

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale
in Ingegneria Aerospaziale



Tesi di Laurea Magistrale

Analisi ed Ottimizzazione della Traiettoria di Allunaggio in Coordinate Sferiche

Relatore:

Prof. Lorenzo Casalino

Candidato:

Giovanni Riccardi

Ottobre 2025

Abstract

Questo lavoro di tesi affronta il problema dell'ottimizzazione della traiettoria di allunaggio di un lander spaziale.

L'obiettivo principale è la massimizzazione della massa finale al termine dell'atterraggio, minimizzando il consumo di propellente durante la fase di discesa e di atterraggio verticale.

La metodologia utilizzata si basa su un approccio di ottimizzazione diretta con vincoli di missione, implementato in ambiente MATLAB tramite il solutore **fmincon**, utilizzando l'algoritmo *sequential quadratic programming*.

Lo studio si articola in tre analisi principali: il confronto tra strategie a spinta costante e ottimizzata, l'influenza dell'altitudine del perilunio e l'effetto del punto di inizio della discesa da una trasferta di Hohmann.

Indice

Abstract	I
Introduzione	1
1 Storia dell'allunaggio	2
1.1 La Luna	2
1.2 La Corsa allo Spazio	4
1.3 Il Programma Apollo	7
1.4 Il Programma Artemis	10
2 Metodi di Ottimizzazione	15
2.1 Algoritmi di Ottimizzazione	17
2.2 Metodi Diretti e Indiretti	19
2.3 Sequential Quadratic Programming	22
2.4 Bang-Bang Control	26
3 Ottimizzazione dell'Allunaggio in Coordinate Sferiche	29
3.1 Modello e Ipotesi	30
3.2 Sistema di Riferimento ed Equazioni	33
3.3 Vincoli e Ottimizzazione	36
4 Risultati	41
4.1 Analisi di Sensibilità della Fase di Discesa per Spinta Costante e Ottimizzata	42
4.1.1 Spinta Costante in Fase di Discesa	42
4.1.2 Spinta Ottimizzata in Fase di Discesa	47
4.1.3 Confronto fra Spinta Costante e Ottimizzata	52
4.2 Analisi di Sensibilità alla Variazione del Perilunio	57
4.3 Analisi di Sensibilità al Punto di Inizio della Fase di Discesa	63

Conclusioni	69
Elenco delle figure	71
Elenco delle tabelle	73
Bibliografia	74

Introduzione

La Luna ha affascinato l'essere umano fin dagli albori dei tempi, associato ad essa miti, significati simbolici e leggende.

Con l'avanzare delle conoscenze astronomiche, l'attenzione verso la Luna si è spostata da corpo celeste avvolto nel mito a oggetto di studio scientifico: infatti l'osservazione dei suoi moti ha permesso di sviluppare teorie fondamentali sul movimento dei corpi celesti e ha contribuito alla nascita dell'astronomia moderna.

Nel XX secolo la Luna divenne meta concreta dell'esplorazione spaziale da parte della Russia e degli Stati Uniti durante il periodo della Guerra Fredda, portando, nel 1969, il primo uomo sulla Luna.

Al giorno d'oggi, con il programma Artemis, la Luna rappresenta nuovamente un soggetto rilevante per l'esplorazione spaziale, non solo come obiettivo scientifico, ma anche come tappa strategica per missioni più ambiziose verso il sistema solare.

In questo contesto, lo studio delle traiettorie di allunaggio assume un ruolo centrale, poiché l'ottimizzazione delle traiettorie orbitali consente di ridurre i consumi propulsivi e di aumentare l'affidabilità delle missioni.

Pertanto, questo lavoro di tesi verte sull'analisi ed ottimizzazione della traiettoria di allunaggio in coordinate sferiche, tenendo in considerazione, con opportune ipotesi, l'effetto della curvatura lunare. Il modello di allunaggio adottato consiste in un'orbita di parcheggio a 100 Km dalla superficie media lunare, da cui il lander scende a 15 km con una Hohmann, tenendo in considerazione i consumi di propellente dovuti a questa trasferta. Partendo da 15 km, l'allunaggio si divide in una fase di discesa e una fase di atterraggio verticale.

L'ottimizzazione è eseguita con il solutore *fmincon* e l'algoritmo *sequential quadratic programming*, basandosi su un metodo diretto.

Capitolo 1

Storia dell'allunaggio

1.1 La Luna

La formazione della Luna risale a circa 4.5 miliardi di anni fa. La sua orbita è collocata ad una distanza media di circa 380 mila chilometri dalla Terra, con un periodo orbitale di 27 giorni, 7 ore, 43 minuti e 12 secondi.

La morfologia lunare è il risultato di una lunga storia di impatti meteoritici e processi vulcanici: i *mari* sono crateri scuri causati da impatti meteoritici, formatesi quando alcuni di essi si riempirono di lava solidificata, e ricoprono circa il 20% della superficie. Gli *altopiani*, invece, sono costituiti da rocce di colore chiaro e possono superare anche i 7000 metri di altitudine. L'intera superficie è ricoperta da uno strato di *regolite*, una miscela di polveri e frammenti rocciosi generata da miliardi di anni di impatti, con spessore variabile da pochi metri nei *mari* fino a oltre 15 metri negli *altopiani*.

Il satellite naturale ha un raggio medio di 1737.4 Km ed è di dimensioni così "ridotte" da non poter trattenere un'atmosfera e la sua massa è circa $7.342 \cdot 10^{22}$ Kg. Sulla superficie lunare, in prossimità dell'equatore, la temperatura può raggiungere i 127°C durante il giorno lunare, che corrisponde a circa 14 giorni terrestri. La temperatura minima, invece, si aggira ai -173°C.

La Luna ha la peculiarità di avere una rotazione sincrona alla Terra, pertanto mostra a quest'ultima sempre la stessa faccia. Tuttavia il "lato nascosto" della Luna può essere osservato in alcune circostanze particolari.

Le *librazioni* sono piccole oscillazioni apparenti della Luna che consentono di osservare circa $\frac{6}{10}$ della superficie lunare e non soltanto l'emisfero sempre rivolto verso la Terra: la *librazione in latitudine* è causata dal fatto che l'equatore lunare

è inclinato di $6^{\circ}41'$ rispetto l'equatore terrestre e ciò garantisce che uno dei poli lunari venga esposto periodicamente, invece la *librazione in longitudine* è causata dalla differenza di velocità di rotazione lunare (costante) e terrestre (variabile in virtù dell'eccentricità dell'orbita).

Il *mese lunare* è formato da 29.5 giorni ed è diviso in otto fasi totali: il *Novilunio* (Luna è tra la Terra e il Sole e la sua faccia illuminata non è rivolta verso la Terra), il *Crescente* (caratterizzata da una falce luminosa crescente), il *Primo Quarto* (quando metà del disco lunare è illuminato), la *Gibbosa crescente* (più della metà del disco visibile), il *Plenilunio* (tutta la faccia visibile illuminata), la *Gibbosa calante*, il *Terzo Quarto* e infine l'*Ultimo Quarto calante* (fase finale in cui appare solo una sottile falce prima di tornare al novilunio successivo). Il passaggio da una fase intermedia all'altra richiede in media circa 3.7 giorni, mentre le fasi intermedie durano all'incirca 7 giorni e 9 ore ciascuna.



Figura 1.1: Fasi Lunari

La Luna influenza in maniera diretta le maree: l'attrazione gravitazionale che la Luna esercita sulla Terra fa in modo che la porzione di acqua rivolta verso il satellite naturale si innalzi causando un rigonfiamento sulla superficie terrestre. L'acqua che si trova sul lato opposto, invece, viene attratta di meno che il resto del globo, formando così un secondo rigonfiamento, di entità minore del primo [1].

Le prime missioni lunari furono interamente robotiche e furono condotte sia dagli Stati Uniti che dall'Unione Sovietica, in un contesto di intensa rivalità geopolitica associato alla Guerra Fredda.

1.2 La Corsa allo Spazio

L'allunaggio costituiva oggetto di ricerca scientifica, ma in particolare fu di grande interesse per una questione di prestigio nazionale e conflitto fra Russia e Stati Uniti: negli anni '50 e '60 le due nazioni erano coinvolte in una guerra costituita principalmente da azioni di propaganda e spionaggio. Lo spazio, in questo conflitto, costituiva un potenziale mezzo con cui poter contemporaneamente spiare la nazione nemica, dimostrare la propria superiorità tecnologica e minacciare lo stato nemico mostrando che i razzi in grado di portare satelliti nello spazio potevano anche colpire il territorio avversario.

Lo scienziato russo Konstantin Tsiolkovsky era convinto che il destino dell'umanità fosse esplorare l'universo. All'inizio del novecento formulò l'equazione che avrebbe consentito di superare la forza di gravità terrestre, immaginando anche come si potesse arrivare alla Luna: con un veicolo multistadio alimentato da una miscela di propellenti liquidi.

Nel 1926 l'americano Robert Goddard costruì e lanciò il primo razzo a propellente liquido. Nello stesso periodo il tedesco Hermann Oberth stabilì che i veicoli multistadio fossero essenziali per lunghi voli.

I progressi dell'Unione Sovietica, tra la fine degli anni '50 e l'inizio degli anni '60, furono percepiti con grande preoccupazione negli Stati Uniti, che si trovavano in piena Guerra Fredda [2].

Il 4 ottobre 1957, l'Unione Sovietica lanciò con successo lo *Sputnik 1*, il primo satellite a orbitare attorno alla Terra. Questo evento segnò l'inizio della corsa allo spazio. Il lancio dello Sputnik non solo dimostrò la superiorità sovietica in campo scientifico e ingegneristico, ma generò anche timore negli Stati Uniti, poiché implicava che l'URSS possedesse la tecnologia per colpire con armi nucleari su distanze intercontinentali. Questa situazione, nota come *crisi dello Sputnik*, spinse il presidente Dwight D. Eisenhower a creare la NASA e a dare il via al Programma Mercury, con l'obiettivo di portare un uomo in orbita.

Il 3 novembre 1957, l'URSS lanciò lo *Sputnik 2*, portando in orbita il primo essere vivente, la cagnolina Laika. La missione, tuttavia, non prevedeva il suo rientro a Terra.

Il 12 aprile 1961, *Jurij Gagarin* divenne il primo essere umano a raggiungere lo spazio e a completare un'orbita attorno alla Terra a bordo della navicella *Vostok 1*.

L'Unione Sovietica, inoltre, avviò il *Programma Luna*, che consisteva in una serie di missioni unmanned verso la Luna tra il 1959 e il 1976. Ventiquattro sonde ricevettero la denominazione ufficiale *Luna*; quelle che non riuscivano a raggiungere l'orbita

terrestre non venivano riconosciute pubblicamente, mentre quelle che fallivano, rimanendo in orbita bassa terrestre, venivano classificate come *Kosmos* [3].

Il programma ottenne una serie di primati storici nell'esplorazione spaziale:

- Luna 1, lanciata nel 1959, non raggiunse la Luna ma fu in grado di entrare in un'orbita eliocentrica.
- Luna 2 fu la prima sonda a raggiungere con successo la superficie lunare.
- Luna 3 riuscì a orbitare attorno alla Luna e a scattare le prime fotografie del suo lato nascosto.
- Luna 9, nel 1966, compì il primo atterraggio morbido e controllato sulla superficie lunare, raccogliendo le prime immagini dalla superficie lunare.
- Luna 10 divenne il primo satellite artificiale della Luna nel 1967.
- Luna 17 e Luna 21, portarono sulla superficie lunare i rover *Lunochod*, i quali effettuarono perlustrazioni telecomandate.
- Luna 16, 20 e 24 garantirono il prelievo di campioni di suolo lunare e riportarli sulla Terra in modo completamente automatizzato

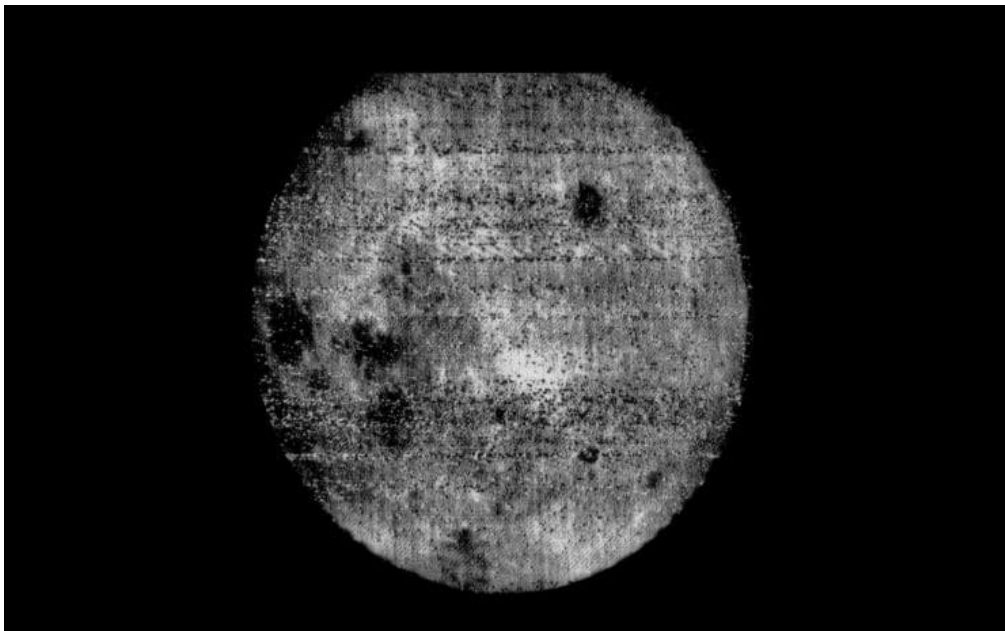


Figura 1.2: Immagine della faccia nascosta della Luna acquisita da *Luna 3*

In risposta ai successi sovietici, gli Stati Uniti svilupparono programmi paralleli con obiettivi specifici per preparare le missioni umane [4].

Il *Programma Ranger* (1961-1965) fu uno dei primi sforzi statunitensi per esplorare la Luna. Le sonde Ranger erano progettate per trasmettere immagini e dati durante il loro avvicinamento alla Luna, per poi schiantarsi sulla superficie lunare.

Il programma fu suddiviso in tre sezioni, dopo aver effettuato sei lanci non riusciti:

- Ranger 7 inviò più di 4300 immagini prima di impattare sulla Luna, dimostrando che i crateri da impatto erano la caratteristica principale della superficie lunare.
- Ranger 8 raccolse oltre 7000 immagini di un'area più vasta, a supporto della missione precedente.
- Ranger 9 si schiantò nel cratere Alphonsus, fornendo 5800 immagini che confermarono la natura della superficie.

Le fotografie ad alta risoluzione acquisite dalle sonde Ranger, insieme a quelle del successivo *Programma Lunar Orbiter*, furono fondamentali per lo studio e la scelta dei potenziali siti di allunaggio.

Il *Programma Surveyor* (1966-1968) fu sviluppato per dimostrare la fattibilità di un atterraggio morbido e controllato sulla Luna. Delle sette missioni lanciate, cinque ebbero successo.

Le sonde Surveyor avevano il compito di raccogliere immagini e analizzare il suolo lunare per determinarne la composizione e la consistenza, per verificare se uno strato di polvere troppo profondo potesse impedire un allunaggio sicuro.

- Surveyor 1, nel giugno 1966, fu la prima sonda statunitense a realizzare un allunaggio morbido e controllato, inviando oltre 11000 immagini. La prima immagine, che mostrava il piede di atterraggio poggiato sul suolo, fu la prova che l'allunaggio era possibile.
- Surveyor 3, 5, 6 e 7, atterrarono in siti diversi, alcuni dei quali sarebbero stati scelti per gli allunaggi umani. Queste sonde erano dotate di strumenti aggiuntivi, come un braccio robotico e un analizzatore di elementi chimici, che permisero di esaminare il suolo e identificarne la composizione, come il basalto, rilevato da Surveyor 5.
- Surveyor 6 fu la prima sonda a decollare dalla superficie lunare, eseguendo un breve salto per raggiungere un secondo sito.

1.3 Il Programma Apollo

Dal 1969 al 1972 gli astronauti statunitensi allunarono in sei siti scelti per obiettivi scientifici diversi, tutti sulla faccia visibile della Luna, dove il terreno era stato analizzato dai satelliti orbitali e gli astronauti potevano rimanere in contatto con il Mission Control della NASA.

Le prime 10 missioni del programma Apollo furono cruciali per preparare lo sbarco sulla Luna [5]. Dopo il disastro dell'Apollo 1 del 1967, in cui tre astronauti persero la vita durante un test alla rampa di lancio di Cape Kennedy durante un test pre-volo, le missioni Apollo 2 e Apollo 3 non vennero mai effettivamente assegnate, mentre Apollo 4, nel 1967, fu il primo volo senza equipaggio del Saturn V.

Le idee di Tsiolkovsky, Goddard e Oberth trovarono applicazione nel razzo Saturn V, progettato sotto la guida di Wernher von Braun: alto 111 metri e alimentato da idrogeno liquido, ossigeno liquido e kerosene, composto da tre stadi che si accendevano in sequenza e con una spinta di oltre 34 MN, era in grado di trasportare più di 140 tonnellate in orbita bassa.

La missione Apollo 5, nel 1968, testò in orbita terrestre il *Lunar Excursion Module* che era unmanned, così come Apollo 6, che effettuò test in orbita e qualificò il Saturn V.

Apollo 7, nel 1968, fu la prima missione manned dopo la tragedia di Apollo 1: per undici giorni furono testati i sistemi di supporto vitale e di comunicazione. Apollo 8, nello stesso anno, permise la circumnavigazione della Luna, dimostrando la capacità del Saturn V di portare uomini oltre l'orbita terrestre.

Nel 1969 Apollo 9 collaudò in orbita terrestre il Lunar Excursion Module con equipaggio a bordo, simulando le manovre necessarie per una missione lunare. Apollo 10 effettuò l'intera missione programmata senza allunaggio, arrivando fino a circa 15 km dalla superficie lunare.

Apollo 11 fu la missione che realizzò per la prima volta nella storia l'allunaggio dell'uomo, rappresentò il culmine del programma spaziale americano e aprì una nuova era nell'esplorazione spaziale.

Il modulo lunare *Eagle* fu trasportato al Kennedy Space Center l'8 gennaio 1969. Il Saturn V, alto circa 36 metri, fu assemblato nello stesso centro e trasportato al pad il 20 maggio dello stesso anno.



Figura 1.3: Saturn V

Il lancio avvenne il 16 luglio 1969 alle 13:32 UTC, dal Kennedy Space Center (oggi Cape Canaveral) circa 12 minuti dopo, il razzo entrò in orbita terrestre.

In orbita, il terzo stadio del Saturn V venne riacceso per eseguire la *Trans-Lunar Injection*, che portò il razzo su una traiettoria direzionata verso la Luna. Dopo questa manovra, il modulo di comando si separò, si girò per agganciarsi al modulo lunare e si allontanò definitivamente dal terzo stadio.

Il viaggio verso la Luna durò circa 3 giorni, durante i quali furono effettuate manutenzioni e piccole correzioni di rotta.

Il 19 luglio 1969, Apollo 11 entrò in orbita lunare, a circa 384000 Km dalla Terra. La missione stazionò in orbita per circa 2.5 giorni, durante i quali la navicella orbitò attorno alla Luna 31 volte.

Il 20 luglio, il modulo lunare *Eagle*, con a bordo Neil Armstrong e Buzz Aldrin, si staccò dal modulo di comando pilotato da Michael Collins, e iniziò la discesa verso la superficie lunare.

Alle 20:17 UTC, l'*Eagle* atterrò con successo nel *Mare della Tranquillità*. Alle 02:51 UTC del 21 luglio, Armstrong scese sul suolo lunare, seguito da Aldrin.

Sul suolo lunare, gli astronauti trascorsero circa 21 ore e 36 minuti nella capsula, di cui circa 2 ore e 15 minuti all'esterno del modulo per raccogliere campioni, esplorare e condurre esperimenti.

Dopo le operazioni sulla superficie lunare, Armstrong e Aldrin risalirono nell'*Eagle*. Alle 17:54 UTC del 21 luglio, il modulo lunare si diresse verso l'orbita, dove effettuò il rendez-vous con il modulo di comando.

Dopodichè fu eseguita la *Trans-Earth Injection* per ritornare verso la Terra. Il viaggio durò circa 2.5 giorni e raggiunse la Terra il 24 luglio 1969, dopo 8 giorni, 3 ore, 18 minuti e 35 secondi di missione totale e la raccolta di circa 21 Kg di campioni lunari.

Pertanto il successo della missione Apollo 11, appena 66 anni dopo il primo volo aereo dei fratelli Wright, fu un esempio dell'audacia e dell'ingegno dell'umanità [6].

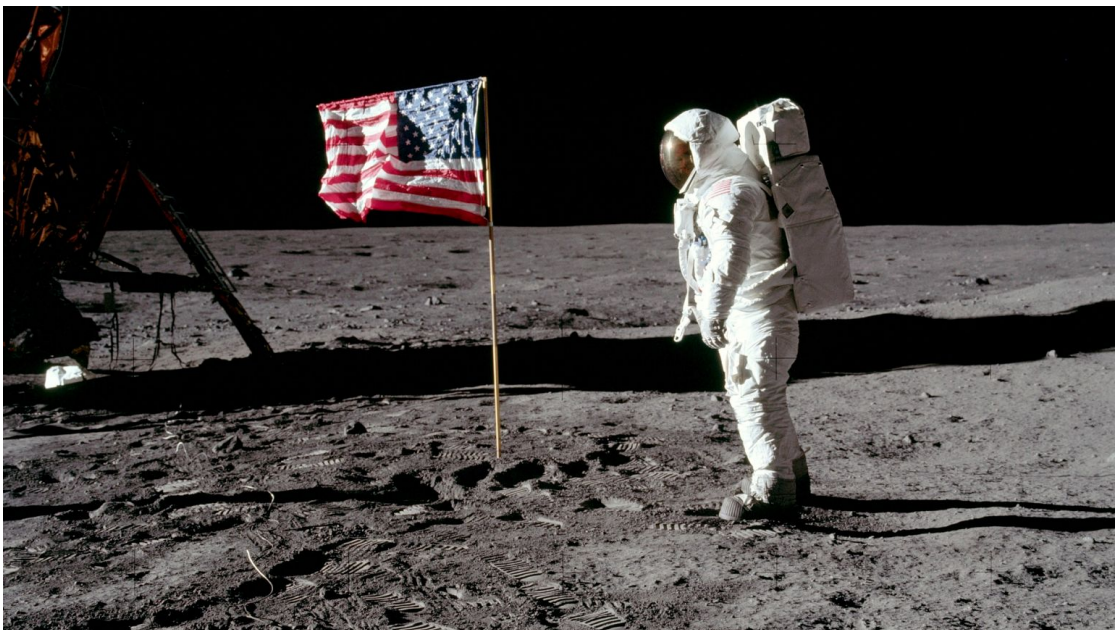


Figura 1.4: Apollo 11

Dopo il successo di Apollo 11, la NASA effettuò altre 6 missioni sulla Luna. Apollo 12 effettuò nuovamente l'allunaggio e riportò sulla Terra ulteriori campioni lunari, mentre Apollo 13 non raggiunse la superficie lunare a causa di un guasto tecnico.

