

POLITECNICO DI TORINO

Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale



Tesi di Laurea Magistrale

**Metodi di apprendimento automatico per
la predizione di flussi compressibili in
componenti aerospaziali**

Relatori

Prof. Andrea FERRERO
Prof. Tommaso TADDEI

Candidato

Wassim CHERKAOUI

2025

Ringraziamenti

Desidero esprimere un sincero ringraziamento al Professor Andrea Ferrero, per la fiducia che ha riposto in me fin dall'inizio, per il sostegno costante e per la disponibilità con cui mi ha guidato durante tutto il percorso di tesi.

Ringrazio inoltre il Professor Tommaso Taddei, per i preziosi suggerimenti, la competenza e l'attenzione dedicata allo sviluppo di questo progetto.

Desidero inoltre rivolgere un pensiero speciale al Professor Massimo Germano, la sua passione per la fluidodinamica, la sua visione e il dono del suo libro nei mesi precedenti, sono stati fonte di ispirazione e motivazione costante.

Un grazie va anche ai miei amici, con cui ho condiviso questi anni al Politecnico: Jacopo, Alessandro, Riccardo, Alessio, Gabriele C. e Gabriele A.

Infine ringrazio i miei genitori e mia sorella che hanno sempre creduto in me e nelle mie idee.

"Computational resources provided by HPC@PoliTO (www.hpc.polito.it)"

Sommario

I modelli di ordine ridotto (Reduced-Order Models, ROMs) sono sempre più riconosciuti come strumenti fondamentali per abilitare applicazioni della Computational Fluid Dynamics (CFD) in tempo reale, in particolare se affiancati a strategie basate sul Machine Learning in configurazioni a geometria fissa. Il loro costo computazionale ridotto li rende estremamente attrattivi per compiti di progettazione e ottimizzazione, specialmente in spazi parametrici ad alta dimensionalità. Inoltre, ROMs stanno diventando strumenti fondamentali per accelerare le simulazioni ad alta fedeltà, fornendo condizioni iniziali efficaci e abilitando processi di ottimizzazione di forma in contesti industriali.

La presente tesi si concentra sullo sviluppo e sull'applicazione di un **algoritmo di interpolazione non-lineare basato sulla Convex Displacement Interpolation (CDI)**, che consente di stimare soluzioni intermedie del campo di moto sfruttando sensori basati sulla fisica del problema, progettati per identificare strutture coerenti nel campo di flusso, come ad esempio i sensori di onda d'urto. A differenza dei metodi lineari come la Proper Orthogonal Decomposition (POD), incapaci di catturare fenomeni di advezione delle strutture di flusso, gli approcci non-lineari superano questa limitazione introducendo un **mapping** che tiene conto di tali movimenti. In particolare, la CDI introduce una mappatura di deformazione in grado di tracciare lo spostamento delle principali strutture fluide (ad esempio urti, fasci d'espansione o vortici) nello spazio dei parametri, fornendo così predizioni più accurate e fisicamente coerenti.

Un aspetto chiave di questo lavoro è l'impiego di sensori che tengono conto della fisica del problema, parte integrante dell'algoritmo CDI. Questi sensori sono progettati per identificare e tracciare le strutture coerenti del flusso nello spazio delle soluzioni, analizzando i gradienti delle grandezze conservative. Per garantire l'affidabilità e l'accuratezza dei sensori, è stata condotta un'**analisi dell'errore** per ciascun sensore su tutti i casi test esaminati.

Successivamente, è stato costruito un **dataset** mediante una serie di simulazioni RANS (Reynolds-Averaged Navier-Stokes) eseguite con un solver CFD sviluppato internamente, in linguaggio *Fortran90*, su diversi casi studio: una presa d'aria

subsonica di un TurboFan e una presa supersonica a doppia rampa. L'algoritmo di interpolazione non-lineare è stato quindi implementato attraverso un codice numerico proprietario. La procedura di interpolazione inizia con l'estrazione delle strutture coerenti mediante i sensori e tali sensori generano delle nuvole di punti (point clouds) per ogni **snapshot** di soluzione.

Un algoritmo di **registrazione** allinea i point clouds all'interno del dataset, garantendo la definizione di mapping bidirezionali tra i diversi parametri. Questi mapping vengono utilizzati per interpolare in maniera non-lineare sia le strutture coerenti sia i campi di moto associati. La tecnica si distingue per la sua **natura non-intrusiva**, in quanto non richiede l'accesso diretto alle equazioni di governo, pur preservando elevati livelli di fedeltà fisica.

I risultati di questo lavoro dimostrano la capacità dell'approccio di generare predizioni accurate del campo di moto in un ampio intervallo di condizioni. Ciò rappresenta non solo un passo significativo verso le potenzialità della CFD in tempo reale, ma fornisce anche condizioni iniziali di alta qualità per simulazioni RANS ad alta fedeltà, con conseguente riduzione dei costi computazionali e accelerazione della convergenza.

Indice

Elenco delle figure	IX
Elenco delle tabelle	XIII
1 Fondamenti teorici	1
1.1 Modelli di Turbolenza	1
1.1.1 Equazioni di Navier Stokes mediate alla Reynolds	2
1.1.2 Eddy-viscosity e modelli di chiusura	3
1.2 Modelli di Ordine Ridotto (ROM)	5
2 Metodi di interpolazione per la predizione di flussi compressibili	7
2.1 Interpolazione lineare vs non lineare	7
2.2 Proper Orthogonal Decomposition (POD)	8
2.2.1 Formulazione generale	8
2.2.2 Applicazione della SVD	8
2.2.3 Riduzione del rango	9
2.2.4 Approssimazione fuori dai punti campione	9
2.3 Convex Displacement Interpolation (CDI)	10
2.3.1 Formulazione matematica e proprietà	10
2.3.2 Struttura dell'algoritmo	11
3 Database di simulazioni ad alta fedeltà	13
3.1 Presa subsonica TurboFan	13
3.2 Presa supersonica a doppia rampa	18
4 Applicazione della CDI per la predizione	25
4.1 Identificazione delle strutture coerenti	25
4.1.1 Sensore di Ducros	26
4.1.2 Sensore di Mach	26
4.1.3 Sensore di Ducros corretto	27
4.1.4 Sensore basato sull'entropia	27

4.2	Applicazione dei sensori al database	28
4.2.1	Caso test: Presa turbofan	28
4.2.2	Caso test: Presa a doppia rampa	30
4.3	Allineamento delle nuvole di punti	33
4.4	Regressione	34
4.5	Selezione dei k-vicini più prossimi	35
4.6	Registrazione	35
4.7	Scelta dei pesi	35
5	Risultati e analisi delle prestazioni	37
5.1	Analisi comparativa dei sensori	37
5.1.1	Caso test 1: $M_\infty = 0.8882$ e $MFR = 0.6911$	37
5.1.2	Caso test 2: $M_\infty = 0.8673$ e $MFR = 0.6983$	42
5.1.3	Caso test 3: $M_\infty = 0.8661$ e $MFR = 0.6614$	46
5.1.4	Caso test 4: $M_\infty = 0.8516$ e $MFR = 0.6578$	50
5.1.5	Caso test 5: $M_\infty = 0.8644$ e $MFR = 0.7384$	54
5.1.6	Marker numerici in fase di predizione	58
5.1.7	Errore associato alla scelta dei sensori	64
5.2	Presa a doppia rampa	65
5.2.1	Caso test 1: $M_\infty = 2.55$ e $i = 0.8^\circ$	66
5.2.2	Caso test 2: $M_\infty = 2.75$ e $i = 0.3^\circ$	68
5.2.3	Caso test 3: $M_\infty = 2.65$ e $i = 2.2^\circ$	70
5.2.4	Caso test 4: $M_\infty = 2.70$ e $i = 3.0^\circ$	72
5.2.5	Caso test 5: $M_\infty = 2.45$ e $i = 3.8^\circ$	74
6	Conclusioni e sviluppi futuri	77
A	Applicazione dei sensori al database	79
B	Interpolazione: campi di moto predetti	83
	Bibliografia	89

Elenco delle figure

1.1	Nel contesto delle simulazioni numeriche dirette, della modellazione della turbolenza e dei modelli di ordine ridotto, segue un riepilogo di alcune delle aree più rilevanti in cui il Machine Learning potrebbe migliorare la fluidodinamica computazionale (CFD) [4]	6
2.1	Rappresentazione schematica della metodologia CDI per un semplice problema 1D. [6]	12
3.1	Griglia computazionale presa turbofan	14
3.2	Spazio dei parametri usato per il training e i test della presa subsonica del turbofan	15
3.3	Campo di Mach per $MFR = 0.61$ al variare del Mach	15
3.4	Campo di Mach per $MFR = 0.67$ al variare del Mach	16
3.5	Campo di Mach per $MFR = 0.74$ al variare del Mach	17
3.6	Dominio computazionale presa supersonica a doppia rampa	18
3.7	Griglia computazionale presa a doppia rampa	19
3.8	Pressione sulla parete inferiore presa a doppia rampa	19
3.9	Spazio dei parametri di addestramento, presa a doppia rampa	20
3.10	Campo di Mach per $M_\infty = 2.4$ al variare dell'incidenza	21
3.11	Campo di Mach per $M_\infty = 2.6$ al variare dell'incidenza	22
3.12	Campo di Mach per $M_\infty = 2.8$ al variare dell'incidenza	23
4.1	Applicazione sensori al database per il caso $M_\infty = 0.89$ e $MFR = 0.67$	28
4.2	Applicazione sensori al database per il caso $M_\infty = 0.87$ e $MFR = 0.67$	29
4.3	Applicazione sensori al database per il caso $M_\infty = 0.84$ e $MFR = 0.67$	29
4.4	Applicazione sensore di Ducros corretto ai casi con $M_\infty = 2.4$ e incidenza variabile	30
4.5	Dettaglio del caso M_∞ e $i = 2^\circ$	30
4.6	Applicazione sensore di Ducros corretto ai casi con $M_\infty = 2.6$ e incidenza variabile	31

4.7	Applicazione sensore di Ducros corretto ai casi con $M_\infty = 2.8$ e incidenza variabile	32
4.8	Mappatura dei punti ordinati $T(X)$, presa a doppia rampa	33
5.1	Caso test 1: Interpolazione tramite CDI e confronto del campo di Mach tramite sensore di Ducros corretto	38
5.2	Caso test 1: sovrapposizione dei sensori predetti e ad alta fedeltà, Ducros corretto	39
5.3	Caso test 1: Distribuzione del coefficiente di pressione sul ventre, Ducros corretto	40
5.4	Caso test 1: Distribuzione del coefficiente di pressione sul dorso, Ducros corretto	40
5.5	Caso test 1: Errore commesso dall’interpolazione	41
5.6	Caso test 2: Interpolazione tramite CDI e confronto del campo di Mach tramite sensore di Ducros corretto	42
5.7	Caso test 2: sovrapposizione dei sensori predetti e ad alta fedeltà, Ducros corretto	43
5.8	Caso test 2: Distribuzione del coefficiente di pressione sul ventre, Ducros corretto	44
5.9	Caso test 2: Distribuzione del coefficiente di pressione sul dorso, Ducros corretto	44
5.10	Caso test 2: Errore commesso dall’interpolazione	45
5.11	Caso test 3: Interpolazione tramite CDI e confronto del campo di Mach tramite sensore di Ducros corretto	46
5.12	Caso test 3: sovrapposizione dei sensori predetti e ad alta fedeltà, Ducros corretto	47
5.13	Caso test 3: Distribuzione del coefficiente di pressione sul ventre, Ducros corretto	47
5.14	Caso test 3: Distribuzione del coefficiente di pressione sul dorso, Ducros corretto	48
5.15	Caso test 3: Errore commesso dall’interpolazione	49
5.16	Caso test 4: Interpolazione tramite CDI e confronto del campo di Mach tramite sensore di Ducros corretto	50
5.17	Caso test 4: sovrapposizione dei sensori predetti e ad alta fedeltà, Ducros corretto	51
5.18	Caso test 4: Distribuzione del coefficiente di pressione sul ventre, Ducros corretto	51
5.19	Caso test 4: Distribuzione del coefficiente di pressione sul dorso, Ducros corretto	52
5.20	Caso test 4: Errore commesso dall’interpolazione	53

5.21	Caso test 5: Interpolazione tramite CDI e confronto del campo di Mach tramite sensore di Ducros corretto	54
5.22	Caso test 5: sovrapposizione dei sensori predetti e ad alta fedeltà, Ducros corretto	55
5.23	Caso test 5: Distribuzione del coefficiente di pressione sul ventre, Ducros corretto	55
5.24	Caso test 5: Distribuzione del coefficiente di pressione sul dorso, Ducros corretto	56
5.25	Caso test 4: Errore commesso dall'interpolazione	57
5.26	Casi test 1 (sx) e 2 (dx): Marker numerici dei sensori	58
5.27	Casi test 3 (sx) e 4 (dx): Marker numerici dei sensori	59
5.28	Caso test 5: Marker numerici dei sensori	60
5.29	Caso test 1: Campi di Mach ottenuti al variare dei sensori	61
5.30	Caso test 1: Campi di errore ottenuti al variare dei sensori	62
5.31	Caso test 1: Confronto distribuzione pressione a parete al variare dei sensori	63
5.32	Andamento dell'errore associato ai sensori al variare dei casi test . .	64
5.33	Spazio dei parametri, addestramento e interpolazione	65
5.34	Caso test 1: Interpolazione tramite CDI e confronto del campo di Mach tramite sensore di Ducros corretto	66
5.35	Caso test 1: sovrapposizione dei sensori predetti e ad alta fedeltà .	67
5.36	Caso test 1: Errore commesso dall'interpolazione	67
5.37	Caso test 2: Interpolazione tramite CDI e confronto del campo di Mach tramite sensore di Ducros corretto	68
5.38	Caso test 2: sovrapposizione dei sensori predetti e ad alta fedeltà .	69
5.39	Caso test 2: Errore commesso dall'interpolazione	69
5.40	Caso test 3: Interpolazione tramite CDI e confronto del campo di Mach tramite sensore di Ducros corretto	70
5.41	Caso test 3: sovrapposizione dei sensori predetti e ad alta fedeltà .	71
5.42	Caso test 3: Errore commesso dall'interpolazione	71
5.43	Caso test 4: Interpolazione tramite CDI e confronto del campo di Mach tramite sensore di Ducros corretto	72
5.44	Caso test 4: sovrapposizione dei sensori predetti e ad alta fedeltà .	73
5.45	Caso test 4: Errore commesso dall'interpolazione	73
5.46	Caso test 5: Interpolazione tramite CDI e confronto del campo di Mach tramite sensore di Ducros corretto	74
5.47	Caso test 5: sovrapposizione dei sensori predetti e ad alta fedeltà .	75
5.48	Caso test 5: Campi di errore ottenuti al variare dei sensori	75
A.1	Spazio dei parametri utilizzato per l'addestramento, presa d'aria del turbofan	79

A.2	Applicazione dei sensori al database di addestramento, $MFR = 0.61$	80
A.3	Applicazione dei sensori al database di addestramento, $MFR = 0.67$	81
A.4	Applicazione dei sensori al database di addestramento, $MFR = 0.74$	82
B.1	Caso test 1: confronto risultati	84
B.2	Caso test 2: confronto risultati	85
B.3	Caso test 3: confronto risultati	86
B.4	Caso test 4: confronto risultati	87
B.5	Caso test 5: confronto risultati	88

Elenco delle tabelle

3.1	Coordinate dei punti per il dominio computazionale	18
3.2	Condizioni al contorno presa a doppia rampa	18
5.1	Errore associato alla scelta dei sensori	64

Capitolo 1

Fondamenti teorici

1.1 Modelli di Turbolenza

Le simulazioni effettuate in questa tesi si basano sul modello RANS (Reynolds-Averaged Navier-Stokes), ampiamente utilizzato per la simulazione di flussi turbolenti. Pertanto, risulta fondamentale richiamare i concetti teorici alla base di questo approccio, descrivendone i principi, le ipotesi e le principali equazioni, al fine di ottenere un quadro chiaro e completo del modello di turbolenza impiegato. Un flusso è turbolento quando, a numeri di Reynolds abbastanza elevati, si manifestano delle instabilità che portano ad un moto caotico. Un flusso può essere considerato turbolento quando ha un comportamento non stazionario, multi-scala e ha una struttura tridimensionale.

La simulazione di flussi turbolenti può essere svolta con tre approcci:

- **Direct Numerical Simulations (DNS):** è l'approccio più accurato dato che non aggiunge ulteriori ipotesi oltre all'assunzione di fluido Newtoniano, ma è anche il più oneroso. Si vanno ad integrare in maniera diretta le equazioni di Navier-Stokes con una griglia sufficientemente fine, in particolare il numero di punti della griglia è proporzionale al numero di Reynolds che caratterizza il problema:

$$\#\text{punti} \propto Re^{\frac{9}{4}}$$

inoltre la simulazione deve essere necessariamente tridimensionale ed instazionaria.

- **Large Eddy Simulations (LES):** è un approccio che prevede l'integrazione diretta delle equazioni di Navier-Stokes per le grandi scale della turbolenza, mentre le piccole scale vengono modellizzate attraverso un modello di sottofiltro.

- **Reynolds-Averaged Navier-Stokes (RANS)**: è un approccio che si basa sulla media nel tempo delle equazioni di Navier-Stokes, con l'obbiettivo di descrivere il comportamento medio del flusso turbolento, riducendo la complessità computazionale rispetto ai due approcci precedenti.

Prima di tutto, scriviamo le equazioni di governo in forma differenziale nel caso di flusso compressibile, in assenza di termini sorgente [1]

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{v}_i)}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial(\rho \bar{v}_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{v}_j \bar{v}_i)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{v}_j H)}{\partial x_j} = \frac{\partial(\bar{v}_i \tau_{ij})}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \end{cases} \quad (1.1)$$

dove il *tensore degli sforzi viscosi* τ_{ij} nell'Eq. (1.1) è definito come

$$\tau_{ij} = 2\mu S_{ij} + \lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \quad (1.2)$$

nel quale si può includere l'*ipotesi di Stokes*

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu \quad (1.3)$$

Definiamo inoltre il *tensore delle velocità di deformazione*

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.4)$$

1.1.1 Equazioni di Navier Stokes mediate alla Reynolds

Nel caso compressibile, si effettua una *media alla Reynolds* per mediare la densità e la pressione, mentre si effettua una *media alla Favre* [2] per le altre variabili, quali la velocità, energia interna, entalpia e temperatura tramite le seguenti relazioni [1]

$$\bar{\rho} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \rho \, dt \quad (1.5)$$

$$\bar{p} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} p \, dt \quad (1.6)$$

$$\tilde{v}_i = \frac{1}{\bar{\rho}} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \rho v_i \, dt \quad (1.7)$$

si sfruttano le grandezze definite per determinare le variabili conservative come somma di due contributi, un valore medio e una fluttuazione

$$\rho = \bar{\rho} + \rho' \quad p = \bar{p} + p' \quad v_i = \tilde{v}_i + v''_i \quad (1.8)$$

L'applicazione delle medie alla Favre e alla Reynolds porta ad avere un nuovo sistema di equazioni di governo, chiamate *Favre and Reynolds-averaged Navier Stokes equations* [1]

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{v}_i)}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{v}_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{v}_j\tilde{v}_i)}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\tilde{\tau}_{ij} - \bar{\rho}\tilde{v}_i''\tilde{v}_j'') \\ \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{E})}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{v}_j\tilde{H})}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(k\frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} - \bar{\rho}\tilde{v}_j''h'' + \widetilde{\tau_{ij}v_i''} - \bar{\rho}\tilde{v}_j''K\right) \\ \quad + \frac{\partial}{\partial x_j}[\tilde{v}_i(\tilde{\tau}_{ij} - \bar{\rho}\tilde{v}_i''\tilde{v}_j'')] \end{cases} \quad (1.9)$$

si può notare che compare un termine aggiuntivo rispetto al tensore degli sforzi viscosi, ovvero il *tensore degli sforzi di Reynolds mediato alla Favre*

$$\tau_{ij}^F = -\bar{\rho}\tilde{v}_i''\tilde{v}_j'' \quad (1.10)$$

tal tensore deve essere determinato, entrano perciò in gioco i *modelli di chiusura*

1.1.2 Eddy-viscosity e modelli di chiusura

L'approccio di eddy-viscosity ideato da Boussinesq [3] prevede che il tensore degli sforzi di Reynolds dipenda linearmente dal tensore delle velocità di deformazione, tramite un fattore di proporzionalità che è la *eddy viscosity*, composta da un termine anisotropo e uno isotropo

$$\tau_{ij}^F = -\bar{\rho}\tilde{v}_i''\tilde{v}_j'' = 2\mu_T \tilde{S}_{ij} - \left(\frac{2}{3}\mu_T\right) \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} - \frac{2}{3}\bar{\rho}\tilde{K}\delta_{ij} \quad (1.11)$$

notiamo l'*energia cinetica turbolenta associata alle fluttuazioni K* nel termine isotropo e la *eddy viscosity* μ_T , ovvero una viscosità turbolenta legata anch'essa alle fluttuazioni, che compare nel termine anisotropo.

I modelli di chiusura servono proprio a calcolare la *eddy viscosity* μ_T per determinare il tensore degli sforzi di Reynolds che compare nelle equazioni RANS.

Esistono diversi modelli di chiusura:

- **Modello $K - \varepsilon$** , si aggiungono due equazioni di trasporto legate all'energia cinetica turbolenta associata alle fluttuazioni K e la *dissipazione di energia cinetica turbolenta* ε .
- **Modello $K - \omega$** , anche in questo caso si aggiungono due equazioni di trasporto, una in funzione sempre dell'energia cinetica turbolenta K , mentre la seconda in funzione della *dissipazione specifica* ω
- **Modello ibrido $K - \varepsilon / K - \omega$** , si sfrutta il modello $K - \omega$ in corrispondenza di condizioni al contorno di parete dove risulta particolarmente efficace. Questo modello è di tipo *Shear Stress Transport* (SST)
- **Modello di Spalart-Allmaras**, prevede l'uso di una sola equazione di trasporto per la *eddy viscosity* tramite la variabile $\tilde{\nu}$ che viene chiamata *modified eddy viscosity*. L'equazione si presenta nella seguente forma,

$$\frac{\partial(\rho\tilde{\nu})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\tilde{\nu}\bar{v}_j)}{\partial x_j} = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\rho(\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right] + \rho(P - D) + \Pi \quad (1.12)$$

dove si può notare la presenza di una serie di termini tra cui uno instazionario, convettivo, diffusivo, di produzione e distruzione, e dei termini misti ottenuti in maniera empirica. In particolare i termini di produzione, distruzione e i termini misti si possono espandere come segue,

$$\begin{cases} P = C_{b1}\tilde{\nu}\tilde{S} \\ D = C_{w1}f_w \frac{\tilde{\nu}^2}{d^2} \\ \Pi = \frac{C_{b2}}{\sigma} \frac{\partial \nu}{\partial x_j} \frac{\partial \nu}{\partial x_j} - \frac{1}{\sigma} (\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \end{cases} \quad (1.13)$$

1.2 Modelli di Ordine Ridotto (ROM)

I modelli di ordine ridotto (Reduced Order Models, ROM) rappresentano strumenti numerici concepiti per ridurre il costo computazionale di simulazioni ad alta fedeltà mantenendo, al contempo, un'adeguata accuratezza nella rappresentazione dei fenomeni fisici dominanti. In fluidodinamica computazionale (CFD), i modelli ROM consentono di descrivere la dinamica di flussi complessi utilizzando un numero molto più ridotto di gradi di libertà rispetto al modello completo (ad esempio, RANS o LES), risultando particolarmente utili in:

- studi parametrici su ampi domini di progetto,
- problemi di ottimizzazione aerodinamica.

Il principio alla base di un modello ROM è la proiezione della soluzione di un sistema originale in un sottospazio ridotto generato da un database di simulazioni ad alta fedeltà, descritto nel Capitolo 3.

La costruzione di un modello ROM si articola tipicamente in tre fasi:

1. **Generazione del database ad alta fedeltà**, in cui vengono raccolte le soluzioni del problema (campi di moto) per diverse condizioni parametriche (ad esempio al variare del Mach, angolo di incidenza...);
2. **Riduzione della dimensionalità**, tramite l'identificazione di strutture coerenti dominanti del flusso tramite tecniche di mappatura e registrazione;
3. **Predizione a basso costo**, che può essere ottenuta tramite proiezione dinamica del sistema ridotto o, in approcci non intrusivi, tramite interpolazione dei campi di moto nello spazio ridotto

Da un punto di vista metodologico, i modelli ROM si suddividono in:

- **Intrusivi**, costruiti proiettando le equazioni di Navier-Stokes su uno spazio ridotto (es. Galerkin-POD)
- **Non intrusivi**, che operano esclusivamente sui dati simulati (snapshot), senza modificare le equazioni di governo del sistema originale, si tratta di **approcci data-driven**

Tradizionalmente, l'interpolazione tra snapshot viene effettuata in modo lineare tramite metodi che generano predizioni ottenute tramite combinazioni lineari degli snapshot presenti nel database di addestramento, ma tale approccio non tiene conto dei fenomeni di trasporto che riguardano le strutture coerenti. Per superare questo limite, si impiegano **metodi di interpolazione non lineari** basati sul Trasporto Ottimale (Optimal Transport), che cercano di "spostare" le strutture

coerenti invece di mediare.

In particolare, in questa tesi verrà adottata la **Convex Displacement Interpolation (CDI)**, un metodo non intrusivo e non lineare che combina concetti di trasporto ottimale con l'interpolazione in spazi ridotti, utilizzando la Proper Orthogonal Decomposition (POD) come tecnica di compressione dei dati, consentendo di preservare al meglio le strutture coerenti del campo di moto. La CDI verrà discussa in dettaglio nel Capitolo 3 e applicata alla predizione di flussi compressibili nel Capitolo 4, mostrando come possa migliorare l'accuratezza delle predizioni ROM rispetto a tecniche di interpolazione lineare.

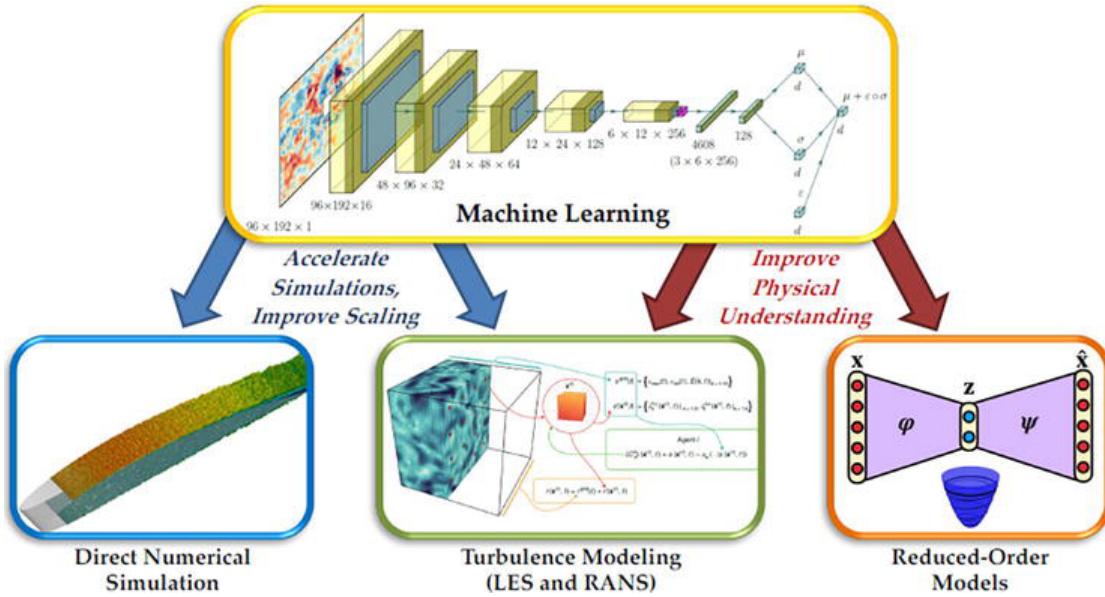


Figura 1.1: Nel contesto delle simulazioni numeriche dirette, della modellazione della turbolenza e dei modelli di ordine ridotto, segue un riepilogo di alcune delle aree più rilevanti in cui il Machine Learning potrebbe migliorare la fluidodinamica computazionale (CFD) [4]

Capitolo 2

Metodi di interpolazione per la predizione di flussi compressibili

2.1 Interpolazione lineare vs non lineare

Le tecniche basate su modelli ridotti consentono di ridurre drasticamente il costo computazionale rispetto a una campagna completa di simulazioni RANS. I modelli di ordine ridotto si distinguono principalmente in approcci lineari e non lineari. Nel seguito si presenta un confronto tra due strategie rappresentative: la **Proper Orthogonal Decomposition (POD)** con interpolazione lineare dei coefficienti e la **Convex Displacement Interpolation (CDI)**.

Un modello lineare tratta i fenomeni complessi come la somma di singoli effetti indipendenti. In altre parole, si basa sul principio di sovrapposizione: la soluzione generale è la somma di soluzioni più semplici.

I metodi lineari falliscono per la loro incapacità di prevedere i fenomeni di trasporto nella fluidodinamica (approssimano la soluzione per nuovi parametri come combinazione lineare delle soluzioni associate a parametri presenti nel database di addestramento).

L'idea è quella di identificare dei fenomeni non-lineari come vortici e urti e vedere come cambia la loro posizione al variare dei parametri, è quindi necessaria una **mappatura** per descrivere il trasporto dei fenomeni non-lineari: la **mappatura può essere fatta con interpolazioni non lineari (CDI)**. Inoltre la mappatura può essere guidata da sensori che catturano i fenomeni non lineari (es. **sensore di Ducros** che capta la divergenza della velocità)

2.2 Proper Orthogonal Decomposition (POD)

La Proper Orthogonal Decomposition (POD) è una tecnica di riduzione dell'ordine dei modelli (ROM) che consente di rappresentare il comportamento di un sistema fisico descritto da equazioni alle derivate parziali (PDE) in uno spazio di dimensione molto più bassa, mantenendo al contempo la maggior parte dell'energia o dell'informazione del sistema originale.

Da un punto di vista matematico, la POD si basa sulla **Singular Value Decomposition (SVD)** applicata a un insieme di snapshot del campo di soluzione di una PDE, acquisiti in diversi istanti temporali o per differenti condizioni parametriche (come nel nostro caso studio).

2.2.1 Formulazione generale

Sia $u(x, \mu_i)$ la soluzione di una PDE in funzione della variabile spaziale $x \in \Omega$ e dei parametri $\mu_i \in \mathcal{P}$.

Durante una simulazione numerica (ad esempio CFD), si raccolgono N_s snapshot del campo discreto:

$$u(x, \mu_i) \quad per \quad i = 1, \dots, N_s$$

che vengono organizzati in una matrice di dati:

$$X = [u_1, u_2, \dots, u_{N_s}] \in \mathbb{R}^{N_x \times N_s}$$

dove N_x è il numero di gradi di libertà spaziali (es. nodi o celle della discretizzazione del dominio).

2.2.2 Applicazione della SVD

Si esegue la decomposizione ai valori singolari della matrice degli snapshot:

$$X = U\Sigma V^T \tag{2.1}$$

dove:

- $U = [\phi_1, \dots, \Phi_{N_s}]$ contiene gli autovettori ortonormali nello spazio fisico (modi spaziali POD)
- $\Sigma = diag(\sigma_1, \dots, \sigma_{N_s})$ contiene i valori singolari, decrescenti e proporzionali all'energia associata a ciascun modo.
- V contiene le coordinate parametriche degli snapshot.

