



**Politecnico
di Torino**

POLITECNICO DI TORINO

Dipartimento di Ingegneria Meccanica ed Aerospaziale

Tesi di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

**Valutazione di teorie strutturali
multi-fidelity per lo sviluppo di modelli
Machine Learning**

Relatori:

Prof. PETROLO Marco

Prof. FILIPPI Matteo

Prof. PAGANI Alfonso

Prof. ZAPPINO Enrico

Dott.ssa SANTORI Martina

Dott.ssa TORTORELLI Elisa

Candidato:

PICCOLOMINI Simone

Ottobre 2025

Abstract

La produzione di componenti in materiale composito comporta fenomeni termomeccanici complessi, responsabili della generazione di tensioni residue e della comparsa di difetti geometrici, quali lo spring-in, in particolare nei componenti con sezione a L. La previsione accurata di tali effetti risulta cruciale per garantire l'affidabilità strutturale e per ridurre i costi derivanti da iterazioni sperimentali e progettuali. In questo lavoro di tesi si propone un approccio di Machine Learning basato su Gaussian Process Regression (GPR), sviluppato in Python ed applicato a modelli numerici di analisi strutturale e di curing. Il modello è stato inizialmente validato su casi di travi sottoposte ad analisi statica e successivamente impiegato per lo studio del processo di curing su componenti con sezione a L, con l'obiettivo di prevedere spostamenti, tensioni residue e angoli di spring-in a partire da caratteristiche geometriche e meccaniche. L'indagine si fonda sull'utilizzo di dati provenienti da simulazioni agli elementi finiti FEM-CUF di tipo multi-fidelity, dimostrando come un adeguato bilanciamento tra dati high-fidelity e low-fidelity consenta di ottenere previsioni ad elevata accuratezza, a fronte di una significativa riduzione dei costi computazionali. Inoltre, è stata integrata una strategia di Ottimizzazione Bayesiana per la selezione ottimale dei dati all'interno dei mix multi-fidelity, al fine di massimizzare l'efficienza del processo di apprendimento. Il modello GPR sviluppato ha inoltre permesso di stimare l'incertezza predittiva, evidenziando il potenziale degli approcci di Machine Learning come strumenti complementari alle analisi numeriche tradizionali per la progettazione avanzata di strutture composite.

English version:

The manufacturing of composite components involves complex thermomechanical phenomena responsible for the generation of residual stresses and geometric defects, such as spring-in, particularly in L-shaped parts. Accurate prediction of these effects is crucial to ensure structural reliability and to reduce the costs associated with experimental and design iterations. This thesis proposes a Machine Learning approach based on Gaussian Process Regression (GPR), developed in Python and applied to numerical models of structural and curing analysis. The model was initially validated on beam cases subjected to static analysis and subsequently employed to study the curing process of L-shaped components, with the aim of predicting displacements, residual stresses, and spring-in angles from geometric and mechanical features. The investigation relies on data obtained from multi-fidelity FEM-CUF finite element simulations, demonstrating that an appropriate balance between high-fidelity and low-fidelity data enables highly accurate predictions while significantly reducing computational costs. Furthermore, a Bayesian Optimization strategy was integrated to optimally select data within multi-fidelity mixes, with the goal of maximizing the efficiency of the learning process. The developed GPR model also allowed the estimation of predictive uncertainty, highlighting the potential of Machine Learning approaches as complementary tools to traditional numerical analyses for the advanced design of composite structures.

Indice

Abstract	i
Elenco delle Figure	v
Elenco delle Tabelle	x
Simboli ed abbreviazioni	xiii
1 Introduzione	1
1.1 Classificazione degli algoritmi ML	2
1.2 Materiali compositi	4
1.2.1 Classificazione dei materiali compositi	5
1.2.2 Processo produttivo	6
1.2.3 Ciclo di cura in autoclave	8
1.2.4 Difetti indotti dal processo di cura	9
2 Modelli per analisi FEM-CUF	11
2.1 Modelli per analisi strutturali	11
2.1.1 Teoria della trave di Eulero-Bernoulli	11
2.1.2 Teoria Classica della Laminazione (CLT)	12
2.1.3 Principio degli spostamenti virtuali (PVD)	13
2.1.4 Carrera Unified Formulation (CUF)	15
2.2 Modelli per analisi di curing	19
2.2.1 Modello cinematico e matematico di analisi	20
2.2.2 Analisi di curing - modello CHILE	21
3 Modelli di Machine Learning	23
3.1 Gaussian Processes (GPs)	23
3.1.1 Matematica per GPs	24
3.1.2 Gaussian Process Classification (GPC)	27
3.1.3 Gaussian Process Regression (GPR)	28
3.1.4 Kernel per i GPs	29
3.1.5 Kernel fondamentali	31
3.2 Bayesian Optimization	35
3.2.1 Funzione di acquisizione Expected Improvement (EI)	36
3.3 Reti Neurali (NN)	36
3.3.1 Cenni storici	36
3.3.2 Struttura matematica di un neurone	37
3.3.3 Funzioni di attivazione	37

3.3.4	Apprendimento e backpropagation	37
3.3.5	Fattori di sviluppo recente	37
3.3.6	Applicazioni	37
3.3.7	Reti profonde e Deep Learning	38
3.3.8	Approcci classici di Machine Learning mediante Reti Neurali	38
4	Analisi preliminari	39
4.1	Problemi 1D	39
4.1.1	Trave isotropa caricata a flessione	39
4.1.2	Trave isotropa caricata a compressione	44
4.1.3	Trave composita caricata a flessione	46
4.2	Problemi 2D	48
4.2.1	Piastra isotropa incastrata su due lati	48
4.2.2	Piastra isotropa appoggiata	54
4.2.3	Piastra composita incastrata su due lati	56
5	Analisi PID e stress residui su componenti in materiale composito	61
5.1	Geometria e materiale	61
5.2	Risultati dell'analisi	62
5.2.1	Angolo di spring-in	62
6	Reti Neurali integranti GPR: analisi strutturali statiche e di curing	63
6.1	Introduzione	63
6.1.1	Applicazione del ML classico al caso di analisi statica su trave	64
6.1.2	Risultati dal training delle NN in Python	66
6.2	Reti neurali integranti GPR per problemi multi-fidelity: applicazioni ad analisi FEM statiche	68
6.2.1	Materiale per l'analisi di travi a sezione rettangolare	70
6.2.2	Trave isotropa caricata a flessione	71
6.2.3	Trave isotropa caricata a torsione	76
6.2.4	Trave isotropa con sezione a I caricata a flessione	81
6.2.5	Considerazioni sui costi computazionali e l'accuratezza dei risultati: analisi statiche	91
7	GPR per problemi multi-fidelity	93
7.1	Trave isotropa ad I caricata a flessione	94
7.1.1	Risultati: previsione di $u_{z,tip}$	95
7.2	Trave composita caricata a flessione	99
7.2.1	Risultati dal training multi-fidelity: previsione di $\sigma_{yz,max}$	100
7.3	Processo di curing di componenti L-SHAPE	106
7.3.1	Influenza della stacking sequence sull'andamento dello spring-in angle	108
7.3.2	Effetto dell'iperparametro di length scale del kernel	109
7.3.3	Risultati dal training multi-fidelity: previsione dell'angolo di spring-in	114
7.3.4	Risultati dal training multi-fidelity: previsione dell'angolo di spring-in - Bayesian optimization	123
7.3.5	Risultati dal training multi-fidelity: previsione delle tensioni - Bayesian optimization	134
7.3.6	Considerazioni finali	147

8 Conclusioni	149
8.1 Riassunto del lavoro	149
8.2 Conclusioni e prospettive future	150
A Statistica per ML	153
B Tabelle di riferimento	155
Ringraziamenti	191
Bibliografia	191

Elenco delle figure

1.1	Introduzione - mappe di Ashby dei materiali - Fonte: [14]	4
1.2	Ciclo di cura consigliato per Hexcel AS4/8552	8
1.3	Schema di assemblaggio tra longerone e rivestimento alare, con evidenza del fenomeno di spring-in. Fonte: [6]	9
2.1	Modelli strutturali - TTEB	11
2.2	Modelli strutturali - applicazione della CUF al caso trave	15
2.3	Modelli strutturali - assemblaggio delle matrici nella CUF - Fonte: [1]	16
2.4	Analisi PID - definizioni di base. Fonte: [5]	19
2.5	Analisi PID - sistema di riferimento. Fonte: [5]	20
3.1	Esempi di operazioni di marginalizzazione e condizionamento. Fonte: [29]	26
3.2	GPR applicato a dataset senza considerare rumore. Fonte: [20]	28
3.3	GPR applicato a dataset affetti rumore, gestiti mediante alpha . Fonte: [20]	29
3.4	Kernel RBF. Fonte: [20]	32
3.5	Kernel di Matérn. Fonte: [20]	33
3.6	Kernel esponenziale seno-quadro. Fonte: [20]	34
4.1	Analisi preliminari - trave isotropa caricata a flessione	39
4.2	Analisi preliminari - trave: confronto risultati analisi statica	40
4.3	Analisi preliminari - trave: confronto risultati analisi modale	42
4.4	Analisi preliminari - trave: rappresentazione delle prime 5 forme modali con 60 elementi LE3	43
4.5	Analisi preliminari - trave isotropa caricata a compressione	44
4.6	Analisi preliminari - trave: confronto risultati analisi statica	45
4.7	Analisi preliminari - trave composita caricata a flessione	46
4.8	Analisi preliminari - trave composita: confronto risultati analisi statica	46
4.9	Analisi preliminari - trave composita: confronto dei risultati analisi statica variando la discretizzazione della sezione trasversale	47
4.10	Analisi preliminari - piastra isotropa	48
4.11	Analisi preliminari - piastra: risultati analisi statica con elementi LE1 e LE2	49
4.12	Analisi preliminari - piastra: confronto risultati analisi statica al variare della discr. trasv.	50
4.13	Analisi preliminari - piastra: deformata statica	51
4.14	Analisi preliminari - piastra: analisi modale, confronto risultati f_1 [Hz]	51
4.15	Analisi preliminari - piastra: prime 5 forme modali. Modello: 32×16 Q9, 1 LE3	53
4.16	Analisi preliminari - piastra isotropa	54
4.17	Analisi preliminari - piastra: deformata statica	55
4.18	Analisi preliminari - piastra composita incastrata su due lati	56

4.19	Analisi preliminari - piastra: deformata statica	57
4.20	Analisi preliminari - piastra: rappresentazione delle prime 5 forme modali con modello 60×30 Q9, 2 elementi LE3	59
5.1	Analisi PID - geometria della trave a L. Fonte: [5]	61
5.2	Analisi PID - andamento angolo di spring-in	62
6.1	Trave CFRP caricata a flessione	64
6.2	ML - distribuzione Monte Carlo dei dati	65
6.3	Risultati del training delle NN in Python secondo i diversi approcci	67
6.4	Schema della rete neurale	69
6.5	Funzione di attivazione ReLU	69
6.6	Trave isotropa caricata a flessione	71
6.7	Risultati del training basati su dati low-fidelity per $L/h = 10$	72
6.8	Risultati del training con dati LF+HF per $L/h = 10$	73
6.9	Risultati del training basati su dati low-fidelity per $L/h = 100$	74
6.10	18 Dati LF, 5 dati HF; $R_{tr}^2 = 99.61\%$; $R_{extr}^2 = 98.03\%$	75
6.11	Trave isotropa caricata a torsione	76
6.12	Trave isotropa caricata a torsione $L/h = 10$. 38 dati LF	77
6.13	Trave isotropa caricata a torsione $L/h = 10$. 19 dati LF	77
6.14	Trave isotropa caricata a torsione $L/h = 10$. 26 dati LF, 6 dati HF	78
6.15	Confronto tra risultati ottenuti con 37 e 17 dati LF per la trave isotropa caricata a torsione $L/h = 100$	79
6.16	Trave isotropa caricata a torsione $L/h = 100$. 27 dati LF, 6 dati HF	80
6.17	Geometria	81
6.18	Visualizzazione geometria mediante ParaView ($L/h = 10$)	81
6.19	Trave con sezione ad I: traccia	81
6.20	Risultati del training della trave ad I con diversi numeri di dati LF.	83
6.21	Trave ad I: training con 30 dati LF, 5 dati HF	84
6.22	Risultati del training della trave ad I con diverse quantità di dati LF	85
6.23	Training multi-fidelity trave ad I: confronto	86
6.24	Training trave ad I: risultati LF	87
6.25	Training trave ad I: multi-fidelity	88
6.26	Trave ad I: training LF per la previsione di tensioni	89
6.27	Trave ad I: training con 22 dati LF, 4 dati HF	90
7.1	Training 30 dati HF	95
7.2	Training 90 dati HF	95
7.3	Training misto con 90 dati: step 1	96
7.4	Training misto con 90 dati: step 2	96
7.5	Training misto con 90 dati: confronto con training 90 HF	97
7.6	Training misto con 30 dati	98
7.7	Training misto con 30 dati: confronto con il caso 30 HF	98
7.8	Trave composita: vista laterale	99
7.9	Laminazione - ParaView	99
7.10	Training con 90 dati esclusivamente HF	100
7.11	Training con 90 dati esclusivamente LF	101
7.12	Training con 90 dati: confronto tra HF e LF	101
7.13	Trave composita: training GPR multi-fidelity	102

7.14	Trave composita: training GPR multi-fidelity	102
7.15	Trave composita: training GPR multi-fidelity	102
7.16	Trave composita: training GPR multi-fidelity	103
7.17	Trave composita: training GPR multi-fidelity - confronto	104
7.18	Trave composita: training GPR multi-fidelity - confronto	104
7.19	Trave composita: training GPR multi-fidelity - confronto	104
7.20	Trave composita: training GPR multi-fidelity - confronto	105
7.21	Andamenti di R^2 e RMSE in funzione del numero di dati HF nel training GPR .	105
7.22	L-SHAPE: geometria da ParaView. Laminazione $(0/90/0/90)_s$	106
7.23	Effetto della laminazione sull'andamento dell'angolo di spring-in	108
7.24	Training GPR HF: selezione hyper-parameter - lenght-scale poco inferiore all'ottimale	109
7.25	Training GPR HF: selezione hyper-parameter - lenght-scale molto inferiore all'ottimale	110
7.26	Training GPR HF: selezione hyper-parameter - lenght scale superiore all'ottimale	111
7.27	L-SHAPE: training GPR multi-fidelity - Parte 1	114
7.28	L-SHAPE: training GPR multi-fidelity - Parte 2	115
7.29	L-SHAPE: training GPR multi-fidelity - Parte 3	116
7.30	L-SHAPE: training GPR multi-fidelity - Parte 4	117
7.31	L-SHAPE: training GPR multi-fidelity - Confronti 1	118
7.32	L-SHAPE: training GPR multi-fidelity - Confronti 2	119
7.33	L-SHAPE: training GPR multi-fidelity - Confronti 3	120
7.34	L-SHAPE: training GPR multi-fidelity - Confronti 4	121
7.35	Andamenti di R^2 e RMSE in funzione del numero di dati HF nel training GPR .	122
7.36	L-SHAPE: training multi-fidelity con Bayesian Opt. - Parte 1	123
7.37	L-SHAPE: training multi-fidelity con Bayesian Opt. - Parte 2	124
7.38	L-SHAPE: training multi-fidelity con Bayesian Opt. - Parte 3	125
7.39	L-SHAPE: training multi-fidelity con Bayesian Opt. - Parte 4	126
7.40	L-SHAPE: training multi-fidelity con Bayesian Opt. - Parte 5	127
7.41	L-SHAPE: training multi-fidelity con Bayesian Opt. - confronti	128
7.42	L-SHAPE: training multi-fidelity con Bayesian Opt. - confronti	129
7.43	L-SHAPE: training multi-fidelity con Bayesian Opt. - confronti	130
7.44	L-SHAPE: training multi-fidelity con Bayesian Opt. - confronti	131
7.45	L-SHAPE: training multi-fidelity con Bayesian Opt. - confronti	132
7.46	Andamenti di R^2 e RMSE in funzione del numero di dati HF nel training GPR - Bayesian Opt.	133
7.47	Confronto andamenti R^2 ed RMSE	133
7.48	L-SHAPE: training multi-fidelity con BO - σ_{xx}	134
7.49	L-SHAPE: training multi-fidelity con BO - σ_{xx}	135
7.50	L-SHAPE: training multi-fidelity con BO - σ_{xx}	136
7.51	L-SHAPE: training multi-fidelity con BO - confronti σ_{xx}	137
7.52	L-SHAPE: training multi-fidelity con BO - confronti σ_{xx}	138
7.53	L-SHAPE: training multi-fidelity con BO - accuratezza - σ_{xx}	138
7.54	L-SHAPE: training multi-fidelity con BO - σ_{yy}	139
7.55	L-SHAPE: training multi-fidelity con BO - σ_{yy}	140
7.56	L-SHAPE: training multi-fidelity con BO - confronti σ_{yy}	141
7.57	L-SHAPE: training multi-fidelity con BO - confronti σ_{yy}	142
7.58	L-SHAPE: training multi-fidelity con BO - accuratezza - σ_{yy}	142
7.59	L-SHAPE: training multi-fidelity con BO - σ_{xz}	143

7.60	L-SHAPE: training multi-fidelity con BO - σ_{xz}	144
7.61	L-SHAPE: training multi-fidelity con BO - confronti σ_{xz}	145
7.62	L-SHAPE: training multi-fidelity con BO - confronti σ_{xz}	146
7.63	L-SHAPE: training multi-fidelity con BO - accuratezza - σ_{xz}	146
7.64	L-SHAPE GPR con BO - predizioni medie con intervalli di confidenza	147
7.65	L-SHAPE: confronto sulle accuratezze	148

Elenco delle tabelle

1.1	Processi produttivi per componenti in composito - confronto. Fonte: [15]	7
4.1	Analisi preliminari - caratteristiche materiale trave isotropa	39
4.2	Analisi preliminari - trave: confronto risultati analisi statica	41
4.3	Analisi preliminari - trave: confronto risultati analisi statica	41
4.4	Analisi preliminari - trave: confronto risultati f_1 analisi modale	42
4.5	Analisi preliminari - trave: confronto risultati analisi modale con 60 elm	42
4.6	Analisi preliminari - trave: confronto risultati analisi statica	45
4.7	Analisi preliminari - trave: confronto risultati analisi statica	45
4.8	Analisi preliminari - caratteristiche materiale trave composita	46
4.9	Analisi preliminari - trave: confronto dei risultati	47
4.10	Analisi preliminari - caratteristiche materiale piastra isotropa	48
4.11	Analisi preliminari - piastra: confronto risultati analisi statica con 4 elm LE1 o LE2	49
4.12	Analisi preliminari - piastra: confronto risultati analisi statica	50
4.13	Analisi preliminari - piastra: confronto risultati analisi modale	52
4.14	Analisi preliminari - piastra: risultati analisi modale, prime 10 frequenze naturali	52
4.15	Analisi preliminari - piastra: confronto risultati analisi statica	55
4.16	Analisi preliminari - caratteristiche materiale piastra composita	56
4.17	Analisi preliminari - piastra composita: confronto risultati analisi statica	57
4.18	Analisi preliminari - piastra: risultati analisi modale, prime 10 frequenze naturali	58
6.1	Materiale trave CFRP caricata a flessione	64
6.2	Metodi NN: riassunto prestazioni	67
6.3	Caratteristiche meccaniche ERGAL	70
6.4	Trave isotropa caricata a flessione $L/h=10$: dati di training LF	72
6.5	Trave isotropa caricata a flessione $L/h=10$: dati di training HF	73
6.6	Trave isotropa caricata a flessione $L/h=100$: dati di training LF. Riferimento figura (6.9b)	74
6.7	Trave isotropa caricata a flessione $L/h=100$: dati di training HF	75
6.8	Trave isotropa caricata a torsione $L/h=10$: dati di training LF (parte 1)	76
6.9	Trave isotropa caricata a torsione $L/h=10$: dati di training LF (parte 2)	76
6.10	Trave isotropa caricata a torsione $L/h=10$: dati di training HF	78
6.11	Trave isotropa caricata a torsione $L/h=100$: dati di training LF (parte 1)	79
6.12	Trave isotropa caricata a torsione $L/h=100$: dati di training LF (parte 2)	79
6.13	Trave isotropa caricata a torsione $L/h=100$: dati di training HF	80
6.14	Caratteristiche meccaniche ERGAL	82
6.15	Trave ad I: dati di training NN-GPR di tipo HF	84
6.16	Trave isotropa ad I caricata a flessione: 4 dati HF	86
6.17	Trave isotropa ad I caricata a flessione: 5 dati HF	88

6.18	Trave isotropa ad I caricata a flessione: 4 dati HF	90
6.19	Costi computazionali: CPU-time LF	91
6.20	Costi computazionali: CPU-time HF e NN-GPR	91
6.21	Accuratezza e costi computazionali NN-GPR: analisi statiche	92
7.1	Training GPR con dataset completo: tabella riassuntiva	97
7.2	Training GPR con dataset ridotto: tabella riassuntiva	98
7.3	Training GPR: tabella riassuntiva	103
7.4	L-SHAPE: costi computazionali	107
7.5	Training GPR L-SHAPE: lenght scale ottimale	113
7.6	Training GPR L-SHAPE: tabella riassuntiva	122
7.7	Training GPR L-SHAPE con Bayesian Opt.: tabella riassuntiva	132
7.8	Training GPR L-SHAPE con Bayesian Opt.: tabella riassuntiva σ_{xx}	138
7.9	Training GPR L-SHAPE con Bayesian Opt.: tabella riassuntiva σ_{yy}	142
7.10	Training GPR L-SHAPE con Bayesian Opt.: tabella riassuntiva σ_{xz}	146
B.1	Ciclo di cura. Fonte: [4][5]	155
B.2	Proprietà meccaniche e fisiche di materiali metallici	156
B.3	Trave ad I: dati di training NN-GPR di tipo LF	157
B.4	Trave isotropa ad I caricata a flessione: 36 dati LF	158
B.5	Trave isotropa ad I caricata a flessione: 36 dati LF	159
B.6	Trave isotropa ad I: dati high-fidelity	160
B.7	Trave isotropa ad I: dati low-fidelity	162
B.8	Trave isotropa ad I: dati test HF	164
B.9	Trave composita: dati high-fidelity	165
B.10	Trave composita: dati low-fidelity	167
B.11	Trave composita: dati test HF	169
B.12	Curing L-SHAPE: dati HF tip spring-in	169
B.13	Curing L-SHAPE: dati LF tip spring-in	173
B.14	Curing L-SHAPE: dati test HF tip spring-in	177
B.15	Curing L-SHAPE: dati HF tensioni	179
B.16	Curing L-SHAPE: dati test HF tensioni	183
B.17	Curing L-SHAPE: dati LF tensioni	185

Simboli ed abbreviazioni

ϵ	Tensore delle deformazioni
σ	Tensore delle tensioni
A	Matrice delle rigidezze membranali
BO	Bayesian optimization
B	Matrice delle rigidezze di accoppiamento
CLT	Classical Lamination Theory
CR	Modo di corpo rigido
CUF	Carrera Unified Formulation
Discr.	Discretizzazione
DL	Deep Learning
DoC	Degree of cure
D	Matrice delle rigidezze flesso-torsionali
EI	Expected improvement
Elm	Elemento/i (riferito a discretizzazione FEM)
ESL	Equivalent single layer
FEM	Finite Element Method
Fless.	Flessionale
FM	Forma modale
FN	Nucleo fondamentale (CUF)
Gen.	Genere
GPC	Gaussian Process Classification
GPR	Gaussian Process Regression
GPs	Gaussian Processes
HDS	High-dimensional space

HF	High-fidelity (data)
IA	Intelligenza artificiale
ISO	Materiale isotropo
KM	Kernel machine
LDS	Low-dimensional space
LE	Espansione di Lagrange
LE	Espansione lagrangiana
LF	Low-fidelity (data)
LW	Layer wise
MFBO	Multi-fidelity bayesian optimization
ML	Machine Learning
NN-GPR	Reti Neurali integranti GPR
NN	Neural Network
ORT	Materiale ortotropo
PES	Predictive entropy search
PID	Process Induced Deformation
PINN	Physics-Informed Neural Network
PI	Probability of improvement
RBF	Radial basis function
RMSE	Root mean square error
SE	Squared-exponential
TD	Test data
TE	Espansione di Taylor
Tors.	Torsionale
Trasv.	Trasversale
TTEB	Teoria della trave di Eulero-Bernoulli
UCB	Upper confidence bound
u	Vettore degli spostamenti
VD	Validation data

Capitolo 1

Introduzione

Il Machine Learning (ML) è un settore dell'Intelligenza Artificiale che si fonda sull'impiego di dati e algoritmi con l'obiettivo di migliorare le capacità computazionali dei sistemi informatici, introducendo modalità di elaborazione parzialmente assimilabili ai meccanismi di apprendimento umano. Oggi rappresenta una delle aree di ricerca e sviluppo più promettenti in ambito scientifico e ingegneristico, costituendo la base di numerose applicazioni in campi eterogenei quali l'ingegneria, la finanza e la ricerca scientifica. La sua diffusione è caratterizzata da una crescita costante, che lascia prevedere ulteriori sviluppi futuri sia in ambito accademico sia industriale.

Il ML si fonda su metodi che combinano principi matematici e tecniche di ottimizzazione, finalizzati a estrarre informazioni significative dai dati disponibili e a utilizzarle per costruire modelli predittivi. In linea generale, le prestazioni di tali algoritmi tendono a migliorare con l'aumentare della quantità e della qualità dei dati, confermando il ruolo centrale che essi rivestono nel processo di apprendimento automatico.

Queste potenzialità assumono un rilievo particolare nel settore aerospaziale, dove la progettazione e la produzione di strutture leggere e ad alte prestazioni rappresentano un requisito imprescindibile per garantire efficienza, sicurezza e sostenibilità. In questo contesto, l'impiego del ML per la previsione di difetti e tensioni residue nei componenti realizzati in materiale composito si configura come uno strumento innovativo e strategico, capace di supportare l'ottimizzazione dei processi produttivi e di ridurre i costi legati al testing e al controllo qualità.

In questa prospettiva, la presente tesi si propone di indagare l'applicazione di tecniche di Machine Learning come supporto alla previsione del comportamento dei materiali compositi nelle fasi di fabbricazione e di utilizzo. A tal fine è stato sviluppato un codice in linguaggio Python, basato sulla Gaussian Process Regression (GPR), capace di effettuare predizioni sui risultati di analisi strutturali e di curing relative a componenti in composito di geometria L-SHAPE. I dati impiegati per l'addestramento dei modelli derivano da analisi multi-fidelity, basate su differenti teorie strutturali, così da combinare fonti di informazione eterogenee in termini di complessità e precisione. Proprio in questo quadro, l'uso di algoritmi di ML come la GPR permette di raggiungere un compromesso ottimale tra costo computazionale e accuratezza delle previsioni, aspetto particolarmente rilevante quando si affrontano problemi complessi e ad alta intensità di calcolo come quelli della meccanica dei compositi.

L'efficacia dell'approccio è stata ulteriormente potenziata attraverso l'integrazione di procedure di ottimizzazione bayesiana, sviluppate per incrementare le capacità predittive e analizzarne l'impatto in termini di accuratezza dei risultati. Parallelamente, è stato sviluppato un modello alternativo basato su reti neurali, anch'esso arricchito dall'integrazione con la GPR, che ha permesso di condurre un confronto critico tra metodologie differenti. Questo confronto ha reso

possibile evidenziare punti di forza, limiti e potenzialità delle diverse strategie, con particolare attenzione alla loro applicabilità nella progettazione e realizzazione di strutture aerospaziali leggere e ad alte prestazioni, in cui la previsione accurata di difetti e tensioni residue assume un ruolo fondamentale.

L'elaborato è strutturato come segue. Inizialmente vengono trattati gli aspetti basilari e storici legati al mondo di IA e ML, e vengono esposte nozioni basilari riguardanti il mondo dei materiali compositi. Nel secondo capitolo vengono presentate le basi teoriche dei modelli impiegati per l'analisi strutturale e di curing dei materiali compositi, con particolare riferimento all'utilizzo del solutore FEM-CUF, che costituisce la principale fonte dei dati multi-fidelity utilizzati nello sviluppo dei modelli di Machine Learning.

Il terzo capitolo è dedicato alla descrizione delle tecniche di ML adottate, con attenzione sia agli aspetti teorici che agli strumenti implementativi necessari per lo sviluppo dei codici in Python. Nel quarto e quinto capitolo sono riportati i risultati delle analisi preliminari, condotte con lo scopo di effettuare un assessment dei modelli e valutare la qualità dei dati di partenza, elemento cruciale per il corretto svolgimento della fase di addestramento degli algoritmi.

Il sesto capitolo illustra i risultati ottenuti mediante l'impiego di reti neurali, analizzandone le prestazioni e discutendone limiti e potenzialità.

Infine, l'ultimo capitolo è dedicato all'applicazione del codice Python di Gaussian Process Regression (GPR), sia nella sua forma standard che in combinazione con procedure di ottimizzazione bayesiana, con lo scopo di: mostrare gli aspetti fondamentali per il corretto funzionamento di un modello GPR, mettere in evidenza le differenze prestazionali e discutere l'efficacia complessiva del metodo.

1.1 Classificazione degli algoritmi ML

Le tecniche convenzionali di ML avevano capacità limitate nell'interpretazione di dati naturali in forma grezza, poiché la costruzione di sistemi ML richiedeva un elevato livello di esperienza ingegneristica. Era necessario progettare un sistema di estrazione dei dati in grado di trasformarli in un vettore di rappresentazione interna, da cui il sottosistema di apprendimento poteva riconoscere schemi ricorrenti e utilizzarli per classificare gli input [8]. Questo approccio viene definito "feature engineering" e trova oggi il suo antagonista nel "feature learning", in cui l'algoritmo identifica automaticamente gli schemi presenti nei dati forniti [8].

Ad ogni modo, si possono identificare due categorie principali di ML:

- **Supervised ML** – processo mediante il quale l'algoritmo sfrutta un set di input e output forniti a priori per addestrare un modello valido; i dati forniti come training set sono validati da esperti. L'obiettivo è permettere all'algoritmo di apprendere le caratteristiche chiave dei dati e utilizzarle per predire la risposta a nuovi input, basandosi su processi di regressione e ottimizzazione [2]. Tra i metodi supervised si distinguono ulteriori varianti:
 - Semi-supervised ML, in cui l'algoritmo riceve dati di training e relazioni dato-etichetta parziali, che dovrà ricostruire sull'intero dataset;
 - Active learning, in cui l'algoritmo dispone di pochi dati etichettati e deve selezionare autonomamente, sulla base di criteri di ottimizzazione, quelli più significativi da elaborare;
 - Reinforcement learning, in cui l'addestramento si basa sul feedback ottenuto in risposta alle decisioni prese, guidando la costruzione del modello migliore [2].

- **Unsupervised ML** – metodo in cui non vengono assegnate etichette ai dati di training; l'obiettivo è far sì che il modello identifichi autonomamente pattern all'interno dei dati, li raggruppi in categorie ed etichetti, al fine di predire e classificare nuovi dati [2].

I metodi di Deep Learning (DL) si basano sulla composizione di numerosi livelli di rappresentazione dei dati, ottenuti combinando moduli semplici ma non lineari. Ciascun livello elabora la rappresentazione dei dati a partire dal livello precedente, producendo rappresentazioni progressivamente più astratte [8]. L'aspetto distintivo degli algoritmi di DL è che i vari layer non vengono progettati a livello ingegneristico, ma costruiti in base ai dati derivanti dal processo di apprendimento.

Nell'ambito del Supervised ML si collocano due modelli fondamentali impiegati nel presente lavoro di tesi: la Gaussian Process Regression (GPR) e le Neural Networks (NN). Entrambi i metodi si basano sull'apprendimento a partire da dati etichettati, in cui gli input e gli output sono noti a priori, permettendo al modello di identificare relazioni tra variabili e di effettuare predizioni su nuovi dati.

In termini introduttivi, la Gaussian Process Regression si fonda sul concetto di funzione di covarianza (kernel), che consente al modello di adattarsi in maniera flessibile alla distribuzione dei dati e di catturare relazioni complesse senza richiedere una forma predeterminata della funzione da apprendere. Le Neural Networks, invece, sono costituite da più strati di nodi interconnessi che elaborano progressivamente le informazioni, permettendo di identificare pattern non lineari e strutture complesse all'interno dei dati. Questi concetti saranno approfonditi nei capitoli dedicati ai singoli modelli, dove verranno illustrate architetture, funzioni di attivazione e modalità di addestramento. In seguito si riporta una breve introduzione.

Gaussian Process Regression (GPR)

La Gaussian Process Regression (GPR) è un modello probabilistico non parametrico utilizzato per la regressione. La funzione da apprendere viene modellata come un processo gaussiano:

$$f(x) \sim \mathcal{GP}(\mu(x), k(x, x')), \quad (1.1)$$

dove $\mu(x)$ è la media a priori e $k(x, x')$ è il kernel che definisce la covarianza tra i valori della funzione in punti diversi.

In sintesi:

- I dati di training aggiornano il modello tramite inferenza bayesiana, trasformando il prior in posterior.
- La funzione di covarianza k controlla quanto i valori della funzione in punti x e x' sono correlati.
- La predizione in un punto non osservato è distribuita secondo una normale con media e deviazione standard calcolate dai dati.

Questo approccio consente di avere predizioni flessibili e un'indicazione della confidenza associata a ciascuna stima.

Reti Neurali (NN)

Le reti neurali (NN) sono modelli computazionali composti da unità chiamate neuroni. L'uscita di un neurone è calcolata come:

$$y = \varphi\left(\sum_{i=1}^n w_i x_i + b\right), \quad (1.2)$$

dove $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ è il vettore di input, $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$ è il vettore dei pesi, b è il bias e $\varphi(\cdot)$ è la funzione di attivazione.

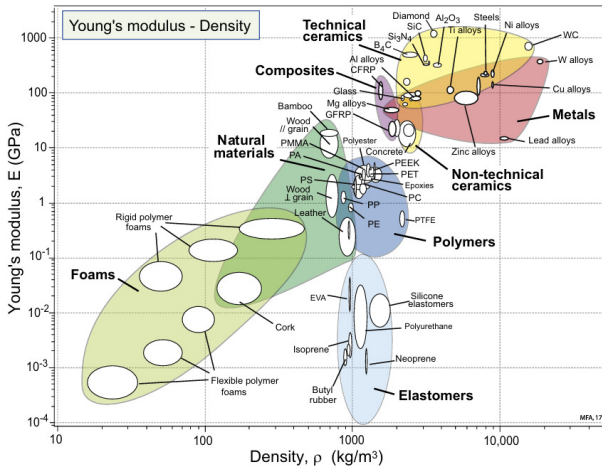
In breve:

- Le NN apprendono una funzione mappando input a output tramite l'ottimizzazione dei pesi.
- L'apprendimento avviene con la retropropagazione, che aggiorna i pesi minimizzando una funzione di costo $J(\mathbf{w})$.
- Le reti profonde (DNN) aggiungono più strati nascosti, catturando relazioni complesse e gerarchiche nei dati.

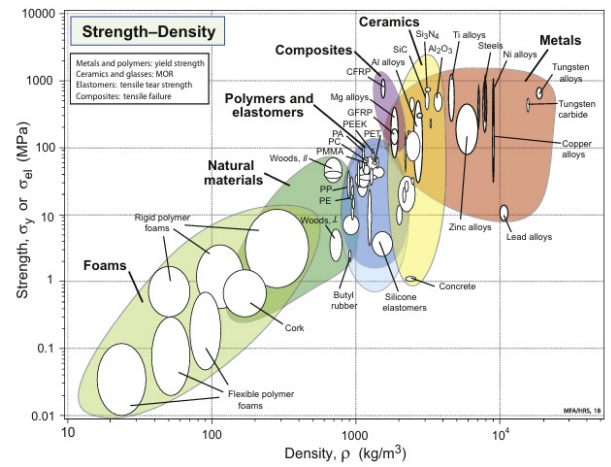
Le NN offrono grande flessibilità per modellare fenomeni non lineari, ma, a differenza di modelli basati su GPR, non forniscono direttamente informazioni sull'incertezza delle predizioni.

1.2 Materiali compositi

I compositi sono materiali costituiti da due o più fasi di natura diversa, chimicamente dissimili. Le due fasi, che prese singolarmente non avrebbero possibilità di applicazione in campo ingegneristico per via di proprietà meccaniche non adatte, se opportunamente unite possono dar luogo a materiali estremamente performanti.



(a) Mappa $E - \rho$



(b) Mappa $\sigma_y - \rho$

Figura 1.1: Introduzione - mappe di Ashby dei materiali - Fonte: [14]

Osservando le mappe di rigidezza e resistenza specifica riportate in figura (1.1), tratte dal testo [14] di Ashby *et al.*, è subito evidente uno dei principali motivi associati al largo impiego di questa categoria di materiali: a parità di rigidezza e tensione di snervamento con i metalli, i compositi presentano una densità decisamente inferiore. Questa caratteristica fondamentale ha giocato un ruolo di primaria importanza nella nascita dell'enorme filone di ricerca e sviluppo associato ai compositi nell'industria aerospaziale, dove si richiedono alte prestazioni e pesi contenuti. Inoltre i compositi garantiscono la possibilità di realizzare componenti monolitici, o comunque con basso numero di connessioni richieste, e questa loro peculiarità è fonte di enorme vantaggio produttivo.

Ad oggi si trovano in commercio esempi di aeromobili che impiegano fino al 50% di materiali compositi in massa sul totale della struttura, come il Boeing 787 Dreamliner; tuttavia si va verso un trend di ridimensionamento del loro utilizzo in quanto l'impiego di compositi determina complicazioni a livello di produzione e certificazione, richiedendo spesso lo sviluppo di infrastrutture e test appositi; si rimanda il lettore alla consultazione dell'articolo [17] di Georgiadis *et al.*, che affronta il tema delle simulazioni atte alla certificazione della parte mobile del bordo di fuga di un Boeing 787. Infine, l'incertezza sulle caratteristiche meccaniche del materiale porta, in alcuni casi, ad un aumento dei margini di sicurezza a progetto, che va necessariamente a ridurre il vantaggio in peso derivante dall'uso dei compositi.

1.2.1 Classificazione dei materiali compositi

A livello morfologico si possono distinguere tre forme comuni di materiali compositi utilizzate nell'industria aerospaziale:

- Compositi fibrosi, che sono costituiti da fibre incorporate in una matrice polimerica.
- Compositi laminati, costituiti da strati impilati di vari materiali. Rientrano in questa categoria anche i laminati sandwich.
- Compositi con rinforzo di particolato, formati da particelle rinforzanti disperse in una matrice polimerica. In questa categoria si possono far rientrare anche alcuni materiali derivanti da stampa 3D.

La matrice può esser di diversa natura:

- Ceramiche o metalliche: presentano vantaggi di applicazione ad alte temperature, dove le matrici polimeriche si degradano
- Polimeriche: sono le matrici più comunemente utilizzate, in particolare quelle costituite da polimeri termoindurenti.

Tra le tipologie di fibra più utilizzate si possono, invece, elencare: fibra di carbonio, fibra di vetro, Kevlar, fibra ceramica, fibra di boro. La fibra di carbonio è spesso utilizzata per la struttura primaria del velivolo per via delle sue ottime proprietà meccaniche anche se, di contro, presenta una bassa conduttività, che rende difficile la protezione dell'aeromobile da fulmini; la fibra di vetro è spesso impiegata nella struttura secondaria (carenature, radome, tip alari); il Kevlar è un materiale estremamente resistente ai danni da impatto, ma, di contro, presenta bassa resistenza a compressione e igroscopia.

1.2.2 Processo produttivo

La produzione di materiali compositi si basa sulla combinazione di fibre e matrice, la quale può avvenire con varie modalità, e si presenta sempre come un problema diviso su più punti: scelta delle fasi, scelta del processo realizzativo, scelta del tool. Il tool è fondamentale per la produzione in quanto è l'elemento atto a conferire la forma voluta al materiale; può esser realizzato con vari materiali, ma più comunemente la scelta ricade su metallici aventi basso CTE: nel caso di studio del paper di Zappino *et al.* [5] la scelta è ricaduta sull'Invar, materiale metallico avente $E = 150\text{GPa}$, $\nu = 0.28$, $CTE = 1.56 \cdot 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$.

Esistono tre principali metodi di deposizione di fibre e matrici per la produzione di materiali compositi:

1. Wet processes
2. Liquid Composite Molding (LCM)
3. Processi da prepreg

Il metodo di stratificazione a umido (wet layup) è considerato uno dei più semplici, e consiste in quattro passaggi fondamentali: disposizione delle fibre; applicazione manuale della resina, tramite pennello o spatola; inserimento delle fibre impregnate dentro uno stampo; chiusura nel sacco a vuoto ed inizio del processo di curing. La vera difficoltà di questa tecnica sta nel riuscire a controllare accuratamente la direzione assunta dalle fibre, dato che esse tendono a disporsi nella direzione imposta dalla matrice. Inoltre, di solito la parte a contatto con il tool avrà una finitura superficiale migliore di quella a contatto con il sacco a vuoto. Per via della relativa semplicità e dei costi accessibili, questo processo viene generalmente impiegato in ambito nautico e automotive.

Il Liquid Composite Molding (LCM) è una famiglia di processi che prevede la deposizione di fibre su uno stampo e la loro successiva saturazione mediante resina liquida. La distribuzione della resina avviene sfruttando un differenziale di pressione determinato da vuoto, iniezione o combinazione di entrambi. Avremo tre principali categorie di processi LCM:

- Vacuum Infusion Process: le fibre secche vengono disposte nello stampo e viene applicato il vuoto per rimuovere l'aria dall'interno dello stampo e dalle fibre. Successivamente, viene introdotta la resina e il vuoto aiuta ad aspirarla.
- Resin Transfer Molding (RTM): le fibre vengono posizionate nello stampo e la resina viene iniettata a pressioni relativamente basse. Esiste anche una versione alternativa, per la quale la resina è iniettata a pressioni elevate, denominata HP-RTM.
- Light Resin Transfer Molding (LRTM): è una variante della tecnica RTM che prevede di utilizzare uno stampo rigido da un lato, flessibile dall'altro. Questa procedura sfrutta pressioni più contenute della HP-RTM, e permette di ottenere pezzi con buone proprietà meccaniche ma finiture geometriche di minor qualità, a costo inferiore rispetto alla RTM.

Il processo di cura, collocato a seguito della deposizione, può avvenire, anch'esso, in diversi modi, come trattato in [15]:

- Polimerizzazione fuori autoclave: il materiale viene inserito in uno stampo, chiuso in sacco a vuoto per rimuovere i residui di aria mediante pressione, e, successivamente, il processo di polimerizzazione viene avviato in un forno. È un metodo meno costoso del processo in autoclave, adatto a strutture molto grandi, che determina qualità leggermente inferiore.

- Riscaldamento ad induzione: una bobina, a contatto col composto, genera un campo magnetico che induce correnti nelle fibre, determinando la generazione di calore localizzato e la polimerizzazione. Il riscaldamento risulta rapido da ottenere e ben localizzato, con possibilità di integrare le bobine direttamente negli stampi.
- Polimerizzazione ad infrarossi: utilizza la radiazione IR per riscaldare la superficie del composito. Il calore generato attiva la polimerizzazione della resina. Il riscaldamento risulta rapido e diretto sulle superficie, il che rende il processo molto utile per realizzare componenti di forma complessa; al contempo, si trova difficoltà di penetrazione del calore in profondità.
- Stampaggio a compressione: è un processo a stampo chiuso in cui un materiale composito viene compresso e polimerizzato tra due metà di uno stampo riscaldato, applicando alta pressione. Risulta essere un processo facilmente ripetibile, vantaggioso per produzioni di massa, e permette di ottenere componenti ad elevata qualità. Il difetto è la necessità di avere stampi durevoli e costosi, con limitazioni sulle geometrie.
- Polimerizzazione in autoclave: per applicazioni industriali di alto livello si adottano generalmente tecnologie più raffinate, basate sul prepreg, ovvero fibre pre-impregnate. La difficoltà principale di questi metodi sta nel dover deporre il materiale a temperature molto basse, in quanto la resina del prepreg tende a polimerizzare a temperatura ambiente. La conservazione del prepreg è possibile a $T \approx -18^\circ C$. La deposizione avviene generalmente a mano, con l'aiuto di strumenti di realtà virtuale atti a guidare l'operatore per un corretto posizionamento. Dopo la chiusura del sacco a vuoto, il componente è inviato in autoclave per il processo di curing. L'autoclave è dotata di tante prese a vuoto per poter finalizzare il processo, ma, al tempo stesso, raggiunge pressioni elevate che consentono l'eliminazione delle porosità dal materiale; i costi di questo processo derivano soprattutto dalle alte temperature e pressioni richieste dall'autoclave. Si ottengono componenti con eccellenti qualità meccaniche, porosità minima, ottima finitura superficiale ed elevata affidabilità a lungo termine.

Tecnica	Pressione	Temperatura	Settore di impiego	Costo	Qualità
Autoclave	Alta	Alta	Aerospaziale	Alto	Alta
Fuori autoclave	Bassa	Media	Grandi strutture civili	Medio	Medio-alta
RTM	Media	Media	Automotive	Medio	Medio-alta
Compressione	Alta	Alta	Automotive	Basso	Medio-bassa
Induzione	Variabile		Prototipi	Medio-basso	Media
UV/IR	Nessuna		Medico/ottico	Basso	Bassa

Tabella 1.1: Processi produttivi per componenti in composito - confronto. Fonte: [15]

1.2.3 Ciclo di cura in autoclave

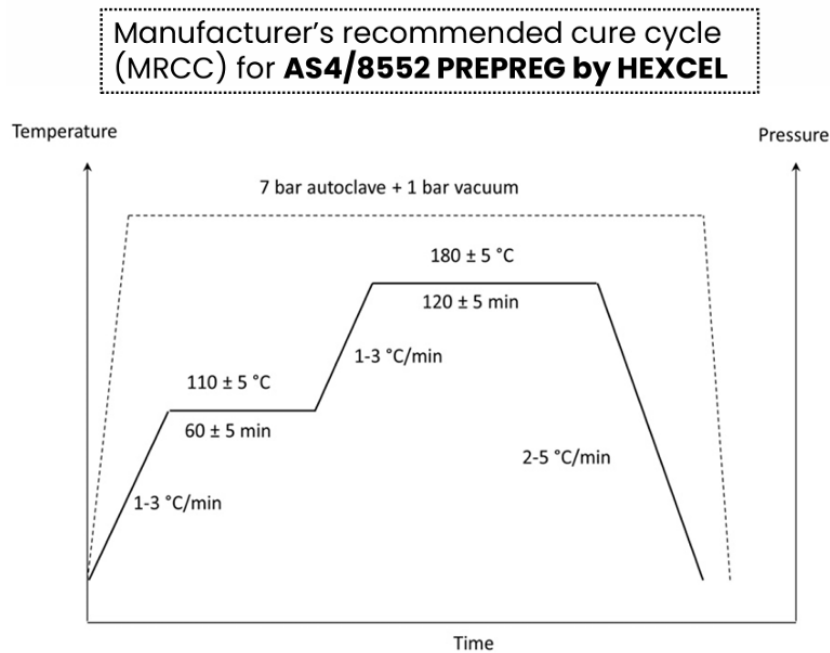


Figura 1.2: Ciclo di cura consigliato per Hexcel AS4/8552

Durante la polimerizzazione dei compositi polimerici termoindurenti rinforzati con fibre, la matrice subisce importanti cambiamenti chimici, fisici e meccanici, mentre le fibre subiscono solo una leggera espansione e contrazione termica. Il generico ciclo di cura adottato per il materiale Hexcel AS4/8552 è riportato, sia in termini di temperatura sia in termini di pressione, in figura (1.2).

La lavorazione di compositi termoindurenti in autoclave ha due obiettivi principali:

- Rimuovere vuoti e volatili e consolidare il laminato utilizzando vuoto e pressione.
- Trasformare i monomeri a basso peso molecolare di resine e indurenti in una macromolecola altamente reticolata attraverso un processo di polimerizzazione.

Il generico ciclo di cura può esser suddiviso in più fasi:

1. **Stadio liquido-viscoso.** A temperatura ambiente, la resina è altamente viscosa. All'aumentare della temperatura, la viscosità diminuisce drasticamente. La dipendenza della viscosità dalla temperatura può essere descritta con un'equazione di tipo Arrhenius $\mu = Ae^{\frac{\Delta E}{RT}f(x)}$. La viscosità aumenta rapidamente con l'aumentare del DoC fino a quando la resina si trasforma da liquido a solido. Sotto l'effetto di calore e pressione applicati dall'autoclave, il prepreg viene compattato e consolidato. Il laminato si compatta e i volatili e le bolle intrappolate nel pezzo migrano/collassano.
2. **Stadio gel-gommoso.** Per le resine epossidiche tipiche, la gelificazione si verifica a un DoC di 0.5-0.6 (al gelation point). Alla gelificazione, la viscosità aumenta da un valore finito all'infinito. La resina inizia ora a sviluppare modulo elastico e a mostrare proprietà viscoelastiche. In questa fase, la resina inizia anche a interagire con le fibre e a formare legami. Gli effetti combinati dello sviluppo del modulo elastico nella resina e della

differenza di deformazioni libere tra fibra e resina comportano la formazione di tensioni residue nel materiale. Tali tensioni residue, tra i protagonisti delle analisi oggetto del presente lavoro, determinano, tra le varie, anche la generazione di difetti come lo spring-in.

3. **Stadio solido-vetroso.** Con l'avanzare della polimerizzazione, avanza anche la temperatura di transizione vetrosa. Oltre questa transizione allo stato vetroso, la velocità di polimerizzazione diminuisce significativamente e, di conseguenza, lo sviluppo del modulo elastico rallenta.

1.2.4 Difetti indotti dal processo di cura

Sono anomalie fisiche o chimiche nella struttura del composito che ne compromettono le prestazioni meccaniche, termiche o dimensionali. In generale, possono riguardare matrice, fibra oppure la loro interfaccia, ed hanno effetti sulla geometria complessiva del componente finito. A differenza dei metalli, dove piccole imperfezioni possono esser tollerate, nel caso dei compositi anche piccole anomalie possono portare a cedimenti improvvisi.

I difetti nei materiali compositi possono aver varia natura e causa; si può parlare di difetti pre-cura (disallineamenti, increspatura delle fibre, porosità iniziale, disposizione non corretta delle fibre) oppure di PID (difetti/deformazioni indotti dal processo).

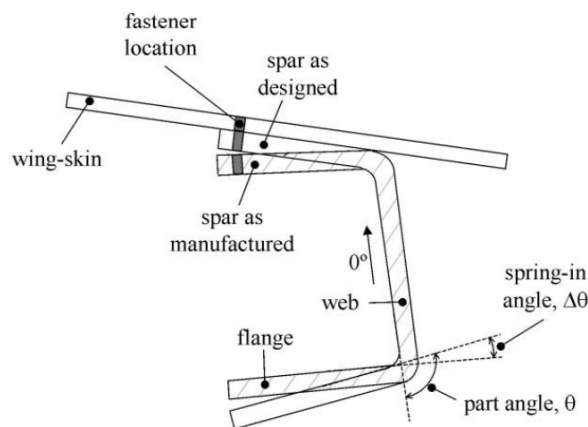


Figura 1.3: Schema di assemblaggio tra longherone e rivestimento alare, con evidenza del fenomeno di spring-in. Fonte: [6]

Il presente lavoro di tesi si concentra, come anticipato, sulla previsione di tensioni residue e di PID mediante metodi ML che impiegano GPR. Tra i citati PID, verrà data particolare importanza al fenomeno dello spring-in angle. In linea generale, nelle strutture in composito processate in autoclave con geometrie ad angolo (ad esempio profili a L o a C), lo spring-in, come sostenuto da Albert *et al.* in [6], consiste in una riduzione dell'angolo nominale incluso tra due pareti del componente, effetto che si manifesta in modo pressoché sistematico. Tale fenomeno è legato allo sviluppo di tensioni residue durante la fase di cura, dovute non solo al differenziale di dilatazione termica tra fibre e matrice, ma anche all'evoluzione delle proprietà meccaniche della resina durante la polimerizzazione. La complessità del fenomeno risiede nel fatto che le fibre mantengono pressoché invariate le loro caratteristiche, mentre la matrice cambia drasticamente le proprie proprietà lungo il ciclo di cura; di conseguenza, l'entità finale dello spring-in dipende strettamente dalla storia di processo e può risultare variabile tra una produzione e l'altra. Lo spring-in rappresenta una criticità soprattutto in fase di assemblaggio, come si nota nell'esempio di figura (1.3), poiché riduce l'accuratezza dell'accoppiamento con le strutture adiacenti; per

questo, nella progettazione degli stampi si adottano spesso fattori di compensazione di natura empirica.

Accanto allo spring-in, un altro fenomeno di rilievo è la warpage, ovvero la curvatura indesiderata di sezioni inizialmente piane. A differenza dello spring-in, che tende a manifestarsi sempre nei componenti con angoli, la warpage può presentarsi o meno a seconda del design del componente e delle condizioni di processo.

Capitolo 2

Modelli per analisi FEM-CUF

2.1 Modelli per analisi strutturali

Si prenda in considerazione un sistema di riferimento cartesiano ortogonale. I vettori di spostamenti, deformazioni e tensioni sono, rispettivamente, definiti come segue:

$$\mathbf{u} = [u_x \ u_y \ u_z]^T \quad (2.1)$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = [\epsilon_{xx} \ \epsilon_{yy} \ \epsilon_{zz} \ \epsilon_{xz} \ \epsilon_{yz} \ \epsilon_{xy}]^T \quad (2.2)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{zz} \ \sigma_{xz} \ \sigma_{yz} \ \sigma_{xy}]^T \quad (2.3)$$

La soluzione del problema strutturale, a livello teorico, passa dalla formulazione di modelli di riferimento, validi per il caso 1D o 2D. Per il caso 1D verrà introdotta la Teoria della Trave di Eulero-Bernoulli (TTEB), mentre per il 2D (caso piastra) si farà riferimento alla Teoria Classica della Laminazione (CLT), entrambe ampiamente discusse da Carrera *et al.* in [7].

2.1.1 Teoria della trave di Eulero-Bernoulli

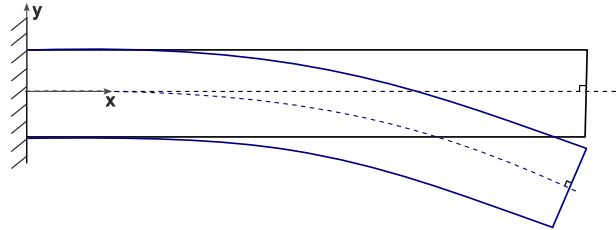


Figura 2.1: Modelli strutturali - TTEB

La TTEB è formulata a partire dalle tre ipotesi assiomatiche riportate in seguito:

1. La sezione trasversale della trave è rigida sul suo piano.
2. La sezione trasversale rimane piana a seguito della deformazione.
3. La sezione trasversale, inizialmente perpendicolare all'asse della trave, rimane tale a deformazione avvenuta.

Queste ipotesi hanno un impatto diretto sui campi di spostamento e deformazione risultanti dalla teoria.

La prima ipotesi implica che le deformazioni nel piano della sezione siano trascurabili. Di conseguenza, gli spostamenti u e w , e le relative deformazioni, dipendono unicamente dalla coordinata assiale y :

$$\begin{cases} \epsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = u_{x,x} = 0 \\ \epsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = w_{z,z} = 0 \\ \gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = u_{x,z} + u_{z,x} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} u_x(x, y, z) = u_x(y) \\ u_z(x, y, z) = u_z(y) \end{cases}$$

La seconda ipotesi comporta che lo spostamento assiale v sia lineare rispetto alle coordinate x e z .

$$u_y(x, y, z) = u_y(y) + \phi_z(y)x + \phi_x(y)z$$

ϕ_z e ϕ_x sono gli angoli di rotazione rispetto agli assi z e x .

Infine, di conseguenza alla terza ipotesi assiomatica, vengono trascurate le deformazioni di taglio $\gamma_{yz} = \gamma_{xy} = 0$. Pertanto, sulla base della loro definizione, si ottiene:

$$\begin{aligned} \phi_z &= -u_{x1,y} \\ \phi_x &= -u_{z1,y} \end{aligned}$$

Il campo di spostamenti della TTEB si presenta come segue:

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z) &= u_{x1} \\ u_y(x, y, z) &= u_{y1} - u_{x1,y}x - u_{z1,y}z \\ u_z(x, y, z) &= u_{z1} \end{aligned}$$

2.1.2 Teoria Classica della Laminazione (CLT)

La CLT si presenta come l'estensione della TTEB al caso bidimensionale delle piastre. Anche in questo caso troviamo tre ipotesi fondamentali alla base della teoria:

1. I segmenti di spessore, inizialmente rettilinei, rimangono tali a deformazione avvenuta.
2. I segmenti di spessore mantengono inalterata la loro lunghezza.
3. I segmenti di spessore, inizialmente perpendicolari alla superficie media, rimangono tali a deformazione avvenuta.

In accordo con la prima ipotesi, gli spostamenti u e v nel piano sono lineari nella coordinata z :

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z) &= u_{x0}(x, y) + \phi_x(x, y)z \\ u_y(x, y, z) &= u_{y0}(x, y) + \phi_y(x, y)z \end{aligned}$$

Dove ϕ_x e ϕ_y sono le rotazioni dei segmenti di spessore rispetto agli assi y ed x , rispettivamente. Sulla base della seconda ipotesi, lo spostamento trasversale w è indipendente dalla coordinata di spessore z e, pertanto, risulta trascurabile la deformazione $\epsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$.

Infine, stando alla terza ipotesi sono nulle le deformazioni a taglio γ_{xz} e γ_{yz} . In definitiva, il campo di spostamenti della CLT si presenta come segue:

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z) &= u_{x0}(x, y) - \frac{\partial u_{z0}}{\partial x}z \\ u_y(x, y, z) &= u_{y0}(x, y) - \frac{\partial u_{z0}}{\partial y}z \\ u_z(x, y, z) &= u_{z0}(x, y) \end{aligned}$$

2.1.3 Principio degli spostamenti virtuali (PVD)

L'analisi delle strutture in ambito aeronautico richiede l'impiego di diverse teorie e metodologie, a seconda delle caratteristiche del problema. In questa sezione il problema viene trattato, nei casi statico e dinamico, attraverso l'approccio del Principio degli spostamenti virtuali (PVD). L'analisi della risposta statica di una struttura tiene in considerazione gli effetti dei carichi esterni e delle forze elastiche. In termini di equilibrio:

$$\delta L_{int} = \delta L_{ext} \quad (2.4)$$

La variazione virtuale di lavoro interno può esser definita a partire dal campo di tensioni e deformazioni di un corpo generico di volume V :

$$\delta L_{int} = \int_V \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV \quad (2.5)$$

Introducendo un'approssimazione agli elementi finiti, si può riscrivere la (2.5) come segue:

$$\delta L_{int} = \delta \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} \quad (2.6)$$

In cui si riconoscono la matrice di rigidezza K e il vettore degli spostamenti nodali U .

La variazione virtuale del lavoro dei carichi esterni, adottando la stessa approssimazione, diventa:

$$\delta L_{ext} = \delta \mathbf{U}^T \mathbf{P} \quad (2.7)$$

Dove P è il vettore dei carichi nodali equivalenti. Riprendendo, a questo punto, l'equazione (2.4), e sostituendo le relazioni (2.6)(2.7), si ottiene:

$$\mathbf{P} = \mathbf{K} \mathbf{U} \quad (2.8)$$

Da cui è immediato ricavare il vettore degli spostamenti, incognita del problema.

Volendo affrontare il problema strutturale nella prospettiva dell'analisi dinamica, si entra nell'ambito dello studio delle vibrazioni libere. Tale formulazione, che considera i contributi delle forze inerziali e delle forze elastiche, consente di determinare le frequenze e i modi propri di vibrazione della struttura. Il PVD può esser quindi riscritto, in caso dinamico ed in assenza di carichi esterni, come segue:

$$\delta L_{int} = -\delta L_{ine} \quad (2.9)$$

Dove il lavoro virtuale delle forze inerziali è definito a partire dal prodotto tra massa, accelerazione e spostamento. Ricordando che $\ddot{\mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t^2}$, si avrà:

$$\delta L_{ine} = \int_V \delta \mathbf{u}^T \rho \ddot{\mathbf{u}} dV \quad (2.10)$$

Introducendo, come nel caso statico, un'approssimazione agli elementi finiti, si ottiene:

$$\delta L_{ine} = \delta \mathbf{U}^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} \quad (2.11)$$

Sostituendo nella relazione (2.9) si ricava:

$$\delta \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} = -\delta \mathbf{U}^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} \quad (2.12)$$

Da cui si ottiene il sistema:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K} \mathbf{U} = 0 \quad (2.13)$$

Dove M è la matrice di massa del corpo.

Come riportato da Carrera *et al.* in [1], la soluzione dell'equazione (2.13) fornisce il vettore U che soddisfa le condizioni di equilibrio dinamiche. La soluzione U dell'equazione omogenea, considerata come funzione armonica del tempo, si può ottenere nella forma di un problema agli autovalori ed autovettori; derivando si ottiene:

$$U = \bar{U}e^{i\omega t} \quad (2.14)$$

$$\dot{U} = i\omega\bar{U}e^{i\omega t} \quad (2.15)$$

$$\ddot{U} = -\omega^2\bar{U}e^{i\omega t} \quad (2.16)$$

Sostituendo le derivate appena ottenute all'interno della (2.13) si ricava:

$$-M\omega^2\bar{U}e^{i\omega t} + K\bar{U}e^{i\omega t} = 0 \quad (2.17)$$

$$\bar{U}e^{i\omega t}(-M\omega^2 + K) = 0 \quad (2.18)$$

$$-M\omega^2 + K = 0 \quad (2.19)$$

Il problema agli autovalori può esser risolto come segue:

$$\omega^2 I - M^{-1}K = 0 \quad (2.20)$$

Dove I è la matrice identità, ω il vettore delle pulsazioni naturali. A questo punto risulta banale ottenere le frequenze proprie della struttura:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad (2.21)$$

Ognuna delle frequenze proprie fornisce un autovettore U che soddisfa l'equazione:

$$K^{-1}MU = \frac{1}{\omega^2}U \quad (2.22)$$

Gli autovettori così ottenuti vengono definiti forme modali (FM), ed ognuno di essi rappresenta un modo di vibrare della struttura.

Infine, volendo tener in conto anche dei carichi esterni, si ricade nella casistica di vibrazioni forzate:

$$\delta U^T M \ddot{U} + \delta U^T K U = \delta U^T P \quad (2.23)$$

$$M \ddot{U} + K U = P \quad (2.24)$$

2.1.4 Carrera Unified Formulation (CUF)

Le principali analisi strutturali agli elementi finiti riportate nel presente elaborato prevedono un approccio che si basa sulla Carrera Unified Formulation, trattata da Carrera *et al.* in [1] ed in [7]. Lo scopo della CUF è un miglioramento dei modelli trave e piastra in termini di accuratezza, con il vantaggio di adottare un numero inferiore di gradi di libertà rispetto ai modelli agli elementi finiti 3D. Inoltre, matrici e vettori alla base del problema sono assemblati a partire da nuclei fondamentali (FN), la cui forma non varia con le dimensioni del problema. Per introdurre il funzionamento della CUF si farà riferimento al caso di una trave incastrata, come in figura (2.2), avente l'asse coincidente con l'asse y del sistema di riferimento. Si consideri lo spostamento assiale $u_y = u_y(x, y, z)$, variabile nelle tre direzioni, in modo da ottenere una trattazione più rigorosa dell'argomento.

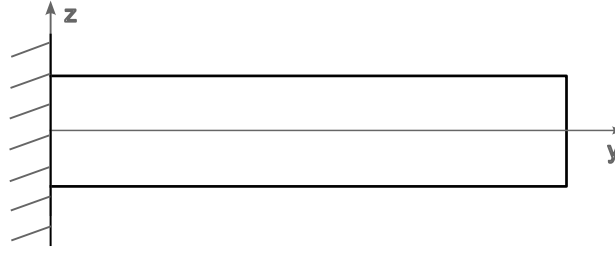


Figura 2.2: Modelli strutturali - applicazione della CUF al caso trave

Il campo di spostamenti può esser definito come prodotto di due funzioni:

$$\mathbf{u} = f(x, z) \cdot g(y) \quad (2.25)$$

Dove $f(x, z)$ descrive gli spostamenti nella generica sezione della trave, mentre $g(y)$ gli spostamenti lungo l'asse y .

Gli spostamenti lungo l'asse y possono esser scritti mediante l'uso delle funzioni di forma, tipiche di una formulazione FEM, dell'elemento trave $N_i(y)$; per gli spostamenti sulla sezione si possono utilizzare espansioni basate sui coefficienti $u_i(x, z)$. Questi ultimi sono ottenuti come sommatoria di funzioni che moltiplicano gli spostamenti modali, come si vede in seguito:

$$\mathbf{u}_i(x, z) = F_\tau(x, z)\mathbf{u}_{\tau_i} = F_1(x, z)\mathbf{u}_{\tau_1} + F_2(x, z)\mathbf{u}_{\tau_2} + \dots + F_n(x, z)\mathbf{u}_{\tau_n} \quad (2.26)$$

Di conseguenza, il campo di spostamenti può esser espresso seguendo la notazione presente nella relazione (2.27):

$$\mathbf{u}(x, y, z) = N_i(y)F_\tau(x, z)\mathbf{u}_{\tau_i} \quad (2.27)$$

In modo analogo è possibile introdurre lo spostamento virtuale, utilizzando gli indici s e j rispettivamente in sostituzione di τ ed i .

$$\delta\mathbf{u} = N_j(y)F_s(x, z)\delta\mathbf{u}_{s_j} \quad (2.28)$$

Al fine di ricavare l'espressione del lavoro virtuale interno vista nel paragrafo dedicato al PVD, è utile introdurre i vettori tensione e deformazione:

$$\boldsymbol{\sigma}(x, y, z) = \mathbf{Cb}N_i(y)F_\tau(x, z)\mathbf{u}_{\tau_i} \quad (2.29)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}(x, y, z) = \mathbf{b}N_i(y)F_\tau(x, z)\mathbf{u}_{\tau_i} \quad (2.30)$$

Dove $\mathbf{b}$ è la matrice degli operatori differenziali, utile a ottenere le deformazioni a partire dagli spostamenti. Essa si presenta come nella (2.31). $\mathbf{C}$ è, invece, la matrice 6×6 contenente le caratteristiche di rigidità del materiale, utile alla scrittura della Legge di Hooke che lega tensioni e deformazioni.

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

È possibile, inoltre, ricavare l'espressione che definisce le deformazioni virtuali:

$$\delta \epsilon(x, y, z) = \mathbf{b} N_j(y) F_s(x, z) \delta \mathbf{u}_{s_j} \quad (2.32)$$

A partire dalla definizione di lavoro virtuale interno data nella (2.5), sostituendo al suo interno le relazioni per le tensioni (2.30) e per la variazione virtuale di deformazioni (2.32), si ottiene:

$$\delta L_{int} = \delta \mathbf{u}_{s_j}^T \int_V [N_j(y) F_s(x, z) \mathbf{b}^T \mathbf{C} \mathbf{b} N_i(y) F_\tau(x, z)] dV \mathbf{u}_{\tau_i} \quad (2.33)$$

Dove l'integrale di volume:

$$\mathbf{k}^{\tau s i j} = \int_V [N_j(y) F_s(x, z) \mathbf{b}^T \mathbf{C} \mathbf{b} N_i(y) F_\tau(x, z)] dV \quad (2.34)$$

È la matrice 3×3 definita nucleo fondamentale, citata in precedenza. Di conseguenza il lavoro virtuale interno può esser scritto come segue:

$$\delta L_{int} = \delta \mathbf{u}_{s_j}^T \mathbf{k}^{\tau s i j} \mathbf{u}_{\tau_i} \quad (2.35)$$

Assemblaggio delle matrici

Nell'ambito della CUF, l'assemblaggio delle matrici si basa su loop impostati sui quattro indici τ, s, i, j dei nuclei fondamentali citati in precedenza. Ogni combinazione di tali indici darà luogo ad un nucleo fondamentale specifico. Uno schema che spiega come viene strutturato il procedimento è riportato in figura (2.3).

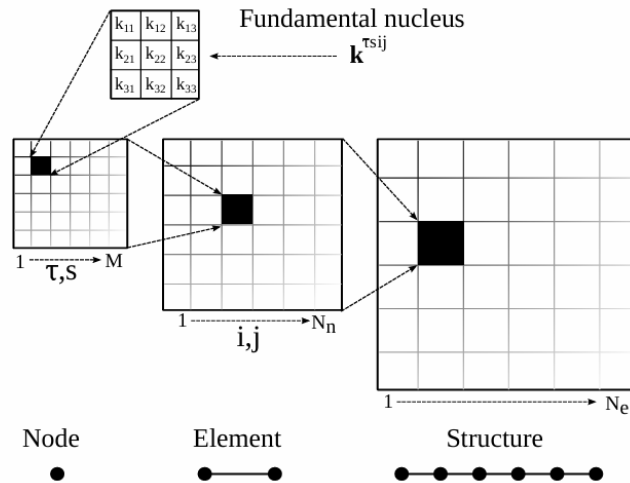


Figura 2.3: Modelli strutturali - assemblaggio delle matrici nella CUF - Fonte: [1]

Essendo ogni FN una matrice 3×3 , esso andrà ad assemblarsi con la matrice del nodo, costruita facendo variare gli indici delle funzioni di espansione sulla sezione trasversale della trave, ovvero τ ed s . La matrice degli elementi viene costruita tramite la variazione degli indici i e j , i quali rappresentano ogni nodo dell'elemento.

Adattamento della CUF ai modelli 2D e 3D

Il campo di spostamenti definito nell'ambito della CUF per il caso 1D è riportato nella (2.36):

$$\mathbf{u}(x, y, z) = N_i(y)F_\tau(x, z)\mathbf{u}_{\tau_i} \quad (2.36)$$

È possibile estendere la trattazione della CUF a modelli strutturali diversi; l'estensione comporterà variazioni nelle funzioni di forma e, in di conseguenza, nelle funzioni F_τ , a seconda del modello adottato. In particolare si avrà:

- Modelli 1D - $N_i(y)$; $F_\tau = F_\tau(x, z)$
- Modelli 2D - $N_i(x, y)$; $F_\tau = F_\tau(z)$
- Modelli 3D - $N_i(x, y, z)$; $F_\tau = 1$

Espansioni di Lagrange e di Taylor

Per trattare l'argomento si fa riferimento al testo [1] di Carrera *et al.* ed al paper di Petrolo *et al.* [10].

All'interno della CUF è possibile implementare diverse tipologie di espansione in serie per definire le funzioni F_τ . Nell'ambito di questa tesi è stata utilizzata prevalentemente l'espansione in serie di Lagrange, la quale ha il vantaggio di permettere l'adozione di un modello di analisi Layer Wise. Per un modello con espansione di Lagrange (LE), le funzioni di espansione in serie sono proprio i polinomi di Lagrange. Tali polinomi sono definiti mediante l'uso di coordinate normalizzate, le quali presentano, rispetto a quelle fisiche, il vantaggio di agevolare l'utilizzo e la successiva integrazione dei polinomi LE, perché la sezione dell'elemento risulta racchiusa tra le coordinate -1 ed 1.

Per una sezione a quattro nodi (LE4), i polinomi di Lagrange assumono la forma:

$$F_\tau = \frac{1}{4}(1 + \alpha\alpha_\tau)(1 + \beta\beta_\tau) \quad \tau = 1, 2, 3, 4 \quad (2.37)$$

Dove α e β sono le coordinate normalizzate, mentre α_τ e β_τ sono le coordinate dei nodi.

Un ulteriore esempio di modello con espansione di Lagrange, largamente utilizzato in questa tesi (si faccia riferimento al capitolo di Analisi preliminari per averne gli esempi applicativi), è il modello a nove nodi LE9:

$$F_\tau = \frac{1}{4}(\alpha^2 + \alpha\alpha_\tau)(\beta^2 + \beta\beta_\tau) \quad \tau = 1, 3, 5, 7 \quad (2.38)$$

$$F_\tau = \frac{1}{2}\beta_\tau^2(\beta^2 + \beta\beta_\tau)(1 - \alpha^2) + \frac{1}{2}\alpha_\tau^2(\alpha^2 + \alpha\alpha_\tau)(1 - \beta^2) \quad \tau = 2, 4, 6, 8 \quad (2.39)$$

$$F_\tau = (1 - \alpha^2)(1 - \beta^2) \quad \tau = 9 \quad (2.40)$$

Il campo di spostamenti che deriva da questo modello si presenta come segue:

$$\begin{cases} u_x = F_1u_{x1} + F_2u_{x2} + \dots + F_9u_{x9} \\ u_y = F_1u_{y1} + F_2u_{y2} + \dots + F_9u_{y9} \\ u_z = F_1u_{z1} + F_2u_{z2} + \dots + F_9u_{z9} \end{cases} \quad (2.41)$$

Le incognite del campo di spostamenti (2.41) sono le componenti di spostamento di ogni nodo definito nel modello strutturale. È importante sottolineare che gradi di libertà del modello FEM, nel caso di espansione di Lagrange, sono gli spostamenti fisici dei nodi.

Un'alternativa all'espansione LE è quella che viene definita espansione di Taylor. L'utilizzo di modelli TE comporta la definizione di campi di spostamento dove compaiono potenze di x e z . A differenza del modello di espansione di Lagrange, dove la numerazione successiva alla sigla LE rappresenta il numero di nodi, nel modello di espansione di Taylor avremo la denominazione TE N, dove N è l'ordine massimo del polinomio adottato per descrivere il campo di spostamenti. All'interno dei modelli TE vengono inclusi come casi particolari i modelli di trave di Eulero Bernoulli e di Timoshenko, indicati rispettivamente con *TE-1* e *TE 0*. Una trattazione approfondita dei modelli TE esula dagli obiettivi di questo paragrafo; si rimanda pertanto alla consultazione dei testi bibliografici.

2.2 Modelli per analisi di curing

Come anticipato nell'introduzione alla tesi, i materiali compositi sono largamente impiegati in ambito aerospaziale per via delle loro eccellenti proprietà meccaniche specifiche e del vantaggio produttivo riscontrato nella realizzazione di pezzi monolitici.

Il ciclo di cura prevede l'esposizione del materiale ad escursioni marcate e ripetute di temperatura e pressione, che determinano la generazione di deformazioni interne al componente. Proprio queste deformazioni, unite all'evoluzione delle proprietà meccaniche che avviene durante il ciclo di cura, determinano l'insorgere di stress residui e conseguenti variazioni dimensionali nel pezzo. Tali variazioni si manifestano a diverse scale nel componente: a livello micro tra le fasi costituenti, a livello meso tra strati di materiale composito aventi diverso orientamento, a livello macro a causa vincoli geometrici imposti oppure per via dell'attrito tra materiale e tool.

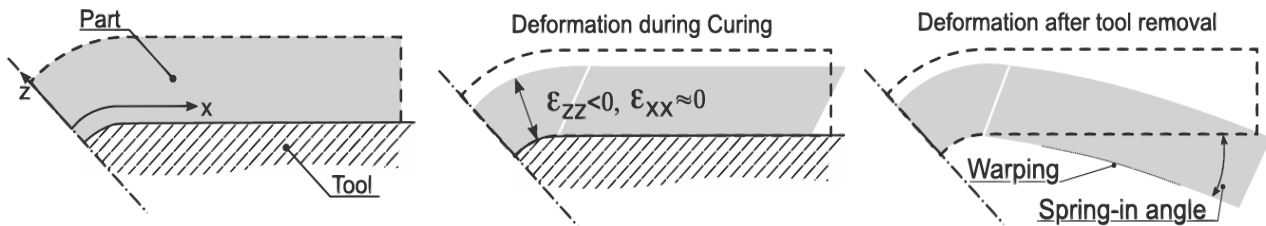


Figura 2.4: Analisi PID - definizioni di base. Fonte: [5]

Queste variazioni dimensionali indotte possono determinare l'ottenimento di proprietà meccaniche inferiori a quelle volute per il componente. L'obiettivo di ricerca del paper "Analysis of process-induced deformations and residual stresses in curved composite parts considering transverse shear stress and thickness stretching" [5], pubblicato nel 2020 da Zappino, Petrolo *et al.*, è lo studio del fenomeno sopra descritto all'interno di componenti in composito aventi forma ad L.

In particolare, l'articolo si concentra sulla determinazione, mediante analisi di curing agli elementi finiti implementanti la CUF, sulla determinazione di stress e deformazioni residui nello spessore del componente, e sul calcolo dell'angolo di spring-in ϕ generato dalle process-induced deformations. L'angolo di spring-in è definito come la deviazione della superficie media della flangia rispetto alla direzione di progetto. In figura (2.4) sono fornite definizioni di base a livello visivo.

In questo capitolo si vuole descrivere il modello matematico fondamentale per lo svolgimento delle analisi FEM-CUF di curing trattate nei capitoli successivi della tesi.

2.2.1 Modello cinematico e matematico di analisi

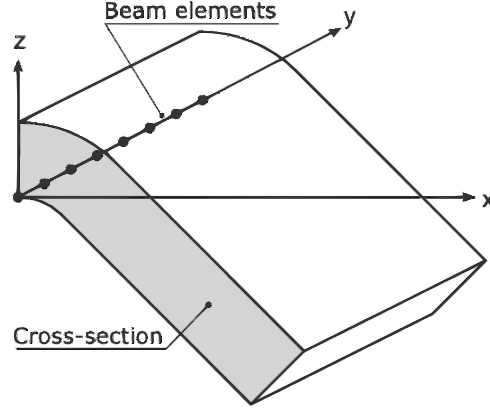


Figura 2.5: Analisi PID - sistema di riferimento. Fonte: [5]

Il sistema di riferimento adottato per l'analisi del processo di curing è riportato in figura (2.5). A partire da esso è stato sviluppato il modello cinematico di riferimento seguente:

$$\mathbf{u}^T = [u_x \ u_y \ u_z] \quad (2.42)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}^T = [\epsilon_{xx} \ \epsilon_{yy} \ \epsilon_{zz} \ \epsilon_{xz} \ \epsilon_{yz} \ \epsilon_{xy}] \quad (2.43)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^T = [\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{zz} \ \sigma_{xz} \ \sigma_{yz} \ \sigma_{xy}] \quad (2.44)$$

Come detto nei capitoli precedenti, le relazioni spostamenti-deformazioni e tensioni-deformazioni sono scritte mediante la matrice $[D]$ degli operatori differenziali e la matrice $[C]$ delle rigidità:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (2.45)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\epsilon} \quad (2.46)$$

Adottando la CUF si scrive il campo di spostamenti sulla sezione trasversale mediante espansioni date da funzioni di Lagrange bidimensionali:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_\tau(y)F_\tau(x, z) \quad \tau = 1, 2, \dots, M \quad (2.47)$$

Dove $u_\tau(y)$ è l'incognita di spostamento lungo l'asse y , $F_\tau(x, z)$ è la funzione di espansione sulla sezione trasversale, M il numero di termini dell'espansione.

Gli spostamenti assiali vengono approssimati, invece, mediante funzioni di forma monodimensionali N_i :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{i\tau}N_i(y)F_\tau(x, z) \quad \tau = 1, 2, \dots, M \quad i = 1, 2, \dots, N_n \quad (2.48)$$

Dove N_n è il numero di nodi per elemento e $u_{i\tau}$ sono le incognite nodali.

La derivazione delle equazioni di governo parte dal principio degli spostamenti virtuali, come nei capitoli precedenti:

$$\delta L_{int} = \delta L_{ext} \quad (2.49)$$

$$\delta L_{int} = \int_V \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV \quad (2.50)$$

$$\delta L_{int} = \delta \mathbf{u}_{sj}^T \int_V [N_j F_s \mathbf{D}^T \mathbf{C} \mathbf{D} F_\tau N_i] dV \mathbf{u}_{\tau i} = \delta \mathbf{u}_{sj}^T \mathbf{k}^{ij\tau s} \mathbf{u}_{\tau i} \quad (2.51)$$

Dove si ricorda che $k^{ij\tau s}$ è il nucleo fondamentale 3×3 della matrice di rigidezza scritto nella notazione della CUF.

La novità rispetto a quanto detto nel capitolo dedicato all'esposizione del PVD sta nella definizione dei carichi esterni, i quali, nel caso sotto esame nella presente esposizione, sono rappresentati da carichi generati dal campo termico e dallo shrinkage dovuto ai processi chimici in atto. Pertanto, la variazione virtuale di lavoro dei carichi esterni, ricordando che β è il vettore contenente i coefficienti di espansione termica, viene scritta come segue:

$$\delta L_{ext} = \int_V \delta \epsilon^T \mathbf{C} \beta \Delta T dV + \int_V \delta \epsilon^T \mathbf{C} \epsilon_s dV \quad (2.52)$$

$$\delta L_{ext} = \delta \mathbf{u}_{sj}^T \int_V N_j F_s \mathbf{D}^T \mathbf{C} (\beta \Delta T + \epsilon_s) dV = \delta \mathbf{u}_{sj}^T \mathbf{f}^{js} \quad (2.53)$$

Dove $\mathbf{f}^{js}$ è il nucleo fondamentale del vettore dei carichi nodali equivalenti.

2.2.2 Analisi di curing - modello CHILE

L'analisi di curing prevista nel codice del gruppo MUL2 si basa sull'adozione del modello costitutivo Cure Hardening Instantaneous Linear Elastic (CHILE), che prevede che la soluzione finale venga calcolata come somma dei contributi dati da un numero discreto N_α di step temporali. Tali step vengono scelti sulla base del ΔT ottenuto, ponendo una soglia di temperatura iniziale significativa. Il modulo a taglio viene definito ad ogni step, e i carichi esterni vengono determinati sulla base degli incrementi di deformazione dovuti a shrinkage e differenziale termico. Per i passaggi successivi si fa riferimento al paper [5] citato in precedenza.

Le proprietà del materiale e le variazioni di carico sono definite all'istante iniziale, e successivamente, si risolve un problema statico:

$$\mathbf{K}^i \Delta \mathbf{u}^i = \Delta \mathbf{F}^i \quad (2.54)$$

$$\Delta \epsilon^i = \mathbf{D} \Delta \mathbf{u}^i \quad (2.55)$$

$$\Delta \sigma^i = \mathbf{C}^i \Delta \epsilon^i \quad (2.56)$$

Le forze scambiate all'interfaccia tra tool e componente vengono calcolate mediante integrazione degli stress, oppure sfruttando le proprietà di partizione della matrice di rigidezza.

Le forze agenti sul materiale composito si calcolano come segue:

$$\Delta \bar{\mathbf{F}}_p^i = \mathbf{K}_p^i \Delta \mathbf{u}_p^i \quad (2.57)$$

Dove $\mathbf{K}_p^i$ è la porzione di matrice di rigidezza associata al materiale composito. Il vettore $\Delta \bar{\mathbf{F}}_p^i$ include i carichi esterni dovuti allo shrinkage ed i carichi termici, ma non include le forze scambiate all'interfaccia. Per ristabilire l'equilibrio, le forze all'interfaccia dovute alla rimozione del tool a fine processo si ottengono mediante la relazione:

$$\Delta \mathbf{F}_i^{tr} = \Delta \bar{\mathbf{F}}_p^i - \Delta \mathbf{F}_p^i \quad (2.58)$$

Il totale delle forze applicate dal tool sul componente in composito viene calcolato come segue:

$$\mathbf{F}_{tr} = \sum_{i=1}^{N_\alpha} \Delta \mathbf{F}_i^{tr} \quad (2.59)$$

L'incremento di spostamenti a seguito della rimozione del tool si calcola risolvendo il sistema lineare:

$$\mathbf{K}_p \Delta \mathbf{u}_{tr} = \mathbf{F}_{tr} \quad (2.60)$$

Infine gli spostamenti, stress e deformazioni residui totali dovuti al processo di curing e alla rimozione del tool sono ricavati come segue:

$$\mathbf{u}^f = \sum_{i=1}^{N_\alpha} \Delta \mathbf{u}_p^i + \Delta \mathbf{u}_{tr} \quad (2.61)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}^f = \sum_{i=1}^{N_\alpha} \Delta \boldsymbol{\epsilon}_p^i + \Delta \boldsymbol{\epsilon}_{tr} \quad (2.62)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^f = \sum_{i=1}^{N_\alpha} \Delta \boldsymbol{\sigma}_p^i + \Delta \boldsymbol{\sigma}_{tr} \quad (2.63)$$

Capitolo 3

Modelli di Machine Learning

Il Machine Learning (ML) è un ramo dell'intelligenza artificiale che si occupa di sviluppare algoritmi capaci di apprendere dai dati e di effettuare previsioni o decisioni senza essere esplicitamente programmati. I modelli di ML possono essere classificati in diverse categorie a seconda del tipo di problema affrontato: supervisionato, non supervisionato o per rinforzo.

In questo capitolo vengono analizzati i modelli supervisionati, i quali apprendono una funzione di mapping tra input e output a partire da un insieme di dati etichettati. Particolare attenzione è rivolta ai Gaussian Processes (GPs), che forniscono una stima probabilistica delle predizioni, e alle Reti Neurali (NN), capaci di catturare relazioni complesse e non lineari nei dati.

Come primo passo verranno fornite le definizioni matematiche avanzate utili alla comprensione dell'argomento (per i concetti di base, si faccia riferimento all'Appendice A). La panoramica teorica proposta fornisce le basi per comprendere i principi fondamentali dei modelli trattati, che verranno successivamente applicati nel resto dell'elaborato.

