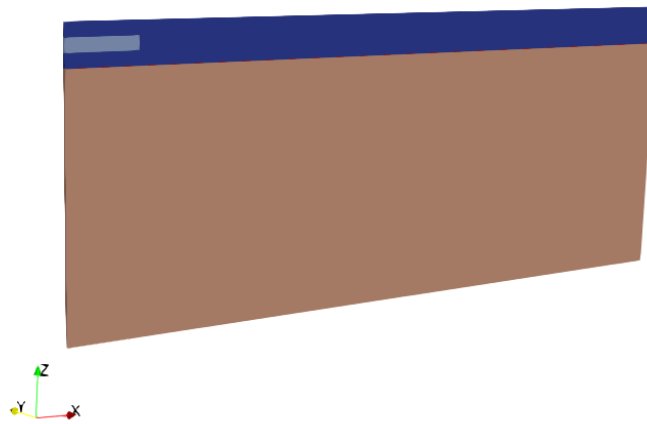


Figura 4.55: Creazione del modello.



Figura 4.56: Dettaglio del modello senza la presenza del tool.

Nelle Figure 4.57, 4.58, 4.59 è possibile vedere il dettaglio delle discretizzazioni con le diverse mesh.



Figura 4.57: Discretizzazione della sezione con 1 elemento Q9.

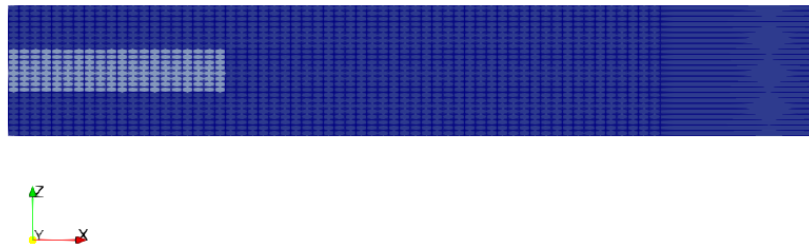


Figura 4.58: Discretizzazione della sezione con 20 elementi Q9.

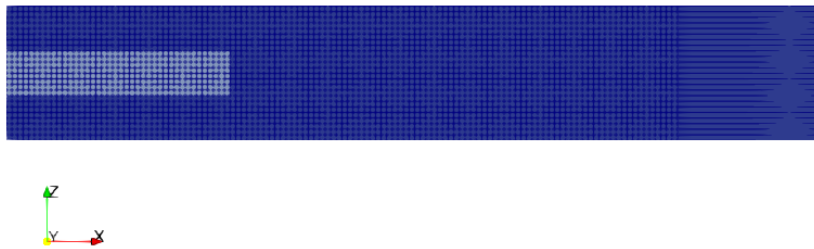


Figura 4.59: Discretizzazione della sezione con 40 elementi Q9.

In Figura 4.60 viene rappresentato lo spostamento verticale del laminato con sensore. Si può osservare come, per via del ciclo di cura, si abbia uno schiacciamento del modello con una conseguente riduzione di spessore. Tale variazione di spessore si riduce man mano che ci si avvicina alla zona in cui è presente il sensore, poichè quest'ultimo non è soggetto allo shrinkage chimico.

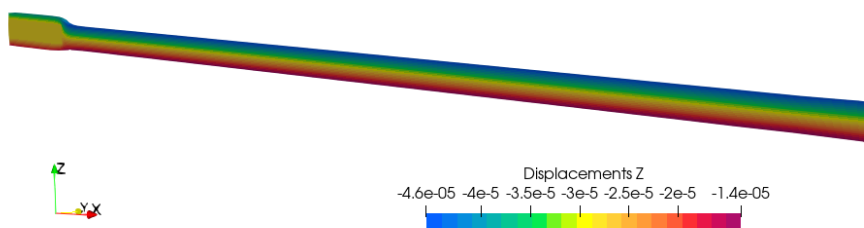


Figura 4.60: Spostamento verticale del laminato con sensore.

• Andamento σ_{xx}

In Figura 4.61 viene rappresentato l'andamento della σ_{xx} nella zona del sensore. In Figura 4.62 viene rappresentata l'evoluzione nel tempo della σ_{xx} all'interno del sensore per via del ciclo di cura, in particolare si può vedere come dopo la rimozione dal tool si raggiunga un picco di tensione. Nelle Figure 4.63, 4.64, 4.65 è possibile osservare l'andamento della σ_{xx} lungo lo spessore in tre diverse zone del laminato, in particolare si può notare l'andamento a zig zag

dovuto al cambio di laminazione tra i vari strati. In questo caso, la presenza dell'inclusione del sensore va a creare una perturbazione del campo di stress che va progressivamente svanendo man mano che ci allontaniamo dal sensore. In Figura 4.66 è possibile osservare l'andamento della σ_{xx} lungo l'asse x, in particolare si può notare la presenza di picchi di tensione in corrispondenza del cambio di materiale, nel passaggio dal sensore al composito.

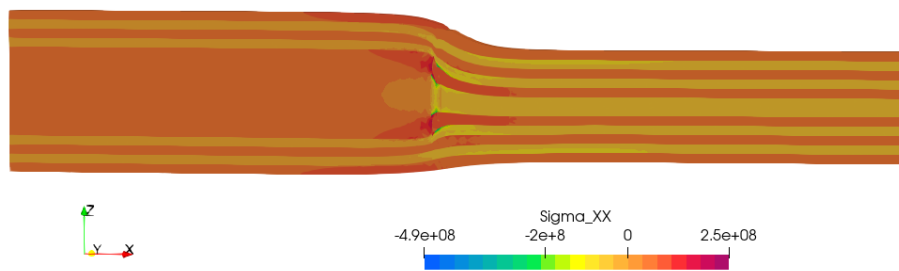


Figura 4.61: Andamento σ_{xx} nella zona del sensore.

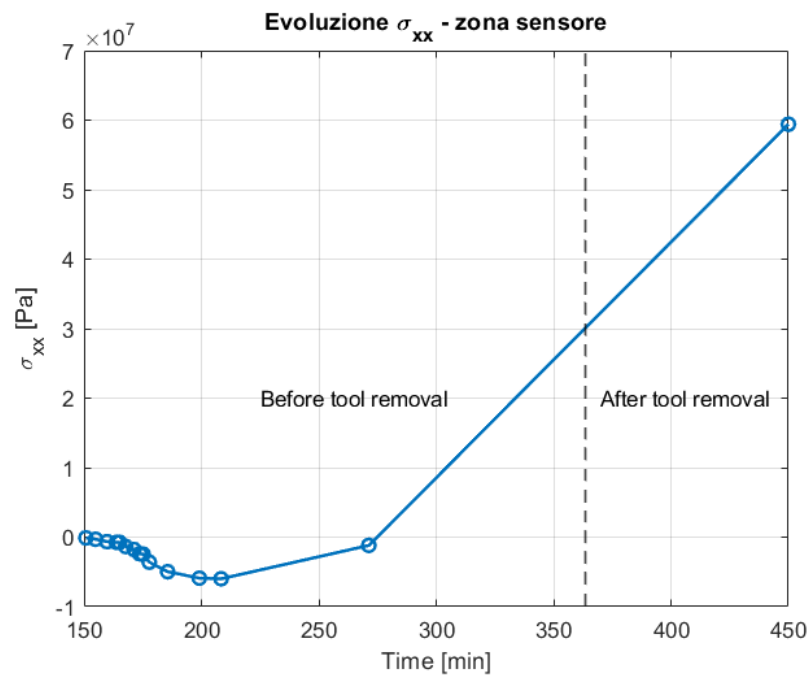


Figura 4.62: Evoluzione nel tempo σ_{xx} all'interno del sensore.

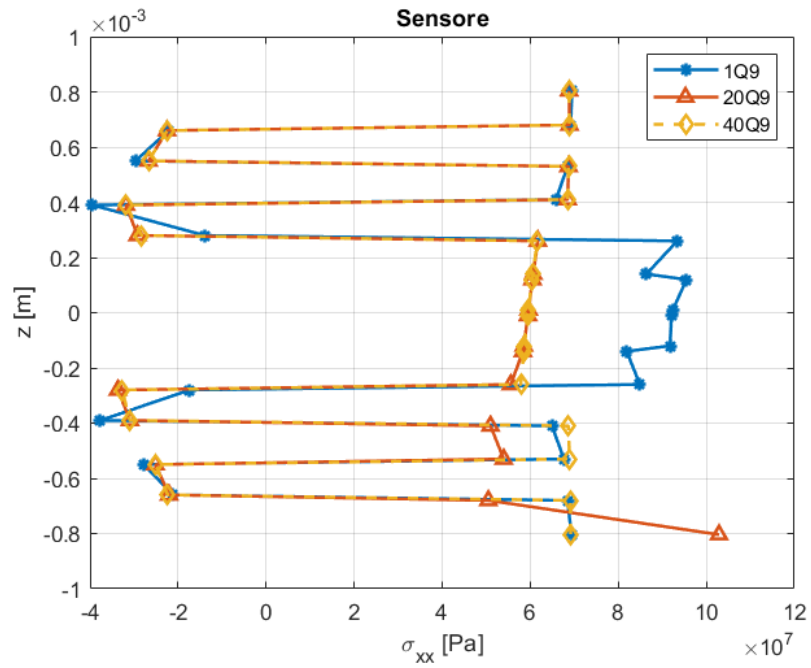


Figura 4.63: Andamento σ_{xx} lungo lo spessore nella zona del sensore.

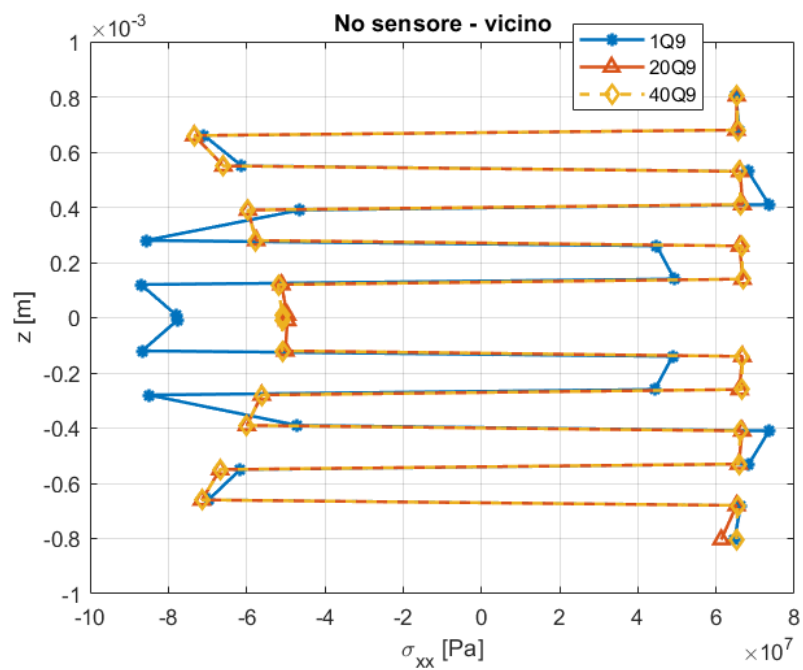


Figura 4.64: Andamento σ_{xx} lungo lo spessore vicino al sensore.

