

POLITECNICO DI TORINO

Tesi di Laurea Magistrale

Stato di tensione e deformazione nei
cuscinetti precaricati



**Politecnico
di Torino**

Relatori

Prof. Daniele BOTTO

Prof. Cristian M. FIRRONE

Candidato

D'Ambra Gianluigi

Marzo 2026



**Politecnico
di Torino**



DIMEAS

Dipartimento
di Ingegneria Meccanica
e Aerospaziale

Indice

Elenco delle figure	III
Elenco delle tabelle	VI
<i>Abstract</i>	1
Introduzione	2
Modellazione del Contatto	5
Trattazione Analitica	5
Trattazione Numerica	8
Penalty Method	9
Augmented Lagrange	11
MPC Algorithm	13
Introduzione ai Cuscinetti	15
Precarico nei cuscinetti	18
Metodologie di applicazione del precarico	20
Tipologia di cuscinetti	21
Cuscinetti radenti	21
Cuscinetti volventi	22
Montaggio del cuscinetto	23
Simulazioni Numeriche	26
Definizione della geometria	26
Costruzione del CAD	27
Creazione del FEM	28
Analisi preliminare per la creazione della Mesh	28
Creazione della mesh	30
Applicazione del contatto	34
Applicazione di vincoli e carichi	35
Risultati del modello numerico	37
Analisi dei risultati	47
Contronto col modello analitico	48
Distribuzione dei carichi	52
Momento di tilting	53
Tilting in funzione dello spostamento assiale	56
Tilting in funzione dello spostamento radiale	58

Conclusioni	60
Risultati 2D	61
Risultati 3D	65
Appendici	69
Appendice A	69
Appendice B	71
Appendice C	77
Appendice D	79
Appendice E	81
Riferimenti bibliografici	85

Elenco delle figure

1	Modello 3D di un generico contatto Hertziano	5
2	Impronte di contatto circolare (sinistra) ed ellittica (destra)	5
3	Stato tensionale per un generico contatto Hertziano	7
4	Elemento di contatto per il <i>penalty method</i>	9
5	Elemento di contatto per il <i>Lagrange method</i>	12
6	Assieme e sezione di un generico cuscinetto	15
7	Esploso assonometrico di un cuscinetto a sfere	16
8	Andamento NON lineare della forza di precarico	18
9	Applicazione meccanica del precarico	20
10	Generici cuscinetti radenti	21
11	Generici cuscinetti volventi	22
12	Montaggio di un cuscinetto duplex ad O (sinistra) e X (destra)	23
13	Generico montaggio di un cuscinetto	25
14	Specifiche del cuscinetto 7303 BEP	26
15	Estrazione di uno spicchio dal cuscinetto	27
16	Spicchio di cuscinetto specchiato	27
17	Scalatura del CAD	28
18	Rappresentazione geometrica dell'arco di cerchio	30
19	Suddivisione della linea di contatto	32
20	Suddivisione delle linee del modello	32
21	Fronte della <i>mesh</i> del cuscinetto	33
22	Retro della <i>mesh</i> del cuscinetto	33
23	Rappresentazione grafica dei contatti nel modello FEM	34
24	Contatti del modello FEM	34
25	Piste inferiori dei cuscinetti	35
26	Applicazione di vincoli e carichi al modello FEM	35
27	Applicazione dei vincoli e dei carichi su <i>ANSYS</i>	36
28	Applicazione dei vincoli e dei carichi sui nodi del modello	36
29	Superfici di contatto	37
30	Superfici delle reazioni nodali	37
31.1	Contatto α - Spostamento 1 μm	38
31.2	Contatto β - Spostamento 1 μm	38
31.3	Contatto γ - Spostamento 1 μm	38
31.4	Contatto δ - Spostamento 1 μm	38
31.5	Stress Von Mises - Spostamento 1 μm	38
32.1	Contatto α - Spostamento 5 μm	39
32.2	Contatto β - Spostamento 5 μm	39
32.3	Contatto γ - Spostamento 5 μm	39
32.4	Contatto δ - Spostamento 5 μm	39
32.5	Von Mises Stress - Spostamento 5 μm	39
33.1	Contatto α - Spostamento 10 μm	40
33.2	Contatto β - Spostamento 10 μm	40

33.3	Contatto γ - Spostamento 10 μm	40
33.4	Contatto δ - Spostamento 10 μm	40
33.5	Von Mises Stress - Spostamento 10 μm	40
34.1	Contatto α - Spostamento 15 μm	41
34.2	Contatto β - Spostamento 15 μm	41
34.3	Contatto γ - Spostamento 15 μm	41
34.4	Contatto δ - Spostamento 15 μm	41
34.5	Von Mises Stress - Spostamento 15 μm	41
35.1	Contatto α - Spostamento 20 μm	42
35.2	Contatto β - Spostamento 20 μm	42
35.3	Contatto γ - Spostamento 20 μm	42
35.4	Contatto δ - Spostamento 20 μm	42
35.5	Von Mises Stress - Spostamento 20 μm	42
36.1	Contatto α - Spostamento 30 μm	43
36.2	Contatto β - Spostamento 30 μm	43
36.3	Contatto γ - Spostamento 30 μm	43
36.4	Contatto δ - Spostamento 30 μm	43
36.5	Von Mises Stress - Spostamento 30 μm	43
37.1	Contatto α - Spostamento 40 μm	44
37.2	Contatto β - Spostamento 40 μm	44
37.3	Contatto γ - Spostamento 40 μm	44
37.4	Contatto δ - Spostamento 40 μm	44
37.5	Von Mises Stress - Spostamento 40 μm	44
38.1	Contatto α - Spostamento 50 μm	45
38.2	Contatto β - Spostamento 50 μm	45
38.3	Contatto γ - Spostamento 50 μm	45
38.4	Contatto δ - Spostamento 50 μm	45
38.5	Von Mises Stress - Spostamento 50 μm	45
39.1	Contatto α - Spostamento 100 μm	46
39.2	Contatto β - Spostamento 100 μm	46
39.3	Contatto γ - Spostamento 100 μm	46
39.4	Contatto δ - Spostamento 100 μm	46
39.5	Von Mises Stress - Spostamento 100 μm	46
40	Linea di contatto a 40°	47
41	Linea di contatto a 65°	47
42	Diagramma Forza di precarico - Spostamento assiale	49
43	Rappresentazione geometrica dell'arco di cerchio	50
44	Superfici delle reazioni nodali	50
45	Impronte di contatto con carico esterno di 100 N (sinistra) e 150 N (destra)	51
46	Von Mises Stress con carico esterno di 100 N (sinistra) e 150 N (destra)	51
47	Nodi delle aree A, B, C e D per il calcolo delle reazioni vincolari	52
48	Distribuzione del carico in funzione dello spostamento assiale	52
49	Momento di tilting applicato al cuscinetto	53
50	Schema di forze del momento di tilting	54

51	Applicazione degli spostamenti differenziali	55
52	Risultati FEM con momento di <i>tilting</i> fissato	56
53	Spicchio di cuscinetto specchiato	57
54	Risultati FEM con momento di <i>tilting</i> variabile	58
55	Spicchio di cuscinetto specchiato	59
56	Nodi che delimitano le linee di contatto delle sfere	60
57	Nodi che delimitano le superfici di contatto delle sfere	60
58	Ricostruzione delle linee indeformate (nero) e deformate (colorate)	63
59	Ricostruzione delle superfici α e γ indeformate (nero) e deformate (rosso) .	66
60	Ricostruzione delle superfici β e δ indeformate (nero) e deformate (rosso) .	67

Elenco delle tabelle

1	Risultati del calcolo hertziano per il contatto sfera-pista in acciaio	29
2	Pressione massima sulla superficie di contatto α	51
3	Percentuale di forza scaricata su sfere e piste	52
4	Parametri geometrici e percentuale di deformazione delle linee	64
5	Parametri geometrici e percentuale di deformazione della superficie α . . .	67
6	Parametri geometrici e percentuale di deformazione della superficie β . . .	67
7	Parametri geometrici e percentuale di deformazione della superficie γ . . .	68
8	Parametri geometrici e percentuale di deformazione della superficie γ . . .	68

Abstract

La presente tesi affronta lo studio del comportamento meccanico di un cuscinetto duplex sottoposto a carico assiale, con particolare attenzione alla modellazione del contatto elastico tra elementi volventi e piste. Dopo un inquadramento teorico dei problemi di contatto in elasticità, viene richiamata la teoria hertziana come riferimento analitico per la descrizione delle pressioni di contatto, delle deformazioni locali e della distribuzione delle tensioni.

Successivamente, il problema viene affrontato mediante un approccio numerico basato sul Metodo degli Elementi Finiti (FEM), utilizzando il software ANSYS. Vengono analizzate e confrontate le principali formulazioni di contatto adottate in ambito FEM, tra cui il metodo della penalità, il metodo dei moltiplicatori di Lagrange e il Lagrangiano aumentato, evidenziandone vantaggi e limiti in termini di accuratezza e costo computazionale. Il modello numerico sviluppato riproduce fedelmente la geometria reale del cuscinetto, includendo la definizione accurata delle superfici di contatto, della mesh e delle condizioni di vincolo e carico.

L'analisi si concentra in particolare sull'effetto del precarico e dell'applicazione di carichi assiali elevati sulla distribuzione dei carichi tra le sfere, sulle pressioni di contatto e sullo stato tensionale delle piste. I risultati numerici vengono confrontati con le previsioni del modello analitico, mostrando una buona coerenza e permettendo di quantificare l'ordine di grandezza delle deformazioni e delle tensioni indotte. Infine, viene studiato l'effetto di un momento di tilting sul comportamento del cuscinetto, analizzando la variazione della distribuzione dei carichi e delle deformazioni al variare degli spostamenti assiali e radiali.

I risultati ottenuti confermano l'importanza di una corretta modellazione del contatto e del precarico nella progettazione dei cuscinetti, fornendo indicazioni utili per l'analisi strutturale e la previsione delle condizioni operative critiche in applicazioni industriali ad alta precisione.

Introduzione

Lo studio dei problemi di contatto risulta fondamentale in molte applicazioni ingegneristiche, in particolar modo nell'analisi dei cuscinetti, ampiamente utilizzati nel settore industriale. Un generico problema di contatto coinvolge due o più corpi separati rigidi e deformabili in cui si può considerare la presenza di attrito. La risoluzione di questo problema permette la determinazione della corrispondente distribuzione di pressione, nonché la forma e le dimensioni dell'area di contatto, oltre campi di spostamento, tensione e zone di scorrimento e di aderenza.

Le fondamenta della teoria statica del contatto in elasticità furono poste da Heinrich Rudolf Hertz^[1] partendo dallo studio di lenti poste in contatto. Il fisico tedesco ricavò formule analitiche per la determinazione della pressione di contatto e l'approccio tra corpi con l'ipotesi di assumere che l'area di contatto fosse ellittica.

Il problema generale di un corpo linearmente elastico in contatto con una base rigida senza attrito fu formulato da Antonio Signorini^[2,3]. L'esistenza e l'unicità della soluzione dei problemi del matematico italiano ^[4] furono investigate da Georges Duvaut e Jacques-Louis Lions^[5] i quali provarono che l'area di contatto reale e gli spostamenti superficiali sono quelli che minimizzano l'energia di deformazione totale, a condizione che non ci sia interpenetrazione tra i corpi di contatto.

Risulta possibile distinguere due tipi di contatti:

- Un contatto è detto conforme se le superfici dei due corpi “combaciano” esattamente o anche solo molto da vicino insieme senza deformazione. Cuscinetti a pattino piatto e cuscinetti a strisciamento sono esempi di contatto conforme.
- Un contatto non-conforme se le superfici di due corpi hanno profili dissimili. Quando vengono portati a contatto senza deformazione, toccheranno dapprima in un punto (contatto puntuale) o lungo una linea (contatto lineare).

Per esempio, in un cuscinetto a sfere è presente un contatto puntuale con le piste, mentre in un cuscinetto a rulli un contatto lineare. Il contatto lineare sorge con i profili dei corpi del rullo che sono conformi in una direzione e non conformi nella direzione perpendicolare. Nei casi classici di contatto, le pressioni sono distribuite su un'area che è piccola rispetto alle dimensioni dei corpi.

Risulta possibile distinguere anche tra:

- Contatto concentrato: quando le dimensioni della regione di contatto sono piccole rispetto a una tipica dimensione locale dei corpi a contatto. È possibile riportare come esempio due sfere elastiche poste in contatto.
- Contatto non-concentrato (o diversificato): quando un contatto non rispetta la condizione di contatto concentrato. È possibile riportare come esempio l'accoppiamento vite dado.

- Contatti semi-concentrati: sono contatti con l'asse corto della zona di contatto piccola, e l'asse lungo del contatto non piccolo rispetto a un tipico diametro dei corpi. È possibile riportare come esempio due cilindri con assi paralleli a contatto.

Nei contatti concentrati, i corpi a contatto possono essere approssimati come mezzi-spazi, per quanto riguarda i calcoli di elasticità, mentre le condizioni al contorno sono determinate dalla geometria reale e dalla cinematica reale.

I contatti semi-concentrati possono essere trattati considerando la geometria come bidimensionale. Questa semplificazione è talvolta troppo approssimativa, ad esempio nella risoluzione di problemi di contatto dei cuscinetti a rulli.

La forte non linearità è difficile da risolvere con un metodo analitico per problemi che coinvolgo geometrie complesse; per questo motivo, vengono utilizzati metodi numerici. Le moderne tecniche di simulazione per i problemi di contatto tramite il metodo degli elementi finiti includono una varietà di tecniche di discretizzazione per piccoli e grandi spostamenti di deformazione. La modellazione numerica dei problemi pratici di contatto richiede particolare attenzione perché l'area di contatto effettiva tra i corpi a contatto non è generalmente nota in anticipo. Per questo motivo, la soluzione corretta dei problemi di contatto deve essere determinata da uno schema iterativo.

Soluzioni in forma chiusa del problema di contatto, in termini di forze normali e tangenziali, sono state trovate solo per un numero limitato di geometrie di contatto, come la sfera, corpi non sferici nei limiti del contatto hertziano e punzone piatto arrotondato^[6].

All'interno del metodo degli elementi finiti, i problemi di contatto sono generalmente affrontati usando o il metodo della penalità o il moltiplicatore di Lagrange, implementato nella formulazione pura o nelle sue versioni standard, cioè perturbata e aumentata.

Il metodo della penalità è ampiamente usato per la semplicità e la facile implementazione nei soliti metodi numerici come il metodo degli elementi finiti (FEM). Tuttavia, è richiesto un parametro di penalità fattibile per garantire la rigidità del contatto, e la penetrazione locale avviene effettivamente lungo un'interfaccia di contatto. In altri termini, il metodo della penalità introduce una rigidità di contatto che è un parametro predeterminato del problema di contatto, e il suo valore è cruciale sia per l'accuratezza dei risultati che per la convergenza della soluzione iterativa.

In alternativa, i metodi del moltiplicatore di Lagrange e del moltiplicatore di Lagrange aumentato formulano i problemi di contatto nelle forme della Lagrangiana e della Lagrangiana aumentata funzionalmente e si possono ottenere risultati molto più accurati rispetto all'impiego del parametro di penalità.^[7]

Nel metodo del moltiplicatore di Lagrange, i moltiplicatori sono gradi di libertà aggiuntivi che causano un aumento delle dimensioni del modello ad elementi finiti. Ne segue un aumento della potenza di calcolo e dei tempi di risoluzione del calcolatore. In alcuni casi è possibile intervenire in fase preliminare dello sviluppo FEM costruendo una mesh che garantisca il giusto compromesso tra l'accuratezza del calcolo e il costo computazionale.

Un altro metodo è il metodo della programmazione matematica, che formula un problema di contatto in un problema complementare lineare (LCP)^[8–14].

Chen e Li proposero il metodo FEM ibrido per risolvere i problemi elastici di contatto^[15–18]. Con questo metodo, la matrice di rigidezza è trasformata in una matrice di conformità condensata della forza di contatto nell'area di contatto. La forza di contatto è risolta iterativamente attraverso le condizioni di continuità della forza di contatto e la matrice di conformità condensata.

Nel 2001, Kousaku e Naoyuki applicarono il FEM nel loro studio dell'effetto di bombatura del profilo sui contatti dei denti degli ingranaggi^[19].

Nel 2009, Takayuki definì la distribuzione del carico lungo la linea di contatto e calcolò gli errori di trasmissione sotto condizioni di contatto dei denti scarichi e caricati^[20].

Lo scopo di questa trattazione consiste nell'applicazione dei contatti a un dispositivo meccanico molto utilizzato in ambito industriale: i cuscinetti. Di questi ultimi ne esistono tantissime tipologie differenti, a seconda dell'impiego e della geometria a cui fanno riferimento. Una volta preso come riferimento un cuscinetto dal catalogo SKF^[21], si partirà da un approccio analitico preliminare per costruire un modello FEM capace di descrivere le condizioni di operatività dello stesso.

Infine, una volta indagato il campo di forze e di spostamenti del cuscinetto quando soggetto a un forte carico assiale, verranno comparati i risultati col cuscinetto non deformato al fine di quantizzare l'ordine di grandezza delle deformazioni.

Modellazione del Contatto

Trattazione Analitica

La teoria del contatto hertziano, formulata da Heinrich Hertz nel 1881, costituisce il fondamento della meccanica del contatto elastico tra corpi solidi. Descrive il comportamento di due superfici deformabili che si comprimono reciprocamente sotto l'azione di un carico normale F . Le ipotesi fondamentali del modello prevedono la linearità elastica, l'isotropia dei materiali, la piccolezza delle deformazioni rispetto alle dimensioni dei corpi e l'assenza di scorrimenti o forze tangenziali, in modo che la pressione risulti puramente normale alla superficie di contatto.

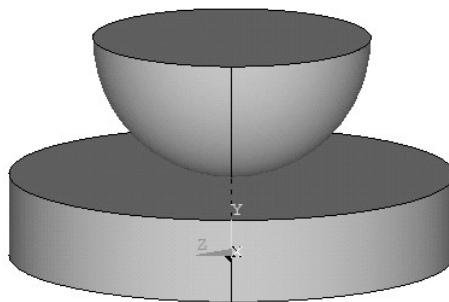


Figura 1: Modello 3D di un generico contatto Hertziano

Quando due corpi curvi vengono messi in contatto, la zona di interazione reale non coincide con il punto o la linea di contatto geometrica, ma si estende in un'area finita in cui la pressione è distribuita in modo continuo. Per superfici sferiche tale area è circolare, mentre nel caso più generale di superfici con curvature differenti lungo assi ortogonali la zona di contatto assume forma ellittica. L'ellissi di contatto rappresenta quindi la regione effettiva in cui agiscono le tensioni di compressione, e le sue dimensioni dipendono dal carico applicato, dalle curvature locali e dalle proprietà elastiche dei materiali.

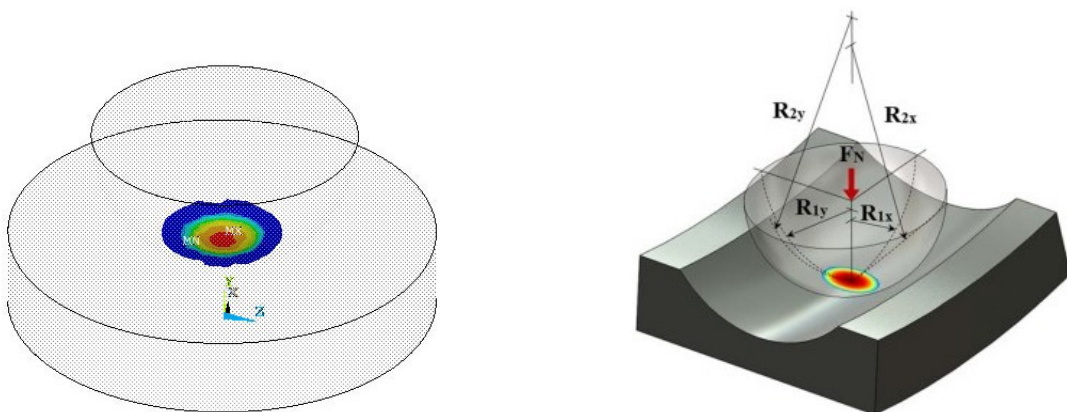


Figura 2: Impronte di contatto circolare (sinistra) ed ellittica (destra)

Le curvature relative lungo le due direzioni principali sono espresse da:

$$\frac{1}{R_x} = \frac{1}{R_{1x}} + \frac{1}{R_{2x}} \quad \frac{1}{R_y} = \frac{1}{R_{1y}} + \frac{1}{R_{2y}} \quad (1)$$

L'ellisse di contatto è caratterizzata dai semiassi a e b , determinati dal bilancio tra la rigidità elastica e le curvature relative. Si introduce il modulo elastico equivalente:

$$\frac{1}{E'} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \quad (2)$$

dove E_1, E_2 sono i moduli di Young e ν_1, ν_2 i coefficienti di Poisson dei due materiali. Nel caso generale, le dimensioni dei semiassi dell'ellisse di contatto sono

$$a = \alpha \left(\frac{3FR_x}{4E'} \right)^{1/3} \quad b = \beta \left(\frac{3FR_y}{4E'} \right)^{1/3} \quad (3)$$

dove α e β sono coefficienti dipendenti dal rapporto di curvatura R_x/R_y . Per superfici sferiche ($R_x = R_y = R$) si ottiene la forma classica

$$a = b = \left(\frac{3FR}{4E'} \right)^{1/3} \quad (4)$$

La dimensione dell'area di contatto cresce quindi con la potenza $F^{1/3}$ del carico, a indicare un comportamento non lineare tipico della deformazione elastica locale.

La distribuzione della pressione all'interno dell'area di contatto è descritta dalla legge parabolica tridimensionale di Hertz:

$$p(x, y) = p_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad (5)$$

dove p_0 è la pressione massima al centro dell'ellisse. La pressione decresce radialmente fino ad annullarsi lungo il bordo della zona di contatto, garantendo continuità e assenza di discontinuità di sforzo. L'integrale della pressione sull'intera area di contatto restituisce il carico totale:

$$F = \frac{2}{3} \pi ab p_0 \quad (6)$$

da cui deriva:

$$p_0 = \frac{3F}{2\pi ab} \quad (7)$$

A parità di carico, un aumento dell'area di contatto implica una riduzione della pressione massima. La deformazione complessiva delle superfici, ovvero la profondità di penetrazione elastica δ , è espressa come:

$$\delta = \frac{a^2}{R_x} + \frac{b^2}{R_y} \quad (8)$$

Nel caso isotropo si ottiene la forma semplificata:

$$\delta = \frac{a^2}{R} \quad (9)$$

È possibile esprimere la deformazione in funzione del carico:

$$\delta = \left(\frac{9F^2}{16R_x R_y E'^2} \right)^{1/3} \quad (10)$$

Questo risultato mostra che la profondità di prenetazione δ cresce con $F^{2/3}$.

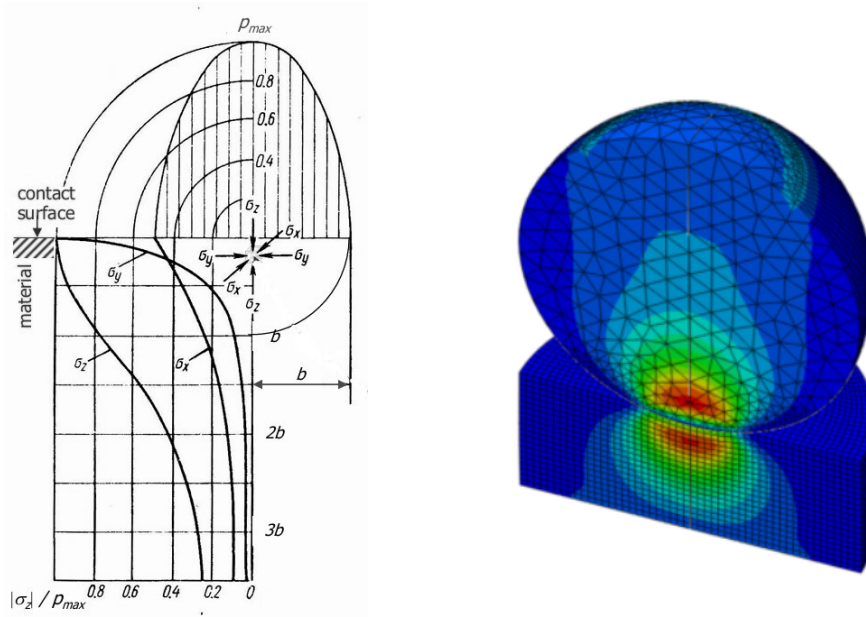


Figura 3: Stato tensionale per un generico contatto Hertziano

Le tensioni interne non raggiungono il massimo sulla superficie ma a una profondità di circa $0.48a$ nel caso sferico. Le componenti principali dello stato tensionale, derivate dalla soluzione elastica tridimensionale, sono approssimabili con

$$\sigma_z(z) = -p_0 \left(1 - \frac{z^2}{a^2} \right)^{3/2} \quad \tau_{max} = 0.31 p_0 \quad (11)$$

Queste tensioni sono fondamentali per la previsione del danneggiamento per fatica da contatto e per la progettazione di organi meccanici sottoposti a sollecitazioni cicliche.

L'energia elastica immagazzinata durante la compressione vale:

$$U = \frac{1}{2} F \delta = \frac{3}{8} \pi a b p_0 \delta, \quad (12)$$

rappresentando l'energia potenzialmente rilasciabile nel processo di scarico elastico.

La teoria hertziana resta valida fintanto che le tensioni massime rimangono inferiori al limite elastico dei materiali.

Trattazione Numerica

Il metodo degli elementi finiti (FEM) è un metodo numerico che può essere applicato per ottenere soluzioni a problemi appartenenti a una varietà di discipline ingegneristiche: problemi stazionari, problemi transitori, problemi di stress/deformazione lineari o non lineari. I primi a pubblicare articoli in questo campo sono Alexander Hrennikoff (1941) e Richard Courant (1943)^[22]. Sebbene i loro approcci siano diversi, hanno una caratteristica comune: la discretizzazione dei continui in una serie di sottodomini discreti chiamati elementi. Nel 1971 viene rilasciata la prima versione del software ANSYS, usato in questa trattazione per le simulazioni numeriche.

Ci sono due teorie di base che, sebbene diverse nei loro approcci, offrono le soluzioni desiderate ai problemi di contatto dei corpi: il metodo della funzione di penalità e il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. La principale differenza tra di esse è il modo in cui includono nella loro formulazione l'energia potenziale delle superfici in contatto.

Il metodo della funzione di penalità, a causa della sua economia, ha ricevuto una maggiore accettazione. Quest'ultimo risulta molto utile nella risoluzione di problemi di contatto con attrito, mentre il metodo di Lagrange, basato sui moltiplicatori, è noto per la sua accuratezza. Il principale svantaggio del metodo di Lagrange è che può portare a soluzioni malconvergenti, al contrario la formulazione di penalità può portare a soluzioni inaccurate.

Altri modelli numerici per modellare il contatto sono il Multi-Point Constraint e il Beam Contact Formulation. Il primo è un metodo di vincolo che impone relazioni cinematiche tra più gradi di libertà, senza introdurre una vera e propria formulazione di contatto con penetrazione e pressione. Nel contesto del contatto in ANSYS, l'MPC viene spesso usato per modellare contatti ideali, come collegamenti rigidi, incastri distribuiti o accoppiamenti senza separazione né attrito.

Il secondo è una tecnica di contatto pensata specificamente per elementi beam, tipicamente utilizzata quando si modellano strutture snelle come cavi, fili, tubazioni o telai. In questa formulazione, il contatto non viene trattato come una superficie-superficie, ma come un'interazione linea-linea o linea-superficie. ANSYS individua la distanza minima tra gli assi delle travi (o tra trave e superficie) e introduce forze di contatto quando tale distanza scende sotto una soglia definita. Il vantaggio principale è l'efficienza computazionale, poiché evita l'uso di mesh solide o di superfici di contatto complesse.

Di seguito, vengono esplicate in dettaglio queste diverse tecniche per modellare numericamente i contatti.

Penalty Method

Il metodo di penalità prevede l'aggiunta di un termine di penalità per migliorare il processo di risoluzione. Nei problemi di contatto, il termine di penalità include la matrice di rigidità della superficie di contatto. Quest'ultima deriva dal concetto che un corpo penetra immaginariamente nell'altro.

La matrice di rigidità della superficie di contatto è aggiunta alla matrice di rigidità del corpo a contatto, in modo che l'equazione incrementale del Metodo degli Elementi Finiti diventa:

$$[K_b + K_c]u = F \quad (13)$$

dove: K_b è la matrice di rigidità dei corpi a contatto; K_c è matrice di rigidità della superficie di contatto; u è lo spostamento; F è la forza. L'entità della superficie di contatto è sconosciuta (Stein & Ramm, 2003), pertanto la sua matrice di rigidità, K_c , è un termine non lineare. I valori di carico totale e spostamento sono:

$$F^{\text{tot}} = \sum \Delta F \quad (14)$$

$$u^{\text{tot}} = \sum \Delta u \quad (15)$$

dove:

- F^{tot} è il vettore forza
- u^{tot} è vettore spostamento

Per derivare la matrice di rigidità, la zona di contatto (che comprende la superficie di contatto) è divisa in una serie di elementi di contatto. L'elemento rappresenta l'interazione tra il nodo superficiale di un corpo con la rispettiva faccia dell'elemento dell'altro corpo. La figura che segue mostra un elemento di contatto in un'applicazione bidimensionale. Quest'ultimo è composto da un nodo *slave* (punto S) e una linea *master*, che collega i nodi 1 e 2. Il punto S_0 segna il nodo *slave* prima dell'applicazione dell'incremento di carico, mentre il punto S segna lo stesso dopo il caricamento.

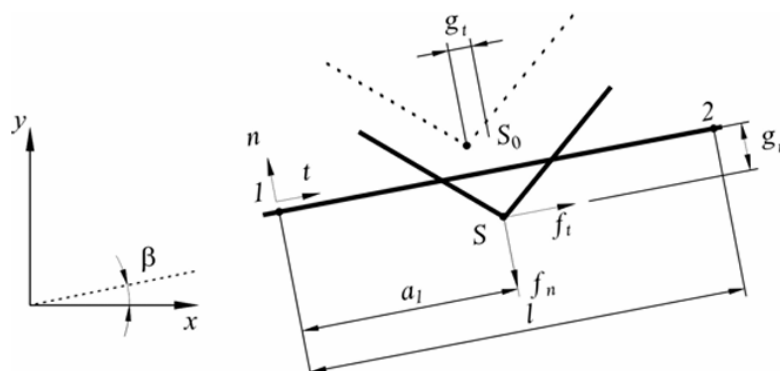


Figura 4: Elemento di contatto per il *penalty method*

Nel caso in cui si consideri la modalità di scorrimento dell'attrito, la forza tangenziale che agisce sulla superficie di contatto è uguale all'entità della forza di attrito. Ne segue che la prima variazione dell'energia potenziale di un elemento di contatto è pari a:

$$\delta\Pi_c = f_n \delta g_n + f_t \delta g_t = k_n g_n \delta g_t + \text{sgn}(g_t) \mu_d k_n g_n \delta g_t \quad (16)$$

dove:

- k_n rappresenta i termini di penalità usati per esprimere la relazione tra la forza di contatto e le penetrazioni lungo la direzione normale;
- k_t sono termini di penalità usati per esprimere la relazione tra la forza di contatto e le penetrazioni lungo la direzione tangenziale;
- g_n è la penetrazione lungo la direzione normale;
- g_t è la penetrazione lungo la direzione tangenziale;

$$f_n = k_n g_n \quad (17)$$

$$f_t = -\text{sgn}(g_t) \mu_d (k_n g_n) \quad (18)$$

Nella pratica, all'interno del software Ansys Mechanical APDL il metodo di penalizzazione utilizza una molla di contatto per stabilire una relazione tra le due superfici di contatto. La rigidezza della molla è chiamata rigidezza di contatto.

Augmented Lagrange

Il metodo Lagrangiano aumentato (predefinito in Ansys) è una serie iterativa di metodi di penalizzazione. Le trazioni di contatto (pressioni e sollecitazioni di attrito) vengono aumentate durante le iterazioni di equilibrio in modo che la penetrazione finale sia inferiore alla tolleranza ammissibile dalla macchina. Rispetto al metodo di penalizzazione, il metodo Lagrangiano aumentato di solito porta a un condizionamento migliore ed è meno sensibile all'entità della rigidità di contatto.

