

# POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale



Tesi di Laurea Magistrale

## Sviluppo di teorie strutturali a cinematica variabile per la risposta dinamica di travi e gusci

Relatori

Prof. Marco PETROLO

Prof. Matteo FILIPPI

Prof. Rodolfo AZZARA

Dott. Daniele SCANO

Candidato

Giuseppe PROFETA

Ottobre 2025



# Sommario

L'analisi delle strutture aerospaziali richiede modelli computazionali avanzati in grado di prevedere e valutare con elevata accuratezza sia le risposte statiche che dinamiche. I metodi tradizionali si basano sulla selezione della teoria strutturale più adatta per ogni componente della grandezza analizzata attraverso i Best Theory Diagrams (BTD). Tale processo comporta un elevato sforzo computazionale e numerose valutazioni, al fine di ricavare le teorie più efficienti per ogni specifica applicazione.

Questo studio punta a una selezione di approccio più efficiente, con l'obiettivo di utilizzare approcci gerarchici in combinazione con metodi di scelta delle teorie per automatizzare l'identificazione della teoria strutturale più appropriata, riducendo così i costi computazionali mantenendo un'elevata accuratezza. La metodologia gerarchica innovativa di cui si parla, che integra teorie strutturali raffinate con il Metodo agli Elementi Finiti è la CUF. Quest'ultima consiste in un approccio gerarchico generalizzato capace di generare teorie strutturali avanzate attraverso espansioni polinomiali, come ad esempio i polinomi di Taylor o Lagrange. Inoltre i modelli utilizzati in questi studi possono essere misti o ridotti, in modo da utilizzare solo le componenti delle espansioni che consentono di ottenere i risultati migliori. Queste teorie verranno applicate a modelli di travi e guscio, includendo anche le piastre come sottocasi del guscio. Le simulazioni basate sul Metodo degli Elementi Finiti (FEM) vengono utilizzate per generare vari risultati di analisi statiche e di risposta dinamica di tipo modale o nel tempo. L'approccio proposto verrà validato attraverso i risultati numerici, già noti in letteratura, confrontando le previsioni dei modelli a ordine ridotto con simulazioni più complete che utilizzano ordini superiori. Il confronto tra le varie teorie si effettua andando ad analizzare il livello di errore tra quelle approssimate e quelle di riferimento. Il metodo di scelta delle teorie è l'Asintotico-Assiomatico (AAM) unito alla generazione di Best Theories Diagrams (BTD).

L'obiettivo principale è sviluppare un modello capace di selezionare la teoria strutturale più appropriata minimizzando il numero di gradi di libertà necessari per un'approssimazione accurata. Lo studio viene affrontato per componenti di vario tipo e di materiali diversi, tra cui sia isotropi che ortotropi. Questa metodologia

risulta particolarmente rilevante per applicazioni aerospaziali che coinvolgono materiali ortotropi e compositi, dove efficienza computazionale e precisione sono tra gli aspetti più importanti. L'obiettivo è riuscire ad ottenere risultati corretti anche per i casi dinamici di nuova applicazione, partendo con la base dei risultati statici già studiati in letteratura.





# Tabella dei contenuti

|                                                                                       |      |
|---------------------------------------------------------------------------------------|------|
| <b>Elenco delle tabelle</b>                                                           | VIII |
| <b>Elenco delle figure</b>                                                            | X    |
| <b>1 Introduzione</b>                                                                 | 1    |
| 1.1 Motivazione . . . . .                                                             | 1    |
| 1.1.1 La rilevanza delle analisi dinamiche nel settore aerospaziale .                 | 2    |
| 1.1.2 Evoluzione dei modelli strutturali: dalle teorie classiche alla CUF . . . . .   | 5    |
| 1.1.3 Il problema della scelta delle teorie e il costo computazionale                 | 11   |
| 1.2 Obiettivi . . . . .                                                               | 14   |
| 1.3 Sviluppo del lavoro . . . . .                                                     | 15   |
| <b>2 Modelli teorici e metodi numerici per l'analisi strutturale di travi e gusci</b> | 17   |
| 2.1 Teorie strutturali classiche . . . . .                                            | 18   |
| 2.1.1 Teorie trave . . . . .                                                          | 18   |
| 2.1.2 Teorie guscio . . . . .                                                         | 23   |
| 2.2 Teorie per analisi di strutture multistrato . . . . .                             | 27   |
| 2.3 1D Carrera Unified Formulation . . . . .                                          | 31   |
| 2.3.1 Espansione di Taylor 1D . . . . .                                               | 33   |
| 2.3.2 Espansione di Lagrange 1D . . . . .                                             | 34   |
| 2.3.3 Espansioni miste di Taylor e Lagrange 1D . . . . .                              | 36   |
| 2.4 2D Carrera Unified Formulation . . . . .                                          | 37   |
| 2.4.1 Espansione di Taylor 2D . . . . .                                               | 38   |
| 2.4.2 Espansione di Lagrange 2D . . . . .                                             | 39   |
| 2.4.3 Espansioni miste di Taylor e Lagrange 2D . . . . .                              | 41   |
| 2.5 Teoria del metodo agli elementi finiti, FEM . . . . .                             | 41   |
| 2.5.1 Elementi finiti 1D . . . . .                                                    | 44   |
| 2.5.2 Elementi finiti 2D . . . . .                                                    | 45   |
| 2.6 Equazioni di governo con applicazione CUF . . . . .                               | 45   |

|          |                                                                                |            |
|----------|--------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 2.6.1    | Principio dei lavori virtuali 1D e 2D . . . . .                                | 46         |
| 2.6.2    | Integrazione temporale con metodo di Newmark . . . . .                         | 48         |
| 2.7      | Soluzioni numeriche per problemi di shear locking . . . . .                    | 49         |
| <b>3</b> | <b>Metodi di selezione delle migliori teorie strutturali per travi e gusci</b> | <b>51</b>  |
| 3.1      | Metodo asintotico-assiomatico, AAM . . . . .                                   | 51         |
| 3.2      | Best Theories Diagrams, BTM . . . . .                                          | 53         |
| <b>4</b> | <b>Analisi statica di trave e piastra con HOTs</b>                             | <b>56</b>  |
| 4.1      | Risultati analisi trave ortotropa . . . . .                                    | 56         |
| 4.2      | Risultati analisi piastra ortotropa . . . . .                                  | 63         |
| <b>5</b> | <b>Analisi alle vibrazioni libere con AAM e BTM per travi e gusci</b>          | <b>73</b>  |
| 5.1      | Risultati analisi trave isotropa con BTM . . . . .                             | 73         |
| 5.2      | Risultati analisi guscio ortotropo con BTM . . . . .                           | 79         |
| <b>6</b> | <b>Analisi dinamica di risposta nel tempo per travi e gusci</b>                | <b>89</b>  |
| 6.1      | Risultati analisi trave a sezione quadrata . . . . .                           | 89         |
| 6.2      | Risultati analisi guscio a tre strati . . . . .                                | 94         |
| 6.3      | Risultati analisi trave con tre fori . . . . .                                 | 116        |
| <b>7</b> | <b>Conclusioni</b>                                                             | <b>123</b> |
| 7.1      | Risultati principali . . . . .                                                 | 123        |
| 7.2      | Obiettivi futuri . . . . .                                                     | 125        |
|          | <b>Bibliografia</b>                                                            | <b>127</b> |

# Elenco delle tabelle

|      |                                                                                                             |     |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.1  | Spostamento e tensioni per trave ortotropa antisimmetrica con Q9 .                                          | 60  |
| 4.2  | Spostamento e tensioni per trave ortotropa antisimmetrica con Q16                                           | 60  |
| 4.3  | Spostamento e tensioni per piastra ortotropa simmetrica con espansioni complete . . . . .                   | 66  |
| 4.4  | Spostamento e tensioni per piastra ortotropa simmetrica con espansioni ridotte . . . . .                    | 66  |
| 4.5  | Teorie miste $MS$ nelle espansioni della piastra ortotropa . . . . .                                        | 68  |
| 5.1  | Modelli BTB per trave a tre fori con $\frac{L}{h} = 10$ . . . . .                                           | 77  |
| 5.2  | Modelli BTB per trave a tre fori con $\frac{L}{h} = 100$ . . . . .                                          | 78  |
| 5.3  | Modelli BTB per guscio a tre strati con $\frac{a}{h} = 4$ . . . . .                                         | 83  |
| 5.4  | Modelli BTB per guscio a tre strati con $\frac{a}{h} = 5$ . . . . .                                         | 84  |
| 5.5  | Modelli BTB per guscio a tre strati con $\frac{a}{h} = 10$ . . . . .                                        | 85  |
| 5.6  | Modelli BTB per guscio a tre strati con $\frac{a}{h} = 20$ . . . . .                                        | 86  |
| 5.7  | Modelli BTB per guscio a tre strati con $\frac{a}{h} = 100$ . . . . .                                       | 87  |
| 6.1  | Spostamento e tensioni per trave isotropa a sezione quadrata - $t = 0.28s$                                  | 93  |
| 6.2  | Spostamento e tensioni per trave isotropa a sezione quadrata - $t = 0.60s$                                  | 93  |
| 6.3  | Istanti temporali dei primi punti di massimo e minimo al variare del rapporto di spessore . . . . .         | 102 |
| 6.4  | Spostamento $\bar{u}_z$ per guscio ortotropo - 1° picco negativo . . . . .                                  | 103 |
| 6.5  | Spostamento $\bar{u}_z$ per guscio ortotropo - 1° picco positivo . . . . .                                  | 103 |
| 6.6  | Tensione $\bar{\sigma}_{\alpha\alpha}$ per guscio ortotropo - 1° picco negativo . . . . .                   | 104 |
| 6.7  | Tensione $\bar{\sigma}_{\alpha\alpha}$ per guscio ortotropo - 1° picco positivo . . . . .                   | 104 |
| 6.8  | Tensione $\bar{\sigma}_{\alpha z}$ per guscio ortotropo - 1° picco negativo . . . . .                       | 104 |
| 6.9  | Tensione $\bar{\sigma}_{\alpha z}$ per guscio ortotropo - 1° picco positivo . . . . .                       | 105 |
| 6.10 | Istanti temporali dei primi punti di massimo e minimo al variare del rapporto di spessore con BTB . . . . . | 113 |
| 6.11 | Spostamento $\bar{u}_z$ per guscio ortotropo con BTB - 1° picco negativo .                                  | 113 |
| 6.12 | Spostamento $\bar{u}_z$ per guscio ortotropo con BTB - 1° picco positivo .                                  | 114 |
| 6.13 | Tensione $\bar{\sigma}_{\alpha\alpha}$ per guscio ortotropo con BTB - 1° picco negativo . . .               | 114 |

|      |                                                                                                         |     |
|------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 6.14 | Tensione $\bar{\sigma}_{\alpha\alpha}$ per guscio ortotropo con BTD - 1° picco positivo . . .           | 114 |
| 6.15 | Tensione $\bar{\sigma}_{\alpha z}$ per guscio ortotropo con BTD - 1° picco negativo . . .               | 115 |
| 6.16 | Tensione $\bar{\sigma}_{\alpha z}$ per guscio ortotropo con BTD - 1° picco positivo . . .               | 115 |
| 6.17 | Istanti temporali dei primi punti di massimo e minimo al variare del<br>rapporto di snellezza . . . . . | 119 |
| 6.18 | Spostamento $u_z$ per trave 3 fori - 1° picco negativo . . . . .                                        | 119 |
| 6.19 | Spostamento $u_z$ per trave 3 fori - 1° picco positivo . . . . .                                        | 119 |
| 6.20 | Istanti temporali dei primi punti di massimo e minimo al variare del<br>rapporto di snellezza . . . . . | 121 |
| 6.21 | Spostamento $u_z$ per trave 3 fori con BTD - 1° picco negativo . . . .                                  | 122 |
| 6.22 | Spostamento $u_z$ per trave 3 fori con BTD - 1° picco positivo . . . .                                  | 122 |

# Elenco delle figure

|      |                                                                                                  |    |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1  | Utilizzo materiali nei modelli Boeing . . . . .                                                  | 2  |
| 1.2  | Materiali compositi, fibre, matrici e orientamento dei ply . . . . .                             | 3  |
| 1.3  | Andamenti su compositi con teorie ESL (Equivalent Single Layer) e<br>LW (Layer Wise) . . . . .   | 6  |
| 1.4  | Diagrammi $RF$ del primo ordine . . . . .                                                        | 13 |
| 1.5  | Diagrammi $RF$ del secondo ordine . . . . .                                                      | 13 |
| 2.1  | Elementi trave, piastra e guscio con rispettivi sistemi di riferimento                           | 18 |
| 2.2  | Trave di Eulero-Bernoulli ed ipotesi cinematiche . . . . .                                       | 19 |
| 2.3  | Trave di Timoshenko ed ipotesi cinematiche . . . . .                                             | 21 |
| 2.4  | Confronto teorie trave di Eulero-Bernoulli e Timoshenko . . . . .                                | 22 |
| 2.5  | Struttura di tipo guscio . . . . .                                                               | 23 |
| 2.6  | Sistema di riferimento per una piastra . . . . .                                                 | 24 |
| 2.7  | Piastra di Kirchhoff ed ipotesi cinematiche . . . . .                                            | 25 |
| 2.8  | Piastra di Reissner-Mindlin ed ipotesi cinematiche . . . . .                                     | 26 |
| 2.9  | Approccio Equivalent Single Layer - Spostamenti e tensioni per<br>multilayer ortotropo . . . . . | 28 |
| 2.10 | Approccio Layer Wise - Spostamenti e tensioni per multilayer ortotropo                           | 29 |
| 2.11 | Approccio Component Wise - strutture rinforzate con espansioni di<br>Lagrange . . . . .          | 30 |
| 2.12 | Elementi 2D con espansioni di Lagrange - LE4, LE9, LE16 . . . . .                                | 35 |
| 2.13 | Elementi 1D con espansioni di Lagrange - LE2, LE3, LE4 . . . . .                                 | 40 |
| 2.14 | Elementi finiti nei modelli FEM . . . . .                                                        | 42 |
| 2.15 | Elemento trave 1D . . . . .                                                                      | 43 |
| 2.16 | Elemento guscio 2D . . . . .                                                                     | 43 |
| 3.1  | Teorie di vario genere nei BTD [92] . . . . .                                                    | 53 |
| 3.2  | Teorie complete e ridotte nei BTD . . . . .                                                      | 55 |
| 4.1  | Trave ortotropa antisimmetrica a due strati . . . . .                                            | 57 |
| 4.2  | Elementi B4 e Q9/Q16 per trave 2 strati . . . . .                                                | 59 |

|      |                                                                                                              |     |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.3  | Confronto elementi Q9 e Q16 su trave a due strati . . . . .                                                  | 59  |
| 4.4  | Distribuzione di $\sigma_{yy}$ lungo $z$ per teorie di ordine superiore - Q9 . . .                           | 61  |
| 4.5  | Distribuzione di $\sigma_{yz}$ lungo $z$ per teorie di ordine superiore - Q9 . . .                           | 61  |
| 4.6  | Distribuzione di $\sigma_{yy}$ lungo $z$ per teorie di ordine superiore - Q16 . .                            | 62  |
| 4.7  | Distribuzione di $\sigma_{yz}$ lungo $z$ per teorie di ordine superiore - Q16 . .                            | 62  |
| 4.8  | Piastra ortotropa simmetrica a 9 strati sottoposta a carico bi-sinusoidale . . . . .                         | 63  |
| 4.9  | Elementi B4 e Q9 per piastra 9 strati . . . . .                                                              | 65  |
| 4.10 | Un quarto di piastra per condizione di simmetria . . . . .                                                   | 65  |
| 4.11 | Distribuzione di $\bar{u}_x$ lungo $z$ per differenti formulazioni . . . . .                                 | 69  |
| 4.12 | Distribuzione di $\bar{\sigma}_{xx}$ lungo $z$ per differenti formulazioni . . . . .                         | 70  |
| 4.13 | Distribuzione di $\bar{\sigma}_{xz}$ lungo $z$ per differenti formulazioni . . . . .                         | 71  |
| 5.1  | Trave isotropa con 3 fori . . . . .                                                                          | 74  |
| 5.2  | BTD per trave a tre fori con $\frac{L}{h} = 10$ . . . . .                                                    | 76  |
| 5.3  | BTD per trave a tre fori con $\frac{q}{a} = 100$ . . . . .                                                   | 78  |
| 5.4  | Guscio ortotropo con 3 strati . . . . .                                                                      | 79  |
| 5.5  | Gusci a tre strati per vari rapporti di spessore . . . . .                                                   | 81  |
| 5.6  | BTD per guscio a tre strati con $\frac{a}{h} = 4$ . . . . .                                                  | 82  |
| 5.7  | BTD per guscio a tre strati con $\frac{a}{h} = 5$ . . . . .                                                  | 84  |
| 5.8  | BTD per guscio a tre strati con $\frac{a}{h} = 10$ . . . . .                                                 | 85  |
| 5.9  | BTD per guscio a tre strati con $\frac{a}{h} = 20$ . . . . .                                                 | 86  |
| 5.10 | BTD per guscio a tre strati con $\frac{a}{h} = 100$ . . . . .                                                | 87  |
| 6.1  | Trave isotropa con sezione quadrata . . . . .                                                                | 90  |
| 6.2  | Andamento di $u_z$ nel tempo con teorie di Taylor di vario ordine . .                                        | 91  |
| 6.3  | Andamento di $\sigma_{yy}$ nel tempo con teorie di Taylor di vario ordine . .                                | 92  |
| 6.4  | Andamento di $\sigma_{yz}$ nel tempo con teorie di Taylor di vario ordine . .                                | 92  |
| 6.5  | Guscio ortotropo con 3 strati . . . . .                                                                      | 95  |
| 6.6  | Andamento di $\bar{u}_z$ in $t$ con teorie Taylor di vario ordine - $\frac{a}{h} = 5$ . .                    | 96  |
| 6.7  | Andamento di $\bar{u}_z$ in $t$ con teorie Taylor di vario ordine - $\frac{a}{h} = 10$ . .                   | 97  |
| 6.8  | Andamento di $\bar{u}_z$ in $t$ con teorie Taylor di vario ordine - $\frac{a}{h} = 20$ . .                   | 97  |
| 6.9  | Andamento di $\bar{u}_z$ in $t$ con teorie Taylor di vario ordine - $\frac{a}{h} = 100$ . .                  | 98  |
| 6.11 | Andamento di $\bar{\sigma}_{\alpha\alpha}$ in $t$ con teorie Taylor di vario ordine - $\frac{a}{h} = 10$ . . | 98  |
| 6.10 | Andamento di $\bar{\sigma}_{\alpha\alpha}$ in $t$ con teorie Taylor di vario ordine - $\frac{a}{h} = 5$ . .  | 99  |
| 6.12 | Andamento di $\bar{\sigma}_{\alpha\alpha}$ in $t$ con teorie Taylor di vario ordine - $\frac{a}{h} = 20$ . . | 99  |
| 6.13 | Andamento di $\bar{\sigma}_{\alpha\alpha}$ in $t$ con teorie Taylor di vario ordine - $\frac{a}{h} = 100$ .  | 100 |
| 6.14 | Andamento di $\bar{\sigma}_{\alpha z}$ in $t$ con teorie Taylor di vario ordine - $\frac{a}{h} = 5$ . .      | 100 |
| 6.15 | Andamento di $\bar{\sigma}_{\alpha z}$ in $t$ con teorie Taylor di vario ordine - $\frac{a}{h} = 10$ . .     | 101 |
| 6.16 | Andamento di $\bar{\sigma}_{\alpha z}$ in $t$ con teorie Taylor di vario ordine - $\frac{a}{h} = 20$ . .     | 101 |
| 6.17 | Andamento di $\bar{\sigma}_{\alpha z}$ in $t$ con teorie Taylor di vario ordine - $\frac{a}{h} = 100$ .      | 102 |

|      |                                                                                        |     |
|------|----------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 6.18 | Andamento di $u_z$ in $t$ con teorie BTD - $\frac{a}{h} = 5$                           | 107 |
| 6.19 | Andamento di $\bar{u}_z$ in $t$ con teorie BTD - $\frac{a}{h} = 10$                    | 107 |
| 6.20 | Andamento di $\bar{u}_z$ in $t$ con teorie BTD - $\frac{a}{h} = 20$                    | 108 |
| 6.21 | Andamento di $\bar{u}_z$ in $t$ con teorie BTD - $\frac{a}{h} = 100$                   | 108 |
| 6.22 | Andamento di $\bar{\sigma}_{\alpha\alpha}$ in $t$ con teorie BTD - $\frac{a}{h} = 5$   | 109 |
| 6.23 | Andamento di $\bar{\sigma}_{\alpha\alpha}$ in $t$ con teorie BTD - $\frac{a}{h} = 10$  | 109 |
| 6.24 | Andamento di $\bar{\sigma}_{\alpha\alpha}$ in $t$ con teorie BTD - $\frac{a}{h} = 20$  | 110 |
| 6.25 | Andamento di $\bar{\sigma}_{\alpha\alpha}$ in $t$ con teorie BTD - $\frac{a}{h} = 100$ | 110 |
| 6.26 | Andamento di $\bar{\sigma}_{\alpha z}$ in $t$ con teorie BTD - $\frac{a}{h} = 5$       | 111 |
| 6.27 | Andamento di $\bar{\sigma}_{\alpha z}$ in $t$ con teorie BTD - $\frac{a}{h} = 10$      | 111 |
| 6.28 | Andamento di $\bar{\sigma}_{\alpha z}$ in $t$ con teorie BTD - $\frac{a}{h} = 20$      | 112 |
| 6.29 | Andamento di $\bar{\sigma}_{\alpha z}$ in $t$ con teorie BTD - $\frac{a}{h} = 100$     | 112 |
| 6.30 | Trave isotropa con 3 fori                                                              | 116 |
| 6.31 | Andamento di $u_z$ in $t$ con teorie Taylor di vario ordine - $\frac{L}{a} = 10$       | 118 |
| 6.32 | Andamento di $u_z$ in $t$ con teorie Taylor di vario ordine - $\frac{L}{a} = 100$      | 118 |
| 6.33 | Andamento di $u_z$ in $t$ con teorie BTD - $\frac{L}{a} = 10$                          | 120 |
| 6.34 | Andamento di $u_z$ in $t$ con teorie BTD - $\frac{L}{a} = 100$                         | 121 |





# Capitolo 1

## Introduzione

### 1.1 Motivazione

Il seguente lavoro è incentrato sullo studio di teorie strutturali di vario genere, per travi, piastre o gusci, che consentono di descrivere il comportamento di componenti o intere strutture in maniera efficace. L'obiettivo principale è quello di arrivare a definire le teorie più adatte in base al caso specifico in analisi. Si parte da una descrizione di una delle categorie di analisi più rilevanti nel settore aerospaziale, quella delle analisi dinamiche. Per comprendere appieno la potenzialità delle analisi e delle teorie che vi stanno dietro è utile anche descrivere i materiali maggiormente utilizzati nelle costruzioni aerospaziali, ovvero i materiali compositi. Questa categoria è stata un punto di svolta chiave nella realizzazioni di componenti quali le ali, la fusoliera e ogni struttura interna ad essa. Grazie alle loro particolarità si possono ottenere strutture più leggere, aerodinamicamente efficienti e strutturalmente compatte e resistenti ai carichi principali che un velivolo deve sopportare.

Nei paragrafi successivi si passa alla descrizione delle teorie strutturali già studiate e utilizzate in lavori precedenti, in modo da avere una panoramica completa di quanto è stato già svolto e utilizzato per ottenere descrizioni complete di campi quali lo spostamento, le tensioni, la temperatura e altri affini.

In conclusione ci si concentra su un aspetto di fondamentale importanza, ovvero la scelta delle teorie strutturali per ridurre il costo computazionale. Infatti grazie alla formulazione CUF, che consente di ottenere vari modelli cinematici attraverso combinazioni di termini di una determinata formulazione, si riesce ad ottenere una quantità estremamente elevata di teorie, più o meno valide, per l'analisi che ci interessa eseguire. Grazie a varie considerazioni e metodi che verranno spiegati in seguito si potrà scegliere quale teoria risulta più valida, andando ad attenzionare anche il costo computazionale. Quest'ultimo indica la quantità di dati e di memoria che bisogna occupare con il calcolatore per completare l'analisi utilizzando una

determinata teoria, e dunque un determinato numero di gradi di libertà. Più basso è questo numero e minore sarà il costo computazionale.

### 1.1.1 La rilevanza delle analisi dinamiche nel settore aerospaziale

Lo sviluppo di una corretta analisi strutturale è risultato fondamentale ai fini di ottenere e migliorare la conoscenza delle strutture aerospaziali. [1]

Uno degli obiettivi di questa tesi è trattare le analisi dinamiche di strutture in risposta nel tempo, sia per modelli trave che piastre o gusci. Le analisi dinamiche sono tra le più importanti nello studio delle strutture aerospaziali, poiché consentono di valutare la risposta della struttura a sollecitazioni variabili nel tempo, come vibrazioni indotte, effetti di risonanza o forzanti date dalle condizioni esterne [2]. Determinati componenti aerospaziali come ali di aerei, fusoliere, pale di elicotteri o pannelli di satelliti devono essere progettati per resistere a tali sollecitazioni garantendo al tempo stesso leggerezza ed efficienza. Inoltre l'uso crescente di questi materiali si sta diffondendo anche in altri campi come l'automotive, l'energia, l'ingegneria civile e il settore biomedico.

I materiali compositi sono diventati tra i più promettenti nel panorama dell'ingegneria aerospaziale moderna [3]. Questi materiali, composti da due o più elementi con proprietà meccaniche e chimiche diverse, sono ampiamente impiegati nel settore data la combinazione delle loro importanti caratteristiche di leggerezza ed elevate proprietà meccaniche, rendendoli ideali per applicazioni ad alte prestazioni. Tale tendenza è evidente nei modelli di punta delle maggiori compagnie aeree, come l'Airbus A350 e il Boeing 787, dove i compositi arrivano fino al 50% del peso strutturale [4, 5].

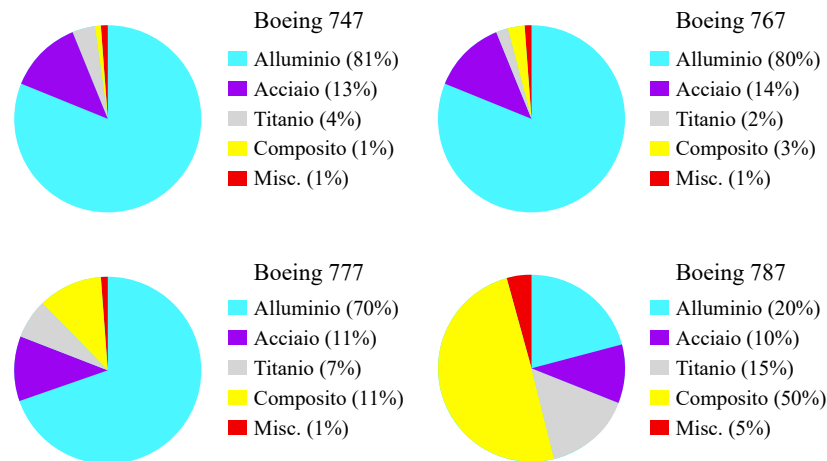


Figura 1.1: Utilizzo materiali nei modelli Boeing

In figura 1.1 vengono riportati in percentuale i materiali utilizzati negli aeromobili dei principali modelli Boeing [4]. Si può notare che nei modelli più vecchi la presenza di alluminio è la più importante, con una percentuale anche parecchio elevata, fino all'80%. Con l'avanzare delle tecnologie e dello studio e sviluppo dei materiali compositi si è passati da un velivolo principalmente costruito in alluminio e acciaio a modelli in materiali compositi, titanio e alluminio.

Dal punto di vista della progettazione, un grande vantaggio risiede soprattutto in determinate caratteristiche del materiale, che non possono essere ottenute con dei semplici materiali metallici [6]. Queste caratteristiche includono la selezione del materiale, il rapporto volumetrico tra fibre e matrice, l'orientamento degli strati, detti ply, e il loro numero totale, che per maggiore chiarezza vengono riportati in figura 1.2.



**Figura 1.2:** Materiali compositi, fibre, matrici e orientamento dei ply

Ciò consente un'ottimizzazione più precisa della struttura in base ai carichi applicati, portando a una riduzione del peso e dei costi complessivi.

Tuttavia, l'eterogeneità dei compositi, sebbene sia l'aspetto principale tra i loro vantaggi, introduce notevoli complessità e incertezze nella modellazione. Per comprendere la risposta meccanica di queste strutture in diverse condizioni, è necessario adottare approcci multiscala. Questo si basa sullo studio del comportamento di ogni singolo layer, in una scala più piccola, e sul trasferimento di questi effetti e proprietà analizzati su scale più grandi. L'analisi dunque si svolge su diverse scale [7, 8]:

- Micro-scala, dove si studiano gli effetti della disposizione dei costituenti, ovvero fibre e matrice, sulle proprietà effettive del materiale omogeneizzato;
- Meso-scala, dove si integrano le disposizioni degli strati del laminato nei modelli strutturali;
- Macro-scala, dove si analizzano il comportamento strutturale, ad esempio di tipo dinamico, del componente finale, attraverso strumenti come il Metodo agli Elementi Finiti (FEM).

Le informazioni acquisite a ogni scala vengono tipicamente trasmesse seguendo una strategia dal basso verso l'alto (bottom-up), permettendo una costruzione di informazioni sempre più specifiche e complete per la struttura complessiva. Anche se la modellazione multiscala riesce ad eseguire delle simulazioni molto fedeli al caso reale, essa non può essere ampiamente usata a causa di costi computazionali onerosi. Le tecniche di modellazione multiscala possono essere classificate in base al loro schema di accoppiamento [7, 8]:

- Gerarchico, che si basa su un accoppiamento a senso unico, dove le informazioni sono passate o dal basso verso l'alto (omogeneizzazione) o dall'alto verso il basso (localizzazione). Questo approccio offre la massima efficienza computazionale ma un basso livello di fedeltà;
- Sinergico, che risulta una via di mezzo tra i due approcci, dove le variabili di campo sono gestite in sequenza nello spazio e contemporaneamente nel tempo, o viceversa;
- Concorrente, che è caratterizzato da un accoppiamento completo e bidirezionale, con tutte le scale gestite simultaneamente. Questo offre la massima fedeltà ma ha anche il costo computazionale più alto.

In generale ci si concentra sullo studio di tecniche di riduzione dell'ordine delle teorie, in modo da renderle più efficienti.

Una delle principali limitazioni degli strumenti di simulazione utilizzati per analizzare il comportamento dei metalli è l'incapacità di fornire uno stato tensionale corretto. A differenza delle strutture in metallo, in quelle composite le deformazioni trasversali e di taglio svolgono un ruolo fondamentale [3]. Le teorie classiche non sono in grado di catturare le discontinuità delle tensioni interlaminari all'interfaccia tra i vari layer. È quindi indispensabile che l'analisi strutturale sia in grado di fornire un'accurata approssimazione dei campi di tensione e deformazione a livello del singolo strato per poter prevenire eventuali problemi come la delaminazione [9]. Oltre alle sfide legate alla natura eterogenea di questi materiali, le strutture composite presentano certe complessità che li rendono difficili da descrivere utilizzando le teorie strutturali classiche. Determinati andamenti come la continuità del taglio tra gli strati, la distribuzione degli spostamenti a *zig-zag* [10] e l'interazione tra le deformazioni nel piano e fuori dal piano, non possono essere catturati in modo accurato dai modelli tradizionali. Queste sfide sono particolarmente evidenti in strutture moderatamente spesse o spesse [11], definite da un rapporto di snellezza, tra lunghezza caratteristica e spessore  $\frac{L}{a}$  inferiore a 50. Allo stesso modo, materiali con un'elevata deformabilità trasversale, come quelli ortotropi, richiedono una modellazione più raffinata. Anche se sono stati sviluppati metodi di analisi tridimensionali (3D), i modelli a trave (1D) e a guscio/piastra (2D) rimangono le opzioni migliori per la loro praticità ed efficienza, molto validi per una prima

analisi preliminare.

Il comportamento delle strutture, sia metalliche che composite, non è uniforme. La sua deformazione è una caratteristica localizzata, che dipende da fattori specifici del problema, come il tipo di carico, le proprietà del materiale e i vincoli. Per esempio, l'analisi di una trave con sezione a C o di un guscio caricato a pressione su un determinato punto mostra che diverse sezioni della stessa struttura possono mostrare risposte di deformazioni abbastanza diverse [3]. Da questo si può dedurre che utilizzare un unico set di gradi di libertà per l'intera struttura non è l'approccio più appropriato. Risulta molto più utile e computazionalmente efficiente utilizzare un metodo che si adatti dinamicamente al comportamento locale, andando ad analizzare la situazione caso per caso.

### 1.1.2 Evoluzione dei modelli strutturali: dalle teorie classiche alla CUF

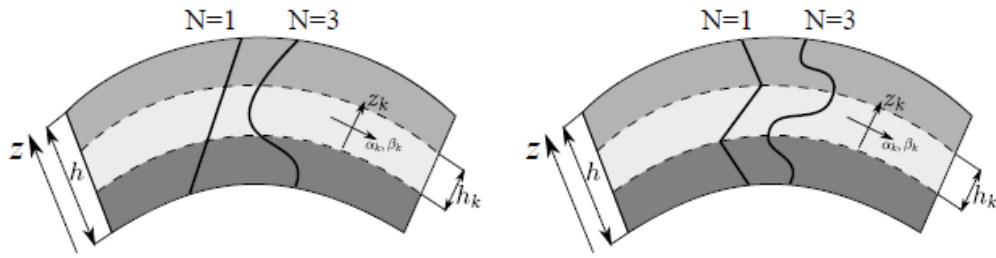
Negli anni lo studio dell'analisi strutturale si è evoluto particolarmente, passando da considerare modelli strutturali basilari, come teorie trave di Eulero Bernoulli o di Timoshenko [12] o teorie guscio/piastra di Kirchhoff o di Reissner Mindlin [13], a modelli più complessi e raffinati [1]. Questi ultimi sono ottenuti attraverso opportune valutazioni dei termini di espansione polinomiale. Le equazioni di governo degli elementi finiti sono generate attraverso la teoria CUF, *Carrera Unified Formulation* [1], una metodologia unificata e gerarchica che si lega in maniera ottimale al FEM, *Finite Element Method*. In base a questa teoria, noto il numero di termini di espansione possiamo considerare un certo numero di combinazioni disponibili, e dunque un certo numero di teorie.

I modelli di travi e gusci/piastre si dividono in due categorie principali: i modelli assiomatici, che si basano su assunzioni predefinite sul comportamento della struttura, e i modelli asintotici, che derivano le espansioni per trave o guscio/piastra direttamente dalle equazioni di governo del modello continuo completo (3D) [9]. Tra le teorie sopra citate ve ne sono alcune che risultano adatte alla descrizione del comportamento dei materiali compositi e altre che non riescono a catturare tutte le caratteristiche di questa tipologia [14]. Come già spiegato precedentemente i materiali compositi sono tra i più utilizzati e promettenti nel settore aerospaziale e per tale motivo devono essere studiati attentamente per riuscire a superare le varie problematiche che si presentano con essi.

Le teorie strutturali raffinate HOST, sono diventate essenziali per l'analisi dei materiali compositi, data la presenza delle complessità descritte in precedenza. Le proprietà fisiche dei compositi, come la loro eterogeneità e la marcata anisotropia, richiedono un approccio di modellazione avanzato. Una delle sfide principali è la discontinuità delle proprietà fisiche tra gli strati del laminato, che le teorie

classiche non riescono a rappresentare correttamente [15]. Le HOST invece riescono a catturare fenomeni complessi presenti nei compositi, come ad esempio:

- La distribuzione a *zig-zag* [10] non lineare degli spostamenti, che nasce a causa della diversa rigidità degli strati. Le teorie raffinate, che si costruiscono tramite espansioni polinomiali di ordine superiore, sono in grado di descrivere correttamente questo comportamento, considerando anche la continuità che vi deve essere negli spostamenti.



**Figura 1.3:** Andamenti su compositi con teorie ESL (Equivalent Single Layer) e LW (Layer Wise)

Come si nota in figura 1.3 in base a quale approccio si utilizza si riesce a cogliere o no l'effetto zig-zag lungo i vari strati.

- La continuità delle sollecitazioni di taglio trasversale, che nelle teorie classiche erano state definite in base a determinate ipotesi, nelle teorie raffinate vengono descritte come grandezze continue tra gli strati del laminato [16]. Questo aspetto risulta fondamentale per la descrizione di modi di danneggiamento.
- Gli effetti locali, come gli "end effects" in piastre e travi, che sono spesso la causa di innesco di meccanismi di danneggiamento, come la delaminazione [17, 18].

Per descrivere al meglio questi effetti è fondamentale usare un approccio layer-wise, dove si descrivono i vari campi che interessano per ogni singolo strato. Per fare ciò si sceglie di utilizzare la CUF [9]. Le teorie raffinate sono particolarmente preziose per l'analisi dei compositi in applicazioni reali, dove sono impiegate per la previsione degli stress di taglio, l'analisi del danneggiamento e per le analisi multiscala. Riuscire ad ottenere una distribuzione accurata delle tensioni su ciascuno strato è fondamentale per lo sviluppo di modelli di previsione del danno e per migliorare le simulazioni numeriche [19].

Le teorie raffinate possono essere di particolare interesse per gusci e piastre con singolarità localizzate, come spiegato nel lavoro di Ambartsumian [20]. Queste

possono essere bordi disomogenei, linee di distorsioni superficiali o cricche. In questi casi, oltre agli sforzi di taglio trasversali, vengono considerati anche gli sforzi normali trasversali e le contrazioni trasversali, andando a soddisfare le condizioni delle superfici di contatto. Inoltre, le teorie raffinate sono molto importanti e utili per i processi ondulatori, i problemi di vibrazione e la stabilità statica e dinamica, soprattutto se si considerano oscillazioni e instabilità di ordine elevato [21].

Al fine di eliminare le assunzioni fatte nelle teorie strutturali classiche, si può pensare di arricchire i campi di spostamento. Secondo Washizu [22], idealmente un modello 1D o 2D basato descritto da un'espansione infinita garantirebbe la soluzione esatta tridimensionale. Per rendere più praticabile questa idea bisogna considerare delle espansioni finite, con la possibilità di troncare certi termini della formulazione. La scelta di questi termini da aggiungere o da troncare è uno degli aspetti più importanti, da attenzionare con cura.

Le espansioni di terzo ordine sono tra le più comuni, con Reddy [23] come uno dei contributori più importanti. Un'espansione polinomiale di terzo ordine, indicata come  $N = 3$ , presenta il seguente campo di spostamenti:

$$\begin{aligned} u_\alpha &= u_{\alpha_1} + zu_{\alpha_2} + z^2u_{\alpha_3} + z^3u_{\alpha_4} \\ u_\beta &= u_{\beta_1} + zu_{\beta_2} + z^2u_{\beta_3} + z^3u_{\beta_4} \\ u_z &= u_{z_1} + zu_{z_2} + z^2u_{z_3} + z^3u_{z_4} \end{aligned} \quad (1.1)$$

L'andamento almeno parabolico risulta molto importante soprattutto per catturare gli effetti in una laminazione non simmetrica. In altri casi si considera semplicemente costante lo spostamento lungo  $z$ , mentre in altri si analizza uno spostamento lineare lungo  $\alpha$  e  $\beta$  e parabolico lungo  $z$ , come mostrato di seguito:

$$\begin{aligned} u_\alpha &= u_{\alpha_1} + zu_{\alpha_2} \\ u_\beta &= u_{\beta_1} + zu_{\beta_2} \\ u_z &= u_{z_1} + zu_{z_2} + z^2u_{z_3} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Anche termini non polinomiali possono essere utilizzati nell'espansione, utili a descrivere un andamento più complesso non ottenibile con dei semplici polinomi. Si può avere ad esempio:

$$\begin{aligned} u_\alpha &= u_{\alpha_1} + zu_{\alpha_2} + \sin\left(\frac{z\pi}{h}\right)u_{\alpha_3} + e^{\frac{z}{h}}u_{\alpha_4} \\ u_\beta &= u_{\beta_1} + zu_{\beta_2} + \sin\left(\frac{z\pi}{h}\right)u_{\beta_3} + e^{\frac{z}{h}}u_{\beta_4} \\ u_z &= u_{z_1} + zu_{z_2} + \sin\left(\frac{z\pi}{h}\right)u_{z_3} + e^{\frac{z}{h}}u_{z_4} \end{aligned} \quad (1.3)$$



Sebbene le teorie strutturali raffinate offrano un eccellente compromesso tra accuratezza ed efficienza computazionale, anche queste possono riscontrare dei problemi, portando ad ottenere risultati non precisi. In questi casi risulta necessario l'utilizzo di modelli tridimensionali. Ciò accade soprattutto in situazioni dove i campi di deformazione e tensione sono intrinsecamente tridimensionali e non si riescono ad approssimare correttamente. Di seguito si riportano alcuni esempi relativi a queste casistiche:

- Problemi termomeccanici [24] e multifisici, che si hanno nelle strutture soggette a variazioni di temperatura o a campi elettrici/magnetici. In questo caso le proprietà dei materiali possono cambiare in modo significativo e anisotropo. L'interazione tra i campi può portare a distribuzioni di sforzo complesse, soprattutto quando si hanno geometrie particolari;
- Effetti locali e singolarità, dove tra questi troviamo fenomeni come concentrazioni di sforzo in prossimità di bordi liberi, fori o discontinuità geometriche, detti *effetti di bordo* o *end effects* [25]. Anche in questo caso si ha un campo di sforzo tridimensionale. Anche se le teorie HOST possono approssimare tali fenomeni si preferisce un'analisi tridimensionale.
- Fenomeni di locking [26], ovvero un irrigidimento eccessivo del modello dato da determinate assunzioni teoriche. Questo fenomeno può manifestarsi in diverse forme, come shear locking e Poisson locking, e influisce negativamente sulla precisione dei risultati, rendendoli in certi casi estremamente sbagliati. Dunque si preferisce un modello più accurato, di tipo tridimensionale.
- Vibrazioni ad alta frequenza, che porta ad avere un andamento del campo di spostamento più complesso. I modelli 1D e 2D sono corretti per le frequenze più basse, mentre la modellazione di modi di vibrazione a frequenze elevate richiede l'uso di modelli 3D.

Dunque, si sceglie di eseguire un'analisi 3D completa quando l'accuratezza richiesta per i campi di sforzo e deformazione non può essere raggiunta con modelli ridotti.

**Esempi caso trave** Nel modello trave viene considerato un elemento gerarchico e senza locking [27] e, successivamente, si utilizza questo per indagare i limiti dei modelli classici quando applicati a problemi concreti. Nel lavoro di Carrera [27], come prima cosa, viene considerata una semplice trave a sezione quadrata: si analizzano i fattori di convergenza e la capacità dell'elemento attuale di superare lo shear-locking. Successivamente ci si focalizza sulle caratteristiche di ordine superiore dell'attuale modello a trave generato con la CUF e sull'inefficacia dei modelli classici. Si sono considerate varie condizioni di carico e geometrie, incluse travi a sezione circolare e a parete sottile. In questo studio lo shear locking è

stato superato impiegando una tecnica MITC (Mixed Interpolation of Tensorial Components).

L'elemento a trave descritto è uno strumento utile per confrontare diverse teorie [9]. La CUF, infatti, consente la derivazione della matrice di rigidezza o di massa in termini di nuclei fondamentali, le cui espressioni formali sono invarianti rispetto all'ordine della teoria. Pertanto, i risultati ottenuti da teorie classiche e da cinematiche raffinate possono essere ottenuti direttamente con lo stesso modello FE, semplicemente modificando un singolo parametro di input, ovvero l'ordine  $N$  della trave. I risultati ottenuti hanno portato ad alcune conclusioni interessanti sugli elementi a trave classici, come:

- Un modello a trave a 6 gradi di libertà [28], che include la torsione e una distribuzione di tensioni del primo ordine, può essere utilizzato per l'analisi di travi a sezione quadrata e circolare con un'accuratezza accettabile. Infatti questo tipo di travi non è soggetto a warping vincolato [29];
- Nel caso di sezioni trasversali quadrate, i modelli classici non risultano adatti in presenza di carichi torsionali o flessio-torsionali [30]. Risulta necessario dunque un modello a trave almeno del quarto ordine, ovvero  $N = 4$ ;
- Nelle strutture a parete sottile si ha la necessità di utilizzare campi di spostamento con elevati ordini di espansione, anche  $N = 14$ , per descrivere correttamente deformazioni 3D e spostamenti della sezione trasversale;
- In certi casi il modello trave a 6 gradi di libertà può fornire risultati accettabili in termini di spostamenti, ma presenta problemi nella descrizione delle sollecitazioni. L'elemento a trave MITC2 CUF include già le relazioni dell'elasticità 3D e non richiede alcun lavoro aggiuntivo per le sollecitazioni, se il campo di spostamento è descritto con espansioni di ordine abbastanza elevato [31].

Un altro studio di Carrera e Petrolo [32] punta a indagare diverse teorie trave di ordine superiore, molti dei quali creati sempre secondo il principio della teoria CUF, andando a considerare geometrie di vario tipo. Sono stati presi in considerazione modelli completi e ridotti per valutare il ruolo di ogni variabile di spostamento rispetto a una soluzione di quarto ordine. Grazie alla formulazione agli elementi finiti si è riusciti a trattare anche diverse geometrie delle sezioni trasversali: quadrate, anulari e a profilo alare [32]. Sono state analizzate travi snelle e corte, con condizioni al contorno di incastro. Le travi sono state sottoposte a carichi di flessione, torsione e trazione. Il modello cinematico più adatto viene scelto proprio in base alla geometria della sezione e al carico utilizzato.

Se si considerano effetti combinati di più condizioni di carico e geometrie di sezione trasversale complesse, il numero di variabili di spostamento efficaci aumenta notevolmente. Bisogna prestare attenzione anche al punto di valutazione sulla

trave. Infatti un certo modello può fornire una soluzione esatta in un certo punto della trave ma può non essere in grado di fornire la stessa accuratezza in un punto diverso. Dunque si può concludere che:

- il numero di variabili da utilizzare dipende essenzialmente dal problema specifico;
- un numero ridotto di variabili di spostamento mostra i migliori benefici solo per geometrie e condizioni di carico semplici;
- se il problema è più complesso e affine a un caso reale è necessario utilizzare un modello CUF completo.

In questo contesto risultano ancora più evidenti certi vantaggi della CUF, come:

- consentire di ottenere risultati "quasi-asintotici" senza l'utilizzo di tecniche matematiche.
- parte dall'accuratezza desiderata della soluzione utilizzandola come un input dell'analisi. Il modello cinematico più adatto viene trovato automaticamente considerando a turno modelli di ordine crescente e mantenendo attive solo le variabili efficaci.

**Esempi caso guscio** Come già noto dagli studi [33, 34] le analisi con elementi piastra e gusci 2D possono risultare di grande importanza. Nelle analisi avanzate non vengono più utilizzate le teorie classiche già note, ma si cercano modi per definire in maniera efficiente le grandezze desiderate. Una delle principali problematiche che si riscontrano nelle teorie a piastra classiche è il fenomeno del Poisson Locking. L'effetto di quest'ultimo è evidente soprattutto nelle piastre sottili e può portare a risultati errati, sovrastimando la rigidità della struttura e sottostimando gli spostamenti.

Per superare queste limitazioni, è necessario adottare teorie strutturali raffinate che possano essere adatte a definire correttamente la risposta strutturale. La validità e l'accuratezza di questi modelli raffinati sono state ampiamente dimostrate attraverso analisi dove i risultati ottenuti vengono confrontati con soluzioni analitiche o con simulazioni 3D di riferimento.

Un esempio classico studiato da Carrera, Scano e Zappino [33] riguarda l'analisi di una piastra quadrata con quattro lati semplicemente appoggiata, sottoposta a un carico distribuito di pressione bi-sinusoidale. Già con questa analisi si evidenziano le problematiche e i limiti delle teorie classiche. I risultati dell'analisi portano alle seguenti conclusioni relative alla necessità di teorie raffinate CUF:

- Si riesce a superare il problema del Poisson locking, che porta a una sottostima degli spostamenti e, di conseguenza, risultati sbagliati. Si nota che l'aggiunta

di termini superiore per descrivere lo spostamento trasversale è sufficiente per eliminare completamente il Poisson locking, anche nelle piastre più sottili;

- Accuratezza dei campi di tensione, dato che alcune teorie classiche forniscono approssimazioni corrette degli spostamenti ma non delle tensioni. Dalle analisi si può notare una convergenza rapida e accurata sia per gli spostamenti che per le tensioni trasversali, anche utilizzando mesh relativamente grossolane.
- Utilizzo di una cinematica raffinata, che, pur richiedendo un maggior numero di gradi di libertà, è un ottimo metodo.

Un altro problema, di fondamentale importanza accademica, studiato nel lavoro di Carrera, Scano e Petrolo [34] è l'analisi di un *pinched shell*. Questo è particolarmente utile in quanto presenta un carico concentrato che genera un campo di deformazione e tensione altamente localizzato, con fenomeni di bordo difficili da riportare con i modelli tradizionali. La geometria considerata consiste in un guscio cilindrico con estremità semplicemente appoggiate.

Le conclusioni dell'analisi ottenuta hanno evidenziato l'importanza e il miglior approccio delle teorie raffinate: si ha la necessità di campi di spostamento descritti da espansioni di grado elevato per ottenere i campi di sforzo, soprattutto nelle zone del carico e nelle vicinanze dei bordi.

Questo studio dimostra che la CUF non viene usata solo per geometrie semplici come travi e piastre, ma anche per strutture complesse come i gusci, dove la curvatura e i carichi localizzati comportano l'utilizzo di modelli avanzati per una corretta previsione del comportamento strutturale.

### 1.1.3 Il problema della scelta delle teorie e il costo computazionale

Un aspetto critico delle analisi dinamiche è proprio la scelta della teoria più adeguata per ciascun problema [35]. L'accuratezza della simulazione dipende dalla capacità di selezionare l'ordine corretto dell'espansione polinomiale da adottare nella modellazione della struttura. Grazie ai moderni strumenti di calcolo ci è possibile valutare modelli molto complessi con un gran numero di termini. Inoltre, per ogni elemento del campo che andiamo a considerare, che sia uno spostamento, una tensione, un effetto termico o elettrico [36, 37], possiamo andare a scegliere la teoria più appropriata [1] con l'ordine di espansione che ci permette di raggiungere un errore minimo rispetto al caso più completo. Questa tecnica ci permette di ottenere delle analisi strutturali più di dettaglio con un carico computazionale inferiore [35]. Tale aspetto risulta fondamentale ai fini di questa tesi, in quanto uno degli obiettivi principali è proprio quello di svolgere delle analisi in maniera ugualmente corretta attraverso l'uso di un minor numero di nodi o termini. Data la

grande varietà di teorie possibili, è fondamentale disporre di un metodo efficace per selezionare la migliore. Per affrontare in modo sistematico questa scelta della teoria strutturale più adatta si sfrutta l'unione della CUF e con il Metodo Assiomatico-Asintotico (AAM).

Tramite questo metodo andiamo a selezionare la teoria con l'errore minimo, in modo da ottenere delle teorie specifiche per ogni caso che consentono di ridurre il costo computazionale.

L'AAM funziona bene perché è una teoria che si basa su:

- selezione di una soluzione di riferimento, asintotica [38], ottenuta con un modello 3D o una teoria di ordine molto elevato;
- valutazione del modello, assiomatica, dove si confrontano le teorie ottenute con la CUF con la soluzione di riferimento;
- analisi del costo computazionale, dove si analizza il numero di gradi di libertà utilizzati.

Si è scelto di riportare i risultati dell'analisi su un grafico detto *Best Theory Diagram*, utile a visualizzare l'accuratezza di una determinata teoria strutturale in base al numero di gradi di libertà che utilizza.

Un esempio chiave riguarda la valutazione di modelli a guscio per strutture in materiali compositi. Gli studi hanno confrontato modelli a guscio di ordini crescenti, dalla teoria del primo ordine (TE1) a teorie superiori, per prevedere le risposte di piastre in vetroresina, gusci cilindrici e sferici [39, 40]. I risultati, che vengono riportati nei lavori in maniera sintetica nei Best Theory Diagrams, hanno rivelato conclusioni importanti:

- L'accuratezza su piastre e i gusci sottili può essere migliorata notevolmente senza un grande aumento dei costi computazionali, se si dà priorità ai termini di terzo ordine per gli spostamenti sul piano. Invece per le piastre più spesse, con un valore  $\frac{a}{h} > 4$ , i termini di ordine più elevato sono fondamentali per la descrizione del campo di tensione.
- Alcune variabili di spostamento hanno una maggiore importanza, che può essere quantificata tramite il parametro del *Relevance Factor*. Questo permette di definire quali termini dell'espansione sono essenziali e quali possono essere trascurati per ridurre il numero di gradi di libertà con la minima perdita di accuratezza [40]. Infatti il valore  $RF$  indica il numero di termini attivi sul numero di termini totali disponibili. Infatti avere  $RF_1 = 1$  indicherebbe la presenza di tutti i termini del primo ordine nel BTD. Risulta molto utile andare a generare dei grafici  $RF$  - *rapporto di snellezza* per vari casi di studio, come mostrato nelle figure 1.4 e 1.5.

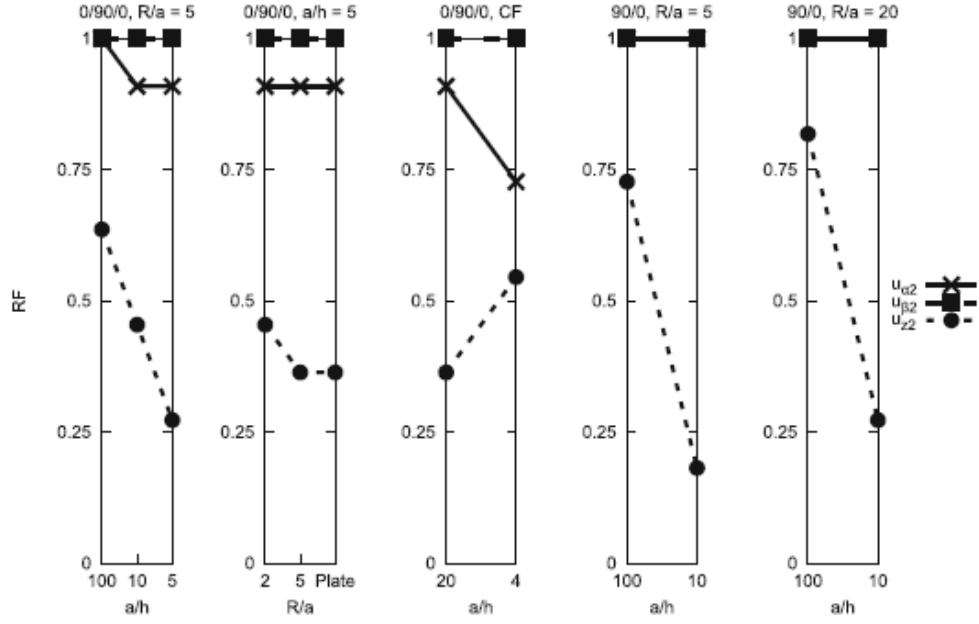


Figura 1.4: Diagrammi  $RF$  del primo ordine

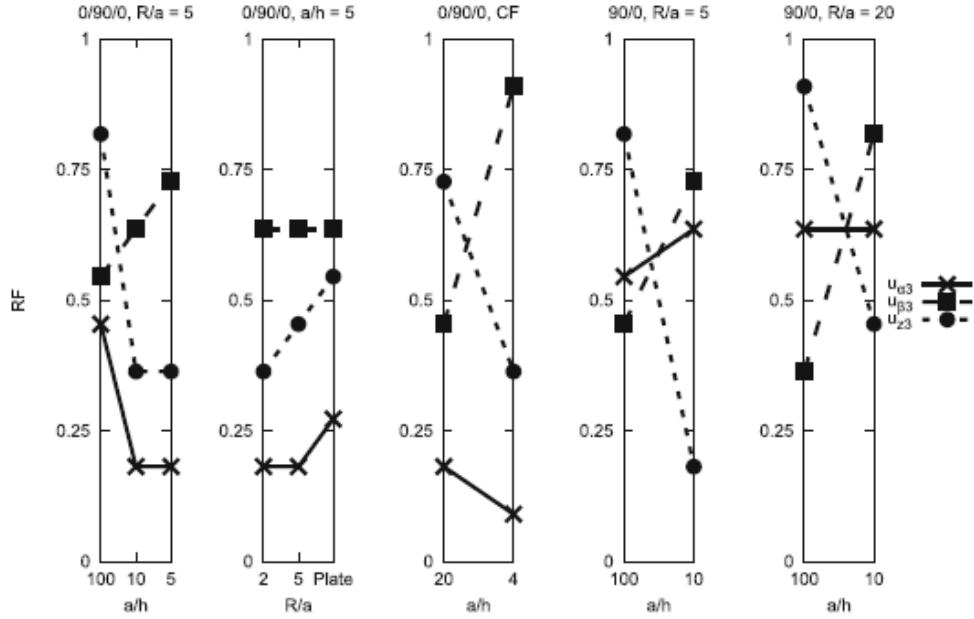


Figura 1.5: Diagrammi  $RF$  del secondo ordine

- Non vi è una sola teoria ottimale per tutti i problemi. La scelta del modello dipende dalla geometria, dalle condizioni di carico e da quali risultati si

vogliono ottenere.