2.2.3 Riduzione del rango

La SVD consente di identificare la dimensionalità intrinseca del manifold parametrico. Troncando la decomposizione ai primi r valori singolari, si ottiene[5]:

$$X \approx U_r \Sigma_r V_r^T \quad (2.2)$$

e quindi tramite la POD possiamo identificare una base ortonormale ridotta capace di approssimare in modo efficiente tutti gli snapshot:

$$u(\mu) \approx \sum_{k=1}^r a_k(\mu) \phi_k$$

dove $a(\mu_i)$ è il vettore delle coordinate modali per il parametro μ_i ed è dato da:

$$a(\mu_i) = \Sigma V_{(:,i)}^T \quad (2.3)$$

Il valore di r viene scelto in modo che una frazione prefissata di energia (o varianza) sia preservata:

$$\frac{\sum_{k=1}^r \sigma_k^2}{\sum_{k=1}^{N_s} \sigma_k^2} \geq \eta, \quad \eta \in [0.99, 0.999]$$

2.2.4 Approssimazione fuori dai punti campione

Una volta ottenuti i modi POD, si può stimare la soluzione per un nuovo valore del parametro $\mu^* \notin \{\mu_i\}$ approssimando i coefficienti modali come funzione di μ :

$$a_k(\mu^*) \approx I_k(\mu^*)$$

dove I_k rappresenta un modello interpolativo o regressivo, ad esempio:

- Radial Basis Functions (RBF)
- Gaussian Process Regression (GPR)
- Reti neurali
- riduzione parametrica tramite Galerkin-Projection

e la ricostruzione lineare della soluzione avviene come:

$$\hat{u}(\mu^*) = \sum_{k=1}^r I_k(\mu^*) \phi_k \quad (2.4)$$

La POD parametrica può essere interpretata come un metodo per identificare un sottospazio lineare di dimensione minima che meglio approssima il manifold delle soluzioni nel dominio parametrico \mathcal{P} . In altre parole, la SVD fornisce la base energeticamente ottimale per rappresentare le soluzioni parametrizzate nel senso dei minimi quadrati.

2.3 Convex Displacement Interpolation (CDI)

La Convex Displacement Interpolation (CDI) è una tecnica di interpolazione non lineare che si basa sul concetto del trasporto ottimale e nasce per superare i limiti delle approssimazioni lineari nei problemi parametrici in cui le soluzioni presentano strutture coerenti, come urti, shear layer o vortici, che si spostano nel dominio al variare dei parametri. La CDI riesce quindi a prevedere i fenomeni di trasporto all'interno dei campi di moto.

I metodi lineari classici (come POD-Galerkin) faticano a rappresentare accuratamente il comportamento della soluzione, a causa della natura fortemente non lineare del fenomeno fisico.

2.3.1 Formulazione matematica e proprietà

La metodologia CDI segue l'approccio introdotto da Cucchiara et al. [6] e può essere formalizzato attraverso una decomposizione offline/online finalizzata alla predizione del campo di moto, descritto da,

$$\mu \in \mathcal{P} \mapsto u_\mu \in \mathcal{M}$$

Si definisce un insieme di parametri di addestramento,

$$\mathcal{P}_{train} = \{\mu^k\}_{k=1}^{n_{train}} \subset \mathcal{P}$$

e il corrispondente dataset delle soluzioni ad alta fedeltà,

$$\mathcal{D}_{train} = \{u_\mu : \mu \in \mathcal{P}_{train}\}$$

Durante la fase di addestramento, per ogni elemento appartenente al dataset di addestramento \mathcal{D}_{train} , si raccolgono un insieme di punti $X_\mu^{raw} = \{x_{i,\mu}^{N_\mu}\}_{i=1}^{N_\mu} \subset \bar{\Omega}$ che descrivono i principali fenomeni fisici che caratterizzano il campo di moto e che si desidera monitorare. Si osservi che gli insiemi $\{X_\mu^{raw} : \mu \in \mathcal{P}_{train}\}$ non contengono necessariamente lo stesso numero di elementi e non sono necessariamente accoppiati tra loro.

Successivamente, si definiscono i punti di riferimento,

$$X^{ref} := \{x_i^{ref}\}_{i=1}^N$$

e i nuovi sensori,

$$X_\mu := \{x_{i,\mu} = x_i^{ref} + \nu_{i,\mu}\}_{i=1}^N$$

tali che il set X_μ approssimi X_μ^{raw} per tutti i $\mu \in \mathcal{P}_{train}$.

Durante la fase online, dato un nuovo valore per i parametri $\mu \notin \mathcal{P}_{train}$, per prima

cosa si applica un metodo di regressione (si usa la RBF per determinare l'approssimazione $\mu \in \mathcal{P} \mapsto \hat{X}_\mu \in \mathbb{R}^{N \times d}$, ma prima si applica la POD per determinare una rappresentazione equivalente) per prevedere la nuova posizione dei sensori,

$$\hat{X}_\mu = \{\hat{x}_{i,\mu} = x_i^{ref} + \hat{\nu}_{i,\mu}\}_{i=1}^N$$

e successivamente si va ad identificare un set di *k-nearest-neighbors*,

$$\mathcal{P}_{nn}^\mu = \{\nu^i\}_{i=1}^k \subset \mathcal{P}_{train}$$

come terzo step, si definiscono le mappature $\{\Phi_\nu : \nu \in \mathcal{P}_{nn}^\mu\}$ tali per cui ogni mappatura Φ_ν sia biettiva in Ω e,

$$\Phi_\nu(\hat{x}_{i,\nu}) \approx \hat{x}_{i,\nu} \quad per \quad i = 1, \dots, N \quad \nu \in \mathcal{P}_{nn}^\mu$$

ed infine, si utilizza la formula che caratterizza la CDI e che fornisce l'approssimazione della soluzione,

$$\hat{u}_\mu = \sum_{\nu \in \mathcal{P}_{nn}^\mu} \omega_\mu^\nu \tilde{u}_\nu \quad dove \quad \tilde{u}_\nu = u_\nu \circ \Phi_\nu \quad (2.5)$$

dove $\{\omega_\mu^\nu\}$ rappresentano i pesi utilizzati per l'interpolazione e vengono determinati come rappresentato nella fig. 2.1

2.3.2 Struttura dell'algoritmo

L'algoritmo CDI può essere formalizzato in due fasi: **offline** e **online** [6].

- **Offline stage**

svolto una volta

1. Generazione del dataset di addestramento tramite le simulazioni CFD ad alta fedeltà $\mathcal{D}_{train} = \{u_\mu : \mu \in \mathcal{P}_{train}\}$
2. Si identificano le strutture coerenti sotto forma nuvole di punti $\{X_\mu^{raw} : \mu \in \mathcal{P}_{train}\}$
3. Definizione del set di riferimento X^{ref} e la nuvola di punti ordinata $\{X_\mu : \mu \in \mathcal{P}_{train}\}$

- **Online stage**

svolto per ogni $\mu \in \mathcal{P}$

1. Predizione dei nuovi punti $\hat{X}_\mu = \{\hat{x}_{i,\mu}\}_{i=1}^N$ (POD + RBF)
2. Selezione dei parametri dei vicini più prossimi $\mathcal{P}_{nn}^\mu = \{\nu^i\}_{i=1}^k \subset \mathcal{P}_{train}$
3. Calcolo mappature Φ_ν basate sui \hat{X}_μ e \hat{X}_ν : problema di ottimizzazione
4. Calcolo dei pesi $\{\omega_\mu^\nu : \nu \in \mathcal{P}_{nn}^\mu\}$ e stima della soluzione approssimata tramite la 2.5

2.3 – Convex Displacement Interpolation (CDI)



Figura 2.1: Rappresentazione schematica della metodologia CDI per un semplice problema 1D. [6]

- (a) Dataset degli snapshots $\{u_{\mu^1}, u_{\mu^2}\}$ e la corrispondente posizione degli urti (sensori), \hat{x}_{μ} rappresenta la posizione dell'urto per il parametro μ
- (b) Snapshot mappati

Capitolo 3

Database di simulazioni ad alta fedeltà

In questo capitolo vengono descritte le simulazioni RANS utilizzate come database di riferimento per la costruzione e validazione del modello ridotto basato su interpolazione non lineare.

Le simulazioni forniscono gli snapshot del campo di moto associati a diverse condizioni operative, costruendo il dataset \mathcal{D}_{train} utilizzato nelle fasi di addestramento e test delle metodologie di interpolazione.

Due casi test sono stati analizzati:

1. Una **presa d'aria subsonica di turbofan**, impiegata per studiare e validare la definizione dei sensori e la robustezza della procedura di registrazione.
2. Una **presa supersonica a doppia rampa**, utilizzata per valutare l'efficacia della metodologia di Convex Displacement Interpolation (CDI) nel rappresentare strutture fortemente non lineari e traslazionali, come gli urti e i fasci d'espansione.

3.1 Presa subsonica TurboFan

La configurazione rappresenta una presa d'aria subsonica tipica di un motore turbofan civile che presenta le seguenti caratteristiche:

- NACA 1-85-100 [7]
- Flusso transonico ad alto numero di Reynolds ($Re \approx 10^7$)
- Equazioni RANS con il modello di turbolenza di Spalart-Allmaras e assunzione di assialsimmetria

- Dominio computazionale discretizzato da circa $150 \cdot 10^3$ elementi

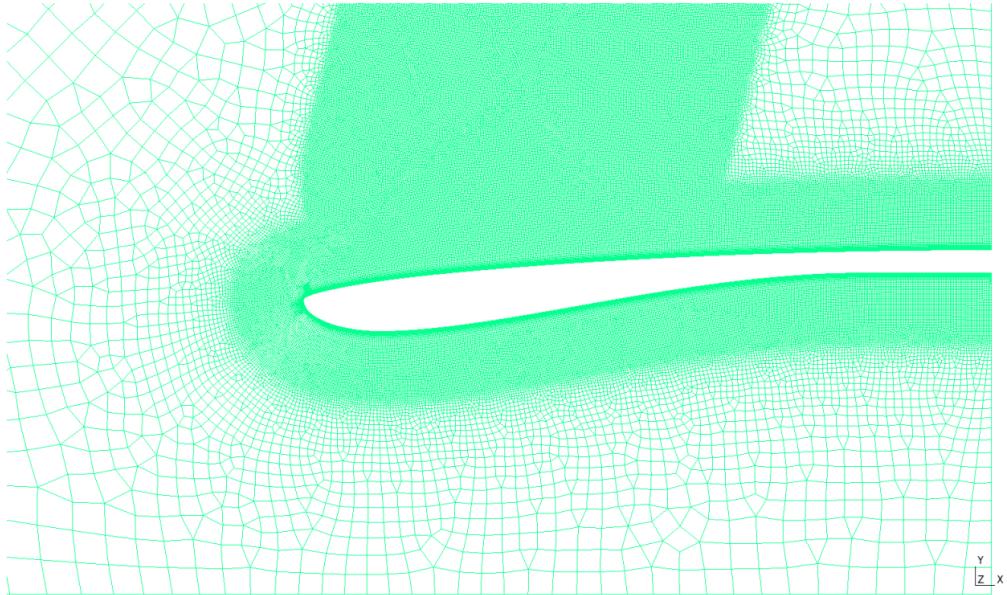


Figura 3.1: Griglia computazionale presa turbofan

Per la generazione del database di simulazioni ad alta fedeltà, sono stati considerati due parametri:

- Mach di volo: $0.84 \leq M_\infty \leq 0.89$
- Mass Flow Rate (MFR): $0.61 \leq MFR \leq 0.74$ con $MFR = \frac{\dot{m}}{\dot{m}_0}$
dove \dot{m} rappresenta la portata massica in ingresso nel motore, mentre \dot{m}_0 la portata massica calcolata a partire dai valori dell'indisturbato a monte

Inoltre l' MFR impone la pressione statica all'uscita della presa, che viene utilizzata come condizione al contorno. L'urto risulta più forte per alti M_∞ e bassi MFR .

Di seguito, in fig. 3.2, sono schematizzati i parametri utilizzati per le simulazioni ad alta fedeltà che compongono il dataset di training e i casi test utilizzati per validare i risultati dell'interpolazione non lineare effettuata tramite la metodologia CDI.

Come già anticipato, le simulazioni ad alta fedeltà sono state svolte tramite un modello RANS, utilizzando un codice sviluppato *in-house* tramite linguaggio *Fortran90* e i risultati ottenuti sono raffigurati nelle fig. 3.3, 3.4, 3.5

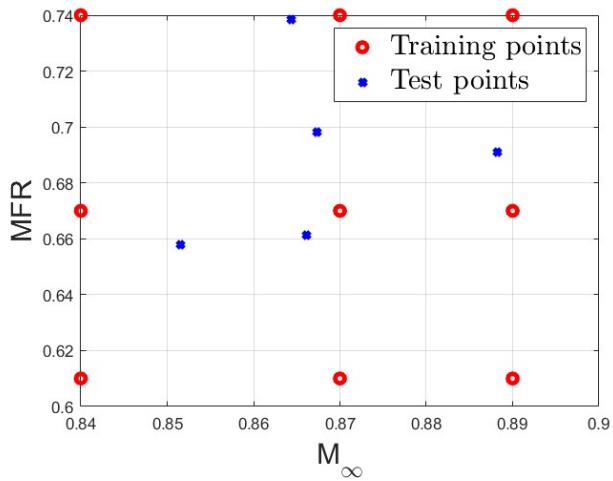


Figura 3.2: Spazio dei parametri usato per il training e i test della presa subsonica del turbofan

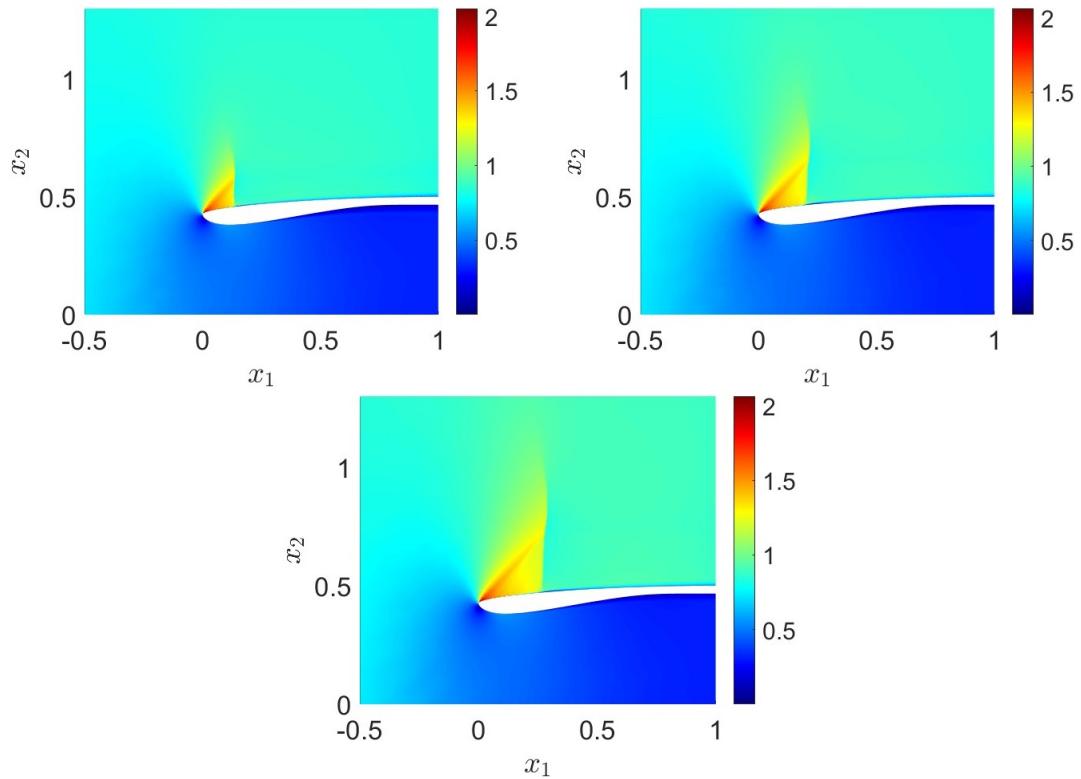


Figura 3.3: Campo di Mach per $MFR = 0.61$ al variare del Mach

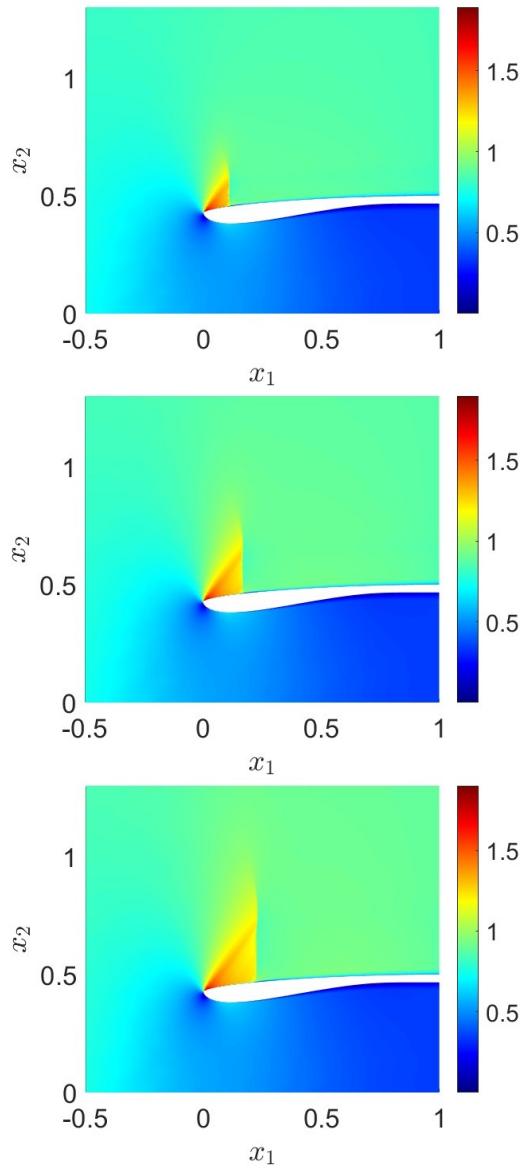


Figura 3.4: Campo di Mach per $MFR = 0.67$ al variare del Mach

Come si può osservare, la configurazione in esame è analoga a quella di un profilo alare soggetto ad un flusso transonico, in cui il numero di Mach indisturbato a monte supera il valore critico, $M_\infty > M_{\infty,cr}$. In tali condizioni, sul dorso del profilo si forma una regione localmente supersonica, comunemente indicata come bolla supersonica, la cui estensione aumenta all'aumentare del Mach di monte.

Il flusso che attraversa questa regione viene quindi ricondotto a regime subsonico da un'onda d'urto che si sviluppa sul dorso del profilo, determinando una brusca variazione delle grandezze termodinamiche.

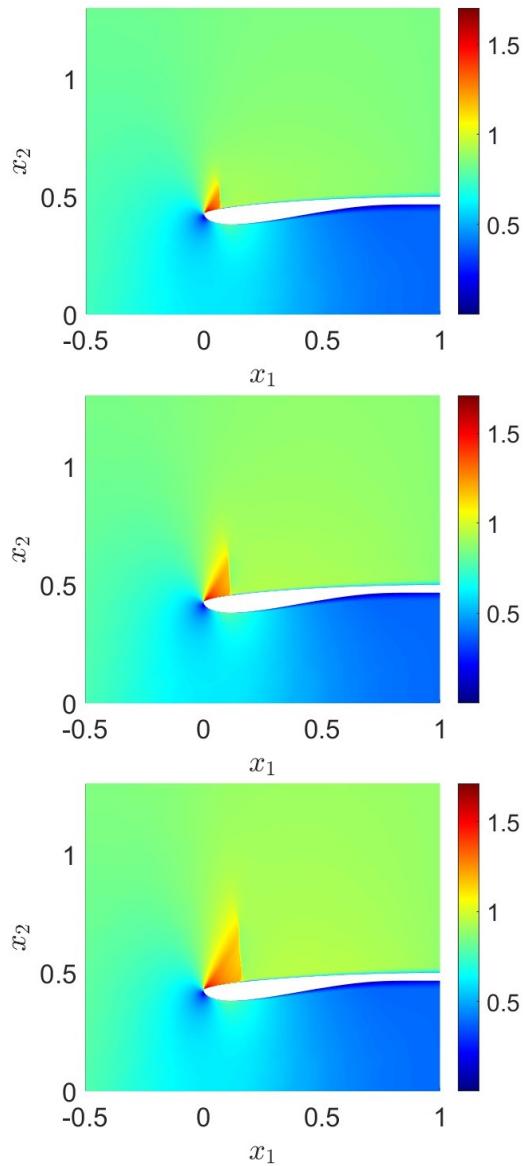


Figura 3.5: Campo di Mach per $MFR = 0.74$ al variare del Mach

Come già anticipato, all'aumentare del numero di Mach a monte, l'intensità dell'onda d'urto cresce in modo significativo. Questo comportamento è dovuto al fatto che, per valori più elevati di M_∞ , la regione supersonica che si sviluppa sul dorso si estende maggiormente, e il salto di pressione necessario per riportare il flusso a regime subsonico diventa più marcato. Analogamente, al diminuire del Mass Flow Ratio (MFR), cioè quando la portata ingerita dal motore si riduce rispetto a quella disponibile al campo lontano, parte del flusso incidente viene deviato verso l'esterno della presa, causando un'intensificazione dell'onda d'urto.

3.2 Presa supersonica a doppia rampa

Le prese d'aria supersoniche rappresentano un componente chiave per i sistemi propulsivi ad alta velocità. Nella seguente tesi si è utilizzato un caso test costituito da una presa supersonica a doppia rampa, che è una configurazione di riferimento ampiamente utilizzata nello studio dei flussi comprimibili, in quanto rappresenta un sistema di compressione esterna che genera una sequenza controllata di urti obliqui per rallentare il flusso e comprimerlo all'ingresso del condotto.

La geometria utilizzata è stata tratta dal lavoro del Professor Ferrero [8], ed è definita dalle coordinate presenti in tab. 3.1,

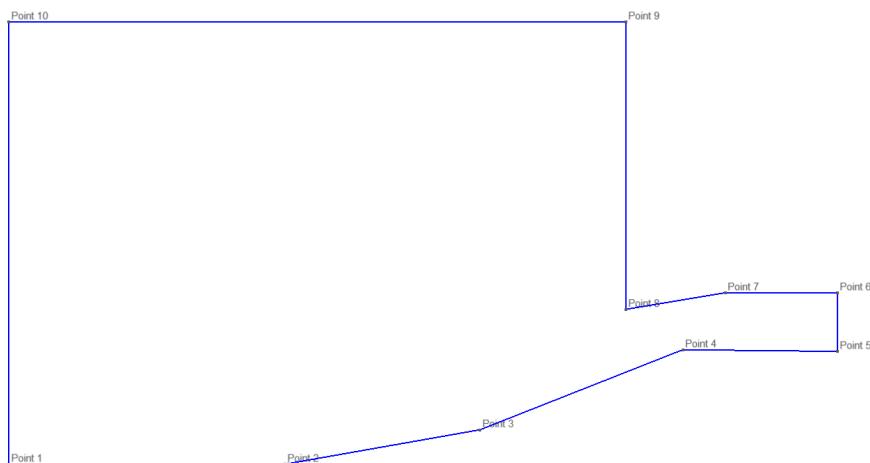


Figura 3.6: Dominio computazionale presa supersonica a doppia rampa

Punto	A	B	C	D	E	F	G	H	I	L	M	N
x/L	-0.500	-0.450	0.000	0.353	0.720	1.000	1.000	0.797	0.617	0.832	0.832	-0.500
y/L	0.000	0.000	0.000	0.0623	0.207	0.204	0.310	0.310	0.280	0.426	0.800	0.800

Tabella 3.1: Coordinate dei punti per il dominio computazionale

Le condizioni al contorno sono invece riportate nella tab. 3.2

Segmento	Condizione al contorno
1-10, 1-2	Inlet
2-3, 3-4, 4-5, 6-7, 7-8	Parete solida
5-6, 8-9, 9-10	Outlet

Tabella 3.2: Condizioni al contorno presa a doppia rampa

Il presente caso test è stato validato utilizzando i seguenti parametri, per i quali sono forniti in letteratura dei valori sperimentali[9].

In particolare, per la validazione sono stati utilizzati i seguenti parametri: $M_\infty = 3$, incidenza $i = 0^\circ$, numero di Reynolds $Re \approx 1.3 \cdot 10^6$, riferito alla lunghezza assiale della prima rampa.

La griglia computazionale utilizzata è composta da $\approx 91 \cdot 10^3$ elementi

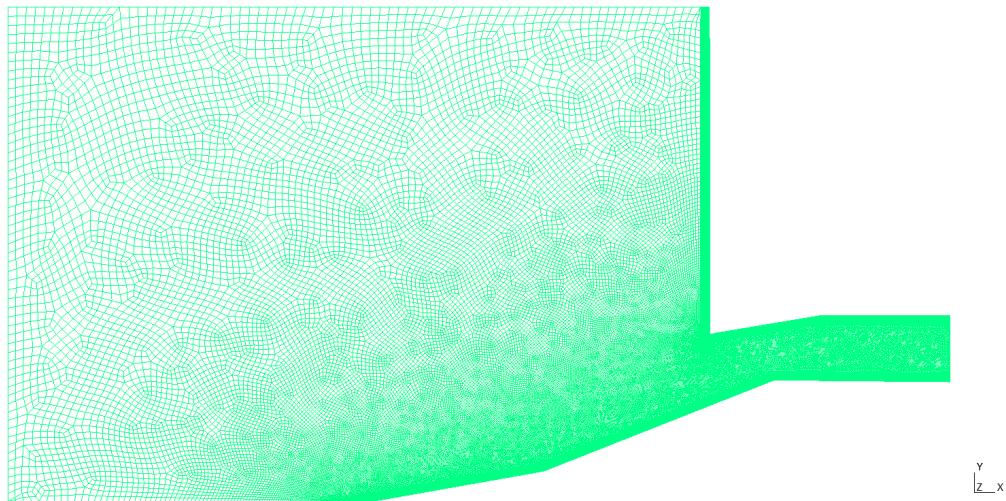


Figura 3.7: Griglia computazionale presa a doppia rampa

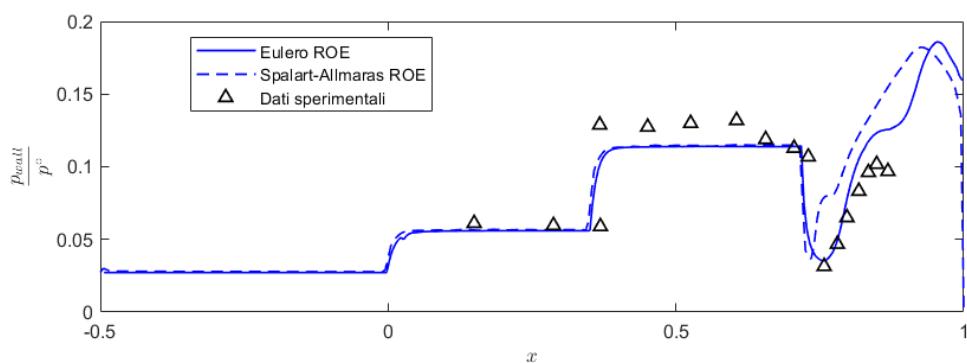


Figura 3.8: Pressione sulla parete inferiore presa a doppia rampa

L’analisi della distribuzione di pressione sulla parete inferiore evidenzia una buona concordanza tra i risultati numerici e le misure sperimentali, indipendentemente dal modello fisico impiegato, sia esso Euler o RANS. Per questo motivo si è optato per l’utilizzo delle simulazioni Euleriane per la generazione del database.

3.2 – Presa supersonica a doppia rampa

Per la generazione del database di simulazioni ad alta fedeltà, sono stati considerati due parametri anche in questo caso test:

- Mach di volo
- Angolo di incidenza

La variazione dell'angolo di incidenza rappresenta un aspetto fondamentale nello studio delle prestazioni delle prese d'aria supersoniche. Durante il volo reale, le condizioni di incidenza variano in funzione dell'assetto del velivolo e delle manovre, modificando significativamente la configurazione del campo di onde d'urto e, di conseguenza, la capacità della presa di catturare e comprimere il flusso.

Secondo Fujii et al.[10], che hanno analizzato sperimentalmente e numericamente l'effetto dell'angolo di incidenza sulla presa rettangolare del progetto Himiko della Jaxa, la variazione dell'incidenza influisce in modo rilevante su due parametri: il Mass Capture Ratio (MCR) e il Total Pressure Recovery (TPR). Ciò è dovuto principalmente a due fattori, l'aumento dell'area proiettata all'ingresso della presa e la variazione della struttura degli urti obliqui.

La fig. 3.9 mostra lo spazio dei parametri utilizzati per costruire il database di simulazioni ad alta fedeltà. Questa distribuzione di campioni consente di esplorare il comportamento della presa in un ampio intervallo operativo, garantendo una copertura adeguata nel dominio parametrico per l'interpolazione basata sulla CDI.

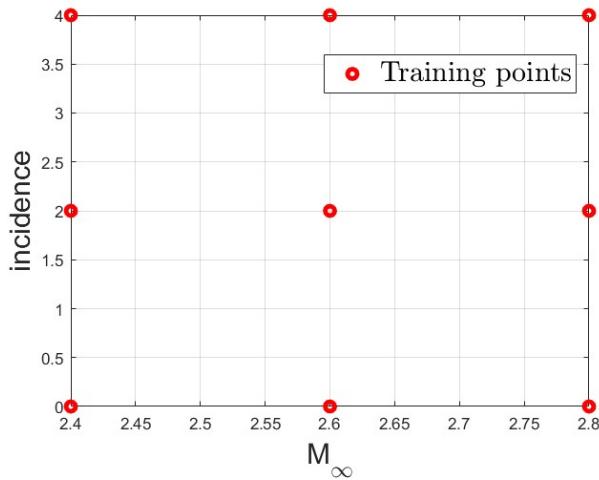


Figura 3.9: Spazio dei parametri di addestramento, presa a doppia rampa

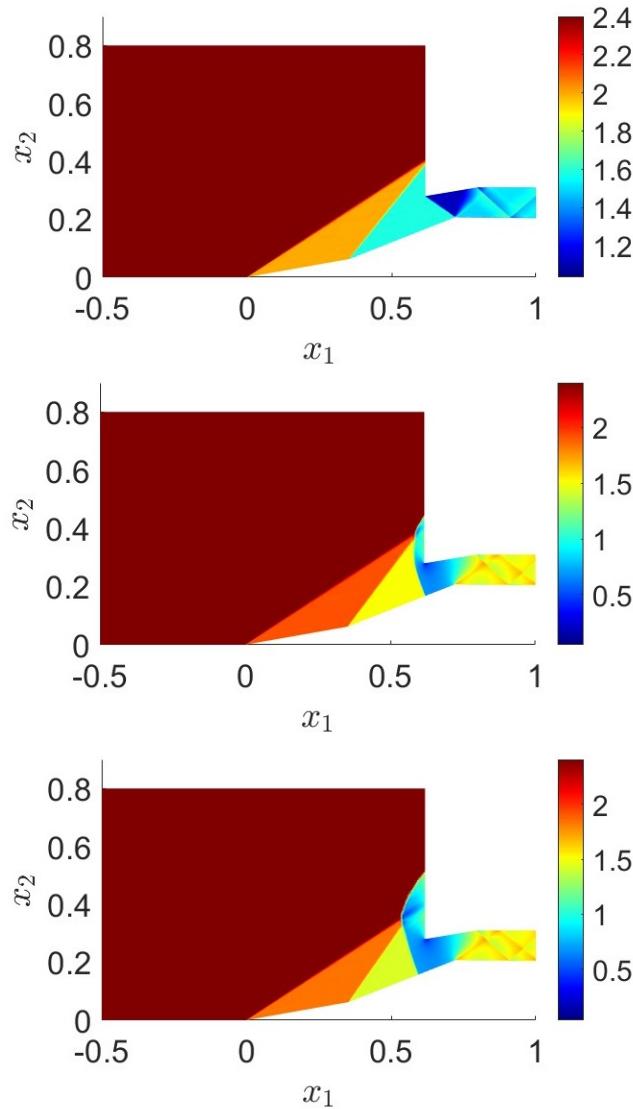


Figura 3.10: Campo di Mach per $M_\infty = 2.4$ al variare dell’incidenza

Il campo di moto è fortemente influenzato sia dal numero di Mach sia, in particolare, dall’angolo di incidenza.