Il metodo consiste nella risoluzione del seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$\min f(x) \quad (19)$$

soggetto a

$$c_i(x) = 0 \quad \forall i \in \mathcal{E} \quad (20)$$

dove $\mathcal{E}$ denota l'insieme degli indici dei vincoli di uguaglianza. Questo problema può essere risolto come una sequenza di problemi di minimizzazione non vincolata.

Come riferimento, riportiamo innanzitutto il passo k -esimo del metodo delle penalità:

$$\min \Phi_k(x) = f(x) + \mu_k \sum_{i \in \mathcal{E}} c_i(x)^2 \quad (21)$$

Il metodo delle penalità risolve questo problema e, all'iterazione successiva, lo risolve nuovamente utilizzando un valore più grande di μ_k e la soluzione precedente come stima iniziale (“*warm start*”).

Il metodo del Lagrangiano aumentato utilizza il seguente obiettivo non vincolato:

$$\min \Phi_k(x) = f(x) + \frac{\mu_k}{2} \sum_{i \in \mathcal{E}} c_i(x)^2 + \sum_{i \in \mathcal{E}} \lambda_i c_i(x) \quad (22)$$

e, dopo ogni iterazione, oltre ad aggiornare μ_k , la variabile λ viene aggiornata secondo la regola:

$$\lambda_i \leftarrow \lambda_i + \mu_k c_i(x_k) \quad (23)$$

dove x_k è la soluzione del problema non vincolato al passo k (cioè $x_k = \arg \min \Phi_k(x)$). La variabile λ è una stima del moltiplicatore di Lagrange, e la precisione di tale stima migliora ad ogni iterazione. Il principale vantaggio del metodo è che, a differenza del metodo delle penalità, non è necessario far tendere $\mu \rightarrow \infty$ per risolvere il problema vincolato originale. Grazie alla presenza del termine del moltiplicatore di Lagrange, μ può rimanere molto più piccolo, evitando così problemi di cattivo condizionamento.

Tuttavia, nelle implementazioni pratiche è comune proiettare le stime dei moltiplicatori in un grande insieme limitato (“safeguards”), il che evita instabilità numeriche e porta a forti risultati teorici di convergenza.

Il metodo Lagrangiano aumentato potrebbe richiedere iterazioni aggiuntive, soprattutto se la mesh deformata diventa troppo distorta. A differenza del metodo classico, può essere applicato all'attrito da incollaggio, all'attrito scorrevole a un contatto senza attrito. Il

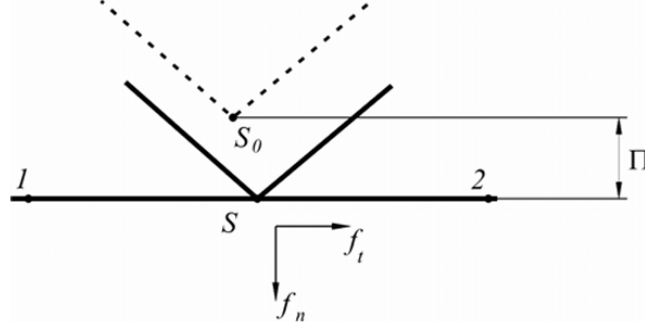


Figura 5: Elemento di contatto per il *Lagrange method*

problema di contatto implica la minimizzazione del potenziale Π e uguagliando a zero la seguente espressione:

$$\Pi(u, \Lambda) = \Pi_b(u) + \Lambda^T g + \frac{1}{2} g^T k g \quad (24)$$

dove

$$\Lambda^T = \left[\left\{ \begin{array}{c} \lambda_n^1 \\ \lambda_t^1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \lambda_n^2 \\ \lambda_t^2 \end{array} \right\} \cdots \left\{ \begin{array}{c} \lambda_n^k \\ \lambda_t^k \end{array} \right\} \right] \quad (25)$$

con:

- λ_n è il moltiplicatore di Lagrange per la direzione normale;
- λ_t è il moltiplicatore di Lagrange per la direzione tangenziale.

$$g = \left[\left\{ \begin{array}{c} g_n^1 \\ g_t^1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} g_n^2 \\ g_t^2 \end{array} \right\} \cdots \left\{ \begin{array}{c} g_n^k \\ g_t^k \end{array} \right\} \right] \quad (26)$$

MPC Algorithm

Nell'analisi agli elementi finiti bisogna avere familiarità con l'applicazione delle condizioni al contorno essenziali alla matrice di rigidezza e al vettore dei carichi. L'approssimazione agli elementi finiti di Galerkin per un problema lineare si riduce generalmente a trovare:

$$u \in X_g : \quad B(u, v) = L(v) \quad \forall v \in X_0, \quad (27)$$

dove X_g è l'insieme delle funzioni ammissibili e X_0 è lo spazio delle funzioni di prova. Il funzionale dei carichi L è assunto lineare, mentre la forma bilineare B può essere non simmetrica o indefinita.

Tipicamente, sia X_0 che X_g sono costruiti da un qualche spazio agli elementi finiti sottostante X , generato da funzioni di forma $\{\theta_k : k \in \mathcal{J}\}$, dove $\mathcal{J}$ indica i gradi di libertà, e X può essere scritto nella forma:

$$X = \{v : v = \theta^T x\} \quad (28)$$

dove θ è il vettore composto dalle funzioni base e x è il vettore dei coefficienti. Lo spazio X_0 deriva dai requisiti per cui le funzioni dello spazio originale X devono soddisfare i vincoli, i quali possono essere scritti come condizioni algebriche dei coefficienti nella forma:

$$Cx = 0 \quad (29)$$

dove C è la matrice dei vincoli. Ne risulta quindi:

$$X_0 = \{v : v = \theta^T x, Cx = 0\} = \text{Ker}(C) \quad (30)$$

L'insieme delle soluzioni X_g è definito in modo simile, ma può includere vincoli non omogenei sui coefficienti nella forma

$$Cx = g \quad (31)$$

in modo tale che:

$$X_g = \{v : v = \theta^T x, Cx = g\} \quad (32)$$

Sia $S = [B(\theta_j, \theta_k)]$ la matrice di rigidezza e $f = [L(\theta_k)]$ il vettore dei carichi. Un compito comune nell'analisi agli elementi finiti consiste nel modificare la matrice di rigidezza e il vettore dei carichi, ottenendo S' e f' , in modo che la soluzione x del sistema algebrico:

$$S'x = f' \quad (33)$$

corrisponda alla soluzione u del problema posto in essere.

Questo processo di modifica è semplice in molti casi, in particolare se i vincoli sono scritti nella forma:

$$x_C - Mx_F = g \quad (34)$$

Questo caso è stato menzionato da Fried^[23], e successivamente studiato in dettaglio da Abel e Shephard e da Curiskis e Valliappan^[24], dove vengono presentati algoritmi efficienti per applicare i vincoli a livello di elemento come parte del processo di assemblaggio sottoinsieme del metodo degli elementi finiti.

Tuttavia, alcuni tipi e combinazioni di vincoli possono presentare difficoltà. Ad esempio, come sottolineato da Akin^[25], casi in cui due vincoli coinvolgono lo stesso grado di libertà creano notevoli difficoltà, tanto che molti programmi non consentono tali casi come condizioni di input valide, nonostante tali situazioni sorgano piuttosto naturalmente nelle applicazioni.

Introduzione ai Cuscinetti

I cuscinetti costituiscono uno degli elementi fondamentali della meccanica applicata, essenziali per garantire il corretto funzionamento di sistemi rotanti o lineari. La loro funzione primaria è quella di sostenere carichi riducendo al minimo l'attrito tra due superfici in movimento relativo. In un sistema meccanico ideale, la trasmissione del moto dovrebbe avvenire con attrito nullo, ma nella realtà le interazioni tra le asperità superficiali e la deformazione dei materiali rendono inevitabile la presenza di resistenze interne. Il cuscinetto nasce quindi come soluzione ingegneristica per minimizzare tali perdite di energia e garantire un moto fluido, stabile e controllato.

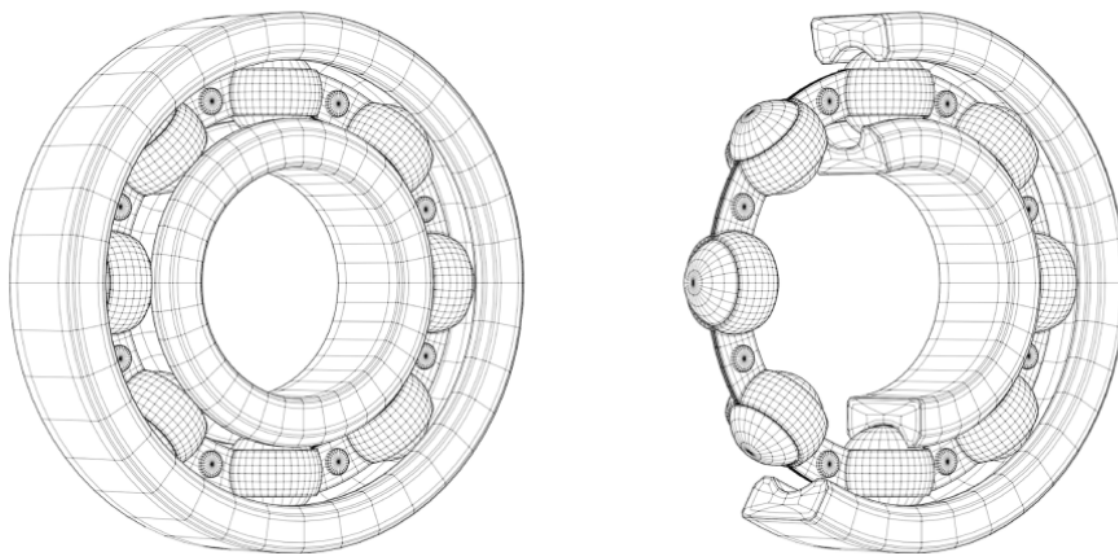


Figura 6: Assieme e sezione di un generico cuscinetto

Dal punto di vista fisico, il principio di funzionamento di un cuscinetto si basa sulla riduzione dell'attrito radente a favore di un attrito di tipo volvente o fluidodinamico. Quando due superfici metalliche sono in contatto diretto, l'attrito è generato dalle microasperità che si deformano plasticamente e producono calore; tale fenomeno, se non opportunamente controllato, conduce a un rapido degrado delle superfici e a un significativo spreco energetico. L'inserimento di un mezzo interposto, che sia un film di lubrificante o una serie di elementi volventi, consente di abbattere il coefficiente d'attrito da valori tipici di 0.3–0.6 a valori dell'ordine di 0.001–0.01, con un incremento notevole dell'efficienza complessiva del sistema.

L'analisi del comportamento dei cuscinetti implica una conoscenza approfondita della tribologia, la scienza che studia l'attrito, l'usura e la lubrificazione delle superfici a contatto. Un cuscinetto è infatti un sistema tribologico complesso in cui interagiscono materiali, lubrificante, geometria e condizioni operative. Il regime di lubrificazione rappresenta una variabile fondamentale: quando il film lubrificante è sufficiente a separare completamen-

te le superfici, si parla di *lubrificazione idrodinamica*, condizione ottimale in termini di efficienza e durata. Se invece il film si riduce fino a consentire un parziale contatto tra le asperità, si instaura una *lubrificazione mista* o *limite*, nella quale l'usura tende ad aumentare in modo esponenziale.

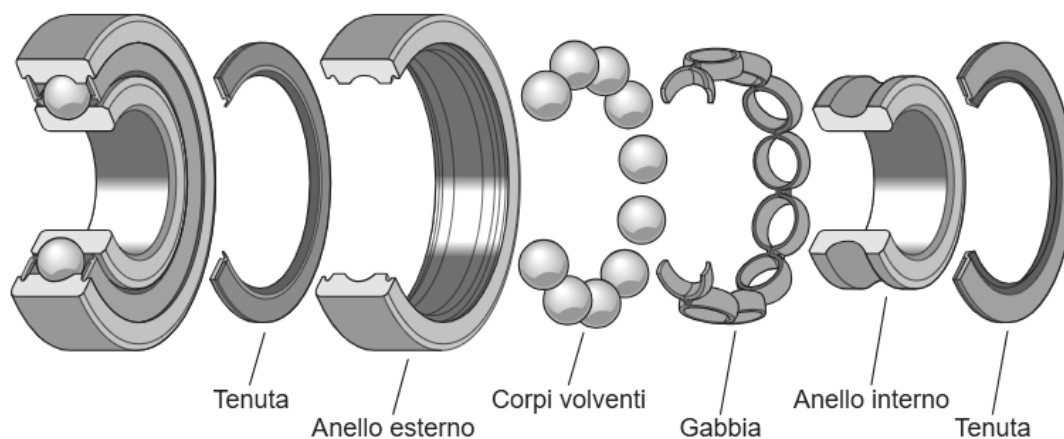


Figura 7: Esploso assometrico di un cuscinetto a sfere

Dal punto di vista costruttivo, un cuscinetto è composto da un corpo fisso (detto alloggiamento o supporto), da un elemento mobile (generalmente l'albero) e da un sistema di interfaccia che consente il moto relativo. Nei cuscinetti volventi, tale sistema è costituito da corpi rotolanti (sfere o rulli) che scorrono tra due piste opportunamente lavorate; nei cuscinetti radenti, invece, la separazione è affidata esclusivamente al film lubrificante, generato o mantenuto per via idrodinamica o idrostatica.

La progettazione di un cuscinetto richiede la valutazione simultanea di diversi fattori: carico statico e dinamico, velocità di rotazione, temperatura di esercizio, ambiente operativo e tipo di lubrificante. Il carico statico rappresenta la forza massima che può essere sostenuta senza deformazioni permanenti delle superfici di contatto, mentre il carico dinamico è quello che il cuscinetto può sopportare in rotazione per un determinato numero di cicli prima che insorgano fenomeni di fatica. Quest'ultima, dovuta alla ripetuta sollecitazione dei materiali, è una delle principali cause di cedimento dei cuscinetti e costituisce il parametro di riferimento per la determinazione della vita nominale.

La dissipazione di calore è un ulteriore aspetto cruciale. Durante il funzionamento, l'attrito residuo e la viscosità del lubrificante generano un riscaldamento che, se non smaltito efficacemente, può portare a deformazioni, perdita di viscosità e persino alla fusione locale del materiale. È quindi indispensabile garantire un equilibrio termico stabile attraverso la scelta adeguata del lubrificante, della geometria interna e, se necessario, di sistemi di raffreddamento esterni.

L'accuratezza di montaggio e il gioco interno sono parametri fondamentali per il corretto funzionamento. Un gioco eccessivo può causare vibrazioni, rumorosità e instabilità

del rotore, mentre un gioco troppo ridotto determina un incremento dell'attrito e del riscaldamento. La scelta ottimale dipende dalle tolleranze dimensionali, dalle dilatazioni termiche e dal tipo di carico applicato.

Dal punto di vista dei materiali, i cuscinetti impiegano acciai al cromo ad alta durezza per le piste e i corpi volventi, mentre le gabbie vengono realizzate in ottone, acciaio o polimeri tecnici. Nei cuscinetti a strisciamento si utilizzano leghe di bronzo, babbitt o compositi autolubrificanti. I trattamenti superficiali come nitrurazione, cementazione e rivestimenti a film sottile (DLC o TiN) consentono di aumentare la resistenza all'usura e ridurre il coefficiente d'attrito, migliorando significativamente la vita operativa.

In sintesi, il cuscinetto rappresenta l'espressione di un equilibrio tra esigenze contrastanti: da un lato la necessità di minimizzare l'attrito e le perdite energetiche, dall'altro quella di garantire rigidità, capacità di carico e durata. La comprensione dei principi di funzionamento, delle interazioni tribologiche e dei parametri di progetto costituisce il fondamento per la scelta e l'applicazione corretta di questo componente essenziale in qualunque sistema meccanico moderno.

Precarico nei cuscinetti

Il precarico nei cuscinetti a sfera rappresenta una delle variabili fondamentali nel progetto dei sistemi rotanti di precisione. Esso consiste nell'applicazione di una forza assiale iniziale tale da eliminare il gioco interno tra gli elementi volventi e le piste di rotolamento. L'obiettivo principale è garantire un comportamento cinematico stabile, riducendo le micro-oscillazioni dovute alla discontinuità del contatto e migliorando la rigidità complessiva dell'insieme. Dal punto di vista meccanico, il precarico impone una deformazione elastica controllata delle sfere e delle piste, generando uno stato di compressione permanente che influenza direttamente la distribuzione dei carichi e le caratteristiche di attrito.

Nei cuscinetti radiali a contatto angolare, il precarico è essenziale per assicurare la continuità del contatto su entrambi gli anelli, specialmente nei casi di accoppiamento in configurazione *back-to-back* o *face-to-face*. Il livello ottimale di precarico è determinato bilanciando la necessità di ridurre il gioco con la limitazione delle perdite per attrito e del riscaldamento interno. Un precarico eccessivo induce un incremento significativo delle deformazioni hertziane e un conseguente aumento della coppia di attrito, che può tradursi in un deterioramento precoce del lubrificante e in una riduzione della vita a fatica dell'elemento volvente. Al contrario, un precarico insufficiente lascia residui di gioco interno che causano vibrazioni torsionali, perdita di precisione e rumore operativo.

L'analisi del comportamento del cuscinetto precaricato può essere affrontata attraverso la teoria del contatto elastico di Hertz, considerando la relazione non lineare tra la forza assiale di precarico F_p e lo spostamento elastico assiale δ . Tale relazione segue approssimativamente la legge:

$$F_p = k\delta^{1.5} \quad (35)$$

dove k dipende dal raggio di curvatura delle piste, dal modulo elastico e dal numero di sfere in contatto. All'aumentare del precarico, la rigidezza assiale equivalente $K = dF_p/d\delta$ cresce in modo non lineare, conferendo al cuscinetto un comportamento progressivamente più rigido ma anche più dissipativo dal punto di vista energetico.

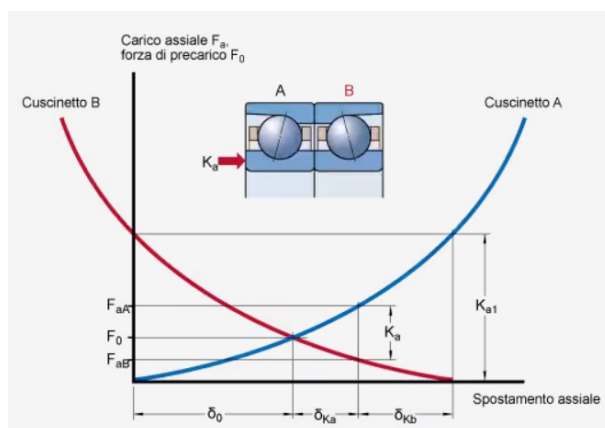


Figura 8: Andamento NON lineare della forza di precarico

L'influenza di un carico assiale esterno su un gruppo di cuscinetti precaricato è illustrata nel grafico soprastante. Le curve rappresentano le caratteristiche elastiche di due cuscinetti in una disposizione ad "O".

- La curva blu rappresenta il cuscinetto A , soggetto a una forza assiale esterna K_a .
- La curva rossa rappresenta il cuscinetto B , che viene scaricato dal carico assiale.

I due cuscinetti vengono precaricati dallo spostamento assiale δ_0 di un anello cuscinetto in relazione all'altro, che produce la forza di precarico F_0 , la quale agisce su entrambi i cuscinetti. Quando il cuscinetto A è soggetto a una forza assiale esterna K_a , il carico su questo cuscinetto aumenta fino a F_{aA} , mentre quello sul cuscinetto B diminuisce fino a F_{aB} . Lo spostamento assiale degli anelli del cuscinetto segue le curve della molla. δ_{Ka} è lo spostamento del gruppo di cuscinetti, mentre δ_{Kb} è il precarico residuo sul cuscinetto B .

Quando le forze assiali sul mandrino raggiungono la naturale forza di sollevamento K_{a1} , il cuscinetto B viene completamente scaricato. In questo caso, esiste il notevole rischio che le sfere scaricate smettano di ruotare e inizino a slittare. Se ciò accade, si verifica il cedimento prematuro del cuscinetto, indipendentemente dalla durata del fenomeno.

Dal punto di vista termico, il precarico influisce in modo marcato sul bilancio energetico del cuscinetto. L'incremento della coppia d'attrito M_f è funzione diretta del precarico e della velocità di rotazione, secondo la relazione empirica $M_f = M_0 + C_f F_p$, dove M_0 rappresenta la coppia di attrito a vuoto e C_f un coefficiente empirico legato al regime di lubrificazione. All'aumentare della temperatura, l'espansione termica differenziale tra gli anelli può modificare ulteriormente il valore effettivo del precarico, causando fenomeni di instabilità dimensionale se non correttamente compensati mediante accorgimenti progettuali, come spessori di regolazione o pre-carichi a molla.

Metodologie di applicazione del precarico

Le metodologie di applicazione del precarico si dividono in due categorie principali: *precarico fisso* e *precarico elastico*.

- Nel precarico fisso, la forza viene imposta meccanicamente tramite distanziali o accoppiamenti con interferenza e rimane costante entro limiti di temperatura definiti.
- Nel precarico elastico la forza è mantenuta tramite molle a tazza, rondelle Belleville o elementi elastomerici, consentendo una parziale compensazione delle variazioni termiche e dei cedimenti strutturali.

La scelta del metodo dipende dalla destinazione d'uso: nelle macchine utensili ad alta precisione si predilige il precarico fisso per la sua stabilità geometrica, mentre nei motori elettrici e negli azionamenti ad alta velocità si tende a utilizzare precarichi elastici per limitare le sollecitazioni dinamiche.

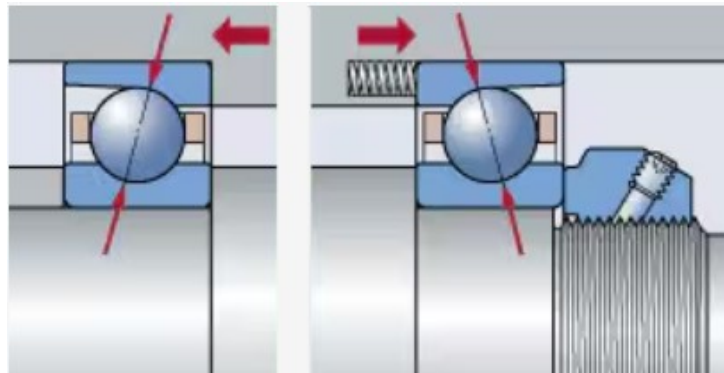


Figura 9: Applicazione meccanica del precarico

Un aspetto critico riguarda l'interazione tra precarico e lubrificazione. L'aumento della pressione di contatto dovuto al precarico modifica lo spessore del film lubrificante secondo la teoria elastoidrodinamica (EHL). Un film troppo sottile porta a contatti misti e a un incremento esponenziale del coefficiente d'attrito. Per questo motivo, il dimensionamento corretto del precarico deve sempre considerare il regime di lubrificazione previsto e la viscosità del lubrificante operativo.

Nel complesso, il precarico rappresenta una variabile di progetto ad alto impatto sul comportamento statico, dinamico e termico del cuscinetto. La sua ottimizzazione richiede un compromesso preciso tra rigidità, attrito, dissipazione termica e durata a fatica. L'impiego di modelli numerici basati su elementi finiti consente oggi di simulare accuratamente la distribuzione dei carichi interni, prevedere il comportamento dinamico in condizioni di servizio reali e ottimizzare il valore di precarico al fine di massimizzare la vita utile del sistema.

Tipologia di cuscinetti

La classificazione dei cuscinetti avviene in base al principio fisico su cui si fonda la riduzione dell'attrito, distinguendo due categorie principali: cuscinetti volventi e cuscinetti radenti (o a strisciamento). La classificazione dei cuscinetti avviene in base al principio fisico su cui si fonda la riduzione dell'attrito, distinguendo due categorie principali: cuscinetti volventi e cuscinetti radenti (o a strisciamento).

Cuscinetti radenti

I cuscinetti radenti, noti anche come cuscinetti a strisciamento, sono i più antichi nella storia della meccanica e operano basandosi sul contatto diretto tra le superfici del perno e della bronzina. La riduzione dell'attrito avviene grazie alla presenza di un film lubrificante che, a seconda delle condizioni operative, può instaurarsi in tre diversi regimi: secco, misto o fluido. Nel regime fluido, detto lubrificazione idrodinamica, il perno è completamente separato dalla bronzina da un sottile strato di fluido viscoso, generato dalla pressione idrodinamica dovuta al moto relativo; questo consente di ridurre l'usura quasi a zero. La lubrificazione idrostatica rappresenta una variante in cui la pressione del fluido è fornita da una sorgente esterna, garantendo la separazione delle superfici anche in condizioni di bassa velocità.

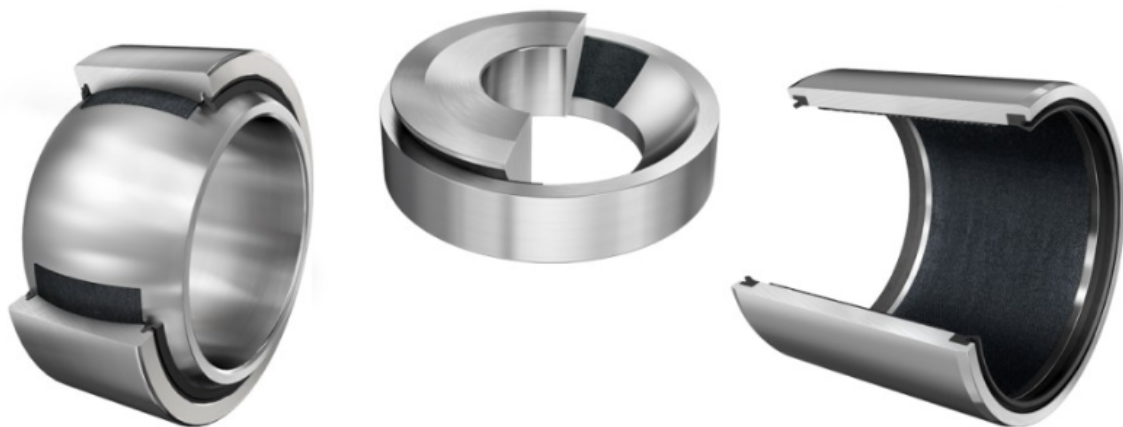


Figura 10: Generici cuscinetti radenti

I cuscinetti radenti vengono realizzati in materiali con ottime proprietà antifrizione, quali bronzo, ottone, ghisa antifrizione o leghe bianche a base di stagno e piombo (metalli antifrizione, come il babbitt). Le versioni moderne possono includere inserti in polimeri autolubrificanti o in materiali compositi rinforzati con fibre di PTFE o grafite. Questa tipologia risulta particolarmente adatta nei casi in cui si richieda silenziosità di funzionamento, capacità di sopportare carichi elevati e semplicità costruttiva, come nei motori a combustione interna o nelle turbine idrauliche. Tuttavia, il principale svantaggio risiede nella maggiore dissipazione energetica per attrito e nella necessità di una lubrificazione costante e accurata.

Cuscinetti volventi

I cuscinetti volventi rappresentano un'evoluzione tecnologica significativa rispetto a quelli radenti. In essi l'attrito di strisciamento è sostituito da attrito volvente, grazie all'interposizione di corpi volventi: sfere, rulli cilindrici, conici o a botte che scorrono tra due anelli concentrici: l'anello interno e quello esterno. Il principio di funzionamento si basa sulla riduzione della superficie di contatto e sulla trasformazione del moto relativo in rotolamento, riducendo così drasticamente l'energia dissipata.



Figura 11: Generici cuscinetti volventi

Dal punto di vista strutturale, un cuscinetto volvente è composto da quattro elementi fondamentali: gli anelli, i corpi volventi, la gabbia e, in alcuni casi, i sistemi di tenuta. La geometria dei corpi volventi costituisce il principale criterio di classificazione. I cuscinetti a sfere sono i più diffusi per la loro capacità di sostenere carichi combinati e per le ridotte tolleranze necessarie in fase di montaggio. All'interno di questa categoria rientrano i cuscinetti a sfere radiali, impiegati per carichi prevalentemente radiali, e quelli a contatto obliquo, progettati per sostenere carichi assiali in una o entrambe le direzioni, tipicamente usati nei mandrini di macchine utensili e nei motori elettrici ad alta velocità.

I cuscinetti a rulli cilindrici presentano una maggiore superficie di contatto lineare e risultano più idonei per carichi radiali elevati, pur non sopportando carichi assiali significativi. Diversamente, i cuscinetti a rulli conici permettono la trasmissione contemporanea di carichi radiali e assiali grazie all'inclinazione dell'asse dei rulli, trovando impiego in ambiti come i mozzi delle ruote dei veicoli o nelle scatole di trasmissione. I cuscinetti a rulli sferici, infine, sono progettati per tollerare disallineamenti angolari e vibrazioni, grazie alla superficie di rotolamento concava dell'anello esterno; essi vengono utilizzati in macchinari pesanti e in ambienti industriali gravosi, come acciaierie o impianti di frantumazione.

Un'ulteriore distinzione riguarda i cuscinetti assiali, destinati a sostenere esclusivamente carichi lungo l'asse di rotazione. Essi possono essere a sfere o a rulli e trovano applicazione in sistemi come compressori, pompe centrifughe e giunti rotanti. Nei casi in cui siano richieste alte velocità e basse perdite per attrito, si impiegano cuscinetti a contatto obliquo o a rulli conici di precisione, spesso lubrificati con grassi sintetici o oli a bassa viscosità.

Montaggio del cuscinetto

Il montaggio dei cuscinetti costituisce una fase cruciale nell'assemblaggio dei sistemi rotanti, in quanto da esso dipendono le prestazioni funzionali, la durata e la stabilità dinamica dell'organo meccanico. Ogni operazione di installazione deve essere eseguita nel pieno rispetto delle tolleranze dimensionali e geometriche previste dal progetto, poiché anche minime deviazioni possono generare disallineamenti, variazioni del gioco interno e carichi residui che compromettono l'affidabilità complessiva del sistema. L'obiettivo primario è ottenere un accoppiamento corretto tra l'anello del cuscinetto e il suo alloggiamento o albero, evitando deformazioni indesiderate e garantendo un contatto omogeneo lungo le piste di rotolamento.

Dal punto di vista meccanico, l'installazione di un cuscinetto implica la scelta tra un accoppiamento radente o interferente. Quest'ultimo, più comune negli accoppiamenti con l'albero, assicura la stabilità del componente durante il funzionamento ad alta velocità o sotto carichi alternati. Tuttavia, l'interferenza deve essere calcolata con precisione: un valore eccessivo riduce il gioco interno del cuscinetto, aumentando l'attrito e la temperatura di esercizio, mentre un'interferenza insufficiente può provocare micro-movimenti che inducono usura per fretting. Le norme ISO 286-1 e ISO 492 forniscono i criteri di scelta per gli accoppiamenti tra anello e sede, in relazione alla classe di tolleranza e alla tipologia di carico prevalente.

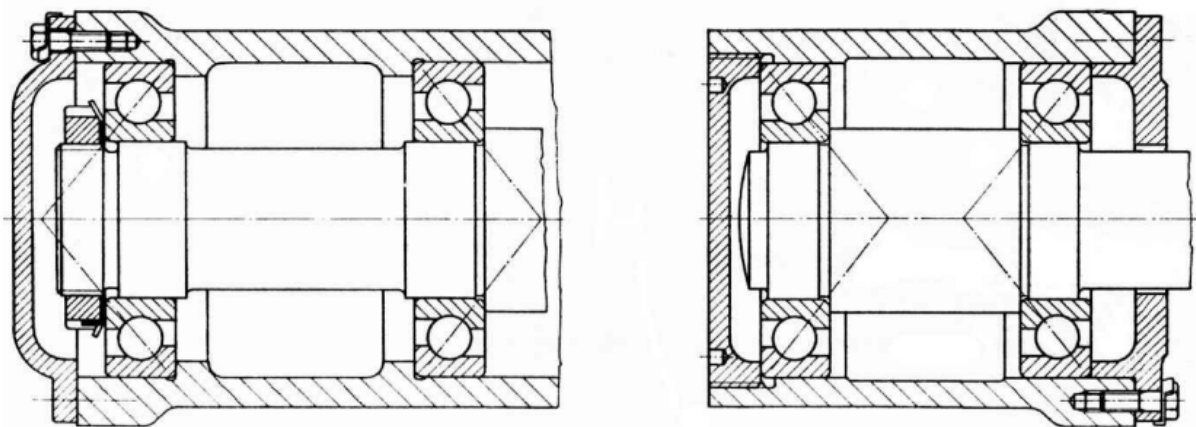


Figura 12: Montaggio di un cuscinetto duplex ad O (sinistra) e X (destra)

Oltre alla modalità di inserimento, un aspetto di primaria importanza è la configurazione di montaggio dei cuscinetti accoppiati, impiegata nei sistemi che richiedono il supporto assiale in entrambe le direzioni o un'elevata rigidità. I cuscinetti a contatto angolare e quelli a rulli conici, in particolare, vengono spesso installati in coppia secondo tre schemi principali: back-to-back (O), face-to-face (X) e tandem (T).

