

Politecnico di Torino

Corso di Laurea

A.a. 2024/2025

Sessione di Laurea Luglio 2025

Analisi del comportamento meccanico e modellazione costitutiva di tendini porcini sottoposti a diversi test stress-relaxation



**Politecnico
di Torino**

Relatore:

Prof.ssa Cecilia Surace

Candidati:

Angelo Lucio Gazzara

Correlatori:

Ing. Vito Burgio

Ing. Martina Di Giacinti

Abstract

(Panoramica) In questo lavoro di tesi è stato analizzato il comportamento meccanico dei tendini flessori digitali superficiali (SDFT) sottoposti a test di carico-rilassamento con trazione uniassiale e shear, con diversi livelli di deformazione. È stata fatta innanzitutto una panoramica generale sulla teoria della meccanica per grandi deformazioni, fino a sviluppare analiticamente dei modelli esistenti al fine di prevedere la risposta di carico dei tendini a generici stati di deformazione. In seguito, sono stati applicati tali modelli ai dati sperimentali ottenuti, al fine di valutarne l'accuratezza e lo scostamento del comportamento reale, caratterizzato da fenomeni di tipo non lineare.

(Materiali e metodi) Il lavoro ha previsto una fase sperimentale, in cui sono stati testati 39 campioni con diversi livelli di deformazione. Segue una fase teorico-numerica basata su un modello costitutivo viscoelastico, composto da quattro parametri iperelastici che caratterizzano la risposta di ECM e delle fibre di collagene, più 16 ulteriori parametri ottenuti dalla formulazione della teoria viscoelastica applicata al calcolo numerico, i quali caratterizzano separatamente i processi viscosi interni di ECM e fibre. A scopo di confronto, è stato inoltre utilizzato un secondo modello a formulazione puramente iperelastica, composto da 4 parametri diversi dai precedenti, al quale è stato aggiunto il contributo viscoso utilizzando lo stesso approccio impiegato nel primo modello.

I campioni sono stati preparati partendo dall'estrazione manuale e successiva misurazione, per poi essere testati utilizzando una macchina a trazione (modello *MTS Insight*[®] con cella di carico funzionante fino a 1000 N). I dati sperimentali sono stati elaborati e confrontati con le previsioni teoriche fornite dal modello mediante degli algoritmi in ambiente MATLAB. La ricerca dei parametri iperelastici e viscosi viene effettuata in maniera parallela mediante algoritmo genetico, dove i primi vengono ricavati dal confronto con il comportamento a infinito, mentre i secondi vengono ricavati dal confronto con il più basso livello di deformazione. Viene utilizzata l'ottimizzazione del coefficiente di determinazione R^2 sia per massimizzare l'approssimazione dei risultati dell'algoritmo genetico, sia per valutare la previsione dei comportamenti a deformazioni maggiori.

(Risultati) I risultati sperimentali mostrano andamenti simili ma con valori di carico che ricoprono un ampio range, che sembra essere correlato alle dimensioni, alla rigidità e alla storia di funzionamento del campione. I modelli viscoelastici proposti riproducono l'andamento tipico stress-strain dei materiali iperelastici per la fase di allungamento, così come l'andamento decrescente per la fase di rilassamento; i livelli di deformazione più alti mostrano un maggiore scostamento dei risultati dalla risposta reale, a causa del comportamento non lineare dei tessuti, non completamente catturati dai modelli matematici.

(Conclusioni e sviluppi futuri) La caratterizzazione del modello iperelastico è adatta per prevedere il comportamento dei tendini, e l'introduzione di variabili interne su diverse scale temporali consente al modello di includere la dissipazione viscosa, quindi di aumentare la precisione dei risultati. Una valutazione più approfondita su origine, struttura interna, trattamento, misurazione e test dei campioni potrebbe aumentare l'accuratezza dei modelli, permettendo di cercare delle correlazioni tra i risultati che supportino lo sviluppo di modelli di previsione della risposta di una qualsiasi struttura tendinea.

Indice

Abstract.....	0
Indice	1
Indice Figure.....	5
Indice Tabelle.....	9
1 Il tendine.....	1
1.1 Anatomia macroscopica e proprietà meccaniche	1
1.2 Struttura gerarchica e composizione microscopica	2
1.3 Collagene.....	2
1.3.1 Raggruppamento delle sub-strutture	3
1.3.2 Caratteristiche sforzo-deformazione	4
1.3.3 Orientamento delle fibre.....	4
1.4 Parte cellulare.....	5
1.4.1 Ruolo dei tenoblasti/tenociti.....	5
1.5 Altri componenti della ECM	6
1.5.1 Elastina	6
1.5.2 Proteoglicani e glicoproteine.....	7
1.5.3 Componenti inorganici	8
2 Meccanica del continuo a grandi deformazioni	9
2.1 Tensori di deformazione	9
2.1.1 Gradiente di deformazione	9
2.1.2 Determinante jacobiano.....	11
2.1.3 Tensore di deformazione Right Cauchy-Green	12
2.1.4 Invarianti di deformazione	13
2.1.5 Decomposizione polare del gradiente di deformazione	13
2.1.6 Autovalori e autovettori dei tensori di deformazione.....	14
2.1.7 Decomposizione dilazionale-distorcente dei tensori di deformazione.....	15
2.2 Tensori di sforzo.....	15
2.2.1 Tensore di sforzo Cauchy	16
2.2.2 Primo tensore Piola-Kirchhoff.....	16
2.3 Iperelasticità e funzione di energia di deformazione.....	17
2.3.1 Iperelasticità	18
2.3.2 Forme equivalenti di funzione di energia di deformazione.....	19
2.3.3 Rappresentazione disaccoppiata della funzione di energia di deformazione.....	20

2.3.4	Iperelasticità isotropica	20
2.3.5	Dipendenza dell'energia di deformazione da I_1 e I_2	21
2.4	Materiali iperelastici incomprimibili.....	25
2.4.1	Formulazione con moltiplicatore lagrangiano.....	25
2.4.2	Semplificazioni sulla derivata della funzione di energia di deformazione ..	26
2.4.3	Conseguenze dell'utilizzo della rappresentazione disaccoppiata.....	26
2.4.4	Iperelasticità trasversalmente isotropica	28
2.5	Deformazione uniassiale e di puro shear per materiali trasversalmente isotropi.	32
2.5.1	Caso uniassiale	32
2.5.2	Caso di shear semplice	33
2.6	Alcune forme di funzione di energia di deformazione.....	36
2.6.1	Modello di Ogden.....	36
2.6.2	Modello Neo-Hookean	36
2.6.3	Modello Mooney-Rivlin.....	37
2.6.4	Modello Holzapfel-Gasser-Ogden	37
2.7	Materiali viscoelastici	38
2.7.1	Modello reologico unidimensionale con singolo elemento di Maxwell	38
2.7.2	Rappresentazione di convoluzione.....	39
2.7.3	Test di rilassamento	40
2.7.4	Modello reologico unidimensionale generalizzato	41
2.7.5	Considerazioni termodinamiche e formulazione generale	42
2.7.6	Formulazione alternativa.....	44
3	Modelli di riferimento	46
3.1	Modello di Carniel	46
3.1.1	Test stress-relaxation	46
3.1.2	Formulazione dei processi di dissipazione viscosa	47
3.1.3	Modello iperelastico per tessuti biologici soft	48
3.1.4	Contributi viscosi	49
3.1.5	Stato di deformazione uniassiale.....	50
3.1.6	Stato di deformazione di shear semplice.....	51
3.1.7	Calcolo numerico dei contributi viscosi.....	52
3.2	Modello di Sopakayang-Holzapfel.....	53
3.2.1	Funzione di energia di deformazione	54
3.2.2	Formulazione del carico iperelastico.....	55
3.2.3	Contributi viscosi del modello SH	57

3.2.4	Stato di deformazione uniassiale.....	57
3.2.5	Stato di deformazione di shear semplice.....	59
4	Materiali e metodi	60
4.1	Descrizione dei tendini esaminati	60
4.2	Analisi dei dati	61
4.2.1	Tipologie di test.....	61
4.2.2	Procedure relative ai tre tipi di test.....	64
4.2.3	Pulizia dei dati (Excel) e ottenimento delle grandezze di interesse (MATLAB) 67	
4.3	Metodo di ricerca dei parametri costitutivi	68
4.3.1	Parametri dei modelli	68
4.3.2	Ricerca contemporanea dei parametri iperelastici e viscosi.....	70
4.3.3	Funzione di ottimizzazione	70
4.3.4	Descrizione della funzione di ricerca	71
5	Risultati ottenuti: grafici e tabelle	73
5.1	Risultati sperimentali.....	73
5.1.1	Dimensioni e andamento dei carichi per prove di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati	73
5.1.2	Dimensioni e andamento dei carichi per prove di trazione uniassiale con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo	78
5.1.3	Dimensioni e andamento dei carichi per prove di trazione uniassiale con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo	81
5.2	Risultati ottenuti con il modello di Carniel	84
5.2.1	Comparazione tra carichi sperimentali e numerici per prove di deformazione uniassiale con livelli di deformazione separati	84
5.2.2	Comparazione tra carichi sperimentali e numerici per prove di deformazione uniassiale con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo.....	90
5.2.3	Comparazione tra carichi sperimentali e numerici per prove di shear semplice con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo	93
5.2.4	Curve di carico raggruppate e valori dei parametri costitutivi e di R^2 per prove di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati	96
5.2.5	Curve di carico raggruppate e valori dei parametri costitutivi e di R^2 per prove di trazione uniassiale con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo.....	101
5.2.6	Curve di carico raggruppate e valori dei parametri costitutivi e di R^2 per prove di trazione uniassiale con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo.....	107
5.3	Risultati ottenuti con il modello di Sopakayang-Holzapfel	110
5.3.1	Comparazione tra carichi sperimentali e numerici per prove di deformazione uniassiale con livelli di deformazione separati	110

5.3.2	Comparazione tra carichi sperimentali e numerici per prove di deformazione uniassiale con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo.....	114
5.3.3	Comparazione tra carichi sperimentali e numerici per prove di shear semplice con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo	116
5.3.4	Curve di carico raggruppate e valori dei parametri costitutivi e di R^2 per prove di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati	117
5.3.5	Curve di carico raggruppate e valori dei parametri costitutivi e di R^2 per prove di trazione uniassiale con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo.....	124
5.3.6	Curve di carico raggruppate e valori dei parametri costitutivi e di R^2 per prove di trazione uniassiale con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo.....	129
6	Conclusioni e sviluppi futuri	134
7	Bibliografia.....	136

Indice Figure

Figura 1: Diagramma della struttura gerarchica di un tendine con i diametri e le lunghezze rappresentativi per i tessuti umani [6].	2
Figura 2: Rappresentazione schematica del comportamento stress-strain tipico del tendine [1].	4
Figura 3: Rappresentazione schematica del moto di un corpo continuo [34].	10
Figura 4: Corpo soggetto a trazione [34].	16
Figura 5: Comparazione tra i valori di I_2 nel caso di carichi uniassiali, di shear puro e di carichi biassiali, in funzione dello stretch applicato λ_1 [33].	22
Figura 6: Comparazione tra i valori di I_2 nel caso di carichi uniassiali, di shear puro e di carichi biassiali, in funzione dell'invariante I_1 [33].	23
Figura 7: Valore normalizzato I_2/I_1 per tutte le modalità di carico, per materiali isotropi [33].	24
Figura 8: Corpo soggetto a trazione normale in direzione $\mathbf{e}_1$ [43].	32
Figura 9: Corpo soggetto a sforzo tangenziale in direzione $\mathbf{e}_3$, che causa una deformazione della direzione $\mathbf{e}_1$ [44].	34
Figura 10: Valori degli invarianti anisotropici del modello HGO modificato, in funzione della variazione dell'angolo di inclinazione delle fibre e quando: a) $\gamma=0.1$; b) $\gamma=0.5$; c) $\gamma=5$ [41].	35
Figura 11: Modello reologico unidimensionale a due rami [47].	38
Figura 12: Storia della deformazione in un test di rilassamento [47].	40
Figura 13: Storia della tensione in un test di rilassamento [47].	41
Figura 14: Modello reologico di rilassamento generalizzato [47].	41
Figura 15: 1) Allineamento delle fibre e delle cellule nella regione mediale del SDFT. 2) Morfologia rotonda e disorganizzazione delle fibre di collagene nella regione prossimale del SDFT [53].	61
Figura 16: Curva stretch ratio-tempo relativo al primo livello di deformazione del test di trazione uniassiale eseguito sul provino del 07/03/2023 (SDFT grande – Sample 1; le informazioni su questo campione sono riportate in Tabella 7,8).	62
Figura 17: Curve stretch ratio-tempo relative ad ogni livello di deformazione del test di trazione uniassiale eseguito sul provino del 07/03/2023 (SDFT grande – Sample 1; le informazioni su questo campione sono riportate in Tabella 7,8).	63
Figura 18: Curva stretch ratio-tempo relativo all'intero test di trazione uniassiale eseguito sul provino del 13/06/2024 (SDFT grande – Sample 22; le informazioni su questo campione sono riportate in Tabella 11,12).	63
Figura 19: Cicli di preconditionamento relativi al test di stress-relaxation con trazione uniassiale e livelli di deformazione raggiunti in un ciclo unico, ottenute dal provino del 13/06/2024 (SDFT grande – Sample 22; le informazioni su questo campione sono riportate in Tabella __,__).	66
Figura 20: Risultati sperimentali dei test di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati, effettuati su SDFT grandi.	74
Figura 21: Risultati sperimentali dei test di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati, effettuati su SDFT piccoli.	76
Figura 22: Bande che indicano il range di curve ricoperto dai test di deformazione uniassiale con livelli di deformazione separati, effettuati su SDFT grandi.	77

Figura 23: Bande che indicano il range di curve ricoperto dai test di deformazione uniassiale con livelli di deformazione separati, effettuati su SDFT piccoli.	78
Figura 24: Risultati sperimentali dei test di trazione uniassiale con livelli di deformazione raggiunti in un ciclo unico, effettuati su SDFT grandi.	79
Figura 25: Risultati sperimentali dei test di trazione uniassiale con livelli di deformazione raggiunti in un ciclo unico, effettuati su SDFT piccoli.	80
Figura 26: Risultati sperimentali dei test di shear semplice con livelli di deformazione raggiunti in un ciclo unico, effettuati su SDFT grandi.	82
Figura 27: Risultati sperimentali dei test di shear semplice con livelli di deformazione raggiunti in un ciclo unico, effettuati su SDFT piccoli.	83
Figura 28: Curve stress-relaxation per test di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati, ottenute dal provino del 07/03/2023 (SDFT grande – Sample 1).	84
Figura 29: Curve stress-relaxation per test di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati, ottenute dal provino del 07/03/2024 (SDFT piccolo – Sample 11).	85
Figura 30: Curve stress-relaxation per test di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati, soltanto al 3% di deformazione, ottenute dal provino del 7 marzo 2023 (SDFT grande – Sample 1).	86
Figura 31: Curve stress-relaxation per test di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati, soltanto al 3% di deformazione, ottenute dal provino del 29 novembre 2023 (SDFT piccolo – Sample 20).	86
Figura 32: Curve stress-relaxation per test di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati, ottenute dal provino del 22/11/2023 (SDFT grande – Sample 3).	87
Figura 33: Curve stress-relaxation per test di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati, ottenute dal provino del 07/03/2024 (SDFT piccolo – Sample 13).	87
Figura 34: Bande per i diversi livelli di deformazione (3%, 6%, 9%, 10%, 12%) delle curve sperimentali (azzurro) e numeriche (magenta), ottenute dai provini SDFT grandi sottoposti alle prove di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati.	88
Figura 35: Bande per i diversi livelli di deformazione (3%, 6%, 9%, 10%, 12%) delle curve sperimentali (azzurro) e numeriche (magenta), ottenute dai provini SDFT piccoli sottoposti alle prove di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati.	89
Figura 36: Banda per le curve al 3% (ingrandita) di deformazione ottenute dai test di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati, eseguite sui tendini SDFT grandi (sinistra) e piccoli (destra).	90
Figura 37: Curve stress-relaxation per test di trazione uniassiale con livelli di deformazione raggiunti in un ciclo unico, ottenute dal provino del 13/06/2024 (SDFT grande – Sample 22).	90
Figura 38: Curve stress-relaxation per test di trazione uniassiale con livelli di deformazione raggiunti in un ciclo unico, ottenute dal provino del 13/06/2024 (SDFT piccolo – Sample 32).	91
Figura 39: Curve stress-relaxation per test di trazione uniassiale con livelli di deformazione raggiunti in un ciclo unico, ottenute dal provino del 21/05/2024 (SDFT grande – Sample 27).	92
Figura 40: Curve stress-relaxation per test di trazione uniassiale con livelli di deformazione raggiunti in un ciclo unico, ottenute dal provino del 21/05/2024 (SDFT piccolo – Sample 35).	92

Figura 41: Curve stress-relaxation per test di trazione uniassiale con livelli di deformazione raggiunti in un ciclo unico, ottenute dal provino del 27/11/2024 (SDFT grande – Sample 30).	93
Figura 42: Curve stress-relaxation per test di shear semplice con livelli di deformazione raggiunti in un ciclo unico, ottenute dal provino del 27/11/2024 (SDFT grande – Sample 30).	94
Figura 43: Curve stress-relaxation per test di shear semplice con livelli di deformazione raggiunti in un ciclo unico, ottenute dal provino del 13/11/2024 (SDFT piccolo – Sample 38).	94
Figura 44: Curve stress-relaxation per test di shear semplice con livelli di deformazione raggiunti in un ciclo unico, relative al solo primo livello di deformazione, ottenute dal provino del 13/11/2024 (SDFT grande – Sample 25).	95
Figura 45: Curve stress-relaxation per test di shear semplice con livelli di deformazione raggiunti in un ciclo unico, relative al solo primo livello di deformazione, ottenute dal provino del 13/11/2024 (SDFT piccolo – sample 38).	95
Figura 46: Andamento delle curve numeriche ottenute con il modello di Carniel, per SDFT grandi con test di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati.	96
Figura 47: Andamento delle curve numeriche ottenute con il modello di Carniel, per SDFT piccoli con test di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati.	98
Figura 48: Andamento delle curve numeriche ottenute con il modello di Carniel, per SDFT grandi con test di trazione uniassiale con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo.	102
Figura 49: Andamento delle curve numeriche ottenute con il modello di Carniel, per SDFT piccoli con test di trazione uniassiale con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo.	104
Figura 50: Andamento delle curve numeriche ottenute con il modello di Carniel, per SDFT grandi con test di shear semplice con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo.	107
Figura 51: Andamento delle curve numeriche ottenute con il modello di Carniel, per SDFT piccoli con test di shear semplice con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo.	109
Figura 52: Curve stress-relaxation per test di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati, ottenute dal provino del 07/03/2023 (SDFT grande – Sample 1).	111
Figura 53: Curve stress-relaxation per test di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati, ottenute dal provino del 07/03/2024 (SDFT piccolo – Sample 11).	111
Figura 54: Curve stress-relaxation per test di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati, ottenute dal provino del 29/11/2023 (SDFT piccolo – Sample 21).	112
Figura 55: Curve stress-relaxation per test di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati, ottenute dal provino del 21/03/2024 (SDFT grande – Sample 8).	113
Figura 56: Bande per i diversi livelli di deformazione (3%, 6%, 9%, 10%, 12%) delle curve sperimentali (azzurro) e numeriche (magenta), ottenute dai provini SDFT grandi sottoposti alle prove di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati.	113
Figura 57: Bande per i diversi livelli di deformazione (3%, 6%, 9%, 10%, 12%) delle curve sperimentali (azzurro) e numeriche (magenta), ottenute dai provini SDFT piccoli sottoposti alle prove di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati.	114
Figura 58: Curve stress-relaxation per test di trazione uniassiale con livelli di deformazione raggiunti in un ciclo unico, ottenute dal provino del 13/06/2024 (SDFT grande – Sample 22).	115

Figura 59: Curve stress-relaxation per test di trazione uniassiale con livelli di deformazione raggiunti in un ciclo unico, ottenute dal provino del 13/06/2024 (SDFT piccolo – Sample 32).	115
Figura 60: Curve stress-relaxation per test di trazione uniassiale con livelli di deformazione raggiunti in un ciclo unico, ottenute dal provino del 27/11/2024 (SDFT grande – Sample 31).	116
Figura 61: Curve stress-relaxation per test di shear semplice con livelli di deformazione raggiunti in un ciclo unico, ottenute dal provino del 13/11/2024 (SDFT grande – Sample 26).	117
Figura 62: Curve stress-relaxation per test di shear semplice con livelli di deformazione raggiunti in un ciclo unico, ottenute dal provino del 13/11/2024 (SDFT piccolo – Sample 38).	117
Figura 68: Andamento delle curve numeriche ottenute con il modello di Sopakayang-Holzapfel, per SDFT grandi con test di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati.	118
Figura 69: Andamento delle curve numeriche ottenute con il modello di Sopakayang-Holzapfel, per SDFT piccoli con test di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati.	121
Figura 70: Andamento delle curve numeriche ottenute con il modello di Sopakayang-Holzapfel, per SDFT grandi con test di trazione uniassiale con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo.	124
Figura 71: Andamento delle curve numeriche ottenute con il modello di Sopakayang-Holzapfel, per SDFT piccoli con test di trazione uniassiale con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo.	127
Figura 72: Andamento delle curve numeriche ottenute con il modello di Sopakayang-Holzapfel, per SDFT grandi con test di shear semplice con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo.	129
Figura 73: Andamento delle curve numeriche ottenute con il modello di Sopakayang-Holzapfel, per SDFT piccoli con test di shear semplice con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo.	131

Indice Tabelle

Tabella 1: Valori di input inseriti nella macchina per la prima modalità di test di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati.	65
Tabella 2: Valori di input inseriti nella macchina per la seconda modalità di test di trazione uniassiale con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo.....	67
Tabella 3: Valori di input inseriti nella macchina per la terza modalità di test di shear semplice con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo. Si noti che le deformazioni raggiunte sono ancora in valore percentuale; dunque, si inserisce un valore di distanza tra le pinze fisso anche se non corrisponde a quello reale, così da adattare la macchina di trazione ad un test di shear, ottenendo i valori di deformazione mostrati in precedenza.	67
Tabella 4: Descrizione dei parametri iperelastici che caratterizzano il modello implementato dal gruppo di Carniel [48].	68
Tabella 5: Descrizione dei parametri iperelastici che caratterizzano il modello implementato da Sopakayang e Holzapfel [51].	69
Tabella 6: Descrizione dei parametri viscosi che caratterizzano il contributo di matrice ($l=m$), fibre ($l=f$) e interazione fibre-matrice ($l=fm$), con quest'ultimo contributo presente soltanto nel secondo dei due modelli implementati [48], [51].	69
Tabella 7: Informazioni generali degli SDFT grandi utilizzati per i test di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati.	73
Tabella 8: Dimensioni degli SDFT grandi utilizzati per i test di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati.	74
Tabella 9: Informazioni generali degli SDFT piccoli utilizzati per i test di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati.	75
Tabella 10: Dimensioni degli SDFT piccoli utilizzati per i test di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati.	75
Tabella 11: Informazioni generali degli SDFT grandi utilizzati per i test di trazione uniassiale con livelli di deformazione raggiunti in un ciclo unico.....	78
Tabella 12: Dimensioni degli SDFT grandi utilizzati per i test di trazione uniassiale con livelli di deformazione raggiunti in un ciclo unico.	79
Tabella 13: Informazioni generali degli SDFT piccoli utilizzati per i test di trazione uniassiale con livelli di deformazione raggiunti in un ciclo unico.....	79
Tabella 14: Dimensioni degli SDFT piccoli utilizzati per i test di trazione uniassiale con livelli di deformazione raggiunti in un ciclo unico.	80
Tabella 15: Informazioni generali degli SDFT grandi utilizzati per i test di shear semplice con livelli di deformazione raggiunti in un ciclo unico.	81
Tabella 16: Dimensioni degli SDFT grandi utilizzati per i test di shear semplice con livelli di deformazione raggiunti in un ciclo unico.....	81
Tabella 17: Informazioni generali degli SDFT piccoli utilizzati per i test di shear semplice con livelli di deformazione raggiunti in un ciclo unico.	82
Tabella 18: Dimensioni degli SDFT piccoli utilizzati per i test di shear semplice con livelli di deformazione raggiunti in un ciclo unico.....	82
Tabella 19: Parametri costitutivi del modello implementato dal gruppo di Carniel, utilizzato sui test di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati, effettuati su SDFT grandi.	97

Tabella 20: Goodness of fit delle curve di carico ottenute utilizzando il modello implementato dal gruppo di Carniel, utilizzato sui test di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati, effettuati su SDFT grandi.....	98
Tabella 21: Parametri costitutivi del modello implementato dal gruppo di Carniel, utilizzato sui test di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati, effettuati su SDFT piccoli.	99
Tabella 22: Goodness of fit delle curve di carico ottenute utilizzando il modello implementato dal gruppo di Carniel, utilizzato sui test di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati, effettuati su SDFT piccoli.....	100
Tabella 23: Parametri iperelastici riportati da Carniel et al. ottenuti per il legamento collaterale medio umano [48].....	100
Tabella 24: Parametri costitutivi del modello implementato dal gruppo di Carniel, utilizzato sui test di trazione uniassiale con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo, effettuati su SDFT grandi.	103
Tabella 25: Goodness of fit delle curve di carico ottenute utilizzando il modello implementato dal gruppo di Carniel, utilizzato sui test di trazione uniassiale con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo, effettuati su SDFT grandi.....	104
Tabella 26: Parametri costitutivi del modello implementato dal gruppo di Carniel, utilizzato sui test di trazione uniassiale con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo, effettuati su SDFT piccoli.....	105
Tabella 27: Goodness of fit delle curve di carico ottenute utilizzando il modello implementato dal gruppo di Carniel, utilizzato sui test di trazione uniassiale con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo, effettuati su SDFT piccoli.	105
Tabella 28: Parametri costitutivi del modello implementato dal gruppo di Carniel, utilizzato sui test di shear semplice con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo, effettuati su SDFT grandi.....	108
Tabella 29: Goodness of fit delle curve di carico ottenute utilizzando il modello implementato dal gruppo di Carniel, utilizzato sui test di shear semplice con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo, effettuati su SDFT grandi.....	108
Tabella 30: Parametri costitutivi del modello implementato dal gruppo di Carniel, utilizzato sui test di shear semplice con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo, effettuati su SDFT piccoli.	109
Tabella 31: Goodness of fit delle curve di carico ottenute utilizzando il modello implementato dal gruppo di Carniel, utilizzato sui test di shear semplice con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo, effettuati su SDFT piccoli.	110
Tabella 32: Parametri costitutivi del modello implementato da Sopakayang e Holzapfel, utilizzato sui test di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati, effettuati su SDFT grandi.....	120
Tabella 33: Goodness of fit delle curve di carico ottenute utilizzando il modello implementato da Sopakayang e Holzapfel, utilizzato sui test di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati, effettuati su SDFT grandi.	120
Tabella 34: Parametri costitutivi del modello implementato da Sopakayang e Holzapfel, utilizzato sui test di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati, effettuati su SDFT piccoli.	123
Tabella 35: Goodness of fit delle curve di carico ottenute utilizzando il modello implementato da Sopakayang e Holzapfel, utilizzato sui test di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati, effettuati su SDFT piccoli.....	123

Tabella 36: Parametri costitutivi del modello implementato da Sopakayang e Holzapfel, utilizzato sui test di trazione uniassiale con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo, effettuati su SDFT grandi.	126
Tabella 37: Goodness of fit delle curve di carico ottenute utilizzando il modello implementato da Sopakayang e Holzapfel, utilizzato sui test di trazione uniassiale con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo, effettuati su SDFT grandi.....	127
Tabella 38: Parametri costitutivi del modello implementato da Sopakayang e Holzapfel, utilizzato sui test di trazione uniassiale con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo, effettuati su SDFT piccoli.	128
Tabella 39: Goodness of fit delle curve di carico ottenute utilizzando il modello implementato da Sopakayang e Holzapfel, utilizzato sui test di trazione uniassiale con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo, effettuati su SDFT piccoli.	128
Tabella 40: Parametri costitutivi del modello implementato da Sopakayang e Holzapfel, utilizzato sui test di shear semplice con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo, effettuati su SDFT grandi.	130
Tabella 41: Goodness of fit delle curve di carico ottenute utilizzando il modello implementato da Sopakayang e Holzapfel, utilizzato sui test di shear semplice con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo, effettuati su SDFT grandi.....	130
Tabella 42: Parametri costitutivi del modello implementato da Sopakayang e Holzapfel, utilizzato sui test di shear semplice con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo, effettuati su SDFT piccoli.	132
Tabella 43: Goodness of fit delle curve di carico ottenute utilizzando il modello implementato da Sopakayang e Holzapfel, utilizzato sui test di shear semplice con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo, effettuati su SDFT piccoli.	132

1 Il tendine

I tendini sono tessuti biologici fondamentali per il sistema muscolo-scheletrico, la cui funzione principale è quella di trasmettere la forza generata dalla contrazione muscolare al sistema scheletrico, permettendo il movimento articolare.

1.1 Anatomia macroscopica e proprietà meccaniche

I tendini sono tessuti biologici soft identificati come tessuto connettivo denso (o compatto), ossia tessuto connettivo che presenta una maggiore componente fibrosa rispetto al tessuto connettivo lasso, immersa in una sostanza fondamentale amorfa identificata come matrice del tessuto [1], [2]. La maggiore presenza della componente fibrosa è dovuta proprio alla sua funzione, in quanto fornisce al tessuto una grande resistenza alla trazione. Hanno un colorito madreperlato a causa della scarsa vascolarizzazione: la rete circolatoria ha struttura variabile, con tronchi primari che formano una struttura reticolare a maglie regolari o a struttura concentrica altamente irregolare; ciò causa una capacità di rinnovamento molto più lenta del tessuto tendineo rispetto ad altri tessuti [3]. Anche la ramificazione nervosa risulta essere relativamente scarsa: l'innervazione si sviluppa sulle guaine che ricoprono il tendine vero e proprio, quest'ultimo invece privo di fibre nervose [1], [3].

I tendini sono provvisti di strutture satelliti, le quali hanno lo scopo di facilitare lo scorrimento sui tessuti circostanti mantenendo la linea d'azione durante la contrazione muscolare. Tali strutture sono [3]:

- Guaina fibrosa, ossia il canale di scorrimento entro cui scorre il tendine a basso attrito;
- Guaina sinoviale, ossia guaina che riveste la superficie del tendine. È composta da due foglietti, parietale (esterno) e (viscerale) interno, tra cui scorre il liquido peritendineo con funzione lubrificante e di apporto trofico;
- Foglietto peritendineo, che costituisce il paratenonio, con funzione analoga a quella della guaina sinoviale;
- Puleggia di riflessione, ossia ispessimenti di tessuto fibrillare presenti in determinati punti del tendine, che hanno lo scopo di contenere il tendine all'interno del suo letto di scorrimento, evitando effetti di corda d'arco;
- Borse tendinee, strutture extratendinee che minimizzano l'attrito tra tendini e strutture ossee adiacenti laddove presentano prominenze ossee;
- Epitenonio, guaina esterna che avvolge l'intero tendine.

Dal punto di vista funzionale, i tendini agiscono come strutture di trasmissione meccanica, ma svolgono anche un importante ruolo nella stabilità articolare e nell'assorbimento degli shock meccanici. Il comportamento biomeccanico è correlato non soltanto all'entità della sollecitazione cui è sottoposto ma anche alla forma del tendine stesso: infatti, nel caso di muscoli deputati a compiere movimenti delicati e di precisione, come i muscoli flessori delle dita, si trovano tendini lunghi e sottili; al contrario, per muscoli che compiono azioni di potenza e resistenza, come il quadricipite femorale, si trovano tendini più corti e robusti.

Il tendine, sottoposto a un carico di trazione, non presenta una risposta perfettamente elastica, bensì esibisce comportamenti di rilassamento, creep ed isteresi. Si vedrà come questo

comportamento sia dovuto alla sua natura multi-composita, quindi alle interazioni delle sue componenti e ai processi viscosi che avvengono all'interno della sua struttura [1].

1.2 Struttura gerarchica e composizione microscopica

Il tendine può essere definito come un materiale composito altamente funzionalizzato in cui la matrice extracellulare (ECM) e le fibre di collagene lavorano insieme per garantire le prestazioni necessarie per la loro funzione, che è quella di trasmettere le forze dai muscoli alle ossa [4]. I tendini sono costituiti per il 55-70% da acqua; presentano una componente cellulare costituita principalmente da fibroblasti, e una componente ECM composta per lo più da collagene organizzato in strutture gerarchiche (Figura 1), che costituisce il 60-85% del peso secco dell'intero tendine [5],[6].

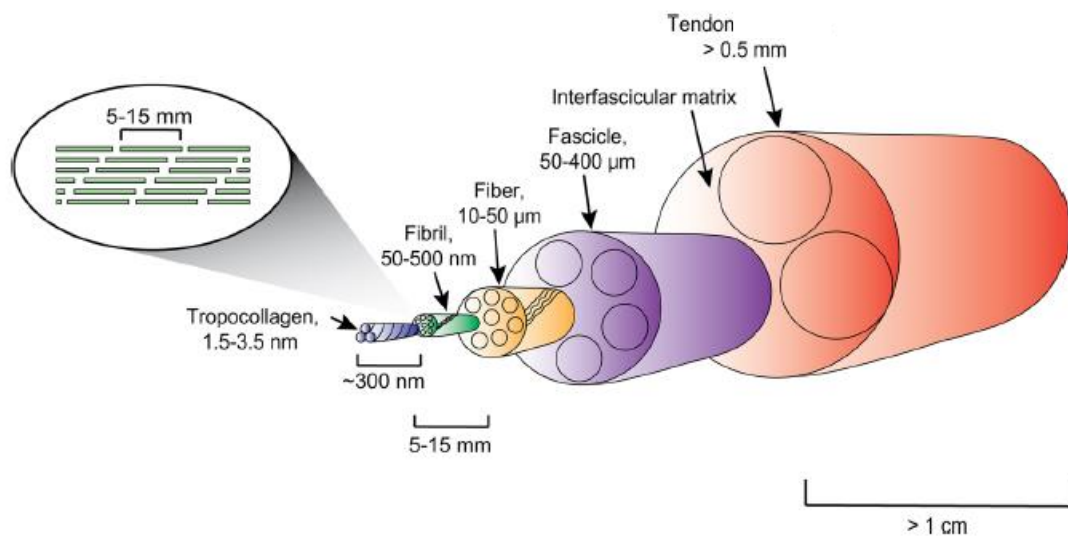


Figura 1: Diagramma della struttura gerarchica di un tendine con i diametri e le lunghezze rappresentativi per i tessuti umani [6].

Tuttavia, la matrice presenta anche una varietà di costituenti diversi dal collagene che formano le matrici interfibrillare e interfascicolare (IFM) che collegano rispettivamente le fibrille e i fascicoli di collagene adiacenti. Questi elementi non-collagene hanno un ruolo significativo non soltanto nella distribuzione dei carichi ma anche nella meccanotrasduzione, in omeostasi e in condizioni patologiche, influenzando l'espressione genica quindi modulando funzione e struttura del tessuto [6]. Queste sono principalmente proteine come i proteoglicani (PG), ma vi è anche una piccola parte di sostanze inorganiche; sono anche presenti fibre elastiche in percentuali minori di quelle del collagene (2% del peso secco), ma la cui presenza è rilevante sia nelle condizioni di carico che nella meccanotrasduzione [7].

1.3 Collagene

Il collagene è una larga famiglia di proteine a tripla elica con funzioni di interazione cellula-matrice e di struttura e funzionalizzazione della ECM. Quasi tutte queste proteine partecipano ad assemblamenti altamente ordinati di ordine superiore che nel caso dei tendini portano alle fibrille, le quali rappresentano l'elemento tensile primario [8]. In particolare, dalla Figura 1 è possibile vedere i diversi livelli strutturali a partire da come le molecole di collagene formano il tropocollagene tramite il superavvolgimento di tre α -eliche sinistrorse in una tripla elica

destrorsa; queste catene vanno a organizzarsi in livelli strutturali maggiori posizionandosi parallelamente le une alle altre ma in maniera sfalsata, formando i legami crociati tra i gruppi laterali di lisina che conferiscono una notevole resistenza a trazione mantenendo la flessibilità delle fibre che formano [9].

Il collagene maggiormente presente nei tendini è quello di tipo I, ma sono presenti anche concentrazioni minori di collagene di tipo II e di tipo III. Nel collagene di tipo I, due tra le tre catene polipeptidiche hanno uguale struttura primaria e vengono chiamate α_1 , mentre la terza ha una differente composizione di amminoacidi ed è denominata α_2 . Entrambe seguono una determinata ripetitività di amminoacidi: un residuo ogni tre è glicina, con la sequenza glicina-prolina-idrossiprolina ripetuta frequentemente. Questi amminoacidi, grazie ai loro limiti di rotazione, sono responsabili della conformazione ad elica; inoltre, l'idrossiprolina contribuisce anche alla stabilizzazione della struttura a tripla elica formando legami a idrogeno fra una catena e l'altra [3].

Il collagene è sintetizzato all'interno del reticolo endoplasmatico delle cellule tendinee, ossia i tenoblasti. Affinché si formi il tropocollagene, è necessario che il procollagene, molecola precursore, perda le sue parti terminali e diventi una molecola attiva, capace di aggregarsi in molecole di tropocollagene lunghe 300 nm, con una periodicità di 64 nm [3].

1.3.1 Raggruppamento delle sub-strutture

Il tendine è un ottimo esempio di struttura altamente organizzata multi-gerarchica, in cui le molecole di collagene si assemblano in fibrille filamentose, formate da microfibrille, che si aggregano per formare fibre di collagene, i principali componenti strutturali, secondo l'ordine di fasci di fibrille, fascicoli e fasci di fibre, quasi paralleli all'asse lungo del tendine, chiamati rispettivamente fasci primari, secondari e terziari [10].

Nel dettaglio, le molecole di tropocollagene si dispongono linearmente lungo la fibrilla, non legate per le loro estremità ma presentando uno spazio di circa mezzo periodo; le molecole adiacenti risultano sfasate di una certa distanza, creando delle fibrille con periodo ripetitivo di zone chiare e scure alternate. Il fatto che il periodo della fibrilla sia minore della lunghezza del tropocollagene è dovuto proprio alla sua disposizione: infatti, le molecole sono disposte linearmente lungo la fibrilla, ma non sono collegate direttamente per le loro estremità ma vi è interposto uno spazio pari a circa mezzo periodo.

All'inizio l'aggregazione delle fibrille avviene mediante interazioni non covalenti (polari e idrofobiche), che vengono poi stabilizzate da legami covalenti trasversali tra le molecole; si distinguono fibrille di tipo T, con diametro più elevato e composte da sub-fibrille spiraliformi che si avvolgono a elica destrorsa, e fibrille di tipo C, con spessore minore e andamento elicoidale o ondulato a passo costante. L'aggregamento di più fibrille forma una fibra, la quale rappresenta l'unità più piccola osservabile al microscopio ottico con diametro variabile tra 1 μm e 12 μm in relazione al numero di fibrille che la compongono. A loro volta le fibre si associano tra loro per formare i fascicoli, detti anche fasci di I ordine; questi si aggregano grazie ai setti endotenonici per creare i fasci di II ordine, che a loro volta formano i fasci di III ordine [3].

Come già visto, i fasci sono circondati da una rete intrecciata di tessuto connettivo chiamato peritenoneo interno o endotenonio. Questo tessuto mantiene i fasci uniti, ne consente un certo movimento l'uno rispetto all'altro e trasporta tutti i vasi sanguigni, i vasi linfatici e i nervi.

L'intero tendine invece è circondato da una sottile guaina di tessuto connettivo, chiamata peritenoneo esterno o epitenonio, che è continua sulla sua superficie interna con l'endotenonio, e che è circondato da un tessuto connettivo grasso e areolare chiamato paratenonio, il quale permette al tendine di scivolare liberamente contro i tessuti circostanti [11].

1.3.2 Caratteristiche sforzo-deformazione

A livello delle fibrille, il collagene presenta un pattern a increspatura sinusoidale regolare [12] che, unitamente all'anisotropia delle fibrille, conferiscono proprietà meccaniche fortemente non lineari. Si possono infatti distinguere diverse regioni distinte nella curva caratteristica sforzo-deformazione, come mostrato in Figura 2:

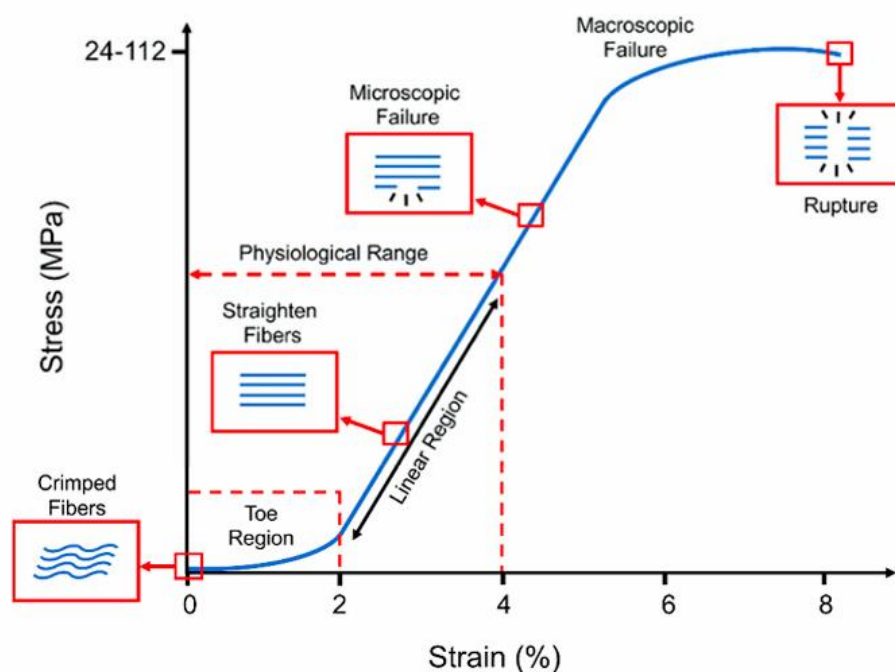


Figura 2: Rappresentazione schematica del comportamento stress-strain tipico del tendine [1].

Si identifica un range fisiologico entro il 4% di allungamento rispetto alla lunghezza a riposo del tendine. All'interno di questo range si distinguono due regioni: la prima regione è detta regione non lineare (*toe region*), conseguenza del fatto che i carichi si distribuiscono non soltanto in direzione assiale e ritenuta significativa nell'assorbire i carichi potenzialmente dannosi tra muscolatura e scheletro; la seconda regione è detta regione lineare, e corrisponde alla zona in cui le fibre di collagene sono completamente distese [6], [13]. Vi è poi la regione di fallimento dove si arriva alla rottura del tessuto, prima mediante rotture microscopiche di singole componenti fibrillari e poi mediante rotture macroscopiche di interi fasci per le deformazioni più alte.

1.3.3 Orientamento delle fibre

Nel 1852 Albert von Kölliker, anatomista e fisiologo svizzero considerato il padre dell'anatomia microscopica, stabilì che le fibre di collagene fossero disposte in direzione longitudinale all'asse lungo del tendine. Successivamente però è stato notato che questa

direzione preferenziale non è l'unica, ma sono presenti fasci di fibre curvi o a spirale o ancora intrecciati gli uni con gli altri. Ciò si lega al fatto che i tendini, durante i movimenti, sono sollecitati non soltanto da carichi longitudinali ma anche trasversali e rotazionali. Josza et al. [14], mediante Microscopia Elettronica a Trasmissione (TEM) e Microscopia Elettronica a Scansione (SEM), hanno analizzato la struttura tridimensionale di tendini umani intatti di vario tipo. Sulla superficie è stato osservato il pattern ondulato precedentemente discusso, mentre all'interno sono state rilevate fibre con direzioni trasversali e orizzontali con un rapporto rispetto alle fibre longitudinali che va da 1:26 a 1:10. Inoltre, nelle giunzioni miotendinee è emerso un arrangiamento irregolare delle fibrille di collagene che vanno a riempire profondi recessi longitudinali che separano i prolungamenti delle cellule muscolari: ciò permette di massimizzare l'area tra le fibre muscolari e quelle tendinee, quindi di ridurre la forza applicata per unità di superficie durante la contrazione dei muscoli.

È rilevante il risultato di uno studio che compara le proprietà meccaniche e l'orientazione delle fibre su strutture tendinee tra campioni di soggetti giovani e anziani, in cui non è emersa alcuna differenza di orientamento delle fibre di collagene tra i due gruppi di campioni [15].

1.4 Parte cellulare

Circa il 90% delle cellule dei tendini sono tenoblasti (fibroblasti) che con l'avanzare dell'età si trasformano in tenociti; la parte restante è invece composta da condrociti presso l'inserzione muscolo-ossea (che nel caso di sollecitazioni di compressione assumono una forma più rotonda [16]), cellule sinoviali sulle superfici tendinee, cellule vascolari come cellule endoteliali dei capillari e cellule muscolari lisce delle arteriole, cellule nervose, cellule staminali derivate dal tendine (TDSC) e cellule immunitarie [10], [17]. Inoltre, in caso di stati patologici si possono trovare molti altri tipi di cellule, ad esempio cellule infiammatorie o macrofagi [18].

1.4.1 Ruolo dei tenoblasti/tenociti

I tenoblasti sono situati tra le fibre di collagene e circondati dalla matrice pericellulare (PCM), questa formata da particolari proteine che creano un ambiente in cui è favorita l'interazione meccanica con le cellule. I tenoblasti hanno differenti morfologie: alcuni sono allungati, altri più rotondi, altri ancora poligonali, mentre nella trasformazione a tenociti assumono una forma ancor più allungata e fortemente allineata lungo la matrice [16]. La funzione di queste cellule è di produrre energia e di formare i costituenti della ECM, manifestando un metabolismo molto attivo soprattutto in forma di tenoblasti: tramite i microfilamenti citoplasmatici come microtubuli e filamenti di actina, sono in grado di adattare la loro forma e scambiare così forze con la matrice. L'aderenza delle cellule alla matrice avviene tramite recettori di superficie specializzati, tra i quali i più importanti sono le integrine [10], proteine transmembrana che si aggregano formando le adesioni focali tra cellula e PCM trasferendo così forze e segnali; altri recettori sono le ciglia primarie che sporgono dalle cellule e deflettono in risposta a carichi ciclici e le connessine che permettono la comunicazione elettrochimica tra le cellule [16]. Dunque, queste cellule fungono anche da meccanotrasduttori, grazie al fatto che sono in grado di percepire i carichi dalla PCM che andranno a impattare sull'espressione genica, quindi sulla modulazione stessa della matrice mediante l'attivazione di protein-chinasi e altre risposte biologiche [4]; oltre all'attivazione di segnali proteici, le forze meccaniche attivano anche i canali ionici per gli ioni Ca^{++} , in particolare con forze di stiramento la cui percezione sembra essere legata ai filamenti di actina cellulari [17]. Tuttavia, i fattori che rendono le condizioni di carico sane rispetto che dannose non sono ancora ben comprese, e a

peggiore ciò si aggiunge una scarsa capacità di riparazione del tendine, che inoltre non si rigenera allo stesso modo ma tende a formare strutture più disordinate [4].

1.5 Altri componenti della ECM

Diverse altre proteine sono presenti nella matrice tendinea con importanti funzioni di struttura e di invio di segnali. Sebbene la risposta meccanica sia principalmente governata dalle fibre di collagene specialmente riguardo rigidità e forza della struttura, gioca un ruolo importante anche l'elastina, soprattutto in merito alla resistenza a deformazioni multiassiali [19]. Una serie di proteoglicani e glicosamminoglicani (GAG) compongono la parte non-collagene di ECM, con effetti più o meno studiati sulle caratteristiche meccaniche del tendine [6].

1.5.1 Elastina

Come il collagene, l'elastina è una proteina strutturale ottenuta da splicing di un precursore ottenuto per sintesi proteica. È un elastomero, quindi un polimero in grado di subire una grossa deformazione e ritornare alla sua composizione originale; presenta un dominio idrofobico che si alterna con zone idrofiliche che possono contenere residui di lisina, tra i quali si creano i *crosslink* tra le catene che ne permettono di avere la memoria di forma. L'elastina rappresenta il principale componente nelle fibre elastiche, costituendone un cuore centrale amorfo a cui si legano altre proteine come i proteoglicani e i GAG presenti nei tendini [20].

Qui, le fibre elastiche hanno dimensioni comparabili a quelle di collagene, e ne seguono il pattern ondulato. Hanno concentrazioni più basse all'interno delle fibre di collagene e maggiori intorno ai tenociti e all'interno della IFM, con il ruolo principale di sostegno dei carichi, resistenza alle deformazioni e minimizzazione delle perdite di energia nella toe region [6]. Nei tendini che immagazzinano energia, la IFM contiene una maggiore quantità di elastina mostrando uno scorrimento delle fibre più recuperabile rispetto ai tendini posizionali: con IFM ricche di elastina si raggiunge un numero maggiore di cicli di fatica prima di arrivare a cedimento del tessuto [16].

È stato ipotizzato che per tendini e legamenti l'elastina diminuisca l'ondulazione delle fibre di collagene creando uno stato di pretensione tra le fibrille cui si va ad interporre, stabilizzandole; inoltre, il cambiamento di risposta meccanica in assenza di elastina nella toe region, combinato con l'assenza di differenze nelle proprietà di rottura, suggerisce l'importanza a minori deformazioni dell'elastina nella risposta e nella struttura laddove le fibre di collagene non risultano ancora totalmente allineate, unitamente alla preponderanza dell'effetto delle fibre di collagene ad alte deformazioni [21]. È stato inoltre studiato come l'elastina stabilizzi questi tessuti non soltanto in direzione assiale agendo come un materiale isotropo trasversale, ma anche nelle altre direzioni agendo come una matrice isotropa che fornisce resistenza globale alle deformazioni multiassiali grazie alla conformazione disordinata della rete crosslinkata, conferendo un'eccezionale durata in vivo [19]. Per ultimo, legando con i GAG, l'elastina ne determina notevolmente il contenuto nella ECM; dunque, anche in questo modo potrebbe influire sulle caratteristiche meccaniche del tessuto, ad esempio mediante la ritenzione idrica dovuta all'idrofilicità dei GAG che causa un ingrossamento delle fibre, quindi un aumento della deformazione a rottura [22].

1.5.2 Proteoglicani e glicoproteine

I GAG sono dei polisaccaridi lineari con unità disaccaridiche che presentano spesso dei gruppi solfato o gruppi carbossilici che ne determinano la tipica caratteristica di carica negativa; questi si vanno a legare covalentemente a una proteina formando i proteoglicani, attraverso un ponte tetrasaccaridico tra GAG e un residuo di serina della catena amminoacidica. Le funzioni principali dei proteoglicani sono quelle di organizzatori tissutali della ECM e di influenza di attività cellulari, ad esempio promuovendo l'adesione tra due cellule diverse: i GAG delle catene infatti, per mezzo della forte carica negativa e della loro conformazione strutturale, riescono a creare interazioni con le macromolecole del tessuto; inoltre questa negatività conferisce l'idrofilicità che attrae molecole d'acqua nel tessuto, rendendolo così più idratato e più resistente a carichi di compressione [23].

Le glicoproteine sono invece macromolecole costituite per la maggior parte da una frazione proteica e per una minor parte da una frazione glicidica rappresentata da oligosaccaridi che presentano strutture ramificate, più piccole rispetto alle proteine; comparate ai proteoglicani, le glicoproteine hanno un peso molecolare minore e presentano differenze nel rapporto proteine-carboidrati e nei radicali glicidici. Un interessante sottogruppo di queste macromolecole sono le glicoproteine adesive, in quanto sembrano avere la proprietà di legare altre macromolecole oppure superfici cellulari [18].

Proteoglicani e glicoproteine costituiscono meno del 5% del peso a secco dei tendini, nei quali si trovano come filamenti regolarmente e ortogonalmente attaccati alle fibrille di collagene. Qui svolgono diverse funzioni come regolazione di fibrillogenasi, crescita cellulare e risposta immunitaria, funzioni che quindi sono più marcate su tessuti in via di sviluppo e che ne spiegano la maggior concentrazione rispetto ai tendini maturi [6][10]. Sebbene si sia a conoscenza di numerose di queste macromolecole presenti nelle ECM tendinee, le loro funzioni rimangono ancora oggetto di studio:

- decorine, tra le più abbondanti, insieme a biglicani, lumicani e fibromoduline, sono piccoli proteoglicani che presentano ripetizioni di leucina (small leucine-rich proteoglycan, SLRP) che si trovano nelle IFM e formano ponti GAG che uniscono le fibrille adiacenti mediante interazioni non covalenti; potrebbero in questo modo modulare la meccanica delle fibrille, possibilmente anche regolandone il diametro che si pensa possa essere correlato positivamente al loro modulo elastico [6][23]. Le decorine sembrano anche essere associate all'allineamento e orientamento delle fibrille e ne facilitano lo scorrimento durante le deformazioni, evitandone in fase di sviluppo la fusione laterale [10];
- aggregani, proteoglicani con più di 100 GAG (legati qui con ponte trisaccaridico), svolgono un ruolo cruciale nella meccanica della compressione: attraggono acqua all'interno del tessuto che contribuisce a mantenere la capacità del tessuto di sopportare le forze compressive, garantendo la loro funzione nei processi di assorbimento degli urti nelle articolazioni [6], [23];
- lubrificina, glicoproteina responsabile della lubrificazione, è presente in grandi quantità presso l'epitenonio soprattutto su tendini sottoposti a taglio e compressione, ma in minor quantità anche presso l'endotenonio a livello della IFM, riducendo probabilmente la frizione interfascicolare [6];
- tenascina-C, isomero della generica tenascina che è una glicoproteina ad alto peso molecolare della ECM, mostra una concentrazione maggiore in tessuti in fase di crescita o

di riparazione, dimostrando di svolgere un ruolo importante nel recupero del tessuto tendineo tramite un effetto de-adesivo che potrebbe consentire alle cellule di riorganizzarsi più liberamente, favorendo una riorganizzazione controllata del tessuto [7], [20];

- proteina oligomerica della matrice cartilaginea (COMP), ossia la trombospodina-5 (le trombospodine sono un gruppo di 5 glicoproteine modulari ciascuna codificata da un gene separato [20]), probabilmente è assieme alla decorina il glicocongiugato più abbondante nei tendini [7] e serve a stabilizzare le fibrille di collagene interagendo anche con i proteoglicani già descritti [6]. È stato trovato su tessuti equini e bovini un contenuto di COMP più alto nel tendine flessore digitale, tessuto di accumulo energetico, rispetto al tendine estensore digitale degli stessi che è invece un tessuto posizionale; ciò suggerisce che il COMP possa avere un ruolo sia meccanico nella risposta ai carichi tensili che metabolico come componente della risposta di guarigione del tessuto [6], [24];
- cheratocani, altre SLRP, agiscono analogamente ai lumicani nella fibrillogenesi tendinea, probabilmente impattando sulla limitazione del diametro delle fibre [25];
- perlecani, sono proteoglicani presenti nelle membrane basali delle aree in cui le cellule non connettive incontrano i tessuti connettivi [23]. Hanno la funzione di reclutamento cellulare nella genesi del tessuto, e l'accumulo su tendini danneggiati sembra favorire i processi di riparazione e rimodellamento della matrice tendinea [26];
- versicani, grandi proteoglicani che sono simili agli aggregani ma con minori GAG a esso legati [23], e come essi si pensa possano avere un'importanza meccanica e strutturale grazie alla loro idratazione. Sono stati infatti rilevati nella PCM dei tendini, e in particolare è risultato un aumento della loro produzione nei tenociti in condizioni di assenza di carico che porta all'espansione e all'aumento della viscoelasticità della matrice. Oltretutto, i versicani influiscono direttamente sulla tensione esercitata dal citoscheletro, modulando così la comunicazione cellulare [27];
- fibronectina e laminina, due grandi glicoproteine multidominio (quest'ultimo che ne permette l'interazione con molte strutture) presenti in molte ECM [20], sono state rilevate anche nelle matrici dei tendini [7], ove però non sembrano esserne state ben chiarite le funzioni: in uno studio sui tendini d'Achille [28] si associa la presenza di queste proteine al danneggiamento delle membrane basali, che normalmente separano dai tessuti connettivi, in cui queste proteine sono maggiormente presenti;
- osteoadherina, opticani, epificani, sindicani, agrina sono altri proteoglicani e glicoproteine rilevate nei tendini [7].

1.5.3 Componenti inorganici

La parte inorganica costituisce lo 0,2% circa del peso a secco del tendine, e comprende principalmente il calcio, già visto per lo scambio di segnali tra cellule ma importante anche nello sviluppo delle giunzioni osteo-tendinee. Altre componenti sono: rame per la formazione di collegamenti tra le fibre di collagene (anche se sembra avere più effetto per arrangiamenti fibrillari disordinati come quelli ossei e meno per quelli ordinati come i tendinei [29]), il manganese per la sintesi di molecole del tessuto connettivo, magnesio che in alte concentrazioni inibisce la calcificazione della matrice da parte delle TDSC [30] e zinco che ne induce la differenziazione (la proteina EGR1 contiene una struttura detta *zinc finger*, contenente atomi di zinco, che le permette di regolare l'espressione genica) [31], cadmio, cobalto, nichel, litio, piombo, fluoruri, fosforo e silicene [18].

