

POLITECNICO DI TORINO

Laurea magistrale in Ingegneria Aerospaziale



Monitoraggio e rilevamento del danno in strutture composite attraverso tecniche accelerometriche

Relatori

Prof. Matteo FILIPPI

Prof. Enrico ZAPPINO

Prof. Rodolfo AZZARA

Candidato

Sibilla CALTA

Aprile 2026

Sommario

Il monitoraggio strutturale rappresenta un tema di crescente importanza e un elemento fondamentale per garantire l'affidabilità e la sicurezza dei materiali compositi impiegati in ambito aerospaziale, aspetto chiave in questo campo.

Tali materiali, pur garantendo ottime prestazioni in termini di rapporto resistenza/peso e proprietà meccaniche specifiche, sono particolarmente vulnerabili a fenomeni di danneggiamento interno, come delaminazioni, cricche o difetti localizzati, spesso difficili da rilevare mediante tecniche di ispezione convenzionali. La capacità di identificare precocemente tali difetti è quindi cruciale per prevenire guasti strutturali e ottimizzare la manutenzione preventiva.

La presente tesi affronta questo tema e la rilevazione del danno mediante l'impiego combinato di tecniche accelerometriche e ottiche in strutture composite.

Dopo una prima introduzione teorica alla *Carrera Unified Formulation (CUF)*, che facilita l'identificazione di variazioni correlate alla presenza di danni, la tesi prosegue con la descrizione dei criteri per l'identificazione del danno.

Nella fase numerica, il codice CUF è stato utilizzato per simulare la risposta di strutture composite integre e danneggiate, valutando gli effetti del danno sulla distribuzione delle frequenze proprie e sui modi di vibrare. In parallelo, è stata condotta un'analisi sperimentale su campioni reali mediante sensori accelerometrici, al fine di validare i risultati numerici.

I risultati ottenuti mostrano una buona coerenza tra simulazioni e misure sperimentali, confermando l'efficacia di questo approccio combinato per la localizzazione e la quantificazione del danno in strutture composite. Tale metodologia costituisce un passo significativo verso lo sviluppo di sistemi di monitoraggio strutturale automatici e non invasivi, con potenziali applicazioni nel settore aerospaziale e in altre aree ingegneristiche in cui l'integrità delle strutture composite è critica.

In conclusione, la tesi dimostra come la combinazione di modelli numerici e tecniche di misura sperimentali possa costituire una strategia efficace per il monitoraggio predittivo, la manutenzione e la gestione sicura di componenti costituiti da materiali compositi.

Indice

Elenco delle tabelle	III
Elenco delle figure	IV
1 Introduzione	1
1.1 Tecniche basate su misure accelerometriche	6
1.2 Tecniche ottiche	14
2 CUF	28
2.1 Concetti generali	31
2.2 Formulazione unificata	32
3 Parte numerica	43
3.1 Analisi alle vibrazioni libere-103	43
3.1.1 Materiale e stacking sequence	43
3.1.2 Modellazione del danno	44
3.1.3 Condizioni al contorno	46
3.1.4 Formulazione del problema modale	46
3.1.5 Pannello integro	47
3.1.6 Pannello con danno in posizione 1	49
3.1.7 Pannello con danno in posizione 2	51
3.2 Analisi di risposta in frequenza-106	53
3.2.1 Test d'impatto	57
3.2.2 Test mediante shaker	58
4 Parte sperimentale	64
4.1 Pannello rettangolare	69
4.2 Pannello integro	71
4.3 Pannello con danno in posizione 1	73
4.4 Pannello con danno in posizione 2	75
4.5 Pannelli con danno doppio	77

4.6	Pannello con taglio passante	79
5	Analisi dei risultati	82
5.1	Risultati numerici	82
5.1.1	MAC	82
5.2	Risultati sperimentali	96
5.2.1	Posizione 1	96
5.2.2	Posizione 2	99
5.2.3	Confronto risultati numerici e sperimentali	103
5.2.4	Pannelli con danno doppio	108
5.2.5	Pannello con taglio passante	113
6	Conclusioni	116
A	Matrice di rigidezza	119
B	Forme modali	121
B.1	Pannello integro	121
B.2	Pannello con danno L=11 cm in posizione 1	124
B.3	Pannello con danno L=15.5 cm in posizione 1	126
B.4	Pannello con danno L=19 cm in posizione 1	129
B.5	Pannello con danno L=11 cm in posizione 2	131
B.6	Pannello con danno L=15.5 cm in posizione 2	134
B.7	Pannello con danno L=19 cm in posizione 2	137
	Bibliografia	140

Elenco delle tabelle

2.1	Forma compatta dei polinomiali di tipo Taylor	34
2.2	Coordinate normalizzate dell'elemento L4	36
2.3	Coordinate normalizzate dell'elemento L9	37
3.1	Frequenze del pannello integro	48
3.2	Frequenze del pannello con danno in posizione 1	50
3.3	Frequenze del pannello con danno in posizione 2	52
4.1	Frequenze del pannello rettangolare integro (a) e danneggiato (b) .	70
4.2	Frequenze del pannello integro	72
4.3	Frequenze del pannello con danno in posizione 1	74
4.4	Frequenze del pannello con danno in posizione 2	76
4.5	Frequenze del pannello con danno doppio L=11 cm affiancato (a), con danno doppio L=15x8 cm sovrapposto (b), con danno doppio L=11 cm (c)	78
4.6	Frequenze del pannello con taglio passante	80

Elenco delle figure

1.1	Funzioni di un SMH	13
1.2	Shearography sistema basato su un interferometro Michelson shearing	18
1.3	Diagramma che mostra i percorsi ottici e relativo sistema di riferimento	18
2.1	Sistema di riferimento della struttura	31
2.2	Elemento di Lagrange a quattro nodi nelle coordinate reali e normalizzate	36
2.3	Elemento di Lagrange a nove nodi nelle coordinate reali e normalizzate	37
2.4	Esempio di modello trave	39
2.5	Esempio di modello piastra	39
2.6	Assemblaggio della matrice di rigidezza globale	41
3.1	File di input per la discretizzazione dello spessore del pannello	45
3.2	Rappresentazione schematica della discretizzazione lungo lo spessore del pannello	45
3.3	Applicazione della mesh al pannello in ambiente Abaqus	45
3.4	File di input per l'introduzione dei vincoli lungo il perimetro del pannello	46
3.5	Posizione 1 del danneggiamento	49
3.6	Posizione 2 del danneggiamento	51
3.7	Sovrapposizione della funzione di risposta del tempo (in blu) e della frequenza (in rosso)	54
3.8	Exponential window per minimizzare gli effetti di leakage	56
3.9	Posizione 1, $x= 0.1333$ m $y=0.06$ m	60
3.10	Posizione 2, $x= 0.2666$ m $y=0.06$ m	60
3.11	Posizione 3, $x= 0.3999$ m $y= 0.06$ m	60
3.12	Posizione 4, $x= 0.5332$ m $y=0.06$ m	60
3.13	Posizione 5, $x= 0.6665$ m $y= 0.06$ m	61
3.14	Posizione 6, $x= 0.1333$ m $y=0.12$ m	61
3.15	Posizione 7, $x= 0.2666$ m $y=0.12$ m	61
3.16	Posizione 8, $x= 0.3999$ m $y= 0.12$ m	61

3.17	Posizione 9, $x= 0.5332$ m $y= 0.12$ m	61
3.18	Posizione 10, $x= 0.6665$ m $y= 0.12$ m	61
3.19	Posizione 11, $x= 0.1333$ m $y= 0.18$ m	62
3.20	Posizione 12, $x= 0.2666$ m $y= 0.18$ m	62
3.21	Posizione 13, $x= 0.3999$ m $y= 0.18$ m	62
3.22	Posizione 14, $x= 0.5332$ m $y= 0.18$ m	62
3.23	Posizione 15, $x= 0.6665$ m $y= 0.18$ m	62
3.24	Posizione 16, $x= 0.1333$ m $y= 0.24$ m	62
3.25	Posizione 17, $x= 0.2666$ m $y= 0.24$ m	63
3.26	Posizione 18, $x= 0.3999$ m $y= 0.24$ m	63
3.27	Posizione 19, $x= 0.5332$ m $y= 0.24$ m	63
3.28	Posizione 20, $x= 0.6665$ m $y= 0.24$ m	63
4.1	Configurazioni dei pannelli con danni singoli	64
4.2	Configurazioni dei pannelli con danni doppi	65
4.3	Configurazione del pannello con taglio passante	65
4.4	Configurazione del banco prova	66
4.5	Shaker impiegato per l'eccitazione del pannello	66
4.6	Dettaglio del sistema di collegamento shaker-pannello	67
4.7	Disposizione dei tre accelerometri	68
4.8	Sistema multicanale di acquisizione dati	68
4.9	Funzioni di risposta in frequenza (FRF) sperimentali dei pannelli rettangolari utilizzate per l'identificazione delle frequenze naturali	69
4.10	Funzione di risposta in frequenza (FRF) sperimentale del pannello integro utilizzata per l'identificazione delle frequenze naturali	71
4.11	Funzioni di risposta in frequenza (FRF) sperimentali dei pannelli con danni $L=11$ cm e $L=15.5$ cm in posizione angolare utilizzate per l'identificazione delle frequenze naturali	73
4.12	Funzione di risposta in frequenza (FRF) sperimentale del pannello con danno $L=19$ cm in posizione angolare utilizzata per l'identifica- zione delle frequenze naturali	73
4.13	Funzioni di risposta in frequenza (FRF) sperimentali dei pannelli con danni $L=11$ cm e $L=15.5$ cm in posizione centrale utilizzate per l'identificazione delle frequenze naturali	75
4.14	Funzione di risposta in frequenza (FRF) sperimentale del pannello con danno $L=19$ cm in posizione centrale utilizzata per l'identifica- zione delle frequenze naturali	75
4.15	Funzioni di risposta in frequenza (FRF) sperimentali dei pannelli con danni doppi affiancati $L=11$ cm e sovrapposti 15×8 cm utilizzate per l'identificazione delle frequenze naturali	77

4.16	Funzione di risposta in frequenza (FRF) sperimentale del pannello con danno doppio L=11 cm utilizzata per l'identificazione delle frequenze naturali	77
4.17	Funzione di risposta in frequenza (FRF) sperimentale del pannello con taglio passante utilizzata per l'identificazione delle frequenze naturali	79
5.1	MAC calcolato tra il pannello integro e con danno L=11 cm	83
5.2	MAC calcolato tra il pannello integro e con danno L=15.5 cm . . .	83
5.3	MAC calcolato tra il pannello integro e con danno L=19 cm	83
5.4	MAC calcolato tra il pannello integro e con danno L=11 cm	86
5.5	MAC calcolato tra il pannello integro e con danno L=15.5 cm . . .	86
5.6	MAC calcolato tra il pannello integro e con danno L=19 cm	86
5.7	Grafico di mode pairing tra la struttura integra e la configurazione danneggiata con L=11 cm in posizione 2	89
5.8	Grafico di mode pairing tra la struttura integra e la configurazione danneggiata con L=15.5 cm in posizione 2	89
5.9	Grafico di mode pairing tra la struttura integra e la configurazione danneggiata con L=19 cm in posizione 2	89
5.10	Pairing tra modo 12 integro (400.715 Hz) e modo 13 con danno L=11 cm (400.214 Hz) in posizione 2	90
5.11	Pairing tra modo 13 integro (404.193 Hz) e modo 12 con danno L=11 cm (398.423 Hz) in posizione 2	90
5.12	Pairing tra modo 19 integro (689.776 Hz) e modo 20 con danno L=11 cm (689.709 Hz) in posizione 2	91
5.13	Pairing tra modo 20 integro (698.994 Hz) e modo 19 con danno L=11 cm (682.172 Hz) in posizione 2	91
5.14	Pairing tra modo 12 integro (400.715 Hz) e modo 13 con danno L=15.5 cm (400.214 Hz) in posizione 2	91
5.15	Pairing tra modo 13 integro (404.193 Hz) e modo 12 con danno L=15.5 cm (398.423 Hz) in posizione 2	92
5.16	Pairing tra modo 19 integro (689.776 Hz) e modo 20 con danno L=15.5 cm (689.709 Hz) in posizione 2	92
5.17	Pairing tra modo 20 integro (698.994 Hz) e modo 19 con danno L=15.5 cm (682.172 Hz) in posizione 2	92
5.18	Pairing tra modo 10 integro (320.54 Hz) e modo 11 con danno L=19 cm (310.909 Hz) in posizione 2	93
5.19	Pairing tra modo 11 integro (325.95 Hz) e modo 10 con danno L=19 cm (306.533 Hz) in posizione 2	93
5.20	Pairing tra modo 12 integro (406.12 Hz) e modo 13 con danno L=19 cm (396.153 Hz) in posizione 2	93

5.21	Pairing tra modo 13 integro (405.96 Hz) e modo 12 con danno L=19 cm (378.497 Hz) in posizione 2	94
5.22	Pairing tra modo 16 integro (599.81 Hz) e modo 18 con danno L=19 cm (609.11 Hz) in posizione 2	94
5.23	Pairing tra modo 19 integro (704.81 Hz) e modo 20 con danno L=19 cm (702.103 Hz) in posizione 2	94
5.24	Pairing tra modo 20 integro (727.80 Hz) e modo 19 con danno L=19 cm (690.304 Hz) in posizione 2	95
5.25	MAC calcolato tra il pannello integro e con danno L=11 cm	96
5.26	MAC calcolato tra il pannello integro e con danno L=15.5 cm	96
5.27	MAC calcolato tra il pannello integro e con danno L=19 cm	97
5.28	MAC calcolato tra il pannello integro e con danno L=11 cm	99
5.29	MAC calcolato tra il pannello integro e con danno L=15.5 cm	99
5.30	MAC calcolato tra il pannello integro e con danno L=19 cm	100
5.31	Grafico di mode pairing tra la struttura integra e la configurazione danneggiata con L=11 cm in posizione 2	101
5.32	Grafico di mode pairing tra la struttura integra e la configurazione danneggiata con L=15.5 cm in posizione 2	101
5.33	Pairing tra modo 9 integro (372.06 Hz) e modo 10 con danno L=11 cm (371.86 Hz) in posizione 2	102
5.34	Pairing tra modo 18 integro (725.11 Hz) e modo 17 con danno L=11 cm (729.95 Hz) in posizione 2	102
5.35	Pairing tra modo 9 integro (372.06 Hz) e modo 11 con danno L=15.5 cm (380.49 Hz) in posizione 2	102
5.36	MAC calcolato tra il pannello integro numerico e integro sperimentale	103
5.37	Grafico di mode pairing tra la struttura integra numerica e integra sperimentale	104
5.38	Pairing tra modo 2 integro numerico (48.35 Hz) e modo 1 integro sperimentale (56.56 Hz)	105
5.39	Pairing tra modo 3 integro numerico (93.85 Hz) e modo 3 integro sperimentale (103.09 Hz)	105
5.40	Pairing tra modo 5 integro numerico (177.07 Hz) e modo 4 integro sperimentale (154.73 Hz)	106
5.41	Pairing tra modo 10 integro numerico (319.58 Hz) e modo 10 integro sperimentale (319.23 Hz)	106
5.42	Pairing tra modo 16 integro numerico (566.68 Hz) e modo 15 integro sperimentale (518.10 Hz)	106
5.43	MAC calcolato tra il pannello integro e con danno doppio L=11 cm affiancato	108
5.44	MAC calcolato tra il pannello integro e con danno doppio L=15x8 cm sovrapposto	108

5.45	MAC calcolato tra il pannello integro e con danno doppio L=11 cm	108
5.46	Grafico di mode pairing tra la struttura integra e la configurazione danneggiata con doppio danno	111
5.47	Pairing tra modo 5 integro (212.37 Hz) e modo 6 con doppio danno (224.80 Hz)	111
5.48	Pairing tra modo 6 integro (245.59 Hz) e modo 7 con doppio danno (252.60 Hz)	112
5.49	Pairing tra modo 9 integro (372.06 Hz) e modo 12 con doppio danno (372.67 Hz)	112
5.50	Pairing tra modo 11 integro (410.75 Hz) e modo 9 con doppio danno (273.77 Hz)	112
5.51	MAC calcolato tra il pannello integro e con taglio passante	113
5.52	Grafico di mode pairing tra la struttura integra e la configurazione danneggiata con taglio passante	114
5.53	Pairing tra modo 9 integro (372.06 Hz) e modo 11 con taglio passante (383.75 Hz)	114
5.54	Pairing tra modo 14 integro (563.63 Hz) e modo 17 con taglio passante (567.78 Hz)	115
B.1	Modo 1, 33.676 Hz	121
B.2	Modo 2, 48.348 Hz	121
B.3	Modo 3, 93.853 Hz	121
B.4	Modo 4, 104.699 Hz	121
B.5	Modo 5, 177.074 Hz	122
B.6	Modo 6, 186.572 Hz	122
B.7	Modo 7, 247.218 Hz	122
B.8	Modo 8, 261.715 Hz	122
B.9	Modo 9, 274.007 Hz	122
B.10	Modo 10, 319.091 Hz	122
B.11	Modo 11, 319.582 Hz	122
B.12	Modo 12, 400.715 Hz	122
B.13	Modo 13, 404.193Hz	123
B.14	Modo 14, 486.365 Hz	123
B.15	Modo 15, 516.385 Hz	123
B.16	Modo 16, 566.676 Hz	123
B.17	Modo 17, 648.664 Hz	123
B.18	Modo 18, 680.605 Hz	123
B.19	Modo 19, 689.776 Hz	123
B.20	Modo 20, 698.994 Hz	123
B.21	Modo 1, 33.666 Hz	124
B.22	Modo 2, 48.339 Hz	124

B.23 Modo 3, 93.696 Hz	124
B.24 Modo 4, 104.667 Hz	124
B.25 Modo 5, 176.877 Hz	124
B.26 Modo 6, 185.827 Hz	124
B.27 Modo 7, 245.612 Hz	124
B.28 Modo 8, 259.409Hz	124
B.29 Modo 9, 272.978 Hz	125
B.30 Modo 10, 316.960 Hz	125
B.31 Modo 11, 317.577 Hz	125
B.32 Modo 12, 397.648 Hz	125
B.33 Modo 13, 402.768 Hz	125
B.34 Modo 14, 483.391 Hz	125
B.35 Modo 15, 515.215 Hz	125
B.36 Modo 16, 561.586 Hz	125
B.37 Modo 17, 644.342 Hz	126
B.38 Modo 18, 672.475 Hz	126
B.39 Modo 19, 685.031 Hz	126
B.40 Modo 20, 697.579 Hz	126
B.41 Modo 1, 33.668 Hz	126
B.42 Modo 2, 48.281 Hz	126
B.43 Modo 3, 93.752 Hz	127
B.44 Modo 4, 104.436 Hz	127
B.45 Modo 5, 176.750 Hz	127
B.46 Modo 6, 186.104 Hz	127
B.47 Modo 7, 246.1543 Hz	127
B.48 Modo 8, 259.983 Hz	127
B.49 Modo 9, 273.442 Hz	127
B.50 Modo 10, 317.501 Hz	127
B.51 Modo 11, 317.809 Hz	128
B.52 Modo 12, 398.955 Hz	128
B.53 Modo 13, 402.407 Hz	128
B.54 Modo 14, 484.180 Hz	128
B.55 Modo 15, 515.367 Hz	128
B.56 Modo 16, 563.300 Hz	128
B.57 Modo 17, 644.484 Hz	128
B.58 Modo 18, 677.204 Hz	128
B.59 Modo 19, 686.566 Hz	129
B.60 Modo 20, 698.122 Hz	129
B.61 Modo 1, 33.659 Hz	129
B.62 Modo 2, 48.283 Hz	129
B.63 Modo 3, 94.605 Hz	129

B.64 Modo 4, 104.542 Hz	129
B.65 Modo 5, 177.159 Hz	129
B.66 Modo 6, 185.780 Hz	129
B.67 Modo 7, 240.702 Hz	130
B.68 Modo 8, 257.318 Hz	130
B.69 Modo 9, 271.851 Hz	130
B.70 Modo 10, 316.247 Hz	130
B.71 Modo 11, 324.680 Hz	130
B.72 Modo 12, 400.013 Hz	130
B.73 Modo 13, 402.360 Hz	130
B.74 Modo 14, 497.639 Hz	130
B.75 Modo 15, 525.156 Hz	131
B.76 Modo 16, 594.257 Hz	131
B.77 Modo 17, 634.600 Hz	131
B.78 Modo 18, 666.471 Hz	131
B.79 Modo 19, 696.838 Hz	131
B.80 Modo 20, 700.623 Hz	131
B.81 Modo 1, 33.674 Hz	131
B.82 Modo 2, 48.346 Hz	131
B.83 Modo 3, 93.523 Hz	132
B.84 Modo 4, 104.425 Hz	132
B.85 Modo 5, 177.020 Hz	132
B.86 Modo 6, 186.563 Hz	132
B.87 Modo 7, 247.045 Hz	132
B.88 Modo 8, 260.630 Hz	132
B.89 Modo 9, 272.597 Hz	132
B.90 Modo 10, 316.437 Hz	132
B.91 Modo 11, 318.994 Hz	133
B.92 Modo 12, 398.423 Hz	133
B.93 Modo 13, 400.214 Hz	133
B.94 Modo 14, 486.183 Hz	133
B.95 Modo 15, 515.066 Hz	133
B.96 Modo 16, 562.502 Hz	133
B.97 Modo 17, 632.173 Hz	133
B.98 Modo 18, 651.304 Hz	133
B.99 Modo 19, 682.172 Hz	134
B.100Modo 20, 689.709 Hz	134
B.101Modo 1, 33.674 Hz	134
B.102Modo 2, 48.347 Hz	134
B.103Modo 3, 93.522 Hz	134
B.104Modo 4, 104.424 Hz	134

B.105	Modo 5, 177.020 Hz	135
B.106	Modo 6, 186.563 Hz	135
B.107	Modo 7, 247.045 Hz	135
B.108	Modo 8, 260.630 Hz	135
B.109	Modo 9, 272.597 Hz	135
B.110	Modo 10, 318.994 Hz	135
B.111	Modo 11, 316.436 Hz	135
B.112	Modo 12, 398.423 Hz	135
B.113	Modo 13, 400.214 Hz	136
B.114	Modo 14, 486.183 Hz	136
B.115	Modo 15, 515.066 Hz	136
B.116	Modo 16, 562.502 Hz	136
B.117	Modo 17, 632.173 Hz	136
B.118	Modo 18, 651.304 Hz	136
B.119	Modo 19, 682.172 Hz	136
B.120	Modo 20, 689.709 Hz	136
B.121	Modo 1, 33.723 Hz	137
B.122	Modo 2, 48.318 Hz	137
B.123	Modo 3, 92.397 Hz	137
B.124	Modo 4, 102.754 Hz	137
B.125	Modo 5, 177.040 Hz	137
B.126	Modo 6, 186.967 Hz	137
B.127	Modo 7, 244.476 Hz	137
B.128	Modo 8, 253.036 Hz	137
B.129	Modo 9, 267.606 Hz	138
B.130	Modo 10, 306.533 Hz	138
B.131	Modo 11, 310.909 Hz	138
B.132	Modo 12, 378.497 Hz	138
B.133	Modo 13, 396.153 Hz	138
B.134	Modo 14, 496.227 Hz	138
B.135	Modo 15, 528.257 Hz	138
B.136	Modo 16, 548.094 Hz	138
B.137	Modo 17, 587.819 Hz	139
B.138	Modo 18, 609.110 Hz	139
B.139	Modo 19, 690.304 Hz	139
B.140	Modo 20, 702.103 Hz	139

Capitolo 1

Introduzione

La selezione dei materiali strutturali per un aereo è influenzata da numerosi fattori; tuttavia, il requisito di elevata resistenza associata a un peso ridotto rappresenta storicamente il criterio predominante. Accanto a tale proprietà, assumono un ruolo di rilievo anche la rigidità, la tenacità, la resistenza alla corrosione, alla fatica e agli effetti termici dell'ambiente operativo, nonché la facilità di fabbricazione, la disponibilità e continuità di approvvigionamento del materiale e, non da ultimo, il costo.

Nel corso dell'evoluzione dell'ingegneria aeronautica, i principali gruppi di materiali impiegati nella costruzione degli aeromobili sono stati il legno, l'acciaio, le leghe di alluminio, e, più recentemente, le leghe di titanio e i materiali compositi rinforzati con fibre.

I primi aeromobili a propulsione convenzionale furono realizzati prevalentemente in legno e tela. Tra i tipi di legno maggiormente utilizzati figuravano l'abete e la betulla, apprezzati per il favorevole rapporto resistenza/peso, che risultava competitivo anche rispetto alle moderne leghe di alluminio sottoposte a heat treatment. Tuttavia, il legno naturale presentava importanti limitazioni: variazioni dimensionali e deformazioni dovute all'assorbimento di umidità e ai cambiamenti delle condizioni atmosferiche, nonché una marcata inconsistenza delle proprietà meccaniche, tipica dei materiali naturali. Inoltre, la pronunciata anisotropia associata alla struttura dei grani costituiva una significativa difficoltà progettuale.

L'introduzione del compensato e lo sviluppo di resine adesive sintetiche consentirono un miglioramento delle prestazioni strutturali, permettendo di ridurre o quantomeno controllare l'anisotropia del materiale e incrementarne la resistenza complessiva.

Durante la Prima Guerra Mondiale (1914-1918), l'elevata quantità di legno richiesta per la produzione di velivoli militari mise in evidenza una delle principali criticità di questo materiale: i tipi di legno più adatti dovevano essere importati dall'estero, con un significativo impiego di risorse logistiche che sarebbero state altrimenti

destinate al trasporto di truppe e rifornimenti. Per evitare il ripetersi di una simile situazione, nel 1924 l'Air Ministry britannico vietò l'impiego del legno nelle parti strutturali maggiormente sollecitate. Questa decisione accelerò l'introduzione di materiali metallici nella costruzione aeronautica, sebbene il legno continuasse a essere utilizzato in misura rilevante per diversi anni.

Un esempio emblematico di utilizzo avanzato del legno è rappresentato dal de Havilland Mosquito, uno degli aeromobili ad alte prestazioni di maggior successo della Seconda Guerra Mondiale (1939-1945), realizzato quasi interamente in legno. Tale scelta fu tuttavia fortemente condizionata dalle circostanze storiche: la carenza di impianti industriali e di manodopera specializzata per la lavorazione dei metalli, a fronte di un'industria del mobile in grado di fornire rapidamente personale e attrezzature adeguate. Inoltre, il legno si prestava a metodi di costruzione rapidi, e i progettisti avevano ormai acquisito una notevole esperienza nella gestione dell'anisotropia del materiale. I progressi nel campo degli adesivi avevano inoltre consentito di ottenere giunzioni affidabili legno-legno, legno-metallo e, in alcuni casi, anche metallo-metallo.

Nonostante questi successi, divenne inevitabile che il ruolo del legno come principale materiale strutturale fosse progressivamente abbandonato. L'aumento dei carichi alari e la crescente complessità delle strutture associate ai velivoli turbojet introdussero significative concentrazioni di tensione, per le quali il legno risultava poco adatto. L'anisotropia del materiale complicava ulteriormente il processo di progettazione, invece le strutture in legno richiedevano livelli di manutenzione superiori rispetto a quelle metalliche. Inoltre, l'impiego del legno si rivelava particolarmente problematico in ambienti tropicali, dove le variazioni di umidità causano effetti rilevanti su forma e dimensioni, e risultava vulnerabile a fenomeni di degrado biologico, come gli attacchi delle termiti.

Il primo aeromobile interamente metallico fu realizzato nel 1915 da Junkers in Germania, utilizzando materiali descritti all'epoca come "iron and steel". L'acciaio offre indubbi vantaggi in termini di elevato modulo elastico, alto limite di snervamento e resistenza a trazione; tuttavia, tali proprietà sono accompagnate da un'elevata densità, che ne limita l'impiego in strutture aeronautiche leggere. Negli anni Trenta, i progettisti furono pertanto costretti a utilizzare l'acciaio in spessori molto ridotti, adottando soluzioni geometriche complesse per garantire la stabilità a buckling delle lamiere sottili.

Un punto di svolta fondamentale si ebbe nel 1909, quando Alfred Wilm scoprì accidentalmente che una lega di alluminio contenente rame, magnesio e silicio e ferro come impurità, presentava proprietà meccaniche significativamente migliorate a seguito di opportuni trattamenti termici. Tale lega venne successivamente commercializzata dalla Durener Metallwerke con il nome di Duraluminio, trovando un'ampia diffusione nel settore aeronautico. L'affermazione delle leghe di alluminio fu ulteriormente favorita da tre fattori principali: una migliore comprensione dei

processi di heat treatment, l'introduzione delle tecniche di estrusione per la realizzazione di profili con sezioni complesse e l'impiego del rivestimento in alluminio puro, che garantiva una maggiore resistenza alla corrosione.

Negli ultimi decenni, l'impiego dei materiali compositi, utilizzati per la prima volta intorno al 1950, ha assunto un ruolo sempre più centrale nel settore aerospaziale, grazie alle loro capacità di coniugare elevate prestazioni meccaniche con una significativa riduzione di peso. Tuttavia, le caratteristiche proprie di questa tipologia di materiali, quali anisotropia ed eterogeneità, rendono la loro progettazione, modellazione e manutenzione più complicata rispetto ai materiali metallici.

In particolare, l'impiego dei polimeri rinforzati con fibre (FRP) continua a crescere grazie alle loro elevate proprietà meccaniche e al significativo vantaggio in termini di peso. Tuttavia, questi materiali risultano suscettibili a forme di danneggiamento complesse, e ciò rende necessario l'utilizzo di sistemi avanzati per la caratterizzazione del danno, al fine di prevenire failure catastrofiche.

Uno degli aspetti più critici è rappresentato dalla formazione e dall'evoluzione del danno interno che può progressivamente compromettere l'integrità strutturale del componente.

In generale, il danno può essere definito come qualsiasi cambiamento introdotto in un sistema che comprometta le sue prestazioni attuali o future. Tale definizione presuppone implicitamente un confronto tra due stati del sistema: uno stato iniziale, solitamente considerato non danneggiato, e uno stato successivo in cui si manifesta la degradazione.

Il concetto di danno non si limita a variazioni delle proprietà del materiale o della geometria del sistema, ma comprende anche alterazioni delle condizioni al contorno e della connettività strutturale. Dal punto di vista della scala di lunghezza, ogni processo di danneggiamento ha origine a livello del materiale. Sebbene la terminologia non sia universalmente condivisa, tali imperfezioni iniziali vengono spesso indicate come "defects" o "flaws" e, in diversa misura, sono intrinseche a tutti i materiali. In presenza di specifiche condizioni di carico, questi difetti possono crescere e coalescere con velocità diverse, generando danno a livello del componente o dell'intero sistema. È importante sottolineare che la presenza di danno non implica necessariamente la perdita totale di funzionalità, ma indica piuttosto una deviazione dal comportamento ottimale. Con il progredire del danneggiamento si raggiunge un punto oltre il quale le prestazioni non risultano più accettabili per l'utilizzatore: tale soglia viene definita "failure".

Dal punto di vista temporale, il danno può accumularsi in maniera incrementale su lunghi periodi, come nel caso dei fenomeni di fatica o corrosione, oppure manifestarsi su scale temporali più brevi, ad esempio durante le fasi di atterraggio di un aeromobile o a seguito di eventi impreveduti quali catastrofi naturali.

In ambito aerospaziale, la presenza di danni non immediatamente visibili, quali

delaminazioni, microfessurazioni o danneggiamenti da impatto, rappresenta una problematica di primaria importanza in termini di sicurezza strutturale e affidabilità operativa. La difficoltà di individuare tali fenomeni mediante ispezioni visive tradizionali rende necessario lo sviluppo di metodologie avanzate di analisi e monitoraggio dello stato di salute strutturale.

Numerose tecniche di proving, testing and evaluation (NDT&E) e metodologie di monitoraggio della salute strutturale in situ (SHM) sono state impiegate per l'identificazione del danno nei materiali FRP. Questi approcci sono oggetto di continuo sviluppo, in particolare nelle applicazioni ad alta criticità, come quelle aerospaziali, dove la necessità di ispezioni affidabili è fondamentale. Il processo di SHM comprende l'osservazione di una struttura o di un sistema meccanico nel tempo mediante misurazioni effettuate a intervalli regolari, l'estrazione di caratteristiche sensibili al danno da tali misure e l'analisi statistica di queste ultime per determinare lo stato di salute corrente del sistema. Nell'ambito del monitoraggio strutturale a lungo termine, l'output del processo viene aggiornato periodicamente con informazioni relative alla capacità della struttura di continuare a svolgere la propria funzione, tenendo conto dell'inevitabile invecchiamento e dell'accumulo di danno dovuto all'ambiente operativo.

Per selezionare la tecnica NDT più adeguata in base a specifici criteri, viene impiegato il processo di gerarchia analitica come supporto decisionale per valutare e classificare le diverse metodologie disponibili. Tra i criteri considerati, la dimensione del provino risulta essere uno degli aspetti più rilevanti, con un'influenza significativa sulla scelta della tecnica più appropriata.

Le tecniche di Non-Destructive Testing and Evaluation (NDT&E) consentono di individuare, identificare e localizzare difetti all'interno dei materiali; tuttavia, tali ispezioni vengono eseguite a intervalli programmati e non permettono di ottenere informazioni dettagliate sull'iniziazione del danno o sulla sua evoluzione tra un'ispezione e l'altra. In alternativa, la rilevazione e la valutazione del danno possono essere effettuate attraverso sistemi di Structural Health Monitoring (SHM) installati in-situ. Questi sistemi integrano tecnologie di sensing avanzate con algoritmi di post-processing, permettendo una diagnostica continua e un monitoraggio in tempo reale dello stato di salute delle strutture. Nonostante i notevoli vantaggi offerti dall'SHM, il loro impiego è ancora limitato principalmente dal peso aggiuntivo dell'hardware necessario e dai costi elevati, che incidono sul massimo peso di atterraggio e riducono conseguentemente il payload disponibile.

La rapida individuazione del danno è un obiettivo prioritario sia per le industrie private sia per le organizzazioni governative, sia per quanto riguarda i prodotti sia per le infrastrutture. Tale esigenza spinge verso l'implementazione di processi di SHM, motivati tanto dalla necessità di garantire la safety in servizio quanto dall'importante impatto economico associato a queste tecnologie.

Inoltre, molte infrastrutture hanno ormai raggiunto o superato la vita utile per cui

erano state progettate, spesso a causa di vincoli economici: ciò rende l'adozione di sistemi di monitoraggio strutturale ancora più cruciale.

Attualmente, gran parte delle attività di manutenzione strutturale e meccanica è ancora basata su approcci time-based. Le tecnologie SHM, però, rappresentano il presupposto fondamentale per l'evoluzione verso filosofie di manutenzione condition-based, meno onerose e più efficienti. Il principio alla base di questo approccio consiste nell'utilizzo di sistemi di misura integrati nella struttura in grado di monitorarne lo stato e di segnalare tempestivamente la presenza di danneggiamenti. I benefici in termini di safety e costi possono essere realizzati solo se il sistema di monitoraggio è in grado di fornire un preavviso sufficiente a consentire l'attuazione delle misure correttive prima che il danno evolva fino alla failure.

Il passaggio a filosofie di manutenzione condition-based richiede tuttavia l'adozione di hardware avanzato e procedure sofisticate di analisi dei dati, necessarie per interpretare correttamente le informazioni raccolte. Un aspetto critico consiste inoltre nell'assicurare che il sistema di monitoraggio installato sia almeno tanto affidabile quanto la struttura stessa. Nonostante queste sfide, lo SHM possiede il potenziale per estendere gli intervalli di manutenzione e, pertanto, mantenere i sistemi operativi più a lungo, con conseguenti benefici economici per il proprietario. Per affrontare efficacemente queste complessità, si è rivelato utile adottare un metodo matematico computazionale capace di rappresentare con precisione la risposta dei materiali compositi. In questo ambito si colloca la *Carrera Unified Formulation*, la quale consente di sviluppare modelli strutturali a vari gradi di approssimazione in maniera sistematica e unificata. Per questo motivo, la CUF si rivela come un ottimo strumento per l'analisi del comportamento meccanico di strutture laminate, rendendola particolarmente adatta allo studio e alla caratterizzazione dei danni dove presenti.

Un'accurata modellazione del comportamento meccanico della struttura costituisce un elemento chiave anche per l'efficacia delle tecniche di identificazione del danno, poiché consente di correlare le variazioni delle risposte dinamiche o cinematiche alle alterazioni locali delle proprietà del materiale. In questo senso, modelli basati sulla *Carrera Unified Formulation* offrono un valido supporto nella definizione di strumenti predittivi affidabili per l'individuazione e la caratterizzazione del danno. In seguito, invece, verranno approfonditi i principali metodi di identificazione del danno, con particolare attenzione alle tecniche basate su misure accelerometriche e ottiche. Tali approcci si inseriscono nel più ampio contesto dello Structural Health Monitoring (SHM), che mira allo sviluppo di sistemi in grado di valutare in maniera continua o periodica lo stato di integrità di una struttura, riducendo la necessità di ispezioni invasive e migliorando l'efficienza delle operazioni di manutenzione.

L'identificazione del danno rappresenta un aspetto centrale nella valutazione dell'integrità strutturale dei componenti aerospaziali, in particolare in presenza

di materiali compositi, nei quali il danneggiamento può svilupparsi internamente senza manifestazioni visibili. La presenza di danno induce modifiche nelle proprietà dinamiche e nel comportamento globale della struttura, che possono essere rilevate mediante un confronto con una condizione di riferimento non danneggiata.

Nel contesto sperimentale, l'identificazione del danno si basa sull'analisi di grandezze misurabili in grado di catturare tali variazioni. Verranno presentate le principali tecniche di identificazione del danno, con riferimento ai metodi basati su misure accelerometriche e a quelli fondati su tecniche ottiche.

1.1 Tecniche basate su misure accelerometriche

Le cricche da fatica e la delaminazione rappresentano forme di danneggiamento particolarmente pericolose e, allo stesso tempo, tra le più comuni negli elementi meccanici e nelle strutture. Per garantire un funzionamento sicuro, è essenziale che tali elementi siano privi di cricche da fatica e delaminazioni o, qualora presenti, che la loro estensione venga determinata con precisione. Poiché in molti casi pratici i metodi non distruttivi tradizionali non risultano sufficientemente efficaci nell'identificare tali difetti, negli ultimi vent'anni sono stati sviluppati approcci basati sull'analisi vibrazionale per la diagnosi del danno. Questi metodi si fondano sulla relazione tra la dimensione e la posizione della failure e le variazioni di specifiche caratteristiche dinamiche degli elementi strutturali.

Tra le strategie più diffuse rientrano i metodi che analizzano la risposta dinamica della struttura, impiegando sensori accelerometrici per misurare spostamenti, velocità o accelerazioni in condizioni operative o sotto eccitazione controllata.

La comunità aerospaziale iniziò a studiare l'identificazione del danno basata sulle vibrazioni tra la fine degli anni Settanta e i primi anni Ottanta, in parallelo con lo sviluppo dello Space Shuttle. In questo contesto venne realizzato lo *Shuttle Modal Inspection System (SMIS)*, progettato per rilevare danni da fatica in componenti quali superfici di controllo e pannelli di fusoliera. Queste aeree erano ricoperte da sistemi di protezione termica che ne impedivano l'accesso, rendendo impraticabili le tecniche non distruttive convenzionali.

Parallelamente, nelle applicazioni legate alle stazioni spaziali furono sviluppati metodi sperimentali e analitici finalizzati a identificare danni causati dall'impatto con detriti orbitali. Tali metodologie si basano sulla correlazione tra modelli analitici della struttura non danneggiata e misure delle proprietà modali ottenute sia su strutture integre sia su strutture lesionate. Le variazioni degli indici di rigidezza risultanti da questa correlazione vengono utilizzate per localizzare e quantificare il danno.

Il principio alla base di questi approcci risiede nella relazione diretta tra stato di

danneggiamento e modifiche delle caratteristiche dinamiche della struttura, quali frequenze naturali, forme modali e funzioni di risposta in frequenza. L'introduzione di un danno altera localmente rigidità, massa ed energia dissipata, generando variazioni osservabili nei parametri modali. Nei provini in materiali polimerici rinforzati con fibre, il danno produce tipicamente una riduzione della rigidità e un aumento del damping, sia nel caso di un difetto localizzato come una cricca, sia nel caso di danno diffuso, come un insieme di microcricche. La riduzione di rigidità si traduce generalmente in una diminuzione delle frequenze naturali.

Poiché la distribuzione degli sforzi in una struttura vibrante non è uniforme e varia da un modo all'altro, la presenza di un danno localizzato modifica ogni modo in maniera diversa, a seconda della sua collocazione. La misura delle frequenze naturali della struttura in momenti diversi della sua vita permette quindi non solo di rilevare la presenza del danno ma anche di stimarne la posizione. L'entità della variazione frequenziale può inoltre essere correlata alla severità del danneggiamento. Analogamente, anche le variazioni nel damping possono essere utilizzate per identificare difetti strutturali. È tuttavia importante considerare che condizioni ambientali o operative variabili possono influenzare le caratteristiche dinamiche e generare falsi positivi nelle analisi di danno.

Le grandezze comunemente considerate in questo tipo di analisi, misurabili anche in un singolo punto e indipendenti dalla posizione del sensore, includono:

- Frequenze naturali: tendono a diminuire con l'aumentare del danneggiamento
- Forme modali: variazioni locali possono evidenziare la presenza o la posizione del danno
- Curvatura modale: più sensibile delle forme modali alle variazioni localizzate di rigidità
- Funzioni di risposta in frequenza (FRF): permettono di analizzare anche fenomeni dinamici non lineari
- Indicatori energetici, come gli indici basati sulla strain energy, utili per localizzare efficacemente danni estesi o diffusi

Tecniche quali il Modal Analysis-based Damage Detection (MDD), i metodi basati sulla curvatura modale e quelli fondati sull'analisi dell'energia modale differenziale rappresentano oggi strumenti consolidati per il monitoraggio della salute strutturale di ali, pannelli e componenti snelli in materiale composito. Le variazioni delle frequenze naturali consentono infatti di identificare con relativa facilità la presenza di una cricca o di un'altra forma di danneggiamento. Tuttavia, la localizzazione del difetto a partire dai soli cambiamenti frequenziali costituisce un problema più complesso: cricche in posizioni differenti, purché associate a determinate lunghezze,

possono produrre variazioni di frequenza simili. Per questo motivo è necessario ricorrere a parametri supplementari, come la curvatura modale, che permettono di individuare direttamente la posizione del danno all'interno della struttura.

Un principio ampiamente utilizzato consiste nel considerare il rapporto $\frac{\delta\omega_i}{\delta\omega_j}$ dei cambiamenti di frequenza provocati dal danno in due modi differenti, indicati come modo i e modo j . Questo rapporto dipende unicamente dalla posizione del danno. Confrontando il rapporto teorico previsto per un danno posto in ciascun punto della struttura con il rapporto misurato sperimentalmente, è possibile individuare le posizioni candidate. Le variazioni frequenziali teoriche per ogni possibile sito di danno vengono calcolate mediante un'analisi di sensitività, una procedura computazionalmente efficiente che richiede un tempo aggiuntivo molto contenuto rispetto all'analisi dinamica di base.

Quando si utilizzano più coppie di modi, la localizzazione del danno può risultare univoca. Tuttavia, nel caso di strutture simmetriche, la procedura può individuare più siti possibili, in numero dipendente dal grado di simmetria geometrica ed elastica della struttura. È necessario disporre almeno di due modi per ridurre il numero dei siti potenzialmente equivalenti; un numero maggiore di modi migliora la robustezza dei risultati, soprattutto quando le variazioni frequenziali sono molto piccole o il modello di danno è semplice. Inoltre, poichè il danneggiamento è tipicamente un fenomeno locale, esso può non influenzare in modo significativo i modi a bassa frequenza della risposta globale, spesso gli unici disponibili in condizioni operative. La localizzazione viene ottenuta calcolando, per ciascun punto della struttura, una funzione di errore che misura la discrepanza tra i cambiamenti di frequenza osservati sperimentalmente e quelli previsti teoricamente dal modello per un danno localizzato in quel punto. La posizione in cui questa funzione assume il valore minimo rappresenta il sito più probabile di danneggiamento. Si definisce l'errore assumendo che il danno sia nella posizione r , dati i cambiamenti di frequenza sperimentali $\delta\omega_i$ e $\delta\omega_j$ e quelli previsti teoricamente s_{ri} e s_{rj} nei modi i e j rispettivamente, come

$$e_{rij} = \begin{cases} \left(\frac{\delta\omega_i}{\delta\omega_j} \right) - 1, & \text{se } \frac{s_{ri}}{s_{rj}} < \frac{\delta\omega_i}{\delta\omega_j} \\ \left(\frac{s_{ri}}{s_{rj}} \right) - 1, & \text{se } \frac{s_{ri}}{s_{rj}} \geq \frac{\delta\omega_i}{\delta\omega_j} \end{cases}$$

L'errore totale associato alla posizione r è la somma degli errori per tutte le coppie di modi, quindi

$$e_r = \sum_{\substack{\text{tutte le coppie} \\ (i,j)}} e_{rij}$$

Per agevolare l'interpretazione, questo errore viene normalizzato rispetto al minimo valore dell'errore totale ottenuto sull'intera griglia. L'indicatore finale è definito

come:

$$E_r = \frac{100e_{min}}{e_r}$$

I siti più probabili di danneggiamento sono quindi quelli in cui $E_r = 100$. Il modello di danno utilizzato nell'analisi di sensitività assume una riduzione isotropa della rigidezza locale. Tale ipotesi è valida, ad esempio, nel caso di un foro in un materiale isotropo, ma non risulta appropriata per una cricca o per un foro in un materiale anisotropo, come un composito laminato. Questo limite non rappresenta un problema quando le direzioni degli sforzi nei modi considerati sono simili, perchè il rapporto delle variazioni frequenziali viene comunque calcolato correttamente. Possono invece sorgere delle difficoltà quando le direzioni principali dello stato di sforzo differiscono sensibilmente tra i modi. In tal caso, la funzione di errore può essere pesata in funzione del grado di similitudine tra i vettori di stress normalizzati dei due modi considerati, mediante un opportuno coefficiente che aumenta l'affidabilità della localizzazione; si moltiplica l'errore per il prodotto scalare dei vettori di stress normalizzati. Diventa quindi

$$e_r = \sum_{\substack{\text{tutte le coppie} \\ (i,j)}} e_{rij} W_{rij}$$

dove $W_{rij} = \left| \frac{\sigma_{ri}\sigma_{rj}}{|\sigma_{ri}||\sigma_{rj}|} \right|$.

L'analisi di sensitività calcola la variazione di frequenza prodotta da un difetto ideale equivalente a un foro di area unitaria centrato in ciascun punto della griglia. Confrontando tali variazioni teoriche con quelle misurate sperimentalmente per il sito identificato, si può stimare la severità del danno in termini di "foro equivalente" o, più in generale, di riduzione locale della rigidezza. Poichè diversi modi possono essere diversamente sensibili alla presenza del danno, in particolare quando questo possiede una forte direzionalità, si adotta generalmente un valore medio tra le stime provenienti dalle diverse forme modali.