3.1 Gaussian Processes (GPs)

I Gaussian Processes sono uno strumento molto importante presente nel mondo del ML, aventi la funzione di sviluppare predizioni sulla base di dati e di conoscenza a priori. Per un dato insieme di punti di training, esiste potenzialmente un numero infinito di funzioni in grado di adattarsi ai dati. I processi gaussiani forniscono una soluzione elegante a questo problema, attribuendo a ciascuna di queste funzioni una probabilità [20]. La media di tale distribuzione di probabilità rappresenta quindi la caratterizzazione più probabile dei dati. Inoltre, l'approccio probabilistico consente di integrare, all'interno del risultato della regressione, anche il grado di confidenza associato alla previsione [29].

La matematica alla base dei Processi Gaussiani (GPs) risale agli anni '50, derivando da studi in ambito statistico. Pur concentrandosi sui GPs, risulta utile notare che essi condividono con altri approcci basati su kernel, come le kernel machine (KM) sviluppate negli anni '90, l'elemento chiave delle funzioni kernel, che verrà introdotto in seguito. Per quanto i mondi di GPs e KM siano nati su filoni di ricerca distinti, come sostenuto da Rasmussen *et al.* in [20], "I processi gaussiani forniscono alle kernel machine un approccio probabilistico e pratico di apprendimento".

I GPs sono definiti come metodi di apprendimento automatico (ML) di tipo non parametrico e supervisionato, impiegati per risolvere problemi di regressione e classificazione statistica. I vantaggi riscontrabili nell'adozione di GPs sono numerosi, tra cui:

- La predizione interpola, almeno nei casi con kernel regolare, i dati di input.

- La predizione, così come suggerito dall'aggettivo, è gaussiana, pertanto probabilistica. In questo modo, l'utente ha la possibilità di calcolare degli intervalli di confidenza statistica-sperimentale e stabilire se sia il caso di effettuare un nuovo fitting in determinate regioni.
- I metodi sono versatili, grazie alla possibilità di specificare diversi tipi di kernel, anche personalizzati.

Tra gli svantaggi elencabili, troviamo il fatto che l'implementazione sia non-sparsa (i GPs devono usare tutto il dataset a disposizione per generare la predizione) e la perdita di efficienza nel caso di spazi di grandi dimensioni (anche solo poche dozzine di feature sono sufficienti a definire lo spazio come high-dimensional).

All'interno dei processi gaussiani possiamo trovare due categorie principali: Gaussian Process Classification (GPC) e Gaussian Process Regression (GPR). Sebbene la trattazione si concentri, nell'ambito di questa tesi, sul GPR, è doveroso introdurre anche il GPC.

La definizione generale di un Gaussian Process può, infine, essere espressa come:

$$f(x) \sim \mathcal{GP}(\mu(x), k(x, x')) \quad (3.1)$$

Dove $f(x)$ è la funzione aleatoria da modellare, $\mu(x) = \mathbb{E}[f(x)]$ è la funzione media, $k(x, x') = \text{Cov}(f(x), f(x'))$ è la funzione di covarianza o kernel, che definisce la dipendenza tra i valori della funzione in punti differenti x e x' .

Per ogni insieme finito di punti di input $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, il vettore dei valori della funzione corrispondente $[f(x_1), \dots, f(x_n)]^\top$ segue una distribuzione normale multivariata.

3.1.1 Matematica per GPs

Il presente paragrafo, che segue i lavori [20] di Rasmussen *et al.*, [29] di Görtler *et al.* e [30] di Anderson, è utile al fine di introdurre i concetti di matematica alla base dei processi gaussiani. Ulteriori approfondimenti sulle definizioni di base sono reperibili in Appendice A.

Come suggerisce il nome, il mattone di base per la costruzione di un GP è la distribuzione normale (Gaussiana), la cui funzione densità di probabilità è la (A.6). In particolare, nel mondo dei Gaussian Processes è interessante concentrarsi sul caso della distribuzione normale multivariata, dove ogni variabile aleatoria è distribuita in modo gaussiano, e l'insieme di tutte le variabili aleatorie risulta anch'esso seguire una gaussiana.

Detta $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ una variabile aleatoria, si dice, come in [30] di Anderson, che essa sia distribuita secondo una normale multivariata con vettore media $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$ e matrice di covarianza $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, scritta come in (3.2):

$$\mathbf{x} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) \quad (3.2)$$

Se la sua funzione densità di probabilità è data da (3.3):

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}} \exp \left(-\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right) \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (3.3)$$

Il vettore $\boldsymbol{\mu}$ descrive, in ogni sua componente, il valore atteso della distribuzione in una delle dimensioni, mentre la matrice di covarianza $\boldsymbol{\Sigma}$, definita in (3.4), serve a modellare la varianza in ogni dimensione e determinare il grado di correlazione tra le variabili in gioco.

$$\Sigma = Cov(X_i, X_j) = \mathbb{E}[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)^T] \quad (3.4)$$

Tale matrice è, inoltre, simmetrica e semi-definita positiva, e la sua diagonale contiene i valori σ_i^2 della varianza della i -esima variabile aleatoria. I valori esterni alla diagonale, σ_{ij} , descrivono la correlazione tra la variabile aleatoria i -esima e j -esima. Si può, quindi, dire, che la distribuzione risulti centrata attorno al valor medio e che la sua forma dipenda dalla matrice di covarianza. Le distribuzioni gaussiane possiedono la comoda proprietà algebrica di essere chiuse rispetto al condizionamento e alla marginalizzazione. Essere chiuse rispetto a queste operazioni significa che le distribuzioni risultanti da tali trasformazioni sono anch'esse gaussiane, il che rende molti problemi in statistica e machine learning trattabili. Nel seguito saranno approfondite queste operazioni, fondamentali per i GPs.

La marginalizzazione e il condizionamento agiscono su sottoinsiemi della distribuzione originale. Si usa la seguente notazione:

$$P_{X,Y} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Sigma_{XX} & \Sigma_{XY} \\ \Sigma_{YX} & \Sigma_{YY} \end{bmatrix}\right) \quad (3.5)$$

dove X e Y rappresentano sottoinsiemi delle variabili casuali originali.

Attraverso la marginalizzazione è possibile estrarre informazioni parziali da distribuzioni di probabilità multivariate. In particolare, data una distribuzione normale $P(X, Y)$ su vettori di variabili casuali $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$, si possono determinare le loro distribuzioni di probabilità marginali nel seguente modo:

$$X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \Sigma_{XX}) \quad (3.6)$$

$$Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \Sigma_{YY}) \quad (3.7)$$

L'interpretazione di queste equazioni è che ogni partizione $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ dipende solamente dalle corrispondenti componenti di $\boldsymbol{\mu}$ e $\boldsymbol{\Sigma}$. Per marginalizzare una variabile casuale da una distribuzione gaussiana, è sufficiente rimuovere le variabili corrispondenti da $\boldsymbol{\mu}$ e $\boldsymbol{\Sigma}$.

$$p_X(x) = \int_y p_{X,Y}(x, y) dy = \int_y p_{X|Y}(x|y) p_Y(y) dy \quad (3.8)$$

Questa equazione si interpreta nel modo seguente: se si è interessati alla densità di probabilità di $\mathbf{X} = \mathbf{x}$, è necessario considerare tutti i possibili valori di $\mathbf{Y}$ che possono congiuntamente portare al risultato.

Un'altra operazione importante per i processi gaussiani è il condizionamento, che permette di determinare la probabilità di una variabile dato il valore di un'altra variabile. Analogamente alla marginalizzazione, questa operazione è chiusa e produce una distribuzione gaussiana modificata. Questa operazione rappresenta la pietra miliare dei processi gaussiani, in quanto consente l'inferenza bayesiana. Il condizionamento è definito da:

$$X|Y \sim \mathcal{N}\left(\mu_X + \Sigma_{XY}\Sigma_{YY}^{-1}(Y - \mu_Y), \Sigma_{XX} - \Sigma_{XY}\Sigma_{YY}^{-1}\Sigma_{YX}\right) \quad (3.9)$$

$$Y|X \sim \mathcal{N}\left(\mu_Y + \Sigma_{YX}\Sigma_{XX}^{-1}(X - \mu_X), \Sigma_{YY} - \Sigma_{YX}\Sigma_{XX}^{-1}\Sigma_{XY}\right) \quad (3.10)$$

Si osservi che la nuova media dipende solamente dalla variabile condizionata, mentre la matrice di covarianza è indipendente da tale variabile.

Per comprendere visivamente queste operazioni, visibili in figura (3.1), si consideri il caso bidimensionale. La marginalizzazione può essere vista come un'integrazione lungo una delle dimensioni della distribuzione gaussiana, in accordo con la definizione generale di distribuzione marginale. Il condizionamento, invece, può essere interpretato geometricamente come un taglio attraverso la distribuzione multivariata, producendo una nuova distribuzione gaussiana con dimensioni ridotte.

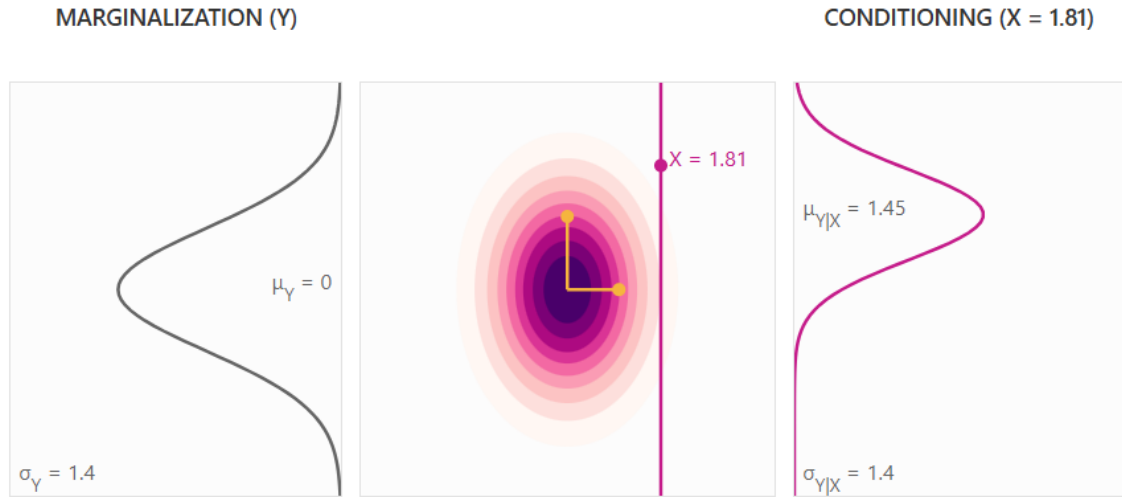


Figura 3.1: Esempi di operazioni di marginalizzazione e condizionamento. Fonte: [29]

Dopo aver richiamato alcune delle proprietà fondamentali delle distribuzioni gaussiane multivariate, esse vengono combinate per definire i processi gaussiani e per mostrare come possano essere utilizzati per affrontare problemi di regressione.

Si passa innanzitutto dalla rappresentazione continua a quella discreta di una funzione: piuttosto che trovare una funzione implicita, si è interessati a prevedere i valori della funzione in punti concreti, detti punti di test X . Per derivare questa rappresentazione funzionale dalle distribuzioni normali multivariate considerate finora, si consideri che i processi stocastici, come i processi gaussiani, sono essenzialmente un insieme di variabili casuali. Inoltre, ciascuna di queste variabili casuali ha un indice i che identifica la i -esima dimensione delle distribuzioni multivariate n -dimensionali.

L'obiettivo dei processi gaussiani è apprendere la distribuzione sottostante dai dati di training. Rispetto ai dati di test X , si denotano i dati di training come Y . L'idea chiave dei processi gaussiani è modellare la distribuzione congiunta di X e Y come una distribuzione normale multivariata. Ciò significa che la distribuzione di probabilità congiunta $P_{X,Y}$ copre lo spazio dei possibili valori della funzione che si desidera prevedere. Si noti che questa distribuzione congiunta di dati di test e di training ha $|X| + |Y|$ dimensioni.

Per eseguire la regressione sui dati di training, il problema viene trattato come un'inferenza bayesiana. L'idea essenziale dell'inferenza bayesiana è aggiornare l'ipotesi corrente man mano che nuove informazioni diventano disponibili, partendo da una distribuzione a priori (detta prior), per ottenere quella definitiva (posterior). Nel caso dei processi gaussiani, queste informazioni da aggiungere progressivamente corrispondono ai dati di training. Pertanto, l'interesse si concentra sulla probabilità condizionata $P_{X|Y}$. Si ricorda, inoltre, che le distribuzioni gaussiane sono chiuse

rispetto al condizionamento, quindi $P_{X|Y}$ segue anch'essa una distribuzione normale.

Rimane da definire come impostare questa distribuzione e come definire il vettore medio μ e la matrice di covarianza Σ . La matrice di covarianza Σ è determinata dalla sua funzione di covarianza k , spesso chiamata anche kernel del processo gaussiano. I kernel verranno descritti nel paragrafo dedicato.

Nei processi gaussiani, ciascun punto di test è trattato come una variabile casuale. Una distribuzione gaussiana multivariata ha lo stesso numero di dimensioni del numero di variabili casuali. Poiché si desidera prevedere i valori della funzione in $|X| = N$ punti di test, la distribuzione gaussiana multivariata corrispondente ha dimensione N . Effettuare una previsione tramite un processo gaussiano equivale infine a estrarre campioni da questa distribuzione, interpretando la i -esima componente del vettore risultante come il valore della funzione corrispondente al i -esimo punto di test.

Ai fini del presente lavoro di tesi, è stato sviluppato in Python un codice che implementa la GPR per problemi strutturali e di curing. Le metriche di accuratezza impiegate per valutare le predizioni, trattate in Appendice A e definite secondo le formule (A.8)(A.9), sono il coefficiente di determinazione R^2 ed il Root Mean Squared Error (RMSE).

3.1.2 Gaussian Process Classification (GPC)

Il Gaussian Process Classifier (GPC) estende i Gaussian Processes alla classificazione probabilistica, producendo predizioni sotto forma di probabilità di classe.

- **Prior:** prima di osservare i dati, il GPC assume un processo gaussiano su una funzione latente f , trasformata tramite una funzione di collegamento π per ottenere probabilità di classe. La funzione latente f non è osservata direttamente e serve solo a formulare il modello in modo conveniente.
- **Posterior:** dopo aver osservato i dati, la distribuzione della funzione latente viene aggiornata in base alle etichette. Poiché le etichette sono discrete, il posterior non è più gaussiano e viene approssimato (ad esempio tramite la Laplace approximation) per ottenere predizioni trattabili.

Il GPC assume generalmente una media a priori nulla e utilizza un kernel per definire la covarianza tra i punti, che determina la struttura di correlazione del modello. La scelta del kernel e dei suoi parametri può influenzare la capacità del modello di adattarsi ai dati.

Il GPC può essere esteso alla classificazione multi-classe tramite approcci one-versus-rest o one-versus-one, combinando classificatori binari per ottenere la predizione finale. L'approccio one-versus-one può risultare più efficiente su dataset di grandi dimensioni, ma non permette di stimare direttamente probabilità di classe. In generale, il GPC rimane uno strumento utile per comprendere come i Gaussian Process possano essere applicati alla classificazione probabilistica.

3.1.3 Gaussian Process Regression (GPR)

Il GPR, presente nelle librerie `sklearn` e `scikit-learn` di Python ed impiegato ai fini di questa tesi, è progettato per implementare i GPs in termini di regressione. A differenza di quanto avviene nel GPC, il prior deve essere specificato, ed il GPR combinerà prior e funzione di verosimiglianza, basata sui campioni del dataset, al fine di calcolare la predizione. È possibile anche dare un approccio probabilistico all'analisi andando a richiedere in output la media e la deviazione standard dei valori previsti. Mediante il parametro `normalize_y` è possibile decidere se annullare la media del prior (ponendo la variabile come `False`) oppure se porla pari a quella del dataset in ingresso (`normalize_y = True`). La covarianza è gestita, anche in questo caso, mediante il kernel. L'`optimizer` ha la funzione di massimizzare la verosimiglianza marginale logaritmica (LML) e, di conseguenza, ottimizzare gli iperparametri del kernel. Come nel caso del GPC, per evitare di considerare massimi locali e non assoluti della LML, è prevista l'opzione di riavviare l'ottimizzatore. Il primo run è gestito mediante gli iperparametri i cui valori sono definiti nel kernel, mentre i successivi tramite valori scelti in modo random tra quelli possibili in termini di range per ogni parametro.

Nell'ambito di analisi multi-fidelity, come quelle esposte nel presente elaborato, risulta fondamentale la possibilità di gestire i diversi livelli di rumore associati a dati ottenuti con livelli di approssimazione differente.

Il GPR, così per come è implementato in Python, permette di assegnare un livello di rumore ai dati, in modo globale (tramite un valore scalare) o in modo puntuale. Tale indicazione può esser fornita al GPR mediante il parametro `alpha`: un valore alto di `alpha` è associato a dati high-fidelity, un valore basso (generalmente unitario) è associato ai low-fidelity. Un'alternativa all'assegnazione "manuale" del livello di rumore è includere nel codice un `WhiteKernel`, che è in grado di stimare il rumore leggendo i valori nel dataset. Nell'ambito del presente elaborato è stata scelta la prima opzione.

La differenza nell'uso del GPR settando o meno un vettore `alpha` associato al rumore presente nei dati è mostrata nelle figure (3.2)(3.3), tratte da [20] di Rasmussen *et al.*.

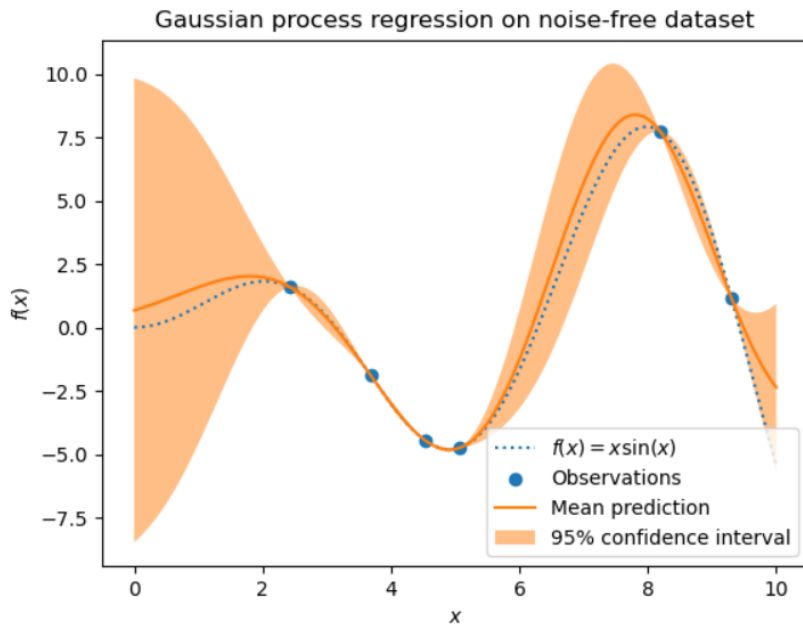


Figura 3.2: GPR applicato a dataset senza considerare rumore. Fonte: [20]

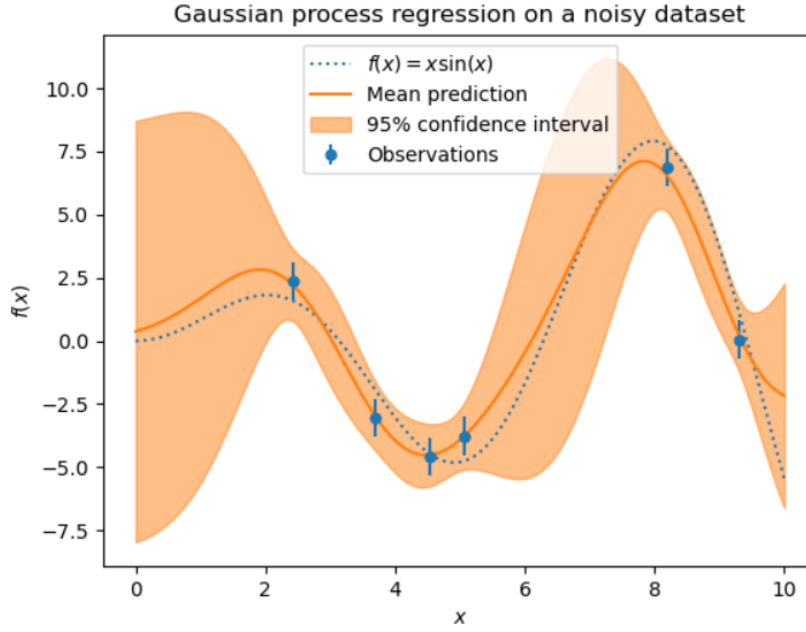


Figura 3.3: GPR applicato a dataset affetti rumore, gestiti mediante α . Fonte: [20]

Come si osserva nelle due rappresentazioni, in assenza di un vettore α il modello tende a interpolare esattamente i dati, producendo predizioni che passano per tutti i punti e con bande di confidenza molto strette. Questo comportamento è appropriato solo se i dati sono realmente privi di rumore (come nel caso di rappresentazione di funzioni esatte), ma può portare a fenomeni di overfitting qualora siano presenti fluttuazioni casuali. L'introduzione di un α diverso da zero, invece, consente al modello di considerare l'incertezza associata alle osservazioni: la curva di predizione risulta più regolare, le bande di confidenza si allargano e il GPR diventa più robusto e realistico nell'analisi di dataset rumorosi. Proprio per questi motivi, nell'ambito della presente tesi, essendo presenti risultati derivanti da analisi multi-fidelity, è stato fatto uso largo del vettore α , assegnando ai dati high-fidelity un peso 10 volte superiore rispetto ai low-fidelity, in sede di training del GPR.

3.1.4 Kernel per i GPs

Il kernel, detto anche funzione di covarianza, è un ingrediente fondamentale per un GPs, e determina la forma del prior e del posterior. Nei modelli a processo gaussiano, un kernel viene usato per determinare la covarianza a priori tra i valori della funzione in due punti qualsiasi, cioè quanto ci si aspetta che questi valori siano simili prima ancora di osservare i dati. Detti x ed x' tali punti di valutazione della funzione, il kernel è definito, come appare in [20] di Rasmussen *et al.* e in [23] di Duvenaud:

$$k(x, x') = \text{Cov}[f(x), f(x')] \quad (3.11)$$

In linea generale, viene spesso, in modo erroneo, detto che i kernel siano utili a determinare la somiglianza tra due input; in realtà il kernel determina quanto sono tra loro simili i valori della funzione calcolati su due input qualsiasi scelti nel dominio in cui essa è definita.

Si possono identificare due categorie di kernel:

- Stazionari: dipendono solo dalla distanza $x - x'$ tra i due dati di input e non dal loro valore assoluto. Sono, pertanto, invarianti per traslazione degli input all'interno del dominio di definizione.
- Non stazionari: dipendono sia dalla distanza tra gli input sia dai loro valori assoluti.

I kernel stazionari possono esser suddivisi ulteriormente in isotropi e anisotropi, in base al fatto che siano anche invarianti (oppure no) rispetto a rotazioni nel dominio.

Iperparametri dei kernel. Ogni Kernel è definito, al suo interno, da una serie di parametri che specificano la forma della funzione di covarianza. Essi sono denominati, in linea generale, hyper-parameters, perché possono essere visti come parametri che definiscono una distribuzione sui parametri della funzione (prima di vedere i dati veri e propri), invece di essere parametri che specificano direttamente la funzione stessa. Analizzando le principali tipologie di kernel sarà possibile mettere in evidenza per ognuna gli hyper-parameters fondamentali.

Operatori tra kernel. Le operazioni di combinazione possibili tra kernel sono analoghe a quelle riscontrabili nell'algebra di base: somma, prodotto ed elevazione a potenza. Dati due kernel $k_1(x, x')$ e $k_2(x, x')$ ed un esponente $p \in \mathbb{R}$, le operazioni sono definite come in (3.12)(3.13)(3.14):

$$k_s(x, x') = k_1(x, x') + k_2(x, x') \quad (3.12)$$

$$k_p(x, x') = k_1(x, x') \cdot k_2(x, x') \quad (3.13)$$

$$k_{exp}(x, x') = k(x, x')^p \quad (3.14)$$

3.1.5 Kernel fondamentali

Per la corretta applicazione dei processi gaussiani, la scelta del kernel riveste un ruolo fondamentale, poiché determina le proprietà della funzione a priori e, di conseguenza, la capacità del modello di adattarsi ai dati. Per questo motivo, è utile descrivere le principali tipologie di kernel disponibili e le loro caratteristiche, così da chiarire le ragioni alla base della scelta del kernel utilizzato nel presente lavoro. Per ulteriori approfondimenti, si invita il lettore alla consultazione del testo [20] di Rasmussen *et al.*

Kernel costante

Viene principalmente impiegato in operazioni di somma, dove va a modificare la media dei GPs, oppure in prodotti, al fine di scalare il modulo dell'altro kernel in gioco. Viene definito tramite l'espressione:

$$k(x, x') = c \quad c \in \mathbb{R}, \quad \forall x, x' \quad (3.15)$$

Come si può comprendere dalla (3.15), l'unico iperparametro in gioco è il valore della costante c .

White Kernel

La sua applicazione principale è all'interno di operazioni di somma, al fine di definire il livello di rumore associato al segnale.

$$k(x, x') = \begin{cases} \sigma^2, & \text{se } x = x', \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad \sigma^2 \in \mathbb{R}, \quad \forall x, x' \quad (3.16)$$

Dalla definizione (3.16) si vede che l'iperparametro, in questo caso, è il livello di rumore σ^2 , detto anche varianza.

Kernel a base radiale (RBF)

È un kernel stazionario, noto anche come squared-exponential (SE) kernel, e, pertanto, indicato con la sigla $SE(x, x')$. È parametrizzato mediante il lenght-scale parameter $l > 0$, che può essere uno scalare (nella variante isotropa del kernel) o un vettore avente la stessa dimensione degli input (variante anisotropa). L'iperparametro l nasce per controllare quanto rapidamente la funzione può cambiare nel dominio degli input: in tal senso, un lenght-scale basso indica che la funzione può oscillare molto rapidamente, dando valori molto diversi anche per punti di input vicini; viceversa, un lenght-scale alto indica che punti vicini avranno valori simili della funzione.

Il kernel a base radiale viene definito come in (3.17):

$$SE(x, x') = k(x, x') = \exp\left(-\frac{(x - x')^2}{2l^2}\right), \quad l \in \mathbb{R}^+ \quad (3.17)$$

Questo kernel è infinitamente derivabile, il che comporta che i processi gaussiani che lo utilizzano come funzione di covarianza possiedono derivate in media quadratica di ogni ordine¹. Di conseguenza, le traiettorie campionate da questi processi sono estremamente lisce, prive di discontinuità o variazioni brusche, rendendo il kernel particolarmente adatto a modellare funzioni con andamento regolare e continuo. In figura (3.4) sono mostrati prior e posterior di un processo gaussiano che impiega il kernel RBF.

¹La varianza della derivata, in qualsiasi ordine, esiste ed è finita.

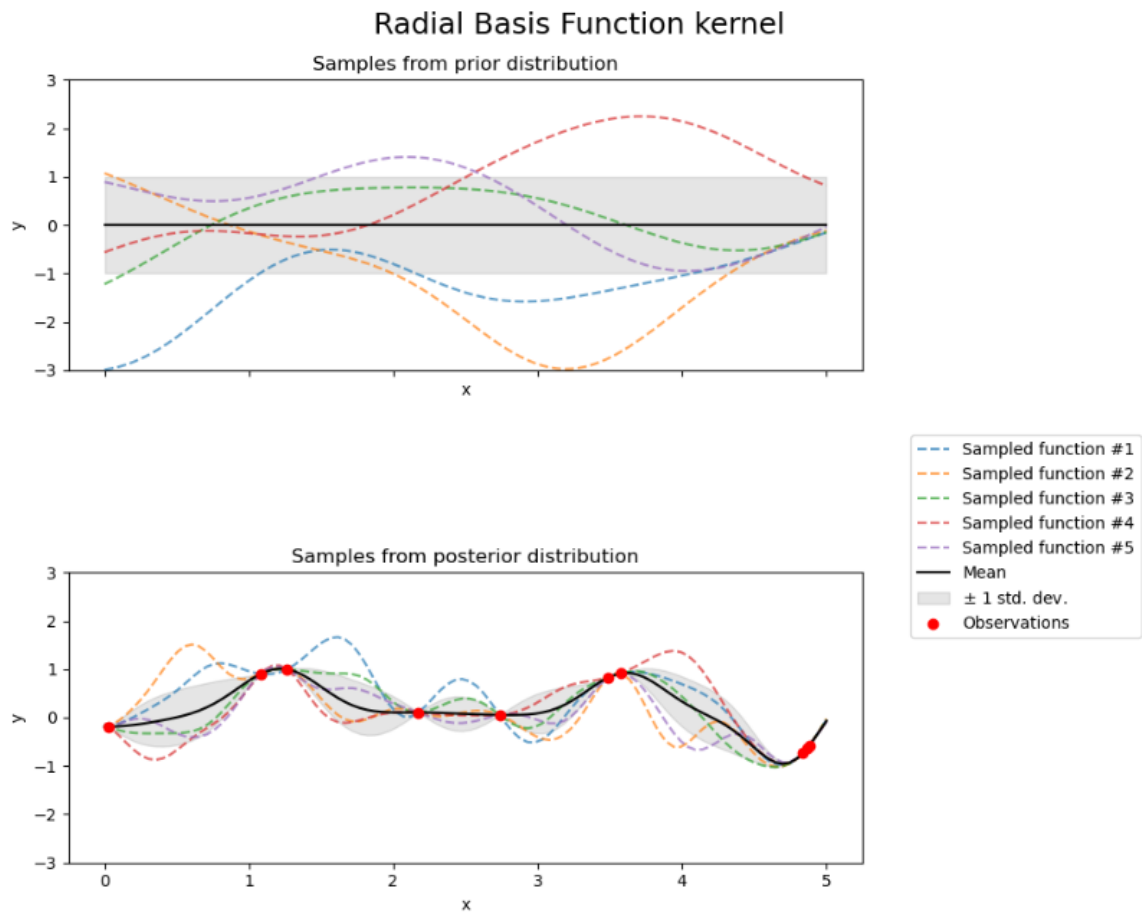


Figura 3.4: Kernel RBF. Fonte: [20]

Il kernel RBF è efficace perché produce funzioni lisce e continue, consente un'interpolazione stabile dei dati osservati, gestisce in modo naturale la propagazione dell'incertezza e non introduce preferenze direzionali nel dominio degli input. Questi sono i principali motivi per cui sarà adottato nei codici descritti ai capitoli successivi.

Kernel di Matérn

È un kernel stazionario, e rappresenta la generalizzazione del kernel RBF. Presenta un iperparametro aggiuntivo, $\nu \in \mathbb{R}^+$, che determina il grado di regolarità della funzione ottenuta. Per $\nu \rightarrow \infty$ il kernel converge a RBF. Esattamente come quest'ultimo, il kernel di Matérn viene parametrizzato anche tramite la length-scale, la cui definizione è analoga al caso RBF. In figura (3.5) sono mostrati prior e posterior risultanti da un GP che impiega il kernel di Matérn, con ν generico e finito.

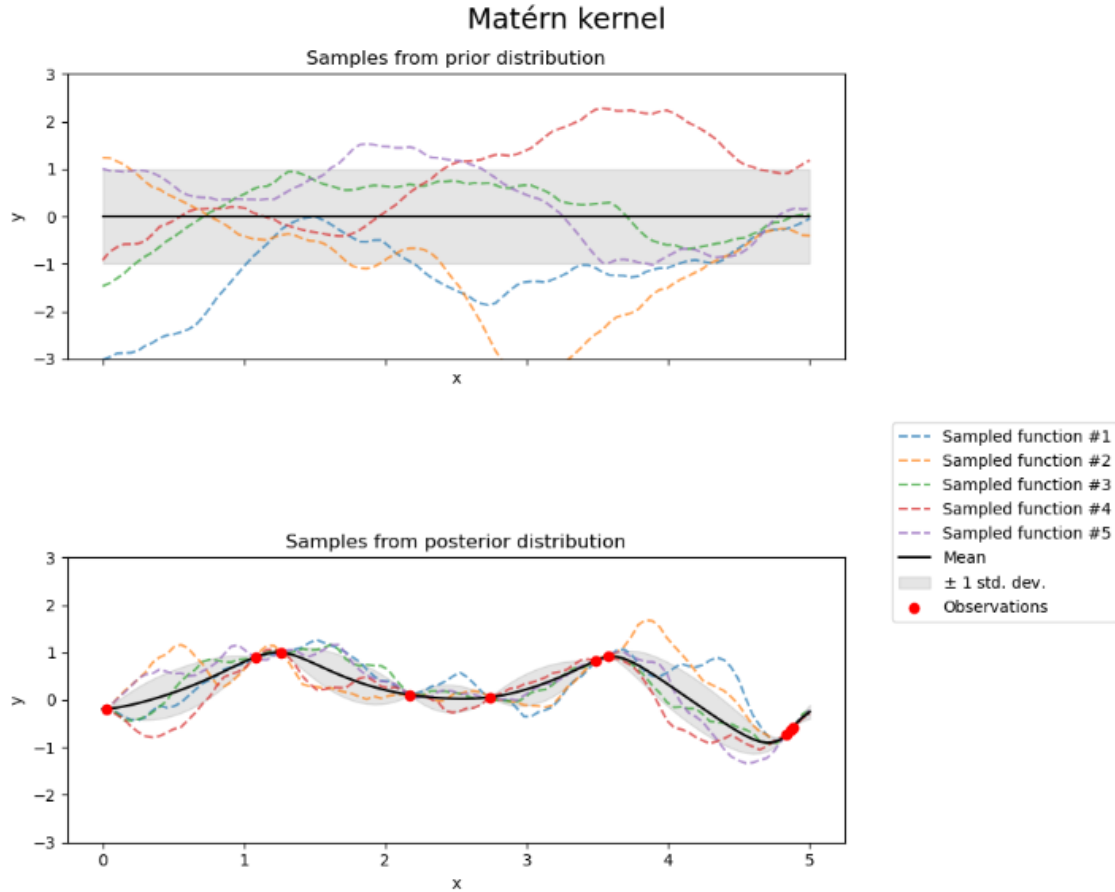


Figura 3.5: Kernel di Matérn. Fonte: [20]

In base a quanto detto, la massima regolarità ottenibile per la funzione si ha quando il kernel converge a RBF.

Kernel razionale quadratico

Il Rational Quadratic Kernel può essere interpretato come una somma di infiniti kernel di tipo RBF, con diverse lenght-scale. È parametrizzato mediante gli iperparametri di lenght-scale $l \in \mathbb{R}^+$ e di scale mixture $\alpha \in \mathbb{R}^+$. L'espressione matematica di base è data da (3.18):

$$k(x, x') = \left(1 + \frac{(x - x')^2}{2\alpha l^2}\right)^{-\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+, l \in \mathbb{R}^+ \quad (3.18)$$

Kernel esponenziale seno-quadrato

È un kernel che permette di modellare funzioni periodiche. Gli iperparametri in gioco sono la lenght-scale $l \in \mathbb{R}^+$ ed il parametro di periodicità $p \in \mathbb{R}^+$. Viene definito come in (3.19):

$$k(x, x') = \exp\left(-\frac{2 \sin^2\left(\pi \frac{x-x'}{p}\right)}{l^2}\right), \quad l \in \mathbb{R}^+, p \in \mathbb{R}^+ \quad (3.19)$$

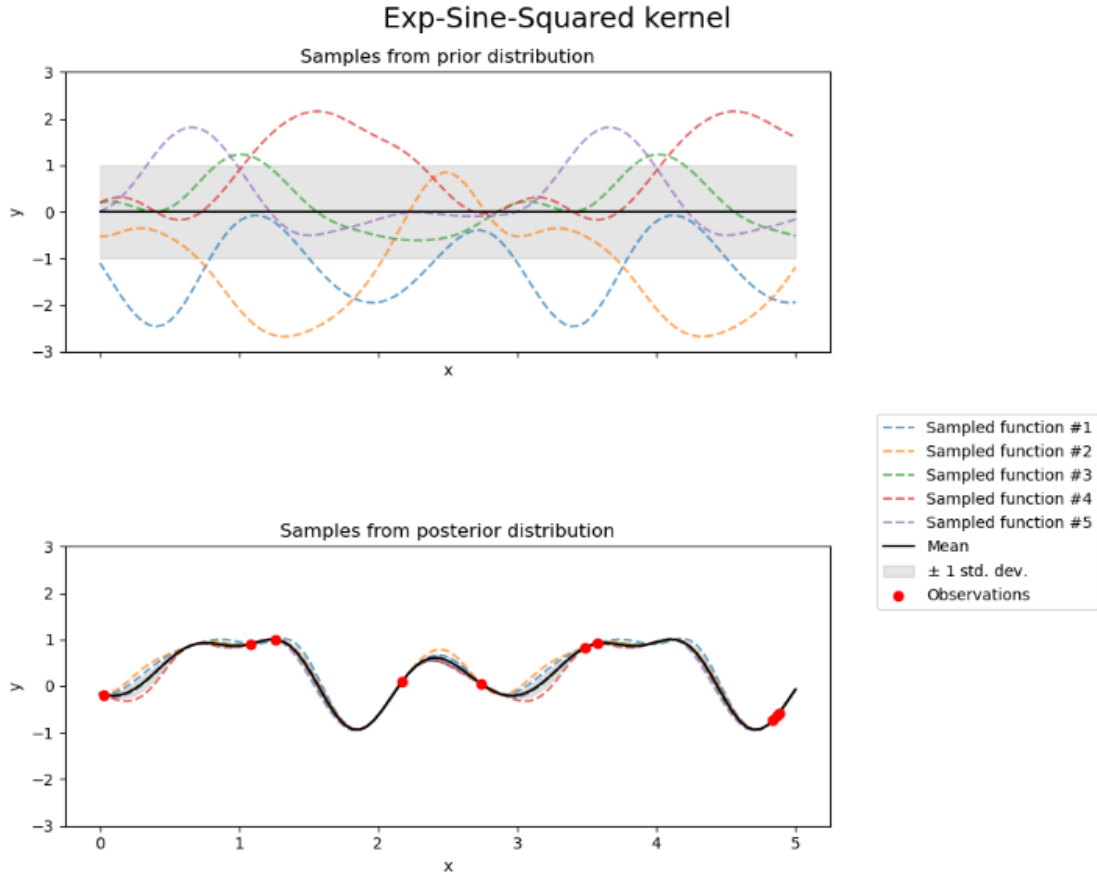


Figura 3.6: Kernel esponenziale seno-quadro. Fonte: [20]

Come si vede da figura (3.6), l'Exp-Sine-Squared kernel è particolarmente indicato per dati periodici perché cattura la ripetitività, interpola bene i punti osservati, gestisce in modo naturale l'incertezza, ha parametri facilmente interpretabili e produce funzioni regolari.

3.2 Bayesian Optimization

Come sottolineato da Garnett in [39], Di Fiore *et al.* in [40] e Luong *et al.* in [45], la Bayesian Optimization (BO) è un approccio volto a ottimizzare in modo efficiente funzioni costose e di tipo black-box. Data una funzione $f : \chi \rightarrow \mathbb{R}$, l'obiettivo è trovare l'input ottimale

$$x^* = \arg \max_{x \in \chi} f(x),$$

dove χ è un dominio limitato, $\chi \subset \mathbb{R}^n$. L'ottimizzazione bayesiana ha lo scopo di modellare la funzione f mediante un modello surrogato, anziché valutare direttamente la funzione obiettivo. Un esempio di modello surrogato è la Gaussian Process Regression (GPR). Si assume che f sia estratta da un processo gaussiano (GP), cioè

$$f(x) \sim \mathcal{GP}(\mu(x), k(x, x')),$$

dove

$$\mu : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}, \quad k : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$$

rappresentano rispettivamente le funzioni di media e covarianza. Di solito si assume che $\mu(x) = 0$ e che k sia il kernel esponenziale quadratico, definito in equazione (3.17).

Dato uno storico di dati fino all'iterazione t ,

$$D_t = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^t,$$

che contiene gli input x_i e le valutazioni

$$y_i = f(x_i) + \epsilon_i \quad \text{per } i = 1, 2, \dots, t,$$

dove $\epsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\epsilon^2)$, la distribuzione predittiva di $f(x) \mid D_t$ è

$$f(x) \mid D_t \sim \mathcal{N}(\mu_t(x), \sigma_t^2(x)),$$

con $\mu_t(x)$ e $\sigma_t^2(x)$ definiti come segue:

$$\mu_t(x) = \mathbf{k}^\top (\mathbf{K} + \sigma_\epsilon^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{y}, \quad \sigma_t^2(x) = k(x, x) - \mathbf{k}^\top (\mathbf{K} + \sigma_\epsilon^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{k},$$

dove $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_t)$ è il vettore delle valutazioni della funzione,

$$\mathbf{k} = [k(x_i, x)]_{\forall x_i \in D_t}, \quad \mathbf{K} = [k(x_i, x_j)]_{\forall x_i, x_j \in D_t},$$

$\mathbf{K}$ è la matrice di covarianza tra tutti gli input, $\mathbf{I}$ è la matrice identità della stessa dimensione di $\mathbf{K}$ e σ_ϵ^2 rappresenta il rumore nella valutazione della funzione. La media predittiva e la deviazione standard vengono utilizzate per calcolare una funzione di acquisizione $\alpha(x)$, la quale viene massimizzata per suggerire il punto successivo da valutare. La funzione di acquisizione sfrutta la distribuzione predittiva per bilanciare due obiettivi contrastanti: campionare nei punti in cui ci si aspetta che la funzione assuma un valore elevato oppure nei punti in cui l'incertezza sul valore della funzione è maggiore. Tra le funzioni di acquisizione più note vi sono: Probability of Improvement (PI), Expected Improvement (EI), Upper Confidence Bound (UCB) e Predictive Entropy Search (PES).

Per questo lavoro di tesi, come si vedrà nel capitolo dedicato, è stato integrato un algoritmo di BO all'interno di un codice Python ML di tipo GPR, al fine di minimizzare la funzione obiettivo definita dal RMSE sulle predizioni. A tale scopo è stata impiegata una funzione di acquisizione di tipo EI, che verrà descritta in breve in seguito.

3.2.1 Funzione di acquisizione Expected Improvement (EI)

Come trattato da Luong *et al.* in [45] la funzione di acquisizione Expected Improvement (EI) misura l'ammontare atteso di miglioramento in un punto $x \in \mathcal{X}$. Essa massimizza il miglioramento atteso rispetto al miglior valore osservato fino all'iterazione corrente

$$y^+ = \max_{i \leq t} (y_i),$$

ed ammette una forma chiusa nel caso di processo gaussiano:

$$\alpha_{EI}(x) = \begin{cases} (\mu(x) - y^+) \Phi(z) + \sigma(x) \phi(z), & \text{se } \sigma(x) > 0, \\ 0, & \text{se } \sigma(x) = 0, \end{cases}$$

dove $\mu(x)$ e $\sigma(x)$ sono la media e la deviazione standard predittiva del processo gaussiano, $z = \frac{\mu(x) - y^+}{\sigma(x)}$, ϕ è la densità della normale standard, e Φ è la funzione di ripartizione della normale standard. Per suggerire il punto successivo per la valutazione della funzione obiettivo black-box, massimizziamo la funzione di acquisizione EI, come segue:

$$x_{t+1} = \arg \max_{x \in \mathcal{X}} \alpha_{EI,t}(x)$$

3.3 Reti Neurali (NN)

Le Reti Neurali si presentano come modelli di calcolo basati su algoritmi interni in grado di riprodurre uno schema di ragionamento assimilabile a quello del sistema nervoso umano. Le singole unità di cui è composta una NN sono dette neuroni, ed esse lavorano in modo congiunto al fine di risolvere problemi complessi.

3.3.1 Cenni storici

Il lavoro sulle Reti Neurali in ambito informatico ed ingegneristico ha tratto spunto dalle ricerche, valse a Hubel e Wiesel un premio Nobel, riguardo la tematica della corteccia visiva primaria dei gatti [2][11]. Proprio i due ricercatori, infatti, nell'articolo intitolato “*Receptive fields, binocular interaction and functional architecture in the cat's visual cortex*”, pubblicato nel gennaio 1962 da *The Journal of Physiology*, mettono in evidenza come a distinguere la corteccia cerebrale dagli altri sottosistemi di un organismo sia la diversità ed il grado di interconnessione tra le cellule presenti, e come sia proprio questo grado di complessità ad influenzare la risposta ottenuta in termini visivi [11].

Il primo sistema assimilabile al funzionamento ML di una NN si deve agli studi del gruppo di ricerca di F. Rosenblatt, il quale sviluppò il *perceptron*, una macchina composta da tre unità (input, output e un algoritmo di apprendimento). Lo scopo di tale macchina era il riconoscimento delle lettere dell'alfabeto. Il perceptron così come era stato creato portava, tuttavia, in sé limiti dovuti alle scarse capacità computazionali ed alla forte dipendenza dalle caratteristiche degli input; venne, pertanto, migliorato successivamente grazie agli studi di M. Minsky e S. Papert, a cui si attribuisce, ad oggi, il funzionamento dell'algoritmo [13].

3.3.2 Struttura matematica di un neurone

Un neurone artificiale riceve in ingresso un vettore di input $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, a cui associa un insieme di pesi $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$. L'uscita del neurone è calcolata come:

$$y = \varphi \left(\sum_{i=1}^n w_i x_i + b \right), \quad (3.20)$$

dove b è il bias e $\varphi(\cdot)$ è la funzione di attivazione.

3.3.3 Funzioni di attivazione

La potenza delle Reti Neurali deriva anche dalla scelta della funzione di attivazione, che introduce non linearità nel modello. Tra le funzioni più utilizzate si trovano:

- Sigmoidale: $\varphi(z) = \frac{1}{1+e^{-z}}$
- ReLU: $\varphi(z) = \max(0, z)$
- Tanh: $\varphi(z) = \tanh(z)$

La scelta di φ influenza in modo sostanziale la capacità di apprendimento della rete.

3.3.4 Apprendimento e backpropagation

L'addestramento di una NN avviene tramite *retropropagazione* (backpropagation), che utilizza la discesa del gradiente per minimizzare una funzione di costo $J(\mathbf{w})$. In particolare, i pesi vengono aggiornati secondo la regola:

$$w_{ij}^{(t+1)} = w_{ij}^{(t)} - \eta \frac{\partial J}{\partial w_{ij}}, \quad (3.21)$$

dove η rappresenta il tasso di apprendimento.

3.3.5 Fattori di sviluppo recente

Il successo recente delle Reti Neurali, come scrive Brunton [2], è dovuto a due fattori chiave:

1. La crescita esponenziale delle capacità computazionali.
2. La disponibilità di dataset di grandi dimensioni.

3.3.6 Applicazioni

Nel settore ingegneristico si trovano vari esempi di applicazioni di NN per gestione di problemi strutturali, come il lavoro sviluppato da Rogers [12] al fine di ottimizzare il progetto di una trave per minimizzarne il peso, nel rispetto dei vincoli ad essa imposti. La rete neurale creata da Rogers per tale studio presentava 5 nodi negli input, utili a rappresentare le 5 variabili di progetto e 41 nodi nel layer di output, rappresentanti i 40 vincoli di stress imposti e la funzione obiettivo (il peso).

Oltre a ciò, le NN trovano applicazioni in svariati ambiti:

- Visione artificiale (riconoscimento facciale, guida autonoma).

- Elaborazione del linguaggio naturale (traduzione automatica, chatbot).
- Medicina (diagnostica assistita, analisi di immagini radiologiche).
- Finanza (previsione di trend di mercato, rilevamento frodi).

3.3.7 Reti profonde e Deep Learning

Le Reti Neurali profonde (Deep Neural Networks, DNN) estendono il concetto di NN tradizionali mediante l'aggiunta di più strati nascosti (*hidden layers*), consentendo di apprendere rappresentazioni gerarchiche dei dati. Questo approccio ha reso possibile il recente successo del *deep learning*, alla base delle più avanzate applicazioni moderne di intelligenza artificiale.

3.3.8 Approcci classici di Machine Learning mediante Reti Neurali

Nel suo lavoro introduttivo agli approcci classici di machine learning [18], Zobeiry identifica cinque categorie di approcci ML mediante Reti Neurali, ordinate per complessità crescente:

- **Approccio tradizionale.** Tale metodo viene investigato dall'autore mediante l'adozione di una NN composta da 3 hidden layer, ognuno di 16 neuroni, senza introduzione di parametri legati alla fisica del problema. Consultando i risultati [18] si osserva una tendenza della NN a perdere accuratezza nelle zone lontane da quelle in cui sono concentrati i dati di training.
- **Physics-Informed Feature.** In questo caso, il comportamento della rete neurale viene "regolarizzato" mediante l'introduzione di una legge fisica significativa per il fenomeno in esame. Ciò consente di ottenere un'accuratezza superiore nella previsione.
- **Physics-Informed Loss.** Metodo analogo al precedente, con l'aggiunta di una funzione di perdita legata alla fisica, che tenga conto di eventuali perdite di prestazione del corpo in esame (nel caso studiato da Zobeiry [18], il problema riguarda il trasferimento di calore, dove la perdita di prestazioni del corpo è legata alla minore capacità del tool di agire come pozzo termico al ridursi dello spessore).
- **Physics-Informed Domain-Transformation.** Approccio che prevede di sfruttare, se disponibili, le soluzioni analitiche in forma chiusa del problema, al fine di correlare tali soluzioni con dati sperimentali o previsioni. L'introduzione della fisica e di tali correlazioni permette di ottenere risultati estremamente accurati dal training della NN. Tuttavia, si tratta di un approccio computazionalmente costoso e non sempre applicabile, anche solo per eventuale mancanza di soluzioni in forma chiusa.
- **Physics-Informed Neural Network (PINN).** Reti Neurali che incorporano le leggi fisiche descritte da equazioni differenziali nelle loro funzioni di perdita, guidando il processo di apprendimento verso soluzioni più coerenti con la fisica sottostante. Possono essere utilizzate per risolvere ODE, PDE oppure per stimare parametri di modelli a partire da dataset limitati.

I primi quattro metodi verranno impiegati in analisi preliminari nel capitolo dedicato alle NN del presente lavoro di tesi, al fine di sondarne le possibilità applicative per i successivi studi.

Capitolo 4

Analisi preliminari

In questo capitolo sono presentati i risultati delle analisi FEM iniziali condotte su problemi strutturali 1D e 2D mediante il codice di calcolo sviluppato dal gruppo di ricerca MUL2, basato sull'uso della CUF [1]. I risultati preliminari offrono indicazioni utili sulle prestazioni del metodo in diversi scenari. Al fine di operare un confronto tra i risultati ottenuti mediante codice FEM e risultati attesi dalla teoria, si introducono i parametri Δu e Δw , che rappresentano errori relativi sugli spostamenti tra soluzioni FEM-CUF e teoria:

$$\Delta u = \frac{|u_{ref}| - |u_{FEM}|}{|u_{ref}|} \cdot 100\% \quad \Delta w = \frac{|w_{ref}| - |w_{FEM}|}{|w_{ref}|} \cdot 100\%$$

4.1 Problemi 1D

4.1.1 Trave isotropa caricata a flessione

Il primo caso di analisi prevede l'analisi FEM statica e modale di una trave in materiale isotropo soggetta ad un carico verticale applicato all'estremo libero, come si vede in figura (4.1).

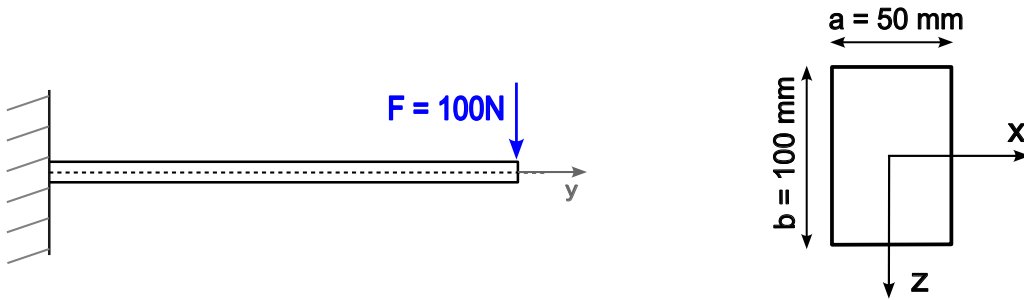


Figura 4.1: Analisi preliminari - trave isotropa caricata a flessione

La trave, dalla lunghezza $L = 1000mm$, presenta sezione trasversale rettangolare con dimensioni $a = 50mm$, $b = 100mm$. Le caratteristiche del materiale sono riportate in tabella (4.1).

Materiale	E [GPa]	ν	$\rho [kg/m^3]$
ERGAL (SAE-7075)	73.1	0.3	2780

Tabella 4.1: Analisi preliminari - caratteristiche materiale trave isotropa

Analisi statica

L'analisi ha avuto come obiettivo la verifica della convergenza del valore di freccia all'estremo libero alla soluzione prevista dalla TTEB:

$$w_{max} = \frac{FL^3}{3EI}$$
$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{ab^3}{12}$$

Tale analisi di convergenza è stata condotta dapprima mediante una discretizzazione longitudinale (lungo asse y) della trave in elementi finiti LE1¹ e, successivamente, sono stati adottati elementi LE2² e LE3³. Per la discretizzazione della sezione trasversale della trave (piano x-z) è stato adottato un elemento finito di tipo LE9⁴, che ha permesso di selezionare il punto centrale della sezione come nodo da cui ricavare l'informazione di spostamento w_{max} ricercata.

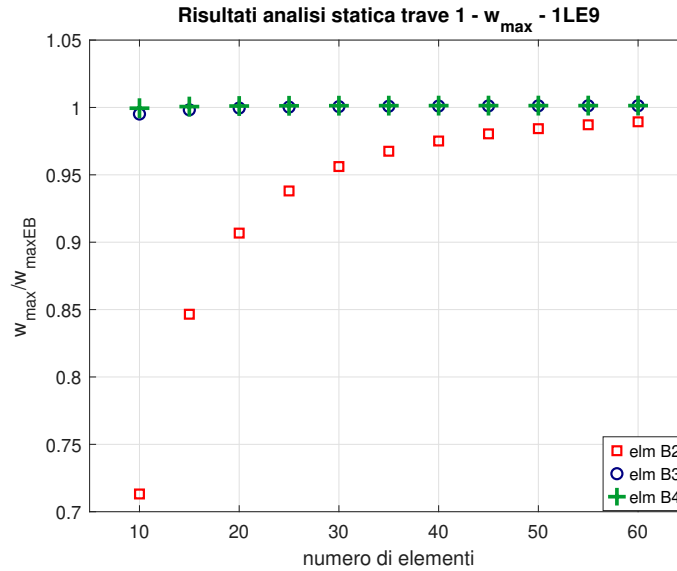


Figura 4.2: Analisi preliminari - trave: confronto risultati analisi statica

Come si può notare dai risultati presentati come confronto nel grafico di figura (4.2), la soluzione converge a quella analitica data dalla TTEB all'aumentare del numero di elementi longitudinali. Al tempo stesso, una discretizzazione con elementi che presentano più nodi risulta dare risultati più accurati anche per un numero di elementi relativamente contenuto. Il fatto che la soluzione converga in maniera sempre più accurata al risultato teorico esatto all'aumentare del numero di elementi finiti in cui la trave viene suddivisa è una delle caratteristiche base del FEM, come trattato in [3].

¹Elementi finiti monodimensionali a due nodi

²Analogo a LE1 ma con 3 nodi

³Analogo a LE1 e LE2, ma con 4 nodi

⁴Elementi finiti bidimensionali a 9 nodi

w_{max} [m] \ Numero elm	10	20	40	60
B2 $\times$ 1LE9	-0.7805E-04	-0.9923E-04	-1.0671E-04	-1.0827E-04
B3 $\times$ 1LE9	-1.0891E-04	-1.0939E-04	-1.0955E-04	-1.0958E-04
B4 $\times$ 1LE9	-1.0938E-04	-1.0955E-04	-1.0959E-04	-1.0959E-04
TTEB	-1.0944E-04	-1.0944E-04	-1.0944E-04	-1.0944E-04

Tabella 4.2: Analisi preliminari - trave: confronto risultati analisi statica

Modello	w_{max} [m]	Δw
60 B2 $\times$ 1LE9	-1.0827E-04	1.07%
60 B3 $\times$ 1LE9	-1.0958E-04	-0.13%
60 B4 $\times$ 1LE9	-1.0959E-04	-0.13%
MSC Patran/Nastran solid	-1.0900E-04	0.4%
Analitico TTEB	-1.0944E-04	

Tabella 4.3: Analisi preliminari - trave: confronto risultati analisi statica

Nelle tabelle (4.2)(4.3) sono stati riportati in forma numerica alcuni risultati delle analisi condotte, per far un confronto tra di essi e la soluzione TTEB ⁵: fin da un primo sguardo il lettore può notare come la discretizzazione con elementi B4 risulti esser la più accurata già con un numero basso di elementi. In particolare, da ulteriori analisi condotte si è notato come, per aver circa la stessa accuratezza della soluzione con 10 elementi B4 utilizzando elementi LE1 sarebbe necessario aumentare in modo significativo il numero di elementi. In tabella (4.3) è presente, inoltre, un confronto con la soluzione ottenuta mediante impiego del codice MSC Patran/Nastran. In questo caso (e analogamente per l'analisi modale e la trave 2) è stata impiegata una mesh con 110 elementi solidi di tipo Tet10.

Analisi modale

I risultati che seguono sono frutto dell'analisi modale condotta sulla trave avente caratteristiche geometriche e meccaniche riportate in figura (4.1). Si invita il lettore a porre attenzione sul fatto che tale trave sia identica a quella che sarà riportata nel paragrafo successivo, pertanto, per questioni di brevità di esposizione, si riporta un'unica sezione dedicata all'analisi modale. I risultati in tabella (4.5) riportano anche un confronto con analisi SOL 103 svolta mediante il codice commerciale MSC Patran/Nastran.

Il grafico in figura (4.3) mostra l'andamento della prima frequenza naturale della trave al variare del numero di elementi e della loro tipologia. Nuovamente si evince come l'utilizzo di elementi B3 e B4 renda la convergenza del risultato più rapida, con un risultato accurato, per tali tipologie di elementi, anche con discretizzazioni rade.

È possibile, inoltre, mettere in evidenza a livello numerico tale discrepanza, come si nota in tabella (4.4).

In analogia a quanto si può notare in molti codici FEM e anche nella teoria [3], la tendenza per le frequenze proprie dell'analisi modale è quella di una convergenza dall'alto all'aumentare del numero di elementi.

Per completezza si riportano in tabella (4.5) le prime 10 frequenze proprie della trave per ogni

⁵Non riportata nel grafico di figura (4.2) in quanto i risultati sono stati adimensionalizzati rispetto ad essa

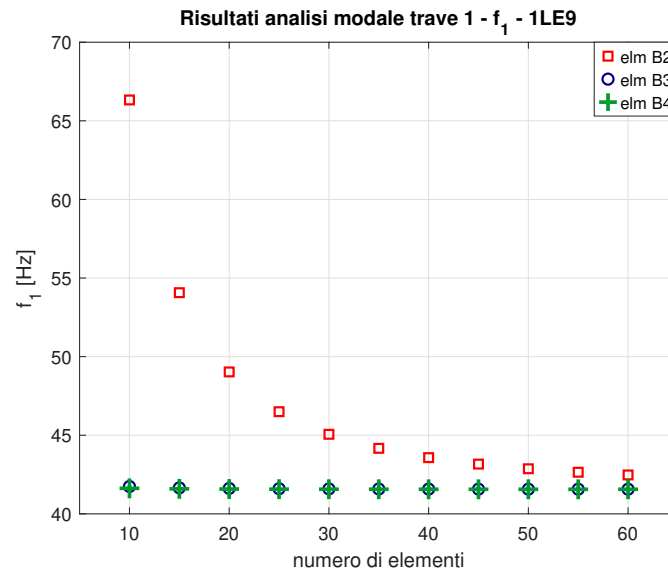


Figura 4.3: Analisi preliminari - trave: confronto risultati analisi modale

f_1 [Hz]	Numero elm			
	10	20	40	60
B2 $\times$ 1LE9	66.3277	49.0279	43.5761	42.4761
B3 $\times$ 1LE9	41.7405	41.6187	41.5766	41.5674
B4 $\times$ 1LE9	41.6235	41.5778	41.5642	41.5626

Tabella 4.4: Analisi preliminari - trave: confronto risultati f_1 analisi modale

tipologia di elemento finito longitudinale adottata (60 elementi), corredate, in figura (4.4), dalla rappresentazione delle prime 5 forme modali della trave riferite al caso in cui la discretizzazione longitudinale sia svolta adottando 60 elementi B4.

f [Hz]	Modello				Gen. FM
	60B2 $\times$ 1LE9	60B3 $\times$ 1LE9	60B4 $\times$ 1LE9	MSC Patran/Nastran	
f_1	42.4761	41.5674	41.5626	41.8748	Fless. x-y
f_2	83.0679	82.5572	82.5526	83.0195	Fless. y-z
f_3	263.5442	257.8221	257.7920	260.1800	Fless. x-y
f_4	500.5020	497.2925	497.2662	498.8446	Fless. y-z
f_5	642.3351	642.0658	642.0490	585.7060	Tors. y
f_6	726.9908	710.6577	710.5735	720.5788	Fless. x-y
f_7	1285.7075	1285.1843	1285.1672	1286.8450	CR
f_8	1325.6779	1362.6742	1362.5091	1319.0790	Fless. x-y
f_9	1395.7144	1316.2930	1316.2292	1393.5640	Fless. y-z
f_{10}	1929.6083	1928.1212	1928.0707	1787.3450	Tors. y

Tabella 4.5: Analisi preliminari - trave: confronto risultati analisi modale con 60 elm

Si invita il lettore a porre particolare attenzione alla disposizione degli assi cartesiani del sistema di riferimento nelle figure (4.4), in quanto la loro disposizione è stata variata con 2 diverse

modalità per mettere in evidenza i modi della trave⁶.

Le rappresentazioni grafiche delle forme modali derivano dall'elaborazione dei risultati mediante il software ParaView.

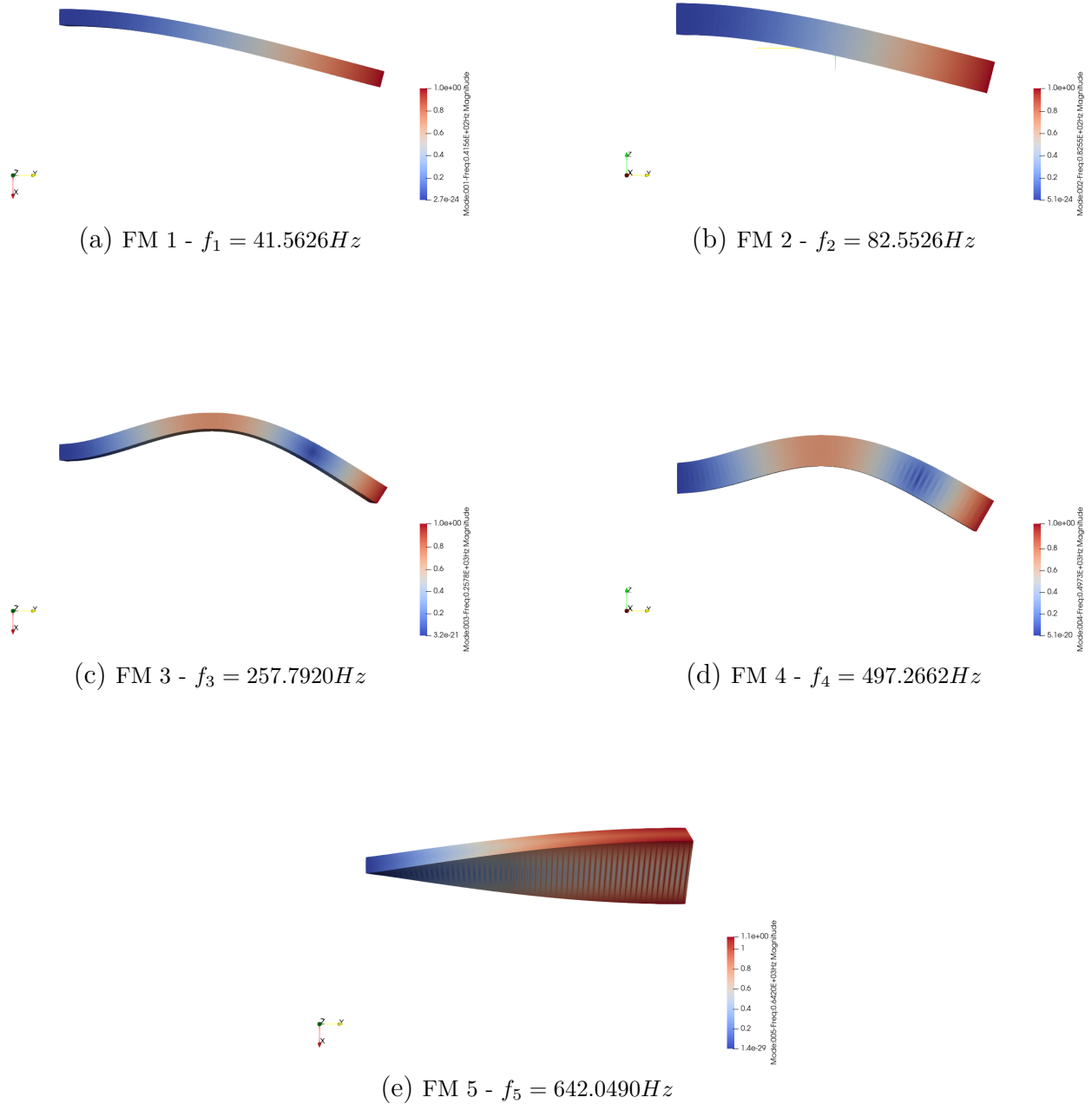


Figura 4.4: Analisi preliminari - trave: rappresentazione delle prime 5 forme modali con 60 elementi LE3

⁶Per semplificare la visualizzazione si ricordano i colori di riferimento degli assi: rosso per l'asse X, giallo per l'asse Y, verde per l'asse Z

4.1.2 Trave isotropa caricata a compressione

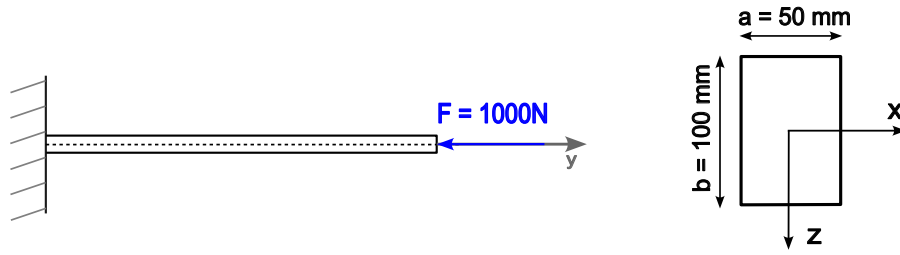


Figura 4.5: Analisi preliminari - trave isotropa caricata a compressione

La trave in esame riporta le stesse caratteristiche geometriche e meccaniche di quella esposta nel primo caso di analisi, pertanto si rimanda il lettore alla tabella (4.1), riportante le caratteristiche meccaniche, ed ai dati geometrici riportati in figura (4.1). La variazione, come evidente in figura (4.5), è relativa al carico, in questo caso di compressione e con intensità di $F = 1000N$.

Come anticipato, dal momento che la trave presenta le stesse caratteristiche geometriche e meccaniche di quella presentata nel caso 1, risulta superfluo riportare i risultati dell'analisi modale, che sarebbero identici a quelli della casistica precedente. L'attenzione dell'analisi, dunque, si sposta sulla verifica della convergenza, al variare di tipologia e numero di elementi adottati per la discretizzazione in direzione longitudinale, del valore dello spostamento assiale u_{max} valutato all'estremo libero, rispetto alla soluzione esatta data dalla TTEB. Per l'espansione nella sezione trasversale è stato, anche qui, adottato un unico elemento di tipo LE9, per ragioni analoghe a quanto sopra.

Analisi statica

La soluzione esatta del problema data dalla TTEB risulta come segue:

$$u_{max} = \frac{NL}{EA}$$
$$A = a \cdot b$$

Dove N rappresenta la risultante di carico normale applicata; in questo caso si ha semplicemente $N = F$. In figura (4.6) si riporta il risultato dell'analisi statica come confronto tra le varie tipologie di elementi.

In analogia con quanto si osservava nei risultati del primo caso in figura (4.2), si nota nuovamente una tendenza alla convergenza dal basso [3] dei valori di spostamento assiale. Anche in questo caso gli elementi con più nodi risultano essere più accurati nella descrizione dei risultati, andando a convergenza anche con discretizzazione molto rada.

In tabella (4.6) si riporta un confronto tra i valori di spostamento assiale ottenuti con le diverse discretizzazioni FEM e la soluzione esatta prevista da TTEB, per metter ancora più in evidenza i risultati descritti.

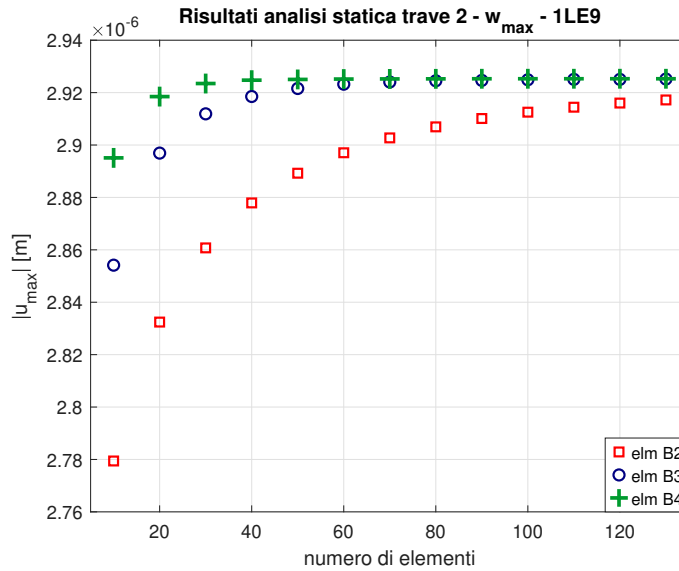


Figura 4.6: Analisi preliminari - trave: confronto risultati analisi statica

u_{max} [m]	Numero elm	10	20	40	60
B2 $\times$ 1LE9		-2.7794E-06	-2.8324E-06	-2.8779E-06	-2.8970E-06
B3 $\times$ 1LE9		-2.8541E-06	-2.8969E-06	-2.9185E-06	-2.9232E-06
B4 $\times$ 1LE9		-2.8951E-06	-2.9185E-06	-2.9248E-06	-2.9252E-06
TTEB		-2.7360E-06	-2.7360E-06	-2.7360E-06	-2.7360E-06

Tabella 4.6: Analisi preliminari - trave: confronto risultati analisi statica

Modello	u_{max} [m]	Δu
60 B2 $\times$ 1LE9	-2.8970E-06	-5.88%
60 B3 $\times$ 1LE9	-2.9232E-06	-6.84%
60 B4 $\times$ 1LE9	-2.9252E-06	-6.92%
MSC Patran/Nastran solid	-2.8600E-06	-4.53%
Analitico TTEB	-2.7360E-06	

Tabella 4.7: Analisi preliminari - trave: confronto risultati analisi statica

I risultati ottenuti tramite il modello FEM e riportati nelle tabelle (4.6) mostrano valori leggermente superiori rispetto ai risultati teorici della TTEB, come messo in evidenza dal parametro Δu in tabella (4.7). Tuttavia, considerando l'ordine di grandezza dei valori, pari a 10^{-6} m, l'errore riscontrato risulta essere estremamente ridotto e, pertanto, potrebbe essere attribuito a piccole imprecisioni numeriche dovute alla discretizzazione del modello o agli algoritmi utilizzati nel processo di calcolo. In particolare, tale differenza può essere considerata all'interno di un margine di errore trascurabile, potenzialmente influenzato anche da variazioni legate alla gestione del compilatore. Ad ogni modo la convergenza al risultato della TTEB può esser considerata soddisfatta.

4.1.3 Trave composita caricata a flessione

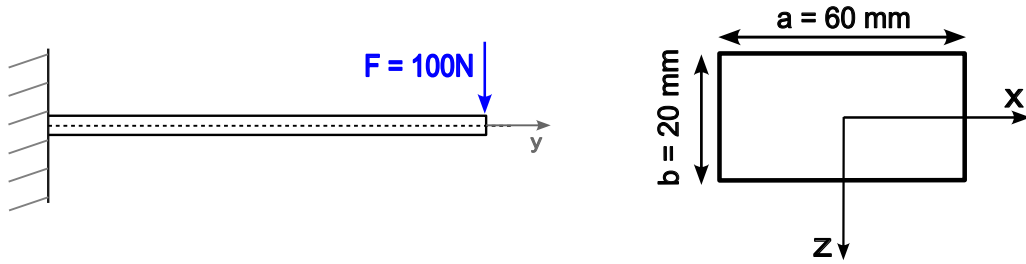


Figura 4.7: Analisi preliminari - trave composita caricata a flessione

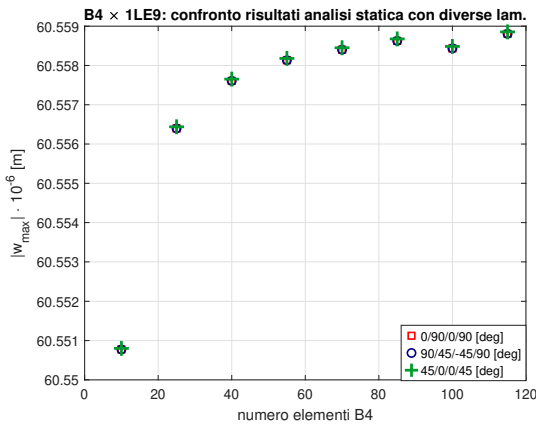
Il caso in esame è relativo all'analisi statica di una trave realizzata in materiale composito, con le caratteristiche geometriche riportate in figura (4.7) e meccaniche riportate in tabella (4.8). L'obiettivo dell'analisi è stata la verifica di convergenza degli spostamenti w_{max} all'estremo libero dovuti al carico di taglio mostrato in figura (4.7) con intensità $F = 100N$, al variare del numero di elementi B4 adottati per la discretizzazione longitudinale, del numero di elementi Q9 per la discretizzazione della sezione trasversale (sono stati adottati prima 1 e poi 2 elementi) e dello schema di laminazione. Quest'ultima, realizzata in 4 strati, ha assunto 3 diversi schemi, (0/90/0/90), (90/45/-45/90), (45/0/0/45) (angoli in [deg]).

Mat.	E_L [GPa]	E_T [GPa]	E_Z [GPa]	ν	G_{LT} [GPa]	G_{LZ} [GPa]	G_{ZT} [GPa]	ρ [kg/m ³]
ORT-M	137.9	14.5	14.5	0.21	5.9	5.9	5.9	1570

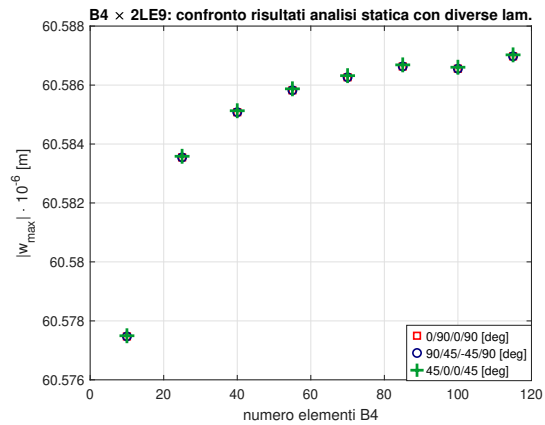
Tabella 4.8: Analisi preliminari - caratteristiche materiale trave composita

Si noti che la tabella (4.8) riporta uno solo dei tre coefficienti di Poisson del materiale, per ragioni di spazio, in quanto tutti risultano identici tra loro.

Analisi statica



(a) Sezione discretizzata con 1LE9



(b) Sezione discretizzata con 2LE9

Figura 4.8: Analisi preliminari - trave composita: confronto risultati analisi statica

Dai risultati riportati nei grafici di figura (4.8) si può notare come la risposta statica della trave sia sostanzialmente identica al variare della laminazione adottata. Come fatto notare nei paragrafi precedenti, si trova la tendenza alla convergenza dal basso del risultato.

La vera differenza dovuta alla scelta di discretizzare la sezione trasversale con 1 elemento Q9 o 2 elementi Q9 si può notare osservando i grafici di figura (4.9) ed i dati di confronto riportati in tabella (4.9). È bene, tuttavia, porre l'attenzione sul fatto che la differenza nei risultati sia sostanzialmente minima, essendo che si parla di discrepanze nell'ordine dei $10^{-7}m$.

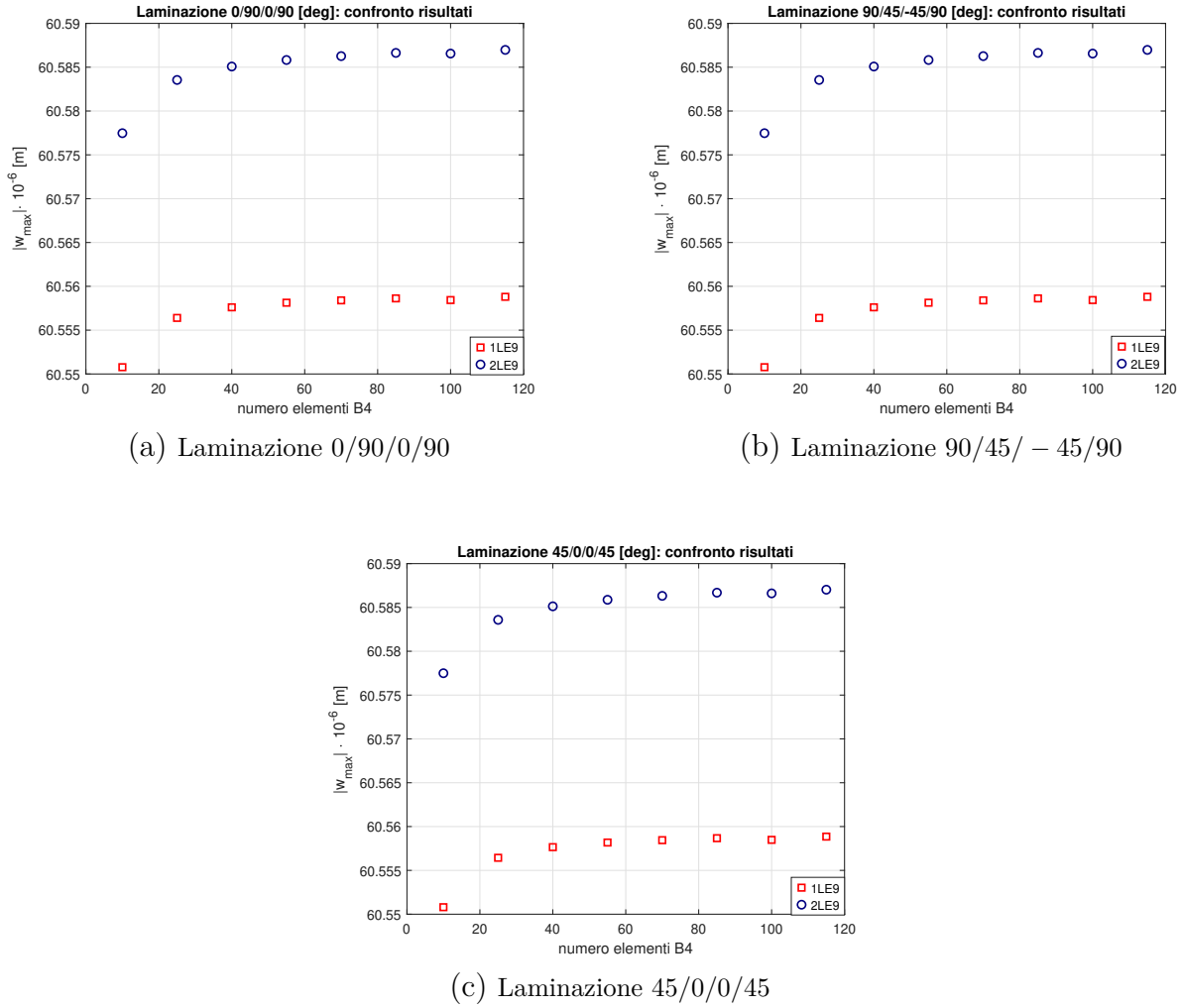


Figura 4.9: Analisi preliminari - trave composita: confronto dei risultati analisi statica variando la discretizzazione della sezione trasversale

Laminazione [deg]	Valore	1LE9			2LE9		
		10 B4	55 B4	100 B4	10 B4	55 B4	100 B4
0/90/0/90	w_{max} [m] · E-02	-0.6055	-0.6056	-0.6056	-0.6058	-0.6059	-0.6059
90/45/ - 45/90	w_{max} [m] · E-02	-0.6055	-0.6056	-0.6056	-0.6058	-0.6059	-0.6059
45/0/0/45	w_{max} [m] · E-02	-0.6055	-0.6056	-0.6056	-0.6058	-0.6059	-0.6059

Tabella 4.9: Analisi preliminari - trave: confronto dei risultati

4.2 Problemi 2D

4.2.1 Piastra isotropa incastrata su due lati

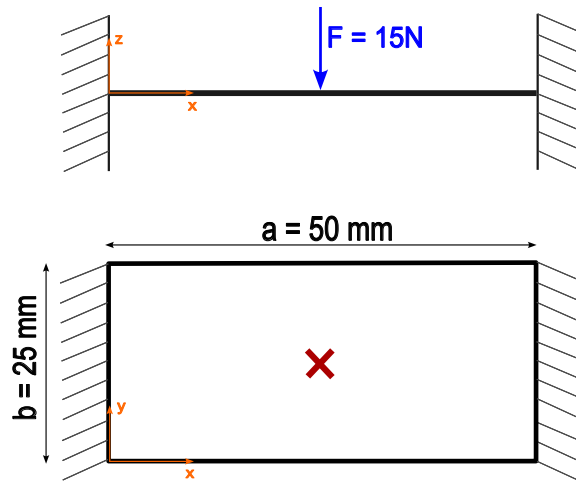


Figura 4.10: Analisi preliminari - piastra isotropa

Il primo caso di analisi vede come oggetto una piastra rettangolare avente dimensioni $a = 50\text{ mm}$, $b = 25\text{ mm}$, spessore $s = 1\text{ mm}$, come riportato in figura (4.10), realizzata in lega di alluminio ERGAL (SAE-7075), con le caratteristiche meccaniche riportate in tabella (4.10).

Materiale	E [GPa]	ν	ρ [kg/m^3]
ERGAL (SAE-7075)	72.5	0.33	2810

Tabella 4.10: Analisi preliminari - caratteristiche materiale piastra isotropa

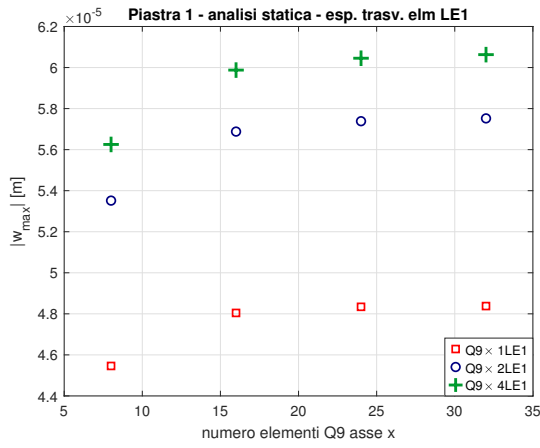
Analisi statica

Una forza, di modulo $F = 15\text{ N}$, è applicata nella direzione z negativa sul punto di mezzeria della piastra. L'obiettivo è realizzare un'analisi statica per la verifica di convergenza relativamente allo spostamento w di tale punto, al variare della discretizzazione sul piano x - y , che ha visto l'impiego di un numero variabile di elementi finiti di tipo Q9, e di quella nello spessore lungo l'asse z . I risultati saranno poi messi in paragone con la soluzione analitica data dall'approssimazione della piastra incastrata ai due lati corti ad una trave con estremi incastrati, seguendo il modello di Eulero-Bernoulli. In particolare la soluzione analitica in tal caso è data da:

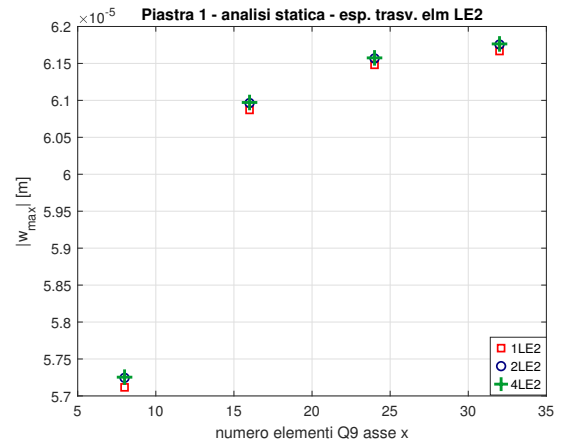
$$w_{maxEB} = \frac{FL^3}{192EI} \quad (4.1)$$

È stato, infine, operato un confronto con la soluzione allo stesso identico problema, ottenuta mediante il codice commerciale MSC Patran/Nastran, con mesh costituita da 402 elementi solidi di tipo Tet10 (identica per analisi modale). I risultati sono messi in evidenza in seguito.

Dai primi risultati, ottenuti mediante elementi di tipo LE1 e LE2, si può notare la tendenza a una convergenza dal basso del risultato. L'analisi mediante elementi LE1 mostra una differenza significativa di risultati a seconda del numero di elementi adottati per la discretizzazione trasversale, mentre l'analisi tramite elementi LE2 mostra una discrepanza meno significativa.



(a) Elementi LE1



(b) Elementi LE2

Figura 4.11: Analisi preliminari - piastra: risultati analisi statica con elementi LE1 e LE2

Volendo operare un confronto basato sul parametro Δw , si rimanda il lettore alla tabella (4.11), che riporta il paragone tra i risultati ottenuti con una discretizzazione trasversale operata con 4 elementi LE1 e 4 elementi LE2, al variare della discretizzazione sul piano x-y.