Per condizioni di incidenza nulla o comunque molto ridotta, il flusso è caratterizzato da onde d’urto che si generano in corrispondenza delle rampe. L’interazione tra queste onde d’urto produce un pattern caratteristico di compressione multirampa che guida il flusso verso il canale interno.

All’aumentare dell’angolo di incidenza comporta un aumento virtuale della pendenza delle rampe per il flusso che arriva dall’indisturbato a monte, di conseguenza gli urti generati sulle due rampe hanno un’intensità maggiore.

3.2 – Presa supersonica a doppia rampa

Tuttavia, esiste un limite fisico per la deflessione che l’urto può sostenere rimanendo attaccato alla rampa, per questo motivo nel caso con M_∞ si genera un’onda d’urto curva e staccata, localizzata a monte del canale (fig. 3.10). Ciò causa un cattivo funzionamento della presa d’aria dato che la configurazione degli urti non più quella prevista per avere un funzionamento efficiente.

La scelta di inserire nel dataset di addestramento tali condizioni di funzionamento limite ha lo scopo di rendere l’algoritmo significativamente più robusto, poiché permette al modello di apprendere anche le transazioni altamente non lineari e garantendo una maggiore stabilità nelle previsioni.

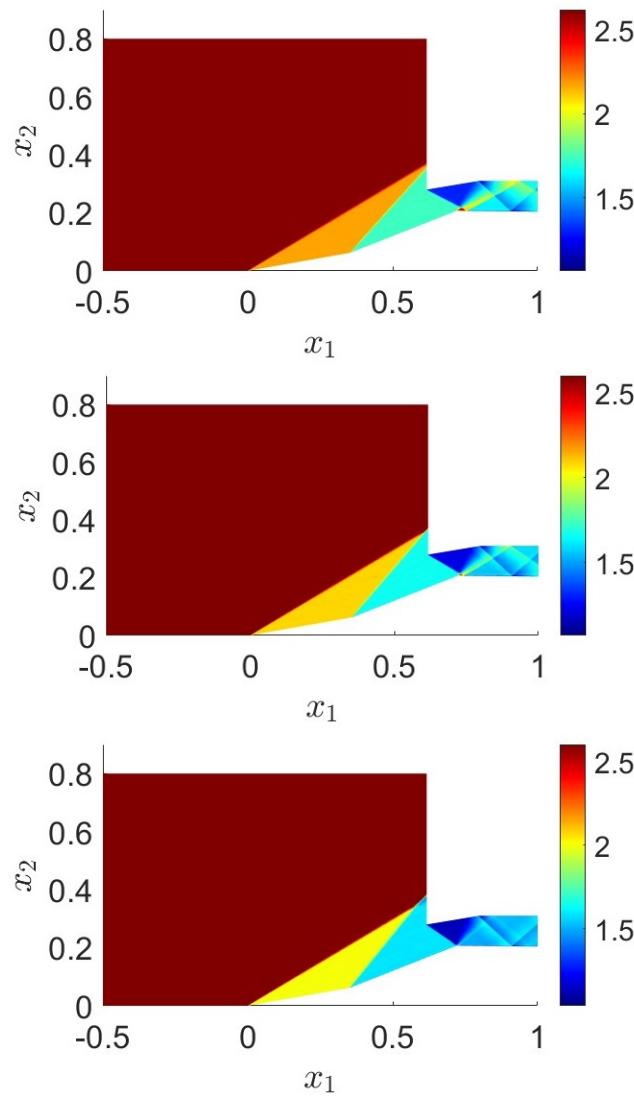


Figura 3.11: Campo di Mach per $M_\infty = 2.6$ al variare dell’incidenza

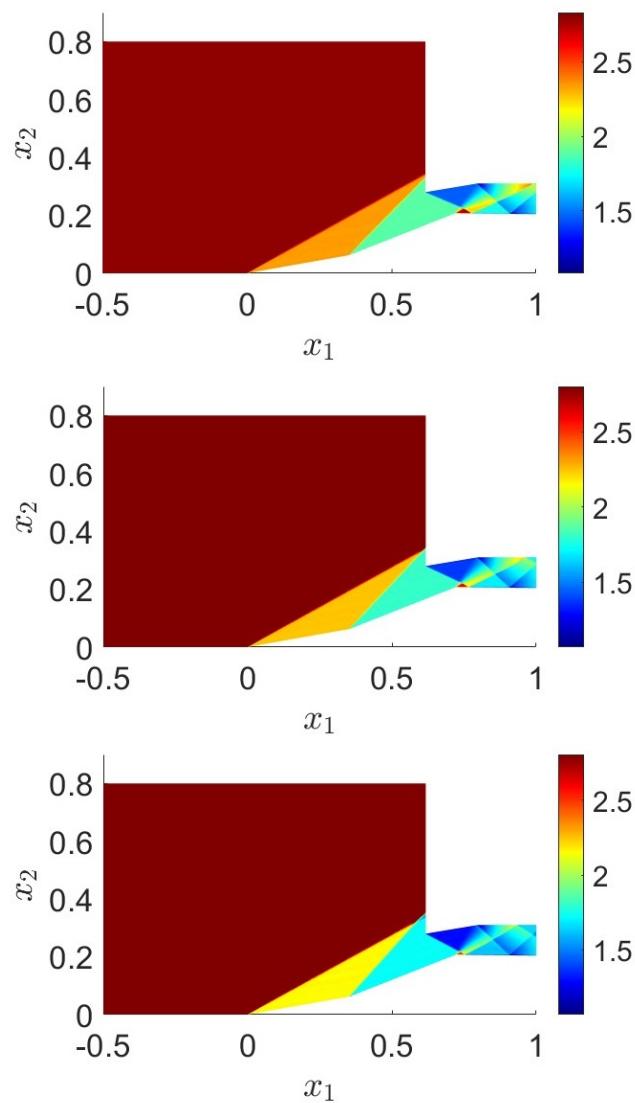


Figura 3.12: Campo di Mach per $M_\infty = 2.8$ al variare dell'incidenza

Capitolo 4

Applicazione della CDI per la predizione

In questo capitolo si vanno ad estendere i concetti introdotti nella sezione 2.3, presentando alcune delle metodologie più rilevanti attuate per i passaggi delle fasi offline ed online dell'algoritmo di interpolazione non lineare basato sulla CDI, mostrandone le proprietà più importanti.

4.1 Identificazione delle strutture coerenti

Per poter applicare l'interpolazione non lineare è necessario disporre di una rappresentazione compatta ma informativa delle principali strutture coerenti presenti nei campi di moto ad alta fedeltà che costituiscono il database, come le onde d'urto, le regioni d'espansione e i vortici.

A tale scopo, si utilizzano dei sensori all'interno del dominio computazionale, in grado di tracciare la posizione e l'evoluzione di tali strutture al variare dei parametri fisici del problema.

Questi sensori non corrispondono a misurazioni fisiche, ma a marker numerici estratti direttamente dalle soluzioni RANS o Eulero, e sono definiti in modo da catturare con alta sensibilità le variazioni locali che caratterizzano la presenza di discontinuità.

All'interno dell'algoritmo sono stati implementati diversi sensori, ciascuno dei quali ottimizzato per un determinato tipo di campo di moto.

L'identificazione dei sensori si basa sulla definizione di una funzione scalare di rilevamento \mathcal{T} , costruita in modo specifico per il problema considerato. Tale funzione consente di individuare, all'interno del dominio computazionale Ω i punti caratterizzati da discontinuità di campo, che risultano particolarmente significativi

per la successiva interpolazione.

Dato il dominio discreto Ω , si definisce un insieme di punti $P_{hf} \subset \Omega$ associato alla soluzione ad alta fedeltà u_μ^{hf} , la funzione scalare viene valutata in ogni punto della mesh $\{\mathcal{T}(x, u_\mu^{hf}) : x \in P_{hf}\}$ per tutti i $\mu \in \mathcal{P}_{train}$. Si ottiene quindi il sottoinsieme di punti selezionati come sensori, definiti come:

$$X_\mu^{raw} = \{x_{i,\mu}^{raw}\} = \{x \in P_{hf} : \mathcal{T}(x, u_\mu^{hf}) \geq t_\mu\}$$

dove t_μ viene chiamato *threshold* ed è una soglia di riferimento determinata in funzione del valore medio o *quantile* dei risultati su tutto il set di addestramento.

4.1.1 Sensore di Ducros

La funzione scalare \mathcal{T} che viene utilizzata come sensore, viene costruita in modo specifico per il problema in esame ed è quindi fortemente dipendente dal tipo di flusso e dal fenomeno fisico di interesse.

Nel caso di flussi comprimibili in regime transonico o supersonico, l'obbiettivo principale è la rilevazione delle onde d'urto, per cui si utilizza il **sensore di Ducros**, definito come:

$$\phi_1(x, u) := \frac{\max(0, -\nabla \cdot v)}{\sqrt{(\nabla \cdot v)^2 + \|\nabla \times v\|_2^2 + a^2}} \frac{\|\nabla p\|_2}{p + \varepsilon} \quad (4.1)$$

dove v è il campo di velocità, p è la pressione, a è la velocità del suono e $\varepsilon > 0$ è una tolleranza pari a 0.01. Tramite tale sensore si va a costruire la funzione scalare, definita come:

$$\mathcal{T}(x_k^{hf}, u_\mu^{hf}) = \sup_{x \in D_k} |\phi(x, u_\mu^{hf})| \quad (4.2)$$

Nel presente lavoro, il sensore di Ducros è stato modificato e adattato in modo da migliorare la capacità di individuare le regioni caratterizzate da elevati gradienti di pressione e discontinuità locali.

4.1.2 Sensore di Mach

È stato inoltre impiegato un secondo sensore, dalla formulazione matematica più semplice ma estremamente efficace nell'individuazione e tracciamento delle regioni supersoniche all'interno del campo di moto.

Questo sensore risulta particolarmente adatto per i flussi transonici, come nel caso della presa d'aria del turbofan, dove la formazione e l'evoluzione delle bolle supersoniche rivestono un ruolo cruciale nella dinamica del flusso.

Il sensore basato sul numero di Mach, viene definito come:

$$\phi_2 = \frac{\|v\|_2}{a} > 1 \quad (4.3)$$

dove $\|v\|_2 = \sqrt{u^2 + v^2}$ e a rappresenta la velocità del suono.

4.1.3 Sensore di Ducros corretto

Per ottenere una rilevazione più robusta e fisicamente consistente, è stato definito un sensore combinato, indicato nel seguito come **sensore di Ducros corretto**, la cui formulazione è la seguente:

$$\phi = \phi_1 \cdot \phi_2 \cdot \phi_3 \quad (4.4)$$

dove,

$$\phi_1 = \frac{\max(0, -\nabla \cdot v)}{\sqrt{(\nabla \cdot v)^2 + \|\nabla \times v\|_2^2 + a^2}} \frac{\|\nabla p\|_2}{p + \varepsilon} \quad (4.5)$$

$$\phi_2 = \begin{cases} 1 & \text{se } Mach > 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (4.6)$$

$$\phi_3 = \begin{cases} 1 & \text{se } \nabla p \cdot v > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (4.7)$$

dove il sensore ϕ_2 serve ad escludere lo strato limite che può essere fonte di instabilità durante la fase di estrapolazione dei marker numerici che catturano le strutture coerenti. Il sensore ϕ_3 ha il compito di rilevare solamente le zone in cui il flusso subisce una compressione.

4.1.4 Sensore basato sull'entropia

È stato infine introdotto un sensore basato sull'entropia, ideato nello specifico per l'analisi di campi di moto completamente supersonici come nel caso test della presa a doppia rampa. Ha l'obiettivo di individuare e tracciare con precisione le onde d'urto e le regioni in cui si verificano fenomeni che causano forti gradienti d'entropia.

Il sensore si basa sulla valutazione del gradiente locale dell'entropia, che assume valori elevati nelle zone caratterizzate da discontinuità termodinamiche.

La formulazione adottata è la seguente:

$$\phi_4 = |\nabla(\rho vs)| \quad (4.8)$$

4.2 Applicazione dei sensori al database

Una volta definiti e validati i sensori (vedi Cap.5), essi sono stati applicati al database di soluzioni CFD ad alta fedeltà relativi ai due casi test in esame. Nell'Appendice A sono riportati i risultati completi dell'applicazione dei diversi sensori ai database di simulazioni, mentre in questo capitolo vengono presentati solo alcuni esempi rappresentativi, scelti per illustrare in modo chiaro il funzionamento della procedura di rilevamento e la distribuzione dei punti caratteristici nel dominio computazionale.

4.2.1 Caso test: Presa turbofan

Per il caso test relativo alla presa d'aria del turbofan, risulta particolarmente interessante confrontare le mappe ottenute con il sensore di Ducros corretto con quelle ottenute tramite il sensore di Mach, quest'ultimo impiegato per individuare la bolla supersonica che si forma sul dorso del profilo.

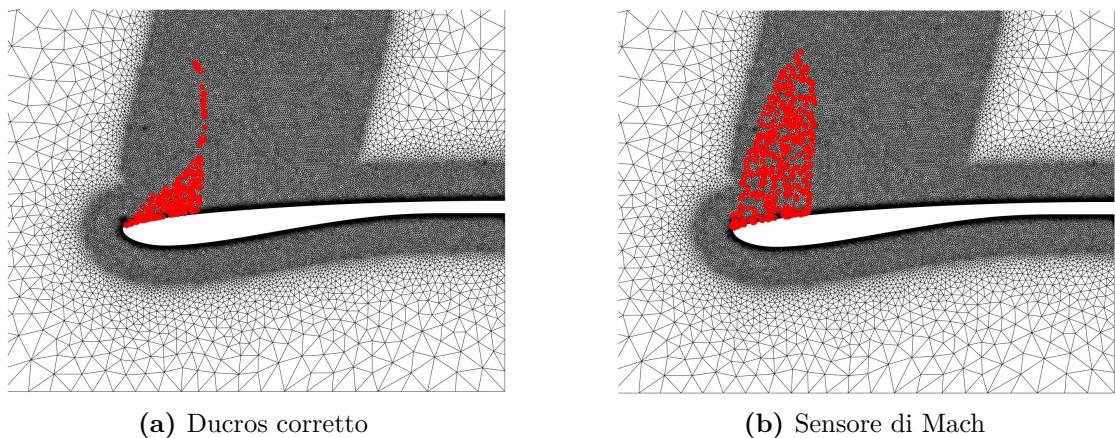


Figura 4.1: Applicazione sensori al database per il caso $M_\infty = 0.89$ e $MFR = 0.67$

Dal confronto tra le due distribuzioni si osserva che il sensore di Ducros corretto individua in modo accurato le discontinuità principali del campo di moto, in particolare l'onda d'urto che si forma sul dorso del profilo.

Il sensore di Mach, invece, permette di delimitare l'intera regione supersonica associata alla bolla di flusso accelerato, il cui confine posteriore è proprio l'onda d'urto. Questa caratteristica risulta particolarmente utile nella fase di predizione mediante CDI, poiché consente di ottenere una ricostruzione del campo di moto più estesa e fisicamente rappresentativa al variare dei parametri in gioco.

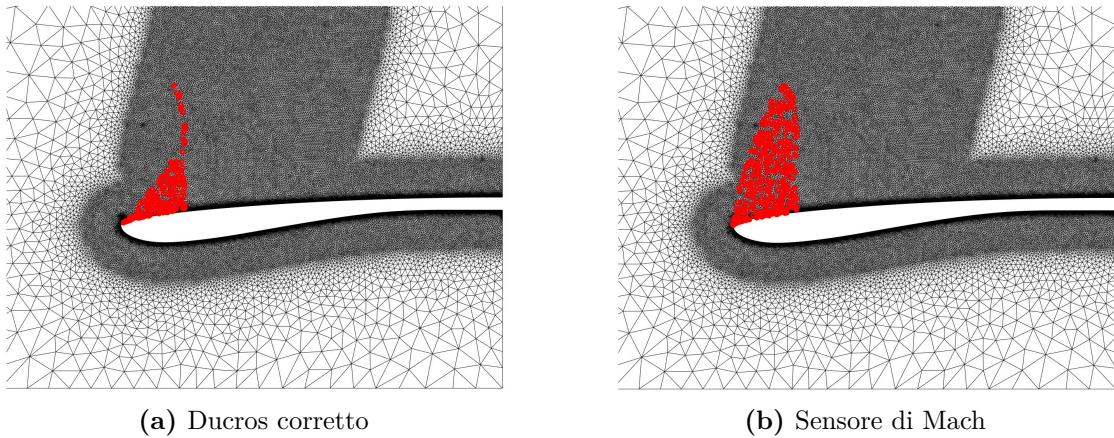


Figura 4.2: Applicazione sensori al database per il caso $M_\infty = 0.87$ e $MFR = 0.67$

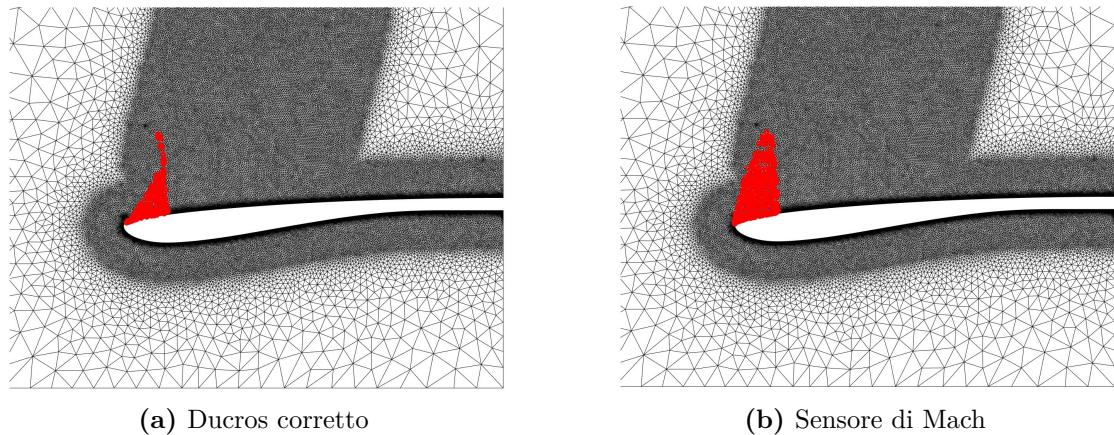


Figura 4.3: Applicazione sensori al database per il caso $M_\infty = 0.84$ e $MFR = 0.67$

Nelle figure 4.1, 4.2, 4.3 si può apprezzare il comportamento dei sensori applicati al database di simulazioni al variare del numero di Mach. Nell'appendice A sono messi a confronto sia al variare del Mach che al variare della MFR.

Per il sensore di Ducros corretto si è optato per la generazione di 200 punti con una soglia di riferimento o *threshold* pari a $t_\mu = 0.3$. Mentre per il sensore di Mach il numero di punti captati sale a 400 e il *threshold* è stato impostato pari a $t_\mu = 0.99$. Ciò comporta che nel caso di utilizzo del sensore di Mach, l'impiego di un maggiore numero di sensori comporta un incremento del costo computazionale e di conseguenza anche dei tempi di calcolo, che tuttavia restano dell'ordine di pochi minuti, risultando quindi trascurabili rispetto ai tempi ben più elevati necessari per la generazioni delle soluzioni ad alta fedeltà.

4.2.2 Caso test: Presa a doppia rampa

In questo caso test, dove sono presenti numerose onde d'urto e il campo di moto è completamente supersonico, risulta inefficace il sensore di Mach, per questo motivo l'interpolazione non lineare è stata svolta utilizzando il sensore di Ducros corretto che è specializzato per il rilevamento di discontinuità nel dominio di calcolo.

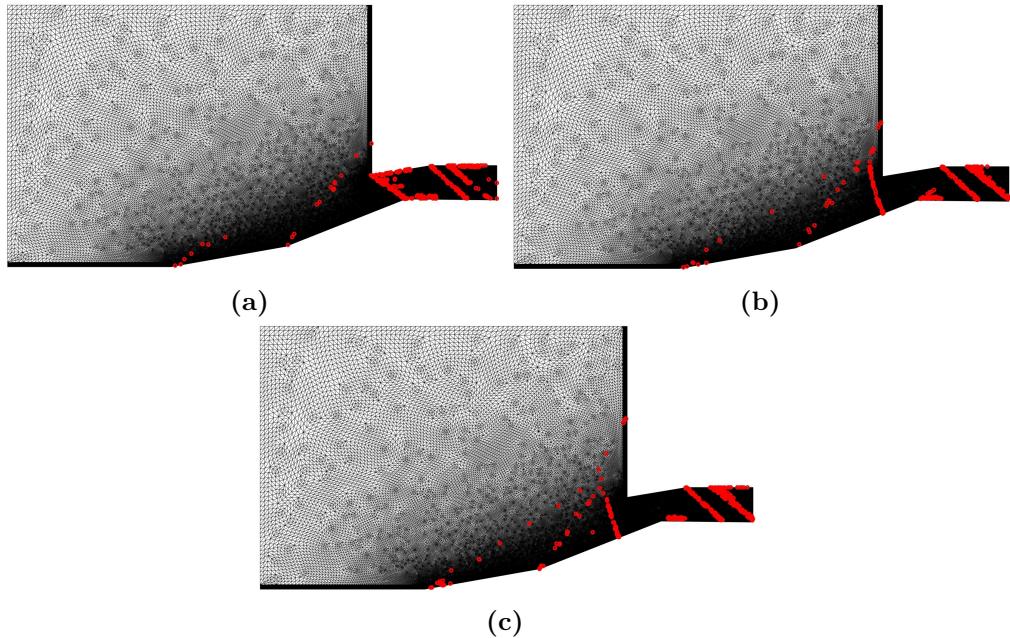


Figura 4.4: Applicazione sensore di Ducros corretto ai casi con $M_\infty = 2.4$ e incidenza variabile

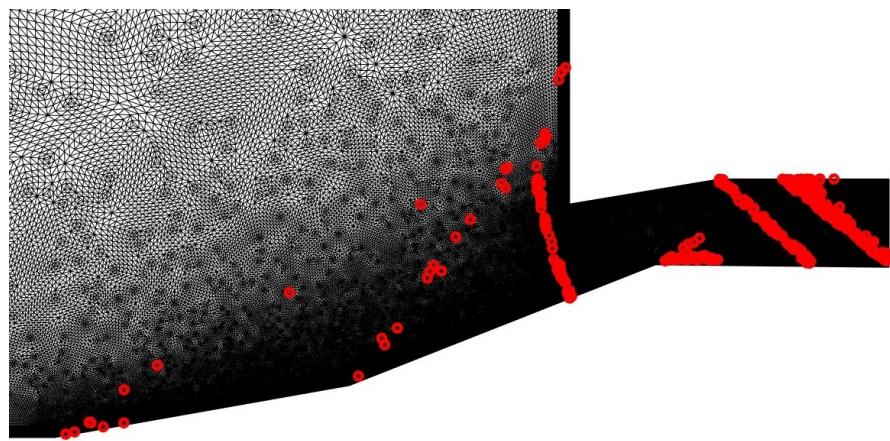


Figura 4.5: Dettaglio del caso M_∞ e $i = 2^\circ$

In fig. 4.5 si può apprezzare nel dettaglio come il sensore di Ducros corretto riesce a captare non solo le onde d’urto principali che si formano ma anche le varie interazioni tra urti che si generano all’ingresso della presa a doppia rampa. Ciò permette di generare, in fase di predizione, dei campi di moto che tendono alla soluzione ad alta fedeltà.

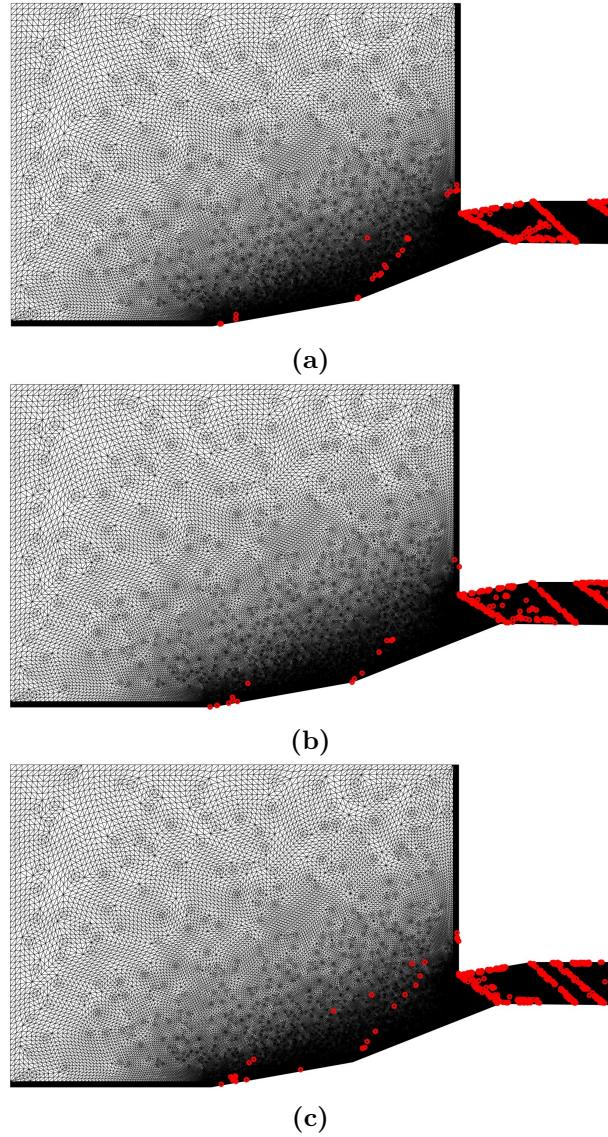


Figura 4.6: Applicazione sensore di Ducros corretto ai casi con $M_\infty = 2.6$ e incidenza variabile

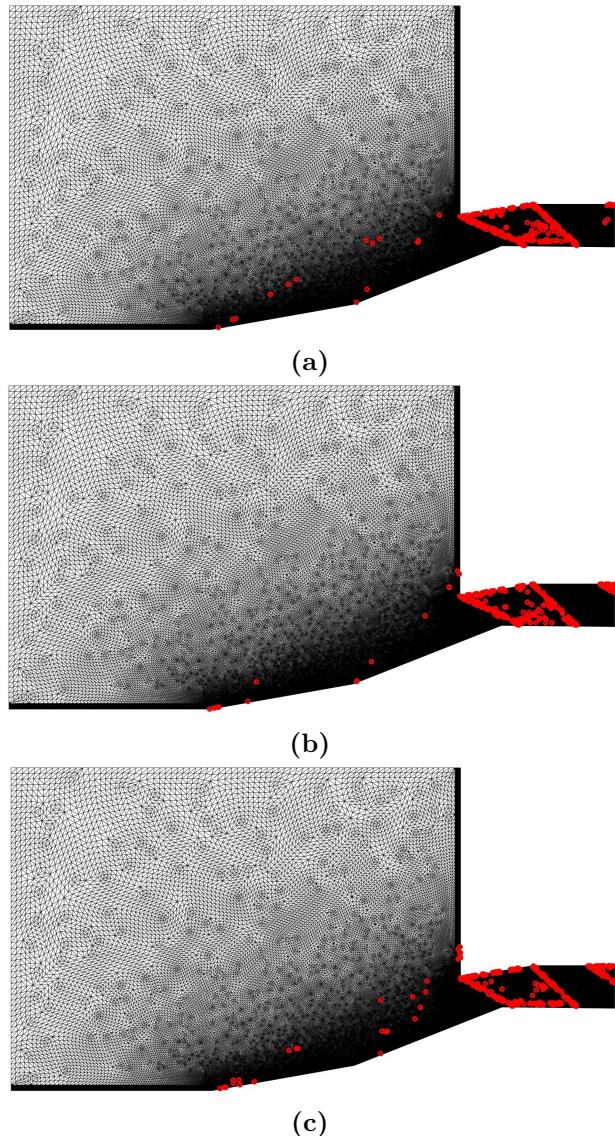


Figura 4.7: Applicazione sensore di Ducros corretto ai casi con $M_\infty = 2.8$ e incidenza variabile

Per questo caso test, a differenza del precedente, sono stati necessari 380 punti captati dal sensore di Ducros corretto a causa dell'elevato numero di discontinuità presenti all'interno del campo di moto, inoltre è stata utilizzata una soglia di riferimento o *threshold* pari a $t_\mu = 0.35$

4.3 Allineamento delle nuvole di punti

Le nuvole di punti contenute in X_μ^{raw} non sono necessariamente delle stesse dimensioni e più importante non sono ordinate, per questo motivo si sfrutta la *point set registration* (PSR) per generare delle nuvole di punti ordinate [6],

$$X_\mu = PSR(X_{\mu^{ref}}^{raw}, X_\mu^{raw}) \quad \mu^{ref} \in \mathcal{P}_{train} \quad (4.9)$$

che consiste nel trovare una mappatura $T : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ che minimizzi la distanza,

$$dist(Y, T(X)) = \max_{y \in Y} \left(\min_{x \in X} \|y - T(x)\|_2 \right)$$

e l'output dell'algoritmo consiste in una mappatura deformata di punti $T(X)$ come si può apprezzare nella fig. 4.8

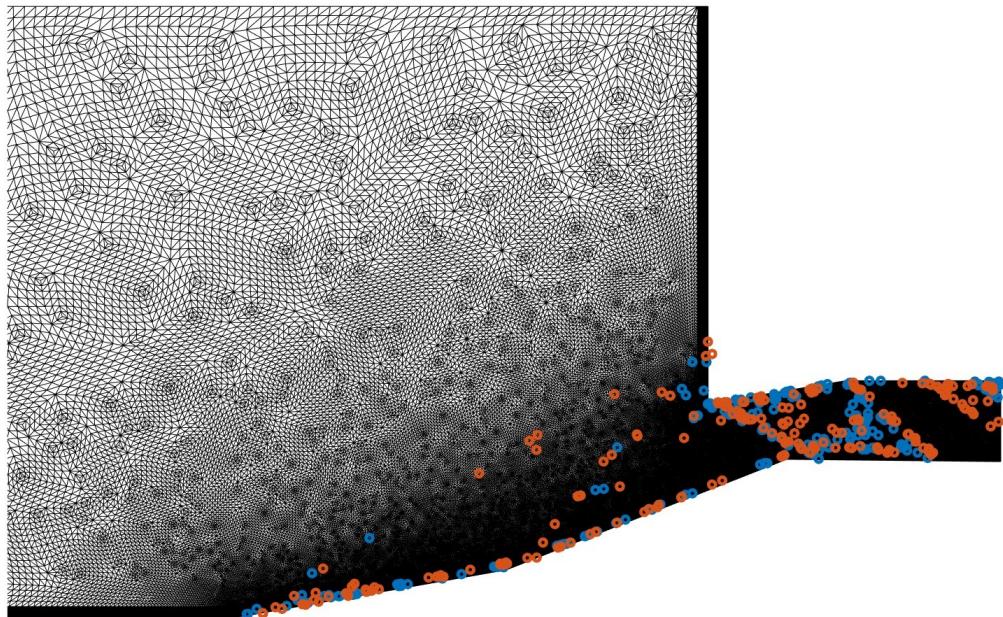


Figura 4.8: Mappatura dei punti ordinati $T(X)$, presa a doppia rampa

dove si utilizza lo snapshot di riferimento che è tipicamente scelto come il centroide dello spazio dei parametri, mentre lo snapshot ad esso associato è una buona approssimazione del baricentro nello spazio delle soluzioni, e che quindi minimizza le somme delle distanze dagli altri snapshot.

4.4 Regressione

A partire dalle nuvole di punti ordinate $\{X_\mu : \mu \in \mathcal{P}_{train}\}$ si applica per prima cosa la *Proper Orthogonal Decomposition* (POD) per la costruzione dei modi e per ottenere una rappresentazione equivalente delle soluzioni

$$X_{\mu^k} = \sum_{i=1}^M Z_i \beta_k^i \quad \text{con} \quad Z_1, \dots, Z_M \in \mathbb{R}^{N \times d}, \quad \beta_1^1, \dots, \beta_{n_{train}}^M \in \mathbb{R} \quad (4.10)$$

e successivamente si applica la regressione *Radial Basis Function* (RBF) per determinare l'approssimazione $\mu \in \mathcal{P} \mapsto \hat{X}_\mu \in \mathbb{R}^{N \times d}$. In particolare si applica la regressione RBF a ogni coefficiente dell'espansione:

$$\hat{\beta}^i = \arg \min_{\beta \in \mathcal{S}_\phi} \lambda \|\beta\|_{\mathcal{S}_\phi}^2 + \sum_{k=1}^{n_{train}} (\beta(\mu^k) - \beta_k^i)^2 \quad i = 1, \dots, M$$

dove \mathcal{S} rappresenta lo spazio nativo associato al kernel¹ ϕ , mentre $\lambda > 0$ è un coefficiente di regolarizzazione.

