



**Politecnico
di Torino**

Politecnico di Torino

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Matematica

A.a. 2025/2026

Sessione di laurea Marzo 2026

Calcolo della sezione radar di strutture complesse mediante una formulazione ibrida EFIE–PO

Relatori:

Prof. Giuseppe Vecchi

Dott. Marco Righero

Dott. Giorgio Giordanengo

Candidato:

Martina Guariglia

mat. 324544

Sommario

La crescente complessità dei moderni sistemi radianti e l'aumento delle frequenze operative richiedono strumenti di analisi elettromagnetica in grado di coniugare accuratezza, efficienza numerica e scalabilità su geometrie realistiche. Le formulazioni integrali, come l'Electric Field Integral Equation (EFIE), forniscono una rappresentazione rigorosa delle correnti indotte su superfici conduttrici, ma il loro costo computazionale cresce rapidamente con l'aumentare della dimensione elettrica dell'oggetto. I metodi asintotici ad alta frequenza, quali la Physical Optics (PO), offrono invece elevata efficienza, pur mostrando limitazioni in termini di accuratezza in presenza di curvature accentuate, discontinuità geometriche o fenomeni diffrattivi.

Questa tesi esplora i possibili vantaggi di una formulazione ibrida EFIE–PO per l'analisi dello scattering da corpi elettricamente estesi. L'approccio integra la precisione della EFIE nelle regioni elettromagneticamente critiche con l'efficienza della PO sulle porzioni più ampie e regolari della superficie. La suddivisione del dominio in tre sotto-regioni (EFIE, buffer e PO) consente di controllare in modo esplicito il contributo rigoroso e quello asintotico, introducendo una zona di transizione che stabilizza l'accoppiamento tra i due modelli. Su tale partizione vengono definite diverse strategie di ibridazione, tra cui una variante in cui la correzione EFIE è modulata localmente in funzione del residuo puntuale della PO rispetto all'equazione integrale, così da concentrare la descrizione rigorosa esclusivamente nelle aree in cui l'approssimazione asintotica risulta meno affidabile.

L'implementazione numerica è stata sviluppata in ambiente MATLAB, adottando una discretizzazione tramite Metodo dei Momenti con funzioni di base Rao–Wilton–Glisson (RWG) su mesh triangolari della superficie. Il codice consente il calcolo delle correnti superficiali, del campo in far-field e della Radar Cross Section (RCS) monostatica per diverse configurazioni, mantenendo una struttura modulare e adattabile a geometrie complesse.

La validazione è stata condotta su tre famiglie di geometrie: coni assialsimmetrici, corpi di tipo almond e modelli semplificati di aereo Rafale. Le prime due categorie includono sia semplici geometrie canoniche sia configurazioni ampiamente utilizzate come benchmark in ambito di misure di RCS e simulazione numerica, come la

almond della NASA, mentre i modelli Rafale forniscono un esempio rappresentativo di piattaforma aeronautica con geometria articolata. Questi casi studio permettono di esplorare scenari con diversa complessità geometrica e dimensione elettrica, passando da forme relativamente semplici ma elettricamente estese a strutture più complesse, caratterizzate da spigoli, superfici inclinate e regioni di forte diffrazione. Le simulazioni hanno consentito di analizzare il comportamento delle varianti ibride in termini di residuo puntuale dell'equazione integrale, distribuzione del campo in far-field per differenti direzioni di incidenza e andamento angolare della RCS monostatica. Nel complesso, i risultati numerici mostrano tendenze coerenti con le aspettative teoriche e indicano che l'approccio ibrido può offrire un vantaggio significativo nel compromesso tra accuratezza e costo computazionale rispetto a formulazioni puramente integrali o puramente asintotiche. Le prestazioni dipendono tuttavia dalla geometria, dalla partizione del dominio e dalle condizioni di illuminazione, suggerendo che la metodologia rappresenta una direzione promettente, con margini di ottimizzazione e possibili sviluppi futuri verso strategie di partizionamento adattivo, criteri automatici basati sul residuo e tecniche di accelerazione numerica più avanzate.

Indice

Elenco delle figure	VII
1 Introduzione	1
1.1 Motivazioni e contesto applicativo	1
1.2 Obiettivo della tesi	3
1.3 Struttura del lavoro	3
2 Fondamenti di Elettromagnetismo	6
2.1 Contesto Teorico dell'Elettromagnetismo	6
2.2 Le equazioni di Maxwell	7
2.2.1 Condizioni al contorno	10
2.3 Misure near-field e far-field	11
3 Formulazioni EFIE e PO	13
3.1 Electric Field Integral Equation (EFIE)	13
3.2 Physical Optics (PO): principi e approssimazioni	16
3.3 Analisi comparativa tra EFIE e PO	18
4 Metodi di Elettromagnetismo Computazionale	21
4.1 Motivazioni e ambiti di applicazione	21
4.2 Metodo dei Momenti (MoM)	23
4.3 Funzioni di base RWG(Rao–Wilton–Glisson)	25
4.4 Stato dell'arte degli approcci ibridi MoM–PO	27
5 Formulazione ibrida EFIE-PO	31
5.1 Motivazioni per l'approccio ibrido	31
5.2 Strategie di accoppiamento dei domini EFIE e PO	32
5.3 Implementazione numerica	35
5.3.1 Struttura algoritmica e gestione del dominio	36

6	Validazione e Risultati	38
6.1	Setup sperimentale e simulativo	38
6.2	Casi studio e geometrie considerate	39
6.2.1	Coni: <i>Cone</i> 0.5λ , <i>Cone</i> 1λ , <i>Cone</i> 1.5λ	40
6.2.2	Almond: <i>Almond</i> 0.5λ , <i>Almond</i> 1λ , <i>Almond</i> 1.5λ	42
6.2.3	Aereo Rafale	44
6.3	Analisi del residuo puntuale	46
6.4	Studio del far-field (FF)	55
6.5	Analisi della Radar Cross Section (RCS) monostatica	61
7	Conclusioni, discussione critica dei risultati e sviluppi futuri	67
7.1	Sintesi dei contributi	67
7.2	Sintesi dei risultati numerici	68
7.3	Prospettive e sviluppi futuri	70
	Bibliografia	73

Elenco delle figure

4.1	Rappresentazione schematica della funzione di base RWG associata a un edge interno comune ai triangoli $\mathcal{T}_n^+$ e $\mathcal{T}_n^-$ [9]	26
5.1	Esempio di mesh triangolare di una piastra (a) e partizione del dominio in sotto-domini $\mathcal{S}_{EFIE}$, $\mathcal{S}_{buf}$ e $\mathcal{S}_{PO}$ (b).	36
6.1	Geometria “ <i>Cone 0.5λ</i> ”: mesh triangolare (a) e partizione nei sotto-domini $\mathcal{S}_{EFIE}$, $\mathcal{S}_{buf}$ e $\mathcal{S}_{PO}$ (b–c). Il parametro 0.5λ indica l’altezza della regione EFIE alla punta e alla base del cono. La tabella riporta le percentuali di area e il numero di funzioni RWG per ciascun sotto-dominio.	40
6.2	Geometria “ <i>Cone 1λ</i> ”: mesh triangolare (a) e partizione nei sotto-domini $\mathcal{S}_{EFIE}$, $\mathcal{S}_{buf}$ e $\mathcal{S}_{PO}$ (b–c). Il parametro 1λ indica l’altezza della regione EFIE alla punta e alla base del cono. La tabella riporta le percentuali di area e il numero di funzioni RWG per ciascun sotto-dominio.	41
6.3	Geometria “ <i>Cone 1.5λ</i> ”: mesh triangolare (a) e partizione nei sotto-domini $\mathcal{S}_{EFIE}$, $\mathcal{S}_{buf}$ e $\mathcal{S}_{PO}$ (b–c). Il parametro 1.5λ indica l’altezza della regione EFIE alla punta e alla base del cono. La tabella riporta le percentuali di area e il numero di funzioni RWG per ciascun sotto-dominio.	41
6.4	Geometria “ <i>Almond 0.5λ</i> ”: rappresentazione della mesh (a) e partizione nei sotto-domini $\mathcal{S}_{EFIE}$, $\mathcal{S}_{buf}$ e $\mathcal{S}_{PO}$ (b). Il parametro 0.5λ indica l’altezza della regione EFIE alle estremità della geometria. La tabella riporta le percentuali di area e il numero di funzioni RWG associate a ciascun sotto-dominio.	42
6.5	Geometria “ <i>Almond 1λ</i> ”: rappresentazione della mesh (a) e partizione nei sotto-domini $\mathcal{S}_{EFIE}$, $\mathcal{S}_{buf}$ e $\mathcal{S}_{PO}$ (b). Il parametro 1λ indica l’altezza della regione EFIE alle estremità della geometria. La tabella riporta le percentuali di area e il numero di funzioni RWG associate a ciascun sotto-dominio.	43

6.6	Geometria “ <i>Almond 1.5λ</i> ”: rappresentazione della mesh (a) e partizione nei sotto-domini $\mathbf{S}_{EFIE}$, $\mathbf{S}_{buf}$ e $\mathbf{S}_{PO}$ (b). Il parametro 1.5λ indica l’altezza della regione EFIE alle estremità della geometria. La tabella riporta le percentuali di area e il numero di funzioni RWG associate a ciascun sotto-dominio.	43
6.7	Geometria “ <i>Rafale 15m</i> ”: rappresentazione della mesh triangolare (a) e partizione nei sotto-domini S_{EFIE} , S_{buf} e S_{PO} (b-c). La tabella riporta le percentuali di area e il numero di funzioni RWG per ciascun sotto-dominio.	45
6.8	Geometria “ <i>Rafale 15m-2</i> ”: rappresentazione della mesh triangolare (a) e partizione nei sotto-domini S_{EFIE} , S_{buf} e S_{PO} (b-c). La tabella riporta le percentuali di area e il numero di funzioni RWG per ciascun sotto-dominio.	45
6.9	Geometria “ <i>Rafale 15m-3</i> ”: rappresentazione della mesh triangolare (a) e partizione nei sotto-domini S_{EFIE} , S_{buf} e S_{PO} (b-c). La tabella riporta le percentuali di area e il numero di funzioni RWG per ciascun sotto-dominio.	46
6.10	Geometria “ <i>Rafale 15m-4</i> ”: rappresentazione della mesh triangolare (a) e partizione nei sotto-domini S_{EFIE} , S_{buf} e S_{PO} (b-c). La tabella riporta le percentuali di area e il numero di funzioni RWG per ciascun sotto-dominio.	46
6.11	Rappresentazione del residuo puntuale per la geometria “Cone 0.5λ ”, per $\theta_{inc} = 0^\circ$, ottenuto dalle diverse formulazioni considerate (EFIE (a), PO (b),fringe (c),fringe a pezzi (d) e fringe con residuo (e)). . .	49
6.12	Rappresentazione del residuo puntuale per la geometria “Cone 1λ ” per $\theta_{inc} = 0^\circ$, ottenuto dalle diverse formulazioni considerate (EFIE (a), PO (b),fringe (c),fringe a pezzi (d) e fringe con residuo (e)). . .	49
6.13	Rappresentazione del residuo puntuale per la geometria “Cone 1.5λ ” per $\theta_{inc} = 0^\circ$, ottenuto dalle diverse formulazioni considerate (EFIE (a), PO (b),fringe (c),fringe a pezzi (d) e fringe con residuo (e)). . .	50
6.14	Rappresentazione del residuo puntuale per la geometria “Almond 0.5λ ” per $\theta_{inc} = 0^\circ$, ottenuto dalle diverse formulazioni considerate (EFIE (a), PO (b),fringe (c),fringe a pezzi (d) e fringe con residuo (e)).	50
6.15	Rappresentazione del residuo puntuale per la geometria “Almond 1λ ” per $\theta_{inc} = 0^\circ$, ottenuto dalle diverse formulazioni considerate (EFIE (a), PO (b),fringe (c),fringe a pezzi (d) e fringe con residuo (e)).	51
6.16	Rappresentazione del residuo puntuale per la geometria “Almond 1.5λ ” per $\theta_{inc} = 0^\circ$, ottenuto dalle diverse formulazioni considerate (EFIE (a), PO (b),fringe (c),fringe a pezzi (d) e fringe con residuo (e)).	51

6.17	Rappresentazione del residuo puntuale per la geometria “Cone 0.5λ ”, per $\theta_{inc} = 45^\circ$, ottenuto dalle diverse formulazioni considerate (EFIE (a), PO (b),fringe (c),fringe a pezzi (d) e fringe con residuo (e)). . .	52
6.18	Rappresentazione del residuo puntuale per la geometria “Cone 1λ ” per $\theta_{inc} = 45^\circ$, ottenuto dalle diverse formulazioni considerate (EFIE (a), PO (b),fringe (c),fringe a pezzi (d) e fringe con residuo (e)). . .	52
6.19	Rappresentazione del residuo puntuale per la geometria “Cone 1.5λ ” per $\theta_{inc} = 45^\circ$, ottenuto dalle diverse formulazioni considerate (EFIE (a), PO (b),fringe (c),fringe a pezzi (d) e fringe con residuo (e)). . .	53
6.20	Rappresentazione del residuo puntuale per la geometria “Almond 0.5λ ” per $\theta_{inc} = 45^\circ$, ottenuto dalle diverse formulazioni considerate (EFIE (a), PO (b),fringe (c),fringe a pezzi (d) e fringe con residuo (e)).	53
6.21	Rappresentazione del residuo puntuale per la geometria “Almond 1λ ” per $\theta_{inc} = 45^\circ$, ottenuto dalle diverse formulazioni considerate (EFIE (a), PO (b),fringe (c),fringe a pezzi (d) e fringe con residuo (e)).	54
6.22	Rappresentazione del residuo puntuale per la geometria “Almond 1.5λ ” per $\theta_{inc} = 45^\circ$, ottenuto dalle diverse formulazioni considerate (EFIE (a), PO (b),fringe (c),fringe a pezzi (d) e fringe con residuo (e)).	54
6.23	Schema delle principali direzioni di scattering generate da un’onda incidente su una superficie: backscattering, specular direction e forward scattering	55
6.24	Confronto del far-field per le geometrie “Cone 0.5λ ” (a-b), “Cone 1λ ” (c-d) e “Cone 1.5λ ” (e-f) in incidenza $\phi_{inc} = 0, \theta_{inc} = 0$. I pannelli di sinistra (a, c, e) mostrano il modulo del far-field in funzione dell’angolo θ per le diverse formulazioni (EFIE, PO e varianti ibride), mentre quelli di destra (b, d, f) riportano il corrispondente errore normalizzato rispetto alla soluzione EFIE.	57
6.25	Confronto del far-field per le geometrie “Cone 0.5λ ” (a-b), “Cone 1λ ” (c-d) e “Cone 1.5λ ” (e-f) in incidenza $\phi_{inc} = 0, \theta_{inc} = 45$. I pannelli di sinistra (a, c, e) mostrano il modulo del far-field in funzione dell’angolo θ per le diverse formulazioni (EFIE, PO e varianti ibride), mentre quelli di destra (b, d, f) riportano il corrispondente errore normalizzato rispetto alla soluzione EFIE.	58
6.26	Confronto del far-field per le geometrie “Almond 0.5λ ” (a-b), “Almond 1λ ” (c-d) e “Almond 1.5λ ” (e-f) in incidenza $\phi_{inc} = 0, \theta_{inc} = 0$. I pannelli di sinistra (a, c, e) mostrano il modulo del far-field in funzione dell’angolo θ per le diverse formulazioni (EFIE, PO e varianti ibride), mentre quelli di destra (b, d, f) riportano il corrispondente errore normalizzato rispetto alla soluzione EFIE.	60

6.27	Confronto del far-field per le geometrie “Almond 0.5λ ” (a-b), “Almond 1λ ” (c-d) e “Almond 1.5λ ” (e-f) in incidenza $\phi_{inc} = 0, \theta_{inc} = 45$. I pannelli di sinistra (a, c, e) mostrano il modulo del far-field in funzione dell’angolo θ per le diverse formulazioni (EFIE, PO e varianti ibride), mentre quelli di destra (b, d, f) riportano il corrispondente errore normalizzato rispetto alla soluzione EFIE.	61
6.28	Andamento della Radar Cross Section (RCS) per le geometrie “Cone 0.5λ ” (a), “Cone 1λ ” (b) e “Cone 1.5λ ” (c) in funzione dell’angolo θ . I grafici riportano il confronto tra le diverse configurazioni considerate, evidenziando la variazione della RCS al variare della dimensione elettrica del cono.	63
6.29	Andamento della Radar Cross Section (RCS) per le geometrie “Almond 0.5λ ” (a), “Almond 1λ ” (b) e “Almond 1.5λ ” (c) in funzione dell’angolo θ . I grafici riportano il confronto tra le diverse configurazioni considerate, evidenziando la variazione della RCS al variare della dimensione elettrica del cono.	64
6.30	Andamento della Radar Cross Section (RCS) del modello “Rafale 15 m” per le quattro partizioni considerate	66

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Motivazioni e contesto applicativo

Nel panorama tecnologico contemporaneo, le antenne rappresentano elementi essenziali per un'ampia varietà di applicazioni, che spaziano dai sistemi di comunicazione wireless ai radar di sorveglianza, fino ai settori aerospaziale, automotive e dell'Internet of Things (IoT). L'evoluzione verso dispositivi sempre più compatti, multifunzionali e operanti a frequenze elevate ha posto nuove sfide nella progettazione elettromagnetica, rendendo indispensabile lo sviluppo di metodologie di analisi e simulazione che siano al tempo stesso accurate, rapide e scalabili.

La caratterizzazione elettromagnetica di un'antenna può essere condotta tramite misure sperimentali o simulazioni numeriche. Le misure offrono un riscontro diretto e affidabile del comportamento reale, ma richiedono strumentazione dedicata e tempi non sempre compatibili con cicli di progetto iterativi. Le simulazioni, invece, permettono di analizzare l'antenna in condizioni operative variabili con maggiore flessibilità, ma il loro costo computazionale cresce rapidamente con la complessità geometrica e le dimensioni elettriche della struttura.

Per affrontare queste limitazioni, è necessario ricorrere a metodi numerici in grado di modellare con precisione il comportamento del campo elettromagnetico irradiato dalle strutture considerate.

Tra i metodi numerici più accurati rientrano le formulazioni integrali, che permettono di descrivere in modo rigoroso le correnti indotte su superfici conduttrici e, tra queste, la più utilizzata è l'*Electric Field Integral Equation* (EFIE). Tali formulazioni garantiscono un'elevata precisione, ma il costo computazionale cresce rapidamente con il numero di incognite, risultando meno efficienti per geometrie complesse o per strutture elettricamente estese.

In alternativa, i metodi asintotici, come la *Physical Optics* (PO), offrono una maggiore efficienza grazie a una modellizzazione semplificata delle correnti nelle

regioni illuminate, pur presentando una minore accuratezza nella descrizione dei fenomeni di diffrazione e degli accoppiamenti elettromagnetici che si manifestano in corrispondenza di bordi, discontinuità e cavità.

L'esigenza di trovare un equilibrio tra accuratezza ed efficienza computazionale ha portato allo sviluppo di approcci ibridi che combinano i punti di forza delle diverse tecniche numeriche.

In questo contesto si colloca la formulazione ibrida EFIE-PO, che applica l'EFIE nelle regioni elettromagneticamente critiche e la PO nelle porzioni più estese o meno sensibili, sfruttando così i vantaggi di entrambi i metodi. Questa strategia riduce il numero di incognite e il costo computazionale complessivo, mantenendo al contempo un livello di accuratezza adeguato nella descrizione del campo.

Un ambito di particolare rilevanza per l'applicazione di queste tecniche è lo studio dello scattering elettromagnetico da corpi elettricamente grandi, tematica di grande interesse sia in ambito accademico che industriale. All'aumentare della frequenza operativa, la lunghezza d'onda associata al campo incidente si riduce, e l'interazione tra quest'ultimo e la superficie dell'oggetto diventa sempre più sensibile ai dettagli geometrici. In tali condizioni, la capacità di prevedere e controllare la riflettività elettromagnetica delle strutture risulta determinante per ottimizzare le prestazioni dei sistemi radar e delle antenne riflettenti.

Un parametro fondamentale per la valutazione quantitativa di questi fenomeni è la Radar Cross Section (RCS), che rappresenta la misura della potenza riflessa da un corpo nella direzione della sorgente incidente. La RCS monostatica, in particolare, fornisce un'indicazione diretta della visibilità radar di un oggetto. Questo parametro è utilizzato in un ampio spettro di applicazioni, in particolare per la valutazione della visibilità radar di bersagli in ambito militare, aeronautico e di sorveglianza, con impieghi che spaziano dallo stealth design al controllo del traffico aereo e alla misura della firma radar [1].

Alla luce di tali considerazioni, la formulazione ibrida EFIE-PO, integrata con tecniche di calcolo della RCS monostatica, si configura come uno strumento potente e versatile per l'analisi dello scattering da corpi elettricamente grandi.

L'integrazione tra modelli rigorosi e metodi approssimati permette di affrontare il problema in modo coerente dal punto di vista fisico e matematico, garantendo al contempo una significativa riduzione dei tempi di simulazione rispetto alle metodologie puramente integrali. In questo quadro, lo sviluppo di soluzioni computazionali ibride rappresenta un passo rilevante verso la realizzazione di strumenti di testing rapido per antenne, in grado di coniugare precisione predittiva, efficienza numerica e flessibilità applicativa, in linea con le esigenze dell'industria e della ricerca accademica nel campo dell'ingegneria elettromagnetica.

1.2 Obiettivo della tesi

L'obiettivo principale di questa tesi è lo sviluppo, l'analisi e la validazione di una formulazione ibrida EFIE-PO dedicata alla modellazione accurata ed efficiente del campo elettromagnetico irradiato e diffuso da strutture elettricamente grandi. L'approccio proposto integra la rigorosità delle formulazioni integrali con la rapidità dei metodi asintotici, così da ottenere una descrizione affidabile dello scattering e una stima robusta della Radar Cross Section monostatica. La metodologia si inserisce nel contesto della modellazione elettromagnetica avanzata, con l'obiettivo di ridurre il costo computazionale senza compromettere la fedeltà fisica del modello. In questa prospettiva, la formulazione ibrida rappresenta un compromesso efficace tra accuratezza e efficienza, particolarmente adatto all'analisi di scenari complessi e di grande interesse applicativo.

Il lavoro si concentra sull'analisi dello scattering elettromagnetico da oggetti caratterizzati da grandi dimensioni elettriche e, al contempo, da dettagli geometrici dell'ordine di poche lunghezze d'onda. In questo regime, i metodi asintotici, pur molto efficienti, non riescono a rappresentare con sufficiente accuratezza i fenomeni di diffrazione e gli accoppiamenti locali tra diverse porzioni della superficie, mentre le formulazioni integrali rigorose risultano eccessivamente onerose dal punto di vista computazionale. La formulazione ibrida EFIE-PO sviluppata in questa tesi affronta tali criticità mediante un accoppiamento adattivo tra le due rappresentazioni: le regioni elettromagneticamente più critiche vengono trattate con EFIE, mentre le porzioni più estese o meno sensibili sono modellate tramite la PO. L'approccio proposto permette inoltre di ottenere una stima efficiente e accurata della Radar Cross Section monostatica, rendendolo particolarmente adatto allo studio di scenari complessi.

In prospettiva, il lavoro intende contribuire allo sviluppo di strumenti di simulazione ibridi, scalabili e robusti, capaci di supportare la progettazione e la validazione di sistemi radianti di nuova generazione. L'obiettivo finale è la realizzazione di un framework di testing elettromagnetico veloce, accurato e flessibile, in grado di rispondere alle esigenze emergenti dei moderni sistemi di comunicazione, rilevamento e osservazione radar, ponendosi come un contributo concreto all'evoluzione delle tecniche di analisi e progettazione nel campo dell'ingegneria elettromagnetica.

1.3 Struttura del lavoro

La tesi è articolata in sette capitoli che conducono dalla formulazione teorica dei modelli elettromagnetici alla loro validazione numerica su geometrie di complessità crescente. Il lavoro sviluppa e analizza una formulazione ibrida EFIE-PO per lo studio dello scattering da corpi elettricamente grandi, integrando modelli rigorosi e

approssimazioni asintotiche con l'obiettivo di ottenere una descrizione accurata del campo irradiato e della Radar Cross Section monostatica.

Il Capitolo 1 introduce le motivazioni e il contesto applicativo del lavoro, con particolare attenzione alle esigenze di testing rapido di antenne e di analisi dello scattering da corpi elettricamente grandi. In questo quadro vengono discussi i limiti delle formulazioni puramente integrali e dei metodi asintotici ad alta frequenza, evidenziando la necessità di metodologie capaci di coniugare accuratezza fisica, riduzione del costo computazionale e scalabilità verso geometrie realistiche.

Il Capitolo 2 richiama i fondamenti dell'elettromagnetismo necessari all'analisi dello scattering delle onde elettromagnetiche. Dopo aver presentato le equazioni di Maxwell nelle forme differenziale e integrale e le condizioni al contorno, vengono introdotte le principali grandezze radiative e la distinzione tra regione di near-field e far-field, che costituiscono il riferimento sperimentale per la caratterizzazione delle antenne e della RCS.

Il Capitolo 3 introduce in maniera sistematica le formulazioni EFIE e PO per l'analisi dello scattering da superfici conduttrici. La EFIE viene derivata a partire dal teorema di equivalenza e dalle rappresentazioni integrali dei campi, mostrando come la corrente superficiale incognita consenta di ricostruire il campo diffuso in modo rigoroso, mentre la Physical Optics è presentata come approssimazione asintotica ad alta frequenza, basata su una stima locale della corrente nelle regioni illuminate. Il capitolo discute le ipotesi alla base di ciascuna formulazione e i corrispondenti ambiti di validità, mettendo in evidenza il diverso compromesso tra accuratezza fisica, capacità di descrivere fenomeni come diffrazione e interazioni multiple, e complessità computazionale dei due approcci.

Il Capitolo 4 introduce gli strumenti di elettromagnetismo computazionale utilizzati per la discretizzazione numerica, con particolare attenzione al Metodo dei Momenti e alle funzioni di base di Rao–Wilton–Glisson su mesh triangolari, e presenta il quadro attuale delle principali tecniche ibride MoM–PO per l'analisi di strutture elettricamente grandi.

Il Capitolo 5 sviluppa la formulazione ibrida EFIE–PO proposta in questa tesi. Vengono descritte le motivazioni fisiche e numeriche dell'approccio ibrido, la partizione della superficie dello scatterer nei sotto-domini S_{EFIE} , S_{Sbuf} , e S_{PO} e le diverse strategie di accoppiamento tra modello rigoroso e modello asintotico (*full EFIE*, *full PO*, *fringe semplice*, *fringe a pezzi*, *fringe con residuo*). La parte finale del capitolo è dedicata all'implementazione numerica in ambiente MATLAB, illustrando la struttura dei dati basata su RWG, il flusso algoritmico per il calcolo delle correnti ibride e la successiva valutazione del far-field e della Radar Cross Section monostatica.

Il Capitolo 6 presenta la validazione del metodo su casi studio rappresentativi, progressivamente più complessi: coni assialsimmetrici, geometrie di tipo almond

e alcuni modelli semplificati di aereo Rafale. Per ciascuna famiglia vengono descritti il setup simulativo e la partizione EFIE–buffer–PO, quindi si analizzano il residuo puntuale rispetto all’EFIE, il far-field per differenti direzioni di incidenza e l’andamento angolare della RCS monostatica, confrontando le soluzioni ibride con EFIE completa e PO e valutando l’efficacia dell’approccio in termini di accuratezza, riduzione del numero di incognite e scalabilità su geometrie realistiche ed elettricamente grandi.

