Politecnico di Torino

Politecnico di Torino

Collegio di Ingegneria Meccanica, Aerospaziale e dell'Autoveicolo

Corso di Laurea Magistrale
in Ingegneria Meccanica
LM-33

Tesi di Laurea Magistrale

Modellazione Analitica di un Sistema Adattivo per Energy Harvesting Vibrazionale

Relatori:
prof. Anastasio Dario
prof. Fasana Alessandro

Candidato:
Rrenato Isaj

Luglio 2025

Desidero ringraziare il professor Fasana, per avermi trasmesso la passione per questa materia, e il professor Anastasio, per la sua pazienza, la disponibilità e l'incoraggiamento dimostrati durante lo svolgimento del lavoro di tesi.

Ringrazio i miei cari amici per il lungo tempo passato assieme.

Ringrazio il mio più caro amico, per il rispetto, la fedeltà e la vicinanza dimostrati in questi anni, e ringrazio la mia piccola amica, per aver dato colore al mio tempo.

Devo tutto a mio fratello, che è un rifugio e un amico per me.
A mio fratello maggiore, per avermi insegnato la perseveranza.
A mia madre, per avermi insegnato l'importanza della concentrazione e della precisione.
Devo tutto a mio padre, per il suo grande cuore.

"Se ce la fa solo uno su mille, tu devi essere lui."

Abstract

In un’ottica di riduzione delle emissioni globali e di ricerca di fonti alternative per la generazione di energia elettrica, l'energy harvesting sta assumendo un ruolo sempre più rilevante, prospettandosi come un metodo pulito e privo di controindicazioni ambientali. L'obiettivo è progettare, testare e analizzare sistemi meccanici orientati alla massimizzazione della produzione energetica rispetto alla sorgente di eccitazione. L'analisi della dinamica di tali sistemi rappresenta quindi un aspetto cruciale per la progettazione, la sperimentazione e l’ottimizzazione degli stessi. In tal senso, lo sviluppo di sistemi meccanici non lineari, rispetto ai tradizionali sistemi lineari a un grado di libertà, offre un'interessante opportunità per ampliare il range di frequenze utili alla generazione di energia. Lo studio riguarda un sistema meccanico costituito da una trave incastrata su un lato, su cui è libero di traslare longitudinalmente uno slider, e dalla presenza di un cristallo piezoelettrico fissato vicino alla base. L’obiettivo è generare energia elettrica mediante la deformazione del piezoelettrico, solidale alla trave, indotta da una generica sorgente vibrazionale. La trattazione ha incluso la modellazione analitica tramite il principio di Hamilton, la risoluzione numerica delle equazioni del moto e una campagna sperimentale di validazione. Il modello, opportunamente validato, ha mostrato una buona aderenza ai dati sperimentali, evidenziando una capacità di generazione energetica superiore rispetto a sistemi lineari. Lo slider si è dimostrato in grado di adattare passivamente e dinamicamente le proprietà del sistema, migliorandone il comportamento in frequenza. Il modello proposto rappresenta quindi uno strumento efficace e a basso costo per la progettazione preliminare degli energy harvesters non lineari in questione, offrendo la possibilità di calibrazione rapida senza necessità di prototipi iniziali. Lo studio costituisce quindi un punto di partenza significativo per la realizzazione di sistemi compatti, efficienti e sostenibili per la generazione di energia elettrica.

Indice

1 Introduzione 1

1.1 Contesto e motivazione 1

1.2 Il sistema in esame: trave con slider mobile 3

1.3 Modellazione analitica 4

1.4 Validazione sperimentale 5

1.5 Obiettivi e struttura della tesi 5

2 Equazioni del moto 7

2.1 Calcolo della funzione lagrangiana 7

2.2 Principio variazionale di Hamilton 9

3 Risoluzione equazioni del moto 13

3.1 Equazioni del moto in forma modale 13

3.2 Auto-problema differenziale 15

3.3 Modellazione fenomeni dissipativi 19

3.3.1 Smorzamento viscoso 19

3.3.2 Attrito 20

4 Algoritmo di risoluzione delle equazioni del moto 23

4.1 Simulazione 23

4.1.1 Soluzione dell'equazione del moto della trave 26

4.1.2 Soluzione dell'equazione del moto dello slider 29

5 Validazione numerica del modello analitico a slider fisso 35

5.1 Confronto con modello a un grado di libertà 35

5.1.1 Modello a un grado di libertà 35

5.1.2 Risultati confronto 38

5.2 Confronto con modello agli elementi finiti con massa concentrata 44

5.2.1 Modello agli elementi finiti 44

5.2.2 Risultati confronto 46

6 Allestimento sperimentale e calibrazione 49

6.1 Strumentazione e sistema fisico 49

6.1.1 Slider reale 51

6.2 Calibrazione dello smorzamento viscoso 53

6.3 Calibrazione forza di attrito 55

7 Risultati 57

7.1 Frequenze naturali del sistema reale 58

7.2 Comportamento a regime dello slider nel sistema reale 63
7.2.1 Prova 1 63
7.2.2 Prova 2 65
8 Conclusioni 71
9 Bibliografia 73

Lista delle figure

Figura 1.1 - Generica funzione di risposta in frequenza di un sistema dinamico lineare del secondo ordine 2
Figura 1.2 - Schema del sistema trave-slider 4
Figura 2.1 - Schema dettagliato del sistema trave-slider 7
Figura 3.1 - Concio di trave (x=Y) 17
Figura 3.2 - Rappresentazione schematica delle forze di attrito $Y > 0$. $Fatt, s$ è la componente agente sullo slider, $Fatt, t$ agente sulla trave. 20
Figura 4.1 - Diagramma a blocchi dell'algoritmo di risoluzione 25
Figura 4.2 - Diagramma a blocchi dell'algoritmo di Newmark non lineare 33
Figura 5.1 Sistema a un grado di libertà reale considerato 35
Figura 5.2 Diagramma di corpo libero massa m 35
Figura 5.3 - Confronto modello analitico/Sdof della densità di potenza spettrale di ampiezza (a) e accelerazione (b) per forzante neutra (f = 3Hz). Linea verticale rossa: frequenza della forzante. 39
Figura 5.4 - Confronto modello analitico/Sdof dei segnali di ampiezza (a) e accelerazione (b) per forzante neutra (f = 3Hz). 39
Figura 5.5 - Confronto modello analitico/Sdof della densità di potenza spettrale di ampiezza (a) e accelerazione (b) per forzante in risonanza col primo modo (f = 7.22Hz). 40
Figura 5.6 – Confronto modello analitico/Sdof dei segnali di ampiezza (a) e accelerazione (b) per forzante in risonanza col primo modo (f = 7.22Hz). 41
Figura 5.7 - Confronto modello analitico/Sdof della densità di potenza spettrale di ampiezza (a) e accelerazione (b) per forzante in risonanza col terzo modo (f = 293.87Hz). 42
Figura 5.8 - Confronto modello analitico/Sdof dei segnali di ampiezza (a) e accelerazione (b) per forzante in risonanza col terzo modo (f = 293.87Hz). 42
Figura 5.9 - Confronto modello analitico/Sdof della densità di potenza spettrale di ampiezza (a) e accelerazione (b) per forzante casuale (f = 0:300Hz). 43
Figura 5.10 - Confronto modello analitico/Sdof dei segnali di ampiezza (a) e accelerazione (b) per forzante casuale (f = 0:300Hz). 44
Figura 6.1 - Schema del setup sperimentale con componenti numerati 49
Figura 6.2 - Modello dello slider a 2 piastrine con esploso 51
Figura 6.3 - Ingombro dello slider con bollatura. 51
Figura 6.4 - Esempio di modo torsionale 53
Figura 6.5 - Esempio di modo flessionale in direzione perpendicolare al piano longitudinale della trave 53
Figura 6.6 – Funzioni di interpolazione dei parametri di smorzamento α(a) e β(b). 55
Figura 6.7 – Schema dell'allestimento per le misurazioni per la calibrazione del coefficiente di attrito 56
Figura 7.1 – Schema dell'allestimento sperimentale trave-slider. Sezione rossa di massa concentrata 58
Figura 7.2 - Risultati confronto frequenze naturali sperimentali per il primo modo (a) e il secondo modo (b); r: indice di correlazione tra dati sperimentali e analitici, posizione slider corrispondente al piano di simmetria 59

Figura 7.3 – Seconda forma modale (modello analitico) al variare della posizione dello slider, posizione slider corrispondente al piano di simmetria 60
Figura 7.4 – Schema dell'allestimento sperimentale trave-slider con sezioni di massa concentrata. 61
Figura 7.5 - Risultati confronto frequenze naturali sperimentali per il primo modo (a) e il secondo modo (b); r: indice di correlazione tra dati sperimentali e analitici, posizione slider calibrata (t) 61
Figura 7.6 – Correlazione tra errore e derivata delle forme modali per il primo modo (a) e il secondo modo (b); r: indice di correlazione, posizione slider calibrata (t) 62
Figura 7.7 - Risultati confronto dello spostamento dello slider (prova 1) 64
Figura 7.8 - Andamento delle frequenze naturali in relazione allo spostamento dello slider (modello analitico; prova 1) 64
Figura 7.9 – Deformazione della trave (modello analitico; prova 1) 65
Figura 7.10 - Risultati confronto dello spostamento dello slider (prova 2) 66
Figura 7.11 – Confronto posizione dello slider e posizione antinodi (modello analitico; prova 2) 67
Figura 7.12 - Schema delle forze di inerzia centrifughe per il secondo modo nell'intorno dell'antinodo. 67
Figura 7.13 - Andamento delle frequenze naturali in relazione allo spostamento dello slider (modello analitico; prova 2) 68
Figura 7.14 – Deformazione della trave (modello analitico; prova 2) 68
Figura 7.15 - Fotografia della seconda forma modale (prova 2) 69

Lista delle tabelle

Tabella 1 - Caratteristiche sistema confronto modello analitico/Sdof 37
Tabella 2 - Impostazioni di simulazione confronto modello analitico/Sdof 37
Tabella 3 - Proprietà forzanti confronto modello analitico/Sdof 38
Tabella 4 - Frequenze naturali confronto modello analitico/Sdof 38
Tabella 5 - Caratteristiche sistema confronto modello analitico/FEM 45
Tabella 6 - Impostazioni di simulazione confronto modello analitico/FEM 45
Tabella 7 - Proprietà della massa concentrata confronto modello analitico/FEM 46
Tabella 8 - Confronto frequenze naturali modello analitico/FEM (m=40g @ 8cm) 46
Tabella 9 - Confronto frequenze naturali modello analitico/FEM (m=40g @ 14cm) 46
Tabella 10 - Confronto frequenze naturali modello analitico/FEM (m=60g @ 8cm) 47
Tabella 11 - Confronto frequenze naturali modello analitico/FEM (m=60g @ 14cm) .. 47
Tabella 12 - Confronto frequenze naturali modello analitico/FEM (m=80g @ 8cm) 47
Tabella 13 - Confronto frequenze naturali modello analitico/FEM (m=80g @ 14cm) .. 47
Tabella 14 - Caratteristiche della trave sperimentale 50
Tabella 15 - Distinta materiali dello slider 52
Tabella 16 - Risultati confronto Modello analitico/FEM 3D delle frequenze modali flessionali 52
Tabella 17 - Misurazioni sperimentali con slider fisso di frequenze naturali e fattori di smorzamento 54
Tabella 18 - Misurazioni angolo di incipiente moto per calibrazione attrito 56
Tabella 19 - Caratteristiche sistema prove sperimentali 57
Tabella 20 – Posizioni del piano di simmetria slider fisso per prove sperimentali 58
Tabella 21 - Nodi del secondo modo (modello analitico al variare della posizione dello slider, posizione slider corrispondente al piano di simmetria 60
Tabella 22 - Proprietà forzanti prove sperimentali 63

1 Introduzione

1.1 Contesto e motivazione

Negli ultimi decenni, con lo sviluppo continuo di sistemi di sensori interconnessi, dispositivi elettronici portatili e dell'Internet of Things (IoT), la domanda e l'interesse verso sistemi di alimentazione alternativi è in continuo aumento. In questo contesto, l'energy harvesting rappresenta una prospettiva promettente [1, 2, 3, 4]. Le tradizionali batterie, infatti, oltre ad avere un impatto ambientale rilevante, hanno limitazioni rappresentate dalla loro autoscarica e, per esigenze di costo o ingombri, anche dalla loro durata, considerando che spesso potrebbero essere non semplici da sostituire [5]. Inoltre, il noto trade-off tra densità energetica e potenza erogabile, può rappresentare una complicazione per i dispositivi più ad alto consumo energetico [6].

L'energy harvesting è una tecnologia che consiste nel raccogliere e recuperare energia che altrimenti andrebbe persa, come quella meccanica-vibrazionale [7], solare [8], termica [9], convertendola in energia elettrica utilizzabile. Questa conversione può avvenire attraverso diversi meccanismi fisici, tra cui l'effetto piezoelettrico [4], elettostatico [10], triboelettrico [11]. La tecnologia è stata oggetto di numerose indagini in un eterogeneo spettro di ambiti come l'ingegneria biomedica, monitoraggio dell' ambiente marittimo, smart cities, automotive, tecnologie UAV [12, 13, 14, 15, 16, 17].

Tra le varie tecnologie di energy harvesting, quelle basate sull' effetto piezoelettrico hanno avuto una particolare attenzione grazie alla semplicità di accoppiamento con sistemi dinamici meccanici ed efficienza di conversione [18] e, in particolare, gli energy harvester vibrazionali sono promettenti grazie alla loro affidabilità, vita utile e alla loro insensibilità all'ambiente circostante; inoltre, essi possono avere l'ulteriore funzione di assorbitori di vibrazioni [19].

I più semplici energy harvester vibrazionali sono basati su sistemi lineari ma hanno la grande limitazione di avere un range di frequenza utilizzabile estremamente ridotto.

Un esempio di sistema meccanico lineare del secondo ordine può essere descritto tramite la seguente equazione:

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_n\dot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = \frac{f(t)}{m};$$

dove:

- $x(t)$ risposta del sistema (m);
- $f(t)$ forzante (N);
- ξ fattore di smorzamento $(-)$;
- $\omega_n = 2\pi f_n$ pulsazione naturale $\left(\frac{rad}{s}\right)$;

Come si può vedere in Figura 1.1, il range in cui si può avere una amplificazione del segnale in ingresso di 20dB è di $\pm 5\%$ nell'intorno della frequenza naturale del sistema. Risulta quindi necessario ampliare la banda utile di conversione per avere un energy harvester adattabile alle varie condizioni di utilizzo, caratterizzate da una più ampia variabilità.

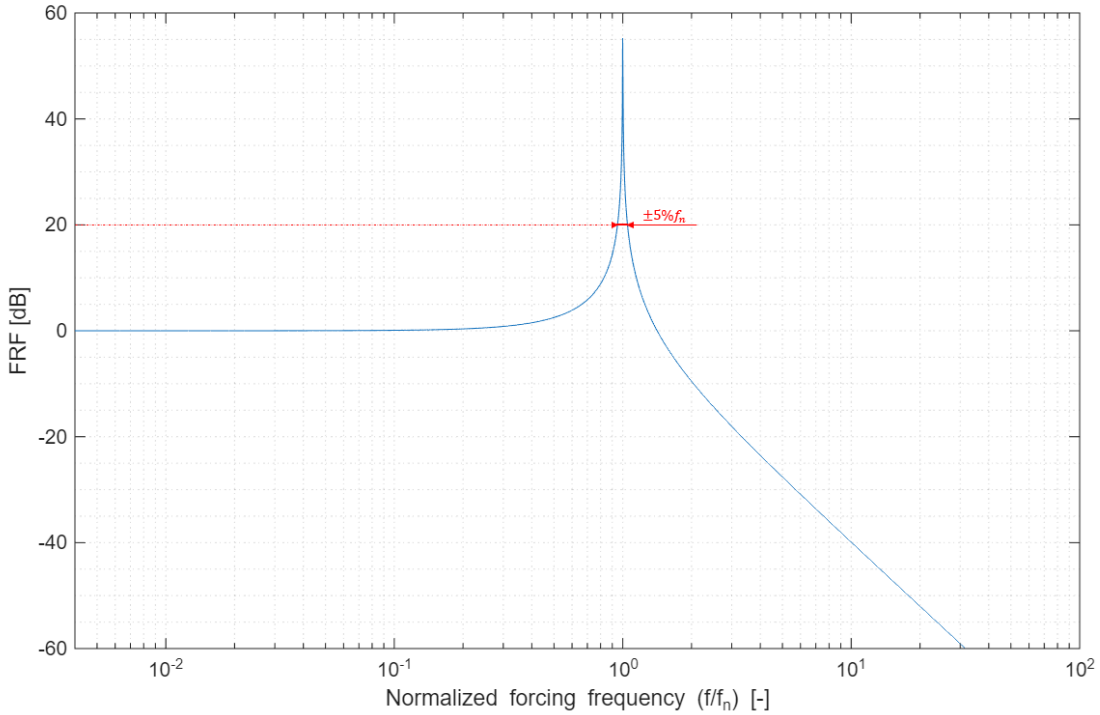

Figura 1.1 - Generica funzione di risposta in frequenza di un sistema dinamico lineare del secondo ordine

Al fine di ampliare la banda utile, per migliorare le prestazioni di harvestinng, è stato indagato l'utilizzo di sistemi non lineari [20, 21], ovvero quei sistemi descrivibili tramite modelli in cui la variazione dell'uscita è non proporzionale alla variazione in ingresso e in cui le equazioni che li descrivono presentano termini non lineari (e.g. potenze). Per esempio, sono stati studiati sistemi non lineari descritti da equazioni differenziali di tipo Duffing [22] o sistemi che sfruttano il fenomeno dell'internal impact effect per aumentare la risposta [23].

Inoltre, hanno ricevuto attenzione anche sistemi a più gradi di libertà (cioè, aventi più frequenze naturali, tante quanti sono i gradi di libertà) i quali sono stati in grado di dare risultati incoraggianti [24, 25].

Un ulteriore metodo studiato per aumentare la banda di frequenze utili è quello del tuning che consiste nel calibrare e sintonizzare il sistema alla frequenza di sollecitazione. Il tuning può essere attivo o passivo.

Il tuning attivo consiste nell'applicare forze esterne per modificare le caratteristiche del sistema quali la rigidezza [26] e la distribuzione della massa [27]; seppur il metodo risulti necessariamente efficace, esso ha il grande difetto di necessitare di un sistema di controllo ma, soprattutto, dell'utilizzo di parte dell'energia generata [28], cosa che vanifica l'obiettivo dell'energy harvesting stesso.

Il tuning passivo, d'altra parte, non richiede intervento esterno, motivo per cui risulta una soluzione interessante.

1.2 Il sistema in esame: trave con slider mobile

Tra i sistemi con la proprietà di self-tuning passivo, quelli composti da una trave con uno slider (massa mobile), hanno suscitato interesse per la loro semplicità costruttiva e per la loro capacità di adattarsi autonomamente alla frequenza di sollecitazione tramite la variazione della distribuzione geometrica della massa lungo la trave, per via del moto dello slider indotto dalla vibrazione stessa [29]. Yu *et al.* [30] hanno condotto una campagna di sperimentazioni su sistema trave-slider evidenziando l'importanza della posizione iniziale dello slider lungo la trave e dell'effetto benefico che può avere una leggera inclinazione del sistema per ridurre la sensibilità ai disturbi. Lan *et al.* [31] hanno proposto un modello per ricavare le forme modali del sistema e hanno evidenziato come il moto dello slider modifichi le forme modali della trave, portando il sistema a adattarsi alla frequenza di sollecitazione; inoltre hanno affermato la non trascurabilità dell'attrito

per quanto riguarda il moto dello slider stesso. Soltani *et al.* [32] hanno studiato una configurazione a tuning-attivo del sistema trave-slider utilizzando magneti permanenti e un controllore che determina la posizione che deve assumere uno slider, tramite un motore, in base alla frequenza di sollecitazione. Müller *et al.* [33] hanno proposto un modello analitico del sistema trave-slider che tenesse in considerazione le caratteristiche del contatto tra trave e slider.

Il sistema trattato nel presente lavoro è un sistema trave-slider, la cui trave è vincolata in un solo lato ed è libera nel lato opposto; uno schema del sistema è visibile in Figura 1.2.

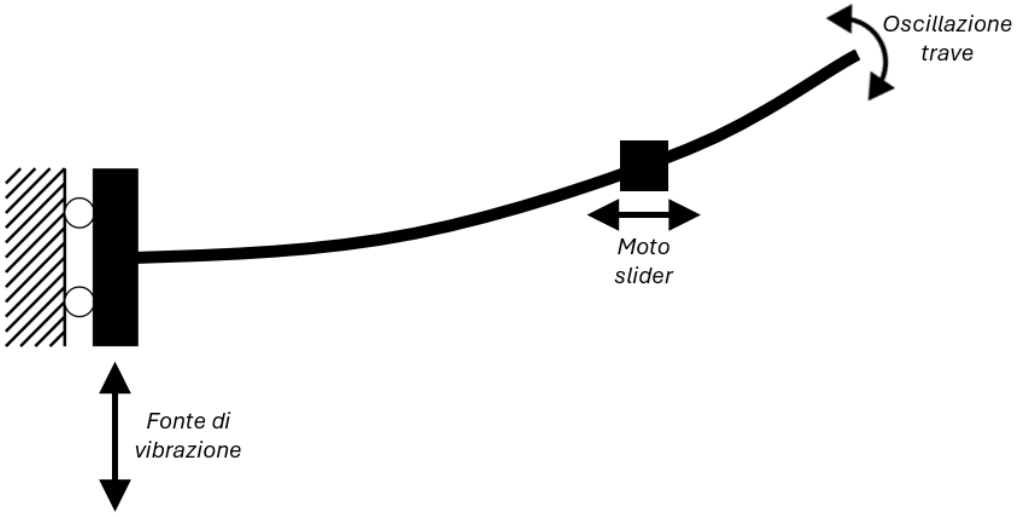

Figura 1.2 - Schema del sistema trave-slider

1.3 Modellazione analitica

Nella prima parte del lavoro è stato sviluppato un modello analitico del sistema tramite il principio variazionale di Hamilton in modo simile a quanto descritto in [31] , assumendo lo slider come una massa puntiforme e limitando l'analisi al moto planare, cioè, trascurando la dinamica attraverso lo spessore della trave. Il modello risultante è costituito da un sistema accoppiato di equazioni differenziali non lineari, che descrivono il moto della trave e della massa mobile sotto l'effetto di una forzante esterna arbitraria (sinusoidale, randomica, a gradino, ecc.).

La risoluzione del sistema è stata effettuata numericamente tramite codice MATLAB, permettendo di simulare il comportamento dinamico completo del sistema in condizioni operative realistiche. È stato incluso anche il modello dell'attrito tra slider e trave, il cui

valore verrà calibrato a posteriori tramite confronto sperimentale. Il modello è stato opportunamente validato numericamente con casi di confronto più semplici.

1.4 Validazione sperimentale

Successivamente, è stato realizzato un prototipo sperimentale. Il sistema è stato testato su shaker con controllo in frequenza, mentre l'accelerazione all'estremità libera della trave è stata monitorata con un accelerometro, e il moto dello slider è stato tracciato tramite telecamera. L'obiettivo della fase sperimentale è duplice: da un lato calibrare i parametri dissipativi (attrito, smorzamento), dall'altro fare una validazione sperimentale del modello analitico.

1.5 Obiettivi e struttura della tesi

L'obiettivo della tesi è lo sviluppo di un modello semi-analitico in grado di prevedere il comportamento del sistema trave-slider alle diverse condizioni operative e contribuire alla comprensione del sistema stesso, proponendo un approccio che integri modellazione analitica, simulazione numerica e verifica sperimentale. L'approccio adottato è volutamente semplificato ma fisicamente coerente, in modo da fornire un primo strumento predittivo per futuri sviluppi più complessi.

La tesi è articolata come segue: nel Capitolo 2 viene descritto in dettaglio il procedimento tramite il quale sono state ricavate le equazioni del moto. Il Capitolo 3 è dedicato alla trattazione dell'analisi modale del sistema, tramite il quale verranno ricavate equazioni del moto disaccoppiate per ogni forma modale. Il Capitolo 4 illustra l'algoritmo numerico sviluppato per la risoluzione del sistema di equazioni. Nel Capitolo 5 verrà illustrata la validazione numerica del modello analitico/numerico. Nel capitolo 6 verrà presentato il setup sperimentale per la validazione e calibrazione sperimentale del modello e, infine, nel Capitolo 7, verranno esposte le prestazioni del modello stesso in relazione alla sua capacità predittiva. Si conclude con alcune riflessioni sul potenziale applicativo e le prospettive future di questo approccio.

2 Equazioni del moto

Per ricavare le equazioni del moto è stato adoperato il principio variazionale di Hamilton, il quale afferma che il moto di un sistema fisico è quello che minimizza l'integrale temporale della lagrangiana del sistema.
L'ipotesi adottata è quella delle piccole oscillazioni, in modo che siano valide le note teorie sul continuo della trave e anche che sia applicabile il principio variazionale di Hamilton, come verrà chiarito in seguito nella trattazione.

2.1 Calcolo della funzione lagrangiana

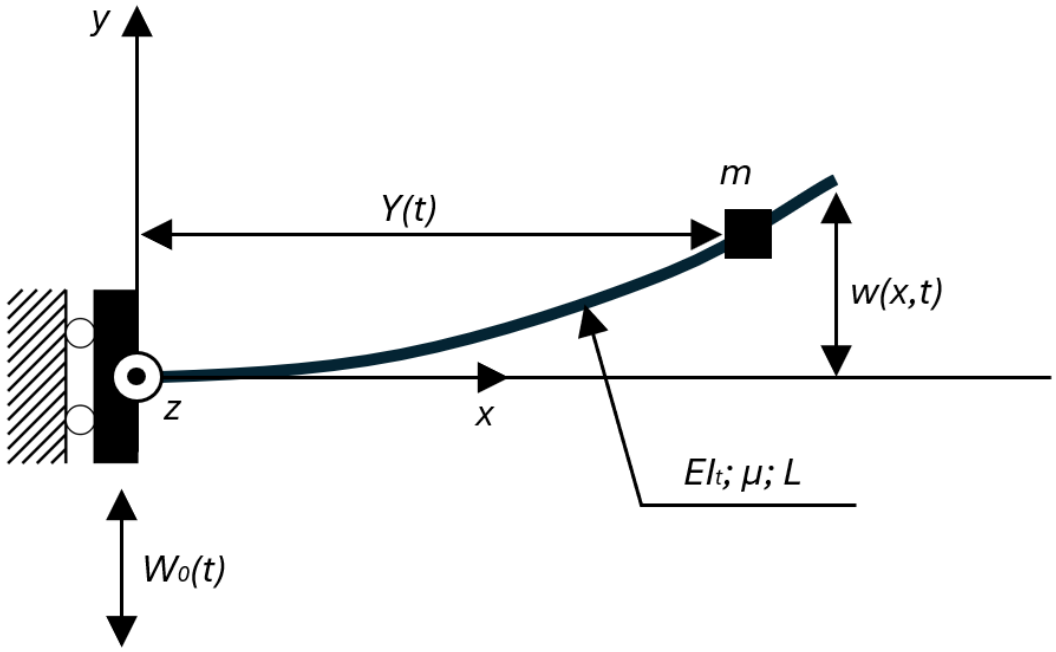

Figura 2.1 - Schema dettagliato del sistema trave-slider

Si procede dunque con il calcolo della funzione lagrangiana, tenendo in considerazione la presenza della massa sulla trave. Le variabili sono esplicitate in Figura 2.1.