## 1.2 Obiettivi

Le analisi dinamiche svolgono un ruolo chiave nella valutazione delle strutture aerospaziali, in particolare per identificare le frequenze naturali, le forme modali e la risposta dinamica sotto carichi variabili. Studiare attentamente il comportamento vibrazionale di componenti come travi, piastre e gusci è essenziale per garantire prestazioni ottimali e prevenire fenomeni dannosi come il flutter o le risonanze strutturali [2]. Se consideriamo lo studio di materiali compositi dobbiamo tenere in considerazione le caratteristiche particolari di questa tipologia di materiali. Infatti i compositi hanno la caratteristica di essere eterogenei, composti da due o più fasi con proprietà fisiche differenti. Questo comporta una complessità maggiore nel descrivere il comportamento della struttura, richiedendo dei modelli avanzati capaci di catturare con precisione determinati effetti. Tra i più importanti abbiamo l'effetto di taglio, di stress interlaminare e di deformazione trasversale [41]. Questi effetti sono molto più complessi da valutare, infatti vengono trascurati nelle teorie strutturali più classiche, come la trave di Eulero Bernoulli o la piastra di Kirchhoff. A tale scopo si è scelto di introdurre la teoria CUF, che consiste in un approccio flessibile ed efficace [1], in grado di generare teorie di ordine superiore mediante espansioni polinomiali variabili lungo le dimensioni caratteristiche. Sebbene la CUF risulta ampiamente validata per le analisi statiche, l'applicazione nelle analisi dinamiche e nei problemi non lineari è ancora in fase di sviluppo e verifica. Grazie a questa formulazione riusciamo a ottenere un bilancio tra complessità computazionale e accuratezza richiesta [42]. Vi sono varie tipologie di funzioni di espansione, come i polinomi di Taylor, Lagrange o Legendre, per descrivere campi di spostamenti e non solo. Possiamo arrivare a descrivere campi di spostamento, tensione, temperatura, potenziale elettrico [43]. In questa trattazione ci concentreremo principalmente su espansioni di Taylor e Lagrange per approssimazioni di strutture trave, piastra e guscio.

La selezione della teoria più adeguata non è un processo semplice o economico dal punto di vista computazionale: bisogna analizzare ogni possibile combinazione per andare a trovare quella che conferisce l'errore più basso. Per confrontare i molteplici modelli si utilizza il Best Theory Diagram, BTD [35, 44], che richiedono un costo computazionale maggiore e un processo più lungo e oneroso. Nel presente lavoro questo strumento viene utilizzato per valutare le teorie di analisi alle vibrazioni libere, di trave e guscio, e quelle dinamiche di risposta nel tempo, anche in questo caso di trave e guscio.

La seguente tesi vuole puntare proprio allo sviluppo di una metodologia sistematica utile allo studio dinamico di elementi travi, piastre e gusci. Nello specifico, il lavoro

si concentra su quattro obiettivi principali, reso possibile grazie all'utilizzo della CUF:

- Sviluppo di una metodologia strutturata in modo generale, in modo da ottenere modelli più flessibili e selezionando il modello più appropriato per ogni componente di spostamento. La metodologia introduce la possibilità di utilizzare diverse tipologie di espansioni nello stesso modello, come Taylor e Lagrange, approcci come Equivalent Single Layer (ESL) e Layer-Wise (LW) [45];
- Analisi e classificazione delle teorie per problemi di tipo dinamico, utilizzando il Metodo Assiomatico-Asintotico (AAM). A differenza dei metodi precedenti, questo approccio non utilizza tecniche di penalizzazione, ma direttamente i gradi di libertà effettivi per valutare tutte le possibili combinazioni e rappresentarle nel diagramma BTM completo;
- Estensione ad altre tipologie di analisi più complesse o non classiche, come quelle termiche e non lineari, dando la possibilità di sviluppare nuovi lavori e applicazioni più complesse.

### 1.3 Sviluppo del lavoro

Il seguente capitolo riporta la struttura della tesi, evidenziando gli aspetti principali del lavoro svolto e le caratteristiche di ogni capitolo. Vengono affrontati approfonditamente tutti gli argomenti dal punto di vista teorico e anche pratico, affrontando esempi di calcolo relativi a modelli strutturali classici.

**Capitolo 2** descrive tutte le teorie strutturali utilizzate per le analisi di componenti, dalle prime esistenti alle più moderne. Si espongono le teorie classiche, sia per travi che gusci, gli approcci per le strutture multistrato, già discussi ampiamente in letteratura, ma anche la Carrera Unified Formulation e il Metodo agli Elementi Finiti. Si affrontano tutte queste teorie dal punto di vista teorico, mostrando formule di espansione di varia tipologia, come Taylor e Lagrange.

**Capitolo 3** descrive il modo utilizzato per la scelta delle migliori teorie strutturali, sia nel caso di travi che di gusci. Viene descritto il Metodo Asintotico-Assiomatico (AAM) e, in maniera correlata, l'utilizzo del grafico Best Theory Diagram (BTM). Questi possono essere integrati perfettamente con l'utilizzo della CUF, che consente di generare tutte le teorie possibili, in base all'espansione scelta, in maniera gerarchica.



**Capitolo 4** affronta il caso dell'analisi statica di due elementi, una trave e una piastra. Entrambi questi sono strutture in materiale composito con un determinato numero di strati. Questi vengono analizzati tramite varie teorie di ordine elevato, mostrando le differenze in termini di valori e andamenti di spostamenti, tensioni normali e trasversali. Si utilizzano espansioni complete ma anche miste, per trovare quelle che conferiscono il risultato migliore con il minimo costo computazionale.

**Capitolo 5** si analizzano elementi quali una trave isotropa e guscio ortotropo effettuando analisi modali alle vibrazioni libere, andando a integrare il metodo asintotico-assiomatico (AAM) e i best theories diagrams (BTD). Grazie a questi diagrammi si possono identificare immediatamente le teorie migliori per ciascun numero di gradi di libertà. Successivamente si riportano anche delle tabelle che mostrano i termini utilizzati, il numero di gradi di libertà e l'errore percentuale rispetto a un valore di riferimento.

**Capitolo 6** affronta l'analisi dinamica di risposta nel tempo, grazie alla quale si possono studiare gli effetti dinamici in un determinato intervallo di tempo. Attraverso il metodo CUF e un'integrazione temporale eseguita con il metodo di Newmark si effettuano prove di analisi dinamica di risposta nel tempo su vari elementi trave e guscio. Per ogni analisi si riportano gli andamenti nel tempo di spostamenti e tensioni normali e trasversali.

**Capitolo 7** che riporta le conclusioni generali del lavoro, mostrando i risultati più significativi ottenuti e le applicazioni future.

## Capitolo 2

# Modelli teorici e metodi numerici per l'analisi strutturale di travi e gusci

Tale capitolo ha come scopo quello di introdurre le teorie strutturali di ordine superiore per modelli sia 1D che 2D. Si vuole descrivere la formulazione e l'utilizzo delle principali teorie classiche [13], inizialmente, e la Carrera Unified Formulation, andando a spiegarne il funzionamento e gli strumenti matematici utilizzati. Si parte dall'analisi di modelli monodimensionali di tipo trave, dove il contributo alla deformazione della sezione trasversale si riduce. Queste considerazioni valgono solo se consideriamo una struttura allungata. Successivamente viene introdotta anche la teoria CUF, utile a superare le mancanze dei modelli con teorie classiche [1].

Si è scelto di estendere la trattazione anche alle teorie 2D per piastre e gusci. I modelli classici, come la teoria di Kirchhoff-Love o la First-order Shear Deformation Theory (FSDT), pur essendo computazionalmente efficienti, mostrano limiti significativi nel descrivere correttamente gli effetti di taglio trasversale [46], in particolare nei casi di piastre laminate, composite o moderatamente spesse. Le teorie raffinate di ordine superiore permettono di superare questi limiti.

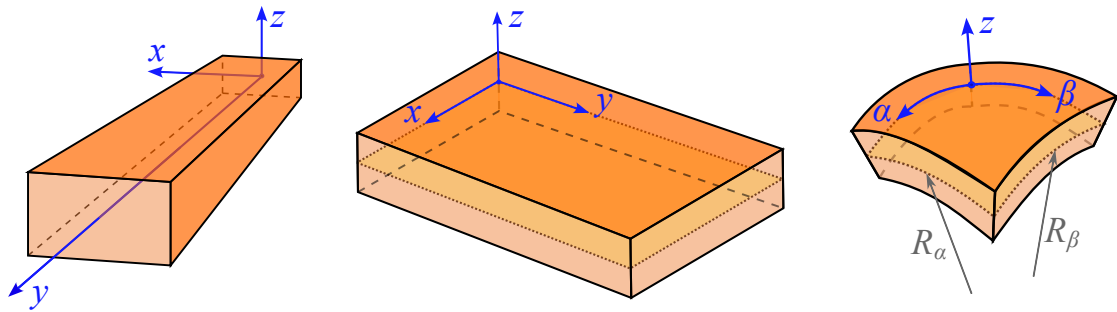
Anche in ambito bidimensionale, la teoria CUF fornisce uno schema gerarchico generalizzato in grado di generare numerose teorie strutturali in modo sistematico e veloce. La CUF consente infatti di modellare piastre e gusci mediante approcci Equivalent Single Layer oppure Layer-Wise. Inoltre, nel caso di struttura composta da elementi più semplici, si può utilizzare l'approccio Component Wise insieme alla CUF.

## 2.1 Teorie strutturali classiche

Nelle teorie strutturali classiche abbiamo l'analisi di un modello attraverso determinati termini. Possiamo considerare una trave o un guscio in un sistema di riferimento cartesiano, come si vede in figura 2.1:

- Per la trave abbiamo la sezione trasversale sul piano  $x - z$ , mentre la lunghezza si sviluppa lungo l'asse  $y$ .
- Per il guscio abbiamo lo spessore che si sviluppa lungo l'asse  $z$ , mentre la superficie sul piano del guscio si trova su  $\alpha - \beta$ .

Di base si considera il guscio con determinati raggi di curvatura nelle due direzioni  $\alpha$  e  $\beta$ . Tali valori possono variare da zero a infinito, portando ad ottenere geometrie della struttura diverse. Se questi raggi di curvatura tendono ad infinito il guscio assumerà la forma di una piastra.



**Figura 2.1:** Elementi trave, piastra e guscio con rispettivi sistemi di riferimento

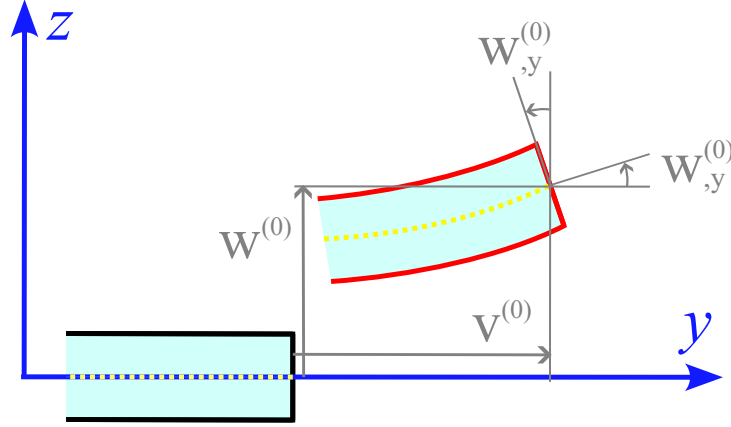
### 2.1.1 Teorie trave

Nella trattazione classica degli elementi trave abbiamo due teorie principali: la teoria di Eulero-Bernoulli, che non considera le deformazioni a taglio, e la teoria di Timoshenko, che considera gli effetti del taglio. Possiamo andare ad analizzare questi due modelli separatamente.

**Teoria di Eulero-Bernoulli** La teoria della trave di Eulero-Bernoulli [13] è una delle formulazioni più utilizzate nell'analisi strutturale. Essa presenta tre ipotesi principali:

- le sezioni trasversali rimangano piane a deformazione avvenuta
- le sezioni trasversali rimangano perpendicolari all'asse neutro della trave a deformazione avvenuta

- vengono trascurati gli effetti di taglio



**Figura 2.2:** Trave di Eulero-Bernoulli ed ipotesi cinematiche

Il campo di spostamenti valido per questa teoria presenta dei termini costanti in  $x, y, z$  e dei termini lineari solo in  $y$ :

$$\begin{cases} u_x(x, y, z) = u^{(0)}(y) \\ u_y(x, y, z) = v^{(0)}(y) - x \frac{\partial u^{(0)}}{\partial y} - z \frac{\partial w^{(0)}}{\partial y} \\ u_z(x, y, z) = w^{(0)}(y) \end{cases} \quad (2.1)$$

dove:

- $u_x(x, z)$  è lo spostamento laterale sul piano della sezione della trave,
- $u_y(x, z)$  è lo spostamento longitudinale lungo la trave,
- $u_z(x, z)$  è lo spostamento verticale sul piano della sezione della trave.

I termini degli spostamenti descritti nelle relazioni 2.1 sono costituiti da dei termini costanti e altri lineari di rotazione, che rappresentano le curvature. Questi sono mostrati più chiaramente in maniera grafica in figura 2.2. In quest'ultima si evidenzia lo spostamento della trave Eulero-Bernoulli sul piano  $y - z$ , con le rispettive componenti di spostamento.

Una volta noto il campo di spostamenti è possibile trovare le altre grandezze fondamentali per i nostri studi: il campo di deformazioni, di minore importanza, e il campo di tensioni, fondamentale per le valutazioni strutturali di un componente. Il campo di deformazioni può essere valutato derivando direttamente il campo di spostamenti rispetto a una certa direzione in base alla componente che ci interessa.

In termini matriciali possiamo scrivere:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^{(0)} \\ v^{(0)} \\ w^{(0)} \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (2.3)$$

Di seguito si può ricavare anche il campo di tensioni conoscendo le caratteristiche del materiale, descritte dal tensore di rigidezza  $C_{ijkl}$  e le deformazioni appena trovate. La dimensione del tensore di rigidezza dipende essenzialmente dal tipo di materiale [1]:

- per un materiale generico vi sono 81 componenti scalari
- nel caso in cui la matrice di tensione sia simmetrica,  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ , vi sono 54 componenti
- nel caso in cui la matrice di deformazione sia simmetrica,  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ , vi sono 36 componenti
- nel caso di materiale iperelastico,  $C_{ijkl} = C_{klij}$ , vi sono 21 componenti
- nel caso di materiale monoclinico vi sono 13 componenti non nulli e diversi tra loro
- nel caso di materiale ortotropo vi sono 9 componenti non nulli e diversi tra loro
- nel caso di materiale isotropo vi sono solo 3 componenti che caratterizzano il materiale

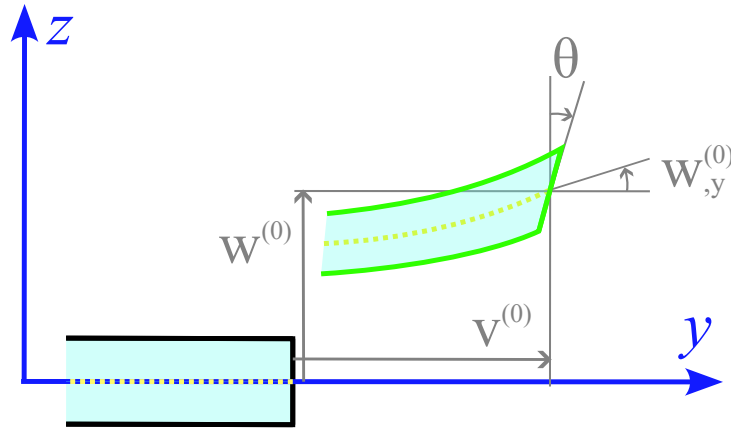
Nel caso di materiali isotropi o ortotropi la matrice delle rigidezze è caratterizzata essenzialmente dai valori del modulo di Young  $E$ , del coefficiente di Poisson  $\nu$  e del modulo di taglio  $G$ . Considerando un caso generico possiamo scrivere semplicemente la relazione:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (2.4)$$

Una volta definiti i campi principali si può andare a studiare le equazioni del moto della trave e analizzare le deformazioni della struttura.

**Teoria di Timoshenko** La teoria della trave di Timoshenko è una generalizzazione della teoria di Eulero-Bernoulli che include gli effetti di deformazione da taglio [47]. Essa assume che le sezioni trasversali possano ruotare in modo indipendente rispetto alla linea elastica. Dunque le ipotesi che rimangono attive per formulare la teoria sono le seguenti:

- le sezioni trasversali rimangano piane a deformazione avvenuta
- le sezioni trasversali rimangano perpendicolari all'asse neutro della trave a deformazione avvenuta



**Figura 2.3:** Trave di Timoshenko ed ipotesi cinematiche

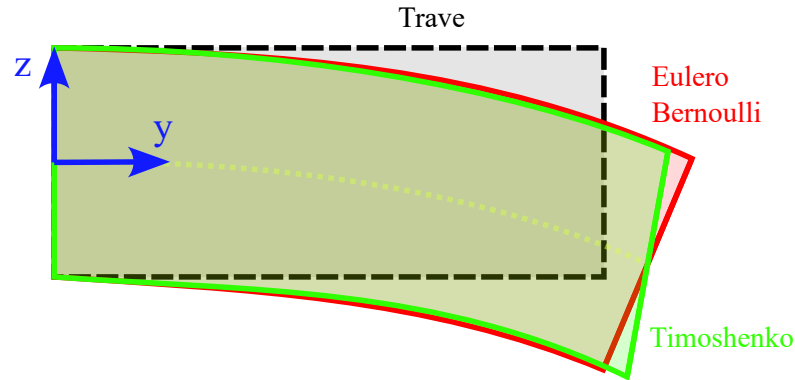
Il campo di spostamenti valido per questa teoria presenta dei termini costanti in  $x, y, z$  e dei termini lineari solo in  $y$ , ma questa volta caratterizzati da dei coefficienti che corrispondono proprio all'angolo di rotazione della sezione rispetto a un determinato asse. Tale angolo non è più coincidente con la derivata dello spostamento  $w$ :

$$\begin{cases} u_x(x, y, z) = u^{(0)}(y) \\ u_y(x, y, z) = v^{(0)}(y) + x\theta(y) - z\psi(y) \\ u_z(x, y, z) = w^{(0)}(y) \end{cases} \quad (2.5)$$

Anche in questo caso i termini degli spostamenti descritti nelle relazioni 2.5 sono costituiti da vari termini. Questi sono mostrati più chiaramente in maniera grafica in figura 2.3. In quest'ultima si evidenzia lo spostamento della trave Timoshenko sul piano  $y - z$ , con le rispettive componenti di spostamento.

Il passo successivo per completare l'analisi è scrivere le equazioni del moto della trave.

**Confronto teorie Eulero Bernoulli - Timoshenko** La teoria di Eulero-Bernoulli è valida per travi sottili, mentre quella di Timoshenko è più adatta a travi corte e spesse, dove gli effetti del taglio non possono essere trascurati. In generale, la teoria di Timoshenko fornisce una soluzione più accurata, specialmente per alte frequenze di vibrazione e carichi dinamici.



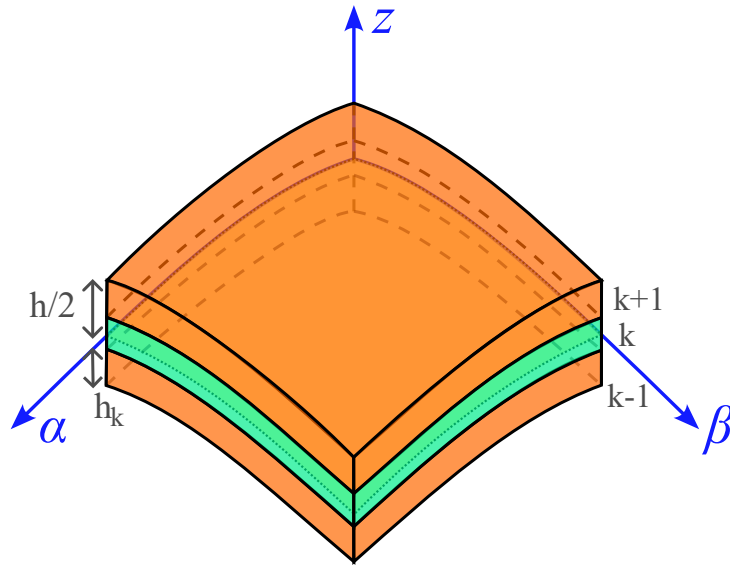
**Figura 2.4:** Confronto teorie trave di Eulero-Bernoulli e Timoshenko

Come si può notare in figura 2.4 la differenza sostanziale tra le due teorie sta proprio nel riuscire a cogliere gli effetti della rotazione della sezione della trave, che in Timoshenko è possibile grazie alla presenza di 5 gradi di libertà, due aggiuntivi rispetto alla teoria di Eulero Bernoulli.

Per tenere conto dell'effetto della distorsione secondaria e dei campi di tensione nelle sezioni a pareti sottili, come descritto da Vlasov [48], è necessario che la cinematica della trave includa termini di ordine superiore. In particolare certe funzioni devono essere rappresentate tramite polinomi di terzo grado. Un approccio simile è stato introdotto da Reddy per le teorie sulle piastre [49]. Queste teorie di ordine superiore permettono di ottenere una distribuzione parabolica delle deformazioni da taglio trasversale, il che consente di soddisfare le condizioni omogenee ai bordi liberi della sezione. Questo rappresenta un miglioramento significativo rispetto alle teorie classiche di Timoshenko e Vlasov [50], le quali non riescono a soddisfare tali condizioni esattamente. In molte applicazioni strutturali più complesse, è necessario considerare condizioni al contorno più generali. Nei casi appena citati, le formulazioni classiche non sono sufficienti e si è spesso costretti a ricorrere a modelli più onerosi dal punto di vista computazionale, come le formulazioni basate su piastre e solidi.

## 2.1.2 Teorie guscio

Un'altra trattazione importante per le teorie strutturali classiche è quella che si fa per il guscio o la piastra. La teoria dei gusci in letteratura è piena di fonti e lavori storici, partendo da quelle più semplice fino ad arrivare a quelle moderne più rinomate [51]. Come si può notare in figura 2.5 il guscio presenta una superficie curva. In particolare i gusci sono il caso più generico di elementi 2D che si può descrivere, dove la superficie è descritta da un certo raggio di curvatura nelle direzioni  $\alpha$  e  $\beta$  [1].

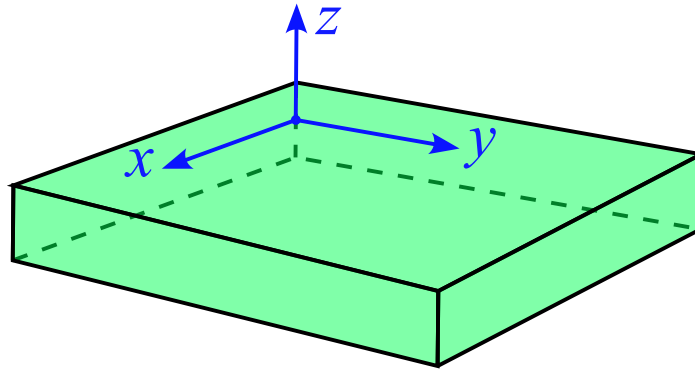


**Figura 2.5:** Struttura di tipo guscio

Queste sono tra le geometrie più comuni e complesse da modellare, poiché derivano dal comportamento tridimensionale dei solidi ma si prestano a una trattazione bidimensionale. In questo caso la caratteristica fondamentale è avere uno spessore molto più piccolo rispetto alle altre due dimensioni, che permette di effettuare ipotesi semplificative per descrivere il comportamento meccanico.

Nell'analizzare i componenti curvi si arrivano ad affrontare delle complessità geometriche e cinematiche, a causa dei termini di accoppiamento e alle grandezze di connessione geometrica. Un caso particolare di guscio è proprio la piastra, in quanto se consideriamo i raggi di curvatura nelle direzioni sul piano tendenti ad infinito otterremo una superficie piana. Lo spessore di questa continua ad essere ridotto rispetto alle due dimensioni sul piano. Un esempio di piastra è quello mostrato in figura 2.6, con il proprio sistema di riferimento.





**Figura 2.6:** Sistema di riferimento per una piastra

Tutte le teorie legate a gusci e piastre si basano sull'assunzione che la deformazione lungo lo spessore sia trascurabile o rappresentabile con ipotesi cinematiche semplificate. Sono state sviluppate diverse formulazioni teoriche classiche per questi modelli, che si differenziano principalmente per:

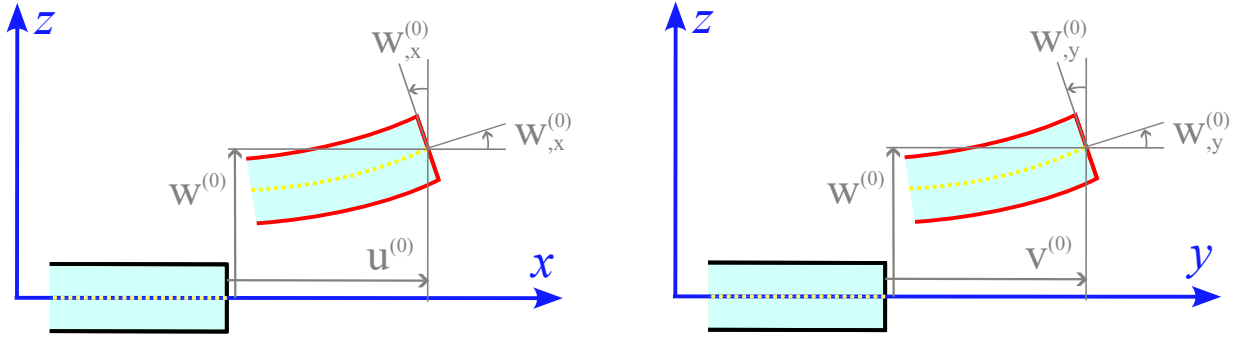
- livello di approssimazione cinematica
- presenza del taglio trasversale

In questo studio si riprendono le teorie più rilevanti a livello storico, ovvero quella di Kirchhoff e quella di Reissner Mindlin.

**Teoria di Kirchhoff** La prima teoria che si analizza è quella di Kirchhoff [1], anche nota come "*Classical Plate Theory*", che consiste nel modo più semplice di descrivere il comportamento meccanico dei gusci e piastre sottili. Essa presenta tre ipotesi fondamentali:

- i segmenti di spessore rimangono rettilinei a deformazione avvenuta e non si accorciano
- i segmenti di spessore rimangono perpendicolari al piano di simmetria a deformazione avvenuta
- si trascurano gli effetti di taglio

Questo implica che lo spostamento lungo lo spessore  $z$  è determinato esclusivamente dalla rotazione della superficie media.



**Figura 2.7:** Piastra di Kirchhoff ed ipotesi cinematiche

Il campo di spostamenti in questo caso presenta dei termini costanti in  $x$ ,  $y$  e  $z$  e dei termini lineari solo in  $x$  e  $y$ , dati direttamente dal termine della derivata di  $u_z$ :

$$\begin{cases} u_x(x, y, z) = u^{(0)}(x, y) - z \frac{\partial w^{(0)}}{\partial x} \\ u_y(x, y, z) = v^{(0)}(x, y) - z \frac{\partial w^{(0)}}{\partial y} \\ u_z(x, y, z) = w^{(0)}(x, y) \end{cases} \quad (2.6)$$

Analogamente per la piastra si riporta in figura 2.7 lo spostamento del segmento di spessore nei due piani  $x - z$  e  $y - z$ . Inoltre si possono notare chiaramente i termini degli spostamenti esplicitati nelle relazioni 2.6.

Il termine della derivata rappresenta la rotazione della normale alla superficie media nel piano  $x - y$ . In questo caso abbiamo solo 3 termini indipendenti che governano il comportamento della trave. Questa teoria presenta alcune importanti limitazioni, come ad esempio la necessità di avere delle piastre sottili, con rapporto  $\frac{a}{h} \gg 10$ . Se siamo in presenza di piastre spesse il contributo della deformazione a taglio diventa rilevante e usando Kirchhoff tendiamo a sottostimare la rigidità flessionale e sovrastimare gli spostamenti.

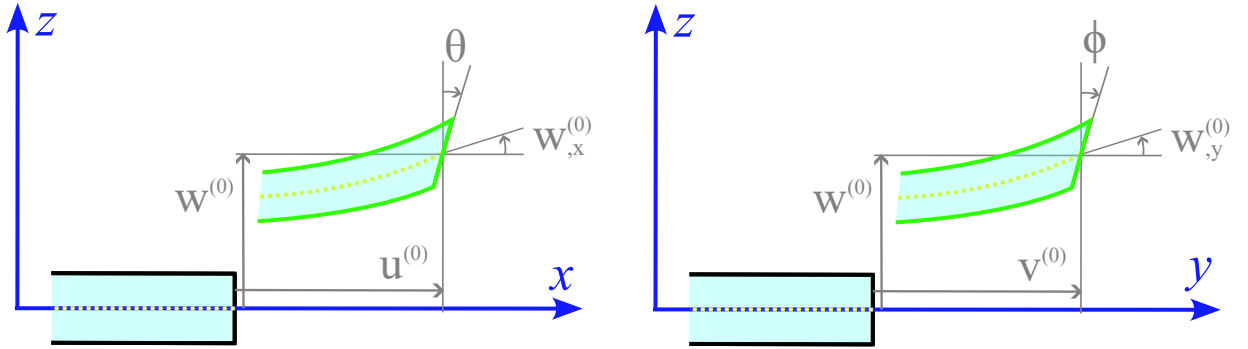
Nel caso di materiali laminati, le ipotesi di indeformabilità delle normali non permettono di cogliere determinati fenomeni [43], come:

- la discontinuità delle tensioni tra gli strati interlaminari
- l'effetto zig-zag nei campi di spostamento
- l'eventuale distorsione trasversale

**Teoria di Reissner-Mindlin** Altra teoria base per lo studio dei gusci e tra le più richiamate in letteratura è quella di Reissner-Mindlin [52, 53]. Questa consiste in un'estensione della teoria di Kirchhoff, progettata in modo da superare certi limiti della precedente e per essere utilizzata in piastre spesse. In questo caso

l'aspetto principale è proprio la considerazione degli effetti di taglio trasversale. Infatti le ipotesi che dobbiamo tenere in conto sono essenzialmente due:

- i segmenti di spessore rimangono rettilinei a deformazione avvenuta e non si accorciano
- i segmenti di spessore non sono più perpendicolari al piano di simmetria a deformazione avvenuta, a causa della deformazione a taglio trasversale



**Figura 2.8:** Piastra di Reissner-Mindlin ed ipotesi cinematiche

Il campo di spostamenti in Reissner-Mindlin presenta dei termini costanti in  $x$ ,  $y$  e  $z$  e dei termini lineari solo in  $x$  e  $y$ , dati, diversamente che con Kirchhoff, da un termine di rotazione indipendente che non coincide con la derivata dello spostamento:

$$\begin{cases} u_x(x, y, z) = u^{(0)}(x, y) + z\theta(x, y) \\ u_y(x, y, z) = v^{(0)}(x, y) + z\phi(x, y) \\ u_z(x, y, z) = w^{(0)}(x, y) \end{cases} \quad (2.7)$$

Come si può notare in figura 2.8 lo spostamento del segmento di spessore è differente rispetto al caso di Kirchhoff. Inoltre si possono notare chiaramente i termini degli spostamenti esplicitati nelle relazioni 2.7.

Questa formulazione consente di ottenere un modello computazionalmente semplice, poiché presenta 5 gradi di libertà per ogni punto nodale, invece dei 3 visti con Kirchhoff, ma ottenendo dei risultati più corretti con una buona accuratezza. Questo risulta utile soprattutto nei casi in cui la deformazione a taglio non risulta trascurabile. Dal punto di vista numerico, un ulteriore vantaggio di questa teoria è che viene richiesta solo continuità  $C^0$  per le funzioni di forma [54, 55], rendendola di fatto lo standard per la maggior parte dei codici commerciali FEM.

Questa teoria presenta comunque delle limitazioni importanti, in quanto la distribuzione costante dello sforzo di taglio non è fisicamente accurata [56]. Di conseguenza

otteniamo una sovrastima della rigidità trasversale, ovvero l'effetto dello shear locking. Per risolvere questo problema è necessario introdurre un fattore correttivo per il taglio,  $k$ . Anche con queste teorie risulta difficile modellare determinati effetti quali la discontinuità delle tensioni interlaminari, l'effetto zig-zag [10] nello spessore e le distorsioni locali tra gli strati.

Per arrivare a rappresentare questi effetti è necessario ricorrere a teorie più sofisticate, come le *Higher-Order Shear Deformation Theories* [57] o le formulazioni *Layer Wise* [58].

**Teorie di ordine superiore (Higher Order Theories, HOTS)** Una delle prime e più note teorie HSDT è quella proposta da J. N. Reddy (1984) [49], la cosiddetta Third-Order Shear Deformation Theory (TSDT). In questa formulazione, il campo di spostamenti viene esteso includendo termini quadratici e cubici nella coordinata lungo lo spessore  $z$ , permettendo così di ottenere una distribuzione parabolica degli sforzi di taglio, che si annulla automaticamente sulle superfici superiore e inferiore della piastra, in accordo con le condizioni fisiche di equilibrio. Il campo di spostamento per Reddy si scrive come:

$$\begin{cases} u_x(x, y, z) = u^{(0)}(x, y) + z\theta(x, y) + z^3\phi(x, y) \\ u_y(x, y, z) = v^{(0)}(x, y) + z\theta(x, y) + z^3\phi(x, y) \\ u_z(x, y, z) = w^{(0)}(x, y) \end{cases} \quad (2.8)$$

I termini in  $z^3$  consentono di ottenere una curvatura variabile dei campi di spostamento e migliora la rappresentazione della deformazione da taglio. Inoltre si soddisfano automaticamente le condizioni di contorno per le tensioni tangenziali. Altro vantaggio è che queste HSDT non necessitano di fattori correttivi per il taglio, ma bisogna tenere conto che il numero di gradi di libertà per nodo cresce, con conseguente aumento del costo computazionale.

Un esempio moderno e generalizzato di teoria di ordine superiore è fornito dalla CUF, in cui le HSDT sono un caso particolare ottenuto specificando la funzione di espansione lungo  $z$ , come ad esempio un polinomio di terzo ordine [43, 56]. Questo approccio permette di costruire una famiglia di modelli a complessità crescente, mantenendo coerenza teorica e flessibilità implementativa.

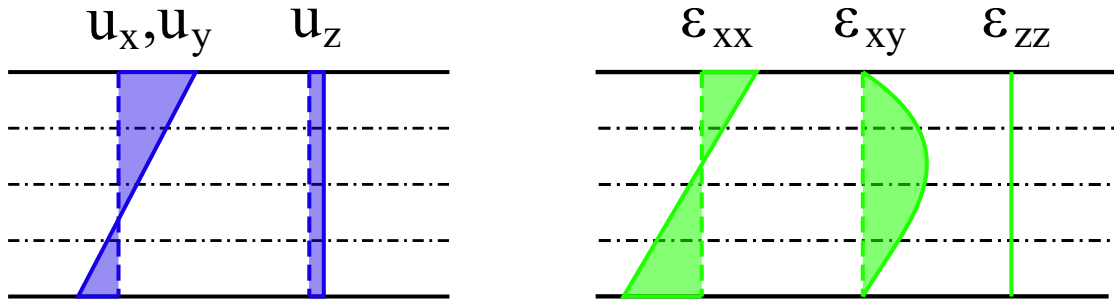
## 2.2 Teorie per analisi di strutture multistrato

L'analisi di strutture laminate, ampiamente utilizzate in ambito aerospaziale per le loro eccellenti proprietà di resistenza e leggerezza, richiede teorie strutturali molto più potenti e precise delle teorie classiche già viste. La composizione di una struttura a strati o a vari componenti strutturali presenta una certa complessità

nella descrizione del problema e dell'analisi, che ha portato allo sviluppo di tre approcci principali: l'Equivalent Single Layer (ESL), il Layer Wise (LW) e il Component Wise (CW). Questi approcci differiscono sostanzialmente nel modo in cui considerano la continuità e la distribuzione dei campi cinematici e di tensione attraverso lo spessore del laminato, in modo da ottenere un equilibrio tra accuratezza e costo computazionale.

- **Equivalent Single Layer, ESL**

L'approccio ESL tratta l'intera struttura laminata come un unico strato omogeneo. Dunque, le proprietà meccaniche dei singoli strati vengono integrate per derivare un unico set di proprietà effettive che descrivono il comportamento globale del laminato. Di conseguenza, un unico campo di spostamento cinematico viene utilizzato per descrivere il comportamento dell'intera sezione, indipendentemente dal numero di strati che la compongono [45].



**Figura 2.9:** Approccio Equivalent Single Layer - Spostamenti e tensioni per multilayer ortotropo

Come si può vedere in figura 2.9 lo spostamento  $u_x$  come anche  $u_y$  è lineare senza interruzioni tra i layer, mentre  $u_z$  è costante. Le deformazioni normali hanno sempre un andamento lineare come gli spostamenti, mentre le deformazioni trasversali hanno un andamento parabolico che si annulla agli estremi [59].

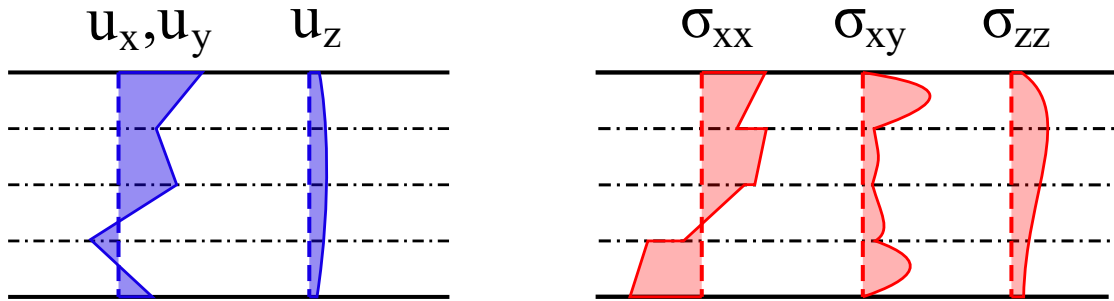
Il principale vantaggio di questo approccio risiede nella sua efficienza computazionale. Dato che il numero di gradi di libertà del modello è indipendente dal numero di strati, i costi di calcolo risultano decisamente contenuti anche per laminati complessi con una maggiore quantità di strati. Risulta essere un ottimo modo per ottenere un andamento globale della struttura.

Tuttavia, il limite fondamentale dell'approccio ESL risiede nella sua incapacità di descrivere accuratamente il campo di tensione locale all'interno dello spessore del laminato. In particolare, queste teorie non assicurano la continuità delle tensioni normali e tangenziali alle interfacce tra gli strati. Tale assunzione è fisicamente irrealistica e può portare a errori significativi nella valutazione di

determinati fenomeni come lo shear lag, l'interazione tra gli strati, o il danno localizzato. Queste teorie sono quindi poco adatte per l'analisi dello stato di tensione a livello del singolo strato di laminato, che risulta fondamentale ad esempio nello studio della delaminazione.

- **Layer Wise, LW**

L'approccio LW adotta una strategia più dettagliata, considerando ogni strato del laminato [60, 61]. Un campo di spostamento separato viene definito per ciascun strato, permettendo di descrivere con precisione le variazioni del comportamento cinematico e di tensione all'interno di ogni componente. Per garantire la coerenza fisica del modello, vengono imposte esplicitamente le condizioni di continuità degli spostamenti e delle tensioni trasversali alle interfacce tra gli strati.



**Figura 2.10:** Approccio Layer Wise - Spostamenti e tensioni per multilayer ortotropo

Come possiamo notare dalla figura 2.10, gli spostamenti seguono un determinato andamento in ciascuno degli strati, garantendo la continuità tra di essi. Allo stesso modo le tensioni trasversali, mentre le tensioni normali consentono di avere andamenti discontinui tra gli strati [62]. Il vantaggio principale di questo approccio è la sua elevata accuratezza. La modellazione LW fornisce una descrizione dettagliata e realistica dello stato di deformazione e tensione attraverso lo spessore del laminato, rispettando le condizioni di continuità fisiche. Ciò lo rende la scelta migliore per analisi che richiedono una valutazione precisa delle tensioni interlaminari.

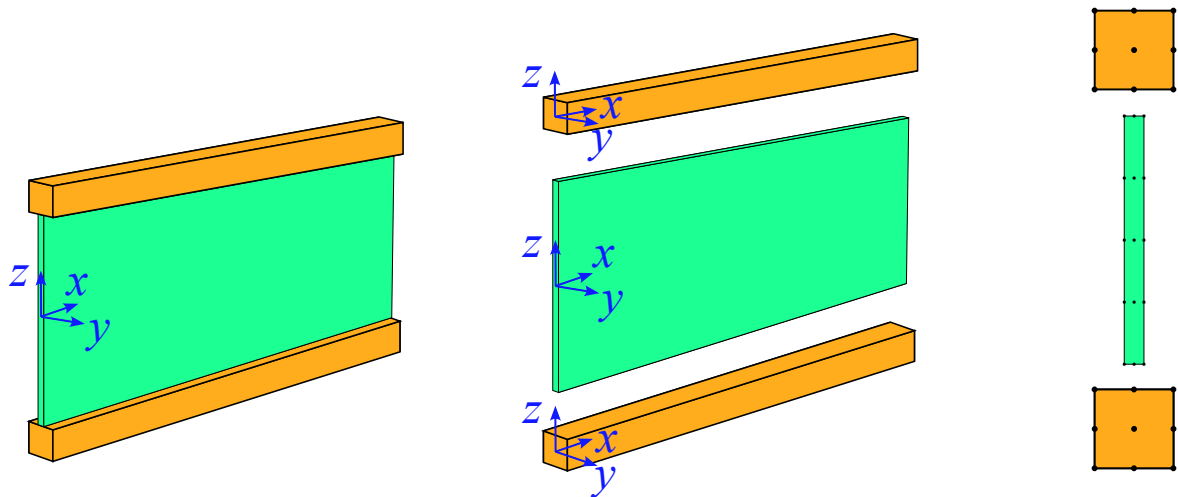
Considerando invece gli svantaggi, l'approccio LW è computazionalmente molto più oneroso rispetto all'ESL. Il numero di gradi di libertà del modello cresce in modo direttamente proporzionale al numero di strati, rendendo le analisi di laminati spessi o multistrato troppo complessi in termini di tempo e risorse computazionali, specialmente nei casi di ottimizzazione o analisi dinamica non lineare. Per questo motivo, il layer wise è spesso considerato l'approccio

migliore per l'analisi di precisione, ma meno pratico per studi preliminari o per la modellazione di strutture molto estese.

- **Component Wise, CW**

L'approccio Component-Wise (CW) è un'ottima metodologia per estendere la Carrera Unified Formulation alla modellazione di strutture complesse composte da più elementi strutturali interconnessi [63]. Mentre la CUF fornisce le fondamenta teoriche per la creazione di modelli strutturali, l'approccio CW ne massimizza l'utilità consentendo di analizzare strutture multicomponente (come travi rinforzate, ali con longheroni e centine) utilizzando il medesimo elemento finito per ogni singolo componente, come possiamo notare in figura 2.11.

Dunque possiamo notare una sostanziale differenza tra l'approccio CW e quello LW. Nel primo si riesce ad analizzare una struttura complessa non come un'unica identità ma come un assemblaggio di componenti strutturali discreti, mentre il LW opera a livello della microstruttura del materiale, modellando ogni singolo strato del laminato come un'unità separata. In



**Figura 2.11:** Approccio Component Wise - strutture rinforzate con espansioni di Lagrange

un'analisi tradizionale di strutture complesse, la modellazione richiede spesso l'utilizzo di elementi finiti di tipo diverso per i vari componenti. Questo approccio però può portare a problemi di compatibilità e complessità nella gestione delle interfacce. L'approccio CW [64] risolve questa problematica trattando ogni componente (ad esempio un longherone, una centina, un rivestimento) come un'entità distinta, ma interconnessa alle altre attraverso

l'imposizione di vincoli cinematici. Il processo di modellazione CW si articola come segue [64]:

- scomposizione della struttura, dove questa viene divisa in un insieme di componenti più semplici
- modellazione dei componenti, dove ognuno di essi viene modellato individualmente utilizzando un'unica teoria basata su CUF. Dunque il campo di spostamento di ogni componente è espresso in termini di funzioni di espansione e coefficienti di spostamento generalizzati.
- accoppiamento, con le diverse componenti connesse tra loro imponendo la continuità del campo di spostamento alle loro interfacce. Questo accoppiamento cinematico assicura che non ci siano discontinuità tra i diversi elementi, permettendo una rappresentazione coerente e accurata del comportamento strutturale complessivo.

L'uso di un unico tipo di elemento finito basato su CUF per tutte le componenti semplifica notevolmente il processo iniziale e garantisce una rappresentazione omogenea e coerente della fisica del problema. I risultati ottenuti non si limitano a fornire solo i valori degli spostamenti globali, ma offrono anche una descrizione della distribuzione delle tensioni locali in ogni componente. Questo rappresenta un aspetto cruciale per la valutazione dell'integrità strutturale e l'analisi di fenomeni di delaminazione o cedimento locale [17, 18].

## **2.3 1D Carrera Unified Formulation**

La CUF, Carrera Unified Formulation [1], rappresenta un approccio gerarchico generalizzato per la derivazione di teorie strutturali avanzate per modelli 1D, travi, e 2D, piastre e gusci. L'idea chiave di questa formulazione è l'introduzione di funzioni di espansione [43], in aggiunta alle classiche funzioni di interpolazione degli elementi finiti, per migliorare la descrizione cinematica della sezione trasversale delle travi e dello spessore di piastre e gusci.

In particolare, nel seguente capitolo ci si concentrerà nello spiegare nel dettaglio il funzionamento della teoria CUF e la sua applicazione nei modelli monodimensionali trave di ordine superiore. L'impiego di questa teoria risulta fondamentale per svolgere delle analisi statiche e dinamiche più complesse utilizzando modelli più complessi rispetto a quelli precedentemente descritti dalle teorie classiche. In questo modo otteniamo dei modelli con un'accuratezza paragonabile a quella dei modelli tridimensionali basate sul metodo degli elementi finiti, ma con un costo computazionale notevolmente ridotto [65].

Consideriamo un modello di trave generico, con le variabili del problema definite in base alla posizione specifica nella sezione della trave, come ad esempio l'asse della



trave stessa. La trattazione completa delle teorie raffinate trave definite tramite la CUF è riportata in vari lavori di Carrera e Giunta [66]. Il primo passo è la definizione del campo di spostamenti:

$$u^k(x, y, z) = \sum_{\tau=1}^M F_{\tau}^k(x, z) u_{\tau}^k(y) = F_{\tau}^k(x, z) u_{\tau}^k(y), \quad \tau = 1, 2, \dots, M \quad (2.9)$$

dove i vari termini indicano:

- $F_{\tau}^k(x, z)$  è una funzione di espansione che agisce sulla sezione della trave e ne definisce la cinematica;
- $u_{\tau}^k(y)$  rappresenta gli spostamenti generalizzati lungo l'asse longitudinale della trave;
- $M$  è il numero di termini della funzione d'espansione, scelto in base al grado della teoria da valutare;
- $k$  è l'indice del grado di libertà generalizzato.

Nello specifico viene riportata la notazione degli spostamenti per ciascuna direzione  $x, y, z$  [66]:

$$\begin{aligned} u_x^k &= F_{u_x \tau}^k(x, z) u_{x \tau}^k(y), & \tau &= 1, 2, \dots, M_{u_x} \\ u_y^k &= F_{u_y \tau}^k(x, z) u_{y \tau}^k(y), & \tau &= 1, 2, \dots, M_{u_y} \\ u_z^k &= F_{u_z \tau}^k(x, z) u_{z \tau}^k(y), & \tau &= 1, 2, \dots, M_{u_z} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Tale scrittura può essere utilizzata per descrivere non solo il campo degli spostamenti ma anche quello delle tensioni, elettrico o termico [36], andando a utilizzare le opportune funzioni di espansione e grandezze generalizzate, come si è discusso in altri lavori. L'adozione della notazione di Einstein implica che l'indice ripetuto  $\tau$  sottintende una sommatoria su tutti i termini dell'espansione. L'uso di funzioni di espansione nella sezione trasversale di modelli 1D consente di ottenere un campo di spostamenti completamente tridimensionale, e quindi di derivare un tensore delle deformazioni e delle tensioni anch'esso 3D. Inoltre, con questa nuova formulazione, le funzioni di espansione sono distinte per ogni componente di spostamento e per ogni grado di libertà generalizzato, potendo scegliere arbitrariamente che la complessità della funzione da applicare ad ogni grado di libertà in maniera indipendente [42]. L'aspetto principale e più conveniente della teoria CUF è che la formulazione non è vincolata a una specifica scelta della funzione d'espansione  $F_{\tau}$ . Questo termine infatti può essere descritto da diverse famiglie di funzioni di base. Si possono scegliere funzioni polinomiali, di vario ordine, trigonometriche, esponenziali o armoniche. Le classi di funzione più utilizzate e più efficienti sono:

- Espansione di Taylor, TE
- Espansione di Lagrange, LE
- Espansione gerarchica di Legendre, HLE

Queste espansioni polinomiali sono sicuramente le più versatili e convenienti per la teoria CUF [43]. Nel nostro studio ci concentreremo sulle TE e LE.

### 2.3.1 Espansione di Taylor 1D

L'espansione di Taylor (TE) utilizza una serie di Taylor del tipo  $x^i z^j$  come funzioni di espansione [1], dove  $i, j$  sono indici interi. Questo porta a una base gerarchica di funzioni, in cui l'ordine polinomiale  $N$  è definito preliminarmente [67]. Per esempio, l'espansione di Taylor del primo ordine nel caso trave, con  $N = 1$ , presenta 9 termini ed è definita come segue:

$$\begin{aligned} u_x &= u_{x_1} + xu_{x_2} + zu_{x_3} \\ u_y &= u_{y_1} + xu_{y_2} + zu_{y_3} \\ u_z &= u_{z_1} + xu_{z_2} + zu_{z_3} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Da questa scrittura si possono ottenere le teorie classiche descritte nel capitolo precedente, andando ad eliminare selettivamente determinati termini. Per esempio, per ottenere la teoria della trave di Timoshenko, che contiene 5 termini, dobbiamo andare ad eliminare dalla teoria generale i termini lineari lungo  $x$  e  $z$ :

$$\begin{aligned} u_x &= u_{x_1} \\ u_y &= u_{y_1} + xu_{y_2} + zu_{y_3} \\ u_z &= u_{z_1} \end{aligned} \quad (2.12)$$

L'impiego dell'espansione di Taylor porta a considerare una formulazione basata sull'approccio Equivalent Single Layer (ESL), nel caso di modellazione di materiali compositi laminati [43]. Un modello di terzo ordine ( $N = 3$ ) è espresso come:

$$\begin{aligned} u_x &= u_{x_1} + xu_{x_2} + zu_{x_3} + x^2u_{x_4} + xzu_{x_5} + z^2u_{x_6} + x^3u_{x_7} + x^2zu_{x_8} + xz^2u_{x_9} + z^3u_{x_{10}} \\ u_y &= u_{y_1} + xu_{y_2} + zu_{y_3} + x^2u_{y_4} + xzu_{y_5} + z^2u_{y_6} + x^3u_{y_7} + x^2zu_{y_8} + xz^2u_{y_9} + z^3u_{y_{10}} \\ u_z &= u_{z_1} + xu_{z_2} + zu_{z_3} + x^2u_{z_4} + xzu_{z_5} + z^2u_{z_6} + x^3u_{z_7} + x^2zu_{z_8} + xz^2u_{z_9} + z^3u_{z_{10}} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Le teorie che presentano tutti i termini dell'espansione vengono dette *teorie uniformi*. Come si è visto nel caso della teoria di Timoshenko, in certe condizioni si può scegliere anche di utilizzare degli ordini di espansione diversi nelle tre direzioni,

portando all'utilizzo di *teorie differenti*. In altri casi si può pensare di utilizzare delle *teorie ridotte*, dove si sceglie di eliminare appositamente determinati termini dell'espansione per ridurre il costo computazionale cercando di mantenere un elevato livello di accuratezza.

Di seguito viene riportato un esempio di teorie ridotte:

$$\begin{aligned} u_x &= u_{x_1} + xu_{x_2} + xzu_{x_5} + z^2u_{x_6} \\ u_y &= u_{y_1} + xu_{y_2} + zu_{y_3} + z^2u_{y_6} + z^3u_{y_{10}} \\ u_z &= u_{z_1} \end{aligned} \tag{2.14}$$

### 2.3.2 Espansione di Lagrange 1D

In questo contesto le espansioni di Lagrange [68] rappresentano una delle famiglie di funzioni di espansione più utilizzate e versatili, molto efficaci per la modellazione di materiali compositi multistrato e per costruire modelli layer-wise [69]. A differenza delle espansioni di Taylor, che si basano su uno sviluppo polinomiale, quelle di Lagrange sono delle espansioni costruite in modo da interpolare il campo di spostamenti su un insieme discreto di punti, i nodi Lagrangiani distribuiti sulla sezione della struttura [7].

Questa tipologia di espansione permette di cogliere con maggiore accuratezza le discontinuità cinematiche tra strati, i salti di tensione interlaminari e gli effetti zig-zag tipici dei compositi [56]. Aspetto fondamentale è che, al contrario delle TE, le LE non sono espansioni gerarchiche, ovvero non derivano da uno sviluppo in serie ma si basano su funzioni di base locali [44]. In termini numerici, le espansioni di Lagrange permettono di ottenere un'eccellente rappresentazione cinematica con un numero relativamente contenuto di gradi di libertà.

