



POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

Tesi di Laurea Magistrale

# **Sviluppo di un Modello High-Fidelity Integrato per l'Analisi di Riduttori Armonici**

## **Relatori**

Prof. Massimo Sorli

Ing. Roberto Guida

## **Candidato**

Claudio Sirimarco

S320049

Sessione di Laurea Dicembre 2025 Anno Accademico 2024/2025

(questa pagina è stata lasciata intenzionalmente bianca)

Grazie amici.

# Abstract

I riduttori armonici sono ampiamente impiegati nella robotica di precisione, ma la loro complessa struttura meccanica li rende soggetti a guasti che possono compromettere l'affidabilità, la sicurezza e l'efficienza dell'intero sistema. Una possibile soluzione a queste criticità è l'adozione di strategie di Prognostics and Health Monitoring (PHM); tuttavia, lo sviluppo di tali tecniche è ostacolato dalla limitata disponibilità di dati sperimentali relativi a componenti difettosi. Per ovviare a questa carenza, è possibile creare modelli digital twin ad alta fedeltà, in grado di simulare il comportamento del sistema sia in condizioni nominali sia in presenza di guasti.

Il presente lavoro si basa su studi precedenti che hanno adottato un approccio multi-body per analizzare l'interazione tra gli ingranaggi e il comportamento del cuscinetto deformabile del Wave Generator. L'obiettivo principale della tesi è l'integrazione di questi due modelli complessi all'interno di un'unica piattaforma di simulazione dinamica.

L'efficacia e l'affidabilità del modello integrato sono state valutate sia in regime statico che dinamico attraverso implementazioni realizzate con il software MATLAB/Simulink. Il modello risultante fornisce una rappresentazione più realistica e dettagliata del riduttore armonico nel suo insieme, gettando le basi per future simulazioni di difetti localizzati e per la validazione di algoritmi di diagnostica e prognostica.

# Indice

<b>Abstract</b>	<b>4</b>
<b>Introduzione</b>	<b>11</b>
<b>1 Principio di funzionamento e geometria del riduttore armonico</b>	<b>15</b>
1.1 Principio di funzionamento . . . . .	16
1.2 Geometria e dimensioni dei componenti . . . . .	19
<b>2 Analisi statica del riduttore armonico</b>	<b>23</b>
2.1 Descrizione del modello matematico . . . . .	23
2.1.1 Modellazione dell'interazione tra Wave Generator e Flexspline . . .	28
2.1.2 Modellazione dell'interazione tra Flexspline e Circular Spline . . .	31
2.2 Risultati del calcolo delle condizioni iniziali . . . . .	34
<b>3 Modello di rotazione del riduttore completo</b>	<b>43</b>
3.1 Modellazione dinamica delle Sfere . . . . .	46
3.2 Modellazione dinamica della ralla esterna del cuscinetto deformabile . . .	48
3.3 Modellazione dinamica della Flexspline . . . . .	49
3.4 Modellazione dinamica della Circular Spline . . . . .	52
<b>4 Risultati e validazione del modello</b>	<b>53</b>
4.1 Simulazione di stabilità statica . . . . .	54
4.1.1 Analisi delle forze e degli spostamenti sul Cuscinetto . . . . .	55

4.1.2	Analisi delle forze e degli spostamenti sulla Flexspline	56
4.1.3	Forze di ingranamento e stabilità della Circular Spline	57
4.2	Simulazione di rotazione del riduttore completo	61
4.2.1	Analisi cinematica: traiettorie dei denti	61
4.2.2	Analisi delle forze di interazione sul cuscinetto	63
4.2.3	Forze di ingranamento	64
4.2.4	Rapporto di riduzione e uscita cinematica	65
<b>Conclusioni e sviluppi futuri</b>		<b>69</b>
<b>Glossario dei simboli</b>		<b>71</b>
<b>Bibliografia</b>		<b>75</b>

# Elenco delle figure

1.1	Schema del riduttore armonico e dei suoi tre elementi principali. [1]	18
1.2	Funzionamento di un riduttore armonico con albero d'uscita sulla Flexspline.	19
1.3	Cuscinetto in condizioni non deformate.	20
1.4	Sezione della flexspline non deformata	21
1.5	Sezione della circular spline	22
2.1	Diagramma di corpo libero di un settore della ralla esterna del cuscinetto	25
2.2	Diagramma di corpo libero di un settore di ralla esterna, con interazione della flexspline	27
2.3	Diagramma di corpo libero di un dente di flexspline	27
2.4	Diagramma di corpo libero di un dente di flex spline, con interazione della circular spline	32
2.5	Esempio di visualizzazione della compenetrazione tra denti con ingranamento destro sul settore 5	34
2.6	Esempio di visualizzazione della compenetrazione tra denti con ingranamento sinistro nel primo quadrante	35
2.7	Rappresentazione dei risultati del problema della deformazione del cuscinetto isolato	37
2.8	Equilibrio delle forze sul settore 1, in blu la forza elastica dalla sfera, in arancione e rosso le forze dai settori adiacenti	38

2.9	Rappresentazione dei risultati del calcolo delle condizioni iniziali nel modello completo	39
2.10	Equilibrio delle forze sul dente n.121	40
3.1	Schema del modello Simulink per la rotazione del riduttore armonico completo, con evidenza dei blocchi principali (Sfere, Ralla Esterna, Flexspline, Circular Spline) e dei segnali scambiati.	44
3.2	Schema del sottomodello Simulink relativo alla dinamica delle sfere e al calcolo dell'interazione con la ralla esterna.	46
3.3	Schema del sottomodello Simulink relativo alla dinamica dei settori della ralla esterna e al calcolo dell'interazione con la Flexspline.	48
3.4	Schema del sottomodello Simulink relativo alla dinamica dei denti della <i>Flexspline</i> e al calcolo delle forze di ingranamento.	49
4.1	Evoluzione delle forze $F_b$ sulle 9 sfere del WG. Si noti il decadimento a zero della forza sulla sfera 1.	55
4.2	Traiettoria del settore 1 della ralla esterna durante la simulazione statica.	56
4.3	Evoluzione delle forze $F_{TS}$ (Flexspline-Settori).	57
4.4	Traiettorie di alcuni denti della Flexspline durante la simulazione statica.	58
4.5	Dinamica dell'assestamento statico delle forze e delle coppie di ingranamento. (a) Le coppie risultanti non nulle iniziali si smorzano. (b) Le singole forze $F_m$ oscillano e si assestano in una nuova configurazione di equilibrio.	59
4.6	Configurazione finale al termine del transitorio in configurazione statica.	60
4.7	Analisi delle traiettorie dei denti durante la simulazione dinamica: (a) vista d'insieme e (b) dettaglio su denti specifici.	62
4.8	Evoluzione delle forze di contatto $F_{TS}$ sui nove settori della ralla esterna.	64
4.9	Evoluzione delle forze di ingranamento su un campione di denti.	65



# Elenco delle tavole

1.1	Dimensioni del cuscinetto	20
1.2	Principali dimensioni della flexspline	22
1.3	Principali dimensioni della circular spline	22
4.1	Parametri utilizzati per la simulazione statica del riduttore armonico.	54
4.2	Parametri utilizzati per la simulazione dinamica del riduttore armonico.	61

# Introduzione

Il **riduttore armonico**, noto anche con il termine anglofono *strain wave gear* e commercialmente conosciuto come *Harmonic Drive®* (dal nome del principale produttore [2]), è un componente di trasmissione meccanica ampiamente impiegato nelle applicazioni robotiche, aerospaziali e nei sistemi di servoattuazione ad alta precisione [3, 4]. La sua funzione primaria è ridurre la velocità di rotazione tra un albero motore in ingresso e un albero condotto in uscita, garantendo al contempo la trasmissione di coppia. Rispetto ad altre tipologie di riduttori compatti, come i riduttori epicicloidali (planetari) o cicloidali, il riduttore armonico viene spesso preferito per una combinazione unica di caratteristiche: offre infatti un **elevato rapporto di riduzione** (tipicamente da 30:1 fino a oltre 320:1) in un singolo stadio, un design estremamente compatto e leggero, la coassialità tra l'albero di ingresso e quello di uscita, e soprattutto un' **assenza quasi totale di gioco angolare** (*zero backlash*) [5]. Perciò risulta particolarmente adatto per applicazioni che richiedono posizionamenti precisi e ripetibili, come i giunti dei robot industriali e collaborativi [4].

Tali proprietà derivano dalla particolare architettura del riduttore, composta da tre elementi principali:

- **Wave Generator (WG)**: costituito a sua volta da una camma ellittica inserita in un cuscinetto deformabile; sulla camma è tipicamente collegato l'albero d'ingresso;
- **Flexspline (FS)**: un ingranaggio flessibile con dentatura esterna, tale che, quando

deformato dal *wave generator*, ingranì con la *Circular Spline*;

- **Circular Spline (CS):** un ingranaggio rigido con dentatura interna, che nel caso in esame supporta l'albero d'uscita.

L'affidabilità è un requisito fondamentale per i sistemi robotici, e i riduttori armonici possono rappresentare un punto di criticità in un sistema complesso. Essendo responsabili di una quota significativa dei malfunzionamenti nei bracci robotici industriali [5], la loro integrità è essenziale per la disponibilità e la sicurezza dell'intero sistema, specialmente in contesti collaborativi [6, 7]. Questa esigenza ha guidato l'adozione di tecniche di *Prognostics and Health Monitoring* (PHM), il cui obiettivo è monitorare lo stato di salute dei componenti per incrementare l'affidabilità, riducendo tempi di fermo e costi di manutenzione [8].

Tali tecniche si basano sulla raccolta e l'analisi di dati ottenuti da sensoristica sul componente. Tuttavia, la scarsità di dati sperimentali relativi a componenti difettosi rende difficile l'addestramento di algoritmi diagnostici [3, 9], per superare questo limite, si ricorre a simulazioni numeriche con modelli che costituiscono un clone digitale (*digital twin*) del componente [5].

Per questo motivo, sono stati sviluppati modelli multibody ad alta fedeltà (*high-fidelity*), in grado di rappresentare in maniera puntuale le dinamiche dei singoli componenti. Tra questi si riportano, da un lato, i modelli di interazione tra *Wave Generator* e *Flexspline*, e di ingranamento tra i denti *Flexspline* e *Circular Spline* [3, 10]; dall'altro, modelli dedicati alla caratterizzazione del cuscinetto deformabile e all'interazione di questo con la camma ellittica e la *Flexspline* [11, 12].

L'obiettivo di questo lavoro di tesi è di ottenere un modello che descriva l'interazione tra il cuscinetto deformabile ed i restanti elementi del riduttore attraverso lo sviluppo di un modello integrato, così da ottenere una rappresentazione più realistica e dettagliata dell'intero sistema. In questo modo, diventa possibile simulare non solo

il comportamento nominale del riduttore, ma anche l'effetto di difetti localizzati, come la rottura di un dente o l'usura di un contatto nel cuscinetto. Il modello sviluppato permette di studiare puntualmente l'insorgere di un difetto agendo sui parametri fisici localizzati; ad esempio, la rottura progressiva di un dente viene simulata riducendone la rigidezza flessionale nel tempo.

I seguenti capitoli descriveranno il processo di sviluppo ed implementazione del modello che descrive il riduttore armonico: prima se ne studieranno i principi di funzionamento, la geometria e le caratteristiche dei componenti principali, analizzando anche le modalità di guasto e le ragioni del suo ampio impiego in robotica. Successivamente, si effettuerà un'**analisi statica** per ricavare le condizioni iniziali, ottenendo i risultati per l'inserimento del *Wave Generator* nella *Flexspline* e sulla modellazione delle interazioni meccaniche che definiscono l'equilibrio iniziale. Si procederà poi allo sviluppo del **modello dinamico di rotazione** del riduttore completo, descrivendo il moto relativo tra *Wave Generator*, *Flexspline* e *Circular Spline* e includendo le leggi di ingranamento e i vincoli cinematici. Infine, verranno presentati e discussi i principali **risultati numerici** ottenuti dalle simulazioni, con particolare attenzione alla distribuzione delle forze di contatto ed alla valutazione dell'rapporto di riduzione cinematico.



# Capitolo 1

## Principio di funzionamento e geometria del riduttore armonico

I riduttori armonici, noti anche come *strain wave gear*, appartengono alla categoria dei rotismi epicicloidali e furono introdotti nel 1955 da C. W. Musser [2]. Grazie al loro particolare principio di funzionamento che sarà necessario conoscere per una corretta modellazione, hanno trovato ampia diffusione in ambito robotico e aerospaziale, dove sono richieste compattezza, elevato rapporto di riduzione e precisione. Rispetto ai riduttori tradizionali, presentano infatti numerosi vantaggi:

- assenza di gioco (*zero backlash*), che garantisce una trasmissione del moto affidabile;
- ingombro ridotto e design compatto rispetto ad altri riduttori coassiali;
- rapporti di riduzione elevati;
- ingranamento simultaneo di più denti, che conferisce silenziosità e regolarità al funzionamento;
- flessibilità di configurazione, con possibilità di fissare alternativamente *Flexspline* o *Circular Spline*.

Tuttavia, come ogni componente meccanico, anche il riduttore armonico presenta limiti operativi ed è soggetto a diverse modalità di guasto [5]. È richiesta un'elevata precisione geometrica in fase di produzione e montaggio per evitare interferenze [5]. Durante il funzionamento, l'elemento più critico è tipicamente la *Flexspline*, la quale, essendo sottoposta a carichi ciclici, è soggetta a **rottura per fatica** [7]. Micro-cricche possono innescarsi in diverse zone, come alla **base del dente (rim)**, sulla **superficie del dente**, nella **sezione posteriore** o all'**interfaccia diaframma-flangia** [5, 6], propagandosi poi lungo il dente o, in modo più critico, lungo la rim, portando potenzialmente alla rottura catastrofica del componente [13]. Altre problematiche rilevanti includono l'**usura**, sia adesiva tra i denti di *Flexspline* e *Circular Spline*, sia sull'interfaccia tra *Wave Generator* e *Flexspline*, spesso aggravata da una **lubrificazione non ottimale** [5, 6] o da effetti geometrici come l'**angolo di conicità** che causa usura non uniforme e può portare a rotture nella sezione posteriore [5, 14]. Sollecitazioni superficiali ripetute possono inoltre portare alla formazione di **pitting** sui fianchi dei denti [5]. La **gestione della salute e della prognostica (PHM)** di questi componenti si concentra quindi principalmente sul rilevamento di guasti meccanici in **cuscinetti e ruote dentate** [4].

## 1.1 Principio di funzionamento

Come mostrato anche in Figura 1.1, il riduttore armonico è costituito da tre elementi principali:

- **Wave Generator (WG)** – costituito da una camma ellittica su cui è calettato un cuscinetto a sfere deformabile; è collegato all'albero di ingresso;
- **Flexspline (FS)** – un ingranaggio flessibile a denti esterni, deformabile secondo la forma del *Wave Generator*;

- **Circular Spline (CS)** – un ingranaggio rigido con dentatura interna, nel caso in esame, solidale all’albero di uscita.

Durante il funzionamento, la rotazione del *Wave Generator* (WG) impone una deformazione ellittica alla *Flexspline* (FS). Questa deformazione fa sì che i denti esterni della FS ingranino con i denti interni della *Circular Spline* (CS) lungo due zone diametralmente opposte, approssimativamente allineate con l’asse maggiore dell’ellisse imposta dal WG [2]. Queste zone di contatto, indicate schematicamente con (4) in Figura 1.2, ruotano solidalmente con il WG.

Da un punto di vista cinematico, questo meccanismo è equivalente a quello di un riduttore epicicloidale [1]. L’analoga si basa sul fatto che la **rotazione della deformazione ellittica**, imposta dal WG, agisce come il porta-treno in un sistema epicicloidale, forzando le zone di ingranamento a orbitare. La *Flexspline*, con i suoi denti  $Z_{FS}$ , può essere vista come analoga a un ingranaggio planetario (deformabile anziché rigido), mentre la *Circular Spline*, con denti  $Z_{CS}$ , funge da corona fissa o mobile. Poiché  $Z_{FS}$  è leggermente inferiore a  $Z_{CS}$  (nel caso in esame  $Z_{CS} - Z_{FS} = 2$ ), per ogni giro completo della deformazione (cioè del WG), la *Flexspline* subisce uno spostamento relativo rispetto alla *Circular Spline*, pari alla differenza del numero di denti. Questa cinematica permette di derivare relazioni tra le velocità angolari dei tre componenti  $(\dot{\theta}_{WG}, \dot{\theta}_{FS}, \dot{\theta}_{CS})$  analoghe all’equazione di Willis per i rotismi epicicloidali, come mostrato nell’Equazione 1.2. La flessibilità intrinseca della *Flexspline* è ciò che permette di realizzare questa cinematica complessa in una struttura compatta e coassiale, trasformando il moto relativo dei denti, che in un sistema rigido sarebbe planetario, in un moto relativo tra alberi coassiali.

Il rapporto di trasmissione ideale, nel caso di albero d’uscita sulla *Flexspline*, si può esprimere come:

$$\tau = \frac{Z_{FS}}{Z_{CS} - Z_{FS}} \quad (1.1)$$

dove  $Z_{FS}$  e  $Z_{CS}$  rappresentano rispettivamente il numero di denti della *Flexspline* e della *Circular Spline*. Nel caso in esame, essi valgono  $Z_{FS} = 200$  e  $Z_{CS} = 202$ . La piccola differenza nel numero di denti consente di ottenere rapporti molto elevati con ingombri contenuti.



Figura 1.1: Schema del riduttore armonico e dei suoi tre elementi principali. [1]

Ad ogni semigiro del *Wave Generator*, la *Flexspline* avanza (o retrocede) di un dente rispetto alla *Circular Spline*, generando così la riduzione del moto [15]. Da queste considerazioni è possibile legare le velocità dei tre componenti con un'equazione per poter studiare separatamente i casi in cui l'albero di uscita si trovi sulla circular spline o sulla flexspline.

$$\dot{\theta}_{WG} = (\tau + 1)\dot{\theta}_{CS} - \tau\dot{\theta}_{FS} \quad (1.2)$$

Scegliendo la *Flexspline* come uscita e la *Circular Spline* come ruota fissa, si ottiene un'inversione di moto e una riduzione della velocità dell'albero di uscita di  $\tau$  volte. Al contrario, fissando la *Flexspline* e collegando l'uscita alla *Circular Spline*, si mantiene la direzione del moto ma con una riduzione della velocità pari a  $(\tau + 1)$  volte rispetto all'albero di ingresso.