Si può valutare l'energia cinetica dello slider nel seguente modo:

$$T_s = \frac{1}{2}m\left(v^2 + \dot{Y}^2\right) + \frac{1}{2}I_s\dot{\theta}^2 + md_g\dot{Y}\dot{\theta} \qquad (2.1)$$

dove:

- $v(Y(t),t)$ velocità verticale della trave nella posizione dello slider;
- $\theta(Y(t),t)$ angolazione della trave nella posizione dello slider.

Quindi si ricavano i valori fondamentali di velocità angolare e lineare della trave nella posizione dello slider per poter calcolare l'energia cinetica di quest'ultimo:

- Angolazione della trave:

$$\theta(Y(t),t) = \left.\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right|_{x=Y(t)} = w'(Y(t),t) \tag{2.2}$$

- Velocità angolare della trave:

$$\dot{\theta}(Y(t),t) = \frac{d\theta}{dt} = \frac{dw'(Y(t),t)}{dt} = \frac{dY(t)}{dt}\left.\frac{\partial w'(x,t)}{\partial x}\right|_{x=Y(t)} + \frac{\partial w'(Y(t),t)}{dt}$$

$$\dot{\theta} = \dot{Y(t)}w''(Y(t),t) + \dot{w}'(Y(t),t) \tag{2.3}$$

- Velocità verticale della trave:

$$v(Y(t),t) = {}^{d}/_{dt}\left(w_0(t) + w(Y(t),t)\right) = \dot{w}_0(t) + \dot{Y}(t)w'(Y(t),t) + \dot{w}(Y(t),t) \tag{2.4}$$

In seguito, si ricavano l'energia cinetica e potenziale elastica della trave con le seguenti formule:

- Energia cinetica della trave:

$$T_t = \int_0^L \frac{1}{2}\mu(\dot{w}_0 + \dot{w})^2 dx \tag{2.5}$$

  Con $\mu = \frac{m}{L} = \rho A$.

- Energia potenziale elastica della trave:

$$V_t = \int_0^L \frac{1}{2} M w'' dx = \int_0^L \frac{1}{2} E I_t w''^2 dx \tag{2.6}$$

con $M = E I_t w''$.

Si può dunque scrivere la funzione lagrangiana:

$$L = T - V = T_s + T_t - V_t$$

$$L = \int_0^L \frac{1}{2}\left[\mu(\dot{w}_0 + \dot{w})^2 - E I_t w''^2\right]dx + \frac{1}{2}m\left[\left(\dot{w}_0 + \dot{Y}w' + \dot{w}\right)^2\Big|_{x=Y(t)} + \dot{Y}^2\right]$$
$$+\frac{1}{2}I_s\left(\dot{Y}w'' + \dot{w}'\right)^2\Big|_{x=Y(t)} + m d_g \dot{Y}\left(\dot{Y}w'' + \dot{w}'\right)\Big|_{x=Y(t)} \tag{2.7}$$

Le variabili lagrangiane saranno in seguito indicate implicitamente dal vettore $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})$:

$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) = [w; w'; w''; Y] \tag{2.8}$$

$$\dot{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) = \left[\dot{w}; \dot{w}'; \dot{w}''; \dot{Y}\right] \tag{2.9}$$

In seguito, per la valutazione delle equazioni del moto sono state fatte le seguenti ipotesi:

- $I_s \cong 0$; la dimensione trasversale dello slider è approssimabile a quella della trave
- $d_g \cong 0$; il centro di massa dello slider si trova sul piano longitudinale della trave

La funzione lagrangiana si modifica nel seguente modo:

$$L = \int_0^L \frac{1}{2}\left[\mu(\dot{w}_0 + \dot{w})^2 - EI_t w''^2\right]dx + \frac{1}{2}m\left[\left(\dot{w}_0 + \dot{Y}w' + \dot{w}\right)^2\Big|_{x=Y(t)} + \dot{Y}^2\right] \tag{2.10}$$

2.2 Principio variazionale di Hamilton

Per applicare il principio variazionale si definisce la funzione azione S come:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t)\, dt = \int_{t_1}^{t_2}\int_0^L h(q(t), \dot{q}(t), t)\, dx\, dt \tag{2.11}$$

con

$$h = \frac{1}{2}\left[\mu(\dot{w}_0 + \dot{w})^2 - EI_t w''^2\right] + \frac{1}{2}m\,\delta(x - Y)\left[\left(\dot{w}_0 + \dot{Y}w' + \dot{w}\right)^2 + \dot{Y}^2\right] \tag{2.12}$$

dove

- $h(x,t)$ contributo locale della lagrangiana;
- $\delta(x - Y)$ delta di Dirac.

Il principio variazionale di Hamilton è un principio di minima azione che afferma che la traiettoria percorsa dal sistema è un punto estremale per la funzione azione, cioè che i valori assunti dalle coordinate lagrangiane $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})$ durante il moto vincolato sono tali che $\delta S = 0$ per piccole perturbazioni del sistema.

L'ipotesi di moto vincolato implica che $\partial q(0, t_1) = \partial q(L, t_2) = 0$, cioè che le coordinate lagrangiane agli estremi dell'intervallo di tempo e/o della lunghezza della trave si mantengano costanti. Seppur l'ipotesi sia valida per un estremo della trave, per l'estremo opposto non è necessariamente così. Per la validità del modello è dunque importante che sia rispettata l'ipotesi di piccole oscillazioni.

Ricordando che la variazione di S corrisponde alla variazione dell'integrando, si ha così:

$$\partial S = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \partial h \, dx \, dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \Big({}^{\partial h}/_{\partial \dot{w}} \, \partial \dot{w} + {}^{\partial h}/_{\partial w'} \, \partial w' + {}^{\partial h}/_{\partial w''} \, \partial w'' + {}^{\partial h}/_{\partial \dot{w}'} \, \partial \dot{w}' + {}^{\partial h}/_{\partial \dot{Y}} \, \partial \dot{Y} + {}^{\partial h}/_{\partial Y} \, \partial Y \Big) \, dx \, dt = 0 \tag{2.13}$$

Grazie alla linearità dell'integrale è possibile scomporre h (e di conseguenza S) in due parti, una rappresentante il contributo della trave alla lagrangiana, il secondo rappresentante quello dello slider:

- Contributo della trave:

$$h_t = \frac{1}{2}\left[\mu\big(\dot{w}_0(t) + \dot{w}(x,t)\big)^2 - EIw''(x,t)^2\right] \tag{2.14}$$

- Contributo dello slider:

$$h_s = \frac{1}{2} m \, \delta(x-y) \left[\Big(\dot{w}_0(t) + \dot{Y}(t) w'(Y(t),t) + \dot{w}(Y(t),t)\Big)^2 + \dot{Y}(t)^2\right] \tag{2.15}$$

Si procede quindi col calcolo della variazione della funzione d'azione ∂S. Integrando per parti i contributi di h esplicitati nelle relazioni (2.14) e (2.15), è possibile ottenere le equazioni del moto del sistema.

- Integrazione contributo della trave (2.14):

$$\partial S_t = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \partial h_t \, dx \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \frac{1}{2} \partial\left[\mu(\dot{w}_0 + \dot{w})^2 - EIw''^2\right] dx \, dt =$$

$$\int_0^L \int_{t_1}^{t_2} \mu(\dot{w}_0 + \dot{w}) \partial \dot{w} dt \, dx - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L EIw'' \partial w'' dx \, dt =$$

$$\int_0^L \left\{ [\mu(\dot{w}_0 \dot{w}) \partial w]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_1}^{t_2} \mu \frac{d(\dot{w}_0 + \dot{w})}{dt} \partial w dt \right\} dx$$

$$- \int_{t_1}^{t_2} \left\{ [EIw'' \partial w']_0^L - \int_0^L EI \frac{dw''}{dx} \partial w' dx \right\} dt =$$

$$- \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \mu(\ddot{w}_0 + \ddot{w}) \partial w dx \, dt + \int_{t_1}^{t_2} \left\{ [EIw''' \partial w]_0^L - \int_0^L EI \frac{d^2 w''}{dx^2} \partial w dx \right\} dt =$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L [\mu(\ddot{w}_0+\ddot{w})+EIw^{IV}]\partial w dx\,dt \tag{2.16}$$

- Integrazione contributo dello slider (2.15):

$$\partial S_s=\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L \partial h_s\,dx\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L \frac{1}{2}m\delta(x-Y)\partial\left[\left(\dot{w}_0+\dot{Y}w'+\dot{w}\right)^2+\dot{Y}^2\right]dx\,dt=$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L m\delta(x-Y)\{\left(\dot{w}_0+\dot{Y}w'+\dot{w}\right)\left(\dot{Y}\partial w'+\partial\dot{w}\right)+\left[\left(\dot{w}_0+\dot{Y}w'+\dot{w}\right)w'+\dot{Y}\right]\partial\dot{Y}$$

$$+\left(\dot{w}_0+\dot{Y}w'+\dot{w}\right)\left(\dot{Y}w''+\dot{w}'\right)\partial Y\}dx\,dt=$$

$$m\delta(x-Y)\left\{\int_{t_1}^{t_2}\left\{\left[\left(\dot{w}_0+\dot{Y}w'+\dot{w}\right)\dot{Y}\partial w\right]_0^L-\int_0^L\frac{d}{dx}\left[\left(\dot{w}_0+\dot{Y}w'+\dot{w}\right)\dot{Y}\right]\partial w dx\right\}dt\right.$$

$$+\int_0^L\left\{\left[\left(\dot{w}_0+\dot{Y}w'+\dot{w}\right)\partial w\right]_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left[\left(\dot{w}_0+\dot{Y}w'+\dot{w}\right)\right]\partial w dt\right\}dx$$

$$+\int_0^L\left\{\left[\left[\left(\dot{w}_0+\dot{Y}w'+\dot{w}\right)w'+\dot{Y}\right]\partial Y\right]_{t_1}^{t_2}\right.$$

$$\left.-\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left[\left(\dot{w}_0+\dot{Y}w'+\dot{w}\right)w'+\dot{Y}\right]\partial Y dt\right\}dx$$

$$\left.+\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L\left(\dot{w}_0+\dot{Y}w'+\dot{w}\right)\left(\dot{Y}w''+\dot{w}'\right)\partial Y dx\,dt\right\}=$$

$$m\delta(x-Y)\{\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L\{-\left(\ddot{w}_0+\ddot{Y}w'+\dot{Y}\dot{w}'+\dot{Y}^2w''+\ddot{w}+\dot{Y}\dot{w}'\right)\partial w$$

$$-\left[\left(\ddot{w}_0+\ddot{Y}w'+\dot{Y}\dot{w}'+\dot{Y}^2w''+\ddot{w}+\dot{Y}\dot{w}'\right)w'\right.$$

$$+\left(\dot{w}_0+\dot{Y}w'+\dot{w}\right)\left(\dot{w}'+\dot{Y}w''\right)+\ddot{Y}$$

$$\left.-\left(\dot{w}_0+\dot{Y}w'+\dot{w}\right)\left(\dot{w}'+\dot{Y}w''\right)\right]\partial Y\}dx\,dt.$$

(2.17)

Quindi sommando (2.16) e (2.17) e ponendoli uguale a 0:

$$\partial S=\partial S_t+\partial S_s=0 \tag{2.18}$$

Si ottiene:

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L \{[\mu(\ddot{w}_0+\ddot{w})+EIw^{IV} + m\delta(x-Y)\left(\ddot{w}_0+\ddot{Y}w'+\dot{Y}\dot{w}'+\dot{Y}^2w''+\ddot{w}+\dot{Y}\dot{w}'\right)]\partial w + m\delta(x-Y)\left[\left(\ddot{w}_0+\ddot{Y}w'+\dot{Y}\dot{w}'+\dot{Y}^2w''+\ddot{w}+\dot{Y}\dot{w}'\right)w' + \ddot{Y}\right]\partial Y\}dx\,dt = 0 \quad (2.19)$$

È evidente come, per generiche variazioni di w e Y, sia necessario che nell'equazione (2.19) si annullino le espressioni dentro le parentesi quadre, affinché $\partial S = 0$.

Si ottengono così due equazioni, corrispondenti alle equazioni del moto del sistema trave-slider:

1. Equazione del moto della trave:

$$\mu\ddot{w} = -EI_t w^{IV} - m\delta(x-Y)\left(\ddot{w}_0+\ddot{w}+2\dot{Y}\dot{w}'+\dot{Y}^2w''+\ddot{Y}w'\right)\Big|_{x=Y(t)} - \mu\ddot{w}_0 \quad (2.20)$$

2. Equazione del moto dello slider:

$$\ddot{Y} = -w'\left(\ddot{w}_0+\ddot{w}+2\dot{Y}\dot{w}'+\dot{Y}^2w''+\ddot{Y}w'\right)\Big|_{x=Y(t)} \quad (2.21)$$

Si evidenzia che le equazioni ricavate sono equazioni differenziali alle derivate parziali non lineari e sono interdipendenti tra loro; quindi, il movimento dello slider influenza quello della trave e viceversa.

3 Risoluzione equazioni del moto

Al fine di risolvere le equazioni ricavate nel capitolo precedente si è optato per un approccio semi-analitico, tramite l'analisi modale.

L'analisi modale consiste nello scomporre la funzione di spostamento della trave $w(x,t)$ nel prodotto di due funzioni, separando le variabili indipendenti, si ha quindi:

$$w(x,t) = \phi(x)\eta(t).$$

L'approccio modale, in questo caso, è un approccio semplificato; infatti, le forme modali $\phi(x)$ variano col moto dello slider, per cui dovrebbero dipendere non solo da x ma anche dalla variabile tempo t, in quanto la posizione dello slider non è fissa nel tempo. L'approccio utilizzato, quindi, come verrà approfondito nel Capitolo 4 dedicato alla risoluzione numerica delle equazioni del moto, consiste nel considerare lo slider istantaneamente fermo e svolgere l'analisi modale istante per istante iterativamente.

Per svolgere l'analisi modale è necessario risolvere l'auto-problema differenziale per trovare le pulsazioni naturali ω_r del sistema e quindi le forme modali $\phi(x)$. Solo in seguito sarà possibile ricavare la funzione dipendente dal tempo $\eta(t)$ e così ricavare $w(x,t)$.

Si evidenzia come la soluzione dell'auto-problema differenziale restituisca infinite frequenze naturali, che sono le frequenze alle quali vibra la trave. Ogni frequenza naturale comporta una funzione $\phi_r(x)$ e $\eta_r(t)$ definite a meno di una costante dipendente dalle condizioni iniziali. Risulta quindi che la funzione $w(x,t)$ è definita come la somma di infinite $w_r(x,t)$, una per ogni frequenza naturale del sistema:

$$w(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} w_r(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(x)\eta_r(t) \quad . \tag{3.1}$$

3.1 Equazioni del moto in forma modale

Al fine di ottenere delle equazioni differenziali alle derivate totali, quindi, si procede con l'analisi modale dell' equazione del moto della trave (2.20).

Per fare ciò si è utilizzato il metodo di Galerkin, quindi, si dividono le variabili come in (3.1) e si integra sulla lunghezza della trave.

Si ottiene:

$$\int_0^L \ddot{\eta}_r \mu \phi_r dx = -\int_0^L \Big[\eta_r E I_t \phi_r^{IV} - m\delta(x-Y)\big(\ddot{w}_0 + \ddot{\eta}_r\phi_r + 2\dot{Y}\dot{\eta}_r\phi_r' + \dot{Y}^2\eta_r\phi_r'' + \ddot{Y}\eta_r\phi_r'\big) - \mu\ddot{w}_0\Big]\, dx \tag{3.2}$$

Si definiscono adesso due operatori:

- $M[\cdot] \doteq \mu$;
- $K[\cdot] \doteq EI_t \frac{d^4}{dx^4}$.

Per quanto riguarda gli operatori appena definiti, è dimostrabile la seguente proprietà:

$$\int_D \phi_s M[\phi_r]\, dx = \int_D \phi_r M[\phi_s]\, dx$$

$$\int_D \phi_s K[\phi_r]\, dx = \int_D \phi_r K[\phi_s]\, dx$$

Questa proprietà è detta autoaggiuntezza degli operatori.

In particolare, per gli operatori autoaggiunti, è dimostrabile anche la proprietà di ortogonalità, per cui:

$$\omega_r \neq \omega_s \;\rightarrow\; \int_D \phi_s M[\phi_r]\, dx = 0$$

$$\omega_r \neq \omega_s \;\rightarrow\; \int_D \phi_s K[\phi_r]\, dx = 0$$

Si definisce inoltre:

- $\int_D \phi_s M[\phi_s]\, dx \doteq m_s$ massa modale;
- $\int_D \phi_s K[\phi_s]\, dx \doteq k_s$ rigidezza modale.

Moltiplicando entrambi i membri di (3.2) per la forma modale $\phi_s(x)$, e tenuto di conto della proprietà di autoaggiuntezza e ortogonalità degli operatori $M[\cdot]$ e $K[\cdot]$, si ottiene:

$$\begin{aligned}(m_s + m\phi_s(Y)^2)\ddot{\eta}_s + 2m\dot{Y}\phi_s(Y)\phi_s'(Y)\dot{\eta}_s \\ + \Big[k_s + m\Big(\dot{Y}^2\phi_s(Y)\phi_s''(Y) + \ddot{Y}\phi_s(Y)\phi_s'(Y)\Big)\Big]\eta_s \\ = -\ddot{w}_0\left(m\phi_s(Y) + \mu\int_0^L \phi_s\, dx\right) \qquad \forall s:\ s = 1,2,3,\dots,n\end{aligned} \tag{3.3}$$

Per quanto riguarda l'equazione del moto dello slider (2.21), è sufficiente sostituire la relazione (3.1) svolgendo le dovute derivate. Si ottiene:

$$\left[1+\left(\sum_{s=1}^{\infty}\eta_s\phi_s'(Y)\right)^2\right]\ddot{Y}+\left[2\sum_{s=1}^{\infty}\eta_s\phi_s'(Y)\sum_{s=1}^{\infty}\dot{\eta}_s\phi_s'(Y)\right]\dot{Y}$$
$$+\left[\sum_{s=1}^{\infty}\eta_s\phi_s'(Y)\sum_{s=1}^{\infty}\eta_s\phi_s''(Y)\right]\dot{Y}^2$$
$$=-\sum_{s=1}^{\infty}\eta_s\phi_s'(Y)\left[\ddot{w}_0+\sum_{s=1}^{\infty}\ddot{\eta}_s\phi_s(Y)\right] \quad . \tag{3.4}$$

È interessante notare come, nell'equazione appena ricavata, non compaia esplicitamente la massa dello slider; in realtà, ovviamente, la massa dello slider influenza la dinamica dello slider stesso, la sua influenza però si manifesta nel momento in cui si ricavano le forme modali ϕ_s, che invece dipendono dalla massa.

3.2 Auto-problema differenziale

L'auto-problema differenziale è il problema agli autovalori che restituisce le pulsazioni naturali ω_s del sistema.

Consiste quindi nel risolvere un problema del tipo:

$$\det[A(\omega)]=0$$

Dove $A(\omega)$ è una matrice definita a partire dalle condizioni al bordo del sistema. È quindi necessario ricavare le equazioni che definiscono le condizioni al bordo.

Per la trattazione, per quanto riguarda la dinamica dello slider, si è optato per una soluzione quasi-statica, cioè una soluzione in cui lo slider viene considerato fermo istante per istante. La scelta è stata fatta nell'ipotesi in cui lo slider, presumibilmente, non dovrebbe raggiungere velocità e accelerazioni tali da avere una influenza sensibile sulla dinamica della trave.

Posta questa ipotesi, nell'ottica in cui la trave venga considerata, da un punto di vista analitico, come la suddivisione di due travi adiacenti nella posizione dello slider $Y(t)$, lo slider stesso (vale a dire la sua massa) è considerato come una condizione al contorno non tempo-variante, molto più facile da gestire analiticamente e anche numericamente.

Le ipotesi adottate, quindi, si esplicitano come segue:

- $\dot{Y}(t) = 0 \quad \forall t \quad ;$
- $\ddot{Y}(t) = 0 \quad \forall t \quad .$

L'equazione del moto della trave (2.20) diventa:

$$\mu\ddot{w} + EI_t w^{IV} + m\delta(x - Y)(\ddot{w}_0 + \ddot{w}) = -\mu\ddot{w}_0 \quad . \tag{3.5}$$

Quindi, per ricavare le forme modali, si passa alla soluzione a variabili separate e, ponendo la forzante uguale a 0 per facilitare i calcoli (in quanto le forme modali sono indipendenti dalla forzante) si ottiene:

$$\ddot{\eta}\left[\phi + \frac{m}{\mu}\phi\delta(x - Y)\right] = -\frac{EI_t}{\mu}\eta\phi^{IV}$$

$$\frac{\ddot{\eta}}{\eta} = -\frac{EI_t}{\mu} \cdot \phi^{IV} \Big/ \left[\phi + \frac{m}{\mu}\phi\delta(x - Y)\right] \doteq -\omega^2$$

Definendo:

$$\beta^4 \doteq \frac{\mu\omega^2}{EI_t} \; ;$$

si ottiene:

$$\phi^{IV} - \beta^4\left[\phi + \frac{m}{\mu}\phi\delta(x - Y)\right] = 0 \tag{3.6}$$

La risoluzione delle forme modali è ottenibile, come preannunciato, considerando la trave come composta da due travi adiacenti nella posizione $Y(t)$; quindi, si definiscono due funzioni di forma ricavabili come la soluzione generica dell'equazione:

$$\phi^{IV} - \beta^4\phi = 0,$$

dove si è apparentemente eliminato il contributo della massa dello slider. Si ottengono quindi due differenti funzioni di forma:

$$\phi_U(x) = a\cos\beta x + b\sin\beta x + c\cosh\beta x + d\sinh\beta x, \quad 0 \le x < Y \quad ; \tag{3.7}$$

$$\phi_D(\bar{x}) = e\cos\beta\bar{x} + f\sin\beta\bar{x} + g\cosh\beta\bar{x} + h\sinh\beta\bar{x}, \quad Y \le x < L \quad . \tag{3.8}$$

Con $\bar{x} = x - Y$.

La funzione (3.7) rappresenta la porzione di trave a monte dello slider (upstream), la funzione (3.8) quella a valle (downstream).

Condizioni al contorno ed equazione caratteristica

Si hanno otto costanti per quanto riguarda le forme modali: $[a; b; c; d; e; f; g; h]$. Sono dunque necessarie otto equazioni linearmente indipendenti, quindi otto condizioni al bordo

Le condizioni al bordo agli estremi della trave sono banalmente quelle di incastro e sezione libera; si possono ottenere così quattro equazioni:

1. $\phi_U(0) = 0$ Incastro;
2. $\phi'_U(0) = 0$ Incastro;
3. $\phi''_D(L) = 0$ Sezione libera;
4. $\phi'''_D(L) = 0$ Sezione libera.

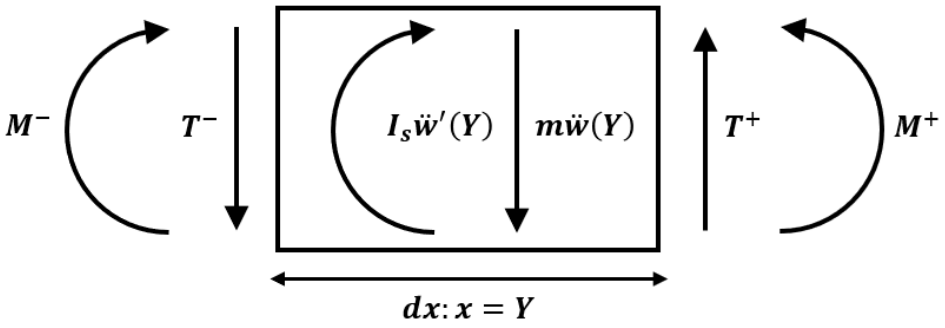

Figura 3.1 - Concio di trave (x=Y)

Le ulteriori quattro si avranno in corrispondenza della posizione $Y(t)$ ed esse sono ottenibili tramite l'integrazione membro per membro dell' equazione (3.6).

Si ha:

$$\lim_{(a,b)\to(Y^-,Y^+)} \int_a^b \left\{\phi^{IV} - \beta^4\left[\phi + \frac{m}{\mu}\phi\delta(x-Y)\right]\right\} dx$$

$$= \phi^{III}(Y^+) - \phi^{III}(Y^-) - \frac{m\omega^2}{EI_t}\phi(Y) = 0$$

che corrisponde a una condizione al bordo sulla derivata terza delle forme modali. Integrando a cascata in questo modo si possono ottenere le seguenti equazioni al bordo:

5. $\phi_U(Y^-) = \phi_D(Y^+)$ Equazione di congruenza sulla posizione;
6. $\phi'_U(Y^-) = \phi'_D(Y^+)$ Equazione di congruenza sulla inclinazione;
7. $\phi''_U(Y^-) = \phi''_D(Y^+)$ Bilancio dei momenti;
8. $\phi'''_U(Y^-) = \phi'''_D(Y^+) - \frac{\omega^2 m}{EI_t}\phi(Y)$ Bilancio delle tensioni.