Le metodologie vibrazionali sono da tempo ampiamente impiegate nell'ingegneria strutturale grazie alla loro affidabilità, al costo relativamente contenuto dei sensori e alla possibilità di integrare accelerometri in modo stabile e permanente anche in strutture complesse. Lo SHM non rappresenta una tecnica unica, ma un insieme articolato di funzioni che devono essere progettate con attenzione e in modo coerente con l'applicazione di interesse. Come illustrato nella figura 1.1 dedicata, tali funzioni comprendono:

- **Strumentazione:** la sua progettazione dipende dalle grandezze che si intende misurare, dalla tipologia di trasduttori impiegati e dalla loro collocazione sulla struttura. Nei sistemi SMH basati su misure ripetute nel tempo si tende a utilizzare una strumentazione permanente, anche se in alcune applicazioni sono

possibili configurazioni temporanee. I sensori cablati sono tradizionalmente i più utilizzati, ma negli ultimi anni si stanno sviluppando soluzioni wireless e reti di sensori che permettono di eliminare la necessità di cablaggi estesi - un vantaggio particolarmente rilevante quando il numero di sensori è elevato. Tuttavia, i sistemi wireless presentano sfide specifiche legate all'elevato consumo energetico, alla trasmissione dei dati e alla sincronizzazione temporale, che richiedono lo sviluppo di caratteristiche hardware dedicate e algoritmi di gestione avanzati. Il numero dei sensori può variare sensibilmente, spaziando da un singolo trasduttore fino a diverse centinaia, in funzione della complessità della struttura e delle esigenze di monitoraggio. Anche la tipologia dei sensori dipende dall'applicazione, ma in generale le vibrazioni misurate presentano ampiezze ridotte e frequenze relativamente basse; per questo motivo è necessaria una sensibilità elevata del sensore. La definizione del numero e della posizione ottimale dei sensori può essere effettuata tramite un modello agli elementi finiti della struttura combinato con scenari previsti di danno e con l'impiego di metodi di ottimizzazione o euristici

- **Eccitazione:** può essere di tipo ambientale oppure artificiale; quest'ultima ha il vantaggio di poter essere controllata e misurata con precisione, ma risulta spesso complessa e costosa da realizzare, richiede potenze elevate e implica l'interruzione delle normali operazioni per poter acquisire dati affidabili. Inoltre, anche in condizioni controllate, sono sempre presenti disturbi - come il vento o altre sorgenti di vibrazione - che possono compromettere la qualità delle misure. L'eccitazione ambientale offre invece diversi vantaggi: è sempre disponibile, non comporta costi aggiuntivi e consente di eccitare facilmente la struttura alle basse frequenze. Tuttavia presenta anche limitazioni rilevanti, tra cui l'impossibilità di misurare direttamente la forza applicata e un contenuto in frequenza che potrebbe non essere adeguato agli obiettivi dell'analisi
- **Acquisizione dei dati:** il sistema di acquisizione ha il compito di registrare e digitalizzare i segnali provenienti dai sensori, che convertono la grandezza fisica misurata in un segnale elettrico analogico. L'obiettivo principale è quello di immagazzinare le serie temporali per l'analisi successiva. L'acquisizione richiede però diverse attenzioni: se le caratteristiche da estrarre dipendono da più sensori, è necessario che essi vengano campionati simultaneamente. La frequenza di campionamento (sampling rate) e la durata del segnale registrato (record length) devono essere adeguate alle caratteristiche da analizzare. La registrazione automatica può essere avviata mediante un clock interno oppure tramite un trigger. Anche la fase di digitalizzazione richiede particolare cura: se il segnale viene campionato a una frequenza f_s , la massima frequenza f_{max} osservabile è pari a $f_{max} = \frac{f_s}{2}$. Se f_s è troppo bassa, le componenti di frequenza superiori a $\frac{f_s}{2}$ vengono interpretate erroneamente come componenti a frequenza

più bassa: questo fenomeno è noto come *aliasing*. Poichè l'aliasing non è correggibile dopo la conversione analogico-digitale (A/D), è necessario un filtro anti-aliasing prima dell'ingresso al convertitore. Nella fase di quantizzazione, il segnale analogico viene convertito nel valore discreto più vicino. I convertitori A/D tipicamente hanno una risoluzione compresa tra 10 e 24 bit; ciò significa che il range di misura viene suddiviso in 2^n intervalli uniformi. Per ottenere la migliore risoluzione possibile, l'intero range dinamico del convertitore dovrebbe essere sfruttato, evitando però che il segnale superi i limiti, fenomeno che causerebbe un overload e il conseguente clipping del segnale. Il sistema di acquisizione dovrebbe quindi essere in grado di rilevare condizioni di overload ed eventualmente rifiutare la misura. Il range dinamico ottimale può essere determinato attraverso test preliminari sulla struttura monitorata

- Processing del segnale: può essere impiegato per estrarre direttamente le caratteristiche utili oppure come fase preliminare di pre-processing. In generale, questa fase consiste nell'elaborazione della serie temporale al fine di ottenere informazioni rilevanti sfruttando le proprietà stocastiche del segnale o altre assunzioni. Tra le operazioni più comuni rientra il filtraggio, utilizzato per limitare il contenuto in frequenza alla banda di interesse. Nelle misure vibrazionali è prassi rimuovere la media o il trend del segnale, in quanto normalmente non apportano informazioni significative. Uno degli strumenti fondamentali è la *Fast Fourier Transform (FFT)*, che permette di convertire i segnali dal dominio del tempo a quello della frequenza in modo estremamente veloce, senza perdita di informazione. Tuttavia, poichè la FFT è formalmente definita per serie temporali di lunghezza infinita, nei dati reali si manifesta il fenomeno del *leakage*: la trasformazione assume infatti la periodicità del segnale, e quando tale condizione non è soddisfatta, parte dell'energia si "spande" nelle linee spettrali adiacenti. Il leakage può essere ridotto, anche se non completamente eliminato, applicando una window function alla serie temporale, così da renderla approssimativamente periodica
- Identificazione dello sbaglio del sensore: il monitoraggio strutturale basato sulle vibrazioni dipende fortemente dall'accuratezza dei dati acquisiti durante l'intera vita operativa della struttura. È quindi fondamentale individuare tempestivamente eventuali malfunzionamenti o errori dei sensori, al fine di garantirne l'affidabilità. Poichè i sistemi di monitoraggio includono tipicamente numerosi sensori che misurano il moto globale o i modi di vibrare a bassa frequenza della struttura, essi presentano una certa ridondanza. Questa caratteristica permette di utilizzare tecniche di correlazione incrociata tra sensori per rilevare anomalie, identificare il sensore difettoso e correggerne eventualmente il segnale

- Estrazione della caratteristica: le serie temporali contengono una grande quantità di dati grezzi che devono essere sintetizzati in un insieme di proprietà rappresentative del comportamento strutturale. L'obiettivo dell'estrazione delle caratteristiche è identificare grandezze che risultino sensibili alla presenza di danno, ma al tempo stesso poco influenzate dalla naturale variabilità ambientale, come variazioni di carico o temperatura. Una variazione significativa di queste caratteristiche può quindi essere interpretata come un'indicazione dell'insorgere di un danno. Poiché il monitoraggio strutturale prevede misure ripetute nel tempo, l'intero processo di estrazione delle caratteristiche dev'essere automatizzato. Alcune grandezze possono essere ricavate automaticamente in modo semplice, invece altre richiedono procedure più complesse, spesso con un alto livello di supervisione e regole dedicate per raggiungere un adeguato grado di automazione
- Processing della caratteristica: il vettore delle caratteristiche estratte presenta una dimensionalità molto più ridotta rispetto alla serie temporale originaria. Ogni singola caratteristica può essere utilizzata per l'individuazione del danno, oppure è possibile ricorrere a tecniche statistiche multivariate che combinano simultaneamente più parametri. Il primo passo consiste nella selezione dei *training data*, ovvero dei dati acquisiti quando la struttura è in condizioni non danneggiate, i quali costituiscono il riferimento per valutare le condizioni future. Tali dati devono coprire l'intero intervallo delle normali condizioni operative e ambientali, poiché anche tali variabili influenzano le caratteristiche estratte e, se non considerate adeguatamente, possono generare falsi allarmi di danno. Le caratteristiche utilizzate possono essere eterogenee e presentare range numerici molto diversi. Quando si applicano metodi di identificazione del danno, le caratteristiche con valori assoluti o variazioni maggiori tendono a dominare il processo decisionale. Per evitare questo effetto indesiderato, ciascuna caratteristica viene tipicamente standardizzata affinché abbia media nulla e varianza unitaria nei training data, garantendo così pari importanza a tutte le grandezze. In alcuni casi, tuttavia, il numero di caratteristiche può risultare ancora troppo elevato per una valutazione statistica affidabile: si può allora procedere selezionando quelle più sensibili al danno oppure lasciando che siano i dati stessi a identificare le caratteristiche più significative, includendole tutte e sfruttando appieno l'informazione disponibile
- Identificazione del danno: l'obiettivo finale è stabilire se nella struttura sia presente o meno un danno. Poiché tutte le caratteristiche mostrano un certo grado di variabilità naturale, la decisione deve essere necessariamente basata su metodi statistici. Una variazione statisticamente significativa rispetto allo stato di riferimento è considerata indicativa dell'insorgere di un danno. Tra gli strumenti più utilizzati vi sono le *control chart*, derivate dai processi

statistici di controllo della qualità e applicate in modo efficace anche allo SHM. Le control chart rappresentano l'evoluzione di una qualità caratteristica in funzione del numero di campioni acquisiti e includono limiti di controllo inferiori e superiori, calcolati sotto l'ipotesi che il processo sia in condizioni normali. In presenza di anomalie o variabilità non ordinarie, le statistiche dei campioni superano tali limiti, generando un segnale di possibile danno

- Allarmi e reports: il sistema di monitoraggio deve essere integrato in una rete che consenta il trasferimento delle informazioni relative allo stato della struttura e del sistema stesso. Sono necessarie almeno tre funzionalità fondamentali: la capacità di inviare un allarme quando viene identificata una possibile condizione di danno; la possibilità, per il personale tecnico, di accedere al sistema per trasferire i dati verso una postazione di analisi off-line o per aggiornare i parametri del sistema di monitoraggio; la comunicazione periodica dello stato del sistema di SHM, così da garantirne il corretto funzionamento nel tempo. Una buona pratica operativa prevede che un allarme venga generato solo se si verificano almeno due rilevazioni consecutive indicative di danno, al fine di ridurre la probabilità di falsi positivi

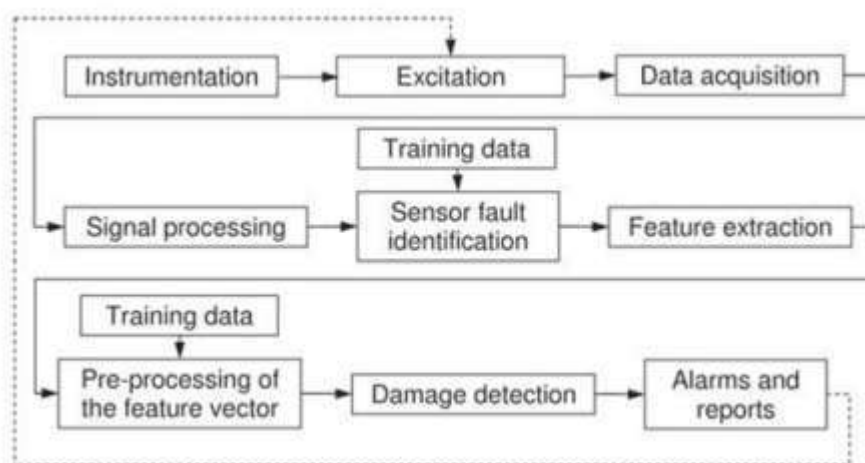


Figura 1.1: Funzioni di un SMH

Il sistema di monitoraggio è concepito in modo modulare, il che significa che ciascuna funzione può essere implementata in maniera relativamente semplice, senza la necessità di riprogettare l'intero sistema da zero. Grazie a questa modularità, risulta anche agevole sviluppare un sistema SHM per nuove strutture, adattando solo i moduli necessari e mantenendo l'architettura generale.

Uno dei principali vantaggi delle tecniche accelerometriche risiede nella loro capacità di operare efficacemente anche in condizioni operative reali, rendendole particolarmente adatte a sistemi SHM continui. I test basati su misure accelerometriche non richiedono l'accesso completo all'intera struttura nè procedure di scansione della superficie lunghe e complesse. Il tempo necessario per l'acquisizione dei dati è molto ridotto. Tuttavia, la risoluzione spaziale dipende fortemente dal numero di sensori disponibili e dalla loro distribuzione; di conseguenza, l'individuazione di danni molto localizzati può risultare difficoltosa, soprattutto se non si dispone di modelli ad alta fedeltà.

Un'ulteriore criticità deriva dal fatto che, in molte applicazioni, le selezioni delle caratteristiche e l'identificazione del danno devono essere condotte in modalità *unsupervised*, poichè non sono disponibili dati della struttura in condizioni già danneggiate. Il danno può accumularsi su scale temporali anche molto diverse, complicando ulteriormente il processo di monitoraggio. Inoltre, è fondamentale che le misure acquisite su lunghi periodi siano accurate e ripetibili, nonostante l'operatività della struttura in ambienti spesso severi.

È infine necessario sviluppare la capacità di definire con precisione le proprietà richieste al sistema di sensorizzazione prima dell'applicazione sul campo e, quando possibile, garantire che i sensori non subiscano danni durante il funzionamento. Nel caso in cui esista una probabilità non trascurabile di danneggiamento dei sensori, anche il loro stato deve essere monitorato. Questo può essere ottenuto impiegando sensori auto-validanti oppure reti di sensori in cui gli elementi si controllano reciprocamente. Il network deve inoltre essere progettato in modo "fail-safe": in caso di guasto di un sensore, gli algoritmi di identificazione del danno devono essere in grado di adattarsi automaticamente alla nuova configurazione. Tale adattamento richiede un livello adeguato di ridondanza nel sistema.

1.2 Tecniche ottiche

Lo sviluppo continuo delle tecniche di controllo non distruttivo (Non-Destructive Testing, NDT), unitamente ai vantaggi offerti dai metodi senza contatto, ha progressivamente indirizzato l'attenzione della comunità scientifica verso le tecniche ottiche. Tra queste, la shearografia si è affermata come una tecnica interferometrica *speckle* a campo pieno, impiegata per la determinazione delle derivate degli spostamenti sulla superficie di un componente.

Rispetto ad altre tecniche interferometriche, la shearografia presenta una spiccata insensibilità ai disturbi ambientali e alle vibrazioni, caratteristica che ne ha favorito l'impiego anche al di fuori dei laboratori ottici controllati, rendendola uno strumento di misura particolarmente adatto per applicazioni in ambito industriale. Inoltre, l'introduzione di ulteriori canali di misura ha permesso l'evoluzione della

shearografia da tecnica prevalentemente qualitativa a sistema idoneo alla misura quantitativa delle deformazioni superficiali.

L'interferometria elettronica di taglio a pattern speckle (shearography), inizialmente sviluppata per misure a campo pieno delle deformazioni, è stata successivamente adottata come strumento per l'ispezione e l'individuazione di difetti nei materiali compositi. Il principio di funzionamento della tecnica si basa sulla formazione di pattern speckle all'interno di un interferometro, ottenuti illuminando la superficie del provino con una sorgente luminosa coerente, tipicamente un laser, e registrando l'immagine interferometrica mediante una camera digitale.

In termini generali, la variazione della fase interferometrica del pattern shearografico può essere espressa dalla seguente relazione:

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda} \left(C \frac{dW}{dx} \right) \Delta x$$

dove C rappresenta la costante geometrica dipendente dalla configurazione ottica del sistema, x indica la direzione di taglio, Δx è la magnitudine del taglio, W è lo spostamento fuori piano della superficie e λ è la lunghezza d'onda della luce laser. Esistono diverse varianti della shearografia, dovute ai differenti approcci adottati nel processo di misura, tra cui la digital shearography (DISH). Questa tecnica risulta tuttavia limitata alle ispezioni di danni superficiali. Un'ulteriore variante è la shearografia basata sullo sfasamento di fase (phase-shift-based shearography), che presenta una sensibilità maggiore rispetto alla shearografia convenzionale in tempo reale, fino a un fattore dieci superiore.

In conclusione, la shearografia è una tecnica di misura rapida e senza contatto, ma risulta limitata all'individuazione di difetti superficiali e subsuperficiali, poichè la capacità di rilevare danni diminuisce all'aumentare della loro profondità. Inoltre, essa non fornisce informazioni dirette sui meccanismi di danneggiamento.

Per effettuare una misura mediante shearografia, la superficie otticamente rugosa dell'oggetto sotto osservazione viene illuminata con una luce laser, in modo da generare un pattern speckle. Tale pattern viene acquisito mediante un dispositivo di taglio (shearing device), che combina coerentemente il pattern speckle con una sua copia identica ma traslata lateralmente. Il pattern speckle interferometrico risultante viene quindi registrato da una camera CCD. Le immagini vengono acquisite prima e dopo l'applicazione del carico e la correlazione tra queste immagini produce un pattern di frange. La fase del pattern di frange contiene informazioni sulla derivata dello spostamento superficiale; per ottenere una misura quantitativa, è necessario ricostruire la distribuzione di fase sull'intera immagine.

Sono state sviluppate numerose tecniche per la ricostruzione della fase; tra queste, una delle più comuni è nota come temporal phase stepping, che consiste nell'acquisizione di una serie di immagini caratterizzate da uno sfasamento di fase noto tra loro. Tali immagini vengono combinate per ottenere una mappa di fase avvolta (wrapped

phase map), in cui la fase è definita con un modulo pari a 2π . Le discontinuità presenti nelle frange della mappa di fase avvolta possono essere successivamente eliminate al fine di ottenere una distribuzione di fase continua; questo processo è noto come *phase unwrapping*.

La strumentazione ottica di un sistema di shearografia idoneo alla misura degli spostamenti fuori dal piano è mostrata in figura 1.2. Il fascio in uscita dal laser viene espanso per illuminare la regione di interesse sulla superficie dell'oggetto in esame. La luce diffusa (scattered) dalla superficie genera un pattern speckle laser, che viene acquisito attraverso un interferometro Michelson di tipo shearing da una camera CCD. Il dispositivo di taglio ha la funzione di dividere l'immagine in modo tale che due immagini identiche, ma traslate, vengano registrate dalla camera. Le due immagini vengono combinate coerentemente, producendo un pattern speckle interferometrico sul sensore della camera. La luce che contribuisce a ciascuno speckle del pattern è diffusa da punti della superficie dell'oggetto separati da una distanza pari alla shear distance. Qualsiasi successiva deformazione della superficie comporta una variazione della differenza di fase tra la luce diffusa da tali punti, determinando una variazione dell'intensità di ciascuno speckle. Il confronto tra le immagini acquisite prima e dopo l'applicazione del carico, generalmente effettuato mediante sottrazione digitale e rettificazione, produce un pattern di frange in cui le frange rappresentano il luogo dei punti caratterizzati dalla stessa magnitudine del gradiente di spostamento.

Si consideri un punto sulla superficie dell'oggetto, localizzato nel punto $P(x,y,z)$, come mostrato in figura 1.3. La luce proveniente dalla sorgente $S(x_S, y_S, z_S)$ viene diffusa dal punto P e acquisita in un punto del rivelatore $D(x_D, y_D, z_D)$ attraverso uno dei due percorsi ottici presenti nel dispositivo di taglio. Dopo la deformazione dell'oggetto, il punto P si sposta nella posizione $P'(x+u, y+v, z+w)$, dove (u,v,w) rappresenta il vettore degli spostamenti nel punto P. Il vettore degli spostamenti e la sua relazione con il sistema di coordinate (x,y,z) sono anch'essi illustrati in figura 1.3. L'origine del sistema di riferimento è posto sulla superficie dell'oggetto, al centro del campo visivo della camera, e la direzione z, fuori dal piano, è orientata dalla superficie dell'oggetto verso la camera.

La variazione della lunghezza del percorso ottico associata al punto P, dovuta alla deformazione dell'oggetto, è espressa come

$$\Delta L_P = (SP' + P'D) - (SP + PD)$$

dove le singole distanze ottiche sono definite come

$$\begin{aligned} SP &= ((x - x_S)^2 + (y - y_S)^2 + (z - z_S)^2)^{1/2} \\ PD &= ((x - x_D)^2 + (y - y_D)^2 + (z - z_D)^2)^{1/2} \\ SP' &= ((x + u - x_S)^2 + (y + v - y_S)^2 + (z + w - z_S)^2)^{1/2} \\ P'D &= ((x + u - x_D)^2 + (y + v - y_D)^2 + (z + w - z_D)^2)^{1/2} \end{aligned}$$

Applicando un'espansione binomiale e trascurando i termini di ordine superiore al primo, si ottiene la seguente espressione approssimata per la variazione del percorso ottico

$$\Delta L_P = \left(\frac{x - x_D}{R_D} + \frac{x - x_S}{R_S} \right) u + \left(\frac{y - y_D}{R_D} + \frac{y - y_S}{R_S} \right) v + \left(\frac{z - z_D}{R_D} + \frac{z - z_S}{R_S} \right) w$$

dove le quantità R_D e R_S rappresentano rispettivamente le distanze tra il punto P e il rivelatore e tra il punto P e la sorgente luminosa, definite come

$$R_D = (x_D^2 + y_D^2 + z_D^2)^{1/2}$$

$$R_S = (x_S^2 + y_S^2 + z_S^2)^{1/2}$$

Introducendo le seguenti relazioni

$$A = \frac{x - x_D}{R_D} + \frac{x - x_S}{R_S}$$

$$B = \frac{y - y_D}{R_D} + \frac{y - y_S}{R_S}$$

$$C = \frac{z - z_D}{R_D} + \frac{z - z_S}{R_S}$$

l'espressione della variazione del percorso ottico può essere riscritta in forma compatta come

$$\Delta L_P = Au + Bv + Cw$$

I coefficienti A, B e C costituiscono i fattori di sensibilità del sistema, dipendenti rispettivamente dalle direzioni di osservazione e di illuminazione. Essi sono equivalenti alle componenti del vettore di sensibilità $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$, definito come la bisettrice dei vettori di osservazione e di illuminazione. In termini di variazione di fase interferometrica, l'espressione può quindi essere scritta come

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \left(k_x \frac{\partial u}{\partial x} + k_y \frac{\partial v}{\partial x} + k_z \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx$$

Nel caso in cui le componenti k_x e k_y del vettore di sensibilità risultino prossime allo zero, il contributo delle derivate degli spostamenti nel piano viene fortemente ridotto e il sistema risulta principalmente sensibile al gradiente degli spostamenti fuori dal piano. In pratica, tale condizione è ottenuta rendendo le direzioni di osservazione e di illuminazione quasi collineari.

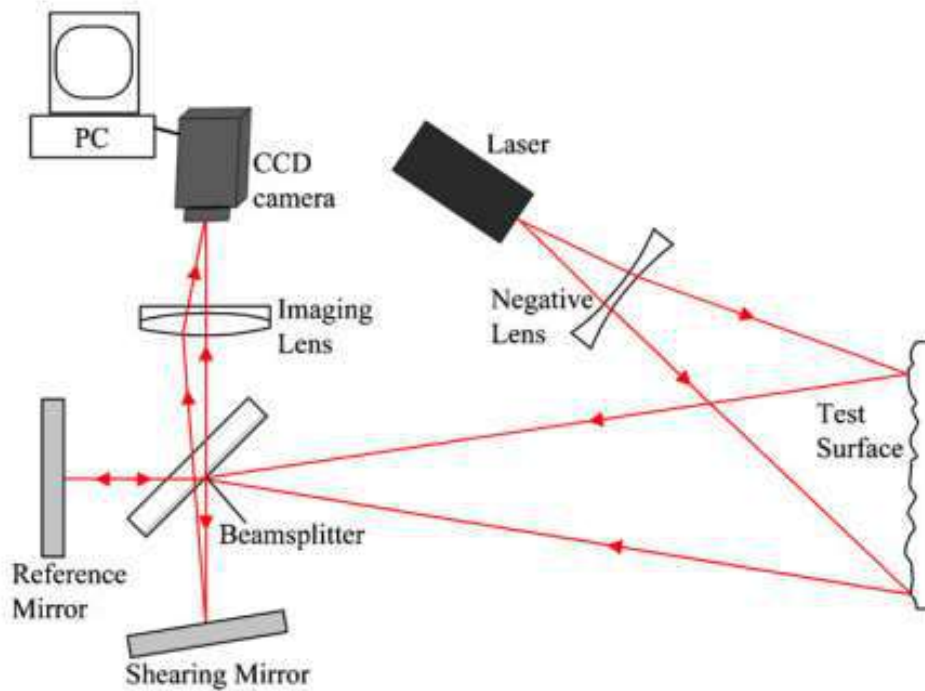


Figura 1.2: Shearography sistema basato su un interferometro Michelson shearing

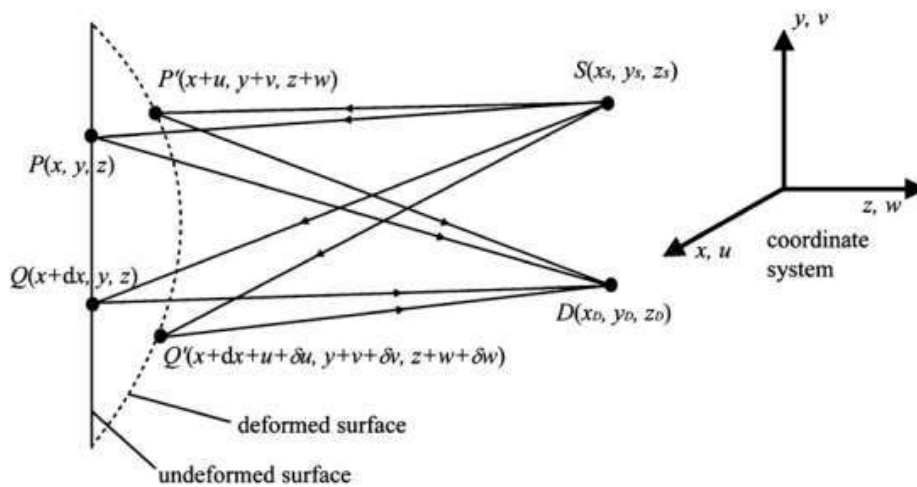


Figura 1.3: Diagramma che mostra i percorsi ottici e relativo sistema di riferimento

Nella shearografia, le derivate degli spostamenti nel piano possono essere misurate mediante un sistema ottico caratterizzato da due direzioni di illuminazione simmetriche. L'oggetto sotto esame viene illuminato simultaneamente da entrambi

i fasci luminosi (*beams*) e, a seguito della loro combinazione coerente, si genera una figura di frange (*fringe pattern*). Utilizzando questa configurazione, si osserva inoltre un'ulteriore figura di interferenza dovuta all'interferometro di shearing (*shearing interferometer*) posizionato tra l'oggetto e la camera di acquisizione. Il conseguente effetto moiré tra i due insiemi di frange produce frange sensibili al gradiente degli spostamenti nel piano, che risultano tuttavia caratterizzate da un contrasto ridotto.

Un metodo alternativo per isolare le derivate degli spostamenti nel piano prevede ancora l'impiego di un'illuminazione simmetrica, ma con illuminazione sequenziale per ciascuna direzione. In questo caso, le immagini vengono acquisite separatamente per ogni direzione di illuminazione, sia prima sia dopo la deformazione dell'oggetto. Successivamente, per ciascuna configurazione viene calcolata la distribuzione di fase. Sottraendo le distribuzioni di fase ottenute dalle diverse direzioni di illuminazione, il contributo della componente di spostamento fuori dal piano viene minimizzato, consentendo l'isolamento delle componenti nel piano.

Qualora la direzione di illuminazione del sistema di shearografia non giaccia nei piani x-z o y-z, le misure risultanti includono contributi provenienti da tutte e tre le componenti delle derivate degli spostamenti. Di conseguenza, è possibile isolare tutte e tre le componenti delle derivate degli spostamenti utilizzando uno strumento dotato di tre direzioni di illuminazione con differenti sensibilità direzionali. In alternativa, possono essere impiegate tre direzioni di osservazione. La shearografia risulta pertanto limitata alla misura degli strain superficiali dell'oggetto in esame, poiché le componenti di strain volumetrico (*bulk strain*) non contribuiscono al segnale misurato.

Tradizionalmente, lo strain è stato misurato mediante estensimetri resistivi (*resistance strain gauges*) che, sebbene semplici ed efficienti, presentano numerose limitazioni. In particolare, un estensimetro misura lo strain superficiale in un singolo punto, con una risoluzione spaziale che dipende dalla sua dimensione caratteristica, ossia dalla lunghezza del gauge. Inoltre, esso deve essere fisicamente aderente alla superficie dell'oggetto sotto esame, un requisito che in molte applicazioni risulta non banale da soddisfare. Le tecniche ottiche consentono di superare tali limitazioni, permettendo misure senza contatto sull'intero campo di vista (*field of view*) del sistema di acquisizione.

Tra le tecniche ottiche, la shearografia risulta particolarmente vantaggiosa grazie alla sua sensibilità alle derivate degli spostamenti superficiali, grandezze strettamente correlate allo strain. La caratterizzazione completa dello strain su un'intera superficie può essere ottenuta mediante la misura di sei componenti delle derivate degli spostamenti: due componenti fuori dal piano e quattro nel piano. Ciò può essere realizzato utilizzando una strumentazione shearografica dotata di almeno tre canali di misura e di due direzioni di shearing ortogonali.

Nel caso di superfici non planari, è necessaria l'applicazione di opportune correzioni

per compensare la variazione dell'entità dello shearing (*shear magnitude*) e del vettore di sensibilità, variazioni indotte dalla geometria dell'oggetto. La derivata della forma dell'oggetto stesso può essere misurata mediante shearografia, rendendo la tecnica particolarmente adatta all'analisi sperimentale di strutture a geometria complessa.

La misura quantitativa dello strain sulla superficie di oggetti non planari richiede l'introduzione di opportune correzioni dovute alla geometria dell'oggetto stesso. Tali correzioni possono essere ottenute mediante una misura della forma dell'oggetto. In questo contesto, la shearografia risulta particolarmente adatta alla misura della pendenza superficiale (*slope*), ovvero della derivata della forma dell'oggetto.

Le principali tecniche impiegate per la misura della pendenza superficiale sono il metodo a doppia lunghezza d'onda (*dual-wavelength*), la rotazione dell'oggetto (*object rotation*) e lo spostamento della sorgente (*source displacement*). Nel metodo a doppia lunghezza d'onda, l'oggetto viene inizialmente illuminato a una lunghezza d'onda λ_1 e viene acquisita un'immagine. Successivamente, l'oggetto viene illuminato nuovamente a una seconda lunghezza d'onda λ_2 e viene registrata un'ulteriore immagine. La sottrazione delle due immagini consente di ottenere una figura di frange di correlazione, nella quale le frange rappresentano le curve di livello della pendenza della superficie dell'oggetto.

Nel metodo di rotazione dell'oggetto, il campione viene ruotato di una piccola quantità tra due esposizioni successive. Anche in questo caso, la sottrazione delle immagini acquisite produce una figura di frange di correlazione sensibile alla pendenza superficiale.

Il terzo approccio, basato sullo spostamento della sorgente, risulta particolarmente vantaggioso poichè la tecnica di rotazione dell'oggetto può non essere applicabile nel caso di oggetti di grandi dimensioni, e il metodo a doppia lunghezza d'onda richiede un'elevata stabilità della frequenza del laser. La tecnica di spostamento della sorgente prevede la traslazione della sorgente ottica in una direzione perpendicolare all'asse di illuminazione tra le diverse esposizioni, seguita dalla generazione di una figura di frange di correlazione mediante sottrazione digitale delle immagini. Tale traslazione deve essere eseguita con particolare attenzione, poichè qualsiasi spostamento lungo l'asse di illuminazione introduce frange portanti (*carrier fringes*), che possono distorcere le frange sensibili alla pendenza.

La shearografia può essere utilizzata per la determinazione delle derivate delle ampiezze vibrazionali delle superfici. Nel caso in cui la vibrazione sia armonica e presenti una frequenza significativamente superiore alla velocità di acquisizione della camera, è possibile effettuare misure mediate nel tempo mediante illuminazione a onda continua. In tale modalità operativa, coppie di immagini vengono acquisite in modo continuo e correlate attraverso la sottrazione, secondo un processo noto come *sottrazione sequenziale*. Questo approccio si distingue dalla sottrazione statica adottata nella shearografia convenzionale, nella quale le immagini acquisite dopo

la deformazione vengono sottratte a una singola immagine di riferimento.

Affinchè la misura risulti significativa, è necessario introdurre uno sfasamento di fase pari a π tra le coppie di immagini, poichè la differenza di intensità media risulterebbe nulla se valutata su un numero elevato di cicli vibrazionali. Il risultato è la comparsa, nella figura di frange, di una frangia caratteristica, detta *frangia nodale*, o *frangia di Bessel*, caratterizzata da elevata intensità luminosa, al contrario dell'intensità delle frange che decresce rapidamente allontanandosi da essa. Nella shearografia, la frangia nodale risulta localizzata nelle regioni di massima ampiezza di vibrazione.

L'interferometro di Michelson è frequentemente impiegato come dispositivo di shearing, grazie alla semplicità della configurazione sperimentale, alla facilità di regolazione dell'entità dello shearing dell'immagine e alla possibilità di effettuare l'analisi di fase mediante la tecnica di *phase stepping temporale*. Tale tecnica può essere implementata montando uno degli specchi dell'interferometro su un trasduttore piezoelettrico (PZT). Tuttavia, uno dei principali svantaggi dell'interferometro di Michelson è la ridotta efficienza luminosa, poichè almeno il 50% della luce incidente viene perso a causa del doppio passaggio attraverso il divisore di fascio *beamsplitter*. Dispositivi di shearing alternativi includono la camera a shearing d'immagine, che utilizza un cuneo di vetro posizionato su una metà dell'apertura della camera, nonchè l'impiego di lastre di vetro o di un bi-prisma di Fresnel. Tali soluzioni presentano una maggiore efficienza luminosa rispetto all'interferometro di Michelson, sebbene l'implementazione dell'analisi di fase mediante phase stepping risulti meno immediata.

Un'ulteriore configurazione, caratterizzata da una migliore efficienza luminosa rispetto all'interferometro di Michelson, utilizza una fibra ottica a mantenimento di polarizzazione e un prisma di Wollaston. I due modi di polarizzazione ortogonali della fibra vengono eccitati in modo equivalente e la luce in uscita dalla fibra illumina la superficie in esame. La luce riflessa viene acquisita da una camera attraverso un sistema di lenti, all'interno del quale è collocato il prisma. Quest'ultimo è allineato in modo da generare una coppia di immagini sheared, corrispondenti ai due modi di polarizzazione della fibra. L'entità dello shearing dell'immagine può essere regolata mediante la traslazione del prisma lungo l'asse ottico.

Una sezione della fibra ottica viene avvolta attorno a un cilindro piezoelettrico, utilizzato come modulatore di fase. Applicando una tensione elettrica al cilindro, la fibra viene deformata elasticamente, inducendo uno sfasamento di fase relativo tra i due modi di polarizzazione ortogonali. Un'ulteriore configurazione prevede l'impiego di un cuneo di vetro operante in riflessione, ottenendo immagini sheared a partire dalle riflessioni sulle superfici anteriore e posteriore del cuneo stesso. Questa configurazione è comunemente utilizzata nelle applicazioni di controllo non distruttivo.

La shearografia presenta requisiti di coerenza relativamente ridotti rispetto ad

altre tecniche interferometriche, in quanto le differenze relative nei percorsi ottici all'interno dell'interferometro risultano contenute. Questa caratteristica ha reso possibile l'impiego di sorgenti a bassa coerenza, purchè la coerenza spaziale sia sufficiente a generare una figura di speckle adeguata all'interferenza.

Il rapido progresso delle componenti elettroniche e ottiche ha reso lo sviluppo di sistemi di shearografia digitale più semplice rispetto al passato, consentendo al contempo la realizzazione di configurazioni più complesse in grado di coprire un intervallo più ampio di applicazioni di misura. La disponibilità di sistemi laser più potenti e maggiormente coerenti permette l'analisi di oggetti di dimensioni maggiori e il monitoraggio di deformazioni transitorie. Allo stesso tempo, la miniaturizzazione delle sorgenti laser semplifica la realizzazione di sistemi shearografici multi-canale, idonei alla misura quantitativa delle tre componenti dello strain.

Il miglioramento della risoluzione spaziale e della profondità in bit delle camere consente l'esecuzione di misure con maggiore accuratezza, oltre all'impiego di camere ad alta velocità. La crescente flessibilità dei sistemi di acquisizione permette inoltre la regolazione in tempo reale dei parametri della camera, quali il tempo di integrazione. Infine, il rapido sviluppo dell'hardware e del software di elaborazione consente oggi l'acquisizione delle immagini quasi in tempo reale, nonché la visualizzazione immediata delle mappe di fase, sia wrapped sia unwrapped.

La sensibilità di misura del metodo basato sulla sottrazione diretta è limitata a una singola frangia, corrispondente a una variazione di fase pari a 2π , rendendo impossibile la rilevazione di variazioni di fase inferiori a tale valore. Di conseguenza, la sottrazione diretta presenta una sensibilità relativamente bassa, che ne limita l'applicabilità pratica. Per superare questa limitazione è stata introdotta la tecnica del phase shifting, che consente di ottenere una sensibilità di misura significativamente superiore. In condizioni ideali, la sensibilità teorica può raggiungere il valore di $\frac{2\pi}{256}$ nel caso di un sistema di acquisizione con risoluzione a 8 bit. Tuttavia, considerando il contributo del rumore di speckle, le limitazioni dell'hardware e altri fattori sperimentali, la sensibilità di misura di un sistema di shearografia digitale basato sul phase shifting risulta tipicamente dell'ordine di $\frac{2\pi}{10}$, ovvero circa un ordine di grandezza superiore rispetto a quella ottenibile mediante sottrazione in tempo reale. Questo miglioramento ha contribuito in modo significativo allo sviluppo e alla diffusione della shearografia digitale.

La shearografia digitale con phase shifting può essere classificata in due principali categorie: la shearografia digitale a phase shifting temporale (temporal phase-shifting digital shearography, TPS-DS) e la shearografia digitale a phase shifting spaziale (spatial phase-shifting digital shearography, SPS-DS).

Il phase stepping temporale prevede l'acquisizione di una sequenza di immagini caratterizzate da uno sfasamento di fase noto tra acquisizioni successive. Le immagini così ottenute vengono successivamente combinate, su base pixel-wise, mediante un algoritmo di phase stepping, producendo una mappa di fase wrapped, nella

quale i valori di fase di ciascun pixel risultano compresi nell'intervallo $[-\pi$ e $+\pi]$. Il phase stepping può essere applicato esclusivamente al frame di riferimento, con la determinazione intermedia delle figure di frange sfasate, oppure sia al frame di riferimento sia al frame di segnale, nel qual caso la mappa di fase wrapped è determinata unicamente dai pattern di speckle.

Il primo approccio è comunemente indicato come *phase of differences*, invece il secondo è noto come *difference of phases*. L'approccio phase of differences risulta computazionalmente più rapido, poichè richiede l'acquisizione di un solo frame di segnale; tuttavia, l'approccio difference of phases consente di ottenere mappe di fase wrapped caratterizzate da un livello di rumore inferiore e da un contrasto delle frange significativamente maggiore.

La tecnica di phase stepping temporale, discussa in precedenza, rappresenta il metodo di analisi di fase preferito nella maggior parte delle applicazioni di shearografia, poichè risulta relativamente semplice da implementare e consente di ottenere mappe di fase wrapped caratterizzate da una buona risoluzione spaziale. Tuttavia, in alcune condizioni sperimentali il misurando può variare nel tempo necessario all'acquisizione della sequenza di immagini sfasate, compromettendo l'accuratezza della misura. Ciò avviene, ad esempio, nel caso di misure dinamiche o di fenomeni transitori.

Una possibile soluzione consiste nell'acquisizione simultanea di una serie di immagini phase-stepped, approccio noto come phase stepping spaziale (*spatial phase stepping*). Questo metodo può essere implementato mediante l'impiego di più camere, soluzione che risulta tuttavia costosa e richiede configurazioni ottiche complesse. Un'alternativa consiste nell'acquisizione simultanea di immagini sfasate utilizzando differenti regioni di una singola camera CCD. In questo caso, le mappe di fase ottenute presentano una risoluzione spaziale inferiore rispetto a quelle ricavate mediante phase stepping temporale, poichè ciascuna immagine occupa soltanto una frazione dell'area attiva del sensore. Tale limitazione può risultare poco significativa qualora venga utilizzato un sensore di grande formato.

Esiste inoltre un approccio che prevede l'impiego di tre o più camere CCD per l'acquisizione simultanea di un interferogramma speckle con differenze di fase note e prefissate. Sebbene questo metodo consenta l'esecuzione di misure dinamiche, il sistema risulta complesso, caratterizzato da errori elevati e da una difficile regolazione dello sfasamento di fase tra le diverse camere, rendendolo poco adatto alle applicazioni pratiche. Un'ulteriore configurazione basata sul phase stepping spaziale utilizza un interferometro di shearing basato sulla polarizzazione, in grado di dividere l'immagine incidente in due contributi che vengono acquisiti affiancati sul sensore della camera, con uno sfasamento di fase relativo pari a π .

Un ulteriore approccio per la determinazione della distribuzione di fase a partire da una singola acquisizione è rappresentato dalla tecnica del carrier spaziale (*spatial carrier*). Tale metodo consente di migliorare la qualità della mappa di fase e di

estrarre informazioni multidimensionali da una singola immagine. Nella tecnica del carrier spaziale, una frequenza portante viene introdotta nella distribuzione di intensità registrata, permettendo la separazione delle informazioni di fase da quelle di fondo nel dominio delle frequenze. L'immagine viene quindi elaborata mediante una trasformata di Fourier per isolare e calcolare la distribuzione di fase.

La tecnica può essere estesa a figure di frange bidimensionali, ma richiede che la frequenza portante sia costante sull'intera immagine, condizione che implica la presenza di frange portanti perfettamente rettilinee. Tale requisito risulta difficilmente soddisfacibile, nella pratica, in un sistema di shearografia. Qualsiasi curvatura delle frange portanti può infatti essere erroneamente interpretata come una distorsione delle frange dovuta alla modulazione di fase, conducendo a una determinazione non corretta della distribuzione di fase.

Un'alternativa ai metodi basati sulle frange portanti consiste nella determinazione della distribuzione di fase a partire da una singola figura di frange. Esistono numerose tecniche che perseguono questo obiettivo; tuttavia, esse risultano spesso caratterizzate da una notevole complessità algoritmica e da un elevato costo computazionale.

Un primo approccio, noto come *skeletonizing*, prevede l'assottigliamento delle frange fino a ottenere strutture di spessore pari a un singolo pixel. A partire da tale elaborazione, viene generata un'immagine nella quale ai massimi di intensità viene assegnato il valore +1, ai minimi il valore -1 e a tutti gli altri punti il valore zero. La fase compresa tra gli skeletons delle frange viene quindi determinata mediante interpolazione. La principale difficoltà di questa tecnica risiede nell'identificazione accurata dei massimi e dei minimi delle frange, garantendo al contempo l'assenza di discontinuità negli skeletons. Nel caso di frange di correlazione a speckle, la presenza di un elevato rumore ad alta frequenza rende necessaria l'applicazione di un filtraggio estensivo.

La trasformata di Fourier finestrata (*windowed Fourier transform*) è stata anch'essa utilizzata per la determinazione della fase. In particolare, una tecnica nota come *windowed Fourier ridges (WFR)* prevede l'analisi di piccole regioni della figura di frange e il confronto delle frequenze spaziali locali con lo spettro ottenuto mediante trasformata finestrata. I valori di frequenza spaziale che presentano la massima corrispondenza, detti ridges, vengono assunti come frequenze locali, direttamente correlate alle derivate della fase. La fase può quindi essere ricostruita a partire dalle frequenze locali, mediante integrazione oppure tramite il calcolo dell'arcotangente del rapporto tra la parte reale e quella immaginaria.

Un approccio concettualmente affine è rappresentato dalla tecnica di demodulazione sequenziale guidata dalla frequenza (*frequency-guided sequential demodulation*). In questo metodo, la figura di frange viene inizialmente filtrata e successivamente normalizzata mediante la trasformata di Hilbert. La fase viene quindi stimata calcolando il coseno del pattern di frange pre-processato, invece le frequenze locali

vengono determinate individuando i valori che minimizzano una funzione di costo basata su una stima iniziale, all'interno di un intorno locale di pixel. I segni delle frequenze locali e la fase associata a ciascun pixel vengono infine determinati in modo sequenziale, seguendo un ordine dipendente dai valori più elevati della frequenza totale. Questa tecnica ha dimostrato buone prestazioni anche in presenza di figure di frange molto ravvicinate.

La trasformata wavelet continua è stata inoltre impiegata per la determinazione della fase a partire da una singola figura di frange in shearografia. Tale approccio risulta particolarmente adatto all'analisi di deformazioni continue, utilizzando sequenze di immagini acquisite mediante camere ad alta velocità. In questo caso, la variazione temporale dell'intensità di ciascun pixel viene determinata e sottoposta a una trasformata wavelet nel dominio temporale. La variazione di intensità monodimensionale nel tempo viene quindi rappresentata in un piano bidimensionale, nel quale i massimi corrispondono alle frequenze locali. La fase può essere successivamente calcolata mediante l'arcotangente del rapporto tra la parte immaginaria e quella reale delle frequenze associate ai ridges. Un vantaggio significativo della trasformata wavelet trasformazione è che la fase demodulata risulta già unwrapped, eliminando la necessità di applicare algoritmi di phase unwrapping successivi.

Nel contesto della shearografia, i principali fattori che influenzano la scelta della tecnica di determinazione della fase includono la robustezza al rumore e la probabilità di generazione di figure di frange ravvicinate, caratteristiche fortemente dipendenti dalla configurazione sperimentale e dal tipo di misura da effettuare.

Le tecniche di interferometria speckle, per loro natura, sono soggette a livelli significativi di rumore ad alta frequenza. Per questo motivo, prima delle successive fasi di elaborazione dell'immagine, quali il phase unwrapping, viene generalmente applicato un processo di filtraggio finalizzato alla riduzione di tale rumore.

L'approccio più comune consiste nell'applicazione di un filtro passa-basso, realizzato mediante una convoluzione bidimensionale dell'immagine con un opportuno kernel di filtraggio.

Il kernel passa-basso più semplice è rappresentato da una maschera 3x3, definita come:

$$\mathbf{K}_{\text{lowpass}} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Nel caso del filtraggio di mappe di fase wrapped, è pratica comune operare separatamente sulle mappe del seno e del coseno della fase, alle quali viene applicato il filtro passa-basso. La mappa di fase wrapped filtrata viene successivamente ricostruita a partire dalle mappe filtrate di seno e coseno mediante l'utilizzo della funzione arcotangente.

L'effetto del filtraggio può essere incrementato applicando il filtro in modo iterativo oppure utilizzando kernel di dimensioni maggiori. Tuttavia, un eccessivo filtraggio

(*over-filtering*) comporta il rischio di sfocare le discontinuità delle frange di fase, con conseguente perdita di informazione e degradazione della qualità della mappa di fase ricostruita.

Le mappe di fase wrapped presentano valori compresi nell'intervallo $[-\pi$ e $+\pi]$. Per ottenere una misura continua della fase è necessario rimuovere le discontinuità di 2π , operazione nota come *phase unwrapping*. Nella pratica della shearografia, tuttavia, le mappe di fase risultano spesso affette da rumore ad alta frequenza, possono presentare interruzioni nelle frange di fase wrapped oppure includere ulteriori criticità, quali la presenza di discontinuità geometriche o fori nell'oggetto in esame. Per tali ragioni, è frequentemente necessario ricorrere a tecniche di phase unwrapping più sofisticate rispetto agli approcci elementari.

Un algoritmo ampiamente utilizzato per il phase unwrapping è il metodo dei branch cuts. Questo approccio prevede innanzitutto l'individuazione dei residui di fase, localizzati nei punti in cui sono presenti discontinuità nelle frange. Ai residui viene assegnato un valore positivo o negativo in funzione della somma dei valori di fase dei pixel adiacenti. Successivamente, vengono introdotte delle linee di taglio (*branch cuts*) che collegano tra loro residui di segno opposto. L'operazione di unwrapping viene quindi eseguita pixel per pixel, evitando di attraversare le branch cuts, ottenendo così una mappa di fase unwrapped priva di ambiguità.

Un approccio alternativo si basa sull'unwrapping guidato dalla qualità, nel quale i pixel vengono srotolati seguendo un ordine determinato da un indice di qualità, generalmente calcolato a partire dai gradienti di fase della mappa wrapped. In questo contesto, l'unwrapping viene effettuato lungo il percorso definito dal *minimum spanning tree*. In un grafico pesato, il minimum spanning tree rappresenta l'albero di connessione che collega tutti i nodi minimizzando il peso totale. Applicato al phase unwrapping, questo metodo consente di privilegiare le regioni di fase più affidabili. La velocità del processo può essere ulteriormente incrementata suddividendo la mappa di fase in regioni locali (*tiles*), che vengono elaborate separatamente.

La shearografia si è affermata come una tecnica di riferimento nel campo dei controlli non distruttivi (NDT), grazie alla sua capacità di fornire misure full-field senza contatto. Essa presenta numerosi vantaggi rispetto a tecniche affini quali l'olografia e l'Electronic Speckle Pattern Interferometry (ESPI), tra cui la possibilità di misurare direttamente le derivate degli spostamenti, requisiti di coerenza più ridotti e una minore sensibilità alle vibrazioni ambientali, dovuta all'impiego di un interferometro a cammino comune (*common-path interferometer*). Poiché la shearografia misura direttamente le anomalie di strain associate alla presenza di difetti, l'efficacia della tecnica nelle applicazioni NDT dipende dalla dimensione e dalla posizione dei difetti, dall'entità del carico applicato e dall'entità e direzione dello shearing. Quando un componente è sottoposto a carico, le regioni delaminate mostrano anomalie di strain rispetto alle aree integre. Mediante shearografia, tali regioni difettose risultano visibili nella figura di frange anche quando il difetto è

localizzato al di sotto della superficie, poichè esso influenza comunque il campo di deformazione superficiale.

