



**Politecnico
di Torino**

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN INGEGNERIA AEROSPAZIALE

Tesi di laurea magistrale

**Studio numerico del fenomeno di
isteresi in un ugello parabolico**

Relatore:

Prof. Martelli Emanuele

Studente:

Antonio Altavilla

Anno Accademico 2024/2025

Indice

1	Introduzione	1
2	Richiami su endoreattori e ugelli	2
2.1	Modello di endoreattore ideale	2
2.2	Ugelli	4
2.2.1	Ugello TIC	6
2.2.2	Ugello TOP	6
3	Separazione	8
3.1	Punto di vista analitico	9
3.2	Interazione strato limite-onda d'urto	10
3.3	Regimi di separazione	13
3.3.1	Free Shock Separation	13
3.3.2	Restricted Shock Separation	15
3.4	Transizione FSS-RSS	17
3.5	Isteresi	18
4	Richiami di fluidodinamica computazionale	19
4.1	Equazioni di conservazione	19
4.2	Turbolenza	20
4.3	Modelli di turbolenza	22
4.4	Strato limite	22
4.4.1	Requisiti su y^+	24
5	Caso studio: Ugello parabolico	25
5.1	Dominio computazionale	25
5.2	Condizioni al contorno	27
5.3	Valutazione modelli di turbolenza	29
5.3.1	Modello SST $k - \omega$	29
5.3.2	Modello Spalart-Allmaras	33
5.3.3	Confronto in FSS	36

5.3.4	Confronto in RSS	38
5.4	Valutazione mesh	43
5.4.1	Mesh 2	44
5.4.2	Confronto in FSS	47
5.4.3	Confronto in RSS	47
6	Conclusioni	53
A	Validazione con ugello TIC	55
A.1	Caso con solo ugello	55
A.1.1	Mesh	55
A.1.2	Condizioni al contorno	56
A.1.3	Modelli di turbolenza	57
A.2	Caso con campo esterno	59
A.2.1	Mesh campo esterno	59
A.2.2	Mesh campo interno	61
A.2.3	Mesh completa	62
A.3	Scelta modello turbolenza	63
A.3.1	Confronto pressione a parete	63
A.3.2	Confronto pressione assiale	65
A.3.3	Confronto campi di Mach	66
B	Output vari	69
B.1	Parametro turbolento y^+ a parete	69
B.1.1	Modello SST $k - \omega$, mesh 1	69
B.1.2	Modello Spalart-Allmaras, mesh 1	71
B.1.3	Modello SST $k - \omega$, mesh 2	73

Elenco delle tabelle

1	Sigle presenti nell'elaborato	vii
5.1	Caratteristiche dimensionali ugello parabolico	25
5.2	Caratteristiche mesh 1 ugello parabolico	26
5.3	Pressioni di camera al variare del NPR	28
5.4	Punto di separazione in funzione del modello di turbolenza	40
5.5	Caratteristiche mesh 2 ugello parabolico	43
5.6	Punto di separazione in funzione della mesh	50
A.1	Punto di separazione in funzione del modello di turbolenza	64

Elenco delle figure

2.1	Effetto di vari parametri sul coefficiente di spinta [17]	4
2.2	Campi di Mach per vari profili di ugelli [16]	5
2.3	Profilo ugello troncato ideale (TIC) [16]	6
2.4	Profilo ugello parabolico (TOP)[16]	7
3.1	Modello studio di Chapman [16]	10
3.2	Valori notevoli di pressione nella separazione[16]	11
3.3	Criterio empirico di Erdos [16]	12
3.4	Configurazione Free Shock Separation [7]	13
3.5	Profilo di pressione a parete caso FSS [16]	14
3.6	Configurazione Restricted Shock Separation [7]	15
3.7	Profilo di pressione a parete caso RSS [16]	16
3.8	Sovrapposizione dei regimi di separazione[19]	17
4.1	Transizione laminare-turbolento [2]	22
4.2	Grafico grandezze adimensionali nello strato limite [2]	23
5.1	Profilo ugello parabolico	25
5.2	Profilo ugello parabolico con dominio esterno	26
5.3	Focus sulla mesh 1	27
5.4	Dominio ugello parabolico con condizioni al contorno	28
5.5	Campi di Mach NPR=10 con SST $k - \omega$	29
5.6	Campi di Mach NPR=12 con SST $k - \omega$	30
5.7	Campi di Mach NPR=14 con SST $k - \omega$	30
5.8	Campi di Mach NPR=16 con SST $k - \omega$	30
5.9	Campi di Mach NPR=18 con SST $k - \omega$	31
5.10	Campo di Mach NPR=20 con SST $k - \omega$	31
5.11	Profili di pressione a parete in fase di start up con modello SST $k - \omega$	32
5.12	Profili di pressione a parete in fase di shut down con modello SST $k - \omega$	32
5.13	Campi di Mach NPR=10 con Spalart-Allmaras	33
5.14	Campi di Mach NPR=12 con Spalart-Allmaras	33

5.15	Campi di Mach NPR=14 con Spalart-Allmaras	33
5.16	Campi di Mach NPR=16 con Spalart-Allmaras	34
5.17	Campi di Mach NPR=18 con Spalart-Allmaras	34
5.18	Campo di Mach NPR=20 con Spalart-Allmaras	34
5.19	Pressione a parete in fase di start up con modello Spalart-Allmaras .	35
5.20	Pressione a parete in fase di shut down con modello Spalart-Allmaras	35
5.21	Caso test 1: FSS a NPR=14 [16]	36
5.22	Confronto campo di Mach a NPR=14	36
5.23	Confronto andamento pressione a parete a NPR=14	37
5.24	Caso test 2: RSS a NPR=16 [16]	38
5.25	Confronto campo di Mach a NPR=16	38
5.26	Confronto andamento pressione a parete a NPR=16	39
5.27	Confronto y^+ per NPR=16	40
5.29	Ciclo di isteresi del punto di separazione con mesh 1	41
5.30	Confronto ciclo di isteresi del punto di separazione con i due modelli di turbolenza (mesh 1)	43
5.31	Campi di Mach NPR=10 con mesh 2	44
5.32	Campi di Mach NPR=12 con mesh 2	44
5.33	Campi di Mach NPR=14 con mesh 2	44
5.34	Campi di Mach NPR=16 con mesh 2	45
5.35	Campi di Mach NPR=18 con mesh 2	45
5.36	Campi di Mach NPR=20 con mesh 2	45
5.37	Profili di pressione a parete in fase di start up con mesh 2	46
5.38	Profili di pressione a parete in fase di shut down con mesh 2	46
5.39	Comparazione mesh sul caso test FSS a NPR=14	47
5.40	Comparazione mesh sul caso test RSS a NPR=16, fase di start up . .	48
5.41	Comparazione mesh sul caso test RSS a NPR=16, fase di shut down .	48
5.42	Ciclo di isteresi del punto di separazione con mesh 2	49
5.43	Confronto ciclo di isteresi del punto di separazione con le due mesh (modello SST $k - \omega$)	50
5.45	Andamento carichi laterali al variare del NPR nelle due fasi [16] . . .	51
A.1	Profilo ugello TIC	55
A.2	Mesh iniziale ugello TIC	56
A.3	campo di Mach solo ugello con modelli di turbolenza	57
A.4	campo di pressione statica solo ugello con modelli di turbolenza . . .	57
A.5	Focus sullo strato limite	58
A.6	Andamento parametro turbolento y^+ nei modelli di turbolenza	58
A.8	Profili grandezze assiali al variare delle mesh del farfield	61
A.9	Caratteristiche mesh del campo interno all'ugello	61
A.10	Confronto profili di pressione statica a parete mesh interne	62

A.11	Confronto profilo di pressione a parete tra modelli di turbolenza	63
A.12	Confronto profilo di pressione assiale tra modelli di turbolenza	65
A.13	Campo di Mach per i vari modelli di turbolenza	66
A.14	Campo di viscosità turbolenta per i vari modelli di turbolenza	67
A.15	Campo del gradiente di densità per i vari modelli di turbolenza	68
B.1	Andamento y^+ a parete per NPR=10 (k- ω , mesh 1)	69
B.2	Andamento y^+ a parete per NPR=12 (k- ω , mesh 1)	70
B.3	Andamento y^+ a parete per NPR=14 (k- ω , mesh 1)	70
B.4	Andamento y^+ a parete per NPR=16 (k- ω , mesh 1)	70
B.5	Andamento y^+ a parete per NPR=18 (k- ω , mesh 1)	71
B.6	Andamento y^+ a parete per NPR=20 (k- ω , mesh 1)	71
B.7	Andamento y^+ a parete per NPR=10 (Spalart-Allmaras, mesh 1)	71
B.8	Andamento y^+ a parete per NPR=12 (Spalart-Allmaras, mesh 1)	72
B.9	Andamento y^+ a parete per NPR=14 (Spalart-Allmaras, mesh 1)	72
B.10	Andamento y^+ a parete per NPR=16 (Spalart-Allmaras, mesh 1)	72
B.11	Andamento y^+ a parete per NPR=18 (Spalart-Allmaras, mesh 1)	73
B.12	Andamento y^+ a parete per NPR=20 (Spalart-Allmaras, mesh 1)	73
B.13	Andamento y^+ a parete per NPR=10 (k- ω , mesh 2)	73
B.14	Andamento y^+ a parete per NPR=12 (k- ω , mesh 2)	74
B.15	Andamento y^+ a parete per NPR=14 (k- ω , mesh 2)	74
B.16	Andamento y^+ a parete per NPR=16 (k- ω , mesh 2)	74
B.17	Andamento y^+ a parete per NPR=18 (k- ω , mesh 2)	75
B.18	Andamento y^+ a parete per NPR=20 (k- ω , mesh 2)	75

Elenco delle sigle

Sigla	Descrizione
<i>TOP</i>	Thrust Optimized Parabolic
<i>TIC</i>	Truncated Ideal Contour
<i>CFD</i>	Computational Fluid Dynamics
<i>FSS</i>	Free Shock Separation
<i>RSS</i>	Restricted Shock Separation
<i>NPR</i>	Nozzle Pressure Ratio
<i>TOC</i>	Thrust Optimized Contour
<i>RANS</i>	Reynolds-averaged Navier Stokes
<i>SP</i>	Separation Point
<i>TP</i>	Triple Point
<i>SJ</i>	Supersonic Jet
<i>MD</i>	Mach Disk
<i>AMD</i>	Anular Mach Disk
<i>QP</i>	Quadruple Point
<i>DNS</i>	Direct Numerical Solution
<i>LES</i>	Large Eddy Simulation
<i>SST</i>	Shear Stress Transport
<i>MSE</i>	Mean Squared Error
<i>BC</i>	Boundary Condition

Tabella 1: Sigle presenti nell'elaborato

Sommario

Nel seguente studio si propone di analizzare l'andamento isteretico del punto di separazione all'interno di un ugello TOP (Thrust Optimized Parabolic) soggetto a condizioni di sovraespansione, riferendosi alla fase di start-up. Tale studio riveste particolare interesse nella valutazione dell'efficienza degli ugelli, delle prestazioni del sistema propulsivo al variare delle condizioni operative.

Lo studio si è svolto mediante simulazioni CFD condotte con il software ANSYS FLUENT; è stato investigato il comportamento del flusso interno all'ugello al variare del Nozzle Pressure Ratio. L'analisi, svolta sulla variazione sia crescente che decrescente del Nozzle Pressure Ratio, ha dimostrato la presenza di due regimi di separazione, con relativa transizione e ri-transizione. Nello specifico queste due configurazioni sono denominate Free Shock Separation (FSS) e Restricted Shock Separation (RSS).

Avvalendosi di un caso test per valutare il modello di turbolenza e la mesh più idonea allo studio dell'ugello parabolico è stato operato un controllo con i dati sperimentali relativi ad una geometria differente, riferendosi ad un ugello TIC.

Sono state utilizzate diverse mesh di riferimento, al fine di valutare la sensibilità numerica dei risultati ottenuti e garantire l'accuratezza delle simulazioni RANS effettuate. Inoltre, è stato effettuato un confronto in termini di modello di turbolenza (SST $k - \omega$ e Spalart-Allmaras), per determinare il più idoneo alla previsione del fenomeno della separazione e a quello dell'isteresi.

Capitolo 1

Introduzione

Nel contesto progettuale di un endoreattore assume particolare rilievo il ruolo dell'ugello di espansione, componente protagonista della conversione di energia termica in cinetica, quindi della generazione di spinta all'interno dell'endoreattore.

L'efficienza dell'ugello, fondamentale per l'ottimizzazione delle prestazioni offerte dal sistema, risulta essere influenzato dalla geometria e dalla tipologia dell'ugello, oltre che dal rapporto d'area che lo caratterizza.

In fase di progetto si possono riscontrare condizioni non ottimali che causano perdite di prestazioni, ad esempio fenomeni di separazione dello strato limite turbolento a parete, potenzialmente pericolosi per la stabilità del sistema propulsivo.

Tali fenomeni minacciano la stabilità in quanto sono causa di carichi instazionari definiti *side loads*, carichi laterali; questi possono verificarsi sia nella fase di start up che in quella di shut down, tendenzialmente a livello del mare, perciò in condizioni di sovraespansione, quindi con la pressione di uscita maggiore di quella ambiente.

Il seguente elaborato si prepone di analizzare l'andamento del punto di separazione di un ugello in condizioni di sovraespansione, con la conseguente estrapolazione del suo andamento isteretico al variare del Nozzle Pressure Ratio; infatti è possibile valutare un posizionamento differente del punto di separazione a parità di NPR che dipende dalla variazione crescente o decrescente della pressione di camera.

Dopo la generazione di un dominio computazionale con scelta della mesh e del modello di turbolenza più adatti, viene eseguita un'analisi numerica mediante simulazioni di tipo RANS considerando come condizione iniziale la soluzione stazionaria relativa al NPR precedente; l'analisi è inoltre svolta su un modello in scala di ugello dal profilo parabolico (TOP).

Capitolo 2

Richiami su endoreattori e ugelli

2.1 Modello di endoreattore ideale

Per comprendere le varie fasi dell'analisi è necessario richiamare alcune definizioni fondamentali sugli endoreattori.

A tale scopo viene considerato il modello di endoreattore ideale, con le seguenti ipotesi semplificative[17]:

- flusso omogeneo
- regime stazionario;
- fluido a composizione costante (frozen equilibrium);
- fluido analizzato approssimato a gas perfetto con γ costante;
- espansione adiabatica;
- assenza di discontinuità e di effetti dello strato limite;
- getto in uscita uniforme e unidimensionale;
- equilibrio chimico in camera di combustione;

La spinta è definita dalla relazione

$$S = \dot{m}u_e + A_e(p_e - p_0) \quad (2.1)$$

che mostra valori massimi in condizioni di getto adattato, ovvero quando la pressione di uscita è pari a quella ambiente ($p_e = p_0$).

Un altro parametro prestazionale è la velocità efficace di scarico, intesa come rapporto tra spinta e portata:

$$c = \frac{S}{\dot{m}} \quad (2.2)$$

Attraverso manipolazioni analitiche si possono ricavare altri due parametri: la velocità caratteristica c^* e il coefficiente di spinta C_F . Il primo misura l'efficienza della combustione del propellente, mentre il secondo è un indicatore dell'effetto benefico dell'ugello sulla spinta generata:

$$c = \frac{S}{\dot{m}} = \frac{p_c A_t}{\dot{m}} \frac{S}{p_c A_t} = c^* \cdot C_F \quad (2.3)$$

La velocità caratteristica dipende dall'efficienza della combustione, dal propellente e dal mixture ratio α , inteso come il rapporto in termini di portate tra di ossidante e combustibile. Invece, il coefficiente di spinta è funzione del rapporto di espansione ϵ , del parametro γ e del NPR.

Un altro parametro prestazionale di rilievo è l'impulso specifico, ovvero il tempo durante il quale l'endoreattore riuscirebbe a sostenere una spinta pari al proprio peso. Analiticamente

$$I_s = \frac{c}{g_0} = \frac{c^* C_F}{g_0} \quad (2.4)$$

Secondo il modello di endoreattore ideale, si può esprimere il coefficiente di spinta come

$$C_F\left(\epsilon, \gamma, \frac{p_c}{p_a}\right) = \Gamma \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \left[\left(\frac{p_e}{p_c} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]} + \epsilon \left(\frac{p_e}{p_c} - \frac{p_a}{p_c} \right) = C_{F,vac} - \epsilon \frac{p_0}{p_c} \quad (2.5)$$

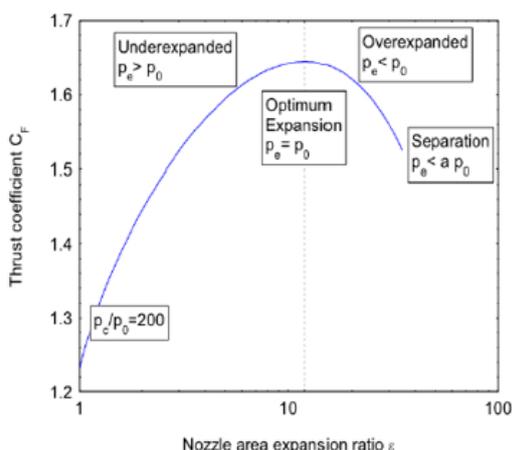
Dal grafico 2.1a si nota che il massimo del coefficiente di spinta si ottiene in condizioni di adattamento. Lo studio si concentra sulla zona a destra del punto massimo, indicativa di un getto sovraespanso, in cui l'ultima parte dell'ugello non contribuisce alla spinta, poiché la formazione di onde d'urto interne provoca la separazione del flusso.

Nel grafico 2.1b si osserva come i massimi delle curve parametrizzate rispetto al rapporto di pressione si spostano verso valori di ϵ maggiori. Si evince che nelle varie fasi durante l'ascesa verticale la scelta di un rapporto di espansione ottimale risulti complessa.

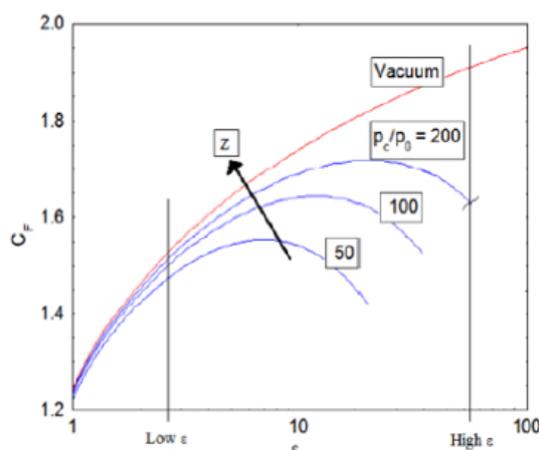
Dal grafico 2.1c si osserva come a quote elevate sia ottimale un ϵ alto, mentre a quote basse un ϵ basso. La problematica della separazione è rappresentato dalla zona in basso a sinistra, quindi ad ϵ alto a quote basse.

Nel grafico 2.1d si osserva come a dato rapporto di pressione il coefficiente di spinta abbia andamento discorde rispetto a γ .

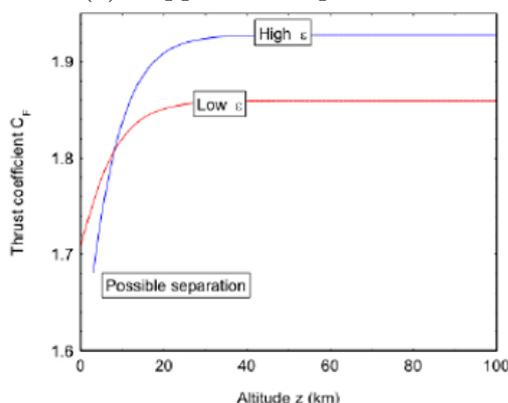
In sintesi, nel contesto progettuale di un ugello sarà necessario eseguire un trade off, scegliendo un rapporto di espansione il più alto possibile, che non superi la soglia critica di separazione. [17]



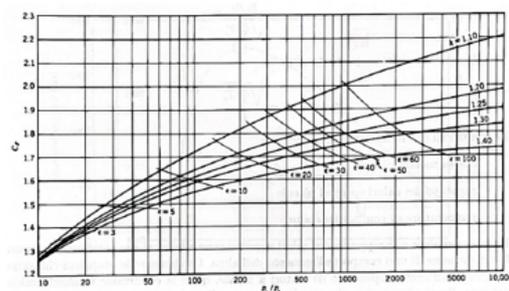
(a) Rapporto di espansione



(b) Rapporto di pressioni



(c) Quota



(d) Coefficiente del fluido

Figura 2.1: Effetto di vari parametri sul coefficiente di spinta [17]

2.2 Ugelli

Alla luce dei vincoli descritti, nella progettazione di un ugello il rapporto di espansione assume un ruolo centrale.

Essendo questo parametro tipicamente fisso risulta necessario scegliere tra la condizione di adattamento nella fase di ascesa, quindi con ϵ bassi, e la condizione definita da un valore elevato che si adatti alle condizioni di vuoto. Entrambe risultano delle situazioni in cui le perdite non sono certamente trascurabili; il giusto compromesso sarebbe rappresentato da ugelli a geometria variabile, che rendono possibile l'adattamento continuo.

La risposta a tali vincoli ha portato allo sviluppo di diverse configurazioni per la parte divergente dell'ugello. Le più comuni sono:

- ugello TIC (Truncated Ideal Contour);
- ugello TOC (Thrust Optimized Contour);
- ugello TOP (Thrust Optimized Parabolic).

Dai campi di Mach è possibile avere una prima idea su quella che è la posizione approssimata dell'urto interno all'ugello, definito dalla linea nera.

Uno dei metodi più utilizzati per la creazione del profilo di un ugello è quello delle linee caratteristiche (MOC), in quanto l'iperbolicità delle equazioni di Eulero fa sì che le caratteristiche del flusso siano unicamente derivate dalle condizioni a monte[16]. Tale metodo mira principalmente di evitare la formazione di urti, quindi la coalescenza delle linee caratteristiche, garantendo la riduzione delle perdite di divergenza.

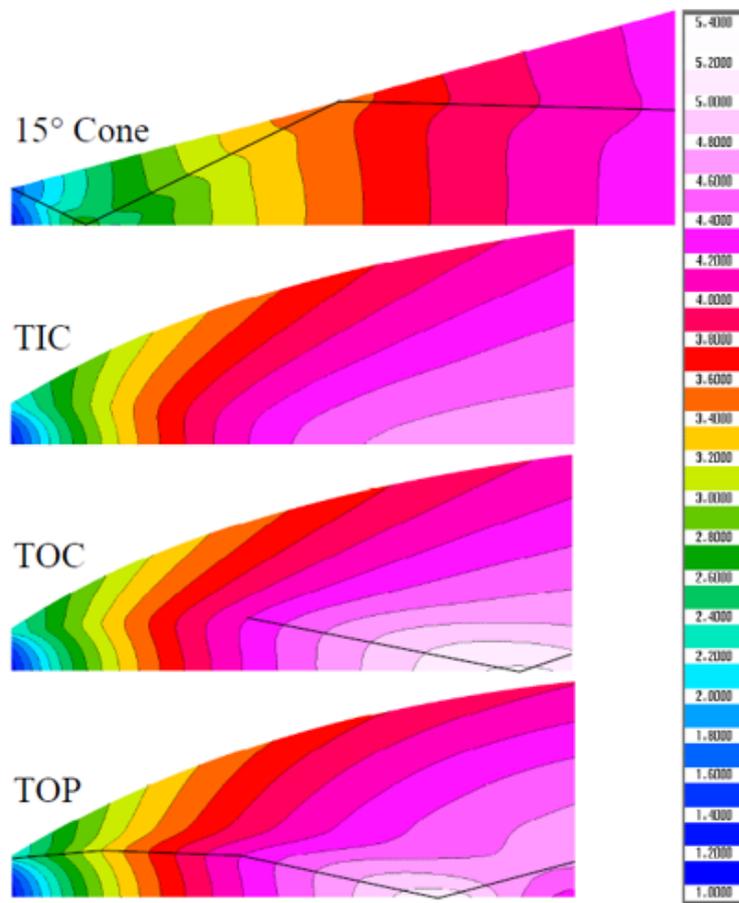


Figura 2.2: Campi di Mach per vari profili di ugelli [16]

2.2.1 Ugello TIC

L'ugello definito dal metodo delle linee caratteristiche è detto *ugello ideale*; nel flusso progettuale l'unico parametro necessario per tale ugello è il Mach di progetto, che fissa il valore di θ_N , in modo da ricavare il punto N, quindi la porzione di espansione iniziale.

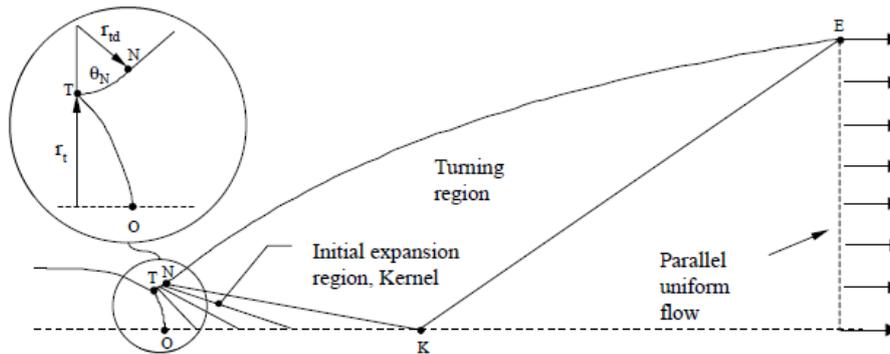


Figura 2.3: Profilo ugello tronco ideale (TIC) [16]

Il metodo MOC consente di determinare la regione compresa tra i punti T–N–K–O, definita come campo di flusso interno.

Un altro punto notevole è il punto K, posto sull'asse dell'ugello, che rappresenta il raggiungimento di un valore di Mach pari a quello di progetto.

Il limite principale dell'ugello ideale è la sua estensione assiale, che comporta ingombri eccessivi, peso maggiore e perdite dovute allo strato limite.

Inoltre il contributo dell'ultimo tratto dell'ugello non contribuisce in modo importante alla spinta, perciò risulta privo di svantaggi troncato l'ugello ideale, creando un profilo TIC.