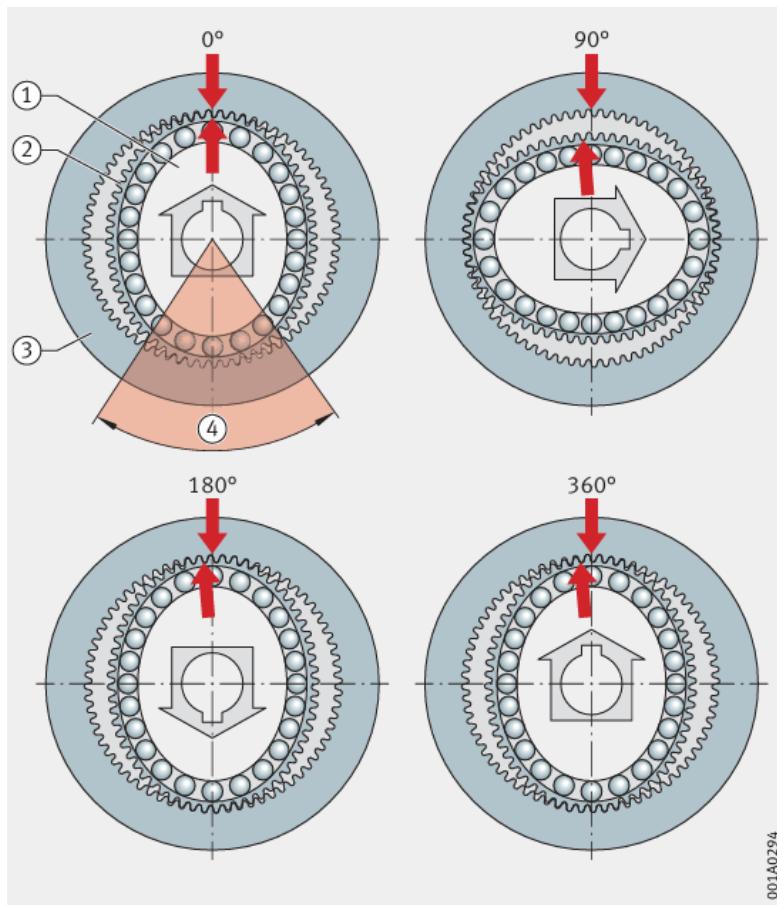


Figura 1.2: Funzionamento di un riduttore armonico con albero d'uscita sulla Flexspline.

## 1.2 Geometria e dimensioni dei componenti

Precedentemente all'assemblaggio, tutti i componenti del riduttore sono costruiti con simmetria circolare fatta eccezione ovviamente per la camma del wave generator. Il cuscinetto in cui questa si inserisce è composto da due ralle di spessore trascurabile rispetto alle dimensioni radiali ed un certo numero di sfere, nel caso in esame pari a nove, che permettono alla camma di ruotare riducendone l'attrito quando questa aderisce alla ralla interna mentre la flexspline aderisce alla ralla esterna.

La camma può essere descritta come un'ellisse con semiassi  $a_i$  e  $b_i$ , orientata lungo

gli assi cartesiani. La differenza tra i due semiassi definisce l'entità della deformazione imposta, mentre la rotazione della camma rispetto all'origine determina la posizione angolare della deformazione. Al variare dell'angolo di rotazione, l'ellisse ruota solidalmente alla ralla interna, trasferendo la deformazione lungo i punti di contatto con le sfere del cuscinetto.

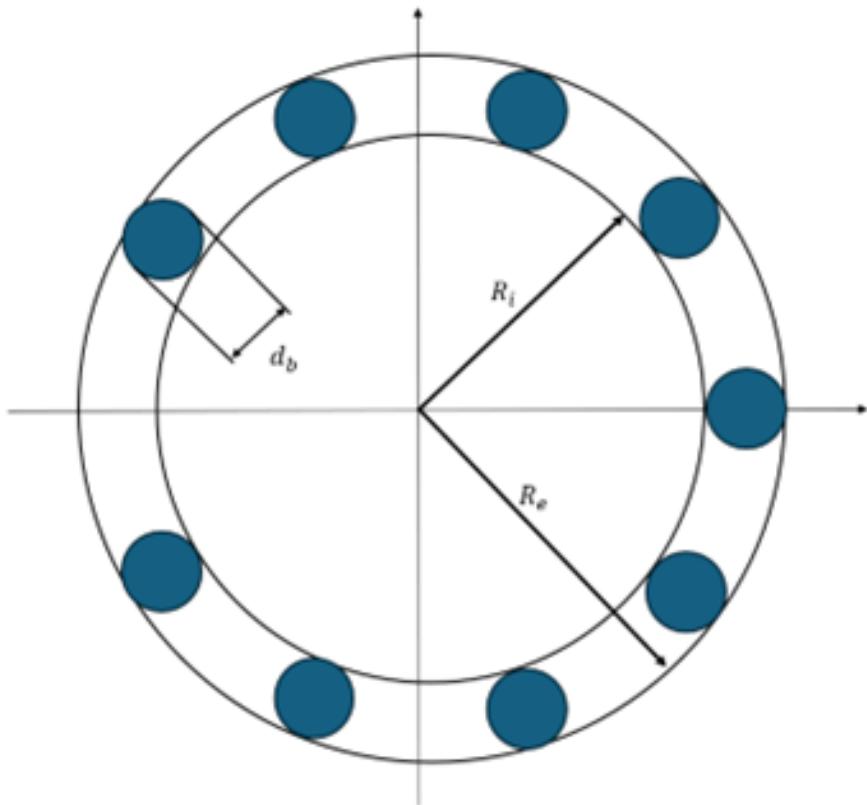


Figura 1.3: Cuscinetto in condizioni non deformate.

Grandezza	Notazione	Valore
Raggio interno	$R_i$	15,69 mm
Raggio esterno	$R_e$	23,63 mm
Diametro sfere	$d_b$	7,94 mm
Semiasse maggiore	$a_i$	16,19 mm
Semiasse minore	$b_i$	15,19 mm

Tabella 1.1: Dimensioni del cuscinetto

La *Flexspline* è l'elemento del riduttore armonico che, grazie alla deformazione indotta dal *Wave Generator*, permette l'ingranamento con la *Circular Spline*. In configurazione non deformata la sua geometria può essere assimilata a quella di un cilindro sottile, detto rim, chiuso su un'estremità da una flangia che consente il collegamento meccanico con l'albero di uscita, o con un vincolo torsionale come nel caso in esame. I parametri principali che dimensionano la *Flexspline* e la sua dentatura sono: il numero dei denti, il passo ed il modulo dei denti ( $p = \pi m$ ), i raggi di altezza dei denti e della rim, la lunghezza dei denti e della flangia e lo spessore della flangia e della rim.

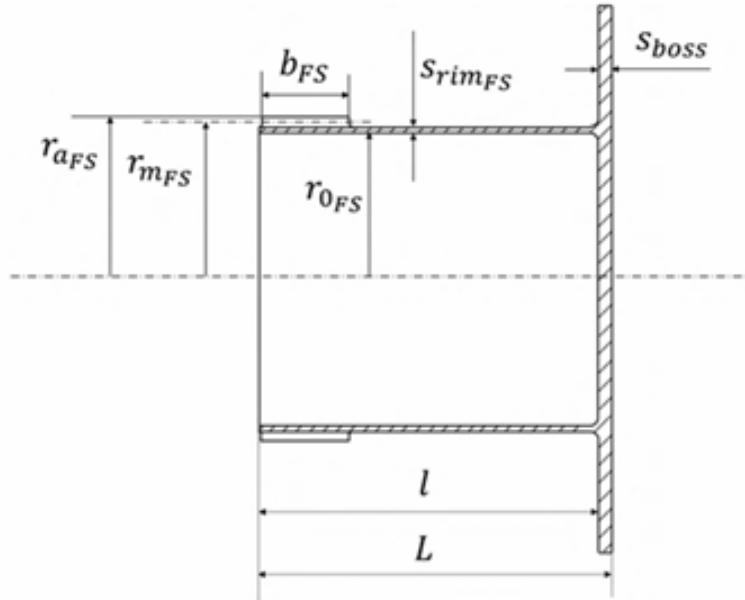


Figura 1.4: Sezione della flexspline non deformata

La geometria della circular spline, infine, può essere assimilata a quella di una corona cilindrica a parete spessa, sulla quale è ricavata una dentatura interna con modulo pari a quello dei denti della flexspline ma in numero superiore per il maggiore raggio. Il profilo dei denti non è semplicemente a doppio arco (come nella flexspline), ma viene costruito per essere coniugato a quello della flexspline, così da garantire un corretto ingranamento e un rapporto di trasmissione costante, evitando scorimenti tra i denti [16].

Grandezza	Notazione	Valore
Raggio interno del cilindro	$r_{0FS}$	23,63 mm
Raggio alla testa dei denti	$r_{aFS}$	25 mm
Lunghezza dei denti	$b_{FS}$	12,1 mm
Lunghezza della rim	$l$	30,6 mm
Spessore della flangia	$s_{boss}$	15,19 mm
Spessore della rim	$s_{rimFS}$	0,875 mm
Numero dei denti	$Z_{FS}$	200

Tabella 1.2: Principali dimensioni della flexspline

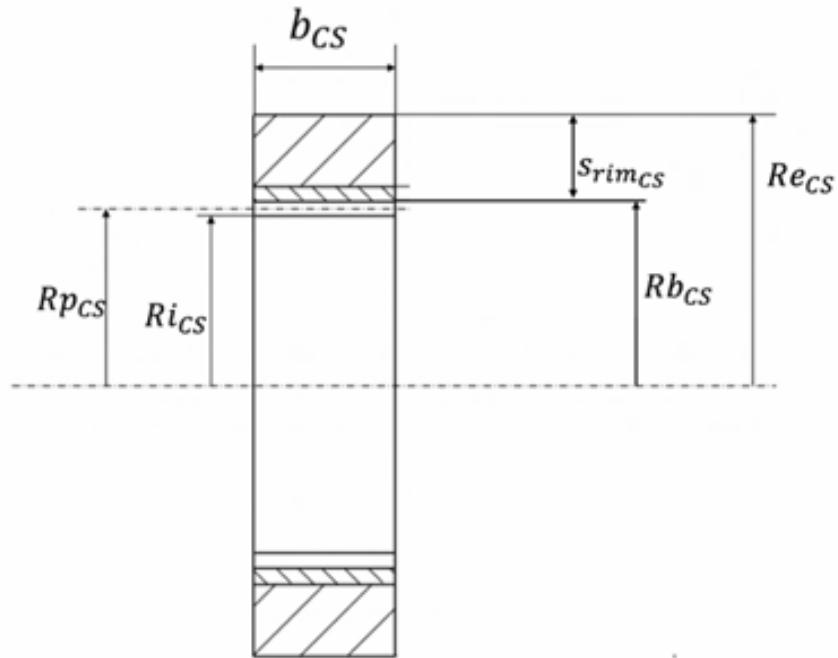


Figura 1.5: Sezione della circular spline

Grandezza	Notazione	Valore
Raggio del cilindro	$R_{CS}$	24,75 mm
Raggio della testa dei denti	$r_{iCS}$	24,15 mm
Lunghezza dei denti	$b_{CS}$	12,1 mm
Spessore della rim	$s_{rimCS}$	2 mm
Numero dei denti	$Z_{CS}$	202

Tabella 1.3: Principali dimensioni della circular spline

## Capitolo 2

# Analisi statica del riduttore armonico

In questo capitolo viene affrontato il calcolo delle condizioni iniziali del modello del riduttore armonico, necessarie per garantire una corretta simulazione del suo comportamento dinamico. Tali condizioni derivano dalla soluzione della configurazione di equilibrio statico del sistema una volta inserito il Wave Generator all'interno della Flexspline e quest'ultima all'interno della Circular Spline, modellandone le interazioni. Dopo aver definito il modello matematico che descrive le interazioni tra i componenti, se ne presenterà la risoluzione numerica implementata in ambiente MATLAB<sup>®</sup>.

### 2.1 Descrizione del modello matematico

La soluzione della formulazione statica per la simulazione del riduttore armonico è stata sviluppata a partire da un modello matematico coincidente con quello che verrà utilizzato per la fase di rotazione, considerando però condizioni di equilibrio statico. L'approccio seguito è di tipo vettoriale: le incognite che descrivono le coordinate dei punti della ralla esterna e dei denti della flexspline vengono messe in relazione alle rigidezze ed alle forze

agenti nel sistema. Queste ultime dipendono quindi a loro volta dalle incognite stesse o dalle variabili indipendenti, ossia le coordinate della ralla interna.

Per costruire il modello si procede dall'interno verso l'esterno: si analizza prima la deformazione del cuscinetto, modellando le sfere come molle non lineari con contatto hertziano, successivamente si sfruttano questi risultati come condizioni iniziali per valutare l'interazione con la flexspline concludendo con la modellazione delle forze di ingranamento tra flexspline e circular spline.

Come descritto nel Capitolo 1, il cuscinetto è costituito da una ralla interna, nove sfere e una ralla esterna. La ralla interna viene modellata come un'ellisse ideale, sulla quale è imposto lo spostamento derivante dalla camma ellittica del Wave Generator. Le nove sfere sono rappresentate come elementi elastici secondo la teoria del contatto hertziano, in grado di sviluppare forze di compressione in funzione della deformazione. Infine, la ralla esterna è discretizzata in nove settori, ciascuno centrato su un punto di contatto con le sfere, connessi tra loro tramite un modello molla-smorzatore che garantisce l'integrità della ralla esterna e l'omogeneizzazione della deformazione tra un settore e l'altro.

In questo primo modello, su ciascuno dei nove settori ( $i = 1, \dots, 9$ ) appartenenti alla ralla esterna agiscono le forze elastiche dovute alle sfere  $F_B$  in direzione normale all'ellisse  $\alpha_N$  e le forze di richiamo tra settori adiacenti  $F_{i\pm 1}$  dirette lungo la congiungente tra i settori.

Secondo la teoria del contatto Hertziano la forza  $F_B$  è calcolabile come fatto in [11]

$$F_B = K_b \cdot \delta^\gamma \cdot h(\delta) \quad (2.1)$$

in cui:

- $K_b$  è la rigidezza della sfera

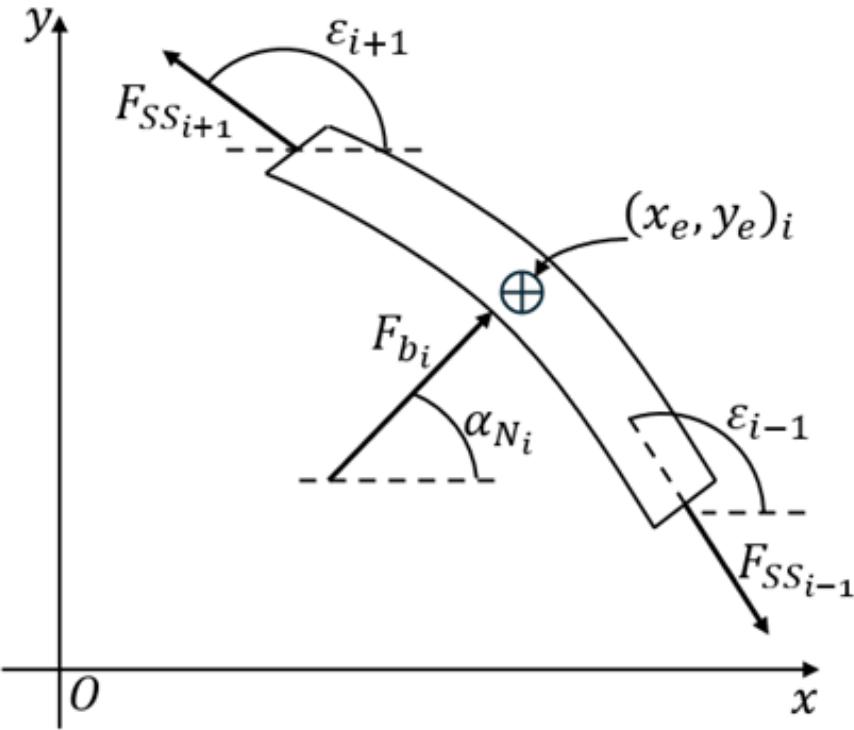


Figura 2.1: Diagramma di corpo libero di un settore della ralla esterna del cuscinetto

- $\delta = \sqrt{(x_e - x_i)^2 + (y_e - y_i)^2} - d_b$  è la deformazione ideale della sfera, in cui  $d_b$  è il suo diametro in condizioni indeformate.
- $\gamma = \frac{3}{2}$  è l'esponente del contatto Hertziano
- $h(\delta) = \begin{cases} 1 & \text{se } \delta < 0 \\ 0 & \text{se } \delta \geq 0 \end{cases}$  è la funzione di attivazione del contatto

e l'angolo normale all'ellisse è calcolabile come  $\alpha_{N_i} = \arctan \left( \frac{a_i^2 y_i}{b_i^2 x_i} \right)$ .

Le forze tra settori adiacenti sono modellate secondo un modello elasto-viscoso:

$$F_{SS_{i\pm 1}} = k_{i\pm 1} \cdot \delta_{i\pm 1} + c_{i\pm 1} \cdot \dot{\delta}_{i\pm 1} \quad (2.2)$$

in cui:

- $k_{i\pm 1}$  è la rigidezza tra settori adiacenti
- $\delta_{i\pm 1} = \sqrt{(x_i - x_{i\pm 1})^2 + (y_i - y_{i\pm 1})^2} - \delta_0$  è la deformazione tra settori adiacenti e  $\delta_0$  la distanza tra settori in condizioni non deformate
- $c_{i\pm 1}$  è lo smorzamento tra settori adiacenti
- $\dot{\delta}_{i\pm 1} = (\dot{x}_{i\pm 1} - \dot{x}_i) \cdot \cos(\varepsilon_{i\pm 1}) + (\dot{y}_{i\pm 1} - \dot{y}_i) \cdot \sin(\varepsilon_{i\pm 1})$  è la velocità relativa tra due settori
- $\varepsilon_{i\pm 1} = \arctan\left(\frac{y_{i\pm 1} - y_i}{x_{i\pm 1} - x_i}\right)$  è l'angolo tra la congiungente due settori e l'asse orizzontale

Le condizioni di equilibrio dinamico si possono scrivere come:

$$\begin{aligned} m_S \ddot{x} &= F_B \cdot \cos(\alpha_N) + F_{SS_{+1}} \cdot \cos(\varepsilon_{+1}) + F_{SS_{-1}} \cdot \cos(\varepsilon_{-1}) \\ m_S \ddot{y} &= F_B \cdot \sin(\alpha_N) + F_{SS_{+1}} \cdot \sin(\varepsilon_{+1}) + F_{SS_{-1}} \cdot \sin(\varepsilon_{-1}) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Che nel caso statico si riducono a:

$$\begin{aligned} 0 &= F_B \cdot \cos(\alpha_N) + k_{+1} \cdot \delta_{+1} \cdot \cos(\varepsilon_{+1}) + k_{-1} \cdot \delta_{-1} \cdot \cos(\varepsilon_{-1}) \\ 0 &= F_B \cdot \sin(\alpha_N) + k_{+1} \cdot \delta_{+1} \cdot \sin(\varepsilon_{+1}) + k_{-1} \cdot \delta_{-1} \cdot \sin(\varepsilon_{-1}) \end{aligned} \quad (2.4)$$

La soluzione di questo sistema permette il calcolo delle condizioni di equilibrio del wave generator all'inserimento della camma ellittica. Successivamente, il modello è stato arricchito includendo l'interfaccia con la flexspline: la ralla esterna è stata ricostruita con una discretizzazione da 200 punti, ottenuti interpolando i raggi calcolati nei nove punti di contatto tramite una spline cubica, così da garantire la continuità della derivata prima. Su ciascuno di questi punti viene modellato il contatto elastico con il corrispondente dente della flexspline, seguendo lo schema già proposto in [3].