La Digital Image Correlation (DIC) rappresenta un'ulteriore tecnica ottica senza contatto per misure full-field, ampiamente utilizzata per la determinazione degli spostamenti e degli strain di provini sottoposti a carichi esterni. La DIC consente inoltre un'identificazione rapida dei difetti, permettendo misure veloci, in tempo reale e in situ durante l'esecuzione di prove meccaniche.

In conclusione, la DIC è una tecnica di misura ottica e numerica full-field e senza contatto, che consente l'esecuzione di misure in situ durante l'applicazione di carichi meccanici. Essa mostra risultati promettenti per la caratterizzazione sperimentale del danno in strutture composite; tuttavia non fornisce informazioni dirette sulle caratteristiche micromeccaniche del danno, che richiedono l'impiego di tecniche complementari.

L'obiettivo della tesi è analizzare il potenziale della Carrera Unified Formulation nella modellazione di strutture composite laminate e valutare l'efficacia di differenti metodi di identificazione del danno, con particolare riferimento a tecniche basate su risposte dinamiche e misure ottiche.

Capitolo 2

CUF

La Carrera Unified Formulation rappresenta un approccio generale per la modellazione di strutture monodimensionali, bidimensionali e tridimensionali, basato su un approccio unificato alla descrizione cinematica dei campi di spostamento. Grazie alla CUF, infatti, è possibile generare in modo sistematico modelli di ordine arbitrario, partendo da un'unica formulazione di base, senza la necessità di definire, per ciascun caso specifico, le equazioni di equilibrio o le relazioni costitutive; in quanto si tratta di una formulazione gerarchica che considera l'ordine della teoria come un input dell'analisi.

Gli effetti non classici, quali *warping*, deformazioni nel piano, effetti di taglio e accoppiamento flessione-torsione, possono essere opportunamente considerati aumentando l'ordine della teoria o del modello adottato. Tuttavia, l'impiego delle espansioni di Taylor per rappresentare il campo degli spostamenti presenta alcune limitazioni intrinseche. In particolare:

- le variabili introdotte possiedono un significato puramente matematico, in quanto corrispondono alle derivate del campo di spostamento lungo gli assi della trave
- i termini di ordine superiore non descrivono fenomeni locali, ma rappresentano solo proprietà globali della sezione trasversale
- l'estensione del modello a una formulazione in presenza di grandi rotazioni può risultare complessa

Per superare queste limitazioni, è possibile descrivere la sezione trasversale della trave mediante i polinomi di Lagrange. L'adozione di questo tipo di funzioni di espansione consente di formulare il modello in termini di sole variabili di spostamento, conferendo a ciascuna incognita un preciso significato fisico, ovvero spostamenti traslazionali.

Questo approccio presenta numerosi vantaggi:

- le incognite possono essere localizzate in specifiche regioni (sub-domini) della sezione, ad esempio in prossimità dei carichi applicati
- le condizioni al contorno geometriche possono essere imposte a livello locale, sui sub-domini della sezione e non esclusivamente sull'intera sezione trasversale; tali condizioni, inoltre, possono essere applicate anche lungo l'asse della trave, permettendo una maggiore flessibilità nella modellazione
- le sezioni trasversali possono essere suddivise e successivamente assemblate con semplicità, poichè gli spostamenti ai bordi costituiscono le variabili fondamentali del problema

Infine, l'uso di funzioni di espansione basate sui polinomi di Lagrange si dimostra particolarmente adatto anche nel caso di analisi non lineari geometriche, dove le formulazioni di Taylor di ordine elevato risultano spesso meno efficienti e più complesse da implementare.

Nell'ambito di questo approccio, è stata sviluppata una specifica implementazione 1D in cui si assumono solo gli spostamenti come variabili, applicata a elementi strutturali di tipo beam. In questo caso, i polinomi di Lagrange sono usati per interpolare il campo degli spostamenti sulla sezione trasversale, consentendo la definizione di modelli con diversi ordini di approssimazione: sono considerati polinomi a tre (L3), quattro (L4) e nove (L9) punti, che portano, rispettivamente, a un'approssimazione lineare, quasi lineare (bilineare) e quadratica del campo degli spostamenti.

Questa formulazione, appartenente alla famiglia dei modelli CUF monodimensionali, si è dimostrata efficace nel rappresentare con grande accuratezza gli effetti locali e i comportamenti shell-like per sezioni sottili chiuse o aperte.

Un ulteriore vantaggio risiede nella flessibilità nella definizione delle condizioni al contorno: è possibile modificarle in modo semplice sulla sezione, introducendo dei vincoli localizzati oppure lungo l'asse della trave, per simulare configurazioni plate/shell-like.

L'interesse verso i modelli di tipo beam deriva principalmente dalla semplicità formulativa e il ridotto costo computazionale rispetto ai modelli bidimensionali (plate/shell) o tridimensionali (solidi).

L'impiego di tali modelli risulta particolarmente interessante nel caso di corpi snelli come le ali di un aereo o le lame del rotore di un elicottero, in cui il rapporto tra lunghezza e dimensioni trasversali è elevato.

Le teorie di trave più conosciute e comunemente utilizzate sono la teoria di Eulero-Bernoulli (EBBM), che non considera le deformazioni dovute al taglio trasversale, e la teoria di Timoshenko (TBM), la quale, invece, tiene conto di una distribuzione uniforme del taglio lungo la sezione trasversale.

Questi modelli forniscono risultati accurati per strutture sottili, compatte e omogenee soggette a flessione, ma mostrano limitazioni quando si analizzano effetti di

taglio complessi, deformazioni locali o comportamenti tridimensionali. Per superare questi limiti, si possono sviluppare teorie di ordine superiore, in grado di migliorare la rappresentazione del campo degli spostamenti.

2.1 Concetti generali

I bordi della trave sono definiti nell'intervallo $0 \leq y \leq L$, come mostrato nella figura 2.1, in cui è rappresentato il sistema di riferimento adottato per la struttura.

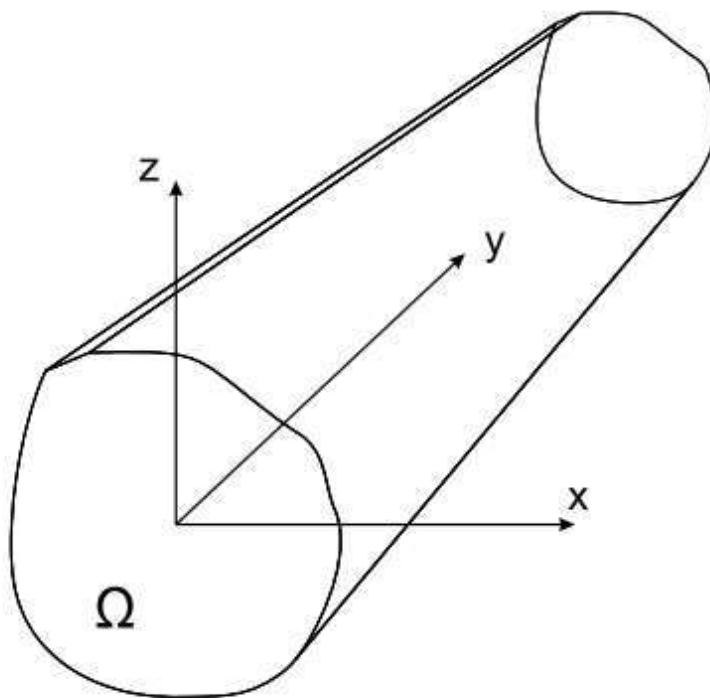


Figura 2.1: Sistema di riferimento della struttura

Il vettore degli spostamenti è espresso nella forma:

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \{u_x \ u_y \ u_z\}^T$$

Le componenti di tensione, indicate con σ , e quelle di deformazione, ϵ , sono suddivise in due gruppi: il primo, identificato dal pedice p , comprende le componenti riferite ai piani ortogonali al dominio Ω , invece il secondo, contraddistinto dal pedice n , quelle relative alla sezione trasversale.

In particolare si definiscono:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_p &= \{\sigma_{zz} \ \sigma_{xx} \ \sigma_{zx}\}^T & \boldsymbol{\epsilon}_p &= \{\epsilon_{zz} \ \epsilon_{xx} \ \epsilon_{zx}\}^T \\ \boldsymbol{\sigma}_n &= \{\sigma_{zy} \ \sigma_{xy} \ \sigma_{yy}\}^T & \boldsymbol{\epsilon}_n &= \{\epsilon_{zy} \ \epsilon_{xy} \ \epsilon_{yy}\}^T \end{aligned}$$

Le relazioni lineari tra deformazioni e spostamenti, adottabili nel caso in cui questi ultimi siano piccoli rispetto alla dimensione predominante della trave, ovvero la sua lunghezza, possono essere espresse tramite gli operatori differenziali \mathbf{D}_p e \mathbf{D}_n , secondo le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\epsilon}_p &= \mathbf{D}_p \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\epsilon}_n &= \mathbf{D}_n \mathbf{u} = (\mathbf{D}_{n\Omega} + \mathbf{D}_{ny}) \mathbf{u}\end{aligned}$$

con

$$\mathbf{D}_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_{n\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_{ny} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$$

La legge di Hooke lineare viene adottata per correlare il campo delle tensioni a quello delle deformazioni, secondo la relazione:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon}$$

Grazie a cui le precedenti relazioni diventano:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_p &= \tilde{\mathbf{C}}_{pp} \boldsymbol{\epsilon}_p + \tilde{\mathbf{C}}_{pn} \boldsymbol{\epsilon}_n \\ \boldsymbol{\sigma}_n &= \tilde{\mathbf{C}}_{np} \boldsymbol{\epsilon}_p + \tilde{\mathbf{C}}_{nn} \boldsymbol{\epsilon}_n\end{aligned}$$

Nel caso di materiali isotropi queste ultime matrici sono:

$$\tilde{\mathbf{C}}_{pp} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{12} & 0 \\ \tilde{C}_{12} & \tilde{C}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{C}_{66} \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{C}}_{nn} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{55} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{C}_{44} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{C}_{33} \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{C}}_{pn} = \tilde{\mathbf{C}}_{np}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tilde{C}_{13} \\ 0 & 0 & \tilde{C}_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Queste ultime rappresentano le matrici di rigidità ridotte, caratterizzate dai coefficienti elastici equivalenti \tilde{C}_{ij} , i quali dipendono dalle caratteristiche meccaniche del materiale: moduli di Young, coefficienti di Poisson, moduli di taglio, orientamento delle fibre (nei materiali compositi). In particolare, la matrice $\tilde{\mathbf{C}}_{pp}$ descrive le relazioni tra le componenti normali e tangenziali nei piani ortogonali a Ω , $\tilde{\mathbf{C}}_{nn}$ rappresenta i contributi sulla sezione trasversale e la matrice di accoppiamento $\tilde{\mathbf{C}}_{pn} = \tilde{\mathbf{C}}_{np}^T$ lega i due insiemi di componenti.

2.2 Formulazione unificata

Il campo degli spostamenti viene espresso come un'espansione in termini di funzioni generiche F_τ , secondo l'approccio unificato della *Carrera Unified Formulation*, secondo la relazione:

$$\mathbf{u} = F_\tau \mathbf{u}_\tau, \quad \tau = 1, 2, \dots, M$$

dove F_τ rappresenta le funzioni di espansione che variano lungo la sezione trasversale della trave, invece \mathbf{u}_τ è il vettore degli spostamenti associato al termine τ che, in accordo con la notazione di Einstein, indica la sommatoria e il parametro M indica il numero totale di termini considerati nell'espansione e, di conseguenza, l'ordine della teoria adottata.

Le funzioni di espansione sono ottenute tramite polinomi di Lagrange e, nel caso specifico, gli elementi L3 sono definiti su un dominio triangolare identificato da tre punti, che costituiscono i vertici dell'elemento utilizzato per interpolare il campo di spostamenti sulla sezione trasversale. Analogamente, gli elementi L4 e L9 sono definiti rispettivamente su domini quadrilaterali, consentendo approssimazioni di ordine superiore e una maggiore flessibilità nella modellazione della sezione; garantendo quindi una rappresentazione continua e accurata del campo di spostamenti anche in presenza di geometrie complesse o di distribuzioni non uniformi delle proprietà del materiale.

Espansione di Taylor (TE)

I modelli basati sull'espansione di Taylor (TE) si fondano sull'utilizzo di sviluppi polinomiali del campo di spostamenti lungo la sezione trasversale della trave, espressi nella forma $x^i z^j$, dove i e j sono numeri interi positivi. L'ordine N rappresenta un parametro libero, definito come dato di input dell'analisi. La scelta del suo valore ottimale, per una determinata configurazione strutturale, viene generalmente effettuata attraverso un'analisi di convergenza, al fine di garantire un equilibrio tra accuratezza del modello e costo computazionale.

Di seguito è riportato il modello cinematico corrispondente a un'espansione di Taylor del secondo ordine, ovvero con $N=2$:

$$\begin{aligned} u_x &= u_{x_1} + x u_{x_2} + z u_{x_3} + x^2 u_{x_4} + xz u_{x_5} + z^2 u_{x_6} \\ u_y &= u_{y_1} + x u_{y_2} + z u_{y_3} + x^2 u_{y_4} + xz u_{y_5} + z^2 u_{y_6} \\ u_z &= u_{z_1} + x u_{z_2} + z u_{z_3} + x^2 u_{z_4} + xz u_{z_5} + z^2 u_{z_6} \end{aligned}$$

Il modello considerato presenta un totale di 18 variabili di spostamento, suddivise in tre categorie in funzione dell'ordine dell'espansione: tre costanti per $N=0$, sei lineari per $N=1$ e nove paraboliche per $N=2$. Le funzioni generiche associate ai vari ordini di espansione sono riportate nella Tabella 2.1.

N	M	F_τ
0	1	$F_1 = 1$
1	3	$F_2 = x \quad F_3 = z$
2	6	$F_4 = x^2 \quad F_5 = xz \quad F_6 = z^2$

Tabella 2.1: Forma compatta dei polinomiali di tipo Taylor

Le formulazioni matematiche relative al comportamento flessionale delle travi furono introdotte originariamente da Eulero e Bernoulli (1744) e successivamente da Timoshenko (1921-1922). I rispettivi modelli rappresentano i riferimenti classici nello studio delle strutture snelle ed omogenee soggette a carichi di flessione, nonché nella determinazione dei modi naturali di vibrazione flessionale.

Nell'ambito della CUF, entrambe le teorie possono essere derivate introducendo opportune ipotesi semplificative a partire da un'espansione di Taylor del campo di spostamenti del primo ordine, ovvero con $N = 1$.

Secondo la teoria di Eulero-Bernoulli (EBBT), la sezione trasversale della trave è assunta rigida nel proprio piano; di conseguenza, le deformazioni nel piano sono trascurabili e gli spostamenti trasversali u_x e u_z dipendono unicamente dalla coordinata assiale y . Inoltre, si ipotizza che la sezione trasversale ruoti attorno alla cosiddetta superficie neutrale, mantenendosi piana durante la deformazione, lo spostamento assiale u_y risulta pertanto lineare rispetto alle coordinate nel piano. Si assume che la sezione rimanga perpendicolare alla superficie neutrale in ogni configurazione deformata; quest'ultima ipotesi implica l'annullamento delle deformazioni di taglio γ_{yz} e γ_{yx} .

Considerando queste tre ipotesi, quindi, il campo di spostamenti previsto dalla teoria di Eulero-Bernoulli risulta espresso come:

$$\begin{aligned} u_x &= u_{x_1} \\ u_y &= u_{y_1} - u_{x_1,y} x - u_{z_1,y} z \\ u_z &= u_{z_1} \end{aligned}$$

dove i termini additivi in u_y rappresentano gli angoli di rotazione della sezione trasversale attorno agli assi principali della sezione.

La teoria di Timoshenko (TBT), invece, mantiene le stesse ipotesi di base ma introduce una maggiore generalità, consentendo alla sezione trasversale di non rimanere perpendicolare alla superficie neutrale durante la deformazione. In questo modo, vengono considerate anche le deformazioni di taglio γ_{xy} e γ_{yz} , che assumono un ruolo rilevante soprattutto nelle travi spesse, costituite da materiali non omogenei o a strutture in materiale composito o con comportamento non puramente flessionale.

In questo caso, il campo di spostamenti risulta descritto da:

$$\begin{aligned}u_x &= u_{x_1} \\u_y &= u_{y_1} + u_{y_2} x - u_{y_3} z \\u_z &= u_{z_1}\end{aligned}$$

Espansione di Lagrange (LE)

I modelli di tipo Lagrange Expansion (LE) si basano sull'utilizzo dei polinomi di interpolazione di Lagrange come funzioni sulla sezione trasversale della trave. Questo approccio consente di costruire teorie di ordine superiore sia monodimensionali (1D) sia bidimensionali (2D), garantendo grande flessibilità nella descrizione cinematica delle strutture. Inoltre, la formulazione isoparametrica può essere impiegata per gestire in modo efficace geometrie di sezione arbitraria. Analogamente a quanto avviene per i modelli Taylor Expansion (TE), le funzioni di interpolazione F_τ vengono utilizzate per rappresentare il campo di spostamenti sia lungo la sezione trasversale, nel caso delle travi, sia attraverso lo spessore, nel caso di piastre e gusci.

Per la descrizione della sezione trasversale vengono impiegati principalmente tre tipi di elementi lagrangiani: L4, L9 e L16, caratterizzati rispettivamente da quattro, nove e sedici punti di interpolazione. Ai fini di una rappresentazione più chiara, vengono introdotte le coordinate naturali (o normalizzate) α e β , che variano nell'intervallo $[-1, +1]$.

L'elemento L4 è illustrato in figura 2.2. Le sue funzioni di interpolazione sono espresse come:

$$F_\tau = \frac{1}{4}(1 + \alpha\alpha_\tau)(1 + \beta\beta_\tau), \quad \tau = 1,2,3,4$$

invece le coordinate naturali associate ai quattro punti dell'elemento sono riportate nella Tabella 2.2

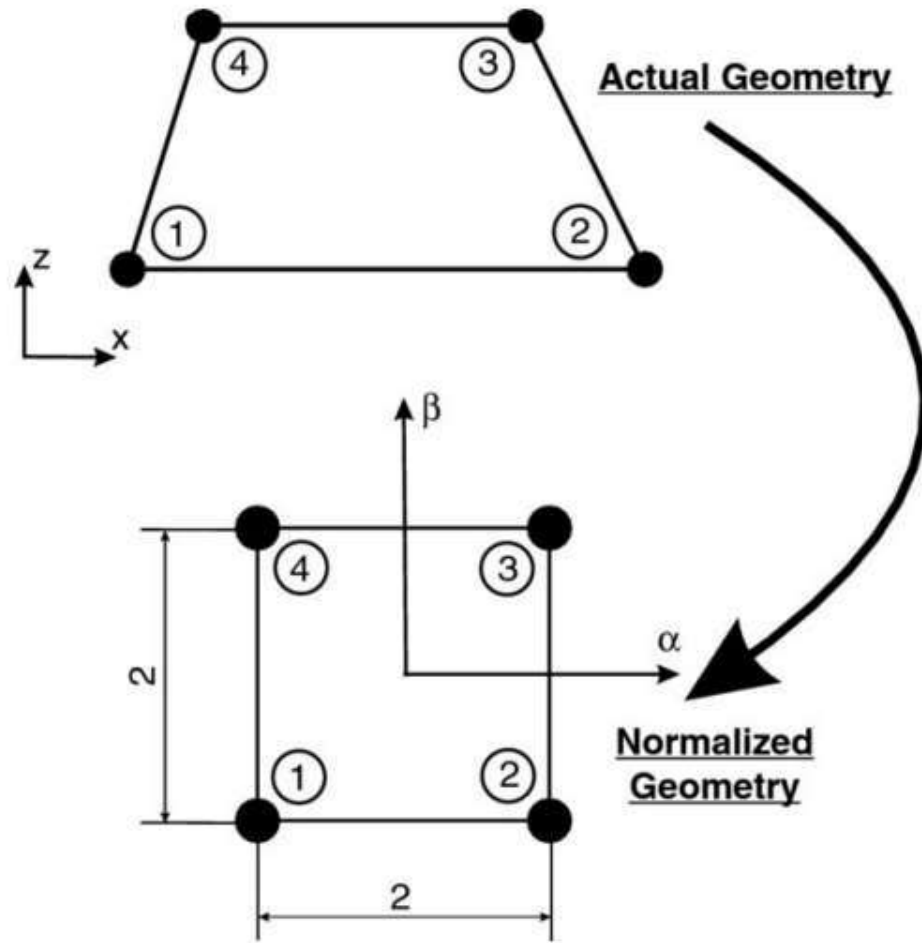


Figura 2.2: Elemento di Lagrange a quattro nodi nelle coordinate reali e normalizzate

Punto	α_τ	β_τ
1	-1	-1
2	1	-1
3	1	1
4	-1	1

Tabella 2.2: Coordinate normalizzate dell'elemento L4

L'elemento L4 può essere interpretato come una espansione lineare, che comprende i termini 1 , α e β e un termine bilineare, $\alpha\beta$. Il corrispondente campo di spostamenti è dunque descritto da:

$$\begin{aligned} u_x &= F_1 u_{x_1} + F_2 u_{x_2} + F_3 u_{x_3} + F_4 u_{x_4} \\ u_y &= F_1 u_{y_1} + F_2 u_{y_2} + F_3 u_{y_3} + F_4 u_{y_4} \\ u_z &= F_1 u_{z_1} + F_2 u_{z_2} + F_3 u_{z_3} + F_4 u_{z_4} \end{aligned}$$

L'elemento L9, rappresentato in figura 2.3, consente invece una descrizione cinematica più raffinata grazie all'utilizzo di funzioni di interpolazione paraboliche. Le funzioni associate ai diversi nodi dell'elemento sono le seguenti:

$$\begin{aligned} F_\tau &= \frac{1}{4}(\alpha^2 + \alpha\alpha_\tau)(\beta^2 + \beta\beta_\tau), & \tau &= 1,3,5,7 \\ F_\tau &= \frac{1}{2}\beta_\tau^2(\beta^2 + \beta\beta_\tau)(1 - \alpha^2) + \frac{1}{2}\alpha_\tau^2(\alpha^2 + \alpha\alpha_\tau)(1 - \beta^2), & \tau &= 2,4,6,8 \\ F_\tau &= (1 - \alpha^2)(1 - \beta^2), & \tau &= 9 \end{aligned}$$

Le coordinate naturali corrispondenti sono riportate nella Tabella 2.3

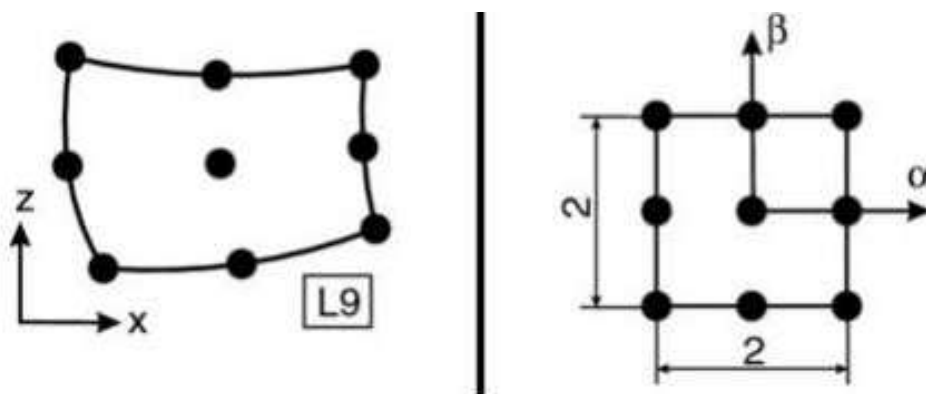


Figura 2.3: Elemento di Lagrange a nove nodi nelle coordinate reali e normalizzate

Punto	α_τ	β_τ
1	-1	-1
2	0	-1
3	1	-1
4	1	0
5	1	1
6	0	1
7	-1	1
8	-1	0
9	0	0

Tabella 2.3: Coordinate normalizzate dell'elemento L9

Dal punto di vista analitico, l'elemento L9 può essere interpretato come un'espansione parabolica, che include due termini cubici ($\alpha\beta^2$ e $\alpha^2\beta$) e un termine quartico ($\alpha^2\beta^2$). Il campo di spostamenti associato risulta quindi:

$$\begin{aligned} u_x &= F_1 u_{x_1} + F_2 u_{x_2} + F_3 u_{x_3} + F_4 u_{x_4} + F_5 u_{x_5} + F_6 u_{x_6} + F_7 u_{x_7} + F_8 u_{x_8} + F_9 u_{x_9} \\ u_y &= F_1 u_{y_1} + F_2 u_{y_2} + F_3 u_{y_3} + F_4 u_{y_4} + F_5 u_{y_5} + F_6 u_{y_6} + F_7 u_{y_7} + F_8 u_{y_8} + F_9 u_{y_9} \\ u_z &= F_1 u_{z_1} + F_2 u_{z_2} + F_3 u_{z_3} + F_4 u_{z_4} + F_5 u_{z_5} + F_6 u_{z_6} + F_7 u_{z_7} + F_8 u_{z_8} + F_9 u_{z_9} \end{aligned}$$

La discretizzazione lungo l'asse della trave è realizzata mediante un approccio classico agli elementi finiti, secondo cui il vettore degli spostamenti può essere espresso come:

$$\mathbf{u} = N_i F_\tau \mathbf{q}_{\tau i}$$

dove N_i rappresenta le funzioni di forma lungo l'asse longitudinale e $\mathbf{q}_{\tau i}$ il vettore degli spostamenti nodali, definito come $\mathbf{q}_{\tau i} = \{q_{u_{x_{\tau i}}} \ q_{u_{y_{\tau i}}} \ q_{u_{z_{\tau i}}}\}^T$.

Si considerano elementi trave con due (B2), tre (B3) e quattro (B4) nodi, le cui funzioni di forma sono definite in funzione della coordinata naturale r , compresa nell'intervallo $[-1,1]$:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{2}(1-r) & \left\{ \begin{array}{l} r_1 = -1 \\ r_2 = +1 \end{array} \right. \\ N_2 &= \frac{1}{2}(1+r) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{2}r(r-1) & \left\{ \begin{array}{l} r_1 = -1 \\ r_2 = +1 \\ r_3 = 0 \end{array} \right. \\ N_2 &= \frac{1}{2}r(r+1) \\ N_3 &= -(1+r)(1-r) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_1 &= -\frac{9}{16}(r + \frac{1}{3})(r - \frac{1}{3})(r - 1) & \left\{ \begin{array}{l} r_1 = -1 \\ r_2 = +1 \\ r_3 = -\frac{1}{3} \\ r_4 = \frac{1}{3} \end{array} \right. \\ N_2 &= \frac{9}{16}(r + \frac{1}{3})(r - \frac{1}{3})(r - 1) \\ N_3 &= \frac{27}{16}(r + 1)(r - \frac{1}{3})(r - 1) \\ N_4 &= -\frac{27}{16}(r + 1)(r + \frac{1}{3})(r - 1) \end{aligned}$$

Il numero di nodi per elemento determina l'ordine dell'approssimazione lungo l'asse longitudinale, invece l'espansione sulla sezione trasversale definisce l'ordine del modello trave.

La scelta del tipo di elemento trave e della mesh, cioè il numero totale di elementi

trave, definisce il numero complessivo dei gradi di libertà (DOFs) del modello strutturale, espresso come

$$DOFs = 3 \times M \times [(N_{NE} - 1) \times N_{BE} + 1]$$

dove i termini indicano rispettivamente il numero di gradi di libertà per nodo, il numero di nodi per elemento e il numero totale di elementi trave.

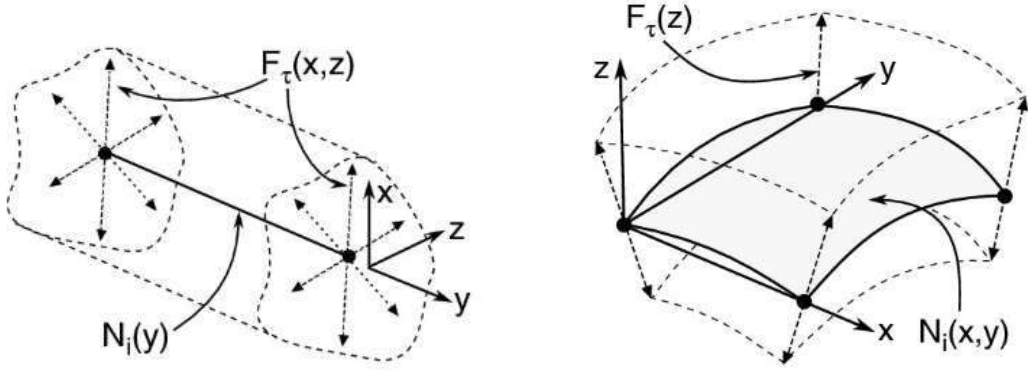


Figura 2.4: Esempio di modello trave

Figura 2.5: Esempio di modello piastra

È importante sottolineare che la discretizzazione della sezione trasversale - ovvero la scelta del tipo, del numero e della distribuzione degli elementi di Lagrange utilizzati - è completamente indipendente dalla scelta dell'elemento finito impiegato lungo l'asse della trave. Questa caratteristica rende la formulazione estremamente flessibile e consente di ottenere modelli 1D con capacità di rappresentazione tipiche dei modelli bidimensionali e tridimensionali.

La formulazione risultante può essere considerata a tutti gli effetti come un modello monodimensionale, poiché le incognite del problema, ovvero gli spostamenti nodali, variano unicamente lungo la direzione assiale della trave. Il campo di spostamenti trasversale, invece, è modellato in maniera assiomatica sul dominio bidimensionale della sezione.

L'introduzione della discretizzazione di Lagrange sulla sezione trasversale consente di ottenere modelli 1D localmente raffinati, in grado di catturare con elevata accuratezza gli effetti locali, come concentrazioni di tensione o deformazioni non uniformi, pur mantenendo come uniche incognite le variabili di spostamento.

La matrice di rigidità degli elementi finiti e il vettore dei carichi esterni, coerenti con il modello sviluppato, vengono ottenuti applicando il principio dei lavori virtuali, espresso come

$$\delta L_{int} = \int_V (\delta \epsilon_p^T \sigma_p + \delta \epsilon_n^T \sigma_n) dV = \delta L_{ext}$$

dove L_{int} rappresenta l'energia di deformazione interna e L_{ext} il lavoro virtuale dei carichi esterni.

La variazione virtuale dell'energia di deformazione può essere riscritta nella forma matriciale

$$\delta L_{int} = \delta \mathbf{q}_{\tau i}^T \mathbf{K}^{ij\tau s} \mathbf{q}_{s j}$$

dove $\mathbf{K}^{ij\tau s}$ indica la matrice di rigidezza espressa nella forma del nucleo fondamentale, le cui componenti sono riportate in dettaglio nella appendice A.

È importante osservare che, fino a questo punto, non è stata effettuata alcuna assunzione riguardo all'ordine dell'approssimazione. Questo implica che è possibile ottenere modelli di trave di ordine superiore - e quindi più raffinati - senza modificare l'espressione formale delle componenti del nucleo fondamentale.

Per evitare fenomeni numerici indesiderati, come il cosiddetto *shear locking*, è stata applicata la tecnica dell'integrazione selettiva. Gli integrali di linea e di superficie sono stati calcolati numericamente mediante il metodo di Gauss, garantendo un'elevata accuratezza con un numero ridotto di punti di integrazione.

La procedura di assemblaggio degli elementi di tipo Lagrangiano segue un approccio analogo a quello comunemente impiegato per gli elementi bidimensionali. I passaggi fondamentali del processo possono essere riassunti come segue:

- il nucleo fondamentale viene utilizzato per calcolare la matrice di rigidezza di ciascun elemento associato ai nodi strutturali della sezione trasversale. Ad esempio, nel caso di un elemento L4, la matrice corrispondente avrà dimensione 12x12
- le matrici di rigidezza dei singoli elementi della sezione vengono assemblate considerando la connettività tra gli elementi, ottenendo così la matrice di rigidezza complessiva della sezione
- le matrici di rigidezza dei vari elementi di trave vengono combinate per formare la matrice di rigidezza globale dell'intera struttura

La procedura di assemblaggio della matrice di rigidezza della struttura completa è illustrata in Figura 2.6. Il primo passo consiste nella costruzione del blocco τs , ovvero la matrice di rigidezza relativa a un singolo nodo del modello FEM, variando opportunamente gli indici τ e s . Ciascun blocco τs viene quindi inserito all'interno della matrice di rigidezza del singolo elemento, modificando gli indici i e j secondo la posizione dei nodi dell'elemento. Una volta completato questo processo per tutti i blocchi, si procede all'assemblaggio della matrice di rigidezza globale della struttura.

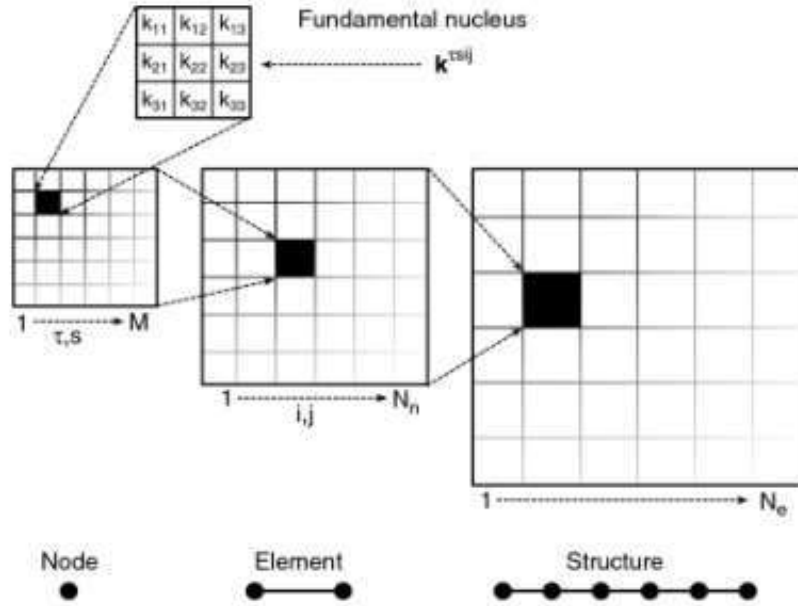


Figura 2.6: Assemblaggio della matrice di rigidezza globale

Il vettore dei carichi coerenti con il modello è derivato considerando un carico generico $\mathbf{P} : \mathbf{P} = \{P_{ux} \ P_{uy} \ P_{uz}\}^T$. Il corrispondente lavoro virtuale esterno risulta quindi: $\delta L_{ext} = \mathbf{P} \delta \mathbf{u}^T$.

Nel contesto della formulazione CUF, la variazione virtuale degli spostamenti può essere espressa come: $\delta L_{ext} = F_\tau \mathbf{P} \delta \mathbf{u}_\tau^T$ e, introducendo le funzioni di forma e gli spostamenti nodali, l'espressione diventa: $\delta L_{ext} = F_\tau N_i \mathbf{P} \delta \mathbf{q}_\tau^T$.

Quest'ultima relazione consente di identificare le componenti del nucleo fondamentale soggette a carico, garantendo il corretto assemblaggio del vettore dei carichi e la corretta associazione con le variabili di spostamento coinvolte.

L'imposizione dei vincoli al contorno può essere effettuata in modo indipendente per ciascuno dei tre gradi di libertà dei punti appartenenti agli elementi della sezione trasversale. In questo modo, è possibile applicare condizioni vincolari sia sull'intera sezione sia su un numero arbitrario di punti della stessa, ottenendo così un'elevata flessibilità nella definizione delle condizioni al contorno strutturali.

La variazione del lavoro virtuale delle forze inerziali, espressa in forma compatta, può essere scritta come:

$$\delta L_{ine} = \delta \mathbf{u}_{s_j}^T \mathbf{m}^{\tau s i j} \ddot{\mathbf{u}}_{\tau i}$$

dove $\mathbf{m}^{\tau s i j}$ rappresenta la matrice di massa. Le componenti di tale matrice sono definite da:

$$\begin{aligned} m_{xx}^{\tau sij} &= m_{yy}^{\tau sij} = m_{zz}^{\tau sij} = \rho \int_A F_\tau F_s dx dz \int_l N_i N_j dy \\ m_{xy}^{\tau sij} &= m_{xz}^{\tau sij} = m_{yx}^{\tau sij} = m_{yz}^{\tau sij} = m_{zx}^{\tau sij} = m_{zy}^{\tau sij} = 0 \end{aligned}$$

In questo contesto, ρ rappresenta la densità del materiale, e N_i e N_j le funzioni di forma.

Capitolo 3

Parte numerica

3.1 Analisi alle vibrazioni libere-103

Il componente analizzato è costituito da un pannello piano di dimensioni in pianta pari a 800 mm x 300 mm e spessore nominale totale $t=3.6$ mm.

La geometria è stata definita in ambiente Abaqus mediante la modellazione della superficie, adottando un approccio di tipo shell.

Il sistema di riferimento globale è stato definito come segue:

- asse X lungo la direzione longitudinale del pannello
- asse Y lungo la direzione trasversale
- asse Z ortogonale al piano del pannello

La geometria in pianta rimane invariata per tutte le configurazioni analizzate; le differenze tra pannello integro e pannello danneggiato sono introdotte esclusivamente attraverso la modifica delle proprietà di laminazione e di sezione nei file di input in ambiente MUL2.

3.1.1 Materiale e stacking sequence

Il pannello è costituito da un laminato composito simmetrico con stacking sequence $[0/45/-45/90]_S$.

Il laminato è quindi composto da 8 lamine, disposte in configurazione simmetrica rispetto al piano medio.

Ogni lamina è stata modellata come materiale ortotropo elastico lineare, caratterizzato dai seguenti parametri:

- Modulo elastico longitudinale e trasversale E_{11} e E_{22} : 64 GPa

- Modulo elastico nella direzione dello spessore E_{33} : 9 GPa
- Modulo di taglio G_{12} : 4.5 GPa
- Moduli di taglio G_{13} e G_{23} : 3.5 GPa
- Coefficiente di Poisson ν_{12} : 0.07
- Coefficienti di Poisson ν_{13} e ν_{23} : 0.3
- Densità: 1.49 g/cm^3

Lo spessore totale del laminato è dato dalla somma degli spessori delle singole lamine e la definizione del layup è stata effettuata assegnando l'orientazione locale delle fibre per ciascuna lamina rispetto al sistema di riferimento globale.

3.1.2 Modellazione del danno

Le configurazioni danneggiate sono state ottenute introducendo una riduzione delle proprietà meccaniche in uno specifico strato del laminato, mantenendo invariata la geometria in pianta.

In particolare, è stata simulata una degradazione interna mantenendo invariata la densità del materiale, ma riducendo i moduli elastici e di taglio di sette ordini di grandezza rispetto ai valori nominali in uno strato fittizio inserito al centro del laminato, simmetrico rispetto al piano medio e con orientazione delle fibre a 90 gradi.

Nella figura 3.1 viene riportato l'estratto del file di input utilizzato per l'introduzione degli elementi di tipo B3 lungo lo spessore del pannello, discretizzato in 10 strati. Accanto, è riportata una rappresentazione schematica della discretizzazione lungo lo spessore: le linee individuano le lamine (ovvero le superfici nodali), invece gli intervalli tra di esse rappresentano gli elementi. Le tre lamine evidenziate in rosso identificano la regione in cui è localizzato il danno; in particolare, gli elementi compresi tra tali superfici corrispondono al quinto e al sesto elemento lungo lo spessore, nei quali viene introdotta la degradazione delle proprietà meccaniche.

In particolare, mentre nella configurazione integra tutti gli strati centrali sono associati alla laminazione identificata dall'ID 4, nella configurazione degradata il quinto e il sesto strato (simmetrici rispetto al piano medio) sono assegnati alla laminazione con ID 5. Tale laminazione è associata a un materiale caratterizzato da proprietà meccaniche significativamente ridotte rispetto a quelle nominali. Questa modifica consente di modellare una degradazione localizzata nello strato centrale del pannello, mantenendo invariata la geometria in pianta e la restante sequenza di laminazione.

```

1 10 0 0 CR1E
2 CR1E
3 B3 1 1 1 2 3 CR1E
4 B3 2 2 3 4 5 CR1E
5 B3 3 3 5 6 7 CR1E
6 B3 4 4 7 8 9 CR1E
7 B3 5 5 9 10 11 CR1E
8 B3 6 5 11 12 13 CR1E
9 B3 7 4 13 14 15 CR1E
10 B3 8 3 15 16 17 CR1E
11 B3 9 2 17 18 19 CR1E
12 B3 10 1 19 20 21 CR1E
13 CR1E
14 CR1E
    
```

Figura 3.1: File di input per la discretizzazione dello spessore del pannello

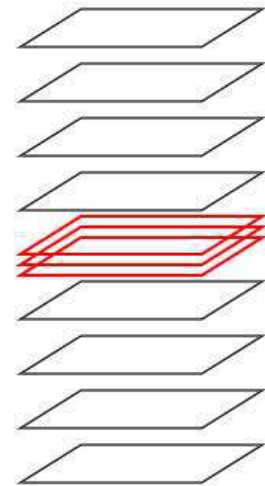


Figura 3.2: Rappresentazione schematica della discretizzazione lungo lo spessore del pannello

Dal punto di vista teorico, tale modifica comporta una variazione della matrice di rigidità estensionale, di accoppiamento e flessionale del laminato, con conseguente alterazione delle frequenze proprie del pannello.

La discretizzazione è stata effettuata mediante elementi bidimensionali di piastra quadrilateri a nove nodi (Q9).

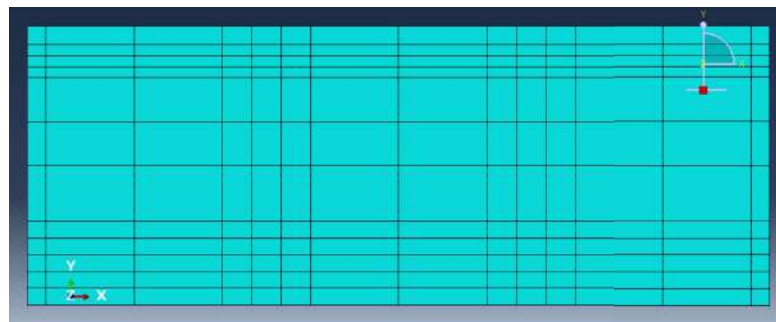


Figura 3.3: Applicazione della mesh al pannello in ambiente Abaqus

3.1.3 Condizioni al contorno

Sono state considerate due configurazioni vincolari: free-free e vincolata. Nella prima tutti i gradi di libertà risultano non vincolati. In tale configurazione, i primi sei autovalori del problema modale risultano idealmente nulli e associati al moto rigido globale della struttura: tre modi traslazionali e tre rotazionali. Tali modi non comportano una deformazione interna e sono stati esclusi dal confronto tra configurazioni integra e danneggiate. I modi successivi al sesto sono associati a deformazioni flessibili del pannello e rappresentano il reale comportamento dinamico strutturale.

Nella seconda sono stati annullati i gradi di libertà traslazionali u_x, u_y, u_z lungo il perimetro del pannello.

```

1 4 CRIF
2  CRIF
3 D-PLANE 1 0.000 1.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 CRIF
4 D-PLANE 2 1.000 0.000 0.000 -0.800 0.000 0.000 0.000 0.000 CRIF
5 D-PLANE 3 0.000 1.000 0.000 -0.300 0.000 0.000 0.000 0.000 CRIF
6 D-PLANE 4 1.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 CRIF
7  CRIF
8  CRIF
9  CRIF

```

Figura 3.4: File di input per l'introduzione dei vincoli lungo il perimetro del pannello

L'imposizione di tali vincoli elimina la possibilità di moto rigido globale; di conseguenza, non sono presenti frequenze nulle e i primi sei modi estratti risultano già modi deformativi flessionali e torsionali.

Pertanto, nel caso vincolato, anche i primi sei modi vengono inclusi nell'analisi comparativa tra configurazione integra e danneggiata.

Nel seguito del lavoro vengono tuttavia riportati e discussi esclusivamente i risultati relativi alla configurazione *free-free*. Le prove sperimentali di analisi modale sono infatti state eseguite unicamente in condizioni di pannello libero, al fine di evitare l'introduzione di vincoli artificiali che potessero influenzare la risposta dinamica della struttura. Di conseguenza, i risultati numerici relativi al caso vincolato non vengono presentati, in quanto non sarebbe possibile effettuare un confronto diretto con i corrispondenti dati sperimentali.

3.1.4 Formulazione del problema modale

L'analisi delle vibrazioni libere è stata condotta risolvendo il problema agli autovalori generalizzato:

$$[K]\Phi = \omega^2[M]\Phi$$

dove

- $[K]$ è la matrice globale di rigidezza
- $[M]$ è la matrice globale di massa
- ω rappresenta la pulsazione naturale
- Φ è il vettore modale

Sono stati estratti i primi venti modi propri per ciascuna configurazione, riportandone le frequenze naturali nel seguito e le corrispondenti rappresentazioni delle forme modali nella appendice B.

3.1.5 Pannello integro

Il pannello integro rappresenta la configurazione di riferimento per l'analisi dinamica della struttura. In tabella 4.2 sono riportate le prime venti frequenze naturali identificate mediante analisi modale.

Le frequenze individuate risultano distribuite in un intervallo compreso tra circa 33 Hz e 699 Hz. I primi modi di vibrazione si collocano nella regione delle basse frequenze e sono generalmente associati a deformazioni globali della struttura, invece i modi di ordine superiore, caratterizzati da frequenze più elevate, corrispondono a forme modali più complesse, con una maggiore localizzazione delle deformazioni. Si osserva inoltre la presenza di alcune frequenze tra loro molto ravvicinate, come nel caso dei modi individuati intorno a 319 Hz e 400 Hz. Tale comportamento è tipico delle strutture piane e può essere associato alla presenza di forme modali con caratteristiche deformative simili oppure a fenomeni di accoppiamento modale tra modi con frequenze prossime.

Le frequenze riportate in questa tabella costituiscono il riferimento per il confronto con le diverse configurazioni danneggiate analizzate nelle sezioni successive, permettendo di valutare l'influenza dei differenti scenari di danneggiamento sulle proprietà dinamiche globali della struttura.

Frequenza	Valore [Hz]
1	33.676
2	48.348
3	93.853
4	104.699
5	177.074
6	186.572
7	247.218
8	261.715
9	274.007
10	319.091
11	319.582
12	400.715
13	404.193
14	486.365
15	516.385
16	566.676
17	648.664
18	680.605
19	689.776
20	698.994

Tabella 3.1: Frequenze del pannello integro

3.1.6 Pannello con danno in posizione 1

Il pannello con danneggiamento in posizione 1, corrispondente alla zona angolare della struttura, come illustrato in figura 3.5, è stato analizzato numericamente considerando tre diverse estensioni del difetto, pari a $L=11$ cm, $L=15.5$ cm e $L=19$ cm.

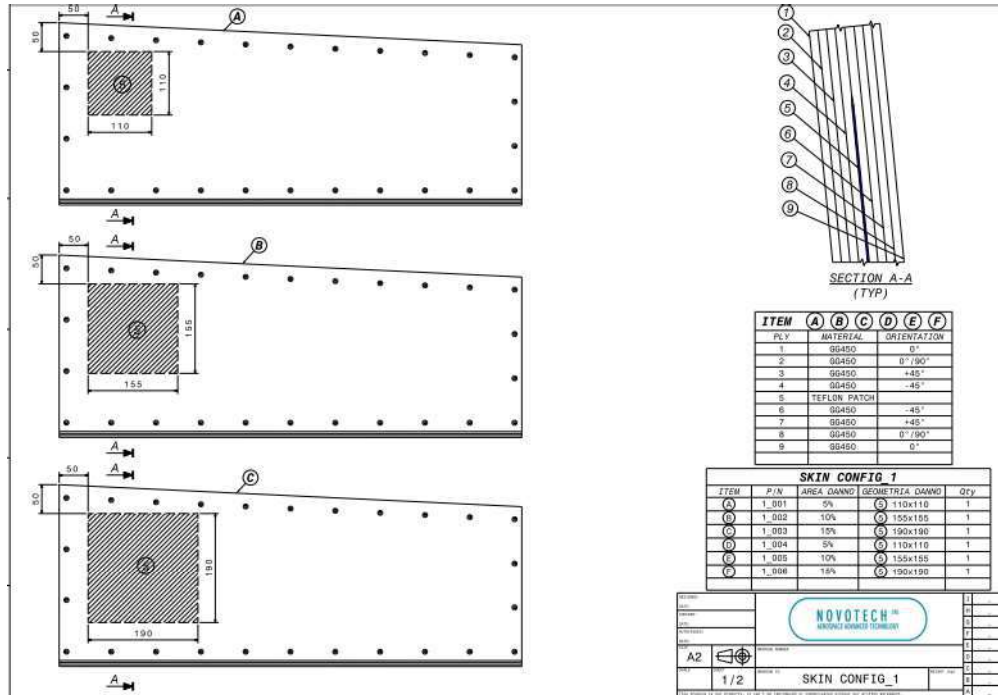


Figura 3.5: Posizione 1 del danneggiamento

In tabella 4.3 sono riportate le prime venti frequenze naturali ottenute mediante analisi modale numerica per le tre configurazioni considerate. Tali risultati possono essere confrontati con le frequenze del pannello integro riportate nella tabella 4.2, anch'esse ottenute tramite simulazione numerica.