Modello	w [m]	Δw
8×4 Q9, 4 elm LE1	-5.6251E-05	12.99%
16×8 Q9, 4 elm LE1	-5.9882E-05	7.39%
24×12 Q9, 4 elm LE1	-6.0453E-05	6.50%
32×16 Q9, 4 elm LE1	-6.0630E-05	6.23%
Modello	w [m]	Δw
8×4 Q9, 4 elm LE2	-5.7250E-05	11.45%
16×8 Q9, 4 elm LE2	-6.0970E-05	5.70%
24×12 Q9, 4 elm LE2	-6.1580E-05	4.76%
32×16 Q9, 4 elm LE2	-6.1760E-05	4.47%

Tabella 4.11: Analisi preliminari - piastra: confronto risultati analisi statica con 4 elm LE1 o LE2

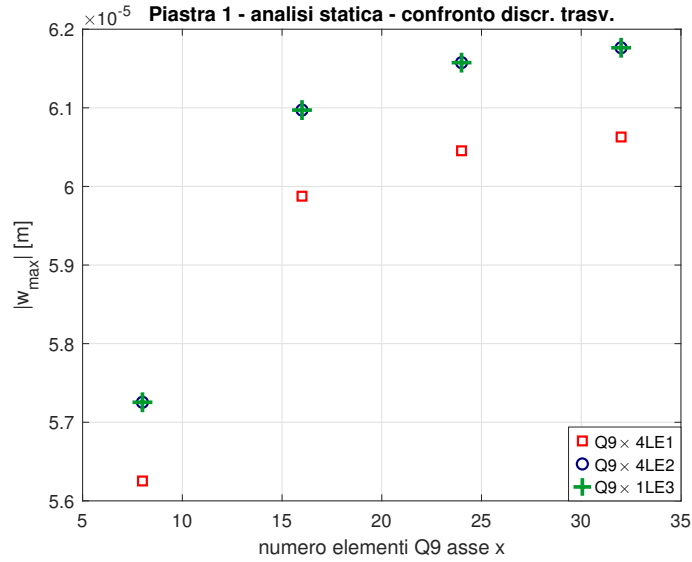


Figura 4.12: Analisi preliminari - piastra: confronto risultati analisi statica al variare della discr. trasv.

Il grafico di figura (4.12) mette in evidenza come i risultati ottenuti mediante 4 elementi di tipo LE2 siano sostanzialmente identici a quelli ottenuti con un solo elemento LE3 adottato per la discretizzazione trasversale. Volendo confrontare i risultati ottenuti al variare della discretizzazione trasversale, a parità di discretizzazione sul piano x-y (con 32×16 elementi Q9), si ottiene quanto riportato in tabella (4.12). Per completezza sono stati riportati anche il risultato teorico EB ed il valore ottenuto mediante solutore commerciale MSC Patran/Nastran.

Modello	w [m]	Δw	σ_x [MPa]	σ_y [MPa]
32×16 Q9, 4 elm LE2	-6.1760E-05	4.47%	48.4456	38.1807
32×16 Q9, 1 elm LE3	-6.1760E-05	4.47%	50.9291	40.6641
MSC Patran/Nastran solid	-6.0900E-05	5.82%	49.0561	38.9142
Analitico EB	-6.4660E-05			

Tabella 4.12: Analisi preliminari - piastra: confronto risultati analisi statica

Si riporta, infine, la rappresentazione della deformata statica della piastra, in figura (4.13).

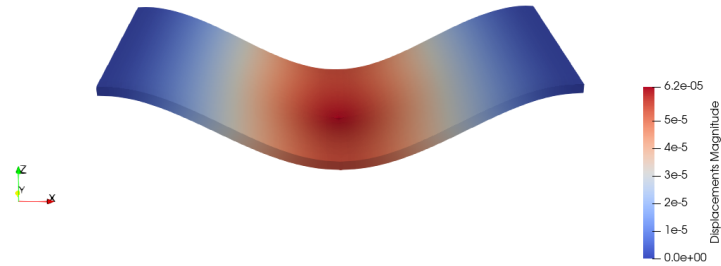


Figura 4.13: Analisi preliminari - piastra: deformata statica

Analisi modale

In analogia a quanto visto per le analisi 1D, in questo paragrafo l'obiettivo è l'esposizione dei risultati relativi all'analisi modale sulla piastra 1. Tali analisi sono state condotte variando la discretizzazione sul piano x-y e nella direzione trasversale z. Come avvenuto al paragrafo precedente, è stata svolta un'analisi di confronto mediante il codice commerciale MSC Patran/Nastran.

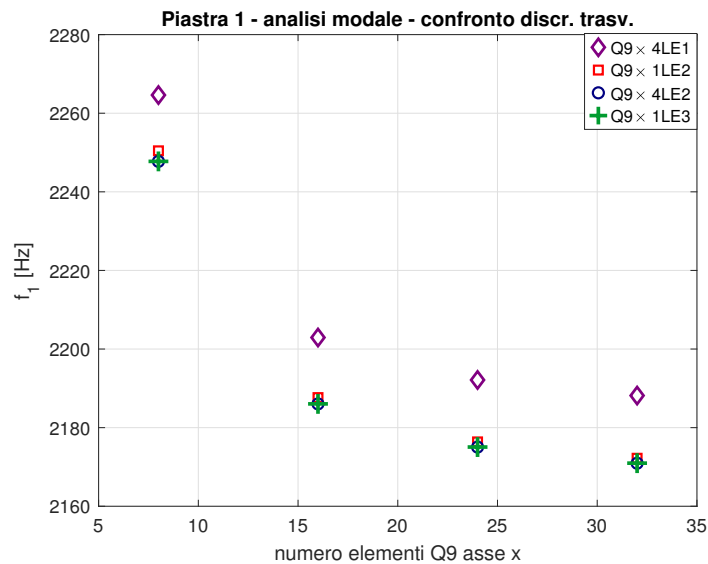


Figura 4.14: Analisi preliminari - piastra: analisi modale, confronto risultati f_1 [Hz]

Il grafico riportato in figura (4.14) mostra un confronto tra i risultati ottenuti dalle analisi condotte al variare della tipologia di elementi per discretizzare la piastra in direzione dello spessore. In particolare si mette in evidenza il valore della prima frequenza propria della piastra. A parità di discretizzazione sul piano x-y (che vede l'uso di un numero crescente di elementi Q9), si nota come i risultati ottenuti adottando elementi di tipo LE1 per discretizzare lo spessore si

discostino molto dagli altri. L'andamento mostra, in tutti i casi, una convergenza dall'alto. A questo punto, considerando i casi di discretizzazione 32×16 elementi Q9 sul piano x-y, si riportano, in tabella (4.13), i risultati relativi alle prime 5 frequenze naturali, al variare della discretizzazione lungo lo spessore. Viene, inoltre, riportato il confronto con l'analisi modale svolta mediante SOL103 di MSC Patran/Nastran.

Modello	f_1 [Hz]	f_2 [Hz]	f_3 [Hz]	f_4 [Hz]	f_5 [Hz]
32×16 Q9, 4 elm LE1	2188.1616	3483.7313	6013.9923	8004.2841	10735.5205
32×16 Q9, 1 elm LE2	2172.2119	3475.7908	5972.4892	7977.0918	10658.0251
32×16 Q9, 4 elm LE2	2170.9488	3470.7870	5966.3030	7963.5699	10645.5749
32×16 Q9, 1 elm LE3	2170.9636	3470.7946	5966.3489	7963.6010	10645.5755
MSC Patran/Nastran solid	2249.4890	3659.8790	6301.5250	8601.2580	10945.9200

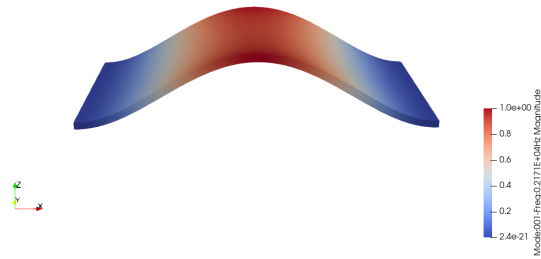
Tabella 4.13: Analisi preliminari - piastra: confronto risultati analisi modale

In tabella (4.14) sono, per completezza espositiva, riportate le prime 10 frequenze naturali nel caso di discretizzazione 32×16 Q9 sul piano x-y, 1 elemento LE3 sullo spessore, in confronto ai risultati ottenuti mediante MSC Patran/Nastran.

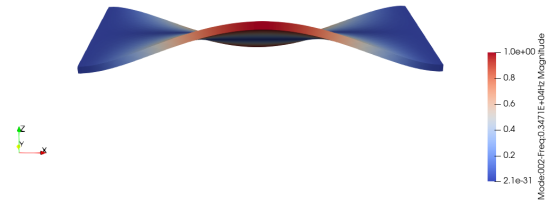
f [Hz]	32×16 Q9, 1 elm LE3	MSC Patran/Nastran solid	Gen. FM
f_1	2170.9636	2249.4890	Fless. x-z
f_2	3470.7946	3659.8790	Tors. x
f_3	5966.3489	6301.5250	Fless. x-z
f_4	7963.6010	8601.2580	Tors. x
f_5	10645.5755	10945.9200	Tors. x
f_6	11674.6888	12651.1700	Fless. x-z
f_7	13983.6949	15560.1800	Tors. x
f_8	15292.6151	16380.2400	Tors. x
f_9	19227.2523	21496.8100	Fless. x-z
f_{10}	21804.2274	24347.9300	Tors. x

Tabella 4.14: Analisi preliminari - piastra: risultati analisi modale, prime 10 frequenze naturali

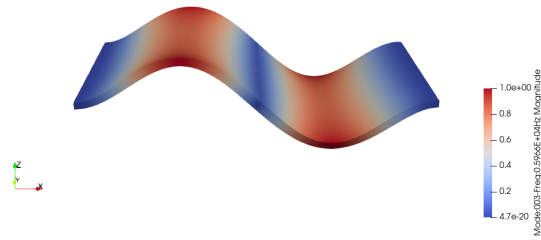
Infine, in figura (4.15) sono riportate le prime 5 forme modali della piastra.



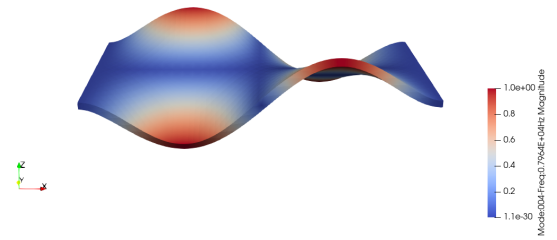
(a) FM 1 - $f_1 = 2170.9636Hz$



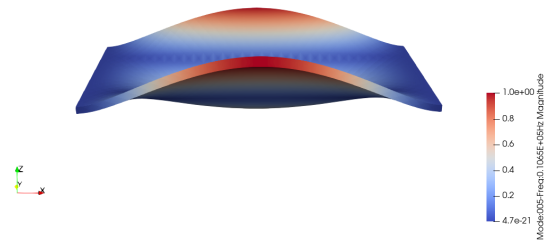
(b) FM 2 - $f_2 = 3470.7946Hz$



(c) FM 3 - $f_3 = 5966.3489Hz$



(d) FM 4 - $f_4 = 7963.7010Hz$



(e) FM 5 - $f_5 = 10645.5755Hz$

Figura 4.15: Analisi preliminari - piastra: prime 5 forme modali. Modello: 32×16 Q9, 1 LE3

4.2.2 Piastra isotropa appoggiata

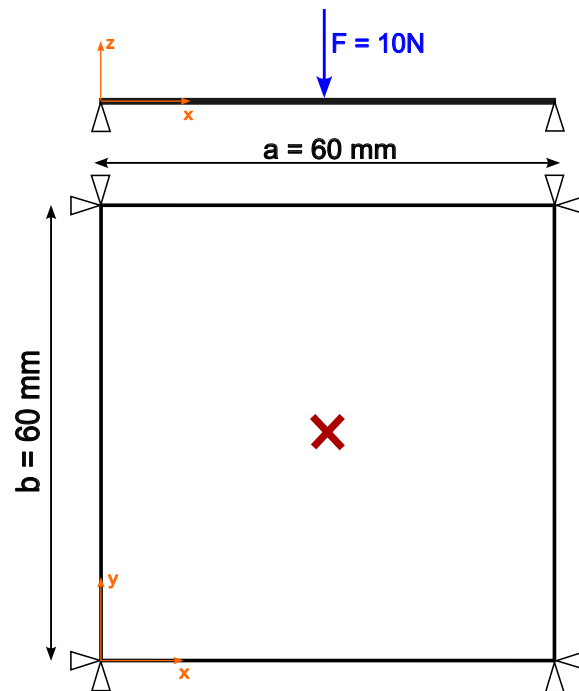


Figura 4.16: Analisi preliminari - piastra isotropa

Il secondo caso di analisi vede protagonista una piastra quadrata di dimensioni $a = b = 60\text{ mm}$, spessore $s = 2\text{ mm}$, visibile in figura (4.16), appoggiata su 4 lati. La piastra è realizzata nella medesima lega di alluminio del caso precedente, pertanto per le caratteristiche meccaniche si rimanda il lettore alla tabella (4.10).

Analisi statica

È stata applicata alla piastra, nel punto di mezzeria, una forza di intensità $F = 10\text{ N}$ diretta nel verso negativo dell'asse z . L'obiettivo dell'analisi consiste nella verifica di convergenza al valore approssimato dato dalla teoria CLT.

In questo caso, basandosi sull'esperienza delle analisi precedenti, si è deciso di svolgere 5 analisi diverse:

- Le prime 3 con pari discretizzazione sul piano x - y , costituita da 16×16 elementi Q9, variando la discretizzazione nello spessore.
- Le restanti due prima con discretizzazione 24×24 e poi con 32×32 elementi Q9 sul piano x - y ; 4 elementi LE3 nello spessore.

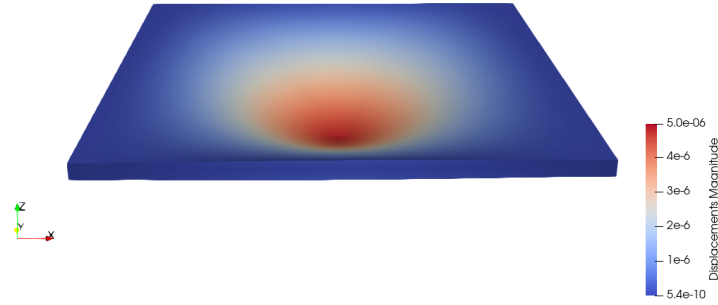


Figura 4.17: Analisi preliminari - piastra: deformata statica

In tabella (4.15) sono riportati i risultati in forma di confronto. In figura (4.17) è riportata la deformata statica della piastra, con riferimento al modello 32×32 Q9, 4 elm LE3.

Modello	w [m]	Δw	σ_x [MPa]	σ_y [MPa]
16×16 Q9, 4 elm LE1	-4.6950E-06	10.91%	6.4835	6.2059
16×16 Q9, 4 elm LE2	-4.7880E-06	9.14%	6.5772	6.2942
16×16 Q9, 4 elm LE3	-4.7880E-06	9.14%	6.4769	6.1939
24×24 Q9, 4 elm LE3	-4.8140E-06	8.65%	7.7452	7.4643
32×32 Q9, 4 elm LE3	-4.8190E-06	8.56%	8.5451	8.2652
Analitico CLT	-5.2700E-06			

Tabella 4.15: Analisi preliminari - piastra: confronto risultati analisi statica

Dai risultati in tabella (4.15) viene messo in evidenza il fatto che una mesh più fitta sul piano x-y porti ad un avvicinamento dei risultati a quelli previsti dalla teoria. Anche la discretizzazione nello spessore gioca un ruolo importante, reso evidente soprattutto dai primi 3 risultati riportati in tabella.

4.2.3 Piastra composita incastrata su due lati

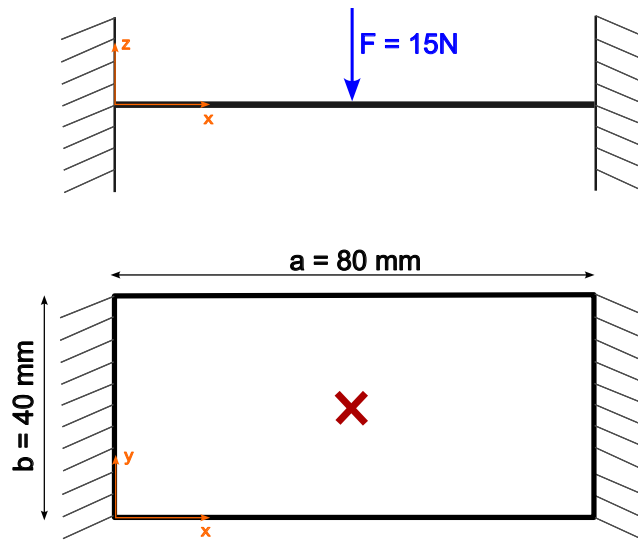


Figura 4.18: Analisi preliminari - piastra composita incastrata su due lati

Il terzo caso di analisi 2D prevede l'analisi statica e modale di una piastra in materiale composito, avente i dati geometrici riportati in figura (4.18) e spessore totale pari a $s = 2\text{ mm}$. La laminazione prevede 4 strati, ognuno spesso 0.5 mm , disposti secondo lo schema $(0/45/45/0)$ [deg]. Il materiale adottato è un CFRP denominato IM7/8552, con i dati riportati in tabella (4.16)⁷.

Materiale	E_1 [GPa]	E_2 [GPa]	E_3 [GPa]	ν_{12}	ν_{13}	ν_{23}	ρ [kg/m ³]
IM7/8552	165.0	9.0	9.0	0.34	0.34	0.5	1580

Tabella 4.16: Analisi preliminari - caratteristiche materiale piastra composita

Analisi statica

È stata applicata una forza di modulo $F = 15\text{ N}$, direzione negativa dell'asse z , sul punto di mezzeria della piastra. Si vuole determinare lo spostamento verticale w del punto di mezzeria. Basandosi sull'esperienza derivante dai risultati dei precedenti paragrafi, le analisi verranno condotte adottando un numero limitato di discretizzazioni, al fine di ottenere un buon trade-off tra risultati e costo computazionale. Si è deciso di operare le verifiche mediante le seguenti combinazioni di discretizzazione:

- Le prime 3 con pari discretizzazione sul piano x - y , costituita da 20×10 elementi di tipo Q9, variando la discretizzazione nello spessore (2 elementi LE1, 2 elementi LE2, 2 elementi LE3).
- Le restanti 2 prima con discretizzazione 40×20 e poi 60×30 sul piano x - y , 2 elementi LE3 nello spessore.

A differenza di quanto avvenuto in precedenza, si è scelto di mostrare anche i costi computazionali delle analisi, in termini di tempo di completamento. I risultati sono riportati in tabella (4.17).

⁷Non sono stati riportati, per questioni di spazio, i valori dei Moduli a taglio G_1 , G_2 , G_3 . Possono esser facilmente intuiti tramite i valori di E e ν

Modello	w [m]	σ_x [MPa]	σ_y [MPa]	CPU time [s]
20×10 Q9, 2 elm LE1	-0.1508E-03	5.5421	4.8777	1.67
20×10 Q9, 2 elm LE2	-0.1635E-03	6.6952	7.1207	2.69
20×10 Q9, 2 elm LE3	-0.1636E-03	6.2048	7.6622	4.18
40×20 Q9, 2 elm LE3	-0.1657E-03	6.7217	7.6151	34.43
60×30 Q9, 2 elm LE3	-0.1661E-03	5.6776	7.1411	162.79

Tabella 4.17: Analisi preliminari - piastra composita: confronto risultati analisi statica

In figura (4.19) si riporta la deformata statica della piastra, riferita a discretizzazione 60×30 Q9, 2 elementi LE3.

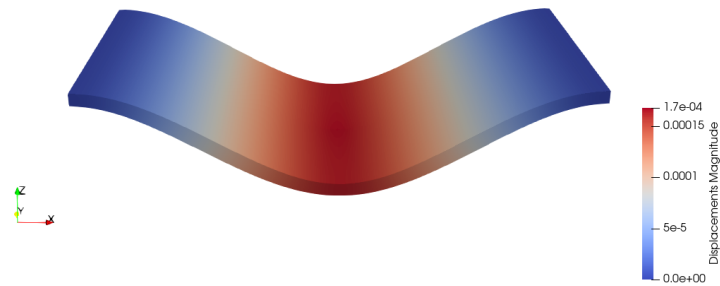


Figura 4.19: Analisi preliminari - piastra: deformata statica

Analisi modale

L'analisi modale vede il confronto, in questo caso, tra due soluzioni di discretizzazione:

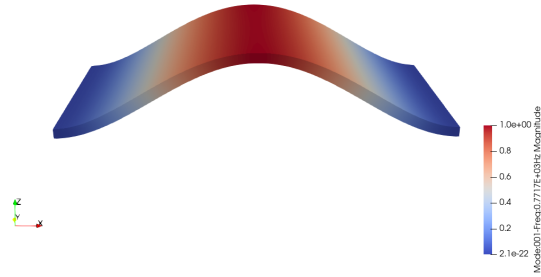
- Discretizzazione 20×10 elementi Q9 sul piano x-y, 2 elementi LE3 nello spessore.
- Discretizzazione 60×30 elementi Q9 sul piano x-y, 2 elementi LE3 nello spessore.

L'obiettivo è mostrare le prime 10 frequenze proprie della piastra e, nel secondo caso di discretizzazione, mostrare le prime 5 forme modali. I risultati relativi alle frequenze proprie sono riportati in tabella (4.18), la quale riporta anche i costi computazionali, all'ultima riga.

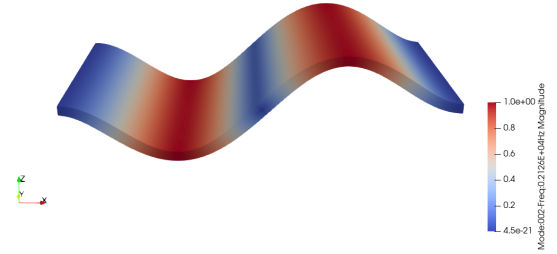
f [Hz]	20×10 Q9, 2 elm LE3	60×30 Q9, 2 elm LE3	Gen. FM
f_1	778.0011	771.7207	Fless. x-z
f_2	2153.8653	2125.7729	Fless. x-z
f_3	3834.8297	3812.9786	Tors. x
f_4	4247.5976	4163.0272	Fless. x-z
f_5	7074.5816	6871.3061	Fless. x-z
f_6	7510.2840	7468.4263	Tors. x
f_7	10664.8738	10244.4114	Fless. x-z
f_8	11069.2462	10996.1887	Tors. x
f_9	13018.3960	12970.2926	Fless. x-y
f_{10}	13883.9619	13856.7333	Fless. x-z
CPU time [s]	5.89	171.23	

Tabella 4.18: Analisi preliminari - piastra: risultati analisi modale, prime 10 frequenze naturali

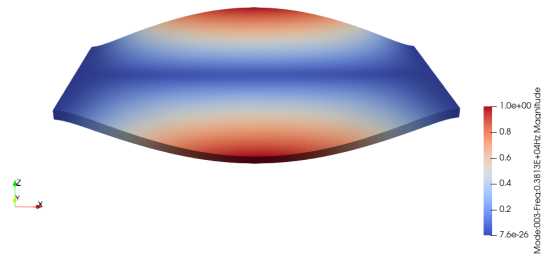
I risultati rendono evidente il fatto che un modello che impiega un numero maggiore di DOF ottenga, in linea generale, valori più bassi di frequenze (in quanto risulta "meno rigido"); al tempo stesso, però, la maggior accuratezza porta con sé differenze significative sul costo computazionale. In figura (4.20) sono riportate le prime 5 forme modali della piastra, con discretizzazione 60×30 Q9 sul piano x-y, 2 elementi LE3 nello spessore.



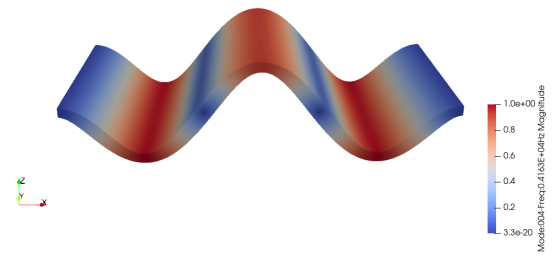
(a) FM 1 - $f_1 = 771.7207Hz$



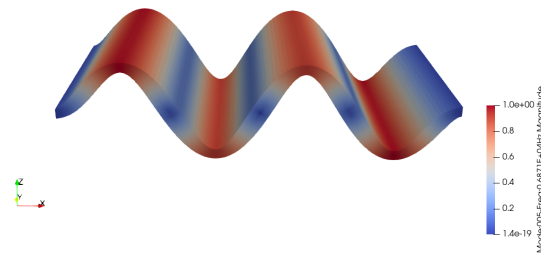
(b) FM 2 - $f_2 = 2125.7729Hz$



(c) FM 3 - $f_3 = 3812.9786Hz$



(d) FM 4 - $f_4 = 4163.0272Hz$



(e) FM 5 - $f_5 = 6871.3061Hz$

Figura 4.20: Analisi preliminari - piastra: rappresentazione delle prime 5 forme modali con modello 60×30 Q9, 2 elementi LE3

Capitolo 5

Analisi PID e stress residui su componenti in materiale composito

In questo capitolo l'obiettivo è lo svolgimento di analisi di curing su componenti in composito con sezione a L adottando il modello di analisi descritto in precedenza nell'elaborato. Si fa riferimento al paper "Analysis of process-induced deformations and residual stresses in curved composite parts considering transverse shear stress and thickness stretching" [5], pubblicato nel 2020 da Zappino, Petrolo *et al.*.

5.1 Geometria e materiale

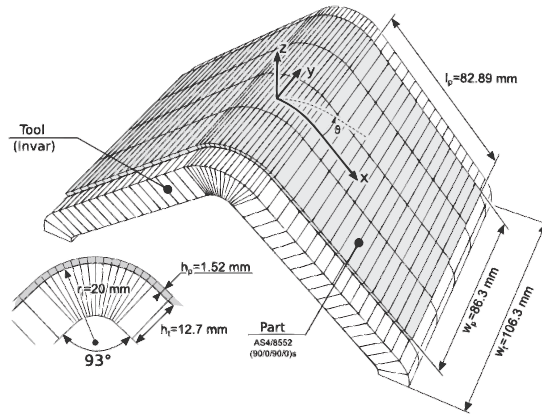


Figura 5.1: Analisi PID - geometria della trave a L. Fonte: [5]

In figura (5.1) è riportata la geometria di riferimento per la trave ad L adottata in questa fase di analisi, insieme al tool. Le dimensioni della trave mettono in luce la possibilità, sfruttata in fase di analisi FEM, di adottare condizioni di simmetria per ridurre l'onere computazionale.

I materiali impiegati sono due:

- Il materiale composito unidirezionale è ottenuto da un prepreg AS4/8552 prodotto da Hexcel, costituito per il 35% in peso di matrice in resina epossidica 8552 e per il 65% di fibra di carbonio AS4HexTow con densità superficiale di $190 \frac{g}{m^2}$. La laminazione adottata è $(90/0/90/0)_s$, per un totale di 8 strati.
- Il tool è realizzato in Invar, avente $E = 150 GPa$, $\nu = 0.285$, $\beta = CTE = 1.56 \cdot 10^{-6} / ^\circ C$.

Per visualizzare i parametri relativi al ciclo di cura si rimanda il lettore alla consultazione della tabella (B.1), tratta dal paper [5] di Zappino, Petrolo *et al.*.

5.2 Risultati dell'analisi

In questa parte dell'elaborato si pone come obiettivo l'esposizione dei risultati ottenuti mediante analisi FEM-CUF del ciclo di cura, in termini angolo di spring-in a seguito della rimozione del tool.

5.2.1 Angolo di spring-in

L'andamento dell'angolo di spring-in è stato calcolato prendendo a riferimento lo strato superiore di materiale composito, nella zona curva e nella flangia destra del pezzo. I risultati sono riproducibili, per simmetria, anche nella flangia sinistra. L'angolo ϕ di spring-in è calcolato, sulla base di considerazioni di natura trigonometrica, seguendo la formula riportata in (5.1).

$$\phi = \arctg\left(\frac{z + |u_z|}{x}\right) - \arctg\left(\frac{z}{x}\right) \quad (5.1)$$

Dove x e z sono le coordinate del sistema di riferimento cartesiano centrato nel piano di simmetria della trave ad L, mentre u_z è il valore della componente di spostamento verticale nel punto considerato. Il risultato è mostrato nel grafico di figura (5.2). Tale risultato risulta fondamentale al fine di introdurre le analisi che verranno condotte successivamente con il modello GPR in Python.

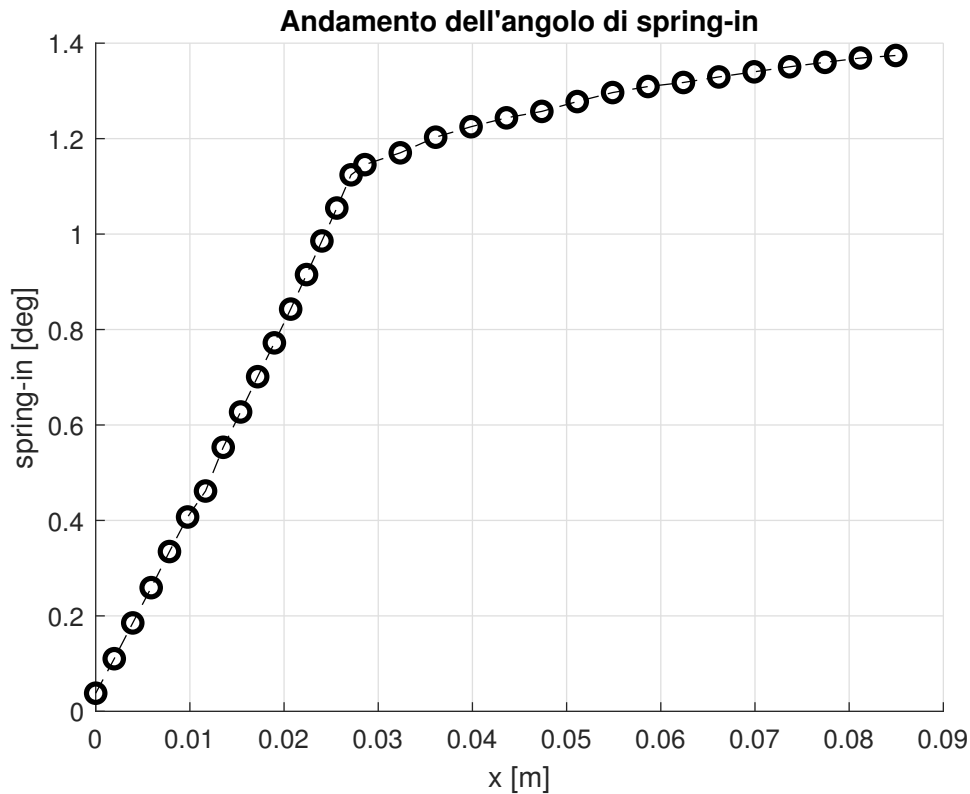


Figura 5.2: Analisi PID - andamento angolo di spring-in

Capitolo 6

Reti Neurali integranti GPR: analisi strutturali statiche e di curing

6.1 Introduzione

Nell'ambito di questo capitolo, è stato deciso di applicare i primi quattro metodi descritti come approcci di ML-NN classici da Zobeiry in [18] a fini di test, in modo da mostrare punti di forza e debolezze di ogni approccio.

Infine, come si vedrà, è stato elaborato in Python un codice di rete neurale integrante GPR, da impiegare per problemi strutturali di natura statica. Il training delle NN è stato basato su dati di tipo multi-fidelity, seguendo l'esempio di Petrolo, Zappino *et al.* in [4]. Un approccio multi-fidelity prevede la raccolta di dati da simulazioni e campagne sperimentali e la loro successiva classificazione:

- **Dati ad alta fedeltà (HF):** sono valori estratti da simulazioni ad alta accuratezza oppure dati sperimentali (come in [4]).
- **Dati a bassa fedeltà (LF):** ottenuti da simulazioni basate su discretizzazioni caratterizzate da significativa approssimazione.

A differenza di quanto fatto da Petrolo, Zappino *et al.* in [4], nelle casistiche oggetto della presente tesi il training delle NN non ha visto l'intervento di dati di carattere sperimentale. Le proprietà alla base delle simulazioni FEM-CUF impiegate nel presente lavoro saranno discusse nei paragrafi successivi.

6.1.1 Applicazione del ML classico al caso di analisi statica su trave

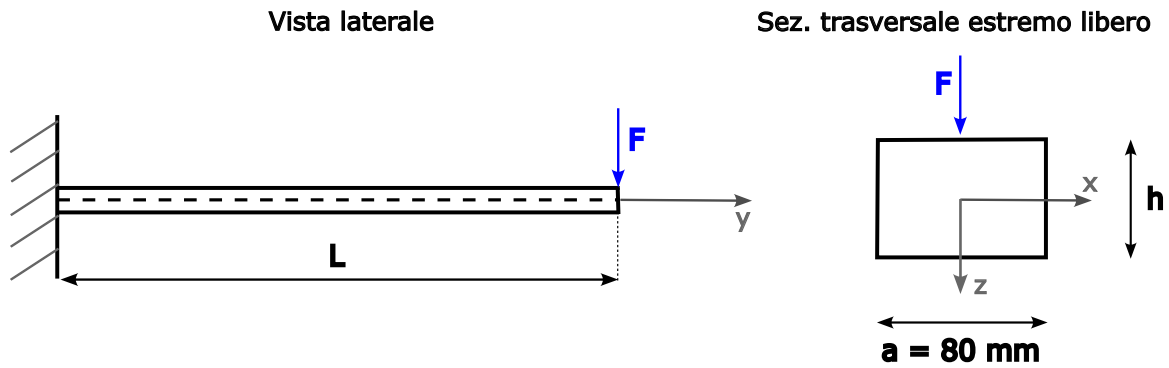


Figura 6.1: Trave CFRP caricata a flessione

Materiale	E_1 [GPa]	E_2 [GPa]	E_3 [GPa]	ν_{12}	ν_{13}	ν_{23}	ρ [kg/m ³]
CFRP	137.9	14.5	14.5	0.21	0.21	0.21	1570

Tabella 6.1: Materiale trave CFRP caricata a flessione

In questa sezione l'obiettivo è implementare degli algoritmi di reti neurali basati su metodi machine-learning di tipo classico, in linguaggio Python, come da esempi [18] di Zobeiry . L'idea è quella di mostrare i punti di forza dei vari approcci di base, in modo da selezionare il metodo più adatto per le applicazioni successive del capitolo. Tali algoritmi verranno applicati a un caso studio specifico: l'analisi statica di una trave in materiale composito CFRP, le cui caratteristiche sono riportate in tabella (6.1) incastrata all'estremo sinistro, libera all'estremo destro e soggetta a un carico di flessione applicato proprio su quest'ultimo, come da figura (6.1).

La trave in oggetto, come detto, è realizzata in materiale composito CFRP, in 4 strati con laminazione (0/90/90/0); la lunghezza è fissata ad 1.000 m, la larghezza è pari a 0.800 m, mentre lo spessore è variabile tra 0.020 m e 0.040 m. Proprio lo spessore, insieme alla forza applicata all'estremo libero della trave, con quest'ultima variabile tra 0.100 N e 120.000 N, sono le variabili indipendenti scelte come fondamentali per l'analisi condotta. Le varie reti neurali implementate avranno l'obiettivo di prevedere, basandosi sui dati di training, l'andamento dello spostamento verticale all'estremo libero della trave nelle zone dove i dati non sono disponibili.

Distribuzione dei dati iniziali mediante algoritmo Monte Carlo in MATLAB

La distribuzione dei dati di forza applicata forniti in input al solutore FEM-CUF si basa su un codice Matlab che implementa una simulazione con metodo Monte Carlo. La funzione densità di probabilità (PDF) scelta per l'estrazione dei dati è riportata nell'equazione (6.1).

$$p(x) = \frac{1}{F_{max} - F_{min}} \quad (6.1)$$

Come il lettore avrà notato, la $p(x)$ è una funzione costante, scelta in sede di analisi proprio perché si è deciso di dare uniformità nella probabilità di estrazione dei dati. L'unico vincolo di accettazione imposto sui valori di forza è stato l'aver uno scostamento relativo minimo del 5% tra un valore di forza e quello adiacente, in modo da forzare la varietà dei campioni.

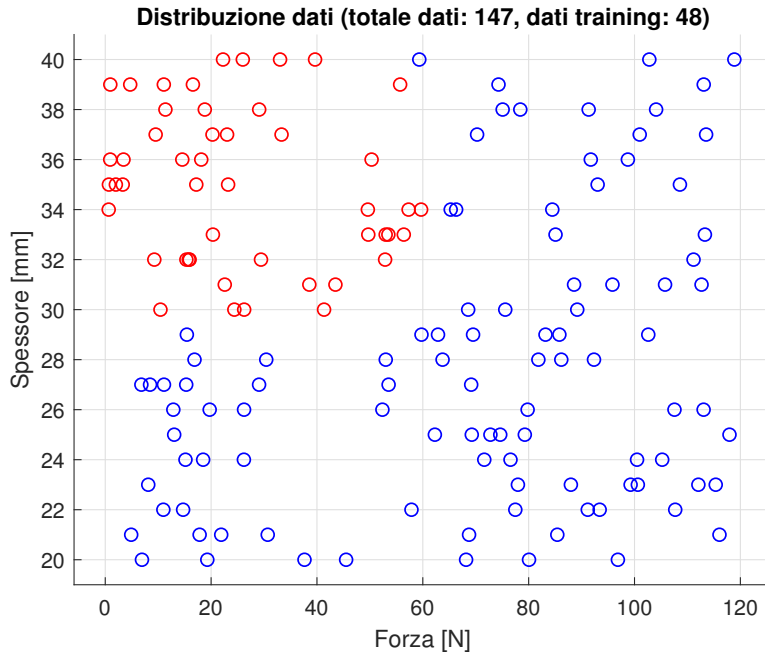


Figura 6.2: ML - distribuzione Monte Carlo dei dati

Come anticipato nel paragrafo precedente, lo spessore della trave è stato fatto variare tra 0.020 m e 0.040 m. L'accoppiamento tra spessore e forza, utilizzato per l'analisi e la generazione del dataset iniziale, è stato ottenuto anch'esso mediante l'algoritmo implementato secondo la simulazione Monte Carlo. In figura (6.2) è riportato il campionamento dei dati iniziali, ottenuto a seguito di cinque simulazioni consecutive eseguite in MATLAB: i dati in rosso (48) saranno utilizzati dalla NN per il training, quelli in blu (99) sono dati di validazione, utilizzati dalla NN per verificare la correttezza dell'estrapolazione fuori dal dominio di training. I 48 dati di training, indicati in rosso in figura (6.2), sono concentrati negli intervalli di forza e spessore $0.100 \text{ N} \leq F \leq 60.050 \text{ N}$ e $0.030 \text{ m} \leq s \leq 0.040 \text{ m}$.

6.1.2 Risultati dal training delle NN in Python

Approccio ML tradizionale

Nel primo caso è stato adottato un approccio ML tradizionale, implementando in Python una rete neurale costituita da 3 layer ognuno con 16 neuroni, con funzione di attivazione ReLU. I risultati ottenuti sono visibili nel grafico di figura (6.3a); la rete neurale mostra grande accuratezza di previsione nelle zone adiacenti ai dati di training, mentre risultano poco accurate le previsioni a bassi valori di spessore ed alti valori di forza. Ad ogni modo il training ha mostrato un test score di accuratezza pari a $R^2 = 99.3\%$.

Approccio Physics-Informed Feature

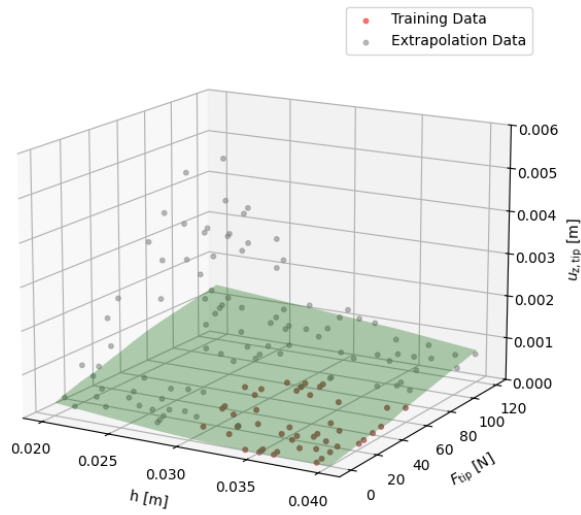
Il secondo approccio adottato mette in campo parzialmente la conoscenza della fisica alla base del problema analizzato. Sebbene la trave fosse in materiale composito, e dunque risulti un'approssimazione molto forte del suo comportamento, è stato deciso di impiegare una feature fisica che andasse a simulare lo spostamento al tip della trave come $u_z \approx \frac{F}{s^3}$, essendo s lo spessore della trave. Questo tipo di espressione si avvicina molto al valore previsto dalla TTEB, ovvero $u_{z,tip} = \frac{PL^3}{3EI}$, dove il momento di inerzia I è appunto dipendente da s^3 . Come si vede, a parità di tipologia di rete neurale (unica variazione data dalla feature fisica), la previsione del comportamento dei dati è decisamente migliore, arrivando a un test score di $R^2 = 99.8\%$.

Approccio Physics-Informed Loss

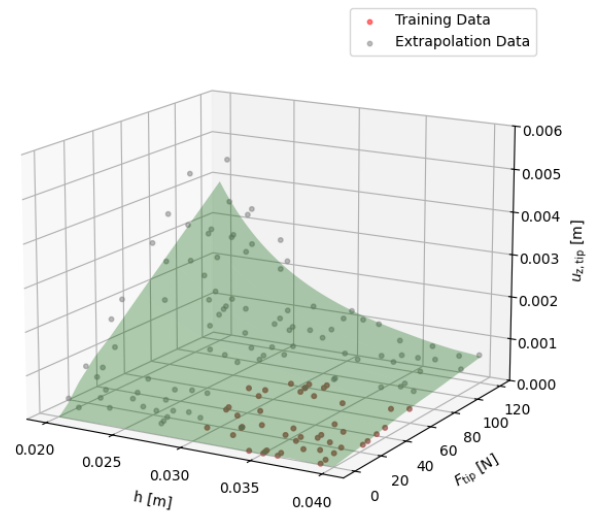
In questo caso è stata imposta una funzione di perdita per la rete neurale diversa dalla MSE, in modo da andar a inserire dei fattori correttivi diversificati a seconda della zona di previsione: nelle zone con previsioni accurate già dal codice 1 la penalità prevista è stata inferiore rispetto alle altre zone (5% contro 10%). Inoltre, rispetto agli altri 3 casi riportati, la rete neurale è stata resa più densa, inserendo 4 layer da 32 neuroni ognuno. I risultati non sono comunque soddisfacenti, arrivando ad aver i test score, nei 5 training consecutivi, pari, in ordine a $R^2 = 89.4$, $R^2 = 96.0\%$, $R^2 = 61.5\%$, $R^2 = 76.7\%$, $R^2 = 80.9\%$.

Approccio Physics-Informed Domain Transformation

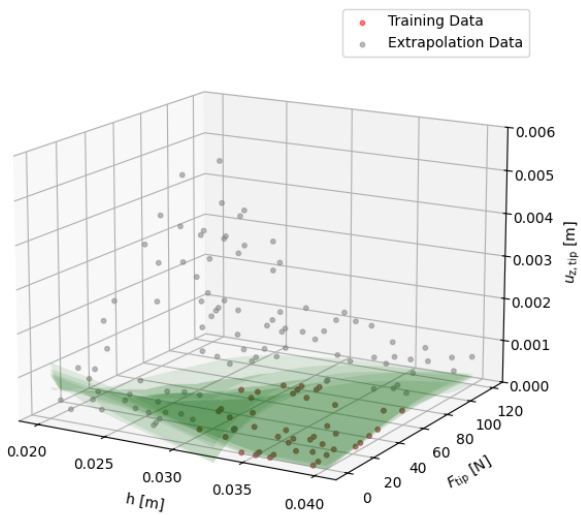
In quest'ultimo caso è stata applicata una trasformazione di dominio dei dati partendo dall'approccio physics-informed feature, andando a sottrarre da ogni previsione lo scostamento di quest'ultima rispetto al valore teorico previsto. Di nuovo, si ribadisce al lettore l'inaccuratezza introdotta dal voler approssimare lo spostamento u_z teorico mediante una funzione vicina alla TTEB nel caso di una trave in realtà composita. Ad ogni modo i risultati sono soddisfacenti, e mostrano un test score $R^2 = 99.9\%$.



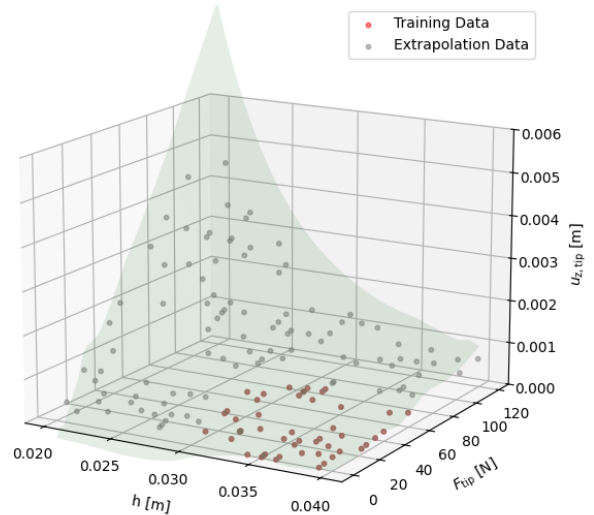
(a) Approccio NN tradizionale



(b) Approccio Physics-Informed Feature



(c) Approccio Physics-Informed Loss



(d) Approccio Physics-Informed Domain Transformation

Figura 6.3: Risultati del training delle NN in Python secondo i diversi approcci

Metodo	R^2 training
NN tradizionale	99.3%
Physics-Informed Feature	99.8%
Physics-Informed Loss	96.0%
Physics-Informed Domain Transformation	99.9%

Tabella 6.2: Metodi NN: riassunto prestazioni

I risultati riportati in tabella (6.2) riflettono solo le prestazioni dei metodi in sede di training: per questo motivo anche predizioni che sembrano scadenti hanno coefficiente di determinazione alto. Per pesare l'accuratezza della predizione verranno, successivamente, usati anche un R^2 di estrapolazione e il valore di RMSE.

6.2 Reti neurali integranti GPR per problemi multi-fidelity: applicazioni ad analisi FEM statiche

Mediante i risultati riportati nei paragrafi precedenti, è stato messo in evidenza il vantaggio dato dai metodi Physics-Informed Feature e Physics-Informed Domain Transformation rispetto ai restanti casi. Tuttavia, questi metodi di ML richiedono un costo computazionale superiore, che talvolta potrebbe non giustificare l'uso di una rete neurale, nata invece per rendere rapido il calcolo. Inoltre, almeno in casi semplici come quello di travi caricate a flessione, risulta poco significativo introdurre una feature nel calcolo della rete neurale: in primo luogo perché fornirebbe alla NN la legge da rispettare per ottenere i risultati, in secondo luogo perché non sempre queste feature corrispondono a leggi fisiche corrette; in tal senso, non sarebbe, ad esempio, corretto introdurre una feature basata sulla TTEB per guidare la rete neurale nella previsione di risultati su travi composite.

Sulla base di quanto detto sopra si comprende la necessità di trovare un compromesso tra la riduzione del costo computazionale associato all'analisi, che viene ottenuta dando alla rete neurale un set limitato di dati di training e facendo sì che essa ottenga molti altri dati, e l'effettiva validità dei risultati che la NN è in grado di estrapolare.

Seguendo l'approccio introdotto per problemi multi-fidelity su casi di travi composite L-SHAPE, trattato da Zappino, Schoenholz, Petrolo e Zobeiry in [4], nonché il materiale trattato da Zobeiry in [18] per i metodi ML tradizionale e Physics-Informed Loss, è stato sviluppato un codice Python che implementa il training di una rete neurale per la risoluzione di problemi legati a flessione e torsione di travi, incastrate all'estremo sinistro e libere al destro e caricate su quest'ultimo.

L'obiettivo delle analisi presentate nei paragrafi seguenti è dimostrare come una rete neurale, addestrata su un insieme limitato di dati – costituito in prevalenza da informazioni di tipo low-fidelity e, in misura minore, da dati high-fidelity – sia in grado di riprodurre con buona accuratezza i risultati ottenibili tramite analisi FEM-CUF, riducendo significativamente l'onere computazionale. Il training della rete neurale, implementata in Python, si basa su dati e modelli previamente ricavati mediante Gaussian Process Regression (GPR), sempre all'interno dello stesso codice. L'integrazione del GPR nel processo, seguendo la logica adottata da Zappino, Petrolo *et al.* in [4] consente di ridurre significativamente la quantità di dati necessari per l'addestramento della rete, contribuendo a rendere il processo complessivo meno oneroso dal punto di vista computazionale. I dati di partenza elaborati dal GPR derivano da un numero ristretto di simulazioni FEM-CUF, suddivise in base al livello di affidabilità secondo i seguenti criteri:

- **Dati low-fidelity (LF):** ottenuti da simulazioni FEM-CUF con elementi finiti di tipo Timoshenko (TE 0).
- **Dati high-fidelity (HF):** ottenuti da simulazioni FEM-CUF con espansione degli elementi di tipo Taylor arrestata al quinto ordine (TE 5).

I dati di validazione sono stati, infine, ottenuti mediante analisi FEM-CUF analoghe a quelle per i dati HF. Sia per le analisi di torsione sia per quelle di flessione, nel caso di trave isotropa, è stato fatto variare lo spessore della trave mantenendo costante il rapporto lunghezza/spessore L/h . I risultati hanno inoltre evidenziato come un corretto posizionamento dei dati high-fidelity all'interno del dominio possa influenzare in modo significativo l'accuratezza dell'estrapolazione effettuata dalla rete neurale.

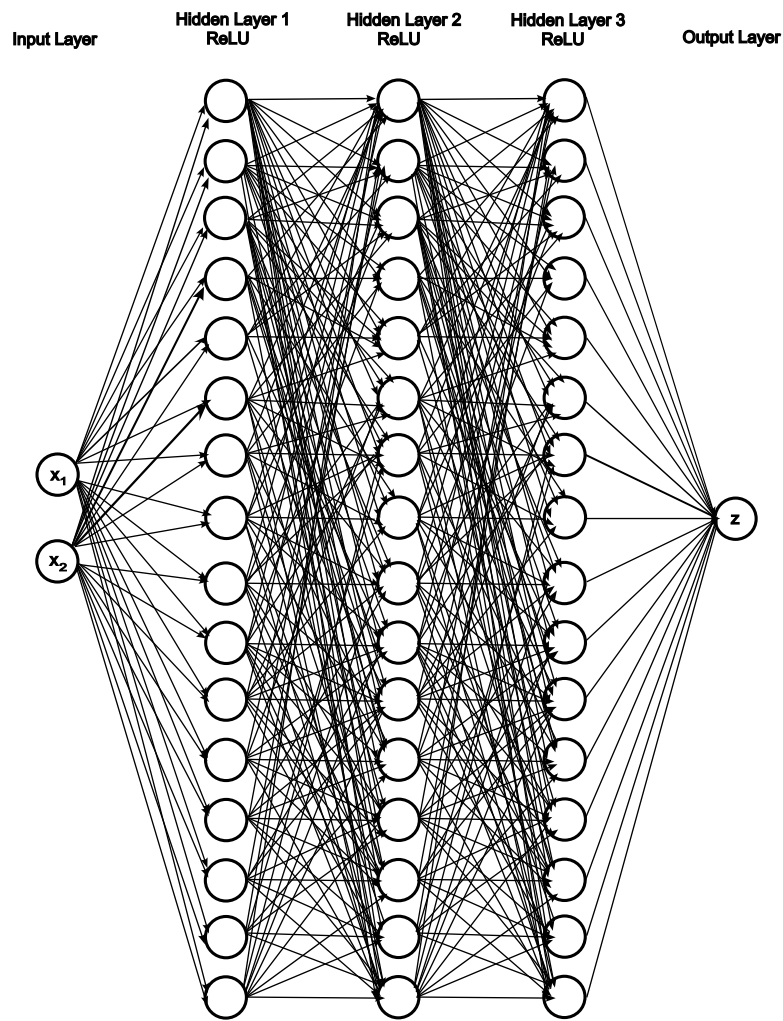


Figura 6.4: Schema della rete neurale

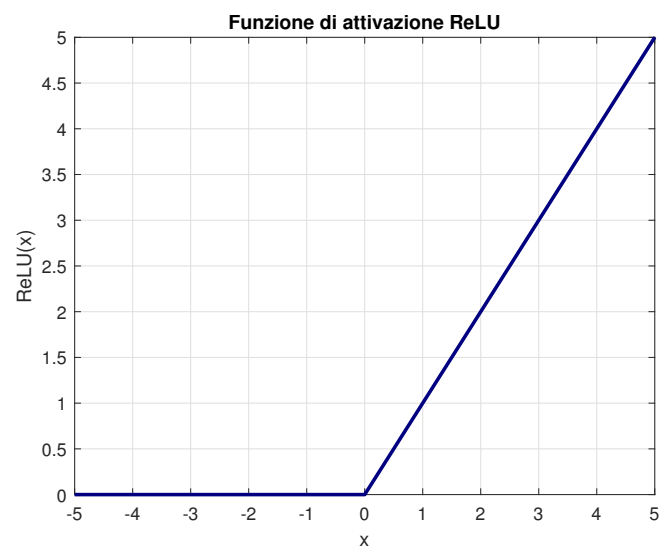


Figura 6.5: Funzione di attivazione ReLU

La rete neurale implementata in Python, mostrata nel suo schema in figura (6.4) è composta da tre hidden layer, ciascuno costituito da 16 neuroni con funzione di attivazione ReLU, mostrata

in figura (6.5). L'addestramento è stato condotto su 100 epoche, con l'integrazione di un algoritmo di Early Stopping estratto dalla libreria **Tensorflow**: esso consente di interrompere il training qualora, per 10 epoche consecutive, non si registri un miglioramento delle prestazioni, selezionando automaticamente i pesi ottimali raggiunti fino a quel punto. Tale meccanismo si è rivelato particolarmente utile, poiché nella pratica la rete neurale ha sempre raggiunto la convergenza prima del limite massimo di 100 epoche, contribuendo così a una sensibile riduzione del costo computazionale.

Durante il processo di training, è stato inoltre previsto un bilanciamento dei pesi assegnati ai dati: i dati high-fidelity sono stati ponderati maggiormente rispetto a quelli low-fidelity, al fine di compensare la maggiore presenza di rumore (noise) associato a questi ultimi. Nel caso in cui il training venga effettuato esclusivamente su dati low-fidelity, i pesi sono assegnati in maniera uniforme. L'accuratezza del modello, sia in fase di addestramento che di estrapolazione, è valutata mediante il coefficiente di determinazione R^2 , che quantifica rispettivamente lo scostamento tra i dati previsti dalla rete e quelli del training set, e quello rispetto ai dati di validazione (al di fuori del dominio di training).

6.2.1 Materiale per l'analisi di travi a sezione rettangolare

Il materiale utilizzato per le travi oggetto di analisi nel caso isotropo a sezione rettangolare è ERGAL, lega di alluminio ad alta resistenza comunemente impiegata in ambito aerospaziale. Nella tabella (6.3) sono riportate le principali proprietà meccaniche del materiale utilizzato nelle simulazioni.

Materiale	E [GPa]	ν	$\rho [kg/m^3]$
ERGAL (SAE-7075)	73.1	0.3	2780

Tabella 6.3: Caratteristiche meccaniche ERGAL

Nel caso con variazione di geometria, invece, è stato deciso di rendere anche il materiale una variabile, rimanendo sempre nell'ambito di materiali metallici isotropi. Per maggiori informazioni si invita il lettore a far riferimento al paragrafo specifico.

6.2.2 Trave isotropa caricata a flessione

In questa sezione è stata esplorata l'applicazione del codice NN-GPR sviluppato e introdotto in precedenza, al caso di una trave isotropa caricata a flessione, il cui schema è riportato in figura (6.6). Al variare del carico applicato e dello spessore, mantenendo costante il rapporto L/h in due casi diversi, si vuole valutare lo spostamento u_z al tip della trave.

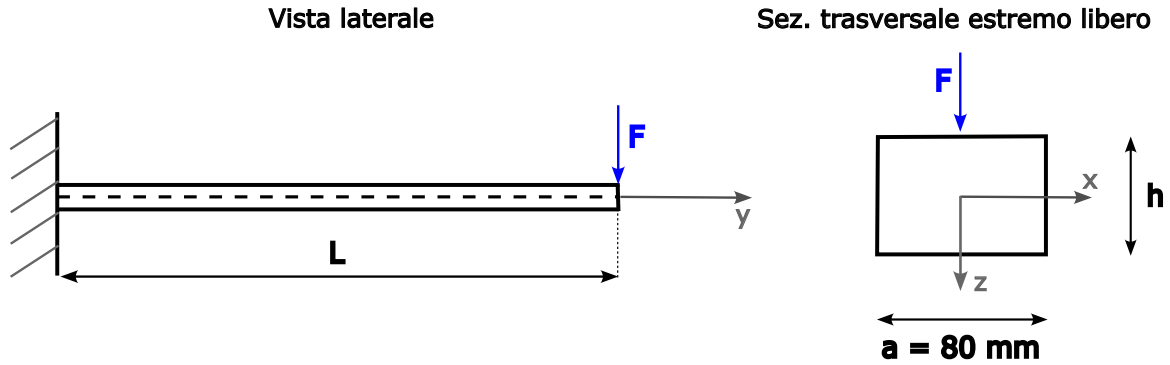


Figura 6.6: Trave isotropa caricata a flessione

È doveroso richiamare all'attenzione del lettore il criterio di classificazione dei dati usati per training e validazione:

- **Dati low-fidelity (LF):** ottenuti da simulazioni FEM-CUF con elementi finiti di tipo Timoshenko (TE 0).
- **Dati high-fidelity (HF):** ottenuti da simulazioni FEM-CUF con espansione degli elementi di tipo Taylor arrestata al quinto ordine (TE 5).
- **Dati di validazione:** ottenuti da analisi FEM-CUF impostate in maniera analoga al caso HF.

Risultati con $L/h = 10$

Inizialmente è stato condotto un tentativo di training basato esclusivamente su dati low-fidelity, al fine di valutare l'accuratezza raggiungibile e la sua variabilità in funzione del numero di dati impiegati. I risultati ottenuti sono riportati nelle figure (6.7a)(6.7b).

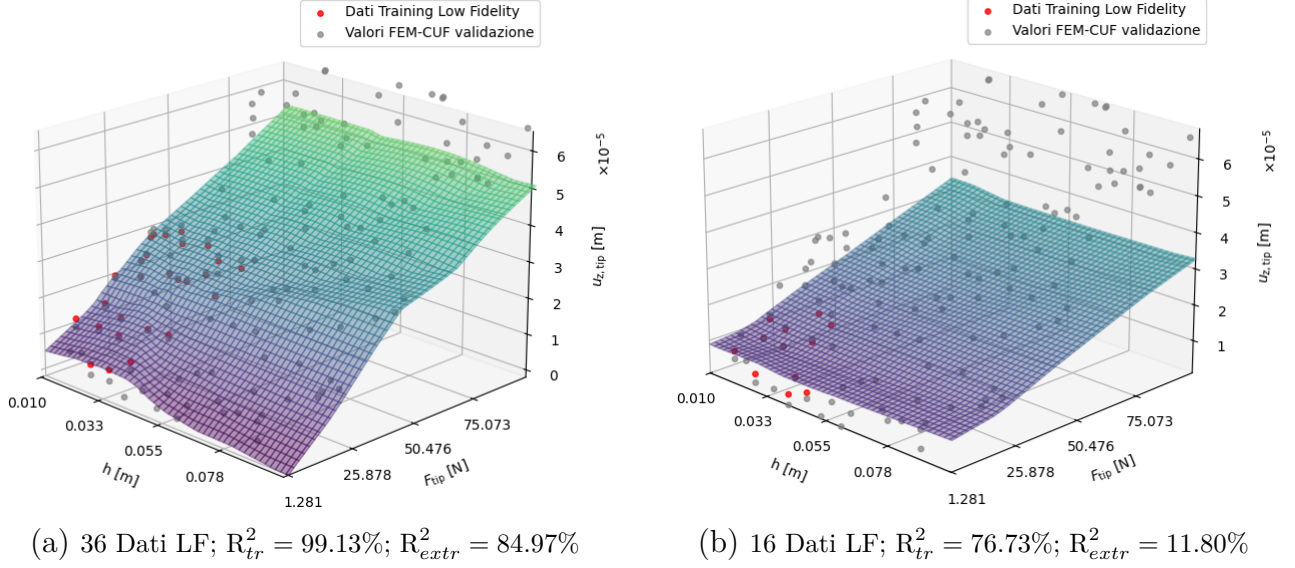


Figura 6.7: Risultati del training basati su dati low-fidelity per $L/h = 10$

Come si può notare, l'accuratezza dei risultati diminuisce significativamente nel momento in cui il numero di dati di training viene ridotto. In ambo i casi, inoltre, l'accuratezza risulta molto bassa nella zona al di fuori del dominio di training. I dati LF impiegati nel training sono riportati in tabella (6.4).

h [m]	F [N]	u_z [m]
0.0100	13.0624	8.6331E-06
0.0100	28.4475	1.8802E-05
0.0140	20.51105	1.3588E-05
0.0140	6.8049	4.5083E-06
0.0180	14.1683	9.4439E-06
0.0180	7.4158	4.9432E-06
0.0220	18.8440	1.2631E-05
0.0260	28.0536	1.8886E-05
0.0260	14.1081	9.4977E-06
0.0260	3.2485	2.1873E-06
0.0330	18.4416	1.2481E-05
0.0330	25.7709	1.7442E-05
0.0370	7.8227	5.3057E-06
0.0410	1.2937	8.7907E-07
0.0410	18.4047	1.2503E-05
0.0450	4.3289	2.9447E-06

Tabella 6.4: Trave isotropa caricata a flessione $L/h=10$: dati di training LF

Introduzione di dati high-fidelity. Introducendo, sulla base del training condotto in figura (6.7b), un quantitativo ridotto di dati di tipo HF, visibili in tabella (6.5), i risultati in termini di accuratezza migliorano in maniera significativa. Nei migliori casi si raggiunge quanto il lettore può apprezzare in figura (6.8a)(6.8b).

h [m]	F [N]	u_z [m]
0.0530	2.0300	0.1386E-05
0.0100	50.4100	0.3391E-04
0.0180	96.3200	0.6472E-04
0.1000	77.5800	0.5317E-04
0.1000	32.6000	0.2234E-04

Tabella 6.5: Trave isotropa caricata a flessione $L/h=10$: dati di training HF

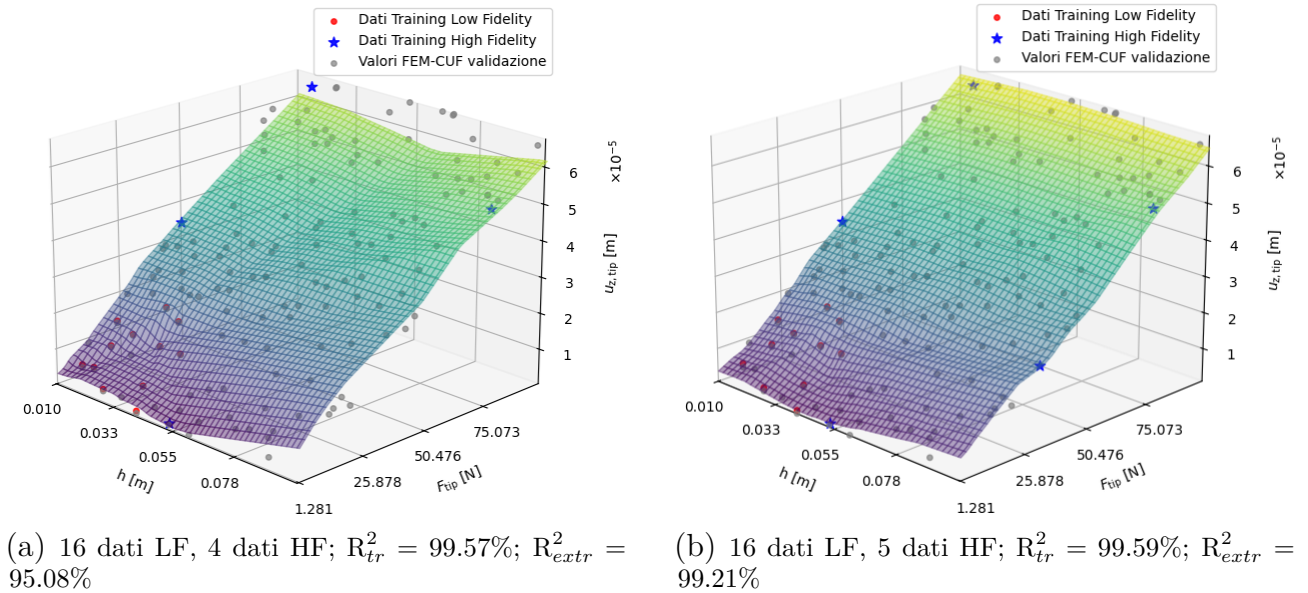


Figura 6.8: Risultati del training con dati LF+HF per $L/h = 10$

Il miglioramento della previsione è già evidente con la sola introduzione di 4 dati HF; con 5 dati HF si nota un'accuratezza di livello estremamente elevato. Ad influenzare l'accuratezza del risultato di training non sono esclusivamente la presenza o la quantità di dati HF, ma anche il loro adeguato posizionamento.

Risultati con $L/h = 100$

Seguendo la logica adottata nel caso precedente, si ottiene, nel caso di soli dati LF, quanto riportato in figura (6.9a)(6.9b). Di nuovo, si nota come l'accuratezza sia abbastanza alta nella zona di training, molto bassa al di fuori, anche nel caso di un numero elevato di dati di training; riducendo i dati di training LF, l'accuratezza si abbassa di nuovo in modo significativo. I dati LF impiegati per il training sono riportati in tabella (6.6).

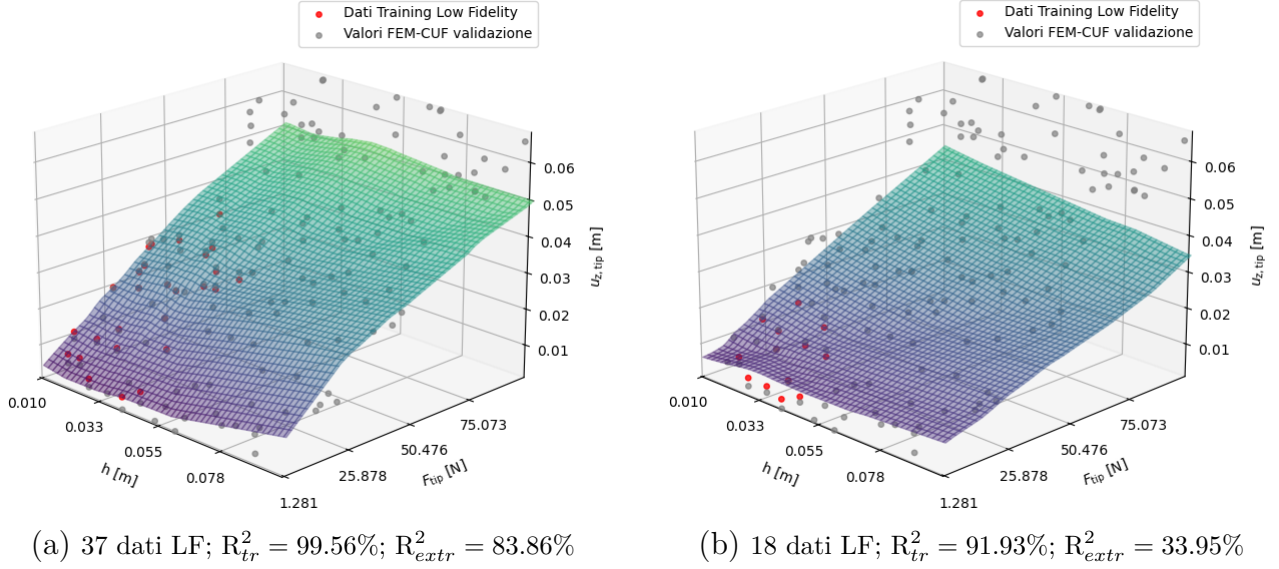


Figura 6.9: Risultati del training basati su dati low-fidelity per $L/h = 100$

h [m]	F [N]	u_z [m]
0.0100	13.0624	0.8809E-02
0.0100	28.4475	0.1919E-01
0.0140	20.5111	0.1392E-01
0.0140	6.8049	0.4618E-02
0.0180	30.6581	0.2086E-01
0.0180	14.1683	0.9640E-02
0.0180	7.4158	0.5046E-02
0.0220	18.8440	0.1284E-01
0.0260	28.0536	0.1913E-01
0.0260	14.1081	0.9620E-02
0.0260	3.2485	0.2215E-02
0.0330	3.5027	0.2390E-02
0.0330	18.4416	0.1258E-01
0.0330	25.7709	0.1759E-01
0.0370	7.8227	0.5339E-02
0.0410	1.2937	0.8834E-03
0.0410	18.4047	0.1256E-01
0.0450	4.3289	0.2956E-02

Tabella 6.6: Trave isotropa caricata a flessione $L/h=100$: dati di training LF. Riferimento figura (6.9b)

Introduzione di dati high-fidelity . Anche in questo caso, un uso appropriato dei pochi dati high-fidelity a disposizione ha determinato un miglioramento significativo del risultato complessivo del training, come visibile in figura (6.10). I dati HF impiegati in questa fase di training sono riportati in tabella (6.7).

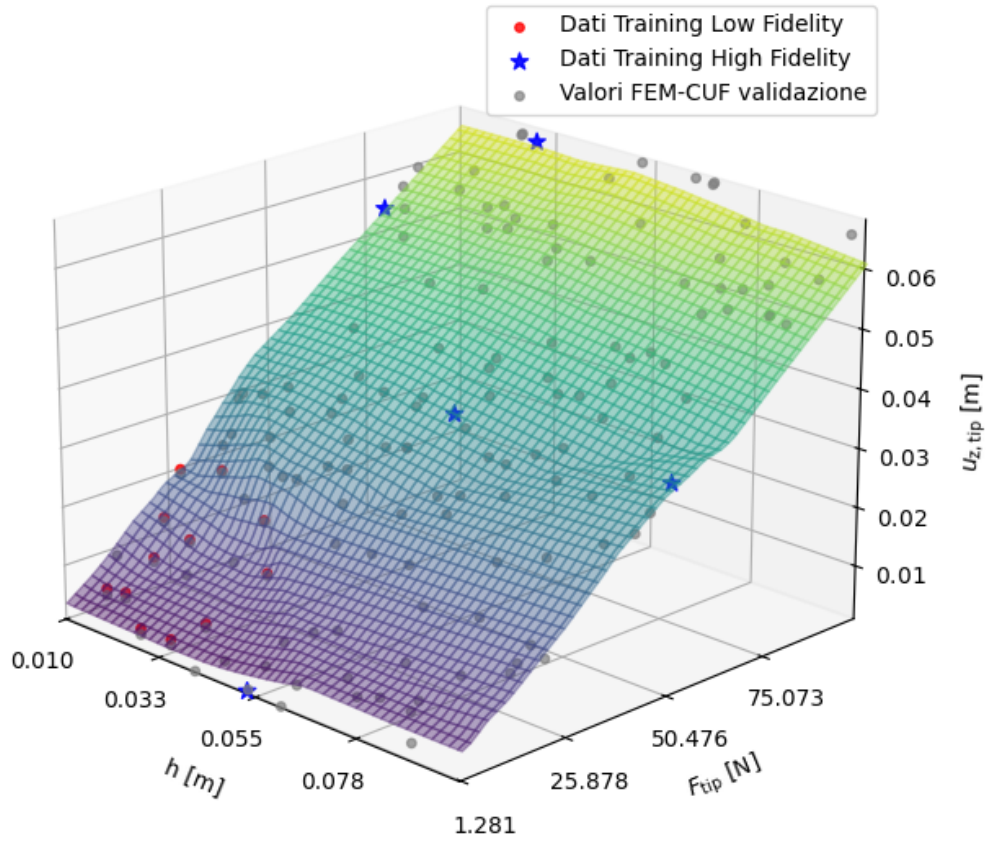


Figura 6.10: 18 Dati LF, 5 dati HF; $R_{tr}^2 = 99.61\%$; $R_{extr}^2 = 98.03\%$

h [m]	F [N]	u_z [m]
0.0100	79.6300	0.5404E-01
0.0300	97.2600	0.6637E-01
0.0530	1.5000	0.1024E-02
0.0530	51.3000	0.3504E-01
0.1000	51.9500	0.3549E-01

Tabella 6.7: Trave isotropa caricata a flessione $L/h=100$: dati di training HF

6.2.3 Trave isotropa caricata a torsione

In analogia a quanto svolto per la trave caricata a flessione, sono state condotte analisi anche per il caso di trave isotropa caricata a torsione, con lo schema in figura (6.11). In questo caso i parametri in input sono lo spessore (a L/h costante) della trave ed il momento torcente concentrato applicato al tip; l'output è l'angolo θ di torsione della sezione trasversale all'estremo libero. È bene anticipare fin da subito che il caso a torsione è risultato di maggiore complessità rispetto alla flessione, per via dei bassi ordini di grandezza in gioco nei risultati di angolo di torsione θ .

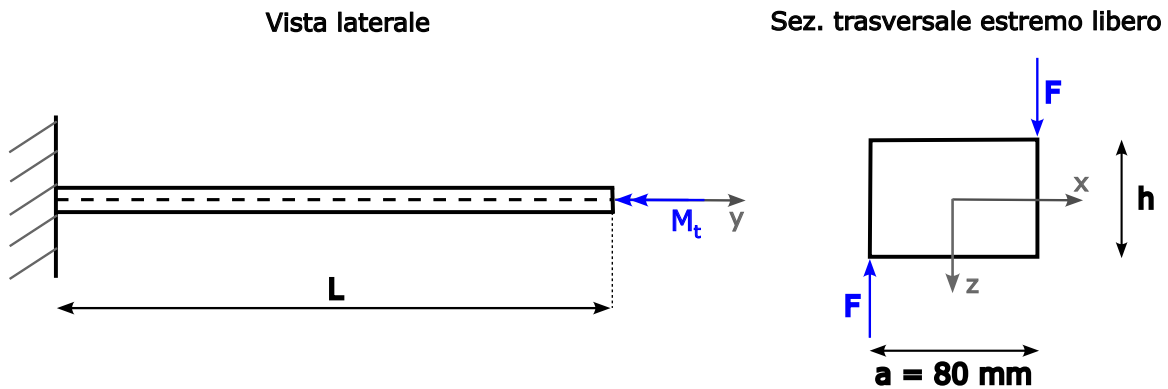


Figura 6.11: Trave isotropa caricata a torsione

Risultati con $L/h = 10$

Ripetendo lo stesso schema visto per la flessione, nel primo caso di torsione troviamo quanto riportato nelle figure (6.12)(6.13). I dati di training LF riferiti alla figura (6.14) sono riportati in tabella.

h [m]	M_t [Nm]	θ [deg]
0.0100	13.5800	0.9051E-01
0.0100	18.9000	0.1260E+00
0.0140	1.1900	0.4413E-02
0.0140	15.4400	0.5724E-01
0.0140	5.3700	0.1991E-01
0.0180	8.3400	0.1985E-01
0.0180	7.6000	0.1809E-01
0.0180	4.2700	0.1017E-01
0.0180	7.6600	0.1824E-01
0.0220	0.5900	0.9895E-03
0.0220	6.6700	0.1118E-01
0.0260	8.1600	0.1026E-01
0.0300	16.4900	0.1631E-01

Tabella 6.8: Trave isotropa caricata a torsione $L/h=10$: dati di training LF (parte 1)

h [m]	M_t [Nm]	θ [deg]
0.0330	7.5900	0.6423E-02
0.0330	0.3000	0.2539E-03
0.0330	3.1300	0.2649E-02
0.0370	1.1900	0.8394E-03
0.0370	2.1900	0.1545E-02
0.0370	8.7600	0.6177E-02
0.0410	5.6000	0.3371E-02
0.0410	5.0700	0.3052E-02
0.0410	2.6500	0.1596E-02
0.0450	4.0700	0.2134E-02
0.0450	16.7400	0.8777E-02
0.0730	6.7200	0.1898E-02
0.0770	0.0900	0.2413E-04

Tabella 6.9: Trave isotropa caricata a torsione $L/h=10$: dati di training LF (parte 2)

Trave isotropa caricata a torsione $L/h = 10$
 R^2 train/test con GPR = 96.98%; R^2 estrapolazione = 63.73%
 38 dati low fidelity, 0 high fidelity

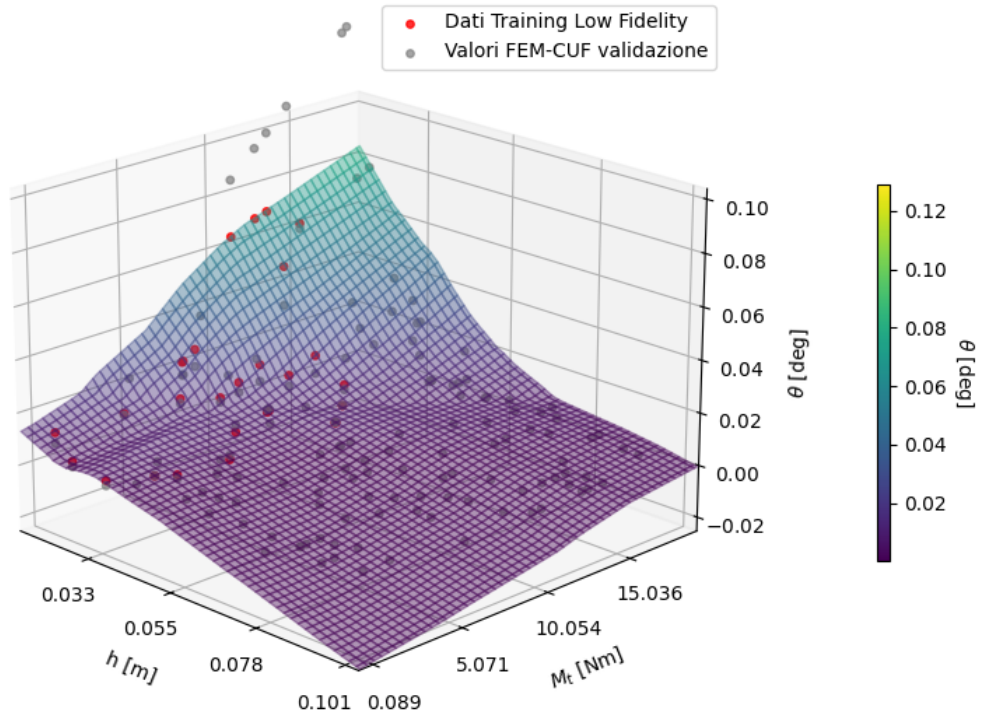


Figura 6.12: Trave isotropa caricata a torsione $L/h = 10$. 38 dati LF

Trave isotropa caricata a torsione $L/h = 10$
 R^2 train/test con GPR = 92.41%; R^2 estrapolazione = 32.79%
 19 dati low fidelity, 0 high fidelity

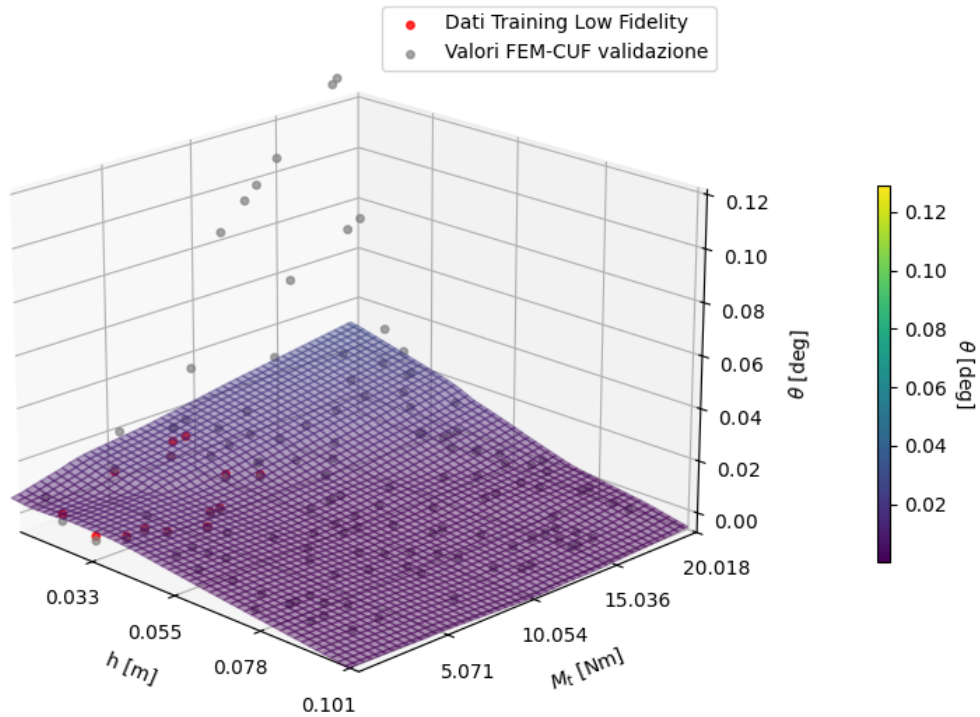


Figura 6.13: Trave isotropa caricata a torsione $L/h = 10$. 19 dati LF

Introduzione di dati high-fidelity . L'inserimento di dati high-fidelity ha comportato un miglioramento dei risultati; ad ogni modo il valore di accuratezza raggiunto risulta inferiore al caso a flessione, richiedendo inoltre l'impiego di ulteriori dati LF. I risultati dal training, che ha visto l'introduzione dei dati LF di tabella (??) e degli HF di tabella (6.10), sono mostrati in figura (6.14).