Si evidenzia che le condizioni 7 e 8 sono ricavabili, in relazione alla Figura 3.1, anche nel seguente modo:

7. Bilancio dei momenti:

$$M^- + I_s\ddot{w}'(Y) = M^+ \quad ;$$

$$EI_t\phi''(Y^-)\eta - \omega^2 I_s\phi'(Y)\eta = EI_t\phi''(Y^+)\eta \quad ;$$

$$\phi''(Y^-) = \phi''(Y^+) + \frac{\omega^2 I_s}{EI_t}\phi' \quad .$$

Ricordando che, per ipotesi, $I_s \approx 0$, si ha:

$$\phi''(Y^-) = \phi''(Y^+) \quad .$$

8. Bilancio degli sforzi di taglio:

$$T^- + m\ddot{w}(Y) = T^+ \quad ;$$

$$EI_t\phi'''(Y^-)\eta + \omega^2 m\phi(Y)\eta = EI_t\phi'''(Y^+)\eta \quad ;$$

$$\phi'''(Y^-) = \phi'''(Y^+) - \frac{\omega^2 m}{EI_t}\phi(Y) \quad .$$

A questo punto, derivando le funzioni in (3.7) e (3.8) e applicando le condizioni al bordo si ottiene il seguente insieme di equazioni:

1. $a + c = 0$;
2. $\beta(b + d) = 0$;
3. $\beta^2\{-ecos[\beta(L-Y)] - fsin[\beta(L-Y)] + gcosh[\beta(L-Y)] + hsinh[\beta(L-Y)]\} = 0$;
4. $\beta^3\{esin[\beta(L-Y)] - fcos[\beta(L-Y)] + gsinh[\beta(L-Y)] + hcosh[\beta(L-Y)]\} = 0$;
5. $acos\beta Y + bsin\beta Y + ccosh\beta Y + dsinh\beta Y = e + g$;
6. $\beta(-asin\beta Y + bcos\beta Y + csinh\beta Y + dcosh\beta Y) = \beta(f + h)$;
7. $\beta^2(-acos\beta Y - bsin\beta Y + ccosh\beta Y + dsinh\beta Y) = \beta^2(-e + g)$;
8. $\beta^3(asin\beta Y - bcos\beta Y + csinh\beta Y + dcosh\beta Y) = \beta^3(-f + h) - \frac{\omega^2 m}{EI_t}(e + g)$.

Queste equazioni possono essere semplificate in un insieme di sei equazioni:

1. $-ecos[\beta(L-Y)] - fsin[\beta(L-Y)] + gcosh[\beta(L-Y)] + hsinh[\beta(L-Y)] = 0$;
2. $esin[\beta(L-Y)] - fcos[\beta(L-Y)] + gsinh[\beta(L-Y)] + hcosh[\beta(L-Y)] = 0$;
3. $a(cos\beta Y - cosh\beta Y) + b(sin\beta Y - sinh\beta Y) - e - g = 0$;
4. $a(-sin\beta Y - sinh\beta Y) + b(cos\beta Y - cosh\beta Y) - f - h = 0$;
5. $a(-cos\beta Y - cosh\beta Y) + b(-sin\beta Y - sinh\beta Y) + e - g = 0$;
6. $a(sin\beta Y - sinh\beta Y) + b(-cos\beta Y - cosh\beta Y) - \frac{m}{\mu}\beta \cdot e + f + \frac{m}{\mu}\beta \cdot g - h = 0$.

Il sistema è lineare con incognite $\boldsymbol{p} = [a; b; e; f; g; h]$.

Si scrive la matrice dei coefficienti:

$$A(\beta(\omega)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\cos[\beta(L-Y)] & -sin[\beta(L-Y)] & cosh[\beta(L-Y)] & sinh[\beta(L-Y)] \\ 0 & 0 & sin[\beta(L-Y)] & -cos[\beta(L-Y)] & sinh[\beta(L-Y)] & cosh[\beta(L-Y)] \\ cos\beta Y - cosh\beta Y & sin\beta Y - sinh\beta Y & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -sin\beta Y - sinh\beta Y & cos\beta Y - cosh\beta Y & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -cos\beta Y - cosh\beta Y & -sin\beta Y - sinh\beta Y & 1 & 0 & -1 & 0 \\ sin\beta Y - sinh\beta Y & -cos\beta Y - cosh\beta Y & \frac{m}{\mu}\beta & 1 & \frac{m}{\mu}\beta & -1 \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

Il sistema ricavato, quindi, è del tipo:

$$A(\beta(\omega)) \cdot \boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}. \tag{3.10}$$

Nel caso in cui $\det(A) \neq 0$, l'equazione ha, per il teorema di Rouché-Capelli, una e unica soluzione, che coincide con quella banale $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$; è necessario quindi che $\det(A) = 0$. In questo caso si avrà una infinità di soluzioni $\boldsymbol{p_s}$, una per ogni modo. Porre $\det(A) = 0$ equivale a trovare una equazione con β come incognita, detta equazione caratteristica. I passaggi sono omessi, riferirsi all'appendice:

$$\begin{aligned} 4\beta\frac{m}{\mu}\{cosh[\beta(L-Y)]sin[\beta(L-Y)] - cos[\beta(L-Y)]sinh[\beta(L-Y)]\}[1 \\ - \cos(\beta Y)\cosh(\beta Y)] \\ + 4\beta\frac{m}{\mu}[\sinh(\beta Y) - \cosh(\beta Y)\sin(\beta Y)]\{1 \\ + cos[\beta(L-Y)]cosh[\beta(L-Y)]\} + 8[1 + \cos(\beta L)\cosh(\beta L)] = 0. \end{aligned} \tag{3.11}$$

L'equazione caratteristica (3.11) ha infinite soluzioni $\beta_s(\omega_s)$, quindi restituisce infiniti ω_s, come già preannunciato.

3.3 Modellazione fenomeni dissipativi

Nel ricavare le equazioni del moto (2.20) e (2.21), non si sono ipotizzati fenomeni di tipo dissipativo quali l'attrito tra slider e trave e lo smorzamento viscoso della trave. La presente sezione ha lo scopo di illustrare la loro modellazione.

3.3.1 Smorzamento viscoso

Poiché l'ipotesi di assenza di smorzamento viscoso risulta irrealistica, per sopperire a questa mancanza, è stato utilizzato il modello di smorzamento viscoso proporzionale. Si definisce, quindi, il coefficiente di smorzamento viscoso modale c_s come segue:

$$c_s = \alpha(m_s + m\phi_s(Y)^2) + \beta k_s. \tag{3.12}$$

L'equazione (3.3) diventa:

$$(m_s + m\phi_s(Y)^2)\ddot{\eta}_s + \left(c_s + 2m\dot{Y}\phi_s(Y)\phi_s'(Y)\right)\dot{\eta}_s + \left[k_s + m\left(\dot{Y}^2\phi_s(Y)\phi_s''(Y) + \ddot{Y}\phi_s(Y)\phi_s'(Y)\right)\right]\eta_s = -\ddot{w}_0\left(m\phi_s(Y) + \mu\int_0^L \phi_s\, dx\right). \qquad \forall s:\ s = 1,2,3,\dots,n \tag{3.13}$$

A questo punto si definisce:

- $\xi_s = \frac{c_s}{2(m_s + m\phi_s(Y)^2)\omega_s}$ fattore di smorzamento modale;
- $\omega_{ds} = \omega_s\sqrt{1-\xi_s^2}$; pulsazione naturale del sistema smorzato.

3.3.2 Attrito

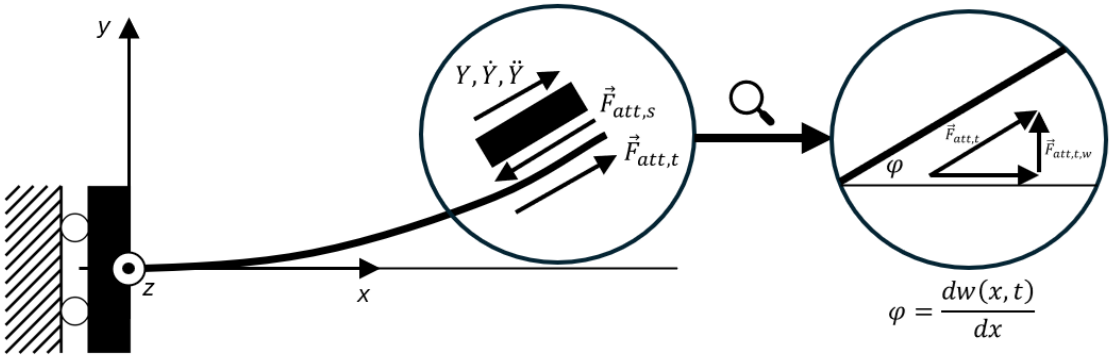

Figura 3.2 - Rappresentazione schematica delle forze di attrito $(\dot{Y} > 0)$. $\vec{F}_{att,s}$ *è la componente agente sullo slider,* $\vec{F}_{att,t}$ *agente sulla trave.*

Per quanto riguarda l'attrito di contatto tra trave e slider, cercando un compromesso tra semplicità di implementazione e accuratezza, si è optato per il modello di Coulomb. Il modello descrive l'attrito tramite un coefficiente di attrito μ_0 opportunamente calibrato:

$$\boldsymbol{F_{att,s}}(\dot{\boldsymbol{Y}}) = -F_{att,0}\cdot\frac{|\dot{Y}|}{\dot{Y}}\cdot\hat{\imath} = -\mu_0\cdot N\cdot\frac{|\dot{Y}|}{\dot{Y}}\cdot\hat{\imath}; \tag{3.14}$$

dove $F_{att,0} = \mu_0 \cdot N$ è il modulo della forza di attrito.

In Figura 3.2 è visibile in modo schematico come le forze di attrito agiscono sul sistema nel caso in cui $\dot{Y} > 0$.

La forza "N" è quella di pressione tra slider e trave; poiché la forza di gravità è stata trascurata, il contributo è dato solo dalle forze di inerzia dello slider, in direzione $\hat{\jmath}$. Ricordando che, in direzione $\hat{\jmath}$, lo slider è solidale alla trave, si ha che la sua accelerazione è quella della trave stessa. Si ha quindi:

$$N = |m\ddot{w}(Y)| = m\left|\sum_{s=1}^{\infty}\ddot{\eta}_s\phi_s(Y)\right|. \tag{3.15}$$

Componendo le relazioni (3.14) e (3.15) e aggiungendole all' equazione del moto dello slider (3.4), questa diventa:

$$\begin{aligned}\left[1+\left(\sum_{s=1}^{\infty}\eta_s\phi_s'(Y)\right)^2\right]\ddot{Y}+\left[2\sum_{s=1}^{\infty}\eta_s\phi_s'(Y)\sum_{s=1}^{\infty}\dot{\eta}_s\phi_s'(Y)\right]\dot{Y}\\ +\left[\sum_{s=1}^{\infty}\eta_s\phi_s'(Y)\sum_{s=1}^{\infty}\eta_s\phi_s''(Y)\right]\dot{Y}^2\\ =-\sum_{s=1}^{\infty}\eta_s\phi_s'(Y)\left[\ddot{w}_0+\sum_{s=1}^{\infty}\ddot{\eta}_s\phi_s(Y)\right]-\mu_0\left|\sum_{s=1}^{\infty}\ddot{\eta}_s\phi_s(Y)\right|\frac{|\dot{Y}|}{\dot{Y}}.\end{aligned} \tag{3.16}$$

D'altra parte, l'effetto dell'attrito sullo spostamento verticale w della trave è stato trascurato, in quanto, tenendo in considerazione l'ipotesi delle piccole oscillazioni ($\cos\varphi = 1$; $\sin\varphi = \varphi$), esso risulta non rilevante rispetto alle componenti di forza date dall'inerzia dello slider. Si riporta, per completezza, la relativa espressione analitica facendo riferimento alla Figura 3.2:

$$\boldsymbol{F_{att,w}}(\dot{\boldsymbol{Y}}) = \mu_0 m|\ddot{w}|\delta(x-Y)w'\frac{|\dot{Y}|}{\dot{Y}}\cdot\hat{\jmath}; \tag{3.17}$$

Dove $w'(x,t) = \varphi(x,t)$ è l'inclinazione della trave nella posizione dello slider.

4 Algoritmo di risoluzione delle equazioni del moto

Allo scopo di creare un algoritmo accessibile e di prestazioni ragionevoli, il sistema di equazioni del moto è stato semplificato ponendo lo slider istantaneamente fermo ed inerte per quanto riguarda la risoluzione dell'equazione del moto della trave, in modo simile a quanto fatto nella Sezione 3.2 per ricavare le forme modali. Questo permette di rendere lineare tale equazione.

L'equazione modale del moto della trave (3.13), quindi, diventa:

$$(m_s + m\phi_s(Y)^2)\ddot{\eta}_s + c_s\dot{\eta}_s + k_s\eta_s = -\ddot{w}_0\left(m\phi_s(Y) + \mu\int_0^L \phi_s\, dx\right) \tag{4.1}$$

Con:

- $m_s = \int_L \mu\phi^2 dx$;
- $k_s = EI_t\beta_s^4\left[\int_L \phi^2 dx + \frac{m}{\mu}\phi(Y)^2\right]$.

L'equazione del moto dello slider resta invariata (3.16).

Poiché l'equazione dello slider è non lineare, una soluzione analitica non è praticabile, si è optato per un metodo di integrazione approssimativo, cioè il metodo di Newmark, che verrà descritto in seguito.

4.1 Simulazione

La simulazione è portata avanti iterativamente per ogni istante di tempo. A seguire, il valore che le funzioni assumono per ogni istante temporale $f(t_j)$ verrà semplicemente indicato come f_j.

Per ogni istante di tempo t_j vengono risolte le due equazioni del moto riepilogate a inizio capitolo per ricavare i valori η_j e Y_j, prendendo come condizioni iniziali i valori all'istante precedente η_{j-1} e Y_{j-1}.

Il valore iniziale Y_{j-1} viene utilizzato come valore di primo tentativo predittivo, viene quindi fatta l'ipotesi che $Y_j = Y_{j-1}$; con questo si risolve l'auto-problema differenziale ricavando le forme modali e quindi si risolve la (4.1) analiticamente ricavando η_j. Tramite le forme modali e η_j si può quindi ricavare un nuovo valore Y_j numericamente dalla (3.16). Confrontando questo valore con quello di primo tentativo l'istante di tempo viene iterato finché i due valori non convergono entro una certa tolleranza. La tolleranza

scelta è tale da rendere la differenza trascurabile rispetto alla dimensione caratteristiche del sistema (lunghezza della trave). A convergenza avvenuta si passa all'istante successivo.

Il procedimento esposto viene ripetuto per ogni modo vibrazionale del sistema. Come detto nel *Capitolo 3*, le frequenze naturali sono infinite, per cui, non essendo chiaramente possibile risolvere il sistema infinite volte, è stato scelto un numero di modi considerati adeguato, considerando che più la frequenza naturale è alta e di minor rilievo sarà la sua ampiezza di oscillazione rispetto ai modi a frequenza più bassa.
La simulazione si conclude quando il sistema è stato risolto per ogni istante temporale, il cui numero è definito a partire dalla frequenza di campionamento preselezionata e dalla durata della simulazione, oppure quando il numero di iterazioni per arrivare a convergenza è eccessivamente grande; in questo ultimo caso la simulazione sarà ritenuta fallita e sarà quindi necessario, possibilmente, selezionare una frequenza di campionamento più alta.
Uno schema a blocchi dell'algoritmo si può vedere in Figura 4.1.

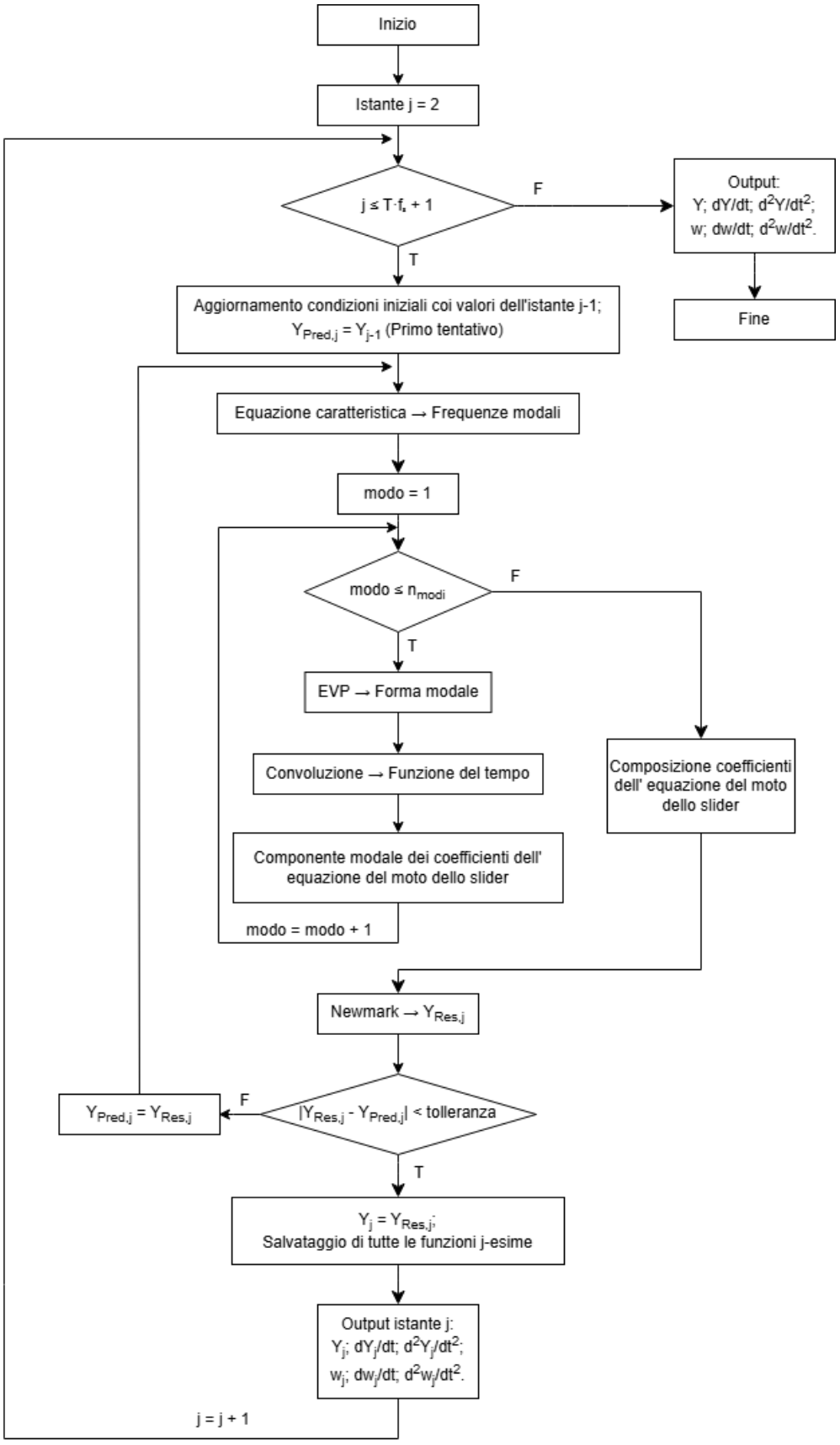

Figura 4.1 - Diagramma a blocchi dell'algoritmo di risoluzione

Per quanto riguarda la frequenza di campionamento è importante evidenziare come essa non sia selezionabile in modo totalmente arbitrario: la minima frequenza di campionamento selezionabile è vincolata dal teorema di Nyquist-Shannon che afferma che essa debba essere quantomeno il doppio della massima frequenza da acquisire; in caso contrario si incorre ad aliasing, ottenendo una risoluzione del sistema fallace. Come regola generale, per poter ricostruire adeguatamente un segnale acquisito, la frequenza di campionamento dovrebbe essere almeno 20 volte la massima frequenza presente nel segnale.

Per quanto detto, la frequenza di campionamento minima deve essere impostata adeguatamente tenendo in considerazione la frequenza massima della forzante (stabilita) e la massima frequenza naturale; poiché, con lo spostamento dello slider, le frequenze naturali cambiano ma non in modo tale da influire sul loro ordine di grandezza, il controllo viene fatto a monte della simulazione, ricavando le frequenze naturali del sistema a slider fisso nella posizione iniziale e, di conseguenza, la frequenza di campionamento è impostata a partire da questi valori in modo opportuno. Per quanto riguarda la frequenza di campionamento massima, in generale, non vi è un limite; inoltre, è opportuno precisare che, per quanto riguarda la risoluzione numerica dell'algoritmo, la frequenza di campionamento dovrebbe essere più alta possibile, indipendentemente dalla frequenza dei segnali acquisiti, in quanto tanto più è fine la discretizzazione temporale, tanto maggiore sarà l'accuratezza del risultato.

4.1.1 Soluzione dell'equazione del moto della trave

L'equazione del moto della trave è lineare del secondo ordine; quindi, è possibile ricavarne la soluzione in modo analitico.

D'ora in avanti, per semplicità, si porrà $-\ddot{w}_0(t)\left(m\phi_s(Y)+\mu\int_0^L \phi_s\,dx\right)=F(t)$.

In virtù del fatto che generalmente non è detto che la forzante sia sinusoidale o esprimibile analiticamente tramite una funzione *semplice*, la soluzione è stata portata avanti mediante integrale di convoluzione.

L'integrale di convoluzione, in generale, è un integrale in cui l'integrando è il prodotto di due funzioni traslate nel tempo l'una rispetto all'altra.

Nel caso in questione si ha:

$$\eta_s(t) = \int_{t_0=0}^{t} F(\tau) h_s(t-\tau) d\tau\,;$$

dove:

- $F(\tau)$ funzione della forzante (dipende dal tempo);
- $h_s(t-\tau)$ risposta all'impulso del sistema per il singolo modo.

La risposta all'impulso è definita come:

$$h_s(t) = \frac{1}{(m_s + m\phi_s(Y)^2)\omega_{ds}} \sin(\omega_{ds} t) \cdot e^{-\xi_s \omega_s t}. \qquad (4.2)$$

Si evidenzia come la risposta all'impulso è ricavata considerando condizioni iniziali del sistema pari a 0 sia per quanto la posizione, sia per quanto riguarda la velocità; cioè, il sistema, all'istante iniziale, è considerato fermo e all'origine.

Per la proprietà di linearità dell'equazione (4.1) è possibile sfruttare il concetto di sovrapposizione degli effetti, quindi, è sufficiente ricavare la risposta libera del sistema (indicato come $\eta_{s,RL}$) per condizioni iniziali generiche e, successivamente, sommare questa alla risposta ricavata con l'integrale di convoluzione, ottenendo così la risposta completa.

La risposta libera e la sua derivata, in questo caso, sono esprimibili come:

- $\eta_{s,RL}(t) = e^{-\xi_s \omega_s t}[c_{1s} \cos(\omega_{ds} t) + c_{2s} \sin(\omega_{ds} t)]$;
- $\dot{\eta_{s,RL}}(t) = -e^{-\xi_s \omega_s t}\{\xi_s \omega_s [c_{1s} \cos(\omega_{ds} t) + c_{2s} \sin(\omega_{ds} t)] + \omega_{ds}[c_{1s} \sin(\omega_{ds} t) - c_{2s} \cos(\omega_{ds} t)]\}$.

Dove c_{1s} e c_{2s} sono le costanti *modali* da ricavare tramite le condizioni iniziali.

Si ha:

- $\eta_{s,RL}(0) = c_{1s}$;
- $\dot{\eta_{s,RL}}(0) = \omega_{ds} c_{2s} - \xi_s \omega_s c_{1s} = \omega_{ds} c_{2s} - \xi_s \omega_s \eta_{s,RL}(0)$.

Quindi:

- $c_{1s} = \eta_{s,RL}(0)$;
- $c_{2s} = \frac{\dot{\eta_{s,RL}}(0) + \xi_s \omega_s \eta_{s,RL}(0)}{\omega_{ds}}$.

Si ha:

$$\eta_{s,RL} = e^{-\xi_s \omega_s t}\left[\eta_{s,RL}(0) \cos(\omega_{ds} t) + \frac{\dot{\eta_{s,RL}}(0) + \xi_s \omega_s \eta_{s,RL}(0)}{\omega_{ds}} \sin(\omega_{ds} t)\right]. \qquad (4.3)$$

Come esposto all'inizio del capitolo, la simulazione è portata avanti iterando su ogni istante. Per la soluzione dell'equazione del moto della trave questo significa integrare, per ogni j-esimo passo di simulazione, su due istanti di tempo: t_{j-1} (per le condizioni iniziali) e t_j. Per risolvere l'integrale di convoluzione, è stato utilizzato il teorema della media integrale:

$$\int_0^{\Delta t} F(\tau)h_s(\Delta t - \tau)d\tau = \Delta t \cdot M(F \cdot h_s, [0, \Delta t]);$$

Dove $M(F \cdot h_s, [0, \Delta t])$ è la media integrale della funzione integranda nell'intervallo di tempo $[0; \Delta t]$.

La scelta dell'intervallo di integrazione ($[0; \Delta t]$ piuttosto che $[t_{j-1}; t_j]$) può apparire insolita; in realtà la scelta è imprescindibile in quanto la funzione di risposta al gradino h_s è ricavata ponendo come istante iniziale $t = 0$. L'informazione del momento che si sta effettivamente integrando è data dall'aggiunta delle condizioni iniziali, che corrispondono alle condizioni del sistema nell'istante precedente t_{j-1}.

In virtù del fatto che gli istanti di tempo debbano essere molto ravvicinati tra loro, la funzione integranda è stata approssimata come lineare nell'intervallo di tempo $[t_{j-1}; t_j]$; allora, la media integrale diventa così media aritmetica:

Si ottiene:

$$\int_0^{\Delta t} F(\tau)h_s(\Delta t - \tau)d\tau \approx \frac{\Delta t}{2} \cdot \frac{F_j \cdot e^{-\xi_{s,j}\omega_{s,j}\Delta t}}{\left(m_{s,j} + m\phi_{s,j}\left(Y_j\right)^2\right)\omega_{ds,j}} \sin\left(\omega_{ds,j}\Delta t\right). \qquad (4.4)$$

In definitiva, sommando la (4.3) e la (4.4), si ha la risposta forzata come segue:

$$\eta_{s,j} = \frac{\Delta t}{2} \cdot \frac{F_j \cdot e^{-\xi_{s,j}\omega_{s,j}\Delta t}}{\left(m_{s,j} + m\phi_{s,j}\left(Y_j\right)^2\right)\omega_{ds,j}} \sin\left(\omega_{ds,j}\Delta t\right) + e^{-\xi_{s,j}\omega_{s,j}\Delta t}\left[\eta_{s,j-1}\cos\left(\omega_{ds,j}\Delta t\right) + \frac{\dot{\eta}_{s,j-1} + \xi_{s,j}\omega_{s,j}\eta_{s,j-1}}{\omega_{ds,j}}\sin\left(\omega_{ds,j}\Delta t\right)\right]. \qquad (4.5)$$

Sarà inoltre importante ricavare $\dot{\eta}_{s,j}$ e $\ddot{\eta}_{s,j}$ in quanto il primo sarà la condizione iniziale per l'istante successivo e il secondo sarà importante per ricavare $\ddot{w}$ che sarà ciò che misureremo sperimentalmente tramite accelerometro.

