



**Politecnico
di Torino**

Politecnico di Torino

Corso di Laurea Ingegneria Aerospaziale

A.a. 2024/2025

Sessione di laurea Ottobre 2025

Acustoforesi di particelle leggere in un canale turbolento

Relatori:

Prof. Michele Iovieno

Dr. Domenico Zaza

Candidati:

Emanuele Bettini

Sommario

L'interazione tra campi acustici e flussi turbolenti con particelle sospese rappresenta un'area di ricerca ancora poco esplorata. Questa tesi affronta tale problematica, costituendo uno dei primi studi volti a colmare questa lacuna. L'obiettivo è analizzare l'influenza di un'onda acustica sulla distribuzione spaziale delle particelle in un flusso turbolento. Mediante simulazioni numeriche dirette con particelle puntiformi (PP-DNS), si studia la concentrazione delle particelle nei piani paralleli alle pareti.

I risultati mostrano che il campo acustico modifica significativamente la distribuzione delle particelle, generando strutture di concentrazione periodiche coerenti con la natura ondulatoria del campo stesso. Questo meccanismo evidenzia la possibilità di controllare la posizione preferenziale delle particelle attraverso parametri di controllo come l'ampiezza della forzante acustica e la dimensione delle particelle. Le scoperte ottenute aprono la strada a ulteriori studi e suggeriscono potenziali applicazioni in ambiti quali il filtraggio dei fluidi (ad es. depuratori d'aria o d'acqua) e la biomedicina.

Indice

Elenco delle figure	III
Elenco delle tabelle	VII
1 Introduzione	1
2 Flusso nel Canale Piano	6
2.1 Modello fisico ed equazioni	6
2.2 Scale caratteristiche e adimensionalizzazione	9
2.2.1 Metodi di Simulazione Numerica (DNS, LES, RANS) per il Canale Piano	13
3 Particelle in Turbolenza e Acustoforesi	15
3.1 Equazioni del moto	16
3.2 Rilevanza delle forze	18
3.3 Forza di Radiazione Acustica	20
3.3.1 Onda Stazionaria nel Canale Piano e Forza Acustica sulla Particella	23
3.3.2 Disturbo di Pressione	24
3.3.3 Inclusione della forza acustica radiativa nell'equazione di Maxey- Riley e Adimensionalizzazione	30
4 Metodo Numerico e Setup delle Simulazioni	33
4.1 Metodo di Fourier-Galerkin e metodo di Chebyshev tau	35
4.2 Setup delle simulazioni	36
5 Risultati	42
5.1 Concentrazione Media	42
5.2 Varianza della Concentrazione	48
5.3 Accelerazioni	54

5.4	Medie d'insieme	58
	Bibliografia	63

Elenco delle figure

2.1	Geometria del canale piano.	7
3.1	Scattering (in rosso) prodotto da una particella sferica investita da un'onda acustica piana (in blu). La quantità λ denota la lunghezza d'onda.	20
3.2	Schema della scomposizione del campo acustico in prossimità di una particella sferica di raggio r . La particella è circondata da uno strato limite viscoso di spessore caratteristico $\sim 5\delta$, all'interno del quale il fluido è trattato come viscoso. All'esterno dello strato, il fluido è assunto non viscoso. Si distinguono inoltre il <i>campo vicino</i> e il <i>campo lontano</i> , separati da una distanza dell'ordine della lunghezza d'onda acustica λ , dove si è assunto che $\lambda \gg r$ e $\lambda \gg \delta$	21
3.3	Confronto qualitativo tra i campi di radiazione acustica: (a) monopolo e (b) dipolo.	23
3.4	Schema bidimensionale del canale piano confinato da due pareti: la parete superiore è fissa, mentre la parete inferiore oscilla rigidamente con frequenza ω , imponendo una condizione di pressione armonica $p_1 = p_A e^{i\omega t}$. La distanza nominale tra le pareti è $2h$	24
3.5	Andamento dell'accelerazione acustoforetica adimensionale normalizzata rispetto a B , in funzione della posizione trasversale adimensionale $\tilde{y}_p$. Sono mostrati i diversi modi stazionari ($n = 1, 2, 3, 4$) corrispondenti a $\tilde{k}_n = \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$	31
4.1	Schema delle simulazioni. Sull'asse delle ascisse è riportato il rapporto tra il raggio della particella e la più piccola scala di Kolmogorov. Sull'asse delle ordinate si trova l'intensità dell'onda acustica E_{ac} . A ogni simulazione corrisponde una coppia di questi due parametri e tutte le simulazioni possono essere raggruppate fissando l'intensità acustica oppure il raggio della particella.	38

4.2	Andamento del rapporto tra la densità della particella e quella del fluido, ρ_p/ρ_f , al variare del raggio adimensionalizzato con la semialtezza del canale, r/h , considerando un numero di Stokes fissato $St^+ = 0.8$. La curva mostra che, all'aumentare del raggio della particella, il rapporto di densità decresce quadraticamente. I simboli in grigio rappresentano i valori di r/h e ρ_p/ρ_f relativi alle simulazioni condotte.	40
5.1	Concentrazione di particelle media al variare di y^+ , normalizzata con il rapporto tra il numero di particelle complessivo e il volume totale. Sono state prese le concentrazioni medie a ogni distanza da parete e mediate su metà canale. Ogni grafico raggruppa tre simulazioni con raggio costante: la Figura 5.1a mostra le simulazioni con le particelle con il raggio più piccolo, $r_p = 8.57 \cdot 10^{-4}$, la Figura 5.1b quelle con raggio $r_p = 1.71 \cdot 10^{-3}$ e la Figura 5.1c quelle con raggio più grande, $r_p = 2.57 \cdot 10^{-3}$. La quantità η denota la scala di Kolmogorov minima presente nel flusso di canale.	44
5.2	Distribuzione spaziale istantanea delle particelle (rappresentate fuori scala) nella regione compresa tra i piani trasversali $x = 2\pi - 0.065$ e $x = 2\pi + 0.065$. Lo sfondo rappresenta la componente streamwise della velocità del fluido nel piano trasversale medio, ovvero a $x = 2\pi$. Le particelle hanno un numero di Stokes $St^+ = 0.8$ e un raggio $r/h = 8.57 \times 10^{-4}$. Sono riportati tre casi corrispondenti a diverse intensità dell'onda acustica: (a) $E_{ac} = 200$, (b) $E_{ac} = 500$ e (c) $E_{ac} = 800$.	46
5.3	Confronto tra la distribuzione della concentrazione, normalizzata con il suo massimo per ogni simulazione, nei piani paralleli alle pareti e l'andamento della funzione $\sin(2\tilde{k}_n(\tilde{y}_p + 1))$. Questo grafico mostra l'influenza dell'onda acustica stazionaria sulla posizione delle particelle. É stato considerato come dominio l'intera altezza del canale per mostrare sia il secondo picco di concentrazione presente sia il confronto completo con la funzione seno che riproduce l'andamento dell'accelerazione acustoforetica.	47
5.4	Varianza, normalizzata, della concentrazione lungo la direzione perpendicolare alle pareti del canale.	49

5.5	Distribuzione spaziale istantanea delle particelle (rappresentate fuori scala) nella regione compresa tra i piani paralleli alle pareti situati a $y = 0.51$ e $y = 0.49$. Le particelle hanno un numero di Stokes $St^+ = 0.8$ e un raggio $r/h = 8.57 \times 10^{-4}$. Lo sfondo rappresenta la componente streamwise della velocità del fluido nel piano parallelo alle pareti in $y = 0.5$. Sono riportati tre casi corrispondenti a diverse intensità dell'onda acustica: (a) $E_{ac} = 200$ (S1), (b) $E_{ac} = 500$ (S4) e (c) $E_{ac} = 800$ (S7).	50
5.6	Covarianza della concentrazione con la componente y della velocità lungo la direzione perpendicolare alle pareti del canale. Questo grafico mostra il legame che esiste tra la concentrazione e la componente lungo y della velocità del flusso.	52
5.7	Distribuzione spaziale istantanea delle particelle (rappresentate fuori scala) nella regione compresa tra i piani trasversali $x = 2\pi - 0.065$ e $x = 2\pi + 0.065$. Lo sfondo rappresenta la componente della velocità del fluido perpendicolare alle pareti valutata nel piano trasversale medio ($x = 2\pi$). Dato che il moto medio verticale è nullo, $\langle v \rangle = 0$, si ha che $v = v'$. Le particelle hanno un numero di Stokes $St^+ = 0.8$ e un raggio $r/h = 8.57 \times 10^{-4}$. Sono riportati tre casi corrispondenti a diverse intensità dell'onda acustica: (a) $E_{ac} = 200$, (b) $E_{ac} = 500$ e (c) $E_{ac} = 800$	53
5.8	Covarianza della concentrazione con la componente x della velocità rappresentata in funzione della coordinata y^+ . Questo grafico mostra il legame che esiste tra la concentrazione e la componente lungo x della velocità del flusso.	55
5.9	Andamento dell'accelerazione totale media agente nei piani paralleli alle pareti sulle particelle. Questo grafico contiene le informazioni sul modulo dell'accelerazione globale agente mediamente su una particella perciò sono considerati gli effetti di tutte le forze considerate nel Capitolo 3.	56
5.10	Andamento della media del rapporto tra l'accelerazione acustica, a_{Ra} , e l'accelerazione dovuta alla resistenza di Stokes, a_{St} , agente nei piani paralleli alle pareti sulle particelle.	57

5.11	Nell'immagine di sinistra 5.11a viene riportato l'andamento dell'accelerazione totale mediata sull'intero canale e in tutto l'intervallo di tempo per ogni simulazione. Nell'immagine di destra 5.11b viene riportato l'andamento del rapporto tra l'accelerazione radiativa e l'accelerazione di Stokes, mediato sull'intero canale e in tutto l'intervallo di tempo per ogni simulazione. Questi grafici permettono di avere un chiaro quadro generale che riassume l'influenza dei due parametri principali, r_p e E_{ac} , sul flusso turbolento.	59
5.12	Andamento dell'accelerazione radiativa mediata su tutto il canale e in tutto l'intervallo di tempo.	60

Elenco delle tabelle

4.1	Parametri per le simulazioni PP-DNS del flusso carico di particelle in un canale con $N_p = 4,000,000$ particelle sferiche. Il numero di Reynolds d'attrito è tenuto costante per tutte le simulazioni a $Re_\tau = 180$. Anche il numero di Stokes è tenuto fisso ($St^+ = 0.8$). Nelle colonne sono riportati: il rapporto tra il raggio della particella e la scala più piccolo di Kolmogorov presente nel canale ($r/\eta_{\min}$), il raggio delle particelle (r), l'intensità dell'energia acustica adimensionale (E_{ac}) e il rapporto di densità tra particella e fluido (ρ_p/ρ_f).	37
-----	---	----

Capitolo 1

Introduzione

Le sospensioni di particelle in un fluido sono presenti in numerosi ambiti, sia naturali sia ingegneristici, e sono caratterizzate da un fluido *vettore* che trasporta particelle solide, piccole gocce liquide o microbolle. Tali flussi si riscontrano in molteplici applicazioni industriali, come nei processi di combustione e nei sistemi di raffreddamento, così come in ambito geofisico, per esempio nello studio del trasporto di particelle in atmosfera, nei corsi d'acqua e negli oceani. Anche in astrofisica esistono casi rilevanti, come nella formazione e nell'evoluzione dei dischi protoplanetari, come illustrato da Cuzzi et al. [1]. In tutti questi contesti è fondamentale comprendere come il flusso influenzi la dinamica della fase dispersa e, viceversa, come la presenza delle particelle possa modificare l'evoluzione del flusso.

L'interazione tra fluido e particelle dipende da numerosi fattori, tra cui la forma delle particelle, il rapporto tra la loro densità e quella del fluido, la dimensione e la concentrazione delle particelle, nonché le caratteristiche della turbolenza. Negli ultimi vent'anni, la complessità fenomenologica di questi flussi ha generato un ampio interesse nella comunità scientifica, come evidenziato dai numerosi studi numerici e sperimentali presenti in letteratura, tra cui Elghobashi [2], Balachandar e Eaton [3] e Brandt e Coletti [4].

Lo studio dei flussi turbolenti con particelle può essere condotta tramite esperimenti o simulazioni numeriche. Nonostante i progressi nelle tecniche di misura ottiche, come la Particle Tracking Velocimetry (PTV) e la Particle Image Velocimetry (PIV), negli ultimi decenni l'approccio numerico si è affermato come strumento principale, come documentato da Brandt e Coletti [4]. Le simulazioni numeriche consentono l'accesso a molte grandezze fisiche del flusso con un livello di dettaglio difficile da ottenere sperimentalmente. Lo sviluppo tecnologico e l'aumento della potenza dei moderni computer hanno permesso simulazioni sempre più accurate, con

un numero minore di approssimazioni e una maggiore aderenza alla realtà. In particolare, per lo studio dei flussi turbolenti si utilizzano le simulazioni numeriche dirette (Direct Numerical Simulation, DNS), in cui le equazioni di Navier-Stokes vengono integrate senza modellizzazione e tutte le scale rilevanti del flusso vengono risolte. Fino a qualche decennio fa, l'elevato costo computazionale delle DNS ne limitava l'impiego, mentre lo studio dei flussi turbolenti avveniva principalmente attraverso approcci modellistici, come le simulazioni RANS (Reynolds-Averaged Navier-Stokes) e LES (Large-Eddy Simulation), che pur fornendo una descrizione parziale della turbolenza, limitata al solo flusso medio o alle scale più grandi, richiedono un costo computazionale inferiore.

Un metodo standard per simulare un gran numero di particelle più piccole della scala di Kolmogorov è la Simulazione Numerica Diretta di Particelle Puntiformi (PP-DNS, Point-Particle DNS, Kuerten [5]), in cui ogni particella è considerata un punto materiale e si risolve il sistema di equazioni differenziali ordinarie che ne descrive la dinamica. Questa tecnica ha dei limiti, come l'intervallo di applicabilità vincolato dalla dimensione delle particelle [3]. Nonostante ciò, molte fenomenologie osservate sono state comprese tramite questa metodologia, tra cui l'aggregazione (detto *clustering* nella letteratura anglofona) e la concentrazione preferenziale delle particelle, mostrando anche come le particelle possano influenzare la turbolenza tramite l'accoppiamento bidirezionale (*two-way coupling*, Kuerten [5]). Definendo la frazione volumetrica, Φ_V , come il rapporto tra il volume delle particelle e il volume del dominio computazionale, si distinguono diversi regimi di accoppiamento. Per basse frazioni volumetriche le particelle non influenzano il flusso (accoppiamento unidirezionale); per frazioni intermedie iniziano a modificare le proprietà del flusso (accoppiamento bidirezionale); per frazioni elevate si parla di accoppiamento multidirezionale. I limiti tra i regimi sono discussi in Elghobashi [6]. Un altro fenomeno rilevante è il campionamento preferenziale (*preferential sampling*), ossia la tendenza delle particelle a concentrarsi in determinate regioni del flusso; esso può essere valutato misurando la correlazione tra la concentrazione delle particelle e le proprietà locali del flusso, come il rateo di deformazione rispetto all'ensrofia. Considerando come parametro di controllo il numero di Stokes, si osserva che per $St = O(1)$ o valori inferiori le particelle si accumulano nelle regioni in cui la deformazione prevale sulla rotazione, coerentemente con il meccanismo centrifugo. Il numero di Stokes, $St = \tau_p/\tau_f$, rappresenta il rapporto tra il tempo di rilassamento della particella, τ_p , e la scala temporale caratteristica del flusso, τ_f , misurando la sensibilità della particella ai cambiamenti di velocità del fluido circostante. Particelle con St elevato non seguono il flusso, mentre particelle con St basso si comportano quasi da traccianti.

L'aggregazione delle particelle inerziali nei flussi turbolenti è massima per $St = O(1)$, dove la distribuzione spaziale non dipende solo dal campo di velocità istantaneo del fluido [4]. Le ragioni di questo campionamento preferenziale sono legate alla natura dissipativa della dinamica delle particelle: le traiettorie nello spazio delle fasi tendono verso un attrattore in evoluzione dinamica, come dimostrato da Bec et al. [7] e Bec [8]. Le particelle più pesanti tendono a essere espulse dai vortici e ad accumularsi in regioni dominate dalla deformazione, mentre le più leggere si raggruppano preferenzialmente all'interno dei vortici.

La maggior parte degli studi si è concentrata su particelle “pesanti”, con densità significativamente superiore a quella del fluido vettore. Questo perché i contributi principali sulle particelle sferiche pesanti in un flusso viscoso sono la forza gravitazionale e la resistenza di Stokes, mentre altri termini come resistenza di pressione, massa aggiunta e forza di Basset-Boussinesq risultano trascurabili per $\rho_p/\rho_f \gtrsim 100$, come mostrato da Armenio e Fiorotto [9]. Inoltre, il calcolo di questi termini è computazionalmente oneroso, per cui molti studi preferiscono trascurarli e pertanto si concentrano sul caso di particelle pesanti. In particolare la forza di Basset richiede in ogni istante il calcolo di un integrale di convoluzione sull'intera dinamica pregressa della particella, rappresentando un ostacolo nelle simulazioni di flussi con un numero elevato di particelle, sia per l'onere di calcolo sia per la necessità di conservare la storia della particella. Analogamente le forze di pressione e di massa aggiunta richiedono di conoscere la derivata materiale della velocità del fluido ed il gradiente di velocità del fluido interpolati nella posizione della particella, informazioni che normalmente non sono calcolate esplicitamente nel corso della simulazione.

Il presente lavoro di tesi esplora l'interazione tra acustoforesi e turboforesi, ossia il moto delle particelle indotto rispettivamente da un campo acustico e dalla turbolenza in un flusso di canale. Negli ultimi dieci anni l'interesse verso l'uso degli ultrasuoni per manipolare le concentrazioni di particelle è aumentato [10]. Una particella sospesa in un fluido, investita da un'onda acustica stazionaria, è soggetta a due ulteriori forze principali: la forza acustica radiativa, legata allo *scattering* dell'onda sonora, e la forza di resistenza di Stokes generata dal flusso indotto dalle oscillazioni ad alta frequenza della particella [11]. In questo lavoro la seconda verrà trascurata poiché è stato osservato che la forza radiativa prevale in termini di intensità.

Per disaccoppiare l'effetto acustico dalla dinamica turbolenta, la scala temporale del campo acustico deve essere molto più piccola della scala turbolenta minima, dell'ordine della scala di Kolmogorov, $\tau_\eta = (\nu/\epsilon)^{1/2}$, dove ν è la viscosità cinematica ed ϵ la dissipazione media di energia cinetica turbolenta. Indicando con f la frequenza dell'onda acustica ($\tau_{ac} = 1/f$), la condizione di disaccoppiamento diventa $f \gg \tau_\eta^{-1}$.

Nei flussi confinati da pareti è utile esprimere la condizione in unità viscosi: $\tau_\nu = \nu/u_\tau^2$, con u_τ velocità d'attrito, e quindi $f \gg \tau_\nu^{-1}$. In forma adimensionale, il tempo caratteristico della turbolenza è $t_\nu = 1/Re_\tau$ e quello del campo acustico è $1/f$, per cui $f \gg Re_\tau$.

Sebbene un'onda acustica si propaghi a velocità infinita in un fluido strettamente incomprimibile, è possibile simulare la presenza di un'onda ad alta frequenza utilizzando le cosiddette equazioni di Navier-Stokes quasi-incomprimibili (o *nearly incompressible equations*, Zank e Matthaeus [12]). Questo approccio permette di modellare gli effetti delle onde acustiche in un flusso che, pur rimanendo incomprimibile, può supportare fenomeni di propagazione acustica. Così facendo, viene integrata una forza aggiuntiva, la forza di radiazione acustica, la cui formulazione analitica è stata elaborata da Settnes e Bruus [13]. Utilizzando questo metodo, sono state eseguite Simulazioni Numeriche Dirette di Particelle Puntiformi (PP-DNS) in un canale piano turbolento [14], al fine di studiare come la dinamica delle particelle sia influenzata dall'onda acustica imposta nel canale, in particolare dall'energia dell'onda e dal rapporto tra la densità delle particelle e quella del fluido. L'obiettivo è verificare se l'imposizione di un'onda stazionaria possa indurre la concentrazione delle particelle nei nodi dell'onda, alterando il fenomeno di concentrazione preferenziale già osservato in questo tipo di flussi. Solitamente la turboforesi (ovvero il moto delle particelle indotto dalla turbolenza) spinge le particelle verso le pareti e fa sì che si accumulino in regioni a bassa velocità, formando strutture allungate nelle cosiddette "low-speed streaks", dove l'energia cinetica turbolenta è bassa. L'ipotesi è che l'introduzione dell'onda acustica possa generare un ulteriore effetto di aggregazione, quindi che la forza di radiazione acustica possa consentire il controllo non invasivo della posizione di particelle leggere disperse in un fluido. In particolare si presume che le particelle si aggregino nei nodi dell'onda.

Ad oggi, l'interazione tra flussi turbolenti con particelle e onde acustiche non è mai stata oggetto di indagini sistematiche. Una comprensione approfondita di questi meccanismi può aprire nuove prospettive per progettare dispositivi capaci di controllare efficacemente la concentrazione delle particelle in flussi turbolenti, ad esempio filtri per fumi o acque inquinate, dispositivi per la separazione di particelle disperse nel sangue o nei corsi d'acqua e nella bassa atmosfera.

La tesi è strutturata per fornire una descrizione completa e coerente del fenomeno. Ogni capitolo descrive uno specifico aspetto. Oltre all'introduzione, il Capitolo 2 descrive il flusso canonico in un canale piano, discutendo le equazioni e le scale caratteristiche del flusso, per fornire un quadro di riferimento generale, essenziale per comprendere il resto della tesi. Il Capitolo 3 introduce i flussi turbolenti con particelle

sospese, descrivendo le forze agenti sulle particelle, con particolare attenzione alla forza acustica radiativa. Il Capitolo 4 illustra la metodologia per simulare questi flussi e come sono state impostate le simulazioni, fornendo una descrizione concisa del metodo numerico adottato, oltre ad una descrizione dettagliata dei parametri principali. Infine il Capitolo 5 è dedicato alla presentazione e discussione dei risultati ottenuti, sintetizzando le principali scoperte emerse dall'indagine numerica.

Capitolo 2

Flusso nel Canale Piano

I flussi turbolenti delimitati da una parete sono intrinsecamente disomogenei e anisotropi. Questo comporta alcune difficoltà che altri flussi turbolenti, come per esempio il getto o le scie, non hanno. Infatti in questi casi la cascata energetica avviene uniformemente dalle scale più grandi a quelle dissipative più piccole con uno spettro definito, mentre nei flussi delimitati da pareti il trasferimento di energia avviene su più intervalli di scale [15]. I flussi di parete più studiati sono: il canale piano, il condotto a sezione circolare e il flusso su lamina piana. Il primo caso è tra i più studiati grazie alla forma semplice del dominio e al fatto che in esso sono presenti tutti i fenomeni caratteristici della turbolenza di parete [16]. Lo studio dei flussi di parete è importante per questioni relative a molti aspetti in campo ingegneristico come ad esempio i flussi su pareti di imbarcazioni o velivoli, i flussi in condotti grandi (acquedotti, gasdotti) oppure piccoli (impianti di azionamento pistoni) ma anche ambientale (lo strato limite planetario) o biologico (vasi sanguigni).

2.1 Modello fisico ed equazioni

Il flusso in un canale piano è un flusso delimitato da due pareti piane parallele estese infinitamente, come mostrato in Figura 2.1. Consideriamo un flusso incompressibile e viscoso. Lungo le direzioni x e z (dette anche rispettivamente *streamwise* e *spanwise*) il canale si estende infinitamente mentre lungo la direzione y l'altezza del canale è $2h$ così da poter mettere il piano xz a metà e avere le pareti a $+h$ e $-h$. Lungo la direzione x agisce un gradiente di pressione uniforme e costante, $\nabla\langle p \rangle$ che muove il fluido.