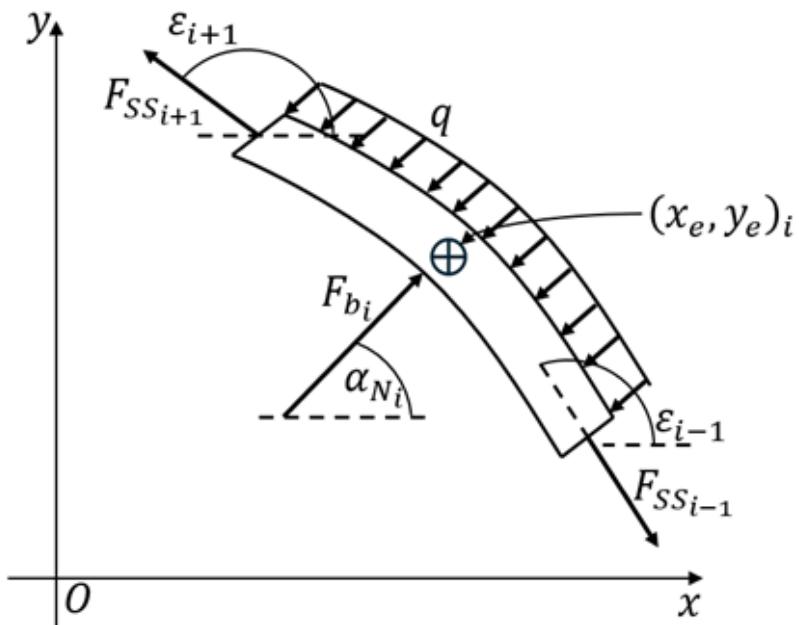


Figura 2.2: Diagramma di corpo libero di un settore di ralla esterna, con interazione della flexpline

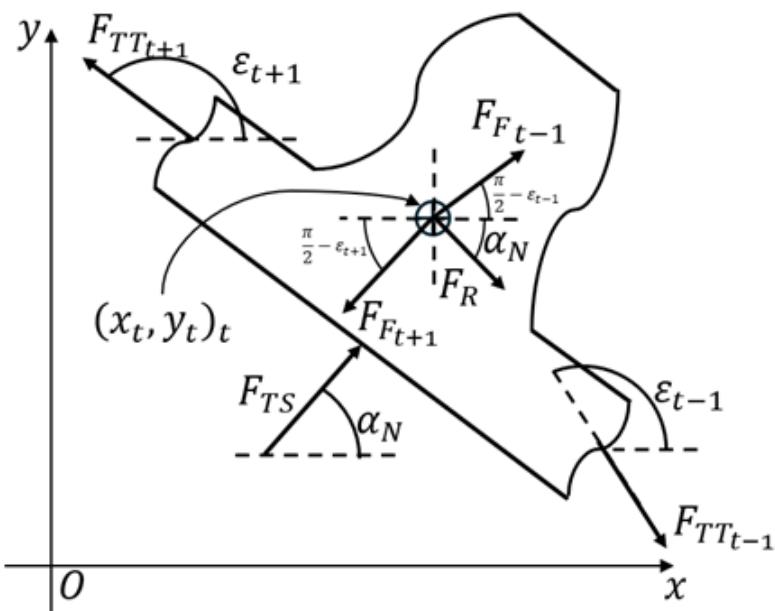


Figura 2.3: Diagramma di corpo libero di un dente di flexpline

### 2.1.1 Modellazione dell’interazione tra Wave Generator e Flexspline

In questo modello si considera la discretizzazione della flexspline coincidente con i denti ( $t = 1 \dots Z_{FS}$ ) e quindi su ogni dente le forze agenti: di interazione con il settore sottostante  $F_{TS}$ , le interazioni tra denti adiacenti  $F_{TTt\pm 1}$ , un coppia di forze dovute resistenza flessionale  $F_{Ft\pm 1}$ , una forza dovuta alla resistenza torsionale  $F_R$  poiché la rotazione della flexspline è vincolata, come visto in. Si considera quindi su ogni settore un carico distribuito  $q = \frac{\sum F_{TS}}{L}$ , dove  $L$  rappresenta la lunghezza del settore. Questo carico distribuito equivale a un carico concentrato di intensità  $\sum F_{TS}$  applicato nel centro del settore.

Operativamente, calcolato il vettore  $\mathbf{F}_{TS}$  di  $Z_{FS}$  elementi (forze di interazione dente-settore), si determina il vettore  $\sum \mathbf{F}_{TS}$  di  $n_b$  elementi attraverso l’operazione:

$$\sum \mathbf{F}_{TS} = -\mathbf{Q} \cdot \mathbf{F}_{TS} \quad (2.5)$$

dove  $\mathbf{Q}$  è una matrice di assegnazione di dimensione  $[n_b \times Z_{FS}]$ , inizializzata a zeri, che ha lo scopo di mappare ciascun dente  $j$  (colonna) al settore  $i$  (riga) angolarmente più vicino.

La matrice viene costruita iterando su ogni colonna  $j$  (per  $j = 1 \dots Z_{FS}$ ): si calcolano le differenze angolari tra la posizione del dente  $j$  e quelle di tutti i  $n_b$  settori; si individua quindi l’indice di riga  $i$  che corrisponde alla minima differenza e si imposta  $\mathbf{Q}(i, j) = 1$ .

In questo modo, ogni colonna contiene un unico ‘1’, definendo così la ripartizione delle forze tra i diversi settori della ralla esterna.

L’interazione tra dente e settore è modellata con un modello elasto-viscoso che agisce solo quando i corpi si compenetrano, come era la forza  $F_B$ , l’interazione tra denti adiacenti della flexspline è analoga a quella tra settori adiacenti. Si introduce inoltre una forza di richiamo flessionale, fondamentale per replicare il comportamento fisico reale del sistema. Questa componente modella la rigidezza intrinseca della rim della flexspline,

la quale si oppone naturalmente alla flessione relativa tra i denti. Senza questa forza, volendo costringere la flexspline a seguire istantaneamente la deformazione ellittica, sarebbero necessari valori di smorzamento tra i denti eccessivamente alti. Tali smorzamenti, tuttavia, provocherebbero ritardi dinamici, portando a penetrazioni eccessive e possibili "falsi ingranamenti" con la Circular Spline.

Per evitare questo comportamento irrealistico (simile a una catena appoggiata) e replicare l'effettiva elasticità del componente, la coppia di richiamo flessionale è definita proporzionale alla variazione dell'angolo tra due denti adiacenti:

$$F_{Fi\pm 1} = \frac{K_{Fi} \cdot \eta + c_{Fi} \cdot \dot{\eta}}{\delta_{i\pm 1}} \quad (2.6)$$

in cui:

- $K_{Fi}$  è un valore di rigidezza flessionale
- $\eta = \varepsilon_i - \varepsilon_{i0}$  è la variazione dell'angolo tra due denti
- $c_{Fi}$  è un valore di smorzamento flessionale
- $\delta_{i\pm 1}$  è la distanza tra il centro di massa di due denti

Sarà diretta perpendicolarmente alla congiungente tra i due denti,  $\frac{\pi}{2} \mp \varepsilon_{\pm 1}$  rispetto l'asse orizzontale.

La forza di richiamo torsionale serve invece a modellare il vincolo della flexspline ed ha quindi modulo proporzionale alla variazione dell'angolo tra il dente e l'origine del sistema di riferimento, questa forza sarà presente solo durante la rotazione del riduttore.

$$F_R = \frac{K_T \cdot \Delta\psi + c_T \cdot \frac{V_R}{\rho_t}}{\rho_t} \quad (2.7)$$

in cui:

- $K_T$  è un valore di rigidezza torsionale

- $\Delta\psi = \psi - \psi_0$  è la variazione dell'angolo del dente misurata dall'origine del sistema di riferimento rispetto alle condizioni statiche, dopo l'inserimento del wave generator ma precedentemente alla rotazione
- $c_T$  è un valore di smorzamento torsionale
- $V_R$  è la velocità del dente in direzione tangente all'ellisse
- $\rho_t$  è la distanza del dente dal centro dell'ellisse

Le forze di ingranamento con i denti della circular spline alla destra e alla sinistra  $F_m^{dx}$  e  $F_m^{sx}$  saranno presenti nel modello di rotazione completo e verranno descritte nel paragrafo 2.1.2.

Le equazioni di equilibrio sono state quindi formulate a partire dai diagrammi di corpo libero dei settori della ralla esterna e dei denti della flexspline.

$$\begin{aligned}
 m_S \ddot{x}_S &= F_B \cdot \cos(\alpha_N) + F_{SS_{+1}} \cdot \cos(\varepsilon_{+1}) + F_{SS_{-1}} \cdot \cos(\varepsilon_{-1}) - \sum F_{TS} \cdot \cos(\alpha_N) \\
 m_S \ddot{y}_S &= F_B \cdot \sin(\alpha_N) + F_{SS_{+1}} \cdot \sin(\varepsilon_{+1}) + F_{SS_{-1}} \cdot \sin(\varepsilon_{-1}) - \sum F_{TS} \cdot \sin(\alpha_N) \\
 m_T \ddot{x}_T &= F_{TS} \cdot \cos(\alpha_N) + F_{TT_{+1}} \cdot \cos(\varepsilon_{+1}) + F_{TT_{-1}} \cdot \cos(\varepsilon_{-1}) - F_{F_{+1}} \cdot \sin(\varepsilon_{+1}) \\
 &\quad - F_{F_{-1}} \cdot \sin(\varepsilon_{-1}) - F_R \cdot \sin(\alpha_N) + F_{m,x}^{dx} + F_{m,x}^{sx} \\
 m_T \ddot{y}_T &= F_{TS} \cdot \sin(\alpha_N) + F_{TT_{+1}} \cdot \sin(\varepsilon_{+1}) + F_{TT_{-1}} \cdot \sin(\varepsilon_{-1}) + F_{F_{+1}} \cdot \cos(\varepsilon_{+1}) \\
 &\quad - F_{F_{-1}} \cdot \cos(\varepsilon_{-1}) - F_R \cdot \cos(\alpha_N) + F_{m,y}^{dx} + F_{m,y}^{sx}
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Che nel caso statico si riducono a:

$$\begin{aligned}
 0 &= F_B \cdot \cos(\alpha_N) + k_{+1} \cdot \delta_{+1} \cdot \cos(\varepsilon_{+1}) + k_{-1} \cdot \delta_{-1} \cdot \cos(\varepsilon_{-1}) - \sum F_{TS} \cdot \cos(\alpha_N) \\
 0 &= F_B \cdot \sin(\alpha_N) + k_{+1} \cdot \delta_{+1} \cdot \sin(\varepsilon_{+1}) + k_{-1} \cdot \delta_{-1} \cdot \sin(\varepsilon_{-1}) - \sum F_{TS} \cdot \sin(\alpha_N) \\
 0 &= F_{TS} \cdot \cos(\alpha_N) + k_{T+1} \cdot (\delta_{T+1} - \delta_0) \cdot \cos(\varepsilon_{+1}) + k_{T-1} \cdot (\delta_{T-1} - \delta_0) \cdot \cos(\varepsilon_{-1}) \\
 &\quad - \frac{K_F \cdot \eta_{+1}}{\delta_{T+1}} \cdot \sin(\varepsilon_{+1}) - \frac{K_F \cdot \eta_{-1}}{\delta_{T-1}} \cdot \sin(\varepsilon_{-1}) \\
 0 &= F_{TS} \cdot \sin(\alpha_N) + k_{T+1} \cdot (\delta_{T+1} - \delta_0) \cdot \sin(\varepsilon_{+1}) + k_{T-1} \cdot (\delta_{T-1} - \delta_0) \cdot \sin(\varepsilon_{-1}) \\
 &\quad + \frac{K_F \cdot \eta_{+1}}{\delta_{T+1}} \cdot \cos(\varepsilon_{+1}) - \frac{K_F \cdot \eta_{-1}}{\delta_{T-1}} \cdot \cos(\varepsilon_{-1})
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

La risoluzione del sistema, da 418 incognite complessive di cui nove coppie per le sfere e 200 coppie per i denti, consente di determinare la configurazione iniziale del sistema composto da Wave Generator e Flexspline, si procede infine modellando le forze di ingranamento tra denti della Flexspline e Circular Spline, al fine di poter considerare un ulteriore grado di libertà del sistema: la rotazione della Circular Spline.

### 2.1.2 Modellazione dell'interazione tra Flexspline e Circular Spline

La Circular Spline viene modellata come un corpo rigido che ha la possibilità di ingranare con la Flex Spline, la sua equazione di equilibrio alla rotazione sarà:

$$J_{CS} \cdot \ddot{\theta}_{CS} = \sum (F_m \cdot \cos(\beta - \delta_m) \cdot \rho_{CS}) - c_{CS} \dot{\theta}_{CS} - T_R \tag{2.10}$$

in cui:

- $J_{CS}$  è l'inerzia della Circular Spline attorno all'asse di rotazione
- $\delta_m$  è definito come la differenza tra gli angoli che, rispetto al centro del sistema, individuano rispettivamente il punto di contatto e il centro di massa del dente [3].
- $\rho_{CS}$  è il raggio primitivo della Circular Spline

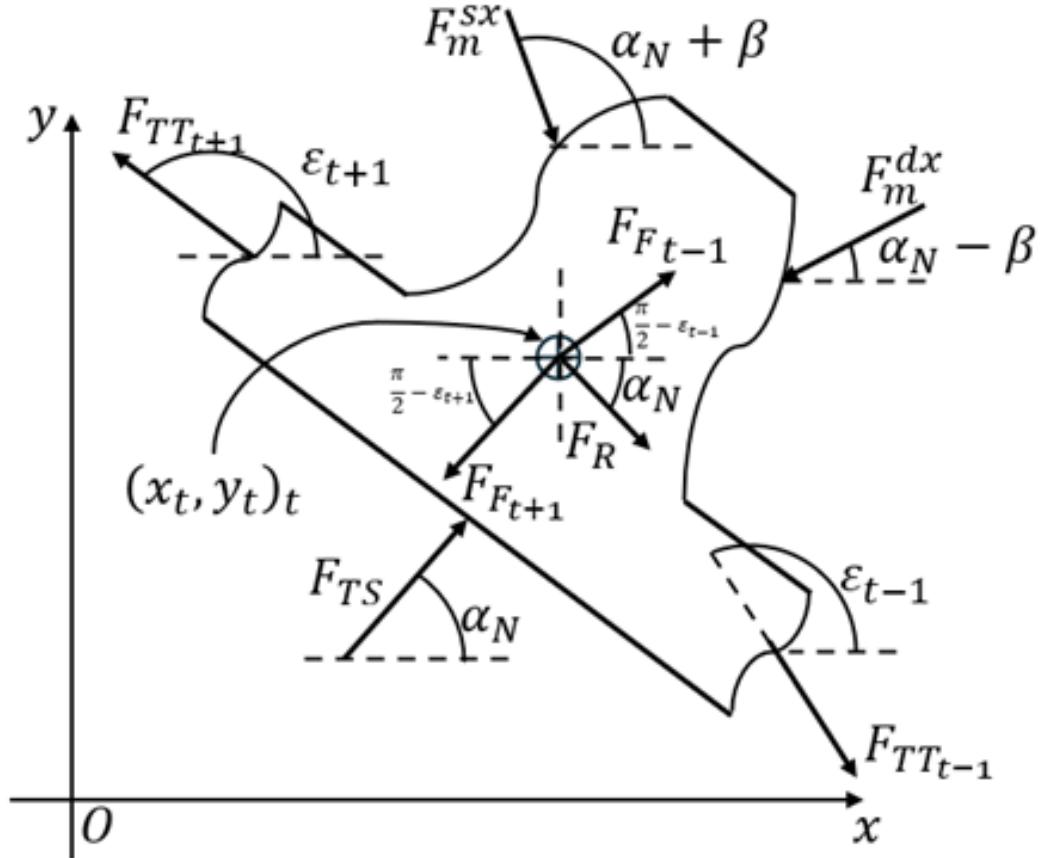


Figura 2.4: Diagramma di corpo libero di un dente di flex spline, con interazione della circular spline

- $T_R$  è la coppia di carico a valle del riduttore

Questa condizione in situazione statica, ed assenza di carico, si riduce a:

$$\sum (F_m \cdot \cos(\beta - \delta_m)) = 0 \quad (2.11)$$

Per valutare le forze di interazione tra i denti è stato ricostruito il modello proposto in [3]: per ciascun dente della *Flexspline* vengono individuati i denti della *Circular Spline* angolarmente più prossimi, denominati rispettivamente dente destro e dente sinistro

potenzialmente in ingranamento.

A partire dal punto di discretizzazione del dente della *Flexspline*, viene quindi ricostruito il profilo a doppio arco del dente, discretizzato in  $5N$  punti:  $N$  punti per ciascun arco delle due facce laterali e  $N$  punti per la testa del dente. La compenetrazione tra i profili dei denti viene valutata come la distanza tra due punti appartenenti alle rispettive facce dei denti, individuati dalla media degli indici dei punti in compenetrazione.

Operativamente, il calcolo di  $F_m$  può essere così sintetizzato:

- per ogni punto della *Flexspline* di coordinate  $(x_t, y_t)$  si individuano i denti della Circular Spline più vicini, a destra e a sinistra, di coordinate  $(x_{CS,DX}, y_{CS,DX})$  e  $(x_{CS,SX}, y_{CS,SX})$ ;
- si costruisce il profilo dei denti e li si trasla sulle rispettive coordinate  $(x_t, y_t)$  e  $(x_{CS}, y_{CS})$ , ruotandolo di un angolo  $\alpha_N$  per la *Flexspline* e  $\alpha_N + \pi$  per la *Circular Spline*;
- si calcola la differenza lungo  $x$  e  $y$  tra i punti dei due profili;
- si conferma la presenza di compenetrazione nel caso in cui almeno una di tali differenze sia pari a zero;
- infine, il valore di compenetrazione  $\delta$  viene assunto come la distanza tra i punti le cui coordinate corrispondono alla media degli indici dei punti in compenetrazione;
- Si calcola quindi  $F_m = K_{FS_{CS}} \cdot \delta$

Nelle figure 2.5 e 2.6 sono mostrati dei dettagli di Flexspline e Circular Spline all'interno del secondo e terzo quadrante in condizioni di equilibrio, è possibile notare il contatto e la compenetrazione rispettivamente sulle facce destre e sinistre dei denti più vicini al semiasse maggiore denti.

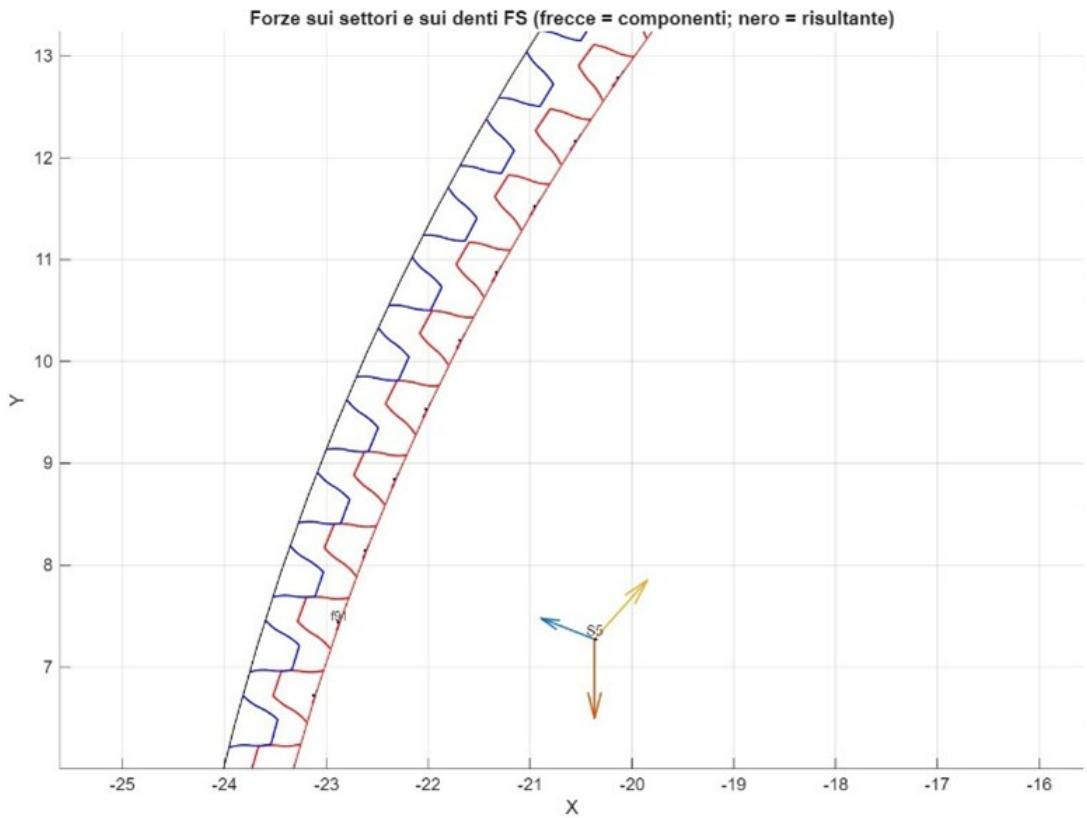


Figura 2.5: Esempio di visualizzazione della compenetrazione tra denti con ingranamento destro sul settore 5

Avendo descritto tutte le forze in gioco è ora possibile procedere con la ricerca delle condizioni di equilibrio iniziali, a causa delle numerose non linearità inserite nella modellazione si affiderà il problema ad un risolutore basato sulla minimizzazione del residuo con algoritmo ai minimi quadrati.