Di base, il campo di spostamenti di un modello generico viene espresso come prodotto tra funzioni di espansione e variabili generalizzate, e in particolare con la LE la funzione di espansione utilizzata è una combinazione lineare di funzioni di forma di Lagrange definite su  $M$  nodi. In generale si può scrivere:

$$u(x, y, z) = \sum_{\tau=1}^M L_{\tau}(x, z) u_{\tau}(y) \tag{2.15}$$

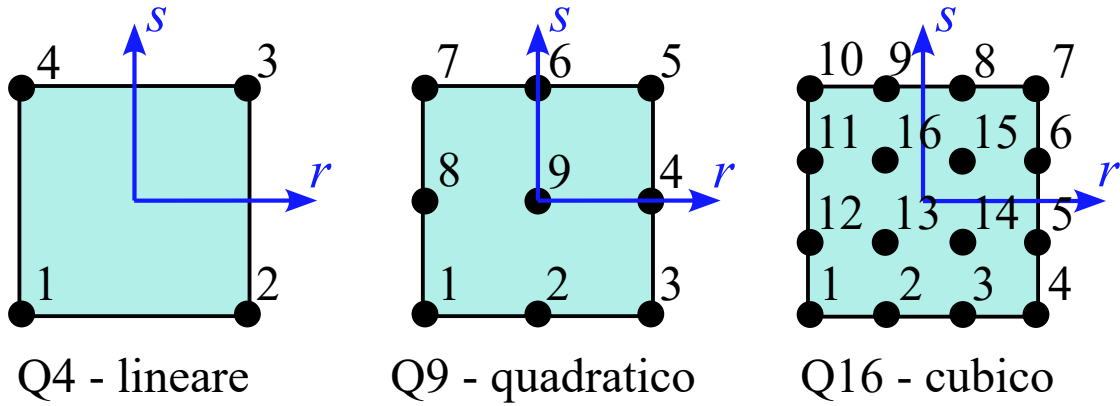
dove:

- $L_{\tau}(x, z)$  è la funzione di Lagrange associata al nodo  $\tau$ , definita nello spazio  $(x, z)$  nel caso di trave o  $(z)$  per la piastra
- $u_{\tau}(y)$  è il vettore delle variabili generalizzate lungo la direzione dello spessore

- $M$  è il numero totale di nodi Lagrangiani, scelto in base al numero di strati o all'accuratezza richiesta

Nella CUF l'espansione di Lagrange viene indicata con LE-X, dove LE indica appunto la Lagrange Expansion e X rappresenta il numero di nodi utilizzati per discretizzare la sezione trasversale o lo spessore della struttura [7, 44].

Per maggiore chiarezza in figura 2.12 vengono riportati tre elementi, utilizzati nel caso trave per discretizzare le sezioni trasversali lungo l'asse  $y$ . In ciascuno viene evidenziato il sistema di riferimento dell'elemento stesso, utile per descrivere le funzioni di Lagrange relative ad ogni caso.



**Figura 2.12:** Elementi 2D con espansioni di Lagrange - LE4, LE9, LE16

**Elemento LE4** In questo caso abbiamo un'espansione costruita con 4 funzioni di forma di Lagrange, definite su 4 nodi Lagrangiani equidistanti (o distribuiti secondo un criterio specifico) nel piano  $x - z$ , come nel caso delle travi qui analizzato. In questa formulazione si parla di interpolazione bi-lineare, con la seguente espressione della funzione di Lagrange [44]:

$$L_\tau = \frac{1}{4}(1 + rr_\tau)(1 + ss_\tau) \quad \tau = 1, 2, 3, 4 \quad (2.16)$$

dove  $r$  e  $s$  sono dei valori che variano da  $-1$  a  $+1$ , mentre  $r_\tau$  e  $s_\tau$  sono le coordinate dei punti di Lagrange in coordinate naturali. Successivamente si dovrà passare dal sistema in coordinate naturali a quelle reali.

**Elemento LE9** Allo stesso modo questo indica che l'elemento considerato presenta 9 nodi e quindi 9 funzioni di forma. In questo caso si parla di interpolazione bi-quadratica, con le seguenti espressioni delle funzioni di Lagrange [44]:

$$L_\tau = \frac{1}{4(r^2 + rr_\tau)(s^2 + ss_\tau)} \quad \tau = 1, 3, 5, 7$$

$$L_\tau = \frac{1}{2s_\tau^2}(s^2 - ss_\tau)(1 - r^2) + \frac{1}{2r_\tau^2}(r^2 - rr_\tau)(1 - s^2) \quad \tau = 2,4,6,8 \quad (2.17)$$

$$L_\tau = (1 - r^2)(1 - s^2) \quad \tau = 9$$

**Elemento LE16** In quest'ultimo caso l'elemento considerato presenta 16 nodi e quindi 16 funzioni di forma. In questo caso si parla di interpolazione bi-cubica, con le seguenti espressioni delle funzioni di Lagrange [44]:

$$L_\tau = \frac{81}{256(1 + rr_\tau)(1 + ss_\tau)} \left( \frac{1}{9} - r^2 \right) \left( \frac{1}{9} - s^2 \right) \quad \tau = 1,4,7,10$$

$$L_\tau = \frac{243}{256}(1 - r^2) \left( s^2 - \frac{1}{9} \right) \left( \frac{1}{3} + 3rr_\tau \right) (1 + ss_\tau) \quad \tau = 2,3,8,9 \quad (2.18)$$

$$L_\tau = \frac{243}{256}(1 - s^2) \left( r^2 - \frac{1}{9} \right) \left( \frac{1}{3} + 3ss_\tau \right) (1 + rr_\tau) \quad \tau = 5,6,11,12$$

$$L_\tau = \frac{729}{256}(1 - r^2)(1 - s^2) \left( \frac{1}{3} + 3rr_\tau \right) \left( \frac{1}{3} + 3ss_\tau \right) \quad \tau = 13,14,15,16$$

Il numero di nodi sta a indicare il grado di dettaglio della discretizzazione e consente di capire quanti gradi di libertà vengono associati alla sezione per ciascun punto. Importante notare che il numero di nodi Lagrangiani non corrisponde direttamente al grado del polinomio usato nell'espansione, come invece avviene nelle espansioni di Taylor, ma corrisponde al numero di punti in cui il campo è esattamente noto o controllato. Infatti nel caso di LE9 il termine di grado massimo è pari a due, mentre per LE16 è pari a tre.

### 2.3.3 Espansioni miste di Taylor e Lagrange 1D

Nello sviluppo di teorie strutturali raffinate si può scegliere di utilizzare un solo tipo di polinomi, come quelli di Taylor o di Lagrange. Tuttavia, in determinate applicazioni, l'impiego di una combinazione di basi polinomiali può offrire un significativo miglioramento in termini di accuratezza e versatilità del modello. L'approccio delle teorie a espansione mista [36] si basa proprio su questo principio, consentendo di descrivere un singolo campo cinematico, come quello di spostamento, attraverso una combinazione lineare di funzioni di espansione provenienti da diverse famiglie. Sostanzialmente si può scegliere di sviluppare l'espansione lungo una direzione con un certo polinomio, per esempio Taylor o Lagrange, e sviluppare quella lungo un'altra direzione con un altro polinomio. Data la differenza in termini di accuratezza tra Taylor e Lagrange risulta molto utile poter scegliere dove applicare la *LE* in modo da risparmiare costo computazionale nelle altre direzioni. Infatti se ci serve una migliore discretizzazione solo su una certa direzione le espansioni miste

possono risultare molto utili.

Grazie a questa strategia si riescono ad ottenere ottimi risultati per determinate analisi di valori di spostamento o di tensioni, con numeri sicuramente inferiori di gradi di libertà.

## 2.4 2D Carrera Unified Formulation

In questo capitolo ci si concentrerà nel proporre una visione completa del funzionamento della teoria CUF e la sua applicazione anche nei modelli bidimensionali piastra e guscio di ordine superiore [9]. Anche in questo caso riusciamo ad ottenere delle analisi con modelli computazionalmente più convenienti ma allo stesso tempo precisi e raffinati. La procedura è sicuramente simile a quella vista per il caso trave. Consideriamo un modello di guscio generico, con le variabili del problema definite in base alla posizione specifica nello spessore del guscio. In figura viene mostrato un esempio di modello guscio. Il primo passo è la definizione del campo di spostamenti, utilizzando anche in questo caso delle funzioni di espansione e delle variabili equivalenti che consentono di passare da un problema 3D a uno 2D:

$$u^k(\alpha, \beta, z) = \sum_{\tau=1}^M F_{\tau}^k(z) u_{\tau}^k(\alpha, \beta) = F_{\tau}^k(z) u_{\tau}^k(\alpha, \beta) \quad \tau = 1, 2, \dots, M \quad (2.19)$$

dove i vari termini indicano:

- $F_{\tau}^k(z)$  è una funzione di espansione che agisce sullo spessore del guscio e ne definisce la cinematica;
- $u_{\tau}^k(\alpha, \beta)$  rappresenta gli spostamenti generalizzati sulla superficie media del guscio;
- $M$  è il numero di termini della funzione d'espansione, scelto in base al grado della guscio da valutare;
- $k$  è l'indice del grado di libertà generalizzato.

Nello specifico viene riportata la notazione degli spostamenti per ciascuna direzione  $\alpha, \beta, z$ :

$$\begin{aligned} u_{\alpha}^k &= F_{u_{\alpha}\tau}^k(z) u_{\alpha\tau}^k(\alpha, \beta), & \tau &= 1, 2, \dots, M_{u_{\alpha}} \\ u_{\beta}^k &= F_{u_{\beta}\tau}^k(z) u_{\beta\tau}^k(\alpha, \beta), & \tau &= 1, 2, \dots, M_{u_{\beta}} \\ u_z^k &= F_{u_z\tau}^k(z) u_{z\tau}^k(\alpha, \beta), & \tau &= 1, 2, \dots, M_{u_z} \end{aligned} \quad (2.20)$$

L'adozione della notazione di Einstein implica che l'indice ripetuto  $\tau$  sottintende una sommatoria su tutti i termini dell'espansione. L'uso di funzioni di espansione nello

spessore del guscio per i modelli 2D consente di ottenere un campo di spostamenti completamente tridimensionale, e quindi di derivare un tensore delle deformazioni e delle tensioni anch'esso 3D. Anche in questo caso grazie alla nuova formulazione le funzioni di espansione sono distinte per ogni componente di spostamento e per ogni grado di libertà generalizzato, portando ai vantaggi descritti in precedenza. Allo stesso modo del caso trave si possono scegliere delle funzioni di espansione arbitrarie in base quale risulta più conveniente in determinati contesti. Infatti si possono scegliere funzioni polinomiali, di vario ordine, trigonometriche, esponenziali o armoniche [70]. Le classi di funzione più utilizzate e più efficienti, come abbiamo già visto, sono:

- Espansione di Taylor, TE
- Espansione di Lagrange, LE
- Espansione gerarchica di Legendre, HLE

Anche in questo caso ci concentreremo sulle TE e LE.

### 2.4.1 Espansione di Taylor 2D

Nel contesto dell'analisi di strutture bidimensionali come i gusci, i polinomi di Taylor rappresentano una scelta efficiente per costruire teorie strutturali raffinate. L'espansione di Taylor (TE) utilizza una serie di Taylor del tipo  $z^b$  come funzioni di espansione [1], dove  $b$  è un indice intero. Questo porta a una base gerarchica di funzioni, in cui l'ordine polinomiale  $N$  è definito preliminarmente [67].

Tale metodo risulta essere ampiamente conveniente e flessibile. Il loro principale vantaggio risiede nella possibilità di includere un numero arbitrario di termini, permettendo così di esplorare fenomeni complessi con un maggior livello di dettaglio. Per esempio, l'espansione di Taylor del secondo ordine nel caso guscio, con  $N = 3$ , presenta 12 termini ed è definita come segue:

$$\begin{aligned} u_\alpha &= u_{\alpha_1} + zu_{\alpha_2} + z^2u_{\alpha_3} + z^3u_{\alpha_4} \\ u_\beta &= u_{\beta_1} + zu_{\beta_2} + z^2u_{\beta_3} + z^3u_{\beta_4} \\ u_z &= u_{z_1} + zu_{z_2} + z^2u_{z_3} + z^3u_{z_4} \end{aligned} \tag{2.21}$$

Le teorie che presentano tutti i termini dell'espansione vengono dette *teorie uniformi*. In questo caso, come possiamo notare, in tutte e tre le relazioni dello spostamento  $u$  abbiamo lo stesso numero di termini e lo stesso grado massimo del polinomio. Come si può vedere di seguito, in certe condizioni si può scegliere anche di utilizzare degli ordini di espansione diversi nelle tre direzioni, portando all'utilizzo di *teorie differenti*.

$$u_\alpha = u_{\alpha_1} + zu_{\alpha_2} + z^2u_{\alpha_3}$$

$$u_\beta = u_{\beta_1} + zu_{\beta_2} + z^2u_{\beta_3} + z^3u_{\beta_4} + z^4u_{\beta_5} + z^5u_{\beta_6} \quad (2.22)$$

$$u_z = u_{z_1} + zu_{z_2}$$

In altri casi si può pensare di utilizzare delle *teorie ridotte*, dove si sceglie di eliminare appositamente determinati termini dell'espansione per ridurre il costo computazionale cercando di mantenere un elevato livello di accuratezza.

Di seguito viene riportato un esempio di teorie ridotte:

$$u_\alpha = u_{\alpha_1} + z^2u_{\alpha_3}$$

$$u_\beta = u_{\beta_1} + zu_{\beta_2} + z^5u_{\beta_6} \quad (2.23)$$

$$u_z = u_{z_1} + z^3u_{z_4} + z^5u_{z_6}$$

## 2.4.2 Espansione di Lagrange 2D

Anche nel caso guscio le funzioni di espansione di Lagrange [68] sono costruite in modo da interpolare il campo di spostamenti su un insieme discreto di punti, i nodi Lagrangiani distribuiti sullo spessore della struttura analizzata [7].

Di base, il campo di spostamenti di un modello generico viene espresso come prodotto tra funzioni di espansione e variabili generalizzate, e in particolare con la LE la funzione di espansione utilizzata è una combinazione lineare di funzioni di forma di Lagrange definite su M nodi. In generale si può scrivere:

$$u(\alpha, \beta, z) = \sum_{\tau=1}^M L_\tau(z) u_\tau(\alpha, \beta) \quad (2.24)$$

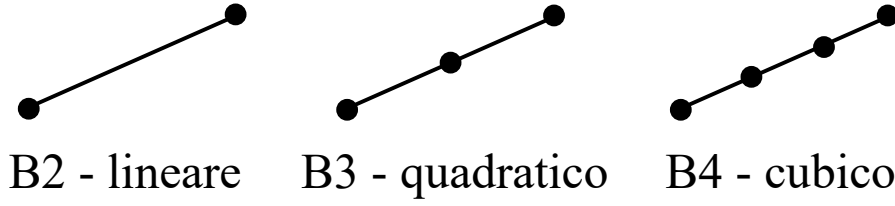
dove:

- $L_\tau(z)$  è la funzione di Lagrange associata al nodo  $\tau$ , definita nello spazio  $(x, z)$  nel caso di trave o  $(z)$  per la piastra
- $u_\tau(\alpha, \beta)$  è il vettore delle variabili generalizzate lungo la direzione dello spessore
- $M$  è il numero totale di nodi Lagrangiani, scelto in base al numero di strati o all'accuratezza richiesta

Nella *Carrera Unified Formulation* l'espansione di Lagrange viene indicata con LE-X, dove LE indica appunto la Lagrange Expansion e X rappresenta il numero di nodi utilizzati per discretizzare la sezione trasversale o lo spessore della struttura [44].

Per maggiore chiarezza in figura 2.13 vengono riportati tre elementi, utilizzati nel caso piastra per discretizzare lo spessore del guscio lungo l'asse  $z$ .





**Figura 2.13:** Elementi 1D con espansioni di Lagrange - LE2, LE3, LE4

**Elemento LE2** In questo caso abbiamo un'espansione costruita con 2 funzioni di forma di Lagrange, definite su 2 nodi Lagrangiani equidistanti (o distribuiti secondo un criterio specifico) lungo l'asse  $z$ , relativo al caso guscio analizzato. In questa formulazione si parla di interpolazione lineare, con le seguenti espressioni delle funzioni di Lagrange [44]:

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{1}{2}(1 - r) \\ L_2 &= \frac{1}{2}(1 + r) \end{aligned} \quad \text{with} \quad \begin{cases} r_1 = -1 \\ r_2 = 1 \end{cases} \quad (2.25)$$

dove  $r$  e  $s$  sono dei valori che variano da  $-1$  a  $+1$ , mentre  $r_\tau$  e  $s_\tau$  sono le coordinate dei punti di Lagrange in coordinate naturali. Successivamente si dovrà passare dal sistema in coordinate naturali a quelle reali.

**Elemento LE3** Allo stesso modo questo elemento indica la presenta 3 nodi e quindi 3 funzioni di forma. In questo caso si parla di interpolazione quadratica, con le seguenti espressioni delle funzioni di Lagrange [44]:

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{1}{2}r(1 - r) \\ L_2 &= -(1 - r)(1 + r) \\ L_3 &= \frac{1}{2}r(1 + r) \end{aligned} \quad \text{with} \quad \begin{cases} r_1 = -1 \\ r_2 = 0 \\ r_3 = 1 \end{cases} \quad (2.26)$$

**Elemento LE4** Infine si esplicita il seguente caso, dove l'elemento considerato presenta 4 nodi e quindi 4 funzioni di forma. In questo caso si parla di interpolazione

cubica, con le seguenti espressioni delle funzioni di Lagrange [44]:

$$\begin{aligned} L_1 &= -\frac{9}{16} \left(r + \frac{1}{3}\right) \left(r - \frac{1}{3}\right) (r - 1) \\ L_2 &= -\frac{27}{16} (r - 1) \left(r - \frac{1}{3}\right) (r + 1) \\ L_3 &= -\frac{27}{16} (r + 1) \left(r + \frac{1}{3}\right) (r - 1) \\ L_4 &= \frac{9}{16} \left(r + \frac{1}{3}\right) \left(r - \frac{1}{3}\right) (r + 1) \end{aligned} \quad \text{with} \quad \begin{cases} r_1 = -1 \\ r_2 = -\frac{1}{3} \\ r_3 = \frac{1}{3} \\ r_4 = 1 \end{cases} \quad (2.27)$$

Il numero di nodi sta a indicare il grado di dettaglio della discretizzazione e consente di capire quanti gradi di libertà vengono associati alla sezione per ciascun punto. Anche nel caso guscio il numero di nodi Lagrangiani non corrisponde direttamente al grado del polinomio usato nell'espansione, ma corrisponde al numero di punti in cui il campo è esattamente noto o controllato.

### 2.4.3 Espansioni miste di Taylor e Lagrange 2D

Come già visto per lo studio delle espansioni nelle teorie trave, anche nelle teorie guscio si può valutare di non utilizzare lo stesso ordine di espansione o lo stesso tipo di espansione nelle direzioni  $\alpha, \beta, z$ . In questo modo, in base alle esigenze del caso studiato, si può scegliere in quale direzione utilizzare un'espansione di ordine superiore o un modello più accurato, come Lagrange piuttosto che Taylor.

Più elevato è l'ordine del polinomio e maggiore sarà il livello di accuratezza della soluzione. Dato che i polinomi di Lagrange richiedono un numero di gradi di libertà più elevato rispetto a quelli di Taylor, a parità di ordine dell'espansione, risulta più conveniente utilizzarli solo dove necessario.

## 2.5 Teoria del metodo agli elementi finiti, FEM

Il metodo agli elementi finiti, noto come FEM (Finite Element Method), è uno degli strumenti numerici più potenti e versatili per l'analisi di problemi ingegneristici complessi, in particolare quelli che derivano dalla meccanica dei continui [7]. Nel contesto strutturale, il FEM permette di studiare il comportamento di componenti e sistemi [71] sottoposti a carichi, vincoli e condizioni di contorno anche molto articolate, rendendo possibile la risoluzione di problemi che non ammettono una soluzione analitica o che presentano una geometria irregolare, materiali eterogenei o stratificati, e carichi non uniformi [71].

Alla base di questo metodo vi è l'idea di trasformare un problema continuo in un problema discreto, suddividendo il dominio in un insieme di sottodomini più piccoli e regolari, detti elementi finiti [72]. In ogni elemento il comportamento

strutturale viene approssimato mediante funzioni di interpolazione, che descrivono le grandezze incognite in funzione dei valori assunti in un numero finito di punti nodali. L'insieme di elementi e nodi costituisce la mesh strutturale. La soluzione globale del problema può essere costruita componendo le soluzioni locali di ciascun elemento, per il principio della continuità. Applicando una formulazione variazionale, come il principio dei lavori virtuali o il metodo di Galerkin [73], si ottiene un sistema di equazioni algebriche che rappresenta il comportamento statico o dinamico della struttura. La risoluzione numerica di questo sistema fornisce una soluzione approssimata al problema originario.

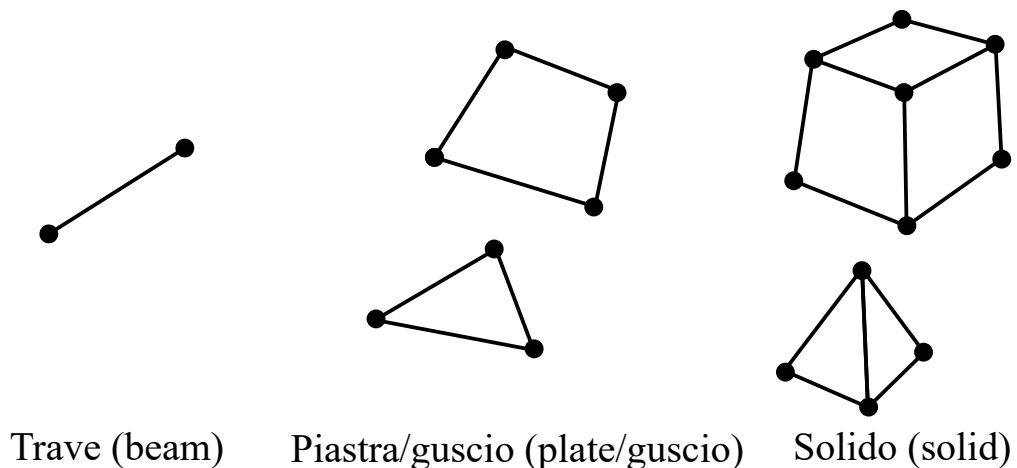
Tra i vantaggi del FEM abbiamo che:

- è applicabile a domini geometrici arbitrari, anche complessi e tridimensionali
- si possono modellare materiali non omogenei, anisotropi o laminati
- è compatibile con qualsiasi condizione di carico o di vincolo, come pressioni variabili, carichi localizzati o condizioni non lineari
- può essere combinato con approcci quali la CUF [43, 65]

L'approssimazione che si ottiene è controllabile in quanto risulta:

- legata al numero di elementi di mesh
- legata al grado delle funzioni di forma
- dipendente dal tipo di modello cinematico utilizzato

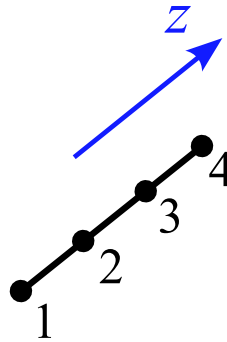
Nel nostro campo possiamo utilizzare vari tipi di elementi finiti [74], in base alla geometria e alla dimensione del problema, se 1D, 2D o 3D, come mostrato in figura 2.14.



**Figura 2.14:** Elementi finiti nei modelli FEM

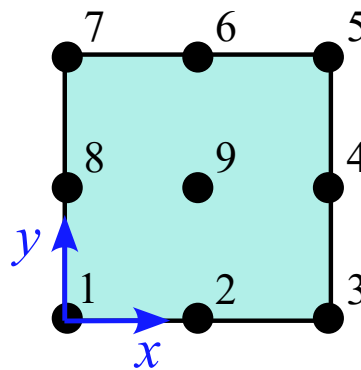
Tra i più importanti si trovano:

- Travi (1D)  
elementi beam possono essere ad esempio con 2, 3 o 4 nodi, dove ogni nodo presenta un certo numero di gradi di libertà. Risultano utili per modellare strutture snelle che si sviluppano lungo una dimensione principale. Più nodi vengono considerati nell'elemento e più complessa può essere la funzione che descrive l'andamento della grandezza considerata [75]. In figura 2.15 viene riportato un esempio di elemento trave 1D.



**Figura 2.15:** Elemento trave 1D

- Piastre o gusci (2D)  
sono degli elementi con due dimensioni caratteristiche sul piano. Tra questi elementi i più utilizzati sono i  $Q4$ ,  $Q9$  o  $Q16$ , con 4, 9 o 16 nodi, e consentono di ottenere interpolazioni quadratiche [56]. La differenza tra gli elementi più utilizzati  $Q4$  e  $Q9$  sta proprio nei nodi utilizzati e nella posizione stessa di questi. Gli elementi più complessi, anche in questo caso, sono quelli con un maggior numero di nodi. In figura 2.16 viene riportato un esempio di elemento *quad* con un'espansione LE9.



**Figura 2.16:** Elemento guscio 2D

- Solidi (3D)  
utilizzati nei modelli tridimensionali completi con un costo computazionale di gran lunga maggiore.

In questa trattazione ci si concentra sull'utilizzo di elementi 1D o 2D, in quanto riducendo notevolmente il costo computazionale si riesce comunque ad ottenere un risultato ben accettabile.

### 2.5.1 Elementi finiti 1D

L'elemento finito 1D, anche noto come elemento trave, rappresenta uno degli elementi utilizzati per l'analisi strutturale più utili e computazionalmente convenienti. In questo caso una sola dimensione, la lunghezza, è significativamente maggiore rispetto alle altre due dimensioni della sezione trasversale. L'utilizzo di questi elementi si rivela cruciale per la riduzione del costo computazionale in problemi complessi, consentendo di studiare in modo efficiente il comportamento di componenti strutturali snelle come longheroni e correnti, tipiche del settore aerospaziale. A differenza delle teorie classiche, che si basano su assunzioni cinematiche semplificate, l'approccio adottato sfrutta la Carrera Unified Formulation (CUF), una costruzione gerarchica delle teorie che consente di costruire un modello cinematico raffinato, in grado di riportare con accuratezza gli effetti di deformazione attraverso la sezione trasversale della trave. Il modello cinematico quindi non è predefinito, ma può essere adattato in base alle esigenze di accuratezza del problema, trovando un compromesso tra realtà fisica e costo computazionale [75].

Il processo di risoluzione di un problema strutturale complesso tramite il metodo agli elementi finiti inizia con la discretizzazione del dominio continuo. Nel caso di un elemento trave, bisogna effettuare la suddivisione della lunghezza dell'elemento stesso in un numero finito di elementi, interconnessi tra loro in punti discreti chiamati nodi [71].

Per ogni elemento, il comportamento strutturale viene descritto approssimando il campo di spostamento generalizzato,  $u^e(x)$ , tramite l'interpolazione dei valori nodali. In questo processo vengono utilizzate delle funzioni di forma [7], o di interpolazione,  $N_i(x)$ , che sono solitamente polinomi di Lagrange. La relazione che lega il campo di spostamento generalizzato all'interno dell'elemento ai valori nodali è:

$$u^e(y) = \sum_{i=1}^n N_i(y)u_i \quad (2.28)$$

dove  $N_i(x)$  sono proprio le funzioni di forma associate al nodo  $i$ -esimo e  $u_i$  sono gli spostamenti nodali, ovvero le incognite.

Tale formulazione permette di trasformare il problema continuo (statico) in un sistema algebrico di tipo:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{P} \quad (2.29)$$

dove  $\mathbf{K}$  è la matrice di rigidezza globale, ottenuta dall'assemblaggio delle rigidezze locali,  $\mathbf{u}$  è il vettore degli spostamenti nodali e  $\mathbf{P}$  è il vettore dei carichi esterni. Vengono riportati vari studi che mostrano come si esegue l'assemblaggio della matrice di rigidezza e del vettore dei carichi [76].

### 2.5.2 Elementi finiti 2D

Gli elementi finiti 2D, noti anche come elementi guscio o piastra, sono tra gli elementi più utilizzati per descrivere strutture geometricamente più complesse delle semplici travi. Questi elementi vengono spesso utilizzati nel settore aerospaziale per lo studio di strutture come ali, fusoliere e serbatoi. L'uso di questi elementi permette di analizzare distribuzioni di carico su superfici estese in maniera efficiente, avvicinandosi in certi casi ai risultati derivanti da analisi con elementi ancora più complessi e computazionalmente costosi.

Come visto negli elementi 1D, l'approccio adottato in questo lavoro si basa sulla Carrera Unified Formulation (CUF), che risulta fondamentale per superare i limiti e le difficoltà che si hanno nelle teorie classiche. In questo modo si riescono a catturare gli effetti di deformazione e tensione lungo lo spessore di una struttura. Anche il processo di risoluzione tramite FEM per strutture bidimensionali inizia con la discretizzazione del dominio [71]. In questo caso, la superficie media della struttura viene suddivisa in un certo numero di elementi finiti 2D, che possono assumere varia forma come triangolare o quadrata [15]. Gli elementi creati sono connessi tra di loro in punti discreti, detti nodi, posti sul piano medio dell'elemento o sul suo contorno. Per ogni elemento finito, il comportamento strutturale viene approssimato interpolando il campo di spostamento generalizzato all'interno dell'elemento partendo dai valori che si hanno sui punti nodali [77]. A differenza degli elementi 1D, l'interpolazione avviene sulla superficie. Per un elemento con  $n$  nodi, il campo di spostamento generalizzato è espresso come:

$$u^e(x, y) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y) u_i \quad (2.30)$$

dove i termini sono gli stessi di quelli descritti nel caso 1D.

Attraverso l'applicazione del principio dei lavori virtuali si riesce a trasformare il problema continuo in un sistema di equazioni algebriche [78]. In base all'analisi che si vuole effettuare il sistema matriciale può essere scritto diversamente.

## 2.6 Equazioni di governo con applicazione CUF

L'analisi della risposta dinamica riveste un ruolo di primaria importanza nella progettazione e verifica delle strutture ingegneristiche, anche per il settore aerospaziale.

Diversamente dall'analisi statica, che considera condizioni di equilibrio stazionario, l'analisi dinamica [79] tiene conto delle forze inerziali e delle variazioni temporali delle sollecitazioni. In questo modo si riescono a identificare fenomeni critici come risonanze, oscillazioni forzate e risposte transitorie [80, 81].

Nel contesto delle strutture aerospaziali, componenti come ali, fusoliere e stabilizzatori sono costantemente soggetti a un'ampia gamma di eccitazioni dinamiche, tra cui raffiche di vento, vibrazioni generate dai motori, carichi di atterraggio e manovre varie. Tali condizioni possono portare a spostamenti significativi, oltre che a stati di tensione e deformazione localizzati che, se non adeguatamente previsti e gestiti, possono portare a fenomeni di fatica, rottura o instabilità. Lo studio della risposta dinamica è quindi indispensabile per ottimizzare il design strutturale, minimizzare il peso, e massimizzare la vita utile dei componenti.

Si farà ricorso alla Carrera Unified Formulation (CUF), un approccio gerarchico avanzato che consente di generare teorie strutturali di varia complessità, capaci di catturare con elevata precisione sia il campo di spostamento che la distribuzione delle tensioni. In letteratura sono già state svolte analisi alle vibrazioni libere con teorie di ordine superiore [82], ma l'approccio CUF permette di ottenere risultati in maniera più efficiente. L'integrazione di CUF con l'approccio Component-Wise (CW) consente di modellare efficacemente strutture composite, riuscendo ad ottenere ottimi risultati nonostante la complessità di modellazione degli elementi in composito [80].

### 2.6.1 Principio dei lavori virtuali 1D e 2D

Per applicare quanto discusso nell'analisi dinamica è necessario l'utilizzo del Metodo degli Elementi Finiti (FEM) per la discretizzazione spaziale del problema [63]. Il FEM trasforma le equazioni differenziali del continuo in un sistema algebrico discreto, che può essere risolto numericamente. Le matrici di massa e di rigidezza sono create utilizzando il principio dei lavori virtuali. L'espressione base che definisce questo principio è la seguente:

$$\delta L_{int} = \delta L_{ext} - \delta L_{ine} \quad (2.31)$$

La formulazione proposta presenta determinate differenze in base al tipo di problema da affrontare, se 1D o 2D.

**PLV 1D** In questo caso possiamo sostituire i lavori virtuali con i termini integrali come di seguito:

$$\begin{aligned} \int_V (\delta \epsilon_{xx} \sigma_{xx} + \delta \epsilon_{yy} \sigma_{yy} + \delta \epsilon_{zz} \sigma_{zz} + \delta \epsilon_{xy} \sigma_{xy} + \delta \epsilon_{xz} \sigma_{xz} + \delta \epsilon_{yz} \sigma_{yz}) dV = \\ \int_V (\delta u_x P_{u_x} + \delta u_y P_{u_y} + \delta u_z P_{u_z}) dV - \int_V \rho (\delta u_x \ddot{u}_x + \delta u_y \ddot{u}_y + \delta u_z \ddot{u}_z) dV \end{aligned} \quad (2.32)$$

Da questa relazione si possono costruire le matrici di rigidezza e di massa, andando a dividere per la componente virtuale degli spostamenti. Di seguito si riportano le tre equazioni di governo:

$$\delta q_{x_{sj}} : K_{u_x u_{x_{s\tau ij}}} q_{x_{\tau i}} + K_{u_x u_{y_{s\tau ij}}} q_{y_{\tau i}} + K_{u_x u_{z_{s\tau ij}}} q_{z_{\tau i}} + M_{u_x u_{x_{s\tau ij}}} \ddot{q}_{x_{\tau i}} = P_{u_{x_{sj}}} \quad (2.33)$$

$$\delta q_{y_{sj}} : K_{u_y u_{x_{s\tau ij}}} q_{x_{\tau i}} + K_{u_y u_{y_{s\tau ij}}} q_{y_{\tau i}} + K_{u_y u_{z_{s\tau ij}}} q_{z_{\tau i}} + M_{u_y u_{y_{s\tau ij}}} \ddot{q}_{y_{\tau i}} = P_{u_{y_{sj}}} \quad (2.34)$$

$$\delta q_{z_{sj}} : K_{u_z u_{x_{s\tau ij}}} q_{x_{\tau i}} + K_{u_z u_{y_{s\tau ij}}} q_{y_{\tau i}} + K_{u_z u_{z_{s\tau ij}}} q_{z_{\tau i}} + M_{u_z u_{z_{s\tau ij}}} \ddot{q}_{z_{\tau i}} = P_{u_{z_{sj}}} \quad (2.35)$$

Attraverso i passaggi di assemblaggio per  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{P}$  possiamo ottenere la scrittura completa dell'equazione del moto in forma matriciale [76], senza considerare lo smorzamento:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{P}(t) \quad (2.36)$$

dove:

- $\mathbf{M}$  è la matrice di massa del sistema [83], che rappresenta l'inerzia della struttura;
- $\mathbf{K}$  è la matrice di rigidezza del sistema, derivata dalla formulazione CUF e che include l'intera gerarchia di teorie strutturali;
- $\mathbf{q}(t)$  è il vettore degli spostamenti generalizzati nodali, che descrivono la configurazione della struttura al tempo  $t$ ;
- $\ddot{\mathbf{q}}(t)$  è il vettore accelerazione, variabile anch'esso nel tempo;
- $\mathbf{P}(t)$  è il vettore dei carichi esterni applicati alla struttura, che possono essere variabili nel tempo.

La costruzione delle matrici di massa e di rigidezza avviene a livello del singolo elemento finito. Per un generico elemento, l'integrale variazionale che porta alle matrici  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{K}$  viene calcolato a partire dal campo di spostamento fornito dalla CUF.

Da questa scrittura completa dell'equazione del moto si possono ricavare le relazioni di casi specifici, eludendo determinati termini:

- Analisi statica, senza forze inerziali, considerando dunque  $\mathbf{M} = \mathbf{0}$ .

$$\mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{P} \quad (2.37)$$

- Analisi alle vibrazioni libere, senza forze esterne applicate, considerando dunque  $\mathbf{P}(t) = \mathbf{0}$ .

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{0} \quad (2.38)$$



- Analisi dinamica di risposta nel tempo, con forze esterne applicate e forze inerziali.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{P}(t) \quad (2.39)$$

**PLV 2D** Nel caso di elemento bidimensionale, come ad esempio un guscio, bisogna considerare i parametri di curvatura e gli assi appropriati. Si ottiene la seguente formulazione con i lavori virtuali:

$$\begin{aligned} \int_V (\delta\epsilon_{\alpha\alpha}\sigma_{\alpha\alpha} + \delta\epsilon_{\beta\beta}\sigma_{\beta\beta} + \delta\epsilon_{zz}\sigma_{zz} + \delta\epsilon_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} + \delta\epsilon_{\alpha z}\sigma_{\alpha z} + \delta\epsilon_{\beta z}\sigma_{\beta z}) H_\alpha H_\beta d\alpha d\beta dz = \\ \int_V (\delta u_\alpha P_{u_\alpha} + \delta u_\beta P_{u_\beta} + \delta u_z P_{u_z}) H_\alpha H_\beta d\alpha d\beta dz \\ - \int_V \rho (\delta u_\alpha \ddot{u}_\alpha + \delta u_\beta \ddot{u}_\beta + \delta u_z \ddot{u}_z) H_\alpha H_\beta d\alpha d\beta dz \end{aligned} \quad (2.40)$$

Allo stesso modo di quanto visto nel caso 1D, anche in questo caso si scrivono le tre equazioni di governo con tutti i termini presenti. A differenza del caso precedente bisogna considerare i termini  $H_\alpha$  e  $H_\beta$ , che sono essenziali per descrivere la curvatura dell'elemento. Attraverso i passaggi di assemblaggio delle matrici  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{P}$  si ottiene la scrittura matriciale completa, che può subire le opportune modifiche in base al tipo di analisi che si vuole eseguire.

## 2.6.2 Integrazione temporale con metodo di Newmark

L'equazione di moto non smorzata rappresenta il punto di partenza per l'analisi dinamica, la cui soluzione permette di determinare l'evoluzione temporale del vettore degli spostamenti generalizzati  $q(t)$  e, da esso, dei campi di spostamento, deformazione e tensione in ogni punto della struttura.

Una volta ottenute le equazioni di moto discretizzate del sistema, il passaggio successivo è quello di risolverle per determinare la risposta dinamica della struttura nel tempo. La soluzione di un'equazione differenziale del secondo ordine, come quella del moto, può essere complessa e l'approccio più comune consiste nell'utilizzare schemi di integrazione numerica temporale [84]. Questi metodi possono essere classificati in due categorie principali: i metodi di integrazione diretta e i metodi basati sulla sovrapposizione modale. I primi risolvono le equazioni di moto direttamente nel dominio del tempo, mentre i secondi si basano su una trasformazione modale per disaccoppiare il sistema di equazioni. In questa trattazione si è scelto di utilizzare il metodo di integrazione diretta di Newmark.

**Metodo di Newmark** Questo è uno degli schemi di integrazione diretta più diffusi per la soluzione delle equazioni di moto dinamiche [63]. Si tratta di un

metodo passo-passo che approssima il comportamento del sistema a intervalli di tempo discreti,  $\Delta t$ . A ogni passo, il metodo risolve un sistema di equazioni lineari per determinare la configurazione futura del sistema basandosi sulla sua configurazione attuale.

Sostituendo le relazioni appropriate nell'equazione di moto all'istante  $t + \Delta t$ , si ottiene un sistema di equazioni che può essere risolto per  $q_{t+\Delta t}$ . La matrice dei coefficienti del sistema, nota come matrice di rigidezza efficace, rimane costante se la matrice di rigidezza del sistema è costante, permettendo di fattorizzarla una sola volta e rendendo ogni passo temporale computazionalmente efficiente.

## 2.7 Soluzioni numeriche per problemi di shear locking

Nelle teorie strutturali classiche per travi e gusci, che considerano la deformazione da taglio, un problema numerico critico noto come shear locking può manifestarsi quando si utilizzano elementi finiti con un'approssimazione polinomiale troppo rigida [85]. Questo fenomeno si verifica soprattutto quando si analizzano strutture estremamente snelle, come travi e piastre sottili, con il rapporto  $\frac{L}{a}$  o  $\frac{a}{h}$  è molto elevato, dove la rigidità flessionale è molto maggiore della rigidità a taglio.

In queste condizioni, un modello agli elementi finiti standard tende a vincolare la rotazione della sezione trasversale in modo tale che essa rimanga quasi perpendicolare al piano medio, comportandosi in modo simile alla teoria di Eulero-Bernoulli o Kirchhoff-Love. Il risultato è che la deformazione da taglio viene approssimata in modo errato come quasi nulla, introducendo un'eccessiva rigidità artificiale nell'elemento. Questa rigidità aggiuntiva produce un'oscillazione della soluzione numerica, sovrastimando la rigidezza globale della struttura e sottostimando drasticamente gli spostamenti, portando a risultati non realistici e a una convergenza molto lenta. In un modello che considera la deformazione da taglio, i termini di energia di deformazione legati alla flessione e al taglio dovrebbero essere correttamente bilanciati. Lo shear locking si verifica quando il contributo dell'energia di deformazione da taglio diventa preponderante e domina l'analisi, anche in condizioni di snellezza elevate, portando ad avere un modello non fedele alla realtà e rendendo l'approccio computazionalmente inutile senza l'adozione di tecniche correttive specifiche [26]. Per mitigare gli effetti negativi dello shear locking sono state sviluppate specifiche tecniche numeriche. Nel contesto delle teorie CUF e della FEM, le due soluzioni principali adottate sono la tecnica SELI (per le travi) e la tecnica MITC (per le piastre e i gusci) [86]. È fondamentale sottolineare che, pur lavorando sulla stessa problematica, queste metodologie agiscono a livello della formulazione numerica del FEM e non sulla teoria CUF in sé [87].

Di seguito si espongono le due metodologie usate per i due tipi di elementi analizzati, trave e guscio:

- **Metodo SELI per trave 1D**

Per gli elementi finiti di tipo trave, una delle soluzioni più efficaci per lo shear locking è l'integrazione numerica selettiva, nota come SELI (SElective Integration). Questo metodo si basa sull'idea di integrare in modo differenziato i termini dell'energia di deformazione. L'energia di deformazione flessionale viene calcolata utilizzando un'integrazione numerica standard, come quella a 2 punti di Gauss nel caso di elementi B2, mentre l'energia di deformazione dovuta al taglio viene calcolata con un numero di punti di integrazione ridotto, per esempio a 1 solo punto di Gauss. L'integrazione ridotta per il termine di taglio elimina la rigidità spuria, poiché l'interpolazione del campo di deformazione da taglio non può catturare le deformazioni indesiderate che causano il locking [27].

- **Metodo MITC per guscio 2D**

Nel caso di elementi bidimensionali come le piastre e i gusci, la gestione dello shear locking è più complessa. Una delle tecniche più efficaci e ampiamente validate è il metodo MITC (Mixed Interpolation of Tensorial Components) [88]. Questo approccio adotta una formulazione mista che interpola separatamente i campi di spostamento e di deformazione. Il principio del MITC è quello di selezionare punti specifici all'interno dell'elemento, dove le deformazioni da taglio vengono calcolate e interpolate. Queste interpolazioni non sono basate direttamente sulle derivate delle funzioni di forma degli spostamenti, ma su funzioni di interpolazione specifiche che evitano la rigidità numerica. Per l'elemento Q9 (con 9 nodi) che si presta bene alla discretizzazione CUF, il MITC è particolarmente efficace nel garantire risultati accurati anche in configurazioni di guscio molto sottile, dove i modelli tradizionali fallirebbero [89]. Tale strumento risulta molto utile in vari tipi di analisi, come quella dinamica [90]. La matrice di rigidezza del FEM viene modificata attraverso il MITC per eliminare l'errore numerico e garantire la corretta risposta a taglio. Questo approccio è stato ampiamente validato nella letteratura scientifica, dimostrando che produce risultati accurati e affidabili per l'analisi di piastre e gusci.

## Capitolo 3

# Metodi di selezione delle migliori teorie strutturali per travi e gusci

Nel seguente capitolo l'obiettivo è quello di realizzare dei diagrammi che ci permettano di valutare le migliori teorie strutturali per effettuare varie tipologie di analisi, cercando di utilizzare il minor numero possibile di gradi di libertà.

Questi diagrammi, chiamati *Best Theories Diagrams* o *BTD*, vengono creati attraverso un procedimento che comprende il metodo asintotico-assiomatico e la valutazione dell'errore relativo. Essi sono molto utilizzati in questo campo proprio per scegliere le migliori teorie da utilizzare con la massima efficienza.

### 3.1 Metodo asintotico-assiomatico, AAM

Nel corso degli anni, lo sviluppo di teorie strutturali per l'analisi di travi, piastre e gusci ha portato ad avere una grande quantità di modelli, ciascuno caratterizzato da diversi livelli di accuratezza, complessità computazionale e campi di applicazione. In base alla tipologia di problema proposto, come la valutazione di spessore, anisotropia, condizioni al contorno o proprietà del materiale, alcune teorie risultano più adeguate di altre.

Questa dipendenza specifica da caso a caso rende estremamente difficile selezionare a priori la teoria più adatta. In ambito CUF, dove è possibile generare centinaia di modelli attraverso combinazioni diverse di variabili generalizzate, si può scegliere in modo arbitrario o empirico quale teoria adottare per una determinata applicazione. Il metodo assiomatico-asintotico (AAM) è una procedura ideata per analizzare e selezionare teorie strutturali all'interno di formulazioni gerarchiche, come la

CUF [91]. L'obiettivo principale dell'AAM è valutare, in maniera sistematica e non empirica, quali variabili generalizzate, ovvero quali termini dell'espansione, contribuiscono in modo significativo alla risposta del modello strutturale per un determinato problema.

L'AAM si fonda su due concetti fondamentali:

- una parte assiomatica, che consiste nella generazione di tutte le possibili combinazioni logiche dei termini della teoria completa
- una parte asintotica [38], che consente di studiare come l'importanza di ciascun termine varia al variare dei parametri del problema, come lo spessore della struttura, il tipo di materiale isotropo o ortotropo, la configurazione laminata o le condizioni al contorno

L'approccio AAM consente quindi di costruire modelli ridotti ottimizzati, selezionando solo le variabili necessarie per raggiungere un certo livello di accuratezza [40]. Questi modelli possono poi essere confrontati tra loro per mezzo di strumenti come i Best Theory Diagrams (BTD), che evidenziano il compromesso tra precisione e costo computazionale. L'applicazione del metodo assiomatico-asintotico segue una serie di passaggi precisi. Il procedimento può essere descritto come segue:

- Definizione del problema fisico: si stabiliscono le caratteristiche geometriche, i materiali, le condizioni al contorno e l'obiettivo dell'analisi. In questa fase si fissa anche la teoria completa di riferimento, da usare come confronto per valutare l'accuratezza.
- Generazione delle combinazioni teoriche, parte assiomatica: vengono costruite tutte le combinazioni possibili dei termini generalizzati della teoria completa. Ogni combinazione corrisponde a una teoria ridotta distinta, definita dal sottoinsieme di variabili utilizzate. Se la teoria completa ha  $n$  termini, il numero totale di combinazioni sarà  $2^n$ . Ogni combinazione può essere implementata usando gli elementi finiti.
- Valutazione dell'accuratezza (parte asintotica): per ciascun modello ridotto, si calcola la soluzione numerica e si confronta con quella ottenuta dal modello completo. Si definisce quindi un certo errore, come l'errore medio percentuale, che quantifica la perdita di accuratezza associata alla riduzione del numero di DOF.
- Costruzione del Best Theory Diagram (BTD): i modelli ottenuti vengono rappresentati in un piano cartesiano in cui l'asse orizzontale indica il numero di DOF e l'asse verticale l'errore. I modelli che minimizzano l'errore per un dato numero di DOF costituiscono la curva BTD, che rappresenta l'involuppo delle teorie più efficienti.

- Analisi dell'influenza dei parametri del problema: ripetendo la procedura al variare di un parametro fisico, geometrico o condizioni al contorno, è possibile studiare in maniera asintotica come cambia l'importanza relativa delle variabili. Questo consente di identificare termini dominanti.

Il metodo assiomatico-asintotico può essere usato facilmente in unione alla CUF, che fornisce una visione chiara per la generazione automatica di modelli strutturali gerarchici [91]. La CUF consente di formulare gli elementi finiti a partire da un'espansione arbitraria del campo di spostamento lungo la direzione trasversale (nello spessore per piastre e gusci, lungo la sezione per travi). In questo modo risulta più semplice valutare l'influenza dei singoli termini generalizzati, permettendo di interpretare fisicamente il contributo di ciascuna variabile alla risposta globale.

### 3.2 Best Theories Diagrams, BTD

I Best Theories Diagrams (BTD) sono uno strumento molto utile per valutare e confrontare le teorie. Per crearli si utilizzano due parametri principali:

- l'accuratezza del modello, interpretabile come errore su frequenze o spostamenti
- il numero di gradi di libertà richiesti, che esprime il costo computazionale

Il BTB consente quindi di identificare, per un certo tipo di problema, le teorie strutturali che offrono il miglior compromesso tra precisione dei risultati e semplicità numerica, fornendo così una possibile scelta del modello più efficiente.

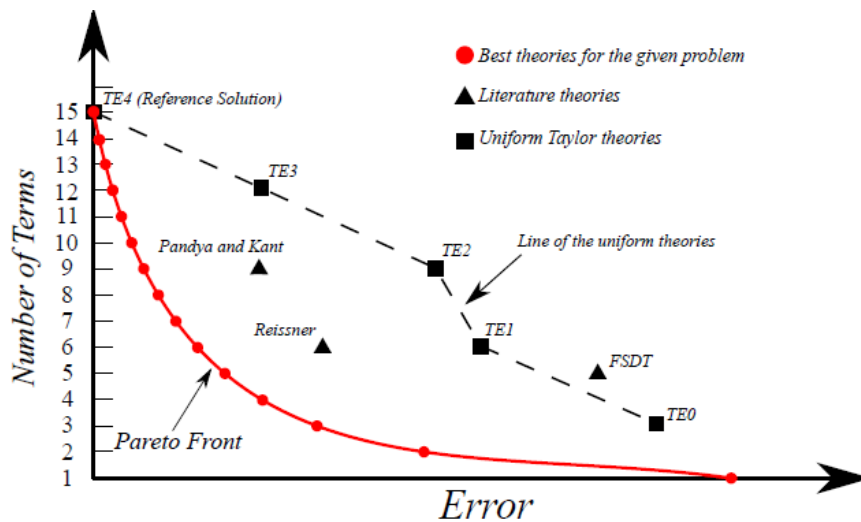


Figura 3.1: Teorie di vario genere nei BTB [92]

Come si può notare in figura 3.1, sul diagramma vengono riportate varie teorie per ciascun numero di gradi di libertà, che possono essere teorie complete o ridotte [92]. Le teorie complete non è detto che siano quelle più convenienti, in quanto con gli stessi gradi di libertà ci possono essere teorie che conferiscono risultati con errori ancora più bassi. I punti rossi che vengono riportati nel diagramma sono proprio le migliori teorie per un dato problema.

In questo modo tale strumento consente di valutare l'efficienza di ciascun modello ridotto in relazione al numero di variabili indipendenti (gradi di libertà) e alla precisione dei risultati ottenuti rispetto a una soluzione di riferimento. Tale confronto solitamente viene fatto con una teoria ad alto ordine, una soluzione 3D o un valore medio.

Dal punto di vista grafico, il BTD è una curva nel piano errore-DOF:

- Ogni punto nel piano rappresenta una specifica teoria ridotta, riportando tutte le possibili combinazioni di termini della teoria completa. Per esempio queste possono essere ottenute da un'espansione polinomiale lungo lo spessore.
- L'errore è misurato rispetto a un parametro di riferimento.
- I gradi di libertà (DOF) coincidono con il numero di termini dell'espansione utilizzati e rappresentano il costo computazionale del modello.

La curva BTD è costruita unendo tutti i punti che rappresentano i modelli ottimali, ovvero quelli che:

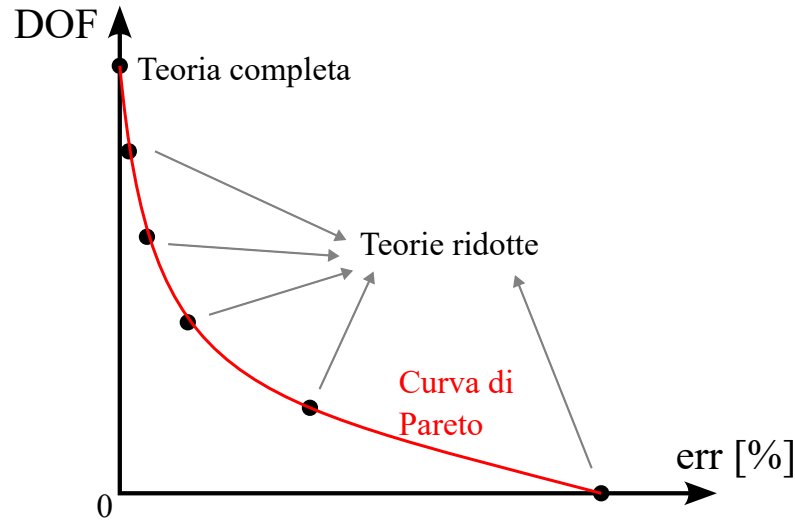
- forniscono l'errore minimo per un certo numero di DOF;
- raggiungono una data accuratezza con il minimo costo numerico.

La costruzione del Best Theory Diagram nasce dall'esigenza di confrontare in modo oggettivo vari modelli strutturali alternativi derivati dalla CUF, ottenendo un'ampia gamma di teorie variando in modo controllato i termini dell'espansione dei campi di spostamento [93]. Con questo approccio si ha la possibilità di generare un grande numero di teorie strutturali partendo da una formulazione completa, variando i termini dell'espansione che definiscono il comportamento del campo di spostamento lungo lo spessore o la sezione.

Per costruire un BTD, si parte da un problema strutturale andando a specificare la geometria, il materiale, le condizioni al contorno e, nel caso di materiali compositi, anche la sequenza di laminazione. Per ottenere i valori di errore percentuale di ogni teoria se ne prende una di riferimento con un alto livello di accuratezza, solitamente un modello al quarto ordine con tutti i termini attivi. Questa fornisce una soluzione molto precisa e vicina a quella tridimensionale. In questo modo si ha un modello di confronto per valutare le prestazioni delle teorie ridotte.

Possiamo notare in figura 3.2 proprio come la teoria completa di riferimento sia

quella con l'errore più basso, mentre le teorie ridotte, con meno gradi di libertà, presenteranno errori via via crescenti.



**Figura 3.2:** Teorie complete e ridotte nei BTD

Il passo successivo consiste nel generare tutte le possibili combinazioni dei termini dell'espansione. Per ogni teoria così ottenuta, si valuta l'accuratezza rispetto al modello di riferimento. I parametri di controllo variano in base al problema, ma solitamente vengono utilizzate le prime frequenze naturali, gli spostamenti in punti chiave, le tensioni, oppure indicatori come il MAC (Modal Assurance Criterion) [94]. A ciascun modello è quindi associato un punto nel piano cartesiano.

Il BTD si ottiene unendo con una retta i modelli che, per ogni numero di gradi di libertà possibile, presentano l'errore minimo. Ogni punto sulla curva è dunque la teoria ottimale per il DOF considerato. I modelli che non appartengono al BTD sono detti dominati, perché esiste almeno una teoria più efficiente (più precisa a parità di DOF, o più semplice a parità di errore). In questo modo, il BTD diventa uno strumento concreto per scegliere la teoria strutturale più adatta, non basandosi su considerazioni arbitrarie o empiriche, ma grazie a un confronto basato su valori precisi.