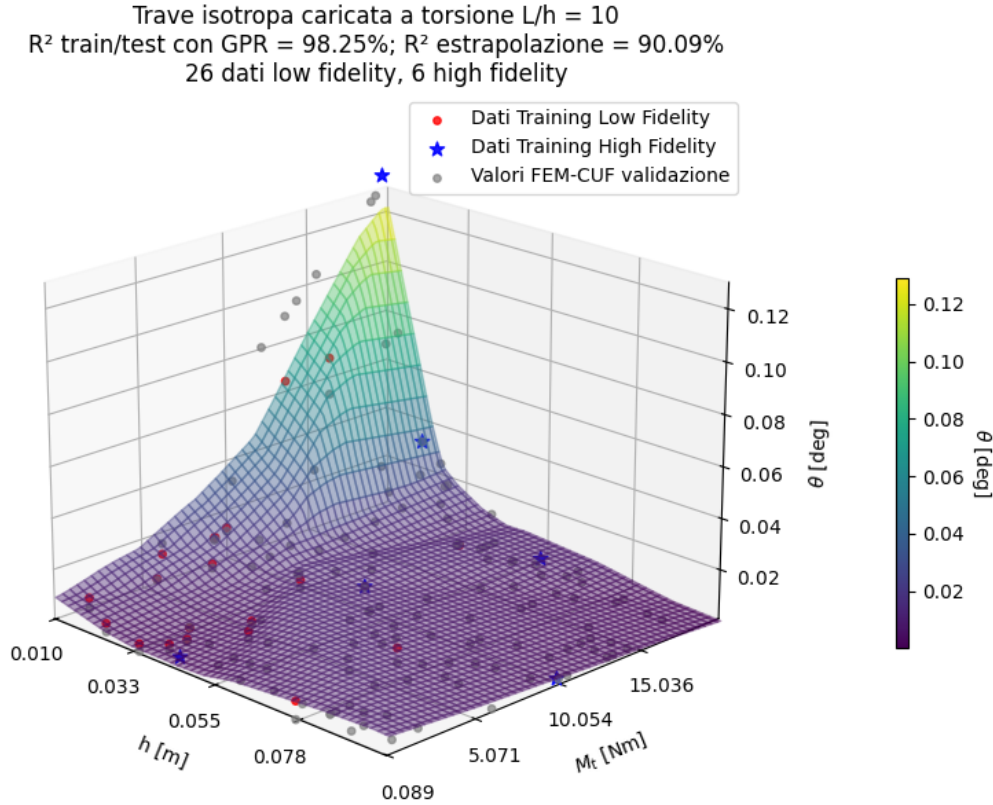


Figura 6.14: Trave isotropa caricata a torsione $L/h = 10$. 26 dati LF, 6 dati HF

h [m]	M_t [Nm]	θ [deg]
0.0100	19.6000	0.1352E+00
0.0220	19.5200	0.3271E-01
0.0410	1.0000	0.7100E-03
0.0450	10.9000	0.5715E-02
0.0610	18.2000	0.7661E-02
0.1000	10.0000	0.2570E-02

Tabella 6.10: Trave isotropa caricata a torsione $L/h=10$: dati di training HF

Risultati con $L/h = 100$

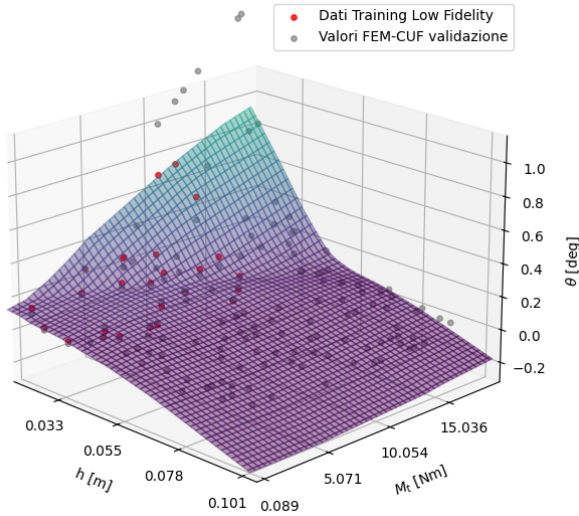
Ancora una volta seguendo quanto fatto in precedenza si trovano i risultati delle figure (6.15a)(6.15b). I dati di training LF del training (6.16) sono riportati in tabella.

h [m]	M_t [Nm]	θ [deg]
0.0100	13.5800	0.1036E+01
0.0100	15.5100	0.1183E+01
0.0140	1.1900	0.4733E-01
0.0140	5.3700	0.2135E+00
0.0140	9.5100	0.3781E+00
0.0180	8.3400	0.2053E+00
0.0180	13.6200	0.3353E+00
0.0180	7.6000	0.1871E+00
0.0180	4.2700	0.1051E+00
0.0180	7.6600	0.1886E+00
0.0220	0.5900	0.9986E-02
0.0220	6.6700	0.1128E+00
0.0220	9.4500	0.1598E+00

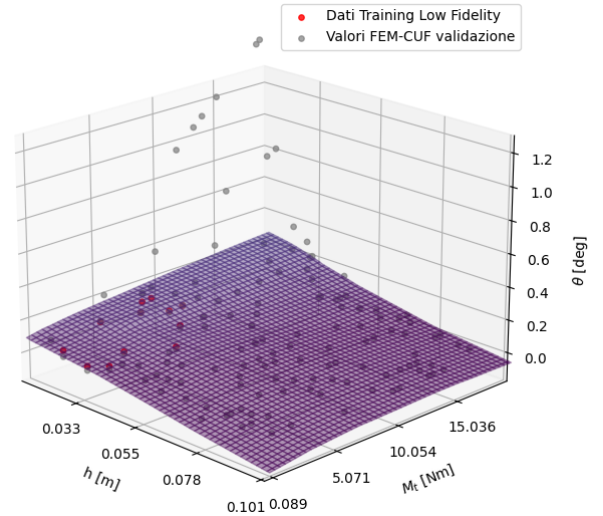
Tabella 6.11: Trave isotropa caricata a torsione $L/h=100$: dati di training LF (parte 1)

h [m]	M_t [Nm]	θ [deg]
0.0220	16.9300	0.2863E+00
0.0260	8.1600	0.1018E+00
0.0260	16.5300	0.2061E+00
0.0330	7.5900	0.6232E-01
0.0330	0.3000	0.2463E-02
0.0330	3.1300	0.2570E-01
0.0370	1.1900	0.8072E-02
0.0370	2.1900	0.1485E-01
0.0370	10.8600	0.7364E-01
0.0410	5.6000	0.3219E-01
0.0410	2.6500	0.1523E-01
0.0450	4.0700	0.2026E-01
0.0650	1.3900	0.4186E-02
0.0770	10.7000	0.2664E-01

Tabella 6.12: Trave isotropa caricata a torsione $L/h=100$: dati di training LF (parte 2)



(a) 37 dati LF; $R_{tr}^2 = 97.94\%$, $R_{extr}^2 = 53.01\%$



(b) 17 dati LF; $R_{tr}^2 = 98.79\%$, $R_{extr}^2 = 18.67\%$

Figura 6.15: Confronto tra risultati ottenuti con 37 e 17 dati LF per la trave isotropa caricata a torsione $L/h = 100$.

Introduzione di dati high-fidelity. L'inserimento di dati high-fidelity ha comportato un miglioramento dei risultati, riportati in figura (6.16). I dati di training HF aggiunti sono riportati in tabella (6.13). È inoltre, evidente, osservando i vari casi di training, come l'accuratezza delle predizioni fornite dal modello NN-GPR non sia influenzata in maniera significativa dalla posizione dei dati di tipo LF, ma sia fortemente condizionata dalla presenza e posizione dei dati HF.

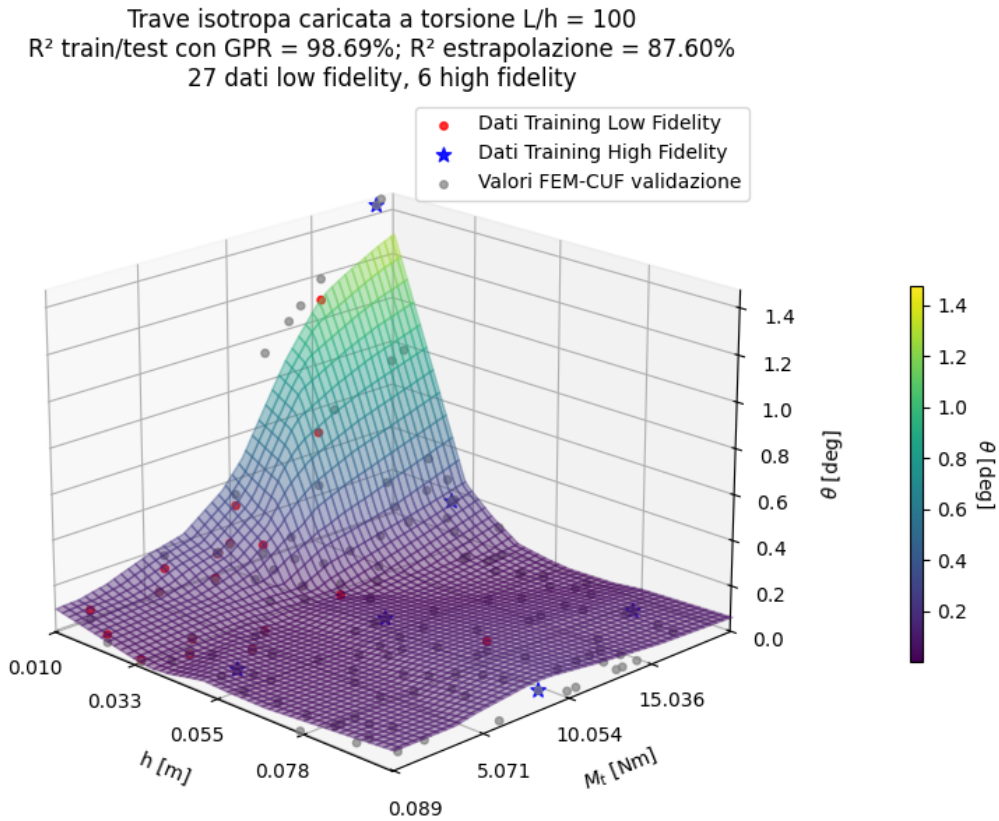


Figura 6.16: Trave isotropa caricata a torsione $L/h = 100$. 27 dati LF, 6 dati HF

h [m]	M_t [Nm]	θ [deg]
0.0100	18.9000	0.1441E+01
0.0300	19.1900	0.1857E+00
0.0490	2.4200	0.1061E-01
0.0530	10.0500	0.3943E-01
0.0840	17.9800	0.4104E-01
0.0960	9.3500	0.1896E-01

Tabella 6.13: Trave isotropa caricata a torsione $L/h=100$: dati di training HF

6.2.4 Trave isotropa con sezione a I caricata a flessione

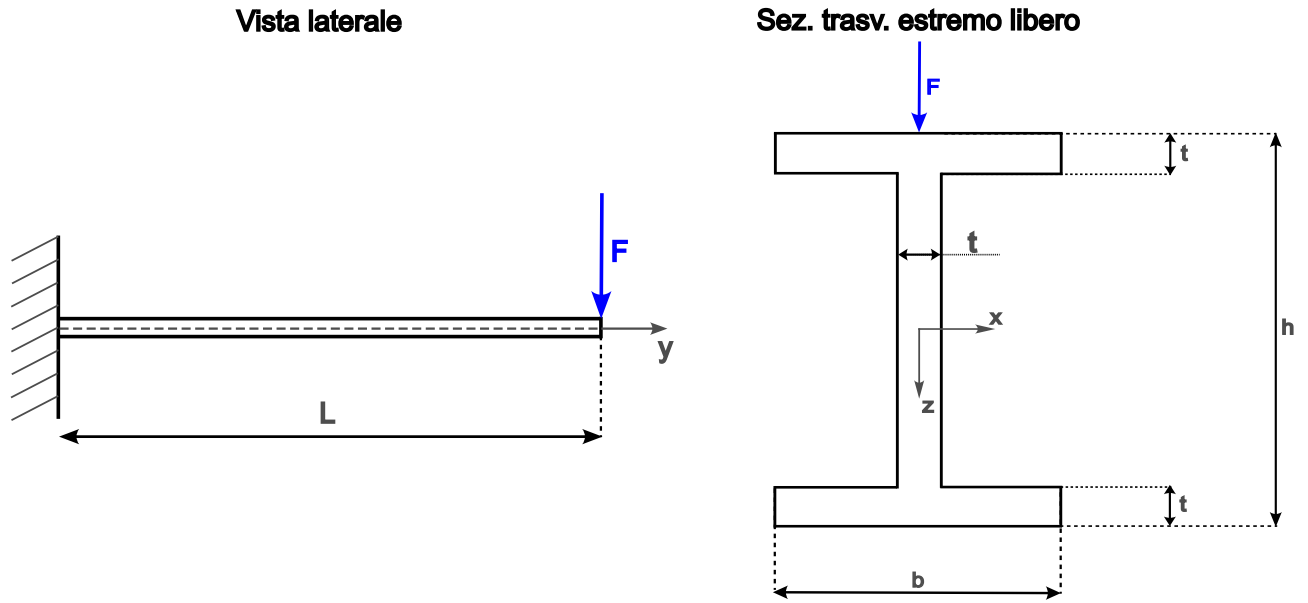


Figura 6.17: Geometria

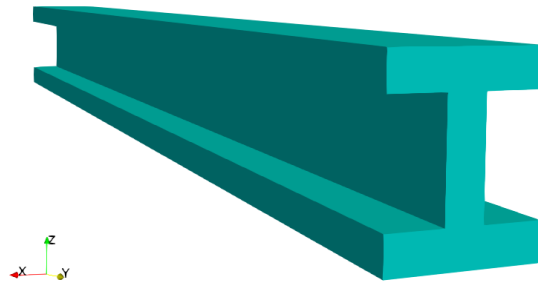


Figura 6.18: Visualizzazione geometria mediante ParaView ($L/h = 10$)

Figura 6.19: Trave con sezione ad I: traccia

In questa sezione è stato deciso di operare due variazioni rispetto ai casi precedenti, la prima sui materiali, la seconda sulla geometria, con l'obiettivo di addestrare le reti neurali integranti GPR a prevedere il comportamento a flessione di una trave con sezione ad I. Con riferimento alla geometria riportata in figura (6.17), si specifica che $t = 20$ mm, $b = 80$ mm. Quindi:

- Nel primo caso le variabili del problema sono il rapporto L/h ed il materiale (tramite i rapporti E/ρ , G/ρ , E/G).

- Nel secondo caso le variabili del problema sono entrambe geometriche: il rapporto L/h ed il rapporto h/t (dove h è l'altezza totale della sezione trasversale, t lo spessore della sezione trasversale, uniforme in ogni parte).

Mediante training delle NN-GPR con dati multi-fidelity ottenuti con analisi FEM-CUF si vogliono investigare gli effetti di tali parametri in termini di spostamento u_z e di tensione massima σ_{yz} , collocata nella sezione di incastro. Il carico applicato all'estremo libero è fisso, pari a $F = 40$ N.

Anche in questo caso, i dati ottenuti si classificano secondo due livelli di fedeltà:

- **Dati low-fidelity (LF)**: ottenuti da simulazioni FEM-CUF con elementi finiti di tipo Timoshenko (TE 0).
- **Dati high-fidelity (HF)**: ottenuti da simulazioni FEM-CUF con elementi finiti dati da espansione di ordine 5 di Taylor (TE 5).

A questi si aggiungono i dati di validazione, utili al calcolo dell'accuratezza della previsione, ottenuti con logica analoga ai dati HF.

I materiali impiegati per l'analisi nel primo caso, corredati di tutte le variabili necessarie, sono riportati in tabella (B.2). È doveroso sottolineare il fatto che i materiali impiegati sono in parte leghe effettivamente utilizzate in ambito aerospaziale, in altri casi materiali metallici puri o leghe inseriti solo a fini rappresentativi, con l'utilità di estendere il campo di variazione delle proprietà.

Per il caso 2, invece, la scelta del materiale è ricaduta sulla lega di alluminio ERGAL (SAE-7075), le cui proprietà, ormai note dai casi passati, sono riportate in tabella (6.14).

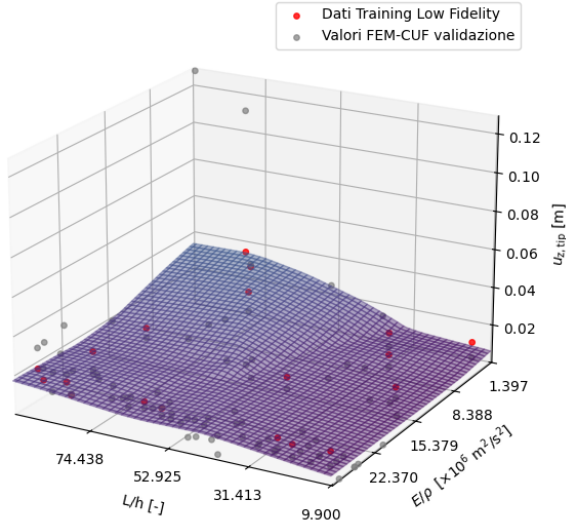
Materiale	E [GPa]	ν	$\rho [kg/m^3]$
ERGAL (SAE-7075)	73.1	0.3	2780

Tabella 6.14: Caratteristiche meccaniche ERGAL

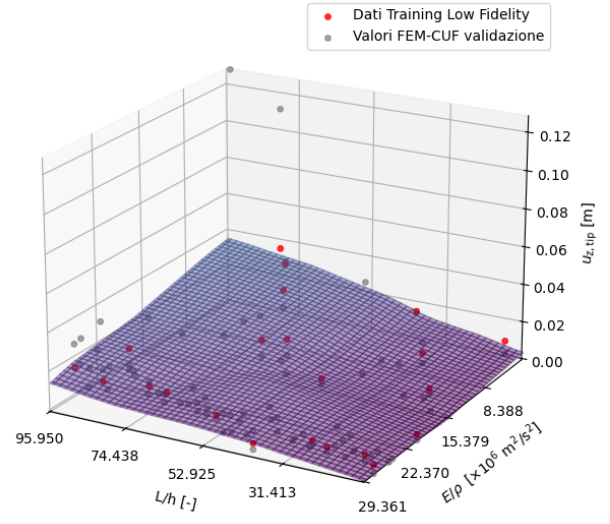
La geometria della trave è riportata in figura (6.17). L'immagine aggiuntiva di figura (6.18) riporta un esempio di geometria della trave, in caso di $L/h = 10$ con $h = 0.1$ m, ed è stata ottenuta mediante il software ParaView.

Caso 1: risultati dal training - previsione di $u_{z,tip}$

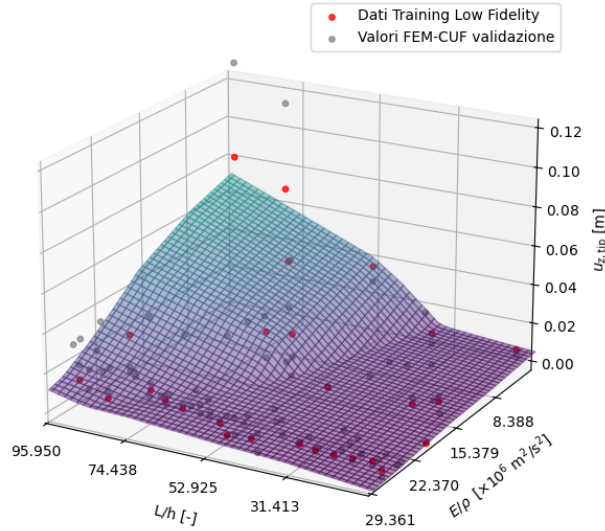
Come avvenuto nei casi precedenti, il training condotto esclusivamente con dati di tipologia LF conduce ad accuratze variabili a seconda del numero di dati di training, ma in ogni caso insufficienti. Nelle figure (6.20a)(6.20b)(6.20c) sono riportati i risultati del training della NN-GPR ottenuti, in ordine, con 26, 30 e 36 dati LF. I dati impiegati per il training (nella versione completa a 36 dati) sono riportati in tabella (B.3).



(a) 26 dati LF; $R_{tr}^2 = 80.84\%$, $R_{extr}^2 = 30.44\%$



(b) 30 dati LF; $R_{tr}^2 = 93.73\%$, $R_{extr}^2 = 35.85\%$



(c) 36 dati LF; $R_{tr}^2 = 93.26\%$, $R_{extr}^2 = 40.57\%$

Figura 6.20: Risultati del training della trave ad I con diversi numeri di dati LF.

Introduzione di dati high-fidelity. A seguito dell'inserimento di 5 dati HF in posizioni opportune, a partire dal training contenente 30 dati di tipo LF, si nota un significativo miglioramento delle previsioni, in linea con quanto avvenuto nei casi noti in precedenza. Il risultato è visibile in figura (6.21). Tale risultato, inoltre, dimostra un aspetto non sottolineato in precedenza: è la presenza e posizione dei dati HF a condizionare l'accuratezza riscontrata a termine del training; la dipendenza dai dati LF del risultato è minima rispetto a quella dai dati HF. I dati HF inseriti nel training sono riportati in tabella (6.15).

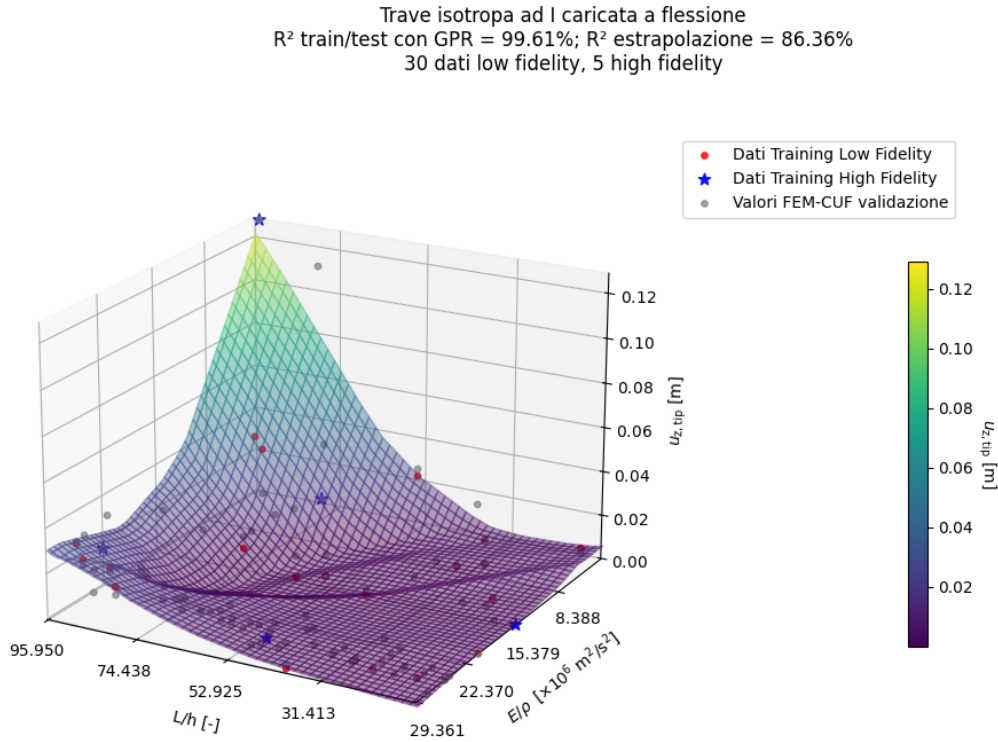


Figura 6.21: Trave ad I: training con 30 dati LF, 5 dati HF

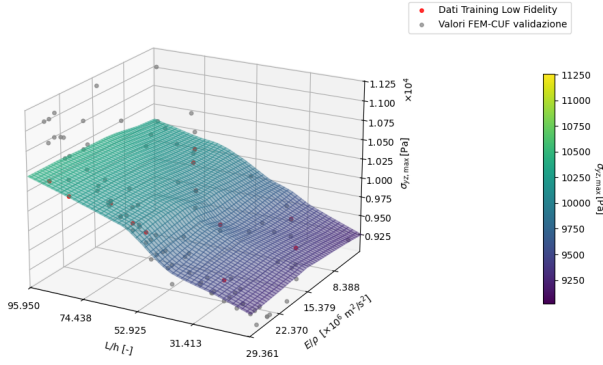
L/h [-]	E [GPa]	ρ [kg/m^3]	E/ρ [$\times 10^6 m^2/s^2$]	$u_{z,tip}$ [m]	$\sigma_{yz,max}$ [Pa]
10	108	7140	15.1340	2.2486E-05	6.6999E+03
50	120	4620	25.9740	2.4834E-03	1.2842E+05
70	50	7310	6.8380	1.6376E-02	1.0148E+04
90	69	2710	25.4620	2.5218E-02	1.0839E+04
95	16	11340	1.4110	1.2790E-01	1.1003E+04

Tabella 6.15: Trave ad I: dati di training NN-GPR di tipo HF

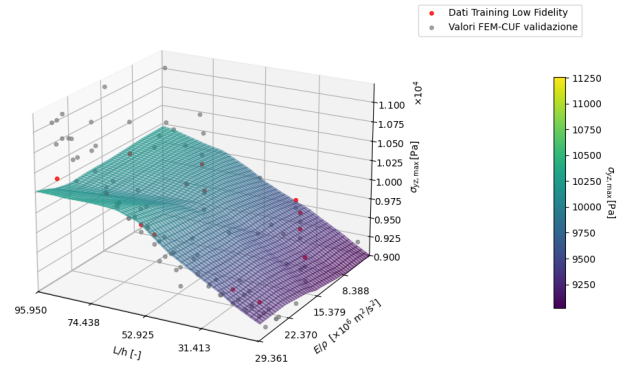
Caso 1: risultati dal training - previsione di $\sigma_{yz,max}$

L'approccio mediante NN-GPR si è mostrato utile ed efficace anche nella previsione di dati di tensioni massime alla sezione di incastro della trave. La soluzione di previsione mediante ML, estendibile anche a casi più complessi, può mostrare enormi vantaggi in ambito di progetto.

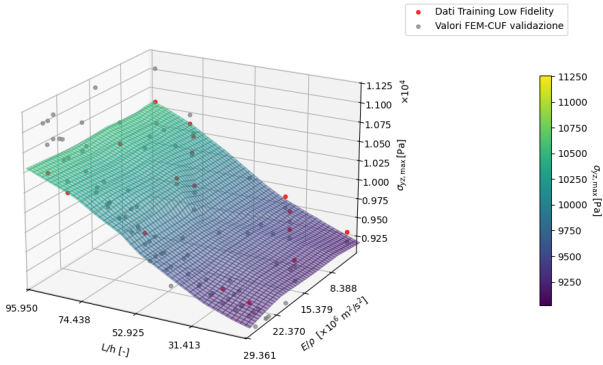
Per consultare i dati impiegati nel training, si invita il lettore a far riferimento alla tabella (B.3), alle pagine precedenti, per i casi low-fidelity. Anche nella previsione delle tensioni, l'accuratezza della NN-GPR è variabile con il numero di dati di training, se ci si limita ad un approccio LF, come si vede nelle figure (6.22a)(6.22b)(6.22c)(6.22d).



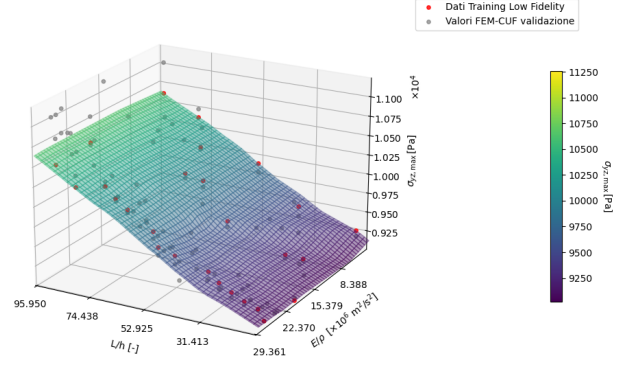
(a) 16 dati LF; $R_{tr}^2 = 97.74\%$, $R_{extr}^2 = 78.63\%$



(b) 20 dati LF; $R_{tr}^2 = 88.80\%$, $R_{extr}^2 = 66.72\%$



(c) 23 dati LF; $R_{tr}^2 = 98.70\%$, $R_{extr}^2 = 89.76\%$



(d) 36 dati LF; $R_{tr}^2 = 99.67\%$, $R_{extr}^2 = 93.73\%$

Figura 6.22: Risultati del training della trave ad I con diverse quantità di dati LF

Introduzione di dati high-fidelity. Partendo dal caso meno oneroso dal punto di vista computazionale, ovvero il training basato su 16 dati low-fidelity, si può dimostrare come l’inserimento di dati HF vada a migliorare le previsioni della NN-GPR. Per i dati di training HF si faccia riferimento alla tabella (6.16), dove sono riportati nella versione completa a 4 dati. I risultati dei training delle NN-GPR con 3 e 4 dati HF sono riportati in figure (6.23a)(6.23b).

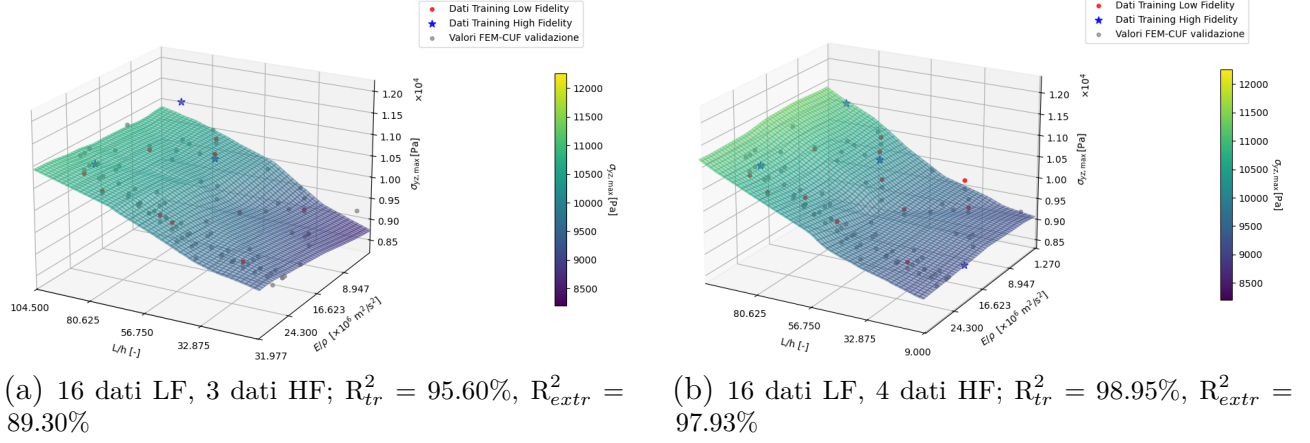


Figura 6.23: Training multi-fidelity trave ad I: confronto

L/h [-]	E [GPa]	ρ [kg/m ³]	E/ρ [$\times 10^6$ m ² /s ²]	$u_{z,tip}$ [m]	$\sigma_{yz,max}$ [Pa]
10	400	19300	20.7250	6.0250E-06	9.1141E+03
70	5	7310	6.8380	1.6376E-02	1.0148E+04
90	69	2710	25.4620	2.5218E-02	1.0839E+04
95	16	11340	1.4110	1.2790E-01	1.1003E+04

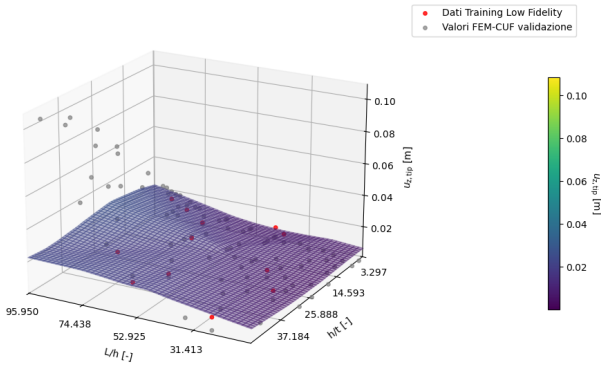
Tabella 6.16: Trave isotropa ad I caricata a flessione: 4 dati HF

Dai risultati ottenuti, in particolare il caso di training con 4 dati high-fidelity, si può notare l’effettiva convenienza in termini di prestazioni nell’utilizzo della NN-GPR al posto di svolgere molte analisi FEM-CUF classiche. L’accuratezza di estrapolazione raggiunta nel caso (6.23b) è superiore anche a quella raggiunta nel caso (6.22d), ancora una volta a conferma della maggiore influenza esercitata sul risultato da parte dei dati HF.

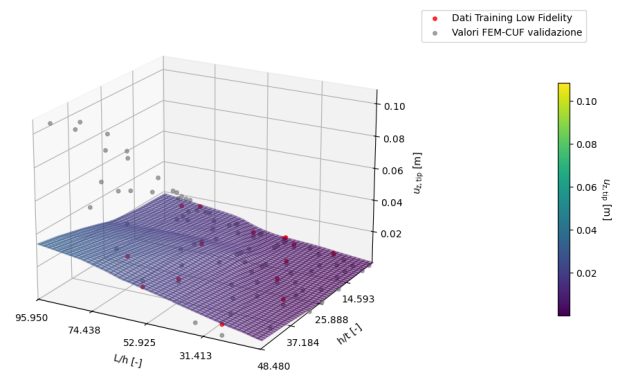
Caso 2: risultati dal training - previsione di $u_{z,tip}$

In questo caso, il training basato esclusivamente su dati di tipo LF permette di ottenere risultati più accurati di quelli visti in precedenza, quando il quantitativo di dati di training è alto. Rimane il fatto che l'estrapolazione non sia ancora sufficientemente accurata. In tabella (B.4) sono riportati i dati di training low-fidelity, già corredati anche dei valori di tensione massima, nella versione completa a 36 valori. Eventuali training con numero inferiore di dati sono effettuati tramite riduzione a partire da questo dataset.

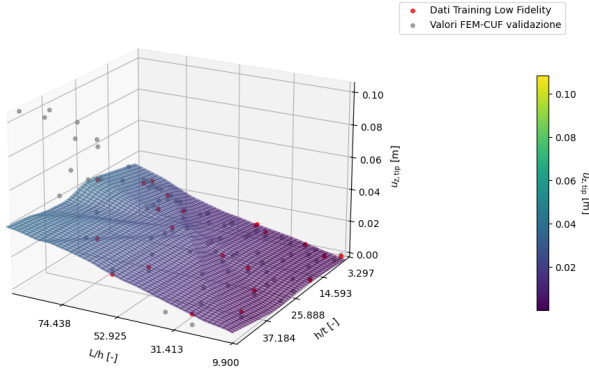
Nelle figure (6.24a)(6.24b)(6.24c)(6.24d) sono riportati i risultati del training con soli dati LF. Si può notare come all'aumentare del numero di dati di training aumenti l'accuratezza del modello nelle previsioni. Nonostante l'inserimento di dati nella zona ad elevati rapporti L/h e h/t , come in figura (6.24d), però, la NN-GPR non raggiunge le accuratezze che si noteranno a seguito di inserimento di dati high-fidelity. Questo aspetto dimostra ancora una volta il fatto che non sia la presenza o posizione di dati low-fidelity a influenzare maggiormente il risultato, bensì l'inserimento di dati high-fidelity, caratterizzati da un livello di rumore inferiore.



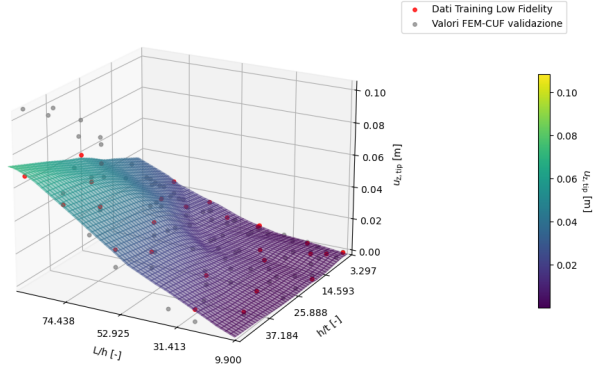
(a) 16 dati LF; $R_{tr}^2 = 88.51\%$, $R_{extr}^2 = 30.82\%$



(b) 20 dati LF; $R_{tr}^2 = 98.52\%$, $R_{extr}^2 = 41.00\%$



(c) 30 dati LF; $R_{tr}^2 = 98.03\%$, $R_{extr}^2 = 55.67\%$



(d) 36 dati LF; $R_{tr}^2 = 99.19\%$, $R_{extr}^2 = 86.68\%$

Figura 6.24: Training trave ad I: risultati LF

Introduzione di dati high-fidelity A partire dai casi con 16 e con 20 dati di training di tipo LF, è stato deciso di inserire in training ulteriori 5 dati di tipo HF, riportati in tabella (6.17), e validi anche per il caso di previsione delle tensioni. I risultati, visibili nelle figure (6.25a)(6.25b), mostrano un significativo miglioramento delle previsioni, oltre che la capacità della NN-GPR di cogliere l'andamento delle previsioni anche nella zona ad alti L/h e h/t , non possibile in precedenza.

L/h [-]	h/t [-]	h [m]	t [m]	L [m]	$u_{z,tip}$ [m]	$\sigma_{yz,max}$ [Pa]
15	13.3333	2.0000E-01	1.5000E-02	3.0000E+00	1.8852E-04	1.7339E+04
30	30.0000	2.4000E-01	8.0000E-03	7.2000E+00	2.7582E-03	8.7232E+04
45	20.0000	1.0000E-01	5.0000E-03	4.5000E+00	7.6630E-03	2.9854E+05
75	5.0000	1.0000E-01	2.0000E-02	7.5000E+00	1.3776E-02	1.5164E+05
95	34.2857	2.4000E-01	7.0000E-03	2.2800E+01	9.4415E-02	2.5992E+05

Tabella 6.17: Trave isotropa ad I caricata a flessione: 5 dati HF

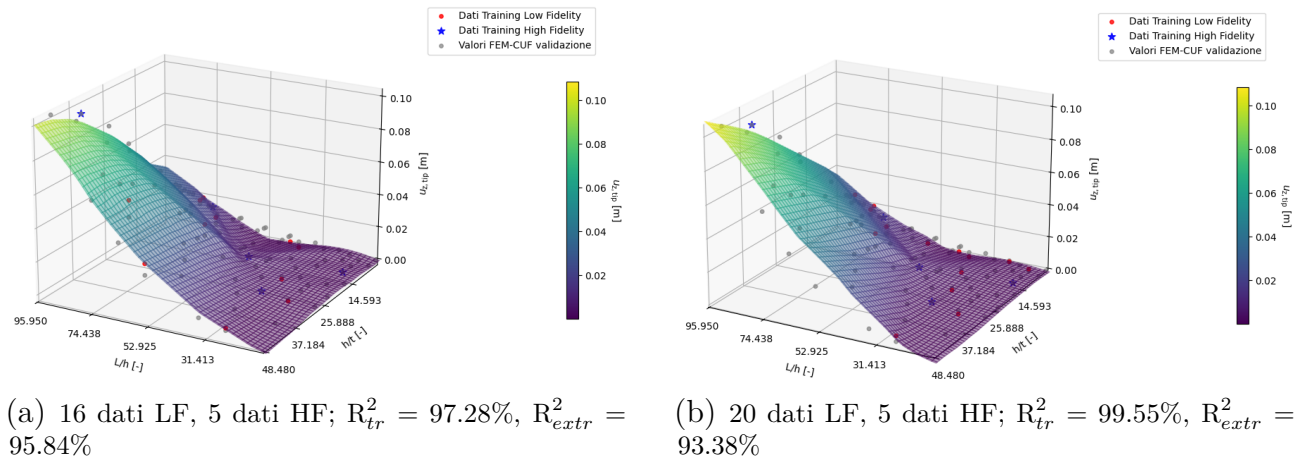
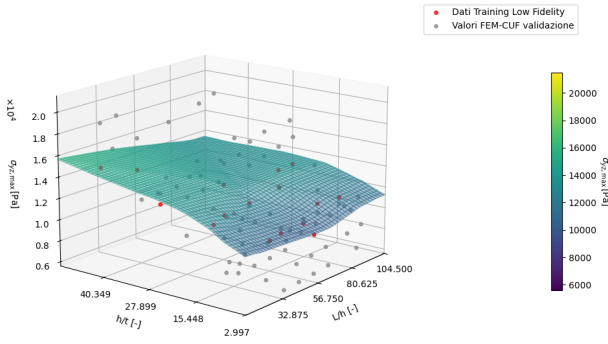


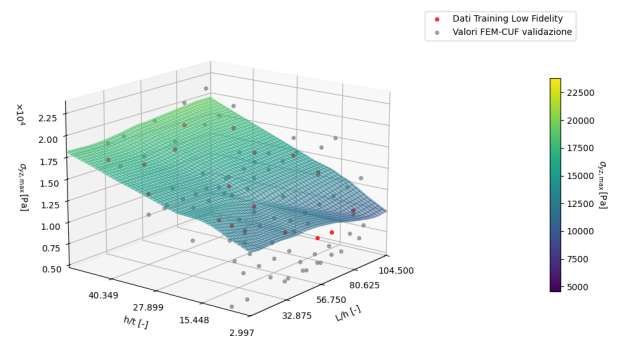
Figura 6.25: Training trave ad I: multi-fidelity

Caso 2: risultati dal training - previsione di $\sigma_{yz,max}$

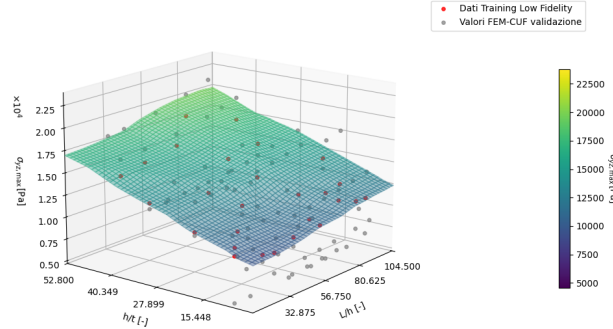
Analogamente a quanto visto per il caso 1, l'obiettivo di questa analisi sarà la previsione della tensione $\sigma_{yz,max}$, posizionata alla sezione di incastro, mediante NN-GPR, questa volta al variare dei parametri geometrici L/h e h/t . La difficoltà superiore, come si vedrà in seguito, giace in questo caso proprio nell'uso di tre parametri geometrici come variabili di base, anziché di 2 geometrici e 2 fisici/meccanici (come, invece, è stato fatto nel caso 1 usando L/h ed E/ρ). Iniziando, come al solito, dai training della NN-GPR ad uso esclusivo di dati low-fidelity, si ottiene quanto riportato nelle figure (6.26a)(6.26b)(6.26c). I dati di training, nella versione completa a 36 valori, sono riportati nella tabella (B.5). Come al solito, i training con numero inferiore di dati di input prevedono l'uso di valori selezionati a partire dalla stessa tabella.



(a) 22 dati LF; $R_{tr}^2 = 68.82\%$, $R_{extr}^2 = 52.20\%$



(b) 24 dati LF; $R_{tr}^2 = 74.67\%$, $R_{extr}^2 = 47.47\%$



(c) 36 dati LF; $R_{tr}^2 = 99.71\%$, $R_{extr}^2 = 53.86\%$

Figura 6.26: Trave ad I: training LF per la previsione di tensioni

Introduzione di dati high-fidelity. A partire dal caso di training basato su 22 dati di tipo low-fidelity, sono stati inseriti fino a 4 dati high-fidelity, ottenendo, nel miglior caso, il risultato di figura (6.27). Tale risultato mette in luce come la NN-GPR mostri maggiori difficoltà di predizione in termini di tensioni nel momento in cui la variazione di geometria diventa significativa. In questo caso di analisi, infatti, la sezione varia sia sul piano longitudinale sia su quello trasversale, portando a modifiche sostanziali nella distribuzione degli stress sulla trave. I dati HF impiegati per il training sono riportati in tabella (6.18).

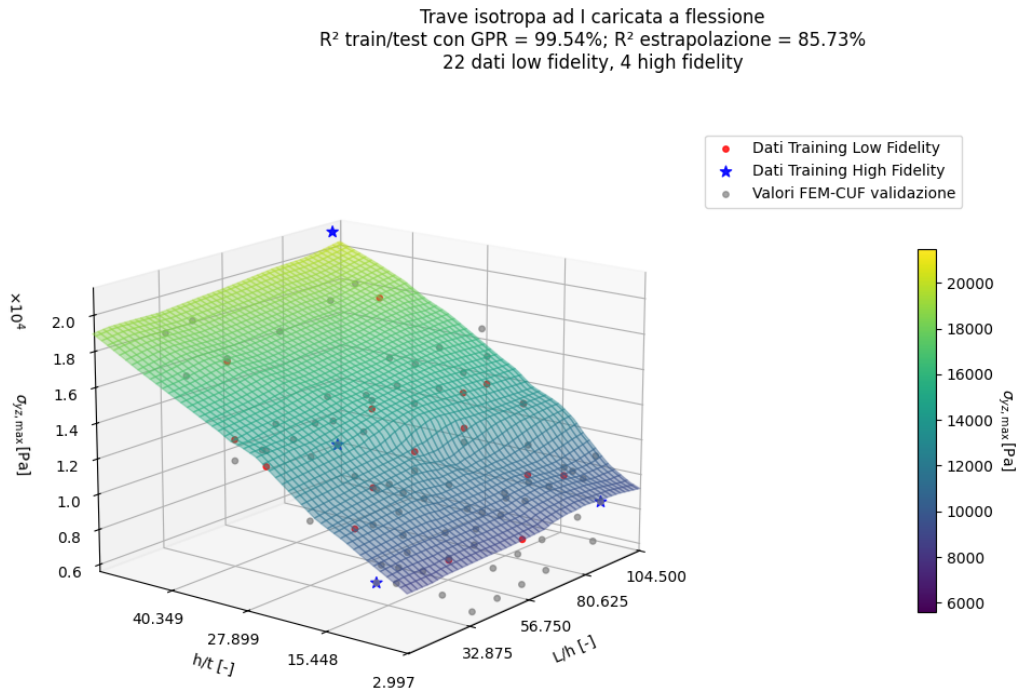


Figura 6.27: Trave ad I: training con 22 dati LF, 4 dati HF

L/h [-]	h/t [-]	h [m]	t [m]	L [m]	$u_{z,tip}$ [m]	$\sigma_{yz,max}$ [Pa]
10	8.0000	2.0000E-01	2.5000E-02	2.0000E+00	3.8675E-05	8.8764E+03
30	22.2222	2.0000E-01	9.0000E-03	6.0000E+00	2.3019E-03	1.4074E+04
90	48.0000	2.4000E-01	5.0000E-03	2.1600E+01	1.0747E-01	2.1639E+04
90	4.0000	1.0000E-01	2.5000E-02	9.0000E+00	2.1817E-02	9.1400E+03

Tabella 6.18: Trave isotropa ad I caricata a flessione: 4 dati HF

6.2.5 Considerazioni sui costi computazionali e l'accuratezza dei risultati: analisi statiche

L'utilizzo integrato di reti neurali e Gaussian Process Regression offre un vantaggio sostanziale in termini di tempi di calcolo, permettendo di ottenere risultati affidabili senza dover ricorrere a un gran numero di simulazioni ad alta fedeltà. Sulla base dell'esperienza derivata dalle analisi statiche condotte nei capitoli precedenti, si può mettere in luce tale vantaggio, mediante i dati raccolti in tabella (6.19)(6.20). È importante specificare che il codice Python della rete neurale sviluppato per il problema in esame è progettato per determinare un totale di circa 10000 dati¹ aggiuntivi rispetto a quelli forniti in training, pertanto i dati in colonna "CPU-time HF tot" della tabella rappresentano una stima dei tempi necessari a svolgere 10000 analisi di tipo high-fidelity, qualora non si disponesse della rete neurale; discorso analogo per la colonna "CPU-time LF tot". Il costo computazionale CPU time NN-GPR è dato dalla somma del costo delle analisi FEM-CUF per ottenere i dati di training e del tempo necessario all'estrapolazione di dati mediante rete neurale, nei casi dove la NN ha raggiunto massima accuratezza. Nel caso della trave con sezione ad I, essendo il rapporto L/h una variabile del problema, i tempi indicati sono un valore medio di quelli ottenuti in analisi.

Sezione	Carico	L/h [-]	CPU-time LF [s]	CPU-time LF tot [s]
Rettangolare	Flessione	10	2.410	2.410E+04
Rettangolare	Flessione	100	2.110	2.110E+04
Rettangolare	Torsione	10	2.510	2.510E+04
Rettangolare	Torsione	100	2.260	2.260E+04
I (caso E/ρ : $u_{z,tip}$)	Flessione	variabile	2.350	2.235E+04
I (caso h/t : $u_{z,tip}$)	Flessione	variabile	2.280	2.280E+04

Tabella 6.19: Costi computazionali: CPU-time LF

Sezione	Carico	L/h [-]	CPU-time HF [s]	CPU-time HF tot [s]	CPU time NN-GPR [s]
Rettangolare	Fless.	10	7.130	7.130E+04	8.607E+01
Rettangolare	Fless.	100	7.050	7.050E+04	8.447E+01
Rettangolare	Tors.	10	7.490	7.490E+04	1.181E+02
Rettangolare	Tors.	100	7.310	7.310E+04	1.130E+02
I (E/ρ)	Fless.	variabile	7.200	7.200E+04	1.151E+02
I (h/t)	Fless.	variabile	7.260	7.260E+04	8.509E+01

Tabella 6.20: Costi computazionali: CPU-time HF e NN-GPR

Esaminando quanto riportato nelle tabelle (6.19)(6.20)(6.21) si comprende l'enorme vantaggio dato dall'impiego di reti neurali nella previsione di risultati di analisi statiche. Un ulteriore miglioramento delle prestazioni sarebbe possibile andando a modificare la struttura delle rete neurale o aumentando, anche di poche unità, il numero dei dati di training. Come già anticipato, anche la disposizione dei dati HF ha enorme influenza sulla previsione.

Il vantaggio in termini di prestazioni e tempi è da elencare tra i motivi per cui la ricerca si concentri, al giorno d'oggi, molto sulle tematiche del Machine Learning e della IA, soprattutto

¹La mesh di predizione della NN-GPR ha taglia 100×100 , il che comporta prevedere 10000 coppie di valori sul piano (L/h , F), (L/h , M_t), (L/h , E/ρ) oppure (L/h , h/t).

Caso di analisi	Dati	L/h [-]	R ² training	R ² extr.	CPU time NN-GPR [s]
Rett. fless.	16 LF, 5 HF	10	99.59%	99.21%	8.607E+01
Rett. fless.	18 LF, 5 HF	100	99.61%	98.03%	8.447E+01
Rett. tors.	26 LF, 6 HF	10	98.25%	90.09%	1.181E+02
Rett. tors.	27 LF, 6 HF	100	98.69%	87.60%	1.130E+02
I fless. (E/ρ) $u_{z,tip}$	30 LF, 5 HF	variabile	99.61%	86.36%	1.151E+02
I fless. (E/ρ) $\sigma_{yz,max}$	16 LF, 4 HF	variabile	98.95%	97.93%	7.763E+01
I fless. (h/t) $u_{z,tip}$	20 LF, 5 HF	variabile	99.55%	93.38%	8.509E+01
I fless. (h/t) $\sigma_{yz,max}$	22 LF, 4 HF	variabile	99.54%	85.73%	9.052E+01

Tabella 6.21: Accuratezza e costi computazionali NN-GPR: analisi statiche

in casi dove la complessità del problema è superiore. Un esempio in tal senso è dato dal lavoro di Zappino, Petrolo *et al.* in [4], che verrà preso a riferimento per le analisi successive.

Capitolo 7

GPR per problemi multi-fidelity

Questo capitolo illustra i risultati ottenuti attraverso il framework di Machine Learning basato su Gaussian Process Regression (GPR), sviluppato in Python e applicato in un contesto multi-fidelity. L'analisi è stata condotta su tre casi studio distinti: la risposta statica di travi isotrope con sezione ad I, di travi composite a sezione rettangolare, e infine il processo di curing di componenti L-SHAPE, seguendo il lavoro [4] di Petrolo, Zappino *et al.*, con esclusione dei dati sperimentali. L'obiettivo è dimostrare come il metodo proposto consenta di raggiungere un'accuratezza predittiva elevata, comparabile a quella delle analisi high-fidelity, facendo uso di un dataset costituito in larga parte da simulazioni low-fidelity, con un conseguente risparmio in termini di costi computazionali.

Il codice Python sviluppato fa uso: della libreria **pandas** per la manipolazione dei file, di componenti della libreria ML **sklearn** (tra cui il GPR) al fine di elaborare i dataset e sviluppare le previsioni, della libreria **matplotlib** per visualizzare graficamente i risultati.

Il codice è strutturato per gestire il training e la valutazione dei modelli GPR in contesto multi-fidelity secondo il seguente flusso logico:

1. Caricamento dei dati: vengono letti tre file distinti contenenti i dati high-fidelity, low-fidelity e di test.
2. Assegnazione dei pesi: ai dati high-fidelity verrà attribuito, in sede di training del GPR, un peso maggiore rispetto ai dati low-fidelity, per compensare l'inaccuratezza intrinseca di questi ultimi, più soggetti a rumore dovuto alle semplificazioni dei modelli low-fidelity.
3. Training del modello; il GPR viene addestrato in tre scenari distinti: (a) utilizzando esclusivamente tutti i dati high-fidelity a disposizione; (b) utilizzando esclusivamente tutti i dati low-fidelity a disposizione; (c) utilizzando un mix di dati high- e low-fidelity. Il numero di dati high-fidelity da inserire (N) è scelto a priori. A partire da un training inizialmente costituito solo da dati low-fidelity, il codice sostituisce N dati low-fidelity con N dati high-fidelity. La sostituzione di dati avviene randomicamente con `seed=42` per garantire la ripetibilità dell'esperimento. L'operazione viene ripetuta più volte e con diverse quantità di dati sostituiti, al fine di analizzare la progressione dei risultati in funzione della presenza e posizione di dati high-fidelity.
4. Valutazione dell'accuratezza nei vari casi: il codice apre il file dei dati di test, costituito da risultati di simulazioni FEM-CUF high-fidelity, e seleziona, tramite estrazione random con `seed=42`, una porzione di dati, la cui quantità è scelta a priori, da utilizzare per il calcolo dei parametri di accuratezza R^2 e RMSE, confrontando le predizioni del modello GPR con i valori di test.

7.1 Trave isotropa ad I caricata a flessione

In questo caso di analisi, la logica multi-fidelity porta a fare la seguente distinzione nei dati di input:

- **Dati low-fidelity (LF)**: ottenuti da simulazioni FEM-CUF con elementi finiti di tipo Timoshenko (TE 0).
- **Dati high-fidelity (HF)**: ottenuti da simulazioni FEM-CUF con elementi finiti dati da espansione di ordine 5 di Taylor (TE 5).

La geometria di base della trave è analoga a quella riportata nelle figure (6.17)(6.18); per brevità d'esposizione, si omettono tali figure.

I dati disponibili erano complessivamente 90 low-fidelity (LF), 90 high-fidelity (HF) e 50 dati di test. In tutti i tre scenari, per il calcolo dell'accuratezza sono stati utilizzati solo 18 dati di test, selezionati secondo la procedura di estrazione casuale descritta in precedenza. Sono stati considerati due scenari per il training dei modelli:

- Utilizzo di tutti i dati disponibili (90 LF + 90 HF + 18 test, totale 198).
- Utilizzo di un dataset ridotto (30 LF + 30 HF + 18 test, totale 78).

Per entrambi gli scenari, sono stati effettuati i tre tipi di training: utilizzando esclusivamente dati high-fidelity, esclusivamente dati low-fidelity e dataset misti con sostituzione di alcuni dati low-fidelity con dati high-fidelity secondo la procedura descritta in introduzione.

Questa suddivisione consente di evidenziare come il numero di dati high-fidelity nei dataset misti influenzi le prestazioni predittive del GPR. Nei casi con 30 dati, il training parte da un numero di dati inferiore, il che comporta già una minore accuratezza di base; l'introduzione dei dati high-fidelity nei dataset misti mostra quindi il suo effetto partendo da condizioni di training meno favorevoli, evidenziando come il contributo dei dati HF dipenda dal contesto iniziale, dal posizionamento dei dati HF e dalla dimensione complessiva del dataset. I dati impiegati per l'intero processo sono riportati nelle tabelle (B.6)(B.7)(B.8).

7.1.1 Risultati: previsione di $u_{z,tip}$

Training con dati esclusivamente HF

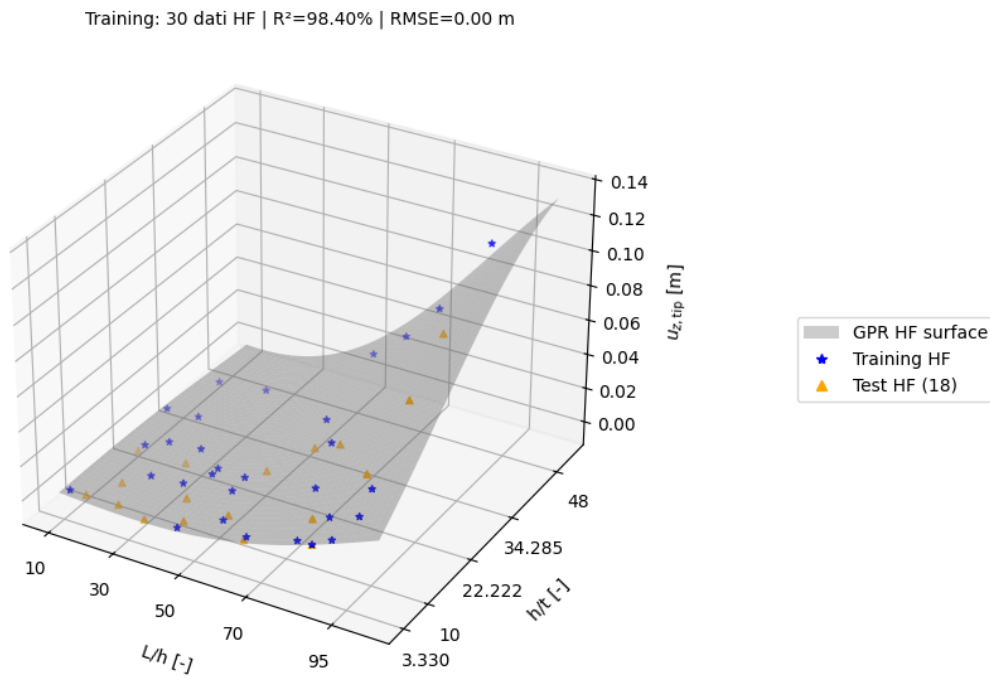


Figura 7.1: Training 30 dati HF

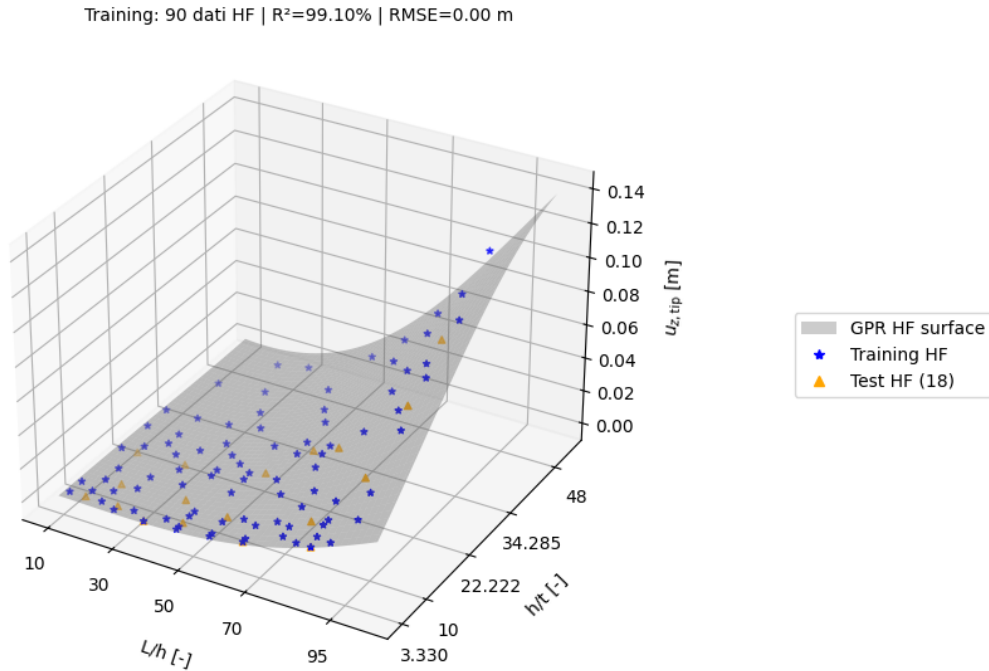


Figura 7.2: Training 90 dati HF

In figura (7.1)(7.2) sono riportati i risultati di diversi casi di training del codice GPR ad uso esclusivo di dati HF: in ordine con 30 e 90 dati. L'accuratezza migliore, come previsto, si ottiene nel caso con 90 dati.

Training multi-fidelity: dataset completo

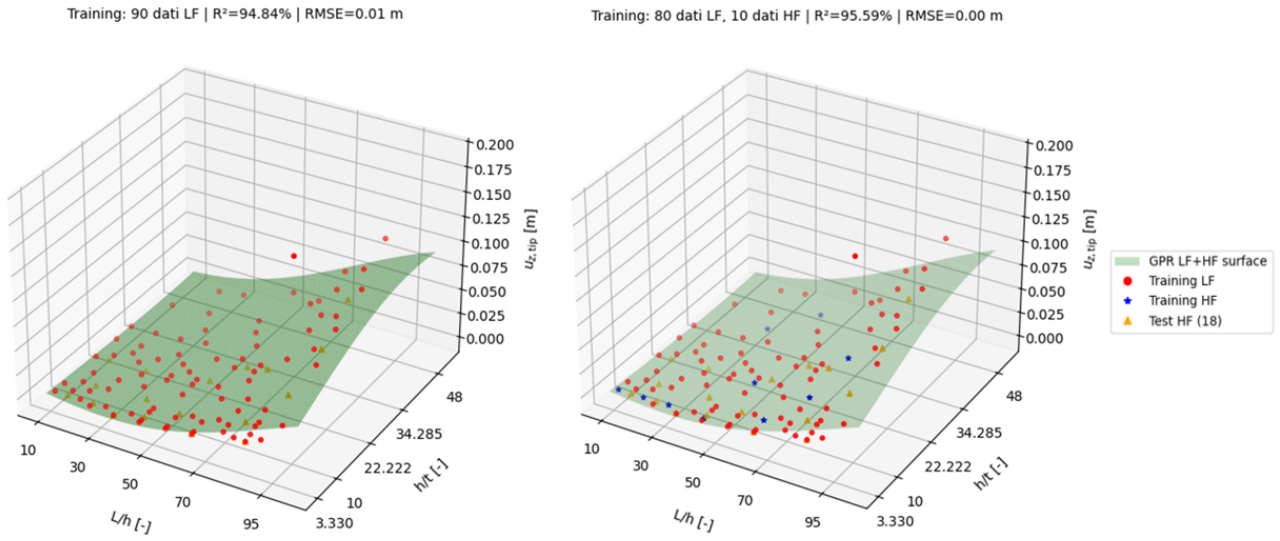


Figura 7.3: Training misto con 90 dati: step 1

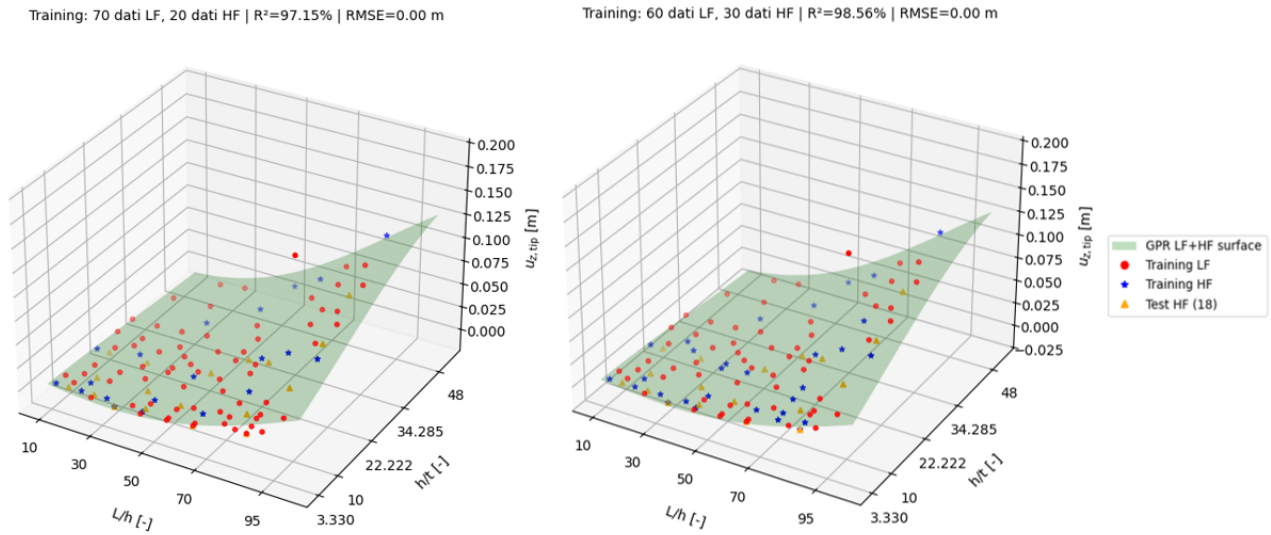


Figura 7.4: Training misto con 90 dati: step 2

Dai risultati riportati in figure (7.3)(7.4) si può notare come, partendo da un training basato esclusivamente su dati di tipo low-fidelity, l'aggiunta di dati HF è grado di migliorare l'accuratezza della previsione, fino al limite massimo, già esposto, ottenibile con i soli dati HF.

Si può dimostrare la differente accuratezza ottenuta nei vari step anche in via grafica, mediante sovrapposizione dei risultati dei training misti con il risultato del training ad uso esclusivo di dati HF, come in figura (7.5).

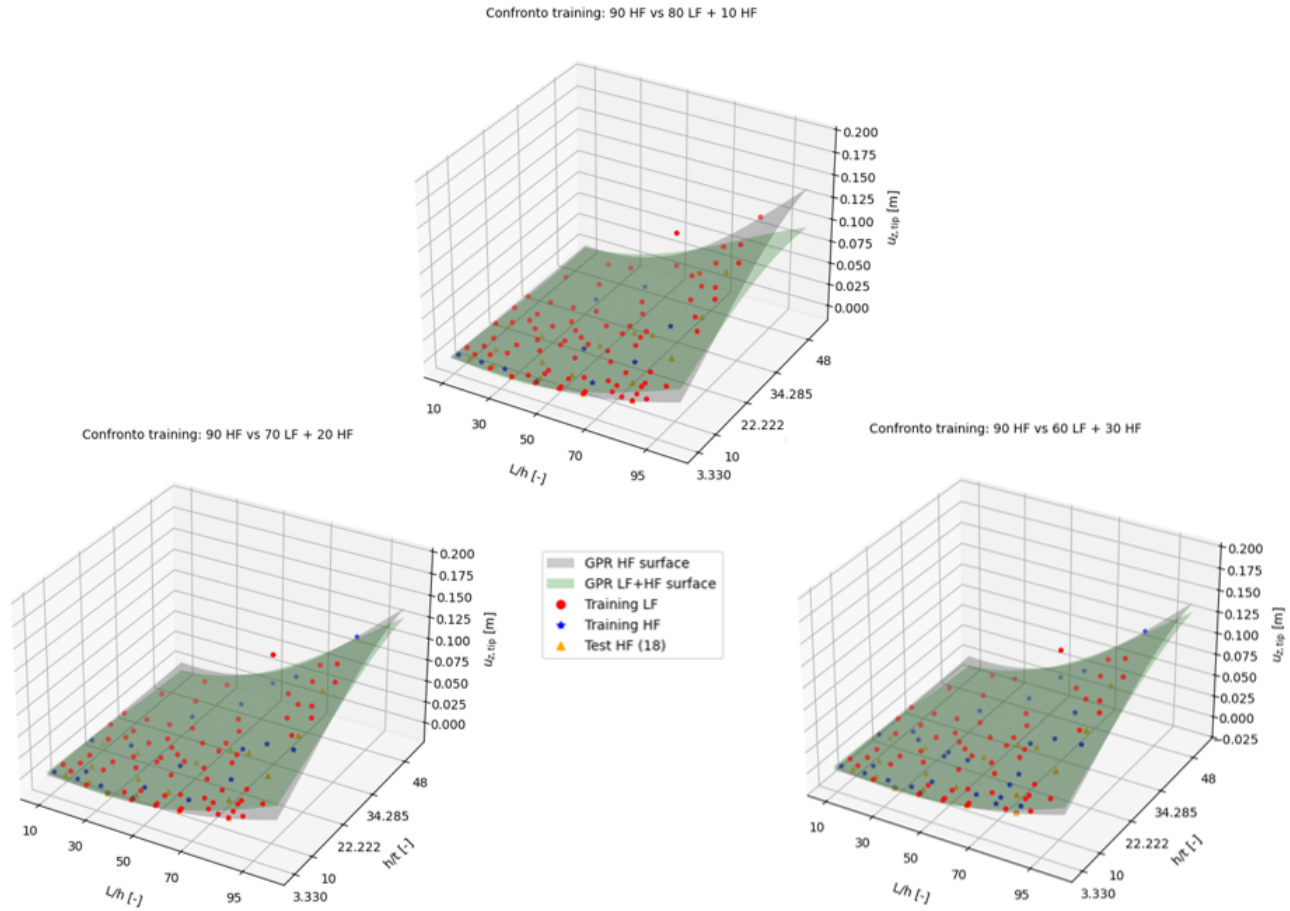


Figura 7.5: Training misto con 90 dati: confronto con training 90 HF

Dati LF	Dati HF	R^2	RMSE
90	0	94.84 %	0.01 m
80	10	95.59 %	0.00 m
70	20	97.15 %	0.00 m
60	30	98.56 %	0.00 m
0	90	99.10 %	0.00 m

Tabella 7.1: Training GPR con dataset completo: tabella riassuntiva

Training multi-fidelity: dataset ridotto

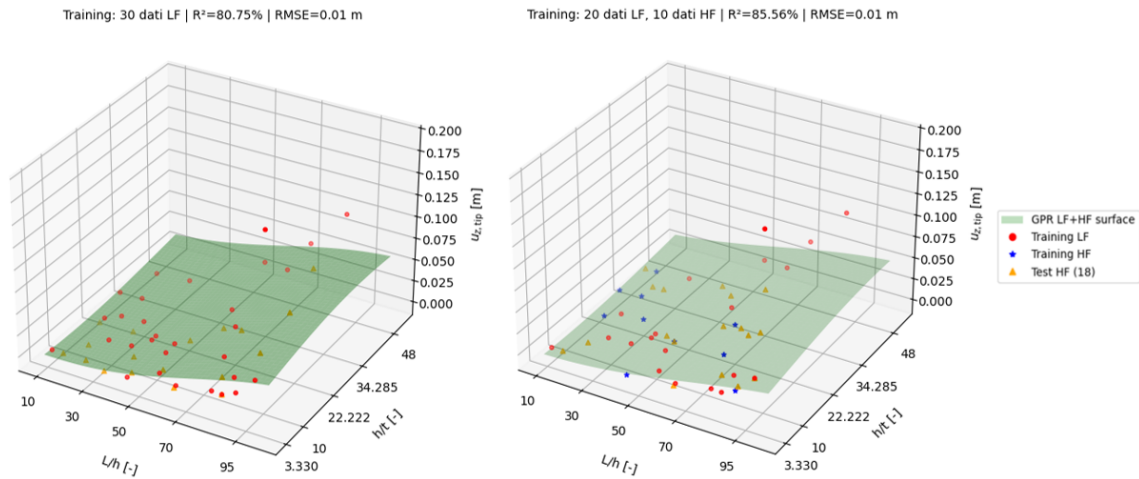


Figura 7.6: Training misto con 30 dati

Analogamente a quanto fatto in precedenza, sono stati condotti training multi-fidelity anche nel caso di dataset ridotto: i risultati sono riportati in figura (7.6). Come logico immaginare, avendo 30 dati al posto di 90, l'accuratezza del training esclusivamente LF sarà inferiore a quanto visto prima. Dal confronto grafico mostrato in figura (7.7) viene ulteriormente evidenziata la tendenza al miglioramento delle prestazioni del GPR.

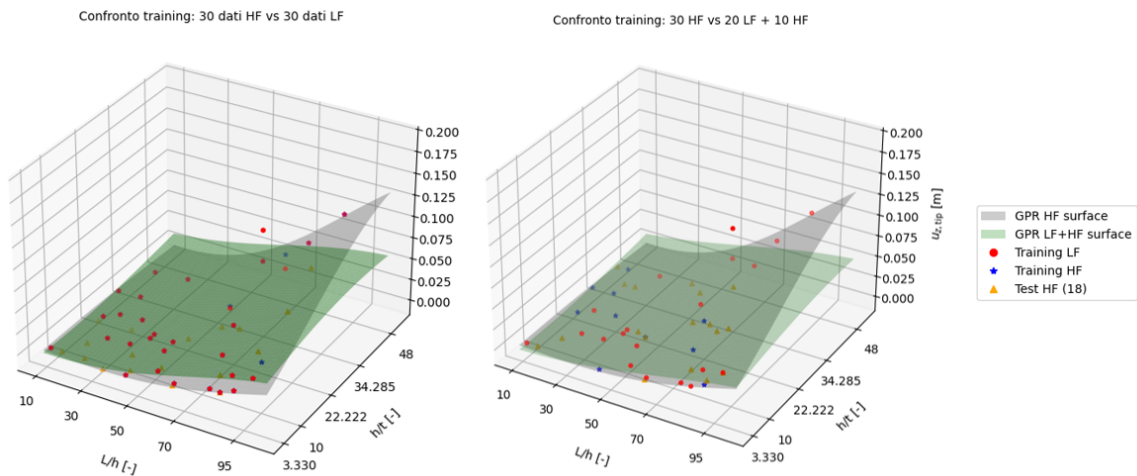


Figura 7.7: Training misto con 30 dati: confronto con il caso 30 HF

Dati LF	Dati HF	R^2	RMSE
30	0	80.75 %	0.01 m
20	10	85.56 %	0.01 m
0	30	98.40 %	0.00 m

Tabella 7.2: Training GPR con dataset ridotto: tabella riassuntiva

7.2 Trave composita caricata a flessione

L'analisi ha come oggetto una trave composita a sezione rettangolare, incastrata all'estremo sinistro e libera al destro, costituita da 8 strati con sequenza di laminazione $(0/90/0/90)_s$. Le variabili alla base del problema multi-fidelity sono il rapporto L/h (tra lunghezza e spessore della sezione trasversale) ed il rapporto E_{11}/G_{12} del materiale. La trave è caricata a flessione sull'estremo destro, con una forza pari a $F = 40$ N, costante in tutte le analisi. Tramite il codice GPR in Python si ottengono previsioni della tensione tagliante massima all'incastro $\sigma_{yz,max}$.

Vista laterale

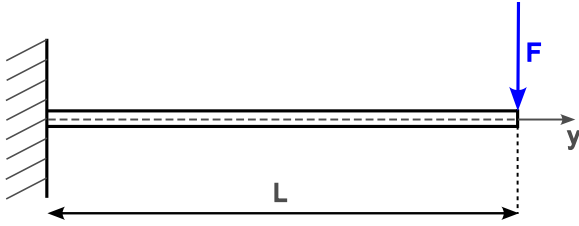


Figura 7.8: Trave composita: vista laterale

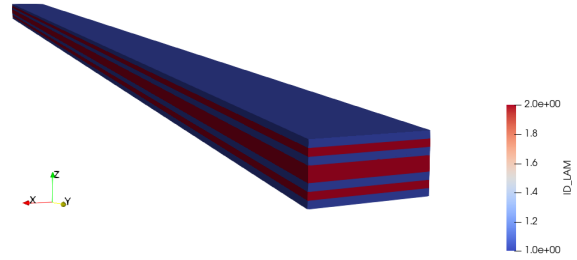


Figura 7.9: Laminazione - ParaView

La distinzione multi-fidelity è leggermente differente rispetto ai casi precedenti:

- **Dati low-fidelity (LF)**: ottenuti mediante simulazioni statiche FEM-CUF di tipo equivalent single layer (ESL).
- **Dati high-fidelity (HF)**: ottenuti mediante simulazioni statiche FEM-CUF di tipo layer wise (LW).

Il dataset, per questo di analisi, prevede un totale di 200 campioni, distribuiti in: 90 dati HF, 90 dati LF, 20 dati di test. Trattandosi, in questo caso, di un unico dataset, i risultati verranno raccolti in un unico paragrafo. I dati sono riportati nelle tabelle (B.9)(B.10)(B.11).

7.2.1 Risultati dal training multi-fidelity: previsione di $\sigma_{yz,max}$

Il training ad uso esclusivo di dati HF, che verrà successivamente impiegato come target, ha mostrato i risultati riportati in figura (7.10).

Training: 90 dati HF | $R^2=98.57\%$ | $RMSE=133.19$ Pa

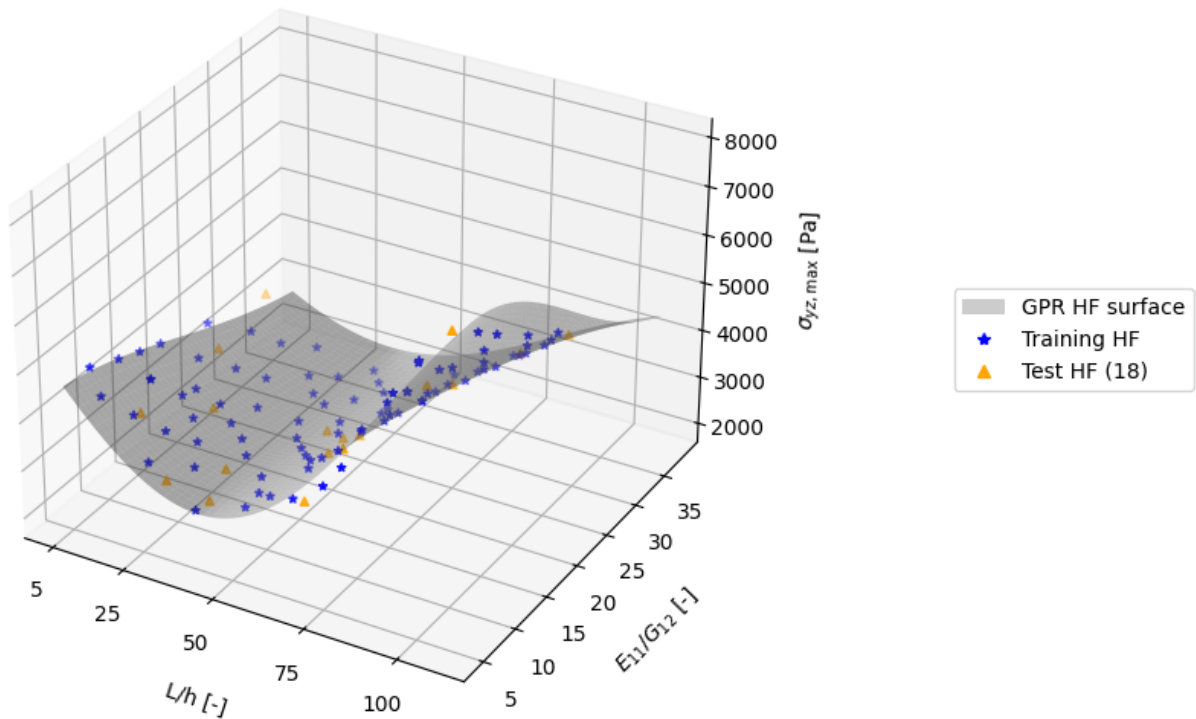


Figura 7.10: Training con 90 dati esclusivamente HF

Successivamente, sono stati condotti vari tentativi di training multi-fidelity, partendo da un uso esclusivo di dati LF, come in figura (7.11), ed andando progressivamente ad aumentare la quantità di dati HF presenti, come avvenuto per il caso della trave ad I. I risultati sono mostrati di seguito.

Training: 90 dati LF | $R^2=-71.91\%$ | $RMSE=1459.61$ Pa

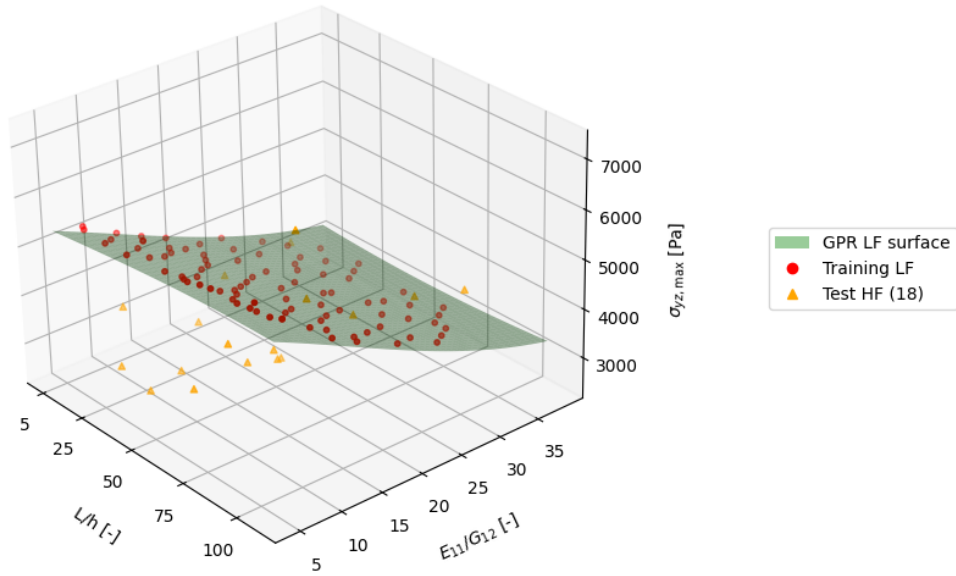


Figura 7.11: Training con 90 dati esclusivamente LF

Confronto training: 90 dati HF vs 90 dati LF

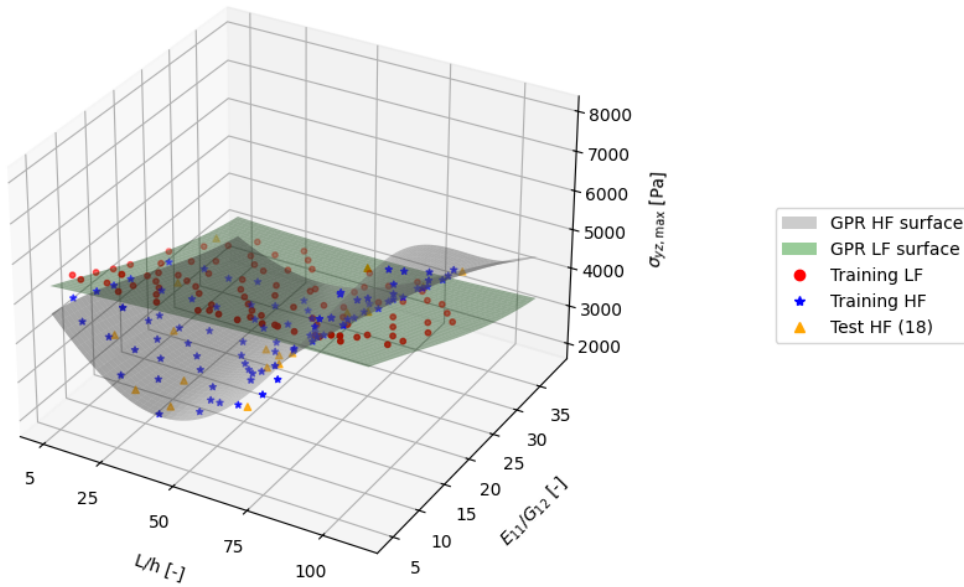


Figura 7.12: Training con 90 dati: confronto tra HF e LF

Il training ad uso esclusivo di dati LF mostra evidenti difficoltà di predizione, riscontrabili in modo immediato mediante lettura di R^2 e RMSE. Graficamente, il confronto si presenta come in figura (7.12). L'obiettivo è, quindi, sostituire dati LF con altri HF negli stessi punti di input, per mostrare l'effettivo guadagno in termini di prestazioni e identificare un trade-off conveniente tra costi computazionali e accuratezza.

In figure (7.13)(7.14)(7.15)(7.16) sono mostrati i risultati dei training GPR misti.

Training: 80 dati LF, 10 dati HF | $R^2=-4.14\%$ | $RMSE=1136.03$ Pa

Training: 70 dati LF, 20 dati HF | $R^2=65.95\%$ | $RMSE=649.55$ Pa

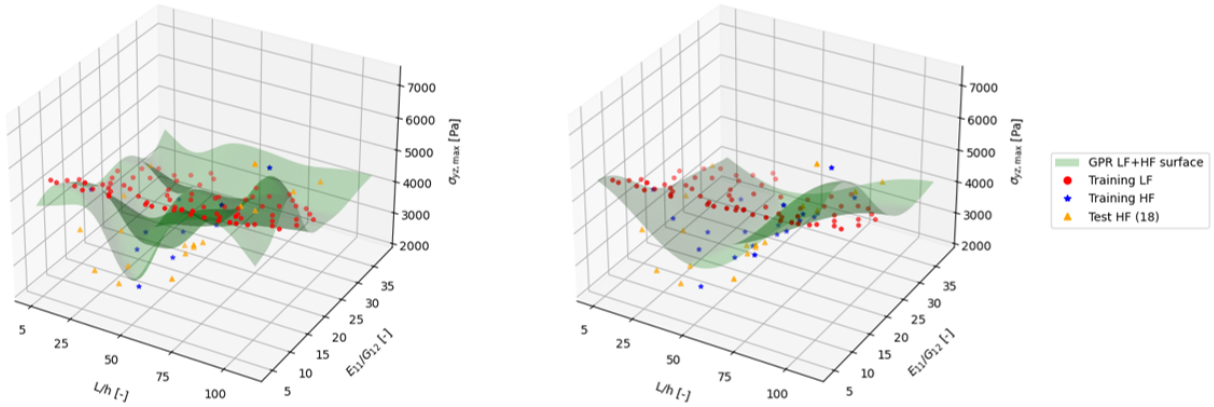


Figura 7.13: Trave composita: training GPR multi-fidelity

Training: 60 dati LF, 30 dati HF | $R^2=75.31\%$ | $RMSE=553.15$ Pa

Training: 50 dati LF, 40 dati HF | $R^2=90.68\%$ | $RMSE=339.94$ Pa

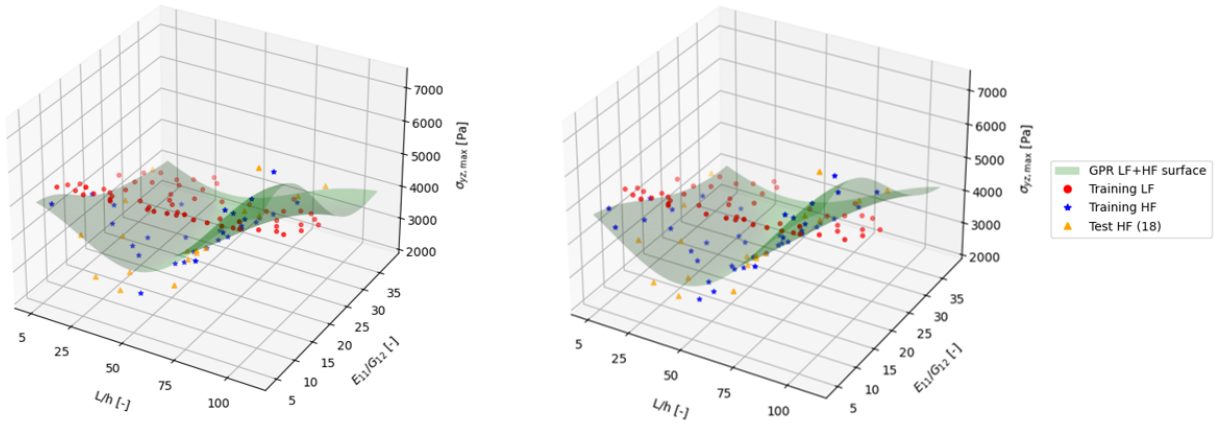


Figura 7.14: Trave composita: training GPR multi-fidelity

Training: 40 dati LF, 50 dati HF | $R^2=92.73\%$ | $RMSE=300.07$ Pa

Training: 30 dati LF, 60 dati HF | $R^2=96.13\%$ | $RMSE=218.95$ Pa

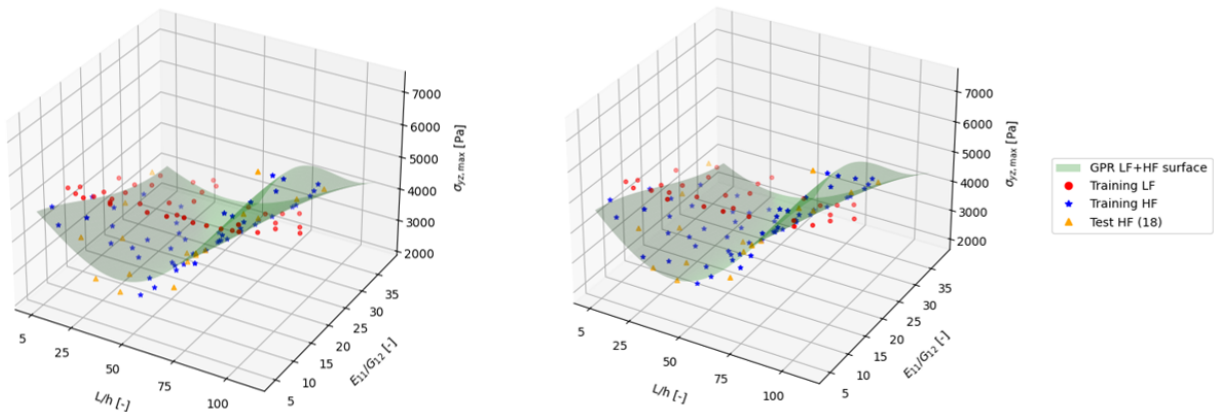


Figura 7.15: Trave composita: training GPR multi-fidelity

Training: 20 dati LF, 70 dati HF | $R^2=97.32\%$ | $RMSE=182.23$ Pa Training: 10 dati LF, 80 dati HF | $R^2=98.39\%$ | $RMSE=141.27$ Pa

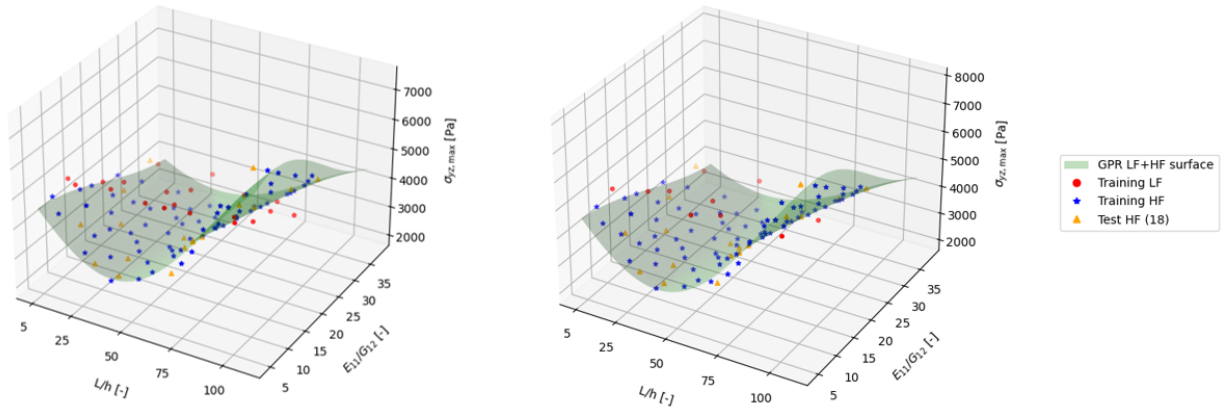


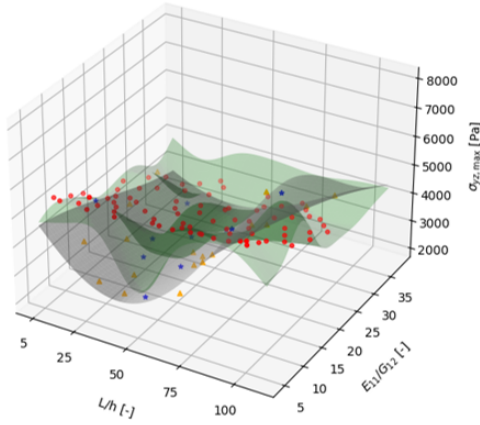
Figura 7.16: Trave composta: training GPR multi-fidelity

Dati LF	Dati HF	R^2	RMSE
90	0	-71.91 %	1.460E+03 Pa
80	10	-4.14 %	1.136E+03 Pa
70	20	65.95 %	6.496E+02 Pa
60	30	75.31 %	5.532E+02 Pa
50	40	90.68 %	3.399E+02 Pa
40	50	92.73 %	3.001E+02 Pa
30	60	96.13 %	2.190E+02 Pa
20	70	97.32 %	1.822E+02 Pa
10	80	98.39 %	1.413E+02 Pa
0	90	98.57 %	1.332E+02 Pa

Tabella 7.3: Training GPR: tabella riassuntiva

Come previsto, all'aumentare del quantitativo di dati HF inseriti in training, la previsione del GPR tende a migliorare in termini di accuratezza. Si possono, però, trovare predizioni ad alta accuratezza per un numero contenuto di dati HF, come nel caso con 50 LF e 40 HF. Il livello di accuratezza raggiunto è reso evidente se si mostra il confronto grafico come nelle figure (7.17)(7.18)(7.19)(7.20).