2 Meccanica del continuo a grandi deformazioni

In questo testo viene utilizzata la “meccanica del continuo” per caratterizzare il comportamento dei tendini. Lo studio del “sistema microscopico”, ossia delle interazioni subatomiche, atomiche e molecolari, sebbene sia molto importante per caratterizzare tutta la grande varietà di fenomeni fisici, spesso risulta scomodo per una descrizione matematica di questi. Ci affidiamo allora alla meccanica del continuo, approccio di studio potente ed efficace che permette, attraverso uno studio che viene sviluppato da principi generali e ben conosciuti quali cinematica, stato di tensione e principi di bilancio, di ottenere delle equazioni che spieghino i fenomeni fisici applicabili ad ogni classe di materiale, indipendentemente dalla sua struttura fisica interna. Si utilizza infatti la nozione di “particella” o “punto materiale” che rappresenta l’accumulo di un gran numero di molecole in una dimensione molto più grande degli spazi intermolecolari, così da poterla approssimare ad una particella continua caratterizzata da grandezze macroscopiche; questa però è anche piccola abbastanza da catturare elevati gradienti e riflettere alcuni effetti microstrutturali, rappresentando così la prima interfaccia del nostro sistema con la natura [32].

La meccanica del continuo unisce meccanica dei solidi, meccanica dei fluidi, termodinamica e principi di trasferimento di calore [33], tutti aspetti chiave dell’ingegneria ed in particolare della bioingegneria, dove a differenza di altre specializzazioni non è possibile ridurre il comportamento di un oggetto fisiologico a quello ideale, o per lo meno la percentuale di errore sarebbe così inaccettabile da renderne inutile tale modellizzazione. Nel caso in questione, non è possibile ridurre il comportamento di un tendine, che collega il muscolo alle ossa trasmettendone la forza, a quello di un collegamento rigido o perfettamente elastico, al pari delle aste per lo studio della trasmissione del moto.

In questo Capitolo quindi, partendo dagli strumenti principali della meccanica per grandi deformazioni, si sviluppano modelli iperelastici ai quali viene poi applicata la dissipazione viscosa. Questa teoria permette di fare previsioni del comportamento reale del materiale soggetto a generici stati di tensione e di deformazione; tuttavia, risulta difficile cogliere con massima accuratezza la risposta dei materiali biologici, in quanto sono caratterizzati da una varietà di fenomeni, ad esempio interazioni tra diverse strutture interne (si pensi alla natura multi-composita del tendine) o micro-danneggiamenti, che ne determinano un comportamento di tipo non lineare. La sfida è dunque trovare modelli costitutivi in grado di approssimare tutta questa serie di fenomeni attraverso un’analisi macroscopica.

Nei seguenti Paragrafi sarà utilizzata la convenzione secondo cui i vettori e le matrici vengono riportati in grassetto, in modo da differenziarli dai valori scalari che invece non saranno in grassetto.

2.1 Tensori di deformazione

2.1.1 Gradiente di deformazione

Siano, in un sistema di assi ortonormali $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, $\mathbf{X}$ il vettore posizione di un generico punto materiale di un corpo continuo nella configurazione iniziale Ω_0 , che viene denominato “coordinata materiale” (o “di riferimento”), e $\mathbf{x}$ il vettore posizione dello stesso punto materiale

del corpo continuo nella configurazione modificata (il che vuole dire traslata, ruotata e deformata) dello stesso corpo Ω , che viene denominata “coordinata spaziale” [32].

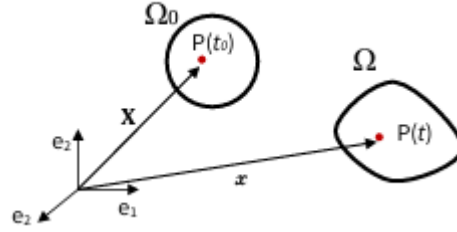


Figura 3: Rappresentazione schematica del moto di un corpo continuo [34].

Si definisce dunque la “funzione di spostamento”:

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) = \mathbf{x}(\mathbf{X}) - \mathbf{X} \quad (1)$$

Essa è una funzione continua, biettiva e differenziabile che definisce un vettore che riferisce la coordinata spaziale rispetto a quella materiale.

Si consideri un secondo punto sia nella configurazione iniziale che modificata, in modo da descrivere come cambia la distanza tra questi due punti, che altro non è che la deformazione. Sia allora $\mathbf{X} + d\mathbf{X}$ la posizione del secondo punto materiale in Ω_0 e $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ la posizione del secondo punto materiale in Ω . Il vettore spostamento di questo secondo punto materiale è:

$$\mathbf{u}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}) = (\mathbf{x} + d\mathbf{x}) - (\mathbf{X} + d\mathbf{X}) \quad (2)$$

Isolando $d\mathbf{x}$:

$$d\mathbf{x} = d\mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}) - \mathbf{x} + \mathbf{X} \quad (3)$$

Che per la eq. (1) diventa:

$$d\mathbf{x} = d\mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}) - \mathbf{u}(\mathbf{X}) \quad (4)$$

La differenza tra un vettore, in questo caso $\mathbf{u}$, misurato nelle posizioni $\mathbf{X} + d\mathbf{X}$ e $\mathbf{X}$, viene definita come il “gradiente del vettore” $\nabla \mathbf{u}$ (oppure $\text{grad}(\mathbf{u})$) che opera su $d\mathbf{X}$ [35]; la eq. (4) diventa quindi:

$$d\mathbf{x} = d\mathbf{X} + \nabla \mathbf{u} d\mathbf{X} \quad (5)$$

Il gradiente di un vettore è definito come un tensore del secondo ordine [35], quindi una matrice; si possono allora raggruppare gli addendi come di seguito:

$$d\mathbf{x} = (\nabla \mathbf{u} + \mathbf{I}) d\mathbf{X} \quad (6)$$

Si introduce quindi il “gradiente di deformazione” $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{F} = (\nabla \mathbf{u} + \mathbf{I}) \quad (7)$$

Applicando la eq. (7) alla eq. (6) si ottiene la relazione che lega, attraverso il gradiente di deformazione, la variazione della distanza che si ha tra due generici punti di un corpo continuo che cambia la sua conformazione:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X} \quad (8)$$

La eq. (8) matematicamente definisce una mappa lineare che genera il “vettore segmento infinitesimo spaziale” attraverso l’azione del tensore del secondo ordine gradiente di deformazione sul “vettore segmento infinitesimo materiale” [32]. $\mathbf{F}$ contiene tutte le informazioni riguardo i cambi locali di lunghezza, volume e angolo tra i punti del corpo continuo secondo la deformazione ottenuta dal cambio di configurazione [36].

È possibile dunque definire anche il gradiente di deformazione inverso $\mathbf{F}^{-1}$ che genera il vettore segmento infinitesimo materiale agendo su quello spaziale in maniera esattamente inversa [32]:

$$d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1}d\mathbf{x} \quad (9)$$

2.1.2 Determinante jacobiano

Un importante utilizzo del gradiente di deformazione è dato dal fatto che esso specifica quanto il volume varia con un cambio di conformazione attraverso il suo determinante, definito “determinante jacobiano”:

$$J = \det(\mathbf{F}) \quad (10)$$

In pratica, dato dV volume infinitesimo appartenente a Ω_0 chiamato “elemento di volume materiale” e dv lo stesso volumetto deformato in Ω chiamato “elemento di volume spaziale” [32], la relazione tra i volumetti è data proprio dal determinante jacobiano:

$$dv = JdV \quad (11)$$

Dunque, se $J = \det(\mathbf{F}) = 1$ la deformazione è isocorica (a volume costante) [33]. Poiché $\mathbf{F}$ è invertibile si ha $J \neq 0$, e dato che non si possono ottenere volumi negativi (impenetrabilità della materia) si rifiutano i valori negativi di J , sebbene siano matematicamente possibili; quindi:

$$J > 0 \quad (12)$$

Si consideri adesso come varia l’elemento superficie. Il vettore superficie è dato dallo scalare della superficie infinitesima che moltiplica il vettore unitario normale alla superficie:

$$d\mathbf{s} = ds\mathbf{n} \quad (13)$$

$$d\mathbf{S} = dS\mathbf{N} \quad (14)$$

Dove $\mathbf{n}$ e $\mathbf{N}$ sono le normali alle superfici rispettivamente della configurazione iniziale e della configurazione modificata. Il volume infinitesimo può essere ottenuto come prodotto scalare tra vettore superficie infinitesima e vettore linea infinitesima. Utilizzando la eq. (11) si ha:

$$d\mathbf{s} \cdot d\mathbf{x} = Jd\mathbf{S} \cdot d\mathbf{X} \quad (15)$$

Utilizzando la eq. (8) si ottiene:

$$d\mathbf{s} \cdot (\mathbf{F}d\mathbf{X}) = Jd\mathbf{S} \cdot d\mathbf{X} \quad (16)$$

$$\mathbf{F}^T d\mathbf{s} \cdot d\mathbf{X} - Jd\mathbf{S} \cdot d\mathbf{X} = 0 \quad (17)$$

$$(\mathbf{F}^T d\mathbf{s} - Jd\mathbf{S}) \cdot d\mathbf{X} = 0 \quad (18)$$

Dunque, essendo la eq. (18) valida per qualsiasi segmento infinitesimo $d\mathbf{X}$, si ottiene:

$$ds = J\mathbf{F}^{-T}d\mathbf{S} \quad (19)$$

La eq. (19) è chiamata “formula di Nanson” ed esprime la variazione di un elemento infinitesimo di superficie dovuto al cambio di conformazione del corpo continuo [32].

Per ultimo, si applichi al determinante jacobiano questa nota proprietà secondo cui se un generico tensore del secondo ordine $\mathbf{A}$ è invertibile, allora [32]:

$$\frac{\partial \det(\mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}} = \det(\mathbf{A})\mathbf{A}^{-T} \quad (20)$$

Applicando la eq. (20) al gradiente di deformazione, cioè sostituendo al generico tensore $\mathbf{A}$ il tensore $\mathbf{F}$, si ottiene insieme alla eq. (10):

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{F}} = J\mathbf{F}^{-T} \quad (21)$$

Il gradiente di deformazione presenta alcune caratteristiche che lo rendono meno pratico per lo sviluppo del modello costitutivo, come ad esempio il fatto che non sia simmetrico o che sia sensibile a un cambio conformazione di pura rotazione (cioè senza deformazione) [34]. Infatti, come già detto, $\mathbf{F}$ descrive il cambio di configurazione completo di un corpo e non soltanto la variazione della distanza tra i suoi punti interni, cioè non soltanto la deformazione ($\mathbf{F}$ trasforma semplicemente uno stesso elemento infinitesimo da prima a dopo un cambio di configurazione, come mostra la eq. (8)). Si costruiscono allora a partire dal gradiente di deformazione dei tensori di deformazione alternativi, tali da misurare solamente l’allungamento o la compressione di un corpo che cambia configurazione secondo $\mathbf{F}$ [32].

2.1.3 Tensore di deformazione Right Cauchy-Green

Come misura generale di deformazione, si consideri il cambio nel prodotto scalare tra due elementi infinitesimi $d\mathbf{X}_1$ e $d\mathbf{X}_2$ che nella nuova configurazione diventano $d\mathbf{x}_1$ e $d\mathbf{x}_2$. Questo cambio di configurazione causa infatti un cambio della distanza e dell’angolo compreso tra i due vettori [37]. Applicando l’eq (8) a tale prodotto scalare si ottiene:

$$d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{x}_2 = (\mathbf{F}d\mathbf{X}_1) \cdot (\mathbf{F}d\mathbf{X}_2) \quad (22)$$

$$d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{x}_2 = d\mathbf{X}_1 \cdot (\mathbf{F}^T \mathbf{F})d\mathbf{X}_2 \quad (23)$$

Si definisce così il tensore di deformazione “Right Cauchy-Green” $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad (24)$$

$$d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{x}_2 = d\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{C}d\mathbf{X}_2 \quad (25)$$

$\mathbf{C}$ rappresenta un’importante misura della deformazione riferita alle coordinate materiali. Il termine “right” nasce dal fatto che nella eq. (22) $\mathbf{F}$ (non trasposto) si trova sulla destra, e viene utilizzato per distinguere questo tensore dal tensore di deformazione “Left Cauchy-Green” $\mathbf{B}$ che viene ottenuto analogamente a quanto fatto qui ma esprimendo al contrario la configurazione modificata rispetto a quella di riferimento, cioè riferendo la deformazione alla configurazione modificata:

$$\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T \quad (26)$$

Si vedrà che lo stato di tensione verrà associato a una determinata configurazione; in questo testo si farà riferimento alla configurazione indeformata, per cui verrà utilizzata la convenzione

di destra. La differenza principale dal gradiente di deformazione sta nel fatto che il legame tra le due configurazioni avviene su due diversi elementi; inoltre, come già anticipato, $\mathbf{C}$ è un tensore simmetrico, e ciò rappresenta un'importante condizione in quanto permette di calcolarne gli "invarianti". Prima di descrivere ciò, è mostrata la stretta correlazione tra il determinante di $\mathbf{F}$ e di $\mathbf{C}$; poiché $\det(\mathbf{F}^T) = \det(\mathbf{F}) = J$, si ha:

$$\det(\mathbf{C}) = \det(\mathbf{F}^T \mathbf{F}) = \det(\mathbf{F}^T) \det(\mathbf{F}) = J^2 \quad (27)$$

L'eq. (27) mostra che il determinante di $\mathbf{C}$ è uguale al quadrato del determinante jacobiano, dunque è anch'esso un indice della variazione volumetrica indotta dalla deformazione.

2.1.4 Invarianti di deformazione

Gli invarianti di deformazione rappresentano dei valori scalari caratteristici per i tensori di deformazione, che non cambiano se il sistema di riferimento è soggetto a rotazioni; sono quindi indipendenti dalla base scelta e descrivono proprietà intrinseche della deformazione. Si definiscono dunque rispetto al tensore di deformazione Right Cauchy-Green [32]:

$$I_1(\mathbf{C}) = \text{tr}(\mathbf{C}) \quad (28)$$

$$I_2(\mathbf{C}) = \frac{1}{2} \left([\text{tr}(\mathbf{C})]^2 - \text{tr}(\mathbf{C}^2) \right) \quad (29)$$

$$I_3(\mathbf{C}) = \det(\mathbf{C}) = J^2 \quad (30)$$

Come si vedrà successivamente, gli invarianti di $\mathbf{C}$ risultano essere molto importanti per la formulazione della risposta del materiale, poiché consentono di avere formulazioni dei modelli iperelastici indipendenti dal sistema di riferimento. È importante notare che, poiché i tensori $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ sono "similari" ossia hanno gli stessi autovalori (conseguenza delle loro formulazioni, eq. (26) e eq. (24)), hanno gli stessi autovalori, dunque hanno anche gli stessi invarianti, pur essendo generalmente due tensori differenti [32].

La simmetria di $\mathbf{C}$ si dimostra facilmente sfruttando la proprietà secondo cui un tensore è simmetrico se risulta uguale al suo trasposto:

$$\mathbf{C}^T = (\mathbf{F}^T \mathbf{F})^T = \mathbf{F}^T (\mathbf{F}^T)^T = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{C} \quad (31)$$

La eq. (31) mostra ancora che il determinante di $\mathbf{C}$ è uguale al quadrato del jacobiano che, come visto nella eq. (11), rappresenta il cambiamento di volume dovuto al cambio di conformazione [32][37]. Si può notare che se $\mathbf{C} = \mathbf{I}$ la eq. (23) diventa $d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{x}_2 = d\mathbf{X}_1 \cdot d\mathbf{X}_2$, cioè lo scalare dei vettori spaziale e materiale risulta uguale, il che significa che il tensore non ha indotto alcuna deformazione e il cambio di configurazione consiste in un moto rigido [38]; ciò è in accordo con quanto appena visto detto sul determinante, infatti $\det(\mathbf{C}) = \det(\mathbf{I}) = 1$, ottenibile soltanto se $\det(\mathbf{F}) = \det(\mathbf{F}^T) = 1$ quindi se lo stato di deformazione non causa variazioni di volume.

2.1.5 Decomposizione polare del gradiente di deformazione

Considerando un certo gradiente di deformazione $\mathbf{F}$ che descrive una deformazione dalla configurazione iniziale a quella modificata, questo può essere decomposto in due moti locali, uno di pura deformazione $\mathbf{U}$ e uno di pura rotazione $\mathbf{R}$, secondo il Teorema di decomposizione polare [32]:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R} \quad (32)$$

Dove $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono due tensori simmetrici, definiti positivi e unici, chiamati rispettivamente “tensore di deformazione destro” e “tensore di deformazione sinistro” e definiti rispettivamente rispetto alla configurazione iniziale e rispetto alla configurazione modificata. Come fatto in precedenza, ci concentriamo soltanto sui tensori riferiti alla configurazione iniziale, utilizzando quindi il tensore di deformazione destro; questo tensore, secondo il Teorema della radice quadrata, è tale che:

$$\mathbf{U}^2 = \mathbf{U}\mathbf{U} = \mathbf{C} \quad (33)$$

E, dato che $\det(\mathbf{C}) = J^2$, è evidente che $\det(\mathbf{U}) = J$. La eq. (33) stabilisce un’importante caratteristica del tensore $\mathbf{C}$, ossia che, allo stesso modo del tensore $\mathbf{U}$, non è correlato alla rotazione rigida del corpo ma soltanto alla pura deformazione. Questa rappresenta un’ulteriore differenza dal tensore $\mathbf{F}$, che lo rende più pratico nell’utilizzo.

Il tensore $\mathbf{R}$ invece, anch’esso unico, è un tensore ortogonale proprio, ossia un tensore tale che $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$ e $\det(\mathbf{R}) = 1$, e rappresenta la rotazione pura del corpo. Detto ciò, se $\mathbf{R} = \mathbf{I}$ e $\mathbf{F} = \mathbf{U}$ si ha una deformazione pura che avviene senza rotazione, al contrario se $\mathbf{U} = \mathbf{I}$ e $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ si ha una rotazione rigida in assenza di deformazione [32].

2.1.6 Autovalori e autovettori dei tensori di deformazione

Poiché simmetrico, è possibile introdurre l’ortogonale set di autovettori ortonormali unitari $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$ e $\mathbf{N}_3$ e i corrispondenti autovalori λ_1, λ_2 e λ_3 del tensore $\mathbf{U}$ [32]:

$$\mathbf{U}\mathbf{N}_i = \lambda_i \mathbf{N}_i \quad i = 1,2,3 \quad (34)$$

Combinando la eq. (34) con la eq. (33) si ottengono gli autovalori di $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{C}\mathbf{N}_i = \mathbf{U}^2 \mathbf{N}_i = \lambda_i^2 \mathbf{N}_i \quad i = 1,2,3 \quad (35)$$

Chiaramente $\mathbf{C}$ e $\mathbf{U}$ hanno gli stesso autovettori ortonormali, che vengono chiamati “direzioni referenziali principali”. Comunque, i corrispondenti valori positivi e reali degli autovettori differiscono: gli autovalori di $\mathbf{U}$ sono λ_1, λ_2 e λ_3 , chiamati “stretch principali”, mentre gli autovalori di $\mathbf{C}$ sono uguali al quadrato degli stretch principali. Si noti che i tensori $\mathbf{F}$ e $\mathbf{R}$, poiché generalmente non simmetrici, non possiedono autovalori reali; bisogna dunque fare attenzione a non confondere gli stretch principali qui presentati come gli autovalori del gradiente di deformazione [32], [33].

Comunque, poiché autovalori di $\mathbf{U}$, è possibile scrivere:

$$\det(\mathbf{U}) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \det(\mathbf{F}) = J \quad (36)$$

Poiché come detto $\det(\mathbf{U}) = \det(\mathbf{F}) = J$. Ne consegue dalla eq. (36) che:

$$\det(\mathbf{C}) = J^2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \quad (37)$$

Dunque, è possibile rappresentare anche gli invarianti di deformazione, definiti dalle eq. (28), eq. (29) e eq. (30), in funzione degli stretch principali:

$$I_1(\mathbf{C}) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \quad (38)$$

$$I_2(\mathbf{C}) = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 \quad (39)$$

$$I_3(\mathbf{C}) = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \quad (40)$$

La rappresentazione in funzione degli stretch principali risulterà importante, ad esempio, per la trattazione di importanti modelli generali di iperelasticità.

2.1.7 Decomposizione dilazionale-distorcente dei tensori di deformazione

A differenza della decomposizione polare che divide $\mathbf{F}$ nelle sue parti di pura deformazione e pura rotazione, la decomposizione dilazionale-distorcente separa il contributo dovuto al cambiamento di volume da quello associato ai cambiamenti di forma a volume costante [32]:

$$\mathbf{F} = (J^{1/3} \mathbf{I}) \bar{\mathbf{F}} = J^{1/3} \bar{\mathbf{F}} \quad (41)$$

Il primo termine $J^{1/3} \mathbf{I}$ rappresenta la parte dilazionale di $\mathbf{F}$, mentre il secondo termine $\bar{\mathbf{F}}$, chiamato “gradiente di deformazione modificato”, ne rappresenta la parte distorsionale ed è definito dagli “stretch principali modificati”:

$$\bar{\lambda}_i = \frac{\lambda_i}{J^{1/3}} \quad i = 1, 2, 3 \quad (42)$$

Ossia pari agli stretch principali fratto $J^{1/3}$, in modo tale che risulti:

$$\det(\bar{\mathbf{F}}) = \bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 \bar{\lambda}_3 = 1 \quad (43)$$

In questo modo viene garantito per costruzione che il tensore $\bar{\mathbf{F}}$ sia esente da variazioni di volume. Come $\mathbf{F}$, è possibile decomporre anche il tensore di deformazione Right Cauchy-Green:

$$\mathbf{C} = (J^{2/3} \mathbf{I}) \bar{\mathbf{C}} = J^{2/3} \bar{\mathbf{C}} \quad (44)$$

Dove il primo termine $J^{2/3}$ è la parte dilazionale e il “tensore Right Cauchy-Green modificato” $\bar{\mathbf{C}}$ è la parte distorsionale definita come:

$$\bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{F}}^T \bar{\mathbf{F}} \quad (45)$$

Anche $\bar{\mathbf{C}}$ è simmetrico, con determinante unitario e quindi caratterizzato da cambiamento di volume nullo; i suoi invarianti sono anch’essi “invarianti modificati” definiti come:

$$\bar{I}_1(\bar{\mathbf{C}}) = \text{tr}(\bar{\mathbf{C}}) = J^{-2/3} I_1(\mathbf{C}) \quad (46)$$

$$\bar{I}_2(\bar{\mathbf{C}}) = \frac{1}{2} (\bar{I}_1^2 - \bar{\mathbf{C}} : \bar{\mathbf{C}}) = J^{-4/3} I_2(\mathbf{C}) \quad (47)$$

$$\bar{I}_3(\bar{\mathbf{C}}) = \det(\bar{\mathbf{C}}) = 1 \quad (48)$$

Quanto visto fino ad ora è valido per qualsiasi stato di deformazione e di materiale, la cui unica restrizione consiste nell’avere un determinante jacobiano strettamente positivo, come definito dalla eq. (12) [32].

2.2 Tensori di sforzo

Le deformazioni danno origine a interazioni all’interno di un corpo continuo tra un generico volume di materiale e il materiale che gli sta attorno. È generalmente accettato che queste interazioni avvengono tra le particelle che compongono la materia; tuttavia, sotto le ipotesi della meccanica del continuo discusse all’inizio di questo capitolo, assumiamo una materia continuamente distribuita, per cui ogni punto all’interno del corpo scambia delle forze che rendono necessario introdurre il concetto di sforzo.

2.2.1 Tensore di sforzo Cauchy

Consideriamo l'elemento di superficie infinitesima della configurazione modificata ds (intesa come area, modulo) con normale $\mathbf{n}$, che abbia posizione $\mathbf{x}$ nel sistema di riferimento corrente. Per quanto detto sopra, questa superficie è soggetta ad una forza $d\mathbf{f}$: possiamo ricavare allora il “vettore trazione Cauchy (o reale)” $\mathbf{t}$ che rappresenti la forza misurata per unità di superficie della configurazione modificata:

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{f}}{ds} \quad (49)$$

Questo vettore risulta dunque dipendente sia dalla posizione $\mathbf{x}$ che dall'orientamento della superficie quindi dalla normale $\mathbf{n}$. Tuttavia, secondo il Teorema dello sforzo di Cauchy esiste un unico tensore del secondo ordine $\boldsymbol{\sigma}$ tale per cui:

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \quad (50)$$

$\boldsymbol{\sigma}$ denota un campo tensoriale chiamato “tensore di sforzo Cauchy (o reale)”, il quale risulta simmetrico sotto l'assunzione che le coppie risultanti siano trascurate (anche in condizioni di conservazione del momento angolare, da cui si ottiene la simmetria del tensore, in sistemi con microstrutture complesse può risultare un momento angolare per unità di area non nullo, causando effetti che richiedono un'estensione della teoria della meccanica del continuo classica [39], [40]). Il tensore di sforzo Cauchy caratterizza completamente le forze interne che agiscono in un solido deformato, e i suoi componenti σ_{ij} rappresentano le componenti di trazione in direzione $\mathbf{e}_j$ che agisce nel piano con la normale in direzione $\mathbf{e}_i$ [34].

2.2.2 Primo tensore Piola-Kirchhoff

Ci sono diverse situazioni, ad esempio quando un corpo è soggetto a larghe deformazioni, dove risulta più conveniente formulare le equazioni del moto rispetto alla configurazione iniziale piuttosto che rispetto alla configurazione modificata [34], poiché non cambiando nel tempo permette di lavorare su di un dominio fisso (utile ad esempio per i software FEM) e le derivate materiali delle grandezze si riducono a derivate parziali nel tempo.

Immaginiamo un corpo deformato come in Figura 4:

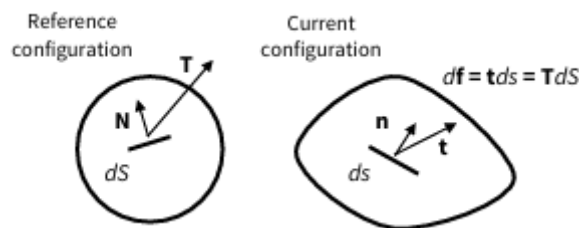


Figura 4: Corpo soggetto a trazione [34].

Mentre il vettore trazione Cauchy $\mathbf{t}$ rappresenta effettivamente la forza per unità di area nella configurazione modificata, $\mathbf{T}$ rappresenta la forza che agisce nella configurazione modificata divisa per l'area nella configurazione iniziale di riferimento:

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{f}}{dS} \quad (51)$$

$\mathbf{T}$ viene chiamato “primo vettore trazione Piola-Kirchhoff” e non assume alcun significato fisico. Anche questo vettore risulta dipendere sia dalla posizione $\mathbf{X}$ che dall’orientamento della superficie quindi dalla normale $\mathbf{N}$, e analogamente a quanto fatto per il vettore trazione Cauchy, secondo il Teorema dello sforzo di Cauchy esiste un unico tensore del secondo ordine $\mathbf{P}$ tale per cui:

$$\mathbf{T} = \mathbf{P}\mathbf{N} \quad (52)$$

$\mathbf{P}$ viene chiamato “primo tensore degli sforzi Piola-Kirchhoff”, e denota un campo tensoriale in cui per ogni elemento un indice descrive le coordinate iniziali e l’altro le coordinate modificate. Dalle eq. (49) e eq. (51), isolando $d\mathbf{f}$ per entrambe, otteniamo la seguente relazione che lega i due tensori degli sforzi:

$$\mathbf{t}ds = \mathbf{T}dS \quad (53)$$

Sostituendo le eq. (50) e eq. (52):

$$\boldsymbol{\sigma}nds = \mathbf{P}NdS \quad (54)$$

Utilizzando la eq. (19) (formula di Nanson) possiamo dunque scrivere $\mathbf{P}$ nella forma seguente:

$$\mathbf{P} = J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T} \quad (55)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1}\mathbf{P}\mathbf{F}^T \quad (56)$$

Il passaggio da $\boldsymbol{\sigma}$ a $\mathbf{P}$ e viceversa viene chiamato “trasformazione di Piola”. Dato che il tensore degli sforzi Cauchy è simmetrico quindi $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$, è implicito che $\mathbf{P}\mathbf{F}^T = \mathbf{F}\mathbf{P}^T$: dunque, poiché $\mathbf{F}$ è generalmente non simmetrico, il tensore $\mathbf{P}$ è anch’esso in generale non simmetrico e presenta nove diverse componenti [32].

È possibile anche definire il “secondo tensore degli sforzi Piola-Kirchhoff” $\mathbf{S}$:

$$\mathbf{S} = J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{P} \quad (57)$$

Questo tensore risulta essere simmetrico, pertanto è molto più agevole da utilizzare nello sviluppo delle formulazioni matematiche. Tuttavia, in questo testo ci si concentra sull’utilizzo del primo tensore, che è quello utilizzato nella formulazione viscoelastica a cui si fa riferimento. In generale, è meglio considerare questi tensori alternativi come forze generalizzate e coniugate al lavoro rispetto a particolari misure di deformazione, prestando attenzione al significato fisico di queste misure di stress [34].

2.3 Iperelasticità e funzione di energia di deformazione

Per determinare la risposta del materiale, insieme alle equazioni trattate fino ad ora che risultano valide generalmente per qualsiasi corpo continuo, bisogna introdurre equazioni aggiuntive nella forma di appropriate leggi costitutive fornite per specificare il materiale in questione, tali che approssimino il comportamento fisico reale del materiale osservato in certe condizioni. Per modello costitutivo si intende dunque un set di equazioni che lega le tensioni alle deformazioni, in maniera dipendente o indipendente dal tempo, in modo da determinare lo stato delle tensioni per qualsiasi punto del corpo continuo. Così, diversi corpi continui avranno necessariamente diverse leggi costitutive, e ciò vale anche tra corpi meccanici solidi e fluidi, i quali condividono le stesse equazioni di campo e che si distingueranno soltanto sulle equazioni costitutive [32], [34].

2.3.1 Iperelasticità

I materiali il cui comportamento è funzione soltanto dello stato corrente di deformazione vengono definiti “elastici”. Nel caso particolare in cui il lavoro compiuto dalle tensioni durante una deformazione dipenda soltanto dalle configurazioni iniziale e finale, il comportamento del materiale si dice essere indipendente dal percorso compiuto e viene definito “iperelastico” [34]. Come conseguenza di questo particolare comportamento è possibile definire una funzione di energia immagazzinata chiamata “funzione di energia libera di Helmholtz” Ψ ; inoltre, nel caso in cui $\Psi = \Psi(\mathbf{F})$ è funzione soltanto del gradiente di deformazione, la funzione di energia libera di Helmholtz è conosciuta come “funzione di energia di deformazione” [32]. Questa funzione, definita per unità di volume nella configurazione iniziale, rappresenta dunque il lavoro svolto dalle tensioni per passare dalle posizioni dei punti del corpo nella configurazione iniziale alle posizioni degli stessi nella configurazione modificata:

$$\Psi(\mathbf{F}) = \int_{t_0}^t \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} dt \quad (58)$$

$$\frac{d\Psi}{dt} = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} \quad (59)$$

Ψ è una funzione scalare positiva che ha come minimo globale il valore $\Psi(\mathbf{I}) = 0$ in corrispondenza di un gradiente di deformazione pari alla matrice identità $\mathbf{F} = \mathbf{I}$; è importante il concetto di “policonvessità” di questa funzione, il quale postula la teoria dell’esistenza globale delle soluzioni. $\mathbf{P}$ è il primo tensore delle tensioni Piola-Kirchhoff visto nel paragrafo precedente, che infatti collega la configurazione iniziale con quella modificata analogamente a quanto fa Ψ per il calcolo del lavoro.

Nelle eq. (58) e eq. (59) si ha il “prodotto interno” tra $\mathbf{P}$ e $\dot{\mathbf{F}}$, detto anche “prodotto scalare della contrazione”: esso restituisce uno scalare definito da [32], [33]:

$$\mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} = \text{tr}(\mathbf{P}\dot{\mathbf{F}}^T) = \text{tr}(\mathbf{P}^T\dot{\mathbf{F}}) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 P_{ij}\dot{F}_{ij} \quad (60)$$

Dato che possiamo anche scrivere, per il generico elemento F_{ij} :

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{\partial \Psi}{\partial F_{ij}} \frac{\partial F_{ij}}{\partial t} \quad \begin{matrix} i = 1,2,3 \\ j = 1,2,3 \end{matrix} \quad (61)$$

Confrontando le eq. (59) e eq. (61) otteniamo l’espressione del primo tensore delle tensioni Piola-Kirchhoff in funzione della funzione di energia di deformazione:

$$\mathbf{P} = \frac{d\Psi}{d\mathbf{F}} \quad (62)$$

Dunque, la derivata della funzione scalare Ψ rispetto al tensore $\mathbf{F}$ cioè il gradiente di Ψ , risulta coincidere con il tensore $\mathbf{P}$ (si dice che $\mathbf{P}$ è il lavoro della forza termodinamica coniugata a $\mathbf{F}$). Utilizzando la eq. (56) possiamo scrivere il tensore delle tensioni Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ in funzione della funzione di energia di deformazione:

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^T = J^{-1} \mathbf{F} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{F}} \right)^T \quad (63)$$

Possiamo vedere da queste equazioni che la risposta tensionale del materiale iperelastico deriva da una data funzione scalare di energia, e ciò implica che l'iperelasticità ha una struttura conservativa [32], [34].

2.3.2 Forme equivalenti di funzione di energia di deformazione

È stato visto nel Paragrafo 2.1.5 che la parte di rotazione $\mathbf{R}$ del gradiente di deformazione $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$ non contribuisce alla deformazione del corpo continuo. Assumiamo adesso che la funzione di energia di deformazione Ψ sia “obiettiva”, cioè che, dopo una traslazione e una rotazione del materiale nello spazio attraverso un “moto rigido sovrapposto”, la quantità di energia immagazzinata rimane invariata. Se questa condizione è rispettata, allora Ψ risulta indipendente da $\mathbf{R}$ ed è dunque possibile scriverla in funzione del solo tensore $\mathbf{U}$. Di conseguenza, dato che $\mathbf{U}$ è strettamente correlato a $\mathbf{C} = \mathbf{U}\mathbf{U}$ come si può vedere dalle eq. (33), si può esprimere Ψ anche in funzione di questo ultimo tensore:

$$\Psi(\mathbf{F}) = \Psi(\mathbf{C}) \quad (64)$$

Essendo $\mathbf{C}$ simmetrico, anche il gradiente della funzione scalare Ψ rispetto a $\mathbf{C}$ sarà simmetrico; questo è legato al gradiente rispetto a $\mathbf{F}$ dalla seguente relazione [32]:

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{F}} \right)^T = 2 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T \quad (65)$$

Sostituendo la eq. (65) alla eq. (63) si ottiene un'importante forma ridotta di equazione costitutiva per materiali iperelastici:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2J^{-1} \mathbf{F} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T \quad (66)$$

Inoltre, confrontando la eq. (65) con la eq. (62) si ottiene un'espressione alternativa per il primo tensore delle tensioni Piola-Kirchhoff:

$$\mathbf{P}^T = 2 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T \quad (67)$$

$$\mathbf{P} = 2\mathbf{F} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}} \right)^T = 2\mathbf{F} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}} \quad (68)$$

Ottenuta in quanto il gradiente della funzione scalare Ψ rispetto a $\mathbf{C}$ è simmetrico, quindi uguale alla sua trasposta.

È importante notare che la eq. (64) specifica la condizione necessaria e sufficiente per cui Ψ sia obbiettiva durante un moto rigido sovrapposto. Questa condizione è vera per molti materiali reali, ma se per esempio Ψ descrive un materiale composito (come, di fatto, sono i tendini) allora l'uguaglianza non risulta più vera, poiché la funzione di energia di deformazione non è più rappresentabile solo in funzione di $\mathbf{C}$. Si vedrà come cambia la formulazione di Ψ per materiali con una particolare anisotropia, nel quale sarà possibile suddividere il comportamento tra componente isotropica e componente direzionale.

2.3.3 Rappresentazione disaccoppiata della funzione di energia di deformazione

Utilizzando la forma decomposta dei tensori di deformazione vista nel Paragrafo 2.1.7, la quale separa i contributi dilazionali e distorsionali, è possibile postulare la “rappresentazione disaccoppiata” della funzione di energia di deformazione [32]:

$$\Psi = \Psi_{vol}(J) + \Psi_{iso}(\bar{\mathbf{C}}) \quad (69)$$

Cioè Ψ viene divisa in due funzioni scalari e obiettive di J e di $\bar{\mathbf{C}}$, tali che $\Psi_{vol}(J) = 0$ e $\Psi_{iso}(\bar{\mathbf{C}}) = 0$ se e solo se $J = 1$ e $\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{I}$ rispettivamente. Il primo termine descrive la risposta volumetrica, mentre il secondo descrive la risposta al carico isocorico che non causa variazione di volume. Si vedrà come la scelta di trattare o meno l'energia del materiale secondo la rappresentazione disaccoppiata causa delle differenze nella formulazione dei carichi, ottenuti mediante la stessa funzione di energia di deformazione; si svolgeranno in entrambi i casi i passaggi matematici che portano da una generica formulazione di Ψ alla formulazione dei carichi espressi dal tensore $\mathbf{P}$, dopodiché si applicheranno entrambe le strategie a due diversi modelli iperelastici.

2.3.4 Iperelasticità isotropica

L'isotropia è una proprietà basata sull'idea che la risposta di un materiale ai carichi sia la stessa in tutte le direzioni. Come conseguenza di ciò, la sua risposta meccanica dipende solo dalla deformazione reale ossia dalla variazione delle distanze dei punti del corpo, mentre ruotarlo rigidamente non varia dal suo punto di vista. Ciò significa che un moto rigido sovrapposto non modifica l'energia immagazzinata e che Ψ è una funzione obiettiva: per quanto detto nel Paragrafo 2.3.1, per i materiali isotropi vale la eq. (64), mentre i materiali per cui la eq. (64) non è valida sono detti anisotropi.

È pertanto possibile restringere la funzione di energia di deformazione per i materiali isotropi che presentano questo comportamento, in quanto la sua relazione con il tensore di deformazione Right Cauchy-Green $\mathbf{C}$ deve essere indipendente dal sistema di riferimento. Infatti, se una funzione tensoriale a valori scalari (in questo caso Ψ) è invariante quando sottoposta a una rotazione (cioè la componente $\mathbf{U}$ del gradiente di deformazione $\mathbf{F}$, quindi anche a $\mathbf{C} = \mathbf{U}\mathbf{U}$), allora, per il Teorema di rappresentazione per invarianti valido per funzioni scalari isotropiche, sarà possibile rappresentare tale funzione in termini degli invarianti principali del suo argomento [32], [34]:

$$\Psi(\mathbf{C}) = \Psi(I_1(\mathbf{C}), I_2(\mathbf{C}), I_3(\mathbf{C})) \quad (70)$$

Dove I_1, I_2, I_3 sono gli invarianti di $\mathbf{C}$, definiti dalle eq. (28), eq. (29) e eq. (30) del Paragrafo 2.1.4.

Ci si focalizza adesso sulla derivata della funzione di energia di deformazione, che si è visto essere direttamente collegata alla misura degli sforzi legati alla deformazione del materiale. Assumendo che $\Psi(\mathbf{C})$ abbia derivata continua rispetto a tali invarianti principali, otteniamo [32]:

$$\frac{\partial \Psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial \Psi}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}} \quad (71)$$

Si possono ricavare le derivate dei tre invarianti rispetto a $\mathbf{C}$; la prima si ottiene dalla eq. (28) utilizzando la proprietà di contrazione doppia:

$$\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial \text{tr} \mathbf{C}}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial (\mathbf{I} : \mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{I} \quad (72)$$

La seconda si ottiene dalla eq. (29) applicando per la traccia di $\mathbf{C}$ la eq. (72) e utilizzando le proprietà per tensori del secondo ordine invertibili:

$$\frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} = \frac{1}{2} \left(2 \text{tr} \mathbf{C} \mathbf{I} - \frac{\partial \text{tr}(\mathbf{C}^2)}{\partial \mathbf{C}} \right) = I_1 \mathbf{I} - \mathbf{C} \quad (73)$$

La terza derivata si ottiene semplicemente applicando la proprietà per tensori del secondo ordine invertibili e ricordando che il tensore $\mathbf{C}$ è simmetrico quindi uguale al suo trasposto:

$$\frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}} = I_3 \mathbf{C}^{-1} \quad (74)$$

Sostituendo le derivate degli invarianti nella eq. (71) è possibile ottenere la forma generale di derivata di Ψ in funzione degli invarianti:

$$\frac{\partial \Psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \right) \mathbf{I} - \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \mathbf{C} + I_3 \frac{\partial \Psi}{\partial I_3} \mathbf{C}^{-1} \quad (75)$$

Questa rappresenta la forma più generale di derivata della funzione di energia di deformazione rispetto agli invarianti del tensore di deformazione $\mathbf{C}$; tramite la eq. (75) è possibile risalire al tensore delle tensioni $\mathbf{P}$ mediante la eq. (68), così come si potrebbe risalire alle altre rappresentazioni delle tensioni. Comunque, per i casi oggetto di questa tesi, saranno assunte delle semplificazioni che ridurranno la complessità di questa formulazione e del modello matematico.

2.3.5 Dipendenza dell'energia di deformazione da I_1 e I_2

È stato visto nel Paragrafo 2.3.4 che l'energia di deformazione immagazzinata per materiali isotropi dipende dagli invarianti I_1 , I_2 , e I_3 . L'influenza di I_1 , e di I_2 , sull'energia libera può essere studiata calcolando come questi invarianti dipendano dal grado di allungamento applicato in diverse modalità di carico. A scopo di esempio, consideriamo i gradienti di deformazione di un elastomero nel caso di deformazione uniassiale, puro shear e deformazione biassiale (i primi due stati sono descritti nel successivo Paragrafo 2.5, eq. (124) e eq. (131)) [33].

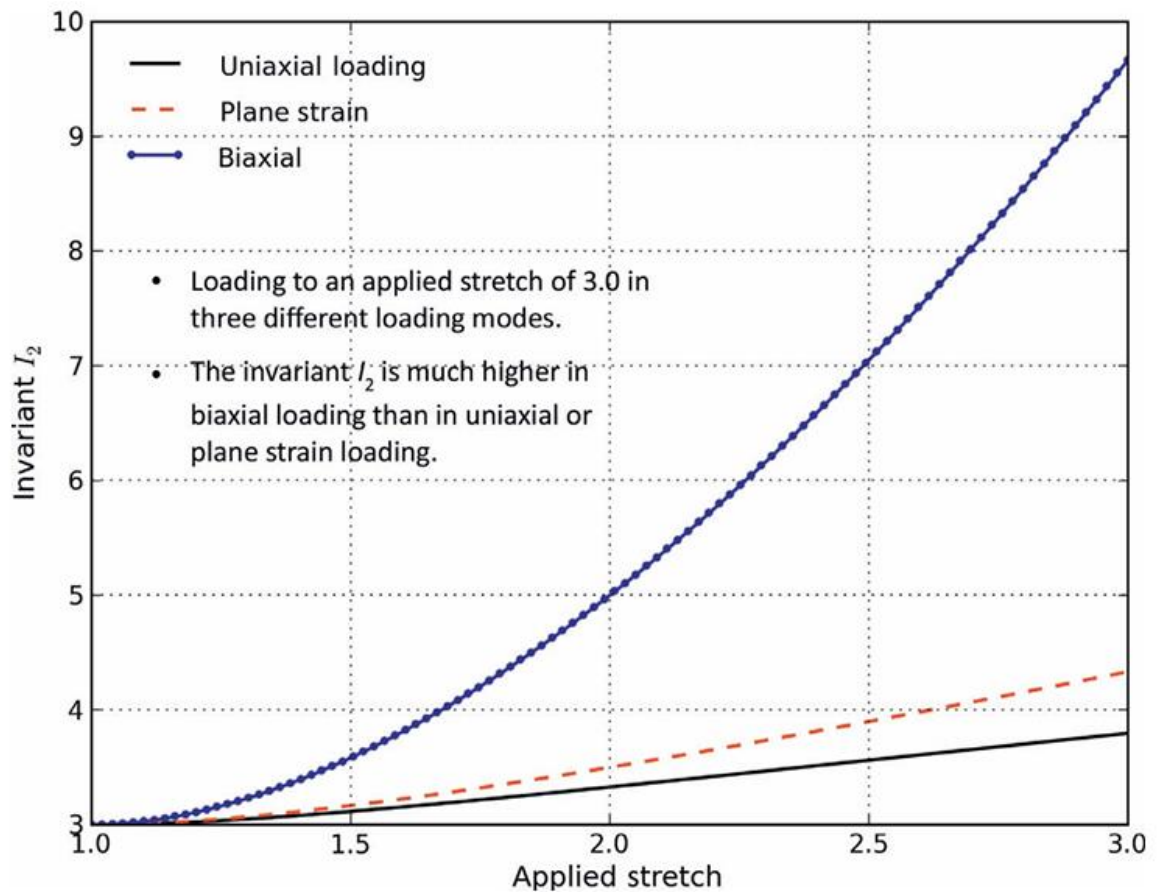


Figura 5: Comparazione tra i valori di I_2 nel caso di carichi uniassiali, di shear puro e di carichi biassiali, in funzione dello stretch applicato λ_1 [33].

L'andamento in Figura 5 mostra la variazione di I_2 , in funzione della deformazione applicata per i tre stati di deformazione. Si vede chiaramente che, rispetto alle prime due prove dove i valori mostrano un lieve aumento, nel caso di deformazione biassiale si ha un forte aumento del valore di I_2 .

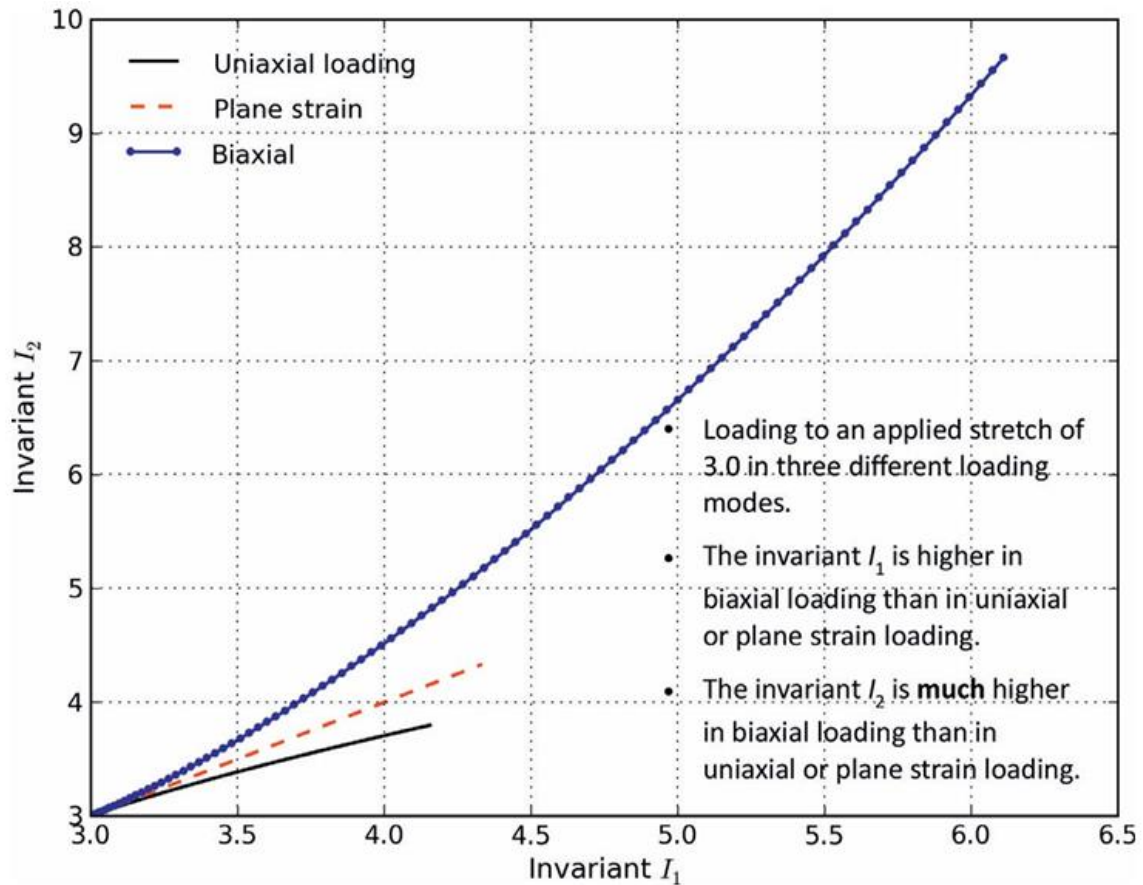


Figura 6: Comparazione tra i valori di I_2 nel caso di carichi uniassiali, di shear puro e di carichi biassiali, in funzione dell'invariante I_1 [33].

In Figura 6 la variazione di I_2 è invece rappresentata in funzione dell'invariante I_1 . Si può innanzitutto notare che i valori di I_1 sono anch'essi più alti in prove biassiali; ma nel caso di deformazioni biassiali, la pendenza maggiore della curva indica un maggiore rate di aumento di I_2 rispetto alle altre prove, molto simile al rate di aumento di I_1 . L'invariante I_2 è molto più alto delle altre due prove e mostra una variazione altrettanto significativa di quella di I_1 .

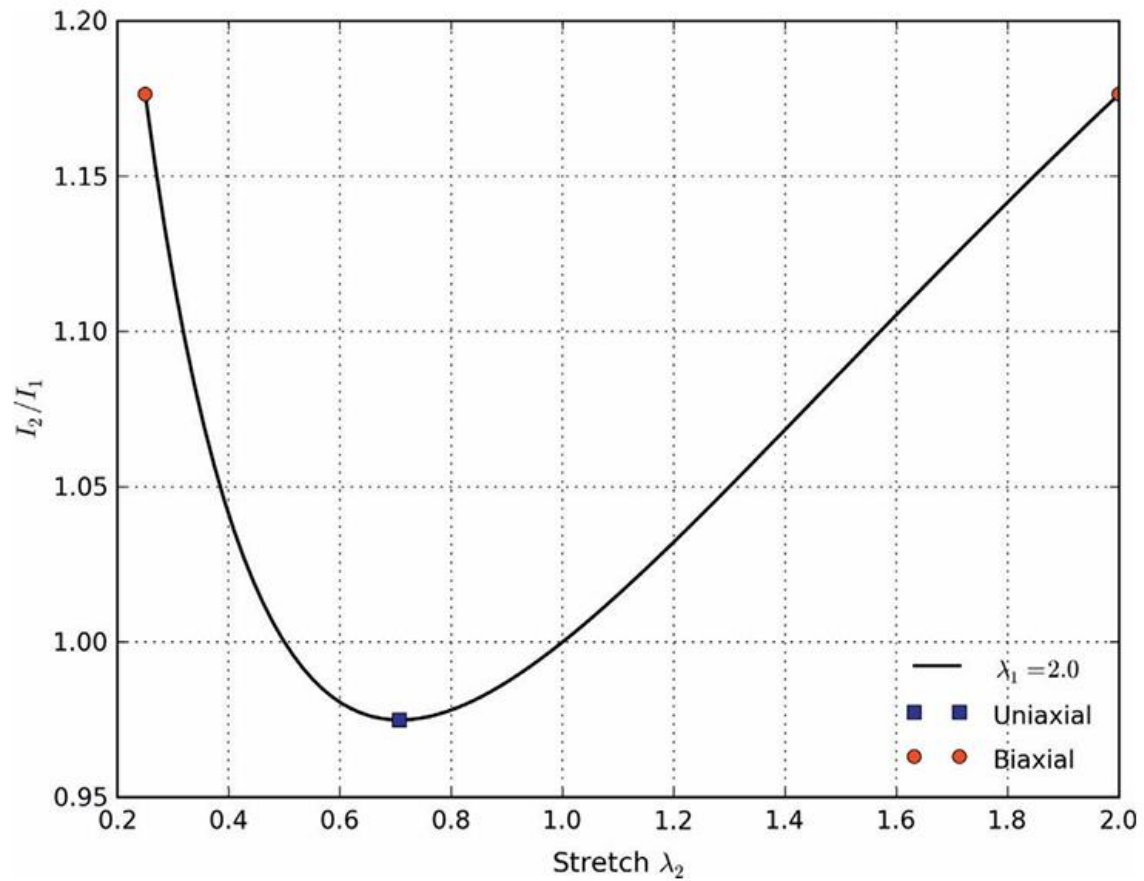


Figura 7: Valore normalizzato I_2/I_1 per tutte le modalità di carico, per materiali isotropi [33].

In Figura 7 è stato raffigurato il rapporto I_2/I_1 in funzione della deformazione applicata sulla seconda direzione λ_2 , avendo fissato il valore di deformazione lungo la prima direzione $\lambda_1 = 2$. In questo modo, in base ai valori assunti da λ_2 , si ha a che fare sia con modalità di deformazione uniassiale che biassiale: infatti per $\lambda_2 = (\lambda_1)^{-0.5} = 0.707$ si è nel caso uniassiale, mentre agli estremi della curva raffigurata, dove $\lambda_2 = \lambda_1$ e dove λ_2 è notevolmente diminuito, siamo nel caso biassiale (nel primo caso di allungamento in entrambe le direzioni, nel secondo invece in direzione 2 si ha una contrazione non isocorica).

Questo ultimo grafico dunque mostra come, al variare della modalità di deformazione, sia ripartito il contributo tra i due invarianti. Il risultato è una curva che ha minimo nel punto corrispondente alla deformazione uniassiale, mentre aumenta per entrambi gli estremi dove la deformazione è di tipo biassiale. Ciò significa che I_2 risulta minimo per carichi uniassiali e massimo per carichi biassiali: in queste ultime condizioni, I_2 è più significativo e il suo contributo sull'energia libera di deformazione è più elevato. Rappresentare Ψ in funzione del solo invariante I_1 causerà una sottostima significativa dell'energia libera per prove biassiali, rispetto che per le altre due modalità.

Si può concludere affermando che I_2 rappresenta un parametro significativo nella formulazione di modelli che simulino la risposta a stati di deformazione complessi. Tuttavia, in questo lavoro di tesi verranno utilizzate soltanto le modalità di deformazione uniassiale e di puro shear; pertanto, nelle successive trattazioni non verrà considerato il contributo di I_2 per semplicità di formulazione, e la eq. (70) può essere ridotta a:

$$\Psi(\mathbf{C}) = \Psi(I_1(\mathbf{C}), I_3(\mathbf{C})) \quad (76)$$

tenendo conto che si tratta di una buona approssimazione per quanto appena visto [33].

2.4 Materiali iperelastici incomprimibili

È già stato detto, nel Capitolo 1 sulla descrizione dei tendini, che questi sono composti prevalentemente da acqua, trattenuta da elementi di natura proteica che compongono la struttura tendinea (ad esempio i GAG) [18]. Questo conferisce ai tendini la capacità di sostenere deformazioni finite senza cambiamenti di volume evidenti, giustificando dunque l'assunzione dell'ipotesi di incomprimibilità per la trattazione meccanica di questi materiali.

2.4.1 Formulazione con moltiplicatore lagrangiano

Poiché incomprimibili, per quanto detto sulle deformazioni isocoriche nel Paragrafo 2.1.2 si ha il cosiddetto “vincolo interno di incompressibilità” $J = \det(\mathbf{F}) = 1$. Per ottenere le equazioni costitutive generali, è possibile postulare la funzione di energia di deformazione definita con il vincolo di incompressibilità come [32]:

$$\Psi = \Psi(\mathbf{F}) - p(J - 1) \quad (77)$$

Dove lo scalare p funge da “moltiplicatore lagrangiano” indeterminato che si può identificare come una pressione idrostatica. Tale p rappresenta una reazione senza lavoro al vincolo cinematico sul campo di deformazione, e può essere determinato soltanto dalle equazioni di equilibrio e dalle condizioni al contorno. È importante notare la differenza del termine Ψ al primo membro, che rappresenta il potenziale di deformazione comprensivo anche del vincolo di incompressibilità, con il termine Ψ al secondo membro che rappresenta soltanto la parte elastica dell'energia dipendente dalla deformazione.

Se il materiale incomprimibile presenta caratteristiche isotrope, allora è possibile riscrivere la eq. (77) in funzione degli invarianti di deformazione, considerando anche che per la eq. (30) $I_3(\mathbf{C}) = J^2$. Supponendo di lavorare vicino a $J = 1$ come per i materiali incomprimibili, possiamo riscrivere J in termini di I_3 utilizzando l'espansione di Taylor troncata al primo ordine:

$$J = \sqrt{I_3} = (1 + \varepsilon)^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}(I_3 - 1) \quad (78)$$

Da cui:

$$J - 1 \approx \frac{1}{2}(I_3 - 1) \quad (79)$$

Pertanto, considerando la eq. (77), ancora valida per funzioni di energia di deformazione obiettive, possiamo riscrivere la funzione di energia di deformazione per materiali iperelastici isotropi incomprimibili come:

$$\Psi = \Psi[I_1(\mathbf{C})] - \frac{1}{2}p(I_3 - 1) \quad (80)$$

Dove $p/2$ funge ancora da moltiplicatore lagrangiano indeterminato.