Apollo 14, invece, si occupò di attività extraveicolari sulla superficie lunare, mentre Apollo 15 impiegò il *Rover Lunare*, che permise di esplorare aree più lontane.

Le ultime due missioni, Apollo 16 e 17, si occuparono dello studio geologico della Luna; in particolare Apollo 17 portò sulla superficie l'astronauta geologo Harrison Schmitt ed è stata, ad oggi, l'ultima missione manned a raggiungere la superficie lunare.

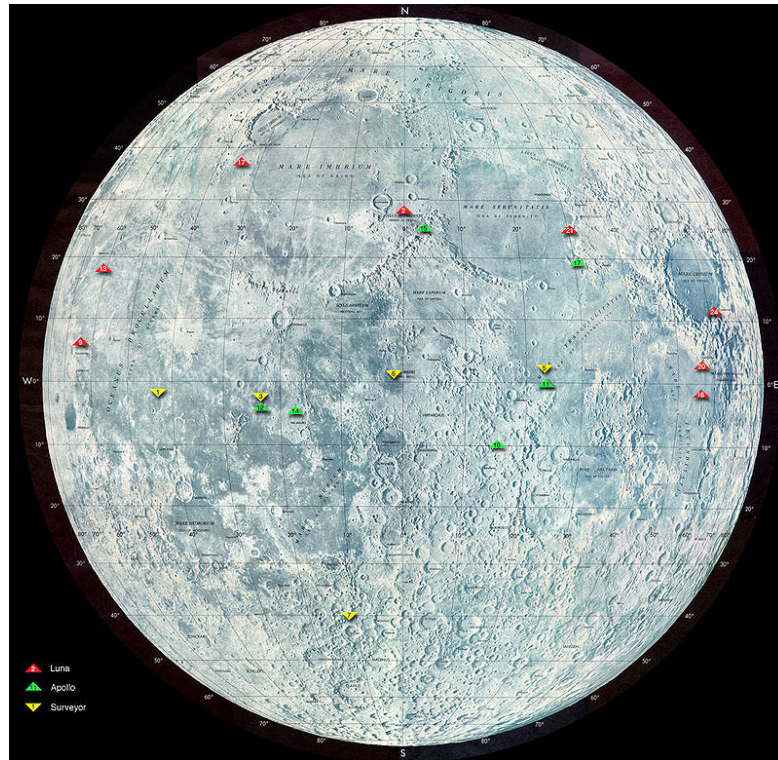


Figura 1.5: Soft Landings Lunari effettuati dai programmi Luna, Surveyor e Apollo

1.4 Il Programma Artemis

Il *Programma Artemis* prende nome da Artemide, dea greca della caccia, armata di arco, sorella gemella di Apollo, per indicare la continuità con il programma della NASA degli anni '60. L'obiettivo principale è riportare l'umanità sulla Luna, nella regione del polo sud, con la missione di far sbarcare "la prima donna e il prossimo uomo". Questo programma è visto come un passo fondamentale per stabilire una presenza a lungo termine e autosufficiente sulla Luna, promuovere un'economia lunare e preparare le future missioni umane verso Marte.

Dal punto di vista scientifico, Artemis mira all'esplorazione del Polo Sud lunare, dove si ritiene sia presente ghiaccio in crateri in ombra. Questo elemento sarà fondamentale per il supporto vitale e la generazione di ossigeno in loco.

Un aspetto rilevante del programma è la collaborazione con partner commerciali e internazionali, come l'ESA (Agenzia Spaziale Europea), la JAXA (Giappone) e la CSA (Agenzia Spaziale Canadese). Ciò mira a costruire un'alleanza globale per l'esplorazione dello spazio a beneficio dell'umanità. L'obiettivo a lungo termine è quello di gettare le basi per consentire a società private di costruire un'economia lunare [7].

Artemis I è stata eseguita dal 16 novembre 2022 e l'11 dicembre 2022 per una durata totale di 25 giorni, 10 ore e 53 minuti. L'obiettivo di questa missione era quello di effettuare il primo volo di prova per testare le capacità dei veicoli spaziali prima di far volare gli astronauti

La missione ha fatto uso della navicella *Orion*, progettata per trasportare gli astronauti dalla Terra all'orbita lunare e ritorno. Durante i 25 giorni di missione, Orion ha percorso circa 1.4 milioni di miglia (circa 2.25 milioni di chilometri). Al rientro nell'atmosfera terrestre, ha raggiunto una velocità di 24.581 mph (circa 39.557 Km/h), equivalente a Mach 32, testando in modo estremo lo scudo termico.

Il vettore utilizzato per lanciare Orion è stato lo *Space Launch System* (SLS), razzo super heavy-lift non riutilizzabile. Il programma SLS è stato annunciato nel 2011 ed è il successore del programma Constellation, cancellato nel 2010, che prevedeva lo sviluppo dei razzi Ares I e Ares V. Il lanciatore ha un costo per lancio di circa 4 miliardi di dollari.

Il progetto dell'SLS prevede un'evoluzione pianificata in diverse configurazioni per aumentare progressivamente la sua potenza e capacità di carico: questo design evolutivo rende possibile effettuare missioni di vario tipo, consentendo l'esplorazione anche verso altre destinazioni nello spazio profondo.

Artemis I ha utilizzato la configurazione *Block 1*, consistente nella capacità trasportare un carico utile di almeno 95 tonnellate in orbita bassa terrestre (LEO). Questa versione sarà utilizzata anche per le missioni Artemis II e III. La configurazione *Block 1B* introdurrà l'*Exploration Upper Stage*, che sarà utilizzato a partire dalla missione Artemis IV fino ad Artemis VI. Infine, la configurazione *Block 2* avrà una capacità di carico superiore a 150 tonnellate verso la LEO per consentire le future missioni con equipaggio verso Marte [8].

La missione aveva anche l'obiettivo di testare gli *Exploration Ground Systems* presso il Kennedy Space Center, ovvero le strutture a terra necessarie per le operazioni di lancio e per il recupero della capsula e dell'equipaggio al loro ritorno [9].

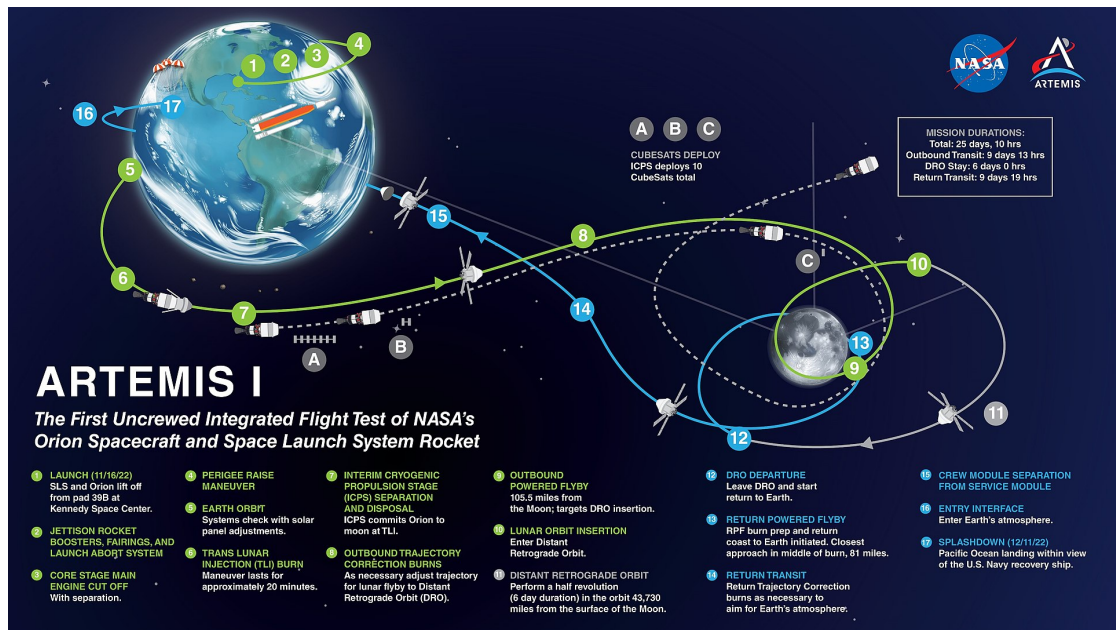


Figura 1.6: Artemis I

Artemis II è prevista per aprile 2026 ed ha l'obiettivo di portare quattro astronauti (Gregory Wiseman, Victor Glover, Christina Koch della NASA e Jeremy Hansen della CSA) in una traiettoria attorno alla Luna a bordo della navicella Orion. Questa missione non prevede un allunaggio, ma solo un sorvolo del satellite naturale (crewed lunar fly-by) per una durata complessiva di missione di circa 10 giorni. La missione utilizzerà la configurazione Block 1 del razzo Space Launch System (SLS) e il lancio avverrà dal Launch Complex 39B del Kennedy Space Center della NASA in Florida.

L'equipaggio avrà il compito di valutare le prestazioni dei sistemi di supporto vitale, ossia quelli che generano aria respirabile e rimuovono l'anidride carbonica e il vapore acqueo prodotti dagli astronauti. Questi test verranno condotti prevalentemente per due condizioni operative per simulare diverse fasi di missione: durante periodi di esercizio fisico, quando il tasso metabolico degli astronauti è più alto e durante i periodi di sonno, quando il tasso metabolico è più basso.

Il viaggio dalla Terra alla Luna non seguirà un impulso singolo, ma si assumerà una traiettoria di trasferimento definita come *multi-trans-lunar-injection* (MTLI), che prevede più accensioni del motore. Per il ritorno, la missione sfrutterà una manovra nota come *free-return trajectory*. Questo percorso sfrutterà la gravità della Luna per riportare Orion verso la Terra. La fase finale di missione prevede un ammaraggio nell'Oceano Pacifico [10].

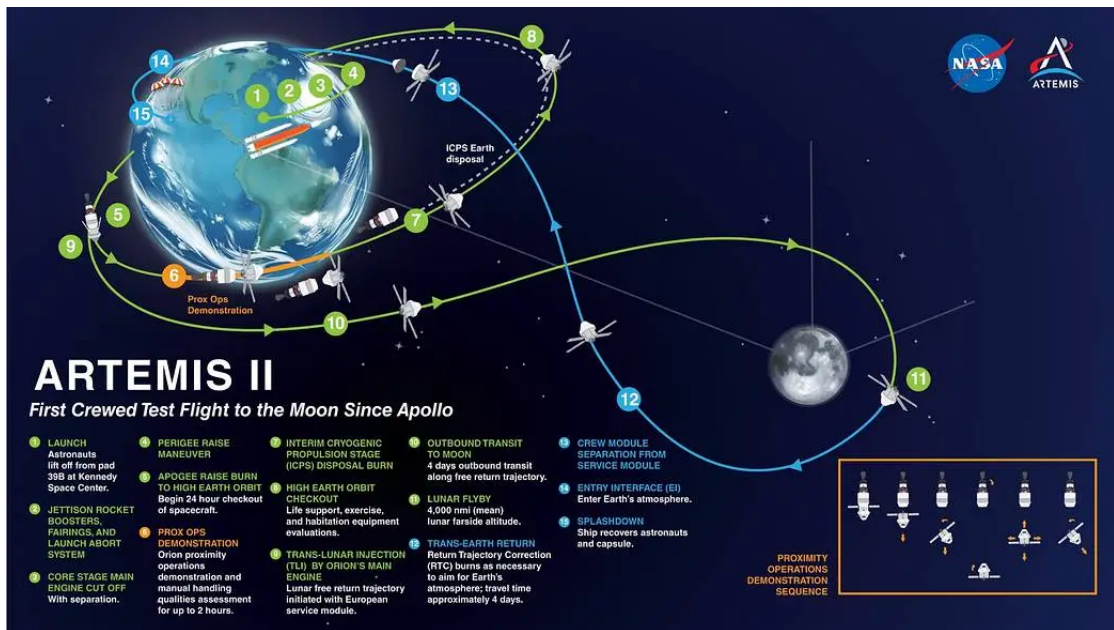


Figura 1.7: Artemis II

Artemis III, al momento prevista per il 2027, rappresenterà la missione che riporterà l'uomo sulla Luna dopo Apollo 17 del 1972 e segnerà il primo sbarco dell'equipaggio sul polo sud lunare, in cui sono già stati localizzati 6 siti di allunaggio.

La missione consisterà in un equipaggio di 4 astronauti, che partirà dalla Terra con la navicella Orion, lanciata dallo Space Launch System nella configurazione Block 1. Due di questi astronauti utilizzeranno gli *Human Landing System* (HLS) per effettuare l'allunaggio umano, costruiti da compagnie private americane. La NASA ha selezionato tre aziende (Blue Origin, Dynetics e SpaceX) per la fase iniziale di progettazione, con SpaceX che si è poi aggiudicata il contratto. Gli altri due astronauti orbiteranno attorno alla Luna sul complesso Gateway/Orion.

La permanenza sulla superficie lunare sarà all'incirca di 6 giorni, durante i quali verranno condotte circa 4 passeggiate lunari. L'intera missione avrà una durata stimata di circa 30 giorni dal lancio al rientro sulla Terra.

Gli esperimenti consisteranno in una serie di osservazioni riguardanti la geologia e la raccolta di campioni, incluso il campionamento di ghiaccio e acqua sul polo sud lunare. Tutte le conoscenze derivanti da questi esperimenti garantiranno una migliore comprensione dei processi planetari del sistema solare [11].

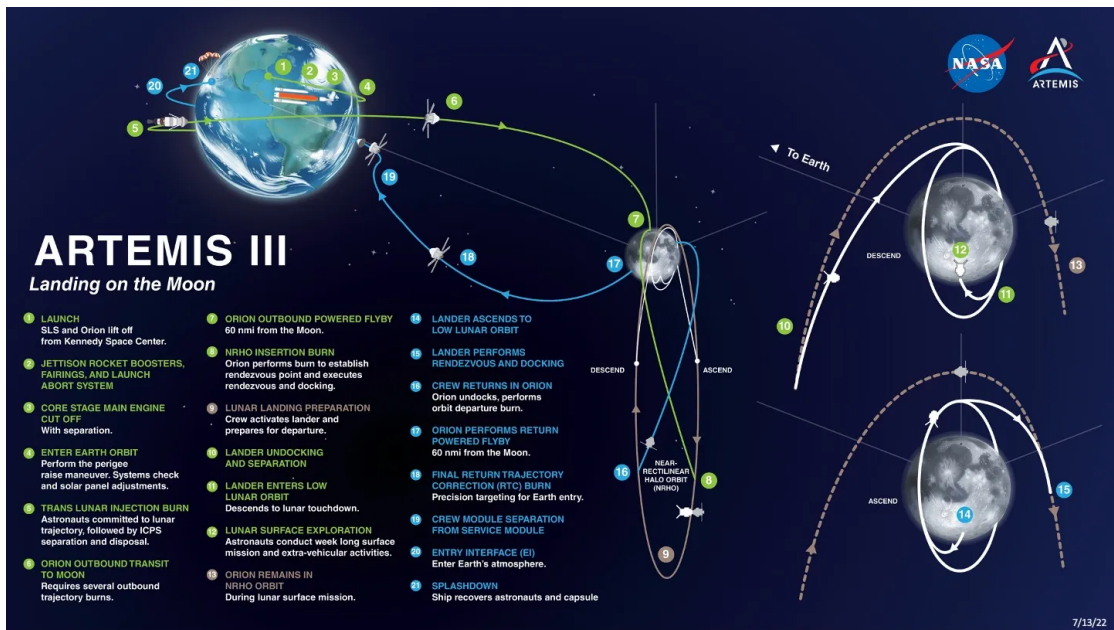


Figura 1.8: Artemis III

Le missioni successive ad Artemis III, si concentreranno sulla presenza umana a lungo termine sulla Luna, in preparazione per le missioni su Marte. Queste missioni consistono principalmente nello sviluppo di un *Lunar Gateway*, ossia una stazione spaziale in orbita lunare. Questa struttura servirà come centro di comunicazione, laboratorio scientifico e punto di trasferimento per gli astronauti tra Orion e il lander lunare nelle missioni future.

Queste missioni vedranno l'utilizzo del razzo Space Lunar System Block 1B, dotata di uno stadio superiore, *Exploration Upper Stage*, più sviluppato rispetto alla configurazione Block 1 [12].

Capitolo 2

Metodi di Ottimizzazione

L'ottimizzazione costituisce un elemento fondamentale per il perfezionamento delle traiettorie orbitali. In termini generali l'ottimizzazione è il processo di individuazione dei valori delle variabili che massimizzano o minimizzano una funzione obiettivo, rispettando determinati vincoli.

Nell'ambito spaziale, l'ottimizzazione è cruciale per il successo di missioni di atterraggio, docking e rendezvous: il processo consiste nella minimizzazione dell'errore che può essere associato alla posizione, velocità o altri parametri lungo la traiettoria, sotto vincoli dinamici e di missione.

L'obiettivo finale può essere la minimizzazione del consumo di propellente, del tempo di missione, dell'errore rispetto alla traiettoria desiderata, o una combinazione di questi (funzione multi-obiettivo).

Per ottenere soluzioni valide, l'ottimizzazione deve tenere conto della dinamica non-lineare del veicolo, delle limitazioni del controllo (massima spinta, ratei di beccheggio e imbardata), dell'incertezza e dei vincoli geometrici e operativi.

L'intero processo di ottimizzazione si articola in diverse fasi [13]:

- *Modellizzazione*: si identificano la funzione obiettivo, le variabili e i vincoli del problema. Un modello eccessivamente approssimativo potrebbe non convergere ad una soluzione utile, mentre uno troppo complesso potrebbe essere computazionalmente complesso da risolvere.
- *Scelta dell'Algoritmo*: viene selezionato un algoritmo di ottimizzazione appropriato per il tipo di problema formulato. La scelta dipende dalla natura del problema (ad esempio lineare o non lineare) e può determinare se la soluzione verrà trovata e con quale rapidità.

- *Risoluzione*: gli algoritmi di ottimizzazione sono iterativi, ossia partono da una stima iniziale e generano una sequenza di stime migliorate fino a raggiungere una soluzione.
- *Verifica della Soluzione*: vengono utilizzate le *condizioni di ottimalità*, ovvero espressioni che permettono di verificare se una configurazione di variabili è effettivamente una soluzione.
- *Analisi di Sensibilità*: si analizza come la soluzione cambia in risposta a piccole perturbazioni nel modello o nei dati.

I problemi di ottimizzazione possono essere classificati in diverse categorie:

- *Continua e Discreta*: nell'ottimizzazione continua le variabili possono assumere qualsiasi valore reale all'interno di un insieme. Invece, nell'ottimizzazione discreta, le variabili possono assumere solo valori interi.

Le funzioni continue sono generalmente più facili da risolvere perché la loro regolarità permette di dedurre informazioni sul comportamento della funzione nell'intorno di un punto.

- *Vincolata e Non Vincolata*: i problemi non vincolati minimizzano una funzione obiettivo senza limitazioni sulle variabili. I problemi vincolati includono vincoli espliciti, che possono essere limiti semplici, vincoli lineari o relazioni non lineari.
- *Lineare e Non Lineare*: nella programmazione lineare sia la funzione obiettivo che tutti i vincoli sono funzioni lineari delle variabili e una proprietà fondamentale è che ogni minimo locale è anche un minimo globale. Invece nella programmazione non lineare almeno la funzione obiettivo o uno dei vincoli è una funzione non lineare.

A differenza dei problemi lineari, i problemi non lineari possono avere minimi locali che non sono minimi globali. La maggior parte degli algoritmi cerca solo un minimo locale, poiché trovare quello globale è generalmente molto più oneroso.

- *Locale e Globale*: molti algoritmi cercano una soluzione locale, ossia un punto in cui la funzione obiettivo ha un valore inferiore rispetto ai punti nelle sue vicinanze. Una soluzione globale è invece il punto con il valore migliore in assoluto per l'ottimizzazione.

Trovare soluzioni globali è generalmente molto più oneroso. Un'eccezione di quest'ultimo caso sono i problemi di *programmazione convessa*, dove ogni minimo locale è anche un minimo globale.

- *Convessa e Non Convessa*: il problema di ottimizzazione è convesso se la funzione obiettivo è convessa, i vincoli di uguaglianza sono lineari, i vincoli di disuguaglianza sono concavi e ogni minimo locale è anche un minimo globale. Il problema è non convesso se anche solo una delle condizioni di convessità non è soddisfatta. In questo caso possono presentarsi minimi locali che non sono minimi globali e pertanto trovare la soluzione ottimale globale per problemi non convessi è generalmente molto difficile.
- *Deterministica e Stocastica*: nell'ottimizzazione deterministica, il modello è completamente specificato. Nell'ottimizzazione stocastica, invece, il modello dipende da quantità incerte e gli algoritmi cercano di ottimizzare le prestazioni attese del modello.

2.1 Algoritmi di Ottimizzazione

Un problema di ottimizzazione consiste nel minimizzare o massimizzare una funzione obiettivo soggetta a determinati vincoli sulle sue variabili. L'obiettivo è trovare i valori delle variabili che ottimizzano la funzione.

Gli algoritmi di ottimizzazione sono procedure iterative che partono da una stima iniziale della soluzione e generano una sequenza di stime migliorate fino a raggiungere una soluzione con la precisione richiesta.

Le proprietà fondamentali di un algoritmo di ottimizzazione ben formulato sono:

- *Robustezza*: l'algoritmo deve funzionare bene su un'ampia varietà di problemi.
- *Efficienza*: l'algoritmo non deve richiedere tempo di calcolo o memoria eccessivi.
- *Accuratezza*: l'algoritmo deve essere in grado di identificare una soluzione con precisione.

Gli algoritmi si possono classificare in base a vari criteri, come la presenza o assenza di vincoli (ottimizzazione vincolata e non vincolata) e la natura delle funzioni (lineari, non lineari, convesse).

Di particolare importanza in questo ambito sono i metodi per problemi non vincolati e vincolati, metodi diretti e indiretti.

I metodi per ottimizzazione non vincolata minimizzano una funzione obiettivo senza limitazioni sulle variabili e si basano su due strategie fondamentali:

- *Line Search* (Ricerca Lineare): il metodo consiste nello scegliere una direzione di discesa p_k e si cerca un passo α_k lungo questa direzione che riduca sufficientemente il valore della funzione obiettivo. La nuova iterata è descritta dalla relazione $x_{k+1} = x_k + \alpha_k \cdot p_k$.