Confronto training: 90 HF vs 80 LF + 10 HF



Confronto training: 90 HF vs 70 LF + 20 HF

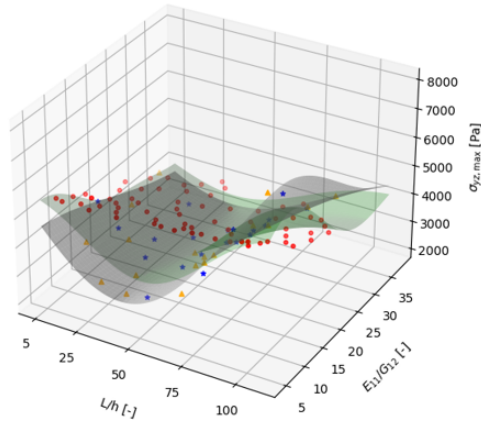
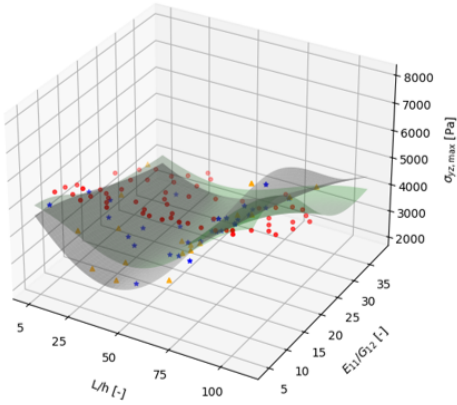


Figura 7.17: Trave composita: training GPR multi-fidelity - confronto

Confronto training: 90 HF vs 60 LF + 30 HF



Confronto training: 90 HF vs 50 LF + 40 HF

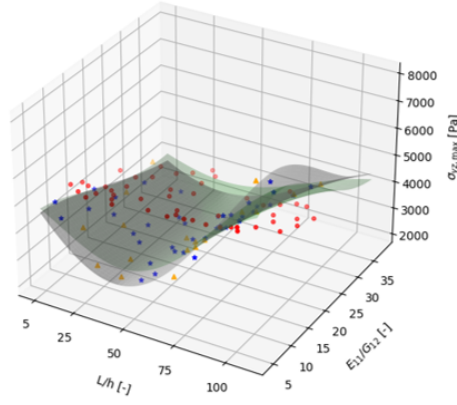
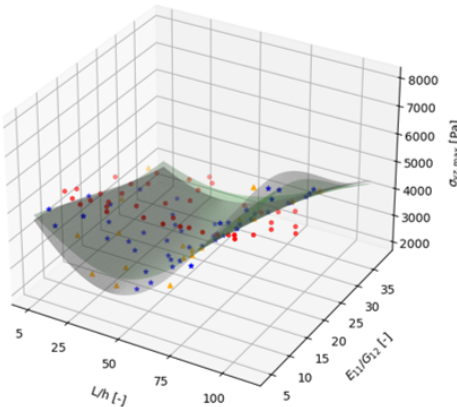


Figura 7.18: Trave composita: training GPR multi-fidelity - confronto

Confronto training: 90 HF vs 40 LF + 50 HF



Confronto training: 90 HF vs 30 LF + 60 HF

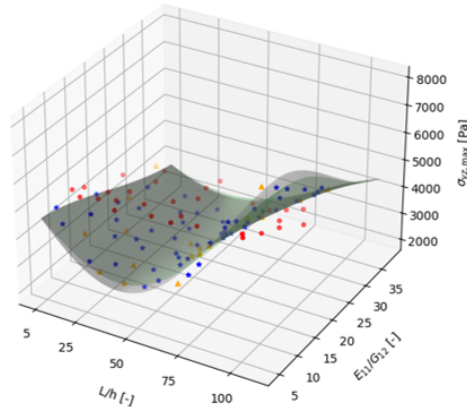


Figura 7.19: Trave composita: training GPR multi-fidelity - confronto

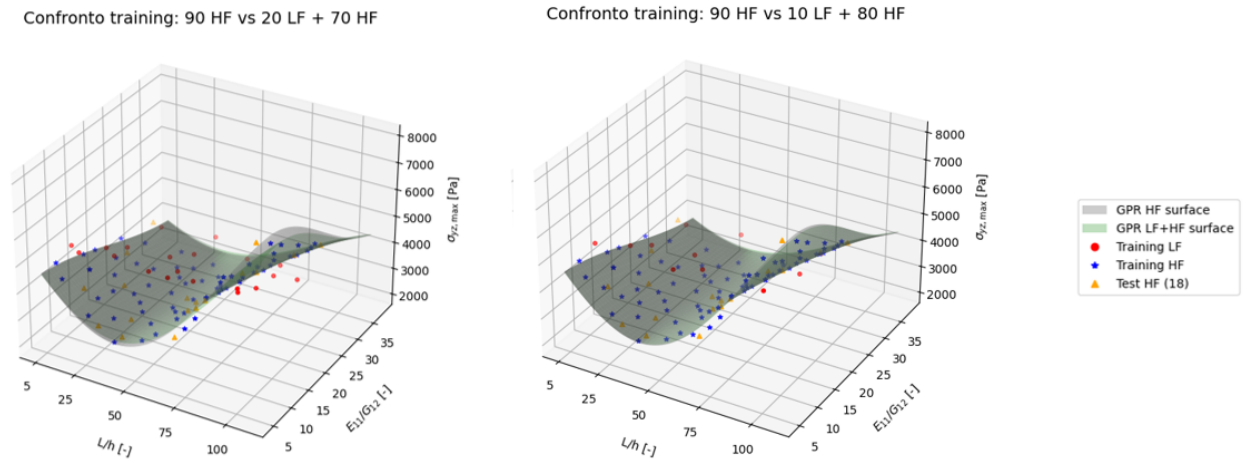
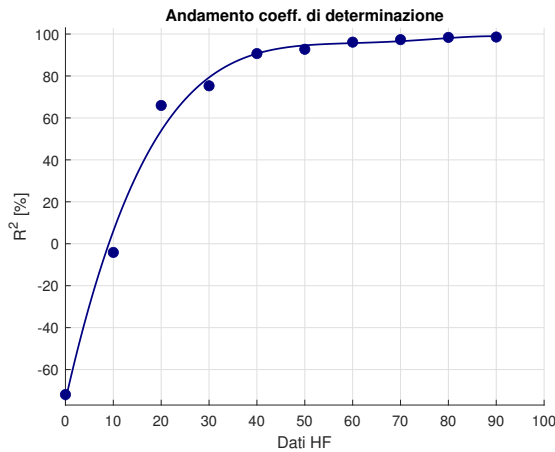
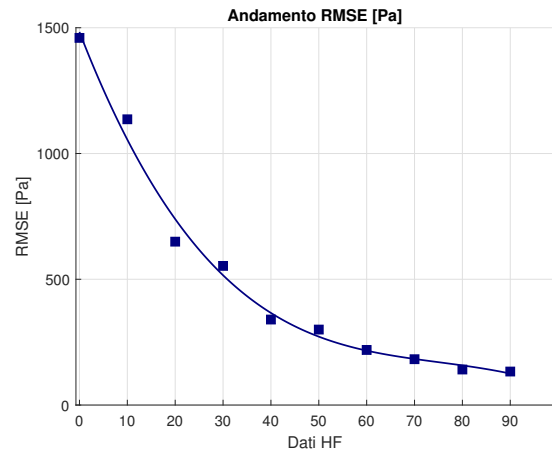


Figura 7.20: Trave composta: training GPR multi-fidelity - confronto

Il miglioramento delle predizioni all'aumentare della quantità di dati HF forniti in training al codice GPR, mostrato in tabella (7.3), è reso ulteriormente evidente dai grafici di figura (7.21). L'interpolazione dei valori è avvenuta mediante una polinomiale di grado 4, utile unicamente a mostrare l'andamento dei valori in modo evidente.



(a) R^2 in funzione della quantità di dati HF



(b) RMSE in funzione della quantità di dati HF

Figura 7.21: Andamenti di R^2 e RMSE in funzione del numero di dati HF nel training GPR

In termini di coefficiente di determinazione R^2 possiamo notare un buon trade-off tra costo computazionale e accuratezza già con 40 dati HF. Ovviamente, la minimizzazione del RMSE richiede il maggior numero di dati HF possibile, quindi la scelta basata su RMSE dipende unicamente dal grado di accuratezza ricercato dall'utente.

7.3 Processo di curing di componenti L-SHAPE

La predizione del comportamento dei materiali compositi durante il processo produttivo, finalizzata alla prevenzione dei difetti, rappresenta un aspetto cruciale in settori ad alta complessità come quello aerospaziale. La possibilità di ridurre le iterazioni sperimentali e/o progettuali consente infatti di contenere in modo significativo i costi complessivi. In linea con l'approccio proposto da Petrolo, Zappino *et al.* nel lavoro *"Efficient analysis of composites manufacturing using multi-fidelity simulation and probabilistic machine learning"* [4], è stato sviluppato e applicato un codice `Python` di Machine Learning basato su Gaussian Process Regression (GPR), realizzato secondo i principi descritti nei capitoli precedenti.

L'analisi ha riguardato componenti in materiale composito a geometria L-SHAPE ad otto strati cross-ply, sottoposti al ciclo di cura riportato in tabella (B.1). Sono state condotte simulazioni FEM-CUF su metà componente ad L con condizioni di simmetria variando la laminazione, mantenendo uno schema cross-ply e utilizzando il materiale composito UD AS4/8552 prodotto da Hexcel, costituito per il 35% in peso di matrice in resina epossidica 8552 e per il 65% di fibra di carbonio AS4HexTow con densità superficiale pari a $190 \frac{g}{m^2}$. L'obiettivo è prevedere l'angolo di tip-spring-in al centro del componente, generatosi a seguito dell'estrazione dal tool (realizzato in Invar) a fine produzione, a partire dai parametri di rigidezza B_{11} e D_{22} , direttamente correlati alla laminazione.

Si cerca, inoltre, di individuare un compromesso ottimale nell'impiego di dati multi-fidelity, in modo da coniugare elevata accuratezza e riduzione dei costi computazionali.

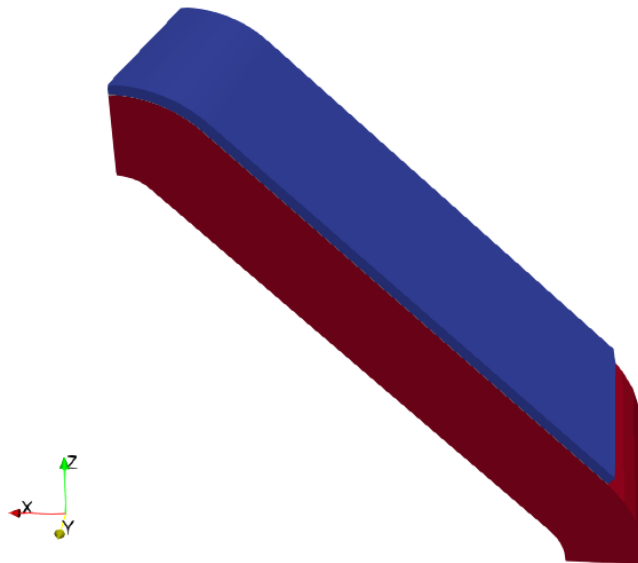


Figura 7.22: L-SHAPE: geometria da ParaView. Laminazione $(0/90/0/90)_s$

A differenza di quanto avvenuto nel caso [4], dove gli autori avevano a disposizione dati sperimentali, in questo caso si punta a basare la predizione sull'uso esclusivo di dati derivanti da simulazioni. In tal senso, si distinguono:

- **Dati low-fidelity (LF)**: derivanti da simulazioni FEM-CUF a carattere equivalent single layer (ESL).
- **Dati high-fidelity (HF)**: derivanti da simulazioni FEM-CUF a carattere layer-wise (LW).
- **Dati di test e validazione**: seguono la logica dei dati HF.

In sede di simulazione sono state analizzate, sia in caso LF sia in caso HF, tutte le 256 possibili combinazioni di sequenza di laminazione cross-ply, impiegando, al fine di ridurre l'onere computazionale, condizioni di simmetria su metà componente. Un esempio di geometria di base del componente, ottenuta mediante il software ParaView, è riportata in figura (7.22).

Il dataset impiegato nell'analisi mediante GPR si compone come segue: 31 dati HF utili alla validazione; 51 dati HF per i test; 174 dati di training.

I dati di training possono essere LF o HF a seconda delle casistiche; i dati LF e HF sono ottenuti con gli stessi input per le analisi di curing FEM-CUF: la differenza si riscontra, quindi, solo in termini di accuratezza del risultato. Le tabelle (B.12),(B.13),(B.14) riportano i dati HF, LF e di test e validazione.

Il modello in Python è studiato per condurre una prima analisi impiegando in training 174 dati esclusivamente LF, e, ad ogni step successivo, sostituire N dati (con N a scelta dell'utente) LF con N dati HF ottenuti con i medesimi input di laminazione. La selezione dei dati da sostituire è stata randomica nel primo caso, esattamente come la suddivisione di dati tra test e validazione (scelti nel file loro dedicato), e gestita mediante estrazione con `seed = 42`, per rendere il processo ripetibile. Nel secondo caso, è stata adottata una strategia BO, che verrà trattata nel paragrafo dedicato. Il kernel del modello GPR è di tipo RBF, con `length_scale_bounds = (1.0e-2, 1.0e2)` e valore iniziale di `length_scale = 1.0`. Ulteriori approfondimenti a riguardo saranno riportati in seguito.

In tabella (7.4) sono, infine, riportate alcune indicazioni di massima sul numero di DOF associati ad analisi LF e HF, con relativi tempi di esecuzione medi, al fine di dare un'idea sul costo computazionale delle analisi FEM-CUF e sull'effettiva, enorme, convenienza nell'uso di modelli GPR.

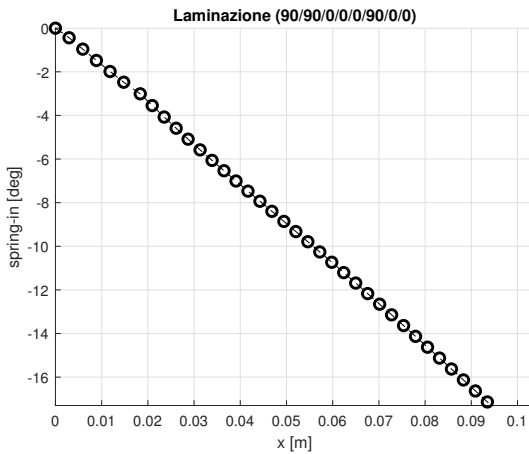
Analisi	DOF	CPU-time medio [s]
FEM-CUF HF	21861	8.3789E+02
FEM-CUF LF	7455	5.8834E+02

Tabella 7.4: L-SHAPE: costi computazionali

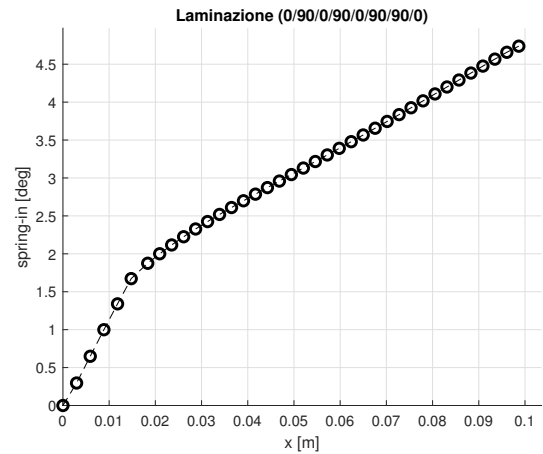
Di contro, la soluzione con un modello GPR sviluppato in Python, richiede un tempo di circa 11.25 secondi nel caso di sostituzione random dei dati, circa 60 secondi nel caso di Bayesian optimization, a cui serve sommare il tempo necessario all'estrazione dei dati dalle analisi FEM-CUF. Il lettore potrà facilmente comprendere come, una volta identificato il corretto mix di dati multi-fidelity per il training, riducendo o escludendo il costo dei dati di validazione, il vantaggio in termini di onere computazionale diventa estremamente significativo.

7.3.1 Influenza della stacking sequence sull'andamento dello spring-in angle

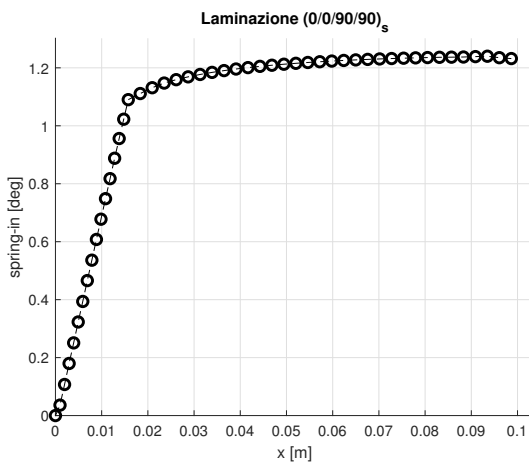
Lo spring-in nei componenti a L realizzati come laminati compositi deriva dalle deformazioni differenziali tra matrice e fibre durante cura e raffreddamento. La matrice si contrae maggiormente, mentre le fibre mostrano minore contrazione lungo la loro direzione, generando deformazioni residue. L'orientamento e la posizione degli strati influenzano fortemente il fenomeno: gli strati esterni incidono di più, mentre una laminazione bilanciata riduce lo spring-in. Prima di applicare il modello GPR, è stato condotto uno studio preliminare sull'influenza della stacking sequence, con analisi FEM-CUF. Sono stati scelti quattro casi rappresentativi (tra i 256 simulati) per evidenziare la variabilità dello spring-in in funzione della laminazione. Dai risultati, riportati in figura (7.23), si nota subito come le laminazioni simmetriche presentino uno spring-in generalmente meno marcato, con andamento ben distinto tra zona curva del componente e flangia; inoltre, per alcune laminazioni, come la (7.23a), l'angolo di spring-in può assumere valori negativi. Questa breve esposizione è utile a introdurre le successive analisi, al fine di mostrare in maniera immediata l'elevata variabilità dei dati in gioco.



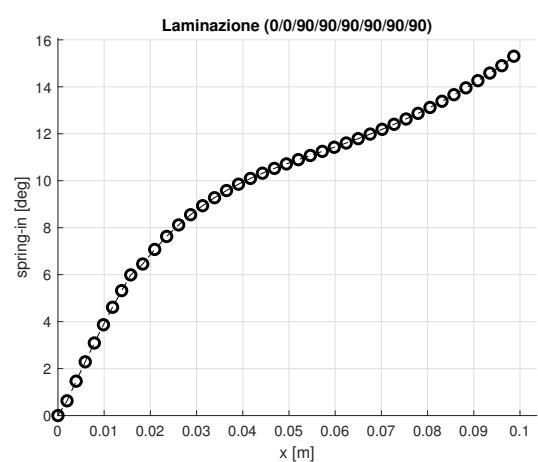
(a) Laminazione (90/90/0/0/0/90/0/0)



(b) Laminazione (0/90/0/90/0/90/90/0)



(c) Laminazione (0/0/90/90)_s



(d) Laminazione (0/0/90/90/90/90/90/90)

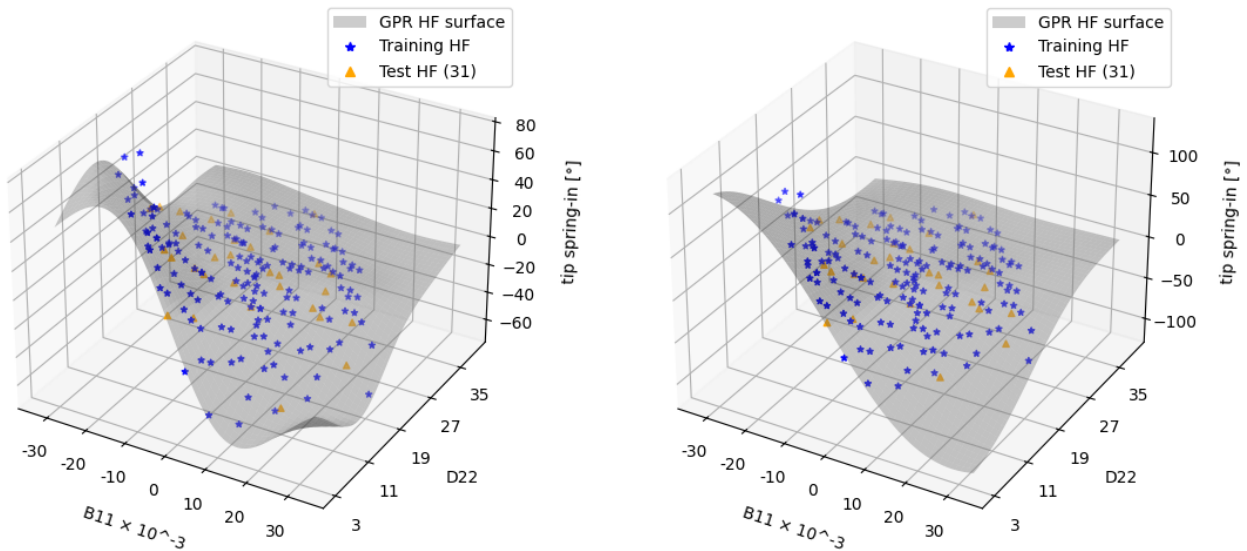
Figura 7.23: Effetto della laminazione sull'andamento dell'angolo di spring-in

7.3.2 Effetto dell'iperparametro di length scale del kernel

Come anticipato nel capitolo teorico dedicato ai modelli di Machine Learning basati su GPs, il kernel RBF utilizzato nel codice Python di GPR oggetto di questa tesi è definito tramite l'hyper-parameter length scale. Più precisamente, è possibile specificare un intervallo di valori all'interno del quale, grazie all'azione dell'optimizer, il modello seleziona quello più appropriato per le predizioni, riducendo il rischio di underfitting o overfitting e migliorando le prestazioni in termini di coefficiente di determinazione e RMSE. Tale intervallo viene stabilito dall'utente nella variabile `length_scale_bounds`.

Le predizioni discusse nei capitoli precedenti si basano su `length_scale_bounds` volutamente ampi, impostati come $(1.0e-2, 1.0e2)$. Una scelta di questo tipo garantisce con buona probabilità l'inclusione del valore ottimale di length scale, con un incremento del costo computazionale trascurabile. Proprio perché non è semplice individuare a priori il valore ottimale dei bounds, è pratica comune impostarli in maniera ampia, permettendo all'optimizer di selezionare automaticamente il parametro più adatto.

Questo approfondimento, sebbene collocato a chiusura dell'elaborato, mira a evidenziare un aspetto finora non trattato: la selezione degli iperparametri del kernel. Se da un lato il kernel RBF è stato scelto sulla base di evidenze in letteratura, per la sua elevata adattabilità a diversi contesti predittivi e la capacità di generare funzioni regolari, la determinazione del length scale è stata inizialmente esplorata attraverso vari tentativi per comprendere le impostazioni più appropriate. Nel presente lavoro, questo processo viene riproposto sul caso principale di interesse per la tesi, utilizzando esclusivamente dati HF nel training, in modo da evidenziare come la variazione dei `length_scale_bounds` possa influenzare il modello anche quando sono disponibili dati di input della massima accuratezza, mostrando in maniera consapevole il procedimento e facilitando la comprensione dei risultati.

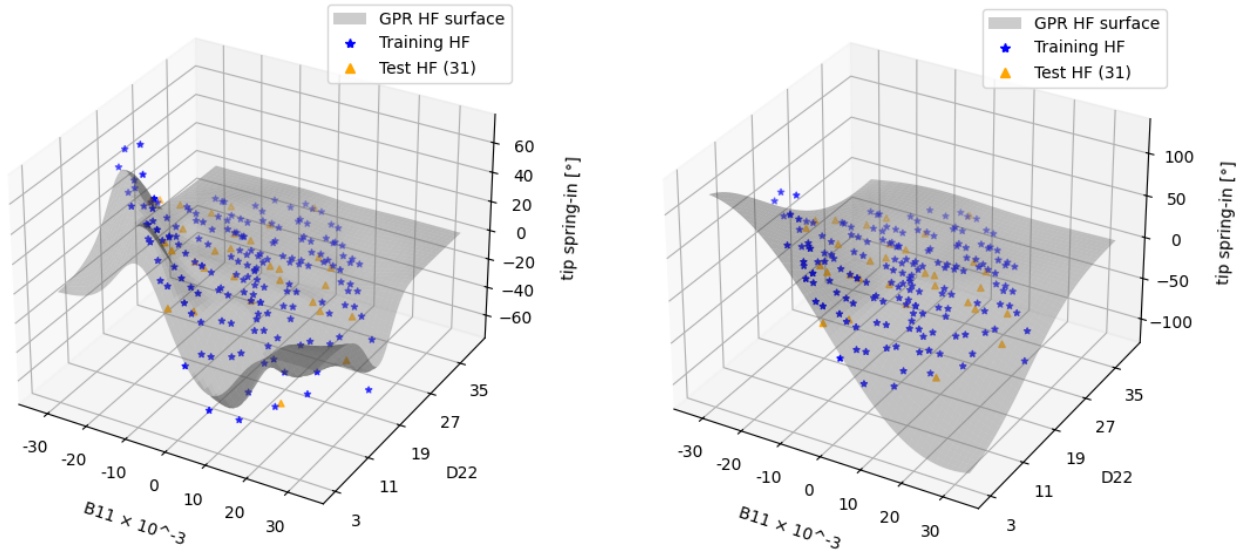


(a) Predizione con `length_scale_bounds` = $(1.0, 1.0)$. $R^2 = 99.21\%$, $RMSE = 1.28^\circ$

(b) Predizione con `length_scale_bounds` = $(1.0e-2, 1.0e2)$. $R^2 = 99.86\%$, $RMSE = 0.63^\circ$

Figura 7.24: Training GPR HF: selezione hyper-parameter - length-scale poco inferiore all'ottimale

Inserire, come visibile dai risultati di figura (7.24) e (7.25), un length scale più basso del valore ottimale, rende il modello più sensibile alle variazioni locali dei dati. La GPR tende a seguire troppo da vicino i punti di training, producendo una superficie di predizione più "ondulata" e irregolare. Di conseguenza, le predizioni su dati non visti peggiorano, con RMSE maggiore e R^2 inferiore rispetto al caso ottimale. Nel caso di figura (7.25) si può notare come i risultati, oltre a differire in maniera molto evidente dalla casistica di riferimento data nel risultato (7.25b), mostrano coefficiente di determinazione e RMSE peggiori rispetto a quelli che si otterrebbero con training basato esclusivamente su dati LF, come si può notare da tabella (7.6).

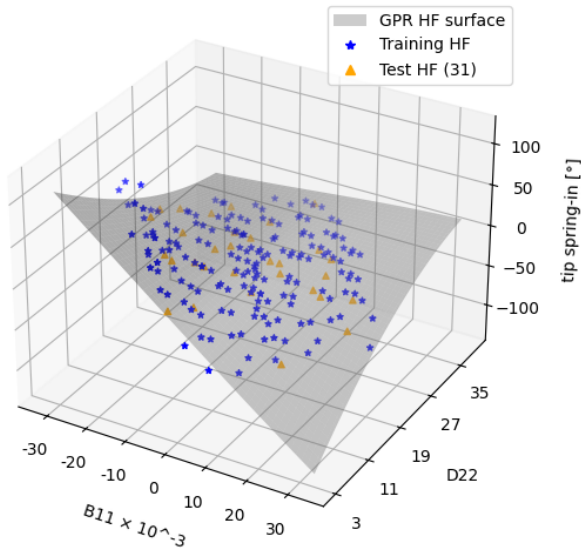


(a) Predizione con `length_scale_bounds` = (0.4, 0.4). $R^2 = 88.73\%$, RMSE = 5.59°

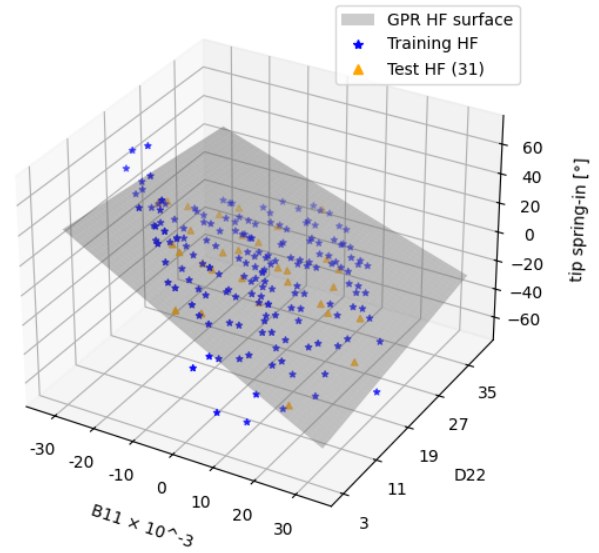
(b) Predizione con `length_scale_bounds` = (1.0e-2, 1.0e2). $R^2 = 99.86\%$, RMSE = 0.63°

Figura 7.25: Training GPR HF: selezione hyper-parameter - lenght-scale molto inferiore all'ottimale

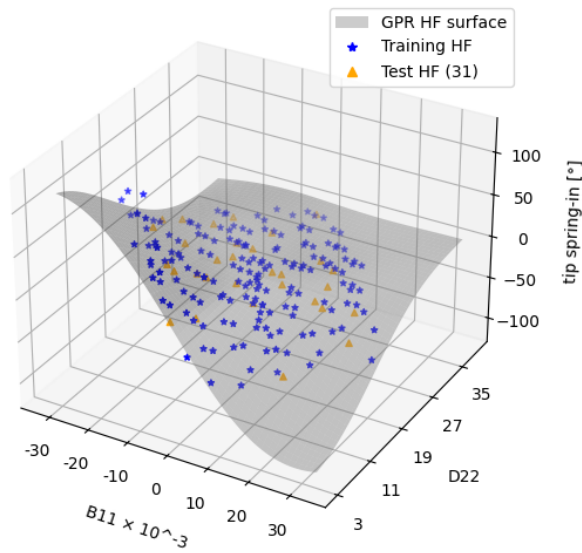
Infine, in figura (7.26) è mostrato l'effetto ottenuto quando viene scelto un parametro di length scale fisso superiore a quello ottimale: il modello GPR diventa troppo "lento" nel seguire le variazioni dei dati, producendo una superficie molto liscia e piatta. In questo caso, le predizioni tendono ad avvicinarsi a un semplice valore medio dei dati di training. Di conseguenza, l'RMSE aumenta e il R^2 diminuisce rispetto al caso ottimale.



(a) Predizione con `length_scale_bounds` = (10.0, 10.0). $R^2 = 94.05\%$, RMSE = 4.06°



(b) Predizione con `length_scale_bounds` = (50.0, 50.0). $R^2 = 73.03\%$, RMSE = 8.65°



(c) Predizione con `length_scale_bounds` = (1.0e-2, 1.0e2). $R^2 = 99.86\%$, RMSE = 0.63°

Figura 7.26: Training GPR HF: selezione hyper-parameter - lenght scale superiore all'ottimale

Scelta del length scale ottimale basata sui dati di training

Come visto in precedenza, una volta scelto un kernel RBF, la scelta di un length scale appropriato è fondamentale per ottenere predizioni accurate con un modello GPR. Il length scale determina quanto due punti devono essere vicini per essere fortemente correlati: dalle analisi precedenti si nota come valori troppo piccoli portano a overfitting, mentre valori troppo grandi causano underfitting, con predizioni vicine al valore medio dei dati.

Se si conoscono i dati di training, come nel caso di analisi su componenti L-SHAPE di questa tesi, è possibile stimare dei bounds ragionevoli per il length scale, attraverso i seguenti passaggi, da integrare nel codice Python:

1. **Standardizzazione delle variabili di input:** le feature del dataset vengono scalate mediante, ad esempio, `StandardScaler` di `sklearn`, in modo da avere media nulla e deviazione standard unitaria. Ciò consente di rendere le diverse feature confrontabili in termini di scala e influenza sulla correlazione.
2. **Determinazione della scala caratteristica delle feature:** si calcola la deviazione standard o l'intervallo (range) di ciascuna variabile di input. Questo valore rappresenta la scala tipica delle variazioni dei dati e fornisce un riferimento quantitativo per la scelta dei parametri del kernel.
3. **Definizione dei bounds del length scale per il kernel RBF:** sulla base della scala caratteristica, si impostano intervalli ragionevoli per ciascuna feature, tipicamente compresi tra $0.1 \times \sigma$ e $10 \times \sigma$, dove σ è la deviazione standard della feature. In tal modo, l'ottimizzazione della verosimiglianza della GPR viene limitata a valori coerenti con la distribuzione dei dati, riducendo il rischio di overfitting o underfitting.

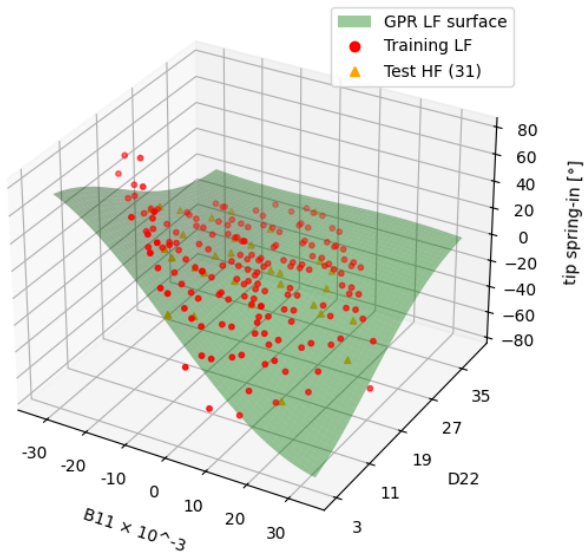
Nella versione finale del codice Python utilizzata, i bounds del length scale sono stati impostati tra 1.0×10^{-2} e 1.0×10^2 . È stata inoltre integrata la possibilità di visualizzare il valore del length scale ottimale ottenuto dall'ottimizzatore della GPR. Questo consente di confrontare come il parametro ottimale varia in funzione del mix di dati utilizzato nelle analisi multi-fidelity. A tal fine, viene riportata la tabella (7.5), che sintetizza i valori di length scale ottimale ottenuti per i diversi set di dati combinati.

Dati LF	Dati HF	length-scale ott.
174	0	2.673
154	20	2.323
144	30	2.428
134	40	2.439
124	50	2.433
114	60	2.459
104	70	2.473
94	80	2.487
84	90	2.463
74	100	2.393
64	110	1.965
54	120	2.042
44	130	2.123
34	140	2.110
24	150	1.769
1	173	1.594
0	174	1.595

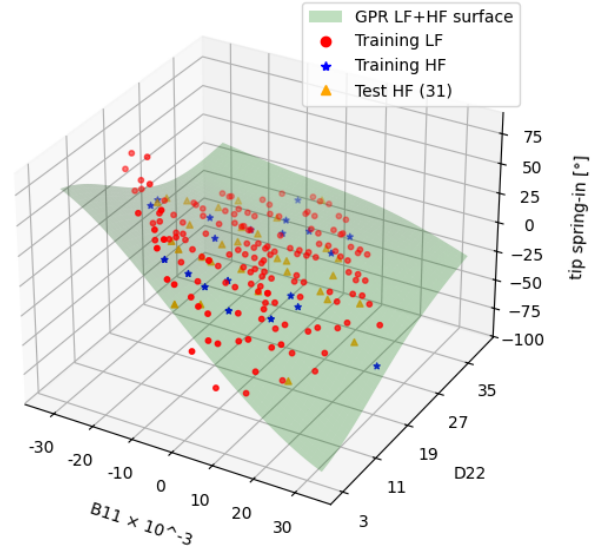
Tabella 7.5: Training GPR L-SHAPE: length scale ottimale

In generale, quindi, la tabella (7.5) mostra come la scelta di bounds molto ampi nel codice Python, ma centrati intorno al valore di 1.0, porti sempre, nel caso di analisi in esame, a risultati di massima accuratezza possibile; questo avviene perché il length scale ottimale si trova all'interno dei bounds forniti al codice Python. Un miglioramento del codice si avrebbe, in termini di costi computazionali, andando a ridurre l'ampiezza dei bounds del length scale, in modo da rendere più semplice la ricerca per l'ottimizzatore.

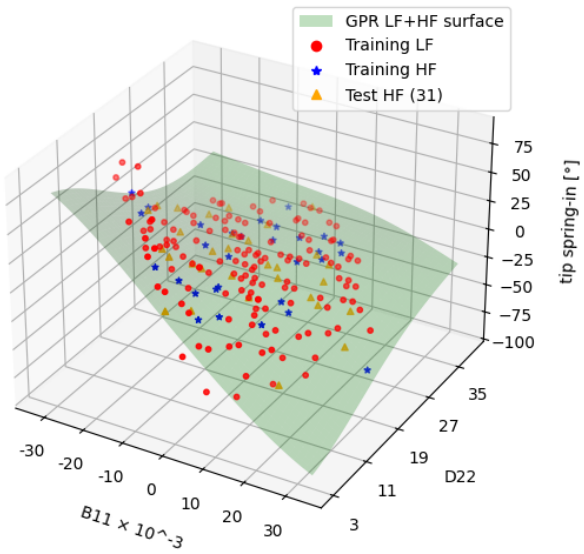
7.3.3 Risultati dal training multi-fidelity: previsione dell'angolo di spring-in



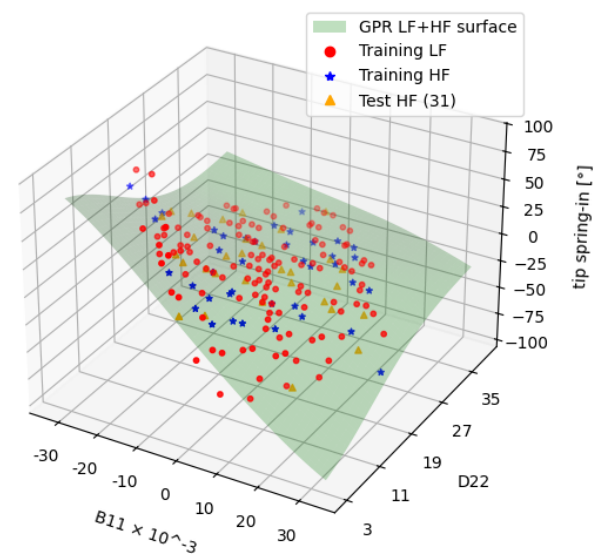
(a) 174 dati LF. $R^2 = 92.07\%$; RMSE = 4.84°



(b) 154 dati LF, 20 dati HF. $R^2 = 94.15\%$; RMSE = 4.03°

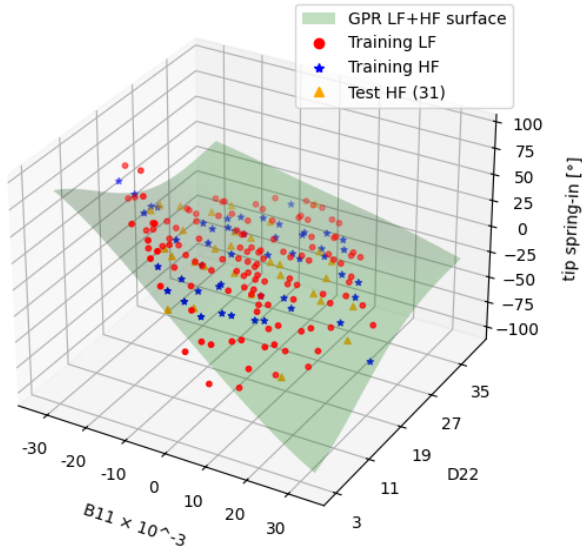


(c) 144 dati LF, 30 dati HF. $R^2 = 94.39\%$; RMSE = 3.97°

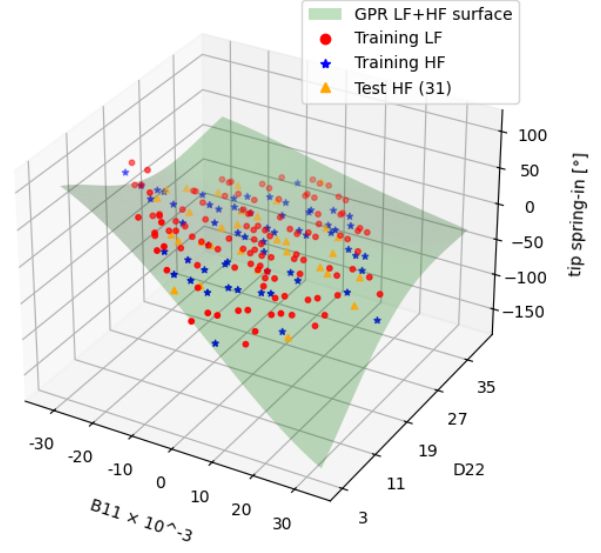


(d) 134 dati LF, 40 dati HF. $R^2 = 95.78\%$; RMSE = 3.44°

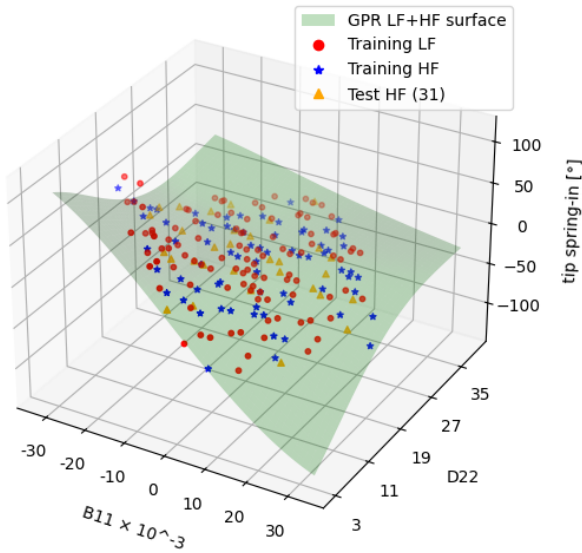
Figura 7.27: L-SHAPE: training GPR multi-fidelity - Parte 1



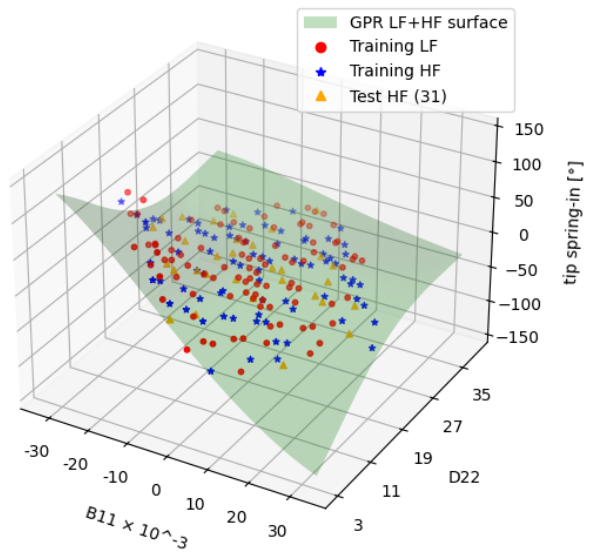
(a) 124 dati LF, 50 dati HF. $R^2 = 96.69\%$; RMSE = 3.05°



(b) 114 dati LF, 60 dati HF. $R^2 = 97.03\%$; RMSE = 2.88°

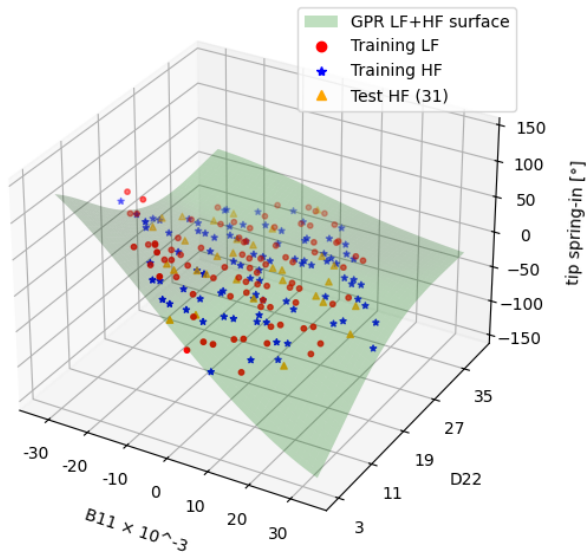


(c) 104 dati LF, 70 dati HF. $R^2 = 97.26\%$; RMSE = 2.77°

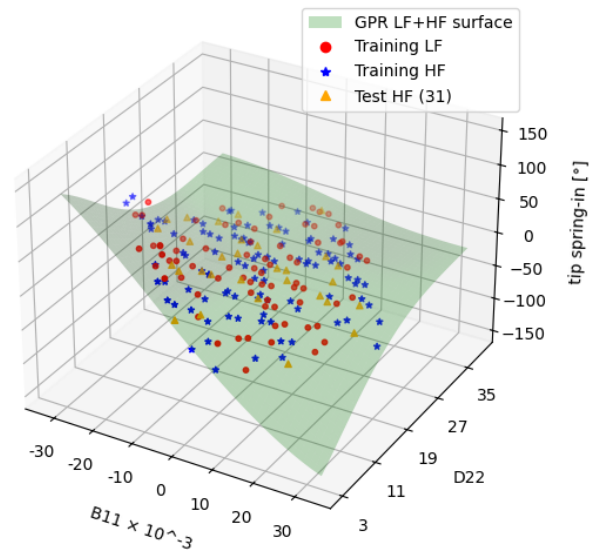


(d) 94 dati LF, 80 dati HF. $R^2 = 97.53\%$; RMSE = 2.63°

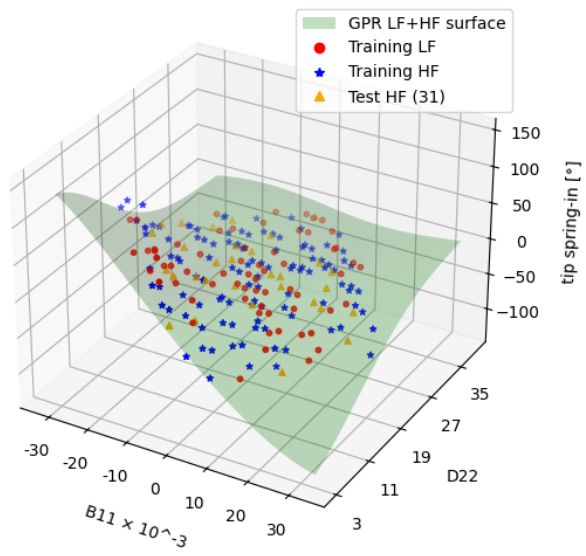
Figura 7.28: L-SHAPE: training GPR multi-fidelity - Parte 2



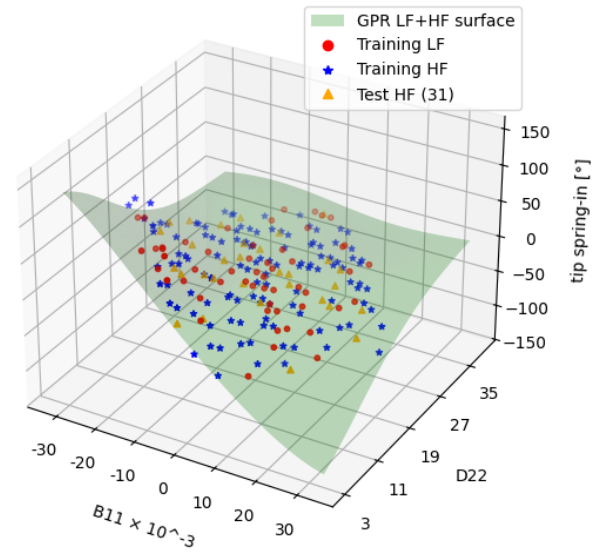
(a) 84 dati LF, 90 dati HF. $R^2 = 97.59\%$; RMSE = 2.60°



(b) 74 dati LF, 100 dati HF. $R^2 = 97.86\%$; RMSE = 2.45°

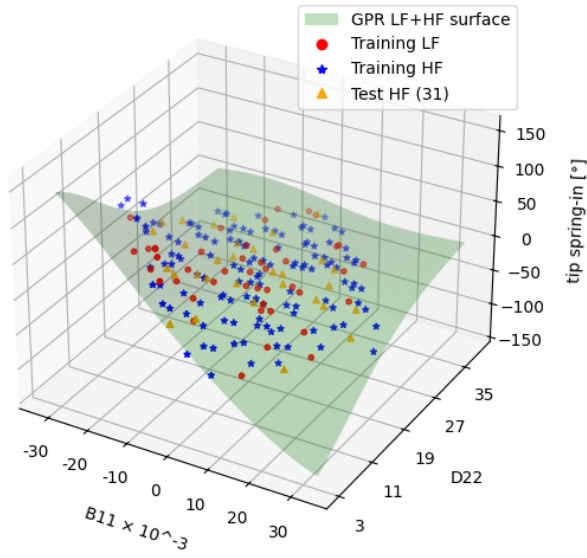


(c) 64 dati LF, 110 dati HF. $R^2 = 98.30\%$; RMSE = 2.18°

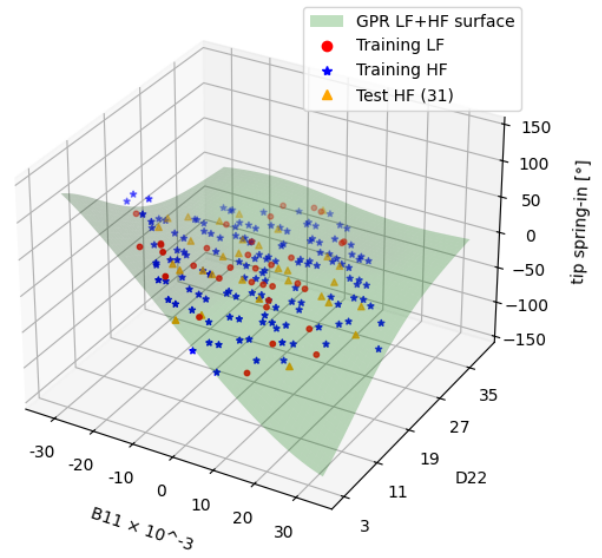


(d) 54 dati LF, 120 dati HF. $R^2 = 98.42\%$; RMSE = 2.11°

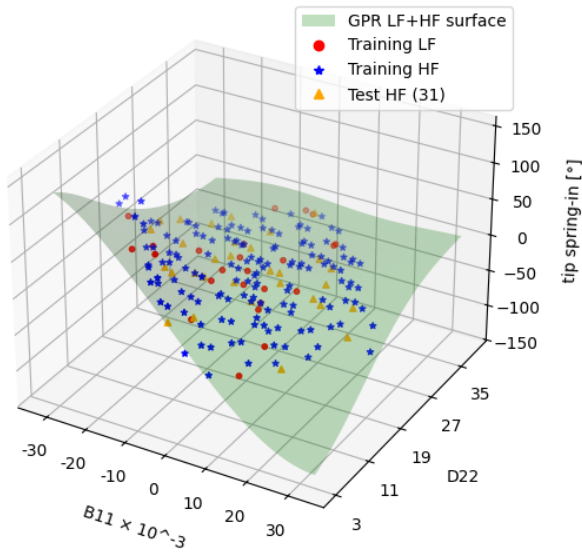
Figura 7.29: L-SHAPE: training GPR multi-fidelity - Parte 3



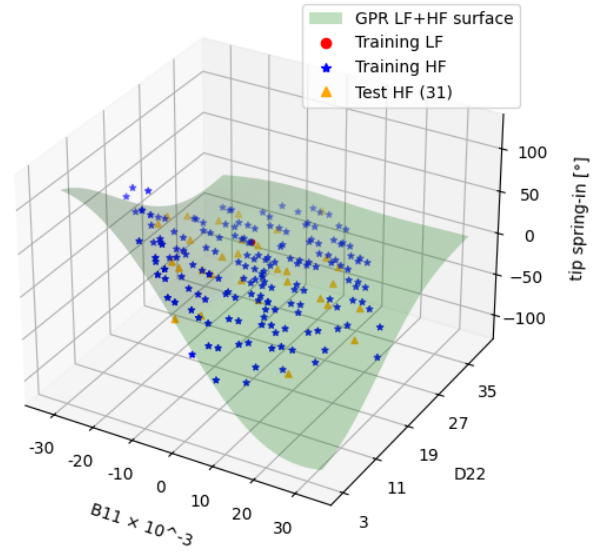
(a) 44 dati LF, 130 dati HF. $R^2 = 98.45\%$; RMSE = 2.09°



(b) 34 dati LF, 140 dati HF. $R^2 = 98.92\%$; RMSE = 1.74°

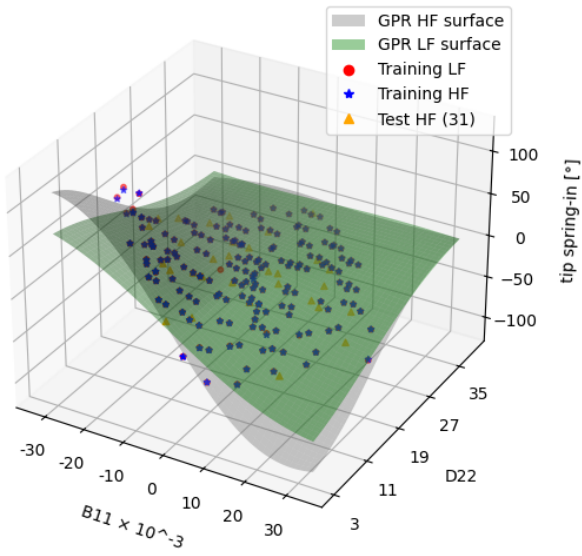


(c) 24 dati LF, 150 dati HF. $R^2 = 99.80\%$; RMSE = 0.66°

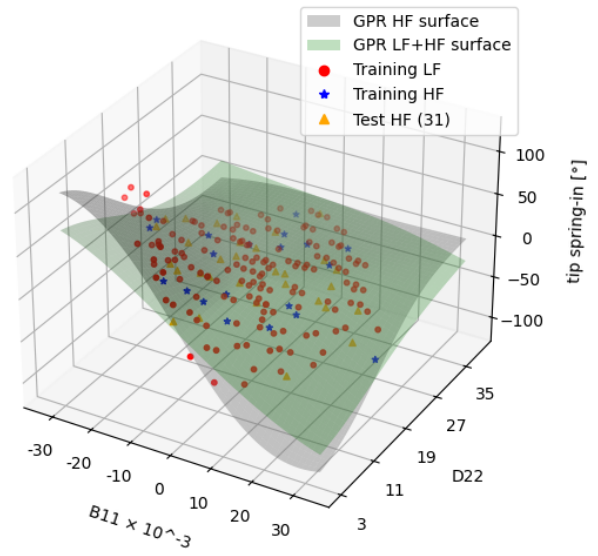


(d) 1 dato LF, 173 dati HF. $R^2 = 99.85\%$; RMSE = 0.63°

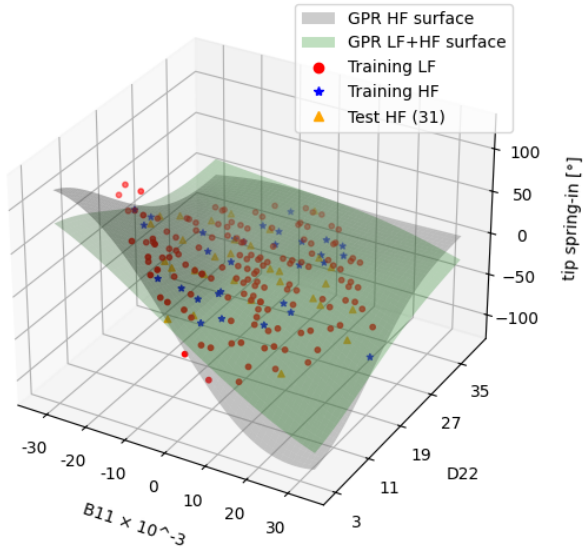
Figura 7.30: L-SHAPE: training GPR multi-fidelity - Parte 4



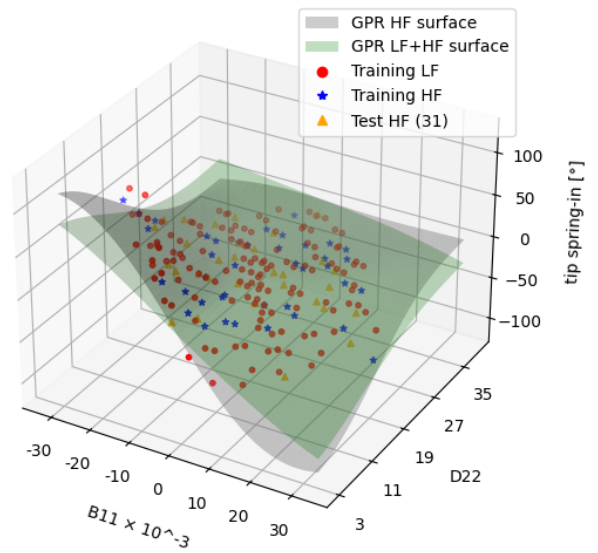
(a) 174 LF vs 174 HF



(b) 154 LF, 20 HF vs 174 HF

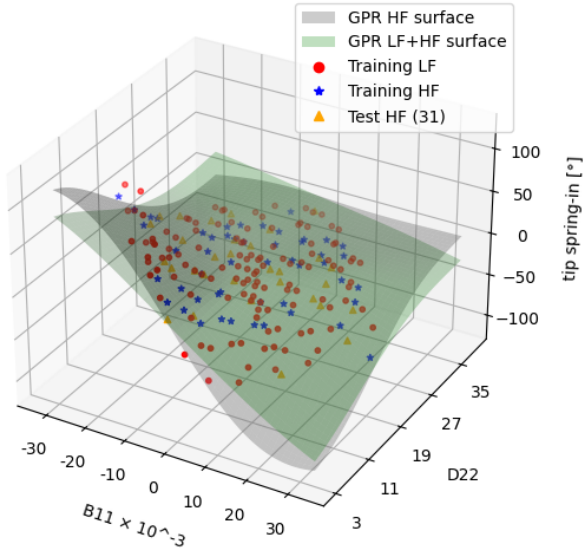


(c) 144 LF, 30 HF vs 174 HF

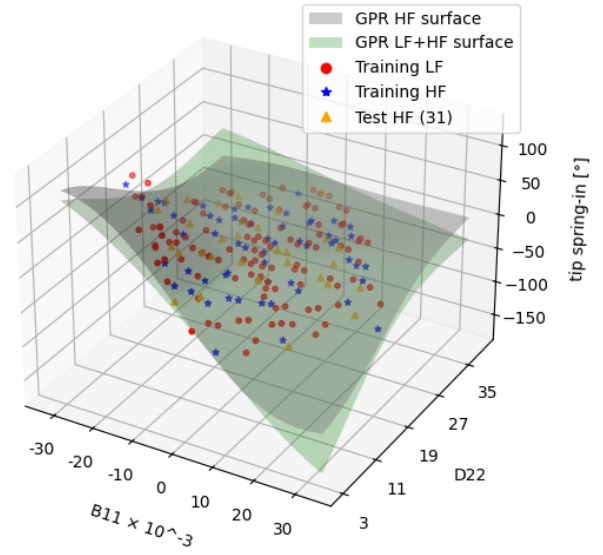


(d) 134 LF, 40 HF vs 174 HF

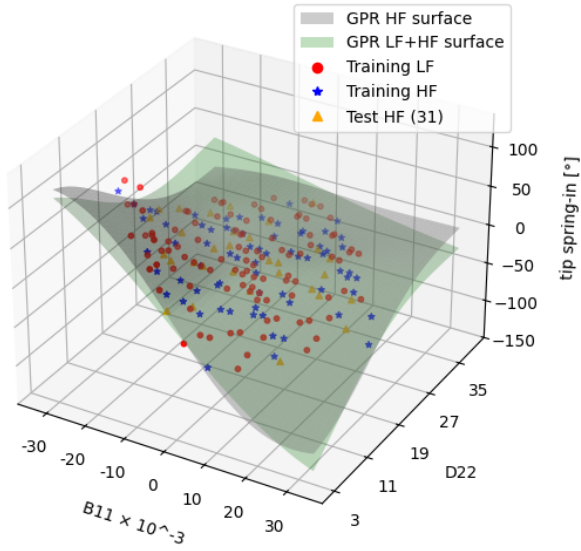
Figura 7.31: L-SHAPE: training GPR multi-fidelity - Confronti 1



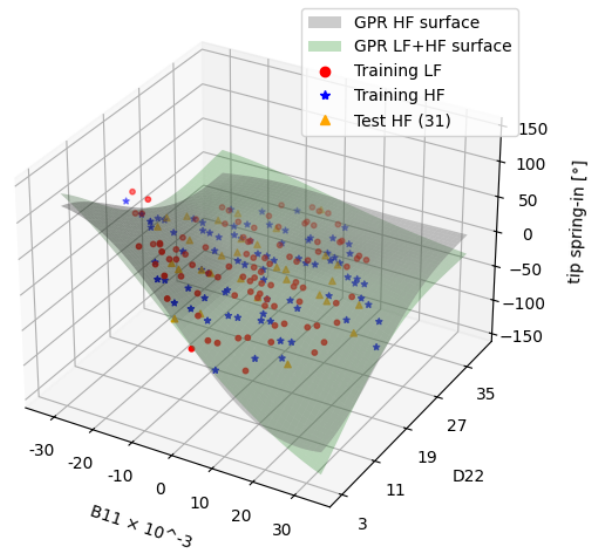
(a) 124 LF, 50 HF vs 174 HF



(b) 114 LF, 60 HF vs 174 HF

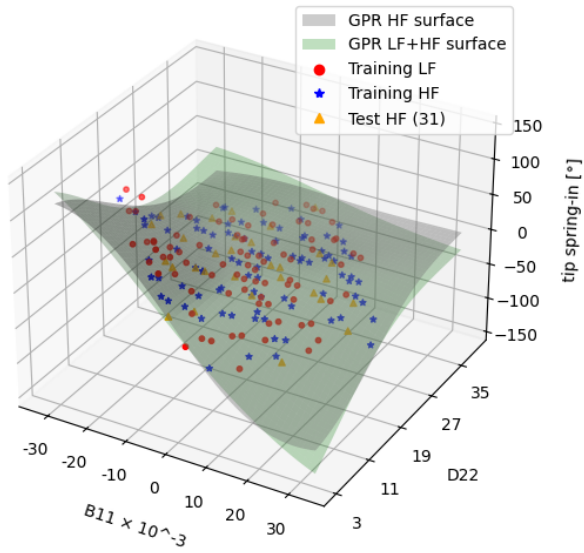


(c) 104 LF, 70 HF vs 174 HF

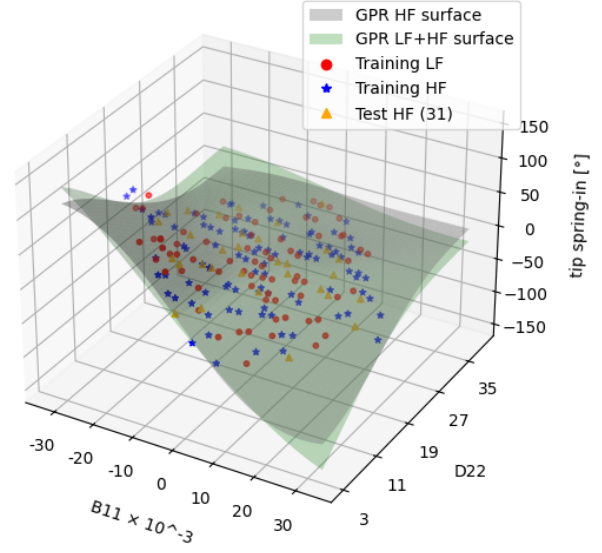


(d) 94 LF, 80 HF vs 174 HF

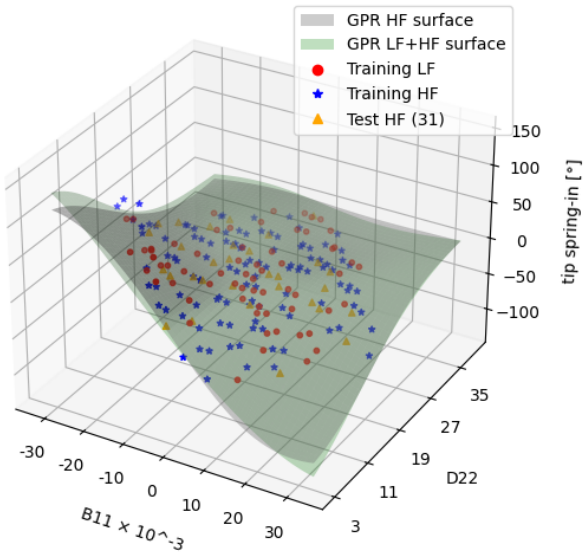
Figura 7.32: L-SHAPE: training GPR multi-fidelity - Confronti 2



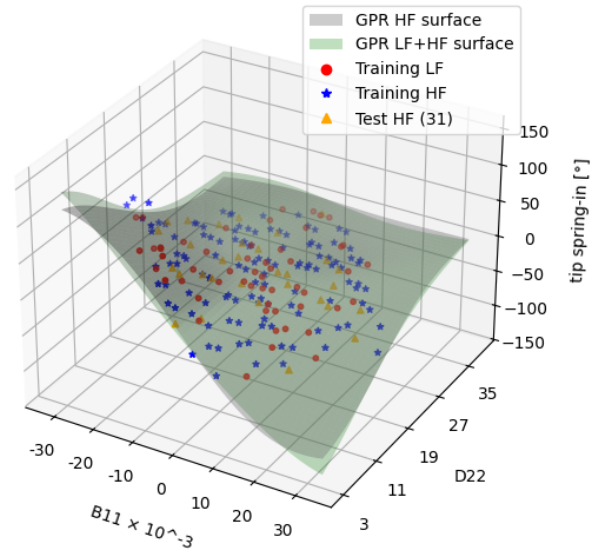
(a) 84 LF, 90 HF vs 174 HF



(b) 74 LF, 100 HF vs 174 HF

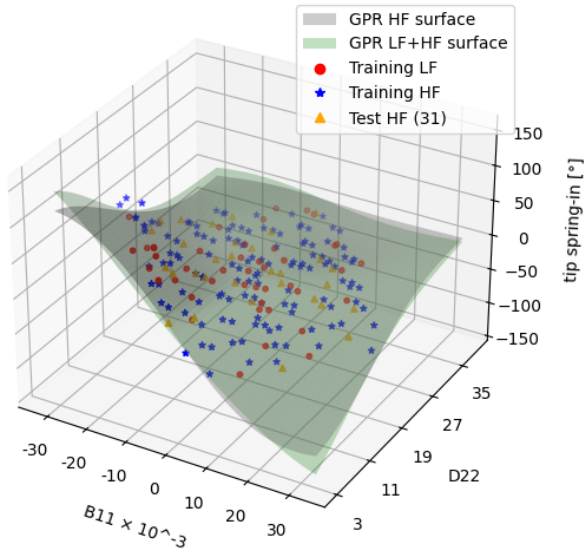


(c) 64 LF, 110 HF vs 174 HF

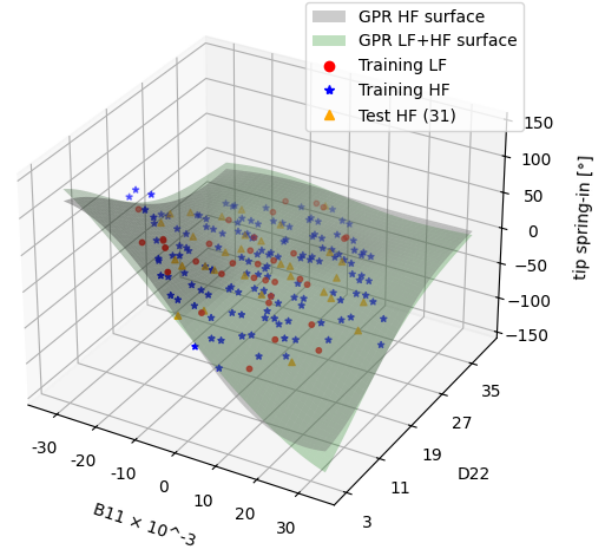


(d) 54 LF, 120 HF vs 174 HF

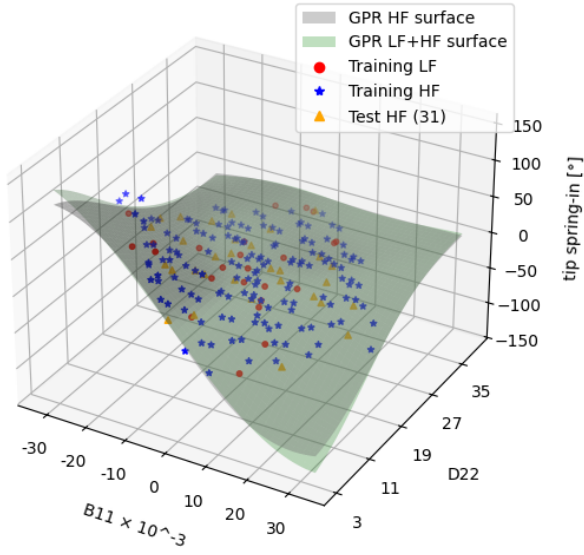
Figura 7.33: L-SHAPE: training GPR multi-fidelity - Confronti 3



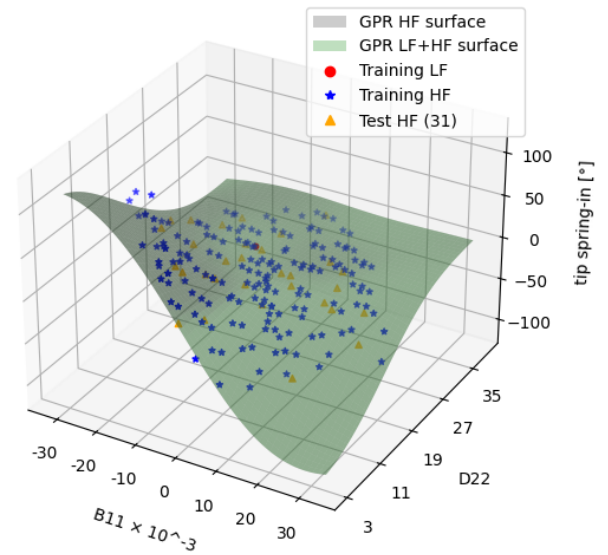
(a) 44 LF, 130 HF vs 174 HF



(b) 34 LF, 140 HF vs 174 HF



(c) 24 LF, 150 HF vs 174 HF

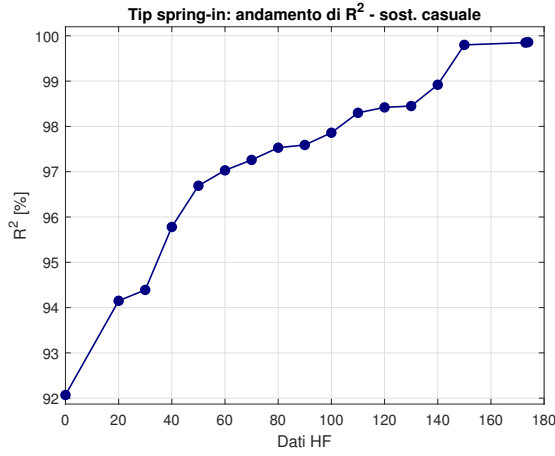


(d) 1 LF, 173 HF vs 174 HF

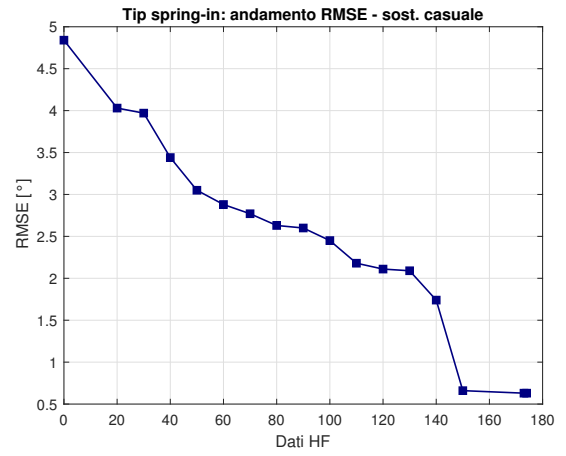
Figura 7.34: L-SHAPE: training GPR multi-fidelity - Confronti 4

Dati LF	Dati HF	R^2	RMSE
174	0	92.07%	4.84°
154	20	94.15%	4.03°
144	30	94.39%	3.97°
134	40	95.78%	3.44°
124	50	96.69%	3.05°
114	60	97.03%	2.88°
104	70	97.26%	2.77°
94	80	97.53%	2.63°
84	90	97.59%	2.60°
74	100	97.86%	2.45°
64	110	98.30%	2.18°
54	120	98.42%	2.11°
44	130	98.45%	2.09°
34	140	98.92%	1.74°
24	150	99.80%	0.66°
1	173	99.85%	0.63°
0	174	99.86%	0.63°

Tabella 7.6: Training GPR L-SHAPE: tabella riassuntiva



(a) R^2 in funzione della quantità di dati HF



(b) RMSE in funzione della quantità di dati HF

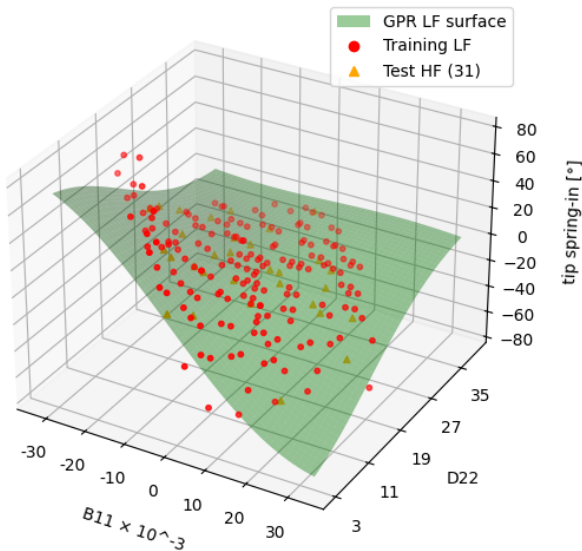
Figura 7.35: Andamenti di R^2 e RMSE in funzione del numero di dati HF nel training GPR

Come si nota dalla consultazione dei risultati riportati alle pagine precedenti, della tabella (7.6) e dei grafici di figura (7.35), il modello GPR è in grado di predire accuratamente i valori di angolo di spring-in in componenti L-SHAPE anche con un quantitativo ridotto di dati HF. Infatti, a partire da 60 dati HF è possibile avere un coefficiente di determinazione superiore al 97%, unito a un RMSE inferiore a 3°. Negli step iniziali di training multi-fidelity si nota dai confronti, come in figura (7.31b), che le difficoltà principali nelle analisi sono riscontrate dal modello nelle zone limite laterali del dominio, dove è presente una quantità ridotta di campioni. L'introduzione di dati HF riduce progressivamente la distanza rispetto alla soluzione con soli HF.

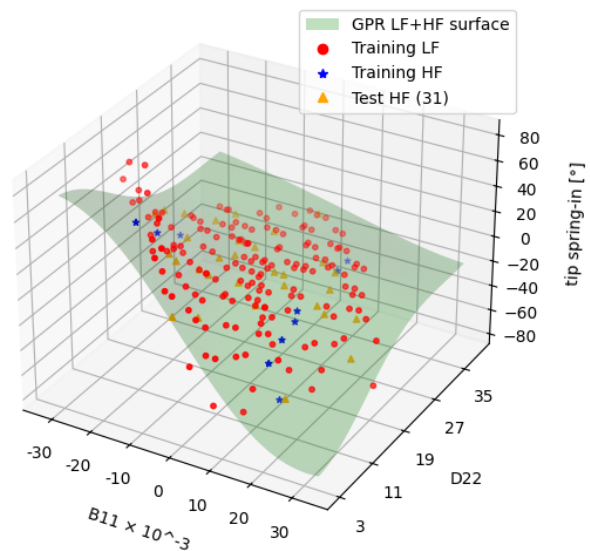
7.3.4 Risultati dal training multi-fidelity: previsione dell'angolo di spring-in - Bayesian optimization

Un ulteriore miglioramento nei risultati delle predizioni mediante GPR si può ottenere andando a correggere il modo in cui vengono selezionati i dati per il mix multi-fidelity. La scelta random di N_{mix} dati LF da sostituire con HF, finora impiegata, risulta poco efficace quando si hanno a disposizione dataset contenenti pochi dati HF. Un passo avanti si può fare impiegando, per la selezione dei dati, un algoritmo basato su Bayesian Optimization. Questa soluzione, che risulta essere abbastanza onerosa in termini di costi computazionali (per quanto comunque conveniente rispetto a svolgere anche solo una analisi di curing HF), permette di ottenere predizioni molto accurate fin da subito, e ridurre il quantitativo di dati HF necessari a raggiungere massima accuratezza.

L'algoritmo impiegato in questa parte di lavoro prevede la definizione di una funzione obiettivo, in questo caso la metrica di accuratezza RMSE, da minimizzare andando a scegliere, ad ogni iterazione, dati diversi da sostituire. Il codice, quindi, è in grado di memorizzare il miglior mix e riproporlo all'utente. Essendo l'ottimizzazione bayesiana, però, sviluppata per modelli continui, si è reso necessario un suo adattamento al caso discreto, andando a limitare il numero di volte in cui viene richiamato il processo GPR, mediante il parametro `n_calls_bo`. Tale parametro è stato imposto pari a 100, al fine di limitare il costo computazionale: di conseguenza, ad ogni iterazione di ottimizzazione bayesiana, la GPR può esser richiamata fino a 100 volte. Sempre al fine di limitare l'onere computazionale, è stato limitato a 2 il numero di volte in cui l'ottimizzatore della GPR può essere riavviato; questa limitazione può avere, come visto nel paragrafo dedicato al lenght-scale, un effetto negativo sulla superficie di predizione, che, come si vedrà, in alcuni casi presenterà gli angoli estremi distanti dal caso HF-only: questo è dovuto al fatto che, essendo l'ottimizzatore GPR avviato poche volte, non troverà una lenght-scale perfetta, ma molto vicina ad essa, il che influisce sui risultati ai bordi, dove non sono presenti dati di training. Rimane comunque valido il risultato nella zona di interesse, ovvero dove sono presenti i dati di training e test. In seguito sono riportati i risultati ottenuti.