All'interno di tali ugelli il fenomeno della separazione consiste nel distacco dello strato limite da parete, il quale procede come getto libero: tale configurazione è definita Free Shock Separation.

Un profilo della tipologia TIC sarà oggetto dell'analisi numerica di validazione per il presente lavoro.

2.2.2 Ugello TOP

L'ugello TOP nasce concettualmente dalla semplificazione dell'ugello TOC, definendone grande facilità costruttiva.

I parametri di progetto per tale ugello risultano: l'angolo di ingresso θ_i , l'angolo di uscita θ_e , la lunghezza del tratto divergente l_{div} e il rapporto di espansione ϵ .

Date queste variabili indipendenti l'obiettivo del progetto è ottimizzare la spinta attraverso la combinazione di questi parametri.

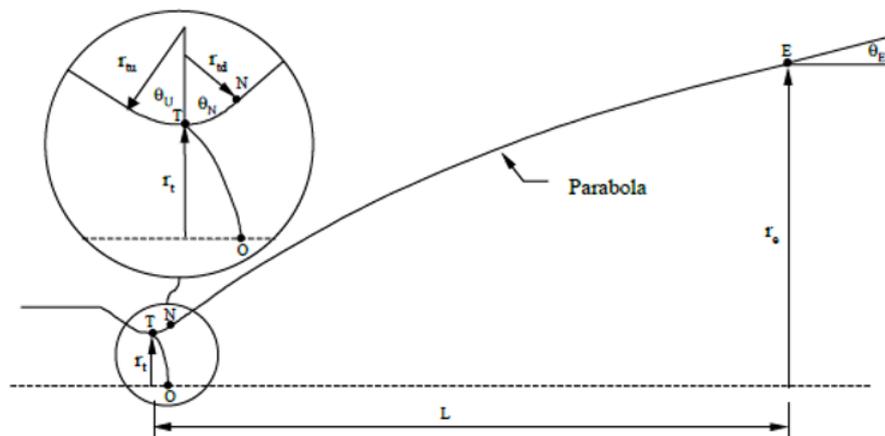


Figura 2.4: Profilo ugello parabolico (TOP)[16]

Se nell'ugello TIC si annullano le possibilità di generare onde d'urto, non è possibile farlo nell'ugello TOP; l'onda d'urto interna che si genera non produce perdite significative. L'aspetto per cui tale discontinuità è oggetto di studio è legato alla configurazione che si crea al getto a valle della separazione da parete: nell'ugello TOP oltre alla configurazione FSS, si presenta per un certo range di NPR una configurazione definita "Restricted Shock Separation" (RSS).

La RSS è caratterizzata da un sistema di urti detto *cap shock pattern*, e dalla formazione di una bolla di ricircolo chiusa, dovuta al riattaccamento del flusso a valle del punto di separazione.[16]

Un profilo della tipologia TOP sarà l'oggetto di studio del presente lavoro.

Capitolo 3

Separazione

Nella trattazione di flussi che lambiscono una superficie solida risulta di fondamentale importanza lo studio dello strato limite e del conseguenziale fenomeno della separazione.

Nel 1904 Prandtl dimostrò che i flussi in prossimità di una parete possono suddividersi in due regioni: uno strato sottile in prossimità del corpo, denominato strato limite (boundary layer), su cui sono predominanti gli effetti di attrito viscoso; invece, meno vicino alla parete si manifesta un flusso su cui l'attrito presenta effetti trascurabili.

Perciò sul flusso dello strato limite si manifestano due interazioni: la condizione di no-slip a parete rallenta tale porzione di flusso, che invece è portato ad accelerare dalla presenza del flusso potenziale più esterno.

Quindi l'insorgenza della separazione è regolata dal gradiente di pressione: difatti un gradiente di pressione favorevole o nullo induce all'attaccamento del flusso a parete; se invece si presenta un gradiente di pressione avverso, si ha il distacco dello strato limite da parete e la conseguenziale formazione di una bolla di ricircolo a valle del punto di separazione.

A livello particellare, all'aumento della pressione della parete lungo la direzione del flusso, si ha conversione di energia cinetica in potenziale per le particelle del flusso. Quindi le particelle più vicine al flusso risentono di un'energia cinetica ridotta rispetto alle particelle più esterne, data la condizione di no-slip.

L'aumento di pressione porta al rallentamento e all'arrestarsi delle particelle, tanto da poter creare una condizione di reverse flow a parete, dove si palesa la separazione.

3.1 Punto di vista analitico

Valutando analiticamente il fenomeno, si considera lo sforzo tangenziale a parete, che risulta nullo nel punto di separazione effettivo; tale condizione risulta

$$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_w = 0 \quad (3.1)$$

in cui u è la componente di velocità parallela alla parete, y è invece la coordinata spaziale normale alla parete.

Valutando il bilancio della quantità di moto, esclusivamente in direzione x , e nella forma non conservativa

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla u \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\nabla \cdot \vec{q}}{3} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \quad (3.2)$$

Si operano delle ipotesi semplificative, tra cui la condizione di no slip su un punto a parete, per cui si ha annullamento delle componenti di velocità, oltre a quello delle derivate nella direzione parallela alla parete.

$$u = w = z = 0 \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} = 0 \quad (3.3)$$

Assumendo viscosità costante è possibile riscrivere la relazione in modo semplificato:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3.4)$$

Commutando le derivate del secondo termine, questa risulta nulla, perciò si valuta la relazione in via definitiva per un punto arbitrario a parete:

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_w = \frac{\partial p_w}{\partial x} \quad \frac{\partial \tau_w}{\partial y} = \frac{\partial p_w}{\partial x} \quad (3.5)$$

Tale equazione, estrapolata dalla conservazione della quantità di moto nella direzione x , è valida indistintamente in ogni punto della parete; data l'equazione dello sforzo di taglio (3.1), si dimostra che nel punto di separazione del flusso a parete si ha gradiente avverso di pressione

$$\left(\frac{\partial p_w}{\partial x} \right)_{x,sep} > 0 \quad (3.6)$$

Quindi la separazione dello strato limite turbolento in un flusso supersonico è un fenomeno che si manifesta nel momento in cui il fluido non riesce più a compensare il rallentamento imposto dal flusso esterno (inviscido).

Tale fenomeno genera un sistema di interazioni tra onde d'urto e strato limite.

3.2 Interazione strato limite-onda d'urto

L'interazione tra onda d'urto e strato limite nell'aerodinamica ad alta velocità è stata oggetto di numerosi studi sperimentali e numerici nel passato.

Le configurazioni principali che sono state analizzate come modelli per valutare tale fenomenologia sono tre[16]:

- Flusso attorno ad una rampa, la più semplice, porta alla formazione di un'onda d'urto obliqua;
- Flusso attorno ad un cuneo, che induce alla formazione di un urto riflettente dal punto di impatto;
- Flusso attorno ad un gradino, che porta alla generazione di un urto nei pressi del punto di separazione, a valle del quale si forma una bolla di ricircolo.

Uno studio sperimentale di notevole importanza che verte sull'argomento è quello condotto da Chapman.[3]

Da tale studio si ricava un riferimento analitico fondamentale, capace di definire un profilo di pressione statica a parete tipico di casi in cui si presenta l'interazione strato limite-onda d'urto.

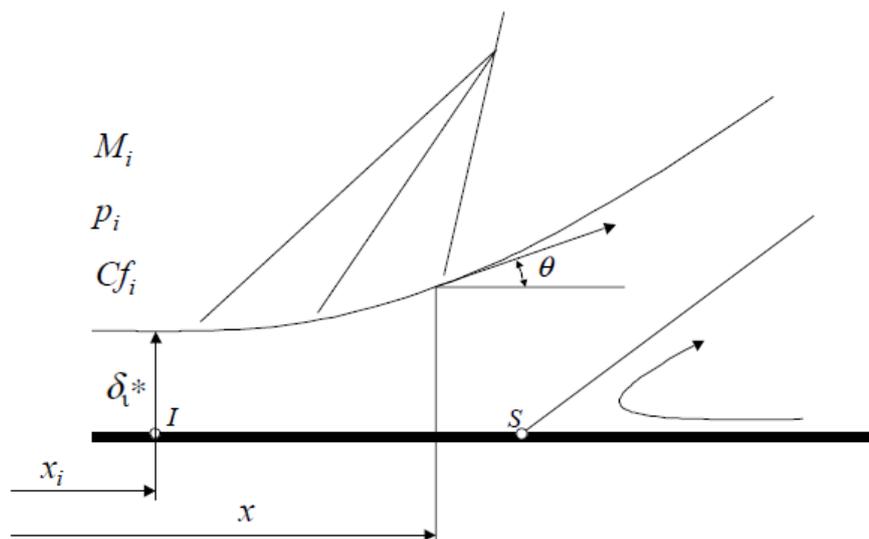


Figura 3.1: Modello studio di Chapman [16]

Da tale andamento si valuta l'aumento repentino della pressione dopo l'interazione (punto I); la separazione vera e propria è definita nel punto S, dopo il quale si ha un ulteriore aumento di pressione sino al raggiungimento della pressione di plateau

(punto P), valore notevole relativo all'interno della bolla di ricircolo. L'ultimo punto notevole (punto R) rappresenta il punto in cui il flusso riattacca a parete, e si raggiunge solo dopo un ultimo aumento di pressione a parete. Si nota la grandezza L_s intesa come estensione dall'incipiente separazione a separazione vera e propria, mentre l'estensione della zona di plateau rappresenta le dimensioni caratteristiche della bolla di ricircolo. Quindi attraverso questo modello di interazione libera è possibile individuare un valore di pressione di incipiente separazione, che ne definisce un riferimento empirico. Si considera un flusso supersonico piano, adiabatico e uniforme.

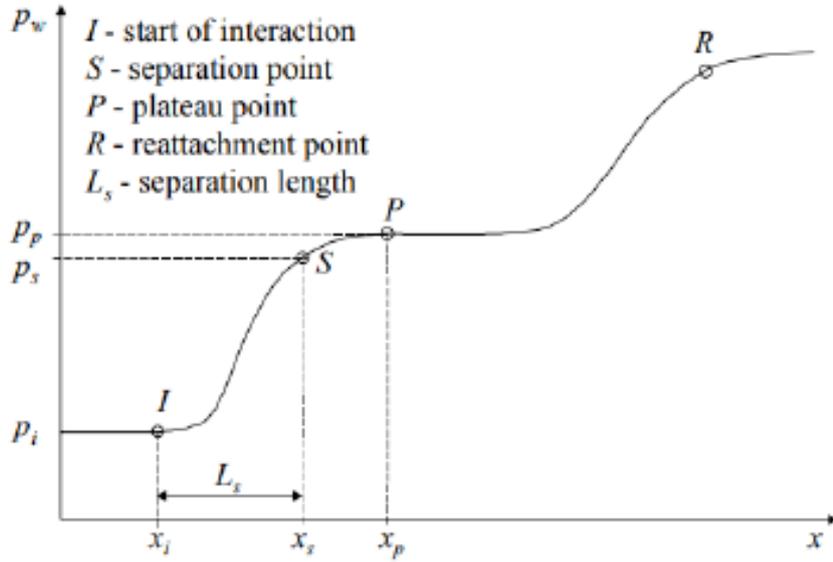


Figura 3.2: Valori notevoli di pressione nella separazione[16]

Le due ulteriori ipotesi definite da Chapman nel suo modello sono:

1. il flusso segue una legge di similarità nella sua struttura;
2. la deviazione del flusso inviscido corrisponde all'effetto dello strato limite, analiticamente

$$\frac{d\delta^*}{dx} = \theta - \theta_i \quad (3.7)$$

Definita una lunghezza caratteristica l del dominio e lo spessore δ^* si ricava

$$\theta - \theta_i = \frac{\delta_i^*}{l} \frac{d(\frac{\delta^*}{\delta_i^*})}{ds} = \frac{\delta_i^*}{l} f_1(s) \quad (3.8)$$

dove $s = \frac{x-x_i}{l}$ rappresenta la coordinata assiale rispetto al punto di inizio separazione, normalizzata rispetto alla lunghezza caratteristica.

Integrando l'equazione (3.8) dal punto di inizio separazione ($x = x_i$) si ricava

$$\frac{p - p_i}{q_i} = \frac{l}{\delta_i^*} C_{fi} \int_0^s \frac{\partial(\frac{\tau_w}{\tau_i})}{\partial(\frac{y}{\delta_i^*})} ds = \frac{l}{\delta_i^*} C_{fi} f_2(s) \quad (3.9)$$

Tale relazione è conseguenza dell'introduzione di grandezze come lo sforzo tangenziale a parete, quindi del corrispondente coefficiente di attrito, e della pressione dinamica q_i . Ricavando dalle ultime due equazioni le funzioni $f_1(s)$ e $f_2(s)$ è possibile unificarle sotto un'unica funzione $F(s)$

$$F(s) = \sqrt{f_1 \cdot f_2} = \sqrt{\frac{p - p_i}{q_i} \frac{\theta - \theta_i}{C_{fi}}} \quad (3.10)$$

Da qui si applica la legge di Prandtl-Meyer, secondo cui

$$\theta - \theta_i = \nu(M_i) - \nu(M) \quad (3.11)$$

Utilizzando l'espressione linearizzata di Chapman della differenza delle funzioni del Mach appena trovata, per piccoli gradienti di pressioni si ottiene

$$F(s) = \frac{p - p_i}{q_i} \sqrt{\frac{\sqrt{M_i^2 - 1}}{2C_{fi}}} \quad (3.12)$$

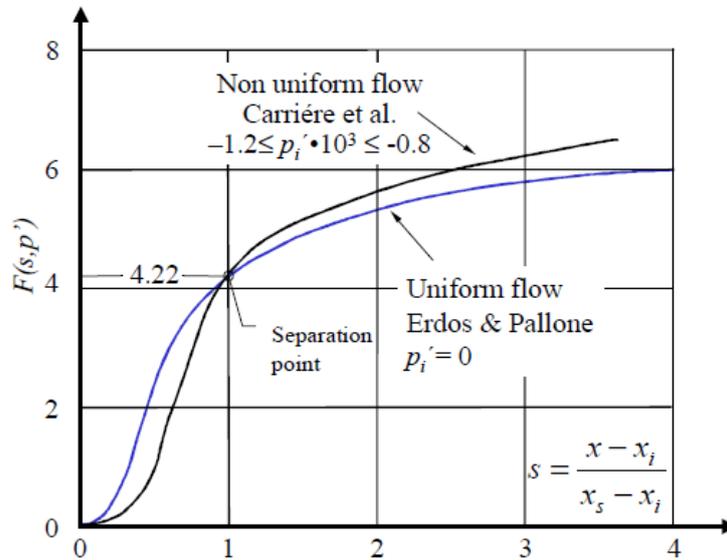


Figura 3.3: Criterio empirico di Erdos [16]

Secondo il criterio empirico di Erdos e Pallone in figura 3.3 si definiscono i punti notevoli di separazione 3.13 e plateau 3.14.

$$F(s) = 4.22 \quad (3.13)$$

$$F(s) = 6 \quad (3.14)$$

Dati i valori notevoli appena descritti è possibile estrapolare i corrispondenti valori di pressione per condizione di separazione e di plateau, nota la pressione di incipiente snervamento p_i .

$$p = p_i + \frac{q_i F(s)}{\sqrt{\frac{\sqrt{M_i^2 - 1}}{2C_{fi}}}}$$

3.3 Regimi di separazione

3.3.1 Free Shock Separation

Durante l'avvio di un endoreattore a livello del mare, il dislivello tra pressione di camera e pressione ambiente non è ancora rilevante, quindi si verifica separazione all'interno dell'ugello, nella configurazione FSS.

In questo caso si ha completo distacco dello strato limite turbolento senza alcun riattaccamento.

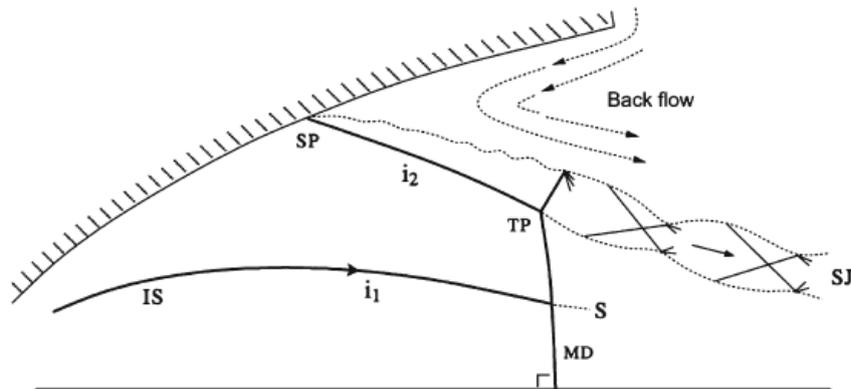


Figura 3.4: Configurazione Free Shock Separation [7]

Da un punto di vista fluidodinamico la figura 3.4 descrive le varie strutture fluidodinamiche che si generano:

- In prossimità della parete si forma un urto obliquo (i_2) dal punto di separazione (SP), con conseguenziale zona di ricircolo.

- L'urto obliquo formatosi si riflette mediante una riflessione di Mach.
- Si genera un urto riflesso nel punto di coalescenza tra urto obliquo e urto interno (i_1), in un punto a monte del punto triplo (TP); questa configurazione è tipica degli ugelli TOP.
- Il getto separato procede liberamente (SJ) con una certa deflessione verso l'asse dell'ugello;
- Si forma una zona di ricircolo a valle della separazione, che viene alimentata dal flusso esterno risucchiato nell'ugello.

Si definisce punto triplo (TP) il punto di intersezione tra le strutture fluidodinamiche generate.

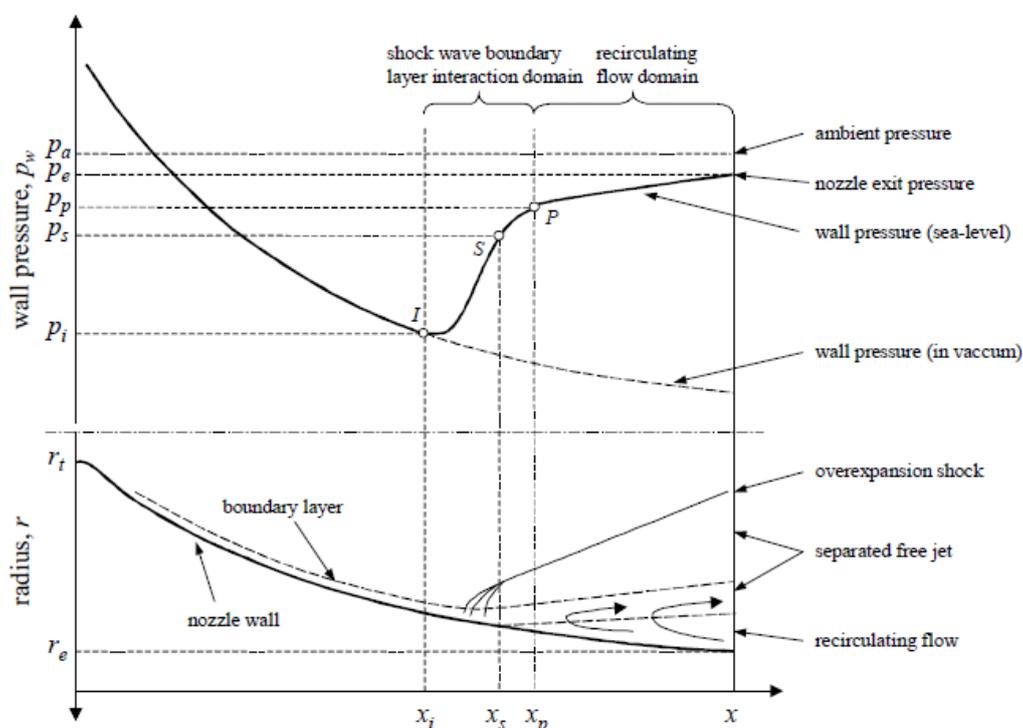


Figura 3.5: Profilo di pressione a parete caso FSS [16]

L'evoluzione del flusso appena descritta comporta un peculiare andamento della pressione a parete: la figura 3.5 mostra come dal punto di incipiente separazione in poi si manifestano delle alterazioni rispetto al tipico andamento dell'espansione in vuoto; al primo aumento sino alla separazione effettiva segue un ulteriore incremento sino al valore di pressione di plateau, inferiore a quella di uscita, nonché alla pressione

ambiente.

Attraverso vari test in scala ridotta si è dimostrato che tali variazioni sono da dovute ad altrettante cause, ovvero l'oscillazione del punto di separazione e del suo fronte d'onda, oltre all'influenza del flusso esterno nella zona di ricircolo.

Sono riportati due criteri empirici che prevedono la separazione mediante il valore di pressione di inizio separazione, il criterio di Summerfield 3.15 e il criterio di Schmucker 3.16:

$$\frac{p_i}{p_a} \approx 0.4 \quad (3.15)$$

$$\frac{p_i}{p_a} = (1.88M_i - 1)^{-0.64} \quad (3.16)$$

3.3.2 Restricted Shock Separation

Dopo alcuni test su modelli in scala (Nave e Coffey) nei primi anni del Novecento si risalì ad una nuova configurazione di separazione, definita RSS, al raggiungimento di un certo Nozzle Pressure Ratio, solo per alcuni tipi di profili. In questa configurazione alla condizione di separazione segue il riattacco del flusso a parete, inducendo un sistema di onde d'urto e di espansione lungo la parete.

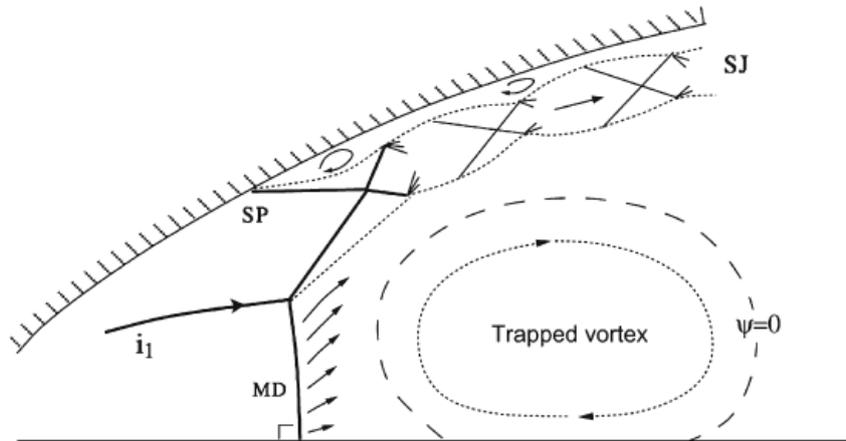


Figura 3.6: Configurazione Restricted Shock Separation [7]

A livello fluidodinamico la struttura che si genera è definita cap shock pattern, come descritto in figura 3.6.

Tale configurazione definisce un punto triplo, in cui convergono urto interno (i_1), disco di Mach (MD) e urto riflesso.

Quindi la differenza sostanziale rispetto alla FSS risiede nella direzione del flusso a valle della separazione, in quanto il getto supersonico è deflesso verso le pareti dell'ugello sino al riattacco del flusso.

Altre due strutture peculiari sono il vortice che si genera a valle del disco di Mach, e le varie bolle di ricircolo chiuse a parete.

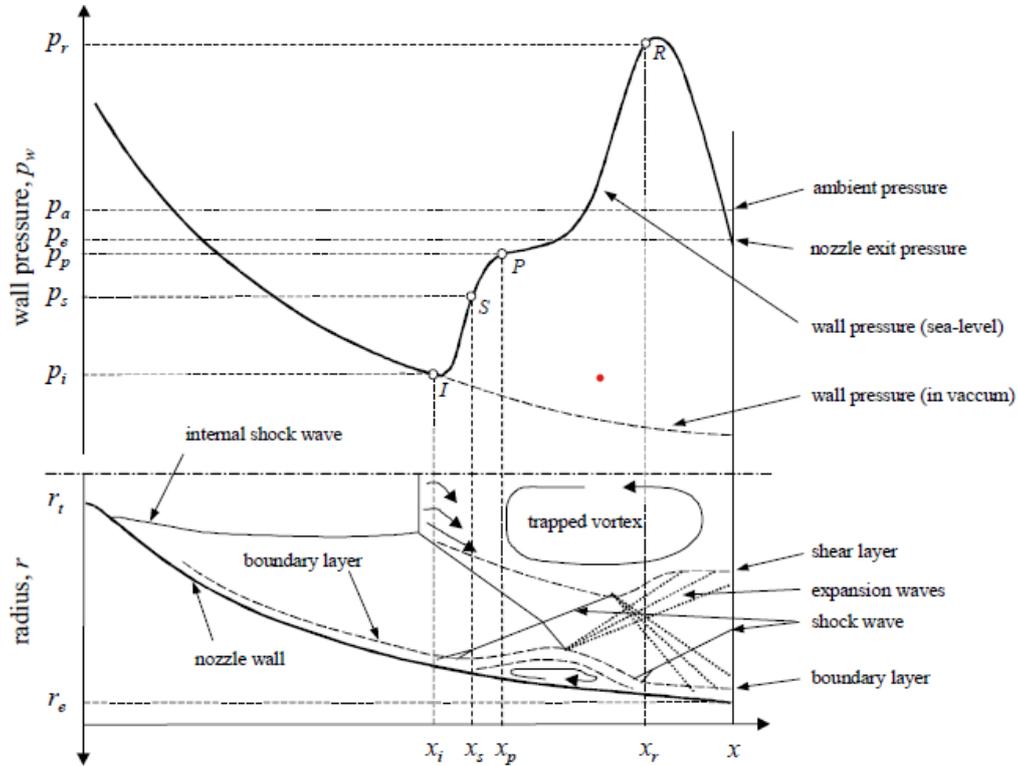


Figura 3.7: Profilo di pressione a parete caso RSS [16]

Dalla valutazione dell'andamento della pressione a parete nella configurazione RSS in 3.7 si nota il raggiungimento di un valore di pressione maggiore rispetto alla FSS; quindi la pressione di plateau è indice della pressione statica in corrispondenza delle bolle di ricircolo. Questo avviene perché il flusso si separa e riattacca più volte, a causa della ricorsività di un sistema di fasci d'espansione e urti obliqui.