Nei lavori più recenti, l'uso dei BTD è stato esteso anche alla dinamica, come l'analisi modale, risposta nel tempo, e alla termoelasticità [93]. Questo si rivela essere uno strumento molto versatile, utilizzabile in molti campi. Alcuni studi ne hanno integrato l'impiego con tecniche di machine learning, per automatizzare la classificazione delle teorie più efficienti in funzione dei parametri del problema.



## Capitolo 4

# Analisi statica di trave e piastra con HOTs

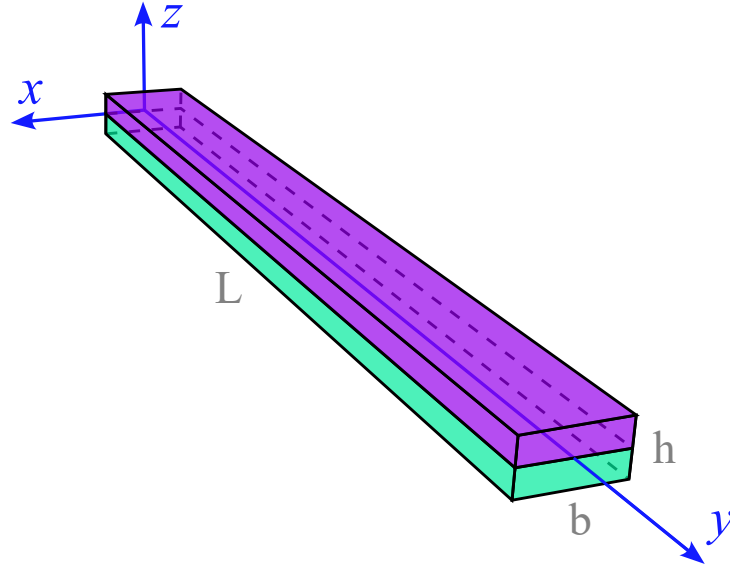
In questo capitolo vengono presentati i risultati ottenuti applicando la Carrera Unified Formulation (CUF) a problemi strutturali modellati in forma monodimensionale o bidimensionale [95]. In particolare, si analizzano due casi studio: una trave e una piastra, entrambe in materiale ortotropo. L'obiettivo principale è quello di confrontare le diverse teorie di approssimazione CUF, ottenute mediante espansioni di tipo Taylor (TE) e Lagrange (LE), rispetto a un modello di riferimento a tre dimensioni, solido, considerato come soluzione esatta [95].

Le analisi sono condotte utilizzando un codice di calcolo non commerciale. La tipologia di analisi svolta è quella statica. Il confronto tra le teorie si basa su parametri chiave come gli spostamenti verticali e le tensioni normali e tangenziali, valutati in specifici punti della struttura. Inoltre un altro parametro fondamentale da confrontare sono i DOFs, gradi di libertà, utilizzati per sviluppare il modello [95].

Per ogni teoria, vengono riportati grafici, tabelle riassuntive e considerazioni sull'accuratezza e l'efficienza del modello strutturale, cercando quale modello mi conferisce il minimo numero di gradi di libertà con l'accuratezza più alta.

### 4.1 Risultati analisi trave ortotropa

Il primo caso di studio riguarda l'analisi statica di una trave ortotropa laminata antisimmetrica, composta da due strati con orientazioni 1 e 2, numerati a partire dal basso, rispettivamente pari a  $0^\circ$  e  $90^\circ$  [95]. Tale elemento strutturale è riportato in figura 4.1. In letteratura sono state già analizzate travi ortotrope caricate all'estremità [96], basate sulla soluzione di De Saint Venant.



**Figura 4.1:** Trave ortotropa antisimmetrica a due strati

Gli assi di riferimento  $x, y, z$  sono disposti con il centro del sistema di coordinate fissato in corrispondenza del baricentro della sezione di trave all'incastro. L'asse  $y$  è quello che segue la lunghezza della trave, dimensione caratteristica della struttura. Gli assi  $x, z$  sono quelli sulla sezione della trave.

La geometria della trave è la seguente:

- lunghezza  $L = 2$  m
- base della sezione trasversale  $b = 0.2$  m
- altezza  $h = 0.1$  m
- rapporto di snellezza  $\frac{L}{h} = 10$

Il materiale utilizzato per i due strati è un ortotropo con le seguenti caratteristiche:

- Moduli di Young  $E_L = 25.0$  GPa,  $E_T = E_z = 1.0$  GPa
- Coefficienti di Poisson  $\nu_{LT} = \nu_{Lz} = \nu_{Tz} = 0.25$
- Moduli di taglio  $G_{LT} = 0.5$  GPa,  $G_{Tz} = G_{Lz} = 0.2$  GPa

Come già detto, la trave è antisimmetrica poiché divisa in due strati e con laminazione diversa. Ciò comporterà anche una non simmetria tra i due strati. La trave è vincolata tramite incastro all'estremo a  $y = 0$ , mentre l'estremo libero a  $y = L$  è soggetta all'applicazione di quattro forze concentrate di intensità pari a 25 N ciascuna, posizionate nei quattro vertici della sezione e orientata nel verso

negativo dell'asse  $z$ . Gli spostamenti e le tensioni sono valutati in punti particolari della struttura e con teorie che seguono le espansioni TE o LE [43]. In questo caso scegliamo di utilizzare:

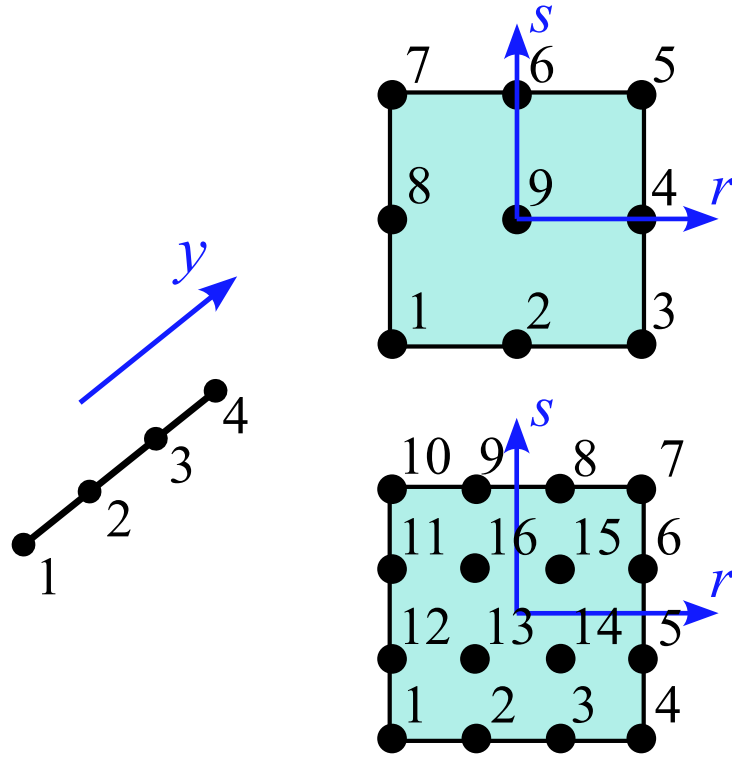
- LE9 o LE16, espansioni di Lagrange con 9 o 16 elementi. Questa è l'espansione che consente di ottenere il risultato più corretto e vicino al caso 3D reale;
- TE1, TE2, TE3, TE4, espansioni di Taylor rispettivamente del primo, secondo, terzo e quarto ordine. Rispetto all'approssimazione con Lagrange, quella di Taylor conferisce risultati meno accurati poiché utilizza un numero ridotto di gradi di libertà a parità di ordine della teoria utilizzata.

Risulta evidente che se scegliamo una teoria di ordine superiore avremo un numero maggiore di gradi di libertà e quindi un costo computazionale più elevato [33]. La scelta della teoria da utilizzare va fatta per ogni variabile calcolata, dunque per le tre componenti del campo di spostamento. Come visto dalla teoria, anche le tensioni dipendono dal calcolo degli spostamenti, poiché le tensioni vengono calcolate tramite le deformazioni che a loro volta vengono dagli spostamenti.

Nel nostro caso scegliamo di analizzare i seguenti dati:

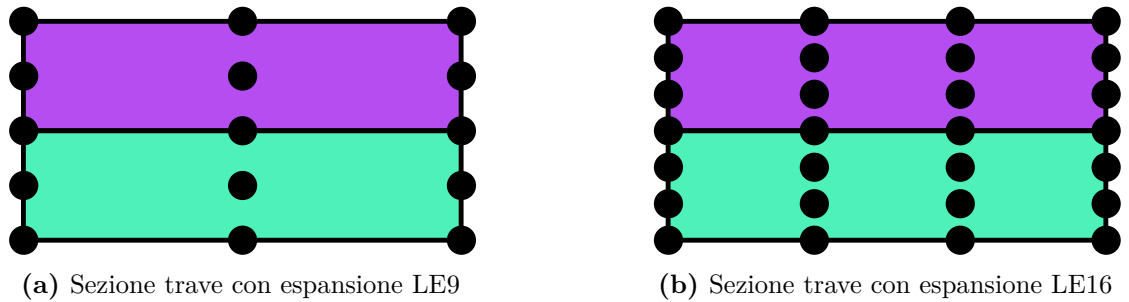
- Spostamento verticale  $u_z$  in corrispondenza dell'estremo libero della trave in coordinate (0,2,0), baricentro della sezione libera
- Tensioni normali,  $\sigma_{yy}$ , e tangenziali,  $\sigma_{yz}$ , in mezzeria della trave e lungo l'asse  $z$ , prendendo in considerazione 14 punti

Nel caso di materiale composito possiamo aspettarci un andamento delle varie grandezze da analizzare simile a quello mostrato nel capitolo precedente in figura 2.10. Come possiamo vedere la teoria utilizzata segue un approccio Layer Wise. Per la discretizzazione FEM longitudinale sono stati scelti 20 elementi B4, elementi trave con 4 nodi ciascuno [95], mentre per la discretizzazione CUF sono stati scelti degli elementi *quad* sulla sezione della trave con 9 o 16 nodi [97]. Tali elementi vengono riportati in figura 4.2.



**Figura 4.2:** Elementi B4 e Q9/Q16 per trave 2 strati

Nel nostro caso di trave con due strati di laminazione abbiamo due elementi Q9 o due elementi Q16, mostrati in figura 4.3.



**Figura 4.3:** Confronto elementi Q9 e Q16 su trave a due strati

Di seguito vengono riportati i risultati dell'analisi svolta in base al modello che si è scelto di sviluppare. Questi modelli vengono messi a paragone con quello 3D solido, confrontando non solo i risultati numerici ma anche i DOFs utilizzati [98]. Effettuiamo due analisi differenti per il caso di elementi Q9 o Q16.

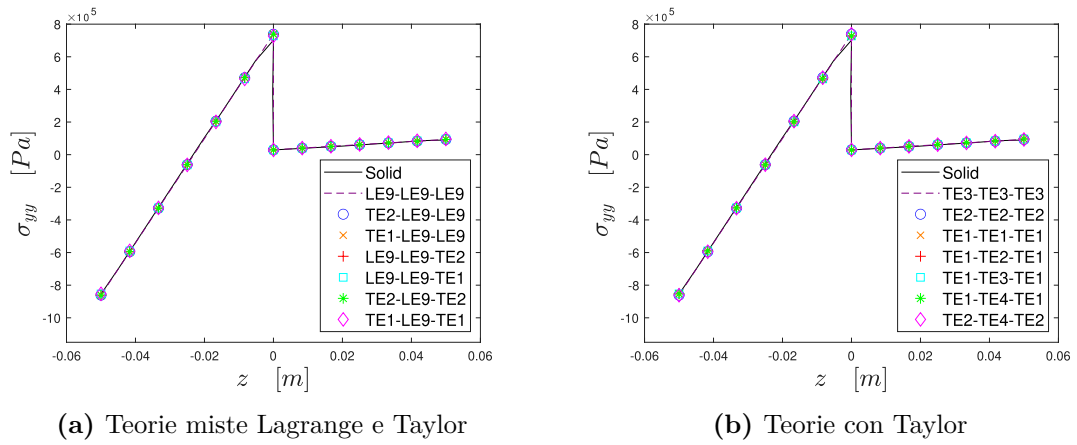
**Tabella 4.1:** Spostamento e tensioni per trave ortotropa antisimmetrica con Q9

| Modello         | $-u_z \times 10^3[m]$ | $\sigma_{yy} \times 10^{-3}[Pa]$ | $\sigma_{yz} \times 10^{-3}[Pa]$ | DOFs   |
|-----------------|-----------------------|----------------------------------|----------------------------------|--------|
| Solido [95]     | 3.48                  | 93.30                            | -11.36                           | 132300 |
| LE9 - LE9 - LE9 | 3.474                 | 93.27                            | -8.18                            | 2745   |
| TE2 - LE9 - LE9 | 3.473                 | 93.22                            | -8.20                            | 2196   |
| TE1 - LE9 - LE9 | 3.472                 | 93.37                            | -8.21                            | 2013   |
| LE9 - LE9 - TE2 | 3.473                 | 93.18                            | -8.18                            | 2196   |
| LE9 - LE9 - TE1 | 3.426                 | 96.13                            | -8.14                            | 2013   |
| TE2 - LE9 - TE2 | 3.472                 | 93.07                            | -8.20                            | 1647   |
| TE1 - LE9 - TE1 | 3.421                 | 96.26                            | -8.16                            | 1281   |
| TE3 - TE3 - TE3 | 3.470                 | 93.65                            | -7.73                            | 1830   |
| TE2 - TE2 - TE2 | 3.466                 | 93.07                            | -7.41                            | 1098   |
| TE1 - TE1 - TE1 | 3.400                 | 96.26                            | -5.04                            | 549    |
| TE1 - TE2 - TE1 | 3.414                 | 96.26                            | -7.37                            | 732    |
| TE1 - TE3 - TE1 | 3.418                 | 96.26                            | -7.72                            | 976    |
| TE1 - TE4 - TE1 | 3.426                 | 96.26                            | -10.14                           | 1281   |
| TE2 - TE4 - TE2 | 3.477                 | 93.07                            | -10.19                           | 1647   |

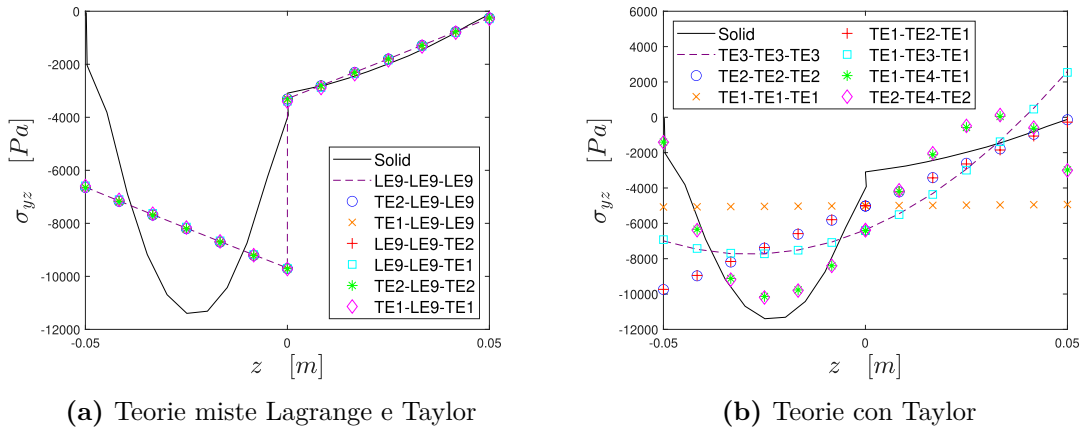
**Tabella 4.2:** Spostamento e tensioni per trave ortotropa antisimmetrica con Q16

| Modello            | $-u_z \times 10^3[m]$ | $\sigma_{yy} \times 10^{-3}[Pa]$ | $\sigma_{yz} \times 10^{-3}[Pa]$ | DOFs   |
|--------------------|-----------------------|----------------------------------|----------------------------------|--------|
| Solido [95]        | 3.48                  | 93.30                            | -11.36                           | 132300 |
| LE16 - LE16 - LE16 | 3.483                 | 93.28                            | -11.50                           | 5124   |
| TE3 - LE16 - LE16  | 3.482                 | 93.37                            | -11.51                           | 4026   |
| TE2 - LE16 - LE16  | 3.481                 | 93.22                            | -11.52                           | 3782   |
| LE16 - LE16 - TE3  | 3.482                 | 93.52                            | -11.50                           | 4026   |
| LE16 - LE16 - TE2  | 3.482                 | 93.18                            | -11.51                           | 3782   |
| TE3 - LE16 - TE3   | 3.482                 | 93.65                            | -11.51                           | 2928   |
| TE2 - LE16 - TE2   | 3.481                 | 93.07                            | -11.53                           | 2440   |
| TE3 - TE3 - TE3    | 3.470                 | 93.65                            | -7.73                            | 1830   |
| TE2 - TE2 - TE2    | 3.466                 | 93.07                            | -7.41                            | 1098   |
| TE1 - TE1 - TE1    | 3.400                 | 96.26                            | -5.04                            | 549    |
| TE2 - TE3 - TE2    | 3.469                 | 93.07                            | -7.74                            | 1342   |
| TE1 - TE3 - TE1    | 3.418                 | 96.26                            | -7.72                            | 976    |
| TE1 - TE4 - TE1    | 3.426                 | 96.26                            | -10.14                           | 1281   |
| TE2 - TE4 - TE2    | 3.477                 | 93.07                            | -10.19                           | 1647   |

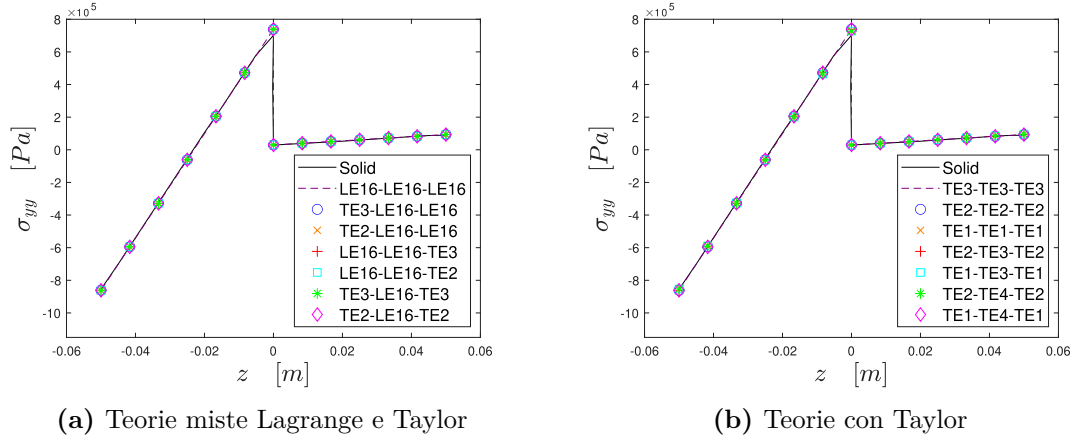
Dai risultati ottenuti e mostrati nelle tabelle 4.1 e 4.2 possiamo notare come la teoria più accurata sia quella che usa l'espansione di Lagrange L16, per Q16, e L9, per Q9, per tutte e tre le variabili di spostamento [95]. Queste sono anche le teorie con il valore di DOF più elevato per dato elemento CUF scelto. Si nota anche come le espansioni di Taylor, in questo contesto, risultano meno accurate rispetto a quelle di Lagrange e talvolta anche sbagliate. Se vogliamo ridurre i gradi di libertà possiamo scegliere di utilizzare delle teorie che presentano un TE4 per lo spostamento in  $y$ . In questo caso l'accuratezza dei risultati rimane comunque molto buona e i DOFs si riducono circa del 50/70 %. Inoltre risulta molto utile andare a riportare su un grafico gli andamenti delle due tensioni al variare di  $z$  e nel caso di elementi Q9 o Q16 [95].



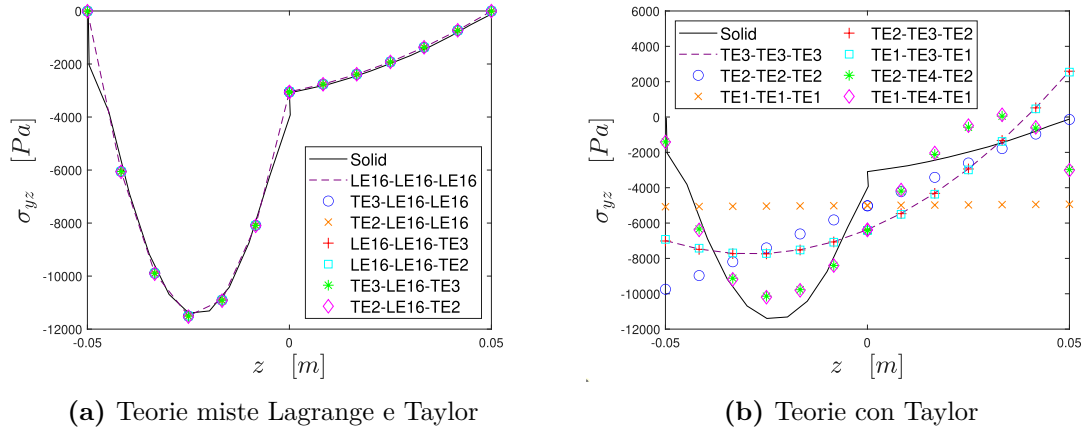
**Figura 4.4:** Distribuzione di  $\sigma_{yy}$  lungo  $z$  per teorie di ordine superiore - Q9



**Figura 4.5:** Distribuzione di  $\sigma_{yz}$  lungo  $z$  per teorie di ordine superiore - Q9



**Figura 4.6:** Distribuzione di  $\sigma_{yy}$  lungo  $z$  per teorie di ordine superiore - Q16



**Figura 4.7:** Distribuzione di  $\sigma_{yz}$  lungo  $z$  per teorie di ordine superiore - Q16

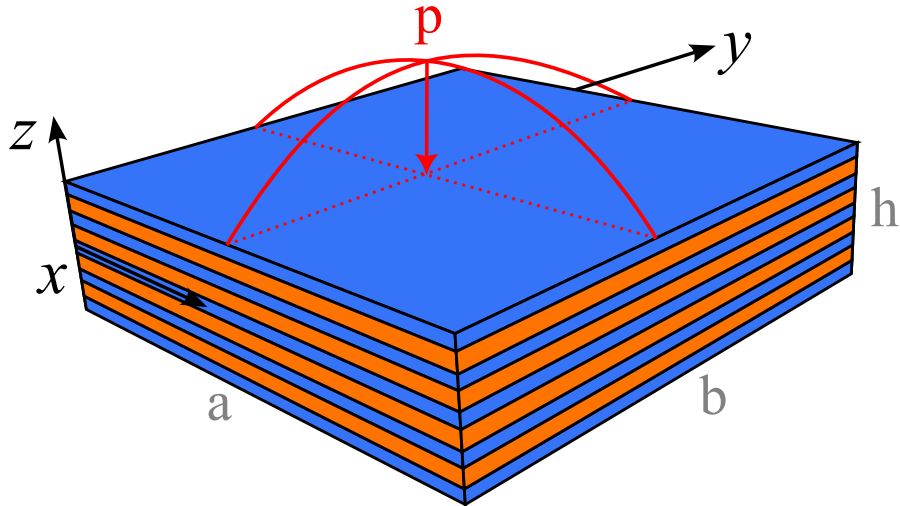
Come si può notare, per ottenere un andamento corretto delle tensioni normali, circa tutte le teorie proposte riescono ad ottenere un risultato accettabile [95]. La differenza più grande si nota proprio nel calcolo delle tensioni trasversali:

- Per elementi Q9 notiamo come le LE9 ci consentono di ottenere solo andamenti lineari. Essendo l'andamento delle tensioni parabolico i risultati ottenuti con le varie combinazioni di teorie LE9 saranno tutti errati. Quando andiamo a utilizzare TE3 e TE4 riusciamo ad ottenere degli andamenti curvilinei o parabolici, che si discostano comunque abbastanza dal risultato reale. Utilizzare TE1 porta ad avere un risultato costante, mentre TE2 conferisce un andamento lineare, senza distinguere tra le due zone di laminazione

- Per elementi Q16 notiamo come le LE16 ci permettono di ottenere degli andamenti molto vicini al risultato corretto. Se andiamo a utilizzare TE i risultati saranno molto simili al caso visto per elementi Q9, dunque con andamenti errati o non abbastanza vicini al caso 3D. Molto importante sottolineare che gli elementi Q16 con le teorie miste riescono a riportare al meglio l'andamento delle tensioni trasversali, evidenziandone la continuità [62].

## 4.2 Risultati analisi piastra ortotropa

Nel secondo caso si effettua l'analisi statica di una piastra ortotropa laminata simmetrica, composta da nove strati con orientazioni 1 e 2, numerati a partire dal basso, rispettivamente pari a  $90^\circ$  e  $0^\circ$  [99]. Tale elemento strutturale è riportato in figura 4.8.



**Figura 4.8:** Piastra ortotropa simmetrica a 9 strati sottoposta a carico bi-sinusoidale

Gli assi di riferimento  $x, y, z$  sono disposti con il centro del sistema di coordinate fissato in corrispondenza del piano medio della piastra. L'asse  $z$  è quello che segue lo spessore della piastra, dimensione caratteristica per questo modello. Gli assi  $x, y$  sono quelli sul piano della piastra.

La geometria della piastra è la seguente:

- dimensioni del piano della piastra  $a = b = 4$  m
- spessore  $h = 1$  m



- rapporto lunghezza-spessore  $\frac{a}{h} = 4$

Gli strati non hanno tutti lo stesso spessore, ma lo spessore complessivo degli strati a  $90^\circ$  è equivalente a quello degli strati a  $0^\circ$ .

Il materiale utilizzato per i vari strati è un ortotropo con le seguenti caratteristiche:

- Moduli di Young  $E_L = 25.0 \text{ GPa}$ ,  $E_T = E_z = 1.0 \text{ GPa}$
- Coefficienti di Poisson  $\nu_{LT} = \nu_{Lz} = \nu_{Tz} = 0.25$
- Moduli di taglio  $G_{LT} = 0.5 \text{ GPa}$ ,  $G_{Tz} = G_{Lz} = 0.2 \text{ GPa}$

La piastra è semplicemente appoggiata in tutti e quattro i lati, a  $x = 0$  e  $y = 0$ , e per quanto riguarda il carico vi è una applicata una pressione bi-sinusoidale. Questa presenta l'andamento descritto dalla seguente formulazione:

$$p = p_z \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) \quad (4.1)$$

con ampiezza  $p_z$  di intensità pari a  $1 \text{ Pa}$ , picco massimo nel punto centrale del piano e orientata nel verso negativo dell'asse  $z$ . Gli spostamenti e le tensioni sono valutati in punti particolari della struttura e con teorie che seguono le espansioni TE o LE [43], come visto anche nel caso trave. In questo caso scegliamo di utilizzare:

- LE4, espansioni di Lagrange con 4 nodi per ogni elemento trave posto lungo lo spessore. Questa è l'espansione che consente di ottenere il risultato più corretto e vicino al caso esatto;
- TE2, TE6, TE9, espansioni di Taylor rispettivamente del secondo, sesto e nono ordine. Rispetto all'approssimazione con Lagrange, quella di Taylor conferisce risultati meno accurati.

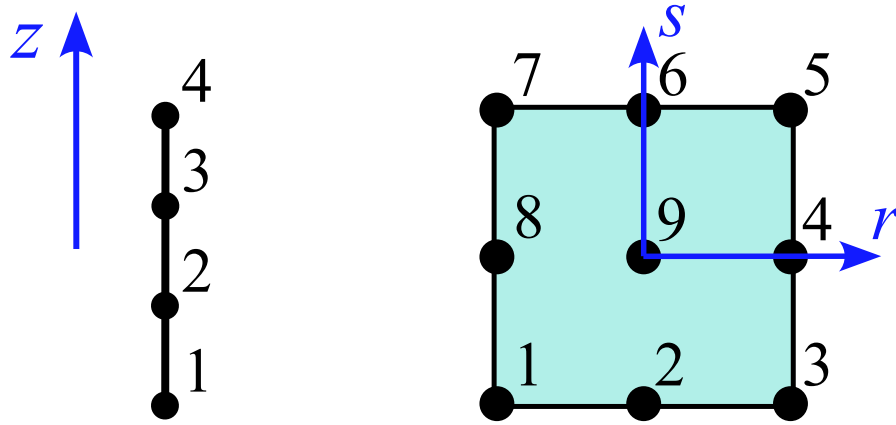
Nel nostro caso scegliamo di analizzare i seguenti parametri:

- Spostamento sul piano  $u_x$  in corrispondenza del punto medio di un lato della piastra, in coordinate  $(0, \frac{b}{2}, z)$ ;
- Tensioni normali,  $\sigma_{xx}$ , e tangenziali,  $\sigma_{xz}$ , rispettivamente valutati al centro della piastra  $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z)$  e nel punto medio di un lato della piastra  $(0, \frac{b}{2}, z)$ .

Il parametro che varia è proprio la coordinata lungo lo spessore  $z$ , in modo da diagrammare tensioni e spostamenti. Al fine di confrontare in maniera più diretta i risultati scegliamo di riportare dei valori adimensionali [100]. Per farlo andiamo a moltiplicare o dividere per grandezze caratteristiche come modulo di Young, pressione o parametri dimensionali:

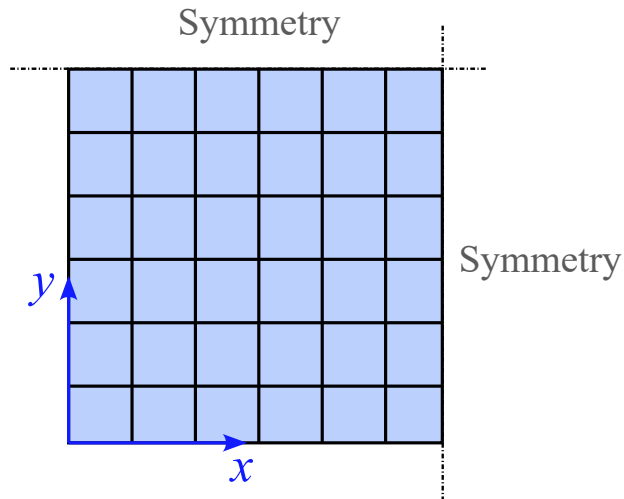
$$\bar{u}_x = \frac{E_T u_x}{p_z (\frac{a}{h})^4 h} \quad \bar{\sigma}_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{p_z (\frac{a}{h})^2} \quad \bar{\sigma}_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{p_z (\frac{a}{h})} \quad (4.2)$$

Per la discretizzazione FEM longitudinale [1] sono stati scelti 9 elementi B4, elementi trave con 4 nodi ciascuno [95], mentre per la discretizzazione CUF sono stati scelti degli elementi *quad* sul piano della piastra con 9 nodi. Entrambi questi modelli vengono rappresentati in figura 4.9.



**Figura 4.9:** Elementi B4 e Q9 per piastra 9 strati

Per semplificare l'analisi e ridurre i costi computazionali, data la geometria del problema, scegliamo di analizzare solo un quarto di piastra. Dunque, la porzione di struttura analizzata corrisponde a quella riportata in figura 4.10, considerando i risultati del resto della piastra simmetrici da entrambi i lati.



**Figura 4.10:** Un quarto di piastra per condizione di simmetria

Di seguito vengono riportati nelle tabelle 4.3 e 4.4 i risultati dell'analisi svolta in base al modello che si è scelto di sviluppare. Questi modelli vengono messi a

paragone con quello esatto valutato semi-analiticamente, confrontando non solo i risultati numerici ma anche i DOFs utilizzati. Vengono effettuate analisi sia con modelli di espansione completi che ridotti, utilizzando solo determinati termini dell'espansione.

**Tabella 4.3:** Spostamento e tensioni per piastra ortotropa simmetrica con espansioni complete

| Modello         | $\bar{u}_x \times 10^{-3}$ | $\bar{\sigma}_{xx}$ | $\bar{\sigma}_{xz}$ | DOFs  |
|-----------------|----------------------------|---------------------|---------------------|-------|
| Esatto [99]     | —                          | 0.684               | 0.223               | —     |
| TE2 - TE2 - TE2 | 0.4008                     | 0.4948              | 0.2414              | 1521  |
| TE6 - TE6 - TE6 | 0.3611                     | 0.6485              | 0.3193              | 3549  |
| TE6 - TE6 - TE2 | 0.3607                     | 0.6506              | 0.3189              | 2873  |
| TE2 - TE6 - TE6 | 0.4019                     | 0.5320              | 0.2584              | 2873  |
| TE9 - TE9 - TE9 | 0.3668                     | 0.6475              | 0.3651              | 5070  |
| TE9 - TE9 - TE6 | 0.3668                     | 0.6476              | 0.3651              | 4563  |
| TE6 - TE9 - TE9 | 0.3611                     | 0.6514              | 0.3210              | 4563  |
| LE4 - LE4 - LE4 | 0.3385                     | 0.6855              | 0.2243              | 14196 |
| LE4 - LE4 - TE2 | 0.3381                     | 0.6878              | 0.2240              | 9971  |
| LE4 - TE2 - TE2 | 0.3371                     | 0.5910              | 0.1949              | 5746  |
| TE2 - LE4 - TE2 | 0.4013                     | 0.5667              | 0.2745              | 5746  |

**Tabella 4.4:** Spostamento e tensioni per piastra ortotropa simmetrica con espansioni ridotte

| Modello         | $\bar{u}_x \times 10^{-3}$ | $\bar{\sigma}_{xx}$ | $\bar{\sigma}_{xz}$ | DOFs |
|-----------------|----------------------------|---------------------|---------------------|------|
| Esatto [99]     | —                          | 0.684               | 0.223               | —    |
| LE4 - LE4 - MS1 | $2.085 \times 10^{-8}$     | 0.6694              | 0.2244              | 9802 |
| LE4 - LE4 - MS2 | $2.048 \times 10^{-8}$     | 0.6702              | 0.2240              | 9802 |
| MS1 - LE4 - LE4 | 0.195                      | 0.5414              | 0.2740              | 9802 |
| MS2 - LE4 - LE4 | 0.402                      | 0.0356              | 0.3097              | 9802 |
| LE4 - MS1 - LE4 | 0.335                      | 0.5898              | 0.1949              | 9802 |
| LE4 - MS2 - LE4 | 0.338                      | 0.4684              | 0.1460              | 9802 |
| LE4 - TE2 - MS2 | $1.746 \times 10^{-8}$     | 0.5735              | 0.1949              | 5577 |

I modelli indicati con *MS* rappresentano delle espansioni di Taylor incomplete, utilizzando solo alcuni termini del polinomio. Considerando i modelli riportati in tabella 4.4 si possono specificare le espansioni utilizzate per ogni caso:

- Modello 1,  $LE4 - LE4 - MS1$ , dove su  $x, y$  abbiamo delle espansioni di Lagrange su 4 nodi, mentre su  $z$  si utilizza un'espansione polinomiale del secondo ordine dove però non viene considerato il termine quadratico. Dunque per  $z$  si ha:

$$u_z = u_{z1} + zu_{z2} \quad (4.3)$$

- Modello 2,  $LE4 - LE4 - MS2$ , dove su  $x, y$  abbiamo delle espansioni di Lagrange su 4 nodi, mentre su  $z$  si utilizza un'espansione polinomiale del secondo ordine dove però non viene considerato il termine lineare. Dunque per  $z$  si ha:

$$u_z = u_{z1} + z^2u_{z3} \quad (4.4)$$

- Modello 3,  $MS1 - LE4 - LE4$ , dove su  $y, z$  abbiamo delle espansioni di Lagrange su 4 nodi, mentre su  $x$  si utilizza un'espansione polinomiale del secondo ordine dove però non viene considerato il termine quadratico. Dunque per  $x$  si ha:

$$u_x = u_{x1} + zu_{x2} \quad (4.5)$$

- Modello 4,  $MS2 - LE4 - LE4$ , dove su  $y, z$  abbiamo delle espansioni di Lagrange su 4 nodi, mentre su  $x$  si utilizza un'espansione polinomiale del secondo ordine dove però non viene considerato il termine lineare. Dunque per  $x$  si ha:

$$u_x = u_{x1} + z^2u_{x3} \quad (4.6)$$

- Modello 5,  $LE4 - MS1 - LE4$ , dove su  $x, z$  abbiamo delle espansioni di Lagrange su 4 nodi, mentre su  $y$  si utilizza un'espansione polinomiale del secondo ordine dove però non viene considerato il termine quadratico. Dunque per  $y$  si ha:

$$u_y = u_{y1} + zu_{y2} \quad (4.7)$$

- Modello 6,  $LE4 - MS2 - LE4$ , dove su  $x, z$  abbiamo delle espansioni di Lagrange su 4 nodi, mentre su  $y$  si utilizza un'espansione polinomiale del secondo ordine dove però non viene considerato il termine lineare. Dunque per  $y$  si ha:

$$u_y = u_{y1} + z^2u_{y3} \quad (4.8)$$

- Modello 7,  $LE4 - TE2 - MS2$ , dove su  $x$  abbiamo l'espansione di Lagrange su 4 nodi, su  $y$  un'espansione in serie di Taylor del secondo ordine e su  $z$  un'espansione del secondo ordine ridotta, ovvero senza il termine lineare:

$$u_z = u_{z1} + z^2u_{z3} \quad (4.9)$$

Di seguito di riportano in tabella 4.5 quali termini sono presenti nelle varie teorie ridotte  $MS$  rispetto ai casi di teorie complete di Taylor. In particolare vengono riportate le teorie Taylor fino al secondo ordine in quanto sono quelle con il grado massimo utilizzate nell'analisi proposta.

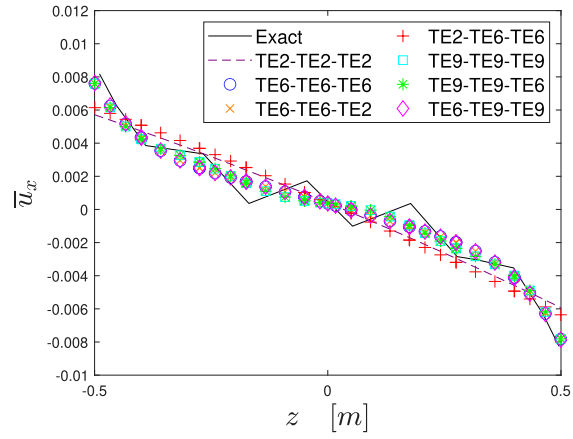
**Tabella 4.5:** Teorie miste  $MS$  nelle espansioni della piastra ortotropa

| Teoria | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | DOF |
|--------|-------|-------|-------|-----|
| TE1    | •     | •     | ○     | 2   |
| TE2    | •     | •     | •     | 3   |
| MS1    | •     | •     | ○     | 2   |
| MS2    | •     | ○     | •     | 2   |

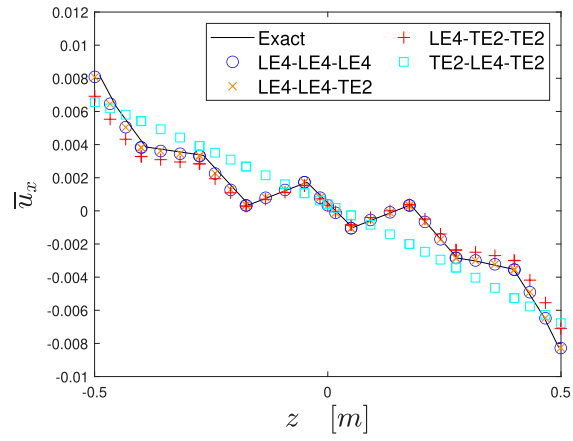
Queste singole teorie possono essere utilizzate ovviamente su tutti e tre gli assi della struttura indicata.

Confrontando i risultati ottenuti con i riferimenti di studi precedenti [95] possiamo notare come il risultato più accurato sia quello che utilizza in tutte e tre le dimensioni l'espansione di Lagrange  $LE4$ . Queste sono anche le teorie con il valore di DOF più elevato. Si nota anche come le espansioni di Taylor, in questo contesto, risultano meno accurate rispetto a quelle di Lagrange. Inoltre nell'utilizzo delle espansioni incomplete bisogna fare attenzione a quale grandezza andiamo ad applicare il termine incompleto [43]. Infatti vi è un'importante differenza tra l'utilizzo di  $MS$  lungo  $z$  e lungo  $x$ : nel caso di utilizzo del solo termine quadratico abbiamo un importante errore per la  $\bar{\sigma}_{xx}$ , mentre per il solo termine lineare si ha un errore notevole per  $\bar{u}_x$ . Se vogliamo ridurre i gradi di libertà possiamo combinare varie tipologie di espansioni per gli andamenti in  $x$ ,  $y$  e  $z$  [98]. Per esempio nel caso di  $LE4 - TE2 - MS2$  otteniamo degli andamenti abbastanza simili a quelli esatti, anche se con valori numerici leggermente errati. I DOFs si riducono circa del 70 % rispetto al caso  $LE4 - LE4 - LE4$ .

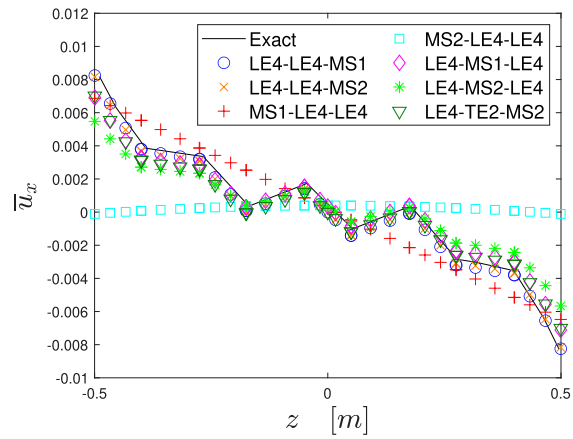
Si riportano sui grafici gli andamenti dello spostamento delle due tensioni al variare di  $z$  per tutte le espansioni proposte in tabella.



(a) Teorie Taylor

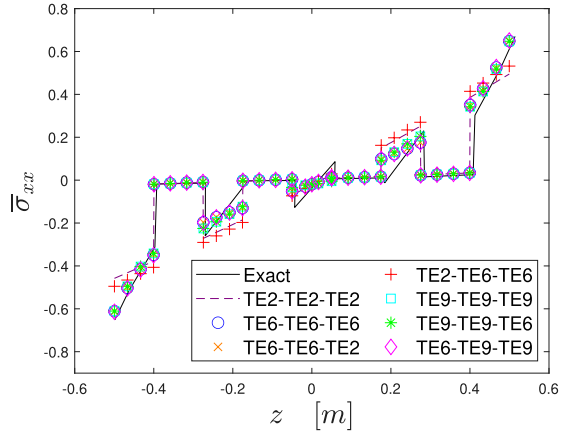


(b) Teorie miste Lagrange e Taylor

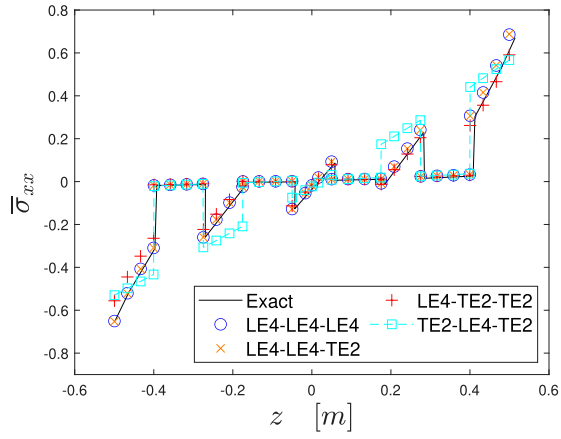


(c) Teorie miste con espansioni ridotte

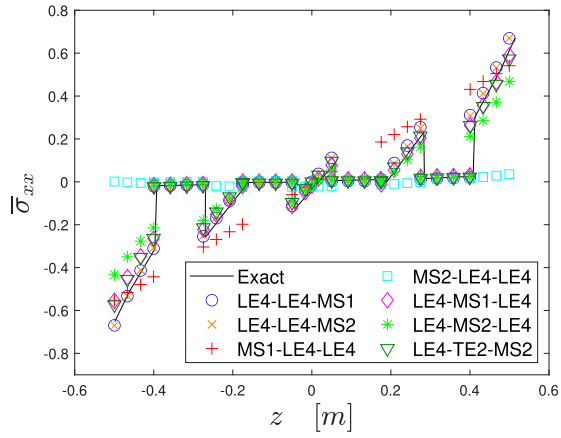
**Figura 4.11:** Distribuzione di  $\bar{u}_x$  lungo  $z$  per differenti formulazioni



(a) Teorie Taylor

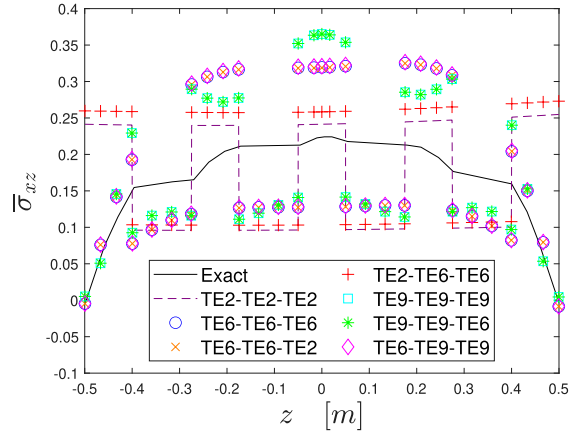


(b) Teorie miste Lagrange e Taylor

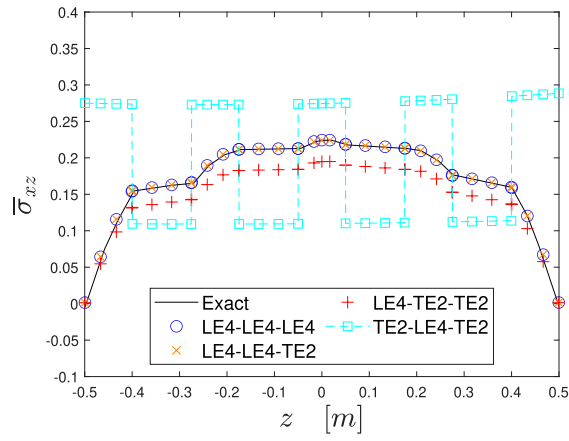


(c) Teorie miste con espansioni ridotte

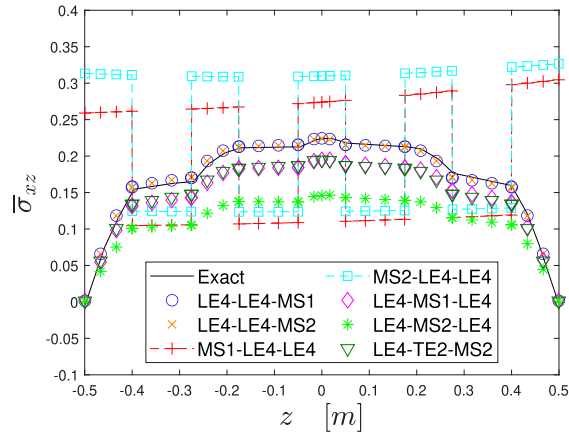
**Figura 4.12:** Distribuzione di  $\bar{\sigma}_{xx}$  lungo  $z$  per differenti formulazioni



(a) Teorie Taylor



(b) Teorie miste Lagrange e Taylor



(c) Teorie miste con espansioni ridotte

 Figura 4.13: Distribuzione di  $\bar{\sigma}_{xz}$  lungo  $z$  per differenti formulazioni



Come si può notare, l'utilizzo delle diverse teorie porta ad ottenere andamenti abbastanza diversi tra loro, dove alcuni risultano più corretti di altri:

- Riguardo lo spostamento  $u_x$ , l'utilizzo delle TE non permette di ottenere l'effetto zig-zag [101], dunque gli andamenti più corretti sono quelli che presentano una LE almeno lungo  $x$ . Utilizzare un'espansione di Taylor in  $z$  ci permette comunque di ottenere un andamento molto vicino a quello esatto
- Per quanto riguarda la tensione normale  $\sigma_{xx}$  gli andamenti sono tutti abbastanza accurati e coincidenti con quello esatto, fatta eccezione per quelli che utilizzano una TE di basso ordine, per esempio TE2, lungo  $x$ . Allo stesso modo otteniamo dei risultati notevolmente errati se andiamo ad utilizzare espansioni MS lungo  $x$ .
- Infine la tensione trasversale  $\sigma_{xz}$  presenta un andamento che viene ben descritto solo dai casi con LE sia in  $x$  che in  $y$ . L'espansione utilizzata lungo  $z$  non influisce particolarmente sul risultato. Se andiamo ad utilizzare espansioni in serie di Taylor otteniamo degli andamenti che variano in ogni strato in maniera simmetrica, come dovrebbe accadere, ma senza continuità tra strato e strato. Utilizzando le teorie miste, tenendo sempre però una LE in  $x$ , si ottiene un andamento corretto ma con valori numerici leggermente errati [102].

## Capitolo 5

# Analisi alle vibrazioni libere con AAM e BTD per travi e gusci

Nel seguente capitolo si effettuano le analisi di strutture semplici, come travi e gusci, al fine di valutare e ricercare quali siano le migliori teorie strutturali tra tutte quelle ottenibili. Le varie teorie vengono ottenute attraverso la formulazione CUF. Successivamente, utilizzando l'AAM e i BTD presentati nel capitolo 3, si riesce a valutare quali tra queste conferiscono il miglior risultato con il minimo costo computazionale.

La tipologia di analisi svolta in questo caso è quella alle vibrazioni libere per una trave con tre fori isotropa, a vari rapporti di snellezza, e per un guscio ortotropo a tre strati, a vari rapporti di spessore.

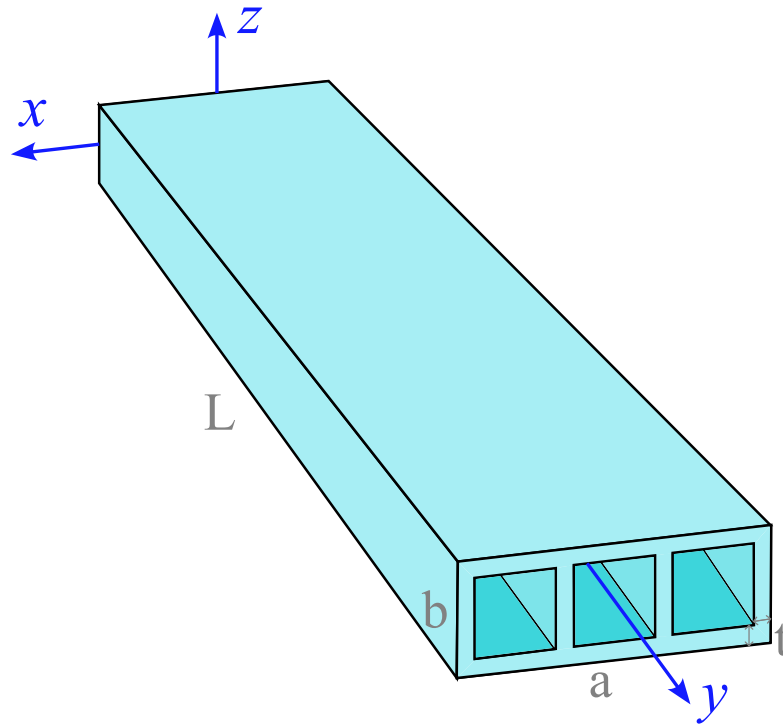
### 5.1 Risultati analisi trave isotropa con BTD

L'analisi qui riportata riguarda una trave, con sezione tre volte forata, soggetta a condizioni di vincolo semplicemente appoggiate [103]. Questa viene rappresentata in figura 5.1.

La trave presenta le seguenti caratteristiche geometriche:

- Lunghezza  $L = 3.8m$
- Geometria della sezione,  $a = 0.38m$ ,  $b = 0.14m$ ,  $t = 0.02m$

Dove  $a, b$  sono le dimensioni principali della sezione e  $t$  è lo spessore della parte interna.



**Figura 5.1:** Trave isotropa con 3 fori

Il materiale utilizzato è un isotropo, con le proprietà elencate di seguito:

- Modulo di Young  $E = 72GPa$
- Coefficiente di Poisson  $\nu = 0.33$
- Densità  $\rho = 2700kg/m^3$

Questa configurazione di trave analizzata è molto utilizzata nel campo aerospaziale, in quanto consente di ottenere un ottimo compromesso tra peso e rigidità, con la sua componente forata.

Lo scopo dell'analisi è la determinazione delle prime dieci frequenze naturali, ottenute tramite modellazione a elementi finiti con la Carrera Unified Formulation. È stata impiegata un'espansione polinomiale di Taylor del quarto ordine (TE4) per rappresentare il campo di spostamenti lungo la sezione della trave. La trave è discretizzata mediante 10 elementi finiti B4.

L'analisi è stata condotta valutando tutte le possibili teorie ridotte derivabili dalla combinazione assiomatica dei termini dell'espansione, per un totale di  $2^{12} = 4096$  modelli distinti. Per ottenere questo valore si è partiti dai 45 gradi di libertà che si hanno in un modello TE4, considerando determinate assunzioni che semplificano e riducono il numero di DOF indipendenti:

- si sceglie di variare simultaneamente lo stesso parametro su  $x$ ,  $y$  e  $z$
- si sceglie di non far variare, mantenendo costanti, i gradi di libertà relativi ai termini costanti

L'utilizzo del metodo assiomatico-asintotico (AAM) ha permesso di analizzare sistematicamente il ruolo di ciascun termine nell'accuratezza delle frequenze ottenute, fino alla costruzione del Best Theory Diagram (BTD) associato al problema considerato.

Per valutare l'efficienza e l'accuratezza delle diverse teorie strutturali derivate dalla formulazione CUF, è stato utilizzato il metodo assiomatico-asintotico (AAM). Questo approccio consente di generare e confrontare un ampio numero di teorie ridotte a partire da un'espansione completa del campo di spostamento. In questo caso si è scelto di utilizzare una Taylor Expansion del quarto ordine (TE4).

A partire da 12 variabili generalizzate attive nel modello completo, sono state costruite tutte le teorie ridotte, ciascuna ottenuta combinando in modo diverso i termini dell'espansione. Per ciascun modello, sono state calcolate le prime 10 frequenze naturali, che costituiscono il parametro di controllo utilizzato per la valutazione dell'accuratezza [104]. In particolare l'errore medio percentuale tra ciascun modello ridotto e il modello di riferimento TE4 è stato calcolato secondo la formula [34]:

$$\text{Errore medio} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} \left| \frac{f_i - f_i^{\text{ref}}}{f_i^{\text{ref}}} \right| \times 100 \quad (5.1)$$

dove  $f_i$  è la  $i$ -esima frequenza naturale del modello ridotto e  $f_i^{\text{ref}}$  quella ottenuta con il modello completo preso come riferimento.