Infine si ottiene la stima,

$$\hat{X}_\mu = \sum_{i=1}^M Z_i \hat{\beta}_\mu^i \quad (4.11)$$

con $m \leq M$

Facendo così si va prima ad esprimere il vettore come una combinazione di *modi* moltiplicati per i coefficienti che dipendono dal valore del parametro e successivamente si applica l'algoritmo di regressione a ciascun coefficiente. Il vantaggio è che non c'è alcuna relazione tra l'algoritmo di regressione utilizzato e la costruzione dei modi. Dato che i modi sono ortonormali, il valore ottimale per ciascun coefficiente è la proiezione del vettore soluzione sul modo corrispondente, dunque si può interpretare l'algoritmo di regressione come un algoritmo atto a prevedere la proiezione della soluzione, che dipende dal parametro, nella direzione del modo corrispondente, che non dipende dal parametro. La metodologia spiegata è giustificata dal fatto che i coefficienti associati ai modi più "energetici" dipendono in modo più regolare dal parametro e sono dunque più facili da stimare, in questo modo si può scegliere in maniera sistematica il numero di modi.

¹è un concetto chiave nella teoria dei metodi kernel e trova applicazione nel Machine Learning quando i problemi sono caratterizzati da dataset di dimensionalità intermedia (numero di dati compreso tra $10 \div 10000$). Lo spazio nativo si riferisce specificamente allo spazio di Hilbert che è matematicamente legato a una specifica funzione kernel tramite la teoria di regolarizzazione alla Tikhonov

4.5 Selezione dei k-vicini più prossimi

Il passo successivo consiste nell'individuazione dei parametri $\nu^1, \dots, \nu^k \in \mathcal{P}_{train}$, ovvero quelli che sono stati utilizzati per l'addestramento, che minimizzano la distanza Euclidea da uno dei parametri $\mu \in \mathcal{P}$ assegnati nella fase online, non appartenente allo spazio dei parametri utilizzati per l'addestramento. La distanza Euclidea è definita come:

$$dist(\mu, \nu) = \|\mu - \nu\|_2 \quad (4.12)$$

questa scelta è dovuta al fatto che la distanza Euclidea è invariante rispetto alle roto-traslazioni dei parametri. Questa è una proprietà chiave per la procedura che caratterizza la CDI

4.6 Registrazione

La mappatura $T(X)$ ottenuta in 4.3 non preserva i bordi del dominio computazionale, quindi per ogni $\nu \in \mathcal{P}_{nn}^\mu$ è necessario trovare una mappatura $\Phi_\nu : \Omega \rightarrow \Omega$ che sia biettiva in Ω e che soddisfi $\Phi_\nu(x_i^{ref}) \approx \hat{x}_i^{ref}$ per $i = 1, \dots, N$.

Lo sviluppo di una procedura di registrazione generale che funzioni per ogni dominio computazionale è il soggetto della ricerca attuale e per questo motivo ci si può imbattere in errori per domini di calcolo particolari come la presa a doppia rampa. Nell'algoritmo oggetto di questa tesi, sono stati implementati due tecniche di registrazione:

- Elasticity-based registration [11]
- Optimization-based registration [12][13]

4.7 Scelta dei pesi

Avendo selezionato i vicini più prossimi caratterizzati dai parametri contenuti nello spazio dei parametri di addestramento $\nu^1, \dots, \nu^k \in \mathcal{P}_{train}$ e dato il nuovo parametro $\mu \in \mathcal{P}$, si vanno a calcolare i pesi come:

- Se il parametro non è presente tra quelli utilizzati per l'addestramento dell'algoritmo $\mu \notin \mathcal{P}_{train}$:

$$\omega_\mu^\nu = \frac{dist(\mu, \nu)}{\sum_{\nu' \in \mathcal{P}_{nn}^\mu} \frac{1}{dist^p(\mu, \nu')}} \quad (4.13)$$

- Se il parametro è tra quelli utilizzati per l’addestramento dell’algoritmo $\mu \in \mathcal{P}_{train}$, allora:

$$\omega_\mu^\nu = \begin{cases} 1 & \mu = \nu \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (4.14)$$

L’esponente $p \geq 1$ assume un valore maggiore per i parametri più vicini a quello considerato per la predizione e inferiore per quelli più lontani.

Capitolo 5

Risultati e analisi delle prestazioni

In questo capitolo si vanno a esporre i risultati ottenuti tramite l'interpolazione non lineare e a valutarne le prestazioni attraverso molteplici analisi. In particolare si farà un'analisi comparativa dei sensori, valutando l'errore che si commette in base al sensore utilizzato, in termini di distribuzione del coefficiente di pressione. Tale analisi comparativa è stata svolta sul caso test della presa d'aria del turbofan, in modo tale da valutare quale configurazione utilizzare per il secondo caso test, la presa a doppia rampa.

5.1 Analisi comparativa dei sensori

Nel caso test della presa d'aria del turbofan, caratterizzato dalla presenza simultanea di regioni subsoniche e supersoniche nel campo di moto, è stata condotta un'analisi comparativa dei diversi sensori disponibili per la rilevazione delle strutture coerenti e, come è stato anticipato, si è valutata la distribuzione del coefficiente di pressione sul dorso del profilo data la presenza dell'onda d'urto.

Infine si è valutato l'errore, commesso dall'interpolazione non lineare rispetto alla simulazione ad alta fedeltà, associato ad ogni sensore, validandone così l'efficacia.

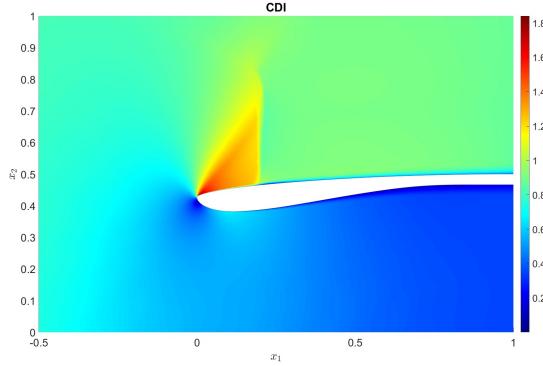
Si è svolta l'interpolazione non lineare per i cinque casi studio rappresentati in fig. 3.2 e a seguire sono elencati i risultati ottenuti per i vari sensori.

5.1.1 Caso test 1: $M_\infty = 0.8882$ e $MFR = 0.6911$

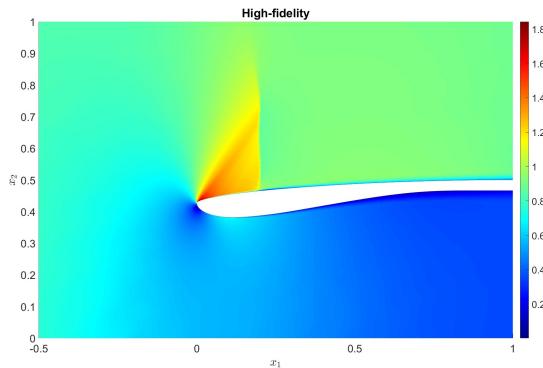
Per apprezzare l'efficacia dell'interpolazione non lineare ottenuta mediante la metodologia CDI, è stata eseguita in parallelo anche l'interpolazione lineare tramite

5.1 – Analisi comparativa dei sensori

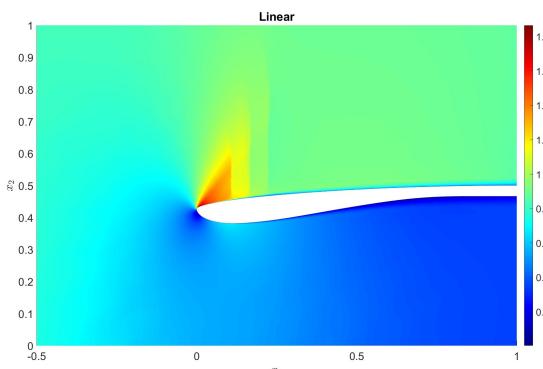
POD, i risultati delle due metodologie sono stati messi a confronto sia in termini di distribuzione del coefficiente di pressione sul dorso del profilo, sia analizzando l'errore rispetto alla soluzione CFD ad alta fedeltà.



(a) Convex Displacement Interpolation (CDI)



(b) Simulazione ad alta fedeltà



(c) Proper Orthogonal Decomposition (POD)

Figura 5.1: Caso test 1: Interpolazione tramite CDI e confronto del campo di Mach tramite sensore di Ducros corretto

In fig. 5.1 si può notare come l’interpolazione non lineare prevede un campo di moto fedele alla simulazione ad alta fedeltà, mentre l’interpolazione lineare non riesce a prevedere in maniera accurata i fenomeni di trasporto che caratterizzano l’urto che si genera sul dorso del profilo. Si può apprezzare l’accuratezza della previsione andando a rappresentare i marker numerici generati in fase di predizione, sovrapposti al sensore applicato alla simulazione ad alta fedeltà,

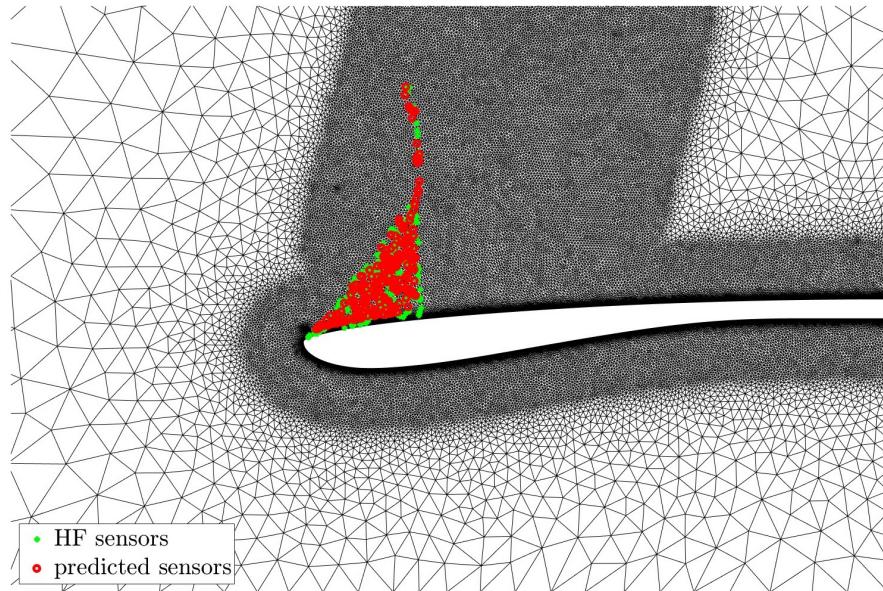


Figura 5.2: Caso test 1: sovrapposizione dei sensori predetti e ad alta fedeltà, Ducros corretto

In fig. 5.2 si può vedere come i sensori predetti dalla metodologia CDI si sovrappongono perfettamente ai sensori applicati alla simulazione CFD ad alta fedeltà, garantendo una previsione del campo di moto fedele alla realtà nonostante la non linearità delle discontinuità, al variare dei parametri in gioco.

Inoltre si è andato a valutare l’andamento del coefficiente di pressione sia sul ventre che sul dorso del profilo come si può notare in fig. 5.3 e in fig. 5.4. Come ci si poteva aspettare, sul ventre non si notano grandi differenze, mentre sul dorso si nota come l’interpolazione lineare fallisce proprio in presenza dell’onda d’urto, mentre la CDI riesce a mantenere un andamento paragonabile a quello della simulazione ad alta fedeltà

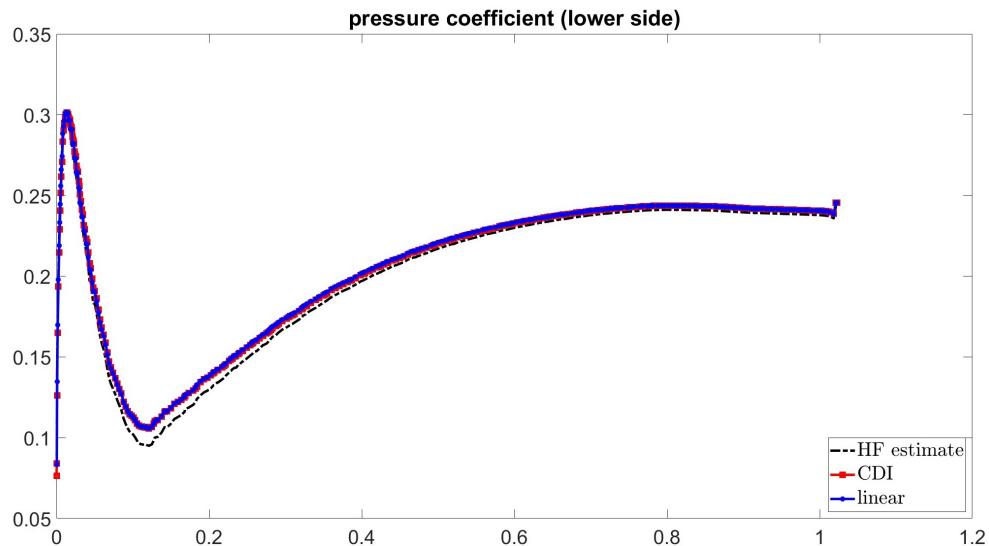


Figura 5.3: Caso test 1: Distribuzione del coefficiente di pressione sul ventre, Ducros corretto

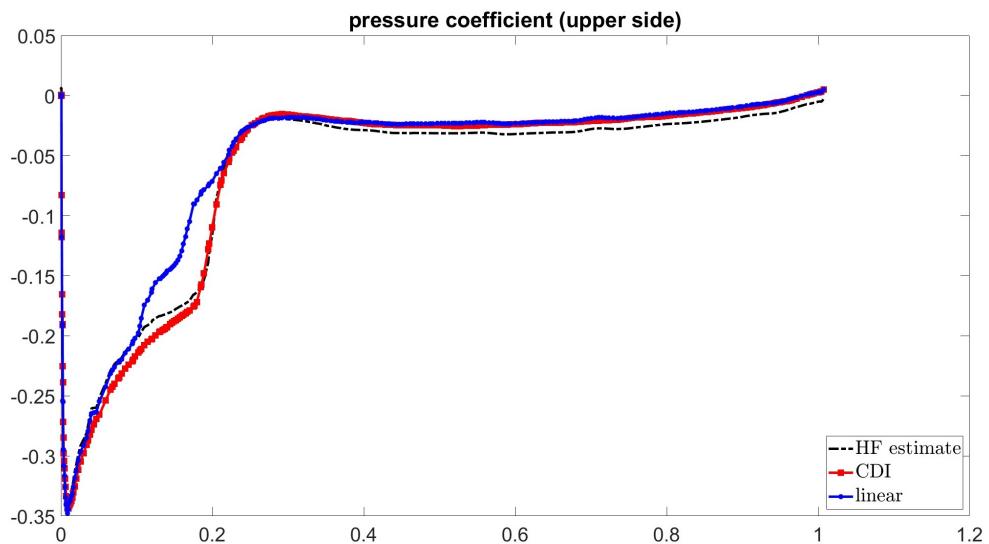
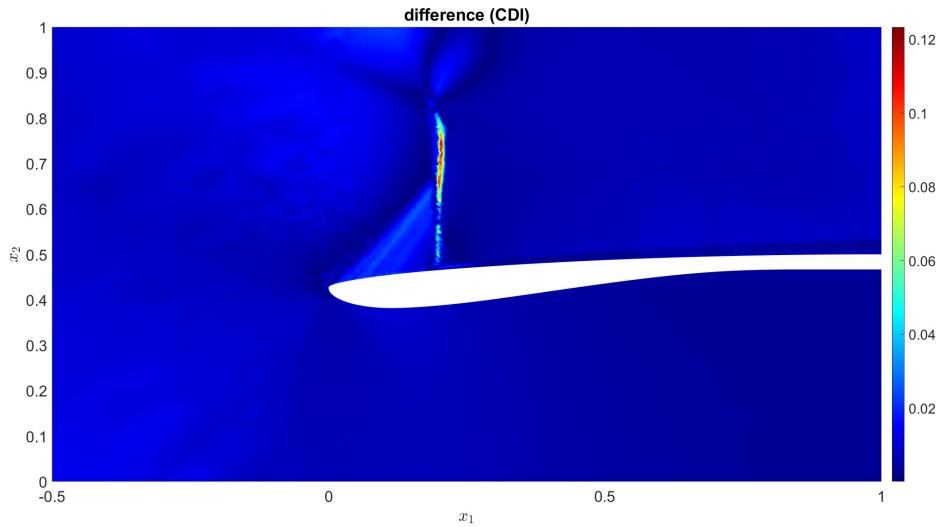
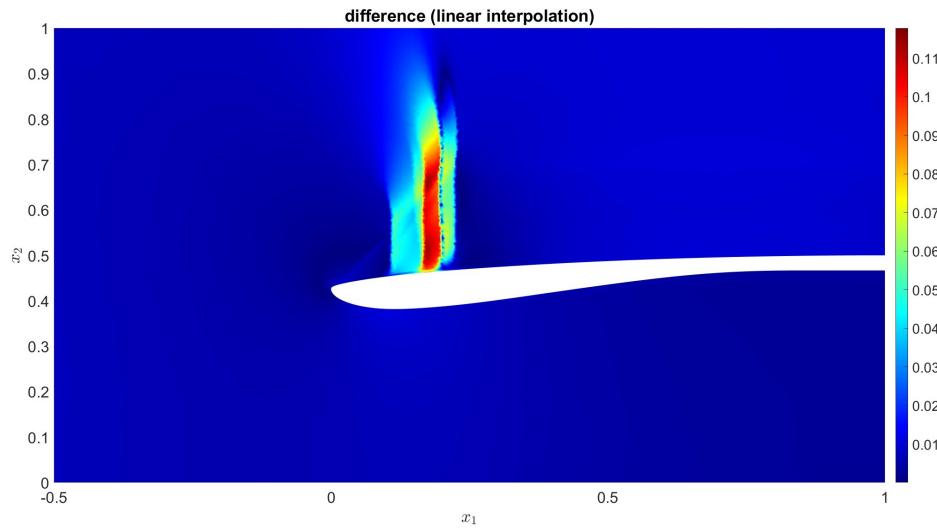


Figura 5.4: Caso test 1: Distribuzione del coefficiente di pressione sul dorso, Ducros corretto

Infine si è generato un grafico che rappresenta la differenza tra la soluzione ottenuta tramite interpolazione e la soluzione ad alta fedeltà,



(a) Convex Displacement Interpolation (CDI)



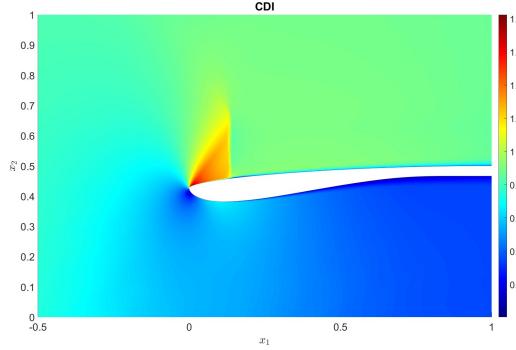
(b) Proper Orthogonal Decomposition (POD)

Figura 5.5: Caso test 1: Errore commesso dall'interpolazione

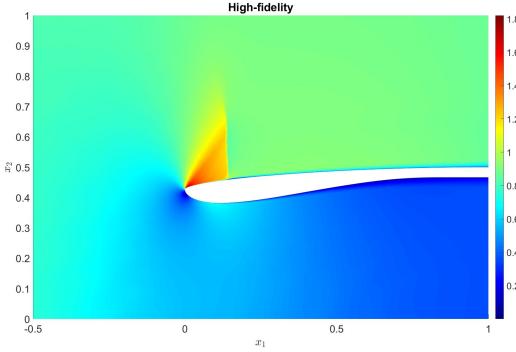
Dalla fig. 5.5 si può notare chiaramente come l'approccio lineare comporta gravi errori circa il posizionamento dell'urto, mentre l'interpolazione non lineare effettuata tramite la CDI predice in maniera efficace la posizione dell'urto al variare del Mach e della MFR .

5.1.2 Caso test 2: $M_\infty = 0.8673$ e $MFR = 0.6983$

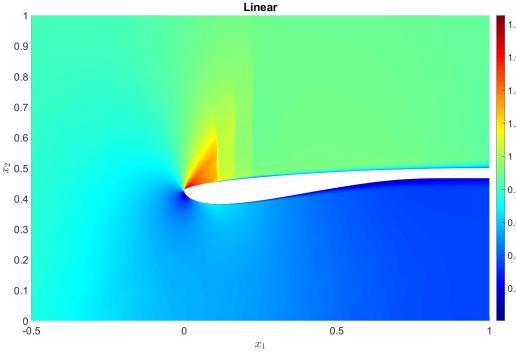
Analogamente al caso precedente, si procede applicando l'interpolazione e si ottengono i seguenti campi di moto,



(a) Convex Displacement Interpolation (CDI)



(b) Simulazione ad alta fedeltà



(c) Proper Orthogonal Decomposition (POD)

Figura 5.6: Caso test 2: Interpolazione tramite CDI e confronto del campo di Mach tramite sensore di Ducros corretto

Anche in questo caso si può andare a visualizzare il confronto tra i sensori captati dalla soluzione ad alta fedeltà con i marker numerici generati nella fase online della predizione (fig. 5.7)

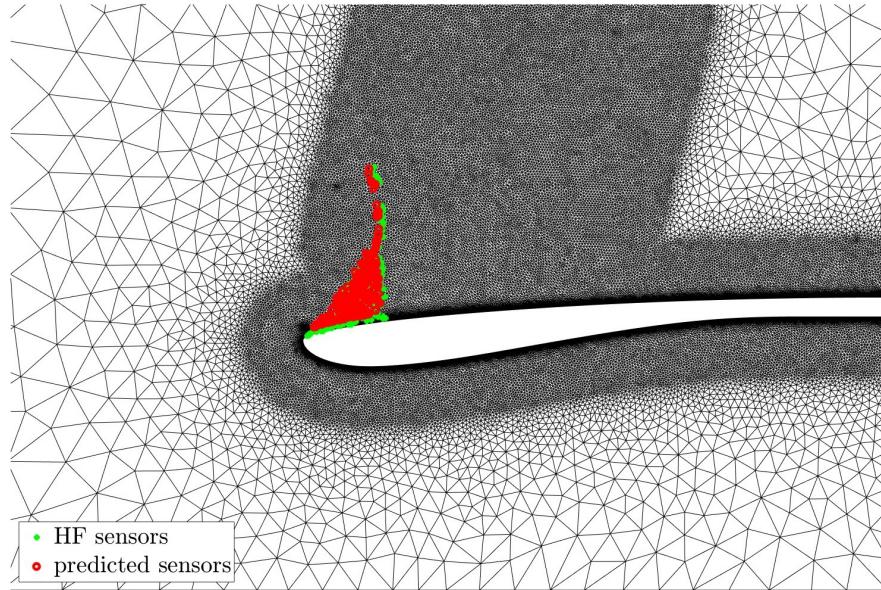


Figura 5.7: Caso test 2: sovrapposizione dei sensori predetti e ad alta fedeltà, Ducros corretto

nuovamente la sovrapposizione risulta compatibile con la soluzione CFD ad alta fedeltà, garantendo così una predizione accurata per quanto riguarda la posizione dell’urto, mantenendo comunque le informazioni relative alla fisica del problema.

Anche per il seguente caso test si è andata a rappresentare la distribuzione del coefficiente di pressione, sia sul dorso che sul ventre del profilo, in modo da confrontare le soluzioni ottenute tramite interpolazione con la soluzione ad alta fedeltà.

Dalla fig. 5.8 si nota come sul ventre del profilo entrambe le soluzioni approssimano bene l’andamento della soluzione ad alta fedeltà. Mentre in fig. 5.9 si può apprezzare come nonostante la distribuzione di pressione sia variata sul dorso del profilo, al variare del Mach e della MFR, la soluzione ottenuta tramite CDI approssima in maniera ottimale l’andamento, mentre la soluzione POD fallisce nuovamente in presenza dell’onda d’urto, restituendo una distribuzione errata del coefficiente di pressione sul dorso del profilo.

5.1 – Analisi comparativa dei sensori

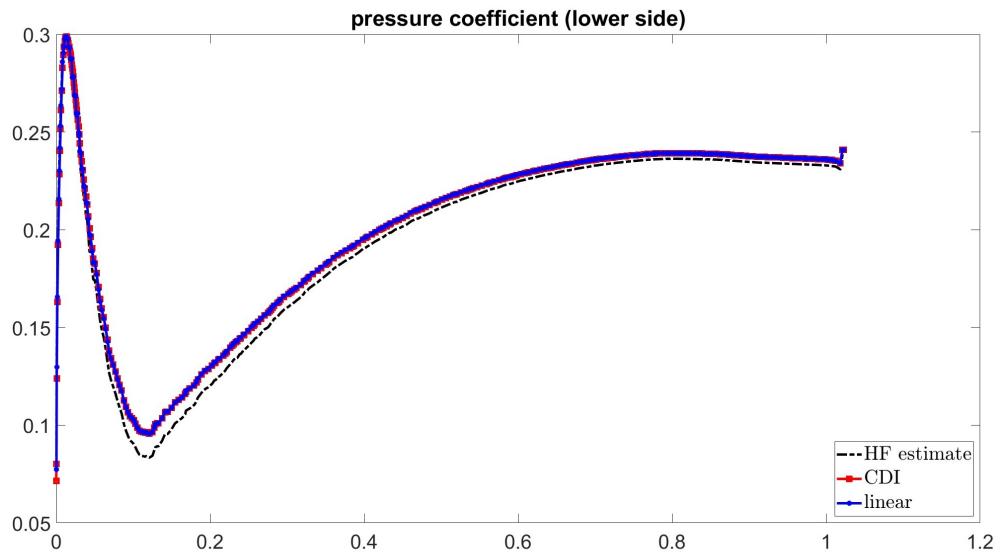


Figura 5.8: Caso test 2: Distribuzione del coefficiente di pressione sul ventre, Ducros corretto

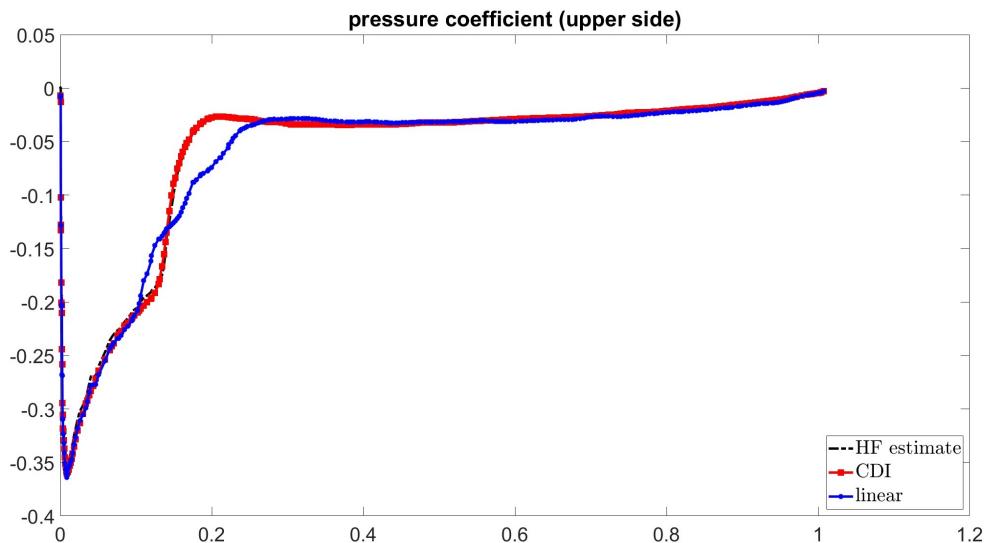


Figura 5.9: Caso test 2: Distribuzione del coefficiente di pressione sul dorso, Ducros corretto

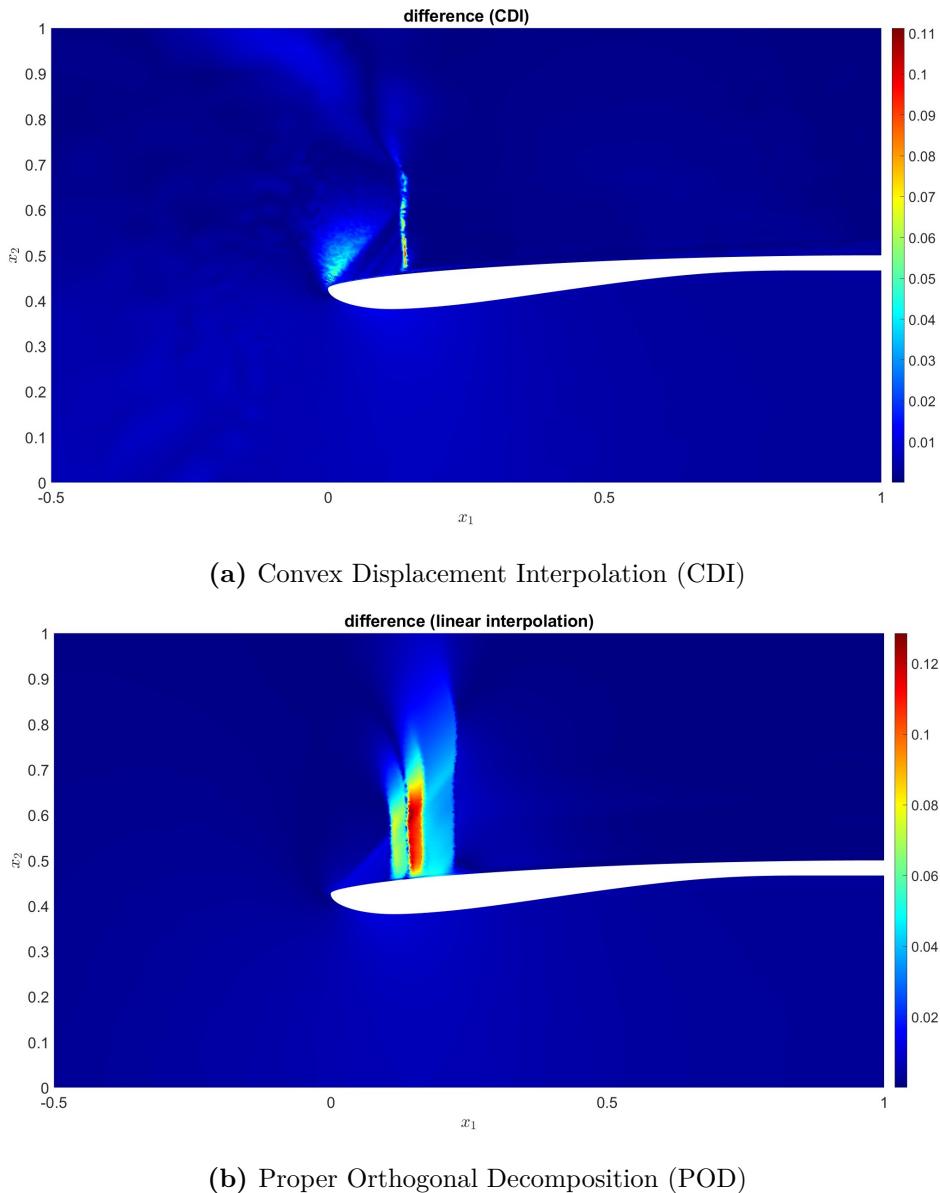
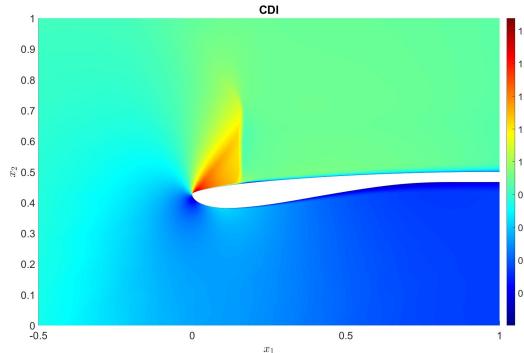


Figura 5.10: Caso test 2: Errore commesso dall’interpolazione

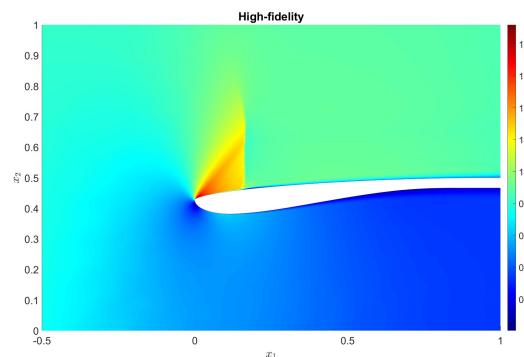
In fig. 5.10 si nota come nella soluzione approssimata ottenuta tramite CDI nasce un disturbo sul bordo d’attacco del profilo che però risulta trascurabile come si è potuto valutare tramite la distribuzione del coefficiente di pressione sul dorso del profilo. La soluzione ottenuta tramite interpolazione lineare fallisce anche in questo caso, mostrando come la posizione dell’urto in fase di predizione sia totalmente errata rispetto alla soluzione reale.