Nel montaggio back-to-back, o configurazione a “O”, gli assi dei carichi di contatto dei due cuscinetti divergono verso l'esterno rispetto all'asse centrale. Questa disposizione offre una notevole rigidità assiale e momentanea, poiché le linee di azione dei carichi generano un ampio momento resistente. È particolarmente indicata per applicazioni in cui si verificano carichi radiali combinati a momenti ribaltanti, come nei mandrini di macchine utensili o nei mozzi di ruote automobilistiche. Inoltre, la configurazione back-to-back garantisce un miglior comportamento termico, poiché le dilatazioni degli anelli tendono a compensarsi, mantenendo stabile il precarico.

La configurazione face-to-face, o montaggio a “X”, prevede invece che le linee di azione dei carichi si incrocino verso l'interno del sistema. Questo schema offre una maggiore capacità di compensare disallineamenti angolari tra albero e sede, a discapito però della rigidità complessiva, che risulta inferiore rispetto al montaggio a “O”. È una soluzione frequentemente adottata in meccanismi che richiedono un'elevata precisione di rotazione ma che non sono soggetti a carichi ribaltanti significativi, come nei motori elettrici o nei riduttori di piccole dimensioni. Dal punto di vista termico, questa configurazione tende a ridurre la variazione del gioco assiale dovuta alla dilatazione, rendendola vantaggiosa in ambienti con forti variazioni di temperatura.

La disposizione tandem, o “in serie”, consiste invece nel montare due cuscinetti con le linee di carico orientate nella stessa direzione. In questo modo entrambi i cuscinetti condividono il carico assiale, raddoppiandone la capacità in un solo verso. Per equilibrare i carichi in entrambe le direzioni, si impiega generalmente un secondo gruppo montato in senso opposto. Tale configurazione è tipica nei sistemi ad alta velocità o nei meccanismi in cui i carichi assiali sono unidirezionali, come nelle pompe centrifughe o nei compressori assiali. La ripartizione del precarico tra i cuscinetti tandem deve essere attentamente controllata per evitare che uno dei due sopporti un carico eccessivo, con conseguente usura prematura.

In tutte le configurazioni, il precarico rappresenta un parametro fondamentale. Esso elimina il gioco interno e aumenta la rigidità del sistema, ma deve essere applicato con estrema precisione per non compromettere la durata dei cuscinetti. Il precarico può essere ottenuto mediante distanziali calibrati, molle a tazza o regolazioni micrometriche, a seconda del tipo di macchina e della classe di precisione richiesta. La distribuzione uniforme del precarico assicura che il carico sia equamente ripartito tra i due cuscinetti, riducendo vibrazioni e rumorosità in esercizio.

Il controllo post-montaggio riveste un'importanza pari a quella dell'installazione stessa. Dopo il montaggio, è necessario verificare la libertà di rotazione, la regolarità di movimento e l'assenza di gioco anomalo, utilizzando strumenti metrologici quali comparatori o sensori di vibrazione. Nei sistemi ad alta precisione, la misura del momento di avviamento e la verifica termica in fase di rodaggio consentono di valutare la corretta distribuzione dei carichi interni e la qualità del montaggio. Una lubrificazione adeguata, infine, contribuisce a stabilizzare il precarico e a garantire la costanza delle prestazioni nel tempo.

Le modalità di montaggio variano in funzione delle dimensioni e della tipologia del cuscinetto. Nei cuscinetti di piccole e medie dimensioni, il montaggio a freddo è quello più diffuso: l'anello viene inserito mediante pressione meccanica o idraulica, impiegando bussole di montaggio che trasmettono uniformemente la forza. È essenziale che la pressione agisca esclusivamente sull'anello da montare, poiché sollecitare quello opposto comporterebbe danni ai corpi volventi o alle piste di rotolamento. Per i cuscinetti di grandi dimensioni o con accoppiamento fortemente interferente, si preferisce il montaggio a caldo, sfruttando la dilatazione termica dell'anello interno ottenuta mediante riscaldamento controllato (80–120 °C). Tale procedura, spesso realizzata con riscaldatori a induzione, consente di evitare stress meccanici e garantisce un bloccaggio omogeneo durante il raffreddamento. In applicazioni di precisione, come turbine e generatori, si utilizzano anche tecniche a pressione idraulica, in cui un fluido pressurizzato facilita l'inserimento riducendo l'attrito tra le superfici.

In conclusione, il montaggio dei cuscinetti, sia singoli che accoppiati, è un processo complesso che richiede un approccio scientifico e metodico. La corretta scelta della configurazione, dell'interferenza e della procedura di assemblaggio determina non solo l'efficienza e la durata del cuscinetto, ma anche il comportamento dinamico dell'intero sistema meccanico. Una realizzazione accurata, supportata da controlli metrologici e da una gestione termica e lubrificante appropriata, rappresenta il presupposto essenziale per ottenere affidabilità e prestazioni elevate nei moderni sistemi rotanti.

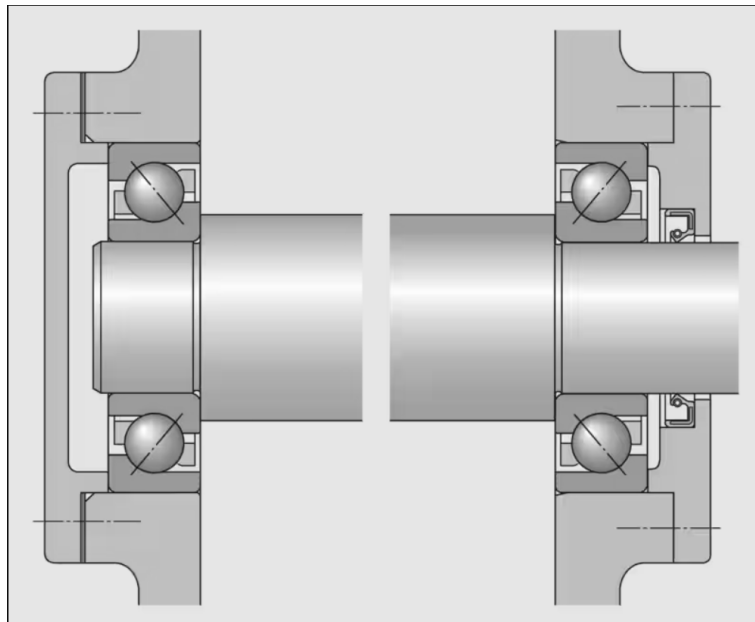


Figura 13: Generico montaggio di un cuscinetto

Simulazioni Numeriche

Definizione della geometria

Le simulazioni numeriche sono state svolte prendendo come riferimento il cuscinetto 7303 BEP dal manuale SKF. Si tratta di un cuscinetto obliquo a una corona di 9 sfere.

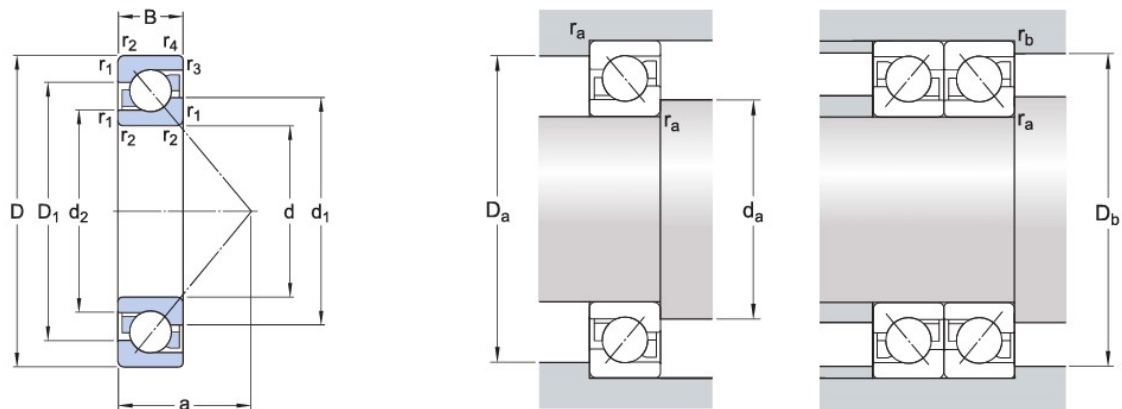


Figura 14: Specifiche del cuscinetto 7303 BEP

Di seguito vengono riportate le specifiche relative alla geometria del cuscinetto:

Simbolo	Valore	Descrizione
d	17 mm	Diametro foro
D	47 mm	Diametro esterno
B	14 mm	Larghezza
d_1	≈ 28.6 mm	Diametro spallamento anello interno (facciata laterale larga)
d_2	≈ 22.82 mm	Diametro spallamento anello interno (facciata laterale piccola)
D_1	≈ 36.2 mm	Diametro spallamento anello esterno (facciata laterale larga)
a	20.4 mm	Distanza tra facciata laterale e punto di pressione
$r_{1,2}$	min. 1 mm	Dimensioni del raccordo
$r_{3,4}$	min. 0.6 mm	Dimensioni del raccordo

Specifiche relative allo spallamento corrispondente:

Simbolo	Valore	Descrizione
d_a	min. 22.6 mm	Diametro spallamento albero
D_a	max. 41.4 mm	Diametro spallamento alloggiamento
D_b	max. 42.8 mm	Diametro spallamento alloggiamento
r_a	max. 1 mm	Raggio del raccordo
r_b	max. 0.6 mm	Raggio del raccordo

Costruzione del CAD

Dal sito della SKF è stato reperito il modello CAD del cuscinetto selezionato, dal quale è stato estratto un singolo spicchio destinato all'analisi mediante simulazione FEM.

Lo studio di uno spicchio di cuscinetto, anziché dell'intero componente, risulta vantaggioso poiché consente di sfruttare la simmetria geometrica e di carico tipica di questi sistemi. In presenza di configurazioni assiali o radiali simmetriche, le condizioni di pressione e deformazione si ripetono in modo identico lungo tutto il cuscinetto. L'analisi di una porzione rappresentativa permette quindi di ottenere risultati validi per l'intera struttura, riducendo la complessità del problema e i tempi di calcolo. Inoltre, le condizioni al contorno risultano più semplici da definire, potendo imporre sui piani di simmetria condizioni di simmetria o di periodicità.

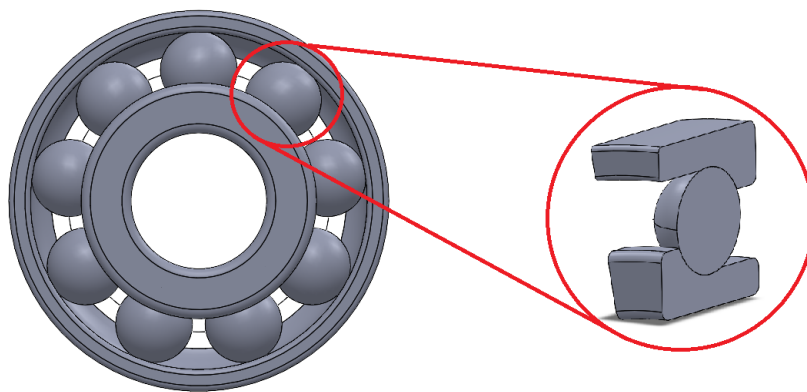


Figura 15: Estrazione di uno spicchio dal cuscinetto

Attraverso il comando *Specchia* di *SolidWorks* è possibile ricreare una configurazione a O di cuscinetto duplex. Il precarico può essere modellato imponendo un opportuno coefficiente di espansione termica ortotropo lungo le piste inferiori dei cuscinetti e, applicando un gradiente di temperatura negativo. In questo modo risulta possibile generare una distanza fittizia tra i due cuscinetti, evitando il contatto diretto e consentendo di simulare in modo controllato l'effetto del precarico.

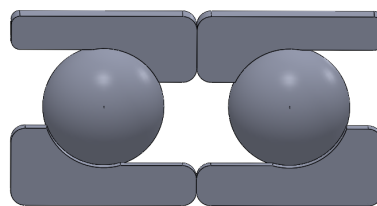


Figura 16: Spicchio di cuscinetto specchiato

A causa della geometria del cuscinetto, questa modellazione del precarico è risultata infruttuosa. Per questo motivo si è scelto di applicare un taglio a estrusione di 5 μm lungo la pista inferiore dello spicchio prima di specchiarlo, al fine di modellare geometricamente un precarico di 10 μm . In tutta la trattazione che segue questa geometria risulterà inalterata.

Creazione del FEM

Per la creazione del FEM si è scelto di usare il software di calcolo numerico Ansys Mechanical APDL, una volta estratto il file *parasolid* (.x_t). Dato che il CAD di partenza lavora con il sistema internazionale, l'unità di misura per le lunghezze risulta essere il metro. Uno *step* fondamentale prima della costruzione della *mesh* consiste nello scalare il CAD 1 000 000 di volte, al fine lavorare con i micrometri come unità di misura.

Svolgere questa operazione comporta una serie di benefici sulla convergenza numerica e sull'accuratezza della soluzione.

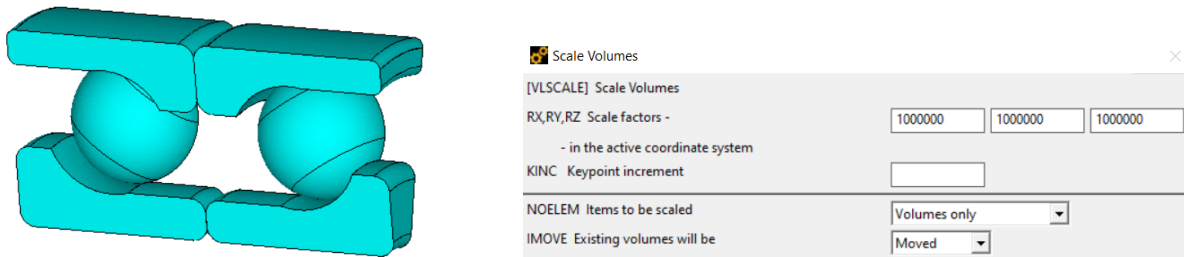


Figura 17: Scalatura del CAD

Analisi preliminare per la creazione della Mesh

Per costruire la *mesh* sono stati svolti dei calcoli preliminari, al fine di individuare l'ordine di grandezza del semiasse maggiore dell'ellisse di contatto. Attraverso un codice Matlab è stato possibile ricostruire la teoria del contatto Hertziano inserendo i valori di geometria e materiali di sfera e pista.

Dalle specifiche tecniche si ricavano i seguenti valori geometrici:

- Diametro della sfera pari a $D_b = 8.5$ mm, corrispondente a un raggio $R_b = 4.25$ mm
- Diametro di curvatura pari a $D_g = 8.7$ mm, equivalente a un raggio $R_g = 4.35$ mm.

Poiché la pista è di tipo concavo, il suo raggio di curvatura entra nel calcolo della curvatura relativa con segno negativo. Entrambi i componenti sono realizzati in acciaio, caratterizzato da modulo di Young $E = 210$ GPa e coefficiente di Poisson $\nu = 0.30$.

Il modulo elastico equivalente del contatto è pertanto definito come:

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu^2}{E} + \frac{1 - \nu^2}{E}$$

da cui si ottiene:

$$E^* = \frac{E}{2(1 - \nu^2)} \approx 1.15 \times 10^{11} \text{ Pa}$$

Il raggio di curvatura equivalente del contatto tra una sfera e una superficie sferica concava è espresso dalla relazione:

$$\frac{1}{R^*} = \frac{1}{R_b} - \frac{1}{R_g}$$

La sostituzione dei valori numerici porta a un raggio equivalente pari a:

$$R^* \approx 0.185 \text{ m}$$

Tale valore, nettamente superiore ai raggi geometrici dei singoli corpi, evidenzia la natura quasi-conforme del contatto, tipica delle configurazioni sfera-gola.

Secondo la formulazione hertziana, il raggio dell'impronta di contatto a , la forza normale F e la pressione massima di contatto p_0 sono legati allo spostamento normale δ dalle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{R^* \delta} \\ F &= \frac{4}{3} E^* \sqrt{R^*} \delta^{3/2} \\ p_0 &= \frac{3F}{2\pi a^2} \end{aligned}$$

Il calcolo è stato effettuato imponendo tre diversi valori di spostamento normale, pari rispettivamente a $5 \mu\text{m}$, $10 \mu\text{m}$ e $20 \mu\text{m}$. I risultati ottenuti in termini di raggio dell'impronta di contatto, forza normale e pressione massima sono riportati in tabella.

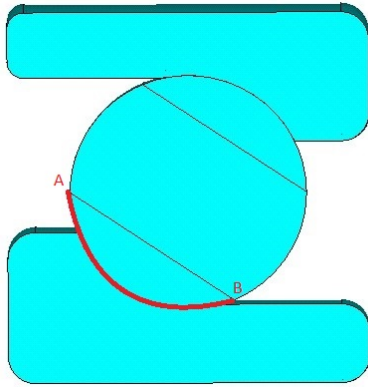
δ [μm]	a [mm]	F [N]	p_0 [MPa]
5	0.96	740	382
10	1.36	2090	540
20	1.92	5920	764

Tabella 1: Risultati del calcolo hertziano per il contatto sfera-pista in acciaio

Dall'analisi emerge come l'aumento dello spostamento normale comporti una crescita non lineare della forza di contatto e della pressione massima, coerentemente con le leggi di scala della teoria di Hertz. La presenza di una geometria quasi-conforme determina impronte di contatto relativamente estese e valori di pressione inferiori rispetto a un contatto sfera-piano, pur mantenendo livelli di tensione rilevanti dal punto di vista della fatica da contatto.

Costruzione della Mesh

Prima di costruire la *mesh* bisogna individuare la lunghezza di un arco in contatto con la pista, conoscendo la lunghezza della corda e il diametro del cerchio. Il problema viene risolto mediante il calcolo dell'angolo al centro e la successiva applicazione della definizione di arco circolare.



Sono noti i seguenti parametri geometrici:

- Diametro del cerchio: $D = 8,5$ mm
- Raggio del cerchio: $R = \frac{D}{2} = 4,25$ mm
- Lunghezza della corda: $AB = 7,0675$ mm

Figura 18: Rappresentazione geometrica dell'arco di cerchio

La relazione tra la lunghezza della corda c e l'angolo al centro θ è data da:

$$c = 2R \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (36)$$

Da cui:

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{c}{2R} = \frac{7.0675}{8.5} = 0.8315 \quad (37)$$

Applicando la funzione inversa:

$$\frac{\theta}{2} = \arcsin(0.8315) = 56.25^\circ \quad (38)$$

Pertanto:

$$\theta = 112.5^\circ = 1.9635 \text{ rad} \quad (39)$$

La lunghezza dell'arco s è data da:

$$s = R \cdot \theta \quad (40)$$

Sostituendo i valori notivieni ricavata la lunghezza dell'arco di cerchio:

$$s = 4.25 \times 1.9635 = 8,345 \text{ mm} \quad (41)$$

La discretizzazione della linea di *mesh* deve pertanto essere costruita imponendo che la dimensione caratteristica degli elementi sia significativamente inferiore alla semiampiezza locale dell'ellisse di contatto, al fine di garantire una corretta rappresentazione della distribuzione delle grandezze di contatto.

Si introduce quindi una lunghezza caratteristica di discretizzazione ℓ_c , definita come una frazione dell'ampiezza della semiellisse, nella forma

$$\ell_c = \alpha \min(a, b), \quad (42)$$

dove il parametro adimensionale α controlla il livello di raffinamento della *mesh* e viene scelto in funzione dell'accuratezza richiesta e della stabilità numerica del metodo adottato. La suddivisione delle linee di mesh è allora ottenuta imponendo che la lunghezza di ciascun segmento Δs soddisfi la condizione

$$\Delta s \leq \beta L(s), \quad (43)$$

dove β è un ulteriore coefficiente di sicurezza numerica che garantisce una risoluzione adeguata dei gradienti locali.

Poiché la distribuzione delle pressioni di contatto presenta un andamento non uniforme con forti variazioni in prossimità del bordo dell'ellisse, la suddivisione risultante è intrinsecamente non uniforme. In particolare, una maggiore densità di nodi è naturalmente richiesta nelle regioni prossime al contorno della semiellisse, dove la derivata spaziale delle grandezze di contatto tende a divergere.

Lo studio proposto in seguito analizza il comportamento del cuscinetto in funzione dello spostamento assiale, pertanto, bisogna prevedere lo spostamento delle linee dei contatti. Queste considerazioni confluiscono in una suddivisione uniforme dell'arco di cerchio.

Il criterio proposto assicura che la discretizzazione delle linee di *mesh* sia direttamente correlata alla geometria effettiva della regione di contatto e alla sua estensione ellittica. Ne consegue una rappresentazione numerica più accurata delle forze di contatto e delle tensioni indotte, con un miglior compromesso tra precisione e costo computazionale rispetto a strategie di discretizzazione uniformi o puramente geometriche.

Nello studio che segue si tiene conto della rotazione della linea dei contatti con l'aumentare dello sforzo assiale e, da questo segue uno spostamento dell'ellisse di contatto. Per evitare problemi di natura numerica si è scelto di suddividere le linee delle superfici di contatto in modo uniforme partendo dal caso più restrittivo di contatto a 1 μm a cui corrisponde una semiapertura di contatto, calcolata analiticamente, pari a 0.96 mm .

Si è scelto di utilizzare i seguenti coefficienti per suddividere le linee di contatto:

$$\alpha = 0.4 \quad (44)$$

$$\beta = 0.5 \quad (45)$$

In conclusione, le considerazioni effettuate portano alla seguente suddivisione:

$$\Delta s = \frac{s}{a \cdot \alpha \cdot \beta} = \frac{8.345}{0.96 \cdot 0.5 \cdot 0.4} \approx 40 \quad (46)$$

Di seguito viene mostrata a schermo la suddivisione effettuata:

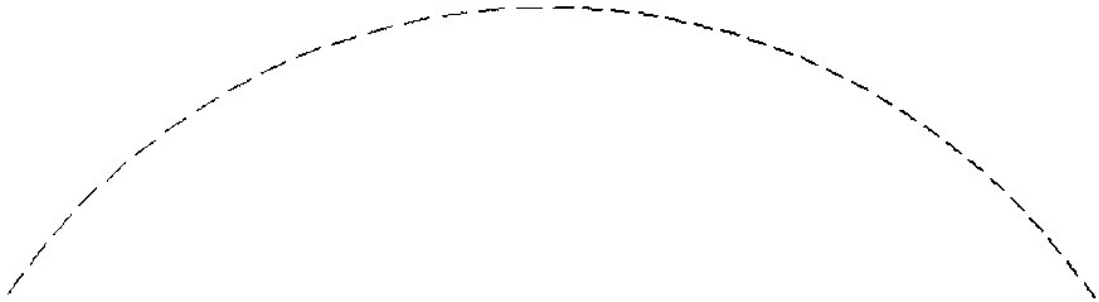


Figura 19: Suddivisione della linea di contatto

Data la simmetria del contatto, si è scelto di usare la stessa suddivisione per le piste superiori e inferiori di ambedue i cuscinetti. La suddivisione finale di tutte le linee risulta essere la seguente:

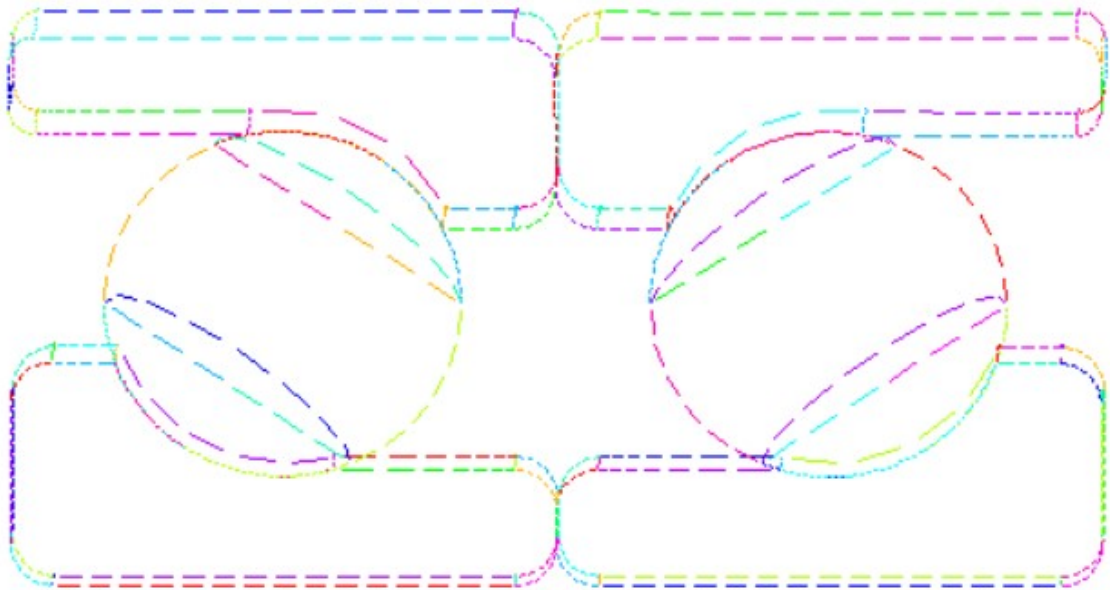


Figura 20: Suddivisione delle linee del modello

Per creazione la *mesh* è necessario specificare le tipologie di elementi usati nel modello :

- **MESH200** con $K1 = \text{QUAD}$ (*4-nodes*) definisce connettività, orientamento e dimensione della *mesh* su superfici, ma non partecipa alla soluzione FEM. È impiegato come *mesh carrier* per successiva estrusione/*sweep* verso elementi solidi. I *quad* a 4 nodi sono lineari e non influiscono sull'accuratezza numerica.
- **SOLID186** è un elemento strutturale 3D a 20 nodi quadratici, con formulazione isoparametrica. Supporta grandi deformazioni, plasticità e comportamento non lineare. È impiegato per analisi strutturali ad alta accuratezza (*stress/strain*).

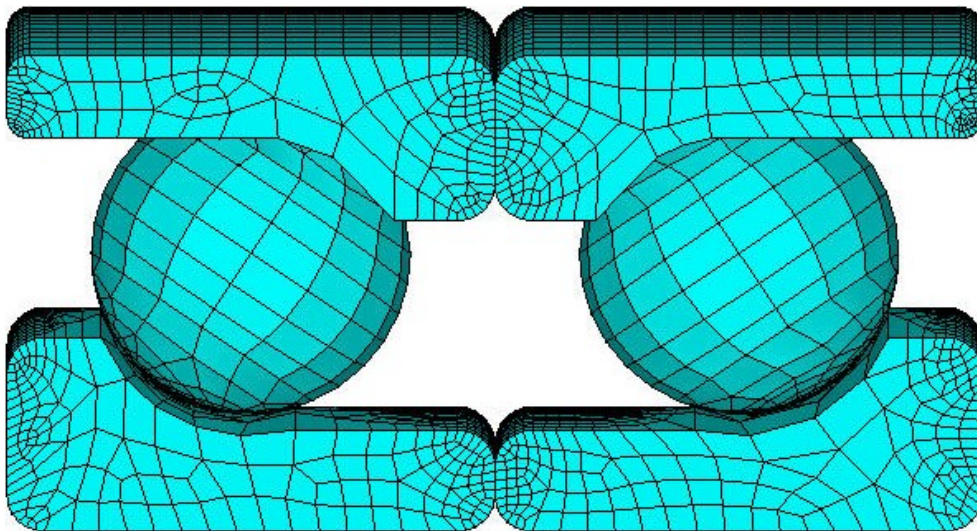


Figura 21: Fronte della *mesh* del cuscinetto

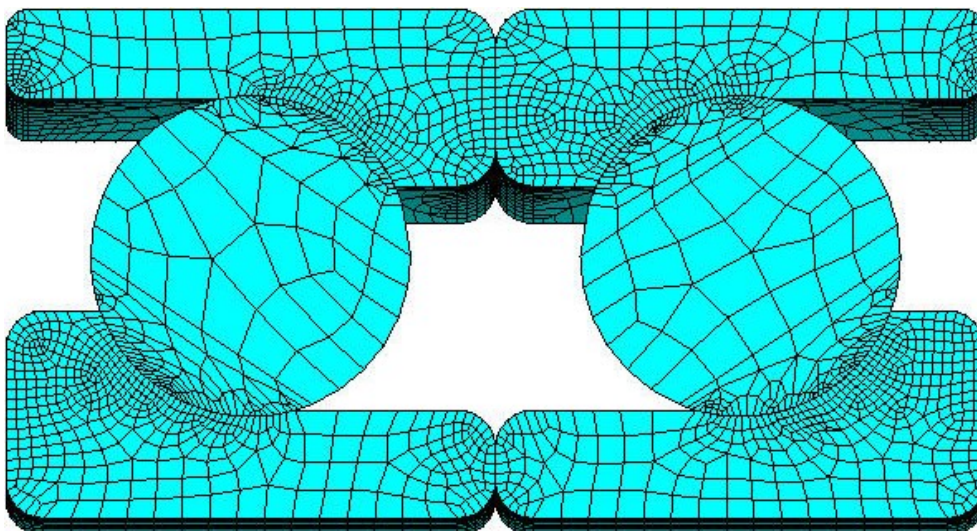


Figura 22: Retro della *mesh* del cuscinetto

Applicazione del contatto

Il contatto viene applicato attraverso l'utilizzo del comando *Contact Wizard* all'interno della sezione *Contact Pair* di Ansys Mechanical APDL. I due spicchi di cuscinetto sono due corpi distinti e, vengono messi in contatto in seguito all'applicazione del carico assiale.

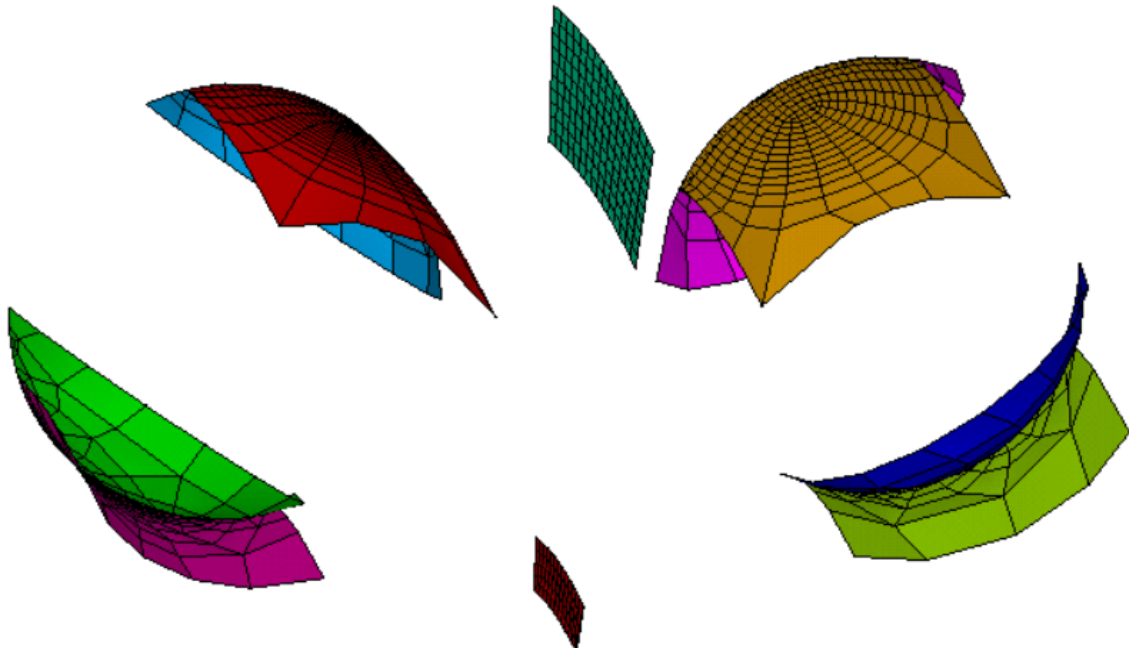


Figura 23: Rappresentazione grafica dei contatti nel modello FEM

Prima di quest'ultimo è presente un semplice contatto puntuale lungo le piste superiori dei cuscinetti (data la presenza di un *gap* tra le piste inferiori). Ne segue la necessità di modellare 6 regioni di contatto: 2 per ogni sfera, riferite rispettivamente alle piste superiori e inferiori, una tra le piste superiori e una tra quelle inferiori dei due cuscinetti.