3.4 Transizione FSS-RSS

Vista come una delle principali cause della generazione dei carichi laterali, la transizione da FSS a RSS (con eventuale ritransizione) avviene a determinati valori di pressione di camera, quindi di Nozzle Pressure Ratio.

Ponendo attenzione sulla fase di start-up, inizialmente è presente una configurazione FSS, in cui l'intersezione tra urto interno e urto obliquo avviene a monte del punto triplo; nel punto triplo avviene l'interazione tra disco di Mach e l'urto derivato dalla coalescenza appena descritta.

Aumentando il NPR, sia il disco di Mach che il punto di separazione procedono verso valle. Quindi si avrà una distanza sempre più ridotta tra la coalescenza delle onde d'urto e il punto triplo.

Il valore di NPR notevole è quello per cui l'estensione dell'urto riflettente è nulla, in quanto la coalescenza delle onde d'urto avviene esattamente nel punto triplo.

Quindi il punto triplo si converte in punto quadruplo (QP).

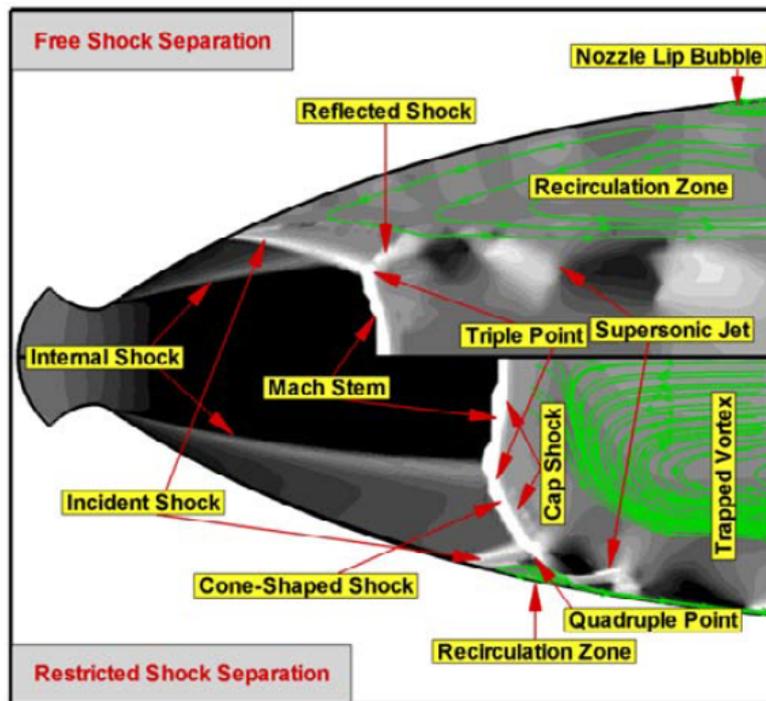


Figura 3.8: Sovrapposizione dei regimi di separazione[19]

Tale punto, oggetto di un transitorio, si scinde poco dopo in due punti tripli distinti, collegati da un disco di Mach, detto anulare (AMD). La sua parte superiore genera un punto triplo con l'onda d'urto incidente e quella riflessa; la parte inferiore si

collega all'onda d'urto interna e al disco di Mach.

Aumentando ulteriormente il NPR il disco di Mach si converte in un'onda d'urto conica riflessa che nel punto triplo genera un punto quadruplo, con la successiva formazione di due onde d'urto oblique riflesse. Lo schema risultante è quello di un cap shock asimmetrico.

Durante quest'evoluzione, la pressione sull'asse dell'ugello aumenta e la deflessione del flusso dall'asse genera strutture vorticose lungo l'asse; queste tendono poi a stabilizzarsi in un unico vortice stabilizzato di grandi dimensioni.

Di conseguenza, l'estensione dell'onda d'urto incidente diminuisce e quella dell'onda riflessa dal punto triplo aumenta. Il momento radiale risultante si intensifica e devia ulteriormente il flusso verso la parete dell'ugello.

In definitiva il getto separato si riattacca a parete, intrappolando delle zone di ricircolo, concretizzando la configurazione RSS.

3.5 Isteresi

Nell'ambito dei fenomeni di transizione e ritransizione tra i due regimi di separazione descritti nel corrente capitolo, è possibile descrivere un andamento isteretico del punto di separazione. In questo modo il punto di separazione può presentare collocazione diversa a parità di NPR, dipendendo dalle soluzioni stazionarie a monte.

Questo fenomeno risulta quindi caratteristico per valori di NPR in cui è probabile transizione o ritransizione.

Le principali cause di un possibile fenomeno di isteresi risultano:

- la presenza di strato limite, che influenza i fenomeni di separazione e riattaccamento del flusso;
- l'inerzia del flusso, rappresentato dalle sue velocità elevate, che ostacola il rapido adattamento alle nuove condizioni di monte;
- la stabilità del flusso, che viene alterata solo in caso di variazione marcata delle condizioni di monte.

Capitolo 4

Richiami di fluidodinamica computazionale

La fluidodinamica computazionale (CFD) è l'analisi di sistemi che coinvolgono fluidi, trasferimento di calore e fenomeni associati quali le reazioni chimiche mediante simulazione computerizzata. Con l'avvento delle nuove tecnologie tale tecnica risulta molto potente e copre un'ampia gamma di settori di applicazione industriali e non industriali.[24]

L'avvento e lo sviluppo di tale disciplina ha portato numerosi vantaggi, soprattutto delle analisi ad alta fedeltà con mezzi non avanzati e in tempi ridotti.

Le simulazioni CFD utilizzate nel seguente elaborato sono basate su codici ai volumi finiti, ovvero basate su un metodo che divide il dominio in celle di dimensione e ne integra le equazioni di governo su ognuna di esse.

4.1 Equazioni di conservazione

Le equazioni di governo utilizzate nell'analisi numerica delle simulazioni CFD sono le equazioni di conservazione. Tali equazioni descrivono il comportamento dei fluidi attraverso tre relazioni che si riferiscono rispettivamente ad una grandezza distinta: massa, quantità di moto ed energia.

Tali equazioni sono espresse attraverso due possibili approcci[5]:

- Approccio euleriano, in cui si segue ogni particella fluida nello spazio e nel tempo, focalizzandosi su una certa regione dello spazio;
- Approccio lagrangiano, in cui si valuta un volume di controllo e ne si segue la sua evoluzione.

Un'ulteriore duplicità è legata alla formulazione delle equazioni, che può essere integrale, quindi considerando un volume di controllo finito, o differenziale, su un

volume di controllo infinitesimo.

Una possibile formulazione è quella riportata in 4.1, nello specifico nella forma differenziale conservativa.

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \\ \frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V} \vec{V}) = \nabla \cdot (-p[I] + [\tau]) = -\nabla p + \nabla \cdot [\tau] + \rho \vec{g} \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho E \vec{V}) = \nabla \cdot (-p \vec{V} + [\tau] \vec{V}) + \nabla \cdot k \nabla T + \rho \vec{g} \cdot \vec{V} \end{cases} \quad (4.1)$$

che si possono compattare nella seguente forma:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot F = \nabla \cdot V + Q \quad (4.2)$$

dove il vettore delle grandezze conservative è $U = [\rho, \rho \vec{V}, \rho E]^T$, F rappresenta i flussi convettivi, V i flussi diffusivi, e Q i termini di sorgente.

Si passa ad una formulazione più adatta al metodo dei volumi finiti, nello specifico la forma integrale

$$\frac{d}{dt} \int_V U dV + \oint_S V \cdot \vec{n} dS + \int_V Q dV \quad (4.3)$$

4.2 Turbolenza

Il rapporto tra forze di inerzia e forze viscosse viene definito dal numero adimensionale di Reynolds, il cui valore critico definisce il confine tra regime laminare e quello turbolento.

Per valori inferiori al numero di Reynolds critico si riscontra regime laminare, caratterizzato da un flusso ordinato, regolare e stratificato. In questo tipo di flusso, le particelle del fluido si muovono lungo traiettorie ben definite e parallele, con scambio minimo tra gli strati adiacenti.

A numeri di Reynolds maggiori del valore critico, il flusso risulta caotico e randomico, definendo un regime turbolento. Questa condizione può essere analizzata come una sovrapposizione di vortici. La dimensione di questi vortici varia dai più grandi, di dimensioni simili a quelle del dominio, ai più piccoli, la cui dimensione è condizionata dalla dissipazione viscosa. I vortici più grandi sono anisotropi, mentre i più piccoli mostrano una natura isotropa.

In merito alla modellazione dei flussi turbolenti, si sono sviluppate varie tecniche, tra cui[5]:

- **Direct Numerical Solution (DNS)**, consiste nella risoluzione accoppiata delle equazioni di massa, quantità di moto lineare ed energia (5 equazioni per 5 incognite). Purtroppo, questo approccio non è praticabile per problemi come questo, a numeri di Reynolds elevati, a causa dell'ampia gamma di scale

da risolvere (dalle più grandi a quelle dissipative di Kolmogorov). Il numero necessario di nodi della griglia è molto spesso così elevato che tale approccio è attualmente oltre lo stato dell'arte per la maggior parte delle applicazioni tecnologiche, necessitando di elevato costo computazionale.

Nello specifico il costo computazionale è proporzionale a Re^3 .

- **Large Eddy Simulation (LES)**, con cui si risolvono solo le scale più grandi, utilizzando una griglia meno fitta; quindi nella risoluzione delle equazioni di Navier-Stokes viene implementato un filtro.

Il costo computazionale risulta proporzionale a Re^5 .

- **Reynolds Average Navier-Stokes (RANS)**, con cui si mediano le equazioni di Navier-Stokes, utilizzando un operatore di media ricavando delle relazioni sul campo medio con l'eventuale fluttuazione rispetto al valore medio.

Adoperando un trade off tra accuratezza e costo computazionale nel seguente studio si è scelto di adottare delle simulazioni RANS, in cui le varie grandezze vengono descritte come in 4.4, scomponendo in valore medio e fluttuazione

$$u_i = \bar{u}_i + u'_i \quad \phi = \bar{\phi} + \phi' \quad (4.4)$$

Nel caso di flussi compressibili si adottano due tipi di operatori di media: nel caso di densità e pressione si adotta la media alla Reynolds (flussi incompressibili), mentre per le restanti grandezze la media alla Favre.

Le equazioni di governo in queste condizioni risultano

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho} \bar{u}_i) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho} \bar{u}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{\tau}_{ij} - \bar{\rho} \tilde{u}_i'' \tilde{u}_j'') \end{cases} \quad (4.5)$$

Il termine sottrattivo del tensore degli sforzi è detto tensore dello stress di Reynolds (τ_{ij}^R), che rappresenta l'effetto delle fluttuazioni turbolente sul campo medio; questa grandezza introdotta dal campo compressibile viene caratterizzata dal modello lineare di Boussinesq, dove lo stress è descritto da un contributo isotropo e uno anisotropo, in funzione della viscosità turbolenta, μ_t . Analiticamente si ottiene

$$\tau_{ij}^R = 2\mu \tilde{\delta}_{ij} - \frac{2}{3} \mu_T \frac{\partial \tilde{q}_t}{\partial x_k} \delta_{ij} - \frac{2}{3} \bar{\rho} k \delta_{ij} \quad (4.6)$$

Perciò la tipologia di simulazione risulta dipendente dalla valutazione della eddy viscosity, e la qualità del modello di turbolenza scelto viene valutata sullo strato limite, nello specifico con requisiti sul valore di y^+ .

4.3 Modelli di turbolenza

Nella seguente trattazione nelle simulazioni sono stati utilizzati tre modelli di turbolenza per la stima della eddy viscosity:

- **Spalart-Allmaras** (1 equazione), risolve l'equazione di trasporto modellata per la viscosità turbolenta cinematica;
- **SST $k - \omega$** (2 equazioni), si riferisce all'energia cinetica turbolenta k e alla dissipazione specifica dell'energia cinetica ω . Questo modello presenta difficoltà di convergenza e dipende fortemente da una stima iniziale. Risulta essere efficiente nel caso di gradienti di pressioni avversi a parete, quindi nei casi di separazione del flusso da parete.
- **$k - \epsilon$** (2 equazioni), che si riferisce all'energia cinetica k e alla dissipazione dell'energia turbolenta. Risulta essere la base del modello SST $k - \omega$ in concomitanza con la sua versione tradizionale.

Tra i vari modelli le differenze risiedono nei gradienti vicino alla parete della variabile trasportata, che risultano molto più piccoli in Spalart-Allmaras rispetto a quelli riscontrati nei modelli a due equazioni.

4.4 Strato limite

Nei flussi ad alti numeri di Reynolds l'effetto della viscosità è limitato in una sottile zona nei pressi della parete, definita strato limite (boundary layer).

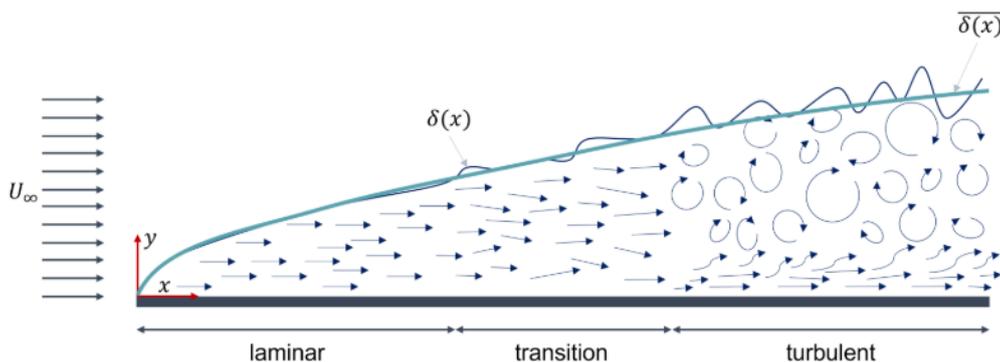


Figura 4.1: Transizione laminare-turbolento [2]

Nello strato limite vige la condizione di aderenza, quindi velocità nulla a parete; nei punti più lontani dalla parete si ha un profilo di velocità gradualmente crescente, sino

al raggiungimento di una condizione di velocità indisturbata. Quindi tale gradiente di velocità rimarca l'importanza degli effetti viscosi.

Si consideri la legge di strato limite descritta da 4.7, dove u^+ e y^+ sono grandezze adimensionali.

$$u^+ = f(y^+) \quad (4.7)$$

I due termini si ottengono come

$$u^+ = \frac{q}{u_T} \quad y^+ = \frac{y}{l_T} \quad (4.8)$$

dove q è la velocità, u_T quella caratteristica viscosa; allo stesso modo per le lunghezze y è la distanza da parete, e l_T la lunghezza caratteristica viscosa.

E' possibile definire una relazione tra le grandezze adimensionali, che si svincoli dalla scala del problema; nel caso in esame si utilizza quella definita dall'andamento raffigurato in 5.27.

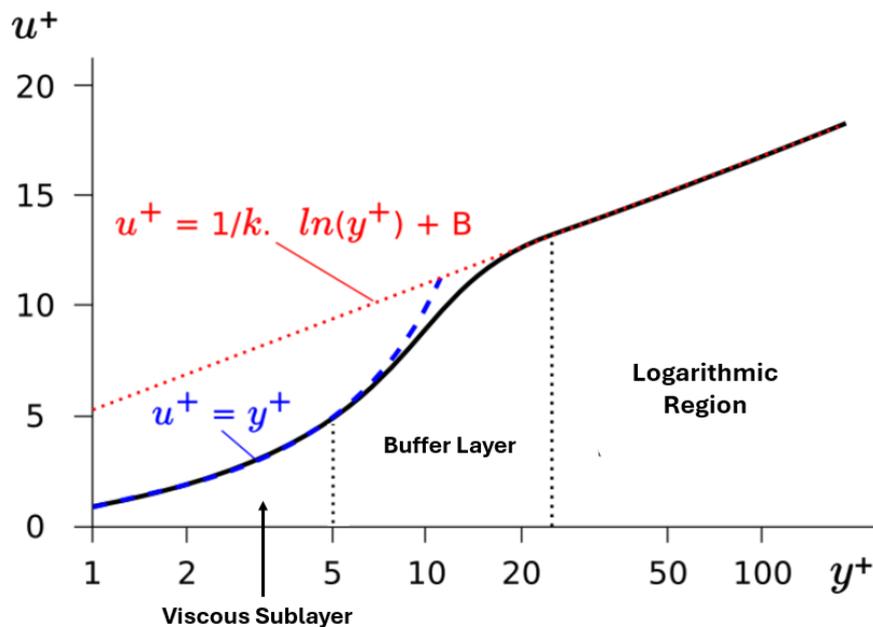


Figura 4.2: Grafico grandezze adimensionali nello strato limite [2]

Dalla figura 4.2 è possibile valutare la distinzione di tre zone:[2]

- il substrato viscoso (Viscous Sublayer), per valori di $y^+ < 5$; in questa zona sono dominanti gli effetti viscosi, e l'andamento risulta pressoché lineare.
- il Buffer Layer, valida per $5 < y^+ < 30$, equivale ad una zona di transizione, in cui si ha equivalenza tra effetti viscosi e turbolenti.

- la regione logaritmica (Logarithmic Region), per valori di $y^+ > 30$, in cui il profilo di velocità è descritto da una relazione di tipo logaritmica.

4.4.1 Requisiti su y^+

Quando si procede alla risoluzione del dominio, è fondamentale scegliere una griglia di calcolo che soddisfi determinati requisiti. In particolare, se si considera la distanza del primo punto della mesh dalla parete, il valore di y^+ deve rientrare nei limiti imposti dal modello di turbolenza adottato. Ad esempio, si hanno le seguenti condizioni:

- Per il modello **Spalart–Allmaras**, è necessario che $y^+ < 5$;
- Per il modello **SST k - ω** , si richiede $y^+ < 1$.

La principale difficoltà consiste proprio nel rispettare tali limiti, in quanto il costo computazionale cresce in modo significativo: simulazioni più accurate richiedono una mesh sempre più raffinata.

All'aumentare del numero adimensionale di Reynolds (Re), lo spessore dello strato limite diminuisce, rendendo necessario un numero elevato di celle per rappresentarlo adeguatamente. Di conseguenza, la risoluzione diretta del flusso vicino alla parete diventa molto onerosa in termini computazionali. Per ovviare a questo problema, nelle applicazioni pratiche si preferisce non risolvere lo strato limite nella sua interezza, ma si ricorre all'uso delle *wall function*, che permettono di modellare il comportamento dello strato limite in modo semplificato.

Capitolo 5

Caso studio: Ugello parabolico

5.1 Dominio computazionale

In questo capitolo si svolgono delle simulazioni di tipo RANS su un ugello di tipo TOP. La tipologia di mesh e di modello di turbolenza adottati derivano dalle decisioni dovute alle analisi di validazione svolte in Appendice A

Quindi l'iter seguito per il profilo di studio è simile a quello di validazione. Nel caso del profilo parabolico si è considerato un ugello in sub-scale assimilabile al modello Volvo S1, in cui il fluido operativo è freddo, nello specifico azoto (N_2).

Tale ugello presenta le seguenti specifiche dimensionali:

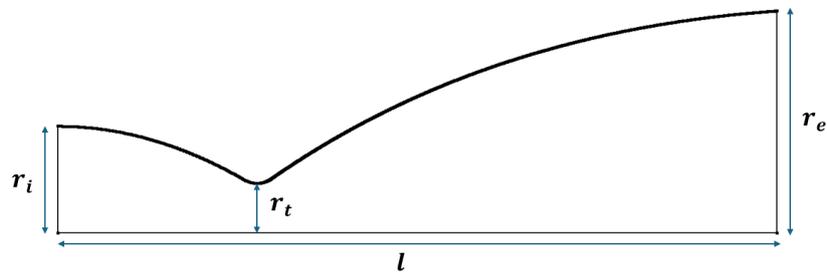


Figura 5.1: Profilo ugello parabolico

Rapporto di superfici, $\frac{A_e}{A_t}$	20
Lunghezza, l	14.44 cm
Raggio di gola, r_t	1 cm
Raggio di ingresso, r_i	2.15 cm
Raggio di uscita, r_e	4.47 cm

Tabella 5.1: Caratteristiche dimensionali ugello parabolico

Per lo studio numerico si implementa un dominio esterno (farfield); tale dominio presenta estensione assiale pari a $15r_e$ ed estensione ortogonale pari a $10r_e$.

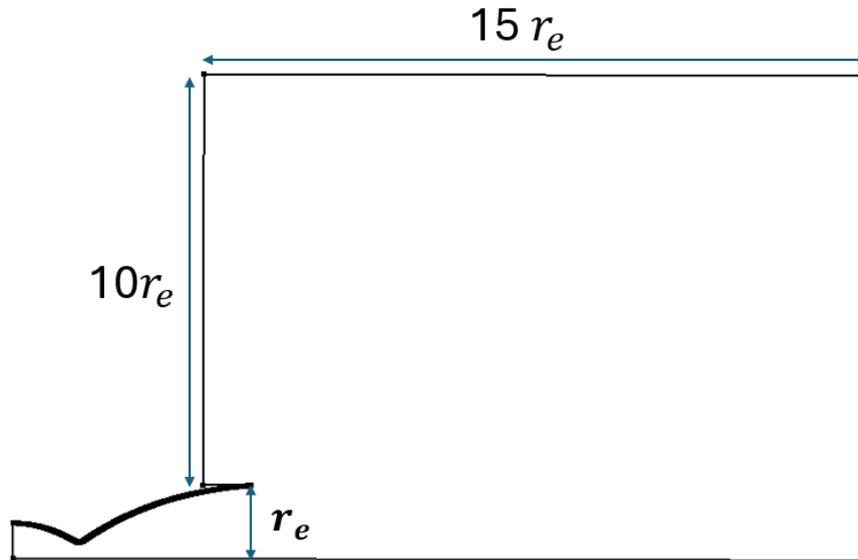


Figura 5.2: Profilo ugello parabolico con dominio esterno

La mesh considerata nelle prime fasi dello studio presenta le caratteristiche e la risoluzione definita dal trade-off eseguito sull'ugello TIC in Appendice A, descritta nella tabella 5.2.

Numero di celle	82000
Dominio interno	220x100
Dominio esterno	200x100
Min. Orthogonal Quality	0.047458

Tabella 5.2: Caratteristiche mesh 1 ugello parabolico

Il Minimum Orthogonal Quality è un parametro relativo alla qualità della mesh, che la renderebbe non idonea nel caso di valori minori di 0.01.

La mesh considerata rispetta tale requisito qualitativo.

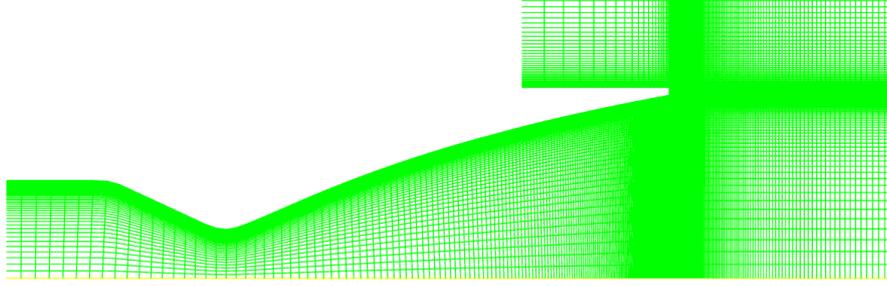


Figura 5.3: Focus sulla mesh 1

5.2 Condizioni al contorno

In questa sezione si valuta la variazione dei campi di Mach e l'andamento del punto di separazione all'interno del profilo dell'ugello TOP in fase di start up (da NPR=10 a NPR=20) e di shut down (da NPR=20 a NPR=10).

Nello studio in esame sono fissate le condizioni di uscita, definite dalla pressione statica pari al valore d'ambiente

$$p_e = 101325 \text{ Pa}$$

mentre la pressione totale di camera è definita in funzione del NPR e la corrispondente pressione statica è ricavata dalle relazioni della trasformazione isentropica. I valori notevoli utilizzati sono riportati in tabella 5.3.

La relazione che caratterizza la trasformazione isentropica

$$\frac{p^0}{p} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad (5.1)$$

dipende dal numero di Mach, il quale si ricava dalla conservazione della portata lungo l'ugello, e dal rapporto di superfici caratteristico del profilo TOP analizzato. Definito il rapporto di superfici $\epsilon = 20$, è possibile valutare la conservazione della portata nelle porzioni ingresso-gola e gola-uscita, estrapolando i valori di Mach di ingresso e uscita:

$$M_i = 0.1265 \quad M_e = 4.7257 \quad (5.2)$$

Tali valori sono fissati e non risentono della variazione di NPR.

	p_i° [Pa]	p_i [Pa]
NPR=10	1013250	1002027
NPR=12	1215900	1202433
NPR=14	1418500	1402838
NPR=16	1621200	1603244
NPR=18	1823850	1803649
NPR=20	2026500	2004055

Tabella 5.3: Pressioni di camera al variare del NPR

Per quanto riguarda il dominio computazionale, come raffigurato in figura 5.4 si impostano varie condizioni al contorno differenziate per il tipo di confini del dominio:

- **Inlet:** la sezione di ingresso del flusso, caratterizzata dal valore di pressione (statica e dinamica) ricavata per ogni NPR nella tabella 5.3; è inoltre impostato un valore di temperatura statica di default ($T=300K$);
- **Outlet:** la sezione di uscita dell'intero dominio, caratterizzata dal valore di pressione statica, nello specifico il valore di pressione ambiente, e dalla temperatura statica di default;
- **Simmetry:** l'asse di simmetria, utilizzato nel caso di dominio computazionale composto dall'intero profilo dell'ugello;
- **Farfield:** il campo esterno all'ugello, caratterizzato dalle stesse grandezze dell'outlet, con inizializzazione del Mach a valori trascurabili ($M = 0.01$);
- **Wall:** la parete dell'ugello, che ne definisce l'impermeabilità rispetto al fluido operativo.