Dal confronto tra i valori si osserva che la presenza del danneggiamento in posizione angolare produce variazioni generalmente contenute nelle frequenze naturali della struttura, in particolare per i modi a bassa frequenza. I primi modi di vibrazione mostrano infatti differenze molto limitate al variare dell'estensione del difetto, indicando che le deformazioni globali associate a tali modi risultano poco influenzate da un danneggiamento localizzato in prossimità dell'angolo del pannello.

All'aumentare della lunghezza del difetto emergono tuttavia alcune variazioni più evidenti nei modi di ordine superiore. In particolare, si osservano scostamenti più marcati in corrispondenza di alcune frequenze appartenenti alla regione medio-alta dello spettro modale, come nel caso dei modi compresi approssimativamente tra

320 Hz e 600 Hz. Questo comportamento è corente con il fatto che le forme modali di ordine più elevato presentano deformazioni più localizzate e risultano quindi maggiormente sensibili alle variazioni locali di rigidezza introdotte dal danneggiamento.

Nel complesso, i risultati numerici indicano che un danneggiamento localizzato in prossimità dell'angolo del pannello influenza in misura relativamente limitata la risposta dinamica globale della struttura, invece gli effetti del difetto diventano progressivamente più evidenti nei modi di vibrazione caratterizzati da frequenze più elevate.

Frequenza	Integro [Hz]	L=11 cm [Hz]	L=15.5 cm [Hz]	L=19 cm [Hz]
1	33.676	33.666	33.668	33.659
2	48.348	48.339	48.281	48.283
3	93.853	93.696	93.752	94.605
4	104.699	104.667	104.436	104.542
5	177.074	176.877	176.750	177.159
6	186.572	185.827	186.104	185.780
7	247.218	245.612	246.154	240.702
8	261.715	259.409	259.983	257.318
9	274.007	272.978	273.442	271.851
10	319.091	316.960	317.501	316.247
11	319.582	317.577	317.809	324.680
12	400.715	397.648	398.955	400.013
13	404.193	402.768	402.407	402.360
14	486.365	483.391	484.180	497.639
15	516.385	515.215	515.367	525.156
16	566.676	561.586	563.300	594.257
17	648.664	644.342	644.484	634.600
18	680.605	672.475	677.204	666.471
19	689.776	685.031	686.566	696.838
20	698.994	697.579	698.122	700.623

Tabella 3.2: Frequenze del pannello con danno in posizione 1

3.1.7 Pannello con danno in posizione 2

Il pannello con danneggiamento in posizione 2, corrispondente alla zona centrale della struttura, come illustrato in figura 3.6, è stato analizzato numericamente considerando tre diverse estensioni del difetto, pari a $L=11$ cm, $L=15.5$ cm e $L=19$ cm.

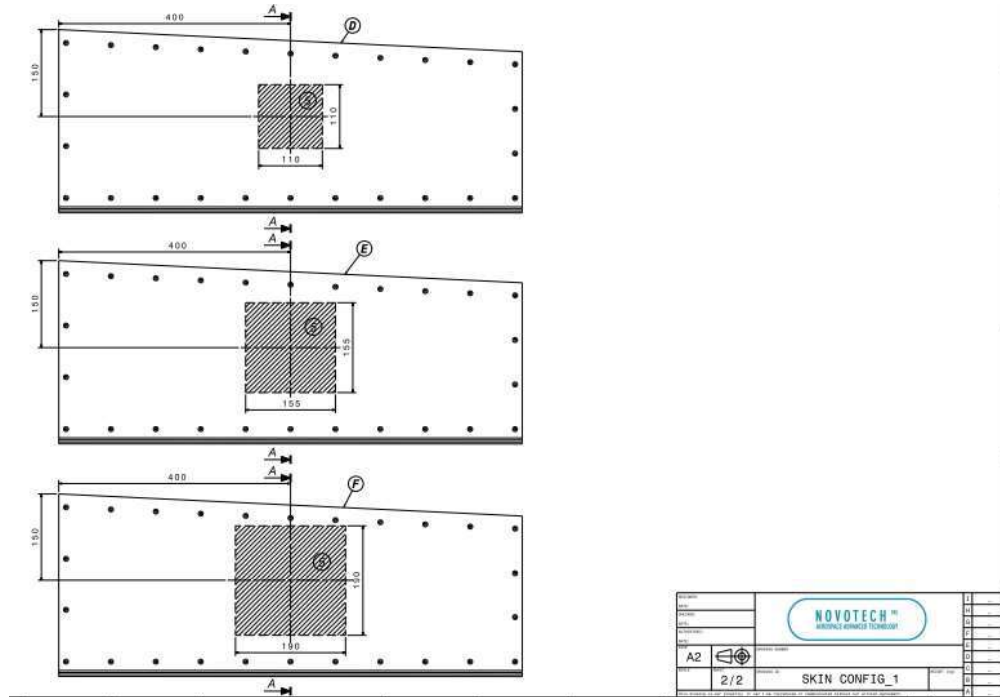


Figura 3.6: Posizione 2 del danneggiamento

In tabella 4.4 sono riportate le prime venti frequenze naturali ottenute mediante analisi modale numerica per le tre configurazioni considerate. I risultati possono essere confrontati con le frequenze del pannello integro riportate nella tabella 4.2. Dal confronto tra i valori si osserva che, per le due configurazioni caratterizzate da difetti di lunghezza $L=11$ cm e $L=15.5$ cm, le frequenze naturali risultano molto simili tra loro e presentano variazioni relativamente contenute rispetto alla configurazione integra. Tuttavia, quando la lunghezza del difetto aumenta fino a $L=19$ cm, emergono scostamenti più significativi, in particolare nelle regioni di frequenza intermedia e alta.

Le differenze più evidenti si osservano per alcuni modi compresi tra circa 250 Hz e 650 Hz, dove si registrano variazioni più marcate delle frequenze naturali. In particolare, si nota che alcune frequenze mostrano una riduzione sensibile all'aumentare della dimensione del difetto, indicando una diminuzione della rigidità locale della struttura dovuta alla presenza del danneggiamento.

Un ulteriore aspetto interessante riguarda la possibile presenza di fenomeni di riordinamento modale tra alcuni modi con frequenze ravvicinate. Ad esempio, i modi identificati intorno a 316-319 Hz mostrano una variazione dell'ordine relativo al variare della lunghezza del difetto, suggerendo un possibile fenomeno di mode veering o mode swapping tra forme modali caratterizzate da frequenze simili. Nel complesso, i risultati numerici indicano che un danneggiamento localizzato nella regione centrale del pannello tende a influenzare in maniera più significativa la risposta dinamica della struttura rispetto al caso di danno in posizione angolare. Ciò è coerente con il fatto che la zona centrale del pannello è generalmente caratterizzata da ampiezze modali più elevate per numerosi modi flessionali, rendendo tali modi maggiormente sensibili alle variazioni locali di rigidità introdotte dal difetto.

Frequenza	Integro [Hz]	L=11 cm [Hz]	L=15.5 cm [Hz]	L=19 cm [Hz]
1	33.676	33.674	33.674	33.723
2	48.348	48.346	48.347	48.318
3	93.853	93.523	93.522	92.397
4	104.699	104.425	104.424	102.754
5	177.074	177.020	177.020	177.040
6	186.572	186.563	186.563	186.967
7	247.218	247.045	247.045	244.476
8	261.715	260.630	260.630	253.036
9	274.007	272.597	272.597	267.606
10	319.091	316.437	318.994	306.533
11	319.582	318.994	316.436	310.909
12	400.715	398.423	398.423	378.497
13	404.193	400.214	400.214	396.153
14	486.365	486.183	486.183	496.227
15	516.385	515.066	515.066	528.257
16	566.676	562.502	562.502	548.094
17	648.664	632.173	632.173	587.819
18	680.605	651.304	651.304	609.110
19	689.776	682.172	682.172	690.304
20	698.994	689.709	689.709	702.103

Tabella 3.3: Frequenze del pannello con danno in posizione 2

3.2 Analisi di risposta in frequenza-106

L'analisi modale rappresenta una procedura finalizzata alla caratterizzazione dinamica di una struttura, descritta in termini delle sue proprietà intrinseche, quali le frequenze naturali, i coefficienti di smorzamento e le mode shapes associate.

Nel caso di un'eccitazione dinamica, la risposta del sistema tende ad amplificarsi al diminuire della distanza tra la frequenza di oscillazione della forza applicata e una delle frequenze naturali della struttura. In particolare, l'ampiezza della risposta raggiunge un valore massimo quando la frequenza di eccitazione coincide con una frequenza di risonanza del sistema.

L'identificazione sperimentale delle frequenze naturali viene condotta mediante la determinazione della funzione di risposta in frequenza (FRF), definita come il rapporto tra la risposta del sistema e la forza di eccitazione applicata.

Un aspetto cruciale nella pianificazione di un test modale riguarda la scelta del punto di applicazione dell'eccitazione. Idealmente, la forza dovrebbe essere applicata in una posizione in grado di eccitare efficacemente tutti i modi della struttura di interesse.

Tale posizione può essere individuata mediante una procedura di *driving point search*, nella quale martello strumentato e accelerometro vengono spostati congiuntamente su diversi punti della struttura. Le misure di driving point FRF ottenute vengono analizzate e combinate al fine di identificare l'insieme delle frequenze naturali presenti.

Una volta individuate le frequenze proprie della struttura, il punto di eccitazione ottimale viene selezionato come quello la cui driving point FRF mostra la presenza del maggior numero di risonanze. Tale punto viene quindi adottato come ingresso per l'esecuzione del test modale completo.

È importante osservare che il punto di riferimento (reference point) non deve coincidere con un nodo di una forma modale, poichè in tal caso il modo corrispondente non risulterebbe osservabile nella FRF, compromettendone l'identificazione.

A partire dai segnali acquisiti nel time domain, la trasformazione nel frequency domain può essere effettuata mediante l'applicazione della *Fast Fourier Transform (FFT)*. Tale operazione consente di determinare la *frequency response function (FRF)* del sistema, la quale presenta dei picchi in corrispondenza delle frequenze di risonanza. A tali frequenze, nel time domain, si osservano valori massimi della risposta, associati alla velocità di oscillazione dell'eccitazione applicata in ingresso, come si può vedere dalla figura 3.7.

La FRF risultante è una grandezza complessa, descrivibile in termini di parte reale e immaginaria oppure modulo (magnitude) e fase.

L'identificazione delle frequenze naturali del sistema può pertanto essere condotta sia attraverso l'analisi della risposta nel time domain, individuando le condizioni di

massima amplificazione, sia mediante l'esame diretto della frequency response function. Quest'ultimo approccio risulta generalmente preferibile, in quanto consente una valutazione più agevole e robusta delle caratteristiche dinamiche del sistema.

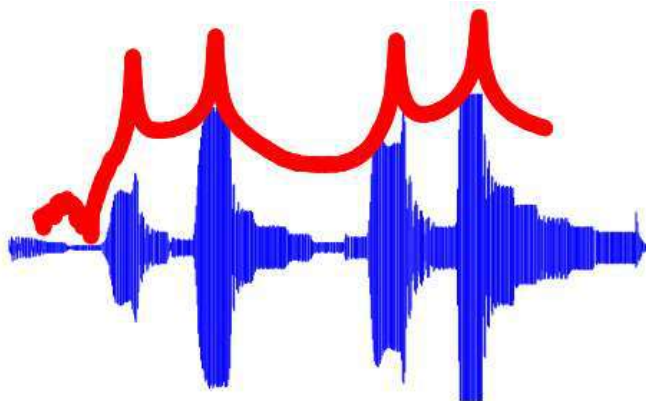


Figura 3.7: Sovrapposizione della funzione di risposta del tempo (in blu) e della frequenza (in rosso)

I deformation patterns associati alle frequenze naturali assumono configurazioni differenti in funzione della frequenza di eccitazione applicata al sistema. Tali configurazioni, descritte attraverso le corrispondenti mode shapes, dipendono dalle proprietà fisiche della struttura, in particolare dalla distribuzione di massa e dalla rigidità, che determinano la posizione delle frequenze naturali e la forma dei modi associati.

Nel caso di una misurazione in configurazione di drive point, ovvero un punto specifico della struttura in cui si applica direttamente una forza di eccitazione e contemporaneamente si misura la risposta, la FRF presenta alcune caratteristiche distintive:

- tutte le risonanze, identificate dai picchi della funzione, risultano separate da anti-risonanze
- l'andamento della fase mostra una variazione di 180 gradi in corrispondenza del superamento di una risonanza, invece una variazione di segno opposto si osserva in corrispondenza di un'antirisonanza
- i picchi della parte immaginaria della funzione di risposta in frequenza devono risultare orientati nella stessa direzione, condizione necessaria per garantire la coerenza fisica della misura e una corretta interpretazione dei risultati

La matrice della funzione di risposta in frequenza, le cui righe e colonne corrispondono rispettivamente ai punti in cui si misura la risposta e si applica la

forza, risulta simmetrica. Tale simmetria è conseguenza della natura simmetrica delle matrici di massa, smorzamento e rigidità che descrivono il sistema. Ne consegue che non è necessario misurare tutti i termini della matrice per ottenere una caratterizzazione completa della struttura.

L'acquisizione dei dati per la determinazione della FRF prevede una serie di passaggi fondamentali. In primo luogo, i segnali analogici forniti dagli strumenti di misura vengono filtrati mediante anti-aliasing filters per evitare che le frequenze più elevate generino aliasing all'interno del range di interesse. Successivamente, i segnali analogici vengono digitalizzati attraverso un convertitore analogico-digitale (ADC), generando una rappresentazione numerica dei segnali. Convertitori con maggiore numero di bit (10,12 o 16) migliorano la risoluzione della digitalizzazione. Errori di campionamento (sampling) e di quantizzazione (quantization) possono introdurre discrepanze nei dati, generalmente meno significative rispetto al fenomeno noto come leakage.

Il leakage si manifesta durante la trasformazione FFT quando i dati campionati non rappresentano correttamente l'intero intervallo temporale del segnale o non soddisfano la periodicità implicita richiesta dalla FFT, producendo distorsioni nel dominio della frequenza. Per ridurre l'effetto si applicano delle funzioni di ponderazione, dette *windows*, che migliorano la conformità dei dati ai requisiti di periodicità. Sebbene le windows riducano significativamente il leakage, non possono eliminarlo completamente.

Una volta digitalizzati, i segnali vengono trasformati tramite FFT per ottenere lo spettro lineare dell'input e dell'output. Successivamente, gli spettri lineari vengono mediati (averaging) per ottenere gli spettri di potenza dell'input e dell'output e lo spettro incrociato (cross spectrum) tra i segnali. Questi spettri mediati consentono il calcolo della FRF e della *coherence*, quest'ultima utilizzata come strumento di controllo qualità per verificare quanto del segnale di output sia effettivamente correlato all'input.

La FRF contiene informazioni sulle frequenze naturali e sullo smorzamento del sistema, invece un insieme di FRF misurate in punti diversi della struttura consente di determinare le mode shapes nei punti in cui i dati sono stati acquisiti.

Per ottenere misure affidabili della FRF, è fondamentale assicurarsi che l'eccitazione applicata alla struttura sia sufficiente a stimolare tutti i modi di interesse; nei test di impatto, questa condizione dipende in particolare dalla scelta della punta del martello impiegata.

La selezione della punta del martello ha un effetto significativo sull'acquisizione dei dati nei test di impatto. La frequenza di eccitazione generata dall'impatto dipende in larga misura dalla durezza della punta stessa: più la punta è dura, più ampio sarà il range di frequenze eccitate dalla forza applicata. La scelta della punta deve garantire che tutti i modi di interesse siano adeguatamente nel range di frequenze considerato; l'utilizzo di una punta troppo morbida può comportare l'eccitazione

insufficiente di alcuni modi, compromettendo la qualità delle misure.

Un altro aspetto critico nella sperimentazione tramite impatto riguarda l'uso di una window per i trasduttori di risposta (response transducers). Per strutture con smorzamento ridotto (lightly damped), la risposta della struttura dovuta all'impatto non si annulla completamente alla fine dell'intervallo di campionamento, causando il fenomeno noto come leakage. La window più comunemente adottata per questo tipo di eccitazione è la exponentially decaying window, illustrata nella figura 3.8. Pur contribuendo a ridurre il leakage, le windows possono introdurre distorsioni nei dati e devono essere utilizzate solo quando strettamente necessario.

Per ottimizzare le misure di impatto, è consigliabile considerare due accorgimenti principali nell'elaborazione dei segnali (signal processing): restringere la banda di misura (narrower bandwidth) e aumentare il numero delle linee spettrali di risoluzione. Entrambi i parametri comportano un incremento del tempo necessario per l'acquisizione, ma riducono la necessità di applicare windows esponenziali e contribuiscono a minimizzare gli effetti del leakage.

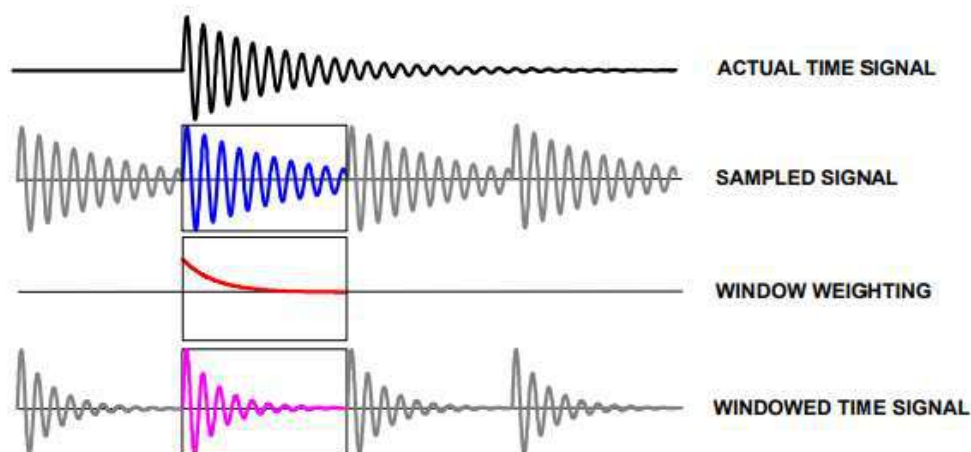


Figura 3.8: Exponential window per minimizzare gli effetti di leakage

Le windows rappresentano funzioni di ponderazione dei dati digitalizzati e influenzano la rappresentazione in frequenza del segnale. Tra le più comuni si annoverano:

- Uniform: funzione di ponderazione a guadagno unitario (unity gain), applicata a tutti i punti del campione o record quando i dati rispettano i requisiti di periodicità della FFT
- Hanning: funzione a forma di coseno che forza l'inizio e la fine del campione a valori prossimi a zero, utile per segnali che non soddisfano i requisiti di periodicità della FFT

- Flat Top: impiegata soprattutto per segnali sinusoidali non periodici e per calibrazione, permette una maggiore accuratezza nella misura dei picchi di ampiezza
- Force/Exponential: la prima è una unity gain window applicata alla porzione del campione in cui avviene l'eccitazione impulsiva; la seconda viene adottata quando il segnale di risposta non decade completamente nell'intervallo di campionamento

L'uso delle windows ha un effetto diretto sulla rappresentazione in frequenza dei dati: può causare una degradazione dell'accuratezza dell'ampiezza dei picchi della funzione e introdurre un maggior smorzamento rispetto a quello realmente presente nella struttura.

3.2.1 Test d'impatto

La convenienza del test di impatto risiede nel fatto che esso richiede un hardware relativamente semplice e consente tempi di misura contenuti. Poichè l'eccitazione applicata alla struttura è di tipo impulsivo, il livello di energia trasmessa dipende dalla massa e dalla velocità del martello. Tale comportamento è direttamente riconducibile al concetto di momento lineare, definito come il prodotto tra massa e velocità; l'impulso è infatti pari alla variazione del momento lineare nel tempo. Dal punto di vista pratico, il controllo accurato della velocità del martello risulta difficoltoso; per questo motivo, il livello della forza applicata viene generalmente regolato agendo sulla massa del martello. I martelli di impatto sono disponibili in un ampio intervallo di masse, che spaziano da poche once fino a diversi pounds, e nella maggior parte dei casi consentono l'aggiunta o la rimozione di masse. Questa caratteristica rende il test di impatto particolarmente adatto alla sperimentazione su strutture di dimensioni e pesi differenti.

Il contenuto in frequenza dell'energia applicata alla struttura dipende principalmente dalla rigidità delle superfici di contatto e, in misura minore, dalla massa del martello. La rigidità del contatto influenza la forma temporale della forza impulsiva, che a sua volta determina il contenuto in frequenza dell'eccitazione. Qualora non sia possibile modificare la rigidità della struttura in esame, il controllo del range di frequenze eccitate può essere ottenuto variando la rigidità della punta del martello. In particolare, una punta più rigida produce un impulso di durata minore e quindi un contenuto in frequenza più esteso, invece una punta più morbida limita l'eccitazione alle frequenze più basse.

Un limite intrinseco del test di impatto è che lo spettro della forza non può essere efficacemente limitato alle sole basse frequenze durante misure ad alta risoluzione; di conseguenza, anche i modi a frequenza inferiore esterni alla banda di interesse

risultano comunque eccitati. Questo aspetto deve essere tenuto in considerazione nell'interpretazione delle FRF misurate.

Dal punto di vista dell'elaborazione dei segnali, i test di impatto presentano due principali criticità. La prima è la presenza di rumore, che può manifestarsi sia nel segnale di forza sia in quello di risposta quando viene utilizzato un intervallo di acquisizione eccessivamente lungo. La seconda è il fenomeno del leakage, che può comparire nel segnale di risposta quando l'intervallo di acquisizione risulta troppo breve rispetto alla durata della risposta strutturale.

Entrambi questi effetti possono essere mitigati mediante un uso appropriato delle window. Poiché l'impulso di forza ha generalmente una durata molto inferiore rispetto alla lunghezza dell'intervallo di campionamento, la porzione di segnale successiva all'impatto è costituita prevalentemente da rumore e può essere eliminata senza compromettere l'informazione contenuta nell'eccitazione. A questo scopo si utilizza comunemente la *force window*. Le piccole oscillazioni osservabili al termine dell'impulso fanno parte integrante della forza applicata e sono un effetto del processamento del segnale; pertanto, non devono essere eliminate mediante troncamento.

3.2.2 Test mediante shaker

In alternativa al test di impatto, l'eccitazione della struttura può essere ottenuta mediante uno shaker, soluzione particolarmente indicata quando si richiede un ingresso controllato nel tempo e nella frequenza.

Gli eccitatori maggiormente impiegati nelle prove modali sono elettromagnetici (o elettrodinamici) e elettroidraulici (o idraulici). Negli shaker elettrodinamici, i più diffusi in ambito sperimentale, la forza è generata dal passaggio di corrente alternata in una bobina immersa in un campo magnetico. Il campo di frequenze operativo dipende dalla dimensione del dispositivo: shaker di piccole dimensioni sono generalmente caratterizzati da un range di frequenza più esteso, ma da una capacità di forza inferiore. Al contrario, dispositivi di dimensioni maggiori possono erogare forze più elevate, a fronte di una banda passante più limitata.

Gli shaker elettroidraulici generano invece la forza mediante sistemi idraulici e sono in grado di fornire livelli di forza significativamente superiori rispetto agli elettrodinamici. Tuttavia, il loro intervallo di frequenze operative risulta generalmente più ridotto. Un vantaggio rilevante di questa tipologia è la possibilità di applicare un precarico statico elevato alla struttura.

L'utilizzo di uno shaker introduce alcune criticità legate all'interazione meccanica tra eccitatore e struttura. Lo shaker è collegato alla struttura tramite una cella di carico (force transducer), necessaria per la misura della forza applicata. Tale collegamento può alterare il comportamento dinamico della struttura, in particolare nel caso di componenti leggeri. Il sistema di fissaggio della cella di carico può

infatti introdurre una massa aggiuntiva non trascurabile, modificando localmente le proprietà inerziali.

Inoltre, la presenza di una massa interposta tra la cella di carico e la struttura comporta che la forza misurata possa risultare maggiore di quella effettivamente trasmessa al componente. La cella di carico percepisce infatti anche l'inerzia degli elementi di collegamento, che vengono dinamicamente considerati parte della struttura.

Poichè la frequency response function è definita rispetto a un ingresso monoassiale, è necessario che lo shaker trasmetta esclusivamente una componente di forza allineata con l'asse principale della cella di carico.

Nella pratica, tuttavia, uno spostamento lungo una direzione può indurre rotazioni o componenti trasversali del moto. Per ridurre la trasmissione di forze indesiderate, lo shaker viene collegato alla struttura mediante un elemento snello denominato *stinger*. Quest'ultimo è caratterizzato da una elevata rigidità assiale, ma bassa rigidità flessionale e a taglio. Dal punto di vista meccanico, esso si comporta come un elemento di tipo truss, in grado di trasmettere esclusivamente sforzi assiali e di minimizzare la trasmissione di momenti flettenti o forze trasversali. Ciò consente alla struttura di muoversi liberamente nelle direzioni non oggetto di eccitazione, migliorando la qualità della misura.

Un ulteriore aspetto critico riguarda il supporto dell'eccitatore. Il corpo principale dello shaker deve essere adeguatamente isolato dalla struttura per evitare che le forze di reazione vengano trasmesse attraverso la base dello shaker, alterando la misura.

Tra le soluzioni comunemente adottate si annoverano: montaggio dello shaker su una base rigida indipendente, con struttura sospesa; utilizzo di fondazioni meccanicamente isolate; sospensione dello shaker stesso. Nel caso di shaker sospeso, può essere necessario aggiungere una massa inerziale al corpo dell'eccitatore, al fine di garantire una forza applicata misurabile, in particolare alle basse frequenze.

Negli shaker elettrodinamici può verificarsi un fenomeno di *impedance mismatch* tra la struttura e la bobina dell'eccitatore. L'impedenza elettrica dello shaker varia infatti con l'ampiezza del moto della bobina.

In prossimità di una risonanza strutturale caratterizzata da massa efficace ridotta, è sufficiente una forza molto piccola per generare una risposta significativa. Ciò può determinare una riduzione dello spettro di forza in corrispondenza della risonanza, rendendo la misura maggiormente sensibile al rumore. Tale problematica può essere mitigata impiegando shaker con bobine di diversa dimensione o utilizzando amplificatori a corrente costante o selezionando un punto di eccitazione caratterizzato da massa efficace maggiore.

Al fine di garantire un'adeguata descrizione spaziale delle forme modali, sono

stati considerati venti punti di misura distribuiti sulla faccia del pannello. Gli accelerometri sono stati disposti in modo equidistante, secondo una griglia regolare, così da assicurare una copertura omogenea della superficie e una corretta ricostruzione delle deformate modali nell'intervallo di frequenze di interesse.

L'eccitazione è stata applicata in un punto non coincidente con nodi modali attesi, individuato approssimativamente a un quarto della lunghezza e a un quarto della larghezza del pannello. Tale scelta consente di evitare configurazioni geometricamente simmetriche e di massimizzare la probabilità di eccitare efficacemente i modi. La configurazione di prova descritta è stata adottata, a titolo esemplificativo, per il pannello caratterizzato da un danneggiamento di lunghezza pari a 11 cm localizzato in posizione angolare (posizione 1), sul quale è stata condotta l'analisi di risposta in frequenza presentata nella sezione corrente.

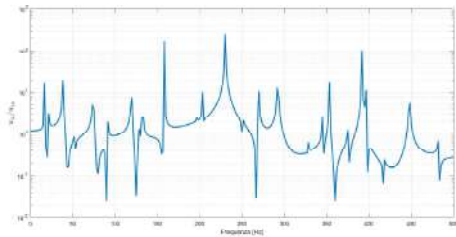


Figura 3.9: Posizione 1, $x= 0.1333$ m
 $y=0.06$ m

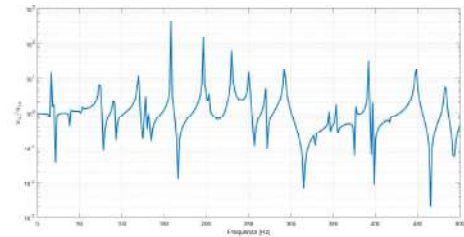


Figura 3.10: Posizione 2, $x= 0.2666$ m
 $y=0.06$ m

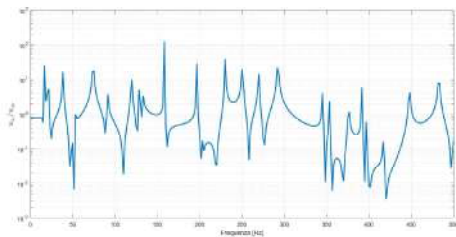


Figura 3.11: Posizione 3, $x= 0.3999$ m
 $y= 0.06$ m

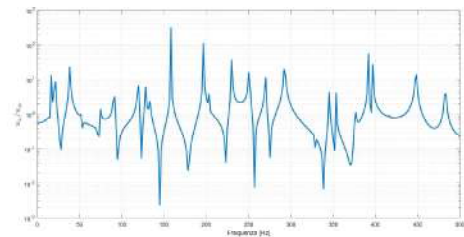


Figura 3.12: Posizione 4, $x= 0.5332$ m
 $y=0.06$ m

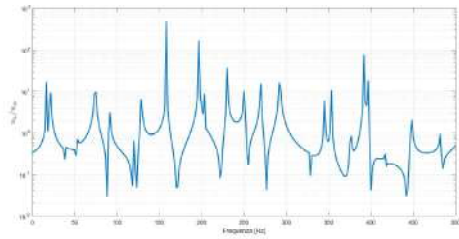


Figura 3.13: Posizione 5, $x= 0.6665$ m
 $y= 0.06$ m

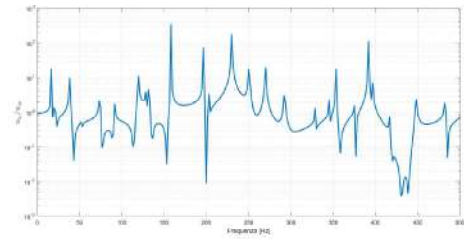


Figura 3.14: Posizione 6, $x= 0.1333$ m
 $y=0.12$ m

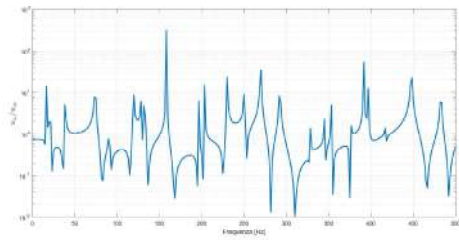


Figura 3.15: Posizione 7, $x= 0.2666$ m
 $y=0.12$ m

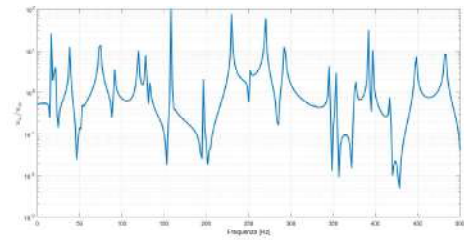


Figura 3.16: Posizione 8, $x= 0.3999$ m
 $y= 0.12$ m

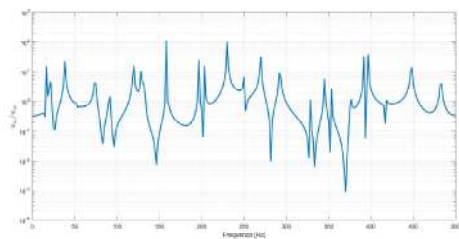


Figura 3.17: Posizione 9, $x= 0.5332$ m
 $y= 0.12$ m

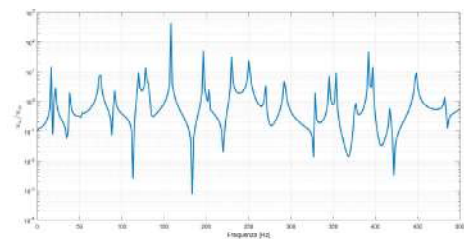


Figura 3.18: Posizione 10, $x= 0.6665$ m
 $y= 0.12$ m

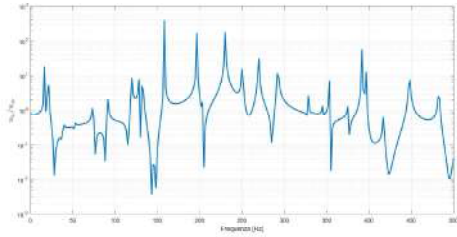


Figura 3.19: Posizione 11, $x= 0.1333$ m $y= 0.18$ m

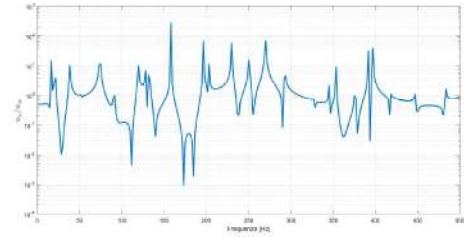


Figura 3.20: Posizione 12, $x= 0.2666$ m $y= 0.18$ m

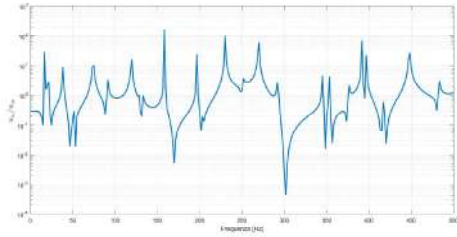


Figura 3.21: Posizione 13, $x= 0.3999$ m $y= 0.18$ m

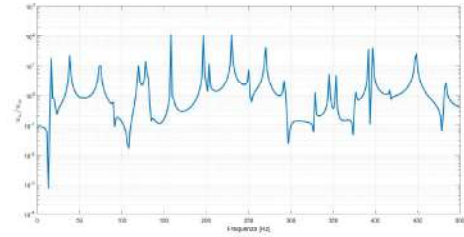


Figura 3.22: Posizione 14, $x= 0.5332$ m $y= 0.18$ m

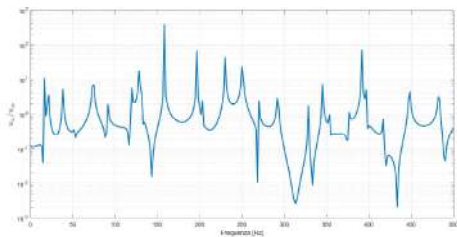


Figura 3.23: Posizione 15, $x= 0.6665$ m $y= 0.18$ m

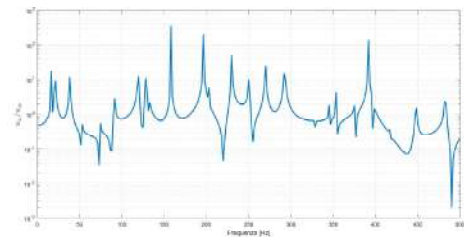


Figura 3.24: Posizione 16, $x= 0.1333$ m $y= 0.24$ m

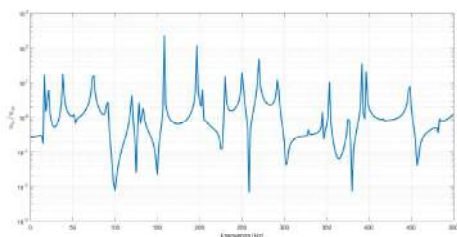


Figura 3.25: Posizione 17, $x= 0.2666$
m $y= 0.24$ m

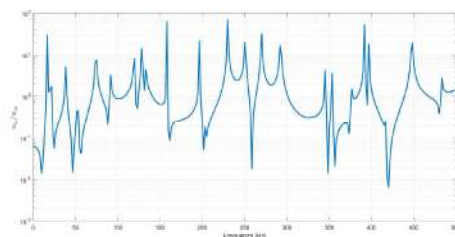


Figura 3.26: Posizione 18, $x= 0.3999$
m $y= 0.24$ m

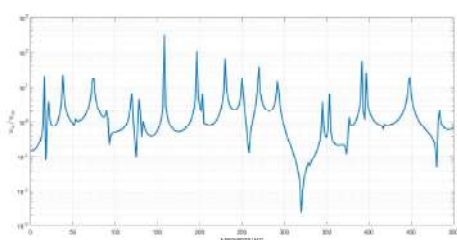


Figura 3.27: Posizione 19, $x= 0.5332$
m $y= 0.24$ m

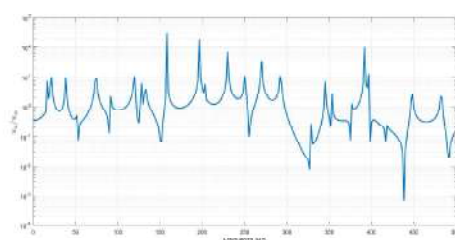


Figura 3.28: Posizione 20, $x= 0.6665$
m $y= 0.24$ m

Le frequenze naturali riportate in tabella risultano coerenti con i picchi individuati nelle funzioni di risposta in frequenza (FRF). In particolare, le principali frequenze di risonanza osservabili nel grafico corrispondono alle frequenze modali calcolate, sebbene non sempre in maniera perfettamente coincidente a causa della presenza di modi ravvicinati, effetti di smorzamento e limitazioni nella risoluzione sperimentale. Tali fattori possono infatti determinare una parziale sovrapposizione o una minore definizione dei picchi nella FRF.

Capitolo 4

Parte sperimentale

I pannelli oggetto della campagna sperimentale presentano identiche dimensioni geometriche e le stesse caratteristiche di materiale, differenziandosi esclusivamente per la configurazione di danneggiamento introdotta. In particolare, sono state considerate diverse condizioni, variando sia la posizione sia l'estensione del difetto, al fine di valutarne l'influenza sulla risposta dinamica della struttura.

Le configurazioni analizzate sono riportate in figura 4.1, in figura 4.2 e in figura 4.3; dove sono illustrate in pianta le diverse disposizioni del danno. Il pannello integro è stato assunto quale configurazione di riferimento, e le restanti configurazioni rappresentano differenti scenari di danneggiamento. Tale rappresentazione consente di evidenziare in modo immediato la variabilità geometrica introdotta e costituisce la base per il successivo confronto dei parametri modali.

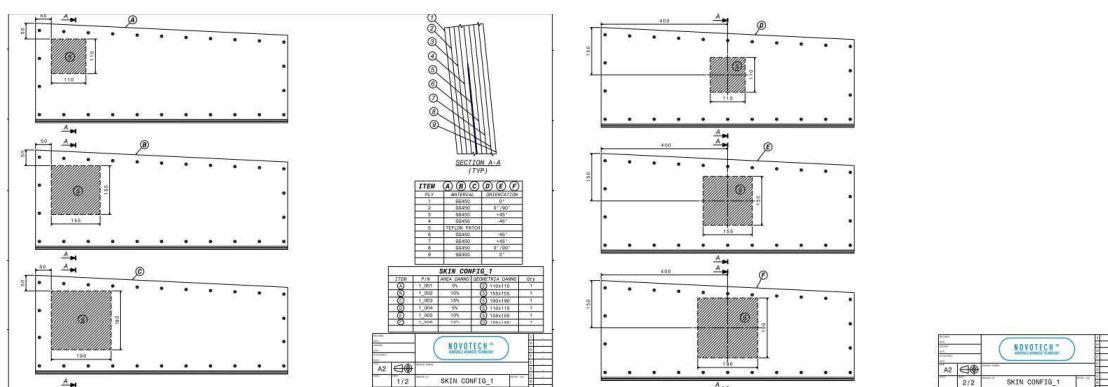


Figura 4.1: Configurazioni dei pannelli con danni singoli

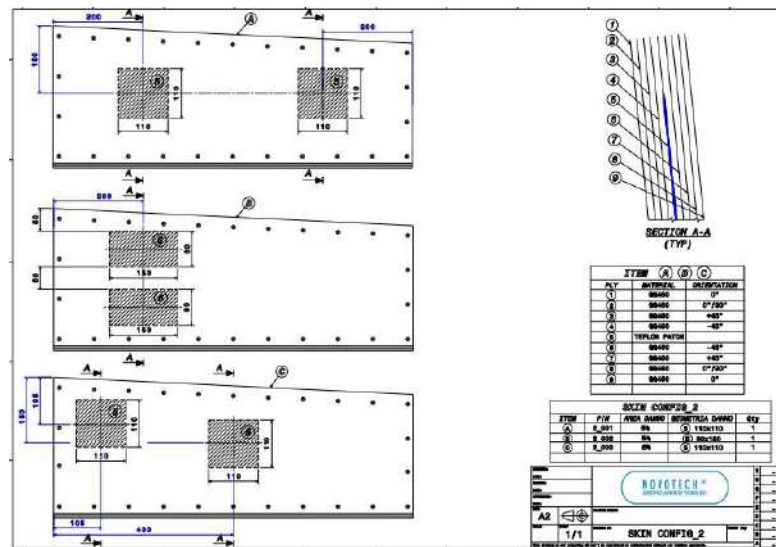


Figura 4.2: Configurazioni dei pannelli con danni doppi

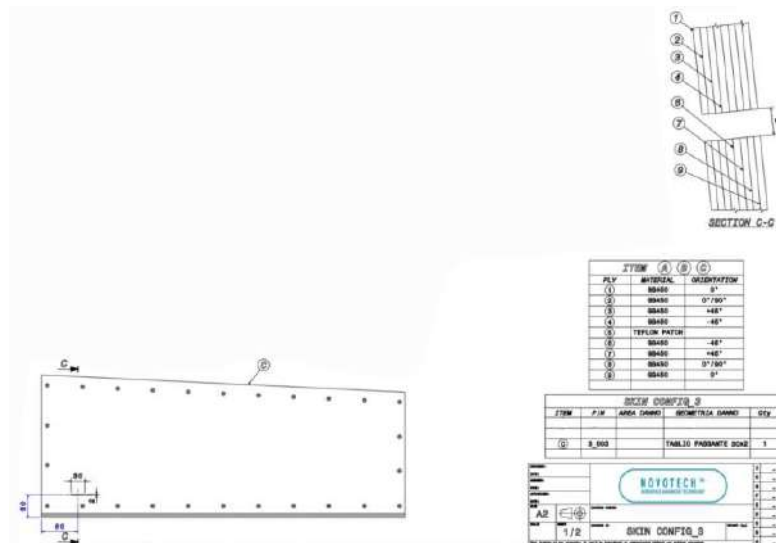


Figura 4.3: Configurazione del pannello con taglio passante

Per ciascuna delle configurazioni soprariportate è stata condotta un'Analisi Modale Sperimentale (EMA), mantenendo invariata la procedura di prova e il setup strumentale, così da isolare l'effetto del danneggiamento dalle possibili variazioni indotte dall'apparato sperimentale.

La configurazione complessiva del banco prova è illustrata in figura 4.4.

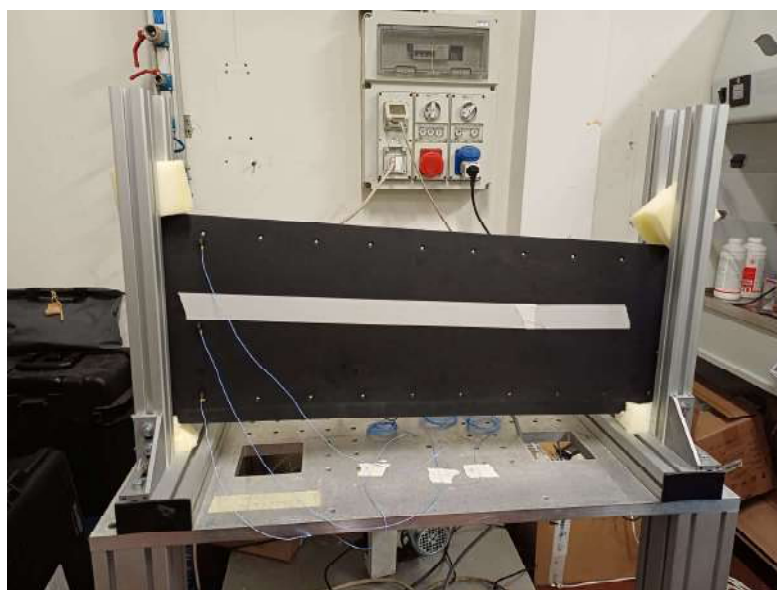


Figura 4.4: Configurazione del banco prova

I pannelli sono stati testati singolarmente, assicurando condizioni al contorno ripetibili per tutte le prove. L'eccitazione è stata applicata mediante shaker elettrodinamico, pilotato attraverso un segnale impulsivo generato tramite codice sviluppato in ambiente MATLAB e inviato allo shaker tramite l'uscita audio del computer. Tale modalità di eccitazione ha consentito di ottenere un ingresso di tipo impulsivo controllato, idoneo alla stima delle funzioni di risposta in frequenza (FRF).

In figura 4.5 è riportato il dettaglio dello shaker impiegato nella campagna sperimentale.

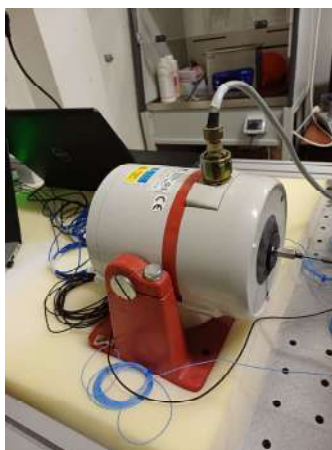


Figura 4.5: Shaker impiegato per l'eccitazione del pannello

La forza applicata è stata misurata mediante cella di carico interposta tra lo shaker e il pannello. Il collegamento meccanico tra la cella di carico e la superficie del pannello è stato realizzato mediante adesivo cianoacrilico, al fine di garantire un accoppiamento sufficientemente rigido e assicurare un trasferimento di forza coerente con l'ipotesi di eccitazione puntuale. Un dettaglio del sistema di collegamento shaker-pannello è riportato in figura 4.6.

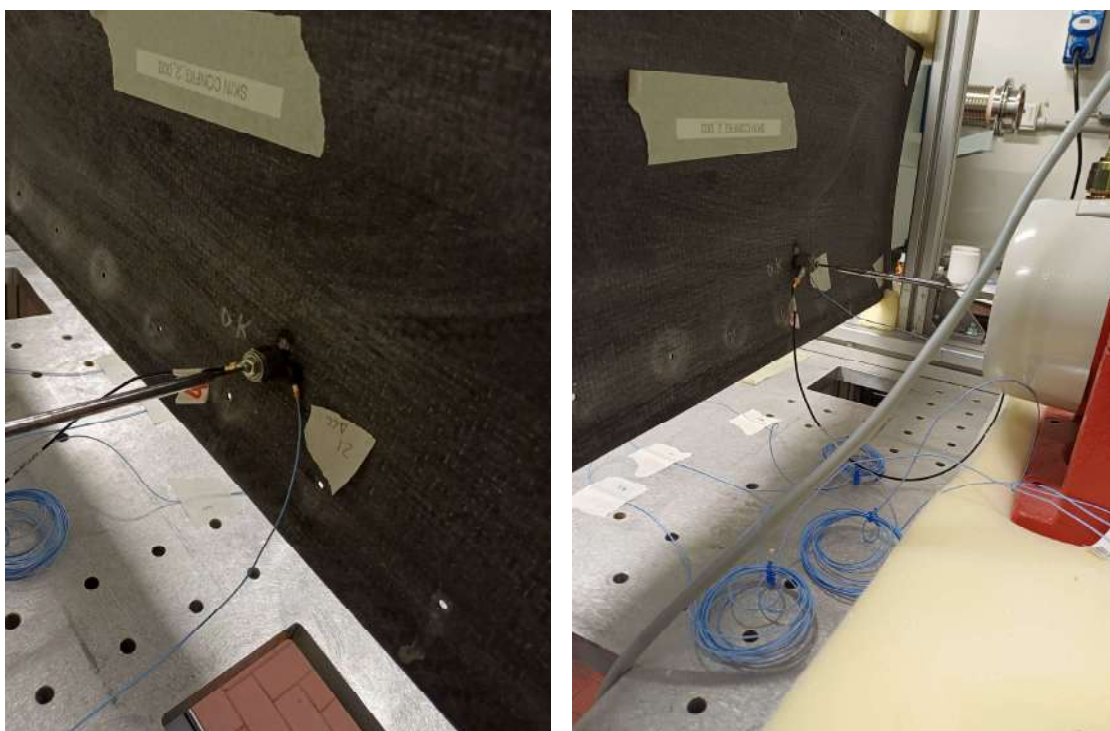


Figura 4.6: Dettaglio del sistema di collegamento shaker-pannello

Per ciascun pannello sono state effettuate nove configurazioni di misura, mantenendo fisso il punto di eccitazione e variando la disposizione dei sensori. In ogni configurazione di misura sono stati impiegati quattro accelerometri, di cui uno mantenuto costantemente in corrispondenza del punto di applicazione della forza. La disposizione tipica dei sensori è illustrata in figura 4.7.

