



**Politecnico
di Torino**

Politecnico di Torino

Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

A.a. 2024/2025

Sessione di laurea Ottobre 2025

Ottimizzazione di traiettorie per inserimento in orbite di parcheggio intorno a Marte e alle sue lune mediante un algoritmo genetico

Relatori:

Prof Lorenzo Casalino

Candidati:

Alessio Arata

Sommario

L'esplorazione Marziana e delle sue lune, ossia Phobos e Deimos, ha molteplici scopi scientifici. In questo elaborato verranno ottimizzate delle traiettorie per inserirsi in orbite di parcheggio intorno a Marte e alle sue lune. Verrà utilizzata la "bielliptic apotwist manouver" per trovare l'orbita di parcheggio ideale. Per minimizzare il DeltaV necessario viene fatto uso di un algoritmo genetico, il tutto svolto in ambiente Matlab.

Ringraziamenti

Vorrei ringraziare il professore Lorenzo Casalino per la sua disponibilità, per la sua professionalità e per il supporto nello svolgimento di questo lavoro di tesi, i suoi chiarimenti sono stati preziosi in questi mesi.

Un ringraziamento speciale anche alla mia famiglia, ai miei amici e a tutti coloro che mi sono stati vicini durante questo percorso. Il vostro aiuto in alcuni momenti di difficoltà è stato fondamentale, una parte di questo traguardo è anche vostro.

Indice

Elenco delle tabelle	VI
Elenco delle figure	VIII
1 Introduzione	1
1.1 Obiettivi della tesi	3
1.2 Struttura della tesi	3
2 Concetti di Meccanica Orbitale	4
2.1 Leggi di Keplero	4
2.2 Legge di Newton	5
2.3 Problema dei due corpi	5
2.3.1 Le costanti del moto	7
2.4 L'equazione della traiettoria	9
2.5 Parametri orbitali	10
2.6 Tipologie di orbite	14
2.6.1 Sfera d'influenza	16
2.7 Missioni interplanetarie - Patched conics method	17
3 Bielliptic Apotwist Maneuver	19
3.1 Struttura della manovra	19
3.1.1 Modifiche apportate - Fasatura	22
3.1.2 Parametri di input e gradi di libertà del problema	22
3.2 Calcolo del ΔV totale	23
3.2.1 Orbita iperbolica A	23
3.2.2 Orbita B e ΔV_1	26
3.2.3 Orbita C e ΔV_2	28
3.2.4 Orbita D e ΔV_3	29
3.2.5 Orbita E e ΔV_4	30

4	L'Algoritmo Genetico	31
4.1	Introduzione e origine dell'algoritmo	31
4.1.1	Terminologia	32
4.2	Schematizzazione dell'algoritmo	33
4.3	Inizializzazione	34
4.4	Selezione	34
4.4.1	Roulette Wheel Selection	35
4.4.2	Rank Selection	36
4.4.3	Tournament Selection	36
4.4.4	Stochastic Universal Sampling	37
4.4.5	Elitism Selection	37
4.5	Crossover	38
4.5.1	Single Point Crossover	38
4.5.2	Two Point Crossover	39
4.5.3	Multi-Point Crossover	39
4.5.4	Uniform Crossover	39
4.5.5	Three Parents Crossover	40
4.6	Mutazione	40
4.6.1	Simple Swap	40
4.6.2	Simple Move	41
4.6.3	Scramble	41
4.6.4	Sub-Tour Inversion	41
4.6.5	Swap Bocks	42
4.7	Criteri di arresto	42
4.8	L'Algoritmo Genetico in Matlab	43
5	Risultati	45
5.1	Confronto finestre di lancio	46
5.2	Caso missione 2037 verso Phobos	48
5.3	Caso missione 2037 verso Deimos	52
6	Conclusioni	56
A	Sistema di riferimento Mars-Centered Inertial MCI	58
B	Sistema di riferimento Perifocale	60
C	Matrici di rotazione	61
D	Effetti delle perturbazioni	62
	Bibliografia	63

Elenco delle tabelle

2.1	Masse dei corpi interessati dallo studio	5
2.2	Relazione tra e , a , E e tipologia di orbita	12
2.3	Anomalia vera	12
2.4	Inclinazioni	13
3.1	Fasi della manovra	21
3.2	Variabili da ottimizzare	22
3.3	Parametri fissati	23
4.1	Esempio Single Point Crossover	38
4.2	Esempio Two Point Crossover	39
4.3	Esempio Uniform Crossover	39
4.4	Esempio Three Parents Crossover	40
4.5	Esempio Simple Swap Mutation	40
4.6	Esempio Simple Move Mutation	41
4.7	Esempio Scramble Mutation	41
4.8	Esempio Sub-Tour Mutation	41
4.9	Esempio Swap Blocks Mutation	42
5.1	Arrival and departure conditions for chemical option (2037-2045) . .	45
5.2	Parametri Phobos e Deimos	45
5.3	Costi in termini di DV per Phobos	46
5.4	Costi in termini di DV per Deimos	47
5.5	DeltaV delle singole manovre e stima del DVtotale	48
5.6	Latitudini/longitudini e raggi delle 7 manovre	48
5.7	Componenti velocità pre/post manovra e DeltaV manovre	49
5.8	Parametri Orbite	49
5.9	Soluzione	50
5.10	DV delle varie manovre	52
5.11	Latitudini/longitudini e raggi delle 7 manovre	52
5.12	Parametri Orbite	53

5.13 Componenti velocità pre/post manovra e DeltaV manovre	53
5.14 Soluzione	54

Elenco delle figure

2.1	Problema dei due corpi [9]	6
2.2	Flight-Path Angle [9]	8
2.3	Geometria dell'orbita ellittica	9
2.4	Parametri orbitali classici [10]	10
2.5	Sezioni coniche [11]	11
2.6	Geometria orbita iperbolica	15
2.7	Schema Patched conics method per trasferimento Terra-Marte [12]	17
3.1	Bielliptic Apotwist Maneuver [14]	20
3.2	Non-tangential capture into Coplanar intersecting capture orbit [16]	21
3.3	Iperbole di arrivo e velocità alla cattura	25
3.4	Orbita B e ΔV_1	27
3.5	Orbita C e ΔV_2	28
3.6	Orbita D e ΔV_3	29
3.7	Orbite E/F e ΔV_4	30
4.1	Schema della terminologia dell'algoritmo genetico	32
4.2	Schema di funzionamento di un algoritmo genetico	33
4.3	Roulette Wheel Selection [20]	35
4.4	Rank Selection [20]	36
4.5	Tournament Selection [20]	36
4.6	Stochastic Universal Sampling [20]	37
5.1	Vista da lontano della soluzione	50
5.2	Vista da vicino della soluzione	51
5.3	Manovra DV2: inserimento nel piano di Deimos	54
5.4	Primo piano delle traiettorie verso Deimos	55
A.1	Esempio Mars-Centered Inertial	59
A.2	Sistema di riferimento perifocale	59

Capitolo 1

Introduzione

L'esplorazione di Marte rappresenta una delle principali frontiere della ricerca spaziale contemporanea. Sin dagli anni Sessanta, con le missioni Mariner e Viking della NASA, il pianeta rosso ha costituito un obiettivo privilegiato per la comunità scientifica, per via delle sue peculiari caratteristiche geologiche, atmosferiche e biologiche. Marte è fondamentale per comprendere l'evoluzione dei pianeti terrestri e dei processi che regolano l'emergere e la scomparsa di ambienti potenzialmente abitabili.

Si ipotizza che Marte in passato abbia ospitato acqua liquida, condizione necessaria per lo sviluppo di processi prebiotici. A sostegno di quest'ipotesi ci sono diversi indizi: a differenza della Luna terrestre e di Venere, su Marte sono stati trovati depositi sedimentari e minerali idrati oltre che numerose reti fluviali fossili. [1]

L'obiettivo dell'esplorazione contemporanea è quindi duplice: da un lato, ricostruire la storia geologica e climatica del pianeta; dall'altro, valutare la sua potenziale abitabilità passata e futura. Negli ultimi decenni, numerose missioni robotiche, tra cui Mars Reconnaissance Orbiter, Curiosity, Perseverance, e ExoMars, hanno arricchito in modo sostanziale la conoscenza della superficie e dell'atmosfera marziana. Tuttavia, la comprensione completa del sistema marziano non può prescindere dall'esplorazione dei suoi satelliti naturali, Phobos e Deimos, in quanto sono elementi fondamentali per ricostruire l'origine e dell'evoluzione del pianeta.

Phobos e Deimos, scoperte da Asaph Hall nel 1877, costituiscono due piccoli corpi irregolari che orbitano rispettivamente a circa 9.400 km e 23.500 km dal centro di Marte. La loro composizione, densità e morfologia indicano una natura complessa, che non consente di stabilire con certezza se si tratti di asteroidi catturati o di frammenti originati da un impatto gigante [2]. Entrambe le ipotesi (la seconda

ipotesi è la più accreditata per quanto riguarda Phobos [3]) comportano implicazioni significative per la storia del sistema marziano: nel primo caso, Phobos e Deimos sarebbero testimoni dei processi di cattura gravitazionale e migrazione planetaria; nel secondo, costituirebbero residui di materiale espulso da Marte, fornendo accesso indiretto alla composizione primitiva della crosta marziana.

Phobos, con un diametro medio di circa 22 km, orbita in appena 7 ore e 39 minuti, completando più di tre rivoluzioni per ogni giorno marziano. Tale rapidità, unita alla sua orbita decrescente, ci fa pensare che il satellite stia lentamente cadendo verso il pianeta, con un moto a spirale, e quindi destinato a disgregarsi o impattare su Marte entro 30–50 milioni di anni [4]. Deimos, al contrario, possiede un'orbita più stabile e distante, e si allontana lentamente a causa delle interazioni mareali. Queste differenze dinamiche rendono le due lune un laboratorio naturale per lo studio delle interazioni gravitazionali e mareali nei sistemi planetari minori.

Lo studio di Phobos e Deimos offre tre principali linee di indagine scientifica:

- comprendere l'origine e l'evoluzione del sistema Marte-lune
- ricostruire l'ambiente spaziale marziano
- esplorare il potenziale utilizzo delle lune come avamposti per missioni umane

Da quest'ultimo punto di vista, Phobos e Deimos rappresentano potenziali basi intermedie per missioni umane. La loro bassa gravità facilita operazioni di atterraggio e decollo, riducendo i costi energetici rispetto alla superficie di Marte. Inoltre, la possibilità di impiegare Phobos come piattaforma logistica o stazione di comando per rover e droni sulla superficie marziana è oggetto di crescente interesse. L'esplorazione delle lune marziane costituirebbe, in tal senso, un passo intermedio strategico tra le missioni robotiche attuali e i futuri insediamenti umani [5].

Dal punto di vista tecnologico, le missioni verso le lune marziane permettono di testare soluzioni innovative per l'atterraggio in gravità ridotta, la perforazione di regolite porosa e la protezione dalle radiazioni cosmiche. Tali esperienze costituiscono un banco di prova indispensabile in vista delle future missioni con equipaggio umano su Marte, dove i rischi associati alla superficie, polveri, escursioni termiche, radiazione, risultano significativamente più elevati [6].

1.1 Obiettivi della tesi

L'obiettivo della tesi è quello di ottimizzare delle traiettorie per inserirsi in orbite di parcheggio intorno a Marte ed alle sue lune. Quindi si vogliono ricavare delle orbite di parcheggio che intercettino le due lune marziane il tutto minimizzando il ΔV necessario. Le traiettorie non sono pensate solo per intercettare le lune ma anche per uscire dall'ambiente marziano e fare ritorno verso la Terra.

L'intento è quello di andare a gettare le basi per lo sviluppo di missioni che possano in futuro portare l'uomo all'esplorazione del sistema marziano.

1.2 Struttura della tesi

La tesi è strutturata su sei capitoli, incluso questo iniziale in cui sono introdotti i risvolti scientifici dell'esplorazione dell'ambiente marziano, incluse le sue lune.

Il secondo capitolo comprende dei richiami di Meccanica Orbitale, in esso sono racchiusi tutti quei concetti, leggi, formule, che sono stati utili nel corso del lavoro di tesi; inoltre sono anche pensati per il lettore che per la prima volta si avvicina a queste tematiche.

Il terzo capitolo analizza nel dettaglio la tipologia di manovra che viene utilizzata per il design delle traiettorie, la *bielliptic apotwist maneuver*. Contiene anche i passaggi principali del codice che ho scritto in linguaggio Matlab per calcolare il costo propulsivo della manovra.

Nel quarto capitolo è spiegato nel dettaglio il funzionamento di un algoritmo genetico e di come viene sfruttato in questa tesi per minimizzare il costo propulsivo. Sono anche mostrati i comandi principali per implementare in Matlab l'algoritmo e risolvere il problema di ottimo.

Nel quinto capitolo sono mostrati i risultati dell'ottimizzazione: vengono prese in considerazione diverse finestre di lancio e confrontate tra di loro per valutare quale sia la più conveniente. Sono infine tabulati i risultati dei casi migliori per ciascuna delle due lune. Questi risultati comprendono costi propulsivi di ciascuna manovra, latitudine, longitudine e raggio di ciascuna manovra, velocità dello spacecraft prima e dopo ciascuna manovra ed i parametri orbitali delle orbite oltre che una rappresentazione grafica.

L'ultimo capitolo è dedicato ai commenti conclusivi e a possibili spunti per proseguire il lavoro.

Capitolo 2

Concetti di Meccanica Orbitale

In questo capitolo viene fatta una panoramica sulla meccanica orbitale, in particolare ci soffermeremo sui concetti fisici e matematici più utili per la comprensione del lavoro svolto nella tesi.

2.1 Leggi di Keplero

Johannes Kepler 1571-1630 è stata una delle principali figure nel campo dell'astronomia, della matematica e filosofia; grazie ai suoi studi arrivò a formulare delle leggi innovative sul moto dei pianeti e a definire un modello più accurato del sistema solare [7].

1. L'orbita di ogni pianeta è un'ellisse col Sole che occupa uno dei due fuochi
2. Il raggio vettore che unisce il centro di un pianeta con il centro del Sole spazza aree uguali in tempi uguali
3. Il quadrato del periodo di un pianeta è proporzionale al cubo del semiasse maggiore

Queste leggi valgono sotto opportune ipotesi:

- La massa del pianeta è trascurabile rispetto a quella della stella
- Il pianeta e la stella possono essere considerati puntiformi
- Le interazioni con altri corpi si possono trascurare

2.2 Legge di Newton

Isaac Newton 1643-1727 diede una spiegazione più accurata del moto dei corpi, introducendo il concetto di *forza di gravitazione universale*[8].

La legge di gravitazione universale afferma che due corpi, rispettivamente di massa M ed m , si attraggono l'un l'altro lungo la congiungente tra i due, con una forza proporzionale al prodotto delle masse e inversamente proporzionale al quadrato delle distanze:

$$F = -G \frac{Mm}{r^2} \frac{\bar{r}}{r} \quad (2.1)$$

con:

- $G = 6.673 \cdot 10^{-11} [\frac{m^3}{kg s^2}]$ detta costante di gravitazione universale
- M ed m sono rispettivamente le masse del corpo centrale e del corpo che orbita attorno al principale
- r è il raggio vettore che unisce i centri di massa dei corpi

2.3 Problema dei due corpi

Dal momento che le masse di Phobos e Deimos sono molto minori rispetto a quella di Marte, possiamo trascurare gli effetti perturbativi che le due Lune hanno sul moto di uno spacecraft che orbita intorno a Marte.

Corpo	Massa in kg
Marte	$6.417 \cdot 10^{23}$
Phobos	$1.066 \cdot 10^{16}$
Deimos	$1.476 \cdot 10^{15}$

Tabella 2.1: Masse dei corpi interessati dallo studio

Pertanto possiamo determinare l'equazione del moto di un satellite intorno a Marte con il problema dei due corpi. Il problema dei due corpi è valido se sono rispettate le seguenti ipotesi:

- Il sistema è composto da due masse, m ed M , e la massa del corpo secondario è trascurabile rispetto alla massa del principale $m \ll M$
- Le masse sono considerate puntiformi
- Le masse hanno una simmetria sferica (è una forzatura, in seguito vengono considerati dei fenomeni perturbativi)

- La sola forza che agisce sui corpi è quella gravitazionale
- Si trascura la presenza degli altri corpi presenti nel sistema

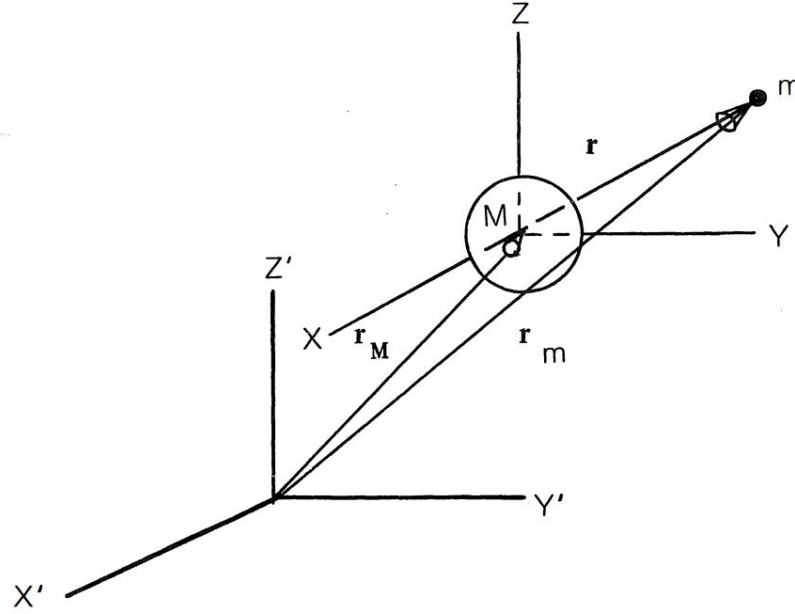


Figura 2.1: Problema dei due corpi [9]

Riferendosi alla figura si vede che $\mathbf{M}$ ed $\mathbf{m}$ sono le masse dei due corpi; ci sono due sistemi di riferimenti, il secondo ha origine coincidente col centro di massa del corpo $\mathbf{M}$. La posizione dei due corpi rispetto al primo sistema di riferimento, quello inerziale, è indicata dai vettori $\mathbf{r}_M$ ed $\mathbf{r}_m$. La posizione del secondo corpo nel secondo sistema di riferimento vale: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_m - \mathbf{r}_M$.