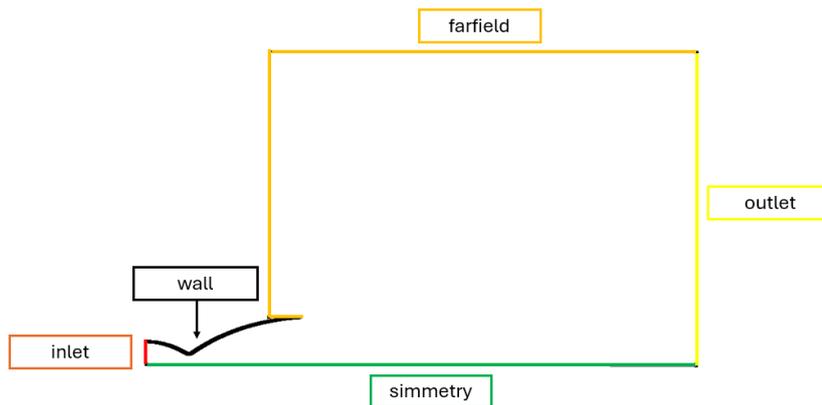


Figura 5.4: Dominio ugello parabolico con condizioni al contorno

Dato il contesto appena descritto si valuteranno i risultati delle simulazioni delle fasi di accensione e spegnimento controllate del profilo TOP in scala ridotta appena descritto attraverso la variazione crescente e decrescente del NPR considerando una serie di soluzioni stazionarie.

L'obiettivo principale è cercare la coesistenza di soluzioni multiple per lo stesso valore di NPR, partendo da condizioni iniziali differenti. Queste simulazioni mirano a verificare l'ampiezza dell'intervallo di isteresi e a fornire indizi per comprendere le cause che portano a collocazioni differenti del punto di separazione durante le fasi di transizione e ritrasizione tra i regimi di FSS e RSS.

Nella prima parte si confronteranno due modelli di turbolenza a parità di mesh; nella seconda parte il confronto verrà operato tra due mesh fissato uno dei due modelli di turbolenza.

5.3 Valutazione modelli di turbolenza

Dalle analisi svolte in Appendice A si valutano due modelli di turbolenza: quello più efficiente tra i modelli a due equazioni, SST $k - \omega$, e quello ad una equazione, Spalart-Allmaras.

In questa sezione sono riportati i campi di Mach per fase di start up ($NPR : 10 \rightarrow 20$) e shut down ($NPR : 20 \rightarrow 10$) nel caso del modello SST $k - \omega$.

5.3.1 Modello SST $k - \omega$

NPR 10

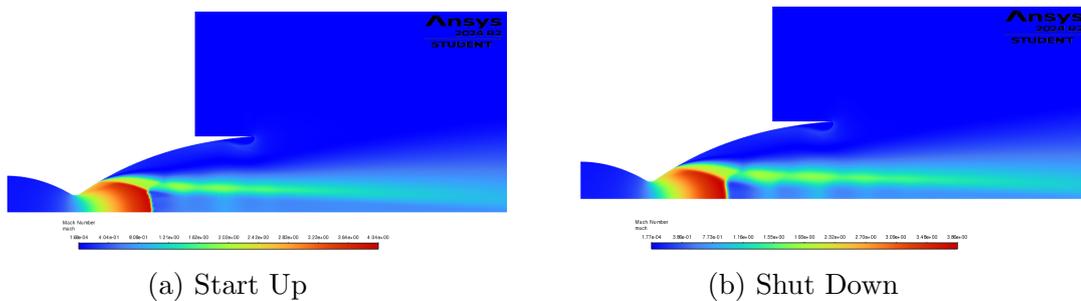


Figura 5.5: Campi di Mach NPR=10 con SST $k - \omega$

NPR 12

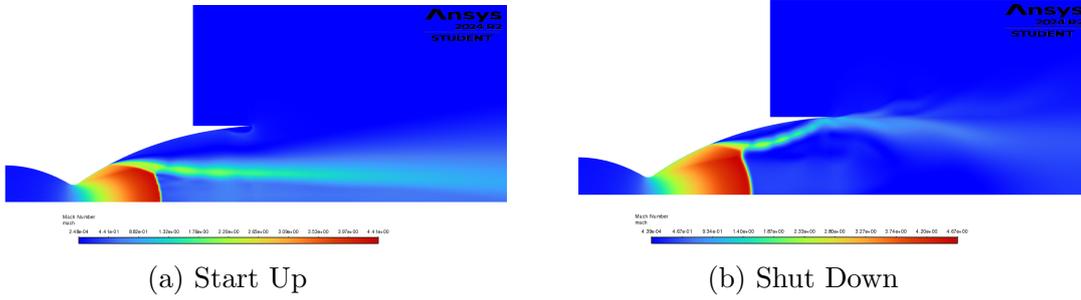


Figura 5.6: Campi di Mach NPR=12 con SST $k - \omega$

NPR 14

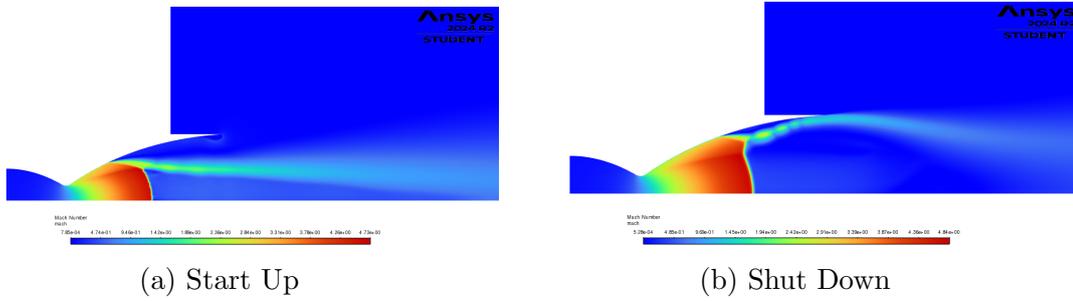


Figura 5.7: Campi di Mach NPR=14 con SST $k - \omega$

NPR 16

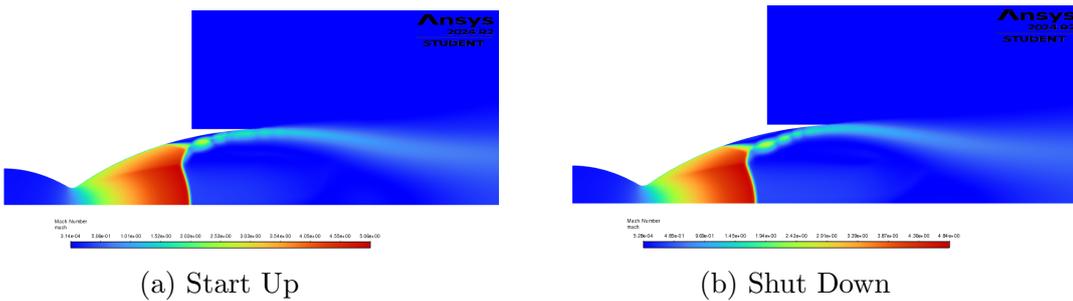


Figura 5.8: Campi di Mach NPR=16 con SST $k - \omega$

NPR 18

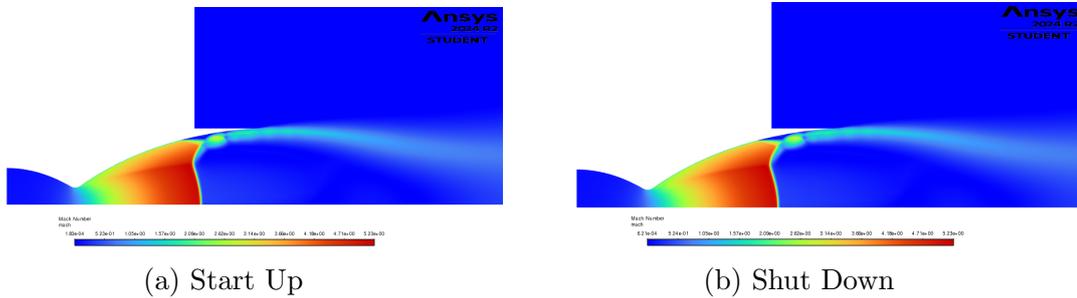


Figura 5.9: Campi di Mach NPR=18 con SST $k - \omega$

NPR 20

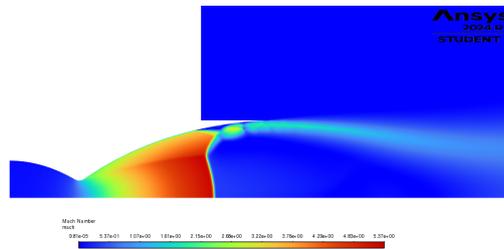


Figura 5.10: Campo di Mach NPR=20 con SST $k - \omega$

Dalla lettura dei campi di Mach del modello SST $k - \omega$ si nota come le differenze più marcate si abbiano a $NPR \in (12 - 14)$, dove la soluzione in start up descrive un caso di FSS, mentre quella in shut down descrive un riattaccamento di flusso, denotando RSS.

Questo comportamento lo si rimarca con gli andamenti della pressione a parete, che nei due casi (start up in figura 5.11 e shut down in figura 5.12) descrive i casi di FSS, con profili pressoché costanti a valle della separazione; i casi di RSS sono invece segnalati da profili con oscillazioni più o meno ampie a valle della prima separazione.

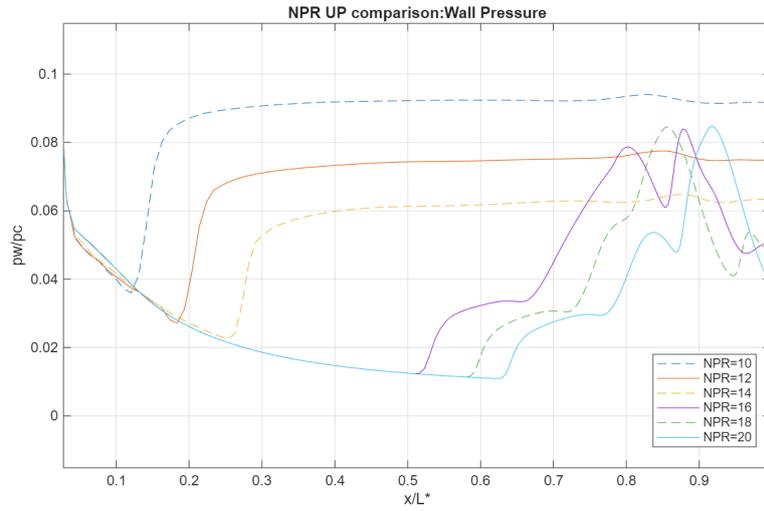


Figura 5.11: Profili di pressione a parete in fase di start up con modello SST $k - \omega$

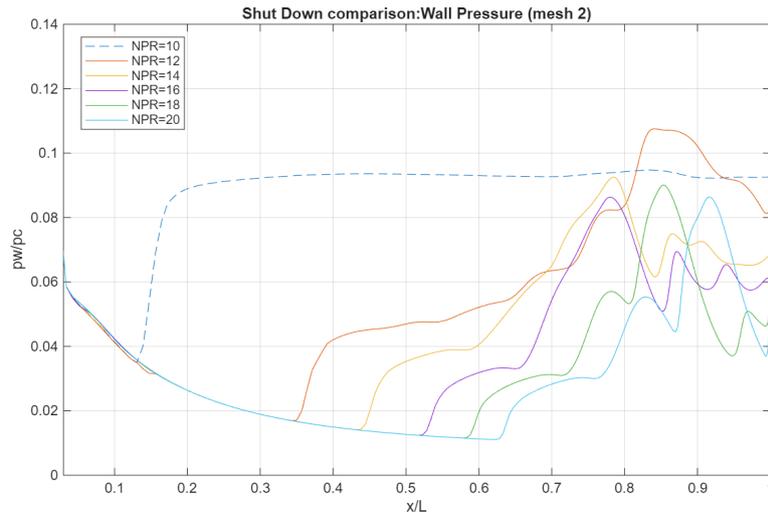


Figura 5.12: Profili di pressione a parete in fase di shut down con modello SST $k - \omega$

5.3.2 Modello Spalart-Allmaras

Si riportano le simulazioni e valutazioni appena viste nella sezione precedente, ma con applicazione del modello Spalart-Allmaras.

NPR 10

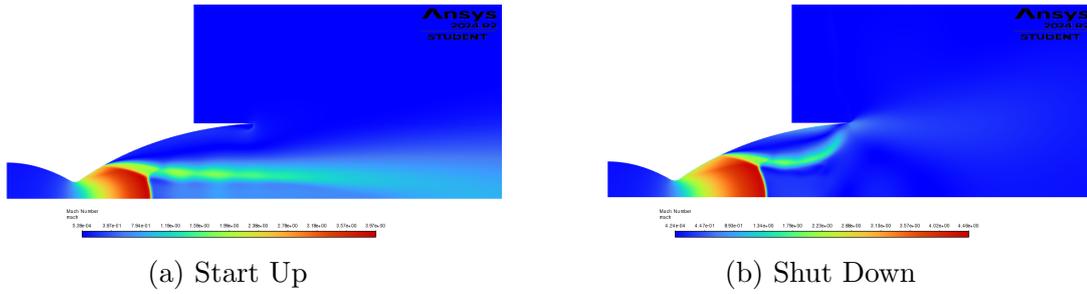


Figura 5.13: Campi di Mach NPR=10 con Spalart-Allmaras

NPR 12

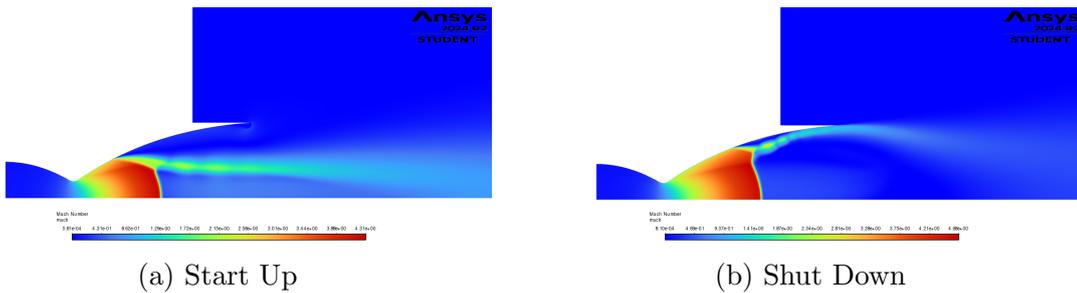


Figura 5.14: Campi di Mach NPR=12 con Spalart-Allmaras

NPR 14

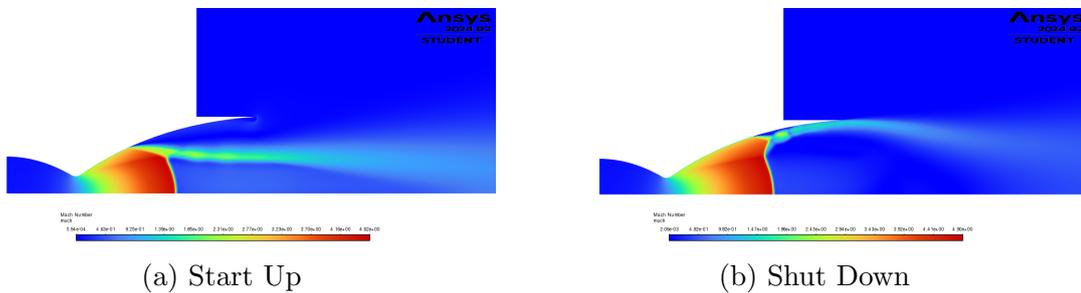


Figura 5.15: Campi di Mach NPR=14 con Spalart-Allmaras

NPR 16

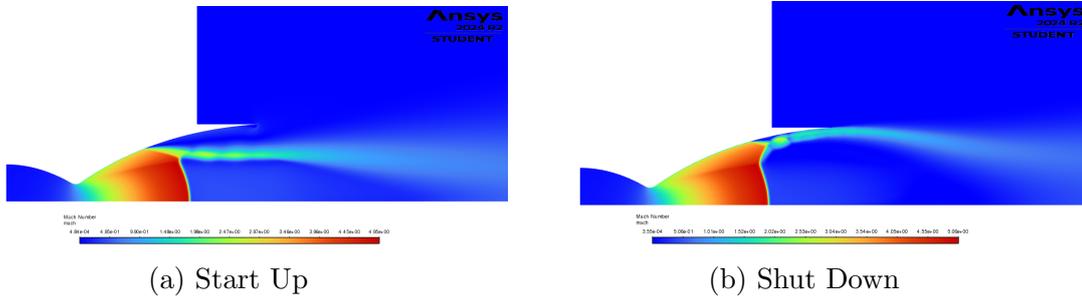


Figura 5.16: Campi di Mach NPR=16 con Spalart-Allmaras

NPR 18

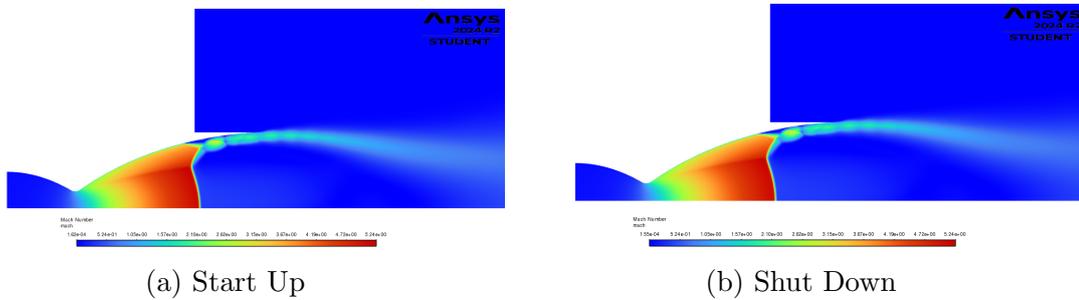


Figura 5.17: Campi di Mach NPR=18 con Spalart-Allmaras

NPR 20

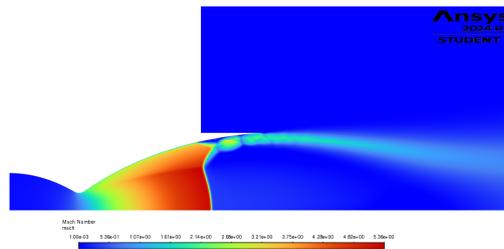


Figura 5.18: Campo di Mach NPR=20 con Spalart-Allmaras

Valutando i campi di Mach del modello Spalart-Allmaras, come per il modello precedente, si notano le differenze più marcate a $NPR \in (12 - 14)$, dove la soluzione in start up descrive un caso di FSS, mentre quella in shut down descrive un riattaccamento di flusso, denotando RSS nello stesso range.

Un comportamento emblematico è quello a $NPR=10$ (figura B.17a), dove il getto supersonico a valle degli urti nel caso di shut down tenda ad avvicinarsi a parete, non concretizzando il riattaccamento, denotando FSS.

Questo comportamento lo si rimarca con gli andamenti della pressione a parete, che nei due casi (start up in figura 5.19 e shut down in figura 5.20) descrive i casi di FSS, con profili pressoché costanti a valle della separazione; allo stesso modo i casi di RSS sono segnalati da profili con oscillazioni più o meno ampie a valle della prima separazione.

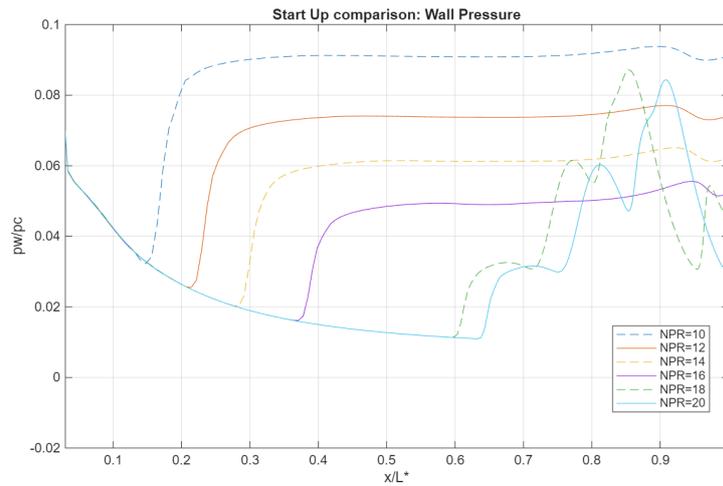


Figura 5.19: Pressione a parete in fase di start up con modello Spalart-Allmaras

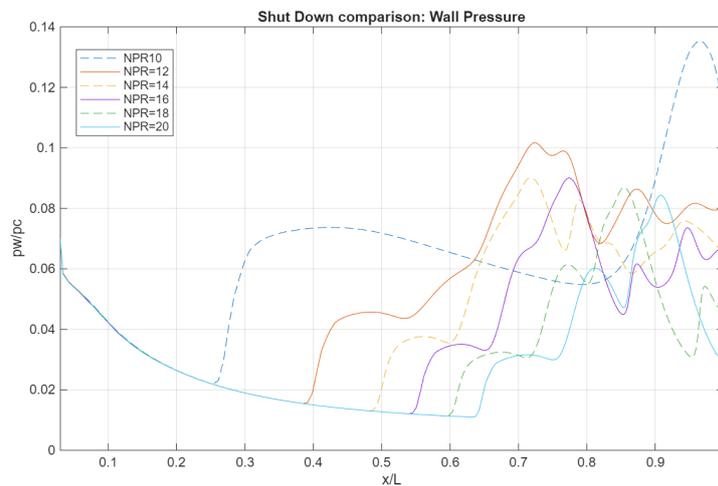


Figura 5.20: Pressione a parete in fase di shut down con modello Spalart-Allmaras

Il confronto tra i modelli di turbolenza è svolto su due casi test particolari:

- caso FSS, a NPR=14 (figura 5.21);
- caso RSS, a NPR=16 (figura 5.24).

5.3.3 Confronto in FSS

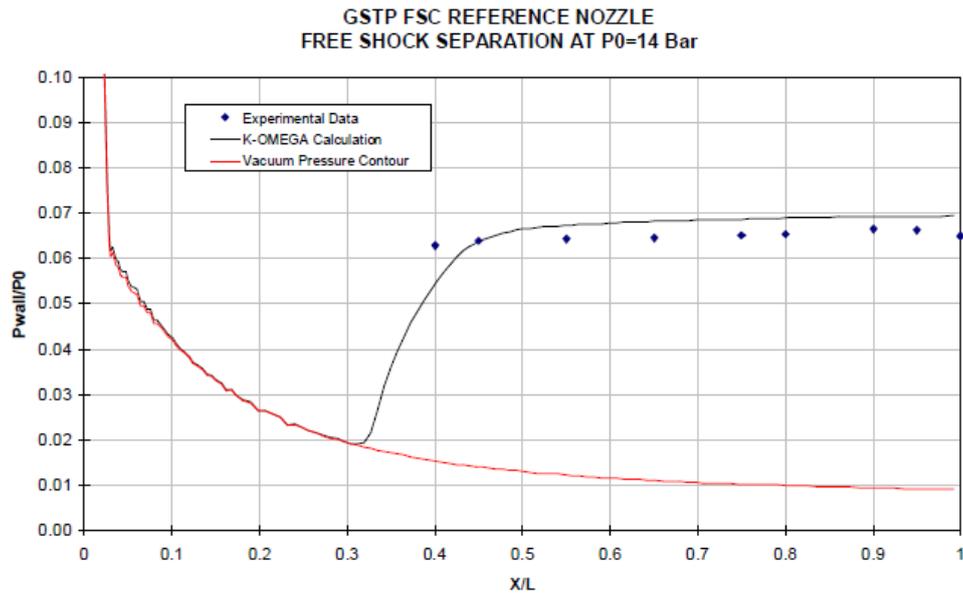


Figura 5.21: Caso test 1: FSS a NPR=14 [16]

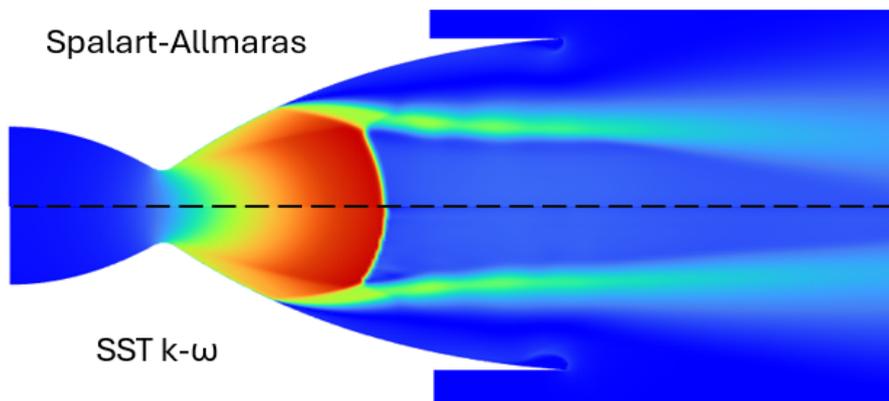


Figura 5.22: Confronto campo di Mach a NPR=14

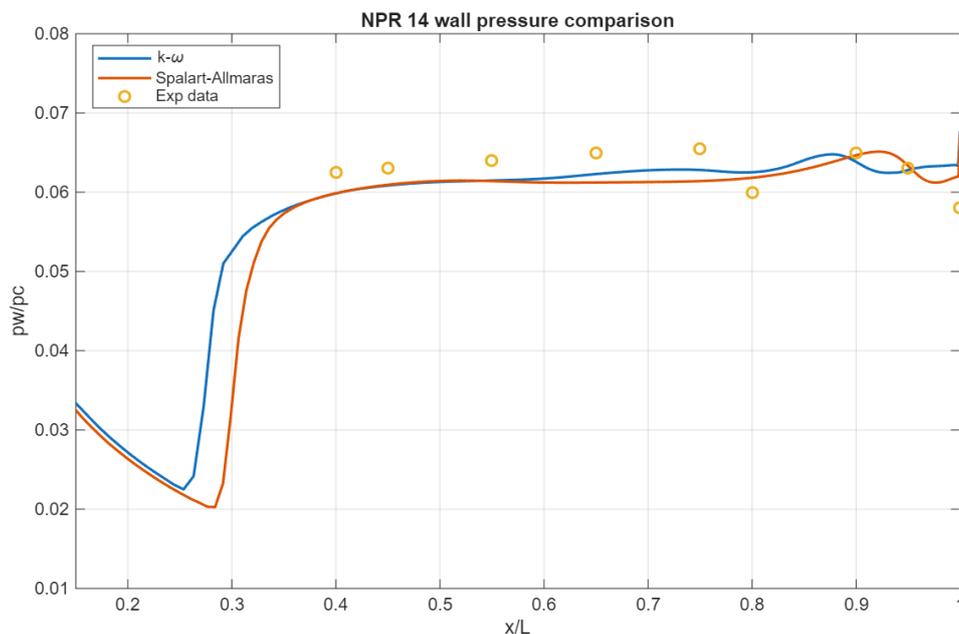


Figura 5.23: Confronto andamento pressione a parete a NPR=14

Si adotta l'errore quadratico medio descritto in 5.3 per il confronto tra andamenti ottenuti e dati sperimentali; analiticamente tale metodo misura la media degli scarti al quadrato tra i valori sperimentali e i valori calcolati.