Viene ricavato $\dot{\eta}_{s,J}$ integrando l'equazione del moto (4.1):

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} [\ddot{\eta}_s + 2\xi_s\omega_s\dot{\eta}_s + \omega_s^2\eta_s]dt = \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{F}{m_s + m\phi_s(Y)^2}\,dt.$$

Anche in questo caso, per la risoluzione degli integrali, si è ipotizzato andamento lineare nell'intervallo:

$$\dot{\eta}_{s,J} = \frac{\Delta t}{2}\frac{F_{j-1} + F_j}{m_{s,j} + m\phi_{s,j}(Y_j)^2} - 2\xi_{s,j}\omega_{s,j}(\eta_{s,j} - \eta_{s,j-1}) - \frac{\Delta t}{2}\omega_{s,j}^2(\eta_{s,j-1} + \eta_{s,j}) + \dot{\eta}_{s,j-1} \tag{4.6}$$

$\ddot{\eta}_{s,J}$ invece si ricava a partire dall'equazione del moto, sfruttando $\dot{\eta}_{s,J}$ e $\eta_{s,j}$:

$$\ddot{\eta}_{s,J} = \frac{F_j}{m_{s,j} + m\phi_{s,j}(Y_j)^2} - 2\xi_{s,j}\omega_{s,j}\dot{\eta}_{s,J} - \omega_{s,j}^2\eta_{s,j}. \tag{4.7}$$

Si ricorda che il pedice "s" sta ad indicare il singolo modo, per cui queste equazioni sono state risolte per ognuno dei modi da simulare.

4.1.2 Soluzione dell'equazione del moto dello slider

Si riporta l'equazione dello slider (3.16) modificata per le esigenze numeriche:

$$\left[1 + \left(\sum_{s=1}^{n}\eta_s\phi_s'(Y)\right)^2\right]\ddot{Y} + \left[2\sum_{s=1}^{n}\eta_s\phi_s'(Y)\sum_{s=1}^{n}\dot{\eta}_s\phi_s'(Y)\right]\dot{Y} + \left[\sum_{s=1}^{n}\eta_s\phi_s'(Y)\sum_{s=1}^{n}\eta_s\phi_s''(Y)\right]\dot{Y}^2 = -\sum_{s=1}^{n}\eta_s\phi_s'(Y)\left[\ddot{w}_0 + \sum_{s=1}^{n}\ddot{\eta}_s\phi_s(Y)\right] - \mu_0\left|\sum_{s=1}^{n}\ddot{\eta}_s\phi_s(Y)\right|\tanh\left(\frac{\dot{Y}}{\epsilon}\right) \tag{4.8}$$

In quanto numericamente una sommatoria non può essere infinita, esse si fermano ad n, che sta ad indicare il numero di modi simulati. Inoltre, poiché la funzione segno presenta un punto di non derivabilità all'origine, che può comportare una complicazione durante la ricerca di convergenza nelle iterazioni, è stato posto:

$$\frac{|\dot{Y}|}{\dot{Y}} \cong \tanh\left(\frac{\dot{Y}}{\epsilon}\right);$$

dove ϵ è un modificatore della forma della funzione: più è piccolo, più la funzione emulerà fedelmente la funzione segno.

Per rendere la trattazione più pratica, questa equazione verrà proposta come:

$$M(t)\ddot{Y}(t) + C(t)\dot{Y}(t) + K(t)Y(t) = F(t) + f_{NL}\big(\dot{Y}(t), t\big); \tag{4.9}$$

dove:

$$f_{NL}\big(\dot{Y}(t), t\big) = -\left[\sum_{s=1}^{n} \eta_s \phi_s'(Y) \sum_{s=1}^{n} \eta_s \phi_s''(Y)\right] \dot{Y}^2 - \mu_0 \left|\sum_{s=1}^{n} \ddot{\eta}_s \phi_s(Y)\right| \tanh\left(\frac{\dot{Y}}{\epsilon}\right) \tag{4.10}$$

Si fa notare come anche i coefficienti dipendano dal tempo, in quanto essi sono funzioni dello spostamento trasversale della trave w e delle sue derivate (spaziali e temporali).

Come già preannunciato, l'equazione, essendo non lineare, potrà essere risolta con un metodo *non esatto*. È stato scelto il metodo di Newmark, appositamente modificato per il caso non lineare.

Il metodo di Newmark appartiene alla famiglia dei *metodi alle differenze finite*. Tale metodo prevede la discretizzazione dell'intervallo temporale di analisi in passi temporali Δt uguali fra loro. Conoscendo la configurazione del sistema all'istante iniziale, questo metodo permette di ricavare la soluzione all'istante temporale successivo. Tale soluzione diviene la condizione iniziale per lo step successivo di calcolo.

Il metodo considera le accelerazioni, per ogni istante di tempo, lineari:

$$\frac{\ddot{Y}(t) - \ddot{Y}_{j-1}}{t - t_{j-1}} = \frac{\ddot{Y}_j - \ddot{Y}_{j-1}}{\Delta t}.$$

Integrando $\ddot{Y}(t)$ e ponendo $t = t_j$, si ottiene:

$$\dot{Y}_j = \dot{Y}_{j-1} + \Delta t\left(\frac{1}{2}\ddot{Y}_{j-1} + \frac{1}{2}\ddot{Y}_j\right);$$

$$Y_j = Y_{j-1} + \Delta t\dot{Y}_{j-1} + \frac{\Delta t^2}{2}\left(\frac{2}{3}\ddot{Y}_{j-1} + \frac{1}{3}\ddot{Y}_j\right).$$

Generalizzando, queste formule possono essere riscritte nel seguente modo:

$$\dot{Y}_j = \dot{Y}_{j-1} + \Delta t\big[(1-\gamma)\ddot{Y}_{j-1} + \gamma\ddot{Y}_j\big]; \tag{4.11}$$

$$Y_j = Y_{j-1} + \Delta t\dot{Y}_{j-1} + \frac{\Delta t^2}{2}\big[(1-2\beta)\ddot{Y}_{j-1} + 2\beta\ddot{Y}_j\big]. \tag{4.12}$$

L'equazione del moto all'istante t_j è:

$$M_j\ddot{Y}_j + C_j\dot{Y}_j + K_jY_j = F_j + f_{NL,j}. \tag{4.13}$$

Sostituendo le equazioni (4.11) e (4.12) nella (4.13), si ottiene la seguente equazione:

$$M_j\ddot{Y}_j + C_j\dot{Y}_{j-1} + \Delta t C_j\left[(1-\gamma)\ddot{Y}_{j-1} + \gamma\ddot{Y}_j\right] + K_j Y_{j-1} + \Delta t K_j\dot{Y}_{j-1} + \frac{\Delta t^2}{2}K_j\left[(1-2\beta)\ddot{Y}_{j-1} + 2\beta\ddot{Y}_j\right] = F_j + f_{NL,j}; \quad (4.14)$$

Con $f_{NL,j} = f_{NL}(\dot{Y}_j, t_j)$.

Nell'equazione (4.14), $\ddot{Y}_j$ è l'unica incognita, in quanto tutti i valori riferiti all'istante $j-1$ sono noti come condizioni iniziali.

La soluzione dell'equazione (4.14), per via della presenza delle non linearità, verrà portata avanti in modo iterativo.

Si definisce:

- $$Y_{pred,j} = Y_{j-1} + \Delta t\dot{Y}_{j-1} + \frac{\Delta t^2}{2}(1-2\beta)\ddot{Y}_{j-1}; \quad (4.15)$$
- $$\dot{Y}_{pred,j} = \dot{Y}_{j-1} + \Delta t(1-\gamma)\ddot{Y}_{j-1.} \quad (4.16)$$

I quali sono i valori definiti nelle equazioni (4.11) e (4.12), senza il contributo della accelerazione $\ddot{Y}_j$.

Si definisce poi la forzante predittiva come segue:

$$F_{NL,pred,j} = F_j + f_{NL}(\dot{Y}_{pred,j}, t_j); \quad (4.17)$$

dove le non linearità sono inizializzate col valore presentato in (4.16), come valore di primo tentativo da cui parte l'iterazione.

Si definiscono poi i seguenti termini:

- $$A = M_j + \gamma\Delta t C_j + \beta\Delta t^2 K_j; \quad (4.18)$$
- $$B = F_{NL,pred,j} - C_j\dot{Y}_{pred,j} - K_j Y_{pred,j}. \quad (4.19)$$

Si ottiene quindi:

$$\ddot{Y}_{pred,j} = \frac{B}{A}. \quad (4.20)$$

Si ricava quindi Y_j, $\dot{Y}_j$ e $F_{NL,j}$:

- $$Y_j = Y_{pred,j} + \beta\Delta t^2\ddot{Y}_{pred,j}; \quad (4.21)$$
- $$\dot{Y}_j = \dot{Y}_{pred,j} + \gamma\Delta t\ddot{Y}_{pred,j}; \quad (4.22)$$
- $$F_{NL,j} = F_j + f_{NL}(\dot{Y}_j, t_j). \quad (4.23)$$

A questo punto si confronta $F_{NL,pred,j}$ con $F_{NL,j}$; se essi convergono entro una certa tolleranza, l'iterazione è conclusa, altrimenti si pone $F_{NL,pred,j} = F_{NL,j}$, si modifica di

conseguenza la (4.19) e si ripete il calcolo dalla (4.20) alla (4.23) finché i valori non convergono.

Anche in questo caso si presenta un diagramma a blocchi esplicativo dell' algoritmo di Newmark non lineare in Figura 4.2.

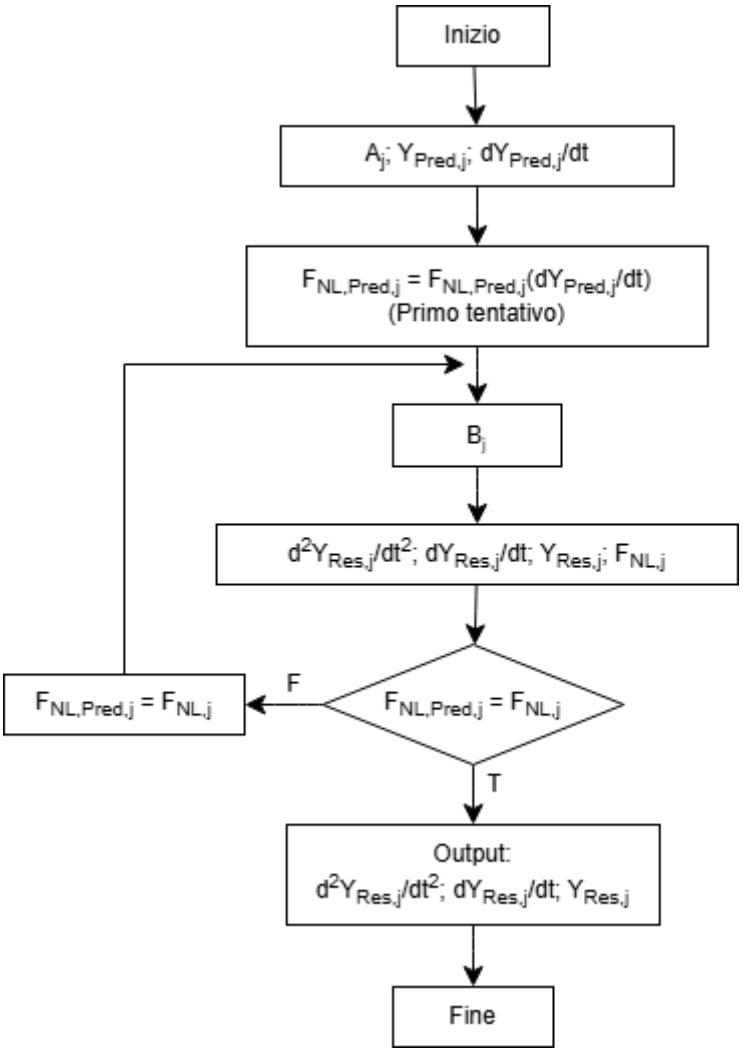

Figura 4.2 - Diagramma a blocchi dell'algoritmo di Newmark non lineare

5 Validazione numerica del modello analitico a slider fisso

Per la validazione si sono utilizzati tre differenti casi di studio, che sono stati poi confrontati con il risultato fornito dal modello, per poterne valutare l'accuratezza da un punto di vista analitico/numerico.

Si evidenzia che i casi di confronto siano tutti a slider fisso.

I due casi di studio di confronto solo:

- Modello a un grado di libertà;
- Modello agli elementi finiti del sistema con massa concentrata.

5.1 Confronto con modello a un grado di libertà

5.1.1 Modello a un grado di libertà

Il modello a un grado di libertà è ottenuto tramite una trave incastrata con una massa in punta. La struttura della trave, quindi, è assimilata a una molla; in più si ha l'effetto di smorzamento dato dalla trave stessa. Si ottiene così un sistema massa-molla-smorzatore rappresentato in Figura 5.1.

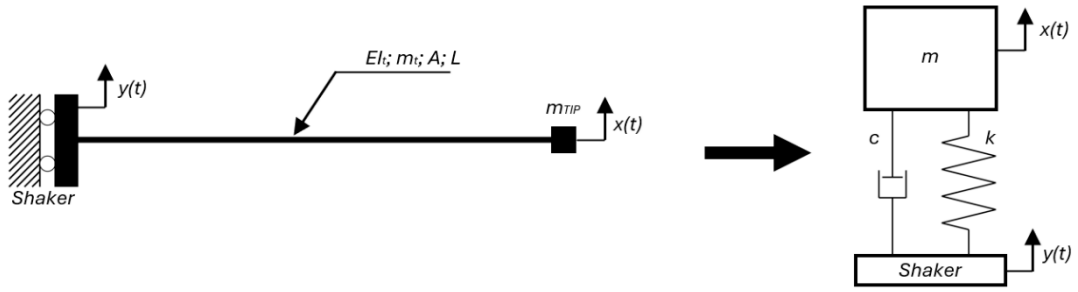

Figura 5.1 Sistema a un grado di libertà reale considerato

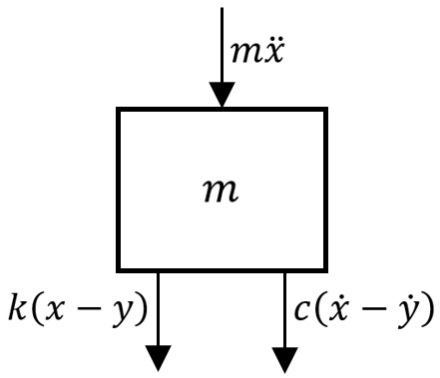

Figura 5.2 Diagramma di corpo libero massa m

La rigidezza k è ricavabile tramite il principio dei lavori virtuali; si riporta direttamente il valore in quanto noto:

$$k = \frac{3EI_t}{L^3}$$

La massa totale m è una composizione della massa del peso in punta m_{tip} con la massa della trave m_t:

$$m = m_{tip} + \lambda m_t. \tag{5.1}$$

Per migliorare la compatibilità del modello a un grado di libertà con i rilievi sperimentali, risulta:

$$\lambda = \frac{1}{4.2}$$

In riferimento al diagramma di corpo libero in Figura 5.2, si può scrivere l'equazione del moto del sistema a un grado di libertà semplificato:

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) = 0. \tag{5.2}$$

In seguito, si definisce:

$$z = x - y \tag{5.3}$$

Ottenendo:

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = -m\ddot{y}$$

$$\ddot{z} + 2\xi\omega_n\dot{z} + \omega_n^2 z = -\ddot{y}. \tag{5.4}$$

Il sistema così modellato ha una sola frequenza naturale (un grado di libertà), la quale corrisponde alla frequenza naturale del primo modo del modello continuo. Si rende noto che la presenza della massa della trave rende impossibile la sovrapposizione perfetta del modello a un grado di libertà con quello *esatto*, in quanto il modello della molla, nel modello a un grado di libertà, implica che la molla abbia massa pari a zero. Con la relazione (5.1) si è cercato un modo semplice per integrare l'informazione della massa della trave, ma la sovrapposizione tra i due modelli richiederebbe che quest'ultima sia trascurabile rispetto a quella della massa in punta.

In seguito, si riportano i parametri fisici impostati per il confronto in Tabella 1 e i parametri di simulazione in Tabella 2:

Tabella 1 - Caratteristiche sistema confronto modello analitico/Sdof

Parametro	Simbolo	Valore	Unità
Lunghezza	L	200	mm
Larghezza	b	30	mm
Spessore	h	1	mm
Modulo di rigidezza trave	E	200	GPa
Densità trave	ρ	7800	kg/m^3
Massa in punta	m_{tip}	80	g
Coefficiente smorzamento 1	α	1.53	s^{-1}
Coefficiente smorzamento 2	β	0	s
Fattore smorzamento Sdof	ξ	1.7%	$-$

Tabella 2 - Impostazioni di simulazione confronto modello analitico/Sdof

Parametro	Simbolo	Valore	Unità
Tempo iniziale	t_{St}	0	s
Tempo finale	t_{End}	10	s
Frequenza di campionamento	f_s	15	$ksps$
Numero di modi simulati	n_{modes}	3	$-$
Numero nodi di discretizzazion	$nodes$	101	$-$

Il confronto è stato svolto tramite la simulazione di entrambi i modelli utilizzando delle forzanti di sollecitazione le cui proprietà sono riportate in Tabella 3. L'ampiezza della forzante è riportata come (m/s) in quanto, sperimentalmente, la forzante verrà controllata in tensione, che determina l'ampiezza della velocità della forzante stessa; quindi, per coerenza, si è optato per mantenere questa soluzione anche dal punto di vista numerico. In quanto l'aspetto cruciale era il comportamento in frequenza, l'ampiezza è stata mantenuta la stessa per tutte le forzanti di test.

Tabella 3 - Proprietà forzanti confronto modello analitico/Sdof

Tipo	Ampiezza (m/s)	Frequenza (Hz)
Sinusoidale 1	0.2	3
Sinusoidale 2		7.22
Sinusoidale 3		293.87
Random		0:300

5.1.2 Risultati confronto

In Tabella 4 sono riportate le frequenze naturali ricavate:

Tabella 4 - Frequenze naturali confronto modello analitico/Sdof

Simbolo	Frequenza (Hz)
$f_{n,sdof}$	7.2187
$f_{n,1}$	7.2216
$f_{n,2}$	92.655
$f_{n,3}$	293.87

Si può notare, come previsto, che la prima frequenza naturale del modello esatto $(f_{n,1})$ e quella del sistema a un grado di libertà $(f_{n,sdof})$ sono nella pratica, uguali:

$$err_{f_n}\% = \left|\frac{f_{n,1} - f_{n,sdof}}{f_{n,1}}\right| = 0.04\%$$

- Forzante sinusoidale 1:

La prima forzante è stata considerata come non in risonanza e minore della frequenza naturale del primo modo/del sistema a un grado di libertà. La scelta è stata fatta per poter fare un confronto con una frequenza neutra, ma che non implicasse un' attenuazione, come avverrebbe per frequenze maggiori a quella di risonanza.

Come si può vedere in Figura 5.3 le distribuzioni di densità di potenza spettrale sono sovrapponibili per i due modelli, ad eccezione dei due picchi in corrispondenza delle frequenze modali 2 e 3 del sistema continuo, i quali però non influiscono in maniera sostanziale all'oscillazione del sistema; infatti, si può vedere in Figura 5.4 come gli errori nei segnali di oscillazione, sia per l'ampiezza che per l'accelerazione, non raggiungano il $7\% RMS$.

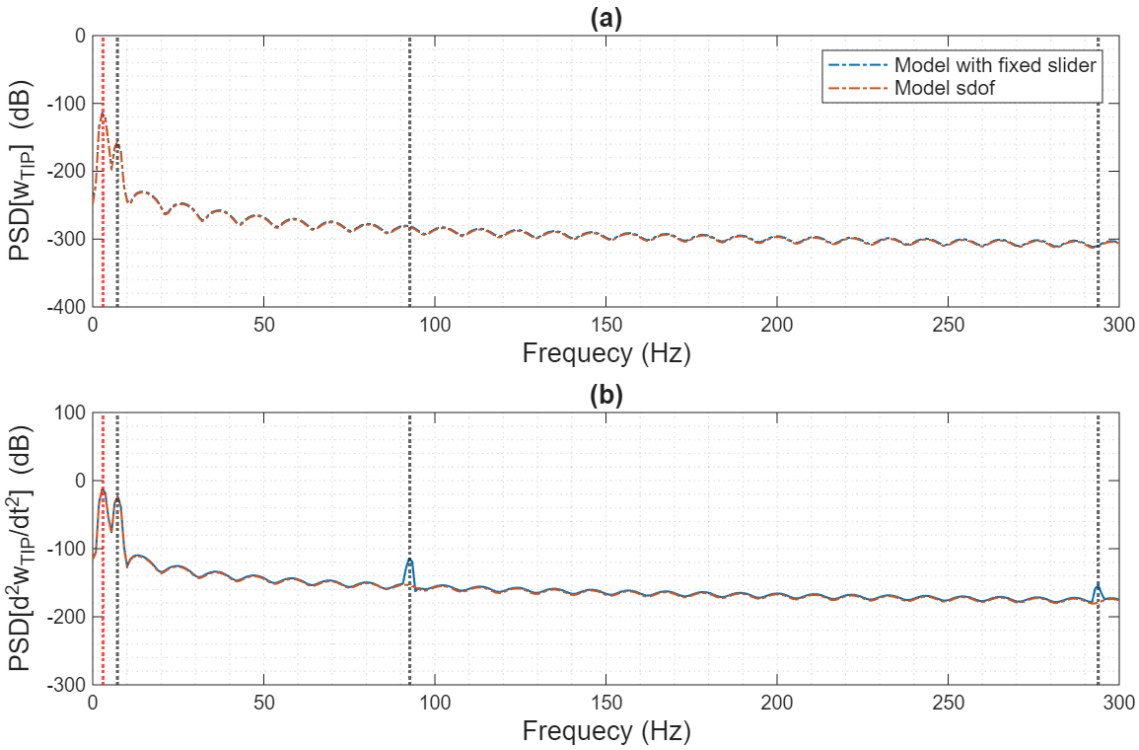

Figura 5.3 - Confronto modello analitico/Sdof della densità di potenza spettrale di ampiezza (a) e accelerazione (b) per forzante neutra (f = 3Hz). Linea verticale rossa: frequenza della forzante.

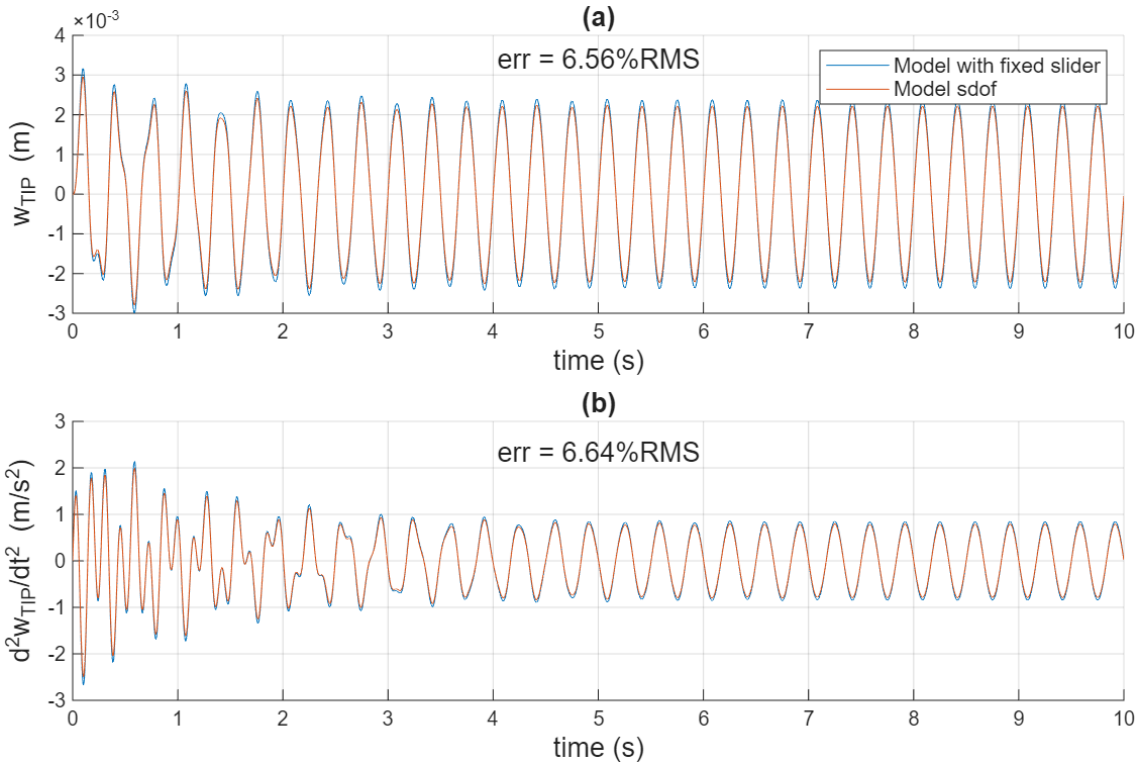

Figura 5.4 - Confronto modello analitico/Sdof dei segnali di ampiezza (a) e accelerazione (b) per forzante neutra (f = 3Hz).

- Forzante sinusoidale 2

In questo caso è stata scelta una forzante in risonanza con la prima frequenza modale. Si può dedurre dalla Figura 5.5 come le forme modali non in risonanza abbiano un'influenza totalmente trascurabile rispetto al modo in risonanza, le densità spettrali risultano quindi del tutto coerenti tra i due modelli. Stessa cosa vale per i segnali di oscillazione osservabili in Figura 5.6: anche in questo caso gli errori non raggiungono il $7\%RMS$, stavolta, però, l'andamento delle ampiezze non è decrescente e asintotico ma è crescente e asintotico; infatti, in risonanza, la risposta libera interagisce con la risposta forzata, causando una risposta amplificata. Si evidenzia infatti come si raggiungano in questo caso picchi di attenuazione minori dell'ampiezza di oscillazione($-50dB$ di questo caso -Figura 5.5a- contro i $-100dB$ del caso precedente -Figura 5.3a-).