Applicando la legge di Newton ai due corpi nel sistema $X' Y' Z'$ otteniamo:

$$M\ddot{\mathbf{r}}_M = -\frac{GMm}{r^2}\frac{\bar{\mathbf{r}}}{r} \quad (2.2)$$

$$m\ddot{\mathbf{r}}_m = -\frac{GMm}{r^2}\frac{\bar{\mathbf{r}}}{r} \quad (2.3)$$

che si possono riscrivere:

$$\ddot{\mathbf{r}}_M = -\frac{Gm}{r^3}\bar{\mathbf{r}} \quad (2.4)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_m = -\frac{GM}{r^3}\bar{\mathbf{r}} \quad (2.5)$$

Infine sottraendo le due espressioni otteniamo:

$$\ddot{r} = -\frac{G(M+m)}{r^3}\bar{r} \quad (2.6)$$

che non è altro che l'espressione del moto relativo del secondo corpo rispetto al primo.

Possiamo inoltre considerare la massa del corpo minore trascurabile rispetto a quella del corpo maggiore $m \ll M$ quindi possiamo dire che:

$$G(M+m) \simeq GM \quad (2.7)$$

Introduciamo quindi il *parametro di gravitazione universale* μ :

$$\mu = GM \quad (2.8)$$

La precedente equazione si riscrive così:

$$\ddot{r} + \frac{\mu}{r^3}\bar{r} = 0 \quad (2.9)$$

Questa relazione vale se verificate le ipotesi fatte in precedenza e descrive il moto di un corpo m rispetto al principale M .

2.3.1 Le costanti del moto

A questo punto è necessario spiegare alcuni concetti utili per comprendere la natura delle orbite. Il campo gravitazionale è conservativo, questo implica che un corpo che si muove sotto l'influenza del solo campo gravitazionale non acquista nè perde energia meccanica. Quello che succede è che a seconda della posizione del satellite nell'orbita, cambia la distribuzione tra energia potenziale ed energia cinetica. Per variare invece il momento angolare di un corpo che ruota attorno ad un centro di rotazione andrebbe applicata una forza tangenziale, ma noi sappiamo che il campo gravitazionale agisce soltanto in senso radiale rispetto al centro di rotazione. Pertanto in assenza di altre forze, il momento angolare si conserva.

Dal momento che l'energia meccanica si conserva si può ricavare la costante E , cioè l'energia meccanica specifica che possiede il satellite:

$$E = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} \quad (2.10)$$

E contiene il contributo dell'energia cinetica per unità di massa e dell'energia potenziale per unità di massa e rimane costante lungo tutta l'orbita.

Il momento angolare specifico si può calcolare così:

$$\bar{h} = \bar{r} \times \bar{v} \quad (2.11)$$

Per come è definito, esso è sempre perpendicolare al piano contenente $\bar{r}$ e $\bar{v}$, ed è una costante del moto. Il piano su cui giacciono $\bar{r}$ e $\bar{v}$ prende il nome di piano orbitale.

Esiste anche un altro modo di definire il vettore $\bar{h}$, per farlo dobbiamo introdurre il *Flight-Path Angle* φ , che determina la direzione del vettore velocità.

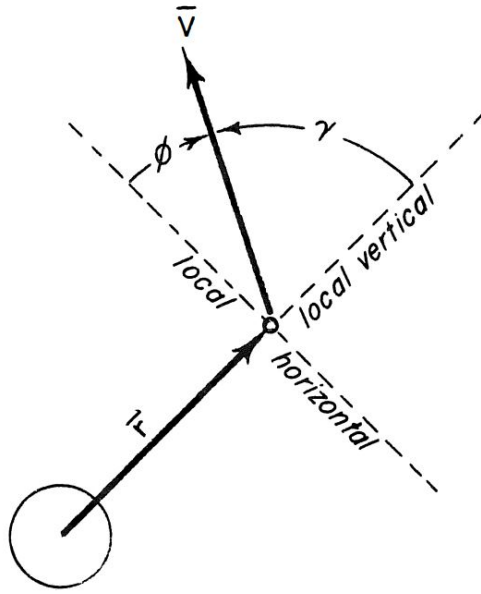


Figura 2.2: Flight-Path Angle [9]

Il Flight-Path Angle è l'angolo tra il vettore velocità ed il piano dell'orizzonte locale. Lo *Zenith Angle* γ è invece l'angolo tra il vettore velocità e il verticale locale. Quindi il vettore $\bar{h}$ si può anche definire come:

$$|\bar{h}| = |\bar{r} \times \bar{v}| = r v \sin(\gamma) = r v \cos(\varphi) \quad (2.12)$$

2.4 L'equazione della traiettoria

La soluzione completa dell'equazione del moto di una piccola massa attorno ad un altro corpo non è così semplice da ottenere, ma è possibile ricavare un'equazione parziale.

Moltiplicando l'equazione del moto ricavata prima per il momento angolare specifico si ottiene:

$$\ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h} = \frac{\mu}{r^3}(\mathbf{h} \times \mathbf{r}) \quad (2.13)$$

Se andiamo ad integrare l'equazione appena ottenuta, possiamo risolverla e ricavare il raggio della traiettoria r al netto di una costante d'integrazione B :

$$r = \frac{(h^2/\mu)}{1 + (B/\mu)\cos(\nu)} \quad (2.14)$$

dove il termine ν è l'angolo di anomalia vera, cioè l'angolo tra B ed il raggio r . L'equazione appena ottenuta rappresenta l'equazione della conica espressa in coordinate polari.

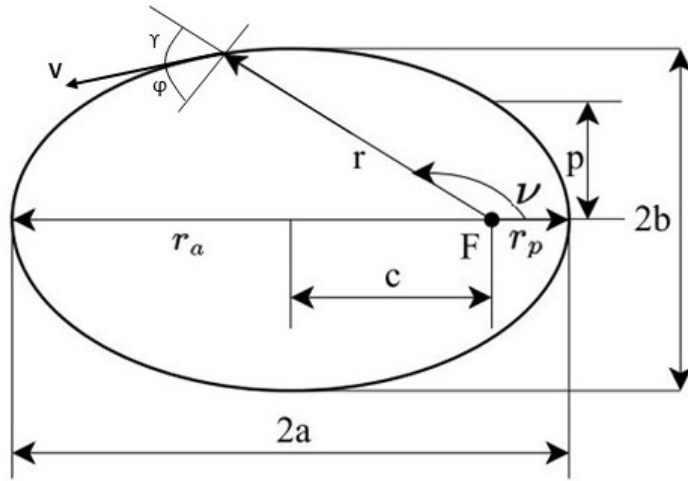


Figura 2.3: Geometria dell'orbita ellittica

Per capire quale sia il tipo di curva descritta dall'equazione bisogna confrontarla con la generica equazione di una conica sempre in coordinate polari, con l'origine che coincide con un fuoco e ν che è l'angolo tra il raggio r ed il periastro, ossia il punto della conica più vicino al fuoco.

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\nu)} \quad (2.15)$$

Al numeratore compare il termine p , è una costante geometrica della conica e prende il nome di *semi-latus rectum*. Rappresenta la distanza tra il fuoco ed un punto situato a $\nu = \frac{\pi}{2}$. Se consideriamo $\nu = 0$ allora troviamo il *periastro* della conica, al contrario a $\nu = \pi$ c'è l'*apoastro*. Il termine e è un'altra costante e prende il nome di *eccentricità*, essa determina la tipologia della conica.

2.5 Parametri orbitali

Una traiettoria Kepleriana è univocamente definita da 6 parametri orbitali:

- La forma dell'ellisse è definita dal semiasse maggiore a e dall'eccentricità e
- La posizione di un corpo lungo quell'orbita è definita dall'anomalia vera ν
- L'orientamento nello spazio dell'orbita è definito dall'inclinazione i , dalla longitudine del nodo ascendente Ω e dall'argomento del periastro ω

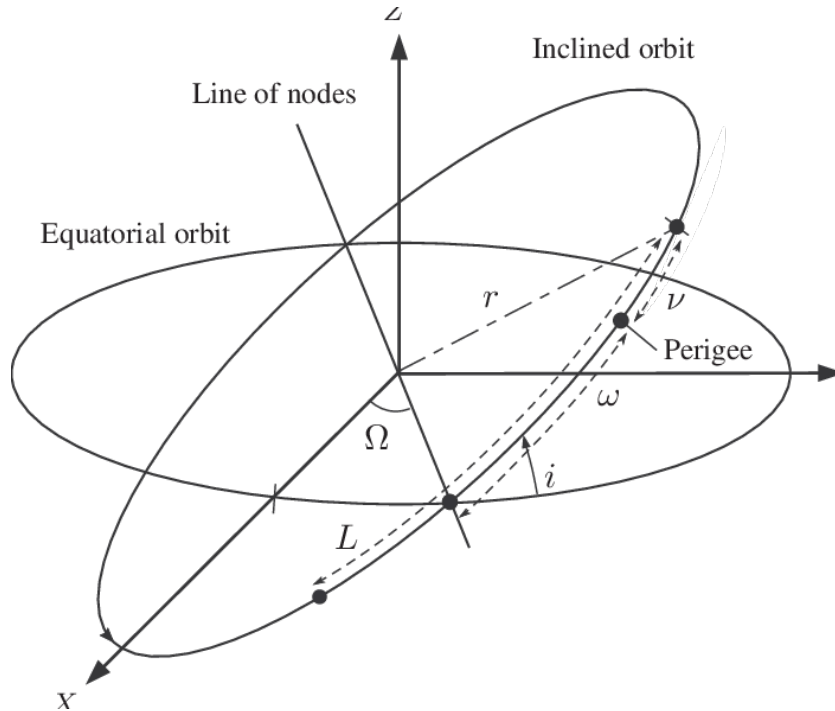


Figura 2.4: Parametri orbitali classici [10]

Semiasse maggiore a

Il semiasse maggiore è la distanza che separa il periastro dal centro dell'orbita. Possiamo anche dire che la somma del raggio al periastro e del raggio all'apoastro è uguale all'asse maggiore dell'ellisse

$$a = \frac{r_p + r_a}{2} \quad (2.16)$$

Questo parametro quindi permette di fissare la dimensione dell'orbita, l'energia ed il periodo. Ha un legame molto stretto con l'energia meccanica specifica attraverso la seguente relazione:

$$E = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a} \quad (2.17)$$

Se l'orbita è circolare a coincide con il raggio; se l'orbita è ellittica assume un valore positivo. Se l'orbita è parabolica ha valore infinito e se sostituito nella precedente equazione segue che l'energia meccanica è nulla. Se l'orbita è iperbolica, il semiasse maggiore è negativo e l'energia meccanica positiva.

Eccentricità e

L'eccentricità ci dice di quanto l'orbita si discosta dalla forma di un cerchio.

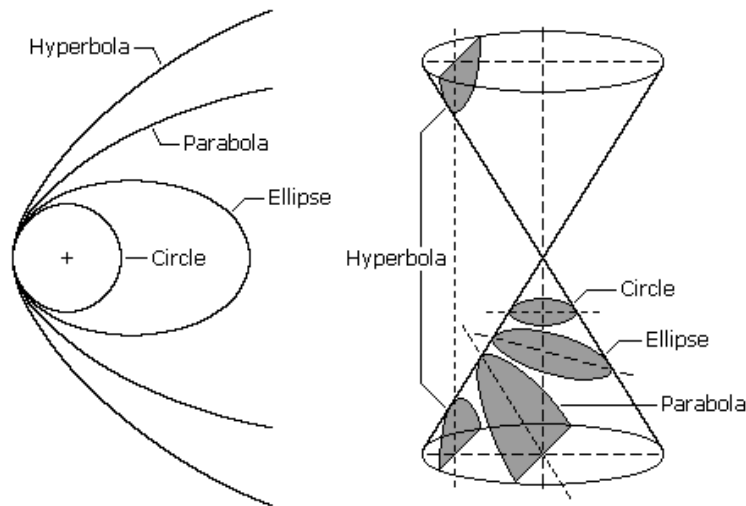


Figure 4.1

Figura 2.5: Sezioni coniche [11]

Nella seguente tabella sono mostrati le possibili combinazioni di eccentricità, semiasse maggiore ed energia meccanica che determinano la tipologia di orbita descritta.

Orbita	Eccentricità	Semiasse maggiore	Energia meccanica
Circolare	$e=0$	> 0	< 0
Ellittica	$0 < e < 1$	> 0	< 0
Parabolica	$e=1$	∞	$=0$
Iperbolica	$e > 1$	< 0	> 0

Tabella 2.2: Relazione tra e , a , E e tipologia di orbita

Anomalia vera ν

Nel piano orbitale è l'angolo tra il periastro ed il vettore posizione. Poniamo di conoscere l'eccentricità dell'orbita ed il raggio in un determinato punto, l'anomalia vera si può ricavare dalla seguente relazione:

$$\nu = \arccos \left[\frac{\bar{e}}{e} \cdot \frac{\bar{r}}{r} \right] \quad (2.18)$$

ma da sola non è ancora sufficiente, per sapere se ci troviamo tra il periastro e l'apoastro o viceversa dobbiamo tener conto anche del Flight-Path angle:

Flight path angle	Anomalia vera
$\bar{r} \cdot \bar{v} \geq 0$	$0 \geq \nu \geq 180$
$\bar{r} \cdot \bar{v} < 0$	$180 < \nu < 360$

Tabella 2.3: Anomalia vera

Inclinazione i

L'angolo tra il vettore $\hat{K}$ ed il momento angolare $\bar{h}$ è detta inclinazione del piano orbitale, si indica con la lettera i

$$i = \arccos \left[\hat{K} \cdot \frac{\bar{h}}{h} \right] \quad (2.19)$$

Nella seguente tabella sono mostrate le tipologie di orbite a seconda del valore dell'inclinazione

Inclinazione	Tipologia orbita
$i = 0$	Equatoriale prograda
$0 < i < 90$	Inclinata prograda
$i = 90$	Polare
$90 < i < 180$	Inclinata retrograda
$i = 180$	Equatoriale retrograda

Tabella 2.4: Inclinazioni

Longitudine del nodo ascendente Ω

È l'angolo, misurato sul piano equatoriale, tra l'asse di riferimento $\hat{I}$ e il nodo ascendente, calcolato in senso antiorario se osservato dalla parte superiore del piano equatoriale. Prende anche il nome di RAAN (Right Ascension of the Ascending Node). Il nodo ascendente è il punto in cui il satellite attraversa l'equatore muovendosi da sud verso nord; al contrario, il nodo discendente corrisponde al passaggio da nord verso sud. La retta che collega questi due punti prende il nome di linea dei nodi, e la sua direzione è rappresentata dal vettore $\bar{n}$, orientata verso il nodo ascendente.

$$\Omega = \arccos \left[\hat{I} \cdot \frac{\bar{n}}{n} \right] \quad (2.20)$$

$$\bar{n} = \hat{K} \times \bar{h} \quad (2.21)$$

Argomento del perigeo ω

Nel piano orbitale, è l'angolo tra il nodo ascendente ed il periastro, misurato nella direzione del moto del satellite.

$$\omega = \arccos \left[\frac{\bar{n}}{n} \cdot \frac{\bar{e}}{e} \right] \quad (2.22)$$

2.6 Tipologie di orbite

Orbita ellittica

Tutti i pianeti del sistema solare ed i satelliti descrivono orbite ellittiche. Poichè l'ellisse è una curva chiusa, un corpo che vi si muove percorrono lo stesso tragitto ciclicamente. Il tempo necessario a completare un giro completo è detto periodo. Il periodo dipende dal semiasse maggiore come si vede nella seguente formula:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \quad (2.23)$$

Riferendoci alla figura si vede immediatamente che il raggio al periastro ed il raggio al periastro sono legati al semiasse maggiore dalla relazione:

$$r_p + r_a = 2a \quad (2.24)$$

ed anche che la distanza tra i due fuochi vale:

$$r_a - r_p = 2c \quad (2.25)$$

Mentre l'eccentricità si ricava dalla seguente espressione:

$$e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} \quad (2.26)$$

Partendo dall'equazione dell'energia meccanica è possibile ricavare la velocità di un corpo in un generico punto della traiettoria:

$$V = \sqrt{\mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)} \quad (2.27)$$

Orbita circolare

L'orbita circolare è un caso ristretto di quella ellittica; in un'orbita circolare il fuoco coincide col centro dell'orbita inoltre $r_a = r_p = a$ perciò l'eccentricità, come visto prima, è nulla. Segue che la velocità sarà uguale in tutti i punti della traiettoria e pari a:

$$V_c = \sqrt{\frac{\mu}{r}} \quad (2.28)$$

Orbita parabolica

L'orbita parabolica rappresenta il caso limite tra una traiettoria chiusa ed una aperta. Come tipologia di orbita è piuttosto rara, ma presenta alcune peculiarità: non ha un apoastro, l'eccentricità è pari ad 1 e vale che:

$$r_p = \frac{p}{2} \quad (2.29)$$

La velocità di un oggetto su un'orbita parabolica ha un nome preciso, *velocità di fuga*. Teoricamente, quando l'oggetto sarà a distanza infinita dal corpo principale, la sua velocità tenderà a zero.

Per ricavare il valore della velocità di fuga in un generico punto di raggio r si parte dalla formula dell'energia meccanica e la si calcola in due punti: il primo nel punto r , il secondo a raggio infinito dove la velocità è nulla e poi si eguagliano.

$$\frac{V_{esc}^2}{2} - \frac{\mu}{r} = 0 \quad (2.30)$$

$$V_{esc} = \sqrt{2\frac{\mu}{r}} = \sqrt{2}V_c \quad (2.31)$$

Quindi la velocità di escape necessaria ad evadere da un punto a distanza r dal corpo principale è equivalente a $\sqrt{2}$ volte la velocità che bisogna avere per stare su un'orbita circolare al medesimo raggio. Se mi trovo su un'orbita circolare e voglio evadere, l'impulso che devo fornire sarà pari a:

$$\Delta V_{esc} = (\sqrt{2} - 1)V_C \quad (2.32)$$

Orbita iperbolica

Questa tipologia di orbita serve per effettuare trasferite interplanetarie perchè ci permette di arrivare a distanza infinita dal corpo attrattore con una velocità residua, che prende il nome di *velocità di eccesso iperbolico*.