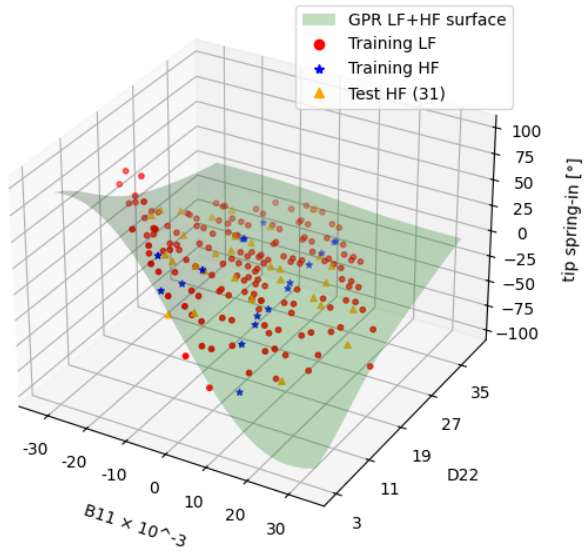


(a) 174 dati LF, $R^2 = 92.07\%$, RMSE = 4.84°

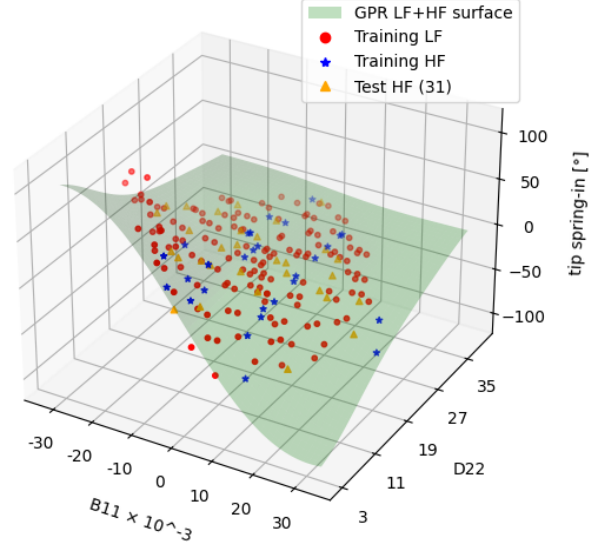


(b) 164 dati LF, 10 dati HF, $R^2 = 97.16\%$, RMSE = 2.81°

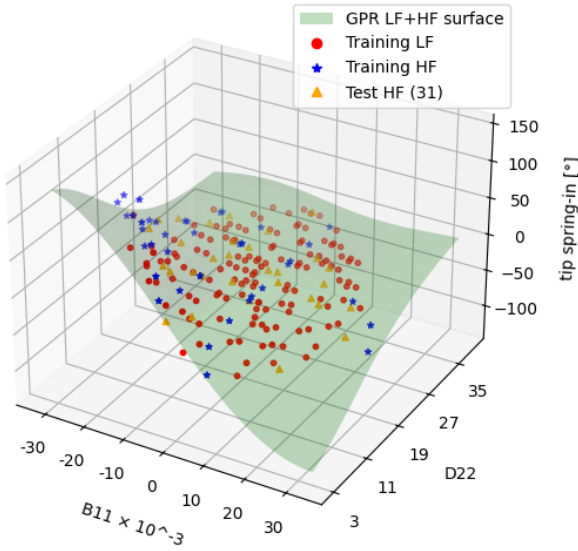
Figura 7.36: L-SHAPE: training multi-fidelity con Bayesian Opt. - Parte 1



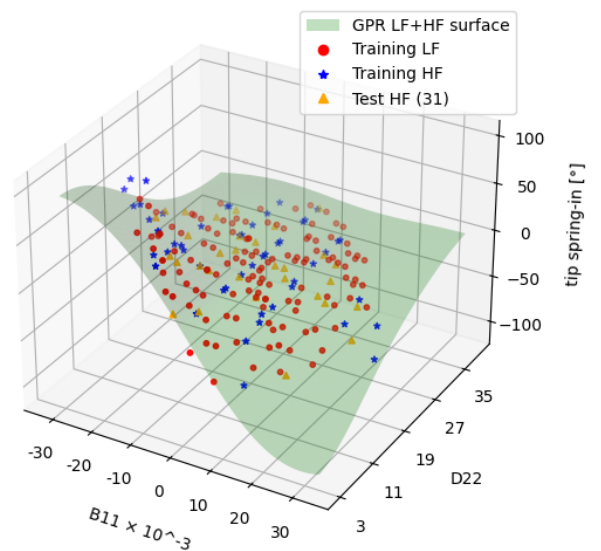
(a) 154 dati LF, 20 dati HF, $R^2 = 98.18\%$, RMSE = 2.25°



(b) 144 dati LF, 30 dati HF, $R^2 = 98.79\%$, RMSE = 1.83°

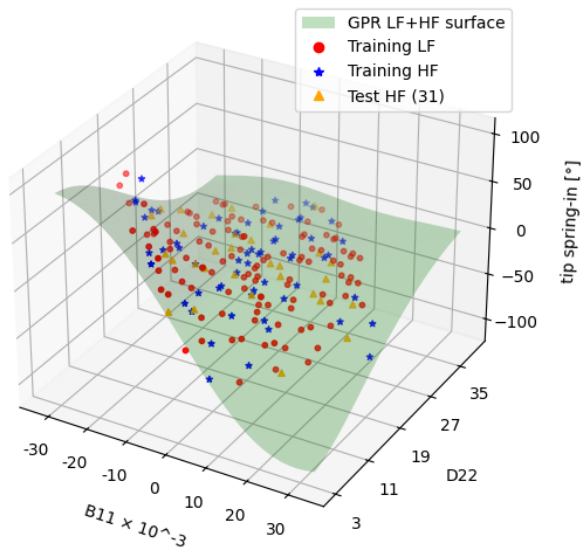


(c) 134 dati LF, 40 dati HF, $R^2 = 98.82\%$, RMSE = 1.79°

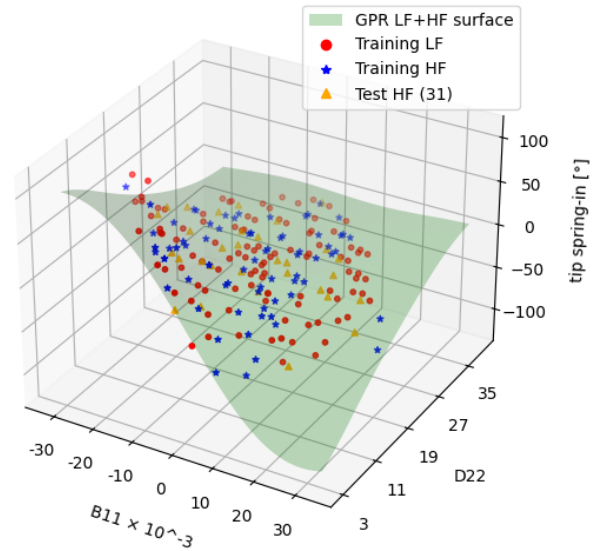


(d) 124 dati LF, 50 dati HF, $R^2 = 99.35\%$, RMSE = 1.34°

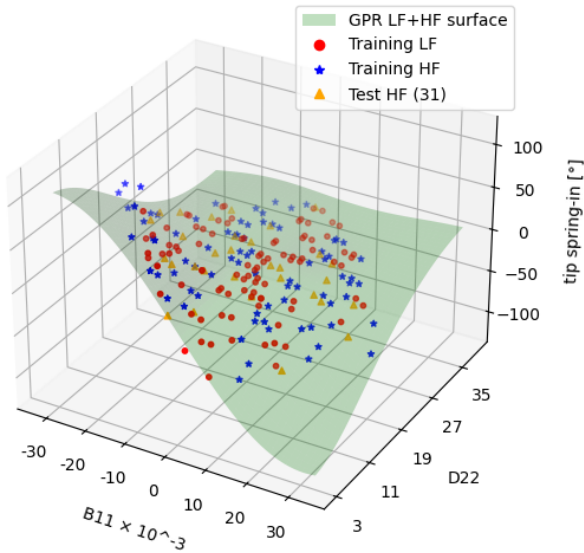
Figura 7.37: L-SHAPE: training multi-fidelity con Bayesian Opt. - Parte 2



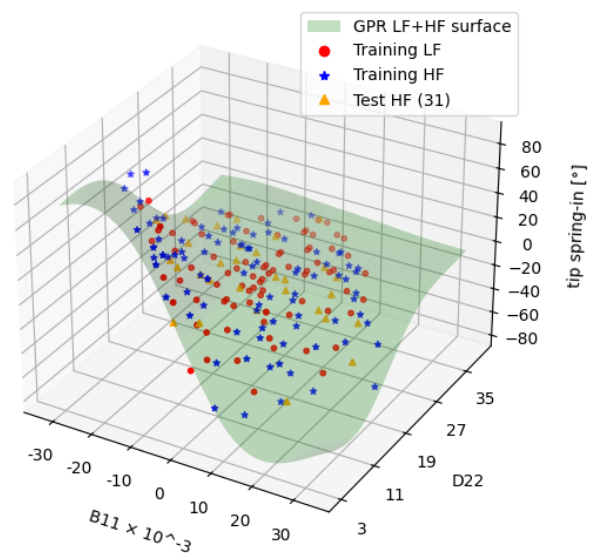
(a) 114 dati LF, 60 dati HF, $R^2 = 99.35\%$, RMSE = 1.31°



(b) 104 dati LF, 70 dati HF, $R^2 = 99.38\%$, RMSE = 1.29°

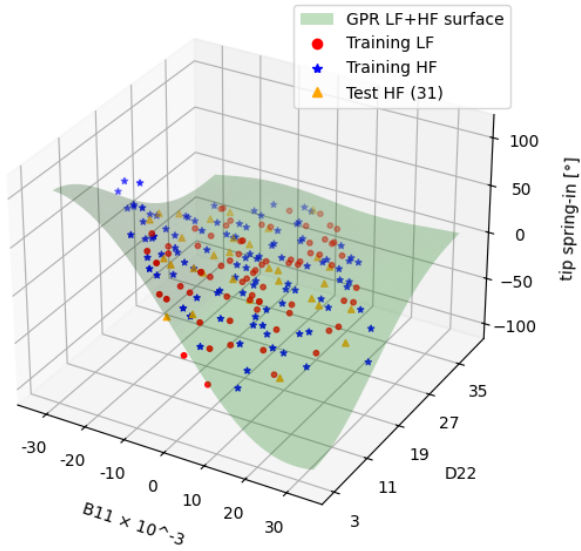


(c) 94 dati LF, 80 dati HF, $R^2 = 99.41\%$, RMSE = 1.26°

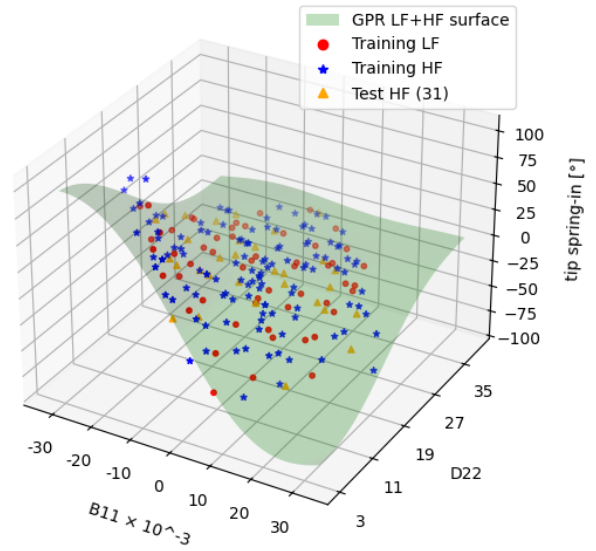


(d) 84 dati LF, 90 dati HF, $R^2 = 99.70\%$, RMSE = 0.88°

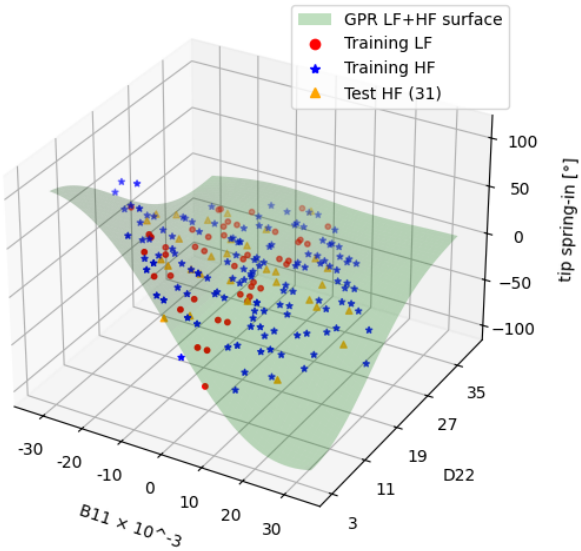
Figura 7.38: L-SHAPE: training multi-fidelity con Bayesian Opt. - Parte 3



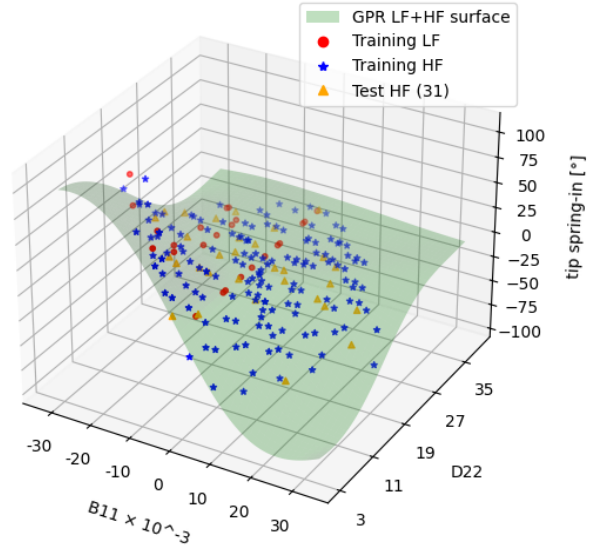
(a) 74 dati LF, 100 dati HF, $R^2 = 99.72\%$, RMSE = 0.88°



(b) 54 dati LF, 120 dati HF, $R^2 = 99.75\%$, RMSE = 0.86°

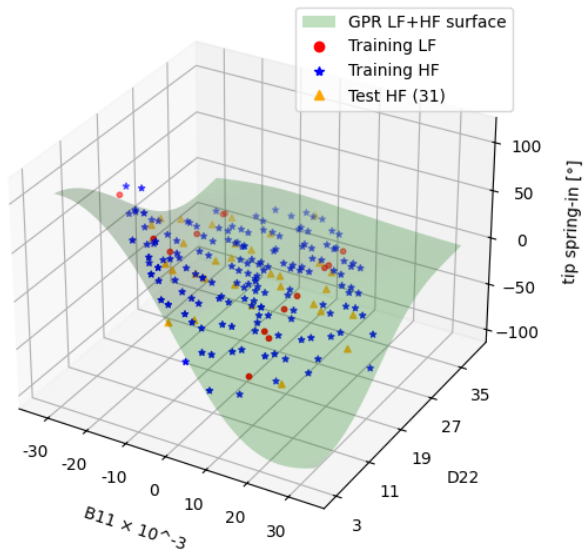


(c) 44 dati LF, 130 dati HF, $R^2 = 99.83\%$, RMSE = 0.69°

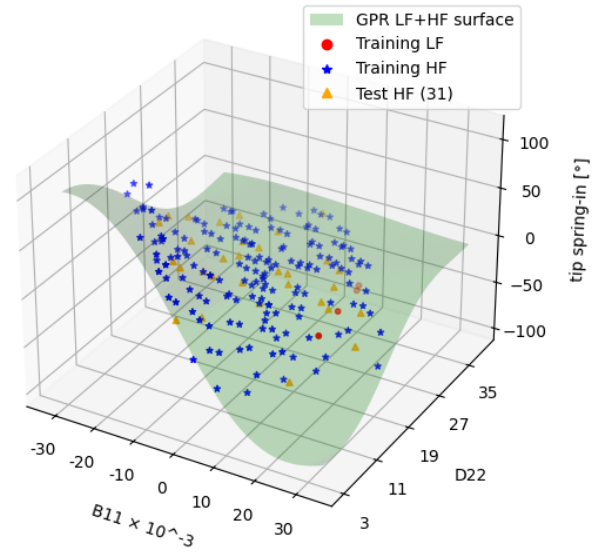


(d) 24 dati LF, 150 dati HF, $R^2 = 99.86\%$, RMSE = 0.67°

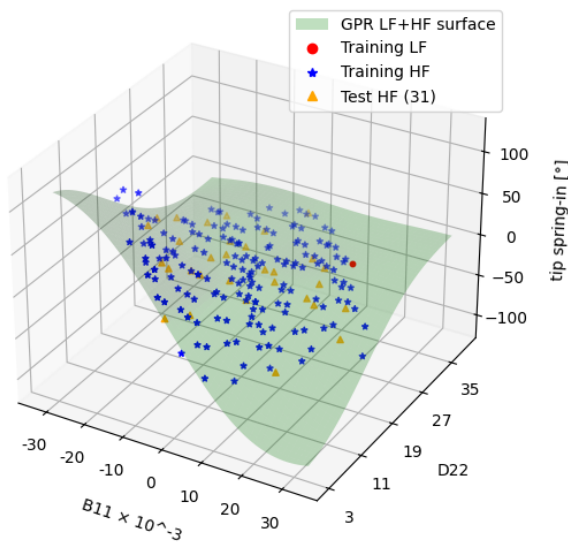
Figura 7.39: L-SHAPE: training multi-fidelity con Bayesian Opt. - Parte 4



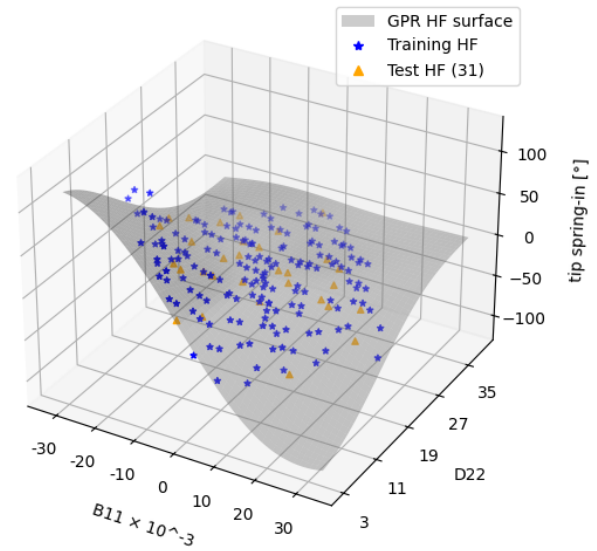
(a) 14 dati LF, 160 dati HF, $R^2 = 99.86\%$, RMSE = 0.63°



(b) 4 dati LF, 170 dati HF, $R^2 = 99.86\%$, RMSE = 0.63°

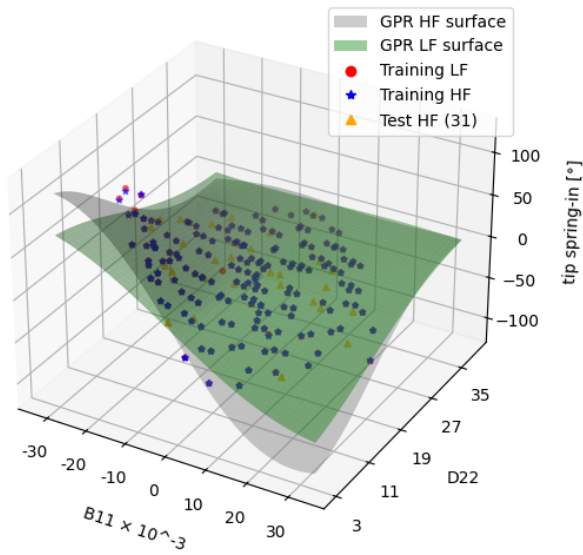


(c) 1 dato LF, 173 dati HF, $R^2 = 99.86\%$, RMSE = 0.63°

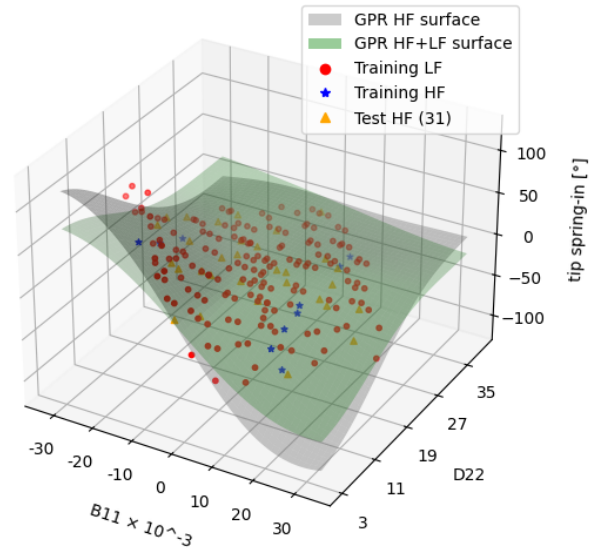


(d) 174 dati HF, $R^2 = 99.86\%$, RMSE = 0.63°

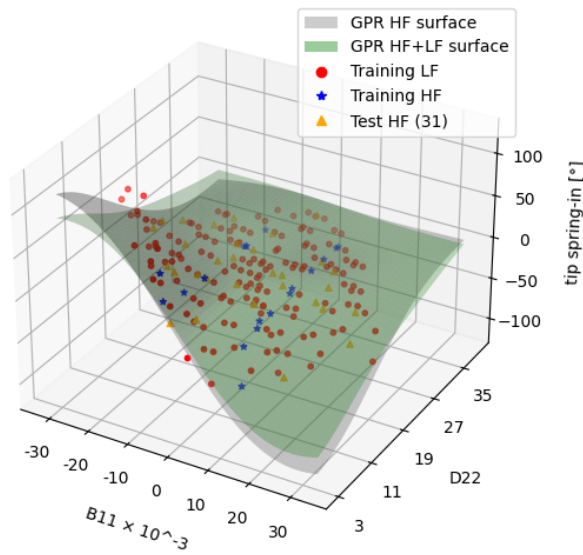
Figura 7.40: L-SHAPE: training multi-fidelity con Bayesian Opt. - Parte 5



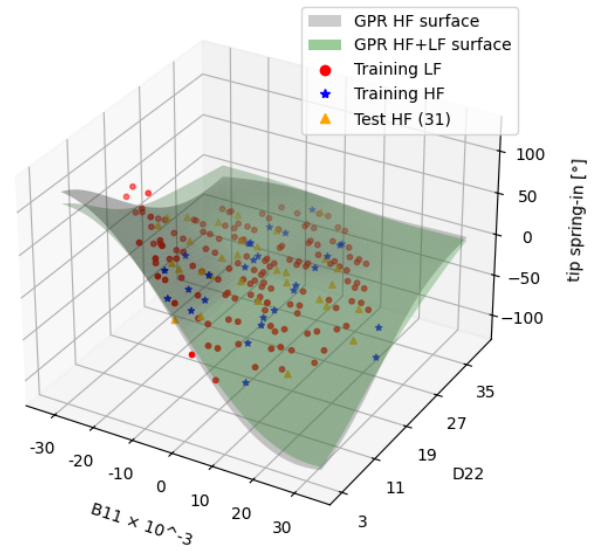
(a) 174 LF vs 174 HF



(b) 164 LF, 10 HF vs 174 HF

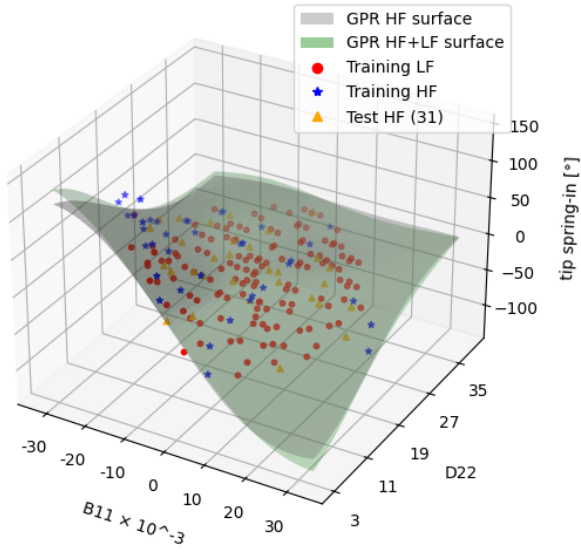


(c) 154 LF, 20 HF vs 174 HF

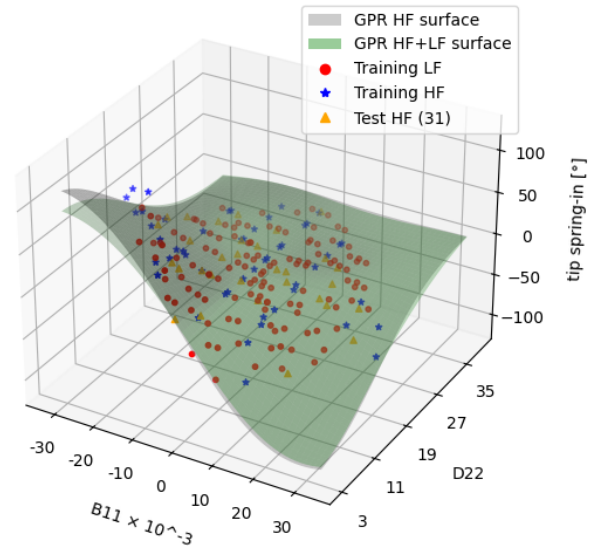


(d) 144 LF, 30 HF vs 174 HF

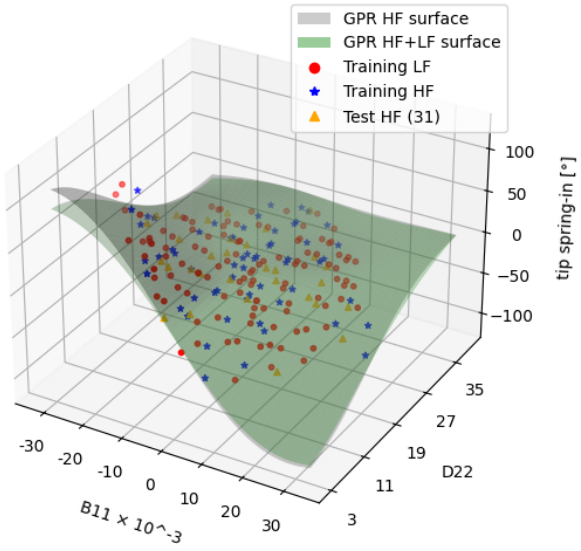
Figura 7.41: L-SHAPE: training multi-fidelity con Bayesian Opt. - confronti



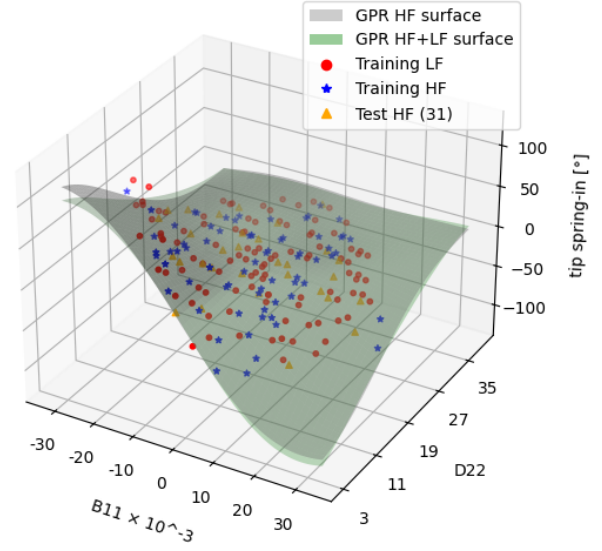
(a) 134 LF, 40 HF vs 174 HF



(b) 124 LF, 50 HF vs 174 HF

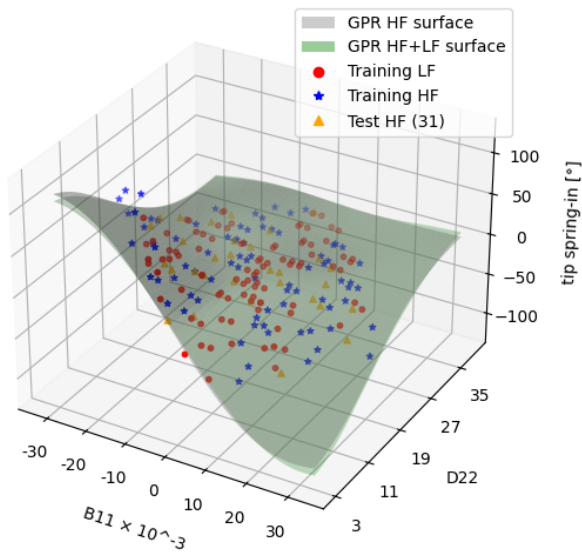


(c) 114 LF, 60 HF vs 174 HF

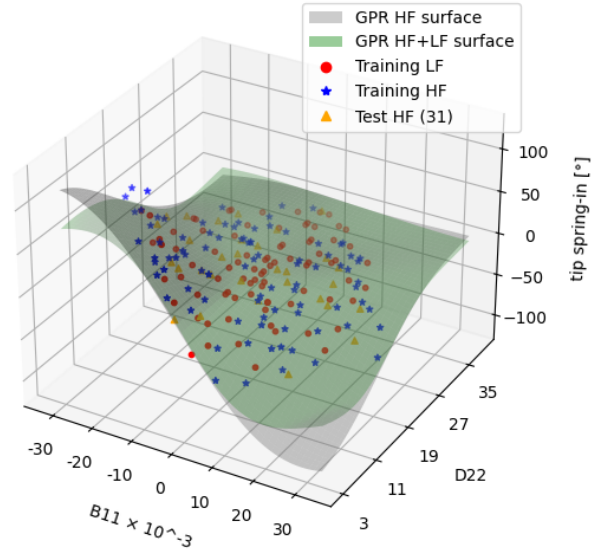


(d) 104 LF, 70 HF vs 174 HF

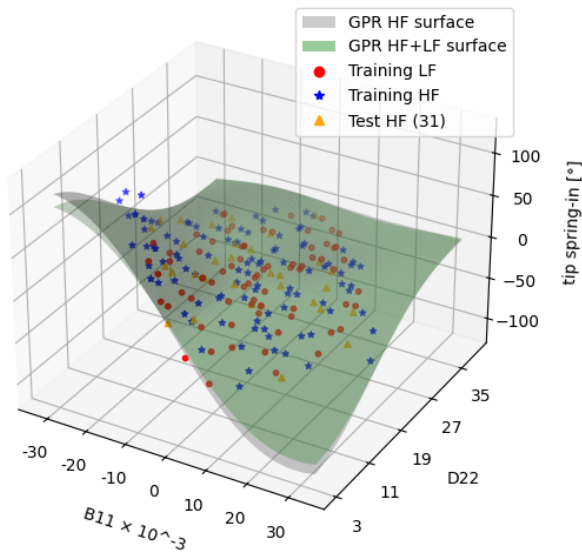
Figura 7.42: L-SHAPE: training multi-fidelity con Bayesian Opt. - confronti



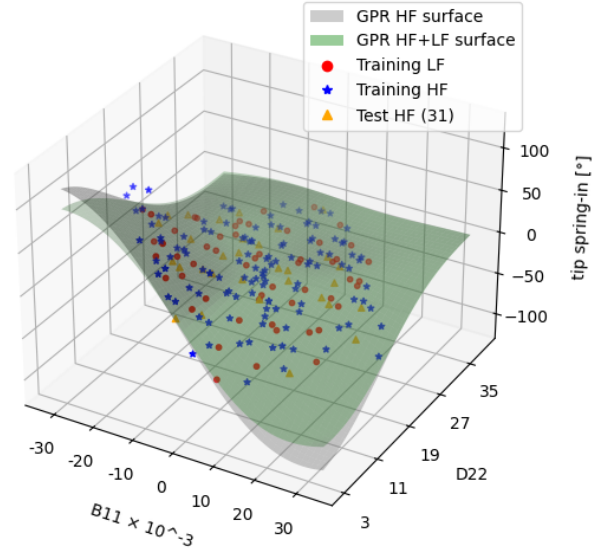
(a) 94 LF, 80 HF vs 174 HF



(b) 84 LF, 90 HF vs 174 HF

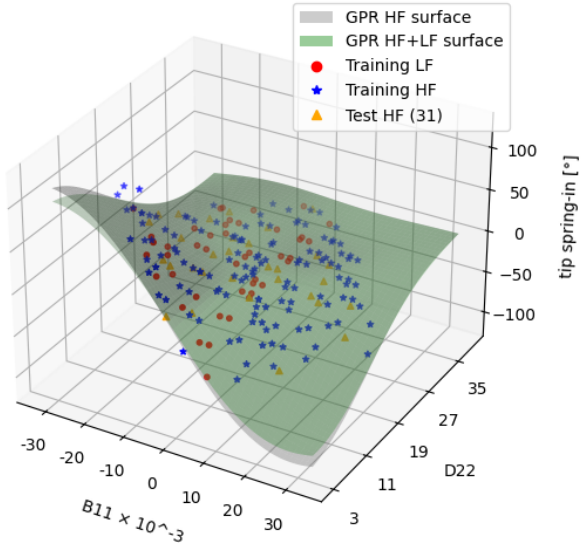


(c) 74 LF, 100 HF vs 174 HF

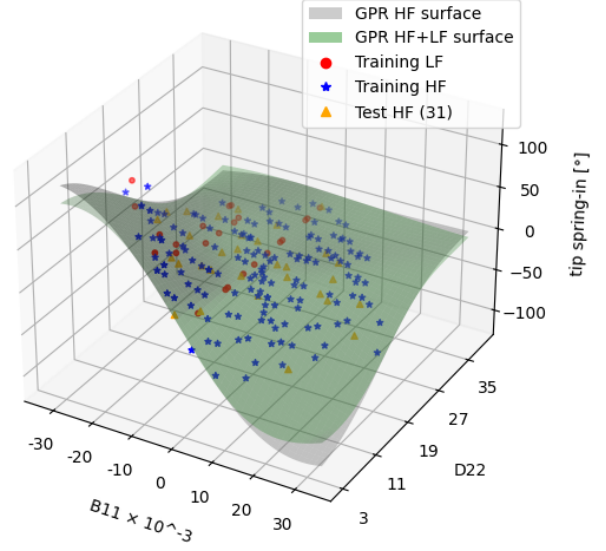


(d) 54 LF, 120 HF vs 174 HF

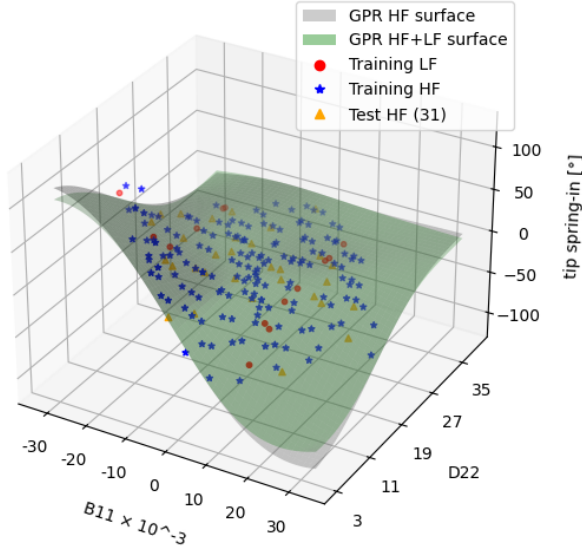
Figura 7.43: L-SHAPE: training multi-fidelity con Bayesian Opt. - confronti



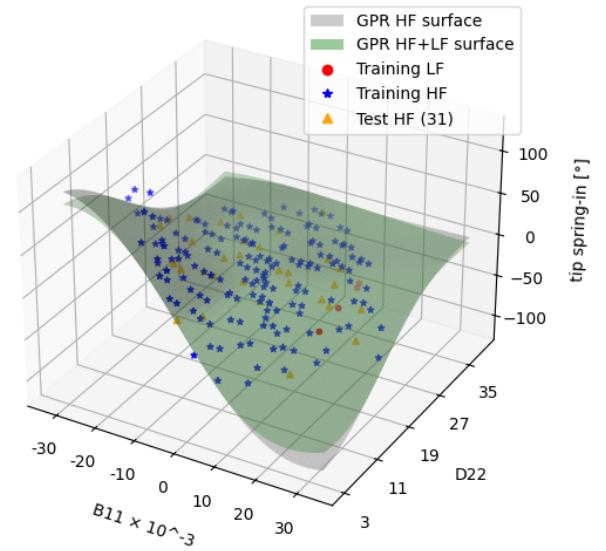
(a) 44 LF, 130 HF vs 174 HF



(b) 24 LF, 150 HF vs 174 HF

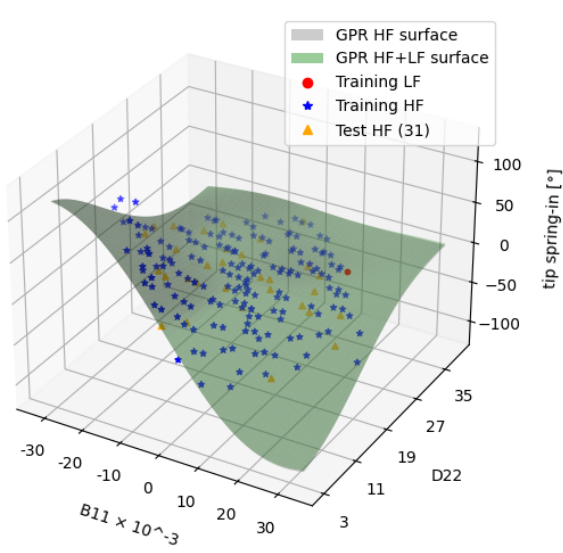


(c) 14 LF, 160 HF vs 174 HF

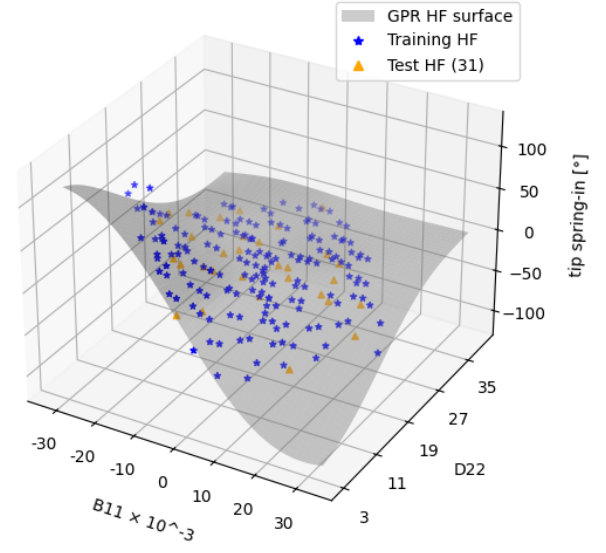


(d) 4 LF, 170 HF vs 174 HF

Figura 7.44: L-SHAPE: training multi-fidelity con Bayesian Opt. - confronti



(a) 1 LF, 173 HF vs 174 HF



(b) 174 HF

Figura 7.45: L-SHAPE: training multi-fidelity con Bayesian Opt. - confronti

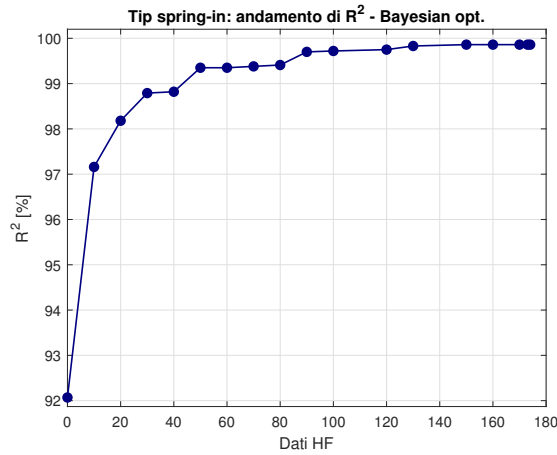
Dati LF	Dati HF	R^2	RMSE	RMSE _{max}
174	0	92.07%	4.84°	12.933°
164	10	97.16%	2.81°	5.910°
154	20	98.18%	2.25°	5.872°
144	30	98.79%	1.83°	4.989°
134	40	98.82%	1.79°	4.631°
124	50	99.35%	1.34°	2.782°
114	60	99.35%	1.31°	2.576°
104	70	99.38%	1.29°	2.517°
94	80	99.41%	1.26°	2.504°
84	90	99.70%	0.88°	1.889°
74	100	99.72%	0.88°	1.890°
54	120	99.75%	0.86°	1.873°
44	130	99.83%	0.69°	1.850°
24	150	99.86%	0.67°	1.636°
14	160	99.86%	0.63°	1.612°
4	170	99.86%	0.63°	1.610°
1	173	99.86%	0.63°	1.608°
0	174	99.86%	0.63°	1.605°

Tabella 7.7: Training GPR L-SHAPE con Bayesian Opt.: tabella riassuntiva

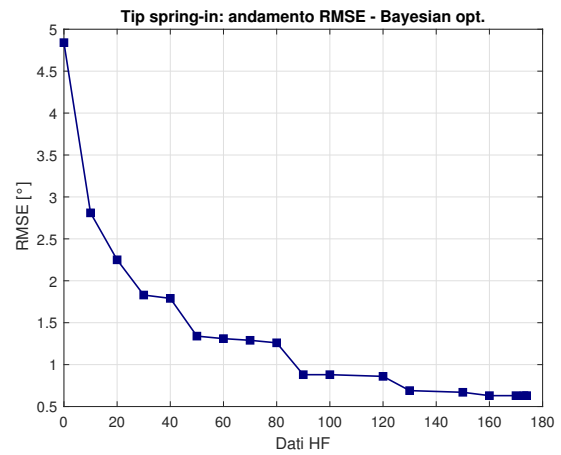
In tabella (7.7) si riportano i risultati ottenuti in termini di accuratezza. Il RMSE_{max} è definito come il massimo valore puntuale raggiunto dall'RMSE, tra dati di validazione e superficie GPR:

$$\text{RMSE}_{max} = \sqrt{(y_i - \hat{y}_i)^2} \quad (7.1)$$

È naturale aspettarsi che tale valore sia superiore a quello di RMSE globale. In forma grafica, si ottiene quanto visibile di seguito, dove, in figura (7.47), si trova un paragone tra il caso a selezione random e quello con ottimizzazione bayesiana.

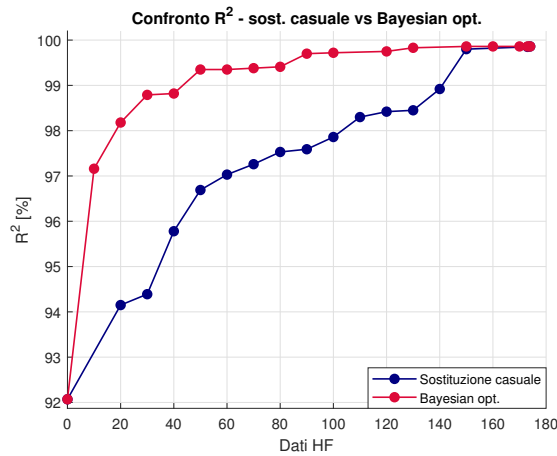


(a) R^2 in funzione della quantità di dati HF

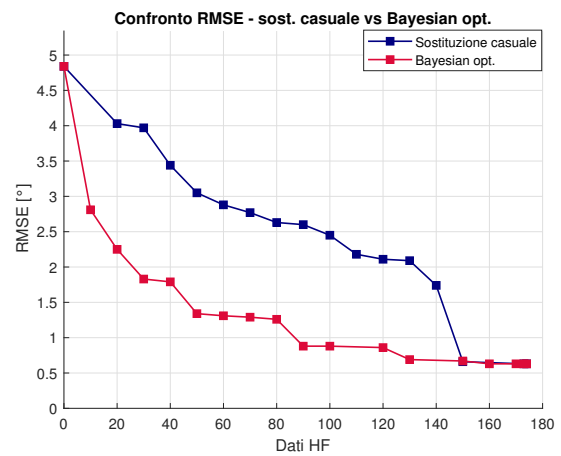


(b) RMSE in funzione della quantità di dati HF

Figura 7.46: Andamenti di R^2 e RMSE in funzione del numero di dati HF nel training GPR - Bayesian Opt.



(a) R^2 in funzione della quantità di dati HF



(b) RMSE in funzione della quantità di dati HF

Figura 7.47: Confronto andamenti R^2 ed RMSE

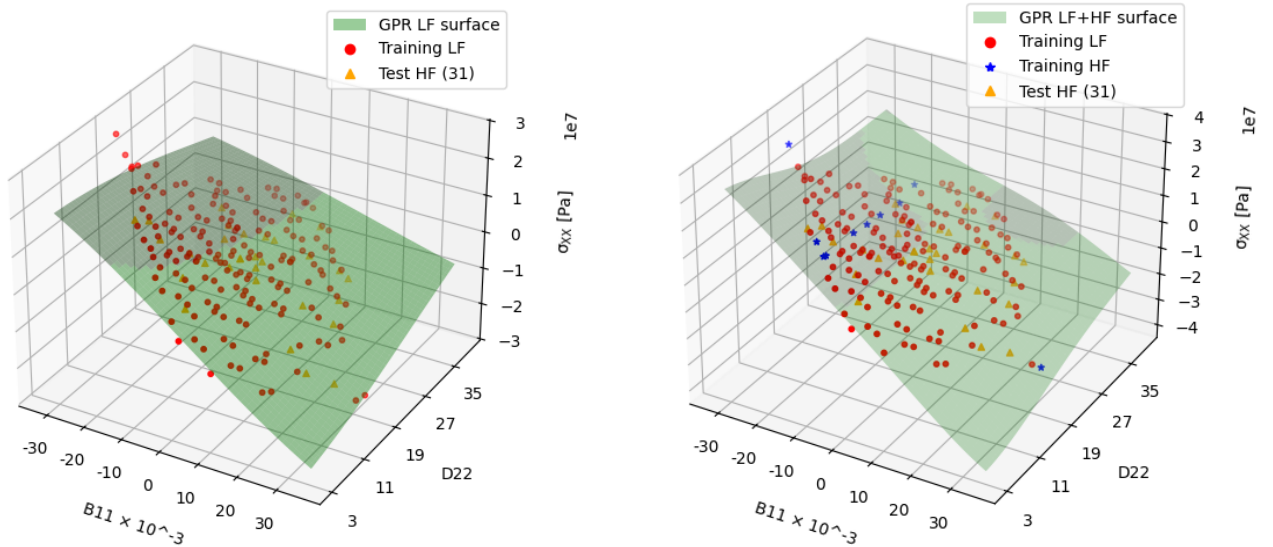
7.3.5 Risultati dal training multi-fidelity: previsione delle tensioni - Bayesian optimization

Un'ultima evoluzione del codice può esser rappresentata dalla possibilità di prevedere le tensioni residue nel componente L-SHAPE a seguito di rimozione del tool. Nell'ambito di questo lavoro di tesi, è stato deciso di applicare il codice di ML via GPR, ampiamente descritto in precedenza, al caso delle tensioni residue σ_{xx} , σ_{yy} e σ_{xz} , le quali sono risultate le più significative in termini di entità, a seguito della consultazione dei risultati prodotti dalle analisi FEM-CUF. Per ottenere una rappresentazione più accurata dei valori effettivi di tensione, è stata condotta un'analisi FEM-CUF per ricavare i valori di tensione lungo lo spessore, all'altezza del piano di simmetria del componente in corrispondenza della curvatura. I valori di tensione utilizzati nelle analisi ML, riportati nelle tabelle (B.15)(B.16)(B.17), corrispondono alla media dei 16 valori misurati nello spessore, al fine di fornire un risultato che tenga conto dell'effetto dovuto all'anisotropia del composito. Per quanto riguarda l'aspetto multi-fidelity delle analisi, si faccia riferimento a quanto detto in precedenza per definire i dataset HF, LF e di test e validazione. Anche in questo caso, il dataset è composto da:

- 174 dati di training (HF ed LF ottenuti a partire dai medesimi input).
- 31 dati HF di validazione.
- 51 dati HF per i test.

Un totale, quindi, di 256 dati, che variano su ogni possibile combinazione di laminazione cross-ply 8 strati.

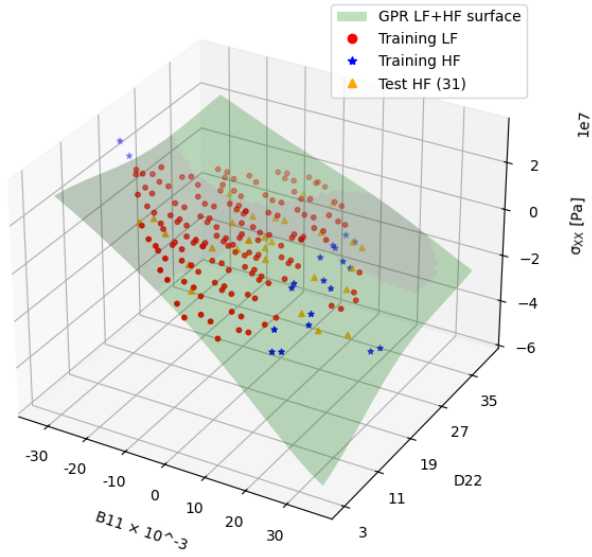
Tensione σ_{xx}



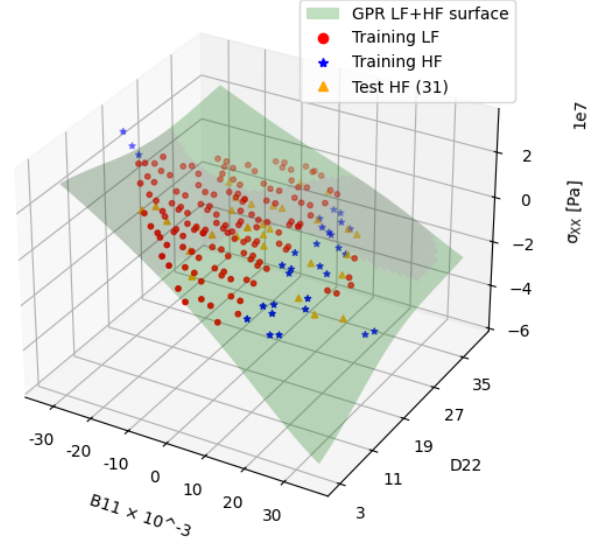
(a) 174 dati LF, $R^2 = 93.73\%$, RMSE = 2.011 MPa

(b) 164 dati LF, 10 dati HF, $R^2 = 98.11\%$, RMSE = 0.801 MPa

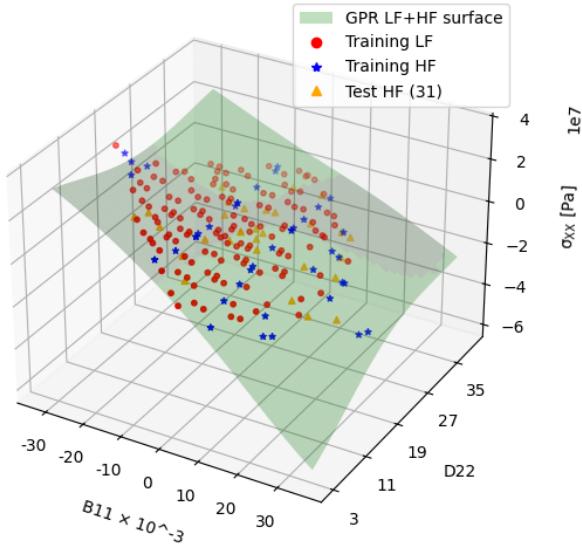
Figura 7.48: L-SHAPE: training multi-fidelity con BO - σ_{xx}



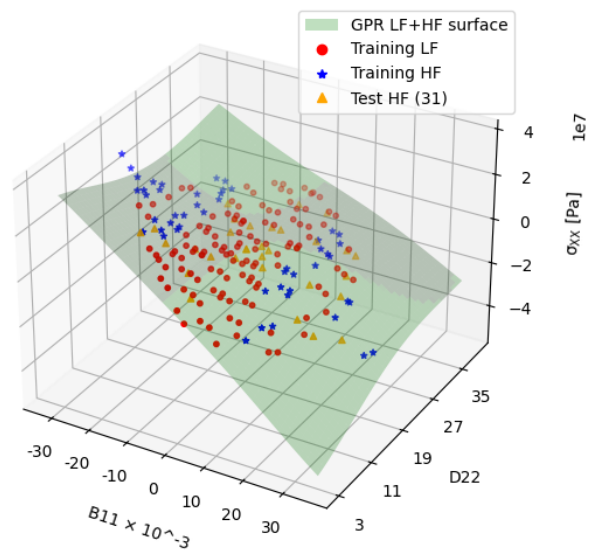
(a) 154 dati LF, 20 dati HF, $R^2 = 98.52\%$, RMSE = 0.767 MPa



(b) 144 dati LF, 30 dati HF, $R^2 = 99.02\%$, RMSE = 0.665 MPa

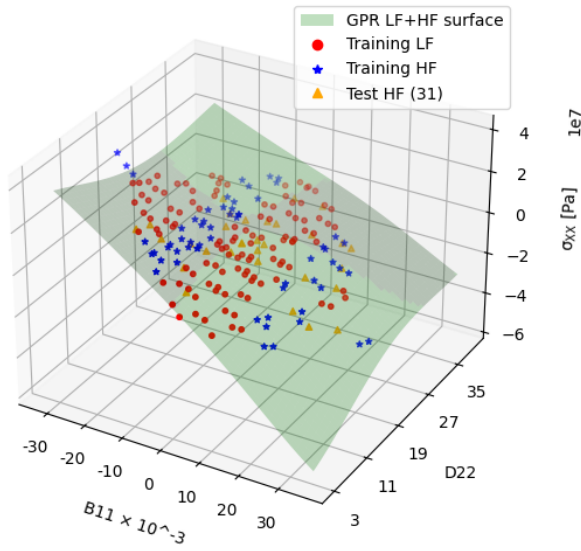


(c) 134 dati LF, 40 dati HF, $R^2 = 99.23\%$, RMSE = 0.576 MPa

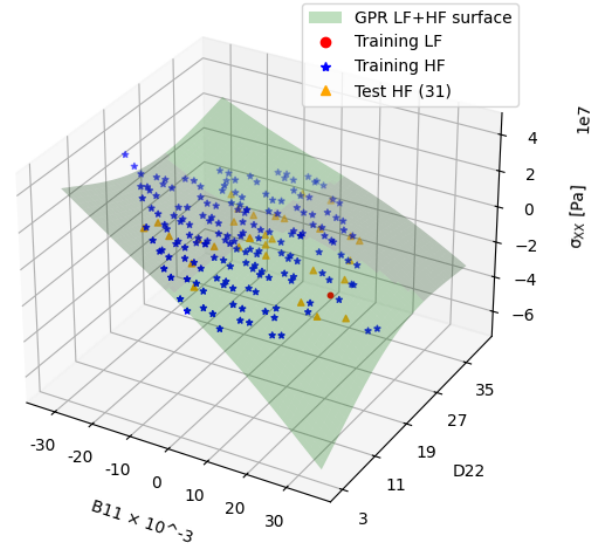


(d) 124 dati LF, 50 dati HF, $R^2 = 99.49\%$, RMSE = 0.561 MPa

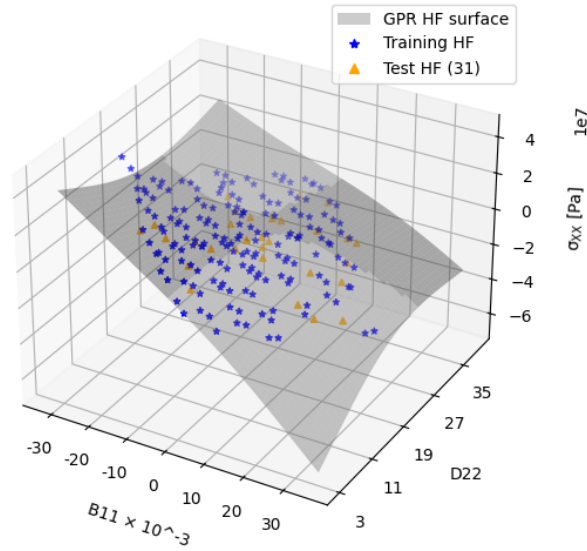
Figura 7.49: L-SHAPE: training multi-fidelity con BO - σ_{xx}



(a) 114 dati LF, 60 dati HF, $R^2 = 99.54\%$, RMSE = 0.549 MPa

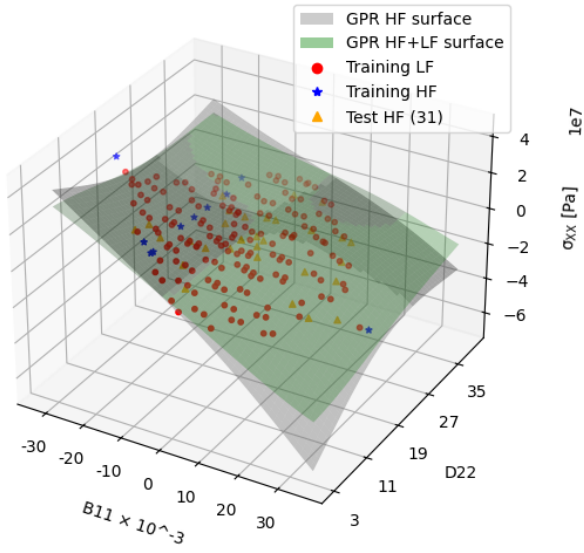


(b) 1 dato LF, 173 dati HF, $R^2 = 99.54\%$, RMSE = 0.546 MPa

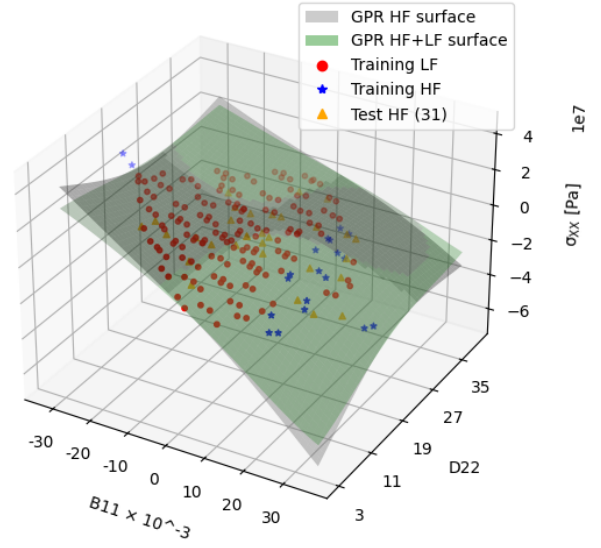


(c) 174 dati HF, $R^2 = 99.54\%$, RMSE = 0.546 MPa

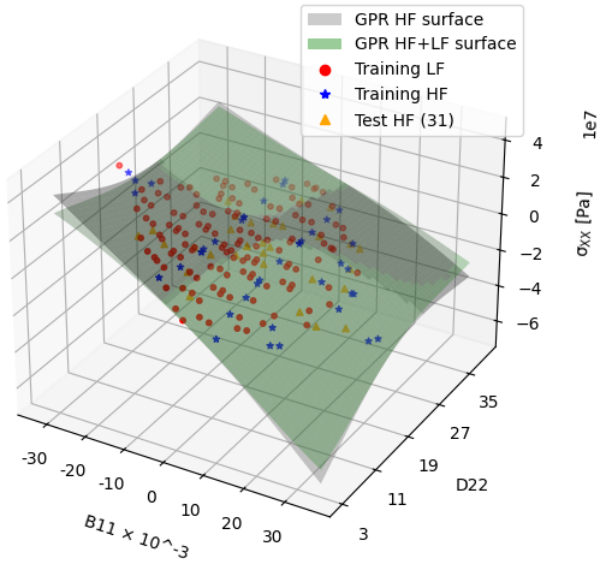
Figura 7.50: L-SHAPE: training multi-fidelity con BO - σ_{xx}



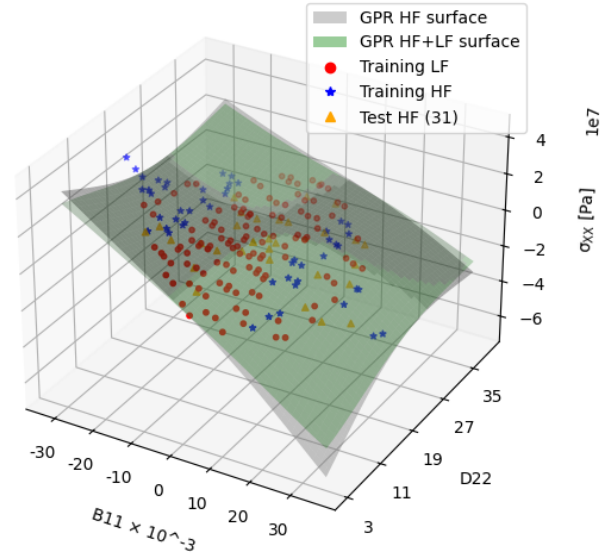
(a) 164 LF, 10 HF vs 174 HF



(b) 154 LF, 20 HF vs 174 HF

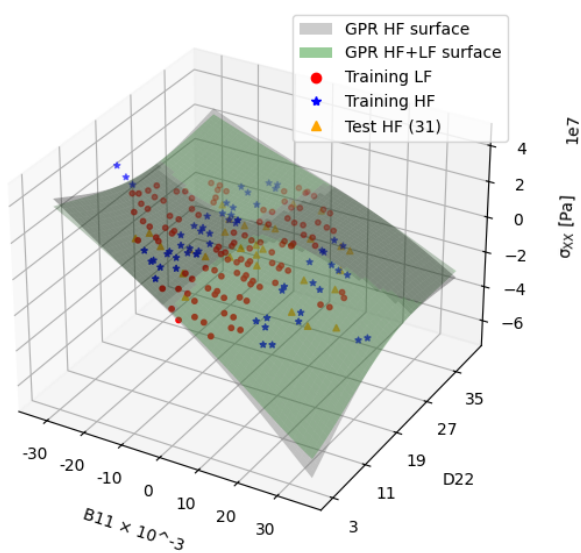


(c) 134 LF, 40 HF vs 174 HF

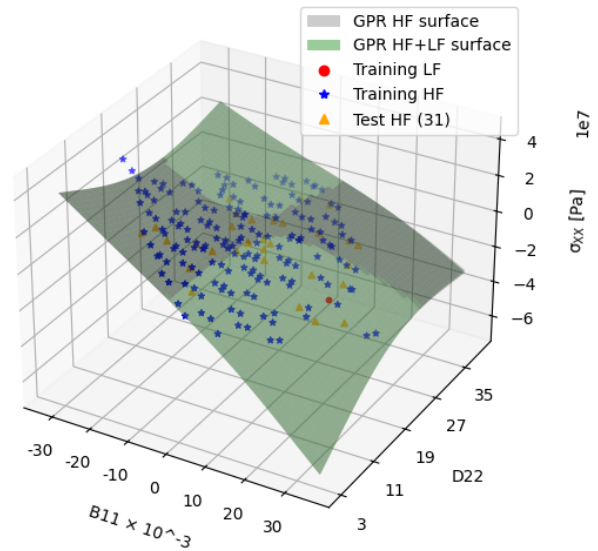


(d) 124 LF, 50 HF vs 174 HF

Figura 7.51: L-SHAPE: training multi-fidelity con BO - confronti σ_{xx}



(a) 114 LF, 60 HF vs 174 HF

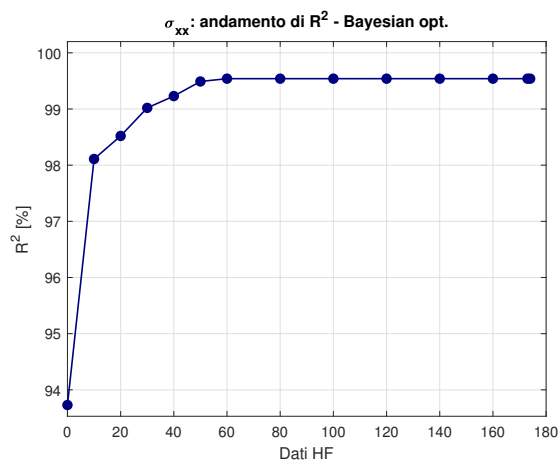


(b) 1 LF, 173 HF vs 174 HF

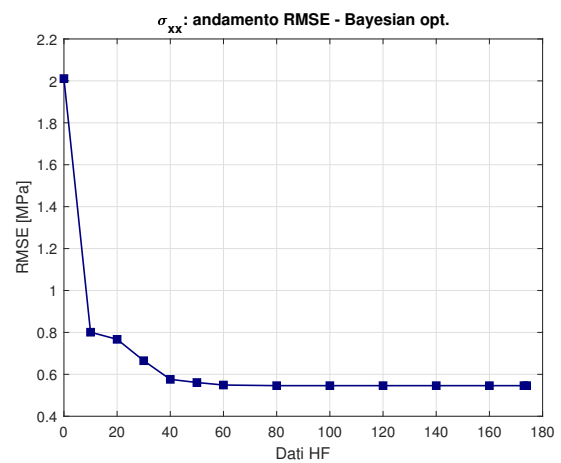
Figura 7.52: L-SHAPE: training multi-fidelity con BO - confronti σ_{xx}

Dati LF	Dati HF	R^2	RMSE [MPa]	RMSE _{max} [MPa]
174	0	93.73%	2.011	4.157
164	10	98.11%	0.801	2.193
154	20	98.52%	0.767	1.943
144	30	99.02%	0.665	1.756
134	40	99.23%	0.576	1.751
124	50	99.49%	0.561	1.447
114	60	99.54%	0.549	1.312
1	173	99.54%	0.546	1.268
0	174	99.54%	0.546	1.263

Tabella 7.8: Training GPR L-SHAPE con Bayesian Opt.: tabella riassuntiva σ_{xx}



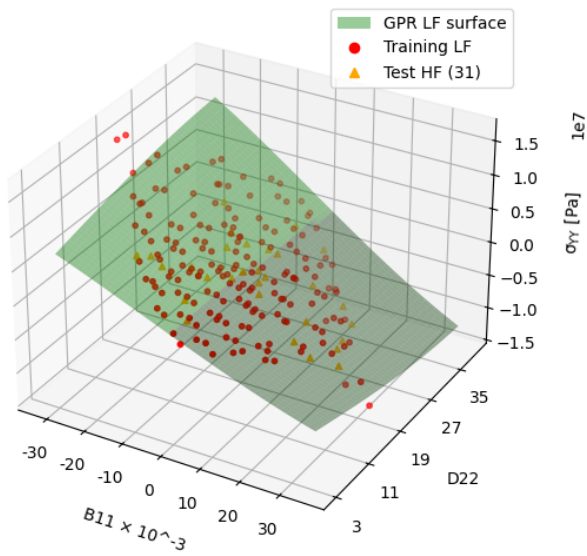
(a) Andamento di R^2



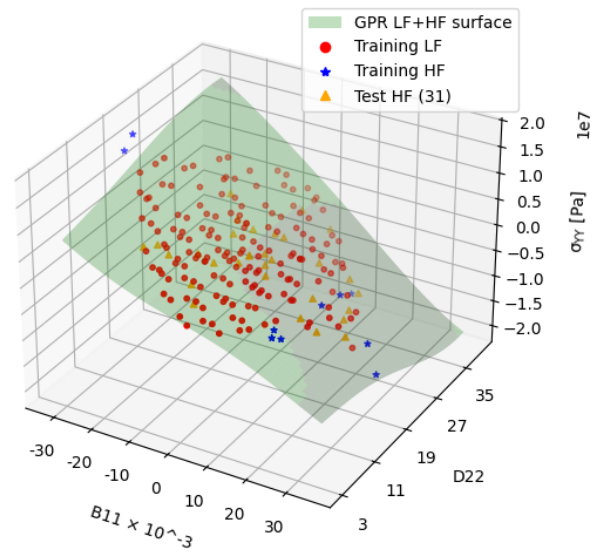
(b) Andamento RMSE

Figura 7.53: L-SHAPE: training multi-fidelity con BO - accuratezza - σ_{xx}

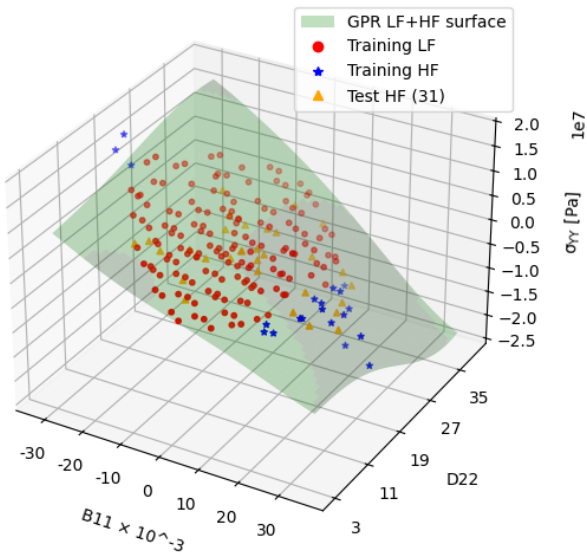
Tensione σ_{yy}



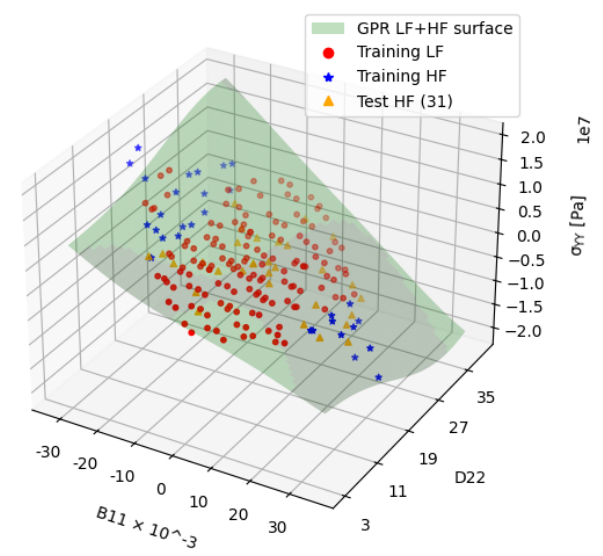
(a) 174 dati LF, $R^2 = 94.65\%$, RMSE = 0.949 MPa



(b) 164 dati LF, 10 dati HF, $R^2 = 96.47\%$, RMSE = 0.642 MPa

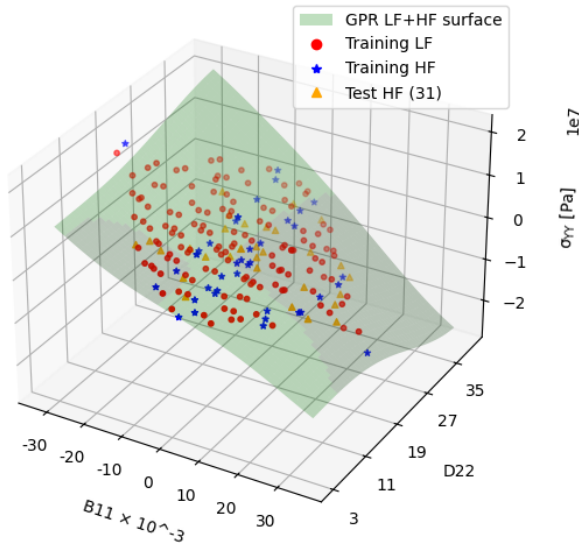


(c) 154 dati LF, 20 dati HF, $R^2 = 97.02\%$, RMSE = 0.524 MPa

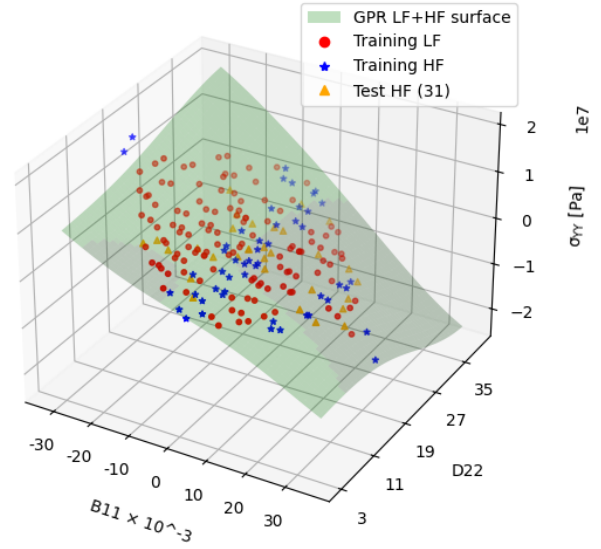


(d) 144 dati LF, 30 dati HF, $R^2 = 97.91\%$, RMSE = 0.502 MPa

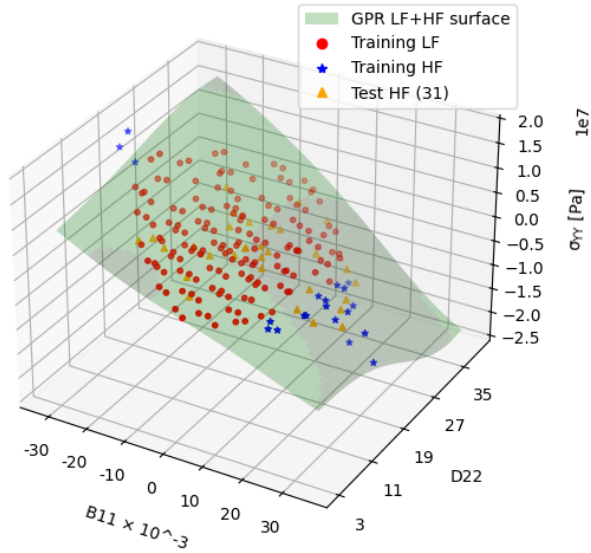
Figura 7.54: L-SHAPE: training multi-fidelity con BO - σ_{yy}



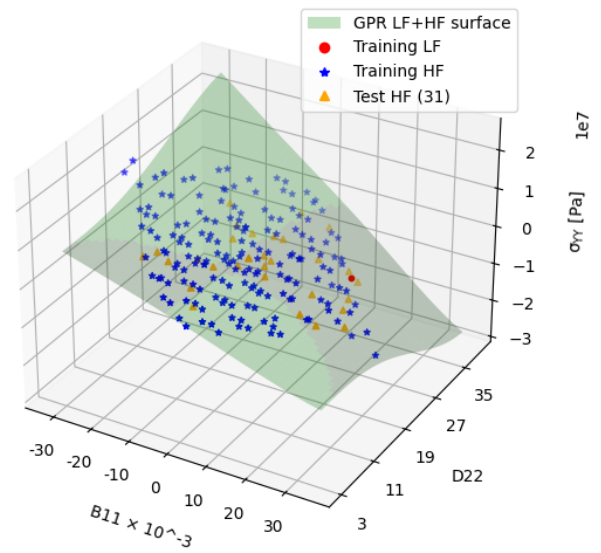
(a) 134 dati LF, 40 dati HF, $R^2 = 98.26\%$, RMSE = 0.474 MPa



(b) 124 dati LF, 50 dati HF, $R^2 = 98.80\%$, RMSE = 0.449 MPa

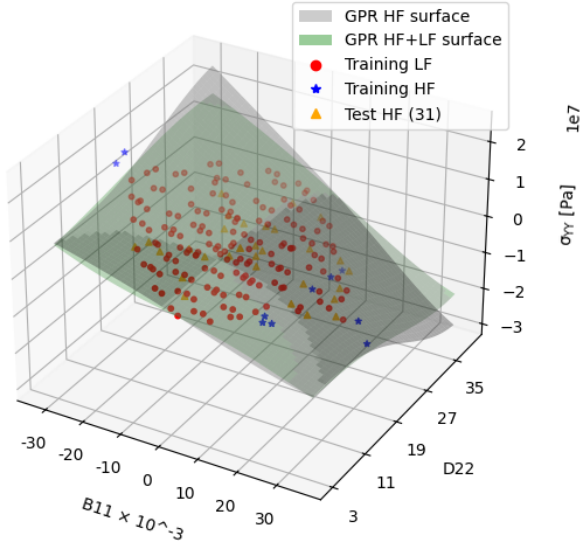


(c) 114 dati LF, 60 dati HF, $R^2 = 98.80$, RMSE = 0.449 MPa

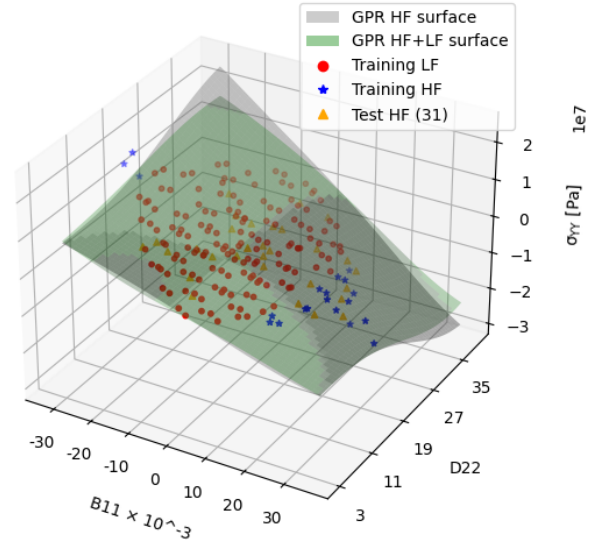


(d) 1 dato LF, 173 dati HF, $R^2 = 98.81\%$, RMSE = 0.449 MPa

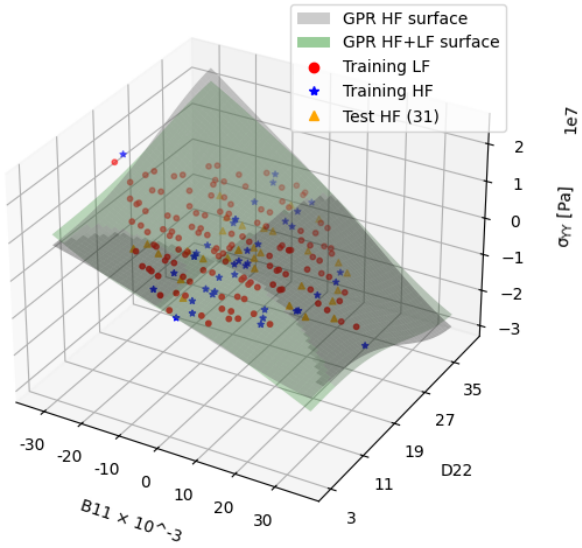
Figura 7.55: L-SHAPE: training multi-fidelity con BO - σ_{yy}



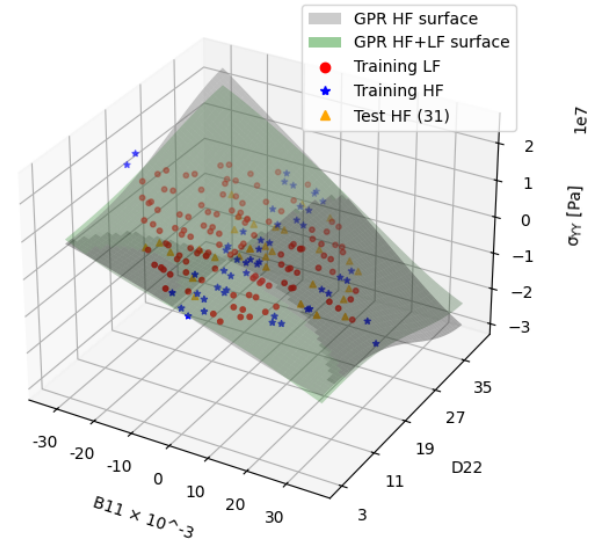
(a) 164 LF, 10 HF vs 174 HF



(b) 154 LF, 20 HF vs 174 HF

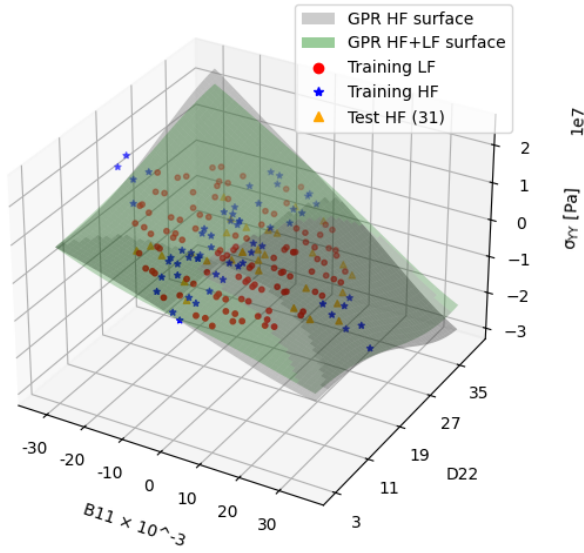


(c) 134 LF, 40 HF vs 174 HF

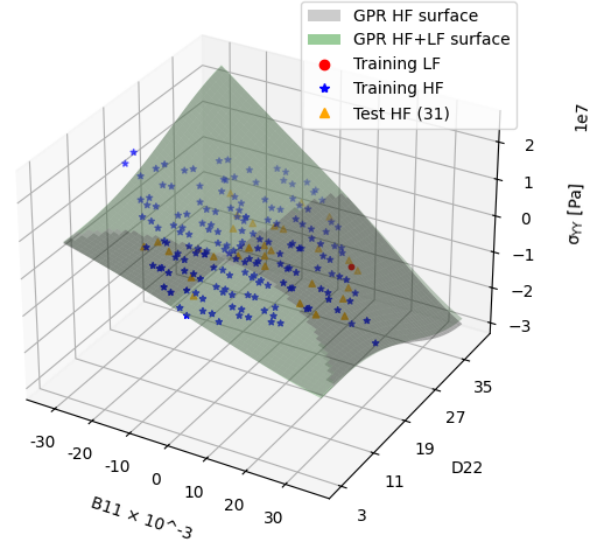


(d) 124 LF, 50 HF vs 174 HF

Figura 7.56: L-SHAPE: training multi-fidelity con BO - confronti σ_{yy}



(a) 114 LF, 60 HF vs 174 HF

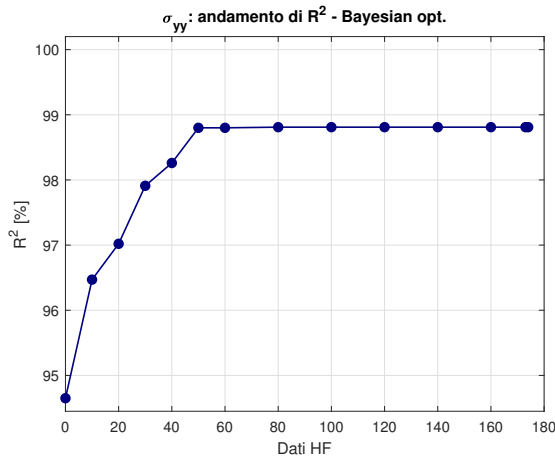


(b) 1 LF, 173 HF vs 174 HF

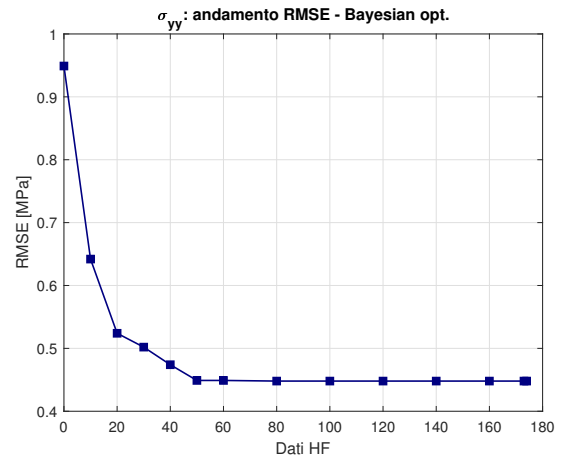
Figura 7.57: L-SHAPE: training multi-fidelity con BO - confronti σ_{yy}

Dati LF	Dati HF	R^2	RMSE [MPa]	RMSE _{max} [MPa]
174	0	94.65%	0.949	3.043
164	10	96.47%	0.642	1.894
154	20	97.02%	0.524	1.772
144	30	97.91%	0.502	1.653
134	40	98.26%	0.474	1.332
124	50	98.80%	0.449	1.271
114	60	98.80%	0.449	1.268
1	173	98.81%	0.448	1.260
0	174	98.81%	0.448	1.258

Tabella 7.9: Training GPR L-SHAPE con Bayesian Opt.: tabella riassuntiva σ_{yy}



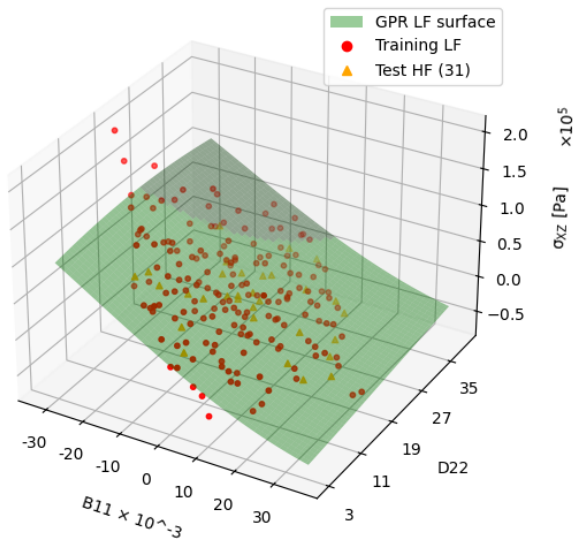
(a) Andamento di R^2



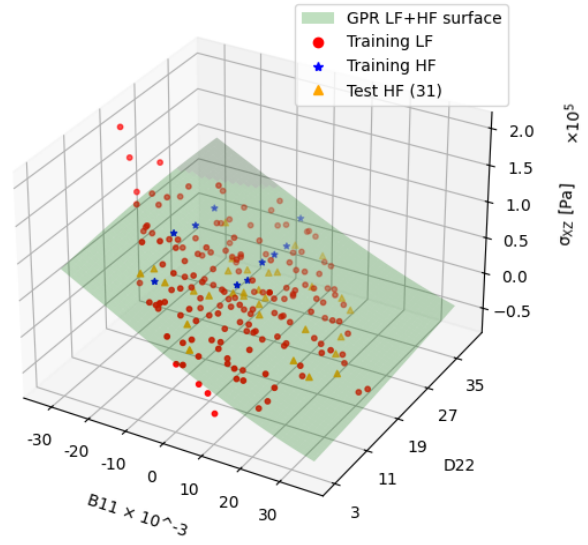
(b) Andamento RMSE

Figura 7.58: L-SHAPE: training multi-fidelity con BO - accuratezza - σ_{yy}

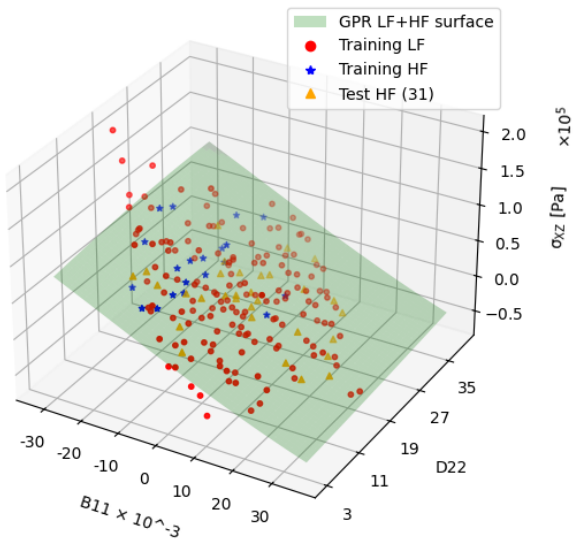
Tensione σ_{xz}



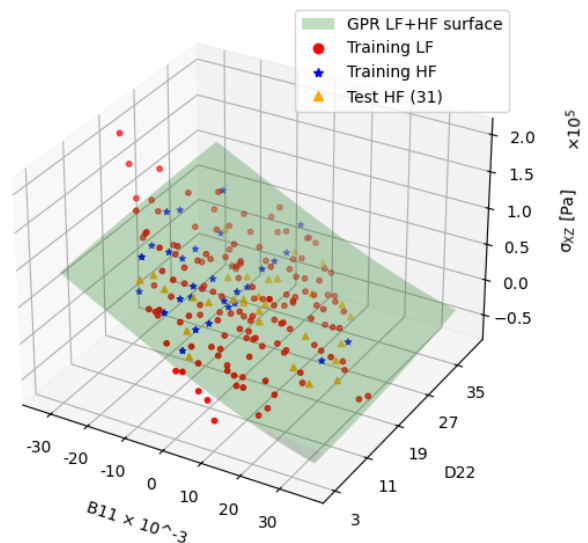
(a) 174 dati LF, $R^2 = 93.66\%$, RMSE = 7.327 kPa