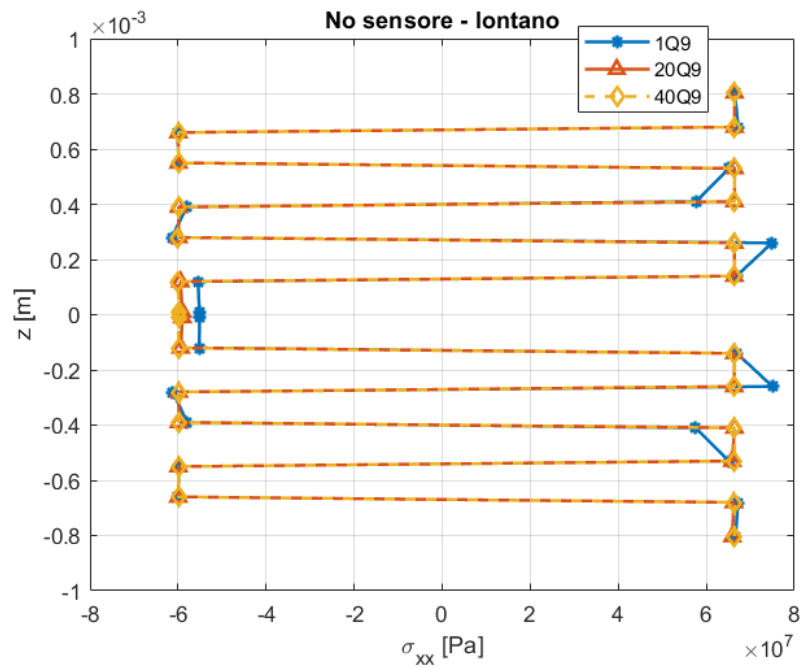


Figura 4.65: Andamento σ_{xx} lungo lo spessore lontano dal sensore.

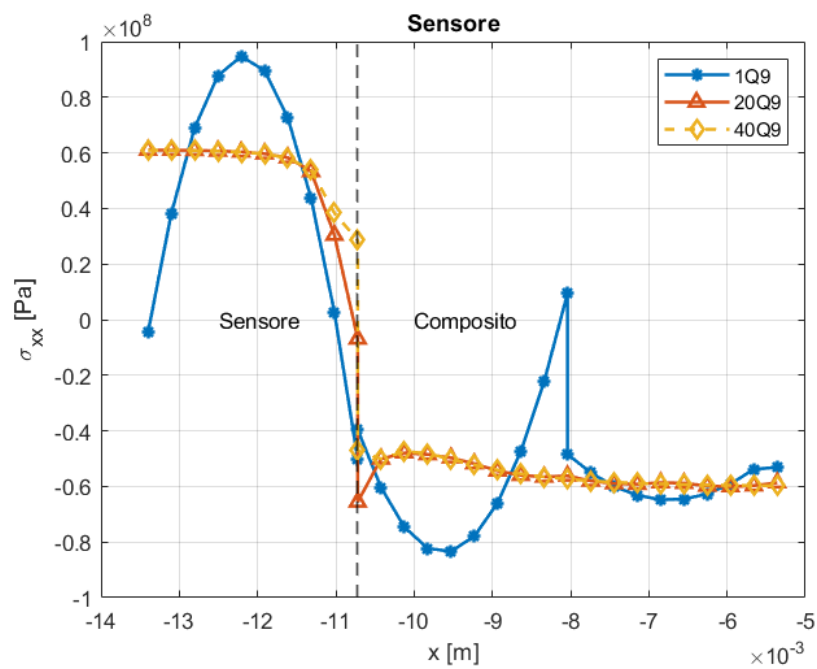


Figura 4.66: Andamento σ_{xx} lungo l'asse x.

- **Andamento σ_{zz}**

In Figura 4.67 viene rappresentato l'andamento della σ_{zz} nella zona del sensore. In Figura 4.68 viene rappresentata l'evoluzione nel tempo della σ_{zz} all'interno del sensore per via del ciclo

di cura, in particolare si può vedere come dopo la rimozione dal tool si raggiunga un picco di tensione. Nelle Figure 4.69, 4.70, 4.71 è possibile osservare l'andamento della σ_{zz} lungo lo spessore in tre diverse zone del laminato, in particolare si può notare come la presenza dell'inclusione del sensore va a creare una perturbazione del campo di stress che va progressivamente svanendo man mano che ci allontaniamo dal sensore. In Figura 4.72 è possibile osservare l'andamento della σ_{zz} lungo l'asse x, in particolare si può notare la presenza di picchi di tensione in corrispondenza del cambio di materiale, nel passaggio dal sensore al composito.

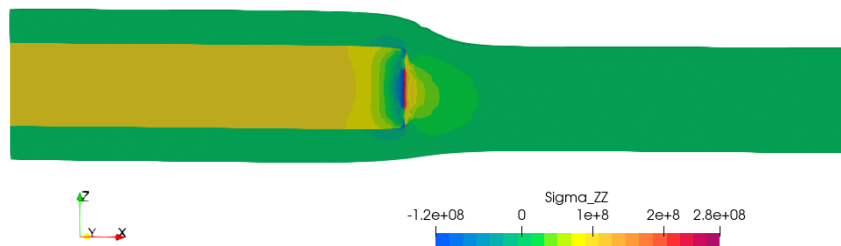


Figura 4.67: Andamento σ_{zz} nella zona del sensore.

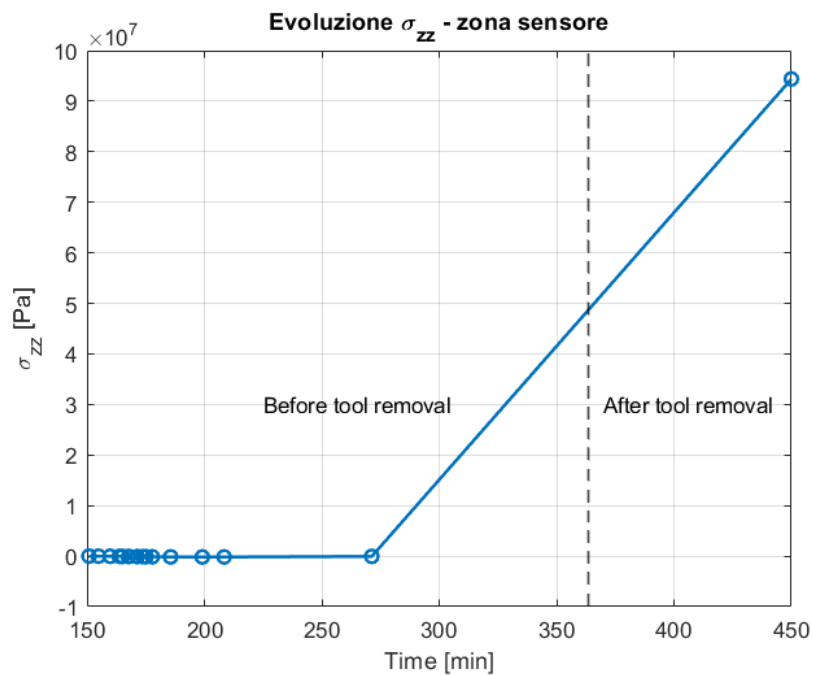


Figura 4.68: Evoluzione nel tempo σ_{zz} all'interno del sensore.

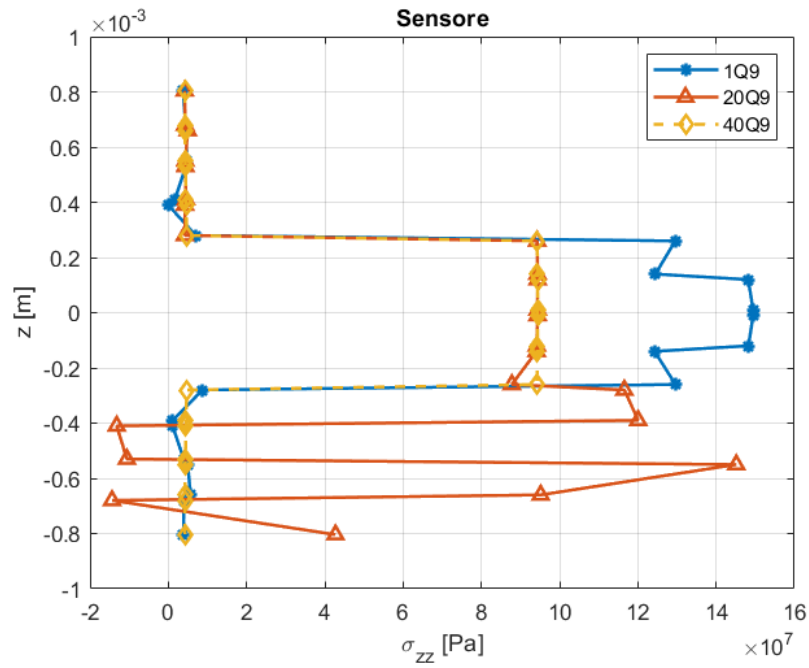


Figura 4.69: Andamento σ_{zz} lungo lo spessore nella zona del sensore.

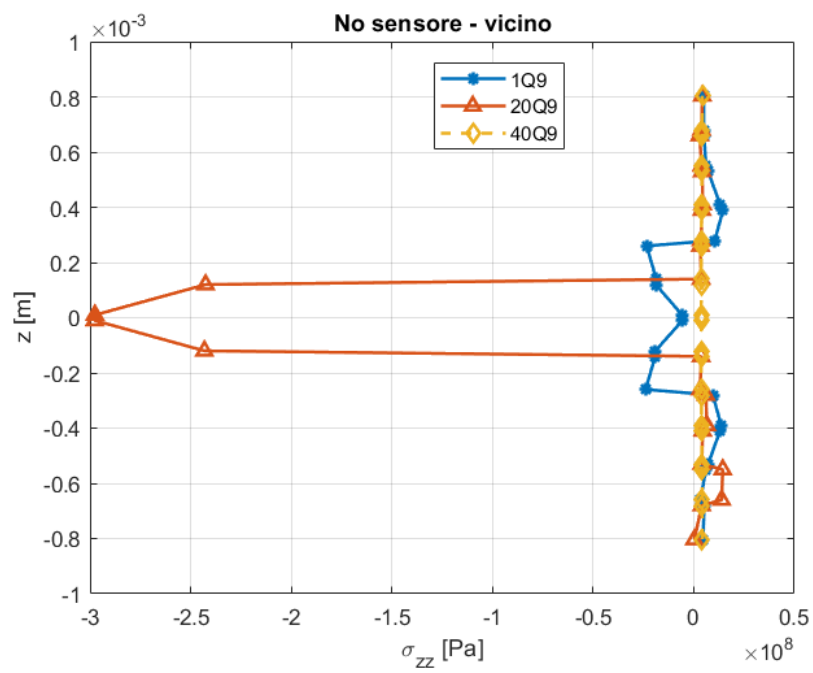


Figura 4.70: Andamento σ_{zz} lungo lo spessore vicino al sensore.

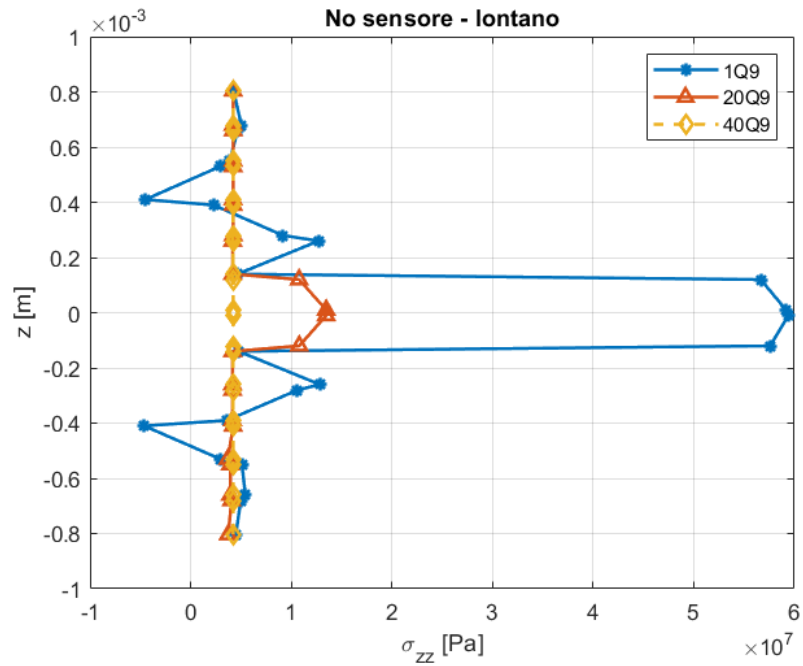


Figura 4.71: Andamento σ_{zz} lungo lo spessore lontano dal sensore.