Le equazioni di bilancio di questo caso sono le equazioni di Navier-Stokes per

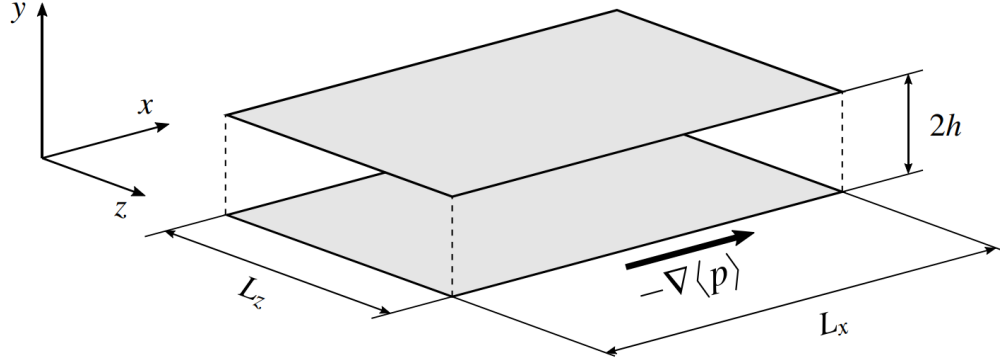


Figura 2.1: Geometria del canale piano.

flussi incompressibili, ovvero con la divergenza del vettore velocità nulla:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.1)$$

inoltre considerando un campo di temperatura omogeneo, l'equazione dell'energia si disaccoppia dall'equazione di continuità e di quantità di moto, ovvero:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + C_{u,i} \quad (2.3)$$

considerando la notazione tensoriale ($x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$). Il campo di pressione è $p(t, \mathbf{x})$, mentre $u_i(t, \mathbf{x})$ è l' i -esima componente del campo di velocità del fluido. Le proprietà del fluido sono rappresentate dalla densità ρ e dalla viscosità cinematica ν , inoltre il termine $C_{u,i}$ è legato ai termini di sorgente di quantità di moto. Le equazioni 2.1 e 2.2 esprimono entrambe la conservazione della massa per flussi incompressibili, la differenza fra le due è che la prima prende in considerazione il vettore velocità mentre la seconda considera le sue componenti. Questo si può scrivere anche attraverso la derivata materiale della densità:

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0. \quad (2.4)$$

La condizione di fluido incompressibile porta delle conseguenze anche sulla pressione. Questa infatti non viene considerata più come una variabile termodinamica, ma assume un ruolo puramente dinamico. La condizione di fluido incompressibile ha

conseguenze dirette sulla pressione: essa non è più trattata come variabile termodinamica, ma come grandezza puramente cinematica che si adatta istantaneamente per garantire la solenoidalità del campo di velocità. Non esiste quindi un'equazione evolutiva per la pressione. Infatti il campo di pressione viene determinato completamente risolvendo l'equazione di Poisson derivata applicando l'operatore divergenza all'equazione di quantità di moto. Inoltre il campo di pressione può essere scomposto in una parte media e le sue fluttuazioni:

$$p = \langle p \rangle + p' \quad (2.5)$$

dove le parentesi $\langle \cdot \rangle$ indicano il valore medio e l'apice $'$ indica le fluttuazioni. Con questa scomposizione l'equazione 2.3 della quantità di moto si può riscrivere in questo modo:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + C_{u,i} \quad (2.6)$$

ma considerando che il gradiente di pressione medio agisce solo in una direzione (quella in cui si muove il flusso, x) allora il primo termine a destra si può riscrivere come:

$$G = -\frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_1} \quad (2.7)$$

che è costante e uniforme e l'equazione sopra scritta diventa:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} = \frac{G}{\rho} \delta_{1i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + C_{u,i} \quad (2.8)$$

Il termine δ_{1i} ha il ruolo di far comparire l'effetto del gradiente di pressione, inglobato in G , lungo la direzione x e non lungo le altre.

Dal momento che lungo le direzioni x e z il canale si estende infinitamente si assume che le proprietà statistiche del flusso siano indipendenti da tali coordinate [16]. Questo si traduce nel fatto che le statistiche legate alla turbolenza non variano se ci si muove in tali direzioni, si dice perciò che il flusso presenta omogeneità statistica in direzione x e z . Perciò si può considerare un dominio finito di dimensioni: $[0, L_x] \times [-h, h] \times [0, L_z]$, in cui sulle pareti perpendicolari a y (che sono a tutti gli effetti delle pareti fisiche) si ha la condizione di aderenza, ovvero velocità nulla:

$$u_i(t, x, y = \pm h, z) = 0 \quad (2.9)$$

mentre sulle pareti perpendicolari a x e z si hanno condizioni al contorno periodiche

per la velocità e la pressione:

$$u_i(t, x = L_x, y, z) = u_i(t, x = 0, y, z) \quad (2.10)$$

$$u_i(t, x, y, z = L_z) = u_i(t, x, y, z = 0) \quad (2.11)$$

$$p'(t, x = L_z, y, z) = p'(t, x = 0, y, z) \quad (2.12)$$

$$p'(t, x, y, z = L_z) = p'(t, , y, z = 0) \quad (2.13)$$

Consideriamo le componenti del vettore velocità, $\mathbf{u} = (u, v, w)$. Dal momento che lungo z vengono imposte condizioni periodiche si ha che la terza componente della velocità mediata nello spazio e nel tempo è nulla: $\langle w \rangle = 0$, saranno presenti solo fluttuazioni di velocità. Infatti la velocità varia lungo x per via del gradiente di pressione, la cui intensità diminuisce all'aumentare di x a causa della viscosità, e lungo y a causa della presenza delle pareti che fa nascere lo strato limite. Inoltre allontanandosi dall'inizio del canale (alte x) anche la componente di velocità non dipende da x e il flusso si dice completamente sviluppato [16]. Inoltre gli esperimenti confermano la simmetria statistica rispetto al piano mediano (parallelo alle pareti) perciò le statistiche di (u, v, w) a una coordinata y sono uguali rispetto a $(u, -v, w)$ alla coordinata $-y$.

2.2 Scale caratteristiche e adimensionalizzazione

Le equazioni di bilancio per il flusso in un canale piano incomprimibile vengono adimensionalizzate mediante l'introduzione di opportune scale caratteristiche per lunghezza, velocità, massa e temperatura. Il flusso di canale piano, analogamente ad altri flussi confinati da pareti (wall-bounded flows), può essere caratterizzato impiegando due distinti insiemi di scale caratteristiche. Tale distinzione deriva dalla struttura stratificata della turbolenza confinata da pareti, la quale riflette la variazione della predominanza delle forze viscosi e inerziali in funzione della distanza dalla parete. Di conseguenza il bilancio della quantità di moto per il flusso medio in direzione x offre un chiaro quadro analitico per investigare l'interazione tra viscosità e inerzia, consentendo di identificare le scale più rappresentative in funzione della distanza dalla parete.

Mediante l'introduzione della decomposizione di Reynolds per i campi di velocità e pressione, riportata in (2.8), e la successiva mediazione dell'equazione risultante, si ottiene il bilancio della quantità di moto per il flusso medio nella direzione

longitudinale (streamwise):

$$\frac{d\langle u'v' \rangle}{dy} = \nu \frac{d^2 \langle u \rangle}{dy^2} - \frac{1}{\rho} \frac{d\langle p \rangle}{dx} \quad (2.14)$$

Se consideriamo gli sforzi di taglio totali:

$$\tau(y) = \rho \nu \frac{d\langle u \rangle}{dy} - \rho \langle u'v' \rangle \quad (2.15)$$

come la somma degli sforzi viscosi, $\rho \nu \frac{d\langle u \rangle}{dy}$, e degli sforzi di Reynolds, $\rho \langle u'v' \rangle$, possiamo riscrivere l'equazione come:

$$\frac{d\tau}{dy} = -G \quad (2.16)$$

dove G , visto in precedenza, è dato da $G = -d\langle p \rangle/dx$ ed è il gradiente medio di pressione che immette quantità di moto uniformemente su tutta la sezione trasversale del canale. La quantità di moto è trasportata lungo la direzione normale a parete dai flussi di quantità di moto turbolenti. In questo modo, è possibile identificare le regioni in cui prevalgono gli sforzi viscosi rispetto a quelli di Reynolds, o viceversa. Vicino a parete le forze viscosi sono molto più intense e si ha la regione chiamata *strato limite*. A mano a mano che ci si allontana da parete l'influenza delle forze d'inerzia aumenta progressivamente, mentre quella delle forze viscosi diventa trascurabile.

A parete, $y = 0$ in questo caso, si definiscono gli sforzi di attrito τ_w semplicemente come:

$$\tau(y = 0) \equiv \tau_w \equiv \rho \nu \left(\frac{d\langle u \rangle}{dy} \right)_{y=0} \quad (2.17)$$

che considerano, per la condizione di aderenza a parete, gli sforzi di Reynolds nulli. Si noti che vicino a parete, a causa dell'influenza della viscosità, i profili di velocità dipendono dal numero di Reynolds, al contrario dei *free shear flows* [16].

Integrando l'equazione (2.14) da parete a una generica distanza y si ottiene:

$$\langle u'v' \rangle = \nu \frac{d\langle u \rangle}{dy} - \frac{\tau_w}{\rho} + \frac{y}{\rho} G \quad (2.18)$$

Da questa equazione si può ricavare un parametro legato alla scala delle velocità, u_τ chiamato velocità d'attrito (*friction velocity*) e definito come:

$$u_\tau \equiv \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (2.19)$$

Sostituendolo nell'equazione (2.14) si ottiene:

$$\langle u'v' \rangle = \nu \frac{d\langle u \rangle}{dy} - u_\tau^2 + \frac{y}{\rho} G \quad (2.20)$$

Valutando questa equazione nel centro del canale, perciò per come sono stati visti finora gli sforzi, a $y = h$ si ha che:

$$u_\tau^2 = \frac{Gh}{\rho} \quad (2.21)$$

considerando che gli sforzi di taglio totali al centro del canale sono nulli per la simmetria del problema in questione. Sostituendo questo risultato di nuovo nell'equazione (2.14) si elimina il contributo del gradiente di pressione ottenendo:

$$\nu \frac{d\langle u \rangle}{dy} - \langle u'v' \rangle = u_\tau^2 \left(1 - \frac{y}{h} \right) \quad (2.22)$$

Ora si assume u_τ come scala caratteristica della velocità e h come scala caratteristica della lunghezza. Dividendo le varie quantità si arriva alla forma adimensionale:

$$\frac{1}{Re_\tau} \frac{d\left(\frac{\langle u \rangle}{u_\tau}\right)}{d\left(\frac{y}{h}\right)} - \frac{\langle u'v' \rangle}{u_\tau^2} = 1 - \frac{y}{h} \quad (2.23)$$

Si noti che gli sforzi di Reynolds dimensionalmente sono una velocità, perciò la denominazione *sforzi* non deve essere mal interpretata. Inoltre emerge un parametro di controllo fondamentale, il numero di Reynolds basato sulla velocità d'attrito:

$$Re_\tau = \frac{u_\tau h}{\nu} \quad (2.24)$$

Si noti che per $Re_\tau \rightarrow \infty$ il termine legato agli sforzi viscosi tende a zero, anche se questo non è mai valido vicino a parete. Perciò vicino a parete bisogna adottare una scala differente per assicurarsi che i termini viscosi, dominanti, non si annullino. Si introduce perciò la scala della lunghezza viscosa (*viscous length scale*):

$$\delta_\nu \equiv \nu \sqrt{\frac{\rho}{\tau_w}} = \frac{\nu}{u_\tau} \quad (2.25)$$

Questo parametro permette di riscrivere l'equazione (2.23):

$$\frac{d\left(\frac{\langle u \rangle}{u_\tau}\right)}{d\left(\frac{y}{\delta_\nu}\right)} - \frac{\langle u'v' \rangle}{u_\tau^2} = 1 - \frac{1}{Re_\tau} \frac{y}{\delta_\nu} \quad (2.26)$$

La distanza da parete normalizzata con la scala della lunghezza si chiama unità di parete (*wall unit*) ed è denotata con y^+ :

$$y^+ \equiv \frac{y}{\delta_\nu} = \frac{u_\tau y}{\nu} \quad (2.27)$$

Si noti che y^+ è simile al numero di Reynolds locale perciò ci si aspetta che la sua grandezza determini l'importanza relativa tra i processi viscosi e turbolenti. Si può dimostrare che l'andamento del contributo percentuale degli sforzi di Reynolds rispetto agli sforzi totali in funzione di y^+ è uguale al variare del numero di Reynolds [16]. Perciò si divide la regione vicino a parete in diverse sotto regioni: il sottostrato viscoso (*viscous sublayer*) per $y^+ < 5$, una zona di raccordo (*buffer layer*) per $5 < y^+ < 30$ e la regione logaritmica (*log-law region*) per $y^+ > 30$. In queste regioni i profili di velocità medi sono differenti ma al variare del numero di Reynolds sono tutti autosimili.

Ritornando all'equazione (2.26) e sostituendo la definizione di y^+ si ottiene:

$$\frac{d\left(\frac{\langle u \rangle}{u_\tau}\right)}{dy^+} - \frac{\langle u'v' \rangle}{u_\tau^2} = 1 - \frac{y^+}{Re_\tau} \quad (2.28)$$

che nel limite di $Re_\tau \rightarrow \infty$ si semplifica diventando:

$$\frac{d\left(\frac{\langle u \rangle}{u_\tau}\right)}{dy^+} - \frac{\langle u'v' \rangle}{u_\tau^2} = 1 \quad (2.29)$$

Questa scelta di scale offre una riscatatura appropriata vicino alla parete (quando $y^+ = O(1)$). Lontano dalla parete, però, dove $y^+ \rightarrow \infty$ e y/h rimane finito, non riesce a descrivere in modo adeguato né l'annullamento dello sforzo viscoso, né la variazione dello sforzo di taglio con l'aumentare della distanza dalla parete. Perciò sono necessari due sistemi distinti di parametri di scala, uno vicino a parete e uno lontano da essa. Nel primo caso per scalare la lunghezza si utilizzerà la lunghezza viscosa δ_ν e per la velocità la velocità d'attrito u_τ . Lontano da parete si cambia solo la scala della lunghezza e verrà utilizzata la semi altezza del canale h . Combinando la velocità e la lunghezza si ottiene anche la scala temporale, infatti considerando che velocità è spazio fratto tempo si conclude che la scala temporale è data da:

$$t = \frac{h}{u_\tau} \quad (2.30)$$

Considerando tutti questi parametri si procede all'adimensionalizzazione della

velocità, del tempo, della posizione e della pressione:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{h} \quad \tilde{t} = \frac{tu_\tau}{h} \quad \tilde{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{u_\tau} \quad \tilde{p} = \frac{p}{\rho u_\tau^2} \quad (2.31)$$

Riscalando tutte le variabili dell'equazione di quantità di moto si ottiene:

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial(\tilde{u}_i \tilde{u}_j)}{\partial \tilde{x}_j} = \frac{Gh}{\rho u_\tau^2} \delta_{1i} - \frac{\partial \tilde{p}'}{\partial \tilde{x}_i} + \frac{\nu}{u_\tau h} \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial^2 \tilde{x}_j^2} + \frac{h}{u_\tau^2} C_{u,i} \quad (2.32)$$

Considerando le definizioni di u_τ e Re_τ si può riscrivere l'equazione appena presentata come:

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial(\tilde{u}_i \tilde{u}_j)}{\partial \tilde{x}_j} = \delta_{1i} - \frac{\partial \tilde{p}'}{\partial \tilde{x}_i} + \frac{1}{Re_\tau} \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial^2 \tilde{x}_j^2} + \tilde{C}_{u,i} \quad (2.33)$$

dove l'ultimo termine è definito nel seguente modo:

$$\tilde{C}_{u,i} = \frac{h}{u_\tau^2} C_{u,i} \quad (2.34)$$

Concludendo, le equazioni del moto in forma adimensionale per un flusso incompressibile in un canale piano sono:

$$\frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial \tilde{x}_j} = 0 \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial(\tilde{u}_i \tilde{u}_j)}{\partial \tilde{x}_j} = \delta_{1i} - \frac{\partial \tilde{p}'}{\partial \tilde{x}_i} + \frac{1}{Re_\tau} \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial^2 \tilde{x}_j^2} + \tilde{C}_{u,i} \quad (2.36)$$

rispettivamente l'equazione di continuità, o bilancio della massa, e l'equazione di bilancio della quantità di moto. Nel seguito della trattazione si ometterà la tilde sulle quantità adimensionali per snellire la notazione.

2.2.1 Metodi di Simulazione Numerica (DNS, LES, RANS) per il Canale Piano

Esistono diversi tipi di simulazioni numeriche e si dividono principalmente per il grado di accuratezza della soluzione. Senza avere la pretesa di essere esaustivi, nel caso si rimanda il lettore a testi più specifici, le tre grandi categorie di simulazioni numeriche sono: simulazioni numeriche dirette (*Direct Numerical Simulation*, DNS), *Large Eddies Simulation* (LES) e *Reynolds-Averaged Navier-Stokes* (RANS).

Ognuna di queste è un compromesso tra velocità (o per meglio dire costo computazionale minore) e accuratezza. Quelle meno accurate sono le RANS che non risolvono direttamente le equazioni di Navier Stokes ma considerano tali equazioni mediate alla Reynolds. Questo semplifica notevolmente i calcoli tanto che tali simulazioni sono le prime ad essere effettuate in un progetto e hanno il solo scopo di fornire un'indicazione del campo di moto medio. Infatti mediando sia la velocità che la pressione nel tempo non possono dare nessuna indicazione sulla turbolenza poiché tutte le scale sono modellizzate.

Le simulazioni LES invece sono più accurate ma anche più onerose. Il loro schema parte dall'ipotesi che con un numero di Reynolds sufficientemente alto le scale più piccole della turbolenza siano statisticamente universali perciò le quantità del flusso possono essere scomposte in due contributi: uno su grande scala e uno su piccola scala. Il primo è calcolato in maniera esplicita mentre le scale più piccole sono calcolate tramite dei modelli. Le componenti della velocità vengono filtrate: $u_i(\vec{x}, t) = \hat{U}_i(\vec{x}, t) + u'_i(\vec{x}, t)$ e perciò divise in una componente risolta, $\hat{U}_i(\vec{x}, t)$, e una componente residua $u'_i(\vec{x}, t)$.

Il terzo tipo di simulazione, la DNS, è la più accurata possibile ma il costo computazionale è elevato. In questo caso le equazioni di Navier-Stokes sono risolte per il caso instazionario e tridimensionale e non viene effettuata nessuna operazione di filtraggio né di modellazione. Tutte le scale sono risolte. Le uniche approssimazioni introdotte da questo tipo di simulazioni sono quelle relative alla discretizzazione spaziale e temporale, il cui errore può essere diminuito a scapito del costo computazionale. Sono presenti dei limiti di applicabilità, in particolare riguardo alle dimensioni del dominio che devono essere più grandi della scala più grande turbolenta, alla spaziatura della griglia, che deve essere più piccola della scala di Kolmogorov e al time step temporale che deve rispettare la condizione di Courant: $\Delta t = \Delta x / (20k^{\frac{1}{2}})$.

Capitolo 3

Particelle in Turbolenza e Acustoforesi

Si procede ora a esaminare il moto di piccole particelle—solide o liquide—sospese in un fluido. Queste particelle possono essere per esempio fumi di combustione, particolato trasportato da correnti atmosferiche, goccioline d'acqua o micro-bolle. Consideriamo un numero N_p di particelle rigide, sferiche e identiche, con raggio r , densità ρ_p , sospese in un fluido con una densità ρ_f e una viscosità ν . L'ipotesi che consideriamo è che queste particelle siano più piccole della scala di Kolmogorov, $\eta = (\nu^3/\epsilon)^{1/4}$, così da vedere intorno a sé un flusso dominato dagli effetti viscosi. In queste condizioni le particelle sono rappresentate come punti materiali di massa m e possono essere descritte con un approccio Lagrangiano [5].

Per arrivare a una formulazione completa del moto di una particella sospesa in un fluido si parte considerando la posizione della p -esima particella $\mathbf{x}_p(t)$ la sua velocità è data dalla relazione:

$$\frac{d\mathbf{x}_p}{dt} = \mathbf{v}_p(t) \quad (3.1)$$

La dinamica della particella è data dal ben noto secondo principio della dinamica di Newton:

$$m_p \frac{d\mathbf{v}_p}{dt} = \mathbf{F} \quad (3.2)$$

che uguaglia la risultante delle forze applicate al corpo, $\mathbf{F}$, al prodotto tra la massa e la derivata del vettore velocità dell'oggetto. La massa di una sfera di raggio r è data da:

$$m_p = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_p \quad (3.3)$$

Le forze agenti su una particella sferica che si muove in un fluido viscoso sono il

frutto di diversi lavori nel corso della storia. Partendo da Stokes [17] e passando poi da Basset [18], Boussinesq [19] e Oseen [20] si identificano i vari contributi che agiscono su una particella: la resistenza di Stokes, la forza di massa aggiunta (*added mass*), la forza di Basset-Boussinesq (comunemente definita *history force*). L'equazione risultante viene storicamente chiamata equazione di Basset-Boussinesq-Oseen (BBO). Negli anni però questa equazione ha subito dei rimaneggiamenti. Sono state aggiunte dei contributi: la resistenza di pressione (*pressure drag force*) e la portanza (*lift force*).

3.1 Equazioni del moto

Si arriva infine alla formulazione più completa delle equazioni del moto di una particella leggera che è proposta da Maxey e Riley [21] e riportata in (3.4).

$$\begin{aligned}
 m_p \frac{dv_i}{dt} = & (m_p - m_f)g_i + m_f \frac{Du_i}{Dt} \Big|_{\mathbf{x}_p(t)} \\
 & - \frac{1}{2}m_f \frac{d}{dt} \left(v_i(t) - u_i(t, \mathbf{x}_p(t)) - \frac{1}{10}r^2 \nabla^2 u_i \Big|_{\mathbf{x}_p(t)} \right) \\
 & - 6\pi r \mu \left[v_i(t) - u_i(t, \mathbf{x}_p(t)) - \frac{1}{6}r^2 \nabla^2 u_i \Big|_{\mathbf{x}_p(t)} \right] \\
 & - 6\pi r^2 \mu \int_0^t d\tau \left(\frac{d/d\tau \left\{ v_i(\tau) - u_i(\tau, \mathbf{x}_p(\tau)) - \frac{1}{6}r^2 \nabla^2 u_i \Big|_{\mathbf{x}_p(\tau)} \right\}}{\sqrt{\pi\nu(t-\tau)}} \right)
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

In questa equazione u_i rappresenta l' i -esima componente di velocità del fluido e v_i l' i -esima componente di velocità della particella. I termini dopo l'uguale sono, in ordine: spinta netta di galleggiamento, forza dovuta al campo di moto indisturbato, effetto della massa aggiunta, resistenza di Stokes e l'ultimo addendo è la forza di Basset.

Il primo addendo:

$$F_G = (m_p - m_f)g = m_p \left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_p} \right) g \tag{3.5}$$

è la spinta netta di galleggiamento, tiene conto della differenza tra la forza peso gravitazionale della particella e la spinta esercitata dal fluido. Nel caso in cui le densità del fluido e della particella siano uguali allora questa spinta sarebbe nulla.

Il secondo addendo:

$$F_{PD} = m_f \frac{Du_i}{Dt} \Big|_{\mathbf{x}_p(t)} \quad (3.6)$$

è la forza generata dal campo di moto indisturbato. Tiene conto delle accelerazioni locali (vicino alla particella) del fluido che producono un gradiente di pressione e quindi una forza.