5.1.3 Caso test 3: $M_\infty = 0.8661$ e $MFR = 0.6614$

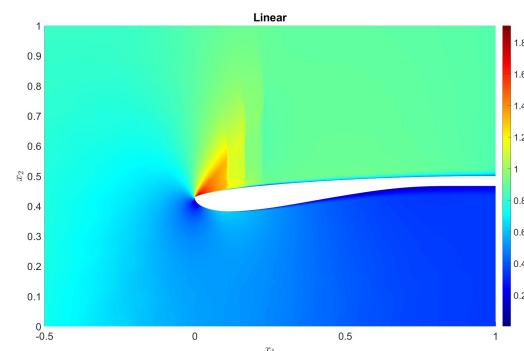
Analogamente ai casi precedenti, si procede applicando l'interpolazione e si ottengono i seguenti campi di moto,



(a) Convex Displacement Interpolation (CDI)



(b) Simulazione ad alta fedeltà



(c) Proper Orthogonal Decomposition (POD)

Figura 5.11: Caso test 3: Interpolazione tramite CDI e confronto del campo di Mach tramite sensore di Ducros corretto

Come fatto in precedenza, si effettua il confronto tra i marker numerici captati dal sensore di Ducros corretto nella soluzione ad alta fedeltà con quelli predetti nella fase online dell’interpolazione non lineare (fig. 5.12)

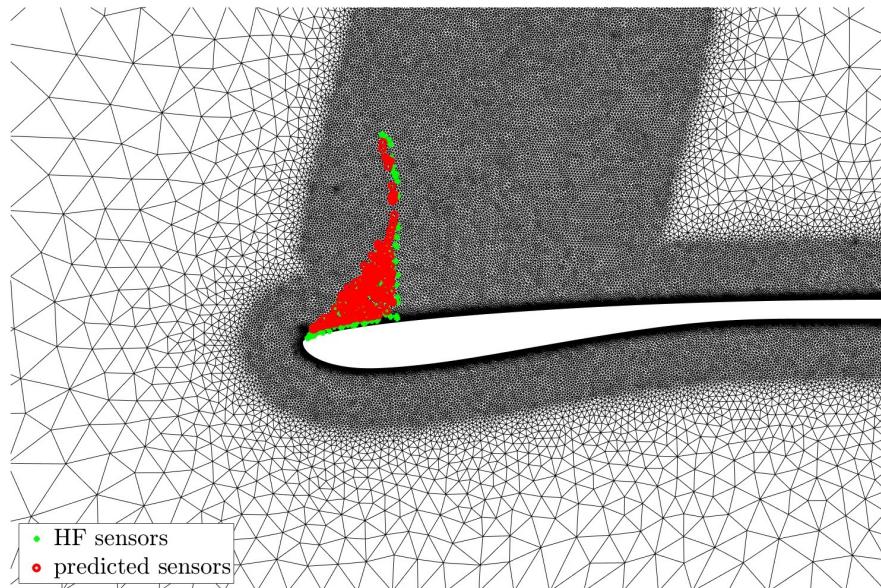


Figura 5.12: Caso test 3: sovrapposizione dei sensori predetti e ad alta fedeltà, Ducros corretto

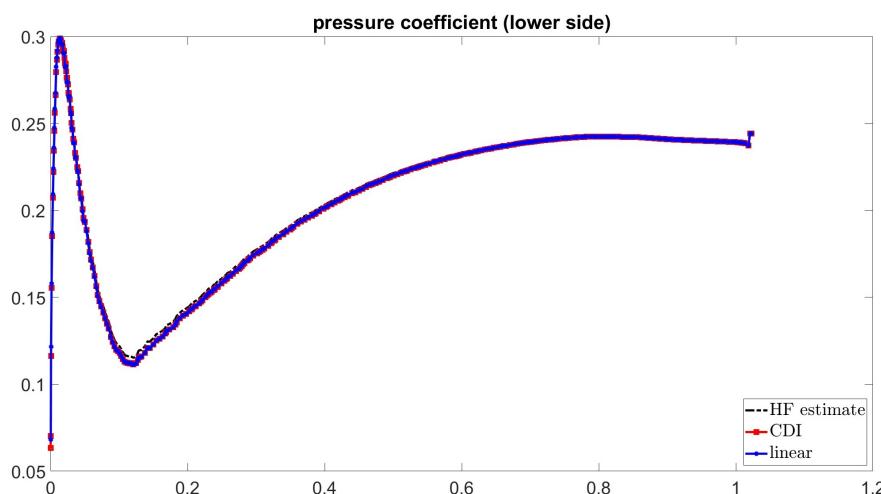


Figura 5.13: Caso test 3: Distribuzione del coefficiente di pressione sul ventre, Ducros corretto

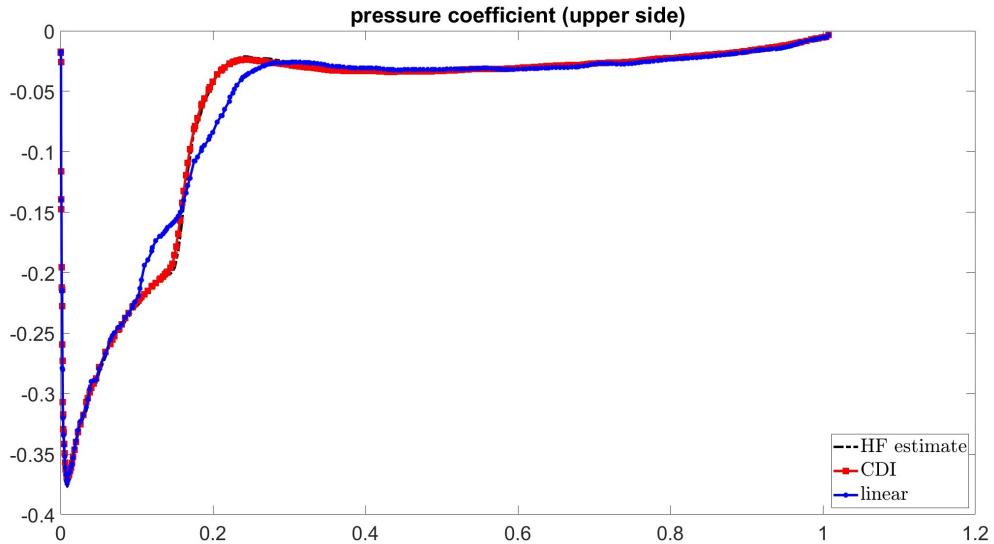


Figura 5.14: Caso test 3: Distribuzione del coefficiente di pressione sul dorso, Ducros corretto

Ancora una volta si può vedere come l’interpolazione lineare fallisce nella predizione della posizione esatta dell’urto, comportando una distribuzione del coefficiente di pressione errata. La metodologia CDI riesce a prevedere in maniera ottimale l’andamento, sovrapponendosi correttamente all’andamento estrapolato dalla soluzione ad alta fedeltà.

Infine, in fig. 5.15, si può notare come si ripresenta lo stesso comportamento riguardo il campo di errore generato dalla differenza tra le soluzioni approssimate e la soluzione reale. In particolare la soluzione lineare comporta incongruenze sia per quanto riguarda la posizione dell’urto sia per l’estensione della bolla supersonica a monte dell’onda d’urto.

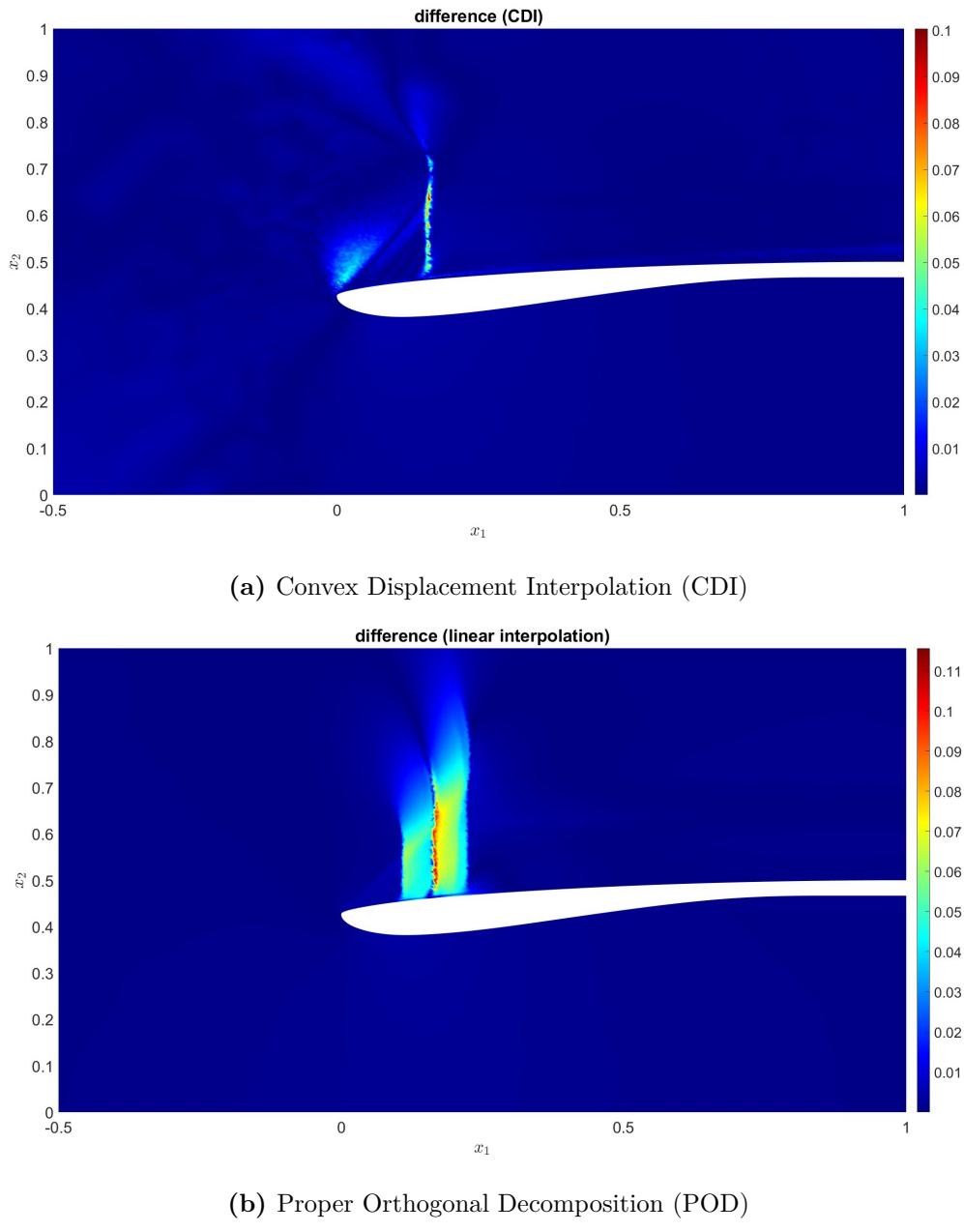
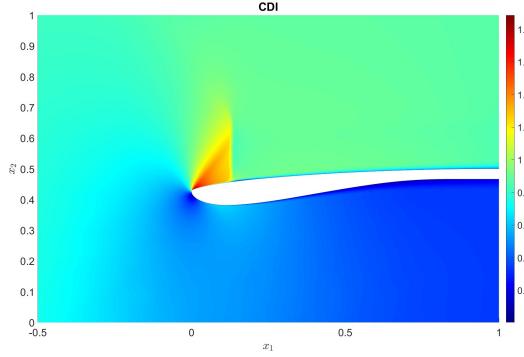


Figura 5.15: Caso test 3: Errore commesso dall'interpolazione

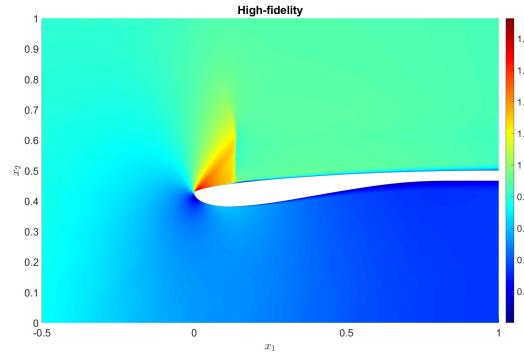
Dal campo di errore si può apprezzare come entrambi i metodi commettano un errore massimo di circa ≈ 0.1 . La differenza risiede nel fatto che l'interpolazione non lineare riesce a captare in maniera ottimale la posizione dell'urto e ciò si traduce in un campo di errore meno disturbato, ovvero si riduce la differenza tra il campo di moto interpolato e quello di alta fedeltà.

5.1.4 Caso test 4: $M_\infty = 0.8516$ e $MFR = 0.6578$

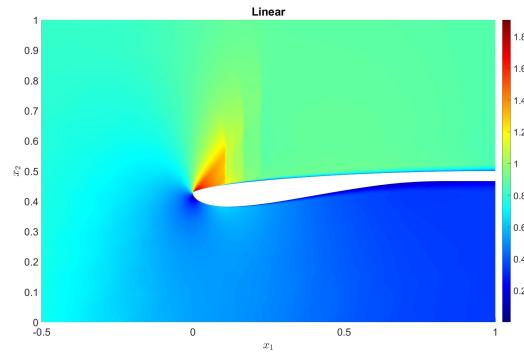
Si procede applicando l'interpolazione e si ottengono i seguenti campi di moto,



(a) Convex Displacement Interpolation (CDI)



(b) Simulazione ad alta fedeltà



(c) Proper Orthogonal Decomposition (POD)

Figura 5.16: Caso test 4: Interpolazione tramite CDI e confronto del campo di Mach tramite sensore di Ducros corretto

Si effettua poi il confronto tra i marker numerici captati dal sensore di Ducros corretto nella soluzione ad alta fedeltà con quelli predetti nella fase online dell’interpolazione non lineare (fig. 5.17)

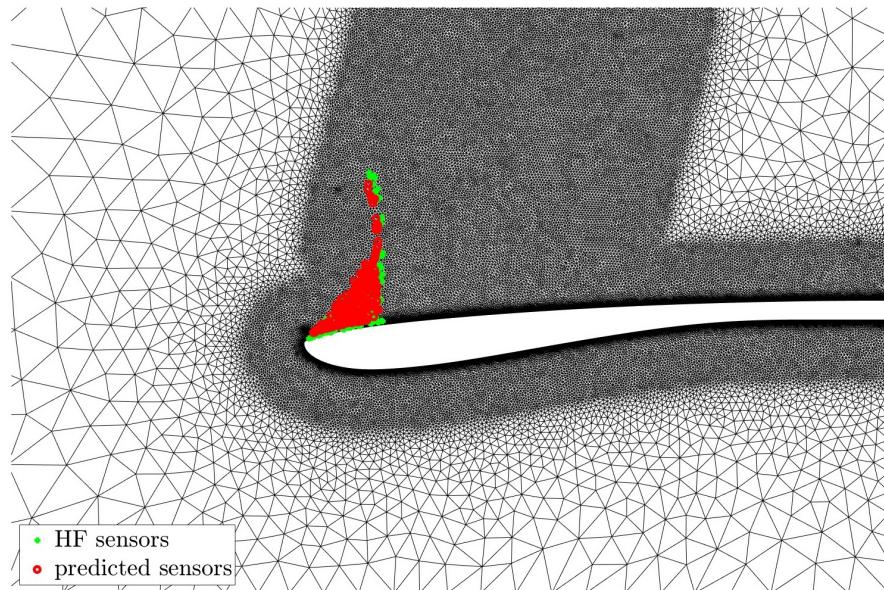


Figura 5.17: Caso test 4: sovrapposizione dei sensori predetti e ad alta fedeltà, Ducros corretto

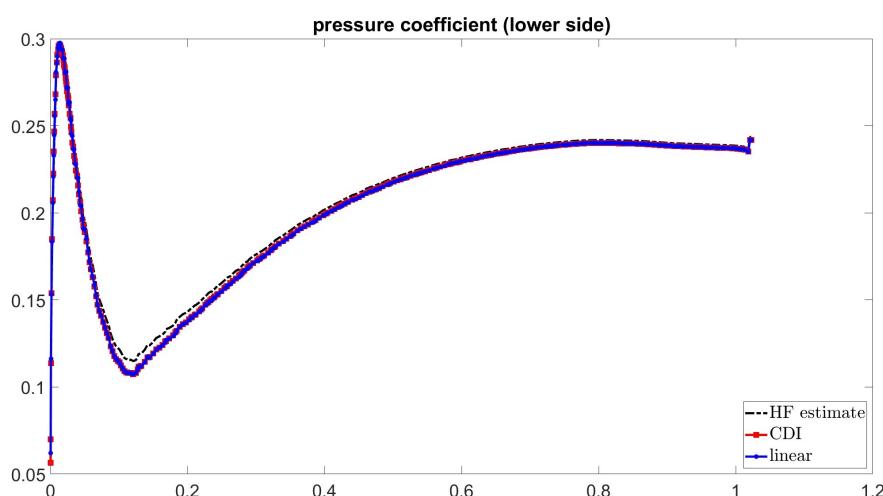


Figura 5.18: Caso test 4: Distribuzione del coefficiente di pressione sul ventre, Ducros corretto

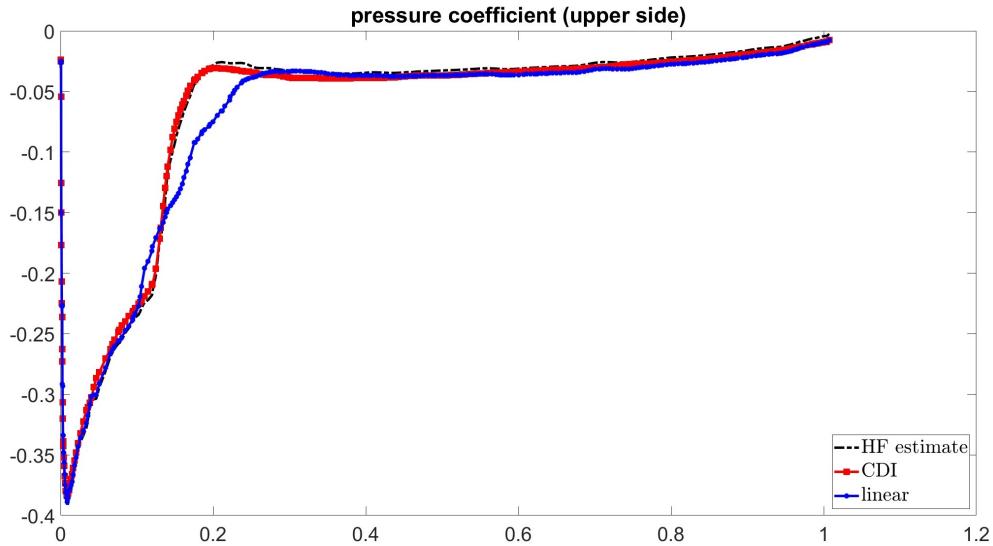


Figura 5.19: Caso test 4: Distribuzione del coefficiente di pressione sul dorso, Ducros corretto

Dalla fig. 5.19 si può vedere ancora una volta l'errore commesso dalla POD nell'approssimare l'andamento del coefficiente di pressione a parete. Mentre in fig. 5.20, in contrasto con il caso test precedente, non è più presente il disturbo sul bordo d'attacco, sintomo di una predizione migliore del campo di moto tramite la CDI. L'interpolazione lineare continua invece a non prevedere in maniera esatta la posizione dell'urto sul dorso del profilo.

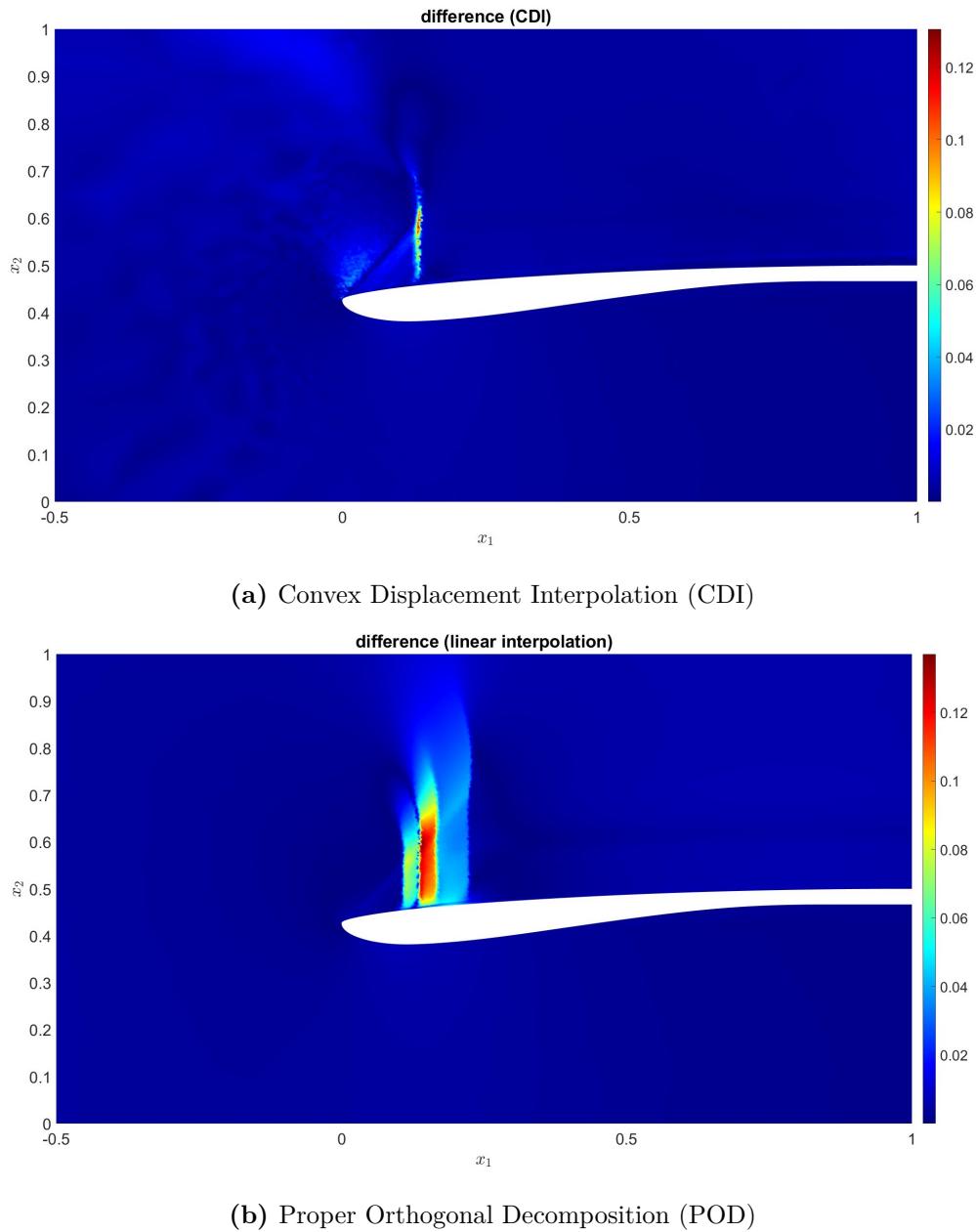
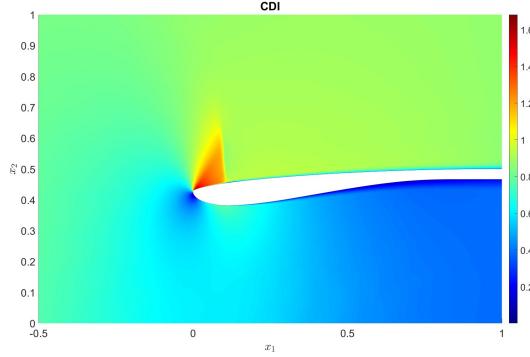


Figura 5.20: Caso test 4: Errore commesso dall'interpolazione

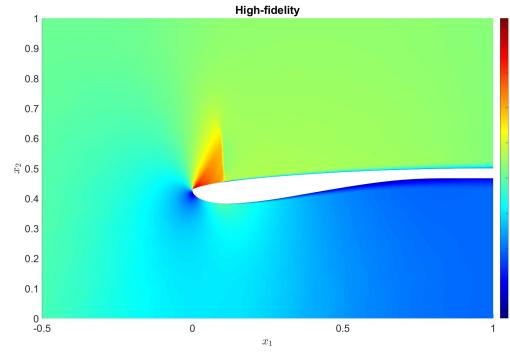
In questo caso test l'errore massimo commesso dalle due interpolazioni è paragonabile, ma il vantaggio della CDI è la maggiore precisione nella localizzazione dell'urto.

5.1.5 Caso test 5: $M_\infty = 0.8644$ e $MFR = 0.7384$

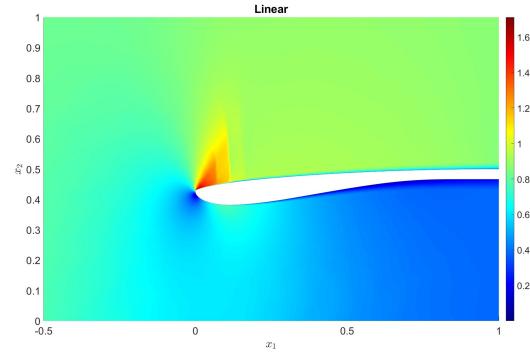
Si procede applicando l'interpolazione e si ottengono i seguenti campi di moto,



(a) Convex Displacement Interpolation (CDI)



(b) Simulazione ad alta fedeltà



(c) Proper Orthogonal Decomposition (POD)

Figura 5.21: Caso test 5: Interpolazione tramite CDI e confronto del campo di Mach tramite sensore di Ducros corretto

Si effettua poi il confronto tra i marker numerici captati dal sensore di Ducros corretto nella soluzione ad alta fedeltà con quelli predetti nella fase online dell’interpolazione non lineare (fig. 5.17)

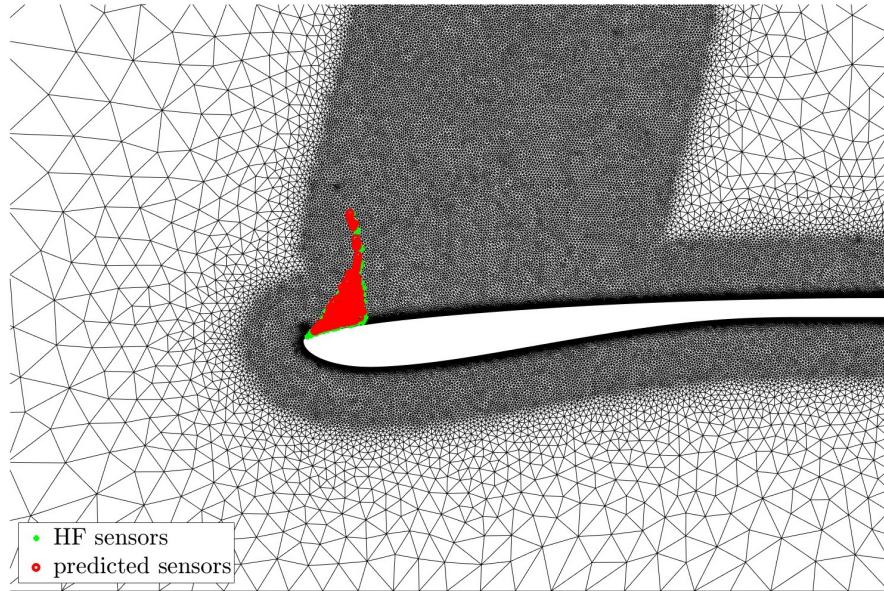


Figura 5.22: Caso test 5: sovrapposizione dei sensori predetti e ad alta fedeltà, Ducros corretto

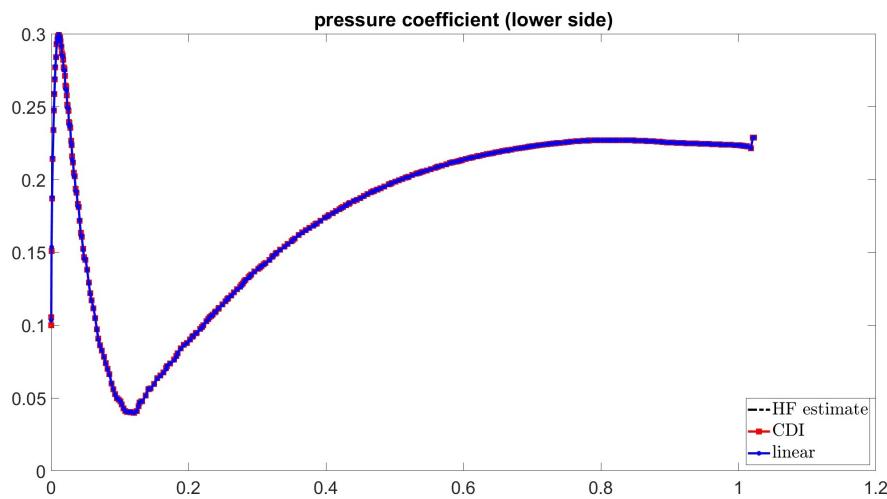


Figura 5.23: Caso test 5: Distribuzione del coefficiente di pressione sul ventre, Ducros corretto

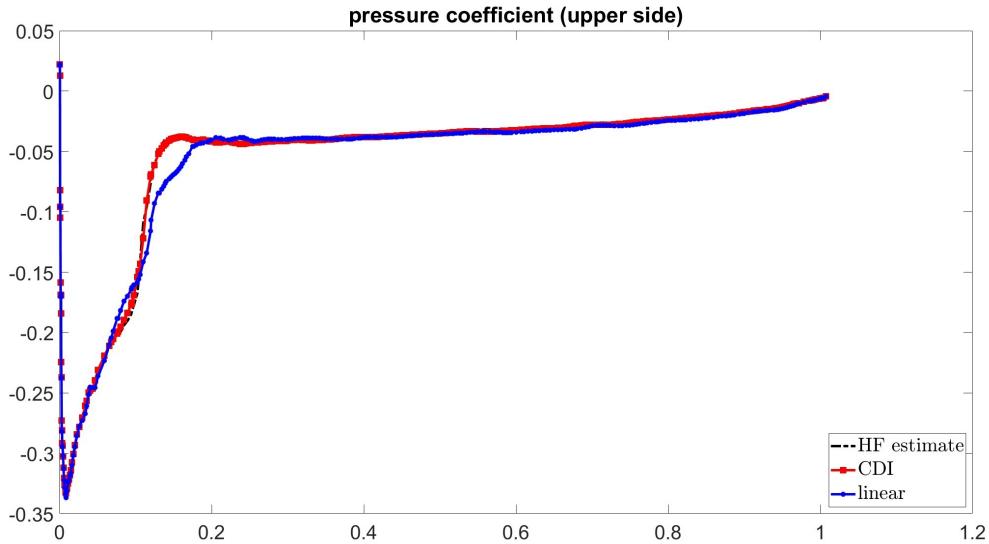


Figura 5.24: Caso test 5: Distribuzione del coefficiente di pressione sul dorso, Ducros corretto

In questo ultimo caso test, oltre alla CDI, anche l’interpolazione lineare effettuata tramite la metologia POD, porta a una soluzione che ha un andamento che approssima fedelmente la distribuzione ottenuta dalla simulazione ad alta fedeltà. Questa osservazione si può notare anche in fig. 5.25 dove il campo di errore associato alla soluzione lineare risulta indisturbato in confronto ai precedenti casi test. Per quanto riguarda l’interpolazione non lineare si è ripresentato il disturbo che si genera sul bordo d’attacco del profilo, ma nonostante ciò la distribuzione del coefficiente di pressione a parete ottenuto, approssima fedelmente la soluzione reale (fig. 5.24).