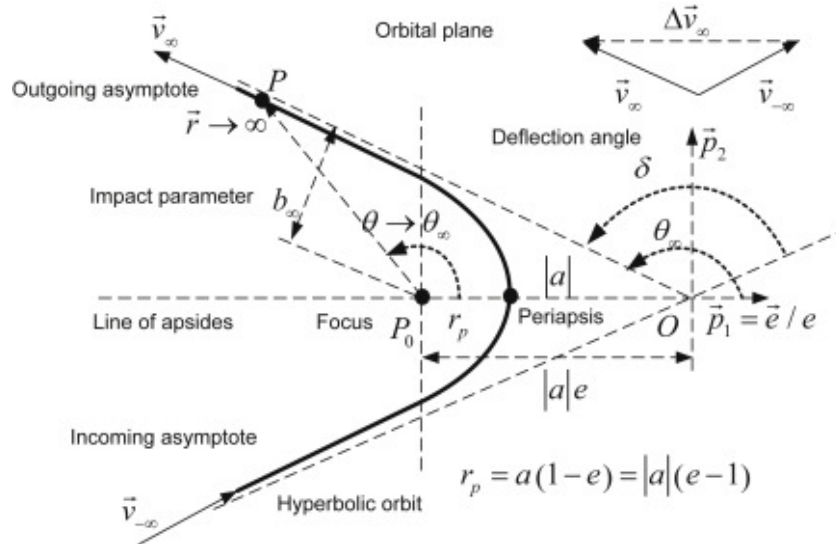


Figura 2.6: Geometria orbita iperbolica

Volendo ottenere una certa velocità di eccesso iperbolico V_∞ , la velocità che dobbiamo avere al *burnout point* V_{bo} si ottiene uguagliando l'equazione dell'energia meccanica calcolata al bounout point e a distanza infinita.

$$\frac{V_{bo}^2}{2} - \frac{\mu}{r_{bo}} = \frac{V_\infty^2}{2} - \frac{\mu}{r_\infty} \quad (2.33)$$

$$V_\infty^2 = V_{bo}^2 - \frac{2\mu}{r_{bo}} = V_{bo}^2 - V_{esc}^2 \quad (2.34)$$

Se $V_\infty = 0$ come nella parabolica allora $V_{bo} = V_{esc}$

2.6.1 Sfera d'influenza

Nel paragrafo precedente si è parlato di "distanza infinita" ma cosa si intende esattamente? Per rispondere è necessario introdurre il concetto di SOI - *Sphere of Influence*.

La sfera d'influenza delimita una regione di spazio di sforma sferica attorno ad un corpo principale (ad esempio un pianeta) all'interno della quale l'influenza gravitazionale che influenza maggiormente un corpo al suo interno è quella del corpo principale, e non quella del Sole.

La sfera d'influenza serve per capire quali sono le aree del sistema solare in cui i pianeti hanno maggior influenza del Sole, e all'interno di quelle aree, la traiettoria di una sonda può essere approssimata col problema dei 2 corpi.

L'equazione che determina il raggio della sfera d'influenza è:

$$r_{soi} = R_p \left(\frac{m_p}{m_s} \right)^{\frac{2}{5}} \quad (2.35)$$

dove R_p è la distanza del pianeta dal Sole, m_p la massa del pianeta ed m_s la massa del Sole. Nel caso di Marte segue che:

$$m_p = m_{\odot} = 6.39 \cdot 10^{23} kg$$

$$m_s = m_{\odot} = 1.989 \cdot 10^{30} kg$$

$$R_p = R_{\odot} = 227.9 \cdot 10^6 km$$

$$r_{SOI,\odot} = 5.76 \cdot 10^5 km$$

Il valore calcolato non è esatto ma solamente una stima del valore che impropriamente viene chiamato "distanza infinita".

2.7 Missioni interplanetarie - Patched conics method

Supponiamo di voler effettuare una missione interplanetaria tra la Terra e Marte.

Finchè il nostro spacecraft rimane dentro la sfera d'influenza del pianeta di partenza (la Terra), l'attrazione gravitazionale esercitata dal Sole può essere trascurata e quindi la traiettoria dello SC è trattata come un problema dei due corpi (Terra e SC). Superato il limite della sfera d'influenza Terrestre lo SC viaggerà su una traiettoria eliocentrica guidata solamente dalla gravità del Sole, quindi di nuovo è un problema dei due corpi (Sole e SC). Infine quando si entra nella sfera d'influenza del pianeta target (Marte), l'orbita dello SC sarà sempre trattata come un problema dei due corpi (Marte e SC). In questo modo un problema complesso a N corpi, viene semplificato con una catena di problemi a due corpi. Il metodo è valido se tutte le traiettorie si collegano senza discontinuità e se nei punti di congiunzione la velocità orbitale è la stessa.

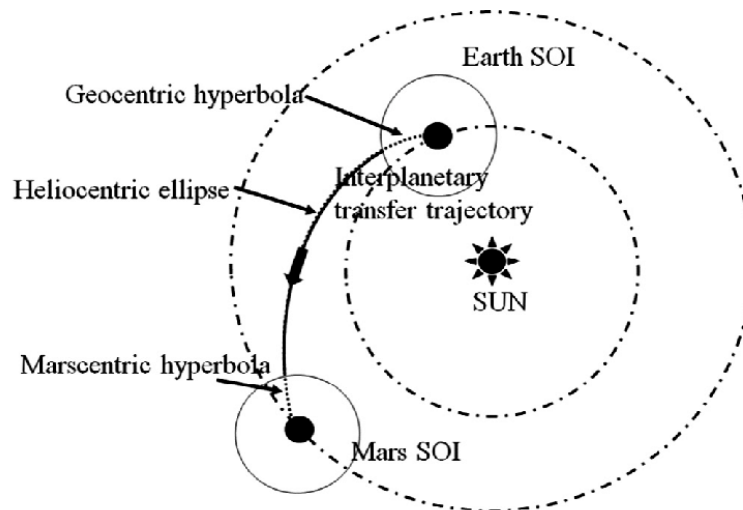


Figura 2.7: Schema Patched conics method per trasferimento Terra-Marte [12]

In forma più schematica il metodo delle Patched conics può essere così riassunto:

1. Fase planetocentrica (vicino alla Terra): lo SC percorre un'orbita iperbolica geocentrica di escape dalla SOI terrestre.
2. Fase eliocentrica: lo SC percorre un'orbita ellittica sotto l'influenza dell'attrazione gravitazionale del Sole
3. Fase planetocentrica (vicino a Marte): lo SC entra in orbita marziana su un'iperbolica, va poi effettuata una manovra di cattura.

Per quanto riguarda la missione sviluppata nel corso della tesi, ci occuperemo soltanto di quest'ultima fase, ossia di quello che succede da quando lo SC entra in orbita marziana a quando esce. Per le altre fasi utilizzeremo valori già studiati, ottimizzati, in altre parole per la nostra missione prenderemo in considerazione delle finestre di lancio i cui dati sono tabulati. Infatti i parametri di missione in input al nostro problema sono la velocità di eccesso iperbolico alla cattura e all'escape, la latitudine e longitudine degli asintoti delle orbite iperboliche di capture e di escape rispetto al sistema di riferimento equatoriale Marziano, e infine l'intervallo di tempo in cui si svolge la missione.

Capitolo 3

Bielliptic Apotwist Maneuver

In questo capitolo andremo a vedere nel dettaglio come funziona la manovra utilizzata per raggiungere l'orbita di parcheggio che intercetti i target, Phobos e Deimos. La tecnica si chiama *Bielliptic Apotwist Maneuver* ed è una manovra a 7 impulsi sviluppata da Qu, Merrill, Chai e Komar [13]. Verrà fatta una panoramica di ciascuna delle fasi in cui è suddivisa e soprattutto di quali sono i gradi di libertà del problema e quali sono invece i parametri che sono stati vincolati.

Maggiori sono i gradi di libertà del problema più sono le possibili traiettorie che si possono generare e le orbite che si possono raggiungere, vedremo successivamente quali sono stati scelti come parametri liberi.

3.1 Struttura della manovra

La bielliptic apotwist maneuver permette di inserirsi in orbite di parcheggio mantenendo dei ΔV bassi. Ognuna delle fasi in cui è suddivisa la manovra è stata sviluppata con lo scopo di abbassare il ΔV rispetto ad un inserimento diretto, e di avere una certa versatilità nella scelta dell'orbita di parcheggio.

Lo sviluppo di questa tecnica inizia con una manovra chiamata *apotwist reorientation*. Per effettuare l'apotwist servono delle condizioni al contorno, i vettori delle velocità in arrivo e alla partenza ed il tempo di permanenza tra arrivo e partenza (*stay time*). Fissata la dimensione dell'orbita di parcheggio desiderata, quindi noti a e i , si effettua una ricerca della geometria dell'orbita di parcheggio tale che sia possibile immettersi con due impulsi tangenziali all'arrivo e alla partenza ed un cambio di piano intermedio, l'*apotwist*. L'apotwist serve per cambiare l'orientamento dell'orbita di parcheggio di arrivo e passare a quella di partenza. Stabilita l'orbita di parcheggio questa, a causa di vari fenomeni perturbativi, precessa fino

ad incontrare il punto di twist, dove avviene il cambio di piano. In seguito, l'orbita post *twist* precessa fino ad essere correttamente allineata per poter effettuare una ripartenza tangenziale al tempo desiderato. Da sola l'apotwist offre gradi di libertà limitati quindi non consente di progettare delle missioni e di trovare delle orbite di parcheggio favorevoli, soprattutto a ΔV bassi.

Il passo successivo nello sviluppo di questa tecnica è quello di aggiungere dei trasferimenti bi-ellittici alla manovra di apotwist. Le condizioni al contorno del problema rimangono invariate ma aumentano i gradi di libertà. Vengono fissate le dimensioni delle orbite di parcheggio e di quelle di trasferimento, di solito per propulsione chimica si fissano rispettivamente ad 1 Sol e 10 Sol [13]. Lo scopo dell'immettersi in un'orbita di trasferimento ellittica intermedia è quello di ridurre il ΔV del cambio di piano effettuandolo il più lontano possibile da Marte, cioè dal fuoco dell'ellisse, quando la velocità è bassa. Questa strategia comporta un risparmio di ΔV ma ha un costo in termini di tempo, infatti nel nostro tempo totale di missione dobbiamo includere anche i periodi delle orbite di trasferimento sia di arrivo che di ripartenza.

Nella seguente figura sono rappresentate le traiettorie complete:

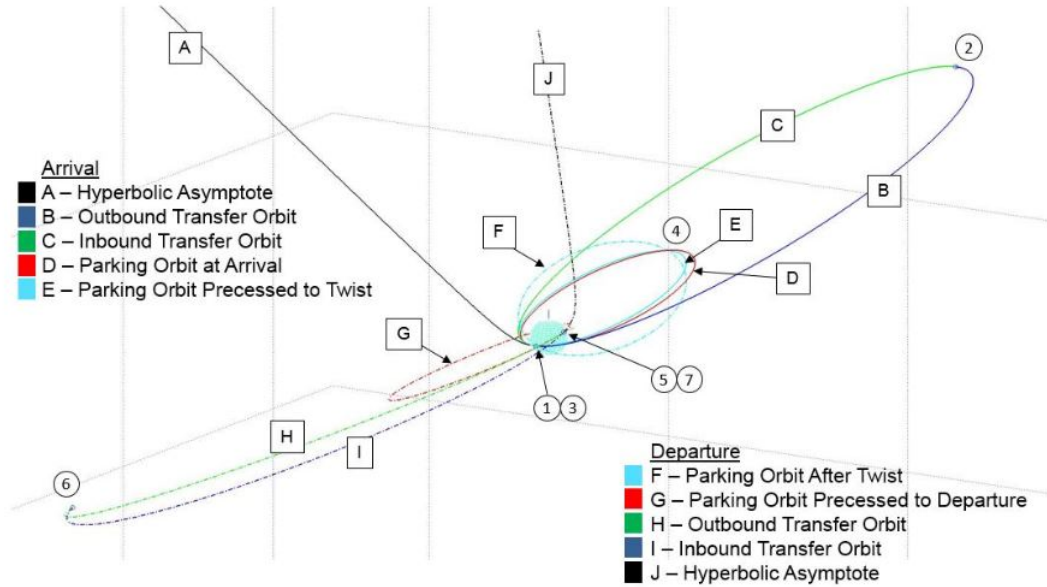


Figure 9. Bi-elliptic apo-twist

Figura 3.1: Bielliptic Apotwist Maneuver [14]

Ricapitolando, la manovra complessiva sarà composta da 7 impulsi suddivise in:

- 3 accensioni per il trasferimento biellittico all'arrivo
- 1 accensione per l'apotwist
- 3 accensioni per il trasferimento biellittico alla partenza

Manovra	Descrizione
ΔV_1 A→B	Inserimento nella biellittica di trasferimento
ΔV_2 B→C	Primo cambio di piano vicino all'apoastro
ΔV_3 C→D	Inserimento nell'orbita di parcheggio target
Perturbazioni D→E	Precessione dell'orbita di parcheggio
ΔV_4 E→F	Apotwist
Perturbazioni F→G	Precessione dell'orbita di partenza
ΔV_5 G→H	Inserimento nella biellittica di uscita
ΔV_6 H→I	Terzo cambio di piano all'apoastro della biellittica
ΔV_7 I→J	Inserimento nell'iperbolica di escape

Tabella 3.1: Fasi della manovra

Vedremo successivamente che le manovre non avvengono sempre esattamente all'apoastro o al periastro ma in alcuni casi vengono effettuate delle migliorie. Come nel caso del metodo di Landau [15] che consiste nell'effettuare le manovre di cattura (prima accensione) e l'escape (settima accensione) coplanari ma non tangenziali e non al periastro. Questo permette di ampliare ulteriormente lo spazio delle soluzioni, ottenendo un range di soluzioni maggiore.

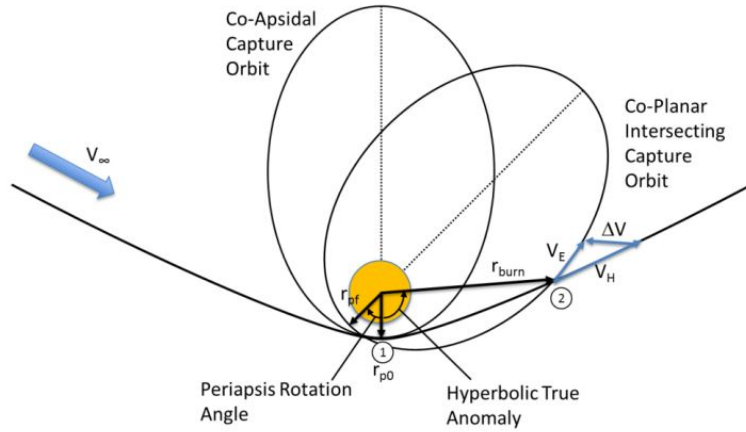


Figura 3.2: Non-tangential capture into Coplanar intersecting capture orbit [16]

3.1.1 Modifiche apportate - Fasatura

Per svolgere questa tesi sono state apportate due modifiche al metodo classico ed entrambe sono funzionali al raggiungimento dei target.

1. ΔV_2 non viene effettuata all'apoastro della bi-ellittica di trasferimento bensì nel punto in cui l'orbita B intercetta il piano orbitale del target. In questo modo dopo il cambio di piano, l'orbita C sarà coplanare al piano orbitale del target e dopo ΔV_3 l'orbita di parcheggio sarà tangente all'orbita dei target.

Questa modifica è stata effettuata perchè non è sufficiente effettuare la manovra all'apoastro portandosi alla stessa inclinazione dell'orbita target, in quanto la Ω delle due orbite non coinciderebbe.

2. Il periodo della bi-ellittica di trasferimento di arrivo non è fissato esattamente a 10 Sol, ma lasciato libero di oscillare nell'intorno di 10 Sol.

Lo scopo è di metterci in fase col target già durante questa manovra, in alternativa sarebbe stato possibile lasciarla fissa a 10 Sol ma dividere la ΔV_3 in due parti, inserendoci in un'orbita di attesa intermedia e di farci in questo modo. Il costo in termini di ΔV delle due opzioni è analogo ma in termini di tempo è più vantaggiosa la prima soluzione perchè ci risparmiamo di percorrere un'orbita di attesa.

3.1.2 Parametri di input e gradi di libertà del problema

Le variabili ottimizzate sono le seguenti:

rp_A [km]	raggio periastro iperbolica d'arrivo
rp_J [km]	raggio periastro iperbolica d'uscita
rp_B [km]	raggio periastro ellittica di trasferimento d'arrivo
rp_I [km]	raggio periastro ellittica di trasferimento d'uscita
ν_A [deg]	anomalia vera a cui si effettua la cattura
ν_J [deg]	anomalia vera a cui si effettua l'escape
t_{twist} [sec]	tempo al quale avviene l'apotwist
i_E [deg]	inclinazione orbita E
β_{arr} [deg]	definisce il piano dell'iperbolica di arrivo
β_{dep} [deg]	definisce il piano dell'iperbolica d'uscita
T_B [sec]	periodo dell'ellittica di trasferimento di arrivo

Tabella 3.2: Variabili da ottimizzare

Mentre i parametri che sono stati dati in input sono i seguenti:

$V_{\infty, cap}$ [km/s]	Velocità di eccesso iperbolico all'arrivo
α_{cap} [rad]	Longitudine dell'asintoto iperbolico di arrivo
δ_{cap} [rad]	Latitudine dell'asintoto iperbolico di arrivo
$V_{\infty, dep}$ [km/s]	Velocità di eccesso iperbolico all'escape
α_{esc} [rad]	Longitudine dell'asintoto iperbolico di escape
δ_{esc} [rad]	Latitudine dell'asintoto iperbolico di escape
t_{stay} [day]	Durata della missione
rp [km]	Raggio al periastro dell'orbita di parcheggio pari a 250km
i_D [rad]	Inclinazione orbita di parcheggio (coincidente con quella del target)
a_D [km]	Semiasse maggiore dell'orbita di parcheggio (deve intercettare il target)
T_H, T_I [sec]	Periodo della bi-ellittica di trasferimento pari a 10 Sol

Tabella 3.3: Parametri fissati

Alcuni dei gradi di libertà possono essere fissati così come alcuni dei parametri fissi possono essere ottimizzati dall'algoritmo genetico. La scelta può cambiare a seconda dei requisiti di missione da rispettare.