Il terzo addendo:

$$F_{AM} = -\frac{1}{2}m_f \frac{d}{dt} \left(v_i(t) - u_i(t, \mathbf{x}_p(t)) - \frac{1}{10}r^2 \nabla^2 u_i \Big|_{\mathbf{x}_p(t)} \right) \quad (3.7)$$

è la forza di massa aggiunta (*added mass* o *virtual mass*) che considera il trascinamento del fluido da parte della particella che accelera. La forza che la particella esercita sul fluido per accelerarlo è intuitivamente pari alla massa del fluido accelerato moltiplicato per l'accelerazione, sicché la forza sulla particella è proporzionale all'opposto del prodotto della massa del fluido accelerato per l'accelerazione della particella. Viene considerata l'accelerazione relativa della particella perché se questa fosse nulla allora non ci sarebbe movimento relativo tra la particella e il fluido e la forza sarebbe nulla. Il termine $r^2 \nabla^2 u_i$ tiene conto della eventuale non uniformità del flusso.

Il quarto addendo:

$$F_{SD} = -6\pi r \mu \left[v_i(t) - u_i(t, \mathbf{x}_p(t)) - \frac{1}{6}r^2 \nabla^2 u_i \Big|_{\mathbf{x}_p(t)} \right] \quad (3.8)$$

è la resistenza di Stokes, ovvero la forza che si oppone al moto dovuta alla presenza della viscosità. Originariamente la forza veniva espressa come:

$$F_{SD} = 6\pi r \mu [u_i(t, \mathbf{x}_p(t)) - v_i(t)] \quad (3.9)$$

tuttavia in molti studi tale forza viene corretta con una relazione empirica proposta da Schiller e Naumann [22] che tiene in conto degli effetti di un numero di Reynolds della particella finito:

$$F_{SD} = 6\pi r \mu [u_i(t, \mathbf{x}_p(t)) - v_i(t)] \left(1 + 0.15 Re_p^{0.687} \right) \quad (3.10)$$

dove il Reynolds della particella è espresso come:

$$Re_p = \frac{2r |\mathbf{u}(\mathbf{x}_p) - \mathbf{v}_p|}{\nu} \quad (3.11)$$

Il termine correttivo verrà indicato con $\Phi(Re_p)$.

Il quinto addendo:

$$F_{BH} = -6\pi r^2 \mu \int_0^t d\tau \left(\frac{d/d\tau \left\{ v_i(\tau) - u_i(\tau, \mathbf{x}_p(\tau) - \frac{1}{6} r^2 \nabla^2 u_i|_{\mathbf{x}_p(t)} \right\}}{\sqrt{\pi \nu (t - \tau)}} \right) \quad (3.12)$$

è la forza di Basset-Boussinesq legata alla storia della particella ovvero all'evoluzione della velocità negli istanti precedenti. Essa rappresenta una resistenza viscosa addizionale che nasce a causa della diffusione instazionaria della vorticità. Include una convoluzione integrale sull'intero dominio temporale della particella $(0, t]$ che rappresenta l'effetto legato alla memoria della particella ovvero tiene conto dell'evoluzione del moto.

Sono presenti inoltre altre due forze chiamate la forza di Magnus [23] e la forza di Saffman [24]. La prima nasce grazie alla rotazione della particella su un proprio asse ed è perpendicolare a entrambe le velocità (di traslazione e rotazione). Questa solitamente è trascurata poiché bisognerebbe tenere conto della rotazione della particella e risolvere ulteriori equazioni per la sua velocità angolare. La forza di Saffman invece nasce dalla presenza di gradienti di velocità nel fluido circostante che producono una distribuzione asimmetrica di pressione attorno alla particella. È stato dimostrato che per particelle sufficientemente piccole, ovvero con un diametro inferiore all'unità viscosa di parete, questa forza produce un effetto trascurabile [25]. Perciò in questo caso la forza di Saffman viene trascurata.

3.2 Rilevanza delle forze

Come accennato nel capitolo 1 il numero di Stokes si può definire come:

$$St = \frac{\tau_p}{\tau_f} \quad (3.13)$$

dove τ_f è un tempo caratteristico del flusso, come ad esempio il tempo scala di Kolmogorov. Il termine a numeratore invece è:

$$\tau_p = \frac{2}{9} \frac{\rho_p}{\rho_f} \frac{r^2}{\nu} \quad (3.14)$$

e rappresenta un tempo caratteristico della dinamica della particella, detto *tempo di rilassamento*. Come discusso da Balachandar [26] il numero di Stokes inteso come rapporti tra scale temporali, permette di distinguere diversi regimi di moto. Se si considerano particelle il cui tempo di risposta è minore del più piccolo tempo

caratteristico del fluido ($\tau_p < \tau_f$) allora la particella risponde a ogni *eddy* (ovvero struttura vorticoso) e segue fedelmente il moto del fluido. Nel caso limite in cui $St \rightarrow 0$ allora si dice che la particella agisce da *tracciante*.

Quando il tempo di risposta della particella è maggiore della scala di Kolmogorov (quindi della scala temporale più piccola) ma minore del tempo scala integrale ($\tau_\eta < \tau_p < \tau_L$) allora esiste un tempo specifico, τ_f^* , al di sotto del quale la particella non segue gli eddy. La struttura vorticoso più piccola nella quale la particella segue bene il flusso è quella con il tempo caratteristico $\tau_f^* = \tau_p$. Per $\tau_f^* = \tau_f$ le dinamiche del moto della particella sono dominate dagli effetti inerziali e nascono perciò fenomeni come il *clustering* e la concentrazione preferenziale. Infine se $\tau_p > \tau_L$ allora la particella non risponde a nessun eddy e il moto è detto balistico poiché diventa quasi indipendente dal moto del fluido circostante.

Per quanto riguarda le altre forze –oltre alla resistenza di Stokes– non si trova un singolo parametro che permetta la divisione in campi di moto differenti ma bisogna considerare diversi aspetti come il rapporto di densità tra particella e fluido e la dimensione della particella [9, 27, 28].

In particolare Armenio e Fiorotto [9] hanno condotto DNS su un flusso in un canale carico di particelle esaminando l'effetto del rapporto di densità, facendolo variare tra $\rho_p/\rho_f = 2.65$ a 2650. Nonostante il basso numero di particelle ($N_p = 2048$), le simulazioni mostrano che anche se il termine legato alla storia della particella (la forza di Basset-History, indicata con BH) è più piccolo della resistenza di Stokes rimane comunque non trascurabile nell'intero intervallo di rapporti di densità considerato. In più il contributo della resistenza di pressione diventa significativo quando tale rapporto si avvicina all'unità, mentre la forza di massa aggiunta è trascurabile in tutti i casi.

Considerando turbolenza omogenea e isotropa, è stato dimostrato che la forza di Basset-History influisce significativamente sulla dinamica delle particelle portando a una riduzione del fenomeno del clustering [29]. L'importanza della forza di Basset-History, anche con rapporti tra le densità elevati, è sostenuta da Daitche [27], che dimostrò come l'importanza di questa forza rispetto alla resistenza di Stokes non è governata da rapporto di densità ma dalla dimensione della particella. Nello specifico è stato mostrato che l'intensità dell'accelerazione dovuta al termine di Basset, $|a_{BH}|$, rispetto all'accelerazione di Stokes, $|a_{SD}|$, si allinea con la seguente legge di scala:

$$\frac{|a_{BH}|}{|a_{SD}|} \approx \alpha \frac{r}{\eta} \quad (3.15)$$

dove r è il raggio della particella, η è la scala della lunghezza di Kolmogorov e α è

una costante circa unitaria.

3.3 Forza di Radiazione Acustica

Quando una particella è investita da un'onda acustica emergono due contributi di forza aggiuntivi: (i) la forza di radiazione acustica, dovuta all'assorbimento e allo *scattering* (dispersione) dell'onda da parte della particella (come illustrato in Figura 3.1), e (ii) la forza di trascinamento, ossia la resistenza di Stokes esercitata dal flusso indotto dall'onda attorno alla particella.

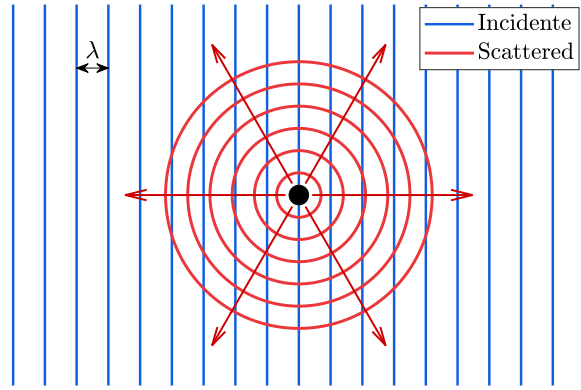


Figura 3.1: Scattering (in rosso) prodotto da una particella sferica investita da un'onda acustica piana (in blu). La quantità λ denota la lunghezza d'onda.

Nel seguito consideriamo una particella sferica di raggio r (diametro $d = 2r$), in generale comprimibile, sospesa in un fluido viscoso caratterizzato da viscosità cinematica ν e soggetta a un campo acustico di lunghezza d'onda λ molto maggiore del raggio, $\lambda \gg r$. In accordo con la letteratura di riferimento (Settnes e Bruus [13]), per particelle sufficientemente piccole il contributo di trascinamento può essere trascurato rispetto alla forza di radiazione acustica; ci concentriamo pertanto su quest'ultima. Assumiamo inoltre che lo spessore di penetrazione viscosa dell'onda (o lunghezza di diffusione viscosa) $\delta = \sqrt{2\nu/\omega}$ – con ω frequenza angolare – sia molto più piccolo della lunghezza d'onda, cioè $\delta \ll \lambda$. In questo modo gli effetti viscosi hanno un ruolo significativo nella determinazione della forza di radiazione, poiché lo spessore dello strato limite acustico attorno alla particella è paragonabile o maggiore della dimensione della particella stessa. In questo regime, infatti, una trattazione che trascuri la viscosità, come quella riportata in Gor'kov [30], non può essere applicata [13].

Sotto queste ipotesi, Settnes e Bruus [13] hanno derivato l'espressione della forza di radiazione acustica basandosi sullo sviluppo perturbativo al secondo ordine delle equazioni di Navier–Stokes in presenza di un campo acustico. In tale approccio, le variabili di stato (pressione, velocità, densità) vengono espanse come serie nell'ampiezza del campo acustico: i termini di primo ordine descrivono il campo acustico oscillatorio, mentre i termini di secondo ordine rappresentano effetti non lineari mediati nel tempo, quali la forza di radiazione acustica e la resistenza di Stokes del flusso indotto. Questo metodo consente così di separare il contributo puramente oscillatorio del suono (che non produce spostamento netto) da quello medio e non lineare, responsabile invece della comparsa della forza di radiazione acustica e dello flusso del fluido attorno alla particella, che ne determinano la migrazione (*acustoforesi*). Seguendo l'approccio non viscoso introdotto da Gor'kov [30], la forza di radiazione acustica viene inizialmente formulata in termini di scattering dell'onda acustica incidente nell'approssimazione di campo lontano, per poi essere estesa alla regione di campo vicino attorno alla particella [13]. Infatti, raccordando la soluzione non viscosa con quella del problema viscoso nello strato limite acustico che circonda la particella (come illustrato in Figura 3.2), Settnes e Bruus [13] hanno derivato un'espressione analitica della forza che include in modo coerente gli effetti viscosi.

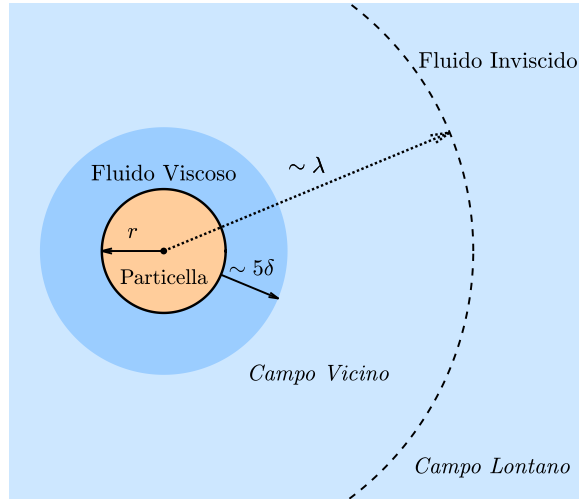


Figura 3.2: Schema della scomposizione del campo acustico in prossimità di una particella sferica di raggio r . La particella è circondata da uno strato limite viscoso di spessore caratteristico $\sim 5\delta$, all'interno del quale il fluido è trattato come viscoso. All'esterno dello strato, il fluido è assunto non viscoso. Si distinguono inoltre il *campo vicino* e il *campo lontano*, separati da una distanza dell'ordine della lunghezza d'onda acustica λ , dove si è assunto che $\lambda \gg r$ e $\lambda \gg \delta$.

La forza di radiazione acustica può essere espressa come segue [13]:

$$\mathbf{F}^{rad} = -\nabla U^{rad} \quad (3.16)$$

dove U^{rad} è il potenziale della forza che, nel caso particolare di onda piana stazionaria, assume la seguente forma:

$$U^{rad} = \frac{4\pi}{3} r^3 \left[\Re[f_1] \frac{1}{2} \kappa_f \langle |p_{in}|^2 \rangle - \Re[f_2] \frac{3}{4} \rho_f \langle |v_{in}|^2 \rangle \right]. \quad (3.17)$$

In quest'ultima espressione $\kappa_f = 1/(\rho_f c_f^2)$ è il fattore di comprimibilità del fluido (con ρ_f densità e c_f velocità del suono), le parentesi $\langle \cdot \rangle$ indicano la media su un periodo dell'onda, $\Re[\cdot]$ denota la parte reale di un numero complesso, mentre p_{in} e v_{in} rappresentano rispettivamente la pressione e la velocità dell'onda incidente. I fattori f_1 e f_2 sono definiti coefficienti di scattering. In particolare, il coefficiente f_1 è associato allo scattering dovuto alla comprimibilità della particella. Una particella comprimibile, infatti, quando viene investita dall'onda incidente, si comporta come una sorgente acustica di tipo monopolo: la variazione del suo volume genera un'onda secondaria che si irradia isotropicamente nello spazio circostante (come mostrato nella Figura 3.3a), analogamente a quanto accade per una sorgente puntiforme. Coerentemente, il fattore f_1 è definito come:

$$f_1(\tilde{\kappa}) = 1 - \tilde{\kappa}, \quad (3.18)$$

con $\tilde{\kappa} = \kappa_p/\kappa_f$, dove κ_p è detto fattore di comprimibilità della particella.

Il secondo coefficiente di scattering, f_2 , è invece associato al moto oscillatorio traslazionale della particella indotto dall'onda incidente ed è legato alla viscosità del fluido. In questo caso, la particella non agisce come una sorgente monopolare, bensì come una sorgente dipolare, poiché il suo movimento genera un campo di velocità che presenta una struttura dipolare (come in Figura 3.3b). L'intensità di tale dipolo acustico è direttamente legata alla differenza di densità tra la particella e il fluido circostante e, a differenza del caso monopolare, risente in maniera significativa degli effetti viscosi che si instaurano nello strato limite attorno alla particella. Pertanto, mentre f_1 descrive lo scattering dovuto alla comprimibilità della particella, il coefficiente f_2 caratterizza il contributo dipolare dovuto alla sua traslazione e al conseguente accoppiamento con la viscosità del fluido. La funzione f_2 è in particolare definita come:

$$f_2(\tilde{\rho}, \tilde{\delta}) = \frac{2[1 - \gamma(\tilde{\delta})](\tilde{\rho} - 1)}{2\tilde{\rho} + 1 - 3\gamma(\tilde{\delta})}, \quad (3.19)$$

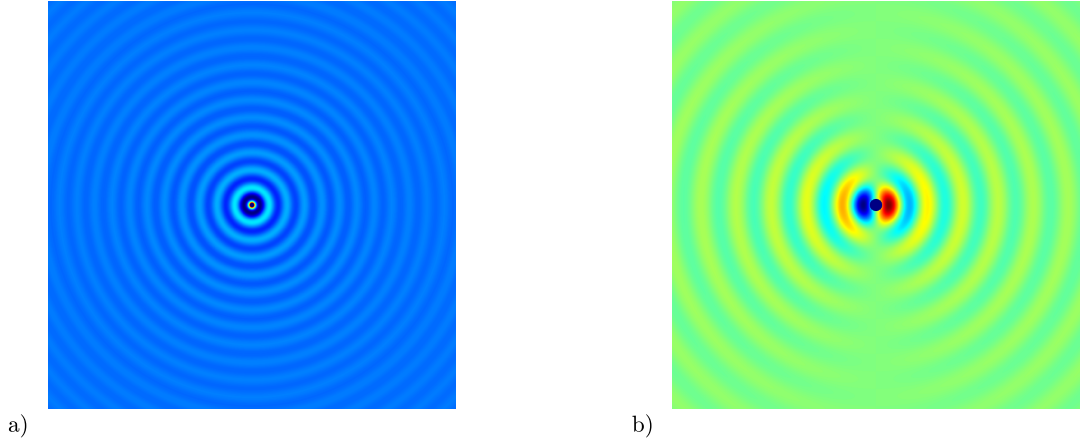


Figura 3.3: Confronto qualitativo tra i campi di radiazione acustica: (a) monopolo e (b) dipolo.

con $\tilde{\rho} = \rho_p / \rho_f$, $\tilde{\delta} = \delta / r$ e γ definita come segue:

$$\gamma(\tilde{\delta}) = -\frac{3}{2} \Re [1 + i(1 + \tilde{\delta})] \tilde{\delta}. \quad (3.20)$$

3.3.1 Onda Stazionaria nel Canale Piano e Forza Acustica sulla Particella

Si consideri un'onda acustica in un canale piano generata dall'oscillazione di una delle due pareti nella direzione perpendicolare alla parete stessa, con frequenza ω (la configurazione esaminata è schematizzata in Figura 3.4). Se tale oscillazione avviene in maniera rigida e con un periodo, $T = 2\pi/\omega$, molto più piccolo della più piccola scala temporale caratteristica del flusso turbolento nel canale, allora i due fenomeni possono essere considerati disaccoppiati. In questo caso, infatti, la turbolenza evolve su scale temporali relativamente lunghe, mentre l'onda acustica costituisce una perturbazione ad alta frequenza che non riesce a influenzare significativamente la dinamica istantanea degli eddies turbolenti. Viceversa, il campo turbolento, variando su tempi molto più lunghi rispetto al periodo acustico, può essere assunto come “congelato” rispetto all'onda sonora. Questa separazione di scale consente di trattare l'oscillazione della parete come una forzante armonica indipendente, sovrapposta al moto turbolento senza diretta interazione.

In prossimità della parete oscillante, si genera un disturbo armonico del campo di pressione che ha la forma:

$$p_1 = p_A e^{i\omega t} \quad (3.21)$$

con p_A ampiezza dell'onda. Si assume che le velocità del fluido siano significati-

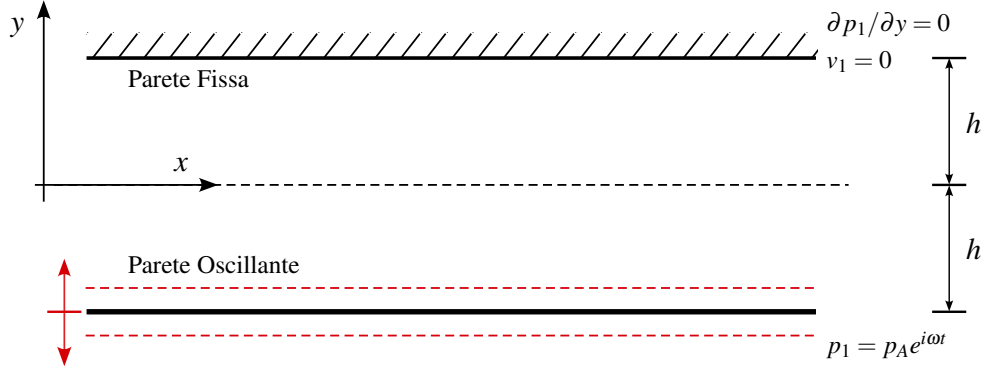


Figura 3.4: Schema bidimensionale del canale piano confinato da due pareti: la parete superiore è fissa, mentre la parete inferiore oscilla rigidamente con frequenza ω , imponendo una condizione di pressione armonica $p_1 = p_A e^{i\omega t}$. La distanza nominale tra le pareti è $2h$.

vamente più piccole della velocità del suono, così che le perturbazioni del campo di pressione (p_1) e del campo di velocità normale alla parete (v_1) possano essere descritte dall'equazione di d'Alembert unidimensionale:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} p_1(t, y) = c_0^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} p_1(t, y) \quad (3.22)$$

e

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} v_1(t, y) = c_0^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} v_1(t, y). \quad (3.23)$$

3.3.2 Disturbo di Pressione

Ci concentriamo per il momento sull'equazione del disturbo di pressione (3.22). Per essa le condizioni al contorno sono:

$$\frac{\partial p_1}{\partial y}(t, h) = 0 \quad (3.24)$$

per quanto riguarda la parete fissa e

$$p_1(t, -h) = p_A e^{i\omega t} \quad (3.25)$$

in corrispondenza della parete oscillante.