Questa condizione semplifica ancora la formulazione della funzione di energia di deformazione, separandone la dipendenza rispetto ai due invarianti I_1 e I_3 .

2.4.2 Semplificazioni sulla derivata della funzione di energia di deformazione

Nei precedenti Paragrafi è stata descritta la rappresentazione della funzione di energia di deformazione in funzione degli invarianti di deformazione, semplificata sulla base dei contributi di tali invarianti sul comportamento meccanico. Considerando un materiale isotropo incomprimibile, sottoposto a semplici stati di deformazione come quello uniassiale e di shear semplice, è possibile dunque semplificare anche la formulazione della derivata della eq. (75) come:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} + I_3 \frac{\partial \Psi}{\partial I_3} \mathbf{C}^{-1} \quad (81)$$

Dove è stata tolta la dipendenza dall'invariante I_2 per quanto detto nel Paragrafo 2.3.5. Per quanto riguarda il secondo addendo, abbiamo visto nella eq. (80) che per materiali incomprimibili il contributo di I_3 è separato; dunque, la derivata rispetto a tale invariante dipenderà soltanto dal termine dipendente da I_3 e risulterà:

$$I_3 \frac{\partial \Psi}{\partial I_3} = -\frac{p}{2} \quad (82)$$

Applicando la eq. (82) alla eq. (81) si ottiene:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}} = -\frac{p}{2} \mathbf{C}^{-1} + \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} \quad (83)$$

Questa è una forma semplificata della derivata della funzione di energia di deformazione, spesso utilizzata per materiali isotropi incomprimibili per il calcolo delle tensioni interne di un materiale, che, come visto precedentemente, si ottengono proprio derivando la funzione Ψ che altro non è che la relazione costitutiva che lega tensioni alle deformazioni.

2.4.3 Conseguenze dell'utilizzo della rappresentazione disaccoppiata

In letteratura sono spesso utilizzate formulazioni iperelastiche dei carichi basate su una forma leggermente diversa della eq. (83). Ciò è strettamente legato all'applicazione della decomposizione dilazionale-distorcente dei tensori di deformazione e alla rappresentazione disaccoppiata della funzione di energia di deformazione. Considerando un materiale incomprimibile, dal valore di $J = 1$ segue $J^{1/3} = J^{2/3} = 1$, per cui la componente dilazionale dei tensori di deformazione risulta unitaria. Inoltre, dal determinante unitario del tensore $\mathbf{F}$ segue che il prodotto dei suoi autovalori e di quelli di $\mathbf{C}$ è unitario: segue che $\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{F}$ e $\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}$. Ciò può far pensare che applicare la decomposizione volumetrica-isocorica sia ininfluenza nel caso di materiali incomprimibili; tuttavia, separando le componenti di Ψ sulla base dei tensori modificati, si ottiene una derivata della suddetta funzione che contiene un "termine di proiezione" aggiuntivo.

Nel dettaglio, si consideri innanzitutto la rappresentazione disaccoppiata di Ψ nel caso di materiale isotropo incomprimibile sottoposto a semplici stati di deformazione come quello uniassiale e di shear semplice (in maniera analoga a quanto fatto sopra):

$$\Psi = \Psi_{vol}(J) + \Psi_{iso}(\bar{\mathbf{C}}) = \Psi_{vol}(J) + \Psi_{iso}(\bar{I}_1) \quad (84)$$

Ottenuta eliminando la dipendenza da I_2 . Separando il contributo dipendente da I_3 in analogia con la eq. (funzione di I_1 e I_3), possiamo dunque scrivere:

$$\Psi_{vol}(J) = -p(J - 1) \quad (85)$$

$$\Psi_{vol}(\bar{I}_3) = -\frac{p}{2}(\bar{I}_3 - 1) \quad (86)$$

Dove la eq. (85) fa riferimento alla eq. (77) e la eq. (86), sulla base delle considerazioni fatte nel Paragrafo 2.4.1, fa riferimento alla eq. (80), considerando che $\bar{I}_3 = I_3$ e che quindi si può procedere allo stesso modo.

L'eq. (84) diventa allora:

$$\Psi = -\frac{p}{2}(\bar{I}_3 - 1) + \Psi_{iso}(\bar{I}_1) \quad (87)$$

A questo punto, è possibile effettuare la derivata rispetto agli invarianti di $\mathbf{C}$:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial \Psi_{vol}(J)}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial \Psi_{iso}(\bar{\mathbf{C}})}{\partial \mathbf{C}} \quad (88)$$

$$\frac{\partial \Psi_{vol}(J)}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial \Psi_{vol}(\bar{I}_3)}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial \Psi_{vol}(\bar{I}_3)}{\partial \bar{I}_3} \frac{\partial \bar{I}_3}{\partial \mathbf{C}} \quad (89)$$

$$\frac{\partial \Psi_{iso}(\bar{\mathbf{C}})}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial \Psi_{iso}(\bar{I}_1)}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial \Psi_{iso}(\bar{I}_1)}{\partial \bar{I}_1} \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \mathbf{C}} \quad (90)$$

Riguardo la derivazione della componente volumetrica, in eq. (89), i due termini assumono la seguente forma:

$$\frac{\partial \Psi_{vol}(\bar{I}_3)}{\partial \bar{I}_3} = -\frac{p}{2} \frac{1}{I_3} \quad (91)$$

$$\frac{\partial \bar{I}_3}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}} = I_3 \mathbf{C}^{-1} \quad (92)$$

Dove la eq. (91) è ottenuta semplicemente derivando la eq. (86), mentre la eq. (92) è ottenuta in quanto $\bar{I}_3 = I_3$, quindi si applica la eq. (74). Applicando le eq. (91) e eq. (92) alla eq. (89) si ottiene quindi:

$$\frac{\partial \Psi_{vol}(J)}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial \Psi_{vol}(\bar{I}_3)}{\partial \mathbf{C}} = -\frac{p}{2} \mathbf{C}^{-1} \quad (93)$$

Invece, per quanto riguarda la eq. (90), ci si concentra sulla derivata dell'invariante modificato. Poiché per la eq. (46) $\bar{I}_1 = J^{-2/3} I_1$, si ha:

$$\frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial (J^{-2/3})}{\partial \mathbf{C}} I_1 + J^{-2/3} \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} \quad (94)$$

Secondo la eq. (74), applicata con $I_3 = J^2$ (eq. (30)):

$$\frac{\partial J^2}{\partial \mathbf{C}} = J^2 \mathbf{C}^{-1} \quad (95)$$

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} = \frac{J}{2} \mathbf{C}^{-1} \quad (96)$$

Dove la eq. (96) è ottenuta considerando la regola della catena sulle derivate delle funzioni composte. Se si applica la eq. (96) alla derivata del primo addendo della eq. (94) si ottiene:

$$\frac{\partial(J^{-2/3})}{\partial \mathbf{C}} = -\frac{2}{3}J^{-5/3} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} = -\frac{2}{3}J^{-5/3} \frac{J}{2} \mathbf{C}^{-1} = -\frac{1}{3}J^{-2/3} \mathbf{C}^{-1} \quad (97)$$

Dunque, applicando la eq. (97) e la eq. (72) alla eq. (94) si ottiene:

$$\frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \mathbf{C}} = J^{-2/3} \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3} I_1 \mathbf{C}^{-1} \right) \quad (98)$$

Si nota che la derivata dell'invariante modificato rispetto al tensore $\mathbf{C}$ (il quale, rappresentando l'effettivo stato di deformazione, non è decomposto) assume una forma diversa dalla derivata sull'invariante originario. Applicando tale risultato alla eq. (90) si ottiene quindi:

$$\frac{\partial \Psi_{iso}(\bar{\mathbf{C}})}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial \Psi_{iso}(\bar{I}_1)}{\partial \mathbf{C}} = J^{-2/3} \frac{\partial \Psi_{iso}(\bar{I}_1)}{\partial \bar{I}_1} \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3} I_1 \mathbf{C}^{-1} \right) \quad (99)$$

Poiché $\bar{I}_1 = I_1$ e $J = 1$, si può scrivere:

$$\frac{\partial \Psi_{iso}(\bar{I}_1)}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3} I_1 \mathbf{C}^{-1} \right) \quad (100)$$

Dunque, unendo i due termini delle eq. (93) e eq. (100) nella eq. (88), si ottiene la seguente formulazione della derivata di Ψ disaccoppiata nelle due parti volumetrica e isocorica:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}} = -\frac{p}{2} \mathbf{C}^{-1} + \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3} I_1 \mathbf{C}^{-1} \right) \quad (101)$$

Facendo un'analogia con la eq. (83), è possibile notare che la rappresentazione disaccoppiata non causa alcuna differenza nella derivata di Ψ rispetto I_3 , ma la causa nella derivata di Ψ rispetto I_1 in quanto nasce il termine $\left(\mathbf{I} - \frac{1}{3} I_1 \mathbf{C}^{-1} \right)$. Tale risultato si proietterà anche sul valore delle tensioni calcolate. Ad esempio, utilizzando la eq. (68) con le due diverse forme di derivata, si ottiene:

$$\mathbf{P}_I = 2\mathbf{F} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}} \right)_I = -p\mathbf{F}^{-T} + 2\mathbf{F} \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} \quad (102)$$

$$\mathbf{P}_{II} = 2\mathbf{F} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}} \right)_{II} = -p\mathbf{F}^{-T} + \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} \left(2\mathbf{F} - \frac{2}{3} I_1 \mathbf{F}^{-T} \right) \quad (103)$$

Dove il pedice I indica la formulazione non decomposta di Ψ mentre il pedice II indica la formulazione decomposta di Ψ . Per entrambe le equazioni, usando la definizione di $\mathbf{C}$ in eq. (24) si è ottenuto $\mathbf{F}\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{F}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F}^{-T} = \mathbf{F}^{-T}$. Si vede quindi la differenza nel termine dipendente dal primo invariante che causa un risultato diverso nelle tensioni ottenute dalla stessa funzione di energia di deformazione.

2.4.4 Iperelasticità trasversalmente isotropica

I materiali composti da un materiale matriciale e una o più famiglie di fibre vengono definiti “materiali compositi rinforzati con fibre”. Nel Capitolo 1 abbiamo visto nel dettaglio la composizione dei tendini che, come altri tessuti biologici soft, presenta sostanze che compongono la matrice extracellulare insieme alle fibre di collagene che conferiscono il tipico comportamento stress-strain mostrato in Figura 2.

Un materiale rinforzato con una famiglia di fibre ha una sola direzione preferita, e la rigidità del materiale in quella direzione è molto più alta rispetto che in direzione ortogonale alle fibre. Per tale ragione, è possibile considerare che la risposta del materiale lungo le direzioni ortogonali alla direzione preferita sia isotropica e che l'unica proprietà di anisotropia derivi dalla presenza delle fibre. Ciò rappresenta il tipo più semplice di anisotropia, detta “isotropia trasversale” [32], [34].

È possibile definire la direzione delle fibre nella configurazione iniziale mediante un campo vettoriale unitario $\mathbf{a}_0(\mathbf{X})$, $|\mathbf{a}_0| = 1$; dopo la deformazione invece la fibra ha una nuova direzione nella configurazione deformata definita dal vettore unitario $\mathbf{a}_0(\mathbf{x}, t)$, $|\mathbf{a}| = 1$. Per relazionare le direzioni delle fibre nelle configurazioni di riferimento e deformata, si definisce anzitutto il “vettore allungamento” o vettore “stretch” λ lungo la direzione di un generico vettore unitario $\mathbf{a}_0$ come [32]:

$$\lambda_{\mathbf{a}_0} = \mathbf{F}\mathbf{a}_0 \quad (104)$$

Esso descrive il cambiamento di lunghezza di un vettore unitario lungo una particolare direzione dovuto al cambio di conformazione descritto da $\mathbf{F}$. Il modulo di λ viene chiamato “stretch ratio” e indica se l'elemento risulta esteso, indeformato oppure compresso, se rispettivamente si ha che $\lambda > 1$, $\lambda = 1$ o $\lambda < 1$. Si ottiene facilmente una relazione tra lo stretch ratio e il tensore Right Cauchy-Green applicando al vettore stretch la proprietà secondo cui il prodotto scalare tra due vettori identici è uguale al quadrato del modulo di tale vettore, quindi utilizzando la eq. (104) e la eq. (24):

$$\lambda^2 = \lambda_{\mathbf{a}_0} \cdot \lambda_{\mathbf{a}_0} = \mathbf{F}\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{F}\mathbf{a}_0 = \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{F} \mathbf{a}_0 = \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{C} \mathbf{a}_0 \quad (105)$$

Nella configurazione deformata l'equivalente vettore a modulo unitario è l'elemento $\mathbf{a}$; si può dunque scrivere la relazione che lega i due vettori unitari delle due configurazioni come [32]:

$$\lambda_{\mathbf{a}_0} = \mathbf{F}\mathbf{a}_0 = \lambda \mathbf{a} \quad (106)$$

La eq. (106) stabilisce che l'allungamento della fibra dipende dalla sua direzione nella configurazione non deformata, quindi dal campo vettoriale unitario $\mathbf{a}_0$ e dal tensore delle tensioni Right Cauchy-Green $\mathbf{C}$. Dunque, la funzione di energia di deformazione per questo tipo di materiale dipenderà esplicitamente sia da $\mathbf{C}$ che dalla direzione delle fibre $\mathbf{a}_0$:

$$\Psi = \Psi(\mathbf{C}, \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0) \quad (107)$$

Il prodotto tensoriale $\mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0$, detto anche “prodotto diadico”, rappresenta la dipendenza dalla direzione delle fibre. Tale prodotto tra due generici vettori $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$ restituisce un “diade”, ossia un tensore del secondo ordine, con la seguente struttura [33]:

$$\mathbf{p} \otimes \mathbf{q} = \begin{bmatrix} p_1 q_1 & p_1 q_2 & p_1 q_3 \\ p_2 q_1 & p_2 q_2 & p_2 q_3 \\ p_3 q_1 & p_3 q_2 & p_3 q_3 \end{bmatrix} \quad (108)$$

Per descrivere le proprietà delle fibre e la loro interazione con la matrice, due pseudo-invarianti I_4 e I_5 sorgono direttamente dall'anisotropia:

$$I_4 = \lambda^2 = \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{C} \mathbf{a}_0 \quad (109)$$

$$I_5 = \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{C}^2 \mathbf{a}_0 \quad (110)$$

I_4 rappresenta il quadrato della deformazione, mentre I_5 non ha un'interpretazione fisica simile. Tuttavia, è stata dimostrata l'importanza di quest'ultimo invariante nella previsione del comportamento di materiali fibro-rinforzati sottoposti a stati di deformazione non semplici come lo shear, soprattutto se avviene in direzione parallela alle fibre. Si è dimostrato anche che I_5 è una misura del cambio dell'area normale alla direzione delle fibre secondo il cosiddetto "effetto Poynting negativo", oppure che è necessario affinché il modulo di shear nel piano delle fibre risulti più grande di quello fuori da tale piano [41].

È possibile osservare quanto detto analizzando le eq. (109) e eq. (110). Se consideriamo deformazioni uniassiali, si ha un gradiente di deformazione del tipo $\mathbf{F} = \lambda \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0 + \lambda_t (\mathbf{I} - \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0)$, il che dice che il materiale si allunga in direzione $\mathbf{a}_0$ e si contrae isotropicamente nelle altre direzioni (generalmente la contrazione può anche non essere isotropica). La deformazione λ che riguarda la configurazione modificata coincide con la deformazione lungo la direzione $\mathbf{a}_0$ della configurazione non deformata. Dalla scrittura di $\mathbf{F}$ segue il tensore destro di Cauchy $\mathbf{C} = \lambda^2 \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0 + \lambda_t^2 (\mathbf{I} - \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0)$: dunque per le eq. (109) e eq. (110) si ottiene che $I_4 = \lambda^2$, valida sempre, e $I_5 = \lambda^4$, che invece non è valida sempre, ma lo è in questo caso in cui la deformazione λ avviene lungo $\mathbf{a}_0$. Si ottiene quindi $I_5 = I_4^2$, che rappresenta una condizione di dipendenza lineare tra i due invarianti: per deformazioni uniassiali quindi I_5 non porta alcuna informazione aggiuntiva, e ometterlo nella formulazione della funzione di deformazione semplifica il modello matematico senza rinunciare alla precisione dei risultati predetti. Lo stesso avviene in caso di deformazioni biassiali, mentre per deformazioni di shear si ha un contributo $I_5 - I_4^2$ diverso da zero, il quale avrà il suo contributo nella formulazione dell'energia [41].

Le derivate di questi invarianti rispetto al tensore $\mathbf{C}$ sono [32]:

$$\frac{\partial I_4}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0 \quad (111)$$

$$\frac{\partial I_5}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{C} \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_0 \mathbf{C} \otimes \mathbf{a}_0 \quad (112)$$

Generalmente, la funzione di energia di deformazione si scrive quindi in funzione di questi altri due invarianti:

$$\Psi(\mathbf{C}) = \Psi(I_1(\mathbf{C}), I_2(\mathbf{C}), I_3(\mathbf{C}), I_4(\mathbf{C}, \mathbf{a}_0), I_5(\mathbf{C}, \mathbf{a}_0)) \quad (113)$$

Comunque, è possibile anche fare alcune considerazioni che permettono di semplificare il modello anche in caso di isotropia trasversale. Come detto in precedenza, è possibile considerare Ψ come la somma dell'energia di deformazione isotropica dovuta alla matrice e dell'energia di deformazione anisotropica dovuta alle fibre; poiché la prima dipende dagli invarianti isotropici I_1 , I_2 e I_3 , mentre la seconda dipende invece dagli invarianti anisotropici I_4 e I_5 , è possibile scrivere [41]:

$$\Psi = \Psi_m(I_1(\mathbf{C}), I_2(\mathbf{C}), I_3(\mathbf{C})) + \Psi_f(I_4(\mathbf{C}, \mathbf{a}_0), I_5(\mathbf{C}, \mathbf{a}_0)) \quad (114)$$

Per quanto riguarda la parte della matrice Ψ_m , si possono utilizzare i risultati ottenuti al precedente Paragrafo 2.3.3 sulla formulazione semplificata dell'energia e sulla derivata ottenuta con e senza decomposizione dei tensori di deformazione. Invece, riguardo la parte delle fibre Ψ_f , nella modellazione biomeccanica viene spesso omessa la dipendenza dall'invariante I_5 , al

fine di ridurre il numero di parametri e di lavorare con invarianti che abbiano un chiaro significato fisico [42]. Bisogna tuttavia considerare quanto detto in precedenza sul contributo di questo invariante e sugli effetti che la sua assenza nel modello possono avere sulla previsione del comportamento meccanico dei tessuti biologici soft. Applicando quanto detto, la eq. (114) si può riscrivere come:

$$\Psi = -\frac{p}{2}(I_3 - 1) + \Psi_m(I_1(\mathbf{C})) + \Psi_f(I_4(\mathbf{C}, \mathbf{a}_0)) \quad (115)$$

$$\Psi = -\frac{p}{2}(\bar{I}_3 - 1) + \tilde{\Psi}_m(\bar{I}_1(\bar{\mathbf{C}})) + \Psi_f(I_4(\mathbf{C}, \mathbf{a}_0)) \quad (116)$$

Dove la eq. (115) rappresenta la formulazione con tensori di deformazione completi, mentre la eq. (116) rappresenta la formulazione utilizzando la forma decomposta dei tensori di deformazione. Con il termine $\tilde{\Psi}_m$ si intende la componente isocorica della funzione di energia di deformazione, cioè $\Psi_{iso}(\bar{\mathbf{C}}) = \tilde{\Psi}_m(\bar{I}_1)$.

Per quanto riguarda il termine Ψ_f , si noti che anche nella eq. (116) non è considerata la rappresentazione disaccoppiata. Si giustifica questa rappresentazione considerando che il contributo volumetrico viene attribuito alla parte isotropica, quindi che il vincolo di incomprimibilità è “gestito” dalla pressione idrostatica della matrice. L’invariante I_4 è per definizione uguale al quadrato del modulo della deformazione in direzione delle fibre, dunque non è scomposta la parte della variazione di volume (o del vincolo su tale variazione, nel caso di incomprimibilità). La derivata di questo termine è dunque, in entrambi i casi:

$$\frac{\partial \Psi_f}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial \Psi_f}{\partial I_4} \frac{\partial I_4}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial \Psi_f}{\partial I_4} \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0 \quad (117)$$

Con la seconda uguaglianza ottenuta applicando la eq. (derivata I_4).

Si può scrivere infine la derivata di Ψ per materiali trasversalmente isotropi, rispettivamente nel caso di tensori di deformazione completi e decomposti, derivando le eq. (115) e eq. (116):

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}}\right)_I = -\frac{p}{2}\mathbf{C}^{-1} + \frac{\partial \Psi_m}{\partial I_1} + \frac{\partial \Psi_f}{\partial I_4} \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0 \quad (118)$$

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}}\right)_{II} = -\frac{p}{2}\mathbf{C}^{-1} + \frac{\partial \tilde{\Psi}_m}{\partial I_1} \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3}I_1\mathbf{C}^{-1}\right) + \frac{\partial \Psi_f}{\partial I_4} \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0 \quad (119)$$

E, utilizzando la eq. (68), i primi tensori di tensore Piola-Kirchhoff:

$$\mathbf{P}_I = 2\mathbf{F} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}}\right)_I = -p\mathbf{F}^{-T} + 2\mathbf{F} \frac{\partial \Psi_m}{\partial I_1} + 2 \frac{\partial \Psi_f}{\partial I_4} \mathbf{F} \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0 \quad (120)$$

$$\mathbf{P}_{II} = 2\mathbf{F} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}}\right)_{II} = -p\mathbf{F}^{-T} + \frac{\partial \tilde{\Psi}_m}{\partial I_1} \left(2\mathbf{F} - \frac{2}{3}I_1\mathbf{F}^{-T}\right) + 2 \frac{\partial \Psi_f}{\partial I_4} \mathbf{F} \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0 \quad (121)$$

Dove il pedice I indica la formulazione non decomposta di Ψ mentre il pedice II indica la formulazione decomposta di Ψ . Queste formulazioni generiche dei tensori $\mathbf{P}$, ricavate per materiali incomprimibili trasversalmente isotropi, sono quelle utilizzate nei due modelli presi come riferimento nell’elaborazione di questo lavoro di tesi.

2.5 Deformazione uniassiale e di puro shear per materiali trasversalmente isotropi

Prima di passare alla descrizione di alcune funzioni di energia di deformazione, analizziamo la forma che i tensori di deformazione fin qui presentati assumono nel caso di deformazione uniassiale e di shear semplice. Si consideri un materiale composito incompressibile come quelli trattati finora, ossia con struttura trasversalmente isotropica data dalla coesistenza di matrice isotropica e fibre interne con comportamento principalmente uniassiale.

Poniamo innanzitutto la direzione delle fibre $\mathbf{a}_0$ lungo la direzione 1 del sistema di riferimento:

$$\mathbf{a}_0 = \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (122)$$

Applicando questo vettore alla eq. (108), il prodotto diadico per un materiale trasversalmente isotropo assume la semplice forma seguente:

$$\mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (123)$$

Questo tensore permette di aggiungere il contributo direzionale alla formulazione isotropica dell'energia di deformazione.

2.5.1 Caso uniassiale

Si consideri un allungamento uniassiale in direzione delle fibre σ_{11} con uno stretch ratio $\lambda = L/L_0$ (Figura 8), al quale è legata una contrazione uniforme nelle altre due direzioni:

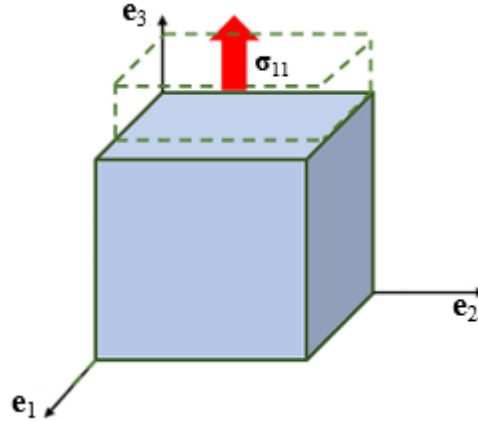


Figura 8: Corpo soggetto a trazione normale in direzione $\mathbf{e}_1$ [43].

In questo caso, le coordinate di un punto materiale nella configurazione modificata sono date dal gradiente di deformazione seguente [33], [43]:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-1/2} \end{bmatrix} \quad (124)$$

Per cui il determinante jacobiano, per la eq. (36), risulta infatti essere $J = \lambda(\lambda)^{-1/2}(\lambda)^{-1/2} = 1$; si noti che le contrazioni normali agli altri piani sono uguali. Dal gradiente di deformazione, utilizzando la eq. (24), segue il tensore di sforzo Cauchy destro:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix} \quad (125)$$

E utilizzando le eq. (28), eq. (29), eq. (30), gli invarianti di $\mathbf{C}$ risultano:

$$I_1 = \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} \quad (126)$$

$$I_2 = 2\lambda + \lambda^{-2} \quad (127)$$

$$I_3 = 1 \quad (128)$$

Si noti che $I_3 = 1$, come è giusto che sia per materiali incomprimibili.

Come già introdotto nel Paragrafo 2.4.4, la funzione di energia di deformazione per materiali trasversalmente isotropi mostra una dipendenza, oltre che dagli invarianti di $\mathbf{C}$, anche dai due nuovi invarianti misti I_4 e I_5 che dipendono sia dal tensore $\mathbf{C}$ che dal prodotto diadico $\mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0$. Nel caso di deformazione assiale, applicando la formulazione di $\mathbf{C}$ della eq. (125) alle eq. (109) e eq. (110), si ottiene:

$$I_4 = \lambda^2 \quad (129)$$

$$I_5 = \lambda^4 \quad (130)$$

Tali risultati erano già stati mostrati nel Paragrafo 2.4.4, e mostrano una dipendenza lineare tra i due invarianti anisotropi nel caso di deformazione uniassiale; nella formulazione dell'energia iperelastica, il termine dipendente dall'invariante I_5 può essere omissso, in quanto il suo contributo può essere incluso nella formulazione del termine che dipende da I_4 .

Si noti che $I_5 = I_4^2$, che conferma quanto detto in precedenza sulla dipendenza lineare tra questi due invarianti nel caso di deformazione uniassiale.

2.5.2 Caso di shear semplice

Adesso si consideri invece che il materiale trasversalmente isotropo e incomprimibile sia soggetto a una deformazione di scorrimento puro rispetto al piano ortogonale a quello delle fibre. Si può rappresentare lo scorrimento delle sezioni ortogonali alle fibre con il puro shear nel piano $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3$ (o allo stesso modo si poteva fare nel piano $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$):

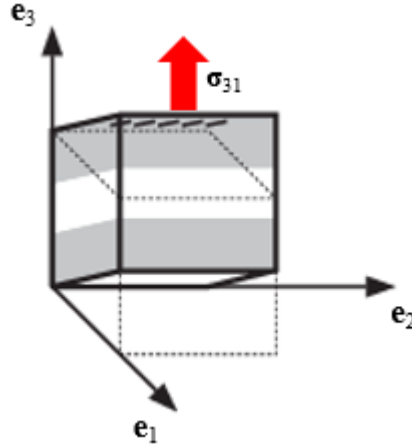


Figura 9: Corpo soggetto a sforzo tangenziale in direzione e_3 , che causa una deformazione della direzione e_1 [44].

In Figura 9 è mostrato come le sezioni del materiale cambino posizione scorrendo lungo la direzione e_3 . Infatti, il puro shear avviene quando si ha una trazione in direzione tangenziale, la quale causa una deformazione in una direzione diversa da quella di trazione; dunque, nel piano e_1e_3 si intende che il puro shear avviene con una deformazione della direzione e_1 dovuta a una trazione tangenziale lungo e_3 . In questo caso, lo stato di deformazione è espresso dal seguente tensore $\mathbf{F}$ [44]:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \gamma & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (131)$$

Dove γ , detto “quantità di shear” rappresenta la tangente dell’angolo di inclinazione θ del vettore $\mathbf{a}$ ottenuto passando dalla configurazione iniziale a quella modificata, detto “angolo di shear” e tale che $\gamma = \tan(\theta)$ [45]. Anche stavolta il determinante jacobiano risulta evidentemente unitario, così come risultano uguali (nonché nulle) le deformazioni normali lungo le altre due direzioni. Dal gradiente di deformazione, utilizzando la eq. (24), segue il tensore di sforzo Cauchy destro:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 + \gamma^2 & 0 & \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \gamma & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (132)$$

E utilizzando le eq. (28), eq. (29), eq. (30), gli invarianti di $\mathbf{C}$:

$$I_1 = 3 + \gamma^2 \quad (133)$$

$$I_2 = 3 + \frac{3}{2}\gamma^2 \quad (134)$$

$$I_3 = 1 \quad (135)$$

Anche stavolta si può notare che $I_3 = 1$ come è giusto che sia per materiali incomprimibili.

Come nel caso precedente, trattandosi di materiale trasversalmente isotropo, bisogna introdurre gli invarianti misti I_4 e I_5 , ottenuti applicando la formulazione di $\mathbf{C}$ della eq. (132) alle eq. (109) e eq. (110). Si ottiene:

$$I_4 = 1 + \gamma^2 \quad (136)$$

$$I_5 = 1 + 3\gamma^2 + \gamma^4 \quad (137)$$

In questo caso, a differenza del precedente, risulta $I_5 \neq I_4^2$ (in particolare si ha $I_5 = I_4^2 - \lambda$). I due invarianti sono quindi linearmente indipendenti e portano informazioni diverse: in particolare, mentre I_4 cattura l'allungamento, I_5 coglie altri aspetti della deformazione delle fibre, come l'interazione tra stiramento e curvatura delle fibre e modifiche nella loro curvatura, e risulta dunque importante per catturare l'effetto di taglio sul materiale trasversalmente isotropo [33], [43], [44].

Nel lavoro di Castillo-Méndez e Ortiz [41] è stato analizzato il contributo degli invarianti anisotropici nel caso di deformazioni uniassiale, biassiale e di shear semplice con rappresentazione decomposta dei tensori di deformazione, cui è soggetto un materiale trasversalmente isotropo, applicato a una funzione di energia di deformazione basata sul modello Holzapfel-Gasser-Ogden (brevemente introdotto successivamente, Paragrafo 2.6.4) al quale è stata applicata una piccola modifica che introduce un termine dipendente da $\bar{I}_5 - \bar{I}_4^2$. Nel caso di trazione uniassiale e biassiale, $\bar{I}_5 - \bar{I}_4^2 = 0$, il che significa che questo termine non fornisce contributo per questi tipi di deformazione. Ciò non vale invece nel caso di shear semplice: ad esempio, in Figura 10 è mostrato l'andamento dei valori degli invarianti anisotropici per diversi valori di scorrimento e in funzione degli angoli di inclinazione:

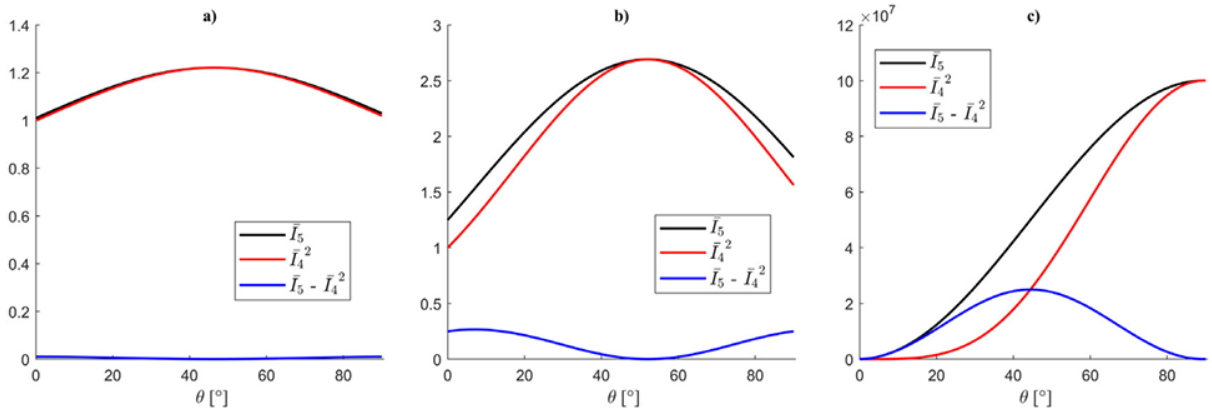


Figura 10: Valori degli invarianti anisotropici del modello HGO modificato, in funzione della variazione dell'angolo di inclinazione delle fibre e quando: a) $\gamma=0.1$; b) $\gamma=0.5$; c) $\gamma=5$ [41].

È stato osservato che i valori di $\bar{I}_5 - \bar{I}_4^2$ sono praticamente nulli per valori di γ molto bassi, e crescono generalmente all'aumentare di γ . La dipendenza dall'angolo di inclinazione delle fibre θ è diversa tra γ bassi e γ alti: per γ bassi si è notato un aumento di $\bar{I}_5 - \bar{I}_4^2$ intorno a $\theta = 0^\circ$ e $\theta = 90^\circ$, mentre quando γ assume valori più alti si è notato un aumento di $\bar{I}_5 - \bar{I}_4^2$ per tutti gli angoli eccetto questi, con valori massimi nell'intervallo di θ tra 40° - 60° [41].

È evidente quindi l'importanza dell'invariante I_5 nella cattura del comportamento di un materiale sottoposto a stati di deformazione di shear semplice rispetto che uniassiali. Tali campi di deformazione sono stati applicati in questo lavoro di tesi per studiare la risposta dei tendini esaminati; attraverso gli invarianti di $\mathbf{C}$ si svilupperanno le formulazioni dei modelli proposti, al fine di implementare una equazione per la previsione dei carichi in funzione della deformazione sperimentale, che poi verrà confrontata con la risposta di carico ottenuta sperimentalmente.

2.6 Alcune forme di funzione di energia di deformazione

In letteratura sono proposte numerose formulazioni specifiche di funzioni di energia di deformazione Ψ , sia per materiali incomprimibili che per comprimibili, che in base ai casi approssimano più o meno bene il comportamento reale. In questo paragrafo presentiamo alcune delle forme più conosciute di Ψ per materiali incomprimibili isotropi e trasversalmente isotropi.

2.6.1 Modello di Ogden

Il modello di Ogden è un modello iperelastico molto generale con una funzione Ψ espressa in termini degli stretch principali, presentati nella eq. (34) come autovalori della componente di pura deformazione $\mathbf{U}$ del gradiente di deformazione $\mathbf{F}$ [32], [33]:

$$\Psi = \Psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{i=1}^N \frac{\mu_p}{\alpha_p} (\lambda_1^{\alpha_p} + \lambda_2^{\alpha_p} + \lambda_3^{\alpha_p} - 3) \quad (138)$$

Dove N stabilisce il numero di termini della funzione, μ_p , $p = 1, \dots, N$ sono dei moduli di shear costanti e α_p , $p = 1, \dots, N$ sono costanti adimensionali. Facendo un confronto con la teoria lineare si ottiene la seguente condizione:

$$2\mu = \sum_{i=1}^N \mu_p \alpha_p \quad (139)$$

Dove il parametro μ rappresenta il classico modulo di shear della teoria lineare del materiale nella configurazione di riferimento. È noto che sono necessarie soltanto tre coppie di costanti ($N = 3$) per ottenere un'eccellente correlazione dei risultati con i dati sperimentali. Sebbene questa forma generale di Ψ renda il modello potente, allo stesso tempo crea il problema sulla selezione dell'appropriato set di parametri che renda stabile la predizione dello stato di deformazione. Comunque, tipici valori delle tre coppie di costanti sono:

- $\alpha_1 = 1.3 \quad \mu_1 = 6.3 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$
- $\alpha_2 = 5.0 \quad \mu_2 = 0.012 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$
- $\alpha_3 = -2.0 \quad \mu_3 = -0.1 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$

Da questo modello generale si possono ottenere diversi casi particolari, come i seguenti due modelli.

2.6.2 Modello Neo-Hookean

Il modello Neo-Hookean (NH) è il più semplice modello iperelastico, ottenuto dal modello generale di Ogden applicando alla eq. (138) i valori $N = 1$ e $\alpha_1 = 2$, in combinazione con il vincolo di incomprimibilità:

$$\Psi = c_1(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) = c_1(I_1 - 3) \quad (140)$$

Dove $c_1 = \mu_1/2$ e, per la eq. (139), il modulo di shear classico del materiale è $\mu = \mu_1$ [32]. Si tratta quindi di un modello a parametro singolo, espresso in termini degli invarianti di $\mathbf{C}$ (che, come visto nel Paragrafo 2.1.6, sono uguali al quadrato degli stretch principali); presenta dunque il vantaggio di essere un modello matematicamente semplice, a scapito di non riuscire a catturare con accuratezza il comportamento per larghe deformazioni. Inoltre, data l'assenza

dell'invariante I_2 nella eq. (140), le tensioni predette risulteranno un po' più basse di quelle reali in situazioni in cui i carichi sono prevalentemente biassiali [32].

2.6.3 Modello Mooney-Rivlin

Il modello Mooney-Rivlin (MR) è nella pratica un'estensione del modello NH, che cerca di migliorarne l'accuratezza includendo nella funzione Ψ una dipendenza lineare dall'invariante I_2 ; infatti, settando nella eq. (140) del modello di Ogden i valori $N = 2$, $\alpha_1 = 2$ e $\alpha_2 = -2$ e sempre in combinazione con il vincolo di incomprimibilità, otteniamo:

$$\Psi = c_1(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) + c_2(\lambda_1^{-2} + \lambda_2^{-2} + \lambda_3^{-2} - 3) = c_1(I_1 - 3) + c_2(I_2 - 3) \quad (141)$$

Dove $c_1 = \mu_1/2$, $c_2 = -\mu_2/2$ e, per la eq. (), il modulo di shear classico del materiale è $\mu = \mu_1 - \mu_2$ [32]. Il termine aggiuntivo migliora quindi le predizioni, al prezzo di avere un termine negativo che, sebbene migliori le predizioni in modalità di singolo carico, può allo stesso tempo rendere il modello instabile per deformazioni finite sotto diversi carichi [33].

2.6.4 Modello Holzapfel-Gasser-Ogden

I modelli visti fino ad ora rappresentano dei metodi di approccio per materiali isotropi, quali ad esempio la gomma vulcanica o altri materiali polimerici. Nel nostro caso abbiamo già visto che una migliore trattazione dei tendini viene fatta considerandoli come materiali compositi, ai quali applichiamo le proprietà di isotropia trasversale. Ciò significa che ci saranno dei nuovi termini nella funzione di energia di deformazione, volti a catturare il comportamento diverso lungo la direzione preferenziale, ossia quella delle fibre.

Il modello HGO è uno di questi: nasce infatti per predire il comportamento dei tessuti arteriosi. Consiste in una rappresentazione del modello NH della risposta della matrice assieme ad un massimo di tre diverse famiglie di fibre [33], [34]:

$$\Psi = \frac{\mu}{2}(I_1 - 3) + \sum_{i=1}^n \frac{k_{1i}}{2k_{2i}} [e^{k_{2i}E_i^2} - 1] \quad (142)$$

Dove:

- n è il numero di famiglie di fibre che, come detto, può avere un valore massimo pari a 3. Per tessuti biologici come le arterie si ha $n = 2$, con fibre della stessa tipologia orientate in due diverse direzioni [46];
- $E_i = d(I_1 - 3) + (1 - 3d)(I_{4i} - 1)$ è il termine energetico, composto dal primo addendo che rappresenta il termine isotropico e il secondo termine che rappresenta il termine anisotropico [33];
- d è la dispersione delle fibre: se $d = 0$ allora le fibre sono perfettamente allineate, mentre se $d = 1/3$ allora le fibre sono randomicamente allineate e danno una risposta isotropica [33];
- I_{4i} ricavato dalla eq. (109) per tre diversi vettori $\mathbf{a}_i$, $i = 1, 2, 3$ allineati ognuno ad una famiglia di fibre. Si noti che gli invarianti I_4 sono tanti quante le famiglie di fibre [34];
- k_{1i} e k_{2i} sono parametri adimensionali riferiti alle proprietà delle fibre i -esime e alla loro risposta tensile. Nel caso delle arterie, i parametri k_1 e k_2 sono uguali per le due famiglie di fibre, quindi sono indice-dipendenti e possono essere portati fuori dalla sommatoria;
- $\langle x \rangle = (x + |x|)/2$ è la funzione rampa.

Per quanto riguarda il comportamento delle fibre, si presume che non siano in grado di sopportare compressione. Pertanto, nel termine energetico della eq. (142), il termine anisotropico dovrebbe contribuire solo se $I_4 > 0$, e la risposta sarà puramente isotropica per $I_4 < 0$ [33], [34].

2.7 Materiali viscoelastici

Prima di descrivere i modelli matematici utilizzati per analizzare il comportamento dei tendini testati in questo lavoro di tesi, bisogna parlare del comportamento dissipativo dei materiali soggetti a deformazioni finite. Il comportamento meccanico di materiali come polimeri termoplastici, polimeri naturali o tessuti biologici come i tendini, sono associati a fenomeni di “rilassamento” e/o “creep”. I primi sono processi in cui una tensione interna decresce nel tempo in condizioni di deformazione costante (ossia nulla), dovuta all’azione congiunta in un materiale tra parte elastica, che reagisce subito alla deformazione, e parte viscosa, che ritarda la risposta dissipando gradualmente l’energia. Il secondo fenomeno invece, in italiano traducibile come “scorrimento viscoso”, consiste nel processo in cui la deformazione aumenta nel tempo in condizioni di carico costante, e rappresenta dunque il fenomeno in condizioni opposte al precedente, dovuto anch’esso alle parti elastica e viscosa [32], [47].

Bisogna tener presente che quanto trattato in questo paragrafo non è riferito alle grandi deformazioni; tuttavia, sarà possibile facilmente estendere i risultati nell’applicazione ai modelli, così come fatto nel lavoro di Carniel et al. [48].

2.7.1 Modello reologico unidimensionale con singolo elemento di Maxwell

Al fine di descrivere in maniera semplice il comportamento di un generico materiale viscoelastico, consideriamo per adesso il dispositivo meccanico monodimensionale in Figura 11 composto da due rami, una singola molla in parallelo ad un elemento di Maxwell singolo ossia composto da una molla in serie ad uno smorzatore:

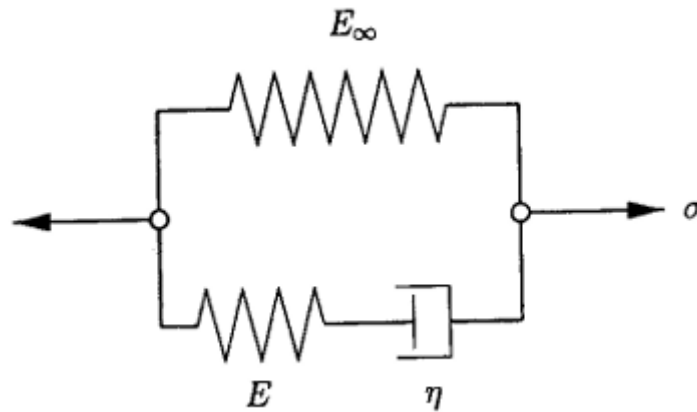


Figura 11: Modello reologico unidimensionale a due rami [47].

Per comodità, si consideri che il dispositivo possieda unità di area e unità di lunghezza in modo che le forze e gli allungamenti possano essere identificati rispettivamente come tensioni e deformazioni. Di conseguenza, denotiamo σ come la tensione totale applicata al dispositivo, mentre E_∞ ed E sono le costanti elastiche delle molle e η è la viscosità dello smorzatore lineare; essendo queste ultime tre grandezze fisiche, le assumiamo come strettamente positive [47]. Si

ha inoltre la deformazione ε , comune ad ogni ramo del dispositivo; è importante notare che il modello trattato è di tipo lineare ed ε rappresenta una deformazione infinitesima.

Si assumi la seguente relazione costitutiva lineare che collega lo stress "viscoso" e la velocità di deformazione nel dissipatore:

$$\sigma^v(t) = \eta \frac{\partial}{\partial t} \alpha(t) \quad (143)$$

Dove σ^v è lo stress viscoso, mentre $\alpha(t)$ è una variabile interna del modello, la quale può essere interpretata come la deformazione anelastica all'interno dello smorzatore. La eq. (143) rappresenta l'equazione costitutiva per il flusso viscoso unidimensionale e lineare. L'ispezione della Figura 11 porta alle seguenti conclusioni:

- La tensione che agisce sulla molla con costante E_∞ è uguale a $(\sigma - \sigma^v)$. Poiché la deformazione su questa molla è ε , si ha che:

$$\sigma = E_\infty \varepsilon + \sigma^v \quad (144)$$

- Per l'equilibrio, la tensione nella molla con costante E è uguale alla tensione σ^v sullo smorzatore. Inoltre, la deformazione sulla molla con costante E è uguale a $(\varepsilon - \alpha)$.

Dalla eq. (143) con l'assunzione di linearità nella risposta elastica allo stress-deformazione:

$$\sigma^v = \eta \dot{\alpha} = E(\varepsilon - \alpha) \quad (145)$$

Introducendo le costanti:

$$E_0 = E_\infty + E \quad (\text{modulo iniziale}) \quad (146)$$

$$\tau = \frac{\eta}{E} \quad (\text{tempo di rilassamento}) \quad (147)$$

Possiamo scrivere l'equazione costitutiva per la risposta allo stress, usando le eq. (144) e eq. (145):

$$\sigma = E_0 \varepsilon - E \alpha \quad (148)$$

Dove la deformazione anelastica α soddisfa l'equazione differenziale:

$$\dot{\alpha} + \frac{1}{\tau} \alpha = \frac{1}{\tau} \varepsilon \quad (149)$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \alpha(t) = 0 \quad (150)$$

Dove l'ultima eq. (150) costituisce la condizione al contorno per risolvere la eq. (149) [47].

2.7.2 Rappresentazione di convoluzione

In alternativa, la risposta allo stress del dispositivo nella Figura 11 può essere formulata in termini di un'integrale di convoluzione eliminando la variabile interna $\alpha(t)$ dalle equazioni costitutive. L'equazione (149) ammette il fattore di integrazione $e^{t/\tau}$, in base al quale diventa:

$$\frac{d}{dt} [e^{t/\tau} \alpha(t)] = \frac{1}{\tau} e^{t/\tau} \varepsilon(t) \quad (151)$$

Integrando la eq. (151) e utilizzando la condizione al contorno della eq. (150) si ottiene:

$$\alpha(t) = \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{(t-s)}{\tau}} \varepsilon(s) ds = \varepsilon(t) - \int_{-\infty}^t e^{-\frac{(t-s)}{\tau}} \dot{\varepsilon}(s) ds \quad (152)$$

Avendo usato la proprietà di integrazione per parti nella seconda uguaglianza. Sostituendo la eq. (152) nella eq. (148) e utilizzando le eq. (146) e eq. (147), si arriva alla relazione:

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t G(t-s) \dot{\varepsilon}(s) ds \quad (153)$$

Dove G è la “funzione di rilassamento” associata al dispositivo in Figura _, definita dalla equazione [47]:

$$G(t) = E_{\infty} + E e^{-t/\tau} \quad (154)$$

2.7.3 Test di rilassamento

Per ottenere ulteriori approfondimenti fisici sulla risposta del modello descritto dalle eq. (153) e eq. (154), si consideri la seguente storia della deformazione:

$$\varepsilon(t) = H(t) \varepsilon_0 = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ \varepsilon_0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (155)$$

Dove $H(t)$ rappresenta la funzione gradino (che assume valori 0 e 1 nelle condizioni sopra indicate).

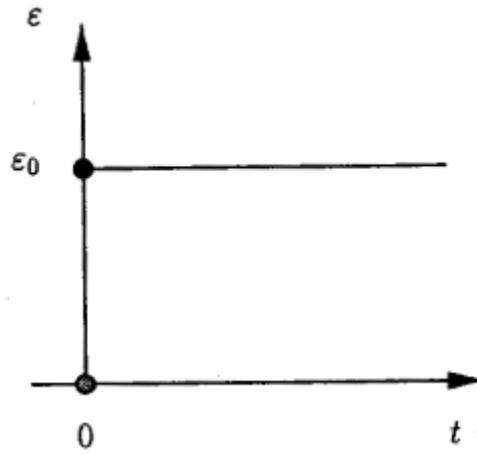


Figura 12: Storia della deformazione in un test di rilassamento [47].

Nota questa storia di deformazione, possiamo calcolare facilmente la storia di tensione tramite l'integrale di convoluzione in eq. (153):

$$\sigma(t) = \left[\int_{-\infty}^t G(t-s) \delta(s) ds \right] \varepsilon_0 = G(t) \varepsilon_0 \quad , t \geq 0 \quad (156)$$

Dove $\delta(t)$ è la funzione delta di Dirac, ottenuta come derivata della funzione gradino.

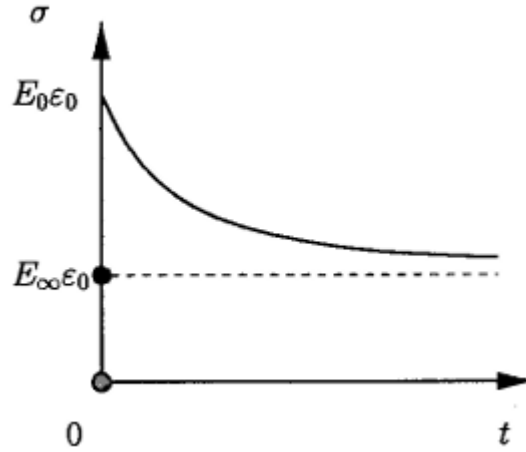


Figura 13: Storia della tensione in un test di rilassamento [47].

Si noti che il tempo di rilassamento viene calcolato dalla storia dello stress tramite la relazione:

$$\tau = -\frac{\sigma(0)}{\dot{\sigma}(0)}\gamma \quad (157)$$

Dove $\gamma = E/E_0$ è chiamato “rapporto di rigidità”, ed è minore o uguale a 1 in test di rilassamento [47].

2.7.4 Modello reologico unidimensionale generalizzato

Possiamo facilmente generalizzare il modello illustrato in Figura 11, includendo un numero arbitrario N di elementi di Maxwell disposti in parallelo, tra di loro e con la singola molla che modella il comportamento a infinito:

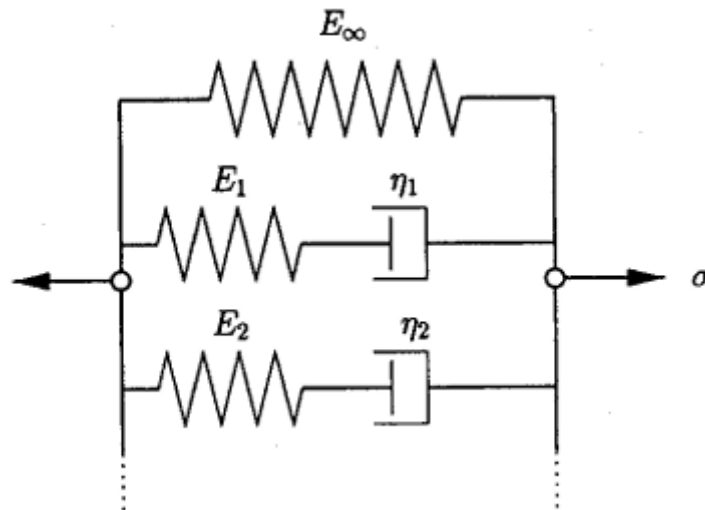


Figura 14: Modello reologico di rilassamento generalizzato [47].

Le equazioni mostrate nei paragrafi precedenti vanno dunque riadattate per N elementi di Maxwell. La tensione di risposta della eq. (148) va ridefinita come:

$$\sigma(t) = E_0 \varepsilon(t) - \sum_{i=1}^N E_i \alpha_i \quad (158)$$

Dove, dalle eq. (146) e eq. (147), il modulo iniziale $E_0 > 0$ e i tempi di rilassamento $\tau_i \geq 0$ sono anch'essi ridefiniti come:

$$E_0 = E_\infty + \sum_{i=1}^N E_i \quad (159)$$

$$\tau_i = \frac{\eta_i}{E_i} \quad i = 1, \dots, N \quad (160)$$

Varia anche l'equazione differenziale delle variabili interne di deformazione anelastica in eq. (149) e eq. (150):

$$\dot{\alpha}_i + \frac{1}{\tau_i} \alpha_i = \frac{1}{\tau_i} \varepsilon \quad i = 1, \dots, N \quad (161)$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \alpha_i(t) = 0 \quad i = 1, \dots, N \quad (162)$$

Possiamo finalmente ridefinire la funzione di rilassamento G , dalla eq. (154), come:

$$G(t) = E_\infty + \sum_{i=1}^N E_i e^{-t/\tau_i} \quad (163)$$

Dalla quale segue facilmente che la risposta allo stress è espressa con la rappresentazione di convoluzione vista in precedenza nella eq. (153) [47].

2.7.5 Considerazioni termodinamiche e formulazione generale

Si definisce l'energia libera ψ come l'energia elastica immagazzinata nelle molle. Ne segue la formulazione:

$$\psi(\varepsilon, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{2} E_\infty \varepsilon^2 + \sum_{i=1}^N E_i (\varepsilon - \alpha_i)^2 \quad (164)$$

Dove $\boldsymbol{\alpha}$ rappresenta il vettore con le componenti α_i , $i = 1, \dots, N$. Allo stesso modo si definisce la funzione di dissipazione $\mathcal{D}$ associata al modello come il tasso di lavoro dissipato negli smorzatori; ciò avviene per effetto di attrito interno, quindi si ha energia dissipata proporzionale alla velocità di dissipazione viscoelastica. Siccome la funzione di dissipazione è una misura di potenza dissipata, si può definire come velocità per spostamento, per cui:

$$\mathcal{D}(\varepsilon, \boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}) = \sum_{i=1}^N \sigma_i^v \dot{\alpha}_i = \boldsymbol{\sigma}^v \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}} \quad (165)$$

Dove $\boldsymbol{\sigma}^v$ rappresenta il vettore con le componenti σ_i^v , $i = 1, \dots, N$. Si consideri la eq. (145) estesa per ogni i -esimo elemento di Maxwell:

$$\sigma_i^v = \eta_i \dot{\alpha}_i = E_i (\varepsilon - \alpha_i) \quad i = 1, \dots, N \quad (166)$$

Utilizzando la prima uguaglianza della eq. (166) nella eq. (165) si ottiene:

$$\mathcal{D}(\varepsilon, \boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}) = \sum_{i=1}^N \eta_i (\dot{\alpha}_i)^2 \geq 0 \quad (167)$$

Cioè, essendo η_i un valore positivo, si ha che la funzione di dissipazione ha valori strettamente positivi. Questo è coerente col secondo principio della termodinamica (nella classica versione di principio di disuguaglianza di Clausius-Duhem) secondo cui la dissipazione interna dev'essere positiva, cioè l'energia interna deve crescere solo per effetto di lavoro meccanico e dissipazione irreversibile [32], [47].

Derivando la funzione di energia libera di eq. (164) rispetto alla generica variabile di deformazione α_i si ottiene:

$$\frac{\partial \psi(\varepsilon, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_i} = -E_i(\varepsilon - \alpha_i) = -\sigma_i^v \quad (168)$$

$$\sigma_i^v = -\frac{\partial \psi(\varepsilon, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_i} \quad (169)$$

Quindi, la derivata parziale dell'energia libera rispetto alla variabile interna genera la forza di non equilibrio associata al freno. Inoltre, inserendo la eq. (169) nella eq. (165) si ottiene la seguente definizione “astratta” di funzione di dissipazione:

$$\mathcal{D}(\varepsilon, \boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}) = -\sum_{i=1}^N \frac{\partial \psi(\varepsilon, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i = -\partial_{\boldsymbol{\alpha}} \psi(\varepsilon, \boldsymbol{\alpha}) \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}} \quad (170)$$

Il che vuol dire che la funzione di dissipazione rappresenta la variazione negativa di energia libera rispetto alle variabili interne.

Invece, derivando la funzione di energia libera rispetto alla deformazione totale ε si ottiene:

$$\frac{\partial \psi(\varepsilon, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \varepsilon} = E_{\infty} \varepsilon + \sum_{i=1}^N E_i(\varepsilon - \alpha_i) \quad (171)$$

Considerando il valore della tensione applicata al dispositivo, ossia l'estensione della eq. (144) per il modello a N elementi di Maxwell:

$$\sigma = E_{\infty} \varepsilon + \sum_{i=1}^N \sigma_i^v \quad (172)$$

Applicando alla eq. (172) la eq. (166) per ogni elemento i -esimo:

$$\sigma = E_{\infty} \varepsilon + \sum_{i=1}^N E_i(\varepsilon - \alpha_i) \quad (173)$$

Dunque, osservando le eq. (171) e eq. (173) risulta evidente l'uguaglianza:

$$\sigma = \frac{\partial \psi(\varepsilon, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \varepsilon} \quad (174)$$

Che è un risultato analogo a quello della eq. (169): la tensione totale generata dal dispositivo è uguale alla derivata della funzione di energia rispetto alla deformazione totale applicata al dispositivo stesso [47].