ID	Contact Behavior	Target	Contact	Pilot Node	Pilot Name
3	Standard	Flexible	Surface-to-Surface	No pilot	
4	Standard	Flexible	Surface-to-Surface	No pilot	
5	Standard	Flexible	Surface-to-Surface	No pilot	
6	Standard	Flexible	Surface-to-Surface	No pilot	
7	Standard	Flexible	Surface-to-Surface	No pilot	
8	Standard	Flexible	Surface-to-Surface	No pilot	

Figura 24: Contatti del modello FEM

Tutti i contatti sono stati modellati usando come algoritmo di calcolo il *Lagrangian Augmented Method*. Nell'ultimo contatto, tra le piste inferiori, viene specificata la presenza del *gap* attraverso il comando *Automatic Contact Adjustment*.

Applicazione di vincoli e carichi

L'obiettivo consiste nello studio di un cuscinetto duplex sottoposto a precarico. Dato il montaggio ad O del cuscinetto, è stato realizzato un gap geometrico di 10 micron lungo la pista inferiore del cuscinetto al fine di rappresentare il precarico.

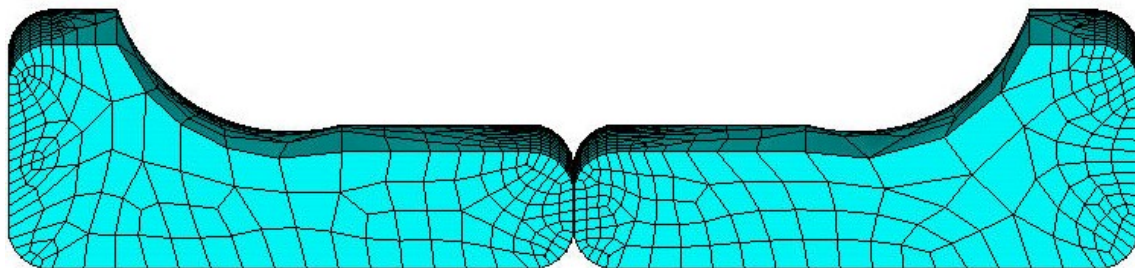


Figura 25: Piste inferiori dei cuscinetti

Di seguito, viene vincolato assialmente un'estremità del cuscinetto mentre la parte opposta viene spinta gradualmente fino alla chiusura completa del *gap* e ancora oltre.

Fintanto che il *gap* lungo la pista inferiore risulta chiuso, il contatto si scarica totalmente lungo la linea di contatto delle sfere. Continuando a spingere, una volta chiuso il *gap*, il contatto si scarica principalmente lungo le piste (che presentano una maggiore rigidità) e, solo una minima parte viene scaricata lungo le sfere poste in contatto.

Le superfici superiori della pista esterna, colorate in rosso, vengono vincolate radialmente mentre le superfici laterali di ambedue le piste e delle sfere, colorate in giallo, vengono vincolate lungo la direzione circonferenziale. Il tutto viene fatto al fine di rispettare le ipotesi di simmetria assiale.

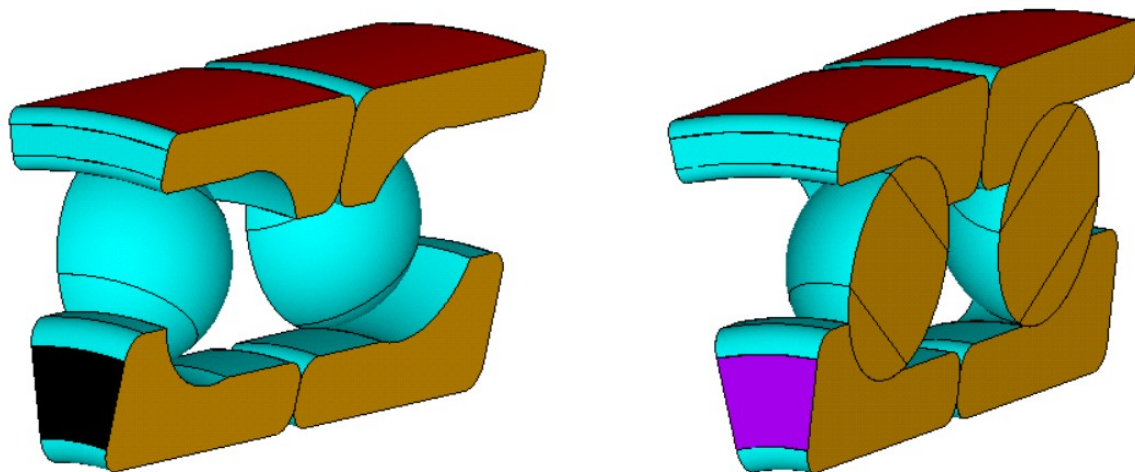


Figura 26: Applicazione di vincoli e carichi al modello FEM

La superficie colorata in nero viene vincolata lungo la direzione assiale mentre su quella opposta, in viola, viene applicato un valore di carico espresso in termini di spostamento nel verso positivo dell'asse Z. In particolare, vengono analizzati i seguenti spostamenti:

| 1 μm | 5 μm | 10 μm | 15 μm | 20 μm | 30 μm | 40 μm | 50 μm | 100 μm |

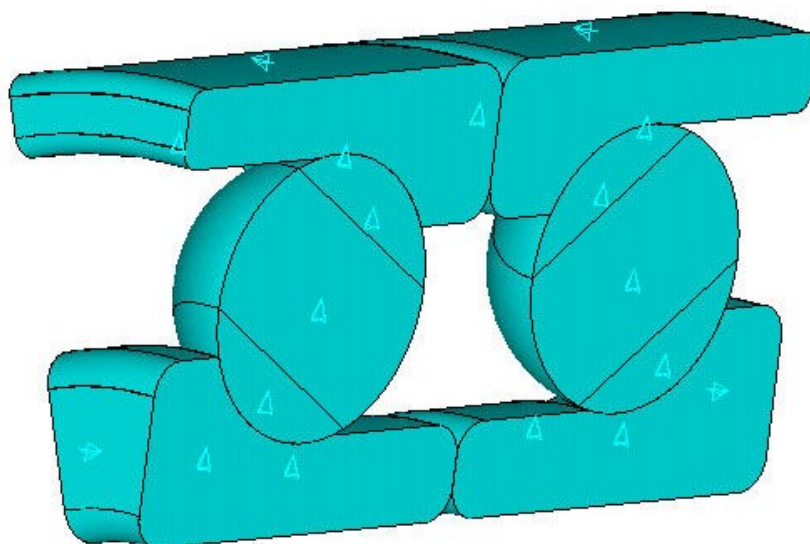


Figura 27: Applicazione dei vincoli e dei carichi su *ANSYS*

Il modello prevede l'impiego di un sistema di riferimento cilindrico ($CSYS=1$) e, anche se carichi e vincoli vengono applicate alle aree, in fase di risoluzione questi vengono ruotati:

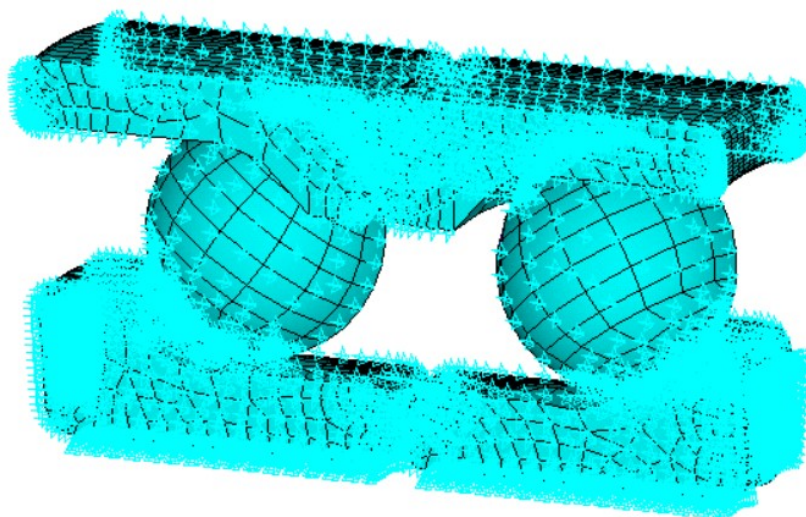
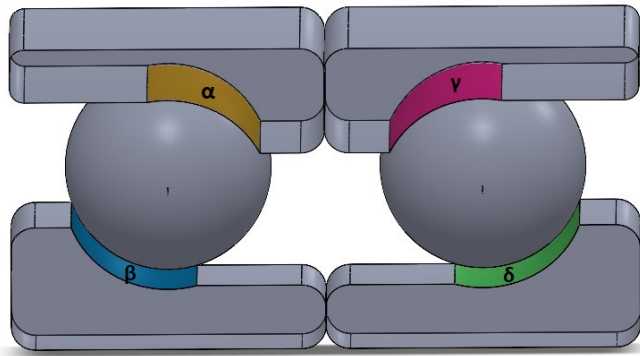


Figura 28: Applicazione dei vincoli e dei carichi sui nodi del modello

Risultati del modello numerico

Prima di introdurre i risultati numerici occorre introdurre una nomenclatura specifica in riferimento alle superfici del cuscinetto analizzate in questo studio. In particolare, con le lettere greche vengono indicate le superfici interessate dal contatto:



- α : Pista SUP del 1° cuscinetto
- β : Pista INF del 1° cuscinetto
- γ : Pista SUP del 2° cuscinetto
- δ : Pista INF del 2° cuscinetto

Figura 29: Superfici di contatto

Con le lettere romane sono indicate le superfici da cui vengono estratte le reazioni vincolari. Queste risultano essenziali per esprimere le percentuali di carico che si scaricano lungo la pista.

- A: Laterare inferiore sinistro
- B: Interfaccia piste superiori
- C: Interfaccia piste inferiori
- D: Laterare inferiore destro

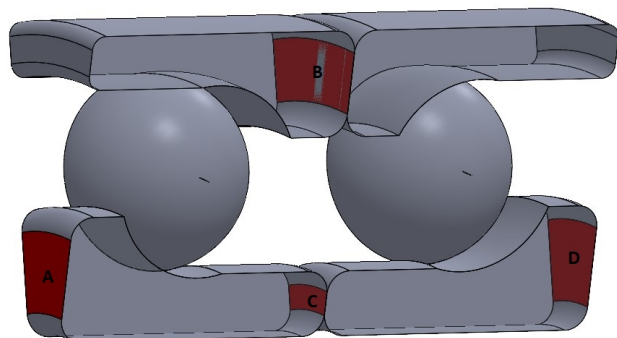
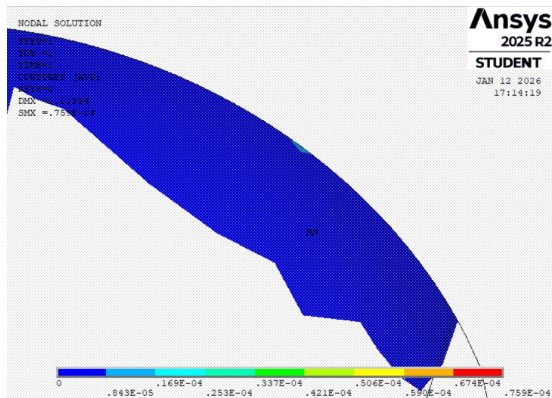


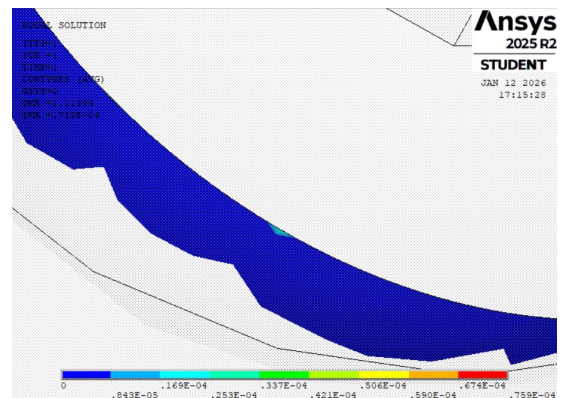
Figura 30: Superfici delle reazioni nodali

Sono state svolte diverse simulazioni numeriche mediante il software *ANSYS Mechanical APDL*. Di seguito vengono mostrati i risultati ottenuti per diversi valori di spostamento imposto nella direzione normale della superficie D.

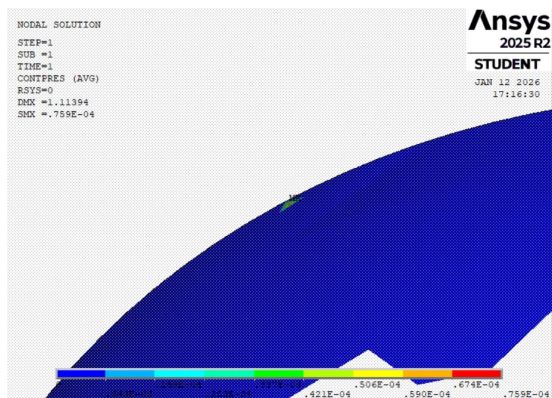
Risultati numerici per uno spessore di 1 μm :



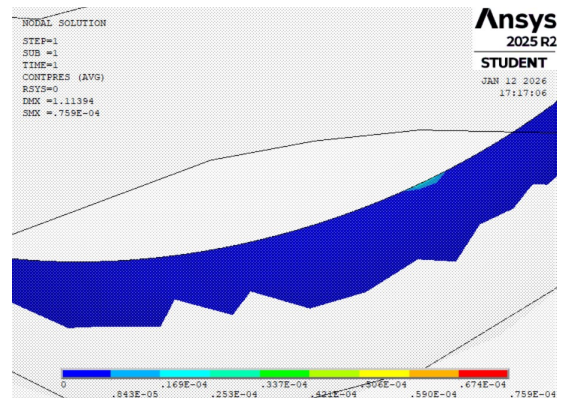
(a) Contatto α - Spostamento 1 μm



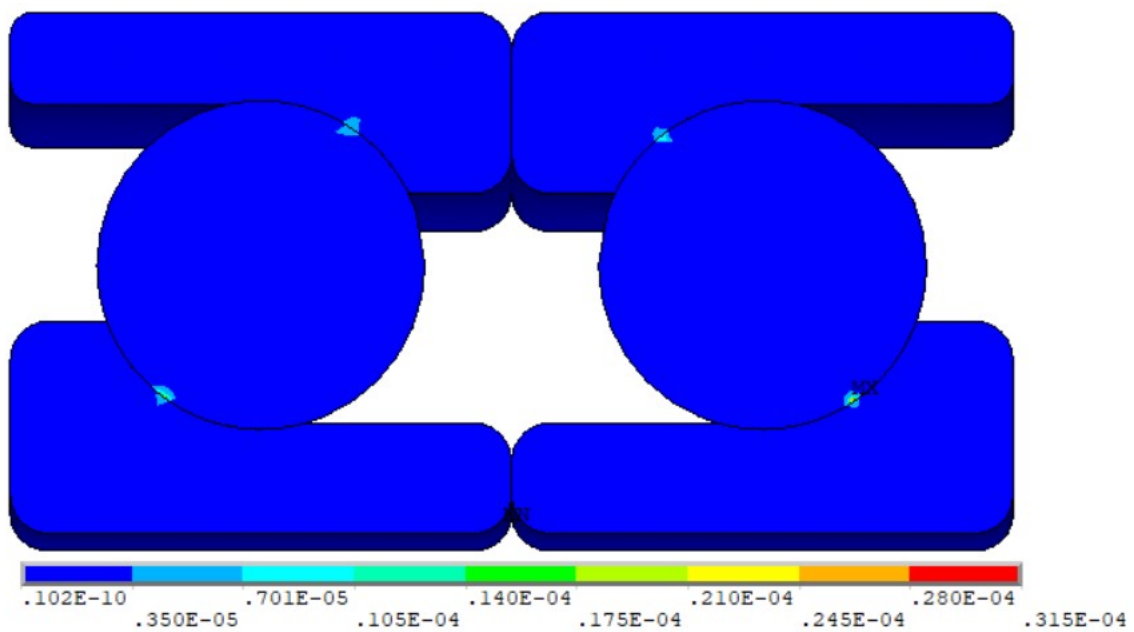
(b) Contatto β - Spostamento 1 μm



(c) Contatto γ - Spostamento 1 μm

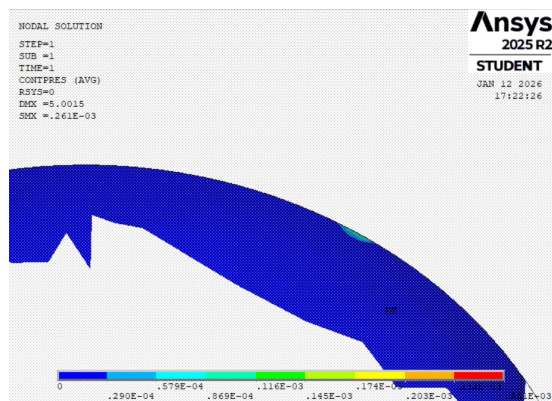


(d) Contatto δ - Spostamento 1 μm

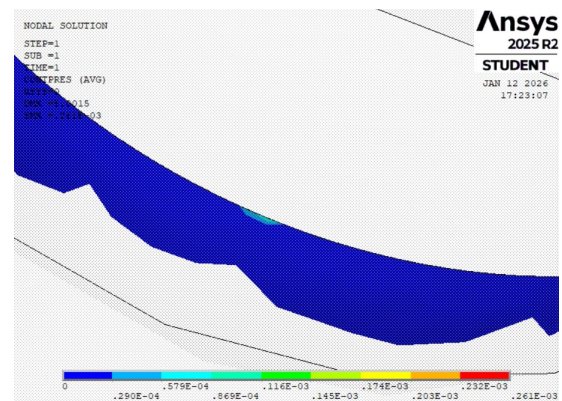


(e) Stress Von Mises - Spostamento 1 μm

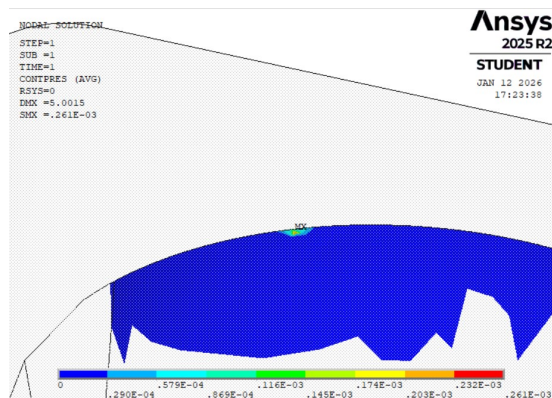
Risultati numerici per uno spessore di 5 μm :



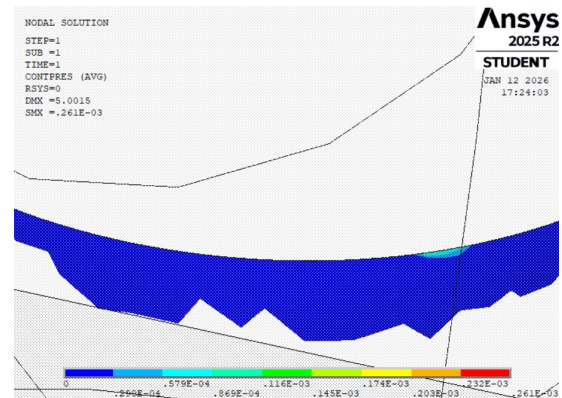
(a) Contatto α - Spostamento 5 μm



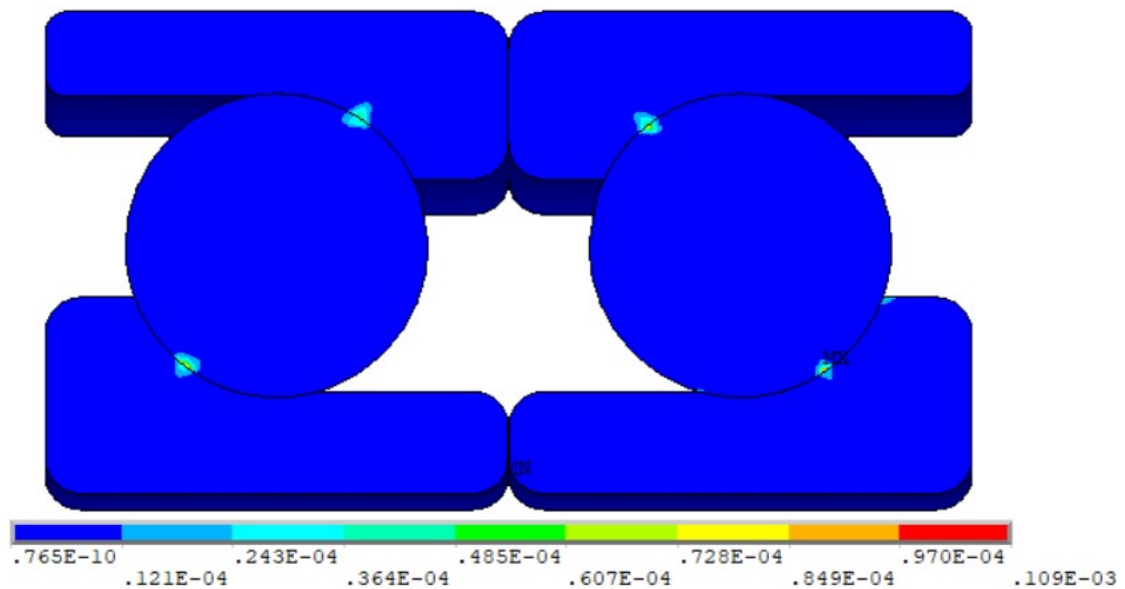
(b) Contatto β - Spostamento 5 μm



(c) Contatto γ - Spostamento 5 μm

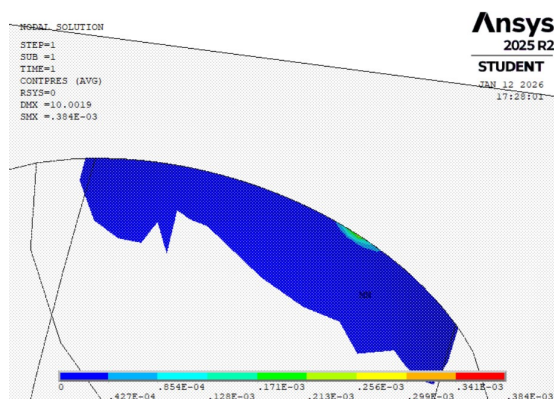


(d) Contatto δ - Spostamento 5 μm

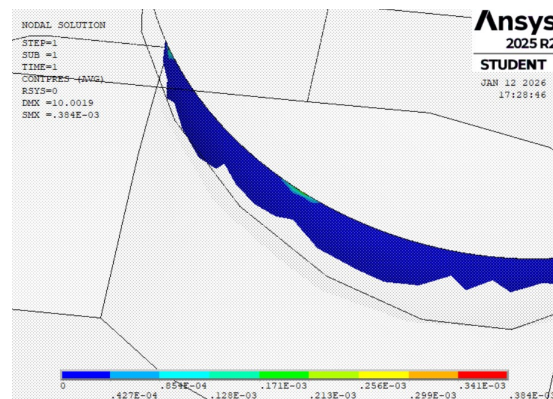


(e) Von Mises Stress - Spostamento 5 μm

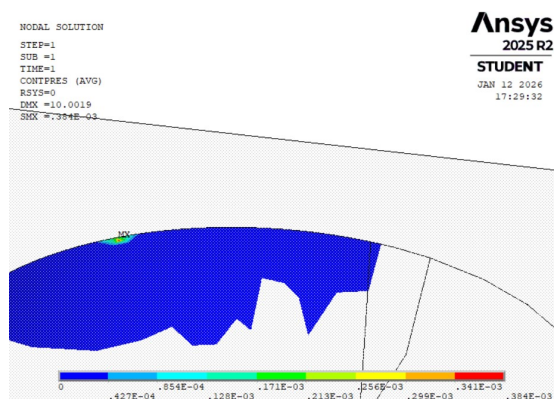
Risultati numerici per uno spessore di 10 μm :



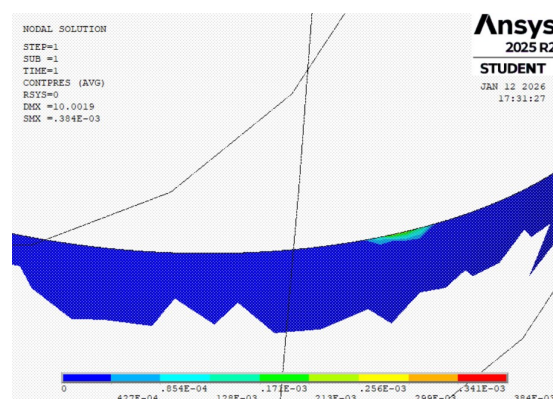
(a) Contatto α - Spostamento 10 μm



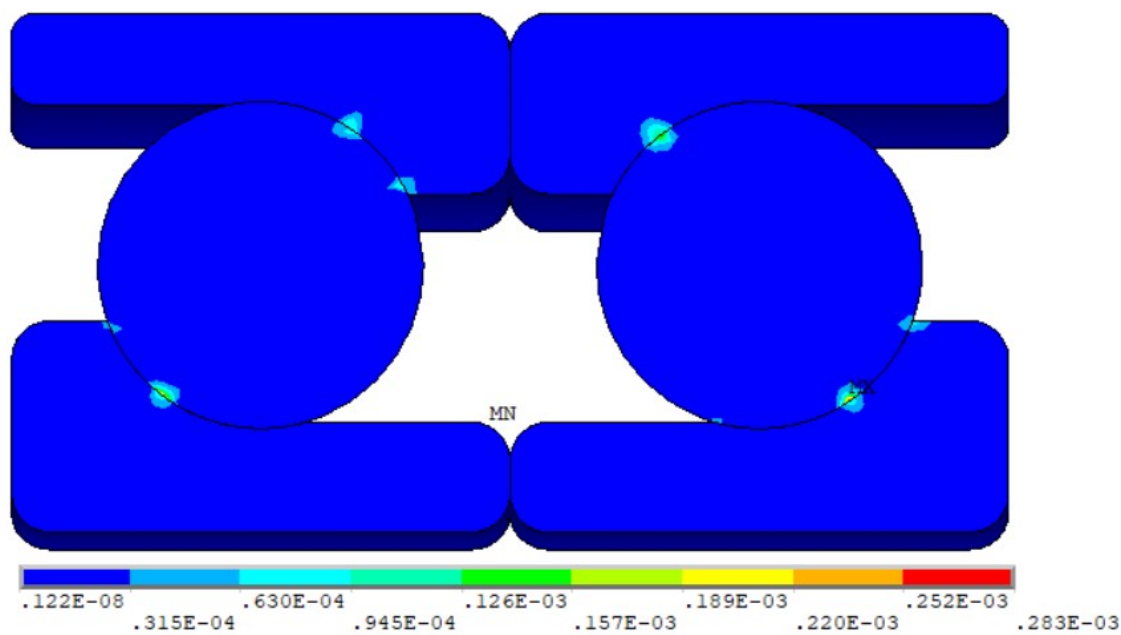
(b) Contatto β - Spostamento 10 μm



(c) Contatto γ - Spostamento 10 μm

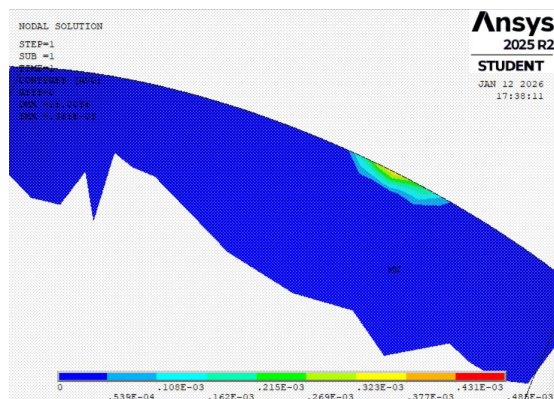


(d) Contatto δ - Spostamento 10 μm

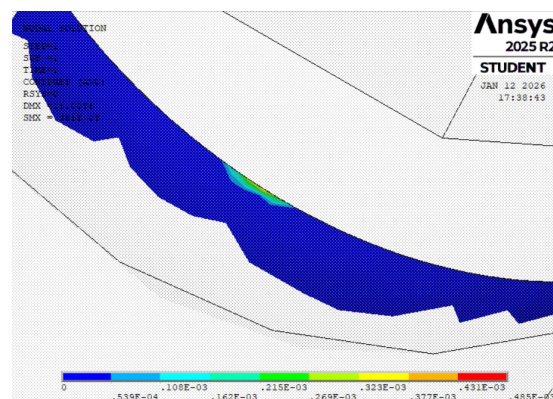


(e) Von Mises Stress - Spostamento 10 μm

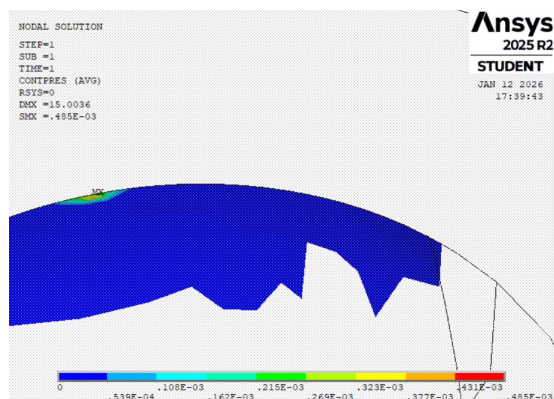
Risultati numerici per uno spessore di 15 μm :



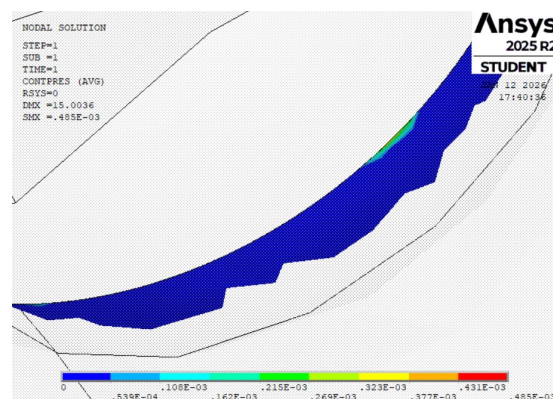
(a) Contatto α - Spostamento 15 μm



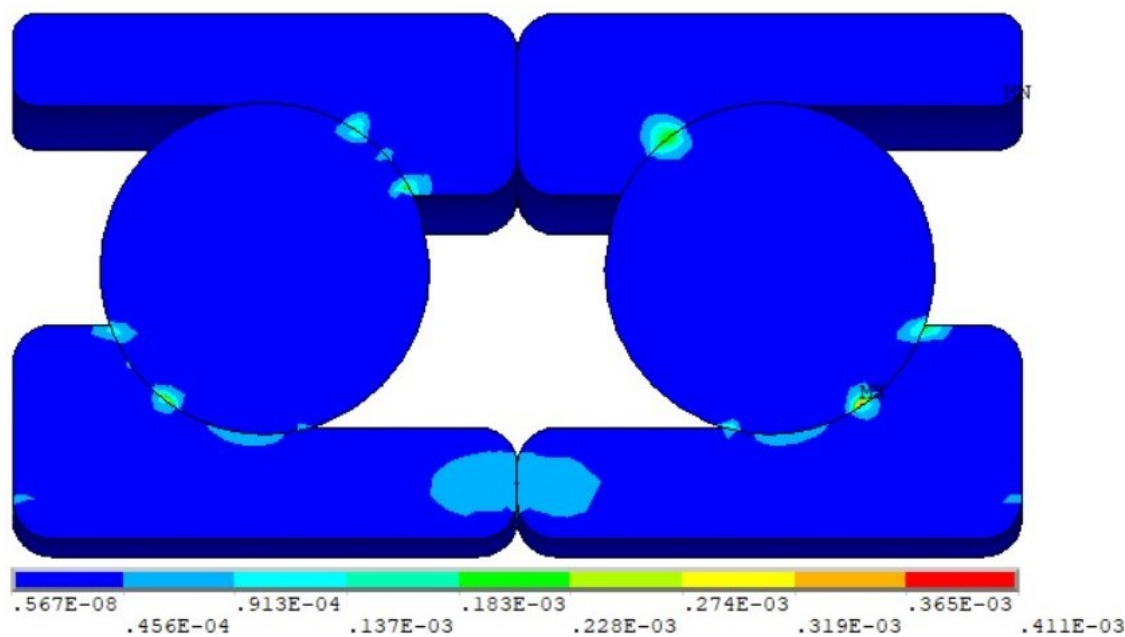
(b) Contatto β - Spostamento 15 μm



(c) Contatto γ - Spostamento 15 μm

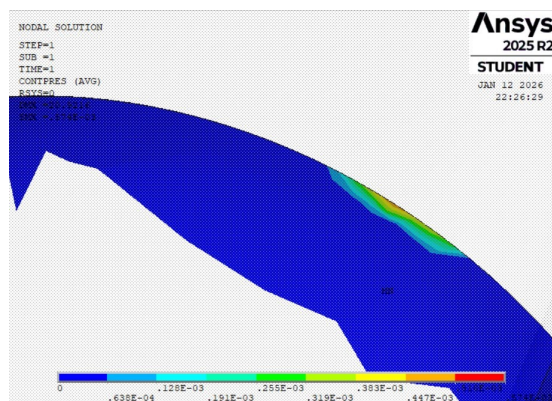


(d) Contatto δ - Spostamento 15 μm

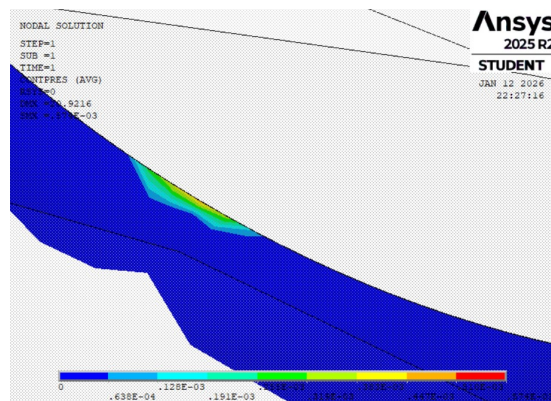


(e) Von Mises Stress - Spostamento 15 μm

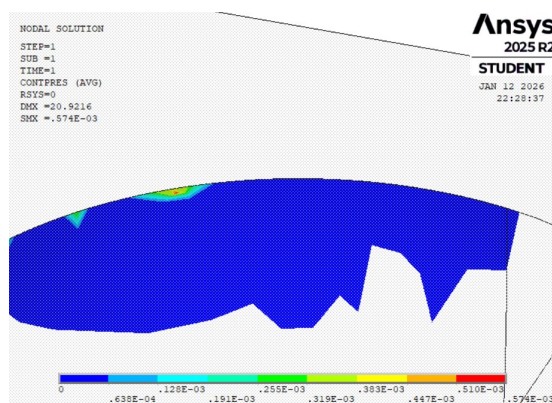
Risultati numerici per uno spessore di 20 μm :