Analiticamente si ha

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \quad (5.3)$$

in cui si considera x_i come vettore delle pressioni calcolate e y_i come vettore delle pressioni sperimentali.

Si ottiene un riscontro quantitativo dal confronto tra i modelli di turbolenza

$$MSE_{k-\omega} = 0.0039 \quad MSE_{S-A} = 0.0040 \quad (5.4)$$

In definitiva i modelli di turbolenza analizzati risultano pressoché equivalenti in ambito di FSS nel confronto numerico con i dati sperimentali. Si ha un miglioramento pressoché trascurabile riguardante il modello SST $k - \omega$, di circa il 2.5%.

5.3.4 Confronto in RSS

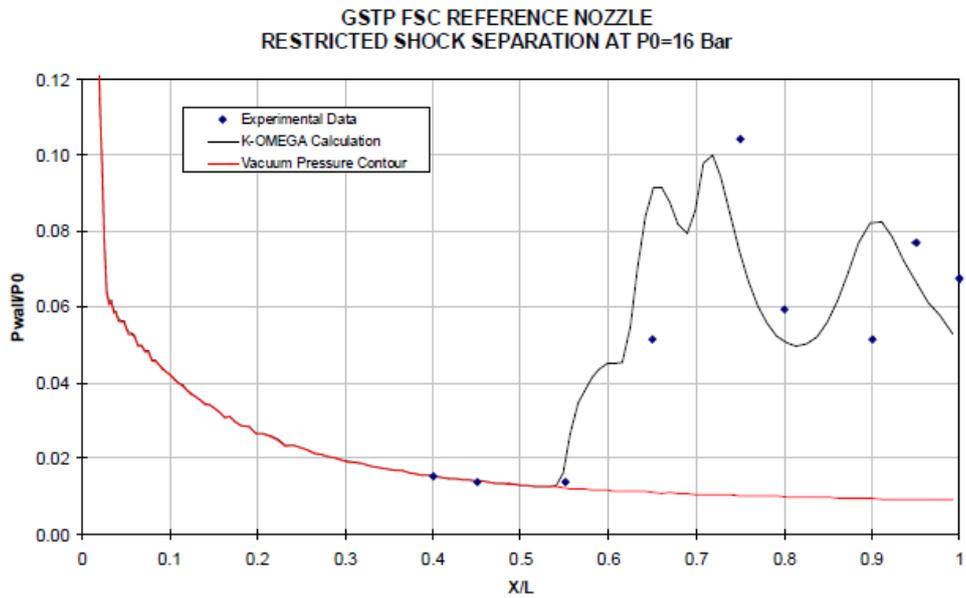


Figura 5.24: Caso test 2: RSS a NPR=16 [16]

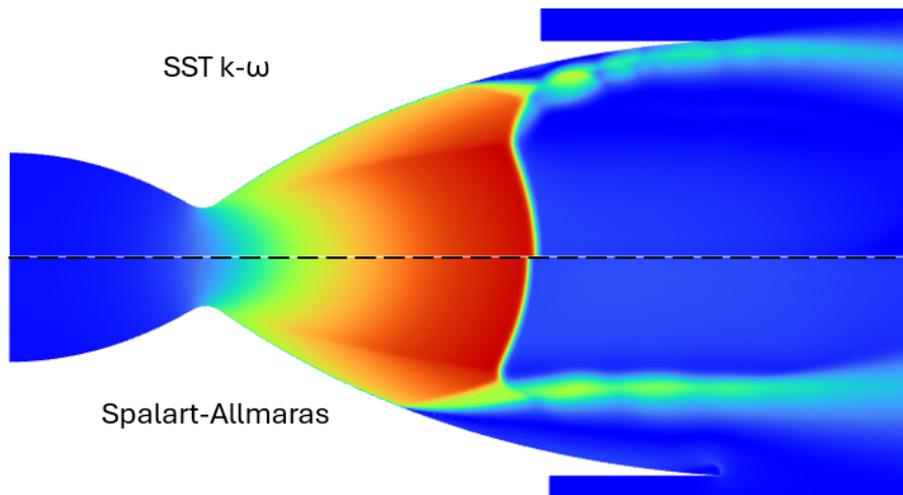


Figura 5.25: Confronto campo di Mach a NPR=16

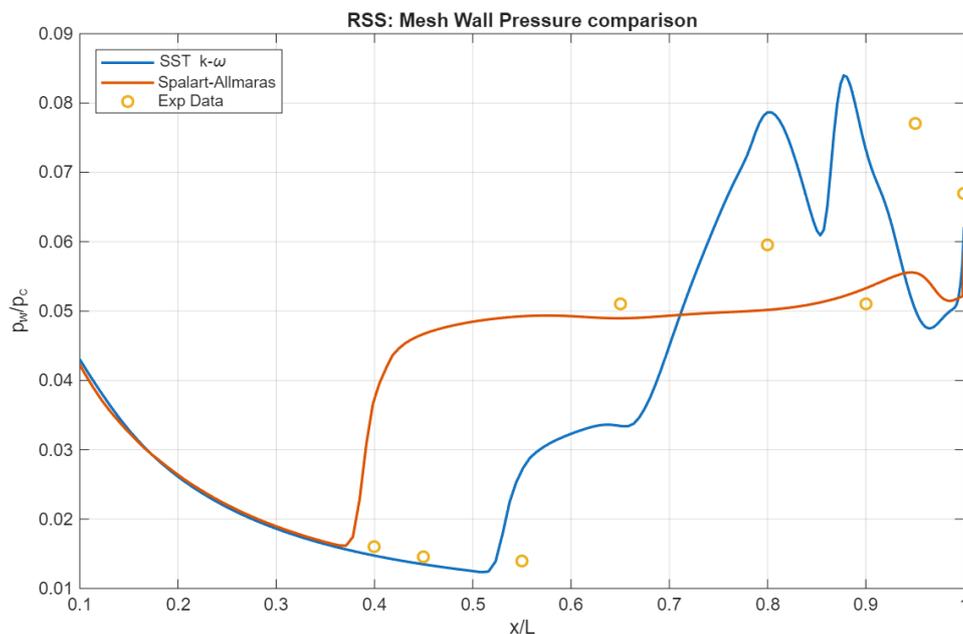


Figura 5.26: Confronto andamento pressione a parete a NPR=16

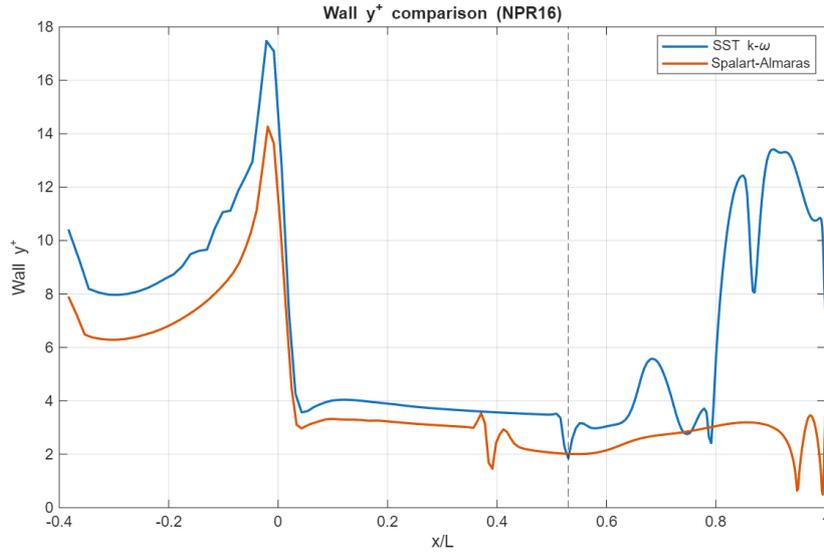
Dal grafico 5.26 si nota come il modello $SST\ k-\omega$ definisca una configurazione RSS per NPR=16, con un comportamento simile a quello dei dati sperimentali ma con andamenti evidentemente diversi; non vale lo stesso per il modello Spalart-Allmaras. Infatti per quest'ultimo modello non vi è riattaccamento del flusso, definendo un comportamento fluidodinamico totalmente differente a valle della separazione.

In termini numerici si applica la 5.3 per il confronto tra i modelli di turbolenza in ambito di RSS; si ottiene dal punto di vista quantitativo

$$MSE_{k-\omega} = 0.00203 \quad MSE_{S-A} = 0.00264 \quad (5.5)$$

Perciò il modello $SST\ k-\omega$ risulta maggiormente efficace nell'approssimazione dei dati sperimentali in ambito di RSS; nel confronto con il modello Spalart-Allmaras lo scarto risulta ridotto di circa il 25%. E' inoltre svolta un'analisi supplementare sulla cattura dello strato limite dei due modelli, mediante la valutazione del parametro turbolento y^+ .

Nel grafico 5.27 l'ascissa tratteggiata corrisponde al punto in cui avviene la separazione per entrambi i modelli turbolenti.


 Figura 5.27: Confronto y^+ per NPR=16

Nonostante Spalart-Allmaras presenti un valore minore in buona parte del profilo, soprattutto nel tratto divergente, il modello SST $k - \omega$ risulta più efficace nella definizione del riattaccamento del flusso. Si segnala il raggiungimento dei requisiti di calcolo con il modello Spalart-Allmaras, secondo cui $y^+ < 5$, specialmente nella zona d'interesse, ovvero quella del tratto divergente a monte della separazione. Minore l'efficacia del modello SST $k - \omega$, in quanto richiede requisiti più restrittivi. Nella tabella 5.4 si ha una valutazione quantitativa, riportando le coordinate assiali dei punti di separazione al variare del NPR, nei casi di start up e shut down, con entrambi i modelli di turbolenza implementati.

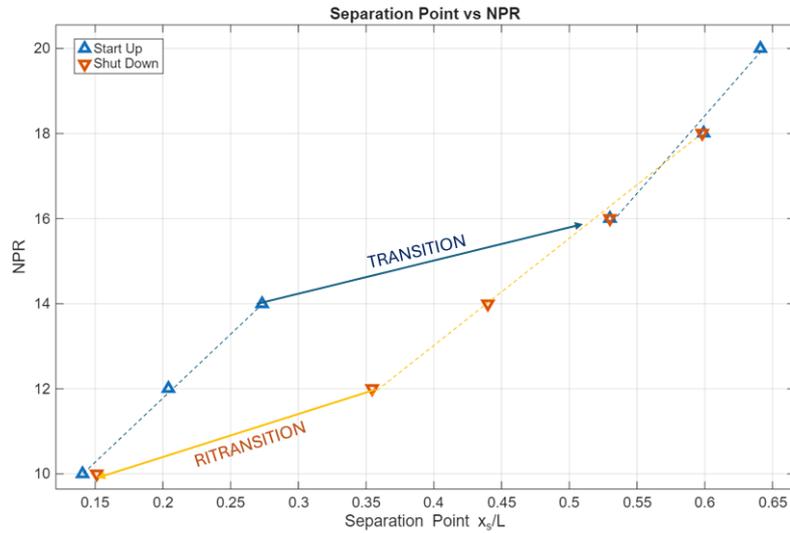
NPR	Start Up		Shut Down	
	$k - \omega$	S-A	$k - \omega$	S-A
10	0.0147	0.0181	0.0158	0.0288
12	0.0213	0.0248	0.037	0.0422
14	0.0285	0.0389	0.0459	0.0521
16	0.0553	0.0409	0.0553	0.058
18	0.0625	0.0636	0.0625	0.0636
20	0.0669	0.0675	0.0669	0.0675

Tabella 5.4: Punto di separazione in funzione del modello di turbolenza

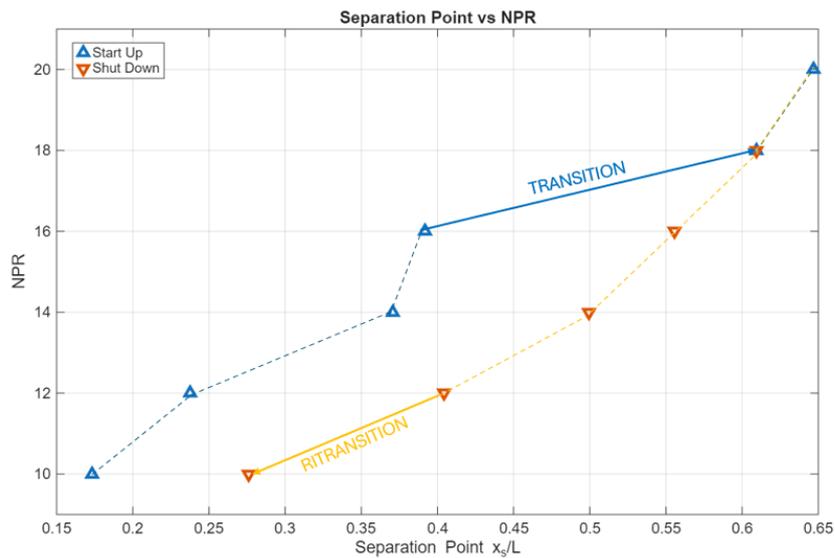
Si nota come il modello Spalart-Allmaras tenda a stimare più a valle il punto di separazione, eccezion fatta per il NPR di transizione, fissato a circa NPR=16.

In definitiva, date le valutazioni svolte e i confronti con i casi test, il modello SST $k - \omega$ risulta essere più efficace nonostante non si raggiungano i requisiti per la cattura dello strato limite a parete.

Si passa alla valutazione isolata dell'andamento del punto di separazione di ogni modello di turbolenza, con successivo confronto dei cicli di isteresi formatisi.



(a) Modello SST $k - \omega$ (mesh 1)



(a) Modello Spalart-Allmaras (mesh 1)

Figura 5.29: Ciclo di isteresi del punto di separazione con mesh 1

Nel caso del modello SST $k - \omega$ (figura 5.28a) al variare del NPR i punti di separazione presentano un andamento lineare nello stesso regime di separazione, come si può notare in FSS per $\text{NPR} \in (10 - 14)$, e ancora più chiaramente in RSS per $\text{NPR} \in (18 - 12)$; si nota una lieve incongruenza a $\text{NPR}=20$, perlopiù imputabile a questioni di calcolo.

Nel caso del modello di Spalart-Allmaras 5.29a le incongruenze risultano maggiori:

- il punto di separazione in start up a $\text{NPR}=12$ risulta essere più a monte del posizionamento previsto;
- la transizione sembra avvenire in maniera anticipata rispetto all'andamento previsto dal resto delle simulazioni;
- la separazione a $\text{NPR}=20$ risulta essere maggiormente congruente alla fase di shut down che a quella di start up;
- la separazione a $\text{NPR}=10$ nella fase di shut down sembra essere eccessivamente a valle, quindi posticipata; risulta evidente in quanto porta alla mancata "chiusura" del ciclo di isteresi, causa il fenomeno di ritransizione.

In generale i fenomeni di transizione e ritransizione avvengono in range differenti di NPR: nel caso di SST $k - \omega$ avviene in $\text{NPR} \in (14 - 16)$, mentre in Spalart-Allmaras in $\text{NPR} \in (16 - 18)$. La ritransizione si verifica in un intervallo comune, per $\text{NPR} \in (12 - 10)$.

Dalle valutazioni grafiche appena prodotte si può inoltre ricreare un confronto visivo mediante la sovrapposizione dei due cicli.

Nello specifico in blu si valuta il ciclo relativo al modello SST $k - \omega$, in rosso quello relativo al modello Spalart-Allmaras.

Dal confronto in figura 5.30 si valuta per la mesh 1 una variazione di NPR tra transizione e ritransizione

$$\Delta_{k-\omega} = \text{NPR}_r - \text{NPR}_t = 2 \quad (5.6)$$

$$\Delta_{S-A} = \text{NPR}_r - \text{NPR}_t = 4 \quad (5.7)$$

Dal confronto con studi simili che utilizzano dei profili parabolici ([4], [6], [16]) risulta esserci uno scarto di NPR tra transizione e ritransizione che oscilla nel range $\Delta = (1 - 3)$.

Perciò risulta più coerente il modello SST $k - \omega$, a differenza del modello Spalart-Allmaras, che sovrastima tale range.

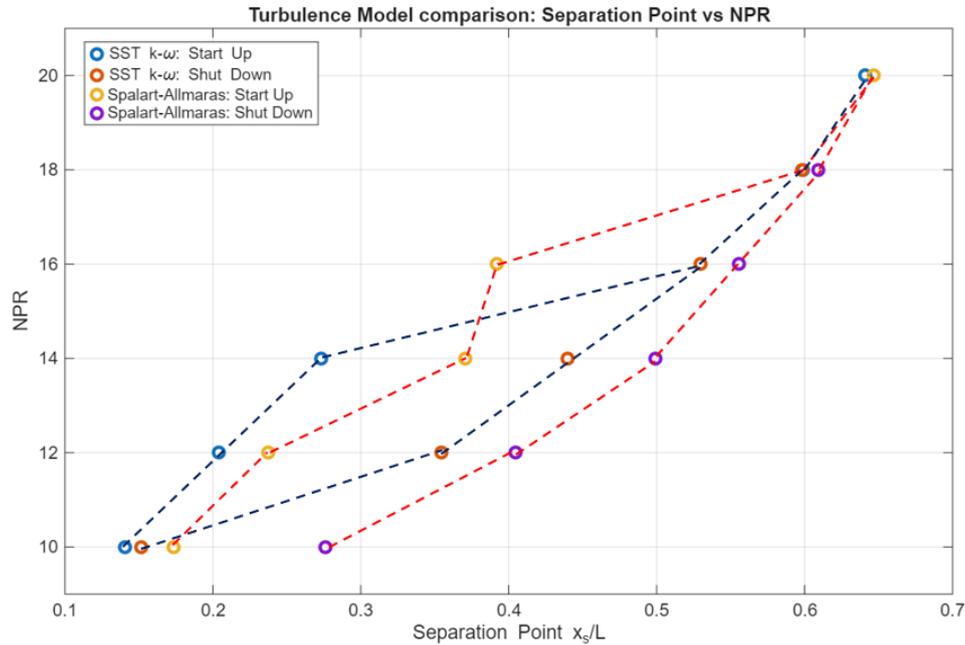


Figura 5.30: Confronto ciclo di isteresi del punto di separazione con i due modelli di turbolenza (mesh 1)

5.4 Valutazione mesh

In questa sezione si adotta una seconda mesh, caratterizzata da numero di celle superiore; nello specifico si è incrementato di un numero di celle pari al 25% ogni confine del dominio computazionale. Restano fissate le condizioni al contorno poste nella sezione 5.1.

Si adotta il modello di turbolenza che ha avuto risultati migliori nel paragrafo precedente, quindi il modello SST $k - \omega$.

Numero di celle	128000
Dominio interno	275x125
Dominio esterno	250x125

Tabella 5.5: Caratteristiche mesh 2 ugello parabolico

Nella mesh 2 si riscontra un incremento di circa il 58% rispetto alla mesh 1 in termini di numero di celle totali.

5.4.1 Mesh 2

Si riportano i campi di Mach con modello SST $k - \omega$ con l'uso della mesh 2.

NPR 10

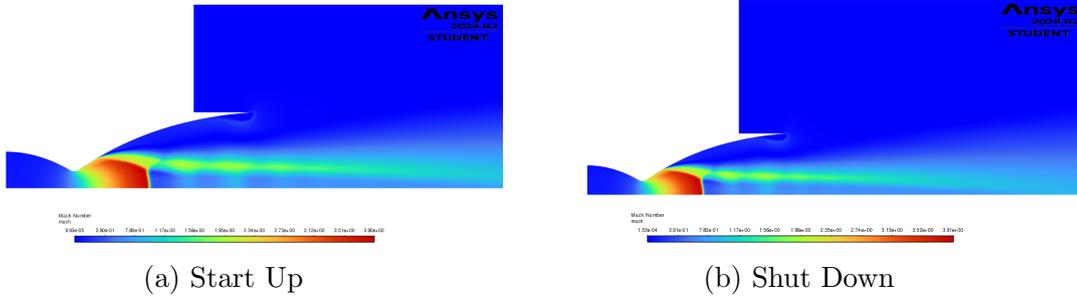


Figura 5.31: Campi di Mach NPR=10 con mesh 2

NPR 12

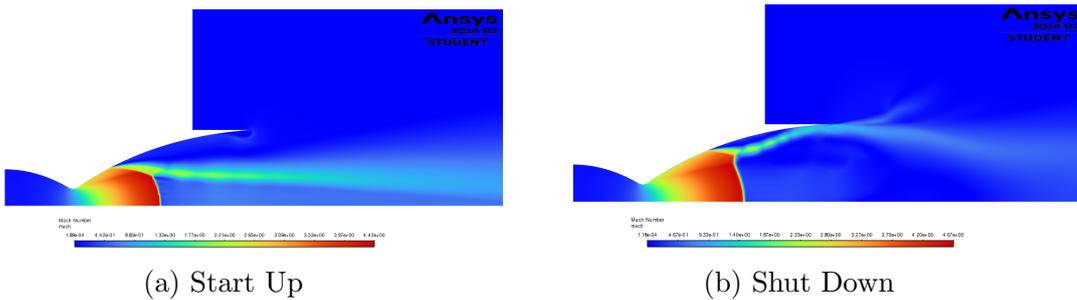


Figura 5.32: Campi di Mach NPR=12 con mesh 2

NPR 14

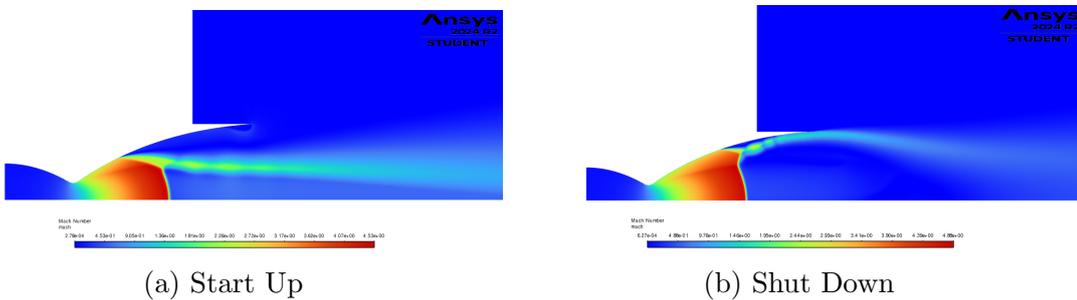


Figura 5.33: Campi di Mach NPR=14 con mesh 2

NPR 16

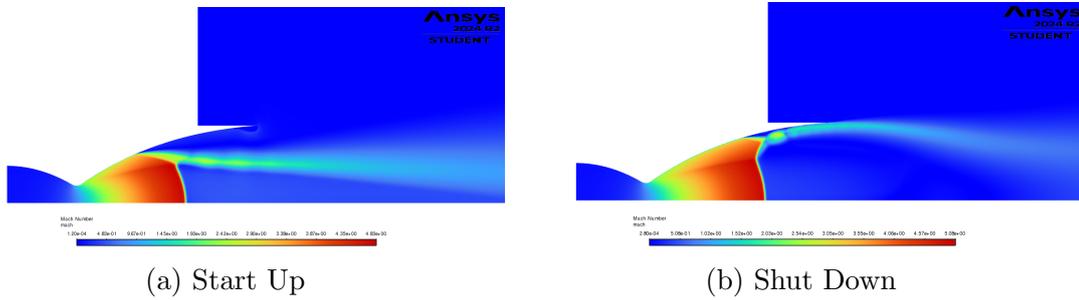


Figura 5.34: Campi di Mach NPR=16 con mesh 2

NPR 18

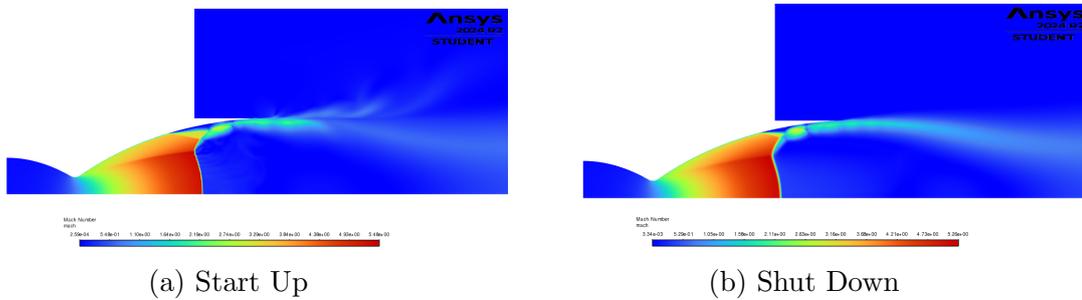
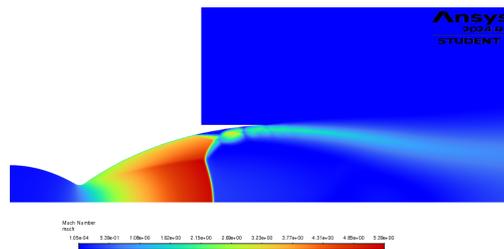


Figura 5.35: Campi di Mach NPR=18 con mesh 2

NPR 20



La presenza di FSS e RSS mostrate nelle varie fasi viene confermata dai grafici 5.37 e 5.38, che definiscono rispettivamente i profili di pressione nelle fasi di start up e shut down.