3.2 Calcolo del ΔV totale

Il ΔV totale è la somma dei 7 impulsi che diamo in ciascuna manovra:

$$\Delta V_{tot} = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 + \Delta V_4 + \Delta V_5 + \Delta V_6 + \Delta V_7 \quad (3.1)$$

Per calcolare il ΔV di ciascuna accensione è necessario ricavarci, dati gli input ed assegnati dei valori alle incognite, tutti i pezzi di orbite che compongono la traiettoria completa. Definita la traiettoria dobbiamo ricavarci le componenti di velocità all'inizio e al termine di ciascun tratto, così da calcolare nei punti di congiunzione il vettore ΔV per differenza vettoriale.

Il modo più semplice per calcolare e per andare a rappresentare tutte le orbite è quello di ricavarci per ciascuna di esse la terna cartesiana che definisce il sistema di riferimento Perifocale, vedi appendice [B]. Per passare dal sistema di riferimento MCI al sistema di riferimento Perifocale vengono utilizzate le matrici di rotazione, vedi appendice [C].

3.2.1 Orbita iperbolica A

Dati $V_{\infty, cap}$, α_{cap} , δ_{cap} , rp_a , ν_A e β_{arr} , si va a definire l'orbita iperbolica dalla quale ci avviciniamo a Marte ed al cui termine viene eseguita la cattura (ΔV_1).

Il semiasse maggiore, che per un'orbita iperbolica è negativo, si ricava nel seguente modo:

$$a_A = -\frac{\mu}{V_{\infty, cap}^2} \quad (3.2)$$

Mentre l'eccentricità:

$$e_A = 1 - \frac{rp_A}{a_A} \quad (3.3)$$

Il semilato retto:

$$p_A = a_A(1 - e_A^2) \quad (3.4)$$

Facendo riferimento alla figura 2.6, si calcola anche il *deflection angle* e l'angolo θ_∞

$$\delta = 2a \sin\left(\frac{1}{e_A}\right) \quad (3.5)$$

$$\theta_\infty = a \cos\left(-\frac{1}{e_A}\right) \quad (3.6)$$

infine calcoliamo la differenza tra i due angoli e la chiamo β , ci serve per ricavare la terna di riferimento del sistema perifocale.

Calcoliamo anche il *flight path angle* alla cattura:

$$\phi_A = \text{atan}\left(\frac{e_A \sin(\nu_A)}{1 + e_A \cos(\nu_A)}\right) \quad (3.7)$$

La matrice di rotazione dell'iperbolica si ricava nel seguente modo:

$$R_A = R_Z(\alpha_{cap}) \cdot R_Y(\delta_{cap}) \cdot R_X(-\beta_{arr}) \cdot R_Z(\beta) \quad (3.8)$$

Ci sarà utile anche calcolare la seguente terna con l'asse x rivolto verso il punto di cattura:

$$R = R_A * R_Z(\nu_A) \quad (3.9)$$

A questo punto si calcola il raggio alla cattura in forma vettoriale:

$$r_{cap} = \frac{p_A}{1 + e_A \cos(\nu_A)} \quad (3.10)$$

$$\bar{r}_{cap} = r_{cap} \cdot R \cdot [1; 0; 0] \quad (3.11)$$

Poi si calcola la velocità vettoriale subito prima della cattura, per farlo sfruttiamo il flight path angle:

$$R = R \cdot R_Z(-\phi_A) \quad (3.12)$$

$$V_{A, cap} = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r_{cap}} - \frac{1}{a_A} \right)} \quad (3.13)$$

$$\bar{V}_{A, cap} = V_{A, cap} \cdot R \cdot [0; 1; 0] \quad (3.14)$$

L'inclinazione dell'orbita iperbolica si ricava in questo modo:

$$i_A = \text{acos}(R_A(3,3)) \quad (3.15)$$

A questo punto per andare a rappresentare l'orbita si crea un vettore di elementi equi-spaziati nell'intervallo $\theta = [-\nu_\infty, \nu_A]$ e si va a calcolare il raggio della curva per questi valori di anomalia vera:

$$r = \frac{p_A}{1 + e_A \cos(\theta)} \quad (3.16)$$

Le coordinate dell'iperbole nel piano perifocale si ottengono come segue:

$$\begin{aligned} x_{orbital} &= r \cdot \cos(\theta) \\ y_{orbital} &= r \cdot \sin(\theta) \\ z_{orbital} &= 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Per andarle a rappresentare nel sistema IJK si vanno a pre moltiplicare i vettori contenenti le coordinate per la matrice R_A , la matrice risultante conterrà su ciascuna riga le 3 coordinate di un punto dell'iperbole.

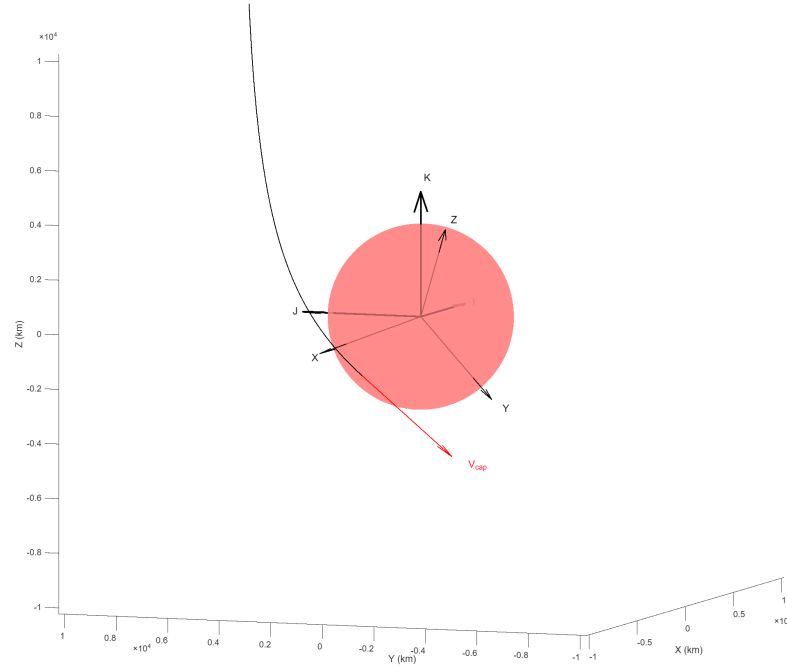


Figura 3.3: Iperbole di arrivo e velocità alla cattura

3.2.2 Orbita B e ΔV_1

Coi valori ricavati in precedenza e noti rp_B e T_B , si procede col calcolo dei parametri orbitali dell'orbita B, ovvero la prima porzione della bi-ellittica di trasferimento:

$$a_B = \left(\mu \left(\frac{T_B}{2\pi} \right)^2 \right)^{\frac{1}{3}} \quad (3.18)$$

$$e_B = 1 - \frac{rp_B}{a_B} \quad (3.19)$$

$$i_B = i_A \quad (3.20)$$

$$p_B = a_B \cdot (1 - e_B^2) \quad (3.21)$$

L'anomalia vera alla cattura sull'ellisse è diversa dall'anomalia vera iperbolica e si ricava invertendo la formula del raggio di un ellisse data l'anomalia, imponendo come raggio quello alla cattura:

$$\nu_{B,cap} = a \cos \left(\frac{\frac{p_B}{r_{cap}} - 1}{e_B} \right) \quad (3.22)$$

Per ricavare la terna del sistema di riferimento dell'orbita B, ci basta ruotare attorno all'asse Z quella precedente di un angolo pari a:

$$\delta_{\nu_{cap}} = \nu_{B,cap} - \nu_A \quad (3.23)$$

$$R_B = R_A \cdot R_Z(\delta_{\nu_{cap}}) \quad (3.24)$$

Infine per il vettore velocità ci occorre prima il flight path angle:

$$\phi_B = \text{atan} \left(\frac{e_B \sin(\nu_{B,cap})}{1 + e_B \cos(\nu_{B,cap})} \right) \quad (3.25)$$

$$R = R_B \cdot R_Z(\nu_{B,cap} + \phi_B) \quad (3.26)$$

ora si può calcolare come segue:

$$V_{B,cap} = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r_{cap}} - \frac{1}{a_B} \right)} \quad (3.27)$$

$$\bar{V}_{B,cap} = V_{B,cap} \cdot R \cdot [1; 0; 0] \quad (3.28)$$

Si deve ora trovare il punto esatto in cui eseguire il cambio di piano, cioè quando l'orbita B intercetta il piano orbitale del target. Conoscendo la terna cartesiana del piano orbitale del target è possibile ricavarsi l'equazione del piano. Per trovare il punto in cui l'orbita intercetta il piano si vanno a sostituire tutti i punti dell'orbita B nell'equazione del piano finchè non troviamo un valore pari a zero. Questo vuole dire che il punto dell'orbita B apparterrà anche al piano orbitale del target. Chiamo tale punto θ_{DV_2}

Si ricava ora la velocità sull'orbita B nel punto in cui eseguo la manovra ΔV_2 eseguendo i seguenti passaggi:

chiamo r_2 il raggio a cui eseguo la manovra 2, ϕ_2 il flight path angle al raggio r_2

$$r_2 = \frac{p_B}{1 + e_B \cos(\theta_{DV_2})} \quad (3.29)$$

$$\phi_2 = \text{atan} \left(\frac{e_B \sin(\theta_{DV_2})}{1 + e_B \cos(\theta_{DV_2})} \right) \quad (3.30)$$

$$V_{B,2} = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r_2} - \frac{1}{a_B} \right)} \quad (3.31)$$

$$\bar{V}_{B,2} = V_{B,2} \cdot R_B \cdot R_Z(\theta_{DV_2} + \phi_2) \cdot [1; 0; 0] \quad (3.32)$$

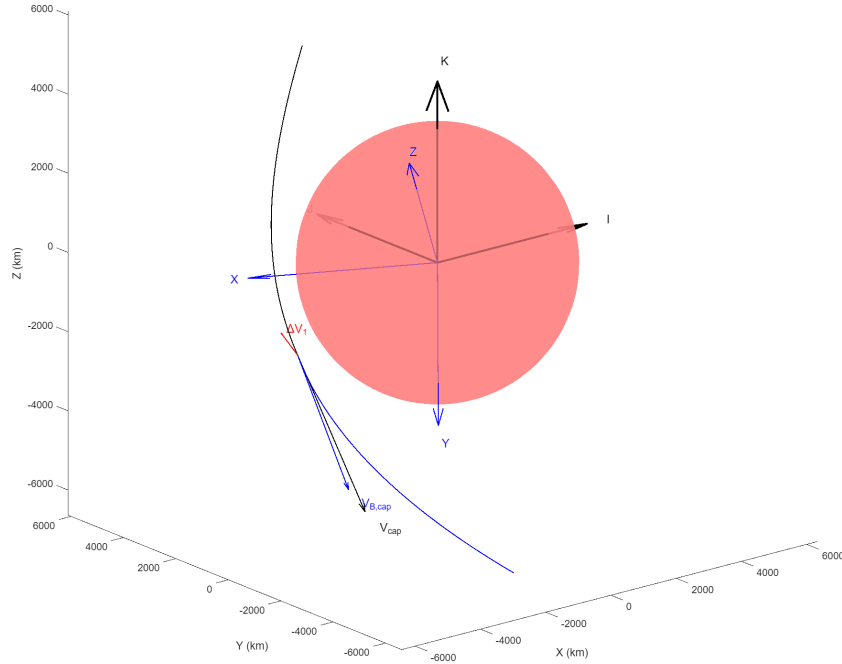


Figura 3.4: Orbita B e ΔV_1

3.2.3 Orbita C e ΔV_2

Dell'orbita C conosciamo già la dimensione e la forma, ci serve solo ricavare la terna cartesiana opportunamente orientata. Per trovarla sono partito da quella del target e l'ho ruotata attorno all'asse z di un angolo θ_C opportuno in modo che le orbite B e C si vadano a toccare nel punto in cui si esegue ΔV_2 . Quindi:

$$R_C = R_{target} \cdot R_Z(\theta_C) \quad (3.33)$$

Serve ricavare la velocità all'inizio dell'orbita C, si parte dal flight path angle:

$$\phi_{2C} = \text{atan} \left(\frac{e_C B \sin(\theta_{DV_2})}{1 + e_C \cos(\theta_{DV_2})} \right) \quad (3.34)$$

$$V_{2C} = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r_2} - \frac{1}{a_C} \right)} \quad (3.35)$$

$$\bar{V}_{2C} = V_{2C} \cdot R_C \cdot R_Z(\theta_{DV_2} + \phi_{2C}) \quad (3.36)$$

Ed infine il ΔV_2

$$\Delta V_2 = \bar{V}_{2C} - \bar{V}_{B,2} \quad (3.37)$$

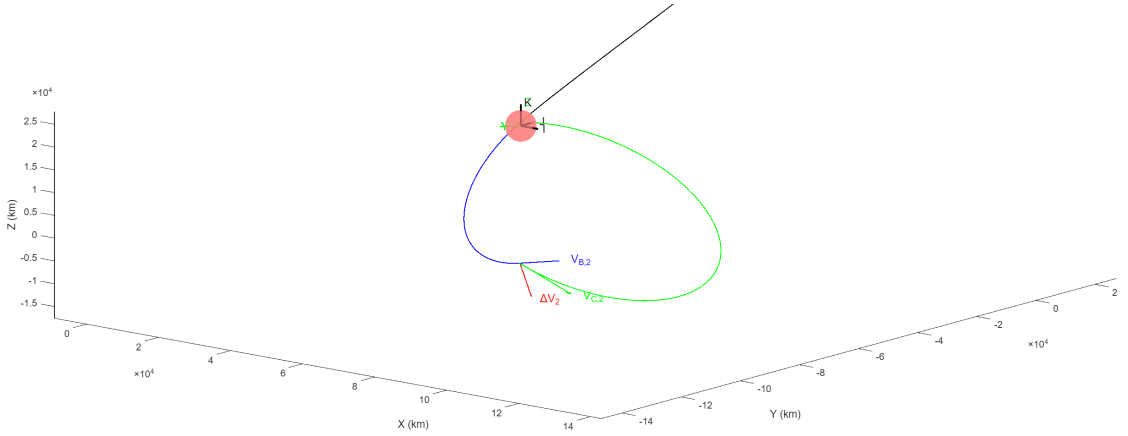


Figura 3.5: Orbita C e ΔV_2

Calcoliamo ora la velocità alla fine dell'orbita C, cioè al periastro:

$$V_{p,C} = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r_{pD}} - \frac{1}{a_C} \right)} \quad (3.38)$$

$$\bar{V}_{p,C} = V_{p,C} \cdot R_C \cdot [0; 1; 0] \quad (3.39)$$

3.2.4 Orbita D e ΔV_3

Dell'orbita D conosciamo già la terna di riferimento perchè coincide con R_C , calcoliamo in modo analogo a prima i parametri orbitali:

$$a_D = \left(\mu \left(\frac{T_D}{2\pi} \right)^2 \right)^{\frac{1}{3}} \quad (3.40)$$

$$e_D = 1 - \frac{rp_D}{a_D} \quad (3.41)$$

La velocità all'inizio dell'orbita D:

$$V_{p,D} = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{rp_D} - \frac{1}{a_D} \right)} \quad (3.42)$$

$$\bar{V}_{p,D} = V_{p,D} \cdot R_D \cdot [0; 1; 0] \quad (3.43)$$

ed infine il ΔV_3

$$\Delta V_3 = \bar{V}_{p,D} - \bar{V}_{p,C} \quad (3.44)$$

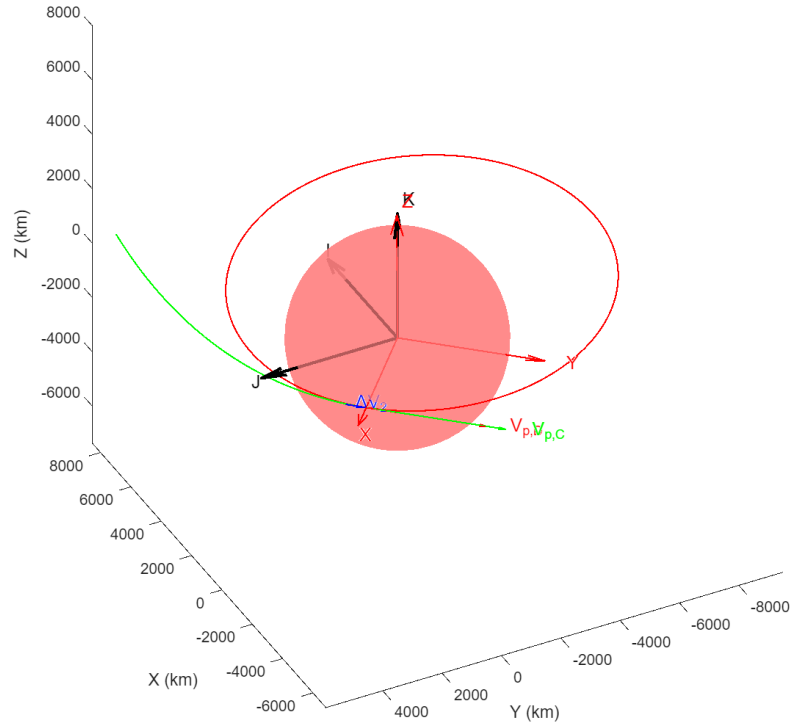


Figura 3.6: Orbita D e ΔV_3

3.2.5 Orbita E e ΔV_4

Per passare dall'orbita D alla E non si effettua alcuna manovra, bensì a causa di alcuni fenomeni perturbativi, nel corso del t_{stay} l'orbita D precessa e diventa orbita E al t_{twist} . In appendice [D] si può trovare una spiegazione di questi fenomeni perturbativi. A questo punto abbiamo tutte le orbite fino alla E; si ripete lo stesso ragionamento a ritroso per ricavarsi rispettivamente J-I-H-G-F.