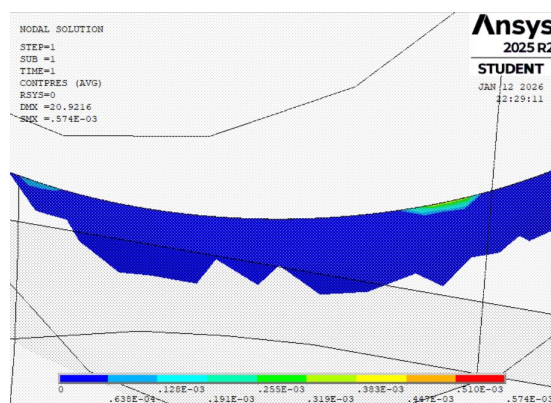
(a) Contatto α - Spostamento 20 μm



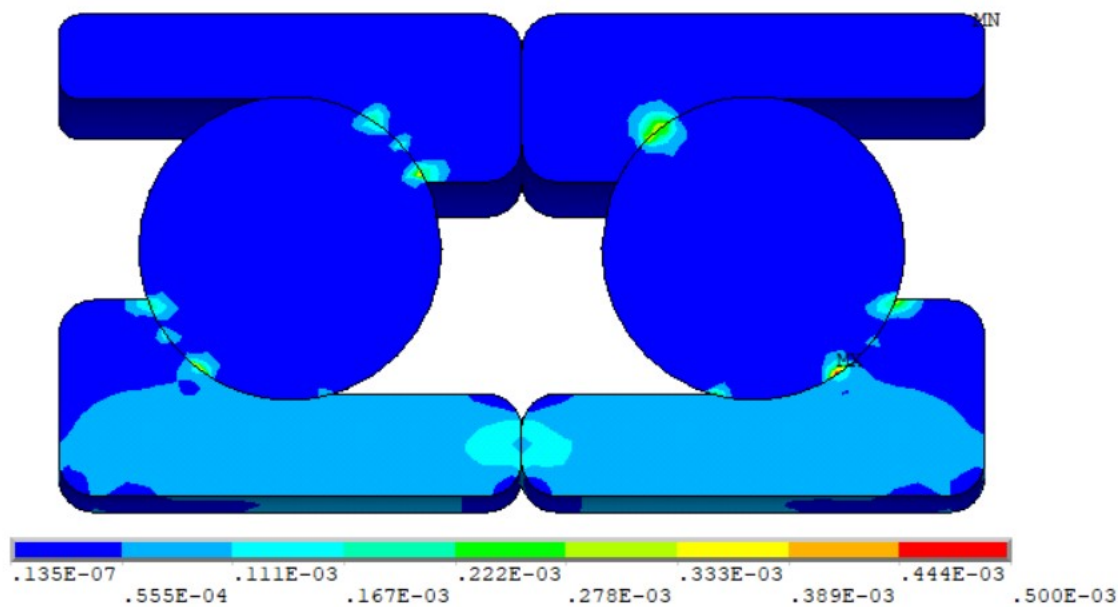
(b) Contatto β - Spostamento 20 μm



(c) Contatto γ - Spostamento 20 μm

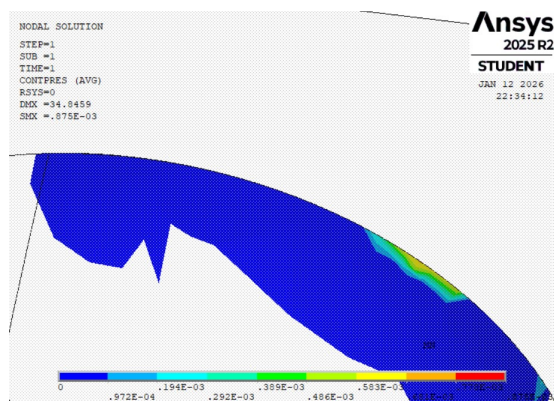


(d) Contatto δ - Spostamento 20 μm

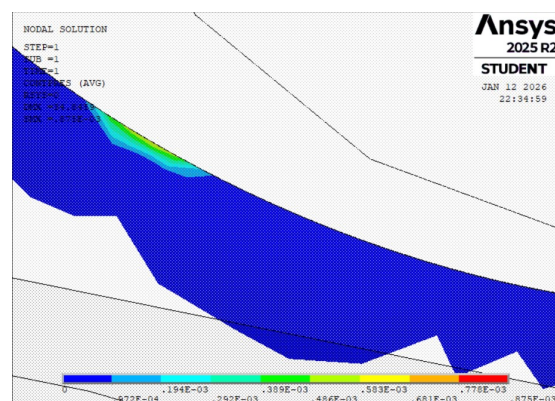


(e) Von Mises Stress - Spostamento 20 μm

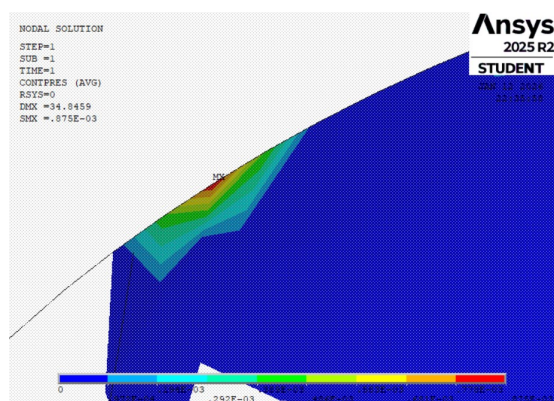
Risultati numerici per uno spessore di 30 μm :



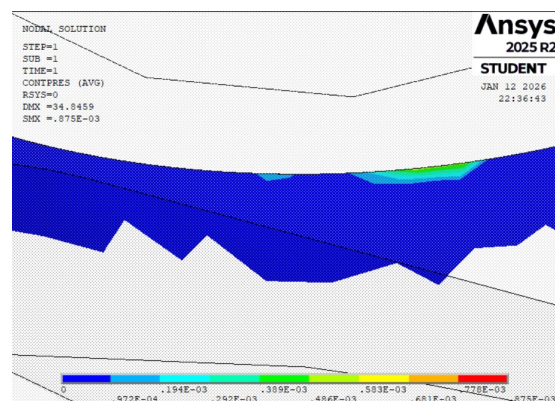
(a) Contatto α - Spostamento 30 μm



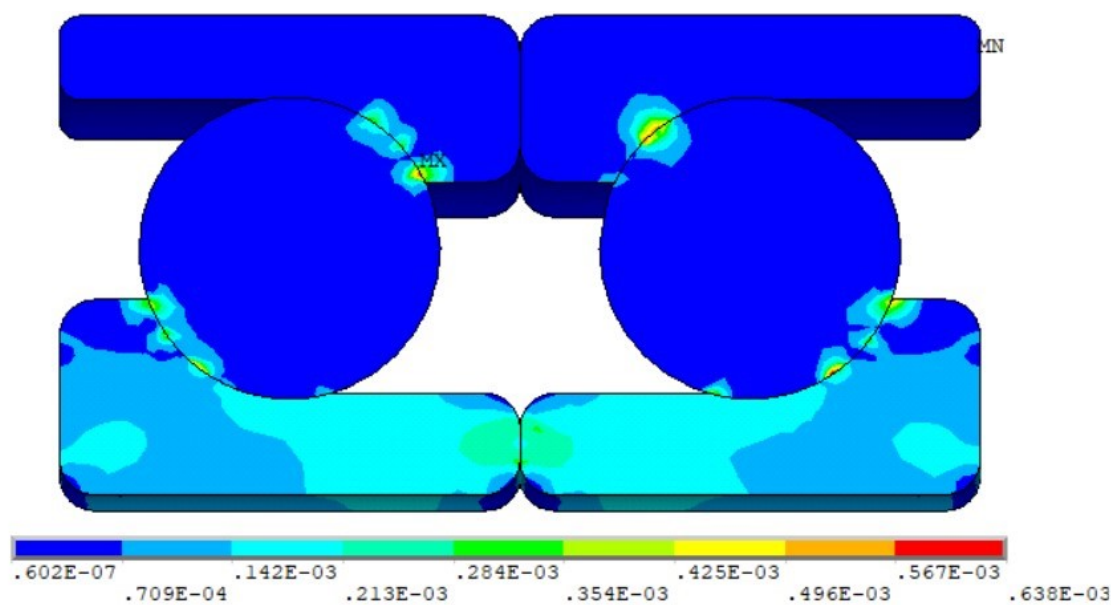
(b) Contatto β - Spostamento 30 μm



(c) Contatto γ - Spostamento 30 μm

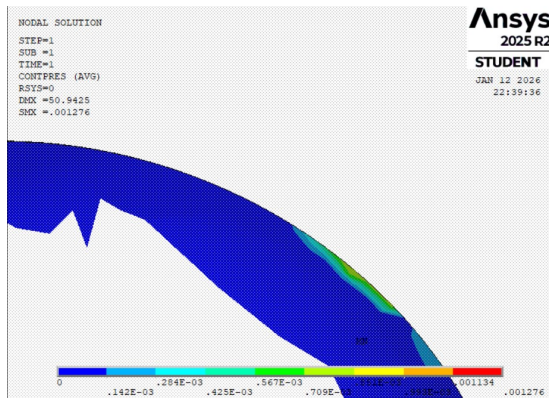


(d) Contatto δ - Spostamento 30 μm

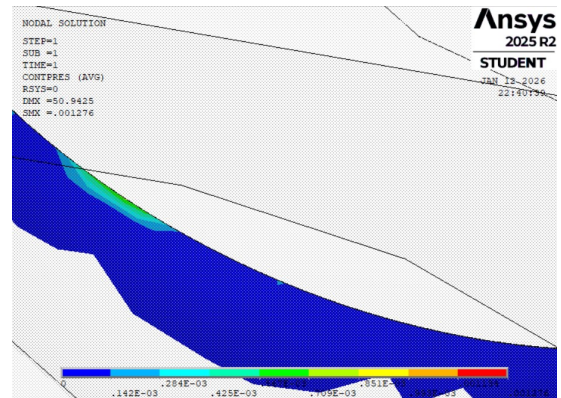


(e) Von Mises Stress - Spostamento 30 μm

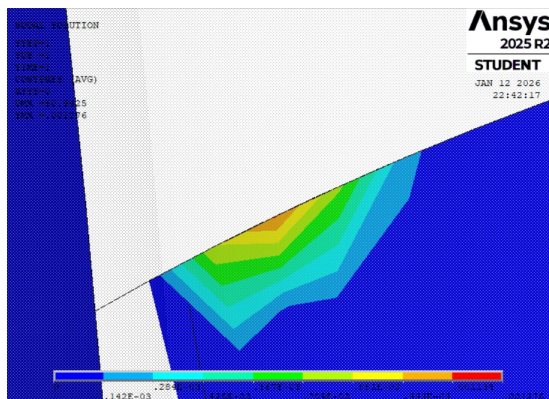
Risultati numerici per uno spessore di 40 μm :



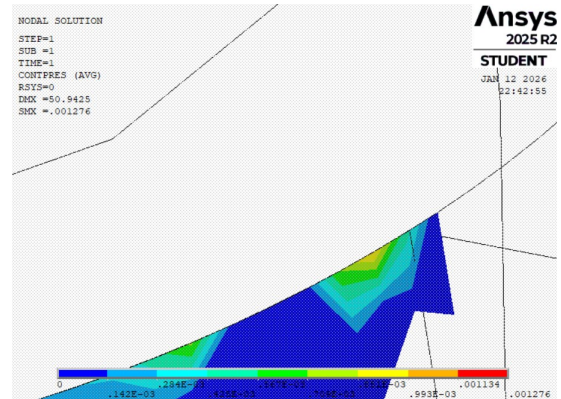
(a) Contatto α - Spostamento 40 μm



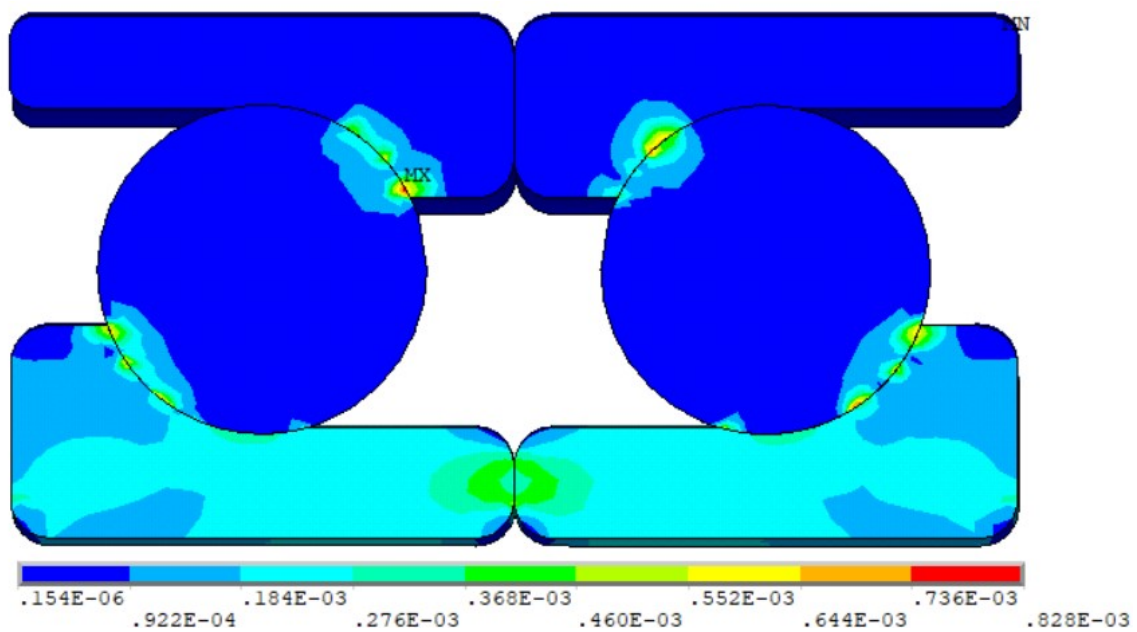
(b) Contatto β - Spostamento 40 μm



(c) Contatto γ - Spostamento 40 μm

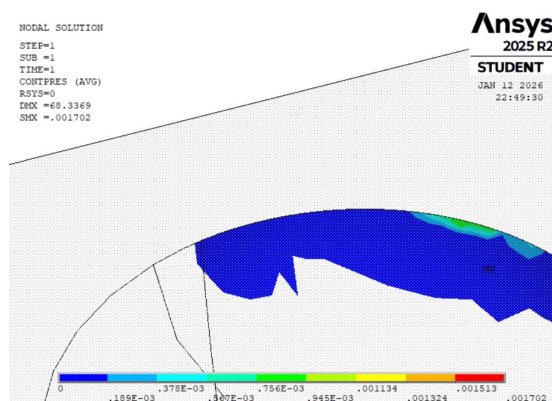


(d) Contatto δ - Spostamento 40 μm

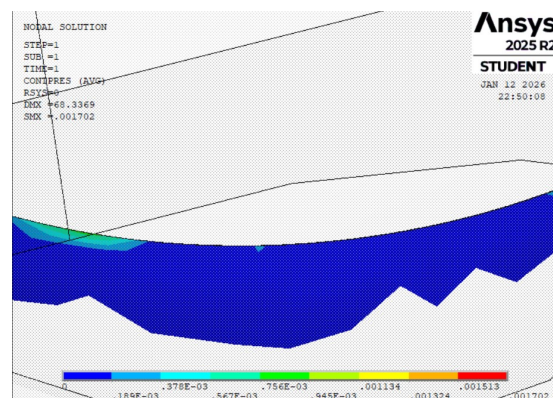


(e) Von Mises Stress - Spostamento 40 μm

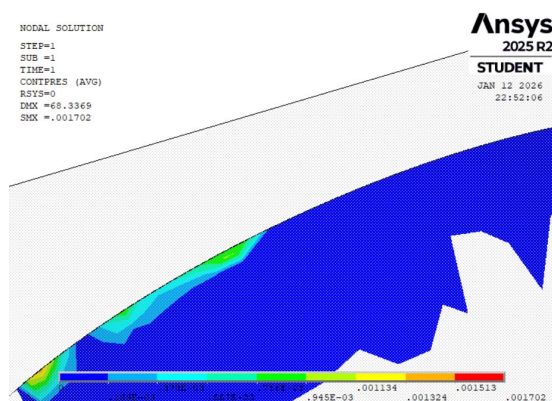
Risultati numerici per uno spessore di 50 μm :



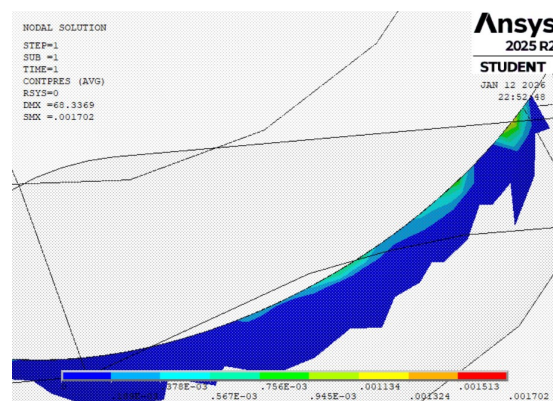
(a) Contatto α - Spostamento 50 μm



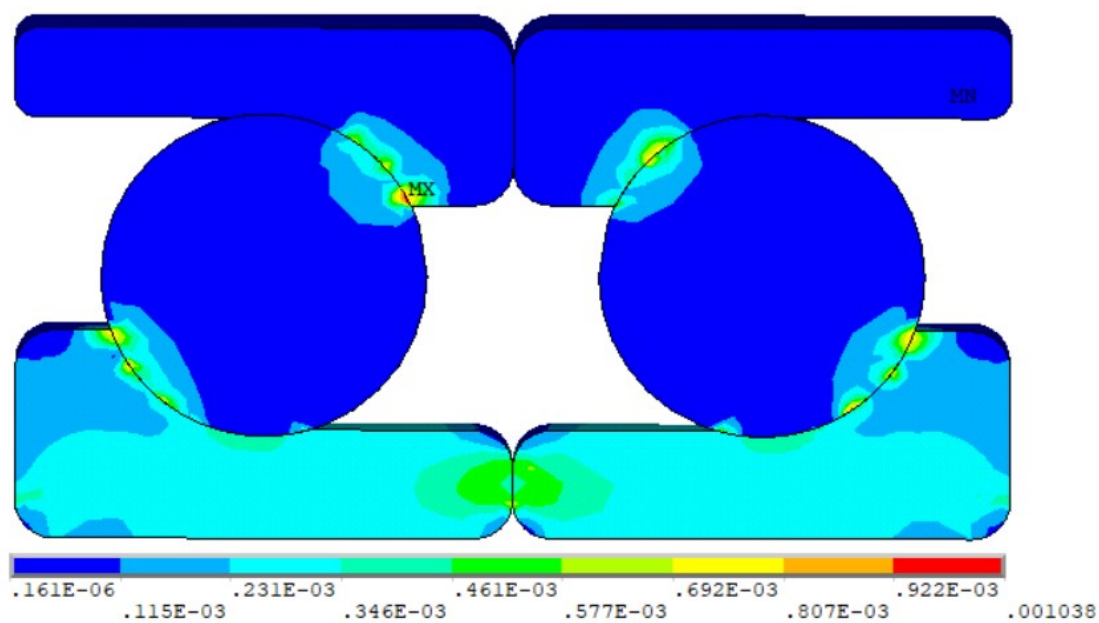
(b) Contatto β - Spostamento 50 μm



(c) Contatto γ - Spostamento 50 μm

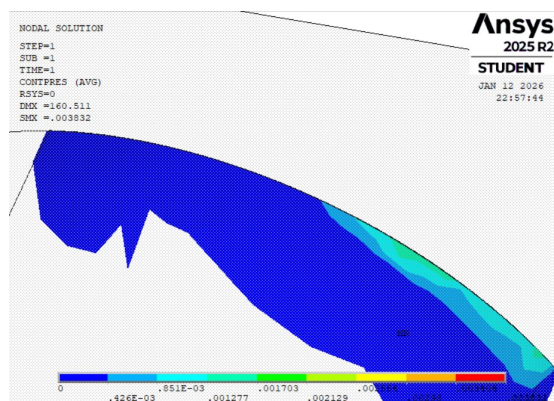


(d) Contatto δ - Spostamento 50 μm

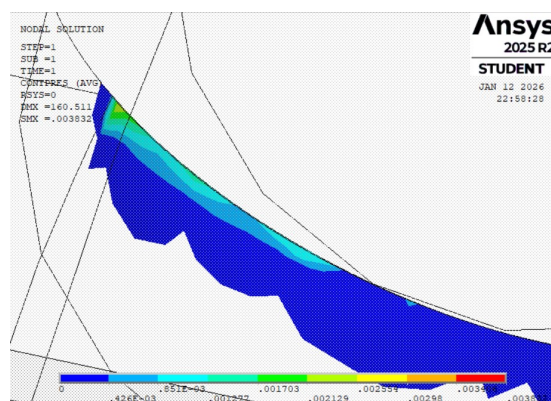


(e) Von Mises Stress - Spostamento 50 μm

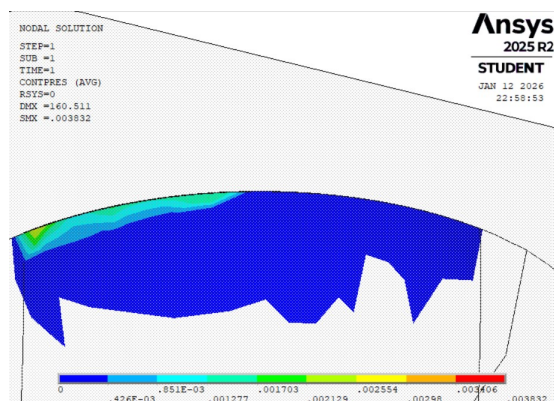
Risultati numerici per uno spessore di 100 μm :



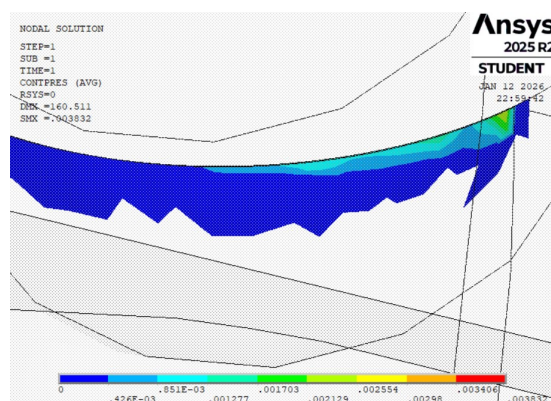
(a) Contatto α - Spostamento 100 μm



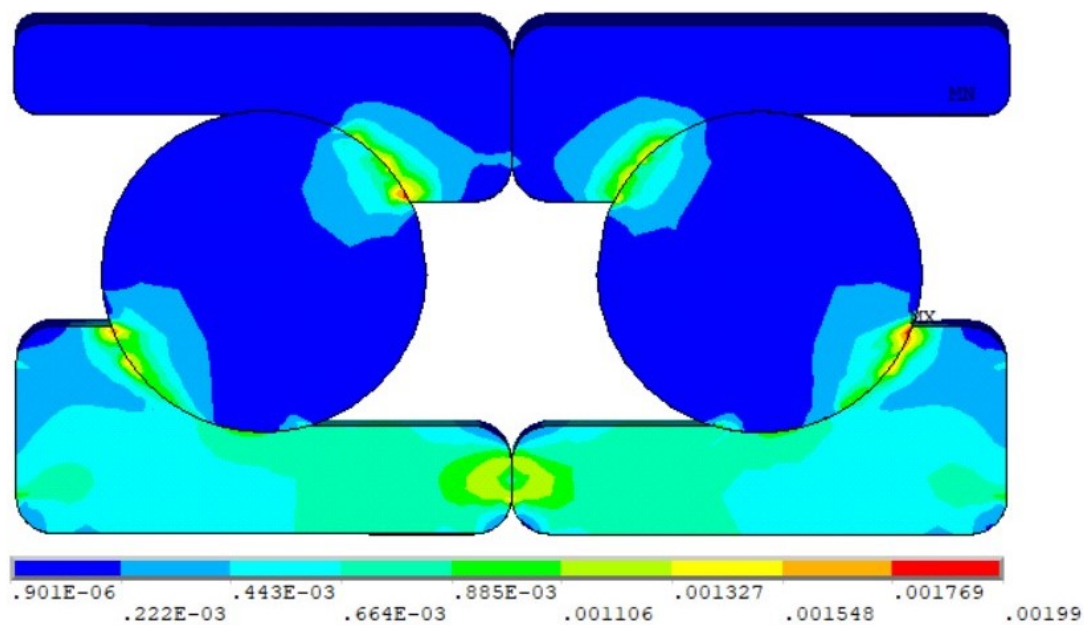
(b) Contatto β - Spostamento 100 μm



(c) Contatto γ - Spostamento 100 μm



(d) Contatto δ - Spostamento 100 μm



(e) Von Mises Stress - Spostamento 100 μm

Analisi dei risultati

L'analisi delle immagini mostra come la distribuzione delle sollecitazioni e l'area di contatto cambino con l'aumento del carico assiale. Con un carico di 1 μm e un angolo di contatto di 40° , la distribuzione delle sollecitazioni è relativamente uniforme, con una bassa concentrazione di stress.

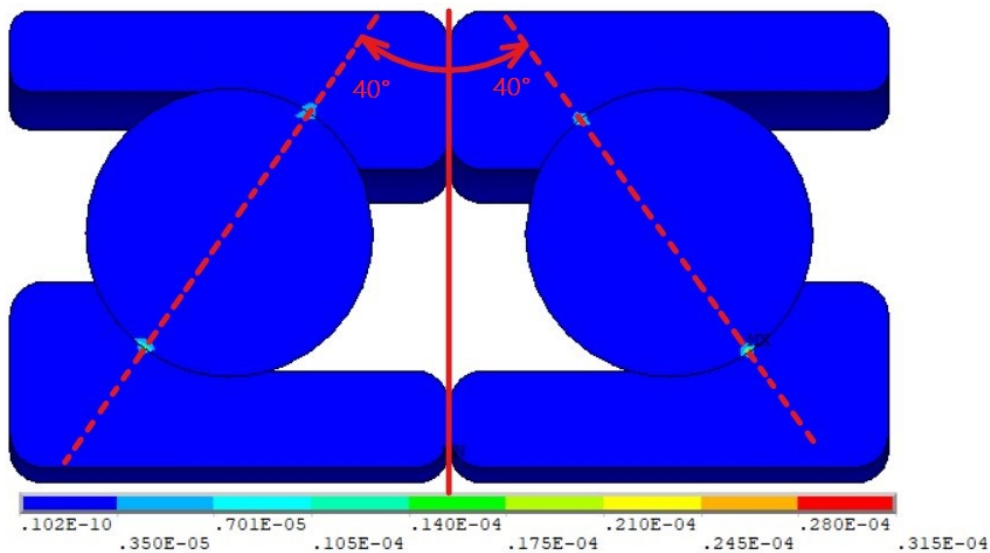


Figura 40: Linea di contatto a 40°

Al contrario, con un carico di 100 μm e un angolo di contatto di 65° , l'area di contatto si espande notevolmente, aumentando la concentrazione di stress. Questo fenomeno è dovuto alla maggiore deformazione dei materiali sotto carico, che porta a una modificazione nella geometria del contatto.

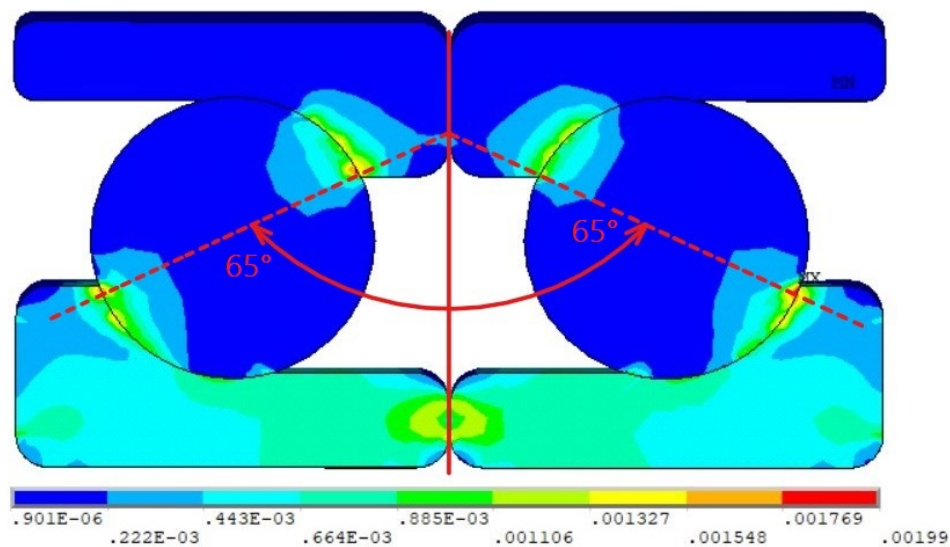


Figura 41: Linea di contatto a 65°

L'incremento del carico assiale provoca un ampliamento della superficie di contatto e una variazione nella distribuzione delle forze, con un aumento della pressione locale. Il passaggio a un angolo di contatto maggiore suggerisce che le sollecitazioni si distribuiscono su una zona più ampia, ma la loro intensità complessiva nelle vicinanze del contatto aumenta. Inoltre, l'aumento del carico incrementa la probabilità di fenomeni di usura e danni ai materiali, influenzando negativamente il comportamento tribologico del sistema.

Confronto col modello analitico

Nel presente lavoro il comportamento forza-spostamento di un cuscinetto a sfere a contatto obliquo in configurazione duplex O (*back-to-back*) è stato modellato mediante un approccio analitico basato sulla teoria del contatto hertziano. L'obiettivo del modello è la determinazione della relazione non lineare tra lo spostamento assiale imposto, associato al precarico, e la forza assiale risultante, nonché la valutazione della validità di tale approccio nel contesto di un'analisi di progetto preliminare.