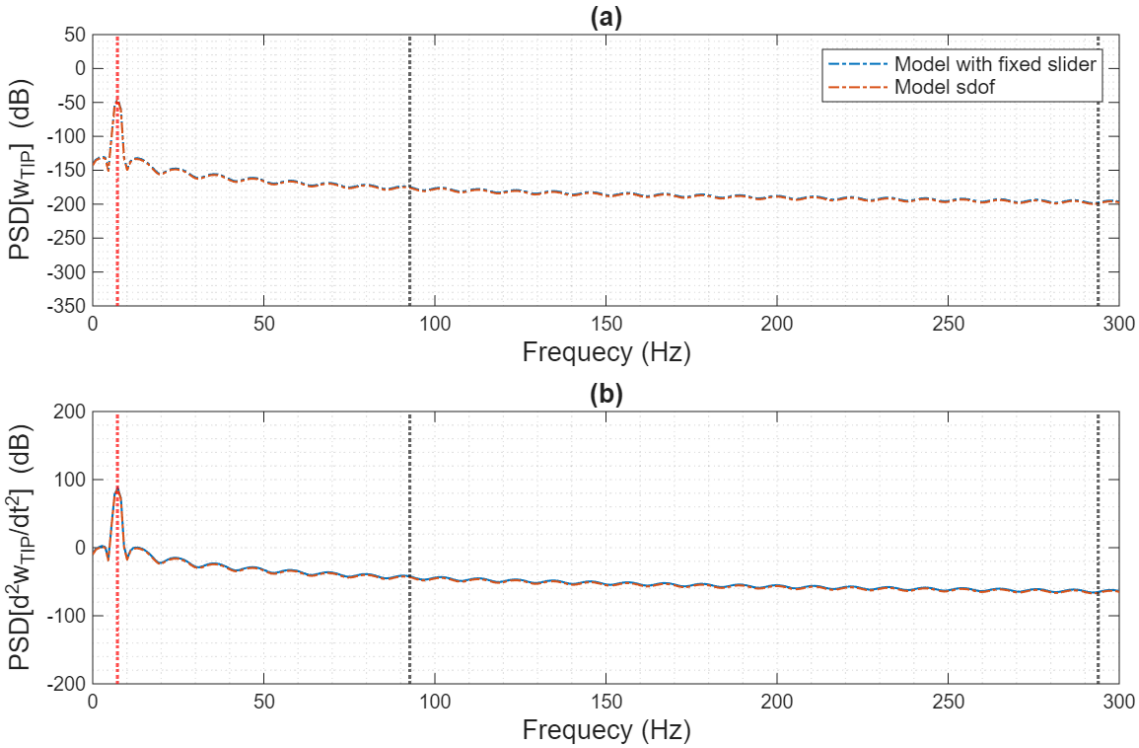

Figura 5.5 - Confronto modello analitico/Sdof della densità di potenza spettrale di ampiezza (a) e accelerazione (b) per forzante in risonanza col primo modo (f = 7.22Hz).

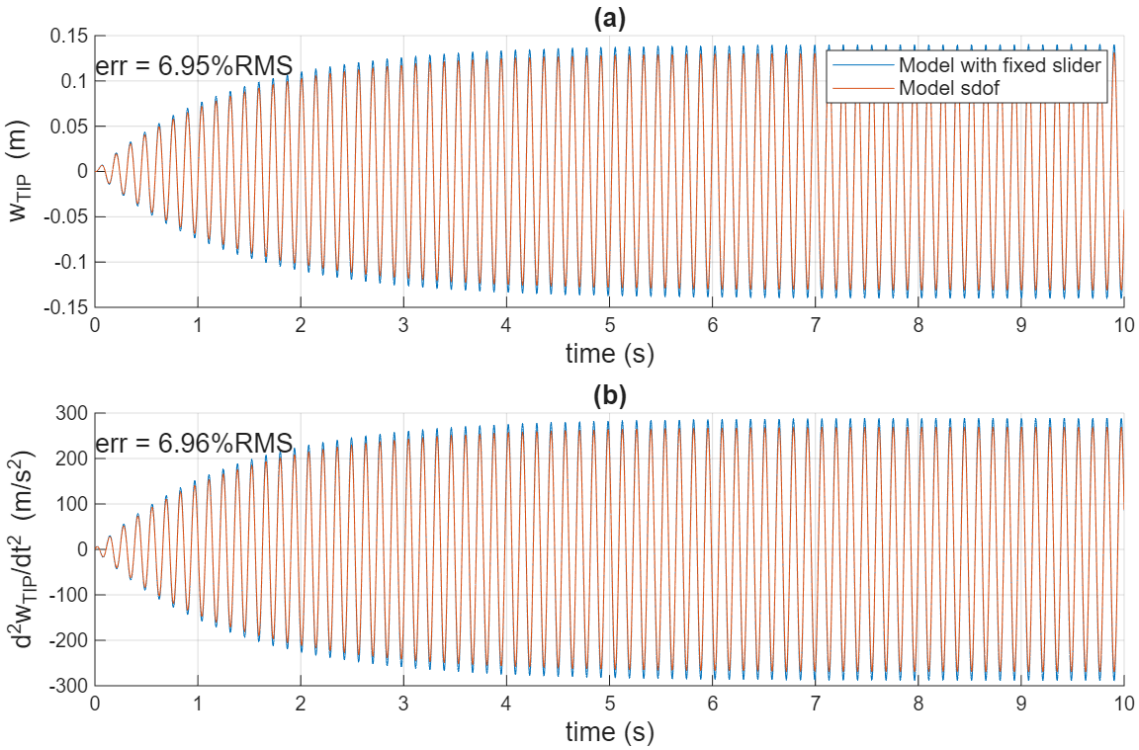

Figura 5.6 – Confronto modello analitico/Sdof dei segnali di ampiezza (a) e accelerazione (b) per forzante in risonanza col primo modo ($f = 7.22Hz$).

- Forzante sinusoidale 3

Per questo caso è stata scelta una forzante simile alla terza frequenza modale del modello continuo.

Come prevedibile, si osserva in Figura 5.7b come la risposta del modello a un grado di libertà, per quanto riguarda l'accelerazione, sia attenuata con una differenza che sfiora i $50dB$. Lo stesso comportamento è deducibile dalla Figura 5.8, con errori RMS decisamente più alti rispetto ai casi precedenti. Ciò è dovuto chiaramente al fatto che, mentre per il modello continuo la forzante entra in risonanza con uno dei suoi modi vibrazionali (in particolare il terzo), per il modello a un grado di libertà questo non può avvenire e, essendo la frequenza della forzante molto lontana rispetto alla sua frequenza naturale, la risposta è chiaramente molto attenuata.

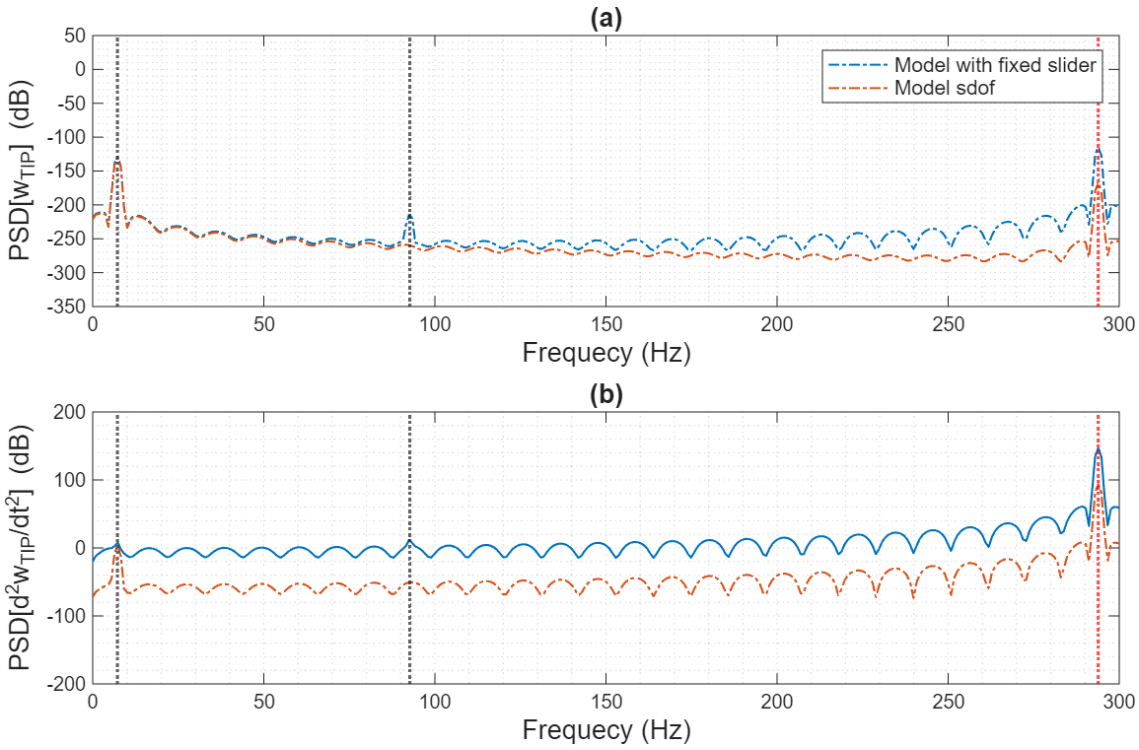

Figura 5.7 - Confronto modello analitico/Sdof della densità di potenza spettrale di ampiezza (a) e accelerazione (b) per forzante in risonanza col terzo modo (f = 293.87Hz).

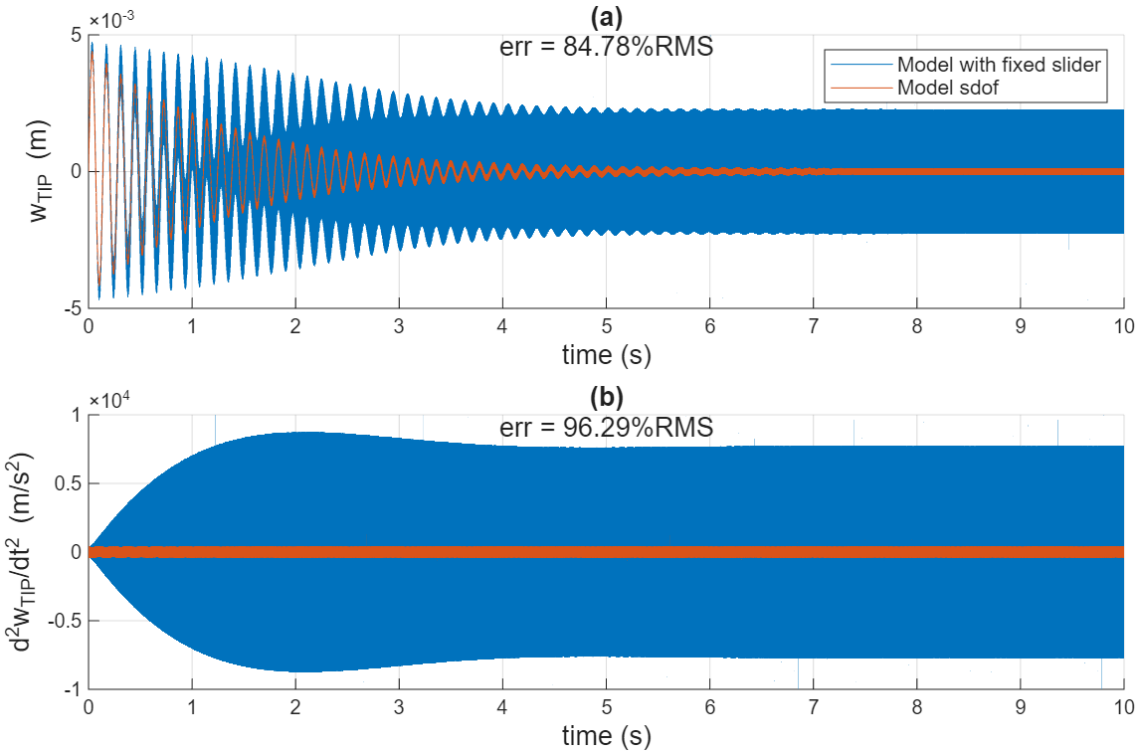

Figura 5.8 - Confronto modello analitico/Sdof dei segnali di ampiezza (a) e accelerazione (b) per forzante in risonanza col terzo modo (f = 293.87Hz).

- Forzante casuale

Il range di frequenza scelto è tale da coprire tutte le frequenze di risonanza simulate del modello continuo. La simulazione è stata condotta per avere un confronto qualitativo generale tra i due modelli.

Generalmente, per quanto riguarda l'ampiezza delle oscillazioni osservabili in Figura 5.10a, la coerenza è sufficiente, con un errore del $10.7\%RMS$. Per quanto riguarda le accelerazioni (Figura 5.10b), invece, si assiste a un errore ($91.49\%RMS$) confrontabile al caso di risonanza col terzo modo (Forzante sinusoidale 3). Anche la distribuzione delle densità spettrali osservabile in Figura 5.9 è in accordo nei due modelli, eccetto che per le zone di risonanza dei modi 2 e 3, risultato prevedibile alla luce dei test precedenti.

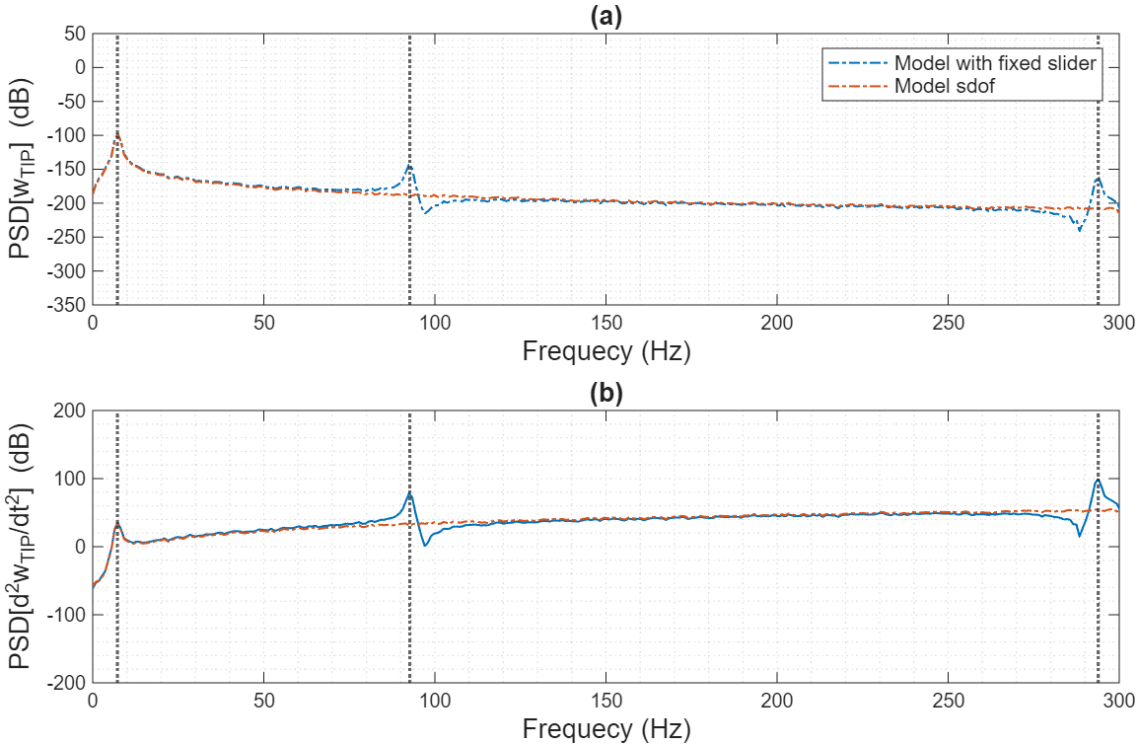

Figura 5.9 - Confronto modello analitico/Sdof della densità di potenza spettrale di ampiezza (a) e accelerazione (b) per forzante casuale (f = 0:300Hz).

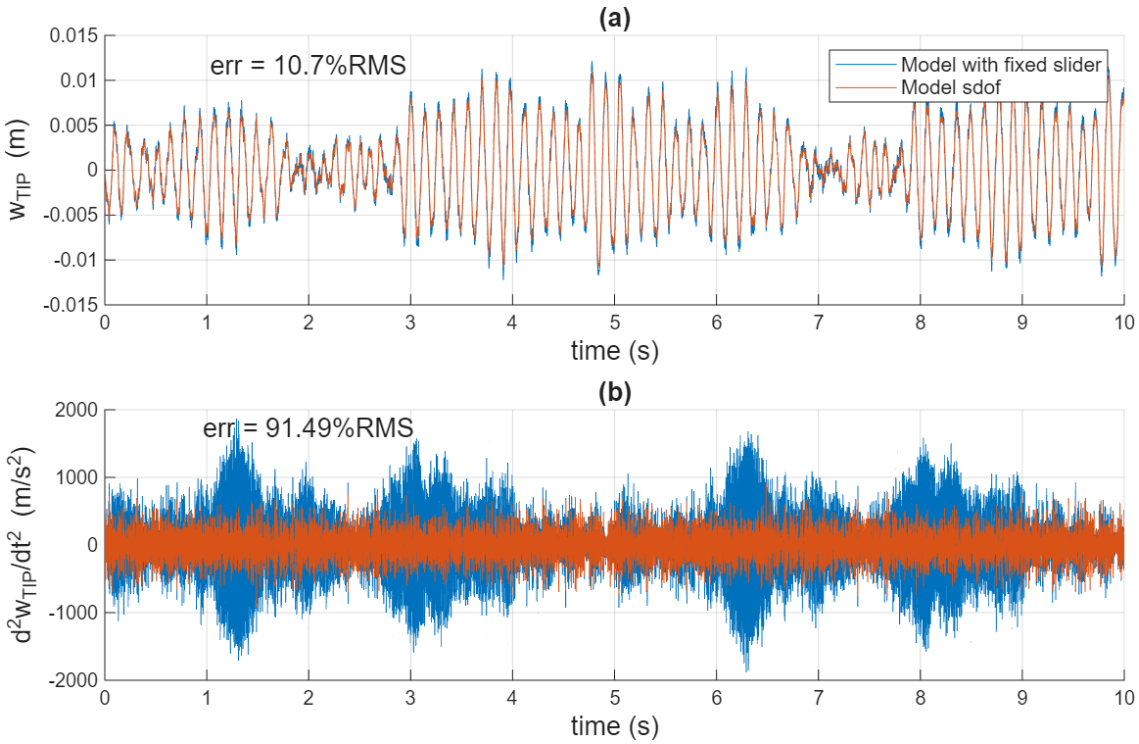

Figura 5.10 - Confronto modello analitico/Sdof dei segnali di ampiezza (a) e accelerazione (b) per forzante casuale (f = 0:300Hz).

5.2 Confronto con modello agli elementi finiti con massa concentrata

5.2.1 Modello agli elementi finiti

Un metodo di discretizzazione mediante elementi finiti è un metodo di risoluzione di problemi, modellati con equazioni differenziali alle derivate parziali, utilizzando funzioni, dette funzioni di forma, con lo scopo di descrivere, localmente, lo spostamento ammissibile che è in grado di compiere il sistema in esame. Si ottiene così, a partire dalle equazioni differenziali, un sistema di equazioni semplici, risolvibili numericamente. L'accuratezza del metodo dipende dalla finezza della discretizzazione spaziale e temporale: una discretizzazione molto fine permette di avvicinarsi sempre più alla soluzione reale.

Anche in questo caso il sistema avrà una massa concentrata, tuttavia essa non sarà più esclusivamente in punta. Lo schema dettagliato del modello è esattamente uguale a quello visibile in Figura 2.1, con l'unica differenza, appunto, che la funzione Y (la posizione dello slider) non dipende più dal tempo, ma è costante.

Anche in questo caso il confronto è svolto per valutare la bontà del modello continuo trattato nel lavoro in questione.

Si riportano i parametri fisici impostati del sistema in

Parametro	Simbolo	Valore	Unità
Lunghezza	L	200	mm
Larghezza	b	30	mm
Spessore	h	1	mm
Modulo di rigidezza trave	E	200	GPa
Densità trave	ρ	7800	kg/m^3
Coefficiente smorzamento 1	α	0	s^{-1}
Coefficiente smorzamento 2	β	0	s

Tabella 5 e i parametri di simulazione in Tabella 6:

Tabella 5 - Caratteristiche sistema confronto modello analitico/FEM

Parametro	Simbolo	Valore	Unità
Lunghezza	L	200	mm
Larghezza	b	30	mm
Spessore	h	1	mm
Modulo di rigidezza trave	E	200	GPa
Densità trave	ρ	7800	kg/m^3
Coefficiente smorzamento 1	α	0	s^{-1}
Coefficiente smorzamento 2	β	0	s

Tabella 6 - Impostazioni di simulazione confronto modello analitico/FEM

Parametro	Simbolo	Valore	Unità
Tempo iniziale	t_{St}	0	s
Tempo finale	t_{End}	1	s
Frequenza di campionament	f_s	20	$ksps$
Numero di modi simulati	n_{modes}	5	–
Numero nodi di discretizzazi	$nodes$	501	–

Il confronto in questo caso si concentrerà sulla sovrapponibilità delle frequenze naturali simulate dai due modelli a partire dalle proprietà della massa concentrata, cioè dalla sua massa stessa e dalla sua posizione. Lo smorzamento viscoso riportato in Tabella 7 è stato posto pari a zero in quanto ininfluente sulle frequenze naturali. Le proprietà della massa concentrata esaminate sono esposte in Tabella 7:

Tabella 7 - Proprietà della massa concentrata confronto modello analitico/FEM

Caso	Massa (g)	Posizione (cm)
$\boldsymbol{Massa\ 1}$	40	8&14
$\boldsymbol{Massa\ 2}$	60	8&14
$\boldsymbol{Massa\ 3}$	80	8&14

5.2.2 Risultati confronto

- Massa 1:

Tabella 8 - Confronto frequenze naturali modello analitico/FEM (m=40g @ 8cm)

Frequenze modali	Valore Modello analitico (Hz)	Valore FEM (Hz)	Errore (%)
$f_{n,1}$	19.2262	19.2262	$\approx 10^{-5}$
$f_{n,2}$	84.3927	84.3927	$\approx 10^{-6}$
$f_{n,3}$	318.5916	318.5916	$\approx 10^{-7}$
$f_{n,4}$	684.2407	684.2407	$\approx 10^{-8}$
$f_{n,5}$	1004.1618	1004.1618	$\approx 10^{-8}$

Tabella 9 - Confronto frequenze naturali modello analitico/FEM (m=40g @ 14cm)

Frequenze modali	Valore Modello analitico (Hz)	Valore FEM (Hz)	Errore (%)
$f_{n,1}$	14.1227	14.1227	$\approx 10^{-5}$
$f_{n,2}$	121.3963	121.3963	$\approx 10^{-6}$
$f_{n,3}$	290.2496	290.2496	$\approx 10^{-7}$
$f_{n,4}$	677.5502	677.5502	$\approx 10^{-8}$
$f_{n,5}$	1161.1610	1161.1610	$\approx 10^{-8}$

- Massa 2:

Tabella 10 - Confronto frequenze naturali modello analitico/FEM (m=60g @ 8cm)

Frequenze modali	**Valore Modello analitico** $(\boldsymbol{Hz})$	**Valore FEM** $(\boldsymbol{Hz})$	**Errore** (%)
$\boldsymbol{f_{n,1}}$	18.4767	18.4767	$\approx 10^{-5}$
$\boldsymbol{f_{n,2}}$	76.0730	76.0730	$\approx 10^{-6}$
$\boldsymbol{f_{n,3}}$	313.8056	313.8056	$\approx 10^{-7}$
$\boldsymbol{f_{n,4}}$	680.5537	680.5537	$\approx 10^{-8}$
$\boldsymbol{f_{n,5}}$	992.8918	992.8918	$\approx 10^{-8}$

Tabella 11 - Confronto frequenze naturali modello analitico/FEM (m=60g @ 14cm)

Frequenze modali	**Valore Modello analitico** $(\boldsymbol{Hz})$	**Valore FEM** $(\boldsymbol{Hz})$	**Errore** (%)
$\boldsymbol{f_{n,1}}$	12.5129	12.5129	$\approx 10^{-5}$
$\boldsymbol{f_{n,2}}$	119.7320	119.7320	$\approx 10^{-6}$
$\boldsymbol{f_{n,3}}$	282.4608	282.4608	$\approx 10^{-7}$
$\boldsymbol{f_{n,4}}$	674.2868	674.2868	$\approx 10^{-8}$
$\boldsymbol{f_{n,5}}$	1158.1552	1158.1552	$\approx 10^{-8}$

- Massa 3:

Tabella 12 - Confronto frequenze naturali modello analitico/FEM (m=80g @ 8cm)

Frequenze modali	**Valore Modello analitico** $(\boldsymbol{Hz})$	**Valore FEM** $(\boldsymbol{Hz})$	**Errore** (%)
$\boldsymbol{f_{n,1}}$	17.7946	17.7946	$\approx 10^{-5}$
$\boldsymbol{f_{n,2}}$	70.6454	70.6454	$\approx 10^{-6}$
$\boldsymbol{f_{n,3}}$	311.0738	311.0738	$\approx 10^{-7}$
$\boldsymbol{f_{n,4}}$	378.4375	378.4375	$\approx 10^{-8}$
$\boldsymbol{f_{n,5}}$	986.8116	986.8116	$\approx 10^{-8}$

Tabella 13 - Confronto frequenze naturali modello analitico/FEM (m=80g @ 14cm)

Frequenze modali	**Valore Modello analitico** $(\boldsymbol{Hz})$	**Valore FEM** $(\boldsymbol{Hz})$	**Errore** (%)
$\boldsymbol{f_{n,1}}$	11.3514	11.3514	$\approx 10^{-5}$
$\boldsymbol{f_{n,2}}$	118.6774	118.6774	$\approx 10^{-6}$
$\boldsymbol{f_{n,3}}$	277.9793	277.9793	$\approx 10^{-7}$
$\boldsymbol{f_{n,4}}$	672.4722	672.4722	$\approx 10^{-8}$
$\boldsymbol{f_{n,5}}$	1156.4291	1156.4291	$\approx 10^{-8}$

È possibile osservare nelle Tabella 8-13 come le frequenze naturali esaminate siano sovrapponibili con un errore trascurabile.