Infine, il Capitolo 7 raccoglie le conclusioni e gli sviluppi futuri del lavoro. Vengono sintetizzati i principali contributi della formulazione ibrida EFIE–PO in termini di compromesso tra accuratezza e costo computazionale, discutendo criticamente i risultati ottenuti e indicando possibili estensioni, quali strategie più avanzate di definizione dei sotto-domini, integrazione con tecniche di accelerazione e applicazione a scenari di testing elettromagnetico ancora più complessi.

Capitolo 2

Fondamenti di Elettromagnetismo

Questo capitolo introduce i principi fondamentali dell'elettromagnetismo e fornisce il quadro teorico necessario per l'analisi della propagazione, della radiazione e dello scattering delle onde elettromagnetiche. Dopo una breve contestualizzazione storica e concettuale, viene messo in evidenza il ruolo delle equazioni di Maxwell come formulazione unificata dei fenomeni elettrici e magnetici, discusse sia nella loro forma differenziale sia in quella integrale, insieme alle condizioni al contorno che descrivono il comportamento dei campi all'interfaccia tra mezzi con proprietà diverse.

La parte finale è dedicata alla descrizione delle regioni di *near-field* e *far-field* e alle corrispondenti tecniche di misura, che costituiscono il riferimento sperimentale per la caratterizzazione delle proprietà radiative e per l'interpretazione dei casi di studio analizzati nella tesi.

2.1 Contesto Teorico dell'Elettromagnetismo

L'elettromagnetismo rappresenta uno dei pilastri della fisica classica e dell'ingegneria moderna, fornendo il quadro teorico che descrive in modo unificato i fenomeni elettrici e magnetici e le loro interazioni. Studia il comportamento delle cariche elettriche, dei campi da esse generati e delle forze associate, offrendo una struttura matematica capace di ricondurre a un unico formalismo fenomeni che vanno dall'elettrostatica alla propagazione delle onde elettromagnetiche irradiate [2].

Lo sviluppo dell'elettromagnetismo è il risultato di un lungo percorso che, tra il XVIII e il XIX secolo, ha visto il contributo di numerosi scienziati le cui leggi empiriche hanno descritto l'interazione tra cariche, correnti e campi magnetici

[3]. La sintesi definitiva di tali risultati è dovuta a James Clerk Maxwell, che formulò un sistema di equazioni differenziali vettoriali capace di riassumere in modo compatto le leggi fondamentali dell'elettricità e del magnetismo, ponendo le basi della teoria classica dei campi. Le equazioni di Maxwell, espresse in forma differenziale o integrale, descrivono come i campi elettrici e magnetici vengono generati da cariche e correnti, come si propagano nello spazio e come interagiscono con i mezzi materiali.

Dal punto di vista ingegneristico, la teoria elettromagnetica è alla base della progettazione di antenne, sensori, apparati radar e dispositivi ad alta frequenza, nei quali la distribuzione dei campi determina direttamente le prestazioni del sistema. I metodi analitici e numerici derivati dalle equazioni di Maxwell, come le formulazioni integrali e il Metodo dei Momenti (MoM), costituiscono strumenti fondamentali per modellare e simulare il comportamento di strutture complesse.

In questo contesto, un ruolo centrale è svolto dallo studio dei fenomeni di scattering, nei quali un'onda incidente interagisce con oggetti o superfici generando campi diffusi che dipendono in modo critico dalla geometria, dalle proprietà elettromagnetiche del bersaglio e dalle condizioni di illuminazione. L'analisi dello scattering è fondamentale per la caratterizzazione di antenne e strutture radianti, per la previsione della Radar Cross Section (RCS) di oggetti complessi e per la progettazione di sistemi di telerilevamento e di contromisure radar.

2.2 Le equazioni di Maxwell

Una trattazione rigorosa dei meccanismi di propagazione e scattering richiede di partire dalle equazioni di Maxwell, che costituiscono il quadro formale alla base di ogni modello analitico e numerico impiegato nello studio dei campi.

I campi elettrici e magnetici sono grandezze vettoriali, ciascuna caratterizzata da una direzione e da un'intensità. Le relazioni tra tali campi, nonché le variazioni spaziali e temporali delle cariche e delle correnti associate alla propagazione delle onde elettromagnetiche, sono descritte da un insieme di leggi fisiche fondamentali note come equazioni di Maxwell.

Le equazioni di Maxwell costituiscono un sistema di quattro equazioni differenziali alle derivate parziali lineari che, insieme alla forza di Lorentz, rappresentano il nucleo teorico della teoria dell'interazione elettromagnetica [4]. La loro formulazione ha permesso di definire in modo completo e rigoroso il legame tra il campo elettrico e il campo magnetico, unificando definitivamente i fenomeni dell'elettricità e del magnetismo in un'unica struttura teorica coerente. Inoltre, esse forniscono una sintesi matematica dei risultati sperimentali ottenuti nel corso del XIX secolo, costituendo la base per la descrizione e l'analisi dei fenomeni elettromagnetici in ambito sia teorico che applicativo.

Le equazioni di Maxwell possono essere espresse in forma integrale e in forma differenziale, tra loro equivalenti: la prima mette in relazione flussi e circuitazioni dei campi su superfici e percorsi chiusi con cariche e correnti, la seconda descrive in modo locale le variazioni spaziali dei campi in ogni punto dello spazio.

Tra le due formulazioni, la forma differenziale è quella più comunemente utilizzata per affrontare problemi elettromagnetici con condizioni al contorno [5], mentre nei problemi di scattering da conduttori perfetti risulta particolarmente conveniente adottare la formulazione integrale, che consente di ridurre il problema alla sola superficie dello scatterer e di passare in modo naturale alla discretizzazione numerica tramite il Metodo dei Momenti, da cui si ottiene l'EFIE nella sua forma discreta. Nel seguito si userà infatti la forma differenziale per introdurre le grandezze fisiche in gioco e la forma integrale come punto di partenza per la derivazione della EFIE impiegata in questa tesi.

Affinché le equazioni differenziali siano matematicamente valide, si assume che i campi siano funzioni univoche, limitate e continue rispetto alla posizione e al tempo, e che possiedano derivate continue, ipotesi generalmente soddisfatta nei campi generati da onde elettromagnetiche, salvo nei punti in cui si verificano discontinuità nelle densità di carica o di corrente. Tali discontinuità si manifestano tipicamente alle interfacce tra materiali diversi, dove i parametri elettrici subiscono variazioni brusche, e le corrispondenti variazioni dei vettori di campo vengono descritte mediante le condizioni al contorno.

Per una descrizione completa del comportamento dei campi elettromagnetici, inclusi i punti di discontinuità, è necessario considerare congiuntamente le equazioni di Maxwell nella loro forma differenziale e le corrispondenti condizioni al contorno, approfondite nel paragrafo 2.2.1.

Nel contesto dell'analisi dei fenomeni elettromagnetici, riveste un ruolo centrale lo studio dei segnali armonici: assumendo una dipendenza temporale del tipo $e^{j\omega t}$, dove $\omega = 2\pi f$ rappresenta la pulsazione angolare associata alla frequenza f , le grandezze variabili nel tempo, come i campi elettrico e magnetico, vengono rappresentate tramite ampiezze complesse, e il problema viene formulato nel dominio della frequenza. In questo formalismo, la dipendenza temporale è assorbita nel fattore esponenziale, le equazioni di Maxwell si semplificano in relazioni algebriche complesse e risulta più agevole analizzare fenomeni di propagazione, radiazione e scattering.

In tale contesto si introducono le seguenti grandezze fondamentali:

- **$\mathbf{E}$** : vettore del campo elettrico [V/m];
- **$\mathbf{H}$** : vettore del campo magnetico [A/m];
- **$\mathbf{J}$** : densità di corrente elettrica [A/m²];
- **$\mathbf{M}$** : densità di corrente magnetica [V/m²];

- $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$: densità di spostamento elettrico [C/m²];
- $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$: induzione magnetica [Wb/m²];
- q_e : densità di carica elettrica [C/m³];
- q_m : densità di carica magnetica [Wb/m³].

che, nel dominio della frequenza, dipendono unicamente dalle coordinate spaziali, mentre la dipendenza temporale è implicitamente contenuta nel fattore $e^{j\omega t}$.

Considerando un mezzo lineare, omogeneo e isotropo, caratterizzato da parametri costitutivi costanti ϵ (permittività) e μ (permeabilità), le equazioni di Maxwell nel dominio della frequenza assumono la seguente forma differenziale:

1. *Legge di Gauss per il campo elettrico*

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = q_e \quad (2.1)$$

2. *Legge di Gauss per il campo magnetico*

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = q_m \quad (2.2)$$

3. *Legge di Faraday dell'induzione elettromagnetica*

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mathbf{M} - j\omega\mu\mathbf{H} \quad (2.3)$$

4. *Legge di Ampère*

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega\epsilon\mathbf{E} \quad (2.4)$$

In tali equazioni, le grandezze $\mathbf{M}$ e q_m non rappresentano sorgenti magnetiche reali, poiché nella realtà non esistono monopoli magnetici, ma sono introdotte per ottenere una formulazione più simmetrica, utile in alcune trattazioni di problemi di radiazione e scattering, e come artificio matematico nelle formulazioni equivalenti basate sul principio di equivalenza.

La forma differenziale, pur essendo particolarmente utile per la risoluzione analitica e numerica dei problemi locali, trova un complemento naturale nella forma integrale, ottenuta applicando i teoremi di Stokes e della divergenza, e pone in relazione i campi e le sorgenti su regioni finite dello spazio.

In particolare, il teorema di Stokes stabilisce che l'integrale di linea di un campo vettoriale $\mathbf{A}$ lungo un percorso chiuso C è uguale all'integrale di superficie del rotore di $\mathbf{A}$ sulla superficie S , delimitata dal contorno C :

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} \quad (2.5)$$

Analogamente, il teorema della divergenza stabilisce che il flusso totale di un campo vettoriale $\mathbf{A}$ attraverso una superficie chiusa è uguale all'integrale volumetrico della divergenza del campo stesso:

$$\oiint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV \quad (2.6)$$

Applicando tali teoremi, le equazioni di Maxwell possono essere riscritte nella loro forma integrale come relazioni tra i flussi e le circuitazioni dei campi su volumi o superfici finite [5]

Forma differenziale	Forma integrale
$\nabla \cdot \mathbf{D} = q_e$	$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \iiint_V q_e dv$
$\nabla \cdot \mathbf{B} = q_m$	$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \iiint_V q_m dv$
$\nabla \times \mathbf{E} = -\mathbf{M} - j\omega\mathbf{B}$	$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\iint(\mathbf{M} + j\omega\mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s}$
$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega\mathbf{D}$	$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint(\mathbf{J} + j\omega\mathbf{D}) \cdot d\mathbf{s}$

Tabella 2.1: Equazioni di Maxwell in forma differenziale e integrale nel dominio armonico, ottenute assumendo un andamento temporale $e^{j\omega t}$

La loro forma differenziale mette in evidenza il significato fisico dei fenomeni elettromagnetici. In questa formulazione, la legge di Gauss per il campo elettrico collega il flusso del campo alla carica racchiusa, mentre la legge di Gauss magnetica, assumendo coerentemente con la realtà fisica che $\mathbf{M}$ e q_m siano nulli, mostra che il flusso del campo magnetico attraverso una superficie chiusa è sempre nullo, a conferma dell'assenza di monopoli magnetici. Le leggi di Faraday e di Ampère-Maxwell descrivono invece l'interdipendenza dinamica tra il campo elettrico e il campo magnetico: la variazione temporale del flusso magnetico induce una circuitazione del campo elettrico, mentre la circuitazione del campo magnetico è generata sia dalle correnti di conduzione sia dalla corrente di spostamento associata alla variazione del campo elettrico.

2.2.1 Condizioni al contorno

Le equazioni di Maxwell, nella loro forma differenziale, descrivono il comportamento locale dei campi elettromagnetici all'interno di un mezzo continuo. Tuttavia, tali relazioni non sono sufficienti a determinarne l'andamento in prossimità delle interfacce tra materiali caratterizzati da differenti proprietà elettromagnetiche. In prossimità di tali interfacce, i vettori di campo possono infatti presentare discontinuità finite, e il loro comportamento deve essere vincolato mediante opportune

condizioni al contorno, ottenute a partire dalla forma integrale delle equazioni di Maxwell.

La forma integrale rappresenta lo strumento più adatto per derivare tali condizioni, poiché mette in relazione i flussi e le circuitazioni dei campi su superfici e percorsi che attraversano l'interfaccia, collegando direttamente i valori dei campi sui due lati della superficie con le eventuali sorgenti concentrate su di essa.

Applicando le equazioni di Maxwell in forma integrale (Tab. 2.1) a volumi e superfici infinitesimi che intersecano l'interfaccia tra due mezzi, si ottengono le condizioni generali di discontinuità dei campi elettromagnetici. Indicando con i pedici 1 e 2 i valori dei campi nei due materiali e con $\hat{n}$ il versore normale alla superficie orientato dal mezzo 1 al mezzo 2, le condizioni al contorno, nel caso più generale con correnti e cariche sia elettriche sia magnetiche, possono essere espresse come

$$\hat{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = \mathbf{M}_s \quad (2.7)$$

$$\hat{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{J}_s \quad (2.8)$$

$$\hat{n} \times (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = q_e \quad (2.9)$$

$$\hat{n} \times (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = q_m \quad (2.10)$$

dove $\mathbf{J}_s$ e $\mathbf{M}_s$ rappresentano, rispettivamente, la densità di corrente elettrica superficiale e la densità di corrente magnetica superficiale.

Queste relazioni definiscono in modo univoco il comportamento dei campi al passaggio tra materiali diversi e costituiscono il punto di partenza per la successiva specializzazione al caso di conduttore perfetto (PEC). Nel caso PEC, le condizioni al contorno si semplificano e diventano fondamentali per la formulazione dell'*Electric Field Integral Equation* (EFIE) e per l'approssimazione di *Physical Optics* (PO), nonché per la costruzione di metodi ibridi basati su tali modelli.

2.3 Misure near-field e far-field

Le antenne costituiscono elementi fondamentali nei sistemi di trasmissione e ricezione elettromagnetica, in quanto permettono la conversione tra segnali elettrici e onde elettromagnetiche irradiate nello spazio. La loro progettazione e analisi richiedono una caratterizzazione accurata delle proprietà radiative, che include la valutazione della distribuzione spaziale dell'energia irradiata, dell'efficienza, della direttività e dell'impedenza. La caratterizzazione elettromagnetica di un'antenna si basa su misure e modelli che descrivono il comportamento del campo in prossimità e a distanza dalla sorgente.

La caratterizzazione sperimentale di un'antenna può essere effettuata attraverso misure nel *near-field* e nel *far-field*, ciascuna con finalità e metodologie specifiche.

- Il *near-field* è la regione prossima all'antenna, in cui le componenti reattive del campo sono predominanti e l'onda non ha ancora assunto una forma planare. In questa zona, il campo varia rapidamente con la distanza e la distribuzione spaziale è complessa. Le misure near-field sono utilizzate per ricostruire il diagramma di radiazione mediante algoritmi di trasformazione numerica (near-field to far-field transformation) e sono preferite in ambienti controllati o per antenne di grandi dimensioni.
- Il *far-field* è la regione in cui il campo elettromagnetico assume una configurazione di onda piana e la distribuzione angolare diventa indipendente dalla distanza. In questa zona, le misure forniscono direttamente il diagramma di radiazione, la direttività, il guadagno e l'efficienza dell'antenna. La distanza minima per considerare una misura in far-field è generalmente definita dalla relazione:

$$R \geq \frac{2D^2}{\lambda}$$

dove R è la distanza dalla sorgente, D è la dimensione massima dell'antenna e λ è la lunghezza dell'onda.

Le misure near-field e far-field sono complementari e, se correttamente eseguite, consentono una caratterizzazione completa delle prestazioni radiative dell'antenna.

Capitolo 3

Formulazioni EFIE e PO

Questo capitolo presenta le principali formulazioni teoriche utilizzate nell'analisi dello scattering elettromagnetico da superfici conduttrici, ponendo l'attenzione sull'*Electric Field Integral Equation* (EFIE) e sull'approssimazione *Physical Optics* (PO).

La EFIE viene introdotta come formulazione rigorosa derivata dalle equazioni di Maxwell e dal teorema di equivalenza, che consente di descrivere il campo diffuso in termini della corrente superficiale indotta su un conduttore perfetto. La derivazione è sviluppata attraverso le rappresentazioni integrali dei campi basate sulla funzione di Green, fino all'imposizione della condizione al contorno sul PEC, che porta alla forma continua dell'equazione integrale.

La PO è presentata come un'approssimazione ad alta frequenza che sostituisce la soluzione integrale completa con una stima locale della corrente sulla regione illuminata della superficie, consentendo una valutazione efficiente dello scattering per oggetti elettricamente grandi.

Il capitolo si conclude con un confronto tra EFIE e PO, evidenziando differenze in termini di accuratezza, complessità computazionale e ambiti di validità. L'analisi comparativa mette in luce la natura complementare dei due approcci e motiva l'impiego di strategie ibride nei problemi di scattering complessi.

3.1 Electric Field Integral Equation (EFIE)

L'Equazione Integrale del Campo Elettrico rappresenta uno degli strumenti fondamentali per l'analisi dello scattering elettromagnetico da superfici conduttrici, in quanto consente di descrivere il fenomeno in termini di correnti indotte sulla superficie dell'oggetto, evitando la necessità di risolvere direttamente le equazioni di Maxwell in tutto il dominio tridimensionale.

Questo approccio risulta particolarmente vantaggioso nei problemi di scattering

da conduttori perfetti (PEC), dove il campo diffuso è interamente determinato dalla corrente superficiale indotta dal campo incidente. In tali situazioni risulta spesso vantaggioso adottare una formulazione integrale anziché una formulazione differenziale [6]. La formulazione integrale, infatti, consente una significativa riduzione della dimensionalità del problema: mentre un approccio differenziale richiederebbe la discretizzazione dell'intero volume dello spazio in cui i campi sono definiti, l'approccio integrale permette di concentrare l'analisi sulla sola superficie del conduttore, convertendo così un problema tridimensionale in uno bidimensionale. Tale riduzione comporta un notevole risparmio computazionale e rende la formulazione particolarmente adatta alla discretizzazione numerica mediante Metodo dei Momenti (MoM), che opera naturalmente su domini di dimensione ridotta.

Per comprendere appieno il ruolo della EFIE è utile richiamare il problema generale della radiazione elettromagnetica, che consiste nel determinare i campi generati da un insieme di sorgenti elettriche e magnetiche distribuite in un mezzo. I problemi di scattering possono essere interpretati come casi particolari di radiazione: un campo incidente interagisce con un oggetto, induce su di esso correnti elettriche (e, in formulazioni equivalenti, correnti magnetiche), e tali correnti agiscono come sorgenti secondarie che irradiano il campo diffuso. La EFIE nasce proprio dall'esigenza di descrivere questo meccanismo in termini di correnti equivalenti, sfruttando il teorema di equivalenza elettromagnetica e la funzione di Green del mezzo, e imponendo infine la condizione al contorno tipica dei conduttori perfetti, secondo cui il campo elettrico tangenziale totale sulla superficie deve annullarsi:

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}^{inc} + \mathbf{E}^{scat}) = 0$$

dove $\hat{\mathbf{n}}$ è il versore normale alla superficie e $\mathbf{E}^{inc}$, $\mathbf{E}^{scat}$ rappresentano rispettivamente il campo incidente e quello diffuso.

Per comprendere la derivazione della EFIE è necessario partire dalle equazioni di Maxwell (Tab. 2.1) nel dominio armonico, assumendo la convenzione temporale $e^{j\omega t}$ e un mezzo omogeneo lineare caratterizzato da permittività ϵ e permeabilità μ . Esse assumono la forma compatta:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = q_e \tag{3.1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = q_m \tag{3.2}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mathbf{M} - j\omega\mu\mathbf{H} \tag{3.3}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega\epsilon\mathbf{E} \tag{3.4}$$

Nei problemi di scattering da PEC, tuttavia, si assume l'assenza di sorgenti magnetiche reali, per cui $\mathbf{M} = 0$ e $q_m = 0$.

Per passare a una descrizione integrale è utile introdurre la funzione di Green scalare del mezzo omogeneo, definita come:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (3.5)$$

dove $k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$ è il numero d'onda. La funzione di Green (3.5) soddisfa l'equazione di Helmholtz scalare con sorgente puntiforme:

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (3.6)$$

e rappresenta la risposta del mezzo a un dipolo elettrico puntiforme unitario. Essa incorpora automaticamente la condizione di radiazione all'infinito, evitando la necessità di imporre condizioni aggiuntive sul bordo del dominio.

Utilizzando la funzione di Green, i campi irradiati da una distribuzione di correnti equivalenti possono essere espressi in termini di potenziali vettoriali. Per una corrente elettrica volumetrica $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$ e una corrente magnetica $\mathbf{M}(\mathbf{r}')$, i potenziali vettori magnetico $\mathbf{A}$ ed elettrico $\mathbf{F}$ si definiscono come [6]:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mu \iiint_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') dV' \quad (3.7)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \epsilon \iiint_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{M}(\mathbf{r}') dV' \quad (3.8)$$

Assumendo la gauge di Lorenz per i potenziali e utilizzando le identità vettoriali (in particolare $\nabla G = -\nabla' G$) insieme all'equazione di continuità $\nabla \cdot \mathbf{J} = -j\omega q_e$, si ottengono le rappresentazioni integrali dei campi in un mezzo omogeneo:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j\omega\mu \iiint_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left[\mathbf{J}(\mathbf{r}') + \frac{1}{k^2} \nabla' \nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') \right] dV' \quad (3.9)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -j\omega\epsilon \iiint_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left[\mathbf{M}(\mathbf{r}') + \frac{1}{k^2} \nabla' \nabla' \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}') \right] dV' \quad (3.10)$$

Queste relazioni descrivono il campo in termini delle sorgenti volumetriche $\mathbf{J}$ e $\mathbf{M}$ distribuite nel volume V .

Nel caso dello scattering da un conduttore perfetto immerso in un mezzo omogeneo, la corrente indotta è confinata alla superficie S dell'oggetto. In assenza di correnti magnetiche equivalenti, il campo diffuso dipende unicamente dalla corrente superficiale $\mathbf{J}_s(\mathbf{r}')$ e le rappresentazioni integrali si riducono a integrali di superficie:

$$\mathbf{E}^{scat}(\mathbf{r}) = -j\omega\mu \iint_S G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left[\mathbf{J}_s(\mathbf{r}') + \frac{1}{k^2} \nabla'_s \nabla'_s \cdot \mathbf{J}_s(\mathbf{r}') \right] dS' \quad (3.11)$$

dove ∇'_s indica l'operatore di gradiente superficiale. Imponendo la condizione al contorno sul PEC, secondo cui il campo elettrico tangenziale totale deve annullarsi,

$$\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \times \mathbf{E}^{scat} = -\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \times \mathbf{E}^{inc}, \quad \mathbf{r} \in S$$

si ottiene la forma continua della *Electric Field Integral Equation*:

$$\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \times \mathbf{E}^{inc}(\mathbf{r}) = j\omega \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \times \iint_S G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left[\mathbf{J}_s(\mathbf{r}') + \frac{1}{k^2} \nabla'_s \nabla'_s \cdot \mathbf{J}_s(\mathbf{r}') \right] dS' \quad \mathbf{r} \in S \quad (3.12)$$

Questa equazione è di tipo Fredholm di primo ordine, in quanto la corrente superficiale compare solo all'interno dell'operatore integrale. La derivazione non introduce ipotesi sulla forma geometrica dello scatterer, per cui la EFIE è applicabile sia a superfici chiuse, sia a superfici aperte e sottili (piastre, patch, riflettori). Nel caso di superfici sottili, $\mathbf{J}_s$ può essere interpretata come somma vettoriale delle densità di corrente sui due lati della superficie [5].

In modo analogo, imponendo la condizione

$$\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \times [\mathbf{H}^{inc}(\mathbf{r}) + \mathbf{H}^{scat}(\mathbf{r})] = \mathbf{J}_s(\mathbf{r})$$

si ottiene il campo magnetico diffuso:

$$\mathbf{H}^{scat}(\mathbf{r}) = \nabla \times \iint_S G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}_s(\mathbf{r}') dS' \quad (3.13)$$

da cui deriva la *Magnetic Field Integral Equation* (MFIE):

$$\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}^{inc}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{J}_s(\mathbf{r})}{2} - \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \times \iint_{S-\delta S} \mathbf{J}_s(\mathbf{r}') \times \nabla' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' \quad (3.14)$$

Dal punto di vista applicativo, la EFIE risulta particolarmente efficace nell'analisi di antenne e nello scattering da superfici conduttrici aperte, mentre nel caso di geometrie chiuse viene tipicamente combinata con la MFIE nella CFIE, così da mitigare i fenomeni di risonanza interna. La formulazione continua così ottenuta rappresenta la base per la successiva discretizzazione numerica mediante il Metodo dei Momenti, trattata nei paragrafi seguenti.

3.2 Physical Optics (PO): principi e approssimazioni

La *Physical Optics* (PO) rappresenta una delle approssimazioni più utilizzate nell'analisi dello scattering elettromagnetico da superfici conduttrici di grandi dimensioni elettriche. A differenza delle formulazioni integrali rigorose, come la EFIE, la

PO non richiede la soluzione completa dell'equazione integrale per la corrente superficiale, ma si basa su un modello approssimato ottenuto assumendo che il campo incidente illumini localmente la superficie come se fosse infinitamente estesa e perfettamente piana.

L'idea di fondo consiste nel sostituire l'oggetto reale con una distribuzione di correnti "fisiche" sulla sua superficie, determinate dal comportamento locale di un piano PEC infinito investito dal campo incidente.

Sebbene semplificativa, questa ipotesi risulta sorprendentemente accurata quando l'oggetto ha dimensioni molto maggiori della lunghezza d'onda e presenta curvature deboli.

Per comprendere la formulazione della PO, consideriamo una superficie perfettamente conduttrice (PEC) illuminata da un campo incidente $\mathbf{E}_{inc}$, $\mathbf{H}_{inc}$ con normale esterna $\hat{\mathbf{n}}$. Nel caso di un piano PEC infinito, le condizioni al contorno impongono che il campo elettrico tangenziale si annulli sulla superficie, mentre il campo magnetico tangenziale raddoppi rispetto al valore incidente. In particolare, si ha:

$$\mathbf{E}_{tot} = 0, \quad \mathbf{H}_{tot} \approx 2\mathbf{H}_{inc}$$

Applicando la legge di Ampère sulla superficie, la densità di corrente superficiale equivalente risulta

$$\mathbf{J} = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}_{inc}$$

Sostituendo l'espressione del campo magnetico totale si ottiene la classica approssimazione PO:

$$\mathbf{J}_{PO}(\mathbf{r}) \approx 2\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_{inc}(\mathbf{r}) \quad (3.15)$$

valida nelle regioni illuminate della superficie. Nelle regioni in ombra, dove il campo incidente non raggiunge direttamente la superficie, la PO impone invece

$$\mathbf{J}_{PO} = 0$$

Questa scelta deriva da un modello puramente geometrico, secondo cui la regione shadowed non riceve energia diretta dal campo incidente. Tuttavia, nella realtà fisica esistono contributi diffratti che la PO classica non è in grado di rappresentare. La PO si colloca nel contesto delle tecniche asintotiche ad alta frequenza, nelle quali la lunghezza d'onda è molto più piccola delle dimensioni caratteristiche dell'oggetto [7].