Si consideri un cuscinetto a sfere caratterizzato da un angolo di contatto α , nel quale uno spostamento assiale relativo tra gli anelli genera una deformazione normale al contatto tra sfera e pista. Assumendo piccoli spostamenti e cinematica rigida degli anelli, la deformazione normale può essere espressa come:

$$\delta_n = \delta_a \sin \alpha \quad (47)$$

Il contatto tra la sfera e le piste viene modellato come contatto elastico tra due corpi curvi secondo la teoria di Hertz. La forza normale trasmessa da una singola sfera risulta essere:

$$F_n = \frac{4}{3} E^* \sqrt{R_{\text{eff}}} \delta_n^{3/2} \quad (48)$$

dove E^* rappresenta il modulo elastico equivalente del contatto, definito come:

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu^2}{E} + \frac{1 - \nu^2}{E} \Rightarrow E^* = \frac{E}{2(1 - \nu^2)} \quad (49)$$

avendo assunto materiali identici per sfera e pista, e R_{eff} è il raggio di curvatura equivalente del contatto. Nel modello adottato si assume, a scopo semplificativo, che il raggio di curvatura della pista sia pari a quello della sfera.

La componente assiale della forza trasmessa da una singola sfera è ottenuta proiettando la forza normale lungo l'asse del cuscinetto:

$$F_{a,1} = F_n \cos \alpha \quad (50)$$

Sostituendo le equazioni (??) ed (??) nell'espressione (??), si ottiene:

$$F_{a,1} = \frac{4}{3} E^* \sqrt{R_{\text{eff}}} (\delta_a \sin \alpha)^{3/2} \cos \alpha \quad (51)$$

Per la determinazione della forza assiale totale del cuscinetto si introduce il numero effettivo di sfere caricate z_{eff} . Seguendo l'approccio classico di Palmgren, si assume che sotto carico assiale puro solo una frazione delle sfere risulti effettivamente caricata, approssimativamente pari alla metà del numero totale. La forza assiale complessiva può quindi essere espressa come:

$$F_a(\delta_a) = z_{\text{eff}} \frac{4}{3} E^* \sqrt{R_{\text{eff}}} (\sin \alpha)^{3/2} \cos \alpha \delta_a^{3/2} \quad (52)$$

L'equazione (??) evidenzia la natura fortemente non lineare del comportamento del cuscinetto, con una dipendenza della forza assiale dallo spostamento del tipo $F \propto \delta^{3/2}$, tipica dei contatti elastici hertziani. Di seguito viene rappresentato l'andamento del grafico relativo a uno spostamento assiale di 10 μm :

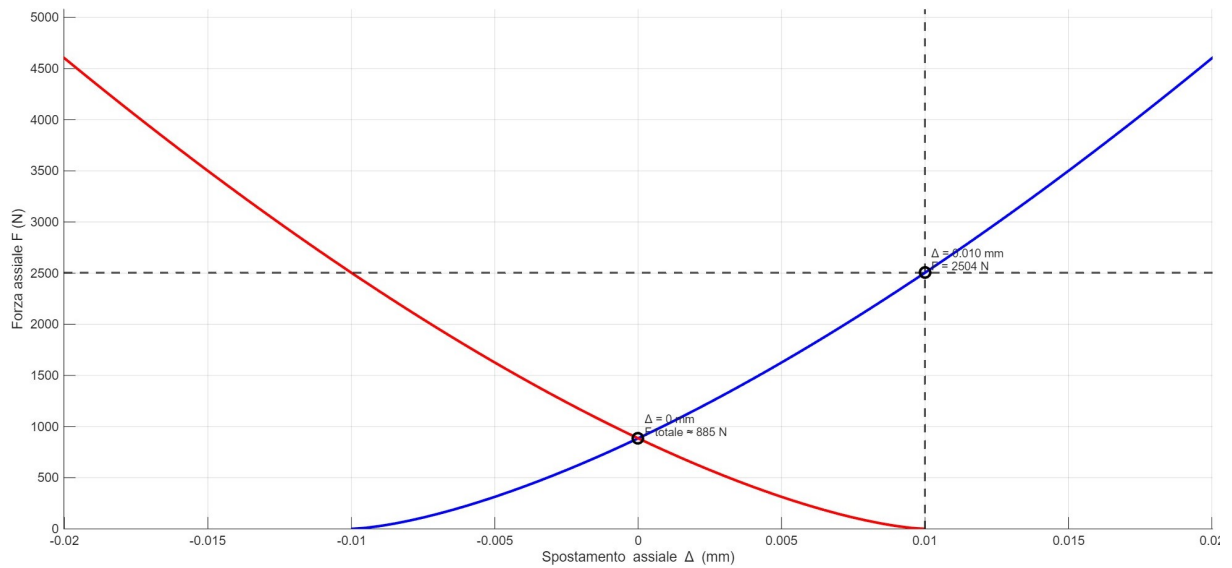


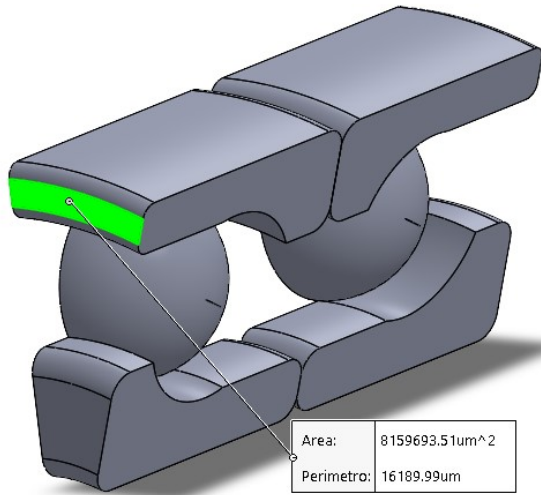
Figura 42: Diagramma Forza di precarico - Spostamento assiale

Il punto di intersezione delle due curve in corrispondenza di $\delta_a = 0$ mm identifica la condizione di equilibrio del sistema precaricato, caratterizzata da una forza assiale interna pari a circa 885 N. Tale valore costituisce il precarico effettivo del sistema, introdotto per annullare il gioco assiale e migliorare la stabilità strutturale. Dato che il modello preso in esame risulta essere un semi-spicchio di un cuscinetto duplex, si considera la forza effettiva pari a circa:

$$F_{a,eff} = \frac{F_a}{2 \cdot n} = \frac{885}{2 \cdot 9} \approx 50 \text{ N} \quad (53)$$

L'intersezione delle linee tratteggiate indicano invece una condizione di carico esterno per cui si riesce ad annullare il precarico di 10 μm imposto in precedenza. tale valore risulta essere di circa 2500 N e, per lo stesso ragionamento precedente si ottiene:

$$F_{est,eff} = \frac{F_{est}}{2 \cdot n} = \frac{2500}{2 \cdot 9} \approx 140N \quad (54)$$



Per la convalida del modello analitico sono stati analizzati due applicazioni di carico esterno al modello FEM. Per avere una distribuzione uniforme di questi ultimi, si è scelto di modellarli mediante delle pressioni.

Risulta quindi necessaria la misurazione della superficie della pista esterna opposta a quella di applicazione dello spostamento assiale. L'area è stata misurata attraverso il programma SolidWork, già opportunamente convertito in μm^2 :

$$A_{F,est} = 8159693.51\mu\text{m}^2 \quad (55)$$

Figura 43: Rappresentazione geometrica dell'arco di cerchio

A seguito dei calcoli prelinari svolti in precedenza si è scelto di analizzare due diversi carichi: 100 N e 150 N.

Ne segue il calcolo delle relative pressioni, tenendo conto che il valore da inserire all'interno di *Ansys* APDL deve avere come unità di misura $\text{N}/\mu\text{m}^2$

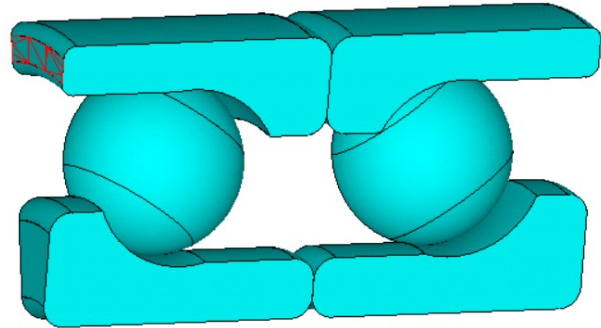


Figura 44: Superfici delle reazioni nodali

$$P_{est,1} = \frac{100}{8159693.51} = 0.0000122553629 \frac{N}{\mu\text{m}^2} \quad (56)$$

$$P_{est,2} = \frac{150}{8159693.51} = 0.00001838304433 \frac{N}{\mu\text{m}^2} \quad (57)$$

Di seguito vengono mostrati i risultati dell'analisi FEM e la relativa distribuzione delle pressioni di contatto. Risulta possibile comparare questi risultati con quelli ricavati in precedenza, nella condizione di carico esterno assente e spostamento assiale di 10 μm .

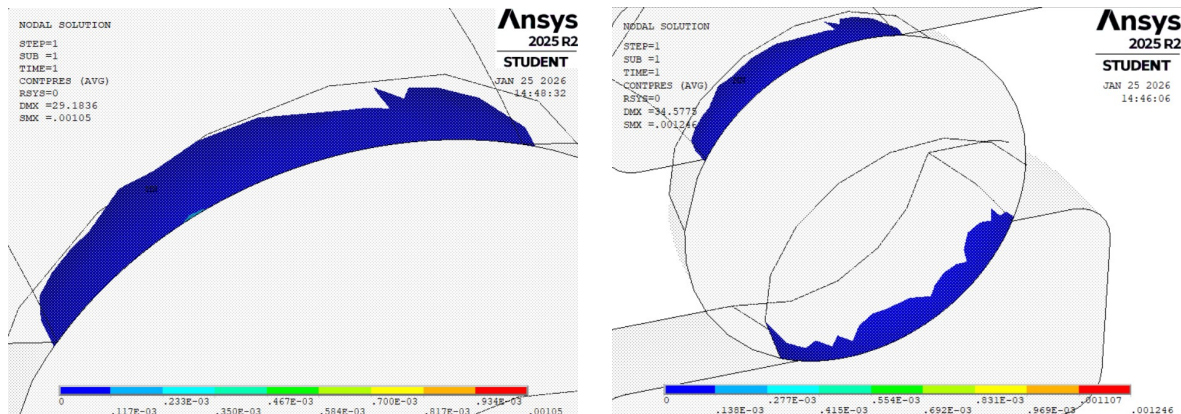


Figura 45: Impronte di contatto con carico esterno di 100 N (sinistra) e 150 N (destra)

Nella condizione di carico esterno pari a 100 N l'ellisse di contatto risulta tendente al blu, conseguenza di una minore intensità della pressione di contatto. Quando il carico aumenta fino a raggiungere i 150 N si ottiene la totale scomparsa grafica dell'ellisse. Il contatto non viene più completamente rilevato una volta raggiunto il valore di 170 N.

$F_{est}[N]$	$P_{max,\alpha}[MPa]$
0	384.1
100	257.5
150	36.6
170	0

Tabella 2: Pressione massima sulla superficie di contatto α

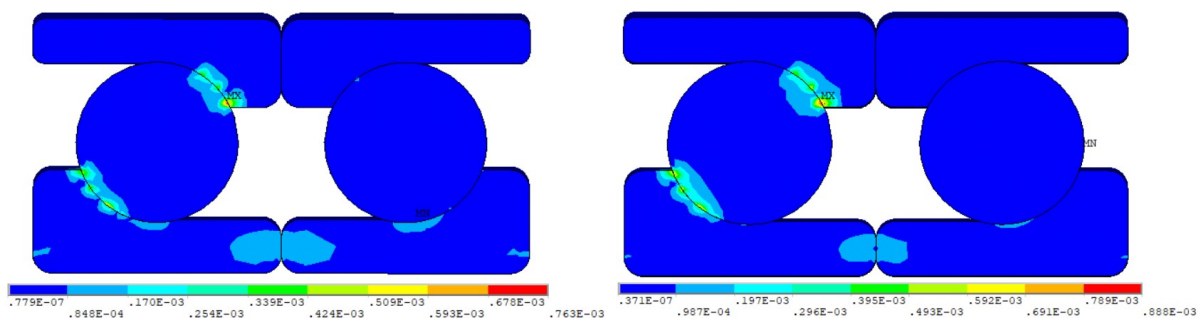


Figura 46: Von Mises Stress con carico esterno di 100 N (sinistra) e 150 N (destra)

Risulta opportuno sottolineare i limiti intrinseci del modello analitico. In particolare, la distribuzione del carico tra le sfere è fortemente semplificata e non tiene conto della reale variazione della deformazione di contatto lungo la corona di sfere. Inoltre, la geometria del contatto è approssimata e non considera le reali curvature delle piste, né eventuali effetti di gioco interno, disallineamenti, attrito o plasticizzazione locale. Nonostante tali limitazioni, il modello risulta adeguato per analisi comparative e di progetto preliminare, in quanto è in grado di cogliere correttamente la non linearità del comportamento elastico.

Distribuzione dei carichi

Nel Post-Processing sono state estratte le reazioni vincolari dei nodi relative alle aree A, B, C e D che sono rilevanti in questa analisi. In particolare, vengono presi in esame solo i valori lungo l'asse Z, interessata dal carico assiale. Per ogni superficie, la somma delle reazioni vincolari di ogni singolo nodo costituisce la forza totale agente sull'intera area.

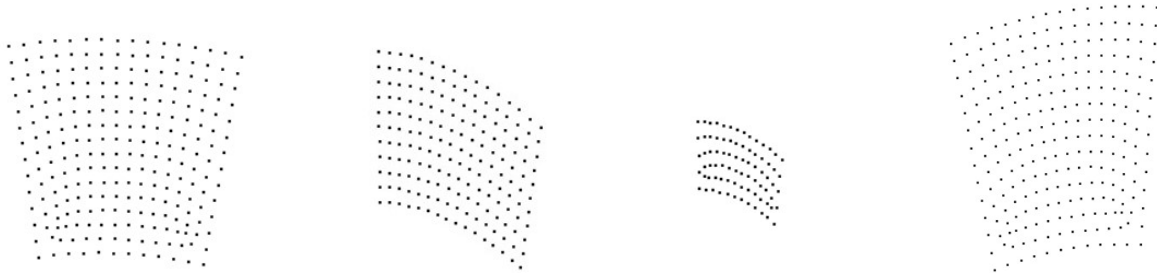


Figura 47: Nodi delle aree A, B, C e D per il calcolo delle reazioni vincolari

I valori di forza ricavati sono stati diagrammati, per ogni valore di spostamento elargito sulla superficie D. In questo modo si è capaci di quantizzare la porzione di carico che viene scaricata lungo la pista inferiore e lungo la linea dei contatti.

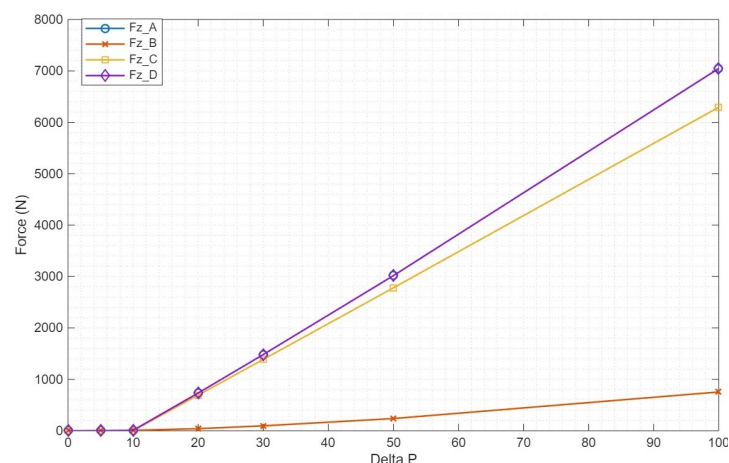


Figura 48: Distribuzione del carico in funzione dello spostamento assiale

I valori sono stati di seguito tabellati per ricavare le percentuali:

$\Delta P [\mu m]$	$Fz_A [N]$	$Fz_C [N]$	$Fz_B [N]$	% su C	% su B
10	8.4	8.4	0	100	0
20	733	40.4	692.6	5.5116	94.488
30	1481.4	95.1	1386.3	6.4196	93.58
50	3016.1	237.25	2778.8	7.8661	92.132
100	7045.9	753.99	6291.9	10.701	89.299

Tabella 3: Percentuale di forza scaricata su sfere e piste

Momento di tilting

I cuscinetti a sfere a contatto obliquo sono ampiamente utilizzati nei sistemi di supporto di alberi rotanti grazie alla loro capacità di sostenere carichi combinati radiali e assiali. Tale caratteristica è resa possibile dalla presenza di un angolo di contatto α tra la direzione della forza di contatto sfera-pista e il piano radiale del cuscinetto. In presenza di un carico assiale F_a , la forza viene trasmessa attraverso i corpi volventi lungo una direzione inclinata, determinando una distribuzione di carico fortemente dipendente dalla geometria interna del cuscinetto e dalle condizioni di montaggio.

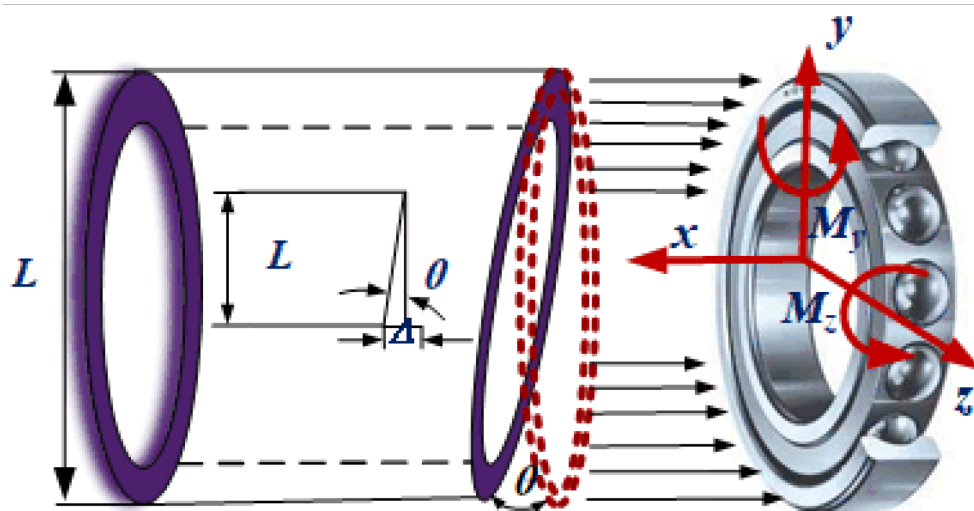


Figura 49: Momento di tilting applicato al cuscinetto

In condizioni ideali di perfetto allineamento tra anello interno ed esterno, il carico assiale risulta equamente ripartito tra le sfere caricate e la risultante delle forze di contatto giace sull'asse di rotazione del cuscinetto. Tuttavia, nelle applicazioni reali, la presenza di disallineamenti angolari, dovuti a deformazioni elastiche dell'albero, tolleranze geometriche o cedimenti strutturali del supporto, altera la cinematica del contatto sfera-pista. Tale disallineamento induce una distribuzione non uniforme delle forze normali di contatto Q_i , responsabile della generazione di un momento di ribaltamento, comunemente indicato come *tilting moment*.

La forza normale agente sulla i -esima sfera può essere espressa, in prima approssimazione, può essere espressa come:

$$Q_i = Q_0 + k_n \delta_i \quad (58)$$

dove:

$$Q_0 = \frac{F_a}{z \sin \alpha} \quad (59)$$

rappresenta la forza media per sfera, z è il numero di sfere caricate, k_n è la rigidità normale del contatto hertziano e δ_i è la variazione locale di interferenza elastica.

Per piccoli angoli di disallineamento θ , la variazione di interferenza può essere linearizzata come:

$$\delta_i \approx \theta r_i \quad (60)$$

dove r_i indica la distanza della sfera dall'asse di rotazione, proiettata nel piano di inclinazione considerato.

L'asimmetria nella distribuzione delle forze normali genera un momento flettente interno che tende a incrementare l'inclinazione relativa degli anelli. Il momento di tilting M_t può essere calcolato come somma dei contributi delle forze di contatto rispetto all'asse del cuscinetto:

$$M_t = \sum_{i=1}^z Q_i r_i \cos \alpha \quad (61)$$

Tale momento rappresenta un effetto interno al cuscinetto e costituisce una delle principali cause di incremento delle sollecitazioni locali sulle piste di rotolamento, con potenziali ripercussioni sulla distribuzione delle pressioni di contatto e sulla vita a fatica del componente.

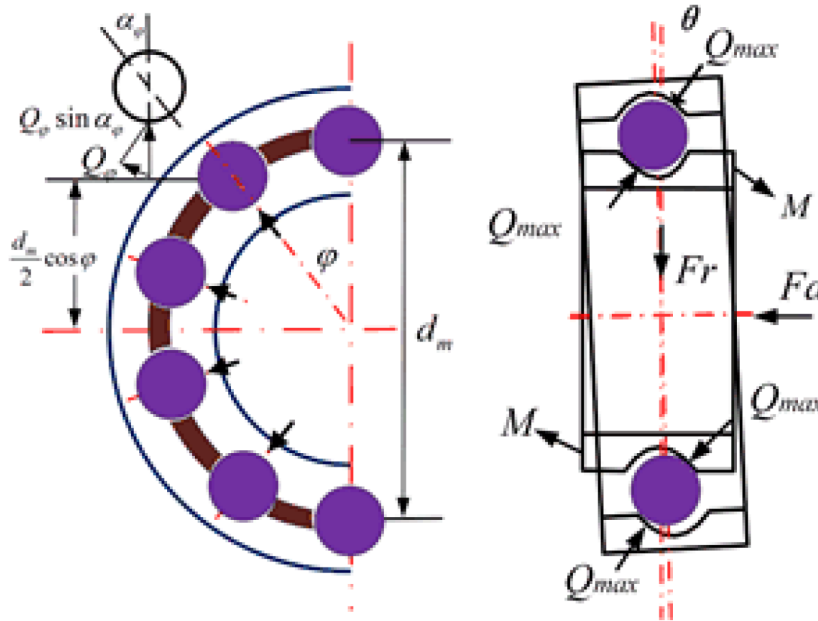


Figura 50: Schema di forze del momento di tilting

Nell'ambito della modellazione agli elementi finiti dei sistemi rotanti supportati da cuscinetti a sfere a contatto obliquo, il momento di tilting viene generalmente introdotto mediante modelli equivalenti in grado di riprodurre il comportamento globale del supporto senza risolvere esplicitamente la geometria e il contatto di ciascun corpo volvente. Tale approccio consente di contenere il costo computazionale mantenendo una descrizione adeguata degli effetti meccanici principali.

Nel software *Ansys APDL* il momento di *tilting* (o momento ribaltante) applicato a un cuscinetto può essere efficacemente modellato attraverso l'imposizione di una coppia di spostamenti differenziali sugli estremi della sua geometria, invece che tramite l'applicazione diretta di un momento concentrato. Questo approccio risulta particolarmente utile quando si desidera rappresentare in modo realistico le condizioni di contatto e la distribuzione delle tensioni all'interno del cuscinetto. Si è scelto di analizzare due diverse condizioni: momento di tilting variabile, fissato uno spostamento assiale di $80\ \mu m$ e momento di tilting fissato con spostamento assiale variabile.

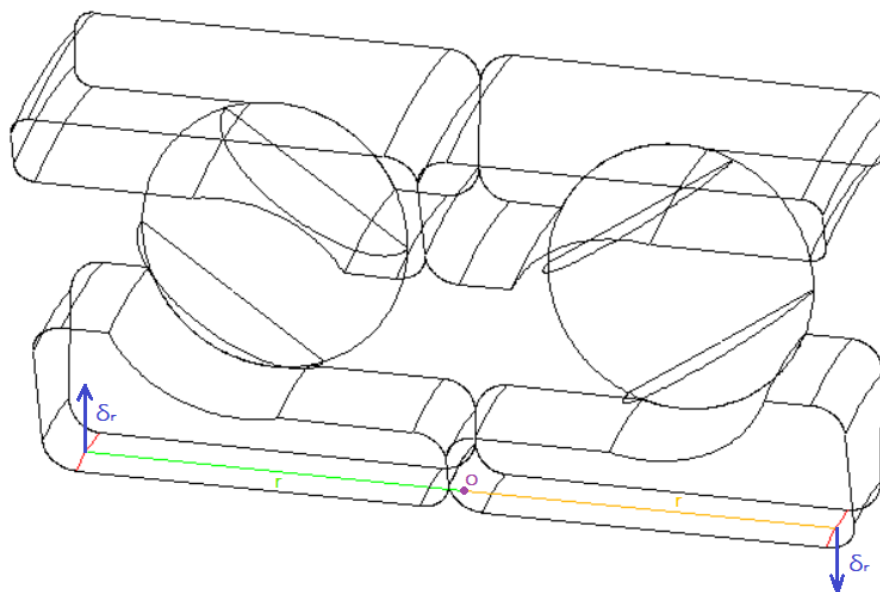


Figura 51: Applicazione degli spostamenti differenziali

In pratica, il momento di *tilting* viene riprodotto imponendo spostamenti verticali uguali e opposti su due regioni diametralmente o assialmente opposte del cuscinetto. Nel caso in esame, gli spostamenti vengono applicati sui nodi delle due linee opposte delle piste inferiori. Tali spostamenti generano una rotazione relativa della struttura attorno a un asse perpendicolare alla direzione del carico, producendo un effetto meccanico equivalente a quello di un momento flettente. L'entità del momento risultante dipende dall'ampiezza degli spostamenti imposti e dalla distanza geometrica tra i punti di applicazione.

In *Ansys APDL*, questa metodologia viene implementata tramite condizioni al contorno di tipo *prescribed displacement* applicate ai nodi selezionati, consentendo un controllo preciso del campo di deformazione. Rispetto all'applicazione diretta di un momento nodale, la coppia di spostamenti permette una migliore stabilità numerica del modello e una rappresentazione più fedele del comportamento reale del cuscinetto, soprattutto in presenza di contatti non lineari tra corpi volventi e piste.

Svolta l'analisi statica, sono state estratte le reazioni vincolari dei nodi a sui cui sono stati precedentemente applicato gli spostamenti al fine di ottenere il valore di forza che, moltiplicata al braccio r di 12 mm, permette di stimare il momento di *tilting*.

Tilting in funzione dello spostamento assiale

Nella prima analisi effettuata si è mantenuto il momento di tilting costante applicando uno spostamento differenziale di 1 μm , considerando diverse condizioni carico assiale:

| 5 μm | 10 μm | 15 μm | 20 μm | 30 μm | 40 μm | 50 μm | 75 μm |

Di seguito vengono rappresentati alcuni risultati relativi al software Ansys APDL, in riferimento alle pressioni di contatto e lo stress di Von Mises:

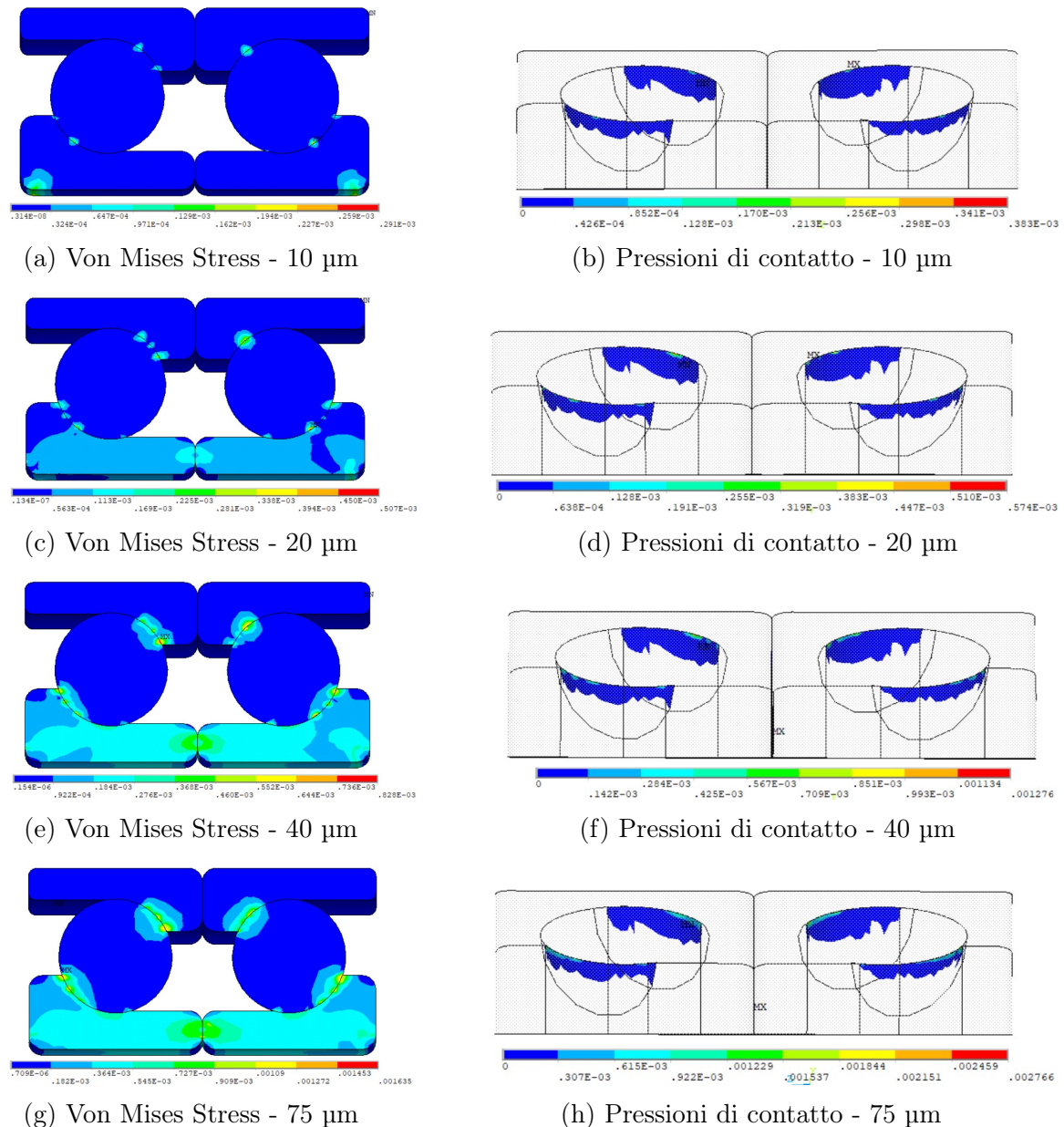


Figura 52: Risultati FEM con momento di *tilting* fissato

Di seguito viene rappresentato l'andamento del *momento di tilting* generato da un cuscinetto duplex in funzione dello spostamento assiale. L'andamento risulta complessivamente regolare e coerente con il comportamento elastico del sistema di supporto.

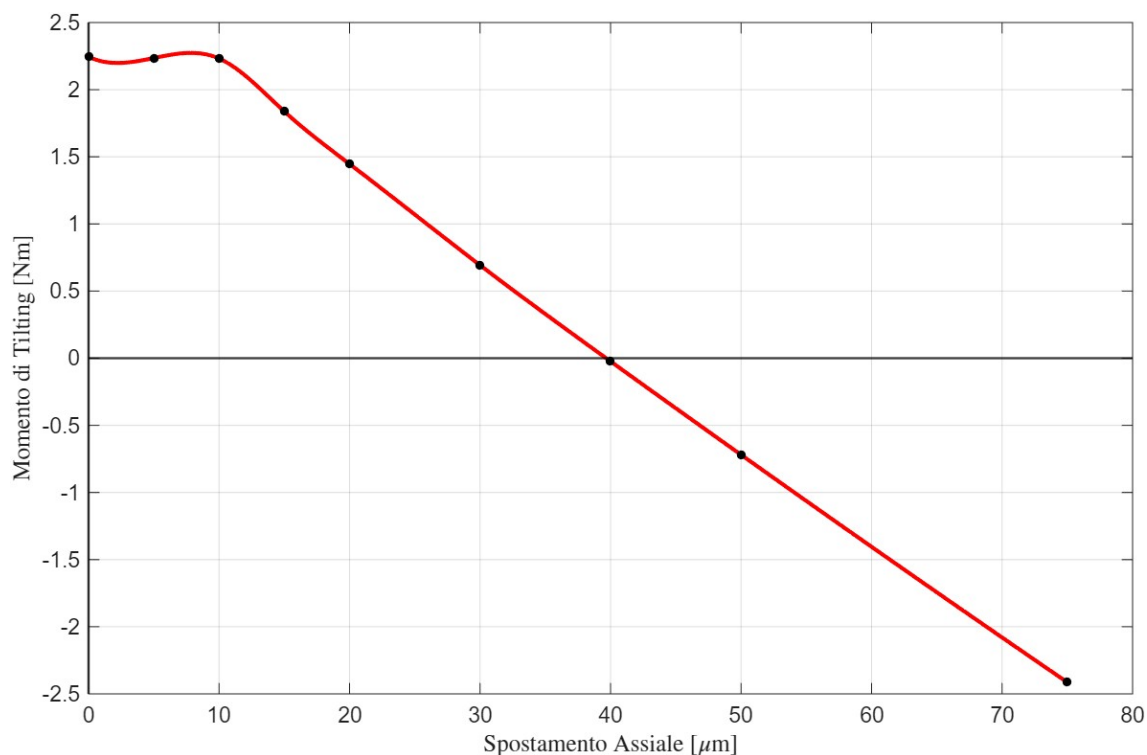


Figura 53: Spicchio di cuscinetto specchiato

Per valori ridotti dello spostamento assiale, fino alla chiusura totale del *gap* pari a 10 μm , il momento di tilting assume valori positivi e pressoché costante, pari a circa 2.2–2.3 Nm.