Ci si calcolano le velocità all'apogeo dell'orbita E ed F:

$$V_{a,E} = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{ra_E} - \frac{1}{a_E} \right)} \quad (3.45)$$

$$\bar{V}_{a,E} = V_{a,E} \cdot R_E \cdot [0; 1; 0] \quad (3.46)$$

$$V_{a,F} = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{ra_F} - \frac{1}{a_F} \right)} \quad (3.47)$$

$$\bar{V}_{a,F} = V_{a,F} \cdot R_F \cdot [0; 1; 0] \quad (3.48)$$

Ed il ΔV_4 come:

$$\Delta V_4 = \bar{V}_{a,F} - \bar{V}_{a,E} \quad (3.49)$$

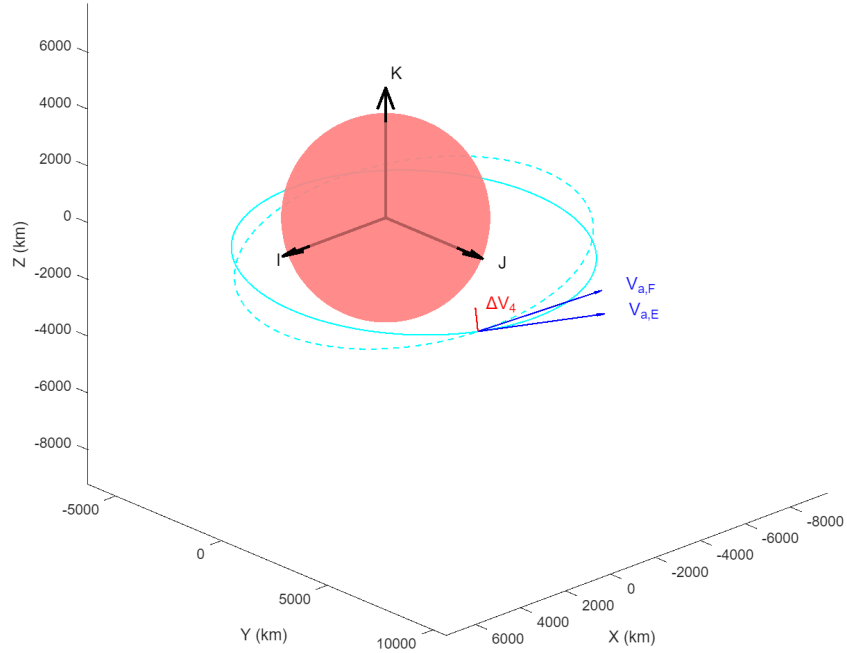


Figura 3.7: Orbite E/F e ΔV_4

Capitolo 4

L'Algoritmo Genetico

In questo capitolo si andrà ad introdurre il funzionamento di un algoritmo genetico, le sue caratteristiche e le sue proprietà. Si procederà poi ad illustrare la sintassi utilizzata su Matlab per implementare l'algoritmo.

4.1 Introduzione e origine dell'algoritmo

Per prima cosa è necessario spiegare perchè si è scelto di utilizzare un algoritmo genetico per la risoluzione del problema. Quando le funzioni da ottimizzare sono semplici, con poche variabili e condizioni al contorno definite, si può giungere ad una soluzione in forma chiusa.

Se non è possibile, per arrivare ad una soluzione si possono usare metodi ricorsivi, come quello del gradiente.

Ci sono però delle funzioni troppo complesse per poter essere ottimizzate con questi metodi; la complessità può essere dovuta a molteplici fattori, quali il numero di variabili coinvolte e la dipendenza di una dalle altre. In questo caso si possono usare degli algoritmi evolutivisti, tra questi gli algoritmi genetici [17] sono ottimi per la risoluzione di problemi non lineari.

Gli algoritmi genetici sono stati sviluppati a partire dagli anni '70 da John Holland e dai suoi collaboratori nell'università del Michigan [18]. Essi si ispirano alla teoria evolutivista formulata da Charles Darwin nel 1859: essa sostiene che tutti gli organismi viventi siano il risultato di milioni di anni di evoluzione e di adattamento alle condizioni ambientali. La filosofia alla base è che gli individui migliori all'interno di una popolazione hanno più chances di sopravvivere, di riprodursi e di trasmettere le loro caratteristiche alle generazioni successive. Quindi generazione dopo generazione gli individui si saranno sempre più adattati alle condizioni ambientali; si tratta di un processo di selezione naturale.

4.1.1 Terminologia

Per poter comprendere meglio il funzionamento dell'algoritmo e del parallelismo con la teoria Darwiniana è necessario andare a spiegare il significato di alcuni termini che ci vengono trasmessi direttamente dalla genetica e dalla biologia [19]:

- Individuo o cromosoma: è una singola soluzione del problema che stiamo risolvendo con l'algoritmo genetico, è composta dal genotipo che contiene le informazioni genetiche e dal fenotipo che ci dice come viene rappresentato l'individuo nel modello
- Popolazione: è un insieme di individui che vengono coinvolti nella ricerca della soluzione del problema
- Gene: è uno degli elementi che forma un individuo: se il nostro problema ha 10 incognite allora ciascun cromosoma sarà formato da 10 geni.
- Allele: è il valore numerico che viene attribuito a ciascun gene per ciascun cromosoma
- Fitness function: anche nota come objective function; per ciascun individuo ci restituisce il fitness score, ovvero il grado di adattamento alla soluzione. La probabilità che un individuo venga selezionato per il processo di riproduzione dipende proprio dal suo fitness score.
- Figli: sono il risultato dei processi di selezione, riproduzione e mutazione degli individui appartenuti alla precedente generazione, cioè i genitori. Essi apparterranno alla generazione successiva.

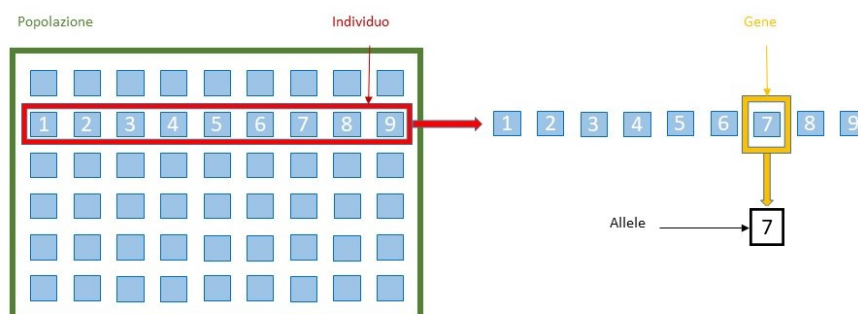


Figura 4.1: Schema della terminologia dell'algoritmo genetico

4.2 Schematizzazione dell'algoritmo

Questo processo si può applicare ad un problema iniziando da una popolazione random di soluzioni, ognuna di queste soluzioni prende il nome di individuo o cromosoma. Ciascun cromosoma è formato dai geni, che corrispondono ognuno ad una incognita del problema. A partire da questo campione di soluzioni, i genitori, si applica un procedimento chiamato selezione dove si va a valutare quali individui sono più adatti ad essere selezionati per generare i figli. La riproduzione può avvenire tramite ricombinazione o mutazione. A questo punto viene valutato il grado di adattamento dei figli, i migliori andranno a sostituire i genitori. In questo modo il processo può ripetersi fino a convergenza, cioè fin quando non migliora più il grado di adattamento.

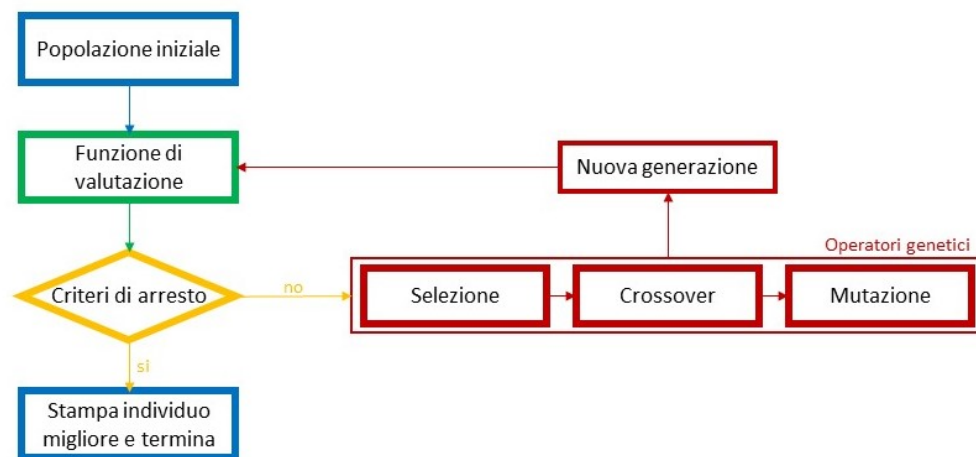


Figura 4.2: Schema di funzionamento di un algoritmo genetico

Quindi il processo che avviene in maniera iterativa può essere schematizzato nel seguente modo:

1. Creazione della popolazione iniziale che contiene N individui o cromosomi;
2. Calcolo del valore della funzione obiettivo di ogni individuo;
3. Selezione delle coppie di genitori;
4. Generazione di nuovi individui, i figli;
5. Mutazione casuale di una parte dei figli per diversificare le soluzioni;

6. Si copiano gli individui migliori della generazione precedente nella nuova generazione;
7. Ottenuta la nuova popolazione di N cromosomi si ripetono gli step precedenti;
8. Arresto dell'algoritmo al raggiungimento di vari criteri.

4.3 Inizializzazione

Il processo di inizializzazione è importante perché va ad influire direttamente sulle prestazioni del codice. Le caratteristiche principali dell'algoritmo genetico che vanno inizializzate sono il numero di iterazioni, cioè delle generazioni, e la dimensione della popolazione. Scegliendo di avere una piccola popolazione ed un numero basso di iterazioni porterà ad avere un algoritmo veloce ma le chances di trovare i risultati migliori sono decisamente inferiori. Al contrario adottare una popolazione molto ampia ed un grande numero di iterazioni ci porterà ad avere un codice piuttosto lento e non è detto che otterremo soluzioni particolarmente buone. Quindi la fase di inizializzazione è fondamentale per trovare il giusto compromesso tra la velocità di esecuzione del codice e la bontà della soluzione ricercata.

In questa fase si andranno anche a definire dei criteri con cui fermare il codice se si vede che dopo un certo numero di iterazioni la soluzione non migliora.

Infine si vanno a definire anche tutti i parametri utili ai calcoli, come i parametri di missione, i parametri gravitazionali, unità di misura e sistemi di riferimento.

4.4 Selezione

Durante il processo di selezione vengono scelti i genitori migliori, ovvero con una fitness più elevata, per andare poi a creare la generazione successiva; più è alta la fitness maggiore sarà la probabilità di scegliere quel determinato cromosoma come base per la riproduzione.

Da sottolineare che il processo di selezione non deve escludere a priori gli elementi peggiori ma semplicemente privilegiare quelli con fitness maggiore; lo scopo è di evitare una prematura convergenza ad un minimo locale.

Ci sono diversi metodi per effettuare la selezione, i principali sono:

- Selezione proporzionale (Roulette Wheel Selection)
- Selezione per rango (Rank Selection)
- Selezione a torneo (Tournament Selection)
- Selezione Stocastica Universale (Stochastic Universal Sampling)
- Elitism Selection

4.4.1 Roulette Wheel Selection

Nella cosiddetta ruota della fortuna, la probabilità di andare a scegliere un determinato individuo come genitore della successiva popolazione è proporzionale alla sua fitness.

Possiamo immaginare che l'intera popolazione sia una torta e che ciascun individuo rappresenti una fetta di questa torta, maggiore sarà la fitness dell'individuo, più grande sarà la fetta di torta, maggiore sarà la probabilità di venire scelti.

Quando la ruota verrà fatta girare ci sono maggiori probabilità che si fermi in corrispondenza di un individuo con una fitness maggiore.

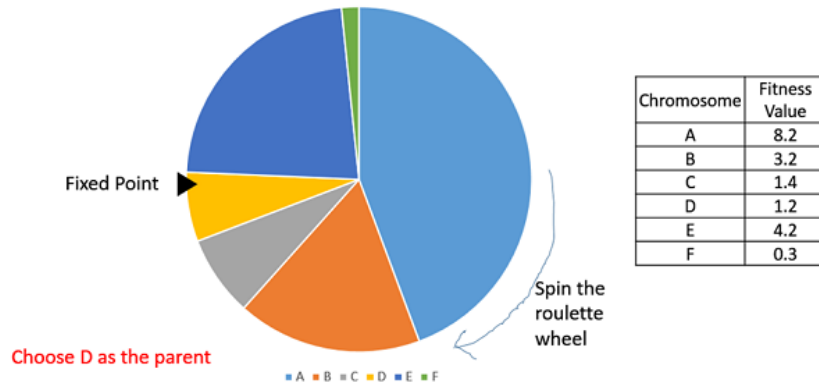


Figura 4.3: Roulette Wheel Selection [20]

Il procedimento va ripetuto tante volte quanti sono gli individui che si desiderano usare come genitori della popolazione successiva.

La probabilità di venir selezionati di ciascun cromosoma si calcola nel seguente modo:

$$p_i = \frac{f_i}{\sum_{j=1}^n f_j} \quad (4.1)$$

con f che rappresenta la fitness value dell'individuo.

Questo metodo non assicura che vengano scelti sempre gli individui migliori inoltre non scarta a priori gli elementi peggiori. Presenta problemi quando tutti gli individui hanno una fitness comparabile perchè il codice non riesce più a muoversi nella direzione del minimo globale. Problematico è anche il caso in cui ci sono presenti elementi con una fitness molto elevata, ciò potrebbe portare ad una prematura convergenza del codice ad un minimo locale.

4.4.2 Rank Selection

Questo metodo di selezione è una variante di quello precedente. Prima abbiamo visto che se un individuo aveva una fitness particolarmente più elevata degli altri, i risultati potevano essere falsati.

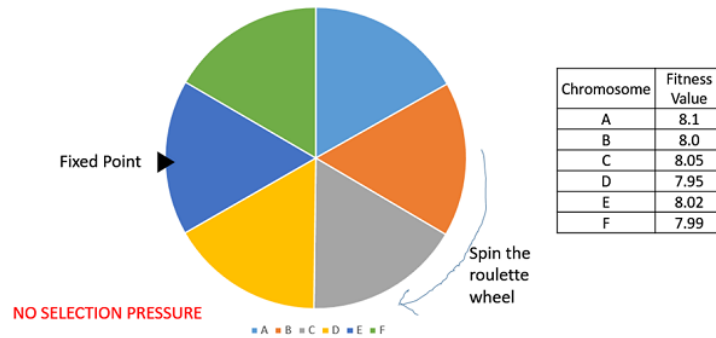


Figura 4.4: Rank Selection [20]

Adesso si ordinano gli individui e poi si calcola la probabilità di selezione facendo riferimento alla loro posizione in classifica e non più sul valore della fitness. Anche se è un metodo più lento, evita di andare a convergenza prematura, assegnando ad elementi con una fitness elevata sempre la stessa probabilità di essere scelti.

Una volta assegnate le probabilità tramite il rango, si procede come nel metodo della roulette.

4.4.3 Tournament Selection

Questo metodo è più efficiente dei precedenti.

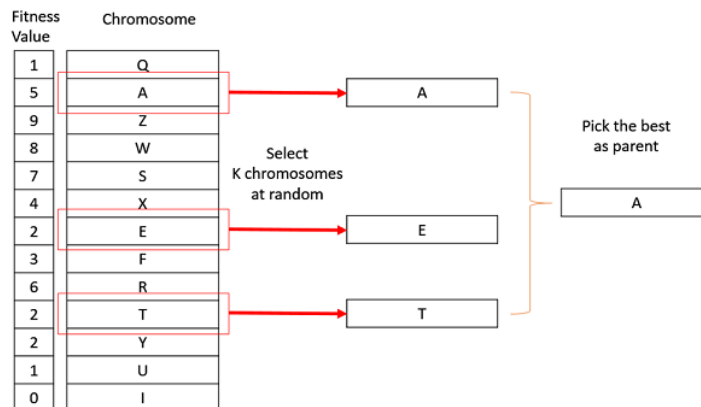


Figura 4.5: Tournament Selection [20]

La selezione a torneo consiste nel selezionare randomicamente un certo numero di individui dalla popolazione (di solito sono 2) e di farli competere tra di loro, il vincitore sarà il cromosoma con il fitness value maggiore. In questo modo il processo di selezione permette di mantenere una certa diversità tra gli individui e i migliori non hanno vantaggi sugli altri. Dal punto di vista computazionale è anche piuttosto semplice, non si devono ordinare i cromosomi in base alla fitness o normalizzarli.

4.4.4 Stochastic Universal Sampling

Questo procedimento è simile alla roulette wheel selection: ci sono un certo numero di puntatori (dipendono dal numero di individui che si vogliono scegliere) che sono equidistanti.

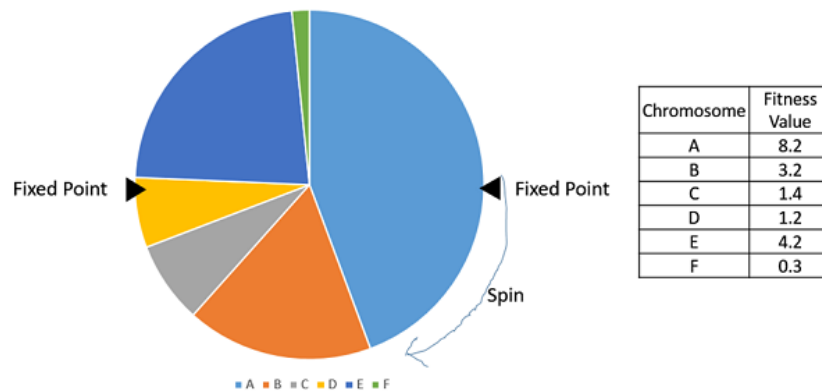


Figura 4.6: Stochastic Universal Sampling [20]

La distanza tra i puntatori è $1/n$, si gira la roulette ed in questo modo verranno selezionati i nostri n individui indicati dai puntatori. Questo è un metodo veloce e permette anche agli individui peggiori di venir selezionati.