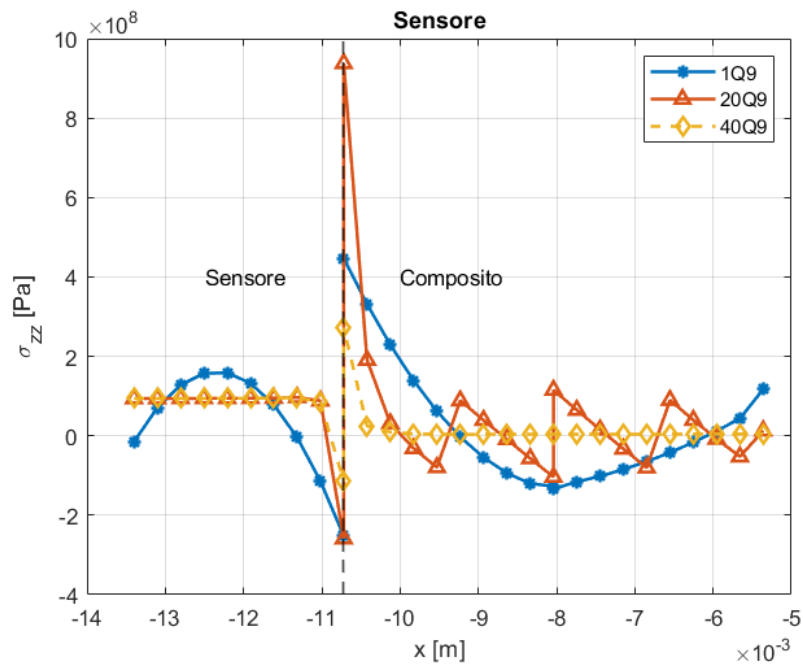


Figura 4.72: Andamento σ_{zz} lungo l'asse x.

- **Andamento σ_{xz}**

In Figura 4.73 viene rappresentato l'andamento della σ_{xz} nella zona del sensore. Nelle Figure 4.74, 4.75, 4.76 è possibile osservare l'andamento della σ_{xz} lungo lo spessore in tre diverse zone

del laminato, in particolare si può notare come la presenza dell'inclusione del sensore va a creare una perturbazione del campo di stress che va progressivamente svanendo man mano che ci allontaniamo dal sensore. In Figura 4.77 è possibile osservare l'andamento della σ_{xz} lungo l'asse x, in particolare si può notare la presenza di picchi di tensione in corrispondenza del cambio di materiale, nel passaggio dal sensore al composito.

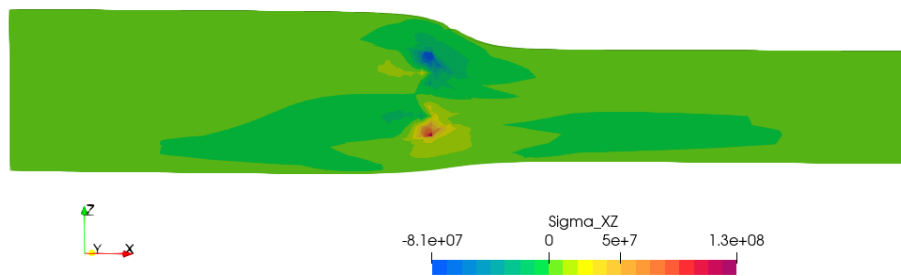


Figura 4.73: Andamento σ_{xz} nella zona del sensore.

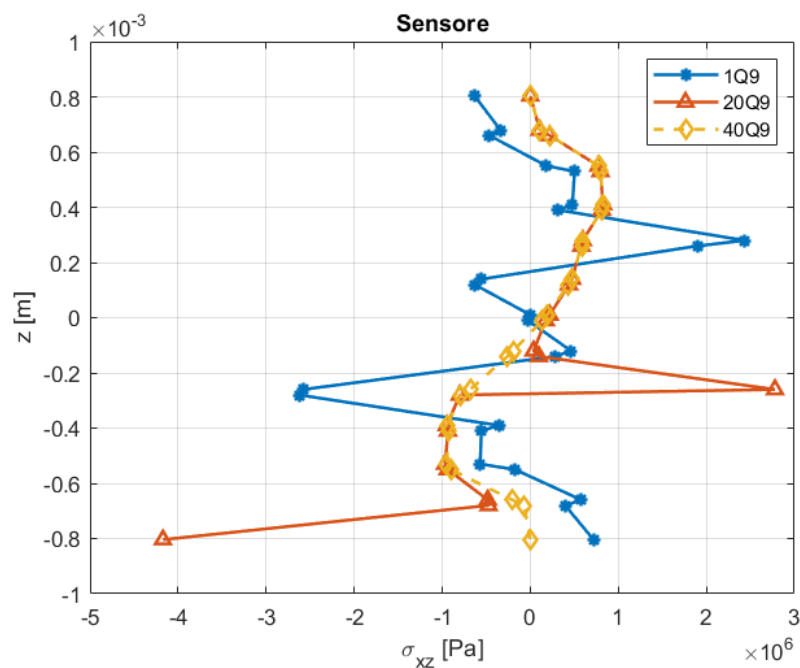


Figura 4.74: Andamento σ_{xz} lungo lo spessore nella zona del sensore.

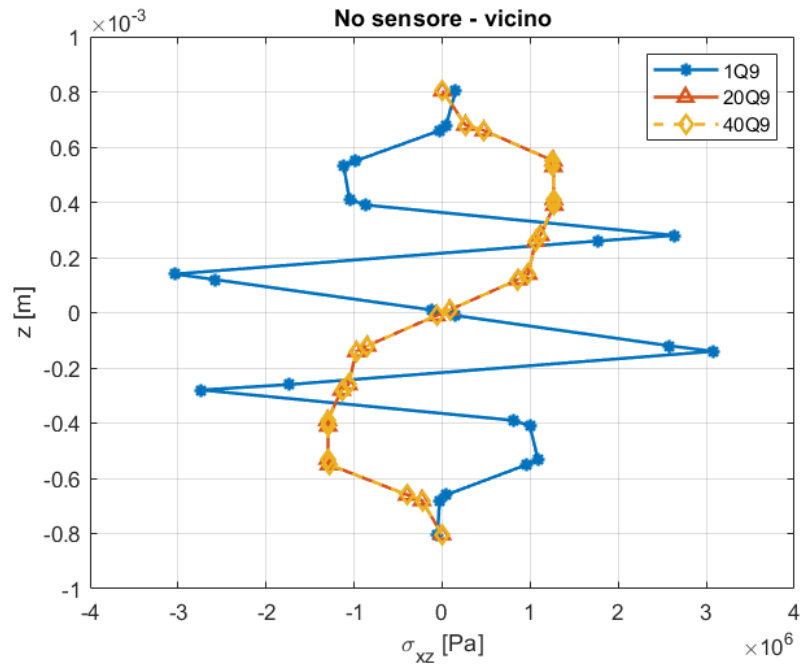


Figura 4.75: Andamento σ_{xz} lungo lo spessore vicino al sensore.

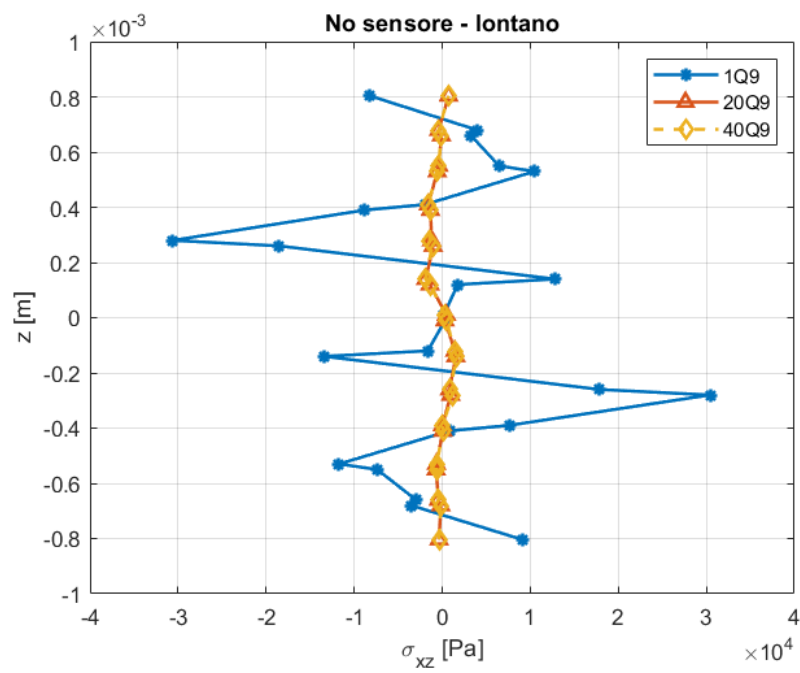
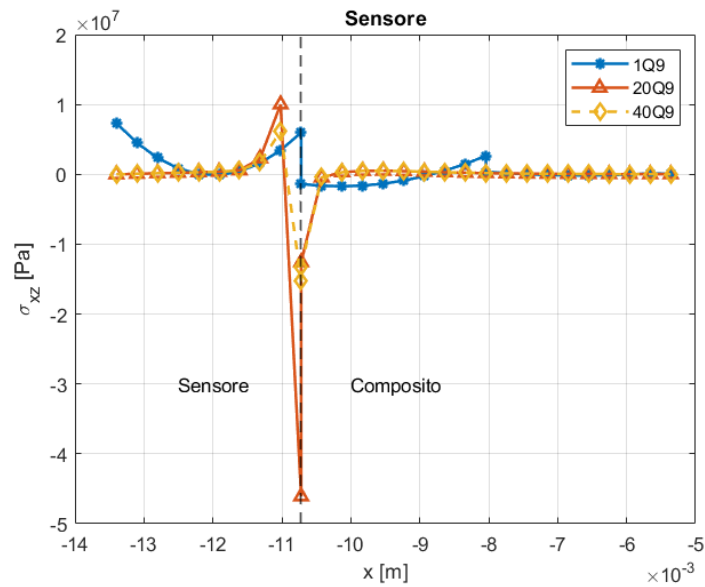


Figura 4.76: Andamento σ_{xz} lungo lo spessore lontano dal sensore.

Figura 4.77: Andamento σ_{xz} lungo l'asse x.

4.3.2.3 Laminato con sensore + resin pocket

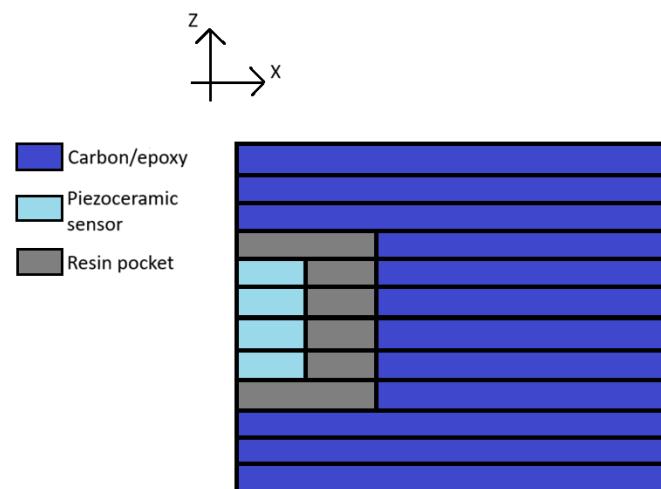


Figura 4.78: Geometria del laminato con sensore + resin pocket.

Nella configurazione con sensore e resin pocket, oltre alla presenza del sensore piezoelettrico posizionato nei quattro strati centrali del laminato, si ha la presenza di una resin pocket che circonda il sensore. Essa avrà uno spessore pari a $6 t_{ply}$ e si estende in direzione x per una lunghezza pari a $40 t_{ply}$ negli strati superiore e inferiore al sensore e per una lunghezza pari a $20 t_{ply}$ negli strati in cui è presente il sensore. Si precisa che la resin pocket viene considerata avente delle proprietà costanti e non dipendenti dall'evoluzione del ciclo di cura, ciò dunque introduce un'approssimazione all'interno del modello. In Tabella 4.14 vengono rappresentati i valori delle caratteristiche relative alla resin pocket (3501-6 neat resin).