In tali condizioni, la propagazione può essere interpretata in termini quasi-geometrici: i raggi incidenti illuminano la superficie, generano correnti locali e tali correnti irradiano il campo diffuso.

Dal punto di vista fisico, la PO può essere vista come un metodo che sostituisce la soluzione rigorosa del problema con una distribuzione di correnti equivalenti definite

solo sulla porzione illuminata della superficie. Queste correnti, pur approssimate, vengono poi utilizzate come sorgenti in una rappresentazione integrale del campo diffuso, tipicamente tramite la funzione di Green del mezzo omogeneo.

Una volta determinata la corrente equivalente $\mathbf{J}_{PO}$, il campo diffuso si ottiene applicando l'EFIE (3.12), sostituendo $\mathbf{J}$ con $\mathbf{J}_{PO}$ e valutando l'integrale di superficie limitatamente alla regione illuminata. Questo procedimento evidenzia come la PO conservi la struttura formale della EFIE, ma con una corrente già nota anziché incognita, evitando così la risoluzione di un sistema integrale.

L'impiego della Physical Optics richiede condizioni geometriche e frequenziali ben definite: gli ostacoli devono essere elettricamente grandi, con dimensioni molto superiori alla lunghezza d'onda, e caratterizzati da superfici lisce con raggio di curvatura elevato, così da poter essere approssimati localmente da un piano. È inoltre necessario identificare in modo netto le regioni illuminate e quelle in ombra, spesso tramite algoritmi di visibilità. In questo regime, la PO fornisce stime affidabili della componente speculare dello scattering, risultando particolarmente efficace nel calcolo della RCS di superfici lisce e nel progetto di grandi antenne a riflettore.

Per costruzione, tuttavia, il modello trascura tutti i fenomeni non riconducibili alla riflessione locale da PEC, come le correnti diffratte agli spigoli, le onde superficiali e le interazioni multiple tra porzioni della struttura, imponendo correnti nulle nelle zone d'ombra anche quando sono presenti contributi diffratti non trascurabili.

La PO rappresenta quindi un compromesso efficace tra accuratezza e costo computazionale: pur non essendo una formulazione rigorosa, fornisce risultati affidabili per superfici di grandi dimensioni elettriche e consente di ottenere rapidamente una stima del campo diffuso. Per questo motivo, è ampiamente utilizzata in applicazioni radar, nella progettazione di riflettori e in generale in tutti i problemi ad alta frequenza in cui una soluzione integrale completa risulterebbe troppo onerosa dal punto di vista computazionale.

3.3 Analisi comparativa tra EFIE e PO

Il confronto tra la *Electric Field Integral Equation* (EFIE) e la *Physical Optics* (PO) permette di chiarire le differenze tra metodi rigorosi e metodi approssimati per lo studio dello scattering elettromagnetico.

Dal punto di vista dell'accuratezza, l'*Electric Field Integral Equation* è in grado di modellare in maniera completa tutti i fenomeni elettromagnetici associati allo scattering: interazioni multiple tra diverse porzioni della superficie, effetti di diffrazione ai bordi, contributi di campo vicino e lontano, e variazioni rapide della corrente dovute a geometrie complesse. La EFIE non introduce alcuna ipotesi sulla dimensione elettrica dell'oggetto o sulla sua curvatura, risultando applicabile sia a

superfici piccole sia a superfici grandi, sia a geometrie lisce sia a geometrie con spigoli pronunciati. Inoltre, la EFIE è valida per superfici aperte e chiuse, e costituisce la base teorica di molti metodi numerici, come il Metodo dei Momenti (MoM), che permette di ottenere soluzioni numeriche accurate tramite la discretizzazione della corrente superficiale. Tuttavia, questa accuratezza ha un costo: la discretizzazione della EFIE porta alla costruzione di matrici dense e complesse, con un numero di incognite proporzionale al numero di elementi della mesh superficiale. Per superfici di grandi dimensioni elettriche, il numero di incognite cresce rapidamente, rendendo la soluzione del sistema lineare estremamente onerosa sia in termini di memoria sia in termini di tempo di calcolo. Anche con tecniche di accelerazione come la Fast Multipole Method (FMM) o la Multi-Level Fast Multipole Method (MLFMM), la EFIE rimane un metodo computazionalmente impegnativo, soprattutto quando si richiede un'elevata risoluzione della corrente o quando la geometria presenta dettagli fini.

La *Physical Optics*, al contrario, adotta un approccio computazionalmente molto più leggero, ma a discapito della generalità e dell'accuratezza. Essa assume che la corrente superficiale sia determinata localmente dal campo incidente, trascurando interazioni non locali ed effetti di diffrazione. Tale ipotesi è valida solo per oggetti elettricamente grandi e superfici lisce, approssimabili localmente da un piano, condizioni in cui la PO fornisce una buona stima della componente speculare dello scattering. Tuttavia, non è in grado di modellare fenomeni come la diffrazione ai bordi, le onde superficiali o le interazioni multiple, portando a una sottostima del campo diffuso nelle regioni d'ombra. Per migliorarne l'accuratezza, la PO viene spesso integrata con modelli di diffrazione come la Geometrical Theory of Diffraction (GTD) o la Uniform Theory of Diffraction (UTD).

Dal punto di vista della complessità computazionale, la differenza tra EFIE e PO è sostanziale. La discretizzazione della EFIE tramite Metodo dei Momenti porta a un sistema lineare denso di dimensione $N \times N$, la cui soluzione richiede un costo computazionale proporzionale al numero di incognite. In particolare, i metodi diretti comportano una complessità fino $O(N^3)$, mentre l'impiego di tecniche accelerate riduce il costo a circa $O(N \log N)$ o meglio, a seconda dell'implementazione [8]. La PO, invece, richiede semplicemente la valutazione della corrente equivalente tramite una formula chiusa e il calcolo dell'integrale di radiazione, che può essere eseguito in modo molto più efficiente. In molti casi, la PO permette di ottenere una stima del campo diffuso con un costo computazionale inferiore rispetto alla EFIE, rendendola particolarmente adatta per analisi preliminari, ottimizzazioni iterative o simulazioni di oggetti molto grandi, come riflettori parabolici, antenne a grande apertura o strutture aeronautiche.

Un ulteriore elemento di confronto riguarda la stabilità numerica. La EFIE può soffrire di problemi di condizionamento, soprattutto per oggetti elettricamente

piccoli o per superfici sottili, richiedendo tecniche di preconditionamento o formulazioni ibride come la Combined Field Integral Equation (CFIE). La PO, essendo un metodo diretto e non iterativo, non presenta problemi di stabilità numerica, ma la sua accuratezza dipende fortemente dalla geometria e dalla frequenza. In particolare, la PO non è adatta per frequenze basse o per oggetti con dimensioni confrontabili con la lunghezza d'onda, dove gli effetti di risonanza e le interazioni multiple diventano dominanti.

In sintesi, pur basandosi entrambi sulle correnti equivalenti indotte sulla superficie del conduttore, EFIE e PO presentano differenze sostanziali in termini di formulazione, accuratezza e costo computazionale.

La *Electric Field Integral Equation* (EFIE) è una formulazione rigorosa, derivata direttamente dalle equazioni di Maxwell, che descrive il campo diffuso in funzione della corrente superficiale incognita, garantendo un'elevata accuratezza a fronte di un costo computazionale significativo dovuto alla natura densa e globale dell'operatore integrale. La *Physical Optics* (PO), invece, è un'approssimazione asintotica ad alta frequenza che sostituisce la corrente incognita con una corrente illuminata valutata localmente dal campo incidente, assumendo un comportamento locale assimilabile a un piano PEC infinito. Tale semplificazione riduce drasticamente i gradi di libertà e il costo computazionale, ma limita la validità del metodo a superfici lisce ed elettricamente grandi. In questo quadro, EFIE e PO rappresentano approcci complementari, la prima offre una modellizzazione completa e rigorosa dello scattering, mentre la seconda fornisce una soluzione approssimata ma estremamente efficiente, la cui scelta dipende dal compromesso tra accuratezza e complessità richiesto dall'applicazione.

Capitolo 4

Metodi di Elettromagnetismo Computazionale

In questo capitolo vengono introdotti i fondamenti dell'elettromagnetismo computazionale (CEM), disciplina che permette la risoluzione numerica delle equazioni di Maxwell per l'analisi e la progettazione di sistemi elettromagnetici complessi. Dopo una panoramica sulle motivazioni e sugli ambiti applicativi del CEM, viene presentato il Metodo dei Momenti (MoM), descrivendone la formulazione generale e la discretizzazione secondo il metodo di Galerkin. Vengono inoltre introdotte le funzioni di base Rao–Wilton–Glisson (RWG), impiegate per la rappresentazione delle correnti superficiali nelle equazioni integrali e ampiamente utilizzate nelle simulazioni su mesh triangolari.

Infine, viene presentato il quadro attuale degli approcci ibridi MoM–PO per lo scattering da strutture elettricamente grandi, discutendo i metodi PO–MoM classici e le loro estensioni (large-element PO, higher-order MoM–PO, schemi iterativi EI/EL–MoM–PO e algoritmi IPO/FB–IPO), che mirano a ridurre il costo computazionale combinando in modo mirato modellazione rigorosa e approssimazioni ad alta frequenza.

4.1 Motivazioni e ambiti di applicazione

L'elettromagnetismo computazionale (Computational Electromagnetics – CEM) costituisce oggi un pilastro fondamentale dell'ingegneria moderna, fornendo strumenti teorici e numerici indispensabili per l'analisi, la progettazione e l'ottimizzazione di dispositivi e sistemi elettromagnetici. Attraverso la formulazione numerica delle

equazioni di Maxwell, il CEM consente di simulare e prevedere con elevata accuratezza il comportamento dei campi elettrici e magnetici in configurazioni complesse, riducendo drasticamente la necessità di costosi esperimenti fisici e di prototipazione ripetuta.

Prima dell'avvento dei calcolatori digitali, l'analisi dei fenomeni elettromagnetici era limitata a misure sperimentali o a soluzioni analitiche valide solo per geometrie semplici. L'introduzione dei computer e dei primi linguaggi di programmazione numerica ha segnato una svolta decisiva, rendendo possibile affrontare problemi troppo complessi per i metodi teorici tradizionali e dando origine all'elettromagnetismo computazionale [6]. Con l'aumento progressivo della potenza di calcolo, i metodi e gli algoritmi del CEM si sono evoluti rapidamente, consentendo la modellazione di strutture con milioni di incognite e la simulazione accurata di fenomeni realistici. Oggi i codici numerici moderni permettono di risolvere problemi tridimensionali complessi, includendo materiali dispersivi e anisotropi e condizioni al contorno tipiche dei sistemi reali.

L'elettromagnetismo computazionale consente di simulare il comportamento di dispositivi e strutture complesse prima della loro realizzazione fisica, permettendo di analizzare in modo sistematico l'effetto di geometrie, materiali e condizioni operative e riducendo significativamente il numero di prototipi necessari. Le sue applicazioni sono estremamente ampie e coinvolgono gran parte dell'ingegneria elettronica e delle telecomunicazioni. Un aspetto centrale del CEM è la capacità di affrontare problemi privi di soluzioni analitiche, caratterizzati da geometrie complesse o materiali eterogenei: tecniche numeriche come il Metodo dei Momenti (MoM), il Metodo degli Elementi Finiti (FEM) e il Metodo delle Differenze Finite nel Dominio del Tempo (FDTD) consentono infatti di modellare con accuratezza fenomeni di scattering, propagazione e accoppiamento elettromagnetico. L'evoluzione della potenza di calcolo e l'introduzione di architetture High-Performance Computing (HPC) hanno ulteriormente ampliato le potenzialità del CEM, rendendo possibile la simulazione parallela su larga scala e l'analisi di problemi multi-fisici in cui l'interazione elettromagnetica è accoppiata con fenomeni termici, meccanici o ottici. In questo modo, il CEM si configura come uno strumento essenziale sia per la progettazione avanzata sia per la comprensione approfondita del comportamento dei campi elettromagnetici.

In conclusione, il CEM fornisce il quadro teorico e computazionale necessario per affrontare l'analisi elettromagnetica in scenari complessi, superando i limiti delle soluzioni analitiche e sperimentali tradizionali. La sua evoluzione, sostenuta dai progressi dell'HPC e dei metodi numerici avanzati, ha reso possibile la modellazione accurata di strutture realistiche e fenomeni multi-fisici.

4.2 Metodo dei Momenti (MoM)

Il Metodo dei Momenti (MoM) è una delle tecniche numeriche più consolidate per la soluzione di equazioni integrali in elettromagnetismo, in particolare nei problemi di radiazione e scattering formulati a partire dalle equazioni di Maxwell. La sua efficacia deriva dalla capacità di trasformare un problema continuo, tipicamente un'equazione integrale definita su domini superficiali o volumici, in un sistema lineare a dimensione finita, risolvibile mediante gli strumenti dell'algebra lineare numerica [6].

Nel contesto dell'elettromagnetismo computazionale, il MoM è impiegato soprattutto in combinazione con formulazioni integrali dei campi, quali l'Equazione Integrale del Campo Elettrico (EFIE), l'Equazione Integrale del Campo Magnetico (MFIE) e le formulazioni combinate (CFIE), ciascuna adatta a specifiche geometrie e condizioni al contorno. In tali approcci, le incognite non sono i campi nel volume, bensì le correnti superficiali, elettriche o magnetiche, indotte sulle superfici degli oggetti. Una volta determinate, tali correnti consentono di ricostruire in modo diretto i campi irradiati o diffusi, fornendo una descrizione completa del fenomeno elettromagnetico.

L'adozione di una formulazione integrale presenta vantaggi significativi rispetto ai metodi volumici tradizionali. L'uso della funzione di Green del mezzo consente infatti di incorporare automaticamente le condizioni di radiazione all'infinito, evitando la discretizzazione esplicita del dominio esterno e riducendo drasticamente il numero di gradi di libertà necessari alla soluzione del problema. Questo aspetto risulta particolarmente vantaggioso quando gli oggetti sono immersi in un mezzo omogeneo illimitato, situazione tipica dei problemi di scattering e radiazione. In questo quadro, il MoM fornisce un procedimento sistematico per trasformare l'equazione integrale continua in un sistema matriciale algebrico, ottenuto mediante l'espansione delle correnti incognite su funzioni di base e la successiva proiezione dell'equazione su un insieme di funzioni di test.

Il risultato è un sistema lineare che lega direttamente i coefficienti delle correnti incognite ai campi noti, generalmente rappresentati dal campo incidente sulla superficie di interesse.

Dal punto di vista formale, il MoM può essere interpretato come la proiezione di un'equazione funzionale su uno spazio vettoriale finito.

Data un'equazione del tipo

$$\mathcal{L}(f) = g$$

dove $\mathcal{L}$ è un operatore lineare che agisce su una funzione incognita f (nel nostro caso la densità di corrente superficiale) e g rappresenta un termine noto (ad esempio, il campo elettrico tangenziale incidente), si cerca una soluzione approssimata f_N appartenente a uno spazio vettoriale finito generato da un insieme di funzioni di base.

Per ottenere una soluzione approssimata, l'incognita f viene espansa in una combinazione lineare di funzioni note $f_1, f_2, f_3, \dots$, appartenenti al dominio di $\mathcal{L}$,

$$f(\mathbf{r}) \approx f_N(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N \alpha_n f_n(\mathbf{r}) \quad (4.1)$$

dove α_n sono coefficienti sconosciuti e f_n sono le funzioni di espansione (o funzioni di base). Per una soluzione esatta la somma dovrebbe estendersi a un insieme completo di funzioni (somma infinita), mentre nelle applicazioni numeriche si utilizza un numero finito N di funzioni, ottenendo una soluzione approssimata con accuratezza crescente al crescere di N .

Sostituendo l'espansione f_N nell'equazione operatore si ottiene

$$\mathcal{L}(f_N) = \mathcal{L}\left(\sum_{n=1}^N \alpha_n f_n\right) = \sum_{n=1}^N \alpha_n \mathcal{L}(f_n) \quad (4.2)$$

e la differenza tra il termine noto g e il risultato dell'operatore applicato alla soluzione approssimata definisce il residuo

$$R = \mathcal{L}(f_N) - g = \sum_{n=1}^N \alpha_n \mathcal{L}(f_n) - g \quad (4.3)$$

Il residuo misura quanto la soluzione approssimata viola l'equazione originale. Una soluzione esatta corrisponderebbe a $R = 0$ in ogni punto del dominio, condizione che non può essere soddisfatta in generale con un numero finito di gradi di libertà. Il MoM impone quindi che il residuo sia ortogonale, rispetto a un opportuno prodotto interno, a un insieme di funzioni di test $w_1, w_2, w_3, \dots$,

$$\langle w_m, R \rangle = 0 \quad m = 1, \dots, N$$

cioè

$$\left\langle w_m, \sum_{n=1}^N \alpha_n \mathcal{L}(f_n) - g \right\rangle = 0 \quad m = 1, \dots, N \quad (4.4)$$

Sviluppando i termini e scambiando somma e prodotto interno, si ottiene il sistema lineare

$$\sum_{n=1}^N \alpha_n \langle w_m, \mathcal{L}(f_n) \rangle = \langle w_m, g \rangle \quad m = 1, \dots, N \quad (4.5)$$

Una volta definite le funzioni di base e di test, il procedimento del Metodo dei Momenti porta a un sistema lineare della forma

$$\mathbf{Z}\mathbf{a} = \mathbf{g}$$

dove $\mathbf{Z}$ è la matrice di impedenza (o matrice dei coefficienti), $\mathbf{a}$ è il vettore dei coefficienti incogniti e $\mathbf{g}$ è il vettore dei termini noti. In notazione compatta si può scrivere come

$$[z_{mn}][\alpha_n] = [g_m] \quad (4.6)$$

dove

$$\mathbf{Z} = [z_{nm}] = \begin{bmatrix} \langle w_1, \mathcal{L}(f_1) \rangle & \langle w_1, \mathcal{L}(f_2) \rangle & \dots \\ \langle w_2, \mathcal{L}(f_1) \rangle & \langle w_2, \mathcal{L}(f_2) \rangle & \dots \\ \dots & \dots & \langle w_m, \mathcal{L}(f_n) \rangle \end{bmatrix}$$

Se la matrice $\mathbf{Z}$ è non-singolare allora esiste la sua inversa $\mathbf{Z}^{-1}$. Allora i coefficienti α_n sono dati da

$$[\alpha_n] = [z_{nm}]^{-1}[g_m]$$

e la soluzione di f è data da (4.1).

La scelta delle funzioni di test determina la natura della discretizzazione.

Nel *Point Matching* (o collocation) il residuo è annullato in un insieme discreto di punti, ossia si impone $R = 0$ in un insieme di N punti del dominio, ottenendo un sistema di N equazioni per i N coefficienti α_n . Questo approccio è intuitivo e computazionalmente leggero, ma può risultare sensibile alla scelta dei punti di collocazione e meno accurato in presenza di variazioni rapide dell'incognita.

Un secondo approccio è il Metodo di Galerkin, nel quale le funzioni di test coincidono con le funzioni di base utilizzate per espandere l'incognita. Questa scelta garantisce una formulazione più coerente e spesso meglio condizionata, poiché il residuo viene annullato in media rispetto allo stesso spazio funzionale in cui è rappresentata l'incognita.

Esistono infine varianti intermedie, come il metodo dei residui pesati generico, in cui le funzioni di test appartengono a uno spazio diverso da quello delle funzioni di base, permettendo una maggiore flessibilità nella modellazione.

Nel contesto delle formulazioni integrali elettromagnetiche, e in particolare nella discretizzazione della EFIE, il metodo più utilizzato è il metodo di Galerkin, poiché garantisce stabilità numerica, coerenza funzionale e una migliore rappresentazione delle interazioni non locali mediate dalla funzione di Green. Anche in questa tesi si adotta il metodo di Galerkin, utilizzando funzioni di base e di test identiche (tipicamente funzioni di tipo RWG(Rao–Wilton–Glisson) per superfici triangolate), così da ottenere una discretizzazione accurata e compatibile con la natura vettoriale delle correnti superficiali.

4.3 Funzioni di base RWG(Rao–Wilton–Glisson)

Le funzioni di base di Rao–Wilton–Glisson (RWG) rappresentano lo standard di riferimento per la discretizzazione delle correnti superficiali nelle formulazioni

integrali dell'elettromagnetismo, in particolare nella EFIE. Si tratta di funzioni vettoriali a supporto locale, definite su coppie di triangoli planari adiacenti che condividono un lato interno della mesh. Questa struttura le rende particolarmente adatte ai codici MoM 3D basati su superfici triangolate, grazie alla loro capacità di garantire continuità tangenziale della corrente e conservazione della carica.

Nella configurazione mostrata in figura (Fig. 4.1), ogni funzione RWG è associata a un edge interno n comune a due triangoli $\mathcal{T}_n^+$ e $\mathcal{T}_n^-$. Il verso assegnato all'edge stabilisce la direzione positiva della corrente e determina il segno della funzione sui due triangoli. I vettori $\boldsymbol{\rho}_n^+$ e $\boldsymbol{\rho}_n^-$ individuano la posizione del punto di osservazione rispetto al vertice "libero" di ciascun triangolo, ossia il vertice non appartenente all'edge comune.

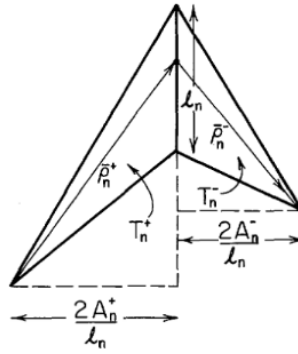


Figura 4.1: Rappresentazione schematica della funzione di base RWG associata a un edge interno comune ai triangoli $\mathcal{T}_n^+$ e $\mathcal{T}_n^-$ [9]

Sia l_n la lunghezza dell'edge comune, e A_n^+, A_n^- le aree dei triangoli $\mathcal{T}_n^+$ e $\mathcal{T}_n^-$. La funzione di base RWG associata all'edge n è definita come

$$\mathbf{f}_n(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{l_n}{2A_n^+} \boldsymbol{\rho}_n^+(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in \mathcal{T}_n^+ \\ -\frac{l_n}{2A_n^-} \boldsymbol{\rho}_n^-(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in \mathcal{T}_n^- \\ 0, & \text{altrove} \end{cases} \quad (4.7)$$

dove $\boldsymbol{\rho}_n^+(\mathbf{r})$ è il vettore che va dal vertice opposto all'edge nel triangolo $\mathcal{T}_n^+$ al punto $\mathbf{r}$, mentre $\boldsymbol{\rho}_n^-(\mathbf{r})$ è definito in modo analogo nel triangolo $\mathcal{T}_n^-$, ma orientato rispetto al vertice libero del secondo triangolo.

Per costruzione $\mathbf{f}_n(\mathbf{r})$ è ovunque tangente alla superficie, nulla al di fuori della coppia di triangoli e con componente normale all'edge costante e continua, il che assicura l'assenza di cariche lineari spurie lungo l'edge e una rappresentazione conforme alle condizioni di continuità della corrente.

Una proprietà fondamentale delle RWG è il loro carattere divergence-conforming. La divergenza superficiale risulta infatti costante su ciascun triangolo:

$$\nabla_s \cdot \mathbf{f}_n(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{l_n}{A_n^+}, & \mathbf{r} \in \mathcal{T}_n^+ \\ -\frac{l_n}{A_n^-}, & \mathbf{r} \in \mathcal{T}_n^- \\ 0, & \text{altrove} \end{cases} \quad (4.8)$$

Ne consegue che la carica totale associata alla singola RWG è nulla. Questa proprietà garantisce la conservazione della carica e impedisce la formazione di accumuli non fisici ai bordi dei sotto-domini, risultando essenziale nella EFIE, dove la divergenza della corrente compare esplicitamente nei termini legati al potenziale scalare.

La corrente superficiale viene approssimata come combinazione lineare delle funzioni RWG:

$$\mathbf{J}_s \approx \sum_{n=1}^N \mathbf{I}_n \mathbf{f}_n(\mathbf{r}) \quad (4.9)$$

dove il coefficiente $\mathbf{I}_n$ rappresenta la componente normale media della corrente che attraversa l'edge n . Questa interpretazione fornisce un legame diretto tra le incognite del sistema MoM e grandezze fisiche sulla superficie, rendendo le RWG particolarmente adatte alle formulazioni EFIE/MFIE su mesh triangolari.

4.4 Stato dell'arte degli approcci ibridi MoM–PO

Nel contesto dell'analisi di scattering da strutture elettricamente grandi, numerosi lavori hanno proposto formulazioni ibride che combinano Metodo dei Momenti (MoM) e Physical Optics (PO), con l'obiettivo di ridurre il costo computazionale mantenendo un controllo soddisfacente dell'accuratezza.

Una prima famiglia di metodi, in cui l'incognita è la densità di corrente superficiale, è rappresentata dagli schemi ibridi PO–MoM introdotti da Jakobus e Landstorfer [10]: un corpo perfettamente conduttore arbitrario viene suddiviso in sotto-regioni trattate con MoM e sotto-regioni trattate con PO, utilizzando in entrambi i casi funzioni di base RWG su mesh triangolare e imponendo la EFIE solo sulla parte MoM. I coefficienti delle funzioni di base nella regione MoM sono ottenuti risolvendo il sistema lineare EFIE, mentre nella regione PO essi sono assegnati direttamente a partire dalla corrente equivalente di Physical Optics, espressa come operatore del campo magnetico totale (incidente più diffuso dalla regione MoM) sui triangoli illuminati. In questo modo la continuità della corrente attraverso il confine tra le due regioni è automaticamente garantita dalle RWG, senza introdurre condizioni di accoppiamento aggiuntive.

Il lavoro di Nazo [11] si innesta su questa impostazione mantenendo la stessa architettura ibrida MoM-PO, ma intervenendo in modo mirato sulla rappresentazione della corrente nella regione PO. L'autore introduce funzioni di base RWG a fase lineare (Linear-Phase RWG), nelle quali l'andamento di fase della corrente è modellato esplicitamente lungo l'elemento. Ciò consente di utilizzare triangoli significativamente più grandi nella regione PO rispetto al requisito classico di circa un decimo di lunghezza d'onda imposto dal MoM, mantenendo invece una discretizzazione RWG standard nella regione trattata con EFIE. La formulazione ibrida MoM-PO con large-element PO che ne risulta permette di ridurre ulteriormente il numero di incognite e i requisiti di memoria rispetto al POMoM di riferimento, mantenendo un buon accordo sulla RCS nei casi test planari considerati, a fronte del fatto che l'accuratezza rimane sensibile sia alla scelta della partizione tra regione rigorosa e regione asintotica, sia alla validità locale dell'approssimazione di Physical Optics quando applicata a elementi triangolari di dimensione ingrandita.