Le direzioni di ricerca più utilizzate per i metodi di line search includono:

- *Metodo Steepest Descent*: utilizza la direzione opposta al gradiente, $-\nabla f_k$. Questo metodo è globalmente convergente ma può essere molto lento, specialmente su problemi mal condizionati.
- *Metodo di Newton*: Utilizza la direzione di Newton $p_k = -\nabla^2 f_k^{-1} \nabla f_k$, che minimizza un modello quadratico della funzione obiettivo. Ha una convergenza quadratica rapida vicino alla soluzione, ma richiede il calcolo e l'inversione della matrice Hessiana $\nabla^2 f_k$, che può essere oneroso e complesso.
- *Metodo Quasi-Newton*: La matrice Hessiana è approssimata con una matrice B_k che viene aggiornata ad ogni iterazione. L'aggiornamento più utilizzato è la formula *BFGS* (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno). Questi metodi raggiungono tipicamente una convergenza superlineare.
- *Metodo del Gradiente Coniugato*: questo metodo genera direzioni di ricerca senza la memorizzazione di matrici, pertanto è adatto per problemi di grandi dimensioni. Questo metodo è più veloce del metodo steepest descent ma meno rapido del metodo Quasi-Newton.
- *Trust Region* (Regione di Fiducia): si costruisce un modello della funzione obiettivo attorno all'iterata corrente x_k e si cerca il minimo all'interno di una *regione di fiducia* in cui si ritiene che il modello sia affidabile.

Il sottoproblema da risolvere è il seguente:

$$\min(p) \quad m_k(x_k + p) \quad \text{tale che} \quad \|p\| \leq \Delta k$$

dove Δk è il raggio della regione di fiducia.

Questo metodo, a differenza della ricerca lineare, sceglie simultaneamente la direzione e la lunghezza del passo.

I metodi per ottimizzazione vincolata, invece, sono algoritmi che affrontano problemi in cui le variabili devono soddisfare vincoli di uguaglianza o disuguaglianza.

I metodi più noti sono i seguenti:

- *Sequential Quadratic Programming* (SQP): è l'algoritmo utilizzato in questo lavoro di tesi, l'idea centrale è quella di approssimare il problema originale

con un sottoproblema di programmazione quadratica (QP) ad ogni iterazione, e usare la soluzione del sottoproblema per definire il passo verso l'iterata successiva.

- *Metodi di Penalità e Barriera*: questi metodi trasformano il problema vincolato in una sequenza di problemi non vincolati:
 - Il metodo della penalità quadratica trasforma un problema di ottimizzazione vincolata in un problema di ottimizzazione non vincolata incorporando i vincoli direttamente nella funzione obiettivo, dove ogni violazione dei vincoli comporta un costo aggiuntivo che aumenta quadraticamente.
 - Il metodo della barriera logaritmica aggiunge termini che impediscono alle iterate di avvicinarsi troppo al limite della regione ammissibile. Questo approccio è alla base dei metodi primal-dual a punti interni, molto efficaci per la programmazione lineare e quadratica convessa.
- *Metodo della Lagrangiana Aumentata*: questo metodo combina la funzione Lagrangiana con un termine di penalità quadratica, evitando alcuni dei problemi di mal condizionamento dei metodi di penalità puri.

2.2 Metodi Diretti e Indiretti

Nel contesto dei problemi di controllo ottimo, come l'ottimizzazione di traiettorie aerospaziali, si usano principalmente due approcci: *metodi diretti* e *metodi indiretti*.

- Il metodo diretto è generalmente utilizzato poichè trasforma il problema di controllo ottimo in un problema di programmazione non lineare (NLP), che può essere risolto con opportuni software.

L'approccio principale di questo metodo è quello di discretizzare in un numero finito di punti, nodi o archi, approssimando le variabili di stato e di controllo in una griglia a tratti costanti o con opportune soluzioni, e convertendo le equazioni differenziali in un insieme finito di vincoli di uguaglianza.

Esistono due categorie principali di metodi diretti:

- Metodo diretto di collocazione: trasforma il problema di ottimizzazione in un grande problema di programmazione non lineare (NLP), utilizzando i nodi in cui le equazioni sono soddisfatte.
- Metodo di Shooting: trasforma il problema in uno di ricerca delle radici per un sistema di equazioni non lineari, modificando condizioni iniziali e finali per ottimizzarle e ottenere il risultato migliore.

Il problema discretizzato con la programmazione non lineare (NLP) diventa un problema di ottimizzazione di parametri, risolvibile con algoritmi come *sequential quadratic programming*, implementato da alcuni solutori come **fmincon**, utilizzato in questo lavoro di tesi.

Il metodo diretto è generalmente più semplice e intuitivo, in quanto non richiede la derivazione analitica delle condizioni di ottimalità, è robusto, garantendo una convergenza partendo da condizioni iniziali non precise, e infine è versatile, poichè può gestire facilmente diverse formulazioni del problema e vincoli complessi.

Nonostante ciò, può essere computazionalmente costoso, a causa del numero elevato di parametri che deve gestire: infatti le soluzioni sono generalmente meno accurate rispetto ai metodi indiretti, siccome anche la presenza di *minimi locali* può causare la convergenza rispetto all'identificazione di una soluzione ottima globale [14][15].

- I metodi indiretti sono noti per fornire soluzioni ad alta precisione e trasformano il problema di controllo ottimo in un problema ai valori al contorno (Boundary Value Problem BVP), sfruttando le condizioni necessarie di ottimalità che derivano da un approccio variazionale, come il *Principio di Pontryagin* [16], il quale afferma che il controllo ottimo u^* deve minimizzare o massimizzare la funzione obiettivo *Hamiltoniana* H in ogni istante di tempo per tutti i controlli [17].

Il problema del controllo ottimale consiste nel minimizzare una funzione obiettivo (o funzionale di costo) definita come segue:

$$J = \Phi(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t) dt$$

in cui:

- $x(t) \in \mathbb{R}^n$ descrive lo stato del sistema al tempo t .
- $u(t) \in \mathbb{R}^m$ è il controllo, dipendente dal tempo, che appartiene a un insieme di controlli ammissibili $\mathcal{U}$.
- $L(x, u, t)$ è il costo istantaneo, dipendente da stato, controllo e tempo.
- $\Phi(x(t_f))$ è il costo finale, funzione dello stato finale $x(t_f)$.

La dinamica del sistema è descritta da un insieme di equazioni differenziali ordinarie, soggette a condizioni iniziali:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad x(t_0) = x_0.$$

Le condizioni al contorno possono essere sia iniziali che finali.

Per risolvere il problema descritto dal principio del minimo di Pontryagin, si introduce un vettore di co-stati (o moltiplicatori di Lagrange) $\lambda(t) \in \mathbb{R}^n$ e si definisce la funzione Hamiltoniana, H , che combina il costo istantaneo con la dinamica del sistema:

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = L(x, u, t) + \lambda^T f(x, u, t)$$

Il principio del minimo di pontryagin stabilisce le condizioni necessarie affinché una traiettoria $x^*(t)$, un controllo $u^*(t)$ e il vettore dei co-stati $\lambda^*(t)$ siano ottimali. Queste condizioni sono necessarie ma non sufficienti per l'ottimalità.

Una condizione necessaria e sufficiente richiederebbe la verifica dell'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman su tutto lo spazio degli stati.

Le condizioni necessarie sono le seguenti:

1. *Minimizzazione dell'Hamiltoniana:* il controllo ottimo $u^*(t)$ minimizza l'Hamiltoniana per ogni istante di tempo $t \in [t_0, t_f]$ rispetto a tutti i controlli ammissibili $u \in \mathcal{U}$.

$$\min_{u \in \mathcal{U}} H(x^*(t), u, \lambda^*(t), t) \implies H(x^*, u^*, \lambda^*, t) \leq H(x^*, u, \lambda^*, t)$$

2. *Equazione di stato:* l'evoluzione dello stato deve seguire la dinamica del sistema, che può essere espressa tramite l'Hamiltoniana:

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = f(x(t), u(t), t)$$

3. *Equazione dei co-stati:* l'evoluzione dei co-stati è descritta dalla seguente equazione differenziale:

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} \implies -\dot{\lambda}^T(t) = H_x = \lambda^T f_x + L_x$$

4. *Condizioni al contorno:*

– La condizione iniziale sullo stato è fissa:

$$x(t_0) = x_0$$

– Se lo stato finale $x(t_f)$ non è fissato, allora i co-stati al tempo finale devono soddisfare la seguente relazione:

$$\lambda^T(t_f) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{x(t_f)} = \Phi_x(x(t_f))$$

5. Condizioni sull'Hamiltoniana al tempo finale:

- Se il tempo finale t_f è fissato e l'Hamiltoniana non dipende dal tempo ($\partial_t H \equiv 0$), allora l'Hamiltoniana è costante lungo la traiettoria:

$$H(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t)) \equiv \text{cost}$$

- Se il tempo finale t_f è libero, allora il valore dell'Hamiltoniana lungo la traiettoria è nullo:

$$H(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t)) \equiv 0$$

Queste condizioni formano un sistema di equazioni differenziali, con condizioni al contorno su due punti, che deve essere risolto per individuare traiettoria e controllo ottimali: il problema di ottimizzazione viene trasformato in un problema ai valori al contorno a due punti (Two Point Boundary Value Problem TPBVP) o a più punti (Multi Point Boundary Value Problem MPBVP).

Questo problema viene tipicamente risolto con tecniche come il *metodo shooting*, che cerca i valori iniziali corretti delle variabili affinché le condizioni iniziali siano soddisfatte.

Pertanto, i metodi indiretti forniscono soluzioni con alta precisione e accuratezza, soddisfacendo le condizioni di ottimalità, e sono computazionalmente efficienti in termini di tempi di calcolo. Tuttavia le condizioni di ottimalità richiedono la derivazione analitica, processo complesso per sistemi ad alta dimensionalità [18].

Questo lavoro di tesi ha fatto uso del metodo diretto per effettuare l'allunaggio in coordinate sferiche. Questa scelta è stata più intuitiva e semplice rispetto alla scelta di un metodo indiretto, a scapito, però, di un incremento significativo dei tempi di calcolo e di lavoro computazionale.

2.3 Sequential Quadratic Programming

La Programmazione Quadratica Sequenziale (Sequential Quadratic Programming - SQP) è uno degli algoritmi più efficaci ed utilizzati per risolvere problemi di ottimizzazione non lineare vincolata.

L'idea di base dell'SQP è di modellare, ad ogni iterazione, il problema di programmazione non lineare (NLP) con un sottoproblema di programmazione quadratica (QP).

La soluzione del sottoproblema viene utilizzata per definire il passo verso una nuova approssimazione della soluzione del problema originale. Questo processo viene ripetuto iterativamente fino alla convergenza [19].

L'approccio SQP può essere visto come una estensione dei metodi di Newton e quasi-Newton nel contesto dell'ottimizzazione vincolata. Un grande vantaggio dei metodi SQP è che non richiedono che gli iterati siano punti ammissibili (cioè che soddisfino i vincoli).

Dato un problema di ottimizzazione non lineare generale (NLP):

$$\min f(x)$$

soggetto a:

$$\begin{aligned} h(x) &= 0 \text{ (vincoli di uguaglianza)} \\ g(x) &\leq 0 \text{ (vincoli di disuguaglianza)} \end{aligned}$$

in cui

- x è un vettore di variabili in $\mathbb{R}^n$.
- $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è la funzione obiettivo.
- $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ rappresenta i vincoli di uguaglianza m .
- $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ rappresenta i vincoli di disuguaglianza p .

all'iterata x_k , il metodo SQP formula il seguente sottoproblema di programmazione quadratica (QP) per calcolare il passo p_k :

$$\min_p f(x_k) + \nabla f(x_k)^T p + \left(\frac{1}{2}\right) p^T B_k p$$

soggetto a:

$$\begin{aligned} \nabla h(x_k)^T p + h(x_k) &= 0 \\ \nabla g(x_k)^T p + g(x_k) &\leq 0 \end{aligned}$$

Analizzando le componenti di questo sottoproblema:

- *Funzione Obiettivo Quadratica*: l'obiettivo del sottoproblema è un'approssimazione quadratica della funzione Lagrangiana del problema originale, ma non della funzione obiettivo $f(x)$. La matrice B_k è un'approssimazione della Hessiana della Lagrangiana:

$$\nabla_{xx}^2 L(x_k, \lambda_k)$$

- *Vincoli Linearizzati*: I vincoli del sottoproblema sono una linearizzazione dei vincoli del problema originale attorno all'iterata x_k .

La soluzione di questo sottoproblema QP fornisce il passo p_k e i moltiplicatori di Lagrange del QP, che vengono usati come stima λ_{k+1} per la nuova iterazione.

La nuova iterazione è quindi:

$$x_{k+1} = x_k + p_k$$

L'algoritmo SQP può essere interpretato come un'applicazione del metodo di Newton per risolvere le condizioni di ottimalità del primo ordine (condizioni Karush-Kuhn-Tucker KKT) del problema vincolato. Per un problema con vincoli di uguaglianza, le condizioni KKT sono un sistema di equazioni non lineari nelle variabili x e nei moltiplicatori λ :

$$\begin{aligned}\nabla f(x) - A(x)^T \lambda &= 0 \\ c(x) &= 0\end{aligned}$$

dove $A(x)$ è lo Jacobiano dei vincoli.

Applicare il metodo di Newton al sistema porta a un sistema lineare per il passo (p_k, p) che è uguale a quello che identifica la soluzione del sottoproblema QP quando B_k è l'Hessiana esatta della Lagrangiana.

Questa uguaglianza garantisce una convergenza quadratica locale del metodo, con la condizione che si parta da un punto vicino alla soluzione.

Il metodo SQP locale converge rapidamente solo se parte vicino a una soluzione ottima. Per poter ottenere una convergenza globale, si utilizzano delle funzioni di merito.

Una funzione di merito combina la funzione obiettivo e i vincoli in un'unica funzione che effettua un trade-off tra la riduzione dell'obiettivo e la soddisfazione dei vincoli. L'algoritmo accetta il passo solo se è presente una riduzione adeguata della funzione di merito.

Le funzioni di merito più comuni sono:

- La funzione di penalità l_1 esatta: è una funzione non differenziabile che aggiunge all'obiettivo una somma pesata delle violazioni dei vincoli.
- L'Augmented Lagrangian: è una funzione differenziabile che combina la Lagrangiana con un termine di penalità quadratica.

L'uso di una funzione di merito influisce positivamente sulla robustezza dell'algoritmo, ma può rallentare la convergenza vicino alla soluzione (effetto Maratos), richiedendo strategie come la "second-order correction" o tecniche "watchdog" (non monotone).

L'efficienza e la convergenza di un metodo SQP dipendono da come viene scelta o approssimata la matrice B_k in ogni sottoproblema quadratico (QP):

- Hessiana Esatta: consiste nell'usare l'Hessiana esatta della Lagrangiana

$$B_k = \nabla_{xx}^2 L(x_k, \lambda_k)$$

che porta al Newton-SQP, che ha una convergenza quadratica locale. Tuttavia, il calcolo delle derivate seconde può essere oneroso.

- Approssimazioni Quasi-Newton: B_k viene approssimata usando metodi quasi-Newton, come l'aggiornamento Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno (BFGS) per evitare il calcolo delle derivate seconde. B_k viene aggiornato ad ogni passo in modo da soddisfare l'equazione secante, utilizzando le variazioni dei gradienti della Lagrangiana. Questo approccio converge superlinearmente.

In ambito pratico SQP viene associato a due implementazioni:

- MATLAB **fmincon**: il solutore **fmincon** di MATLAB può implementare diversi algoritmi per l'ottimizzazione non lineare vincolata [20]:
 - **interior-point**: algoritmo predefinito di **fmincon**. È un metodo trust-region basato su tecniche di punto interno per la programmazione non lineare ed è robusto per problemi su larga scala.
 - **trust-region-reflective**: algoritmo associato ad un metodo trust-region su un sottospazio basato sul metodo di Newton interior-reflective. Ad ogni iterazione, l'algoritmo risolve un sistema lineare tramite il metodo dei gradienti coniugati preconditionati (PCG).
 - **sqp**: come visto in precedenza, l'algoritmo SQP è basato sul metodo di Programmazione Quadratica Sequenziale (SQP), che modella il problema non lineare, ad ogni iterata x_k , con un sottoproblema di programmazione quadratica (QP), la cui soluzione viene usata per definire il passo successivo.
 - **sqp-legacy**: si tratta di una versione precedente dell'algoritmo SQP.
 - **active-set**: algoritmo che si basa sulla strategia SQP, identifica un insieme di vincoli espressi come uguaglianze e risolve il problema basandosi su un insieme, aggiornandolo iterativamente.

- IQP vs. EQP: gli approcci IQP (Inequality-Constrained QP) risolvono il sottoproblema QP con tutti i vincoli di disuguaglianza linearizzati. Gli approcci EQP (Equality-Constrained QP), invece, selezionano un gruppo di vincoli e risolvono un QP con solo vincoli di uguaglianza, aggiornando il working set ad ogni iterazione.

2.4 Bang-Bang Control

Il controllo bang-bang è un tipo di controllo a retroazione che varia bruscamente tra due stati estremi, solitamente il valore massimo e minimo ammissibile.

Questo tipo di controllo emerge nei problemi di controllo ottimo, specialmente quando si cerca di minimizzare il tempo o il consumo di propellente nel caso specifico di ottimizzazione di traiettorie orbitali.

La base teorica si trova nel Principio del Minimo di Pontryagin, che, come visto in precedenza, afferma che il controllo ottimo u^* , che minimizza un funzionale di costo J , deve minimizzare (o massimizzare), in ogni istante, una funzione Hamiltoniana H rispetto a tutti i controlli ammissibili u .

Richiamando l'Hamiltoniana descritta in precedenza:

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = L(x(t), u(t)) + \lambda^T(t) f(x(t), u(t))$$

in cui L è il costo istantaneo, λ è il vettore dei moltiplicatori di Lagrange e f rappresenta la dinamica del sistema:

$$\dot{x} = f(x, u)$$

Se l'Hamiltoniana è una funzione lineare nella variabile di controllo u , l'applicazione del principio di Pontryagin porta a spingere il controllo verso il suo limite superiore o inferiore a seconda del segno del coefficiente nell'Hamiltoniana.

Questo coefficiente è chiamato *funzione di commutazione* (switching function). Quando il controllo può assumere solo valori compresi in un intervallo $[min, max]$, la soluzione ottima sarà la seguente:

- $u^* = \text{massima}$ se la funzione di commutazione è positiva.
- $u^* = \text{minima}$ se la funzione di commutazione è negativa.

Il controllo commuta istantaneamente tra i suoi estremi non appena la funzione di commutazione cambia segno.

Il controllo bang-bang, nel contesto dell'atterraggio lunare, dove l'obiettivo è massimizzare la massa finale, traducendosi in minimizzazione del consumo di propellente, riguarda principalmente i seguenti parametri [14]:

- *Controllo della Spinta* (Thrust): In un problema di atterraggio lunare a consumo minimo, la spinta ottimale ha tipicamente un profilo "bang-bang".

Il motore principale è o completamente acceso ($T = T_{max}$) o completamente spento ($T = T_{min}$, solitamente con valore nullo). La decisione di accendere o spegnere il motore dipende dal segno della funzione di commutazione associata alla spinta.

Nel caso specifico, in una traiettoria ottimale, potrebbe esserci una fase iniziale di caduta libera con motore spento, seguita da una fase di frenata a spinta massima.

- *Controllo di Assetto* (Attitude): anche i sistemi di controllo di assetto, come i Reaction Control System (RCS), possono operare in modalità bang-bang per ottimizzare il consumo.

Una coppia massima positiva o massima negativa può essere applicata per modificare l'orientamento del veicolo spaziale, ad esempio per variare l'angolo di beccheggio (pitch angle).

La tendenza al comportamento bang-bang del motore è una caratteristica intrinseca delle traiettorie a consumo di propellente ottimale ed è il risultato di un processo di ottimizzazione per l'ottenimento dell'efficienza massima.

Una traiettoria ottimale può portare all'ottenimento di una traiettoria di tipo "burn-coast-burn", in cui è presente una prima fase in cui il motore del veicolo è acceso per fornire spinta per iniziare la frenata orbitale o per correggere la rotta; dopodiché il motore è spento e il veicolo si muove per inerzia, soggetto solo alle forze gravitazionali ed infine una fase di accensione del motore per completare la manovra, come la frenata finale per l'atterraggio.

L'effetto "bang-bang" si può compensare generando traiettorie ottimizzate con un limite di spinta inferiore, per poi permettere al veicolo di utilizzare tutta la sua spinta massima disponibile. Questo approccio consente di massimizzare la massa utile finale [21].

Sebbene il controllo bang-bang sia ottimale in molti contesti teorici, la sua implementazione pratica presenta degli ostacoli [15]:

- *Oscillazioni*: a causa delle commutazioni improvvise, il sistema tende a oscillare attorno al valore desiderato.

- *Usura e Stress*: le transizioni improvvise possono causare stress portando a usura e affaticamento dei componenti.
- *Chattering e Pulse Width Modulation (PWM)*: Per approssimare un controllo bang-bang con attuatori reali che non possono commutare istantaneamente, o per ridurre le oscillazioni ad alta frequenza, si usa spesso la modulazione di larghezza di impulso (Pulse Width Modulation - PWM). Questa tecnica simula un valore di spinta o momento con valore intermedio modulando la durata dei periodi di accensione e spegnimento dei propulsori.
- *Archi Singolari*: possono essere presenti situazioni in cui la funzione di commutazione rimane nulla per un intervallo di tempo finito. In questo caso, il principio di Pontryagin non fornisce informazioni dirette sul controllo ottimo, che può assumere valori intermedi tra il minimo e il massimo. Questo tratto della traiettoria è denominata "arco singolare". Per identificare il controllo lungo un arco singolare, è necessario derivare ripetutamente la funzione di commutazione rispetto al tempo affinché la variabile di controllo non sia esplicita.

Capitolo 3

Ottimizzazione dell'Allunaggio in Coordinate Sferiche

L'allunaggio è una delle sfide ingegneristiche più ardue e affascinanti della nuova era spaziale. L'assenza di atmosfera sulla Luna rende l'allunaggio più complesso, poichè vengono preclusi tutti i metodi di decelerazione aerodinamica, che possono essere utilizzati su pianeti come la Terra o Marte.

Pertanto un lander lunare, per ridurre la propria energia cinetica associata alla velocità orbitale, deve fare affidamento esclusivamente sulla propulsione, sfruttando la direzione della spinta per poter decelerare e atterrare in sicurezza.

Si distinguono due teorie principali di allunaggio:

- *Hard Landing*: il contatto con la superficie avviene a una velocità elevata, portando alla distruzione del veicolo spaziale. In alcune missioni l'impattamento può essere intenzionale, come la sonda LCROSS della NASA, progettata per schiantarsi ad alta velocità col fine di sollevare la regolite per poi analizzare spettroscopicamente la composizione del sottosuolo alla ricerca di ghiaccio [22].
- *Soft Landing*: questa tipologia di allunaggio è studiata per missioni robotiche e con equipaggio.