Proprietà	Valore	Unità di misura
Modulo elastico E	$3.5 \cdot 10^9$	Pa
Poisson ratio ν	0.30	-
Densità ρ	$1.26 \cdot 10^3$	kg/m^3
Coefficiente di espansione termica α	$50 \cdot 10^{-6}$	$ppm/^\circ C$

Tabella 4.14: Proprietà 3501-6 neat resin [30].

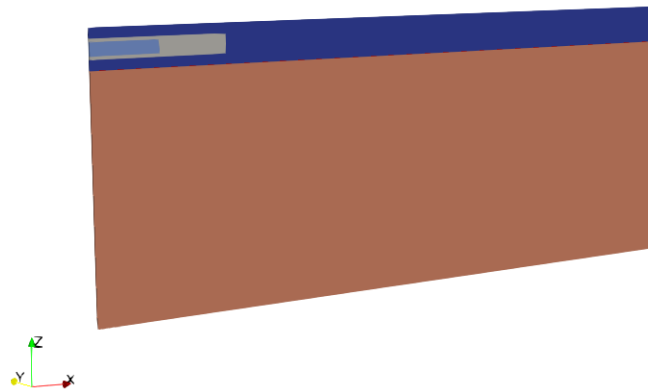


Figura 4.79: Creazione del modello.



Figura 4.80: Dettaglio del modello senza la presenza del tool.

Nelle Figure 4.81, 4.82, 4.83 è possibile vedere il dettaglio delle discretizzazioni con le diverse mesh.



Figura 4.81: Discretizzazione della sezione con 1 elemento Q9.

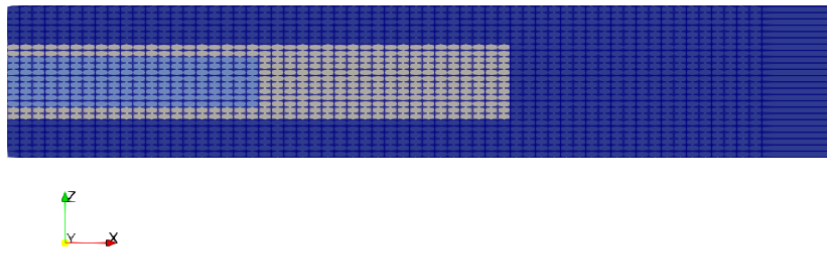


Figura 4.82: Discretizzazione della sezione con 20 elementi Q9.

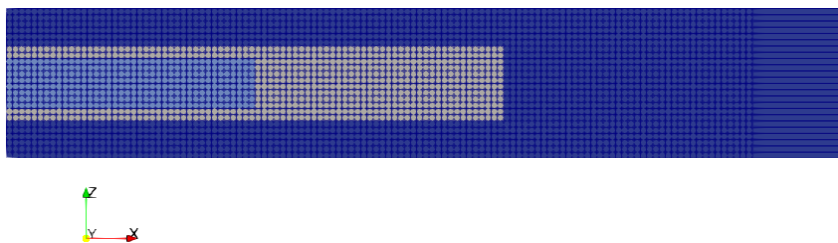


Figura 4.83: Discretizzazione della sezione con 40 elementi Q9.

In Figura 4.84 viene rappresentato lo spostamento verticale del laminato con sensore + resin pocket. Si può osservare come, per via del ciclo di cura, si abbia uno schiacciamento del modello con una conseguente riduzione di spessore. Tale variazione di spessore si riduce man mano che ci si avvicina alla zona in cui sono presenti il sensore e la resin pocket, poichè il sensore non è soggetto allo shrinkage chimico e la resin pocket viene considerata avente delle proprietà costanti e non dipendenti dall'evoluzione del ciclo di cura.

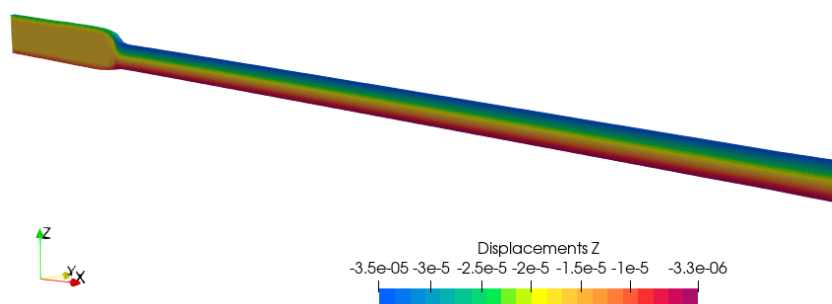


Figura 4.84: Spostamento verticale del laminato con sensore + resin pocket.

- **Andamento σ_{xx}**

In Figura 4.85 viene rappresentato l'andamento della σ_{xx} nella zona sensore + resin pocket. In Figura 4.86 viene rappresentata l'evoluzione nel tempo della σ_{xx} all'interno del sensore per via del ciclo di cura, in particolare si può vedere come dopo la rimozione dal tool si raggiunga

un picco di tensione. Nelle Figure 4.87, 4.88, 4.89 è possibile osservare l'andamento della σ_{xx} lungo lo spessore in tre diverse zone del laminato, in particolare si può notare l'andamento a zig zag dovuto al cambio di laminazione tra i vari strati. In questo caso, la presenza del sensore va a creare una perturbazione del campo di stress che va progressivamente svanendo man mano che ci allontaniamo dal sensore. In Figura 4.90 è possibile osservare l'andamento della σ_{xx} lungo l'asse x, in particolare si può notare la presenza di picchi di tensione in corrispondenza dei cambi di materiale, nel passaggio dal sensore alla resin pocket e dalla resin pocket al composito.

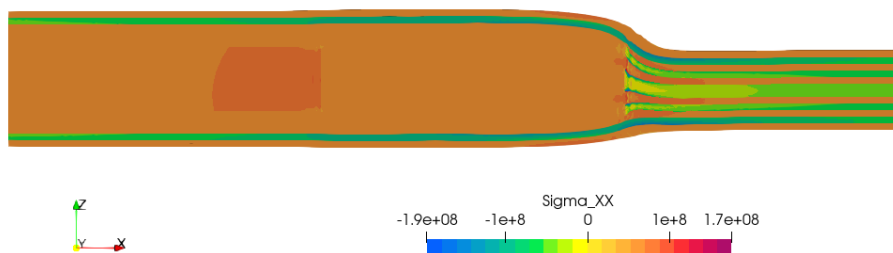


Figura 4.85: Andamento σ_{xx} nella zona sensore + resin pocket.

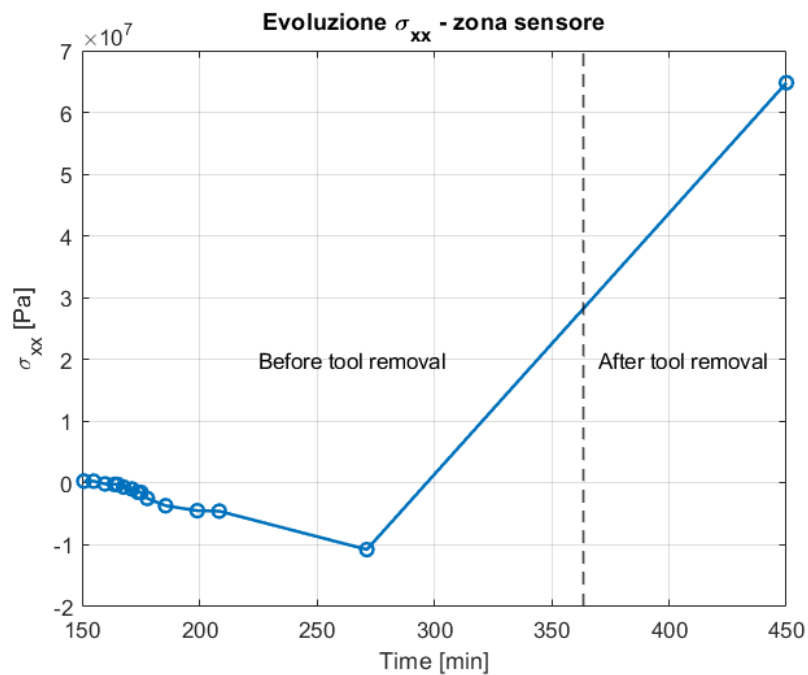


Figura 4.86: Evoluzione nel tempo σ_{xx} all'interno del sensore.

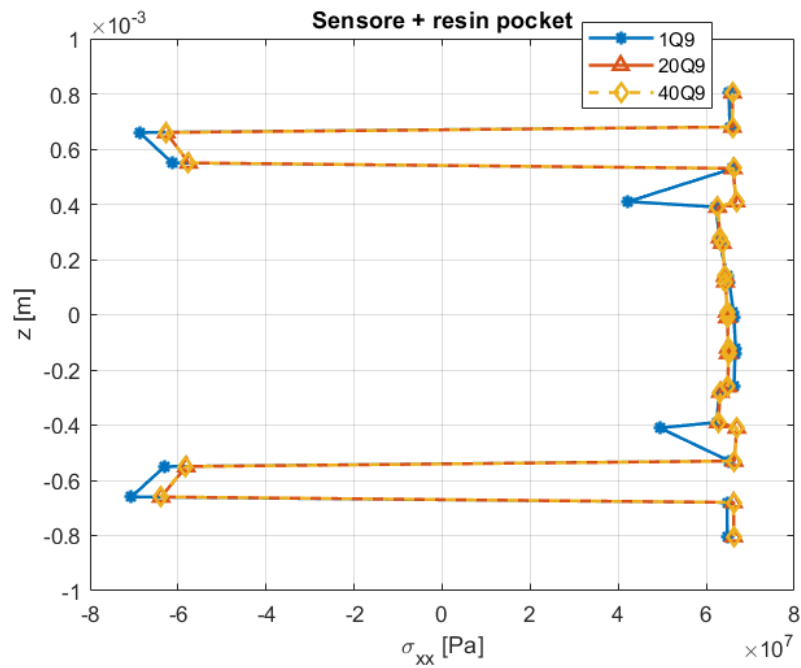


Figura 4.87: Andamento σ_{xx} lungo lo spessore nella zona sensore + resin pocket.

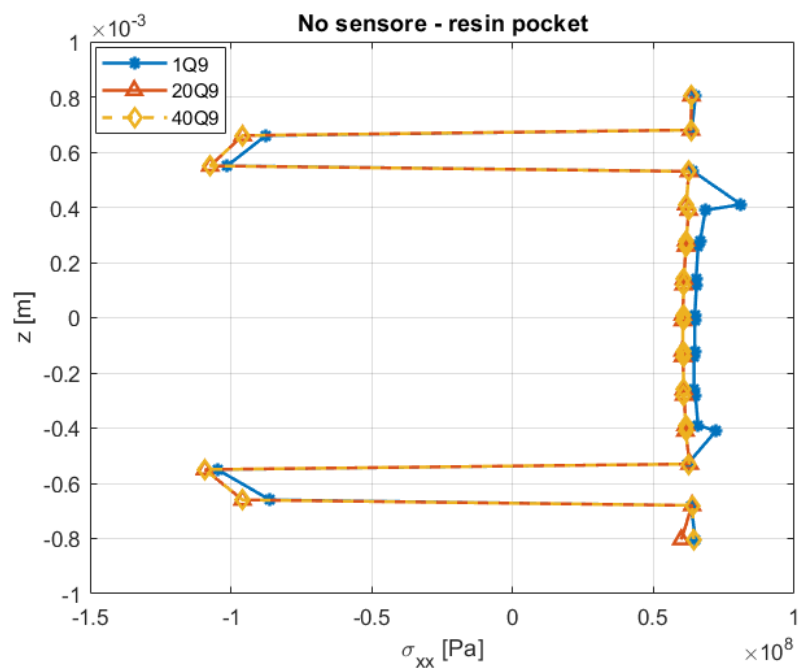


Figura 4.88: Andamento σ_{xx} lungo lo spessore nella zona della resin pocket.