Per valutare l'influenza della snellezza geometrica sulla distribuzione ottimale delle teorie [97], sono state effettuate due analisi distinte, variando il rapporto tra lunghezza e base della trave:

- nel primo caso con  $\frac{L}{a} = 10$
- nel secondo caso con  $\frac{L}{a} = 100$

I risultati ottenuti sono riportati nei grafici 5.2 e 5.3, e mostrano come la posizione dei modelli ottimali sulla curva BTD sia sensibile al parametro geometrico considerato. Per ogni analisi eseguita si riporta:

- un grafico  $DOF - err(\%)$  con tutti i punti riportati per ogni teoria analizzata e una linea, evidenziata in rosso, che rappresenta la curva di Pareto. Tale curva indica, per ogni DOF, la teoria migliore, ovvero quella che conferisce il minimo errore possibile;

- una tabella che riporta il DOF, i vari termini presenti nell'espressione della teoria trave e l'errore percentuale relativo a ciascuna teoria analizzata [34]. Ogni pallino pieno presente in tabella indica che quel determinato termine è utilizzato nella teoria con quel valore di DOF. In tabella vengono riportati solo i termini della teoria nell'espansione lungo un solo asse, dato che per le ipotesi viste in precedenza le espansioni sugli altri assi presenteranno gli stessi termini d'espansione.

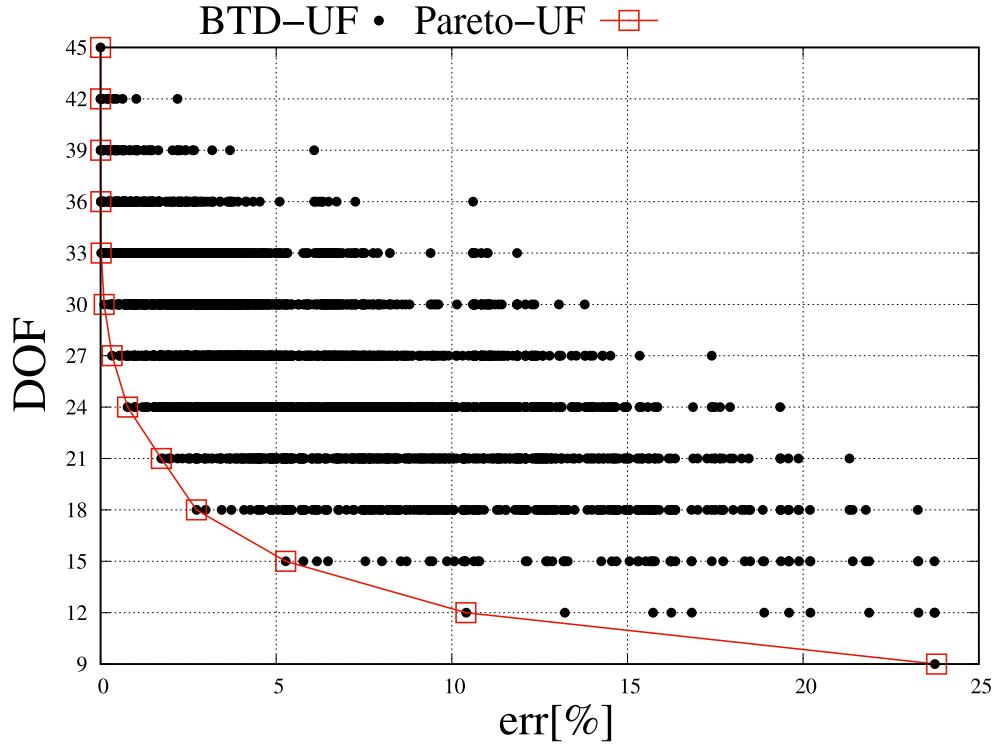


Figura 5.2: BTD per trave a tre fori con  $\frac{L}{a} = 10$

**Tabella 5.1:** Modelli BTD per trave a tre fori con  $\frac{L}{a} = 10$

| DOF | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4$ | $u_5$ | $u_6$ | $u_7$ | $u_8$ | $u_9$ | $u_{10}$ | $u_{11}$ | $u_{12}$ | $u_{13}$ | $u_{14}$ | $u_{15}$ | err[%] |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|--------|
| 45  | ●     | ●     | ●     | ●     | ●     | ●     | ●     | ●     | ●     | ●        | ●        | ●        | ●        | ●        | ●        | 0.000  |
| 42  | ●     | ●     | ●     | ●     | ●     | ●     | ●     | ●     | ●     | ●        | ●        | ●        | ○        | ●        | ●        | 0.000  |
| 39  | ●     | ●     | ●     | ●     | ●     | ●     | ●     | ●     | ●     | ●        | ○        | ●        | ○        | ●        | ●        | 0.005  |
| 36  | ●     | ●     | ●     | ●     | ●     | ●     | ●     | ●     | ●     | ●        | ○        | ●        | ○        | ●        | ○        | 0.011  |
| 33  | ●     | ●     | ●     | ●     | ●     | ●     | ●     | ●     | ○     | ●        | ○        | ●        | ○        | ●        | ○        | 0.018  |
| 30  | ●     | ●     | ●     | ●     | ●     | ●     | ●     | ○     | ○     | ●        | ○        | ●        | ○        | ●        | ○        | 0.101  |
| 27  | ●     | ●     | ●     | ●     | ●     | ●     | ○     | ○     | ○     | ●        | ○        | ●        | ○        | ●        | ○        | 0.330  |
| 24  | ●     | ●     | ●     | ●     | ●     | ●     | ○     | ○     | ○     | ●        | ○        | ○        | ○        | ●        | ○        | 0.771  |
| 21  | ●     | ●     | ●     | ●     | ●     | ●     | ○     | ○     | ○     | ○        | ○        | ○        | ○        | ●        | ○        | 1.73   |
| 18  | ●     | ●     | ●     | ●     | ●     | ●     | ○     | ○     | ○     | ○        | ○        | ○        | ○        | ○        | ○        | 2.73   |
| 15  | ●     | ●     | ●     | ●     | ●     | ○     | ○     | ○     | ○     | ○        | ○        | ○        | ○        | ○        | ○        | 5.27   |
| 12  | ●     | ●     | ●     | ○     | ●     | ○     | ○     | ○     | ○     | ○        | ○        | ○        | ○        | ○        | ○        | 10.4   |
| 9   | ●     | ●     | ●     | ○     | ○     | ○     | ○     | ○     | ○     | ○        | ○        | ○        | ○        | ○        | ○        | 23.8   |

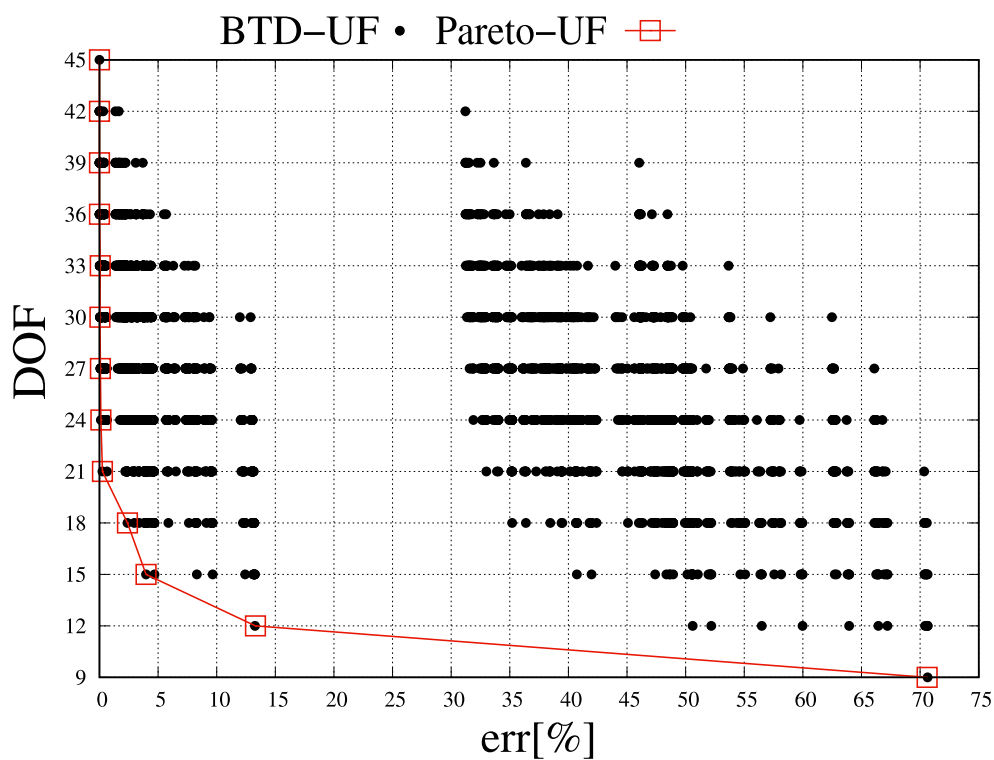

 Figura 5.3: BTD per trave a tre fori con  $\frac{L}{a} = 100$ 

 Tabella 5.2: Modelli BTD per trave a tre fori con  $\frac{L}{a} = 100$ 

| DOF | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4$ | $u_5$ | $u_6$ | $u_7$ | $u_8$ | $u_9$ | $u_{10}$ | $u_{11}$ | $u_{12}$ | $u_{13}$ | $u_{14}$ | $u_{15}$ | err[%] |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|--------|
| 45  | •     | •     | •     | •     | •     | •     | •     | •     | •     | •        | •        | •        | •        | •        | •        | 0.000  |
| 42  | •     | •     | •     | •     | •     | •     | •     | •     | •     | •        | •        | •        | •        | •        | ○        | 0.000  |
| 39  | •     | •     | •     | •     | •     | •     | •     | •     | •     | •        | •        | ○        | •        | ○        | ○        | 0.000  |
| 36  | •     | •     | •     | •     | •     | •     | •     | •     | •     | •        | •        | ○        | ○        | ○        | ○        | 0.005  |
| 33  | •     | •     | •     | •     | •     | •     | •     | •     | •     | •        | ○        | ○        | ○        | ○        | ○        | 0.063  |
| 30  | •     | •     | •     | •     | •     | ○     | •     | •     | ○     | •        | •        | ○        | ○        | ○        | ○        | 0.046  |
| 27  | •     | •     | •     | •     | •     | ○     | •     | •     | ○     | ○        | •        | ○        | ○        | ○        | ○        | 0.074  |
| 24  | •     | •     | •     | •     | •     | ○     | •     | •     | ○     | ○        | ○        | ○        | ○        | ○        | ○        | 0.119  |
| 21  | •     | •     | •     | •     | •     | ○     | •     | ○     | ○     | ○        | ○        | ○        | ○        | ○        | ○        | 0.253  |
| 18  | •     | •     | •     | •     | •     | ○     | ○     | ○     | ○     | ○        | ○        | ○        | ○        | ○        | ○        | 2.38   |
| 15  | •     | •     | •     | ○     | •     | •     | ○     | ○     | ○     | ○        | ○        | ○        | ○        | ○        | ○        | 3.97   |
| 12  | •     | •     | •     | ○     | •     | ○     | ○     | ○     | ○     | ○        | ○        | ○        | ○        | ○        | ○        | 13.3   |
| 9   | •     | •     | •     | ○     | ○     | ○     | ○     | ○     | ○     | ○        | ○        | ○        | ○        | ○        | ○        | 70.6   |

Dalle analisi effettuate si può notare come nel caso di trave molto più allungata gran parte delle teorie considerate presentino errori parecchio elevati. Tuttavia, se consideriamo solo le teorie migliori per ciascun grado di libertà, da 45 DOF a 15 DOF attivi l'analisi con trave  $\frac{L}{a} = 100$  presenta errori molto bassi e perfino inferiori rispetto al caso di trave  $\frac{L}{a} = 10$ . Se consideriamo invece il caso della teoria trave con solo i termini costanti attivi, con 9 DOF, la seconda analisi presenterà un risultato gravemente errato, al contrario del primo caso che rimane con un errore inferiore al 25%.

Questi risultati possono essere dedotti facilmente anche dalla tabella dei modelli BTD, che mostra quali sono le teorie migliori per ogni DOF considerato, indicando anche il valore dell'errore percentuale. In questo caso di trave vengono riportati solo i 15 elementi relativi alla direzione  $\alpha$ , in quanto i termini lungo le altre due direzioni vengono attivati allo stesso modo contemporaneamente.

## 5.2 Risultati analisi guscio ortotropo con BTD

La seguente analisi è svolta per un guscio composito a tre strati, soggetto a condizioni di vincolo semplicemente appoggiate. Casi di studio simili sono stati affrontati in letteratura [105], utilizzando proprio i BTD per eseguire analisi efficienti. Tale elemento viene riportato in figura 5.4. Tutti e quattro i lati del guscio sono vincolati con un semplice appoggio, condizione che garantisce un vincolo meccanico sufficiente a impedire traslazioni e rotazioni globali, mantenendo però la possibilità di flessione locale. Tale struttura presenta le seguenti caratteristiche geometriche:

- Lunghezza dei lati del guscio  $a = b = 1m$
- La geometria è simmetrica rispetto agli assi principali, con  $R = R_\alpha = R_\beta$

Dove  $a, b$  sono le dimensioni principali della sezione sul piano e  $h$  è lo spessore del guscio.

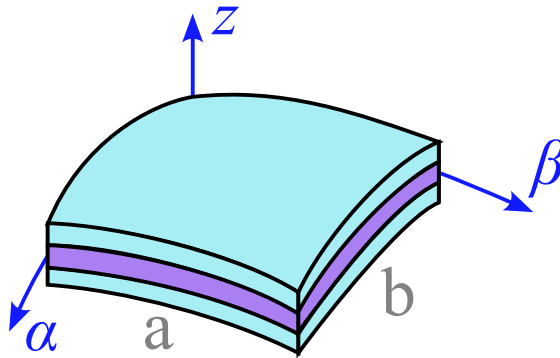


Figura 5.4: Guscio ortotropo con 3 strati



Facendo variare il rapporto  $\frac{a}{h}$  il parametro che varia è proprio lo spessore. Il materiale utilizzato è un laminato ortotropo, con le proprietà elencate di seguito:

- Moduli di Young  $E_1 = 25GPa$ ,  $E_2 = 1GPa$ ,  $E_3 = 1GPa$
- Coefficienti di Poisson  $\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.25$
- Moduli di taglio  $G_{12} = G_{13} = 0.5GPa$ ,  $G_{23} = 0.2GPa$

La laminazione segue la sequenza simmetrica  $[0/90/0]$ , dove gli strati a  $0^\circ$  sono allineati con la direzione  $\beta$  e quelli a  $90^\circ$  con la direzione  $\alpha$ .

Lo scopo dell'analisi è la determinazione delle prime dieci frequenze naturali, ottenute tramite modellazione a elementi finiti con la Carrera Unified Formulation. Anche in questo caso è stata impiegata un'espansione polinomiale di Taylor del quarto ordine (TE4) per rappresentare il campo di spostamenti lungo lo spessore del guscio. Quest'ultimo è discretizzato mediante 3 elementi finiti B4. L'analisi è stata condotta valutando tutte le possibili teorie ridotte derivabili dalla combinazione assiomatica dei termini dell'espansione, per un totale di  $2^{12} = 4096$  modelli distinti. Per ottenere questo valore si è partiti dai 15 gradi di libertà che si hanno in un modello TE4, considerando determinate assunzioni che semplificano e riducono il numero di DOF indipendenti: si sceglie di non far variare, mantenendo costanti, i gradi di libertà relativi ai termini costanti.

Come già visto nel caso della trave il metodo assiomatico-asintotico (AAM) permette di analizzare sistematicamente il ruolo di ciascun termine dell'espansione, evidenziando l'accuratezza della teoria e permettendo la costruzione del BTD associato al problema considerato. In letteratura sono stati già studiati metodi asintotici per la descrizione di piastre, sia di materiale ortotropo che sandwich [106]. Anche per il guscio si utilizza una Taylor Expansion del quarto ordine, come teoria di riferimento.

Per ciascun modello, sono state calcolate le prime 10 frequenze naturali, che costituiscono il parametro di controllo utilizzato per la valutazione dell'accuratezza. Come visto in precedenza l'errore medio percentuale tra ciascun modello ridotto e il modello di riferimento TE4 è stato calcolato secondo la formula:

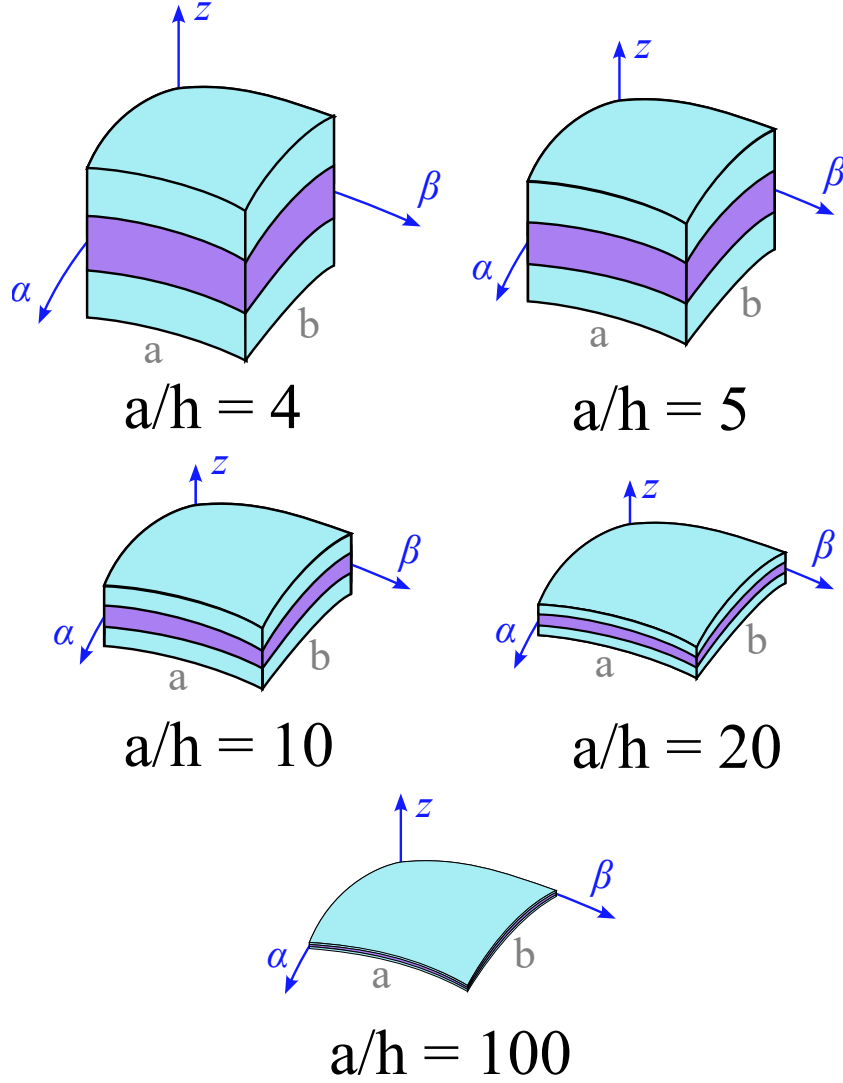
$$\text{Errore medio} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} \left| \frac{f_i - f_i^{\text{ref}}}{f_i^{\text{ref}}} \right| \times 100 \quad (5.2)$$

dove  $f_i$  è la  $i$ -esima frequenza naturale del modello ridotto e  $f_i^{\text{ref}}$  quella ottenuta con il modello completo preso come riferimento [34].

Per valutare l'influenza della snellezza geometrica sulla distribuzione ottimale delle teorie, sono state effettuate cinque analisi distinte, variando il rapporto tra lunghezza e spessore del guscio [92]:

- rapporto di spessore  $\frac{a}{h} = [4, 5, 10, 20, 100]$

I vari elementi gusci per i 5 rapporti di spessore analizzati vengono riportati in figura 5.5.



**Figura 5.5:** Gusci a tre strati per vari rapporti di spessore

I risultati ottenuti sono riportati nei grafici che seguono e mostrano come la posizione dei modelli ottimali sulla curva BTD sia sensibile al parametro geometrico considerato. Per ogni analisi eseguita si riporta [92]:

- un grafico  $DOF - err(\%)$  con tutti i punti riportati per ogni teoria analizzata e una linea, evidenziata in rosso, che rappresenta la curva di Pareto. Tale curva indica, per ogni DOF, la teoria migliore, ovvero quella che conferisce il minimo errore possibile

- una tabella che riporta il DOF, i vari termini presenti nell'espressione della teoria guscio e l'errore percentuale relativo a ciascuna teoria analizzata [34]. Ogni pallino pieno presente in tabella indica che quel determinato termine è utilizzato nella teoria con quel valore di DOF. In tabella vengono riportati tutti i termini dell'espansione lungo  $\alpha, \beta, z$ .

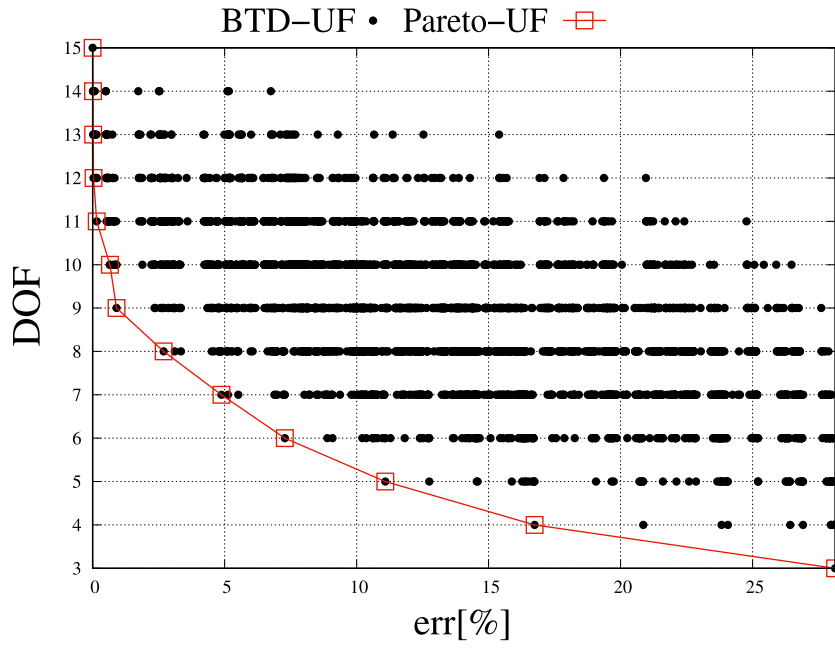


Figura 5.6: BTD per guscio a tre strati con  $\frac{a}{h} = 4$

**Tabella 5.3:** Modelli BTM per guscio a tre strati con  $\frac{a}{h} = 4$

| DOF | $u_{\alpha_1}$ | $u_{\beta_1}$ | $u_{z_1}$ | $u_{\alpha_2}$ | $u_{\beta_2}$ | $u_{z_2}$ | $u_{\alpha_3}$ | $u_{\beta_3}$ | $u_{z_3}$ | $u_{\alpha_4}$ | $u_{\beta_4}$ | $u_{z_4}$ | $u_{\alpha_5}$ | $u_{\beta_5}$ | $u_{z_5}$ | err[%] |
|-----|----------------|---------------|-----------|----------------|---------------|-----------|----------------|---------------|-----------|----------------|---------------|-----------|----------------|---------------|-----------|--------|
| 15  | •              | •             | •         | •              | •             | •         | •              | •             | •         | •              | •             | •         | •              | •             | •         | 0.000  |
| 14  | •              | •             | •         | •              | •             | •         | •              | •             | •         | •              | •             | •         | ○              | •             | •         | 0.013  |
| 13  | •              | •             | •         | •              | •             | •         | ○              | •             | •         | •              | •             | •         | ○              | •             | •         | 0.019  |
| 12  | •              | •             | •         | •              | •             | ○         | ○              | •             | •         | •              | •             | •         | ○              | •             | •         | 0.037  |
| 11  | •              | •             | •         | •              | •             | ○         | ○              | •             | •         | •              | •             | ○         | ○              | •             | •         | 0.155  |
| 10  | •              | •             | •         | •              | •             | ○         | ○              | •             | ○         | •              | •             | ○         | ○              | •             | •         | 0.654  |
| 9   | •              | •             | •         | •              | •             | ○         | ○              | •             | ○         | •              | •             | ○         | ○              | •             | ○         | 0.904  |
| 8   | •              | •             | •         | ○              | •             | ○         | ○              | •             | ○         | •              | •             | ○         | ○              | •             | ○         | 2.693  |
| 7   | •              | •             | •         | ○              | •             | ○         | ○              | •             | ○         | •              | ○             | ○         | ○              | •             | ○         | 4.882  |
| 6   | •              | •             | •         | ○              | •             | ○         | ○              | •             | ○         | •              | ○             | ○         | ○              | ○             | ○         | 7.279  |
| 5   | •              | •             | •         | ○              | •             | ○         | ○              | ○             | ○         | •              | ○             | ○         | ○              | ○             | ○         | 11.09  |
| 4   | •              | •             | •         | ○              | •             | ○         | ○              | ○             | ○         | ○              | ○             | ○         | ○              | ○             | ○         | 16.74  |
| 3   | •              | •             | •         | ○              | ○             | ○         | ○              | ○             | ○         | ○              | ○             | ○         | ○              | ○             | ○         | 28.12  |

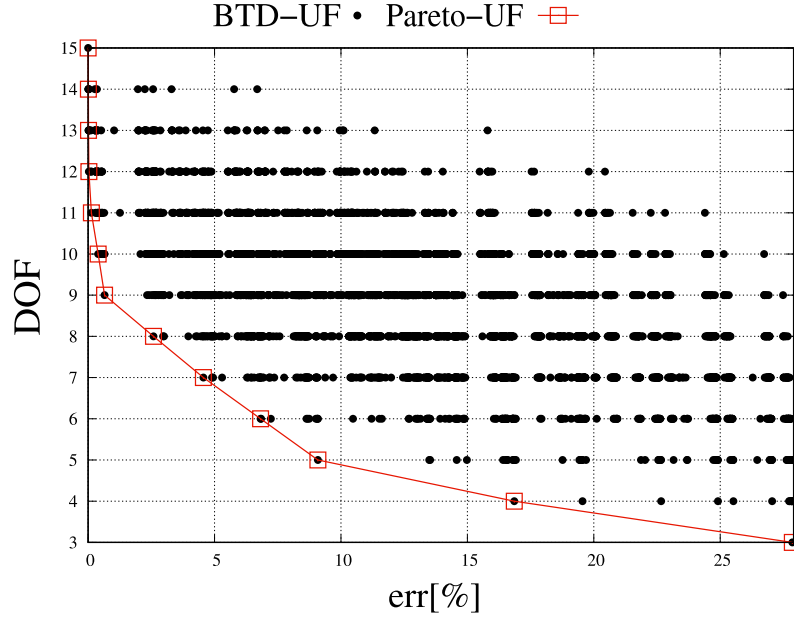

 Figura 5.7: BTD per guscio a tre strati con  $\frac{a}{h} = 5$ 

 Tabella 5.4: Modelli BTD per guscio a tre strati con  $\frac{a}{h} = 5$ 

| DOF | $u_{\alpha_1}$ | $u_{\beta_1}$ | $u_{z_1}$ | $u_{\alpha_2}$ | $u_{\beta_2}$ | $u_{z_2}$ | $u_{\alpha_3}$ | $u_{\beta_3}$ | $u_{z_3}$ | $u_{\alpha_4}$ | $u_{\beta_4}$ | $u_{z_4}$ | $u_{\alpha_5}$ | $u_{\beta_5}$ | $u_{z_5}$ | err[%] |
|-----|----------------|---------------|-----------|----------------|---------------|-----------|----------------|---------------|-----------|----------------|---------------|-----------|----------------|---------------|-----------|--------|
| 15  | •              | •             | •         | •              | •             | •         | •              | •             | •         | •              | •             | •         | •              | •             | •         | 0.000  |
| 14  | •              | •             | •         | •              | •             | •         | •              | •             | •         | •              | •             | •         | ○              | •             | •         | 0.011  |
| 13  | •              | •             | •         | •              | •             | •         | ○              | •             | •         | •              | •             | •         | ○              | •             | •         | 0.016  |
| 12  | •              | •             | •         | •              | •             | ○         | ○              | •             | •         | •              | •             | •         | ○              | •             | •         | 0.028  |
| 11  | •              | •             | •         | •              | •             | ○         | ○              | •             | •         | •              | •             | ○         | ○              | •             | •         | 0.129  |
| 10  | •              | •             | •         | •              | •             | ○         | ○              | •             | ○         | •              | •             | ○         | ○              | •             | •         | 0.394  |
| 9   | •              | •             | •         | •              | •             | ○         | ○              | •             | ○         | •              | •             | ○         | ○              | •             | ○         | 0.648  |
| 8   | •              | •             | •         | •              | •             | ○         | ○              | •             | ○         | •              | •             | ○         | ○              | ○             | ○         | 2.585  |
| 7   | •              | •             | •         | •              | •             | ○         | ○              | ○             | ○         | •              | •             | ○         | ○              | ○             | ○         | 4.558  |
| 6   | •              | •             | •         | ○              | •             | ○         | ○              | ○             | ○         | •              | •             | ○         | ○              | ○             | ○         | 6.819  |
| 5   | •              | •             | •         | ○              | •             | ○         | ○              | ○             | ○         | •              | ○             | ○         | ○              | ○             | ○         | 9.088  |
| 4   | •              | •             | •         | ○              | •             | ○         | ○              | ○             | ○         | ○              | ○             | ○         | ○              | ○             | ○         | 16.86  |
| 3   | •              | •             | •         | ○              | ○             | ○         | ○              | ○             | ○         | ○              | ○             | ○         | ○              | ○             | ○         | 27.85  |

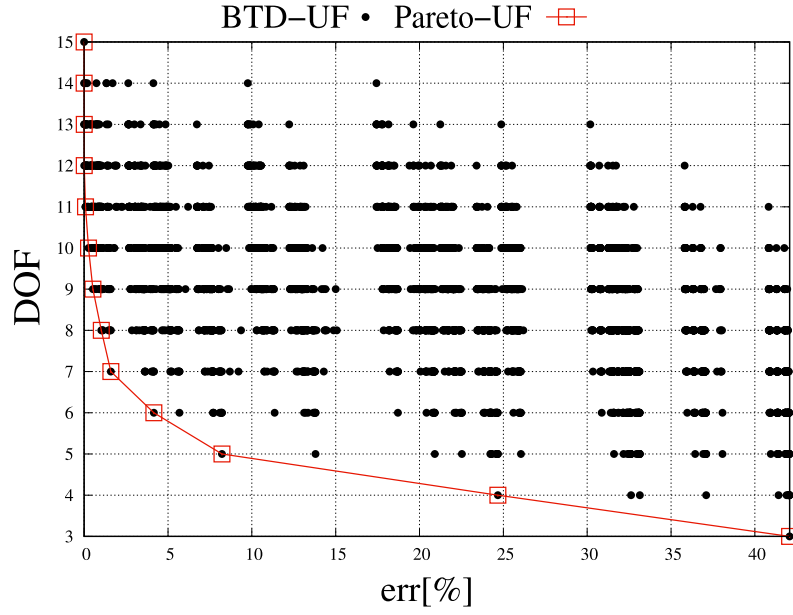

 Figura 5.8: BTD per guscio a tre strati con  $\frac{a}{h} = 10$ 

 Tabella 5.5: Modelli BTD per guscio a tre strati con  $\frac{a}{h} = 10$ 

| DOF | $u_{\alpha_1}$ | $u_{\beta_1}$ | $u_{z_1}$ | $u_{\alpha_2}$ | $u_{\beta_2}$ | $u_{z_2}$ | $u_{\alpha_3}$ | $u_{\beta_3}$ | $u_{z_3}$ | $u_{\alpha_4}$ | $u_{\beta_4}$ | $u_{z_4}$ | $u_{\alpha_5}$ | $u_{\beta_5}$ | $u_{z_5}$ | err[%] |
|-----|----------------|---------------|-----------|----------------|---------------|-----------|----------------|---------------|-----------|----------------|---------------|-----------|----------------|---------------|-----------|--------|
| 15  | •              | •             | •         | •              | •             | •         | •              | •             | •         | •              | •             | •         | •              | •             | •         | 0.000  |
| 14  | •              | •             | •         | •              | •             | •         | •              | •             | •         | •              | •             | •         | ○              | •             | •         | 0.003  |
| 13  | •              | •             | •         | •              | •             | •         | •              | •             | •         | •              | •             | ○         | ○              | •             | •         | 0.005  |
| 12  | •              | •             | •         | •              | •             | •         | ○              | •             | •         | •              | •             | ○         | ○              | •             | •         | 0.007  |
| 11  | •              | •             | •         | •              | •             | ○         | ○              | •             | •         | •              | •             | ○         | ○              | •             | •         | 0.080  |
| 10  | •              | •             | •         | •              | •             | ○         | ○              | •             | ○         | •              | •             | ○         | ○              | •             | •         | 0.156  |
| 9   | •              | •             | •         | •              | •             | ○         | ○              | •             | ○         | •              | •             | ○         | ○              | ○             | •         | 0.520  |
| 8   | •              | •             | •         | •              | •             | ○         | ○              | ○             | ○         | •              | •             | ○         | ○              | ○             | •         | 1.022  |
| 7   | •              | •             | •         | •              | •             | ○         | ○              | ○             | ○         | •              | •             | ○         | ○              | ○             | ○         | 1.590  |
| 6   | •              | •             | •         | •              | •             | ○         | ○              | ○             | ○         | •              | ○             | ○         | ○              | ○             | ○         | 4.159  |
| 5   | •              | •             | •         | ○              | •             | ○         | ○              | ○             | ○         | •              | ○             | ○         | ○              | ○             | ○         | 8.219  |
| 4   | •              | •             | •         | ○              | •             | ○         | ○              | ○             | ○         | ○              | ○             | ○         | ○              | ○             | ○         | 24.67  |
| 3   | •              | •             | •         | ○              | ○             | ○         | ○              | ○             | ○         | ○              | ○             | ○         | ○              | ○             | ○         | 40.89  |

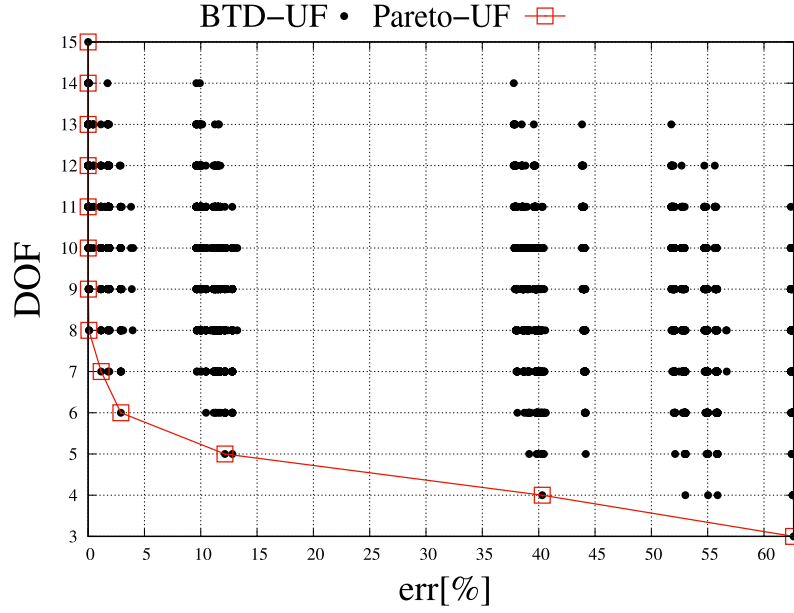

 Figura 5.9: BTD per guscio a tre strati con  $\frac{a}{h} = 20$ 

 Tabella 5.6: Modelli BTD per guscio a tre strati con  $\frac{a}{h} = 20$ 

| DOF | $u_{\alpha_1}$ | $u_{\beta_1}$ | $u_{z_1}$ | $u_{\alpha_2}$ | $u_{\beta_2}$ | $u_{z_2}$ | $u_{\alpha_3}$ | $u_{\beta_3}$ | $u_{z_3}$ | $u_{\alpha_4}$ | $u_{\beta_4}$ | $u_{z_4}$ | $u_{\alpha_5}$ | $u_{\beta_5}$ | $u_{z_5}$ | err[%] |
|-----|----------------|---------------|-----------|----------------|---------------|-----------|----------------|---------------|-----------|----------------|---------------|-----------|----------------|---------------|-----------|--------|
| 15  | •              | •             | •         | •              | •             | •         | •              | •             | •         | •              | •             | •         | •              | •             | •         | 0.000  |
| 14  | •              | •             | •         | •              | •             | •         | •              | •             | •         | •              | •             | •         | ○              | •             | •         | 0.001  |
| 13  | •              | •             | •         | •              | •             | •         | ○              | •             | •         | •              | •             | •         | ○              | •             | •         | 0.002  |
| 12  | •              | •             | •         | •              | •             | •         | ○              | •             | •         | •              | •             | ○         | ○              | •             | •         | 0.003  |
| 11  | •              | •             | •         | •              | •             | •         | ○              | •             | •         | •              | •             | ○         | ○              | ○             | •         | 0.004  |
| 10  | •              | •             | •         | •              | •             | •         | ○              | ○             | •         | •              | •             | ○         | ○              | ○             | •         | 0.006  |
| 9   | •              | •             | •         | •              | •             | ○         | ○              | ○             | •         | •              | •             | ○         | ○              | ○             | •         | 0.019  |
| 8   | •              | •             | •         | •              | •             | ○         | ○              | ○             | •         | •              | •             | ○         | ○              | ○             | ○         | 0.065  |
| 7   | •              | •             | •         | •              | •             | ○         | ○              | ○             | ○         | •              | •             | ○         | ○              | ○             | ○         | 1.154  |
| 6   | •              | •             | •         | •              | •             | ○         | ○              | ○             | ○         | •              | ○             | ○         | ○              | ○             | ○         | 2.906  |
| 5   | •              | •             | •         | ○              | •             | ○         | ○              | ○             | ○         | •              | ○             | ○         | ○              | ○             | ○         | 12.15  |
| 4   | •              | •             | •         | ○              | •             | ○         | ○              | ○             | ○         | ○              | ○             | ○         | ○              | ○             | ○         | 40.32  |
| 3   | •              | •             | •         | ○              | ○             | ○         | ○              | ○             | ○         | ○              | ○             | ○         | ○              | ○             | ○         | 62.63  |

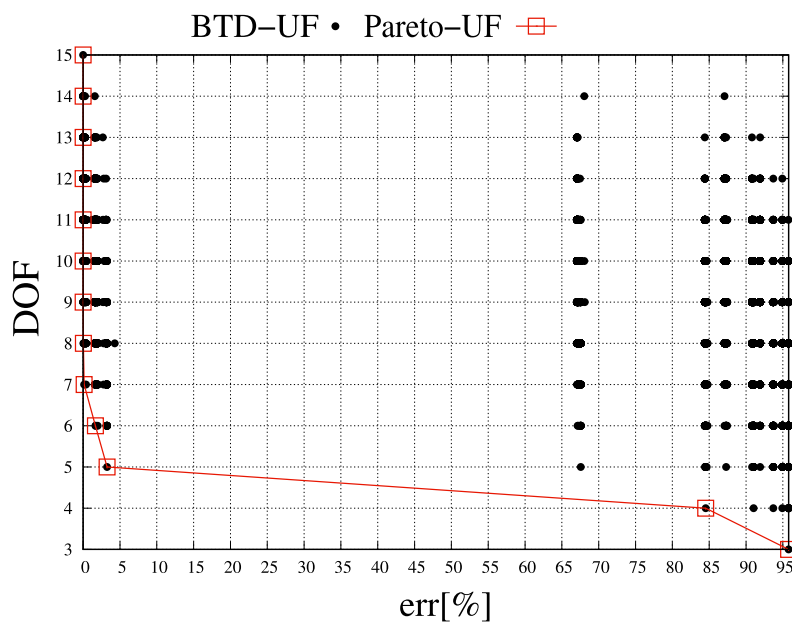

 Figura 5.10: BTB per guscio a tre strati con  $\frac{a}{h} = 100$ 

 Tabella 5.7: Modelli BTB per guscio a tre strati con  $\frac{a}{h} = 100$ 

| DOF | $u_{\alpha_1}$ | $u_{\beta_1}$ | $u_{z_1}$ | $u_{\alpha_2}$ | $u_{\beta_2}$ | $u_{z_2}$ | $u_{\alpha_3}$ | $u_{\beta_3}$ | $u_{z_3}$ | $u_{\alpha_4}$ | $u_{\beta_4}$ | $u_{z_4}$ | $u_{\alpha_5}$ | $u_{\beta_5}$ | $u_{z_5}$ | err[%] |
|-----|----------------|---------------|-----------|----------------|---------------|-----------|----------------|---------------|-----------|----------------|---------------|-----------|----------------|---------------|-----------|--------|
| 15  | •              | •             | •         | •              | •             | •         | •              | •             | •         | •              | •             | •         | •              | •             | •         | 0.000  |
| 14  | •              | •             | •         | •              | •             | •         | •              | •             | •         | •              | •             | ○         | •              | •             | •         | 0.000  |
| 13  | •              | •             | •         | •              | •             | •         | •              | •             | •         | •              | •             | ○         | •              | •             | ○         | 0.000  |
| 12  | •              | •             | •         | •              | •             | •         | •              | •             | •         | •              | •             | ○         | ○              | •             | ○         | 0.000  |
| 11  | •              | •             | •         | •              | •             | •         | ○              | •             | •         | •              | •             | ○         | ○              | •             | ○         | 0.001  |
| 10  | •              | •             | •         | •              | •             | •         | ○              | •             | •         | •              | •             | ○         | ○              | ○             | ○         | 0.002  |
| 9   | •              | •             | •         | •              | •             | •         | ○              | ○             | •         | •              | •             | ○         | ○              | ○             | ○         | 0.003  |
| 8   | •              | •             | •         | •              | •             | ○         | ○              | ○             | •         | •              | •             | ○         | ○              | ○             | ○         | 0.036  |
| 7   | •              | •             | •         | •              | •             | ○         | ○              | ○             | •         | •              | ○             | ○         | ○              | ○             | ○         | 0.133  |
| 6   | •              | •             | •         | •              | •             | ○         | ○              | ○             | ○         | •              | ○             | ○         | ○              | ○             | ○         | 1.668  |
| 5   | •              | •             | •         | •              | •             | ○         | ○              | ○             | ○         | ○              | ○             | ○         | ○              | ○             | ○         | 3.260  |
| 4   | •              | •             | •         | ○              | •             | ○         | ○              | ○             | ○         | ○              | ○             | ○         | ○              | ○             | ○         | 84.52  |
| 3   | •              | •             | •         | ○              | ○             | ○         | ○              | ○             | ○         | ○              | ○             | ○         | ○              | ○             | ○         | 95.78  |



Nei primi due casi, relativi a gusci spessi, si osserva una distribuzione piuttosto ampia dei modelli nel piano DOF–errore. Le migliori teorie si collocano tra 11 e 15 DOF, dove si ottengono errori ben inferiori al 5%. I modelli con meno di 8 DOF non sono in grado di fornire risultati sufficientemente accurati. Bisogna trovare un buon compromesso senza utilizzare la teoria completa con tutti i gradi di libertà. Nei diagrammi successivi, per gusci sempre più sottili, si può notare come l'errore percentuale va aumentando sempre di più per determinate teorie, portando a risultati marcatamente errati per molti valori bassi di DOF. I grafici mostrano un andamento sempre più diviso, mostrando l'importanza della scelta dei termini per ottenere risultati migliori, anche utilizzando lo stesso numero di gradi di libertà. Ciò suggerisce che, in strutture molto sottili, l'effetto dominante sia concentrato su pochi contributi cinematici chiave (come la flessione e l'effetto di taglio), e che molte delle variabili presenti nel modello completo non contribuiscano in modo significativo all'accuratezza globale.

Tutti questi valori vengono esplicitati chiaramente nelle tabelle che, oltre a riportare il valore dell'errore percentuale, racchiude i termini utilizzati in ciascuna teoria migliore per i vari DOF. A differenza del caso trave, per la piastra abbiamo 15 termini complessivi, nelle tre direzioni. Tali termini possono variare indipendentemente tra loro.

## Capitolo 6

# Analisi dinamica di risposta nel tempo per travi e gusci

Nel seguente capitolo si pone attenzione su un tipo fondamentale di analisi, quella dinamica di risposta nel tempo. Grazie a questa possiamo osservare e studiare l'andamento nel tempo di grandezze fondamentali, quali gli spostamenti e le tensioni agenti su determinati punti delle strutture analizzate.

Vi sono vari studi in letteratura che effettuano analisi dinamiche, utilizzando la formulazione CUF, in modo da studiare gli effetti su componenti importanti dei velivoli, come rotori o pale di elicotteri [107, 108].

Verranno discussi i risultati numerici ottenuti effettuando delle analisi dinamiche di risposta nel tempo applicando il metodo di integrazione temporale di Newmark. Inizialmente si propone un caso semplice di trave a sezione quadrata e delle espansioni di Taylor complete di vario ordine. Successivamente si punta ad utilizzare i dati ricavati dai BTD per scegliere direttamente quale teoria utilizzare e ottimizzare l'analisi.

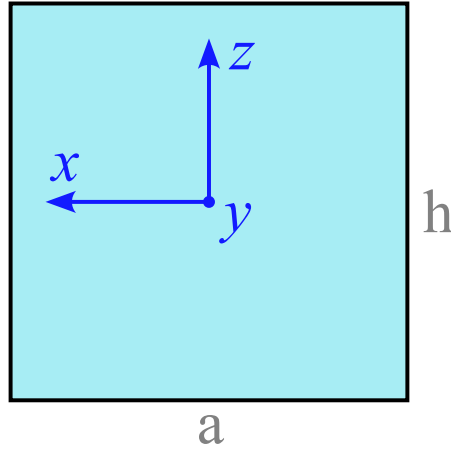
### 6.1 Risultati analisi trave a sezione quadrata

La prima analisi svolta riguarda una trave isotropa, con sezione quadrata, soggetta a condizioni di vincolo semplicemente appoggiate. La geometria della sezione della trave viene riportata in figura 6.1.

La trave presenta le seguenti caratteristiche geometriche:

- Rapporto trave  $\frac{L}{h} = 100$
- Geometria della sezione,  $a = 0.1m$ ,  $h = 0.1m$

Dove  $a, h$  sono le dimensioni principali della sezione, per l'appunto quadrata.



**Figura 6.1:** Trave isotropa con sezione quadrata

Il materiale utilizzato è un isotropo, con le proprietà elencate di seguito:

- Modulo di Young  $E = 69GPa$
- Coefficiente di Poisson  $\nu = 0.33$
- Densità  $\rho = 2700kg/m^3$

Questa configurazione di trave analizzata è tra le più semplici, molto utile per affrontare per la prima volta un'analisi dinamica di risposta nel tempo. Tale caso, già proposto in letteratura, è stato utilizzato per validare e verificare la teoria proposta e il codice utilizzato. In altri lavori [109] sono state già analizzate casistiche dinamiche per travi, anche a sezione aperta [110].

Lo scopo dell'analisi è quello di determinare gli andamenti di spostamento  $u_z$  e tensioni  $\sigma_{yy}$  e  $\sigma_{yz}$ , in funzione del tempo, in determinati punti della trave.

- Spostamento verticale  $u_z$  in corrispondenza del punto centrale della sezione media della trave, in coordinate  $(0, \frac{L}{2}, 0)$ , corrispondente al baricentro della sezione
- Tensione normale,  $\sigma_{yy}$ , in corrispondenza di un quarto della trave al top della sezione, in coordinate  $(0, \frac{L}{4}, \frac{h}{2})$
- Tensione tangenziale,  $\sigma_{yz}$ , in corrispondenza di un quarto della trave al centro della sezione, in coordinate  $(0, \frac{L}{4}, 0)$

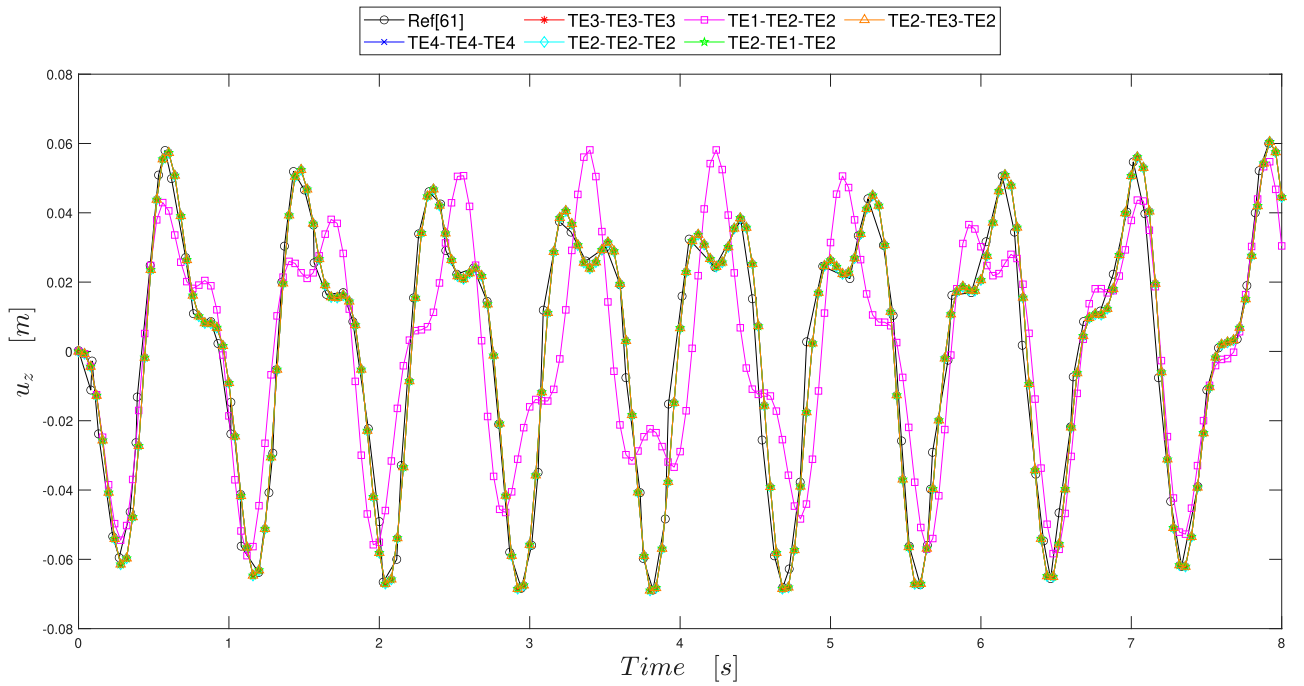
La trave è discretizzata mediante 10 elementi finiti B4. La pressione applicata sulla trave è di tipo sinusoidale variabile nel tempo, definita dalla seguente espressione:

$$P_z(t) = P_{z0} \sin(\omega t) \quad (6.1)$$

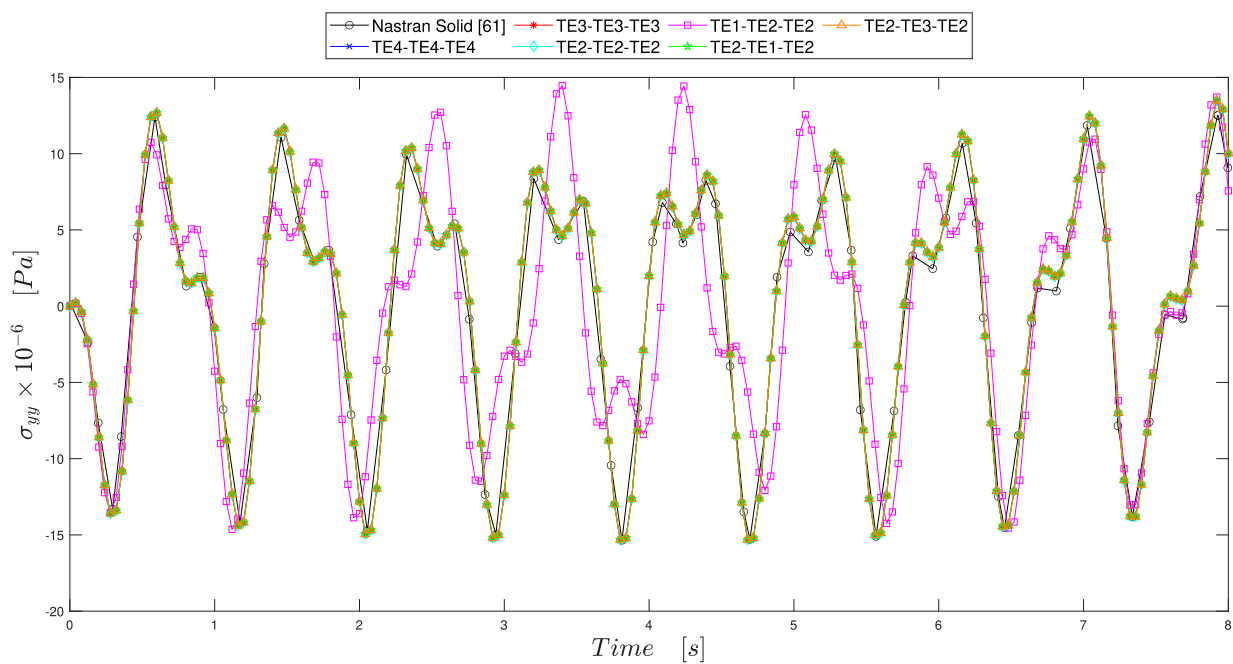
dove  $P_{z_0} = -1000N$  è l'ampiezza del carico sinusoidale e  $\omega = 7rad/s$  è la frequenza angolare [63].

Per descrivere il campo di spostamenti si sceglie di utilizzare le espansioni di Taylor di diverso ordine. Si parte da considerare delle teorie complete dal quarto ordine in giù per tutte e tre le direzioni. Le ulteriori combinazioni di teorie utilizzate prevedono di considerare  $TE$  di ordine inferiore in determinate direzioni, ottenendo un campo di spostamenti, per esempio, di  $TE2 - TE3 - TE2$ .

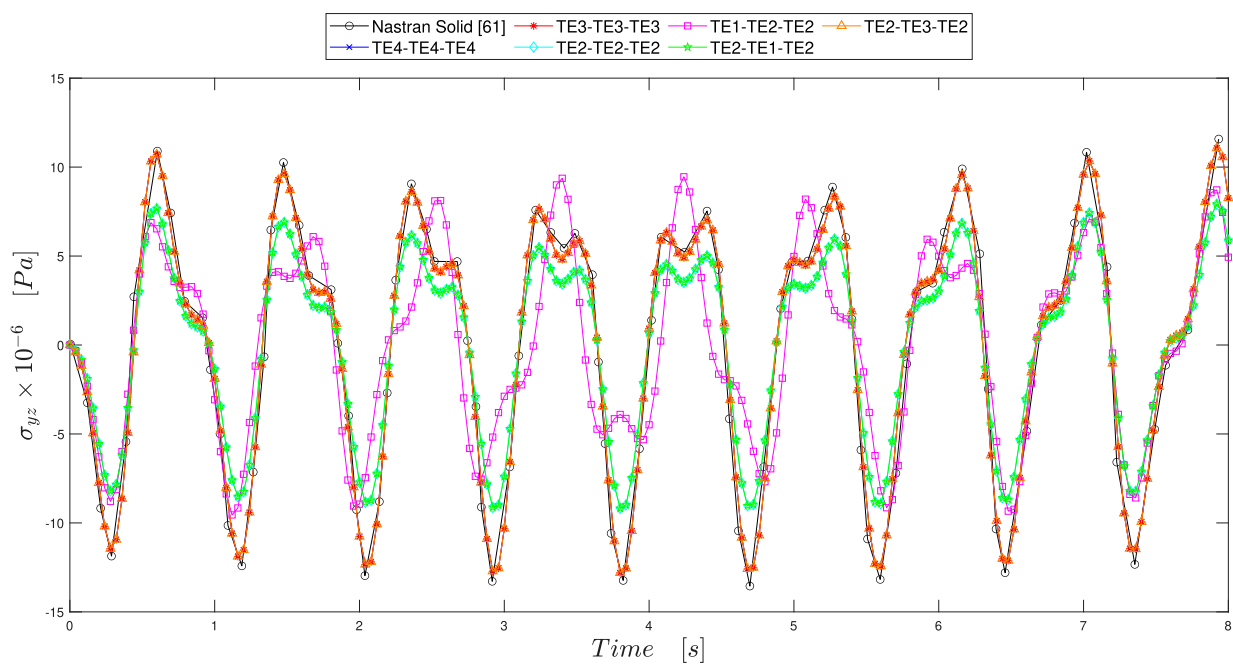
Di seguito si riportano gli andamenti delle grandezze precedentemente descritte dopo aver effettuato un'analisi dinamica su 2000 istanti temporali, ma andandone a riportare solo 200 per una più facile comprensione. L'intervallo di tempo considerato va da  $0s$  a  $8s$ .