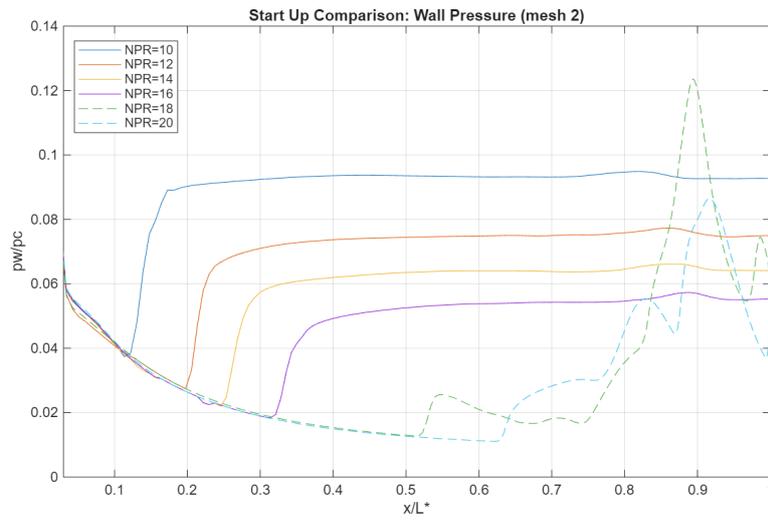


Figura 5.37: Profili di pressione a parete in fase di start up con mesh 2

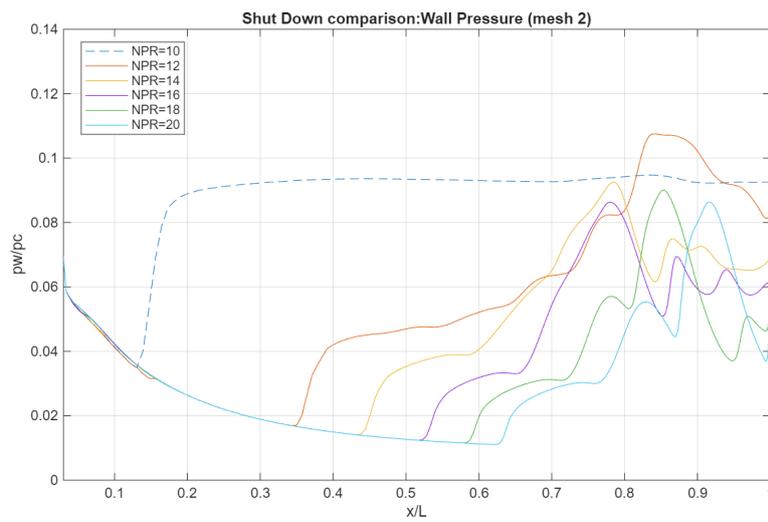


Figura 5.38: Profili di pressione a parete in fase di shut down con mesh 2

5.4.2 Confronto in FSS

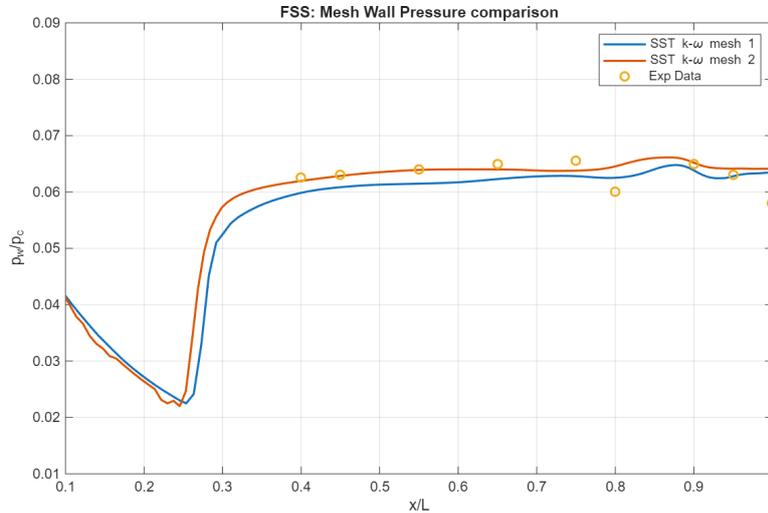


Figura 5.39: Comparazione mesh sul caso test FSS a NPR=14

Dal grafico 5.39 si nota come il raffinamento della mesh permetta una lieve ma significativa riduzione dello scarto dei profili di pressione a parete nel caso di FSS rispetto ai dati sperimentali a disposizione (dallo studio [16]).

Questo miglioramento risulta evidente nella prima parte del divergente, dove i dati sperimentali sembrano seguire esattamente l'andamento di pressione a parete della mesh 2.

Analiticamente, mediante l'utilizzo di 5.3 si ottiene:

$$MSE_{mesh1} = 0.0039 \quad MSE_{mesh2} = 0.0038 \quad (5.8)$$

Quindi anche in questo caso la discriminante tra le due mesh non risiede nel caso di FSS, dove le due alternative risultano pressoché equivalenti; infatti, nel confronto con i dati sperimentali si dimostra un leggero miglioramento nel caso della mesh 2, pari a circa il 2.5% rispetto alla mesh 1.

5.4.3 Confronto in RSS

Più delicata è la questione relativa al confronto con i dati sperimentali del caso di RSS; infatti la mesh 2 prevede FSS nel caso di NPR=16, quindi discorde rispetto ai dati sperimentali; per tale motivo si valutano sia i profili di pressione in fase di start-up che in fase di shut down, dove si riscontra in entrambe le mesh un caso di RSS.

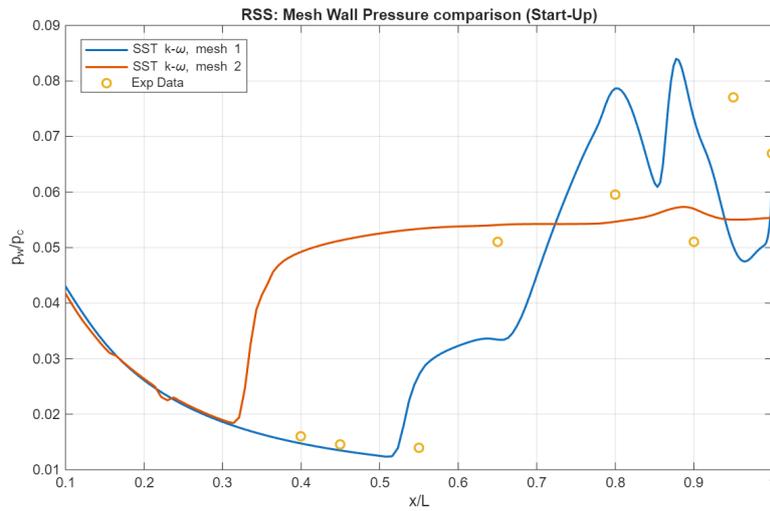


Figura 5.40: Comparazione mesh sul caso test RSS a NPR=16, fase di start up

Nella fase di start up si ottengono degli scarti quadratici medi pari a

$$MSE_{mesh1} = 0.0203 \quad MSE_{mesh2} = 0.0281 \quad (5.9)$$

Perciò la mesh 1 risulta avere un comportamento coerente rispetto ai dati sperimentali sia a livello quantitativo che a livello qualitativo, rispecchiando il regime di separazione vigente.

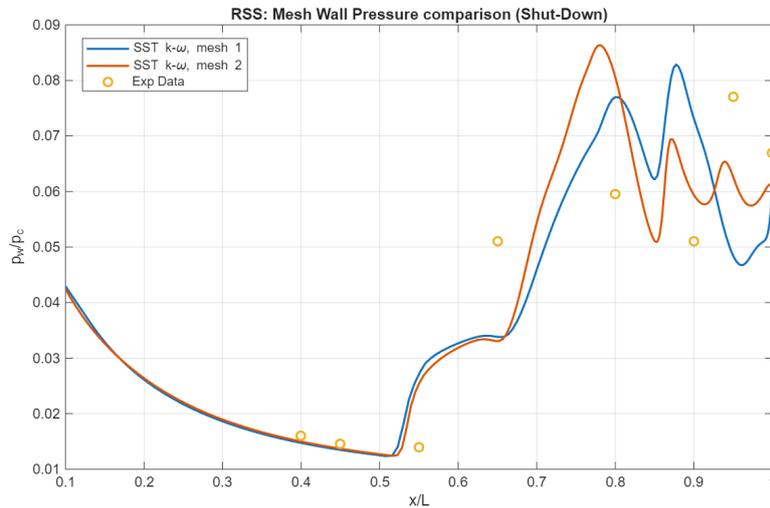


Figura 5.41: Comparazione mesh sul caso test RSS a NPR=16, fase di shut down

Nella fase di shut down si ottengono degli scarti quadratici medi pari a

$$MSE_{mesh1} = 0.0203 \quad MSE_{mesh2} = 0.0144 \quad (5.10)$$

A parità di modello di turbolenza, quindi nella fase di shut down, risulta esserci un comportamento più vicino ai dati sperimentali da parte della mesh 2 (di circa il 29% in più rispetto alla mesh 1).

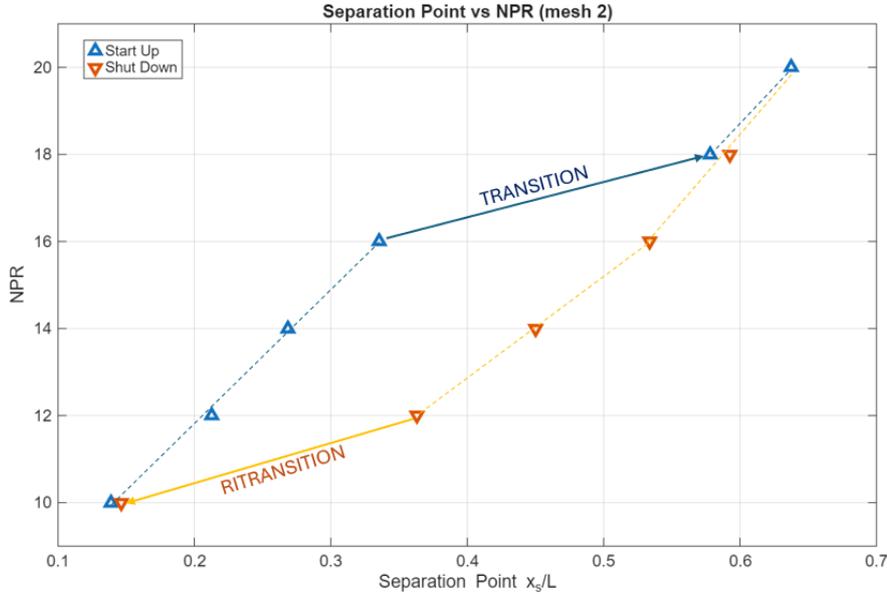


Figura 5.42: Ciclo di isteresi del punto di separazione con mesh 2

Differentemente della mesh iniziale, la transizione avviene a $NPR=17$. Quindi la mesh 2 evidenzia un comportamento differente rispetto ai due modelli visti finora per la mesh 1.

A differenza del modello Spalart-Allmaras per la mesh 1, in questo caso la mesh 2 non presenta particolari incongruenze in merito al ciclo di isteresi; l'unica problematica è relativa al lieve disallineamento già riscontrato nella mesh 1 per $NPR=20$. Anche in questo caso, tenuto conto delle valutazioni relative ai cicli di isteresi in figura 5.28a e 5.42, è possibile ottenere un riscontro visivo mediante la loro sovrapposizione.

Dalla lettura del grafico 5.43 si valuta una variazione di NPR in corrispondenza di transizione e ritransizione con le due mesh di riferimento pari a

$$\Delta_{mesh1} = NPR_r - NPR_t = 2 \quad (5.11)$$

$$\Delta_{mesh2} = NPR_r - NPR_t = 4 \quad (5.12)$$

Quindi anche in questo caso la mesh 1 risulta avere maggiore conformità rispetto ai dati sperimentali.

La differenza sostanziale riguarda la presenza di FSS a $\text{NPR}=16$ in fase di start up per la mesh 2, non prevista dalla mesh 1 per lo stesso modello di turbolenza.

Anche in questo caso si può definire un riscontro quantitativo del confronto tra le due mesh usando come riferimento la collocazione del punto di separazione al variare del NPR.

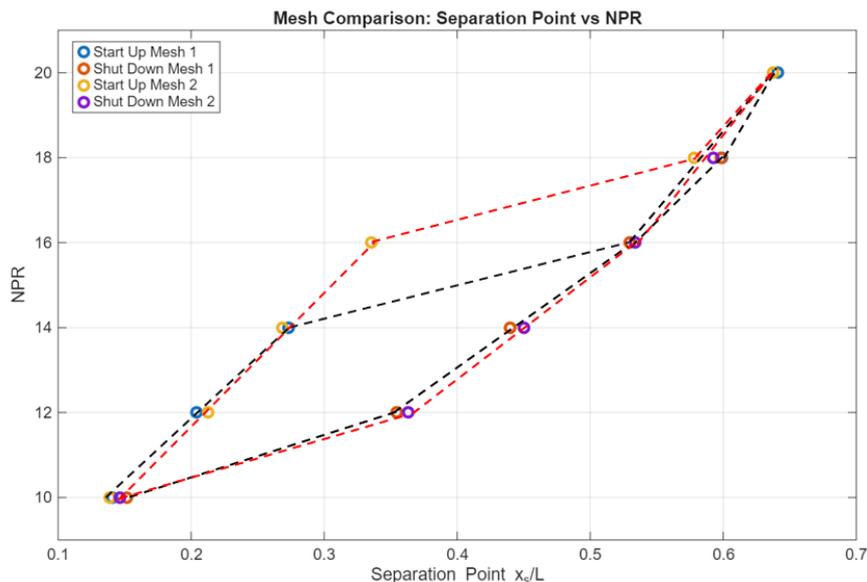


Figura 5.43: Confronto ciclo di isteresi del punto di separazione con le due mesh (modello SST $k - \omega$)

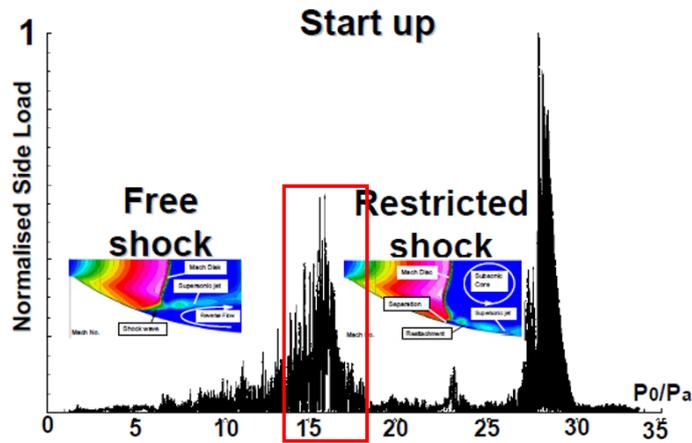
Si notano in tabella 5.6 degli scarti percentuali accettabili, eccezion fatta per il già discusso caso del $\text{NPR}=16$ in fase di start up.

Separation Point x_s (SST $k - \omega$)						
NPR	Start Up		Shut Down		Δ [%]	
	Mesh 1	Mesh 2	Mesh 1	Mesh 2	Start Up	Shut Down
10	0.0147	0.0145	0.0158	0.0153	1.38	3.27
12	0.0213	0.0222	0.037	0.0379	4.05	2.37
14	0.0285	0.028	0.0459	0.047	1.79	2.34
16	0.0553	0.035	0.0553	0.0557	58	0.72
18	0.0625	0.0603	0.0625	0.0618	3.65	1.13
20	0.0669	0.0665	0.0669	0.0665	0.6	0.6

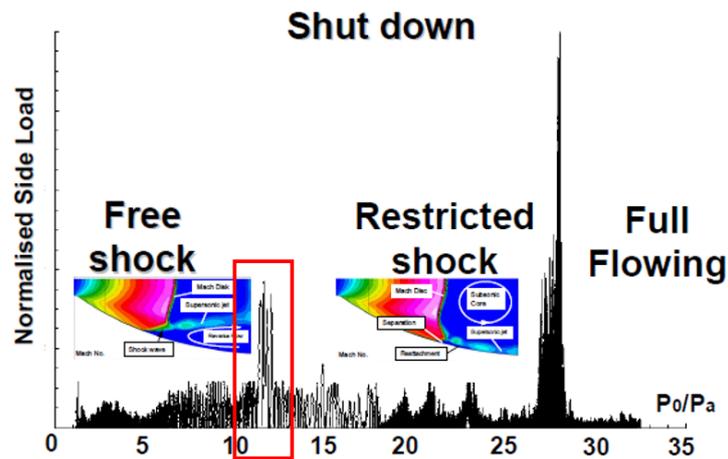
Tabella 5.6: Punto di separazione in funzione della mesh

In definitiva, nel confronto delle due mesh, si nota come anche in questo caso si abbia discordanza nel fenomeno di transizione: essa avviene ad un valore di $NPR \approx 17$ per la mesh 2, come dimostra anche lo studio [13] su un ugello TOP; allo stesso modo lo studio [16] dimostra come la transizione avvenga a $NPR \approx 15$, per cui la presenza di RSS mostrata dalla mesh 1 risulta ragionevole.

Al contrario si ottiene invece maggiore uniformità sul range di ritransizione, che è concorde per ogni modello e ogni mesh analizzati nell'elaborato.



(a) Start Up



(a) Shut Down

Figura 5.45: Andamento carichi laterali al variare del NPR nelle due fasi [16]

Quindi i range di NPR relativi ai fenomeni di transizione e ritransizione dovrebbero essere quelli interessati dai side loads più marcati; difatti dalle figure 5.44a e 5.45a si nota come sia in fase di start up che in fase di shut down questo requisito venga rispettato dai risultati ottenuti nell'analisi, nonostante la presenza di lievi incongruenze.

Capitolo 6

Conclusioni

Il lavoro descritto nel seguente elaborato ha permesso di approfondire in modo significativo le dinamiche di separazione del flusso in ugelli parabolici (TOP), in condizioni di sovraespansione, focalizzandosi sul comportamento isteretico del punto di separazione nelle fasi di accensione e spegnimento. L'utilizzo della CFD con approccio RANS ha evidenziato l'efficacia dei modelli di turbolenza SST $k - \omega$ e Spalart-Allmaras nel riprodurre le due principali configurazioni di separazione, ovvero FSS e RSS.

L'analisi ha mostrato:

- una dipendenza significativa del regime di separazione sia dal valore del NPR sia dalla storia della soluzione (ciclo di isteresi), quindi dalle soluzioni stazionarie precedenti;
- una marcata sensibilità ai modelli di turbolenza adottati, con SST $k - \omega$ che si è dimostrato più efficiente nella previsione fenomenologica;
- l'influenza della qualità e del grado di raffinamento della mesh nel catturare correttamente la transizione da FSS a RSS e la relativa ritrasizione, oltre alle caratteristiche e alla collocazione del punto di separazione.

Nello specifico, risultano interessanti le seguenti osservazioni:

- per gli ugelli parabolici (in particolare i modelli Volvo S1) il ciclo di isteresi è definito in maniera pressoché univoca per $\text{NPR} \in (10 - 15)$.
- l'accuratezza del modello di turbolenza viene valutata con il confronto con i dati sperimentali; risulta rispettato pienamente nel caso di FSS, in maniera meno evidente dal punto di vista quantitativo avviene anche in RSS.

- nel caso analizzato il raffinamento della mesh porta a calcoli dalla precisione maggiore, ma con incongruenze a livello di fenomenologia, dovuto principalmente alla complessità dell'evoluzione del flusso.

Questi risultati forniscono un contributo utile per la progettazione di ugelli più efficienti, suggerendo che il controllo della separazione debba considerare sia l'accuratezza dei modelli numerici sia l'adeguata caratterizzazione della simulazione.

Infine tale elaborato potrebbe essere di utile indicazione per eventuali studi con un approccio più avanzato, servendosi di simulazioni transitorie per esaminare meglio il comportamento del flusso durante le variazioni di NPR; ulteriori approfondimenti potrebbero rivolgersi al campo delle vibrazioni e dell'acustica: i fenomeni appena descritti influenzano significativamente le prestazioni dei motori a razzo, in particolare in termini di stabilità del volo e carichi laterali (side loads).

Altro oggetto di studio potrebbe essere un modello in scala reale per avere conferme sui risultati ottenuti e calibrare i modelli di turbolenza utilizzati.

Appendice A

Validazione con ugello TIC

A.1 Caso con solo ugello

Per la validazione della mesh e dei modelli di turbolenza, oltre alle impostazioni del solver, è stato eseguito un test numerico su un ugello troncato ideale (TIC), nello specifico quello oggetto dello studio di Stark e Hagemann. [23]

La geometria di tale profilo, in figura A.1, è stata ricavata da punti caratteristici definiti dallo studio sovracitato.

A.1.1 Mesh

Per il solo ugello si opta per una mesh definita in base al numero di divisioni dei bordi del dominio, nel caso specifico si tratta di una mesh 120x80.

Viene inoltre inserito un infittimento della griglia (BIAS) in prossimità della parete in modo da poter valutare in modo efficace il sottostrato viscoso.

Il vincolo imposto in tale zona è relativo ai modelli di turbolenza e al valore del parametro turbolento y^+ .

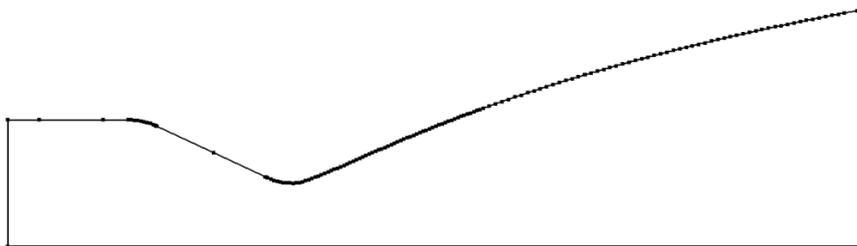


Figura A.1: Profilo ugello TIC

In questa prima fase i modelli turbolenti considerati sono Spalart-Allmaras (1 equazione) e SST $k - \omega$ (2 equazioni).

In queste analisi si opta per una viscosità variabile con la temperatura, modellizzata dalla formula di Sutherland

$$\mu = S \frac{T^{\frac{3}{2}}}{\chi + T} \quad (\text{A.1})$$

in cui le due costanti χ e S dipendono dal fluido operativo.

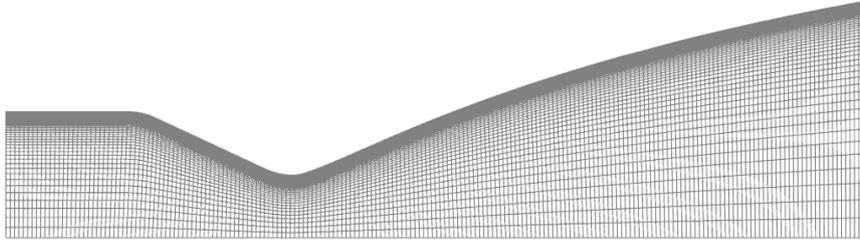


Figura A.2: Mesh iniziale ugello TIC

A.1.2 Condizioni al contorno

Per la definizione del problema si pongono le opportune condizioni al contorno, nello specifico in ingresso la pressione e la temperatura totali (2 BCs) e in uscita la pressione statica (1 BC).

$$p_i^\circ = 2.5 \text{ MPa} \quad T_i^\circ = 283 \text{ K} \quad p_e = p_{amb} = 101325 \text{ Pa} \quad (\text{A.2})$$

Dato in input il Nozzle Pressure Ratio (NPR)

$$NPR = \frac{p_i^\circ}{p_{amb}} = 25.25 \quad (\text{A.3})$$

Con la condizione sonica in gola ($M_t = 1$) si adotta la conservazione della portata tra sezioni di ingresso e gola e tra quelle di gola e uscita, in modo da ricavarne i rispettivi Mach. Ipotizzando la conservazione delle grandezze totali lungo l'ugello

$$\frac{A_i}{A_t} = \frac{f(M_t = 1)}{f(M_i)} \quad (\text{A.4})$$

Si ricavano dei valori di Mach di ingresso e uscita pari a

$$M_i = 0.146 \quad M_e = 4.305 \quad (\text{A.5})$$

A.1.3 Modelli di turbolenza

In questa sezione si adottano due modelli di turbolenza: Spalart-Allmaras, modello ad una equazione, e SST $k - \omega$, modello a due equazioni.

Si nota come nella figura A.3 si apprezzi la presenza di strato limite turbolento a parete, sottolineando gli effetti viscosi. Essendo le simulazioni dei due modelli di turbolenza sovrapponibili, vengono riportate quelle relativi al modello SST $k - \omega$, eccezion fatta per il parametro turbolento y^+ , con differenze marcate tra i due modelli (figura A.6a e A.6b).