La manovra prevede una sequenza precisa di accensioni dei motori per ridurre la velocità verticale ed orizzontale fino a valori all'incirca nulli nelle prossimità del touchdown.

La complessità di questa metodologia è associata ad uno studio approfondito della traiettoria per raggiungere un sito di atterraggio specifico, evitare ostacoli e minimizzare il consumo di propellente per massimizzare il carico utile.

Questo lavoro di tesi si concentra su una tecnica *soft landing*, che si traduce matematicamente in un *problema di controllo ottimo* che agisce sulla spinta del lander.

L'obiettivo è determinare la sequenza di comandi (in questo caso, l'orientamento e l'intensità della spinta del motore) che guida il lander da uno stato iniziale a uno stato finale, minimizzando una funzione di costo, che è il consumo di propellente.

La traiettoria risultante è la soluzione ottimale che soddisfa le equazioni della dinamica del volo e rispetta tutti i vincoli imposti, come i limiti sulla spinta del motore e le condizioni finali di atterraggio.

3.1 Modello e Ipotesi

Il metodo impiegato per l'ottimizzazione della traiettoria di allunaggio prevede che il lander parta da un'orbita di parcheggio a 100 Km dalla superficie media lunare e raggiunga, con una trasferta di Hohmann, passando ad un'orbita ellittica, il perilunio che si trova a 15 Km dalla superficie lunare, da cui incomincia la traiettoria di allunaggio ottimizzata [23].

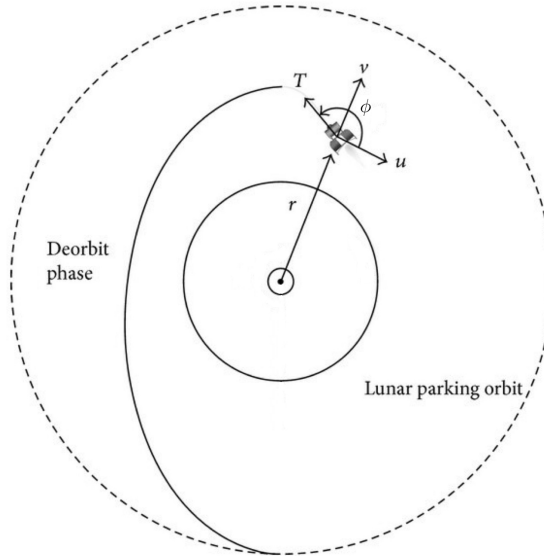


Figura 3.1: Modello di discesa da Hohmann a 100 Km

La massa iniziale del lander nell'orbita di parcheggio è pari a 1600 Kg: è stato valutato il ΔV e il consumo di propellente per poter effettuare la trasferta di Hohmann e raggiungere il perilunio a 15 Km.

Partendo dal calcolo del perilunio $r_{p,15}$ e apolunio $r_{a,15}$, si è potuto calcolare il semiasse maggiore $a_{H,15}$:

$$r_{p,15} = 1737.4 + 15 = 1752.4 \text{ Km} \qquad r_{a,15} = 1737.4 + 100 = 1837.4 \text{ Km}$$

$$a_{H,15} = (1837.4 + 1752.4)/2 = 1794.9 \text{ Km}$$

Con questi dati si è potuta calcolare la velocità all'apolunio, utile per poter valutare il ΔV , dopo aver calcolato anche la velocità orbitale all'orbita di parcheggio a 100 Km

$$v_{circ,100} = \sqrt{\frac{\mu_{moon}}{R_{moon} + h}} = \sqrt{\frac{4902.8}{1737.4 + 100}} = \sqrt{\frac{4902.8}{1837.4}} = 1.6335 \text{ km/s}$$

$$v_{a,15km} = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r_a} - \frac{1}{a} \right)} = \sqrt{4902.8 \left(\frac{2}{1837.4} - \frac{1}{1794.9} \right)} = 1.6140 \text{ km/s}$$

$$\Delta v_{15km} = v_{circ} - v_{a,15km} = 1.6335 - 1.6140 = 0.0195 \text{ km/s} \quad (19.5 \text{ m/s})$$

Calcolando l'energia orbitale specifica $\epsilon_{H,15}$, si procede calcolando la velocità nel punto di perilunio della Hohmann $V_{H2,15}$

$$\epsilon_{H,15} = -\frac{4902.8}{2 \times 1794.9} = -1.3658 \frac{\text{Km}^2}{\text{s}^2}$$

$$V_{H2,15} = \sqrt{2 \left(-1.3658 + \frac{4902.8}{1752.4} \right)} = 1.6923 \frac{\text{Km}}{\text{s}}$$

Si valuta pertanto il consumo propellente per $\Delta V = 19.5 \text{ m/s}$:

$$m_{\text{prop},15km} = 1600 \cdot \left(1 - e^{-19.5/2844} \right) = 10.93 \text{ kg}$$

La massa con cui inizia la traiettoria di allunaggio deve tenere conto di questo consumo e varrà come di seguito:

$$m_{15Km} = 1600 - 10.93 = 1589.07 \text{ Kg}$$

L'allunaggio è diviso in due fasi distinte:

1. *Fase di Discesa Ottimizzata*: il lander, partendo da 15 km di quota dalla superficie media lunare (perilunio della Hohmann) e con una velocità di $1.6923 \frac{Km}{s}$, inizia la discesa.

In questa fase, sia l'angolo di controllo che l'intensità della spinta sono variabili di controllo.

L'obiettivo è trovare l'evoluzione temporale ottimale di queste variabili per ridurre quota e velocità in modo efficiente, rispettando i vincoli imposti.

Questa fase viene risolta numericamente in ambiente MATLAB tramite la funzione `fmincon`, che utilizza un algoritmo *Sequential Quadratic Programming* (SQP).

2. *Fase di Atterraggio Verticale*: questa fase non è soggetta a ottimizzazione ed inizia quando il lander raggiunge un'altitudine di 10 metri dalla superficie.

Durante questa fase, viene imposta una spinta esattamente uguale e opposta alla forza peso per ciascuno dei nodi che discretizzano la traiettoria ($T_i = m_i \cdot g_{moon,i}$).

Questa strategia garantisce una discesa ad una velocità verticale costante di -2 m/s, per una durata fissa di 5 secondi, assicurando un contatto con il suolo lunare controllato.

Le ipotesi semplificative alla base del modello sono le seguenti:

- *Luna sferica e non rotante*:

la Luna è modellata come una sfera perfetta con un raggio medio di 1737.4 Km. Questa assunzione implica che il campo gravitazionale sia centrale e dipenda solo dalla distanza dal centro della Luna. Inoltre, vengono trascurate le irregolarità della superficie e le anomalie gravitazionali.

Infine si ipotizza che la Luna non ruoti, eliminando la necessità di considerare le forze apparenti di Coriolis e centrifughe, una semplificazione accettabile dato il valore basso della rotazione lunare.

- *Lander come massa puntiforme e spinta applicata al centro di massa*:

il lander è trattato come un punto materiale, le cui dimensioni e geometria sono trascurabili rispetto alla scala della traiettoria.

Si assume che la spinta sia sempre applicata al suo centro di massa. Questa ipotesi disaccoppia la dinamica traslazionale da quella rotazionale.

Di conseguenza, il modello non deve gestire i momenti e la dinamica di assetto, con un focus preciso sulla traiettoria.

- *Campo gravitazionale centrale:*

l'accelerazione di gravità lunare, g_{moon} , è modellata secondo la legge di gravitazione universale: $g_{\text{moon}}(r) = \mu / r^2$, dove μ è la costante gravitazionale planetaria della Luna e r è la distanza dal suo centro.

Questo modello considera la variazione della gravità con l'altitudine, che non è trascurabile durante la discesa da 15 Km dalla superficie media lunare.

3.2 Sistema di Riferimento ed Equazioni

Il sistema di riferimento utilizzato è quello in coordinate sferiche, rappresentato nella figura seguente:

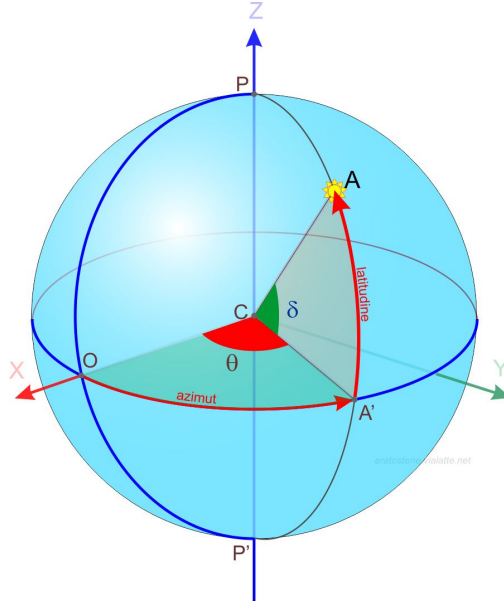


Figura 3.2: Coordinate sferiche

Le variabili di stato che descrivono completamente il sistema sono sette:

- Posizione: raggio r , latitudine δ e longitudine θ .
- Velocità: componenti radiale V_r , latitudinale V_δ e longitudinale V_θ .
- Massa del lander m .

Il controllo della spinta è definito in un sistema di riferimento locale solidale con il lander (F_b , body frame):

- L'asse $\mathbf{X}_b$ è diretto lungo la direzione "downrange" (longitudinale), positivo verso est.
- L'asse $\mathbf{Y}_b$ è diretto lungo la direzione "crossrange" (latitudinale), positivo verso nord.
- L'asse $\mathbf{Z}_b$ è allineato con la direzione radiale locale, positivo uscente dalla superficie lunare.

L'origine di questo sistema di riferimento è posta nel centro di massa del lander, considerato puntiforme. Le rotazioni del vettore spinta sono definite rispetto a questo sistema:

- L'angolo di *beccheggio* (*pitch*) ϕ è una rotazione attorno all'asse Y_b ed è l'angolo di controllo primario. Controlla la direzione della spinta tra la componente verticale (per contrastare la gravità e controllare la quota) e quella orizzontale (per frenare la velocità orbitale e sfruttare la gravità lunare per la discesa).
- L'angolo di *imbardata* (*yaw*) ψ è una rotazione attorno all'asse Z_b . Controlla la direzione della spinta nel piano orizzontale, permettendo manovre di correzione laterale (crossrange).
- L'angolo di *rollio* (*roll*) χ , è associato ad una rotazione attorno all'asse X_b e non influenza la direzione del vettore spinta, pertanto viene trascurato.

Le equazioni differenziali del moto nel sistema di riferimento in coordinate sferiche sono le seguenti [23] [24]:

$$\dot{r} = V_r \quad (1)$$

$$\dot{\delta} = \frac{V_\delta}{r} \quad (2)$$

$$\dot{\theta} = \frac{V_\theta}{r \cos \delta} \quad (3)$$

$$\dot{V}_r = \frac{T \sin \phi}{m} - \frac{\mu_{moon}}{r^2} + \frac{V_\delta^2 + V_\theta^2}{r} \quad (4)$$

$$\dot{V}_\delta = \frac{T \cos \phi \sin \psi}{m} - \frac{V_\delta V_r}{r} - \frac{V_\theta^2 \tan \delta}{r} \quad (5)$$

$$\dot{V}_\theta = \frac{T \cos \phi \cos \psi}{m} - \frac{V_\theta V_r}{r} + \frac{V_\delta V_\theta \tan \delta}{r} \quad (6)$$

$$\dot{m} = -\frac{T}{I_{sp} \cdot g_0} \quad (7)$$

- L'equazione (1) è il tasso di variazione della distanza r dal centro lunare e indica la velocità radiale V_r .
- L'equazione (2) indica la variazione della latitudine nel tempo, essa divide la velocità V_δ per r convertendo la velocità latitudinale in un tasso di variazione angolare della latitudine, tenendo in considerazione la curvatura radiale.
- L'equazione (3) è associata alla variazione della longitudine nel tempo (velocità longitudinale), in cui il termine $r \cos \delta$ converte la velocità longitudinale in un tasso di variazione angolare della longitudine, tenendo conto della curvatura della superficie sferica.
- L'equazione (4) è associata all'accelerazione radiale del lander, in cui si tiene conto della componente radiale della spinta del motore ($\frac{T \sin \phi}{m}$), dell'accelerazione gravitazionale lunare (g_{moon}) e dell'accelerazione centrifuga ($\frac{V_\delta^2 + V_\theta^2}{r}$) dovuta dalla rotazione apparente del sistema di riferimento per le componenti di velocità.
- L'equazione (5) rappresenta l'accelerazione latitudinale.

Il termine $\frac{T \cos \phi \sin \psi}{m}$ rappresenta la componente dell'accelerazione dovuta alla spinta del motore nella direzione latitudinale.

La componente $-\frac{V_\delta V_r}{r}$ descrive come il movimento radiale influenzi la componente longitudinale della velocità.

Infine il termine $\frac{V_\delta^2 \tan \delta}{r}$ è una componente che è associato all'effetto della velocità longitudinale sulla componente latitudinale dovuto alla geometria sferica.

- L'equazione (6) è associata all'accelerazione longitudinale.

Il termine $\frac{T \cos \phi \cos \psi}{m}$ rappresenta la componente dell'accelerazione dovuta alla spinta del motore nella direzione longitudinale.

La componente $-\frac{V_\theta V_r}{r}$ è una componente di forza apparente che descrive come il movimento radiale influenzi la componente tangenziale della velocità del lander.

Infine il termine $\frac{V_\delta V_\theta \tan \delta}{r}$ è una componente di forza apparente, simile alla forza di Coriolis, tra le componenti latitudinale e longitudinale.

- L'equazione (7) indica la variazione della massa del lander a causa del consumo di propellente. Essa è data dal rapporto tra la spinta (T) e il prodotto tra l'impulso specifico del lander (290 secondi) e l'accelerazione gravitazionale terrestre al livello del mare.

Queste equazioni sono state implementate nella funzione MATLAB `satelliteODEE`, che viene chiamata ripetutamente dall'integratore numerico (`ode45`) all'interno del processo di ottimizzazione.

```
function dydt = satelliteODEE(epsilon, y, phi, tf, problem, psi, T_adim)
    r = y(1);
    delta = y(2);
    theta = y(3);
    Vr = y(4);
    Vdelta = y(5);
    Vtheta = y(6);
    m = y(7);

    g_moon = G * M_moon / (r * r_rif)^2;
    g_moon_adim = g_moon / a_rif;
    c = 290 * 9.80665 / v_rif;

    dydt = zeros(7, 1);
    dydt(1) = Vr;
    dydt(2) = Vdelta/r;
    dydt(3) = Vtheta/(r*cos(delta));
    dydt(4) = (T_adim*sin(phi))/m-g_moon_adim+(Vdelta^2+Vtheta^2)/r;
    dydt(5) = (T_adim*cos(phi)*sin(psi))/m-(Vr*Vdelta)/r-(Vtheta^2*tan(delta))/r;
    dydt(6) = (T_adim*cos(phi)*cos(psi))/m-(Vr*Vtheta)/r+(Vdelta*Vtheta*tan(delta))/r;
    dydt(7) = -T_adim/c;
end
```

3.3 Vincoli ed Ottimizzazione

I vincoli possono essere di uguaglianza (c_{eq}), che devono essere soddisfatti esattamente, o disuguaglianza (c), che stabiliscono un limite superiore o inferiore per una variabile o una funzione. Entrambi definiscono delle condizioni che il sistema deve soddisfare.

Questo lavoro di tesi, nella fase di discesa ottimizzata (fase 1) è soggetta a vincoli di uguaglianza, perlopiù imposti al punto di transizione tra la fase 1 di discesa e la fase 2 e garantiscono che il lander si trovi nelle condizioni corrette per iniziare l'atterraggio verticale controllato.

La fase di atterraggio verticale non è ottimizzata: la sua traiettoria è deterministica una volta che le condizioni iniziali sono state fissate dalla fase 1.

I vincoli imposti alla fine della Fase 1 (discesa ottimizzata) sono i seguenti:

1. *Annullamento della velocità orizzontale:* il vincolo più critico per un atterraggio verticale è l'annullamento completo della velocità nel piano orizzontale. Questo assicura che la discesa finale sia puramente verticale:

$$V_\theta(t_{f1}) = 0$$

Questo vincolo viene imposto sulla componente di velocità longitudinale, assumendo che le manovre laterali (in direzione δ) siano trascurate o già corrette ($\psi = 0, V_\delta = 0$).

2. *Raggiungimento dell'altitudine per l'inizio dell'atterraggio verticale:* La fase ottimizzata termina ad una quota da cui inizia la fase discesa finale.

Questa quota è stata fissata a 10 metri: la scelta di 10 metri rappresenta un'altezza considerata sufficientemente bassa per minimizzare la fase non ottimale, ma abbastanza alta da garantire che il veicolo possa completare la discesa in sicurezza, con le giuste condizioni di velocità e assetto, e con un margine per le correzioni finali. Infatti, secondo il principio di Pontryagin, la simulazione non ottimizzata (in questo caso associata alla fase 2), deve essere la più breve possibile.

$$h(t_{f1}) = r(t_{f1}) - R_{moon} = 10 \text{ m}$$

L'obiettivo dell'ottimizzazione, infatti, è la massimizzazione della massa finale, e qualsiasi deviazione dalla soluzione ottima comporta un consumo di propellente superiore al minimo teorico.

Pertanto la durata della fase non ottimale deve essere ridotta al minimo indispensabile e prolungare questa fase significherebbe operare in una modalità sub-ottimale per più tempo, consumando più propellente del necessario e riducendo la massa finale del lander.

3. *Velocità di atterraggio verticale costante:* alla fine della fase di discesa il lander deve aver già raggiunto la velocità verticale target che sarà mantenuta costante durante la Fase 2. Questa velocità è fissata a -2 m/s.

$$V_r(t_{f1}) = -2 \frac{m}{s}$$

In questa fase la spinta è mantenuta pari al peso del lander per ogni nodo ($T_i = m_i \cdot g_{moon,i}$), così da garantire il soddisfacimento del vincolo di velocità costante.

I vincoli sono inseriti all'interno della funzione `constraint` di `fmincon`:

```
c = []; % Vincoli di disuguaglianza (assenti)

ceq(1) = y_final_fase1(end,6); % V_theta = 0 alla fine della Fase 1.
      y_final_fase1(end,6) è lo stato V_theta all ultimo nodo
      della Fase 1.

ceq(2) = y_final_fase2(end,1) - R_moon/r_rif; % Impone altitudine
      finale (alla fine della Fase 2) nulla, ovvero r = R_moon.

ceq(3) = y_final_fase2(end,4); % Impone la velocità radiale finale
      (al touchdown) V_r = 0.
```

La funzione `fmincon` di MATLAB è il solutore utilizzato per questo problema di ottimizzazione non lineare vincolata.

`fmincon` è rappresentato come segue nel codice:

```
x = fmincon(@(allVar) objectivee(allVar, problem), ...
      allVarGuess, [], [], [], [], ...
      allVarLower, allVarUpper, ...
      @(allVar) constraintss(allVar, problem), options);
```

La funzione da minimizzare è definita dai seguenti elementi: `objectivee`, partendo dal vettore di stime iniziali `allVarGuess`, rispettando i limiti inferiori e superiori `allVarLower` e `allVarUpper`, soddisfacendo i vincoli non lineari definiti in `constraintss`.

Il sistema di equazioni differenziali ordinarie viene integrato mediante la funzione `ode45` con parametri di tolleranza adeguati per avere un trade-off tra l'accuratezza della soluzione e i tempi di calcolo:

```
optODE = odeset('RelTol', 1e-3, 'AbsTol', 1e-3);
problem.optODE = optODE;
```

I parametri sono i seguenti:

- `RelTol = 1e-3`: tolleranza relativa sull'errore di integrazione
- `AbsTol = 1e-3`: tolleranza assoluta sull'errore di integrazione

Il problema di ottimizzazione vincolata viene risolto con le seguenti opzioni:

```
options = optimoptions('fmincon', ...
    'Algorithm', 'sqp', ...
    'ConstraintTolerance', 1e-6, ...
    'StepTolerance', 1e-6, ...
    'Display', 'iter-detailed', ...
    'MaxIterations', 2000, ...
    'OptimalityTolerance', 1e-4, ...
    'FunctionTolerance', 1e-4);
```

I parametri principali sono:

- `Algorithm = 'sqp'`: algoritmo Sequential Quadratic Programming
- `ConstraintTolerance = 1e-6`: tolleranza sulla violazione dei vincoli
- `StepTolerance = 1e-6`: tolleranza minima sul passo di ottimizzazione
- `MaxIterations = 2000`: numero massimo di iterazioni consentite
- `OptimalityTolerance = 1e-4`: tolleranza sulle condizioni di ottimalità del primo ordine
- `FunctionTolerance = 1e-4`: tolleranza sulla variazione della funzione obiettivo

Il solutore `fmincon`, pertanto, cerca il minimo di una data funzione obiettivo, soggetta a vincoli di uguaglianza. In questo lavoro di tesi la funzione obiettivo è proprio la massa del lander, che deve essere massimizzata:

```
function obj = costt(tf1, xf)
    obj = -xf;
end
```

`xf` rappresenta lo stato finale della massa del lander, `y_combined(end, 7)`.

L'obiettivo è quindi minimizzare `-xf` (minimizzando il negativo e pertanto massimizzando la massa). Poiché la massa iniziale è fissa, la massimizzazione della massa finale equivale a minimizzare il consumo di propellente.

I limiti inferiori (*Lower Bounds*, `lb`) e superiori (*Upper Bounds*, `ub`) definiscono lo spazio di ricerca ammissibile per le variabili di ottimizzazione, garantendo che la soluzione trovata sia fisicamente realizzabile e coerente con le caratteristiche del lander.

Questi limiti sono definiti per tre categorie di variabili:

- *Durata della Fase 1 (τ_1):*
 - `problems.LBtau1 = 30;` (corrispondenti a 450 secondi)
 - `problems.UBtau1 = 40;` (corrispondenti a 600 secondi)

Questo intervallo è scelto per ragioni di efficienza: un tempo troppo breve richiederebbe una spinta eccessiva per frenare, mentre un tempo troppo lungo aumenterebbe il consumo di propellente a causa delle perdite gravitazionali.

- *Angolo di Spinta (ϕ):* Questo controllo determina l'orientamento della spinta.
 - `problems.LBangolo1 = [pi/2];` (90°)
 - `problems.UBangolo1 = [3*pi/2];` (270°)

Un angolo di 90° rappresenta una spinta verticale, mentre angoli maggiori introducono una componente di frenata orizzontale, essenziale per ridurre la velocità tangenziale, o in alcuni casi con una componente verso il basso.

- *Spinta (T):* La spinta è usata come variabile di controllo e nelle simulazioni ed è stata imposta al valore massimo per valori diversi di simulazione oppure con un lower bound nullo. Il valore di spinta viene adimensionalizzato affinché `fmincon` possa lavorare su ordini di grandezza compatibili nell'ottimizzazione.