Per risolvere l'equazione (3.22), si può adottare la tecnica della separazione delle variabili, che può essere applicata con successo a svariati altri problemi descritti da equazioni alle derivate parziali lineari omogenee. Il metodo consiste nel cercare soluzioni della (3.22) che siano della forma

$$p_1(t, y) = f(t)g(y), \quad (3.26)$$

dove f è una funzione del solo tempo t e g è una funzione della sola coordinata y . Sostituendo questa espressione nella (3.22) si ottiene

$$g(y) \ddot{f}(t) = c_0^2 f(t) g''(y). \quad (3.27)$$

Dividendo entrambi i membri per $f(t)g(y)$, si ricava

$$\frac{\ddot{f}(t)}{f(t)} = c_0^2 \frac{g''(y)}{g(y)}. \quad (3.28)$$

Poiché il primo membro dipende unicamente dal tempo e il secondo unicamente dalla variabile spaziale y , entrambi devono essere uguali ad una costante di separazione, che indichiamo con $-\omega^2$. Si ottengono quindi due equazioni ordinarie distinte:

$$\ddot{f}(t) + \omega^2 f(t) = 0, \quad (3.29)$$

$$g''(y) + k^2 g(y) = 0, \quad k = \frac{\omega}{c_0}. \quad (3.30)$$

La prima equazione differenziale ha come soluzione generale

$$f(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}, \quad (3.31)$$

mentre la seconda equazione ammette come soluzione generale

$$g(y) = A \cos(ky) + B \sin(ky). \quad (3.32)$$

Combinando i due risultati, la soluzione generale per il disturbo di pressione assume la forma

$$p_1(t, y) = [A \cos(ky) + B \sin(ky)] [C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}]. \quad (3.33)$$

Dato che l'eccitazione esterna è armonica, è sufficiente considerare la dipendenza temporale proporzionale a $e^{i\omega t}$, ottenendo quindi

$$p_1(t, y) = \hat{p}(y) e^{i\omega t} \quad (3.34)$$

con

$$\hat{p}(y) = A \cos(ky) + B \sin(ky), \quad (3.35)$$

o alternativamente:

$$\hat{p}(y) = C \cos(k(y + \alpha)). \quad (3.36)$$

La condizione (3.25) sulla parete fissa, posta in $y = h$, è

$$\frac{\partial p_1}{\partial y}(t, h) = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{p}'(h) = 0. \quad (3.37)$$

Calcolando la derivata della soluzione proposta e imponendo questa condizione si ricava:

$$\hat{p}'(h) = -Ck \sin(k(h + \alpha)) = 0. \quad (3.38)$$

Pertanto deve risultare

$$\sin(k(h + \alpha)) = 0 \quad \Rightarrow \quad k(h + \alpha) = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (3.39)$$

Se si sceglie in particolare $\alpha = h$, si ottiene

$$k(2h) = n\pi \quad \Rightarrow \quad k = \frac{n\pi}{2h}. \quad (3.40)$$

Pertanto il valore $\alpha = h$ è ammissibile, ma solo se il numero d'onda k assume i valori *quantizzati*:

$$k_n = \frac{n\pi}{2h}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (3.41)$$

Imponendo la condizione al contorno (3.24) in $y = -h$, si ha invece

$$\hat{p}(-h) = C \cos(k(-h + h)) = C \cos(0) = C, \quad (3.42)$$

e dal momento che

$$p_1(t, -h) = p_A e^{i\omega t}, \quad (3.43)$$

si ricava immediatamente che

$$C = p_A. \quad (3.44)$$

In conclusione, la soluzione finale per il disturbo di pressione può essere scritta come

$$p_1(t, y) = p_A e^{i\omega t} \cos(k_n(y + h)), \quad \text{con } k = \frac{n\pi}{2h}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (3.45)$$

Disturbo di Velocità Normale alla Parete

Per ottenere l'espressione della perturbazione del campo di velocità, v_1 , si considera l'equazione di continuità linearizzata per l'onda unidimensionale:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_f \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0. \quad (3.46)$$

Essa pone in relazione le fluttuazioni di densità ρ_1 al campo di velocità perturbato v_1 , tramite la densità media nel fluido ρ_f . Introducendo la relazione di stato lineare $\rho_1 = p_1/c_f^2$ (con c_f velocità del suono del fluido), si ottiene

$$\frac{1}{\rho_f c_f^2} \frac{\partial p_1}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0. \quad (3.47)$$

In questo modo il campo di velocità perturbato può essere espresso in termini del gradiente del campo di pressione e può essere direttamente ottenuto dalla soluzione di pressione precedentemente ricavata:

$$p_1(t, y) = p_A \cos(k(y + h)) e^{i\omega t}. \quad (3.48)$$

Infatti, derivando p_1 rispetto al tempo si trova

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = i\omega p_A \cos(k(y + h)) e^{i\omega t}, \quad (3.49)$$

che sostituita nella (3.47) fornisce

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} = -\frac{i\omega}{\rho_f c_f^2} p_A \cos(k(y + h)) e^{i\omega t}. \quad (3.50)$$

Utilizzando la relazione di dispersione $\omega = kc_f$, si ha

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} = -\frac{ik}{\rho_f c_f} p_A \cos(k(y + h)) e^{i\omega t}. \quad (3.51)$$

Integrando rispetto alla variabile spaziale y risulta

$$v_1(t, y) = -\frac{i}{\rho_f c_f} p_A \sin(k(y + h)) e^{i\omega t} + C(t). \quad (3.52)$$

Il termine $C(t)$ rappresenta una velocità uniforme; poiché il moto medio del fluido è nullo nella direzione perpendicolare alla parete, si pone $C(t) = 0$. La soluzione

finale per la velocità perturbata assume quindi la forma

$$v_1(t, y) = -\frac{ip_A}{\rho_f c_f} \sin(k(y+h)) e^{i\omega t}. \quad (3.53)$$

Forza di Radiazione Acustica Risultante

A partire dalla soluzione (3.45) ottenuta per il disturbo di pressione, la forma fisica reale del disturbo si può scrivere come

$$p_1(t, y) = p_A \cos(\omega t) \cos(k_n(y+h)), \quad (3.54)$$

e il modulo quadro del campo di pressione risulta quindi essere

$$|p_1(t, y)|^2 = p_A^2 \cos^2(\omega t) \cos^2(k_n(y+h)). \quad (3.55)$$

Per determinare la quantità utile all'espressione del potenziale U^{rad} della forza acustica su una particella sferica, espressa dalla (3.17), si calcola la media temporale del modulo quadro (3.55) su un periodo $T = 2\pi/\omega$:

$$\langle |p_1|^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T p_A^2 \cos^2(\omega t) \cos^2(k_n(y+h)) dt. \quad (3.56)$$

Il termine spaziale $\cos^2(k_n(y+h))$ non dipende dal tempo e si porta fuori dall'integrale, mentre la media temporale di $\cos^2(\omega t)$ su un periodo vale 1/2. Si ottiene quindi

$$\langle |p_1|^2 \rangle = \frac{1}{2} p_A^2 \cos^2(k_n(y+h)). \quad (3.57)$$

Questa relazione fornisce il contributo medio del campo di pressione al termine radiante.

Il modulo quadro della perturbazione della velocità si può invece ottenere dalla (3.53):

$$|v_1(t, y)|^2 = \left(\frac{p_A}{\rho_f c_f} \right)^2 \sin^2(k(y+h)). \quad (3.58)$$

Mediando sul periodo temporale dell'onda, si ottiene analogamente:

$$\langle |v_1|^2 \rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{p_A}{\rho_f c_f} \right)^2 \sin^2(k(y+h)). \quad (3.59)$$

Sostituendo la media temporale del modulo quadro di pressione e velocità nell'equazione (3.17) per U^{rad} si ottiene:

$$U^{rad} = \frac{4\pi}{3} r^3 \left[\frac{1}{4} \Re[f_1] \kappa_f p_A^2 \cos^2(k_n(y+h)) - \frac{3}{8} \Re[f_2] \kappa_f p_A^2 \sin^2(k_n(y+h)) \right]. \quad (3.60)$$

Derivando rispetto a y e cambiando il segno, si ottiene la forza di radiazione acustica esercitata dall'onda stazionaria su una particella sferica:

$$\mathbf{F}^{rad} = -\frac{\partial U^{rad}}{\partial y} \mathbf{e}_y = \pi r^3 \left[\frac{1}{3} \Re[f_1] + \frac{1}{4} \Re[f_2] \right] \frac{p_A^2}{\rho_f c_f^2} k_n \sin(2k_n(y+h)) \mathbf{e}_y \quad (3.61)$$

Introducendo la definizione di densità di energia acustica [13]:

$$E_{ac} = \frac{1}{4} \frac{p_A^2}{\rho_f c_f^2} = \frac{1}{4} \kappa_f p_A^2, \quad (3.62)$$

l'espressione della forza diventa:

$$\mathbf{F}^{rad} = 4\pi r^3 \left[\frac{1}{3} \Re[f_1] + \frac{1}{4} \Re[f_2] \right] E_{ac} k_n \sin(2k_n(y+h)) \mathbf{e}_y, \quad (3.63)$$

con

$$f_1(\tilde{\kappa}) = 1 - \tilde{\kappa}, \quad (3.64)$$

$$f_2(\tilde{\rho}, \tilde{\delta}) = \frac{2[1 - \gamma(\tilde{\delta})](\tilde{\rho} - 1)}{2\tilde{\rho} + 1 - 3\gamma(\tilde{\delta})}, \quad (3.65)$$

e

$$\gamma(\tilde{\delta}) = -\frac{3}{2} \Re[1 + i(1 + \tilde{\delta})] \tilde{\delta}. \quad (3.66)$$

Si noti che nel caso di particella rigida (incomprimibile), $f_1 = 1$.

3.3.3 Inclusione della forza acustica radiativa nell'equazione di Maxey-Riley e Adimensionalizzazione

Aggiungendo la componente della forza acustica radiativa appena trovata nell'equazione di Maxey-Riley (3.4) si ottiene:

$$\begin{aligned}
 m_p \frac{dv_i}{dt} = & (m_p - m_f)g_i + m_f \left. \frac{Du_i}{Dt} \right|_{\mathbf{x}_p(t)} \\
 & - \frac{1}{2} m_f \frac{d}{dt} \left(v_i(t) - u_i(t, \mathbf{x}_p(t)) - \frac{1}{10} r^2 \nabla^2 u_i \Big|_{\mathbf{x}_p(t)} \right) \\
 & - 6\pi r \mu \left[v_i(t) - u_i(t, \mathbf{x}_p(t)) - \frac{1}{6} r^2 \nabla^2 u_i \Big|_{\mathbf{x}_p(t)} \right] \\
 & - 6\pi r^2 \mu \int_0^t d\tau \left(\frac{d/d\tau \left\{ v_i(\tau) - u_i(\tau, \mathbf{x}_p(\tau)) - \frac{1}{6} r^2 \nabla^2 u_i \Big|_{\mathbf{x}_p(\tau)} \right\}}{\sqrt{\pi \nu(t - \tau)}} \right) \\
 & + 4\pi r^3 \left[\frac{1}{3} \Re[f_1] + \frac{1}{4} \Re[f_2] \right] E_{ac} k_n \sin(2k_n(y + h)) \delta_{2,i}
 \end{aligned} \tag{3.67}$$

che schematicamente si può vedere in questo modo:

$$m_p \frac{du_p}{dt} = F_G + F_{SD} + F_{AM} + F_{PD} + F_{BH} + F_R \tag{3.68}$$

dove il pedice G sta per galleggiamento, SD sta per Stokes Drag (resistenza di Stokes), AM sta per added mass (massa aggiunta), PD sta per pressure drag (resistenza di pressione), BH sta per Basset-History, R sta per radiativa.

Si procede ora con l'adimensionalizzazione della forza acustica. Per l'adimensionalizzazione degli altri contributi si rimanda a Zaza [31]. Come già introdotto in precedenza, i parametri di scala utilizzati come riferimento sono: h per le lunghezze, u_τ per le velocità, ρ_f per la densità e h/u_τ per i tempi. Si ottengono perciò:

$$\underline{x} = \tilde{x}h \quad \underline{u} = \tilde{u}u_\tau \quad t = \tilde{t} \frac{h}{u_\tau} \quad \rho_p = \tilde{\rho}_p \rho_f \tag{3.69}$$

con i termini adimensionali soprassegnati dalla tilde. Perciò la densità di energia acustica diventa:

$$E_{ac} = \rho_f u_\tau^2 \tilde{E}_{ac} \tag{3.70}$$

poiché ha le dimensioni di una massa per unità di lunghezza e di tempo al quadrato. Di conseguenza, l'accelerazione della particella dovuta alla forza radiativa in forma

adimensionale diventa:

$$\frac{F^{rad}}{m_p} \frac{h}{u_\tau^2} = \frac{1}{\tilde{\rho}_p} \tilde{E}_{ac} \left(1 + \frac{3}{4} \Re[f_2] \right) \tilde{k}_n \sin(2\tilde{k}_n(\tilde{y} + 1)), \quad (3.71)$$

o alternativamente, in forma compatta:

$$\tilde{a}^{rad} = B \sin(2\tilde{k}_n(\tilde{y}_p + 1)), \quad (3.72)$$

dove il fattore B è definito come segue:

$$B = \frac{\tilde{E}_{ac}}{\tilde{\rho}_p} \left(1 + \frac{3}{4} \Re[f_2] \right) \tilde{k}_n. \quad (3.73)$$

Nell'equazione (3.72) la quantità $\tilde{y}_p$ rappresenta la seconda componente (coordinata normale alla parete) della posizione della particella, indicando che questa forza aggiuntiva è solo funzione della distanza dalla parete come mostrato in Figura 3.5.

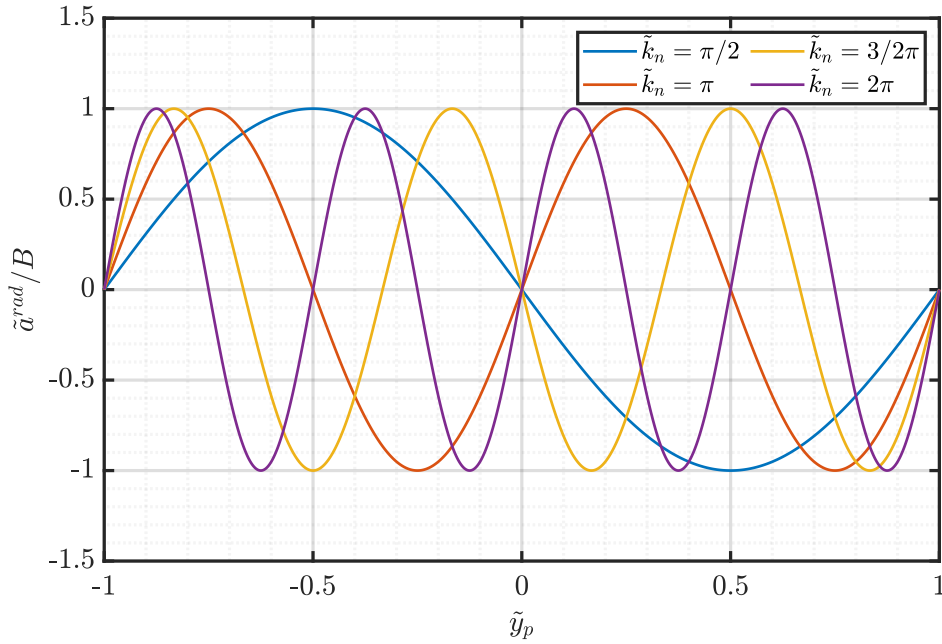


Figura 3.5: Andamento dell'accelerazione acustoforetica adimensionale normalizzata rispetto a B , in funzione della posizione trasversale adimensionale $\tilde{y}_p$. Sono mostrati i diversi modi stazionari ($n = 1, 2, 3, 4$) corrispondenti a $\tilde{k}_n = \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$.

Considerando solo la forza acustica, si osserva che i punti di equilibrio per le particelle corrispondono agli zeri della forza, ossia alle posizioni in cui

$$\sin(2\tilde{k}_n(\tilde{y}_p + 1)) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\tilde{k}_n(\tilde{y}_p + 1) = m\pi, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad (3.74)$$

ovvero:

$$\tilde{y}_p = \frac{m\pi}{2\tilde{k}_n} - 1 \quad (3.75)$$

In questi punti l'accelerazione radiativa si annulla e la particella non subisce alcuna forza netta. In Figura 3.5 sono riportati i diversi modi stazionari: si nota come il numero e la posizione dei punti di equilibrio aumentino con l'ordine del modo $\tilde{k}_n$, dando luogo a una distribuzione sempre più complessa delle potenziali zone di accumulo.

Per determinare la stabilità dei punti di equilibrio è necessario analizzare il segno della derivata della forza rispetto alla coordinata trasversale:

$$\frac{\partial \tilde{a}^{rad}}{\partial \tilde{y}_p} = 2B\tilde{k}_n \cos(2\tilde{k}_n(\tilde{y}_p + 1)). \quad (3.76)$$

Un equilibrio risulta stabile quando la derivata è negativa (forza di richiamo verso la posizione di equilibrio), e instabile quando la derivata è positiva. Ne consegue che, dato che $B > 0$, i punti di equilibrio stabili sono localizzati nei nodi in Figura 3.5 dove la pendenza della derivata è negativa. Sarà in questi nodi che le particelle tenderanno a concentrarsi sotto l'azione della forza di radiazione acustica.

Capitolo 4

Metodo Numerico e Setup delle Simulazioni

La discretizzazione spaziale delle equazioni di Navier-Stokes può essere affrontata utilizzando vari approcci computazionali, tra cui: i metodi alle differenze finite (Pirozzoli [32]), ai volumi finiti (Ferziger e Peric [33]), agli elementi finiti (John [34]) e spettrali (Canuto et al. [35] e Peyret [36]). I metodi agli elementi finiti e quelli spettrali rientrano nella vasta classe delle tecniche di discretizzazione delle equazioni differenziali note come metodo dei residui pesati (WRM, weighted residual method). In tale approccio, la funzione incognita viene approssimata mediante una serie troncata di funzioni di base (o di prova). Contemporaneamente, si utilizzano le funzioni di test, dette anche funzioni peso, con lo scopo di garantire che l'equazione differenziale sia soddisfatta in modo ottimale dalla soluzione approssimata [37]. Tale condizione viene realizzata imponendo la minimizzazione del residuo che si ottiene sostituendo la soluzione approssimata nell'equazione differenziale che si intende risolvere.

I metodi spettrali si differenziano dagli altri WRM per la natura delle funzioni di base utilizzate per espandere la soluzione approssimata e per l'estensione del dominio su cui sono definite. Nei metodi agli elementi finiti, il dominio viene suddiviso in sotto-intervalli più piccoli, detti elementi, con funzioni di prova definite localmente all'interno di ciascun elemento. Al contrario, i metodi spettrali impiegano funzioni di prova definite globalmente che sono infinitamente differenziabili sull'intero dominio. In questo contesto, le funzioni più comunemente impiegate sono i polinomi trigonometrici, polinomi di Chebyshev e polinomi di Legendre, che sono ottenuti come autofunzioni di un problema di Sturm-Liouville singolare [38]. A condizione che le funzioni di espansione siano scelte in modo appropriato in base alle caratteristiche

della funzione incognita da approssimare, i metodi spettrali sono in grado di raggiungere la *precisione spettrale*. Si dice che un metodo ha precisione spettrale se l'errore di approssimazione diminuisce più velocemente all'aumentare del numero di funzioni di base impiegate nell'approssimazione. In particolare l'errore decresce in modo esponenziale. Come dimostrato in Canuto et al. [37], nelle espansioni di Fourier di funzioni periodiche infinitamente differenziabili, i coefficienti della serie decadono più rapidamente di qualsiasi potenza negativa del numero del modo. In modo analogo, per problemi non periodici, la precisione spettrale può essere raggiunta utilizzando i polinomi di Chebyshev o di Legendre come funzioni di base, a condizione che la funzione approssimata sia infinitamente liscia (*smooth*).

Nel corso degli ultimi sessant'anni i metodi spettrali hanno acquisito una notevole attenzione grazie alla loro capacità di raggiungere un'alta precisione con griglie relativamente più grossolane rispetto ad altri metodi, in particolare nel contesto degli studi numerici sui flussi turbolenti, in cui la risoluzione delle strutture vorticosi su scala fine è essenziale. Nelle simulazioni numeriche dirette della turbolenza isotropa omogenea, ad esempio, la rappresentazione di Fourier si è imposta come la scelta naturale per sfruttare la periodicità tridimensionale del campo di flusso e semplificare il trattamento dell'accoppiamento pressione-velocità. Allo stesso modo, nelle simulazioni di flussi in un canale, l'uso della rappresentazione di Chebyshev nella direzione normale alla parete è preferito rispetto ad altri approcci di discretizzazione, come le differenze finite, fino a numeri di Reynolds molto elevati, in cui l'infiltramento della griglia vicino alla parete imposto dalla rappresentazione spettrale diventa eccessivo.

La metodologia per la risoluzione della formulazione delle equazioni di Navier-Stokes è la seguente. Per la discretizzazione spaziale si avvale della combinazione di due approcci pseudo-spettrali: il metodo di Fourier-Galerkin per le direzioni omogenee della turbolenza e il metodo di Chebyshev-tau per la direzione normale alla parete. Per quanto riguarda l'integrazione temporale è gestita attraverso uno schema ibrido implicito-esplicito, caratterizzato da un'accuratezza del secondo ordine. Per una analisi approfondita di tali metodologie, si rimanda ai testi di riferimento di Canuto et al. [38] e Peyret [39]. Pertanto, anziché riesaminare i concetti di base, il focus principale è posto sull'implementazione pratica e sugli specifici adattamenti richiesti per la risoluzione del problema in esame.

4.1 Metodo di Fourier-Galerkin e metodo di Chebyshev tau

I metodi di Fourier-Galerkin sono una classe di metodi spettrali utilizzati per risolvere equazioni differenziali, in particolare per problemi con condizioni al contorno periodiche. Questo approccio unisce l'espansione di una funzione in serie di Fourier con il metodo dei residui pesati di Galerkin. Il metodo di Fourier-Galerkin viene utilizzato nelle direzioni streamwise e spanwise (perciò rispettivamente x e z) poiché in queste direzioni la turbolenza è omogenea e isotropa e le condizioni al contorno sono periodiche. Nella direzione normale a parete non sono presenti condizioni periodiche perciò viene utilizzato un altro metodo chiamato di Chebyshev-tau che sfrutta i polinomi di Chebyshev [37].

Funzioni di base (Fourier)

Il metodo si basa sull'idea che una funzione periodica può essere approssimata come una somma di funzioni periodiche più semplici, ovvero seni e coseni, che formano la serie di Fourier. In un problema monodimensionale con dominio periodico, la soluzione $u(x)$ viene approssimata come una serie troncata di polinomi trigonometrici:

$$u(x) \approx \tilde{u}_N(x) = \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \hat{u}_k e^{ikx} \quad (4.1)$$

Dove $\hat{u}_k$ sono i coefficienti di Fourier da determinare, che rappresentano l'ampiezza di ciascuna onda. Il metodo è particolarmente efficace perché le derivate di questi termini possono essere calcolate in modo esatto semplicemente moltiplicando per ik , il che semplifica notevolmente il calcolo.

Metodo di Galerkin

Per trovare i coefficienti di Fourier $\hat{u}_k$, si utilizza il metodo di Galerkin, un metodo che appartiene alla famiglia dei metodi dei residui pesati. In questo approccio si sostituisce la soluzione approssimata $\tilde{u}_N$ nell'equazione differenziale originale. Dato che l'approssimazione non sarà la soluzione esatta, si otterrà un residuo R :

$$R = L(\tilde{u}_N) - f = L\left(\sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \hat{u}_k e^{ikx}\right) - f = 0 \quad (4.2)$$

Il metodo di Galerkin impone che questo residuo sia ortogonale (ovvero, il suo prodotto scalare sia zero) alle stesse funzioni di base usate per l'approssimazione. In altre parole, si impone che l'errore sia il più piccolo possibile proiettato su queste funzioni:

$$\int_{\Omega} R(x) \cdot \phi_j(x) dx = 0 \quad (4.3)$$

per ogni funzione di base $\phi_j(x)$. Nel caso di Fourier le funzioni di base sono e^{ijx} . Questo porta a un sistema di equazioni lineari per i coefficienti $\hat{u}_k$ che possono essere risolti per trovare la soluzione.

Tra i principali vantaggi di questi metodi, spiccano la loro capacità di ottenere una precisione spettrale, una convergenza esponenziale che si traduce in un errore di approssimazione notevolmente ridotto. Inoltre, il calcolo delle derivate nel dominio di Fourier risulta particolarmente efficiente, semplificando l'analisi. Per un numero moderato di termini, questi metodi si dimostrano anche computazionalmente più efficienti rispetto ai metodi alle differenze finite o agli elementi finiti, in quanto richiedono un minor numero di punti di griglia per raggiungere un'accuratezza equivalente.

D'altra parte, tali metodi presentano alcune limitazioni significative. In primo luogo, richiedono condizioni al contorno periodiche, il che ne restringe l'applicabilità a una specifica classe di problemi. Per problemi non lineari, l'approccio evolve verso un metodo pseudo-spettrale, con una conseguente riduzione della precisione. Infine, la precisione dei metodi spettrali decade drasticamente in presenza di discontinuità nella soluzione, come nel caso di onde d'urto, sebbene questo aspetto non rappresenti un problema per i flussi a bassa velocità, dove tali discontinuità non si manifestano.

4.2 Setup delle simulazioni

Le simulazioni partono da campi ottenuti da simulazioni precedenti che hanno raggiunto una condizione di stazionarietà statistica, caratterizzata da una turbolenza completamente sviluppata. Per le particelle, è stato simulato il numero di particelle in base ai parametri riportati nella tabella 4.1. Ogni simulazione ha coperto 25 scale temporali adimensionali ($t^+ = 4500$). Il post-processing è stato eseguito sulle ultime 15 scale temporali per garantire che sia le variabili del fluido che quelle delle particelle avessero raggiunto la stazionarietà statistica. I risultati di tale analisi saranno presentati e discussi nel capitolo successivo.