(b) 164 dati LF, 10 dati HF, $R^2 = 94.22\%$, RMSE = 6.999 kPa

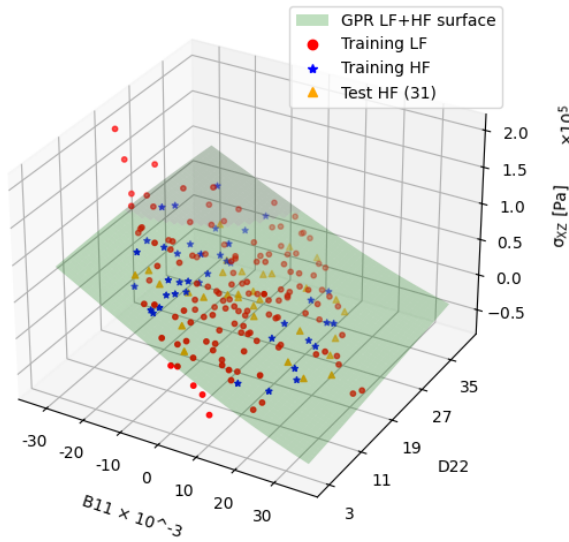


(c) 154 dati LF, 20 dati HF, $R^2 = 94.17\%$, RMSE = 7.025 kPa

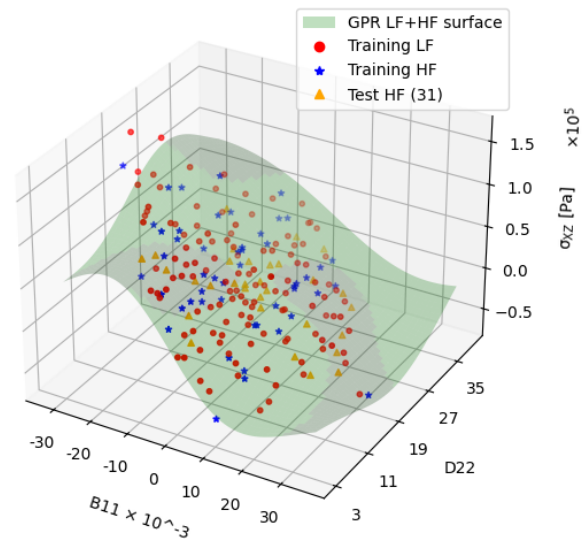


(d) 144 dati LF, 30 dati HF, $R^2 = 94.30\%$, RMSE = 6.948 kPa

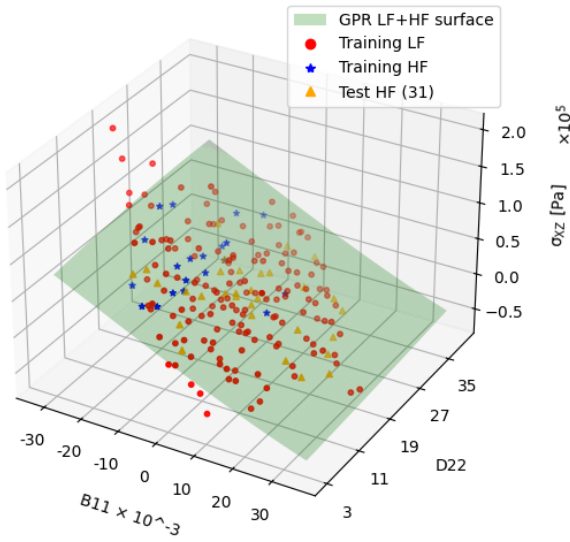
Figura 7.59: L-SHAPE: training multi-fidelity con BO - σ_{xz}



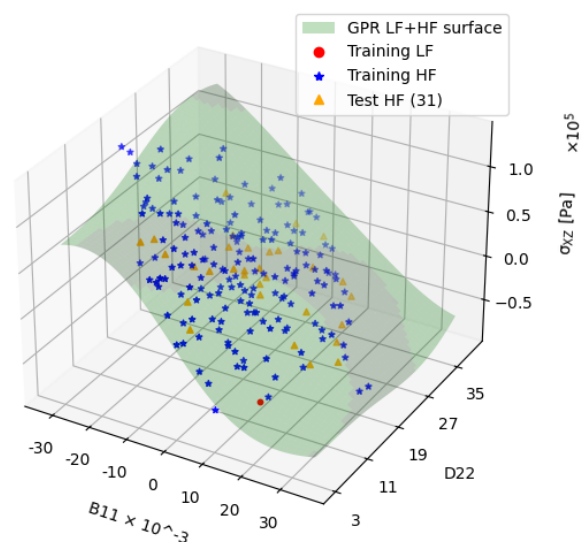
(a) 134 dati LF, 40 dati HF, $R^2 = 94.82\%$, RMSE = 6.806 kPa



(b) 124 dati LF, 50 dati HF, $R^2 = 95.71\%$, RMSE = 6.421 kPa

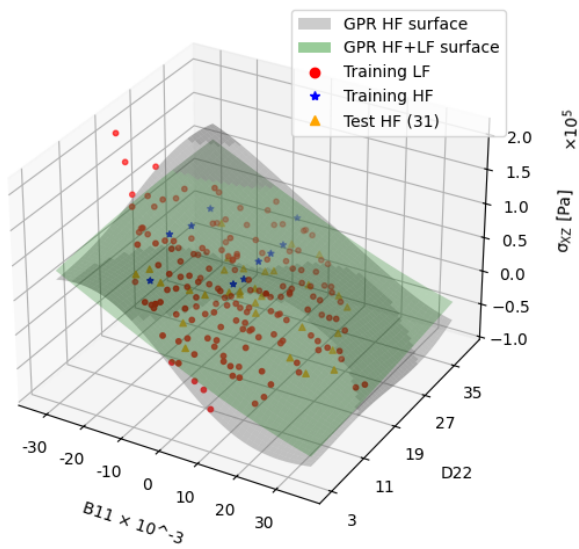


(c) 114 dati LF, 60 dati HF, $R^2 = 96.13$, RMSE = 6.317 kPa

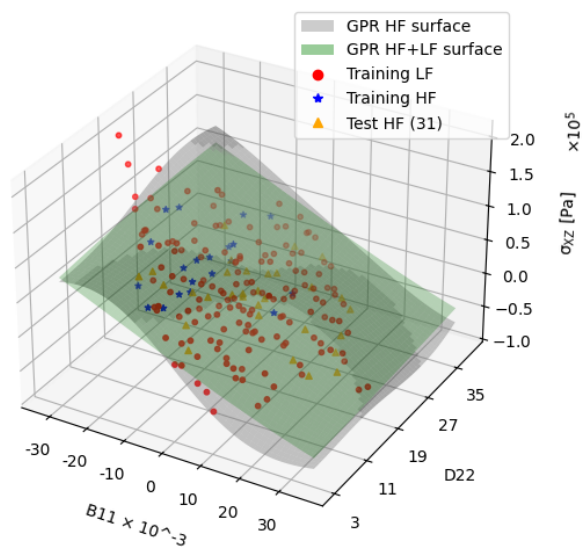


(d) 1 dato LF, 173 dati HF, $R^2 = 96.31\%$, RMSE = 6.304 kPa

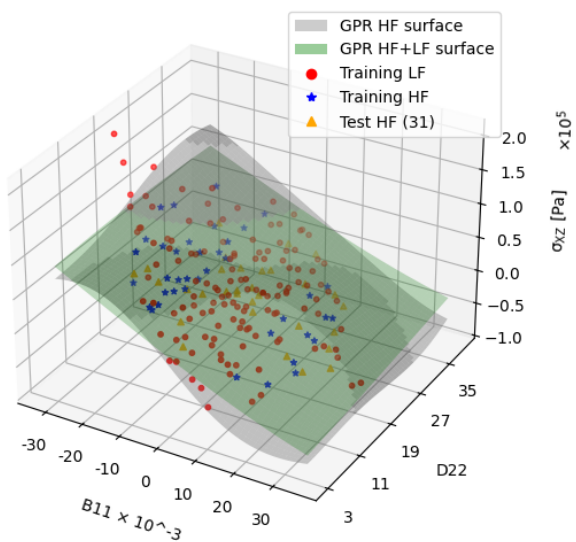
Figura 7.60: L-SHAPE: training multi-fidelity con BO - σ_{xz}



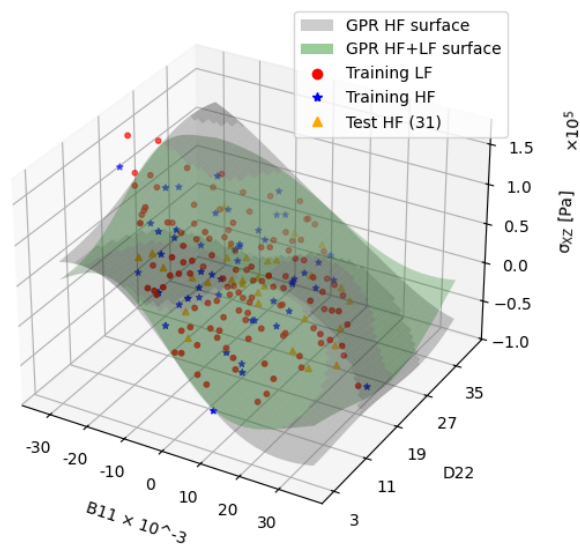
(a) 164 LF, 10 HF vs 174 HF



(b) 154 LF, 20 HF vs 174 HF

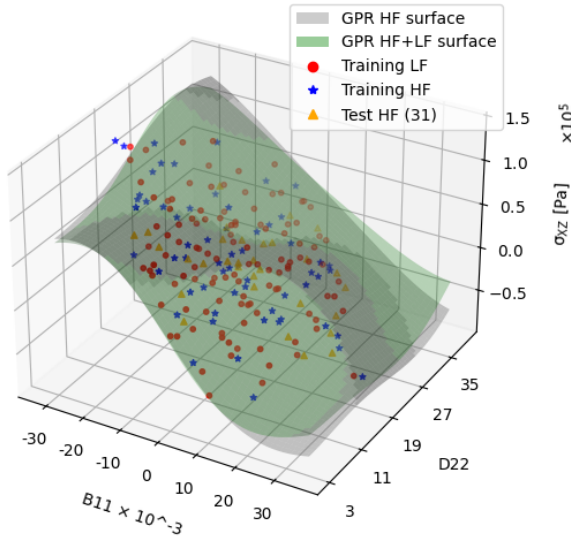


(c) 134 LF, 40 HF vs 174 HF

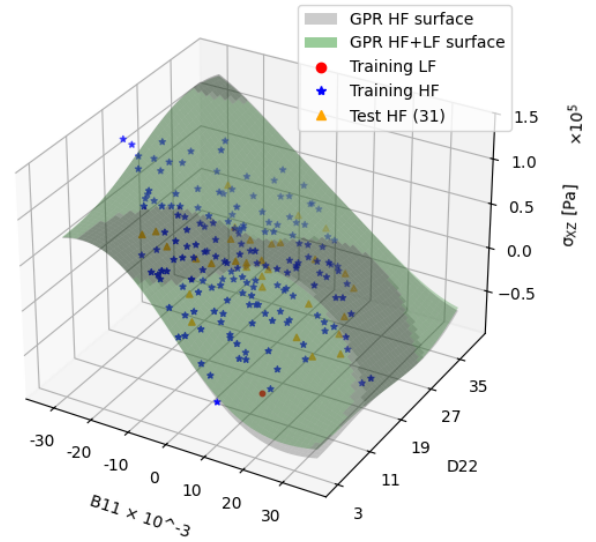


(d) 124 LF, 50 HF vs 174 HF

Figura 7.61: L-SHAPE: training multi-fidelity con BO - confronti σ_{xz}



(a) 114 LF, 60 HF vs 174 HF

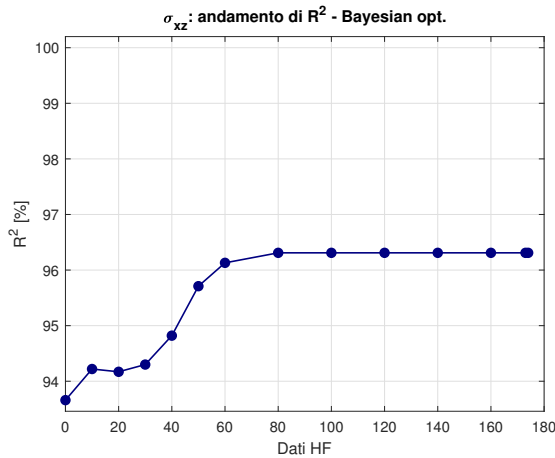


(b) 1 LF, 173 HF vs 174 HF

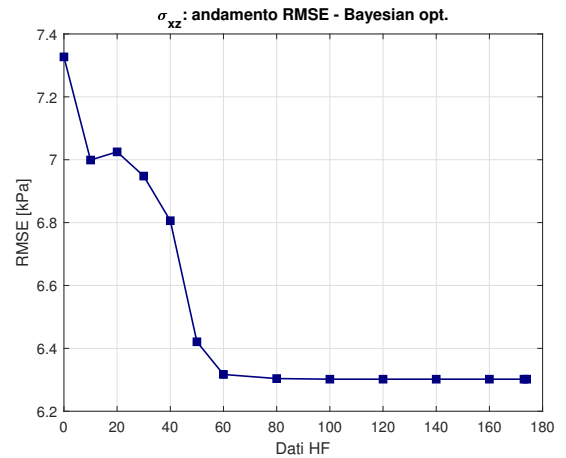
Figura 7.62: L-SHAPE: training multi-fidelity con BO - confronti σ_{xz}

Dati LF	Dati HF	R^2	RMSE [Pa]	RMSE _{max} [Pa]
174	0	93.66%	7.327E+03	1.519E+04
164	10	94.22%	6.999E+03	1.362E+04
154	20	94.17%	7.025E+03	1.274E+04
144	30	94.30%	6.948E+03	1.017E+04
134	40	94.82%	6.806E+03	0.989E+04
124	50	95.71%	6.421E+03	0.936E+04
114	60	96.13%	6.317E+03	0.907E+04
1	173	96.31%	6.304E+03	0.883E+04
0	174	96.31%	6.302E+03	0.882E+04

Tabella 7.10: Training GPR L-SHAPE con Bayesian Opt.: tabella riassuntiva σ_{xz}



(a) Andamento di R^2



(b) Andamento RMSE

Figura 7.63: L-SHAPE: training multi-fidelity con BO - accuratezza - σ_{xz}

7.3.6 Considerazioni finali

Per valutare la coerenza delle predizioni ottenute dai diversi training GPR multi-fidelity, è possibile osservare la superficie di risposta media ottenuta. Essa è stata calcolata, nei quattro casi precedentemente esposti, impiegando tutti i possibili mix di dati multi-fidelity generati tramite Ottimizzazione Bayesiana, incluse le simulazioni LF-only e HF-only. La superficie verde rappresenta la risposta media, mentre le superfici grigie mostrano i bound al 95% ($\mu \pm 1.96\sigma$) della variabilità tra i diversi mix, evidenziando l'intervallo entro cui cade circa il 95% delle predizioni e fornendo un'indicazione della robustezza del modello. I risultati sono mostrati in figura (7.64). Infine, in figura (7.65) sono riportati i grafici di confronto, in termini di metriche di accuratezza, tra i vari casi di training. Il grafico di figura (7.65b) riporta l'RMSE normalizzato rispetto al massimo.

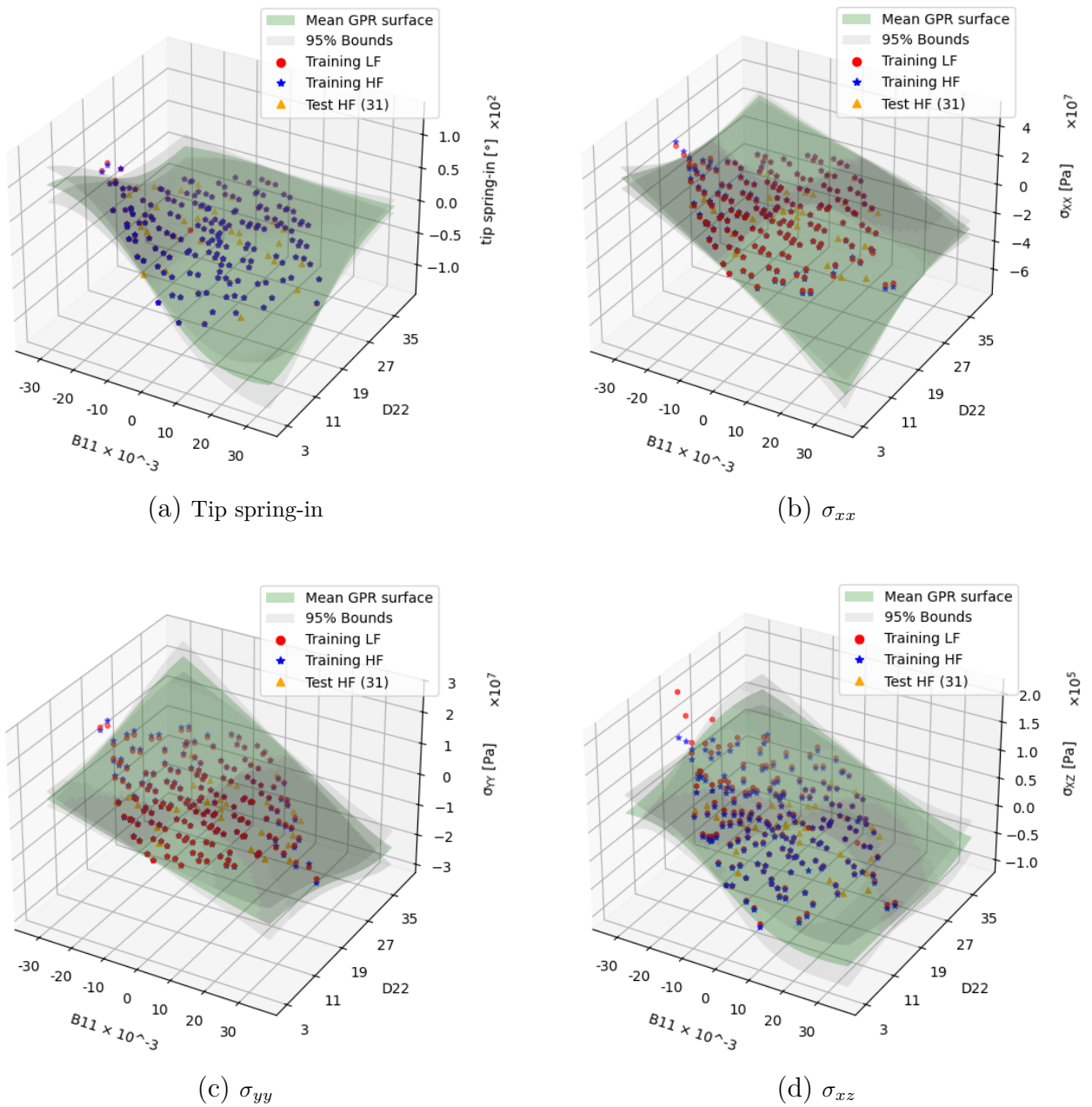
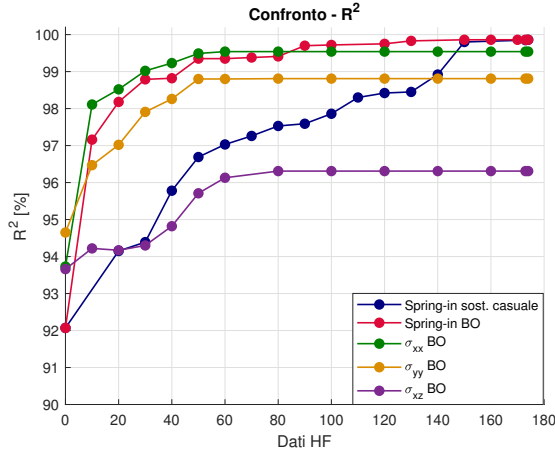
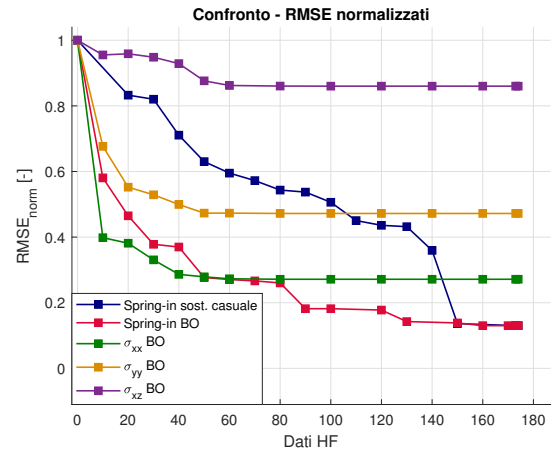


Figura 7.64: L-SHAPE GPR con BO - predizioni medie con intervalli di confidenza



(a) Andamento di R^2



(b) Andamento RMSE

Figura 7.65: L-SHAPE: confronto sulle accuratèzze

Dall'osservazione dei risultati in figura (7.64) si nota che, in linea generale, le superfici di confine risultano complessivamente strette intorno a quella media, in ognuno dei casi e, in particolar modo, in quello della σ_{xx} di figura (7.64b). Questo comportamento è indice di una buona coerenza tra i diversi training GPR multi-fidelity, che risulta in una variabilità delle predizioni contenuta.

Per quanto riguarda l'accuratezza, dai grafici di figura (7.65) si osserva che la predizione più accurata risulta essere quella relativa al *tip spring-in*, seguita dalle componenti assiali di tensione. Risulta invece più complessa la predizione e rappresentazione delle componenti di taglio.

L'impiego della Bayesian Optimization mostra, infine, notevoli vantaggi predittivi rispetto a una selezione casuale dei dati high-fidelity, consentendo di individuare in modo più efficiente le sostituzioni ottimali dei dati low-fidelity e migliorando sensibilmente la qualità complessiva del training. Tali risultati confermano l'efficacia dell'approccio multi-fidelity proposto, sia in termini di stabilità sia di accuratezza delle predizioni.

Capitolo 8

Conclusioni

8.1 Riassunto del lavoro

Il lavoro di tesi esposto è focalizzato sulla valutazione di teorie strutturali multi-fidelity basate su Carrera-Unified-Formulation al fine di sviluppare modelli ML di natura supervised (GPR e reti neurali) in linguaggio Python. Tali codici, applicati a più casi di studio, hanno consentito di analizzare il comportamento meccanico di componenti eterogenei, come travi isotrope o composite con diverse sezioni, ed, infine, travi composite con sezione trasversale ad L sottoposte a ciclo di cura, andando a prevedere spostamenti e tensioni. Nel particolare caso delle travi composite di natura L-SHAPE, l'approccio ML mediante GPR integrante ottimizzazione bayesiana ha consentito di sviluppare predizioni relativamente all'angolo di spring-in a termine del processo di cura, nonché alle tensioni residue, basandosi esclusivamente sui parametri di laminazione.

Il lavoro si articola su più sezioni di natura teorica e pratica:

- **Revisione ed applicazione dei modelli strutturali e di curing fondamentali:** nel secondo capitolo vengono affrontate le teorie strutturali basilari per lo svolgimento delle analisi FEM-CUF oggetto del presente elaborato, con attenzione agli approcci di tipo Equivalent Single Layer e Layer-Wise. Quest'ultimo, in particolare, è stato utile per il calcolo delle distribuzioni di tensione nello spessore dei laminati L-SHAPE. Il quarto ed il quinto capitolo espongono le applicazioni di base di quanto detto sopra, al fine di validare il metodo di base.
- **Teoria per modelli ML:** il terzo capitolo contiene, per intero, la teoria utile allo sviluppo dei modelli ML impiegati nelle varie fasi del lavoro. Partendo da una descrizione generale dei Gaussian Processes e della matematica di base (i cui fondamenti sono esposti in Appendice A), l'attenzione si focalizza sulla GPR, nucleo fondamentale del lavoro. Vengono, inoltre, esposti i principi di base per lo sviluppo di codici basati su reti neurali.
- **Casi di studio:** il sesto ed il settimo capitolo presentano i risultati degli studi condotti mediante codici ML che impiegano risultati multi-fidelity provenienti da analisi FEM-CUF. Nel sesto capitolo l'attenzione si concentra sullo sviluppo e validazione di un codice Python di reti neurali integranti GPR a monte, basandosi sui risultati ottenuti da Zobeiry *et al.* con modelli di rete neurale basilari. I risultati ottenuti nel caso di travi isotrope con varie sezioni e materiali hanno mostrato l'effettiva convenienza del metodo in termini computazionali e di accuratezza, a confronto con lo svolgimento di un elevato quantitativo di analisi di natura high-fidelity. Nel settimo capitolo, infine, è stato sviluppato un codice ML Python per compiere predizioni basate su dati multi-fidelity FEM-CUF concentrandosi

sul solo uso di modelli GPR. Il codice ha dato risultati soddisfacenti per vari casi di studio, dalle travi isotrope ad I alle travi composite con sezioni elementari, fino allo studio di componenti in materiale composito con sezione ad L, nucleo fondamentale del lavoro. Partendo da studi iniziali che hanno mostrato la variabilità dei risultati in termini di angoli di spring-in a fine processo di cura in funzione dei parametri di laminazione B_{11} e D_{22} , nonché l'influenza della selezione del parametro fondamentale di length-scale dei kernel per GPR (mettendo in evidenza il metodo di scelta impiegato per il presente lavoro), sono state sviluppate predizioni di angoli di spring-in e tensioni residue a seguito del ciclo di cura su componenti L-SHAPE, in dipendenza dei parametri di laminazione sopra descritti. Tali studi sono stati condotti dapprima mediante selezione casuale del mix di dati multi-fidelity, e, successivamente, con selezione basata su Bayesian Optimization. Il metodo con selezione casuale ha permesso di ottenere risultati con accuratezza moderata, in tempi contenuti, mentre il metodo con Bayesian Optimization ha mostrato come sia possibile ottenere predizioni ad alta accuratezza, con mix di dati contenenti un quantitativo ridotto di campioni high-fidelity a fronte di molti low-fidelity, accettando un costo computazionale superiore, comunque conveniente rispetto allo svolgimento di molte analisi FEM-CUF di natura HF.

8.2 Conclusioni e prospettive future

Il lavoro svolto in questa tesi ha permesso di validare l'impiego di risultati provenienti da analisi multi-fidelity FEM-CUF al fine di sviluppare modelli di ML in grado di prevedere tensioni residue, spostamenti e difetti derivanti dal processo di cura. Le principali conclusioni che si possono trarre sono le seguenti:

- **Convenienza nell'uso di modelli ML:** le predizioni basate su uso di codici ML hanno permesso di ottenere stime estremamente accurate dei risultati, con costi computazionali contenuti se confrontati a quelli di tante singole analisi. L'approccio ML si mostra, quindi, particolarmente adeguato a casi dove risulti necessario svolgere un elevato numero di stime e campionamenti.
- **Differenze tra approcci basati su reti neurali e su GPR:** le reti neurali (NN) si mostrano adatte alla scalabilità su dataset di grandi dimensioni, mentre i processi basati su GPR vedono un aumento notevole del costo computazionale aumentando il quantitativo di dati di training. Al contempo, i modelli GPR restituiscono un modello probabilistico, basato su distribuzioni normali, di facile interpretazione, non possibile nel caso di NN. Il modello GPR può essere esteso anche allo studio di incertezze, aspetto non facilmente valutabile nel caso delle reti neurali. Infine, i modelli basati su GPR si mostrano di più semplice sviluppo, per via della facilità di gestione degli algoritmi, dovuta alla necessità di regolare pochi iper-parametri di base, a differenza dei modelli NN che richiedono la gestione di più aspetti (funzione di attivazione, profondità della rete, quantità di neuroni per layer, ad esempio).
- **Predizione di difetti e tensioni residue nei processi di curing dei compositi:** il metodo basato su GPR si è mostrato estremamente vantaggioso in termini computazionali e di accuratezza per la previsione di difetti produttivi e tensioni residue nel caso di compositi L-SHAPE. L'integrazione della Bayesian Optimization nella selezione del mix di dati multi-fidelity ha giocato un ruolo chiave nell'aumento dell'accuratezza. Inoltre, come evidenziato da Petrolo, Schoenholz, Zappino et al. [4], è stato dimostrato come la

predizione dello spring-in sia dominata principalmente da dati di natura simulativa, e non sperimentale, fino al punto di raggiungere, nel presente lavoro, elevate accuratèzze in assenza totale di dati sperimentali.

Il presente lavoro può aprire la strada ad alcuni sviluppi futuri significativi, come: l'applicazione dei metodi ML a componenti con geometria differente (C-SHAPE o Ω -SHAPE, ad esempio); lo studio e predizione di difetti di natura diversa (come warpage, ad esempio) nati a seguito del processo di cura; l'ulteriore ottimizzazione dei codici di ML probabilistico, al fine di ridurre in modo significativo le dimensioni dei dataset necessari per le analisi, con relativo risparmio in termini di analisi. Tale ottimizzazione potrà essere perseguita anche mediante una gestione differente dei parametri di rumore assegnati ai dati multi-fidelity. Infine, l'adozione di approcci basati su machine learning non rappresenta soltanto un vantaggio in termini di efficienza numerica, ma costituisce anche un significativo passo avanti verso una produzione più razionale e sostenibile. La possibilità di prevedere con accuratezza tensioni residue e difetti già in fase di progettazione consente, infatti, di ridurre il numero di iterazioni progettuali e di prove produttive, con un conseguente abbattimento dei costi di sviluppo e dei tempi di realizzazione dei componenti.

Appendice A - Statistica per ML

In questa appendice vengono richiamati alcuni concetti fondamentali di probabilità e statistica necessari per comprendere le basi teoriche dei Gaussian Processes (GPs), con l'obiettivo di definire le grandezze di base per comprendere i risultati presentati nella tesi. Inoltre, vengono definite le metriche di accuratezza impiegate nelle predizioni tramite modello GPR in Python. In un contesto sperimentale o di simulazione, la generica grandezza misurata può essere indicata con la variabile X . Essendo il risultato della misurazione casuale (entro i limiti dettati dalla fisica del problema), si definisce variabile aleatoria X una variabile numerica il cui valore può cambiare tra una replica dell'esperimento ed un'altra [25] [26].

Una variabile aleatoria si definisce discreta se il suo range è costituito da un insieme finito o numerabile di numeri reali. Si definisce, invece, continua una variabile aleatoria il cui range è costituito da un intervallo (finito o infinito) di numeri reali.

Date le definizioni di base sopra riportate, è possibile introdurre, in breve, le nozioni utili per la comprensione dei GPs.

Definizioni

Funzione densità di probabilità di X

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx \quad (\text{A.1})$$

Media o valore atteso di X

$$\mathbb{E}(X) = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \quad (\text{A.2})$$

Varianza di X

$$\sigma^2 = Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \mu^2 = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] \quad (\text{A.3})$$

Deviazione standard di X

$$\sigma = \sqrt{V(X)} \quad (\text{A.4})$$

Covarianza. Date due variabili aleatorie X ed Y , la covarianza è la misura della dipendenza lineare tra di esse:

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] \quad (\text{A.5})$$

Distribuzione normale e Gaussian Processes. La distribuzione normale (o gaussiana) è una delle più importanti in statistica e viene definita dalla funzione di densità:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (\text{A.6})$$

dove μ è la media e σ^2 la varianza.

Un Gaussian Process (GP) può essere visto come un'estensione di questa distribuzione: una collezione di variabili aleatorie tali che ogni sottoinsieme finito abbia distribuzione normale multivariata. Un GP è completamente specificato da una funzione di media $m(x)$ e da una funzione di covarianza (detta, come si vede nell'elaborato, kernel) $k(x, x')$, e si scrive

$$f(x) \sim \mathcal{GP}(m(x), k(x, x')). \quad (\text{A.7})$$

In questo modo, la Gaussian Process Regression (GPR) sfrutta direttamente le proprietà della distribuzione gaussiana per modellare funzioni e stimare l'incertezza sulle predizioni.

Metriche di accuratezza

Coefficiente di determinazione R^2

Il coefficiente di determinazione misura la proporzione di varianza dei dati spiegata dal modello ed è definito come

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}, \quad (\text{A.8})$$

dove y_i sono i valori osservati (detti anche ground truth, in questo caso ottenuti mediante simulazioni FEM-CUF), $\hat{y}_i$ i valori predetti dal modello e $\bar{y}$ la media dei valori osservati. In casi reali, si può ricadere in una delle seguenti quattro casistiche:

- $R^2 = 1$: il modello, attraverso le predizioni generate, è in grado di spiegare completamente la variabilità dei dati osservati.
- $0 < R^2 < 1$: il modello spiega parzialmente la variabilità dei dati; una frazione compresa tra 0 e 1 della varianza osservata è catturata dalle predizioni.
- $R^2 = 0$: il modello non apporta alcuna informazione aggiuntiva rispetto alla semplice media dei dati, spiegando la variabilità con la stessa accuratezza di un predittore costante.
- $R^2 < 0$: le predizioni del modello risultano peggiori della stima basata sulla media dei dati, indicando che il modello non cattura correttamente la struttura della variabilità osservata.

Nell'ambito del lavoro di tesi presentato, il coefficiente di determinazione è stato riportato in termini percentuali $R_{\%}^2 = R^2 \cdot 100\%$.

Root Mean Squared Error (RMSE)

L'errore quadratico medio è una misura della differenza assoluta tra valori osservati e predetti:

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}. \quad (\text{A.9})$$

Appendice B - Tabelle di riferimento

T [s]	t [°C]	α [-]	E_L [GPa]	E_Z, E_X [MPa]	$\nu_{LZ, LX}$ [-]	ν_{XZ} [-]	$G_{LX, LZ}$ [MPa]	G_{XZ} [MPa]	$\alpha'_L \times 10^{-7}$ [m ² /°C]	$\alpha'_{Z, X} \times 10^{-5}$ [m ² /°C]	$\varepsilon_{L, Z}$ [%]
148.88	168.88	0.54	119.70	0.25	0.329	1.000	0.06	0.06	-3.600	13.699	0.000
149.77	169.77	0.56	119.70	0.41	0.329	1.000	0.10	0.10	-3.599	13.699	-0.036
150.68	170.68	0.57	119.70	0.68	0.329	1.000	0.17	0.17	-3.599	13.699	-0.072
151.60	171.60	0.59	119.70	1.13	0.329	1.000	0.28	0.28	-3.598	13.699	-0.107
152.55	172.55	0.61	119.70	1.88	0.329	1.000	0.47	0.47	-3.597	13.699	-0.143
153.54	173.54	0.62	119.70	3.14	0.329	1.000	0.79	0.79	-3.595	13.699	-0.179
154.55	174.55	0.64	119.70	5.24	0.329	1.000	1.31	1.31	-3.592	13.699	-0.214
155.61	175.61	0.66	119.70	8.74	0.329	0.999	2.19	2.19	-3.587	13.699	-0.250
156.71	176.71	0.67	119.70	14.56	0.329	0.999	3.64	3.64	-3.578	13.698	-0.286
157.86	177.86	0.69	119.70	24.20	0.329	0.998	6.06	6.06	-3.563	13.698	-0.321
159.07	179.07	0.71	119.70	40.10	0.329	0.998	10.05	10.04	-3.538	13.697	-0.357
160.38	180.00	0.72	119.71	70.38	0.329	0.996	17.68	17.63	-3.491	13.695	-0.393
161.87	180.00	0.74	119.71	144.62	0.329	0.991	36.50	36.32	-3.375	13.691	-0.430
163.57	180.00	0.76	119.73	297.41	0.328	0.981	75.80	75.05	-3.133	13.682	-0.467
165.06	180.00	0.77	119.75	517.61	0.327	0.968	133.86	131.52	-2.775	13.669	-0.496
165.15	180.00	0.77	119.75	534.66	0.327	0.967	138.42	135.92	-3.361	4.015	-0.498
167.06	180.00	0.79	119.80	983.09	0.326	0.939	262.28	253.51	-3.146	4.007	-0.530
168.42	180.00	0.80	119.85	1429.67	0.324	0.911	393.25	373.98	-2.919	3.999	-0.550
169.53	180.00	0.81	119.90	1878.20	0.323	0.884	533.06	498.49	-2.674	3.990	-0.565
170.19	180.00	0.81	119.96	2305.49	0.321	0.858	674.56	620.50	-2.426	3.981	-0.574
170.60	180.00	0.81	120.01	2706.08	0.320	0.833	815.13	738.00	-2.178	3.972	-0.579
171.03	180.00	0.81	120.06	3083.65	0.318	0.811	955.12	851.59	-1.930	3.963	-0.584
171.46	180.00	0.82	120.12	3440.43	0.316	0.789	1094.55	961.54	-1.683	3.954	-0.589
172.06	180.00	0.82	120.19	3887.14	0.314	0.762	1279.56	1102.88	-1.352	3.942	-0.595
172.69	180.00	0.82	120.26	4304.35	0.312	0.737	1463.56	1238.70	-1.022	3.930	-0.602
173.35	180.00	0.83	120.33	4695.22	0.310	0.714	1646.47	1369.38	-0.691	3.918	-0.609
174.21	180.00	0.83	120.42	5150.74	0.308	0.688	1873.36	1525.99	-0.279	3.902	-0.617
175.15	180.00	0.83	120.51	5574.37	0.305	0.663	2098.55	1675.92	0.133	3.887	-0.626
176.16	180.00	0.84	120.59	5969.98	0.302	0.640	2321.98	1819.75	0.545	3.872	-0.634
177.26	180.00	0.84	120.68	6340.76	0.300	0.619	2543.59	1957.98	0.956	3.857	-0.642
178.48	180.00	0.85	120.77	6689.40	0.297	0.600	2763.29	2091.03	1.366	3.842	-0.651
179.85	180.00	0.85	120.85	7018.16	0.295	0.581	2981.00	2219.27	1.776	3.827	-0.659
181.42	180.00	0.85	120.94	7328.93	0.292	0.564	3196.60	2343.00	2.184	3.812	-0.667
183.25	180.00	0.86	121.03	7623.34	0.290	0.548	3409.94	2462.50	2.590	3.797	-0.675
185.43	180.00	0.86	121.11	7902.79	0.287	0.533	3620.89	2577.98	2.994	3.783	-0.684
188.13	180.00	0.87	121.20	8168.50	0.285	0.518	3829.33	2689.67	3.396	3.768	-0.692
192.38	180.00	0.87	121.30	8470.74	0.282	0.502	4075.98	2818.94	3.875	3.750	-0.701
198.39	180.00	0.87	121.40	8756.48	0.279	0.487	4318.74	2943.36	4.350	3.733	-0.711
207.42	180.00	0.88	121.50	9027.26	0.276	0.473	4557.58	3063.23	4.820	3.716	-0.720
221.36	180.00	0.88	121.59	9276.55	0.274	0.461	4785.13	3175.29	5.271	3.699	-0.730
247.36	180.00	0.89	121.69	9531.48	0.271	0.448	5025.57	3291.57	5.751	3.682	-0.739
333.33	20.00	0.89	121.75	9674.51	0.269	0.441	5163.91	3357.54	6.029	3.672	-0.746

Tabella B.1: Ciclo di cura. Fonte: [4][5]

Materiale / Lega	E [GPa]	G [GPa]	ρ [kg/m ³]	E/ρ [$\times 10^6 \frac{m^2}{s^2}$]	G/ρ [$\times 10^6 \frac{m^2}{s^2}$]	E/G
Al 1100	69	25.94	2710	25.461	9.574	2.66
Al 2024-T3	73	27.44	2780	26.259	9.869	2.66
Al 2024-T6	73	27.44	2780	26.259	9.869	2.66
Al 2014-T6	73	27.44	2850	25.614	9.623	2.66
Al 6061-T6	69	26.00	2700	25.556	9.630	2.65
Al 7075-T6	71	26.69	2810	25.267	9.497	2.66
Al 5083	72	27.07	2650	27.170	10.216	2.66
Al 5052	70	26.32	2680	26.119	9.821	2.66
Al 356-T6	75	28.30	2680	27.962	10.552	2.65
Al 3003	69	25.94	2730	25.275	9.506	2.66
Al 2618-T61	73	27.44	2780	26.259	9.869	2.66
Al 2025	73	27.44	2770	26.357	9.901	2.66
2091 Al-Li-Cu	75	28.20	2580	29.070	10.930	2.66
Ti-6Al-4V (Grade 5)	114	44.00	4430	25.740	9.929	2.59
Ti-6Al-4V ELI	110	40.96	4420	24.886	9.267	2.69
Ti-3Al-2.5V	103	38.43	4420	23.312	8.693	2.68
Ti-6242	115	41.97	4600	25.000	9.119	2.74
Ti-5553	120	43.24	4620	25.974	9.360	2.78
Ti-6Al-2Sn-4Zr-2Mo	116	41.69	4500	25.778	9.264	2.78
Acciaio A36	200	76.92	7850	25.478	9.799	2.60
Acciaio 1045	210	80.77	7850	26.751	10.291	2.60
Inox 304	193	74.23	8000	24.125	9.279	2.60
Inox 316	193	74.23	8000	24.125	9.279	2.60
Inconel 718	205	79.40	8190	25.034	9.700	2.58
Inconel 625	200	77.50	8440	23.698	9.185	2.58
Rame (Cu)	120	44.78	8960	13.393	4.996	2.68
Ottone C360	103	38.66	8530	12.080	4.534	2.66
Bronzo fosforoso	115	41.80	8800	13.068	4.750	2.75
Mg AZ91	45	16.67	1810	24.863	9.209	2.70
Nichel (Ni)	200	76.34	8900	22.472	8.576	2.62
Monel 400	190	72.51	8800	21.590	8.239	2.62
Tungsteno (W)	400	155.56	19300	20.725	8.058	2.57
Piombo (Pb)	16.0	5.93	11340	1.411	0.523	2.70
Stagno (Sn)	50.0	18.50	7310	6.838	2.530	2.70
Zinco (Zn)	108.0	43.20	7140	15.134	6.056	2.50
Oro (Au)	78.0	27.60	19300	4.041	1.431	2.83
Argento (Ag)	83.0	30.10	10490	7.912	2.868	2.76
Platino (Pt)	168.0	61.90	21450	7.832	2.888	2.71
Tantalio (Ta)	186.0	69.60	16650	11.169	4.178	2.67
Indio (In)	11.0	4.07	7310	1.505	0.557	2.70
Lega Pb-Sn (60/40)	30.0	11.11	8400	3.571	1.322	2.70
Lega Pb-Sb (5% Sb)	40.0	14.81	11200	3.571	1.323	2.70

Tabella B.2: Proprietà meccaniche e fisiche di materiali metallici

L/h [-]	E [GPa]	ρ [kg/m ³]	E/ρ [$\times 10^6$ m ² /s ²]	$u_{z,tip}$ [m]	$\sigma_{yz,max}$ [Pa]
10	400	19300	20.7250	6.0250E-06	9.1141E+03
10	75	2680	27.9620	3.2143E-05	9.1134E+03
15	16	11340	1.4110	5.0573E-04	9.1406E+03
15	73	2780	26.2590	1.1084E-04	9.1413E+03
20	103	8530	12.0800	1.8584E-04	9.1803E+03
20	73	2770	26.3570	2.6221E-04	9.1805E+03
25	120	8960	13.3930	3.1127E-04	9.2296E+03
25	73	2780	26.2590	5.1167E-04	9.2307E+03
30	50	7310	6.8380	1.2903E-03	9.2888E+03
30	70	2680	26.1190	9.2159E-04	9.2920E+03
35	30	8400	3.5710	3.4138E-03	9.3600E+03
35	69	2700	25.5560	1.4842E-03	9.3646E+03
40	11	7310	1.5050	1.3895E-02	9.4415E+03
40	75	2580	29.0700	2.0379E-03	9.4473E+03
45	108	7140	15.1340	2.0147E-03	9.5691E+03
45	72	2650	27.1700	3.0221E-03	9.5410E+03
50	400	19300	20.7250	7.4612E-04	9.6636E+03
50	75	2680	27.9620	3.9793E-03	9.6469E+03
55	16	11340	1.4110	2.4826E-02	9.7502E+03
55	73	2780	26.2590	5.4412E-03	9.7595E+03
60	103	8530	12.0800	5.0064E-03	9.8832E+03
60	73	2770	26.3570	7.0638E-03	9.8843E+03
65	120	8960	13.3930	5.4632E-03	1.0013E+04
65	73	2780	26.2590	8.9806E-03	1.0019E+04
70	50	7310	6.8380	1.6376E-02	1.0148E+04
70	70	2680	26.1190	1.1697E-02	1.0165E+04
75	30	8400	3.5710	3.3568E-02	1.0301E+04
75	69	2700	25.5560	1.4595E-02	1.0321E+04
80	11	7310	1.5050	1.1110E-01	1.0462E+04
80	75	2580	29.0700	1.6295E-02	1.0484E+04
85	108	7140	15.1340	1.3573E-02	1.0752E+04
85	72	2650	27.1700	2.0359E-02	1.0657E+04
90	400	19300	20.7250	4.3502E-03	1.0895E+04
90	75	2680	27.9620	2.3201E-02	1.0844E+04
95	16	11340	1.4110	1.2790E-01	1.1003E+04
95	73	2780	26.2590	2.8034E-02	1.1029E+04

Tabella B.3: Trave ad I: dati di training NN-GPR di tipo LF

L/h [-]	h/t [-]	h [m]	t [m]	L [m]	$u_{z,tip}$ [m]	$\sigma_{yz,max}$ [Pa]
10	5.0000	1.0000E-01	2.0000E-02	1.0000E+00	3.3025E-05	9.1133E+03
10	18.1818	2.0000E-01	1.1000E-02	2.0000E+00	7.2329E-05	1.1324E+04
15	40.0000	2.4000E-01	6.0000E-03	3.6000E+00	4.4910E-04	1.7267E+04
15	6.6667	1.0000E-01	1.5000E-02	1.5000E+00	1.2961E-04	1.1893E+04
20	8.0000	2.0000E-01	2.5000E-02	4.0000E+00	3.0718E-04	5.1157E+03
20	30.0000	2.4000E-01	8.0000E-03	4.8000E+00	8.1929E-04	1.3137E+04
25	48.0000	2.4000E-01	5.0000E-03	6.0000E+00	2.3071E-03	1.8611E+04
25	4.0000	1.0000E-01	2.5000E-02	2.5000E+00	4.6825E-04	7.6751E+03
30	22.2222	2.0000E-01	9.0000E-03	6.0000E+00	2.3019E-03	1.4074E+04
30	16.6700	2.0000E-01	1.1998E-02	6.0000E+00	1.7603E-03	1.0121E+04
35	34.2857	2.4000E-01	7.0000E-03	8.4000E+00	4.7314E-03	1.4045E+04
35	13.3333	2.0000E-01	1.5000E-02	7.0000E+00	2.3832E-03	8.6003E+03
40	5.0000	1.0000E-01	2.0000E-02	4.0000E+00	2.0937E-03	9.4470E+03
40	22.2222	2.0000E-01	9.0000E-03	8.0000E+00	5.4531E-03	1.4276E+04
45	3.3333	1.0000E-01	3.0000E-02	4.5000E+00	2.6017E-03	7.0585E+03
45	4.0000	1.0000E-01	2.5000E-02	4.5000E+00	2.7281E-03	7.9584E+03
50	16.6667	2.0000E-01	1.2000E-02	1.0000E+01	8.1430E-03	1.0473E+04
50	40.0000	2.4000E-01	6.0000E-03	1.2000E+01	1.6557E-02	1.8118E+04
55	6.6667	1.0000E-01	1.5000E-02	5.5000E+00	6.3599E-03	1.2617E+04
55	48.0000	2.4000E-01	5.0000E-03	1.3200E+01	2.4532E-02	1.9606E+04
60	30.0000	2.4000E-01	8.0000E-03	1.4400E+01	2.2066E-02	1.4055E+04
60	22.2222	2.0000E-01	9.0000E-03	1.2000E+01	1.8397E-02	1.4848E+04
65	13.3333	2.0000E-01	1.5000E-02	1.3000E+01	1.5255E-02	9.1579E+03
65	4.0000	1.0000E-01	2.5000E-02	6.5000E+00	8.2197E-03	8.3951E+03
70	40.0000	2.4000E-01	6.0000E-03	1.6800E+01	4.5424E-02	1.8998E+04
70	18.1818	2.0000E-01	1.1000E-02	1.4000E+01	2.4532E-02	1.2476E+04
75	10.0000	1.0000E-01	1.0000E-02	7.5000E+00	2.0943E-02	1.8539E+04
75	48.0000	2.4000E-01	5.0000E-03	1.8000E+01	6.2195E-02	2.0659E+04
80	4.0000	1.0000E-01	2.5000E-02	8.0000E+00	1.5323E-02	8.8169E+03
80	34.2857	2.4000E-01	7.0000E-03	1.9200E+01	5.6460E-02	1.5621E+04
85	10.0000	1.0000E-01	1.0000E-02	8.5000E+00	3.0486E-02	1.9056E+04
85	6.6667	1.0000E-01	1.5000E-02	8.5000E+00	2.3470E-02	1.3670E+04
90	22.2222	2.0000E-01	9.0000E-03	1.8000E+01	6.2078E-02	1.6100E+04
90	48.0000	2.4000E-01	5.0000E-03	2.1600E+01	1.0747E-01	2.1639E+04
95	25.0000	2.0000E-01	8.0000E-03	1.9000E+01	7.8523E-02	1.7264E+04
95	18.1818	2.0000E-01	1.1000E-02	1.9000E+01	6.1315E-02	1.3430E+04

Tabella B.4: Trave isotropa ad I caricata a flessione: 36 dati LF

L/h [-]	h/t [-]	h [m]	t [m]	L [m]	$u_{z,tip}$ [m]	$\sigma_{yz,max}$ [Pa]
10	30.0000	2.4000E-01	8.0000E-03	2.4000E+00	1.0327E-04	1.3050E+04
10	8.0000	2.0000E-01	2.5000E-02	2.0000E+00	3.8675E-05	5.0764E+03
10	18.1818	2.0000E-01	1.1000E-02	2.0000E+00	7.2329E-05	1.1324E+04
15	40.0000	2.4000E-01	6.0000E-03	3.6000E+00	4.4910E-04	1.7267E+04
15	10.0000	1.0000E-01	1.0000E-02	1.5000E+00	1.6842E-04	1.6743E+04
20	5.0000	1.0000E-01	2.0000E-02	2.0000E+00	2.6221E-04	9.1805E+03
25	4.0000	1.0000E-01	2.5000E-02	2.5000E+00	4.6825E-04	7.6751E+03
25	20.0000	1.0000E-01	5.0000E-03	2.5000E+00	1.3172E-03	3.0211E+04
25	13.3333	2.0000E-01	1.5000E-02	5.0000E+00	8.6924E-04	8.4869E+03
30	16.6700	2.0000E-01	1.1998E-02	6.0000E+00	1.7603E-03	1.0121E+04
30	40.0000	2.4000E-01	6.0000E-03	7.2000E+00	3.5793E-03	1.7521E+04
35	25.0000	2.0000E-01	8.0000E-03	7.0000E+00	3.9300E-03	1.4918E+04
40	5.0000	1.0000E-01	2.0000E-02	4.0000E+00	2.0937E-03	9.4470E+03
40	18.1818	2.0000E-01	1.1000E-02	8.0000E+00	4.5797E-03	1.1689E+04
40	16.6667	2.0000E-01	1.2000E-02	8.0000E+00	4.1703E-03	1.0275E+04
45	6.6667	1.0000E-01	1.5000E-02	4.5000E+00	3.4840E-03	1.2360E+04
50	25.0000	2.0000E-01	8.0000E-03	1.0000E+01	1.1452E-02	1.5312E+04
50	40.0000	2.4000E-01	6.0000E-03	1.2000E+01	1.6557E-02	1.8118E+04
55	4.0000	1.0000E-01	2.5000E-02	5.5000E+00	4.9801E-03	8.1582E+03
55	6.6667	1.0000E-01	1.5000E-02	5.5000E+00	6.3599E-03	1.2617E+04
55	48.0000	2.4000E-01	5.0000E-03	1.3200E+01	2.4532E-02	1.9606E+04
60	30.0000	2.4000E-01	8.0000E-03	1.4400E+01	2.2066E-02	1.4055E+04
60	22.2222	2.0000E-01	9.0000E-03	1.2000E+01	1.8397E-02	1.4848E+04
65	13.3333	2.0000E-01	1.5000E-02	1.3000E+01	1.5255E-02	9.1579E+03
70	22.2222	2.0000E-01	9.0000E-03	1.4000E+01	2.9211E-02	1.5214E+04
75	48.0000	2.4000E-01	5.0000E-03	1.8000E+01	6.2195E-02	2.0659E+04
75	10.0000	1.0000E-01	1.0000E-02	7.5000E+00	2.0943E-02	1.8539E+04
75	6.6667	1.0000E-01	1.5000E-02	7.5000E+00	1.6124E-02	1.3273E+04
80	4.0000	1.0000E-01	2.5000E-02	8.0000E+00	1.5323E-02	8.8169E+03
80	30.0000	2.4000E-01	8.0000E-03	1.9200E+01	5.2298E-02	1.4837E+04
85	3.3333	1.0000E-01	3.0000E-02	8.5000E+00	1.7528E-02	8.0237E+03
85	8.0000	2.0000E-01	2.5000E-02	1.7000E+01	2.3528E-02	5.9784E+03
85	10.0000	1.0000E-01	1.0000E-02	8.5000E+00	3.0486E-02	1.9056E+04
90	40.0000	2.4000E-01	6.0000E-03	2.1600E+01	9.6533E-02	2.0142E+04
95	25.0000	2.0000E-01	8.0000E-03	1.9000E+01	7.8523E-02	1.7264E+04
95	18.1818	2.0000E-01	1.1000E-02	1.9000E+01	6.1315E-02	1.3430E+04

Tabella B.5: Trave isotropa ad I caricata a flessione: 36 dati LF

Tabella B.6: Trave isotropa ad I: dati high-fidelity

L/h [-]	h/t [-]	h [m]	t [m]	L [m]	$u_{z,tip}$ [m]	$\sigma_{yz,max}$ [Pa]
10.000	5.000	0.100	0.020	1.000	3.322E-05	1.627E+04
10.000	25.000	0.200	0.008	2.000	9.314E-05	2.136E+03
10.000	30.000	0.240	0.008	2.400	1.037E-04	2.136E+03
10.000	8.000	0.200	0.025	2.000	3.874E-05	4.007E+03
10.000	18.182	0.200	0.011	2.000	7.275E-05	2.136E+03
15.000	40.000	0.240	0.006	3.600	2.895E-04	4.238E+04
15.000	13.333	0.200	0.015	3.000	1.885E-04	1.734E+04
15.000	6.667	0.100	0.015	1.500	1.300E-04	4.238E+04
15.000	20.000	0.100	0.005	1.500	2.867E-04	4.238E+04
15.000	10.000	0.100	0.010	1.500	1.691E-04	4.062E+04
20.000	5.000	0.100	0.020	2.000	2.621E-04	5.933E+04
20.000	22.222	0.200	0.009	4.000	6.834E-04	4.533E+04
20.000	8.000	0.200	0.025	4.000	3.069E-04	2.530E+04
20.000	25.000	0.200	0.008	4.000	7.347E-04	4.910E+04
20.000	30.000	0.240	0.008	4.800	8.190E-04	4.577E+04
25.000	48.000	0.240	0.005	6.000	2.305E-03	9.801E+04
25.000	4.000	0.100	0.025	2.500	4.675E-04	6.535E+04
25.000	13.333	0.200	0.015	5.000	8.687E-04	4.742E+04
25.000	20.000	0.100	0.005	2.500	1.317E-03	1.040E+05
25.000	10.000	0.100	0.010	2.500	7.771E-04	1.040E+05
30.000	30.000	0.240	0.008	7.200	2.758E-03	8.723E+04
30.000	22.222	0.200	0.009	6.000	2.300E-03	8.895E+04
30.000	5.000	0.100	0.020	3.000	8.827E-04	8.965E+04
30.000	16.670	0.200	0.012	6.000	1.759E-03	6.905E+04
30.000	40.000	0.240	0.006	7.200	3.576E-03	1.128E+05
35.000	48.000	0.240	0.005	8.400	6.318E-03	1.510E+05
35.000	34.286	0.240	0.007	8.400	4.726E-03	1.128E+05
35.000	13.333	0.200	0.015	7.000	2.381E-03	7.178E+04
35.000	3.330	0.100	0.030	3.500	1.222E-03	7.554E+04
35.000	25.000	0.200	0.008	7.000	3.926E-03	1.148E+05
40.000	18.182	0.200	0.011	8.000	4.575E-03	1.048E+05
40.000	5.000	0.100	0.020	4.000	2.091E-03	1.101E+05
40.000	30.000	0.240	0.008	9.600	6.533E-03	1.212E+05
40.000	16.667	0.200	0.012	8.000	4.166E-03	9.476E+04
40.000	22.222	0.200	0.009	8.000	5.448E-03	1.244E+05
45.000	8.000	0.200	0.025	9.000	3.488E-03	6.165E+04
45.000	20.000	0.100	0.005	4.500	7.663E-03	1.463E+05
45.000	3.333	0.100	0.030	4.500	2.597E-03	8.698E+04
45.000	6.667	0.100	0.015	4.500	3.480E-03	1.463E+05
45.000	4.000	0.100	0.025	4.500	2.724E-03	9.903E+04
50.000	16.667	0.200	0.012	10.000	8.133E-03	1.157E+05
50.000	18.182	0.200	0.011	10.000	8.932E-03	1.286E+05
50.000	25.000	0.200	0.008	10.000	1.144E-02	1.632E+05
50.000	13.333	0.200	0.015	10.000	6.936E-03	9.957E+04

Continua nella pagina successiva

L/h [-]	h/t [-]	h [m]	t [m]	L [m]	$u_{z,tip}$ [m]	$\sigma_{yz,max}$ [Pa]
50.000	40.000	0.240	0.006	12.000	1.654E-02	1.943E+05
55.000	3.333	0.100	0.030	5.500	4.742E-03	9.566E+04
55.000	6.667	0.100	0.015	5.500	6.352E-03	1.641E+05
55.000	34.286	0.240	0.007	13.200	1.833E-02	1.725E+05
55.000	4.000	0.100	0.025	5.500	4.972E-03	1.094E+05
55.000	48.000	0.240	0.005	13.200	2.450E-02	2.311E+05
60.000	8.000	0.200	0.025	12.000	8.265E-03	7.578E+04
60.000	25.000	0.200	0.008	12.000	1.976E-02	1.894E+05
60.000	30.000	0.240	0.008	14.400	2.204E-02	1.732E+05
60.000	22.222	0.200	0.009	12.000	1.837E-02	1.781E+05
60.000	16.667	0.200	0.012	12.000	1.405E-02	1.335E+05
65.000	6.667	0.100	0.015	6.500	1.048E-02	1.787E+05
65.000	48.000	0.240	0.005	15.600	4.044E-02	2.634E+05
65.000	13.333	0.200	0.015	13.000	1.524E-02	1.212E+05
65.000	3.333	0.100	0.030	6.500	7.827E-03	1.032E+05
65.000	4.000	0.100	0.025	6.500	8.207E-03	1.183E+05
70.000	40.000	0.240	0.006	16.800	4.537E-02	2.543E+05
70.000	18.182	0.200	0.011	14.000	2.450E-02	1.666E+05
70.000	22.222	0.200	0.009	14.000	2.917E-02	2.000E+05
70.000	8.000	0.200	0.025	14.000	1.312E-02	8.392E+04
70.000	20.000	0.100	0.005	7.000	2.883E-02	2.543E+05
75.000	13.333	0.200	0.015	15.000	2.340E-02	1.339E+05
75.000	10.000	0.100	0.010	7.500	2.092E-02	2.562E+05
75.000	6.667	0.100	0.015	7.500	1.610E-02	1.916E+05
75.000	48.000	0.240	0.005	18.000	6.211E-02	2.931E+05
75.000	5.000	0.100	0.020	7.500	1.378E-02	1.516E+05
80.000	22.222	0.200	0.009	16.000	4.354E-02	2.202E+05
80.000	40.000	0.240	0.006	19.200	6.771E-02	2.806E+05
80.000	4.000	0.100	0.025	8.000	1.530E-02	1.306E+05
80.000	30.000	0.240	0.008	19.200	5.223E-02	2.147E+05
80.000	34.286	0.240	0.007	19.200	5.639E-02	2.291E+05
85.000	3.333	0.100	0.030	8.500	1.750E-02	1.178E+05
85.000	5.000	0.100	0.020	8.500	2.005E-02	1.612E+05
85.000	10.000	0.100	0.010	8.500	3.045E-02	2.745E+05
85.000	8.000	0.200	0.025	17.000	2.350E-02	9.535E+04
85.000	6.667	0.100	0.015	8.500	2.344E-02	2.038E+05
90.000	22.222	0.200	0.009	18.000	6.200E-02	2.394E+05
90.000	48.000	0.240	0.005	21.600	1.073E-01	3.351E+05
90.000	30.000	0.240	0.008	21.600	7.436E-02	2.339E+05
90.000	40.000	0.240	0.006	21.600	9.641E-02	3.059E+05
90.000	4.000	0.100	0.025	9.000	2.178E-02	1.389E+05
95.000	25.000	0.200	0.008	19.000	7.842E-02	2.651E+05
95.000	18.182	0.200	0.011	19.000	6.123E-02	2.067E+05
95.000	6.667	0.100	0.015	9.500	3.272E-02	2.158E+05
95.000	34.286	0.240	0.007	22.800	9.441E-02	2.599E+05
95.000	10.000	0.100	0.010	9.500	4.162E-02	2.908E+05

Tabella B.7: Trave isotropa ad I: dati low-fidelity

L/h [-]	h/t [-]	h [m]	t [m]	L [m]	$u_{z,tip}$ [m]	$\sigma_{yz,max}$ [Pa]
10.000	5.000	0.100	0.020	1.000	3.302E-05	9.113E+03
10.000	25.000	0.200	0.008	2.000	9.263E-05	1.457E+04
10.000	30.000	0.240	0.008	2.400	1.033E-04	1.305E+04
10.000	8.000	0.200	0.025	2.000	3.867E-05	5.076E+03
10.000	18.182	0.200	0.011	2.000	7.233E-05	1.132E+04
15.000	40.000	0.240	0.006	3.600	4.491E-04	1.727E+04
15.000	13.333	0.200	0.015	3.000	1.883E-04	8.411E+03
15.000	6.667	0.100	0.015	1.500	1.296E-04	1.189E+04
15.000	20.000	0.100	0.005	1.500	2.856E-04	1.674E+04
15.000	10.000	0.100	0.010	1.500	1.684E-04	1.674E+04
20.000	5.000	0.100	0.020	2.000	2.622E-04	9.180E+03
20.000	22.222	0.200	0.009	4.000	6.831E-04	1.393E+04
20.000	8.000	0.200	0.025	4.000	3.072E-04	5.116E+03
20.000	25.000	0.200	0.008	4.000	7.347E-04	1.466E+04
20.000	30.000	0.240	0.008	4.800	8.193E-04	1.314E+04
25.000	48.000	0.240	0.005	6.000	2.307E-03	1.861E+04
25.000	4.000	0.100	0.025	2.500	4.683E-04	7.675E+03
25.000	13.333	0.200	0.015	5.000	8.692E-04	8.487E+03
25.000	20.000	0.100	0.005	2.500	1.317E-03	1.688E+04
25.000	10.000	0.100	0.010	2.500	7.770E-04	1.688E+04
30.000	30.000	0.240	0.008	7.200	2.761E-03	1.328E+04
30.000	22.222	0.200	0.009	6.000	2.302E-03	1.407E+04
30.000	5.000	0.100	0.020	3.000	8.837E-04	9.292E+03
30.000	16.670	0.200	0.012	6.000	1.760E-03	1.012E+04
30.000	40.000	0.240	0.006	7.200	3.579E-03	1.752E+04
35.000	48.000	0.240	0.005	8.400	6.325E-03	1.886E+04
35.000	34.286	0.240	0.007	8.400	4.731E-03	1.405E+04
35.000	13.333	0.200	0.015	7.000	2.383E-03	8.600E+03
35.000	3.330	0.100	0.030	3.500	1.224E-03	6.905E+03
35.000	25.000	0.200	0.008	7.000	3.930E-03	1.492E+04
40.000	18.182	0.200	0.011	8.000	4.580E-03	1.169E+04
40.000	5.000	0.100	0.020	4.000	2.094E-03	9.447E+03
40.000	30.000	0.240	0.008	9.600	6.541E-03	1.348E+04
40.000	16.667	0.200	0.012	8.000	4.170E-03	1.028E+04
40.000	22.222	0.200	0.009	8.000	5.453E-03	1.428E+04
45.000	8.000	0.200	0.025	9.000	3.492E-03	5.327E+03
45.000	20.000	0.100	0.005	4.500	7.671E-03	1.236E+04
45.000	3.333	0.100	0.030	4.500	2.602E-03	7.059E+03
45.000	6.667	0.100	0.015	4.500	3.484E-03	1.236E+04
45.000	4.000	0.100	0.025	4.500	2.728E-03	7.958E+03
50.000	16.667	0.200	0.012	10.000	8.143E-03	1.047E+04
50.000	18.182	0.200	0.011	10.000	8.942E-03	1.191E+04
50.000	25.000	0.200	0.008	10.000	1.145E-02	1.531E+04
50.000	13.333	0.200	0.015	10.000	6.945E-03	8.839E+03

Continua nella pagina successiva

L/h [-]	h/t [-]	h [m]	t [m]	L [m]	$u_{z,tip}$ [m]	$\sigma_{yz,max}$ [Pa]
50.000	40.000	0.240	0.006	12.000	1.145E-02	1.812E+04
55.000	3.333	0.100	0.030	5.500	4.749E-03	7.249E+03
55.000	6.667	0.100	0.015	5.500	6.360E-03	1.262E+04
55.000	34.286	0.240	0.007	13.200	1.835E-02	1.460E+04
55.000	4.000	0.100	0.025	5.500	4.980E-03	8.158E+03
55.000	48.000	0.240	0.005	13.200	2.453E-02	1.961E+04
60.000	8.000	0.200	0.025	12.000	8.276E-03	5.528E+03
60.000	25.000	0.200	0.008	12.000	1.979E-02	1.565E+04
60.000	30.000	0.240	0.008	14.400	1.979E-02	1.406E+04
60.000	22.222	0.200	0.009	12.000	1.840E-02	1.485E+04
60.000	16.667	0.200	0.012	12.000	1.407E-02	1.071E+04
65.000	6.667	0.100	0.015	6.500	1.050E-02	1.292E+04
65.000	48.000	0.240	0.005	15.600	2.336E-02	2.010E+04
65.000	13.333	0.200	0.015	13.000	1.525E-02	9.158E+03
65.000	3.333	0.100	0.030	6.500	7.839E-03	7.474E+03
65.000	4.000	0.100	0.025	6.500	8.220E-03	8.395E+03
70.000	40.000	0.240	0.006	16.800	4.542E-02	1.900E+04
70.000	18.182	0.200	0.011	14.000	2.453E-02	1.248E+04
70.000	22.222	0.200	0.009	14.000	2.921E-02	1.521E+04
70.000	8.000	0.200	0.025	14.000	1.314E-02	5.691E+03
70.000	20.000	0.100	0.005	7.000	2.886E-02	1.521E+04
75.000	13.333	0.200	0.015	15.000	2.343E-02	9.413E+03
75.000	10.000	0.100	0.010	7.500	2.094E-02	1.854E+04
75.000	6.667	0.100	0.015	7.500	1.612E-02	1.327E+04
75.000	48.000	0.240	0.005	18.000	6.220E-02	2.066E+04
75.000	5.000	0.100	0.020	7.500	1.380E-02	1.032E+04
80.000	22.222	0.200	0.009	16.000	4.360E-02	1.563E+04
80.000	40.000	0.240	0.006	19.200	6.780E-02	1.954E+04
80.000	4.000	0.100	0.025	8.000	1.532E-02	8.817E+03
80.000	30.000	0.240	0.008	19.200	5.230E-02	1.484E+04
80.000	34.286	0.240	0.007	19.200	5.646E-02	1.562E+04
85.000	3.333	0.100	0.030	8.500	1.753E-02	8.024E+03
85.000	5.000	0.100	0.020	8.500	2.008E-02	1.066E+04
85.000	10.000	0.100	0.010	8.500	3.049E-02	1.906E+04
85.000	8.000	0.200	0.025	17.000	2.353E-02	5.978E+03
85.000	6.667	0.100	0.015	8.500	2.347E-02	1.367E+04
90.000	22.222	0.200	0.009	18.000	6.208E-02	1.610E+04
90.000	48.000	0.240	0.005	21.600	1.075E-01	2.164E+04
90.000	30.000	0.240	0.008	21.600	7.446E-02	1.530E+04
90.000	40.000	0.240	0.006	21.600	9.653E-02	2.014E+04
90.000	4.000	0.100	0.025	9.000	2.182E-02	9.140E+03
95.000	25.000	0.200	0.008	19.000	7.852E-02	1.726E+04
95.000	18.182	0.200	0.011	19.000	6.131E-02	1.343E+04
95.000	6.667	0.100	0.015	9.500	3.277E-02	1.411E+04
95.000	34.286	0.240	0.007	22.800	9.454E-02	1.639E+04
95.000	10.000	0.100	0.010	9.500	1.891E-01	2.908E+05

Tabella B.8: Trave isotropa ad I: dati test HF

L/h [-]	h/t [-]	h [m]	t [m]	L [m]	$u_{z,tip}$ [m]	$\sigma_{yz,max}$ [Pa]
10.000	3.333	0.100	0.030	1.000	5.640E-05	1.531E+04
10.000	13.333	0.200	0.015	2.000	5.640E-05	1.245E+03
10.000	40.000	0.240	0.006	2.400	1.345E-04	9.931E+02
15.000	5.000	0.100	0.020	1.500	2.429E-04	2.588E+04
15.000	18.182	0.200	0.011	3.000	2.429E-04	1.931E+04
15.000	34.286	0.240	0.007	3.600	3.740E-04	2.588E+04
20.000	10.000	0.100	0.010	2.000	3.988E-04	7.435E+04
20.000	34.286	0.240	0.007	4.800	8.839E-04	5.030E+04
25.000	5.000	0.100	0.020	2.500	5.112E-04	7.603E+04
25.000	18.182	0.200	0.011	5.000	1.119E-03	5.858E+04
25.000	34.286	0.240	0.007	6.000	1.724E-03	7.320E+04
30.000	8.000	0.200	0.025	6.000	1.034E-03	4.268E+04
30.000	18.182	0.200	0.011	6.000	1.759E-03	7.571E+04
35.000	3.333	0.100	0.030	3.500	1.222E-03	7.554E+04
35.000	10.000	0.100	0.010	3.500	2.129E-03	1.148E+05
35.000	20.000	0.100	0.005	3.500	2.129E-03	1.148E+05
40.000	3.333	0.100	0.030	4.000	3.176E-03	8.175E+04
40.000	10.000	0.100	0.010	4.000	3.176E-03	1.298E+05
40.000	34.286	0.240	0.007	9.600	7.052E-03	1.298E+05
45.000	5.000	0.100	0.020	4.500	2.977E-03	1.179E+05
45.000	18.182	0.200	0.011	9.000	6.512E-03	1.172E+05
45.000	40.000	0.240	0.006	10.800	6.512E-03	1.766E+05
50.000	5.000	0.100	0.020	5.000	4.083E-03	1.248E+05
50.000	16.670	0.200	0.012	10.000	8.133E-03	1.157E+05
50.000	34.286	0.240	0.007	12.000	1.377E-02	1.594E+05
55.000	8.000	0.200	0.025	11.000	6.367E-03	9.566E+04
55.000	18.182	0.200	0.011	11.000	1.189E-02	1.390E+05
55.000	34.286	0.240	0.007	13.200	1.833E-02	1.725E+05
60.000	6.667	0.100	0.015	6.000	8.246E-03	1.335E+05
60.000	18.182	0.200	0.011	12.000	1.543E-02	1.487E+05
65.000	3.333	0.100	0.030	6.500	7.827E-03	1.032E+05
65.000	10.000	0.100	0.010	6.500	8.207E-03	1.183E+05
65.000	22.222	0.200	0.009	13.000	2.336E-02	1.894E+05
65.000	40.000	0.240	0.006	15.600	1.524E-02	2.404E+05
70.000	10.000	0.100	0.010	7.000	1.312E-02	1.666E+05
70.000	34.286	0.240	0.007	16.800	3.778E-02	2.077E+05
75.000	6.667	0.100	0.015	7.500	1.610E-02	1.916E+05
75.000	20.000	0.100	0.005	7.500	3.545E-02	4.331E+05
75.000	34.286	0.240	0.007	18.000	4.646E-02	2.186E+05
80.000	8.000	0.200	0.025	16.000	1.959E-02	9.159E+04
80.000	18.182	0.200	0.011	16.000	3.657E-02	1.832E+05
85.000	3.333	0.100	0.030	8.500	1.750E-02	1.178E+05
85.000	18.182	0.200	0.011	17.000	4.386E-02	1.911E+05
85.000	30.000	0.240	0.008	20.400	6.265E-02	2.244E+05

Continua nella pagina successiva

L/h [-]	h/t [-]	h [m]	t [m]	L [m]	$u_{z,tip}$ [m]	$\sigma_{yz,max}$ [Pa]
90.000	5.000	0.100	0.020	9.000	2.380E-02	1.660E+05
90.000	13.333	0.200	0.015	18.000	4.044E-02	1.518E+05
90.000	34.286	0.240	0.007	21.600	8.028E-02	2.497E+05
95.000	6.667	0.100	0.015	9.500	3.272E-02	2.158E+05
95.000	20.000	0.100	0.005	9.500	7.204E-02	5.032E+05
95.000	48.000	0.240	0.005	22.800	1.262E-01	3.488E+05

Tabella B.9: Trave composita: dati high-fidelity

L/h [-]	E_{11}/G_{12} [-]	E_{11} [GPa]	G_{12} [GPa]	$u_{z,tip}$ [m]	$\sigma_{yz,max}$ [Pa]
5.000	12.000	161.000	13.417	9.866E-07	4.335E+03
5.000	25.000	161.000	6.440	1.129E-06	3.576E+03
5.000	8.000	161.000	20.125	9.321E-07	4.633E+03
5.000	18.000	161.000	8.944	1.058E-06	3.951E+03
10.000	29.000	161.000	5.552	6.898E-06	3.040E+03
10.000	7.000	161.000	23.000	6.446E-06	4.261E+03
10.000	21.000	161.000	7.667	6.760E-06	3.401E+03
10.000	14.000	161.000	11.500	6.618E-06	3.784E+03
15.000	16.000	161.000	10.062	2.160E-05	3.313E+03
15.000	31.000	161.000	5.194	2.199E-05	2.659E+03
15.000	24.000	161.000	6.708	2.182E-05	2.933E+03
15.000	9.000	161.000	17.889	2.136E-05	3.741E+03
20.000	26.000	161.000	6.192	5.087E-05	2.593E+03
20.000	11.000	161.000	14.636	5.029E-05	3.277E+03
20.000	34.000	161.000	4.735	5.111E-05	2.327E+03
20.000	19.000	161.000	8.474	5.063E-05	2.875E+03
25.000	13.000	161.000	12.385	9.789E-05	2.916E+03
25.000	30.000	161.000	5.367	9.865E-05	2.282E+03
25.000	6.000	161.000	26.833	9.747E-05	3.354E+03
25.000	22.000	161.000	7.318	9.833E-05	2.550E+03
30.000	28.000	161.000	5.750	1.695E-04	2.242E+03
30.000	17.000	161.000	9.471	1.689E-04	2.603E+03
30.000	32.000	161.000	5.031	1.697E-04	2.128E+03
30.000	10.000	161.000	16.100	1.685E-04	2.866E+03
35.000	23.000	161.000	7.000	2.681E-04	2.358E+03
35.000	15.000	161.000	10.733	2.676E-04	2.606E+03
35.000	27.000	161.000	5.963	2.683E-04	2.239E+03
35.000	35.000	161.000	4.600	2.687E-04	2.023E+03
40.000	20.000	161.000	8.050	3.993E-04	2.477E+03
40.000	33.000	161.000	4.879	4.001E-04	2.105E+03
40.000	5.000	161.000	32.200	3.980E-04	2.830E+03
40.000	29.000	161.000	5.552	3.999E-04	2.213E+03
45.000	18.000	161.000	8.944	5.678E-04	2.626E+03
45.000	24.000	161.000	6.708	5.683E-04	2.447E+03
45.000	12.000	161.000	13.417	5.673E-04	2.766E+03

Continua nella pagina successiva

L/h [-]	E_{11}/G_{12} [-]	E_{11} [GPa]	G_{12} [GPa]	$u_{z,tip}$ [m]	$\sigma_{yz,max}$ [Pa]
45.000	31.000	161.000	5.194	5.688E-04	2.240E+03
50.000	9.000	161.000	17.889	7.774E-04	2.920E+03
50.000	7.000	161.000	23.000	7.772E-04	2.875E+03
50.000	16.000	161.000	10.062	7.782E-04	2.834E+03
50.000	21.000	161.000	7.667	7.787E-04	2.685E+03
55.000	14.000	161.000	11.500	1.035E-03	3.097E+03
55.000	25.000	161.000	6.440	1.036E-03	2.737E+03
55.000	8.000	161.000	20.125	1.034E-03	3.098E+03
55.000	26.000	161.000	6.192	1.036E-03	2.701E+03
60.000	11.000	161.000	14.636	1.343E-03	3.416E+03
60.000	34.000	161.000	4.735	1.346E-03	2.614E+03
60.000	19.000	161.000	8.474	1.344E-03	3.194E+03
60.000	13.000	161.000	12.385	1.343E-03	3.389E+03
65.000	30.000	161.000	5.367	1.710E-03	2.981E+03
65.000	6.000	161.000	26.833	1.706E-03	3.532E+03
65.000	22.000	161.000	7.318	1.709E-03	3.339E+03
65.000	28.000	161.000	5.750	1.709E-03	3.066E+03
70.000	17.000	161.000	9.471	2.133E-03	3.895E+03
70.000	32.000	161.000	5.031	2.135E-03	3.129E+03
70.000	10.000	161.000	16.100	2.132E-03	4.138E+03
70.000	23.000	161.000	7.000	2.134E-03	3.576E+03
75.000	15.000	161.000	10.733	2.623E-03	4.371E+03
75.000	27.000	161.000	5.963	2.624E-03	3.646E+03
75.000	35.000	161.000	4.600	2.625E-03	3.230E+03
75.000	20.000	161.000	8.050	2.623E-03	4.067E+03
80.000	33.000	161.000	4.879	3.185E-03	3.582E+03
80.000	5.000	161.000	32.200	3.181E-03	4.650E+03
80.000	29.000	161.000	5.552	3.185E-03	3.814E+03
80.000	18.000	161.000	8.944	3.183E-03	4.563E+03
85.000	24.000	161.000	6.708	3.818E-03	4.466E+03
85.000	12.000	161.000	13.417	3.816E-03	5.435E+03
85.000	31.000	161.000	5.194	3.819E-03	3.969E+03
85.000	9.000	161.000	17.889	3.816E-03	5.576E+03
90.000	7.000	161.000	23.000	4.529E-03	6.123E+03
90.000	16.000	161.000	10.062	4.531E-03	5.553E+03
90.000	21.000	161.000	7.667	4.532E-03	5.073E+03
90.000	14.000	161.000	11.500	4.530E-03	5.749E+03
95.000	25.000	161.000	6.440	5.330E-03	5.055E+03
95.000	8.000	161.000	20.125	5.327E-03	6.753E+03
95.000	18.000	161.000	8.944	5.329E-03	5.772E+03
95.000	29.000	161.000	5.552	5.330E-03	4.702E+03
100.000	14.000	161.000	11.500	6.214E-03	6.719E+03
100.000	5.000	161.000	32.200	6.211E-03	7.176E+03
100.000	22.000	161.000	7.318	6.215E-03	5.720E+03
100.000	27.000	161.000	5.963	6.216E-03	5.195E+03
5.000	15.000	161.000	10.730	1.024E-06	4.135E+03

Continua nella pagina successiva

L/h [-]	E_{11}/G_{12} [-]	E_{11} [GPa]	G_{12} [GPa]	$u_{z,tip}$ [m]	$\sigma_{yz,max}$ [Pa]
10.000	14.000	161.000	11.500	6.618E-06	3.784E+03
15.000	18.000	161.000	8.940	2.166E-05	3.210E+03
20.000	15.000	161.000	10.733	5.047E-05	3.062E+03
25.000	18.000	161.000	8.944	9.815E-05	2.703E+03
75.000	5.000	161.000	32.200	2.621E-03	4.155E+03
80.000	8.000	161.000	20.125	3.181E-03	5.039E+03
85.000	12.000	161.000	13.417	3.816E-03	5.435E+03
90.000	31.000	161.000	5.194	4.533E-03	4.252E+03
100.000	17.000	161.000	9.471	6.214E-03	6.325E+03

Tabella B.10: Trave composita: dati low-fidelity

L/h [-]	E_{11}/G_{12} [-]	E_{11} [GPa]	G_{12} [GPa]	$u_{z,tip}$ [m]	$\sigma_{yz,max}$ [Pa]
5.000	12.000	161.000	13.417	9.264E-07	4.821E+03
5.000	25.000	161.000	6.440	1.023E-06	3.863E+03
5.000	8.000	161.000	20.125	8.864E-07	5.219E+03
5.000	18.000	161.000	8.944	9.762E-07	4.325E+03
10.000	29.000	161.000	5.552	6.787E-06	3.641E+03
10.000	7.000	161.000	23.000	6.447E-06	5.333E+03
10.000	21.000	161.000	7.667	6.691E-06	4.116E+03
10.000	14.000	161.000	11.500	6.585E-06	4.645E+03
15.000	16.000	161.000	10.062	2.167E-05	4.483E+03
15.000	31.000	161.000	5.194	2.195E-05	3.540E+03
15.000	24.000	161.000	6.708	2.184E-05	3.926E+03
15.000	9.000	161.000	17.889	2.148E-05	5.120E+03
20.000	26.000	161.000	6.192	5.108E-05	3.809E+03
20.000	11.000	161.000	14.636	5.063E-05	4.926E+03
20.000	34.000	161.000	4.735	5.124E-05	3.401E+03
20.000	19.000	161.000	8.474	5.090E-05	4.259E+03
25.000	13.000	161.000	12.385	9.861E-05	4.745E+03
25.000	30.000	161.000	5.367	9.918E-05	3.596E+03
25.000	6.000	161.000	26.833	9.825E-05	5.475E+03
25.000	22.000	161.000	7.318	9.895E-05	4.058E+03
30.000	28.000	161.000	5.750	1.706E-04	3.704E+03
30.000	17.000	161.000	9.471	1.702E-04	4.417E+03
30.000	32.000	161.000	5.031	1.707E-04	3.498E+03
30.000	10.000	161.000	16.100	1.698E-04	5.040E+03
35.000	23.000	161.000	7.000	2.701E-04	4.001E+03
35.000	15.000	161.000	10.733	2.697E-04	4.585E+03
35.000	27.000	161.000	5.963	2.702E-04	3.762E+03
35.000	35.000	161.000	4.600	2.705E-04	3.362E+03
40.000	20.000	161.000	8.050	4.024E-04	4.207E+03
40.000	33.000	161.000	4.879	4.030E-04	3.458E+03
40.000	5.000	161.000	32.200	4.013E-04	5.663E+03
40.000	29.000	161.000	5.552	4.029E-04	3.657E+03

Continua nella pagina successiva

L/h [-]	E_{11}/G_{12} [-]	E_{11} [GPa]	G_{12} [GPa]	$u_{z,tip}$ [m]	$\sigma_{yz,max}$ [Pa]
45.000	18.000	161.000	8.944	5.724E-04	4.360E+03
45.000	24.000	161.000	6.708	5.727E-04	3.950E+03
45.000	12.000	161.000	13.417	5.719E-04	4.873E+03
45.000	31.000	161.000	5.194	5.731E-04	3.558E+03
50.000	9.000	161.000	17.889	7.839E-04	5.200E+03
50.000	7.000	161.000	23.000	7.837E-04	5.440E+03
50.000	16.000	161.000	10.062	7.845E-04	4.527E+03
50.000	21.000	161.000	7.667	7.849E-04	4.152E+03
55.000	14.000	161.000	11.500	1.044E-03	4.711E+03
55.000	25.000	161.000	6.440	1.044E-03	3.901E+03
55.000	8.000	161.000	20.125	1.043E-03	5.337E+03
55.000	26.000	161.000	6.192	1.045E-03	3.841E+03
60.000	11.000	161.000	14.636	1.354E-03	5.017E+03
60.000	34.000	161.000	4.735	1.356E-03	3.431E+03
60.000	19.000	161.000	8.474	1.355E-03	4.312E+03
60.000	13.000	161.000	12.385	1.354E-03	4.816E+03
65.000	30.000	161.000	5.367	1.723E-03	3.634E+03
65.000	6.000	161.000	26.833	1.721E-03	5.663E+03
65.000	22.000	161.000	7.318	1.723E-03	4.109E+03
65.000	28.000	161.000	5.750	1.723E-03	3.741E+03
70.000	17.000	161.000	9.471	2.150E-03	4.491E+03
70.000	32.000	161.000	5.031	2.152E-03	3.537E+03
70.000	10.000	161.000	16.100	2.150E-03	5.165E+03
70.000	23.000	161.000	7.000	2.151E-03	4.051E+03
75.000	15.000	161.000	10.733	2.644E-03	4.676E+03
75.000	27.000	161.000	5.963	2.646E-03	3.813E+03
75.000	35.000	161.000	4.600	2.646E-03	3.401E+03
75.000	20.000	161.000	8.050	2.645E-03	4.270E+03
80.000	33.000	161.000	4.879	3.211E-03	3.503E+03
80.000	5.000	161.000	32.200	3.207E-03	5.960E+03
80.000	29.000	161.000	5.552	3.210E-03	3.709E+03
80.000	18.000	161.000	8.944	3.209E-03	4.436E+03
85.000	24.000	161.000	6.708	3.850E-03	4.017E+03
85.000	12.000	161.000	13.417	3.848E-03	5.009E+03
85.000	31.000	161.000	5.194	3.850E-03	3.610E+03
85.000	9.000	161.000	17.889	3.848E-03	5.363E+03
90.000	7.000	161.000	23.000	4.567E-03	5.688E+03
90.000	16.000	161.000	10.062	4.568E-03	4.637E+03
90.000	21.000	161.000	7.667	4.569E-03	4.236E+03
90.000	14.000	161.000	11.500	4.568E-03	4.824E+03
95.000	25.000	161.000	6.440	5.373E-03	3.976E+03
95.000	8.000	161.000	20.125	5.371E-03	5.569E+03
95.000	18.000	161.000	8.944	5.372E-03	4.481E+03
95.000	29.000	161.000	5.552	5.374E-03	3.737E+03
100.000	14.000	161.000	11.500	6.265E-03	4.866E+03
100.000	5.000	161.000	32.200	6.263E-03	6.179E+03