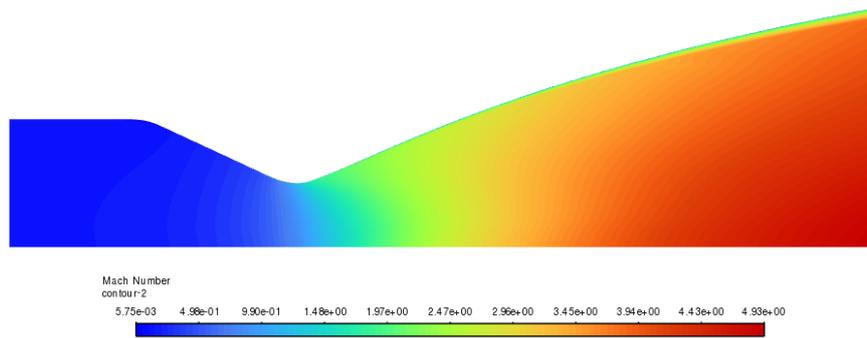


Figura A.3: campo di Mach solo ugello con modelli di turbolenza

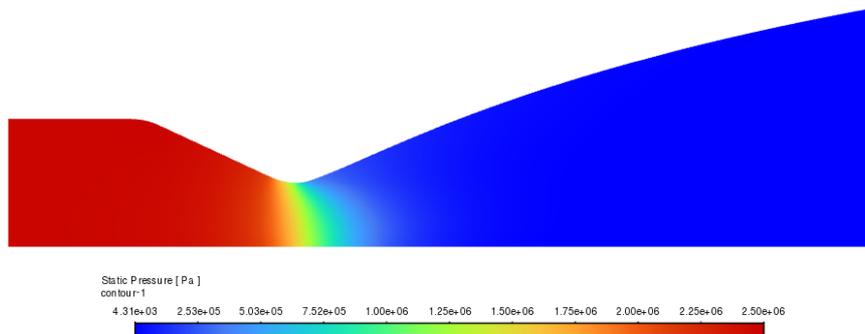


Figura A.4: campo di pressione statica solo ugello con modelli di turbolenza

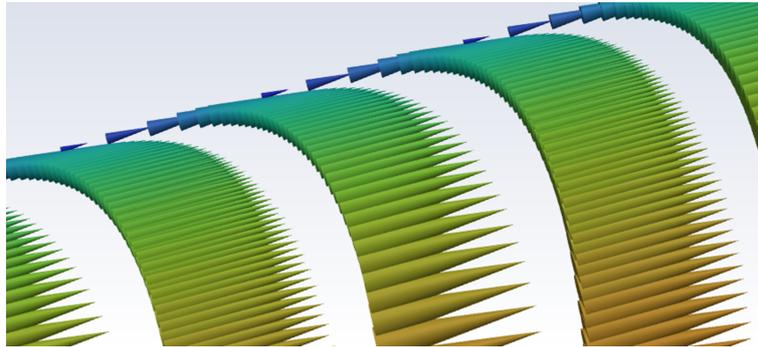
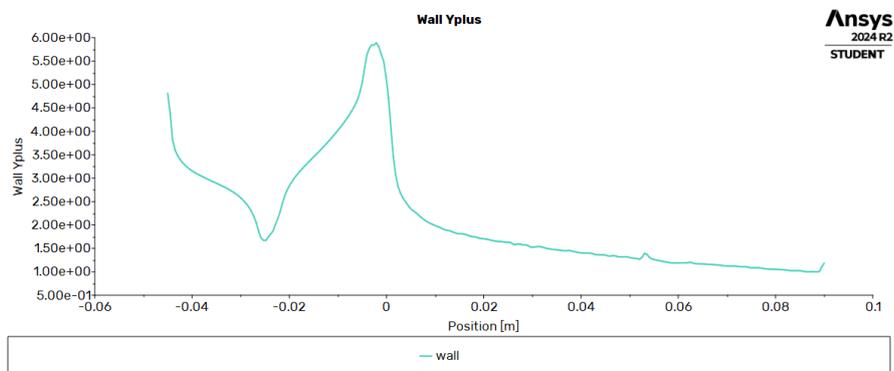
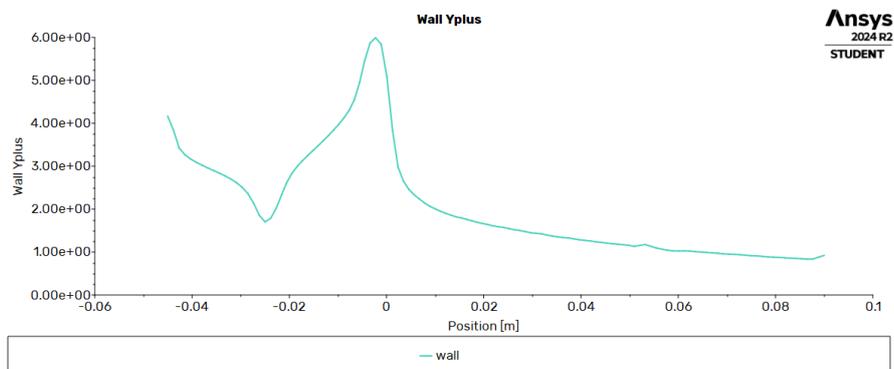


Figura A.5: Focus sullo strato limite



(a) modello $k-\omega$



(b) modello Spalart-Allmaras

Figura A.6: Andamento parametro turbolento y^+ nei modelli di turbolenza

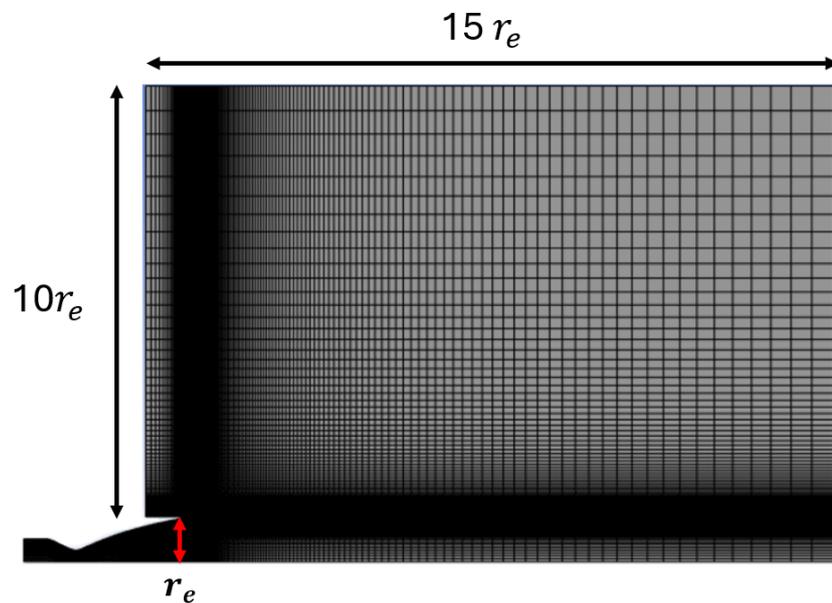
Dalla lettura dei grafici A.6a e A.6b i modelli rispettano il vincolo sul valore del parametro turbolento per poter indagare il sottostrato viscoso, specialmente sul

tratto divergente, che risulta essere il tratto più critico, essendo presente la possibilità di separazione del flusso.

A.2 Caso con campo esterno

A.2.1 Mesh campo esterno

Per valutare l'effettivo sviluppo del flusso a valle dell'ugello si costruisce una porzione esterna all'ugello nel dominio computazionale; nello specifico il campo esterno presenterà un'estensione assiale pari a 15 volte il raggio della sezione di uscita, mentre l'estensione assiale pari a 10 volte lo stesso raggio.



Assumendo lo stesso valore di NPR si sono svolte delle simulazioni di test con campi esterni discretizzate da mesh caratterizzate da risoluzioni differenti, nello specifico:

- mesh 1: 160x100;
- mesh 2: 220x100;
- mesh 3: 280x100;

Il confronto tra le tre mesh viene eseguita valutando le grandezze assiali lungo l'asse di simmetria, nello specifico si confronta l'andamento della pressione, del Mach e della velocità assiali.

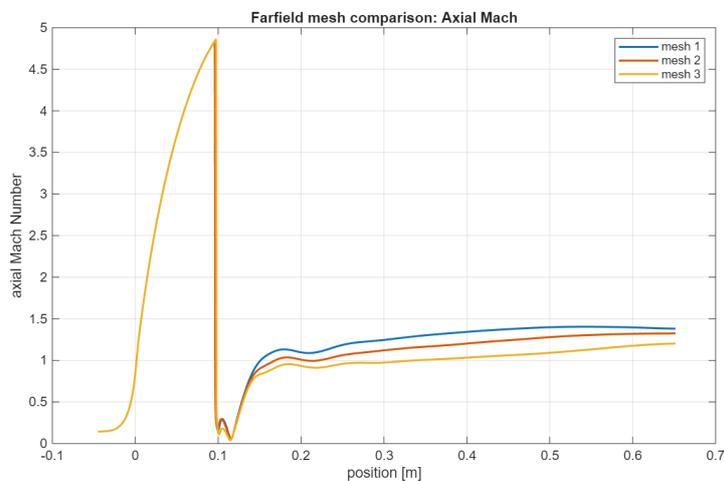
Tutte le simulazioni sono eseguite a parità di condizioni e modello di turbolenza

utilizzato (SST $k-\omega$).

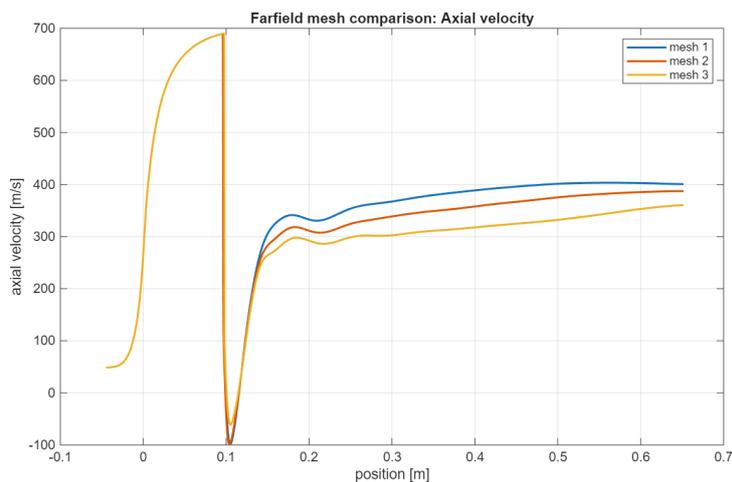
Dal confronto si estrapola come le oscillazioni vengano catturate meglio dalla griglia più fitta, che però richiede tempi di calcolo maggiori delle altre due.

Dal grafico A.8a si nota come tutte e tre le mesh seguano in maniera pressoché corretta l'andamento della pressione assiale e la conseguente collocazione del disco di Mach.

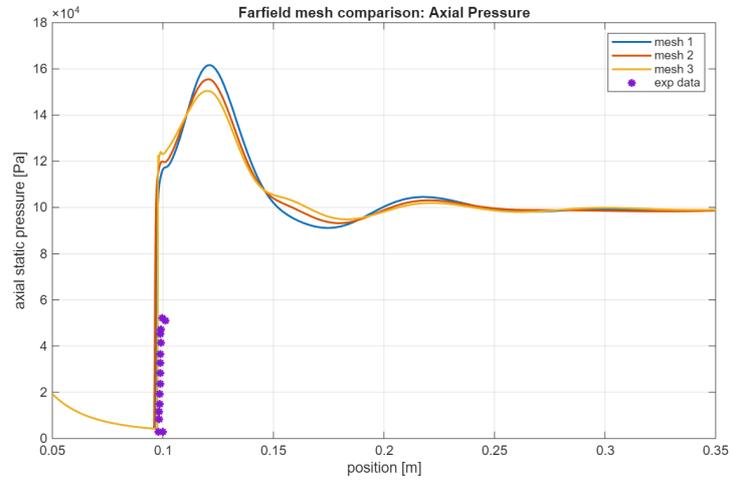
Quindi il campo di moto risulta essere meglio descritto dalla griglia più raffinata, ma per la posizione del disco di Mach sarebbe sufficiente una griglia più grossolana. Per tale motivo un giusto compromesso sarebbe rappresentato dalla scelta della mesh intermedia, definita dal numero di elementi 220x80.



(a) Campo di Mach assiale



(b) Campo di velocità assiale



(a) Campo di pressione statica assiale

Figura A.8: Profili grandezze assiali al variare delle mesh del farfield

A.2.2 Mesh campo interno

La mesh interna all'ugello presenta come peculiarità principale l'infittimento in corrispondenza della sezione di uscita e della parete, in modo da catturare al meglio lo strato limite, la separazione dello stesso e rispettare i vincoli sull' y^+ .

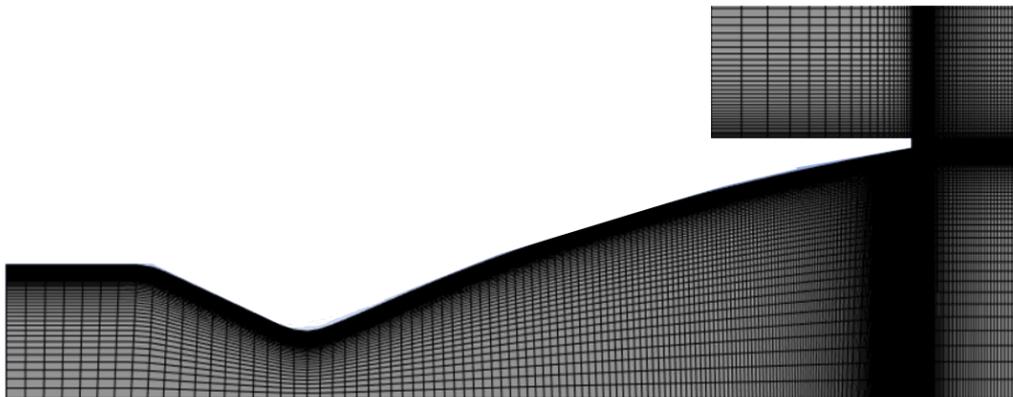


Figura A.9: Caratteristiche mesh del campo interno all'ugello

Per la selezione della mesh più idonea alla previsione del flusso interno all'ugello si opta per la pressione statica a parete, di cui si hanno dei dati sperimentali dello studio di Stark e Hagemann [23].

Nello specifico si esegue la stessa simulazione su mesh con le seguenti risoluzioni:

- mesh 1: 120x100;
- mesh 2: 200x100;
- mesh 3: 280x100;

Utilizzando i dati sperimentali del paper [23], si confrontano gli output delle simulazioni con il modello di turbolenza $k - \omega$ delle tre mesh.

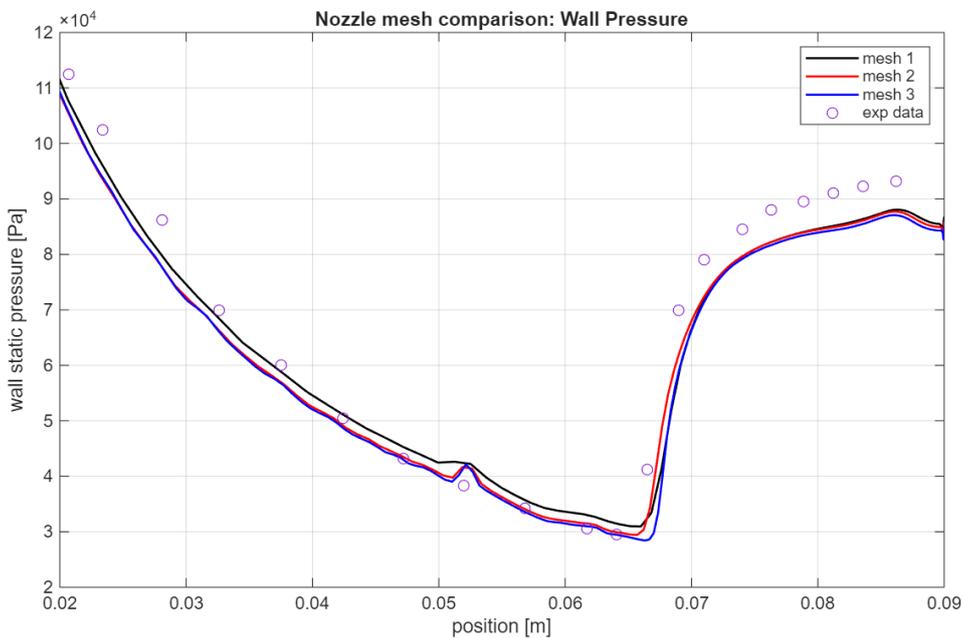


Figura A.10: Confronto profili di pressione statica a parete mesh interne

Nel complesso le tre griglie tendono a sottostimare il valore di pressione a parete rispetto a ciò che viene rilevato in ambito sperimentale.

Il giusto compromesso tra costo computazionale e precisione dei risultati risiede nella mesh di definizione intermedia, quindi quella di risoluzione 200x100.

A.2.3 Mesh completa

Quindi le analisi vengono eseguite sulla mesh con caratteristiche definite dal trade off tra costo computazionale e precisione dei risultati ottenuti dalle varie simulazioni.

Nel caso di studio la mesh avrà risoluzione 200x100 all'interno dell'ugello e 220x100 nel campo esterno, con gli opportuni infittimenti in prossimità di parete e sezione di uscita.

A.3 Scelta modello turbolenza

In questa sezione si operano le simulazioni del caso appena descritto con vari modelli di turbolenza per comprenderne il comportamento e confrontandone con i dati sperimentali in termini di pressione statica a parete e pressione assiale sull'asse di simmetria.

Nello specifico vengono implementati i seguenti modelli turbolenti:

- SST $k - \omega$, con e senza effetti di compressibilità;
- Standard $k - \epsilon$, con e senza effetti di compressibilità;
- Spalart-Allmaras.

A.3.1 Confronto pressione a parete

Il primo confronto analizzato verte sull'andamento della pressione a parete e sul conseguenziale punto di separazione.

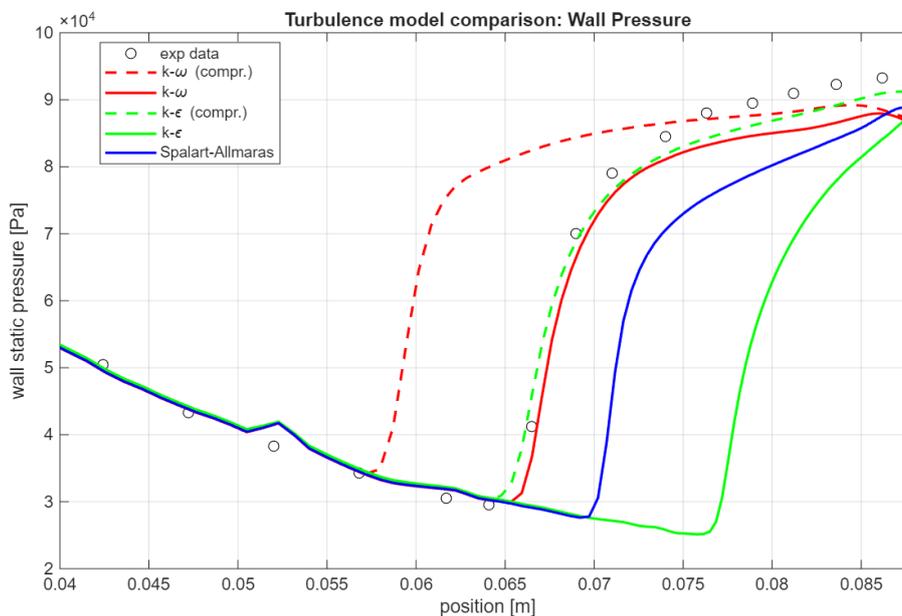


Figura A.11: Confronto profilo di pressione a parete tra modelli di turbolenza

Dal grafico A.11 consegue che, rispetto ai dati sperimentali:

- il modello $k - \omega$ con effetti di compressibilità prevede una separazione prematura del flusso;
- il modello Spalart-Allmaras, e ancora di più $k - \epsilon$, prevedono un ritardo nella separazione del flusso;
- i modelli che seguono maggiormente il comportamento definito dai dati sperimentali sono il metodo $k - \omega$ privo di effetti di compressibilità, e il metodo $k - \epsilon$ in cui si ha l'implementazione di tali effetti.

Nella tabella A.1 si riportano i dati numerici relativi al grafico A.11 con calcolo dell'errore relativo del punto di separazione calcolato rispetto a quello sperimentale. E' possibile ricavare empiricamente il punto di separazione caratteristico dei vari modelli estrapolando il punto in cui si annulla la tensione tangenziale a parete in ciascuna delle simulazioni.

	Separation Point	Offset
	x_{sep}/R^*	Δx_{sep}
Experimental Data	6.6	0 %
SST $k - \omega$	6.71	+1.67 %
SST $k - \omega$ (compr.)	5.94	-10%
Standard $k - \epsilon$	7.78	+17.88%
Standard $k - \epsilon$ (compr.)	6.48	-1.82%
Spalart-Allmaras	7.07	+7.12%

Tabella A.1: Punto di separazione in funzione del modello di turbolenza

Si nota come i risultati meno discostanti si abbiano con i modelli a due equazioni, nello specifico $k - \omega$ senza effetti di compressibilità e $k - \epsilon$ con effetti di compressibilità.

A.3.2 Confronto pressione assiale

Il secondo termine di confronto per i modelli di turbolenza risulta essere la pressione assiale lungo l'asse di simmetria e conseguenziale posizione del disco di Mach.

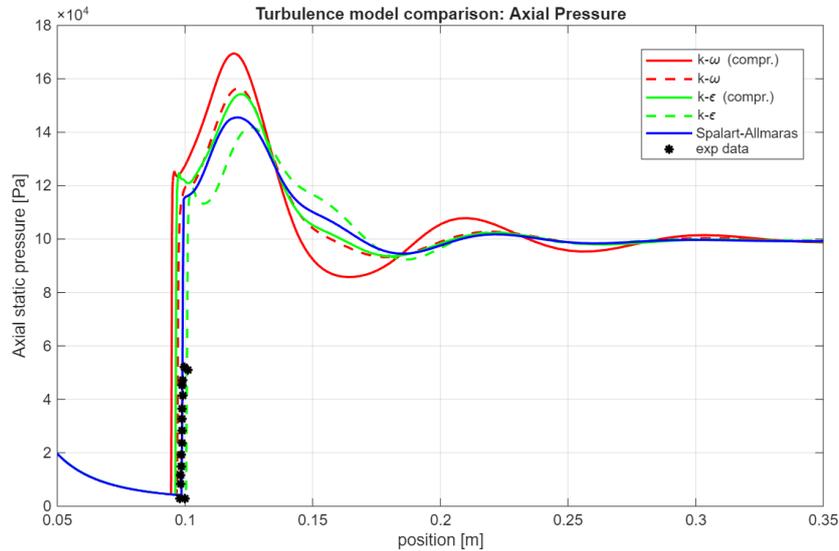


Figura A.12: Confronto profilo di pressione assiale tra modelli di turbolenza

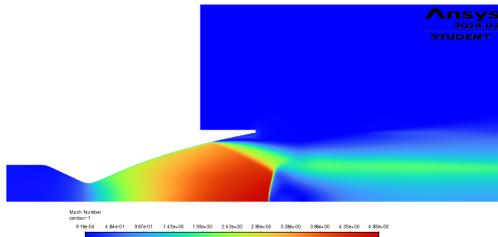
Dal grafico A.12 si nota che la posizione del disco di Mach è definito con buona approssimazione da tutti i modelli di turbolenza. In termini di fluttuazioni della pressione assiale i metodi più funzionali risultano essere le due versioni del metodo $k - \omega$, specialmente quello in cui non si implementa l'effetto della compressibilità; meno precisi Spalart-Allmaras e le versioni del metodo $k - \epsilon$.

A.3.3 Confronto campi di Mach

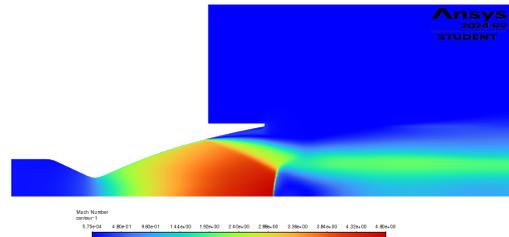
E' quindi possibile valutare le differenze tra i vari campi elaborati dalle simulazioni al variare dei modelli di turbolenza utilizzati.

Nello specifico si analizzano i seguenti campi:

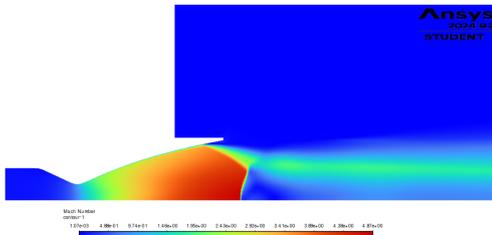
- campo di Mach, che visualizza fenomeni come la separazione e il disco di Mach;



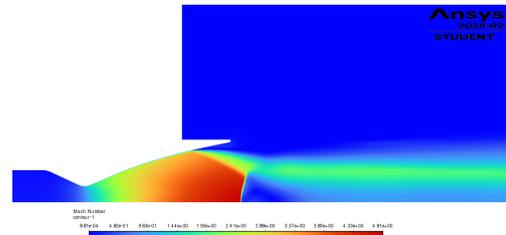
(a) Modello $k - \omega$



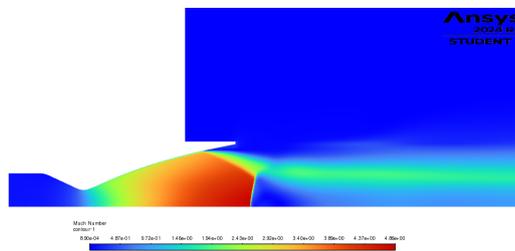
(b) Modello $k - \omega$ compressibile



(c) Modello $k - \epsilon$



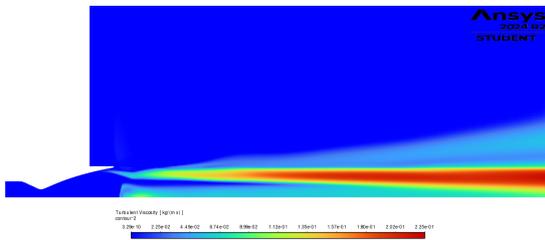
(d) Modello $k - \epsilon$ compressibile



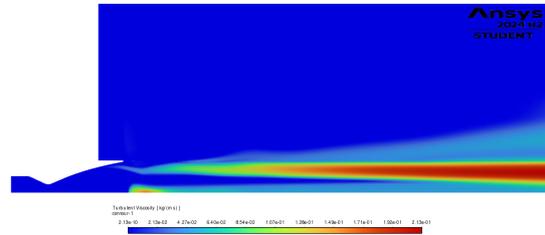
(e) Modello Spalart-Allmaras

Figura A.13: Campo di Mach per i vari modelli di turbolenza

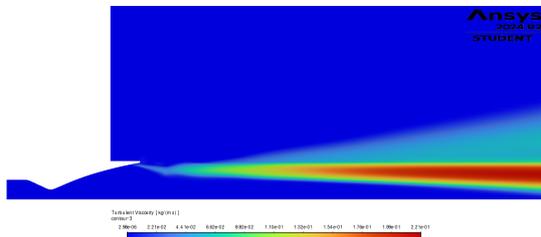
- campo di viscosità turbolenta, raffigurante gli effetti della viscosità calcolata sulla distribuzione di quantità di moto; si nota come in generale la viscosità tendi ad aumentare a valle della separazione, e quindi sulla scia dove si riscontrano fenomeni di decomposizione dei vortici.