## 2.2 Risultati del calcolo delle condizioni iniziali

Una volta definite le equazioni di equilibrio e il modello matematico che descrive le interazioni tra le componenti del Wave Generator e della Flexspline, è stato necessario risolvere numericamente il sistema non lineare ottenuto per determinare le condizioni

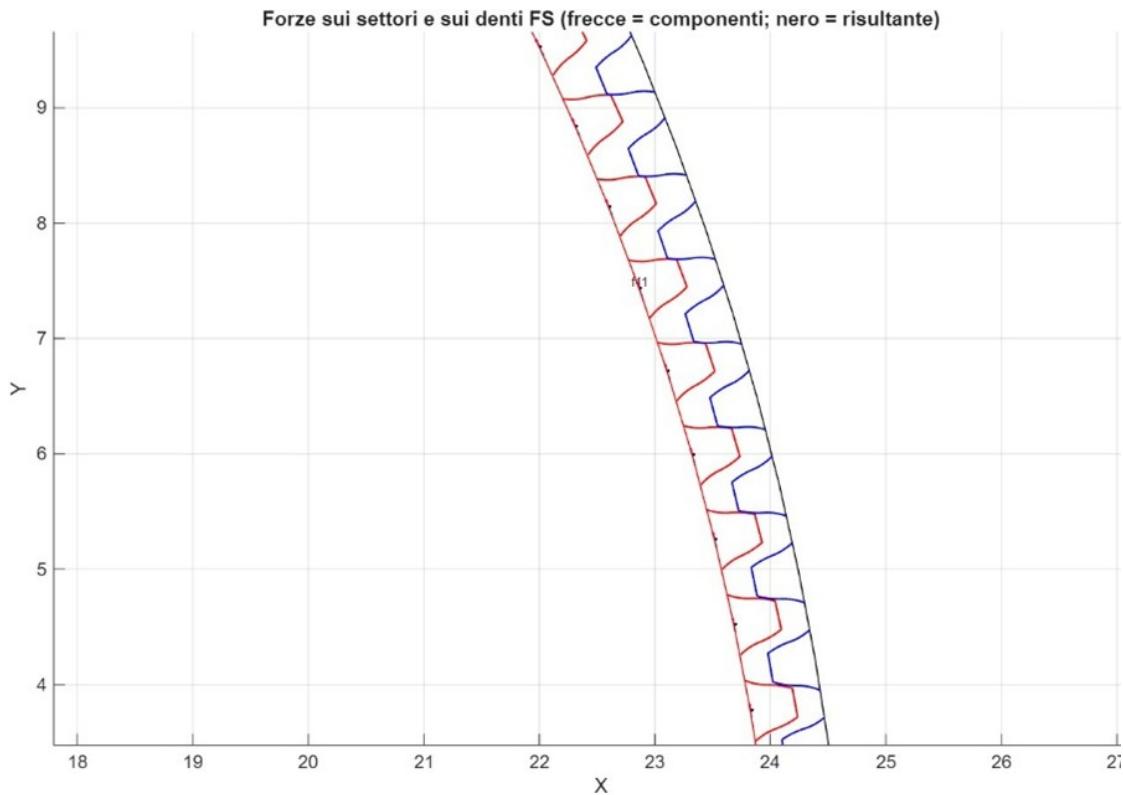


Figura 2.6: Esempio di visualizzazione della compenetrazione tra denti con ingranamento sinistro nel primo quadrante

iniziali di equilibrio statiche.

Il problema è stato formulato come un sistema di equazioni che descrive le forze risultanti su ogni punto della discretizzazione, in cui le incognite sono le coordinate dei punti appartenenti alla ralla esterna e ai denti della *Flexspline*. A causa della natura non lineare delle forze di contatto (in particolare quelle modellate secondo la teoria hertziana) e dell'elevato numero di variabili, il sistema risulta fortemente accoppiato e sensibile alla scelta delle condizioni iniziali.

Per la risoluzione è stato adottato il solver *lsqnonlin* di *MATLAB*<sup>®</sup>, preferendolo a *fsolve* in quanto consente infatti di formulare il problema come una minimizzazione nel senso dei minimi quadrati della norma delle equazioni residue, garantendo una maggiore robustezza numerica anche in presenza di non linearità marcate e fornendo una migliore

gestione dei limiti e dei vincoli sulle variabili [17].

Tra gli algoritmi disponibili all'interno del solver `lsqnonlin` sono stati analizzati i metodi *trust-region-reflective*, *Levenberg–Marquardt*, e *interior-point*, confrontandone l'efficacia sul problema in esame.

L'algoritmo *trust-region-reflective* si basa sulla risoluzione iterativa di sottoproblemi quadratici all'interno di una regione di fiducia (*trust region*), nella quale il modello locale approssima in modo accettabile la funzione obiettivo. Ogni iterazione richiede la costruzione e la risoluzione di un sistema lineare associato alla matrice hessiana o alla sua approssimazione, con aggiornamenti della dimensione della regione di fiducia in base al rapporto tra riduzione effettiva e prevista della funzione obiettivo. Questo approccio, pur essendo robusto e ampiamente utilizzato per problemi vincolati da limiti superiori e inferiori, tende a soffrire di tempi di convergenza elevati e di instabilità in presenza di forti non linearità e di residui di piccola entità, come avviene nel modello considerato [18].

Il metodo *Levenberg–Marquardt* (LM) rappresenta invece un compromesso tra il metodo di Gauss–Newton e la discesa del gradiente, introducendo un parametro di regolarizzazione che stabilizza l'aggiornamento in prossimità di regioni non lineari o mal condizionate. Questo algoritmo è particolarmente efficiente per problemi di dimensioni moderate e con jacobiani densi, ma tende a mostrare difficoltà di convergenza per problemi di larga scala con struttura sparsa e numerosi vincoli [17]. Nei test preliminari condotti, il metodo LM ha mostrato una sensibilità marcata alla scelta delle condizioni iniziali e una maggiore probabilità di convergenza verso soluzioni localmente non fisiche.

L'algoritmo *interior-point*, infine, si basa su una formulazione in cui i vincoli del problema vengono incorporati nella funzione obiettivo attraverso funzioni barriera, risolvendo iterativamente le condizioni di Karush–Kuhn–Tucker mediante passi Newton modificati. Questo approccio consente di mantenere le variabili entro i limiti ammissibili e di gestire vincoli non lineari o sistemi altamente accoppiati.

Nonostante i maggiori tempi di computazione richiesti, l'algoritmo *interior-point* ha fornito i risultati più accurati e stabili, garantendo una convergenza regolare e una soluzione coerente con l'equilibrio statico atteso. Le simulazioni hanno evidenziato che tale metodo permette di risolvere il problema senza divergenze o oscillazioni numeriche, preservando la continuità delle forze di contatto tra i vari componenti: per questo motivo è stato scelto come algoritmo definitivo per la risoluzione del modello completo.

Nel campo dell'ottimizzazione meccanica e del contatto elastico, applicazioni analoghe confermano l'efficacia dei metodi *interior-point* per la risoluzione di problemi di tipo hertziano [19].

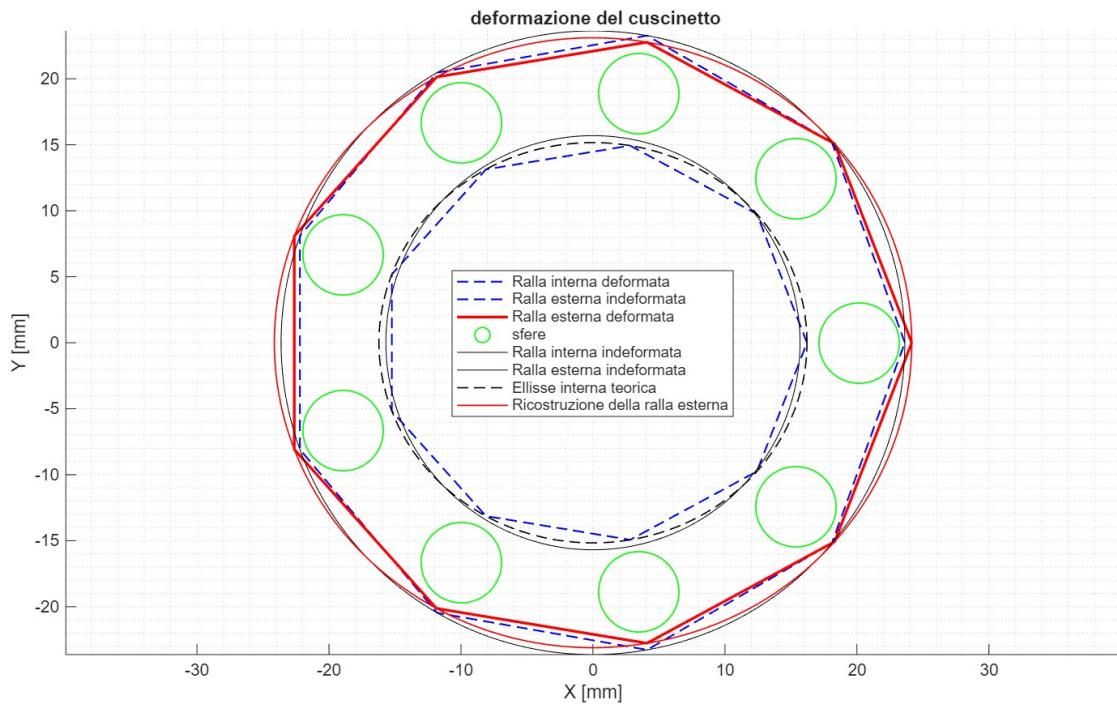


Figura 2.7: Rappresentazione dei risultati del problema della deformazione del cuscinetto isolato

La Figura 2.7 mostra la configurazione di equilibrio della ralla esterna del cuscinetto, ottenuta risolvendo il sistema in 18 incognite mediante il solver `lsqnonlin` tramite algoritmo *interior-point*. Il confronto tra le geometrie prima e dopo la deformazione mostra

la deformazione elastica subita dalla ralla in corrispondenza delle zone di contatto con le sfere. La deviazione rispetto alla geometria iniziale risulta coerente con l'andamento teorico previsto: la ralla si flette localmente in prossimità delle forze di contatto, mantenendo tuttavia una forma pressoché circolare nelle regioni non sollecitate che vengono ricostruite sfruttando un'interpolazione che fa uso di spline cubiche, in modo da garantire continuità nella derivata.

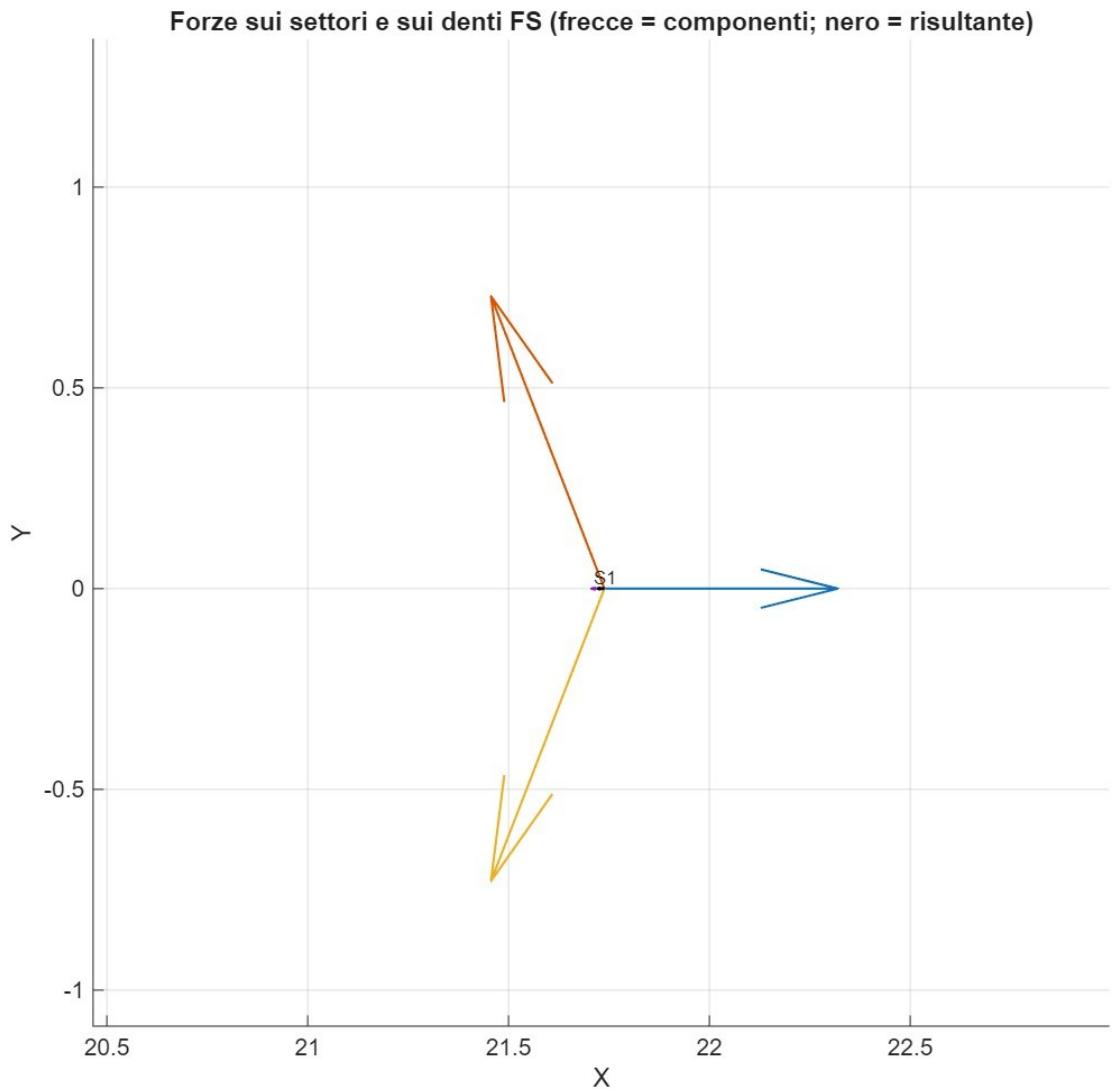


Figura 2.8: Equilibrio delle forze sul settore 1, in blu la forza elastica dalla sfera, in arancione e rosso le forze dai settori adiacenti

Questo comportamento conferma la corretta distribuzione del carico fra le sfere e la validità del modello nel descrivere la risposta elastica della ralla. Il risultato ottenuto fornisce quindi una base di riferimento, nonchè il punto iniziale, per la successiva ricerca delle condizioni di equilibrio tra Flexspline e Circular Spline.

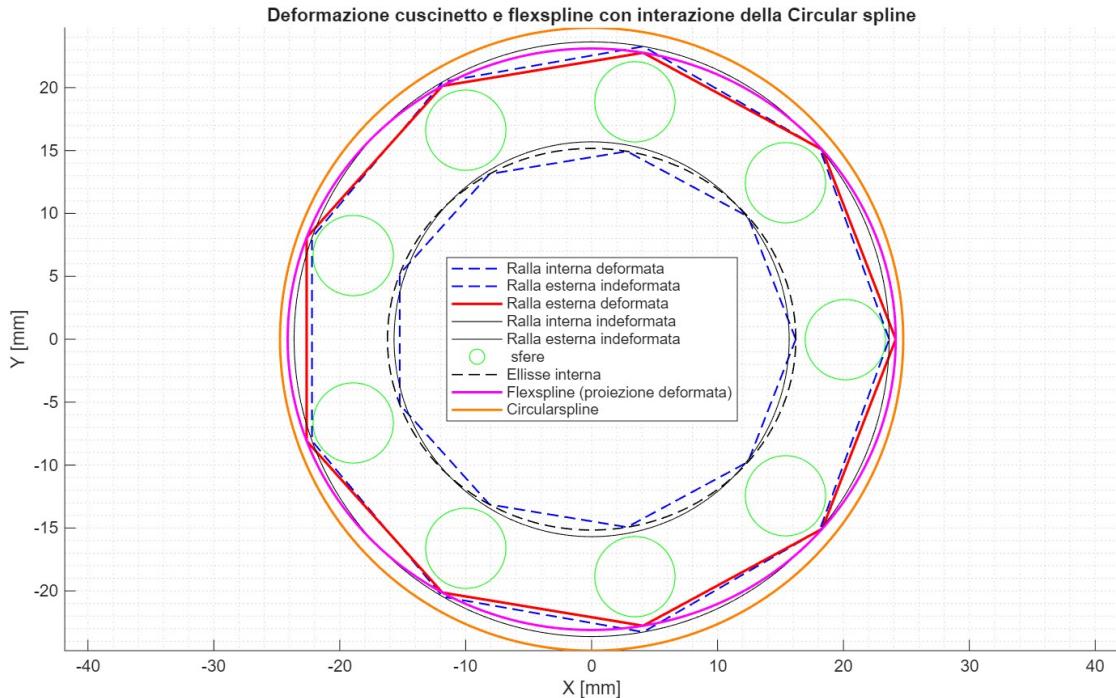


Figura 2.9: Rappresentazione dei risultati del calcolo delle condizioni iniziali nel modello completo

Dall’analisi dei risultati del calcolo delle condizioni iniziali è possibile trarre alcune conclusioni riguardanti la distribuzione e il modulo delle forze nel sistema complessivo, comprendente il cuscinetto deformabile, la *Flexspline* e la *Circular Spline*.

Tutte le nove sfere risultano compresse, come previsto, in modo da generare reazioni radiali che bilanciano le forze agenti sui corrispondenti settori della ralla esterna. La compressione delle sfere rappresenta il principale meccanismo di trasmissione della deformazione imposta dalla camma ellittica del *Wave Generator* verso l’anello esterno, consentendo al sistema di raggiungere la condizione di equilibrio statico. Le reazioni di

contatto, distribuite in modo simmetrico lungo la circonferenza, mostrano un andamento coerente con la simmetria del modello, con valori massimi in corrispondenza dei punti di maggiore eccentricità della camma.