Il problema di ottimizzazione richiede delle *initial guess*, ossia una stima vicina alla soluzione finale può ridurre il tempo di convergenza e ottenere risultati migliori:

- *Stima per l'Angolo di Spinta:*

```
problems.StimaAngoloT1 = linspace(3.2, 2.5, problems.nodes1)';
```

Questa stima indica che l'angolo varia linearmente da 3.2 radianti (circa 183°) a 2.5 radianti (circa 143°). Questa stima rappresenta una manovra che inizia con una spinta quasi orizzontale (per frenare la velocità orbitale) per poi diventare progressivamente più verticale man mano che il lander si avvicina alla superficie lunare.

- *Stima per la Spinta:* La stima per la spinta assume valori diversi a seconda della simulazione considerata con un vettore `linspace`.
- *Stima per la durata della fase di discesa:*

```
problems.tau1 = 35;
```

Per la durata della fase di discesa, si fornisce un valore di 35 secondi adimensionali (525 secondi), che è il punto intermedio dell'intervallo $[30, 40]$.

Capitolo 4

Risultati

Questo capitolo tratta le simulazioni di traiettorie di allunaggio di tre casi:

- Analisi di sensibilità della fase di discesa con diversi valori di spinta costante e ottimizzata.
- Analisi di sensibilità per diversi valori di perilunio.
- Analisi di sensibilità al punto di inizio della fase di discesa.

Tutte le simulazioni prevedono l'inizio dell'atterraggio verticale a 10 m dalla superficie media lunare, con la spinta direzionata a 90° per ogni nodo della fase verticale e uguale al peso, per ottenere una velocità verticale costante di $-2\frac{m}{s}$. La durata della fase verticale è pertanto fissa e pari a 5 secondi.

I tre casi tengono conto del consumo di propellente per la partenza dalla Hohmann a 100 Km. In particolare, il *caso base* prevede che il punto di partenza della fase di discesa sia a 15 Km dalla superficie media lunare e il vettore di stato iniziale che caratterizza questa simulazione è il seguente:

```
y0 = [R_moon+15000; 0; 0; 0; 0; 1692.3; 1589.07];  
%y0 = [r; delta ; theta ; V_r; V_delta ; V_theta ; m];
```

Il punto di partenza è a 15 Km dalla superficie media lunare sommato al raggio medio lunare, la velocità longitudinale iniziale è pari alla velocità che si ottiene al perilunio di 15 Km per la partenza dalla Hohmann a 100 Km e infine la massa tiene conto del consumo dovuto alla trasferta.

4.1 Analisi di Sensibilità della Fase di Discesa per Spinta Costante e Ottimizzata

La fase di discesa è valutata nella condizione di spinta fissa e massima e nella condizione di spinta ottimizzata. Quest'ultimo caso prevede un Lower Bound della spinta pari a 0 N e Upper Bound al valore massimo di simulazione.

Sono stati valutati 6 valori di spinta da 3600 N a 4600 N con un passo di 200 N.

4.1.1 Spinta Costante in Fase di Discesa

Nella tabella seguente (4.1) sono riportati i risultati prodotti dalle simulazioni con spinta costante:

Spinta	3600 N	3800 N	4000 N	4200 N	4400 N	4600 N
V_r atterraggio verticale	-2 m/s	-2 m/s	-2 m/s	-2 m/s	-2 m/s	-2 m/s
h inizio atterraggio verticale	10 m	10 m	10 m	10 m	10 m	10 m
Massa finale del lander m_f	835.56 Kg	838.97 Kg	841.83 Kg	844.24 Kg	846.31 Kg	848.07 Kg
Tempo di discesa (fase 1) tf_1	593.37 s	559.58 s	529.57 s	502.71 s	478.52 s	456.62 s
Tempo di atterraggio (fase 2) tf_2	598.37 s	564.58 s	534.57 s	507.71 s	483.52 s	461.62 s

Tabella 4.1: Risultati di simulazione per sei valori di spinta costante

Si evince che, per ottenere la massimizzazione della massa finale del lander, converrebbe assumere la spinta massima possibile, ossia pari a 4600 N per le prove in analisi, con una massa finale pari a 848.07 Kg.

Tra il caso a 3600 N e quello a 3800 N si osserva un incremento di circa 3.41 Kg, tra 3800 N e 4000 N il guadagno si riduce a circa 2.86 Kg, tra 4000 N e 4200 N la differenza è di 2.41 Kg, tra 4200 N e 4400 N 2.07 Kg e infine tra 4400 N e 4600 N la differenza di massa è di soli 1.76 Kg.

Queste differenze suggeriscono che l'aumento di massa finale tenda progressivamente a saturarsi con la spinta, raggiungendo un massimo oltre il quale i benefici aggiuntivi risultano sempre meno significativi.

La durata della fase verticale in ogni simulazione è pari a 5 secondi come previsto e la durata della fase di discesa è decrescente all'aumentare della spinta.

Di seguito sono riportati i grafici principali delle simulazioni messi a confronto sulla base del valore di spinta:

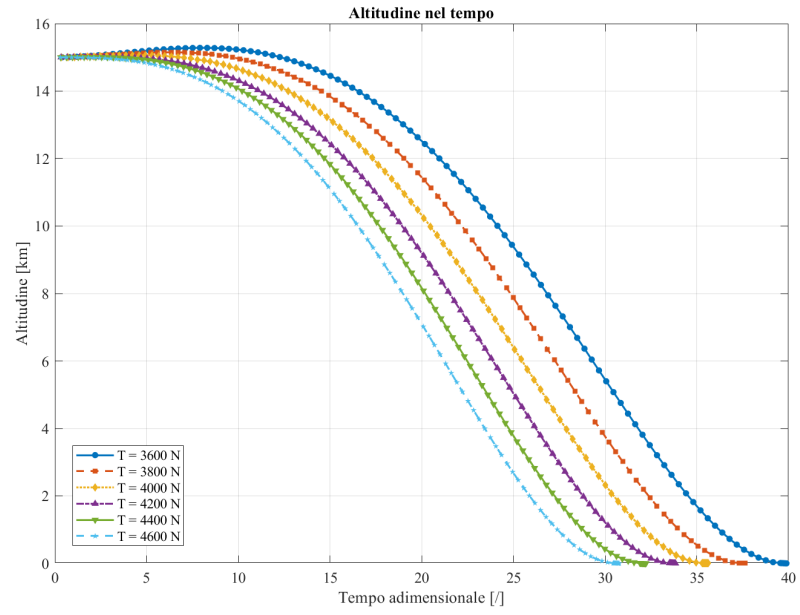


Figura 4.1: Variazione dell'altitudine nel tempo - Spinta Costante

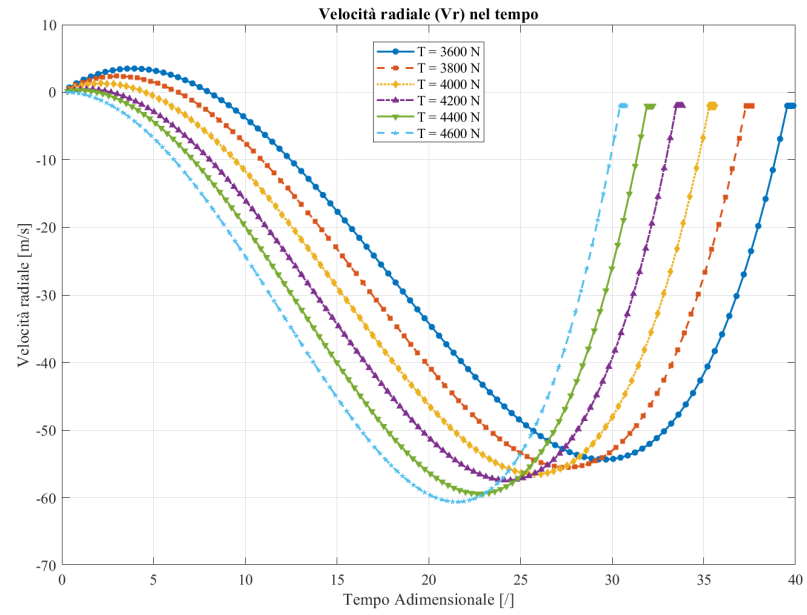


Figura 4.2: Andamento della velocità radiale (V_r) nel tempo - Spinta Costante

In riferimento alla Figura 4.1, la partenza della fase di discesa è a 15 km dalla superficie media lunare. Tutte le simulazioni raggiungono la convergenza e l'altitudine nulla, associata al suolo lunare. La velocità radiale, invece assume nella fase verticale il valore fisso pari a $-2 \frac{m}{s}$.

Le simulazioni a 3600 N, 3800 N e 4000 N hanno un leggero incremento di quota all'inizio della fase di discesa, ciò è associato allo scopo di guadagnare tempo per poter ridurre adeguatamente la velocità longitudinale; questo fenomeno è collegato al rapporto spinta-massa del lander [24].

Si può notare come, all'aumentare della spinta, l'altitudine tenda ad assumere un guadagno di quota sempre meno rilevante, infatti una spinta elevata consente di ridurre rapidamente la velocità longitudinale senza dover aumentare l'altitudine. Tuttavia va evidenziato che un rapporto spinta-massa molto elevato potrebbe non essere fisicamente possibile o pratico.

La Figura 4.2 rappresenta la velocità radiale del lander nella fase di discesa e di atterraggio. In questo caso si può notare l'andamento positivo all'inizio della fase di discesa per le simulazioni a 3600 N, 3800 N e 4000 N col fine del guadagno di quota. La velocità radiale assume un valore sempre più negativo all'aumentare della spinta e il tempo di atterraggio si riduce sempre di più.

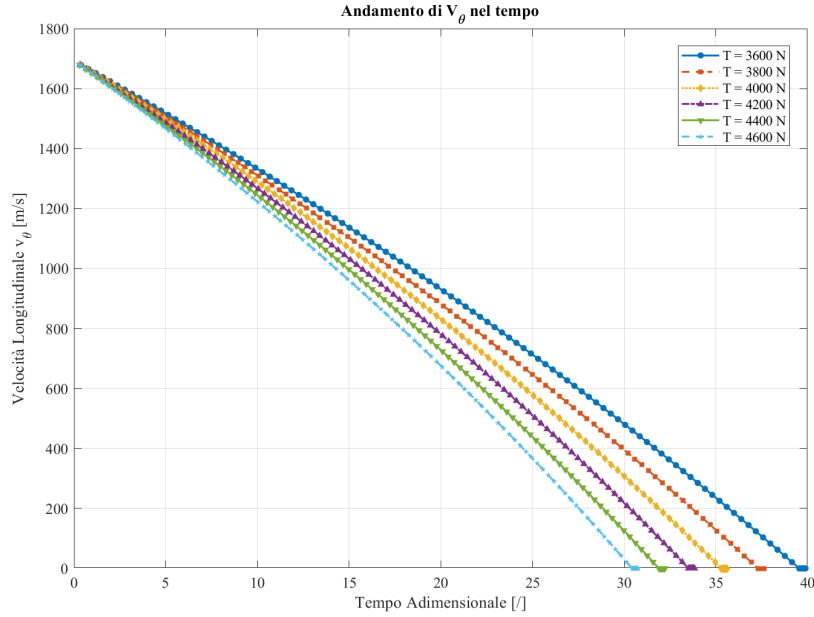


Figura 4.3: Andamento della velocità longitudinale (V_θ) nel tempo - Spinta Costante

La velocità longitudinale in Figura 4.3 decresce linearmente fino alla fine della fase di discesa, dopodichè rimane nulla per tutta la fase verticale in tutte le simulazioni.

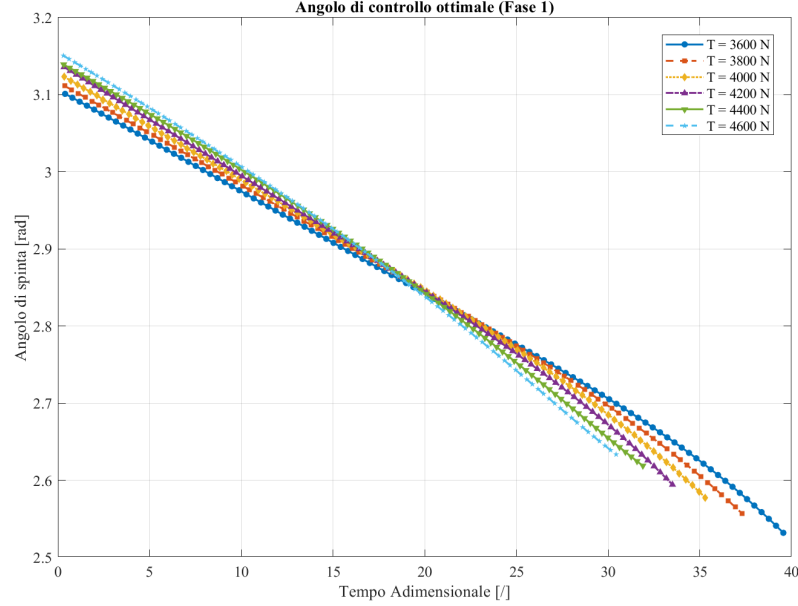


Figura 4.4: Angolo di controllo ottimale durante la Fase 1 - Spinta Costante

L'angolo di controllo della spinta, nella Figura 4.4, è sempre decrescente. La direzione della spinta fa in modo di spingere in direzione orizzontale in senso opposto al moto orbitale per decelerare e iniziare la fase di discesa. Per ottenere questa riduzione rapida della velocità il lander si orienta con un angolo di beccheggio tendente verso i 180 gradi.

Si nota come la pendenza negativa dell'angolo di controllo tenda ad essere più accentuata all'aumentare della spinta, poichè il lander può permettersi di spingere per decelerare più energicamente la sua velocità longitudinale e scendere più rapidamente [18].

La simulazione a 4600 N e 4400 N costanti superano 3.14 rad , ciò è dovuto alla spinta elevata, opposta al moto e leggermente rivolta verso il basso per poter ottimizzare la fase di discesa. Pertanto una piccola parte della spinta viene utilizzata per spingere attivamente verso il basso.

La fase verticale, invece, mantiene la direzione della spinta a 90° fissi per poter effettuare un atterraggio verticale a velocità costante e spinta uguale al peso per tutta la fase.

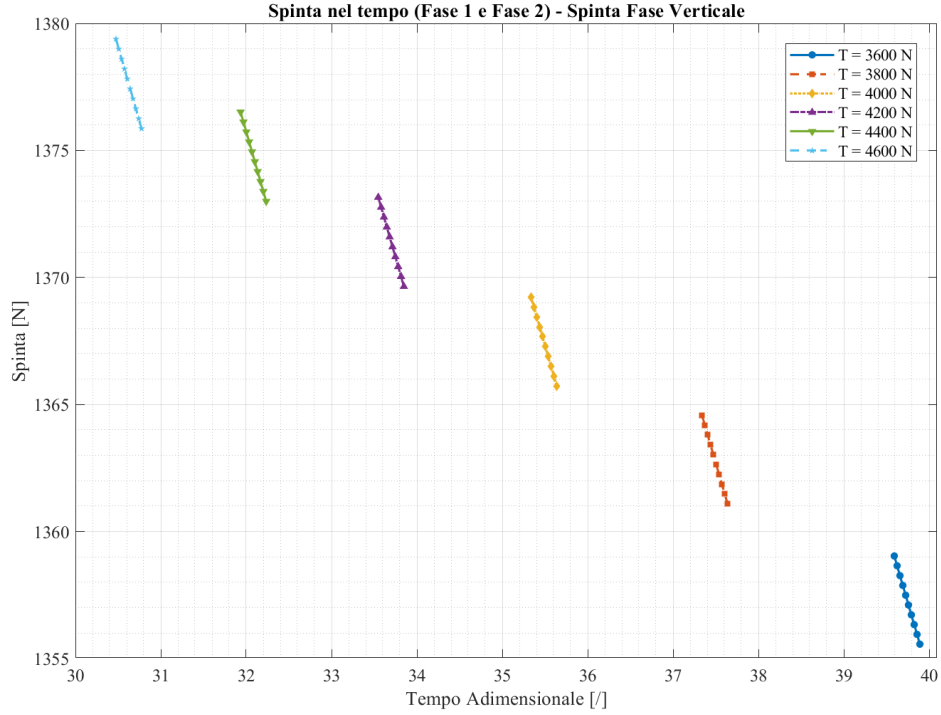


Figura 4.5: Spinta nel tempo per la fase verticale - Spinta Costante

Nella fase di discesa (fase 1), la spinta rimane ad un livello costante e massimo per ciascuna simulazione. All'aumentare della spinta la durata della fase di discesa si riduce.

Nella Figura 4.5 le spinte nella fase verticale (fase 2) sono in ogni nodo pari al peso ($T = m_i \cdot g_{moon,i}$) per poter atterrare a velocità costante di $-2 \frac{m}{s}$ da 10 metri di altitudine dalla superficie media lunare.

Si nota che, all'aumentare della spinta costante in fase di discesa, l'ultimo nodo della fase verticale tende ad assumere un valore sempre più elevato e pertanto associato ad una massa finale più alta da compensare con la spinta verticale.

4.1.2 Spinta Ottimizzata in Fase di Discesa

La spinta della fase di discesa (fase 1) è ottimizzata, considerando un lower bound di 0 N e un upper bound massimo sulla base della simulazione.

La stima iniziale della spinta è un vettore `linspace` nei 100 nodi della fase di discesa mantenuto al valore massimo per ogni simulazione.

La spinta durante la fase verticale (fase 2) viene calcolata assumendo una velocità verticale costante di $-2\frac{m}{s}$, di conseguenza il valore della spinta è uguale al peso, $T = m_i \cdot g_{moon,i}$, determinato per ogni nodo della fase 2.

I risultati ottenuti sono i seguenti:

Spinta	3600 N	3800 N	4000 N	4200 N	4400 N	4600 N
V_r atterraggio verticale	-2 m/s	-2 m/s	-2 m/s	-2 m/s	-2 m/s	-2 m/s
h inizio atterraggio verticale	10 m	10 m	10 m	10 m	10 m	10 m
Massa finale del lander m_f	835.57 Kg	838.97 Kg	841.83 Kg	844.24 Kg	846.31 Kg	848.10 Kg
Tempo di discesa (fase 1) tf_1	596.34 s	560.42 s	530.00 s	526.49 s	524.38 s	524.27 s
Tempo di atterraggio (fase 2) tf_2	601.34 s	565.42 s	535.00 s	531.49 s	529.38 s	529.27 s

Tabella 4.2: Risultati di simulazione per sei valori di spinta ottimizzata

Dalla tabella 4.2 si riscontra che il risultato migliore sia associato alla spinta massima considerabile per la fase di discesa, ossia il caso a 4600 N, come si è potuto verificare nella simulazioni a spinta costante.

Tutte le prove riportate in tabella sono ottime e raggiungono la convergenza.

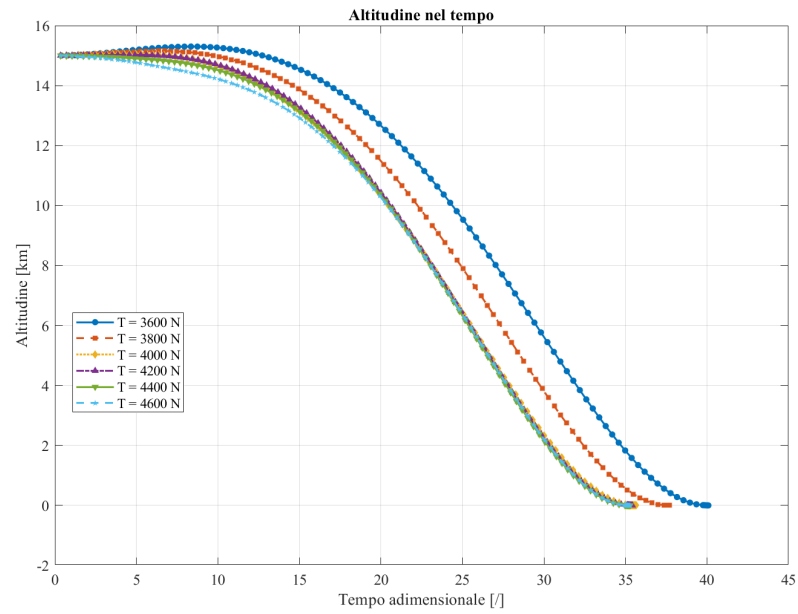


Figura 4.6: Variazione dell'altitudine nel tempo - Spinta Ottimizzata

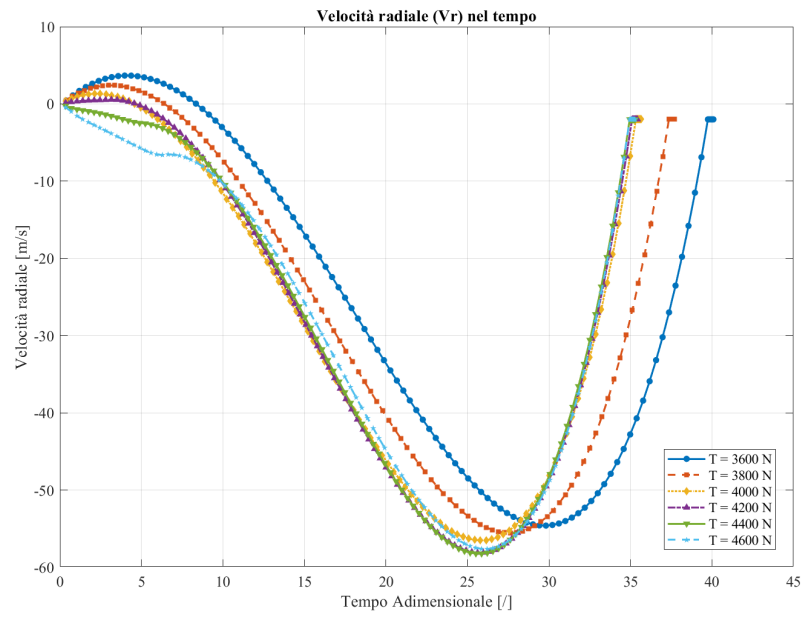


Figura 4.7: Andamento della velocità radiale (V_r) nel tempo - Spinta Ottimizzata

L'andamento dell'altitudine e della velocità radiale nelle Figure 4.6 e 4.7 è congruente con gli andamenti riscontrati nelle simulazioni a spinta costante. Tuttavia, all'aumentare della spinta e nella parte iniziale della fase di discesa, si presentano leggere irregolarità nella velocità radiale V_r che comunque non compromettono la convergenza o la validità dei risultati.