Una linea di sviluppo successiva è rappresentata dai metodi ibridi ad alto ordine e dalle varianti iterative della formulazione MoM-PO. Djordjević e Notaroš propongono un ibrido higher-order MoM-PO [12] in cui la regione MoM è discretizzata tramite funzioni di base gerarchiche di ordine superiore su patch quadrilateri o triangolari, così da rappresentare in modo accurato la variazione di ampiezza e fase della corrente con un numero di gradi di libertà sensibilmente inferiore rispetto alla classica discretizzazione RWG di primo ordine. La regione PO è invece modellata mediante la corrente equivalente di Physical Optics su superfici estese, con valutazione del far-field tramite integrazioni numeriche ad alta accuratezza. In questo modo l'ibrido higher-order MoM-PO permette una riduzione significativa del numero di incognite, della memoria e del tempo di calcolo nella parte rigorosa, mantenendo un errore controllato nella caratterizzazione di antenne installate su grandi piattaforme metalliche, purché la geometria sia sufficientemente regolare da beneficiare della discretizzazione ad alto ordine.

Una direzione distinta rispetto alla sola ottimizzazione della discretizzazione è rappresentata, da un lato, dai metodi ibridi iterativi MoM-PO e, dall'altro, dagli algoritmi di iterative physical optics (IPO). Zi-Liang Liu e Chao-Fu Wang introducono l'Efficient Iterative MoM-PO (EI-MoM-PO) [13], in cui la suddivisione in regione MoM e regione PO è quella classica RWG-based, ma il contributo della parte PO non viene più incorporato come blocco di matrice PO. Si imposta invece un processo iterativo tra le due regioni che aggiorna, a ogni passo, il termine di eccitazione (vettore di tensione) modificato dalla corrente PO, evitando il calcolo e lo stoccaggio esplicito dei termini di accoppiamento MoM-PO: a parità di numero di incognite, l'EI-MoM-PO mantiene il livello di accuratezza del MoM-PO convenzionale, ma riduce drasticamente il tempo di calcolo e la memoria necessari per oggetti elettricamente molto grandi, a patto che l'interazione elettromagnetica tra regione rigorosa e regione PO sia sufficientemente debole da garantire la convergenza in

poche iterazioni e che l'approssimazione PO resti valida nella parte trattata in modo asintotico.

In parallelo, Li Xiao et al. propongono un'ulteriore variante "EI-MoM-PO", in cui l'EI-MoM-PO è combinato con il metodo degli Equivalent Dipole Moments (EDM) [14]: le funzioni di base MoM e le correnti PO sono rappresentate tramite dipoli equivalenti, così da ottenere espressioni chiuse e molto compatte per gli elementi di matrice e per i termini di accoppiamento MoM-PO. Questa scelta non modifica il numero di incognite, ma semplifica e velocizza in modo significativo il filling della matrice MoM e la valutazione dei contributi di accoppiamento, con un impatto diretto sulla robustezza ed efficienza del metodo su piattaforme PEC tridimensionali elettricamente molto grandi (ad esempio cono sopra piastra o cono sopra paraboloide), pur lasciando inalterata la dipendenza globale dall'accuratezza del modello PO e dai parametri di arresto dell'iterazione.

Di natura concettualmente diversa sono invece gli algoritmi IPO, come quello classico di Obelleiro-Basteiro, Rodríguez e Burkholder [15], sviluppato per lo scattering da grandi cavità aperte: in questo caso non si costruisce una matrice MoM globale, ma si parte da una formulazione MFIE per le correnti equivalenti sulle pareti interne e la si risolve iterativamente applicando ripetutamente l'approssimazione di Physical Optics, in modo da introdurre progressivamente le riflessioni multiple all'interno della cavità. Il Forward-Backward IPO (FB-IPO) di Burkholder e Lundin [16], così come le varianti forward-backward accelerate, enfatizzano questa idea ordinando i facet lungo la direzione principale di propagazione e aggiornando le correnti in modo sequenziale avanti-indietro, combinando tali schemi con tecniche di accelerazione tipo FaFFA e con criteri di rilassamento, allo scopo di migliorare la convergenza su cavità molto allungate a frequenze elevate. Il codice generale descritto da Pandolfo et al. [17] estende ulteriormente il paradigma IPO a scenari realistici complessi (riflettori, radome, piattaforme con antenne, bersagli di grande scala), introducendo implementazioni parallele CPU/GPU e accelerazioni multilevel per gestire mesh molto grosse senza inversione di matrici dense. Questi metodi consentono di modellare riflessioni multiple e fenomeni di masking in ambito alta frequenza con discretizzazioni relativamente grossolane, ma rimangono intrinsecamente asintotici: l'accuratezza è strettamente legata alla validità dell'ipotesi PO nelle regioni considerate, al numero di iterazioni (ovvero al numero di riflessioni interne rilevanti) e alle strategie di controllo del residuo e di rilassamento adottate. In sintesi, tutti questi approcci ibridi MoM-PO perseguono la riduzione del costo computazionale intervenendo principalmente sulla scelta delle funzioni di base (RWG standard o a fase lineare, higher-order), sull'organizzazione della matrice (schemi iterativi EI-MoM-PO) o sul riutilizzo dell'approssimazione PO in forma iterativa (IPO/FB-IPO).

Il lavoro presentato in questa tesi si colloca nello stesso filone, ma con un'impostazione diversa: invece di agire solo sulla discretizzazione o sull'algoritmo di

soluzione, proponiamo una formulazione EFIE–PO che introduce una partizione esplicita della superficie in sotto-domini S_{EFIE} , S_{buf} e S_{PO} , e utilizza il residuo locale dell’equazione integrale come indicatore per modulare in maniera adattiva il contributo rigoroso, con l’obiettivo di concentrare il MoM nelle regioni elettromagneticamente più critiche e demandare alla PO le porzioni “regolari”, ottenendo così un bilanciamento più controllato tra accuratezza e costo computazionale su geometrie tridimensionali realistiche.

Capitolo 5

Formulazione ibrida EFIE-PO

In questo capitolo viene presentata la formulazione ibrida EFIE-PO sviluppata con l'obiettivo di ridurre il costo computazionale dell'analisi di scattering, mantenendo al contempo un controllo esplicito sull'accuratezza rispetto alla soluzione EFIE completa. Dopo aver discusso le motivazioni fisiche e numeriche alla base dell'approccio ibrido, si introducono le strategie di suddivisione della superficie dello scatterer nei sotto-domini $\mathbf{S}_{EFIE}$, $\mathbf{S}_{buf}$ e $\mathbf{S}_{PO}$ e le diverse configurazioni di accoppiamento tra modello rigoroso e modello asintotico (*full EFIE*, *full PO*, *fringe semplice*, *fringe a pezzi*, *fringe con residuo*). La parte finale del capitolo è dedicata all'implementazione numerica in ambiente MATLAB, descrivendo la struttura dei dati basata su RWG, il flusso algoritmico per il calcolo delle correnti ibride e la produzione dei campi irradiati e della RCS monostatica che verranno analizzati nel Capitolo 6.

5.1 Motivazioni per l'approccio ibrido

Nel contesto del testing rapido di antenne e della caratterizzazione della Radar Cross Section (RCS), l'impiego di una formulazione ibrida risponde all'esigenza di contenere il numero di incognite associato alla EFIE pura, garantendo al contempo un'adeguata accuratezza nella descrizione delle correnti indotte nelle regioni elettromagneticamente più sensibili. Il principio alla base dell'approccio ibrido consiste nel limitare l'applicazione del trattamento rigoroso MoM alle porzioni della superficie in cui l'approssimazione asintotica della PO mostra prestazioni insufficienti, quali bordi, zone ad elevata curvatura e aree di transizione tra illuminazione e ombra, sfruttando invece la PO sulle superfici estese e regolari, per le quali il modello ad alta frequenza fornisce una rappresentazione affidabile del fenomeno di scattering.

All'interno di questo quadro concettuale si collocano le diverse configurazioni ibride, che implementano in maniera sistematica il criterio di suddivisione del dominio. Tali configurazioni mirano a ottenere una riduzione significativa del costo computazionale, mantenendo la perdita di accuratezza entro limiti controllati e compatibili con le esigenze applicative.

5.2 Strategie di accoppiamento dei domini EFIE e PO

La superficie complessiva dello scatterer viene suddivisa in tre sotto-domini principali: un dominio EFIE, un dominio PO e una regione di transizione o buffer, che svolge il ruolo di fringe numerica tra le due descrizioni.

Indichiamo con S_{EFIE} la porzione di superficie in cui la corrente superficiale è trattata mediante EFIE/MoM, con S_{PO} la porzione in cui la corrente è modellata tramite PO e con S_{buf} una striscia di elementi che circonda il dominio EFIE e ne media l'interazione con il dominio PO, così che:

$$S = S_{EFIE} \cup S_{buf} \cup S_{PO}$$

Nel dominio S_{EFIE} , la densità di corrente superficiale $\mathbf{J}_{EFIE}$ è incognita del sistema lineare MoM e viene calcolata risolvendo l'equazione integrale discretizzata tramite funzioni di base RWG.

Nel dominio S_{PO} , la corrente $\mathbf{J}_{PO}$ è invece valutata mediante la formulazione di Physical Optics a partire dal campo incidente e dalla normale locale alla superficie, senza introdurre ulteriori incognite nel sistema lineare.

La regione S_{buf} è trattata in modo ibrido, definendo una corrente di fringe $\mathbf{J}_{buf}$ che rappresenta una correzione locale della PO verso la soluzione EFIE, con modalità differenti a seconda della configurazione scelta.

A livello teorico, la corrente superficiale totale $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ può essere vista come somma di contributi definiti sui diversi sotto-domini:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \mathbf{J}_{EFIE}(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in S_{EFIE} \\ \mathbf{J}_{buf}(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in S_{buf} \\ \mathbf{J}_{PO}(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in S_{PO} \end{cases}$$

Sulla base di questa struttura sono state analizzate diverse strategie di accoppiamento, che differiscono per il modo in cui la correzione EFIE viene applicata nella regione di transizione. Le configurazioni considerate sono:

- **Full EFIE:**

Questa configurazione utilizza EFIE su tutta la superficie, $S_{EFIE} = S$ e funge da riferimento numerico di alta accuratezza. In questo caso la corrente è calcolata rigorosamente su tutta la superficie tramite EFIE/MoM, e il sistema lineare coinvolge tutti i RWG associati alla mesh. Questa soluzione costituisce il riferimento “gold standard” per correnti, campo irradiato e RCS.

- **Full PO:**

In questa configurazione l'intera superficie è modellata con la corrente equivalente di Physical Optics, senza risolvere alcun sistema EFIE/MoM per imporre l'equazione integrale. La corrente PO continua $\mathbf{J}_{PO} = \mathbf{n} \times \mathbf{H}_{inc}$ viene semplicemente proiettata nello spazio delle funzioni RWG tramite la matrice di Gram, ottenendo i coefficienti dei RWG mediante la soluzione di un piccolo sistema lineare che fornisce i coefficienti RWG in senso di minimo errore quadratico (best-fit in norma L^2), ma che non coinvolge l'operatore di campo EFIE. In questo modo si ottiene una rappresentazione discreta coerente con la discretizzazione MoM, mantenendo però il costo computazionale di un modello PO puro, che resta il limite di accuratezza minima in presenza di bordi, punte e regioni in ombra.

- **Fringe semplice:**

In questo caso il dominio EFIE è confinato a una regione particolare dello scatterer (ad esempio la zona di maggiore interesse o con geometria più complessa), mentre il dominio PO copre le regioni esterne. La regione di buffer S_{buf} è definita come una corona di elementi di superficie attorno al dominio S_{EFIE} , su cui si introduce una corrente correttiva $\mathbf{J}_\Delta$ che tiene conto della differenza tra la soluzione EFIE e la soluzione PO nelle regioni adiacenti.

Questa corrente correttiva è ottenuta imponendo che la soluzione ibrida soddisfi l'EFIE nella zona $S_{EFIE} \cup S_{buf}$.

Consideriamo quindi la matrice completa EFIE $\mathbf{Z}$ e il campo incidente $\mathbf{e}$, che possiamo suddividere in blocchi:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{aa} & \mathbf{Z}_{ab} \\ \mathbf{Z}_{ba} & \mathbf{Z}_{bb} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_a \\ \mathbf{e}_b \end{bmatrix}$$

dove indichiamo con a la zona $S_{EFIE} \cup S_{buf}$ e con b la zona S_{PO} .

Si vuole costruire una corrente ibrida $\mathbf{J}_{fringe}$ che coincida con PO nella zona S_{PO} :

$$\mathbf{J}_{fringe,b} = \mathbf{J}_{PO,b}$$

e che soddisfi EFIE nella zona $S_{EFIE} \cup S_{buf}$:

$$\mathbf{Z}_{aa}\mathbf{J}_{fringe,a} + \mathbf{Z}_{ab}\mathbf{J}_{PO,b} = \mathbf{e}_a \quad (5.1)$$

Introducendo la correzione $\mathbf{J}_\Delta$, definita sui gradi di libertà di a :

$$\mathbf{J}_{fringe,a} = \mathbf{J}_{PO,a} + \mathbf{J}_\Delta$$

e sostituendo quest'ultima nell'equazione (5.1), si ottiene il sistema ridotto:

$$\mathbf{Z}_{aa}\mathbf{J}_\Delta = \mathbf{e}_a - \mathbf{Z}_{aa}\mathbf{J}_{PO,a} - \mathbf{Z}_{ab}\mathbf{J}_{PO,b} \quad (5.2)$$

Una volta calcolata $\mathbf{J}_\Delta$, la corrente ibrida fringe è definita come:

$$\mathbf{J}_{fringe}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \mathbf{J}_{PO} + \mathbf{J}_\Delta & \mathbf{r} \in S_{EFIE} \\ \mathbf{J}_{PO} & \mathbf{r} \in S_{buf} \cup S_{PO} \end{cases} \quad (5.3)$$

Sebbene il sistema ridotto per la correzione $\mathbf{J}_\Delta$ venga costruito su $S_{EFIE} \cup S_{buf}$, nella configurazione fringe la correzione viene applicata esclusivamente ai gradi di libertà appartenenti a S_{EFIE} . L'inclusione del buffer nel dominio S_{EFIE} ha lo scopo di evitare che il bordo artificiale dell'equazione integrale coincida con il bordo della regione in cui la corrente è effettivamente utilizzata. L'EFIE, infatti, quando è risolta su un dominio troncato, tende a presentare errori locali e peggioramento del condizionamento in prossimità del bordo del dominio.

La presenza di S_{buf} come “zona cuscinetto” consente di spostare tali effetti indesiderati al di fuori della regione di interesse, ottenendo una correzione $\mathbf{J}_\Delta$ più stabile e fisicamente coerente. Al tempo stesso, l'esclusione di $\mathbf{J}_\Delta$ in S_{buf} mantiene il buffer come zona di transizione passiva tra EFIE e PO, permettendo un accoppiamento più regolare tra le due descrizioni e riducendo il rischio di discontinuità artificiali lungo l'interfaccia.

- **Fringe a pezzi:**

Questo approccio viene impiegato quando la geometria presenta più zone EFIE tra loro separate, ciascuna circondata dalla propria fringe. In tali casi, mentre nella fringe semplice si mantiene in EFIE anche l'interazione reciproca tra le diverse porzioni EFIE, eventualmente distanti tra loro, nella fringe a pezzi queste interazioni vengono volutamente sopresse annullando, nella matrice EFIE, i termini di accoppiamento tra sotto-regioni EFIE distinte. In termini di dominio, S_{buf} è quindi trattata come unione di sotto-domini indipendenti, su cui agiscono correzioni di corrente localizzate e non mutualmente accoppiate. Ne consegue che, se l'oggetto presenta un'unica regione EFIE con la relativa zona di buffer, la formulazione a pezzi coincide esattamente con la fringe semplice.

- **Fringe con residuo:**

In questa configurazione, a differenza del fringe semplice, la correzione EFIE

non viene applicata in modo uniforme su tutti i gradi di libertà della zona S_{EFIE} , ma è modulata localmente in funzione del vettore del residuo puntuale della PO, calcolato come

$$\mathbf{res}_{PO} = |\mathbf{Z}\mathbf{J}_{PO} - \mathbf{e}|$$

Per ogni RWG della zona S_{EFIE} si definisce un peso normalizzato:

$$\omega_n = \frac{|\mathbf{res}_{PO,n}|}{\max_{m \in S_{EFIE}} |\mathbf{res}_{PO,m}|}, \quad n \in S_{EFIE} \quad (5.4)$$

Dove il residuo è piccolo, $\omega_n \approx 0$, la PO è “buona”, ossia soddisfa bene l’EFIE e la corrente ibrida coincide quasi con $\mathbf{J}_{PO}$.

Dove il residuo è grande, $\omega_n \approx 1$, la PO non va bene, ossia viola fortemente EFIE e la corrente ibrida dà maggior rilievo alla correzione $\mathbf{J}_{\Delta}$ ottenuta dalla soluzione EFIE locale.

La corrente ibrida assume la forma generale:

$$\mathbf{J}_{fringe}(n) = \alpha(\omega_n)\mathbf{J}_{PO}(n) + \beta(\omega_n)\mathbf{J}_{\Delta}(n)$$

e in questo lavoro è stata utilizzata la scelta: $\alpha = 1, \beta = \omega$ che porta alla seguente espressione operativa:

$$\mathbf{J}_{fringe}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \mathbf{J}_{PO} + \omega \cdot \mathbf{J}_{\Delta} & \mathbf{r} \in S_{EFIE} \\ \mathbf{J}_{PO} & \mathbf{r} \in S_{buf} \cup S_{PO} \end{cases} \quad (5.5)$$

Si tratta di una combinazione semplice e monotona, in cui il contributo PO è sempre presente con peso 1 mentre il contributo EFIE cresce linearmente da 0 a 1. Per $\omega = 0$ si ottiene PO pura mentre per $\omega = 1$ si recupera la soluzione EFIE completa nella zona S_{EFIE} .

Dal punto di vista fisico, questa variante rappresenta la scelta più naturale: la correzione EFIE viene applicata solo dove la PO risulta inadeguata, senza attenuare la componente PO nelle regioni in cui essa è già accurata.

5.3 Implementazione numerica

L’implementazione numerica della formulazione ibrida EFIE–PO è stata sviluppata in ambiente MATLAB, a partire da una discretizzazione MoM basata su funzioni di base RWG definite su una mesh triangolare della superficie dello scatterer, con passo caratteristico dei triangoli dell’ordine di $\lambda/10$ nella regione EFIE.

Per ciascuna geometria in esame viene costruita una struttura di triangolazione che raccoglie in modo coerente tutte le informazioni necessarie: le coordinate dei vertici,

la connettività delle celle triangolari, l'elenco delle coppie di triangoli adiacenti associate agli edge interni, da cui vengono definite le RWG, e un vettore di indici che permette di etichettare ogni RWG in base all'appartenenza ai tre sotto-domini $\mathcal{S}_{EFIE}$, $\mathcal{S}_{buf}$ e $\mathcal{S}_{PO}$.

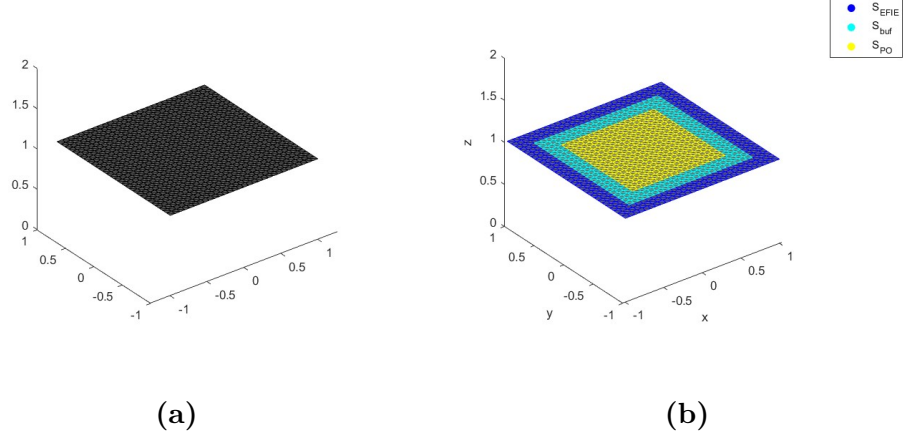


Figura 5.1: Esempio di mesh triangolare di una piastra (a) e partizione del dominio in sotto-domini $\mathcal{S}_{EFIE}$, $\mathcal{S}_{buf}$ e $\mathcal{S}_{PO}$ (b).

Su questa struttura è stato costruito un codice modulare che, a partire dalla struttura di mesh e dai parametri di simulazione, esegue in modo automatico il calcolo delle correnti per le diverse configurazioni: full EFIE, full PO e casi ibridi di tipo fringe (nelle varianti semplice, a pezzi e con residuo). Per ciascuna configurazione, il codice calcola le correnti superficiali discretizzate, ne visualizza la distribuzione tramite grafici 3D sulla superficie triangolata e valuta il campo radiato in far-field e la RCS monostatica, producendo grafici 2D in funzione dell'angolo di osservazione. Gli intervalli di visualizzazione e le direzioni di osservazione possono essere specificati a priori in input, consentendo un'analisi flessibile e comparativa delle diverse soluzioni.

5.3.1 Struttura algoritmica e gestione del dominio

Il flusso principale dell'algoritmo può essere schematizzato in quattro blocchi:

1. Pre-processing della mesh e definizione dei sotto-domini:

A partire dalla connettività dei triangoli, vengono costruite le funzioni RWG e vengono calcolati i punti gaussiani necessari per l'assemblaggio della matrice EFIE e per la proiezione del campo incidente.

In questa fase il vettore di indici associato alle RWG viene tradotto nelle tre maschere logiche $zona_efie$, $zona_buffer$ e $zona_PO$, che identificano

rispettivamente le funzioni di base RWG appartenenti a S_{EFIE} , S_{buf} e S_{PO} . La scelta dei sotto-domini è effettuata a priori sulla base della geometria e della direzione di incidenza, ma il codice è strutturato in modo da poter modificare facilmente tale partizione per analisi comparative.

2. Costruzione della matrice EFIE e del termine noto:

La seconda fase riguarda l'assemblaggio della matrice EFIE completa $\mathbf{Z}$, ottenuta valutando il kernel integrale sugli elementi triangolari e proiettando il campo elettrico incidente sulla base RWG. L'operatore EFIE è memorizzato come matrice sparsa, poiché la maggior parte dei contributi tra RWG lontane è nulla o trascurabile. Il termine noto $\mathbf{e}$ è ottenuto integrando il campo incidente sui punti gaussiani associati a ciascuna RWG.

Una volta assemblata la matrice, viene eseguita una fattorizzazione LU, che consente di risolvere in modo efficiente sia il sistema EFIE completo sia i sistemi ridotti necessari per il calcolo della correzione $\mathbf{J}_\Delta$, evitando di ricostruire l'operatore a ogni configurazione ibrida.

3. Calcolo della corrente PO e proiezione nello spazio RWG:

A partire dal versore di propagazione dell'onda incidente e dalla normale locale ai triangoli, viene calcolato il campo magnetico incidente e quindi la corrente PO, che viene annullata nelle regioni in ombra tramite un test di visibilità basato sul prodotto scalare tra la normale e il versore di propagazione. La corrente PO, definita inizialmente come campo continuo, viene poi proiettata nello spazio delle RWG utilizzando la Gram matrix, ottenuta valutando le funzioni RWG sui punti gaussiani. Questo passaggio è essenziale per poter combinare PO ed EFIE all'interno dello stesso spazio funzionale e per garantire che la corrente PO sia compatibile con la discretizzazione MoM.

4. Costruzione delle correnti ibride:

Per la configurazione fringe semplice, la costruzione della corrente ibrida segue direttamente le relazioni introdotte nelle equazioni (5.1)-(5.3), ossia si estraggono i blocchi $\mathbf{Z}_{aa}$ e $\mathbf{Z}_{ab}$ della matrice EFIE, si risolve il sistema ridotto per ottenere la correzione $\mathbf{J}_\Delta$ e si costruisce $\mathbf{J}_{fringe}$ applicando $\mathbf{J}_\Delta$ unicamente nella regione S_{EFIE} , mentre in S_{buf} e S_{PO} si mantiene la sola corrente PO.

Nel caso della fringe a pezzi, come descritto nel paragrafo 5.2, la matrice EFIE viene modificata annullando le interazioni tra sotto-portioni distinte della fringe, così da ridurre l'accoppiamento non desiderato e ottenere una versione localizzata dell'equazione.

Per la variante fringe con residuo, la combinazione tra PO e correzione EFIE segue la forma generale dell'equazione (5.5). La corrente ibrida è ottenuta modulando localmente $\mathbf{J}_{PO}$ e $\mathbf{J}_\Delta$, tramite il peso ω_n , definito in (5.4), dando luogo alla strategia di transizione definita dalle scelte di α e β .

Capitolo 6

Validazione e Risultati

Questo capitolo presenta la validazione della formulazione ibrida EFIE–PO attraverso una serie di casi studio con complessità crescente: coni, almond e alcuni modelli semplificati di aereo Rafale. Dopo aver descritto il setup simulativo e la partizione dei domini EFIE, buffer e PO, viene analizzato il residuo puntuale per valutare la qualità locale della soluzione. Si passa quindi allo studio del far-field delle geometrie canoniche per due direzioni di incidenza, utile a verificare la capacità delle formulazioni ibride di riprodurre correttamente la struttura angolare del campo diffuso. Infine, l'attenzione si concentra sulla Radar Cross Section (RCS) monostatica, valutata sia per le figure canoniche sia per i modelli aeronautici, così da confermare l'efficacia e la scalabilità dell'approccio ibrido su geometrie realistiche ed elettricamente grandi.

6.1 Setup sperimentale e simulativo

Nel modello numerico adottato, il mezzo di propagazione è assunto essere il vuoto, e le principali costanti elettromagnetiche vengono inizializzate a partire dai valori fondamentali della fisica classica:

- velocità della luce $c_0 = 299792458 m/s$
- permeabilità magnetica $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} H/m$
- permittività elettrica $\epsilon_0 = \frac{1}{c_0^2 \mu_0}$

Da queste grandezze deriva l'impedenza intrinseca del vuoto $\eta_0 = \mu_0 c_0$, che lega i campi elettrico e magnetico nelle onde piane incidenti.

La frequenza di lavoro f fissa la lunghezza d'onda, definita come $\lambda = \frac{c_0}{f}$, rispetto alla quale vengono scalate le dimensioni caratteristiche delle geometrie considerate. In particolare, le estensioni dei sotto-domini EFIE e buffer sono espresse in multipli

di λ , così da consentire un confronto diretto tra casi con diversa ampiezza della regione rigorosa a parità di geometria globale.

Per tutte le simulazioni è stata scelta la frequenza $f = 299792458\text{Hz}$, in modo che la lunghezza d'onda risulti $\lambda = 1\text{ m}$.

Sono state considerate due onde piane incidenti, caratterizzate dalle direzioni $(\phi_{inc}, \theta_{inc}) = (0^\circ, 0^\circ)$ e $(0^\circ, 45^\circ)$ nel sistema di coordinate sferiche, in modo da analizzare sia un caso di illuminazione assiale simmetrica dall'alto, sia un caso obliquo a 45° che rompe tale simmetria. Per ciascuna di esse la polarizzazione del campo elettrico incidente è descritta dal versore $\mathbf{e}_0 = e_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + e_\phi \hat{\boldsymbol{\phi}}$, con (e_θ, e_ϕ) scelti in modo da rappresentare i casi di interesse. In tutti i risultati presentati, il campo elettrico incidente è assunto con polarizzazione lineare puramente θ , ossia $(e_\theta, e_\phi) = (1, 0)$ ma la formulazione numerica consente tuttavia di modificare arbitrariamente la coppia per analizzare diverse polarizzazioni incidenti.