Per poter avere una indicazione dell'effetto del campo acustico sulle particelle leggere sono state effettuate nove simulazioni al variare di due parametri: l'intensità

dell'onda acustica E_{ac} e il raggio della particella r . Per quanto riguarda l'intensità acustica (adimensionalizzata) si è effettuato un test preliminare per capire l'ordine di grandezza significativo al quale avvenivano dei fenomeni importanti. Si è scoperto che intorno al valore di $E_{ac} = 500$ il campo acustico influenza la concentrazione di particelle perciò sono stati adottati tra diversi valori: 200, 500, 800. Relativamente al raggio della particella si è deciso di adottare un raggio inferiore alla più piccola scala di Kolmogorov, perciò la scelta è ricaduta su alcune frazioni di questa scala, $r/\eta_{\min} = 0.1, 0.2, 0.3$. Come accennato nel Capitolo 3, l'ipotesi che consideriamo è che queste particelle siano più piccole della scala di Kolmogorov, $\eta = (\nu^3/\epsilon)^{1/4}$, così da vedere intorno a sé un flusso Stokesiano. In queste condizioni le particelle sono rappresentate come punti materiali di massa m e possono essere descritte con un approccio Lagrangiano [5]. Considerando questi due parametri con tre valori ciascuno è naturale pensare a un totale di nove simulazioni, ognuna con una coppia diversa di tali parametri, come mostrato graficamente in Figura 4.1 e riportato nella Tabella 4.1.

Tabella 4.1: Parametri per le simulazioni PP-DNS del flusso carico di particelle in un canale con $N_p = 4,000,000$ particelle sferiche. Il numero di Reynolds d'attrito è tenuto costante per tutte le simulazioni a $Re_\tau = 180$. Anche il numero di Stokes è tenuto fisso ($St^+ = 0.8$). Nelle colonne sono riportati: il rapporto tra il raggio della particella e la scala più piccolo di Kolmogorov presente nel canale ($r/\eta_{\min}$), il raggio delle particelle (r), l'intensità dell'energia acustica adimensionale (E_{ac}) e il rapporto di densità tra particella e fluido (ρ_p/ρ_f).

	$r/\eta_{\min}$	r/h	E_{ac}	ρ_p/ρ_f
Run 1	0.1	8.57×10^{-4}	200	151.285
Run 4			500	
Run 7			800	
Run 3	0.2	1.71×10^{-3}	200	37.821
Run 6			500	
Run 9			800	
Run 2	0.3	2.57×10^{-3}	200	16.809
Run 5			500	
Run 8			800	

Gli altri parametri che non cambiano da simulazione a simulazione per non appesantire la tabella non sono riportati ma verranno elencati di seguito. Nelle simulazioni numeriche dirette (DNS) di flussi con particella, la scelta del numero di particelle N_p è un compromesso fondamentale tra la robustezza statistica e l'onerosità computazionale. Per garantire la significatività dei risultati, è essenziale che il numero

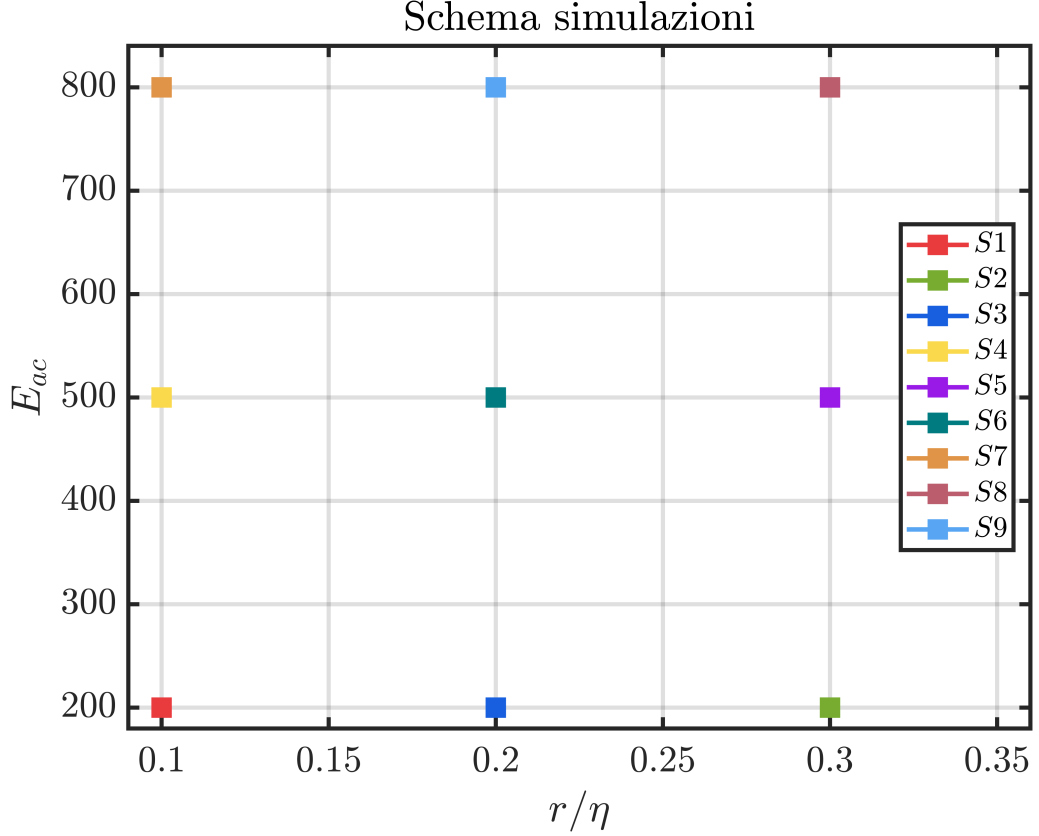


Figura 4.1: Schema delle simulazioni. Sull'asse delle ascisse è riportato il rapporto tra il raggio della particella e la più piccola scala di Kolmogorov. Sull'asse delle ordinate si trova l'intensità dell'onda acustica E_{ac} . A ogni simulazione corrisponde una coppia di questi due parametri e tutte le simulazioni possono essere raggruppate fissando l'intensità acustica oppure il raggio della particella.

di campioni sia sufficientemente elevato da rappresentare accuratamente le statistiche del sistema, riducendo l'incertezza associata alle medie temporali e spaziali. Allo stesso tempo, per mantenere i calcoli gestibili in termini di tempo di esecuzione e risorse computazionali, è necessario evitare un numero eccessivamente alto. A tal fine, è stato scelto un valore di $N_p = 4,000,000$. Il dominio computazionale utilizzato per queste simulazioni è un canale piano le cui dimensioni adimensionali sono state fissate a $L_x = 4\pi h$ nella direzione del flusso (x), $L_y = 2h$ nella direzione normale alle pareti (y) e $L_z = 2\pi h$ nella direzione trasversale (z). La discretizzazione spaziale di tale dominio è stata eseguita tramite una griglia uniforme composta da $384 \times 201 \times 192$ punti, rispettivamente nelle direzioni x , y e z .

In aggiunta ai parametri geometrici, il flusso è stato caratterizzato da un numero di Reynolds d'attrito, $Re_\tau = 180$, e un numero di Stokes delle particelle, $St^+ = 0.8$, dove l'apice "+" indica che il tempo di rilassamento della particella è stato

riscaldato con il tempo viscoso $\tau_\nu = \nu/u_\tau^2$. Quest'ultimo parametro è cruciale per descrivere il comportamento delle particelle all'interno del flusso turbolento. Un valore di $St^+ = 0.8$ indica che le particelle tendono a seguire fedelmente il moto del fluido, comportandosi in modo simile a un tracciante. Allo stesso tempo, un valore prossimo all'unità conferisce alle particelle una sufficiente inerzia per mostrare un comportamento che devia leggermente dalle traiettorie del fluido, consentendo lo studio degli effetti di accumulo e dispersione dovuti proprio a tale inerzia.

Avendo fissato il numero di Stokes, St^+ , come parametro di controllo per descrivere il comportamento delle particelle all'interno del flusso turbolento, e considerando il raggio della particella, r , come una variabile da simulazione a simulazione, è necessario determinare il rapporto di densità tra particella e fluido, $\frac{\rho_p}{\rho_f}$. Questo viene ricavato dalla relazione adimensionale che lega il numero di Stokes al raggio della particella e alle proprietà del fluido.

Il numero di Stokes, St^+ può essere descritto come il rapporto tra il tempo caratteristico di risposta della particella alle sollecitazioni del fluido e la scala temporale viscosa:

$$St^+ = \frac{\tau_p}{\tau_\nu} = \frac{\tau_p u_\tau^2}{\nu} = \frac{2}{9} \frac{r^2}{h^2} \frac{\rho_p}{\rho_f} Re_\tau^2. \quad (4.4)$$

Usando il raggio adimensionalizzato con la semialtezza del canale $\tilde{r} = r/h$ e il rapporto di densità adimensionale $\tilde{\rho}_p = \rho_p/\rho_f$, si ottiene:

$$St^+ = \frac{2}{9} \tilde{r}^2 \tilde{\rho}_p Re_\tau^2. \quad (4.5)$$

Una volta fissato il numero di Stokes St^+ , il raggio delle particelle e il Reynolds di attrito Re_τ si può ricavare il rapporto di densità direttamente dall'espressione (4.5). Da questa relazione è evidente che, mantenendo il numero di Stokes costante, un incremento del raggio della particella, $\tilde{r}$, comporta una diminuzione proporzionale del rapporto di densità $\frac{\rho_p}{\rho_f}$. Questo implica che per particelle più grandi, il rapporto tra la loro densità e quella del fluido vettore deve ridursi per mantenere un identico comportamento inerziale. La Figura 4.2 mostra l'andamento del rapporto densità della particella e del fluido $\frac{\rho_p}{\rho_f}$ al variare del raggio adimensionale considerando un numero di Stokes fissato a 0.8.

Per quanto concerne la frequenza adimensionale di oscillazione dell'onda acustica, ω , la sua scelta è stata guidata dalla necessità di separare le scale temporali del fenomeno acustico da quelle della turbolenza. Coerentemente con la condizione presentata nel Capitolo 1, $f \gg 1/\tau_\nu$, si impone che la frequenza angolare (adimensionale) dell'onda sia molto più grande del numero di Reynolds di friction, cioè $\omega \gg Re_\tau$,

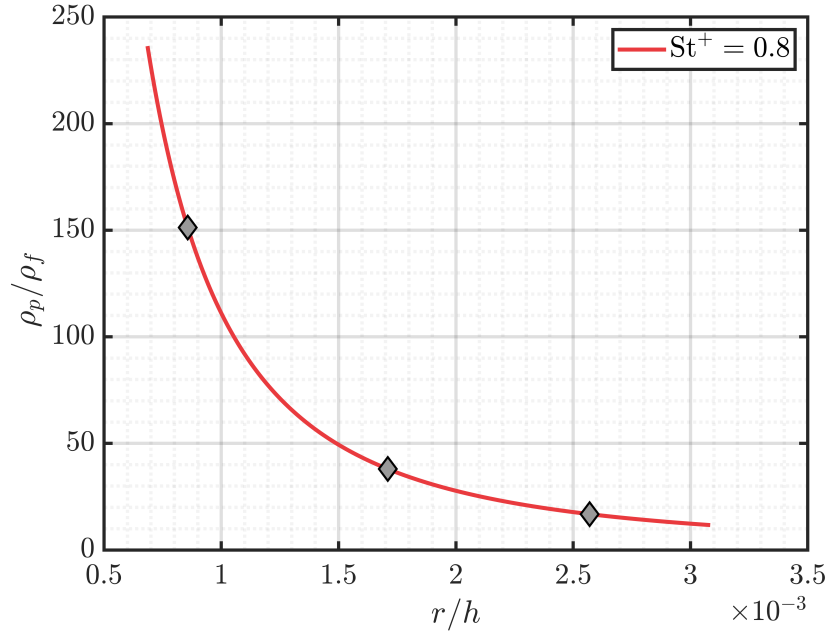


Figura 4.2: Andamento del rapporto tra la densità della particella e quella del fluido, ρ_p/ρ_f , al variare del raggio adimensionalizzato con la semialtezza del canale, r/h , considerando un numero di Stokes fissato $St^+ = 0.8$. La curva mostra che, all’aumentare del raggio della particella, il rapporto di densità decresce quadraticamente. I simboli in grigio rappresentano i valori di r/h e ρ_p/ρ_f relativi alle simulazioni condotte.

che garantisce una completa separazione tra l’oscillazione dell’onda e le fluttuazioni turbolente. Per questo motivo si è adottato un valore di $\omega = 1800$. Questo valore elevato assicura che il campo di flusso a media nulla generato dall’onda acustica non interagisca in modo significativo con le strutture turbolente a larga scala del canale, permettendo così di studiare in maniera isolata l’effetto del gradiente di pressione acustica sulla dinamica delle particelle.

A completamento dell’impostazione delle simulazioni, la forma dell’onda stazionaria è stata attentamente definita attraverso l’imposizione del quarto modo di oscillazione. Questa configurazione modale genera un campo che si manifesta con una topologia specifica: quattro ventri, che rappresentano i punti di massima ampiezza dell’onda, e cinque nodi, dove l’intensità dell’onda si annulla. È importante notare che questi nodi includono anche i due punti di pressione nulla che si formano naturalmente in corrispondenza delle pareti del canale. Coerentemente con i principi dell’acustoforesi, che guidano le particelle verso i punti di minima energia potenziale acustica, tale scelta modale risulta strategica per la manipolazione. La specifica

distribuzione spaziale dei nodi, dettata dal quarto modo, crea un massimo di concentrazione delle particelle a un quarto della larghezza del canale. La simmetria di questa configurazione non è solo un risultato estetico, ma un'importante caratteristica funzionale che semplifica l'analisi statistica e consente un controllo prevedibile e replicabile del posizionamento delle particelle, offrendo vantaggi evidenti rispetto a modalità alternative come il terzo o il quinto modo.

Capitolo 5

Risultati

In questo capitolo vengono riportati i risultati ottenuti dalle simulazioni numeriche sul flusso in un canale carico di particelle soggetto all'azione di un'onda acustica. Lo studio si concentra su piccole particelle sferiche con densità molto maggiore rispetto al fluido vettore e utilizza la tecnica Point-Particle DNS per valutare l'effetto di un'onda acustica stazionaria sulla posizione delle particelle nel fluido.

La prima sezione è dedicata all'analisi della distribuzione della concentrazione delle particelle all'interno dei piani paralleli alle pareti. I risultati preliminari di questa indagine evidenziano già l'influenza significativa dell'onda acustica. Nello specifico, la variazione sinusoidale della posizione delle particelle tra i diversi piani di riferimento costituisce una prova evidente dell'effetto indotto dall'onda acustica. Tale fenomeno conferma in modo inequivocabile che la funzione dell'onda acustica è quella di modulare il trasporto e la distribuzione delle particelle all'interno di un regime di flusso turbolento.

La seconda parte dello studio si focalizza, invece, sull'esame delle varianze relative alle concentrazioni osservate, offrendo così una valutazione quantitativa della dispersione delle particelle e della stabilità del fenomeno.

5.1 Concentrazione Media

Per investigare l'effetto dell'onda acustica le nove simulazioni sono state raggruppate tenendo conto della dimensione della particella, come nella divisione riportata nella Tabella 4.1. I risultati ottenuti dal post-processing dei dati ricavati dalle simulazioni sono i profili della concentrazione delle particelle (mediata nel tempo) lungo la direzione normale alle pareti, y . In questo modo si stabilisce una simmetria dal momento che il canale si può dividere in due regioni simmetriche tramite un piano

parallelo alle pareti passante nel centro del canale. La posizione di tale piano è $y = 0$ e le pareti si trovano a $y = -h$ e $y = +h$ come riportato in Figura 3.4. Nei grafici tuttavia si utilizza come coordinata la variabile y^+ perciò la parete si trova a $y^+ = 0$ e il centro del canale si trova a $y^+ = 180$. Tutto questo porta a mediare i risultati su metà canale.

Nelle Figure 5.1a, 5.1b e 5.1c sono riportati gli andamenti delle concentrazioni normalizzate al variare della distanza da parete per le nove simulazioni. La normalizzazione avviene considerando il rapporto tra il numero di particelle complessive N_p e il volume totale del dominio, V_Φ , ovvero:

$$\langle \tilde{n} \rangle = \frac{\langle n \rangle}{\frac{N_p}{V_\Phi}} = \frac{\langle n \rangle}{\frac{4 \cdot 10^6}{2\pi \cdot 4\pi \cdot 2}}. \quad (5.1)$$

Le tre figure in esame evidenziano in modo sistematico un medesimo andamento. Si osserva che un incremento dell'intensità dell'onda acustica induce una maggiore concentrazione delle particelle in una zona spaziale sempre più ristretta. Analizzando la Figura 5.1a, si può chiaramente notare come le particelle mostrino una spiccata tendenza a convergere verso il nodo in prossimità di $y^+ = 90$, posizione che corrisponde a un quarto dell'altezza del canale. Questo comportamento si manifesta in maniera particolarmente accentuata nella simulazione S7, caratterizzata dalla più alta intensità acustica tra quelle considerate. In questo caso, il range spaziale in cui la concentrazione assume valori non nulli è notevolmente più circoscritto. Di conseguenza il valore massimo di concentrazione raggiunto è superiore rispetto alle altre simulazioni. Per ragioni di simmetria precedentemente descritte, un comportamento analogo si riscontra nella seconda metà del canale, precisamente nella posizione $y^+ = 270$, ovvero il terzo quarto dell'altezza del canale. Il fatto che la concentrazione aumenti quando aumenta l'intensità acustica non sorprende ed è intuitivo, all'aumentare dell'intensità di una forza ci si aspetta che il suo effetto sia più marcato.

Le visualizzazioni riportate in Figura 5.2 illustrano chiaramente l'effetto di raggruppamento delle particelle. La figura illustra la distribuzione istantanea delle particelle nel piano trasversale medio ($x = L_x/2$), ovvero perpendicolare alla direzione del flusso (x), una volta che il flusso turbolento ha raggiunto la condizione di pieno sviluppo (stazionarietà statistica). I tre pannelli corrispondono alle simulazioni S1, S4 e S7, le quali considerano particelle con lo stesso raggio; le configurazioni differiscono unicamente per l'intensità dell'onda acustica, E_{ac} , che aumenta monotonamente passando da S1 ($E_{ac} = 200$) a S4 ($E_{ac} = 500$) a S7 ($E_{ac} = 800$). Sullo sfondo di ciascuna immagine è visualizzata la componente longitudinale (u) della

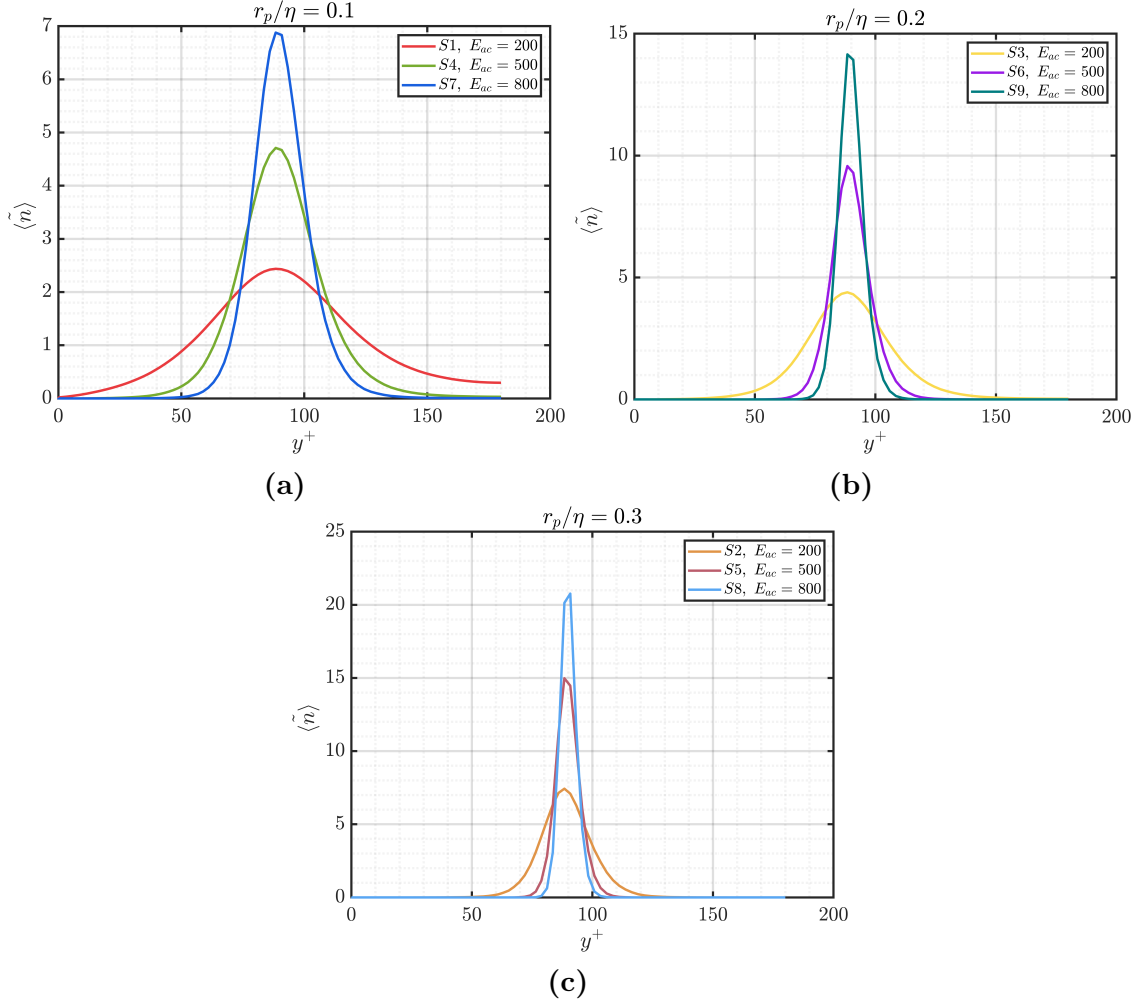


Figura 5.1: Concentrazione di particelle media al variare di y^+ , normalizzata con il rapporto tra il numero di particelle complessivo e il volume totale. Sono state prese le concentrazioni medie a ogni distanza da parete e mediate su metà canale. Ogni grafico raggruppa tre simulazioni con raggio costante: la Figura 5.1a mostra le simulazioni con le particelle con il raggio più piccolo, $r_p = 8.57 \cdot 10^{-4}$, la Figura 5.1b quelle con raggio $r_p = 1.71 \cdot 10^{-3}$ e la Figura 5.1c quelle con raggio più grande, $r_p = 2.57 \cdot 10^{-3}$. La quantità η denota la scala di Kolmogorov minima presente nel flusso di canale.

velocità del fluido, la cui distribuzione è tipica di un flusso in un canale. L'analisi di queste visualizzazioni conferma il fenomeno distintivo appena osservato tramite i profili della concentrazioni: le particelle tendono ad accumularsi e a raggrupparsi in prossimità dei quarti dell'altezza totale del canale, in corrispondenza delle posizioni verticali $y = \pm 0.5h$. Questo posizionamento preferenziale delle particelle è una prova evidente dell'influenza dell'onda acustica. L'effetto dell'intensità dell'onda acustica nel favorire la concentrazione delle particelle in regioni specifiche del canale

è evidente dal confronto delle visualizzazioni. All'aumentare di E_{ac} si osserva un progressivo e marcato accumulo di particelle a distanze ben definite dalla parete, corrispondenti ai picchi rilevati nei profili di concentrazione media. L'apparente progressiva riduzione del numero di particelle negli ultimi due casi (Fig. 5.2b e 5.2c) è dovuta esclusivamente alla loro sovrapposizione nelle zone di forte accumulo.