2.7.6 Formulazione alternativa

Per concludere la trattazione sui materiali viscoelastici, è presentata una formulazione alternativa del modello reologico precedentemente illustrato (Figura 14), suscettibile di una semplice estensione per includere la risposta elastica non lineare. Si parte dal sostituire le variabili interne di deformazione con variabili interne che rappresentano delle tensioni:

$$q_i = E_i \alpha_i \quad i = 1, \dots, N \quad (175)$$

Applicando la eq. (175) alla eq. (158) per ogni elemento i -esimo:

$$\sigma = E_0 \varepsilon - \sum_{i=1}^N q_i \quad (176)$$

Si definiscono i rapporti relativi adimensionali:

$$\gamma_i = \frac{E_i}{E_0} \quad i = 1, \dots, N \quad (177)$$

$$\gamma_\infty = \frac{E_\infty}{E_0} \quad (178)$$

Dove la eq. (159) utilizzata con tali valori adimensionali, ossia divisa per E_0 , ne rappresenta la seguente restrizione:

$$\gamma_\infty + \sum_{i=1}^N \gamma_i = 1 \quad (179)$$

Dunque, si hanno $N + 1$ parametri adimensionali, di cui N sono linearmente indipendenti. Tale condizione di restrizione sui parametri adimensionali risulta essere molto significativa in questa formulazione, poiché vedremo che permetterà la ripartizione dei contributi di carico iperelastico e viscoso nella risposta del materiale. Verrà utilizzato infatti il modello sviluppato da Carniel et al. [48] dove questi rappresentano alcuni dei parametri costitutivi, oggetto di ricerca per prevedere la risposta del comportamento tendineo.

Definiamo la funzione di energia immagazzinata iniziale W^0 come:

$$W^0(\varepsilon) = \frac{1}{2} \varepsilon E_0 \varepsilon \quad (180)$$

La cui derivata è dunque:

$$\frac{\partial W^0(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} = E_0 \varepsilon \quad (181)$$

Tramite queste ultime definizioni è dunque possibile ottenere una formulazione alternativa del modello viscoelastico generalizzato. Sostituendo la eq. (181) nella eq. (176) si ottiene:

$$\sigma = \frac{\partial W^0(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} - \sum_{i=1}^N q_i \quad (182)$$

Invece, sostituendo la eq. (181) nella eq. (161):

$$\dot{\alpha}_i + \frac{1}{\tau_i} \alpha_i = \frac{1}{\tau_i} \frac{1}{E_0} \frac{\partial W^0(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \quad i = 1, \dots, N \quad (183)$$

Moltiplicando entrambi i membri per E_i (ricordando che è un valore costante):

$$E_i \dot{\alpha}_i + \frac{1}{\tau_i} E_i \alpha_i = \frac{1}{\tau_i} \frac{E_i}{E_0} \frac{\partial W^0(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \quad i = 1, \dots, N \quad (184)$$

Infine, applicando le eq. (175) e eq. (177) si ottiene:

$$\dot{q}_i + \frac{1}{\tau_i} q_i = \frac{\gamma_i}{\tau_i} \frac{\partial W^0(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \quad i = 1, \dots, N \quad (185)$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} q_i(t) = 0 \quad i = 1, \dots, N \quad (186)$$

Le ultime tre equazioni riassumono il modello in maniera equivalente a quanto fatto nel precedente Paragrafo 2.7.5, ma con l'aggiunta di considerare, tramite la funzione convessa e arbitraria $W^0(\varepsilon)$, una risposta elastica generalmente non lineare.

La formulazione alternativa qui presentata è stata implementata dal gruppo di Carniel per caratterizzare i processi viscosi dei materiali polimerici e dei tessuti biologici; l'eq. (185) viene quindi estesa nel campo delle grandi deformazioni, mediante il passaggio dal generico stato di deformazione ε allo stato di deformazione rappresentato dal tensore $\mathbf{F}$, e allo stesso modo dalla generica funzione di energia immagazzinata iniziale W^0 alla funzione di energia di deformazione iperelastica Ψ . Quest'ultima verrà però esplicitata non come energia iniziale, ma come energia finale ottenuta dal cosiddetto “comportamento a infinito”, ossia il comportamento nel quale i processi viscosi si sono esauriti e la risposta del materiale sarà puramente iperelastica; bisognerà dunque applicare una modifica alla soluzione della eq. (185) differenziale, che si vedrà successivamente nella risoluzione numerica di tale equazione proposta nel lavoro di Carniel et al. [48].

3 Modelli di riferimento

Le formulazioni matematiche sviluppate nei Paragrafi precedenti verranno applicate utilizzando due diverse formulazioni iperelastiche, al fine di ottenere la formulazione dei carichi espressa mediante il primo tensore delle tensioni Piola-Kirchhoff. Nel primo modello che verrà trattato è sviluppata, oltre la formulazione del tensore $\mathbf{P}$ per stato di deformazione uniassiale, anche il calcolo dei carichi dissipati dai processi viscosi interni, secondo la formulazione alternativa appena presentata, ma sviluppata in forma di calcolo numerico che distingue quattro processi con scale temporali distinte. In questo lavoro di tesi, si è scelto di utilizzare innanzitutto la formulazione proposta dal primo modello che è sviluppata per deformazioni uniassiali. La stessa formulazione viene poi estesa applicando uno stato di deformazione di shear semplice. Infine, si è utilizzata una seconda formulazione iperelastica che include un termine misto aggiuntivo, alla quale è stato applicato il metodo dei calcoli viscosi utilizzato nel modello precedente. Dunque, sono stati applicati gli stati di deformazione presentati nel Paragrafo 2.5 per sviluppare, dalle Ψ proposte, i carichi $\mathbf{P}$ per entrambi i modelli presi come riferimento.

3.1 Modello di Carniel

Per condurre lo studio sui provini oggetto di test è stato scelto come modello di riferimento quello implementato da Carniel et al. [48], che verrà descritto in questo Paragrafo. Le formulazioni costitutive fenomenologiche, come quelle visco-iperelastiche, hanno dimostrato la loro affidabilità nell'analisi della meccanica dei tessuti molli, e i parametri costitutivi possono essere valutati tramite prove meccaniche standard. Dunque, i parametri elastici e viscosi, come E_0 , τ_i e γ_i , vengono valutati minimizzando la discrepanza tra i dati sperimentali e i risultati del modello mediante tecniche di ottimizzazione. Lo stress applicato sui campioni viene identificato dal primo tensore degli sforzi Piola-Kirchhoff $\mathbf{P}$, in quanto rappresenta una misura dello stress nominale solitamente adottata nelle attività sperimentali sui tessuti biologici [48]. Anche in questo lavoro di tesi, dunque, si lavorerà con questo tensore degli sforzi, poiché rappresenta lo strumento più adatto per comparare i valori di carico ottenuti secondo le modalità di test effettuate.

3.1.1 Test stress-relaxation

In questo lavoro è stata anzitutto discussa l'analisi di tipo "stress-relaxation" per materiali viscoelastici. I test di stress-relaxation sono stati eseguiti mediante un processo in due fasi: una fase di deformazione uniassiale a velocità costante che allunga il tessuto fino a un livello di deformazione stabilito, seguita da una fase di rilassamento del materiale a deformazione nulla (quindi lunghezza fissata e velocità di deformazione nulla). A differenza di altri test che studiano il rilassamento dei materiali, in cui si considera come punto zero dell'analisi il punto finale della prima fase di allungamento, in questo lavoro (come anche nel lavoro di tesi) sono stati valutati i dati di entrambe le fasi del test, così da valutare i fenomeni viscosi presenti già nella prima fase di allungamento. È stata eseguita un'analisi costitutiva per interpretare il comportamento mostrato dai test sperimentali, al fine di indagare i fenomeni di rilassamento da carico in materiali sia polimerici che biologici [48].

Dunque, ci si concentra sull'analisi teorica del comportamento dissipativo dei materiali mediante la definizione di variabili che caratterizzano i processi di dissipazione viscosa, per poi passare direttamente all'applicazione sul modello iperelastico sviluppato per tessuti biologici.

3.1.2 Formulazione dei processi di dissipazione viscosa

La risposta meccanica dei tessuti biologici soft è caratterizzata da non linearità geometrica, anisotropia, comportamento incomprimibile o quasi incomprimibile, elasticità non lineare e fenomeni dipendenti dal tempo. Quest'ultima caratteristica è stata oggetto principale del lavoro di Carniel et al. [48], mediante la modellazione viscosa che teorizza l'effetto delle variabili viscosi e la loro dipendenza dal tempo. Viene spiegato come, secondo i dati in letteratura, si possono sviluppare diversi processi viscosi all'interno dei materiali, che influenzano la distribuzione dei tempi di rilassamento, e che quindi vengono considerati quattro processi viscosi al fine di coprire lo spettro principale di rilassamento che va da 10^{-1} s a 10^3 s.

Le formulazioni per la dissipazione viscosa sono state sviluppate partendo dalla formulazione alternativa già introdotta nel Paragrafo 2.7.6 per il campo delle tensioni e per la relazione differenziale che correla le variabili viscosi all'energia di deformazione. Nella eq. (185), τ_i e γ_i sono i parametri viscosi: il tempo di rilassamento τ_i rende possibile valutare il tempo che il processo viscoso i -esimo richiede per svilupparsi, mentre il parametro di rigidità relativa γ_i specifica il contributo del processo viscoso i -esimo alla massima diminuzione di stress cui il materiale è sottoposto durante i fenomeni di stress-relaxation, cioè quando nella fase di relaxation il materiale passa da una condizione di aumento di carico ad una di rilassamento con conseguente diminuzione di carico, come visto in Figura 13 (Paragrafo 2.7.3).

La massima diminuzione di stress $\Delta\sigma_{max}$ può essere rappresentata come la somma delle tensioni interne di ogni processo viscoso [48]:

$$\Delta\sigma_{max} = \sigma_0 \sum_{i=1}^N \gamma_i \quad (187)$$

È stato già detto come il test stress-relaxation può essere considerato come un processo in due fasi. Durante la prima fase, che si sviluppa nell'intervallo di tempo $0-t_L$, il materiale viene progressivamente allungato fino ad un livello di deformazione ε_L secondo una velocità di deformazione k :

$$\varepsilon_L = kt_L \quad (188)$$

La valutazione della storia di carico del materiale durante la prima fase richiede l'integrazione della eq. (185) [47]:

$$q_i = \frac{\gamma_i}{\tau_i} \int_0^t e^{-\frac{t-s}{\tau_i}} \sigma_0 ds \quad i = 1, \dots, N \quad (189)$$

In questi integrali, i valori che le variabili viscosi γ_i , τ_i e quindi il carico interno q_i assumono all'istante finale t_L , dipendono sia dal livello di deformazione raggiunto ε_L che dalla velocità di deformazione k . Dunque, al tempo t_L possiamo scrivere lo stress come:

$$\sigma(\varepsilon_L, k) = \sigma_{0,L}(\varepsilon_L) - \sum_{i=1}^N q_{i,L}(\varepsilon_L, k) \quad (190)$$

Dove il valore di carico iniziale $\sigma_{0,L} = E_0 \varepsilon_L$ dipende solo dal livello di deformazione, mentre i carichi viscosi interni dipendono sia da livello che velocità di deformazione.

Nella seconda parte di test viene mantenuta una deformazione costante, ossia nulla. Per ottenere la progressiva diminuzione di carico bisogna ancora integrare la eq. (185) considerando però le condizioni iniziali come quelle ottenute nell'istante finale della prima parte del processo t_L :

$$\sigma(\varepsilon(t)) = \left(1 - \sum_{i=1}^N \gamma_i\right) \sigma_{0,L}(\varepsilon_L) + \left\{ \sum_{i=1}^N [\gamma_i \sigma_{0,L}(\varepsilon_L) - q_{i,L}(\varepsilon_L, k)] \right\} e^{-\frac{t-t_L}{\tau_i}} \quad (191)$$

Dove i valori con pedice L sono quelli derivati dall'istante finale della parte di test precedente. Quando i processi viscosi sono completamente sviluppati, lo stress raggiunge il suo valore di equilibrio σ_∞ , il quale può essere calcolato dalla eq. (191) imponendo $t \rightarrow +\infty$:

$$\sigma_\infty(\varepsilon_L) = \left(1 - \sum_{i=1}^N \gamma_i\right) \sigma_{0,L}(\varepsilon_L) = \gamma_\infty \sigma_{0,L}(\varepsilon_L) \quad (192)$$

Dove γ_∞ , ottenuto applicando la eq. (179), rappresenta la rigidezza relativa del materiale quando vengono raggiunte le condizioni di equilibrio [47], [48].

3.1.3 Modello iperelastico per tessuti biologici soft

La risposta meccanica istantanea è definita nel contesto dei materiali iperelastici incomprimibili trasversalmente isotropi, mediante una funzione di energia di deformazione suddivisa nelle componenti di matrice e di fibre, secondo la rappresentazione disaccoppiata rispetto alle forme decomposte dei tensori di deformazione. Vengono inoltre assunte le semplificazioni presentate in precedenza, tipiche della modellazione biomeccanica, attraverso le quali vengono eliminate le dipendenze dell'energia dagli invarianti I_2 e I_5 . Pertanto, sono state utilizzate in questo lavoro la eq. (118) per il calcolo dell'energia di deformazione Ψ e la eq. (120) per il calcolo delle tensioni $\mathbf{P}^0$:

$$\Psi = -\frac{p}{2}(\bar{I}_3 - 1) + \tilde{\Psi}_m(\bar{I}_1(\bar{\mathbf{C}})) + \Psi_f(I_4(\mathbf{C}, \mathbf{a}_0)) \quad (193)$$

$$\mathbf{P}^0(\mathbf{C}) = 2\mathbf{F} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}} = -p\mathbf{F}^{-T} + \frac{\partial \tilde{\Psi}_m}{\partial I_1} \left(2\mathbf{F} - \frac{2}{3}I_1\mathbf{F}^{-T}\right) + 2\frac{\partial \Psi_f}{\partial I_4} \mathbf{F}\mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0 \quad (194)$$

Dove con l'apice 0 si indica il contributo puramente iperelastico che non considera la dissipazione viscosa. Le forme di energia della matrice isocorica e delle fibre sono state modellizzate come:

$$\tilde{\Psi}_m(\bar{I}_1) = \frac{C_1}{\alpha_1} e^{\alpha_1(\bar{I}_1-3)-1} \quad (195)$$

$$\Psi_f(I_4) = \frac{C_4}{(\alpha_4)^2} [e^{\alpha_4(I_4-1)} - \alpha_4(I_4 - 1) - 1] \quad (196)$$

Quindi il tensore $\mathbf{P}^0$ assume la seguente forma:

$$\mathbf{P}^0(\mathbf{C}) = -p(\mathbf{C})\mathbf{F}^{-T} + \tilde{\mathbf{P}}_m^0(\mathbf{C}) + \mathbf{P}_f^0(\mathbf{C}) \quad (197)$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_m^0(\mathbf{C}) = 2\mathbf{F} \frac{\partial \tilde{\Psi}_m}{\partial \mathbf{C}} = C_1 e^{\alpha_1(I_1-3)} \left(2\mathbf{F} - \frac{2}{3}I_1\mathbf{F}^{-T}\right) \quad (198)$$

$$\mathbf{P}_f^0(\mathbf{C}) = 2\mathbf{F} \frac{\partial \Psi_f}{\partial \mathbf{C}} = 2 \frac{C_4}{\alpha_4} e^{[\alpha_4(I_4-1)]-1} \mathbf{F} \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0 \quad (199)$$

I parametri costitutivi C_1 , α_1 , C_4 e α_4 sono proposti per rappresentare una grandezza fisica del materiale. C_1 specifica la “shear stiffness”, ossia la rigidità al taglio del materiale, come $G = 2C_1$, mentre α_1 regola la non linearità della risposta al taglio, in riferimento ai risultati sperimentali, ed è dunque un parametro adimensionale; analogamente per le fibre, C_4 definisce la rigidità specifica delle fibre e viene misurato in MPa (come C_1), mentre α_4 dipende dalla conformazione ondulata iniziale delle fibre ed è adimensionale (come α_1).

La shear stiffness misura quanto un materiale si oppone alla deformazione di taglio, e descrive la resistenza alla distorsione (non al cambiamento di volume). Si calcola generalmente, conoscendo gli altri parametri elastici quali modulo di Young E e modulo di Poisson ν , come $G = E/[2(1 + \nu)]$. Un materiale con G molto alta, come l'acciaio ad esempio (circa 80 GPa), risulta dunque molto rigido rispetto agli sforzi di taglio (quindi sforzi tangenziali), deformandosi poco anche sotto sforzi elevati; al contrario, un materiale con G bassa, come per gomme morbide (elastomeri, circa 0,1 MPa), risulta più morbido agli sforzi quindi si deforma più facilmente. Per quanto riguarda i materiali viscoelastici, nella eq. (153) (Paragrafo 2.7.2) è stata introdotta la funzione di rilassamento che lega tensioni e deformazioni con una dipendenza dal tempo, secondo l'integrale di convoluzione: questa funzione di rilassamento a taglio rappresenta proprio la shear stiffness viscoelastica, che dunque non è più una costante ma una funzione che decresce nel tempo esponenzialmente secondo la eq. (154), in quanto il materiale “rilassa” il carico accumulato.

Questi quattro parametri rappresentano i parametri costitutivi che regolano il comportamento iperelastico del tessuto biologico soft, tramite i quali viene calcolato lo stress istantaneo.

3.1.4 Contributi viscosi

Come già visto, all'interno dei tessuti biologici soft possono svilupparsi fenomeni di dissipazione viscosa, dovuto ad esempio al movimento di fluidi o lo srotolamento/riassetto delle fibre, che deve quindi essere modellizzato matematicamente per cogliere adeguatamente la risposta del materiale. Viene quindi introdotto un insieme specifico di processi viscosi come fatto nel Paragrafo 2.7:

$$\mathbf{P}(\mathbf{C}, t) = -p(\mathbf{C})\mathbf{F}^{-T} + \tilde{\mathbf{P}}_m(\mathbf{C}, t) + \mathbf{P}_f(\mathbf{C}, t) \quad (200)$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_m(\mathbf{C}, t) = \tilde{\mathbf{P}}_m^0(\mathbf{C}) - \sum_{i=1}^n \mathbf{q}_m^i(\mathbf{C}, t) \quad (201)$$

$$\mathbf{P}_f(\mathbf{C}, t) = \mathbf{P}_f^0(\mathbf{C}) - \sum_{j=1}^m \mathbf{q}_f^j(\mathbf{C}, t) \quad (202)$$

Queste equazioni riprendono il comportamento istantaneo descritto dalle eq. (197), eq. (198) e eq. (199), sottraendo il carico dissipato, come fatto nella eq. (190) ma considerando le tensioni definite dal tensore $\mathbf{P}$, ai contributi di matrice e fibre che non riguardano il vincolo di incomprimibilità. Lo stato di tensione diventa quindi dipendente dal tempo in quanto ne dipendono i processi viscosi, i quali sono in questo caso genericamente n fenomeni viscosi per la matrice e m fenomeni viscosi per le fibre. Come detto precedentemente, si considerano

quattro processi viscosi su scale temporali separate che vanno da 10^{-1} s a 10^3 s, per cui si ottiene $n = m = 4$.

La formulazione alternativa delle equazioni del modello viscoelastico di Simo e Hughes [47], descritta nel Paragrafo 2.7.6, viene utilizzata da Carniel et al. [48] estendendo la eq. (185) alla teoria delle grandi deformazioni, quindi passando da una deformazione infinitesima ε alla rappresentazione dello stato di deformazione mediante il gradiente di deformazione $\mathbf{F}$:

$$\dot{\mathbf{q}}_i + \frac{1}{\tau_i} \mathbf{q}_i = \frac{\gamma_i}{\tau_i} \frac{\partial \Psi^0(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \quad (203)$$

Dove la funzione di energia immagazzinata W^0 viene sostituita dalla funzione di energia di deformazione per comportamento iperelastico Ψ^0 . Si noti che, nel passaggio all'applicazione del modello viscoelastico alle grandi deformazioni, le variabili interne $\mathbf{q}_i$ assumono la struttura di tensori del secondo ordine, e con esse le loro derivate. Inoltre, il gradiente di Ψ^0 restituisce un tensore ben noto secondo la eq. (62), ossia il primo tensore degli sforzi Piola-Kirchhoff:

$$\dot{\mathbf{q}}_i + \frac{1}{\tau_i} \mathbf{q}_i = \frac{\gamma_i}{\tau_i} \mathbf{P}^0 \quad (204)$$

La eq. (204) è stata dunque applicata separatamente per matrice e fibre. L'evoluzione delle variabili viscosi è definita dalle seguenti equazioni differenziali:

$$\dot{\mathbf{q}}_m^i + \frac{1}{\tau_m^i} \mathbf{q}_m^i = \frac{\gamma_m^i}{\tau_m^i} \tilde{\mathbf{P}}_m^0 \quad (205)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_f^j + \frac{1}{\tau_f^j} \mathbf{q}_f^j = \frac{\gamma_f^j}{\tau_f^j} \mathbf{P}_f^0 \quad (206)$$

Da queste equazioni, valide per tensori di carico generici, è possibile calcolare le formulazioni dei carichi istantanei e viscosi sostituendo il gradiente di deformazione relativo al tipo di prova eseguita.

3.1.5 Stato di deformazione uniassiale

Nel lavoro di Carniel et al. le relazioni tensione-deformazione vengono sviluppate per condizioni di carico uniassiale. Si considerano dunque tutte le formulazioni esposte nel Paragrafo 2.5.1, che possiamo applicare alle equazioni qui sviluppate per ottenere la risposta teorica del materiale modellizzato. Per lo stato di deformazione uniassiale, ci si concentra in questo lavoro di tesi sulla risposta in direzione delle fibre, in quanto è l'unica ad essere stata misurata: il valore del carico di interesse sarà dunque quello in posizione 11 del primo tensore di tensioni Piola-Kirchhoff.

Per ottenere la risposta istantanea, bisogna ricavare i termini della eq. (197) utilizzando il gradiente di deformazione di eq. (124). Si ottiene il carico istantaneo in direzione delle fibre P_{11}^0 :

$$P_{11}^0 = -p\lambda^{-1} + \tilde{P}_{m,11}^0 + P_{f,11}^0 \quad (207)$$

$$\tilde{P}_{m,11}^0 = C_1 e^{\alpha_1(I_1-3)} \left(2\lambda - \frac{2}{3} I_1 \lambda^{-1} \right) \quad (208)$$

$$P_{f,11}^0 = 2 \frac{C_4}{\alpha_4} e^{[\alpha_4(I_4-1)]-1} \lambda \quad (209)$$

E i carichi istantanei normali in direzione ortogonale alle fibre P_{22}^0 e P_{33}^0 :

$$P_{22}^0 = P_{33}^0 = -p\lambda^{\frac{1}{2}} + \tilde{P}_{m,22}^0 + P_{f,22}^0 \quad (210)$$

$$\tilde{P}_{m,22}^0 = \tilde{P}_{m,33}^0 = C_1 e^{\alpha_1(I_1-3)} \left(2\lambda^{-\frac{1}{2}} - \frac{2}{3} I_1 \lambda^{\frac{1}{2}} \right) \quad (211)$$

$$P_{f,22}^0 = P_{f,33}^0 = 0 \quad (212)$$

In queste equazioni, il moltiplicatore lagrangiano p rappresenta un'incognita. Tuttavia, secondo il vincolo di incomprimibilità, vale la seguente condizione al contorno:

$$P_{22}^0 = P_{33}^0 = 0 \quad (213)$$

Da cui segue:

$$p = \tilde{P}_{m,22}^0 \lambda^{-\frac{1}{2}} = C_1 e^{\alpha_1(I_1-3)} \left(2\lambda^{-1} - \frac{2}{3} I_1 \right) \quad (214)$$

Ottenuto il valore del moltiplicatore lagrangiano, è possibile ottenere la formulazione del carico in direzione assiale, applicando le eq. (208), eq. (209) e eq. (214) alla eq. (207):

$$P_{11}^0 = C_1 e^{\alpha_1(I_1-3)} \left(2\lambda^{-1} - \frac{2}{3} I_1 \right) \lambda + C_1 e^{\alpha_1(I_1-3)} \left(2\lambda - \frac{2}{3} I_1 \lambda^{-1} \right) + 2 \frac{C_4}{\alpha_4} e^{[\alpha_4(I_4-1)]-1} \lambda \quad (215)$$

Questo valore descrive l'andamento della risposta alla deformazione assiale in direzione delle fibre per un materiale puramente iperelastico.

3.1.6 Stato di deformazione di shear semplice

In questo lavoro di tesi, oltre test di deformazione assiale sono stati effettuati anche test di shear semplice. Si sviluppa quindi il modello iperelastico implementato da Carniel et al. con lo stato di deformazione descritto nel Paragrafo 2.5.2, ossia utilizzando la funzione di energia di deformazione, quindi la formulazione del primo tensore di tensioni Piola-Kirchhoff, con il nuovo gradiente di deformazione.

Utilizzando il tensore $\mathbf{F}$ e gli invarianti di $\mathbf{C}$ descritti nel Paragrafo 2.5.2, ricaviamo anche stavolta i carichi di interesse dalla eq. (197). Si è visto che la condizione di deformazione di shear semplice avviene quando si ha una trazione tangenziale, la quale causa uno scorrimento dei piani in un'altra direzione. Nel caso di interesse (si vedranno più avanti le modalità di prova), si modella la direzione della trazione come direzione $\mathbf{e}_3$, la quale causa una deformazione nella direzione delle fibre $\mathbf{e}_1$, come mostrato nel Paragrafo sopracitato. Dunque, il carico di interesse sarà quello in posizione 31:

$$P_{31}^0 = \tilde{P}_{m,31}^0 + P_{f,31}^0 = 2C_1 e^{\alpha_1(I_1-3)} \gamma + 2 \frac{C_4}{\alpha_4} e^{[\alpha_4(I_4-1)]-1} \gamma \quad (216)$$

$$\tilde{P}_{m,31}^0 = 2C_1 e^{\alpha_1(I_1-3)} \gamma \quad (217)$$

$$P_{f,31}^0 = 2 \frac{C_4}{\alpha_4} e^{[\alpha_4(l_4-1)]-1} \gamma \quad (218)$$

Dove γ rappresenta il rapporto tra deformazione in direzione $\mathbf{e}_3$ e lunghezza iniziale in direzione $\mathbf{e}_1$. Si può notare che il contributo del moltiplicatore lagrangiano non influisce nel calcolo della tensione di shear, ma è presente, come nel caso precedente, nelle tensioni assiali, che però non sono rilevanti per questo tipo di test poiché non sono quelle misurate. Per ottenere il carico di shear basta dunque sommare i due contributi come qui mostrato.

3.1.7 Calcolo numerico dei contributi viscosi

Per quanto riguarda il calcolo dei contributi viscosi, la soluzione analitica delle eq. (215) e eq. (216) differenziali è piuttosto difficile, quindi risulta più adatta la soluzione numerica. Il contributo allo stress della matrice e delle fibre può essere valutato mediante le seguenti equazioni:

$$P_l(t^{p+1}) = \gamma_l^\infty P_l^0(t^{p+1}) + \sum_{i=1}^4 \gamma_l^i h_l^i(t^{p+1}) \quad (219)$$

$$h_l^i(t^{p+1}) = h_l^i(t^p) e^{-\frac{t^{p+1}-t^p}{\tau_l^i}} + [P_l(t^{p+1}) - P_l(t^p)] e^{-\frac{t^{p+1}-t^p}{2\tau_l^i}} \quad (220)$$

Dove:

- $l = m$ per il contributo della matrice, e $l = f$ per il contributo delle fibre;
- P_l è il contributo di carico di matrice e di fibre, ottenuto dalla somma del contributo a infinito P_l^0 , precedentemente calcolato, e del contributo viscoso, questo calcolato istante per istante;
- γ_l^∞ e γ_l^i sono i rapporti relativi adimensionali visti nel Paragrafo 2.7.6, definiti dalle eq. (177) e eq. (178) e che rispettano la condizione di eq. (179). Dunque, tali rapporti ripartiscono il contributo totale tra comportamento a infinito e comportamento dei processi viscosi;
- h_l^i sono i contributi viscosi per ognuno dei quattro processi viscosi (si ricorda che sono stati scelti quattro processi viscosi per modellizzare il comportamento viscoelastico della matrice, e idem quattro processi viscosi per modellizzare il comportamento viscoelastico delle fibre);
- t^p e t^{p+1} discretizzano intervalli di tempo nella storia di deformazione del materiale. Indicano gli istanti di tempo, che corrispondono alle varie iterazioni nel calcolo numerico;
- τ_l^i sono le costanti di tempo che caratterizzano ognuno dei quattro processi viscosi.

Attraverso questa formulazione quindi si riesce a sommare il carico dissipato dai processi viscosi della matrice e delle fibre. I contributi viscosi modellizzati con esponenziali decrescenti vengono sommati al contributo iperelastico, dando al carico totale il tipico andamento decrescente del test di relaxation illustrato in Figura 13 (Paragrafo 2.7.3).

La formulazione appena illustrata è quella proposta e utilizzata da Carniel et al. per i loro test di deformazione assiale. Il valore di carico a cui viene fatto riferimento per il calcolo della parte iperelastica, e che viene utilizzato anche nella formulazione viscosa, risulta essere adatto a test di deformazione svolti con velocità di deformazione relativamente elevate per il tipo di tessuto trattato, nei quali l'allungamento avviene con processi viscosi poco rilevanti. Nei test

effettuati da Carniel et al. la velocità di deformazione a cui i provini vengono sottoposti è di 1 %/s, cioè per un campione fittizio lungo 10 cm la velocità di deformazione a cui viene sottoposto è di 60 mm/min. In questo lavoro di tesi, date le condizioni di lavoro che permettevano di lavorare con una macchina a trazione adatta a basse velocità di deformazione, si è scelto di lavorare con velocità di deformazione di 10 mm/min. È stato osservato per alcuni lavori che utilizzano formulazioni analoghe, effettuati dal gruppo di lavoro di Natali e Carniel [49], [50], che può risultare più affidabile, specialmente per test effettuati con basse velocità di deformazione (come quella utilizzata per questo lavoro di tesi), utilizzare una formulazione che faccia riferimento al “comportamento a infinito” del materiale: questo si definisce come il comportamento ricavato dai punti finali delle curve di relaxation, dove quindi è stato raggiunto il plateau e i processi viscosi si sono completamente esauriti (o quasi). In questo modo, se si prendono diversi di questi punti ottenuti da test effettuati con diverse deformazioni totali raggiunte, si può ricostruire un andamento idealmente iperelastico, dato che i processi viscosi si sono idealmente esauriti; si evita in questo modo di utilizzare i punti di inizio rilassamento, poiché nel caso di velocità di deformazione non abbastanza elevate potrebbero presentare una componente di energia già dissipata.

In questo lavoro di tesi, poiché come vedremo nel Capitolo seguente si sono effettuati test su diversi livelli di deformazione crescenti, e poiché come già detto le velocità di deformazione sono relativamente basse, si è scelto di prevedere il comportamento iperelastico paragonando i carichi numerici con quelli del comportamento a infinito. Per fare ciò però è necessario fare una piccola modifica alla precedente formulazione viscosa, in quanto i valori della curva iperelastica ottenuta dai punti a infinito ha già valori di tensione ai quali è stata sottratta la parte dissipata. Dunque, mentre nella eq. (219) viene ripartito tramite γ_l^∞ il contributo iperelastico di P_l^0 , nel caso in questione bisogna prendere come carichi iperelastici i valori non ripartiti, per cui:

$$P_l^\infty = \gamma_l^\infty P_l^0 \quad (221)$$

Applicando la eq. (221) alla eq. (219) e eq. (220) si ottiene:

$$P_l(t^{p+1}) = P_l^\infty(t^{p+1}) + \sum_{i=1}^4 \frac{\gamma_l^i}{\gamma_l^\infty} h_l^i(t^{p+1}) \quad (222)$$

$$h_l^i(t^{p+1}) = h_l^i(t^p) e^{-\frac{t^{p+1}-t^p}{\tau_l^i}} + [P_l(t^{p+1}) - P_l(t^p)] e^{-\frac{t^{p+1}-t^p}{2\tau_l^i}} \quad (223)$$

Le eq. (222) e eq. (223) rappresentano la formulazione per il calcolo numerico del contributo viscoso utilizzata per l'analisi dei test effettuati in questo lavoro di tesi, nelle modalità che verranno presentate nel seguente Capitolo. Tale formulazione viene infatti usata anche per il seguente modello di iperelasticità, in modo da applicare l'approccio viscoelastico qui presentato ad altre formulazioni di Ψ e valutarne la validità generale.

3.2 Modello di Sopakayang-Holzapfel

Per effettuare un confronto con il modello precedente implementato dal gruppo di Carniel, è stato utilizzato un secondo modello iperelastico implementato da Sopakayang e Holzapfel. Questo modello più recente è stato formulato sempre per l'applicazione sui tessuti biologici: è utilizzato un approccio che incorpora i cambiamenti strutturali dei principali componenti

tissutali, cioè includendo, oltre i due contributi separati di matrice e fibre, un terzo contributo dato dall'interazione di queste, dato semplicemente da un termine accoppiato. Il cambiamento strutturale delle fibre di collagene è incluso nel modello costitutivo utilizzando la funzione di distribuzione di probabilità di Weibull, che permette con una legge statistica di discretizzare il contributo delle fibre quando avviene in combinazione con la matrice e quando invece avviene da solo dopo aver superato un certo allungamento λ_s . L'utilizzo di questo approccio innovativo porta alla formulazione di una funzione di energia di deformazione che, come la precedente, presenta nuovamente quattro parametri iperelastici che definiscono la risposta del tessuto, in modo da cercare di catturare i meccanismi fisiologici di interazione tra matrice e fibre.

I contributi viscosi non sono stati trattati in questo modello. Pertanto, viene utilizzato lo stesso approccio, formulato da Simo e Huyges e implementato da Carniel et al. nel proprio modello, per caratterizzare la dissipazione interna in questo modello. Poiché è presente un nuovo contributo dato dall'interazione fibre-matrice, è stato scelto di aggiungere ulteriori parametri costitutivi per definire i processi viscosi associati a tale contributo. Dato che si hanno tre contributi differenti, e poiché vengono scelti come in precedenza quattro processi viscosi, ognuno caratterizzato da rapporto relativo adimensionale e costante di tempo, si hanno in totale 24 parametri viscosi. In totale, questo modello viscoelastico è dunque caratterizzato da 28 parametri costitutivi.

Implementare un modello viscoelastico da questa formulazione iperelastica permette di confrontare i risultati dei due modelli; inoltre, si possono fare delle valutazioni sull'utilizzo dell'approccio viscoelastico per modelli con formulazioni alternative come questa, che oltretutto non considera il contributo separato delle parti volumetrica e isocorica di energia.

3.2.1 Funzione di energia di deformazione

La funzione di energia di deformazione è strutturata da tre componenti, che rappresentano i contributi originati dalle fibre di collagene, dalla matrice e dall'interazione fibra-matrice:

$$\Psi = \Psi_m(I_1) + P(I_4)\Psi_f(I_4) + (1 - P(I_4))\Psi_{fm}(I_1, I_4) \quad (224)$$

Dove Ψ_m è l'energia relativa alla matrice, Ψ_f è l'energia relativa alle fibre, Ψ_{fm} è l'energia relativa all'interazione fibre-matrice e $P(I_4)$ è la funzione di densità cumulativa delle fibre allungate.

La matrice è assunta avere il comportamento di un materiale di tipo Neo-Hookean, per cui il termine Ψ_m fa riferimento alla eq. (140):

$$\Psi_m(I_1) = \frac{\mu}{2}(I_1 - 3) \quad (225)$$

Dove μ è quindi il modulo di shear. La risposta delle fibre è modellata invece da un termine quadratico:

$$\Psi_f(I_4) = k(I_4 - 1)^2 \quad (226)$$

Dove k è un parametro del materiale. Il modello con non-linearità quadratica è stato inizialmente proposto nel contesto dei problemi di cavitazione per materiali polimerici simili alla gomma. È stato mostrato che questa forma rappresenta la più semplice forma polinomiale in grado di garantire la condizione di stress puramente idrostatico relativo allo stato indeformato, e che per deformazioni maggiori il carico assiale sia di tipo tensile per semplici

estensioni in direzione delle fibre [45]. Il contributo meccanico dell'interazione fibra-matrice è invece modellato come semplice prodotto delle due funzioni energetiche:

$$\Psi_{fm}(I_1, I_4) = \Psi_m(I_1)\Psi_f(I_4) = \frac{\mu}{2}k(I_1 - 3)(I_4 - 1)^2 \quad (227)$$

Riguardo il comportamento delle fibre, si assume che diventino totalmente dritte ognuna per diversi allungamenti $\lambda_s \geq 1$ secondo la densità di probabilità di Weibull p :

$$p(\lambda_s) = \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{\lambda_s - 1}{\beta} \right)^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{\lambda_s - 1}{\beta} \right)^\alpha} \quad (228)$$

Dove $\alpha > 0$ è il cosiddetto “parametro di forma” mentre $\beta > 0$ è il cosiddetto “parametro di scala”. Integrando rispetto alla variabile λ_s , nell'intervallo da 1 a I_4 che rappresenta l'intervallo di valori che può assumere, si ottiene la funzione di densità cumulata P di fibre allungate:

$$P(I_4) = \int_1^{I_4} p(\lambda_s) d\lambda_s = 1 - e^{-\left(\frac{I_4 - 1}{\beta} \right)^\alpha} \quad (229)$$

Applicando le eq. (225), eq. (226), eq. (227) e eq. (229) alla eq. (224) si può quindi riscrivere la funzione di energia di deformazione come:

$$\Psi = \frac{\mu}{2}(I_1 - 3) + \left[1 - e^{-\left(\frac{I_4 - 1}{\beta} \right)^\alpha} \right] k(I_4 - 1)^2 + e^{-\left(\frac{I_4 - 1}{\beta} \right)^\alpha} \frac{\mu}{2} k(I_1 - 3)(I_4 - 1)^2 \quad (230)$$

Rispetto al modello di Carniel et al., anche questo modello presenta quattro parametri iperelastici μ , k , α e β , che però hanno diversi significati fisici rispetto ai precedenti.

3.2.2 Formulazione del carico iperelastico

Per ottenere le formulazioni dei tensori di tensione, si può fare riferimento alle formulazioni sviluppate dalla teoria senza disaccoppiare Ψ in parti volumetrica e isocorica (scelta effettuata dagli autori di tale modello), tenendo conto delle differenze che nascono dalla formulazione del termine misto. Infatti, stavolta, oltre i termini di matrice e di fibre che possono essere trattati allo stesso modo, è presente anche il termine di interazione fibre-matrice che dipende sia da I_1 che da I_4 ; la eq. (115) diventa:

$$\Psi = -\frac{p}{2}(I_3 - 1) + \Psi_m(I_1) + \Psi_f(I_4) + \Psi_{fm}(I_1, I_4) \quad (231)$$

Avendo definito di nuovo il moltiplicatore lagrangiano p in termini di pressione idrostatica. Dunque, la derivata di Ψ rispetto a $\mathbf{C}$ presenterà un termine aggiuntivo sia sull'invariante I_1 che sull'invariante I_4 ; la eq. (118) diventa:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}} = -\frac{p}{2} \mathbf{C}^{-1} + \frac{\partial \Psi_m}{\partial I_1} + \frac{\partial \Psi_{fm}}{\partial I_1} + \left(\frac{\partial \Psi_f}{\partial I_4} + \frac{\partial \Psi_{fm}}{\partial I_4} \right) \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0 \quad (232)$$

Quindi la scrittura per ottenere $\mathbf{P}^0$ della eq. (120) diventa:

$$\mathbf{P}^0 = 2\mathbf{F} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}} = -p\mathbf{F}^{-T} + 2\mathbf{F} \left(\frac{\partial \Psi_m}{\partial I_1} + \frac{\partial \Psi_{fm}}{\partial I_1} \right) + 2 \left(\frac{\partial \Psi_f}{\partial I_4} + \frac{\partial \Psi_{fm}}{\partial I_4} \right) \mathbf{F} \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0 \quad (233)$$

Con l'apice 0 che anche qui indica il comportamento puramente iperelastico. Rispetto al lavoro effettuato da Sopakayang e Holzapfel, che mirava a presentare le potenzialità di questo modello iperelastico, in questo lavoro di tesi ci si vuole applicare la teoria di dissipazione interna. Pertanto, rispetto alla formulazione dell'articolo, è necessario distinguere i vari contributi delle tre componenti del tessuto per il calcolo dei contributi viscosi, poiché tale calcolo dipende dal valore ideale di carico, ripartito da ognuna delle componenti per ognuno dei processi viscosi:

$$\Psi = \Psi_m + \Psi_f + \Psi_{fm} \quad (234)$$

$$\Psi_m = \frac{\mu}{2} (I_1 - 3) \quad (235)$$

$$\Psi_f = \left[1 - e^{-\left(\frac{I_4-1}{\beta}\right)^\alpha} \right] k (I_4 - 1)^2 \quad (236)$$

$$\Psi_{fm} = e^{-\left(\frac{I_4-1}{\beta}\right)^\alpha} \frac{\mu}{2} k (I_1 - 3) (I_4 - 1)^2 \quad (237)$$

Le derivate dei singoli componenti, da utilizzare nella eq. (233), sono:

$$\frac{\partial \Psi_m}{\partial I_1} = \frac{\mu}{2} \quad (238)$$

$$\frac{\partial \Psi_f}{\partial I_4} = 2k(I_4 - 1) + 2k(I_4 - 1)e^{-\left(\frac{I_4-1}{\beta}\right)^\alpha} \left[\frac{\alpha}{2} \left(\frac{I_4 - 1}{\beta} \right)^\alpha - 1 \right] \quad (239)$$

$$\frac{\partial \Psi_{fm}}{\partial I_1} = \frac{\mu}{2} k (I_4 - 1)^2 e^{-\left(\frac{I_4-1}{\beta}\right)^\alpha} \quad (240)$$

$$\frac{\partial \Psi_{fm}}{\partial I_4} = 2kI_4(I_4 - 1)e^{-\left(\frac{I_4-1}{\beta}\right)^\alpha} \left[\frac{\mu}{2} (I_1 - 3) - \frac{\alpha\mu}{4} (I_1 - 3) \left(\frac{I_4 - 1}{\beta} \right)^\alpha \right] \quad (241)$$

La eq. (233) verrà sviluppata dunque mantenendo separati i vari termini, allo stesso modo di quanto fatto con il modello precedente, applicando le derivate delle eq. (238), eq. (239), eq. (240) e eq. (241):

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^0 = 2\mathbf{F} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}} = & -p\mathbf{F}^{-T} + 2\mathbf{F} \left[\frac{\mu}{2} + \frac{\mu}{2} k (I_4 - 1)^2 e^{-\left(\frac{I_4-1}{\beta}\right)^\alpha} \right] \\ & + 2 \left\{ 2k(I_4 - 1) + 2k(I_4 - 1)e^{-\left(\frac{I_4-1}{\beta}\right)^\alpha} \left[\frac{\alpha}{2} \left(\frac{I_4 - 1}{\beta} \right)^\alpha - 1 \right] \right. \\ & + 2kI_4(I_4 - 1)e^{-\left(\frac{I_4-1}{\beta}\right)^\alpha} \left[\frac{\mu}{2} (I_1 - 3) \right. \\ & \left. \left. - \frac{\alpha\mu}{4} (I_1 - 3) \left(\frac{I_4 - 1}{\beta} \right)^\alpha \right] \right\} \mathbf{F} \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0 \end{aligned} \quad (242)$$

3.2.3 Contributi viscosi del modello SH

Si vuole procedere alla stessa maniera di quanto fatto dal gruppo di Carniel. Viene quindi introdotto anche qui un insieme specifico di processi viscosi, applicati sul tensore $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{P}(\mathbf{C}, t) = -p(\mathbf{C})\mathbf{F}^{-T} + \mathbf{P}_m(\mathbf{C}, t) + \mathbf{P}_f(\mathbf{C}, t) + \mathbf{P}_{fm}(\mathbf{C}, t) \quad (243)$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_m(\mathbf{C}, t) = \mathbf{P}_m^0(\mathbf{C}) - \sum_{i=1}^4 \mathbf{q}_m^i(\mathbf{C}, t) \quad (244)$$

$$\mathbf{P}_f(\mathbf{C}, t) = \mathbf{P}_f^0(\mathbf{C}) - \sum_{j=1}^4 \mathbf{q}_f^j(\mathbf{C}, t) \quad (245)$$

$$\mathbf{P}_{fm}(\mathbf{C}, t) = \mathbf{P}_{fm}^0(\mathbf{C}) - \sum_{k=1}^4 \mathbf{q}_{fm}^k(\mathbf{C}, t) \quad (246)$$

Come in precedenza, lo stato di tensione diventa dipendente dal tempo in conseguenza dell'aggiunta dei processi viscosi. Oltre i processi per la matrice e per le fibre, si hanno stavolta anche quattro processi che caratterizzano la dissipazione relativa all'interazione fibre-matrice. Si utilizza quindi la formulazione alternativa delle equazioni del modello viscoelastico di Simo e Hughes estesa alla teoria delle grandi deformazioni, con il passaggio da una deformazione infinitesima ε alla rappresentazione dello stato di deformazione mediante il gradiente di deformazione $\mathbf{F}$:

$$\dot{\mathbf{q}}_i + \frac{1}{\tau_i} \mathbf{q}_i = \frac{\gamma_i}{\tau_i} \mathbf{P}^0 \quad (247)$$

La quale si applica ai tre processi viscosi:

$$\dot{\mathbf{q}}_m^i + \frac{1}{\tau_m^i} \mathbf{q}_m^i = \frac{\gamma_m^i}{\tau_m^i} \mathbf{P}_m^0 \quad (248)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_f^j + \frac{1}{\tau_f^j} \mathbf{q}_f^j = \frac{\gamma_f^j}{\tau_f^j} \mathbf{P}_f^0 \quad (249)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_{fm}^k + \frac{1}{\tau_{fm}^k} \mathbf{q}_{fm}^k = \frac{\gamma_{fm}^k}{\tau_{fm}^k} \mathbf{P}_{fm}^0 \quad (250)$$

Come in precedenza, mediante queste equazioni differenziali si effettuerà il calcolo delle componenti di carico viscoso mediante l'approccio numerico.

3.2.4 Stato di deformazione uniassiale

Si utilizzano i tensori $\mathbf{F}$, $\mathbf{C}$ e $\mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0$ relativi alla deformazione uniassiale per ottenere la formulazione della risposta del tessuto alle deformazioni. Come già detto, a differenza di quanto svolto nell'articolo di riferimento, si procede esplicitando separatamente i contributi poiché necessari per il calcolo numerico viscoso; inoltre, si utilizza il tensore $\mathbf{P}$ invece che il tensore $\boldsymbol{\sigma}$, non tanto perché è stato utilizzato nel precedente modello, quanto perché risulta il più adatto per trattare i dati utilizzati in questo lavoro di tesi.

Si ottiene il carico istantaneo in direzione delle fibre P_{11}^0 :

$$P_{11}^0 = -p\lambda^{-1} + P_{m,11}^0 + P_{f,11}^0 + P_{fm,11}^0 \quad (251)$$

$$P_{m,11}^0 = 2F_{11} \frac{\partial \Psi_m}{\partial I_1} = \mu\lambda \quad (252)$$

$$\begin{aligned} P_{f,11}^0 &= 2 \frac{\partial \Psi_f}{\partial I_4} \mathbf{F}_{11}(\mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0)_{11} \\ &= 4kI_4(I_4 - 1)\lambda + 4kI_4(I_4 - 1)e^{-\left(\frac{I_4-1}{\beta}\right)^\alpha} \left[\frac{\alpha}{2} \left(\frac{I_4-1}{\beta} \right)^\alpha - 1 \right] \lambda \end{aligned} \quad (253)$$

$$\begin{aligned} P_{fm,11}^0 &= 2 \left[F_{11} \frac{\partial \Psi_{fm}}{\partial I_1} + \frac{\partial \Psi_{fm}}{\partial I_4} \mathbf{F}_{11}(\mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0)_{11} \right] \\ &= \mu k(I_4 - 1)^2 e^{-\left(\frac{I_4-1}{\beta}\right)^\alpha} \lambda \\ &\quad + 4kI_4(I_4 - 1)e^{-\left(\frac{I_4-1}{\beta}\right)^\alpha} \left[\frac{\mu}{2}(I_1 - 3) - \frac{\alpha\mu}{4}(I_1 - 3) \left(\frac{I_4-1}{\beta} \right)^\alpha \right] \lambda \end{aligned} \quad (254)$$

E i carichi istantanei normali in direzione ortogonale alle fibre P_{22}^0 e P_{33}^0 :

$$P_{22}^0 = P_{33}^0 = -p\lambda^{\frac{1}{2}} + P_{m,22}^0 + P_{f,22}^0 + P_{fm,22}^0 \quad (255)$$

$$P_{m,22}^0 = 2F_{22} \frac{\partial \Psi_m}{\partial I_1} = \mu\lambda^{-\frac{1}{2}} \quad (256)$$

$$P_{f,22}^0 = 2 \frac{\partial \Psi_f}{\partial I_4} \mathbf{F}_{22}(\mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0)_{22} = 0 \quad (257)$$

$$P_{fm,22}^0 = 2 \left[F_{22} \frac{\partial \Psi_{fm}}{\partial I_1} + \frac{\partial \Psi_{fm}}{\partial I_4} \mathbf{F}_{22}(\mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0)_{22} \right] = \mu k(I_4 - 1)^2 e^{-\left(\frac{I_4-1}{\beta}\right)^\alpha} \lambda^{-\frac{1}{2}} \quad (258)$$

Il moltiplicatore lagrangiano p rappresenta un'incognita, che può essere ricavata applicando la stessa condizione al contorno che segue dalla condizione di incomprimibilità:

$$P_{22}^0 = P_{33}^0 = 0 \quad (259)$$

Da cui segue:

$$p = (P_{m,22}^0 + P_{fm,22}^0)\lambda^{-\frac{1}{2}} = \mu\lambda^{-1} + \mu k(I_4 - 1)^2 e^{-\left(\frac{I_4-1}{\beta}\right)^\alpha} \lambda^{-1} \quad (260)$$

Ottenuto il valore del moltiplicatore lagrangiano, è possibile ottenere la formulazione del carico in direzione assiale, applicando le eq. (252), eq. (253), eq. (254) e eq. (260) alla eq. (251):

$$\begin{aligned} P_{11}^0 &= \mu\lambda + 4kI_4(I_4 - 1)\lambda \\ &\quad + 4kI_4(I_4 - 1)e^{-\left(\frac{I_4-1}{\beta}\right)^\alpha} \left[\frac{\alpha}{2} \left(\frac{I_4-1}{\beta} \right)^\alpha - 1 + \frac{\mu}{2}(I_1 - 3) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha\mu}{4}(I_1 - 3) \left(\frac{I_4-1}{\beta} \right)^\alpha \right] \lambda + \mu k(I_4 - 1)^2 e^{-\left(\frac{I_4-1}{\beta}\right)^\alpha} \lambda \\ &\quad - \left[\mu + \mu k(I_4 - 1)^2 e^{-\left(\frac{I_4-1}{\beta}\right)^\alpha} \right] \lambda^{-2} \end{aligned} \quad (261)$$

Questo valore descrive l'andamento della risposta alla deformazione assiale in direzione delle fibre per un materiale puramente iperelastico, secondo il modello implementato da Sopakayang e Holzapfel.

3.2.5 Stato di deformazione di shear semplice

È possibile applicare questo modello, come il precedente, ai risultati ottenuti dalle prove con deformazione di shear semplice, applicando i tensori illustrati nel Paragrafo 2.5.2. Poiché si applica il nuovo modello sugli stessi dati, quindi per le stesse modalità di deformazione, si può affermare per quanto detto nel Paragrafo 3.1.6 che il carico di interesse è rappresentato dal termine P_{31}^0 . Utilizzando la eq. (261) con i tensori che rappresentano la deformazione di shear semplice, si ottiene:

$$\begin{aligned} P_{31}^0 &= P_{m,31}^0 + P_{f,31}^0 + P_{fm,31}^0 \\ &= \mu\gamma + \mu k(I_4 - 1)^2 e^{-\left(\frac{I_4 - 1}{\beta}\right)^\alpha} \gamma + 4kI_4(I_4 - 1)\gamma \\ &\quad + 4kI_4(I_4 - 1)e^{-\left(\frac{I_4 - 1}{\beta}\right)^\alpha} \left[\frac{\alpha}{2} \left(\frac{I_4 - 1}{\beta} \right)^\alpha - 1 + \frac{\mu}{2}(I_1 - 3) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha\mu}{4}(I_1 - 3) \left(\frac{I_4 - 1}{\beta} \right)^\alpha \right] \gamma \end{aligned} \quad (262)$$

$$P_{m,31}^0 = \mu\gamma \quad (263)$$

$$P_{f,31}^0 = 4kI_4(I_4 - 1)\gamma + 4kI_4(I_4 - 1)e^{-\left(\frac{I_4 - 1}{\beta}\right)^\alpha} \left[\frac{\alpha}{2} \left(\frac{I_4 - 1}{\beta} \right)^\alpha - 1 \right] \gamma \quad (264)$$

$$\begin{aligned} P_{fm,31}^0 &= \mu k(I_4 - 1)^2 e^{-\left(\frac{I_4 - 1}{\beta}\right)^\alpha} \gamma \\ &\quad + 4kI_4(I_4 - 1)e^{-\left(\frac{I_4 - 1}{\beta}\right)^\alpha} \left[\frac{\mu}{2}(I_1 - 3) - \frac{\alpha\mu}{4}(I_1 - 3) \left(\frac{I_4 - 1}{\beta} \right)^\alpha \right] \gamma \end{aligned} \quad (265)$$

Dove γ rappresenta il rapporto tra deformazione in direzione $\mathbf{e}_3$ e lunghezza iniziale in direzione $\mathbf{e}_1$. Anche per questo modello il contributo del moltiplicatore lagrangiano non influisce nel calcolo della tensione di shear, ottenuta sommando i tre contributi come qui mostrato.

Le tensioni iperelastiche ottenute sotto deformazioni uniassiale e di shear semplice vengono utilizzate con il modello viscoelastico già presentato nel Paragrafo 3.1.7 secondo il procedimento illustrato dal gruppo di Carniel. È possibile dunque utilizzare le eq. (219) e eq. (220), dove stavolta il pedice l assume anche la notazione $l = fm$, in modo da applicare lo stesso procedimento anche per il calcolo dei contributi viscosi della componente di interazione fibre-matrice. Inoltre, come spiegato in precedenza, i parametri comportamento iperelastico sono ottenuti tramite il confronto con il comportamento a infinito, a causa di esigenze di tipo sperimentale; pertanto, si applica la sostituzione $P_l^\infty = \gamma_l^\infty P_l^0$ che porta all'utilizzo delle eq. (222) e eq. (223), anch'esse utilizzate con i termini $P_{m,31}^0$, $P_{f,31}^0$ e $P_{fm,31}^0$ delle eq. (263), eq. (264) e eq. (265) ricavate dal modello di Sopakayang e Holzapfel.

4 Materiali e metodi

In questo capitolo vengono discusse le procedure attraverso le quali si è analizzato il comportamento dei tendini, in particolare tendini flessori digitali superficiali (SDFT) di origine porcina. Per descriverne il comportamento vengono proposti i modelli implementati da Carniel et al. [48] e di Sopakayang-Holzapfel [51] descritti nel capitolo precedente.

4.1 Descrizione dei tendini esaminati

Il muscolo flessore digitale superficiale nei maiali origina dall'epicondilo mediale all'estremità distale dell'omero. È composto da due teste di dimensioni diverse. Il SDFT origina dalla testa più piccola che scende lungo il lato caudomediale verso l'ulna e lungo il lato caudale verso il metacarpo. All'estremità distale del metacarpo, il SDFT si divide in branche mediali e laterali, che corrono per inserirsi sulla superficie palmare delle ossa falangee intermedie [52].

La struttura dei SDFT porcini può essere suddivisa in tre regioni [53]:

- Regione prossimale, corrispondente a quella che precede la parte miofibrosa muscolo-terminale del campione che avvolge l'articolazione tibiotarsica, soggetta a forze di compressione, attrito e tensione;
- Regione mediale, parte estesa del tendine a sezione ridotta che sopporta esclusivamente forze di tensione;
- Regione prossimale, corrispondente a quella che precede la parte cartilaginea osso-terminale del campione che passa vicino all'articolazione metatarso-falangea, soggetta a forze di compressione.