6.2 Casi studio e geometrie considerate

Per la validazione della formulazione ibrida EFIE–PO sono state considerate tre famiglie di geometrie PEC: coni, almond e alcuni modelli semplificati di aereo Rafale. Questi casi studio coprono scenari con complessità crescente, passando da superfici lisce e assialsimmetriche a forme allungate con curvature variabili, fino a configurazioni aeronautiche realistiche caratterizzate da numerosi spigoli, discontinuità e regioni di forte diffrazione.

Tutte le figure canoniche (coni e almond) sono state scalate in modo che la dimensione caratteristica sia dell'ordine di 5λ , pari a circa 5 m nel caso in esame, così da operare in regime di scattering da corpi elettricamente grandi. Per ciascuna di queste geometrie sono state considerate tre copie, identiche dal punto di vista della forma ma caratterizzate da differenti partizioni della superficie nei sotto-domini S_{EFIE} , S_{buf} e S_{PO} , al fine di studiare l'effetto della scelta delle regioni rigorose e asintotiche. I modelli aeronautici, invece, sono versioni idealizzate del Rafale, tutte con lunghezza pari a 15 m, anch'esse replicate in più configurazioni con diversa distribuzione delle zone S_{EFIE} , S_{buf} e S_{PO} , così da valutare l'efficacia del metodo su superfici complesse ed elettricamente molto estese.

In tutti i casi, la superficie è discretizzata mediante funzioni di base RWG definite su mesh triangolari, e per ciascun dominio vengono riportate la percentuale di area associata ai sotto-domini EFIE, buffer e PO, insieme al corrispondente numero di RWG.

Nella tesi, l'analisi del far-field dei coni e delle almond per due diverse direzioni di incidenza ($\theta_{inc} = 0^\circ$ e $\theta_{inc} = 45^\circ$) ha lo scopo di verificare in modo controllato l'efficacia delle formulazioni ibride nel riprodurre correttamente la struttura angolare del campo diffuso. Una volta validato il comportamento dei metodi su geometrie

canoniche, l'attenzione si sposta sul parametro di maggiore interesse applicativo, ovvero la Radar Cross Section (RCS), valutata sia per le figure canoniche sia, come caso conclusivo più complesso, per i modelli di aereo di lunghezza 15 m.

6.2.1 Coni: *Cone* 0.5λ , *Cone* 1λ , *Cone* 1.5λ

I coni rappresentano geometrie assialsimmetriche semplici, caratterizzate da una superficie liscia e priva di spigoli marcati, nelle quali la Physical Optics è intrinsecamente favorevole sulle porzioni estese illuminate, mentre la correzione EFIE è necessaria principalmente in prossimità della punta e della base, dove la curvatura locale e la variazione rapida delle normali rendono la descrizione asintotica meno affidabile. Nei tre casi considerati (indicati come *Cone* 0.5λ , *Cone* 1λ e *Cone* 1.5λ), la geometria globale del cono è mantenuta invariata (con dimensione caratteristica pari a circa 5λ), mentre viene modificata l'estensione della regione S_{EFIE} attorno alle zone critiche, che passa da circa 0.5λ a 1.5λ , come mostrato nelle figure (Fig.6.1)-(Fig.6.3). In questo modo è possibile studiare l'effetto della dimensione del dominio EFIE sulla qualità della soluzione ibrida a parità di discretizzazione. Le tabelle riportano, per ciascuna configurazione, la percentuale di area assegnata ai sotto-domini S_{EFIE} , S_{buf} e S_{PO} .

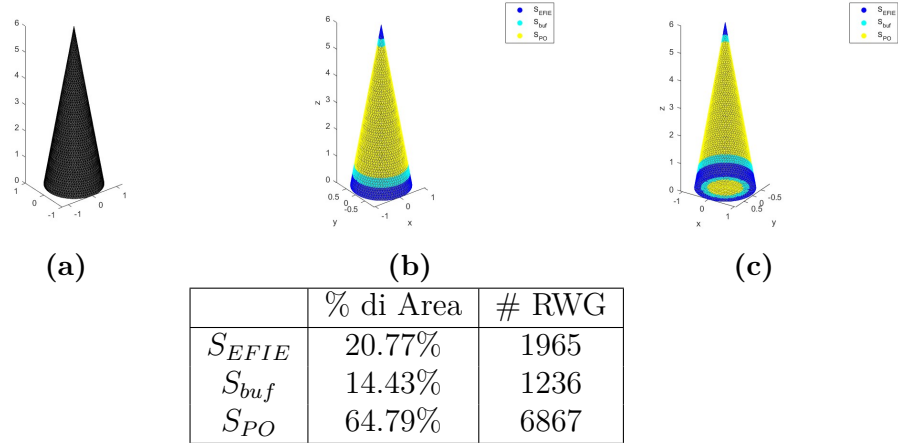
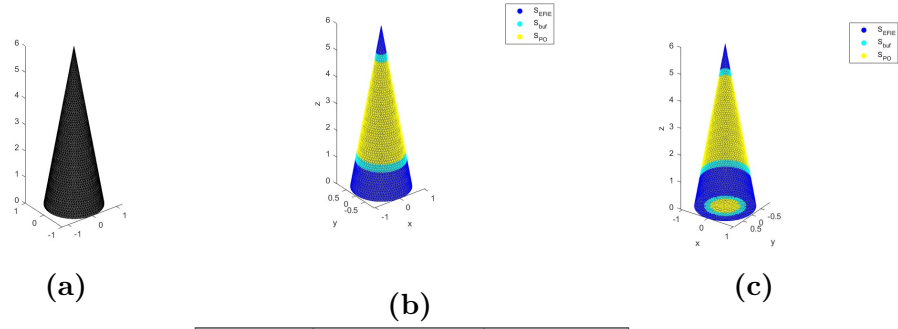
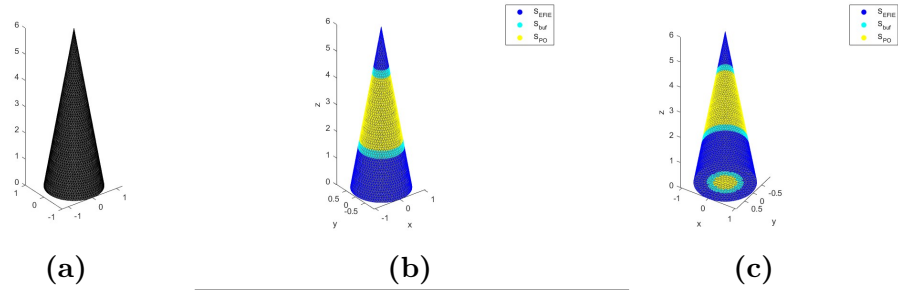


Figura 6.1: Geometria “*Cone* 0.5λ ”: mesh triangolare (a) e partizione nei sotto-domini S_{EFIE} , S_{buf} e S_{PO} (b–c). Il parametro 0.5λ indica l'altezza della regione EFIE alla punta e alla base del cono. La tabella riporta le percentuali di area e il numero di funzioni RWG per ciascun sotto-dominio.



	% di Area	# RWG
S_{EFIE}	37.44%	3678
S_{buf}	14.74%	1128
S_{PO}	49.82%	5262

Figura 6.2: Geometria “Cone 1λ ”: mesh triangolare (a) e partizione nei sotto-domini S_{EFIE} , S_{buf} e S_{PO} (b–c). Il parametro 1λ indica l’altezza della regione EFIE alla punta e alla base del cono. La tabella riporta le percentuali di area e il numero di funzioni RWG per ciascun sotto-dominio.



	% di Area	# RWG
S_{EFIE}	52.87%	5301
S_{buf}	12.09%	1091
S_{PO}	35.04%	3676

Figura 6.3: Geometria “Cone 1.5λ ”: mesh triangolare (a) e partizione nei sotto-domini S_{EFIE} , S_{buf} e S_{PO} (b–c). Il parametro 1.5λ indica l’altezza della regione EFIE alla punta e alla base del cono. La tabella riporta le percentuali di area e il numero di funzioni RWG per ciascun sotto-dominio.

6.2.2 Almond: *Almond* 0.5λ , *Almond* 1λ , *Almond* 1.5λ

Le geometrie almond, derivate dalla nota “NASA almond” [18], introducono una forma più complessa rispetto ai coni, con estremità appuntite, curvature variabili e regioni di raccordo che generano fenomeni di diffrazione più marcati. In questo caso, la PO tende a degradare in modo più pronunciato rispetto ai coni, soprattutto nelle regioni di elevata curvatura e nelle zone di transizione tra illuminazione e ombra, dove si manifestano effetti di diffrazione e correnti non puramente speculari. Anche in questo caso si considerano tre configurazioni (*Almond* 0.5λ , *Almond* 1λ , *Almond* 1.5λ), ottenute mantenendo invariata la geometria globale, anch’essa con dimensione caratteristica dell’ordine di 5λ , e variando l’estensione dei sotto-domini S_{EFIE} e S_{buf} alle estremità della struttura, come illustrato nelle figure (Fig. 6.4)-(Fig. 6.6). Le percentuali di area e il numero di RWG riportati nelle tabelle mostrano come, al crescere della regione trattata con EFIE, aumenti la frazione di superficie modellata in modo rigoroso, a fronte di una riduzione progressiva della porzione descritta tramite PO.

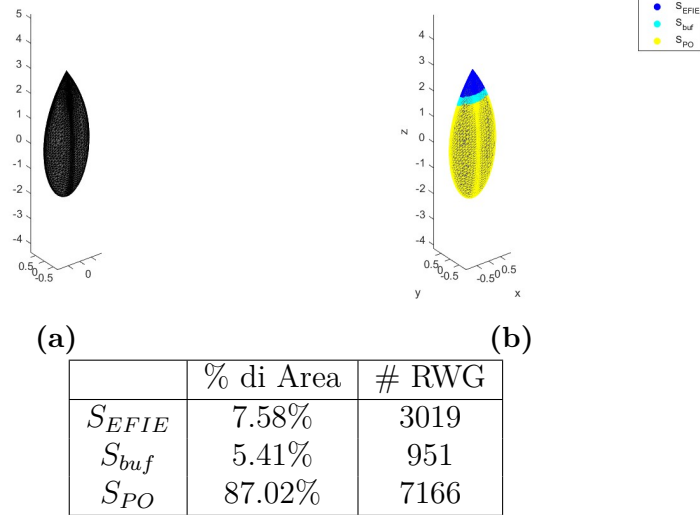
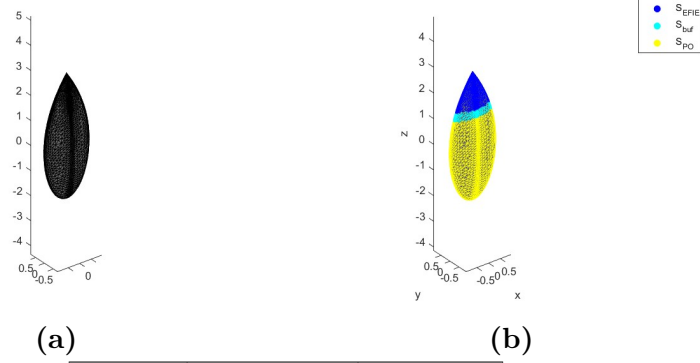
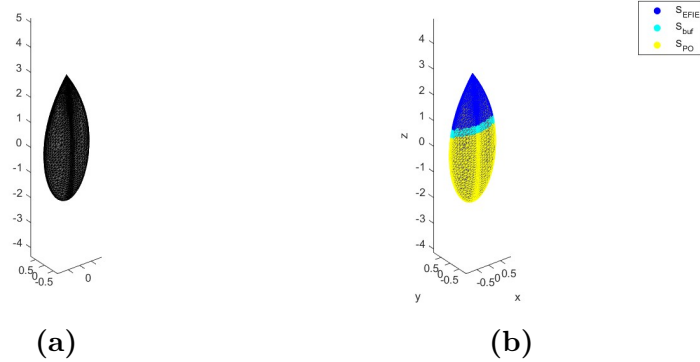


Figura 6.4: Geometria “*Almond* 0.5λ ”: rappresentazione della mesh (a) e partizione nei sotto-domini S_{EFIE} , S_{buf} e S_{PO} (b). Il parametro 0.5λ indica l’altezza della regione EFIE alle estremità della geometria. La tabella riporta le percentuali di area e il numero di funzioni RWG associate a ciascun sotto-dominio.



	% di Area	# RWG
S_{EFIE}	16.43%	4591
S_{buf}	7.43%	806
S_{PO}	76.14%	5739

Figura 6.5: Geometria “*Almond 1λ*”: rappresentazione della mesh (a) e partizione nei sotto-domini S_{EFIE} , S_{buf} e S_{PO} (b). Il parametro 1λ indica l’altezza della regione EFIE alle estremità della geometria. La tabella riporta le percentuali di area e il numero di funzioni RWG associate a ciascun sotto-dominio.



	% di Area	# RWG
S_{EFIE}	27.63%	5890
S_{buf}	8.72%	636
S_{PO}	63.65%	4610

Figura 6.6: Geometria “*Almond 1.5λ*”: rappresentazione della mesh (a) e partizione nei sotto-domini S_{EFIE} , S_{buf} e S_{PO} (b). Il parametro 1.5λ indica l’altezza della regione EFIE alle estremità della geometria. La tabella riporta le percentuali di area e il numero di funzioni RWG associate a ciascun sotto-dominio.

6.2.3 Aereo Rafale

Nel caso del Rafale è stato considerato un modello triangolato dell'intero velivolo, con lunghezza caratteristica pari a circa 15λ (≈ 15 m), che rappresenta un caso di studio particolarmente impegnativo dal punto di vista elettromagnetico. La geometria combina superfici piane e pannellature inclinate con curvature multiple, spigoli vivi, prese d'aria, stabilizzatori e volumi articolati della fusoliera, generando zone di ombra, di mascheramento e di forte concentrazione di campo.

Ne risulta una distribuzione molto eterogenea delle normali e un'elevata densità di discontinuità geometriche, condizioni in cui l'ipotesi locale di Physical Optics è spesso poco accurata su porzioni estese della superficie e richiede quindi un uso mirato della formulazione EFIE nelle aree più critiche. Il numero complessivo di funzioni RWG del modello è sensibilmente superiore rispetto ai casi canonici considerati in precedenza e colloca il problema in un regime di scattering da struttura elettricamente grande, con un carico computazionale paragonabile a scenari reali di interesse aeronautico.

Su questa stessa mesh di riferimento sono state definite quattro diverse configurazioni ibride, variando esclusivamente la partizione della superficie nei sotto-domini S_{EFIE} , S_{buf} e S_{PO} , e mantenendo invariata la discretizzazione geometrica. In altre parole, la geometria e la densità di mesh restano identiche, mentre cambia soltanto quali pannelli sono trattati in modo rigoroso (EFIE), quali appartengono alla regione di transizione (buffer) e quali sono descritti direttamente tramite PO. Le figure (Fig. 6.7)–(Fig. 6.10) mostrano le quattro configurazioni del “Rafale 15 m” e la corrispondente suddivisione nei sotto-domini, mentre le tabelle associate riportano, per ciascun caso, le percentuali di area e il numero di funzioni RWG assegnati a S_{EFIE} , S_{buf} e S_{PO} .

Nella prima configurazione, denominata “Rafale 15 m”, la regione EFIE è confinata a una porzione relativamente ridotta della superficie (poco più di un decimo dell'area totale), concentrata nelle zone ritenute più sensibili dal punto di vista elettromagnetico, mentre una larga frazione del velivolo è trattata tramite la regione di buffer e la sola PO. Questa scelta enfatizza il risparmio computazionale e consente di verificare quanto la correzione fornita dal buffer sia in grado di compensare le approssimazioni insite nella PO. Procedendo verso le configurazioni “Rafale 15 m-2”, “Rafale 15 m-3” e “Rafale 15 m-4”, l'area assegnata alla EFIE viene progressivamente aumentata fino a coprire oltre la metà della superficie, con una riduzione corrispondente della parte PO e una riorganizzazione della regione di buffer, che viene via via concentrata lungo giunzioni, bordi e contorni geometricamente più complessi. In questo modo si passa da un assetto fortemente sbilanciato verso la descrizione asintotica a configurazioni in cui la parte rigorosa domina e la PO è limitata alle zone più regolari.

Di conseguenza, il modello “Rafale 15λ ” diventa un banco di prova ideale per

valutare in modo sistematico l'impatto della scelta del partizionamento, a parità di dimensione elettrica e di mesh, sia sulle prestazioni delle diverse varianti ibride proposte (fringe, fringe a pezzi, fringe con residuo) sia sull'accordo con la soluzione EFIE completa. Nelle sezioni successive queste quattro configurazioni saranno quindi confrontate in termini di Radar Cross Section monostatica, così da mettere in evidenza il compromesso tra accuratezza e costo computazionale associato a ciascun schema di partizione.

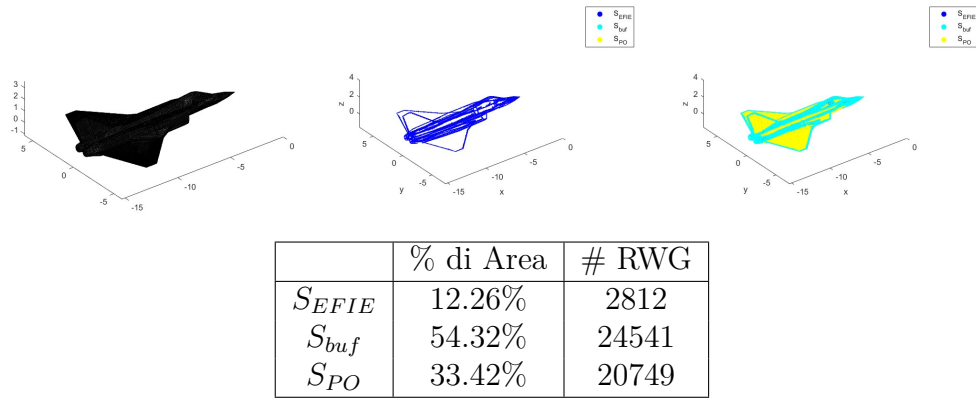


Figura 6.7: Geometria “Rafale 15m”: rappresentazione della mesh triangolare (a) e partizione nei sotto-domini S_{EFIE} , S_{buf} e S_{PO} (b-c). La tabella riporta le percentuali di area e il numero di funzioni RWG per ciascun sotto-dominio.

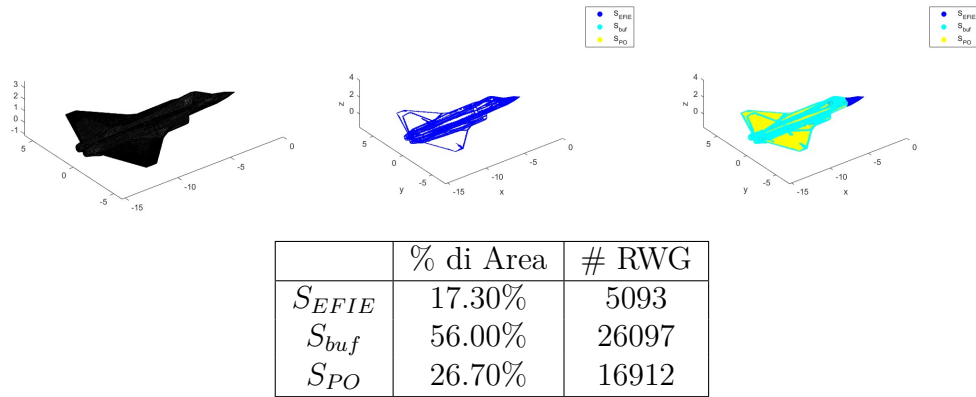


Figura 6.8: Geometria “Rafale 15m-2”: rappresentazione della mesh triangolare (a) e partizione nei sotto-domini S_{EFIE} , S_{buf} e S_{PO} (b-c). La tabella riporta le percentuali di area e il numero di funzioni RWG per ciascun sotto-dominio.

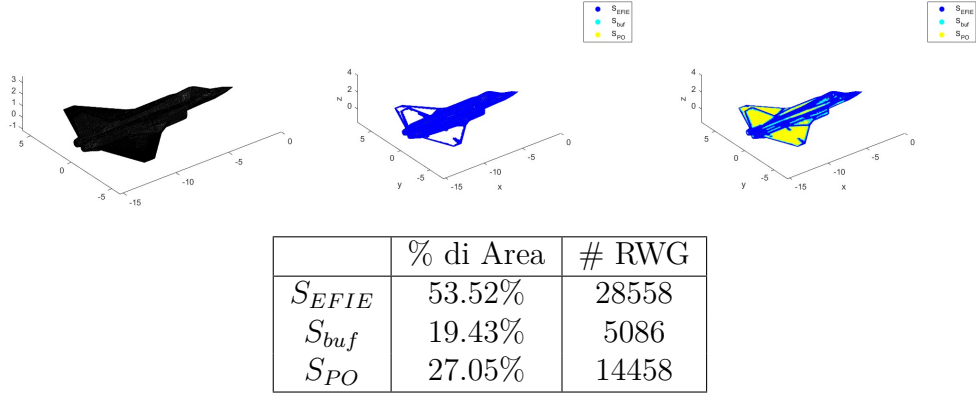


Figura 6.9: Geometria “Rafale 15m-3”: rappresentazione della mesh triangolare (a) e partizione nei sotto-domini S_{EFIE} , S_{buf} e S_{PO} (b-c). La tabella riporta le percentuali di area e il numero di funzioni RWG per ciascun sotto-dominio.

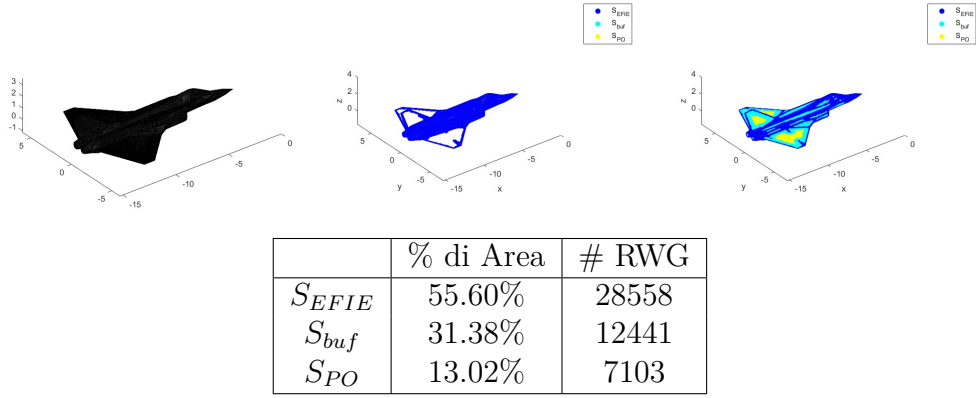


Figura 6.10: Geometria “Rafale 15m-4”: rappresentazione della mesh triangolare (a) e partizione nei sotto-domini S_{EFIE} , S_{buf} e S_{PO} (b-c). La tabella riporta le percentuali di area e il numero di funzioni RWG per ciascun sotto-dominio.

6.3 Analisi del residuo puntuale

In questa sezione si analizza in dettaglio il residuo puntuale associato alle diverse formulazioni considerate (EFIE completa, Physical Optics e varianti ibride) limitatamente alle geometrie canoniche di tipo cono e almond. L’obiettivo è quantificare, in termini locali sulla superficie, quanto ciascun modello sia coerente con l’equazione integrale del campo elettrico, assumendo la soluzione EFIE completa come riferimento numerico.

In forma discretizzata, indicando con $\mathbf{Z}$ la matrice EFIE ottenuta mediante Metodo dei Momenti, con $\mathbf{J}$ il vettore dei coefficienti delle correnti superficiali RWG e con $\mathbf{e}$ il termine noto associato al campo incidente, il residuo è definito come

$$\mathbf{r} = \mathbf{Z}\mathbf{J} - \mathbf{e} \quad (6.1)$$

e viene valutato proiettando il modulo $\|\mathbf{r}\|$ su ciascuna funzione di base RWG.

La quantità così ottenuta è rappresentata sulle superfici triangolate, generando mappe che evidenziano le zone in cui l'equazione integrale è meno soddisfatta. Le figure (Fig.6.11)-(Fig.6.21) riportano tali mappe per due angoli di incidenza dell'onda piana, $\theta_{inc} = 0^\circ$ e $\theta_{inc} = 45^\circ$, permettendo di studiare sia l'effetto della geometria sia quello dell'angolo di illuminazione.

La soluzione EFIE completa viene assunta come riferimento numerico per la valutazione delle altre formulazioni: in questo caso il residuo è tipicamente limitato da errori di discretizzazione e di arrotondamento numerico e rappresenta quindi una stima dell'accuratezza massima raggiungibile dalla mesh considerata. I residui ottenuti dalle altre tecniche (PO e ibridi) sono interpretati come misura dello scostamento rispetto a tale soluzione di riferimento, sia in termini globali (valori medi) sia in termini locali (zone di massimo errore).

L'introduzione delle formulazioni ibride di tipo fringe consente di ridurre sistematicamente il residuo nelle porzioni trattate con EFIE. Per le geometrie coniche, l'estensione progressiva della regione EFIE si traduce in una diminuzione monotona dei valori medi di $\|\mathbf{r}\|$ e in una contrazione delle aree caratterizzate da residuo elevato. In particolare, includere nella regione rigorosa le zone prossime alla punta, alla base e alle shadow boundary permette di controllare in modo efficace le regioni elettromagneticamente più sensibili, nelle quali la PO pura mostrava le deviazioni maggiori.

Un comportamento analogo si osserva per le almond, sebbene con livelli di residuo complessivamente più alti rispetto ai coni. Anche in questo caso, l'estensione della regione EFIE verso le estremità e i raccordi principali migliora la descrizione delle correnti laddove la PO è meno affidabile. Le mappe mostrano come, all'aumentare dell'area rigorosa, l'errore si riduca non solo in ampiezza ma anche in estensione, con una progressiva attenuazione delle zone ad alta curvatura e delle shadow boundary che, nella PO pura, costituivano le principali sorgenti di residuo.

Per queste geometrie canoniche, le varianti *fringe semplice* e *fringe a pezzi* coincidono di fatto: la superficie è suddivisa in un'unica zona EFIE e non sono presenti sotto-porzioni distinte della fringe su cui applicare pesature differenti. Ne consegue che le due formulazioni producono la stessa correzione della PO e generano mappe e valori medi di residuo numericamente indistinguibili, per cui nel seguito vengono considerate congiuntamente.

La variante *fringe con residuo* introduce invece un elemento aggiuntivo di adattività. In questo caso la correzione EFIE è modulata localmente tramite un peso

normalizzato associato a ciascuna RWG, funzione del residuo della PO: dove la PO viola maggiormente l'EFIE il peso tende a uno e la componente rigorosa è pienamente attiva, mentre nelle zone in cui l'errore è già contenuto il contributo EFIE viene progressivamente attenuato. In questo modo, la parte rigorosa viene progressivamente focalizzata nelle regioni più critiche, punte, bordi, raccordi ad alta curvatura e shadow boundary, lasciando invece che la PO descriva le porzioni più regolari della superficie. Nei casi analizzati questo meccanismo produce valori medi di residuo confrontabili, e talvolta leggermente inferiori, rispetto alle altre varianti ibride, a parità di numero di incognite, mostrando un uso più efficiente del dominio EFIE disponibile.