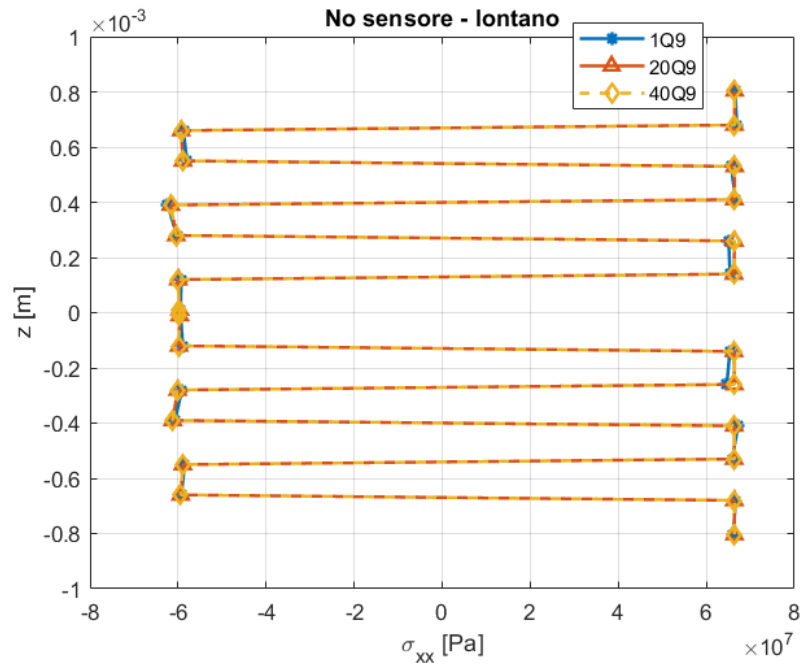


Figura 4.89: Andamento σ_{xx} lungo lo spessore lontano dal sensore.

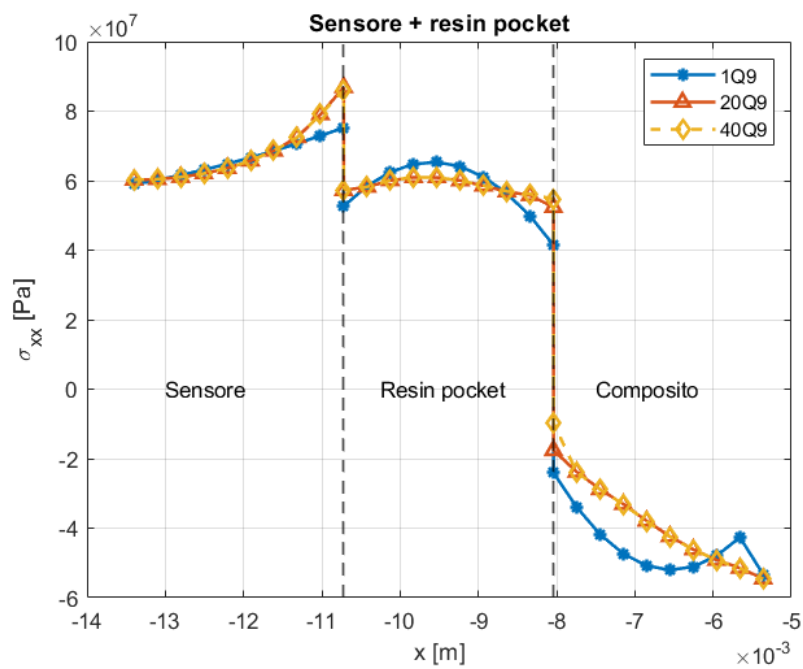


Figura 4.90: Andamento σ_{xx} lungo l'asse x.

- **Andamento σ_{zz}**

In Figura 4.91 viene rappresentato l'andamento della σ_{zz} nella zona sensore + resin pocket. In Figura 4.92 viene rappresentata l'evoluzione nel tempo della σ_{zz} all'interno del sensore per

via del ciclo di cura, in particolare si può vedere come dopo la rimozione dal tool si raggiunga un picco di tensione. Nelle Figure 4.93, 4.94, 4.95 è possibile osservare l'andamento della σ_{zz} lungo lo spessore in tre diverse zone del laminato, in particolare si può notare come la presenza del sensore vada a creare una perturbazione del campo di stress che va progressivamente svanendo man mano che ci allontaniamo dal sensore. In Figura 4.96 è possibile osservare l'andamento della σ_{zz} lungo l'asse x, in particolare si può notare la presenza di picchi di tensione in corrispondenza dei cambi di materiale, nel passaggio dal sensore alla resin pocket e dalla resin pocket al composito.

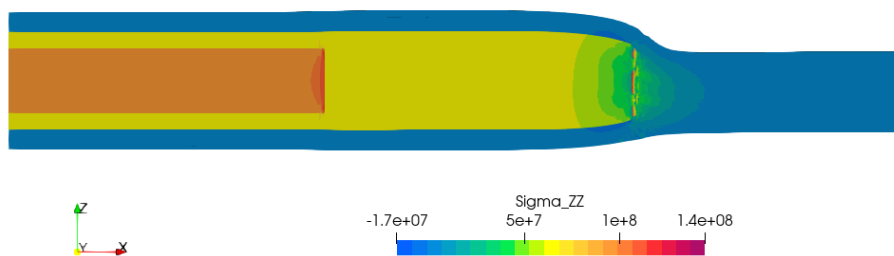


Figura 4.91: Andamento σ_{zz} nella zona sensore + resin pocket.

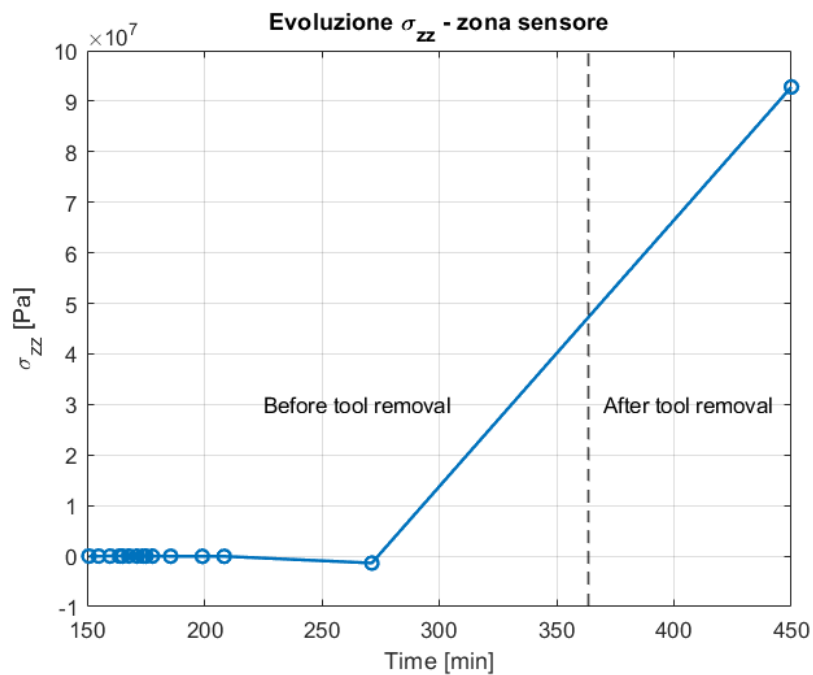


Figura 4.92: Evoluzione nel tempo σ_{zz} all'interno del sensore.

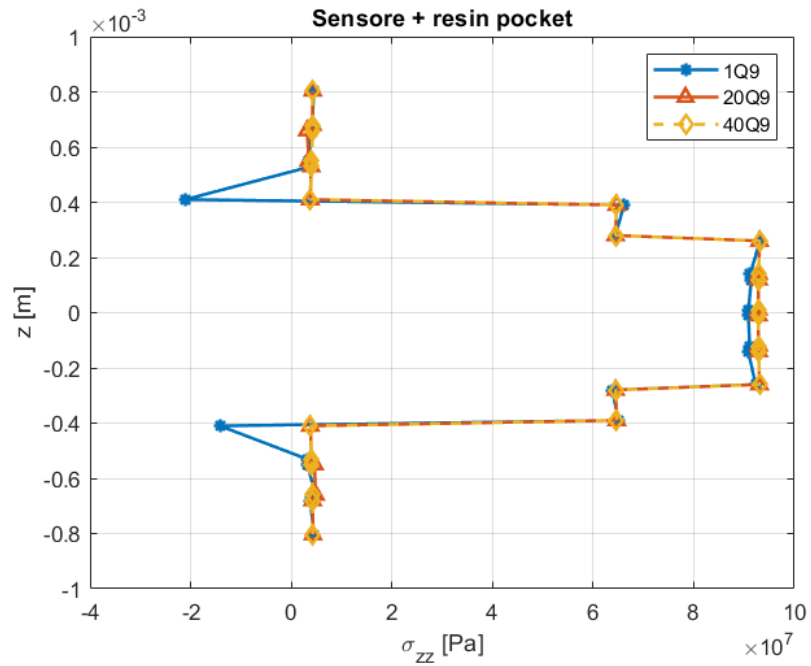


Figura 4.93: Andamento σ_{zz} lungo lo spessore nella zona sensore + resin pocket.

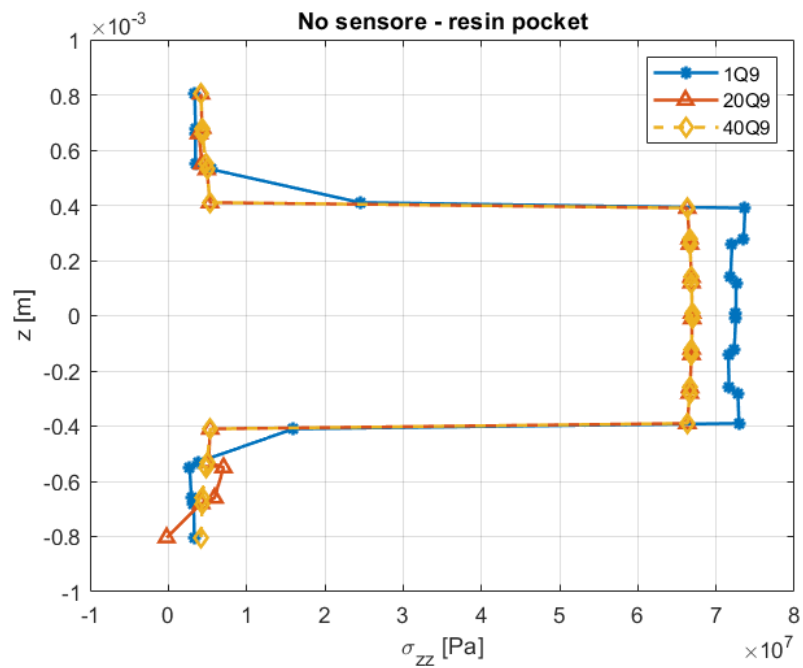


Figura 4.94: Andamento σ_{zz} lungo lo spessore nella zona della resin pocket.