Poiché le diverse regioni vengono sottoposte a diverse condizioni biomeccaniche, viene osservata una differenza ultrastrutturale tra di esse (Figura 15). La regione mediale mostra fibroblasti allungati e allineati in direzione assiale alle fibre di collagene, le quali presentano un andamento ondulato e ben organizzato; assume così una struttura generalmente fibrosa, ben adatta a sostenere carichi tensili. Al contrario, la regione prossimale è caratterizzata da cellule con una morfologia rotonda, mentre le fibre di collagene risultano più disordinate e con spazi interfibrillari più ampi; per sostenere più efficacemente carichi di compressione, dunque, si ha una organizzazione strutturale di tipo fibrocartilagineo [53].

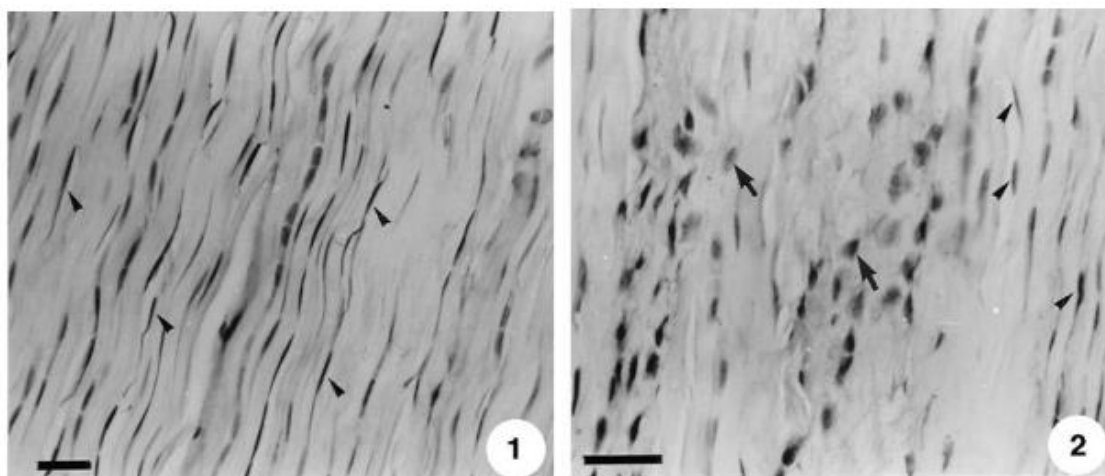


Figura 15: 1) Allineamento delle fibre e delle cellule nella regione mediale del SDFT. 2) Morfologia rotonda e disorganizzazione delle fibre di collagene nella regione prossimale del SDFT [53].

4.2 Analisi dei dati

Per ottenere i dati sperimentali è stata utilizzata la macchina a trazione *MTS Insight® Electromechanical Testing Systems* con cella di carico funzionante fino a 1000 N, con la quale sono stati sottoposti i provini a cicli di carico mediante deformazione a velocità costante ($v = 10 \text{ mm/min}$), intervallati ad una fase di riposo o relaxation che è fondamentale per la caratterizzazione dei processi viscosi che dissipano parte dell'energia accumulata durante la fase di carico.

I tendini in condizioni fisiologiche di normale funzionamento raggiungono allungamenti al di sotto del 4% della loro lunghezza a riposo che sono al di sotto di quelli che possono raggiungere prima di arrivare a rottura. Per studiarne il comportamento è stato scelto di distinguere diversi livelli di deformazioni a cui sottoporre il provino, che nel caso di deformazione uniassiale partono da allungamenti del 3% quindi entro il range di normale funzionamento, per poi aumentare le deformazioni raggiunte al di fuori del normale funzionamento, fino a un massimo del 15% dove anche i provini più robusti arrivavano generalmente a rottura (i dati in cui si è manifestata una completa rottura sono stati ignorati). Occorre far notare che lo stato dei provini *in-vitro* è diverso da quello *in-vivo*, con i provini che sono stati estratti e conservati anche per diverse ore a temperatura controllata e con trattamento frequente con soluzione fisiologica, ma che ovviamente perdono parzialmente le loro proprietà meccaniche a causa della degradazione in ambiente non fisiologico.

I livelli di deformazione vanno da un numero di 3 a 5, poiché alcuni campioni hanno presentato una rottura o uno scivolamento dalle pinze nei livelli intermedi che ne ha compromesso l'utilità dei dati. La rottura era sempre parziale, cioè non si otteneva mai un troncamento netto del tendine, ma avveniva uno schiocco facilmente udibile causato dalla lacerazione delle strutture interne, le quali causavano una perdita immediata del carico sostenuto, durante l'allungamento costante o durante la fase di riposo, rilevabile visivamente sul monitor durante la prova e successivamente durante l'analisi dei dati.

4.2.1 Tipologie di test

Sono state effettuate tre modalità di prove:

1. Deformazioni uniassiali mediante separati cicli di carico, relaxation e scarico, con livelli di deformazione e rilassamento ottenuti in diverse prove effettuate sullo stesso campione, ognuna con una velocità di deformazione $v = 10 \text{ mm/min}$ costante;
2. Deformazioni uniassiali mediante cicli di carico e relaxation svolti in un'unica prova, che comprende tutti i livelli di deformazione e successivo rilassamento, con velocità di deformazione sempre a $v = 10 \text{ mm/min}$ costante.
3. Shear semplice mediante cicli di carico svolti in un'unica prova, anch'essa che comprende tutti i livelli di deformazione e successivo rilassamento, con velocità di deformazione sempre a $v = 10 \text{ mm/min}$ costante.

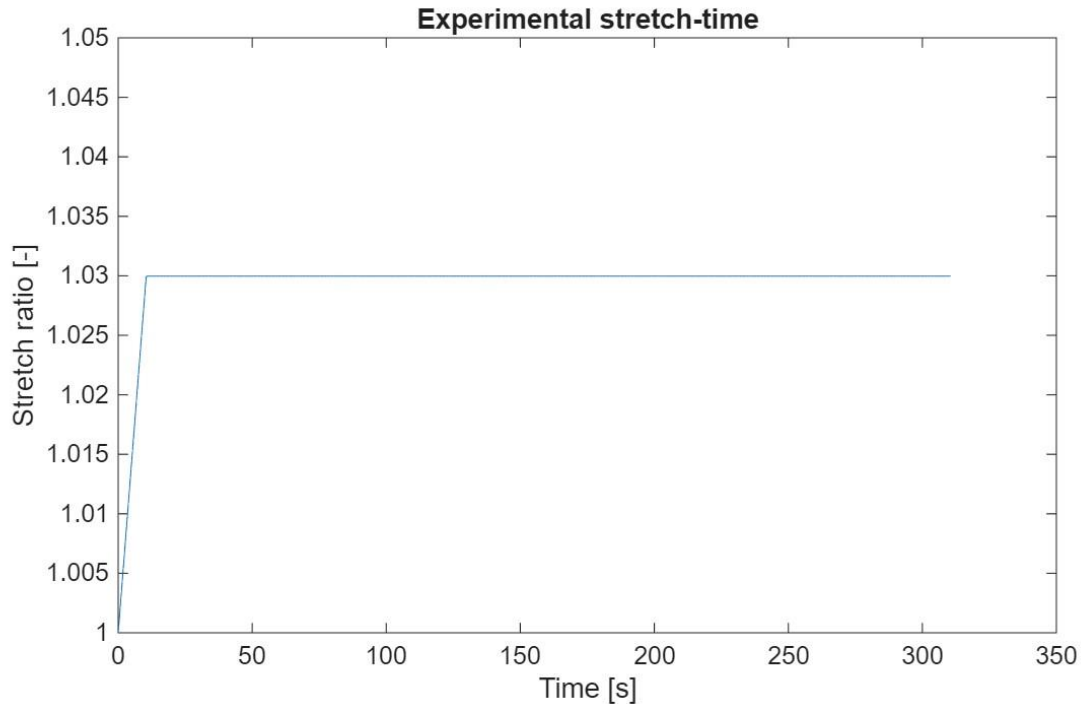


Figura 16: Curva stretch ratio-tempo relativo al primo livello di deformazione del test di trazione uniassiale eseguito sul provino del 07/03/2023 (SDFT grande – Sample 1; le informazioni su questo campione sono riportate in Tabella 7,8).

In Figura 16 è mostrato a titolo di esempio l'andamento della curva dello stretch ratio applicato ad uno dei campioni testati per il tipo di prova numero 1. Questo andamento è relativo soltanto al primo livello di deformazione, nel quale viene raggiunto un allungamento pari al 3% della lunghezza iniziale del campione. La durata della prova dipende, seppur in piccola parte, dalla lunghezza del campione, poiché la velocità di deformazione è uguale per ogni prova, ma la lunghezza raggiunta è percentuale di quella iniziale, quindi il tempo impiegato per raggiungerla è funzione della lunghezza di ogni campione; dunque, per provini più corti la prova durerà leggermente meno che per provini più lunghi, e i risultati complessivi, che verranno mostrati nel successivo Capitolo, mostreranno curve con tempi finali lievemente differenti.

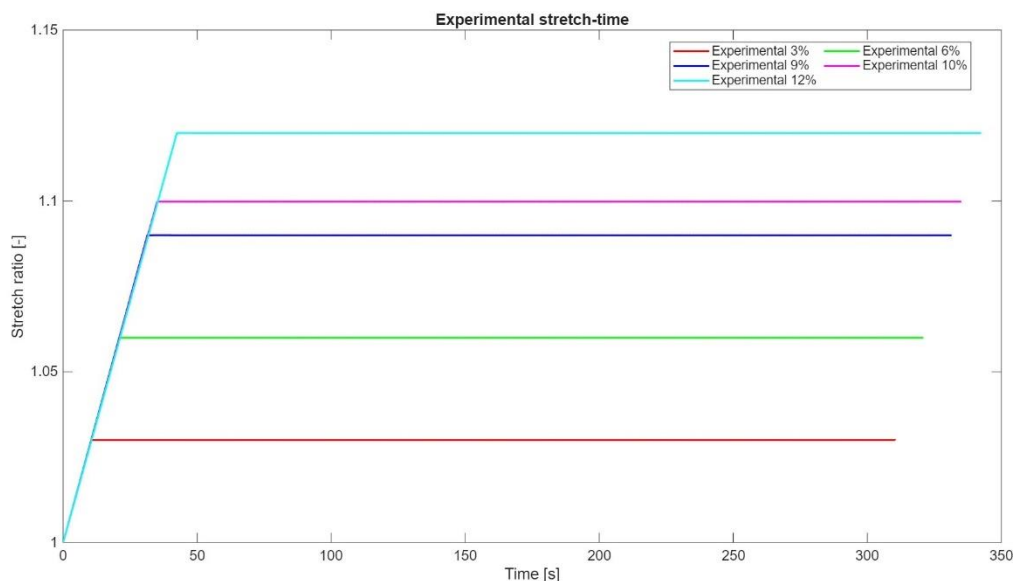


Figura 17: Curve stretch ratio-tempo relative ad ogni livello di deformazione del test di trazione uniassiale eseguito sul provino del 07/03/2023 (SDFT grande – Sample 1; le informazioni su questo campione sono riportate in Tabella 7,8).

In Figura 17 sono mostrate le curve che indicano ogni livello di deformazione, discretizzati con diversi colori, per lo stesso campione precedente e quindi per il primo tipo di prova. I livelli successivi vengono raggiunti in maniera analoga al primo, infatti i tratti di curva a deformazione costante risultano sovrapposti; ne consegue una durata lievemente maggiore ad ogni prova, poiché la velocità è fissata anche tra i vari livelli di deformazione da raggiungere.

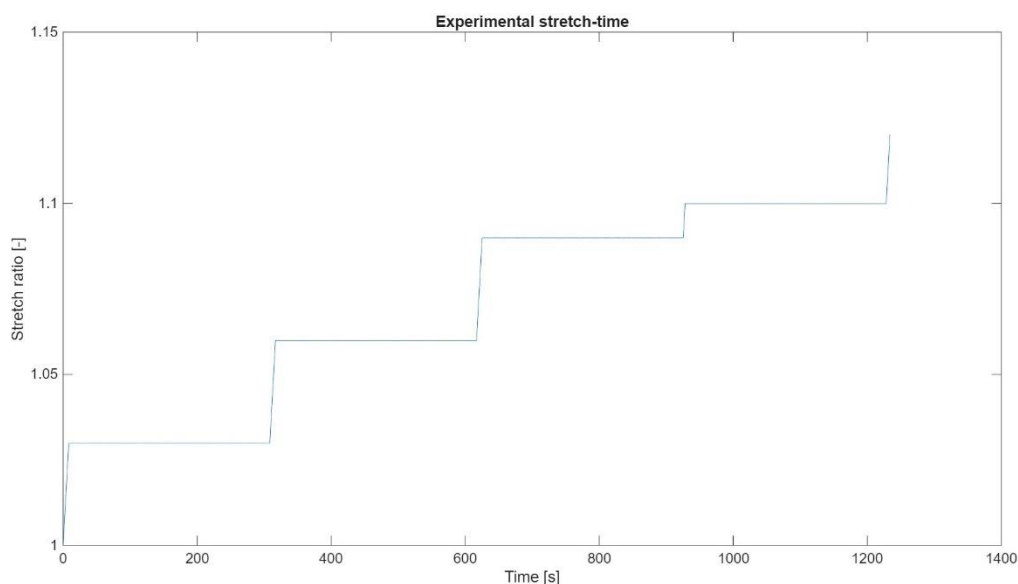


Figura 18: Curva stretch ratio-tempo relativo all'intero test di trazione uniassiale eseguito sul provino del 13/06/2024 (SDFT grande – Sample 22; le informazioni su questo campione sono riportate in Tabella 11,12).

In Figura 18 è invece mostrato l'andamento dello stretch ratio rispetto al tempo, applicato a un campione soggetto al secondo tipo di test con livelli di deformazione consecutivi, raggiunti in un unico ciclo. La differenza principale dai primi tipi di test eseguiti risiede proprio nel fatto

che ogni livello di deformazione viene raggiunto partendo dal punto finale di relaxation del precedente, senza lo scarico intermedio e senza ripartire da una deformazione nulla. La durata complessiva sarà quindi maggiore di circa 4 volte di quella vista per il raggiungimento dei singoli livelli, relativamente al primo tipo di test.

Per il terzo tipo di prova l'andamento stretch ratio-time è analogo, ma con differenze nei valori di stretch ratio, in quanto, come verrà spiegato di seguito, i livelli di deformazione sono discretizzati con lunghezze di deformazione trasversale fissate invece che percentuali della lunghezza del campione, causando dunque valori di stretch ratio differenti per ogni tendine esaminato.

4.2.2 Procedure relative ai tre tipi di test

Si riportano le procedure comuni e distinte delle tre modalità di test eseguiti, al fine di fornire una panoramica su come sono stati ottenuti i risultati della sperimentazione, a partire dalle fasi iniziali. Per le tre modalità di test sono stati eseguiti i seguenti passaggi comuni:

- Sono state misurate le dimensioni minori dei vari campioni, in particolare si è scelta una larghezza e uno spessore in tre punti diversi della lunghezza che rappresentano le sezioni distale, mediale e prossimale del tendine. L'estremità distale corrisponde a quella che precede la parte cartilaginea osso-terminale del campione, mentre l'estremità prossimale corrisponde a quella che precede la parte miofibrosa muscolo-terminale del campione.
- Sono stati pinzettati i provini alle due estremità, cercando nella maniera migliore possibile di fissarlo con il suo asse parallelo a quello della macchina, e pinzettandone le parti osso-terminali e muscolo-terminali, cercando di far corrispondere alla parte non pinzettata la lunghezza effettiva della struttura tendinea. Questo processo, poiché manuale, rappresenta una fonte di variabilità dei dati e di incertezza dei risultati.
- È stata misurata la lunghezza iniziale della parte del provino esposta dalle pinze che, come detto precedentemente, dovrebbe corrispondere alla lunghezza effettiva del tendine.
- Sono stati settati i parametri della prova, diversi per ogni tipo di test quindi riportati di seguito;
- È stato eseguito un preconditionamento del provino, in modalità differenti tra prove a livelli separati e prove a unico ciclo;
- È stata avviata la prova: i provini sono stati sottoposti a deformazione nelle due modalità prescritte, fin quando non si è completata correttamente, a meno di una rottura interna del provino o di uno scivolamento dalle pinze dello stesso, il che lo rende inutilizzabile ai nostri scopi.
- Il campione ha così esaurito la sua utilità e può essere scartato.

Le differenze tra le tre modalità di test sono invece le seguenti:

1. Per la prima modalità sono state effettuate un numero di prove separate pari al numero di livelli di deformazione (da 3 a 5), in quanto dopo ogni prova bisognava riavviare il test cambiando il parametro che stabiliva il livello di deformazione.

È stato eseguito un pretensionamento manuale di circa 1 N per ogni livello di deformazione, in modo da portare il provino a uno stato teso che evitasse che i primi millimetri di deformazione non risultassero scarichi (si pensi ad una fune non tesa: ad un allungamento iniziale non corrisponde una tensione interna). Anche questo processo rappresenta una fonte di variabilità dei dati e di incertezza dei risultati (il pretensionamento di 1 N si riferiva alla

prova con un campione precedente in quanto la macchina non ha un riferimento assoluto per i carichi che vengono infatti azzerati ad ogni prova, mentre lo stato teso veniva valutato visivamente e pizzicando lievemente il provino per valutarne la rigidità).

Per ogni prova il campione è stato deformato fino al livello di deformazione settato, dopodiché è stato mantenuto a tale lunghezza massima per un tempo di rilassamento pari a 300 secondi, così da poter sperimentare sul tendine la fase di relaxation viscosa. Il campione, rimasto pinzettato, è stato bagnato con soluzione fisiologica (per evitare il più possibile la perdita delle proprietà del tessuto); il parametro che stabiliva il livello di deformazione da raggiungere veniva aggiornato e si rilanciava la prova fino a raggiungere la rottura o lo scivolamento del campione, corrispondente con provini validi a livelli di deformazioni che vanno da un minimo di 10% per campioni deboli a un massimo di 15% quando i tendini erano ben fissati e resistenti.

Input della macchina	Valori	Unità di misura
Deformazione massima	3/6/9/10/12/15	%
Frequenza di campionamento	30/50	Hz
Distanza tra le pinze	variabile	mm
Velocità di deformazione	10	mm/min
Tempo di rilassamento	300	s

Tabella 1: Valori di input inseriti nella macchina per la prima modalità di test di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati.

2. Per la seconda modalità viene effettuata un'unica prova dove 5 livelli di deformazione vengono raggiunti e intervallati da un tempo di rilassamento pari a 5 minuti (ad eccezione dei test del 21/05/2024, che saranno evidenziati nei risultati).

La fase di preconditionamento consiste in questo caso nell'applicazione di due prove consecutive, ognuna con 5 cicli di carico e scarico ottenute raggiungendo deformazioni massime del 3% della lunghezza iniziale e minime del 1,2% della lunghezza iniziale. Ciò serve a permettere al tendine di raggiungere delle condizioni simili a quelle omeostatiche, nella quale il tessuto raggiunge un equilibrio meccanico e biochimico, simulando quindi lo stato naturale del tessuto.

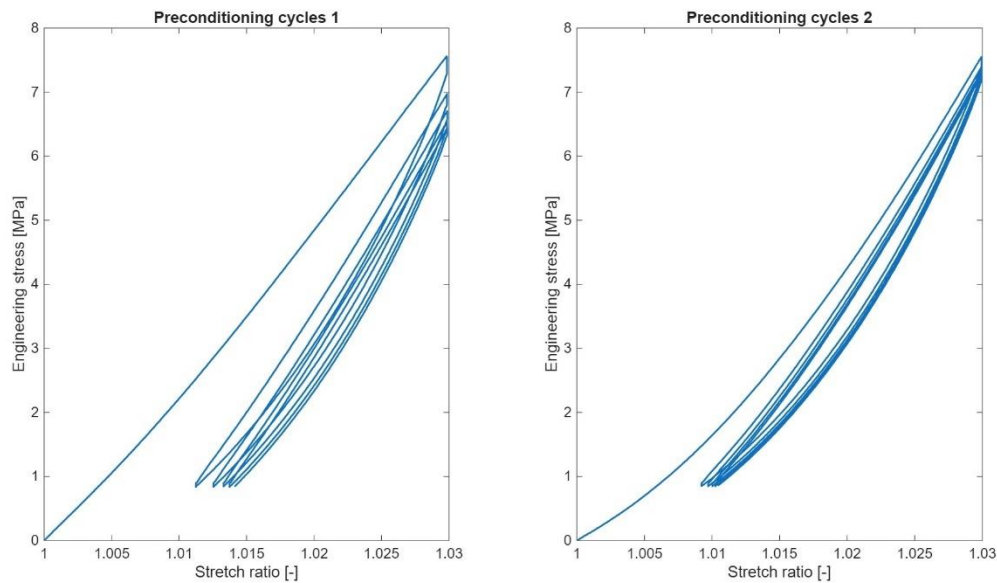


Figura 19: Cicli di preconditionamento relativi al test di stress-relaxation con trazione uniassiale e livelli di deformazione raggiunti in un ciclo unico, ottenute dal provino del 13/06/2024 (SDFT grande – Sample 22; le informazioni su questo campione sono riportate in Tabella 11,12).

Si può osservare dalla Figura _ che questi cicli convergono verso un andamento standard del carico: infatti, mentre nel primo ciclo di preconditionamento (sinistra) si ha una maggiore distanza fra le curve di carico e di scarico, nel secondo ciclo tali curve presentano un andamento più regolare per ognuno dei 5 cicli; l'area compresa tra le curve di carico e quelle di scarico rappresenta il fenomeno di isteresi che caratterizza i tessuti biologici. A differenza della modalità di pretensionamento precedente, questo metodo rappresenta un miglioramento nelle modalità di test, poiché oltre che più accurato, risulta essere anche un processo riproducibile ad ogni prova, togliendo quindi una fonte di variabilità dei risultati. Rispetto alla prova precedente non è presente l'azzeramento della deformazione relativa tra un livello di deformazione e l'altro; quindi, dopo la fase di relaxation inizia subito la seguente fase di deformazione assiale, partendo dall'ultimo valore della precedente deformazione che è mantenuto costante nella fase di relaxation. Il termine della prova coincide con il completamento del test; se questa è stata completata correttamente e il campione appare ancora adatto, lo stesso campione può essere utilizzato anche per effettuare il test di shear.

Input della macchina	Valori	Unità di misura
Deformazione massima 1	3	%
Deformazione massima 2	6	%
Deformazione massima 3	9	%
Deformazione massima 4	10	%
Deformazione massima 5	12	%
Frequenza di campionamento	30	Hz
Distanza tra le pinze	100	mm
Velocità di deformazione	10	mm/min
Tempo di rilassamento	60/300	s

Tabella 2: Valori di input inseriti nella macchina per la seconda modalità di test di trazione uniassiale con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo.

3. Anche per la terza modalità viene effettuata un'unica prova con un massimo di 5 livelli di deformazione raggiunti e intervallati da un tempo di rilassamento pari a 5 minuti, senza azzeramento della deformazione relativa. A differenza delle prove con deformazione uniassiale, qui sono stabiliti 5 livelli di deformazione uguali per ogni campione, cioè non basati sulla lunghezza percentuale a riposo del campione, ma pari a 10 mm, 12 mm, 14 mm, 16 mm e 20 mm. Sono inoltre diverse le modalità di afferraggio del campione alla macchina di prova: poiché la macchina utilizzata nasce per esercitare deformazioni uniassiali, è stato fissato un supporto nell'estremità inferiore della macchina che ha permesso di fissare il campione in orizzontale, in modo che l'estremità superiore della macchina sottoponesse il campione a uno stato deformativo di shear semplice. Si riporta inoltre che non è stato eseguito alcun preconditionamento per questo tipo di prova.

Input della macchina	Valori	Unità di misura
Deformazione massima 1	10	%
Deformazione massima 2	12	%
Deformazione massima 3	14	%
Deformazione massima 4	16	%
Deformazione massima 5	20	%
Frequenza di campionamento	30	Hz
Distanza tra le pinze	100	mm
Velocità di deformazione	10	mm/min
Tempo di rilassamento	300	s

Tabella 3: Valori di input inseriti nella macchina per la terza modalità di test di shear semplice con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo. Si noti che le deformazioni raggiunte sono ancora in valore percentuale; dunque, si inserisce un valore di distanza tra le pinze fisso anche se non corrisponde a quello reale, così da adattare la macchina di trazione ad un test di shear, ottenendo i valori di deformazione mostrati in precedenza.

4.2.3 Pulizia dei dati (Excel) e ottenimento delle grandezze di interesse (MATLAB)

I dati e le misure ottenute in uscita dalla macchina sono stati salvati in formato .txt ed elaborati in formato .xls (dove vengono soprattutto traslati nell'origine), in modo da renderli pronti per essere importati su MATLAB. Vengono anche aggiunte le misure ricavate manualmente.

Una volta importati i dati in MATLAB, si separano i vari livelli, e per ognuno si ricavano i singoli vettori di tempo, carico e deformazione. Dal carico si ricava lo stress ingegneristico dividendo per l'area media del provino, media delle aree delle tre regioni ottenute con approssimazione ad un'ellisse con assi uguali alla larghezza e allo spessore misurati. Dalla deformazione invece si ricava lo strain ingegneristico dividendo per la lunghezza iniziale; si ricava inoltre il vettore di stretch ratio dallo strain ingegneristico, e nel caso dei dati ottenuti dalle prove di shear si ricava il vettore di scorrimento $\gamma = \tan(\theta)$, dividendo lo spostamento misurato in direzione perpendicolare per la lunghezza a riposo. Ottenuti questi vettori, si ricavano i valori finali di stress ingegneristico, stretch ratio per deformazione uniassiale e

scorrimento per shear semplice, di ogni livello di deformazione. Questi valori rappresentano i punti di equilibrio attraverso i quali viene calcolata la risposta iperelastica del materiale, in quanto rappresentano i punti di fine rilassamento nei quali si ipotizza che siano stati esauriti tutti i processi viscosi: dunque, costruendo una curva che passi per tali punti, si ipotizza che questa rappresenti la risposta iperelastica del materiale.

4.3 Metodo di ricerca dei parametri costitutivi

La ricerca dei parametri del modello viene effettuata mediante la funzione `ga` di MATLAB. Per questa funzione, le formulazioni del tensore $\mathbf{P}$ ottenute per i due modelli considerati, sono state utilizzate come “funzioni obiettivo” da comparare con i risultati del modello matematico, al fine di ottenere i parametri che descrivano una curva quanto più vicina alla curva dei carichi ottenuta sperimentalmente.

4.3.1 Parametri dei modelli

Per modellizzare il comportamento viscoelastico del tendine, i modelli proposti presentano quattro parametri iperelastici, diversi tra un modello e l'altro come visto nel precedente Capitolo. Inoltre, sono utilizzati ulteriori parametri per descrivere la dissipazione viscosa interna per ogni componente del tessuto modellizzato. Si è già visto che nel primo modello, implementato da Carniel et al. [48], si distinguono i componenti di matrice e di fibre, mentre nel secondo modello di Sopakayang e Holzapfel [51] è aggiunta una terza componente di interazione fibre-matrice; poiché si sono scelti 4 processi viscosi per ogni componente, ognuno caratterizzato da rapporto relativo adimensionale e costante di tempo, si ottiene un totale di 16 parametri viscosi per il primo modello e 24 parametri viscosi per il secondo modello. Come per tutti i modelli basati sulla meccanica teorica, ognuno di questi parametri da ricercare vuole avere un significato fisico, in modo tale che il modello matematico proposto, oltre a simulare il comportamento, riesca anche a fornire una descrizione fisica e concreta del tessuto. Nelle seguenti tabelle è fatto un riassunto dei parametri utilizzati per caratterizzare la risposta iperelastica derivata dal modello di Carniel et al. (Tabella 4), la risposta iperelastica derivata dal modello di Sopakayang e Holzapfel (Tabella 5) e la dissipazione viscosa del generico contributo l della componente tendinea (Tabella 6), dove $l = m, f, fm$ sta per matrice, fibre e interazione fibre-matrice, rispettivamente (si ricordi che la componente di interazione fibre-matrice è modellizzata soltanto nel secondo modello presentato).

Parametri	Unità di misura	Significato fisico	Intervallo di valori dello spazio di ricerca
C_1	MPa	Rigidezza di shear della matrice $G = C_1/2$	0.001-1000
α_1	-	Regola la nonlinearietà della risposta allo shear	0.001-1000
C_4	MPa	Rigidezza iniziale delle fibre	0.001-1000
α_4	-	Indice della conformazione ondulata iniziale delle fibre	0.001-1000

Tabella 4: Descrizione dei parametri iperelastici che caratterizzano il modello implementato dal gruppo di Carniel [48].

Parametri	Unità di misura	Significato fisico	Intervallo di valori dello spazio di ricerca
μ	MPa	Modulo di shear	0.001-1000
k	MPa	Indice di rigidità delle fibre	0.001-1000
α	-	Parametro di forma	0.001-1000
β	-	Parametro di scala	0.001-1000

Tabella 5: Descrizione dei parametri iperelastici che caratterizzano il modello implementato da Sopakayang e Holzapfel [51].

Parametri	Unità di misura	Significato fisico	Intervallo di valori dello spazio di ricerca
γ_l^1	-	Rapporto relativo di rigidità per il primo processo viscoso	0.01-1
τ_l^1	s	Costante di tempo del primo processo viscoso	0.001-0.1
γ_l^2	-	Rapporto relativo di rigidità per il secondo processo viscoso	0.01-1
τ_l^2	s	Costante di tempo del secondo processo viscoso	0.1-10
γ_l^3	-	Rapporto relativo di rigidità per il terzo processo viscoso	0.01-1
τ_l^3	s	Costante di tempo del terzo processo viscoso	10-1000
γ_l^4	-	Rapporto relativo di rigidità per il quarto processo viscoso	0.01-1
τ_l^4	s	Costante di tempo del quarto processo viscoso	1000-100000

Tabella 6: Descrizione dei parametri viscosi che caratterizzano il contributo di matrice ($l=m$), fibre ($l=f$) e interazione fibre-matrice ($l=fm$), con quest'ultimo contributo presente soltanto nel secondo dei due modelli implementati [48], [51].

Di questi parametri, risultano particolarmente significativi i primi quattro parametri iperelastici di entrambi i modelli, poiché fortemente impattanti sull'andamento della curva. In particolare, i parametri C_1 e C_4 per il primo modello e i parametri μ e k per il secondo modello rappresentano dei fattori moltiplicativi dell'energia di deformazione, e vengono infatti misurati con l'unità di misura di una tensione. Poiché le fibre sono più rigide della matrice del tessuto tendino, ci si aspetta che il suo contributo nella risposta dei carichi sia maggiore per alte deformazioni, dove cominciano ad intervenire in maniera maggiore rispetto alle altre componenti tissutali; dunque, ci si aspetta che il coefficiente relativo al contributo delle fibre risulti maggiore di quello della matrice.

È importante sottolineare che, oltre questi parametri oggetto di ricerca, nei modelli viscoelastici è presente anche il parametro γ_l^∞ , $l = m, f, fm$, che rappresenta il rapporto relativo adimensionale di rigidità del comportamento a infinito, ossia del contributo

puramente iperelastico, il quale si somma ai contributi dei carichi viscosi. Tale parametro non viene ricercato poiché è utilizzata la condizione della eq. (179), che esprime una dipendenza lineare tra i quattro parametri dei processi viscosi e il quinto del comportamento a infinito; dunque, nell'algoritmo di ricerca dei parametri viene definito $\gamma_l^\infty = 1 - (\gamma_l^1 + \gamma_l^2 + \gamma_l^3 + \gamma_l^4)$, $l = m, f, fm$, in modo tale che la condizione in eq. (179) sia sempre rispettata.

4.3.2 Ricerca contemporanea dei parametri iperelastici e viscosi

È stato già detto che i carichi di confronto per ricavare il comportamento iperelastico dei provini sono quelli ottenuti dai punti finali del rilassamento, i quali rappresentano il cosiddetto comportamento a infinito del materiale. Dato che i livelli di deformazione cui i provini sono stati sottoposti sono pari a un numero che va da 3 a 5, la curva iperelastica viene costruita utilizzando dei vettori in ambiente MATLAB che hanno questo numero di elementi; addirittura, per un provino sottoposto a test di shear (prova del 13/11/2024, Sample 39), si hanno solo due punti a infinito, poiché la prova raggiunge soltanto il terzo livello di deformazione con rilassamento interrotto, che quindi non permette di avvicinarsi al valore di plateau, come invece viene fatto per i punti precedenti, quindi non può essere utilizzato per ricavare il comportamento iperelastico. Anche se pochi, sono comunque sufficienti a ricostruire la curva, il cui andamento è definito dalla formulazione teorica.

I parametri viscosi invece sono catturati dal confronto con l'intero andamento dei carichi al primo livello di deformazione, che per le prove di deformazione uniassiale (sia con livelli separati che con ciclo unico) corrisponde a quella che raggiunge il 3% di deformazione di picco, mentre per test di shear semplice corrisponde a quella che raggiunge i 10 mm di spostamento perpendicolare rispetto alla posizione iniziale. Dato che il campionamento viene effettuato con una frequenza di 30 Hz o 50 Hz, si ottiene in ambiente MATLAB un vettore con ben più elementi rispetto al vettore con i punti a infinito.

Inizialmente, si era scelto di ricavare i quattro parametri separatamente a quelli viscosi, utilizzando l'algoritmo di ricerca con la sola formulazione iperelastica, per poi inserire tali parametri nella formulazione viscoelastica per la ricerca dei restanti parametri viscosi. Si è visto che, mentre il fitting dei primi parametri replicava fedelmente la curva sui punti a infinito, il fitting viscoelastico restituiva risultati peggiori e non soddisfacenti. Si è scelto dunque di effettuare la ricerca di tutti i parametri contemporaneamente, applicando nella stessa funzione utilizzata dal ga la formulazione iperelastica, con il vettore dei punti a infinito, e la formulazione viscoelastica, con il vettore del primo livello di deformazione. I risultati così ottenuti si sono rivelati più soddisfacenti, sia per la fedeltà delle singole curve rispetto quelle del primo livello di deformazione, quanto per la coerenza dei parametri ottenuti tra i vari campioni; poiché lo spazio di ricerca dei parametri iperelastici presenta numerosi minimi locali, è probabile che la ricerca complessiva dei parametri aiuta ad indirizzare la ricerca verso i parametri ottimali per il campione specifico.

4.3.3 Funzione di ottimizzazione

Per ricercare i parametri è stata utilizzata la funzione di ottimizzazione “coefficiente di determinazione” R^2 , definita come:

$$R^2 = 1 - \frac{RSS}{TSS}$$

In cui:

$$RSS = \sum_{i=1}^{n_{punti}} (\text{punto curva sperimentale} - \text{punto curva numerica})^2$$

$$TSS = \sum_{i=1}^{n_{punti}} (\text{punto curva sperimentale} - \text{media punti della curva sperimentale})^2$$

Il valore RSS è dunque il quadrato della distanza tra le due curve a confronto e rappresenta il valore che dipende da quanto il fitting abbia predetto i risultati, mentre il valore TSS rappresenta il quadrato della differenza tra la curva obiettivo e il suo valor medio e funge come valore di riferimento al di sotto del quale l'RSS deve il più possibile mantenersi. Il valore di R^2 tende quindi a 1, valore che rappresenta il limite superiore della funzione, avvicinato man mano che i risultati predetti tendono a quelli reali, dove quindi la variabilità dei dati è perfettamente spiegata dal modello; quando invece l' R^2 assume valore nullo si può dire che il modello non spiega nulla della variabilità ed è come predire soltanto la media; se invece il valore ottenuto è inferiore a 0 significa che il modello è mal definito (come fosse peggiore di quello che ne calcola la media).

Notare che si tratta di una sommatoria in quanto si lavora con strumenti digitali, quindi i dati, così come le curve numeriche ottenute dal modello matematico, non saranno continui ma avranno un tot di punti dovuti al campionamento. In particolare, in ambiente MATLAB i vettori di stress ingegneristico, stretch e tempo devono avere lo stesso numero di elementi, sia per il calcolo del carico numerico che per il confronto con il carico sperimentale mediante R^2 .

L'algoritmo di ricerca viene completato per 5 diverse volte: ottenute 5 combinazioni dei parametri, si calcola il valore di R^2 migliore rispetto alla curva di carico del primo livello di deformazione, e i parametri corrispondenti vengono scelti come quelli che rappresentano il campione testato. Una volta ottenuti i parametri, questi vengono utilizzati per tracciare le curve numeriche, sostituendoli nelle medesime equazioni del modello utilizzate per ricavarli insieme ai vettori di deformazione; nel caso di deformazione uniassiale tale vettore rappresenta lo stretch ratio, mentre nel caso di shear semplice rappresentano la quantità di shear.

4.3.4 Descrizione della funzione di ricerca

La funzione implementata per la ricerca dei parametri dei due modelli riceve come input i valori di stretch ratio (trazione uniassiale) o di quantità di shear (shear semplice), insieme ai vettori di stress ingegneristico e di tempo sperimentali. Si ricorda infatti che il carico diventa, nel modello viscoelastico, funzione anche della variabile tempo, a causa dei processi viscosi che seguono un decremento esponenziale con una costante di tempo diversa per ogni processo.

Per quanto riguarda gli altri due vettori, i valori di stretch ratio sono stati utilizzati per calcolare i valori numerici di tensione ottenuti assieme a un determinato set di parametri costitutivi, mentre i valori di stress ingegneristico sono stati confrontati a tali tensioni numeriche, allo scopo di raggiungere, iterazione dopo iterazione, il set di parametri che minimizzi la differenza tra le due tensioni. Si ricorda che la ricerca dei parametri è stata svolta confrontando contemporaneamente il comportamento iperelastico e quello viscoelastico: dunque, sono stati ottimizzati i parametri costitutivi comparando nello stesso algoritmo di ricerca i valori di stress ingegneristico ottenuti dai punti a infinito e i valori di stress ingegneristico ottenuti dal primo livello di deformazione completo. È necessario dunque

inserire come input i vettori con i punti stretch-stress sia del comportamento a infinito che del primo livello di deformazione, e applicare separatamente il calcolo del vettore numerico di tensione, quindi utilizzare separatamente la funzione di ottimizzazione.

La formulazione matematica utilizza le equazioni viste nei Capitoli teorici, in particolare viene utilizzata la formulazione iperelastica del carico $\mathbf{P}$, che utilizza soltanto i primi quattro parametri, e la formulazione viscoelastica di $\mathbf{P}$ che comprende anche i carichi dissipativi, utilizzando quindi i parametri viscosi (16 per primo modello, 24 per il secondo modello). Poiché è stata sottolineata l'importanza dei parametri moltiplicativi rispetto alle componenti di fibre e di matrice, ed in particolare che il contributo fibroso abbia un coefficiente indicativo della rigidità del tessuto maggiore di quello delle fibre, è stata imposta una condizione vincolante che garantisca le condizioni $C_1 < C_4$ e $\mu < k$. Tale condizione potrebbe non essere rispettata nella ricerca dei parametri, poiché per quanto il modello possa essere realistico, la ricerca di così tanti parametri porta spesso la soluzione a convergere verso un minimo che non rappresenta la soluzione globale del sistema. Ciò è stato visto in quanto svolgendo molteplici prove, è stata difficilmente ottenuta una soluzione unica per ogni ricerca svolta dall'algoritmo. Tuttavia, avendo imposto questa condizione, si vedrà come la combinazione dei parametri iperelastici darà dei valori abbastanza coerenti tra le varie prove, in quanto nonostante sia stato fornito uno spazio di ricerca con un intervallo di sei ordini di grandezza (0.001-1000), i valori ottenuti rientrano in un intervallo di valori ben più ristretto. In aggiunta, poiché tale vincolo è stato applicato a posteriori dell'ottenimento delle combinazioni di parametri, è stato verificato che l'effettiva applicazione si ha soltanto per una minoranza di elaborazioni dei parametri (16 prove per il modello di Carniel, e una sola prova per il modello di Sopakayang-Holzapfel).

Per quanto riguarda la funzione di ottimizzazione R^2 , come visto nel Paragrafo 4.3.3 questa si basa su un calcolo medio effettuato su tutti i punti dei vettori di carico, in modo da ottenere un unico valore scalare che sia indice di affidabilità dei risultati. Le curve di carico ottenute dalle prove stress-relaxation, ottenute per questo lavoro di tesi, mostrano un andamento strettamente crescente per la fase di deformazione costante e un andamento strettamente decrescente per la fase di deformazione nulla, quanto meno nella fase iniziale in cui non è stato raggiunto il plateau. L'applicazione di un metodo di ottimizzazione come quello di R^2 non tiene conto, secondo la sua formulazione, di ottimizzare i risultati secondo la variazione cui sono sottoposti, poiché svolge una comparazione basata sulla semplice media quadratica tra le differenze dei valori assunti; pertanto, si è scelto di riportare in input anche il valore di picco dei carichi relativi al primo livello di deformazione, utilizzato per separare i due andamenti a pendenza opposta, e effettuare la ricerca dei parametri separando anche il vettore di carichi del primo livello di deformazione, dimezzando il peso del valore di ottimizzazione di ognuna delle due parti. La ricerca dunque è svolta in contemporanea applicando l'ottimizzazione delle tensioni numeriche attraverso la comparazione con tre vettori di stress ingegneristico separati: il primo contiene lo stress ingegneristico puramente iperelastico, il secondo contiene lo stress ingegneristico crescente della fase di deformazione a velocità costante del primo livello di deformazione, e il terzo contiene lo stress ingegneristico decrescente della fase di rilassamento del primo livello di deformazione.

5 Risultati ottenuti: grafici e tabelle

Sono stati tracciati diversi grafici di seguito mostrati, alcuni per le singole prove e altri raggruppando le prove per campioni dello stesso tipo, al fine di mostrare la variabilità riguardo il comportamento dei vari provini e la validità e le differenze dei due modelli.

5.1 Risultati sperimentali

Vediamo innanzitutto l'andamento delle curve stress-relaxation ottenute per tutte le prove effettuate, per ogni tipo di tendine e di prova effettuata. Per distinguere le varie prove, ogni curva viene segnata con un simbolo che viene associato alla prova dalla Tabella _ che riporta le informazioni generali. Le dimensioni assiali sono generalmente comprese nell'intervallo 10^2 - 10^3 mm, mentre quelle trasversali sono comprese nell'intervallo 10^1 - 10^2 mm. Come già detto, le prove di trazione uniassiale (nelle due modalità) raggiungono livelli di deformazione in valore percentuale alla lunghezza iniziale dei campioni, quindi ogni campione raggiunge lunghezze diverse; le prove di shear invece presentano livelli di deformazione fissati a 10 mm, 12 mm, 14 mm, 16 mm e 20 mm.

5.1.1 Dimensioni e andamento dei carichi per prove di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati

		Sample 1	Sample 2	Sample 3	Sample 4	Sample 5
<i>general info</i>	Test date	07/03/2024	18/10/2023	22/11/2023	14/03/2024	18/10/2023
	Achieved strain rate	12%	9%	9%	10%	10%
	Symbol	circle	plus sign	asterisk	point	cross
		Sample 6	Sample 7	Sample 8	Sample 9	Sample 10
<i>general info</i>	Test date	22/11/2023	14/03/2024	21/03/2024	29/11/2023	29/11/2023
	Achieved strain rate	10%	12%	12%	12%	12%
	Symbol	horizontal line	vertical line	square	diamond	upward triangle

Tabella 7: Informazioni generali degli SDFT grandi utilizzati per i test di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati.

		Sample 1	Sample 2	Sample 3	Sample 4	Sample 5
measures [mm]	Distal width	5,34	4,55	5,82	6,08	4,15
	Medial width	6,64	4,55	5,03	8,97	4,15
	Proximal width	7,06	4,55	5,09	6,47	4,15
	Distal thickness	3,15	2,70	3,01	3,25	2,73
	Medial thickness	2,95	2,70	2,64	3,71	2,73
	Proximal thickness	2,62	2,70	2,88	3,30	2,73
	Initial length 3%	58,06	59,97	58,13	47,30	48,00
	Initial length 6%	58,11	60,49	58,23	47,30	48,20
	Initial length 9%	58,24	61,10	58,73	47,30	48,42
	Initial length 10%	58,57	-	-	47,33	48,82
	Initial length 12%	58,99	-	-	-	-
		Sample 6	Sample 7	Sample 8	Sample 9	Sample 10
measures [mm]	Distal width	7,69	4,42	4,67	5,52	6,30
	Medial width	5,44	4,31	5,04	4,40	5,04
	Proximal width	6,01	6,31	5,85	4,83	5,65
	Distal thickness	2,98	2,21	2,75	2,34	2,20
	Medial thickness	3,02	1,76	2,58	1,94	2,48
	Proximal thickness	3,07	2,42	2,57	1,81	2,68
	Initial length 3%	51,63	49,84	50,37	53,68	59,44
	Initial length 6%	52,19	49,96	50,46	53,68	59,60
	Initial length 9%	52,84	50,12	50,50	53,79	59,95
	Initial length 10%	53,10	50,38	50,72	54,01	60,46
	Initial length 12%	-	50,69	51,01	54,32	60,92

Tabella 8: Dimensioni degli SDFT grandi utilizzati per i test di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati.

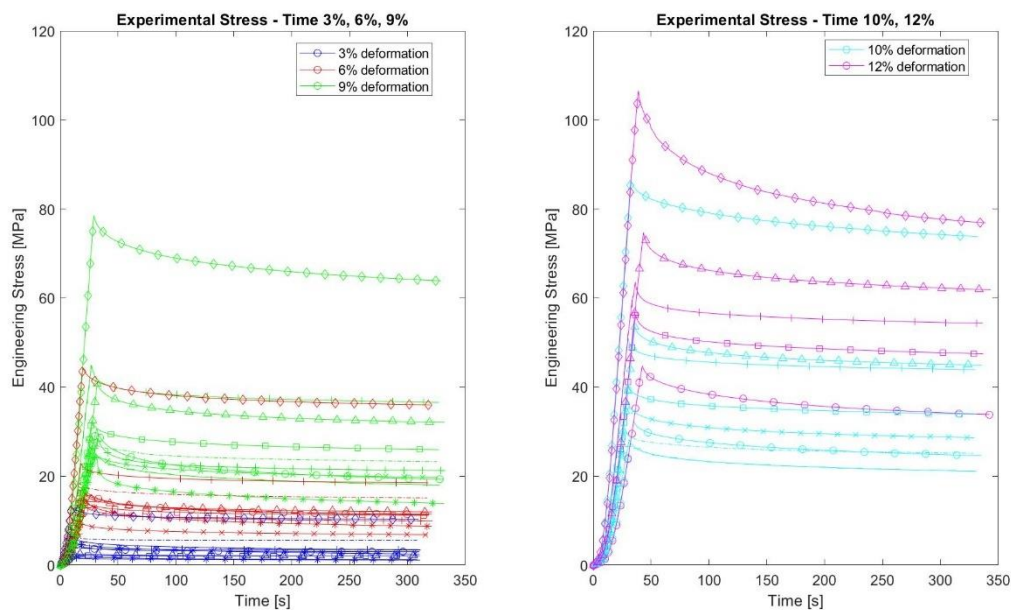


Figura 20: Risultati sperimentali dei test di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati, effettuati su SDFT grandi.

		Sample 11	Sample 12	Sample 13	Sample 14	Sample 15	Sample 16
<i>general info</i>	Test date	07/03/2024	18/10/2023	07/03/2024	18/10/2023	22/11/2023	14/03/2024
	Achieved strain rate	12%	9%	10%	10%	10%	12%
	Symbol	circle	plus sign	asterisk	point	cross	horizontal line
		Sample 17	Sample 18	Sample 19	Sample 20	Sample 21	
<i>general info</i>	Test date	14/03/2024	21/03/2024	21/03/2024	29/11/2023	29/11/2023	
	Achieved strain rate	12%	12%	12%	12%	12%	
	Symbol	vertical line	square	diamond	upward triangle	updown triangle	

Tabella 9: Informazioni generali degli SDFT piccoli utilizzati per i test di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati.

		Sample 11	Sample 12	Sample 13	Sample 14	Sample 15	Sample 16
<i>measures [mm]</i>	Distal width	3,65	3,26	3,99	3,33	3,30	3,84
	Medial width	3,95	3,26	3,73	3,33	4,07	3,60
	Proximal width	4,52	3,26	4,27	3,33	5,43	4,07
	Distal thickness	1,85	1,54	1,72	1,38	1,45	1,42
	Medial thickness	1,43	1,54	1,77	1,38	1,10	1,32
	Proximal thickness	1,48	1,54	1,54	1,38	1,07	1,34
	Initial length 3%	48,40	61,88	51,10	49,75	51,92	39,24
	Initial length 6%	48,45	61,97	51,24	49,83	52,03	39,26
	Initial length 9%	48,54	62,11	51,45	49,93	52,24	39,28
	Initial length 10%	48,78	-	51,99	50,10	53,02	39,79
	Initial length 12%	49,05	-	-	-	-	39,86
		Sample 17	Sample 18	Sample 19	Sample 20	Sample 21	
<i>measures [mm]</i>	Distal width	3,73	4,52	4,17	2,58	3,87	
	Medial width	4,10	4,45	3,91	3,03	3,57	
	Proximal width	4,29	5,41	3,92	5,83	6,62	
	Distal thickness	1,43	2,57	1,34	1,90	1,75	
	Medial thickness	1,33	1,79	1,50	1,31	1,66	
	Proximal thickness	1,57	1,95	1,49	1,51	1,70	
	Initial length 3%	32,78	42,46	43,27	50,95	50,46	
	Initial length 6%	33,09	42,47	43,28	51,07	50,50	
	Initial length 9%	33,41	42,49	43,32	51,26	50,56	
	Initial length 10%	33,73	42,52	43,35	51,52	50,74	
	Initial length 12%	33,94	42,57	43,38	51,79	50,95	

Tabella 10: Dimensioni degli SDFT piccoli utilizzati per i test di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati.

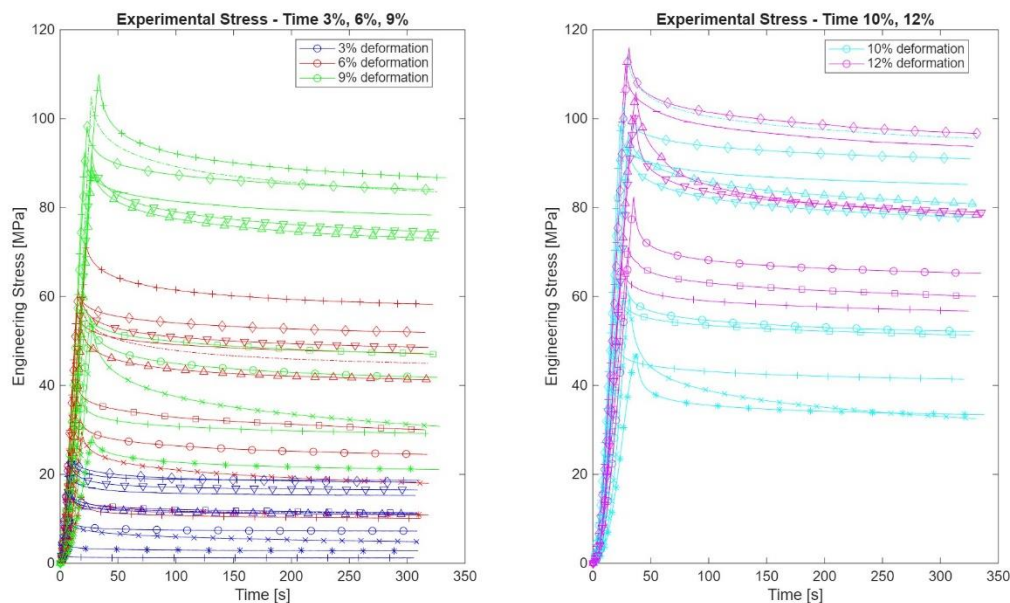


Figura 21: Risultati sperimentali dei test di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati, effettuati su SDFT piccoli.

I test presentati in Figura 20,21 e in Tabella 7-10 riguardano le prove di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati. Si può notare subito la variabilità dei dati ottenuti: l'andamento delle curve è coerente per ogni prova, col classico andamento iperelastico a sinistra del picco e con la tipica fase di relaxation presentata già in Figura 13 (Paragrafo 2.7.3 – Test di rilassamento), ma i valori di carico ottenuti ricoprono un range abbastanza ampio di valori. Ciò è dovuto al fatto che ogni tendine estratto presenta numerose fonti di variabilità.

Per quanto riguarda le misure dei campioni (elencate in Tabella 8,10), si è visto come da queste sia stata ricavata un'area media tra le aree delle tre sezioni, le quali già erano approssimate ad un'ellisse (quest'ultima rappresenta comunque un'approssimazione più lecita della precedente); la differenza di forma, quindi di area tra i tre punti può essere più o meno accentuata tra i vari provini, e con essa il modo in cui il carico viene ripartito nella struttura tendinea. Inoltre, le misure sono state prese con strumenti manuali in dei tessuti molli, che sono quindi facilmente deformabili: ciò rende la misura ottenuta dipendente dall'operatore e variabile da caso a caso. Lo storico dello sviluppo e dei carichi a cui sono stati soggetti i tendini è sempre vario, difetti posturali e infortuni dell'animale possono notevolmente influire nella distribuzione dei carichi e dunque nello sviluppo delle dimensioni del tendine; sebbene l'analisi dei carichi viene fatta su volumi normalizzati, cosa che rende l'andamento delle curve coerente con il comportamento reale, da un punto di vista quantitativo il valore dimensionato dei parametri, che nel modello teorico sono ottenuti per rappresentare una grandezza fisica caratteristica del materiale, sarà sicuramente soggetto a incertezza.

La lunghezza dei campioni è stata determinata come la lunghezza tra le due parti pinzettate dei campioni che dunque coincide con la lunghezza della parte soggetta a deformazione, per cui si tratta di un valore più affidabile poiché facilmente ricavabile; tuttavia, la fine delle regioni prossimali e l'inizio delle regioni miofibrosa e cartilaginea avviene mediante una zona di transizione non facilmente identificabile, e la risposta ai carichi può discostarsi rispetto quella dei tessuti prossimi alla regione mediale. Le curve ottenute mostrano quindi una risposta media

del comportamento dei tendini, ma una più approfondita analisi strutturale, sia macro che micro (sia nella geometria che nella composizione interna e disposizione dei tessuti) potrebbe fornire dei risultati più precisi, dando la possibilità di tracciare le regioni più critiche nonché le più importanti nello studio del buon funzionamento e dell'analisi dei danni.

Anche la modalità di estrazione manuale, sebbene sia stata seguita una procedura standard come descritto nel Paragrafo 4.2.2, rappresenta una fonte di variabilità, sia riguardo il taglio delle estremità quanto per la rimozione dei tessuti che avvolgono il tendine, che magari non sempre veniva completamente ripulito o che nel farlo veniva superficialmente danneggiato.

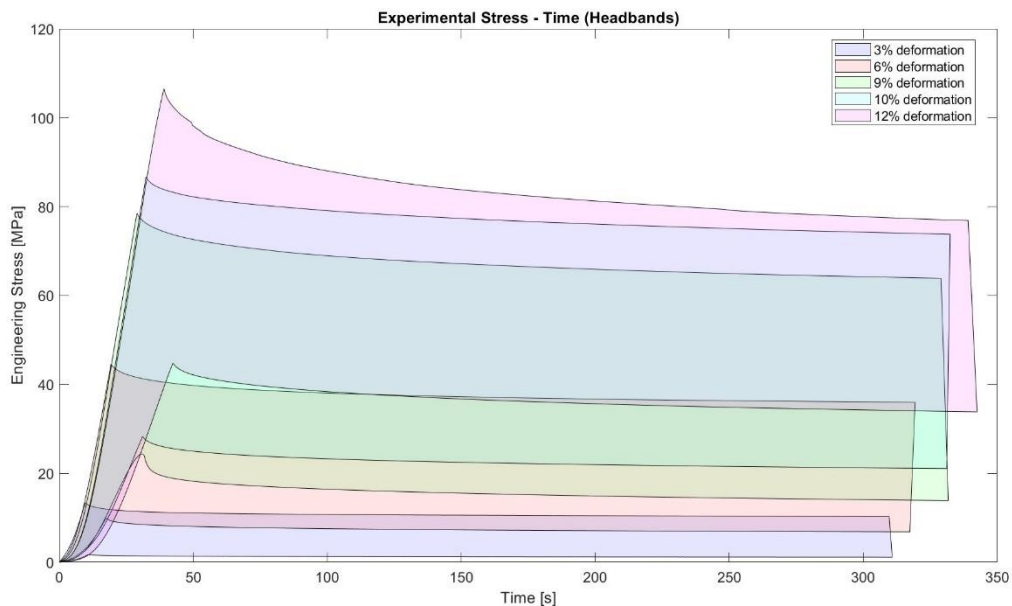


Figura 22: Bande che indicano il range di curve ricoperto dai test di deformazione uniassiale con livelli di deformazione separati, effettuati su SDFT grandi.