Continua nella pagina successiva

L/h [-]	E_{11}/G_{12} [-]	E_{11} [GPa]	G_{12} [GPa]	$u_{z,tip}$ [m]	$\sigma_{yz,max}$ [Pa]
100.000	22.000	161.000	7.318	6.266E-03	4.191E+03
100.000	27.000	161.000	5.963	6.267E-03	3.863E+03
5.000	15.000	161.000	10.730	9.527E-07	4.559E+03
10.000	14.000	161.000	11.500	6.585E-06	4.645E+03
15.000	18.000	161.000	8.940	2.171E-05	4.329E+03
20.000	15.000	161.000	10.733	5.078E-05	4.567E+03
25.000	18.000	161.000	8.944	9.881E-05	4.336E+03
75.000	5.000	161.000	32.200	2.643E-03	5.912E+03
80.000	8.000	161.000	20.125	3.208E-03	5.468E+03
85.000	12.000	161.000	13.417	3.848E-03	5.009E+03
90.000	31.000	161.000	5.194	4.570E-03	3.619E+03
100.000	17.000	161.000	9.471	6.266E-03	4.584E+03

L/h [-]	E_{11}/G_{12} [-]	E_{11} [GPa]	G_{12} [GPa]	$u_{z,tip}$ [m]	$\sigma_{yz,max}$ [Pa]
5.000	34.000	161.000	4.735	1.207E-06	3.183E+03
10.000	24.000	161.000	6.708	6.815E-06	3.257E+03
15.000	10.000	161.000	16.100	2.140E-05	3.671E+03
20.000	18.000	161.000	8.944	5.059E-05	2.920E+03
25.000	11.000	161.000	14.636	9.778E-05	3.012E+03
30.000	6.000	161.000	26.833	1.682E-04	3.092E+03
35.000	12.000	161.000	13.417	2.674E-04	2.696E+03
40.000	7.000	161.000	23.000	3.982E-04	2.771E+03
45.000	22.000	161.000	7.318	5.682E-04	2.508E+03
50.000	29.000	161.000	5.552	7.793E-04	2.428E+03
55.000	19.000	161.000	8.474	1.036E-03	2.949E+03
60.000	14.000	161.000	11.500	1.343E-03	3.365E+03
65.000	16.000	161.000	10.062	1.708E-03	3.606E+03
70.000	5.000	161.000	32.200	2.131E-03	3.727E+03
75.000	8.000	161.000	20.125	2.621E-03	4.544E+03
80.000	22.000	161.000	7.318	3.184E-03	4.276E+03
85.000	15.000	161.000	10.733	3.817E-03	5.205E+03
90.000	27.000	161.000	5.963	4.533E-03	4.554E+03
95.000	32.000	161.000	5.031	5.331E-03	4.464E+03
100.000	10.000	161.000	16.100	6.213E-03	7.218E+03

Tabella B.11: Trave composita: dati test HF

Tabella B.12: Curing L-SHAPE: dati HF tip spring-in

tip spring-in [deg]	B_{11} [Pa · m ²]	D_{22} [Pa · m ³]
-5.272	1.427E+04	2.635E+01
-3.618	1.020E+04	3.100E+01
-12.829	2.447E+04	2.144E+01

Continua nella pagina successiva

tip spring-in [deg]	B ₁₁ [Pa · m ²]	D ₂₂ [Pa · m ³]
-1.950	6.118E+03	3.410E+01
-8.544	2.039E+04	2.454E+01
-6.025	1.631E+04	2.919E+01
-25.608	3.059E+04	1.964E+01
0.128	2.039E+03	3.565E+01
-5.731	1.631E+04	2.609E+01
-3.777	1.224E+04	3.074E+01
-17.039	2.651E+04	2.119E+01
-2.265	8.157E+03	3.384E+01
-11.016	2.243E+04	2.429E+01
-7.321	1.835E+04	2.894E+01
2.423	-2.039E+03	3.565E+01
-3.614	1.224E+04	2.609E+01
-1.811	8.157E+03	3.074E+01
-12.626	2.243E+04	2.119E+01
-7.981	1.835E+04	2.429E+01
-4.884	1.427E+04	2.894E+01
1.314	0.000E+00	3.539E+01
-2.866	1.020E+04	3.048E+01
-11.821	2.039E+04	2.403E+01
-7.261	1.631E+04	2.868E+01
-59.023	3.059E+04	1.912E+01
-1.934	8.157E+03	2.454E+01
-0.164	4.079E+03	2.919E+01
-10.034	1.835E+04	1.964E+01
1.319	0.000E+00	3.229E+01
-2.982	1.020E+04	2.739E+01
-24.119	2.447E+04	1.783E+01
2.972	-4.079E+03	3.384E+01
-3.368	1.020E+04	2.429E+01
-1.126	6.118E+03	2.894E+01
-15.361	2.039E+04	1.938E+01
0.526	2.039E+03	3.203E+01
-4.936	1.224E+04	2.713E+01
4.876	-8.157E+03	3.384E+01
-1.438	6.118E+03	2.429E+01
-2.705	8.157E+03	2.713E+01
-29.968	2.243E+04	1.757E+01
-3.161	8.157E+03	2.403E+01
-0.644	4.079E+03	2.868E+01
1.192	0.000E+00	3.178E+01
6.112	-1.020E+04	3.100E+01
1.326	-0.000E+00	2.609E+01
-8.554	1.427E+04	1.654E+01
2.806	-4.079E+03	2.919E+01
-4.302	1.020E+04	1.964E+01

Continua nella pagina successiva

tip spring-in [deg]	B ₁₁ [Pa · m ²]	D ₂₂ [Pa · m ³]
-22.351	2.039E+04	1.473E+01
4.437	-8.157E+03	3.074E+01
2.134	-2.039E+03	2.894E+01
-7.209	1.224E+04	1.938E+01
-40.977	2.243E+04	1.447E+01
0.286	2.039E+03	2.119E+01
-8.978	1.224E+04	1.628E+01
3.773	-6.118E+03	2.894E+01
-0.849	4.079E+03	2.403E+01
-25.979	1.835E+04	1.447E+01
1.315	0.000E+00	2.558E+01
-15.436	1.427E+04	1.602E+01
-7.851	1.020E+04	1.912E+01
-2.883	6.118E+03	2.377E+01
-57.345	2.039E+04	1.421E+01
8.625	-1.631E+04	2.919E+01
4.043	-6.118E+03	2.429E+01
-5.922	8.157E+03	1.473E+01
5.621	-1.020E+04	2.739E+01
-1.573	4.079E+03	1.783E+01
1.318	-0.000E+00	2.248E+01
-20.393	1.427E+04	1.292E+01
1.275	0.000E+00	1.938E+01
-10.947	1.020E+04	1.447E+01
5.317	-8.157E+03	2.713E+01
-4.376	6.118E+03	1.757E+01
-0.179	2.039E+03	2.222E+01
-41.548	1.631E+04	1.266E+01
9.863	-1.835E+04	2.894E+01
3.867	-4.079E+03	1.938E+01
-5.724	6.118E+03	1.447E+01
7.108	-1.224E+04	2.713E+01
-0.479	2.039E+03	1.757E+01
2.650	-2.039E+03	2.222E+01
-26.952	1.224E+04	1.266E+01
10.060	-1.631E+04	2.868E+01
2.902	-2.039E+03	1.912E+01
5.461	-6.118E+03	2.377E+01
-12.460	8.157E+03	1.421E+01
-3.997	4.079E+03	1.731E+01
1.062	0.000E+00	2.196E+01
-66.528	1.427E+04	1.240E+01
1.307	0.000E+00	1.679E+01
3.079	-4.079E+03	2.144E+01
-8.104	1.020E+04	1.189E+01
4.563	-8.157E+03	2.454E+01

Continua nella pagina successiva

tip spring-in [deg]	B ₁₁ [Pa · m ²]	D ₂₂ [Pa · m ³]
-2.914	6.118E+03	1.499E+01
0.248	2.039E+03	1.964E+01
-25.568	1.631E+04	1.008E+01
6.223	-1.224E+04	2.609E+01
0.049	2.039E+03	1.654E+01
2.364	-2.039E+03	2.119E+01
-13.571	1.224E+04	1.163E+01
4.081	-6.118E+03	2.429E+01
-5.838	8.157E+03	1.473E+01
6.005	-1.020E+04	2.429E+01
-2.144	4.079E+03	1.473E+01
-29.377	1.427E+04	9.821E+00
7.844	-1.427E+04	2.584E+01
-14.681	1.020E+04	1.137E+01
5.767	-8.157E+03	2.403E+01
-0.481	2.039E+03	1.912E+01
11.083	-2.039E+04	2.454E+01
6.947	-1.020E+04	1.964E+01
1.301	0.000E+00	1.318E+01
-21.776	1.020E+04	8.271E+00
10.578	-1.835E+04	2.429E+01
4.738	-4.079E+03	1.473E+01
-9.076	6.118E+03	9.821E+00
8.656	-1.224E+04	2.248E+01
-1.217	2.039E+03	1.292E+01
-46.181	1.224E+04	8.012E+00
9.804	-1.224E+04	1.938E+01
11.648	-1.631E+04	2.248E+01
-25.368	8.157E+03	8.012E+00
14.338	-2.039E+04	2.403E+01
8.093	-6.118E+03	1.447E+01
-8.437	4.079E+03	9.562E+00
12.785	-1.427E+04	2.222E+01
1.190	0.000E+00	1.266E+01
6.398	4.079E+03	1.731E+01
-66.401	1.020E+04	7.754E+00
10.665	-1.020E+04	1.189E+01
11.177	-1.427E+04	1.654E+01
12.637	-1.835E+04	1.964E+01
6.402	-4.079E+03	1.008E+01
8.539	-8.157E+03	1.473E+01
-19.405	6.118E+03	5.171E+00
-3.605	2.039E+03	6.721E+00
4.597	-2.039E+03	9.821E+00
8.223	-6.118E+03	1.447E+01
19.528	-2.651E+04	2.119E+01

Continua nella pagina successiva

tip spring-in [deg]	B ₁₁ [Pa · m ²]	D ₂₂ [Pa · m ³]
16.056	-1.631E+04	1.628E+01
5.985	-2.039E+03	6.721E+00
17.881	-2.039E+04	1.938E+01
11.533	-6.118E+03	9.821E+00
13.469	-1.020E+04	1.447E+01
-18.827	4.079E+03	4.913E+00
21.603	-2.447E+04	2.093E+01
17.894	-1.427E+04	1.602E+01
1.122	0.000E+00	6.463E+00
-54.788	6.118E+03	4.654E+00
26.965	-3.059E+04	1.964E+01
24.809	-2.039E+04	1.473E+01
21.523	-6.118E+03	5.171E+00
26.528	-2.447E+04	1.783E+01
24.060	-1.020E+04	8.271E+00
22.812	-1.427E+04	1.292E+01
32.149	-2.855E+04	1.938E+01
31.516	-1.427E+04	9.821E+00
29.037	-1.835E+04	1.447E+01
20.221	-4.079E+03	4.913E+00
27.249	-1.224E+04	1.266E+01
-23.612	2.039E+03	3.105E+00
43.397	-3.263E+04	1.938E+01
50.071	-1.835E+04	9.821E+00
46.187	-8.157E+03	4.913E+00
43.149	-2.651E+04	1.757E+01
46.861	-1.224E+04	8.012E+00
43.367	-1.631E+04	1.266E+01
57.669	-3.059E+04	1.912E+01
59.324	-2.039E+04	1.421E+01
56.461	-6.118E+03	4.654E+00
69.228	-2.447E+04	1.731E+01
66.078	-1.020E+04	7.754E+00

Tabella B.13: Curing L-SHAPE: dati LF tip spring-in

tip spring-in [deg]	B ₁₁ [Pa · m ²]	D ₂₂ [Pa · m ³]
-5.268	1.427E+04	2.635E+01
-3.614	1.020E+04	3.100E+01
-12.885	2.447E+04	2.144E+01
-1.944	6.118E+03	3.410E+01
-8.611	2.039E+04	2.454E+01
-6.073	1.631E+04	2.919E+01
-25.721	3.059E+04	1.964E+01
0.117	2.039E+03	3.565E+01

Continua nella pagina successiva

tip spring-in [deg]	B ₁₁ [Pa · m ²]	D ₂₂ [Pa · m ³]
-5.784	1.631E+04	2.609E+01
-3.829	1.224E+04	3.074E+01
-17.164	2.651E+04	2.119E+01
-2.293	8.157E+03	3.384E+01
-11.132	2.243E+04	2.429E+01
-7.420	1.835E+04	2.894E+01
2.386	-2.039E+03	3.565E+01
-3.653	1.224E+04	2.609E+01
-1.859	8.157E+03	3.074E+01
-12.717	2.243E+04	2.119E+01
-8.078	1.835E+04	2.429E+01
-4.978	1.427E+04	2.894E+01
1.288	0.000E+00	3.539E+01
-2.936	1.020E+04	3.048E+01
-11.937	2.039E+04	2.403E+01
-7.299	1.631E+04	2.868E+01
-59.932	3.059E+04	1.912E+01
-1.962	8.157E+03	2.454E+01
-0.203	4.079E+03	2.919E+01
-10.108	1.835E+04	1.964E+01
1.292	0.000E+00	3.229E+01
-3.061	1.020E+04	2.739E+01
-24.218	2.447E+04	1.783E+01
2.952	-4.079E+03	3.384E+01
-3.411	1.020E+04	2.429E+01
-1.183	6.118E+03	2.894E+01
-15.468	2.039E+04	1.938E+01
0.488	2.039E+03	3.203E+01
-5.043	1.224E+04	2.713E+01
4.852	-8.157E+03	3.384E+01
-1.452	6.118E+03	2.429E+01
-2.782	8.157E+03	2.713E+01
-29.932	2.243E+04	1.757E+01
-3.184	8.157E+03	2.403E+01
-0.634	4.079E+03	2.868E+01
1.279	0.000E+00	3.178E+01
6.065	-1.020E+04	3.100E+01
1.299	0.000E+00	2.609E+01
-8.623	1.427E+04	1.654E+01
2.792	-4.079E+03	2.919E+01
-4.370	1.020E+04	1.964E+01
-22.448	2.039E+04	1.473E+01
4.433	-8.157E+03	3.074E+01
2.110	-2.039E+03	2.894E+01
-7.300	1.224E+04	1.938E+01
-40.945	2.243E+04	1.447E+01

Continua nella pagina successiva

tip spring-in [deg]	B ₁₁ [Pa · m ²]	D ₂₂ [Pa · m ³]
0.288	2.039E+03	2.119E+01
-9.027	1.224E+04	1.628E+01
3.774	-6.118E+03	2.894E+01
-0.907	4.079E+03	2.403E+01
-26.795	1.835E+04	1.447E+01
1.286	0.000E+00	2.558E+01
-15.505	1.427E+04	1.602E+01
-7.853	1.020E+04	1.912E+01
-3.002	6.118E+03	2.377E+01
-57.677	2.039E+04	1.421E+01
8.591	-1.631E+04	2.919E+01
4.053	-6.118E+03	2.429E+01
-5.944	8.157E+03	1.473E+01
5.645	-1.020E+04	2.739E+01
-1.599	4.079E+03	1.783E+01
1.289	0.000E+00	2.248E+01
-20.420	1.427E+04	1.292E+01
1.291	0.000E+00	1.938E+01
-10.994	1.020E+04	1.447E+01
5.338	-8.157E+03	2.713E+01
-4.418	6.118E+03	1.757E+01
-0.226	2.039E+03	2.222E+01
-41.433	1.631E+04	1.266E+01
9.945	-1.835E+04	2.894E+01
3.951	-4.079E+03	1.938E+01
-5.666	6.118E+03	1.447E+01
7.576	-1.224E+04	2.713E+01
-0.582	2.039E+03	1.757E+01
2.732	-2.039E+03	2.222E+01
-25.008	1.224E+04	1.266E+01
9.798	-1.631E+04	2.868E+01
2.973	-2.039E+03	1.912E+01
5.488	-6.118E+03	2.377E+01
-12.393	8.157E+03	1.421E+01
-4.025	4.079E+03	1.731E+01
1.182	0.000E+00	2.196E+01
-66.069	1.427E+04	1.240E+01
1.305	0.000E+00	1.679E+01
3.062	-4.079E+03	2.144E+01
-8.153	1.020E+04	1.189E+01
4.556	-8.157E+03	2.454E+01
-2.975	6.118E+03	1.499E+01
0.224	2.039E+03	1.964E+01
-25.613	1.631E+04	1.008E+01
6.228	-1.224E+04	2.609E+01
0.035	2.039E+03	1.654E+01

Continua nella pagina successiva

tip spring-in [deg]	B ₁₁ [Pa · m ²]	D ₂₂ [Pa · m ³]
2.324	-2.039E+03	2.119E+01
-13.655	1.224E+04	1.163E+01
4.056	-6.118E+03	2.429E+01
-5.927	8.157E+03	1.473E+01
6.010	-1.020E+04	2.429E+01
-2.194	4.079E+03	1.473E+01
-29.390	1.427E+04	9.821E+00
7.863	-1.427E+04	2.584E+01
-14.738	1.020E+04	1.137E+01
5.755	-8.157E+03	2.403E+01
-0.474	2.039E+03	1.912E+01
11.118	-2.039E+04	2.454E+01
6.974	-1.020E+04	1.964E+01
1.289	0.000E+00	1.318E+01
-21.760	1.020E+04	8.271E+00
10.635	-1.835E+04	2.429E+01
4.768	-4.079E+03	1.473E+01
-9.103	6.118E+03	9.821E+00
8.684	-1.224E+04	2.248E+01
-1.254	2.039E+03	1.292E+01
-45.924	1.224E+04	8.012E+00
9.852	-1.224E+04	1.938E+01
11.711	-1.631E+04	2.248E+01
-24.515	8.157E+03	8.012E+00
14.414	-2.039E+04	2.403E+01
8.146	-6.118E+03	1.447E+01
-8.420	4.079E+03	9.562E+00
12.826	-1.427E+04	2.222E+01
1.181	0.000E+00	1.266E+01
6.393	-4.079E+03	1.731E+01
-65.589	1.020E+04	7.754E+00
10.720	-1.020E+04	1.189E+01
11.218	-1.427E+04	1.654E+01
12.683	-1.835E+04	1.964E+01
6.394	-4.079E+03	1.008E+01
8.530	-8.157E+03	1.473E+01
-19.343	6.118E+03	5.171E+00
-3.633	2.039E+03	6.721E+00
4.561	-2.039E+03	9.821E+00
8.186	-6.118E+03	1.447E+01
19.626	-2.651E+04	2.119E+01
16.125	-1.631E+04	1.628E+01
6.014	-2.039E+03	6.721E+00
17.958	-2.039E+04	1.938E+01
11.550	-6.118E+03	9.821E+00
13.486	-1.020E+04	1.447E+01

Continua nella pagina successiva

tip spring-in [deg]	B ₁₁ [Pa · m ²]	D ₂₂ [Pa · m ³]
-18.120	4.079E+03	4.913E+00
21.691	-2.447E+04	2.093E+01
17.935	-1.427E+04	1.602E+01
1.121	0.000E+00	6.463E+00
-54.901	6.118E+03	4.654E+00
28.065	-3.059E+04	1.964E+01
24.888	-2.039E+04	1.473E+01
21.464	-6.118E+03	5.171E+00
26.609	-2.447E+04	1.783E+01
24.047	-1.020E+04	8.271E+00
22.838	-1.427E+04	1.292E+01
32.243	-2.855E+04	1.938E+01
31.527	-1.427E+04	9.821E+00
29.086	-1.835E+04	1.447E+01
20.115	-4.079E+03	4.913E+00
27.209	-1.224E+04	1.266E+01
-23.226	2.039E+03	3.105E+00
45.402	-3.263E+04	1.938E+01
49.903	-1.835E+04	9.821E+00
45.785	-8.157E+03	4.913E+00
46.840	-2.651E+04	1.757E+01
47.498	-1.224E+04	8.012E+00
43.279	-1.631E+04	1.266E+01
61.220	-3.059E+04	1.912E+01
58.964	-2.039E+04	1.421E+01
55.685	-6.118E+03	4.654E+00
68.733	-2.447E+04	1.731E+01
66.168	-1.020E+04	7.754E+00

Tabella B.14: Curing L-SHAPE: dati test HF tip spring-in

tip spring-in [deg]	B ₁₁ [Pa · m ²]	D ₂₂ [Pa · m ³]
0.855	0.000E+00	3.591E+01
-43.453	3.263E+04	1.938E+01
-0.343	4.079E+03	3.384E+01
-29.879	2.855E+04	1.938E+01
-5.229	1.427E+04	2.584E+01
-18.224	2.447E+04	2.093E+01
-1.200	6.118E+03	3.358E+01
4.178	-6.118E+03	3.410E+01
-5.877	1.427E+04	2.274E+01
-7.280	1.631E+04	2.248E+01
-37.662	2.651E+04	1.757E+01
0.516	2.039E+03	2.894E+01
-10.922	1.631E+04	1.938E+01

Continua nella pagina successiva

tip spring-in [deg]	B ₁₁ [Pa · m ²]	D ₂₂ [Pa · m ³]
2.117	-2.039E+03	3.203E+01
-6.056	1.224E+04	2.248E+01
3.830	-6.118E+03	3.358E+01
-14.811	1.835E+04	1.912E+01
-10.325	1.427E+04	2.222E+01
-3.822	1.020E+04	2.687E+01
-68.541	2.447E+04	1.731E+01
-0.440	4.079E+03	2.144E+01
-1.388	6.118E+03	2.429E+01
-0.951	6.118E+03	2.119E+01
0.477	2.039E+03	2.584E+01
-13.500	1.631E+04	1.628E+01
-3.115	8.157E+03	2.403E+01
6.380	-1.224E+04	3.074E+01
2.183	-2.039E+03	2.584E+01
-2.428	8.157E+03	1.938E+01
5.496	-1.020E+04	3.048E+01
0.036	4.079E+03	2.093E+01
3.206	-4.079E+03	2.868E+01
2.357	-2.039E+03	1.964E+01
7.498	-1.427E+04	2.894E+01
3.478	-4.079E+03	2.403E+01
5.125	-8.157E+03	2.403E+01
7.130	-1.020E+04	2.687E+01
7.711	-1.427E+04	2.635E+01
-1.296	4.079E+03	1.938E+01
-53.463	1.835E+04	9.821E+00
8.312	-1.631E+04	2.609E+01
2.668	-2.039E+03	1.654E+01
3.401	-6.118E+03	2.119E+01
-7.916	8.157E+03	1.163E+01
1.347	0.000E+00	1.938E+01
1.300	0.000E+00	1.628E+01
3.798	-4.079E+03	2.093E+01
-5.599	6.118E+03	1.447E+01
-64.716	1.631E+04	9.562E+00
5.530	-6.118E+03	1.499E+01
-3.846	4.079E+03	1.008E+01
8.505	-1.427E+04	2.274E+01
4.204	-4.079E+03	1.783E+01
4.628	-8.157E+03	1.938E+01
3.142	-2.039E+03	1.757E+01
13.565	-2.243E+04	2.429E+01
8.899	-8.157E+03	1.473E+01
-2.108	2.039E+03	9.821E+00
3.742	-2.039E+03	1.292E+01

Continua nella pagina successiva

tip spring-in [deg]	B ₁₁ [Pa · m ²]	D ₂₂ [Pa · m ³]
6.927	-6.118E+03	1.757E+01
9.300	-1.020E+04	1.912E+01
22.302	-2.447E+04	2.144E+01
1.232	0.000E+00	6.979E+00
15.184	-2.243E+04	2.119E+01
10.457	-8.157E+03	1.163E+01
11.576	-1.224E+04	1.628E+01
13.464	-1.631E+04	1.938E+01
-44.806	8.157E+03	4.913E+00
26.147	-1.224E+04	1.163E+01
23.073	-1.020E+04	1.137E+01
20.664	-1.835E+04	1.912E+01
10.758	-4.079E+03	9.562E+00
14.765	-8.157E+03	1.421E+01
27.847	-1.631E+04	1.008E+01
0.939	0.000E+00	3.363E+00
32.080	-2.243E+04	1.757E+01
26.680	-8.157E+03	8.012E+00
42.966	-2.243E+04	1.447E+01
11.551	-2.039E+03	3.105E+00
32.959	-1.631E+04	9.562E+00
66.266	-1.427E+04	1.240E+01
0.000	0.000E+00	2.846E+00

Tabella B.15: Curing L-SHAPE: dati HF tensioni

σ_{xx} [Pa]	σ_{yy} [Pa]	σ_{xz} [Pa]	σ_{yz} [Pa]	B ₁₁ [Pa · m ²]	D ₂₂ [Pa · m ³]
2.309E+06	1.173E+06	2.620E+04	-6.688E+03	0.000E+00	3.591E+01
-4.957E+06	-8.604E+06	1.327E+04	2.467E+06	1.427E+04	2.635E+01
-2.910E+06	-6.718E+06	-1.255E+04	2.267E+06	1.020E+04	3.100E+01
-1.253E+07	-1.424E+07	-5.181E+04	2.724E+06	2.447E+04	2.144E+01
-9.624E+05	-4.209E+06	2.460E+03	1.634E+06	6.118E+03	3.410E+01
-5.826E+06	-9.755E+06	-1.961E+04	2.309E+06	1.631E+04	2.919E+01
1.544E+06	-7.800E+05	2.310E+04	5.960E+05	2.039E+03	3.565E+01
-3.041E+06	-6.371E+06	-1.097E+04	1.611E+06	1.224E+04	3.074E+01
-1.413E+06	-4.816E+06	1.567E+03	1.353E+06	8.157E+03	3.384E+01
-8.669E+06	-9.352E+06	-2.602E+04	1.646E+06	2.243E+04	2.429E+01
-2.728E+07	-1.476E+07	-6.503E+04	1.684E+06	3.263E+04	1.938E+01
4.125E+06	2.982E+06	4.530E+04	-5.524E+05	-2.039E+03	3.565E+01
-2.216E+06	-4.090E+06	5.569E+01	9.317E+05	1.224E+04	2.609E+01
-5.919E+05	-3.107E+06	6.254E+03	8.937E+05	8.157E+03	3.074E+01
-5.522E+06	-6.078E+06	-1.284E+04	9.843E+05	1.835E+04	2.429E+01
-3.386E+06	-5.397E+06	-6.381E+03	1.080E+06	1.427E+04	2.894E+01
2.716E+06	1.032E+06	2.755E+04	3.747E+04	0.000E+00	3.539E+01
-3.076E+06	-4.218E+06	-8.388E+02	7.619E+05	1.427E+04	2.584E+01

Continua nella pagina successiva

σ_{xx} [Pa]	σ_{yy} [Pa]	σ_{xz} [Pa]	σ_{yz} [Pa]	B_{11} [Pa · m ²]	D_{22} [Pa · m ³]
-1.118E+07	-7.532E+06	-3.560E+04	8.654E+05	2.447E+04	2.093E+01
-6.870E+06	-6.060E+06	-9.287E+03	8.388E+05	2.039E+04	2.403E+01
-2.930E+07	-9.040E+06	-7.214E+04	7.188E+05	3.059E+04	1.912E+01
6.142E+06	6.068E+06	6.415E+04	-1.783E+06	-6.118E+03	3.410E+01
-3.071E+05	-1.718E+06	1.271E+04	4.485E+05	8.157E+03	2.454E+01
-6.194E+06	-4.784E+06	-1.382E+04	6.263E+05	1.835E+04	1.964E+01
-3.294E+06	-3.527E+06	2.237E+03	5.504E+05	1.427E+04	2.274E+01
-1.333E+06	-2.639E+06	5.522E+03	5.546E+05	1.020E+04	2.739E+01
-1.327E+07	-6.771E+06	-1.099E+04	6.387E+05	2.447E+04	1.783E+01
4.424E+06	3.552E+06	3.764E+04	-5.287E+05	-4.079E+03	3.384E+01
3.496E+05	-1.255E+06	1.327E+04	3.709E+05	6.118E+03	2.894E+01
-8.101E+06	-4.955E+06	-1.748E+04	4.956E+05	2.039E+04	1.938E+01
1.750E+06	8.089E+04	1.922E+04	1.899E+05	2.039E+03	3.203E+01
6.440E+06	6.687E+06	5.073E+04	-1.488E+06	-8.157E+03	3.384E+01
1.859E+06	2.812E+05	1.919E+04	1.230E+05	2.039E+03	2.894E+01
3.146E+06	1.802E+06	2.321E+04	-1.072E+05	-2.039E+03	3.203E+01
-5.296E+05	-1.518E+06	8.874E+03	2.943E+05	8.157E+03	2.713E+01
-1.027E+07	-4.292E+06	-1.724E+04	3.294E+05	2.243E+04	1.757E+01
4.894E+06	4.226E+06	3.573E+04	-5.723E+05	-6.118E+03	3.358E+01
-5.811E+05	-1.223E+06	1.171E+04	2.034E+05	8.157E+03	2.403E+01
7.739E+05	-2.960E+05	1.340E+04	1.799E+05	4.079E+03	2.868E+01
1.912E+06	7.689E+05	2.005E+04	5.070E+04	0.000E+00	3.178E+01
2.844E+06	1.135E+06	3.177E+04	-1.836E+04	0.000E+00	2.609E+01
-4.450E+06	-2.729E+06	-1.129E+04	3.167E+05	1.427E+04	1.654E+01
-1.749E+06	-1.657E+06	6.174E+03	2.399E+05	1.020E+04	1.964E+01
3.658E+05	-7.429E+05	1.403E+04	2.256E+05	6.118E+03	2.429E+01
-1.132E+07	-4.480E+06	-3.978E+04	3.373E+05	2.039E+04	1.473E+01
2.579E+05	-5.511E+05	1.687E+04	1.592E+05	6.118E+03	2.119E+01
3.165E+06	1.724E+06	2.614E+04	-7.177E+04	-2.039E+03	2.894E+01
-2.869E+06	-1.999E+06	1.455E+03	2.144E+05	1.224E+04	1.938E+01
-6.426E+05	-1.200E+06	8.903E+03	2.065E+05	8.157E+03	2.403E+01
7.685E+06	7.980E+06	6.209E+04	-1.728E+06	-1.224E+04	3.074E+01
3.427E+06	1.779E+06	3.026E+04	-6.075E+04	-2.039E+03	2.584E+01
-3.435E+06	-1.718E+06	-3.148E+03	1.597E+05	1.224E+04	1.628E+01
4.599E+06	3.240E+06	3.591E+04	-2.832E+05	-6.118E+03	2.894E+01
-9.642E+05	-9.213E+05	8.396E+03	1.284E+05	8.157E+03	1.938E+01
6.117E+06	5.371E+06	4.328E+04	-6.961E+05	-1.020E+04	3.048E+01
-5.513E+06	-2.301E+06	-1.208E+04	1.309E+05	1.427E+04	1.602E+01
2.940E+06	1.808E+06	2.751E+04	-1.270E+05	-4.079E+03	2.868E+01
-2.192E+06	-1.341E+06	6.328E+03	1.148E+05	1.020E+04	1.912E+01
-3.865E+05	-7.062E+05	2.168E+03	1.368E+05	6.118E+03	2.377E+01
-1.518E+07	-4.064E+06	-2.105E+04	1.387E+05	2.039E+04	1.421E+01
9.922E+06	1.101E+07	1.028E+05	-2.179E+06	-1.631E+04	2.919E+01
3.424E+06	1.631E+06	2.922E+04	-5.732E+04	-2.039E+03	1.964E+01
4.776E+06	2.840E+06	3.550E+04	-1.736E+05	-6.118E+03	2.429E+01
-1.700E+06	-7.591E+05	5.563E+03	7.783E+04	8.157E+03	1.473E+01

Continua nella pagina successiva

σ_{xx} [Pa]	σ_{yy} [Pa]	σ_{xz} [Pa]	σ_{yz} [Pa]	B_{11} [Pa · m ²]	D_{22} [Pa · m ³]
6.751E+05	1.059E+05	1.475E+04	4.923E+04	4.079E+03	1.783E+01
7.771E+06	7.107E+06	5.192E+04	-1.143E+06	-1.427E+04	2.894E+01
-3.290E+06	-1.227E+06	-5.988E+02	7.363E+04	1.020E+04	1.447E+01
1.331E+06	4.345E+05	1.125E+04	4.821E+04	2.039E+03	2.222E+01
1.066E+07	1.039E+07	6.745E+04	-1.826E+06	-1.835E+04	2.894E+01
-9.881E+05	-3.488E+05	3.957E+03	3.948E+04	6.118E+03	1.447E+01
5.304E+06	3.942E+06	3.251E+04	-3.726E+05	-1.224E+04	2.713E+01
1.017E+06	4.000E+05	1.082E+04	1.774E+04	2.039E+03	1.757E+01
2.882E+06	1.456E+06	2.292E+04	5.588E+03	-2.039E+03	2.222E+01
6.703E+06	5.880E+06	4.549E+04	-7.761E+05	-1.631E+04	2.868E+01
2.808E+06	1.069E+06	1.562E+04	-7.388E+03	-2.039E+03	1.912E+01
4.060E+06	2.298E+06	1.968E+04	-4.577E+04	-6.118E+03	2.377E+01
-2.446E+06	-8.132E+05	7.745E+03	2.996E+04	8.157E+03	1.421E+01
4.401E+06	3.004E+06	1.435E+04	-2.053E+05	-1.020E+04	2.687E+01
9.974E+04	1.584E+04	9.543E+03	2.534E+04	4.079E+03	1.731E+01
1.811E+06	8.284E+05	1.249E+04	3.808E+04	0.000E+00	2.196E+01
-1.333E+07	-3.775E+06	5.241E+03	4.340E+04	1.427E+04	1.240E+01
9.570E+06	8.842E+06	1.052E+05	-2.615E+06	-1.427E+04	2.635E+01
4.728E+06	2.407E+06	4.758E+04	-2.232E+05	-4.079E+03	2.144E+01
5.890E+06	3.842E+06	5.585E+04	-4.478E+05	-8.157E+03	2.454E+01
-2.206E+05	-3.401E+05	1.195E+04	5.922E+04	6.118E+03	1.499E+01
2.981E+06	1.206E+06	3.795E+04	1.695E+04	2.039E+03	1.964E+01
-1.228E+07	-3.053E+06	-5.847E+04	1.838E+05	1.631E+04	1.008E+01
1.533E+06	5.215E+05	2.141E+04	1.125E+03	2.039E+03	1.654E+01
4.644E+06	2.792E+06	3.856E+04	-1.837E+05	-6.118E+03	2.429E+01
-2.018E+07	-4.106E+06	-3.253E+04	1.761E+05	1.835E+04	9.820E+00
3.661E+06	1.654E+06	3.196E+04	-6.912E+04	-2.039E+03	1.654E+01
-4.681E+06	-1.585E+06	-3.502E+04	5.687E+04	8.157E+03	1.163E+01
6.134E+06	4.085E+06	3.802E+04	-4.011E+05	-1.020E+04	2.429E+01
4.438E+05	1.595E+05	1.345E+04	2.582E+04	4.079E+03	1.473E+01
-9.695E+06	-2.034E+06	-7.169E+04	1.048E+05	1.427E+04	9.820E+00
7.710E+06	6.046E+06	6.052E+04	-7.834E+05	-1.427E+04	2.584E+01
2.418E+06	1.031E+06	1.730E+04	-1.239E+04	0.000E+00	1.628E+01
-4.792E+06	-1.267E+06	1.263E+03	6.110E+04	1.020E+04	1.137E+01
4.145E+06	2.546E+06	3.392E+04	-1.572E+05	-8.157E+03	2.403E+01
-2.084E+07	-4.171E+06	-1.369E+04	1.085E+05	1.631E+04	9.562E+00
1.213E+07	1.159E+07	1.036E+05	-2.257E+06	-2.039E+04	2.454E+01
5.647E+06	2.553E+06	4.533E+04	-1.401E+05	-6.118E+03	1.499E+01
7.063E+06	3.919E+06	6.207E+04	-2.536E+05	-1.020E+04	1.964E+01
-2.919E+05	1.857E+05	9.516E+03	1.958E+03	4.079E+03	1.008E+01
2.435E+06	1.040E+06	2.313E+04	-2.594E+04	0.000E+00	1.318E+01
4.056E+06	1.911E+06	2.603E+04	-5.323E+04	-4.079E+03	1.783E+01
-7.577E+06	-1.434E+06	-2.478E+04	5.705E+04	1.020E+04	8.271E+00
1.050E+07	7.766E+06	6.522E+04	-9.894E+05	-1.835E+04	2.429E+01
5.578E+06	2.907E+06	3.918E+04	-1.020E+05	-8.157E+03	1.938E+01
-2.254E+06	-3.550E+05	-1.008E+04	2.351E+04	6.118E+03	9.820E+00

Continua nella pagina successiva

σ_{xx} [Pa]	σ_{yy} [Pa]	σ_{xz} [Pa]	σ_{yz} [Pa]	B_{11} [Pa · m ²]	D_{22} [Pa · m ³]
6.811E+06	4.208E+06	4.094E+04	-2.213E+05	-1.224E+04	2.248E+01
8.876E+05	5.279E+05	1.001E+04	4.429E+03	2.039E+03	1.292E+01
2.890E+06	1.332E+06	1.816E+04	-4.055E+03	-2.039E+03	1.757E+01
-1.331E+07	-2.576E+06	-2.212E+04	6.881E+04	1.224E+04	8.012E+00
1.243E+07	1.082E+07	8.956E+04	-1.550E+06	-2.243E+04	2.429E+01
7.392E+06	4.001E+06	5.253E+04	-1.626E+05	-1.224E+04	1.938E+01
6.987E+05	5.165E+05	1.060E+04	-4.057E+03	2.039E+03	9.820E+00
9.313E+06	5.634E+06	5.313E+04	-3.398E+05	-1.631E+04	2.248E+01
3.178E+06	1.354E+06	1.905E+04	-2.058E+04	-2.039E+03	1.292E+01
4.564E+06	2.185E+06	3.000E+04	-3.091E+04	-6.118E+03	1.757E+01
-6.070E+06	-1.139E+06	-3.237E+03	3.460E+04	8.157E+03	8.012E+00
5.035E+06	2.183E+06	2.753E+04	-3.497E+04	-6.118E+03	1.447E+01
6.155E+06	3.187E+06	2.484E+04	-8.093E+04	-1.020E+04	1.912E+01
-1.103E+06	-1.857E+04	2.445E+03	1.258E+04	4.079E+03	9.562E+00
7.461E+06	4.491E+06	3.538E+04	-1.565E+05	-1.427E+04	2.222E+01
2.825E+06	1.354E+06	8.339E+03	9.461E+03	-4.079E+03	1.731E+01
-1.291E+07	-2.509E+06	-6.067E+03	6.272E+04	1.020E+04	7.754E+00
1.622E+07	1.451E+07	1.207E+05	-2.926E+06	-2.447E+04	2.144E+01
9.109E+06	3.652E+06	6.443E+04	-2.263E+05	-1.020E+04	1.189E+01
9.734E+06	4.863E+06	7.979E+04	-3.235E+05	-1.427E+04	1.654E+01
2.394E+06	1.054E+06	1.945E+04	-5.692E+04	0.000E+00	6.979E+00
4.901E+06	1.826E+06	3.701E+04	-8.010E+04	-4.079E+03	1.008E+01
6.444E+06	2.814E+06	5.173E+04	-1.029E+05	-8.157E+03	1.473E+01
-6.522E+06	-6.764E+05	-3.578E+04	1.698E+04	6.118E+03	5.171E+00
1.318E+07	9.353E+06	1.017E+05	-1.091E+06	-2.243E+04	2.119E+01
7.425E+06	2.846E+06	4.970E+04	-9.033E+04	-8.157E+03	1.163E+01
8.314E+06	3.930E+06	5.728E+04	-1.403E+05	-1.224E+04	1.628E+01
-3.687E+04	4.359E+05	3.662E+03	-1.492E+04	2.039E+03	6.721E+00
9.483E+06	5.279E+06	5.484E+04	-2.502E+05	-1.631E+04	1.938E+01
3.465E+06	1.362E+06	2.649E+04	-3.271E+04	-2.039E+03	9.820E+00
5.000E+06	2.144E+06	1.532E+04	-3.634E+04	-6.118E+03	1.447E+01
-1.282E+07	-1.912E+06	-6.157E+04	5.141E+04	8.157E+03	4.913E+00
1.682E+07	1.302E+07	1.009E+05	-1.808E+06	-2.651E+04	2.119E+01
1.089E+07	5.177E+06	7.863E+04	-1.975E+05	-1.631E+04	1.628E+01
3.943E+06	1.384E+06	1.381E+04	-4.353E+04	-2.039E+03	6.721E+00
6.380E+06	2.254E+06	2.752E+04	-6.152E+04	-6.118E+03	9.820E+00
7.367E+06	3.125E+06	4.841E+04	-5.970E+04	-1.020E+04	1.447E+01
-4.107E+06	-3.581E+05	-2.419E+04	1.090E+04	4.079E+03	4.913E+00
1.464E+07	9.376E+06	9.064E+04	-6.583E+05	-2.447E+04	2.093E+01
8.734E+06	3.173E+06	4.614E+04	-6.442E+04	-1.020E+04	1.137E+01
9.353E+06	4.211E+06	7.200E+04	-9.045E+04	-1.427E+04	1.602E+01
8.817E+06	4.611E+06	7.912E+04	-1.687E+05	-1.835E+04	1.912E+01
4.905E+06	2.092E+06	3.943E+04	-1.120E+04	-8.157E+03	1.421E+01
2.337E+07	1.764E+07	1.173E+05	-2.313E+06	-3.059E+04	1.964E+01
1.660E+07	5.226E+06	1.021E+05	-2.148E+05	-1.631E+04	1.008E+01
1.555E+07	6.587E+06	9.662E+04	-2.581E+05	-2.039E+04	1.473E+01

Continua nella pagina successiva

σ_{xx} [Pa]	σ_{yy} [Pa]	σ_{xz} [Pa]	σ_{yz} [Pa]	B_{11} [Pa · m ²]	D_{22} [Pa · m ³]
1.013E+07	2.550E+06	6.366E+04	-8.692E+04	-6.118E+03	5.171E+00
1.703E+07	8.805E+06	7.621E+04	-4.577E+05	-2.447E+04	1.783E+01
1.147E+07	3.375E+06	3.712E+04	-9.434E+04	-1.020E+04	8.271E+00
1.131E+07	4.272E+06	6.515E+04	-9.096E+04	-1.427E+04	1.292E+01
1.429E+06	7.985E+05	6.371E+03	-2.344E+04	0.000E+00	3.363E+00
2.078E+07	1.206E+07	1.079E+05	-1.008E+06	-2.855E+04	1.938E+01
1.411E+07	5.595E+06	3.483E+04	-1.271E+05	-1.835E+04	1.447E+01
7.270E+06	2.042E+06	2.711E+04	-4.663E+04	-4.079E+03	4.913E+00
1.575E+07	7.281E+06	7.244E+04	-2.157E+05	-2.243E+04	1.757E+01
9.411E+06	2.905E+06	4.928E+04	-4.231E+04	-8.157E+03	8.012E+00
-3.289E+06	-3.645E+05	1.172E+04	1.413E+04	2.039E+03	3.105E+00
2.912E+07	1.426E+07	1.220E+05	-1.555E+06	-3.263E+04	1.938E+01
2.033E+07	7.390E+06	2.391E+04	-1.843E+05	-2.243E+04	1.447E+01
1.848E+07	7.880E+06	1.028E+05	-3.454E+05	-2.651E+04	1.757E+01
1.605E+07	3.582E+06	4.318E+04	-6.778E+04	-1.224E+04	8.012E+00
1.992E+07	7.310E+06	7.340E+04	-1.688E+05	-2.447E+04	1.731E+01
1.185E+07	3.715E+06	4.386E+04	-5.333E+04	-1.020E+04	7.754E+00
1.472E+07	5.333E+06	9.582E+04	-2.448E+04	-1.427E+04	1.240E+01

Tabella B.16: Curing L-SHAPE: dati test HF tensioni

σ_{xx} [Pa]	σ_{yy} [Pa]	σ_{xz} [Pa]	σ_{yz} [Pa]	B_{11} [Pa · m ²]	D_{22} [Pa · m ³]
-7.837E+06	-8.755E+06	-3.271E+04	2.193E+06	2.039E+04	2.454E+01
-2.051E+07	-1.634E+07	-8.206E+04	2.431E+06	3.059E+04	1.964E+01
-4.763E+06	-7.178E+06	-1.466E+04	1.646E+06	1.631E+04	2.609E+01
-1.331E+07	-1.165E+07	-5.586E+04	1.866E+06	2.651E+04	2.119E+01
-6.827E+06	-9.015E+06	-2.091E+04	1.746E+06	1.835E+04	2.894E+01
-1.041E+07	-7.745E+06	-3.592E+04	1.132E+06	2.243E+04	2.119E+01
9.196E+05	-1.507E+06	1.512E+04	5.883E+05	4.079E+03	3.384E+01
-1.900E+07	-1.011E+07	-3.675E+04	1.140E+06	2.855E+04	1.938E+01
-1.491E+06	-3.533E+06	2.587E+03	8.036E+05	1.020E+04	3.048E+01
-5.835E+05	-2.258E+06	1.419E+04	6.522E+05	6.118E+03	3.358E+01
-4.987E+06	-6.521E+06	-5.683E+03	8.579E+05	1.631E+04	2.868E+01
1.802E+06	-2.453E+05	2.735E+04	3.373E+05	4.079E+03	2.919E+01
2.366E+06	1.060E+06	2.660E+04	2.830E+04	0.000E+00	3.229E+01
-1.270E+06	-2.153E+06	9.679E+03	3.926E+05	1.020E+04	2.429E+01
-4.531E+06	-3.758E+06	4.275E+02	4.350E+05	1.631E+04	2.248E+01
-2.240E+06	-3.023E+06	3.650E+03	4.762E+05	1.224E+04	2.713E+01
-2.174E+07	-7.510E+06	-3.780E+04	4.877E+05	2.651E+04	1.757E+01
3.772E+05	-7.636E+05	1.418E+04	2.250E+05	6.118E+03	2.429E+01
-5.426E+06	-3.718E+06	-2.242E+03	3.341E+05	1.631E+04	1.938E+01
-2.435E+06	-2.311E+06	5.850E+03	2.954E+05	1.224E+04	2.248E+01
-7.196E+06	-3.725E+06	-9.588E+03	2.603E+05	1.835E+04	1.912E+01
-3.040E+06	-2.193E+06	9.787E+03	2.204E+05	1.427E+04	2.222E+01
-1.013E+06	-3.404E+06	1.009E+04	2.619E+05	1.020E+04	2.687E+01

Continua nella pagina successiva

σ_{xx} [Pa]	σ_{yy} [Pa]	σ_{xz} [Pa]	σ_{yz} [Pa]	B_{11} [Pa · m ²]	D_{22} [Pa · m ³]
-2.374E+07	-7.088E+06	6.106E+04	2.368E+05	2.447E+04	1.731E+01
7.634E+06	7.954E+06	8.270E+04	-2.456E+06	-1.020E+04	3.100E+01
1.388E+06	5.462E+04	2.142E+04	1.166E+05	4.079E+03	2.144E+01
4.473E+06	2.744E+06	3.907E+04	-3.644E+05	-4.079E+03	2.919E+01
6.101E+06	5.024E+06	4.871E+04	-7.954E+05	-8.157E+03	3.074E+01
1.822E+06	5.214E+05	2.313E+04	7.771E+04	2.039E+03	2.584E+01
-6.364E+06	-3.071E+06	-2.035E+04	2.488E+05	1.631E+04	1.628E+01
-1.690E+07	-5.227E+06	-3.282E+04	2.712E+05	2.243E+04	1.447E+01
1.767E+06	5.184E+05	2.149E+04	3.822E+04	2.039E+03	2.119E+01
8.696E+05	-9.005E+04	1.310E+04	9.915E+04	4.079E+03	2.403E+01
-1.172E+07	-3.538E+06	-1.673E+04	1.463E+05	1.835E+04	1.447E+01
1.287E+06	1.718E+04	1.471E+04	6.433E+04	4.079E+03	2.093E+01
2.345E+06	9.837E+05	2.029E+04	2.472E+04	0.000E+00	2.558E+01
6.093E+06	4.575E+06	3.836E+04	-4.466E+05	-1.020E+04	2.739E+01
2.258E+06	9.389E+05	1.818E+04	1.304E+04	0.000E+00	2.248E+01
-6.904E+06	-1.861E+06	-7.439E+03	1.087E+05	1.427E+04	1.292E+01
2.336E+06	9.874E+05	1.866E+04	-2.031E+03	0.000E+00	1.938E+01
3.482E+06	1.996E+06	2.569E+04	-5.876E+04	-4.079E+03	2.403E+01
5.107E+06	3.494E+06	3.089E+04	-2.094E+05	-8.157E+03	2.713E+01
5.680E+04	-3.617E+05	1.114E+04	4.683E+04	6.118E+03	1.757E+01
-1.202E+07	-3.250E+06	2.185E+03	8.800E+04	1.631E+04	1.266E+01
3.859E+06	1.891E+06	2.293E+04	-5.211E+04	-4.079E+03	1.938E+01
4.628E+06	3.097E+06	3.547E+04	-1.454E+05	-8.157E+03	2.403E+01
-6.450E+06	-1.891E+06	-2.748E+02	4.542E+04	1.224E+04	1.266E+01
2.500E+06	1.372E+06	3.546E+04	-8.540E+04	0.000E+00	1.679E+01
-3.397E+06	-1.275E+06	-1.146E+04	1.045E+05	1.020E+04	1.189E+01
6.355E+06	5.874E+06	6.974E+04	-9.474E+05	-1.224E+04	2.609E+01
3.382E+06	1.581E+06	3.647E+04	-6.940E+04	-2.039E+03	2.119E+01
-6.144E+06	-1.746E+06	-1.439E+04	1.149E+05	1.224E+04	1.163E+01
-1.705E+06	-7.751E+05	-1.558E+02	7.808E+04	8.157E+03	1.473E+01
1.116E+06	4.056E+04	1.346E+04	6.491E+04	4.079E+03	1.938E+01
9.381E+06	8.543E+06	8.584E+04	-1.593E+06	-1.631E+04	2.609E+01
4.136E+06	2.653E+06	3.536E+04	-1.661E+05	-6.118E+03	2.119E+01
2.336E+06	9.880E+05	2.336E+04	-7.405E+02	0.000E+00	1.938E+01
3.867E+06	1.967E+06	2.053E+04	-5.206E+04	-4.079E+03	2.093E+01
-7.917E+05	-2.629E+05	1.433E+03	3.929E+04	6.118E+03	1.447E+01
1.012E+06	3.848E+05	8.517E+03	3.737E+04	2.039E+03	1.912E+01
8.079E+06	5.419E+06	5.744E+04	-5.412E+05	-1.427E+04	2.274E+01
4.413E+06	1.938E+06	3.614E+04	-6.084E+04	-4.079E+03	1.473E+01
5.794E+06	2.827E+06	3.627E+04	-9.953E+04	-8.157E+03	1.473E+01
1.058E+07	7.820E+06	6.153E+04	-7.830E+05	-2.039E+04	2.403E+01
1.809E+06	8.524E+05	9.154E+03	3.224E+03	0.000E+00	1.266E+01
1.065E+07	6.457E+06	7.162E+04	-5.035E+05	-1.835E+04	1.964E+01
1.125E+07	3.884E+06	5.699E+04	-1.487E+05	-1.224E+04	1.163E+01
1.217E+07	6.908E+06	7.569E+04	-3.636E+05	-2.039E+04	1.938E+01
1.511E+06	8.511E+05	1.026E+04	-1.315E+04	0.000E+00	6.463E+00

Continua nella pagina successiva

σ_{xx} [Pa]	σ_{yy} [Pa]	σ_{xz} [Pa]	σ_{yz} [Pa]	B_{11} [Pa · m ²]	D_{22} [Pa · m ³]
5.479E+06	1.432E+06	2.295E+04	-1.761E+04	-4.079E+03	9.562E+00
-8.299E+06	-1.686E+06	3.678E+04	4.179E+04	6.118E+03	4.654E+00
1.475E+07	4.500E+06	7.408E+04	-1.079E+05	-1.427E+04	9.820E+00
9.785E+06	3.693E+06	5.413E+04	-4.043E+04	-1.224E+04	1.266E+01
1.937E+07	5.032E+06	1.081E+05	-1.448E+05	-1.835E+04	9.820E+00
1.522E+07	3.587E+06	1.608E+04	-6.661E+04	-8.157E+03	4.913E+00
1.409E+07	4.192E+06	6.463E+04	-5.669E+04	-1.631E+04	1.266E+01
4.576E+06	1.433E+06	-2.322E+04	-2.691E+04	-2.039E+03	3.105E+00
3.005E+07	1.307E+07	8.941E+04	-5.978E+05	-3.059E+04	1.912E+01
1.719E+07	5.924E+06	7.336E+04	-1.073E+05	-1.631E+04	9.562E+00
2.045E+07	6.899E+06	-1.761E+03	-8.404E+04	-2.039E+04	1.421E+01
1.197E+07	3.188E+06	-2.643E+04	-5.209E+04	-6.118E+03	4.654E+00
9.624E+05	5.209E+05	9.790E+03	5.694E+01	0.000E+00	2.846E+00

Tabella B.17: Curing L-SHAPE: dati LF tensioni

σ_{xx} [Pa]	σ_{yy} [Pa]	σ_{xz} [Pa]	σ_{yz} [Pa]	B_{11} [Pa · m ²]	D_{22} [Pa · m ³]
2.220E+06	1.124E+06	2.911E+04	-6.764E+03	0.000E+00	3.591E+01
-4.506E+06	-7.822E+06	-2.532E+04	2.386E+06	1.427E+04	2.635E+01
-2.645E+06	-6.107E+06	-1.301E+04	2.252E+06	1.020E+04	3.100E+01
-1.439E+07	-1.294E+07	-4.710E+04	2.661E+06	2.447E+04	2.144E+01
-8.749E+05	-3.827E+06	2.733E+03	1.694E+06	6.118E+03	3.410E+01
-5.296E+06	-8.868E+06	-1.783E+04	2.338E+06	1.631E+04	2.919E+01
1.504E+06	-7.091E+05	2.566E+04	6.622E+05	2.039E+03	3.565E+01
-2.764E+06	-5.792E+06	-9.970E+03	1.637E+06	1.224E+04	3.074E+01
-1.284E+06	-4.378E+06	1.425E+03	1.451E+06	8.157E+03	3.384E+01
-8.081E+06	-8.502E+06	-2.365E+04	1.526E+06	2.243E+04	2.429E+01
-2.480E+07	-1.342E+07	-5.912E+04	1.666E+06	3.263E+04	1.938E+01
3.750E+06	2.711E+06	5.034E+04	-6.138E+05	-2.039E+03	3.565E+01
-2.015E+06	-3.718E+06	6.188E+01	8.802E+05	1.224E+04	2.609E+01
-5.381E+05	-2.825E+06	5.686E+03	8.981E+05	8.157E+03	3.074E+01
-5.020E+06	-5.525E+06	-1.167E+04	9.530E+05	1.835E+04	2.429E+01
-3.078E+06	-4.907E+06	-5.801E+03	1.098E+06	1.427E+04	2.894E+01
2.570E+06	9.380E+05	3.062E+04	4.164E+04	0.000E+00	3.539E+01
-2.797E+06	-3.835E+06	-7.625E+02	7.349E+05	1.427E+04	2.584E+01
-1.016E+07	-6.847E+06	-3.236E+04	8.021E+05	2.447E+04	2.093E+01
-6.246E+06	-5.509E+06	-8.443E+03	7.699E+05	2.039E+04	2.403E+01
-2.664E+07	-1.004E+07	-6.558E+04	7.987E+05	3.059E+04	1.912E+01
5.883E+06	5.517E+06	7.128E+04	-1.743E+06	-6.118E+03	3.410E+01
-2.792E+05	-1.562E+06	1.316E+04	4.077E+05	8.157E+03	2.454E+01
-5.631E+06	-4.350E+06	-1.256E+04	5.693E+05	1.835E+04	1.964E+01
-2.995E+06	-3.206E+06	2.034E+03	5.044E+05	1.427E+04	2.274E+01
-1.212E+06	-2.399E+06	5.020E+03	5.477E+05	1.020E+04	2.739E+01
-1.206E+07	-6.156E+06	-9.992E+03	5.807E+05	2.447E+04	1.783E+01
4.027E+06	3.229E+06	4.183E+04	-5.875E+05	-4.079E+03	3.384E+01

Continua nella pagina successiva

σ_{xx} [Pa]	σ_{yy} [Pa]	σ_{xz} [Pa]	σ_{yz} [Pa]	B_{11} [Pa · m ²]	D_{22} [Pa · m ³]
3.178E+05	-1.141E+06	1.445E+04	3.721E+05	6.118E+03	2.894E+01
-7.365E+06	-4.504E+06	-1.589E+04	4.506E+05	2.039E+04	1.938E+01
1.590E+06	7.354E+04	2.135E+04	2.110E+05	2.039E+03	3.203E+01
5.855E+06	6.079E+06	5.637E+04	-1.423E+06	-8.157E+03	3.384E+01
1.690E+06	2.556E+05	2.132E+04	1.367E+05	2.039E+03	2.894E+01
2.864E+06	1.638E+06	2.578E+04	-1.191E+05	-2.039E+03	3.203E+01
-4.815E+05	-1.380E+06	8.067E+03	3.113E+05	8.157E+03	2.713E+01
-1.141E+07	-4.769E+06	-1.568E+04	2.994E+05	2.243E+04	1.757E+01
4.449E+06	3.841E+06	3.896E+04	-6.359E+05	-6.118E+03	3.358E+01
-5.283E+05	-1.112E+06	1.065E+04	2.073E+05	8.157E+03	2.403E+01
8.598E+05	-3.289E+05	1.489E+04	1.999E+05	4.079E+03	2.868E+01
1.124E+06	8.543E+05	1.823E+04	5.633E+04	0.000E+00	3.178E+01
2.586E+06	1.032E+06	3.530E+04	-1.669E+04	0.000E+00	2.609E+01
-4.045E+06	-2.481E+06	-1.026E+04	2.880E+05	1.427E+04	1.654E+01
-1.590E+06	-1.506E+06	5.613E+03	2.181E+05	1.020E+04	1.964E+01
2.586E+05	-6.754E+05	1.480E+04	2.051E+05	6.118E+03	2.429E+01
-1.029E+07	-4.073E+06	-3.616E+04	3.066E+05	2.039E+04	1.473E+01
2.344E+05	-5.010E+05	1.534E+04	1.447E+05	6.118E+03	2.119E+01
2.889E+06	1.567E+06	2.904E+04	-7.974E+04	-2.039E+03	2.894E+01
-2.608E+06	-1.817E+06	1.323E+03	1.949E+05	1.224E+04	1.938E+01
-5.841E+05	-1.091E+06	8.094E+03	2.139E+05	8.157E+03	2.403E+01
6.986E+06	7.255E+06	6.899E+04	-1.664E+06	-1.224E+04	3.074E+01
3.215E+06	1.617E+06	3.363E+04	-6.750E+04	-2.039E+03	2.584E+01
-3.123E+06	-1.562E+06	-2.862E+03	1.451E+05	1.224E+04	1.628E+01
4.181E+06	2.945E+06	3.990E+04	-3.147E+05	-6.118E+03	2.894E+01
-8.766E+05	-8.376E+05	7.633E+03	1.167E+05	8.157E+03	1.938E+01
5.561E+06	4.883E+06	4.809E+04	-7.734E+05	-1.020E+04	3.048E+01
-5.012E+06	-2.092E+06	-1.098E+04	1.190E+05	1.427E+04	1.602E+01
3.266E+06	2.009E+06	2.501E+04	-1.155E+05	-4.079E+03	2.868E+01
-1.992E+06	-1.219E+06	7.031E+03	1.044E+05	1.020E+04	1.912E+01
-4.294E+05	-7.846E+05	1.971E+03	1.244E+05	6.118E+03	2.377E+01
-1.687E+07	-4.515E+06	-1.914E+04	1.261E+05	2.039E+04	1.421E+01
9.020E+06	1.001E+07	9.347E+04	-2.421E+06	-1.631E+04	2.919E+01
3.573E+06	1.482E+06	3.247E+04	-5.956E+04	-2.039E+03	1.964E+01
4.341E+06	2.582E+06	3.945E+04	-1.929E+05	-6.118E+03	2.429E+01
-1.545E+06	-6.901E+05	6.181E+03	7.076E+04	8.157E+03	1.473E+01
6.137E+05	9.627E+04	1.415E+04	4.475E+04	4.079E+03	1.783E+01
7.365E+06	6.461E+06	5.769E+04	-1.046E+06	-1.427E+04	2.894E+01
-2.991E+06	-1.115E+06	-5.443E+02	6.693E+04	1.020E+04	1.447E+01
1.210E+06	3.950E+05	1.250E+04	5.357E+04	2.039E+03	2.222E+01
9.693E+06	9.447E+06	7.495E+04	-1.765E+06	-1.835E+04	2.894E+01
-8.983E+05	-3.171E+05	4.396E+03	3.608E+04	6.118E+03	1.447E+01
5.894E+06	4.380E+06	3.612E+04	-4.140E+05	-1.224E+04	2.713E+01
1.030E+06	4.444E+05	1.202E+04	1.971E+04	2.039E+03	1.757E+01
2.620E+06	1.324E+06	2.084E+04	6.209E+03	-2.039E+03	2.222E+01
7.448E+06	6.533E+06	5.055E+04	-8.623E+05	-1.631E+04	2.868E+01

Continua nella pagina successiva

σ_{xx} [Pa]	σ_{yy} [Pa]	σ_{xz} [Pa]	σ_{yz} [Pa]	B_{11} [Pa · m ²]	D_{22} [Pa · m ³]
2.853E+06	1.188E+06	1.420E+04	-8.209E+03	-2.039E+03	1.912E+01
3.991E+06	2.089E+06	2.187E+04	-5.086E+04	-6.118E+03	2.377E+01
-2.224E+06	-7.393E+05	7.041E+03	3.329E+04	8.157E+03	1.421E+01
4.890E+06	3.338E+06	1.305E+04	-1.866E+05	-1.020E+04	2.687E+01
1.108E+05	1.760E+04	1.060E+04	2.815E+04	4.079E+03	1.731E+01
1.646E+06	7.531E+05	1.135E+04	4.231E+04	0.000E+00	2.196E+01
-1.212E+07	-3.432E+06	8.046E+04	4.822E+04	1.427E+04	1.240E+01
8.700E+06	8.038E+06	1.169E+05	-2.701E+06	-1.427E+04	2.635E+01
4.498E+06	2.188E+06	5.286E+04	-2.029E+05	-4.079E+03	2.144E+01
5.354E+06	3.493E+06	6.205E+04	-4.581E+05	-8.157E+03	2.454E+01
-2.006E+05	-3.092E+05	1.086E+04	5.384E+04	6.118E+03	1.499E+01
2.960E+06	1.096E+06	4.216E+04	1.541E+04	2.039E+03	1.964E+01
-1.116E+07	-2.775E+06	-5.315E+04	1.671E+05	1.631E+04	1.008E+01
1.394E+06	4.741E+05	2.379E+04	1.023E+03	2.039E+03	1.654E+01
4.222E+06	2.539E+06	4.285E+04	-2.042E+05	-6.118E+03	2.429E+01
-1.834E+07	-3.733E+06	-2.957E+04	1.601E+05	1.835E+04	9.820E+00
3.458E+06	1.503E+06	3.551E+04	-6.283E+04	-2.039E+03	1.654E+01
-4.256E+06	-1.441E+06	-3.183E+04	5.170E+04	8.157E+03	1.163E+01
5.577E+06	3.714E+06	4.225E+04	-3.672E+05	-1.020E+04	2.429E+01
4.034E+05	1.450E+05	1.223E+04	2.348E+04	4.079E+03	1.473E+01
-1.077E+07	-2.260E+06	-6.517E+04	9.528E+04	1.427E+04	9.820E+00
7.009E+06	5.497E+06	6.724E+04	-7.255E+05	-1.427E+04	2.584E+01
2.198E+06	9.373E+05	1.922E+04	-1.127E+04	0.000E+00	1.628E+01
-4.357E+06	-1.152E+06	1.148E+03	5.555E+04	1.020E+04	1.137E+01
4.605E+06	2.829E+06	3.769E+04	-1.746E+05	-8.157E+03	2.403E+01
-1.895E+07	-3.791E+06	-1.244E+04	9.860E+04	1.631E+04	9.562E+00
1.203E+07	1.054E+07	1.152E+05	-2.266E+06	-2.039E+04	2.454E+01
5.134E+06	2.321E+06	5.036E+04	-1.274E+05	-6.118E+03	1.499E+01
6.421E+06	3.563E+06	6.897E+04	-2.453E+05	-1.020E+04	1.964E+01
-2.654E+05	1.688E+05	8.651E+03	1.780E+03	4.079E+03	1.008E+01
2.414E+06	9.455E+05	2.570E+04	-2.358E+04	0.000E+00	1.318E+01
3.687E+06	1.737E+06	2.892E+04	-5.675E+04	-4.079E+03	1.783E+01
-6.888E+06	-1.304E+06	-2.253E+04	5.187E+04	1.020E+04	8.271E+00
9.847E+06	7.060E+06	7.247E+04	-9.362E+05	-1.835E+04	2.429E+01
4.071E+06	2.643E+06	4.353E+04	-1.134E+05	-8.157E+03	1.938E+01
-2.049E+06	-3.227E+05	-9.163E+03	2.137E+04	6.118E+03	9.820E+00
6.192E+06	3.825E+06	4.549E+04	-2.459E+05	-1.224E+04	2.248E+01
9.341E+05	4.799E+05	9.103E+03	4.026E+03	2.039E+03	1.292E+01
2.327E+06	1.211E+06	2.018E+04	-4.505E+03	-2.039E+03	1.757E+01
-1.210E+07	-2.342E+06	-2.011E+04	6.255E+04	1.224E+04	8.012E+00
1.130E+07	9.836E+06	9.951E+04	-1.514E+06	-2.243E+04	2.429E+01
6.720E+06	3.637E+06	5.837E+04	-1.806E+05	-1.224E+04	1.938E+01
6.352E+05	4.695E+05	9.633E+03	-3.688E+03	2.039E+03	9.820E+00
8.466E+06	5.122E+06	5.903E+04	-3.775E+05	-1.631E+04	2.248E+01
2.889E+06	1.231E+06	2.117E+04	-1.871E+04	-2.039E+03	1.292E+01
4.149E+06	1.986E+06	3.334E+04	-3.435E+04	-6.118E+03	1.757E+01

Continua nella pagina successiva

σ_{xx} [Pa]	σ_{yy} [Pa]	σ_{xz} [Pa]	σ_{yz} [Pa]	B_{11} [Pa · m ²]	D_{22} [Pa · m ³]
-5.518E+06	-1.036E+06	-3.597E+03	3.145E+04	8.157E+03	8.012E+00
4.577E+06	1.985E+06	3.059E+04	-3.886E+04	-6.118E+03	1.447E+01
5.596E+06	2.898E+06	2.760E+04	-7.357E+04	-1.020E+04	1.912E+01
-1.003E+06	-2.063E+04	2.223E+03	1.144E+04	4.079E+03	9.562E+00
6.783E+06	4.083E+06	3.932E+04	-1.739E+05	-1.427E+04	2.222E+01
3.139E+06	1.504E+06	9.265E+03	1.051E+04	-4.079E+03	1.731E+01
-1.174E+07	-2.787E+06	-5.516E+03	5.701E+04	1.020E+04	7.754E+00
1.874E+07	1.319E+07	1.564E+05	-2.765E+06	-2.447E+04	2.144E+01
8.281E+06	3.320E+06	7.159E+04	-2.057E+05	-1.020E+04	1.189E+01
8.849E+06	4.421E+06	8.866E+04	-3.109E+05	-1.427E+04	1.654E+01
2.176E+06	9.578E+05	2.161E+04	-5.175E+04	0.000E+00	6.979E+00
4.456E+06	1.660E+06	4.112E+04	-7.282E+04	-4.079E+03	1.008E+01
5.859E+06	2.559E+06	5.748E+04	-1.143E+05	-8.157E+03	1.473E+01
-5.929E+06	-6.149E+05	-3.253E+04	1.543E+04	6.118E+03	5.171E+00
1.198E+07	8.502E+06	1.130E+05	-1.013E+06	-2.243E+04	2.119E+01
6.750E+06	2.587E+06	5.523E+04	-1.004E+05	-8.157E+03	1.163E+01
7.558E+06	3.573E+06	6.365E+04	-1.559E+05	-1.224E+04	1.628E+01
-3.352E+04	3.962E+05	3.329E+03	-1.356E+04	2.039E+03	6.721E+00
8.621E+06	4.799E+06	6.094E+04	-2.780E+05	-1.631E+04	1.938E+01
3.150E+06	1.238E+06	2.943E+04	-2.973E+04	-2.039E+03	9.820E+00
4.546E+06	1.949E+06	1.702E+04	-4.037E+04	-6.118E+03	1.447E+01
-1.165E+07	-1.738E+06	-5.597E+04	4.674E+04	8.157E+03	4.913E+00
1.529E+07	1.184E+07	1.121E+05	-1.648E+06	-2.651E+04	2.119E+01
9.903E+06	4.707E+06	8.736E+04	-2.195E+05	-1.631E+04	1.628E+01
3.985E+06	1.258E+06	1.535E+04	-3.957E+04	-2.039E+03	6.721E+00
5.800E+06	2.050E+06	3.058E+04	-5.592E+04	-6.118E+03	9.820E+00
6.697E+06	2.841E+06	5.379E+04	-6.634E+04	-1.020E+04	1.447E+01
-3.733E+06	-3.256E+05	-2.199E+04	9.907E+03	4.079E+03	4.913E+00
1.331E+07	8.524E+06	1.007E+05	-7.314E+05	-2.447E+04	2.093E+01
7.940E+06	2.885E+06	5.127E+04	-7.157E+04	-1.020E+04	1.137E+01
8.502E+06	3.828E+06	7.999E+04	-1.005E+05	-1.427E+04	1.602E+01
9.796E+06	5.123E+06	7.192E+04	-1.874E+05	-1.835E+04	1.912E+01
5.450E+06	2.325E+06	4.382E+04	-1.245E+04	-8.157E+03	1.421E+01
2.124E+07	1.603E+07	1.626E+05	-2.307E+06	-3.059E+04	1.964E+01
1.509E+07	4.751E+06	1.134E+05	-1.993E+05	-1.631E+04	1.008E+01
1.414E+07	5.989E+06	1.074E+05	-2.868E+05	-2.039E+04	1.473E+01
9.213E+06	2.318E+06	7.074E+04	-7.902E+04	-6.118E+03	5.171E+00
1.549E+07	8.005E+06	8.468E+04	-5.085E+05	-2.447E+04	1.783E+01
1.043E+07	3.068E+06	4.125E+04	-8.898E+04	-1.020E+04	8.271E+00
1.028E+07	3.883E+06	7.238E+04	-1.011E+05	-1.427E+04	1.292E+01
1.299E+06	7.259E+05	7.078E+03	-2.131E+04	0.000E+00	3.363E+00
1.889E+07	1.096E+07	1.199E+05	-9.234E+05	-2.855E+04	1.938E+01
1.283E+07	5.086E+06	3.870E+04	-1.413E+05	-1.835E+04	1.447E+01
6.609E+06	1.857E+06	3.012E+04	-4.239E+04	-4.079E+03	4.913E+00
1.431E+07	6.619E+06	8.049E+04	-2.396E+05	-2.243E+04	1.757E+01
8.556E+06	2.641E+06	5.475E+04	-4.701E+04	-8.157E+03	8.012E+00

Continua nella pagina successiva

σ_{xx} [Pa]	σ_{yy} [Pa]	σ_{xz} [Pa]	σ_{yz} [Pa]	B ₁₁ [Pa · m ²]	D ₂₂ [Pa · m ³]
-2.990E+06	-3.314E+05	1.065E+04	1.285E+04	2.039E+03	3.105E+00
2.647E+07	1.520E+07	2.022E+05	-1.492E+06	-3.263E+04	1.938E+01
1.849E+07	6.718E+06	2.657E+04	-2.047E+05	-2.243E+04	1.447E+01
2.053E+07	8.756E+06	1.143E+05	-3.838E+05	-2.651E+04	1.757E+01
1.459E+07	3.980E+06	4.797E+04	-7.531E+04	-1.224E+04	8.012E+00
2.213E+07	8.122E+06	8.156E+04	-1.535E+05	-2.447E+04	1.731E+01
1.317E+07	4.127E+06	4.874E+04	-5.926E+04	-1.020E+04	7.754E+00
1.338E+07	4.848E+06	1.065E+05	-2.720E+04	-1.427E+04	1.240E+01

Ringraziamenti

Giunto al termine di questo percorso di studi, desidero esprimere la mia profonda gratitudine a tutte le persone che, con supporto, insegnamenti e incoraggiamenti, hanno reso possibile tutto ciò che in questi cinque anni di positivo è successo. In primo luogo, ci tengo a ringraziare l'intera squadra di relatori, il gruppo di ricerca MUL2 ed, in particolare, il prof. Petrolo, per avermi introdotto a un tema di studio diverso da quelli previsti dal nostro percorso canonico, ma estremamente stimolante, e per avermi spinto a dare il massimo in questo affascinante lavoro, con suggerimenti e consigli, e con massima accuratezza per ogni aspetto, da quelli pratici di analisi e codice fino a quelli estetici di presentazione. Un ringraziamento speciale va alle dott.sse Santori e Tortorelli, che mi hanno affiancato dal primo giorno di lavoro fino all'ultimo, in modo instancabile, in qualsiasi momento del giorno e della settimana; hanno saputo fin da subito darmi i giusti suggerimenti per ottenere il massimo dei risultati in modo efficiente.

Se sono arrivato fino a chiudere questo cerchio, aperto quando ero ancora bambino, lo devo alla mia famiglia, inclusi nonni e zii, che ha sempre creduto al 100% e oltre nelle mie capacità, perfino nei momenti in cui sembrava difficile anche a me stesso. Devo ringraziare i miei genitori, non solo per avermi sostenuto sotto ogni punto di vista, ma anche per avermi insegnato, fin da piccolo, a non accontentarmi mai dei risultati che ottengo: la mia ostinazione a far sempre meglio è dovuta soprattutto a questo. A mio fratello devo tanti sorrisi che è riuscito a tirarmi fuori nei momenti in cui ero giù di morale: dietro la maschera da comico si nascondono sensibilità, intelligenza ed enormi potenzialità.

Come sempre, al mio fianco trovo Giulia: impossibile ricordare ogni momento positivo insieme, perché sono davvero tanti. Da anni riesce a sopportare la mia impulsività, a starmi vicino quando tutto sembra andare storto e, più di ogni altra cosa, a ricordarmi quanto valgo anche quando io tendo a dimenticarlo.

Questi anni non sarebbero stati uguali senza Federica, Gabriele e Simone, tre persone per me fondamentali, i migliori amici che potessi desiderare e che gli anni dell'adolescenza mi hanno regalato. A loro si aggiunge Sergiy, con cui ho condiviso molti momenti di divertimento, sia nelle vacanze sia quando, qualche anno fa, uscire non era possibile, ma l'appuntamento sui videogiochi era fisso. Al mio fianco ci sono state anche altre persone per me molto importanti: Samuele, Alice e Giorgio, i compagni di corso fin dalla triennale (Lorenza, Arianna, Andrea e Enrico) e quelli conosciuti in magistrale, Angelo (che compagno di corso non è, ma è come se lo fosse, e che molto spesso mi ha spronato a dare il mio meglio), nonché tutto il gruppo finalese, senza i quali le estati di svago non sarebbero state la stessa cosa.

Non mi resta che ringraziare me stesso, per la determinazione che ho sempre portato con me, che a volte mi fa sbagliare, ma spesso mi porta a crescere per dimostrare le mie vere potenzialità, che altri, in passato, non sono stati in grado di valorizzare; anche per l'eccesso di etica e morale, che a volte mi viene fatto notare e che forse sì o forse no, in futuro, peserà sulle mie scelte. Qualunque sia la direzione del mio futuro professionale, avrò sempre la convinzione che la tecnologia e l'ingegneria debbano essere messe al servizio della civiltà, e non esser volte alla sua distruzione, in qualsiasi contesto.

Bibliografia

- [1] E. Carrera, M. Cinefra, M. Petrolo, and E. Zappino. *Finite Element analysis of structures through Unified Formulation*. Wiley, Chichester, 1st edition, 2014.
- [2] S.L. Brunton and J.N. Kutz. *Data-driven science and engineering: Machine Learning, dynamical systems, and control*. Cambridge University Press, Cambridge, 2nd edition, 2022.
- [3] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor. *The Finite Element Method*. Butterworth-Heinemann, Oxford, 5th edition, 2000.
- [4] C. Schoenholz, E. Zappino, M. Petrolo, and N. Zobeiry. Efficient analysis of composites manufacturing using multi-fidelity simulation and probabilistic machine learning. *Composite Structures. Part B, Engineering*, 280, 2024.
- [5] E. Zappino, M. Petrolo, and E. Carrera. Analysis of process-induced deformations and residual stresses in curved composite parts considering transverse shear stress and thickness stretching. *Composite Structures. Engineering*, 2020.
- [6] C. Albert and G. Fernlund. Spring-in and warpage of angled composite laminates. *Composites Science and Technology*, 62(14):1895–1912, 2002.
- [7] E. Carrera, M. Cinefra, and A. Pagani. *Fondamenti di teoria dell’elasticità e delle strutture*. AIDAA educational series. Gruppo Persiani Editore, Bologna, 1st edition, 2021.
- [8] Y. LeCun, Y. Bengio, and G. Hinton. Deep learning. *Nature (London)*, 521(7553):436–444, 2015.
- [9] N. Zobeiry and K.D. Humfeld. A physics-informed machine learning approach for solving heat transfer equation in advanced manufacturing and engineering applications. *Engineering applications of artificial intelligence*, 101, 2021.
- [10] M. Petrolo, M.H. Nagaraj, I. Kaleel, and E. Carrera. A global-local approach for the elastoplastic analysis of compact and thin-walled structures via refined models. *Computers & Structures*, 206:54–65, 2018.
- [11] D.H. Hubel and T.N. Wiesel. Receptive fields, binocular interaction and functional architecture in the cat’s visual cortex. *The Journal of physiology*, 160(1):106–154, 1962.
- [12] J.L. Rogers. Simulating structural analysis with Neural Network: Neural Networks. *Journal of computing in civil engineering*, 8(2):252–265, 1994.
- [13] M.L. Minsky and S. Papert. *Perceptrons and Pattern Recognition*. MIT Press, 1967.
- [14] M.F. Ashby, H. Shercliff, and D. Cebon. *Materials: Engineering, Science, Processing and Design*. Butterworth-Heinemann, Amsterdam, 4th edition, 2018.
- [15] E. Zappino and M. Santori. Tecnologie aerospaziali. Materiale didattico del corso, Politecnico di Torino, 2025. A.A. 2024/2025.
- [16] C. Albert and G. Fernlund. Spring-in and warpage of angled composite laminates. *Composites Science and Technology*, 62(14):1895–1912, 2002.

- [17] S. Georgiadis, A.J. Gunnion, R.S. Thomson, and B.K. Cartwright. Bird-strike simulation for certification of the Boeing 787 composite moveable trailing edge. *Composite structures*, 86(1):258–268, 2008.
- [18] N. Zobeiry. *Physics-informed Machine Learning: Heat Transfer*. University of Washington, Cambridge, 1st edition, 2024.
- [19] M.T. Hagan et al. *Neural Network Design*. Martin Hagan, 2014.
- [20] C.E. Rasmussen and K.I. Williams. *Gaussian Processes for Machine Learning*. MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1st edition, 2006.
- [21] A. Géron. *Hands-On Machine Learning with Scikit-Learn, Keras & TensorFlow*. O’Reilly Media, Canada, 2nd edition, 2019.
- [22] M.A. Aizerman, E.M. Braverman, and L.I. Rozonoer. Theoretical foundation of potential functions method in pattern recognition. *Avtomat. i Telemekh.*, 25(6):917–936, 1964.
- [23] D.K. Duvenaud. Automatic model construction with Gaussian Processes. Master’s thesis, University of Cambridge, 2014.
- [24] K.L. Du, B. Jiang, J. Lu, J. Hua, and M.N.S. Swamy. Exploring Kernel Machines and Support Vector Machines: principles, techniques, and future directions. *Mathematics*, 12(24):3935, 2024.
- [25] D.C. Montgomery, G.C. Runger, and N.F. Hubele. *Engineering Statistics*. John Wiley & Sons, Inc., 5th edition, 2011.
- [26] H. Pham. *Springer Handbook of Engineering Statistics*. Springer, 2nd edition, 2023.
- [27] A. Gelman, J.B. Carlin, H.S. Stern, D.B. Dunson, A. Vehtari, and D.B. Rubin. *Bayesian Data Analysis*. Columbia University, New York, NY, 3rd edition, 2025.
- [28] D.J.C. MacKay et al. Introduction to Gaussian Processes. In *NATO ASI Series F: Computer and Systems Sciences*, volume 168, pages 133–166. 1998.
- [29] J. Görtler, R. Kehlbeck, and O. Deussen. A visual exploration of Gaussian Processes. *Distill*, 2019.
- [30] T.W. Anderson. *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*. Wiley Series in Probability and Statistics. John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, 3rd edition, 2003. Volume 355.
- [31] B. Wu, W. Zhang, L. Chen, and J. Liang. A GP-based kernel construction and optimization method for RVM. In *International Conference on Computer and Automation Engineering (ICCAE)*, volume 4, pages 419–423, 2010.
- [32] M. Petrolo, M. Santori, K. Johnson, E. Zappino, and N. Zobeiry. Assessment of Multi-Fidelity Structural Theories to Train Probabilistic Machine Learning for Process-Induced Defects. Slides presented at Artificial Intelligence for Composite Materials Conference, 1–3 September 2025, Bristol, United Kingdom, 2025. Websites: www.mul2.com.
- [33] A. Damianou and N.D. Lawrence. Deep Gaussian Processes. In *Artificial Intelligence and Statistics*, pages 207–215, 2013.

- [34] E. Schulz, M. Speekenbrink, and A. Krause. A tutorial on Gaussian Process Regression: modelling, exploring, and exploiting functions. *Journal of Mathematical Psychology*, 2018.
- [35] D. Scano. *Uso di Polinomi di Lagrange nell'Analisi Lineare e Nonlineare di Strutture Laminee*. PhD thesis, Politecnico di Torino, 2021.
- [36] D. Eaton and K. Murphy. Bayesian structure learning using dynamic programming and MCMC. In *Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence*, 2007.
- [37] M. Raissi, P. Perdikaris, and G.E. Karniadakis. Physics Informed Deep Learning Part 1: Data-driven Discovery of Nonlinear Partial Differential Equations. *Journal of Computational Physics*, 2017.
- [38] N. Friedman and D. Koller. Being Bayesian about Network Structure: A Bayesian approach to structure discovery in Bayesian Networks. *Machine Learning*, 50:95–126, 2003.
- [39] R. Garnett. *Bayesian Optimization*. Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom, first edition edition, 2023.
- [40] F. Di Fiore and L. Mainini. Physics-aware multifidelity Bayesian Optimization: A generalized formulation. *Elsevier Ltd*, 2024.
- [41] A.I.J. Forrester, A. Söbester, and A.J. Keane. Multi-fidelity optimization via surrogate modelling. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 463:3251–3269, 2007.
- [42] A. Tran, J. Tranchida, T. Wildey, and A.P. Thompson. Multi-fidelity Machine Learning with uncertainty quantification and Bayesian Optimization for materials design: application to ternary random alloys. *Journal of Chemical Physics*, 2020.
- [43] A. Serani, R. Pellegrini, J. Wackers, C.E. Jeanson, P. Queutey, M. Visonneau, et al. Adaptive multi-fidelity sampling for CFD-based optimization via Radial Basis Function metamodels. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 2019.
- [44] Y.D. Yoon and G.H. Yoon. Application of Bayesian Optimization for controlling particle behavior. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 68(5):86–, 2025.
- [45] P. Luong, D. Nguyen, S. Gupta, S. Rana, and S. Venkatesh. Adaptive cost-aware Bayesian Optimization. *Knowledge-Based Systems*, 232:107481–, 2021.
- [46] J. Snoek, H. Larochelle, and R.P. Adams. Practical Bayesian Optimization of Machine Learning algorithms. In *Advances in Neural Information Processing Systems (NIPS)*, pages 2951–2959, 2012.
- [47] P.I. Frazier and J. Wang. Bayesian Optimization for materials design. In *Information Science for Materials Discovery and Design*, pages 45–75. Springer, 2016.
- [48] Z. Wang and N. de Freitas. Theoretical Analysis of Bayesian Optimization with Unknown Gaussian Process Hyper-Parameters. *arXiv preprint arXiv:1406.7758*, 2014.