Alla luce quindi dei confronti con il modello a un grado di libertà e il modello agli elementi finiti, il modello sviluppato nel presente lavoro risulta quindi analiticamente e numericamente corretto e validato considerando lo slider fisso.

6 Allestimento sperimentale e calibrazione

In questo capitolo verrà esposto il setup sperimentale ed i procedimenti eseguiti. Inoltre, verrà trattata la calibrazione dei parametri dello smorzamento viscoso della trave e dell'attrito tra trave e slider.

6.1 Strumentazione e sistema fisico

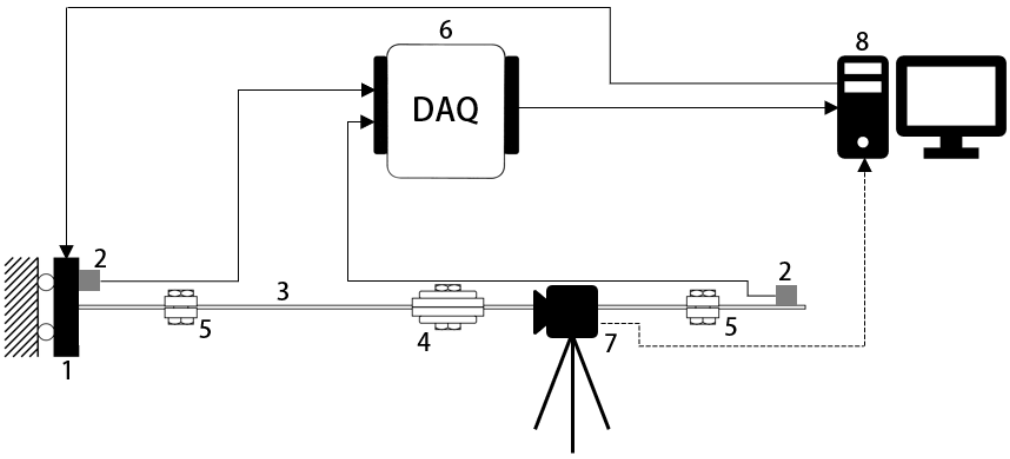

Figura 6.1 - Schema del setup sperimentale con componenti numerati

In Figura 6.1 è visibile il sistema assemblato per le misurazioni. In ordine si ha:

1. Shaker**:**

   È l'apparecchio utilizzato per fornire il segnale di vibrazione al sistema trave-slider.

2. Accelerometri:

   Piezoelettrici, monoassiali, marca Brüel & Kjær; frequenza di campionamento $2048Hz$.

   Sono due, uno sulla punta della trave e l'altro sulla base dello shaker. L'accelerometro sulla trave ha lo scopo di ottenere un tracciamento dell'ampiezza di oscillazione assoluta; infatti, essa è ricavabile integrando numericamente i dati forniti dall'accelerometro. L'accelerometro sullo shaker, invece, viene utilizzato per ottenere l'accelerazione relativa tra trave e shaker e quindi, tramite integrazione, l'oscillazione relativa del sistema trave-slider.

3. Trave**:**

   Trave in acciaio semplice fissata ad una morsa che a sua volta è stata fissata allo shaker tramite staffe in acciaio . Le caratteristiche sono riportate in Tabella 14.

Tabella 14 - Caratteristiche della trave sperimentale

Parametro	Simbolo	Valore	Unità
Lunghezza	L	204	mm
Larghezza	b	30	mm
Spessore	h	1	mm
Modulo di rigidezza trave	E	190	GPa
Densità trave	ρ	7850	$^{kg}/_{m^3}$

4. Slider**:**

   Per questo componente verrà dedicata una trattazione a sé stante nella sezione successiva;

5. Fermi per lo slider:

   Il loro scopo è di evitare che lo slider sfugga dalla trave o che raggiunga la base.

6. Scheda di acquisizione:

   Oros: OR38

7. Telecamera:

   GoPro Hero 9, obiettivo: $27mm$, framerate: $240fps$; nessuna stabilizzazione software, correzione ottica in post-produzione.

   La telecamera è stata utilizzata per tracciare il movimento longitudinale dello slider. A tal proposito è stato tracciato un segno sullo slider.

8. Computer:

   Per memorizzazione ed elaborazione dati.

La superficie su cui appoggia lo shaker deve chiaramente essere priva di vibrazioni di alcun tipo; oltre a ciò, l'ambiente di misurazione non necessita di altre caratteristiche.

6.1.1 Slider reale

Le caratteristiche dello slider ideale modellato sono:

- Centro di massa sul piano longitudinale della trave;
- Momento di inerzia nulla sul piano longitudinale in direzione perpendicolare all'asse longitudinale;
- Ingombro longitudinale nullo.

La prima caratteristica è facilmente implementabile tramite slider simmetrico rispetto al piano longitudinale della trave, le altre due sono chiaramente impossibili da realizzare. Si è comunque cercato di contenere il più possibile le relative dimensioni.

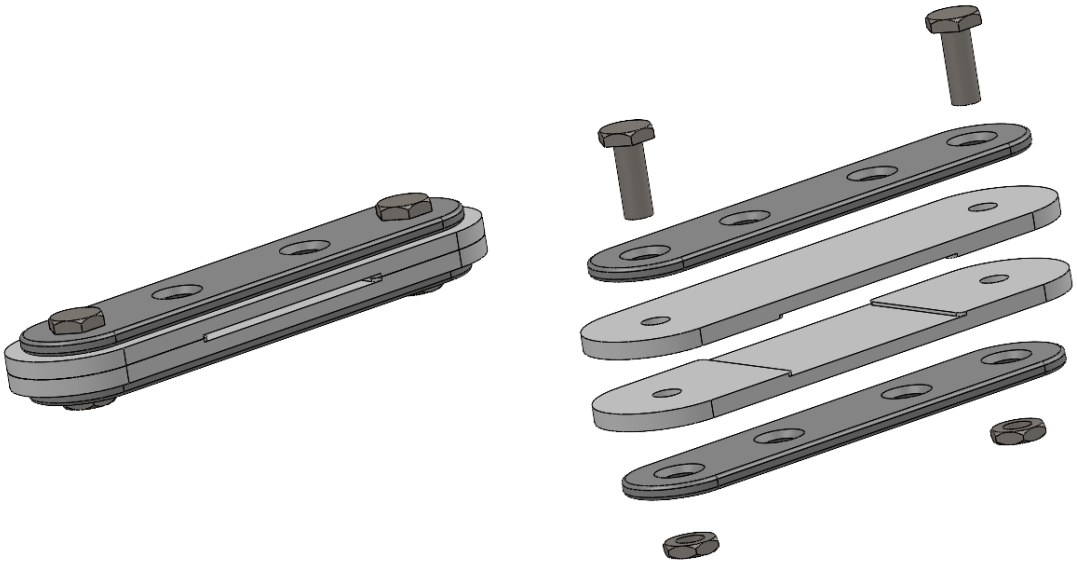

Figura 6.2 - Modello dello slider a 2 piastrine con esploso

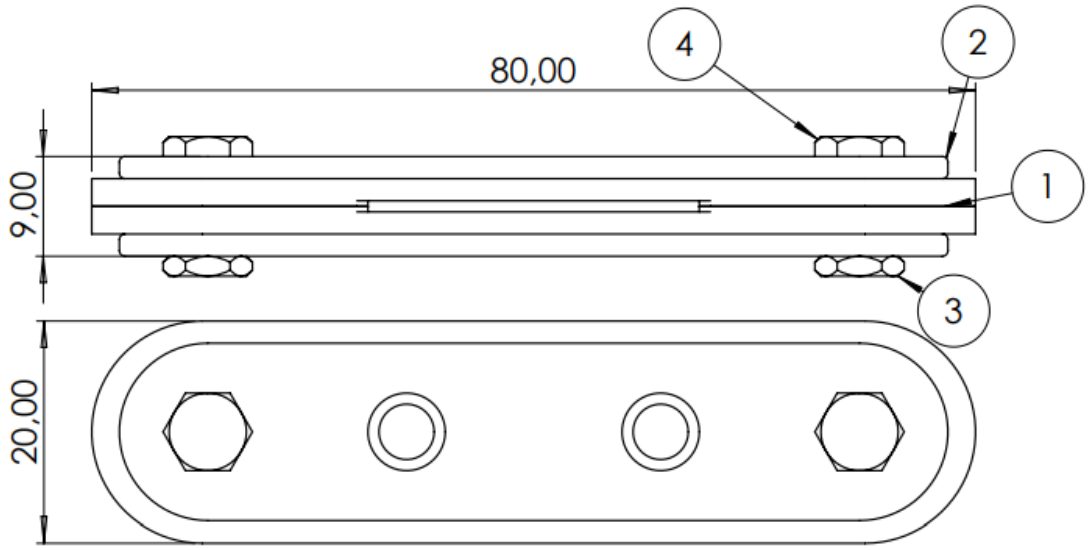

Figura 6.3 - Ingombro dello slider con bollatura.

Tabella 15 - Distinta materiali dello slider

Numero articolo	Parte	Descrizione	Quantità
1	Struttura slider	Materiale: PLA	2
2	Piastrina	Materiale: Acciaio	2
3	Dado M4	-	2
4	Vite M4	-	2

È proposto in Figura 6.2 e in Figura 6.3 lo slider progettato per l'applicazione con i suoi ingombri e distinta materiali in Tabella 15. Le piastrine (2) hanno il solo scopo di conferire peso allo slider, in modo modulare, sottraendone o aggiungendone a paia per evitare di sbilanciare il centro di massa dal piano di simmetria.
Al fine di confrontare le frequenze modali fornite dal modello con quelle del sistema reale, in via preliminare, è stata svolta la simulazione FEM dei modelli 3D tramite Solidworks, i cui risultati sono riportati in Tabella 16.

Tabella 16 - Risultati confronto Modello analitico/FEM 3D delle frequenze modali flessionali

Frequenze modali	Valore Modello analitico (Hz)	Valore FEM (Hz)	Errore (%)
$f_{n,1}$	14.777	15.826	6.6%
$f_{n,2}$	103.970	114.990	9.6%
$f_{n,3}$	296.426	322.560	8.1%
$f_{n,4}$	691.571	659.180	4.9%

È opportuno specificare come, nel sistema reale, siano presenti ulteriori frequenze modali torsionali e flessionali, raffigurate a titolo di esempio in Figura 6.4 e in Figura 6.5; infatti, è importante evidenziare come il modello implichi moto piano, cioè, trascuri ciò che succede sullo spessore della trave (e dello slider), si trascurano quindi i moti torsionali e quelli flessionali in direzione perpendicolare al piano longitudinale della trave. Questi possono comportare discrepanze tra i risultati sperimentali e quelli restituiti dal modello, soprattutto nel caso di forzante di frequenza simile a quelle modali in questione.

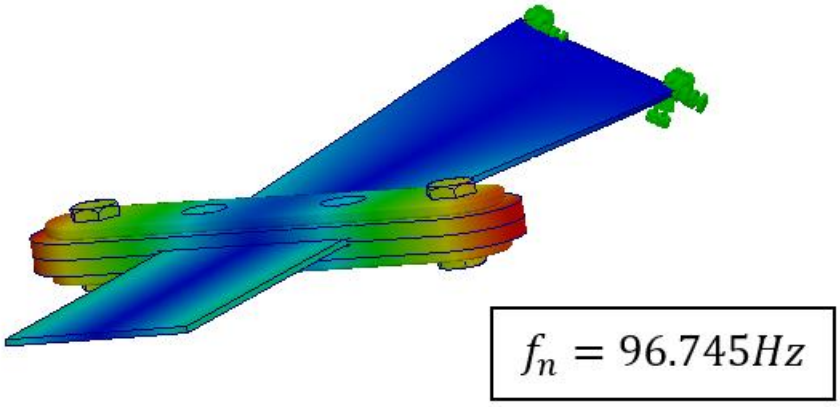

Figura 6.4 - Esempio di modo torsionale

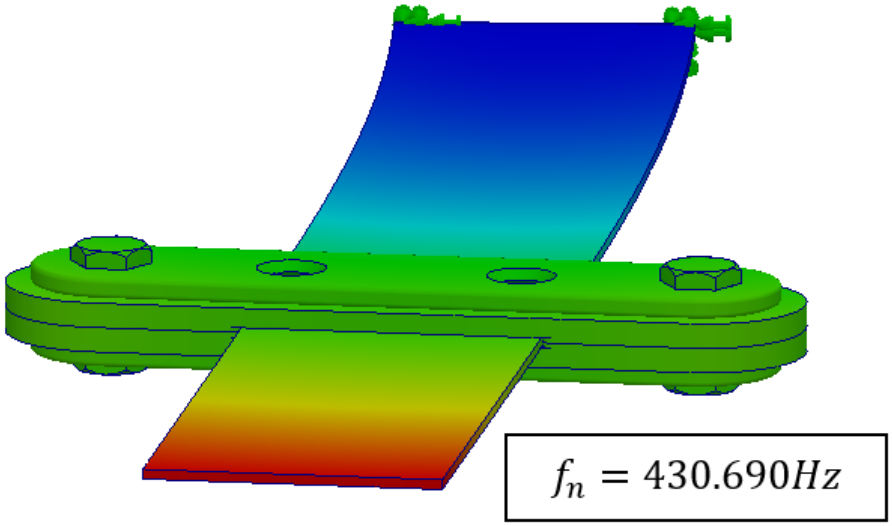

Figura 6.5 - Esempio di modo flessionale in direzione perpendicolare al piano longitudinale della trave

6.2 Calibrazione dello smorzamento viscoso

Per la calibrazione dello smorzamento viscoso è stata portata avanti una campagna di misurazioni volte a rilevare le frequenze naturali e i fattori di smorzamento percentuale per il sistema con lo slider bloccato in diverse posizioni.

Lo scopo è ricavare i parametri α e β della relazione (3.12); a partire da questa relazione si può ricavare:

$$\xi_s = \frac{\alpha}{2 \cdot \omega_s} + \frac{\beta}{2} \cdot \omega_s. \qquad (6.1)$$

I passaggi da seguire per la calibrazione dei suddetti parametri sono i seguenti:

1. Posizionamento e fissaggio dello slider nella posizione desiderata;
2. Sperimentazione del sistema con forzante di frequenza variabile e randomica;

3. Acquisizione dati dagli accelerometri;
4. Elaborazione dei risultati al fine di ricavare le prime due frequenze naturali e i corrispondenti fattori di smorzamento;
5. Risoluzione del seguente sistema per ogni i-esima posizione testata dello slider:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2 \cdot \omega_{s,1}} & \frac{\omega_{s,1}}{2} \\ \frac{1}{2 \cdot \omega_{s,2}} & \frac{\omega_{s,2}}{2} \end{pmatrix}_i \cdot \begin{pmatrix} \alpha_s \\ \beta_s \end{pmatrix}_i = \begin{pmatrix} \xi_{s,1} \\ \xi_{s,2} \end{pmatrix}_i .$$

Ricavando così $(\alpha_s; \beta_s)_i$.

6. Interpolazione dei risultati ricavati al punto 4 rispetto alla posizione.

Le misurazioni sperimentali sono riportate in Tabella 17.

Tabella 17 - Misurazioni sperimentali con slider fisso di frequenze naturali e fattori di smorzamento

Posizione $(\boldsymbol{mm})$	**Frequenza naturale 1** $(\boldsymbol{Hz})$	**Fattore di smorzamento 1** (%)	**Frequenza naturale 2** $(\boldsymbol{Hz})$	**Fattore di smorzamento 2** (%)
175	9.4894	1.5479	100.9524	0.6893
160	10.1599	1.6676	97.6880	0.9023
145	11.0252	1.5665	88.1456	1.3180
130	11.8532	1.6271	79.0720	1.3398
115	12.7420	1.7523	70.7506	1.6392
100	13.5840	2.2282	66.7935	1.5710
85	14.4999	2.0373	65.9429	1.5801

In questo modo si ottengono due funzioni che restituiscono i parametri α e β per ogni posizione Y dello slider. Le curve risultanti sono riportate in Figura 6.6.

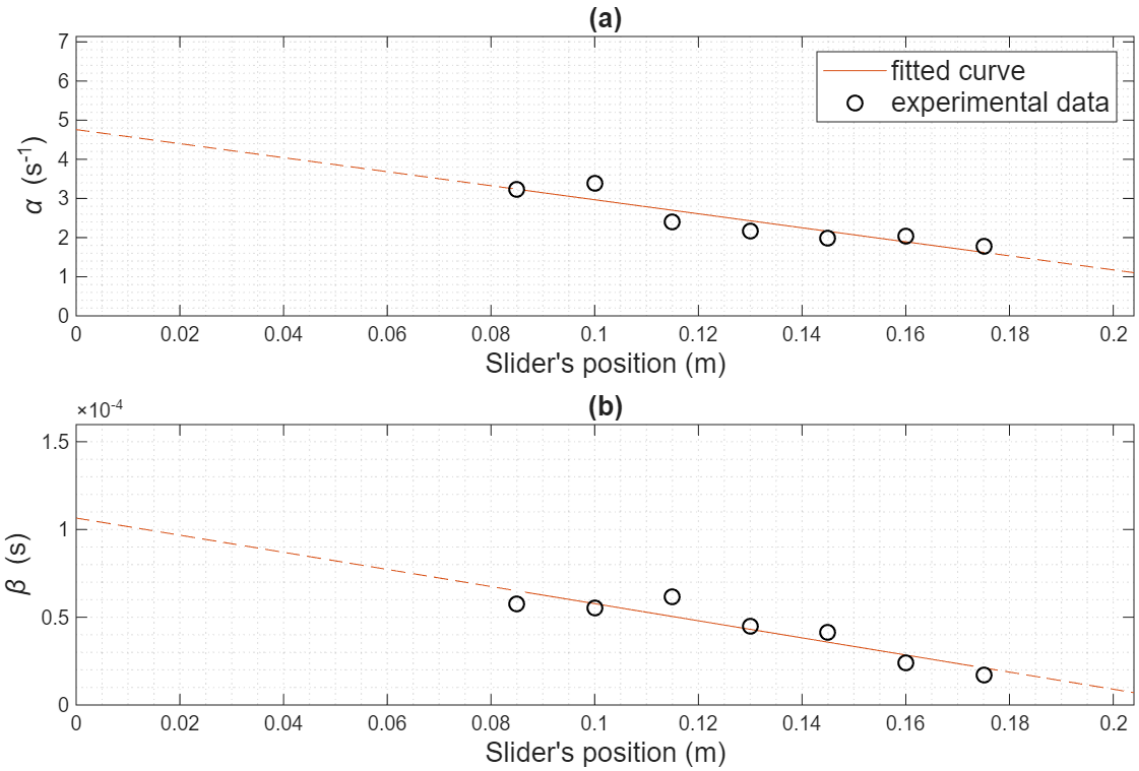

Figura 6.6 – Funzioni di interpolazione dei parametri di smorzamento α(a) e β(b).

6.3 Calibrazione forza di attrito

La calibrazione della forza di attrito consiste nel determinare il coefficiente di attrito μ_0 tra lo slider e la trave. La stima è stata ricavata tramite l'elaborazione di dati sperimentali ottenuti tramite prove quasi-statiche. I passaggi della procedura sono i seguenti:

1. Posizionamento dello slider sulla trave in una posizione arbitraria;
2. Inclinazione dello slider fino ad ottenere moto;
3. Elaborazione dei dati ricavando il coefficiente di attrito.

L'idea è che, data la forza gravitazionale nota, conoscendo l'inclinazione della trave per cui lo slider inizia a muoversi, è possibile ottenere una stima del coefficiente di attrito statico μ_s. Uno schema del sistema misurato è riportato in Figura 6.7 dove i valori asteriscati indicano quelli di incipiente moto dello slider.

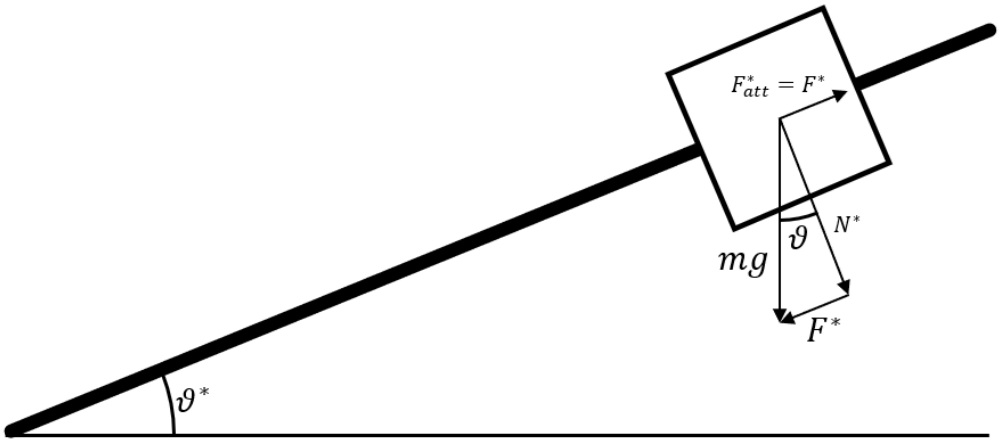

Figura 6.7 – Schema dell'allestimento per le misurazioni per la calibrazione del coefficiente di attrito

Dalle note relazioni trigonometriche si ha:

$$N^* = mgcos\vartheta^* \tag{6.2}$$

$$F^*_{att} = F^* = mgsin\vartheta^* \tag{6.3}$$

Dal modello di attrito di Coulomb si ottiene:

$$\mu_s = \frac{F^*_{att}}{N} = tan\vartheta^* \tag{6.4}$$

La misura è stata ripetuta tre volte ottenendo i risultati riportati in Tabella 18.

Tabella 18 - Misurazioni angolo di incipiente moto per calibrazione attrito

Misura	**Inclinazione** (°)	**Coefficiente** $\boldsymbol{\mu_s}(-)$
1	18	0.32
2	18	0.32
3	20	0.36

È stato scelto un valore medio tra le misurazioni. Si ha:

$$\overline{\mu_s} = 0.34$$

Tenendo in considerazione che, nella realtà, l'attrito cambia e diminuisce nel momento in cui lo slider si muove, è stato scelto un valore di μ_0 leggermente inferiore.

$$\mu_0 = 0.8\mu_s = 0.27$$

7 Risultati

In questo capitolo si presentano e discutono i risultati ottenuti dalle prove sperimentali eseguite sul sistema trave-slider modellato.

Il capitolo è suddiviso in due parti: nella prima parte verrà fatto un confronto tra le frequenze naturali a slider fisso tra le rilevazioni sperimentali e i dati restituiti dal modello, nella seconda parte verrà confrontato il comportamento dello slider libero di traslare.

In Tabella 19 sono riportati i parametri che caratterizzano l'allestimento sperimentale indagato.

Tabella 19 - Caratteristiche sistema prove sperimentali

Parametro	Simbolo	Valore	Unità
Lunghezza	L	204	mm
Larghezza	b	30	mm
Spessore	h	1	mm
Modulo di rigidezza trave	E	190	GPa
Densità trave	ρ	7850	$^{kg}/_{m^3}$
Massa slider mobile	m_f	39	g
Massa slider fisso	m_c	51	g

Il motivo per cui la massa dello slider, nel caso in cui esso sia fisso, è maggiore di quella dello slider stesso lasciato libero di traslare è che, per bloccare lo slider, i fermi sono stati posti adiacenti ad esso, per cui è stata presa in considerazione anche la loro massa.

7.1 Frequenze naturali del sistema reale

Il procedimento per ricavare le frequenze naturali è del tutto simile a quello adottato nel caso della calibrazione dello smorzamento viscoso, i passaggi sono i seguenti:

1. Posizionamento e fissaggio slider nella posizione desiderata;
2. Sperimentazione del sistema con forzante di frequenza variabile e randomica;
3. Acquisizione dati dagli accelerometri;
4. Elaborazione dei risultati al fine di ricavare le frequenze naturali;

Sono state ripetute sette prove, riepilogate in Tabella 20.

Tabella 20 – Posizioni del piano di simmetria slider fisso per prove sperimentali

Prova	Posizione (mm)
1	85
2	100
3	115
4	130
5	145
6	160
7	175

La posizione dello slider riportata in Tabella 20 è quella corrispondente al piano di simmetria dello slider. Uno schema dell'allestimento si può osservare in Figura 7.1.

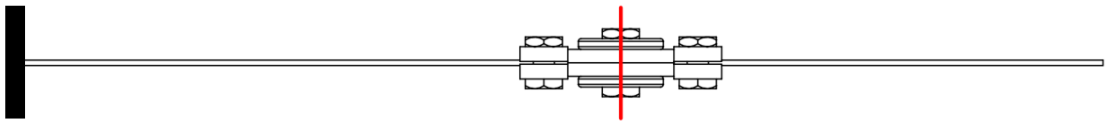

Figura 7.1 – Schema dell'allestimento sperimentale trave-slider. Sezione rossa di massa concentrata

In generale si osserva in Figura 7.2 come il modello tenda a sovrastimare le frequenze naturali. Nel caso del primo modo (Figura 7.2a) l'errore tende a diminuire all'aumentare della distanza di posizionamento dello slider e i risultati del modello ricalcano il trend sperimentale di diminuzione della frequenza naturale; infatti, aumentando la distanza dello slider dall'incastro, la rigidezza del sistema tende a diminuire, diminuendo così la sua frequenza naturale. Vicino all'incastro si ha un errore del $\cong 16.8\%$ fino ad arrivare a

un errore del $\cong 3.8\%$ all'estremo libero. Per quanto riguarda il secondo modo (Figura 7.2b), anche in questo caso il modello riesce a ricalcare il trend con le frequenze naturali che in questo caso aumentano all'aumentare della posizione dello slider lungo la trave. L'errore presenta un massimo di $\cong 27.0\%$ per la posizione dello slider $Y = 145mm$ con l'errore che diminuisce rapidamente nei punti successivi. Si osserva, inoltre, in Figura 7.2b che, nel caso delle frequenze naturali analitiche, si assiste a un'inversione di trend in posizione $Y = 160mm$; questo è giustificabile, osservando la Figura 7.3c e in Tabella 21, considerando che, per quella configurazione, lo slider si trova a cavallo del nodo modale. Infatti, posto che la massa concentrata conferisce inerzia al sistema, diminuendone le frequenze naturali di conseguenza, nel caso in cui la massa si trovi su un nodo, questa, non spostandosi, non contribuisce all'inerzia del sistema e, di fatto, è come se non fosse presente. Per cui, in generale, più la massa concentrata si trova in un intorno del nodo, più alta sarà la frequenza naturale.