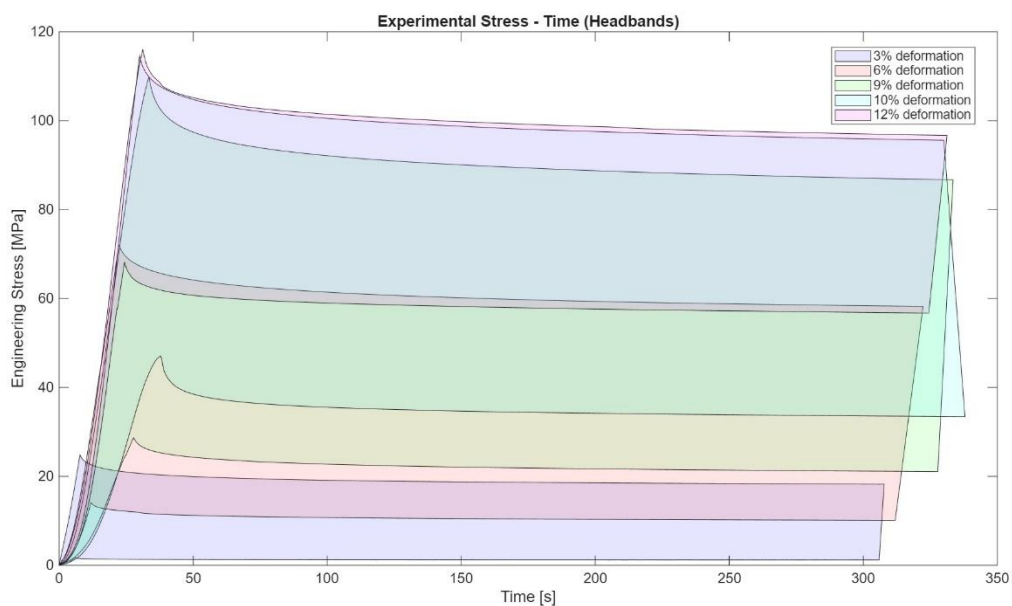


Figura 23: Bande che indicano il range di curve ricoperto dai test di deformazione uniassiale con livelli di deformazione separati, effettuati su SDFT piccoli.

I grafici in Figura 22,23 mostrano i range di curve ottenuti dalla curva con picco maggiore a quella con picco minore, per ogni livello di deformazione; dunque, tali intervalli ricoprono i carichi compresi tra la curva col valore di picco più alto a quella col valore di picco più basso (non sono dunque ricoperti alcuni valori, ad esempio valori di picco di curve che, poiché la velocità di deformazione è uguale per ogni prova, raggiungono la percentuale di deformazione in minor tempo a causa della minore lunghezza iniziale; tali grafici sono dunque puramente qualitativi, attraverso i quali si vuole mostrare degli intervalli entro cui è probabile che sia compreso il comportamento di un qualsiasi tendine porcino della stessa tipologia).

Le bande risultano sovrapposte l'una con l'altra proprio a causa della variabilità dei provini che, soggetti alla stessa percentuale di deformazione, rispondono con dei carichi di diversa entità in base alla loro struttura e rigidezza.

5.1.2 Dimensioni e andamento dei carichi per prove di trazione uniassiale con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo

		Sample 22	Sample 23	Sample 24	Sample 25	Sample 26
<i>general info</i>	Test date	13/06/2024	13/06/2024	13/06/2024	13/11/2024	13/11/2024
	Achieved strain rate	12%	12%	12%	12%	12%
	Symbol	circle	plus sign	asterisk	point	cross
		Sample 27	Sample 28	Sample 29	Sample 30	Sample 31
<i>general info</i>	Test date	21/05/2024	21/05/2024	21/05/2024	27/11/2024	27/11/2024
	Achieved strain rate	12%	12%	12%	12%	12%
	Symbol	horizontal line	vertical line	square	diamond	upward triangle

Tabella 11: Informazioni generali degli SDFT grandi utilizzati per i test di trazione uniassiale con livelli di deformazione raggiunti in un ciclo unico.

		Sample 22	Sample 23	Sample 24	Sample 25	Sample 26
<i>measures</i> [mm]	Distal width	4,92	4,03	4,46	5,25	4,82
	Medial width	5,80	5,24	3,35	6,29	5,22
	Proximal width	6,47	6,73	5,37	7,29	7,63
	Distal thickness	2,93	2,89	2,28	2,63	2,40
	Medial thickness	2,34	2,78	2,23	2,46	2,61
	Proximal thickness	2,34	1,98	1,65	2,45	2,47
	Initial length	46,63	38,28	28,44	50,90	50,90
		Sample 27	Sample 28	Sample 29	Sample 30	Sample 31
<i>measures</i> [mm]	Distal width	4,67	4,87	4,29	4,73	5,14
	Medial width	5,19	5,31	4,73	6,07	5,54
	Proximal width	6,73	7,63	6,15	7,16	6,34
	Distal thickness	2,27	2,06	2,45	3,17	2,72
	Medial thickness	2,07	2,13	2,36	2,78	2,82
	Proximal thickness	2,60	2,73	2,94	2,99	2,50
	Initial length	57,80	40,09	50,12	44,06	43,53

Tabella 12: Dimensioni degli SDFT grandi utilizzati per i test di trazione uniassiale con livelli di deformazione raggiunti in un ciclo unico.

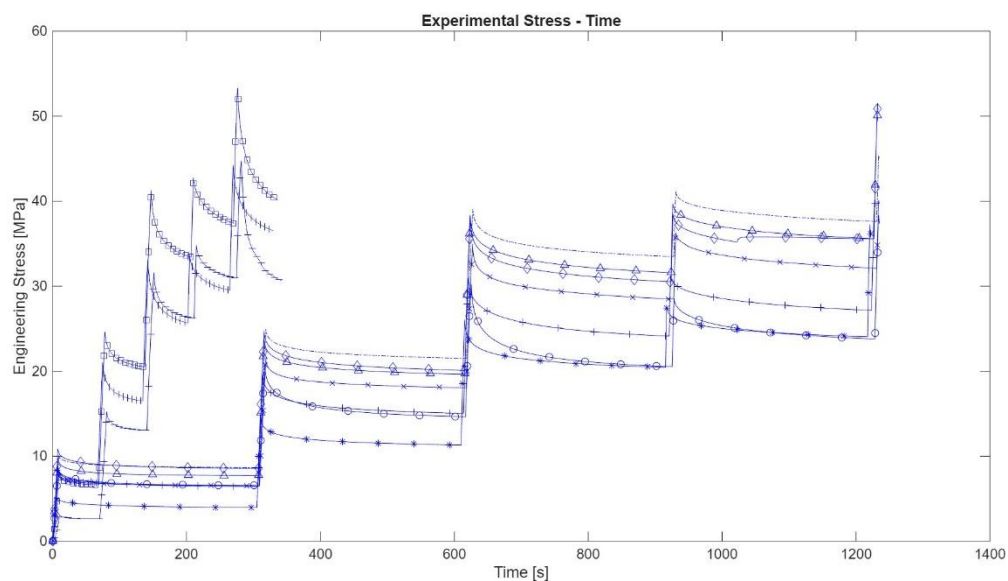


Figura 24: Risultati sperimentali dei test di trazione uniassiale con livelli di deformazione raggiunti in un ciclo unico, effettuati su SDFT grandi.

		Sample 32	Sample 33	Sample 34	Sample 35	Sample 36	Sample 37
<i>general</i> <i>info</i>	Test date	13/06/2024	13/06/2024	13/06/2024	21/05/2024	27/11/2024	27/11/2024
	Achieved strain rate	12%	12%	12%	12%	12%	12%
	Symbol	circle	plus sign	asterisk	point	cross	horizontal line

Tabella 13: Informazioni generali degli SDFT piccoli utilizzati per i test di trazione uniassiale con livelli di deformazione raggiunti in un ciclo unico.

		Sample 32	Sample 33	Sample 34	Sample 35	Sample 36	Sample 37
<i>measures</i> [mm]	Distal width	4,57	4,05	4,00	4,38	4,38	5,70
	Medial width	3,69	3,97	3,50	4,15	4,21	4,29
	Proximal width	3,67	3,96	3,06	4,07	4,47	5,77
	Distal thickness	1,71	1,64	1,53	1,45	1,39	1,60
	Medial thickness	1,43	1,70	1,37	1,33	1,58	1,40
	Proximal thickness	1,43	1,78	1,65	1,19	1,54	1,47
	Initial length	38,28	38,28	29,44	40,86	35,84	44,72

Tabella 14: Dimensioni degli SDFT piccoli utilizzati per i test di trazione uniassiale con livelli di deformazione raggiunti in un ciclo unico.

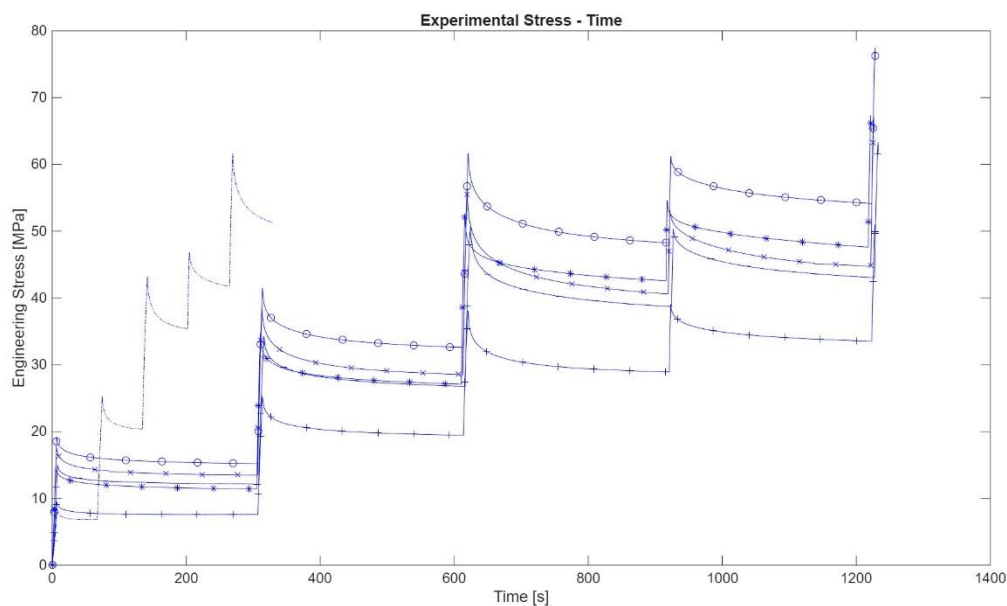


Figura 25: Risultati sperimentali dei test di trazione uniassiale con livelli di deformazione raggiunti in un ciclo unico, effettuati su SDFT piccoli.

I test presentati in Figura 24,25 e in Tabella 11-14 riguardano le prove di trazione uniassiale con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo. Gli andamenti dei carichi mostrano anche qui una certa variabilità dei risultati, dovuta ai motivi descritti in precedenza.

Tra le varie prove, in Figura 24 e in Figura 25 risaltano le prove eseguite in data 21/05/2024, le quali sono caratterizzate da un minore tempo di rilassamento impostato pari a 60 secondi, a differenza dei test svolti in altre date con i consueti 300 secondi di rilassamento. Il motivo di tale scelta è puramente sperimentale, si è scelto inizialmente di accorciare i tempi di relaxation in conseguenza al cambio di modalità di test (le prove dei 21/05/2024 sono state le prime effettuate con la modalità a ciclo unico). Tuttavia, si è osservato come questa scelta non permetteva ai tendini di raggiungere il plateau di carichi; il tessuto non riusciva a esaurire completamente i fenomeni viscosi, i quali si accumulavano incrementando l'andamento decrescente delle fasi di rilassamento dei livelli successivi. Il mancato completamento dei processi viscosi, per quanto detto nelle modalità di analisi dei dati, non permette di ricostruire correttamente i punti a infinito che rappresentino il comportamento iperelastico del materiale, ma al contrario aumentano la non-linearità di una curva ricostruita su tali punti: infatti, se i processi viscosi non si esauriscono, i valori di carico non dissipato si sommano al carico

puramente iperelastico, per cui i valori predetti di carico iperelastico dei punti a infinito risulterà maggiore; la formulazione non lineare dei due modelli iperelastici utilizzati (quella che dà all'andamento dei carichi di trazione una concavità verso l'alto) farà sì che per i livelli di deformazione successivi al primo questo effetto sarà sempre più evidente, e la discrepanza dei dati sperimentali con quelli predetti sarà generalmente maggiore rispetto che per le prove con rilassamento di 300 secondi (per il primo livello di deformazione si fa una ricerca combinata tra i parametri iperelastici e viscosi, per cui il valore di R^2 può risultare anche ottimale; poi però i carichi predetti per gli altri livelli di deformazione con gli stessi parametri mostrano la validità dei risultati).

Per le restanti prove, non è stata svolta la fase di relaxation per l'ultimo livello di deformazione, per cui il comportamento iperelastico è stato ottenuto soltanto sui punti finali delle quattro fasi di rilassamento relative ai livelli precedenti.

5.1.3 Dimensioni e andamento dei carichi per prove di trazione uniassiale con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo

		Sample 30	Sample 25	Sample 26	Sample 31
<i>general info</i>	Test date	27/11/2024	13/11/2024	13/11/2024	27/11/2024
	Achieved strain rate	20 mm	16 mm	16 mm	20 mm
	Symbol	circle	plus sign	asterisk	point

Tabella 15: Informazioni generali degli SDFT grandi utilizzati per i test di shear semplice con livelli di deformazione raggiunti in un ciclo unico.

		Sample 30	Sample 25	Sample 26	Sample 31
<i>measures [mm]</i>	Distal width	4,73	5,25	4,82	5,14
	Medial width	6,07	6,29	5,22	5,54
	Proximal width	7,16	7,29	7,63	6,34
	Distal thickness	3,17	2,63	2,40	2,72
	Medial thickness	2,78	2,46	2,61	2,82
	Proximal thickness	2,99	2,45	2,47	2,50
	Axial length	18,74	50,90	50,90	17,54

Tabella 16: Dimensioni degli SDFT grandi utilizzati per i test di shear semplice con livelli di deformazione raggiunti in un ciclo unico.

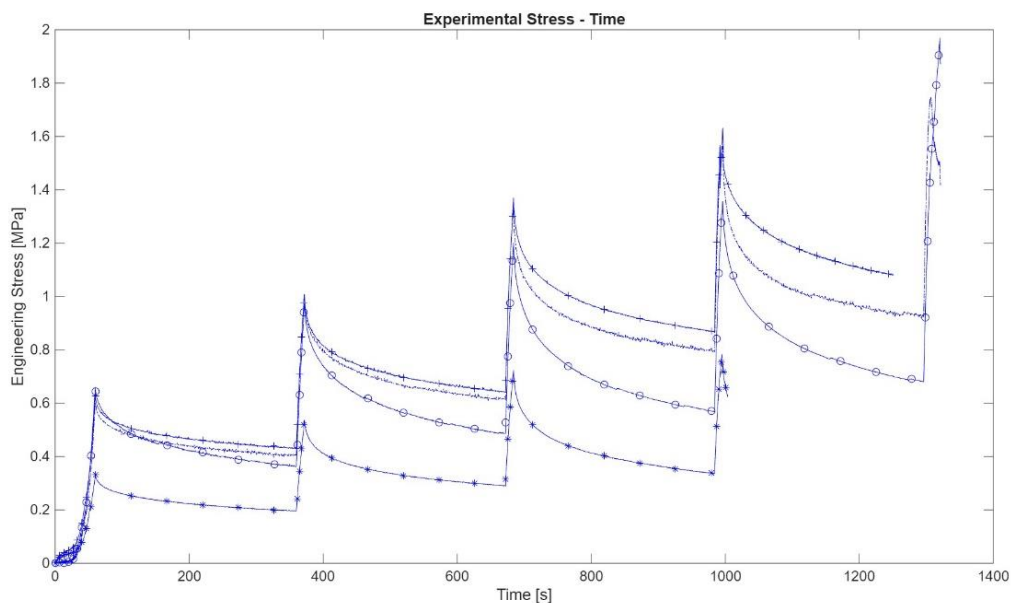


Figura 26: Risultati sperimentali dei test di shear semplice con livelli di deformazione raggiunti in un ciclo unico, effettuati su SDFT grandi.

		Sample 38	Sample 39	Sample 36	Sample 37
<i>general info</i>	Test date	13/11/2024	13/11/2024	27/11/2024	27/11/2024
	Achieved strain rate	20 mm	14 mm	20 mm	20 mm
	Symbol	circle	plus sign	asterisk	point

Tabella 17: Informazioni generali degli SDFT piccoli utilizzati per i test di shear semplice con livelli di deformazione raggiunti in un ciclo unico.

		Sample 38	Sample 39	Sample 36	Sample 37
<i>measures [mm]</i>	Distal width	3,49	4,12	4,38	5,70
	Medial width	4,02	4,37	4,21	4,29
	Proximal width	4,49	4,62	4,47	5,77
	Distal thickness	1,30	1,36	1,39	1,60
	Medial thickness	1,23	1,24	1,58	1,40
	Proximal thickness	1,36	1,39	1,54	1,47
	Axial length	50,90	50,90	16,73	19,11

Tabella 18: Dimensioni degli SDFT piccoli utilizzati per i test di shear semplice con livelli di deformazione raggiunti in un ciclo unico.

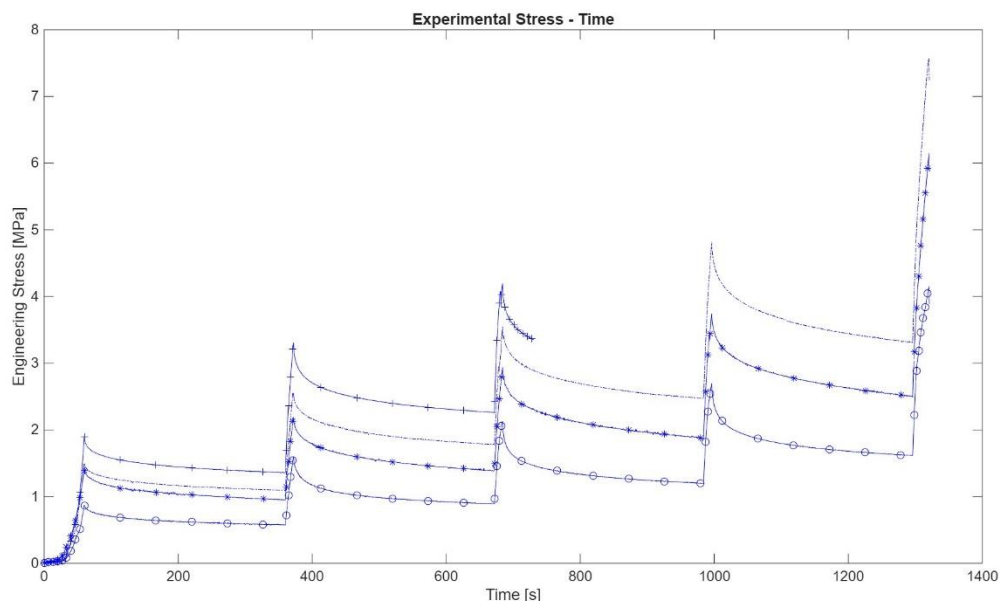


Figura 27: Risultati sperimentali dei test di shear semplice con livelli di deformazione raggiunti in un ciclo unico, effettuati su SDFT piccoli.

I test presentati in Figura 26,27 e in Tabella 15-18 riguardano le prove di shear semplice con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo. Si noti dalle tabelle che 6 degli 8 campioni utilizzati sono stati riutilizzati dalle prove di trazione assiale a ciclo unico, mentre due campioni (Sample 38 e Sample 39) sono usati soltanto per le prove di shear; la convenzione simbolica che lega i provini utilizzati per entrambi i tipi di test ai relativi grafici è separata, dunque lo stesso campione avrà generalmente un simbolo che lo lega alla prova di trazione uniassiale e un altro simbolo che lo lega alle prove di shear (si faccia quindi riferimento alla tabella relativa al tipo di test effettuato).

Anche per i test di shear manca la fase di relaxation per l'ultimo livello di deformazione, ad eccezione della prova sul Sample 25, il cui punto a infinito, sebbene non siano stati completati i 300 secondi di rilassamento per il livello che raggiunge 16 mm di deformazione, è stato considerato per estrarre il comportamento iperelastico. Inoltre, il Sample 39 presenta soltanto due punti a infinito, poiché all'inizio della terza fase di rilassamento la prova è già interrotta; nonostante ciò, la prova è stata utilizzata, ricavando il comportamento iperelastico soltanto dai due punti a disposizione (come già introdotto nel Paragrafo 4.3.2).

Generalmente, si può notare innanzitutto che i valori di carico ottenuti sono notevolmente inferiori di quelli ottenuti dalle due tipologie di test di deformazione uniassiale, mantenendosi inferiori alla decina di MPa. Il tendine, come già detto, è una struttura anatomica che si occupa di rispondere principalmente a sollecitazioni in direzione del suo asse, poiché la sua funzione principale è quella di trasmettere il moto dai muscoli alle ossa; il principio di funzionamento è associabile in parte a quello di una fune, pertanto presenta una rigidità maggiore per carichi di trazione rispetto che per carichi che hanno direzioni diverse.

Un'altra differenza rispetto ai test precedenti riguarda la fase di rilassamento. Sembra che per tutte le prove di shear il tempo di rilassamento di 300 secondi non sia sufficiente per l'esaurimento dei fenomeni viscosi, in maniera più accentuata rispetto agli altri tipi di test; ciò

suggerisce che i fenomeni di dissipazione viscosa potrebbero avvenire su scale temporali maggiori nel caso di deformazioni in direzioni diverse da quella assiale (anche negli altri tipi di test non sempre si è raggiunto un andamento perfettamente orizzontale, dunque un carico costante nella fase finale del rilassamento, però in maniera meno evidente rispetto che alle prove di shear).

5.2 Risultati ottenuti con il modello di Carniel

Per fare una valutazione dei risultati ottenuti con il modello matematico, si veda innanzitutto la differenza tra i dati sperimentali e le relative curve predette, utilizzando il carico della formulazione viscoelastica proposta dal gruppo di Carniel.

5.2.1 Comparazione tra carichi sperimentali e numerici per prove di deformazione uniassiale con livelli di deformazione separati

Sono riportati in Figura 28,29 le curve relative ai test di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati del Sample 1 (SDFT grande) e del Sample 11 (SDFT piccolo). Tali curve riguardano gli andamenti delle curve di carico sperimentale (curve continue) e delle curve di carico ottenute dalla formulazione numerica di Carniel (curve tratteggiate), per ognuno dei livelli di deformazione raggiunti per queste prove, ognuno dei quali è rappresentato da un diverso colore.

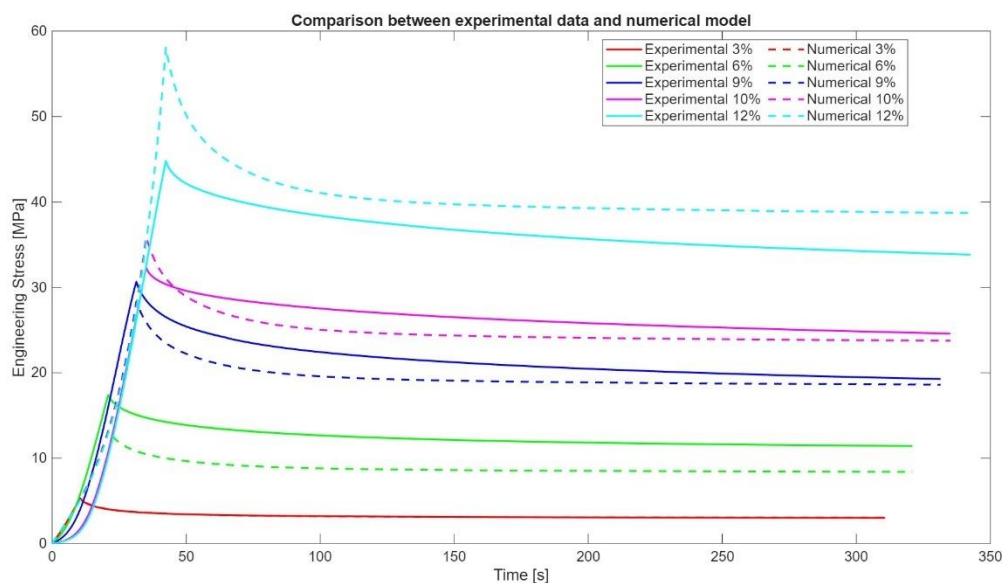


Figura 28: Curve stress-relaxation per test di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati, ottenute dal provino del 07/03/2023 (SDFT grande – Sample 1).

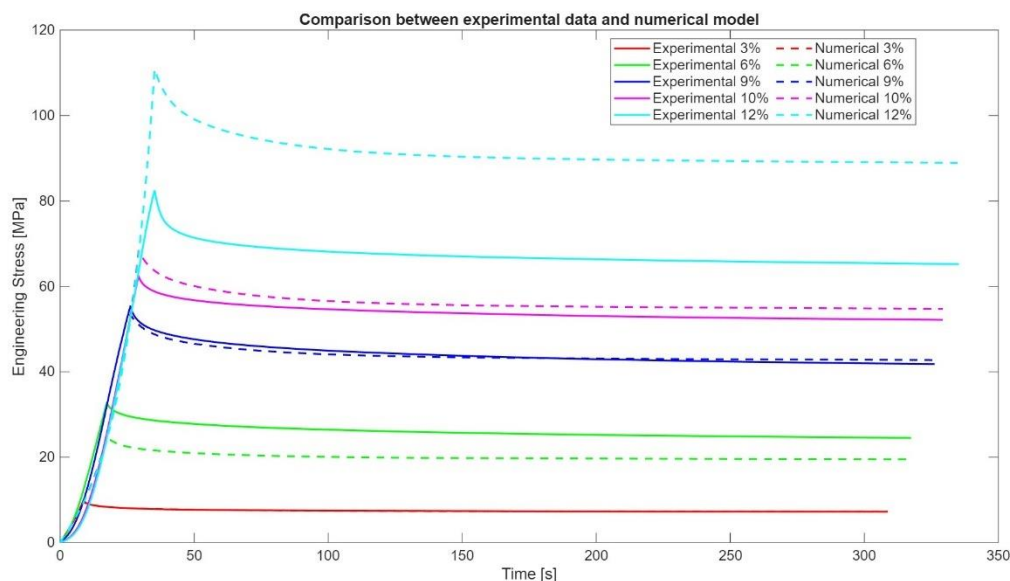


Figura 29: Curve stress-relaxation per test di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati, ottenute dal provino del 07/03/2024 (SDFT piccolo – Sample 11).

La prima cosa che è possibile notare è il fatto che il fitting risulti notevolmente migliore per il primo livello di deformazione rispetto che per tutti gli altri livelli. Questo è un risultato atteso, poiché coerente col fatto di aver fittato i parametri viscosi con le tensioni e le deformazioni del primo livello di deformazione. Per tale motivo infatti, il modello riesce a catturare con grande precisione l'andamento viscoelastico per questo livello di deformazioni, mentre per i livelli successivi, poiché i processi viscosi sono non lineari, si ottengono dei valori di carico numerici che si discostano dai relativi valori sperimentali. I parametri viscosi, rappresentativi della dissipazione interna, sono ottenuti da una formulazione di tipo lineare, mentre i reali processi interni dei tessuti biologici mostrano dei fenomeni spesso fortemente non lineari, principalmente a causa della natura multi-composita dei tessuti; la discrepanza dai risultati teorici per i successivi livelli di deformazione può dunque essere spiegata dal comportamento dissipativo non previsto dalla formulazione viscoelastica utilizzata.

Si può approfondire notando che per i livelli di deformazione più alti i carichi previsti numericamente, per ogni prova di questa tipologia, risultano maggiori di quelli effettivamente ottenuti. Questo risultato può essere associato al fatto che i fenomeni viscosi potrebbero aumentare assieme al carico cui è sottoposto il tessuto, il quale accumulerebbe un maggiore quantitativo di energia da dissipare. Bisogna comunque tener conto di quanto già detto per le prove sperimentali di shear semplice, ossia che se i processi viscosi non dovessero essere totalmente esauriti nei punti a infinito, questo potrebbe causare una sovrastima del carico previsto numericamente.

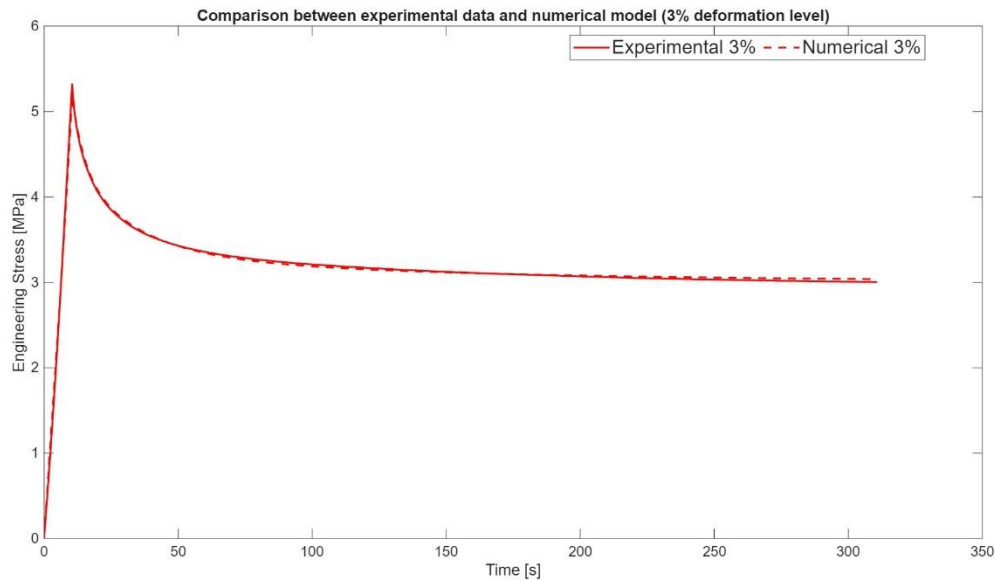


Figura 30: Curve stress-relaxation per test di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati, soltanto al 3% di deformazione, ottenute dal provino del 7 marzo 2023 (SDFT grande – Sample 1).

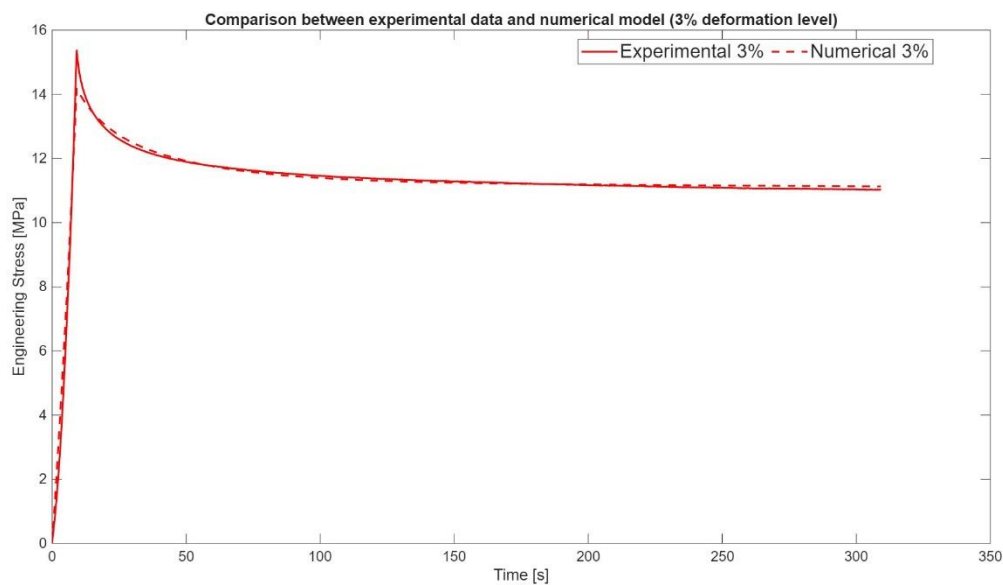


Figura 31: Curve stress-relaxation per test di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati, soltanto al 3% di deformazione, ottenute dal provino del 29 novembre 2023 (SDFT piccolo – Sample 20).

In Figura 30,31 sono riportati come esempio gli andamenti esclusivi del primo livello di deformazione, relativi ai test di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati, del Sample 1 (SDFT grande) e del Sample 20 (SDFT piccolo). Si osserva meglio l'accuratezza dei risultati riprodotti: il primo livello di deformazione è quello preso come oggetto di valutazione dei fenomeni viscosi, dunque una fedele formulazione iperelastica abbinata a un processo di ricerca dei carichi dissipati su adeguate scale temporali permette di ricostruire il comportamento di una singola prova di stress-relaxation. Appare così più evidente l'influenza dei fenomeni viscosi non lineari, i quali portano ad ottenere in molti casi carichi che si discostano notevolmente per le percentuali di deformazione maggiori.

Bisogna anche notare che la ricerca sul primo livello di deformazione non sempre è perfetta: in Figura 31 notiamo ad esempio che il valore di picco non viene completamente raggiunto, e di conseguenza l'andamento iniziale di smorzamento, che è relativo ai processi viscosi delle scale temporali inferiori, risulta essere sottostimato (la prova del Sample 20 è stata scelta per rappresentare questo risultato che risulta essere ricorrente in maniera più o meno evidente per le altre prove).

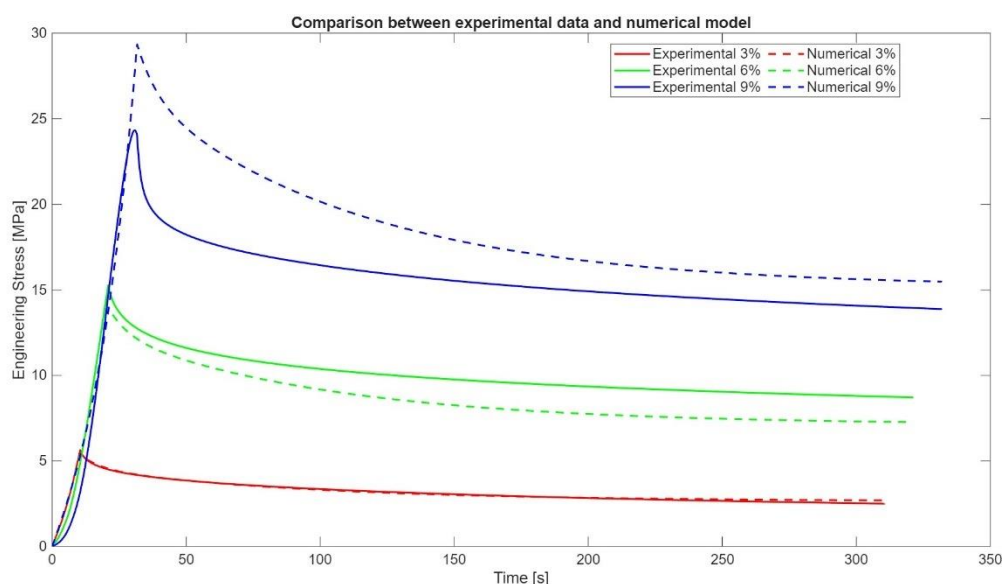


Figura 32: Curve stress-relaxation per test di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati, ottenute dal provino del 22/11/2023 (SDFT grande – Sample 3).

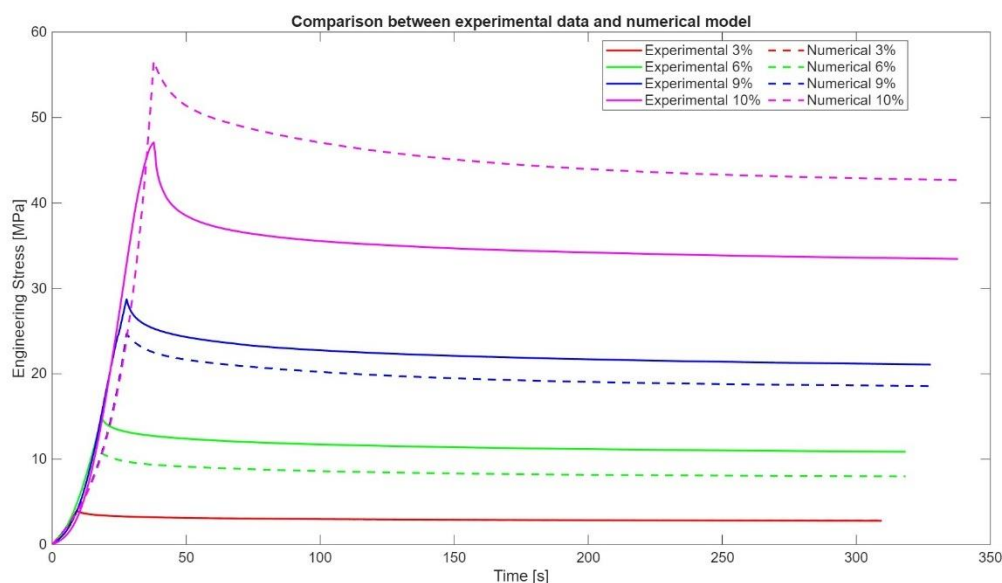


Figura 33: Curve stress-relaxation per test di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati, ottenute dal provino del 07/03/2024 (SDFT piccolo – Sample 13).

I risultati ottenuti dai test che hanno raggiunto la rottura del tendine, come i test riportati in Figura 32 (SDFT grande, Sample 3) e in Figura 33 (SDFT piccolo, Sample 13), mostrano

generalmente un maggiore decremento dei carichi nella fase di rilassamento dei livelli più alti. Tali grafici infatti non presentano le curve relative agli ultimi livelli di deformazione a causa della rottura avvenuta durante il livello successivo all'ultimo riportato. Si osserva che l'andamento sotto deformazione costante presenta un cambio di concavità (che passa dall'alto verso il basso) presso il picco di carico (sulla sinistra); questo andamento potrebbe essere correlato ad un accumulo di energia maggiore che viene dissipata durante la fase di rilassamento del tendine. È possibile che questo cambio di concavità sull'aumento dei carichi, osservato anche in altri provini che raggiungono tutti i livelli di deformazione senza rottura, sia indice di una condizione di grande sforzo per il tessuto, il quale dunque si allontana dall'avere un comportamento elastico verso una deformazione permanente.

Per mostrare come varia la previsione delle curve nelle varie prove e per i vari livelli di deformazione, osserviamo i seguenti grafici in cui i dati e i risultati ottenuti sono stati raggruppati per tipologia di tendine (SDFT grande e SDFT piccolo):

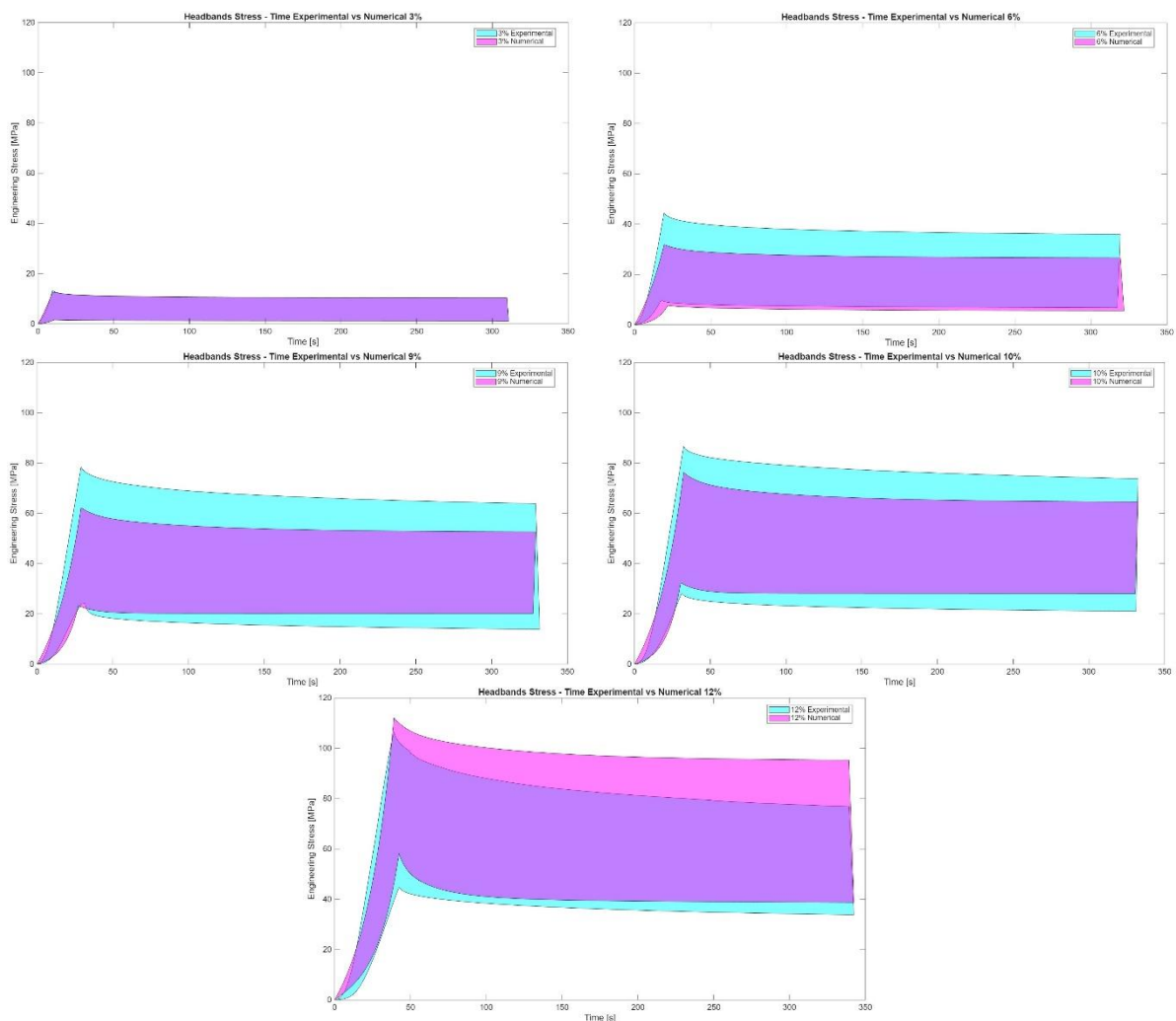


Figura 34: Bande per i diversi livelli di deformazione (3%, 6%, 9%, 10%, 12%) delle curve sperimentali (azzurro) e numeriche (magenta), ottenute dai provini SDFT grandi sottoposti alle prove di trazione uniaassiale con livelli di deformazione separati.

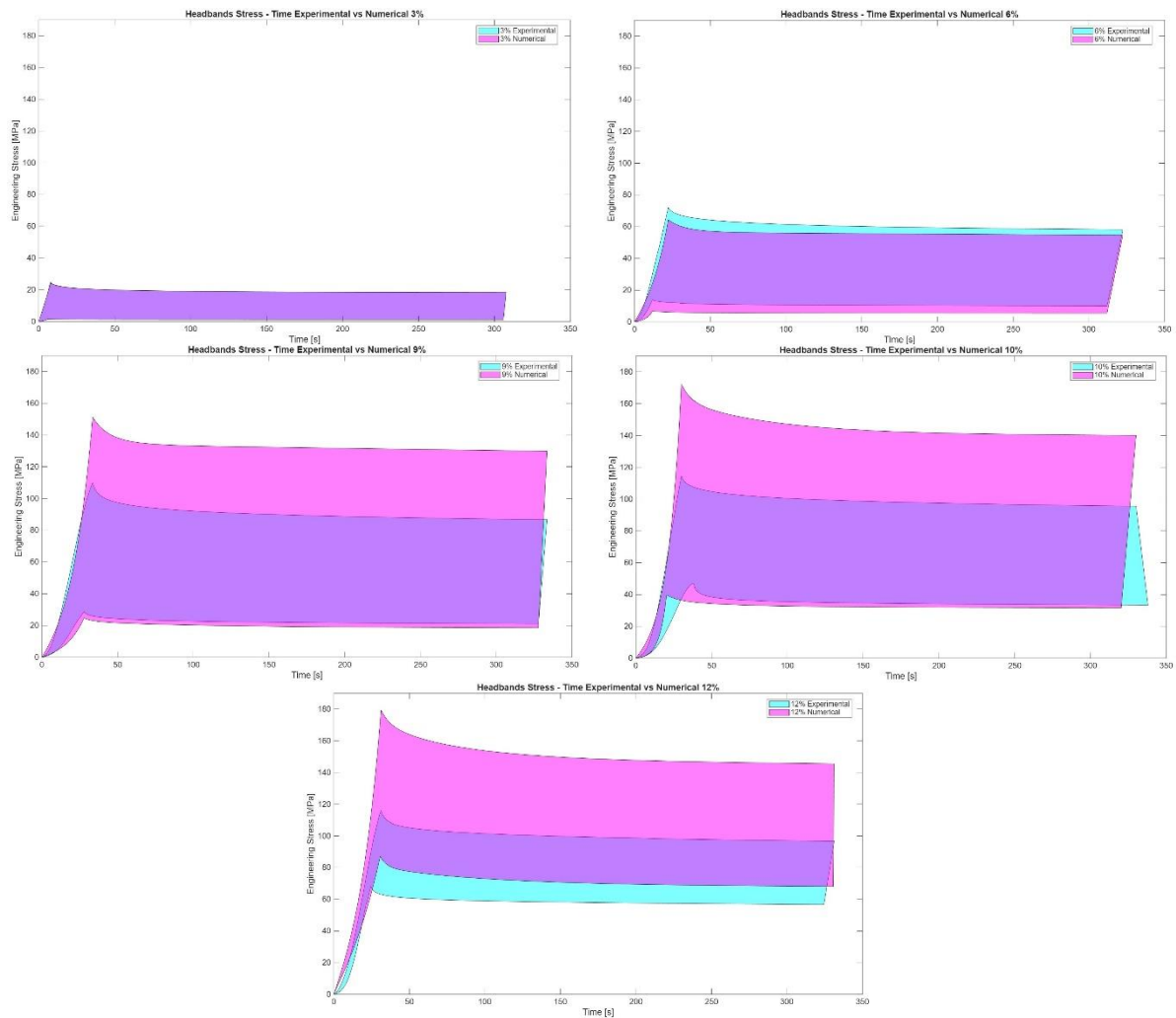


Figura 35: Bande per i diversi livelli di deformazione (3%, 6%, 9%, 10%, 12%) delle curve sperimentali (azzurro) e numeriche (magenta), ottenute dai provini SDFT piccoli sottoposti alle prove di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati.

Le bande presenti in Figura 34,35 sono tracciate tra le curve con i valori più alti e le curve con i valori più bassi (considerando il valore di picco), per ogni tipologia di tendine e di test. Come le precedenti bande ottenute sui test sperimentali, anche queste sono ottenute tramite una comparazione dei valori di picco di ogni curva, pertanto escludono qualche punto del piano stress-time; anche queste quindi sono rappresentazioni qualitative, attraverso le quali si mostrano caratteristiche di confronto complessive sui test della stessa tipologia.

Si può notare che, per il più basso range di allungamento, la banda delle curve numeriche ottenute col modello matematico risulta quasi coincidente con quella dei dati sperimentali (lo vediamo ingrandito in Figura 36); al contrario, vediamo come per gli altri livelli di deformazione le bande non coincidono, con la banda delle curve sperimentali generalmente più ristretta di quella delle curve numeriche.

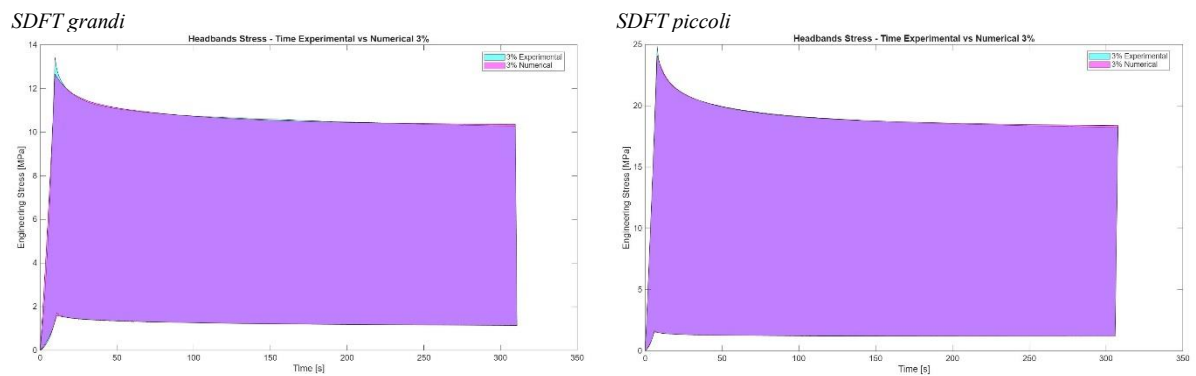


Figura 36: Banda per le curve al 3% (ingrandita) di deformazione ottenute dai test di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati, eseguite sui tendini SDFT grandi (sinistra) e piccoli (destra).

5.2.2 Comparazione tra carichi sperimentali e numerici per prove di deformazione uniassiale con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo

Sono riportati in Figura 37,38 gli andamenti della curva di carico sperimentale (curva blu) e della curva di carico ottenuta dalla formulazione numerica di Carniel (curva rossa), relativamente ai dati ottenuti dal Sample 22 (SDFT grande) e dal Sample 32 (SDFT piccolo).

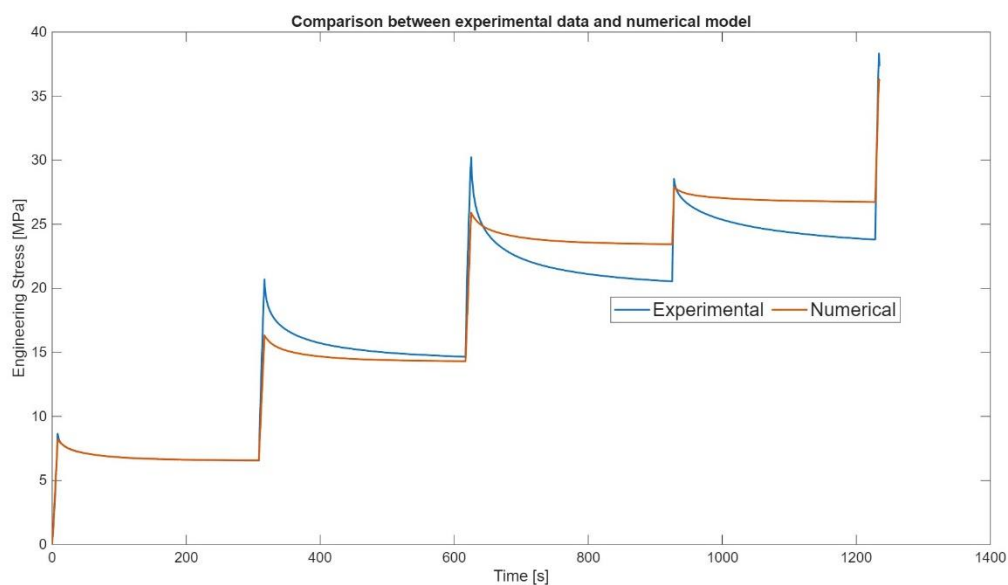


Figura 37: Curve stress-relaxation per test di trazione uniassiale con livelli di deformazione raggiunti in un ciclo unico, ottenute dal provino del 13/06/2024 (SDFT grande – Sample 22).

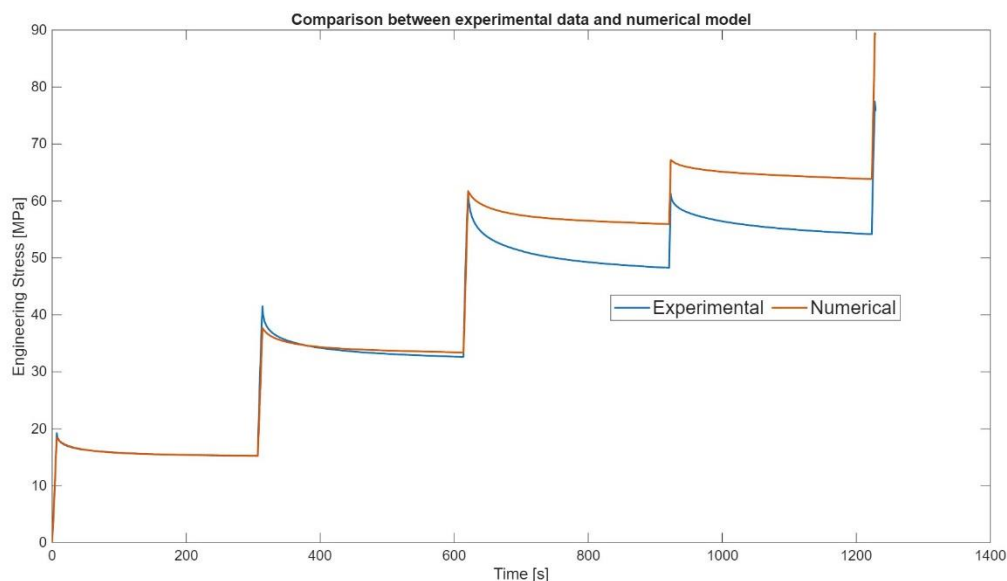


Figura 38: Curve stress-relaxation per test di trazione uniassiale con livelli di deformazione raggiunti in un ciclo unico, ottenute dal provino del 13/06/2024 (SDFT piccolo – Sample 32).

Anche per questo tipo di prove si nota che i carichi numerici superano quelli sperimentali per i livelli di deformazione maggiori, per lo stesso motivo discusso per le precedenti prove. Tuttavia, da questi grafici a ciclo unico si può notare un fenomeno inverso nei precedenti livelli di deformazione. Infatti, durante la trazione del secondo livello di deformazione, il carico ottenuto dal test presenta generalmente un aumento maggiore di quello ottenuto dal modello matematico, che porta a un valore di picco di carico, relativo al 6% di deformazione, maggiore per la curva sperimentale rispetto che quella numerica; talvolta la tensione sperimentale resta maggiore di quella numerica per tutta la fase di rilassamento e anche per alcuni livelli successivi, fino ad essere superata dalla tensione calcolata per il 12% di deformazione relativa. Questo risultato potrebbe essere associato a qualche fenomeno in cui il tendine, sottoposto a una deformazione assiale maggiore di quella di normale azionamento (che si ricorda coincidere con il 4% di deformazione circa), cambia repentinamente il modo in cui risponde ai carichi secondo la sua composizione interna.

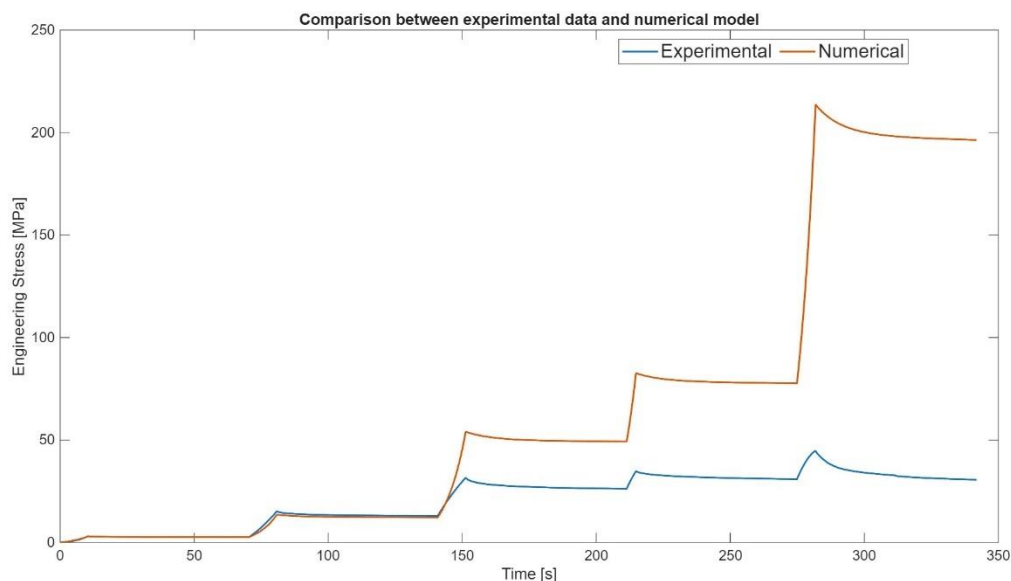


Figura 39: Curve stress-relaxation per test di trazione uniassiale con livelli di deformazione raggiunti in un ciclo unico, ottenute dal provino del 21/05/2024 (SDFT grande – Sample 27).