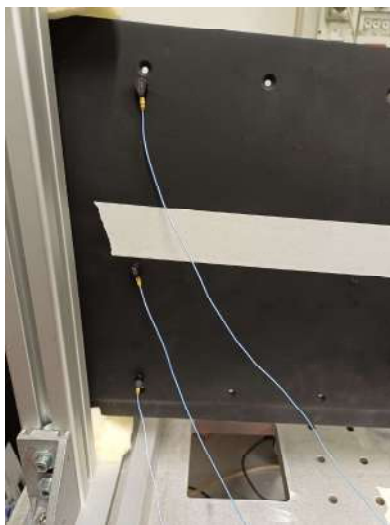


Figura 4.7: Disposizione dei tre accelerometri

I segnali provenienti dalla cella di carico e dagli accelerometri sono stati acquisiti mediante sistema multicanale di acquisizione dati, mostrato in figura 4.8, al quale sono stati collegati i diversi trasduttori tramite canali dedicati. Tale configurazione ha consentito l'acquisizione simultanea del segnale di ingresso e delle risposte strutturali.

L'intera procedura sperimentale è stata mantenuta invariata per tutte le configurazioni di danno, al fine di garantire la confrontabilità dei risultati e consentire un'analisi coerente delle variazioni dei parametri modali indotte dalla presenza e dalla posizione del difetto.



Figura 4.8: Sistema multicanale di acquisizione dati

Le frequenze naturali della struttura sono state individuate a partire dall'analisi delle funzioni di risposta in frequenza (FRF) ottenute sperimentalmente mediante il software Brüel & Kjær Pulse. In particolare, i picchi della FRF consentono di identificare le principali frequenze di risonanza della struttura.

4.1 Pannello rettangolare

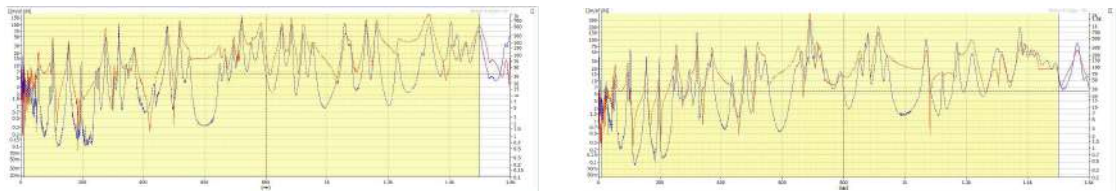


Figura 4.9: Funzioni di risposta in frequenza (FRF) sperimentali dei pannelli rettangolari utilizzate per l'identificazione delle frequenze naturali

La figura 4.9 mostra le FRF sperimentali dei pannelli rettangolari integro e danneggiato, dalle quali sono state individuate le frequenze naturali riportate nella tabella 4.1.

Frequenza	Integro [Hz]	Danneggiato [Hz]
1	56.559	53.830
2	96.400	95.171
3	103.095	103.138
4	154.792	155.052
5	195.647	196.756
6	244.487	244.118
7	254.106	253.714
8	276.087	272.533
9	304.350	296.313
10	319.233	320.648
11	344.854	358.572
12	364.527	368.579
13	436.568	435.656
14	477.134	478.923
15	518.098	479.126
16	549.027	479.630
17	648.867	517.862
18	667.217	518.238
19	694.872	519.733
20	716.688	543.773

Tabella 4.1: Frequenze del pannello rettangolare integro (a) e danneggiato (b)

La tabella 4.1 riporta le prime venti frequenze naturali ottenute mediante analisi modale sperimentale per un pannello rettangolare in configurazione integra (a) e danneggiata (b). In questo caso la presenza del danneggiamento è nota, ma l'entità precisa del difetto non è stata determinata.

Dal confronto tra le due configurazioni si osserva che, per i primi modi di vibrazione, le frequenze naturali del pannello danneggiato risultano generalmente vicine a quelle della configurazione integra. Ciò indica che la presenza del difetto non altera in maniera significativa la risposta dinamica globale della struttura nelle regioni di bassa frequenza, dove le forme modali sono associate a deformazioni più globali del pannello.

All'aumentare dell'ordine modale emergono invece differenze più evidenti tra le due configurazioni. In particolare, nelle regioni di frequenza medio-alte si osservano scostamenti più marcati tra i valori delle frequenze naturali, suggerendo che il danneggiamento introduca una riduzione locale della rigidità della struttura.

Questo comportamento è coerente con il fatto che i modi di vibrazione caratterizzati da frequenze più elevate presentano deformazioni modali più localizzate e risultano

pertanto maggiormente sensibili alla presenza di discontinuità strutturali. Nel complesso, i risultati sperimentali evidenziano come la presenza del difetto influenzi principalmente le frequenze naturali associate ai modi di ordine superiore, invece i primi modi risultano meno sensibili alla presenza del danneggiamento.

4.2 Pannello integro

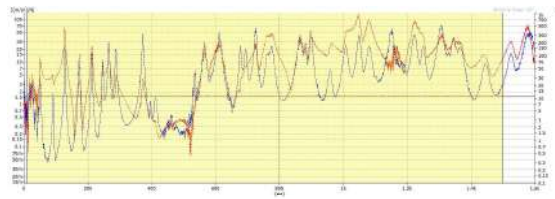


Figura 4.10: Funzione di risposta in frequenza (FRF) sperimentale del pannello integro utilizzata per l'identificazione delle frequenze naturali

La figura 4.10 mostra la FRF sperimentale del pannello integro, dalla quale sono state individuate le frequenze naturali riportate nella tabella 4.2.

Frequenza	Valore [Hz]
1	50.103
2	90.696
3	127.273
4	172.516
5	212.370
6	245.586
7	265.200
8	287.203
9	372.059
10	395.543
11	410.750
12	460.171
13	534.406
14	563.625
15	611.317
16	676.854
17	693.975
18	725.110
19	760.997
20	775.461

Tabella 4.2: Frequenze del pannello integro

La tabella 4.2 riporta le prime venti frequenze naturali ottenute mediante analisi modale sperimentale per il pannello integro. Questa configurazione rappresenta la condizione di riferimento per l'analisi del comportamento dinamico della struttura e costituisce la base di confronto per le successive configurazioni caratterizzate dalla presenza di differenti danneggiamenti.

Le frequenze identificate risultano distribuite in un intervallo compreso tra circa 50 Hz e 775 Hz. I primi modi di vibrazione, associati alle frequenze più basse, sono generalmente caratterizzati da deformazioni globali della struttura e risultano meno sensibili alla presenza di eventuali discontinuità locali. Al contrario, i modi di ordine superiore, corrispondenti a frequenze più elevate, presentano forme modali più complesse e con deformazioni maggiormente localizzate.

I valori riportati in questa tabella verranno quindi utilizzati come riferimento per valutare le variazioni delle frequenze naturali osservate nei pannelli danneggiati analizzati nelle sezioni successive, consentendo di individuare l'influenza del danneggiamento sulla risposta dinamica della struttura.

4.3 Pannello con danno in posizione 1

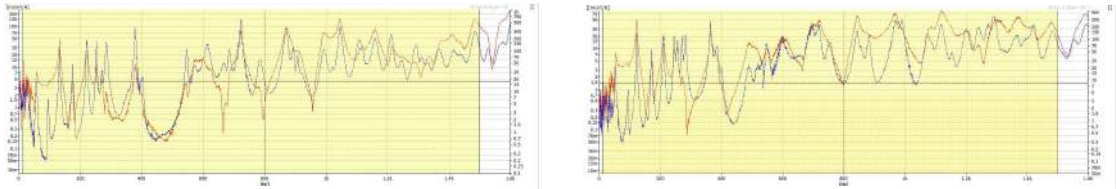


Figura 4.11: Funzioni di risposta in frequenza (FRF) sperimentali dei pannelli con danni $L=11$ cm e $L=15.5$ cm in posizione angolare utilizzate per l'identificazione delle frequenze naturali

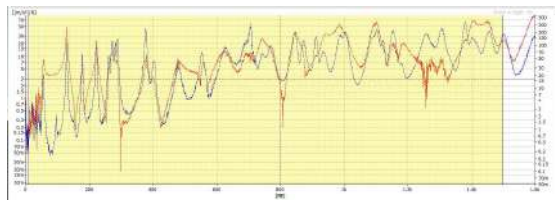


Figura 4.12: Funzione di risposta in frequenza (FRF) sperimentale del pannello con danno $L=19$ cm in posizione angolare utilizzata per l'identificazione delle frequenze naturali

Le figure 4.11 e 4.12 mostrano le FRF sperimentali dei pannelli con danni $L=11$ cm, $L=15.5$ cm e $L=19$ cm in posizione angolare, dalla quale sono state individuate le frequenze naturali riportate nella tabella 4.3.

Frequenza	Integro [Hz]	L=11 cm [Hz]	L=15.5 cm [Hz]	L=19 cm [Hz]
1	50.103	56.456	52.029	55.320
2	90.696	94.655	93.766	97.565
3	127.273	132.128	122.174	128.682
4	172.516	174.386	156.500	177.710
5	212.370	220.519	171.148	222.614
6	245.586	252.100	209.892	259.594
7	265.200	269.951	244.638	271.583
8	287.203	280.866	255.227	282.103
9	372.059	284.677	270.083	288.412
10	395.543	377.994	281.362	377.031
11	410.750	402.336	363.570	403.597
12	460.171	546.064	384.645	478.770
13	534.406	571.880	397.281	550.746
14	563.625	613.105	488.319	561.111
15	611.317	667.977	517.907	626.126
16	676.854	684.119	547.841	693.232
17	693.975	722.080	598.795	705.028
18	725.110	784.663	689.771	742.503
19	760.997	869.432	695.533	770.842
20	775.461	892.336	718.495	846.352

Tabella 4.3: Frequenze del pannello con danno in posizione 1

La tabella 4.3 riporta le prime venti frequenze naturali ottenute mediante analisi modale sperimentale per il pannello caratterizzato da un danneggiamento localizzato in posizione angolare (posizione 1). Sono state considerate tre diverse estensioni del difetto, pari a $L=11$ cm, $L=15.5$ cm e $L=19$ cm.

Dal confronto tra i valori riportati nella tabella si osserva che le frequenze naturali variano in maniera sensibile al variare della dimensione del difetto. In particolare, per alcune frequenze appartenenti alla regione medio-bassa dello spettro modale si registrano variazioni relativamente contenute, invece all'aumentare dell'ordine modale emergono differenze più marcate tra le diverse configurazioni di danneggiamento.

Questo comportamento è coerente con il fatto che i modi di vibrazione a frequenza più elevata sono generalmente caratterizzati da deformazioni modali più localizzate e risultano quindi maggiormente sensibili alla presenza di discontinuità strutturali. L'incremento della lunghezza del difetto comporta infatti una riduzione locale della rigidità del pannello, che si riflette in variazioni più evidenti delle frequenze naturali associate ai modi di ordine superiore.

Il confronto con le frequenze del pannello integro riportate nella tabella 4.2 consente quindi di evidenziare l'influenza del danneggiamento sulla risposta dinamica della struttura, fornendo una prima indicazione qualitativa dell'effetto della posizione e dell'estensione del difetto sulle proprietà modali del pannello.

4.4 Pannello con danno in posizione 2

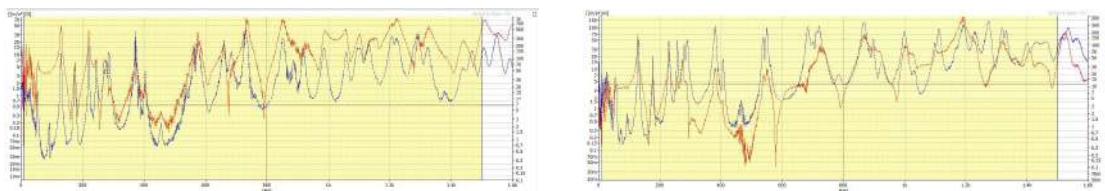


Figura 4.13: Funzioni di risposta in frequenza (FRF) sperimentali dei pannelli con danni $L=11$ cm e $L=15.5$ cm in posizione centrale utilizzate per l'identificazione delle frequenze naturali

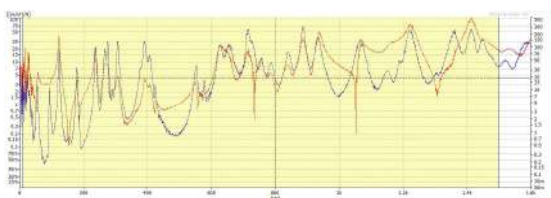


Figura 4.14: Funzione di risposta in frequenza (FRF) sperimentale del pannello con danno $L=19$ cm in posizione centrale utilizzata per l'identificazione delle frequenze naturali

Le figure 4.13 e 4.14 mostrano le FRF sperimentali dei pannelli con danni $L=11$ cm, $L=15.5$ cm e $L=19$ cm in posizione centrale, dalla quale sono state individuate le frequenze naturali riportate nella tabella 4.4.

Frequenza	Integro [Hz]	L=11 cm [Hz]	L=15.5 cm [Hz]	L=19 cm [Hz]
1	50.103	52.621	55.132	54.241
2	90.696	92.071	93.952	92.933
3	127.273	129.395	128.455	122.374
4	172.516	174.238	176.878	178.466
5	212.370	219.918	229.462	236.632
6	245.586	244.217	257.391	265.806
7	265.200	268.724	274.168	275.155
8	287.203	277.252	280.329	306.337
9	372.059	285.545	289.341	376.510
10	395.543	371.862	342.176	390.052
11	410.750	403.646	380.490	406.900
12	460.171	455.699	406.231	423.823
13	534.406	562.661	464.210	550.877
14	563.625	577.554	537.710	558.486
15	611.317	659.933	549.461	576.836
16	676.854	683.153	562.303	625.624
17	693.975	729.953	602.420	655.151
18	725.110	829.687	683.516	713.653
19	760.997	851.721	721.553	728.707
20	775.461	888.032	738.968	754.604

Tabella 4.4: Frequenze del pannello con danno in posizione 2

La tabella 4.4 riporta le prime venti frequenze naturali ottenute mediante analisi modale sperimentale per il pannello caratterizzato da un danneggiamento localizzato nella regione centrale della struttura (posizione 2). Anche in questo caso sono state considerate tre diverse estensioni del difetto, pari a $L=11$ cm, $L=15.5$ cm e $L=19$ cm.

Dal confronto tra i valori riportati nella tabella si osserva che la presenza del danneggiamento in posizione centrale produce variazioni più marcate nelle frequenze naturali rispetto a quanto osservato per il caso di danno in posizione angolare. In particolare, già nelle regioni di frequenza medio-basse si evidenziano differenze significative tra le diverse configurazioni considerate.

All'aumentare dell'estensione del difetto si osserva inoltre una maggiore dispersione dei valori delle frequenze naturali, con variazioni talvolta consistenti tra i tre casi analizzati. Questo comportamento suggerisce che la presenza del danneggiamento nella zona centrale del pannello influisca in maniera più significativa sulla distribuzione di rigidità della struttura, determinando una perturbazione più evidente della risposta dinamica globale.

Tale risultato è coerente con il fatto che la regione centrale della piastra è generalmente caratterizzata da ampiezze modali più elevate per numerosi modi flessionali. Di conseguenza, una riduzione locale della rigidezza in questa zona tende a produrre effetti più evidenti sulle frequenze naturali rispetto a quanto avviene nel caso di danneggiamenti localizzati in prossimità dei bordi.

Il confronto con le frequenze del pannello integro riportate nella tabella 4.2 consente quindi di evidenziare come la posizione del danneggiamento rappresenti un fattore determinante nell'influenzare il comportamento dinamico della struttura.

4.5 Pannelli con danno doppio

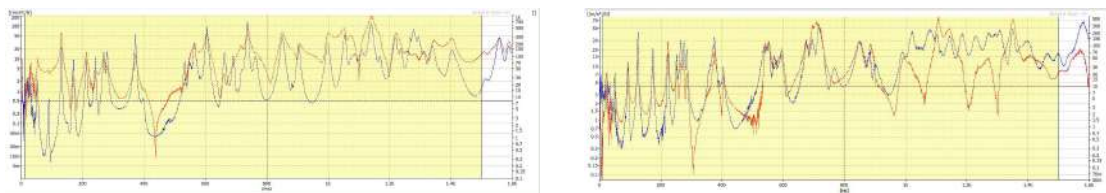


Figura 4.15: Funzioni di risposta in frequenza (FRF) sperimentali dei pannelli con danni doppi affiancati $L=11$ cm e sovrapposti 15×8 cm utilizzate per l'identificazione delle frequenze naturali

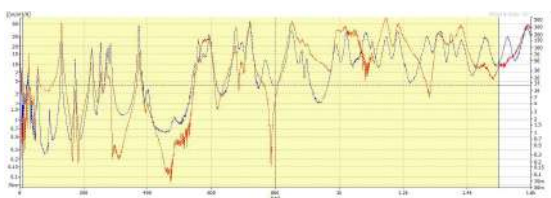


Figura 4.16: Funzione di risposta in frequenza (FRF) sperimentale del pannello con danno doppio $L=11$ cm utilizzata per l'identificazione delle frequenze naturali

Le figure 4.15 e 4.16 mostrano le FRF sperimentali dei pannelli con doppio difetto affiancato di lunghezza $L=11$ cm, doppio difetto sovrapposto con dimensioni 15×8 cm e doppio difetto con lunghezza $L=11$ cm disposto secondo una configurazione non regolare, dalla quale sono state individuate le frequenze naturali riportate nella tabella 4.5.

Frequenza	Integro [Hz]	(a) [Hz]	(b) [Hz]	(c) [Hz]
1	50.103	52.520	55.552	55.047
2	90.696	89.615	92.092	92.027
3	127.273	130.432	125.355	129.929
4	172.516	168.999	172.701	173.312
5	212.370	211.609	223.950	220.142
6	245.586	241.255	261.427	224.805
7	265.200	268.808	275.066	252.603
8	287.203	278.831	293.111	271.423
9	372.059	371.238	382.120	273.768
10	395.543	398.490	392.811	275.895
11	410.750	483.725	403.820	284.070
12	460.171	532.423	490.731	372.668
13	534.406	546.626	539.227	401.048
14	563.625	564.489	550.586	481.567
15	611.317	605.222	606.145	545.258
16	676.854	661.949	651.879	558.729
17	693.975	691.106	707.742	572.364
18	725.110	717.043	715.417	594.367
19	760.997	737.136	805.892	675.695
20	775.461	762.99	879.368	695.213

Tabella 4.5: Frequenze del pannello con danno doppio L=11 cm affiancato (a), con danno doppio L=15x8 cm sovrapposto (b), con danno doppio L=11 cm (c)

La tabella 4.5 riporta le prime venti frequenze naturali ottenute mediante analisi modale sperimentale per tre diverse configurazioni di pannelli caratterizzati da doppio danneggiamento. In particolare, sono considerate le configurazioni con doppio difetto affiancato di lunghezza L=11 cm (a), doppio difetto sovrapposto con dimensioni 15x8 cm (b) e doppio difetto con lunghezza L=11 cm disposto secondo una configurazione non regolare (c).

Dal confronto tra i valori riportati nella tabella si osserva che la presenza di due danneggiamenti produce variazioni apprezzabili nelle frequenze naturali della struttura, con differenze che risultano dipendere non solo dall'estensione dei difetti ma anche dalla loro disposizione geometrica. In particolare, per i modi di vibrazione a frequenza più bassa le differenze tra le tre configurazioni risultano relativamente contenute, invece all'aumentare dell'ordine modale emergono scostamenti più significativi.

Questo comportamento è coerente con il fatto che i modi di ordine superiore sono generalmente caratterizzati da deformazioni modali più localizzate e risultano

quindi maggiormente sensibili alle variazioni locali di rigidità introdotte dalla presenza di più difetti. Inoltre, la diversa disposizione dei danneggiamenti può alterare in maniera differente la distribuzione di rigidità del pannello, determinando variazioni non uniformi delle frequenze naturali.

Nel complesso, i risultati evidenziano come la presenza di un doppio danneggiamento possa influenzare in maniera significativa la risposta dinamica della struttura, con effetti che diventano progressivamente più evidenti nelle regioni di frequenza intermedia e alta dello spettro modale.

4.6 Pannello con taglio passante

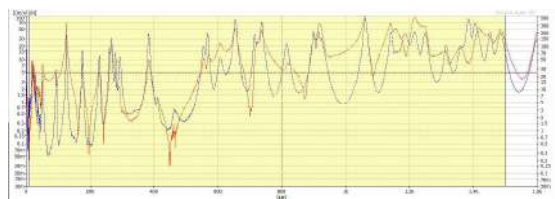


Figura 4.17: Funzione di risposta in frequenza (FRF) sperimentale del pannello con taglio passante utilizzata per l'identificazione delle frequenze naturali

La figura 4.17 mostra la FRF sperimentale del pannello con taglio passante, dalla quale sono state individuate le frequenze naturali riportate nella tabella 4.6.

Frequenza	Integro [Hz]	Taglio passante [Hz]
1	50.103	51.047
2	90.696	93.634
3	127.273	125.276
4	172.516	175.613
5	212.370	229.003
6	245.586	259.568
7	265.200	266.953
8	287.203	279.609
9	372.059	293.519
10	395.543	342.309
11	410.750	383.747
12	460.171	398.661
13	534.406	413.068
14	563.625	468.929
15	611.317	549.663
16	676.854	556.158
17	693.975	567.777
18	725.110	606.238
19	760.997	655.004
20	775.461	714.467

Tabella 4.6: Frequenze del pannello con taglio passante

La tabella 4.6 riporta le prime venti frequenze naturali ottenute mediante analisi modale sperimentale per il pannello caratterizzato dalla presenza di un taglio passante localizzato in prossimità di una regione angolare della struttura.

Dal confronto con i valori relativi al pannello integro si osserva che la presenza del taglio comporta variazioni nelle frequenze naturali della struttura, riconducibili alla riduzione locale di rigidità introdotta dal danneggiamento. In particolare, le frequenze associate ai primi modi di vibrazione mostrano scostamenti relativamente contenuti, invece differenze più evidenti emergono nelle regioni di frequenza intermedia e più elevata dello spettro modale.

Questo comportamento è coerente con il fatto che i modi di ordine superiore risultano generalmente più sensibili alle variazioni locali delle proprietà strutturali, in quanto caratterizzati da deformazioni modali maggiormente localizzate. La presenza del taglio passante introduce infatti una discontinuità significativa nella distribuzione di rigidità del pannello, influenzando in maniera più marcata tali modi di vibrazione.

Nel complesso, i risultati evidenziano come la presenza di un danneggiamento di

tipo passante, pur non modificando in modo sostanziale la struttura globale delle prime forme modali, produca variazioni apprezzabili nelle frequenze naturali della struttura, confermando la sensibilità dei parametri dinamici globali alla presenza di difetti strutturali.

Capitolo 5

Analisi dei risultati

5.1 Risultati numerici

5.1.1 MAC

Al fine di valutare il grado di similarità tra mode shapes ottenute da differenti analisi, ad esempio tra risultati sperimentali e numerici, sono state sviluppate specifiche tecniche di confronto statistico. Tra queste, una delle più diffuse è il *Modal Assurance Criterion (MAC)*, che fornisce una misura quantitativa del livello di correlazione tra due forme modali. Il MAC è definito come:

$$MAC(\phi_i, \phi_j) = \frac{|\phi_i^T \phi_j|^2}{(\phi_i^T \phi_i)(\phi_j^T \phi_j)}$$

dove ϕ_i e ϕ_j rappresentano i vettori delle forme modali associate ai modi i e j , invece l'apice T indica la trasposizione del vettore.

Il MAC è un coefficiente di correlazione adimensionale, il cui valore è compreso tra 0 e 1. Un valore pari a 1 indica una perfetta correlazione tra le due mode shapes considerate, invece valori inferiori a 1 indicano la presenza di discrepanze, il cui grado è proporzionale alla riduzione del coefficiente. In ambito ingegneristico, valori del MAC compresi tra 0.9 e 1 sono generalmente considerati indicativi di una buona correlazione tra le forme modali, invece valori significativamente inferiori a tale intervallo suggeriscono una scarsa corrispondenza tra le mode shapes. Tali discrepanze possono essere attribuite a diversi fattori, quali errori di misura, approssimazioni nel modello numerico o un'eccitazione insufficiente di alcuni modi durante la fase sperimentale.

Posizione 1

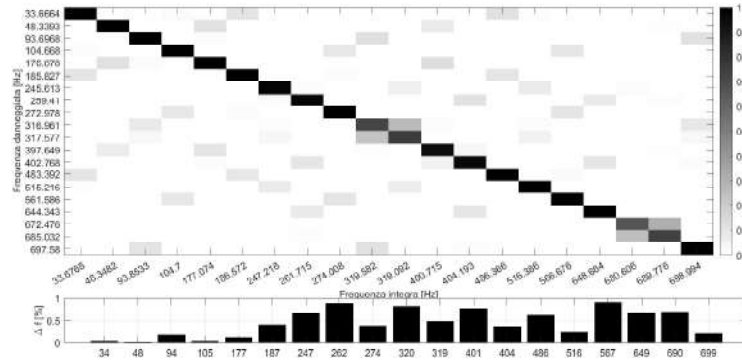


Figura 5.1: MAC calcolato tra il pannello intero e con danno L=11 cm

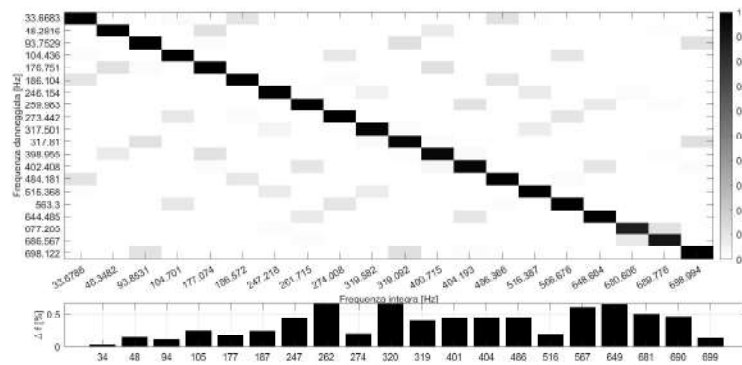


Figura 5.2: MAC calcolato tra il pannello intero e con danno L=15.5 cm

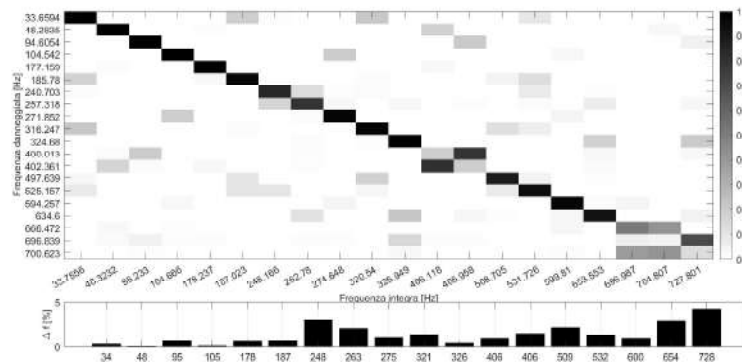


Figura 5.3: MAC calcolato tra il pannello intero e con danno L=19 cm

Il Modal Assurance Criterion (MAC) è stato utilizzato per valutare il grado di correlazione tra le forme modali del pannello integro e quelle delle configurazioni danneggiate. Nelle mappe riportate in figura si osserva come i valori del MAC risultino prevalentemente concentrati lungo la diagonale principale, indicando una buona corrispondenza tra i modi propri della struttura integra e quelli della struttura danneggiata.

In particolare, per la maggior parte dei modi considerati il MAC assume valori prossimi all'unità, evidenziando che il danno introdotto non altera significativamente la forma modale globale della struttura, ma produce principalmente variazioni nelle frequenze naturali. Questo comportamento è tipico di danni di entità moderata o localizzati, che influenzano principalmente la rigidezza locale senza modificare in modo sostanziale la distribuzione modale globale.

Si osservano tuttavia alcune zone di correlazione parziale fuori dalla diagonale, riconducibili alla possibile interazione o scambio modale (mode mixing) tra modi vicini in frequenza. Tale fenomeno risulta più evidente in corrispondenza di alcune bande di frequenza intermedie, dove il danno induce una variazione della distribuzione di rigidezza tale da modificare l'ordinamento relativo delle frequenze naturali. Un aspetto interessante emerge confrontando le prime due configurazioni: nel caso di danno $L=11$ cm (5.1), le zone di correlazione parziale risultano più pronunciate rispetto alla configurazione con danno $L=15.5$ cm (5.2). Questo comportamento apparentemente controintuitivo suggerisce che l'impatto del danno sulla correlazione modale non dipende solo dalla sua grandezza, ma anche dalla posizione dei modi coinvolti e dalla distribuzione della rigidezza locale. In alcune circostanze, un danno più grande può produrre una perturbazione più uniforme, riducendo l'interazione tra modi e quindi diminuendo il fenomeno di mode mixing rispetto a un danno più piccolo e localizzato.

Nella configurazione con danno $L=19$ cm (5.3) la distribuzione dei valori di MAC appare invece più dispersa, con la presenza di alcune correlazioni significative tra modi non perfettamente allineati lungo la diagonale principale. Ciò suggerisce che l'aumento dell'estensione del danno produce una perturbazione più significativa del campo modale della struttura, causando un maggiore accoppiamento tra alcune forme modali e rendendo meno immediata l'identificazione univoca dei modi corrispondenti.

I grafici inferiori riportano la variazione percentuale delle frequenze naturali tra il pannello integro e quello danneggiato. Tali variazioni sono state calcolate considerando esclusivamente le coppie di modi caratterizzate da un valore di MAC superiore a 0.7, in modo da confrontare solo forme modali effettivamente correlate tra loro.

In particolare, per $L=11$ cm le variazioni risultano relativamente contenute, invece per $L=19$ cm si osservano scostamenti significativamente più elevati, soprattutto per i modi di ordine superiore. Questo comportamento è coerente con il fatto

che i modi a frequenza più elevata sono generalmente più sensibili a variazioni locali di rigidità, in quanto caratterizzati da lunghezze d'onda modali, ovvero la distanza tra i punti della struttura che si muovono in fase opposta, più ridotte. Di conseguenza, tali modi risultano più influenzati dalla presenza e dall'estensione del danno.

Nel complesso, l'analisi del MAC e delle variazioni di frequenza evidenzia come l'aumento della lunghezza del difetto comporti una progressiva perturbazione della risposta dinamica della struttura, manifestata sia attraverso maggiori variazioni delle frequenze naturali sia tramite una riduzione della correlazione modale tra configurazione integra e danneggiata.

Posizione 2

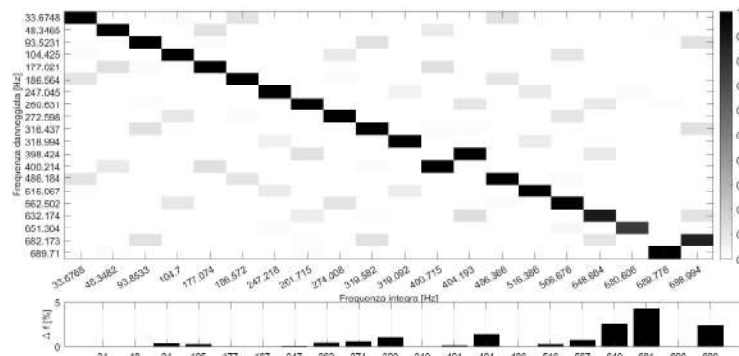


Figura 5.4: MAC calcolato tra il pannello intero e con danno L=11 cm

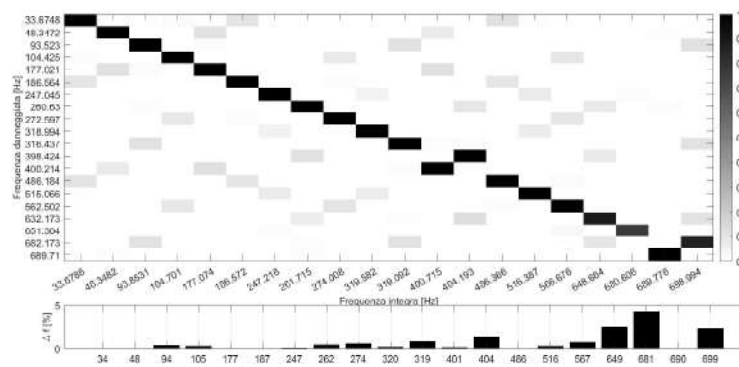


Figura 5.5: MAC calcolato tra il pannello intero e con danno L=15.5 cm

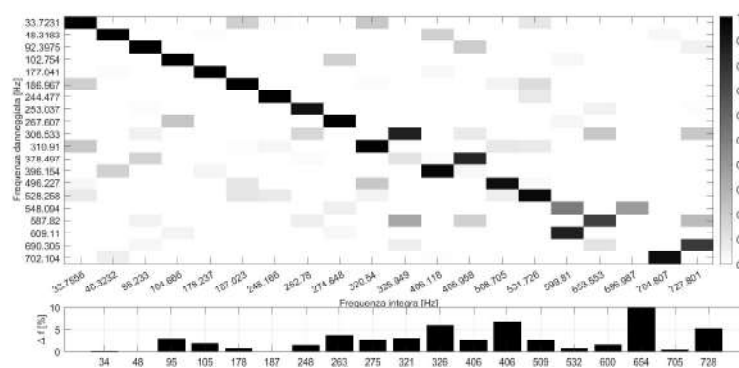


Figura 5.6: MAC calcolato tra il pannello intero e con danno L=19 cm

I grafici ottenuti tramite l'analisi della coerenza modale (MAC) per le tre configurazioni di danno offrono un approfondimento sul comportamento dinamico della struttura in relazione alla posizione e all'entità del danno. L'analisi evidenzia come la presenza di un difetto strutturale modifichi la correlazione tra le forme modali della configurazione integra e quelle della configurazione danneggiata, mettendo in luce il ruolo significativo che la posizione del danno riveste nella risposta dinamica complessiva del pannello.

Nel caso in esame, in cui il danno è posizionato centralmente nel pannello, si osserva un comportamento più marcato rispetto alla struttura integra. In tutti i grafici si nota infatti un aumento dei valori fuori dalla diagonale della matrice MAC, accompagnato da una progressiva diminuzione della coerenza tra le modalità modali all'aumentare della grandezza del danno. Sebbene la diagonale principale continui a presentare valori elevati, indicativi di una generale somiglianza tra le forme modali delle due configurazioni, la presenza di correlazioni fuori diagonale evidenzia che il danno influisce in maniera più significativa sulle proprietà dinamiche della struttura.

Queste zone di correlazione parziale possono essere ricondotte al fenomeno di interazione modale (mode mixing), che si manifesta quando modi con frequenze relativamente vicine tendono a interagire tra loro a seguito della variazione locale di rigidità introdotta dal danno. In tali condizioni, la corrispondenza uno a uno tra i modi della struttura integra e quelli della configurazione danneggiata può risultare meno evidente, dando origine a correlazioni distribuite anche al di fuori della diagonale principale.

Un fenomeno particolarmente interessante e peculiare emerge confrontando questi risultati con quelli ottenuti per le stesse grandezze di danno localizzate in una zona angolare della struttura, come nei grafici precedentemente analizzati. In quelle configurazioni si osservava infatti una maggiore corrispondenza tra le modalità modali della struttura danneggiata e quella integra, con valori della matrice MAC fortemente concentrati lungo la diagonale e correlazioni fuori diagonale relativamente limitate. Ciò suggerisce che, quando il danno è localizzato in una regione periferica del pannello, la risposta dinamica della struttura subisce perturbazioni più contenute e le forme modali tendono a rimanere maggiormente simili a quelle della configurazione integra.

Al contrario, nei grafici relativi al danno posizionato centralmente, emerge un fenomeno di disallineamento delle frequenze modali. In alcuni casi si osserva infatti che la corrispondenza tra le frequenze della struttura integra e quelle della struttura danneggiata non segue più un andamento strettamente lineare lungo la diagonale della matrice MAC. Ad esempio, nel caso del pannello con danno $L=11$ cm (5.4), la dodicesima frequenza modale della struttura danneggiata risulta maggiormente correlata con la tredicesima frequenza della struttura integra e viceversa. Questo comportamento evidenzia un riordinamento modale, tipico dei sistemi in cui una

perturbazione strutturale altera la distribuzione di rigidità e modifica l'ordine relativo dei modi.

Tale fenomeno non risulta invece evidente nei casi in cui il danno è localizzato in prossimità degli angoli della struttura, dove la corrispondenza tra le frequenze modali rimane più regolare e la diagonale della matrice MAC appare più definita. Questo comportamento indica che la posizione del danno ha un ruolo fondamentale nel determinare il livello di perturbazione della risposta dinamica della struttura. Dal punto di vista fisico, ciò può essere interpretato considerando che un danno localizzato nella regione centrale del pannello tende a interagire con un numero maggiore di forme modali globali, poiché tale regione è generalmente caratterizzata da deformazioni modali più significative. Di conseguenza, la riduzione locale di rigidità introdotta dal difetto si riflette in maniera più evidente sulla distribuzione delle frequenze naturali e sulla correlazione tra le forme modali. Al contrario, un danno situato in prossimità dei bordi o degli angoli della struttura tende ad avere un effetto più localizzato, influenzando in misura minore la dinamica globale del sistema.

Nei grafici inferiori è inoltre riportata la variazione percentuale delle frequenze naturali tra la configurazione integra e quella danneggiata. A differenza di un confronto diretto tra modi aventi lo stesso indice modale, le differenze di frequenza sono state calcolate esclusivamente tra le coppie di modi che presentano un valore di MAC superiore a 0.7. In questo modo il confronto tra le frequenze viene effettuato solo tra forme modali effettivamente correlate dal punto di vista dinamico, evitando associazioni non fisicamente significative dovute a eventuali riordinamenti modali. Ciò è coerente con il fatto che i modi a frequenza più elevata risultano generalmente più sensibili alle variazioni locali di rigidità, in quanto caratterizzati da lunghezze d'onda modali più ridotte.

Come evidenziato nell'analisi delle matrici del Modal Assurance Criterion (MAC), la presenza del danno può introdurre alcune anomalie nella corrispondenza tra i modi della struttura integra e quelli della configurazione danneggiata. In particolare, nel caso di danno localizzato nella regione centrale del pannello si osservano valori di correlazione significativi anche al di fuori della diagonale principale della matrice MAC, suggerendo la presenza di fenomeni di interazione modale o di riordinamento delle frequenze modali.

Per rendere più chiara l'associazione tra le modalità della struttura integra e quelle della configurazione danneggiata, è stata quindi effettuata un'analisi di *mode pairing*, il cui risultato è riportato nelle figure 5.7, 5.8 e 5.9. Tale rappresentazione, costruita a partire dai valori della matrice MAC, consente di visualizzare in maniera immediata la corrispondenza tra gli indici modali delle due configurazioni strutturali.

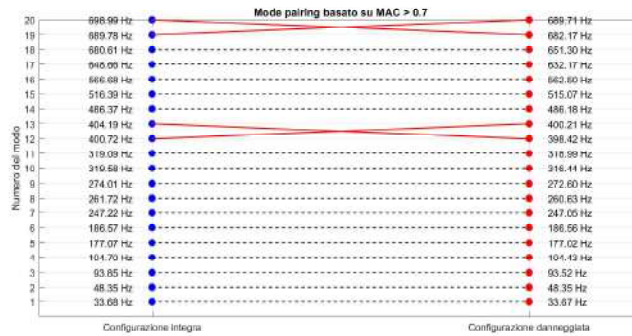


Figura 5.7: Grafico di mode pairing tra la struttura integra e la configurazione danneggiata con L=11 cm in posizione 2

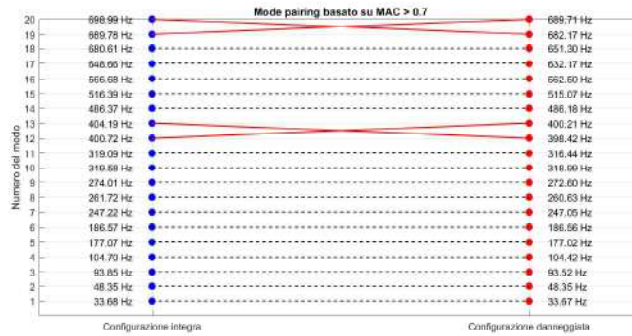


Figura 5.8: Grafico di mode pairing tra la struttura integra e la configurazione danneggiata con L=15.5 cm in posizione 2

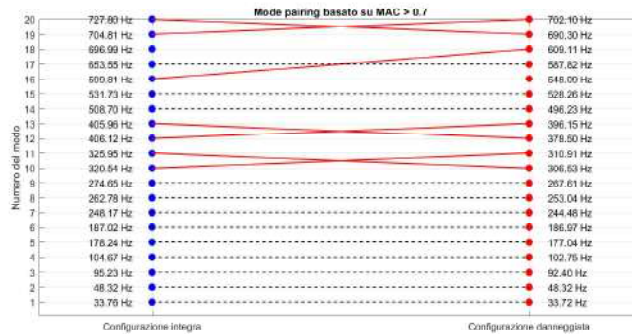


Figura 5.9: Grafico di mode pairing tra la struttura integra e la configurazione danneggiata con L=19 cm in posizione 2

Per interpretare correttamente queste corrispondenze è utile analizzare direttamente le forme modali associate ai modi coinvolti, come mostrato nelle figure sottoriportate. Il confronto tra le deformazioni modali della struttura integra e di quella danneggiata evidenzia come le modalità coinvolte presentino distribuzioni di spostamento molto simili, pur comparando in posizioni differenti nell'ordinamento delle frequenze.

Questo confronto mostra che la presenza del danno non altera in maniera significativa la morfologia delle forme modali, ma provoca principalmente una variazione relativa delle frequenze naturali, che può determinare uno scambio nell'ordine modale tra modi. Tale comportamento è tipico dei sistemi strutturali in cui una perturbazione locale di rigidezza modifica la distribuzione delle frequenze modali senza introdurre variazioni sostanziali nella configurazione spaziale delle deformazioni.