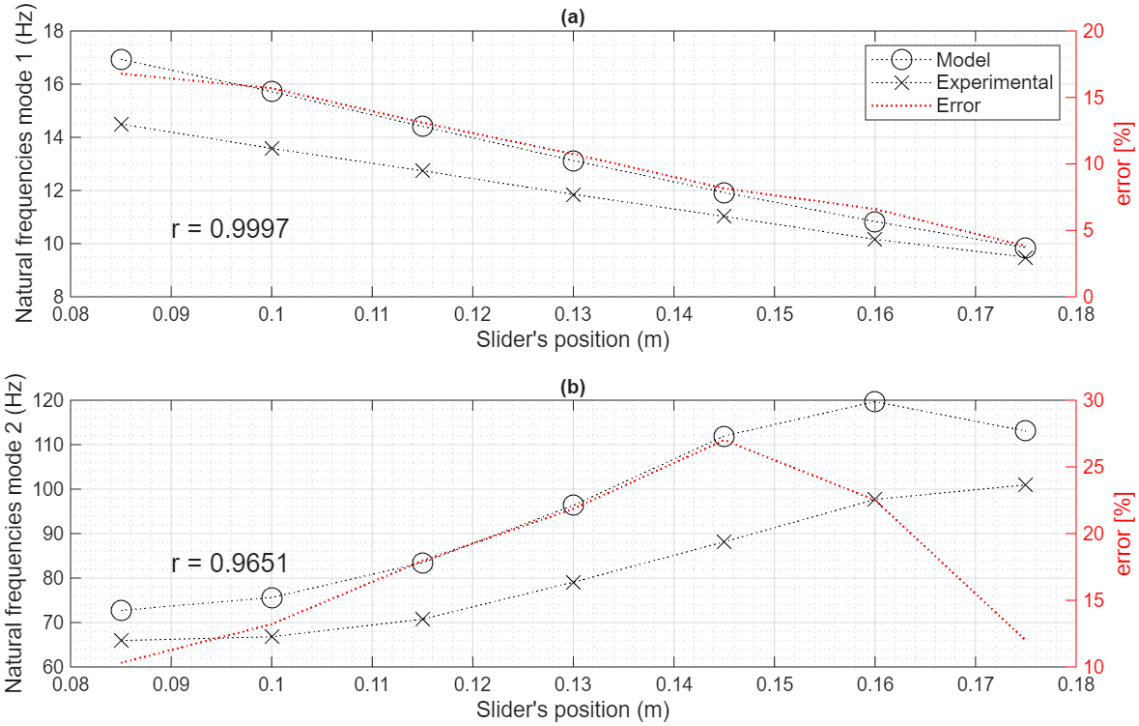

Figura 7.2 - Risultati confronto frequenze naturali sperimentali per il primo modo (a) e il secondo modo (b); r: indice di correlazione tra dati sperimentali e analitici, posizione slider corrispondente al piano di simmetria

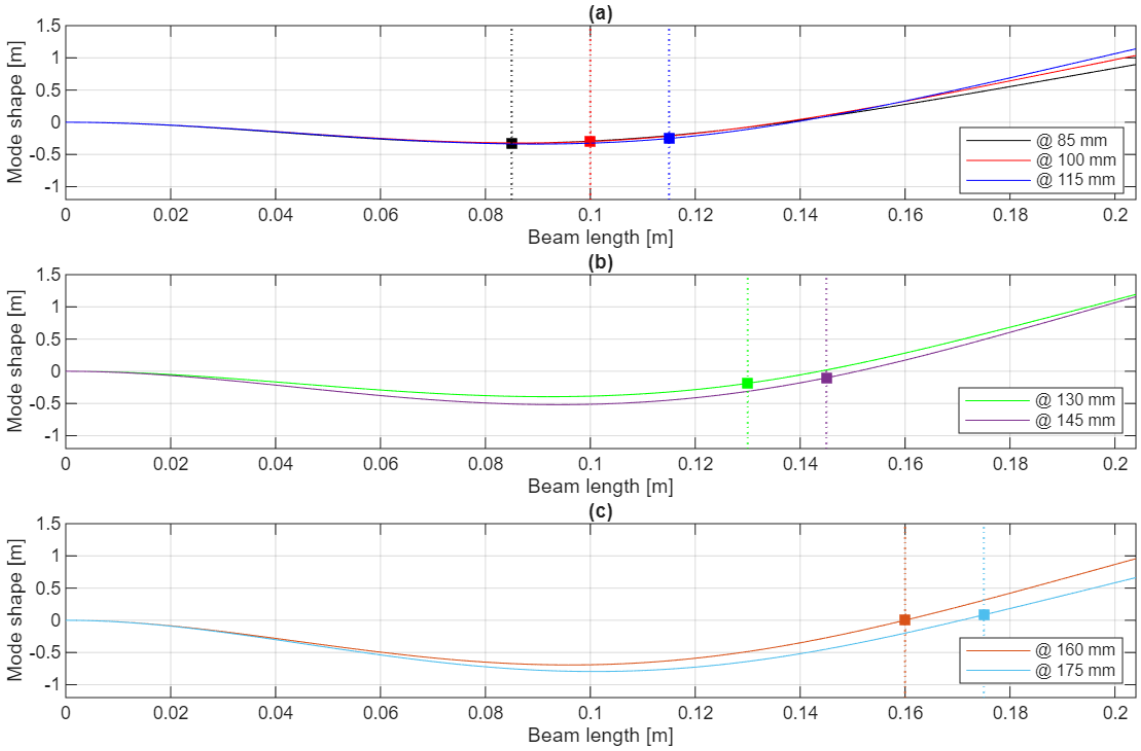

Figura 7.3 – Seconda forma modale (modello analitico) al variare della posizione dello slider, posizione slider corrispondente al piano di simmetria

Tabella 21 - Nodi del secondo modo (modello analitico al variare della posizione dello slider, posizione slider corrispondente al piano di simmetria

Posizione slider (mm)	Posizione nodo (mm)
85	137
100	136
115	139
130	144
145	151
160	160
175	171

Tuttavia, questo comportamento non ha una corrispondenza coi dati sperimentali rilevati, i quali non presentano un'inversione di trend in tale zona del grafico (Figura 7.2b) e a ciò è imputabile anche la diminuzione dell'errore per le posizioni $Y = 160mm$ e $Y = 175mm$. Risulta quindi una discrepanza di forma tra i dati analitici e sperimentali. L'ipotesi fatta a inizio sezione era quella di considerare la massa concentrata nel piano di simmetria dello slider (Figura 7.1), ma, in generale, non è necessariamente la scelta

migliore. Al fine di correlare adeguatamente i dati sperimentali con quelli analitici, è stato cercata la posizione di massa concentrata più adeguata, rispetto al piano di simmetria, massimizzando l'indice di correlazione di Pearson. In Figura 7.4 sono riportate le sezioni risultanti di massa concentrata.

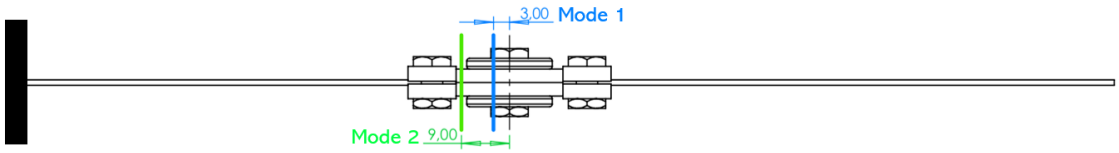

Figura 7.4 – Schema dell'allestimento sperimentale trave-slider con sezioni di massa concentrata.

Si può notare in Figura 7.5 come gli indici di correlazione siano aumentati, coerentemente con quanto descritto, soprattutto per il secondo modo, per il quale si verifica anche una notevole riduzione dell'errore massimo (19.6% per la posizione dello slider $Y = 151mm$).

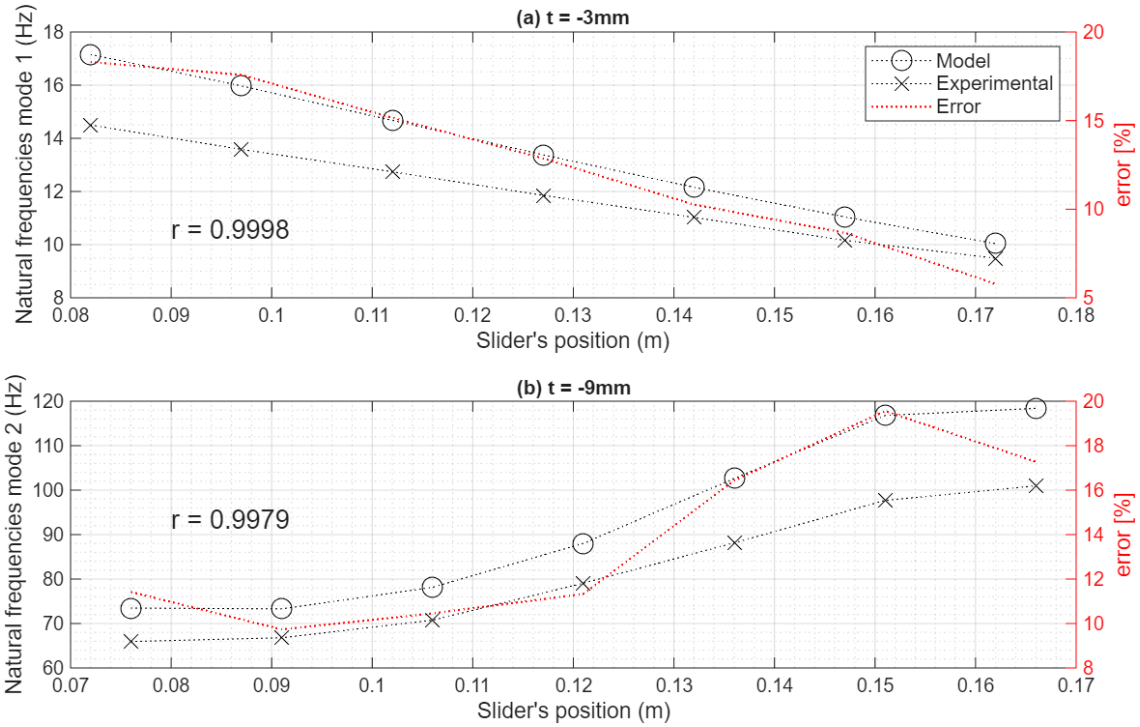

Figura 7.5 - Risultati confronto frequenze naturali sperimentali per il primo modo (a) e il secondo modo (b); r: indice di correlazione tra dati sperimentali e analitici, posizione slider calibrata (t)

Per quanto riguarda l'errore, d'altra parte, risulta che esso ha una correlazione forte con la pendenza locale della forma modale, cioè con la sua derivata. Questo comportamento

deriva dall'ipotesi di momento di inerzia dello slider trascurabile; in realtà, come si può dedurre dalla Figura 7.6, il momento di inerzia dello slider può essere trascurato soltanto quando l'inclinazione locale è piccola (per esempio quando lo slider si trova in prossimità di un antinodo), in quanto, in tale posizione, lo slider non si troverebbe a ruotare ma solamente a traslare verticalmente, rendendo ininfluente il suo momento nell'inerzia totale del sistema. D'altro canto, quando lo slider si trova in zone in cui la pendenza è pronunciata, l'importanza del suo momento di inerzia sale in maniera proporzionale alla pendenza stessa. L'evidenza che il modello restituisce sempre frequenze naturali più alte rispetto ai rilievi sperimentali, come già anticipato e osservabile anche nel confronto in Figura 7.5, è una riprova di ciò,

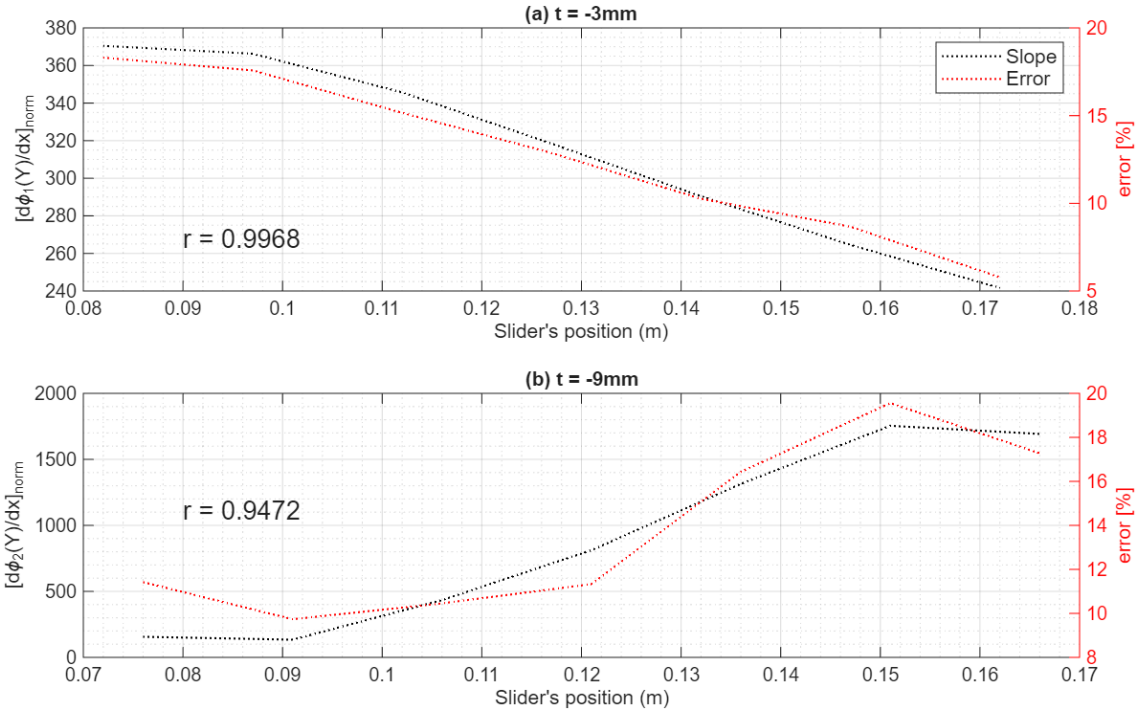

Figura 7.6 – Correlazione tra errore e derivata delle forme modali per il primo modo (a) e il secondo modo (b); r: indice di correlazione, posizione slider calibrata (t)

Un fattore che contribuisce al fatto che le frequenze naturali restituite dal modello siano sempre maggiori di quelle sperimentali potrebbe essere dato anche dalla presenza di giochi meccanici e la presenza di attrito, dati dall'accoppiamento non ideale, i quali possono essere fonte di ulteriore smorzamento, che tende a diminuire le frequenze naturali del sistema.

7.2 Comportamento a regime dello slider nel sistema reale

Per il confronto col sistema reale sono state effettuate due misurazioni con forzanti differenti. Lo scopo è verificare il comportamento dello slider a regime restituito dal modello analitico, cioè la posizione in cui lo slider smette di traslare e si stabilizza.
Le proprietà delle forzanti sono riportate in Tabella 22.

Tabella 22 - Proprietà forzanti prove sperimentali

Prova	Tipo	Ampiezza (m/s)	Frequenza (Hz)	Posizione slider iniziale (mm)
1	*Sinusoidale*	0.095	10	130
2	*Sinusoidale*	0.120	80	17

7.2.1 Prova 1

La prima prova si è concentrata sul comportamento dello slider per una frequenza di sollecitazione vicina al primo modo. Il confronto è riportato in Figura 7.7 in cui è visibile come il modello riesca a prevedere lo spostamento dello slider verso la punta della trave. Vi è una sostanziale differenza nei tempi richiesti dovuta al modello semplificativo di attrito coulombiano implementato nel modello analitico: esso non tiene in considerazione l'insorgenza di impuntamenti ma, soprattutto, non tiene in considerazione la variabilità dell'attrito radente rispetto alla velocità dello slider.
La forza di attrito gioca un ruolo importante rispetto al comportamento adattivo del sistema: ciò che determina la posizione a regime dello slider è il rapporto tra la forza di attrito e le forze che la trave imprime allo slider tramite la sua deformazione. In questo caso, poiché il primo modo è notoriamente quello che implica oscillazioni massime del sistema rispetto ai modi successivi, la forza di attrito non riesce mai a bilanciare le forze centrifughe a cui è sottoposto lo slider durante l'oscillazione, portando lo slider ad andare in punta.
Il movimento dello slider, in questo caso, riesce a adattare il sistema con successo, portando la frequenza del primo modo ad avvicinarsi alla frequenza della forzante (Figura 7.8) e amplificando l'oscillazione della trave, come si può osservare in Figura 7.9. Infatti, lo spostamento dello slider verso la punta ha l'effetto di ridurre la rigidezza del sistema e di conseguenza la sua frequenza naturale.

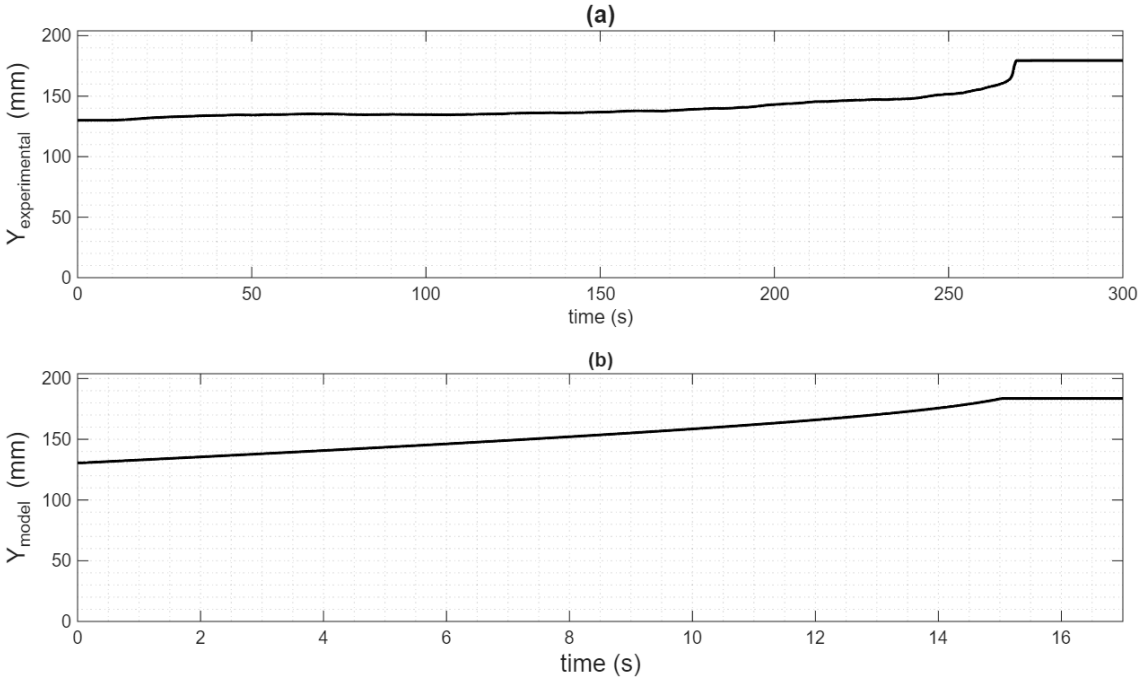

Figura 7.7 - Risultati confronto dello spostamento dello slider (prova 1)

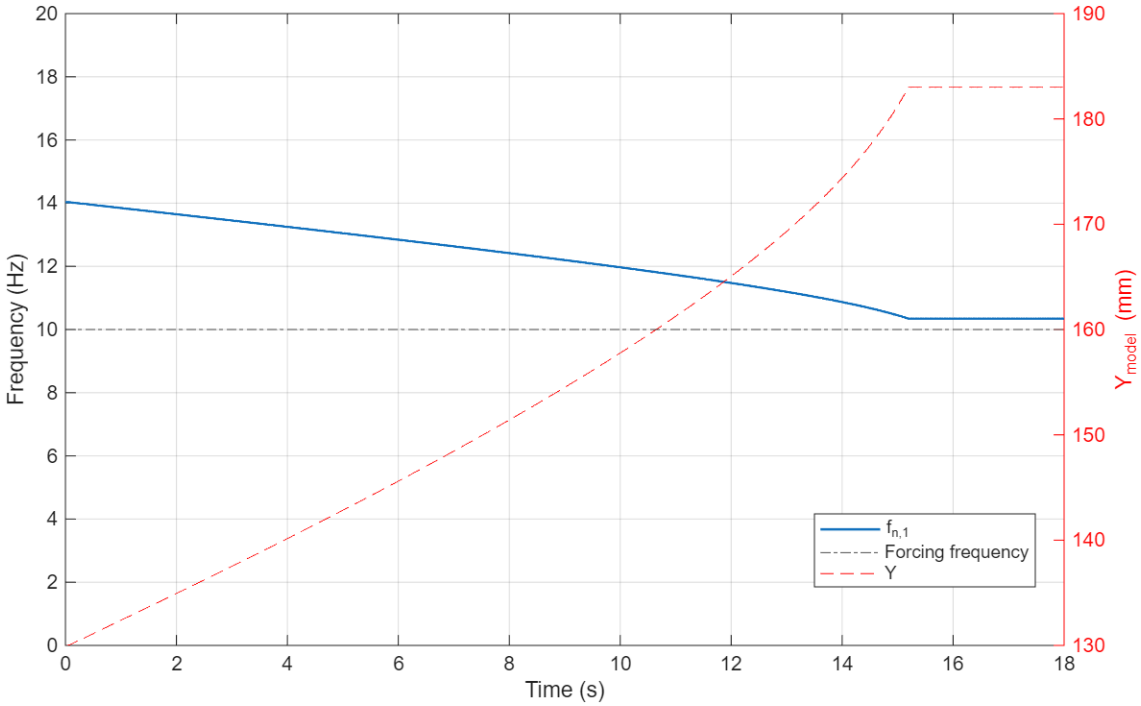

Figura 7.8 - Andamento delle frequenze naturali in relazione allo spostamento dello slider (modello analitico; prova 1)

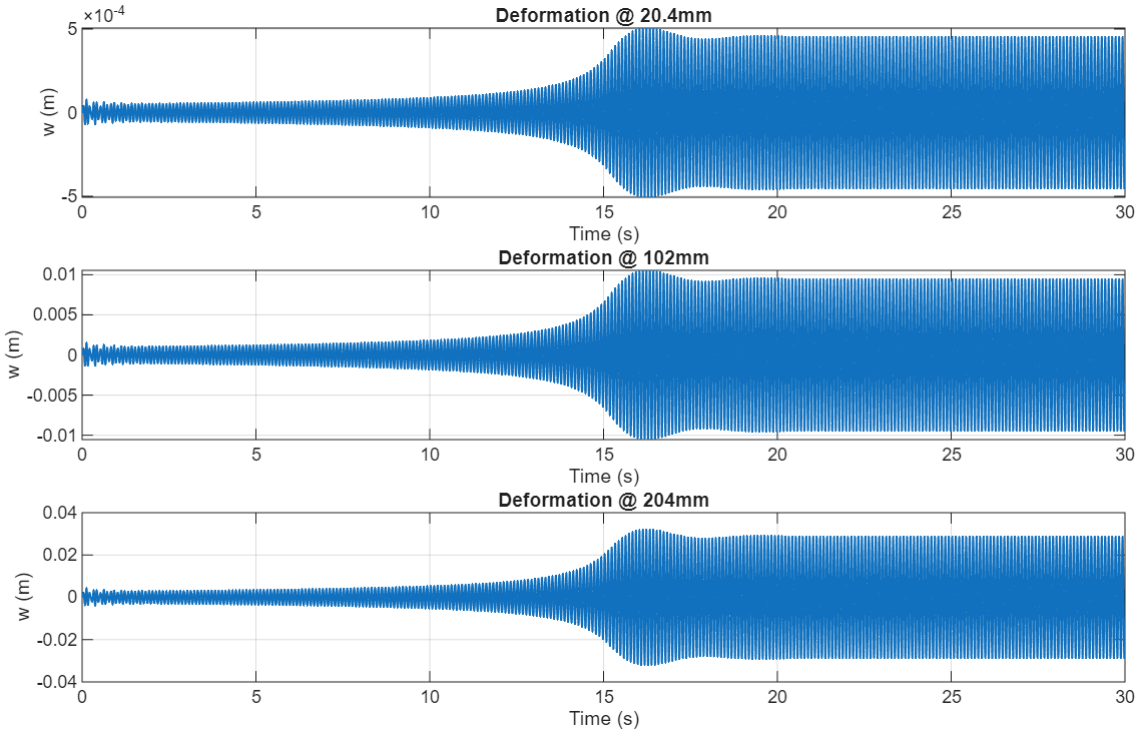

Figura 7.9 – Deformazione della trave (modello analitico; prova 1)

7.2.2 Prova 2

La seconda prova vede l'utilizzo di una forzante di frequenza vicina a quella del secondo modo. Anche in questo caso il modello riesce a prevedere il comportamento a regime dello slider che, questa volta, si arresta in una posizione intermedia della trave, come osservabile in Figura 7.10. Vi è una discrepanza tra la posizione finale prevista dal modello e quella reale di $15mm$ dovuta, anche questa volta, all'implementazione del modello semplificato di attrito coulombiano, come già descritto per la prova 1, e anche all'errore rilevato tra le frequenze naturali, descritto nella prima sezione di questo capitolo: un errore nelle frequenze naturali determina, infatti, anche una differenza nelle forme modali, modificando così la posizione del punto di equilibrio.