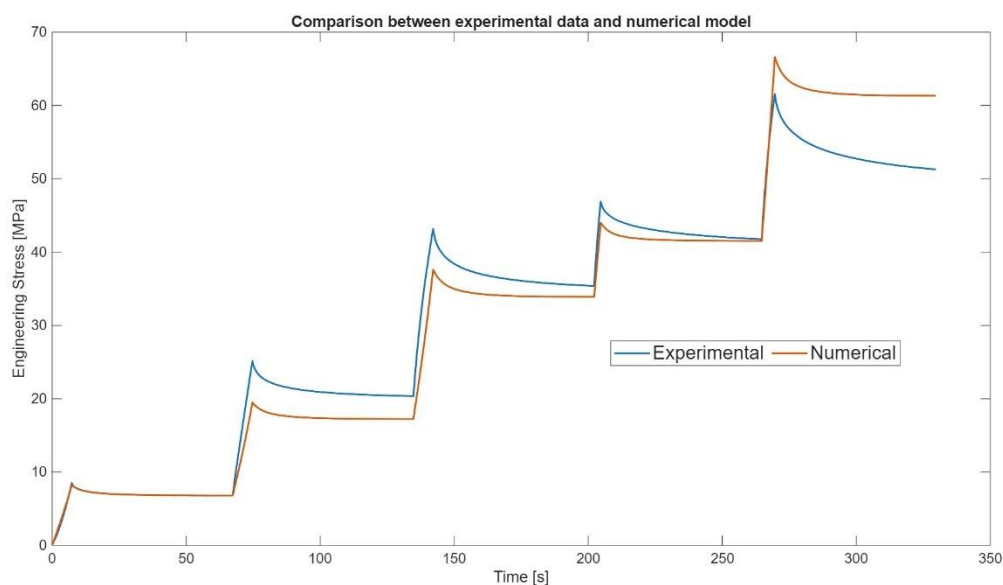


Figura 40: Curve stress-relaxation per test di trazione uniassiale con livelli di deformazione raggiunti in un ciclo unico, ottenute dal provino del 21/05/2024 (SDFT piccolo – Sample 35).

In Figura 39,40 sono mostrati i risultati dei test del 21/05/2024 (SDFT grande, Sample 27; SDFT piccolo, sample 35), commentate in precedenza in quanto i risultati sperimentali sono stati ottenuti con una fase di rilassamento di solo 60 secondi. Si nota innanzitutto un asse dei tempi pari a circa 1/4 di quello presente nelle altre prove, come ovvia conseguenza del minore tempo concesso alla fase di rilassamento. Inoltre, si nota una condizione comune delle curve di carico, ossia l'andamento a concavità invertita presso il picco di carico, precedentemente associato a una condizione di sforzo intenso del tendine; in questo caso, il mancato completamento dei fenomeni dissipativi con conseguente accumulo dei carichi residui potrebbe portare a una condizione di grande sforzo del tessuto biologico, quindi a un avvicinamento

verso le deformazioni permanenti, che potrebbe quindi essere associato a questo particolare andamento.

Per quanto riguarda la previsione numerica, questa sembra essere peggiore rispetto che per le altre prove: In Figura 39 si nota un evidente scostamento nei valori di carico per livelli di deformazione maggiori, mentre in Figura 40 si ha una peggiore cattura dell'andamento della fase di rilassamento, legata ad una scarsa cattura dei fenomeni viscosi. È opportuno comunque ribadire che la cattura dei fenomeni viscosi non è ottimale neanche per il resto dei test eseguiti, poiché come già detto questi seguono un comportamento di tipo non lineare.

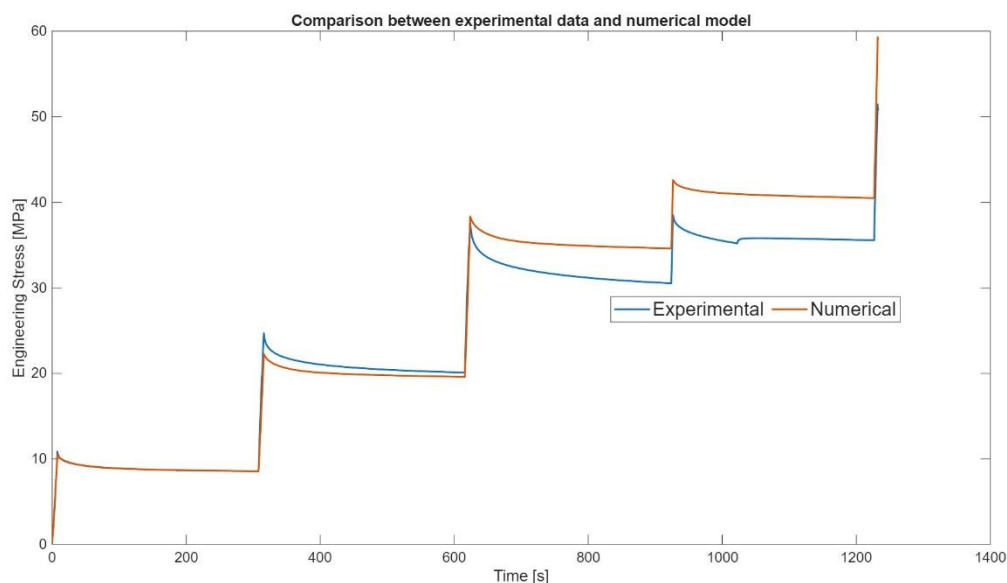


Figura 41: Curve stress-relaxation per test di trazione uniassiale con livelli di deformazione raggiunti in un ciclo unico, ottenute dal provino del 27/11/2024 (SDFT grande – Sample 30).

Si riporta inoltre in Figura 41 il test del 27/11/2024 (Sample 30), in cui il rilassamento del quarto livello di deformazione presenta un improvviso aumento del carico, associabile o a un disturbo esterno o a un particolare fenomeno scattato nei tessuti interni del tendine.

5.2.3 Comparazione tra carichi sperimentali e numerici per prove di shear semplice con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo

Sono riportati in Figura 42,43 gli andamenti della curva di carico sperimentale (curva blu) e della curva di carico ottenute dalla formulazione numerica di Carniel (curva rossa) per due campioni sottoposti a test di shear semplice (SDFT grande - Sample 30; SDFT piccolo - Sample 38).

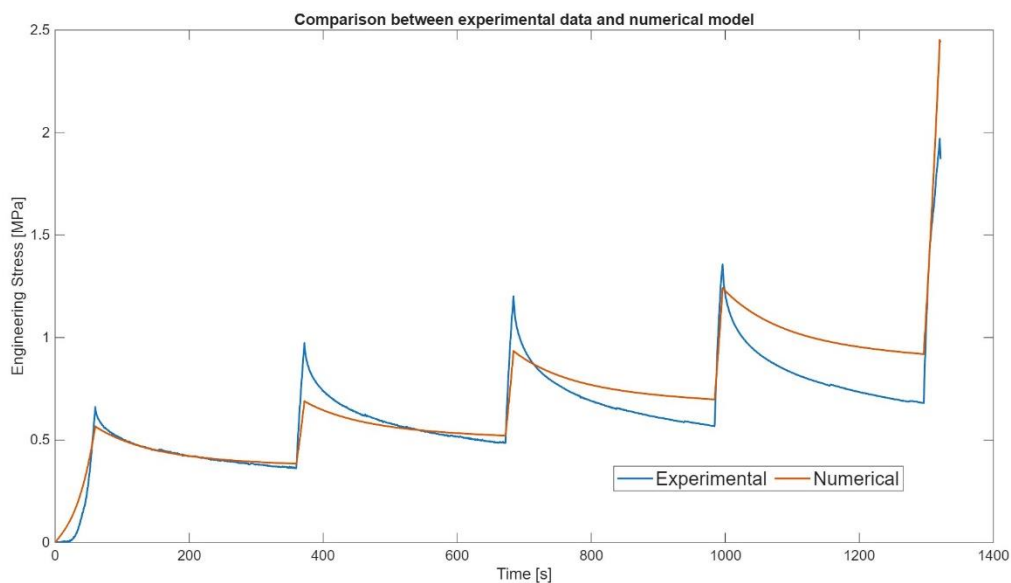


Figura 42: Curve stress-relaxation per test di shear semplice con livelli di deformazione raggiunti in un ciclo unico, ottenute dal provino del 27/11/2024 (SDFT grande – Sample 30).

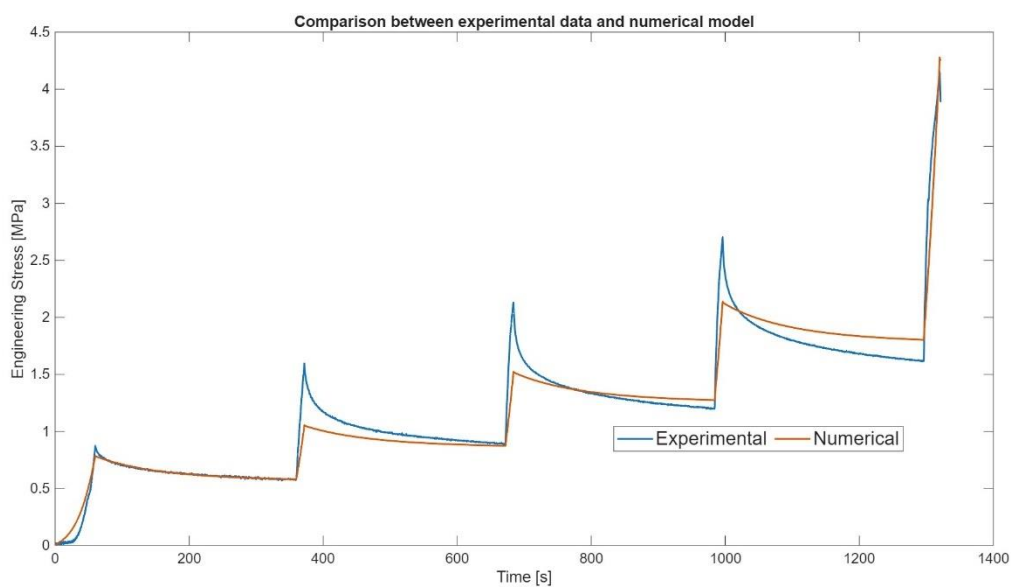


Figura 43: Curve stress-relaxation per test di shear semplice con livelli di deformazione raggiunti in un ciclo unico, ottenute dal provino del 13/11/2024 (SDFT piccolo – Sample 38).

Gli andamenti sono analoghi a quelli del precedente tipo di test, sia per quanto riguarda i carichi sperimentali che numerici, con valori di carico inferiori. Come già visto, le fasi di rilassamento mostrano una diminuzione di carico più accentuata, che non sembra esaurirsi entro i 300 secondi; da ciò ne consegue una previsione del comportamento lievemente peggiore già dal primo livello di deformazione.

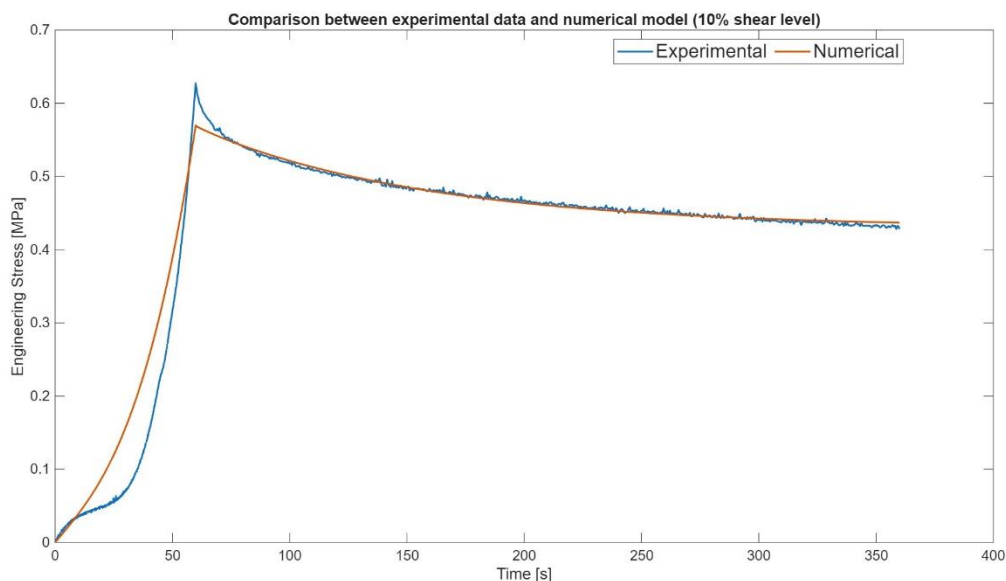


Figura 44: Curve stress-relaxation per test di shear semplice con livelli di deformazione raggiunti in un ciclo unico, relative al solo primo livello di deformazione, ottenute dal provino del 13/11/2024 (SDFT grande – Sample 25).

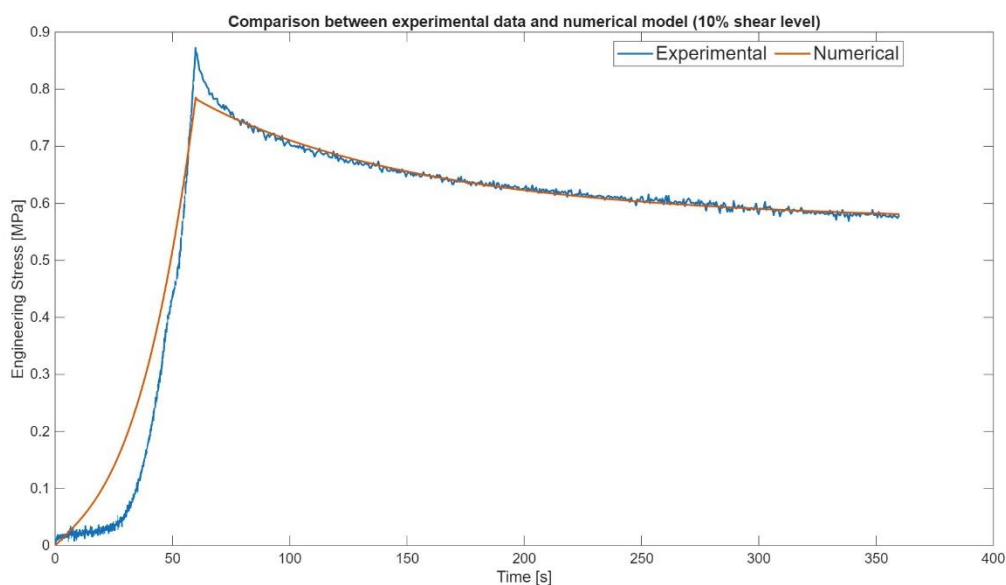


Figura 45: Curve stress-relaxation per test di shear semplice con livelli di deformazione raggiunti in un ciclo unico, relative al solo primo livello di deformazione, ottenute dal provino del 13/11/2024 (SDFT piccolo – sample 38).

Si prendano come esempio le deformazioni esclusive del primo livello di deformazione, relative ai test di shear del Sample 25 (SDFT grande) e del Sample 38 (SDFT piccolo), in Figura 44,45. Poiché i carichi nell'asse y sono minori risulta più evidente il rumore che affligge le prove di shear, che è dovuto probabilmente in gran parte all'utilizzo dello strumento esterno di fissaggio dell'estremità non soggetta a trazione. L'andamento del carico in uscita dalla macchina di prova risulta essere più irregolare per questo tipo di prove, mostrando in alcuni casi (come questi due) un andamento iniziale a "S".

Il modello numerico non riesce a riprodurre questa risposta allo stesso modo di quanto riesce per le prove di deformazione uniassiale, come visto in Figura 30,31,36. È possibile che la causa di ciò risieda nell'utilizzo della formulazione semplificata, che ad esempio non include il contributo dell'invariante I_5 . Come trattato nella teoria infatti, questo invariante porta con sé informazioni aggiuntive a quelle dell'invaiente I_4 quando si hanno di stati di deformazioni come quelli di scorrimento; particolari fenomeni interni, come interazioni tra le componenti del tessuto tendineo, potrebbero quindi non essere incluse dal modello iperelastico implementato dal gruppo di Carniel, e ciò potrebbe spiegare il particolare fenomeno qui osservato, non previsto dalla formulazione matematica utilizzata.

5.2.4 Curve di carico raggruppate e valori dei parametri costitutivi e di R^2 per prove di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati

Si riportano di seguito in Figura 46,47 l'andamento delle singole curve, di ogni tipologia di campione e di test, ottenute dal modello matematico del gruppo di Carniel, assieme ai relativi parametri con le quali sono state ricavate. La simbologia che associa le curve al campione testato è la stessa utilizzata in precedenza per mostrare i risultati sperimentali; pertanto, si faccia riferimento a quanto elencato in Tabella 7,9. Si ricorda che tra tutte le varie prove, non tutte hanno raggiunto gli ultimi livelli di deformazione, in quanto il provino ha raggiunto prematuramente una rottura parziale o uno scollamento dalle pinze della macchina di prova, perdendo così di utilità per la caratterizzazione del comportamento meccanico.

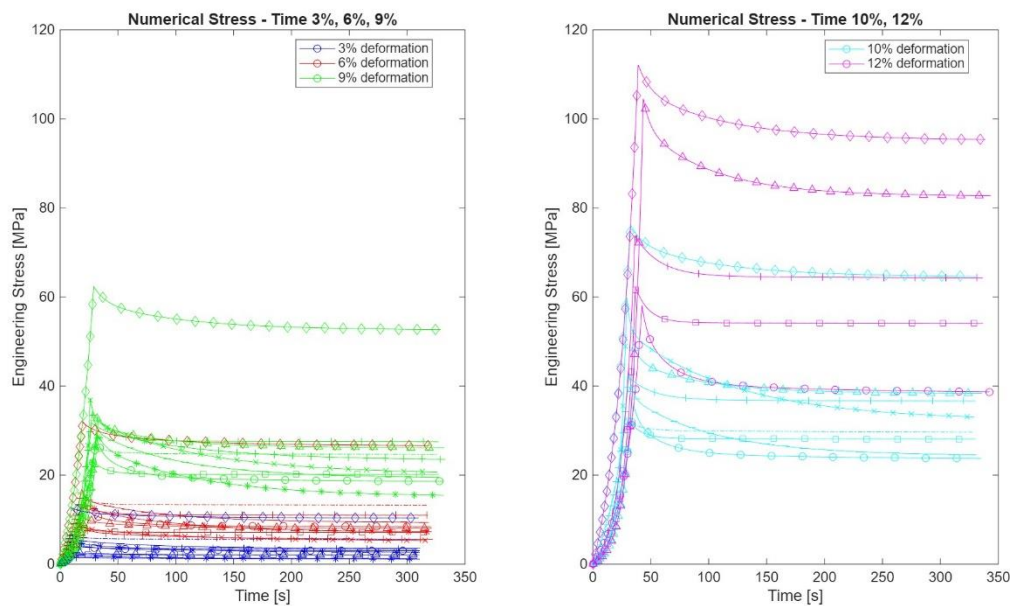


Figura 46: Andamento delle curve numeriche ottenute con il modello di Carniel, per SDFT grandi con test di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati.

	Sample 1	Sample 2	Sample 3	Sample 4	Sample 5
C_1	4,56	0,32	2,85	15,16	1,98
α_1	19,02	56,34	8,46	14,84	48,75
C_4	11,45	3,93	11,93	15,20	2,74
α_4	9,91	21,18	8,89	5,93	21,51
γ^1_{matrix}	0,106	0,088	0,044	0,187	0,158
τ^1_{matrix}	0,051	0,019	0,055	0,005	0,010
γ^2_{matrix}	0,408	0,040	0,212	0,130	0,210
τ^2_{matrix}	4,748	0,218	7,184	2,129	9,822
γ^3_{matrix}	0,162	0,018	0,139	0,165	0,036
τ^3_{matrix}	96,86	11,20	83,59	13,30	12,66
γ^4_{matrix}	0,036	0,066	0,061	0,060	0,118
τ^4_{matrix}	2784,7	2855,9	9913,9	6762,9	1823,3
γ^1_{fiber}	0,135	0,132	0,033	0,210	0,222
τ^1_{fiber}	0,081	0,035	0,079	0,009	0,009
γ^2_{fiber}	0,221	0,101	0,223	0,107	0,253
τ^2_{fiber}	4,437	9,266	7,519	4,683	2,554
γ^3_{fiber}	0,231	0,178	0,360	0,034	0,226
τ^3_{fiber}	22,47	85,58	83,73	21,61	93,03
γ^4_{fiber}	0,036	0,047	0,021	0,093	0,027
τ^4_{fiber}	1517,2	1776,6	8407,2	2939,2	4820,9
	Sample 6	Sample 7	Sample 8	Sample 9	Sample 10
C_1	4,15	0,70	0,76	6,88	1,17
α_1	20,70	22,55	31,02	8,72	43,10
C_4	14,29	17,65	9,37	55,09	7,01
α_4	8,77	11,52	13,89	6,76	16,88
γ^1_{matrix}	0,161	0,094	0,240	0,033	0,202
τ^1_{matrix}	0,006	0,025	0,008	0,021	0,035
γ^2_{matrix}	0,170	0,070	0,176	0,031	0,039
τ^2_{matrix}	7,486	0,262	9,649	9,188	6,438
γ^3_{matrix}	0,082	0,063	0,195	0,071	0,130
τ^3_{matrix}	294,13	65,35	12,11	10,42	10,20
γ^4_{matrix}	0,099	0,041	0,052	0,073	0,169
τ^4_{matrix}	3446,7	2859,8	1273,3	26710,8	2552,4
γ^1_{fiber}	0,124	0,043	0,224	0,061	0,344
τ^1_{fiber}	0,007	0,027	0,018	0,027	0,015
γ^2_{fiber}	0,386	0,048	0,056	0,113	0,093
τ^2_{fiber}	2,914	0,172	9,774	9,830	6,069
γ^3_{fiber}	0,208	0,161	0,101	0,107	0,103
τ^3_{fiber}	69,60	20,66	12,50	72,77	59,66
γ^4_{fiber}	0,029	0,035	0,024	0,043	0,078
τ^4_{fiber}	2996,4	2491,3	6308,4	4695,6	53869,6

Tabella 19: Parametri costitutivi del modello implementato dal gruppo di Carniel, utilizzato sui test di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati, effettuati su SDFT grandi.

	Sample 1	Sample 2	Sample 3	Sample 4	Sample 5
$R^2_{3\% \text{ deformation}}$	0,9970	0,9929	0,9933	0,9970	0,9994
$R^2_{6\% \text{ deformation}}$	0,6478	-0,0471	0,8842	0,8239	0,8715
$R^2_{9\% \text{ deformation}}$	0,9395	0,7133	0,8423	0,9701	0,8481
$R^2_{10\% \text{ deformation}}$	0,9611	-	-	0,9290	0,6061
$R^2_{12\% \text{ deformation}}$	0,9261	-	-	-	-
	Sample 6	Sample 7	Sample 8	Sample 9	Sample 10
$R^2_{3\% \text{ deformation}}$	0,9984	0,9810	0,9936	0,9845	0,9980
$R^2_{6\% \text{ deformation}}$	0,8986	0,1967	0,2462	0,6744	0,3258
$R^2_{9\% \text{ deformation}}$	0,8673	0,6010	0,6560	0,7728	0,7439
$R^2_{10\% \text{ deformation}}$	0,5228	0,8123	0,7875	0,8977	0,8316
$R^2_{12\% \text{ deformation}}$	-	0,8440	0,8903	0,8746	0,3632

Tabella 20: Goodness of fit delle curve di carico ottenute utilizzando il modello implementato dal gruppo di Carniel, utilizzato sui test di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati, effettuati su SDFT grandi.

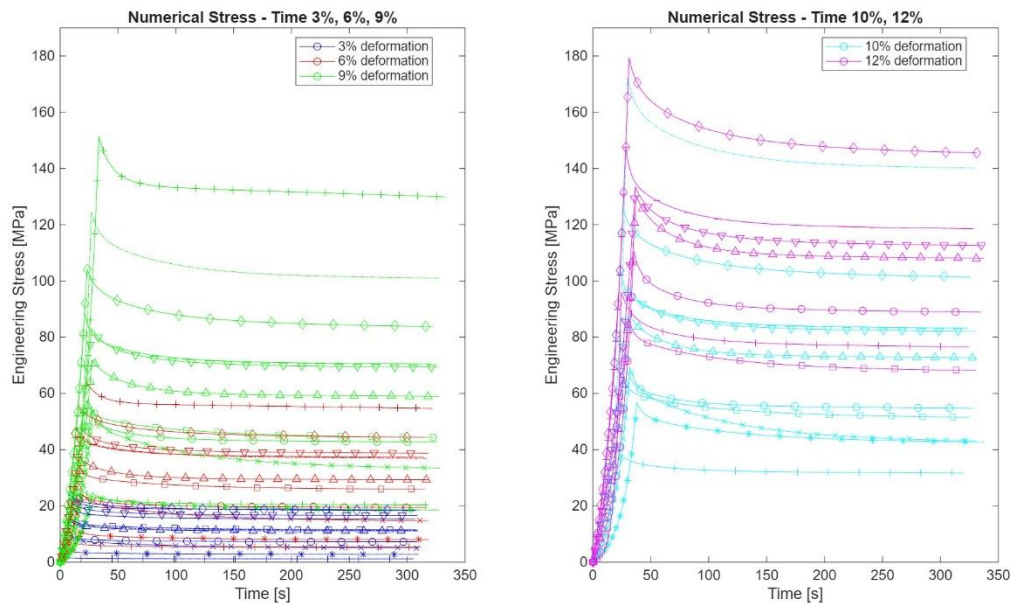


Figura 47: Andamento delle curve numeriche ottenute con il modello di Carniel, per SDFT piccoli con test di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati.

	Sample 11	Sample 12	Sample 13	Sample 14	Sample 15	Sample 16
C_1	15,45	15,83	4,76	15,35	3,43	22,54
α_1	21,23	20,93	21,72	34,31	20,81	7,64
C_4	17,44	56,14	8,32	27,84	20,93	63,85
α_4	10,31	11,24	11,07	14,24	9,82	6,24
γ^1_{matrix}	0,038	0,074	0,113	0,138	0,196	0,051
τ^1_{matrix}	0,041	0,038	0,035	0,058	0,038	0,038
γ^2_{matrix}	0,259	0,174	0,093	0,276	0,187	0,067
τ^2_{matrix}	4,429	6,727	8,601	6,057	0,254	1,002
γ^3_{matrix}	0,047	0,017	0,199	0,084	0,345	0,127
τ^3_{matrix}	104,21	18,92	11,33	10,14	79,00	15,09
γ^4_{matrix}	0,169	0,319	0,062	0,132	0,023	0,132
τ^4_{matrix}	3278,0	4684,7	2953,1	3985,1	3272,5	1901,3
γ^1_{fiber}	0,032	0,079	0,169	0,053	0,239	0,061
τ^1_{fiber}	0,031	0,021	0,073	0,083	0,007	0,080
γ^2_{fiber}	0,185	0,106	0,163	0,082	0,210	0,260
τ^2_{fiber}	4,763	8,201	5,418	5,827	5,609	3,857
γ^3_{fiber}	0,161	0,099	0,146	0,147	0,174	0,113
τ^3_{fiber}	33,03	16,48	80,75	58,68	81,03	43,81
γ^4_{fiber}	0,133	0,224	0,111	0,207	0,073	0,064
τ^4_{fiber}	5498,3	2761,8	3086,1	12796,7	3086,7	3140,2
	Sample 17	Sample 18	Sample 19	Sample 20	Sample 21	
C_1	0,16	12,70	33,98	0,72	24,67	
α_1	50,38	1,00	10,65	10,04	4,46	
C_4	4,05	61,95	53,82	62,62	64,24	
α_4	19,29	3,37	6,47	6,75	5,02	
γ^1_{matrix}	0,053	0,098	0,033	0,045	0,074	
τ^1_{matrix}	0,018	0,042	0,064	0,043	0,052	
γ^2_{matrix}	0,133	0,049	0,114	0,094	0,071	
τ^2_{matrix}	7,245	9,754	4,851	8,558	8,595	
γ^3_{matrix}	0,344	0,206	0,233	0,184	0,256	
τ^3_{matrix}	10,16	18,89	17,60	90,02	10,16	
γ^4_{matrix}	0,132	0,059	0,125	0,061	0,134	
τ^4_{matrix}	3068,0	3847,9	3896,4	2455,2	5097,1	
γ^1_{fiber}	0,058	0,070	0,079	0,044	0,057	
τ^1_{fiber}	0,063	0,072	0,091	0,059	0,063	
γ^2_{fiber}	0,115	0,290	0,127	0,082	0,086	
τ^2_{fiber}	7,405	4,150	4,722	8,247	8,488	
γ^3_{fiber}	0,105	0,112	0,137	0,151	0,139	
τ^3_{fiber}	40,68	79,07	62,09	35,28	44,67	
γ^4_{fiber}	0,134	0,033	0,186	0,093	0,137	
τ^4_{fiber}	2595,1	1591,6	4164,3	2822,1	3898,6	

Tabella 21: Parametri costitutivi del modello implementato dal gruppo di Carniel, utilizzato sui test di trazione uniaassiale con livelli di deformazione separati, effettuati su SDFT piccoli.

	Sample 11	Sample 12	Sample 13	Sample 14	Sample 15	Sample 16
R^2 3% deformation	0,9985	0,9948	0,9989	0,9984	0,9965	0,9997
R^2 6% deformation	0,6744	0,9282	0,6336	0,7774	0,8454	0,7108
R^2 9% deformation	0,9524	0,0561	0,8769	0,8138	0,9735	0,9445
R^2 10% deformation	0,9881	-	0,6633	0,0939	0,6929	0,9935
R^2 12% deformation	0,5177	-	-	-	-	0,7690
	Sample 17	Sample 18	Sample 19	Sample 20	Sample 21	
R^2 3% deformation	0,9960	0,9993	0,9990	0,9846	0,9933	
R^2 6% deformation	-0,3910	0,8245	0,8868	0,5440	0,7438	
R^2 9% deformation	0,3803	0,9850	0,9946	0,7123	0,9321	
R^2 10% deformation	0,6350	0,9572	0,9108	0,8987	0,9814	
R^2 12% deformation	0,5548	0,8557	0,1249	0,5515	0,3211	

Tabella 22: Goodness of fit delle curve di carico ottenute utilizzando il modello implementato dal gruppo di Carniel, utilizzato sui test di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati, effettuati su SDFT piccoli.

In Tabella 19,21 sono elencati i parametri costitutivi in uscita dall'algoritmo di ricerca relativi al primo tipo di test di deformazione uniassiale a livelli separati, elaborati mediante la formulazione dei carichi ottenuta dal modello iperelastico di Carniel, per i due tipi di tendine porcino esaminati. Si tratta come già visto di 20 parametri. I primi quattro riguardano la caratterizzazione del comportamento iperelastico, quindi entrano in gioco sia nell'ottimizzazione della tensione iperelastica che nell'ottimizzazione della tensione viscoelastica. Si ricorda infatti che la ricerca dei parametri viene eseguita confrontando parallelamente i valori di stress ingegneristico sia dei punti a infinito (punti finali della relaxation) che di tutti i punti in uscita dalla macchina per il primo livello di deformazione; tali punti vengono confrontati paragonando lo stress ingegneristico ottenuto sperimentalmente con il carico ottenuto dalla formulazione del modello matematico, calcolato dai valori di deformazione sperimentali e dai parametri che vengono ottimizzati iterazione dopo iterazione. I parametri C_1 e C_4 assumono solitamente valori di decine di MPa, ma non mancano valori che si discostino notevolmente rispetto questa tendenza; inoltre, è sempre rispettata la condizione $C_1 < C_4$ poiché imposta nella ricerca dei parametri, anche se sebbene alcune volte tale differenza è netta, altre volte i valori si avvicinano, mostrando una possibile ricerca verso i valori che non rispettano questa condizione. Come già detto, la ricerca dell'ottimo mediante un semplice algoritmo basato sulla funzione di ottimizzazione R^2 può facilmente convergere verso minimi locali, possibilmente distanti dalla reale soluzione globale dell'equazione.

Si vuole fare un confronto con i soli parametri iperelastici, riportati nell'articolo di riferimento per l'implementazione di tale modello, i quali però sono stati ottenuti da risultati sperimentali sul legamento collaterale medio (MCL) umano; tale confronto dunque è mostrato soltanto come metro di paragone approssimativo.

C_1 [MPa]	α_1	C_4 [MPa]	α_4
0.049	3.438	2.337	4.856

Tabella 23: Parametri iperelastici riportati da Carniel et al. ottenuti per il legamento collaterale medio umano [48].

Tali valori sono inferiori rispetto quelli ottenuti applicando lo stesso modello per i tendini flessori di origine porcina. Ciò potrebbe indicare dunque una differenza di rigidità dei due

materiali, ma è necessaria un'analisi più approfondita sulle modalità di sperimentazione per poter garantire riproducibilità dei dati e fare delle valutazioni con valenza fisica.

In Tabella 20,22 sono invece riportati i valori di R^2 ottenuti dal confronto dello strain ingegneristico in uscita dalla macchina di prova con i carichi calcolati numericamente, per ogni livello di deformazione. Si può notare che i valori ottenuti per il primo livello di deformazione sono molto più vicini al valore ideale rispetto che i valori degli altri livelli di deformazione: ciò era facilmente prevedibile, in quanto tali valori sono indice della somiglianza dei vali di carico, già osservata dai grafici degli andamenti di confronto tra i due carichi sperimentale e numerico. Come già detto, mentre i valori di R^2 del primo livello sono massimizzati per ottenere un andamento numerico quanto più simile a quello reale, gli altri sono calcolati per fornire una valutazione su quanto il modello viscoelastico lineare riesca a prevedere il comportamento del materiale per deformazioni maggiori, laddove in realtà il comportamento viscoso del tendine presenta una variazione più complessa dei carichi dissipati.

Si può osservare che il valore di correlazione peggiore corrisponde generalmente all'ultimo livello di deformazione raggiunto. Anche questo era già stato osservato dalla valutazione delle curve di carico, le quali mostravano una grossa differenza per gli ultimi livelli di deformazione; negli ultimi livelli si ha probabilmente un incremento più elevato dei fenomeni viscosi, associati all'elevata condizione di carico che talvolta ha portato infatti alla rottura, e che dunque discosta il valore di energia dissipata da quella che invece viene prevista mediante una relazione soltanto lineare che la lega all'energia di una deformazione molto minore.

Si può osservare un'altra tendenza da queste tabelle, che riguarda i valori di R^2 del secondo livello di deformazione, i quali spesso sono inferiori degli R^2 relativi ai livelli successivi. Si potrebbe associare questo risultato alle osservazioni sulle prove di trazione uniassiale con livelli raggiunti in un unico ciclo: infatti, si era osservato che, per tale livello, i valori di carico sperimentali mostravano un repentino aumento non previsto dalla formulazione matematica presentata, superando i carichi numerici talvolta anche per i livelli di deformazione successivi, prima di osservare un aumento dei carichi numerici per l'ultimo livello. Dunque, si creerebbe un gap improvviso nel secondo livello di deformazione, colmato successivamente, che giustificerebbe questo risultato, rappresentando una caratteristica coerente di queste prove stress-relaxation su più livelli di deformazione, su diverse modalità di test di deformazione uniassiale e su molteplici campioni biologici; la ricerca della motivazione di tale fenomeno potrebbe influire sul miglioramento delle attuali formulazioni proposte.

5.2.5 Curve di carico raggruppate e valori dei parametri costitutivi e di R^2 per prove di trazione uniassiale con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo

In Figura 48,49 sono riportati gli andamenti, raggruppati per SDFT grande e SDFT piccolo, delle curve di carico ottenute dalla formulazione numerica di Carniel per i test di trazione uniassiale con livelli di deformazione raggiunti in un'unica prova; per tali curve si fa riferimento alla simbologia in Tabella 11,13.

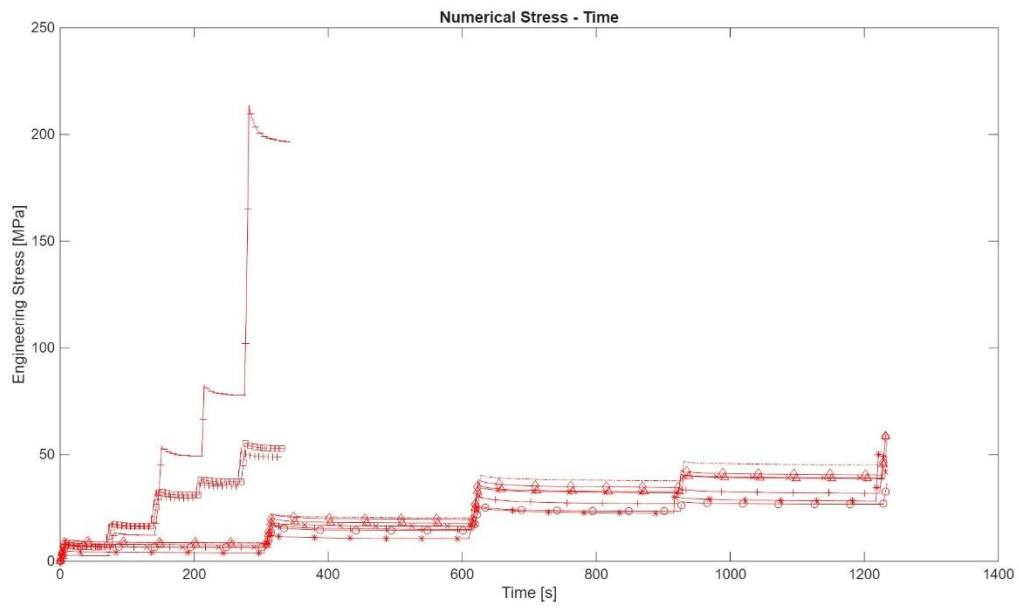


Figura 48: Andamento delle curve numeriche ottenute con il modello di Carniel, per SDFT grandi con test di trazione uniassiale con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo.

	Sample 22	Sample 23	Sample 24	Sample 25	Sample 26
C_1	4,76	16,64	8,20	21,75	8,18
α_1	0,32	11,26	20,53	14,53	16,01
C_4	37,91	17,23	11,97	22,39	26,56
α_4	1,86	5,78	9,24	6,19	6,61
γ^1_{matrix}	0,029	0,034	0,068	0,135	0,237
τ^1_{matrix}	0,035	0,035	0,012	0,041	0,013
γ^2_{matrix}	0,049	0,093	0,092	0,035	0,183
τ^2_{matrix}	0,233	5,868	0,149	0,154	0,308
γ^3_{matrix}	0,146	0,097	0,152	0,100	0,164
τ^3_{matrix}	15,57	82,82	13,99	20,15	14,80
γ^4_{matrix}	0,083	0,123	0,067	0,188	0,043
τ^4_{matrix}	1582,4	2005,2	6671,8	4275,3	2202,5
γ^1_{fiber}	0,392	0,240	0,080	0,112	0,229
τ^1_{fiber}	0,015	0,037	0,012	0,036	0,008
γ^2_{fiber}	0,055	0,079	0,098	0,067	0,048
τ^2_{fiber}	9,905	5,787	7,814	7,248	0,190
γ^3_{fiber}	0,089	0,164	0,162	0,095	0,067
τ^3_{fiber}	57,81	38,81	81,34	92,44	61,68
γ^4_{fiber}	0,057	0,103	0,113	0,090	0,122
τ^4_{fiber}	5306,1	2384,9	3117,3	4650,2	4038,8
	Sample 27	Sample 28	Sample 29	Sample 30	Sample 31
C_1	0,53	7,70	4,77	14,75	21,83
α_1	61,51	7,25	5,72	11,85	14,24
C_4	4,32	26,53	33,45	34,14	22,03
α_4	20,26	5,00	5,60	4,06	5,43
γ^1_{matrix}	0,166	0,072	0,099	0,092	0,037
τ^1_{matrix}	0,004	0,020	0,050	0,048	0,028
γ^2_{matrix}	0,431	0,193	0,045	0,068	0,068
τ^2_{matrix}	7,876	3,665	0,143	0,190	6,355
γ^3_{matrix}	0,122	0,147	0,133	0,176	0,222
τ^3_{matrix}	15,06	12,53	13,10	129,54	16,53
γ^4_{matrix}	0,045	0,179	0,059	0,087	0,077
τ^4_{matrix}	11374,2	5461,2	2981,2	2612,0	1441,7
γ^1_{fiber}	0,045	0,047	0,043	0,120	0,167
τ^1_{fiber}	0,033	0,016	0,015	0,042	0,015
γ^2_{fiber}	0,059	0,067	0,059	0,083	0,239
τ^2_{fiber}	9,126	4,322	3,782	3,888	0,116
γ^3_{fiber}	0,057	0,128	0,130	0,134	0,080
τ^3_{fiber}	10,78	13,07	13,89	25,92	60,35
γ^4_{fiber}	0,486	0,163	0,106	0,100	0,043
τ^4_{fiber}	3184,1	2944,2	4243,8	3296,9	1340,1

Tabella 24: Parametri costitutivi del modello implementato dal gruppo di Carniel, utilizzato sui test di trazione uniassiale con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo, effettuati su SDFT grandi.

	Sample 22	Sample 23	Sample 24	Sample 25	Sample 26
$R^2_{3\% \text{ deformation}}$	0,9914	0,9975	0,9952	0,9936	0,9897
$R^2_{\text{total deformation}}$	0,9461	0,9177	0,8963	0,8991	0,8972
$R^2_{6\% \text{ deformation}}$	0,4378	0,8297	0,5938	0,7708	0,5823
$R^2_{9\% \text{ deformation}}$	0,0208	0,3328	-0,1018	-0,4968	-0,6451
$R^2_{10\% \text{ deformation}}$	-0,1044	-0,5873	-2,8701	-4,6975	-3,3658
$R^2_{12\% \text{ deformation}}$	0,2963	0,5381	-1,0772	0,3612	0,7667
	Sample 27	Sample 28	Sample 29	Sample 30	Sample 31
$R^2_{3\% \text{ deformation}}$	0,9905	0,9954	0,9598	0,9956	0,9963
$R^2_{\text{total deformation}}$	-31,3857	0,7854	0,8624	0,9317	0,9655
$R^2_{6\% \text{ deformation}}$	0,8515	0,6860	-0,7031	0,8027	0,4958
$R^2_{9\% \text{ deformation}}$	-36,6560	-0,3750	0,6302	-0,2729	0,6144
$R^2_{10\% \text{ deformation}}$	-371,1135	0,0154	0,1108	0,0511	-0,7801
$R^2_{12\% \text{ deformation}}$	-802,0227	-4,0406	-6,6049	0,8898	0,5264

Tabella 25: Goodness of fit delle curve di carico ottenute utilizzando il modello implementato dal gruppo di Carniel, utilizzato sui test di trazione uniassiale con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo, effettuati su SDFT grandi.

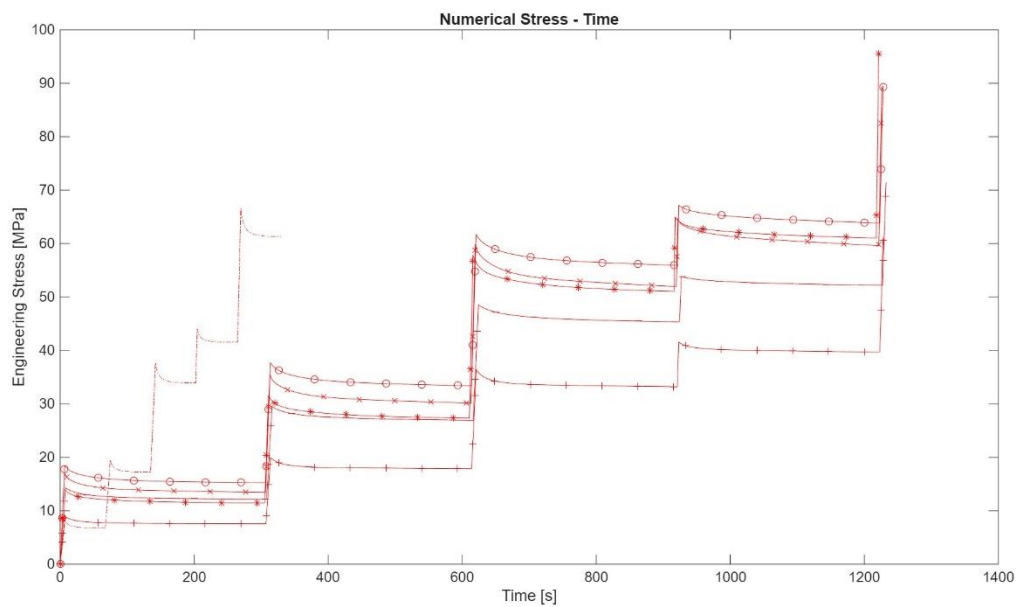


Figura 49: Andamento delle curve numeriche ottenute con il modello di Carniel, per SDFT piccoli con test di trazione uniassiale con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo.

	Sample 32	Sample 33	Sample 34	Sample 35	Sample 36	Sample 37
C_1	31,33	17,21	20,27	9,23	22,56	16,92
α_1	4,98	16,83	12,03	10,11	0,51	0,13
C_4	52,84	22,40	35,18	29,01	41,10	50,28
α_4	3,41	5,46	6,38	7,12	5,36	3,73
γ^1_{matrix}	0,034	0,051	0,040	0,084	0,040	0,041
τ^1_{matrix}	0,040	0,012	0,022	0,017	0,058	0,023
γ^2_{matrix}	0,054	0,045	0,128	0,082	0,092	0,066
τ^2_{matrix}	0,210	7,644	0,167	0,151	3,434	9,757
γ^3_{matrix}	0,170	0,105	0,125	0,121	0,118	0,220
τ^3_{matrix}	10,13	33,29	13,20	11,54	10,15	17,20
γ^4_{matrix}	0,113	0,123	0,244	0,076	0,328	0,258
τ^4_{matrix}	2943,1	2414,1	5013,3	16498,5	3480,1	3080,9
γ^1_{fiber}	0,021	0,183	0,135	0,068	0,074	0,086
τ^1_{fiber}	0,007	0,024	0,018	0,028	0,027	0,037
γ^2_{fiber}	0,035	0,078	0,092	0,185	0,078	0,069
τ^2_{fiber}	4,846	7,994	7,704	2,795	2,254	0,165
γ^3_{fiber}	0,161	0,096	0,126	0,114	0,176	0,090
τ^3_{fiber}	46,12	24,30	70,41	10,33	35,78	64,99
γ^4_{fiber}	0,175	0,127	0,129	0,063	0,167	0,102
τ^4_{fiber}	1785,4	3470,6	2965,7	42418,5	1410,7	5148,5

Tabella 26: Parametri costitutivi del modello implementato dal gruppo di Carniel, utilizzato sui test di trazione uniaxiale con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo, effettuati su SDFT piccoli.

	Sample 32	Sample 33	Sample 34	Sample 35	Sample 36	Sample 37
$R^2_{3\% \text{ deformation}}$	0,9960	0,9936	0,9961	0,9934	0,9981	0,9917
$R^2_{\text{total deformation}}$	0,9032	0,9008	0,7360	0,9361	0,6409	0,8940
$R^2_{6\% \text{ deformation}}$	0,8157	0,2526	0,8343	-0,3877	0,7572	0,6285
$R^2_{9\% \text{ deformation}}$	-0,2596	-1,4543	-2,3859	0,7172	-1,8653	-0,4382
$R^2_{10\% \text{ deformation}}$	0,3509	-0,0786	-5,3207	0,6572	-1,0050	0,0387
$R^2_{12\% \text{ deformation}}$	0,9470	0,8096	-1,8081	-7,0141	0,5185	0,8939

Tabella 27: Goodness of fit delle curve di carico ottenute utilizzando il modello implementato dal gruppo di Carniel, utilizzato sui test di trazione uniaxiale con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo, effettuati su SDFT piccoli.

La prima cosa che è possibile osservare è che tutte le curve presentano un andamento simile sia come forma che come valori di carico, ad eccezione delle curve che corrispondono alle soluzioni ottenute dai test risalenti al 21/05/2024, commentati già singolarmente per la loro irregolarità dovuta ad un tempo di rilassamento pari a un quinto di quello concesso per le altre prove.

In Tabella 25,27 si possono osservare i valori di R^2 delle varie curve numeriche, rispetto alla curva sperimentale. Nella seconda riga viene riportato, per le prove ad unico ciclo, anche il valore di $R^2_{\text{total deformation}}$ complessivo di tutto il ciclo di deformazione, dal primo all'ultimo livello di deformazione raggiunto da ogni prova. Invece, per i livelli di deformazione successivi, non è corretto confrontare direttamente i valori di carico per valutare la somiglianza delle deformazioni, poiché i due tratti di curva da confrontare (sperimentale e numerico) hanno diversi valori iniziali, coincidenti al carico a infinito della precedente fase di relaxation; al fine

di valutare la somiglianza per i livelli di deformazione successivi al primo, si è scelto dunque di traslare i tratti di curva sperimentale e numerico in modo che entrambi partissero da zero, in modo che i valori di R^2 siano indice di valutazione della previsione del carico ottenuta dal modello numerico, per una deformazione che conduce da una percentuale di deformazione relativa ad un'altra.

Innanzitutto, si osserva come l'accuratezza dei risultati del primo livello di deformazione non venga raggiunta nei livelli successivi, con scostamenti dei valori di R^2 anche molto elevati; lo stesso si può dire anche per l'intera curva, che a causa dello scostamento dei valori per i livelli successivi, riporta un indice totale di somiglianza più basso. Riprendendo il discorso del repentino aumento dei carichi sperimentali del secondo livello di deformazione, rispetto a quelli numerici, è significativo il confronto tra i valori $R^2_{6\% \text{ deformation}}$ e $R^2_{\text{total deformation}}$: spesso infatti si osserva un valore minore relativo al secondo livello, in quanto si crea un gap tra curva sperimentale e curva numerica che viene colmato successivamente, a volte nelle fasi finali della prova, in cui poi si ha il superamento dei carichi numerici su quelli sperimentali. Si ricorda che questo ultimo risultato, comune alla maggioranza delle prove, è stato giustificato da alcuni fattori come la variazione non lineare dei fenomeni viscosi, che portano a una sovrastima dei carichi finali. Nonostante ciò, il superamento iniziale dei valori di tensione sperimentali su quelli numerici è stato osservato in una gran parte degli andamenti, e viene anche parzialmente valutato dal confronto dei valori di R^2 relativi ai vari livelli; sarebbe importante capire a quale tipo di fenomeno è dovuto questo risultato, in modo da comprendere meglio il comportamento dei tessuti biologici soft e poterlo riprodurre in nuovi modelli matematici da sviluppare.

Riguardo alle prove con minore tempo di rilassamento, nelle tabelle relative ai valori di R^2 si osservano valori inferiori, in particolare per il Sample 27, per il quale era stato già mostrato, nel confronto tra la curva di stress ingegneristico e di tensione numerica, come la seconda raggiungesse valori decisamente più alti. Sicuramente è possibile, svolgendo più prove di ricerca dei parametri, ottenere delle combinazioni che restituiscano curve di carico più soddisfacenti, in quanto, come già detto, la ricerca dell'ottimo per un modello con così tanti parametri non è facile per semplici algoritmi di ricerca come quello utilizzato. Tuttavia, questo non è il focus su cui si basa questo lavoro di tesi, il quale vuole valutare in maniera generale quanto i modelli viscoelastici proposti siano adatti ai tessuti biologici e a quali miglie potremmo essere sottoposti, cercando di individuare alcuni fenomeni non compresi dalle attuali formulazioni matematiche.

Riguardo i parametri costitutivi, mostrati in Tabella 25,27, non si osservano particolari differenze tra i valori delle prove con minore tempo di rilassamento. Fa eccezione ancora una volta il Sample 27, che mostra valori di C_1 e di C_4 un po' più bassi, a scapito dei valori dei valori di α_1 e di α_4 che invece sono più alti: poiché la formulazione matematica implementata da Carniel et al. vede i primi due parametri come fattori moltiplicativi dell'energia di deformazione e gli altri due come regolatori dell'andamento esponenziale, questa combinazione di valori è la causa di un andamento inizialmente simile per il primo livello ($R^2_{3\% \text{ deformation}}=0,9905$), che però nei livelli successivi fornisce dei carichi previsti che si discostano eccessivamente. Bisogna comunque evitare di associare i valori ottenuti da questo campione come valori inadatti ad ogni campione: infatti, parametri iperelastici simili sono stati ottenuti per alcuni provini della prima modalità di test (ad esempio il Sample 2 e il Sample 17, Tabella 20,22), i quali però hanno fornito una migliore previsione dei risultati, senza l'eccesso di tensioni visto per il Sample 27. Si ricorda infatti che i vari provini presentano un elevato grado di variabilità, riguardante sia la

risposta iperelastica che quella viscosa; dunque, anche se si può osservare una tendenza di valori per i vari parametri, è necessario uno studio più approfondito per stabilire quale sia il corretto intervallo di valori per un dato tessuto biologico.

5.2.6 Curve di carico raggruppate e valori dei parametri costitutivi e di R^2 per prove di trazione uniassiale con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo

In Figura 50,51 sono riportati gli andamenti, raggruppati per SDFT grande e SDFT piccolo, delle curve di carico ottenute dalla formulazione numerica di Carniel per i test di shear semplice con livelli di deformazione raggiunti in un'unica prova; per tali curve si fa riferimento alla simbologia in Tabella 15,17.

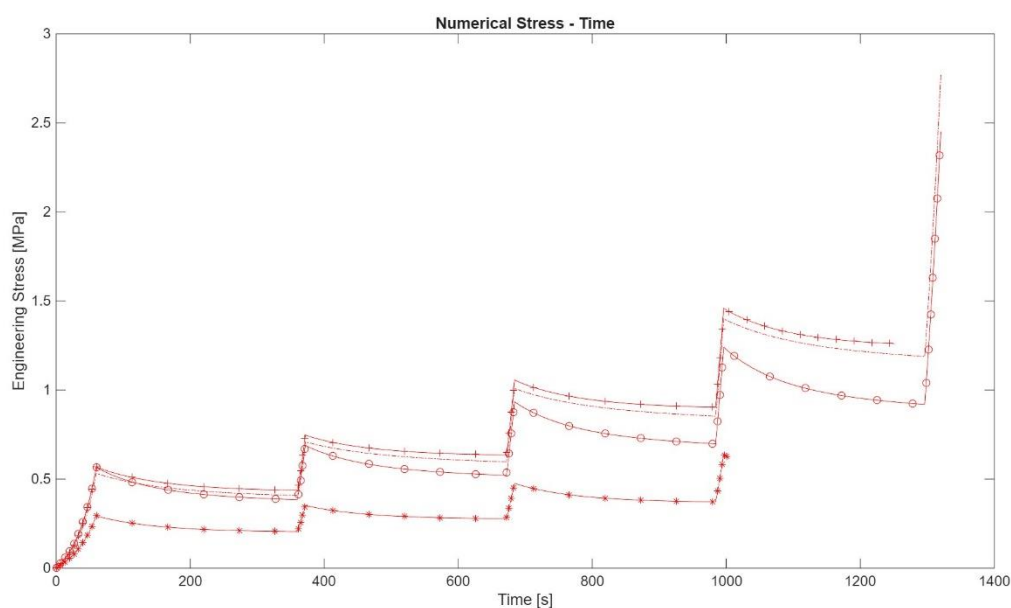


Figura 50: Andamento delle curve numeriche ottenute con il modello di Carniel, per SDFT grandi con test di shear semplice con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo.

	Sample 30	Sample 25	Sample 26	Sample 31
C_1	0,22	0,55	0,36	0,15
α_1	0,14	5,05	5,23	0,39
C_4	0,24	9,02	1,28	0,40
α_4	0,15	0,23	1,21	0,12
γ_{matrix}^1	0,028	0,034	0,041	0,076
τ_{matrix}^1	0,093	0,012	0,062	0,016
γ_{matrix}^2	0,048	0,042	0,061	0,037
τ_{matrix}^2	0,142	0,203	0,166	0,121
γ_{matrix}^3	0,045	0,031	0,015	0,084
τ_{matrix}^3	10,08	10,11	69,49	59,65
γ_{matrix}^4	0,019	0,031	0,027	0,014
τ_{matrix}^4	1001,3	1340,7	2344,5	1009,6
γ_{fiber}^1	0,230	0,118	0,237	0,098
τ_{fiber}^1	0,041	0,046	0,044	0,054
γ_{fiber}^2	0,053	0,254	0,233	0,116
τ_{fiber}^2	0,164	0,155	0,149	0,250
γ_{fiber}^3	0,396	0,306	0,427	0,264
τ_{fiber}^3	85,17	97,41	88,72	103,61
γ_{fiber}^4	0,168	0,051	0,020	0,170
τ_{fiber}^4	1000,1	15424,7	2728,3	1006,5

Tabella 28: Parametri costitutivi del modello implementato dal gruppo di Carniel, utilizzato sui test di shear semplice con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo, effettuati su SDFT grandi.

	Sample 30	Sample 25	Sample 26	Sample 31
$R^2_{10 \text{ mm}}$	0,8719	0,9369	0,9063	0,8913
$R^2_{\text{total deformation}}$	0,8967	0,9120	0,8382	0,6493
$R^2_{12 \text{ mm}}$	0,0537	-0,2452	-0,5313	-0,4271
$R^2_{14 \text{ mm}}$	0,3480	0,0224	0,0795	-0,0290
$R^2_{16 \text{ mm}}$	0,4632	0,0620	-0,5626	-0,0667
$R^2_{20 \text{ mm}}$	0,7620	-	-	-6,8185

Tabella 29: Goodness of fit delle curve di carico ottenute utilizzando il modello implementato dal gruppo di Carniel, utilizzato sui test di shear semplice con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo, effettuati su SDFT grandi.