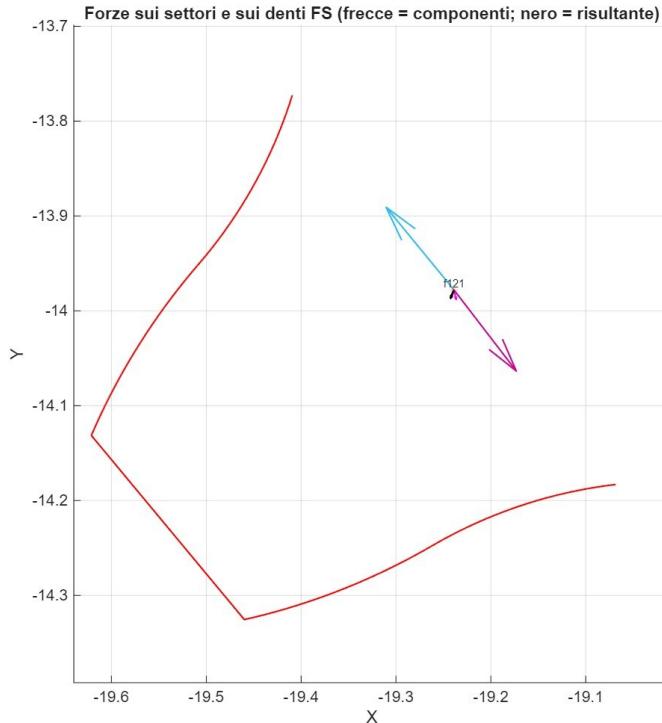


Figura 2.10: Equilibrio delle forze sul dente n.121

In equilibrio, anche le forze di richiamo tra settori adiacenti e quelle di contatto tra i settori e i denti della *Flexspline* contribuiscono a mantenere la continuità geometrica della ralla esterna. Le interazioni tra settori agiscono lungo le congiungenti tra i centri dei settori, compensando le componenti tangenziali delle reazioni delle sfere e garantendo la stabilità della forma ellittica assunta dall'anello esterno sotto deformazione.

Le forze di ingranamento tra *Flexspline* e *Circular Spline* risultano localizzate sul semiasse maggiore dell'ellisse, in accordo con il principio di funzionamento del riduttore armonico. Il modulo di tali forze risulta contenuto, poiché la deformazione imposta dal Wave Generator viene in larga parte assorbita dalle rigidezze distribuite del sistema, in

particolare da quella hertziana delle sfere e dalla rigidezza flessionale dei denti della Flexspline. Inoltre, le forze di ingranamento presentano un andamento simmetrico rispetto all’asse maggiore: tale simmetria implica che la risultante delle forze tangenziali lungo la circonferenza è prossima a zero e che, di conseguenza, la Circular Spline non tende a ruotare. Questo comportamento conferma che il modello in equilibrio statico non presenta coppie spurie sull’albero d’uscita e rispetta la condizione di simmetria imposta dal sistema.

Si osserva, infine, che il modello risulta particolarmente sensibile ai parametri di rigidezza del contatto tra sfere, delle connessioni tra settori e della flessione dei denti. Piccole variazioni di questi parametri possono modificare in modo apprezzabile la distribuzione delle forze e il grado di deformazione locale, aspetto che riveste un ruolo centrale nell’ottica delle applicazioni di *Prognostics and Health Monitoring* basate sull’analisi delle forze di contatto e delle loro variazioni nel tempo, per questo motivo saranno necessari raffinati lavori di tuning dei parametri che garantiranno realismo e funzionalità al modello finale.



## Capitolo 3

# Modello di rotazione del riduttore completo

Il presente capitolo descrive l'integrazione del modello del cuscinetto deformabile all'interno del modello completo di riduttore armonico per poi effettuare una analisi di natura dinamica del sistema complesso costituito da cuscinetto deformabile e riduttore armonico.

Il modello risultante, implementato in ambiente *Matlab/Simulink*, consente di simulare il comportamento dinamico del sistema durante la rotazione, includendo le interazioni tra tutte le principali componenti: *Wave Generator*, *Flexspline* e *Circular Spline*. L'obiettivo è quello di ottenere una rappresentazione *high-fidelity* del riduttore, capace di riprodurre in modo realistico gli effetti della deformabilità e dell'elasticità dei singoli elementi, fornendo così una base solida per analisi di diagnostica, prognostica e validazione futura con dati sperimentali. Il modello è stato costruito secondo un approccio *multi-body*, nel quale ogni sottocomponente è rappresentato da un blocco Simulink dedicato e interconnesso agli altri attraverso segnali di forza, spostamento e velocità angolare. La simulazione del comportamento complessivo consente di analizzare in dettaglio la

risposta dinamica del riduttore durante una rotazione imposta, con la possibilità di verificare la coerenza del comportamento statico (condizioni di equilibrio) e di valutare le prestazioni cinematiche e dinamiche del sistema.

Le condizioni iniziali ottenute nel capitolo 2 possono essere quindi inserite all'interno del modello qui presentato, inizialmente con una velocità di rotazione in ingresso nulla per poterne verificare le condizioni di equilibrio e poi ottenere dei risultati sulle prestazioni del riduttore simulando una rotazione in ingresso.

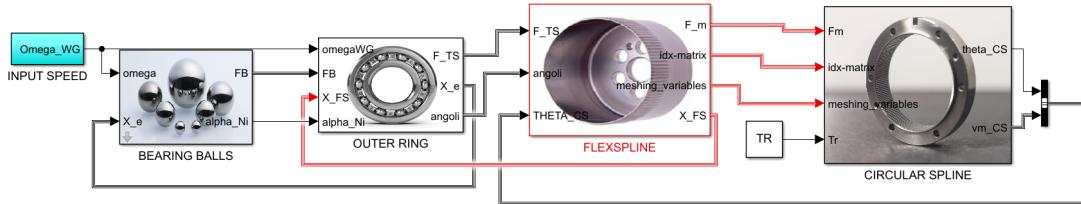


Figura 3.1: Schema del modello Simulink per la rotazione del riduttore armonico completo, con evidenza dei blocchi principali (Sfere, Ralla Esterna, Flexspline, Circular Spline) e dei segnali scambiati.

Lo schema generale del modello, mostrato in Figura 3.1, evidenzia il flusso dei segnali principali e la sequenza di calcolo che collega i diversi blocchi funzionali:

- **Input del modello:** la variabile di ingresso principale è la velocità angolare  $\omega_{WG}$  del *Wave Generator*, applicata alla camma ellittica. Essa rappresenta la sorgente del moto e, attraverso una funzione di trasferimento che viene utilizzata per simulare una partenza graduale, impone le deformazioni sul resto del sistema: la rotazione della camma genera lo spostamento ellittico della ralla interna del cuscinetto, che costituisce il primo elemento dinamico del modello.
- **Blocco *Sfere*:** riceve come input la cinematica della ralla interna e calcola le forze di contatto hertziane e di attrito tra ciascuna sfera e le due ralle. L'output

del blocco è rappresentato dalla forza totale scambiata dalle sfere ( $F_B$ ), che viene trasmessa al blocco successivo e contribuisce all'equilibrio della ralla esterna.

- **Blocco *Ralla Esterna*:** utilizza le forze delle sfere come input, risolvendo per ogni settore della ralla l'equilibrio dinamico in presenza di forze elasto-viscose e delle interazioni con la *Flexspline*. Le posizioni della *Flexspline* vengono ricevute in feedback ed elaborate per calcolare le forze di contatto  $F_{TS}$ . L'output principale di questo blocco è rappresentato dalle coordinate aggiornate della superficie esterna ( $X_e$ ), utilizzate nel calcolo delle interazioni con le sfere.
- **Blocco *Flexspline*:** costituisce il cuore del modello, in quanto elabora le forze in ingresso e le interazioni tra la *Flexspline* e la *Circular Spline*. Riceve in input la forza di contatto proveniente dalla ralla esterna ( $F_{TS}$ ) e le coordinate della *Circular Spline* in feedback. Internamente, per ogni dente, vengono calcolate le forze flessionali e torsionali e la forza d'ingranamento ( $F_m$ ) derivante dal contatto con la *Circular Spline*. L'output di questo blocco è costituito dalle coordinate istantanee dei denti della *Flexspline* ( $X_{FS}$ ), utilizzate come feedback sia per la ralla esterna sia per la *Circular Spline*.
- **Blocco *Circular Spline*:** rappresenta l'anello di chiusura della catena cinematica. Riceve la distribuzione delle forze di ingranamento provenienti dalla *Flexspline* e calcola, in base alle posizioni angolari e ai denti in presa, la coppia risultante agente sulla *Circular Spline*. L'equilibrio rotazionale di quest'ultima consente di determinare l'accelerazione e la velocità angolare in uscita, che rappresentano l'output cinematico del riduttore.

L'interazione tra i blocchi è completamente bidirezionale: le forze di contatto vengono propagate in avanti lungo la catena cinematica, mentre le posizioni e le coordinate

geometriche vengono restituite in feedback ai blocchi precedenti, garantendo un accoppiamento realistico tra tutti i componenti in rispetto del principio di azione-reazione. Questa architettura consente di ottenere un modello numericamente coerente e dinamicamente accoppiato, in grado di riprodurre fedelmente i fenomeni meccanici caratteristici del riduttore armonico.

Nei paragrafi seguenti verranno descritti in dettaglio i principali sottomodelli che compongono l'architettura del riduttore, specificando le equazioni implementate, le ipotesi adottate e la natura dei segnali scambiati tra i vari blocchi.

### 3.1 Modellazione dinamica delle Sfere

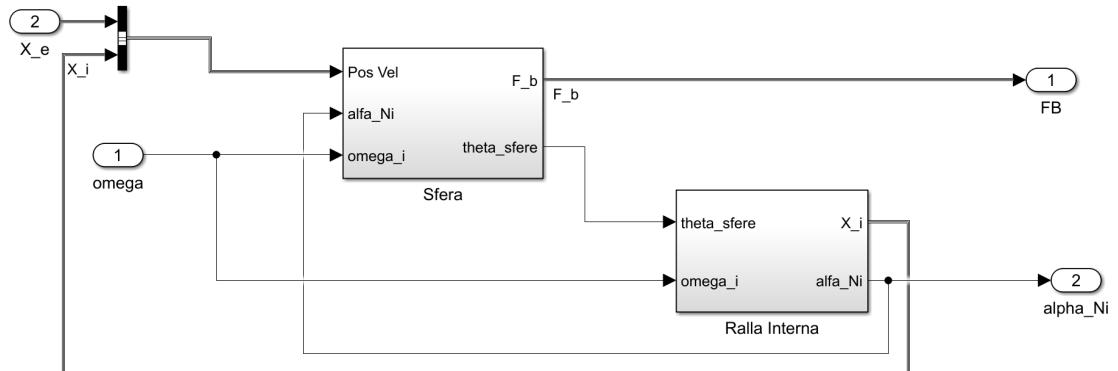


Figura 3.2: Schema del sottomodello Simulink relativo alla dinamica delle sfere e al calcolo dell'interazione con la ralla esterna.

All'interno di questo blocco viene implementata la dinamica delle nove sfere interne al cuscinetto deformabile del *Wave Generator*, come descritto nel Capitolo 2 di [11]. Ogni sfera è modellata come un corpo rigido soggetto alle forze di contatto con la ralla interna e la ralla esterna, quindi alle forze d'attrito e alle eventuali componenti viscose associate alla rotazione. L'equilibrio dinamico viene risolto a ogni passo di integrazione, aggiornando la posizione e la velocità di ciascuna sfera in funzione delle forze agenti.

A ogni step di simulazione vengono ricalcolate le coordinate dei punti di contatto tra le sfere e la ralla esterna. Per ciascuna sfera  $i$  viene risolto l'equilibrio alla traslazione lungo la direzione tangenziale e l'equilibrio alla rotazione, considerando unicamente le forze che effettivamente agiscono sulla sfera, ovvero le componenti di attrito. Le forze di contatto hertziane, pur essendo calcolate nel blocco, non agiscono direttamente sulle sfere ma vengono trasmesse come segnali di uscita verso la ralla esterna.

$$m_b \ddot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{F}_{\text{attr},i} + \mathbf{F}_{\text{visc},i} \quad (3.1)$$

Le forze di attrito  $\mathbf{F}_{\text{attr},i}$  sono modellate come proporzionali alla forza di contatto normale  $F_{B,i}$  tra le due ralle attraverso la sfera, mediante un coefficiente d'attrito  $\mu_i$  calcolato dinamicamente in funzione dello stato locale di contatto:

$$\mathbf{F}_{\text{attr},i} = \mu_i F_{B,i} \mathbf{t}_i \quad (3.2)$$

dove  $\mathbf{t}_i$  è la direzione tangenziale nel punto di contatto. L'algoritmo di calcolo di  $\mu_i$  tiene conto delle condizioni relative di scorrimento, consentendo di distinguere tra regime di aderenza e di slittamento parziale, come descritto in [20].

L'angolo di rotazione  $\theta_i$  di ciascuna sfera viene aggiornato a ogni passo temporale integrando la velocità angolare istantanea  $\dot{\theta}_i$ :

$$\theta_i(t + \Delta t) = \theta_i(t) + \dot{\theta}_i \Delta t \quad (3.3)$$

L'integrazione di  $\theta_i$  consente di aggiornare la posizione dei punti di contatto e di calcolare le nuove direzioni delle forze  $\alpha_{N,i}$ , garantendo la corretta evoluzione cinematica della superficie di contatto tra sfera e ralla. I valori aggiornati di  $F_{B,i}$  e  $\alpha_{N,i}$  vengono quindi forniti in uscita al blocco successivo (*Ralla Esterna*), che utilizza tali informazioni per determinare la risposta dinamica dei settori deformabili.

Questo approccio, mutuato dal modello di [11], consente di rappresentare accuratamente la distribuzione dinamica dei contatti durante la rotazione del *Wave Generator*. In particolare, il ricalcolo iterativo dei punti di contatto e delle forze hertziane garantisce la coerenza con la cinematica imposta dal profilo ellittico e con la deformabilità della ralla esterna.

### 3.2 Modellazione dinamica della ralla esterna del cuscinetto deformabile

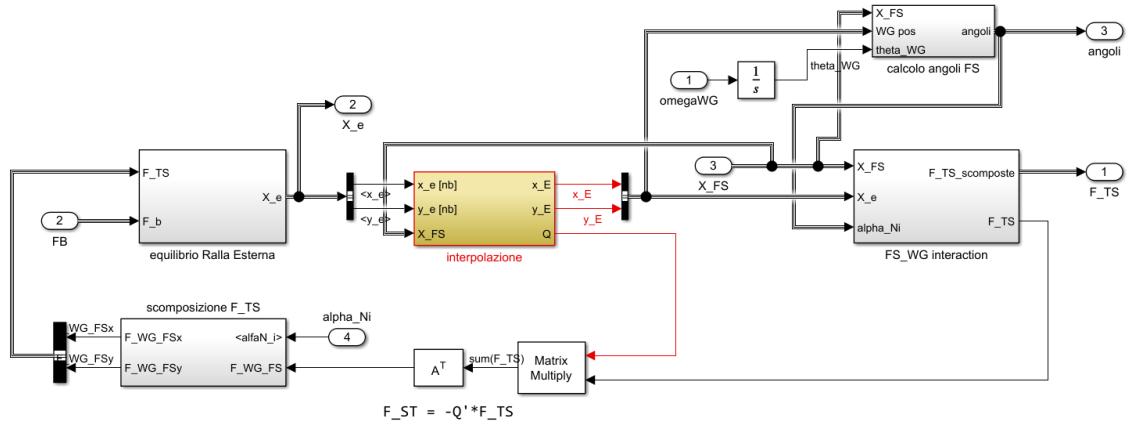


Figura 3.3: Schema del sottomodello Simulink relativo alla dinamica dei settori della ralla esterna e al calcolo dell'interazione con la Flexsplines.

Il blocco *Ralla Esterna* rappresenta l'anello intermedio del modello e svolge un ruolo fondamentale nella trasmissione delle forze dal cuscinetto alla *Flexsplines*. Riceve in input le forze di contatto  $F_B$  provenienti dalle sfere e le rispettive direzioni  $\alpha_{N,i}$  calcolate nel blocco precedente, risolvendo per ciascun settore della ralla l'equilibrio dinamico in presenza delle forze esterne e delle interazioni elasto-viscose con i settori adiacenti.

La ralla esterna è discretizzata in  $n_b$  settori, ognuno dei quali è assimilabile a una piccola porzione di trave deformabile vincolata elasticamente alle porzioni vicine. Le forze scambiate con la *Flexsplines* vengono modellate come carichi distribuiti sui settori, calcolati in

base alle coordinate della superficie della *Flexspline* ( $X_{FS}$ ) ricevute in feedback. Poiché la *Flexspline* è rappresentata da un numero di denti  $Z_{FS}$  maggiore del numero di settori della ralla, è stato necessario introdurre una **matrice di assegnamento** che consente di collegare in modo coerente i denti ai settori corrispondenti.

Le posizioni della *Flexspline*, ottenute dal blocco successivo, vengono elaborate insieme alla ricostruzione della ralla esterna, ottenuta interpolando i nove settori, per valutare i punti di contatto locali. L'output del blocco è rappresentato dalle coordinate aggiornate della superficie esterna della ralla ( $X_e$ ), utilizzate come input per il calcolo delle forze di contatto nel blocco *Flexspline*.

### 3.3 Modellazione dinamica della Flexspline

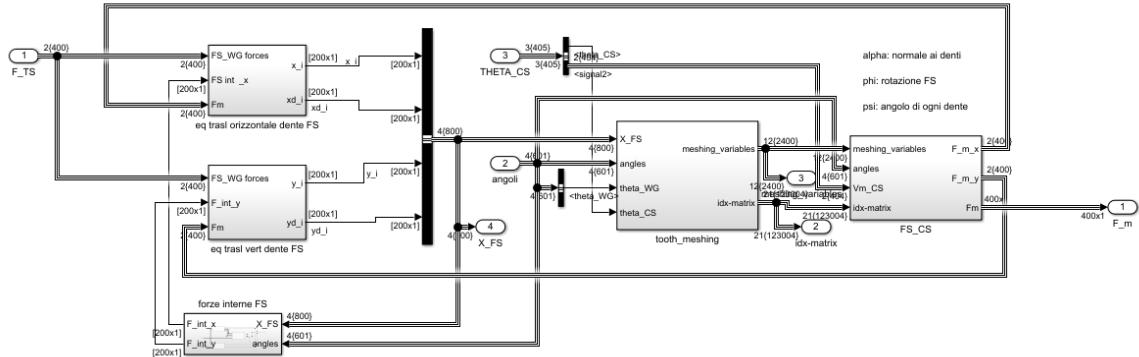


Figura 3.4: Schema del sottomodello Simulink relativo alla dinamica dei denti della *Flexspline* e al calcolo delle forze di ingranamento.

Il blocco dedicato alla dinamica della *Flexspline* rappresenta il cuore della modellazione del riduttore armonico, in quanto racchiude la parte più complessa del comportamento dinamico e dell'interazione tra componenti. In questa sezione vengono risolti i fenomeni di deformazione della parete flessibile e di ingranamento con la *Circular Spline*, includendo anche le forze interne di richiamo flessionale e torsionale già descritte nel Capitolo 2. La *Flexspline* è modellata come un insieme di denti discreti, ciascuno

dei quali è connesso elasticamente ai denti adiacenti tramite elementi di rigidezza che riproducono il comportamento deformabile dell'anello sottile.

Il blocco riceve in ingresso:

- le forze di contatto  $\mathbf{F}_{TS}$  provenienti dalla ralla esterna;
- le coordinate della *Circular Spline* ( $X_{CS}$ ) in *feedback*;
- le direzioni di contatto  $\alpha_{N,i}$  e gli angoli di orientamento dei denti.

Per ogni dente  $j$  della *Flexspline* viene risolto l'equilibrio dinamico, considerando:

- le forze esterne provenienti dalla ralla esterna ( $\mathbf{F}_{TS,j}$ );
- le forze d'ingranamento  $\mathbf{F}_{m,j}$  dovute al contatto con la *Circular Spline*;
- le forze interne di richiamo elastico, flessionale  $\mathbf{F}_{f,j}$  e torsionale  $\mathbf{F}_{t,j}$  che rappresentano rispettivamente la rigidezza tra denti adiacenti, la forza di richiamo per la deformazione della *Flexspline* e la reazione vincolare.