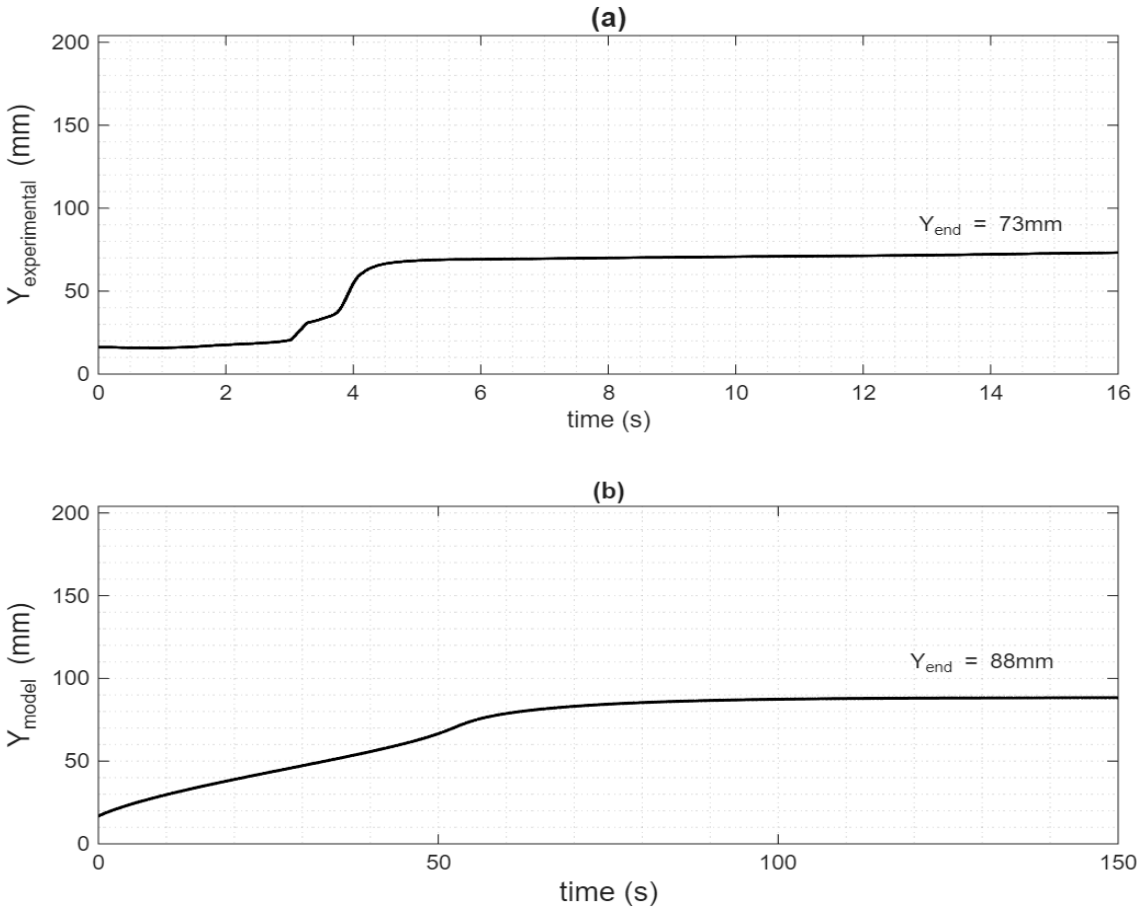

Figura 7.10 - Risultati confronto dello spostamento dello slider (prova 2)

È interessante osservare, facendo riferimento alla Figura 7.11, come lo slider tenda a posizionarsi nella posizione antinodale del secondo modo, quello, in partenza, di frequenza naturale più vicina alla frequenza della forzante. Ciò avviene perché la forzante determina oscillazioni rilevanti per il modo di frequenza più vicina ad esso e, in concomitanza a ciò, poiché l'antinodo, essendo un massimo della funzione di forma, è un punto di simmetria della trave rispetto alle forze centrifughe a cui è sottoposto lo slider. La forma della trave stessa tende a spingere lo slider verso la punta della trave finché non viene intrappolato nell'intorno dell'antinodo stesso, che rappresenta quindi un punto di equilibrio stabile (Figura 7.12).

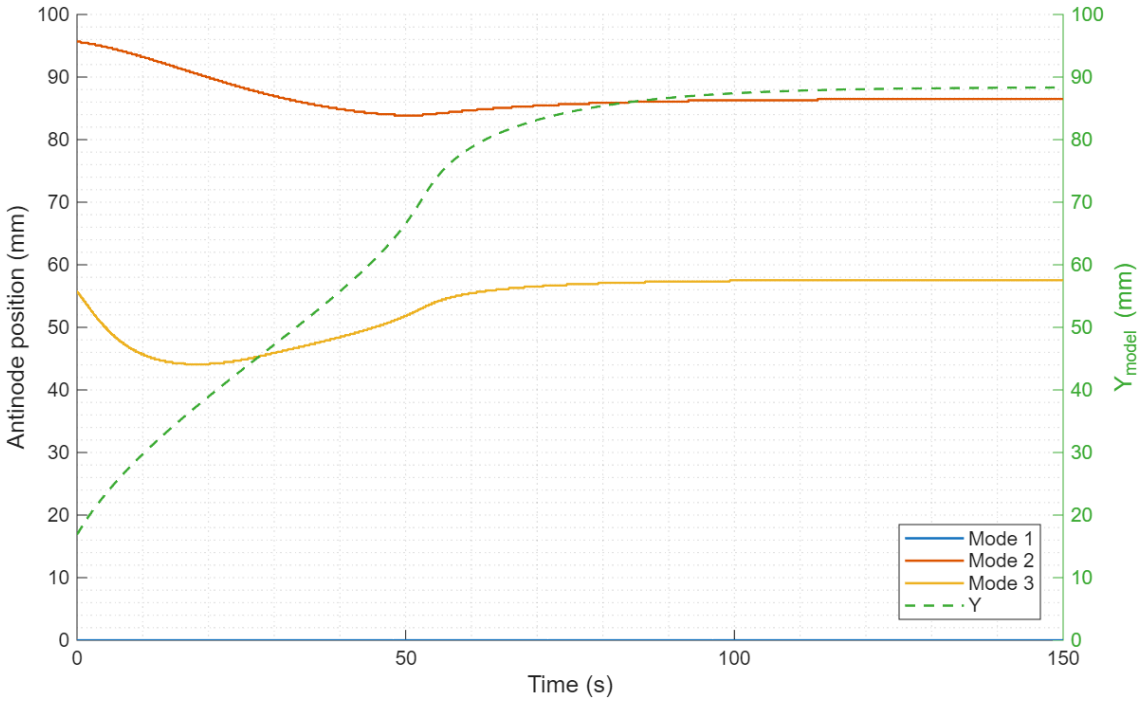

Figura 7.11 – Confronto posizione dello slider e posizione antinodi (modello analitico; prova 2)

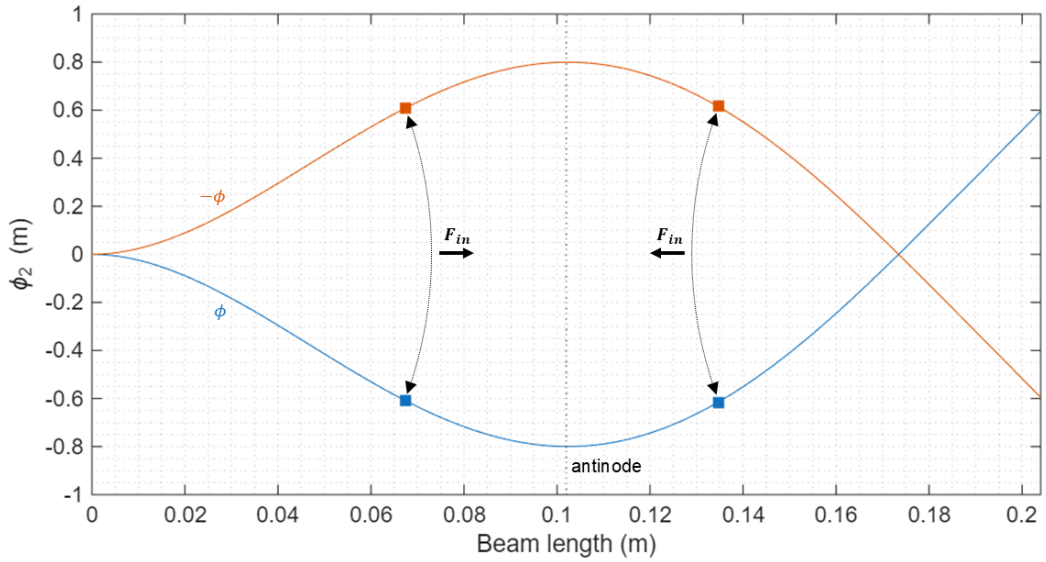

Figura 7.12 - Schema delle forze di inerzia centrifughe per il secondo modo nell'intorno dell'antinodo.

Questo ha un effetto benefico di adattazione del sistema alla frequenza di sollecitazione, portando la frequenza naturale del secondo modo a sovrapporsi a quella della forzante (Figura 7.13), risultando in una amplificazione delle oscillazioni del sistema trave-slider osservabile in Figura 7.14. Il posizionamento dello slider sull'antinodo è rilevato anche sperimentalmente e visibile in Figura 7.15.

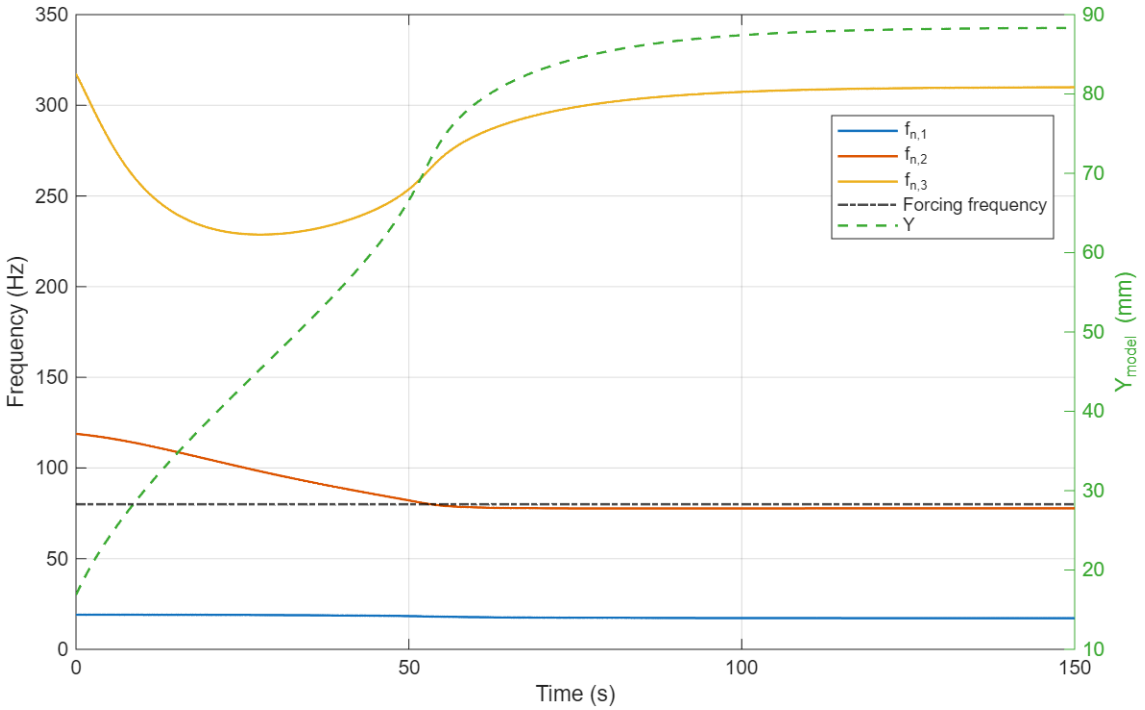

Figura 7.13 - Andamento delle frequenze naturali in relazione allo spostamento dello slider (modello analitico; prova 2)

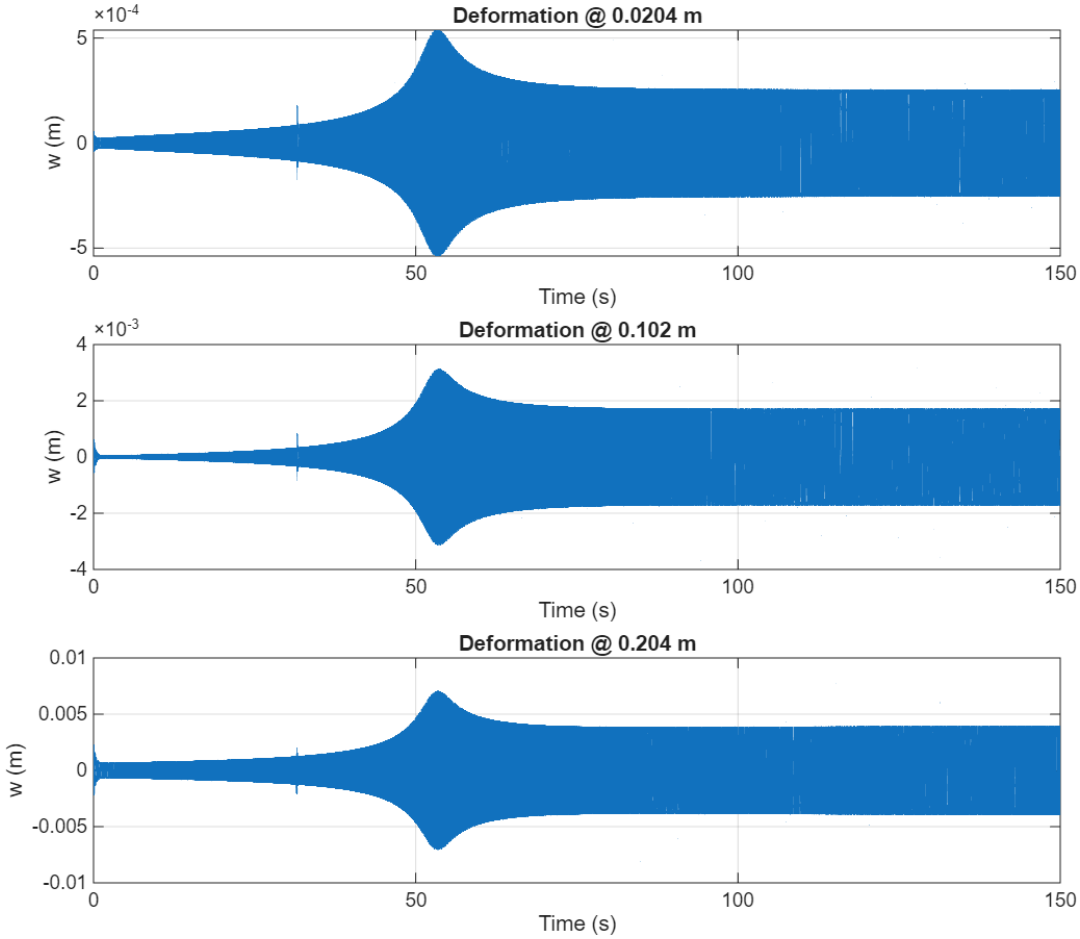

Figura 7.14 – Deformazione della trave (modello analitico; prova 2)

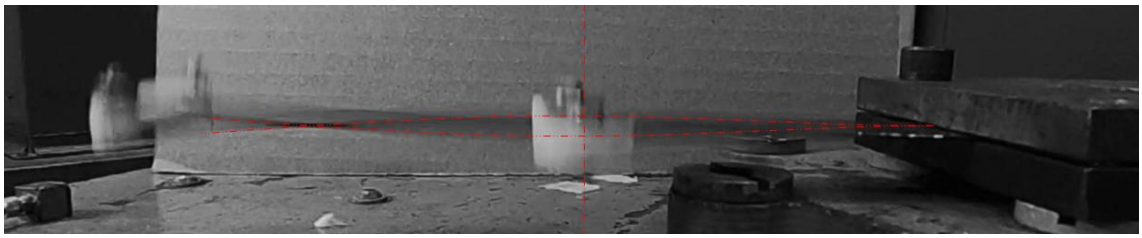

Figura 7.15 - Fotografia della seconda forma modale (prova 2)

Anche in questo caso l'attrito gioca un ruolo importante nella capacità adattiva del sistema, in quanto, nel caso lo slider arrivi sull'antinodo con una velocità tale che riesca a sfuggire dal punto di equilibrio, il comportamento adattivo potrebbe non verificarsi.

8 Conclusioni

Lo scopo di questo lavoro era lo sviluppo di un modello per la previsione del comportamento dinamico di un sistema composto da una trave con una massa mobile.
Il modello elaborato è in grado di descrivere in modo soddisfacente il comportamento osservato sperimentalmente, sia per quanto riguarda la previsione delle frequenze naturali del sistema, sia per il comportamento dello slider a regime. I risultati confermano le capacità auto-adattive del sistema alle diverse frequenze di sollecitazione vibrazionale, mettendo in evidenza il suo potenziale nell'ampliare la banda utile di frequenze, un aspetto critico per i sistemi di energy harvesting.
Tuttavia, alcune assunzioni semplificative, come l'ingombro puntiforme dello slider e l'adozione di un modello di attrito puramente coulombiano, risultano limitative per quanto riguarda le prestazioni predittive del modello. Queste ipotesi portano, in particolare, a una sovrastima delle reali frequenze naturali del sistema e introducono scostamenti rispetto alle rilevazioni sperimentali. Le correlazioni sull'errore ricavate rappresentano comunque un importante e promettente punto di partenza per una futura calibrazione ed ottimizzazione del modello. Inoltre, l'implementazione di slider a basso coefficiente di attrito, ad esempio mediante l'impiego di cuscinetti, potrà migliorare l'accordo tra previsioni del modello e risultati sperimentali, riducendo fenomeni di impuntamento e smorzamento e rendendo il sistema più adatto ad applicazioni pratiche di energy harvesting.
Il lavoro contribuisce alla comprensione del comportamento dei sistemi con massa mobile e l'utilizzo del modello sviluppato in questa trattazione, opportunamente calibrato, potrà snellire le fasi successive di studio e progettazione di questi sistemi, anche in ottica di miniaturizzazione degli stessi, ponendo le basi per futuri sviluppi nel campo dell'energy harvesting. In prospettiva, il lavoro potrà essere esteso mediante l'adozione di modelli più accurati per l'attrito, l'estensione a sistemi tridimensionali e l'integrazione con elementi piezoelettrici reali per valutare l'efficienza energetica complessiva del sistema.

9 Bibliografia

[1] T. Sanislav, G. Mois, S. Zeadally e S. Folea, «Energy Harvesting Techniques for Internet of Things (IoT),» IEEE Access, 9, 9370135, 2021.

[2] Y. Sun, J. Chen, X. Li, Y. Lu, S. Zhang e Z. Cheng, «Flexible piezoelectric energy harvester/sensor with high voltage output over wide temperature range,» Nano Energy, 61, 337-345, 2019.

[3] L.-C. Zhao, H.-X. Zou, K.-X. Wei, S.-X. Zhou, G. Meng e W.-M. Zhang, «Mechanical Intelligent Energy Harvesting: From Methodology to Applications,» Advanced Energy Materials, 13(29), 2023.

[4] H. Liu, J. Zhong, C. Lee, S.-W. Lee e L. Lin, «A comprehensive review on piezoelectric energy harvesting technology: Materials, mechanisms, and applications,» 2018, Applied Physics Reviews, 5(4).

[5] F. Akhtar e M. Rehmani, «Energy replenishment using renewable and traditional energy resources for sustainable wireless sensor networks: A review,» Renewable & Sustainable Energy Reviews, 45, 769-784, 2015.

[6] S. Park, R. Tian, J. Coelho, V. Nicolosi e J. Coleman, «Quantifying the Trade-Off between Absolute Capacity and Rate Performance in Battery Electrodes,» Advanced Energy Materials, 9(33), 2019.

[7] C. Wei e X. Jing, «A comprehensive review on vibration energy harvesting: Modelling and realization,» Renewable & Sustainable Energy Reviews, 74, 1-18, 2017.

[8] D. Hao, L. Qi, A. Tairab, A. Ahmed, A. Azam, D. Luo, Y. Pan, Z. Zhang e J. Yan, «Solar energy harvesting technologies for PV self-powered applications: A comprehensive review.,» Renewable Energy, 188, 678-697, 2022.

[9] R. Kishore e S. Priya, «A Review on Low-Grade Thermal Energy Harvesting: Materials, Methods and Devices,» Materials, 11(8), 1433, 2018.

[10] L. Chen, Y. Ma, C. Hou, X. Su e H. Li, «Modeling and analysis of dual modules cantilever-based electrostatic energy harvester with stoppers,» Applied Mathematical Modelling, 116, 350-371, 2023.

[11] M. Moscufo, «Triboelectric harvester for sensor system in smart tires,» Politecnico di Torino, 2022.

[12] I. Izadgoshasb, «Piezoelectric Energy Harvesting towards Self-Powered Internet of Things (IoT) Sensors in Smart Cities,» Sensors 2021, 21(24), 8332, 2021.

[13] F. Cossa, S. Idehara, M. Rabelo e M. de Oliveira, «Micro-Energy Harvesting From Automotive Dynamics,» Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, 145(5), 054501, 2023.

[14] M. Han, H. Wang, Y. Yang, C. Liang, W. Bai, Z. Yan, H. Li, Y. Xue, X. Wang, B. Akar, H. Zhao, H. Luan, J. Lim, I. Kandela, G. Ameer, Y. Zhang, Y. Huang e J. Rogers, «Three-dimensional piezoelectric polymer microsystems for vibrational energy harvesting, robotic interfaces and biomedical implants,» Nature Electronics, 2(1), 26-35, 2019.

[15] S. Panda, S. Hajra, K. Mistewicz, P. In-na, M. Sahu, P. Rajaitha e H. Kim, «Piezoelectric energy harvesting systems for biomedical applications,» Nano Energy, 100, 107514, 2022.

[16] M. Perez, K. Billon, T. Gerges, J.-F. Capsal, M. Cabrera, S. Chesné e C. Jean-Mistral, «Vibration energy harvesting on a drone quadcopter based on piezoelectric structures,» Mechanics & Industry: An International Journal on Mechanical Sciences and Engineering Applications, 23, 20, 2022.

[17] L.-C. Zhao, H.-X. Zou, X. Xie, D.-H. Guo, Q.-H. Gao, Z.-Y. Wu, G. Yan, K.-X. Wei e W.-M. Zhang, «Mechanical intelligent wave energy harvesting and self-powered marine environment monitoring,» Nano Energy, 108, 108222, 2023.

[18] N. Sezer e M. Koç, «A comprehensive review on the state-of-the-art of piezoelectric energy harvesting,» Nano Energy, 80, 105567, 2021.

[19] P. Raj e B. Santhosh, «Parametric study and optimization of linear and nonlinear vibration absorbers combined with piezoelectric energy harvester,» International Journal of Mechanical Sciences, 152, 268-279, 2019.

[20] N. Tran, M. H. Ghayesh e M. Arjomandi, «Ambient vibration energy harvesters: A review on nonlinear techniques for performance enhancement,» International Journal of Engineering Science, 127, 162-185, 2018.

[21] S. Zhou, M. Lallart e A. Erturk, «Multistable vibration energy harvesters: Principle, progress, and perspectives,» Journal of Sound and Vibration, 528, 116886, 2022.

[22] D. Karličić, M. Cajić, S. Paunović e S. Adhikari, «Nonlinear energy harvester with coupled Duffing oscillators,» Communications in Nonlinear Science & Numerical Simulation, 91, 105394, 2020.

[23] S. Fang, X. Wang, X. Zhang, K. Wu, T. Yan, X. Chuai, X. Huang, X. Li, Z. Lai, S. Dong e W.-H. Liao, «High output, lightweight and small-scale rotational piezoelectric energy harvester utilizing internal impact effect,» Energy Conversion and Management, 322, 119180, 2024.

[24] K. Song, M. Bonnin, F. L. Traversa e F. Bonani, «Broadband vibration energy harvesting using nonlinear multi degree-of-freedom mechanical filters,» Nonlinear Dynamics, 113(12), 14301-14317, 2025.

[25] B. Zhang, H. Li, S. Zhou, J. Liang, J. Gao e D. Yurchenko, «Modeling and analysis of a three-degree-of-freedom piezoelectric vibration energy harvester for broadening bandwidth,» Mechanical Systems and Signal Processing, 176, 109169, 2022.

[26] S. Roundy e Y. Zhang, «Toward self-tuning adaptive vibration based micro-generators,» Smart Structures, Devices, and Systems II : 13-15, 2004.

[27] P. Ibrahim, M. Arafa e Y. Anis, «An Electromagnetic Vibration Energy Harvester with a Tunable Mass Moment of Inertia,» Sensors (Basel, Switzerland), 21(16), 5611, 2021.

[28] S. Punyakaew e M. Parnichkun, «Vibration energy harvesting for low frequency using auto-tuning parametric rolling pendulum under exogenous multi-frequency excitations,» Theoretical & Applied Mechanics Letters, 10, 448-455, 2020.

[29] L. M. Miller, P. Pillatsch, E. Halvorsen, P. K. Wright, E. M. Yeatman e A. S. Holmes, «Experimental passive self-tuning behavior of a beam resonator with sliding proof mass,» Journal of Sound and Vibration, 332(26), 7142-7152, 2013.

[30] L. Yu, L. Tang e T. Yang, «Experimental investigation of a passive self-tuning resonator based on a beam-slider structure,» Acta Mechanica Sinica, 35(5), 1079-1092, 2019.

[31] C. Lan, Z. Chen, G. Hu, Y. Liao e W. Qin, «Achieve frequency-self-tracking energy harvesting using a passively adaptive cantilever beam,» Mechanical Systems and Signal Processing, 156, 107672, 2021.

[32] J. Soltani e G. Rezazadeh, «Wide range tuning behavior of a new nonlinear energy harvester based on the beam–slider structure,» Archive of Applied Mechanics, 92, 3013-3031, 2022.

[33] F. Müller e M. Krack, «Explanation of the self-adaptive dynamics of a harmonically forced beam with a sliding mass,» Archive of Applied Mechanics, 90(7), 1569-1582, 2020.

[34] F. Müller, M. W. Beck e M. Krack, «Experimental validation of a model for a self-adaptive beam-slider system,» Mechanical Systems and Signal Processing, 2023.

[35] E. C. Miranda e J. J. Thomsen, «Vibration Induced Sliding: Theory and Experiment for a Beam with a Spring-Loaded Mass,» Nonlinear Dynamics 16, 167-186, 1998.

[36] X. Zhang, J. Grajal, J. Vazquez-Roy, U. Radhakrishna, X. Wang, W. Chern, L. Zhou, Y. Lin, P.-C. Shen, X. Ji, X. Ling, A. Zubair, Y. Zhang, H. Wang, M. Dubey,

J. Kong, M. Dresselhaus e T. Palacios, «Two-dimensional MoS2-enabled flexible rectenna for Wi-Fi-band wireless energy harvesting,» Nature, 566, 368-372, 2019.