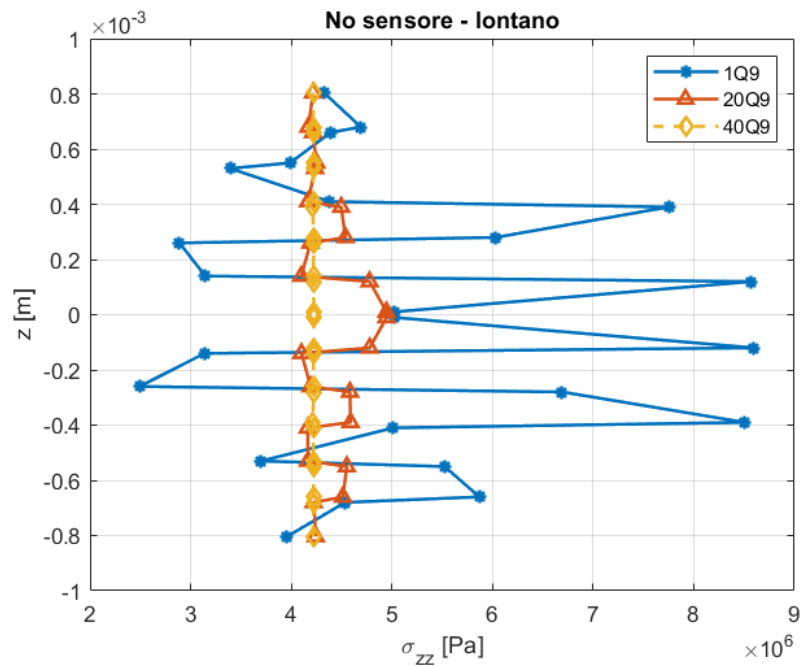


Figura 4.95: Andamento σ_{zz} lungo lo spessore lontano dal sensore.

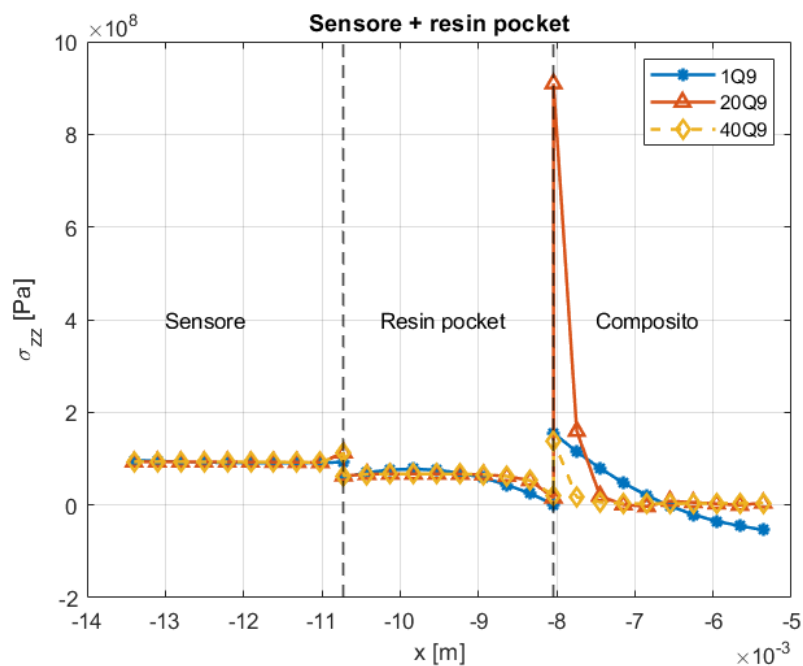


Figura 4.96: Andamento σ_{zz} lungo l'asse x.

- **Andamento σ_{xz}**

In Figura 4.97 viene rappresentato l'andamento della σ_{xz} nella zona sensore + resin pocket. Nelle Figure 4.98, 4.99, 4.100 è possibile osservare l'andamento della σ_{xz} lungo lo spessore in

tre diverse zone del laminato, in particolare si può notare come la presenza del sensore vada a creare una perturbazione del campo di stress che va progressivamente svanendo man mano che ci allontaniamo dal sensore. In Figura 4.101 è possibile osservare l'andamento della σ_{xz} lungo l'asse x, in particolare si può notare la presenza di picchi di tensione in corrispondenza dei cambi di materiale, nel passaggio dal sensore alla resin pocket e dalla resin pocket al composito.

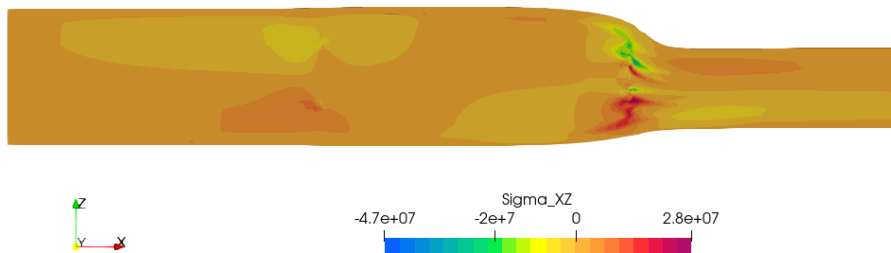


Figura 4.97: Andamento σ_{xz} nella zona sensore + resin pocket.

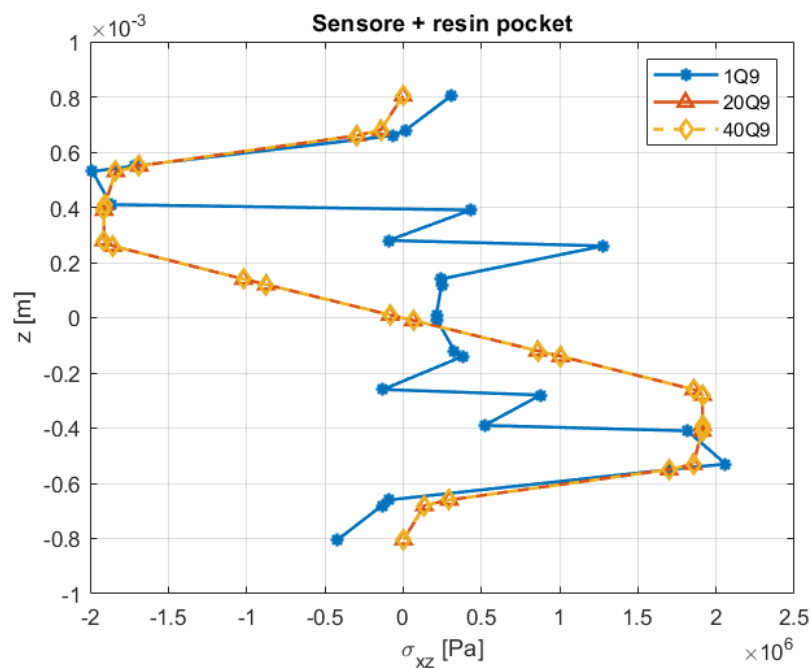


Figura 4.98: Andamento σ_{xz} lungo lo spessore nella zona sensore + resin pocket.

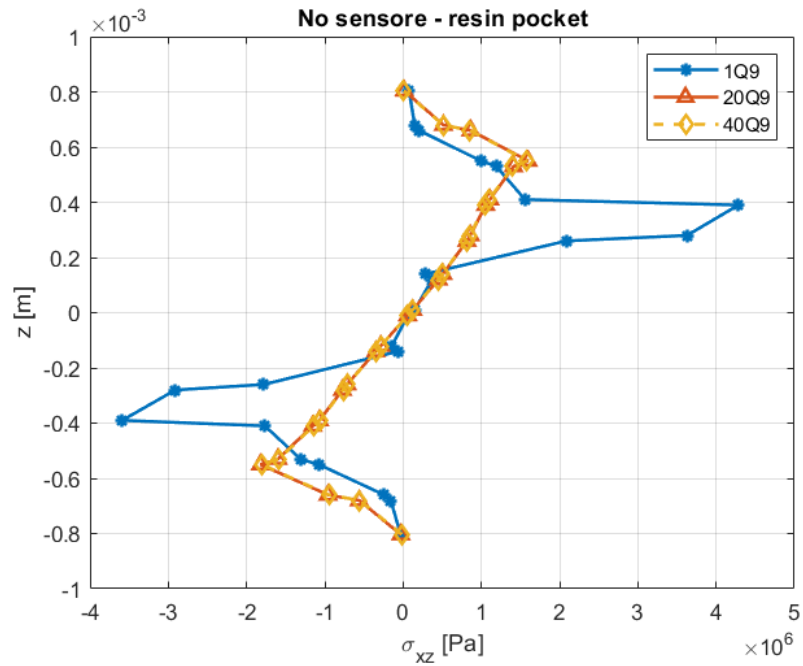


Figura 4.99: Andamento σ_{xz} lungo lo spessore nella zona della resin pocket.

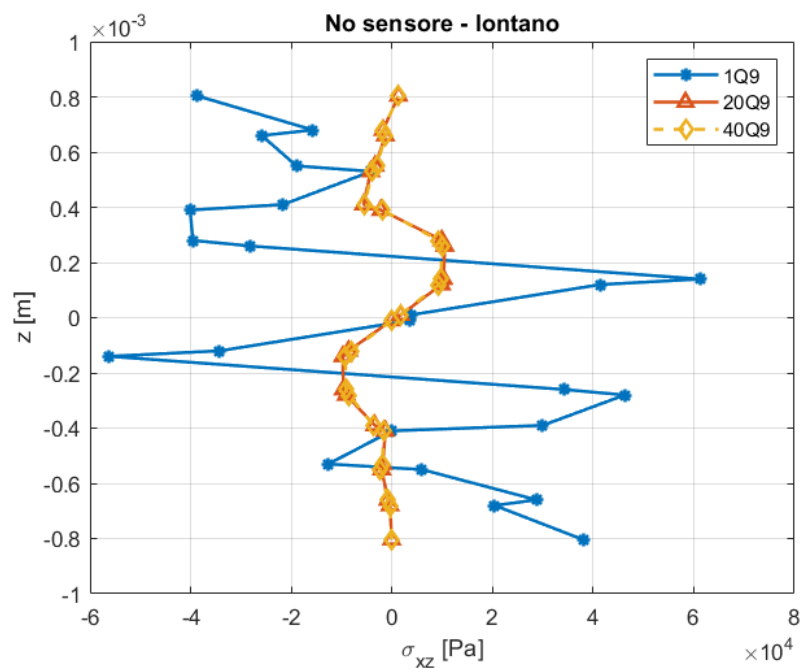


Figura 4.100: Andamento σ_{xz} lungo lo spessore lontano dal sensore.

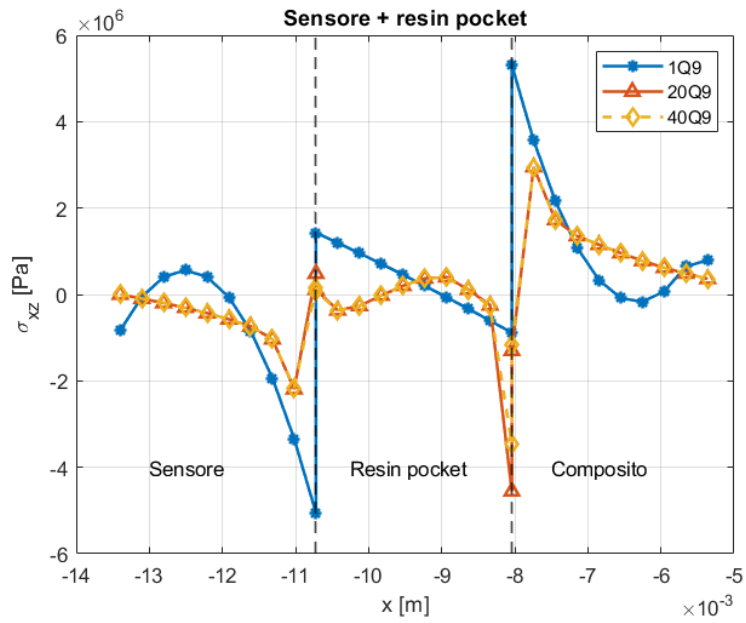


Figura 4.101: Andamento σ_{xz} lungo l'asse x.