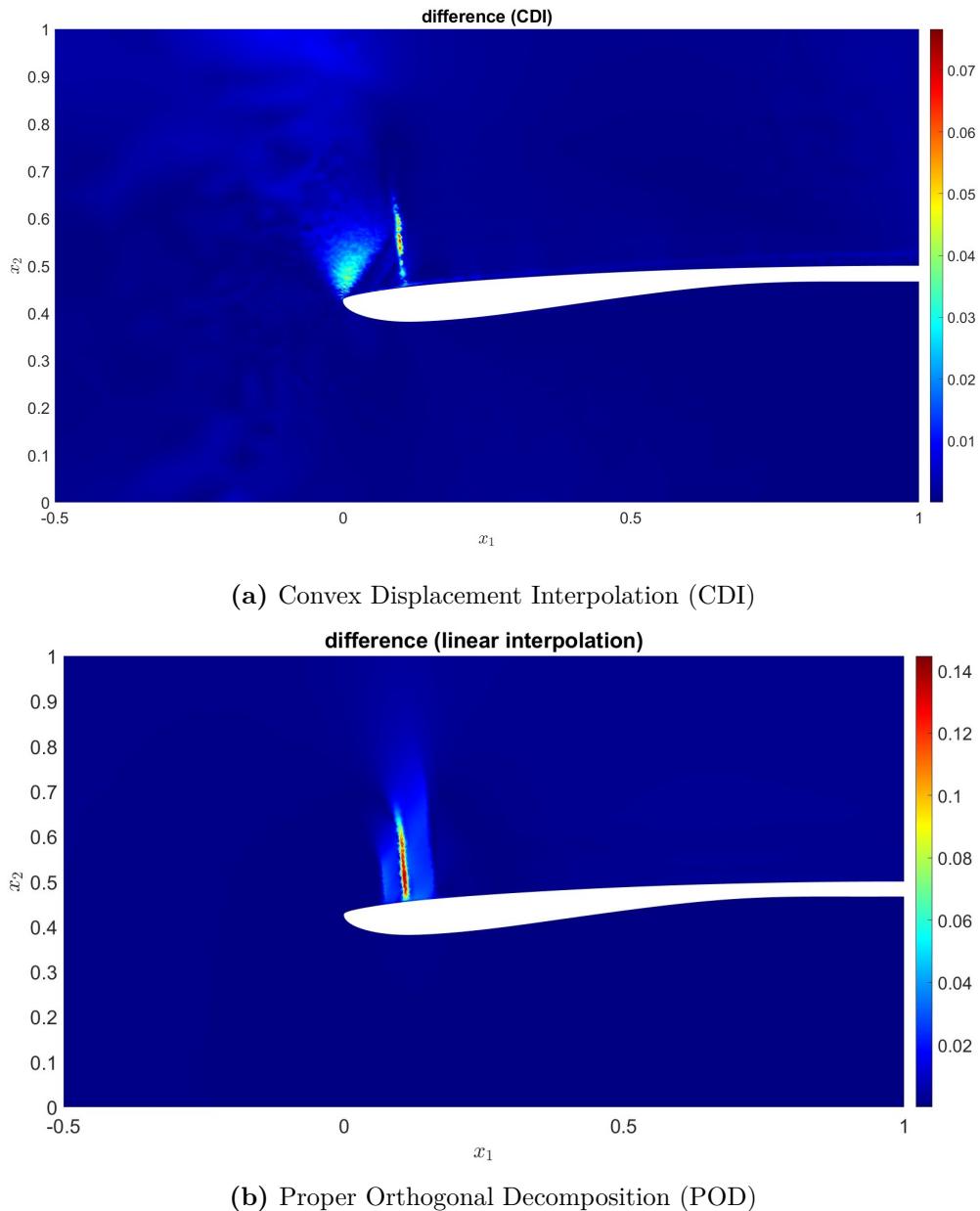


Figura 5.25: Caso test 4: Errore commesso dall’interpolazione

Dalla fig. 5.25 si può vedere come l’errore massimo, definito come la differenza tra il campo di moto approssimato e quello di alta fedeltà, commesso dalla CDI è di circa ≈ 0.07 , mentre l’interpolazione lineare commette un errore massimo di circa ≈ 0.14 .

5.1.6 Marker numerici in fase di predizione

In questa sezione vengono presentati i risultati ottenuti nella fase online di predizione, analizzando le prestazioni della metodologia CDI al variare del sensore impiegato per la rilevazione delle strutture coerenti.

In particolare, vengono confrontate le distribuzioni dei marker numerici associate ai tre sensori considerati: il sensore di Ducros corretto, il sensore di Mach e il sensore basato sull'entropia.

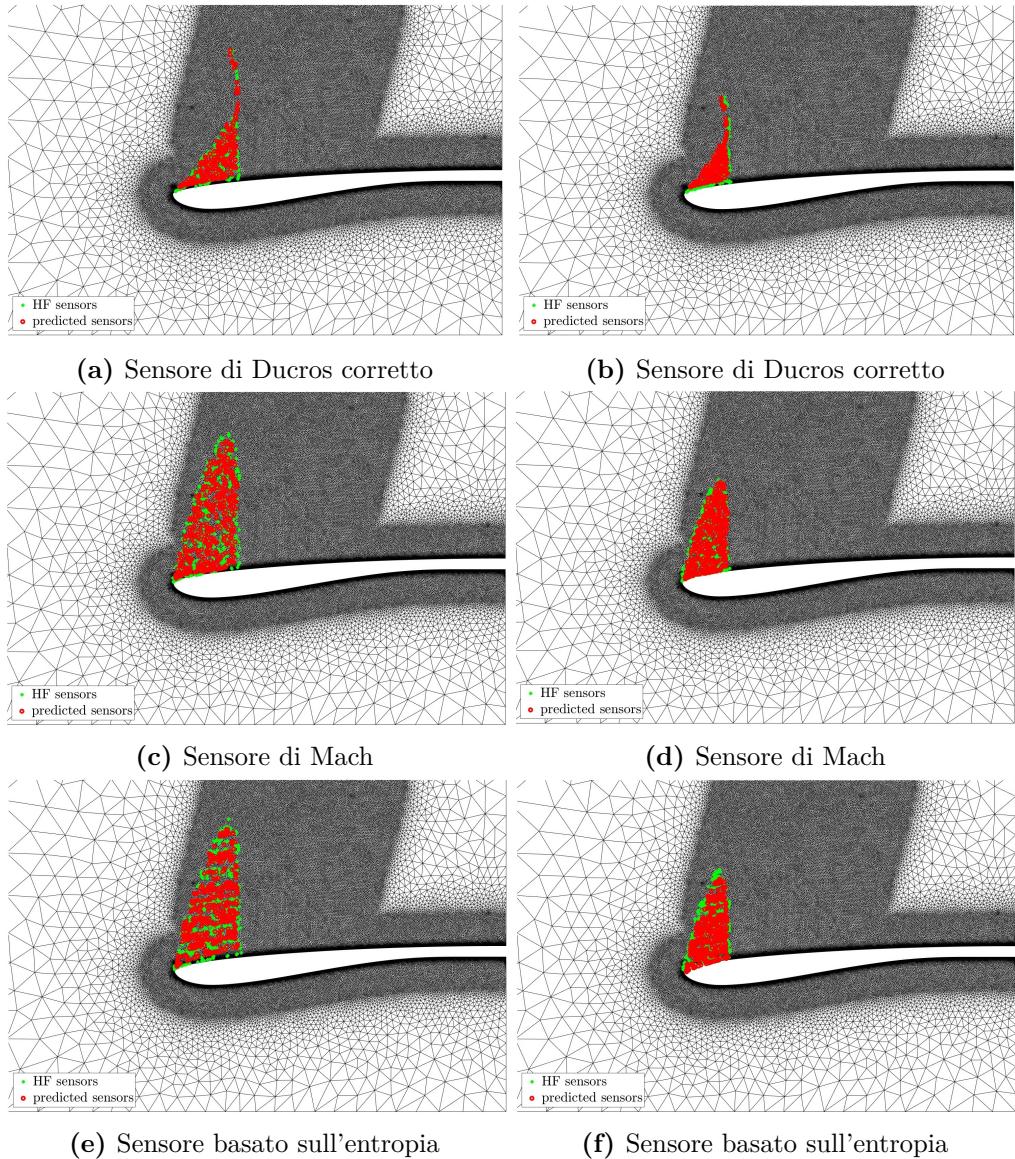


Figura 5.26: Casi test 1 (sx) e 2 (dx): Marker numerici dei sensori

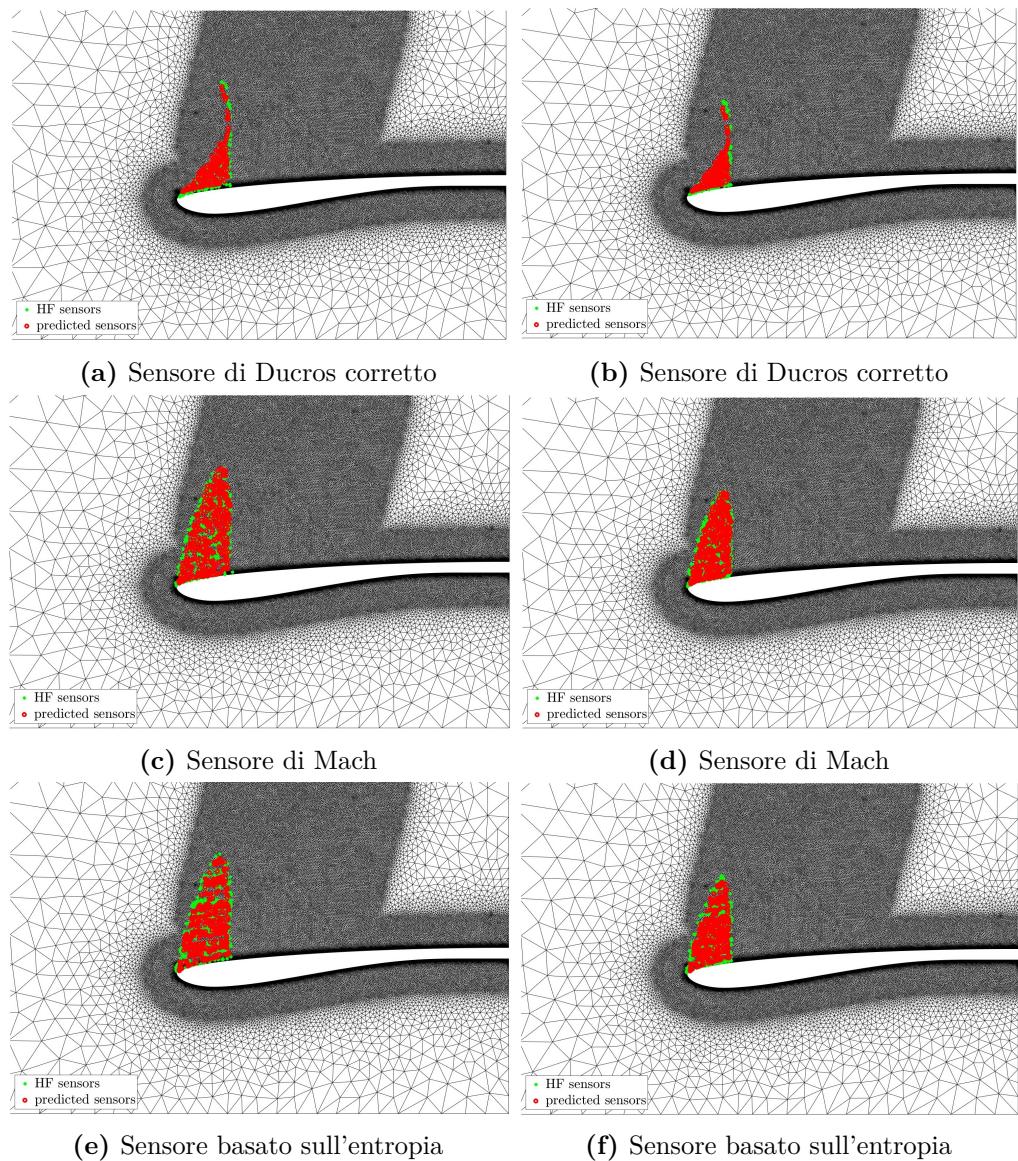


Figura 5.27: Casi test 3 (sx) e 4 (dx): Marker numerici dei sensori

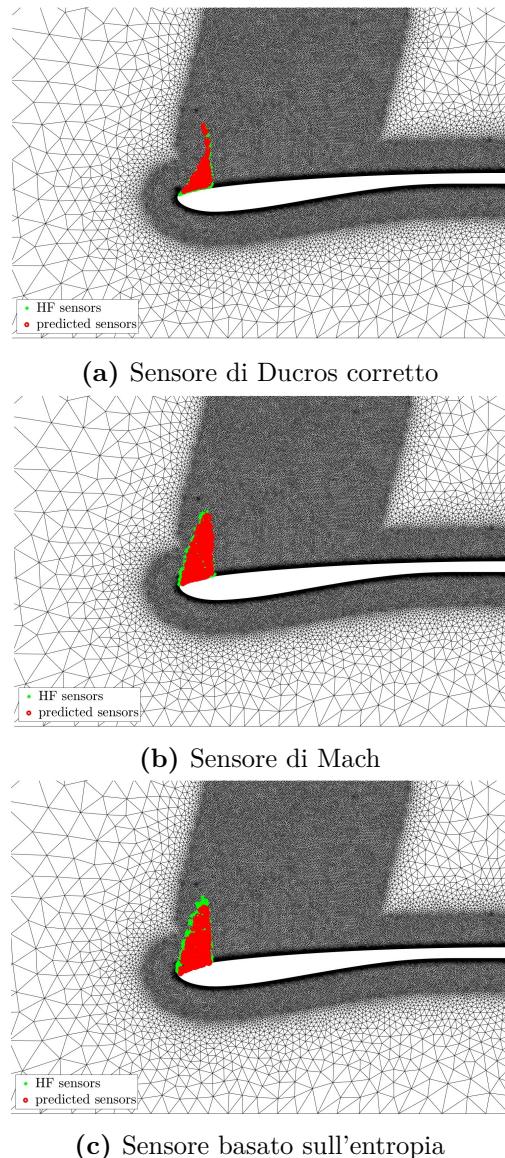
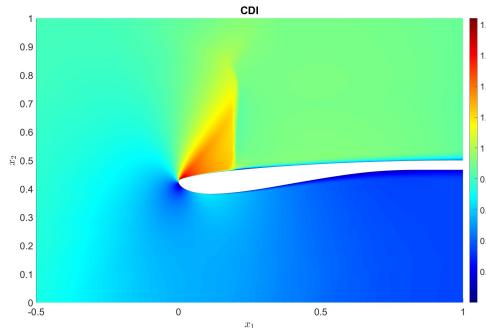


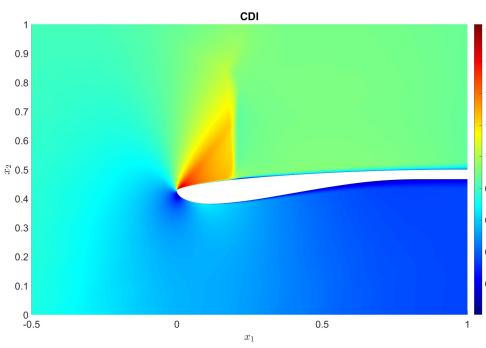
Figura 5.28: Caso test 5: Marker numerici dei sensori

Ai marker numerici generati in fase predittiva dall'algoritmo per ogni sensore implementato, sono associate soluzioni del campo di moto ottenute tramite interpolazione non lineare e per questo motivo risulta di particolare interesse fare un ulteriore confronto tra i campi di Mach e i campi di errore al variare dei sensori impiegati.

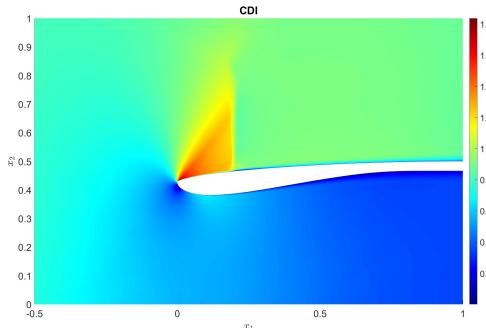
Il confronto tra le soluzioni ottenute impiegando i differenti sensori di rilevamento delle strutture coerenti è stato eseguito per il caso test n. 1, scelto come rappresentativo dell’insieme dei casi analizzati.



(a) Sensore di Ducros corretto



(b) Sensore di Mach



(c) Sensore basato sull’entropia

Figura 5.29: Caso test 1: Campi di Mach ottenuti al variare dei sensori

Tutti e tre i sensori forniscono un campo di moto coerente dal punto di vista fisico come si può apprezzare dalla fig. 5.29.

5.1 – Analisi comparativa dei sensori

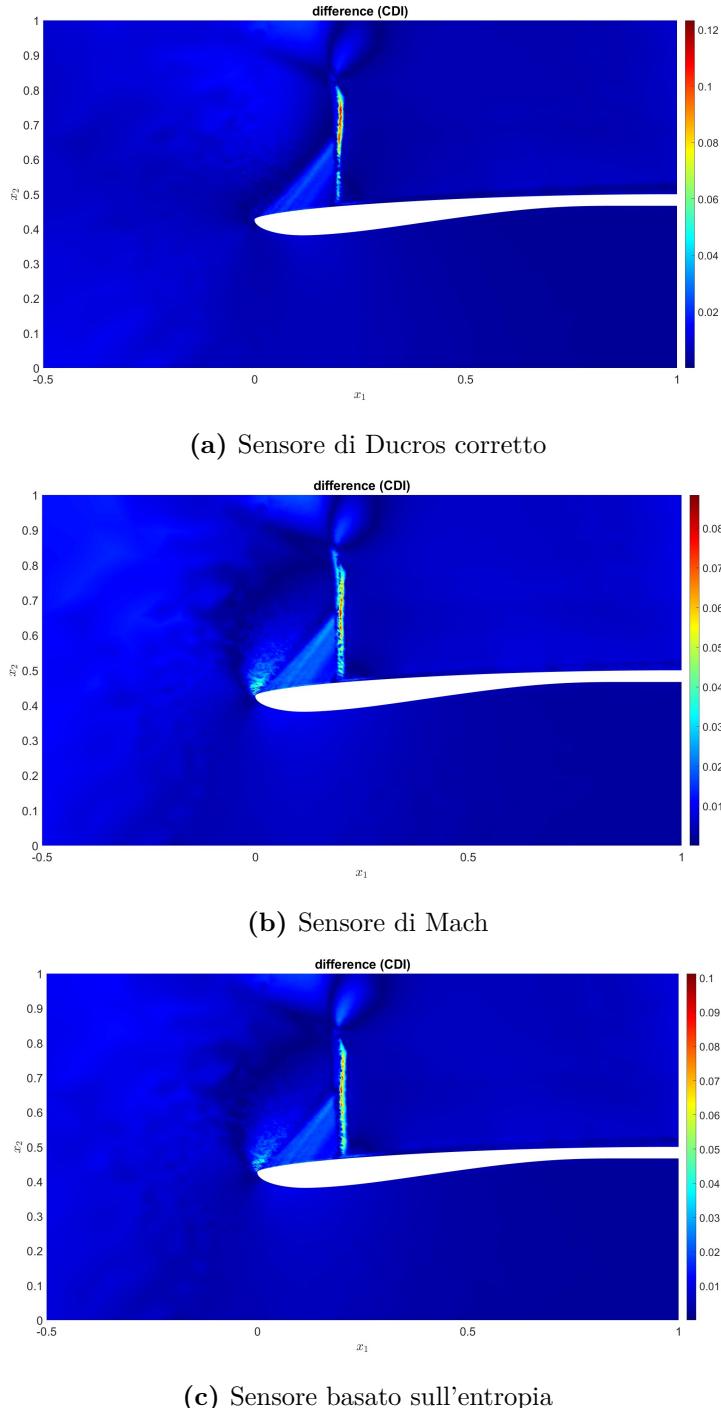
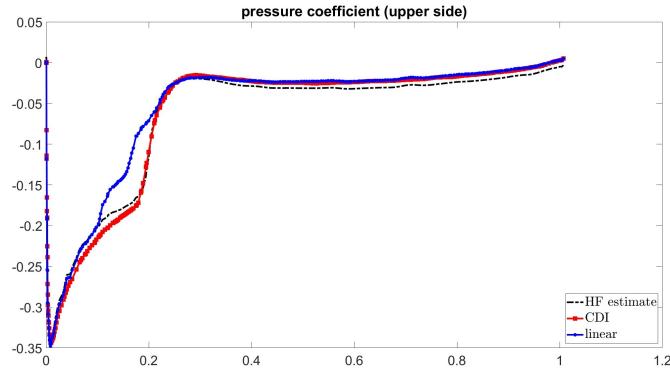
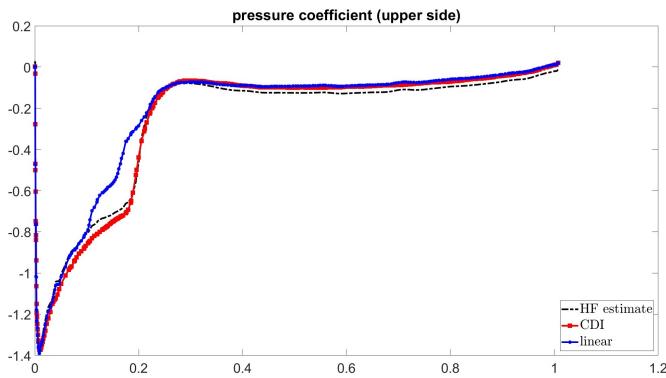


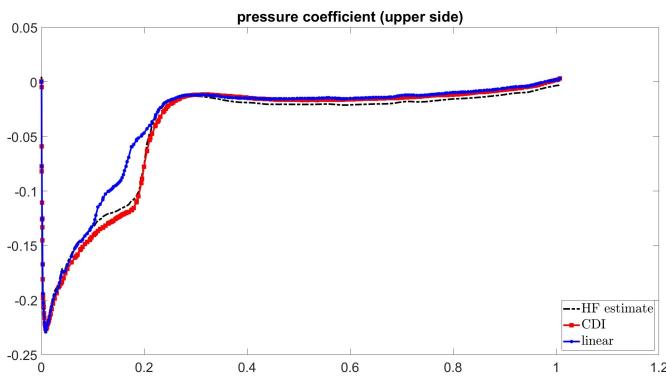
Figura 5.30: Caso test 1: Campi di errore ottenuti al variare dei sensori



(a) Sensore di Ducros corretto



(b) Sensore di Mach



(c) Sensore basato sull'entropia

Figura 5.31: Caso test 1: Confronto distribuzione pressione a parete al variare dei sensori

Tutti i sensori che sono stati impiegati per la predizione del campo di moto hanno fornito una distribuzione del coefficiente di pressione a parete paragonabile al caso

reale come si può vedere dalla fig. 5.31.

Dalla fig. 5.30 invece si può notare come il sensore di Mach e il sensore basato sull'entropia generano maggiori disturbi a monte dell'onda d'urto, in particolare sul bordo d'attacco del profilo. Di conseguenza si può affermare che i tre sensori predicono in maniera ottimale la posizione dell'urto, ma solo il sensore di Ducros corretto fornisce una predizione accurata anche nel resto del campo di moto.

5.1.7 Errore associato alla scelta dei sensori

Per apprezzare le prestazioni ottenute per i vari casi test, al variare del sensore utilizzato, si è valutato l'errore in L^2 definito come:

$$E = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_w} (C_{p,HF} - C_{p,CDI})^2}{N_w}} \quad (5.1)$$

Caso test n°	1	2	3	4	5
Sensore di Ducros corretto	0.0335	0.0169	0.0156	0.0262	0.0112
Sensore di Mach	0.0360	0.0186	0.0174	0.0275	0.0118
Sensore Entropia	0.0580	0.0287	0.0280	0.0439	0.0192
Interpolazione lineare	0.0699	0.0567	0.0476	0.0616	0.0344

Tabella 5.1: Errore associato alla scelta dei sensori

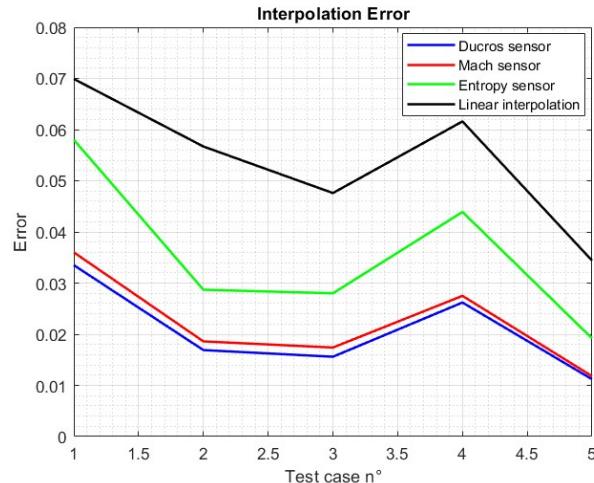


Figura 5.32: Andamento dell'errore associato ai sensori al variare dei casi test

5.2 Presa a doppia rampa

In questa sezione vengono presentati i risultati ottenuti tramite l'interpolazione non lineare, basata sulla CDI, per i cinque casi test relativi alla seconda geometria considerata, ovvero la presa d'aria a doppia rampa.

L'obiettivo è valutare la capacità dell'approccio di ricostruire con accuratezza le principali strutture del flusso, in particolare le onde d'urto generate dalla doppia deflessione e le interazioni tra gli urti nel canale d'ingresso, al variare dei parametri in gioco: Mach di volo ed incidenza (vedi fig. 3.9).

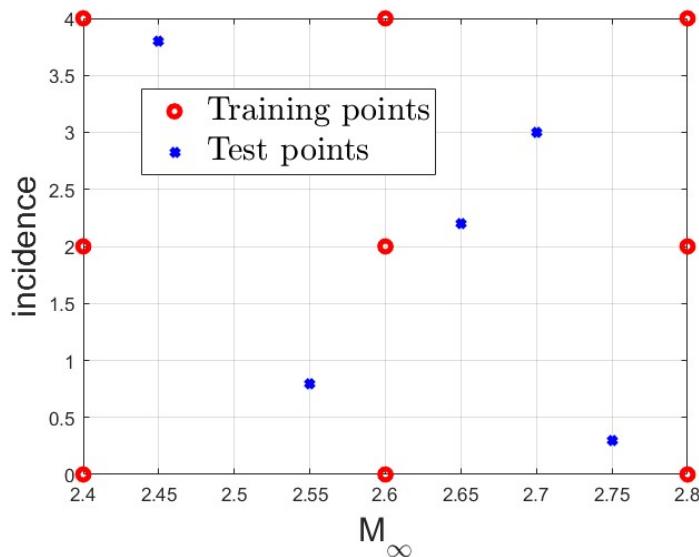


Figura 5.33: Spazio dei parametri, addestramento e interpolazione

In particolare, i parametri che caratterizzano i cinque casi test presi in esame sono:

- $M_{\infty} = 2.55$ e $i = 0.8^\circ$
- $M_{\infty} = 2.75$ e $i = 0.3^\circ$
- $M_{\infty} = 2.65$ e $i = 2.2^\circ$
- $M_{\infty} = 2.70$ e $i = 3.0^\circ$
- $M_{\infty} = 2.45$ e $i = 3.8^\circ$

Per ciascun caso test vengono confrontate la soluzione interpolata e la corrispondente soluzione CFD ad alta fedeltà, analizzando sia i campi di Mach che gli errori associati, utilizzando come sensore quello di Ducros corretto. Nell'Appendice B sono messe a confronto le restanti variabili primitive (densità, pressione e componenti di velocità).

5.2.1 Caso test 1: $M_\infty = 2.55$ e $i = 0.8^\circ$

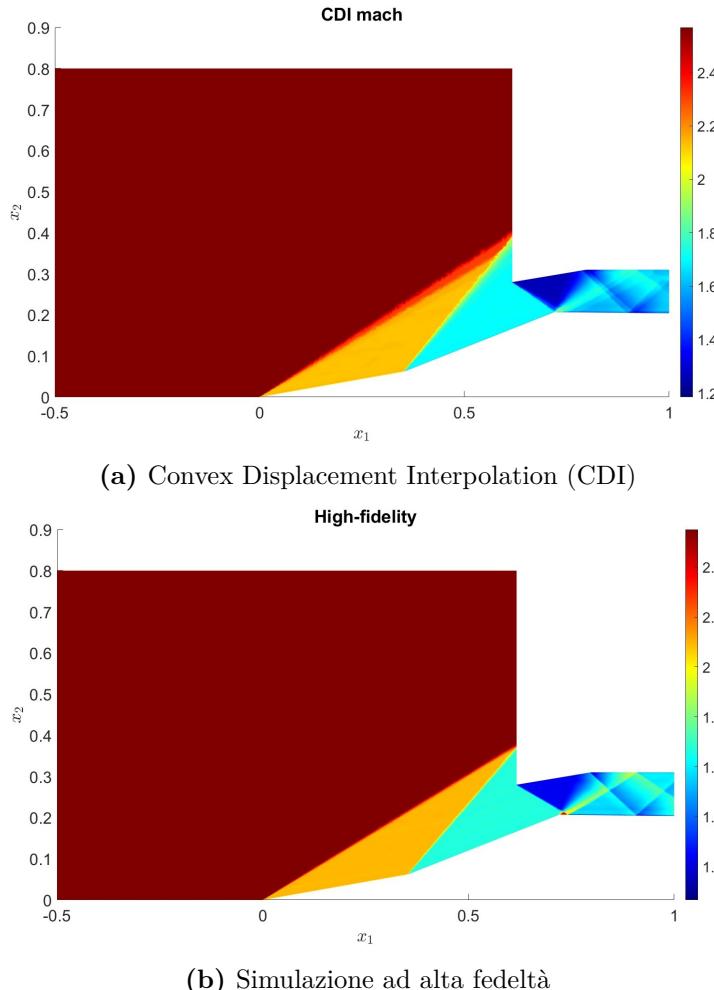


Figura 5.34: Caso test 1: Interpolazione tramite CDI e confronto del campo di Mach tramite sensore di Ducros corretto

Il campo di Mach ottenuto tramite CDI conserva le proprietà fisiche più importanti del flusso, incluse le regioni supersoniche e la posizione degli urti. Inoltre anche le interazioni tra gli urti vengono riprodotte fedelmente e si nota un leggero disturbo per quanto riguarda l'urto che si genera sulla prima rampa.