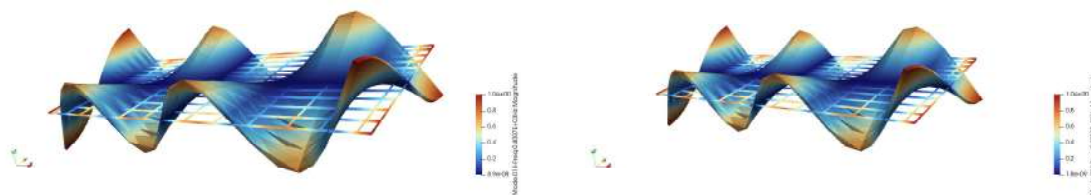


Figura 5.10: Pairing tra modo 12 integro (400.715 Hz) e modo 13 con danno L=11 cm (400.214 Hz) in posizione 2

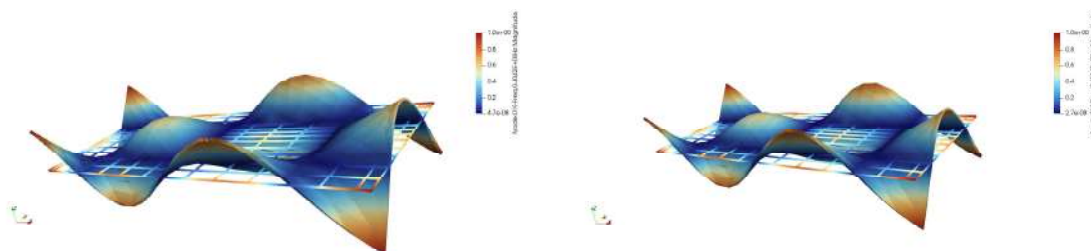


Figura 5.11: Pairing tra modo 13 integro (404.193 Hz) e modo 12 con danno L=11 cm (398.423 Hz) in posizione 2

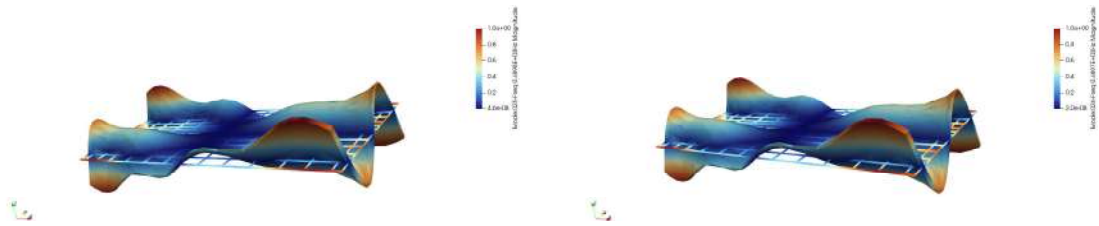


Figura 5.12: Pairing tra modo 19 intero (689.776 Hz) e modo 20 con danno $L=11$ cm (689.709 Hz) in posizione 2

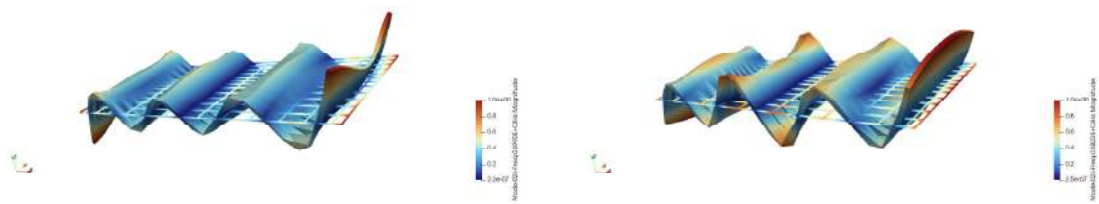


Figura 5.13: Pairing tra modo 20 intero (698.994 Hz) e modo 19 con danno $L=11$ cm (682.172 Hz) in posizione 2

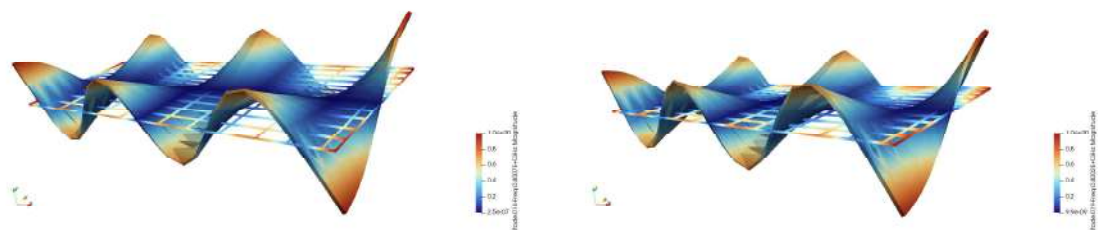


Figura 5.14: Pairing tra modo 12 intero (400.715 Hz) e modo 13 con danno $L=15.5$ cm (400.214 Hz) in posizione 2

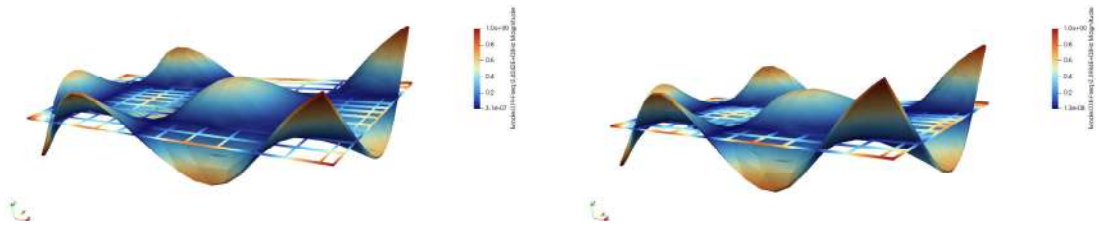


Figura 5.15: Pairing tra modo 13 intero (404.193 Hz) e modo 12 con danno $L=15.5$ cm (398.423 Hz) in posizione 2

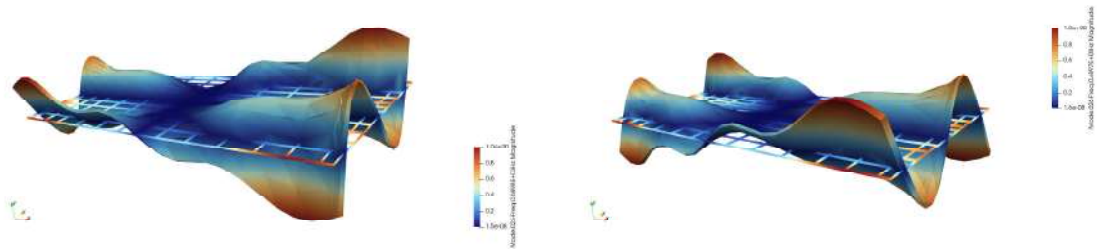


Figura 5.16: Pairing tra modo 19 intero (689.776 Hz) e modo 20 con danno $L=15.5$ cm (689.709 Hz) in posizione 2

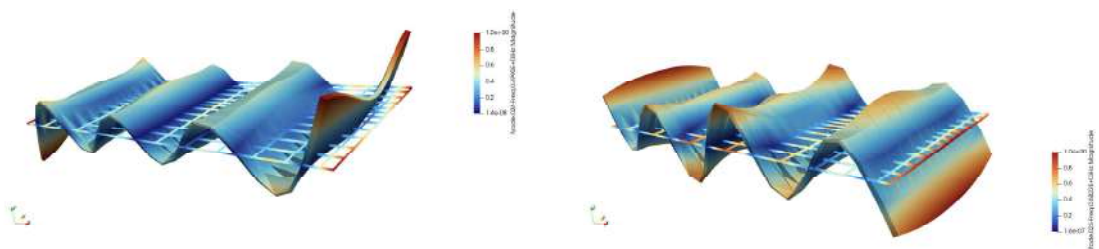


Figura 5.17: Pairing tra modo 20 intero (698.994 Hz) e modo 19 con danno $L=15.5$ cm (682.172 Hz) in posizione 2

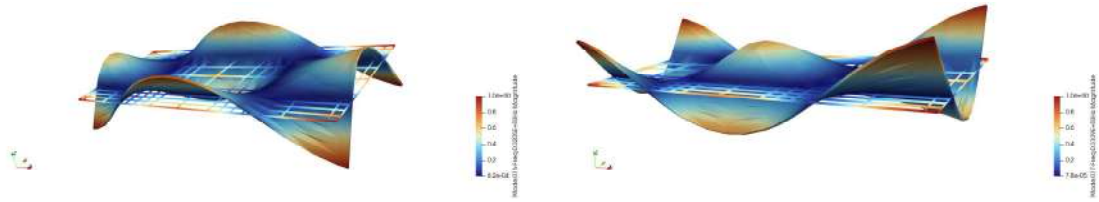


Figura 5.18: Pairing tra modo 10 intero (320.54 Hz) e modo 11 con danno $L=19$ cm (310.909 Hz) in posizione 2

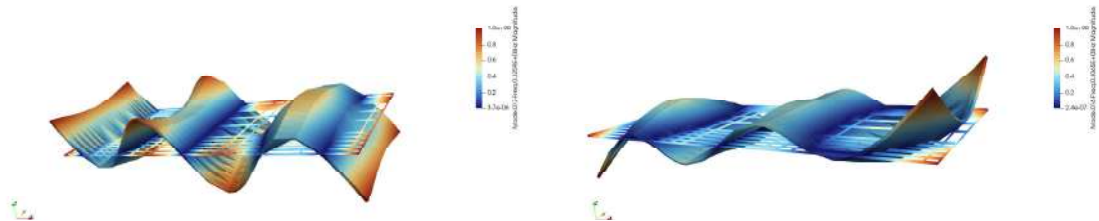


Figura 5.19: Pairing tra modo 11 intero (325.95 Hz) e modo 10 con danno $L=19$ cm (306.533 Hz) in posizione 2

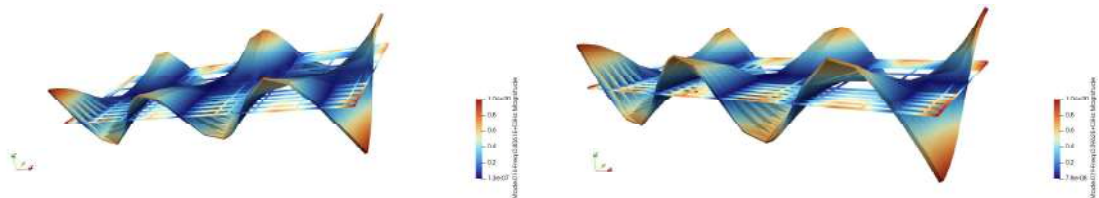


Figura 5.20: Pairing tra modo 12 intero (406.12 Hz) e modo 13 con danno $L=19$ cm (396.153 Hz) in posizione 2

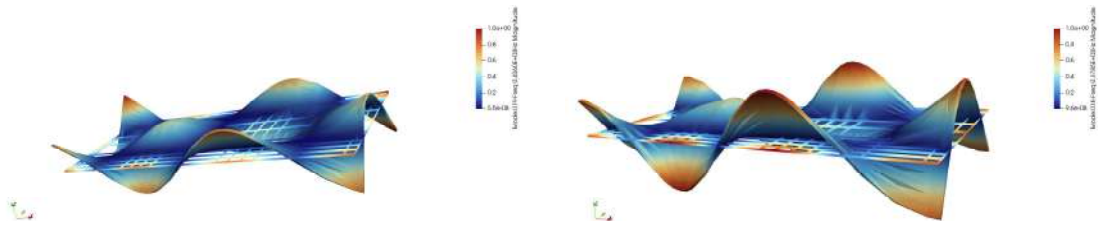


Figura 5.21: Pairing tra modo 13 intero (405.96 Hz) e modo 12 con danno $L=19$ cm (378.497 Hz) in posizione 2

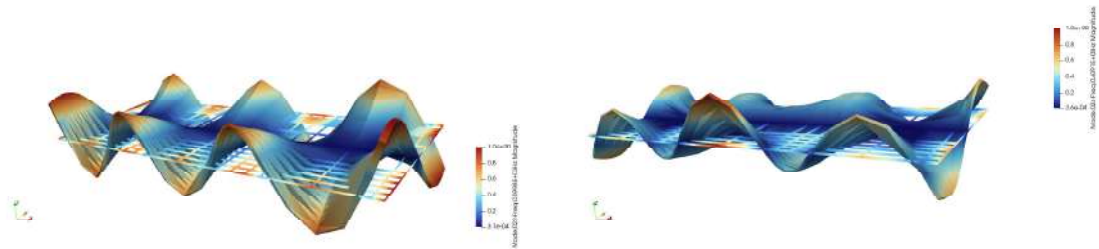


Figura 5.22: Pairing tra modo 16 intero (599.81 Hz) e modo 18 con danno $L=19$ cm (609.11 Hz) in posizione 2

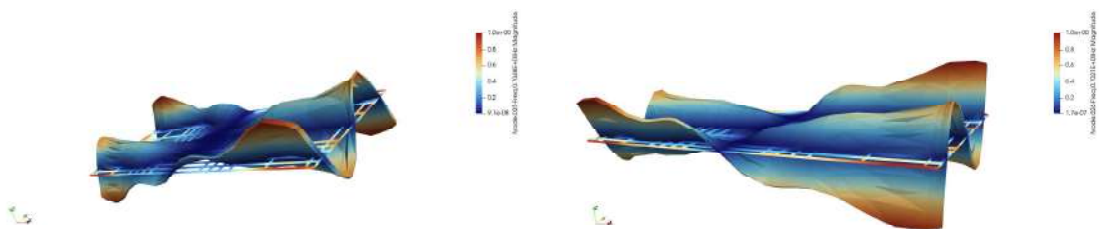


Figura 5.23: Pairing tra modo 19 intero (704.81 Hz) e modo 20 con danno $L=19$ cm (702.103 Hz) in posizione 2

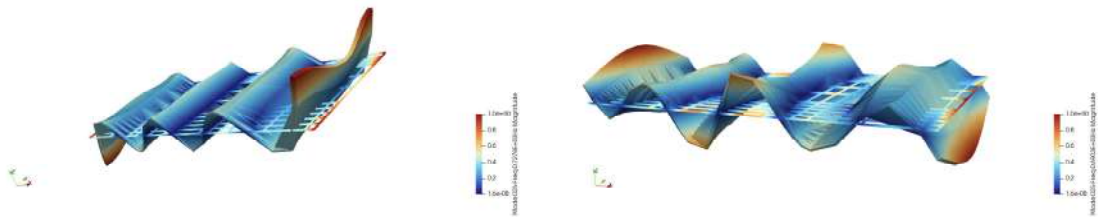


Figura 5.24: Pairing tra modo 20 integro (727.80 Hz) e modo 19 con danno $L=19$ cm (690.304 Hz) in posizione 2

Nel complesso, l'analisi combinata delle matrici MAC, dei grafici di mode pairing e del confronto delle forme modali consente di identificare in maniera più chiara la corrispondenza tra i modi della struttura integra e quelli della configurazione danneggiata, permettendo di interpretare correttamente eventuali variazioni nell'ordinamento delle frequenze modali indotte dalla presenza del danno.

5.2 Risultati sperimentali

5.2.1 Posizione 1

Le matrici del Modal Assurance Criterion (MAC) riportate nelle figure mostrano il confronto tra le forme modali identificate sperimentalmente per il pannello intero e quelle ottenute per tre configurazioni danneggiate caratterizzate da un difetto localizzato in posizione angolare, con dimensioni rispettivamente pari a $L=11$ cm, $L=15.5$ cm e $L=19$ cm.

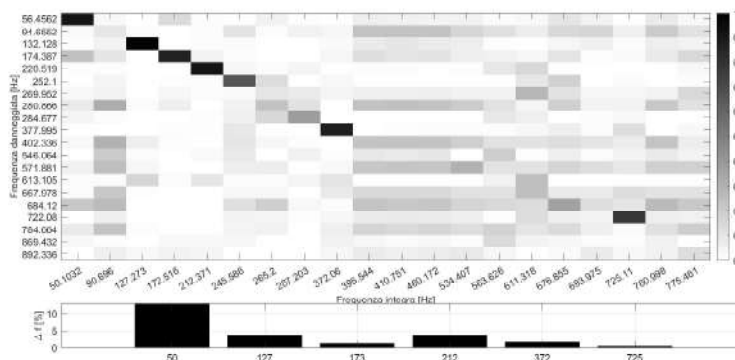


Figura 5.25: MAC calcolato tra il pannello intero e con danno $L=11$ cm

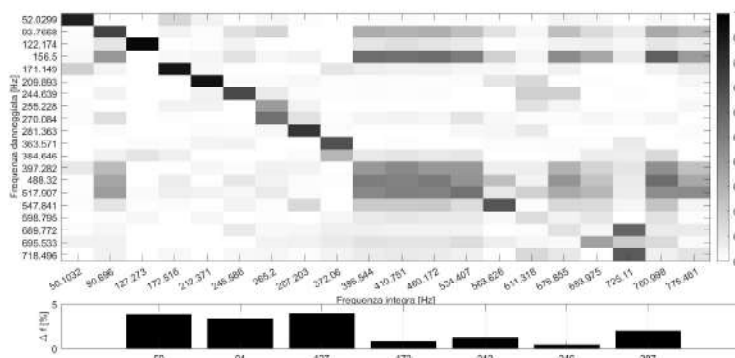


Figura 5.26: MAC calcolato tra il pannello intero e con danno $L=15.5$ cm

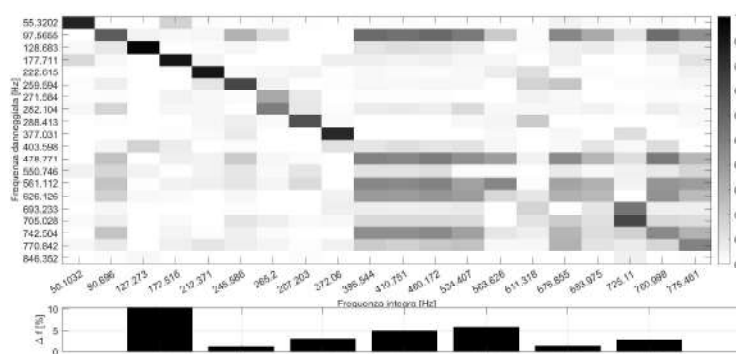


Figura 5.27: MAC calcolato tra il pannello integro e con danno $L=19$ cm

Nel caso del pannello con danno di dimensione $L=11$ cm (5.25) i valori del MAC risultano prevalentemente concentrati lungo la diagonale principale della matrice, indicando una buona corrispondenza tra le forme modali della configurazione integra e quelle della struttura danneggiata. Le correlazioni fuori diagonale risultano limitate e concentrate principalmente nelle bande di frequenza medio-alte, dove si osservano alcuni fenomeni di correlazione parziale tra modi adiacenti, riconducibili a lievi fenomeni di interazione modale.

Un comportamento qualitativamente analogo si osserva anche per la configurazione con danno di grandezza $L=15.5$ cm (5.26). Tuttavia, rispetto al caso precedente, si nota una maggiore dispersione dei valori di correlazione fuori diagonale, in particolare nelle regioni di frequenza intermedia e superiore. Questo indica che l'aumento dell'estensione del difetto introduce una perturbazione più evidente nella risposta dinamica della struttura. In tali condizioni alcuni modi della struttura danneggiata mostrano una correlazione non esclusiva con un singolo modo della struttura integra, ma presentano valori di MAC apprezzabili anche con modi vicini di frequenza, evidenziando possibili fenomeni di interazione modale o *mode mixing*. Nel caso della configurazione con danno di grandezza $L=19$ cm (5.27) la diagonale principale della matrice MAC rimane comunque ben definita, ma si osserva una dispersione ancora più marcata dei valori di correlazione al di fuori dalla diagonale, soprattutto nelle bande di frequenze più elevate. Ciò suggerisce una maggiore interazione tra alcune forme modali dovuta alla riduzione locale di rigidità introdotta dal difetto, che può favorire fenomeni di accoppiamento modale tra modi con frequenze tra loro ravvicinate.

Il confronto tra le tre configurazioni analizzate evidenzia che, nonostante l'aumento progressivo della dimensione del difetto, la struttura mantiene una buona corrispondenza modale con la configurazione integra. Ciò suggerisce che la morfologia globale delle forme modali non subisce variazioni sostanziali. Questo comportamento è coerente con la posizione angolare del danneggiamento, localizzato in una zona generalmente meno coinvolta nella deformazione globale delle prime forme modali.

Di conseguenza, il difetto influisce principalmente sui valori delle frequenze naturali, invece la distribuzione spaziale delle deformazioni modali rimane complessivamente simile a quella osservata nella struttura integra.

Nei grafici inferiori è inoltre riportata la variazione percentuale delle frequenze naturali tra la configurazione integra e quella danneggiata. In questo caso le differenze di frequenza sono state calcolate esclusivamente tra le coppie di modi che presentano un valore di MAC superiore a 0.7, in modo da confrontare solamente forme modali effettivamente correlate dal punto di vista dinamico. Per questo motivo il numero di valori rappresentati negli istogrammi risulta inferiore rispetto al numero totale dei modi identificati, in particolare nei risultati sperimentali dove la correlazione modale può risultare più dispersa.

L'analisi delle variazioni percentuali delle frequenze naturali conferma inoltre una tendenza generale all'aumento dello scostamento rispetto alla configurazione integra al crescere della dimensione del danno. In particolare, alcune frequenze appartenenti alla banda intermedia mostrano variazioni più significative, indicando una maggiore sensibilità di tali modi alla riduzione locale di rigidità introdotta dal difetto.

L'analisi congiunta delle matrici MAC e delle variazioni delle frequenze naturali mostra che, anche in presenza di scostamenti in frequenza talvolta rilevanti, i valori di MAC rimangono generalmente elevati e concentrati lungo la diagonale principale. Questo risultato suggerisce che il danneggiamento influisce prevalentemente sulle frequenze naturali della struttura, invece la morfologia delle forme modali globali risulta sostanzialmente preservata. Tale risultato è coerente con la natura localizzata del difetto e con la sua posizione angolare nel pannello, che tende a perturbare la rigidità locale della struttura senza modificare in maniera sostanziale il campo modale globale.

5.2.2 Posizione 2

Le matrici MAC riportate in figura mostrano il confronto tra le forme modali della configurazione integra e quelle della struttura danneggiata nel caso di danno localizzato in posizione centrale. In modo analogo a quanto osservato nei risultati numerici relativi alla stessa posizione del difetto, anche nel caso sperimentale la distribuzione dei valori di MAC evidenzia un comportamento meno regolare rispetto al caso di danno in posizione angolare.

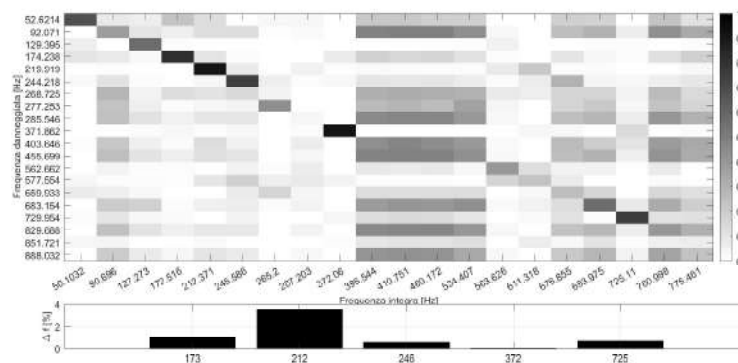


Figura 5.28: MAC calcolato tra il pannello integro e con danno $L=11$ cm

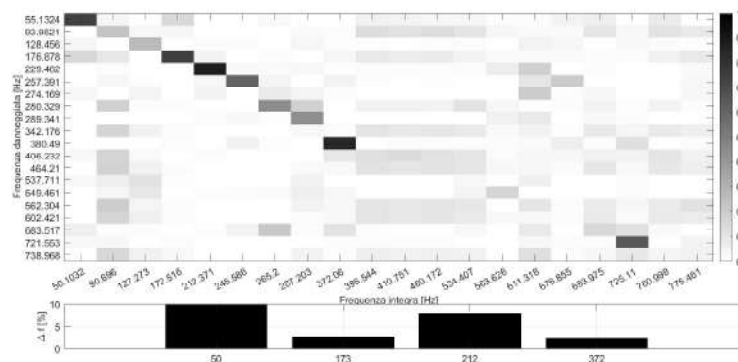


Figura 5.29: MAC calcolato tra il pannello integro e con danno $L=15.5$ cm

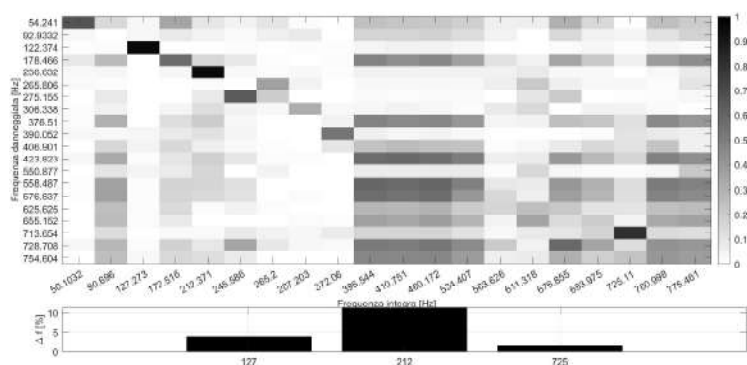


Figura 5.30: MAC calcolato tra il pannello integro e con danno $L=19$ cm

Nelle prime frequenze la diagonale principale risulta ancora abbastanza riconoscibile e i valori di MAC associati ai modi corrispondenti rimangono relativamente elevati, indicando che le forme modali globali non subiscono variazioni sostanziali. Tuttavia, all'aumentare della frequenza si osserva una progressiva dispersione dei valori di correlazione, con la comparsa di contributi significativi anche al di fuori della diagonale principale. Questo comportamento indica una maggiore interazione tra forme modali differenti e una corrispondenza meno diretta tra i modi della configurazione integra e quelli della struttura danneggiata.

In particolare, nella banda di frequenze intermedie si osservano regioni in cui i valori di MAC risultano distribuiti su più colonne o righe, indicando che alcune forme modali della struttura danneggiata presentano caratteristiche miste rispetto a quelle della configurazione integra. Questo fenomeno è tipico dei casi in cui il danno è localizzato in zone strutturalmente più sensibili dal punto di vista dinamico, come la regione centrale della piastra, dove molte forme modali presentano elevati livelli di deformazione.

L'analisi delle variazioni percentuali delle frequenze naturali mostra inoltre che solo alcune coppie modali presentano valori di MAC sufficientemente elevati da consentire un confronto diretto tra le frequenze della struttura integra e quelle della configurazione danneggiata. Per questo motivo il numero di barre presenti negli istogrammi risulta inferiore rispetto al numero totale dei modi identificati. In generale si osservano scostamenti percentuali contenuti per la maggior parte dei modi accoppiati, invece in alcuni casi specifici compaiono variazioni più significative, in particolare per alcune frequenze appartenenti alla regione intermedia dello spettro. Nel complesso, il confronto tra le matrici MAC e le variazioni di frequenza evidenzia come la presenza del difetto in posizione centrale influenzi in maniera più marcata il comportamento dinamico della struttura rispetto al caso di danno angolare. Oltre alle variazioni delle frequenze naturali, si osserva infatti anche una maggiore dispersione dei valori di correlazione modale, indice di una perturbazione più significativa delle forme modali.

Questo comportamento risulta coerente con la posizione del danno, in quanto la zona centrale della piastra è generalmente caratterizzata da ampiezze modali più elevate per numerosi modi flessionali. Di conseguenza, una riduzione locale della rigidezza in tale regione tende a modificare in maniera più sensibile la distribuzione delle deformazioni modali, generando una maggiore interazione tra i modi e una correlazione modale meno netta rispetto ai casi in cui il difetto è localizzato in prossimità dei bordi.

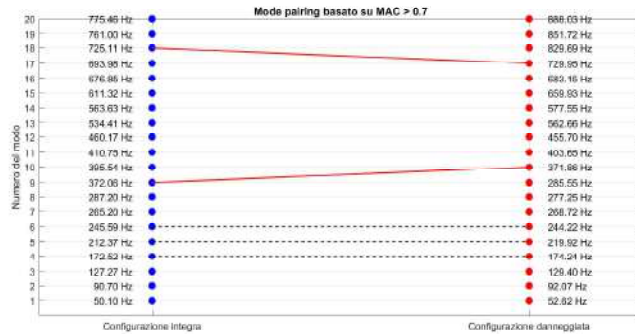


Figura 5.31: Grafico di mode pairing tra la struttura integra e la configurazione danneggiata con $L=11$ cm in posizione 2

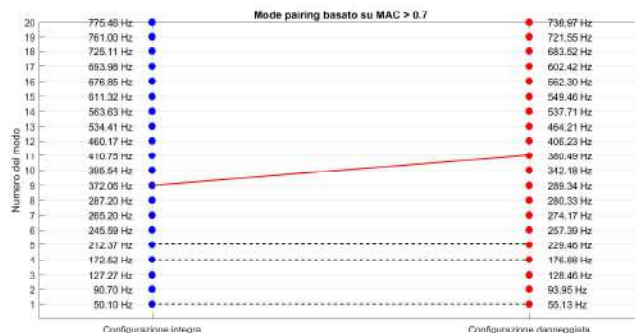


Figura 5.32: Grafico di mode pairing tra la struttura integra e la configurazione danneggiata con $L=15.5$ cm in posizione 2

Per interpretare correttamente queste corrispondenze è utile analizzare direttamente le forme modali associate ai modi coinvolti, come mostrato nelle figure sottoriportate. Il confronto tra le deformazioni modali della struttura integra e di quella danneggiata evidenzia come le modalità coinvolte presentino distribuzioni di spostamento molto simili, pur comparando in posizioni differenti nell'ordinamento delle frequenze.

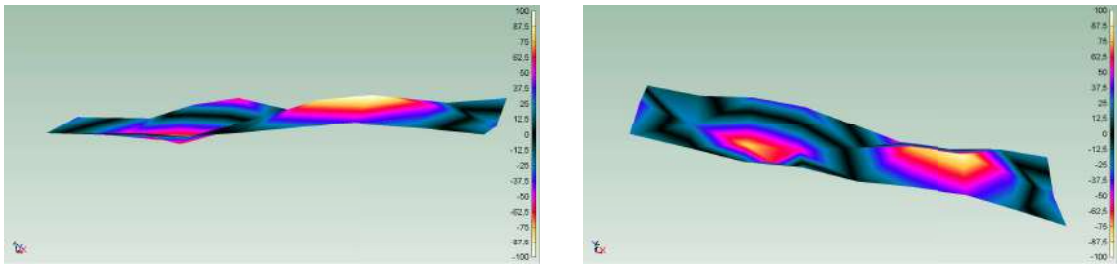


Figura 5.33: Pairing tra modo 9 integro (372.06 Hz) e modo 10 con danno L=11 cm (371.86 Hz) in posizione 2

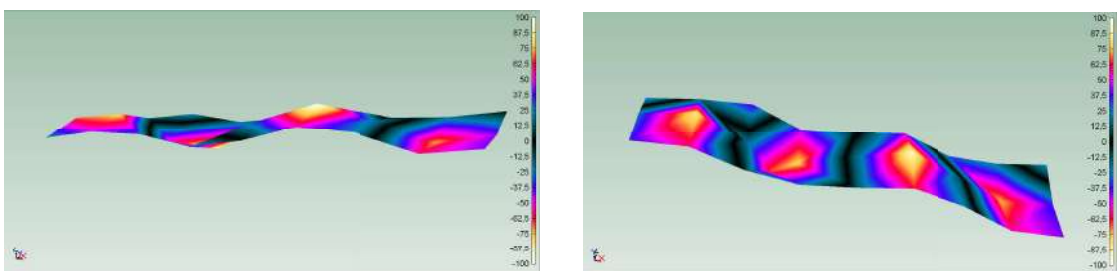


Figura 5.34: Pairing tra modo 18 integro (725.11 Hz) e modo 17 con danno L=11 cm (729.95 Hz) in posizione 2

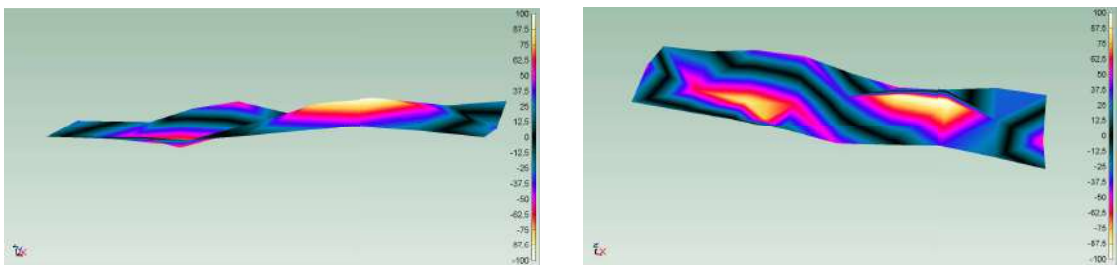


Figura 5.35: Pairing tra modo 9 integro (372.06 Hz) e modo 11 con danno L=15.5 cm (380.49 Hz) in posizione 2

5.2.3 Confronto risultati numerici e sperimentali

Al fine di effettuare un confronto coerente tra i risultati numerici e quelli sperimentali, è stato necessario rendere compatibili i gradi di libertà considerati nelle due analisi. A tal fine, sono stati selezionati gli spostamenti nella direzione fuori piano (asse Z) di 27 nodi del modello numerico del pannello integro, individuati come i più prossimi alle posizioni in cui sono stati collocati i 27 accelerometri durante le prove sperimentali.

Questa operazione ha consentito di costruire un set di dati numerici direttamente confrontabile con quello sperimentale, basato sulle medesime posizioni di misura. In questo modo è stato possibile eseguire un confronto diretto tra il pannello integro numerico e il pannello rettangolare integro sperimentale, riducendo gli effetti legati alla diversa discretizzazione del modello e garantendo una maggiore significatività dei risultati.

Sulla base di tali dati, è stata quindi calcolata la matrice MAC, utilizzando esclusivamente i punti corrispondenti selezionati

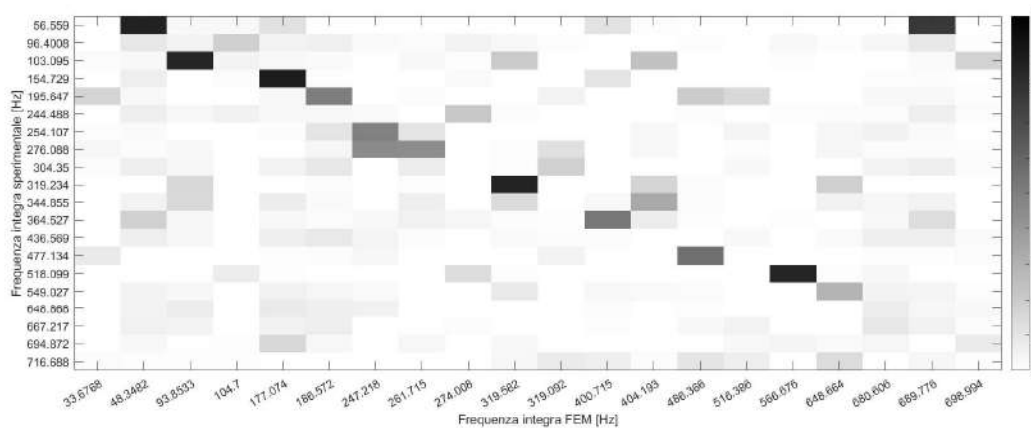


Figura 5.36: MAC calcolato tra il pannello integro numerico e integro sperimentale

La matrice MAC ottenuta dal confronto evidenzia una correlazione complessivamente buona tra le forme modali, con valori più elevati distribuiti prevalentemente in prossimità della diagonale principale. Questo comportamento indica che, nonostante le differenze tra modello e configurazione reale, è possibile individuare una corrispondenza tra diversi modi di vibrazione.

Tuttavia, la distribuzione dei valori non risulta perfettamente concentrata lungo la diagonale, ma presenta una certa dispersione, in particolare per i modi di ordine superiore. Questo aspetto è coerente con quanto atteso nelle analisi sperimentali,

dove la presenza di rumore, l'incertezza nella misura e la vicinanza tra alcune frequenze modali rendono più complessa una chiara identificazione e separazione dei modi.

Al fine di rendere più chiara l'associazione tra i modi delle due configurazioni, è stato inoltre costruito il grafico di mode pairing, che consente di evidenziare in maniera immediata le coppie modali caratterizzate da maggiore correlazione

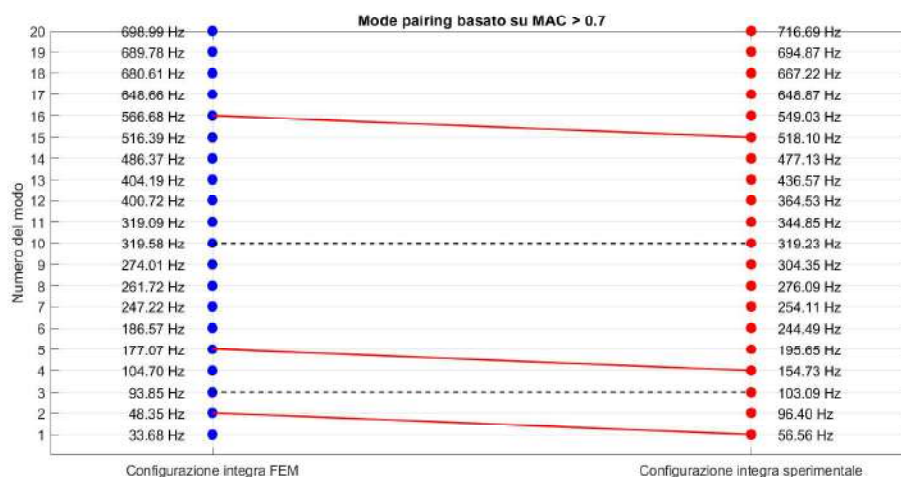


Figura 5.37: Grafico di mode pairing tra la struttura integra numerica e integra sperimentale

Il grafico di mode pairing, costruito considerando valori di correlazione MAC superiori a 0.7, consente di evidenziare in maniera più immediata le corrispondenze tra i modi numerici e sperimentali. Dall'analisi del grafico emerge che:

- i modi a bassa frequenza mostrano una corrispondenza meno evidente o assente, suggerendo difficoltà nell'eccitazione o identificazione sperimentale di alcune forme modali globali (in particolare il primo modo numerico)
- alcune coppie modali risultano associate ma con uno scostamento significativo in frequenza, evidenziando possibili fenomeni di riordinamento modale
- i modi a frequenza intermedia mostrano le corrispondenze più chiare, con valori di MAC elevati e associazioni più stabili
- nei modi ad alta frequenza si osserva nuovamente una maggiore dispersione, indicativa di una crescente sensibilità agli effetti locali, alle condizioni al contorno e alle approssimazioni del modello

In particolare, si osservano alcune associazioni tra modi numerici e sperimentali caratterizzate da differenze di frequenza non trascurabili (ad esempio nei primi modi e in alcuni modi intermedi), segno che la corrispondenza modale non avviene sempre in maniera uno a uno ma può coinvolgere fenomeni di accoppiamento o scambio tra modi vicini.

A completamento dell'analisi, sono state infine confrontate visivamente alcune forme modali significative, riportando sia le deformate ottenute dal modello numerico sia quelle ricavate sperimentalmente

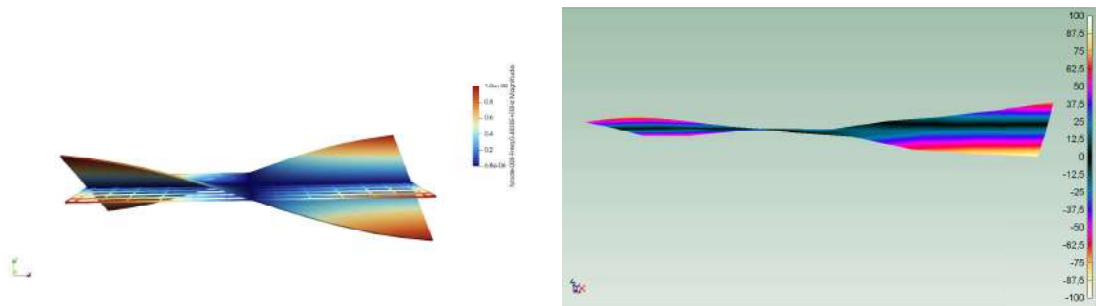


Figura 5.38: Pairing tra modo 2 integro numerico (48.35 Hz) e modo 1 integro sperimentale (56.56 Hz)

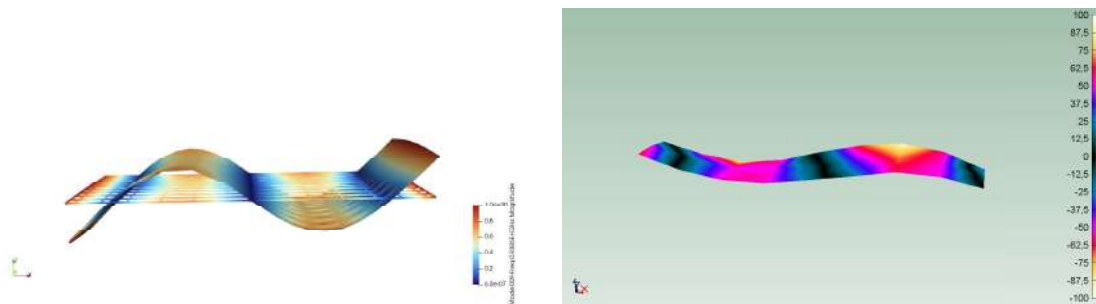


Figura 5.39: Pairing tra modo 3 integro numerico (93.85 Hz) e modo 3 integro sperimentale (103.09 Hz)

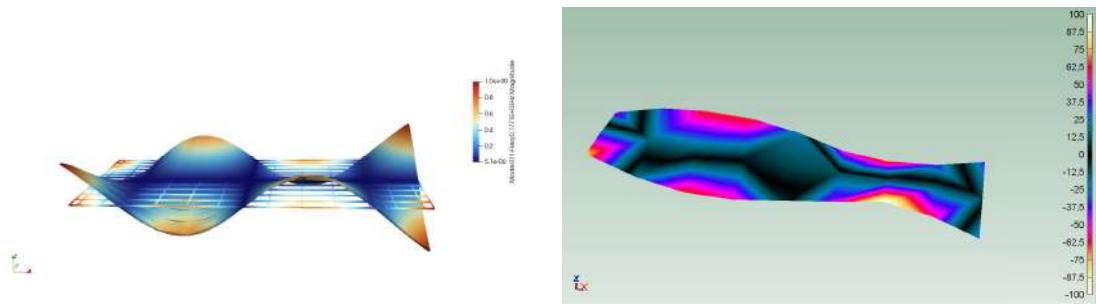


Figura 5.40: Pairing tra modo 5 integro numerico (177.07 Hz) e modo 4 integro sperimentale (154.73 Hz)

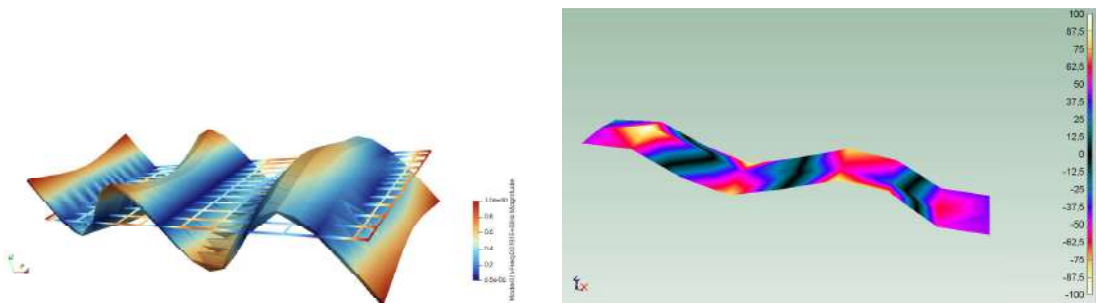


Figura 5.41: Pairing tra modo 10 integro numerico (319.58 Hz) e modo 10 integro sperimentale (319.23 Hz)

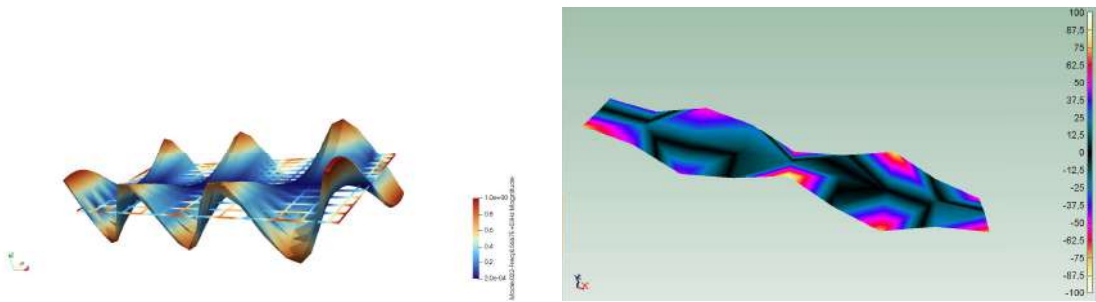


Figura 5.42: Pairing tra modo 16 integro numerico (566.68 Hz) e modo 15 integro sperimentale (518.10 Hz)

Nel complesso, il confronto conferma che il modello numerico è in grado di riprodurre le principali caratteristiche dinamiche della struttura, pur evidenziando le inevitabili discrepanze legate alla natura sperimentale dei dati e alle semplificazioni del modello.

Il confronto tra le matrici MAC ottenute dall'analisi numerica e quelle ricavate dall'analisi modale sperimentale consente di valutare la capacità del modello numerico di riprodurre il comportamento dinamico reale della struttura.

È tuttavia opportuno osservare che, nel confronto tra i risultati numerici e quelli sperimentali, il primo modo flessionale individuato nel modello numerico non risulta chiaramente identificabile nei risultati sperimentali. L'analisi modale sperimentale evidenzia infatti come primo modo significativo quello torsionale, corrispondente al secondo modo ottenuto nel modello numerico. Questa discrepanza può essere attribuita a diversi fattori tipici delle analisi modali sperimentali. In primo luogo, alcune forme modali possono risultare difficili da eccitare o da identificare qualora presentino ampiezze di deformazione ridotte nei punti di misura. Inoltre, nel caso di modi caratterizzati da frequenze molto basse, la loro individuazione può risultare più complessa a causa dei limiti strumentali del sistema di acquisizione e della presenza di rumore nelle regioni di frequenza prossime allo zero.

In particolare, sia nei risultati numerici sia in quelli sperimentali, il caso di danno localizzato in posizione centrale mostra una maggiore dispersione dei valori di MAC rispetto al caso di danno angolare. Questo comportamento evidenzia una maggiore interazione tra alcune forme modali e suggerisce la presenza di fenomeni di riordinamento modale o di accoppiamento tra modi con frequenze ravvicinate. L'analisi congiunta delle matrici MAC e delle variazioni delle frequenze naturali evidenzia inoltre che il confronto tra le frequenze della configurazione integra e di quella danneggiata è stato effettuato esclusivamente per le coppie modali caratterizzate da valori di MAC sufficientemente elevati ($MAC > 0.7$). Di conseguenza, il numero di modi confrontati nei grafici delle variazioni percentuali delle frequenze risulta inferiore rispetto al numero totale dei modi identificati, in particolare nei risultati sperimentali dove la correlazione modale può risultare più dispersa.

Nel complesso, il confronto evidenzia una buona coerenza tra i risultati numerici e sperimentali, confermando l'affidabilità del modello numerico nel descrivere le principali caratteristiche dinamiche della struttura.

5.2.4 Pannelli con danno doppio

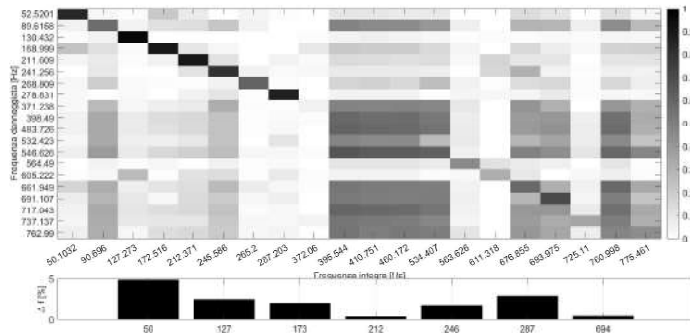


Figura 5.43: MAC calcolato tra il pannello intero e con danno doppio L=11 cm affiancato

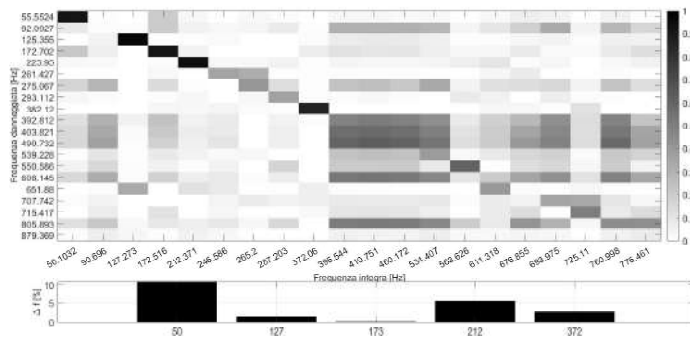


Figura 5.44: MAC calcolato tra il pannello intero e con danno doppio L=15x8 cm sovrapposto

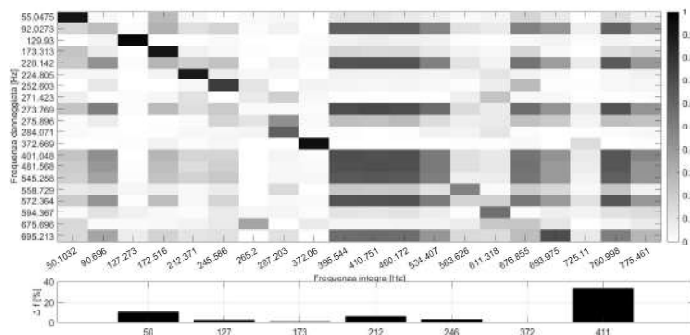


Figura 5.45: MAC calcolato tra il pannello intero e con danno doppio L=11 cm

L'analisi della matrice MAC (5.44) relativa al pannello con doppio danno affiancato evidenzia una correlazione complessivamente buona tra le forme modali della configurazione integra e quelle della configurazione danneggiata. I valori più elevati della matrice risultano infatti concentrati prevalentemente lungo la diagonale principale, indicando che la corrispondenza tra i modi della struttura integra e quelli della struttura danneggiata è generalmente ben conservata.

Per i modi a bassa frequenza la correlazione modale risulta particolarmente elevata, con valori di MAC prossimi all'unità, a conferma del fatto che la presenza del danno non altera in maniera significativa la morfologia globale delle prime forme modali. All'aumentare della frequenza si osserva una maggiore dispersione dei valori della matrice, accompagnata da correlazioni fuori diagonale più diffuse e da una progressiva riduzione dell'intensità lungo la diagonale principale.

Questo comportamento suggerisce che i modi di ordine superiore risultano maggiormente sensibili alla presenza del danneggiamento, poichè le relative deformazioni modali tendono a localizzarsi maggiormente nelle regioni interessate dalle discontinuità strutturali. Nonostante ciò, non si osservano valori fuori diagonale chiaramente dominanti tali da indicare un vero e proprio riordinamento modale.

Nel caso del pannello caratterizzato da un doppio danno disposto verticalmente, la matrice MAC(??) mostra ancora una volta una buona corrispondenza tra le forme modali della configurazione integra e quelle della configurazione danneggiata. La diagonale principale rimane infatti chiaramente riconoscibile, con valori di correlazione elevati per i primi modi di vibrazione.

Anche in questo caso i modi a frequenza più bassa risultano essere i meno influenzati dalla presenza del danno, mantenendo una forte similitudine con le corrispondenti forme modali della configurazione integra. Tuttavia, nella regione delle frequenze intermedie e più elevate si osserva una progressiva diminuzione della correlazione modale, accompagnata da una maggiore dispersione dei valori della matrice.

Questa distribuzione dei valori suggerisce che il danneggiamento influisce in maniera più evidente sui modi di ordine superiore, nei quali la deformazione modale può risultare maggiormente concentrata nelle aree interessate dal difetto. Nonostante la presenza di alcune correlazioni fuori diagonale, non emergono valori significativamente predominanti che possano indicare un chiaro fenomeno di scambio o riordinamento dei modi.

L'analisi delle variazioni percentuali delle frequenze naturali evidenzia inoltre che il confronto tra le frequenze della configurazione integra e di quella danneggiata è stato effettuato esclusivamente per le coppie modali caratterizzate da valori di MAC sufficientemente elevati ($MAC > 0.7$). Di conseguenza, il numero di modi confrontati nei grafici delle variazioni percentuali delle frequenze risulta inferiore rispetto al numero totale dei modi identificati. In questo caso si osservano alcune variazioni percentuali più marcate rispetto al caso precedente, in particolare per alcune frequenze appartenenti alla regione intermedia dello spettro.

La matrice MAC (5.45) relativa al pannello con doppio danno privo di una disposizione geometrica specifica evidenzia un comportamento differente rispetto ai casi precedenti. Pur rimanendo visibile la diagonale principale per i primi modi di vibrazione, la correlazione modale tende a ridursi in maniera più marcata nelle regioni di frequenza intermedia e alta.

In particolare, si osserva una maggiore diffusione di valori di correlazione fuori diagonale e una riduzione dell'intensità dei valori lungo la diagonale principale. Questo comportamento suggerisce che la presenza simultanea dei due danneggiamenti, combinata con la loro disposizione geometrica non regolare, introduce perturbazioni più significative nel campo modale della struttura.

Di conseguenza, le forme modali associate ai modi di ordine superiore risultano più sensibili alla presenza del danno, mostrando una minore somiglianza con quelle della configurazione integra. Tuttavia, anche in questo caso non si individuano valori fuori diagonale nettamente predominanti tali da indicare un chiaro fenomeno di mode swapping, ma piuttosto una generale riduzione della correlazione modale dovuta alla maggiore complessità della configurazione danneggiata.

Un aspetto particolarmente interessante emerge dall'analisi delle variazioni delle frequenze naturali nel caso del doppio danneggiamento privo di una disposizione geometrica regolare. In questa configurazione si osservano infatti scostamenti percentuali significativamente più elevati, soprattutto per i modi di ordine superiore. Questo comportamento suggerisce che la distribuzione non regolare dei difetti introduca una perturbazione più marcata nella distribuzione di rigidezza del pannello, influenzando in maniera più significativa le frequenze naturali rispetto alla morfologia globale delle forme modali, che rimane invece complessivamente simile a quella della configurazione integra.

Nel complesso, il confronto tra le matrici MAC relative alle tre configurazioni di doppio danneggiamento evidenzia come la disposizione geometrica dei difetti possa influenzare in modo significativo la risposta modale del pannello.

Nel caso del doppio danno affiancato e di quello sovrapposto la diagonale principale della matrice rimane generalmente ben definita, indicando una buona corrispondenza tra i modi della configurazione integra e quelli della configurazione danneggiata. Le principali differenze emergono soprattutto nei modi di ordine superiore, dove si osserva una maggiore dispersione dei valori di correlazione.