**Figura 6.2:** Andamento di  $u_z$  nel tempo con teorie di Taylor di vario ordine



**Figura 6.3:** Andamento di  $\sigma_{yy}$  nel tempo con teorie di Taylor di vario ordine



**Figura 6.4:** Andamento di  $\sigma_{yz}$  nel tempo con teorie di Taylor di vario ordine

Di seguito viene riportata una tabella con i risultati numerici delle analisi di spostamenti e tensioni con i vari modelli utilizzati. I risultati riportati sono relativi al tempo  $t = 0.28s$  dell'analisi, ovvero in corrispondenza del primo picco negativo dei tre andamenti, e al tempo  $t = 0.60s$ , ovvero il primo picco positivo.

**Tabella 6.1:** Spostamento e tensioni per trave isotropa a sezione quadrata -  $t = 0.28s$

| Modello         | $u_z \times 10^{-2}[m]$ | $\sigma_{yy} \times 10^{-6}[Pa]$ | $\sigma_{yz} \times 10^{-6}[Pa]$ | DOFs |
|-----------------|-------------------------|----------------------------------|----------------------------------|------|
| Ref[63]         | -5.775                  | -12.42                           | -11.60                           | —    |
| TE4 - TE4 - TE4 | -6.144                  | -13.58                           | -11.44                           | 465  |
| TE3 - TE3 - TE3 | -6.144                  | -13.58                           | -11.44                           | 372  |
| TE2 - TE2 - TE2 | -6.144                  | -13.58                           | -8.20                            | 279  |
| TE1 - TE2 - TE2 | -5.446                  | -13.55                           | -8.79                            | 248  |
| TE2 - TE1 - TE2 | -6.144                  | -13.58                           | -8.20                            | 248  |
| TE2 - TE3 - TE2 | -6.144                  | -13.58                           | -11.44                           | 310  |

**Tabella 6.2:** Spostamento e tensioni per trave isotropa a sezione quadrata -  $t = 0.60s$

| Modello         | $u_z \times 10^{-2}[m]$ | $\sigma_{yy} \times 10^{-6}[Pa]$ | $\sigma_{yz} \times 10^{-6}[Pa]$ | DOFs |
|-----------------|-------------------------|----------------------------------|----------------------------------|------|
| Ref[63]         | 5.328                   | 11.66                            | 10.69                            | —    |
| TE4 - TE4 - TE4 | 5.733                   | 12.68                            | 10.71                            | 465  |
| TE3 - TE3 - TE3 | 5.733                   | 12.68                            | 10.71                            | 372  |
| TE2 - TE2 - TE2 | 5.733                   | 12.68                            | 7.67                             | 279  |
| TE1 - TE2 - TE2 | 4.055                   | 9.92                             | 6.53                             | 248  |
| TE2 - TE1 - TE2 | 5.733                   | 12.68                            | 7.67                             | 248  |
| TE2 - TE3 - TE2 | 5.733                   | 12.68                            | 10.71                            | 310  |

Dai grafici ottenuti si ottengono determinate informazioni riguardo la scelta delle teorie da utilizzare sulle varie direzioni. Infatti possiamo notare che in determinati casi, per ottenere degli andamenti ugualmente corretti, con un errore minimo, possono bastare anche teorie di ordine basso. I risultati di riferimento, "Ref[63]" e "Nastran Solid[63]", sono presi dal lavoro dello studio della risposta dinamica nel tempo di Azzara et al. [63].

- Spostamento  $u_z$ : il suo andamento risulta ben descritto quando si utilizzano teorie del terzo o quarto ordine in tutte le direzioni del campo. Il risultato

peggiore, che si discosta parecchio dall'andamento corretto, lo abbiamo nel caso  $TE1 - TE2 - TE2$ , dunque quando si utilizza un'espansione del primo ordine lungo  $x$ . Se invece si utilizza l'espansione del primo ordine lungo  $y$  il risultato sarà comunque molto vicino a quello corretto. Dunque notiamo una maggiore influenza del termine in  $x$ . Risultati comunque buoni, ma con un certo valore di errore, si ottengono nel caso di espansione del secondo ordine in tutte le direzioni. Facendo ulteriori prove si nota che i risultati migliori si ottengono quando si utilizzano delle  $TE$  almeno del terzo ordine nelle direzioni  $x$  e  $y$ . Fa eccezione il caso di  $TE2 - TE3 - TE2$  che mostra un andamento molto preciso e corrispondente a quello delle teorie di alto ordine. Utilizzare le espansioni del quarto ordine risulta dunque inutile per ottenere dei risultati corretti

- Tensione  $\sigma_{yy}$ : il suo andamento risulta ben descritto, anche in questo caso, quando si utilizzano le espansioni di ordine elevato in tutte le direzioni. Valgono le stesse considerazioni viste per il caso precedente. In questo caso notiamo una certa differenza anche nel caso di espansione lungo  $z$ , anche se meno rilevante di quella su  $y$ .
- Tensione  $\sigma_{yz}$ : considerazioni analoghe possono essere fatte per le tensioni tangenziali, dove vediamo degli andamenti sbagliati quando si utilizzano espansioni del primo o del secondo ordine su  $x$  e  $y$ . In questo caso però risulta importante anche il termine in  $z$ , notando una differenza nella scelta tra espansione di secondo e quarto ordine.

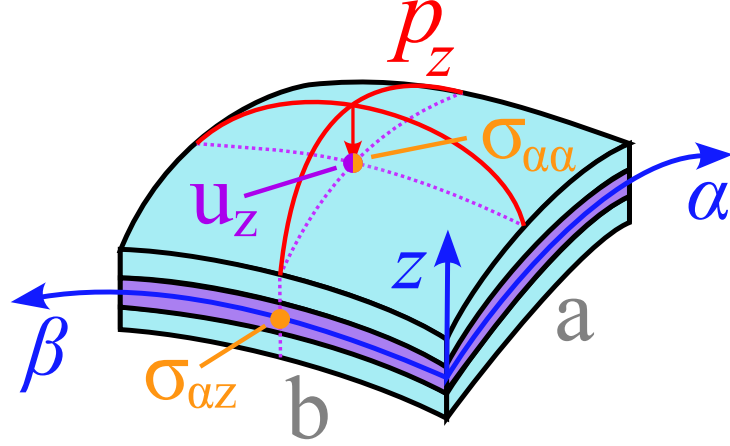
Tali risultati ci hanno consentito di validare il modello analizzato, confrontando i risultati ottenuti con le varie teorie per capire quale convenga maggiormente. In conclusione conviene optare per la scelta delle teorie che conferiscono il minor errore con il grado di espansione più basso.

## 6.2 Risultati analisi guscio a tre strati

La seconda analisi proposta riguarda un guscio composito a tre strati, soggetto a condizioni di vincolo semplicemente appoggiate. Casi di studio di modelli simili sono stati affrontati in letteratura [111], utilizzando teorie di ordine superiore per le analisi dinamiche. Tale elemento viene riportato in figura 6.5. Tale struttura presenta le seguenti caratteristiche geometriche:

- Lunghezza dei lati del guscio  $a = b = 1m$  e vari valori di rapporto di spessore
- La geometria è simmetrica rispetto agli assi principali, con  $R_\alpha = R_\beta = 1m$

Dove  $a, b$  sono le dimensioni principali della sezione sul piano e  $h$  è lo spessore del guscio.



**Figura 6.5:** Guscio ortotropo con 3 strati

Facendo variare il rapporto  $\frac{a}{h}$  il parametro che varia è proprio lo spessore. Il materiale utilizzato è un laminato ortotropo, già studiato in letteratura per queste analisi dinamiche di gusci [112]. Tale materiale presenta le proprietà sotto indicate:

- Moduli di Young  $E_1 = 25GPa$ ,  $E_2 = 1GPa$ ,  $E_3 = 1GPa$
- Coefficienti di Poisson  $\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.25$
- Moduli di taglio  $G_{12} = G_{13} = 0.5GPa$ ,  $G_{23} = 0.2GPa$

La laminazione segue la sequenza simmetrica  $[0/90/0]$ , dove gli strati a  $0^\circ$  sono allineati con la direzione  $\beta$  e quelli a  $90^\circ$  con la direzione  $\alpha$ .

Lo scopo dell'analisi è la determinazione dello spostamento  $u_z$  e delle tensioni  $\sigma_{\alpha\alpha}$  e  $\sigma_{\alpha z}$  in funzione del tempo, che varia da 0 a 64 secondi, in determinati punti del guscio. Si è considerata una forzante di tipo bisinusoidale che agisce lungo l'asse  $z$  del valore massimo di  $P_{z0} = 1MPa$ , con la seguente espressione:

$$P_z(t) = P_{z0} \sin\left(\frac{\pi\alpha}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi\beta}{b}\right) \sin(\omega t) \quad (6.2)$$

Al fine di confrontare in maniera più diretta i risultati si sceglie di riportare dei valori adimensionali. Per farlo si moltiplica o divide per grandezze caratteristiche come modulo di Young, pressione o parametri dimensionali:

$$\bar{u}_z = \frac{E_L h^3}{p_z R^4} u_z \quad \bar{\sigma}_{\alpha\alpha} = \frac{h^2}{p_z R^2} \sigma_{\alpha\alpha} \quad \bar{\sigma}_{\alpha z} = \frac{h}{p_z R} \sigma_{\alpha z} \quad (6.3)$$



dove  $E_L$  indica il modulo elastico dello strato laminato,  $h$  lo spessore del guscio,  $p_z$  la pressione a cui è soggetto il guscio e  $R$  il raggio di curvatura.

I punti scelti per analizzare i valori di  $u_z$ ,  $\sigma_{\alpha\alpha}$  e  $\sigma_{\alpha z}$  sono i seguenti:  $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right)$ ,  $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right)$ ,  $\left(0, \frac{b}{2}, 0\right)$ .

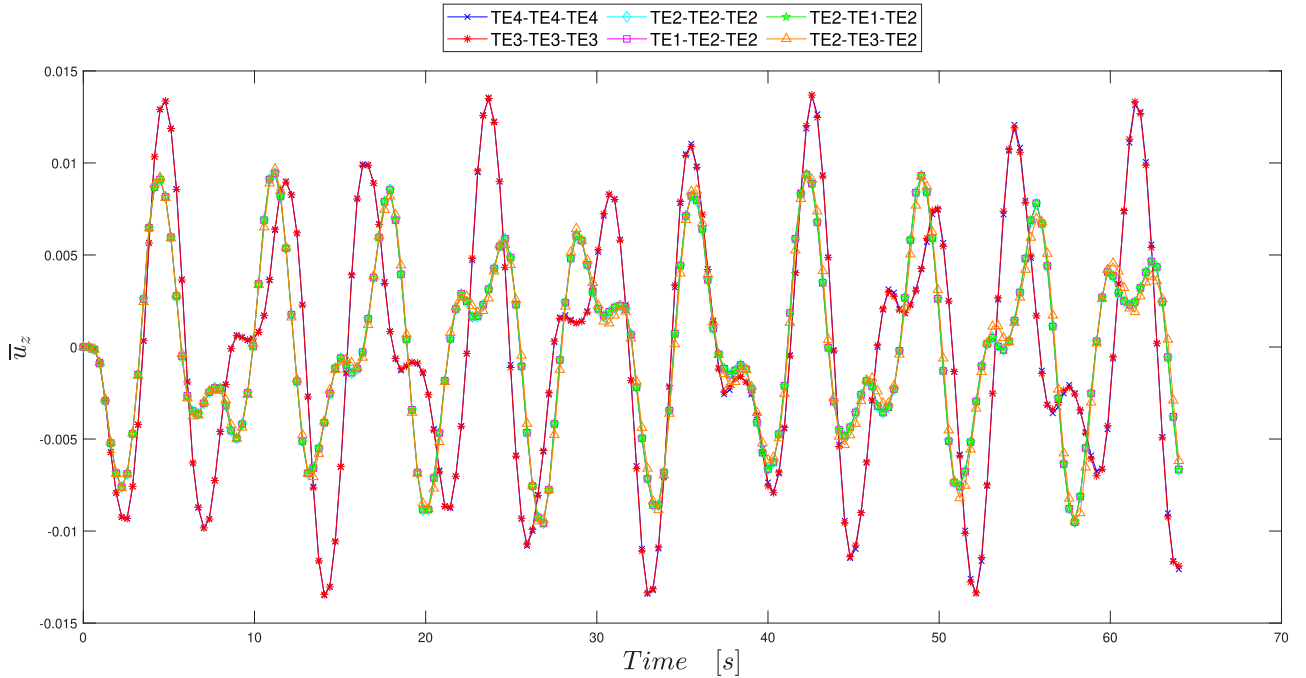
Per effettuare questa analisi si sceglie di utilizzare la simmetria del guscio, andando ad analizzare solo  $\frac{1}{4}$  della struttura complessiva.

**Analisi con espansioni di Taylor complete** Per prima cosa vengono impiegate varie teorie di espansione di Taylor per rappresentare il campo di spostamenti e tensioni lungo lo spessore del guscio.

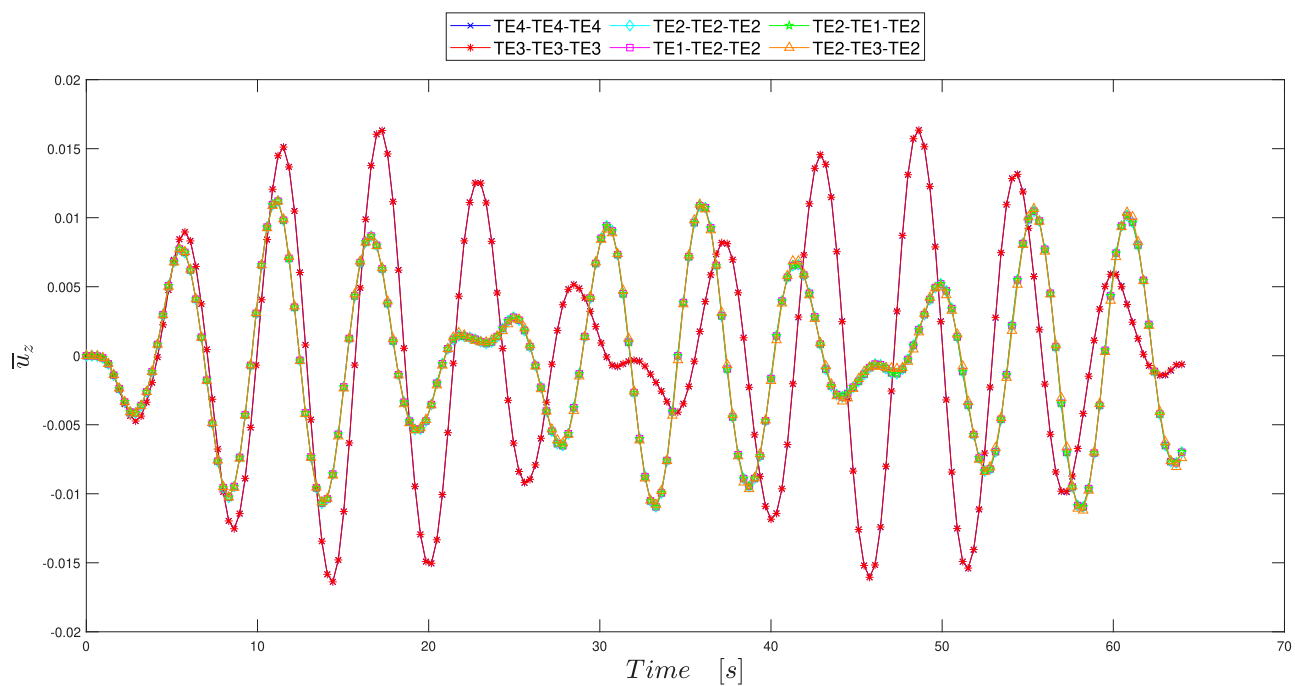
Per valutare l'influenza della snellezza geometrica sulla risposta nel tempo delle tre grandezze al variare delle teorie, sono state effettuate tre analisi distinte, variando il rapporto tra lunghezza e spessore del guscio [92]:

- rapporto di spessore  $\frac{a}{h} = [5, 10, 20, 100]$

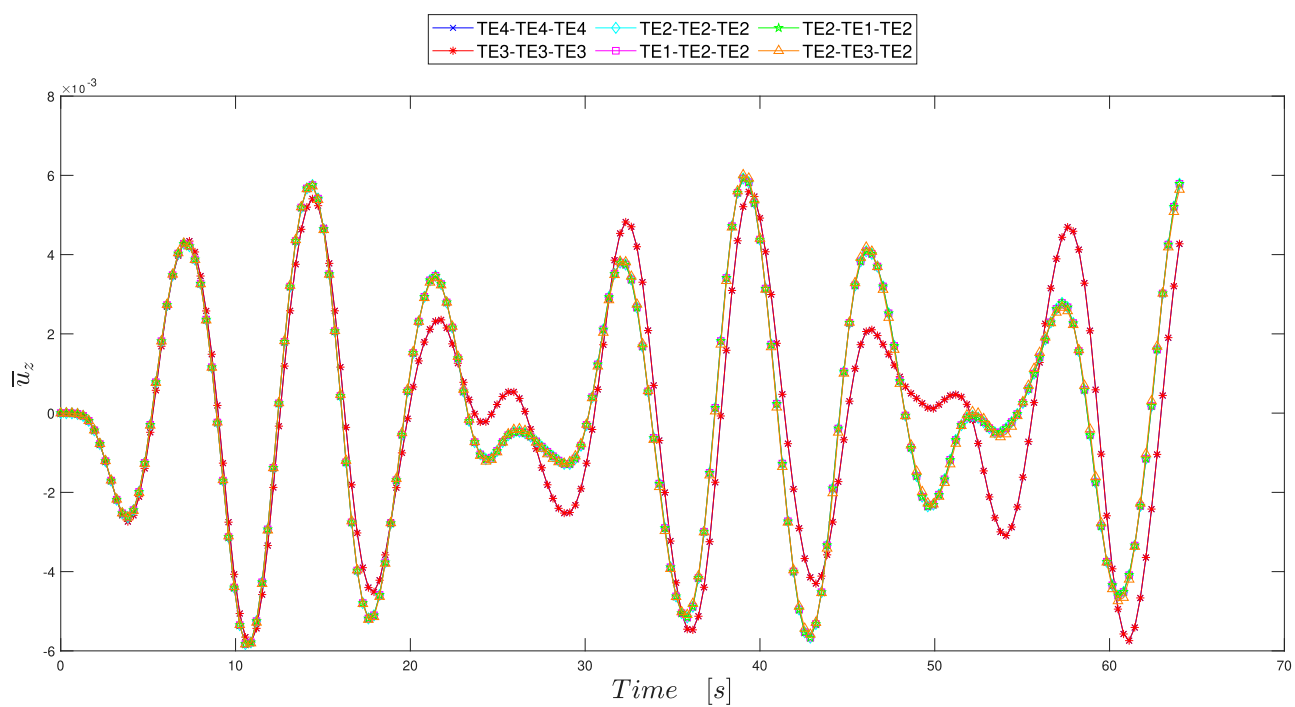
Di seguito si riportano gli andamenti di  $u_z$ ,  $\sigma_{\alpha\alpha}$ ,  $\sigma_{\alpha z}$  dopo aver effettuato un'analisi dinamica su 2000 istanti temporali, ma andandone a riportare solo 200 per una più facile comprensione. L'intervallo di tempo considerato va da 0s a 64s. Vengono riportati tre grafici per ogni grandezza, uno per ogni valore del rapporto di spessore.



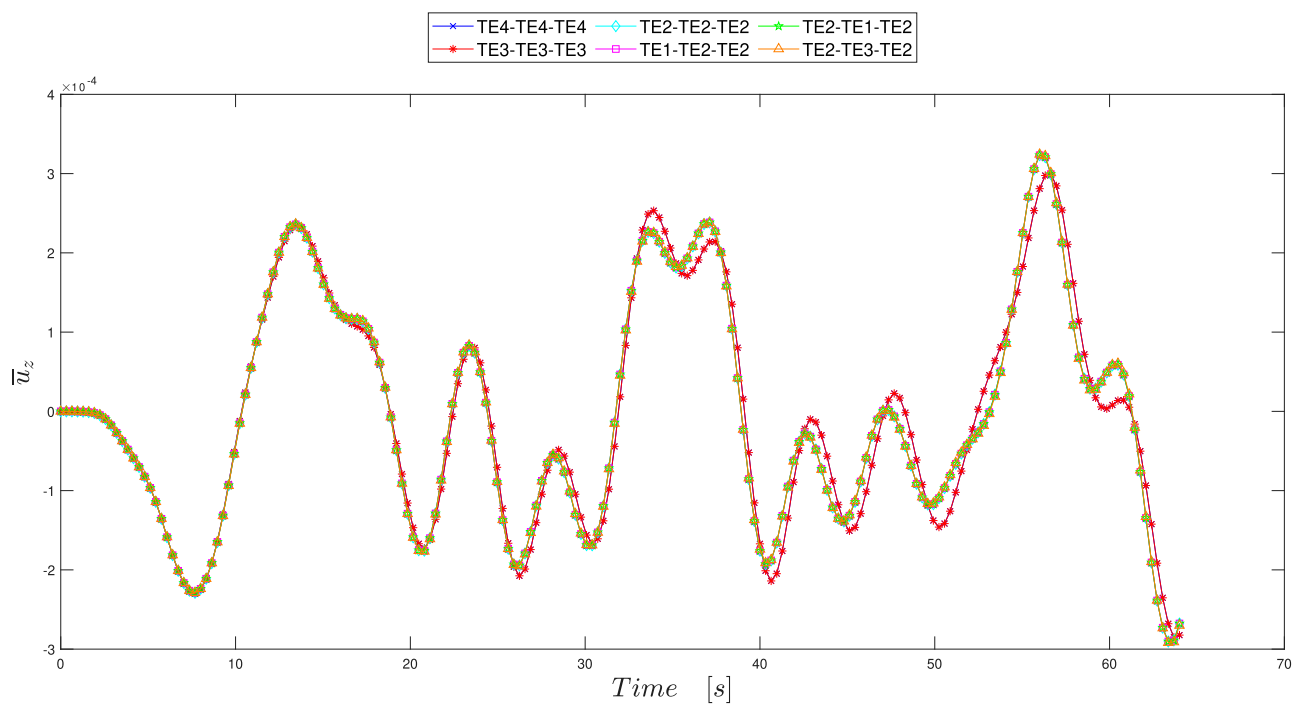
**Figura 6.6:** Andamento di  $\bar{u}_z$  in  $t$  con teorie Taylor di vario ordine -  $\frac{a}{h} = 5$



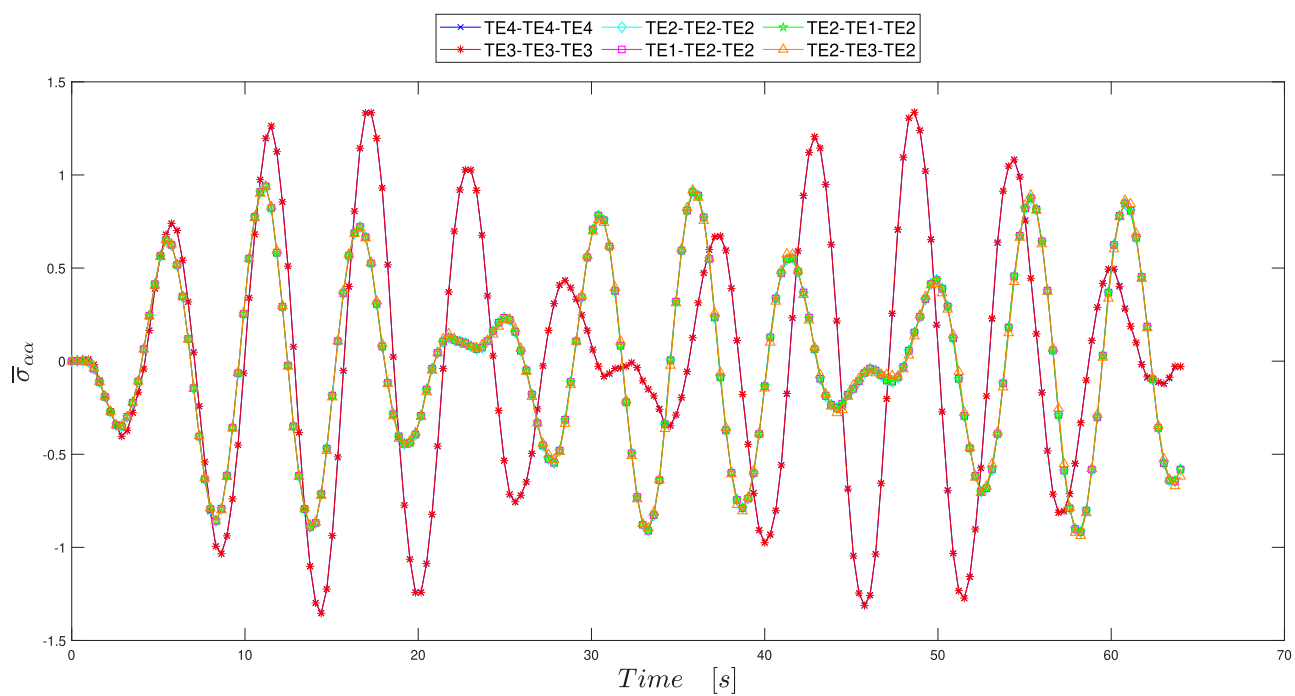
**Figura 6.7:** Andamento di  $\bar{u}_z$  in  $t$  con teorie Taylor di vario ordine -  $\frac{a}{h} = 10$



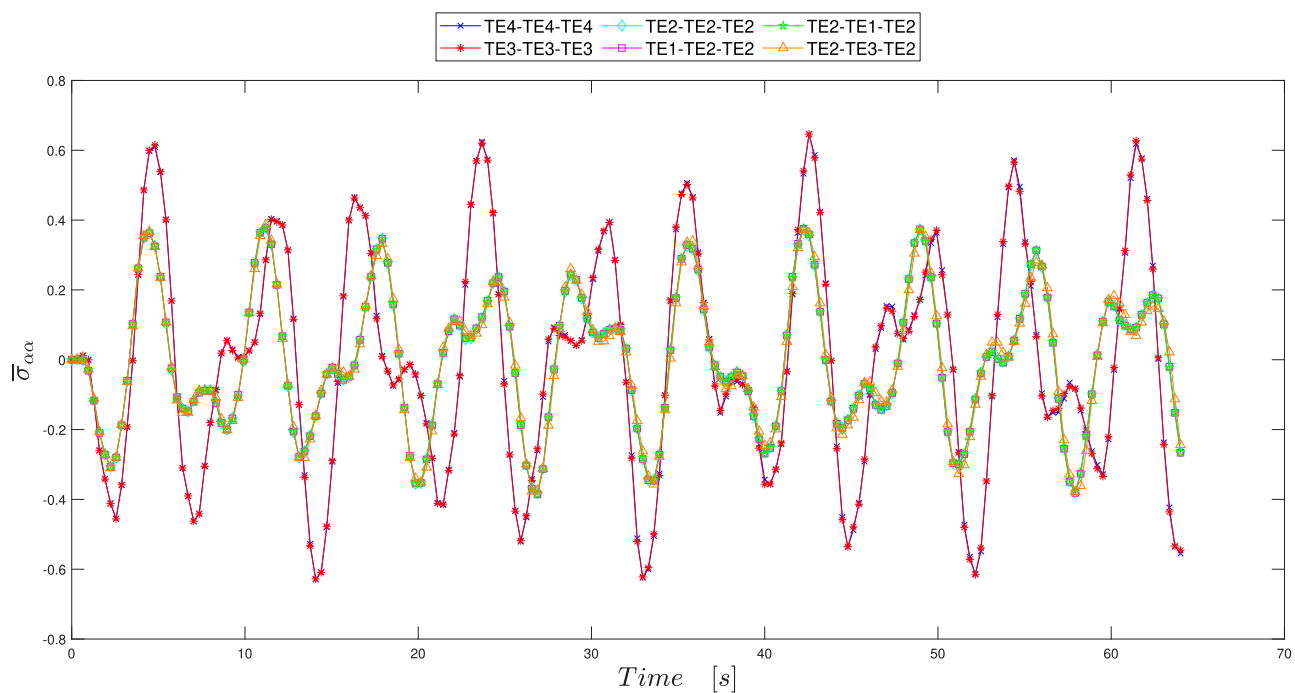
**Figura 6.8:** Andamento di  $\bar{u}_z$  in  $t$  con teorie Taylor di vario ordine -  $\frac{a}{h} = 20$



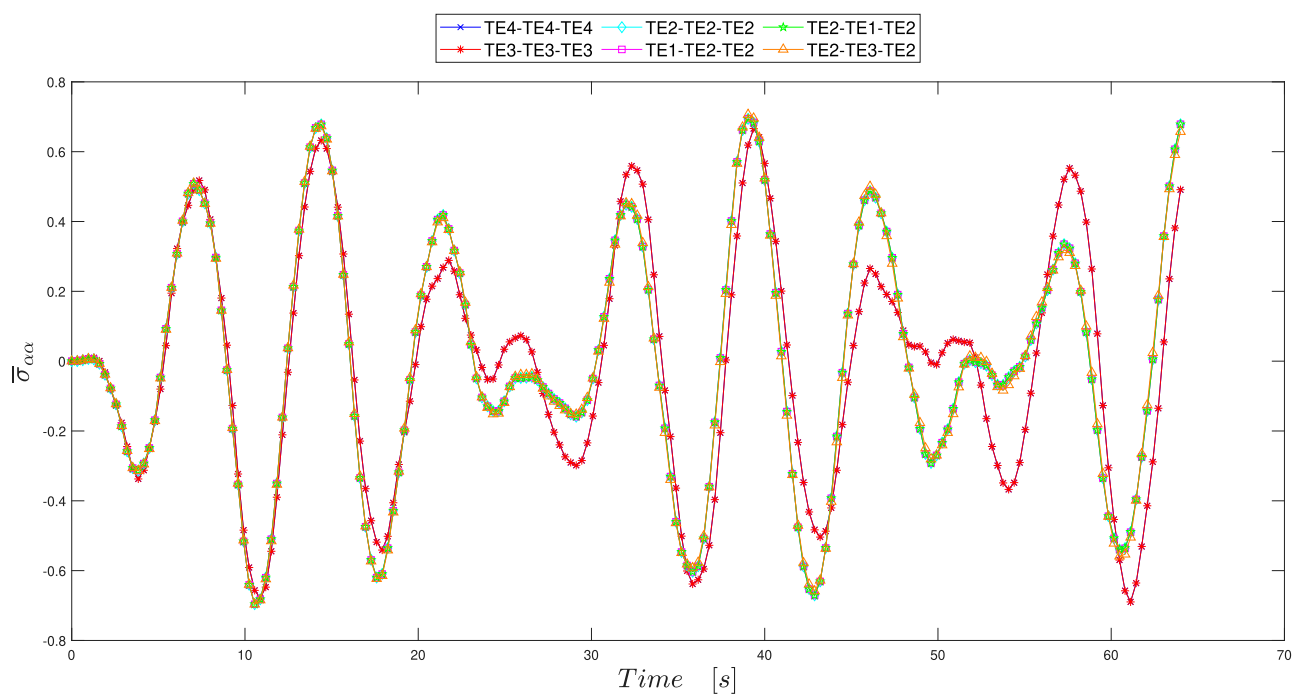
**Figura 6.9:** Andamento di  $\bar{u}_z$  in  $t$  con teorie Taylor di vario ordine -  $\frac{a}{h} = 100$



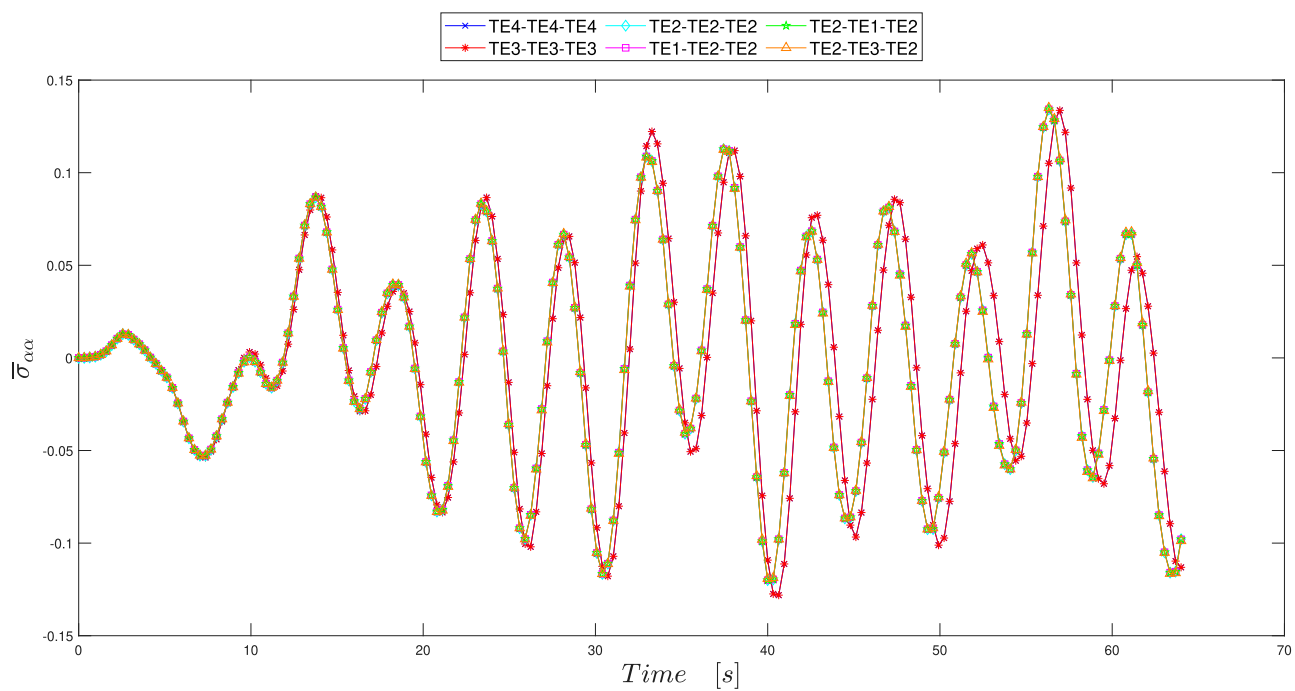
**Figura 6.11:** Andamento di  $\bar{\sigma}_{\alpha\alpha}$  in  $t$  con teorie Taylor di vario ordine -  $\frac{a}{h} = 10$



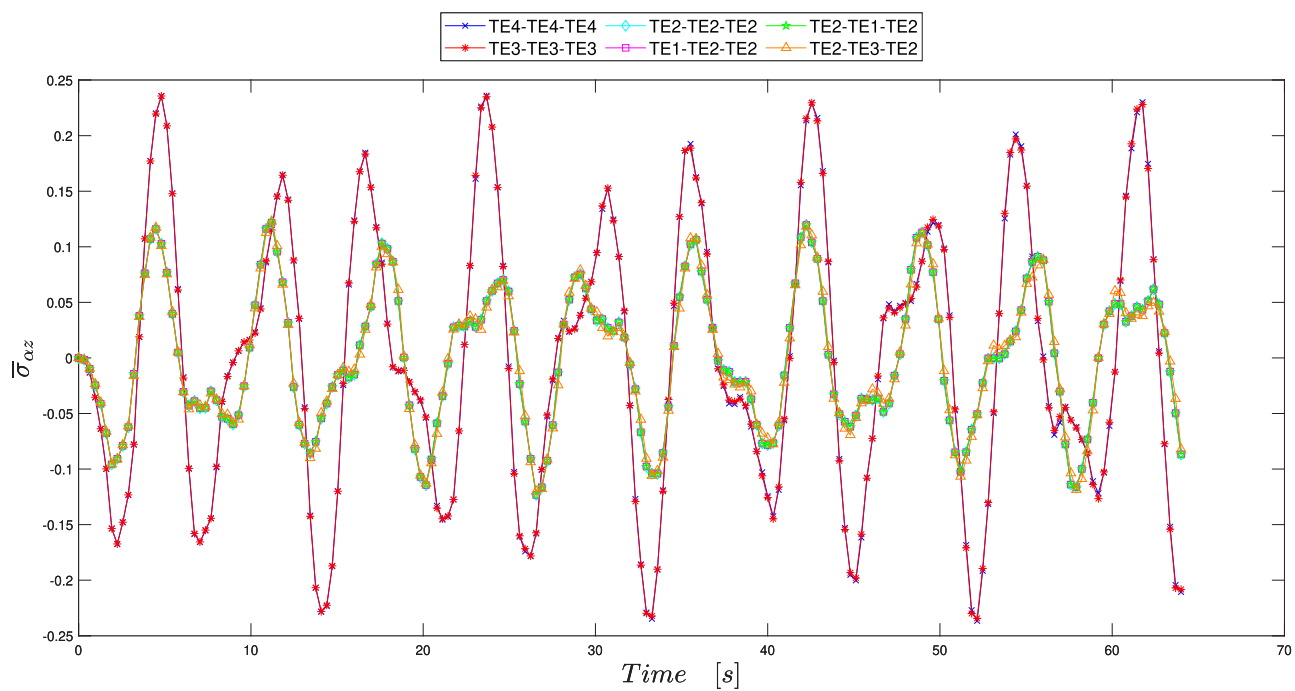
**Figura 6.10:** Andamento di  $\bar{\sigma}_{\alpha\alpha}$  in  $t$  con teorie Taylor di vario ordine -  $\frac{a}{h} = 5$



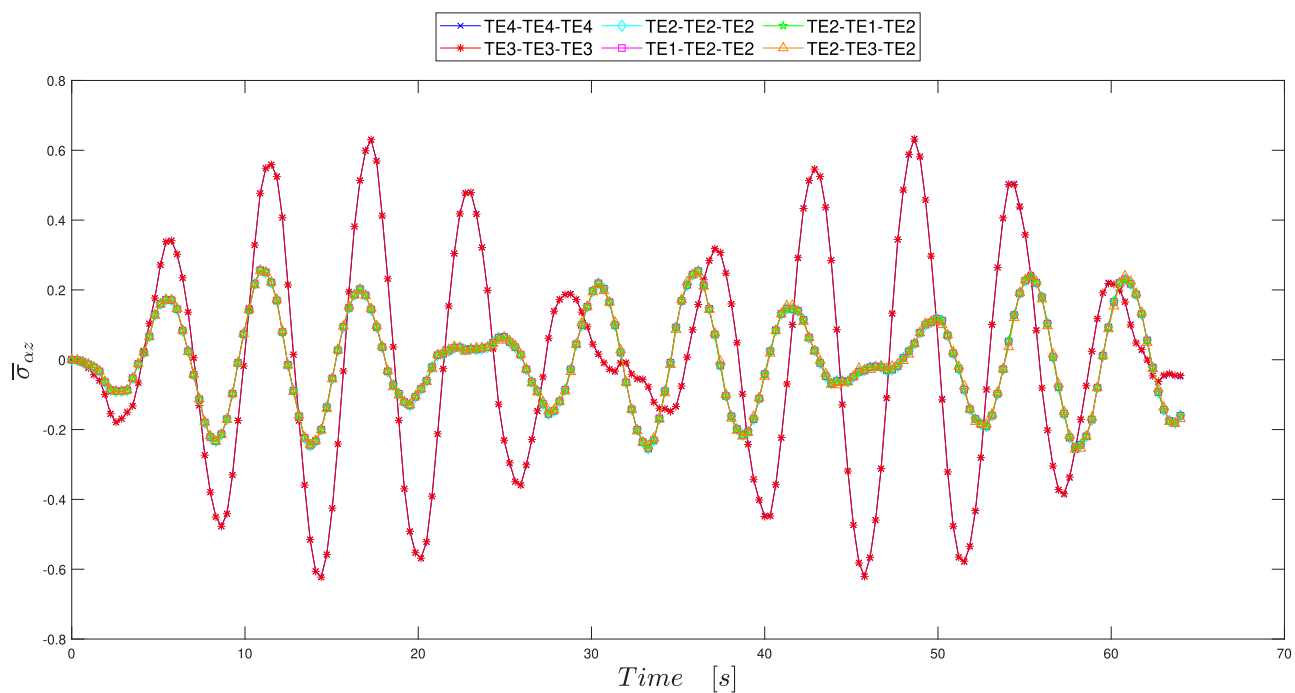
**Figura 6.12:** Andamento di  $\bar{\sigma}_{\alpha\alpha}$  in  $t$  con teorie Taylor di vario ordine -  $\frac{a}{h} = 20$



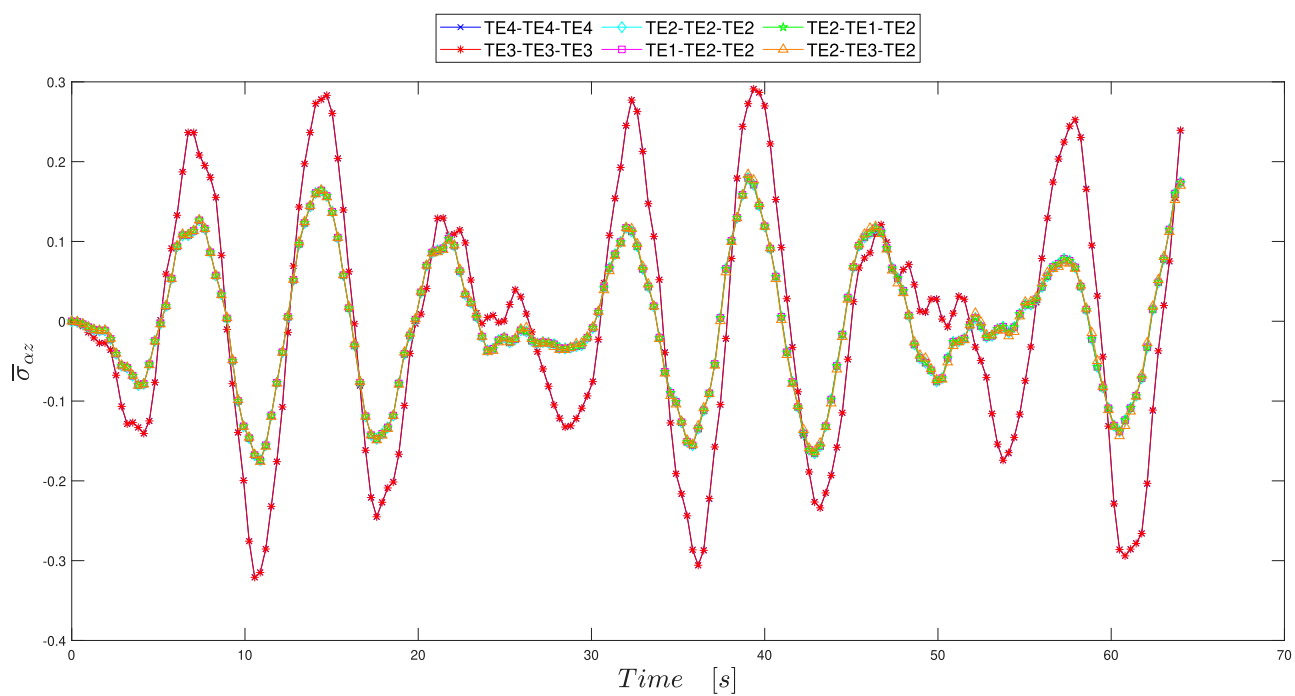
**Figura 6.13:** Andamento di  $\bar{\sigma}_{\alpha\alpha}$  in  $t$  con teorie Taylor di vario ordine -  $\frac{a}{h} = 100$



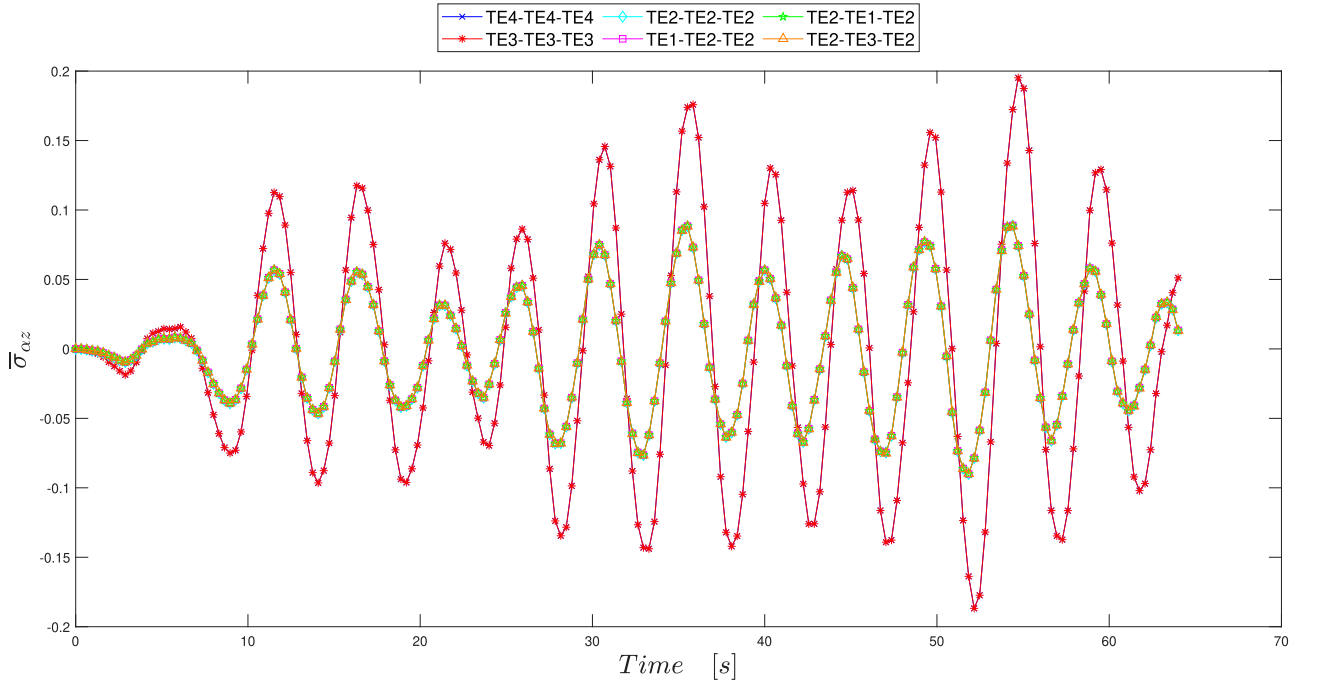
**Figura 6.14:** Andamento di  $\bar{\sigma}_{\alpha z}$  in  $t$  con teorie Taylor di vario ordine -  $\frac{a}{h} = 5$



**Figura 6.15:** Andamento di  $\bar{\sigma}_{\alpha z}$  in  $t$  con teorie Taylor di vario ordine -  $\frac{a}{h} = 10$



**Figura 6.16:** Andamento di  $\bar{\sigma}_{\alpha z}$  in  $t$  con teorie Taylor di vario ordine -  $\frac{a}{h} = 20$



**Figura 6.17:** Andamento di  $\bar{\sigma}_{\alpha z}$  in  $t$  con teorie Taylor di vario ordine -  $\frac{a}{h} = 100$

Gli istanti temporali in corrispondenza dei picchi sono diversi sia in base a quale grandezza si analizza che in base ai vari casi di rapporti di spessore:

**Tabella 6.3:** Istanti temporali dei primi punti di massimo e minimo al variare del rapporto di spessore

|                               | $\frac{a}{h}$ | 1° picco negativo | 1° picco positivo |
|-------------------------------|---------------|-------------------|-------------------|
| $\bar{u}_z$                   | 5             | 2.56s             | 4.80s             |
|                               | 10            | 2.88s             | 5.76s             |
|                               | 20            | 3.84s             | 7.36s             |
|                               | 100           | 7.68s             | 13.44s            |
| $\bar{\sigma}_{\alpha\alpha}$ | 5             | 2.56s             | 4.80s             |
|                               | 10            | 2.88s             | 5.76s             |
|                               | 20            | 3.84s             | 7.36s             |
|                               | 100           | 7.36s             | 2.56s             |
| $\bar{\sigma}_{\alpha z}$     | 5             | 2.24s             | 4.80s             |
|                               | 10            | 2.56s             | 5.76s             |
|                               | 20            | 4.16s             | 6.72s             |
|                               | 100           | 2.88s             | 6.08s             |

Inoltre vengono riportate delle tabelle con i risultati numerici delle analisi degli spostamenti e delle tensioni con i vari modelli utilizzati. La tabella riporta i risultati dello spostamento o delle tensioni in corrispondenza del primo picco per ciascuna analisi, al variare del rapporto di spessore. La prima tabella riporta i risultati relativi al primo picco negativo, mentre la seconda al primo picco positivo. Di seguito si riportano tutti i risultati numerici delle analisi di spostamento e tensioni nei punti sopra descritti.

**Tabella 6.4:** Spostamento  $\bar{u}_z$  per guscio ortotropo - 1° picco negativo

| Modello         | $\bar{u}_z \times 10^{-3}$<br>$\frac{a}{h} = 5$ | $\bar{u}_z \times 10^{-3}$<br>$\frac{a}{h} = 10$ | $\bar{u}_z \times 10^{-3}$<br>$\frac{a}{h} = 20$ | $\bar{u}_z \times 10^{-4}$<br>$\frac{a}{h} = 100$ | DOFs |
|-----------------|-------------------------------------------------|--------------------------------------------------|--------------------------------------------------|---------------------------------------------------|------|
| TE4 - TE4 - TE4 | -9.326                                          | -4.729                                           | -2.737                                           | -2.300                                            | 1215 |
| TE3 - TE3 - TE3 | -9.314                                          | -4.728                                           | -2.736                                           | -2.300                                            | 972  |
| TE2 - TE2 - TE2 | -6.887                                          | -4.149                                           | -2.626                                           | -2.289                                            | 729  |
| TE1 - TE2 - TE2 | -6.886                                          | -4.149                                           | -2.626                                           | -2.290                                            | 648  |
| TE2 - TE1 - TE2 | -6.882                                          | -4.149                                           | -2.626                                           | -2.289                                            | 648  |
| TE2 - TE3 - TE2 | -6.878                                          | -4.176                                           | -2.629                                           | -2.289                                            | 810  |

**Tabella 6.5:** Spostamento  $\bar{u}_z$  per guscio ortotropo - 1° picco positivo

| Modello         | $\bar{u}_z \times 10^{-3}$<br>$\frac{a}{h} = 5$ | $\bar{u}_z \times 10^{-3}$<br>$\frac{a}{h} = 10$ | $\bar{u}_z \times 10^{-3}$<br>$\frac{a}{h} = 20$ | $\bar{u}_z \times 10^{-4}$<br>$\frac{a}{h} = 100$ | DOFs |
|-----------------|-------------------------------------------------|--------------------------------------------------|--------------------------------------------------|---------------------------------------------------|------|
| TE4 - TE4 - TE4 | 13.347                                          | 8.966                                            | 4.341                                            | 2.344                                             | 1215 |
| TE3 - TE3 - TE3 | 13.366                                          | 8.965                                            | 4.341                                            | 2.344                                             | 972  |
| TE2 - TE2 - TE2 | 8.154                                           | 7.486                                            | 4.212                                            | 2.360                                             | 729  |
| TE1 - TE2 - TE2 | 8.160                                           | 7.486                                            | 4.212                                            | 2.360                                             | 648  |
| TE2 - TE1 - TE2 | 8.151                                           | 7.484                                            | 4.212                                            | 2.360                                             | 648  |
| TE2 - TE3 - TE2 | 8.111                                           | 7.526                                            | 4.214                                            | 2.363                                             | 810  |



**Tabella 6.6:** Tensione  $\bar{\sigma}_{\alpha\alpha}$  per guscio ortotropo - 1° picco negativo

| Modello         | $\bar{\sigma}_{\alpha\alpha} \times 10^{-1}$<br>$\frac{a}{h} = 5$ | $\bar{\sigma}_{\alpha\alpha} \times 10^{-1}$<br>$\frac{a}{h} = 10$ | $\bar{\sigma}_{\alpha\alpha} \times 10^{-1}$<br>$\frac{a}{h} = 20$ | $\bar{\sigma}_{\alpha\alpha} \times 10^{-2}$<br>$\frac{a}{h} = 100$ | DOFs |
|-----------------|-------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|------|
| TE4 - TE4 - TE4 | -4.552                                                            | -4.031                                                             | -3.373                                                             | -5.375                                                              | 1215 |
| TE3 - TE3 - TE3 | -4.559                                                            | -4.034                                                             | -3.374                                                             | -5.375                                                              | 972  |
| TE2 - TE2 - TE2 | -2.800                                                            | -3.486                                                             | -3.135                                                             | -5.273                                                              | 729  |
| TE1 - TE2 - TE2 | -2.797                                                            | -3.487                                                             | -3.137                                                             | -5.275                                                              | 648  |
| TE2 - TE1 - TE2 | -2.805                                                            | -3.485                                                             | -3.135                                                             | -5.273                                                              | 648  |
| TE2 - TE3 - TE2 | -2.798                                                            | -3.150                                                             | -3.137                                                             | -5.270                                                              | 810  |

**Tabella 6.7:** Tensione  $\bar{\sigma}_{\alpha\alpha}$  per guscio ortotropo - 1° picco positivo

| Modello         | $\bar{\sigma}_{\alpha\alpha} \times 10^{-1}$<br>$\frac{a}{h} = 5$ | $\bar{\sigma}_{\alpha\alpha} \times 10^{-1}$<br>$\frac{a}{h} = 10$ | $\bar{\sigma}_{\alpha\alpha} \times 10^{-1}$<br>$\frac{a}{h} = 20$ | $\bar{\sigma}_{\alpha\alpha} \times 10^{-2}$ | DOFs |
|-----------------|-------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------|------|
| TE4 - TE4 - TE4 | 6.099                                                             | 7.391                                                              | 5.174                                                              | 1.285                                        | 1215 |
| TE3 - TE3 - TE3 | 6.148                                                             | 7.398                                                              | 5.176                                                              | 1.285                                        | 972  |
| TE2 - TE2 - TE2 | 3.258                                                             | 6.243                                                              | 4.898                                                              | 1.285                                        | 729  |
| TE1 - TE2 - TE2 | 3.248                                                             | 6.245                                                              | 4.900                                                              | 1.285                                        | 648  |
| TE2 - TE1 - TE2 | 3.263                                                             | 6.241                                                              | 4.898                                                              | 1.285                                        | 648  |
| TE2 - TE3 - TE2 | 3.241                                                             | 6.280                                                              | 4.900                                                              | 1.285                                        | 810  |

**Tabella 6.8:** Tensione  $\bar{\sigma}_{\alpha z}$  per guscio ortotropo - 1° picco negativo

| Modello         | $\bar{\sigma}_{\alpha z} \times 10^{-1}$<br>$\frac{a}{h} = 5$ | $\bar{\sigma}_{\alpha z} \times 10^{-1}$<br>$\frac{a}{h} = 10$ | $\bar{\sigma}_{\alpha z} \times 10^{-1}$<br>$\frac{a}{h} = 20$ | $\bar{\sigma}_{\alpha z} \times 10^{-2}$<br>$\frac{a}{h} = 100$ | DOFs |
|-----------------|---------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|------|
| TE4 - TE4 - TE4 | -1.676                                                        | -1.790                                                         | -1.406                                                         | -1.867                                                          | 1215 |
| TE3 - TE3 - TE3 | -1.674                                                        | -1.789                                                         | -1.406                                                         | -1.867                                                          | 972  |
| TE2 - TE2 - TE2 | -0.908                                                        | -0.901                                                         | -0.785                                                         | -0.946                                                          | 729  |
| TE1 - TE2 - TE2 | -0.908                                                        | -0.901                                                         | -0.785                                                         | -0.946                                                          | 648  |
| TE2 - TE1 - TE2 | -0.907                                                        | -0.901                                                         | -0.785                                                         | -0.946                                                          | 648  |
| TE2 - TE3 - TE2 | -0.913                                                        | -0.901                                                         | -0.789                                                         | -0.946                                                          | 810  |

**Tabella 6.9:** Tensione  $\bar{\sigma}_{\alpha z}$  per guscio ortotropo - 1° picco positivo

| Modello         | $\bar{\sigma}_{\alpha z} \times 10^{-1}$<br>$\frac{a}{h} = 5$ | $\bar{\sigma}_{\alpha z} \times 10^{-1}$<br>$\frac{a}{h} = 10$ | $\bar{\sigma}_{\alpha z} \times 10^{-1}$<br>$\frac{a}{h} = 20$ | $\bar{\sigma}_{\alpha z} \times 10^{-2}$<br>$\frac{a}{h} = 100$ | DOFs |
|-----------------|---------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|------|
| TE4 - TE4 - TE4 | 2.356                                                         | 3.411                                                          | 2.364                                                          | 1.582                                                           | 1215 |
| TE3 - TE3 - TE3 | 2.357                                                         | 3.410                                                          | 2.365                                                          | 1.582                                                           | 972  |
| TE2 - TE2 - TE2 | 1.027                                                         | 1.706                                                          | 1.079                                                          | 0.767                                                           | 729  |
| TE1 - TE2 - TE2 | 1.027                                                         | 1.706                                                          | 1.079                                                          | 0.767                                                           | 648  |
| TE2 - TE1 - TE2 | 1.026                                                         | 1.705                                                          | 1.079                                                          | 0.767                                                           | 648  |
| TE2 - TE3 - TE2 | 1.009                                                         | 1.713                                                          | 1.084                                                          | 0.767                                                           | 810  |

Dai risultati ottenuti possiamo notare che l'andamento nel tempo risulta nettamente diverso in base a se vengono utilizzate teorie di espansione di ordine superiore o no. La differenza si nota chiaramente, in tutti i casi di rapporto di spessore e grandezza valutata, se si sceglie un'espansione  $TE4/TE3$  o  $TE2/TE1$ . I risultati tra le espansioni di Taylor del quarto e del terzo ordine differiscono di poco a livello numerico e presentano un andamento simile. Gli andamenti con le espansioni del primo e del secondo ordine sono molto simili tra di loro, anche nei casi in cui si utilizzano modelli misti con sia  $TE1$  che  $TE2$ . Il caso  $TE2 - TE3 - TE2$  presenta un andamento simile alle teorie di ordine basso ma leggermente diverso, proprio a causa della presenza di un'espansione del terzo ordine su  $y$ .