È opportuno notare un fenomeno distintivo relativo alla curva di colore rosso (Fig. 5.1a), che rappresenta la simulazione con la minore intensità acustica. A differenza di quanto si osserva negli altri casi, in questa specifica situazione, la concentrazione non converge a zero man mano che ci si sposta verso destra, ovvero muovendosi verso il centro del canale. Questo comportamento mette in evidenza un regime dominato dall'interazione tra turbolenza e onda acustica: il mescolamento indotto dalle fluttuazioni turbolente fa sì che al centro del canale siano comunque presenti particelle, nonostante l'onda acustica tenda a convogliarle verso i nodi di equilibrio della forza di radiazione acustica. Un'analoga considerazione vale anche per le altre simulazioni con $E_{ac} = 200$, che confermano l'effetto osservato, seppur mitigato dall'aumento del raggio, il quale comporta un incremento della forza di radiazione acustica. Passando all'analisi della Figura 5.1b, si evidenzia un notevole incremento dell'ampiezza del picco di concentrazione all'aumentare del raggio. Questo fenomeno è coerente con i principi discussi in dettaglio nel Capitolo 4, e può essere compreso richiamando l'espressione (adimensionale) dell'accelerazione dovuta alla forza di radiazione acustica:

$$\tilde{a}^{rad} = B \sin(2\tilde{k}_n(\tilde{y}_p + 1)), \quad (5.2)$$

con

$$B = \frac{\tilde{E}_{ac}}{\tilde{\rho}_p} \left(1 + \frac{3}{4} \Re[f_2] \right) \tilde{k}_n. \quad (5.3)$$

Da questa espressione si osserva chiaramente che, fissati il numero d'onda $\tilde{k}_n$ e l'intensità dell'onda acustica E_{ac} , l'intensità dell'accelerazione acustoforetica risulta inversamente proporzionale al rapporto tra la densità della particella e quella del fluido. Poiché il numero di Stokes è mantenuto costante, all'aumentare del raggio il rapporto di densità diminuisce, come mostrato in Figura 4.2. In particolare, passando da $r/\eta_{min} = 0.1$ a $r/\eta_{min} = 0.2$, il rapporto ρ_p/ρ_f si riduce da 151.3 a 37.8. Tale riduzione rende le particelle dinamicamente più leggere rispetto al fluido circostante e amplifica l'effetto della forza acustoforetica.

Un'ulteriore considerazione riguarda la distanza dalla parete in cui è presente il massimo accumulo di particelle, $y^+ = 90$, che non è affatto casuale. Infatti se si sovrappone al grafico della concentrazione la curva della funzione sinusoidale

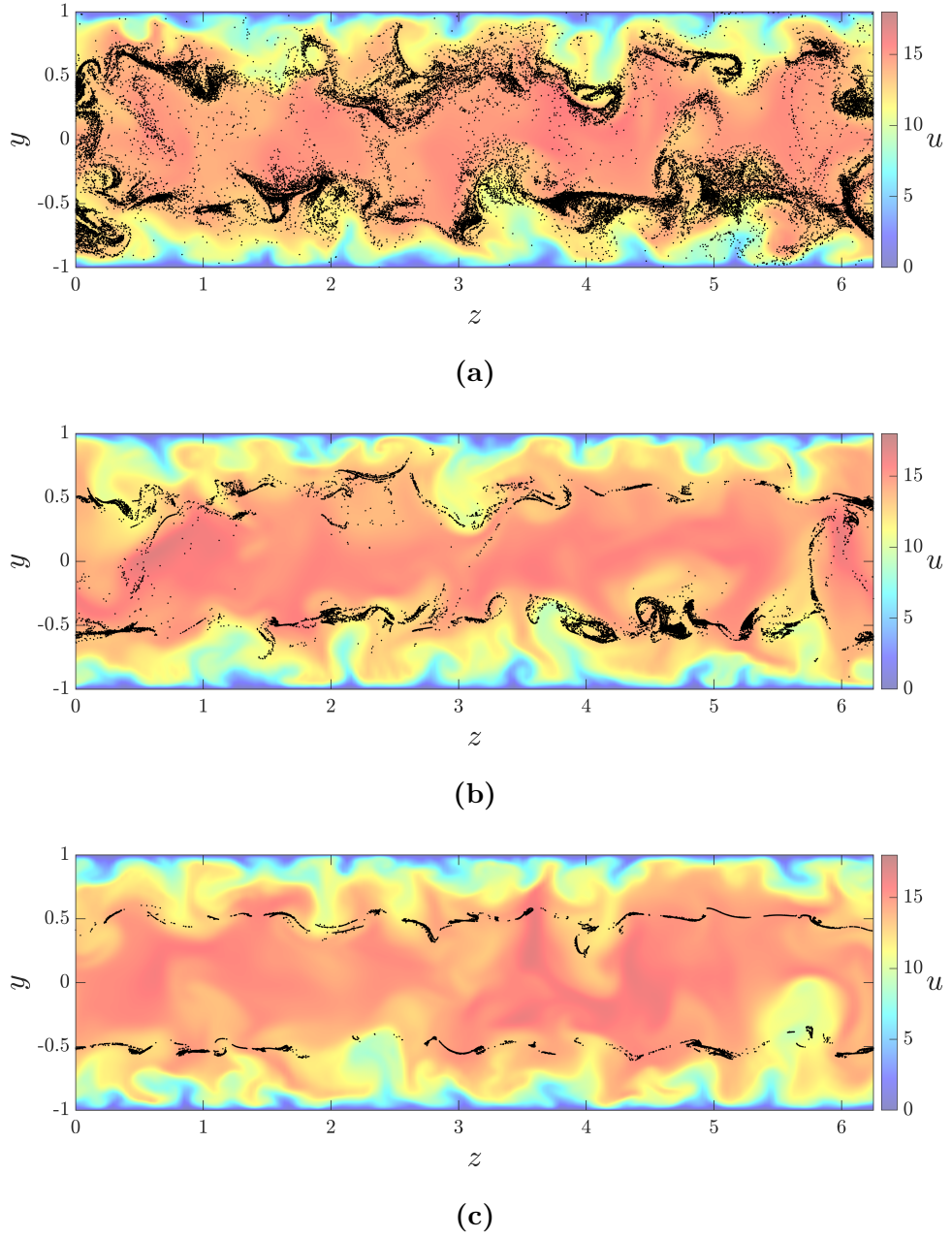


Figura 5.2: Distribuzione spaziale istantanea delle particelle (rappresentate fuori scala) nella regione compresa tra i piani trasversali $x = 2\pi - 0.065$ e $x = 2\pi + 0.065$. Lo sfondo rappresenta la componente streamwise della velocità del fluido nel piano trasversale medio, ovvero a $x = 2\pi$. Le particelle hanno un numero di Stokes $St^+ = 0.8$ e un raggio $r/h = 8.57 \times 10^{-4}$. Sono riportati tre casi corrispondenti a diverse intensità dell'onda acustica: (a) $E_{ac} = 200$, (b) $E_{ac} = 500$ e (c) $E_{ac} = 800$.

(3.74), come in Figura 5.3, si osserva che i punti in cui si registra il massimo della concentrazione coincidono con i nodi dell'onda (dove la forza acustoforetica si annulla) in cui la derivata dell'accelerazione a_{ac} rispetto a y è negativa. Infatti se si considera

$\tilde{k}_n = \pi$ (ovvero $m = 2$) si ottengono 3 intersezioni della funzione seno con l'asse delle ascisse (linea tratteggiata in Fig. 5.3), oltre agli estremi, ma solo due sono punti stabili (con pendenza negativa). Il punto centrale, pur essendo un punto di equilibrio per la forza di radiazione acustica, è instabile (pendenza positiva). Questo spiega perché nel centro del canale non si riscontra concentrazione preferenziale di particelle. La Figura 5.3 differisce dalle altre poiché si considera l'intero dominio —non solo metà canale— e la normalizzazione è avvenuta con il massimo della concentrazione per ogni simulazione. In questo modo nessuna curva supera il valore di 1 e il confronto con la funzione seno è più immediata.

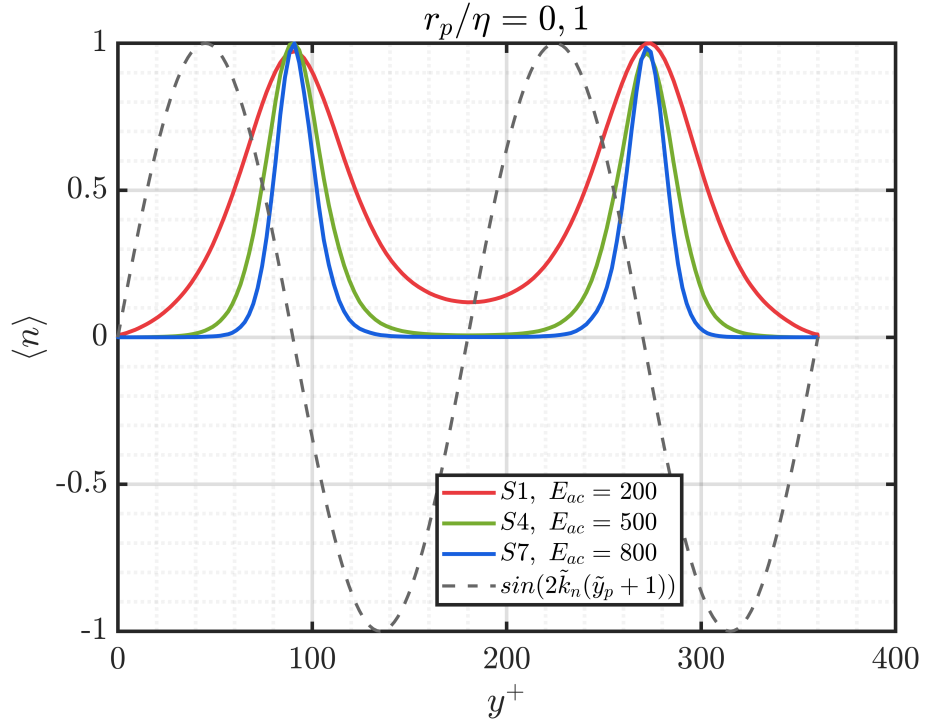


Figura 5.3: Confronto tra la distribuzione della concentrazione, normalizzata con il suo massimo per ogni simulazione, nei piani paralleli alle pareti e l'andamento della funzione $\sin(2\tilde{k}_n(\tilde{y}_p + 1))$. Questo grafico mostra l'influenza dell'onda acustica stazionaria sulla posizione delle particelle. È stato considerato come dominio l'intera altezza del canale per mostrare sia il secondo picco di concentrazione presente sia il confronto completo con la funzione seno che riproduce l'andamento dell'accelerazione acustoforetica.

Le Figure 5.1b e, in modo ancora più evidente, la Figura 5.1c mostrano un andamento meno regolare della curva di concentrazione in prossimità della posizione $y^+ = 90$. Tale comportamento non è dovuto a un fenomeno fisico intrinseco, ma è la conseguenza della struttura della griglia computazionale utilizzata nelle simulazioni. Nello specifico, la densità dei nodi della griglia è più elevata in prossimità delle pareti

del canale, per catturare con accuratezza i fenomeni che avvengono nello strato limite. Al contrario, procedendo verso la regione centrale del canale, la spaziatura diventa progressivamente più alta. Questa variazione di risoluzione spaziale si riflette direttamente sulla rappresentazione dei dati, generando una perdita di uniformità nei punti in cui la griglia è meno fitta, come si osserva chiaramente nelle figure in esame.

5.2 Varianza della Concentrazione

In questa sezione sono presentati i risultati relativi alla varianza della concentrazione di particelle, rappresentata in Figura 5.4. Sulle ordinate si nota la denominazione $\langle n'n' \rangle$ che denota la varianza di n e offre un'indicazione di quanto si discostano i valori di n rispetto alla media. Più alta è la varianza di n e più intense sono le fluttuazioni di concentrazione. Se la varianza tende a zero, invece, le fluttuazioni sono molto deboli e la concentrazione è molto vicina alla concentrazione media, indicando una distribuzione spaziale di particelle più uniforme. Anche in questo caso si riscontra un andamento simile per i tre gruppi di simulazioni. L'operatore $\langle \cdot \rangle$ indica l'operazione di media statistica.

Analizzando la varianza della concentrazione nei tre pannelli in Figura 5.4 si evince la presenza di un massimo in corrispondenza della posizione $y^+ = 90$, che coincide esattamente con la zona in cui si osserva il picco di concentrazione delle particelle. In termini più specifici, una varianza bassa in un piano parallelo alle pareti indica che la distribuzione delle particelle in tale piano è uniforme o caratterizzata da una variabilità molto ridotta. Al contrario, le fluttuazioni maggiori rispetto alla media sono riscontrate proprio in prossimità del punto di massima concentrazione. È opportuno sottolineare, inoltre, che l'effetto dell'intensità acustica si manifesta in modo netto e diretto. Un incremento di tale intensità determina un'amplificazione notevole delle fluttuazioni, confermando che una maggiore forza applicata al sistema produce un effetto più marcato sulla dinamica delle particelle. Analogamente alla concentrazione media, i picchi di $\langle n'n' \rangle$ crescono monotonamente con l'intensità dell'onda e con il raggio delle particelle.

La disuniformità della concentrazione nei piani paralleli alle pareti situati a $y^+ \approx 90$ è visibile anche nelle visualizzazioni della distribuzione istantanea delle particelle negli stessi piani, come riportato in Figura 5.5. I tre pannelli della figura si riferiscono a tre diverse simulazioni (S1, S4, S7), nelle quali il raggio delle particelle è fisso ($r/h = 8.57 \times 10^{-4}$) e l'intensità dell'onda acustica cresce monotonamente. Come si osserva dal confronto tra i tre pannelli (Fig. 5.5), la distribuzione di particelle a questa

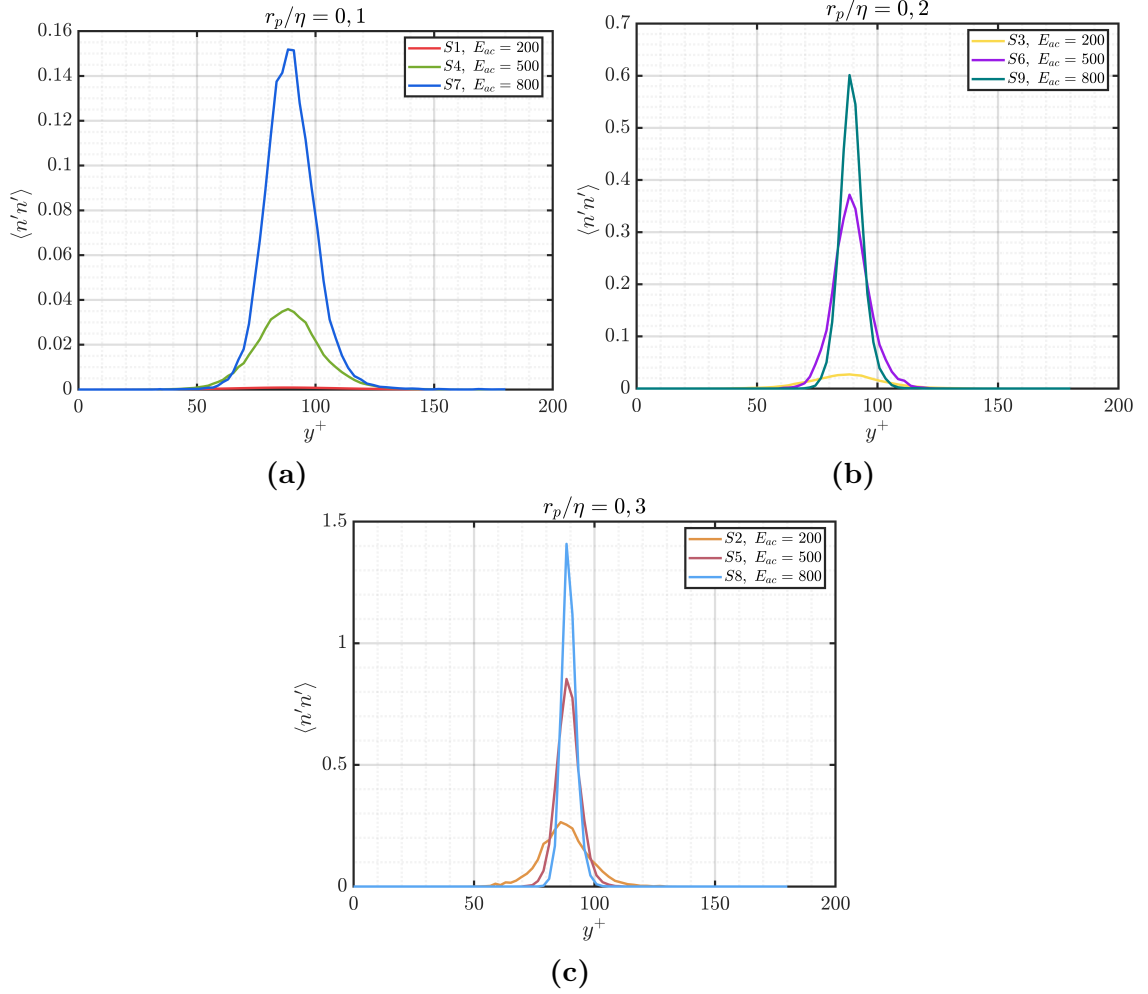
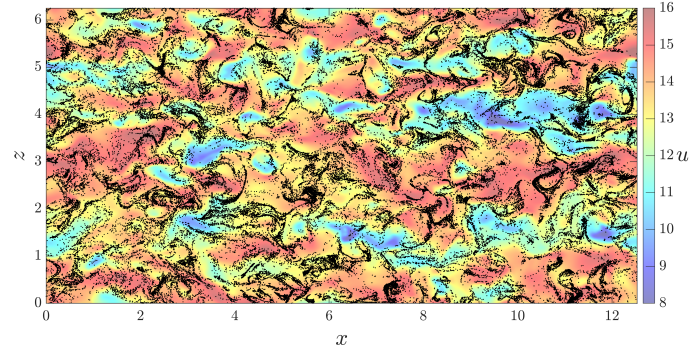


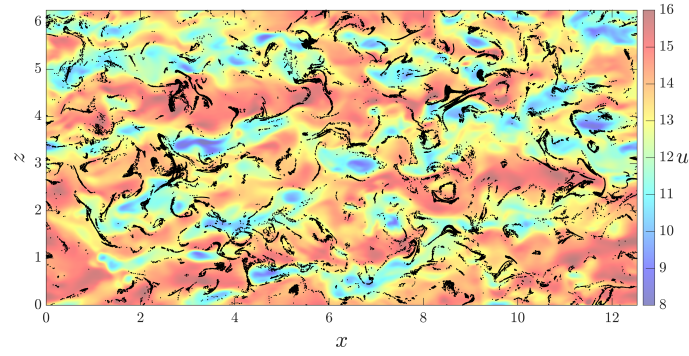
Figura 5.4: Varianza, normalizzata, della concentrazione lungo la direzione perpendicolare alle pareti del canale.

distanza dalla parete diventa via via meno uniforme all'aumentare dell'intensità dell'onda acustica, mostrando un clustering sempre più marcato. All'aumentare di E_{ac} , la riduzione del numero di particelle visibili in queste visualizzazioni è solo apparente: il numero totale di particelle rappresentate nei tre pannelli, infatti, aumenta (S1: $N_p = 101274$, S4: $N_p = 190911$, S7: $N_p = 265376$). Il rafforzarsi dell'onda acustica favorisce un marcato clustering in strutture localizzate, svuotando ampie regioni del piano che risultano quasi prive di particelle.

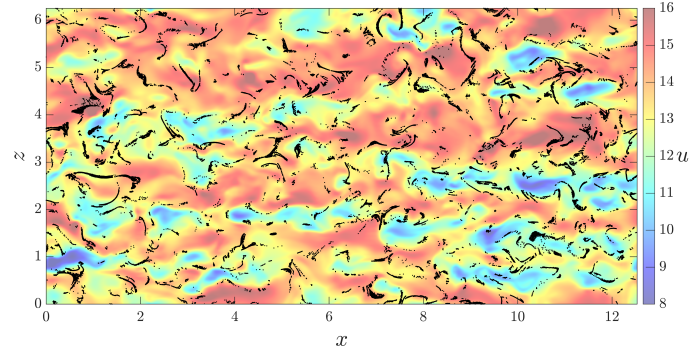
Un ulteriore risultato di notevole interesse riguarda la covarianza tra la concentrazione di particelle e le variabili rappresentative del flusso. Questo strumento statistico consente di quantificare il legame tra le fluttuazioni di due variabili distinte. Il calcolo della covarianza si basa sulla moltiplicazione delle fluttuazioni di due variabili — ad esempio, la concentrazione di particelle (n) e una delle componenti di velocità (u, v, w)



(a)



(b)



(c)

Figura 5.5: Distribuzione spaziale istantanea delle particelle (rappresentate fuori scala) nella regione compresa tra i piani paralleli alle pareti situati a $y = 0.51$ e $y = 0.49$. Le particelle hanno un numero di Stokes $St^+ = 0.8$ e un raggio $r/h = 8.57 \times 10^{-4}$. Lo sfondo rappresenta la componente streamwise della velocità del fluido nel piano parallelo alle pareti in $y = 0.5$. Sono riportati tre casi corrispondenti a diverse intensità dell'onda acustica: (a) $E_{ac} = 200$ (S1), (b) $E_{ac} = 500$ (S4) e (c) $E_{ac} = 800$ (S7).

— e sulla successiva media del prodotto ottenuto. Attraverso questo processo, si ricava una curva il cui andamento fornisce indicazioni precise sul tipo di correlazione

esistente. Quando la curva della covarianza assume valori positivi, si deduce che le due variabili tendono a muoversi nella stessa direzione: all'aumentare di una, anche l'altra tende ad aumentare. Al contrario, quando la curva è negativa, la relazione è inversa: un incremento in una variabile si accompagna a una diminuzione dell'altra. É fondamentale sottolineare che un valore di covarianza non implica necessariamente l'esistenza di un legame fisico o causale tra le variabili, ma si limita a descrivere una tendenza statistica. Sebbene la covarianza non sia una misura di causalità, essa rappresenta un indicatore rilevante per comprendere come le variabili si influenzano reciprocamente in termini statistici.

La covarianza tra la concentrazione n e la componente di velocità del fluido perpendicolare alla parete v è riportata, per le nove simulazioni, nelle Figure 5.6a, 5.6b e 5.6c. Prima di procedere con l'analisi dei grafici è opportuno definire la convenzione di segno adottata per v . In generale, v è positiva se diretta verso l'alto (dalla parete inferiore verso quella superiore); di conseguenza, vicino alla parete superiore $v > 0$ indica moto verso la parete, mentre vicino a quella inferiore $v > 0$ indica moto di allontanamento dalla parete. Per la discussione che segue, assumiamo la parete inferiore come riferimento, per cui $v' < 0$ denota moto verso la parete e $v' > 0$ moto che se ne allontana. Dai tre pannelli si osserva che, in tutti i casi, fluttuazioni positive di concentrazione $n' > 0$ si correlano con velocità verticali negative $v' < 0$ quando $y^+ < 90$ (ossia $y < -0.5$ e $y > 0.5$), indicando che al di sotto della posizione di equilibrio le particelle tendono a concentrarsi in regioni di fluido che si muovono verso la parete. Al contrario, al di sopra di $y^+ = 90$ si osserva $\langle n'v' \rangle > 0$, ossia $n' > 0$ si associa a $v' > 0$, o equivalentemente, $n' < 0$ si associa a $v' < 0$. In questo caso, le particelle campionano preferenzialmente regioni ascendenti, che si allontanano dalla parete e si dirigono verso il centro del canale.