Nel complesso, l'analisi del residuo puntuale per coni e almond mette in evidenza tre aspetti principali. In primo luogo, la soluzione EFIE completa viene assunta come riferimento numerico e rappresenta il termine di paragone rispetto al quale sono valutate tutte le altre formulazioni e l'andamento del residuo mostra che, al crescere della porzione di superficie trattata in modo rigoroso, le soluzioni ibride si avvicinano progressivamente a tale riferimento. In secondo luogo, la PO pura, pur estremamente efficiente dal punto di vista computazionale, presenta residui significativi proprio nelle regioni fisicamente più delicate, con una degradazione che aumenta al crescere della complessità geometrica e per incidenze oblique. Infine, le formulazioni ibride di tipo fringe, in particolare la variante pesata sul residuo, mostrano la capacità di recuperare selettivamente la coerenza con l'EFIE in tali zone, mantenendo la descrizione asintotica sulle parti meno sensibili della superficie. Questo consente di ottenere una riduzione marcata del residuo rispetto alla PO pura, con un numero di incognite e un costo computazionale inferiore rispetto alla EFIE completa, in linea con gli obiettivi di accuratezza ed efficienza posti all'inizio del lavoro.

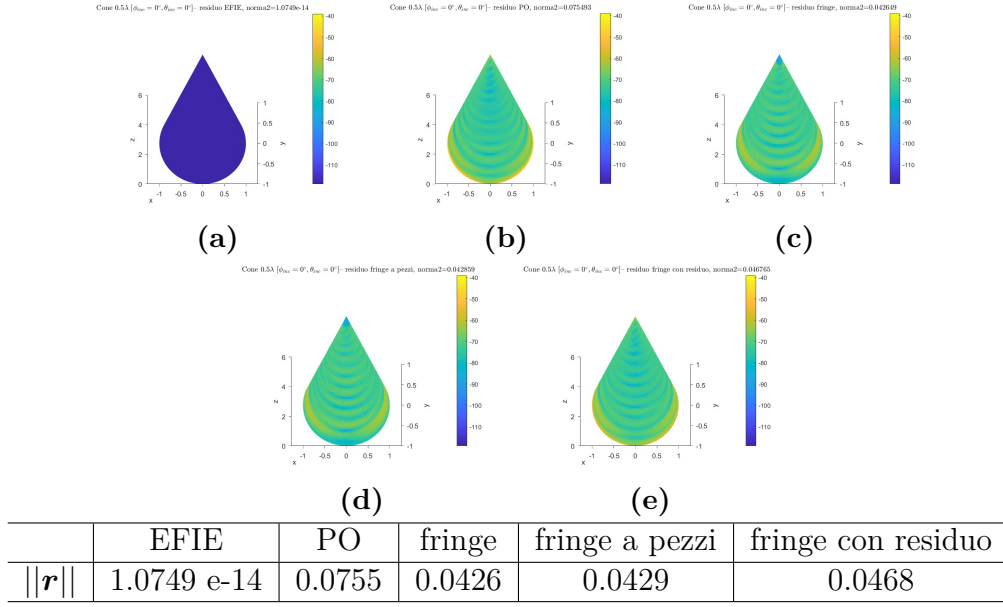


Figura 6.11: Rappresentazione del residuo puntuale per la geometria “Cone 0.5λ ”, per $\theta_{inc} = 0^\circ$, ottenuto dalle diverse formulazioni considerate (EFIE (a), PO (b), fringe (c), fringe a pezzi (d) e fringe con residuo (e)).

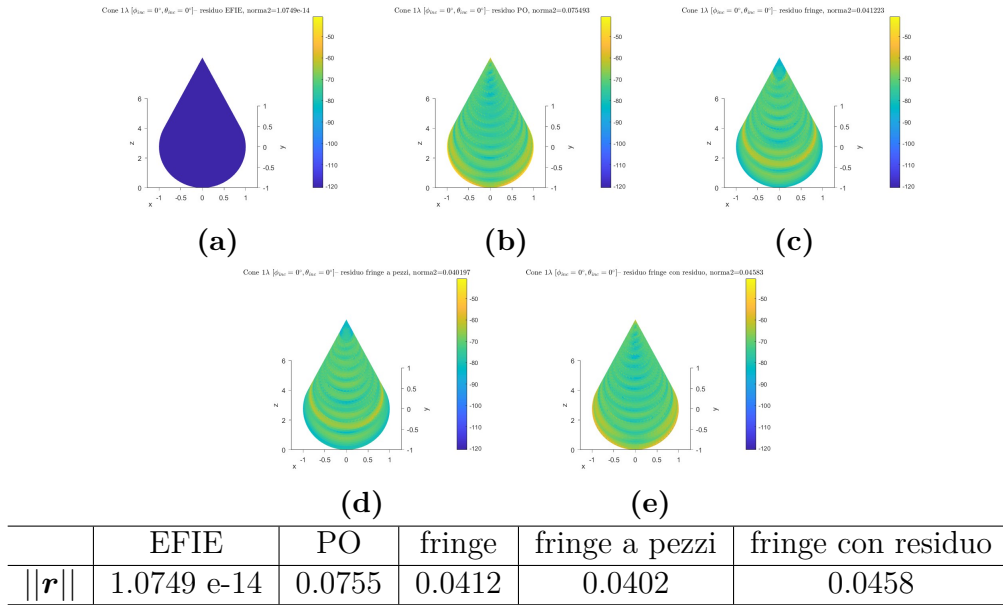


Figura 6.12: Rappresentazione del residuo puntuale per la geometria “Cone 1λ ” per $\theta_{inc} = 0^\circ$, ottenuto dalle diverse formulazioni considerate (EFIE (a), PO (b), fringe (c), fringe a pezzi (d) e fringe con residuo (e)).

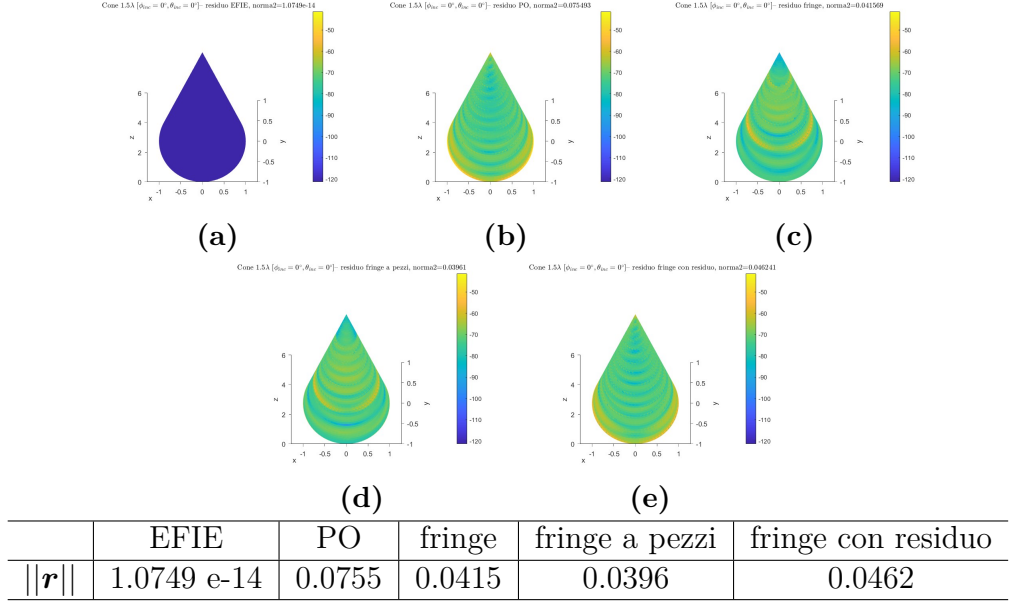


Figura 6.13: Rappresentazione del residuo puntuale per la geometria “Cone 1.5λ ” per $\theta_{inc} = 0^\circ$, ottenuto dalle diverse formulazioni considerate (EFIE (a), PO (b), fringe (c), fringe a pezzi (d) e fringe con residuo (e)).

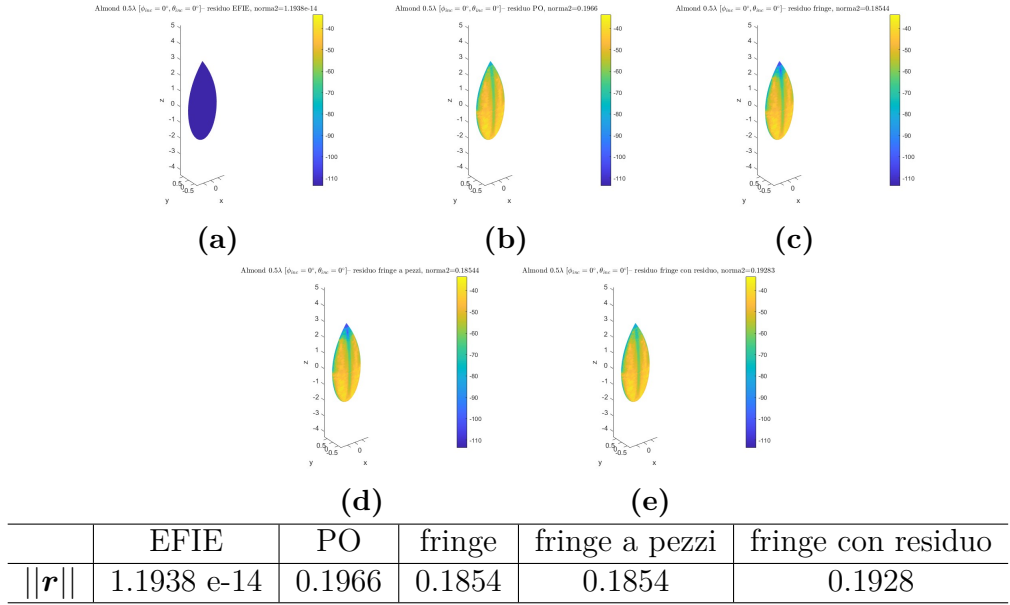


Figura 6.14: Rappresentazione del residuo puntuale per la geometria “Almond 0.5λ ” per $\theta_{inc} = 0^\circ$, ottenuto dalle diverse formulazioni considerate (EFIE (a), PO (b), fringe (c), fringe a pezzi (d) e fringe con residuo (e)).

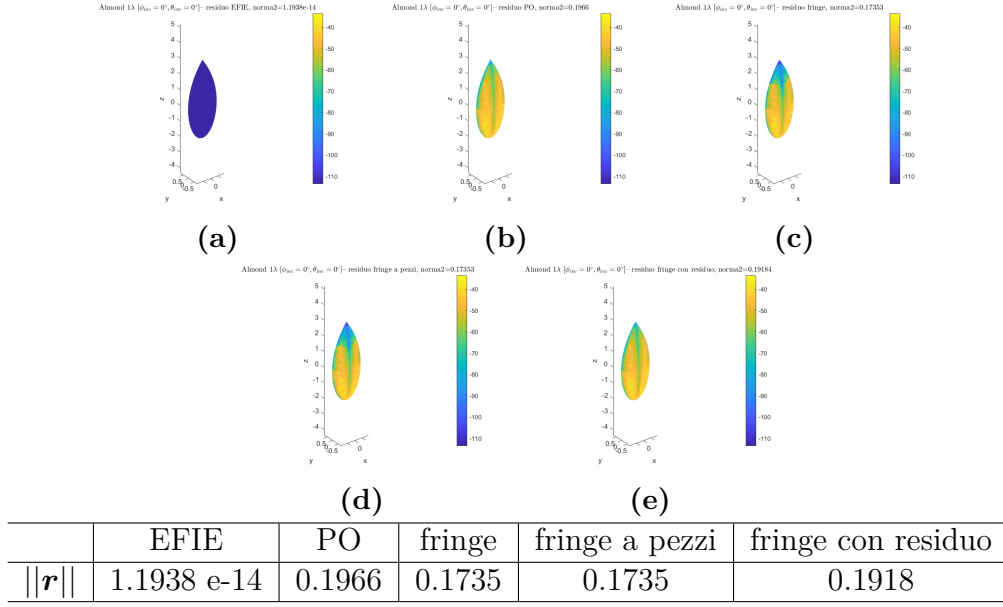


Figura 6.15: Rappresentazione del residuo puntuale per la geometria “Almond 1λ ” per $\theta_{inc} = 0^\circ$, ottenuto dalle diverse formulazioni considerate (EFIE (a), PO (b), fringe (c), fringe a pezzi (d) e fringe con residuo (e)).

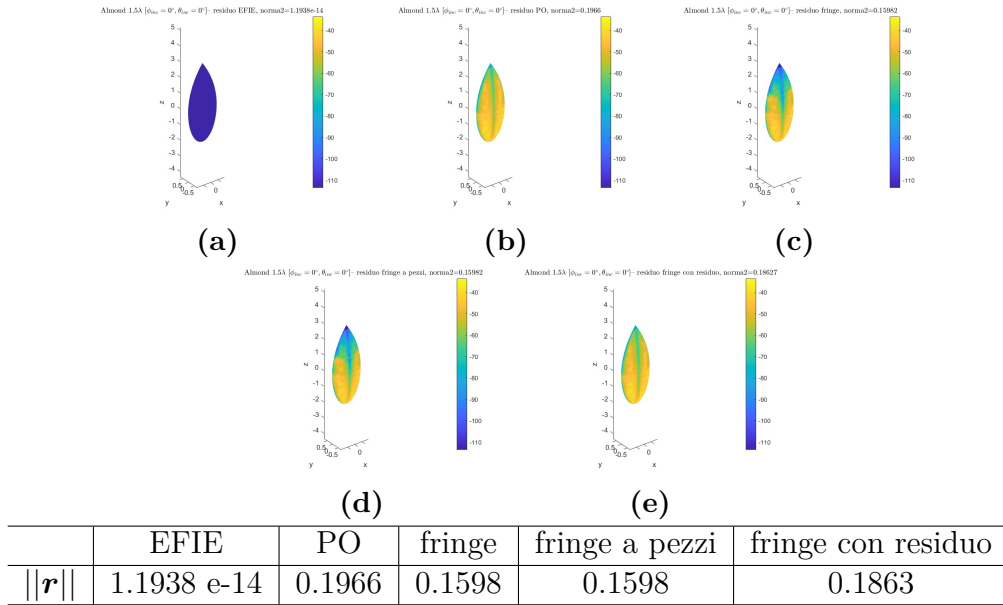


Figura 6.16: Rappresentazione del residuo puntuale per la geometria “Almond 1.5λ ” per $\theta_{inc} = 0^\circ$, ottenuto dalle diverse formulazioni considerate (EFIE (a), PO (b), fringe (c), fringe a pezzi (d) e fringe con residuo (e)).

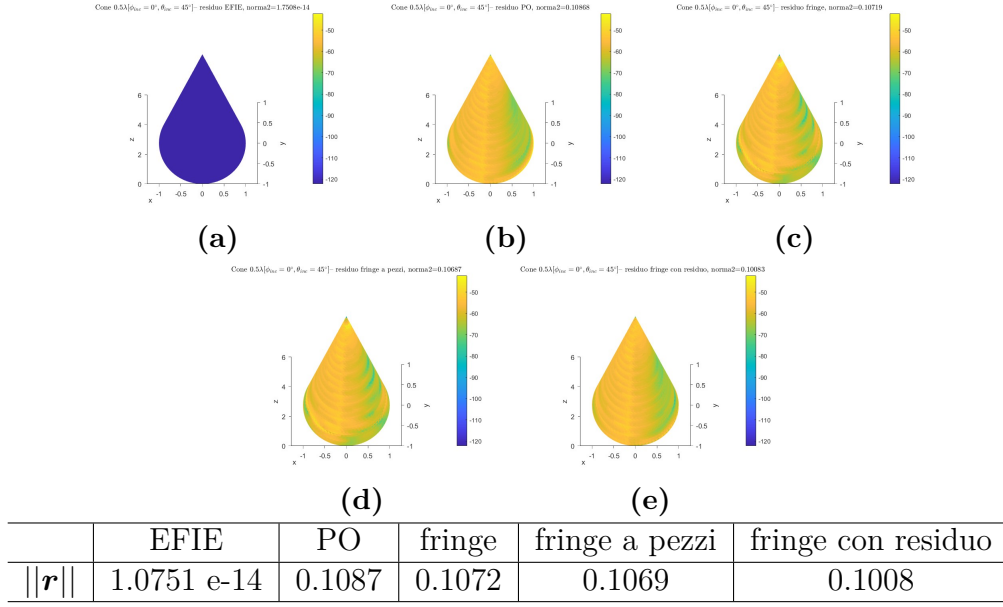


Figura 6.17: Rappresentazione del residuo puntuale per la geometria “Cone 0.5λ ”, per $\theta_{inc} = 45^\circ$, ottenuto dalle diverse formulazioni considerate (EFIE (a), PO (b), fringe (c), fringe a pezzi (d) e fringe con residuo (e)).

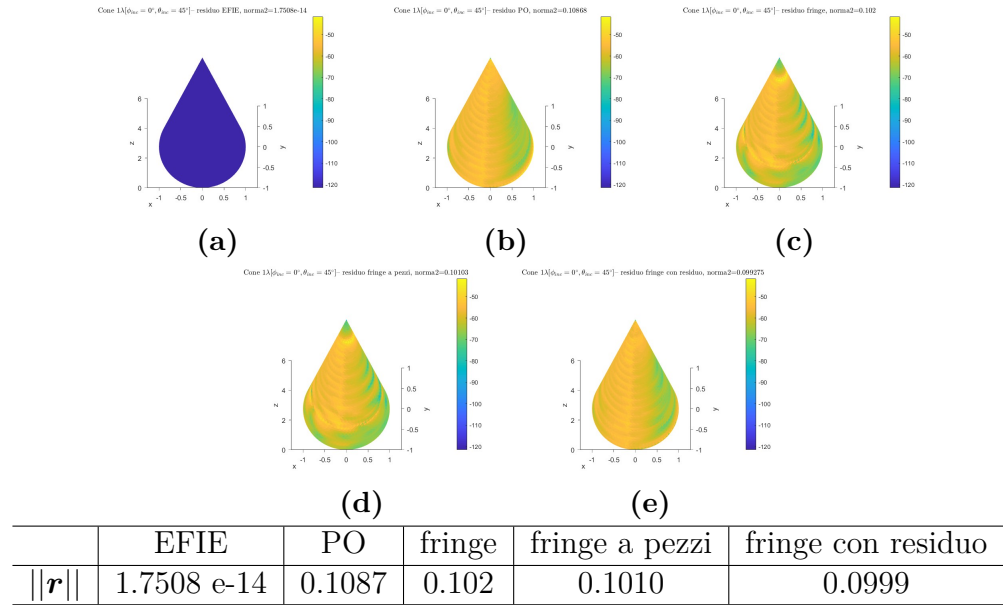


Figura 6.18: Rappresentazione del residuo puntuale per la geometria “Cone 1λ ”, per $\theta_{inc} = 45^\circ$, ottenuto dalle diverse formulazioni considerate (EFIE (a), PO (b), fringe (c), fringe a pezzi (d) e fringe con residuo (e)).

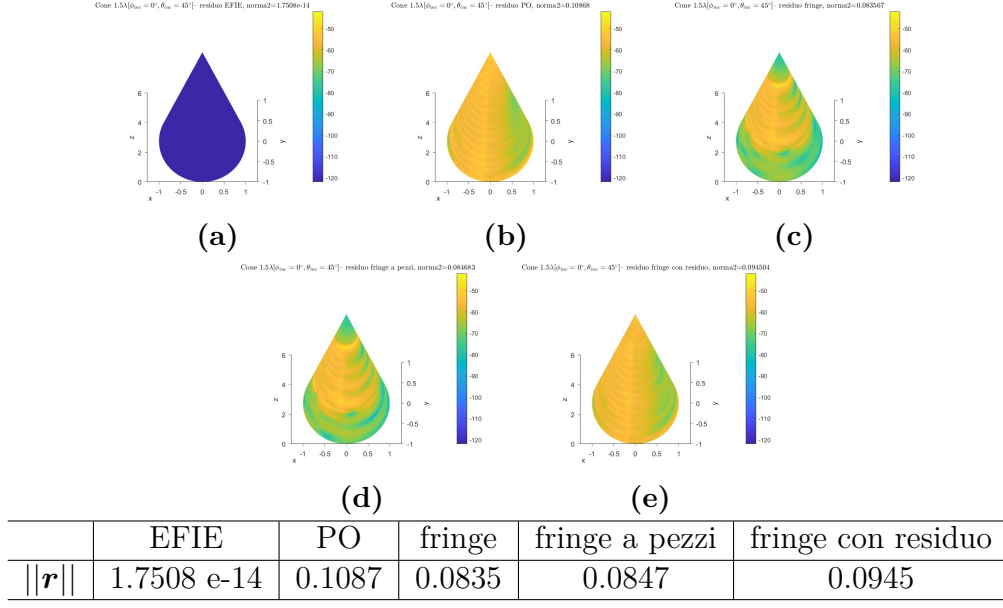


Figura 6.19: Rappresentazione del residuo puntuale per la geometria “Cone 1.5λ ” per $\theta_{inc} = 45^\circ$, ottenuto dalle diverse formulazioni considerate (EFIE (a), PO (b), fringe (c), fringe a pezzi (d) e fringe con residuo (e)).

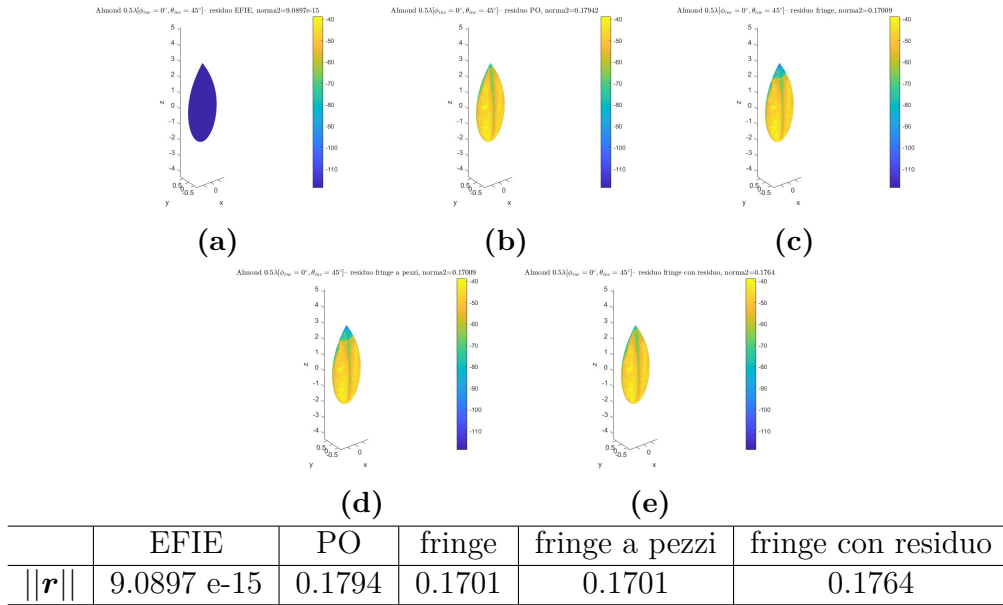


Figura 6.20: Rappresentazione del residuo puntuale per la geometria “Almond 0.5λ ” per $\theta_{inc} = 45^\circ$, ottenuto dalle diverse formulazioni considerate (EFIE (a), PO (b), fringe (c), fringe a pezzi (d) e fringe con residuo (e)).

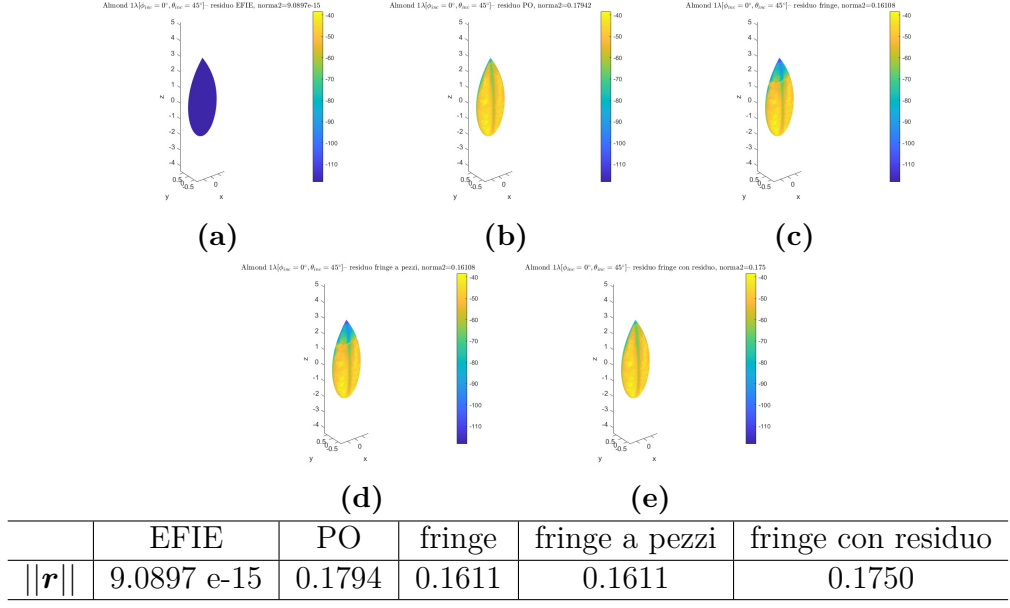


Figura 6.21: Rappresentazione del residuo puntuale per la geometria “Almond 1λ ” per $\theta_{inc} = 45^\circ$, ottenuto dalle diverse formulazioni considerate (EFIE (a), PO (b), fringe (c), fringe a pezzi (d) e fringe con residuo (e)).

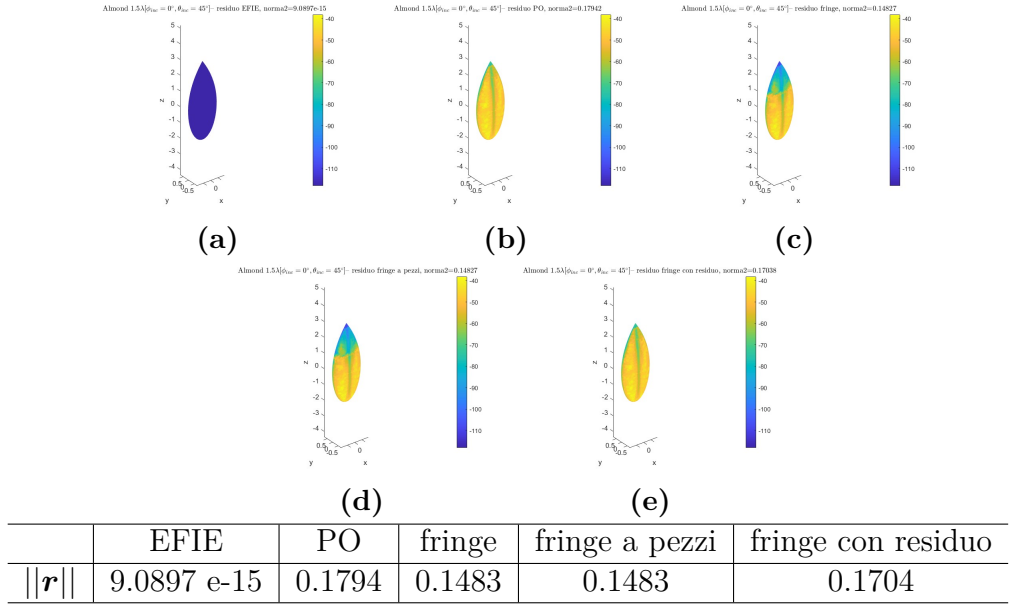


Figura 6.22: Rappresentazione del residuo puntuale per la geometria “Almond 1.5λ ” per $\theta_{inc} = 45^\circ$, ottenuto dalle diverse formulazioni considerate (EFIE (a), PO (b), fringe (c), fringe a pezzi (d) e fringe con residuo (e)).