Diversamente, nel caso del doppio danno privo di una disposizione geometrica regolare, la matrice MAC mostra una dispersione più marcata dei valori di correlazione e una riduzione più evidente della corrispondenza modale nelle regioni di frequenza intermedia e alta. Questo comportamento suggerisce che una distribuzione non regolare dei difetti possa introdurre perturbazioni più significative nella distribuzione di rigidezza della struttura, influenzando in misura maggiore la risposta modale globale.

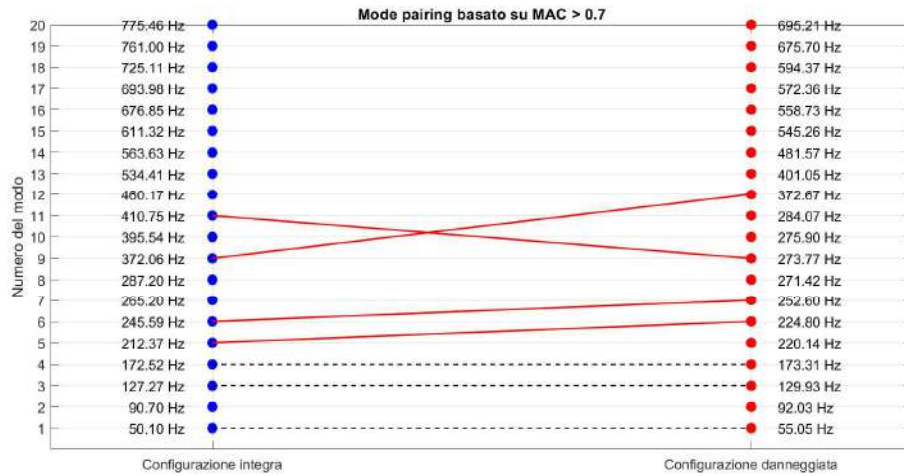


Figura 5.46: Grafico di mode pairing tra la struttura integra e la configurazione danneggiata con doppio danno

Per interpretare correttamente queste corrispondenze è utile analizzare direttamente le forme modali associate ai modi coinvolti, come mostrato nelle figure sottoriportate. Il confronto tra le deformazioni modali della struttura integra e di quella danneggiata evidenzia come le modalità coinvolte presentino distribuzioni di spostamento molto simili, pur comparando in posizioni differenti nell'ordinamento delle frequenze.

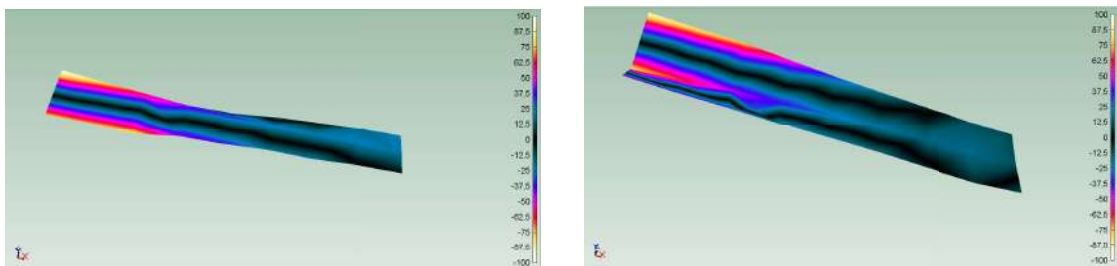


Figura 5.47: Pairing tra modo 5 integro (212.37 Hz) e modo 6 con doppio danno (224.80 Hz)

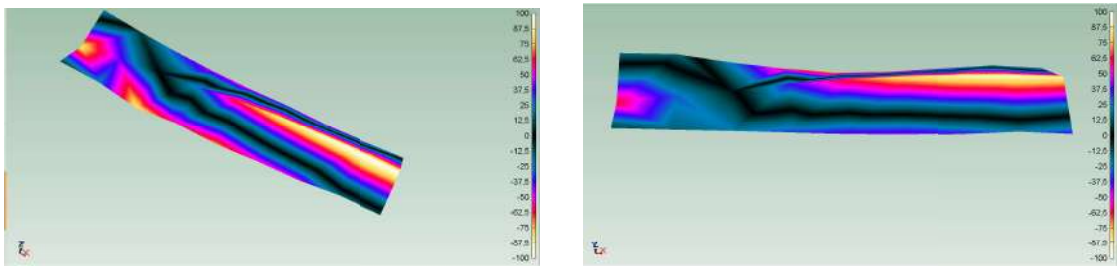


Figura 5.48: Pairing tra modo 6 intero (245.59 Hz) e modo 7 con doppio danno (252.60 Hz)

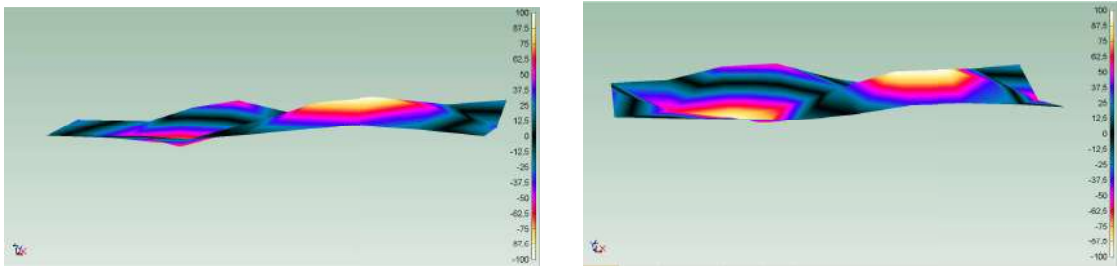


Figura 5.49: Pairing tra modo 9 intero (372.06 Hz) e modo 12 con doppio danno (372.67 Hz)

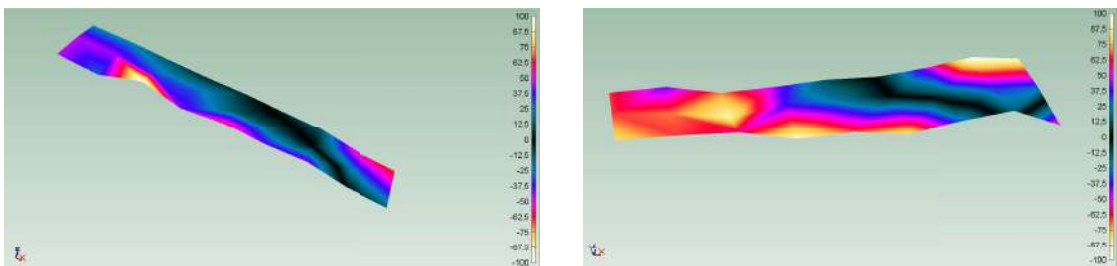


Figura 5.50: Pairing tra modo 11 intero (410.75 Hz) e modo 9 con doppio danno (273.77 Hz)

5.2.5 Pannello con taglio passante

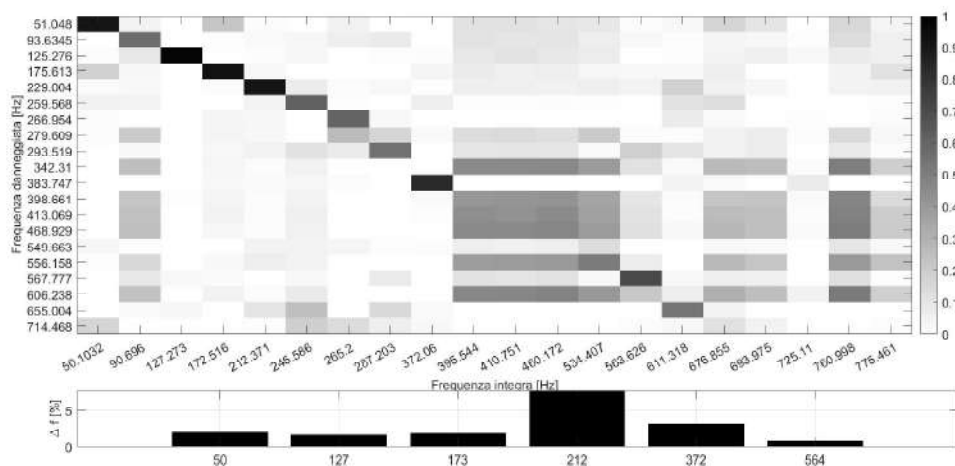


Figura 5.51: MAC calcolato tra il pannello integro e con taglio passante

La matrice MAC (5.51) relativa al pannello caratterizzato da un taglio passante localizzato in prossimità di un angolo mostra una buona correlazione tra le forme modali della configurazione integra e quelle della configurazione danneggiata per i primi modi di vibrazione. In particolare, nella regione delle basse frequenze la diagonale principale della matrice risulta ben definita e caratterizzata da valori di MAC elevati, indicando che la presenza del difetto non altera in maniera significativa la morfologia globale delle prime forme modali della struttura.

All'aumentare della frequenza, tuttavia, la matrice evidenzia una progressiva riduzione della correlazione modale. Nella regione delle frequenze intermedie e alte, in particolare tra circa 380 Hz e 460 Hz, si osserva infatti una maggiore dispersione dei valori di MAC e la comparsa di una banda di correlazione più diffusa che coinvolge più modi contemporaneamente. Questo comportamento suggerisce che i modi di ordine superiore risultano maggiormente influenzati dalla presenza del taglio passante, probabilmente a causa della maggiore sensibilità di tali modi alle variazioni locali di rigidezza introdotte dal danneggiamento.

La posizione del taglio, situata in prossimità di un angolo del pannello, contribuisce verosimilmente a produrre una perturbazione non uniforme del campo modale della struttura. Di conseguenza, alcune forme modali mostrano una minore corrispondenza con quelle della configurazione integra, con una distribuzione dei valori della matrice MAC più diffusa rispetto ai casi caratterizzati da danneggiamenti meno localizzati. Nonostante ciò, la diagonale principale rimane comunque riconoscibile per diversi modi, indicando che la struttura mantiene nel complesso una buona corrispondenza modale con la configurazione non danneggiata.

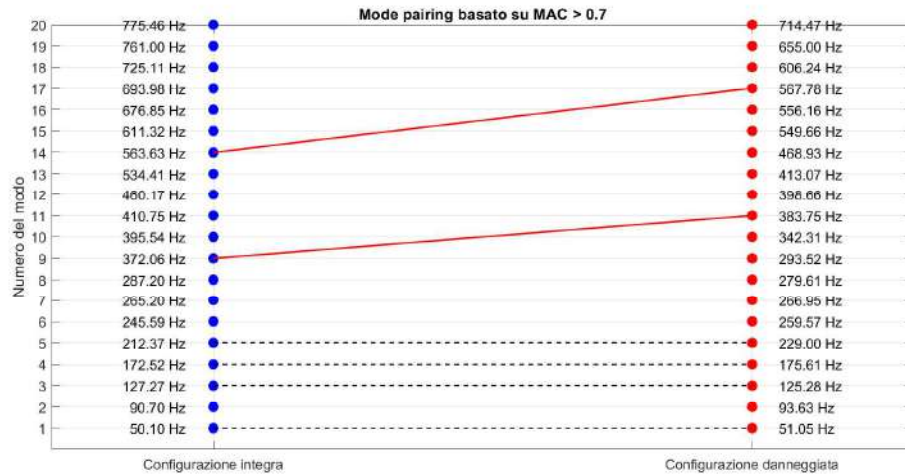


Figura 5.52: Grafico di mode pairing tra la struttura integra e la configurazione danneggiata con taglio passante

Il grafico di mode pairing (5.52) mostra il confronto tra le frequenze naturali della struttura integra e quelle della configurazione danneggiata per le coppie modali caratterizzate da valori di MAC sufficientemente elevati. In generale si osservano variazioni percentuali contenute per la maggior parte dei modi, invece alcune coppie modali mostrano scostamenti più marcati, con variazioni che raggiungono valori dell'ordine del 6-8%

Per interpretare correttamente queste corrispondenze è utile analizzare direttamente le forme modali associate ai modi coinvolti, come mostrato nelle figure sottoriportate. Il confronto tra le deformazioni modali della struttura integra e di quella danneggiata evidenzia come le modalità coinvolte presentino distribuzioni di spostamento molto simili, pur comparando in posizioni differenti nell'ordinamento delle frequenze.

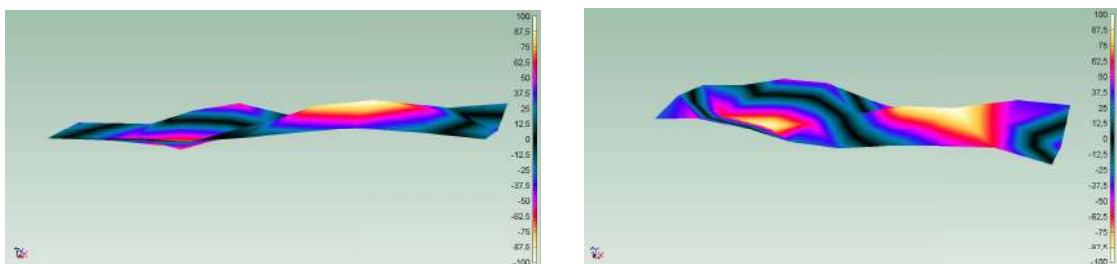


Figura 5.53: Pairing tra modo 9 integro (372.06 Hz) e modo 11 con taglio passante (383.75 Hz)

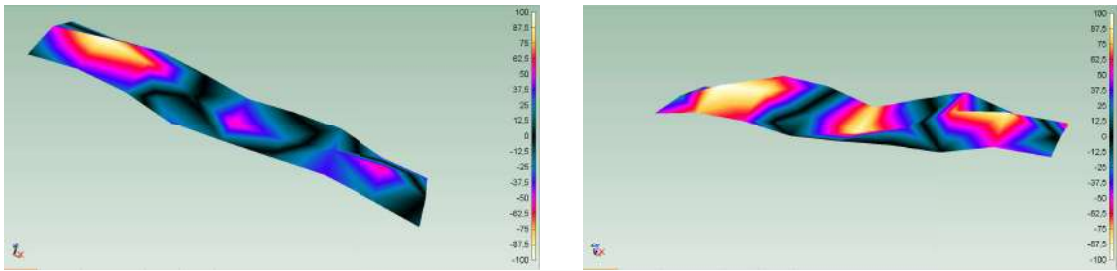


Figura 5.54: Pairing tra modo 14 intero (563.63 Hz) e modo 17 con taglio passante (567.78 Hz)

Dall'analisi complessiva delle matrici MAC sperimentali emerge che la correlazione modale tra configurazione integra e danneggiata risulta generalmente elevata per i modi a bassa frequenza, invece tende a ridursi progressivamente nelle regioni di frequenza intermedia e alta. Questa tendenza risulta comune a tutte le configurazioni analizzate e suggerisce che, oltre agli effetti del danneggiamento, possano contribuire anche fattori legati alla maggiore complessità delle forme modali di ordine superiore e alle difficoltà di identificazione sperimentale associate a tali modi. Nonostante ciò, le variazioni osservate nelle frequenze naturali risultano comunque significative, indicando una buona sensibilità dei parametri dinamici globali alla presenza del danneggiamento.

Capitolo 6

Conclusioni

Il presente lavoro ha avuto come obiettivo principale l'analisi del comportamento dinamico di pannelli compositi mediante un approccio integrato numerico e sperimentale, con particolare attenzione alla valutazione degli effetti del danneggiamento sulle proprietà modali della struttura. A tal fine, sono state investigate diverse configurazioni, comprendenti il pannello integro, pannelli con danno localizzato in differenti posizioni e con diversa estensione, nonché casi più complessi caratterizzati dalla presenza di danni multipli e di un taglio passante.

L'analisi numerica, sviluppata mediante modellazione agli elementi finiti, ha consentito di determinare le frequenze naturali e le forme modali della struttura nelle varie configurazioni considerate. I risultati ottenuti mostrano come il danneggiamento introduca variazioni nelle proprietà dinamiche del pannello, modificando la distribuzione della rigidità e, conseguentemente, la risposta modale della struttura. In particolare, è stato osservato che i modi di vibrazione a bassa frequenza risultano generalmente poco influenzati dalla presenza del danno, in quanto associati a deformazioni globali della struttura. Al contrario, i modi di ordine superiore evidenziano una maggiore sensibilità, perchè caratterizzati da deformazioni più localizzate e quindi maggiormente influenzati da variazioni locali di rigidità.

L'analisi dell'effetto della posizione del danno ha evidenziato come un difetto localizzato in prossimità delle zone angolari del pannello produca variazioni relativamente contenute nelle frequenze naturali, invece un danneggiamento in posizione centrale comporti effetti più significativi. Tale comportamento è riconducibile alla distribuzione spaziale delle deformazioni modali: molte forme modali presentano infatti massimi di deformazione nelle regioni centrali del pannello, rendendo tali zone particolarmente sensibili alla presenza di difetti. Di conseguenza, il danneggiamento in posizione centrale determina una maggiore perturbazione del campo di deformazione e una più marcata modifica delle caratteristiche dinamiche.

Parallelamente, l'analisi dell'effetto dell'estensione del danno ha mostrato come l'incremento della dimensione del difetto comporti una progressiva variazione delle

frequenze naturali, con effetti più evidenti nei modi di ordine superiore. Questo risultato è coerente con la riduzione di rigidità introdotta dal danneggiamento, che diventa più significativa all'aumentare della sua estensione, influenzando in maniera più marcata le modalità di vibrazione localizzate.

Nei casi più complessi, quali il danneggiamento doppio e il taglio passante, la risposta dinamica della struttura risulta ulteriormente alterata. In particolare, la presenza di più discontinuità introduce effetti di interazione tra le zone danneggiate, con conseguente modifica della distribuzione delle frequenze naturali e maggiore difficoltà nell'identificazione delle corrispondenze modali.

L'attività sperimentale, condotta mediante prove di risposta in frequenza con eccitazione tramite shaker, ha permesso di ottenere le funzioni di risposta in frequenza (FRF) della struttura e di identificare le frequenze naturali a partire dai picchi di risonanza. I risultati sperimentali mostrano una buona coerenza nei modi a bassa e media frequenza, invece evidenziano una maggiore dispersione nelle regioni ad alta frequenza. Questo comportamento è attribuibile a diversi fattori, tra cui la presenza di rumore di misura, le limitazioni strumentali e la maggiore densità modale alle alte frequenze, che rende più complessa l'identificazione e la separazione dei modi.

Un aspetto fondamentale del lavoro è rappresentato dal confronto tra i risultati numerici e quelli sperimentali, effettuato mediante l'utilizzo del criterio MAC (Modal Assurance Criterion). Al fine di garantire un confronto coerente, sono stati selezionati gli spostamenti fuori piano di nodi del modello numerico in corrispondenza delle posizioni degli accelerometri sperimentali, permettendo così un confronto diretto tra le forme modali delle due configurazioni.

Le matrici MAC ottenute evidenziano una buona correlazione complessiva tra i risultati numerici e sperimentali, con valori elevati distribuiti prevalentemente lungo la diagonale principale. Tuttavia, si osserva una maggiore dispersione nei risultati sperimentali, fenomeno tipico delle analisi modali sperimentali e riconducibile alle incertezze nella misura e nell'identificazione modale. Il grafico di mode pairing ha inoltre permesso di evidenziare in maniera chiara le corrispondenze tra i modi, mostrando come queste risultino più stabili per le frequenze intermedie, invece siano meno definite per i modi a bassa frequenza e più dispersive per quelli ad alta frequenza.

Un risultato particolarmente significativo riguarda la mancata identificazione del primo modo flessionale nei dati sperimentali, a favore del modo torsionale successivo. Questo fenomeno può essere attribuito alla difficoltà di eccitare e misurare alcune forme modali, in particolare quando presentano ampiezze ridotte nei punti di misura o quando ricadono in regioni di frequenza in cui il rapporto segnale-rumore è sfavorevole.

L'analisi congiunta delle variazioni delle frequenze naturali e delle matrici MAC ha inoltre evidenziato l'importanza di considerare esclusivamente le coppie modali

caratterizzate da elevati valori di correlazione ($MAC > 0.7$) per effettuare confronti significativi. Questo approccio consente di evitare associazioni non fisicamente significative e di ottenere una valutazione più affidabile delle variazioni indotte dal danneggiamento.

Nel complesso, il lavoro ha dimostrato come l'analisi modale rappresenti uno strumento efficace per la caratterizzazione del comportamento dinamico di strutture composite e per la rilevazione degli effetti del danneggiamento. L'integrazione tra modellazione numerica e analisi sperimentale ha permesso di ottenere una visione completa del fenomeno, evidenziando sia i punti di forza sia i limiti di ciascun approccio.

In prospettiva, possibili sviluppi futuri potrebbero includere l'adozione di tecniche avanzate di identificazione modale, l'impiego di modelli numerici più sofisticati in grado di rappresentare in maniera più accurata i meccanismi di danneggiamento, nonché l'estensione dell'analisi a strutture di maggiore complessità e a condizioni operative più realistiche. Ulteriori miglioramenti potrebbero essere ottenuti anche attraverso un incremento della densità dei punti di misura sperimentali e l'utilizzo di tecniche di riduzione del rumore, al fine di migliorare la qualità dei dati e la precisione dell'identificazione modale.

In conclusione, i risultati ottenuti confermano la validità dell'approccio adottato e forniscono indicazioni utili per l'applicazione di tecniche di analisi modale nel contesto della diagnostica strutturale e del monitoraggio dell'integrità di strutture aeronautiche.

Appendice A

Matrice di rigidità

Le componenti della matrice di rigidità $\mathbf{K}^{ij\tau s}$ si possono scrivere come:

$$K_{xx}^{ij\tau s} = \tilde{C}_{22} \int_{\Omega} F_{\tau,x} F_{s,x} d\Omega \int_l N_i N_j dy + \tilde{C}_{66} \int_{\Omega} F_{\tau,z} F_{s,z} d\Omega \int_l N_i N_j dy + \\ + \tilde{C}_{44} \int_{\Omega} F_{\tau} F_s d\Omega \int_l N_{i,y} N_{j,y} dy$$

$$K_{xy}^{ij\tau s} = \tilde{C}_{23} \int_{\Omega} F_{\tau,x} F_s d\Omega \int_l N_i N_{j,y} dy + \tilde{C}_{44} \int_{\Omega} F_{\tau} F_{s,x} d\Omega \int_l N_{i,y} N_j dy$$

$$K_{xz}^{ij\tau s} = \tilde{C}_{12} \int_{\Omega} F_{\tau,x} F_{s,z} d\Omega \int_l N_i N_j dy + \tilde{C}_{66} \int_{\Omega} F_{\tau,z} F_{s,x} d\Omega \int_l N_i N_j dy$$

$$K_{yx}^{ij\tau s} = \tilde{C}_{44} \int_{\Omega} F_{\tau,x} F_s d\Omega \int_l N_i N_{j,y} dy + \tilde{C}_{23} \int_{\Omega} F_{\tau} F_{s,x} d\Omega \int_l N_{i,y} N_j dy$$

$$K_{yy}^{ij\tau s} = \tilde{C}_{55} \int_{\Omega} F_{\tau,z} F_{s,z} d\Omega \int_l N_i N_j dy + \tilde{C}_{44} \int_{\Omega} F_{\tau,x} F_{s,x} d\Omega \int_l N_i N_j dy + \\ + \tilde{C}_{33} \int_{\Omega} F_{\tau} F_s d\Omega \int_l N_{i,y} N_{j,y} dy$$

$$K_{yz}^{ij\tau s} = \tilde{C}_{55} \int_{\Omega} F_{\tau,z} F_s d\Omega \int_l N_i N_{j,y} dy + \tilde{C}_{13} \int_{\Omega} F_{\tau} F_{s,z} d\Omega \int_l N_{i,y} N_j dy$$

$$K_{zx}^{ij\tau s} = \tilde{C}_{12} \int_{\Omega} F_{\tau,z} F_{s,x} d\Omega \int_l N_i N_j dy + \tilde{C}_{66} \int_{\Omega} F_{\tau,x} F_{s,z} d\Omega \int_l N_i N_j dy$$

$$K_{zy}^{ij\tau s} = \tilde{C}_{13} \int_{\Omega} F_{\tau,z} F_s d\Omega \int_l N_i N_{j,y} dy + \tilde{C}_{55} \int_{\Omega} F_{\tau} F_{s,z} d\Omega \int_l N_{i,y} N_j dy$$

$$K_{zz}^{ij\tau s} = \tilde{C}_{11} \int_{\Omega} F_{\tau,z} F_{s,z} d\Omega \int_l N_i N_j dy + \tilde{C}_{66} \int_{\Omega} F_{\tau,x} F_{s,x} d\Omega \int_l N_i N_j dy + \\ + \tilde{C}_{55} \int_{\Omega} F_{\tau} F_s d\Omega \int_l N_{i,y} N_{j,y} dy$$

Appendice B

Forme modali

Nel seguito sono presentate le forme modali relative ai diversi casi studiati nell'ambito dell'analisi numerica