Questi andamenti si ripetono in tutte le simulazioni e i picchi di $\langle n'v' \rangle$ si intensificano sia all'aumentare del raggio delle particelle sia con l'incremento dell'intensità dell'onda acustica. Essi riflettono l'interazione tra (i) la forza acustoforetica, che tende a concentrare le particelle nel nodo a $y^+ \approx 90$, e (ii) i moti verticali turbolenti (fluttuazioni v'), che ne perturbano la posizione di equilibrio e ne promuovono la dispersione. Il segno opposto della covarianza ai due lati di $y^+ \approx 90$ si comprende esaminando le visualizzazioni della distribuzione istantanea di particelle nel piano trasversale medio ($x = L_x/2$) riportate in Figura 5.7. Oltre alla posizione istantanea delle particelle, la figura mostra anche la velocità verticale del fluido evidenziando un meccanismo caratteristico: moti ascendenti ($v' > 0$) spazzano le particelle verso l'alto, portandole al di sopra della posizione di equilibrio; in quella regione, quindi, le zone a maggiore concentrazione ($n' > 0$) risultano associate a velocità positive, ossia

$\langle n'v' \rangle > 0$. Specularmente, moti discendenti ($v' < 0$) spingono le particelle verso il basso; al di sotto di $y^+ \approx 90$ le fluttuazioni di concentrazione positive si associano a velocità negative, dando $\langle n'v' \rangle < 0$. In sintesi, le fluttuazioni turbolente verticali tendono a perturbare la posizione l'equilibrio imposto dall'onda acustica e il segno della covarianza $\langle n'v' \rangle$ registra il verso di questa perturbazione.

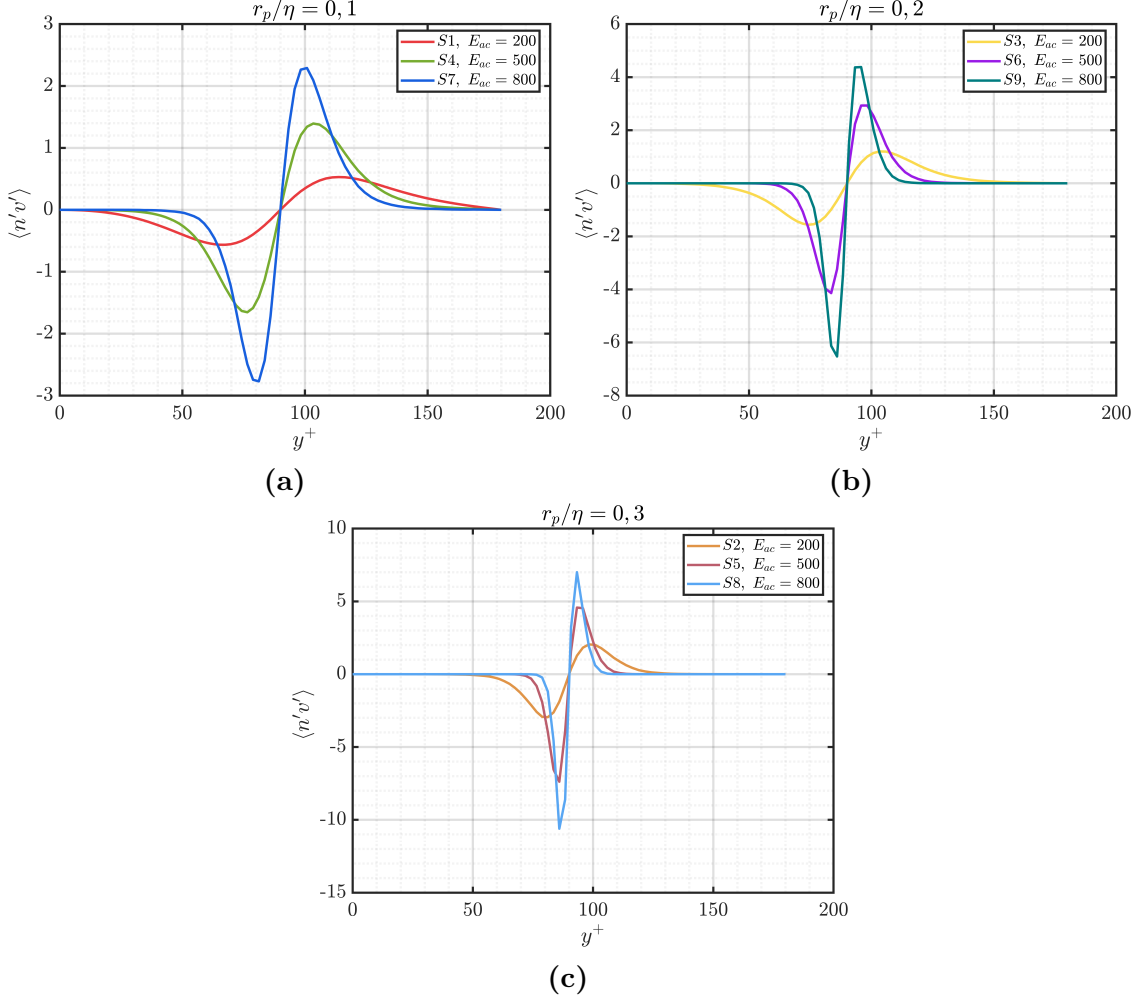


Figura 5.6: Covarianza della concentrazione con la componente y della velocità lungo la direzione perpendicolare alle pareti del canale. Questo grafico mostra il legame che esiste tra la concentrazione e la componente lungo y della velocità del flusso.

La covarianza tra la concentrazione n e la componente longitudinale della velocità u è mostrata in Figura 5.8 per le nove simulazioni. I profili di $\langle n'u' \rangle$ presentano un andamento di segno opposto rispetto a $\langle n'v' \rangle$. La spiegazione risiede nella dinamica turbolenta dei flussi di parete. Nella metà inferiore del canale, i moti ascendenti ($v' > 0$) sollevano porzioni di fluido a bassa velocità longitudinale, provenienti da regioni più vicine alla parete. Il sollevamento di fluido lento comporta quindi l'introduzione

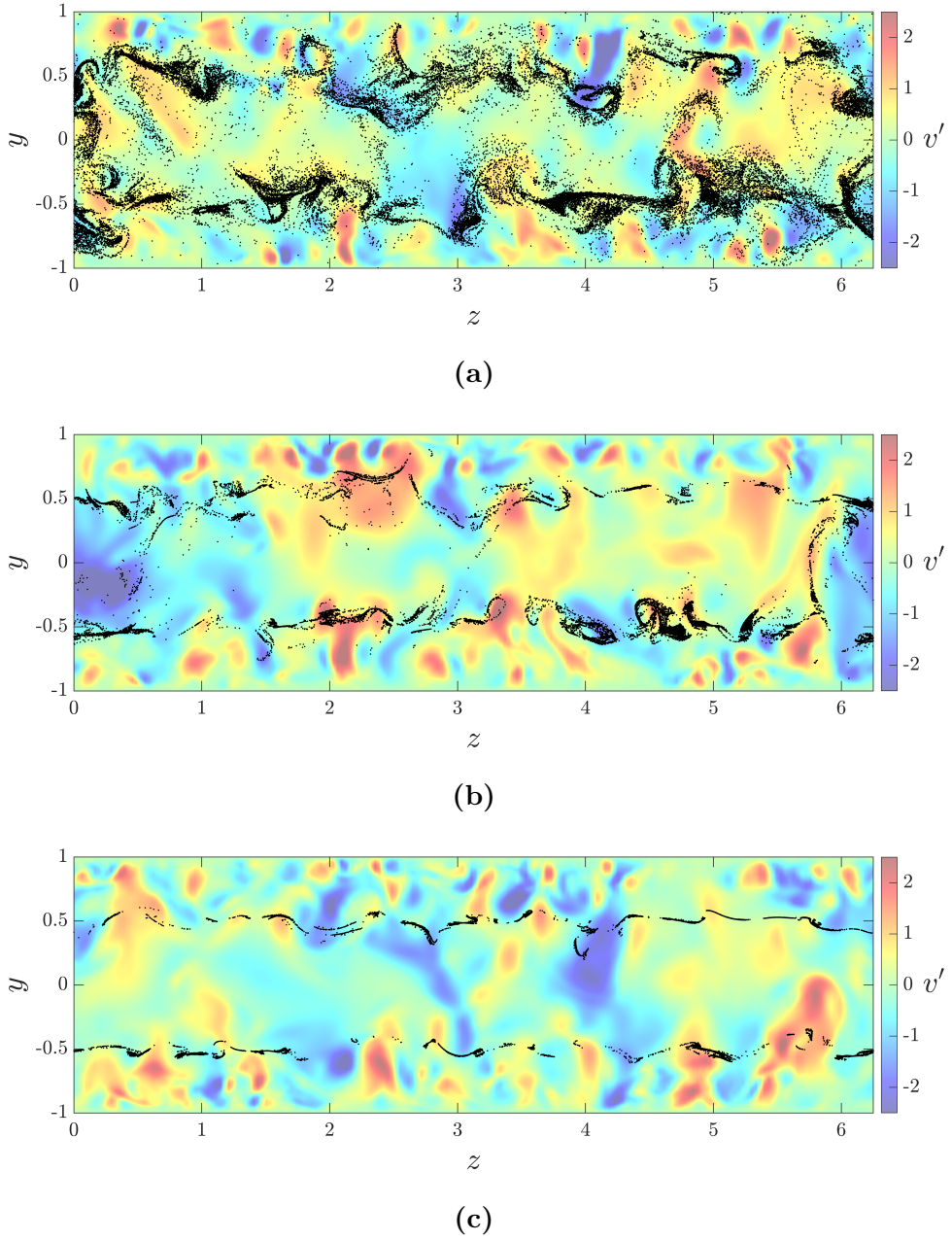


Figura 5.7: Distribuzione spaziale istantanea delle particelle (rappresentate fuori scala) nella regione compresa tra i piani trasversali $x = 2\pi - 0.065$ e $x = 2\pi + 0.065$. Lo sfondo rappresenta la componente della velocità del fluido perpendicolare alle pareti valutata nel piano trasversale medio ($x = 2\pi$). Dato che il moto medio verticale è nullo, $\langle v \rangle = 0$, si ha che $v = v'$. Le particelle hanno un numero di Stokes $St^+ = 0.8$ e un raggio $r/h = 8.57 \times 10^{-4}$. Sono riportati tre casi corrispondenti a diverse intensità dell'onda acustica: (a) $E_{ac} = 200$, (b) $E_{ac} = 500$ e (c) $E_{ac} = 800$.

di fluttuazioni di velocità u negative ($u' < 0$): più lento (longitudinalmente) del flusso medio a quella data distanza dalla parete. Questi eventi sono detti eventi di tipo

Q2 (“ejections”) e sono associati a $\langle u'v' \rangle < 0$ con $v' > 0$, $u' < 0$. I moti discendenti ($v' < 0$) trasportano invece fluido ad alta velocità longitudinale verso la parete, cioè verso regioni in cui la velocità media è più bassa, introducendo così fluttuazioni di u positive ($u' > 0$). Questi moti sono detti eventi di tipo Q4 (“sweeps”), anch’essi con $\langle u'v' \rangle < 0$ ma $v' < 0$, $u' > 0$. Per completezza, la nomenclatura che indica con Q2 gli eventi di ejection e Q4 gli eventi di sweep deriva dalla decomposizione in quadranti (Q) del piano (u', v') . In particolare, Q1 indica il primo quadrante, caratterizzato da ($u' > 0$, $v' > 0$); Q2 si riferisce al caso in cui ($u' < 0$, $v' > 0$), con Q3 si indica il caso in cui ($u' < 0$, $v' < 0$), e infine, con Q4 si denota la combinazione ($u' > 0$, $v' < 0$).

La correlazione tra u' e v' nei flussi turbolenti di parete spiega il segno di $\langle n'u' \rangle$. Al di sopra di $y^+ \approx 90$ si osserva $\langle n'v' \rangle > 0$: $n' > 0$ si associa a $v' > 0$ e, poiché nel canale piano turbolento u' si correla negativamente con v' ($\langle u'v' \rangle < 0$), ne consegue $\langle n'u' \rangle < 0$, come mostrato in Figura 5.8. Simmetricamente, al di sotto di $y^+ \approx 90$ si ha $\langle n'v' \rangle < 0$: $n' > 0$ si associa a $v' < 0$ e dunque $\langle n'u' \rangle > 0$. Per simmetria, lo stesso ragionamento vale nella metà superiore del canale.

In conclusione, la maggiore concentrazione osservata al di sopra della posizione di equilibrio ($y^+ \gtrsim 90$) è una conseguenza diretta dei moti turbolenti verticali che perturbano il nodo imposto dall’onda acustica: le fluttuazioni ascendenti ($v' > 0$) trasportano le particelle insieme a porzioni di fluido longitudinalmente più lente ($u' < 0$); al contrario, le fluttuazioni discendenti ($v' < 0$), associate a moti longitudinali più veloci ($u' > 0$), spingono le particelle al di sotto dell’equilibrio.

5.3 Accelerazioni

In questa sezione, sono presentati e analizzati i risultati relativi alle accelerazioni subite dalle particelle, i cui valori sono stati mediati nei piani paralleli alle pareti. Tale approccio consente di evidenziare le tendenze generali nel comportamento delle particelle all’interno del flusso.

Le Figure 5.9a, 5.9b e 5.9c mostrano l’andamento dell’accelerazione totale delle particelle, la quale integra i contributi di tutte le componenti di accelerazione discusse in dettaglio nel Capitolo 3. L’analisi di questi grafici rivela un andamento marcatamente sinusoidale, i cui minimi coincidono con gli zeri della funzione seno rappresentata nella Figura 5.3. Il profilo di accelerazione mostra, infatti, una notevole somiglianza con il valore assoluto della funzione seno, confermando una forte correlazione con l’onda acustica. Un aspetto saliente di questi risultati è che un incremento dell’intensità dell’onda acustica si traduce in un aumento dell’ampiezza dell’accelerazione in modulo. Questo fenomeno è una conseguenza diretta della

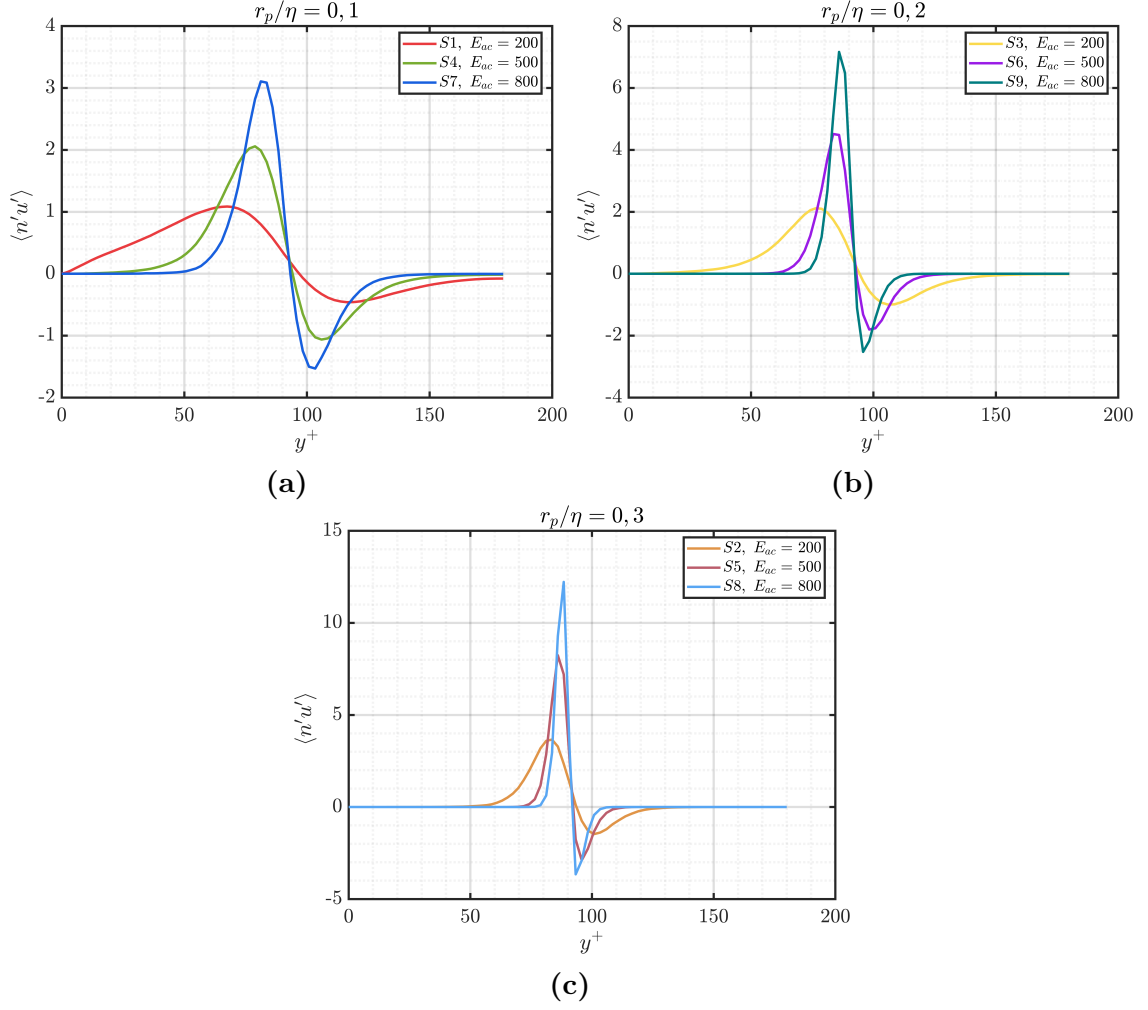


Figura 5.8: Covarianza della concentrazione con la componente x della velocità rappresentata in funzione della coordinata y^+ . Questo grafico mostra il legame che esiste tra la concentrazione e la componente lungo x della velocità del flusso.

relazione espressa nell'equazione (3.71), la quale stabilisce una dipendenza diretta tra la forza acustica adimensionale e l'intensità acustica radiativa. In aggiunta, tale variazione non solo influisce sull'ampiezza, ma provoca anche uno spostamento dei massimi di accelerazione, che tendono a convergere verso le posizioni in cui si registra la massima concentrazione di particelle. Questa dinamica suggerisce una stretta interazione tra il campo di forza acustica e la distribuzione spaziale delle particelle nel flusso.

L'incremento del raggio delle particelle determina un aumento dell'accelerazione in modulo, un comportamento già osservato in relazione alle concentrazioni. Tale correlazione è una diretta conseguenza del setup delle simulazioni, come descritto nel Capitolo 4. Sulla base dei parametri fissati, l'aumento del raggio della particella, r_p ,

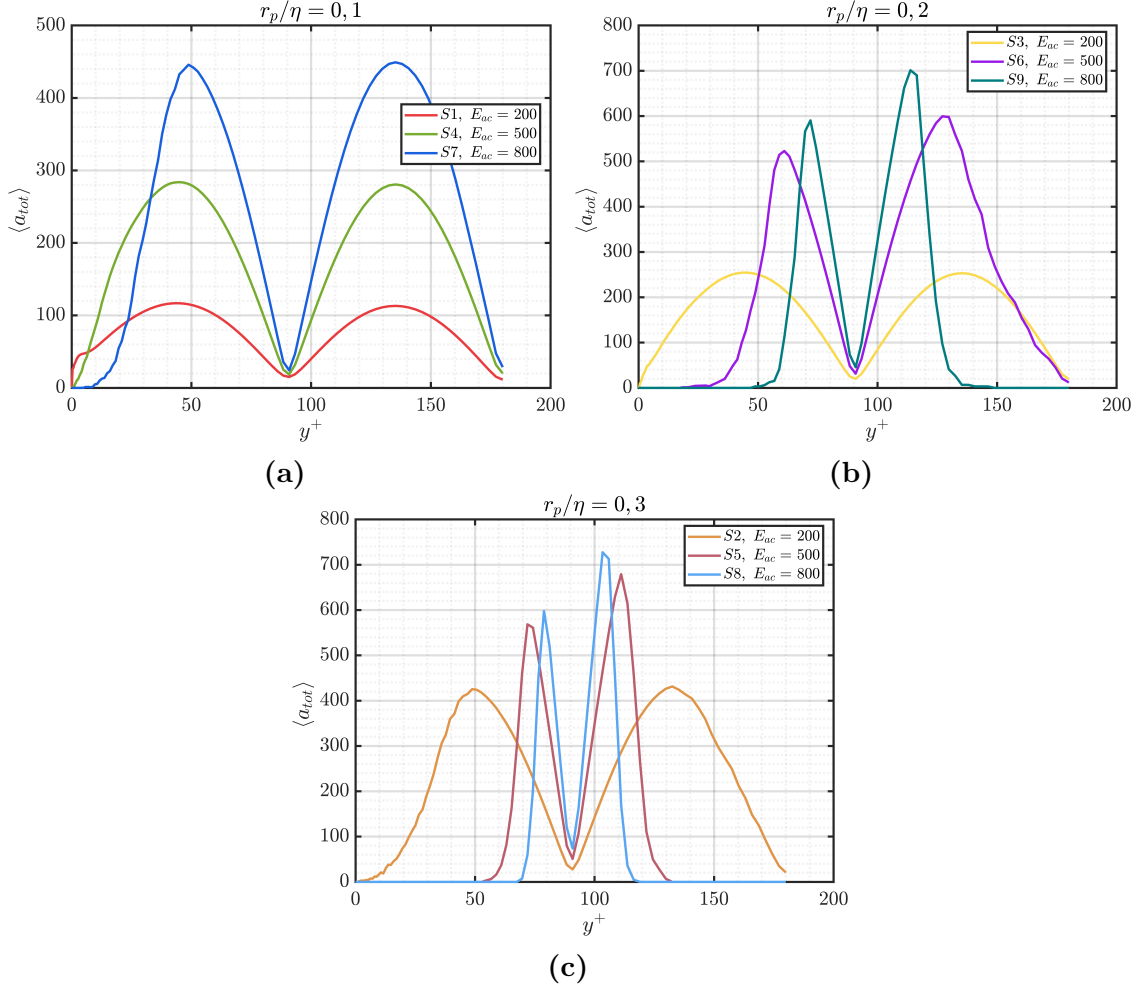


Figura 5.9: Andamento dell’accelerazione totale media agente nei piani paralleli alle pareti sulle particelle. Questo grafico contiene le informazioni sul modulo dell’accelerazione globale agente mediamente su una particella perciò sono considerati gli effetti di tutte le forze considerate nel Capitolo 3.

comporta una diminuzione della sua densità, ρ_p , per mantenere costante il numero di Stokes. Questo legame di proporzionalità inversa è illustrato in Figura 4.2, dove si evidenzia la riduzione del rapporto di densità $\frac{\rho_p}{\rho_f}$ al crescere di r_p . Di conseguenza, facendo riferimento all’equazione (3.71), si osserva che una minore densità della particella si traduce in una maggiore forza acustica adimensionalizzata, la quale è direttamente proporzionale all’accelerazione subita dalla particella.

Le Figure 5.10a, 5.10b e 5.10c illustrano l’andamento del rapporto tra l’accelerazione acustica radiativa e l’accelerazione dovuta alla resistenza di Stokes (che per semplicità sarà indicata come “accelerazione di Stokes”). Questi grafici rivelano che, nelle immediate vicinanze della parete, il contributo della forza acustica è notevolmente inferiore rispetto a quello della forza di Stokes. Questo fenomeno

è reso ancora più evidente all'aumentare dell'intensità acustica e del raggio della particella. Procedendo verso l'interno del canale, allontanandosi dalla parete, la componente acustica acquisisce un ruolo più significativo, seguendo un andamento sinusoidale che rispecchia la natura dell'onda acustica. In particolare si osserva una piccola regione, intorno a $y^+ = 90$, in cui il contributo dell'accelerazione di Stokes torna a essere dominante. Questo andamento complessivo è in linea con i risultati precedentemente discussi, i quali hanno dimostrato che la forza acustica radiativa tende a concentrare le particelle in determinate zone, dalle quali le altre forze non riescono più a disperderle efficacemente.