6.4 Studio del far-field (FF)

Si analizza il comportamento del far field irradiato dalle geometrie considerate, con particolare attenzione alle direzioni angolari di θ comprese tra -180° e 180° lungo le quali viene campionata la risposta radiativa. Nei grafici, oltre alla distribuzione completa del far-field, sono evidenziate tre direzioni di riferimento: backscattering, direzione speculare (simmetrica rispetto alla direzione incidente) e forward scattering, rappresentate schematicamente in (Fig.6.23), che costituiscono punti chiave per l'interpretazione dei risultati e per la valutazione dell'efficacia delle diverse formulazioni.

Quando si analizza il far-field, l'andamento angolare del campo presenta tipicamente una serie di lobi, ovvero regioni in cui l'energia irradiata o diffusa assume valori massimi o minimi significativi. Il lobo principale rappresenta la direzione di massima intensità del campo, mentre i lobi secondari sono massimi minori, spesso legati a fenomeni di diffrazione, interferenza o approssimazioni del modello. La forma e la regolarità di questi lobi costituiscono un indicatore diretto della qualità della soluzione numerica.

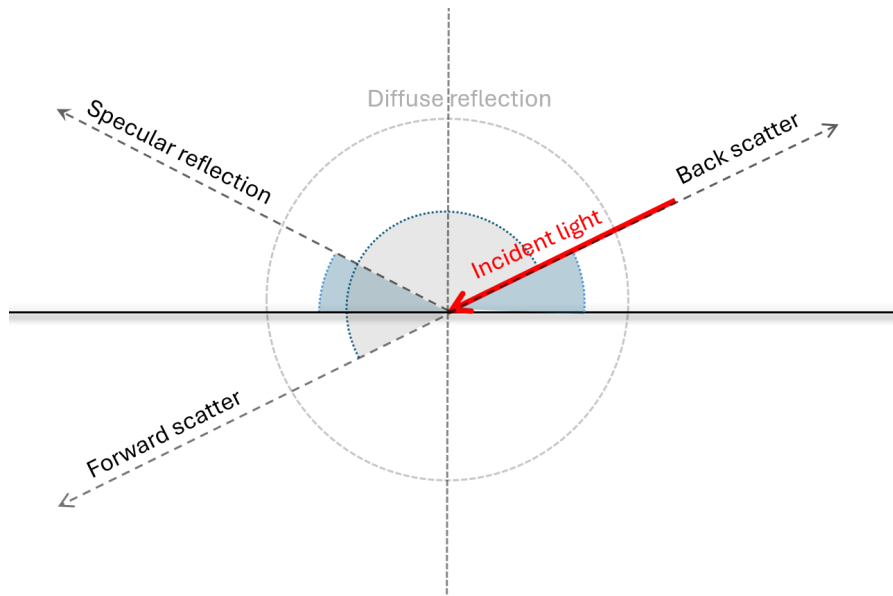


Figura 6.23: Schema delle principali direzioni di scattering generate da un'onda incidente su una superficie: backscattering, specular direction e forward scattering

Si analizza, quindi, il comportamento del far field ottenuto dalle diverse formulazioni (EFIE completa, PO e varianti ibride) per le geometrie canoniche di tipo cono e almond.

Le Figure (Fig. 6.24)-(Fig. 6.27) riportano, per ciascuna configurazione geometrica e per due angoli di incidenza ($\theta_{inc} = 0^\circ$ e $\theta_{inc} = 45^\circ$), il modulo del far-field in funzione dell'angolo di osservazione θ e il corrispondente errore angolare normalizzato rispetto alla soluzione EFIE.

In particolare, i pannelli di sinistra mostrano il diagramma di radiazione $|\mathbf{E}_{FF}(\theta)|$ per tutte le formulazioni, mentre quelli di destra rappresentano, in scala $10\log_{10}(\cdot)$, l'errore definito come

$$error(\theta) = \frac{\mathbf{E}_{FF,EFIE}(\theta) - \mathbf{E}_{FF,modello}(\theta)}{||\mathbf{E}_{FF,EFIE}(\theta)||} \quad (6.2)$$

dove $\mathbf{E}_{FF,modello}(\theta)$ indica il vettore dei campi lontani ottenuto con PO o con una delle formulazioni ibride.

Le figure (Fig.6.24)-(Fig.6.25) mostrano il modulo del far-field e l'errore normalizzato rispetto alla soluzione EFIE per le geometrie coniche *Cone* 0.5λ , *Cone* 1λ , *Cone* 1.5λ , in incidenza rispettivamente assiale ($\theta_{inc} = 0^\circ$) e obliqua ($\theta_{inc} = 45^\circ$). In entrambi i casi le curve EFIE e PO sono identiche per tutte le configurazioni, poiché entrambe le formulazioni sono applicate all'intera superficie e alla stessa mesh. Le differenze osservate nei grafici derivano quindi esclusivamente dalle varianti ibride, che modificano la distribuzione del campo in funzione della porzione di superficie trattata con EFIE.

Per $\theta_{inc} = 0^\circ$ la simmetria assiale semplifica la struttura del far-field: le direzioni di backscattering e specular coincidono ($\theta = 0^\circ$), mentre il forward scattering è osservato a $\theta = 180^\circ$.

In questa configurazione, la PO riproduce correttamente il profilo globale del campo, con lobi principali ben allineati alla EFIE.

Le formulazioni ibride introducono correzioni localizzate che si manifestano soprattutto nelle regioni intermedie tra i lobi principali, dove la PO tende a generare oscillazioni spurie. All'aumentare della dimensione elettrica del cono, l'estensione della regione EFIE e della fringe consente agli ibridi di smussare progressivamente tali irregolarità: il profilo dei lobi secondari diventa più regolare, l'errore normalizzato si riduce e le differenze rispetto alla EFIE si concentrano in intervalli angolari sempre più ristretti.

Per $\theta_{inc} = 45^\circ$, la configurazione perde la simmetria assiale e il far-field assume una struttura più articolata: le direzioni di backscattering, specular e forward sono ben distinte (rispettivamente date da $\theta = 45^\circ$, $\theta = -45^\circ$ e $\theta = -135^\circ$) e gli effetti di diffrazione sul bordo e di accoppiamento tra le diverse porzioni della superficie diventano più rilevanti.

In questo scenario, la PO mostra deviazioni più marcate rispetto alla EFIE, soprattutto nelle direzioni speculari e nei lobi laterali.

Le formulazioni ibride compensano tali discrepanze con maggiore efficacia, grazie

all'estensione adattiva della regione EFIE. L'errore normalizzato si riduce sensibilmente nelle zone angolari più critiche, confermando la capacità dell'approccio ibrido di recuperare la coerenza con la soluzione rigorosa pur mantenendo un costo computazionale contenuto.

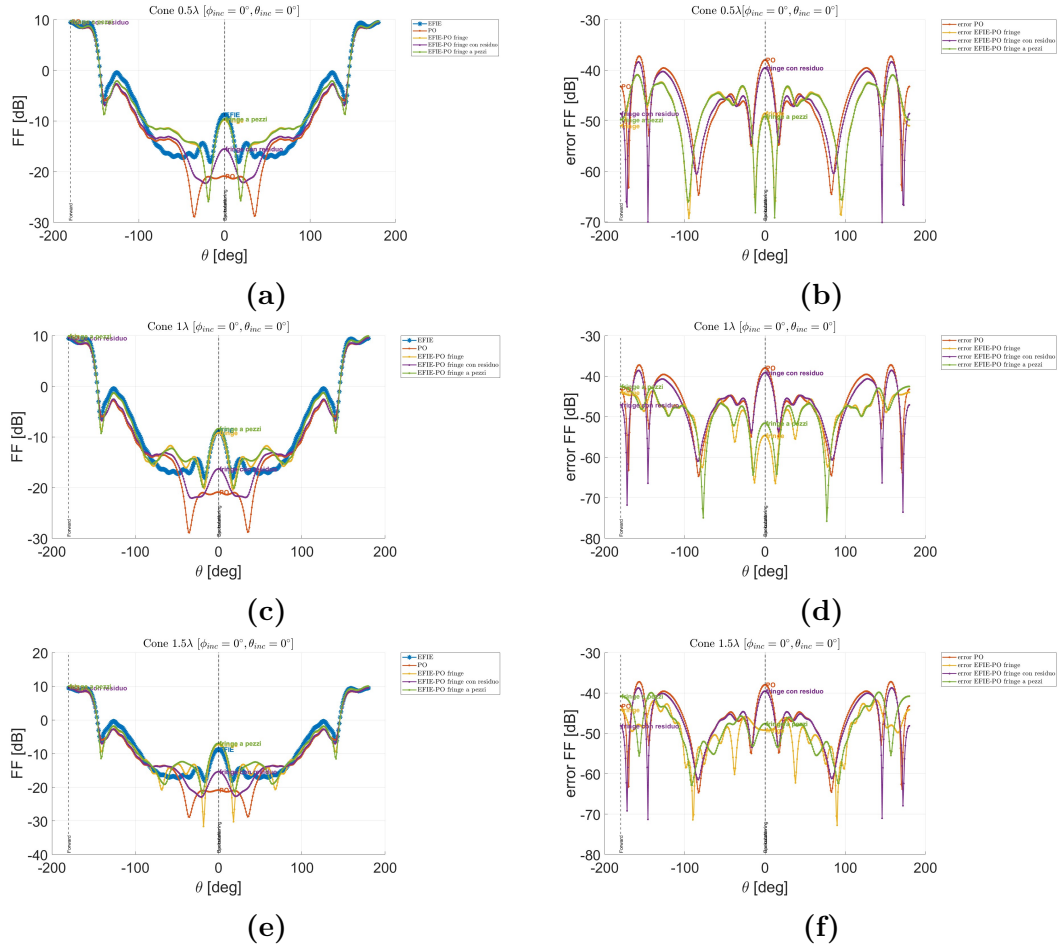


Figura 6.24: Confronto del far-field per le geometrie “Cone 0.5λ ” (a-b), “Cone 1λ ” (c-d) e “Cone 1.5λ ” (e-f) in incidenza $\phi_{inc} = 0^\circ, \theta_{inc} = 0^\circ$. I pannelli di sinistra (a, c, e) mostrano il modulo del far-field in funzione dell’angolo θ per le diverse formulazioni (EFIE, PO e varianti ibride), mentre quelli di destra (b, d, f) riportano il corrispondente errore normalizzato rispetto alla soluzione EFIE.

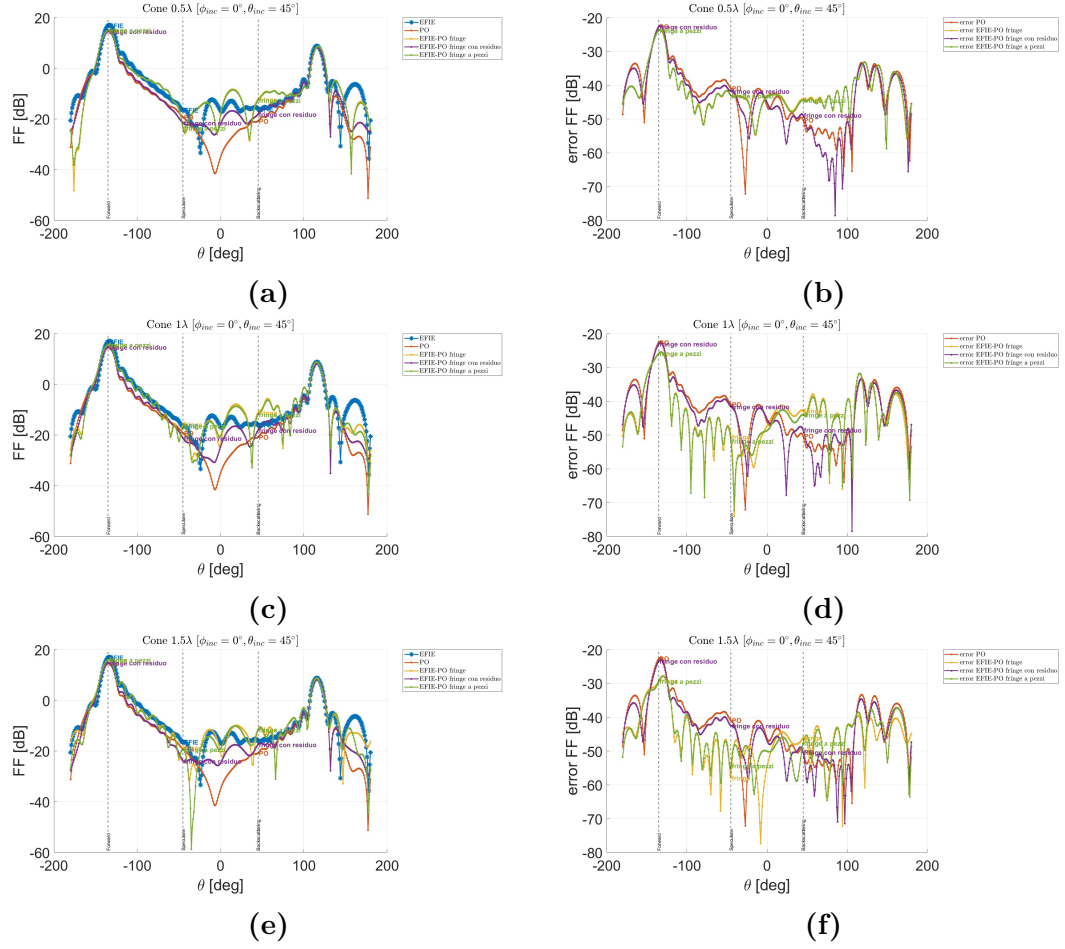


Figura 6.25: Confronto del far-field per le geometrie “Cone 0.5λ ” (a-b), “Cone 1λ ” (c-d) e “Cone 1.5λ ” (e-f) in incidenza $\phi_{inc} = 0^\circ, \theta_{inc} = 45^\circ$. I pannelli di sinistra (a, c, e) mostrano il modulo del far-field in funzione dell’angolo θ per le diverse formulazioni (EFIE, PO e varianti ibride), mentre quelli di destra (b, d, f) riportano il corrispondente errore normalizzato rispetto alla soluzione EFIE.

Le figure (Fig. 6.26)-(Fig. 6.27) mostrano invece il confronto del far-field e dell’errore normalizzato per le geometrie *Almond* 0.5λ , *Almond* 1λ , *Almond* 1.5λ , rispettivamente in incidenza assiale e obliqua.

Come per i coni, le curve EFIE e PO coincidono per tutte le configurazioni, poiché applicate all’intera superficie della stessa geometria. Le differenze osservate nei grafici derivano quindi esclusivamente dalle formulazioni ibride.

Le geometrie almond presentano una curvatura più complessa rispetto ai coni, con regioni di raccordo e variazioni di pendenza che generano fenomeni di diffrazione più marcati e interazioni più forti tra porzioni non adiacenti della superficie. Questo

si riflette direttamente sulla struttura dei lobi del far-field: il lobo principale (tipicamente in backscattering o in forward, a seconda dell'incidenza) risulta più stretto e più sensibile alla curvatura locale, mentre i lobi secondari, legati a interferenze e diffrazioni, sono più numerosi e più pronunciati rispetto ai coni. La regolarità di questi lobi è un indicatore diretto della qualità della soluzione numerica.

In incidenza assiale, la PO riesce ancora a riprodurre l'andamento globale del campo, ma mostra deviazioni più evidenti rispetto ai coni, soprattutto nelle regioni angolari intermedie e nei lobi secondari. Questo comportamento è dovuto alla maggiore complessità geometrica delle almond, che introduce correnti diffratte non catturate dal modello asintotico. Le formulazioni ibride migliorano sensibilmente la situazione: il profilo dei lobi secondari diventa più regolare, i picchi non fisici vengono attenuati e l'errore normalizzato si riduce nelle zone in cui la PO presenta le maggiori discrepanze. L'effetto è più evidente per le geometrie elettricamente più grandi, dove la PO tende a generare oscillazioni spurie che l'ibrido riesce a mitigare.

Con incidenza obliqua, la complessità aumenta ulteriormente: le direzioni di backscattering, specular e forward sono ben distinte e la superficie almond genera una distribuzione del far field caratterizzata da lobi multipli e variazioni angolari più accentuate.

In questo scenario, la PO mostra deviazioni significative rispetto alla EFIE, in particolare nella direzione speculare e nei lobi laterali, dove gli effetti di diffrazione e accoppiamento tra diverse porzioni della superficie sono più intensi.

Le formulazioni ibride compensano tali errori in modo più efficace rispetto al caso assiale: i lobi secondari risultano più coerenti, il lobo speculare si avvicina alla soluzione rigorosa e l'errore normalizzato diminuisce nelle regioni angolari più critiche. Anche in questo caso, l'efficacia dell'ibrido cresce con l'estensione della regione EFIE, che permette di correggere le zone geometricamente più sensibili.

Nel complesso, le geometrie almond evidenziano in modo ancora più marcato i limiti della PO rispetto ai coni, a causa della maggiore complessità geometrica e della presenza di regioni ad alta curvatura.

Le formulazioni ibride riescono tuttavia a recuperare buona parte delle deviazioni, migliorando la regolarità dei lobi secondari e riducendo l'errore nelle direzioni speculari e nelle zone di transizione. L'efficacia dell'approccio ibrido risulta quindi particolarmente evidente per queste geometrie, confermando la necessità di un trattamento rigoroso localizzato nelle regioni più critiche.

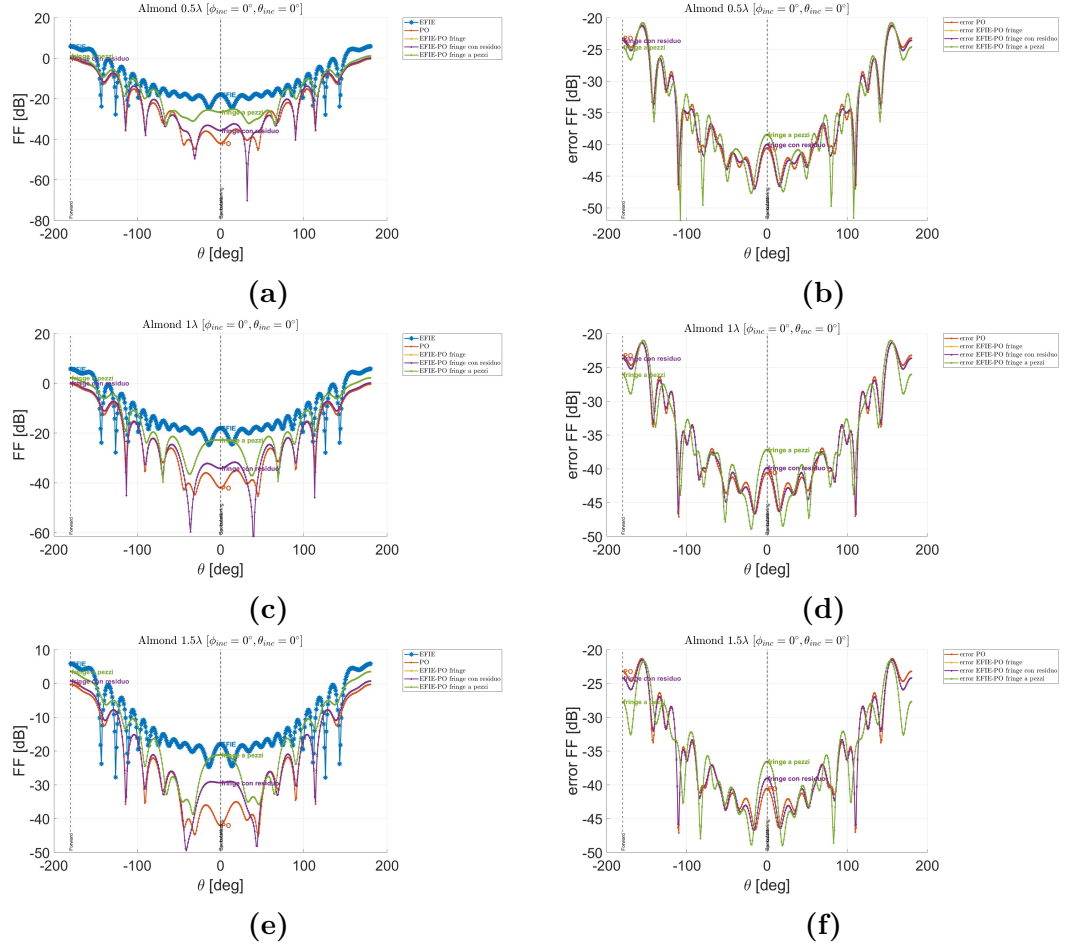


Figura 6.26: Confronto del far-field per le geometrie “Almond 0.5λ ” (a-b), “Almond 1λ ” (c-d) e “Almond 1.5λ ” (e-f) in incidenza $\phi_{inc} = 0, \theta_{inc} = 0$. I pannelli di sinistra (a, c, e) mostrano il modulo del far-field in funzione dell’angolo θ per le diverse formulazioni (EFIE, PO e varianti ibride), mentre quelli di destra (b, d, f) riportano il corrispondente errore normalizzato rispetto alla soluzione EFIE.

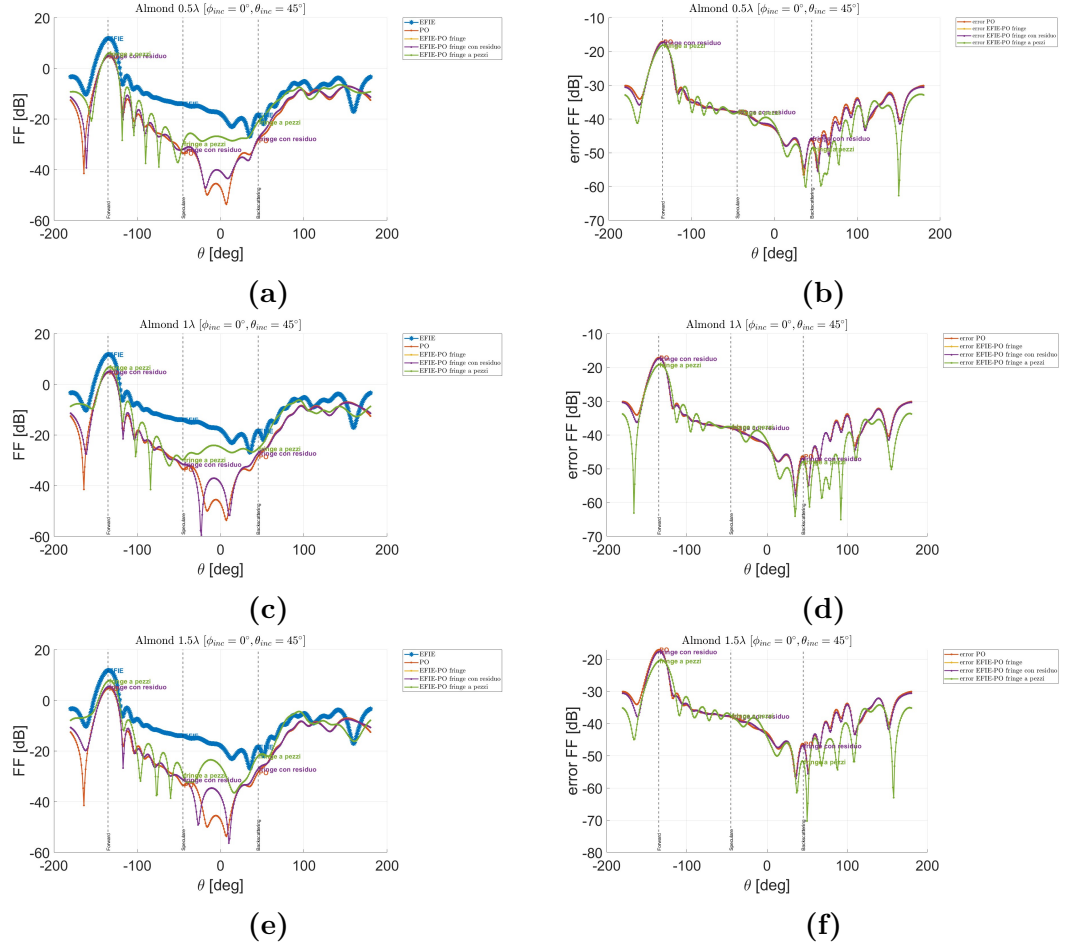


Figura 6.27: Confronto del far-field per le geometrie “Almond 0.5λ ” (a-b), “Almond 1λ ” (c-d) e “Almond 1.5λ ” (e-f) in incidenza $\phi_{inc} = 0^\circ, \theta_{inc} = 45^\circ$. I pannelli di sinistra (a, c, e) mostrano il modulo del far-field in funzione dell’angolo θ per le diverse formulazioni (EFIE, PO e varianti ibride), mentre quelli di destra (b, d, f) riportano il corrispondente errore normalizzato rispetto alla soluzione EFIE.

6.5 Analisi della Radar Cross Section (RCS) monostatica

La Radar Cross Section (RCS) monostatica quantifica la potenza riflessa da un oggetto nella stessa direzione di incidenza dell’onda piana e rappresenta quindi un indicatore diretto della sua visibilità radar lungo la direzione di osservazione considerata.

La Radar Cross Section monostatica σ è classicamente definita come:

$$\sigma = 4\pi \frac{|E^{scatt}|^2}{|E_{inc}|^2} \quad (6.3)$$

dove E^{scatt} è il campo elettrico diffuso nella direzione di backscattering ed E_{inc} è il campo incidente. In questa sezione, tuttavia, non si rappresenta σ in senso stretto, bensì il modulo del campo retro-diffuso normalizzato rispetto al campo incidente. Nei grafici, l'asse y riporta $\frac{|E^{scatt}|}{|E_{inc}|}$, assumendo $|E_{inc}| = 1$. Si analizza dunque l'andamento di tale quantità in funzione dell'angolo θ per le diverse geometrie considerate e per le varie formulazioni (EFIE completa, PO e varianti ibride). In tutti i grafici, quindi, l'angolo θ rappresenta la direzione di incidenza dell'onda piana, e ciascun punto della curva corrisponde al valore normalizzato del campo in backscattering per quella direzione.

Per le geometrie coniche (Fig.6.28) la RCS mostra, in tutte e tre le configurazioni, Cone 0.5λ , Cone 1λ , Cone 1.5λ , un andamento caratterizzato da un valore massimo e da una serie di lobi secondari che riflettono la natura liscia ma finita della superficie. La PO ne riproduce qualitativamente il comportamento globale, ma tende a sottostimare sistematicamente il livello nelle zone di minimo e nei lobi secondari, dove gli effetti di diffrazione alla punta e alla base diventano più rilevanti. Le formulazioni ibride, in particolare la fringe con residuo, riducono visibilmente questa discrepanza: le curve ibride rimangono molto vicine alla EFIE su gran parte dell'intervallo angolare e ricostruiscono in modo più accurato posizione e profondità dei minimi, con un accordo che migliora all'aumentare dell'estensione EFIE da 0.5λ a 1.5λ .