Riguardo il rapporto di spessore si può notare che più la piastra diventa sottile, con un valore di  $\frac{a}{h}$  crescente, e più gli andamenti delle teorie di basso ordine conferiranno risultati simili a quelle di alto ordine. La differenza tra le teorie si va accentuando all'aumentare del tempo. Come si può notare dai grafici, nel caso di  $\frac{a}{h} = 10$  tutti gli andamenti coincidono circa fino al secondo picco negativo. Nel caso di guscio spesso, invece, si può notare una differenza negli andamenti già a partire dal primo picco negativo.

In tutti i casi, sia di spostamento che di tensioni, si può notare come scegliendo teorie di basso ordine i picchi massimi vengono sottostimati, in certi casi anche abbondantemente. Inoltre al variare del rapporto di spessore si può notare come:

- per  $\frac{a}{h} = 5$  l'andamento delle teorie di basso e alto ordine differisca notevolmente;
- per  $\frac{a}{h} = 10$  l'andamento complessivo nelle teorie di basso ordine risulta anticipato rispetto a quelle di alto ordine, con il picco massimo che arriva prima;
- per  $\frac{a}{h} = 20$  si ha un'ottima sovrapposizione delle oscillazioni nel tempo, con i picchi massimi che coincidono tra le teorie di diverso ordine d'espansione;

- per  $\frac{a}{h} = 100$  si ha un'ottima sovrapposizione delle oscillazioni nel tempo soprattutto per la fase iniziale e nel caso dello spostamento. Riguardo la tensione abbiamo un andamento sbagliato in termini di ampiezza del picco, soprattutto nel caso di tensione tangenziale.

La grandezza più difficile da catturare con le teorie di basso ordine è sicuramente la tensione tangenziale  $\sigma_{\alpha z}$ .

Nel caso del guscio [113], a differenza della trave vista nel capitolo precedente, per ottenere un andamento corretto non sono sufficienti le teorie di espansione di Taylor di basso ordine. In questo caso risulta più conveniente utilizzare le teorie di espansione *TE3* complete su tutti gli assi, in quanto consentono di ottenere risultati quasi coincidenti con quelli del quarto ordine, ma con un costo computazionale inferiore.

**Analisi con migliori teorie strutturali** In secondo luogo si riprendono le teorie trovate per lo stesso caso guscio nel capitolo 5.2, scegliendo quella più adatta in base all'errore richiesto. La scelta tra le migliori teorie disponibili dipende in primo luogo dall'errore massimo che si può accettare, ma anche dal numero di gradi di libertà del modello. Si scelgono delle teorie ottimali per confrontarne l'andamento temporale che conferiscono nell'analisi, mostrando quelle in corrispondenza di punti rilevanti dell'andamento della curva di Pareto:

- per  $\frac{a}{h} = 5$  si riportano le teorie BTD a *15DOF*, *11DOF*, *7DOF* e *5DOF*;
- per  $\frac{a}{h} = 10$  si riportano le teorie BTD a *15DOF*, *11DOF*, *7DOF* e *5DOF*;
- per  $\frac{a}{h} = 20$  si riportano le teorie BTD a *15DOF*, *8DOF*, *6DOF* e *5DOF*.
- per  $\frac{a}{h} = 100$  si riportano le teorie BTD a *15DOF*, *7DOF*, *6DOF* e *5DOF*.

Di seguito si riportano gli andamenti di  $u_z$ ,  $\sigma_{\alpha\alpha}$  e  $\sigma_{\alpha z}$  dopo aver effettuato un'analisi dinamica su 2000 istanti temporali, ma andandone a riportare solo 200 per una più facile comprensione. L'intervallo di tempo considerato va da 0s a 64s. Vengono riportati quattro grafici per ogni grandezza, uno per ogni rapporto di spessore.

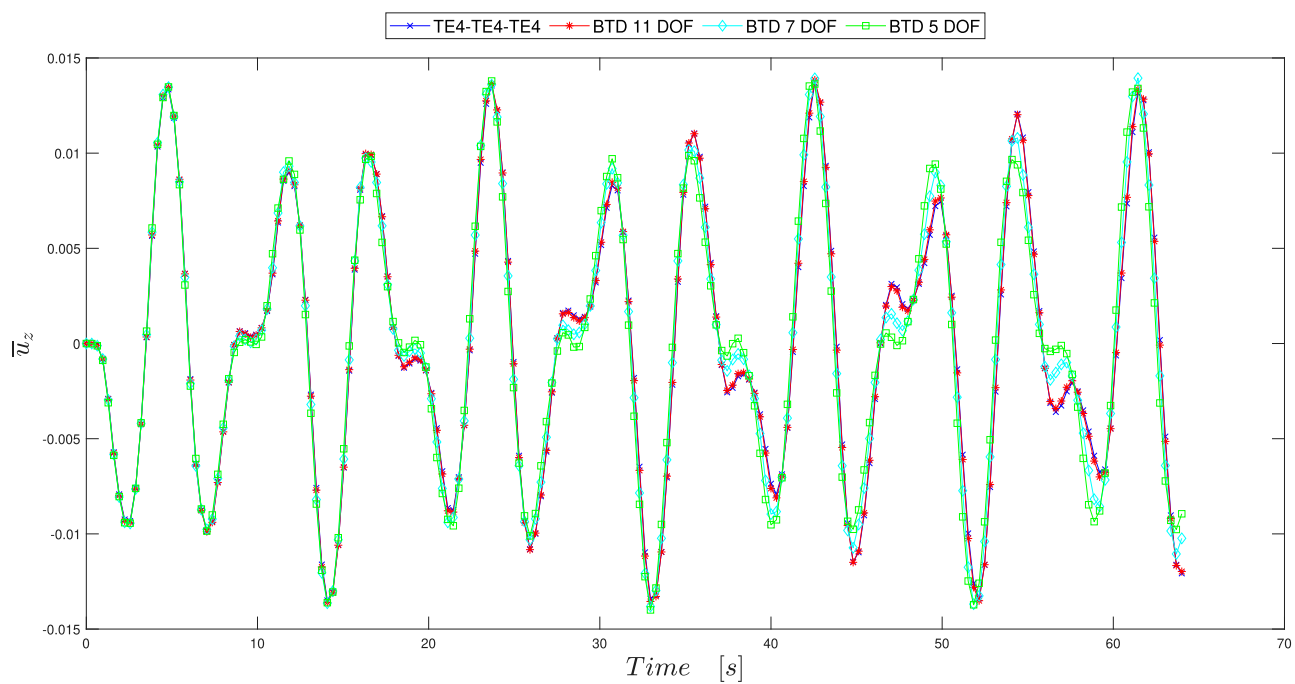


Figura 6.18: Andamento di  $u_z$  in  $t$  con teorie BTD -  $\frac{a}{h} = 5$

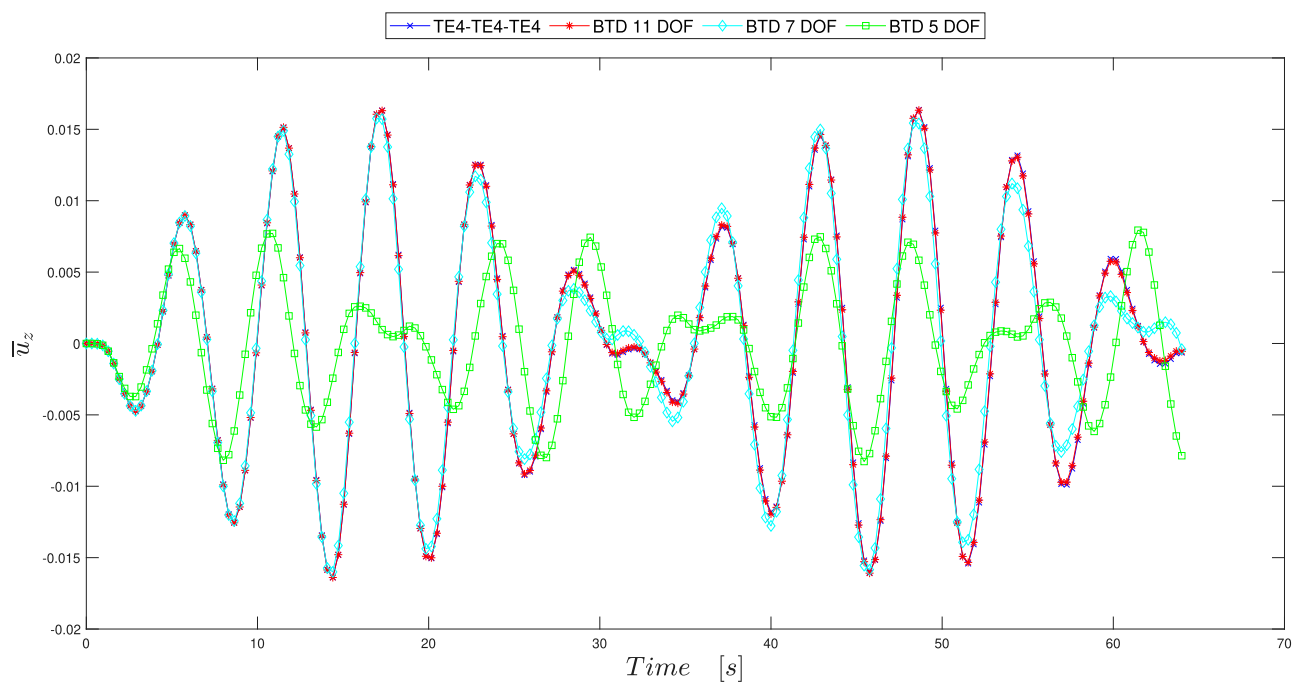
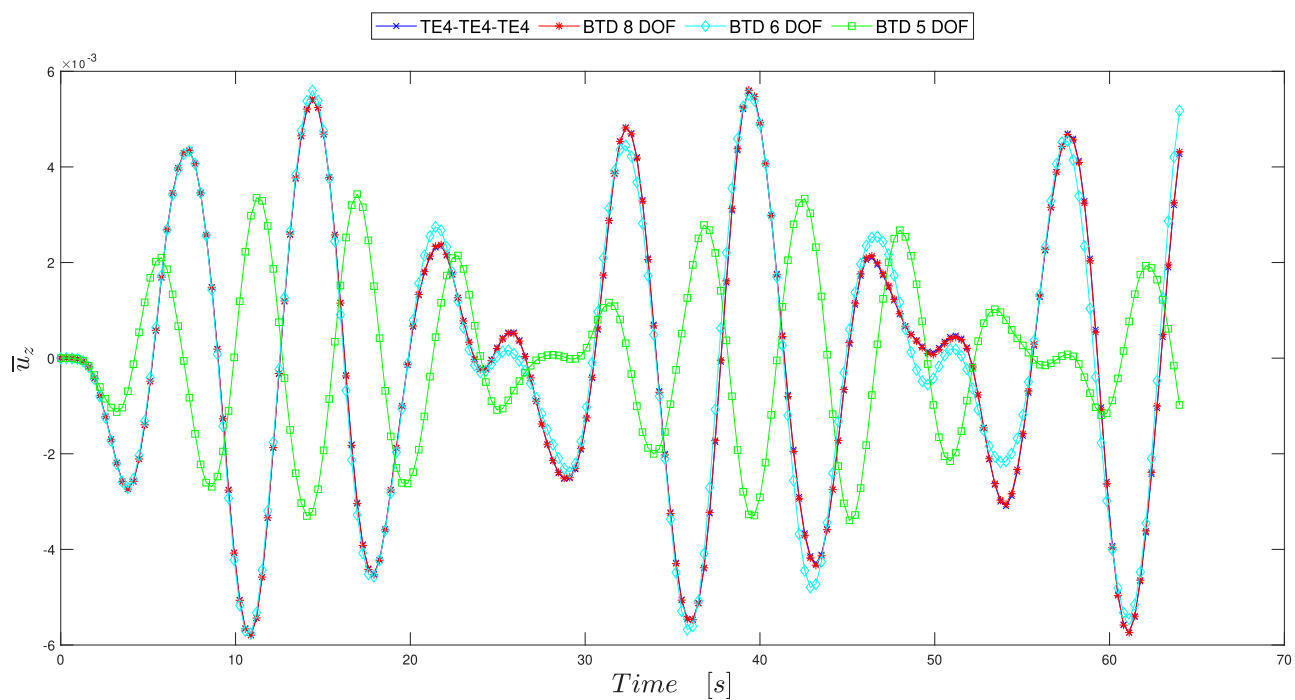
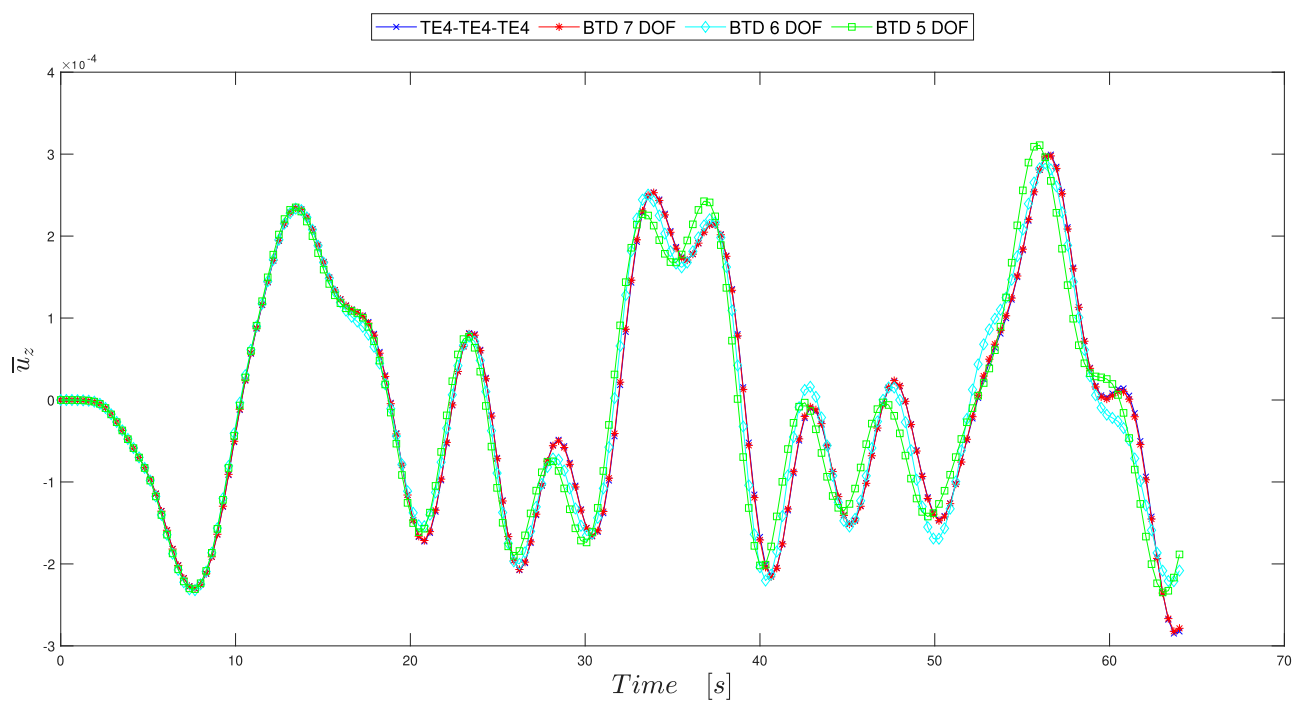


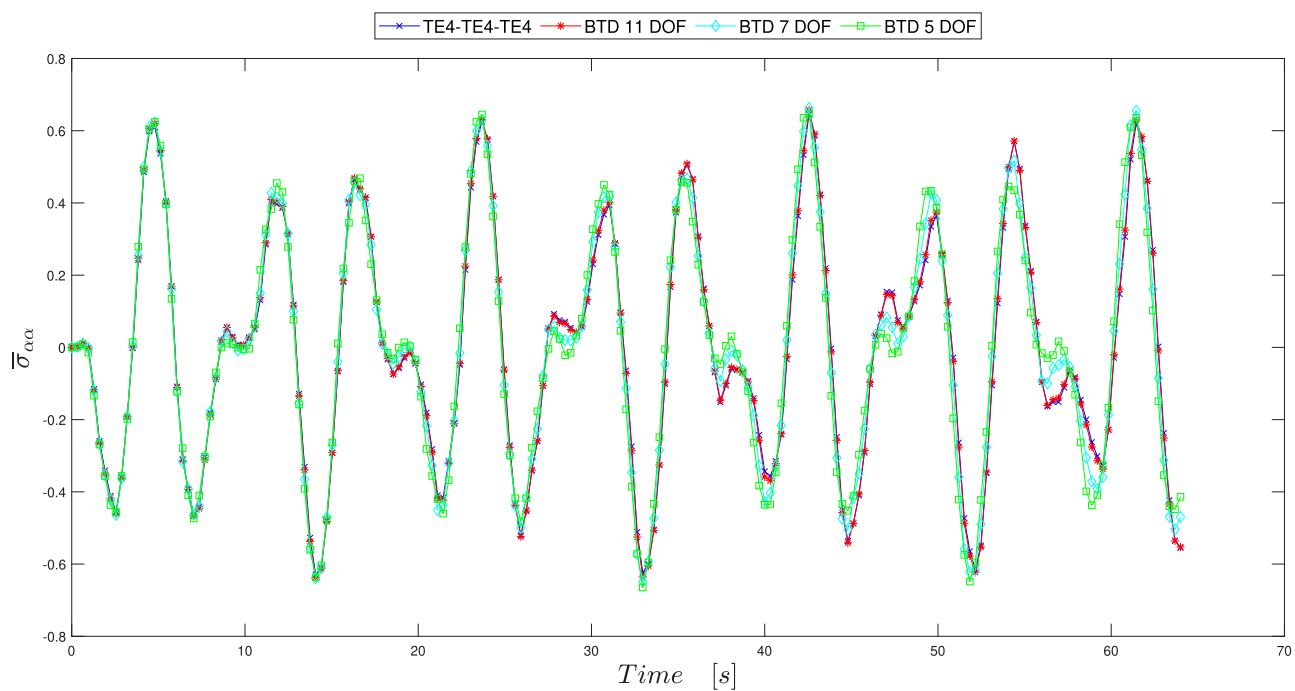
Figura 6.19: Andamento di  $\bar{u}_z$  in  $t$  con teorie BTD -  $\frac{a}{h} = 10$



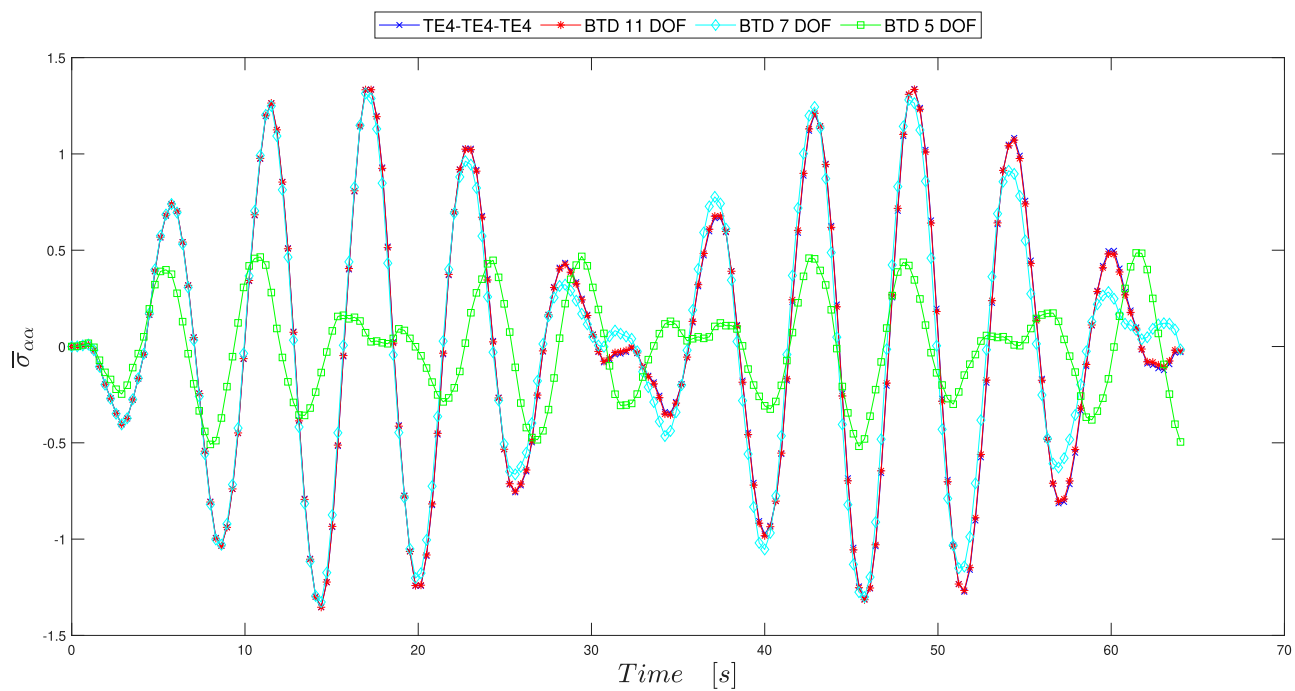
**Figura 6.20:** Andamento di  $\bar{u}_z$  in  $t$  con teorie BTD -  $\frac{a}{h} = 20$



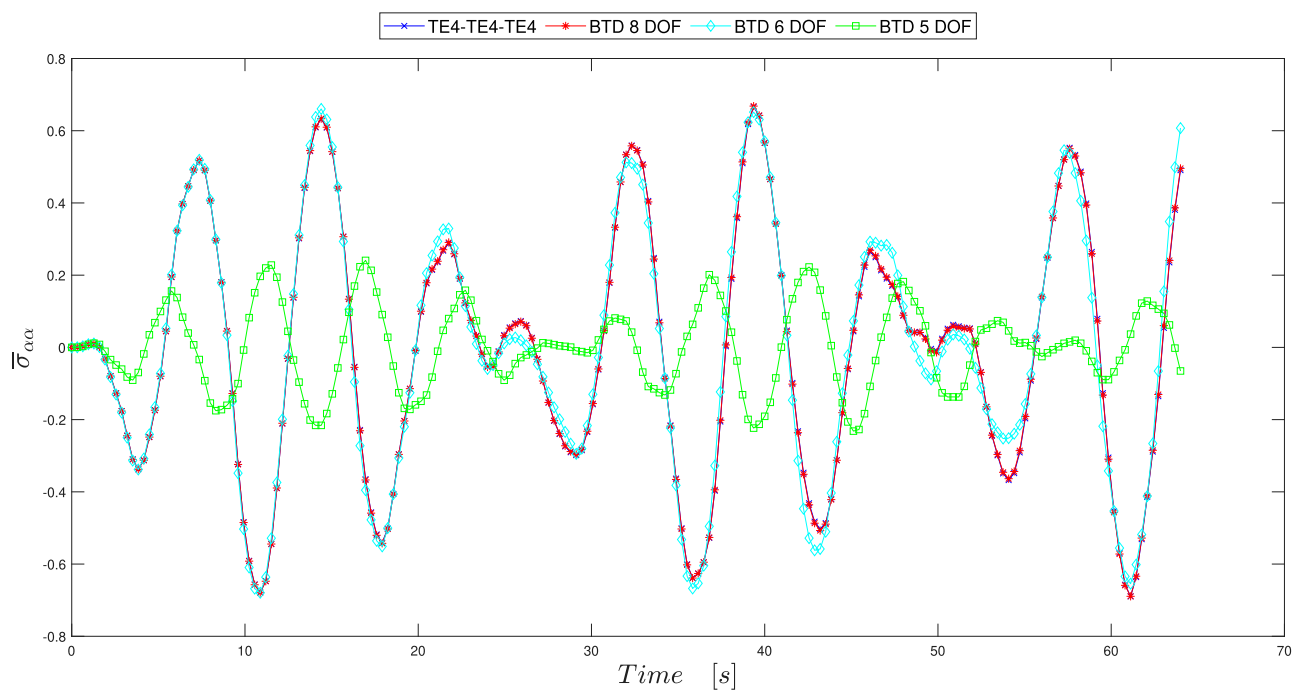
**Figura 6.21:** Andamento di  $\bar{u}_z$  in  $t$  con teorie BTD -  $\frac{a}{h} = 100$



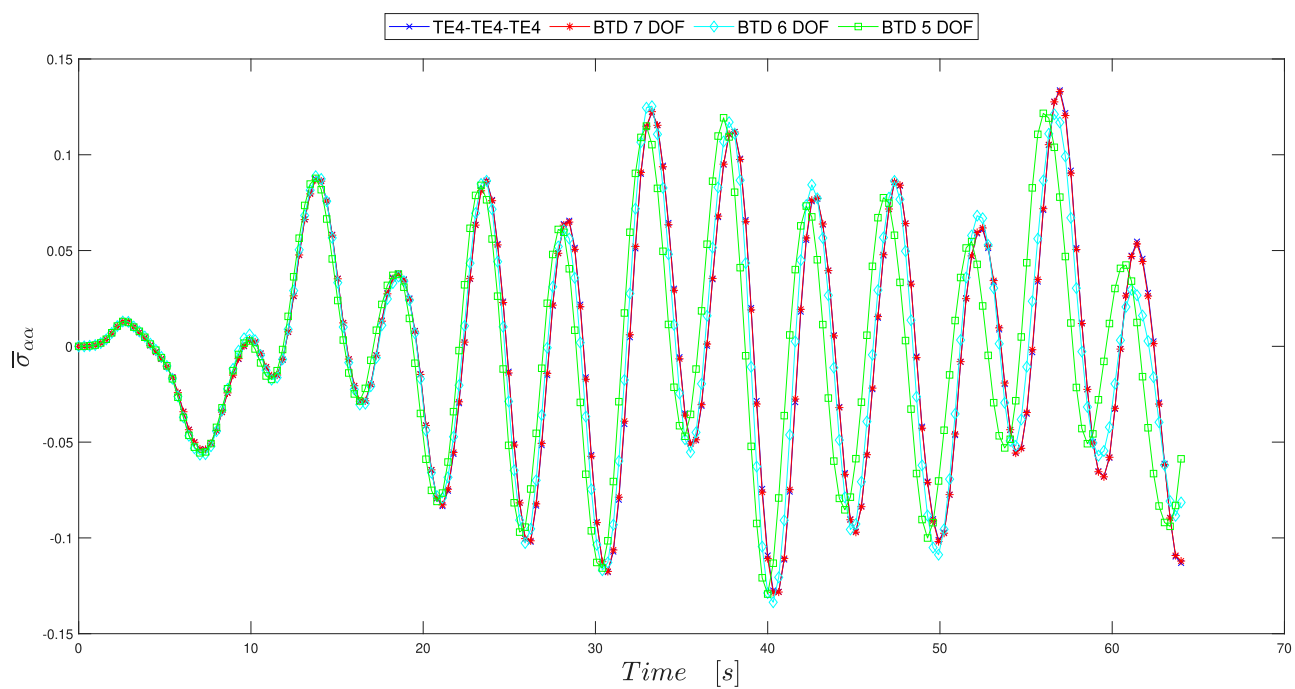
**Figura 6.22:** Andamento di  $\bar{\sigma}_{\alpha\alpha}$  in  $t$  con teorie BTD -  $\frac{a}{h} = 5$



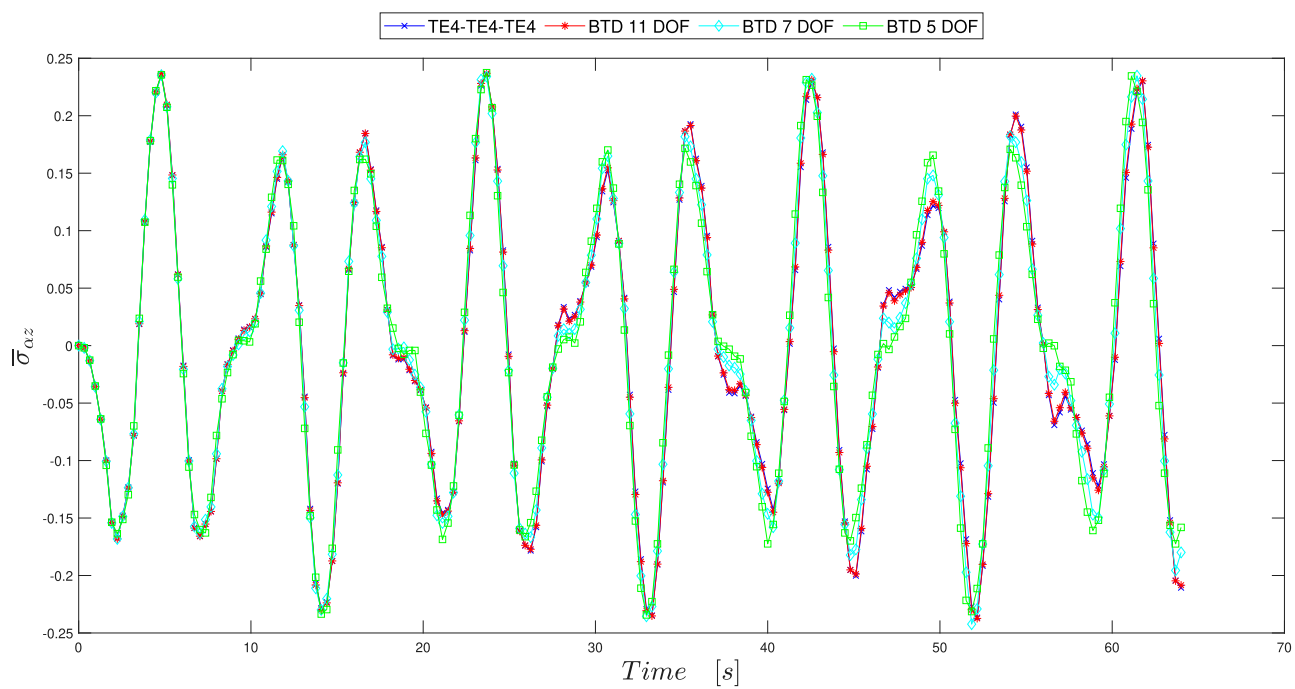
**Figura 6.23:** Andamento di  $\bar{\sigma}_{\alpha\alpha}$  in  $t$  con teorie BTD -  $\frac{a}{h} = 10$



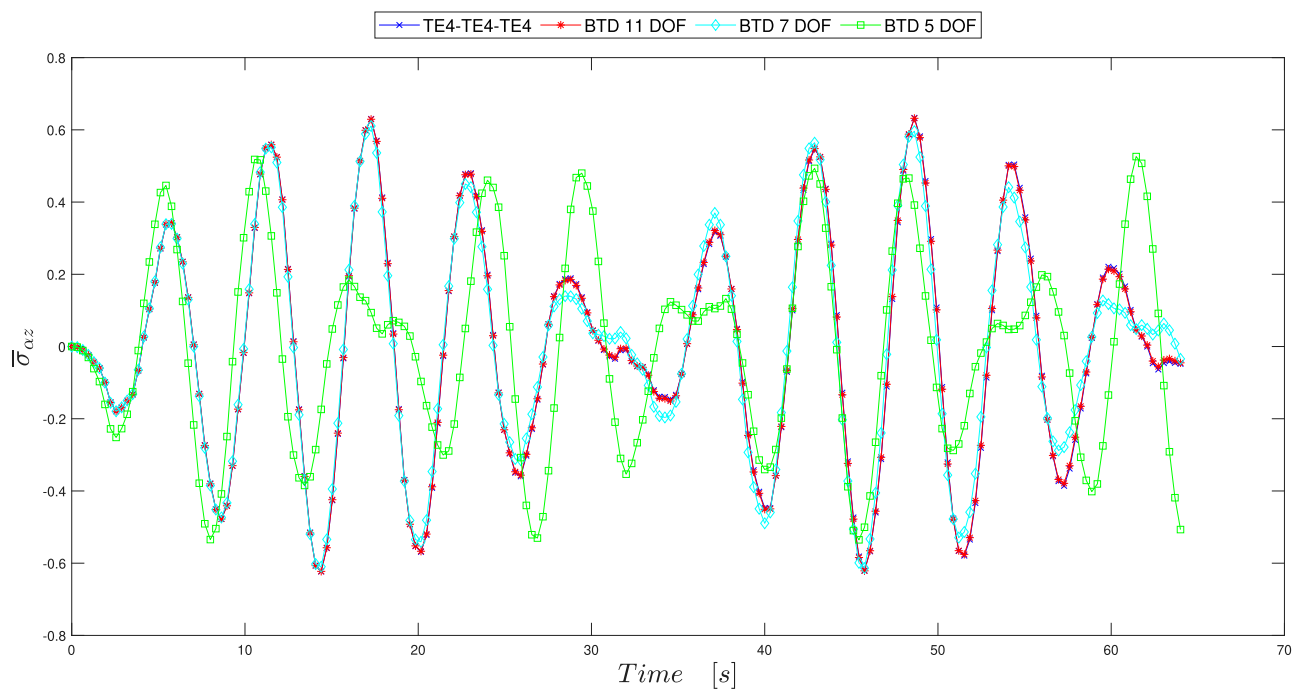
**Figura 6.24:** Andamento di  $\bar{\sigma}_{\alpha\alpha}$  in  $t$  con teorie BTD -  $\frac{a}{h} = 20$



**Figura 6.25:** Andamento di  $\bar{\sigma}_{\alpha\alpha}$  in  $t$  con teorie BTD -  $\frac{a}{h} = 100$

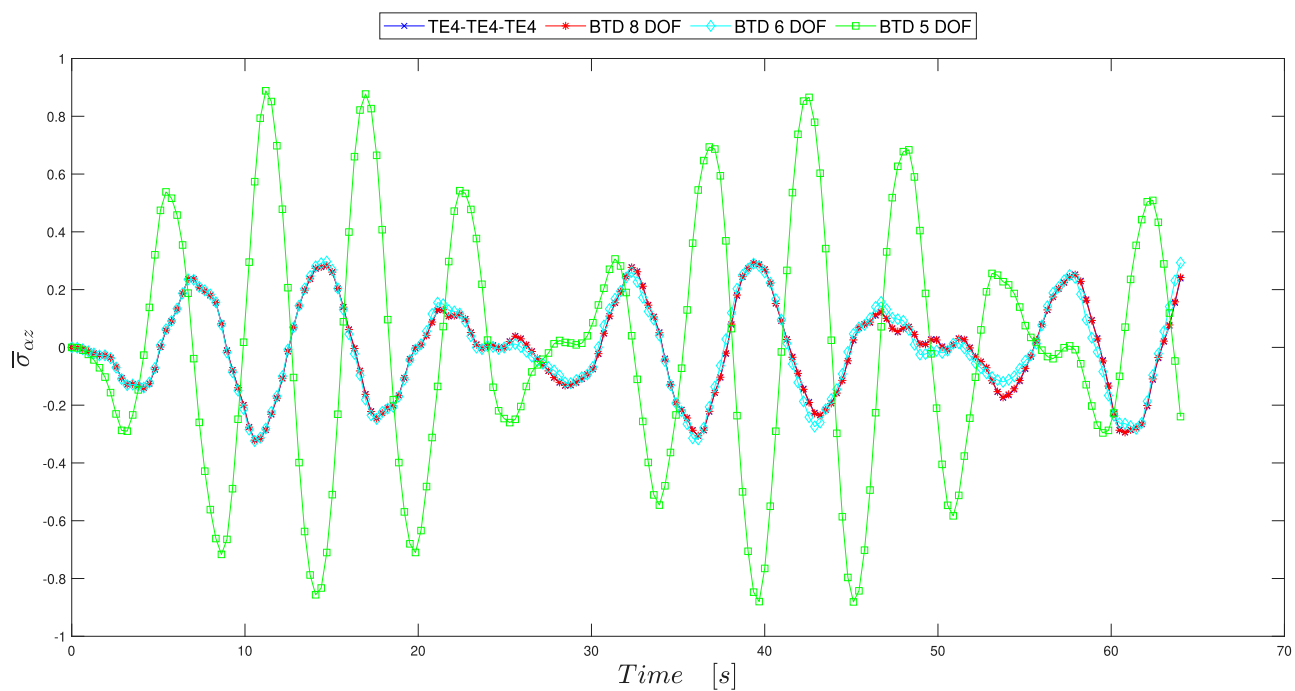


**Figura 6.26:** Andamento di  $\bar{\sigma}_{\alpha z}$  in  $t$  con teorie BTD -  $\frac{a}{h} = 5$

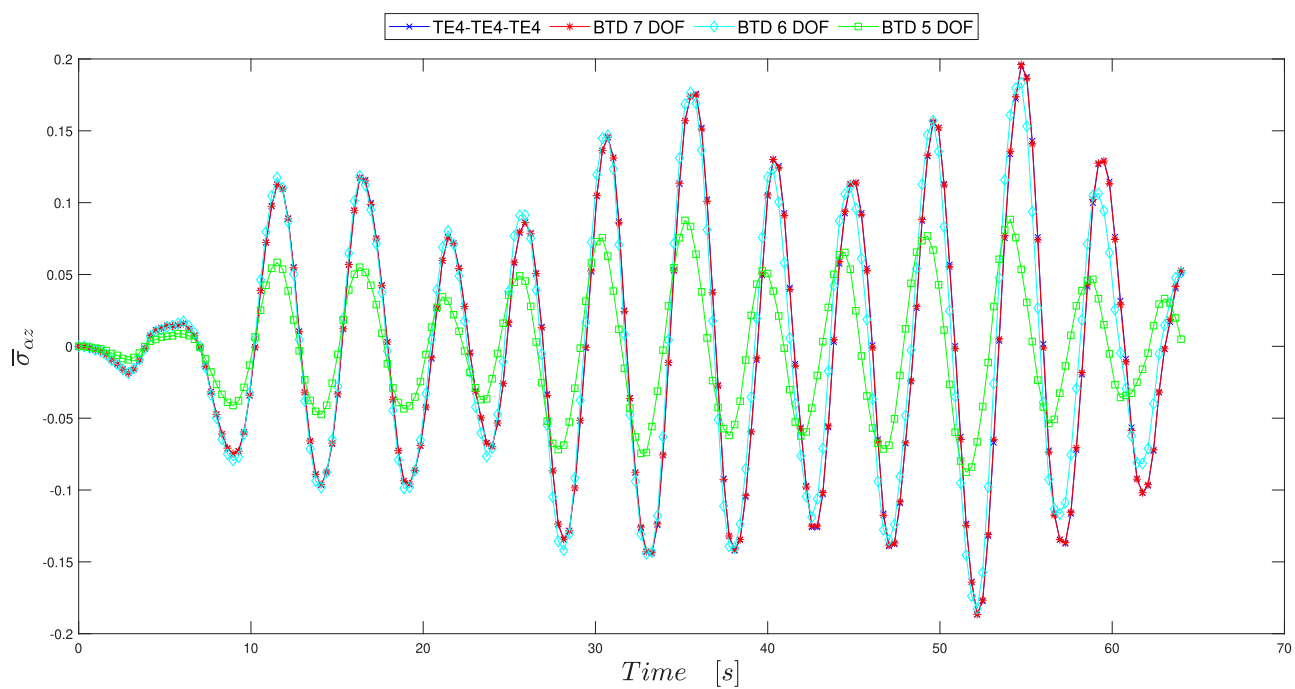


**Figura 6.27:** Andamento di  $\bar{\sigma}_{\alpha z}$  in  $t$  con teorie BTD -  $\frac{a}{h} = 10$





**Figura 6.28:** Andamento di  $\bar{\sigma}_{\alpha z}$  in  $t$  con teorie BTD -  $\frac{a}{h} = 20$



**Figura 6.29:** Andamento di  $\bar{\sigma}_{\alpha z}$  in  $t$  con teorie BTD -  $\frac{a}{h} = 100$

Anche in questo caso si riportano i risultati analitici per ognuna delle analisi svolte. Gli istanti temporali in corrispondenza dei picchi di massimo e minimo sono i seguenti:

**Tabella 6.10:** Istanti temporali dei primi punti di massimo e minimo al variare del rapporto di spessore con BTD

|                               | $\frac{a}{h}$ | 1° picco negativo | 1° picco positivo |
|-------------------------------|---------------|-------------------|-------------------|
| $\bar{u}_z$                   | 5             | 2.56s             | 4.80s             |
|                               | 10            | 2.88s             | 5.76s             |
|                               | 20            | 3.84s             | 7.36s             |
|                               | 100           | 7.68s             | 13.44s            |
| $\bar{\sigma}_{\alpha\alpha}$ | 5             | 2.56s             | 4.80s             |
|                               | 10            | 2.88s             | 5.76s             |
|                               | 20            | 3.84s             | 7.36s             |
|                               | 100           | 7.36s             | 2.56s             |
| $\bar{\sigma}_{\alpha z}$     | 5             | 2.24s             | 4.80s             |
|                               | 10            | 2.56s             | 5.76s             |
|                               | 20            | 4.16s             | 6.72s             |
|                               | 100           | 2.88s             | 6.08s             |

Di seguito si riportano tutti i risultati numerici delle analisi di spostamento e tensioni nei punti sopra descritti.

**Tabella 6.11:** Spostamento  $\bar{u}_z$  per guscio ortotropo con BTD - 1° picco negativo

| Modello   | $\bar{u}_z \times 10^{-3}$<br>$\frac{a}{h} = 5$ | $\bar{u}_z \times 10^{-3}$<br>$\frac{a}{h} = 10$ | $\bar{u}_z \times 10^{-3}$<br>$\frac{a}{h} = 20$ | $\bar{u}_z \times 10^{-4}$<br>$\frac{a}{h} = 100$ | DOFs |
|-----------|-------------------------------------------------|--------------------------------------------------|--------------------------------------------------|---------------------------------------------------|------|
| BTD 15DOF | -9.326                                          | -4.729                                           | -2.737                                           | -2.301                                            | 1215 |
| BTD 11DOF | -9.401                                          | -4.740                                           | —                                                | —                                                 | 891  |
| BTD 8DOF  | —                                               | —                                                | -2.738                                           | —                                                 | 648  |
| BTD 7DOF  | -9.451                                          | -4.723                                           | —                                                | -2.301                                            | 567  |
| BTD 6DOF  | —                                               | —                                                | -2.718                                           | -2.320                                            | 486  |
| BTD 5DOF  | -9.435                                          | -3.720                                           | -0.691                                           | -2.307                                            | 405  |

**Tabella 6.12:** Spostamento  $\bar{u}_z$  per guscio ortotropo con BTD - 1° picco positivo

| Modello   | $\bar{u}_z \times 10^{-3}$<br>$\frac{a}{h} = 5$ | $\bar{u}_z \times 10^{-3}$<br>$\frac{a}{h} = 10$ | $\bar{u}_z \times 10^{-3}$<br>$\frac{a}{h} = 20$ | $\bar{u}_z \times 10^{-4}$<br>$\frac{a}{h} = 100$ | DOFs |
|-----------|-------------------------------------------------|--------------------------------------------------|--------------------------------------------------|---------------------------------------------------|------|
| BTD 15DOF | 13.347                                          | 8.966                                            | 4.341                                            | 2.345                                             | 1215 |
| BTD 11DOF | 13.456                                          | 4.728                                            | —                                                | —                                                 | 891  |
| BTD 8DOF  | —                                               | —                                                | 4.343                                            | —                                                 | 648  |
| BTD 7DOF  | 13.471                                          | 4.149                                            | —                                                | 2.342                                             | 567  |
| BTD 6DOF  | —                                               | —                                                | 4.332                                            | 2.335                                             | 486  |
| BTD 5DOF  | 13.478                                          | 4.149                                            | -0.827                                           | 2.350                                             | 405  |

**Tabella 6.13:** Tensione  $\bar{\sigma}_{\alpha\alpha}$  per guscio ortotropo con BTD - 1° picco negativo

| Modello   | $\bar{\sigma}_{\alpha\alpha} \times 10^{-1}$<br>$\frac{a}{h} = 5$ | $\bar{\sigma}_{\alpha\alpha} \times 10^{-1}$<br>$\frac{a}{h} = 10$ | $\bar{\sigma}_{\alpha\alpha} \times 10^{-1}$<br>$\frac{a}{h} = 20$ | $\bar{\sigma}_{\alpha\alpha} \times 10^{-2}$<br>$\frac{a}{h} = 100$ | DOFs |
|-----------|-------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|------|
| BTD 15DOF | -4.552                                                            | -4.031                                                             | -3.373                                                             | -5.377                                                              | 1215 |
| BTD 11DOF | -4.607                                                            | -4.040                                                             | —                                                                  | —                                                                   | 891  |
| BTD 8DOF  | —                                                                 | —                                                                  | -3.375                                                             | —                                                                   | 648  |
| BTD 7DOF  | -4.639                                                            | -4.044                                                             | —                                                                  | -5.383                                                              | 567  |
| BTD 6DOF  | —                                                                 | —                                                                  | -3.382                                                             | -5.628                                                              | 486  |
| BTD 5DOF  | -4.566                                                            | -2.469                                                             | -0.695                                                             | -5.510                                                              | 405  |

**Tabella 6.14:** Tensione  $\bar{\sigma}_{\alpha\alpha}$  per guscio ortotropo con BTD - 1° picco positivo

| Modello   | $\bar{\sigma}_{\alpha\alpha} \times 10^{-1}$<br>$\frac{a}{h} = 5$ | $\bar{\sigma}_{\alpha\alpha} \times 10^{-1}$<br>$\frac{a}{h} = 10$ | $\bar{\sigma}_{\alpha\alpha} \times 10^{-1}$<br>$\frac{a}{h} = 20$ | $\bar{\sigma}_{\alpha\alpha} \times 10^{-2}$<br>$\frac{a}{h} = 100$ | DOFs |
|-----------|-------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|------|
| BTD 15DOF | 6.099                                                             | 7.391                                                              | 5.174                                                              | 1.285                                                               | 1215 |
| BTD 11DOF | 6.202                                                             | 7.406                                                              | —                                                                  | —                                                                   | 891  |
| BTD 8DOF  | —                                                                 | —                                                                  | 5.178                                                              | —                                                                   | 648  |
| BTD 7DOF  | 6.227                                                             | 7.398                                                              | —                                                                  | 1.285                                                               | 567  |
| BTD 6DOF  | —                                                                 | —                                                                  | 5.194                                                              | 1.297                                                               | 486  |
| BTD 5DOF  | 6.246                                                             | 3.754                                                              | -0.337                                                             | 1.297                                                               | 405  |

**Tabella 6.15:** Tensione  $\bar{\sigma}_{\alpha z}$  per guscio ortotropo con BTD - 1° picco negativo

| Modello   | $\bar{\sigma}_{\alpha z} \times 10^{-1}$<br>$\frac{a}{h} = 5$ | $\bar{\sigma}_{\alpha z} \times 10^{-1}$<br>$\frac{a}{h} = 10$ | $\bar{\sigma}_{\alpha z} \times 10^{-1}$<br>$\frac{a}{h} = 20$ | $\bar{\sigma}_{\alpha z} \times 10^{-2}$<br>$\frac{a}{h} = 100$ | DOFs |
|-----------|---------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|------|
| BTB 15DOF | -1.676                                                        | -1.790                                                         | -1.406                                                         | -1.867                                                          | 1215 |
| BTB 11DOF | -1.681                                                        | -1.793                                                         | —                                                              | —                                                               | 891  |
| BTB 8DOF  | —                                                             | —                                                              | -1.406                                                         | —                                                               | 648  |
| BTB 7DOF  | -1.682                                                        | -1.793                                                         | —                                                              | -1.863                                                          | 567  |
| BTB 6DOF  | —                                                             | —                                                              | -1.389                                                         | -1.857                                                          | 486  |
| BTB 5DOF  | -1.636                                                        | -2.517                                                         | -0.267                                                         | -0.942                                                          | 405  |

**Tabella 6.16:** Tensione  $\bar{\sigma}_{\alpha z}$  per guscio ortotropo con BTB - 1° picco positivo

| Modello   | $\bar{\sigma}_{\alpha z} \times 10^{-1}$<br>$\frac{a}{h} = 5$ | $\bar{\sigma}_{\alpha z} \times 10^{-1}$<br>$\frac{a}{h} = 10$ | $\bar{\sigma}_{\alpha z} \times 10^{-1}$<br>$\frac{a}{h} = 20$ | $\bar{\sigma}_{\alpha z} \times 10^{-2}$<br>$\frac{a}{h} = 100$ | DOFs |
|-----------|---------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|------|
| BTB 15DOF | 2.356                                                         | 3.411                                                          | 2.364                                                          | 1.582                                                           | 1215 |
| BTB 11DOF | 2.364                                                         | 3.415                                                          | —                                                              | —                                                               | 891  |
| BTB 8DOF  | —                                                             | —                                                              | 2.366                                                          | —                                                               | 648  |
| BTB 7DOF  | 2.353                                                         | 3.395                                                          | —                                                              | 1.578                                                           | 567  |
| BTB 6DOF  | —                                                             | —                                                              | 2.353                                                          | 1.740                                                           | 486  |
| BTB 5DOF  | 2.356                                                         | 3.883                                                          | 1.877                                                          | 0.856                                                           | 405  |

Dai risultati ottenuti si può notare la grande efficacia nell'utilizzo dei modelli tratti dai BTB, in quanto anche modelli con solo 7 DOF riescono a replicare quasi perfettamente l'andamento di tutte le grandezze con qualsiasi rapporto di spessore. Tale modello a 7 DOF risulta computazionalmente più leggero anche dei modelli con meno gradi di libertà presentati con le teorie Taylor complete. A differenza delle *TE* complete, questo però conferisce risultati corretti. Questo vale sia per lo spostamento verticale che per entrambe le tensioni, normale e tangenziale. L'unico modello che non riesce a replicare i vari andamenti è quello a 5 DOF.

Tali risultati confermano quanto siano da preferire le teorie ridotte rispetto a quelle complete con Taylor.

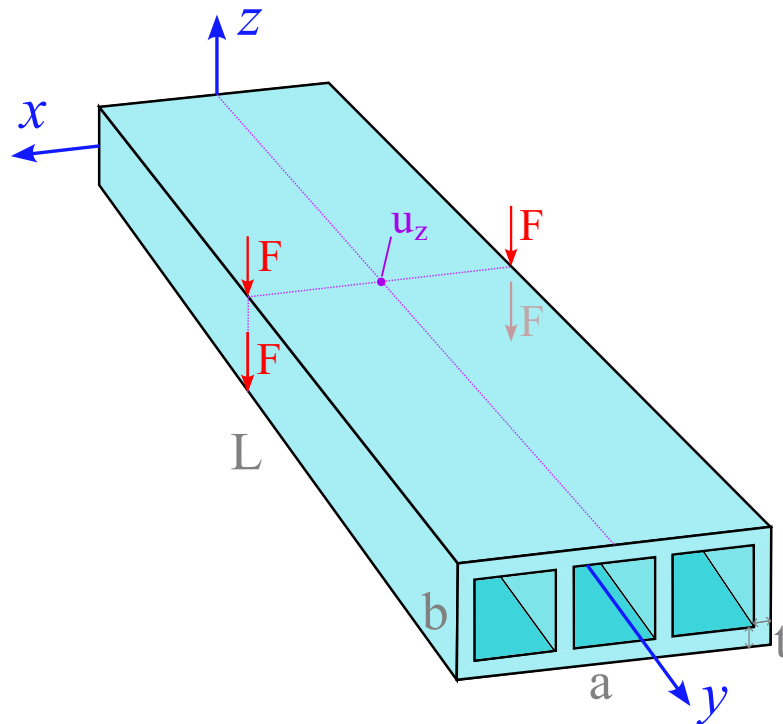
### 6.3 Risultati analisi trave con tre fori

L'ultima analisi proposta riguarda una trave, con sezione tre volte forata, soggetta a condizioni di vincolo semplicemente appoggiate. Questa viene rappresentata in figura 6.30, indicando in quale punto viene effettuata l'analisi.