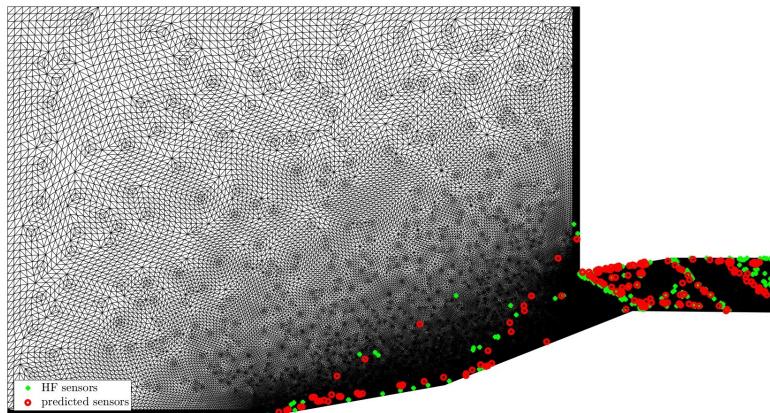


Figura 5.35: Caso test 1: sovrapposizione dei sensori predetti e ad alta fedeltà

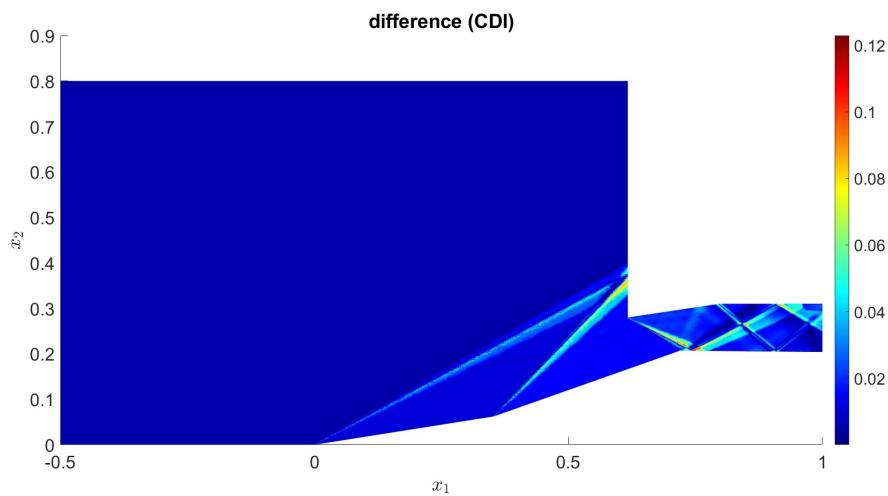


Figura 5.36: Caso test 1: Errore commesso dall’interpolazione

Nella fig. 5.35 sono riprodotti i sensori ottenuti tramite l’interpolazione, che si sovrappongono in maniera coerente a quelli estratti dalla soluzione ad alta fedeltà. Tale controllo risulta cruciale per quanto riguarda la qualità della soluzione interpolata che si ottiene.

Dalla fig. 5.36 risulta una differenza massima tra il campo di Mach approssimato e quello esatto di circa ≈ 0.13 , ciò avviene nella zona in cui sono presenti le interazioni tra gli urti, all’ingresso del canale della presa d’aria.

5.2.2 Caso test 2: $M_\infty = 2.75$ e $i = 0.3^\circ$

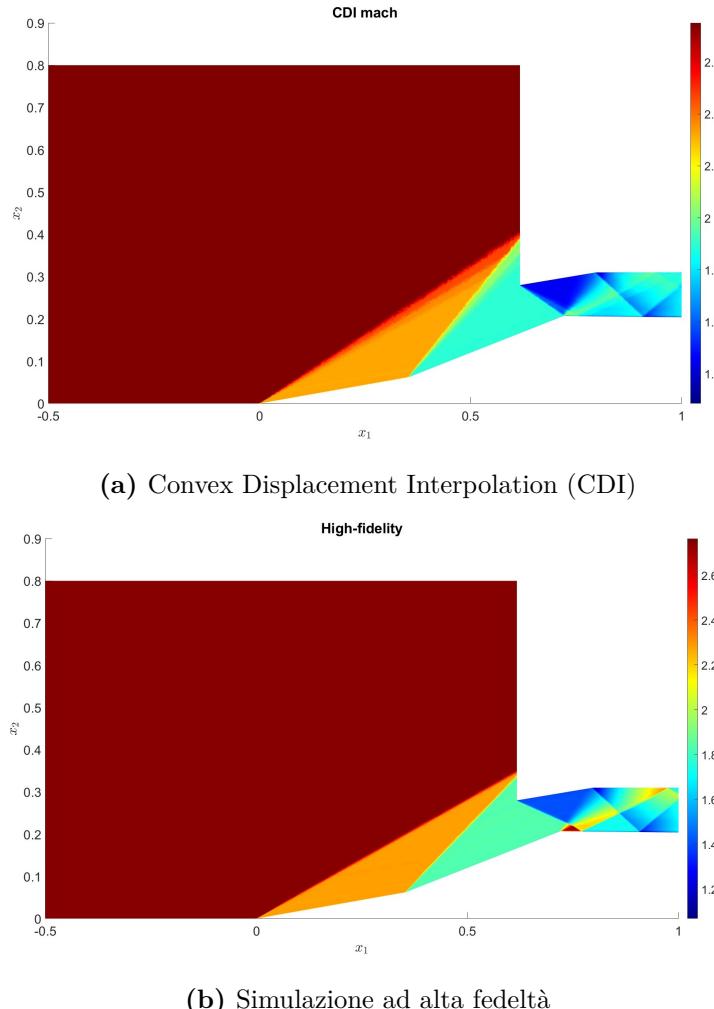


Figura 5.37: Caso test 2: Interpolazione tramite CDI e confronto del campo di Mach tramite sensore di Ducros corretto

Anche per il caso test 2 la metodologia CDI fornisce una ricostruzione del campo di Mach coerente con la soluzione ad alta fedeltà per quanto riguarda la configurazione degli urti, la loro intensità e le interazioni, nonostante la forte non linearità dei fenomeni.

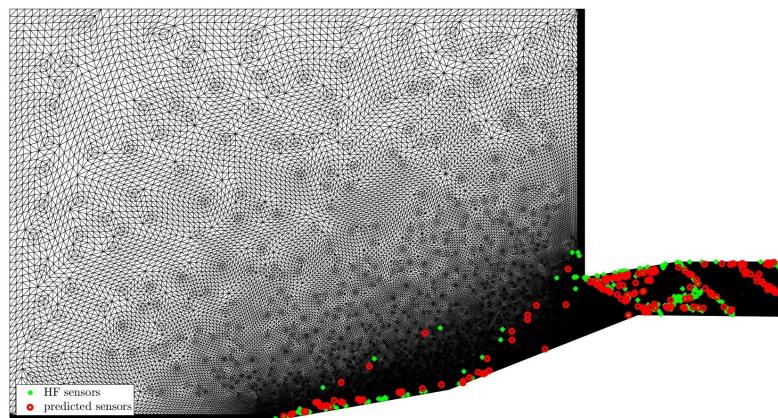


Figura 5.38: Caso test 2: sovrapposizione dei sensori predetti e ad alta fedeltà

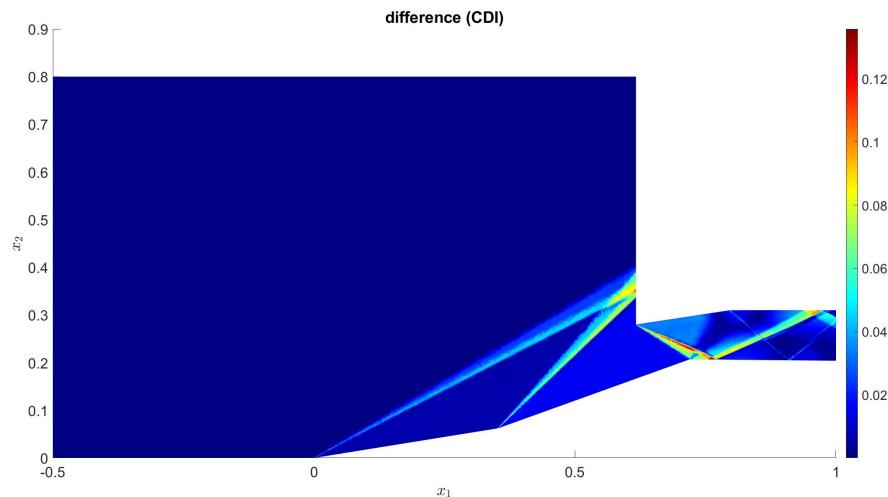


Figura 5.39: Caso test 2: Errore commesso dall'interpolazione

Per il seguente caso test si ottiene una migliore predizione per il posizionamento dell’urto principale che si genera sulla prima rampa, ma nascono nuovi disturbi all’interno del condotto. L’errore commesso è dello stesso ordine di grandezza del precedente, con un valore massimo di ≈ 0.12 , assicurando una predizione accurata.

5.2.3 Caso test 3: $M_\infty = 2.65$ e $i = 2.2^\circ$

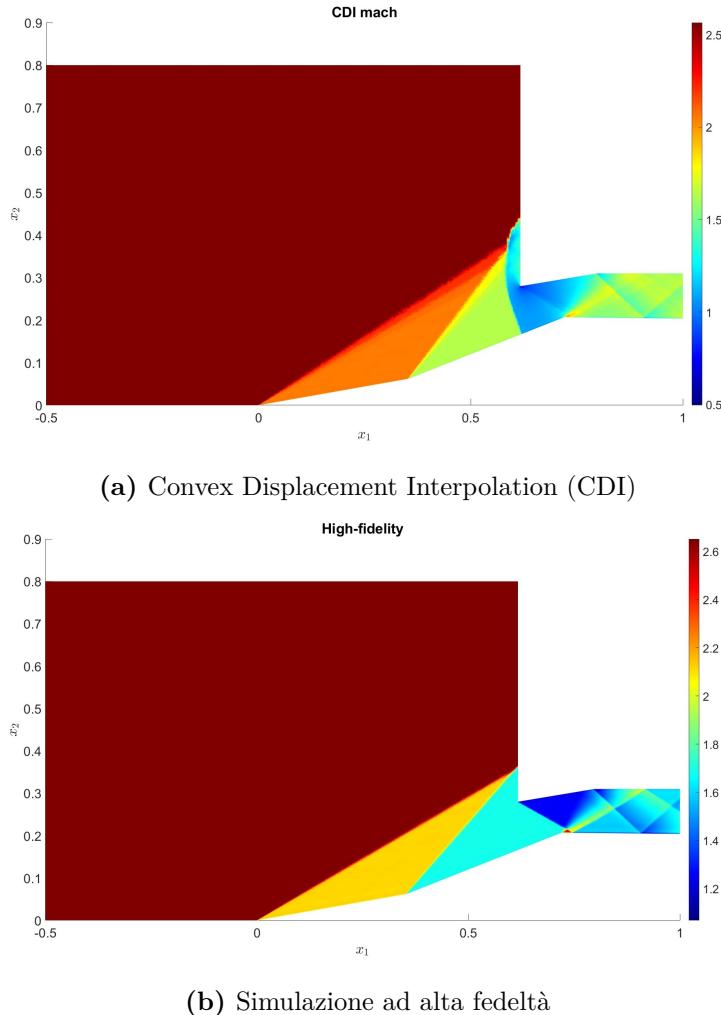


Figura 5.40: Caso test 3: Interpolazione tramite CDI e confronto del campo di Mach tramite sensore di Ducros corretto

Tra i cinque casi test considerati per la presa a doppia rampa, il seguente presenta un comportamento particolarmente interessante dal punto di vista fisico: essendo i parametri operativi molto vicini alla transizione tra la configurazione con urto attaccato e quella con l'urto staccato, la metodologia CDI predice un urto staccato nonostante la soluzione esatta non lo abbia. In prossimità della frontiera tra i due regimi di flusso, lo spazio dei parametri presenta un cambiamento topologico brusco, che rende l'interpolazione particolarmente sensibile. Per risolvere tale problema si potrebbe costruire un dataset di addestramento più fitto, specialmente in prossimità

della transizione tra i due regimi.

Questa incongruenza tra il campo di Mach interpolato e quello ad alta fedeltà, genera una zona particolarmente disturbata nel campo di Errore, all'ingresso del condotto sulla seconda rampa (fig. 5.42).

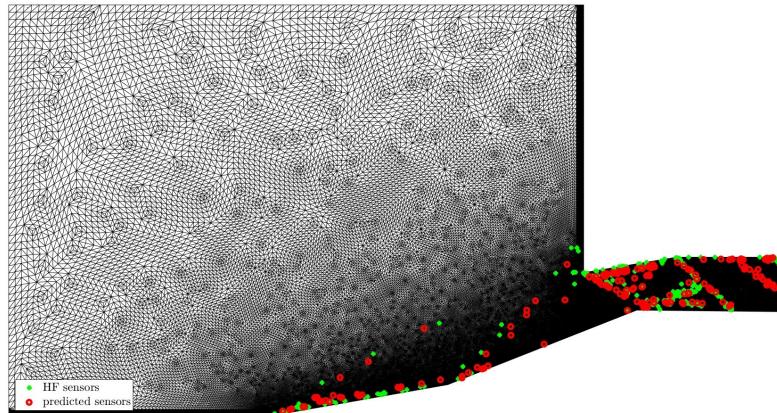


Figura 5.41: Caso test 3: sovrapposizione dei sensori predetti e ad alta fedeltà

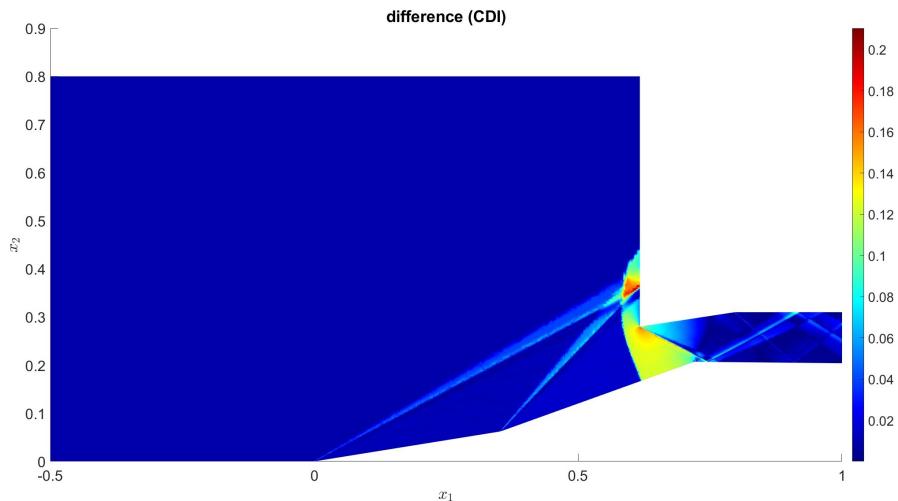


Figura 5.42: Caso test 3: Errore commesso dall'interpolazione

5.2.4 Caso test 4: $M_\infty = 2.70$ e $i = 3.0^\circ$

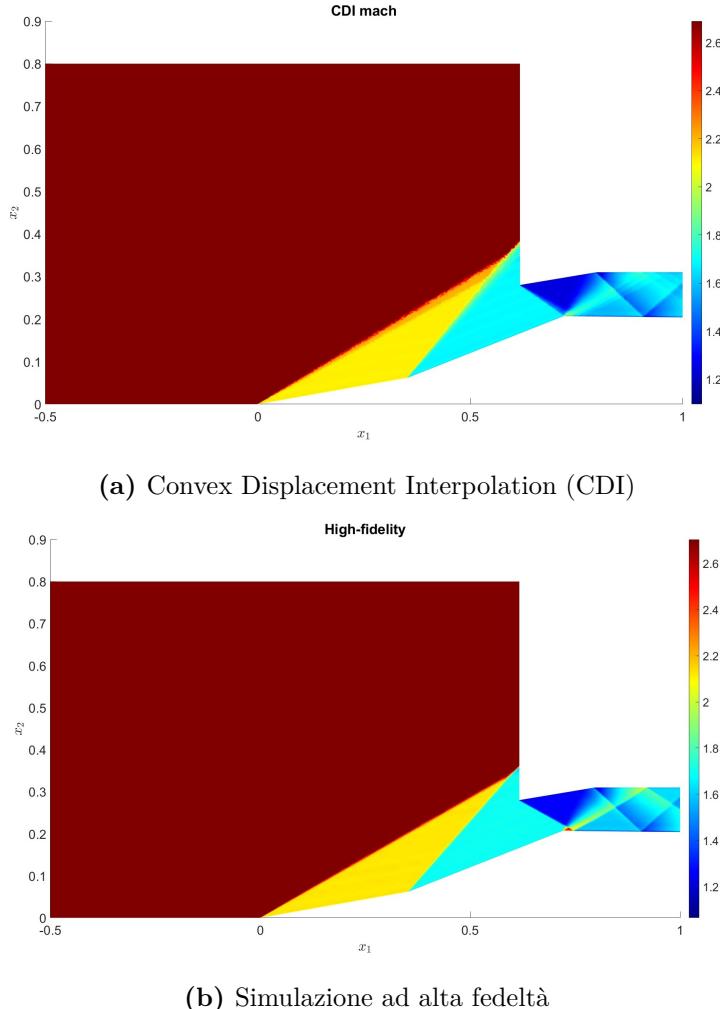


Figura 5.43: Caso test 4: Interpolazione tramite CDI e confronto del campo di Mach tramite sensore di Ducros corretto

Il quarto caso test rappresenta la configurazione per la quale la metodologia CDI fornisce i risultati più accurati. Ciò è dovuto al fatto che i parametri che lo caratterizzano si trovano esattamente a metà tra i parametri utilizzati per l'addestramento. Trovarsi in una regione centrale dello spazio dei parametri implica che la soluzione può essere ottenuta tramite una vera interpolazione tra gli snapshot che appartengono a entrambi i lati del dominio.

In questo caso la registrazione delle nuvole di punti è particolarmente stabile, le mappature risultano ben condizionate e le pesature dei vicini più prossimi

producono una combinazione lineare nel manifold e questo permette di riprodurre fedelmente la fisica del problema.

Il risultato è una predizione del campo di Mach praticamente sovrapponibile alla soluzione ad alta fedeltà, con una corretta individuazione delle onde d’urto nonostante la forte non linearità (vedi fig. 5.45).

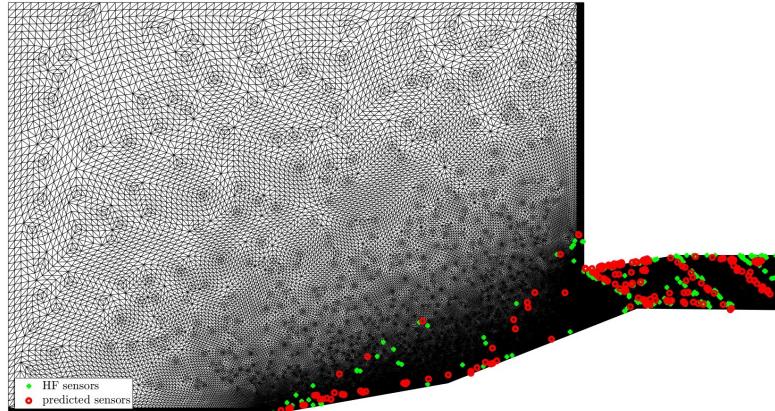


Figura 5.44: Caso test 4: sovrapposizione dei sensori predetti e ad alta fedeltà

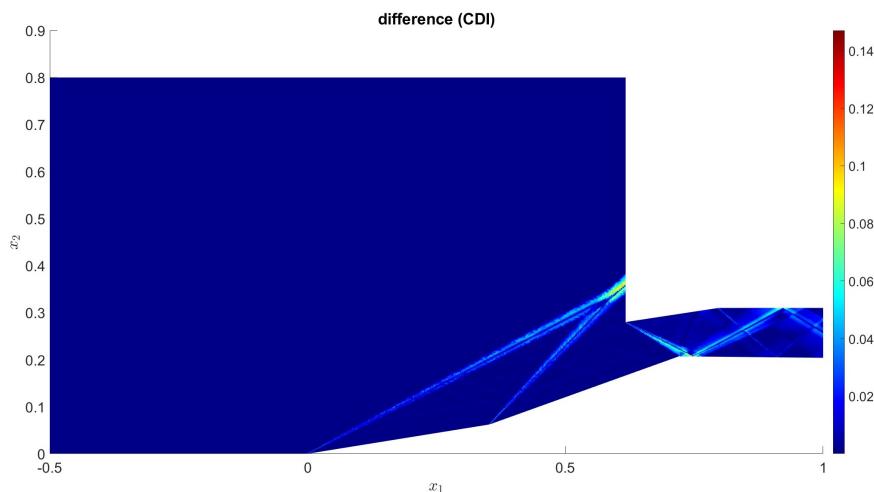


Figura 5.45: Caso test 4: Errore commesso dall’interpolazione

5.2.5 Caso test 5: $M_\infty = 2.45$ e $i = 3.8^\circ$

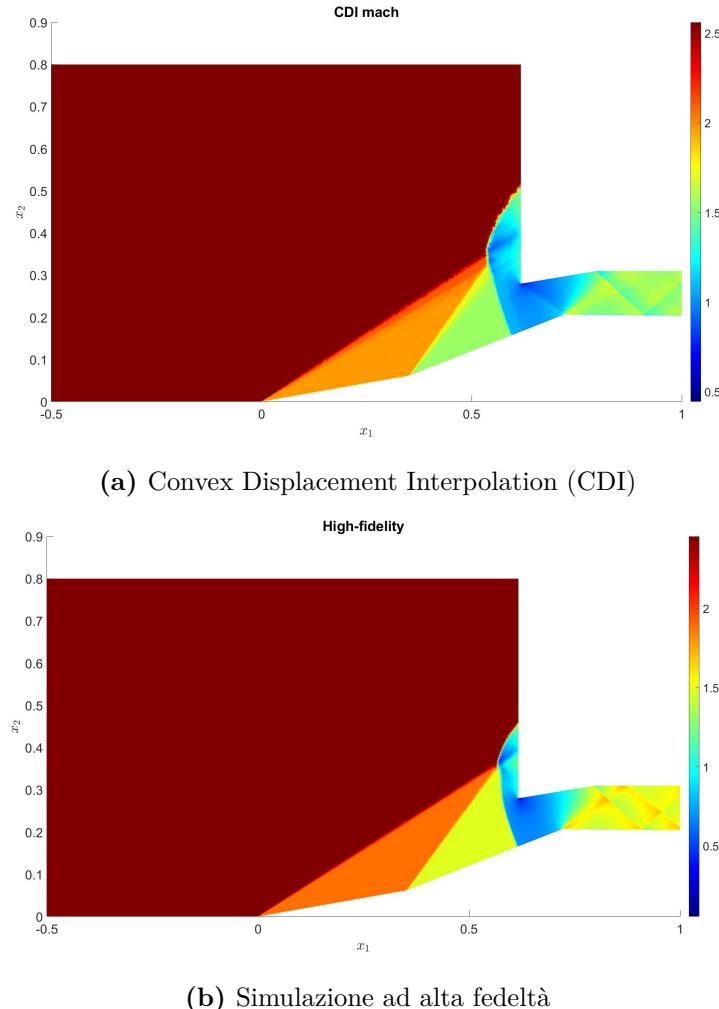


Figura 5.46: Caso test 5: Interpolazione tramite CDI e confronto del campo di Mach tramite sensore di Ducros corretto

In questo caso test si può apprezzare come l’interpolazione non lineare riesce a captare la variazione del regime di flusso, prevedendo la presenza dell’urto staccato. Nonostante ciò si nota un’incongruenza tra il campo di Mach generato dall’interpolazione e quello relativo alla soluzione CFD di alta fedeltà, ciò è dovuto al fatto nel dataset di addestramento sono presenti solamente due casi che rappresentano questo tipo di regime di flusso, di conseguenza la predizione, in termini di posizionamento dell’urto, non risulta accurata come si può vedere in fig. 5.48

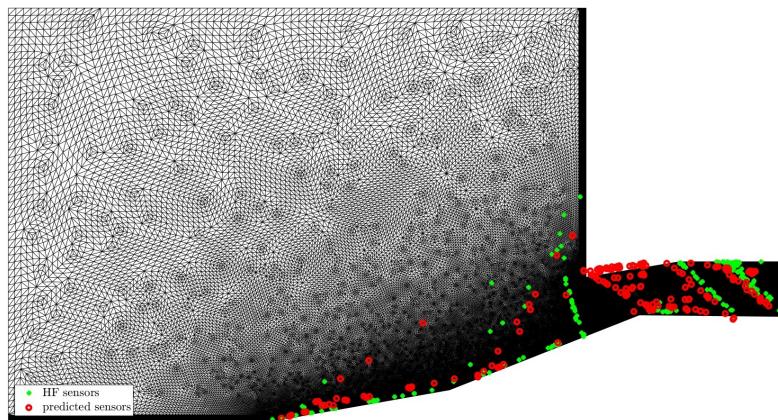


Figura 5.47: Caso test 5: sovrapposizione dei sensori predetti e ad alta fedeltà

Dalla fig. 5.47 si può notare una mancanza di marker numerici nella zona in cui si presenta l’urto staccato, sintomo di una mancanza di dati relativi a questa particolare configurazione delle strutture coerenti nel dataset di addestramento.

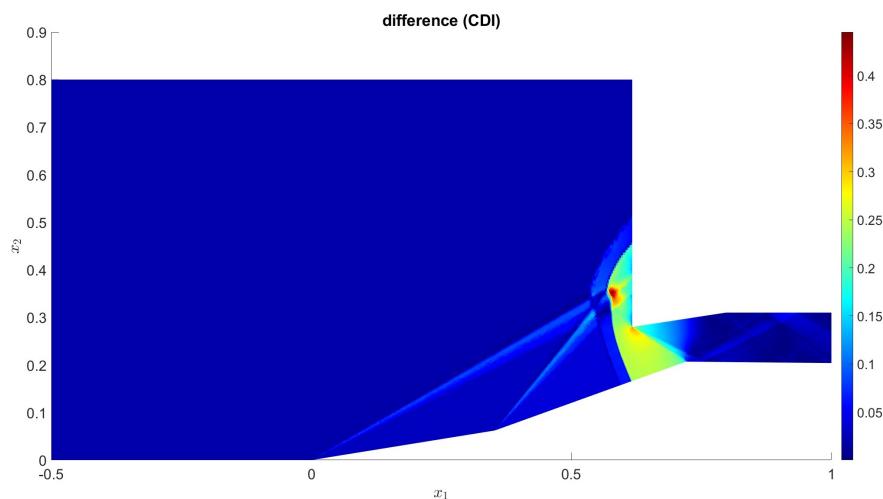


Figura 5.48: Caso test 5: Campi di errore ottenuti al variare dei sensori

Capitolo 6

Conclusioni e sviluppi futuri

Il lavoro svolto ha permesso di valutare l'efficacia della *Convex Displacement Interpolation (CDI)* nella predizione di campi di moto complessi, caratterizzati da variazioni significative per quanto riguarda la topologia e dall'interazione tra strutture coerenti.

I due casi test selezionati, la presa d'aria di un TurboFan e la presa a doppia rampa, hanno fornito un banco di prova molto differenziato e hanno permesso di analizzare il comportamento dell'interpolazione non lineare sia in condizioni transoniche sia in condizioni completamente supersoniche.

Dai risultati si è visto come l'accuratezza predittiva è buona nella maggior parte dei casi test considerati, con particolare efficacia nei casi in cui i parametri da interpolare sono ben rappresentati all'interno dello spazio dei parametri di addestramento dell'algoritmo.

Da un punto di vista computazionale, la generazione delle soluzioni interpolate risulta estremamente vantaggiosa rispetto alle simulazioni CFD ad alta fedeltà:

- Per la presa d'aria del TurboFan, i tempi di predizione sono dell'ordine di pochi minuti $\approx 3\text{min}$ per cinque casi test.
- Per la presa a doppia rampa, caratterizzata da una maggiore complessità e da un campionamento di punti superiore tramite i sensori (circa 400 marker numerici), i tempi si collocano nell'ordine delle decine di minuti.

L'algoritmo è stato sviluppato utilizzando il software *Matlab* ed è un algoritmo di tipo seriale, perciò ci sono grandi margini di miglioramento e ottimizzazione del codice per ridurre ulteriormente i tempi di calcolo.

Questi risultati confermano come la CDI sia uno strumento promettente per applicazioni aerospaziali e permette di compiere un passo verso le simulazioni in tempo reale.

Sono stati inoltre individuati alcuni limiti, in particolare nei casi che si trovano nella zona di transizione tra una configurazione del campo di moto e un'altra, per i quali si rende necessario un infittimento del dataset di addestramento, ma essendo questo processo appartenente alla fase offline dell'algoritmo, si tratta di un procedimento da svolgere una singola volta.

La tesi in esame apre la strada a diversi sviluppi futuri:

- Miglioramento della fase di allineamento delle nuvole di punti per rendere la fase di registrazione più robusta e generalizzata. L'obiettivo è quello di ottenere una procedura in grado di operare su geometrie differenti, domini computazionali non coincidenti.
- Si possono integrare tecniche data-driven, come ad esempio le reti neurali per la regressione delle nuvole di punti e l'adozione di sensori adattivi (*physics informed sensors*) che tengono conto della fisica del problema al variare del caso test.
- Ottimizzazione dell'algoritmo non intrusivo basato sul trasporto ottimale tramite un codice ad architettura modulare che sfrutti le potenzialità delle GPU per accelerare i tempi di calcolo.

Appendice A

Applicazione dei sensori al database

Di seguito sono elencati i risultati ottenuti estrapolando i marker numerici utilizzando i vari sensori *physics-informed* per ogni snapshot del dataset di addestramento per il caso della presa d'aria del turbofan. In questo modo si fornisce una visione completa del comportamento della tecnica di rilevazione delle strutture coerenti.

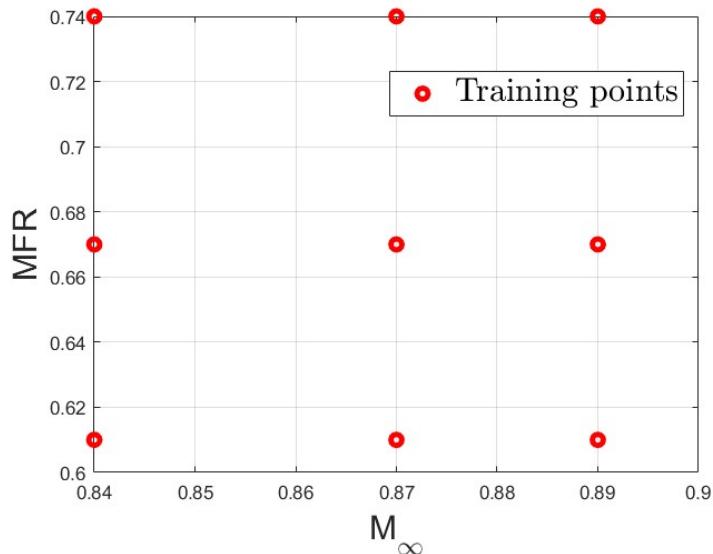


Figura A.1: Spazio dei parametri utilizzato per l'addestramento, presa d'aria del turbofan

La fig. A.1 riporta lo spazio dei parametri utilizzato per la generazione del database. Tale riferimento permette di interpretare più agevolmente le figure successive, che

mostrano l'applicazione dei vari sensori ai nove snapshot che compongono il database di addestramento.