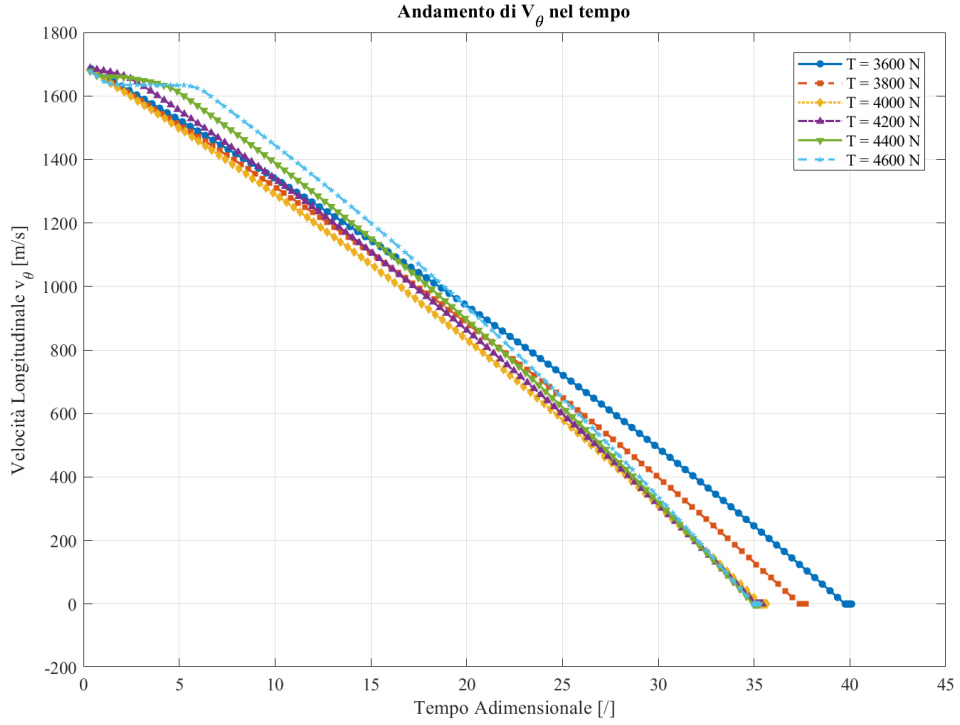


Figura 4.8: Andamento della velocità longitudinale (V_θ) nel tempo - Spinta Ottimizzata

La velocità longitudinale nella Figura 4.8 ha andamento decrescente e si annulla all'inizio della fase verticale come previsto dal vincolo imposto. All'aumentare della spinta, c'è la tendenza iniziale a ridurre lievemente la velocità prima della fase di discesa e una riduzione più significativa successivamente.

L'angolo di controllo nella Figura 4.9 ha sempre andamento decrescente con qualche piccola irregolarità. In queste prove si nota come anche il caso a 4200 N, insieme ai 4400 N e 4600 N, assuma un valore di poco superiore ai 3.14 rad per compensare la velocità longitudinale e volgersi verso il basso per iniziare la manovra di discesa.

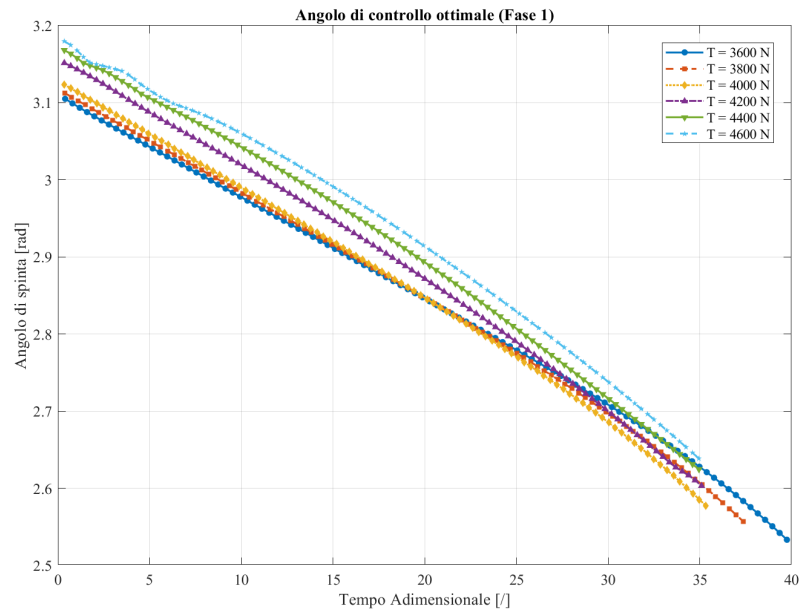


Figura 4.9: Angolo di controllo ottimale durante la Fase 1 - Spinta Ottimizzata

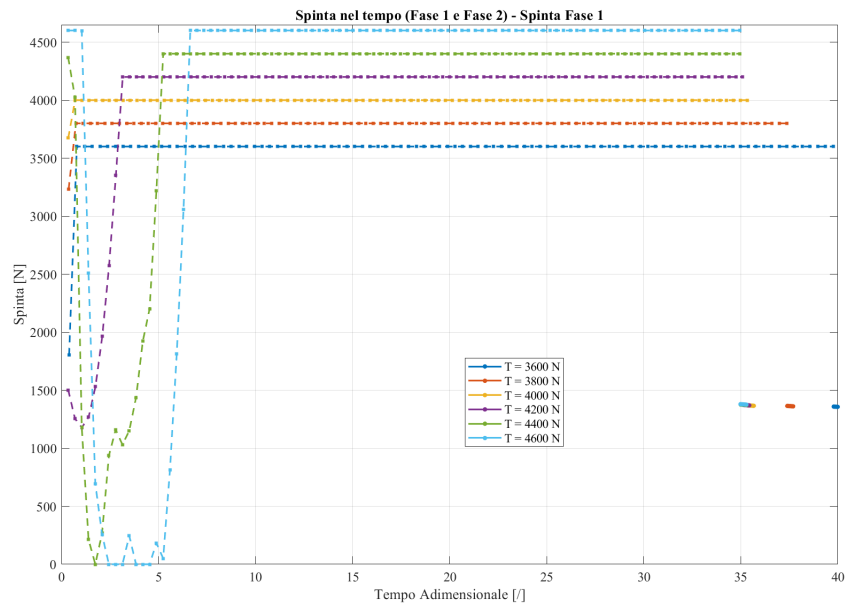


Figura 4.10: Spinta nel tempo per la fase di discesa - Spinta Ottimizzata

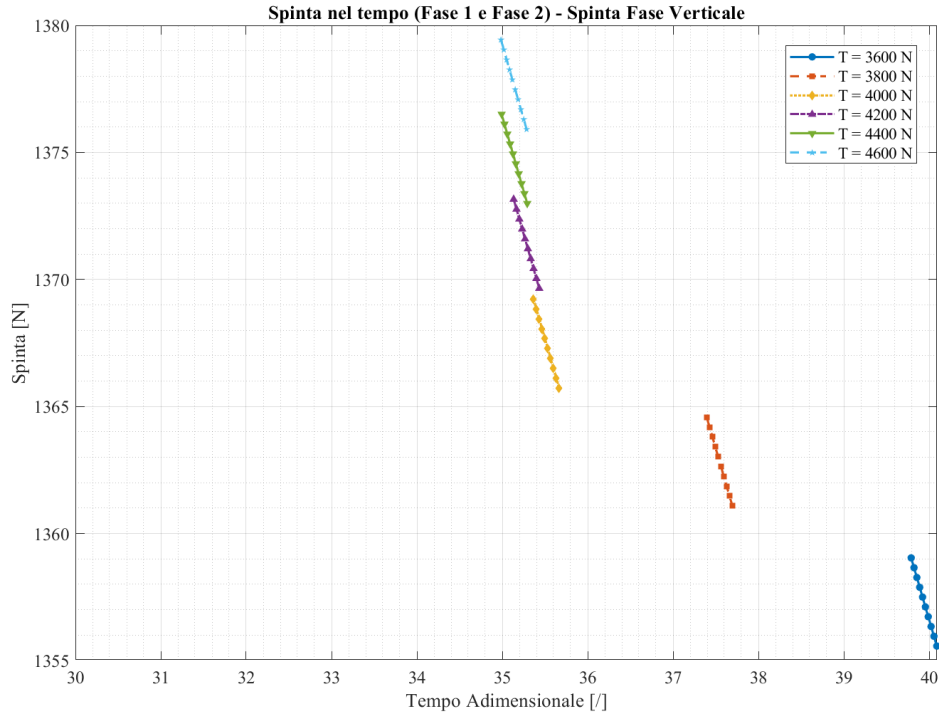


Figura 4.11: Spinta nel tempo per la fase verticale - Spinta Ottimizzata

Nella Figura 4.10 si può notare un fenomeno quasi-bang-bang per i casi a 4200 N 4400 N e 4600 N.

Siccome l'obiettivo è la massimizzazione della massa finale del lander nella traiettoria di allunaggio, risultati di questo tipo sono frequenti nella letteratura e generalmente associati a controlli bang-bang con variazioni istantanee della spinta tra il valore massimo e minimo, occasionalmente assumendo valori intermedi in presenza di vincoli stringenti [14].

Questo fenomeno è caratteristico dei problemi di controllo ottimale *fuel-optimal* con ingressi vincolati e *multiple constraint* da rispettare simultaneamente.

L'ampiezza delle oscillazioni si intensifica proporzionalmente alla spinta massima disponibile: una spinta più elevata può permettere manovre più brusche e repentine, alternando rapidamente tra spinta massima e motori spenti per soddisfare con precisione i vincoli di atterraggio imposti.

Nonostante ciò, seguendo la teoria del controllo ottimale, la spinta tende a rimanere prossima al suo valore massimo per la maggior parte della simulazione.

4.1.3 Confronto fra Spinta Costante e Ottimizzata

Per confrontare la spinta costante con quella ottimizzata, è stato analizzato il caso in cui la spinta nella fase di discesa è pari a 4600 N, cioè il valore massimo possibile per la simulazione a spinta costante per garantire la convergenza.

Spinta	4600 N costanti	4600 N ottimizzati
V_r atterraggio verticale	-2 m/s	-2 m/s
h inizio atterraggio verticale	10 m	10 m
Massa finale del lander m_f	848.07 Kg	848.10 Kg
Tempo di discesa (fase 1) tf_1	456.62 s	524.27 s
Tempo di atterraggio (fase 2) tf_2	461.62 s	529.27 s

Tabella 4.3: Confronto fra caso a spinta costante massima e spinta ottimizzata

Si riscontra che il caso a 4600 N ottimizzati impiega circa 68 secondi in più rispetto al caso con 4600 N costanti, ma è presente un guadagno di 30 grammi di propellente.

Si può pertanto constatare che, per le simulazioni in esame, il guadagno fra una strategia a spinta costante ed ottimizzata è quasi ininfluenza sul guadagno di massa finale del lander e risparmio di propellente, siccome la differenza agisce solo sullo 0.002% di propellente rispetto alla massa iniziale.

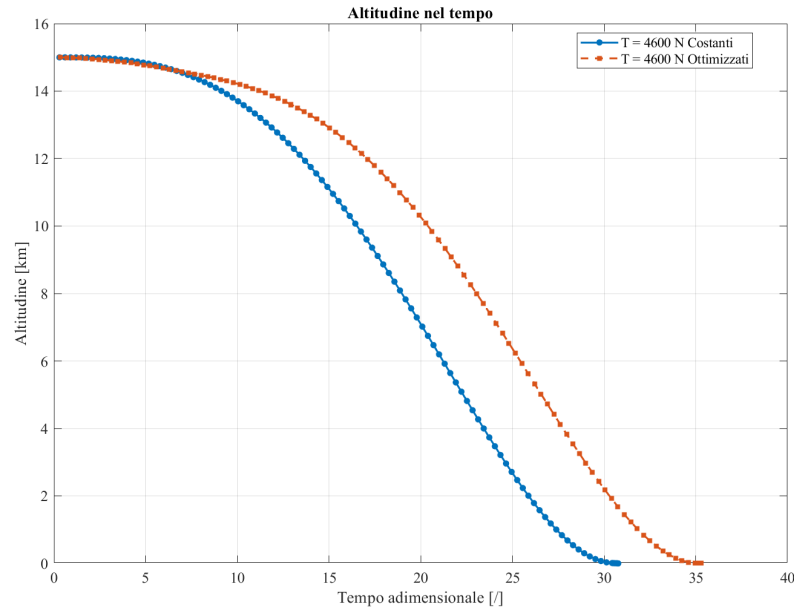


Figura 4.12: Variazione dell'altitudine nel tempo - Confronto Spinta

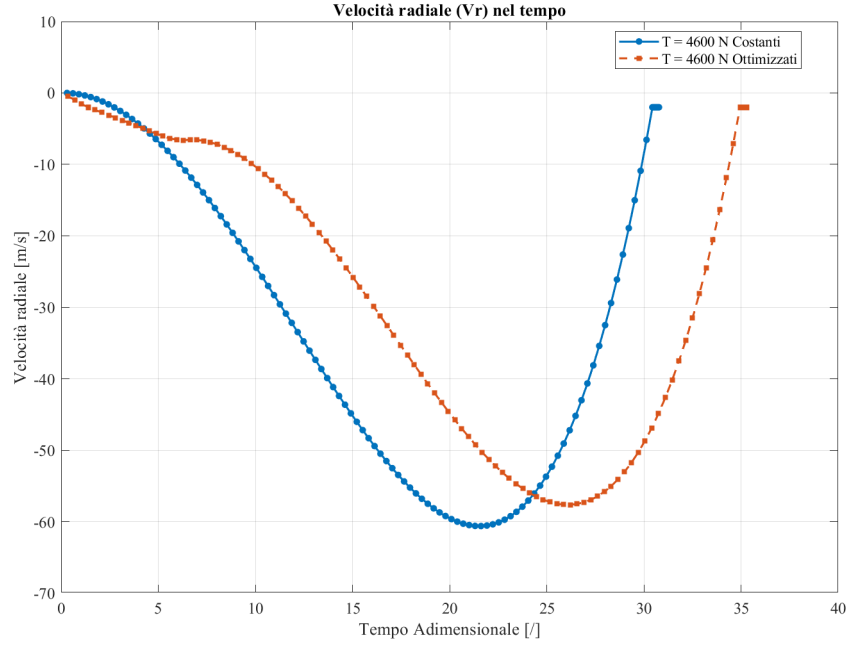


Figura 4.13: Andamento della velocità radiale (V_r) nel tempo - Confronto Spinta

Dalla Figura 4.12 si può dedurre che la simulazione a 4400 N costanti varia leggermente la sua quota nella parte iniziale della discesa, prediligendo il processo di rallentamento della velocità orbitale del lander. Invece il caso a 4400 N ottimizzati inizia immediatamente la manovra di discesa, ma impiegando maggior tempo rispetto al caso con spinta costante per massimizzare la massa finale.

Nella Figura 4.13 la velocità radiale soddisfa i vincoli in entrambe le simulazioni. La prova a 4400 N ottimizzati è caratterizzata da una velocità radiale inizialmente irregolare ma tende a stabilizzarsi per il resto della fase di discesa.

La velocità longitudinale, nella Figura 4.14, del caso a 4400 N ottimizzato, rispetto al caso a spinta costante, presenta una fase in cui essa è mantenuta costante, associata alla spinta nulla che si assume nella fase caratterizzata da oscillazione.

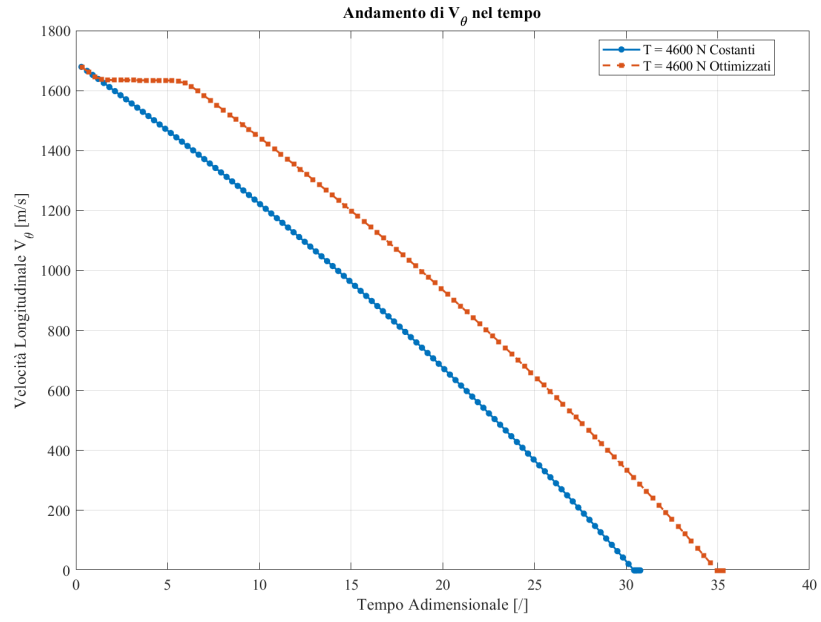


Figura 4.14: Andamento della velocità longitudinale (V_θ) nel tempo - Confronto Spinta

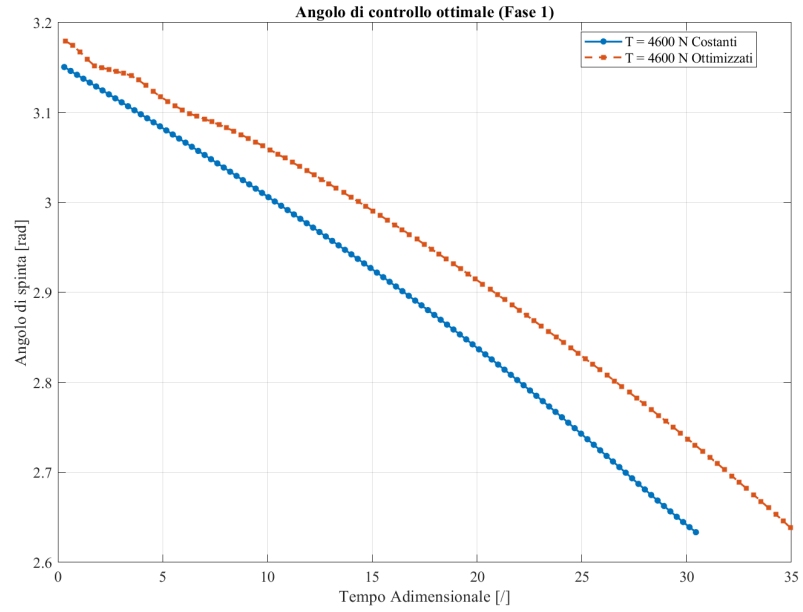


Figura 4.15: Angolo di controllo ottimale durante la Fase 1 - Confronto Spinta

Entrambe le simulazioni nella Figura 4.15 possiedono un angolo di controllo che inizia per un valore maggiore di 3.14 rad e arriva fino a circa 2.65 rad alla fine della fase di discesa.

La tendenza a sfruttare la componente di spinta rivolta verso il basso, e quindi un angolo di controllo più elevato, all'inizio della fase di discesa, è maggiore nel caso a 4600 N ottimizzati.

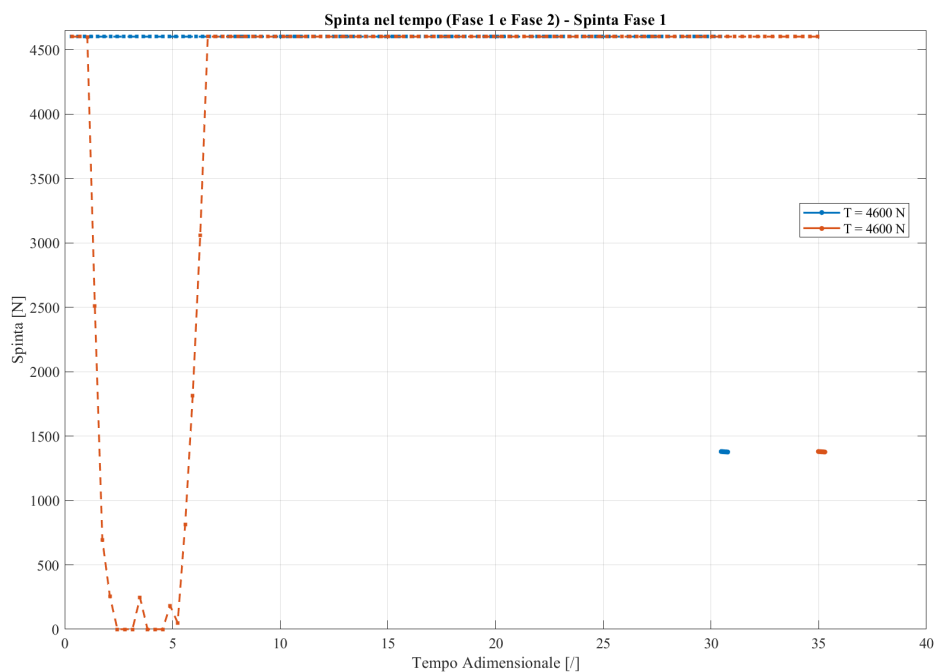


Figura 4.16: Spinta nel tempo per la fase di discesa - Confronto Spinta

Le Figura 4.16 riporta la spinta nella fase di discesa, in cui si riscontra la differenza fra il caso caratterizzato da spinta variabile e spinta costante.

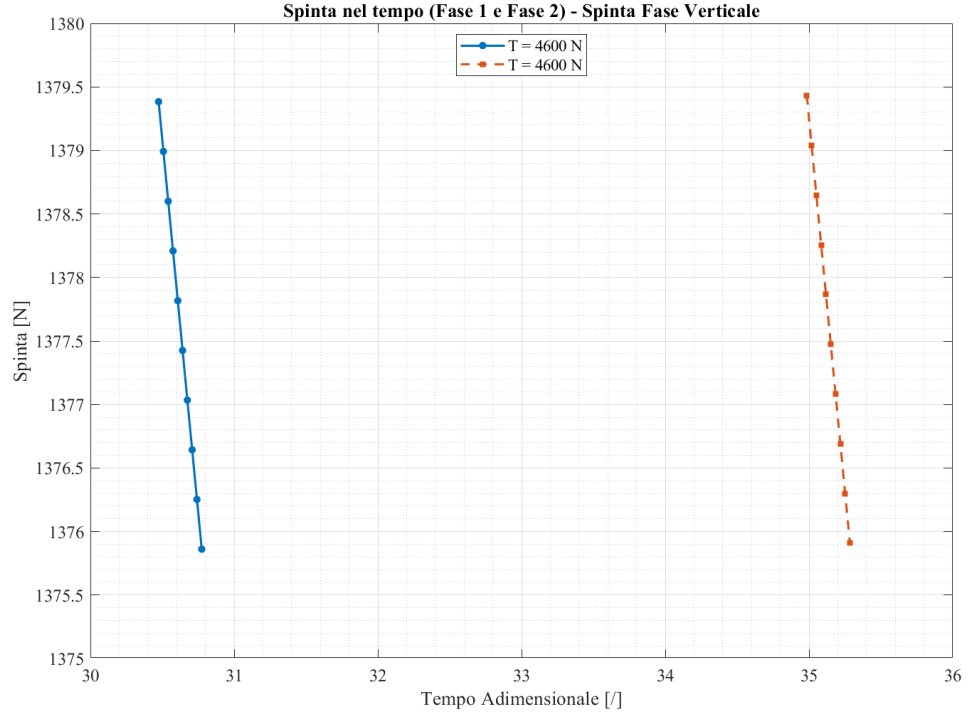


Figura 4.17: Spinta nel tempo per la fase verticale - Confronto Spinta

La spinta nella fase verticale, nella Figura 4.17, è mantenuta uguale al peso in ogni nodo $T = m_i \cdot g_{moon,i}$ per ottenere velocità radiale costante a $-2 \frac{m}{s}$ con direzione a 90° .