Il calcolo delle forze d'ingranamento  $\mathbf{F}_{m,j}$  avviene individuando, a ogni passo temporale, i denti effettivamente in presa e determinando la penetrazione elastica locale  $l_{m,j}$  tra il profilo della *Flexspline* e quello della *Circular Spline*. Come descritto in [3], il contatto tra i profili coniugati viene modellato attraverso un sistema massa-molla-smorzatore che consente di rappresentare in modo continuo la generazione e l'evoluzione della forza di ingranamento. La forza normale  $\mathbf{F}_{m,j}$  giace lungo la retta di pressione individuata dall'angolo  $\beta_j$  e, in generale, non risulta simmetrica tra il profilo sinistro e quello destro del dente. La formulazione adottata per il calcolo della forza di ingranamento è la seguente:

$$F_{m,j} = K_{FS-CS} l_{m,j} + c_{FS-CS} \dot{l}_{m,j} \quad (3.4)$$

dove:

- $K_{FS-CS}$  [N/m] è la rigidezza di contatto tra la *Flexspline* e la *Circular Spline*;
- $c_{FS-CS}$  [Ns/m] è il coefficiente di smorzamento del contatto;
- $l_{m,j}$  [m] rappresenta la deformazione dovuta alla compenetrazione tra i due profili nel punto di contatto;
- $\dot{l}_{m,j}$  [m/s] è la velocità di deformazione, calcolata a partire dalle velocità dei punti di contatto dei due profili.

Le due componenti di ingranamento (sinistra e destra) possono presentare valori differenti, poiché il punto di contatto sul profilo destro non risulta in generale simmetrico rispetto a quello sinistro. Questa asimmetria si traduce in una distribuzione non uniforme delle forze  $\mathbf{F}_{m,j}$  lungo la circonferenza della *Flexspline*, fenomeno tipico dei riduttori armonici.

L'inserimento del *Wave Generator* all'interno della *Flexspline*, a sua volta accoppiata con la *Circular Spline*, determina una deformazione ellittica tale da garantire l'ingranamento simultaneo di più coppie di denti lungo la circonferenza.

Le forze di ingranamento  $\mathbf{F}_{m,j}$  vengono successivamente scomposte in componenti radiale e tangenziale. Questa scomposizione avviene in funzione della posizione angolare dei denti ( $\psi_j$ ), o meglio della differenza tra le posizioni angolari tra i denti in contatto ( $\delta_m$ ), e dell'angolo di pressione locale ( $\beta$ ). I valori calcolati vengono quindi trasmessi come output al blocco *Circular Spline*, dove concorrono al calcolo della coppia torcente risultante.

L'approccio adottato consente di rappresentare in modo realistico la deformabilità della parete della *Flexspline* e la distribuzione delle forze lungo il perimetro, garantendo coerenza con la cinematica imposta dal *Wave Generator*.

### 3.4 Modellazione dinamica della Circular Spline

Il blocco *Circular Spline* chiude la catena cinematica del riduttore, ricevendo in ingresso le forze d'ingranamento  $\mathbf{F}_m$  calcolate nel blocco *Flexspline* e la coppia resistente, qualora fosse presente. Per ciascun dente in presa, vengono valutati l'angolo di contatto  $\beta$  e la direzione della forza d'ingranamento, in modo da poter determinare il contributo tangenziale alla coppia risultante.

L'equilibrio dinamico alla rotazione della *Circular Spline* viene quindi espresso come:

$$J_{CS} \cdot \ddot{\theta}_{CS} = \sum (F_m \cdot \cos(\beta - \delta_m) \cdot \rho) - c_{CS} \dot{\theta}_{CS} - T_R \quad (3.5)$$

dove:

- $J_{CS}$  è il momento d'inerzia della *Circular Spline*;
- $\rho$  rappresenta il raggio del punto di applicazione della forza;
- $c_{CS}$  è il coefficiente viscoso di smorzamento;
- $T_R$  è la coppia resistente esterna applicata all'albero d'uscita.

Il primo termine a destra dell'equazione (3.5) rappresenta la somma dei contributi tangenziali di tutte le forze d'ingranamento, che generano la coppia motrice trasmessa attraverso il riduttore. L'integrazione temporale dell'equazione del moto consente di ottenere la velocità angolare  $\dot{\theta}_{CS}$  e la posizione angolare  $\theta_{CS}$  della *Circular Spline*, variabili che costituiscono le principali uscite del modello e vengono restituite al blocco *Flexspline* come segnali di *feedback*. Questo accoppiamento bidirezionale garantisce la coerenza cinematica e dinamica tra le due ruote dentate, permettendo di analizzare il comportamento del riduttore sotto differenti condizioni operative.

## Capitolo 4

# Risultati e validazione del modello

Nei capitoli precedenti è stato descritto il processo di integrazione del modello high-fidelity del cuscinetto deformabile all'interno del modello multibody completo del riduttore armonico. Si è prima affrontata l'analisi statica, in MATLAB, per la determinazione delle corrette condizioni iniziali nel capitolo 2 e, successivamente, si è presentato il modello dinamico integrato in ambiente Simulink nel capitolo 3.

Ora ci si pone lo scopo di analizzare e validare il comportamento del modello ottenuto: a tal fine verranno presentati i risultati numerici di due tipologie di simulazione:

La prima, descritta nella Sezione 4.1, analizza la stabilità statica del sistema. Si verifica che il modello dinamico, in assenza di input di rotazione e sottoposto alle sole condizioni iniziali di precarico, mantenga l'equilibrio statico calcolato in precedenza, confermando la corretta implementazione delle interazioni tra i componenti.

La seconda, trattata nella Sezione 4.2, riguarda la rotazione del riduttore completo. Verranno analizzati i principali output cinematici e dinamici, come la distribuzione delle forze di contatto, la valutazione dell'errore cinematico e la risposta complessiva del sistema. Questi risultati verranno discussi e confrontati qualitativamente con i comportamenti attesi descritti in letteratura, ponendo le basi per la futura validazione sperimentale del modello.

## 4.1 Simulazione di stabilità statica

Il primo passo per la validazione del modello dinamico consiste nel verificarne la stabilità in condizioni statiche, confermando che il sistema, una volta inizializzato con le condizioni di equilibrio statico calcolate nel capitolo 2, mantenga tale equilibrio in assenza di input esterni ovvero quando il modello, in ambiente Matlab/Simulink, viene lanciato imponendo una velocità di rotazione del Wave Generator nulla ( $\omega_{WG} = 0$ ). Le condizioni iniziali relative alla deformazione dei componenti e al precarico interno sono state caricate direttamente dai risultati dell'analisi statica. Idealmente si vorrebbe che, in queste condizioni, le velocità e le accelerazioni di tutti i componenti del modello (denti della Flexspline, settori della ralla esterna, sfere e Circular Spline) rimangano nulle, e che le forze di interazione interne rimangano costanti e pari ai valori di equilibrio; tuttavia, è prevedibile che vi siano delle oscillazioni dovute agli errori numerici residui della funzione di minimizzazione dell'errore utilizzata per ricavare le condizioni iniziali nel capitolo 2.

La simulazione è stata eseguita impostando i parametri in tabella dove si riportano anche le specifiche dell'hardware impiegato.

Parametro	Descrizione/Valore
Processore	Intel® Core™ i7-8565U CPU @ 1.80GHz
Memoria RAM	8 GB
$\omega_{WG}$ (Input)	0 rad/s
Solver	ode14x
Tempo di simulazione	$50 \cdot 10^{-6}$ s
Fixed-step size	$1 \cdot 10^{-7}$ s

Tabella 4.1: Parametri utilizzati per la simulazione statica del riduttore armonico.

L'analisi dei risultati, riportata nelle figure seguenti, mostra un comportamento del sistema vicino alla stabilità attesa, sebbene si manifestino delle oscillazioni prevedibili e dovute agli errori residui della funzione di minimizzazione dell'errore utilizzata per ricavare le condizioni iniziali (capitolo 2), che comportano una risultante delle forze

interne non perfettamente bilanciata all’istante  $t = 0$ .

#### 4.1.1 Analisi delle forze e degli spostamenti sul Cuscinetto

La **Figura 4.1** mostra l’evoluzione delle forze  $F_b$  esercitate dalle 9 sfere del Wave Generator sui settori della ralla esterna. Per le sfere 2–9 il valore rimane vicino al precarico iniziale, segno che l’accoppiamento mantiene un comportamento stabile.

L’unica anomalia riguarda la **sfera 1**, per la quale la forza  $F_{b,1}$  si annulla dopo pochi passi d’integrazione. Questo non è un fenomeno fisico ma un chiaro *artefatto del modello*: il settore corrispondente si allontana progressivamente fino a perdere il contatto. La causa è da attribuire allo **squilibrio residuo nelle condizioni iniziali**, legato all’impiego di valori di rigidezza ancora approssimati nel modello statico.

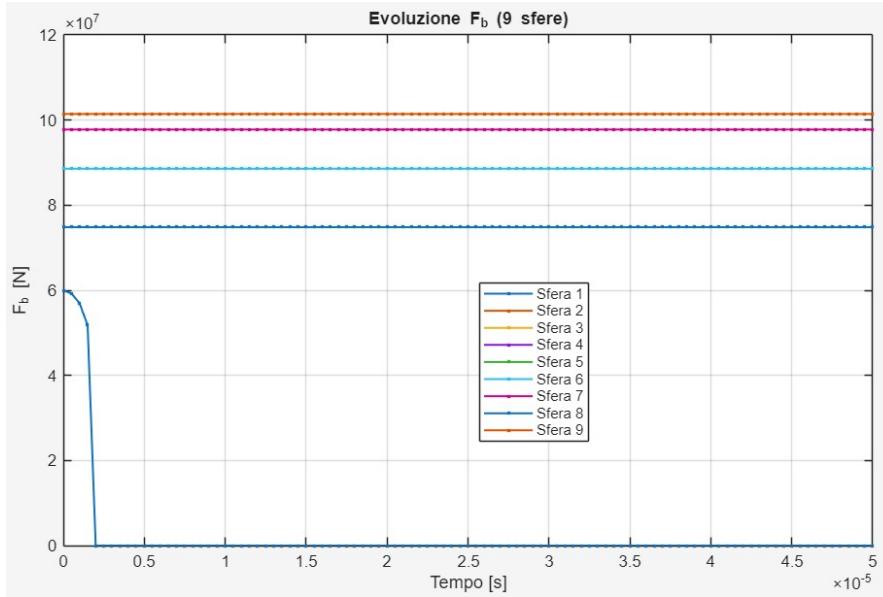


Figura 4.1: Evoluzione delle forze  $F_b$  sulle 9 sfere del WG. Si noti il decadimento a zero della forza sulla sfera 1.

La **Figura 4.2** conferma questo comportamento: mentre i settori 2–9 si mantengono prossimi alle loro posizioni di equilibrio, il settore 1 si sposta verso l’esterno di alcuni centesimi di millimetro, fino alla perdita di contatto con la sfera. Questo risultato, pur

non realistico dal punto di vista fisico, è coerente con l'annullamento della forza e indica la necessità di un successivo *tuning* delle rigidezze.

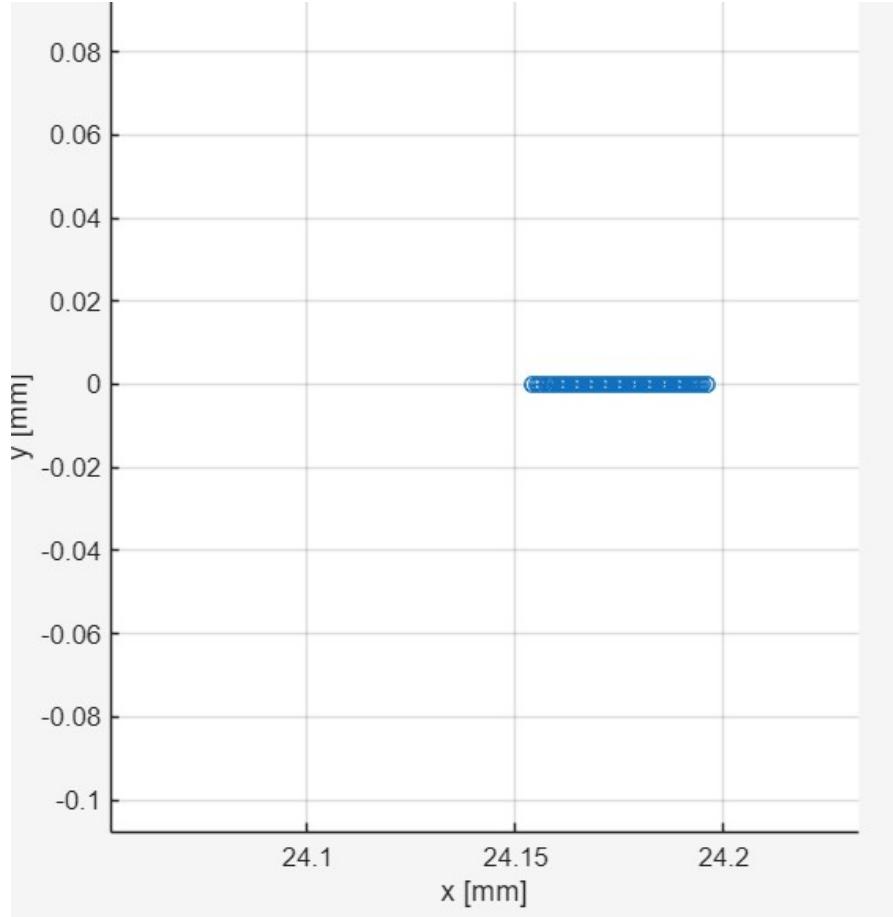


Figura 4.2: Traiettoria del settore 1 della ralla esterna durante la simulazione statica.

#### 4.1.2 Analisi delle forze e degli spostamenti sulla Flexsplne

L'effetto dello squilibrio iniziale si riflette anche sulla risposta della Flexsplne. Le forze di contatto  $F_{TS}$  tra denti e settori, riportate in **Figura 4.3**, mostrano un andamento complessivamente decrescente: ciò suggerisce un leggero spostamento radiale della Flexsplne verso l'esterno. Il comportamento non lineare delle curve è coerente con gli

assestamenti locali dei denti e con le approssimazioni presenti nella configurazione statica iniziale.

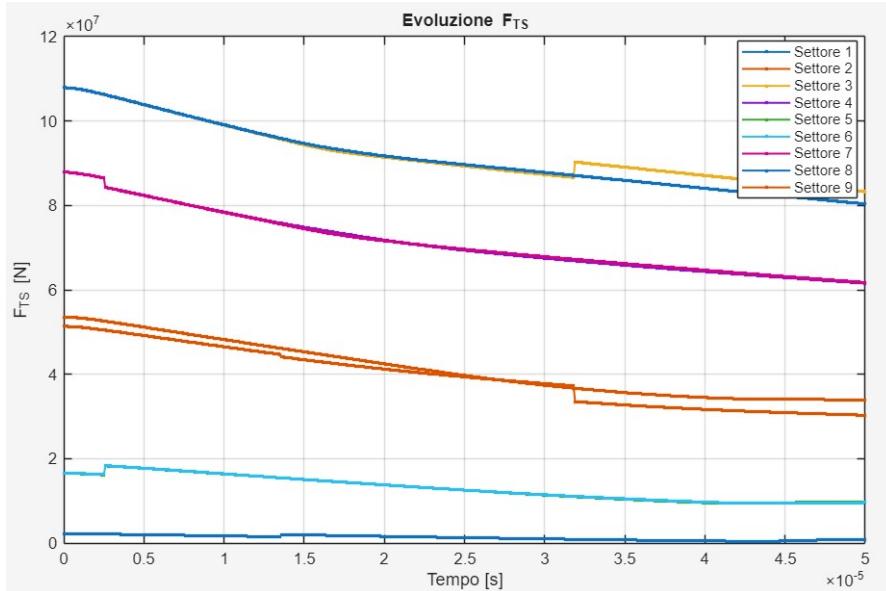


Figura 4.3: Evoluzione delle forze  $F_{TS}$  (Flexspline-Settori).

La [Figura 4.4](#) mostra invece le traiettorie dei denti della Flexspline. Le oscillazioni osservate, pur con ampiezza non trascurabile, risultano smorzate e compatibili con una delle **frequenze proprie del sistema**, verosimilmente associate alla vibrazione radiale dei denti o della rim di supporto. Ciò indica che, nonostante le semplificazioni iniziali, il modello riproduce in modo coerente la dinamica locale della Flexspline.

#### 4.1.3 Forze di ingranamento e stabilità della Circular Spline

L'aspetto più critico della stabilità statica riguarda le forze di ingranamento (meshing) tra i denti della Flexspline e della Circular Spline. Come mostrato in [Figura 4.5 \(a\)](#), l'evoluzione delle coppie totali  $C_{sx}$  e  $C_{dx}$  evidenzia che all'istante  $t = 0$  la somma delle forze di ingranamento non è nulla, generando una coppia risultante non nulla sulla Circular Spline.