B.1 Pannello integro

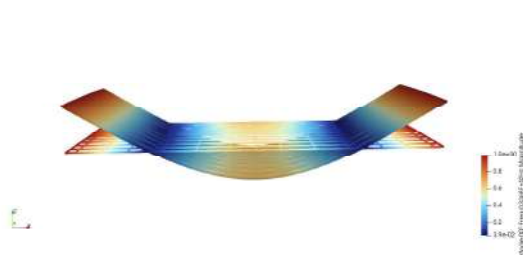


Figura B.1: Modo 1, 33.676 Hz

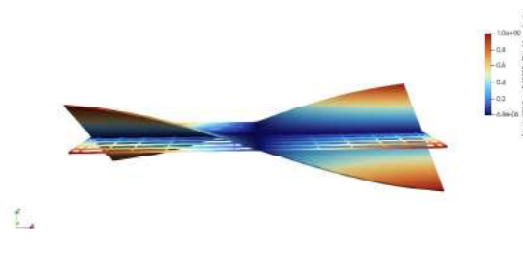


Figura B.2: Modo 2, 48.348 Hz

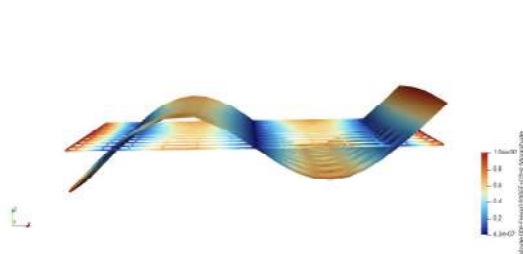


Figura B.3: Modo 3, 93.853 Hz

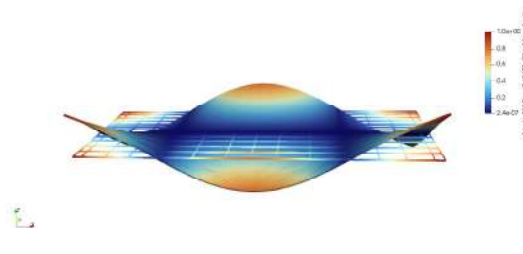


Figura B.4: Modo 4, 104.699 Hz

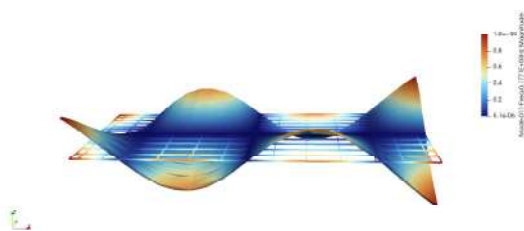


Figura B.5: Modo 5, 177.074 Hz

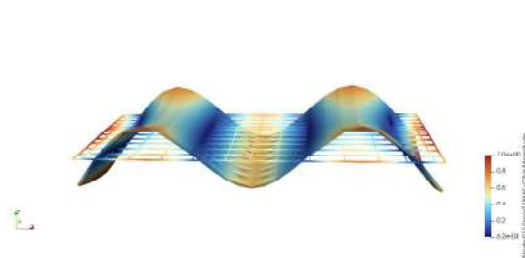


Figura B.6: Modo 6, 186.572 Hz

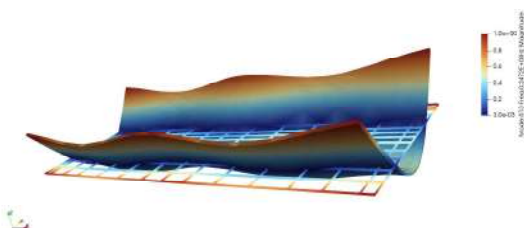


Figura B.7: Modo 7, 247.218 Hz

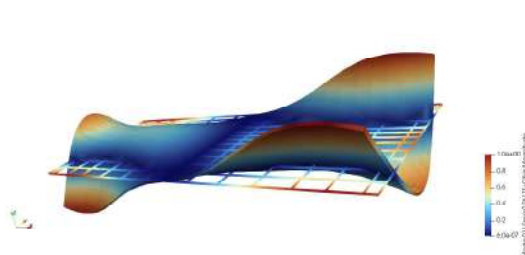


Figura B.8: Modo 8, 261.715 Hz

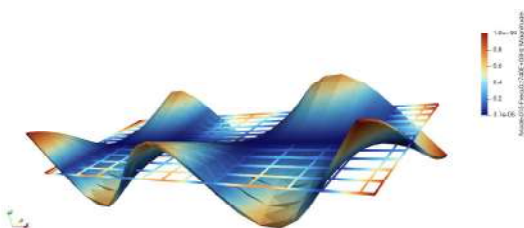


Figura B.9: Modo 9, 274.007 Hz

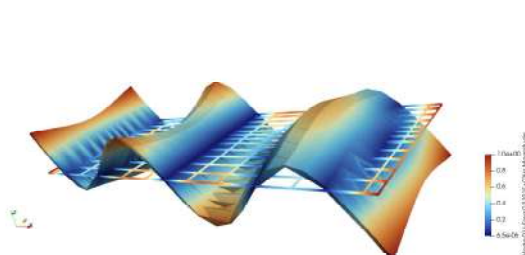


Figura B.10: Modo 10, 319.091 Hz

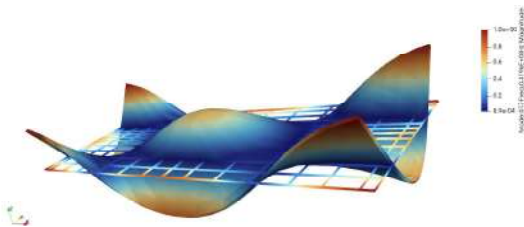


Figura B.11: Modo 11, 319.582 Hz

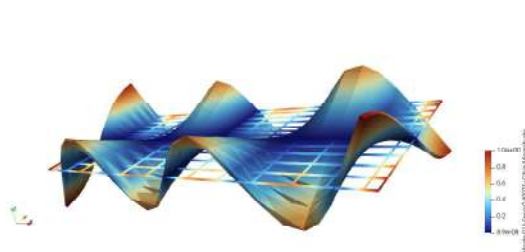


Figura B.12: Modo 12, 400.715 Hz

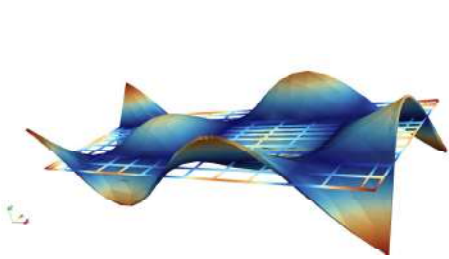


Figura B.13: Modo 13, 404.193Hz

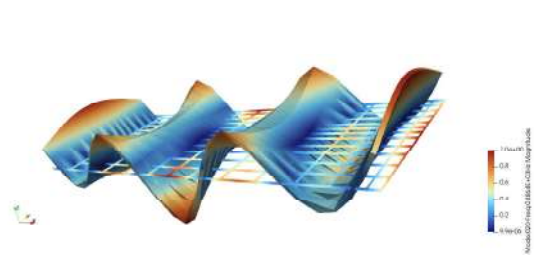


Figura B.14: Modo 14, 486.365 Hz



Figura B.15: Modo 15, 516.385 Hz

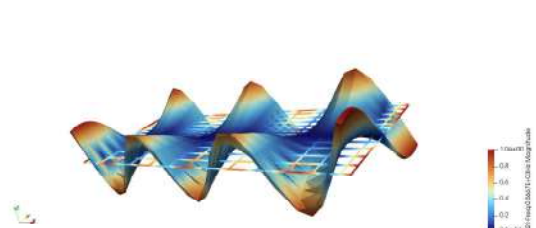


Figura B.16: Modo 16, 566.676 Hz

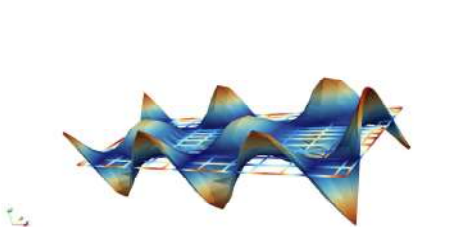


Figura B.17: Modo 17, 648.664 Hz

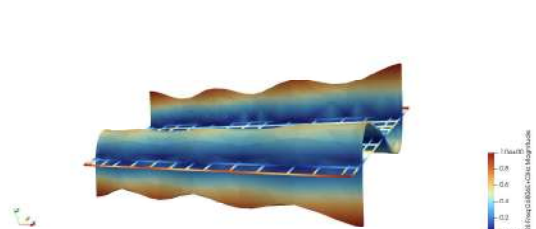


Figura B.18: Modo 18, 680.605 Hz

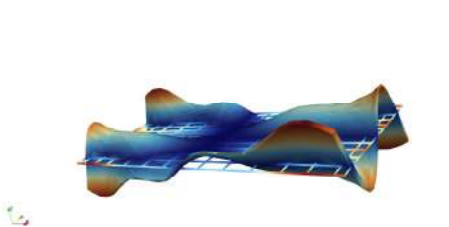


Figura B.19: Modo 19, 689.776 Hz

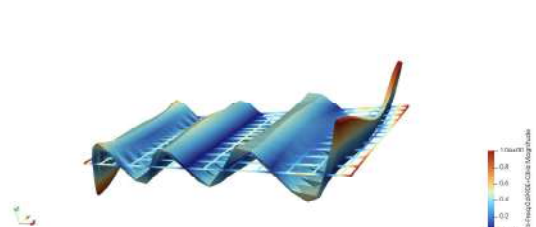


Figura B.20: Modo 20, 698.994 Hz

B.2 Pannello con danno L=11 cm in posizione 1

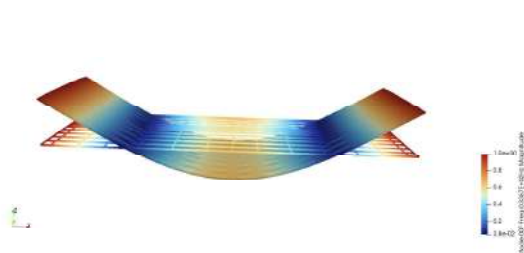


Figura B.21: Modo 1, 33.666 Hz

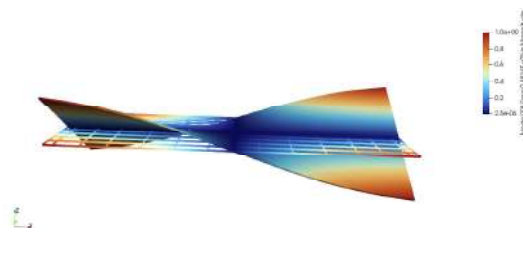


Figura B.22: Modo 2, 48.339 Hz

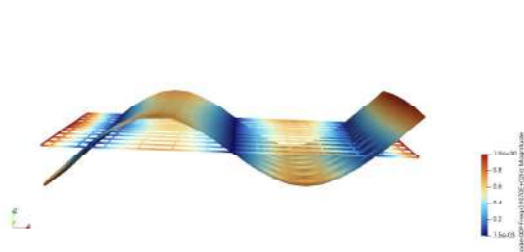


Figura B.23: Modo 3, 93.696 Hz

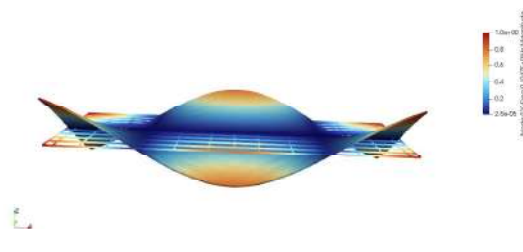


Figura B.24: Modo 4, 104.667 Hz

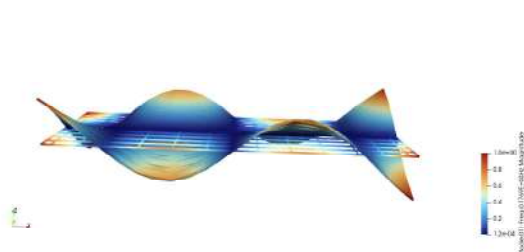


Figura B.25: Modo 5, 176.877 Hz

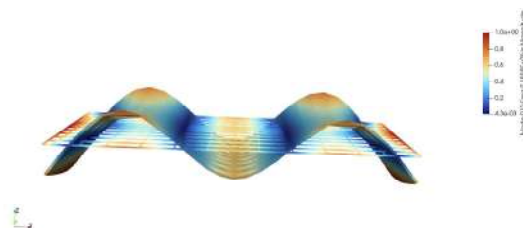


Figura B.26: Modo 6, 185.827 Hz

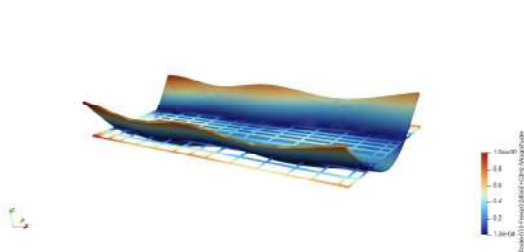


Figura B.27: Modo 7, 245.612 Hz

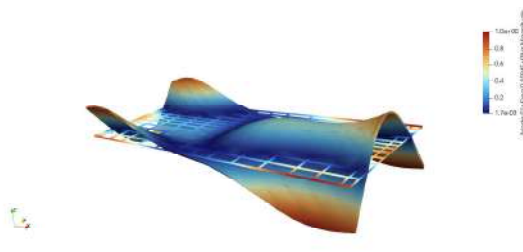


Figura B.28: Modo 8, 259.409 Hz

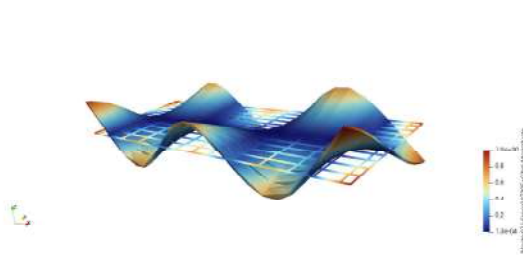


Figura B.29: Modo 9, 272.978 Hz

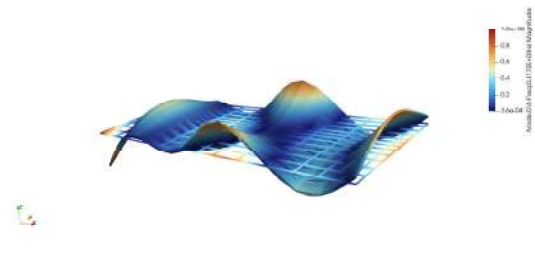


Figura B.30: Modo 10, 316.960 Hz

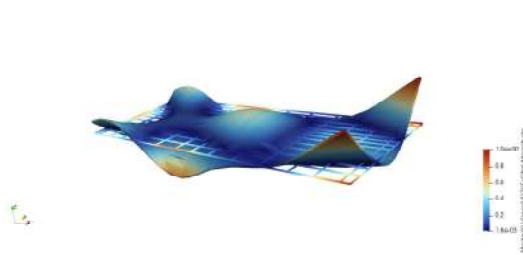


Figura B.31: Modo 11, 317.577 Hz

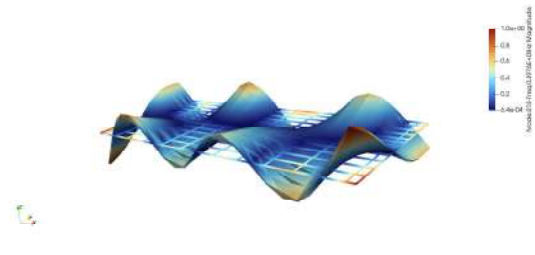


Figura B.32: Modo 12, 397.648 Hz

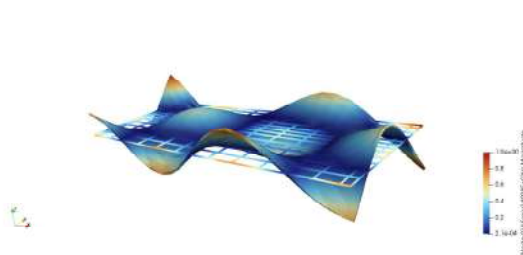


Figura B.33: Modo 13, 402.768 Hz

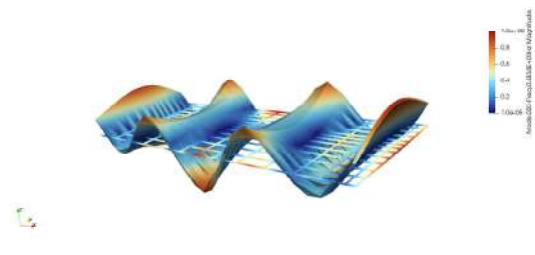


Figura B.34: Modo 14, 483.391 Hz

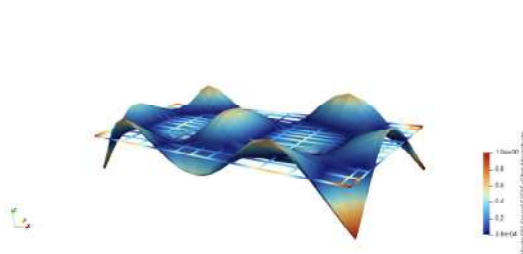


Figura B.35: Modo 15, 515.215 Hz

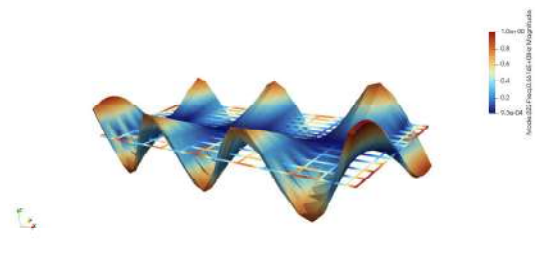


Figura B.36: Modo 16, 561.586 Hz

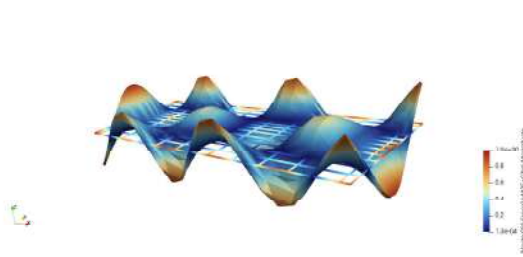


Figura B.37: Modo 17, 644.342 Hz

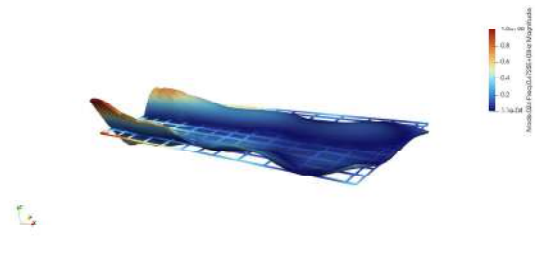


Figura B.38: Modo 18, 672.475 Hz

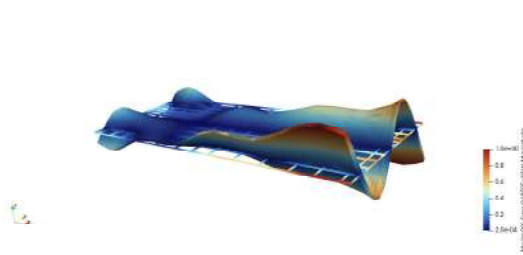


Figura B.39: Modo 19, 685.031 Hz

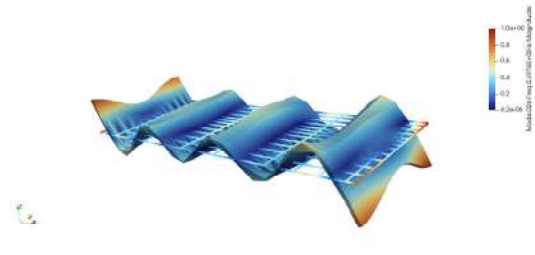


Figura B.40: Modo 20, 697.579 Hz

B.3 Pannello con danno $L=15.5$ cm in posizione 1

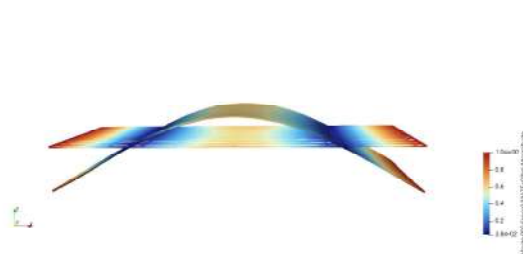


Figura B.41: Modo 1, 33.668 Hz

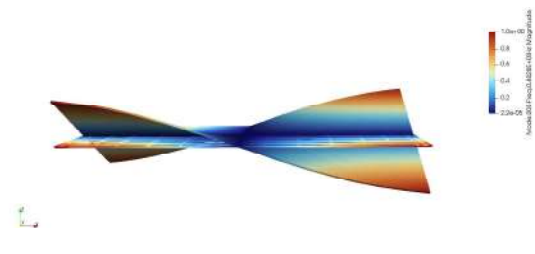


Figura B.42: Modo 2, 48.281 Hz

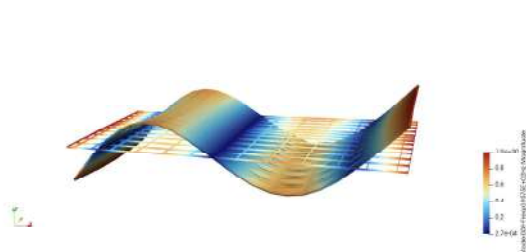


Figura B.43: Modo 3, 93.752 Hz

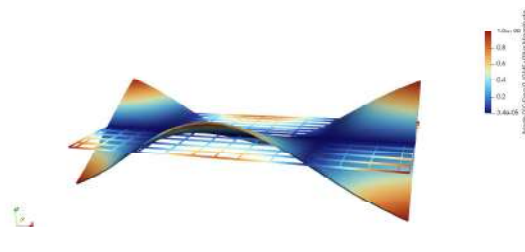


Figura B.44: Modo 4, 104.436 Hz

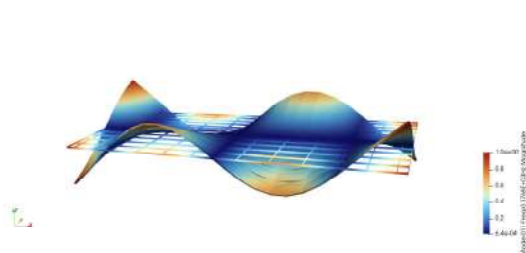


Figura B.45: Modo 5, 176.750 Hz

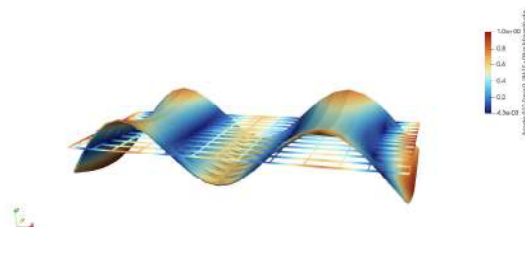


Figura B.46: Modo 6, 186.104 Hz

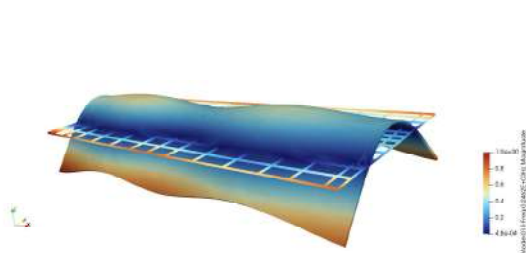


Figura B.47: Modo 7, 246.1543 Hz

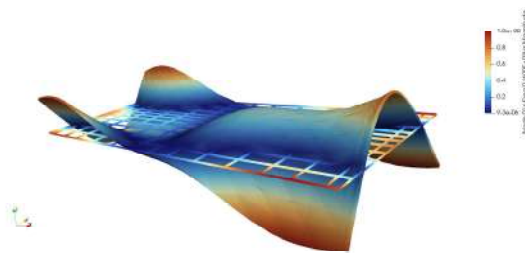


Figura B.48: Modo 8, 259.983 Hz

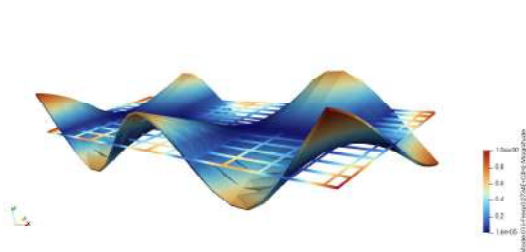


Figura B.49: Modo 9, 273.442 Hz

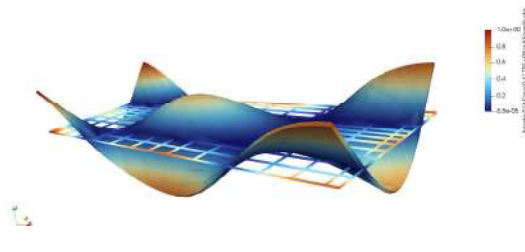


Figura B.50: Modo 10, 317.501 Hz

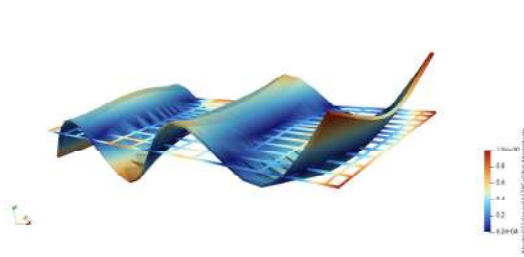


Figura B.51: Modo 11, 317.809 Hz

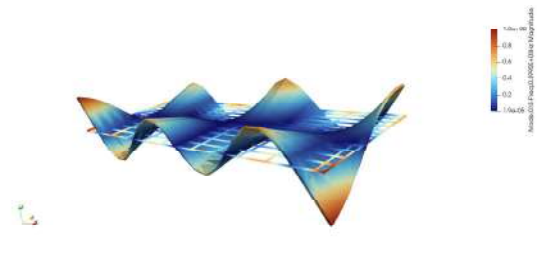


Figura B.52: Modo 12, 398.955 Hz



Figura B.53: Modo 13, 402.407 Hz

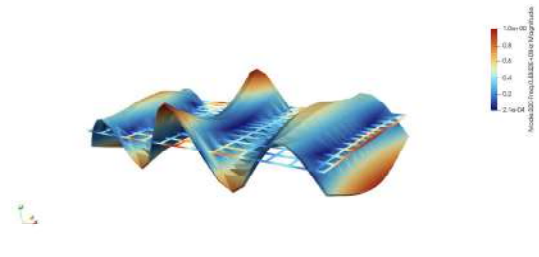


Figura B.54: Modo 14, 484.180 Hz

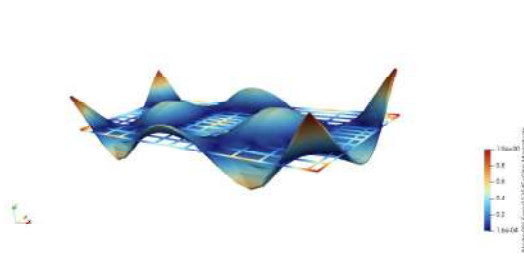


Figura B.55: Modo 15, 515.367 Hz

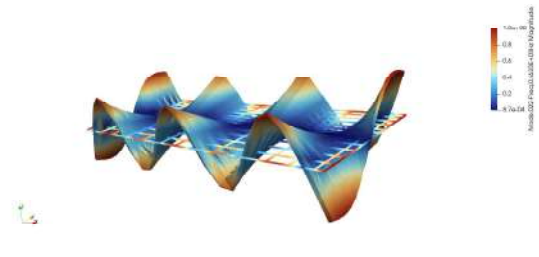


Figura B.56: Modo 16, 563.300 Hz

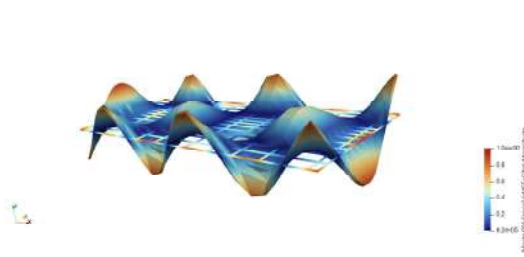


Figura B.57: Modo 17, 644.484 Hz

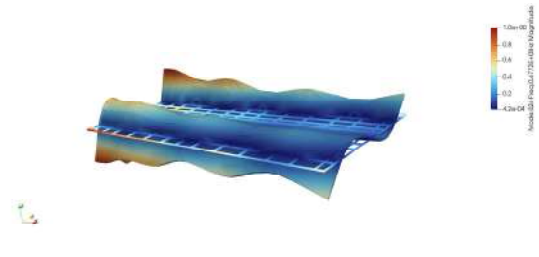


Figura B.58: Modo 18, 677.204 Hz

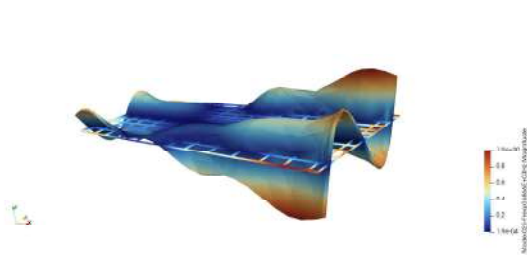


Figura B.59: Modo 19, 686.566 Hz

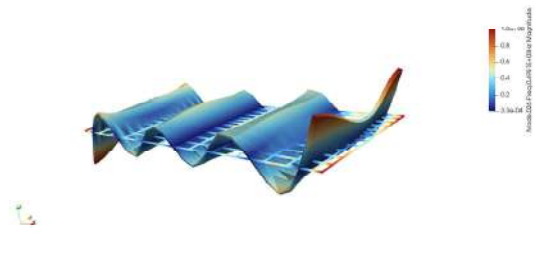


Figura B.60: Modo 20, 698.122 Hz

B.4 Pannello con danno $L=19$ cm in posizione 1

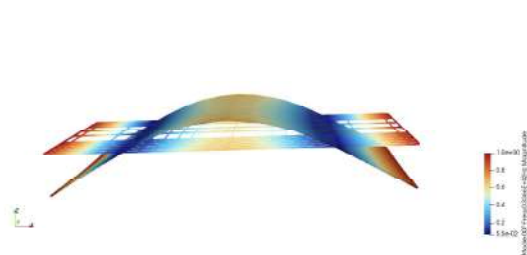


Figura B.61: Modo 1, 33.659 Hz

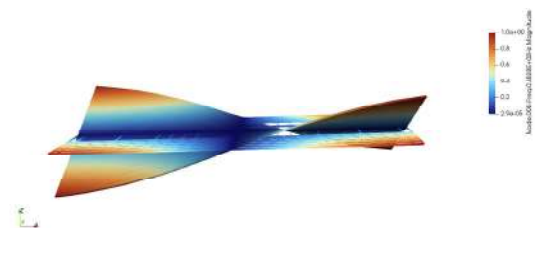


Figura B.62: Modo 2, 48.283 Hz

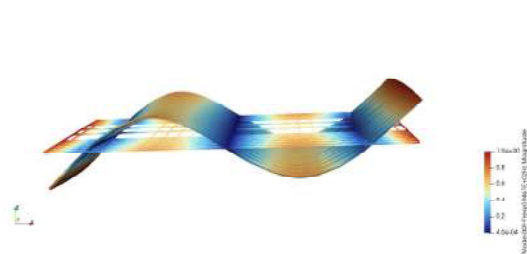


Figura B.63: Modo 3, 94.605 Hz

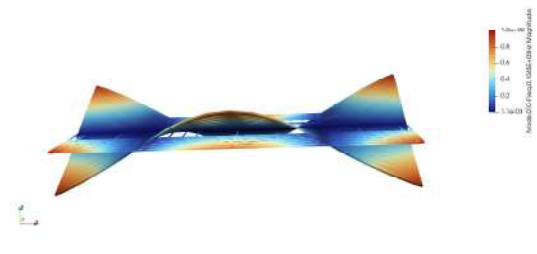


Figura B.64: Modo 4, 104.542 Hz

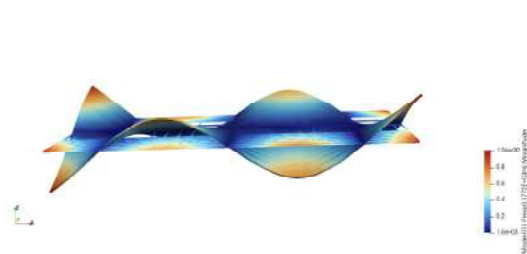


Figura B.65: Modo 5, 177.159 Hz

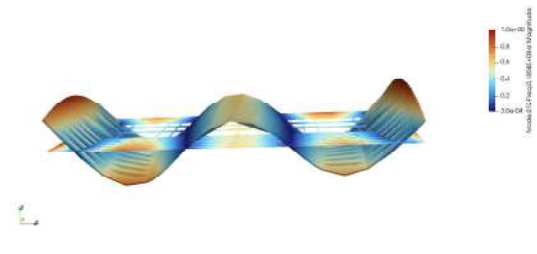


Figura B.66: Modo 6, 185.780 Hz



Figura B.67: Modo 7, 240.702 Hz

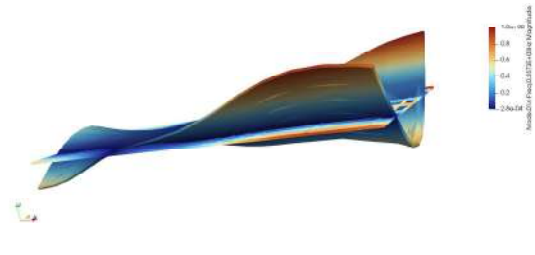


Figura B.68: Modo 8, 257.318 Hz

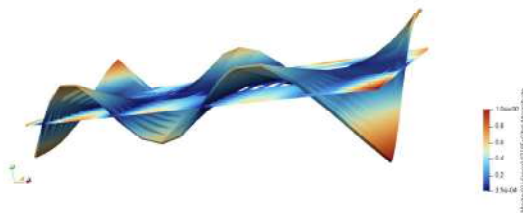


Figura B.69: Modo 9, 271.851 Hz

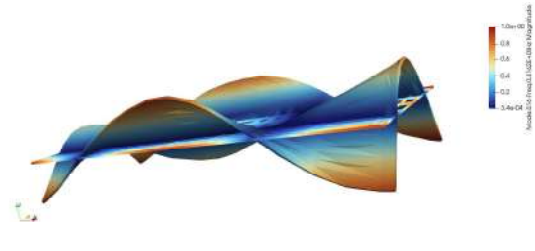


Figura B.70: Modo 10, 316.247 Hz

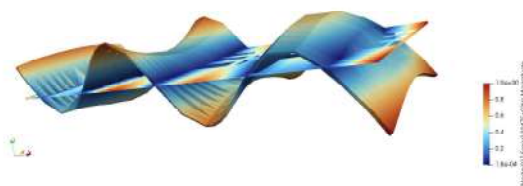


Figura B.71: Modo 11, 324.680 Hz

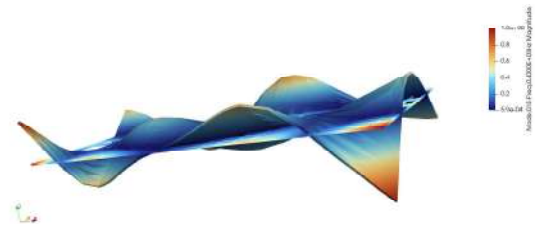


Figura B.72: Modo 12, 400.013 Hz

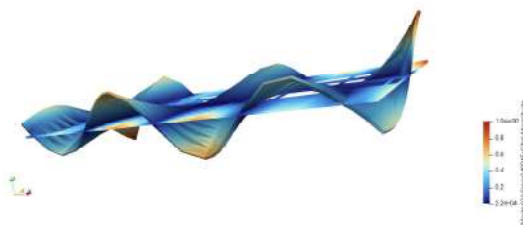


Figura B.73: Modo 13, 402.360 Hz

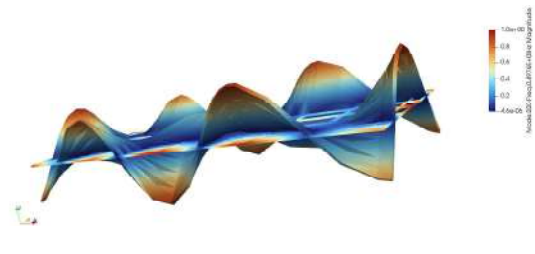


Figura B.74: Modo 14, 497.639 Hz

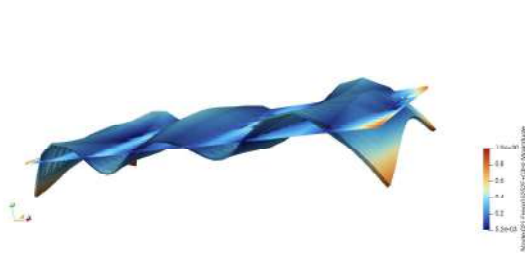


Figura B.75: Modo 15, 525.156 Hz

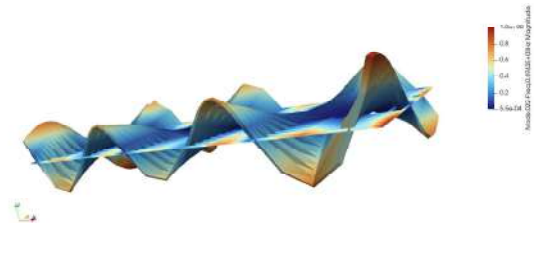


Figura B.76: Modo 16, 594.257 Hz

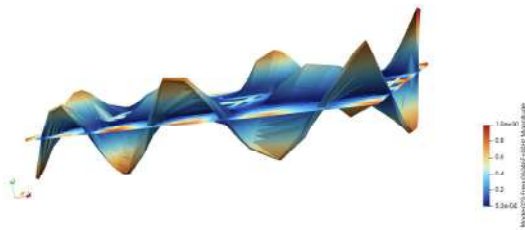


Figura B.77: Modo 17, 634.600 Hz



Figura B.78: Modo 18, 666.471 Hz

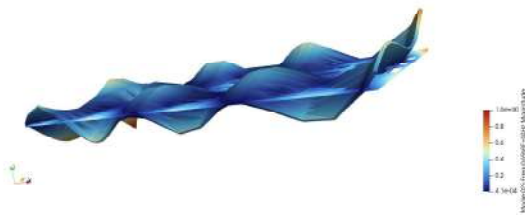


Figura B.79: Modo 19, 696.838 Hz

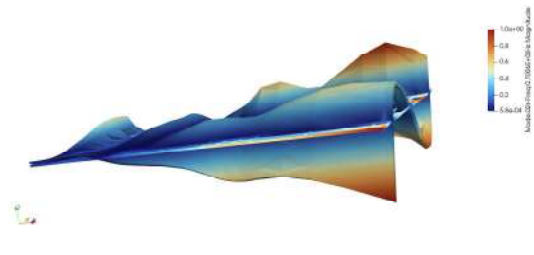


Figura B.80: Modo 20, 700.623 Hz

B.5 Pannello con danno L=11 cm in posizione 2

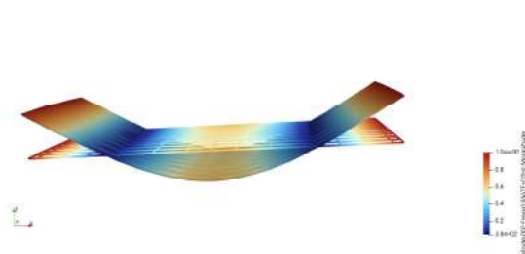


Figura B.81: Modo 1, 33.674 Hz

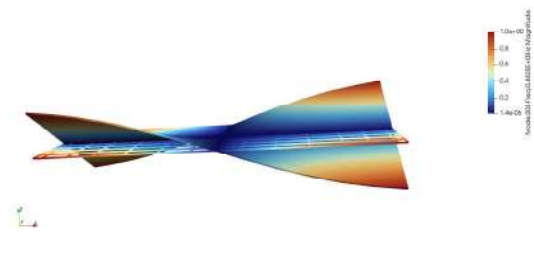


Figura B.82: Modo 2, 48.346 Hz

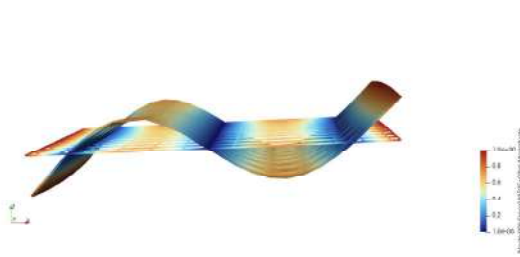


Figura B.83: Modo 3, 93.523 Hz

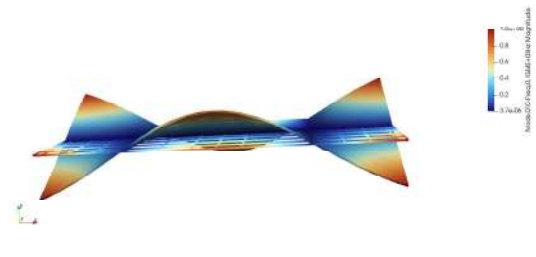


Figura B.84: Modo 4, 104.425 Hz

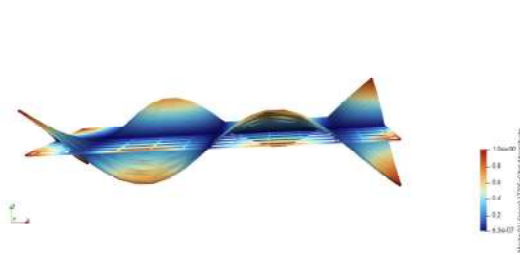


Figura B.85: Modo 5, 177.020 Hz

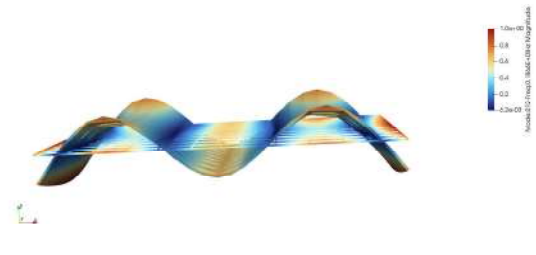


Figura B.86: Modo 6, 186.563 Hz

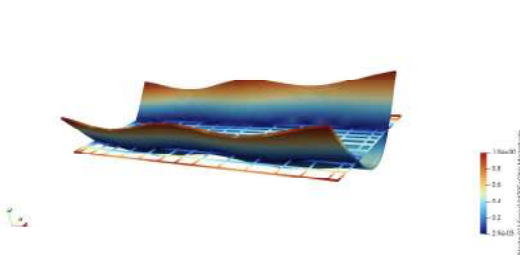


Figura B.87: Modo 7, 247.045 Hz

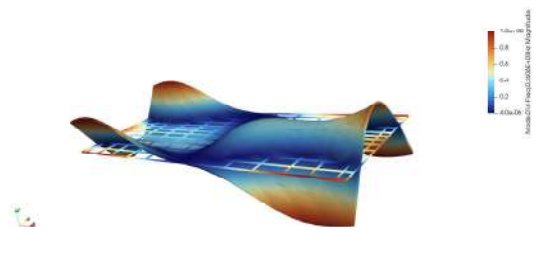


Figura B.88: Modo 8, 260.630 Hz

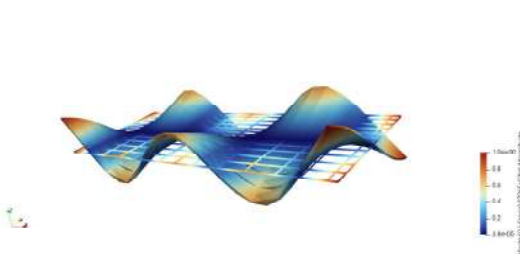


Figura B.89: Modo 9, 272.597 Hz

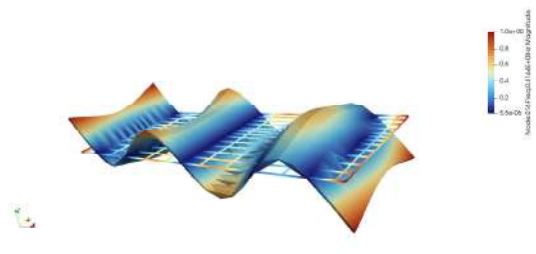


Figura B.90: Modo 10, 316.437 Hz

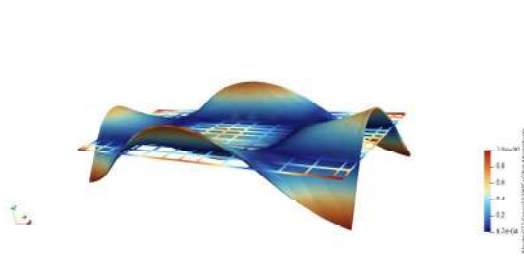


Figura B.91: Modo 11, 318.994 Hz

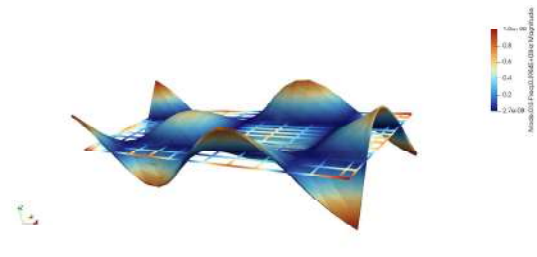


Figura B.92: Modo 12, 398.423 Hz

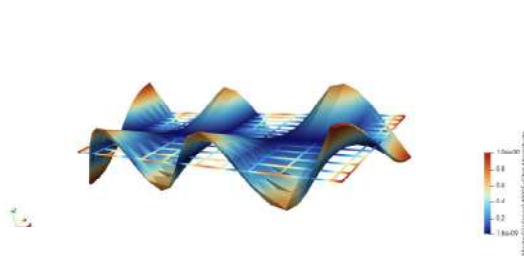


Figura B.93: Modo 13, 400.214 Hz

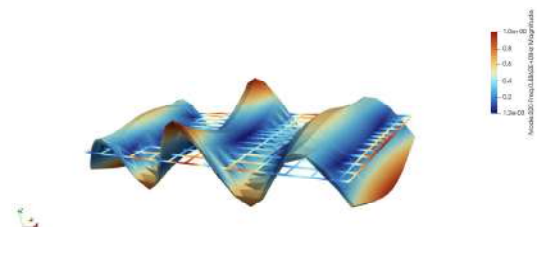


Figura B.94: Modo 14, 486.183 Hz



Figura B.95: Modo 15, 515.066 Hz

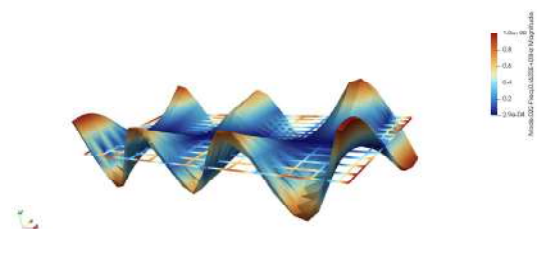


Figura B.96: Modo 16, 562.502 Hz

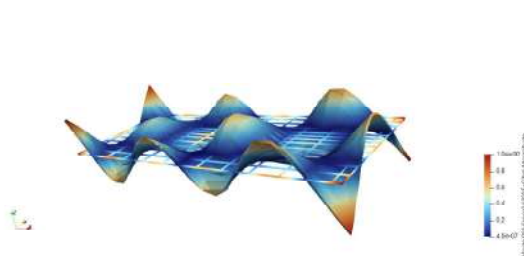


Figura B.97: Modo 17, 632.173 Hz

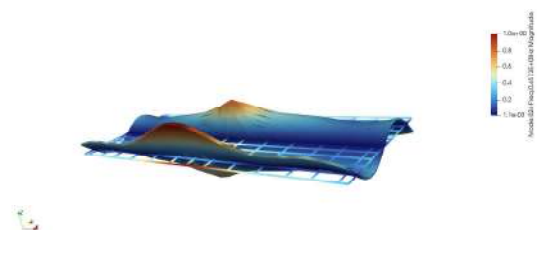


Figura B.98: Modo 18, 651.304 Hz

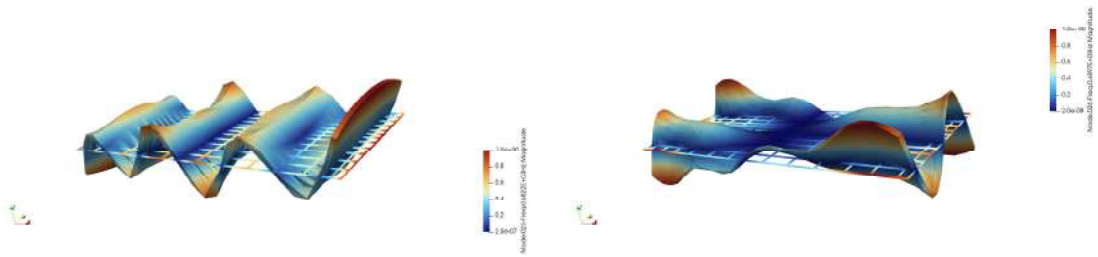


Figura B.99: Modo 19, 682.172 Hz

Figura B.100: Modo 20, 689.709 Hz

B.6 Pannello con danno $L=15.5$ cm in posizione 2

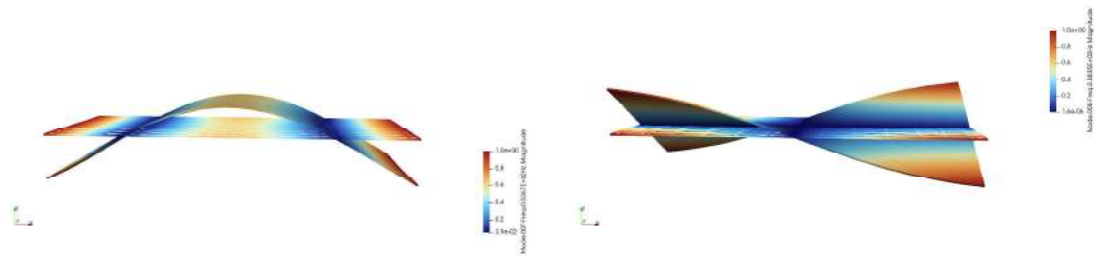


Figura B.101: Modo 1, 33.674 Hz

Figura B.102: Modo 2, 48.347 Hz

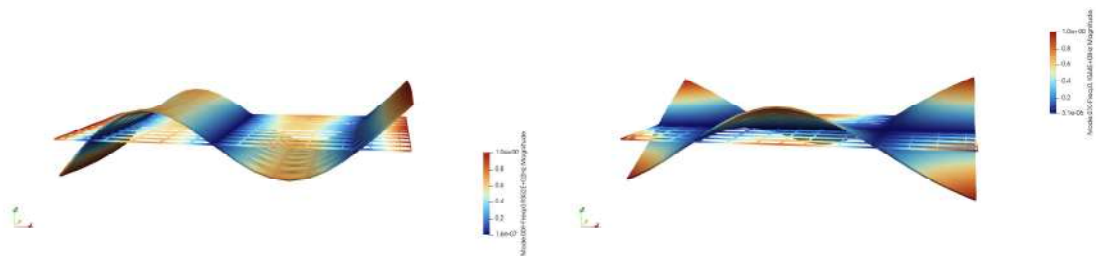


Figura B.103: Modo 3, 93.522 Hz

Figura B.104: Modo 4, 104.424 Hz

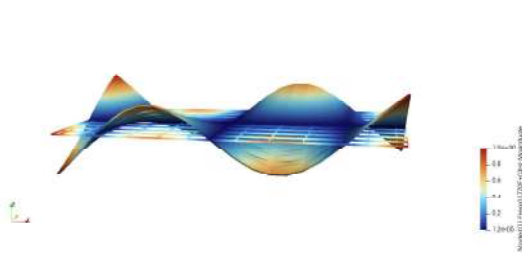


Figura B.105: Modo 5, 177.020 Hz

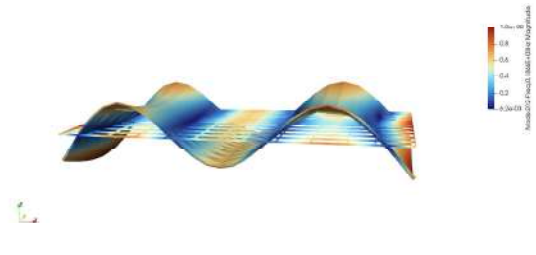


Figura B.106: Modo 6, 186.563 Hz

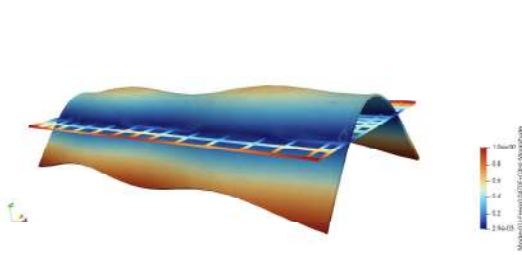


Figura B.107: Modo 7, 247.045 Hz

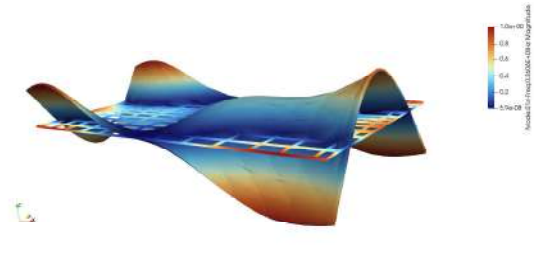


Figura B.108: Modo 8, 260.630 Hz

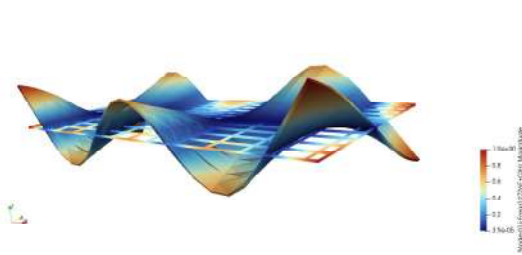


Figura B.109: Modo 9, 272.597 Hz

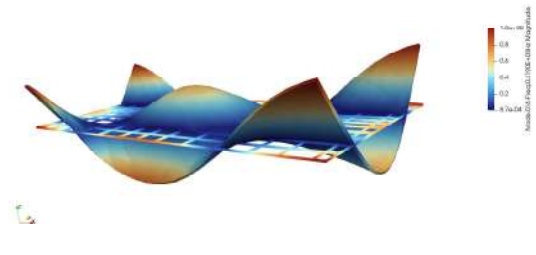


Figura B.110: Modo 10, 318.994 Hz

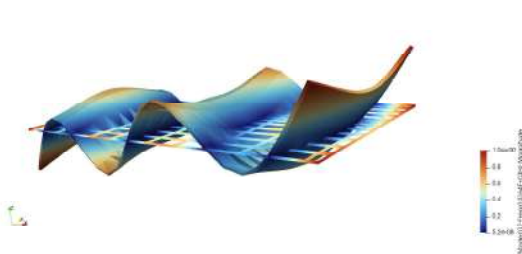


Figura B.111: Modo 11, 316.436 Hz

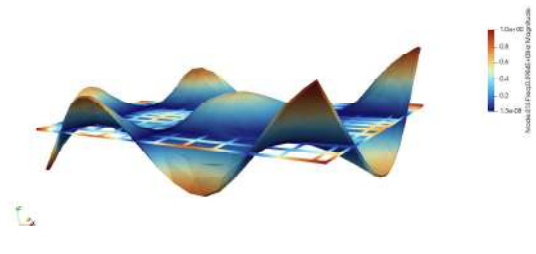


Figura B.112: Modo 12, 398.423 Hz

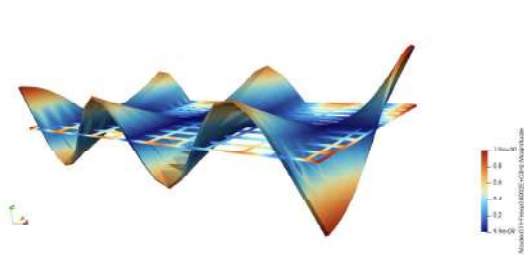


Figura B.113: Modo 13, 400.214 Hz

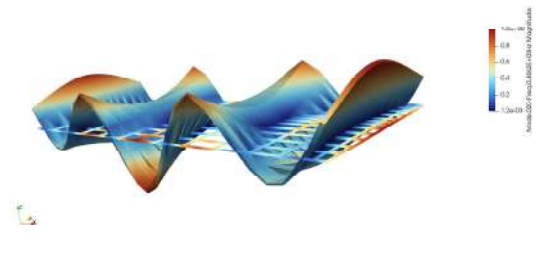


Figura B.114: Modo 14, 486.183 Hz

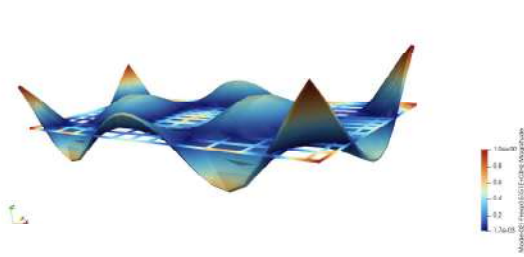


Figura B.115: Modo 15, 515.066 Hz

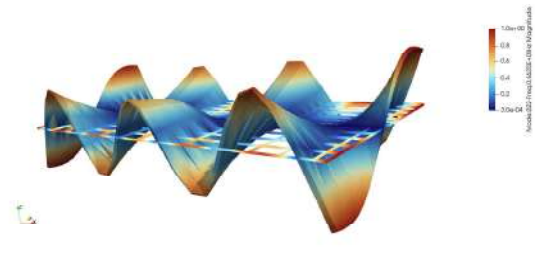


Figura B.116: Modo 16, 562.502 Hz

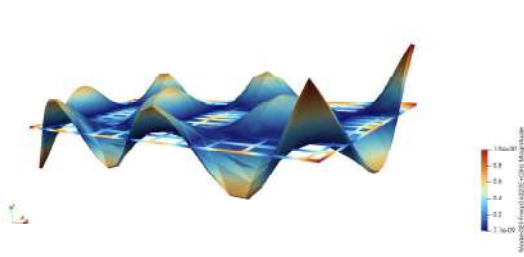


Figura B.117: Modo 17, 632.173 Hz

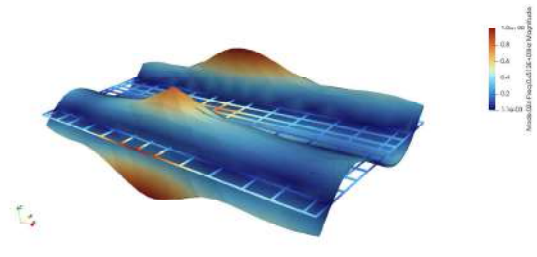


Figura B.118: Modo 18, 651.304 Hz

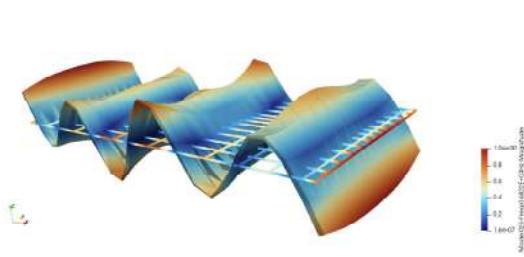


Figura B.119: Modo 19, 682.172 Hz

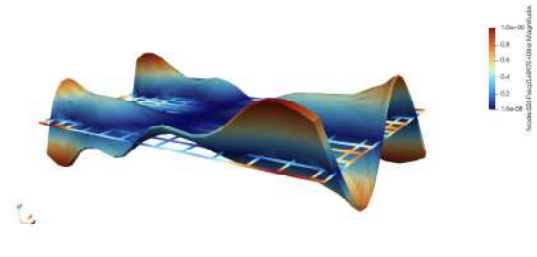


Figura B.120: Modo 20, 689.709 Hz

B.7 Pannello con danno L=19 cm in posizione 2

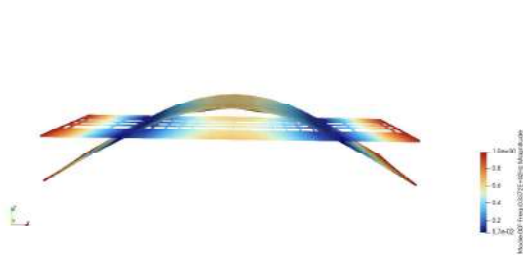


Figura B.121: Modo 1, 33.723 Hz

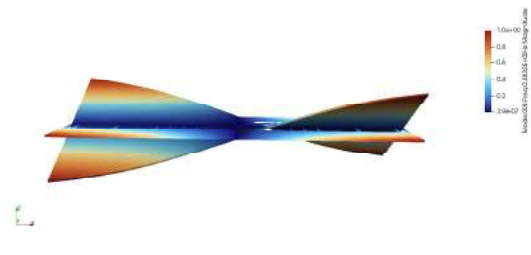


Figura B.122: Modo 2, 48.318 Hz

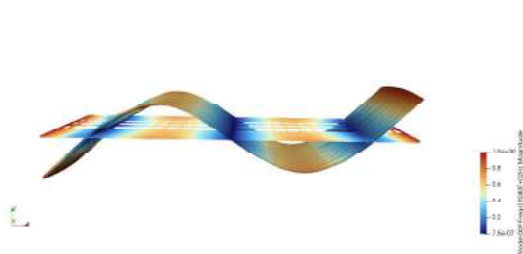


Figura B.123: Modo 3, 92.397 Hz

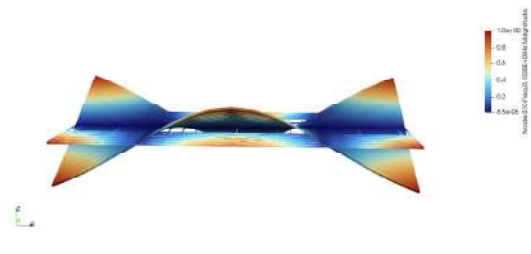


Figura B.124: Modo 4, 102.754 Hz

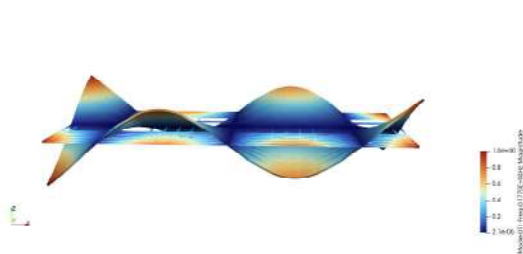


Figura B.125: Modo 5, 177.040 Hz

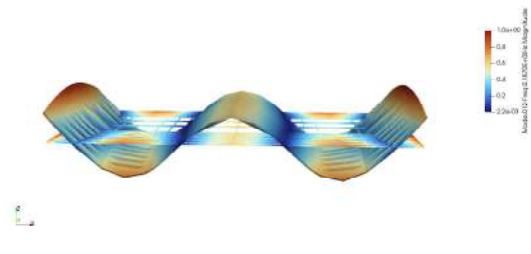


Figura B.126: Modo 6, 186.967 Hz

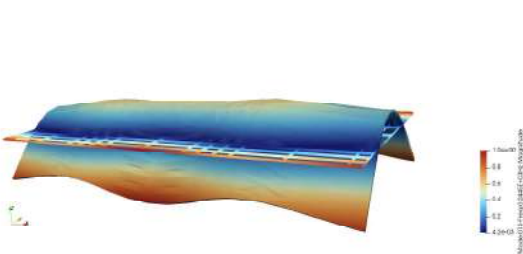


Figura B.127: Modo 7, 244.476 Hz

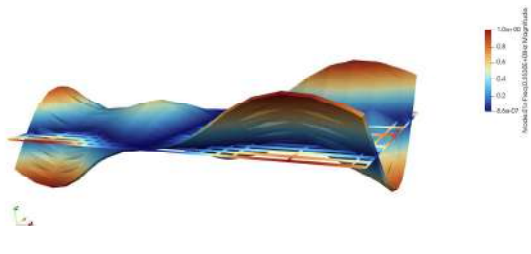


Figura B.128: Modo 8, 253.036 Hz

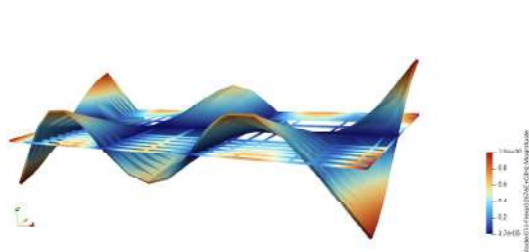


Figura B.129: Modo 9, 267.606 Hz

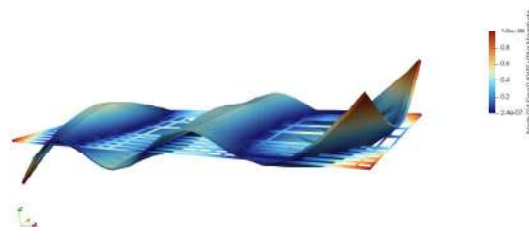


Figura B.130: Modo 10, 306.533 Hz

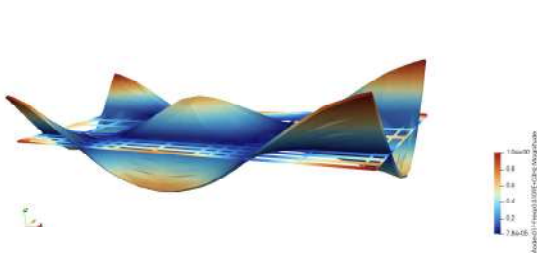


Figura B.131: Modo 11, 310.909 Hz

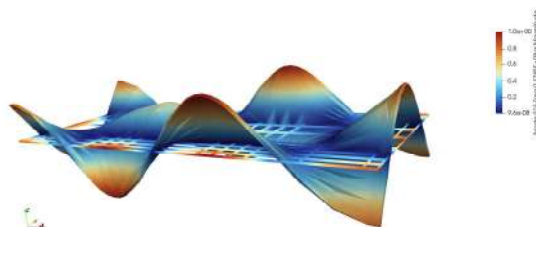


Figura B.132: Modo 12, 378.497 Hz

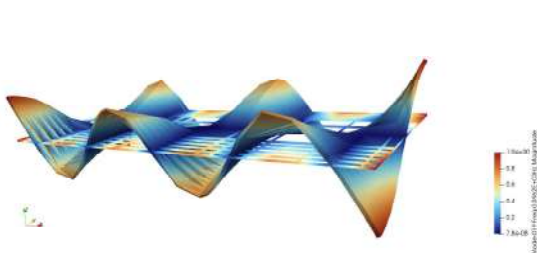


Figura B.133: Modo 13, 396.153 Hz

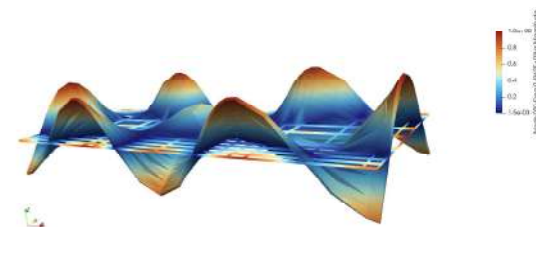


Figura B.134: Modo 14, 496.227 Hz

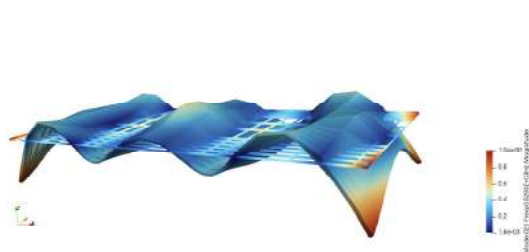


Figura B.135: Modo 15, 528.257 Hz

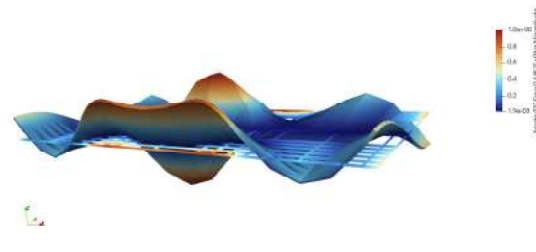


Figura B.136: Modo 16, 548.094 Hz

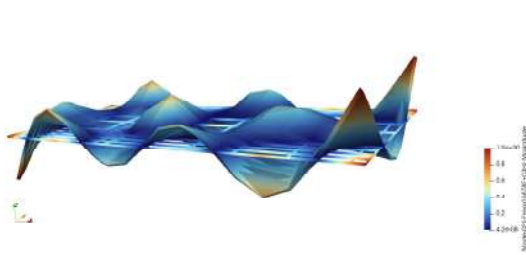


Figura B.137: Modo 17, 587.819 Hz

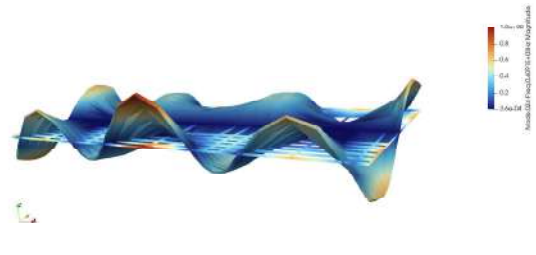


Figura B.138: Modo 18, 609.110 Hz

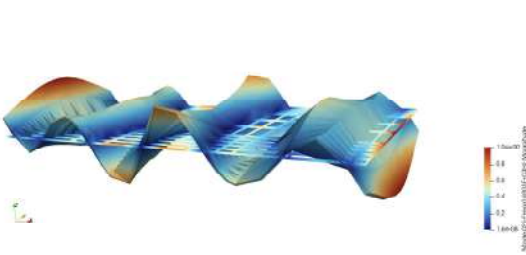


Figura B.139: Modo 19, 690.304 Hz

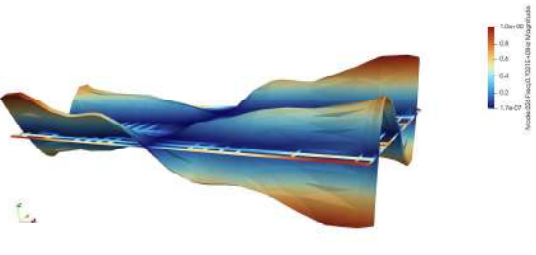


Figura B.140: Modo 20, 702.103 Hz

Bibliografia

- [1] E. Carrera e M. Petrolo. «Refined beam elements with only displacement variables and plate/shell capabilities». In: *Meccanica* 47 (apr. 2012), pp. 537–556.
- [2] O. Ahmed, X. Wang, M.-V. Tran e M.-Z. Ismadi. «Advancements in fiber-reinforced polymer composite materials damage detection methods: Towards achieving energy- efficient SHM systems». In: *Composites Part B: Engineering* 223 (2021), Art. no. 109136.
- [3] A.K. Pandey, M. Biswas e M.M. Samman. «Damage detection from changes in curvature mode shapes». In: *Journal of Sound and Vibration* 145 (1991), pp. 321–332.
- [4] K. Worden, E. J. Cross, N. Dervilis, E. Papatheou e I. Antoniadou. «Structural Health Monitoring: from Structures to Systems-of-Systems». In: *IFAC-PapersOnLine* 48 (2015), pp. 1–17.
- [5] P. Cawley e R. Adams. «A vibration technique for non-destructive testing of fibre composite structures». In: *Journal of composite materials* 13 (apr. 1979), pp. 161–175.
- [6] Q. Zhao, X. Dan, F. Sun, Y. Wang, S. Wu e L. Yang. «Digital shearography for NDT: Phase measurement technique and recent developments». In: *Applied Sciences* 8 (dic. 2018), Art. no. 2662.
- [7] D. Francis, R.P. Tatam e R.M. Groves. «Shearography technology and applications: a review». In: *Measurement Science and Technology* 21 (ago. 2010), Art. no. 102001.
- [8] Y. Y. Hung. «Shearography: A New Optical Method For Strain Measurement And Nondestructive Testing». In: *Optical Engineering* 21 (giu. 1982), p. 391.
- [9] E. Carrera, M. Cinefra, M. Petrolo e E. Zappino. *Finite Element Analysis of Structures Through Unified Formulation*. Newark: John Wiley & Sons, Incorporated, 2014.
- [10] H. Schreier, J.-J. Orteu e M.A. Sutton. *Image Correlation for Shape, Motion and Deformation Measurements*. New York, NY, USA: Springer US, 2009.

- [11] A. Deraemaeker e K. Worden. *New trends in vibration based structural health monitoring*. Cham, Switzerland: Springer, 2010.
- [12] T. H. G. Megson. *Aircraft Structures for Engineering Students*. Oxford, UK: Butterworth-Heinemann, 1999.
- [13] P. Avitabile. *Modal Space Articles 1998–2014: 17 years of modal analysis in our little world*. Original material available from the Structures and Dynamics laboratory, University of Massachusetts Lowell. 2014.
- [14] Siemens Digital Industries Software. *Modal Testing: A Practical Guide*. 2020.
- [15] *Fundamentals of Modal Testing*. Rapp. tecn. 5954-7957E. U.S.A.: Agilent Technologies, 2000.