La trave presenta le seguenti caratteristiche geometriche:

- Lunghezza  $L = 3.8m$  e rapporto trave  $\frac{L}{a} = 10$
- Geometria della sezione,  $a = 0.38m$ ,  $b = 0.14m$ ,  $t = 0.02m$

Dove  $a, b$  sono le dimensioni principali della sezione e  $t$  è lo spessore della parte interna.



**Figura 6.30:** Trave isotropa con 3 fori

Il materiale utilizzato è un isotropo, con le proprietà elencate di seguito:

- Modulo di Young  $E = 72GPa$
- Coefficiente di Poisson  $\nu = 0.33$
- Densità  $\rho = 2700kg/m^3$

Tale configurazione è stata già proposta nel capitolo sulle analisi alle vibrazioni libere con AAM e BTD. In questo caso si è considerata una forzante di tipo sinusoidale nello spazio e nel tempo che agisce lungo l'asse  $z$ , con la seguente espressione:

$$P_z(t) = P_{z_0} \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right) \sin(\omega t) \quad (6.4)$$

Per valutare l'influenza della snellezza geometrica sulla distribuzione ottimale delle teorie [97], sono state effettuate due analisi distinte, variando il rapporto tra lunghezza e base della trave:

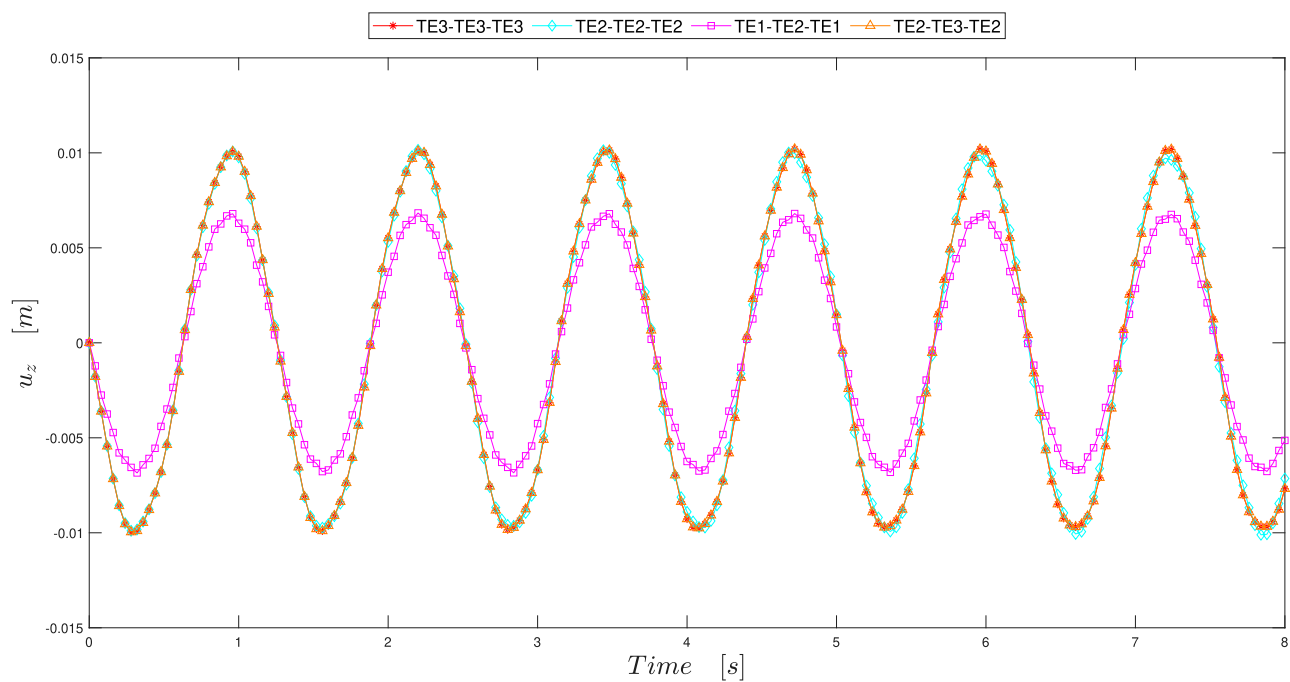
- nel primo caso con  $\frac{L}{a} = 10$
- nel secondo caso con  $\frac{L}{a} = 100$

Lo scopo dell'analisi è la determinazione dello spostamento verticale  $u_z$  in funzione del tempo in un determinato punto caratteristico della trave, di coordinate  $(0, \frac{L}{2}, \frac{b}{2})$ . Vengono applicate in mezzzeria della trave, in corrispondenza dei quattro angoli esterni della sezione, 4 forze che agisce lungo l'asse  $z$ . In base al rapporto di snellezza si selezionano determinati valori delle forze e del tempo impiegato per l'analisi:

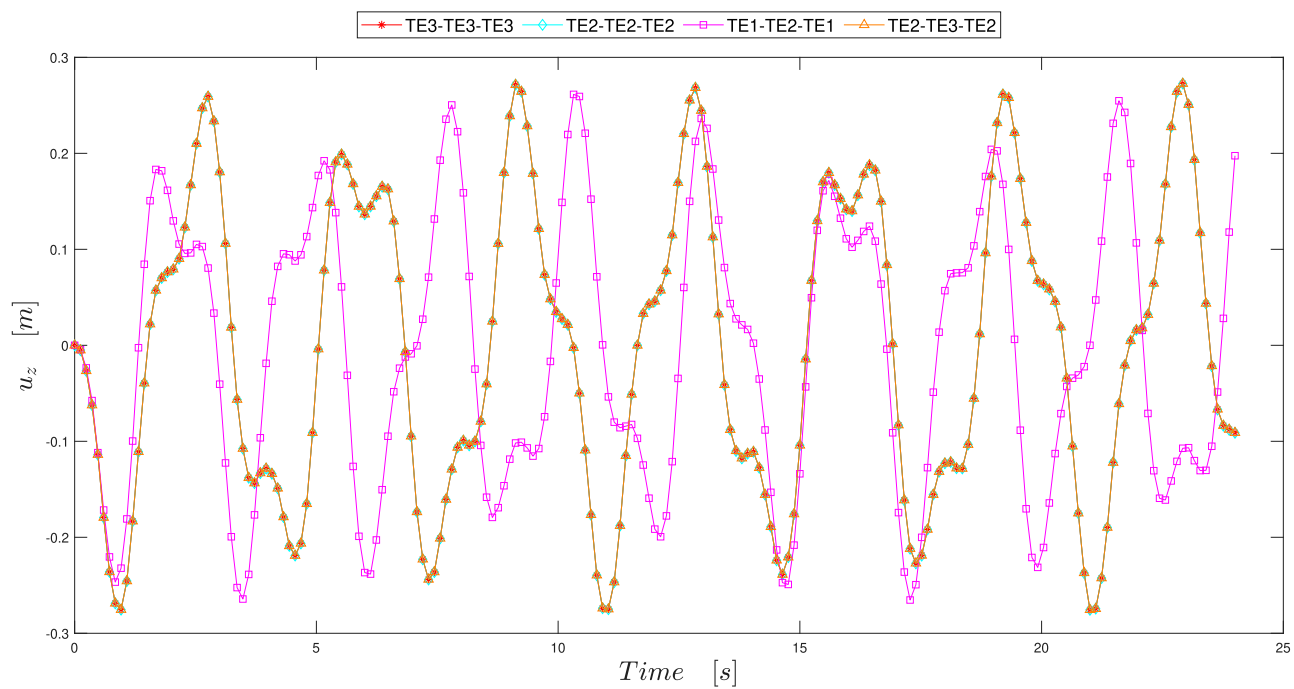
- per  $\frac{L}{a} = 10$  si applicano 4 forze  $F_z = -10 \times 10^3 N$ , per un tempo di  $t = 8s$
- per  $\frac{L}{a} = 100$  si applicano 4 forze  $F_z = -0.5 \times 10^3 N$ , per un tempo di  $t = 24s$

**Analisi con espansioni di Taylor complete** Per prima cosa vengono impiegate varie teorie di espansione di Taylor per rappresentare il campo di spostamenti in mezzzeria della trave.

Di seguito si riportano gli andamenti di  $u_z$  dopo aver effettuato un'analisi dinamica su 2000 istanti temporali, ma andandone a riportare solo 200 per una più facile comprensione. Vengono riportati due grafici, uno per ogni valore del rapporto di spessore.



**Figura 6.31:** Andamento di  $u_z$  in  $t$  con teorie Taylor di vario ordine -  $\frac{L}{a} = 10$



**Figura 6.32:** Andamento di  $u_z$  in  $t$  con teorie Taylor di vario ordine -  $\frac{L}{a} = 100$

Di seguito si riportano le tabelle con i risultati numerici delle analisi degli spostamenti con i vari modelli utilizzati. La tabella riporta i risultati dello spostamento in corrispondenza del primo picco, al variare del rapporto di snellezza. La prima tabella riporta i risultati relativi al primo picco negativo, mentre la seconda al primo picco positivo.

Gli istanti temporali in corrispondenza dei picchi sono diversi in base ai vari casi di rapporti di snellezza:

**Tabella 6.17:** Istanti temporali dei primi punti di massimo e minimo al variare del rapporto di snellezza

|       | $\frac{L}{a}$ | 1° picco negativo | 1° picco positivo |
|-------|---------------|-------------------|-------------------|
| $u_z$ | 10            | 0.28s             | 0.96s             |
|       | 100           | 0.96s             | 2.76s             |

Di seguito si riportano tutti i risultati numerici delle analisi di spostamento nel punto in mezzeria indicato.

**Tabella 6.18:** Spostamento  $u_z$  per trave 3 fori - 1° picco negativo

| Modello         | $u_z \times 10^{-3}$<br>$\frac{L}{a} = 10$ | $u_z \times 10^{-1}$<br>$\frac{L}{a} = 100$ | DOFs |
|-----------------|--------------------------------------------|---------------------------------------------|------|
| TE3 - TE3 - TE3 | -9.964                                     | -2.754                                      | 930  |
| TE2 - TE2 - TE2 | -9.893                                     | -2.754                                      | 558  |
| TE1 - TE2 - TE1 | -6.558                                     | -2.322                                      | 372  |
| TE2 - TE3 - TE2 | -9.964                                     | -2.754                                      | 682  |

**Tabella 6.19:** Spostamento  $u_z$  per trave 3 fori - 1° picco positivo

| Modello         | $u_z \times 10^{-3}$<br>$\frac{L}{a} = 10$ | $u_z \times 10^{-1}$<br>$\frac{L}{a} = 100$ | DOFs |
|-----------------|--------------------------------------------|---------------------------------------------|------|
| TE3 - TE3 - TE3 | 10.060                                     | 2.591                                       | 930  |
| TE2 - TE2 - TE2 | 10.073                                     | 2.591                                       | 558  |
| TE1 - TE2 - TE1 | 6.795                                      | 0.805                                       | 372  |
| TE2 - TE3 - TE2 | 10.060                                     | 2.591                                       | 682  |



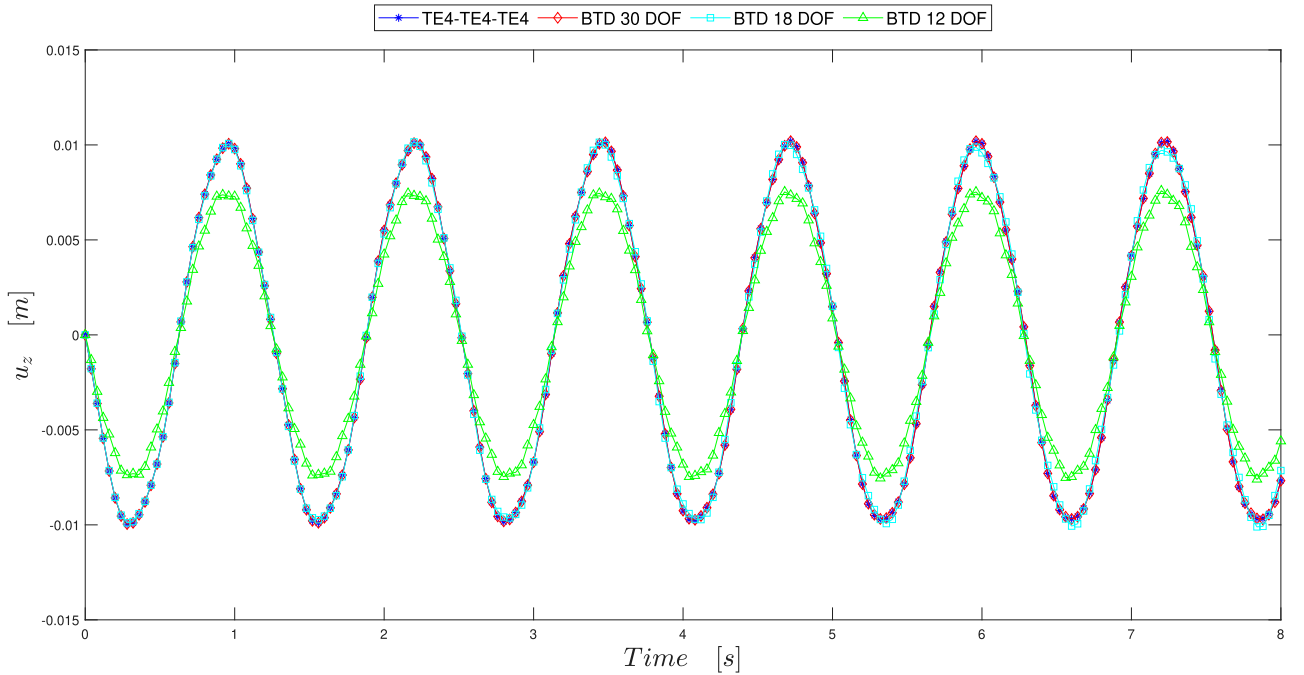
Da questi risultati si può notare come le teorie con l'andamento più corretto sono quelle del terzo ordine se usate in tutte le direzioni ma anche solo nella direzione principale  $y$ . Risultati ugualmente abbastanza accurati si possono ottenere con le teorie del secondo ordine se usate lungo tutte le direzioni. Infatti se si usano anche teorie di espansione del primo ordine il risultato ottenuto sarà nettamente sbagliato, soprattutto nel caso  $\frac{L}{a} = 100$ .

Molto interessante notare come, a differenza del caso guscio, gli andamenti più corretti andranno a coincidere durante tutta l'analisi e non solo nella prima parte.

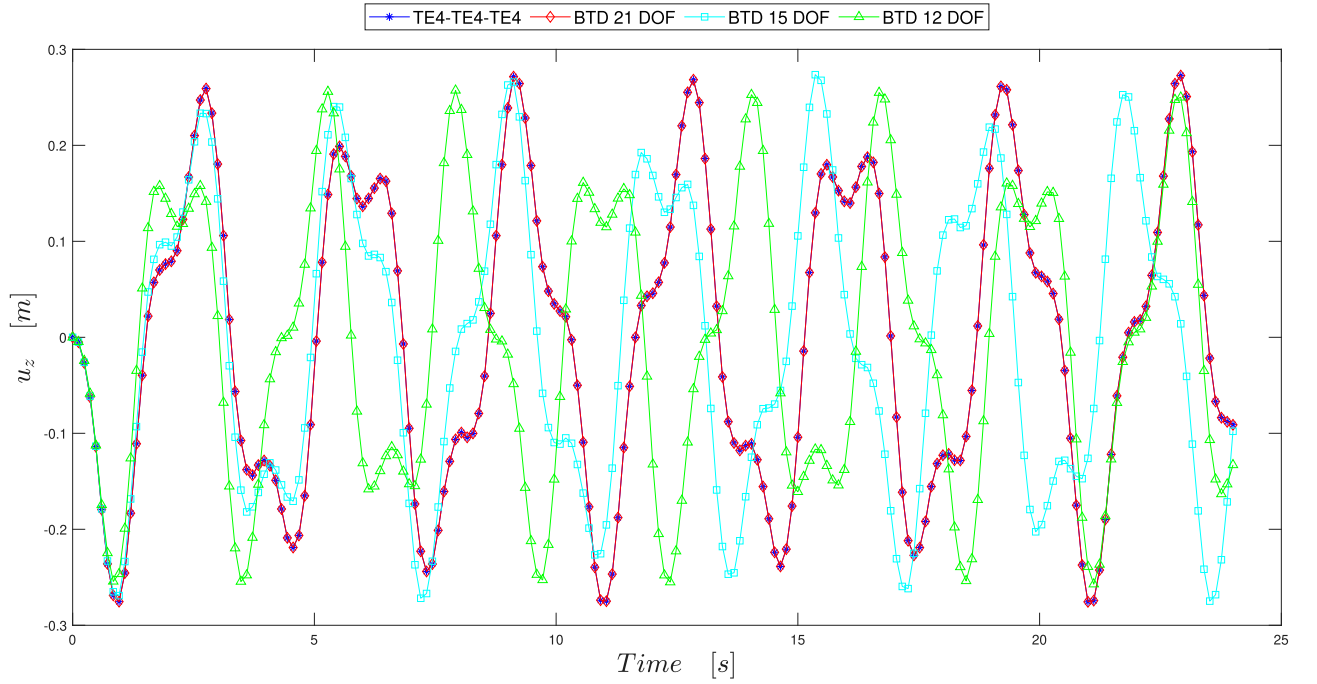
**Analisi con migliori teorie strutturali** In secondo luogo si riprendono le teorie trovate per lo stesso caso trave nel capitolo 5.1, scegliendo quella più adatta in base all'errore richiesto. Si utilizza lo stesso criterio di scelta delle teorie BTD visto nel caso guscio:

- per  $\frac{L}{a} = 10$  si riportano le teorie BTD a 45DOF, 30DOF, 18DOF e 12DOF;
- per  $\frac{L}{a} = 100$  si riportano le teorie BTD a 45DOF, 21DOF, 15DOF e 12DOF.

Di seguito si riportano gli andamenti di  $u_z$  per i due rapporti di snellezza.



**Figura 6.33:** Andamento di  $u_z$  in  $t$  con teorie BTD -  $\frac{L}{a} = 10$



**Figura 6.34:** Andamento di  $u_z$  in  $t$  con teorie BTD -  $\frac{L}{a} = 100$

Anche in questo caso si riportano i risultati analitici per ognuna delle analisi svolte. Gli istanti temporali in corrispondenza dei picchi di massimo e minimo sono i seguenti:

**Tabella 6.20:** Istanti temporali dei primi punti di massimo e minimo al variare del rapporto di snellezza

|       | $\frac{L}{a}$ | 1° picco negativo | 1° picco positivo |
|-------|---------------|-------------------|-------------------|
| $u_z$ | 10            | 0.28s             | 0.96s             |
|       | 100           | 0.96s             | 2.76s             |

Di seguito si riportano le tabelle con i risultati numerici delle analisi degli spostamenti.

**Tabella 6.21:** Spostamento  $u_z$  per trave 3 fori con BTD - 1° picco negativo

| Modello   | $u_z \times 10^{-3}$<br>$\frac{L}{a} = 10$ | $u_z \times 10^{-1}$<br>$\frac{L}{a} = 100$ | DOFs |
|-----------|--------------------------------------------|---------------------------------------------|------|
| BTB 45DOF | -9.963                                     | -2.754                                      | 1395 |
| BTB 30DOF | -9.959                                     | —                                           | 930  |
| BTB 21DOF | —                                          | -2.754                                      | 651  |
| BTB 18DOF | -9.893                                     | —                                           | 558  |
| BTB 15DOF | —                                          | -2.691                                      | 465  |
| BTB 12DOF | -7.375                                     | -2.464                                      | 372  |

**Tabella 6.22:** Spostamento  $u_z$  per trave 3 fori con BTD - 1° picco positivo

| Modello   | $u_z \times 10^{-3}$<br>$\frac{L}{a} = 10$ | $u_z \times 10^{-1}$<br>$\frac{L}{a} = 100$ | DOFs |
|-----------|--------------------------------------------|---------------------------------------------|------|
| BTB 45DOF | 10.059                                     | 2.591                                       | 1395 |
| BTB 30DOF | 10.061                                     | —                                           | 930  |
| BTB 21DOF | —                                          | 2.591                                       | 651  |
| BTB 18DOF | 10.073                                     | —                                           | 558  |
| BTB 15DOF | —                                          | 2.331                                       | 465  |
| BTB 12DOF | 7.303                                      | 1.414                                       | 372  |

Come si può notare dai risultati la scelta delle teorie migliori dai BTB consente di ottenere dei risultati ottimi al fine di analizzare lo spostamento verticale della trave in una risposta dinamica. Utilizzando teorie con 30 o 21 gradi di libertà i risultati sono perfettamente sovrapponibili a quelli delle teorie complete di ordine superiore. Il grande vantaggio a livello di costo computazionale lo si nota nelle teorie con 18 DOF, con un valore di errore percentuale basso. Scendendo ancora abbiamo le teorie a 15 DOF che non riescono a replicare in maniera soddisfacente l'andamento ma si avvicina in alcuni casi ai risultati corretti, mentre le teorie a 12 DOF risultano ampiamente sbagliate, soprattutto nel caso di trave molto allungata.

# Capitolo 7

## Conclusioni

In questo lavoro ci si è focalizzati sulla ricerca e l'applicazione di un approccio efficiente per eseguire analisi strutturali di tipo statico e dinamico. Per fare ciò ci si è basati sulla cinematica di strutture semplici realizzata tramite la CUF, metodo gerarchico in grado di costruire un elevato numero di teorie strutturali. L'obiettivo rimane sempre quello di identificare la teoria strutturale più adatta per ottenere un corretto bilanciamento tra accuratezza e costo computazionale.

In letteratura, con le teorie classiche, il processo di selezione della migliore teoria strutturale è lungo e richiede un elevato costo computazionale. Tale lavoro ha come obiettivo proprio quello di ridurre e semplificare questo processo.

Una delle innovazioni della tesi consiste proprio nell'utilizzare la natura gerarchica della CUF per analizzare in modo sistematico la risposta dinamica di travi e gusci. Adottando espansioni polinomiali, come quelle basate sulle formulazioni di Lagrange, Taylor, o miste, si riesce a ottenere un approccio con controllo preciso sulla cinematica del problema.

Di fondamentale importanza è stata l'introduzione del Metodo Asintotico-Assiomatico (AAM), utilizzato per identificare automaticamente i termini più efficaci delle espansioni polinomiali. Questo metodo consente di costruire i diagrammi delle migliori teorie, detti BTM, che sono molto utili a evidenziare gli aspetti di accuratezza ed efficienza a livello di costo computazionale.

### 7.1 Risultati principali

I contributi principali ottenuti in questa tesi sono riassunti nei seguenti paragrafi, divisi in base al tipo di analisi svolta.

**Analisi statica di travi e gusci** Sono stati proposti degli studi di trave e piastra ortotropi, con un certo numero di strati di laminazione, per studiare come variano

i valori di spostamento verticale e tensioni normali e tangenziali. La cinematica di entrambe le strutture è stata descritta con metodo CUF e formulazioni di tipo polinomiale con Taylor, Lagrange o teorie miste e ridotte. I casi di teorie miste o ridotte sono proprio quelli che ci fanno capire quanto può essere vantaggioso eludere determinati termini dell'espansione in quanto non rilevanti al fine di ottenere risultati corretti delle analisi.

- Nel caso **trave** si può notare che in base alla formulazione scelta si può ridurre notevolmente il numero di gradi di libertà, dunque il costo computazionale, mantenendo un risultato perfettamente accettabile. Scegliere degli elementi Q16 incrementa il numero di gradi di libertà nel caso si utilizzi un'espansione di Lagrange. Nel caso delle tensioni normali gli elementi Q9 con Lagrange riescono a descrivere perfettamente l'andamento, ma utilizzando le espansioni di Taylor si riesce ad ottenere un risultato ugualmente corretto utilizzando un numero di DOFs inferiore. Per la descrizione di andamenti curvi, come si ha nel caso di tensioni trasversali, le espansioni con Lagrange utilizzando elementi Q16 possono risultare essenziali per ottenere l'andamento corretto. In questo caso si può optare per un modello con teorie miste, utilizzando Lagrange solo lungo l'asse principale del modello, che nel caso della trave corrisponde alla  $y$ . Ciò consente di ridurre il costo computazionale.
- Nel caso **piastra** si può notare come la scelta delle teorie influenzi notevolmente i risultati. Per catturare correttamente l'effetto a zig-zag caratteristico dei materiali compositi bisogna utilizzare delle espansioni di Lagrange lungo la dimensione caratteristica. Andando ad utilizzare delle teorie ridotte nelle altre direzioni è possibile ridurre il costo computazionale. Nel caso di tensioni normali è possibile ottenere andamenti corretti con le espansioni di Taylor se si utilizza un ordine elevato. Se invece si studiano le tensioni trasversali le espansioni di Taylor non riescono a riportare la continuità tra gli strati laminati, dunque è necessario utilizzare delle espansioni di Lagrange nelle direzioni caratterizzanti.

**Analisi alle vibrazioni libere di travi e gusci** Uno degli aspetti più importanti del lavoro proposto è proprio quello di trovare quali sono i termini più rilevanti di una determinata teoria. In questo caso si è scelto di utilizzare una base di espansione di Taylor del quarto ordine,  $TE4$ , andando a studiare tutte le combinazioni possibili per le teorie. I casi proposti per l'analisi sono una trave e un guscio dal punto di vista delle vibrazioni libere.

- Nel caso **trave** si nota come, sia nel caso di trave molto snella o non, per ottenere un errore inferiore all'1% è necessario utilizzare almeno 21 DOF. I

termini dell'espansione più rilevanti per l'analisi sono quelli costanti e lineari, aggiungendo in certi casi alcuni termini di ordine superiore per catturare determinate risposte. Introdurre ulteriori termini di ordine superiore farebbe scendere di poco l'errore percentuale.

- Nel caso **guscio** si nota come più è sottile il guscio e meno termini sono sufficienti per ridurre l'errore percentuale. Anche in questo caso i termini più importanti sono quelli costanti e quelli lineari, fatta eccezione per quelli relativi all'espansione su  $z$ . In certi casi possono risultare più rilevanti i termini sul piano di ordine superiore rispetto a quelli fuori dal piano di basso ordine.

**Analisi dinamica di risposta nel tempo di travi e gusci** Di fondamentale importanza sono le analisi dinamiche di risposta nel tempo, dove si punta a rappresentare come variano le grandezze principali, quali spostamento verticale e tensioni normale e tangenziale. Per l'analisi si sceglie un punto caratteristico della geometria della trave o del guscio e si studia in un determinato intervallo di tempo. Si sono confrontati i risultati ottenuti con le teorie di Taylor complete e quelle ridotte, prese dai BTD.

- Nel caso **trave** si può notare come le teorie complete minimo del secondo ordine riescano già a riportare degli andamenti abbastanza corretti. Per ridurre il numero di gradi di libertà in maniera efficiente si sceglie di utilizzare delle teorie prese dai BTD, andando ad analizzare lo spostamento e mostrando quelle con i risultati più significativi. Si conclude che le teorie più efficienti sono quelle a 18 DOF.
- Nel caso **guscio** si nota come le teorie complete di Taylor di basso ordine non siano sufficienti a replicare correttamente gli andamenti, soprattutto quelli delle tensioni trasversali. Il risultato migliore a livello di costo computazionale e accuratezza del risultato è ottenuto utilizzando le migliori teorie strutturali ottenute con sui BTD. Utilizzando solo determinati termini delle teorie di Taylor si riesce ad avere un risultato ottimo con un numero di DOF inferiori. Si ottengono degli ottimi risultati già con 7 DOF, per qualsiasi valore del rapporto di spessore del guscio.

## 7.2 Obiettivi futuri

Questo studio ha approfondito una metodologia molto utile per la generazione e la selezione di teorie strutturali, utilizzandola anche in ambiti nuovi come le analisi dinamiche di risposta nel tempo, fondamentali nello studio di strutture aerospaziali. Tale approccio può comunque essere ancora implementato e migliorato, consentendo di eseguire analisi più complesse anche in maniera più rapida. L'obiettivo finale

sarebbe quelli di automatizzare il processo di selezione delle teorie per renderlo efficiente facilmente ripetibile per le varie casistiche [114].

- Uno dei principali obiettivi futuri è lo sviluppo dell'integrazione tra CUF, che agisce come generatore di dati di addestramento, e le reti neurali (NN), che forniscono indicazioni sul miglior modello strutturale da utilizzare [115]. Questo approccio risolve una delle problematiche del metodo BTM esposto in precedenza, ovvero la necessità di migliaia di analisi per un singolo studio. L'utilizzo del machine learning è fondamentale per una serie di fattori. Tra questi abbiamo la riduzione del costo computazionale, con le reti neurali che permettono di addestrare un modello utilizzando solo circa il 10% delle combinazioni di teorie che sarebbero necessarie per un'analisi completa [116]. Ciò riduce notevolmente il tempo di calcolo. Altro fattore chiave è la generazione di un database intelligente, creando un insieme di risultati di simulazioni relative ad ogni possibile caso. Questo database servirebbe per addestrare una rete neurale in grado di consigliare il modello strutturale ottimale per un dato problema, usando come parametri variabili lo spessore, le proprietà del materiale, altri valori geometrici e le condizioni al contorno.
- Un passo importante nello sviluppo di nuovi studi e lavori per il futuro è l'estensione della metodologia descritta, e possibilmente integrata con machine learning, a problemi che vanno oltre le analisi meccaniche strutturali. L'approccio può essere applicato a problemi multicampo, come le analisi termo-meccaniche e le simulazioni che includono effetti accoppiati, come le proprietà piezoelettriche. Questo risulterebbe possibile in quanto tale processo è abbastanza versatile. Le possibili applicazioni riguardano la previsione del comportamento strutturale, in scenari in cui la temperatura non è costante e influenza direttamente le proprietà dei materiali, ma anche l'analisi delle interazioni tra diverse variabili fisiche. Anche per questo campo di applicazione si possono creare i BTM e identificare le teorie più efficienti, permettendo così di eseguire analisi complesse in maniera efficiente e in minor tempo.

# Bibliografia

- [1] E. Carrera. «Theories and finite elements for multilayered plates and shells: a unified compact formulation with numerical assessment and benchmarking». In: *Archives of Computational Methods in Engineering* 10.3 (2003), pp. 215–296 (cit. alle pp. 2, 5, 11, 14, 17, 20, 23, 24, 31, 33, 38, 65).
- [2] Y. Yan, A. Pagani e E. Carrera. «Exact solutions for free vibration analysis of laminated, box and sandwich beams by refined layer-wise theory». In: *Composite Structures* 175 (2017), pp. 28–45 (cit. alle pp. 2, 14).
- [3] E. Carrera, I. Elishakoff e M. Petrolo. «Who needs refined structural theories?» In: *Composite Structures* 264 (2021), p. 113671 (cit. alle pp. 2, 4, 5).
- [4] D.H. Middleton. *Composite Materials in Aircraft Structures*. UK: Longman Scientific & Technical, 1990 (cit. alle pp. 2, 3).
- [5] George I. Lubin, cur. *Handbook of Composites*. New York: Van Nostrand Reinhold Company, 1982 (cit. a p. 2).
- [6] Mel M. Schwartz. *Composite Materials Handbook*. New York: McGraw-Hill Book Co., 1983 (cit. a p. 3).
- [7] Alberto García de Miguel. «Hierarchical component-wise models for enhanced stress analysis and health monitoring of composites structures». Tesi di dott. Torino: Politecnico di Torino, 2019 (cit. alle pp. 3, 4, 34, 35, 39, 41, 44).
- [8] Ibrahim Kaleel. «Computationally-efficient multiscale models for progressive failure and damage analysis of composites». Tesi di dott. Torino: Politecnico di Torino, 2018 (cit. alle pp. 3, 4).
- [9] E. Carrera e M. Petrolo. «Guidelines and Recommendations to Construct Theories for Metallic and Composite Plates». In: *AIAA Journal* 48.12 (2010), pp. 2852–2866 (cit. alle pp. 4–6, 9, 37).
- [10] V.R. Aitharaju. «C° zigzag kinematic displacement models for the analysis of laminated composites». In: *Mechanics of Composite Materials and Structures* 6.1 (1999), pp. 31–56 (cit. alle pp. 4, 6, 27).



- [11] S. Ahmad, O. C. Zienkiewicz e B. M. Irons. «Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements». In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2.3 (1970), pp. 419–451 (cit. a p. 4).
- [12] S. P. Timoshenko. «On the correction for shear of the differential equation for transverse vibration of prismatic bars». In: *Philosophical Magazine Series 6* 41 (1921), pp. 744–746 (cit. a p. 5).
- [13] E. Carrera. «Theories and finite elements for multilayered plates and shells: a unified compact formulation with hierarchical description». In: *Archives of Computational Methods in Engineering* 9.2 (2002), pp. 87–140 (cit. alle pp. 5, 17, 18).
- [14] J. N. Reddy. «A simple higher-order theory for laminated composites». In: *Journal of Applied Mechanics* 51 (1986), pp. 745–752 (cit. a p. 5).
- [15] E. Carrera, F. Miglioretti e M. Petrolo. «Accuracy of refined finite elements for laminated plate analysis». In: *Composite Structures* 93.5 (2011), pp. 1311–1327 (cit. alle pp. 6, 45).
- [16] O. Allix e P. Ladeveze. «Interlaminar interface modelling for the prediction of delamination». In: *Composite Structures* 22 (1992), pp. 235–242 (cit. a p. 6).
- [17] P. Krawczyk, F. Frey e A.P. Zielinski. «Large deflections of laminated beams with interlayer slips: Part 1: model development». In: *Engineering Computations* 24.1 (2007), pp. 17–32 (cit. alle pp. 6, 31).
- [18] P. Krawczyk e B. Rebora. «Large deflections of laminated beams with interlayer slips: Part 2: finite element development». In: *Engineering Computations* 24.1 (2007), pp. 33–51 (cit. alle pp. 6, 31).
- [19] C. Balzani e W. Wagner. «An interface element for the simulation of delamination in unidirectional fiber-reinforced composite laminates». In: *Engineering Fracture Mechanics* 75 (2008), pp. 2597–2615 (cit. a p. 6).
- [20] S. A. Ambartsumian. «Nontraditional theories of shells and plates». In: *Appl Mech Rev* 55.5 (2002), R35–R44 (cit. a p. 6).
- [21] R.K. Kapania e S. Raciti. «Recent advances in analysis of laminated beams and plates. Part II: Vibrations and wave propagation». In: *AIAA Journal* 27.7 (1989), pp. 935–946 (cit. a p. 7).
- [22] K. Washizu. *Variational methods in elasticity and plasticity*. Oxford: Pergamon, 1968 (cit. a p. 7).
- [23] J.N. Reddy. *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*. New York, USA: CRC press, 1997 (cit. a p. 7).

- [24] A. Entezari, M. Filippi e E. Carrera. «Unified finite element approach for generalized coupled thermoelastic analysis of 3D beam-type structures, Part 1: Equations and formulation». In: *Journal of Thermal Stresses* 40.11 (2017), pp. 1386–1401 (cit. a p. 8).
- [25] N. Ghazouani e R. El Fatmi. «Higher order composite beam theory built on Saint-Venant’s solution. Part II: Built-in effects influence on the behavior of end-loaded cantilever beams». In: *Composite Structures* 93.2 (2011), pp. 567–581 (cit. a p. 8).
- [26] E. Carrera e S. Brischetto. «Analysis of thickness locking in classical, refined and mixed multilayered plate theories». In: *Composite Structures* 82.4 (2008), pp. 549–562 (cit. alle pp. 8, 49).
- [27] Erasmo Carrera e Alfonso Pagani. «Evaluation of the accuracy of classical beam FE models via locking-free hierarchically refined elements». In: *International Journal of Mechanical Sciences* 100 (2015), pp. 169–179 (cit. alle pp. 8, 50).
- [28] E. Carrera, G. Giunta, P. Nali e M. Petrolo. «Refined beam elements with arbitrary cross-section geometries». In: *Computers Structures* 88.5-6 (2010), pp. 283–293. DOI: 10.1016/j.compstruc.2009.11.002 (cit. a p. 9).
- [29] V.Z. Vlasov. *Thin-walled elastic beams*. Washington: National Science Foundation, 1961 (cit. a p. 9).
- [30] S. Benscoter. «A theory of torsion bending for multicell beams». In: *J Appl Mech* 21.1 (1954), pp. 25–34 (cit. a p. 9).
- [31] P.-S. Lee, H.-C. Noh e C.-K. Choi. «Geometry-dependent mitc method for a 2-node iso-beam element». In: *Struct Eng Mech* 29.2 (2008), pp. 203–221 (cit. a p. 9).
- [32] Erasmo Carrera e Marco Petrolo. «On the Effectiveness of Higher-Order Terms in Refined Beam Theories». In: *Journal of Applied Mechanics* 78.2 (2011), p. 021013 (cit. a p. 9).
- [33] E. Carrera, D. Scano e E. Zappino. «Plate Finite Elements with Arbitrary Displacement Fields along the Thickness». In: *Mechanics of Advanced Materials and Structures* (2024) (cit. alle pp. 10, 58).
- [34] E. Carrera, D. Scano e M. Petrolo. «Evaluation of Variable Kinematics Beam, Plate, and Shell Theories using the Asymptotic-Axiomatic Method». In: *Mechanics of Solids* (2024) (cit. alle pp. 10, 11, 75, 76, 80, 82).
- [35] M. Petrolo, A. Pagani e E. Carrera. «Evaluation of higher-order theories for composite shells via Best Theory Diagrams». In: *Composite Structures* 153 (2016), pp. 800–816 (cit. alle pp. 11, 14).

- [36] E. Carrera. «An assessment of mixed and classical theories for the thermal stress analysis of orthotropic multilayered plates». In: *Journal of Thermal Stresses* 23.9 (2000), pp. 797–831 (cit. alle pp. 11, 32, 36).
- [37] M. Cho e J. Oh. «Higher order zig-zag theory for fully coupled thermoelectric–mechanical smart composite plates». In: *International Journal of Solids and Structures* 41.5 (2004), pp. 1331–1356 (cit. a p. 11).
- [38] L.A. Aghalovyan e M.L. Aghalovyan. «On Asymptotic Theory of Beams, Plates and Shells». In: *Curved and Layered Structures* 3.1 (2016) (cit. alle pp. 12, 52).
- [39] M. Petrolo e P. Iannotti. «Best Theory Diagrams for Laminated Composite Shells Based on Failure Indexes». In: *Aerotecnica Missili Spazio* 102 (2023), pp. 199–218. DOI: 10.1007/s42496-023-00158-5 (cit. a p. 12).
- [40] Marco Petrolo e Erasmo Carrera. «Methods and guidelines for the choice of shell theories». In: *Acta Mechanica* 231 (2020), pp. 395–434. DOI: 10.1007/s00707-019-02601-w (cit. alle pp. 12, 52).
- [41] E. Carrera e M. Petrolo. «Refined shell finite elements based on CUF for stress recovery in composite structures». In: *Composite Structures* 94.2 (2012), pp. 542–552 (cit. a p. 14).
- [42] E. Carrera, A. Pagani, M. Petrolo e E. Zappino. «Recent developments on refined theories for beams with applications». In: *Mechanical Engineering Reviews* 2.2 (2015), pp. 14–00298 (cit. alle pp. 14, 32).
- [43] E. Carrera, M. Petrolo e E. Zappino. «Recent advances in refined theories for composite multilayered structures». In: *Applied Mechanics Reviews* 64.2 (2011), p. 020802 (cit. alle pp. 14, 25, 27, 31, 33, 42, 58, 64, 68).
- [44] D. Scano, E. Carrera e E. Zappino. «Shell finite elements with arbitrary displacement fields along the thickness». In: *International Journal of Solids and Structures* (2025). In press (cit. alle pp. 14, 34–36, 39–41).
- [45] J.N. Reddy e D.H. Robbins. «Theories and Computational Models for Composite Laminates». In: *Applied Mechanics Reviews* 47.6 (1994), pp. 147–169 (cit. alle pp. 15, 28).
- [46] R.K. Kapania e S. Raciti. «Recent advances in analysis of laminated beams and plates. Part I: Shear effects and buckling». In: *AIAA Journal* 27.7 (1989), pp. 923–935 (cit. a p. 17).
- [47] S. P. Timoshenko. «On the additional deflection due to shearing». In: *Herald Croatian Nat Assoc* 33.1 (1921), pp. 50–52 (cit. a p. 21).
- [48] V. Z. Vlasov. *Thin-Walled Elastic Beams*. Israel Program for Scientific Translations, 1961 (cit. a p. 22).

- [49] J. N. Reddy. «A simple higher-order theory for laminated composite plates». In: *Journal of Applied Mechanics* 51 (1984), pp. 745–752 (cit. alle pp. 22, 27).
- [50] P.O. Friberg. «Beam element matrices derived from Vlasov’s theory of open thin-walled elastic beams». In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 21.7 (1985), pp. 1205–1228 (cit. a p. 22).
- [51] P.M. Naghdi. «A survey of recent progress in the theory of elastic shells». In: *Applied Mechanics Review* 9 (1956), pp. 365–368 (cit. a p. 23).
- [52] Eric Reissner. «The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates». In: *Journal of Applied Mechanics* 12.2 (1945), A69–A77 (cit. a p. 25).
- [53] Raymond D. Mindlin. «Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates». In: *Journal of Applied Mechanics* 18.1 (1951), pp. 31–38 (cit. a p. 25).
- [54] T. Kant, D.R.J. Owen e O.C. Zienkiewicz. «A refined higher-order C° plate bending element». In: *Computers structures* 15.2 (1982), pp. 177–183 (cit. a p. 26).
- [55] T. Kant e J.R. Kommineni. «Large amplitude free vibration analysis of cross-ply composite and sandwich laminates with a refined theory and C° finite elements». In: *Computers structures* 50.1 (1994), pp. 123–134 (cit. a p. 26).
- [56] M. Petrolo e E. Carrera. «Methods and guidelines for the choice of refined theories for composite and sandwich plates». In: *Composite Structures* 239 (2020), p. 111984 (cit. alle pp. 26, 27, 34, 43).
- [57] L. Demasi. «Partially Layer Wise advanced Zig Zag and HSDT models based on the Generalized Unified Formulation». In: *Engineering Structures* 53 (2013), pp. 63–91 (cit. a p. 27).
- [58] E. Carrera. «Evaluation of Layerwise Mixed Theories for Laminated Plates Analysis». In: *AIAA Journal* 36.5 (1998), pp. 830–839 (cit. a p. 27).
- [59] E. Carrera e M. Petrolo. «Guidelines and Recommendations to Construct Theories for Metallic and Composite Plates». In: *AIAA Journal* 48.12 (2010), pp. 2852–2866 (cit. a p. 28).
- [60] E. Carrera. «Multilayered Shell Theories Accounting for Layerwise Mixed Description, Part 1: Governing Equations». In: *AIAA Journal* 37.9 (1999), pp. 1107–1116 (cit. a p. 29).
- [61] E. Carrera. «Multilayered Shell Theories Accounting for Layerwise Mixed Description, Part 2: Numerical Evaluations». In: *AIAA Journal* 37.9 (1999), pp. 1117–1124 (cit. a p. 29).

- [62] M. Karama, K. Afaq e S. Mistou. «Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity». In: *International Journal of Solids and Structures* 40 (2003), pp. 1525–1546 (cit. alle pp. 29, 63).
- [63] R. Azzara, E. Carrera, M. Filippi e A. Pagani. «Time Response Stress Analysis of Solid and Reinforced Thin-Walled Structures by Component-Wise Models». In: *International Journal of Structural Stability and Dynamics* 20.14 (2020), p. 2043010. DOI: 10.1142/S0219455420430105 (cit. alle pp. 30, 46, 48, 91, 93).
- [64] E. Carrera, M. Maiarú e M. Petrolo. «Component-wise analysis of laminated anisotropic composites». In: *International Journal of Solids and Structures* 49 (2012), pp. 1839–1851 (cit. alle pp. 30, 31).
- [65] E. Carrera, G. Giunta e M. Petrolo. «A Modern and Compact Way to Formulate Classical and Advanced Beam Theories». In: *Developments in Computational Structures Technology*. 2010, pp. 75–112 (cit. alle pp. 31, 42).
- [66] E. Carrera e G. Giunta. «Refined beam theories based on Carrera’s unified formulation». In: *International Journal of Applied Mechanics* 2.1 (2010), pp. 117–143 (cit. a p. 32).
- [67] M. Abambres, D. Camotim e N. Silvestre. «GBT-based first-order analysis of elastic-plastic thin-walled steel members exhibiting strain-hardening». In: *The IES Journal Part A: Civil & Structural Engineering* 6.2 (2013), pp. 119–134 (cit. alle pp. 33, 38).
- [68] E. Carrera, R. Augello e D. Scano. «Multilayered Beam, Plate and Shell Theories with Interlaminar Variables and Lagrange Polynomials». In: *Memorie dell’Accademia delle Scienze di Torino* (2022), pp. 99–134 (cit. alle pp. 34, 39).
- [69] Manish Hassan Nagaraj. «Higher-order layer-wise models for the progressive damage and impact analysis of composite structures». Tesi di dott. Torino: Politecnico di Torino, 2021 (cit. a p. 34).
- [70] E. Carrera, M. Cinefra, A. Lamberti e M. Petrolo. «Results on best theories for metallic and laminated shells including layer-wise models». In: *Composite Structures* 126 (2015), pp. 285–298 (cit. a p. 38).
- [71] O.C. Zienkiewicz e R.L. Taylor. *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*. Washington, USA: Butterworth-Heinemann, 2005 (cit. alle pp. 41, 44, 45).
- [72] K.J. Bathe. *Finite Element Procedure*. Upper Saddle River, New Jersey, USA: Prentice Hall, 1996 (cit. a p. 41).

- [73] E. Carrera e L. Demasi. «Classical and advanced multilayered plate elements based upon PVD and RMVT. Part 1: Derivation of finite element matrices». In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 55.2 (2002), pp. 191–231 (cit. a p. 42).
- [74] A. Pagani, E. Carrera, D. Scano e R. Augello. «Finite elements based on jacobi shape functions for the analysis of beams, plates and shells». In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 124.20 (2023), pp. 4490–4519 (cit. a p. 42).
- [75] P. Vidal e O. Polit. «A sine finite element using a zig-zag function for the analysis of laminated composite beams». In: *Composites* 43 (2011), pp. 1671–1682 (cit. alle pp. 43, 44).
- [76] E. Carrera e D. Scano. «Composite shell finite elements with arbitrary displacement fields along the thickness». In: *Mechanics of Advanced Materials and Structures* (2025). In press (cit. alle pp. 45, 47).
- [77] K.-J. Bathe e E.N. Dvorkin. «A formulation of general shell elements—the use of mixed interpolation of tensorial components». In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 22 (1986), pp. 697–722 (cit. a p. 45).
- [78] J.H. Argyris. «Matrix displacement analysis of plates and shells, Prolegomena to a general theory, part I». In: *Ingenieur-Archiv* 35 (1966), pp. 102–142 (cit. a p. 45).
- [79] R. R. Craig e A. J. Kurdila. *Fundamentals of Structural Dynamics*. John Wiley & Sons, 2006 (cit. a p. 46).
- [80] M.K. Rao, Y. Desai e M. Chistnis. «Free vibrations of laminated beams using mixed theory». In: *Composite Structures* 52 (2001), pp. 149–160 (cit. a p. 46).
- [81] P. K. Parhi, S. K. Bhattacharyya e P. K. Sinha. «Dynamic analysis of multiple delaminated composite twisted plates». In: *Aircraft Eng. Aerospace Technol.* 71.5 (1999), pp. 451–461 (cit. a p. 46).
- [82] A. Bhimaraddi. «A higher order theory for free vibration analysis of circular cylindrical shells». In: *International Journal of Solids and Structures* 20.7 (1984), pp. 623–630 (cit. a p. 46).
- [83] A. Pagani, E. Carrera, M. Boscolo e J.R. Banerjee. «Refined dynamic stiffness elements applied to free vibration analysis of generally laminated composite beams with arbitrary boundary conditions». In: *Composite Structures* 110 (2014), pp. 305–316 (cit. a p. 47).
- [84] D. E. Beskos e K. L. Leung. «Dynamic response of plate systems by combining finite differences, finite elements and laplace transform». In: *Comput. Struct.* 19.5–6 (1984), pp. 763–775 (cit. a p. 48).

- [85] E. Carrera e S. Brischetto. «Analysis of thickness locking in classical, refined and mixed multilayered plate theories». In: *Composite Struct* 82.4 (2008), pp. 549–562 (cit. a p. 49).
- [86] K.J. Bathe e E.N. Dvornik. «A four node plate bending element based on mindlin-reissner plate theory and mixed interpolation». In: *Int J Numer Methods Eng* 21 (1985), pp. 367–383 (cit. a p. 49).
- [87] P.-S. Lee, H.-C. Noh e C.-K. Choi. «Geometry-dependent MITC method for a 2-node iso-beam element». In: *Struct Eng Mech* 29.2 (2008), pp. 203–221 (cit. a p. 49).
- [88] E. Carrera e A. Varello. «Dynamic response of thin-walled structures by variable kinematic one-dimensional models». In: *Journal of Sound and Vibration* 331.24 (2012), pp. 5268–5282 (cit. a p. 50).
- [89] M.L. Bucalem e K.J. Bathe. «Higher-order MITC general shell elements». In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 36.21 (1993), pp. 3729–3754 (cit. a p. 50).
- [90] M. Cinefra. «Free-vibration analysis of laminated shells via refined MITC9 elements». In: *Mechanics of Advanced Materials and Structures* 23.9 (2016), pp. 937–947 (cit. a p. 50).
- [91] M. Petrolo e A. Lamberti. «Axiomatic/asymptotic analysis of refined layer-wise theories for composite and sandwich plates». In: *Mechanics of Advanced Materials and Structures* 23.1 (2016), pp. 28–42 (cit. alle pp. 52, 53).
- [92] Daniele Scano, Erasmo Carrera e Marco Petrolo. «DEVELOPMENT OF FINITE ELEMENT MODELS WITH NODE-WISE VARIATIONS OF STRUCTURAL THEORIES FOR DYNAMIC ANALYSES». In: *Proceedings of the ASME 2025 Aerospace Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*. 2025 (cit. alle pp. 53, 54, 80, 81, 96).
- [93] M. Cinefra et al. «Best theory diagrams for multilayered plates considering multifield analysis». In: *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 28.16 (2017), pp. 2184–2205 (cit. alle pp. 54, 55).
- [94] M. Petrolo e E. Carrera. «On the use of neural networks to evaluate performances of shell models for composites». In: *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences* 7.31 (2020) (cit. a p. 55).
- [95] A. Pagani, A. G. de Miguel, M. Petrolo e E. Carrera. «Analysis of laminated beams via Unified Formulation and Legendre polynomial expansions». In: *Composite Structures* 144 (2016), pp. 10–23 (cit. alle pp. 56, 58, 60–62, 65, 68).

- [96] N. Ghazouani e R. El Fatmi. «Higher order composite beam theory built on Saint-Venant's solution. Part II: Built-in effects influence on the behavior of end-loaded cantilever beams». In: *Composite Structures* 93.2 (2011), pp. 567–581 (cit. a p. 56).
- [97] E. Carrera, M. Petrolo e E. Zappino. «Performance of CUF Approach to Analyze the Structural Behavior of Slender Bodies». In: *Journal of Structural Engineering* 138.2 (2012), pp. 285–297 (cit. alle pp. 58, 75, 117).
- [98] M. Petrolo e E. Carrera. «Refined one-dimensional theories based on the Carrera Unified Formulation for multilayered plates». In: *Composites Part B: Engineering* 55 (2013), pp. 201–210 (cit. alle pp. 59, 68).
- [99] N. J. Pagano e S. J. Hatfield. «Elastic behavior of multilayered bidirectional composites». In: *AIAA Journal* 10.7 (1972), pp. 931–933 (cit. alle pp. 63, 66).
- [100] N. J. Pagano. «Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates». In: *Journal of Composite Materials* 4.1 (1970), pp. 20–34 (cit. a p. 64).
- [101] M. Petrolo e E. Carrera. «Methods and guidelines for the choice of refined theories for composite and sandwich plates». In: *Mechanics of Advanced Materials and Structures* 27.18 (2020), pp. 1557–1574 (cit. a p. 72).
- [102] E. Carrera. *Teorie strutturali raffinate per materiali compositi*. ISBN 978-88-85745-42-3. Torino, Italy: Polito Springer Series, 2021 (cit. a p. 72).
- [103] E. Carrera, D. Scano e M. Petrolo. «Analisi numerica trave con diagrammi BTD». In: *Mechanics of Solids* (2025). Manuscript in preparation. DOI: 10.1134/S0025654424606438 (cit. a p. 73).
- [104] E. Carrera, F. Miglioretti e M. Petrolo. «Computations and evaluations of higher-order theories for free vibration analysis of beams». In: *Journal of Sound and Vibration* 331 (2012), pp. 4269–4284. DOI: 10.1016/j.jsv.2012.04.017 (cit. a p. 75).
- [105] M. Petrolo e E. Carrera. «Best theory diagrams for multilayered structures via shell finite elements». In: *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences* 6.4 (2019), pp. 1–23 (cit. a p. 79).
- [106] V.L. Berdichevsky. «An asymptotic theory of sandwich plates». In: *International Journal of Engineering Science* 48.3 (2010), pp. 383–404 (cit. a p. 80).
- [107] E. Carrera, M. Filippi e E. Zappino. «Free vibration analysis of rotating composite blades via carrera unified formulation». In: *Composite Structures* 106 (2013), pp. 317–325 (cit. a p. 89).



- [108] J. A. Main, R. A. Carlin, E. Garcia, S. W. Peterson e A. M. Strauss. «Dynamic analysis of space-based inflated beam structures». In: *Journal of the Acoustical Society of America* 97.2 (1995), pp. 1035–1045 (cit. a p. 89).
- [109] R.D. Ambrosini, J.D. Riera e R.F. Danesi. «A modified Vlasov theory for dynamic analysis of thin-walled and variable open section beams». In: *Engineering Structures* 22.8 (2000), pp. 890–900 (cit. a p. 90).
- [110] A. Kumar, A. Chakrabarti e P. Bhargava. «Vibration of laminated composites and sandwich shells based on higher order zigzag theory». In: *Engineering Structures* 56 (2013), pp. 880–888 (cit. a p. 90).
- [111] R.K. Khare, T. Kant e A.K. Garg. «Free vibration of composite and sandwich laminates with a higher-order facet shell element». In: *Composite Structures* 65.3 (2004), pp. 405–418 (cit. a p. 94).
- [112] E. Carrera, M. Petrolo e P. Nali. «Unified formulation applied to free vibrations finite element analysis of beams with arbitrary section». In: *Shock and Vibrations* 18.3 (2011), pp. 485–502 (cit. a p. 95).
- [113] D. E. Beskos e K. L. Leung. «Dynamic response of plate systems by combining finite differences, finite elements and laplace transform». In: *Computers and Structures* 19.5-6 (1984), pp. 763–775 (cit. a p. 106).
- [114] Marco Petrolo, Erasmo Carrera, Matteo Filippi e Maria Cinefra. «Development of Reduced Structural Theories for Composite Plates and Shells via Machine Learning». In: *MORTech 2019 - 5th international Workshop Reduced Basis, POD and PGD Model Reduction Techniques* (2019) (cit. a p. 126).
- [115] M. Petrolo e E. Carrera. «On the use of neural networks to evaluate performances of shell models for composites». In: *Adv. Model. and Simul. in Eng. Sci.* 7.31 (2020). DOI: 10.1186/s40323-020-00169-y (cit. a p. 126).
- [116] Erasmo Carrera e Marco Petrolo. «Preliminary Assessments on the Development of Refined Shell Models for Free Vibrations via Machine Learning». In: *ISVCS12, 12th International Symposium on Vibrations of Continuous Systems* (2019) (cit. a p. 126).