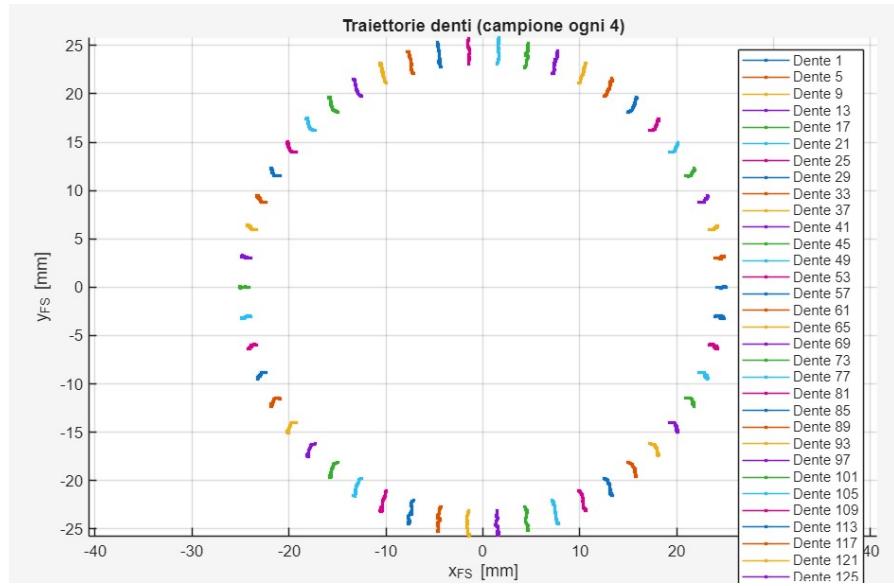
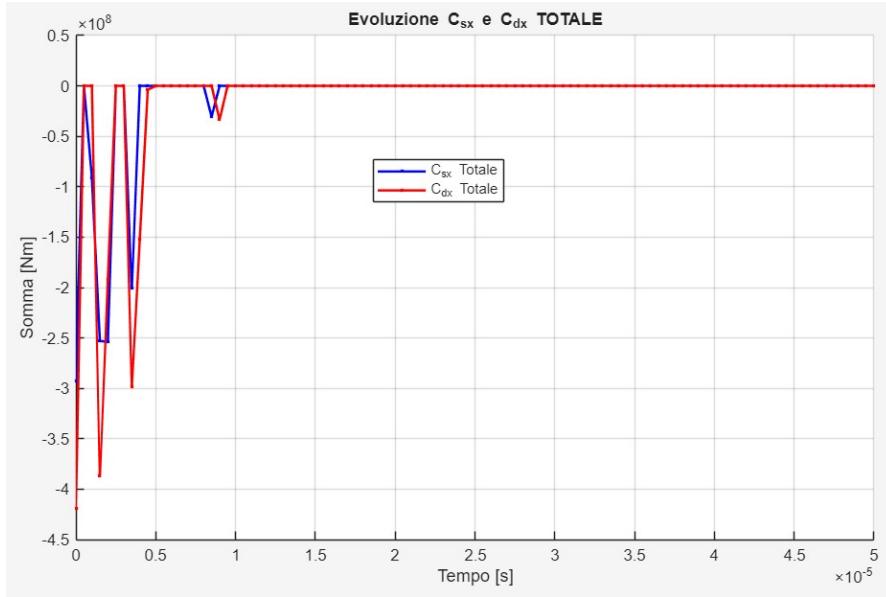


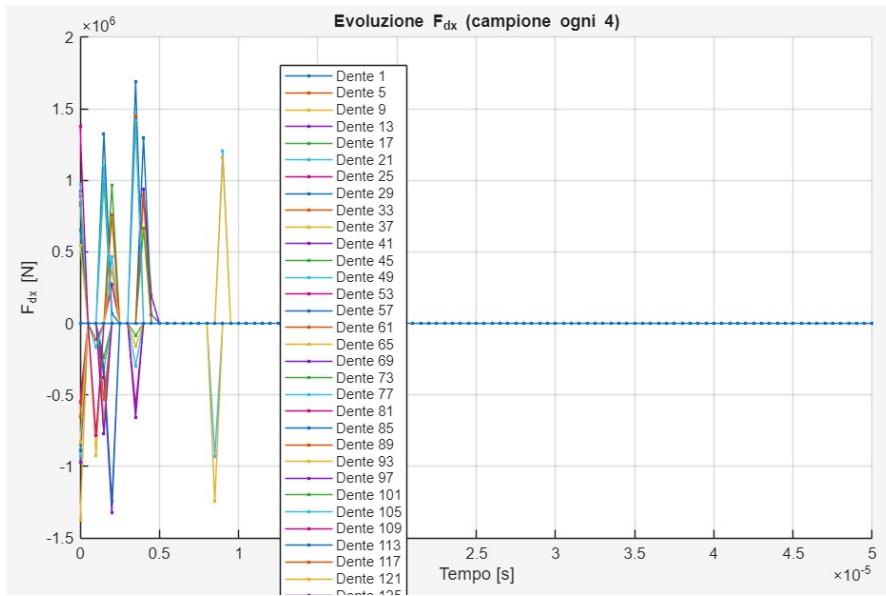
Figura 4.4: Traiettorie di alcuni denti della Flexpline durante la simulazione statica.

Questa coppia iniziale genera un piccolo spostamento angolare transitorio della CS ( $\theta_{CS}$ ). La CS, essendo libera di ruotare, si sposta in una nuova posizione generando forze d'ingranamento opposte, come si vede nel dettaglio delle singole forze in **Figura 4.5 (b)**. Il sistema si assesta così in una nuova posizione di equilibrio dopo pochi microsecondi.

Durante questo transitorio, i denti della Flexpline tendono a riposizionarsi. Come si può osservare dalla figura della configurazione finale (vedere Figura 4.6), i denti nelle zone di ingranamento primario (sull'asse maggiore) subiscono un leggero spostamento, mentre quelli lungo il semiasse minore (al di fuori del meshing) si dispongono in una configurazione alternata e più stabile, anche se poco realistica. Questo comportamento è guidato dalle forze interne di rigidezza flessionale, che spingono la FS verso una configurazione di minima energia potenziale in assenza di un carico esterno. Questo comportamento della simulazione statica non pregiudica l'analisi dinamica: non appena il Wave Generator entra in rotazione ( $\omega_{WG} \neq 0$ ), la deformazione ellittica imposta dalla camma diventa la forzante dominante bilancia immediatamente questa la resistenza flessionale, costringendo i denti a seguire il profilo ellittico corretto, come verrà mostrato



(a) Evoluzione delle coppie di ingranamento totali  $C_{sx}$  e  $C_{dx}$ .



(b) Evoluzione delle singole forze d'ingranamento  $F_m$ .

Figura 4.5: Dinamica dell’assestamento statico delle forze e delle coppie di ingranamento.  
 (a) Le coppie risultanti non nulle iniziali si smorzano. (b) Le singole forze  $F_m$  oscillano e si assestano in una nuova configurazione di equilibrio.

nella sezione successiva.

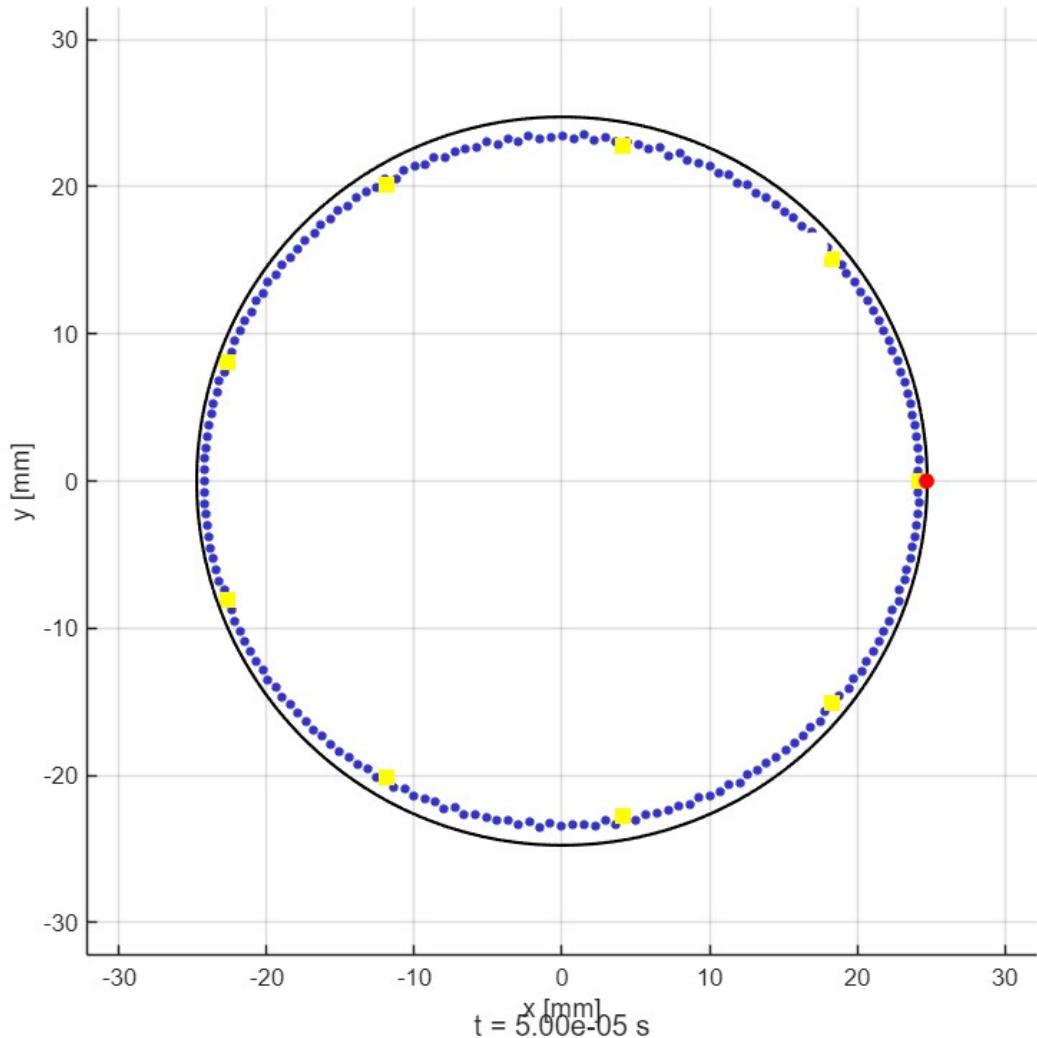


Figura 4.6: Configurazione finale al termine del transitorio in configurazione statica.

Dopo questo breve assestamento (circa  $20 \cdot 10^{-6}$  s), tutte le forze e le posizioni raggiungono un nuovo stato di equilibrio stabile, confermando la stabilità intrinseca del modello in assenza di input.

## 4.2 Simulazione di rotazione del riduttore completo

Verificata la stabilità statica, si passa all’analisi del **transitorio di avvio** del riduttore.

Al modello viene imposto un input di velocità  $\omega_{WG}$  sotto forma di rampa, che cresce gradualmente fino al valore operativo di 31 rad/s (come specificato in Tabella 4.2).

L’obiettivo è osservare il comportamento del sistema durante questa fase operativa, valutando la cinematica, le forze di contatto nel cuscinetto e l’insorgenza delle forze di ingranamento. La simulazione è stata inizializzata con le medesime condizioni di precarico statico descritte nel Capitolo 2. I parametri utilizzati sono riportati in Tabella 4.2.

Tabella 4.2: Parametri utilizzati per la simulazione dinamica del riduttore armonico.

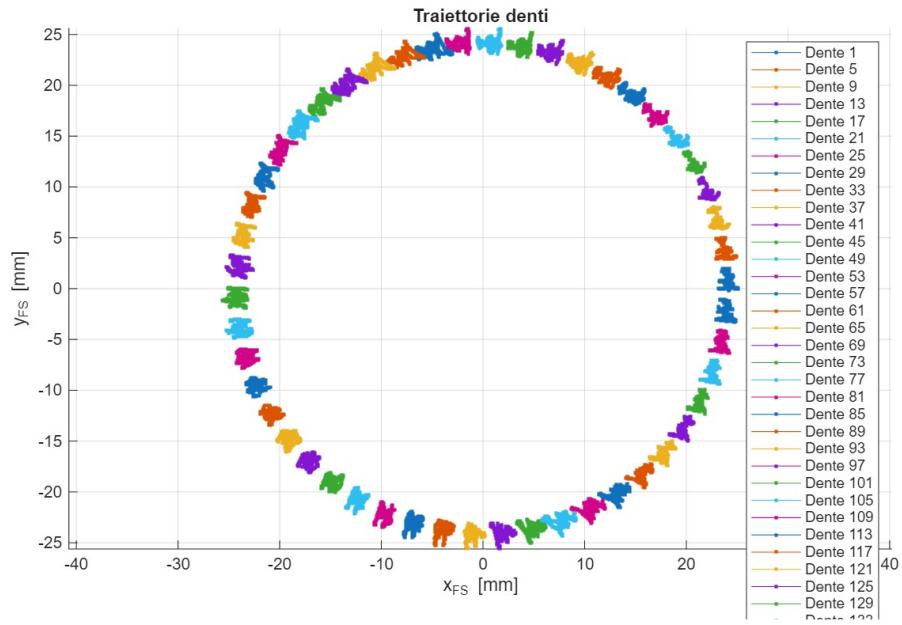
Parametro	Descrizione/Valore
Processore	Intel® Core™ i7-8565U CPU @ 1.80GHz
Memoria RAM	8 GB
$\omega_{WG}$ (Input)	31 rad/s
Solver	ode14x
Fixed-step size	$5 \cdot 10^{-7}$ s

Nei paragrafi seguenti vengono presentati i risultati principali della simulazione a regime.

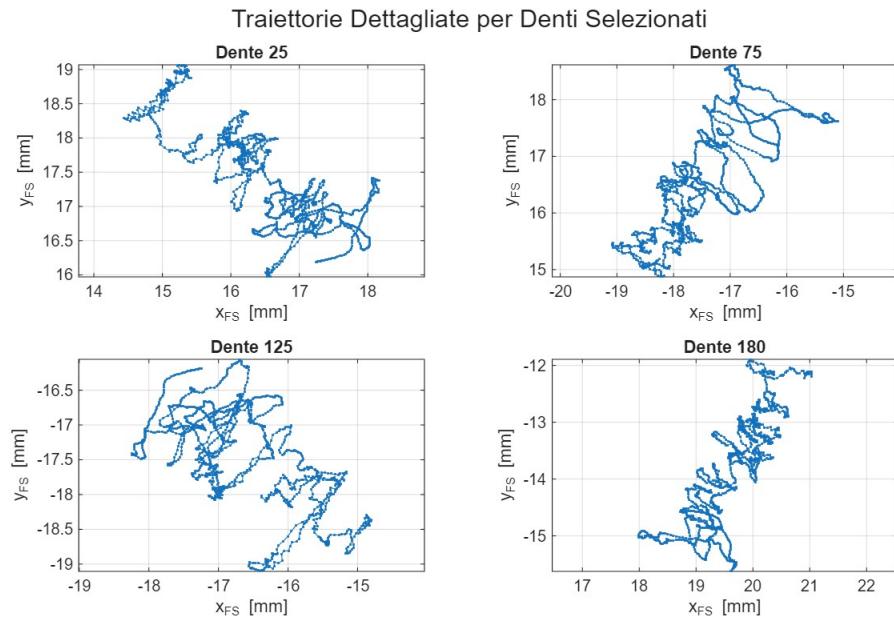
### 4.2.1 Analisi cinematica: traiettorie dei denti

La **Figura 4.7** mostra le traiettorie dei denti della Flexspline durante la rotazione del WG. L’analisi globale, in **Figura 4.7a**, conferma che i denti seguono un percorso che riproduce il profilo ellittico imposto, indicando che la deformazione si propaga in modo coerente lungo tutta la rim.

Il dettaglio in **Figura 4.7b** permette di apprezzare la forma del percorso per i singoli denti. L’assenza di sovrapposizioni o deviazioni anomale conferma che l’interfaccia tra la camma del WG e la rim trasferisce correttamente la deformazione. Pur non disponendo



(a) Panoramica delle traiettorie di un campione di denti.



(b) Dettaglio su 4 denti selezionati.

Figura 4.7: Analisi delle traiettorie dei denti durante la simulazione dinamica: (a) vista d'insieme e (b) dettaglio su denti specifici.

di una quantificazione numerica dello scostamento rispetto al profilo teorico, l’andamento complessivo risulta coerente con il principio di funzionamento del riduttore.

#### 4.2.2 Analisi delle forze di interazione sul cuscinetto

Le forze  $F_{TS}$  scambiate tra la Flexspline e i nove settori della ralla esterna, mostrate in Figura 4.8, presentano un andamento periodico legato alla rotazione del Wave Generator. Ogni settore attraversa ciclicamente zone di maggiore e minore deformazione e viene pertanto caricato e scaricato in sequenza, in accordo con il funzionamento del cuscinetto ellittico.

Dall’osservazione del grafico emergono due elementi significativi. In primo luogo, i picchi di forza non compaiono simultaneamente sui diversi settori, ma sono distribuiti nel tempo: ciò è coerente con la propagazione dell’onda di deformazione lungo la ralla. In secondo luogo, l’intensità dei picchi non è identica per tutti i settori. Questa variabilità, pur non marcata, è compatibile con le approssimazioni geometriche e con la sensibilità del modello alle imprecisioni nelle condizioni di avvio.

Il limitato intervallo temporale della simulazione non permette di osservare il comportamento a regime, ma consente di evidenziare il transitorio di avvio. Le oscillazioni ad alta frequenza sovrapposte ai contributi principali sono attribuibili all’eccitazione delle frequenze proprie dei componenti coinvolti, in particolare dei settori e della rim della Flexspline.

La risposta ottenuta, pur riferita a una fase iniziale della dinamica, risulta utile anche dal punto di vista del monitoraggio di salute del sistema: la struttura temporale delle forze  $F_{TS}$  fornisce una firma dinamica sensibile a variazioni nei parametri o a condizioni di usura non uniforme, costituisce quindi una base di dati per individuare deviazioni dovute a difetti localizzati.

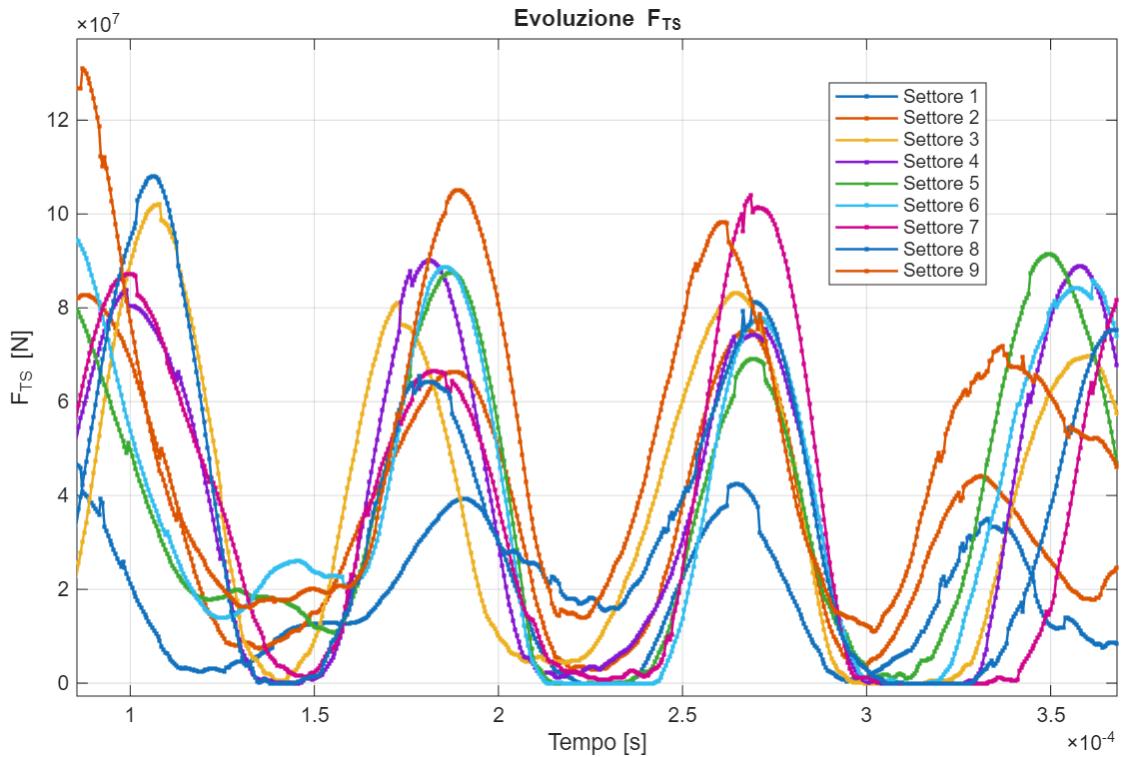


Figura 4.8: Evoluzione delle forze di contatto  $F_{TS}$  sui nove settori della ralla esterna.

#### 4.2.3 Forze di ingranamento

La [Figura 4.9](#) riporta le forze di ingranamento  $F_m$  sui denti della Flexspline in presa con la Circular Spline. L'andamento è caratterizzato da picchi ripetitivi di natura impulsiva, tipici dei riduttori armonici: il carico viene infatti trasferito in modo discreto da un gruppo di denti a quello successivo man mano che il profilo ellittico ruota.

Le oscillazioni ad alta frequenza che si sovrappongono ai picchi principali sono attribuibili alla dinamica locale dei singoli denti, eccitati dall'impatto di contatto durante l'ingranamento. Tale comportamento, complesso ma fisicamente plausibile, conferma che l'interazione Flexspline–Circular Spline è catturata in modo coerente dal modello.