4.4.5 Elitism Selection

Questa tecnica si esegue in aggiunta ad una delle precedenti nel caso in cui l'individuo caratterizzato dal valore massimo di fitness non fosse già stato scelto, in tal caso l'individuo verrebbe automaticamente inserito tra i genitori della generazione successiva. In questo modo si preservano i geni che risultano essere particolarmente adatti alla soluzione, limitando così la perdita di informazioni.

4.5 Crossover

Il crossover, in italiano ricombinazione, consiste nel generare da due cromosomi genitori un cromosoma figlio. A seconda della probabilità con cui avviene, tra 0 e 1, la generazione dei figli sarà l'esatta copia di quella dei genitori, se 0, oppure saranno totalmente generati da crossover, se 1.

Il processo di crossover può essere riassunto in tre fasi:

- Si scelgono in modo randomico un paio di cromosomi dai genitori
- Si sceglie in modo casuale un pezzo lungo ciascun cromosoma
- Si scambiano le due parti selezionate e si crea un nuovo cromosoma. Esso conterrà un po' di geni di un genitore e un po' dell'altro

Esistono varie tipologie di crossover:

- Single Point Crossover
- Two Point Crossover
- Multi-Point Crossover
- Uniform Crossover
- Three Parents Crossover

4.5.1 Single Point Crossover

Questo è il metodo più semplice e consiste nel prendere due cromosomi genitori, tagliarli in un punto a caso, lo stesso per entrambi, e poi scambiare le due parti. Questo metodo non è ottimale perchè nel caso in cui un cromosoma sia già abbastanza buono, cambiandone una parte significativamente grande si vanno a perdere delle informazioni.

genitore 1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
genitore 2	5	7	4	1	6	8	9	3	7
figlio 1	1	2	3	4	5	6	9	3	7
figlio 2	5	7	4	1	6	8	7	8	9

Tabella 4.1: Esempio Single Point Crossover

4.5.2 Two Point Crossover

Simile al precedente ma i punti di taglio questa volta sono due. La sezione che viene scambiata tra i due cromosomi è quella compresa tra i due punti di taglio. Questo metodo è migliore del precedente perchè scambiando solo una parte del cromosoma non si hanno perdite significative di informazioni, inoltre ci sono molte più combinazioni, quindi lo spazio dei figli è maggiore.

genitore 1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
genitore 2	5	7	4	1	6	8	9	3	7
figlio 1	1	2	3	1	6	8	7	8	9
figlio 2	5	7	4	4	5	6	9	3	7

Tabella 4.2: Esempio Two Point Crossover

4.5.3 Multi-Point Crossover

Ci sono due modalità con cui si può eseguire questo crossover, ovvero considerando un numero pari di tagli oppure un numero dispari. Come detto in precedenza, aumentare il numero dei tagli rischia di corrompere le stringhe dei cromosomi ma si evita che si perdano delle ottime informazioni, come visto nel caso del single point.

4.5.4 Uniform Crossover

Con questo metodo si utilizza una crossover mask, della stessa lunghezza dei genitori, composta da 1 e da 0, e da due genitori. Quando nella mask c'è l'1, il gene viene copiato dal genitore 1, se nella mask c'è un 0, il gene viene preso dal genitore 2.

genitore 1	1	0	0	1	1	0	0	0	1
genitore 2	1	0	1	0	1	0	1	0	1
mask	1	0	0	1	1	1	0	1	0
figlio 1	1	0	1	1	1	0	1	0	1
figlio 2	1	0	0	0	1	0	0	0	1

Tabella 4.3: Esempio Uniform Crossover

Questa mask viene nuovamente generata per ogni coppia di genitori e quindi le rispettive progenie contreranno diversi rimescolamenti dei geni.

4.5.5 Three Parents Crossover

Questa tecnica è molto usata quando si ha una codifica binaria e fa utilizzo di tre genitori per generare un figlio. Si procede gene per gene, se quelli dei primi 2 genitori sono identici, viene copiato quel gene, se sono diversi allora si prende il gene dal terzo genitore.

genitore 1	1	1	0	0	1	1	0	1	0
genitore 2	1	0	1	0	1	0	1	1	0
genitore 3	0	1	0	1	0	0	0	1	1
figlio	1	1	0	0	1	0	0	1	0

Tabella 4.4: Esempio Three Parents Crossover

4.6 Mutazione

La mutazione permette di mantenere un certo grado di diversità nella popolazione. Il crossover da solo porta ad una progressiva omogeneizzazione dei cromosomi. La mutazione ha il compito di inserire ad ogni generazione elementi completamente nuovi i cui geni, una volta ricombinati, possano costruire cromosomi ancora migliori. Anche per effettuare la mutazione ci sono diversi modi:

- Simple Swap
- Simple Move
- Scramble
- Sub-Tour Inversion
- Swap Blocks

4.6.1 Simple Swap

Consiste nel scegliere due posizioni casuali nel cromosoma e di scambiare i geni corrispondenti

padre	1	2	3	4	5	6	7	8	9
figlio	1	2	6	4	5	3	7	8	9

Tabella 4.5: Esempio Simple Swap Mutation

4.6.2 Simple Move

Consiste nello scegliere una posizione casuale nella sequenza, il gene corrispondente viene rimosso, e riposizionato in un'altra posizione casuale del cromosoma.

padre	1	2	3	4	5	6	7	8	9
figlio	1	2	4	5	6	3	7	8	9

Tabella 4.6: Esempio Simple Move Mutation

Questo metodo mantiene la validità della permutazione, cioè non crea duplicati, ma d'altra parte può rompere delle sottostrutture nel cromosoma che sono già buone.

4.6.3 Scramble

Si scelgono due posizioni casuali nella sequenza che definiscono un sottointervallo; si prendono gli elementi all'interno di quel sottointervallo e si mescolano (shuffle) in ordine casuale infine si reinseriscono nella stessa posizione.

Introduce variazioni più forti del semplice swap o move, ma solo in una parte localizzata del cromosoma. Può anche essere utile per rompere sottostrutture inefficienti e ricombinarle. Ma essendo casuale, rischia di distruggere anche segmenti già buoni del cromosoma.

padre	1	2	3	4	5	6	7	8	9
figlio	1	2	5	6	3	7	4	8	9

Tabella 4.7: Esempio Scramble Mutation

4.6.4 Sub-Tour Inversion

Si scelgono due posizioni casuali nella sequenza che definiscono un sotto-percorso (sub-tour). Si prende quel sotto-percorso e si inverte l'ordine degli elementi, infine si ricostruisce il cromosoma reinserendo quel sotto intervallo.

padre	1	2	3	4	5	6	7	8	9
figlio	1	2	7	6	5	4	3	8	9

Tabella 4.8: Esempio Sub-Tour Mutation

Può migliorare notevolmente soluzioni in cui un percorso parziale è “mal ordinato”. Ma rischia di distruggere sottosequenze buone se applicata troppo spesso quindi va dosata con una bassa probabilità di mutazione.

4.6.5 Swap Bocks

Si selezionano due sotto-sequenze (blocchi) del cromosoma e si scambiano interamente le due sottosequenze mantenendo l'ordine interno dei geni.

padre	1	2	3	4	5	6	7	8	9
figlio	1	2	7	8	5	6	3	4	9

Tabella 4.9: Esempio Swap Blocks Mutation

Produce cambiamenti più ampi rispetto a swap/move mutation e conserva le sottostrutture interne dei blocchi. Ma è più invasiva, come prima può rompere sottosequenze ottimali se usata troppo spesso.

4.7 Criteri di arresto

Le condizioni di arresto di algoritmo genetico estremamente importanti per determinare quando le iterazioni devono fermarsi. L'algoritmo appena lanciato tenderà molto velocemente a migliorare la soluzione, ma dopo decine di iterazioni questo miglioramento sarà sempre più lento fino a giungere a convergenza. Convergenza che non è detto che coincida col minimo assoluto della soluzione ma potrebbe essere un minimo locale.

Per questo motivo è importante stabilire dei criteri di arresto quando si è in prossimità dell'ottimo, questi criteri in genere sono i seguenti:

- quando non ci sono miglioramenti nella soluzione per N iterazioni;
- quando si supera un numero prestabilito di iterazioni;
- quando il valore della funzione obiettivo è uguale o migliore di un certo valore prestabilito.

Come per altri parametri di un algoritmo genetico, anche la scelta dei criteri di arresto può variare a seconda del problema specifico da risolvere. Per questo motivo sono state testate diverse soluzioni tra quelle proposte.

4.8 L'Algoritmo Genetico in Matlab

MATLAB è un programma che si può usare per vari scopi, come operazioni con matrici, creazione di algoritmi, analisi e simulazioni. Inoltre è possibile risolvere problemi matematici molto complessi. Per svolgere questa tesi magistrale è stato fatto utilizzo in particolare di un toolbox di Matlab, il "Global Optimization Toolbox" [21]. Questo toolbox fornisce delle funzioni che vanno a cercare le soluzioni a problemi di massimo o di minimo. Tra le varie opzioni disponibili, è stato usato il "ga" solver, che sfrutta gli algoritmi genetici per risolvere questi problemi [22]. Il comando **ga** trova il minimo di una funzione, ed in Matlab si richiama con una sintassi ben precisa:

$$[x, fval, exitflag, output, population, score] = ga(fun, nvars, [], [], [], lb, ub, [], [], options) \quad (4.2)$$

in cui i vari parametri rappresentano rispettivamente [23]:

- **x**: il vettore della soluzione migliore trovata dall'algoritmo genetico
- **fval**: il valore ottenuto dalla soluzione ottimale nella funzione obiettivo
- **exitflag**: ci fornisce il motivo per il quale è terminato l'algoritmo
- **output**: fornisce informazioni sul processo di ottimizzazione
- **population**: ritorna una matrice contenente la popolazione finale
- **score**: è un vettore che contiene gli score della popolazione finale
- **fun**: è il nome della funzione da ottimizzare, nel nostro caso la funzione DeltaV
- **nvars**: contiene il numero dei gradi di libertà del problema, 11 nel nostro caso
- **lb**: è il vettore che contiene i limiti inferiori che ciascuna delle variabili può assumere
- **ub**: è il vettore che contiene i limiti superiori che ciascuna variabile può assumere
- **options**: opzioni di ottimizzazione dell'algoritmo genetico, possono essere modificate

Le opzioni di ottimizzazione dell'algoritmo genetico servono per specificare, ad esempio, la dimensione della popolazione, la funzione di selezione, le tipologie di crossover e mutazione da utilizzare ed i criteri di arresto.

La sintassi per variare il comando è così descritta:

$$options = optimoptions('ga', 'Options1', 'Value1', ...) \quad (4.3)$$

Nel nostro caso si è scelto di modificare le seguenti opzioni:

- **PopulationSize:** indica la dimensione di ciascuna generazione
- **CrossoverFraction:** indica la frazione di nuovi individui generati tramite crossover
- **MaxGeneration:** indica il numero massimo di iterazioni consentite
- **MaxStallGeneration:** indica dopo quante iterazioni completate senza aver trovato una soluzione migliore l'algoritmo debba fermarsi
- **InitialPopulationMatrix:** matrice contenente almeno un individuo di partenza
- **SelectionFcn:** indica il meccanismo di selezione degli individui (es. roulette)
- **CrossoverFcn:** indica il meccanismo con cui si effettua crossover (es. single point)
- **MutationFcn:** indica il meccanismo con cui possono mutare gli individui
- **Display:** specifica quante informazioni sono stampate ad ogni iterazione (es. off)
- **PlotFcn:** specifica le funzioni da plottare ad ogni iterazione (es. *gaplotbest* indica il best score in funzione del mean score)

in modo da cercare il miglior compromesso tra una certa rapidità nel trovare un minimo ma allo stesso tempo senza giungere prematuramente a convergenza.

Capitolo 5

Risultati

In questo capitolo verranno riportati i risultati ottenuti attraverso il processo di ottimizzazione mediante l'utilizzo dell'algoritmo genetico implementato in Matlab.

Dopo aver introdotto i parametri di missioni che vanno dal 2037 al 2045 [13] ed i corrispondenti parametri orbitali di Phobos e Deimos per le relative missioni, si andranno a confrontare le soluzioni trovate.

L'obiettivo è individuare quale soluzione è la più conveniente in termini di DeltaV per intercettare ciascuno dei due satelliti naturali di Marte e di conseguenza anche la finestra di lancio ottimale tra quelle prese in esame.

Launch Year	Mars Arrival (m-d-y)	V_{∞} (km/s)	Decl (deg)	RA (deg)	Mars Departure (m-d-y)	V_{∞} (km/s)	Decl (deg)	RA (deg)	Stay Time (days)
2037	8/02/2038	2.789	38.7	19.4	7/23/2039	3.097	8.7	-124.1	352.8
2041	7/27/2042	2.920	-1.7	113.8	7/31/2043	2.471	5.3	-53.5	368.7
2045	10/06/2046	3.334	-34.0	162.9	1/29/2048	2.757	31.6	34.3	480

Tabella 5.1: Arrival and departure conditions for chemical option (2037-2045)

Dal sito del JPL della Nasa [24] si reperiscono i parametri orbitali di Phobos e Deimos necessari a ricavare la loro posizione per tutta la durata delle missioni.

Missione	e	i (deg)	T (h)	a (km)	Ω (deg)	ω (deg)	ν_0 (deg)	N (deg/sec)
Phobos 2037	0.0151	1.093	7.66	9377	52.385	347.64	22.84	0.01355
Deimos 2037	0.00033	1.791	30.31	23460	86.492	100.66	49.12	0.0033
Phobos 2041	0.0149	1.0998	7.66	9377	325.16	351.65	23.714	0.01305
Deimos 2041	0.00026	0.995	30.31	23460	1.0856	42.569	261.99	0.00329
Phobos 2045	0.0149	2.459	7.66	9377	352.02	227.92	129.96	0.01305
Deimos 2045	0.00028	1.419	30.31	23460	73.882	129.399	89.124	0.0033

Tabella 5.2: Parametri Phobos e Deimos

5.1 Confronto finestre di lancio

Nelle tabelle sottostanti sono confrontati i migliori DeltaV ricavati per ciascuna delle finestre di lancio prese in esame, nei casi in cui vogliamo intercettare o Phobos o Deimos.

Dapprima sono riportati i costi propulsivi di ciascuna delle 7 manovre, descritte nel capitolo 3 e poi la somma complessiva.

Per far sì di ottenere una soluzione valida sono stati inseriti dei vincoli: gli apoastri delle orbite di parcheggio in ingresso ed in uscita devono coincidere, altrimenti non possiamo effettuare la manovra 4, cioè l'apotwist; inoltre l'orbita di parcheggio deve intercettare il target all'istante t in cui si raggiunge l'apoastro.

L'algoritmo deve convergere ad una soluzione che rispetti il più possibile questi vincoli, pertanto vengono stimate delle penalità al DeltaV tanto più la soluzione contiene errori.

Nelle tabelle è riportata la somma algebrica dei DeltaV delle manovre, non la stima che tiene conto degli errori, quindi il costo propulsivo effettivo potrebbe essere leggermente superiore, a causa di micro correzioni che devono essere svolte per rispettare a pieno i vincoli.

	2037	2041	2045
DV1	0.8530	1.0687	1.7222
DV2	0.0838	0.0978	0.2829
DV3	0.6868	0.6931	0.6917
DV4	0.3150	0.1862	1.2210
DV5	0.6864	0.6871	0.6865
DV6	0.0193	0.0114	0.0019
DV7	0.1977	1.1025	0.8272
Σ_{DV}	2.8419	3.8469	5.4335

Tabella 5.3: Costi in termini di DV per Phobos

Per entrambe le destinazioni si nota il medesimo trend: la finestra di lancio migliore tra le 3 proposte è la prima, quella del 2037.

	2037	2041	2045
DV1	0.8847	1.0935	1.2394
DV2	0.0813	0.0156	0.5408
DV3	0.2905	0.2921	0.3001
DV4	0.2630	0.4754	0.5308
DV5	0.2904	0.2894	0.2879
DV6	0.0019	0.1838	0.1664
DV7	0.2146	0.9298	1.6928
Σ_{DV}	2.0264	3.2796	4.7583

Tabella 5.4: Costi in termini di DV per Deimos

Phobos percorre un'orbita quasi circolare intorno a Marte con un periodo inferiore rispetto a quella di Deimos, quindi è più piccola e passa più vicina al pianeta stesso. In virtù di ciò è ragionevole aspettarsi che a parità di finestra di lancio sia più conveniente intercettare Deimos rispetto a Phobos; proprio perchè essendo più stretta l'orbita di Phobos è necessario effettuare una frenata maggiore alla cattura e dare un'impulso maggiore all'escape rispettivamente per immettersi ed uscire dall'orbita di parcheggio.

I risultati ottenuti confermano questo fatto: gli impulsi DV3 e DV5 sono i maggiori responsabili della differenza di DVtotale tra i due casi nella stessa finestra di lancio.

Si vanno ora a riportare i risultati dei due casi migliori tra quelli analizzati.

5.2 Caso missione 2037 verso Phobos

Come già visto prima la missione più economica per intercettare Phobos è quella del 2037, riporto nuovamente la tabella contenente i DeltaV dei singoli impulsi.

Viene inoltre riportato anche il valore stimato del DeltaV complessivo, esso tiene conto degli errori che si possono commettere, ovvero di piccole differenza tra la posizione degli apoastri delle orbite E ed F al momento del twist e della distanza dal target all'apoastro dell'orbita D. La maggiorazione del DeltaV viene introdotta per correggere queste imprecisioni nella soluzione.

Phobos	2037
DV1	0.8530
DV2	0.0838
DV3	0.6868
DV4	0.3150
DV5	0.6864
DV6	0.0193
DV7	0.1977
Σ_{DV}	2.8419
stima del DVtotale	2.9636

Tabella 5.5: DeltaV delle singole manovre e stima del DVtotale

Il sistema di riferimento utilizzato è Mars-Centered inertial (MCI) ha origine coincidente col centro di Marte ma gli assi sono fissi, non ruotano insieme al pianeta. Gli assi I e J appartengono al piano equatoriale mentre K è perpendicolare ad esso quindi è allineato col verso di rotazione del pianeta, vedi appendice A.