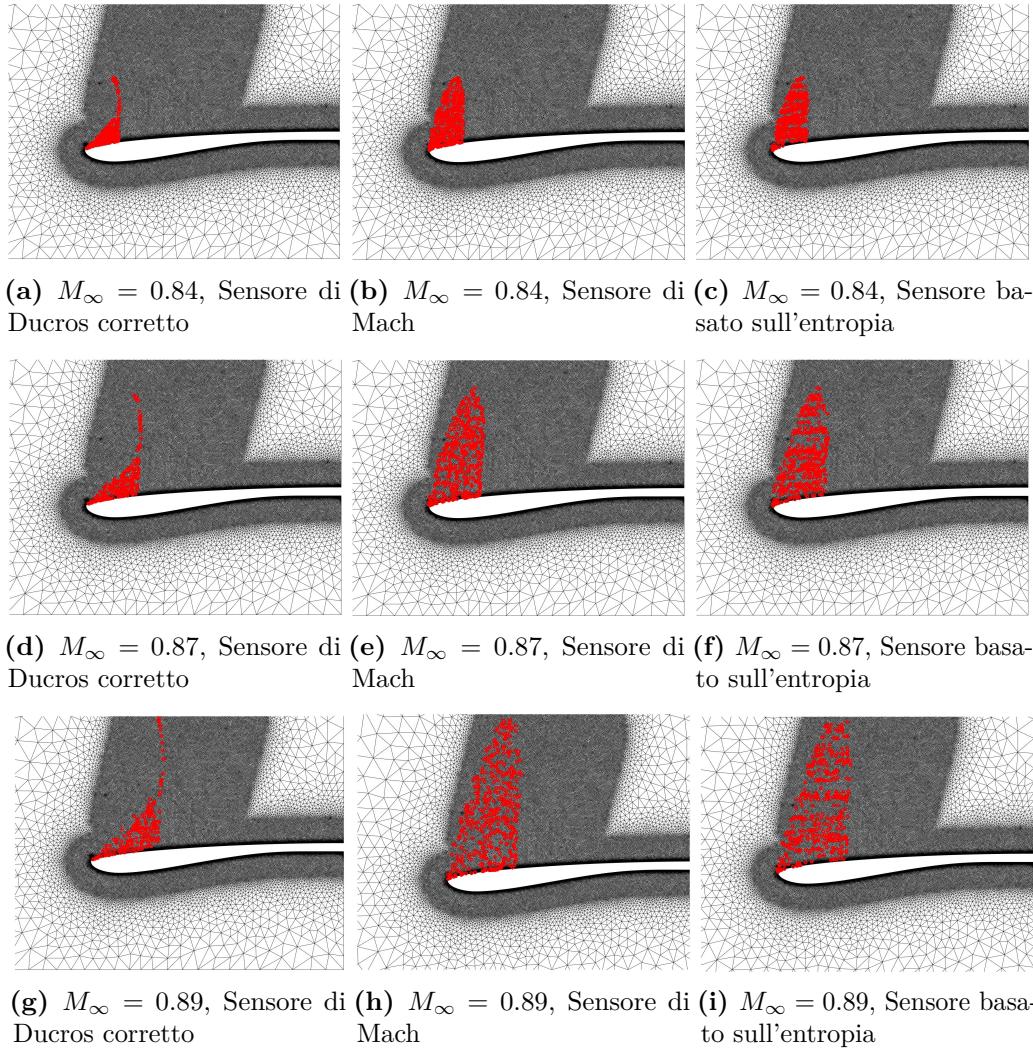


Figura A.2: Applicazione dei sensori al database di addestramento, $MFR = 0.61$

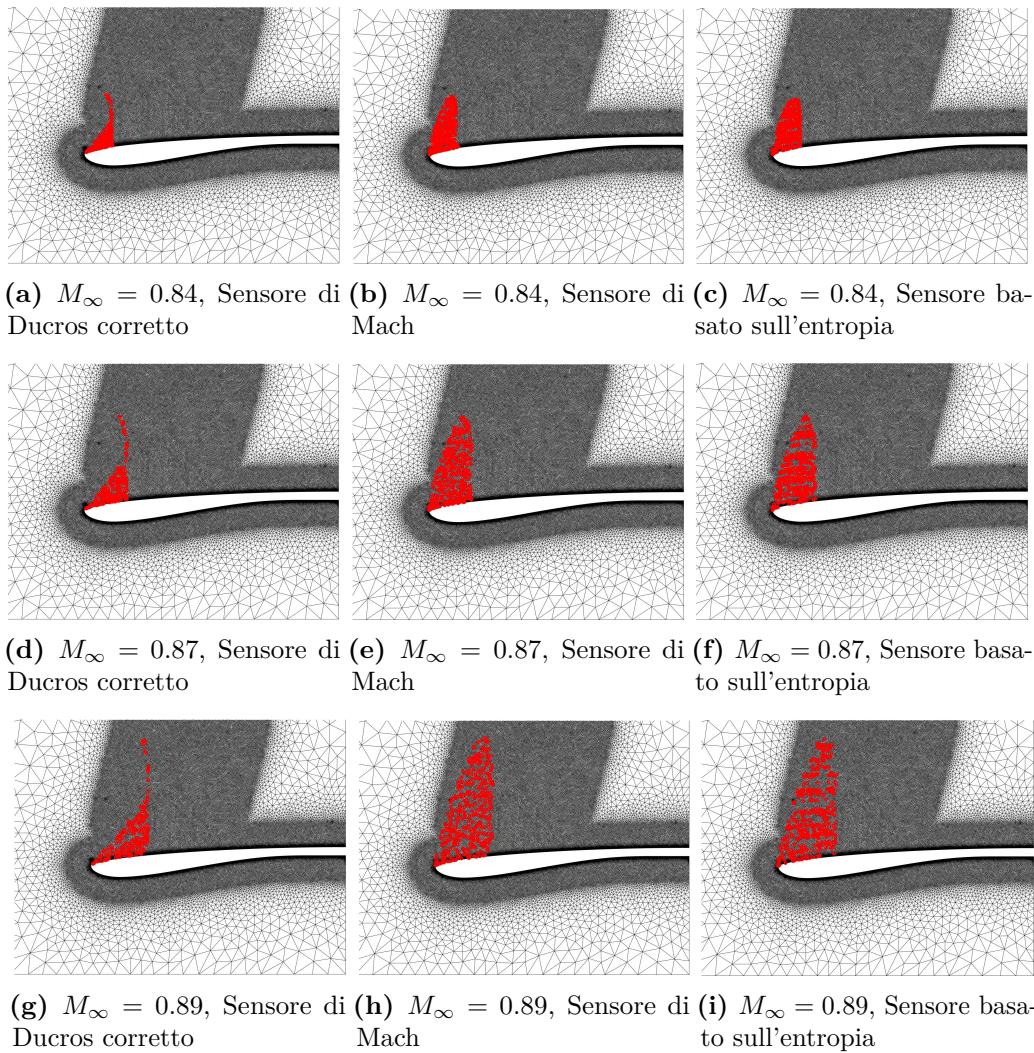


Figura A.3: Applicazione dei sensori al database di addestramento, $MFR = 0.67$

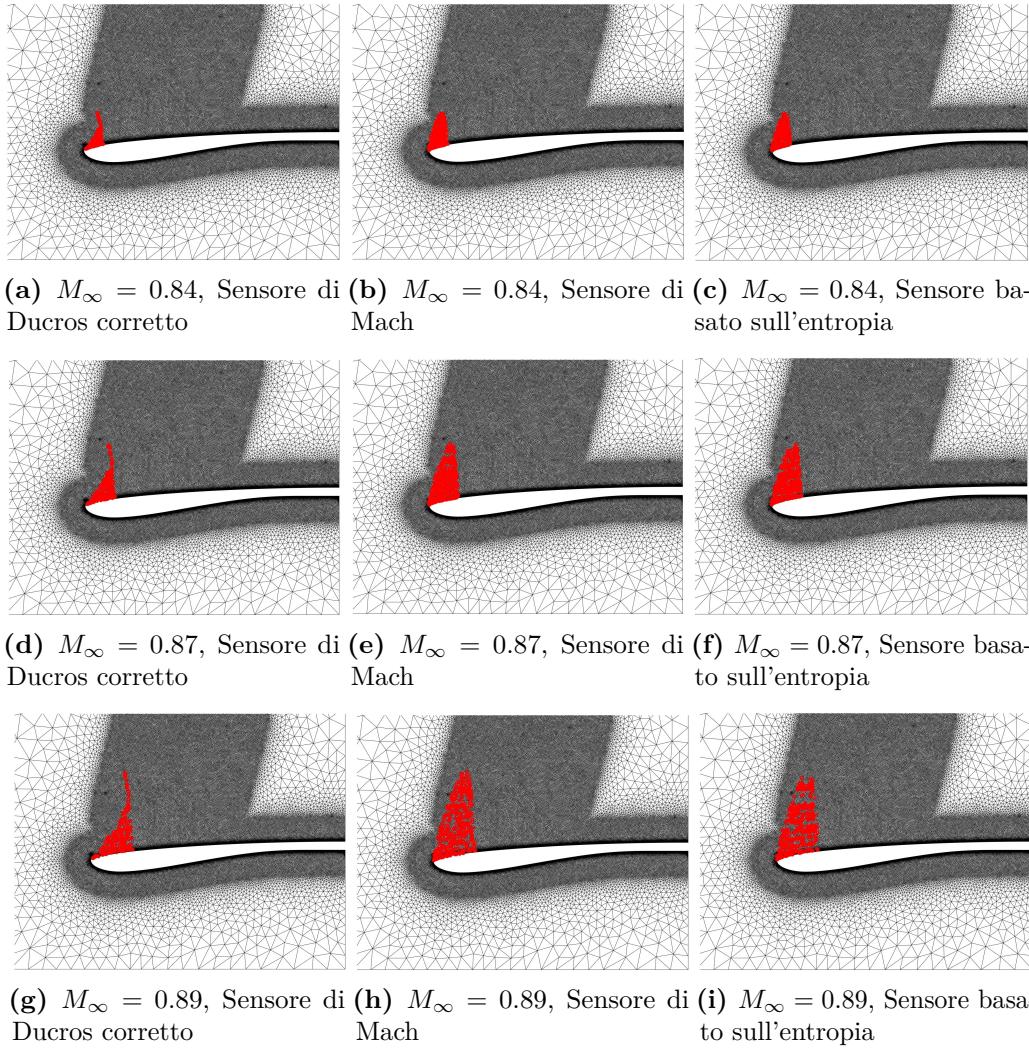


Figura A.4: Applicazione dei sensori al database di addestramento, $MFR = 0.74$

Appendice B

Interpolazione: campi di moto predetti

Di seguito sono riportati i campi di moto delle principali grandezze termodinamiche calcolate mediante la CDI per i cinque casi test considerati. Oltre al campo di Mach, già discusso nella tesi, vengono presentate:

- la densità ρ
- la pressione p
- la componente orizzontale di velocità u
- la componente verticale di velocità v

Per ciascuna variabile vengono confrontate la soluzione interpolata tramite la metodologia CDI e la soluzione ad alta fedeltà, in modo da permettere un confronto diretto sulla qualità dell'interpolazione. Le figure evidenziano la capacità della CDI nel ricostruire correttamente le principali caratteristiche del flusso.

Le configurazioni sono organizzate per caso test, mantenendo lo stesso ordine utilizzato nel capitolo dedicato alla fase di predizione (Cap. 5), così da facilitare il confronto con le analisi presentate precedentemente.

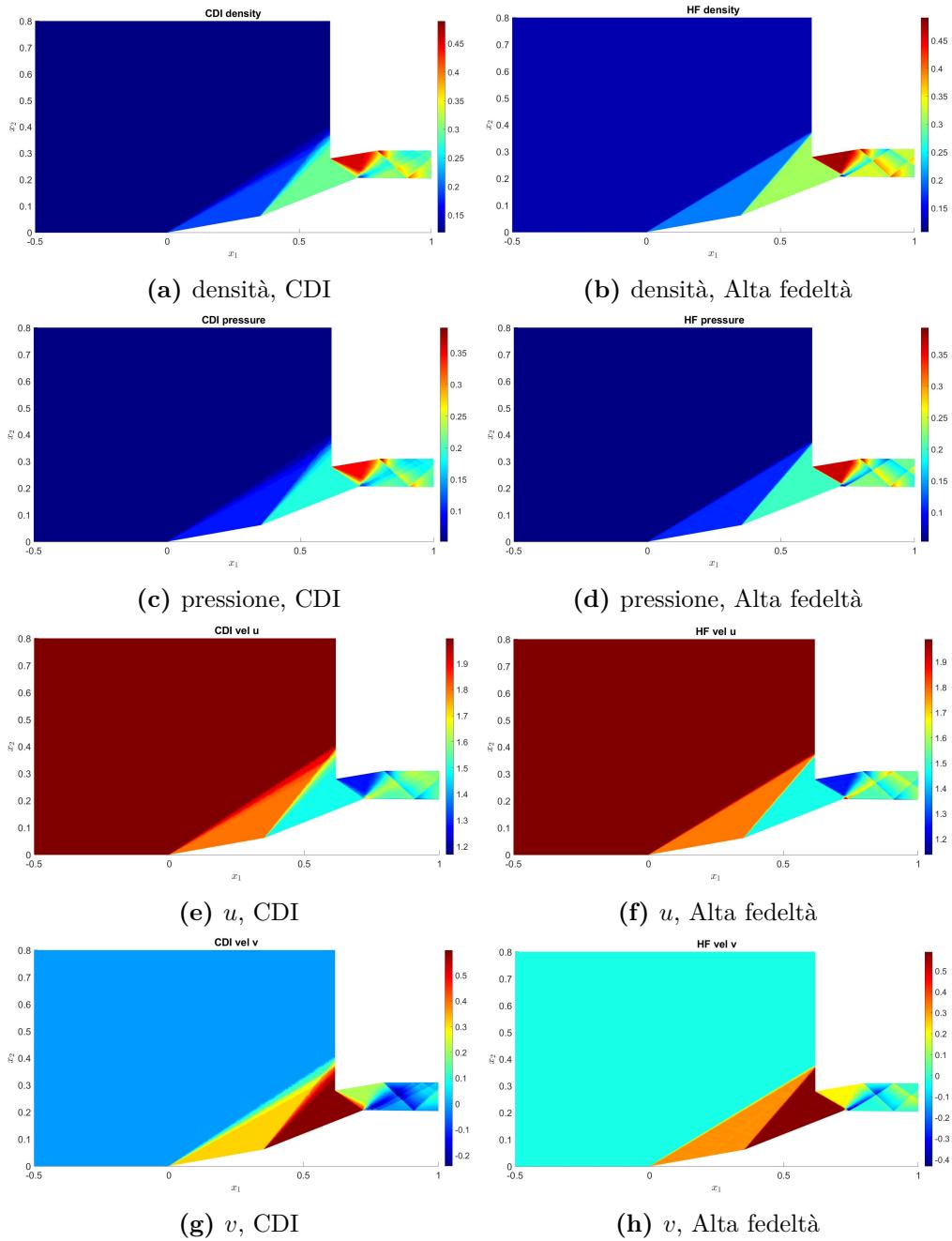


Figura B.1: Caso test 1: confronto risultati

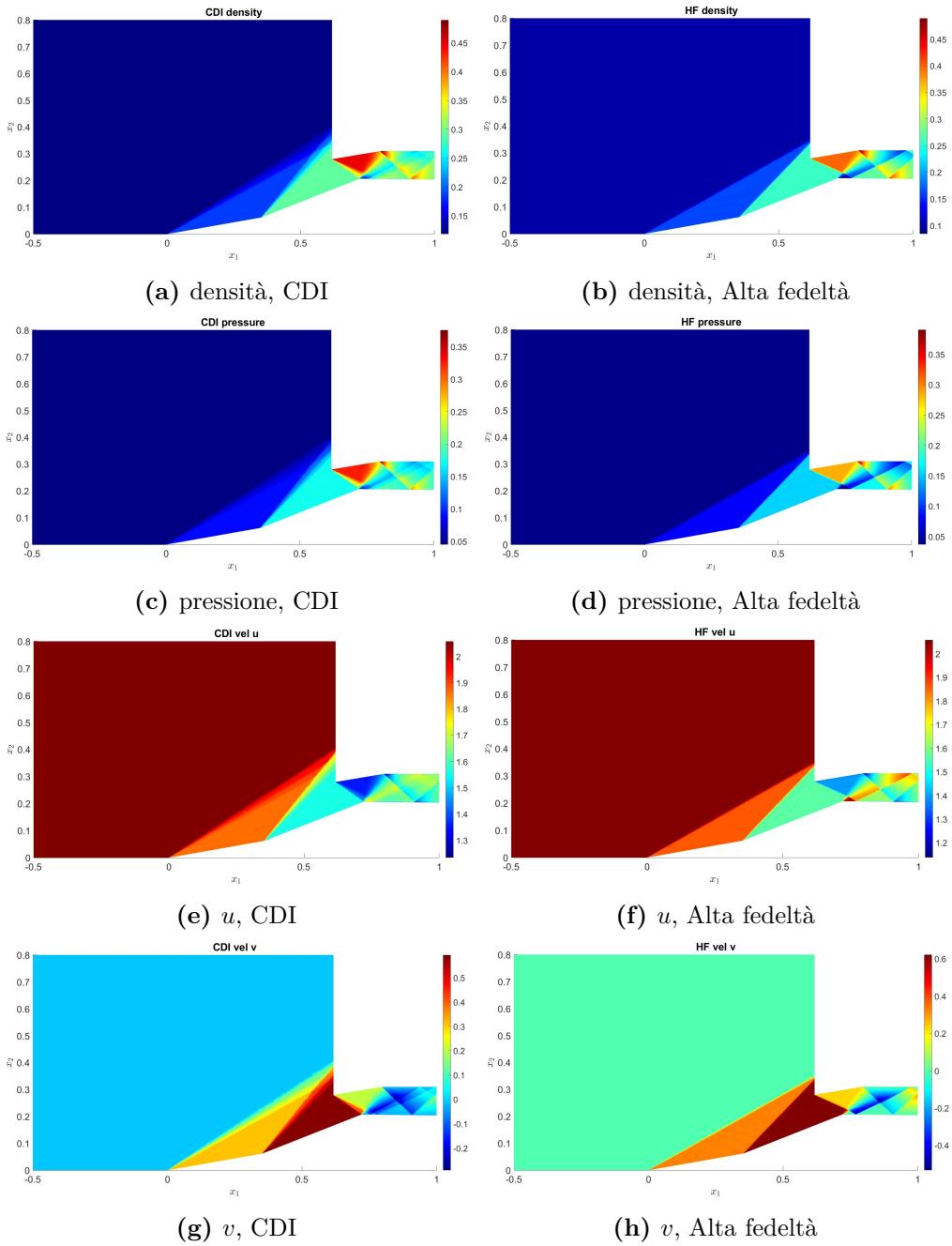


Figura B.2: Caso test 2: confronto risultati

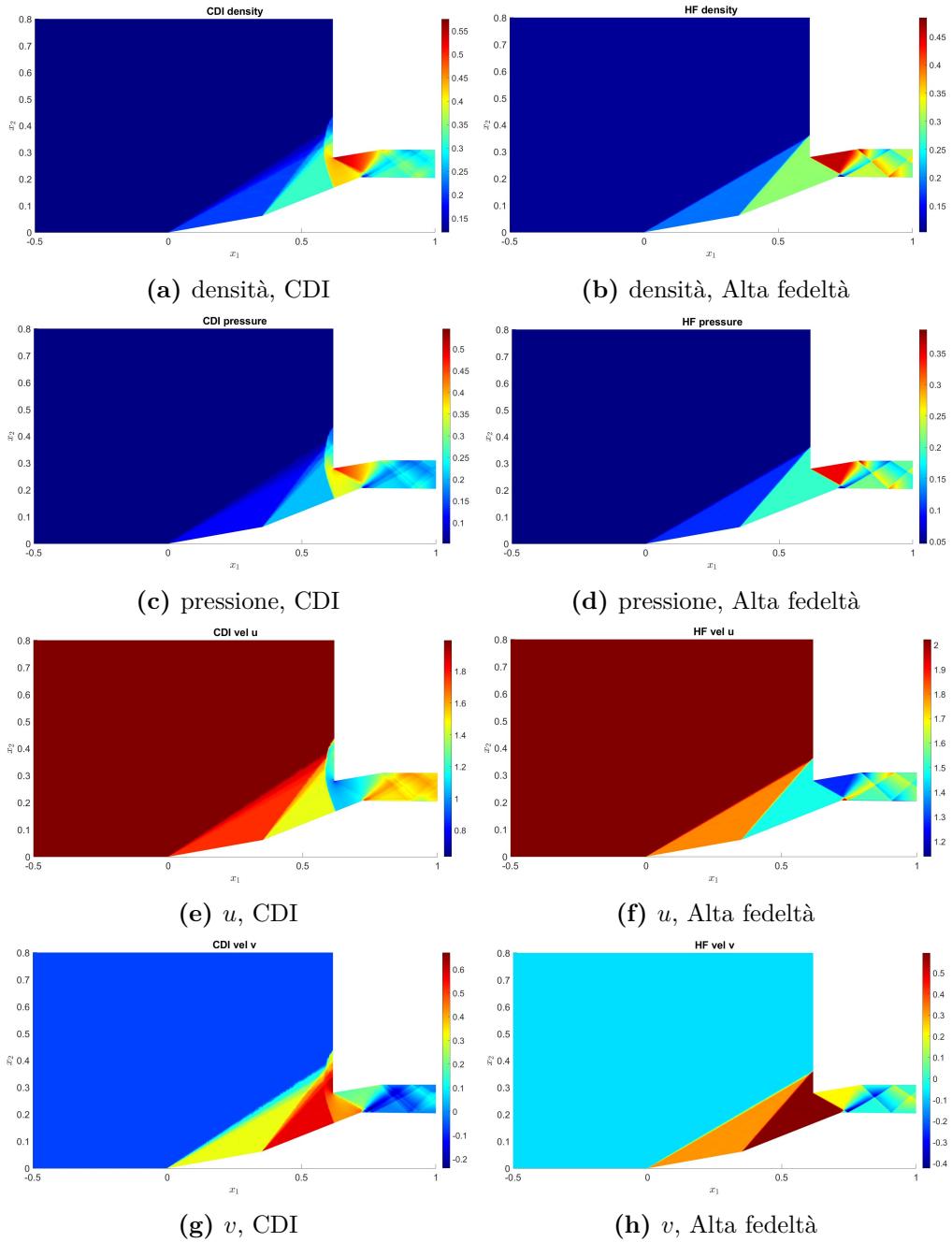


Figura B.3: Caso test 3: confronto risultati

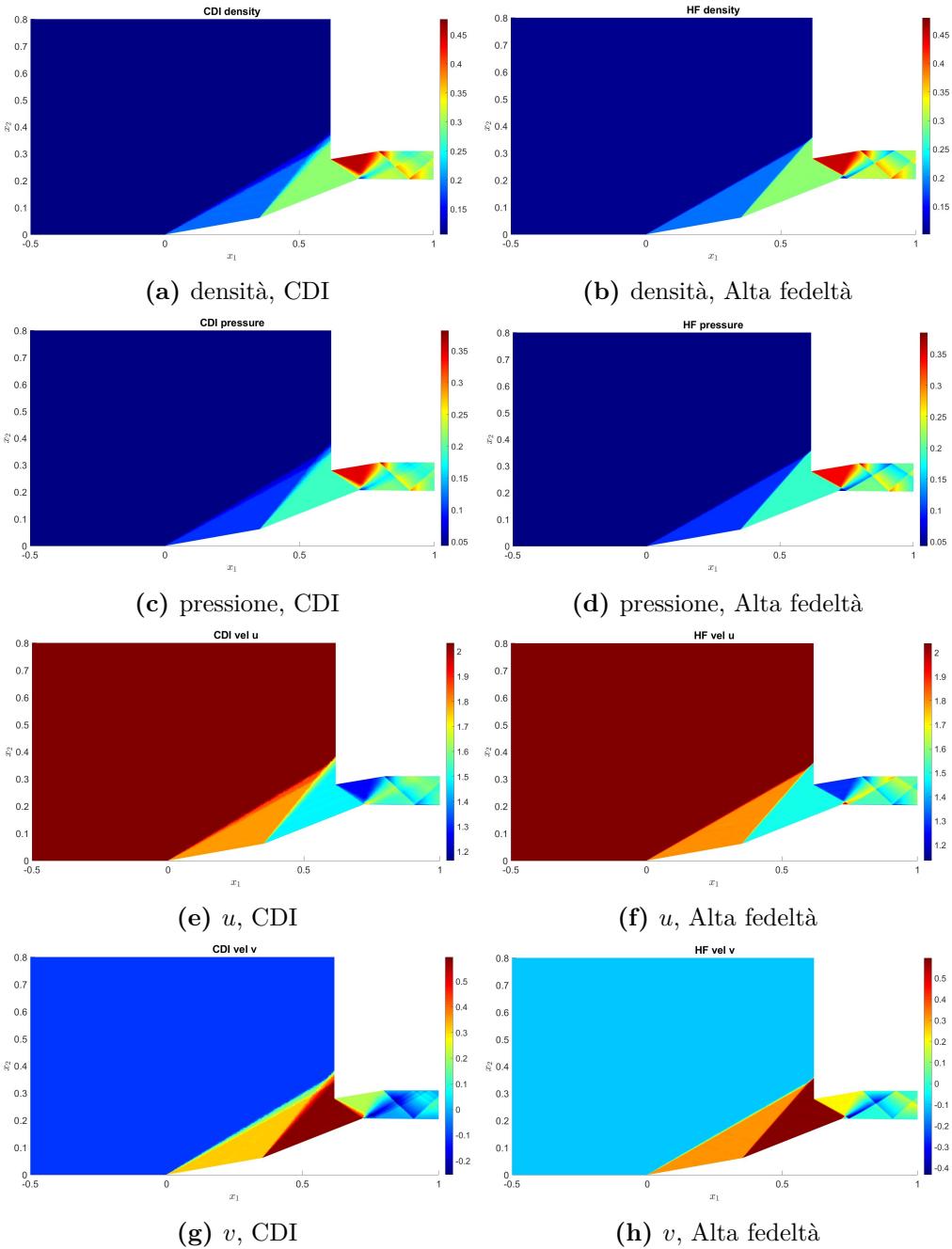


Figura B.4: Caso test 4: confronto risultati

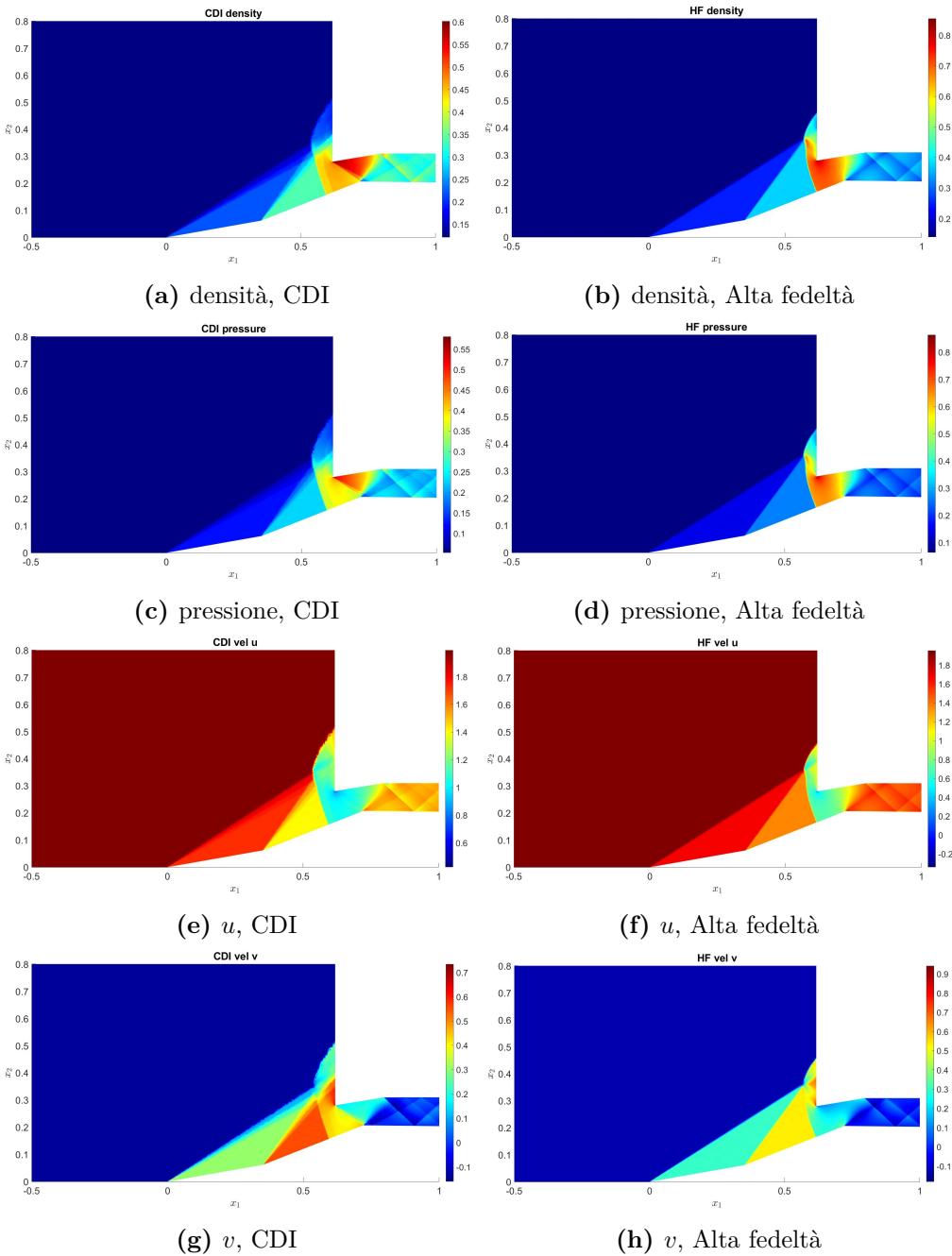


Figura B.5: Caso test 5: confronto risultati

Bibliografia

- [1] J. Blazek. *Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications*. Butterworth-Heinemann, 2015. URL: <https://books.google.it/books?id=r-ecBAAAQBAJ> (cit. alle pp. 2, 3).
- [2] Alexandre Favre. «Equations des gaz turbulents compressibles». In: *J. de Mecanique* 4.3 (1965) (cit. a p. 2).
- [3] Jean Boussinesq. *Essai sur la théorie des eaux courantes*. Imprimerie nationale, 1877 (cit. a p. 3).
- [4] Ricardo Vinuesa e Steven L Brunton. «The potential of machine learning to enhance computational fluid dynamics». In: *arXiv preprint arXiv:2110.02085* (2021), pp. 1–13 (cit. a p. 6).
- [5] Steven L. Brunton e J. Nathan Kutz. *Data-Driven Science and Engineering: Machine Learning, Dynamical Systems, and Control*. Cambridge University Press, 2019 (cit. a p. 9).
- [6] Simona Cucchiara, Angelo Iollo, Tommaso Taddei e Haysam Telib. «Model order reduction by convex displacement interpolation». In: *Journal of Computational Physics* 514 (2024), p. 113230 (cit. alle pp. 10–12, 33).
- [7] Richard J Re e William K Abeyounis. *A wind tunnel investigation of three NACA 1-series inlets at mach numbers up to 0.92*. Rapp. tecn. 1996 (cit. a p. 13).
- [8] Andrea Ferrero. «Control of a Supersonic Inlet in Off-Design Conditions with Plasma Actuators and Bleed». In: *Aerospace* 7.3 (2020). ISSN: 2226-4310. DOI: 10.3390/aerospace7030032. URL: <https://www.mdpi.com/2226-4310/7/3/32> (cit. a p. 18).
- [9] Wolfgang W. Koschel e Andreas Schneider. «Detailed analysis of mixed compression hypersonic intake». In: 1999. URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:107420150> (cit. a p. 19).

BIBLIOGRAFIA

- [10] Manami Fujii, Shogo Ogura, Tetsuya Sato, Hideyuki Taguchi, Atsushi Hashimoto e Takashi Takahashi. «Effect of angle of attack on the performance of the supersonic intake for High Mach Integrated Control Experiment (HIMICO)». In: *Aerospace Science and Technology* 127 (2022), p. 107687. ISSN: 1270-9638. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ast.2022.107687>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1270963822003613> (cit. a p. 20).
- [11] Philippe Angot, Charles-Henri Bruneau e Pierre Fabrie. «A penalization method to take into account obstacles in incompressible viscous flows». In: *Numerische Mathematik* 81.4 (1999), pp. 497–520 (cit. a p. 35).
- [12] Tommaso Taddei. «A registration method for model order reduction: data compression and geometry reduction». In: *SIAM Journal on Scientific Computing* 42.2 (2020), A997–A1027 (cit. a p. 35).
- [13] Andrea Ferrero, Tommaso Taddei e Lei Zhang. «Registration-based model reduction of parameterized two-dimensional conservation laws». In: *Journal of Computational Physics* 457 (2022), p. 111068 (cit. a p. 35).