Per le geometrie almond (Fig.6.29) il comportamento è più critico. Il modulo normalizzato del campo retro-diffuso ottenuto con EFIE presenta una struttura ricca di lobi stretti e ravvicinati, soprattutto alle alte angolazioni, dovuta alla combinazione di estremità appuntite e raccordi ad elevata curvatura. In questo scenario la PO risulta chiaramente insufficiente: la curva asintotica non segue né l'ampiezza né la frequenza angolare delle oscillazioni e tende a smussare i picchi e i null più marcati. Le formulazioni ibride migliorano sensibilmente l'accordo con EFIE, in particolare nelle regioni angolari associate alle estremità della almond, ma permangono differenze non trascurabili nei lobi più fini. Ciò suggerisce che, per geometrie così complesse, un'estensione EFIE fino a 1.5λ è sufficiente a correggere i contributi principali ma non a riprodurre in dettaglio l'intera struttura interferenziale del diagramma.

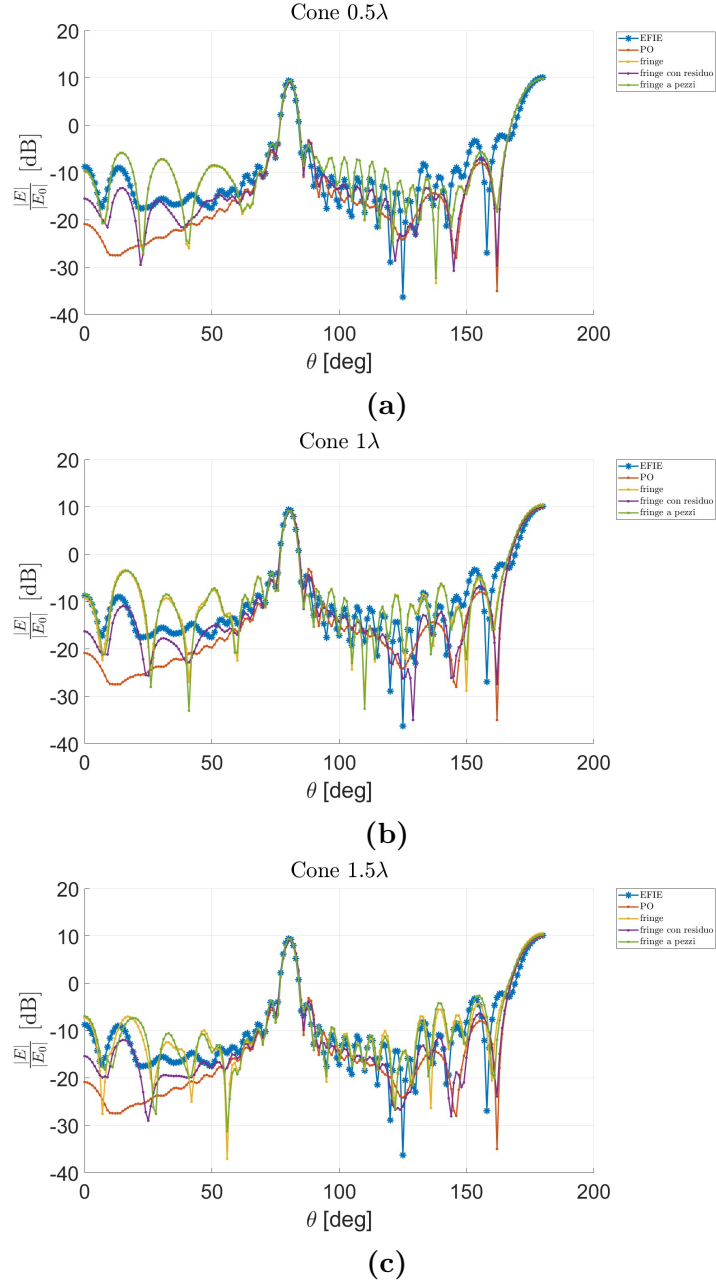


Figura 6.28: Andamento della Radar Cross Section (RCS) per le geometrie “Cone 0.5λ ” (a), “Cone 1λ ” (b) e “Cone 1.5λ ” (c) in funzione dell’angolo θ . I grafici riportano il confronto tra le diverse configurazioni considerate, evidenziando la variazione della RCS al variare della dimensione elettrica del cono.

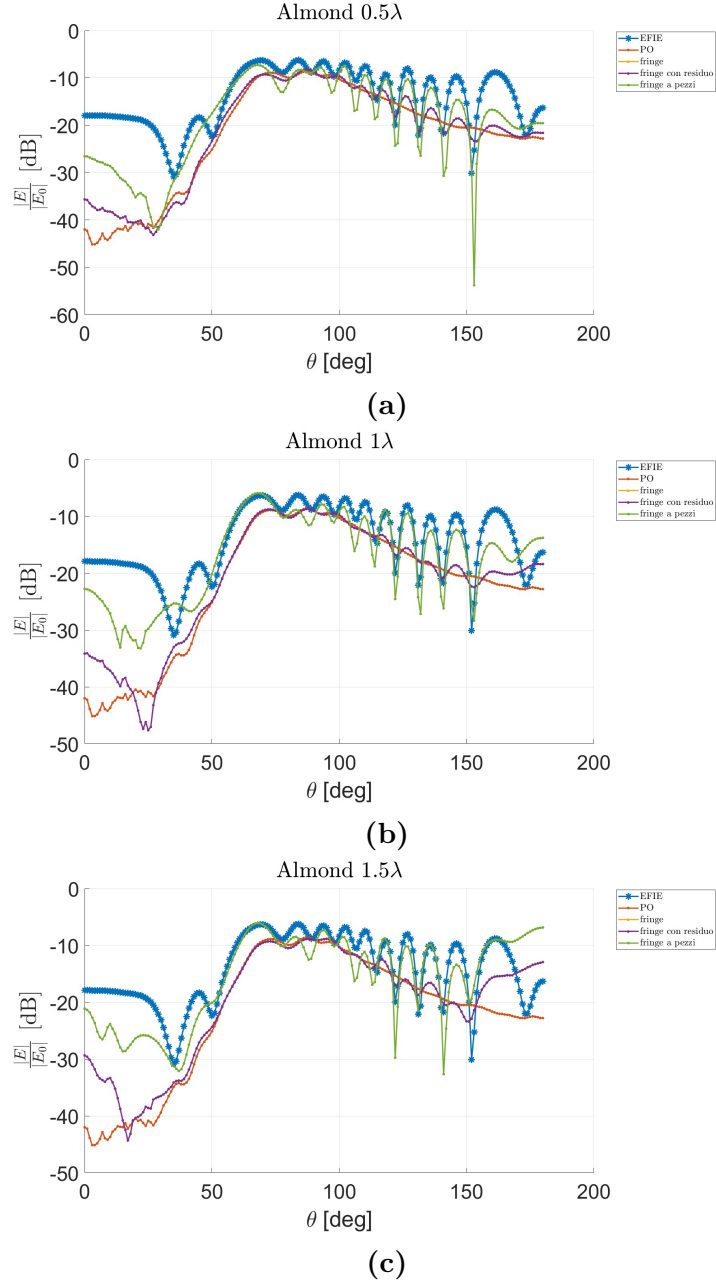


Figura 6.29: Andamento della Radar Cross Section (RCS) per le geometrie “Almond 0.5λ ” (a), “Almond 1λ ” (b) e “Almond 1.5λ ” (c) in funzione dell’angolo θ . I grafici riportano il confronto tra le diverse configurazioni considerate, evidenziando la variazione della RCS al variare della dimensione elettrica del cono.

Per il modello Rafale (Fig.6.30) la firma radar è fortemente irregolare, con un diagramma EFIE caratterizzato da lobi multipli e minimi profondi, generati dalla

combinazione di superfici planari e bordi d'attacco. La PO riproduce l'andamento medio del campo ma tende a smussare i minimi e a sottostimare la RCS nelle direzioni in cui il contributo di spigoli, raccordi e cavità è più marcato. Le oscillazioni fini del diagramma EFIE non vengono catturate in modo soddisfacente.

Passando alle soluzioni ibride, le due varianti si comportano in modo diverso. La fringe semplice migliora progressivamente l'accordo con la EFIE al crescere dell'estensione della regione rigorosa: nelle configurazioni "Rafale 15 m-2", "Rafale 15 m-3" e "Rafale 15 m-4" la curva riproduce via via meglio posizione e profondità dei principali minimi e segue più da vicino l'involuppo della EFIE su tutto l'intervallo angolare.

La fringe con residuo, invece, rimane in tutte le configurazioni molto vicina alla PO. Questo comportamento è legato al fatto che, su una geometria complessa come il Rafale, il residuo della PO risulta piuttosto diffuso e non individua in modo netto poche zone "molto critiche": il peso che modula la correzione EFIE tende quindi a essere moderato su gran parte della superficie, e la componente rigorosa non sostituisce mai davvero la PO come avviene nella fringe semplice. Di conseguenza la curva segue sostanzialmente l'involuppo asintotico, con miglioramenti solo locali. Nel complesso, per il Rafale le simulazioni mostrano che l'estensione della regione EFIE porta a un avvicinamento evidente alla soluzione completa solo per la formulazione fringe semplice, mentre la fringe con residuo privilegia un comportamento più conservativo e resta più vicina alla PO, pur mantenendo il vantaggio di limitare l'uso della parte rigorosa.

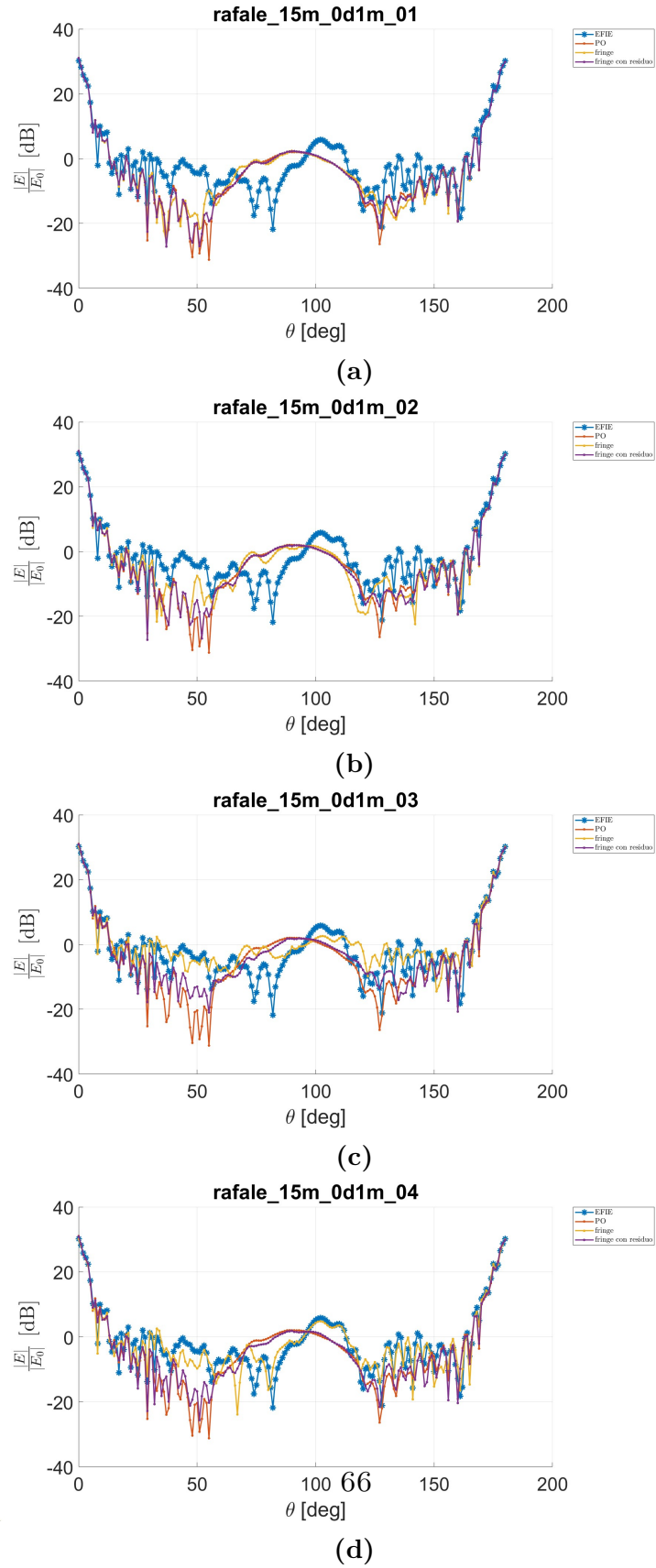


Figura 6.30: Andamento della Radar Cross Section (RCS) del modello “Rafale 15 m” per le quattro partizioni considerate

Capitolo 7

Conclusioni, discussione critica dei risultati e sviluppi futuri

In questa tesi è stata studiata una formulazione ibrida EFIE–PO per l’analisi dello scattering elettromagnetico da strutture conduttrici elettricamente grandi, con particolare attenzione alla rapida caratterizzazione elettromagnetica di antenne e bersagli radar in termini di correnti superficiali, campo irradiato e Radar Cross Section RCS monostatica. Il lavoro ha combinato in modo sistematico la modellazione rigorosa basata su Electric Field Integral Equation EFIE e Metodo dei Momenti MoM con l’approssimazione asintotica di Physical Optics PO, introducendo una partizione esplicita della superficie dello scatterer in sotto-domini specializzati e strategie di accoppiamento mirate per bilanciare accuratezza e costo computazionale.

7.1 Sintesi dei contributi

Il percorso teorico della tesi è partito dai fondamenti dell’elettromagnetismo e dalle equazioni di Maxwell (Tab. 2.1), mettendo in evidenza come la forma integrale risulti particolarmente adatta allo studio dei fenomeni di scattering da conduttori perfetti PEC.

A partire dalle condizioni al contorno sul PEC (2.7)-(2.10), l’*Electric Field Integral Equation* è stata introdotta come formulazione rigorosa, in cui il campo diffuso viene espresso in funzione della corrente superficiale incognita (3.12).

In parallelo, la Physical Optics è stata presentata come approssimazione ad alta frequenza che sostituisce la soluzione integrale completa con una corrente locale

definita sulla regione illuminata (3.15), evidenziandone la natura asintotica e i limiti in corrispondenza di bordi, regioni in ombra e aree ad elevata curvatura.

Su queste basi teoriche è stato discusso il ruolo delle tecniche di elettromagnetismo computazionale CEM e, in particolare, del Metodo dei Momenti (4.1), come strumento per trasformare le equazioni integrali in sistemi lineari a dimensione finita. La tesi ha richiamato la formulazione generale del MoM, il metodo di Galerkin e le proprietà delle funzioni RWG (4.7), sottolineando come la natura divergence-conforming di queste ultime garantisca una rappresentazione fisicamente coerente delle correnti superficiali e della continuità di carica.

Il contributo principale del lavoro risiede nella formulazione ibrida EFIE-PO proposta nei Capitoli 5 e 6, in cui la superficie complessiva dello scatterer è suddivisa in tre sotto-domini S_{EFIE} , S_{buf} e S_{PO} . Nella regione S_{EFIE} la corrente superficiale è calcolata tramite EFIE-MoM con discretizzazione RWG, nella regione S_{PO} è impiegata la corrente approssimata di Physical Optics, mentre la regione di buffer S_{buf} funge da zona di transizione numerica tra descrizione rigorosa e descrizione asintotica. All'interno di questo schema sono state definite diverse strategie di accoppiamento full EFIE, full PO, fringe semplice (5.3), fringe a pezzi, fringe con residuo (5.5), che differiscono per l'estensione del dominio rigoroso e per il modo in cui la correzione EFIE viene applicata nella regione buffer.

Dal punto di vista implementativo, la tesi fa uso di librerie MATLAB preesistenti, sviluppate dal gruppo di ricerca di cui fanno parte i relatori coinvolti nel progetto di tesi, per il calcolo degli elementi di matrice EFIE e delle correnti PO su mesh triangolari. Su questa base è stato sviluppato, nell'ambito di questo lavoro, un codice modulare che implementa gli algoritmi ibridi EFIE-PO, gestisce la definizione dei sotto-domini e automatizza il calcolo delle correnti superficiali, del far-field e della RCS monostatica per le diverse configurazioni EFIE, PO e ibride. La struttura dati è basata su funzioni RWG, con costruzione della matrice EFIE, del termine noto e di una fattorizzazione LU riutilizzata sia per la soluzione completa sia per i sistemi ridotti necessari al calcolo delle correzioni locali. Il codice gestisce inoltre il test di visibilità per la PO, la proiezione della corrente PO nello spazio RWG tramite Gram matrix e la definizione di maschere logiche che identificano i sotto-domini sulla base della geometria e della direzione di incidenza.

7.2 Sintesi dei risultati numerici

La validazione della formulazione ibrida è stata effettuata su una serie di casi studio con complessità crescente, includendo coni assialsimmetrici *Cone* 0.5λ (Fig. 6.1), *Cone* 1λ (Fig. 6.2), *Cone* 1.5λ (Fig. 6.3), geometrie di tipo almond *Almond* 0.5λ (Fig. 6.4), *Almond* 1λ (Fig. 6.5), *Almond* 1.5λ (Fig. 6.6) e modelli semplificati di aereo tipo Rafale con lunghezze pari 15λ (Fig. 6.7)-(Fig. 6.10).

Per ciascuna famiglia delle geometrie canoniche, la dimensione caratteristica globale è stata mantenuta dell'ordine di 5 lunghezze d'onda, dove λ è stata assunta pari a 1m, mentre è stata variata l'estensione del dominio EFIE e della regione di buffer, così da analizzare in modo sistematico l'effetto della partizione sulla qualità della soluzione ibrida a parità di geometria. In tutti i casi, la soluzione EFIE completa è stata assunta come riferimento numerico di alta accuratezza, mentre la soluzione PO pura ha rappresentato il limite di massimo risparmio computazionale e minimo livello di accuratezza accettabile.

Nel caso dei coni, caratterizzati da superfici lisce e prive di spigoli marcati, le simulazioni del far-field (Fig. 6.24)-(Fig. 6.25) hanno mostrato che la PO fornisce una descrizione intrinsecamente favorevole sulle porzioni illuminate lontane dalle estremità, mentre richiede una correzione rigorosa in prossimità della punta e della base. Le configurazioni ibride fringe hanno evidenziato che un'estensione relativamente contenuta del dominio EFIE, tipicamente dell'ordine di 0.5–1.5 lunghezze d'onda attorno alle regioni critiche, è sufficiente a recuperare un buon accordo con la EFIE completa per quanto riguarda sia la distribuzione delle correnti sia la struttura angolare del far-field. In questo scenario, la riduzione del numero di incognite rispetto alla soluzione EFIE pura è risultata significativa, mantenendo l'errore sulla RCS (Fig. 6.28) entro limiti compatibili con le esigenze applicative considerate.

Per le geometrie almond, caratterizzate da curvature variabili ed estremità appuntite, nelle figure del far field (Fig. 6.26)-(Fig. 6.27), la Physical Optics ha mostrato limiti più marcati, in particolare nelle regioni di elevata curvatura e nelle zone di transizione tra illuminazione e ombra, dove sono presenti contributi diffratti e correnti non puramente speculari. Le soluzioni ibride hanno migliorato l'accordo con la EFIE completa rispetto alla PO pura, soprattutto nelle lobi principali della RCS monostatica (Fig. 6.29) e nella riproduzione dei picchi associati alle zone terminali della struttura. Tuttavia, è emerso come, per valori di estensione EFIE intorno a 1–1.5 lunghezze d'onda, permangano differenze non trascurabili nei lobi secondari più fini, suggerendo che per geometrie complesse l'uniformità locale dell'approssimazione PO e la scelta del sotto-dominio rigoroso assumono un ruolo ancora più critico.

Nei casi di tipo aeronautico è stato considerato un modello semplificato del Rafale di lunghezza 15 m, analizzato in quattro diverse configurazioni ibride che differiscono per l'estensione dei sotto-domini S_{EFIE} , S_{buf} e S_{PO} . In questo scenario, la configurazione full PO mostra limiti evidenti nella riproduzione della RCS monostatica (Fig. 6.30), soprattutto in presenza di bordi e volumi incassati, mentre le configurazioni ibride permettono di migliorare il compromesso tra accuratezza e costo computazionale concentrando la EFIE nelle regioni elettromagneticamente più sensibili e demandando alla PO le porzioni ampie e regolari della fusoliera. L'analisi delle quattro partizioni conferma che l'estensione della regione EFIE

migliora in modo sistematico l'accordo con la soluzione rigorosa per la variante *fringe semplice*, mentre la variante *fringe con residuo* tende a rimanere più vicina alla PO a causa della natura diffusa del residuo locale su una geometria complessa e dell'uso di pesi conservativi nella combinazione delle correnti.

Nel complesso, l'analisi del residuo locale rispetto all'EFIE, dei diagrammi di radiazione in far-field e della RCS monostatica ha evidenziato come la formulazione ibrida EFIE-PO proposta sia in grado di offrire un compromesso controllabile tra accuratezza e costo computazionale. Da un lato, l'impiego della PO nelle regioni estese regolari consente una riduzione significativa del numero di incognite e dei tempi di calcolo, dall'altro, l'introduzione di una regione EFIE concentrata nelle aree critiche, supportata da una zona buffer e da strategie di combinazione fringe, permette di recuperare i fenomeni non ben descritti dal modello asintotico, come le diffrazioni ai bordi e le interazioni multiple locali. I risultati ottenuti confermano quindi la validità dell'approccio per il testing rapido di antenne e bersagli metallizzati elettricamente grandi, in contesti in cui una EFIE completa sarebbe troppo onerosa e una PO pura non sufficientemente accurata, pur evidenziando la necessità di affinare ulteriormente i criteri adattivi basati sul residuo per geometrie altamente complesse.

7.3 Prospettive e sviluppi futuri

Gli sviluppi futuri del lavoro si articolano lungo diverse direzioni, sia dal punto di vista modellistico sia dal punto di vista computazionale. Un primo ambito riguarda la definizione di strategie più avanzate per la scelta e l'aggiornamento dei sotto-domini S_{EFIE} , S_{buf} e S_{PO} , superando una partizione puramente geometrica e direzione-dipendente a favore di criteri automatici guidati da indicatori di errore locali. In questa prospettiva, il residuo dell'EFIE già utilizzato nella variante *fringe con residuo* può essere ulteriormente sfruttato per definire algoritmi adattivi che espandano o riducano dinamicamente il dominio rigoroso in funzione della qualità locale della soluzione ibrida.

Una seconda linea di sviluppo riguarda l'integrazione della formulazione EFIE-PO con tecniche di accelerazione quali Fast Multipole Method FMM, Multi-Level FMM o metodi gerarchici basati su dipoli equivalenti, al fine di rendere più efficiente la soluzione delle porzioni EFIE su geometrie ancora più grandi. In parallelo, l'impiego di funzioni di base ad alto ordine o a fase lineare, già proposto in letteratura per ridurre il numero di gradi di libertà senza perdere accuratezza, potrebbe essere esteso sia alla regione rigorosa sia alla regione PO, ottenendo così un ulteriore alleggerimento della discretizzazione mantenendo una buona fedeltà nella rappresentazione delle correnti superficiali.

L'insieme di questi sviluppi renderebbe la formulazione proposta uno strumento

ancora più flessibile e potente per il testing rapido di antenne e per l'analisi di scattering da strutture realistiche elettricamente grandi, consolidando il ruolo dei metodi ibridi EFIE-PO nel panorama dell'elettromagnetismo computazionale.

Ringraziamenti

Bibliografia

- [1] George T. Ruck, Donald E. Barrick, William D. Stuart e Clarence K. Krichbaum. *Radar Cross Section Handbook*. Vol. 1. New York: Plenum Press, 1970, p. 7.
- [2] Matthew N. O. Sadiku. *Elements of electromagnetics*. JOUP USA, 200, p. 3.
- [3] Fawwaz T. Ulaby, Eric Michielssen e Umberto Ravaioli. *Fundamentals of Applied Electromagnetics*. 7^a ed. Pearson, 2015.
- [4] John David Jackson. *Classical Electrodynamics*. 3^a ed. New York: Wiley, 1999.
- [5] Constantine A. Balanis. *Advanced Engineering Electromagnetics*. JOHN WILEY e SONS, 1972.
- [6] W. C. Gibson. *The Method of Moments in Electromagnetics*. 3rd ed., CRC Press, Boca Raton, FL, 2015, p. 1.
- [7] Javier Gutiérrez-Meana, José A. Martínez-Lorenzo e Fernando Las-Heras. «High Frequency Techniques: the Physical Optics Approximation and the Modified Equivalent Current Approximation (MECA)». In: *Electromagnetic Waves Propagation in Complex Matter*. InTech, 2011.
- [8] Roger F. Harrington. *Field Computation by Moment Methods*. IEEE Press, 1993.
- [9] S. Rao, D. Wilton e A. Glisson. «Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape». In: *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 30.3 (1982), pp. 409–418. DOI: 10.1109/TAP.1982.1142818.
- [10] U. Jakobus e F.M. Landstorfer. «Improvement of the PO-MoM hybrid method by accounting for effects of perfectly conducting wedges». In: *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 43.10 (1995), pp. 1123–1129. DOI: 10.1109/8.467649.
- [11] Siyanda Nazo. «A hybrid MoM/PO technique with large element PO». Tesi di laurea mag. Private Bag X1, Matieland 7602, South Africa.: University of Stellenbosch, 2012.

- [12] M. Djordjevic e B.M. Notaros. «Higher order hybrid method of moments-physical optics modeling technique for radiation and scattering from large perfectly conducting surfaces». In: *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 53.2 (2005), pp. 800–813. DOI: 10.1109/TAP.2004.841318.
- [13] Zi-Liang Liu e Chao-Fu Wang. «Efficient Iterative Method of Moments—Physical Optics Hybrid Technique for Electrically Large Objects». In: *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 60.7 (2012), pp. 3520–3525. DOI: 10.1109/TAP.2012.2196963.
- [14] Li Xiao, Xiao-Hua Wang, Bing-Zhong Wang, Gang Zheng e Peng Chen. «An Efficient Hybrid Method of Iterative MoM-PO and Equivalent Dipole-Moment for Scattering From Electrically Large Objects». In: *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters* 16 (2017), pp. 1723–1726. DOI: 10.1109/LAWP.2017.2669910.
- [15] F. Obelleiro-Basteiro, J. Luis Rodriguez e R.J. Burkholder. «An iterative physical optics approach for analyzing the electromagnetic scattering by large open-ended cavities». In: *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 43.4 (1995), pp. 356–361. DOI: 10.1109/8.376032.
- [16] R.J. Burkholder e T. Lundin. «Forward-backward iterative physical optics algorithm for computing the RCS of open-ended cavities». In: *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 53.2 (2005), pp. 793–799. DOI: 10.1109/TAP.2004.841317.
- [17] Luca Pandolfo, Paolo De Vita, Mauro Bandinelli, Giorgio Carluccio e Matteo Albani. «A Flexible, General-Purpose Code Based on the Iterative Physical Optics Algorithm: Analyzing Electromagnetic Scattering in Electrically Large Scenarios. [EM Programmer’s Notebook]». In: *IEEE Antennas and Propagation Magazine* 59.5 (2017), pp. 150–158. DOI: 10.1109/MAP.2017.2731210.
- [18] A.C. Woo, H.T.G. Wang, M.J. Schuh e M.L. Sanders. «EM programmer’s notebook-benchmark radar targets for the validation of computational electromagnetics programs». In: *IEEE Antennas and Propagation Magazine* 35.1 (1993), pp. 84–89. DOI: 10.1109/74.210840.