Di seguito è riportata una tabella contenente la posizione in cui vengono effettuate le manovre rispetto al sistema di riferimento descritto prima, in particolare troviamo latitudine e longitudine espresse in gradi e distanza dal centro di Marte in km.

	lat (deg)	long (deg)	radius (km)
DV1	-26.7832	164.7049	4081.7
DV2	1.0646	-50.6885	143690
DV3	-1.0898	138.0091	3639.5
DV4	-1.0413	65.3272	9377
DV5	-8.1877	82.6529	3639.5
DV6	8.1877	-97.3471	183850
DV7	-8.2147	174.8651	3799.6

Tabella 5.6: Latitudini/longitudini e raggi delle 7 manovre

Nella seguente tabella sono espresse le componenti delle velocità prima e dopo ciascuna manovra e la loro differenza vettoriale, cioè i DV delle manovre.

	x	y	z	modulo
pre	-1.1515	-4.2916	-3.00344	5.3632
post	-1.1152	-3.5459	-2.5097	4.5309
DV1	0.0363	0.7456	0.4128	0.8530
pre	0.2954	-0.2120	0.0862	0.3737
post	0.3208	-0.2002	0.0072	0.3782
DV2	0.0254	0.0119	0.0790	0.0838
pre	-3.2141	-3.5709	-0.0070	4.8044
post	-2.7546	-3.0605	-0.0060	4.1176
DV3	0.4595	0.5105	0.0010	0.6868
pre	-1.4522	0.6673	0.0093	1.5982
post	-1.4199	0.6587	0.3225	1.5982
DV4	0.0322	0.0085	0.3132	0.3150
pre	-4.0512	0.4363	-0.5933	4.1176
post	-4.7265	0.5090	-0.6922	4.8040
DV5	0.6753	0.0727	0.0989	0.6864
pre	0.0936	-0.0101	0.0137	0.0951
post	0.0969	-0.0131	-0.0533	0.0970
DV6	0.0024	0.0030	0.0189	0.0193
pre	-4.6756	0.3778	0.2873	4.6997
post	-4.8481	0.4745	0.2869	4.8797
DV7	0.1724	0.0966	0.0006	0.1977

Tabella 5.7: Componenti velocità pre/post manovra e DeltaV manovre

In questa tabella troviamo dei parametri utili per andare a rappresentare le orbite:

Orbita	a(km)	e	i (rad)	rp (km)
A	-5505.9	1.7048	0.7019	3880.7
B	93821	0.9601	0.7019	3742.5
C	94524	0.9615	0.0191	3639.5
D	6508.2	0.4408	0.0191	3639.5
E	6508.2	0.4408	0.0191	3639.5
F	6508.2	0.4408	0.3007	3639.5
G	6508.2	0.4408	0.3007	3639.5
H	93747	0.9612	0.3007	3639.5
I	93821	0.9596	0.1527	3788.5
J	-33779	1.1122	0.1527	3789.5

Tabella 5.8: Parametri Orbite

Riporto infine una tabella contenente i valori che l'algoritmo genetico ha ricavato per ciascuna incognita, cioè il cromosoma:

rp_A (km)	491.1772
rp_J (km)	400.0162
rp_B (km)	353.0010
rp_I (km)	399.0000
ta_A (rad)	0.3979
ta_J (rad)	0.1004
$t_{twist} (*t_{stay})$	0.3327
i_{EO} (rad)	0.3007
β_{arr} (rad)	0.2080
β_{dep} (rad)	0.0159
T_B (Sol)	9.942475

Tabella 5.9: Soluzione

Da questa figura si osservano le orbite iperboliche di arrivo e di partenza, quelle nere, e le ellittiche di trasferimento col periodo maggiore, divise tra blu (prima del cambio di piano ΔV_2) e verdi (dopo il cambio di piano) .

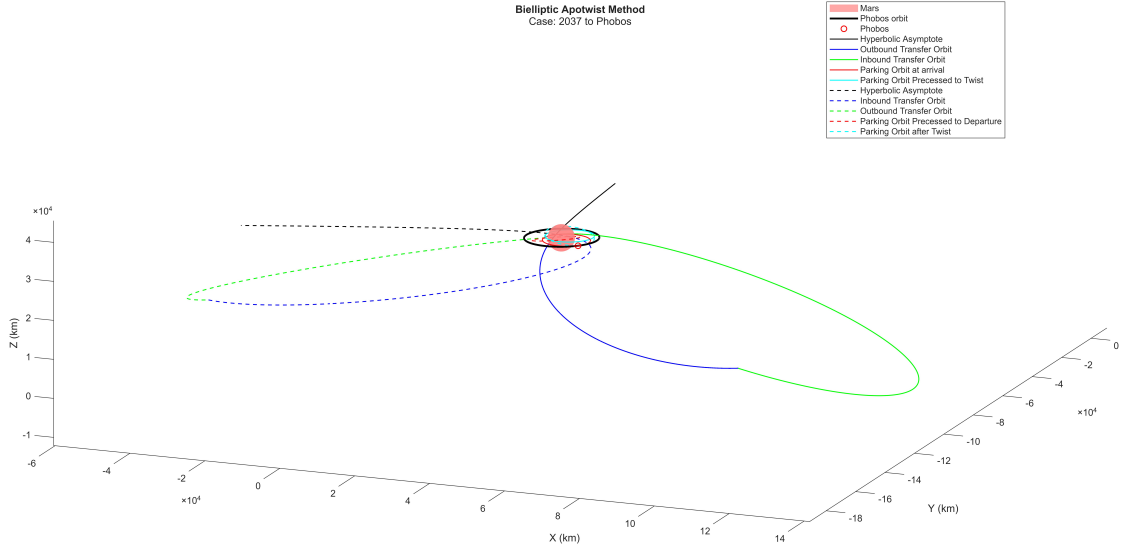


Figura 5.1: Vista da lontano della soluzione

Come avevamo anticipato nel capitolo 3, nel caso ideale si effettua il cambio di piano ΔV_2 nei pressi dell'apoastro dell'orbita blu, in questo modo la velocità è bassa e si risparmia sul costo propulsivo. Ma per poter immettersi in un'orbita di parcheggio coplanare al piano orbitale di Phobos è necessario vincolare il cambio

di piano nel punto in cui l'orbita blu interseca il piano, per cui la manovra 2 non avviene necessariamente all'apoastro, come si vede dalla figura 5.1.

Ingrandendo la figura 5.2 si può apprezzare l'orbita di parcheggio in tutte le sue fasi: rossa continua all'arrivo, cioè quando intercetta il target. A causa dei fenomeni perturbativi, dopo un periodo di tempo pari a t_{twist} trasla: azzurra continua. Dopo l'apotwist, manovra 4, cambia inclinazione: azzurra tratteggiata. Infine sempre a causa dei fenomeni perturbativi dopo un periodo di tempo pari a $t_{stay} - t_{twist}$ si sposta in quella rossa tratteggiata.

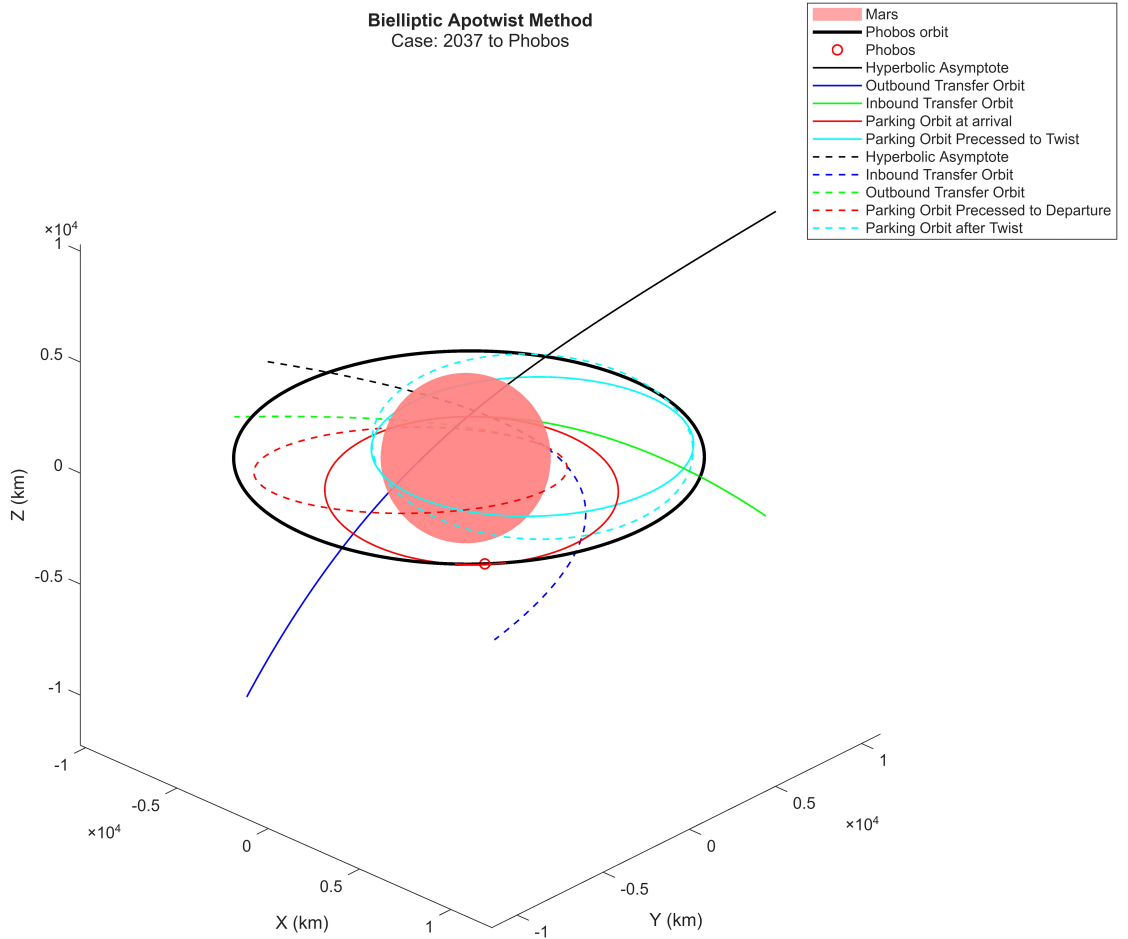


Figura 5.2: Vista da vicino della soluzione

Dalla figura 5.2 si vede che l'orbita di parcheggio intercetta Phobos ed anche gli apoastri delle orbite azzurre sono coincidenti; come detto prima queste sono condizioni necessarie per la riuscita della missione e per la validità della soluzione proposta.

5.3 Caso missione 2037 verso Deimos

Gli stessi risultati vengono riportati anche per la missione verso Deimos:

DV1	0.8847
DV2	0.0813
DV3	0.2905
DV4	0.2630
DV5	0.2904
DV6	0.0019
DV7	0.2146
somma	2.0264
stima del DV _{totale}	2.1855

Tabella 5.10: DV delle varie manovre

Anche in questo caso le tabelle riportano valori rispetto al sistema di riferimento Mars-Centered inertial (MCI).

	lat (deg)	long (deg)	radius (km)
DV1	-34.1015	177.3223	4484.9
DV2	1.0305	-57.1042	139690
DV3	-1.2822	132.2014	3639.5
DV4	-1.2112	-90.1384	23460
DV5	-16.0255	82.2520	3639.5
DV6	16.0255	-97.7480	184680
DV7	-15.8534	174.4503	3802.6

Tabella 5.11: Latitudini/longitudini e raggi delle 7 manovre

Orbita	a (km)	e	i (rad)	rp (km)
A	-5505.9	1.7160	0.6867	3942.3
B	94232	0.9611	0.6867	3661.8
C	94409	0.9614	0.0313	3639.5
D	13550	0.7314	0.0313	3639.5
E	13550	0.7314	0.0313	3639.5
F	13550	0.7314	0.4332	3639.5
G	13550	0.7314	0.4332	3639.5
H	94157	0.9613	0.4332	3639.5
I	94232	0.9598	0.3554	3788.4
J	-3377.9	1.1122	0.3554	3790.5

Tabella 5.12: Parametri Orbite

Nuovamente si riportano i valori delle componenti di velocità in corrispondenza di ciascuna manovra necessarie a ricavare il DV complessivo

	x	y	z	modulo
pre	-0.9232	-4.4210	-2.5455	5.1843
post	-0.9026	-3.6138	-2.1840	4.3179
DV1	0.0206	0.8072	0.3615	0.8847
pre	0.2860	-0.2634	0.0864	0.3983
post	0.3112	-0.2502	0.0102	0.3994
DV2	0.0251	0.0132	0.0762	0.0813
pre	-3.5566	-3.2282	-0.1048	4.8043
post	-3.3415	-3.0330	-0.0985	4.5138
DV3	0.2151	0.1952	0.0063	0.2905
pre	0.7001	-0.0020	0.0161	0.7003
post	0.6567	0.0023	-0.2432	0.7003
DV4	0.0434	0.0043	0.2593	0.2630
pre	-4.3996	0.3214	-0.9562	4.5138
post	-4.6827	0.3421	-1.0177	4.8042
DV5	0.2831	0.0207	0.0615	0.2904
pre	0.0923	-0.0067	0.0201	0.0947
post	0.0941	-0.0069	0.0205	0.0966
DV6	0.0018	0.0001	0.0004	0.0019
pre	-4.6084	0.0521	-0.9116	4.6980
post	-4.7753	0.1680	-0.9807	4.8779
DV7	0.1669	0.1160	0.0691	0.2146

Tabella 5.13: Componenti velocità pre/post manovra e DeltaV manovre

Si riporta infine il cromosoma contenente i valori delle incognite per questa soluzione:

rp_A (km)	552.7630
rp_J (km)	400.9690
rp_B (km)	272.3383
rp_I (km)	398.8826
ta_A (rad)	0.6292
ta_J (rad)	0.1100
$t_{twist} (*t_{stay})$	0.2500
i_{EO} (rad)	0.4332
β_{arr} (rad)	0.1348
β_{dep} (rad)	0.3226
T_B (Sol)	10.0078

Tabella 5.14: Soluzione

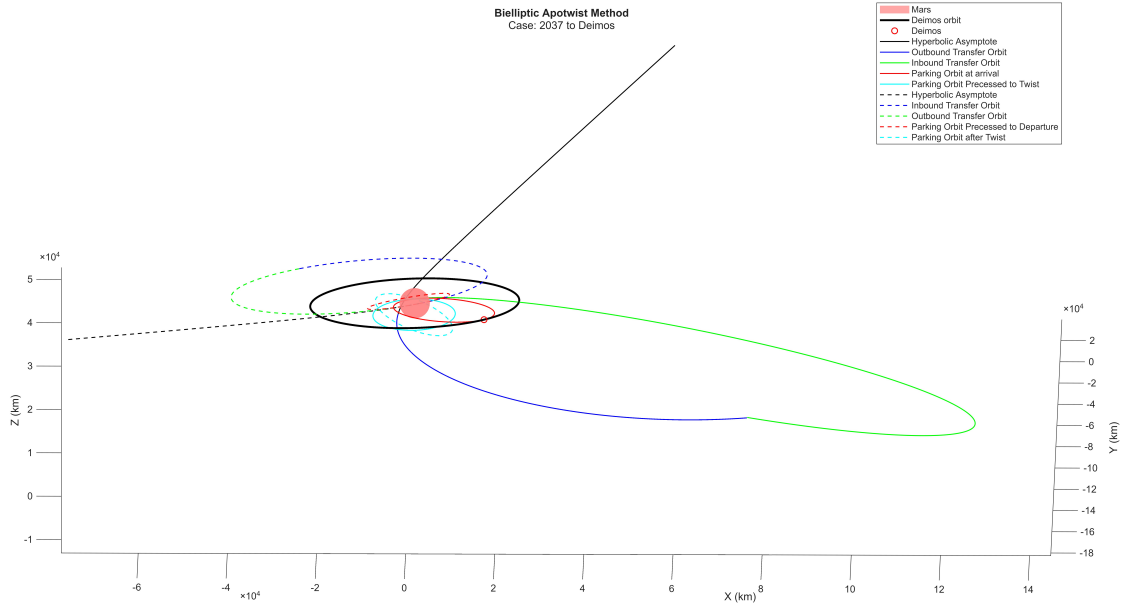


Figura 5.3: Manovra DV2: inserimento nel piano di Deimos

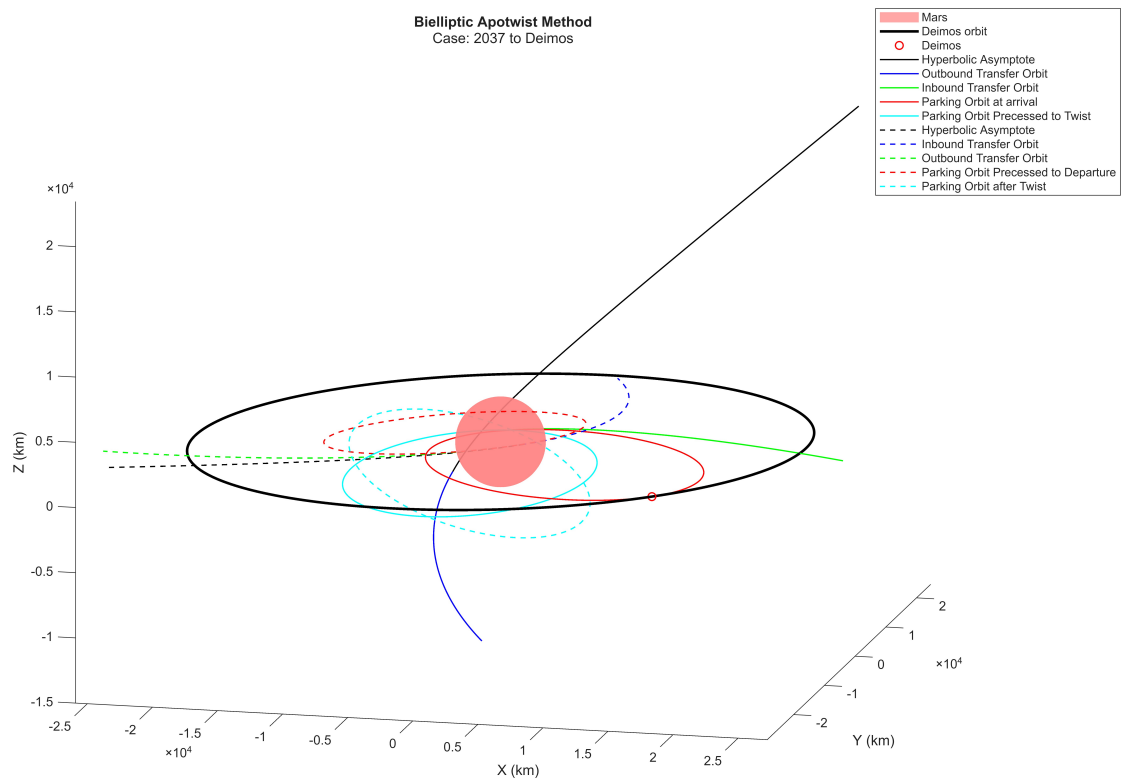


Figura 5.4: Primo piano delle traiettorie verso Deimos

Capitolo 6

Conclusioni

In questa tesi di laurea è stato sviluppato un codice Matlab che implementa la "bielliptic apotwist maneuver", con le dovute modifiche, per una missione di andata e ritorno da Marte. Durante la missione ci si deve immettere in un'orbita di parcheggio che intercetti i satelliti naturali di Marte, Phobos e Deimos. Lo scopo era quello di trovare una soluzione che minimizzasse il ΔV necessario. Per risolvere il problema di ottimizzazione è stato fatto utilizzo di un algoritmo genetico, sviluppato col "global optimization toolbox" di Matlab.