4.3.2.4 Confronto tra i modelli

- Confronto σ_{xx}

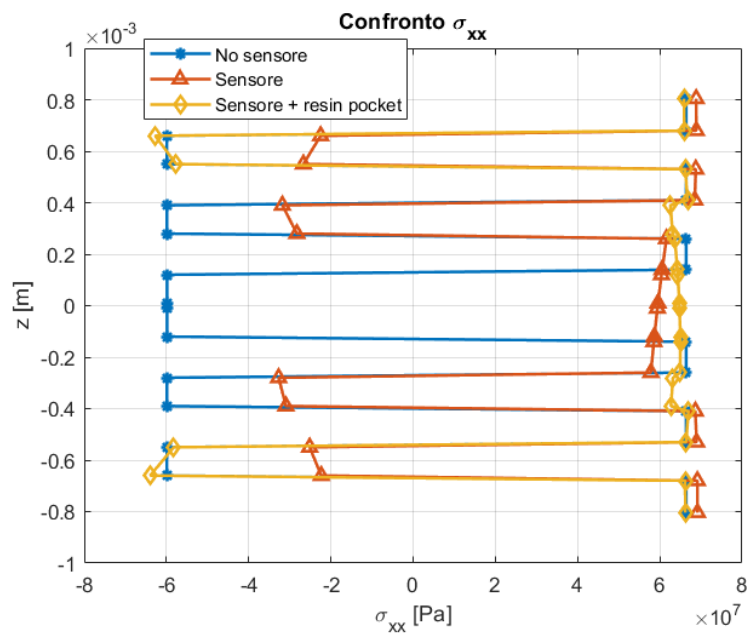
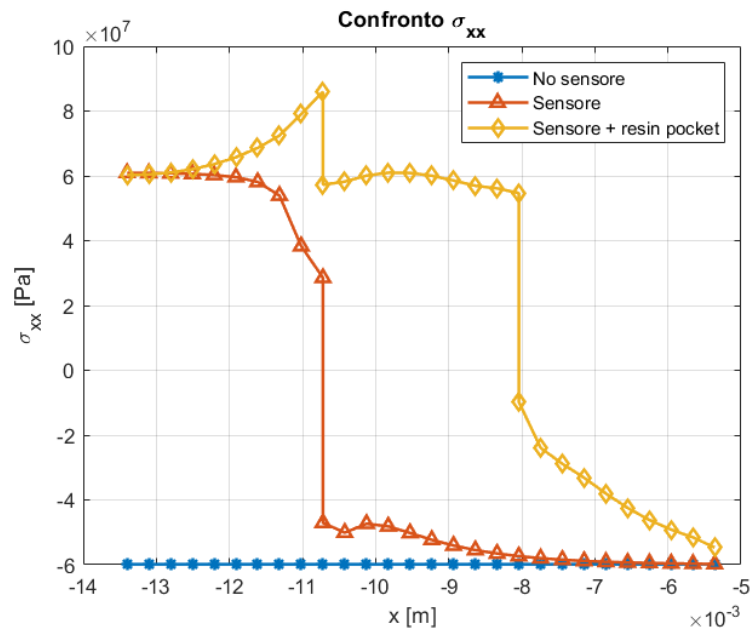
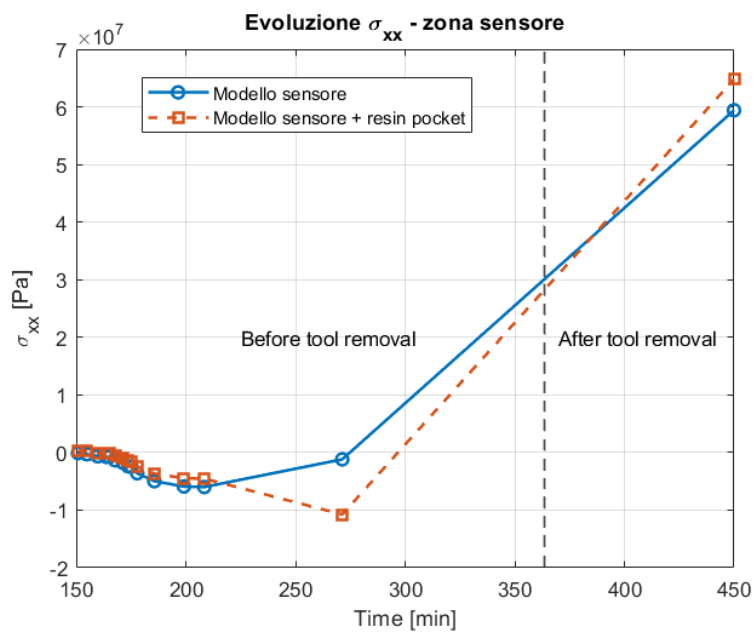


Figura 4.102: Confronto σ_{xx} lungo lo spessore.

Figura 4.103: Confronto σ_{xx} lungo l'asse x.Figura 4.104: Confronto evoluzione nel tempo σ_{xx} all'interno del sensore.

- Confronto σ_{zz}

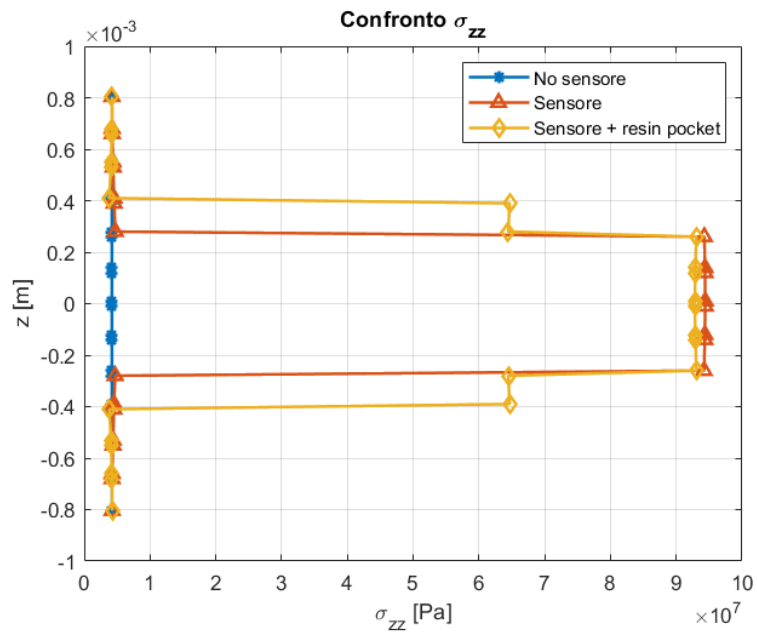


Figura 4.105: Confronto σ_{zz} lungo lo spessore.

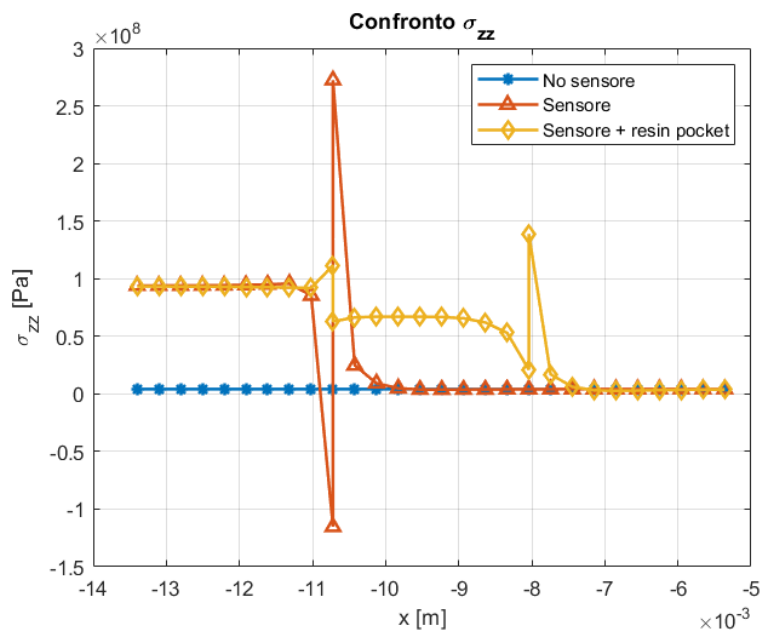


Figura 4.106: Confronto σ_{zz} lungo l'asse x .

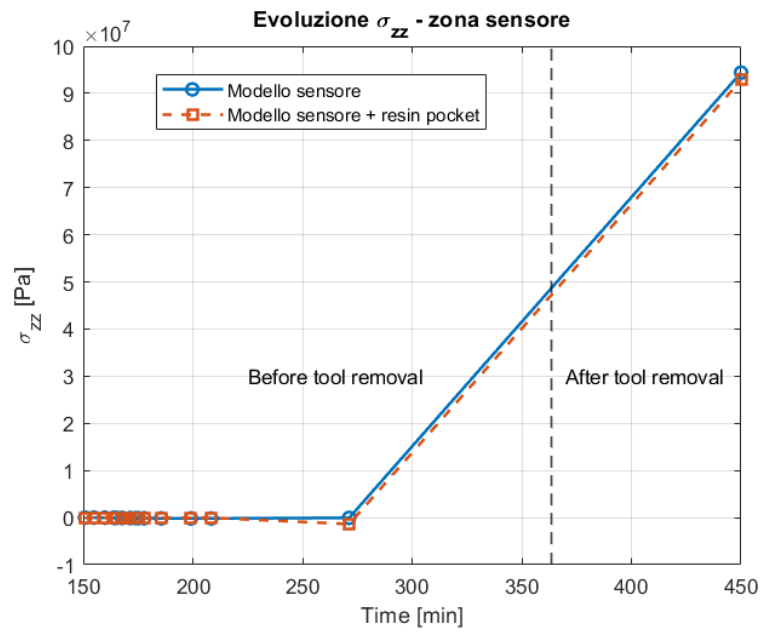


Figura 4.107: Confronto evoluzione nel tempo σ_{zz} all'interno del sensore.

- Confronto σ_{xz}

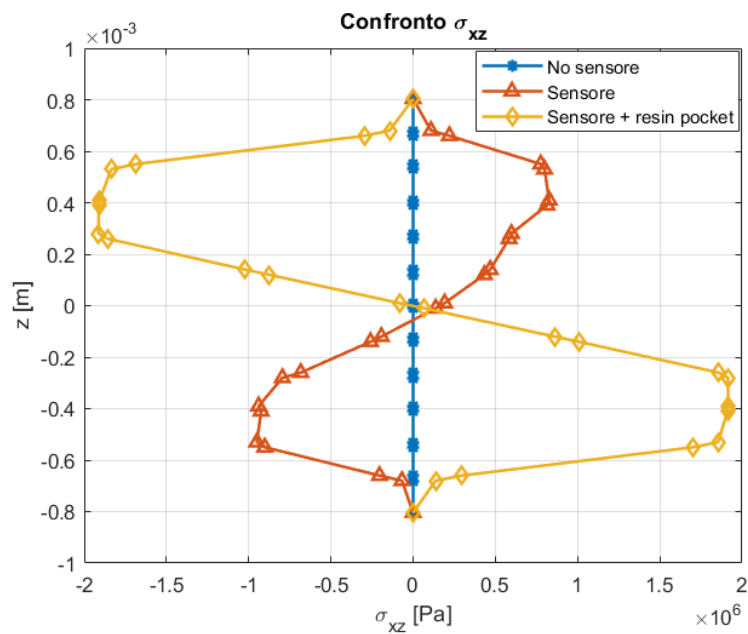


Figura 4.108: Confronto σ_{xz} lungo lo spessore.

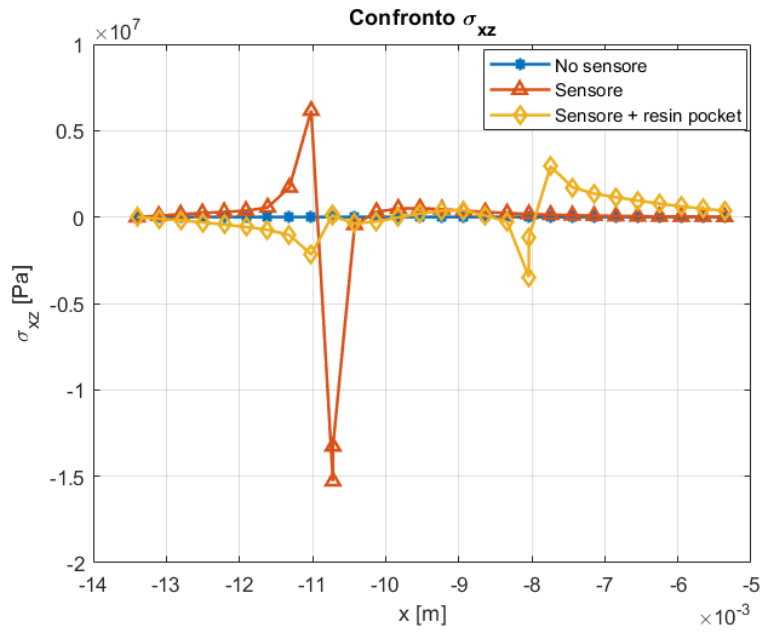


Figura 4.109: Confronto σ_{xz} lungo l'asse x.