Si nota che il valore finale dei due casi, associato ad un valore specifico di peso da compensare, è pressochè identico, ma il caso a 4400 N risulta teoricamente il più efficiente.

4.2 Analisi di sensibilità alla Variazione del Perilunio

L'obiettivo di questa sezione è valutare le velocità e il consumo di propellente per iniziare un trasferimento orbitale di Hohmann da un'orbita di parcheggio circolare a 100 Km verso un perilunio a 14 Km o 16 Km dalla superficie media lunare, da cui è eseguita la simulazione della traiettoria di allunaggio e paragonata ai risultati con perilunio a 15 Km.

La massa iniziale del lander nell'orbita di parcheggio a 100 Km è pari a 1600 Kg e la spinta considerata per queste prove è fissa e pari a 4600 N, poiché il guadagno della strategia ottimizzata è trascurabile (30 grammi, 0.002% della massa iniziale [4.3]) a favore di un controllo più semplice e affidabile. Il consumo di propellente dovuto alla Hohmann è stato sottratto ai 1600 Kg all'inizio della simulazione dei corrispettivi periluni, considerando anche che $c = I_{sp} \times g_0 = 290 \text{ s} \times 9.80665 \text{ m/s}^2 = 2844 \text{ m/s}$.

Considerando che la velocità circolare dell'orbita di parcheggio è la seguente:

$$v_{circ} = \sqrt{\frac{\mu}{r_{circ}}} = \sqrt{\frac{4902.8}{1837.4}} = 1.6335 \text{ km/s}$$

Caso con Perilunio a 14 Km ($h_{p,14} = 14 \text{ Km}$)

$$r_{p,14} = 1737.4 + 14 = 1751.4 \text{ Km} \quad a_{H,14} = (1837.4 + 1751.4)/2 = 1794.4 \text{ Km}$$

$$v_{a,14km} = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r_a} - \frac{1}{a} \right)} = \sqrt{4902.8 \left(\frac{2}{1837.4} - \frac{1}{1794.4} \right)} = 1.6138 \text{ km/s}$$

$$\Delta v_{14km} = v_{circ} - v_{a,14km} = 1.6335 - 1.6138 = 0.0197 \text{ km/s} \quad (19.7 \text{ m/s})$$

$$\epsilon_{H,14} = -\frac{4902.8}{2 \times 1794.4} \approx -1.3661 \frac{\text{Km}^2}{\text{s}^2} \quad V_{H2,14} = \sqrt{2 \left(-1.3661 + \frac{4902.8}{1751.4} \right)} \approx 1.6931 \frac{\text{Km}}{\text{s}}$$

Consumo propellente per $\Delta V = 19.7 \text{ m/s}$ (Caso 14 km):

$$m_{prop,14km} = 1600 \cdot (1 - e^{-19.7/2844}) = 11.044 \text{ Kg}$$

Caso con Perilunio a 16 Km ($h_{p,16} = 16 \text{ Km}$)

$$r_{p,16} = 1737.4 + 16 = 1753.4 \text{ Km} \quad a_{H,16} = (1837.4 + 1753.4)/2 = 1795.4 \text{ Km}$$

$$v_{a,16km} = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r_a} - \frac{1}{a} \right)} = \sqrt{4902.8 \left(\frac{2}{1837.4} - \frac{1}{1795.4} \right)} = 1.6143 \text{ km/s}$$

$$\Delta v_{16km} = v_{circ} - v_{a,16km} = 1.6335 - 1.6143 = 0.0192 \text{ km/s} \quad (19.2 \text{ m/s})$$

$$\epsilon_{H,16} = -\frac{4902.8}{2 \times 1795.4} \approx -1.3654 \frac{\text{Km}^2}{\text{s}^2} \quad V_{H2,16} = \sqrt{2 \left(-1.3654 + \frac{4902.8}{1753.4} \right)} \approx 1.6916 \frac{\text{Km}}{\text{s}}$$

Consumo propellente per $\Delta V = 19.2 \text{ m/s}$ (Caso 16 km):

$$m_{\text{prop},16km} = 1600 \cdot (1 - e^{-19.2/2844}) = 10.77 \text{ Kg}$$

Di seguito sono riportati i risultati di simulazione con i nuovi parametri implementati e confrontati col caso avente perilunio a 15 Km:

Perilunio	14 Km	15 Km	16 Km
Velocità iniziale [Km/s]	1.6931	1.6923	1.6916
Massa iniziale	1588.96 Kg	1589.07 Kg	1589.23 Kg
V_r atterraggio verticale	-2 m/s	-2 m/s	-2 m/s
h inizio atterraggio verticale	10 m	10 m	10 m
Massa finale del lander m_f	848.30 Kg	848.07 Kg	847.83 Kg
Tempo di discesa (fase 1) tf_1	456.41 s	456.62 s	456.87 s
Tempo di atterraggio (fase 2) tf_2	461.41 s	461.62 s	461.87 s

Tabella 4.4: Risultati per diversi valori di perilunio con massa corretta

Dalla tabella 4.4 si riscontra che il caso con perilunio a 14 Km risulta essere il più efficiente in termini di massa finale del lander (848.30 Kg), mentre quello a 16 Km richiede un maggiore consumo di propellente, comportando una massa finale inferiore (847.83 Kg).

Al diminuire del perilunio i risultati migliorano progressivamente, poiché viene sfruttata in modo più efficace la gravità lunare per l'ottimizzazione della traiettoria di atterraggio: l'energia potenziale gravitazionale viene convertita in energia cinetica utile in modo più efficiente.

Tuttavia, in missioni reali il perilunio non può essere abbassato arbitrariamente a causa delle irregolarità della superficie lunare e dei margini di sicurezza operativi.

I tempi di missione crescono progressivamente all'aumentare dell'altitudine del perilunio (da 461.41 secondi a 461.87 secondi), evidenziando che le traiettorie con perilunio più elevato richiedono manovre di durata maggiore.

Tutte le simulazioni raggiungono la convergenza e soddisfano i vincoli di missione imposti.

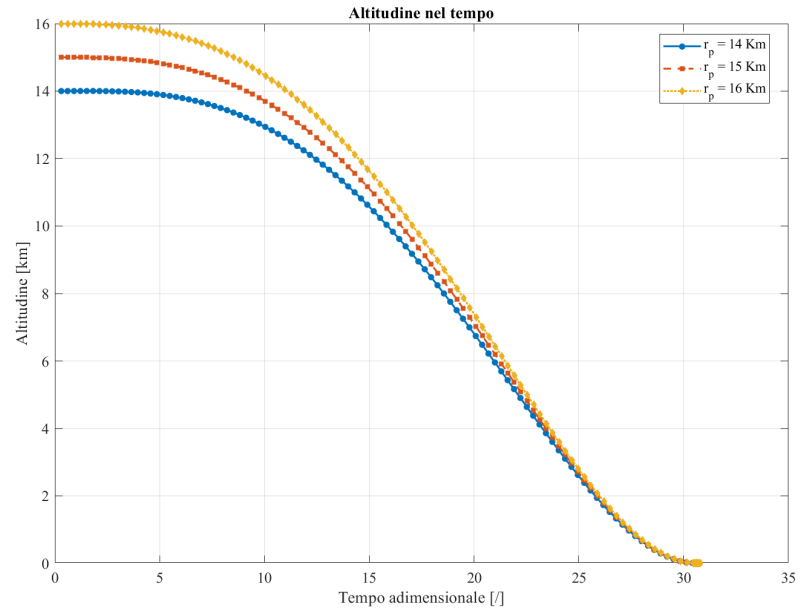


Figura 4.18: Variazione dell'altitudine nel tempo - Δr_p

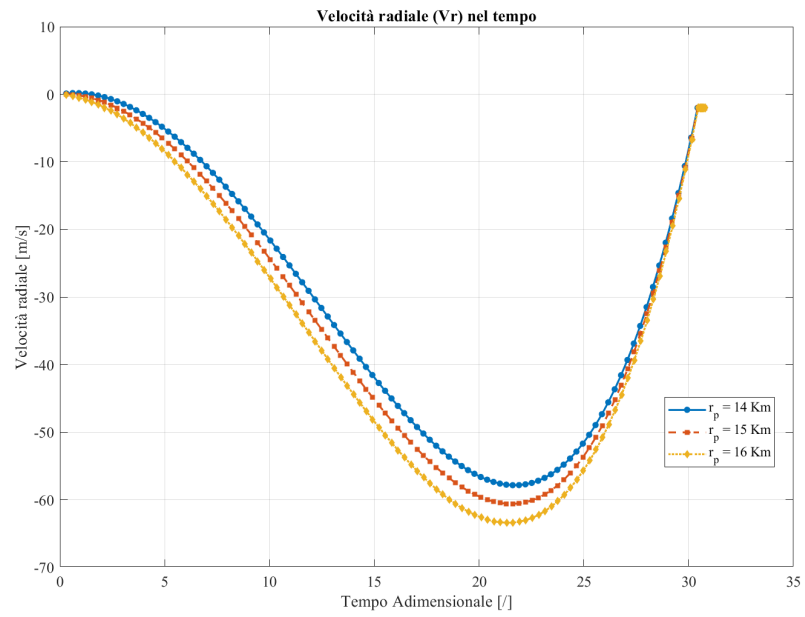


Figura 4.19: Andamento della velocità radiale (V_r) nel tempo - Δr_p

Dalla Figura 4.18 si deduce che, all'aumentare del perilunio, la pendenza del tratto rettilineo di discesa risulta più negativa. Inoltre, nella fase di discesa iniziale, viene mantenuta un'altitudine pressoché costante, dove la spinta si oppone prevalentemente alla componente orizzontale del moto, per un tempo più breve all'aumentare dell'altitudine del perilunio.

La velocità radiale rappresentata nella Figura 4.19 presenta valori in modulo crescenti all'aumentare del perilunio. In particolare, la V_r del caso a 16 Km raggiunge valori assoluti più elevati tra le tre configurazioni analizzate, conseguenza della maggiore differenza di altitudine da compensare durante la discesa.

Per quanto riguarda la velocità longitudinale, mostrata nella Figura 4.20, tutti i casi esaminati presentano una pendenza pressoché identica, con differenze trascurabili dal punto di vista numerico di simulazione.

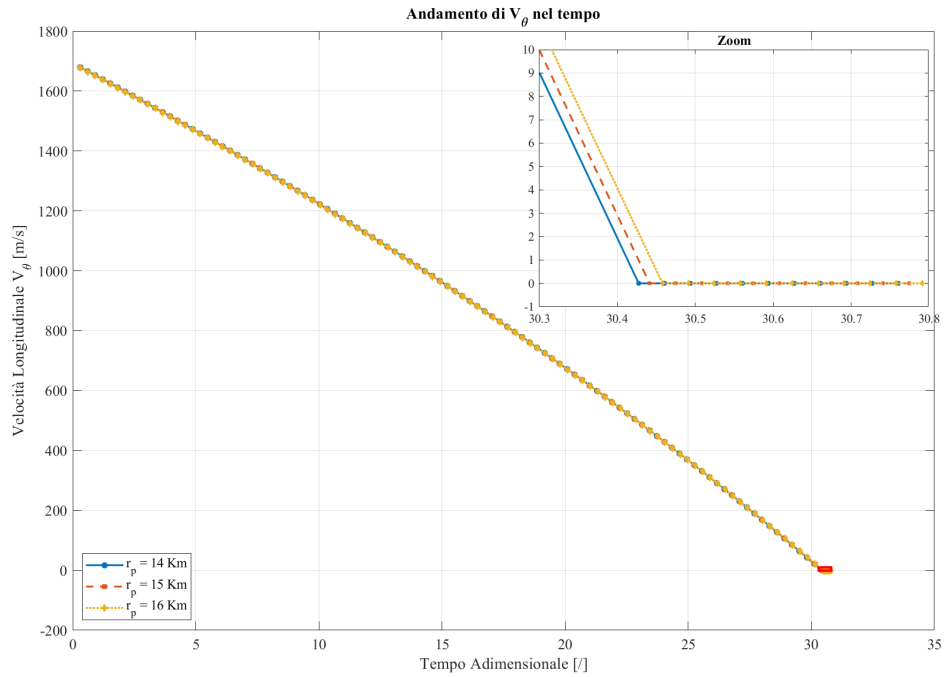


Figura 4.20: Andamento della velocità longitudinale (V_θ) nel tempo - Δr_p

Il vincolo di annullamento della V_θ alla fine della fase di discesa viene adeguatamente rispettato e mantenuto tale per tutta la durata della fase verticale.

Dalla figura 4.21 si osserva che, all'aumentare del perilunio, gli angoli di controllo sono maggiormente rivolti verso il basso durante la fase di discesa.

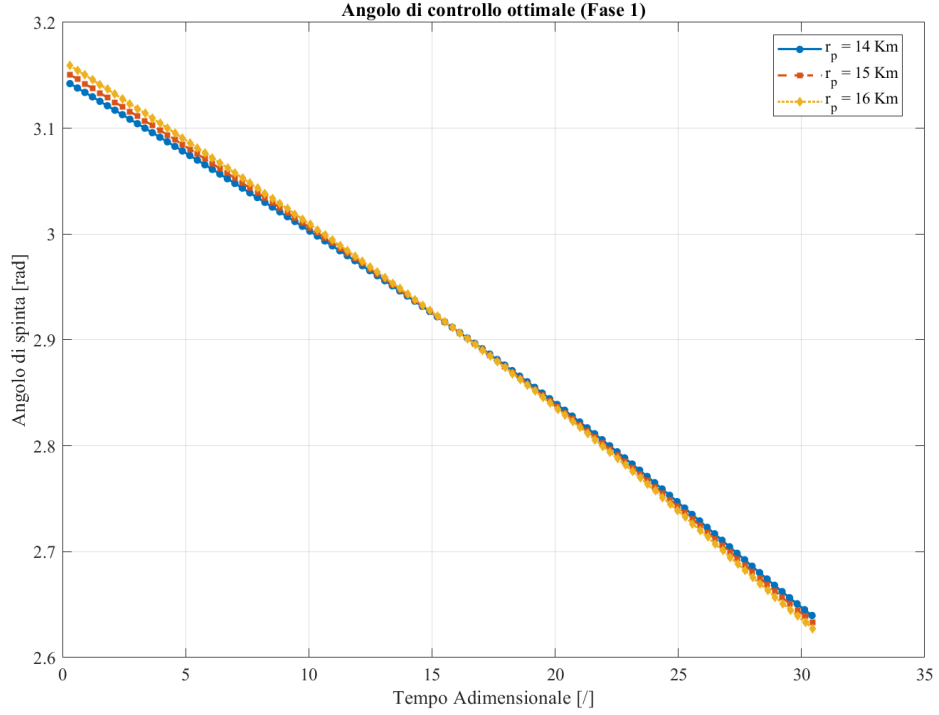


Figura 4.21: Angolo di controllo ottimale durante la Fase 1 - Δr_p

La configurazione con perilunio a 16 Km presenta la la pendenza più negativa dell'angolo di controllo tra le tre prove, in quanto questa simulazione richiede una traiettoria iniziale maggiormente deflessa verso il basso nella prima parte della fase di discesa.

Questa strategia di controllo è necessaria per soddisfare simultaneamente il vincolo di altitudine a 10 metri e per dissipare l'eccesso di energia potenziale data dall'altitudine maggiore.

Nella fase di discesa (fase 1), la spinta rimane ad un livello costante e massimo pari a 4600 N per ciascuna simulazione.

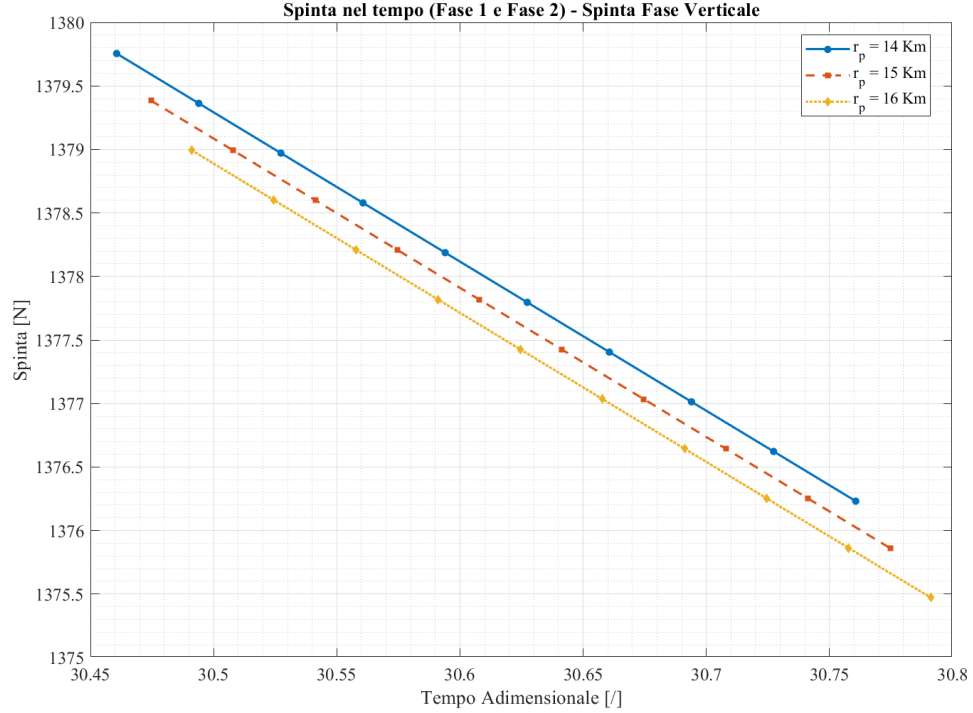


Figura 4.22: Spinta nel tempo per la fase verticale - Δr_p

Nella fase di atterraggio verticale (Figura 4.22) la spinta viene modulata per bilanciare esattamente il peso di ciascun nodo del lander ($T = m_i \cdot g_{\text{moon}}$). L'analisi dei dati e il grafico indicano che la configurazione ottimale corrisponde al perilunio di 14 Km.

4.3 Analisi di Sensibilità al Punto di Inizio della Fase di Discesa

L'obiettivo di questa sezione è confrontare tre diverse condizioni di inizio per la fase di discesa attorno al perilunio a 15 km: partendo da 15.5 km con velocità verticale negativa u (verso il basso), esattamente a 15 km con velocità orizzontale, e nuovamente da 15.5 km ma con velocità verticale u positiva (verso l'alto).

Per ottenere questi valori è stato necessario calcolare i parametri orbitali (a, e, p) e le componenti di velocità (v, u) a partire dall'anomalia vera (ν), partendo da una Hohmann il cui perilunio si trova a 15 km dalla superficie lunare media, ma i calcoli sono stati effettuati per il punto della Hohmann a 15.5 km dalla superficie media lunare.

$$\text{Raggio Apolunio } r_a = R_{\text{moon}} + 100 = 1737.4 + 100 = 1837.4 \text{ km}$$

$$\text{Raggio Perilunio } r_p = R_{\text{moon}} + 15 = 1737.4 + 15 = 1752.4 \text{ km}$$

Semiasse maggiore (a):

$$a = \frac{r_a + r_p}{2} = \frac{1837.4 + 1752.4}{2} = 1794.9 \text{ km}$$

Eccentricità (e):

$$e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} = \frac{1837.4 - 1752.4}{1837.4 + 1752.4} \approx 0.023678$$

Semilato retto (p):

$$p = a(1 - e^2) = 1794.9 \cdot (1 - 0.023678^2) \approx 1793.9 \text{ Km}$$

Analizzando il punto specifico a 15.5 km di quota:

$$r = R_{\text{moon}} + 15.5 = 1737.4 + 15.5 = 1752.9 \text{ km}$$

$$\cos \nu = \frac{\frac{p}{r} - 1}{e} = \frac{\frac{1793.9}{1752.9} - 1}{0.023678} \approx 0.987829$$

$$\nu = -\arccos(0.987829) \approx -8.95^\circ$$

Il segno negativo indica che ci si trova poco prima del perilunio.

Calcolo delle velocità tangenziale (orizzontale, v) e radiale (verticale, u):

$$h = \sqrt{\mu p}, \quad v = \sqrt{\frac{\mu}{p}}(1 + e \cos \nu), \quad u = \sqrt{\frac{\mu}{p}}e \sin \nu$$

$$v \approx \sqrt{\frac{4902.8}{1793.9}} \cdot (1 + 0.023678 \cdot 0.987829) \approx 1.69186 \text{ Km/s}$$

$$u \approx \sqrt{\frac{4902.8}{1793.9}} \cdot 0.023678 \cdot \sin(-8.95^\circ) \approx -0.006089 \text{ Km/s (circa -6.09 m/s)}$$

Questo valore negativo indica velocità verso il basso, molto piccola come previsto poco prima del periastro.

Di seguito è riportato il vettore di stato iniziale per il caso a 15.5 km con velocità verticale negativa (verso il basso):

```
y0 = [R_moon+15500; 0; 0; -6.09; 0; 1691.86; 1589.07];
%y0 = [r; delta ; theta ; V_r; V_delta ; V_theta ; m];
```

Nella tabella seguente (4.5) sono riportati tutti i risultati di simulazione:

Velocità di inizio discesa	V_{H2} (h=15.5km)	V_{H2} (h=15km)	V_{H2} (h=15.5km)
Velocità verticale iniziale [m/s]	-6.09	0	6.09
Velocità orbitale iniziale [km/s]	1.69186	1.6923	1.69186
V_r atterraggio verticale	-2 m/s	-2 m/s	-2 m/s
h inizio atterraggio verticale	10 m	10 m	10 m
Massa finale del lander m_f	847.95 Kg	848.07 Kg	847.90 Kg
Tempo di discesa (fase 1) t_{f1}	456.70 s	456.62 s	456.73 s
Tempo di atterraggio (fase 2) t_{f2}	461.70 s	461.62 s	461.73 s

Tabella 4.5: Risultati di simulazione per partenza da tre punti della Hohmann

Si deduce che i risultati migliori sono associati al perilunio di 15 Km (848.07 Kg). Le differenze in massa tra un caso e l'altro si aggirano tra i 120 grammi e i 170 grammi di propellente. Tutte le simulazioni convergono e rispettano i vincoli.