Il bielliptic apotwist method, introdotto da Qu, Merrill, Chai e Kosar, consiste in sette manovre che catturano lo spacecraft dalla sua traiettoria interplanetaria in un'orbita di parcheggio obiettivo, nel nostro caso col vincolo di intercettare le lune, e successivamente lo riorientano per permettergli di sfuggire dalla sfera d'influenza di Marte.

L'algoritmo genetico, basato sulla teoria evoluzionistica Darwiniana, è stato implementato efficacemente per l'ottimizzazione del costo propulsivo delle manovre. Questi algoritmi di ottimizzazione convergono sempre verso una soluzione del problema, in modo più o meno efficiente in base alla combinazione di alcuni fattori come i meccanismi di selezione, di crossover, di mutazione, della dimensione della popolazione, del numero di generazioni e dei criteri di arresto scelti. Sono in generale molto adatti a lavorare con numerose variabili, come in questo caso dove ne sono state usate 11.

Al codice Matlab sono stati forniti come parametri di ingresso alcuni dati preesistenti relativi a traiettorie iperboliche di arrivo e di ripartenza da Marte, riferite a tre diverse missioni, comprese tra il 2037 e 2045.

Dai risultati dell'ottimizzazione è emerso che la finestra di lancio più conveniente è quella relativa alla prima missione, quella del 2037, sia nel caso in cui si voglia intercettare Phobos sia Deimos.

In particolare, per tutti i casi presi in considerazione, è sempre risultato più conveniente intercettare Deimos rispetto a Phobos, questo dipende dal semiasse

maggiore dell'orbita di parcheggio, che nel caso di Deimos è maggiore di quello di Phobos. Inoltre entrambe le lune orbitano attorno a Marte con orbite quasi equatoriali e hanno inclinazioni molto simili tra loro, quindi nel nostro studio l'inclinazione dell'orbita di parcheggio non è stato un parametro che ha influenzato in modo significativo i risultati.

Futuri studi dovrebbero prendere in considerazione altri tipi di propulsione oltre a quella chimica; inoltre si potrebbe utilizzare un modello fisico più accurato per la fase in cui transitiamo in prossimità delle lune. A quel punto si potrebbe analizzare una manovra di landing.

Appendice A

Sistema di riferimento Mars-Centered Inertial MCI

Il Mars-Centered Inertial (MCI) è un sistema di riferimento inerziale centrato su Marte, comodo per descrivere le orbite di satelliti o altri corpi celesti attorno ed esso. Le caratteristiche principali sono:

- Origine: coincide col centro di massa di Marte
- Asse I: diretto verso il punto dell'equatore marziano che interseca la direzione dell'equinozio di riferimento (come per quello terrestre)
- Asse K: allineato all'asse di rotazione di Marte, puntando verso il polo nord celeste di Marte
- Asse J: a completare la terna destrorsa (IJK)

Il sistema di riferimento è inerziale, quindi non ruota insieme a Marte, non segue la rotazione del pianeta attorno al proprio asse. Permette di descrivere efficacemente anche le orbite di Phobos e Deimos, cioè gli obiettivi della tesi, inoltre è anche comodo quando si fanno missioni interplanetarie perchè in genere come parametri di missione vengono forniti le velocità in ingresso e uscita dalla SOI e latitudini e longitudini degli asintoti iperbolici rispetto a tal sistema di riferimento, come appunto nella trattazione.

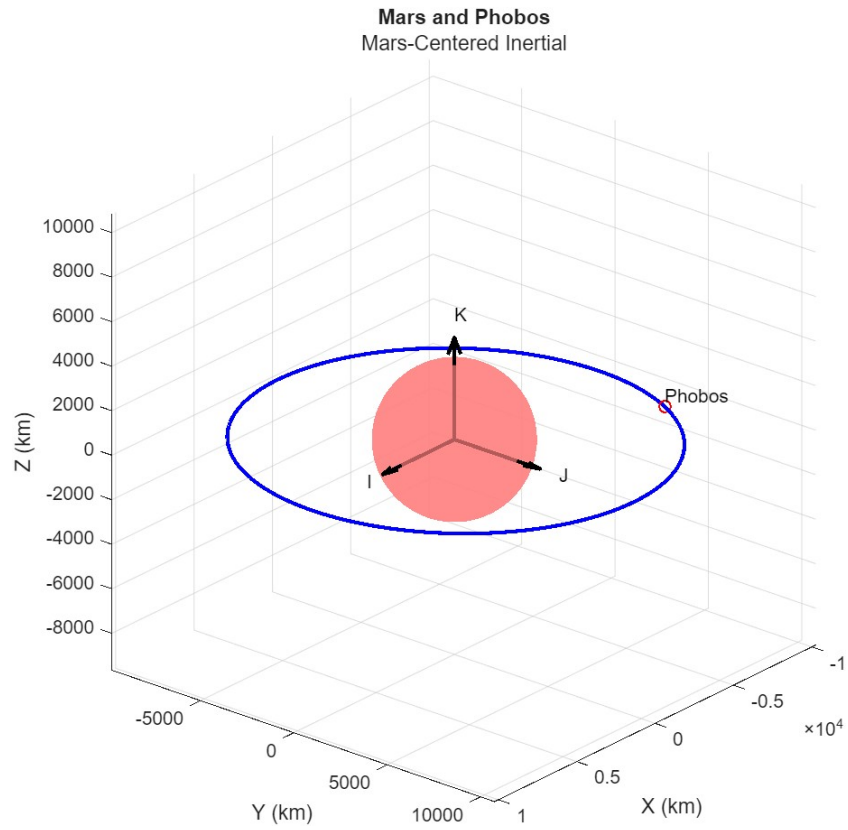


Figura A.1: Esempio Mars-Centered Inertial

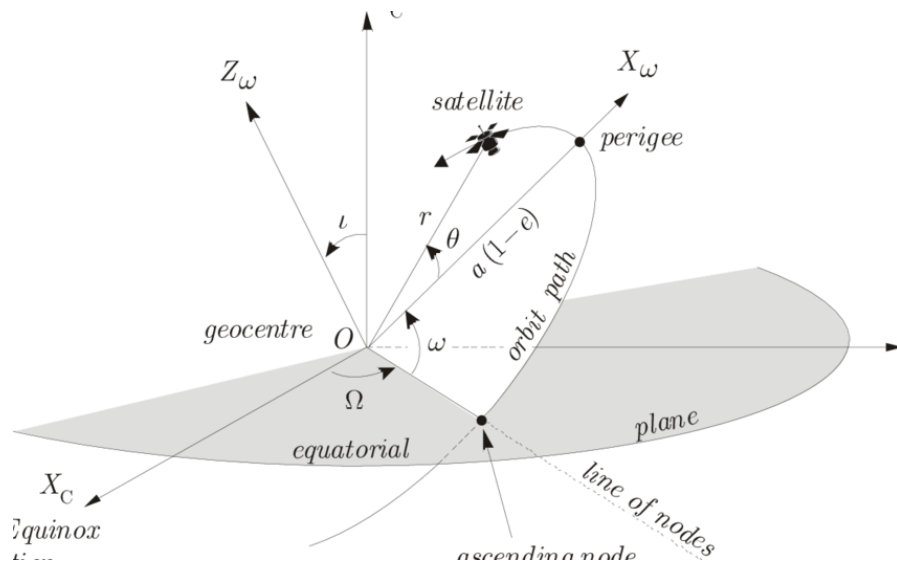


Figura A.2: Sistema di riferimento perifocale

Appendice B

Sistema di riferimento Perifocale

Il sistema di riferimento perifocale è uno dei più utilizzati ed uno dei più utili per descrivere le orbite dei pianeti ed infatti ne esiste uno per ciascuna di esse.

Le caratteristiche principali sono:

- Origine: coincide col fuoco dell'orbita, nel nostro caso il centro di massa di Marte
- Asse $\bar{p}$: diretto verso il periastro
- Asse $\bar{w}$: allineato all'asse $\bar{h}$ cioè al momento angolare specifico dell'orbita
- Asse $\bar{q}$: perpendicolare all'asse $\bar{p}$, giacente nel piano orbitale e diretto verso il semilato retto

Il vettore posizione nel sistema perifocale si esprime:

$$\bar{r}_{pqw} = \begin{Bmatrix} r \cos(\nu) \\ r \sin(\nu) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

Mentre il vettore velocità:

$$\bar{V}_{pqw} = \begin{Bmatrix} -\frac{\mu}{h} \sin(\nu) \\ \frac{\mu}{h} (e + \cos(\nu)) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

Appendice C

Matrici di rotazione

Le matrici di rotazione servono per ruotare un sistema di riferimento di un certo angolo attorno ad uno degli assi che lo compongono.

Rotazione attorno all'asse x di un angolo α

$$R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad (\text{C.1})$$

Rotazione attorno all'asse y di un angolo β

$$R_y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{pmatrix} \quad (\text{C.2})$$

Rotazione attorno all'asse z di un angolo γ

$$R_z(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.3})$$

Sono utili perchè noti gli angoli Ω , i , ω è possibile passare dal sistema di riferimento MCI a quello Perifocale e viceversa. Quindi se devo disegnare un'orbita prima mi ricavo l'equazione della conica nel piano perifocale e poi per rappresentarla trasformo le coordinate dei punti nel piano MCI.

Appendice D

Effetti delle perturbazioni

Il modello usato per approssimare la forma di Marte è quello di un geoide. Caratteristica comune in molti pianeti che a causa della rotazione subiscono un leggero schiacciamento ai poli ed un rigonfiamento all'equatore.

La perturbazione che abbiamo considerato per questa trattazione è la **J₂**, la quale considera l'effetto dello schiacciamento ai poli e vale: $J_2 = 0.00196045$.

Questo schiacciamento porta a diversi effetti:

- effetto su Ω : regressione della linea dei nodi
- effetto su ω : precessione della linea degli apsidi

Effetto sulla linea dei nodi Il primo effetto riguarda la regressione della linea dei nodi e si evidenzia con una variazione nel tempo della longitudine del nodo ascendente Ω . Questa variazione è negativa nel caso di orbite prograde $0 < i < 90$ oppure positiva se le orbite sono retrograde $90 < i < 180$.

La variazione è misurata nel seguente modo:

$$\dot{\Omega}_{J_2} = -\frac{3}{2}n \frac{J_2 R_p^2}{a^2(1-e^2)^2} \cos(i) \quad (\text{D.1})$$

dove n è il moto medio:

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \quad (\text{D.2})$$

Effetto sulla linea degli apsidi Il secondo effetto influenza la precessione della linea degli apsidi con la modifica dell'argomento del periastro ω , che si calcola nel seguente modo:

$$\dot{\omega}_{J_2} = \frac{3}{4}n \frac{J_2 R_p^2}{a^2(1-e^2)^2} (4 - 5\sin^2(i)) \quad (\text{D.3})$$

Bibliografia

- [1] Bethany Ehlmann e Christopher Edwards. «Mineralogy of the Martian Surface». In: *Annual Review of Earth and Planetary Sciences* 42 (mag. 2014), pp. 291–315. DOI: 10.1146/annurev-earth-060313-055024 (cit. a p. 1).
- [2] Ryuki Hyodo, Pascal Rosenblatt, Hidenori Genda e Sébastien Charnoz. «On the Impact Origin of Phobos and Deimos. II. True Polar Wander and Disk Evolution». In: *The Astrophysical Journal* 851.2 (dic. 2017), p. 122. DOI: 10.3847/1538-4357/aa9984. URL: <https://doi.org/10.3847/1538-4357/aa9984> (cit. a p. 1).
- [3] T. P. Andert, P. Rosenblatt, M. Pätzold, B. Häusler, V. Dehant, G. L. Tyler e J. C. Marty. «Precise mass determination and the nature of Phobos». In: *Geophysical Research Letters* 37.9 (2010). DOI: <https://doi.org/10.1029/2009GL041829>. eprint: <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1029/2009GL041829>. URL: <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/2009GL041829> (cit. a p. 2).
- [4] Bruce G. Bills, Gregory A. Neumann, David E. Smith e Maria T. Zuber. «Improved estimate of tidal dissipation within Mars from MOLA observations of the shadow of Phobos». In: *Journal of Geophysical Research: Planets* 110.E7 (2005). DOI: <https://doi.org/10.1029/2004JE002376>. eprint: <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1029/2004JE002376>. URL: <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/2004JE002376> (cit. a p. 2).
- [5] A. Samokhin, M. Samokhina, I. Grigoriev e M. Zapletin. «Base on Phobos — Much safer exploration of Mars without the need for humans on the surface of the planet». In: *Acta Astronautica* 204 (2023), pp. 920–925. ISSN: 0094-5765. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2022.12.028>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0094576522007007> (cit. a p. 2).
- [6] Robert M Haberle, R Todd Clancy, François Forget, Michael D Smith e Richard W Zurek. *The atmosphere and climate of Mars*. Cambridge University Press, 2017 (cit. a p. 2).

- [7] Anna Lombardi. *Keplero*. Corriere della Sera, 2017 (cit. a p. 4).
- [8] Erik Verlinde. «On the origin of gravity and the laws of Newton». In: *Journal of High Energy Physics* 2011.4 (2011), pp. 1–27 (cit. a p. 5).
- [9] Roger R Bate, Donald D Mueller, Jerry E White e William W Saylor. *Fundamentals of astrodynamics*. Courier Dover Publications, 2020 (cit. alle pp. 6, 8).
- [10] Mirko Leomanni, Gianni Bianchini, Andrea Garulli e Antonio Giannitrapani. «A class of globally stabilizing feedback controllers for the orbital rendezvous problem». In: *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 27 (dic. 2017), pp. 4296–4311. DOI: 10.1002/rnc.3817 (cit. a p. 10).
- [11] Raghav Maini e Ugur Guven. «Trajectory Analysis of UPESSAT - A CubeSat Project». Tesi di dott. Mag. 2014. DOI: 10.13140/RG.2.1.2156.6962 (cit. a p. 11).
- [12] Parvathi Sp e R V Ramanan. «Direct Transfer Trajectory Design Options for Interplanetary Orbiter Missions using an Iterative Patched Conic Method». In: *Advances in Space Research* 59 (dic. 2016). DOI: 10.1016/j.asr.2017.01.023 (cit. a p. 17).
- [13] Min Qu, Raymond G Merrill, Patrick Chai e David R Komar. «Optimizing parking orbits for roundtrip Mars missions». In: *2017 AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference*. NF1676L-26982. 2017 (cit. alle pp. 19, 20, 45).
- [14] Patrick Chai, Min Qu, Raymond Merrill, D.R. Komar e Christopher Jones. «Trajectory Designs for a Mars Hybrid Transportation Architecture». In: ago. 2015 (cit. a p. 20).
- [15] Damon Landau, James Longuski e Paul Penzo. «Method for Parking-Orbit Reorientation for Human Missions to Mars». In: *Journal of Spacecraft and Rockets - J SPACECRAFT ROCKET* 42 (mag. 2005), pp. 517–522. DOI: 10.2514/1.7042 (cit. a p. 21).
- [16] Raymond G Merrill, David Komar, Min Qu e Patrick Chai. «Mars Sphere of Influence Maneuvers for NASA’s Evolvable Mars Campaign». In: *AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference*. 2016, p. 5210 (cit. a p. 21).
- [17] Oliver Kramer. «Genetic algorithms». In: *Genetic algorithm essentials*. Springer, 2017, pp. 11–19 (cit. a p. 31).
- [18] John H Holland. «Genetic algorithms». In: *Scientific american* 267.1 (1992), pp. 66–73 (cit. a p. 31).
- [19] Melanie Mitchell. «Genetic algorithms: An overview.» In: *Complex*. Vol. 1. 1. 1995, pp. 31–39 (cit. a p. 32).

- [20] Tutorialspoint. *Genetic Algorithm Parent Selection*. 2025. URL: https://www.tutorialspoint.com/genetic_algorithms/genetic_algorithms_parent_selection.htm (visitato il 10/06/2025) (cit. alle pp. 35–37).
- [21] MathWorks. *Global Optimization Toolbox*. 2025. URL: <https://it.mathworks.com/help/gads/index.html> (visitato il 10/08/2025) (cit. a p. 43).
- [22] MathWorks. *Genetic Algorithm Documentation*. 2025. URL: <https://it.mathworks.com/help/gads/genetic-algorithm.html> (visitato il 10/08/2025) (cit. a p. 43).
- [23] MathWorks. *Genetic Algorithm Commands*. 2025. URL: <https://it.mathworks.com/help/gads/ga.html#d122e38653> (visitato il 10/08/2025) (cit. a p. 43).
- [24] Jpl.Nasa. *Horizons System*. 2025. URL: <https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons/app.html#/> (cit. a p. 45).