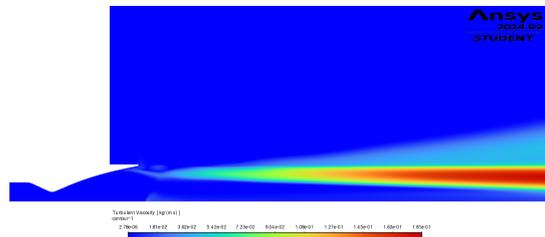
(a) Modello $k - \omega$



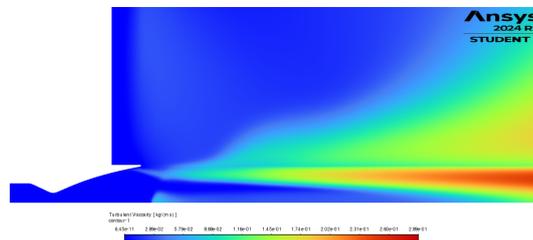
(b) Modello $k - \omega$ compressibile



(c) Modello $k - \epsilon$



(d) Modello $k - \epsilon$ compressibile

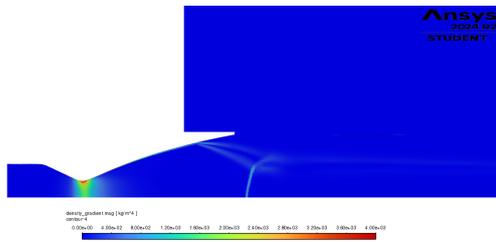


(e) Modello Spalart-Allmaras

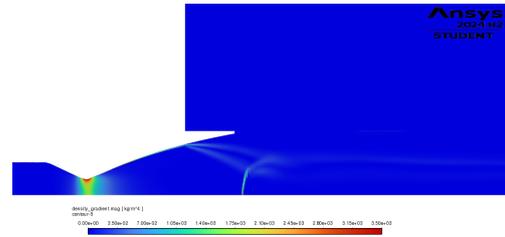
Figura A.14: Campo di viscosità turbolenta per i vari modelli di turbolenza

Si nota come nel grafico A.15e la viscosità turbolenta del modello di Spalart-Allmaras abbia valori marcati più diffusi nel campo esterno rispetto agli altri modelli, che hanno valori e dispersioni pressoché sovrapponibili.

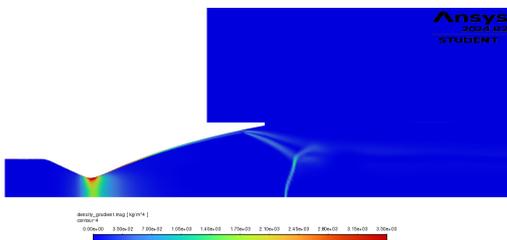
- campo del gradiente di densità, che permette di identificare le strutture fluidodinamiche caratteristiche, come il disco di Mach, le varie onde d'urto interagenti e il conseguenziale punto triplo. Molto simile risulta il comportamento e gli output del gradiente di pressione.



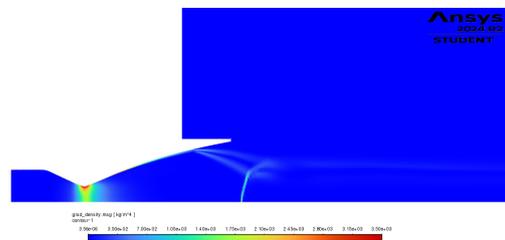
(a) Modello $k - \omega$



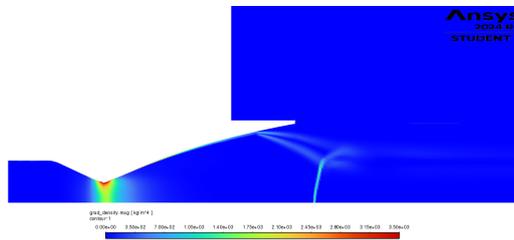
(b) Modello $k - \omega$ compressibile



(c) Modello $k - \epsilon$



(d) Modello $k - \epsilon$ compressibile



(e) Modello Spalart-Allmaras

Figura A.15: Campo del gradiente di densità per i vari modelli di turbolenza

Appendice B

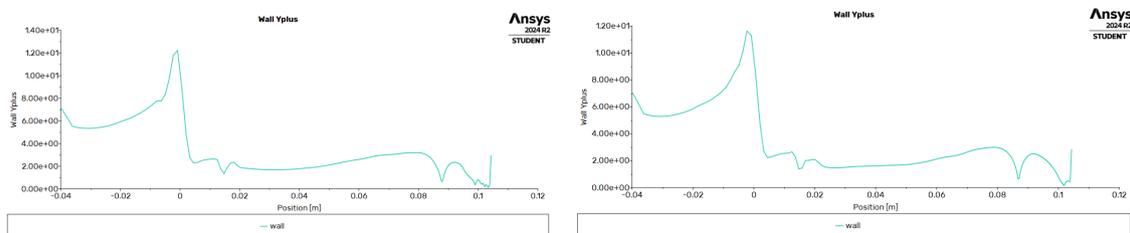
Output vari

Si riportano alcuni output delle varie simulazioni CFD svolte durante l'elaborato; oltre ai vari campi di Mach descritti nel capitolo 5 e nell'appendice A, assume importanza rilevante la stime del parametro turbolento y^+ al variare dei modelli di turbolenza e delle mesh di riferimento.

B.1 Parametro turbolento y^+ a parete

B.1.1 Modello SST $k - \omega$, mesh 1

NPR=10

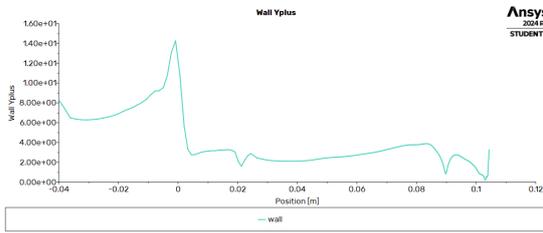


(a) Start Up

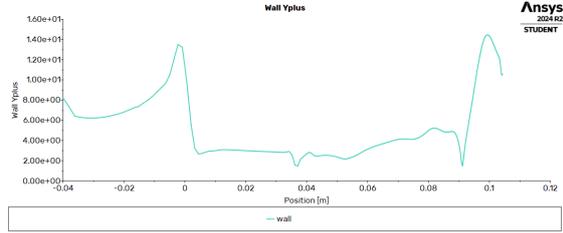
(b) Shut Down

Figura B.1: Andamento y^+ a parete per NPR=10 ($k-\omega$, mesh 1)

NPR=12



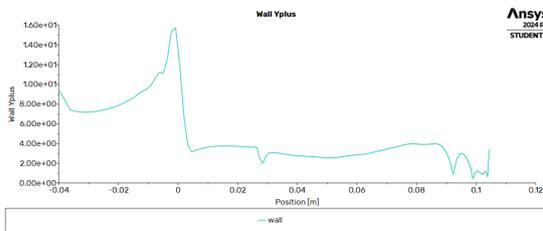
(a) Start Up



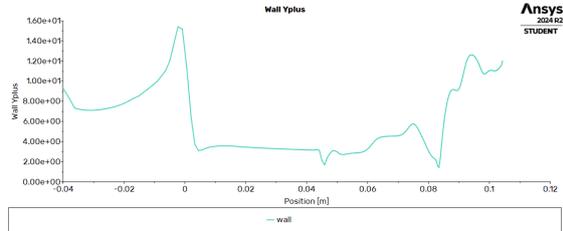
(b) Shut Down

Figura B.2: Andamento y^+ a parete per NPR=12 ($k-\omega$, mesh 1)

NPR=14



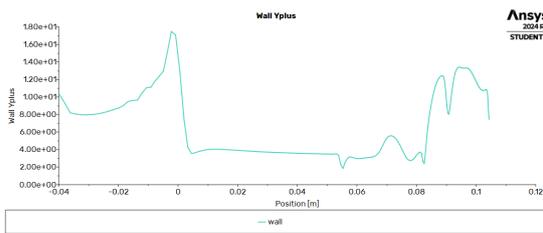
(a) Start Up



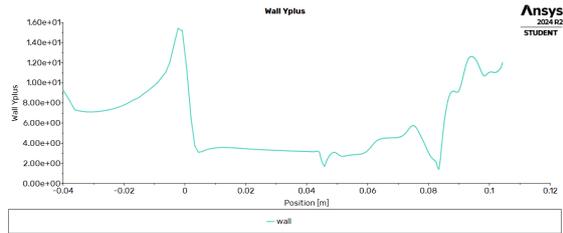
(b) Shut Down

Figura B.3: Andamento y^+ a parete per NPR=14 ($k-\omega$, mesh 1)

NPR=16



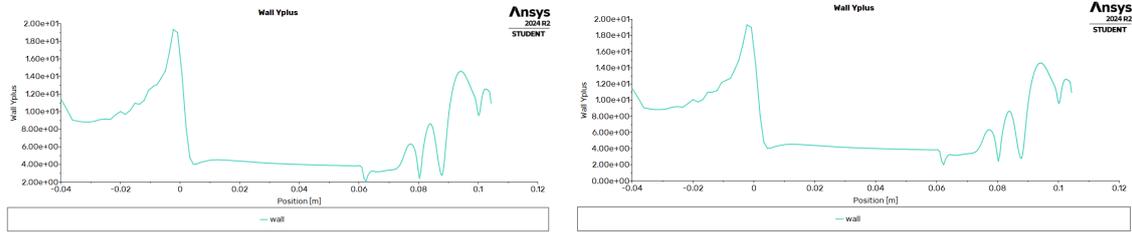
(a) Start Up



(b) Shut Down

Figura B.4: Andamento y^+ a parete per NPR=16 ($k-\omega$, mesh 1)

NPR=18



(a) Start Up

(b) Shut Down

Figura B.5: Andamento y^+ a parete per NPR=18 ($k-\omega$, mesh 1)

NPR=20

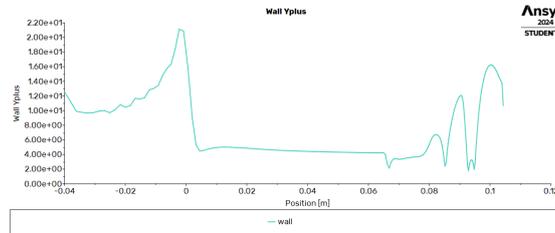
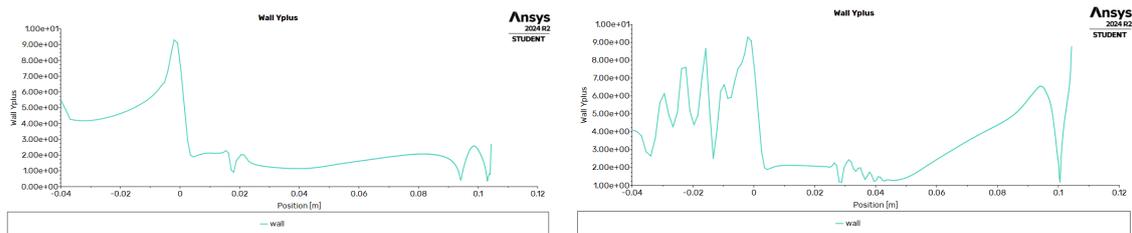


Figura B.6: Andamento y^+ a parete per NPR=20 ($k-\omega$, mesh 1)

B.1.2 Modello Spalart-Allmaras, mesh 1

NPR=10

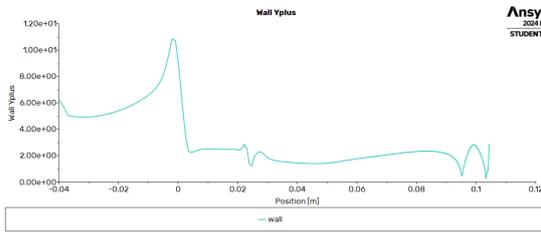


(a) Start Up

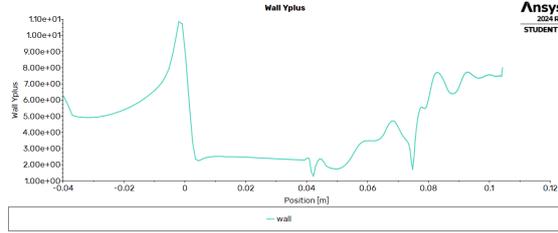
(b) Shut Down

Figura B.7: Andamento y^+ a parete per NPR=10 (Spalart-Allmaras, mesh 1)

NPR=12



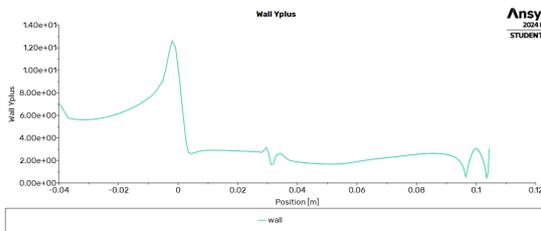
(a) Start Up



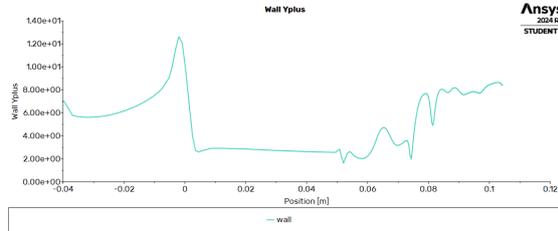
(b) Shut Down

Figura B.8: Andamento y^+ a parete per NPR=12 (Spalart-Allmaras, mesh 1)

NPR=14



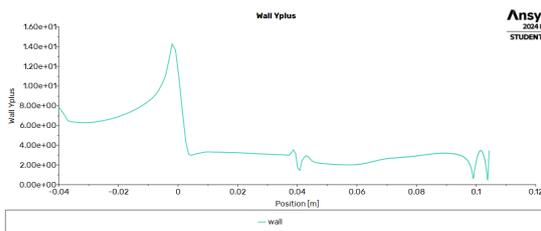
(a) Start Up



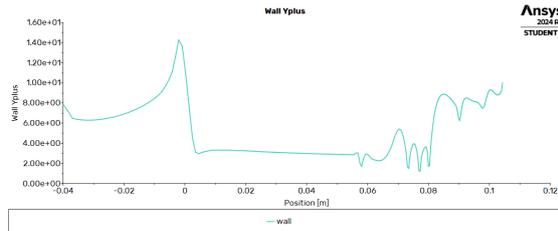
(b) Shut Down

Figura B.9: Andamento y^+ a parete per NPR=14 (Spalart-Allmaras, mesh 1)

NPR=16



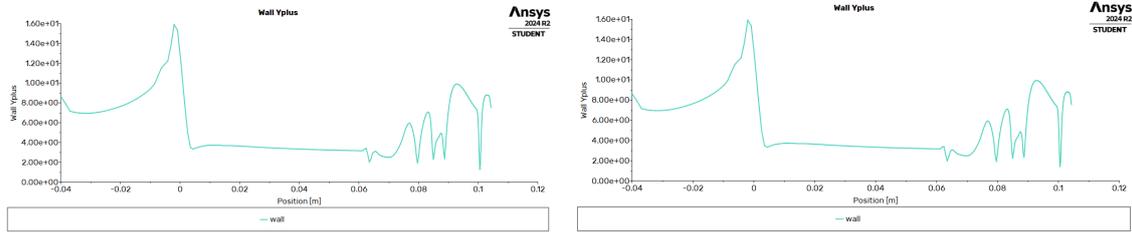
(a) Start Up



(b) Shut Down

Figura B.10: Andamento y^+ a parete per NPR=16 (Spalart-Allmaras, mesh 1)

NPR=18



(a) Start Up

(b) Shut Down

Figura B.11: Andamento y^+ a parete per NPR=18 (Spalart-Allmaras, mesh 1)

NPR=20

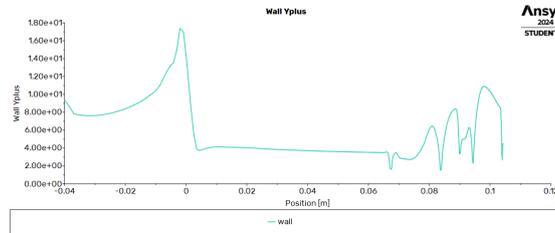
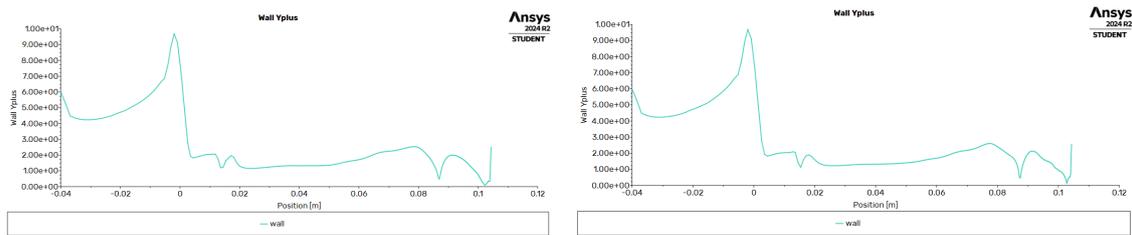


Figura B.12: Andamento y^+ a parete per NPR=20 (Spalart-Allmaras, mesh 1)

B.1.3 Modello SST $k - \omega$, mesh 2

NPR=10

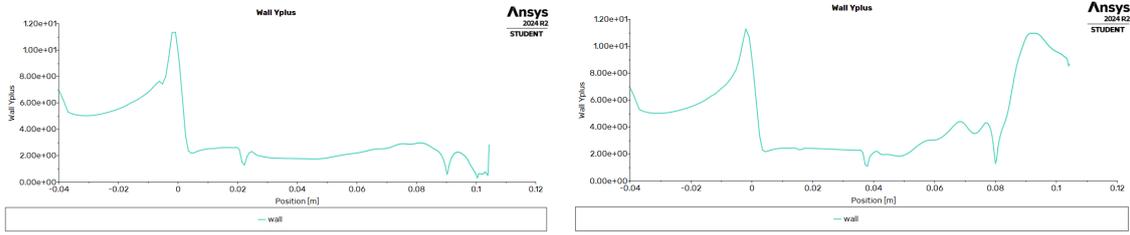


(a) Start Up

(b) Shut Down

Figura B.13: Andamento y^+ a parete per NPR=10 ($k-\omega$, mesh 2)

NPR=12

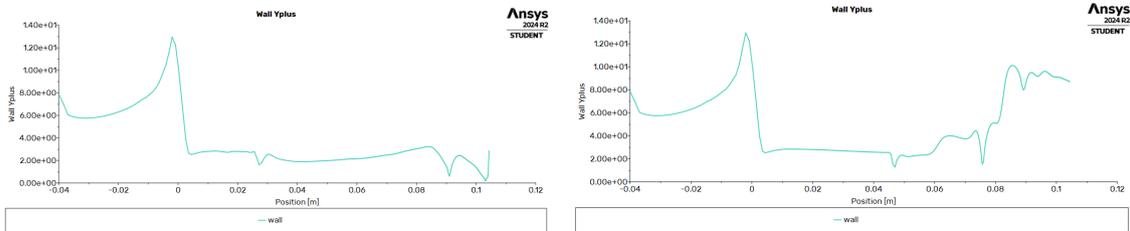


(a) Start Up

(b) Shut Down

Figura B.14: Andamento y^+ a parete per NPR=12 ($k-\omega$, mesh 2)

NPR=14

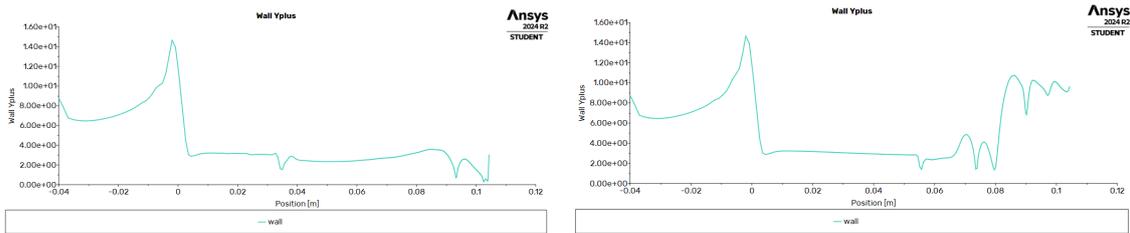


(a) Start Up

(b) Shut Down

Figura B.15: Andamento y^+ a parete per NPR=14 ($k-\omega$, mesh 2)

NPR=16



(a) Start Up

(b) Shut Down

Figura B.16: Andamento y^+ a parete per NPR=16 ($k-\omega$, mesh 2)

NPR=18

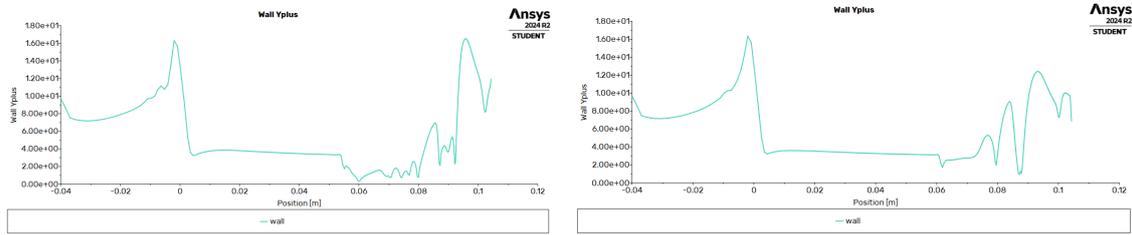
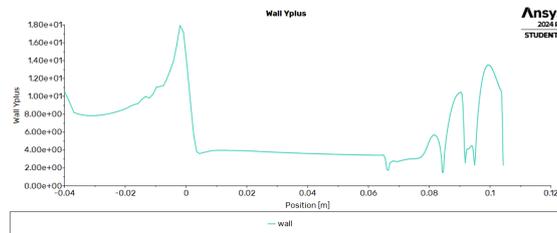


Figura B.17: Andamento y^+ a parete per NPR=18 (k- ω , mesh 2)

NPR=20



Bibliografia

- [1] Riccardo Aceti. Studio numerico di un flusso secondario coassiale per il controllo della separazione in ugello top durante il transitorio di start-up. Tesi di laurea magistrale in ingegneria aerospaziale, Politecnico di Torino, 2025. Electronic thesis, 185 pagine.
- [2] CFD University. Y+ values and its importance for mesh generation, n.d. Accessed: 2025-06-30.
- [3] Dean R. Chapman, Donald M. Kuehn, and Howard K. Larson. Investigation of separated flows in supersonic and subsonic streams with emphasis on the effect of transition. Technical Report NACA Report 1311, National Advisory Committee for Aeronautics (NACA), 1958.
- [4] Sébastien Deck and Thien-Hiep Nguyen. Unsteady side-loads in a thrust-optimized contour nozzle at hysteresis regime. *Shock Waves*, 12(4):255–268, 2002.
- [5] A. Ferrero. Dispense del corso di fluidodinamica computazionale dei sistemi propulsivi. Lecture notes, Politecnico di Torino, 2024.
- [6] M. Frey, G. Hagemann, and M. Terhardt. Flow separation and side-load behavior of the vulcain engine. In *35th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit*, Los Angeles, CA, 1999. American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- [7] A. Hadjadj and M. Onofri. Nozzle flow separation. *Shock Waves*, 19:163–169, 2009.
- [8] Abdellah Hadjadj and Jean-Paul Dussauge. Shock wave boundary-layer interactions. *Progress in Aerospace Sciences*, 44(7-8):360–424, 2009.
- [9] R. Karandikar, A.K. Mishra, and J. Kavipriya. Study of nozzle flow separations in divergent section of nozzle. *International Journal of Science and Engineering*, 12(2):89–94, 2021.

- [10] E. Martelli, F. Nasuti, and M. Onofri. Numerical calculation of FSS/RSS transition in highly overexpanded rocket nozzle flows. *Shock Waves*, 20(2):139–146, January 2010.
- [11] E. Martelli, L. Saccoccio, P.P. Ciottoli, C.E. Tinney, W.J. Baars, and M. Bernardini. Flow dynamics and wall pressure signatures in a high-reynolds number overexpanded nozzle with free shock separation. *Journal of Fluid Mechanics*, 903:A38, 2020.
- [12] J. Mattsson, U. Hogman, and L. Torngren. A subscale test programme on investigation of flow separation and side loads in rocket nozzles. Technical Report ESA-WPP-162, European Space Agency (ESA), 1999.
- [13] Koopaee M.K and Khaef I. Numerical study of wall cooling effects on transition between shock structures in a rocket propulsion nozzle. pages 1–14, 2014.
- [14] D. Monk and E.A. Chadwick. Comparison of turbulence models effectiveness for a delta wing at low reynolds number. In *7th European Conference for Aeronautics and Space Sciences (EUCASS)*. EUCASS, 2017.
- [15] F. Nasuti and M. Onofri. Flow structures in overexpanded rocket nozzles. In *Proceedings of the European Conference for Aerospace Sciences (EUCASS)*, 2007.
- [16] Jan Ostlund. Flow processes in rocket engine nozzles with focus on flow separation and side-loads. *PhD Thesis, Royal Institute of Technology (KTH)*, (TRITA-NA-R0201), 2002.
- [17] D.G. Pastrone, A. Ferrero, and F. Masseni. Dispense del corso di endoreattori. Lecture notes, Politecnico di Torino, 2024.
- [18] C.D. Perez-Segarra, J.E. Jaramillo, O. Lehmkuhl, G. Colomer, and A. Oliva. Turbulence modelling and numerical issues: From rans to dns and les. In *III Conferencia Nacional em Mecanica de Fluidos, Termodinamica e Energia*, Lisboa, Portugal, 2009.
- [19] A. Shams and P. Comte. Formation of cap-shock pattern. In *Proceedings of the 3rd European Conference for Aerospace Sciences (EUCASS)*. EUCASS, 2008.
- [20] A. Shams and P. Comte. Status of restricted shock separation in rocket nozzles, n.d. Manuscript in preparation or unpublished.
- [21] A. Shams, P. Comte, and S. Girard. Numerical simulation of shock-induced separated flows in overexpanded rocket nozzles. *Progress in Flight Physics*, 3:353–370, 2012.

- [22] E. Shimshi, G. Ben-Dor, and A. Levy. Numerical study of flow separation and shock reflection hysteresis in planar nozzles. *International Journal of Aerospace Innovations*, 2(2):79–87, 2010.
- [23] R. Stark and G. Hagemann. Current status of numerical flow prediction for separated nozzle flows. Technical Report DLR-IB-124-2003/35, DLR — Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt, 2003.
- [24] Henk Kaarle Versteeg and Weeratunge Malalasekera. *An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method*. Pearson Education, Harlow, England, 2 edition, 2007.