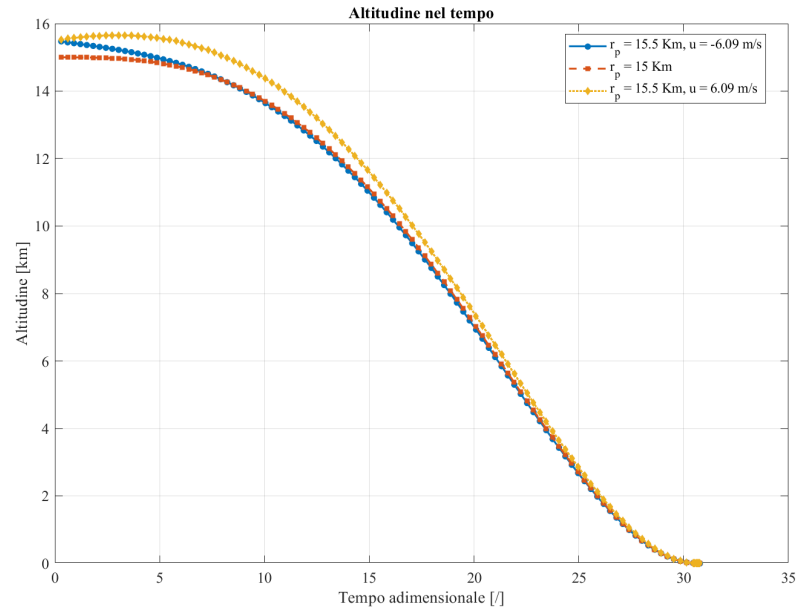


Figura 4.23: Variazione dell'altitudine nel tempo - Δr_p , Δu

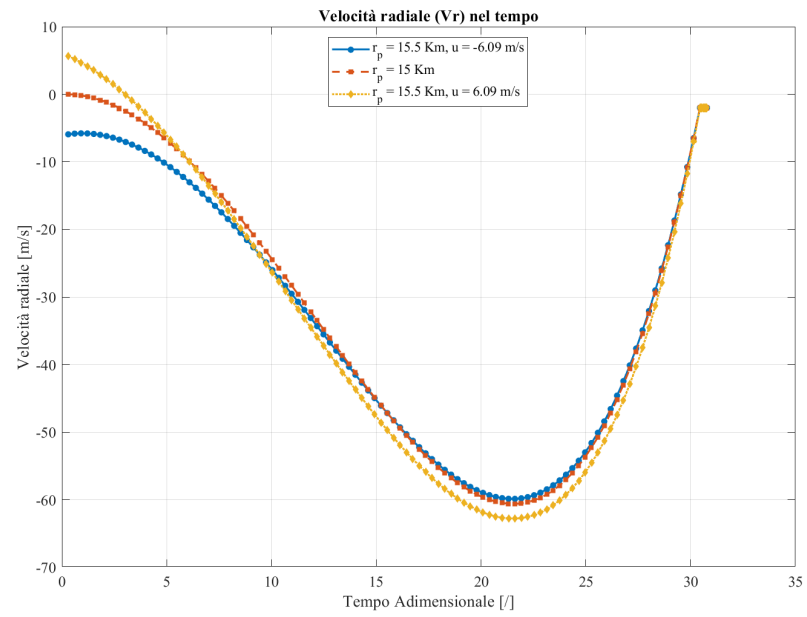


Figura 4.24: Andamento della velocità radiale (V_r) nel tempo - Δr_p , Δu

L'altitudine, nella Figura 4.23, mostra che la pendenza del tratto rettilineo di discesa con perilunio a 15 Km e 15.5 (u negativa) è pressochè identica, invece per il caso a 15.5 Km (u positiva) è più elevata, vista la velocità verticale positiva da compensare.

Le velocità iniziali nella Figura 4.24 sono congruenti a ciò che è stato impostato nel vettore di stato iniziale. Si noti come il caso a 15.5 Km (u positiva)) tenda ad assumere il valore in modulo più grande di V_r , fenomeno associato al dover contrastare la velocità verticale positiva con un valore più negativo per soddisfare i vincoli. Al contrario, il caso a 15.5 Km (u negativa) assume il valore più piccolo in modulo poichè favorito dal direzionamento negativo iniziale della velocità.

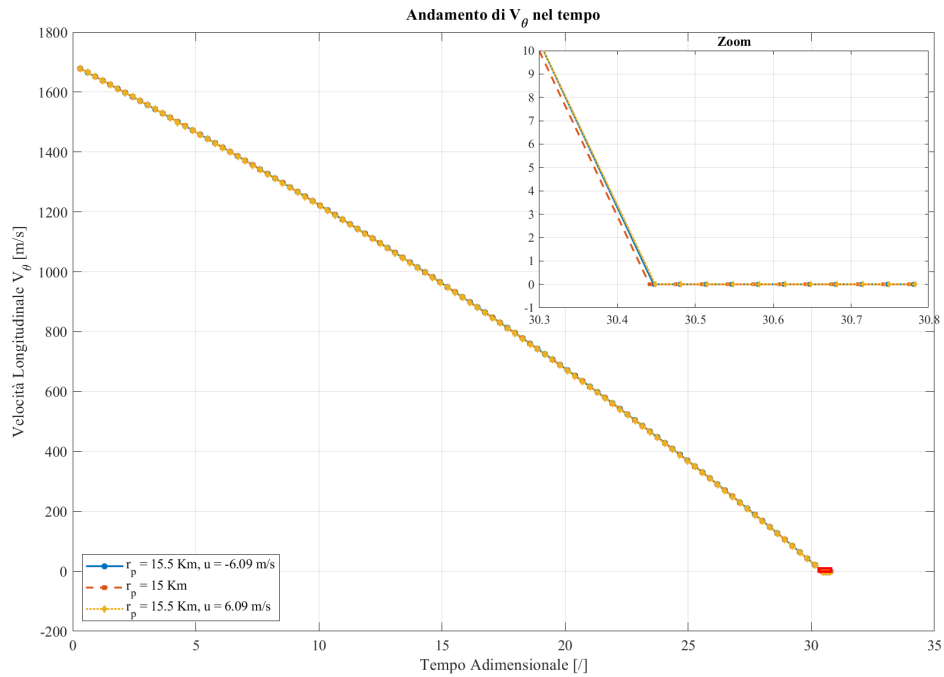


Figura 4.25: Andamento della velocità longitudinale (V_θ) nel tempo - Δr_p , Δu

Dalla Figura 4.25 si evince che l'andamento della velocità longitudinale V_θ è pressochè identico nei tre casi e rispetta il vincolo di annullamento alla fine della fase di discesa.

Dalla Figura 4.26 si deduce che l'angolo di controllo della spinta assume la pendenza più negativa per 15.5 Km (u positiva) tra i tre casi, poichè essendo presente una velocità verticale verso l'alto, si necessita che la spinta abbia una componente maggiore verso il basso per la parte iniziale della fase di discesa.

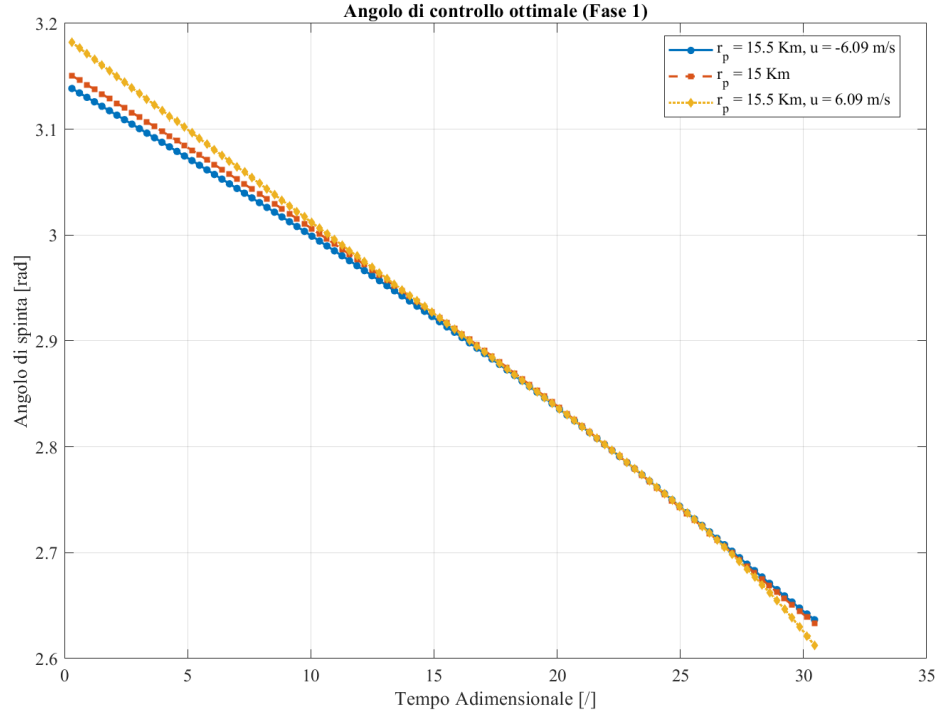


Figura 4.26: Angolo di controllo ottimale durante la Fase 1 - Δr_p , Δu

Al contrario, nella simulazione a 15.5 Km (u negativa), la componente negativa di quest'ultima favorisce la manovra di discesa e pertanto si richiede un angolo più piccolo.

Nella fase di discesa (fase 1), la spinta rimane ad un livello costante e massimo pari a 4600 N per ciascuna simulazione.

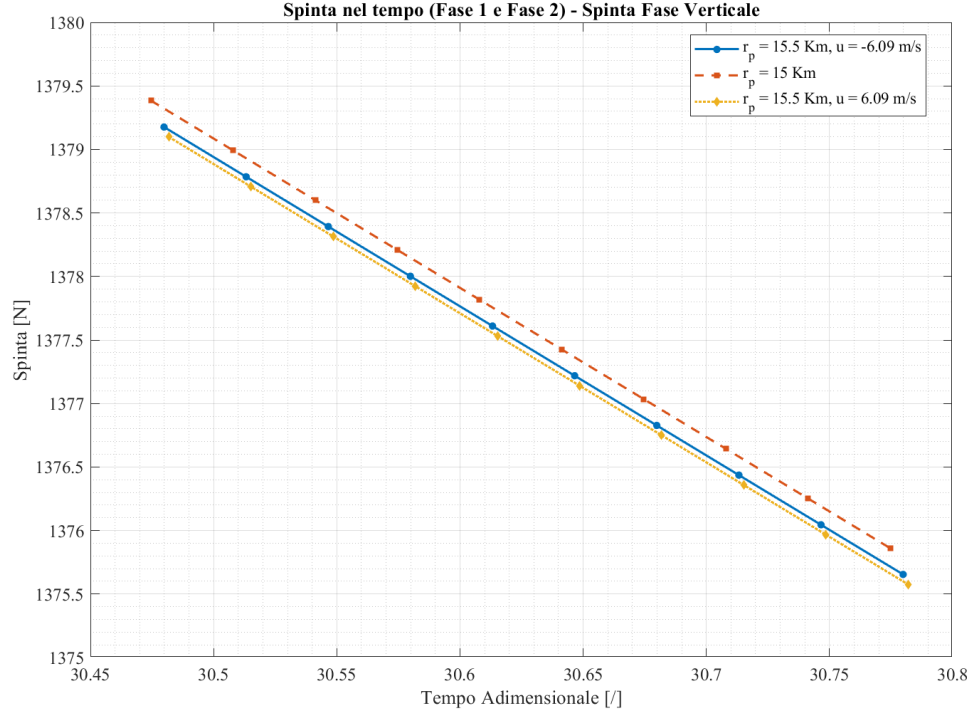


Figura 4.27: Spinta nel tempo per la fase verticale - Δr_p , Δu

Come si può notare dalla Figura 4.27, la spinta della fase verticale è pressochè uguale per tutti i casi. Solo il caso associato al perilunio (15 Km) presenta un valore finale di spinta più alto degli altri e pertanto il valore di massa finale del lander più elevato.

Conclusioni

Questo lavoro di tesi ha analizzato ed ottimizzato la traiettoria di allunaggio in coordinate sferiche considerando un moto prettamente nella direzione longitudinale, focalizzandosi su tre casi principali: l'analisi della spinta costante e ottimizzata, la variazione del perilunio, e la sensibilità al punto di inizio della fase di discesa. Tutte le simulazioni hanno previsto un atterraggio verticale a 10 metri dalla superficie media lunare con una velocità verticale costante di $-2 \frac{m}{s}$.

L'analisi del caso a spinta costante ed ottimizzata ha dimostrato che, in entrambi i casi, la spinta massima disponibile (4600 N) sia la più efficace per massimizzare la massa finale del lander. Il guadagno di massa si riduce man mano che aumenta il valore di spinta.

Per alcune simulazioni a spinta ottimizzata (4200 N, 4400 N e 4600 N), è stato osservato un comportamento *quasi-bang-bang*, tipico dei controlli ottimali con vincoli per la massimizzazione della massa finale del lander.

Il confronto tra spinta costante e ottimizzata a 4600 N ha rivelato una differenza minima nel guadagno di massa finale e propellente: la strategia ottimizzata è associata ad un guadagno pari allo 0.002% di propellente rispetto alla massa iniziale del lander. Questa differenza trascurabile suggerisce che una strategia a spinta costante, più semplice e affidabile, potrebbe essere preferibile in scenari operativi.

L'analisi della variazione del perilunio ha indicato che un perilunio a 14 Km risulta il più efficiente in termini di massa finale, rispetto ai 15 Km e 16 Km. Questo guadagno è dovuto a un più efficace sfruttamento della gravità lunare per l'ottimizzazione della traiettoria, tenendo però in considerazione che in missioni reali, il perilunio non può essere abbassato arbitrariamente per via delle irregolarità della superficie lunare e dei margini di sicurezza.

I risultati migliori per le tre diverse condizioni iniziali della fase di discesa sono associati al perilunio di 15 Km. L'analisi ha evidenziato che una velocità verticale iniziale positiva richieda un angolo di controllo della spinta più inclinato verso il

basso per iniziare la discesa, mentre una velocità verticale iniziale negativa favorisce la manovra.

Questi risultati offrono spunti importanti per la progettazione e l'ottimizzazione delle future missioni di allunaggio. Ulteriori implementazioni possono includere un'analisi latitudinale e una di componenti longitudinali e latitudinali combinate.

Un possibile sviluppo futuro può consistere nel superare le ipotesi semplificative riguardanti il lander puntiforme, considerando l'inerzia del corpo del lander e l'effetto di una spinta disallineata, oppure può essere associato all'implementazione del un campo gravitazionale non uniforme e il superamento dell'ipotesi di Luna perfettamente sferica. Riguardo al metodo di ottimizzazione, `fmincon` si è rivelato un solutore sensibile alle condizioni iniziali. Per tale motivo, per poter effettuare un'analisi più accurata, si potrebbe pensare di optare su solutori come `multistart`, che testano più punti di partenza per identificare la soluzione migliore, riducendo il rischio di convergere verso ottimi locali.

Elenco delle figure

1.1	Fasi Lunari	3
1.2	Immagine della faccia nascosta della Luna acquisita da <i>Luna 3</i> . . .	5
1.3	Saturn V	8
1.4	Apollo 11	9
1.5	Soft Landings Lunari effettuati dai programmi Luna, Surveyor e Apollo	10
1.6	Artemis I	12
1.7	Artemis II	13
1.8	Artemis III	14
3.1	Modello di discesa da Hohmann a 100 Km	30
3.2	Coordinate sferiche	33
4.1	Variazione dell'altitudine nel tempo - Spinta Costante	43
4.2	Andamento della velocità radiale (V_r) nel tempo - Spinta Costante .	43
4.3	Andamento della velocità longitudinale (V_θ) nel tempo - Spinta Costante	44
4.4	Angolo di controllo ottimale durante la Fase 1 - Spinta Costante . .	45
4.5	Spinta nel tempo per la fase verticale - Spinta Costante	46
4.6	Variazione dell'altitudine nel tempo - Spinta Ottimizzata	48
4.7	Andamento della velocità radiale (V_r) nel tempo - Spinta Ottimizzata	48
4.8	Andamento della velocità longitudinale (V_θ) nel tempo - Spinta Ottimizzata	49
4.9	Angolo di controllo ottimale durante la Fase 1 - Spinta Ottimizzata	50
4.10	Spinta nel tempo per la fase di discesa - Spinta Ottimizzata	50
4.11	Spinta nel tempo per la fase verticale - Spinta Ottimizzata	51
4.12	Variazione dell'altitudine nel tempo - Confronto Spinta	52
4.13	Andamento della velocità radiale (V_r) nel tempo - Confronto Spinta	53
4.14	Andamento della velocità longitudinale (V_θ) nel tempo - Confronto Spinta	54
4.15	Angolo di controllo ottimale durante la Fase 1 - Confronto Spinta .	54

4.16	Spinta nel tempo per la fase di discesa - Confronto Spinta	55
4.17	Spinta nel tempo per la fase verticale - Confronto Spinta	56
4.18	Variazione dell'altitudine nel tempo - Δr_p	59
4.19	Andamento della velocità radiale (V_r) nel tempo - Δr_p	59
4.20	Andamento della velocità longitudinale (V_θ) nel tempo - Δr_p	60
4.21	Angolo di controllo ottimale durante la Fase 1 - Δr_p	61
4.22	Spinta nel tempo per la fase verticale - Δr_p	62
4.23	Variazione dell'altitudine nel tempo - $\Delta r_p, \Delta u$	65
4.24	Andamento della velocità radiale (V_r) nel tempo - $\Delta r_p, \Delta u$	65
4.25	Andamento della velocità longitudinale (V_θ) nel tempo - $\Delta r_p, \Delta u$.	66
4.26	Angolo di controllo ottimale durante la Fase 1 - $\Delta r_p, \Delta u$	67
4.27	Spinta nel tempo per la fase verticale - $\Delta r_p, \Delta u$	68

Elenco delle tabelle

4.1	Risultati di simulazione per sei valori di spinta costante	42
4.2	Risultati di simulazione per sei valori di spinta ottimizzata	47
4.3	Confronto fra caso a spinta costante massima e spinta ottimizzata .	52
4.4	Risultati per diversi valori di perilunio con massa corretta	58
4.5	Risultati di simulazione per partenza da tre punti della Hohmann .	64

Bibliografia

- [1] «The Moon and Beyond: A New Era of Space Travel is Here». In: *National Geographic* (lug. 2019) (cit. a p. 3).
- [2] Wikipedia contributors. *Corsa allo spazio*. 2024. URL: https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Corsa_allo_spazio&oldid=146326774 (cit. a p. 4).
- [3] Wikipedia contributors. *Programma Luna*. 2024. URL: https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Programma_Luna&oldid=140796618 (cit. a p. 5).
- [4] NASA Science. *Lunar Ranger and Surveyor Programs*. URL: <https://science.nasa.gov/mission/lunar-ranger-and-surveyor/> (cit. a p. 6).
- [5] NASA. *The Apollo Program*. URL: <https://www.nasa.gov/the-apollo-program/> (cit. a p. 7).
- [6] Erik Gregersen. «Apollo 11». In: *Encyclopædia Britannica* (2025). URL: <https://www.britannica.com/topic/Apollo-11> (cit. a p. 9).
- [7] National Aeronautics and Space Administration (NASA). *Artemis*. Online. URL: <https://www.nasa.gov/artemis/>. (cit. a p. 11).
- [8] National Aeronautics and Space Administration (NASA). *Space Launch System (SLS)*. Online. URL: <https://www.nasa.gov/space-launch-system/>. (cit. a p. 11).
- [9] National Aeronautics and Space Administration (NASA). *Artemis I*. Online. URL: <https://www.nasa.gov/mission/artemis-i/>. (cit. a p. 11).
- [10] National Aeronautics and Space Administration (NASA). *Artemis II*. Online. URL: <https://www.nasa.gov/mission/artemis-ii/>. (cit. a p. 12).
- [11] National Aeronautics and Space Administration (NASA). *Artemis III*. Online. URL: <https://www.nasa.gov/mission/artemis-iii/>. (cit. a p. 13).
- [12] Wikipedia, L'enciclopedia libera. *Artemis 4*. URL: https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Artemis_4&oldid=146706936 (cit. a p. 14).
- [13] Jorge Nocedal e Stephen J. Wright. *Numerical Optimization*. Springer Series in Operations Research. Springer, 1999. ISBN: 0-387-98793-2 (cit. a p. 15).

- [14] Lin Ma, Zhijiang Shao, Weifeng Chen e Zhengyu Song. «Trajectory optimization for lunar soft landing with a Hamiltonian-based adaptive mesh refinement strategy». In: *Advances in Engineering Software* 100 (2016), pp. 266–276. ISSN: 0965-9978. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2016.08.002>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0965997816302411> (cit. alle pp. 20, 27, 51).
- [15] Mauro Pontani, Fabio Celani e Stefano Carletta. «Lunar descent and landing via two-phase explicit guidance and pulse-modulated reduced-attitude control». In: *Acta Astronautica* 212 (2023), pp. 672–685. DOI: 10.1016/j.actaastro.2023.07.037 (cit. alle pp. 20, 27).
- [16] Autori di Wikipedia. «Principio di Pontryagin». In: *Wikipedia, L'enciclopedia libera* (2024). URL: https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Principio_di_Pontryagin&oldid=142507516 (cit. a p. 20).
- [17] Giorgio Stefani. *Il principio del massimo di Pontryagin*. 2015. URL: https://giorgiostefani.weebly.com/uploads/5/2/5/6/52569167/pmp_%2820150527%29.pdf (cit. a p. 20).
- [18] Daniele Amore. «Downrange Analysis for Optimal Lunar Soft Precision Landing». A.Y. 2022/2023, Supervisor: Prof. Lorenzo Casalino. Master's Degree Thesis in Aerospace Engineering. Torino, Italia: Politecnico di Torino, 2023 (cit. alle pp. 22, 45).
- [19] Paul T. Boggs e Jon W. Tolle. «Sequential Quadratic Programming». In: *Acta Numerica* (1996), pp. 1–52 (cit. a p. 23).
- [20] The MathWorks, Inc. *fmincon - Optimization Toolbox™ User's Guide*. The MathWorks, Inc. Natick, Massachusetts, 2025 (cit. a p. 25).
- [21] Jason M. Everett e Anand R. Iyer. «Path-adaptive guidance algorithm trades for a two-stage lunar descent vehicle». In: *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*. 2023 (cit. a p. 27).
- [22] Wikipedia contributors. *Lunar Crater Observation and Sensing Satellite*. 2024. URL: https://it.wikipedia.org/wiki/Lunar_Crater_Observation_and_Sensing_Satellite (cit. a p. 29).
- [23] Huiping Chu, Lin Ma, Kexin Wang, Zhijiang Shao e Zhengyu Song. «Trajectory Optimization for Lunar Soft Landing with Complex Constraints». In: *Advances in Space Research* 60 (lug. 2017). DOI: 10.1016/j.asr.2017.07.024 (cit. alle pp. 30, 34).
- [24] Dong-Hyun Cho, Donghoon Kim e Henzesh Leeghim. «Optimal Lunar Landing Trajectory Design for Hybrid Engine». In: *Mathematical Problems in Engineering* 2015 (2015), pp. 1–8. DOI: <https://doi.org/10.1155/2015/462072> (cit. alle pp. 34, 44).