All'aumentare dello spostamento assiale, nel range intermedio compreso tra 10 e 40 μm , il momento di tilting decresce in modo pressoché lineare. Questo comportamento indica un progressivo trasferimento del carico tra i due cuscinetti che costituiscono la configurazione duplex, con una conseguente riduzione della risultante del momento ribaltante. La linearità dell'andamento suggerisce che la risposta del sistema sia governata prevalentemente dalla rigidità elastica complessiva del gruppo albero – cuscinetto. In corrispondenza di uno spostamento assiale pari a circa 40 μm , il momento di tilting si annulla. Tale condizione rappresenta un punto di equilibrio neutro, nel quale la distribuzione delle forze di contatto non genera alcun momento risultante attorno all'asse considerato.

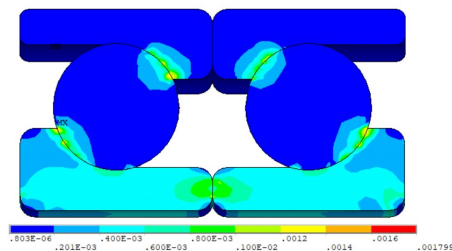
Per spostamenti assiali superiori a questo valore critico, il momento di tilting assume segno negativo e cresce progressivamente in valore assoluto. Ciò indica un'inversione del verso del momento ribaltante, dovuta alla prevalenza del carico sull'altro cuscinetto del duplex. Anche in questa regione l'andamento rimane sostanzialmente lineare, confermando un comportamento elastico e prevedibile del sistema.

Tilting in funzione dello spostamento radiale

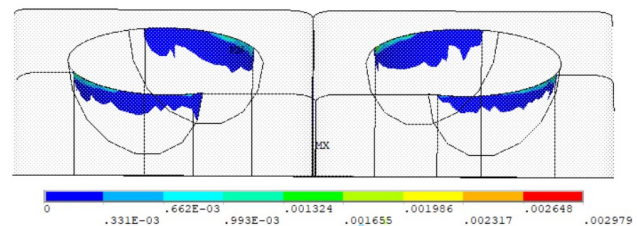
Nella seconda analisi effettuata si è mantenuto il carico assiale costante, pari a 80 μm , e sono state considerate diverse coppie differenziali di spostamento:

$$| 2 \mu\text{m} | 4 \mu\text{m} | 6 \mu\text{m} | 8 \mu\text{m} |$$

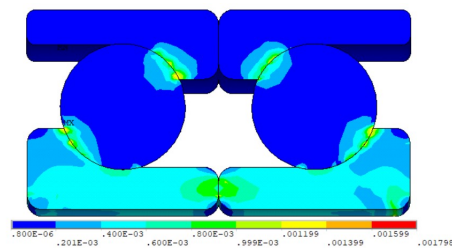
Di seguito vengono rappresentati alcuni risultati relativi al software Ansys APDL, in riferimento alle pressioni di contatto e lo stress di Von Mises:



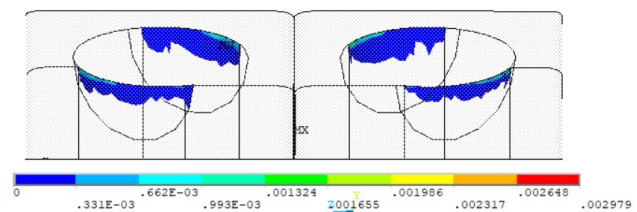
(a) Von Mises Stress - 2 μm



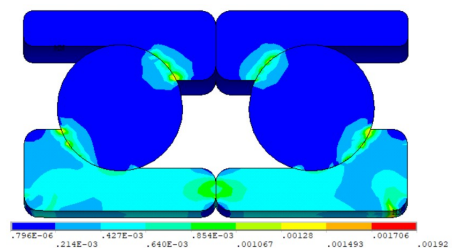
(b) Pressioni di contatto - 2 μm



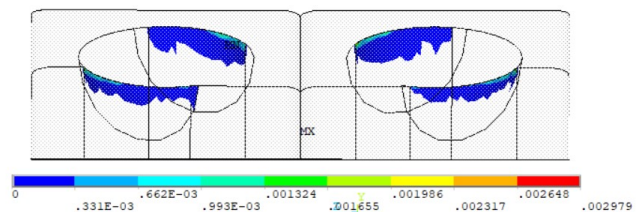
(c) Von Mises Stress - 4 μm



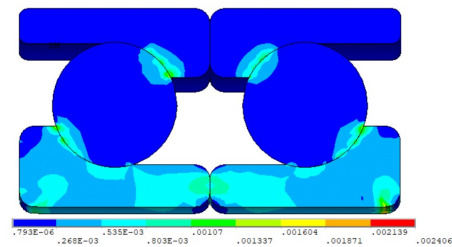
(d) Pressioni di contatto - 4 μm



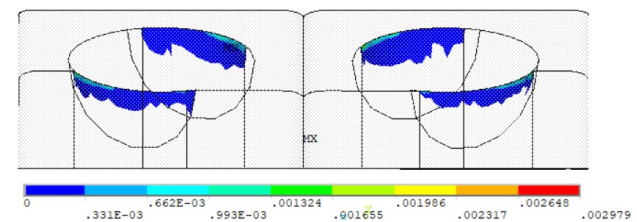
(e) Von Mises Stress - 6 μm



(f) Pressioni di contatto - 6 μm



(g) Von Mises Stress - 8 μm



(h) Pressioni di contatto - 8 μm

Figura 54: Risultati FEM con momento di *tilting* variabile

Di seguito viene rappresentato l'andamento del momento *di tilting* in funzione dello *spostamento radiale*, mantenendo fissato uno spostamento assiale pari a 80 μm . Tale configurazione consente di analizzare il contributo diretto dello spostamento radiale alla generazione della coppia responsabile del fenomeno di tilting.

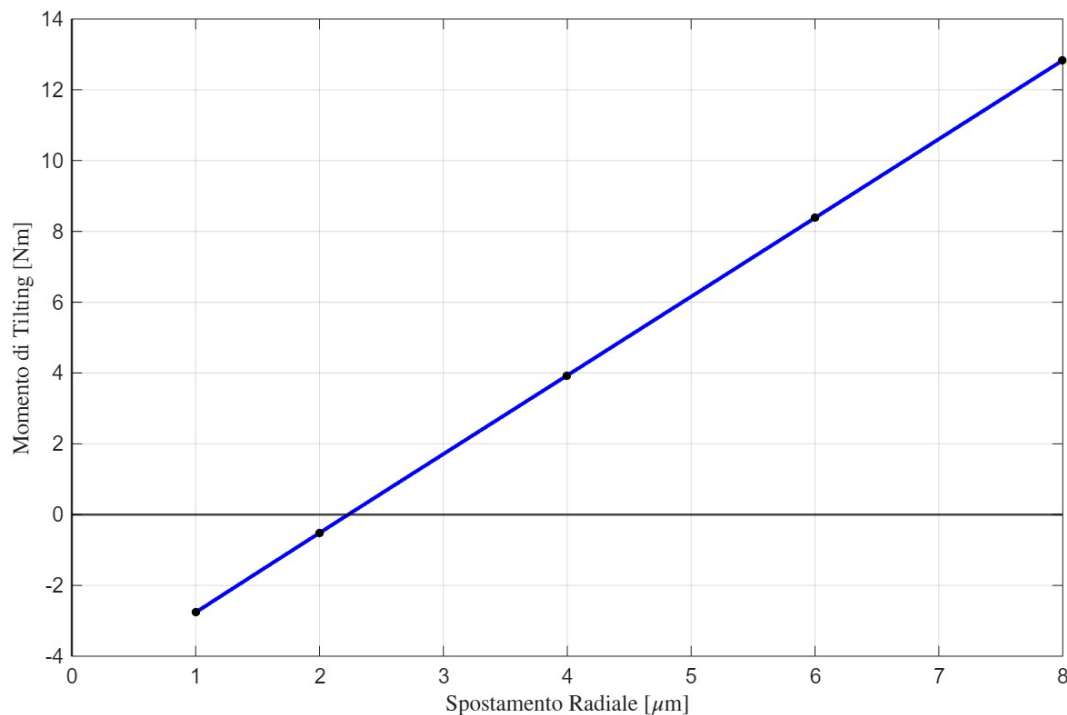


Figura 55: Spicchio di cuscinetto specchiato

Dall'analisi del grafico emerge una relazione sostanzialmente lineare tra il momento di tilting e lo spostamento radiale nel range considerato. Per valori ridotti dello spostamento radiale (circa 1 μm), il momento di tilting assume valori negativi, indicando un verso del momento opposto rispetto alla convenzione di segno adottata. All'aumentare dello spostamento radiale, il momento cresce progressivamente, attraversando una condizione prossima all'annullamento per uno spostamento radiale di circa 2 μm .

Superata tale soglia, il momento di tilting diventa positivo e aumenta in modo pressoché proporzionale allo spostamento radiale, raggiungendo valori superiori a 12 Nm per spostamenti dell'ordine di 8 μm . Questo comportamento evidenzia come lo spostamento radiale rappresenti il principale meccanismo di generazione della coppia ribaltante, una volta fissata la condizione di carico assiale.

La marcata linearità dell'andamento suggerisce che, nelle condizioni analizzate, il sistema lavori in un regime elastico, in cui la rigidità radiale del cuscinetto duplex e la geometria dei contatti governano direttamente la risposta in termini di momento di tilting. L'assenza di evidenti non linearità indica inoltre che non si verificano variazioni significative nel numero o nella posizione dei contatti attivi.

Conclusioni

Il seguente studio presenta l'obiettivo di quantificare la deformazione delle sfere del cuscinetto, quando soggetto a carichi elevati, al fine di comprendere se questi influenzano in modo significativo la trattazione analitica del problema.

Per approfondire l'argomento, sono stati intrapresi due diversi studi:

- Uno studio bidimensionale dove vengono estratti i nodi che delimitano le sfere delle linee di contatto per due condizioni, indeformato e applicazione di un carico assiale pari a $100\text{ }\mu\text{m}$. Mediante il software *MATLAB* 2025b i nodi, di ambedue le condizioni, vengono interpolati usando rispettivamente una circonferenza e un'ellisse.

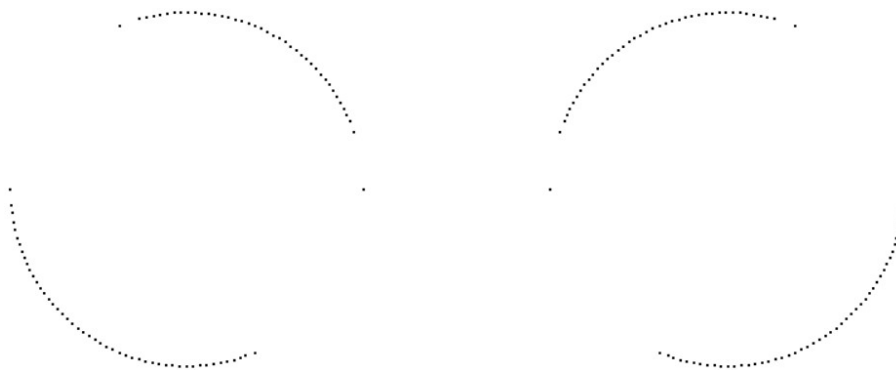


Figura 56: Nodi che delimitano le linee di contatto delle sfere

- Uno studio tridimensionale dove vengono estratti i nodi che delimitano le sfere delle superfici di contatto per due condizioni, indeformato e applicazione di un carico assiale pari a $100\text{ }\mu\text{m}$. Mediante il software *MATLAB* 2025b i nodi, di ambedue le condizioni, vengono interpolati usando rispettivamente una sfera e un'ellissoide.

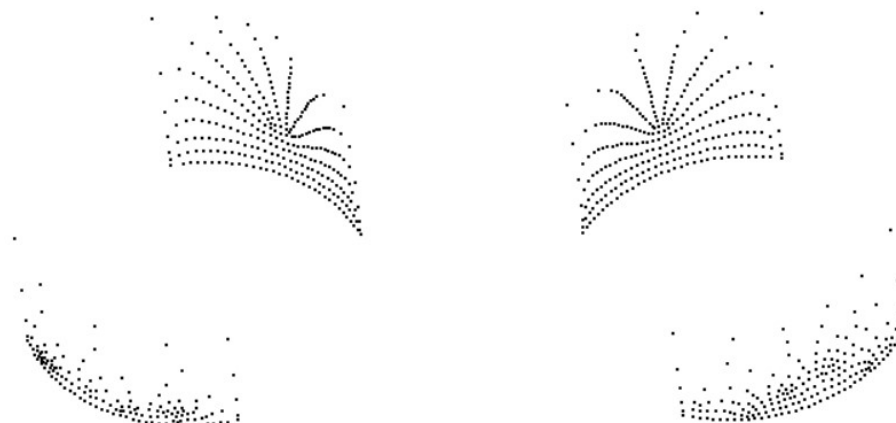


Figura 57: Nodi che delimitano le superfici di contatto delle sfere

Risultati 2D

Nel presente lavoro viene sviluppata una procedura di post-processing finalizzata alla quantificazione della deformazione geometrica di linee inizialmente circolari, soggetti a spostamenti indotti da carichi meccanici. L'analisi si basa sul confronto tra la geometria non deformata, approssimata mediante un *fit* circolare, e la geometria deformata, descritta tramite un *fit* ellittico.

La differenza tra il raggio iniziale del cerchio e i semiassi dell'ellisse deformata consente di stimare in modo diretto le deformazioni percentuali lungo le direzioni principali. Per ciascuna linea sono disponibili due insiemi di dati; il primo descrive la configurazione non deformata attraverso le coordinate spaziali dei nodi:

$$\mathbf{x}_0 = (X, Y, Z), \quad (62)$$

mentre il secondo fornisce gli spostamenti nodali:

$$\mathbf{u} = (U_X, U_Y, U_Z). \quad (63)$$

Le coordinate deformate sono ottenute mediante la relazione:

$$\mathbf{x}_d = \mathbf{x}_0 + \mathbf{u}. \quad (64)$$

L'analisi viene condotta nel piano ZY , assumendo che la deformazione principale della linea avvenga in tale sezione. Poiché i file di input possono contenere nodi in ordine differente, viene preliminarmente effettuato un allineamento dei nodi sulla base del loro identificativo univoco, selezionando esclusivamente i nodi comuni a entrambi i dataset e garantendo la corretta associazione tra coordinate iniziali e spostamenti.

La geometria iniziale viene approssimata come un cerchio, descritto dall'equazione:

$$(Z - a)^2 + (Y - b)^2 = r^2, \quad (65)$$

dove a e b rappresentano le coordinate del centro e r il raggio. Sviluppando l'equazione si ottiene:

$$Z^2 + Y^2 - 2aZ - 2bY + (a^2 + b^2 - r^2) = 0, \quad (66)$$

che può essere riscritta in forma lineare come:

$$-2aZ - 2bY + c = -(Z^2 + Y^2), \quad (67)$$

con

$$c = a^2 + b^2 - r^2. \quad (68)$$

Il sistema sovradeterminato così ottenuto viene risolto tramite il metodo dei minimi quadrati nella forma matriciale:

$$\mathbf{A}\mathbf{p} = \mathbf{B}, \quad (69)$$

con

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2Z_1 & -2Y_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -2Z_n & -2Y_n & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -(Z_1^2 + Y_1^2) \\ \vdots \\ -(Z_n^2 + Y_n^2) \end{bmatrix}. \quad (70)$$

Dai parametri stimati si ricavano le coordinate del centro e il raggio del cerchio attraverso la relazione:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}, \quad (71)$$

che rappresenta la dimensione caratteristica del target nello stato non deformato.

In funzione della configurazione geometrica di ciascuna linea, viene successivamente considerata solo una porzione del cerchio, tipicamente un semicerchio superiore o inferiore, descritta tramite la parametrizzazione:

$$\begin{cases} Z(\theta) = a + r \cos \theta \\ Y(\theta) = b + r \sin \theta \end{cases}, \quad \theta \in [\theta_{\min}, \theta_{\max}]. \quad (72)$$

La forma deformata del target viene approssimata mediante un'ellisse espressa nella sua forma generale implicita:

$$AZ^2 + BZY + CY^2 + DZ + EY + F = 0. \quad (73)$$

I coefficienti A , B , C , D ed E vengono determinati risolvendo un sistema lineare ai minimi quadrati del tipo:

$$\mathbf{M}\mathbf{c} = -\mathbf{1}, \quad (74)$$

dove

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} Z_1^2 & Z_1Y_1 & Y_1^2 & Z_1 & Y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Z_n^2 & Z_nY_n & Y_n^2 & Z_n & Y_n \end{bmatrix}, \quad (75)$$

imponendo

$$F = 1. \quad (76)$$

Il centro dell'ellisse viene ottenuto imponendo l'annullamento del gradiente della funzione quadratica, ricavando le espressioni analitiche:

$$Z_c = \frac{BE - 2CD}{4AC - B^2}, \quad Y_c = \frac{BD - 2AE}{4AC - B^2}. \quad (77)$$

A partire dal centro, il termine noto dell'equazione ellittica viene ricalcolato come:

$$F_c = AZ_c^2 + BZ_cY_c + CY_c^2 + DZ_c + EY_c + F. \quad (78)$$

I semiassi principali dell'ellisse vengono determinati analizzando la matrice quadratica associata:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{bmatrix}, \quad (79)$$

i cui autovalori λ_1 e λ_2 consentono di calcolare i semiassi secondo le relazioni:

$$a = \sqrt{\frac{-F_c}{\min(\lambda_1, \lambda_2)}} \quad b = \sqrt{\frac{-F_c}{\max(\lambda_1, \lambda_2)}} \quad (80)$$

L'orientazione dell'ellisse rispetto al sistema di riferimento è infine descritta dall'angolo di rotazione che fornisce un'indicazione dell'eventuale anisotropia della deformazione indotta.

$$\theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{B}{A - C} \right) \quad (81)$$

Di seguito viene mostrato un grafico in cui viene espresso un confronto geometrico tra quattro archi di cerchio e i corrispondenti quattro archi di ellisse nel piano Z - Y , con coordinate espresse in micrometri. Gli archi di ellisse sono rappresentati tramite punti colorati, mentre gli archi di cerchio di riferimento sono indicati da curve continue nere:

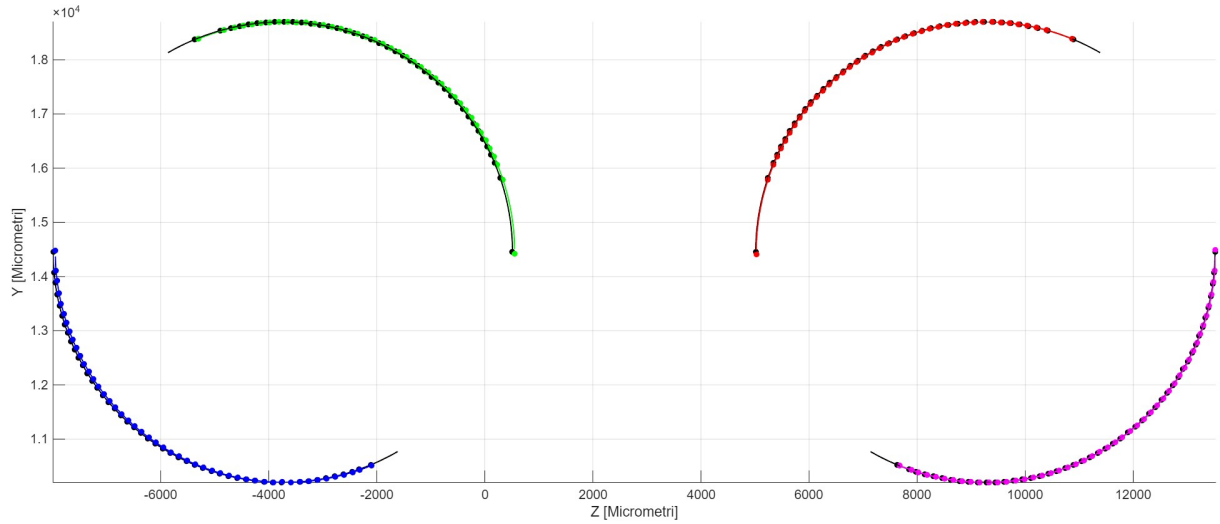


Figura 58: Ricostruzione delle linee indeformate (nero) e deformate (colorate)

Per ciascuna configurazione si osserva una marcata sovrapposizione tra le due geometrie, a dimostrazione della buona capacità dell'arco di ellisse di approssimare l'arco di cerchio nel dominio considerato. Le discrepanze residue, di entità limitata, risultano più evidenti in prossimità delle estremità degli archi, dove la variazione di curvatura propria dell'ellisse si discosta maggiormente dalla curvatura costante del cerchio.

La quantificazione della deformazione viene effettuata confrontando il raggio iniziale del cerchio con i semiassi dell'ellisse deformata. Le deformazioni percentuali lungo le direzioni principali sono definite come:

$$\varepsilon_a = \frac{a - r}{r} \cdot 100 \quad \varepsilon_b = \frac{b - r}{r} \cdot 100 \quad (82)$$

rappresentative rispettivamente della deformazione massima e minima.

I risultati ottenuti per ciascuna linea vengono infine raccolti in una tabella riassuntiva:

Linee	Raggio cerchio [μm]	Semiasse a [μm]	Semiasse b [μm]	% Deformazione	
				ε_a	ε_b
Linea α	4250	4242.0	4221.1	-0.18	-0.67
Linea β	4250	4245.4	4228.5	-0.10	-0.49
Linea γ	4250	4280.5	4262.0	0.72	0.29
Linea δ	4250	4246.7	4230.4	-0.72	-0.46

Tabella 4: Parametri geometrici e percentuale di deformazione delle linee

Risultati 3D

Nel presente lavoro viene estesa la procedura di analisi geometrica al caso tridimensionale, al fine di caratterizzare la deformazione di una superficie inizialmente ellissoidale mediante il confronto tra la configurazione non deformata e quella deformata. L'approccio adottato si basa sul fit di un ellissoide ai punti sperimentali o numerici nelle due configurazioni e sulla successiva valutazione delle variazioni dei semiassi principali. Tale metodologia consente di ottenere una descrizione completa della deformazione spaziale delle superfici, includendo eventuali anisotropie lungo le tre direzioni principali.

I dati di input sono costituiti da due insiemi di punti tridimensionali: il primo descrive la configurazione non deformata delle superfici, mentre il secondo fornisce gli spostamenti nodali associati a ciascun punto. Le coordinate deformate vengono ottenute sommando gli spostamenti alle coordinate iniziali secondo la relazione:

$$\mathbf{x}_d = \mathbf{x}_0 + \mathbf{u}, \quad (83)$$

dove

$$\mathbf{x}_0 = (X, Y, Z), \quad \mathbf{u} = (U_X, U_Y, U_Z). \quad (84)$$

Poiché i due insiemi di dati possono presentare un ordinamento differente, viene preliminarmente effettuato un allineamento dei nodi tramite l'identificativo univoco, selezionando esclusivamente i punti comuni a entrambi i dataset e garantendo la corretta associazione tra coordinate e spostamenti.

La geometria delle superfici viene quindi approssimata mediante un ellissoide tridimensionale, descritto nella sua forma implicita generale dall'equazione:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0. \quad (85)$$

I coefficienti dell'ellissoide vengono determinati risolvendo un problema ai minimi quadrati costruito a partire dalle coordinate dei punti, formulato in forma matriciale come:

$$\mathbf{D}\mathbf{p} = \mathbf{0}, \quad (86)$$

dove

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & x_1y_1 & x_1z_1 & y_1z_1 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^2 & y_n^2 & z_n^2 & x_ny_n & x_nz_n & y_nz_n & x_n & y_n & z_n & 1 \end{bmatrix}. \quad (87)$$

La soluzione viene ottenuta tramite decomposizione ai valori singolari (SVD), selezionando il vettore dei coefficienti associato al più piccolo valore singolare. A partire dai coefficienti stimati, l'equazione dell'ellissoide viene riscritta separando il termine quadratico e quello lineare, introducendo la matrice simmetrica

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} A & D/2 & E/2 \\ D/2 & B & F/2 \\ E/2 & F/2 & C \end{bmatrix}, \quad (88)$$

e il vettore

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} G \\ H \\ I \end{bmatrix}. \quad (89)$$

Il centro dell'ellissoide viene determinato imponendo l'annullamento del gradiente della forma quadratica, ottenendo

$$\mathbf{c} = -\frac{1}{2}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{q}. \quad (90)$$

Il termine noto dell'equazione viene quindi ricalcolato nel centro come:

$$J_c = J + \mathbf{c}^T \mathbf{Q} \mathbf{c} + \mathbf{q}^T \mathbf{c}. \quad (91)$$

La determinazione dei semiassi principali dell'ellissoide avviene mediante l'analisi spettrale della matrice normalizzata $\mathbf{Q}/(-J_c)$. Calcolando gli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ di tale matrice, i semiassi risultano pari a:

$$a = \sqrt{\frac{1}{\lambda_1}}, \quad b = \sqrt{\frac{1}{\lambda_2}}, \quad c = \sqrt{\frac{1}{\lambda_3}}. \quad (92)$$

Gli autovettori associati definiscono inoltre l'orientazione dell'ellissoide nello spazio, consentendo di ricostruire la sua geometria completa. Una volta determinati gli ellipsoidi corrispondenti alla configurazione non deformata e a quella deformata, viene generata una mesh parametrica tridimensionale di ciascun ellissoide mediante una rappresentazione angolare basata sulle coordinate sferiche. I punti della mesh vengono successivamente ruotati secondo la matrice degli autovettori e traslati nel centro dell'ellissoide.

Al fine di migliorare la rappresentazione grafica e limitare l'analisi alle regioni effettivamente interessate dai dati, viene applicato un filtraggio spaziale che seleziona esclusivamente le porzioni di ellissoide situate entro una distanza prefissata dai punti originali.

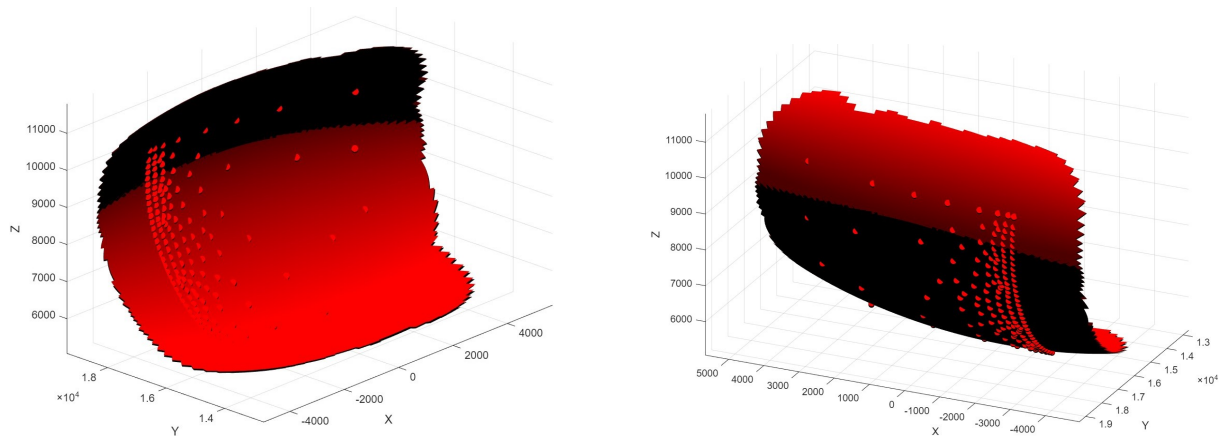


Figura 59: Ricostruzione delle superfici α e γ indeformate (nero) e deformate (rosso)

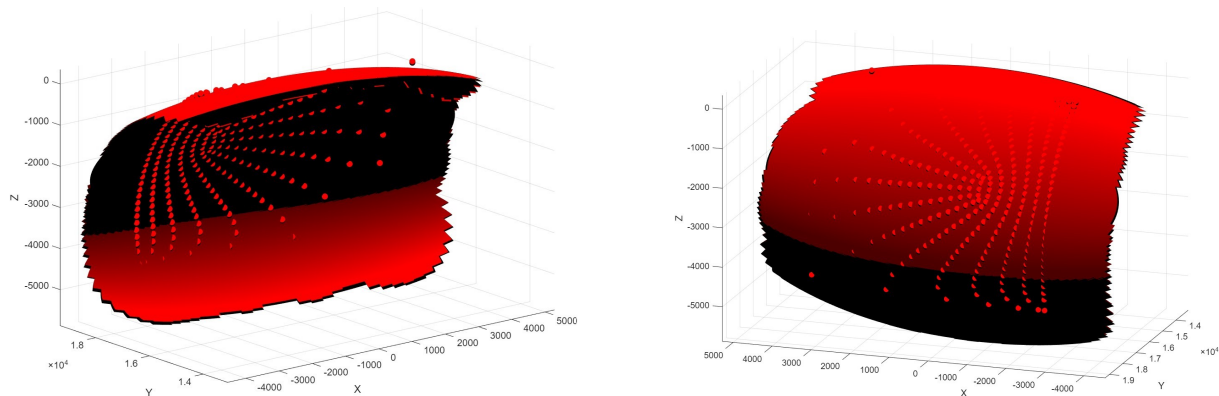


Figura 60: Ricostruzione delle superfici β e δ indeformate (nero) e deformate (rosso)

La quantificazione della deformazione viene infine effettuata confrontando i semiassi dell'ellissoide deformato con quelli dell'ellissoide non deformato.

Le deformazioni relative percentuali lungo le tre direzioni principali sono definite come:

$$\varepsilon_a = \frac{a_d - a_0}{a_0} \cdot 100, \quad \varepsilon_b = \frac{b_d - b_0}{b_0} \cdot 100, \quad \varepsilon_c = \frac{c_d - c_0}{c_0} \cdot 100 \quad (93)$$

dove i pedici 0 e d indicano rispettivamente la configurazione non deformata e quella deformata. I risultati ottenuti consentono di caratterizzare in modo quantitativo la deformazione tridimensionale delle superfici, evidenziando eventuali differenze di comportamento lungo le tre direzioni principali.