Conclusioni

Durante questo lavoro di tesi, attraverso la creazione di una serie di modelli, è stato possibile analizzare il processo di manifattura di materiali compositi con sensori piezoelettrici incorporati. In particolare, si è andati ad analizzare come la presenza del sensore vada ad impattare sull'andamento delle tensioni nell'area in cui è presente il sensore stesso.

Nel primo capitolo è stato possibile vedere una panoramica generale sul processo di manifattura di componenti realizzati in materiale composito, concentrandosi in particolare sulla spiegazione del funzionamento del ciclo di cura a cui vengono sottoposti i componenti e sull'evoluzione dei parametri di processo principali. È seguita una successiva panoramica sullo Structural Health Monitoring (SHM) di strutture in composito, focalizzando l'attenzione su come l'utilizzo di sensori piezoelettrici possa permettere il monitoraggio dell'integrità strutturale dei componenti e su come sia importante adottare delle opportune tecniche di inclusione per minimizzare l'impatto che la presenza del sensore ha all'interno del componente.

Nel secondo capitolo si è andati a vedere come ci si può approcciare da un punto di vista numerico al processo di manifattura. È stata introdotta la possibilità di creare dei modelli discretizzati secondo la cosiddetta Carrera Unified Formulation (CUF). In particolare, si è visto come, attraverso l'utilizzo di funzioni di forma e funzioni di espansione, è possibile mantenere sempre un campo di spostamenti con una formulazione 3D, anche se la discretizzazione del modello dovesse avvenire come se fosse un modello trave 1D.

Nel terzo capitolo si è andati ad effettuare una serie di assessment del modello numerico, in modo tale da prendere confidenza col codice e testare il funzionamento del codice stesso, oltre che valutare la correttezza e la bontà dei modelli creati e dei risultati ottenuti. Si è andati a creare modelli via via più complessi, andando man mano ad aumentare il numero di elementi presenti sulle sezioni, così da vedere come variano i risultati al variare del numero di gradi di libertà della struttura, oltre a valutare la differenza che si ha tra la discretizzazione della sezione attraverso l'utilizzo di funzioni di espansione di Taylor (TE) e la discretizzazione della sezione attraverso l'utilizzo di funzioni di espansione di Lagrange (LE).

Nel quarto capitolo si è andati ad affrontare il vero focus della tesi, andando ad analizzare delle strutture con inclusioni. Dopo un'introduzione sul problema relativo all'accoppiamento elettro-meccanico, si è andati ad effettuare una serie di assessment volti a valutare l'interazione tra il sensore e il materiale ospitante.

Sono stati dapprima inseriti due assessment con lo scopo di valutare la bontà e la correttezza dei modelli creati e dei risultati ottenuti. Nel primo assessment, relativo ad una trave bimorfa in PVDF, è stato possibile vedere come l'applicazione di una differenza di potenziale al materiale piezoelettrico possa generare una deformazione sottoforma di bending della struttura, per via dell'effetto piezoelettrico inverso. Nel secondo assessment, relativo ad un laminato composito a 6 strati, è stata effettuata un'analisi meccanica per andare a valutare l'andamento delle tensioni interlaminari che si hanno nell'interfaccia tra il sensore e il composito.

Successivamente si è andati a valutare come varia l'analisi nel momento in cui si ha un componente che viene posto ad un determinato ciclo di cura. In particolare, si utilizza un ciclo di cura che segue una serie di step temporali che fanno fede al cosiddetto modello CHILE (Cure Hardening Instantaneously Linear Elastic). Si è dunque inserito un assessment, relativo ad un laminato composito a 8 strati, con lo scopo di andare a valutare l'andamento di alcune tensioni sia nella zona del sensore che lontano dal sensore, così da confrontare gli andamenti.

È stato infine introdotto un caso test, relativo ad un laminato composito a 12 strati, suddiviso in tre diverse casistiche. Il laminato è stato difatti analizzato dapprima senza sensore, poi con il sensore, e poi con la presenza di sensore e resin pocket. Si è andati a valutare l'andamento di alcune tensioni sia nella zona del sensore che lontano dal sensore, e si è andati infine ad effettuare un confronto tra i vari modelli.

Le analisi svolte hanno evidenziato come la presenza del sensore crei una perturbazione del campo di stress che va svanendo man mano che ci si allontana dal sensore. In particolare, è stato possibile notare come all'interfaccia tra un materiale e l'altro si abbiano i picchi di tensione più elevati. Questo chiaramente crea delle problematiche relative all'integrità del componente, poichè si ha la presenza di stress concentrati. Eventuali strategie di mitigazione del problema potrebbero essere legate all'ottimizzazione del processo di manifattura dei componenti, cercando di utilizzare delle tecniche sempre più precise e raffinate, alla scelta di un adatto e accurato posizionamento del sensore all'interno del componente, ad esempio nel piano medio del laminato oppure sulla superficie del laminato a seconda della necessità, oppure all'utilizzo di un sensore con una determinata forma. Si tratta sicuramente di un campo in cui c'è ancora tanto da ricercare e sviluppare, in vista di una sempre maggiore efficienza per il futuro.

Bibliografia

- [1] N. Zobeiry. *Composite Materials: Introduction*. PhD thesis, Research Associate and Lecturer, Materials Engineering Department, the University of British Columbia, 2019.
- [2] Composite Materials: Introduzione. Appunti del corso di Tecnologie Aerospaziali del Prof. Enrico Zappino, Politecnico di Torino, 2024.
- [3] N. Zobeiry. *Composite Materials: Fiber*. PhD thesis, Research Associate and Lecturer, Materials Engineering Department, the University of British Columbia, 2019.
- [4] Composite Materials: Fibre. Appunti del corso di Tecnologie Aerospaziali del Prof. Enrico Zappino, Politecnico di Torino, 2024.
- [5] N. Zobeiry. *Composite Materials: Matrix*. PhD thesis, Research Associate and Lecturer, Materials Engineering Department, the University of British Columbia, 2019.
- [6] Composite Materials: Matrici. Appunti del corso di Tecnologie Aerospaziali del Prof. Enrico Zappino, Politecnico di Torino, 2024.
- [7] N. Zobeiry. *Composite Materials: Manufacturing Processes and Defects*. PhD thesis, Research Associate and Lecturer, Materials Engineering Department, the University of British Columbia, 2019.
- [8] Composite Materials: Processi produttivi. Appunti del corso di Tecnologie Aerospaziali del Prof. Enrico Zappino, Politecnico di Torino, 2024.
- [9] N. Zobeiry. *Composite Materials: Manufacturing of Boeing 787 and Boeing 777X*. PhD thesis, Research Associate and Lecturer, Materials Engineering Department, the University of British Columbia, 2019.
- [10] Composite Materials: Autoclave. Appunti del corso di Tecnologie Aerospaziali del Prof. Enrico Zappino, Politecnico di Torino, 2024.
- [11] Composite Materials: Difetti, Tensioni residue, Deformazioni. Appunti del corso di Tecnologie Aerospaziali del Prof. Enrico Zappino, Politecnico di Torino, 2024.

- [12] B. Meemary, D. Vasiukov, M. Deléglise-Lagardère, and S. Chaki. Sensors integration for structural health monitoring in composite pressure vessels: A review. *Elsevier*, 2025. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263822324006743?via%3Dihub>.
- [13] C. Tuloup, W. Harizi, Z. Aboura, Y. Meyer, K. Khellil, and R. Lachat. On the use of in-situ piezoelectric sensors for the manufacturing and structural health monitoring of polymer-matrix composites: A literature review. *Elsevier*, 2019. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0263822318347342?via%3Dihub>.
- [14] L.B. Carani, J. Humphrey, M.M. Rahman, and O.I. Okoli. Advances in embedded sensor technologies for impact monitoring in composite structures. *Journal of Composites Science*, 2024. URL <https://www.mdpi.com/2504-477X/8/6/201>.
- [15] H. Montazerian, A. Rashidi, A. Milani, and M. Hoorfar. Integrated sensors in advanced composites: A critical review. *Critical Reviews in Solid State and Material Sciences*, 45:1–52, 06 2019. URL <https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/10408436.2019.1588705>.
- [16] WELLPCB Website: Come funziona il piezoelettrico: la guida definitiva completa. URL <https://pcbitalian.com/Come-funziona-il-piezoelettrico-la-guida-definitiva-completa.html>.
- [17] AUDIOWELL Website: How Piezoelectricity Works?, 2020. URL <https://www.audiowell.com/technology/187.html>.
- [18] Y. Meyer, R. Lachat, and G. Akhras. A review of manufacturing techniques of smart composite structures with embedded bulk piezoelectric transducers. *Smart Materials and Structures*, 2019. URL <https://utc.hal.science/hal-02116494v1>.
- [19] E. Zappino, N. Zobeiry, M. Petrolo, R. Vaziri, E. Carrera, and A. Poursartip. Analysis of process-induced deformations and residual stresses in curved composite parts considering transverse shear stress and thickness stretching. *Elsevier*, 2020. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0263822319337043?via%3Dihub>.
- [20] E. Carrera, M. Cinefra, M. Petrolo, and E. Zappino. *Finite element analysis of structures through unified formulation*. John Wiley & Sons, 2014. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/book/10.1002/9781118536643>.
- [21] Notes on FEM for Aeroelasticity. Appunti del corso di Aeroelasticità del Prof. Marco Petrolo, Politecnico di Torino, 2024.
- [22] N. Grieco. Calcolo della freccia di una trave, 2019. URL <https://www.nunziogrieco.it/calcolo-della-freccia-di-una-trave/>.
- [23] E. Zappino and E. Carrera. Advanced modeling of embedded piezo-electric transducers for the health-monitoring of layered structures. *International Journal of Smart and Nano Materials*, 2020. URL <https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/19475411.2020.1841038>.

-
- [24] E. Zappino, E. Carrera, and D. Scano. Advanced tailored kinematic models for multi-field analysis of laminated structures. *XI ECCOMAS Thematic Conference on Smart Structures and Materials SMART 2025*, Linz, Austria, 1-3 July 2025.
- [25] Materiali e laminazioni tipiche in ambito aerospaziale. Appunti del corso di Modellazione Numerica e Tecniche di Simulazione di Strutture Aerospaziali del Prof. Salvatore Brischetto, Politecnico di Torino, 2024.
- [26] F. Miglioretti and E. Carrera. Application of a refined multi-field beam model for the analysis of complex configurations. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 22 (1-2):52–66, 2015. URL <http://dx.doi.org/10.1080/15376494.2014.912365>.
- [27] J. Najd, E. Zappino, E. Carrera, W. Harizi, and Z. Aboura. A variable kinematic model for the prediction of capacitance variations in embedded pzt sensors. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2023. URL <https://doi.org/10.1177/1045389X221121974>.
- [28] E. Zappino and M. Petrolo. Advanced multi-field modeling for the virtual manufacturing of layered structures with embedded sensors. *XI ECCOMAS Thematic Conference on Smart Structures and Materials SMART 2025*, Linz, Austria, 1-3 July 2025.
- [29] W. Hwang and H.C. Park. Finite element modeling of piezoelectric sensors and actuators. *AIAA Journal*, 1993. URL <https://arc.aiaa.org/doi/10.2514/3.11707>.
- [30] D.A. Singh and A.J. Vizzini. Structural integrity of composite laminates with interlaced actuators. *Smart Materials and Structures*, 1994. URL <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0964-1726/3/1/009>.