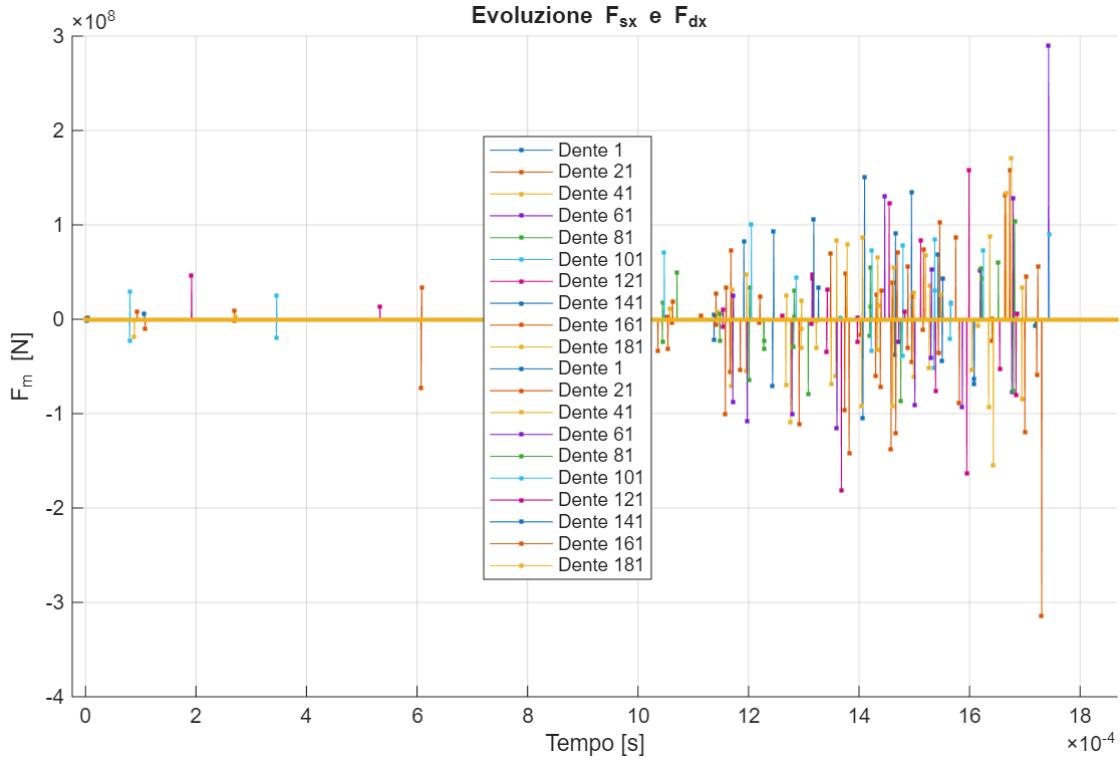


Figura 4.9: Evoluzione delle forze di ingranamento su un campione di denti.

#### 4.2.4 Rapporto di riduzione e uscita cinematica

La [Figura 4.10](#) riporta gli angoli, le velocità e il rapporto istantaneo tra WG e Circular Spline. Il transitorio iniziale, visibile nello zoom in [4.10b](#), è un artefatto numerico dovuto alla divisione per un angolo di uscita inizialmente prossimo allo zero, il comportamento ritorna stabile dopo circa  $6 \cdot 10^{-6}$  s.

A regime, la velocità della Circular Spline assume un valore di  $\omega_{CS} \approx 0.31$  rad/s coerente con il rapporto di riduzione nominale 100:1 del riduttore considerato. La velocità risulta stabile nel tempo e non presenta irregolarità apprezzabili, confermando la consistenza delle interazioni cinematiche e dinamiche all'interno del modello.

La simulazione evidenzia una risposta a regime coerente con il funzionamento atteso del riduttore armonico: le traiettorie dei denti seguono correttamente il profilo imposto,

le forze sul cuscinetto presentano una periodicità regolare e i picchi di ingranamento mostrano una dinamica credibile. Gli errori numerici sono limitati al transitorio iniziale e non influenzano il comportamento a regime. Nel complesso, il modello fornisce una rappresentazione fisicamente consistente della trasmissione e costituisce una base solida per future attività di tuning dei parametri e per applicazioni nel monitoraggio delle prestazioni (PHM).

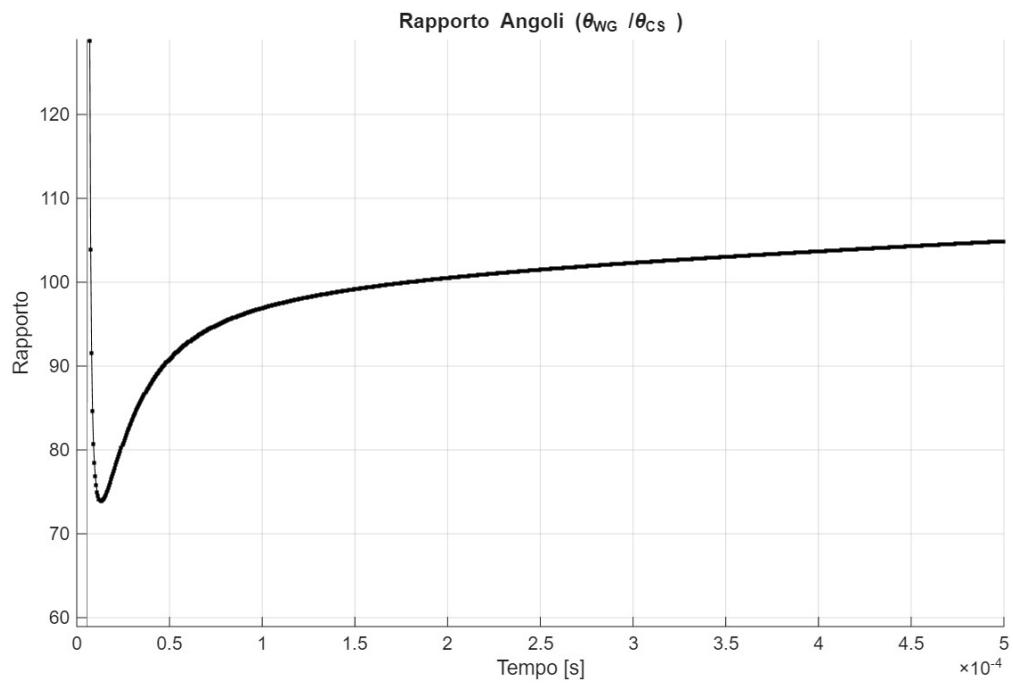
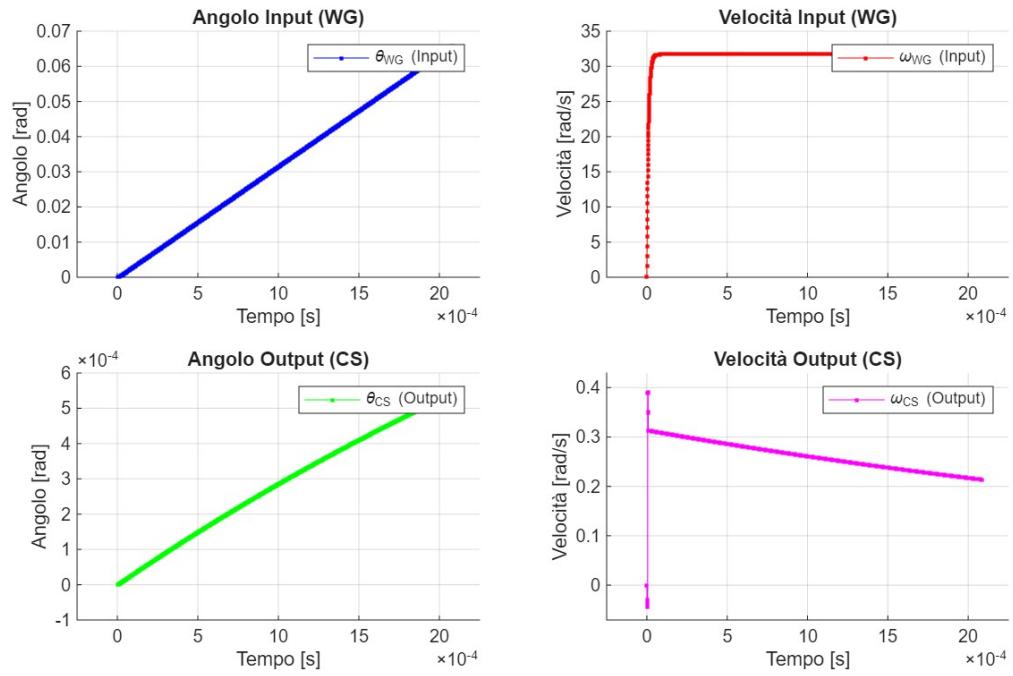


Figura 4.10: Analisi cinematica della trasmissione durante la simulazione dinamica.



# Conclusioni e sviluppi futuri

La presente tesi si inserisce nel contesto dello sviluppo di digital twin ad alta fedeltà per componenti robotici. La necessità di tali modelli è motivata dalla difficoltà nel reperire dati sperimentali di guasto, fondamentali per lo sviluppo di efficaci strategie di Prognostics and Health Monitoring (PHM). Lavori precedenti avevano stabilito le fondamenta, sviluppando un modello multibody per le interazioni degli ingranaggi e un sottomodello avanzato per il cuscinetto deformabile del Wave Generator. L'obiettivo principale di questo lavoro è stato l'integrazione di questi due modelli in un'unica piattaforma di simulazione dinamica, superando la precedente idealizzazione del Wave Generator come corpo infinitamente rigido.

Questo lavoro costituisce una base per le future attività di ricerca e sviluppo: Il prossimo passo, di cruciale importanza, sarà la *verifica funzionale* del modello integrato in applicazioni di PHM. Tale verifica sarà possibile solo dopo un'accurata attività di tuning dei parametri del modello (quali rigidezze e smorzamenti dei contatti) attraverso il confronto con dati sperimentali. Questo processo è indispensabile per garantire non solo l'accuratezza qualitativa, già dimostrata, ma anche quella quantitativa.

Una volta validato, il modello potrà essere impiegato come banco prova virtuale per il suo scopo primario: il PHM. Gli sviluppi futuri si concentreranno su:

- La simulazione di specifiche modalità di guasto localizzate, come l'usura progressiva nelle piste del cuscinetto, la variazione di rigidezza dovuta a cricche nella

Flexsplines, o il danneggiamento di singoli denti.

- La generazione di ampi dataset simulati, rappresentativi del comportamento del riduttore sia in condizioni nominali che in diverse fasi di degradazione.
- L'utilizzo di tali dataset per l'addestramento e la validazione di algoritmi di diagnostica e prognostica, con l'obiettivo finale di stimare la Remaining Useful Life (RUL) del componente in applicazioni robotiche reali.

# Glossario dei simboli

## Acronimi

<b>CS</b>	Circular Spline
<b>FS</b>	Flexspline
<b>PHM</b>	Prognostics and Health Monitoring
<b>WG</b>	Wave Generator

## Simboli Greci

---

Simbolo	Descrizione
$\alpha_N$	Angolo della normale alla superficie ellittica
$\beta$	Angolo di pressione / ingranamento (direzione della forza di contatto)
$\gamma$	Esponente del contatto Hertziano ( $\gamma = 1.5$ )
$\delta_b$	Deformazione di contatto della sfera (compenetrazione radiale)
$\delta_m$	Angolo di sfasamento del contatto rispetto al centro del dente
$\delta_{ss}$	Deformazione elastica tra settori adiacenti
$\epsilon$	Angolo della congiungente tra elementi (settori o denti)
$\eta$	Variazione dell'angolo tra due denti adiacenti
$\theta$	Posizione angolare (generica)

Simbolo	Descrizione
$\theta_{CS}$	Posizione angolare della Circular Spline
$\theta_{FS}$	Posizione angolare della Flexspline
$\theta_{WG}$	Posizione angolare del Wave Generator
$\mu$	Coefficiente d'attrito
$\rho$	Raggio generico di applicazione della forza
$\rho_{CS}$	Raggio primitivo della Circular Spline
$\rho_t$	Distanza (raggio) di un dente dal centro di rotazione
$\tau$	Rapporto di trasmissione ideale (configurazione CS fissa)
$\psi$	Angolo di posizione assoluta di un dente
$\omega$	Velocità angolare (generica, $\omega = \dot{\theta}$ )
$\omega_{CS}$	Velocità angolare della Circular Spline
$\omega_{FS}$	Velocità angolare della Flexspline
$\omega_{WG}$	Velocità angolare del Wave Generator (input)

---

## Simboli Latini

---

Simbolo	Descrizione
$a_i, b_i$	Semiassi (maggiore e minore) della camma ellittica
$b_{CS}, b_{FS}$	Lunghezza (assiale) dei denti (CS, FS)
$c$	Coefficiente di smorzamento generico
$c_T$	Smorzamento torsionale (FS)
$c_{CS}$	Smorzamento viscoso della Circular Spline
$c_{FS-CS}$	Smorzamento del contatto tra denti FS e CS
$C_{sx}, C_{dx}$	Coppie totali di ingranamento (sinistra e destra) agenti sulla CS

Simbolo	Descrizione
$d_b$	Diametro delle sfere del cuscinetto
$F_{attr}$	Forza d'attrito
$F_B$	Forza di contatto Hertziano (sfera)
$F_F$	Forza di richiamo flessionale (tra denti FS)
$F_m$	Forza di ingranamento (normale) tra denti FS e CS
$F_R$	Forza equivalente di richiamo torsionale (su denti FS)
$F_{SS}$	Forza di interazione tra settori adiacenti (ralla esterna)
$F_{TS}$	Forza di interazione tra Dente (FS) e Settore (WG)
$F_{TT}$	Forza di interazione tra denti adiacenti (FS)
$h(\delta)$	Funzione di attivazione del contatto (Heaviside)
$J_{CS}$	Momento d'inerzia della Circular Spline
$k_b$	Rigidezza del contatto sferico (Hertz)
$k_{i\pm 1}$	Rigidezza strutturale tra settori della ralla
$K_F$	Rigidezza flessionale (tra denti FS)
$K_T$	Rigidezza torsionale (dente FS)
$K_{FS-CS}$	Rigidezza del contatto tra denti FS e CS
$l$	Lunghezza della rim (sezione cilindrica) della Flexspline
$l_m$	Compenetrazione elastica tra i denti di FS e CS (Lunghezza)
$L$	Lunghezza totale della Flexspline (inclusa flangia)
$m$	Modulo della dentatura
$m_b$	Massa della sfera
$m_S$	Massa del settore (ralla esterna)
$m_T$	Massa del dente (Flexspline)
$n_s$	Numero di settori (discretizzazione ralla esterna)
$N$	Numero di punti di discretizzazione (profilo dente)

Simbolo	Descrizione
$p$	Passo della dentatura
$q$	Carico distribuito
$Q$	Matrice di assegnazione (mappatura dente-settore)
$R_e$	Raggio esterno (ralla esterna WG) in condizioni indeformate
$R_i$	Raggio interno (ralla interna WG) in condizioni indeformate
$R_{bCS}$	Raggio di base della Circular Spline
$r_{aFS}$	Raggio alla testa dei denti (Flexspline)
$r_{ics}$	Raggio alla testa dei denti (Circular Spline)
$r_{0FS}$	Raggio interno della rim (Flexspline)
$s_{boss}$	Spessore della flangia (boss) della Flexspline
$s_{rim}$	Spessore della rim (sezione cilindrica)
$T_R$	Coppia resistente (di carico) sull'albero d'uscita
$V_R$	Velocità tangenziale del dente
$(x, y)$	Coordinate cartesiane
$Z_{CS}$	Numero di denti della Circular Spline
$Z_{FS}$	Numero di denti della Flexspline

---

# Bibliografia

- [1] Schaeffler Group, “Precision strain wave gears.” Datasheet/Brochure, 2022. Online.
- [2] Harmonic Drive LLC, “The world of motion control transformed by a single invention.” Website. Accessed:. Attributed to C. W. Musser.
- [3] S. Sartorio, “Sviluppo di un modello multibody di un riduttore armonico,” tesi di laurea magistrale, Politecnico di Torino, Torino, 2023.
- [4] A. Raviola, R. Guida, A. C. Bertolino, A. D. Martin, S. Mauro, and M. Sorli, “A comprehensive multibody model of a collaborative robot to support model-based health management,” *Robotics*, vol. 12, p. 71, May 2023.
- [5] A. Raviola, A. D. Martin, R. Guida, G. Jacazio, S. Mauro, and M. Sorli, “Harmonic drive gear failures in industrial robots applications: An overview,” in *Proceedings of the European Conference of the PHM Society*, vol. 6, p. 11, 2021.
- [6] J.-Y. Li, J.-X. Wang, G.-W. Zhou, W. Pu, and Z.-H. Wang, “Accelerated life testing of harmonic driver in space lubrication,” *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology*, vol. 229, no. 12, pp. 1491–1502, 2015.
- [7] J. Zheng and W. Yang, “Failure analysis of a flexspline of harmonic gear drive in stc industrial robot: Microstructure and stress distribution,” in *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, vol. 452, p. 042148, dec 2018.
- [8] O. Fink, E. Zio, and U. Weidmann, “Prognostics and health management of industrial assets: Current progress and road ahead,” *Frontiers in Artificial Intelligence*,

- vol. 3, p. 578613, 2020.
- [9] G. Qiao and B. Weiss, "Accuracy degradation analysis for industrial robot systems," in *ASME International Manufacturing Science and Engineering Conference*, (Los Angeles, CA, US), 2017.
  - [10] C. Preissner, T. J. Royston, and D. Shu, "A high-fidelity harmonic drive model," *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 134, p. 011002, dec 2011.
  - [11] M. Massarella, "Modellazione high-fidelity di un cuscinetto ellittico deformabile per riduttori armonici," tesi di laurea magistrale, Politecnico di Torino, Torino, 2024.
  - [12] R. Dhaouadi, F. Ghorbel, and P. Gandhi, "A new dynamic model of hysteresis in harmonic drives," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 50, no. 6, pp. 1165–1171, 2003.
  - [13] F. Curà, A. Mura, and C. Rosso, "Investigation about crack propagation paths in thin rim gears," *Frattura ed Integrità Strutturale*, vol. 8, no. 30, pp. 446–453, 2014.
  - [14] J. D. Smith, A. J. Nick, J. M. Schuler, A. Kennett, and R. P. Dillon, "Cryobotics: Extreme cold environment testing of strain wave gear sets," in *IEEE Aerospace Conference Proceedings*, 2019.
  - [15] K. Adam and A. Mazurkow, "Properties of elasto-hydrodynamic oil film in meshing of harmonic drive gears," *Materials*, vol. 14, no. 5, p. 1194, 2021.
  - [16] Y. Yang, J. Li, J. Wang, and F. Zeng, "Analysis of tooth profile modification and meshing characteristics of double arc harmonic drive," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 235, no. 18, pp. 4113–4126, 2021.
  - [17] H. Ramsin and P.-Å. Wedin, "A comparison of some algorithms for the nonlinear least squares problem," *Numerische Mathematik*, vol. 27, pp. 413–426, 1977.
  - [18] N. I. M. Gould, D. Orban, and P. L. Toint, "Numerical methods for large-scale nonlinear optimization," *Acta Numerica*, vol. 14, pp. 299–361, 2005.

- [19] J. Herskovits, G. N. R. Filho, M. M. B. R. Vellasco, and P. R. R. L. R. Silva, “Interior point algorithms for nonlinear constrained least squares problems,” *Inverse Problems in Science and Engineering*, vol. 12, no. 6, pp. 715–727, 2004.
- [20] F. Yang, M. Song, X. Ma, N. Guo, and Y. Xue, “Research on H7006C Angular Contact Ball Bearing Slipping Behavior under Operating Conditions,” *Lubricants*, vol. 11, no. 7, 2023.