I risultati ottenuti per ciascuna linea vengono infine raccolti in una serie di tabelle riassuntive:

Superficie α	Indeformato [μm]	Deformato [μm]	% Deformazione ε
Semiasse a	8266.5	8240.4	-0.31
Semiasse b	3731.8	3714.7	-0.46
Semiasse c	2993.5	2959.3	-1.14

Tabella 5: Parametri geometrici e percentuale di deformazione della superficie α

Superficie β	Indeformato [μm]	Deformato [μm]	% Deformazione ε
Semiasse a	7409.5	7339.2	-0.95
Semiasse b	3356.2	3321.9	-1.02
Semiasse c	2353.9	2292.0	-2.63

Tabella 6: Parametri geometrici e percentuale di deformazione della superficie β

Superficie γ	Indeformato [μm]	Deformato [μm]	% Deformazione ε
Semiasse a	8266.5	8237.5	-0.35
Semiasse b	3731.8	3724.8	-0.19
Semiasse c	2993.5	2977.3	-0.54

Tabella 7: Parametri geometrici e percentuale di deformazione della superficie γ

Superficie δ	Indeformato [μm]	Deformato [μm]	% Deformazione ε
Semiasse a	7409.5	7344.2	-0.88
Semiasse b	3356.2	3311.9	-1.32
Semiasse c	2353.9	2312.2	-1.77

Tabella 8: Parametri geometrici e percentuale di deformazione della superficie γ

Appendici

Appendice A

Il seguente script MATLAB implementa il modello hertziano con precarico, specchiatura delle curve e confronto tra i due cuscinetti:

```
1 %% --- Parametri identici al tuo codice originale ---
2 clear; close all; clc;
3
4 d = 17e-3;
5 D = 47e-3;
6 B = 14e-3;
7
8 alpha_deg = 40;
9 alpha = deg2rad(alpha_deg);
10
11 E = 210e9;
12 nu = 0.30;
13 E_eff = 1/((1-nu^2)/E + (1-nu^2)/E);
14
15 z = 9;
16 d_ball = 8.5e-3;
17 R_ball = d_ball/2;
18
19 pitchD = (D + d)/2;
20
21 R_outer_race = R_ball;
22 R_inner_race = R_ball;
23
24 R_eff = 1 ./ (1/R_ball + 1/((R_outer_race + R_inner_race)/2));
25
26 K_H = (4/3)*E_eff*sqrt(R_eff);
27
28 axial_clearance = 0;
29
30 %% --- Precarico in spostamento ---
31 delta0 = 10e-6; % 10 Micrometri
32
33 %% --- Asse spostamenti totale coppia ---
34 delta = linspace(-150e-6, 150e-6, 400);
35
36 %% --- Stessa identica funzione del tuo codice originale ---
37 force_single = @(d) ...
38     (d <= axial_clearance).*0 + ...
39     (d > axial_clearance).* ...
40     ( z*K_H*((d-axial_clearance)*cos(alpha)).^(3/2) * sin(alpha) );
```

```

41
42 %% --- Costruzione curve esattamente come da immagine SKF ---
43 F_A = zeros(size(delta)); % curva crescente
44 F_B = zeros(size(delta)); % curva decrescente
45
46 for i = 1:length(delta)
47     % Cuscinetto A      parte da -delta0 (destra del grafico)
48     dA = delta(i) + delta0;
49     F_A(i) = force_single(dA);
50
51     % Cuscinetto B      parte da +delta0, specchiato e ribaltato
52     dB = -(delta(i) - delta0);
53     F_B(i) = force_single(dB);
54 end
55
56 %% --- Plot ---
57 figure('Color','w','Position',[200 200 900 420]);
58 hold on;
59 plot(delta*1e6, F_A, 'b', 'LineWidth', 2);
60 plot(delta*1e6, F_B, 'r', 'LineWidth', 2);
61 grid on;
62
63 xlabel('Spostamento assiale \delta [\mu m]');
64 ylabel('Forza [N]');
65 title('Curve originali Hertziane + precarico + specchiatura');
66 legend('Cuscinetto A', 'Cuscinetto B', 'Location', 'NorthWest');

```

Appendice B

Script MATLAB per il calcolo del contatto elastico hertziano:

```
1  clc; clear all; close all;
2
3  %% ----- INPUT (unit : mm, N, GPa) -----
4  % Scegliere uno dei casi:
5  % caseType = 'cylinder-plane';           % [1] Cilindro-Piano
6  % caseType = 'cylinder-cylinder';       % [2] Cilindro-Cilindro
7  % caseType = 'cylinder-concave';       % [3] Cilindro-Concavo
8  % caseType = 'sphere-plane';           % [4] Sfera-Piano
9  % caseType = 'sphere-sphere';          % [5] Sfera-Sfera
10
11      --
10  caseType = 'sphere-concave';           % [6] Sfera-Concavo
11      ----
12
13  % Parametri geometrici (modificare a seconda del caso)
14  R1_mm = 8.5;    % Raggio 1 [mm] (sfera o cilindro superiore)
15  R2_mm = 8.7;    % Raggio 2 [mm] (sfera inferiore, conca, o cilindro
16                    inferiore)
17  L_mm = 10;      % Lunghezza cilindro [mm] (solo per contatti con
18                    cilindro)
19  F_N = 1000;     % carico totale [N]
20
21  % Materiale
22  E_GPa = 210;    % Modulo di Young [GPa]
23  nu = 0.30;     % Coefficiente di Poisson
24
25  %% ----- Conversioni ed E* -----
26  % converto nelle unit SI interne quando opportuno
27  E = E_GPa * 1e9;    % [Pa]
28  Estar = E / (2*(1 - nu^2)); % come usato nei blocchi precedenti (
29  Pa)
30
31  % mantengo copie in mm dove le formule empiriche (originali) lo
32  richiedono
33  R1 = R1_mm; R2 = R2_mm; L = L_mm;
34
35  %% Inizializzo variabili di output comuni
36  a_mm = NaN;      % raggio di contatto (per contatti puntuali) [mm]
37  b_mm = NaN;      % semilarghezza di contatto (per contatti lineari)
38                    [mm]
39  p0_MPa = NaN;    % pressione massima [MPa]
40  A_mm2 = NaN;     % area di contatto [mm^2]
41  delta_um = NaN;  % abbassamento [um]
42  notes = ',';
```

```

38
39 switch lower(caseType)
40     %% ----- Sfera-Sfera (Hertz point contact)
41     -----
42     case 'sphere-sphere'
43         % Uso formule hertziane note (usando mm->m per calcoli
44         %    fisici)
45         R1_m = R1_mm*1e-3; R2_m = R2_mm*1e-3; F = F_N;
46         invR = 1/R1_m + 1/R2_m;          % per due sfere che si toccano
47         %    (convesse entrambe)
48         R_eff = 1 / invR;                % [m]
49         a = ( (3 * F * R_eff) / (4 * Estar) )^(1/3); % [m]
50         p0 = (3 * F) / (2 * pi * a^2);    % [Pa]
51         delta = a^2 / R_eff;              % [m]
52         A = pi * a^2;                    % [m^2]
53
54         % conversione verso unit  richieste
55         a_mm = a*1e3;
56         p0_MPa = p0*1e-6;
57         delta_um = delta*1e6;
58         A_mm2 = A*1e6;
59         notes = 'Sfera-Sfera (classico Hertz point contact)';
60
61     %% ----- Sfera-Concava (sfera-conca)
62     -----
63     case 'sphere-concave'
64         % sfera (R1) contro conca (R2) -> curvatura efficace 1/R1 -
65         %    1/R2
66         R1_m = R1_mm*1e-3; R2_m = R2_mm*1e-3; F = F_N;
67         invR = 1/R1_m - 1/R2_m;          % attenzione al segno per conca
68         if abs(invR) < 1e-18
69             error('Curvatura efficace ~ 0: R1 e R2 portano a
70             invR_eff = 0');
71         end
72         R_eff = 1 / invR;
73         a = ( (3 * F * R_eff) / (4 * Estar) )^(1/3); % [m] (Hertz
74         %    point)
75         p0 = (3 * F) / (2 * pi * a^2);    % [Pa]
76         delta = a^2 / R_eff;              % [m]
77         A = pi * a^2;
78
79         a_mm = a*1e3; p0_MPa = p0*1e-6; delta_um = delta*1e6; A_mm2
80         = A*1e6;
81         notes = 'Sfera-Concava (Hertz point adapted)';
82
83     %% ----- Sfera-Piano -----
84     case 'sphere-plane'

```

```

77 % piano => R2 = Inf, invR = 1/R1 + 0 -> R_eff = R1
78 R1_m = R1_mm*1e-3; F = F_N;
79 invR = 1/R1_m; R_eff = 1 / invR;
80 a = ( (3 * F * R_eff) / (4 * Estar) )^(1/3); % [m]
81 p0 = (3 * F) / (2 * pi * a^2);
82 delta = a^2 / R_eff;
83 A = pi * a^2;
84
85 a_mm = a*1e3; p0_MPa = p0*1e-6; delta_um = delta*1e6; A_mm2
    = A*1e6;
86 notes = 'Sfera-Piano (Hertz point)';
87
88 %% ----- Cilindro-Piano (line contact)
    -----
89 case 'cylinder-plane'
90 % usa la formula lineare: b = sqrt((4*q*R_eff)/(pi*E*))
91 % Input: R1 = raggio cilindro superiore (mm), R2 = Inf (
    piano)
92 % Conversione in SI per calcolo coerente
93 R1_m = R1_mm*1e-3; L_m = L_mm*1e-3; F = F_N;
94 q = F / L_m; % [N/m] carico per lunghezza
95 % curvatura: 1/(2R) per cilindro, piano = 0 -> R_eff =
    1/(1/(2R))
96 % per contatto lineare la formula : b = sqrt((4*q*R_eff)
    /(pi*Estar))
97 % calcolo R_eff in metri (curvatura cilindro: alpha = 1/(2R
    ))
98 alpha = 1/(2*R1_m);
99 % nel modello hertziano lineare: R_eff = 1/(2*alpha) = R1_m
100 R_eff = R1_m;
101 b = sqrt((4*q*R_eff)/(pi*Estar)); % [m]
102 p0 = (2*q)/(pi*b); % [Pa]
103 delta = (2*q)/(pi*Estar) * log((4*R_eff)/b); % [m], come
    nel blocco originale
104 A_line = 2*b * L_m; % area di contatto
    approssimata [m^2]
105
106 b_mm = b*1e3; p0_MPa = p0*1e-6; delta_um = delta*1e6; A_mm2
    = A_line*1e6;
107 notes = 'Cilindro-Piano (line contact)';
108
109 %% ----- Cilindro-Cilindro -----
110 case 'cylinder-cylinder'
111 % per coerenza con il codice originale uso le formule
    empiriche date
112 % ATTENZIONE: le costanti empiriche originali erano
    espresse con dimensioni mm,N

```

```

113 % mantengo quindi i calcoli in mm e N come nell'originale e
    poi converto.
114 L = L_mm; r = R1_mm; R = R2_mm; F = F_N;
115 % formule originali (assunte in mm,N)
116 b_mm = ((0.00241)/sqrt(1+(r/R))) * sqrt((F*2*r)/L); % [mm]
117 P_max_MPa = 264 * sqrt(1 + (r/R)) * sqrt((F)/(L*2*r)); % [
    MPa]
118 a_mm = L/2;
119 % delta (empirica mm)
120 delta_mm = (4.05/100000)*(F^0.925 / L^0.85); % [mm] (valore
    empirico)
121
122 % assegnazioni coerenti
123 p0_MPa = P_max_MPa;
124 A_mm2 = (2*b_mm) * L; % area approssimativa [mm^2]
125 delta_um = delta_mm * 1e3;
126 notes = 'Cilindro-Cilindro (formule empiriche, unit mm
    usate internamente)';
127
128 %% ----- Cilindro-Concavo -----
129 case 'cylinder-concave'
130 % mantengo il blocco finale coerente con le formule
    Hertziane per rullo-conca
131 % calcoli in SI (m) come nell'ultimo blocco del codice di
    partenza
132 R1_m = R1_mm*1e-3; R2_m = R2_mm*1e-3; L_m = L_mm*1e-3; F =
    F_N;
133 q = F / L_m;
134 invR_eff = 1/R1_m - 1/R2_m;
135 if abs(invR_eff) < 1e-18
136     error('Curvatura equivalente infinita (R1=R2).');
137 end
138 R_eff = 1 / invR_eff; % [m]
139 b = sqrt( (4*q*R_eff) / (pi*Estar) ); % [m]
140 p0 = (2*q) / (pi*b); % [Pa]
141 delta = (2*q)/(pi*Estar) * log( (4*R_eff)/b ); % [m]
142
143 b_mm = b*1e3; p0_MPa = p0*1e-6; delta_um = delta*1e6;
144 A_mm2 = (2*b_mm) * L_mm; % area approssimativa [mm^2]
145 notes = 'Cilindro-Concavo (Hertz line contact adattato)';
146
147 otherwise
148     error('caseType non riconosciuto. Scegliere un caso valido.
    ');
149 end
150
151 %% ----- Stampa risultati in formato uniforme

```

```

152 fprintf('--- Risultati contatto: %s ---\n', notes);
153 fprintf('Input: R1 = %.3f mm, R2 = %.3f mm, L = %.3f mm (se
    applicabile), F = %.3f N\n', R1_mm, R2_mm, L_mm, F_N);
154
155 % stampa raggio/semi-larghezza
156 if ~isnan(a_mm)
157     fprintf('a (raggio di contatto, point) = %.6f mm\n', a_mm);
158 end
159 if ~isnan(b_mm)
160     fprintf('b (semilarghezza contatto, line) = %.6f mm\n', b_mm);
161 end
162
163 % pressione massima
164 if ~isnan(p0_MPa)
165     fprintf('Pressione massima p0 = %.6f MPa\n', p0_MPa);
166 end
167
168 % area e abbassamento
169 if ~isnan(A_mm2)
170     fprintf('Area di contatto A      %.6f mm^2\n', A_mm2);
171 end
172 if ~isnan(delta_um)
173     fprintf('Abbassamento delta    %.6f m \n', delta_um);
174 end
175
176 fprintf('-----\n');
177
178 %% ----- Grafico -----
179 % se abbiamo 'a' o 'b' definiamo il profilo e lo plottiamo
    coerentemente
180 if exist('a','var') && ~isempty(a)
181     % plot sfera (radiale)
182     r = linspace(0, 1.2*a, 300);
183     p = zeros(size(r));
184     inside = r <= a;
185     p(inside) = p0 .* sqrt(1 - (r(inside)/a).^2);
186     figure('Name','Profilo pressione (point contact)','NumberTitle',
        , 'off');
187     plot(r*1e3, p*1e-6, 'LineWidth', 2);
188     xlabel('r [mm]'); ylabel('p(r) [MPa]');
189     title(['Profilo pressione      ' caseType]);
190     grid on;
191 elseif exist('b','var') && ~isempty(b)
192     x = linspace(-1.5*b, 1.5*b, 300);
193     p = zeros(size(x));
194     inside = abs(x) <= b;

```

```

195     p(inside) = p0 .* sqrt(1 - (x(inside)/b).^2);
196     figure('Name','Profilo pressione (line contact)','NumberTitle',
           'off');
197     plot(x*1e3, p*1e-6, 'LineWidth', 2);
198     xlabel('x [mm]'); ylabel('p(x) [MPa]');
199     title(['Profilo pressione      ' caseType]);
200     grid on;
201 end

```

Appendice C

Analisi della deformazione tramite *fit* circolare ed ellittico:

```
1  clc; clear; close all;
2
3  %% =====
4  %   Lista dei target
5  %   =====
6  targets = {'Targ1', 'Targ2', 'Targ3', 'Targ4'};
7  colors = {'r','g','b','m'};
8
9  %% =====
10 %   Figura unica per tutti i target
11 %   =====
12 figure; hold on; grid on; axis equal;
13 xlabel('Z [Micrometri]'); ylabel('Y [Micrometri]');
14 title('Comparazione Deformata-NONDeformata');
15 legend_entries = {};
16
17 %% =====
18 %   Tabella risultati
19 %   =====
20 results = table('Size',[0 5],...
21     'VariableTypes',{'string','double','double','double','double'},...
22     'VariableNames',{'Target','RaggioCerchio','SemiAsseMag','SemiAsseMin','DeformazionePct'});
23
24 %% =====
25 %   Loop su tutti i target
26 %   =====
27 for k = 1:length(targets)
28     targ = targets{k};
29
30     % --- Lettura file
31     noDef = readmatrix([targ '_NoDef.txt']);
32     dispN = readmatrix(['Spostamenti_' targ '.txt']);
33
34     % --- Estrazione colonne
35     node_nd = noDef(:,1);
36     X = noDef(:,2);
37     Y = noDef(:,3);
38     Z = noDef(:,4);
39
40     node_d = dispN(:,1);
41     UX = dispN(:,2);
42     UY = dispN(:,3);
```

```

43     UZ = dispN(:,4);
44
45     % --- Allineamento nodi
46     [~, ia, ib] = intersect(node_nd, node_d);
47     X = X(ia); Y = Y(ia); Z = Z(ia);
48     UX = UX(ib); UY = UY(ib); UZ = UZ(ib);
49
50     % --- Nodi deformati
51     Z0 = Z; Y0 = Y;
52     Z1 = Z + UZ; Y1 = Y + UY;
53
54     % --- Fit cerchio
55     A = [-2*Z0, -2*Y0, ones(size(Z0))];
56     B = -(Z0.^2 + Y0.^2);
57     params = A\B;
58     a = params(1); b = params(2);
59     r = sqrt(a^2 + b^2 - params(3));
60
61     % --- Fit ellisse deformata
62     M = [Z1.^2, Z1.*Y1, Y1.^2, Z1, Y1];
63     f = -ones(size(Z1));
64     coef = M\f;
65
66     Ae = coef(1); Be = coef(2); Ce = coef(3);
67     De = coef(4); Ee = coef(5); Fe = 1;
68
69     Zc_ell = (Be*Ee - 2*Ce*De)/(4*Ae*Ce - Be^2);
70     Yc_ell = (Be*De - 2*Ae*Ee)/(4*Ae*Ce - Be^2);
71
72     F_c = Ae*Zc_ell^2 + Be*Zc_ell*Yc_ell + Ce*Yc_ell^2 + De*Zc_ell
          + Ee*Yc_ell + Fe;
73
74     Q = [Ae, Be/2; Be/2, Ce];
75     eigvals = eig(Q);
76     a_ell = sqrt(-F_c / min(eigvals));
77     b_ell = sqrt(-F_c / max(eigvals));
78
79     % --- Deformazioni percentuali
80     eps_a = 100 * (max(a_ell,b_ell) - r) / r;
81     eps_b = 100 * (min(a_ell,b_ell) - r) / r;
82
83     results = [results; {targ, r, max(a_ell,b_ell), min(a_ell,b_ell)
84                       }, [eps_a, eps_b]};
85 end
86 disp(results);

```

Appendice D

Fit ellissoidale 3D e valutazione delle deformazioni percentuali:

```
1  clc; clear; close all;
2
3  %% =====
4  % CARICAMENTO PUNTI
5  %% =====
6  noDef = readmatrix('Targ1_NoDef.txt');
7  dispN = readmatrix('Spostamenti_Targ1.txt');
8
9  [~, ia, ib] = intersect(noDef(:,1), dispN(:,1));
10
11  Xb = noDef(ia,2); Yb = noDef(ia,3); Zb = noDef(ia,4);
12  Xr = Xb + dispN(ib,2);
13  Yr = Yb + dispN(ib,3);
14  Zr = Zb + dispN(ib,4);
15
16  %% =====
17  % FUNZIONI AUSILIARIE
18  %% =====
19  function ell = fitEllipsoid(x,y,z)
20      D = [ x.^2, y.^2, z.^2, x.*y, x.*z, y.*z, x, y, z, ones(size(x)
21          ) ];
22      [~, ~, V] = svd(D,0);
23      p = V(:,end);
24
25      [A,B,C,Dxy,Exz,Fyz,G,H,I,J] = deal(p(1),p(2),p(3),p(4),p(5),p
26          (6),p(7),p(8),p(9),p(10));
27      Q = [A,Dxy/2,Exz/2; Dxy/2,B,Fyz/2; Exz/2,Fyz/2,C];
28      q = [G;H;I];
29
30      centro = -0.5 * (Q \ q);
31      J2 = J + centro.'*Q*centro + q.'*centro;
32      [U,S] = eig(Q/-J2);
33      axes_len = sqrt(1 ./ diag(S));
34
35      ell.cx = centro(1); ell.cy = centro(2); ell.cz = centro(3);
36      ell.U = U; ell.axes_len = axes_len;
37  end
38
39  function [Xe,Ye,Ze] = generateMesh(ell, nRes)
40      [phi,theta] = meshgrid(linspace(0,2*pi,nRes), linspace(0,pi,
41          nRes));
42      Xe = ell.axes_len(1) * sin(theta).*cos(phi);
43      Ye = ell.axes_len(2) * sin(theta).*sin(phi);
44      Ze = ell.axes_len(3) * cos(theta);
```

```

42
43     pts = [Xe(:), Ye(:), Ze(:)] * ell.U';
44     Xe = reshape(pts(:,1), size(Xe)) + ell.cx;
45     Ye = reshape(pts(:,2), size(Ye)) + ell.cy;
46     Ze = reshape(pts(:,3), size(Ze)) + ell.cz;
47 end
48
49 function [Xe_f,Ye_f,Ze_f] = filterMesh(Xe,Ye,Ze,Xp,Yp,Zp,maxDist)
50     mask = false(size(Xe));
51     for i = 1:numel(Xp)
52         mask = mask | ((Xe-Xp(i)).^2 + (Ye-Yp(i)).^2 + (Ze-Zp(i)).^2 <= maxDist^2);
53     end
54     Xe_f = Xe; Ye_f = Ye; Ze_f = Ze;
55     Xe_f(~mask)=NaN; Ye_f(~mask)=NaN; Ze_f(~mask)=NaN;
56 end
57
58 %% =====
59 % FIT ELLISSOIDI
60 %% =====
61 ell_black = fitEllipsoid(Xb,Yb,Zb);
62 ell_red    = fitEllipsoid(Xr,Yr,Zr);
63
64 %% =====
65 % GENERAZIONE E FILTRAGGIO MESH
66 %% =====
67 nRes = 150;
68 [Xe_black,Ye_black,Ze_black] = generateMesh(ell_black,nRes);
69 [Xe_red,Ye_red,Ze_red]      = generateMesh(ell_red,nRes);
70
71 maxDist_factor = 0.4;
72 [Xe_black_f,Ye_black_f,Ze_black_f] = filterMesh(Xe_black,Ye_black,
73     Ze_black,Xb,Yb,Zb,maxDist_factor*mean(ell_black.axes_len));
74 [Xe_red_f,Ye_red_f,Ze_red_f]      = filterMesh(Xe_red,Ye_red,
75     Ze_red,Xr,Yr,Zr,maxDist_factor*mean(ell_red.axes_len));
76
77 %% =====
78 % CALCOLO DEFORMAZIONI
79 %% =====
80 deformazioni_perc = 100 * (ell_red.axes_len - ell_black.axes_len)
81     ./ ell_black.axes_len;
82 disp('Deformazioni Relative (%)');
83 fprintf('a: %.2f %%\n', deformazioni_perc(1));
84 fprintf('b: %.2f %%\n', deformazioni_perc(2));
85 fprintf('c: %.2f %%\n', deformazioni_perc(3));

```

Appendice E

Il seguente script MATLAB implementa il modello hertziano con precarico, specchiatura delle curve e confronto tra i due cuscinetti.

```
1  clc; clear; close all;
2
3  %% =====
4  %   Lista dei target
5  % =====
6  targets = {'Targ1', 'Targ2', 'Targ3', 'Targ4'};
7  colors = {'r','g','b','m'}; % colori per deformati e ellissi
8
9  %% =====
10 %   Figura unica per tutti i target
11 % =====
12 figure; hold on; grid on; axis equal;
13 xlabel('Z [Micrometri]'); ylabel('Y [Micrometri]');
14 title('Comparazione Deformata-NONDeformata');
15 legend_entries = {};
16
17 %% =====
18 %   Tabella risultati
19 % =====
20 results = table('Size',[0 5],...
21     'VariableTypes',{'string','double','double','double','double'},...
22     'VariableNames',{'Target','RaggioCerchio','SemiAsseMag','SemiAsseMin','DeformazionePct'});
23
24 %% =====
25 %   Loop su tutti i target
26 % =====
27 for k = 1:length(targets)
28     targ = targets{k};
29
30     %% =====
31     %   Lettura file
32     %% =====
33     noDef = readmatrix([targ '_NoDef.txt']);
34     dispN = readmatrix(['Spostamenti_' targ '.txt']);
35
36     %% =====
37     %   Estrazione colonne
38     %% =====
39     node_nd = noDef(:,1);
40     X = noDef(:,2);
41     Y = noDef(:,3);
```

```

42     Z = noDef(:,4);
43
44     node_d = dispN(:,1);
45     UX = dispN(:,2);
46     UY = dispN(:,3);
47     UZ = dispN(:,4);
48
49     %% =====
50     % Allineamento nodi
51     %% =====
52     [~, ia, ib] = intersect(node_nd, node_d);
53     X = X(ia); Y = Y(ia); Z = Z(ia);
54     UX = UX(ib); UY = UY(ib); UZ = UZ(ib);
55
56     %% =====
57     % Nodi deformati
58     %% =====
59     Xd = X + UX; Yd = Y + UY; Zd = Z + UZ;
60     Z0 = Z; Y0 = Y; % non deformati
61     Z1 = Zd; Y1 = Yd; % deformati
62
63     %% =====
64     % Fit cerchio
65     %% =====
66     A = [-2*Z0, -2*Y0, ones(size(Z0))];
67     B = -(Z0.^2 + Y0.^2);
68     params = A\B;
69     a = params(1); b = params(2); r = sqrt(a^2 + b^2 - params(3));
70
71     fprintf('%s: Raggio cerchio = %.4f\n', targ, r);
72
73     % Definizione semicerchio
74     switch k
75         case {3}
76             t = linspace(0, (2/3)*pi, 800); % semicerchio superiore
77         case {2}
78             t = linspace(pi, (5/3)*pi, 800); % semicerchio
              inferiore
79         case {1}
80             t = linspace((1/3)*pi, pi, 800); % semicerchio
              superiore
81         case {4}
82             t = linspace((4/3)*pi, 2*pi, 800); % semicerchio
              inferiore
83     end
84     Zc_full = a + r*cos(t);
85     Yc_full = b + r*sin(t);

```

```

86     mask = ismembertol(Zc_full, Z0, r/100); % tolleranza
           proporzionale al raggio
87     Zc = Zc_full(mask);
88     Yc = Yc_full(mask);
89
90     %% =====
91     %   Fit ellisse deformata
92     %% =====
93     M = [Z1.^2, Z1.*Y1, Y1.^2, Z1, Y1];
94     f = -ones(size(Z1));
95     coef = M\f;
96
97     Ae = coef(1); Be = coef(2); Ce = coef(3);
98     De = coef(4); Ee = coef(5); Fe = 1;
99
100    % Centro ellisse
101    Zc_ell = (Be*Ee - 2*Ce*De)/(4*Ae*Ce - Be^2);
102    Yc_ell = (Be*De - 2*Ae*Ee)/(4*Ae*Ce - Be^2);
103
104    % Traslazione al centro
105    F_c = Ae*Zc_ell^2 + Be*Zc_ell*Yc_ell + Ce*Yc_ell^2 + De*Zc_ell
           + Ee*Yc_ell + Fe;
106
107    % Semiassi tramite autovalori matrice quadratica
108    Q = [Ae, Be/2; Be/2, Ce];
109    eigvals = eig(Q);
110    a_ell = sqrt(-F_c / min(eigvals));
111    b_ell = sqrt(-F_c / max(eigvals));
112
113    % Angolo rotazione ellisse
114    theta = 0.5 * atan2(Be, Ae-Ce);
115
116    fprintf('%s: Centro ellisse = (%.4f, %.4f), semiassi: a = %.4f,
           b = %.4f, angolo = %.4f rad\n', ...
117           targ, Zc_ell, Yc_ell, max(a_ell,b_ell), min(a_ell,b_ell),
           theta);
118
119    %% =====
120    %   Calcolo deformazioni in %
121    %% =====
122    eps_a = 100 * (max(a_ell,b_ell) - r) / r; % deformazione asse
           maggiore [%]
123    eps_b = 100 * (min(a_ell,b_ell) - r) / r; % deformazione asse
           minore [%]
124    fprintf('%s: Deformazione epsilon_a = %.2f%%, epsilon_b = %.2f
           %%\n', targ, eps_a, eps_b);
125

```

```

126 %% =====
127 %   Aggiunta alla tabella
128 %% =====
129 results = [results; {targ, r, max(a_ell,b_ell), min(a_ell,b_ell
    ), [eps_a, eps_b]}}];
130
131 %% =====
132 %   Traccia punti e curve
133 %% =====
134 plot(Z0, Y0, 'ko', 'MarkerSize', 4, 'MarkerFaceColor','k');
135 plot(Z1, Y1, 'o', 'Color', colors{k}, 'MarkerSize', 4, '
    MarkerFaceColor', colors{k});
136 plot(Zc, Yc, 'k-', 'LineWidth', 1);
137 [ZZ, YY] = meshgrid(linspace(min(Z1),max(Z1),600), linspace(min
    (Y1),max(Y1),600));
138 ell_eq = Ae*ZZ.^2 + Be*ZZ.*YY + Ce*YY.^2 + De*ZZ + Ee*YY + Fe;
139 contour(ZZ, YY, ell_eq, [0 0], 'Color', colors{k}, 'LineWidth',
    1);
140
141 %% =====
142 %   Aggiornamento legenda
143 %% =====
144 legend_entries{end+1} = [targ ' non deformati'];
145 legend_entries{end+1} = [targ ' deformati'];
146 end
147
148 grid on; axis equal;
149
150 %% =====
151 %   Stampa tabella finale
152 % =====
153 disp('-----');
154 disp('Riepilogo deformazioni di tutti i target (%):');
155 disp(results);

```

Riferimenti bibliografici

- [1] H. Hertz, Über die Berührung fester elastischer Körper, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 92, pp. 156–171, 1882.
- [2] A. Signorini, Sopra alcune questioni di elastostatica, *Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze*, 1933.
- [3] A. Signorini, Questioni di elasticità non linearizzata e semilinearizzata, *Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni*, vol. 18, pp. 95–139, 1959.
- [4] G. Fichera, Problemi elastostatici con vincoli unilaterali: il problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno, *Memorie della Accademia Nazionale dei Lincei*, vol. 7, no. 2, pp. 91–140, 1964.
- [5] G. Duvaut and J. Lions, *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod, Paris, 1972.
- [6] M. Ciavarella, D. Hills, and G. Monno, The influence of round edges on the indentation by a flat punch, *Proc. IMechE Part C*, vol. 212, pp. 319–328, 1998. doi:10.1243/0954406981521259.
- [7] G. Duvant and J. L. Lins, Elasticité avec frottement, *Journal de Mécanique*, vol. 10, pp. 409–420, 1971.
- [8] G. Zavarise, P. Wriggers, and B. A. Schrefler, A method for solving contact problems, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, vol. 42, no. 3, pp. 473–498, 1998.
- [9] C. Kane, E. A. Repetto, M. Ortiz, and J. E. Marsden, Finite element analysis of non-smooth contact, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 180, no. 1–2, pp. 1–26, 1999.
- [10] A. Pandolfi, C. Kane, J. E. Marsden, and M. Ortiz, Time-discretized variational formulation of non-smooth frictional contact, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, vol. 53, no. 8, pp. 1801–1829, 2002.
- [11] O. A. Olukoko, A. A. Becker, and R. T. Fenner, Independent meshing of contacting surfaces using fictitious nodes, *Computers & Structures*, vol. 48, no. 5, pp. 787–801, 1993.
- [12] J. G. Leahy and A. A. Becker, Numerical treatment of local variables in 3D frictional contact problems, *Computers & Structures*, vol. 71, no. 4, pp. 383–395, 1999.
- [13] H. Gun, Boundary element analysis of 3-D elasto-plastic contact problems with friction, *Computers & Structures*, vol. 82, pp. 555–566, 2004.
- [14] P. Huang, X. Zhang, S. Ma, and X. Huang, Contact algorithms for the material point method, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, vol. 85, no. 4, pp. 498–517, 2011.

- [15] W. J. Chen, Analysis of elastic contact problems by mixed finite element methods, *J. Dalian Univ. Technol.*, vol. 2, pp. 16–28, 1979.
- [16] R. F. Li, *Modification Method and Stiffness Analysis of Gear Drives*, Chongqing University Press, 1998.
- [17] H. M. Lankarani and P. E. Nikravesh, Canonical impulse-momentum equations for impact analysis, *Journal of Mechanical Design*, vol. 114, no. 1, pp. 180–186, 1992.
- [18] S. Ahmed, H. M. Lankarani, and M. Pereira, Frictional impact analysis in open-loop multibody systems, *Journal of Mechanical Design*, vol. 121, no. 1, pp. 119–127, 1999.
- [19] H. M. Lankarani, Poisson-based formulation for frictional impact analysis, *Journal of Mechanical Design*, vol. 122, no. 4, pp. 489–497, 1999.
- [20] H. M. Lankarani and P. E. Nikravesh, Contact force model with hysteresis damping, *Journal of Mechanical Design*, vol. 112, no. 3, pp. 369–376, 1990.
- [21] SKF, A. B. SKF [online]. 2014.
- [22] WILLIAMSON JR, Frank. Richard courant and the finite element method: A further look. *Historia Mathematica*, 1980, 7.4: 369-378.
- [23] J. Abel and M. S. Shephard, An algorithm for multipoint constraints in finite element analysis, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 14, no. 3, pp. 464–467, 1979.
- [24] M. Ainsworth and B. Senior, Aspects of an adaptive *hp*-finite element method: adaptive strategy, conforming approximation and efficient solvers, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 150, pp. 65–87, 1997.
- [25] J. E. Akin, *Finite Elements for Analysis and Design*, Academic Press, London, 1994.