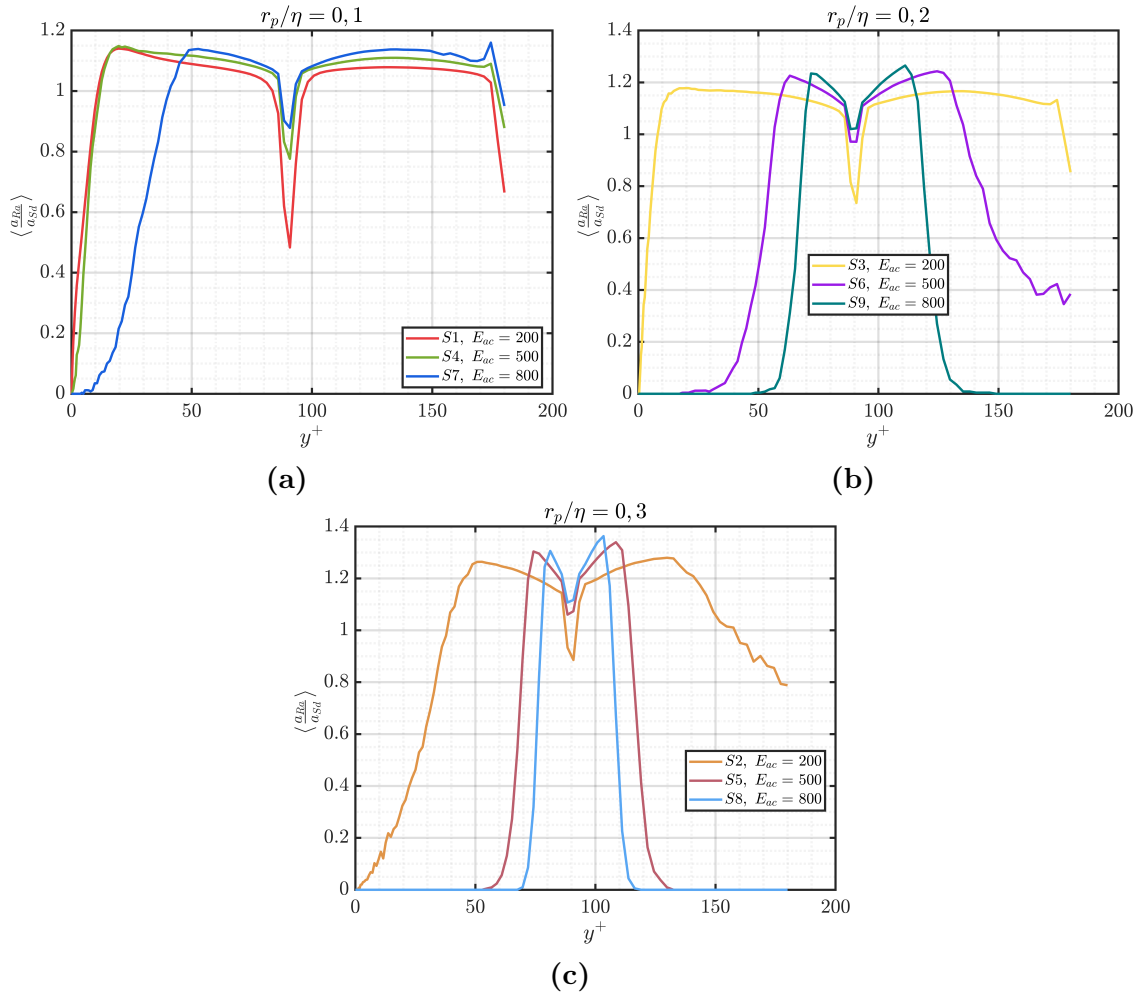


Figura 5.10: Andamento della media del rapporto tra l'accelerazione acustica, a_{Ra} , e l'accelerazione dovuta alla resistenza di Stokes, a_{St} , agente nei piani paralleli alle pareti sulle particelle.

5.4 Medie d'insieme

Allo scopo di ottenere una comprensione più approfondita e completa dell'influenza dell'onda acustica sul sistema e di permettere un confronto rigoroso tra le diverse condizioni di simulazione, è stata condotta un'analisi basata sul calcolo delle medie d'insieme. Questo approccio metodologico fornisce una visione sintetica e globale dell'andamento dei fenomeni fisici in esame, superando le fluttuazioni istantanee e le specificità di singole realizzazioni. I risultati di queste analisi sono riportati in Figura 5.11a, che illustra i valori dell'accelerazione media sull'intero canale e sull'intero campione di particelle per ogni simulazione. I profili sono in linea con le aspettative teoriche e confermano la validità delle ipotesi formulate. In particolare, si è osservato che l'efficacia della forza acustica sulle particelle, misurata in termini di accelerazione media, è direttamente proporzionale sia all'aumento dell'intensità acustica applicata che all'incremento del raggio delle particelle. Questa evidenza numerica rafforza in modo significativo la conclusione che l'azione dell'onda acustica rappresenta il principale meccanismo di controllo e modulazione della dinamica e, di conseguenza, dell'accelerazione delle particelle all'interno del flusso turbolento. La sua influenza dominante permette di manipolare le particelle in modo prevedibile, rendendola un fattore chiave per il controllo del moto delle particelle in flussi complessi.

La Figura 5.11b presenta in modo quantitativo il rapporto tra l'accelerazione indotta dalla forza di radiazione acustica e quella dovuta alla forza di Stokes. I dati riportati in questa analisi a livello globale confermano in modo coerente le conclusioni derivate dalle analisi più dettagliate illustrate nelle Figure 5.10a, 5.10b e 5.10c. Una delle principali osservazioni che si possono trarre da questa rappresentazione è che, in media su tutto il volume del canale, la forza radiativa esercitata dall'onda acustica è sistematicamente superiore alla forza di Stokes. Questo risultato cruciale sottolinea la dominanza del meccanismo acustico nel determinare il moto delle particelle rispetto ai tradizionali effetti di trascinamento del fluido. L'onda acustica non si limita a essere un fattore perturbante, ma agisce come il principale motore che governa la dinamica delle particelle nel flusso turbolento. È importante notare che, sebbene la dominanza acustica rappresenti la tendenza media sull'intero canale, la forza di Stokes potrebbe localmente prevalere o esercitare un'influenza comparabile in specifiche regioni del flusso. Questo fenomeno è dovuto alla complessa interazione tra il campo acustico stazionario, caratterizzato dalla sua struttura di nodi e ventri, e la natura vorticoso e fluttuante della turbolenza. Comprendere queste variazioni locali è cruciale per ottimizzare l'efficienza dei sistemi di manipolazione acustica e per prevedere con maggiore precisione il comportamento delle particelle in ogni

punto del canale. Tali evidenze rafforzano la conclusione che, sebbene l'acustoforesi sia il meccanismo principale di manipolazione, le proprietà della turbolenza del fluido continuano a esercitare un'influenza significativa che non può essere trascurata.

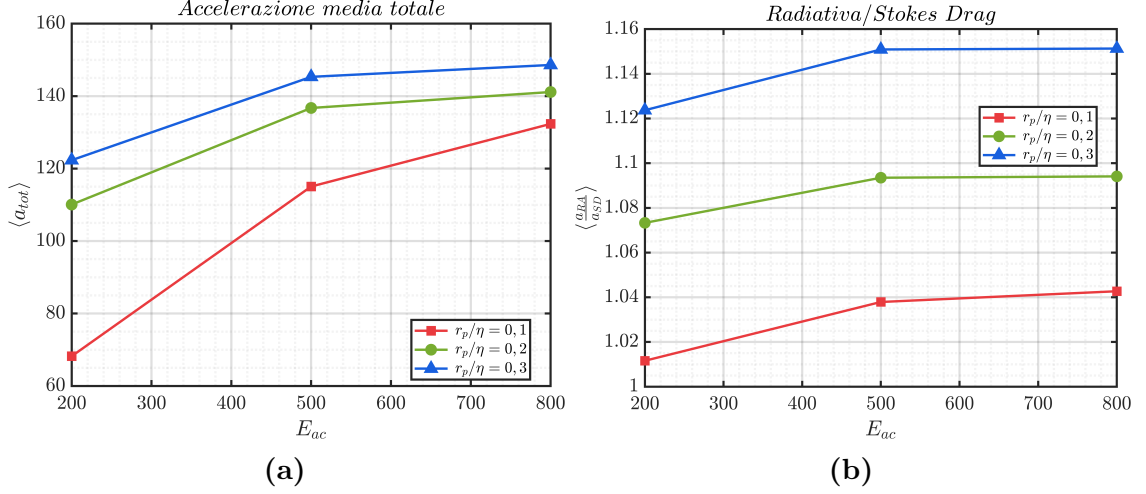


Figura 5.11: Nell'immagine di sinistra 5.11a viene riportato l'andamento dell'accelerazione totale mediata sull'intero canale e in tutto l'intervallo di tempo per ogni simulazione. Nell'immagine di destra 5.11b viene riportato l'andamento del rapporto tra l'accelerazione radiativa e l'accelerazione di Stokes, mediato sull'intero canale e in tutto l'intervallo di tempo per ogni simulazione. Questi grafici permettono di avere un chiaro quadro generale che riassume l'influenza dei due parametri principali, r_p e E_{ac} , sul flusso turbolento.

Nella Figura 5.12 viene presentata l'accelerazione radiativa assoluta, calcolata come media sull'intero canale e su tutto l'intervallo di tempo. Questa analisi statistica offre un'ulteriore conferma delle conclusioni precedentemente tratte, in quanto rende evidente la relazione diretta tra l'accelerazione radiativa e i parametri del sistema. I risultati, infatti, mostrano chiaramente l'influenza dell'intensità dell'onda acustica e del raggio della particella sull'accelerazione stessa. All'aumentare di questi due fattori, l'accelerazione media delle particelle tende a crescere in modo significativo, convalidando l'ipotesi che la forza acustica radiativa sia il principale motore del movimento delle particelle in questo contesto.

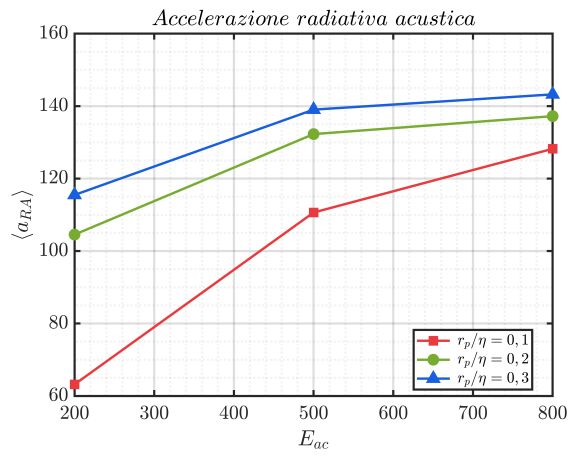


Figura 5.12: Andamento dell'accelerazione radiativa mediata su tutto il canale e in tutto l'intervallo di tempo.

Conclusioni

Il presente studio ha indagato l'interazione tra i fenomeni di acustoforesi e turboforesi in un flusso turbolento di canale, esplorando l'effetto di un'onda acustica stazionaria sulla dinamica di particelle leggere. L'analisi è stata condotta attraverso simulazioni numeriche dirette di tipo Point-Particle DNS, colmando una lacuna nella letteratura scientifica relativa all'interazione tra flussi turbolenti carichi di particelle e onde acustiche. L'ipotesi centrale, ovvero che la forza di radiazione acustica potesse permettere il controllo non invasivo della posizione delle particelle, è stata pienamente confermata dai risultati ottenuti.

I risultati delle simulazioni hanno dimostrato in modo inequivocabile che l'imposizione di un'onda acustica ha un'influenza significativa sulla distribuzione delle particelle. In particolare, è emersa una chiara tendenza delle particelle a convergere verso i nodi dell'onda stazionaria imposta, come dimostrato dall'andamento della concentrazione media lungo la direzione perpendicolare alle pareti. Questo fenomeno di aggregazione si manifesta in maniera più marcata all'aumentare dell'intensità dell'onda acustica, portando a una concentrazione più elevata e localizzata in zone specifiche del canale. Il comportamento delle particelle segue la funzione sinusoidale dell'onda stazionaria, con i massimi di concentrazione posizionati esattamente nei punti di equilibrio stabili, dove la derivata della forza acustica è negativa.

Un'ulteriore analisi ha evidenziato come le proprietà fisiche delle particelle influenzino la loro aggregazione. Mantenendo costante il numero di Stokes, un aumento del raggio delle particelle ha comportato un notevole incremento dell'ampiezza del picco di concentrazione. Questo risultato è stato attribuito alla conseguente diminuzione del rapporto di densità tra particella e fluido, rendendo le particelle dinamicamente più leggere e, di conseguenza, più facili da aggregare sotto l'azione dell'onda acustica.

In sintesi, questo studio ha fornito una profonda comprensione dei meccanismi che regolano l'interazione tra particelle e onde acustiche in un contesto di flusso turbolento. I risultati aprono nuove e promettenti prospettive per la progettazione di dispositivi in grado di controllare efficacemente il raggruppamento delle particelle.

Le applicazioni potenziali sono molteplici e significative, spaziando dalla depurazione di fumi o acque inquinate a strumenti per la separazione di particelle disperse in sostanze come il sangue. I risultati ottenuti da questo studio rappresentano un passo importante verso lo sviluppo di tecnologie non invasive per la manipolazione di fasi disperse in flussi complessi.

In lavori futuri, il fenomeno potrà essere approfondito con uno studio parametrico continuo, variando in modo controllato l'intensità E_{ac} e la frequenza dell'onda acustica per determinare le soglie di risposta delle particelle all'onda imposta e identificare le condizioni più efficaci nel modulare trasporto e clustering delle particelle. Sarà inoltre opportuno esplorare l'effetto del numero di Stokes St e del numero di Reynolds Re_τ al fine di derivare leggi di scala. Una volta chiariti i meccanismi elementari, l'analisi potrà essere estesa a forzanti più complesse, così da valutare l'impatto della configurazione del forcing e della geometria sulle dinamiche di trasporto e accumulo.

Bibliografia

- [1] J. Cuzzi, R. Hogan, J. Paque e A. Dobrovolskis. «Size-selective Concentration of Chondrules and Other Small Particles in Protoplanetary Nebula Turbulence». In: *The Astrophysical Journal* 546 (set. 2000). DOI: 10.1086/318233 (cit. a p. 1).
- [2] S. Elghobashi. «Direct Numerical Simulation of Turbulent Flows Laden with Droplets or Bubbles». In: *Annual Review of Fluid Mechanics* 51 (gen. 2019). DOI: 10.1146/annurev-fluid-010518-040401 (cit. a p. 1).
- [3] S. Balachandar e J. Eaton. «Turbulent Dispersed Multiphase Flow». In: *Annu. Rev. Fluid Mech.* 42 (gen. 2010), pp. 111–133. DOI: 10.1146/annurev-fluid.010908.165243 (cit. alle pp. 1, 2).
- [4] L. Brandt e F. Coletti. «Particle-Laden Turbulence: Progress and Perspectives». In: *Annual Review of Fluid Mechanics* 54 (gen. 2022). DOI: 10.1146/annurev-fluid-030121-021103 (cit. alle pp. 1, 3).
- [5] J. Kuerten. «Point-Particle DNS and LES of Particle-Laden Turbulent flow - a state-of-the-art review». In: *Flow, Turbulence and Combustion* 97 (ott. 2016). DOI: 10.1007/s10494-016-9765-y (cit. alle pp. 2, 15, 37).
- [6] S. Elghobashi. «On predicting particle-laden turbulent flows». In: *Applied Scientific Research* 52 (1994), pp. 309–329 (cit. a p. 2).
- [7] J. Bec, A. Celani, M. Cencini e S. Musacchio. «Clustering and collisions of heavy particles in random smooth flows». In: *Physics of Fluids* 17.7 (giu. 2005), p. 073301. DOI: 10.1063/1.1940367 (cit. a p. 3).
- [8] J. Bec. «Multifractal concentrations of inertial particles in smooth random flows». In: *Journal of Fluid Mechanics* 528 (2005), pp. 255–277. DOI: 10.1017/S0022112005003368 (cit. a p. 3).
- [9] V. Armenio e V. Fiorotto. «The importance of the forces acting on particles in turbulent flows». In: *Physics of Fluids* 13 (ago. 2001), pp. 2437–2440. DOI: 10.1063/1.1385390 (cit. alle pp. 3, 19).

- [10] S. Wang, X. Wang, F. You e H. Xiao. «Review of Ultrasonic Particle Manipulation Techniques: Applications and Research Advances». In: *Micromachines* 14.8 (2023). ISSN: 2072-666X. DOI: 10.3390/mi14081487 (cit. a p. 3).
- [11] R. Barnkob, Per A., T. Laurell e H. Bruus. «Acoustic radiation- and streaming-induced microparticle velocities determined by microparticle image velocimetry in an ultrasound symmetry plane». In: *Phys. Rev. E* 86 (5 nov. 2012), p. 056307. DOI: 10.1103/PhysRevE.86.056307 (cit. a p. 3).
- [12] G. P. Zank e W. H. Matthaeus. «The equations of nearly incompressible fluids. I. Hydrodynamics, turbulence, and waves». In: *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics* 3.1 (gen. 1991), pp. 69–82. DOI: 10.1063/1.857865 (cit. a p. 4).
- [13] M. Settnes e H. Bruus. «Forces acting on a small particle in an acoustical field in a viscous fluid». In: *Phys. Rev. E* 85 (1 gen. 2012), p. 016327. DOI: 10.1103/PhysRevE.85.016327. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.85.016327> (cit. alle pp. 4, 20–22, 29).
- [14] Stephen B. Pope. *Turbulent Flows*. Cambridge University Press, 2000 (cit. a p. 4).
- [15] J. Jiménez. «Near-wall turbulence». In: *Physics of Fluids* 25.10 (ott. 2013), p. 101302. ISSN: 1070-6631. DOI: 10.1063/1.4824988. eprint: https://pubs.aip.org/aip/pof/article-pdf/doi/10.1063/1.4824988/16097093/101302_1_online.pdf. URL: <https://doi.org/10.1063/1.4824988> (cit. a p. 6).
- [16] S. B. Pope. *Turbulent Flows*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000 (cit. alle pp. 6, 8–10, 12).
- [17] G. G. Stokes. «On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums». In: *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* 9 (1851), pp. 8–106 (cit. a p. 16).
- [18] A. B. Basset. *A Treatise on Hydrodynamics: With Numerous Examples*. Vol. 2. A Treatise on Hydrodynamics: With Numerous Examples. Bell e Company, 1888 (cit. a p. 16).
- [19] J. Boussinesq. *Théorie de l'écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides dans les lits rectilignes a grande section*. Vol. 1. Gauthier-Villars et fils, 1897 (cit. a p. 16).
- [20] C. W. Oseen. *Neuere Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik*. Mathematik und ihre Anwendungen in Monographien und Lehrbüchern. Akademische Verlagsgesellschaft, 1927 (cit. a p. 16).

- [21] M. R. Maxey e J. J. Riley. «Equation of motion for a small rigid sphere in a nonuniform flow». In: *The Physics of Fluids* 26.4 (apr. 1983), pp. 883–889. ISSN: 0031-9171. DOI: 10.1063/1.864230. eprint: https://pubs.aip.org/aip/pfl/article-pdf/26/4/883/12462274/883_1_online.pdf. URL: <https://doi.org/10.1063/1.864230> (cit. a p. 16).
- [22] L. Schiller e A. Naumann. «A drag coefficient correlation». In: *Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure* 77 (1935), pp. 318–320 (cit. a p. 17).
- [23] S. I. Rubinow e Joseph B. Keller. «The transverse force on a spinning sphere moving in a viscous fluid». In: *Journal of Fluid Mechanics* 11.3 (1961), pp. 447–459. DOI: 10.1017/S0022112061000640 (cit. a p. 18).
- [24] P. G. Saffman. «The lift on a small sphere in a slow shear flow». In: *Journal of Fluid Mechanics* 22.2 (1965), pp. 385–400. DOI: 10.1017/S0022112065000824 (cit. a p. 18).
- [25] W. Gao, P. Shi, M. Parsani e P. Costa. «On the relevance of lift force modelling in turbulent wall flows with small inertial particles». In: *Journal of Fluid Mechanics* 988 (2024), A47. DOI: 10.1017/jfm.2024.474 (cit. a p. 18).
- [26] S. Balachandar. «A scaling analysis for point-particle approaches to turbulent multiphase flows». In: *International Journal of Multiphase Flow* 35.9 (2009), pp. 801–810. ISSN: 0301-9322. DOI: 10.1016/j.ijmultiphaseflow.2009.02.013 (cit. a p. 18).
- [27] A. Daitche. «On the role of the history force for inertial particles in turbulence». In: *Journal of Fluid Mechanics* 782 (2015), pp. 567–593. DOI: 10.1017/jfm.2015.551 (cit. a p. 19).
- [28] Y. Ling, M. Parmar e S. Balachandar. «A scaling analysis of added-mass and history forces and their coupling in dispersed multiphase flows». In: *International Journal of Multiphase Flow* 57 (2013), pp. 102–114. ISSN: 0301-9322. DOI: 10.1016/j.ijmultiphaseflow.2013.07.005 (cit. a p. 19).
- [29] S. Olivieri, F. Picano, G. Sardina, D. Iudicone e L. Brandt. «The effect of the Basset history force on particle clustering in homogeneous and isotropic turbulence». In: *Physics of Fluids* 26.4 (apr. 2014), p. 041704. ISSN: 1070-6631. DOI: 10.1063/1.4871480 (cit. a p. 19).
- [30] L. P. Gor'kov. «On the Forces Acting on a Small Particle in an Acoustical Field in an Ideal Fluid». In: *Soviet Physics Doklady* 6 (1962), pp. 773–775 (cit. alle pp. 20, 21).

- [31] D. Zaza. «Particle-laden Channel Flows: Mixed Convection and Non-Heavy Particles». PhD thesis. Politecnico di Torino, mar. 2025 (cit. a p. 30).
- [32] S. Pirozzoli. «Finite Difference Methods for Incompressible and Compressible Turbulence». In: *Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Cham: Springer International Publishing, 2019, pp. 55–118. ISBN: 978-3-030-17012-7. DOI: 10.1007/978-3-030-17012-7_3 (cit. a p. 33).
- [33] J. H. Ferziger e M. Peric. «Solution of the Navier-Stokes Equations». In: *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1996, pp. 149–208. ISBN: 978-3-642-97651-3. DOI: 10.1007/978-3-642-97651-3_7 (cit. a p. 33).
- [34] V. John. «The Time-Dependent Navier–Stokes Equations: Turbulent Flows». In: *Numerical Simulation of Incompressible Flows: Methods and Results*. Cham: Springer International Publishing, 2016, pp. 447–647. ISBN: 978-3-319-45750-5. DOI: 10.1007/978-3-319-45750-5_8 (cit. a p. 33).
- [35] C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni e T. A. Zang. «Some Algorithms for Unsteady Navier–Stokes Equations». In: *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1988, pp. 201–239. ISBN: 978-3-642-84108-8. DOI: 10.1007/978-3-642-84108-8_7 (cit. a p. 33).
- [36] R. Peyret. «Fundamentals of spectral methods». In: *Numerical Methods for Fluid Dynamics*. New York, NY: Springer New York, 2002, pp. 9–15. ISBN: 978-1-4757-6557-1. DOI: 10.1007/978-1-4757-6557-1_2 (cit. a p. 33).
- [37] C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni e T. A. Zang. «Introduction». In: *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1988, pp. 1–30. ISBN: 978-3-642-84108-8. DOI: 10.1007/978-3-642-84108-8_1 (cit. alle pp. 33–35).
- [38] C Canuto, M Y Hussaini, A Quarteroni e T A Zang. *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Heidelberg: Springer, 1988. ISBN: 978-3-540-52205-8. DOI: 10.1007/978-3-642-84108-8 (cit. alle pp. 33, 34).
- [39] R. Peyret. «Fundamentals of spectral methods». In: *Spectral Methods for Incompressible Viscous Flow*. New York, NY: Springer New York, 2002, pp. 9–15. ISBN: 978-1-4757-6557-1. DOI: 10.1007/978-1-4757-6557-1_2 (cit. a p. 34).