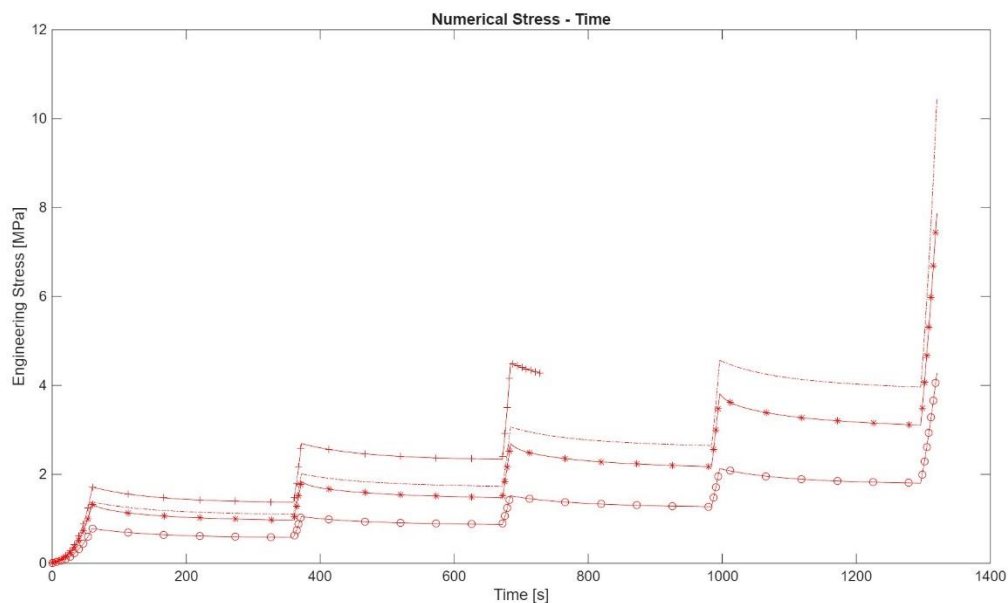


Figura 51: Andamento delle curve numeriche ottenute con il modello di Carniel, per SDFT piccoli con test di shear semplice con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo.

	Sample 38	Sample 39	Sample 36	Sample 37
C_1	0,57	0,98	0,26	0,35
α_1	5,59	15,74	0,55	1,36
C_4	16,83	27,94	0,95	1,36
α_4	0,21	9,60	0,15	0,55
γ_{matrix}^1	0,028	0,028	0,086	0,030
τ_{matrix}^1	0,026	0,036	0,050	0,070
γ_{matrix}^2	0,024	0,030	0,098	0,016
τ_{matrix}^2	0,144	0,192	0,294	0,205
γ_{matrix}^3	0,044	0,011	0,020	0,020
τ_{matrix}^3	10,21	14,81	10,23	10,08
γ_{matrix}^4	0,023	0,010	0,049	0,010
τ_{matrix}^4	1352,6	3079,8	1000,2	1127,4
γ_{fiber}^1	0,448	0,076	0,122	0,150
τ_{fiber}^1	0,014	0,047	0,045	0,019
γ_{fiber}^2	0,209	0,163	0,126	0,228
τ_{fiber}^2	0,147	0,113	9,971	0,142
γ_{fiber}^3	0,147	0,280	0,241	0,195
τ_{fiber}^3	93,97	88,05	75,72	76,86
γ_{fiber}^4	0,030	0,113	0,171	0,134
τ_{fiber}^4	1178,1	2742,4	1000,4	1008,5

Tabella 30: Parametri costitutivi del modello implementato dal gruppo di Carniel, utilizzato sui test di shear semplice con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo, effettuati su SDFT piccoli.

	Sample 38	Sample 39	Sample 36	Sample 37
$R^2_{10\text{ mm}}$	0,9383	0,9434	0,9789	0,9489
$R^2_{\text{total deformation}}$	0,9315	0,8867	0,9167	0,8994
$R^2_{12\text{ mm}}$	-0,3041	0,1159	0,4371	-0,0130
$R^2_{14\text{ mm}}$	-0,1138	-2,6834	0,5088	0,3444
$R^2_{16\text{ mm}}$	-0,0596	-	0,5060	0,2862
$R^2_{20\text{ mm}}$	0,2523	-	0,7196	0,3418

Tabella 31: Goodness of fit delle curve di carico ottenute utilizzando il modello implementato dal gruppo di Carniel, utilizzato sui test di shear semplice con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo, effettuati su SDFT piccoli.

Come già visto nei risultati sperimentali, i valori di carico ottenuti (in ordinata in Figura 50,51) sono notevolmente inferiori rispetto ai test di trazione uniassiale. Gli andamenti mostrano una certa regolarità tra i vari campioni dello stesso tipo, con una fase di rilassamento decrescente anche verso la fase finale (similmente, anche se in maniera minore, ai risultati sperimentali). I parametri costitutivi (Tabella 28,30) presentano alcune differenze di tendenza rispetto le altre due modalità di test. I parametri iperelastici C_1 e C_4 sono generalmente inferiori, poiché i carichi sono inferiori mentre le deformazioni sono comparabili (anche superiori) di quelle di deformazione uniassiale. Per quanto riguarda i parametri viscosi, si può notare che la costante di tempo del quarto processo viscoso, con costante di tempo maggiore compresa tra 1000 s e 100000 s, tende al valore inferiore di tale intervallo; potrebbe essere necessario fare una rivalutazione più approfondita sulla scelta e sulla separazione di tali processi viscosi.

In Tabella 29,31 sono riportati i valori di R^2 per i due tipi di provini, che assumono valori inferiori già dal primo livello di deformazione. La ricerca dei parametri relativa al primo livello risulta dunque meno efficace: oltre a quanto appena detto sulla separazione dei processi viscosi, il motivo potrebbe risiedere sull'inadeguatezza del modello proposto per deformazioni di shear, in quanto la formulazione semplificata potrebbe non racchiudere tutte le informazioni riguardanti la funzione di energia che lega lo stato deformativo a quello di tensione. La mancanza di un termine dipendente dall'invariante I_5 potrebbe quindi portare ad un'inaccuratezza della previsione di questo modello per deformazioni di scorrimento, e lo sviluppo di modelli viscoelastici che includano tale contributo potrebbe portare ad un miglioramento dei risultati per questo tipo di test.

5.3 Risultati ottenuti con il modello di Sopakayang-Holzapfel

Sono riportati in questo paragrafo i risultati relativi al secondo modello iperelastico utilizzato, con l'implementazione aggiuntiva dei processi di dissipazione interna, applicato agli stessi dati sperimentali mostrati in precedenza e utilizzati per il modello precedente. Si riportano quindi i risultati allo stesso modo di quanto fatto nel Paragrafo precedente, in modo da poterli confrontare e valutare come l'applicazione del metodo viscoelastico, implementato dal gruppo di Carniel, sia valido per un modello con una formulazione iperelastica più complessa come quella presentata da Sopakayang e Holzapfel.

5.3.1 Comparazione tra carichi sperimentali e numerici per prove di deformazione uniassiale con livelli di deformazione separati

Sono riportati in Figura 52,53 le curve relative ai test di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati del Sample 1 (SDFT grande) e del Sample 11 (SDFT piccolo). Come per

il modello precedente, queste curve rappresentano gli andamenti delle curve di carico sperimentale (curve continue) e delle curve di carico ottenute dalla formulazione numerica di Carniel (curve tratteggiate), per ognuno dei livelli di deformazione raggiunti per queste prove, ognuno dei quali è rappresentato da un diverso colore.

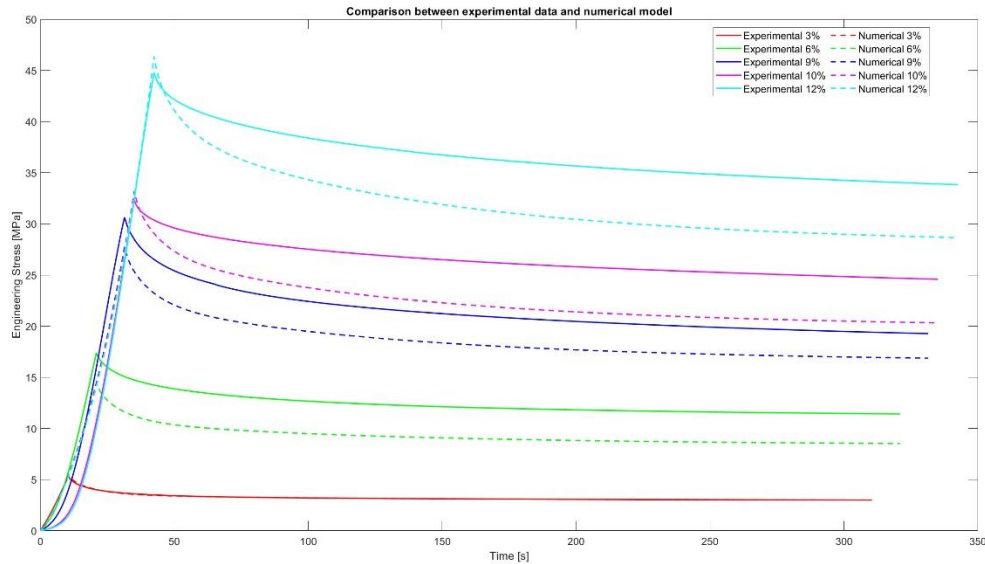


Figura 52: Curve stress-relaxation per test di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati, ottenute dal provino del 07/03/2023 (SDFT grande – Sample 1).

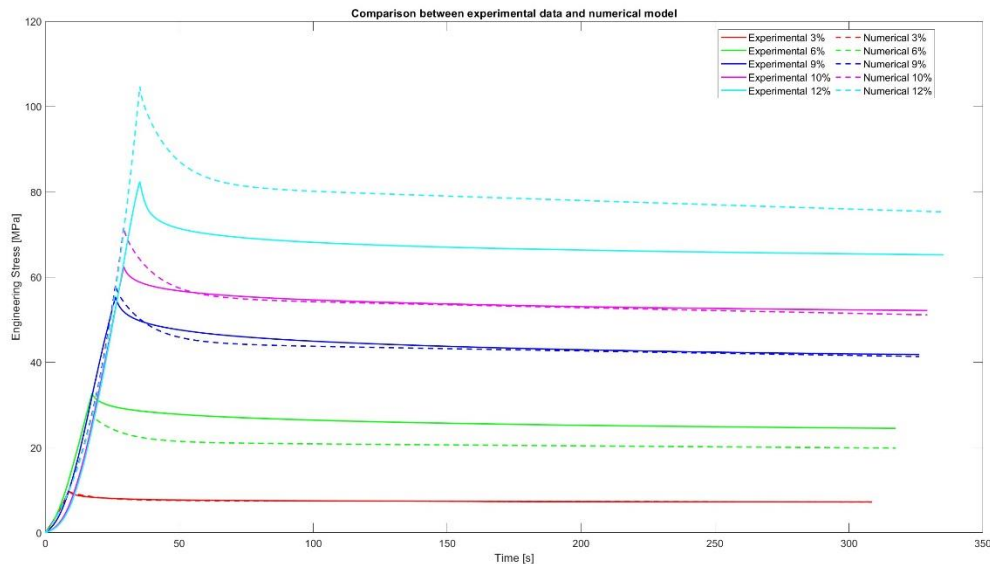


Figura 53: Curve stress-relaxation per test di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati, ottenute dal provino del 07/03/2024 (SDFT piccolo – Sample 11).

Le curve previste da questo modello presentano un andamento coerente con quelli visti in precedenza, mostrando dunque un buon adattamento della formulazione viscosa a quella puramente iperelastica. Rispetto al modello precedente, si nota un maggiore decremento generale dei carichi relativo alla fase viscosa. Tale risultato potrebbe essere attribuito alla

presenza dei processi viscosi aggiuntivi riguardanti l'interazione matrice-fibre, i quali potrebbero permettere al modello di catturare i fenomeni viscosi di interazione che il modello precedente non riusciva a catturare. Dunque, a differenza del primo modello che generalmente sottostimava il decremento viscoso dei carichi, questa formulazione riesce a stimare una maggiore dissipazione di energia. Tuttavia, l'aggiunta di processi viscosi aggiuntivi dell'interazione fibre-matrice, in maniera totalmente separata rispetto a quelli già presenti delle sole fibre, sembra talvolta causare una sovrastima della dissipazione energetica.

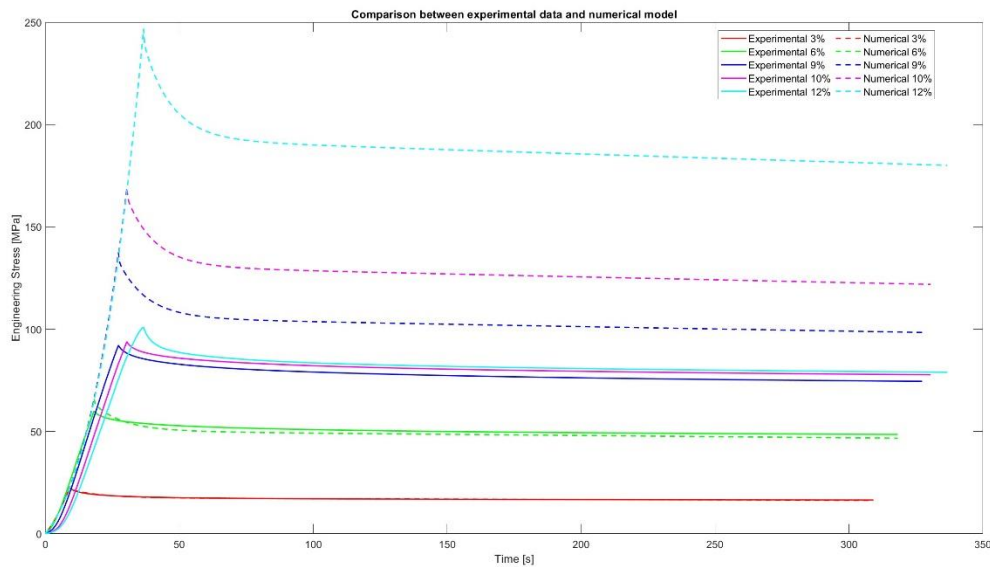


Figura 54: Curve stress-relaxation per test di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati, ottenute dal provino del 29/11/2023 (SDFT piccolo – Sample 21).

In Figura 54 si osserva ad esempio un'evidente accentuazione del decremento calcolato, rispetto a quello ottenuto in realtà. La cattiva previsione del comportamento viscoso sembra in questo caso peggiorare anche la stima dei parametri iperelastici, causando una sovrastima anche nel valore dei carichi di picco per i vari livelli di deformazione successivi al primo.

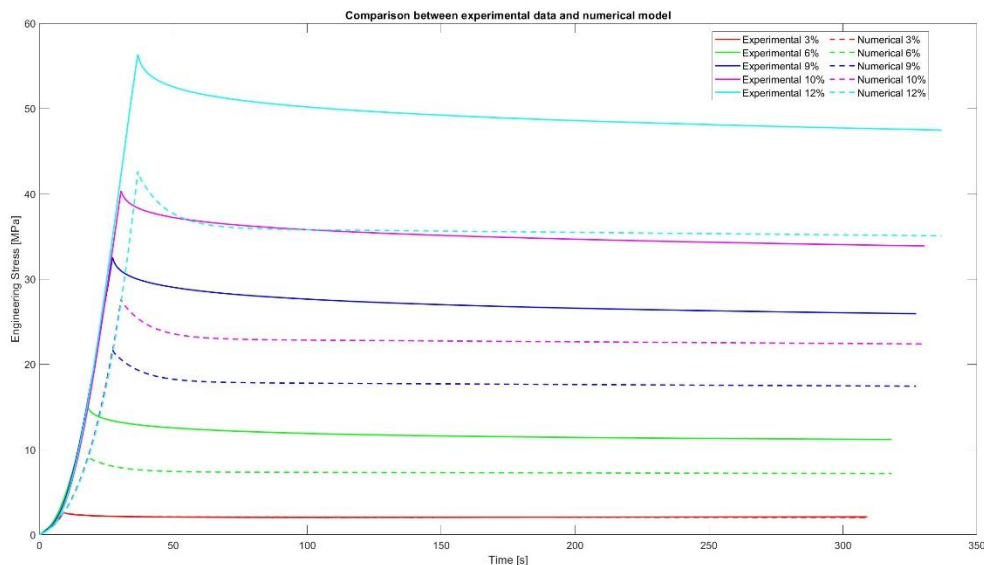


Figura 55: Curve stress-relaxation per test di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati, ottenute dal provino del 21/03/2024 (SDFT grande – Sample 8).

Se talvolta la sovrastima viscosa causa un'esagerazione dei carichi numerici, altre volte può causare invece una sottostima, come mostrato in Figura 55. In questo caso si ha un innalzamento della curva dei carichi sperimentali dal secondo livello di deformazione, che viene mantenuto per tutte le deformazioni cui è soggetto il provino; a differenza del modello precedente quindi, in cui il gap che si creava al secondo livello veniva colmato fino a che l'ultimo livello di deformazione presentasse dei valori di carico maggiori per la curva numerica, in questo caso si ha un comportamento variabile in tal senso.

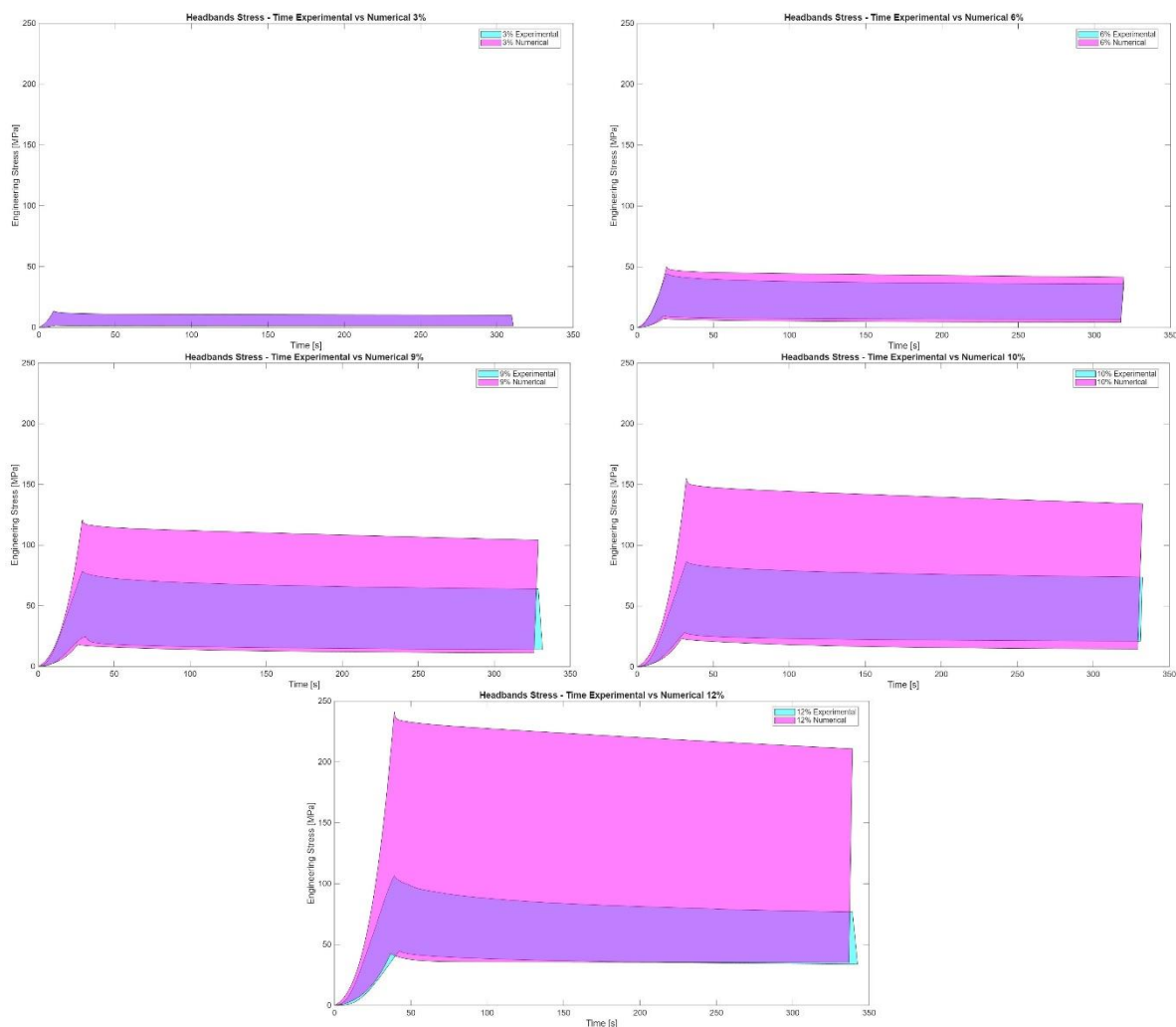


Figura 56: Bande per i diversi livelli di deformazione (3%, 6%, 9%, 10%, 12%) delle curve sperimentali (azzurro) e numeriche (magenta), ottenute dai provini SDFT grandi sottoposti alle prove di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati.

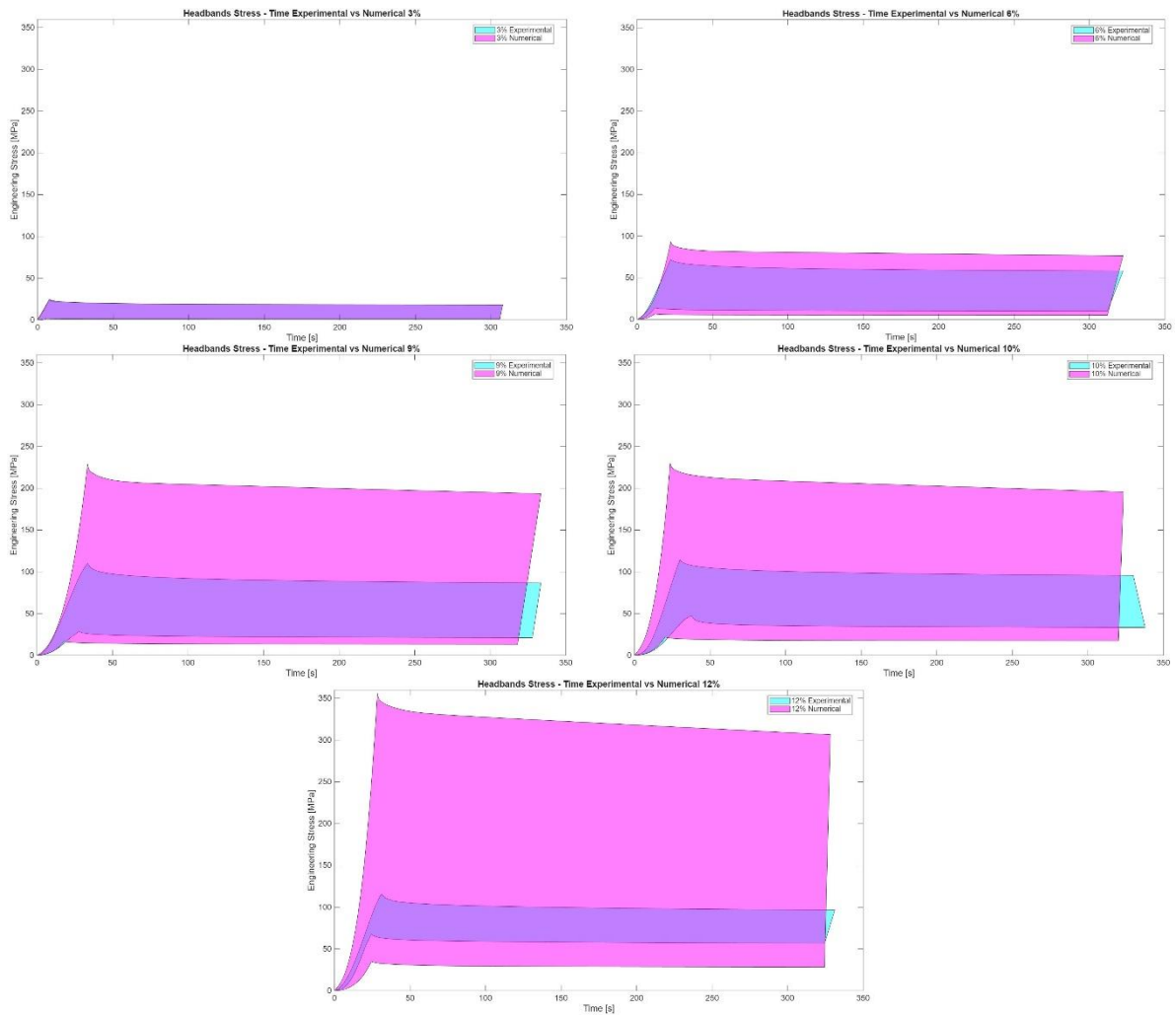


Figura 57: Bande per i diversi livelli di deformazione (3%, 6%, 9%, 10%, 12%) delle curve sperimentali (azzurro) e numeriche (magenta), ottenute dai provini SDFT piccoli sottoposti alle prove di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati.

Osservando le bande che contengono i valori di carico numerici e sperimentali ottenuti per ogni provino (ottenute secondo le modalità descritte nel Paragrafo 5.2.1), è possibile confermare quanto appena visto: i risultati ottenuti applicando il modello viscoelastico alla formulazione iperelastica di Sopakayang-Holzapfel mostrano un comportamento meno regolare rispetto al modello viscoelastico di Carniel et al., con range di valori più ampio delle curve numeriche (magenta) rispetto quello delle curve sperimentali (azzurro), specialmente per l'ultimo livello di deformazione. La previsione delle curve è più incerta, con la curva numerica che può raggiungere valori di carico sia minori, anche per l'ultimo livello di deformazione, che molto maggiori di quelli ottenuti dai test in vitro.

5.3.2 Comparazione tra carichi sperimentali e numerici per prove di deformazione uniassiale con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo

Sono riportati in Figura 58,59 gli andamenti della curva di carico sperimentale (curva blu) e della curva di carico ottenuta dalla formulazione numerica di Sopakayang-Holzapfel (curva rossa), relativamente ai dati ottenuti dal Sample 22 (SDFT grande) e dal Sample 32 (SDFT piccolo).

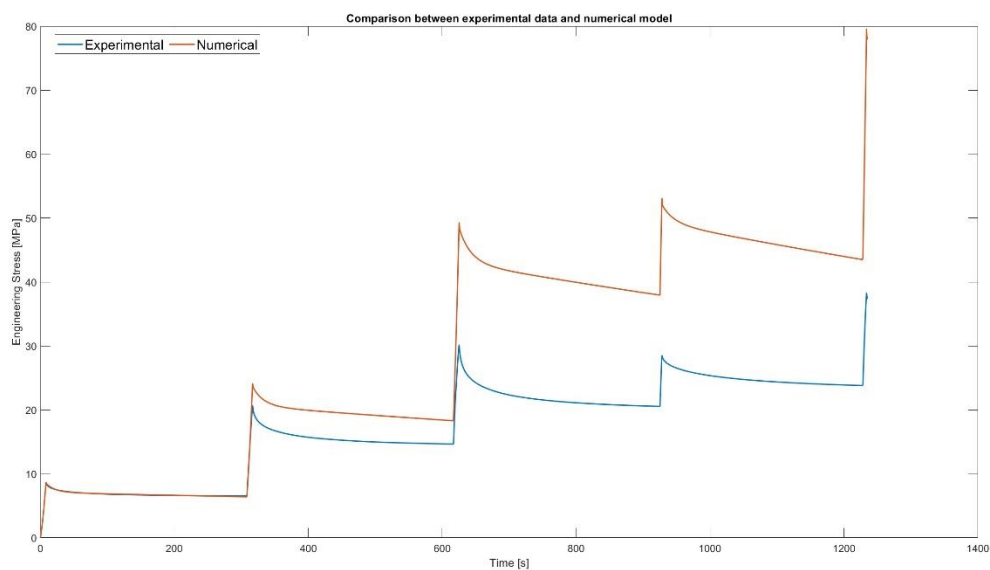


Figura 58: Curve stress-relaxation per test di trazione uniassiale con livelli di deformazione raggiunti in un ciclo unico, ottenute dal provino del 13/06/2024 (SDFT grande – Sample 22).

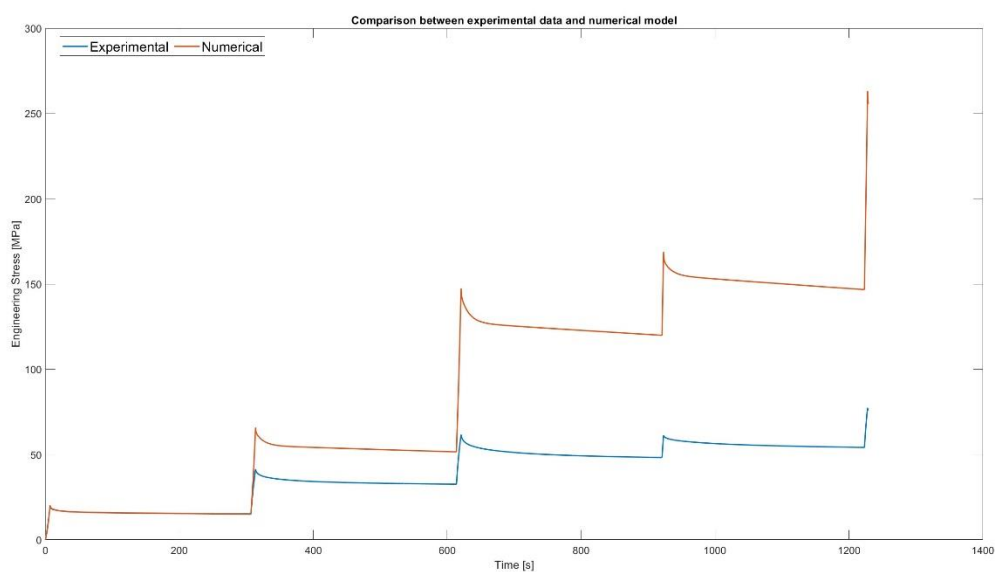


Figura 59: Curve stress-relaxation per test di trazione uniassiale con livelli di deformazione raggiunti in un ciclo unico, ottenute dal provino del 13/06/2024 (SDFT piccolo – Sample 32).

Per questa modalità di test si osserva generalmente, ma non sempre, una sovrastima dei carichi più marcata rispetto al modello precedente. La fase di rilassamento talvolta presenta, come in Figura 58, un andamento numerico con pendenza negativa fino alla fine dei 300 s di rilassamento, non raggiungendo il plateau di carico. Questo risultato era stato osservato nei risultati sperimentali, ma in maniera alquanto meno evidente, dunque potrebbe essere indice di un'ulteriore sovrastima dei processi viscosi, relativa ai processi di dissipazione più lenti.

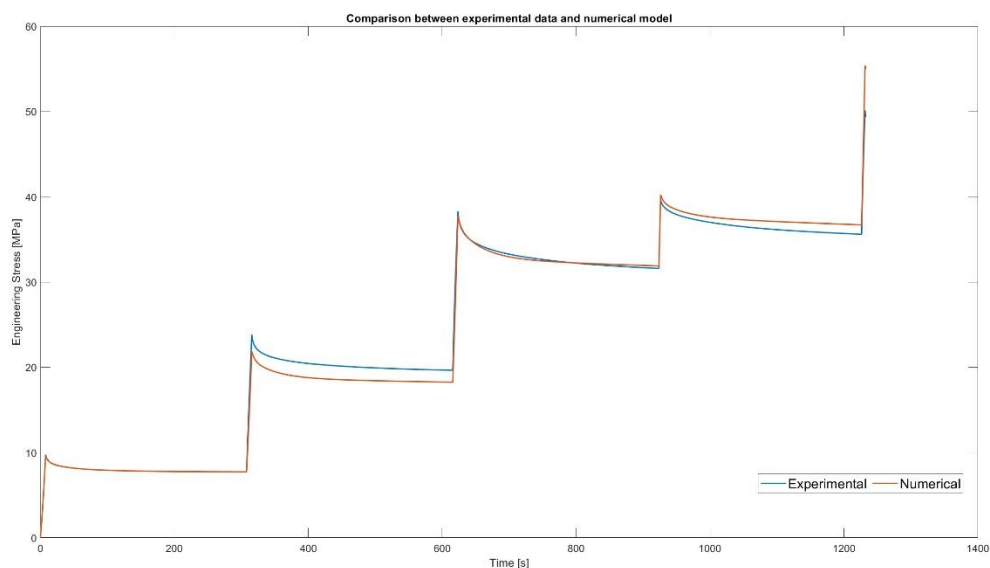


Figura 60: Curve stress-relaxation per test di trazione uniassiale con livelli di deformazione raggiunti in un ciclo unico, ottenute dal provino del 27/11/2024 (SDFT grande – Sample 31).

Bisogna specificare che non sempre si ottengono risultati insoddisfacenti. In Figura 60 si trovano andamenti delle curve sperimentale e numerica molto simili dal primo all'ultimo livello di deformazione, sia nel valore dei carichi ma anche da un punto di vista della forma assunta dalle curve nelle due fasi. Il decremento dei carichi della fase di rilassamento sembra essere ben replicato dal modello matematico anche nei livelli di deformazione successivi al primo, in un modo che non è stato osservato per il modello precedente. È possibile che l'inclusione del contributo di interazione fibre-matrice aiuti a catturare dei fenomeni interni non previsti dalla formulazione di Carniel, andando a colmare alcune lacune della formulazione iperelastica semplificata. C'è da dire che la maggior parte delle prove non presenta questa similitudine tra carichi sperimentali e numerici: è possibile che l'aumento del numero di parametri renda ancora più complessa la ricerca della combinazione ottimale di parametri che rappresentino i vari campioni; dunque, bisognerebbe approfondire la validità di questo modello proposto cercando di sviluppare metodi più potenti di ottimizzazione dei parametri costitutivi.

Riguardo le prove del 21/05/2024, non si riportano differenze significative nei risultati rispetto quanto ottenuto dagli altri test della stessa tipologia, se non una sovrastima lievemente maggiore dei risultati.

5.3.3 Comparazione tra carichi sperimentali e numerici per prove di shear semplice con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo

Sono riportati in Figura 61,62 gli andamenti della curva di carico sperimentale (curva blu) e della curva di carico ottenute dalla formulazione numerica di Sopakayang-Holzapfel (curva rossa) per due campioni sottoposti a test di shear semplice (SDFT grande - Sample 26; SDFT piccolo - Sample 38).

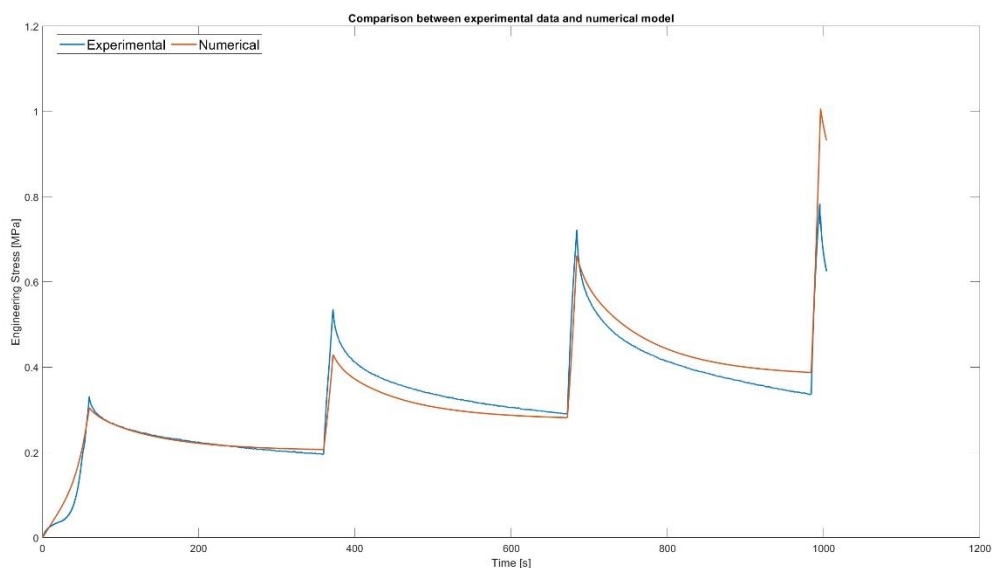


Figura 61: Curve stress-relaxation per test di shear semplice con livelli di deformazione raggiunti in un ciclo unico, ottenute dal provino del 13/11/2024 (SDFT grande – Sample 26).

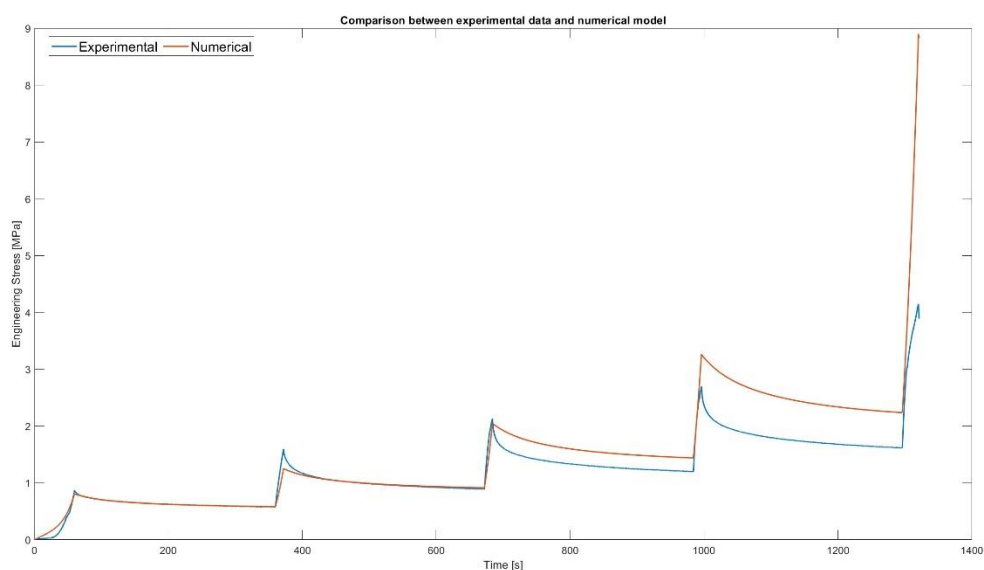


Figura 62: Curve stress-relaxation per test di shear semplice con livelli di deformazione raggiunti in un ciclo unico, ottenute dal provino del 13/11/2024 (SDFT piccolo – Sample 38).

Il maggiore contributo dissipativo osservato per questo secondo modello, rispetto al primo, permette di ottenere nel caso di test di shear semplice degli andamenti in generale più fedeli; ciò riguarda soprattutto la forma della curva nella fase di rilassamento e la pendenza negativa che questa mantiene, che indica il mancato raggiungimento della completa dissipazione viscosa.

5.3.4 Curve di carico raggruppate e valori dei parametri costitutivi e di R^2 per prove di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati

Si riportano di seguito in Figura 68,69 l'andamento delle singole curve, di ogni tipologia di campione e di test, ottenute dal modello matematico di Sopakayang-Holzapfel, assieme ai

relativi parametri con le quali sono state ricavate. La simbologia che associa le curve al campione testato è la stessa utilizzata in precedenza per mostrare i risultati sperimentali e numerici del modello precedente; pertanto, si faccia riferimento a quanto elencato in Tabella 7,9.

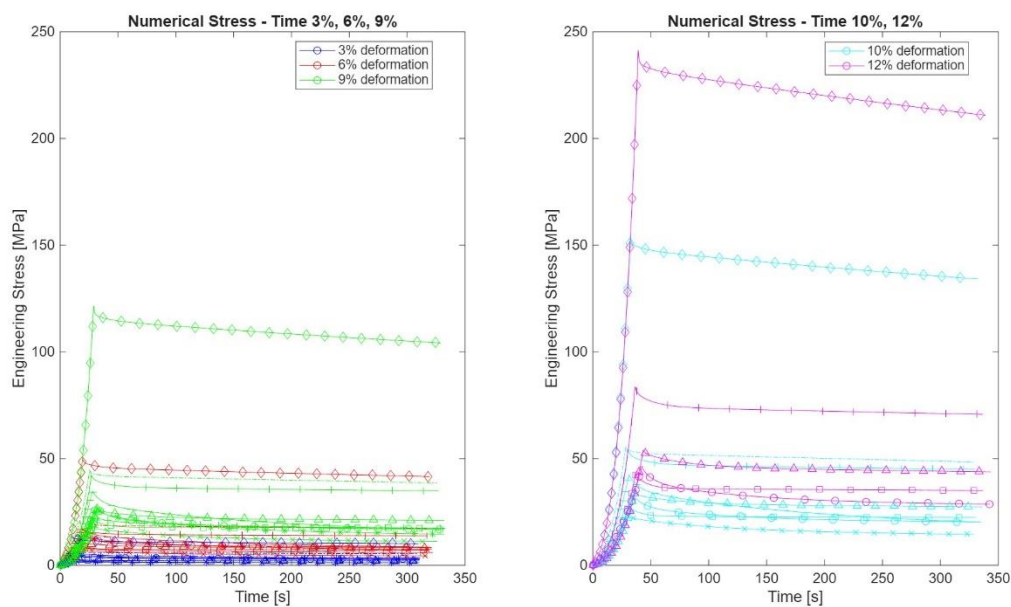


Figura 63: Andamento delle curve numeriche ottenute con il modello di Sopakayang-Holzapfel, per SDFT grandi con test di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati.

	Sample 1	Sample 2	Sample 3	Sample 4	Sample 5
μ	1,44	1,08	0,81	5,88	2,07
k	62,52	115,82	66,73	24,83	103,89
α	0,31	1,44	0,37	28,04	47,99
β	39,89	1,50	52,84	40,60	36,03
γ^1_{matrix}	0,088	0,275	0,264	0,171	0,094
τ^1_{matrix}	0,058	0,081	0,071	0,045	0,067
γ^2_{matrix}	0,240	0,258	0,211	0,435	0,163
τ^2_{matrix}	2,789	5,354	8,400	0,516	4,937
γ^3_{matrix}	0,082	0,173	0,450	0,092	0,207
τ^3_{matrix}	58,26	10,26	90,83	10,02	10,17
γ^4_{matrix}	0,431	0,224	0,042	0,282	0,476
τ^4_{matrix}	1402,4	1140,2	3827,8	4378,9	2574,5
γ^1_{fiber}	0,091	0,046	0,047	0,238	0,123
τ^1_{fiber}	0,086	0,041	0,068	0,054	0,041
γ^2_{fiber}	0,179	0,259	0,287	0,190	0,257
τ^2_{fiber}	1,931	1,343	5,144	9,138	8,402
γ^3_{fiber}	0,341	0,079	0,256	0,249	0,273
τ^3_{fiber}	10,07	10,25	94,48	52,67	26,73
γ^4_{fiber}	0,032	0,188	0,151	0,247	0,280
τ^4_{fiber}	27791,6	1051,2	1250,9	2619,5	1968,6
$\gamma^1_{\text{fiber-matrix}}$	0,218	0,046	0,100	0,287	0,085
$\tau^1_{\text{fiber-matrix}}$	0,074	0,048	0,040	0,065	0,054
$\gamma^2_{\text{fiber-matrix}}$	0,257	0,036	0,247	0,264	0,139
$\tau^2_{\text{fiber-matrix}}$	1,121	1,862	2,917	0,503	2,011
$\gamma^3_{\text{fiber-matrix}}$	0,270	0,207	0,114	0,012	0,206
$\tau^3_{\text{fiber-matrix}}$	91,73	61,24	10,65	10,06	82,34
$\gamma^4_{\text{fiber-matrix}}$	0,083	0,186	0,057	0,348	0,186
$\tau^4_{\text{fiber-matrix}}$	1355,2	1069,8	1184,9	3060,0	1608,6

	Sample 6	Sample 7	Sample 8	Sample 9	Sample 10
μ	2,72	8,27	6,86	11,15	5,80
k	60,85	28,18	28,37	37,71	53,42
α	29,54	36,34	63,64	38,11	29,32
β	27,61	32,17	43,51	58,21	20,08
γ^1_{matrix}	0,191	0,120	0,152	0,192	0,258
τ^1_{matrix}	0,086	0,063	0,051	0,068	0,088
γ^2_{matrix}	0,134	0,040	0,194	0,419	0,202
τ^2_{matrix}	9,873	0,405	0,579	9,924	2,708
γ^3_{matrix}	0,149	0,231	0,016	0,082	0,172
τ^3_{matrix}	18,23	16,22	383,50	23,00	10,06
γ^4_{matrix}	0,511	0,113	0,365	0,243	0,200
τ^4_{matrix}	1675,5	2173,1	6783,3	4401,8	3668,7
γ^1_{fiber}	0,101	0,236	0,127	0,260	0,252
τ^1_{fiber}	0,052	0,067	0,065	0,037	0,048
γ^2_{fiber}	0,238	0,233	0,247	0,092	0,202
τ^2_{fiber}	9,107	8,184	9,126	6,731	8,446
γ^3_{fiber}	0,238	0,225	0,205	0,229	0,184
τ^3_{fiber}	37,13	33,84	33,28	64,21	55,45
γ^4_{fiber}	0,204	0,223	0,262	0,270	0,247
τ^4_{fiber}	1785,7	3405,0	2508,0	3013,2	3505,3
$\gamma^1_{\text{fiber-matrix}}$	0,270	0,234	0,131	0,381	0,150
$\tau^1_{\text{fiber-matrix}}$	0,065	0,013	0,047	0,026	0,076
$\gamma^2_{\text{fiber-matrix}}$	0,227	0,140	0,228	0,212	0,147
$\tau^2_{\text{fiber-matrix}}$	6,329	2,094	0,162	0,725	1,679
$\gamma^3_{\text{fiber-matrix}}$	0,258	0,076	0,167	0,035	0,095
$\tau^3_{\text{fiber-matrix}}$	155,38	16,41	10,07	539,41	36,38
$\gamma^4_{\text{fiber-matrix}}$	0,082	0,391	0,246	0,300	0,281
$\tau^4_{\text{fiber-matrix}}$	2545,2	4948,3	7588,0	4210,8	3564,5

Tabella 32: Parametri costitutivi del modello implementato da Sopakayang e Holzapfel, utilizzato sui test di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati, effettuati su SDFT grandi.

	Sample 1	Sample 2	Sample 3	Sample 4	Sample 5
$R^2_{3\% \text{ deformation}}$	0,9931	0,9995	0,9978	0,9972	0,9974
$R^2_{6\% \text{ deformation}}$	0,7605	0,1667	0,9356	0,8858	0,6408
$R^2_{9\% \text{ deformation}}$	0,9385	0,6577	0,9178	-0,6725	0,3374
$R^2_{10\% \text{ deformation}}$	0,8920	-	-	-2,0804	0,1865
$R^2_{12\% \text{ deformation}}$	0,9343	-	-	-	-
	Sample 6	Sample 7	Sample 8	Sample 9	Sample 10
$R^2_{3\% \text{ deformation}}$	0,9748	0,9984	0,9982	0,9996	0,9996
$R^2_{6\% \text{ deformation}}$	0,8932	0,6840	0,3262	0,9025	0,4049
$R^2_{9\% \text{ deformation}}$	0,8493	0,9304	0,5287	-0,7994	0,4219
$R^2_{10\% \text{ deformation}}$	0,5509	0,9831	0,5757	-1,8883	0,3519
$R^2_{12\% \text{ deformation}}$	-	0,6493	0,6301	-8,9597	0,4287

Tabella 33: Goodness of fit delle curve di carico ottenute utilizzando il modello implementato da Sopakayang e Holzapfel, utilizzato sui test di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati, effettuati su SDFT grandi.

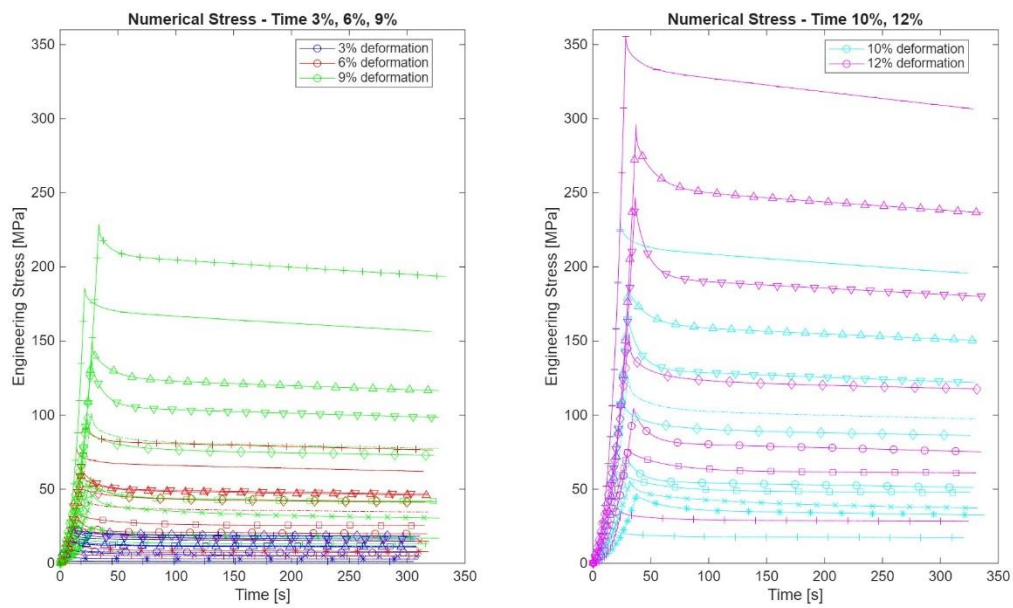


Figura 64: Andamento delle curve numeriche ottenute con il modello di Sopakayang-Holzapfel, per SDFT piccoli con test di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati.

	Sample 11	Sample 12	Sample 13	Sample 14	Sample 15	Sample 16
μ	10,89	14,41	4,11	17,24	2,59	15,15
k	26,37	50,42	37,62	34,40	73,25	32,25
α	39,25	23,28	18,26	33,20	0,30	35,99
β	31,61	31,01	11,46	23,76	126,48	53,80
γ^1_{matrix}	0,075	0,091	0,080	0,072	0,438	0,298
τ^1_{matrix}	0,077	0,089	0,075	0,023	0,078	0,086
γ^2_{matrix}	0,078	0,586	0,067	0,068	0,137	0,458
τ^2_{matrix}	1,022	2,020	1,615	0,359	9,535	1,824
γ^3_{matrix}	0,138	0,098	0,133	0,102	0,390	0,141
τ^3_{matrix}	10,08	10,04	10,14	19,17	106,23	14,88
γ^4_{matrix}	0,659	0,187	0,672	0,695	0,019	0,081
τ^4_{matrix}	8135,7	3836,3	2532,8	2534,6	3530,3	2881,2
γ^1_{fiber}	0,268	0,228	0,233	0,169	0,091	0,193
τ^1_{fiber}	0,030	0,046	0,050	0,036	0,089	0,047
γ^2_{fiber}	0,317	0,170	0,263	0,261	0,106	0,197
τ^2_{fiber}	6,017	8,930	5,964	2,999	7,305	8,442
γ^3_{fiber}	0,152	0,093	0,209	0,152	0,110	0,260
τ^3_{fiber}	44,75	43,35	32,09	27,99	91,90	47,19
γ^4_{fiber}	0,134	0,177	0,213	0,197	0,312	0,166
τ^4_{fiber}	10663,0	2494,7	2111,6	2115,0	3427,1	2434,2
$\gamma^1_{\text{fiber-matrix}}$	0,290	0,047	0,155	0,293	0,036	0,053
$\tau^1_{\text{fiber-matrix}}$	0,088	0,089	0,035	0,015	0,052	0,094
$\gamma^2_{\text{fiber-matrix}}$	0,151	0,365	0,488	0,283	0,381	0,199
$\tau^2_{\text{fiber-matrix}}$	0,635	0,500	0,373	1,886	3,051	0,559
$\gamma^3_{\text{fiber-matrix}}$	0,202	0,069	0,103	0,061	0,139	0,038
$\tau^3_{\text{fiber-matrix}}$	11,61	10,04	22,96	21,17	10,45	10,19
$\gamma^4_{\text{fiber-matrix}}$	0,216	0,433	0,135	0,222	0,213	0,611
$\tau^4_{\text{fiber-matrix}}$	2223,8	3729,6	2031,8	4506,5	2723,9	3141,6

	Sample 17	Sample 18	Sample 19	Sample 20	Sample 21
μ	4,36	5,74	16,79	12,88	16,69
k	68,55	32,61	29,75	34,00	22,98
α	10,84	48,65	38,69	20,38	61,86
β	30,73	0,00	42,61	30,56	154,06
γ^1_{matrix}	0,246	0,207	0,208	0,637	0,274
τ^1_{matrix}	0,015	0,035	0,091	0,078	0,054
γ^2_{matrix}	0,060	0,184	0,239	0,137	0,224
τ^2_{matrix}	0,283	3,186	2,312	4,968	0,330
γ^3_{matrix}	0,095	0,053	0,134	0,080	0,054
τ^3_{matrix}	10,03	63,44	19,03	37,31	21,45
γ^4_{matrix}	0,191	0,083	0,401	0,096	0,428
τ^4_{matrix}	2015,8	3973,7	3711,7	4458,5	3649,7
γ^1_{fiber}	0,216	0,472	0,164	0,139	0,230
τ^1_{fiber}	0,070	0,068	0,092	0,027	0,054
γ^2_{fiber}	0,229	0,082	0,237	0,272	0,248
τ^2_{fiber}	8,731	3,044	9,180	3,449	9,094
γ^3_{fiber}	0,254	0,104	0,284	0,220	0,260
τ^3_{fiber}	32,11	34,05	46,51	30,59	47,53
γ^4_{fiber}	0,187	0,075	0,184	0,202	0,140
τ^4_{fiber}	3724,0	3528,6	1932,7	1294,0	7773,3
$\gamma^1_{\text{fiber-matrix}}$	0,475	0,167	0,094	0,720	0,232
$\tau^1_{\text{fiber-matrix}}$	0,006	0,013	0,065	0,027	0,044
$\gamma^2_{\text{fiber-matrix}}$	0,076	0,423	0,070	0,127	0,440
$\tau^2_{\text{fiber-matrix}}$	2,616	4,260	2,045	0,465	0,252
$\gamma^3_{\text{fiber-matrix}}$	0,049	0,163	0,182	0,026	0,125
$\tau^3_{\text{fiber-matrix}}$	28,75	28,69	716,44	15,05	10,02
$\gamma^4_{\text{fiber-matrix}}$	0,106	0,073	0,464	0,105	0,155
$\tau^4_{\text{fiber-matrix}}$	3377,2	4413,2	2661,2	3947,7	3850,4

Tabella 34: Parametri costitutivi del modello implementato da Sopakayang e Holzapfel, utilizzato sui test di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati, effettuati su SDFT piccoli.

	Sample 11	Sample 12	Sample 13	Sample 14	Sample 15	Sample 16
$R^2_{3\% \text{ deformation}}$	0,9984	0,9960	0,9991	0,9986	0,9987	0,9837
$R^2_{6\% \text{ deformation}}$	0,7814	0,4121	0,6809	0,7351	0,8525	0,3521
$R^2_{9\% \text{ deformation}}$	0,9879	-5,8383	0,8579	0,9527	0,9491	-3,5463
$R^2_{10\% \text{ deformation}}$	0,9828	-	0,9394	0,9929	0,9330	-6,0546
$R^2_{12\% \text{ deformation}}$	0,8546	-	-	-	-	-16,9244
	Sample 17	Sample 18	Sample 19	Sample 20	Sample 21	
$R^2_{3\% \text{ deformation}}$	0,9989	0,9955	0,9994	0,9982	0,9997	
$R^2_{6\% \text{ deformation}}$	-0,5951	0,7660	0,9738	0,9403	0,9889	
$R^2_{9\% \text{ deformation}}$	-0,4602	0,9376	0,2607	-0,8694	0,3359	
$R^2_{10\% \text{ deformation}}$	-0,3788	0,9625	-0,6427	-2,6475	-0,8796	
$R^2_{12\% \text{ deformation}}$	-0,0114	0,9546	-4,5193	-15,5237	-6,8025	

Tabella 35: Goodness of fit delle curve di carico ottenute utilizzando il modello implementato da Sopakayang e Holzapfel, utilizzato sui test di trazione uniassiale con livelli di deformazione separati, effettuati su SDFT piccoli.

Data la variabilità maggiore mostrata dagli andamenti delle curve numeriche, si ottiene di conseguenza un insieme di parametri iperelastici che manifestano una variabilità maggiore di quanto visto nel precedente modello. Infatti, sebbene i quattro parametri μ , k , α , β abbiano un significato diverso da quello dei parametri iperelastici della formulazione di Carniel, entrambi descrivono la risposta iperelastica del materiale, e in particolare i primi due sono coefficienti moltiplicativi della risposta delle componenti di matrice e fibre, presentando la stessa unità di misura di C_1 e C_4 ; i valori assunti infatti oscillano attorno alla decina di MPa proprio come i precedenti, con una variabilità lievemente superiore.

Lo stesso si può osservare dai valori di R^2 , i quali assumono talvolta valori di previsione alti e talvolta valori bassi per i livelli di deformazione successivi al primo.

5.3.5 Curve di carico raggruppate e valori dei parametri costitutivi e di R^2 per prove di trazione uniassiale con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo

In Figura 70,71 sono riportati gli andamenti, raggruppati per SDFT grande e SDFT piccolo, delle curve di carico ottenute dalla formulazione numerica di Sopakayang-Holzapfel per i test di trazione uniassiale con livelli di deformazione raggiunti in un'unica prova; per tali curve si fa riferimento alla simbologia in Tabella 11,13.

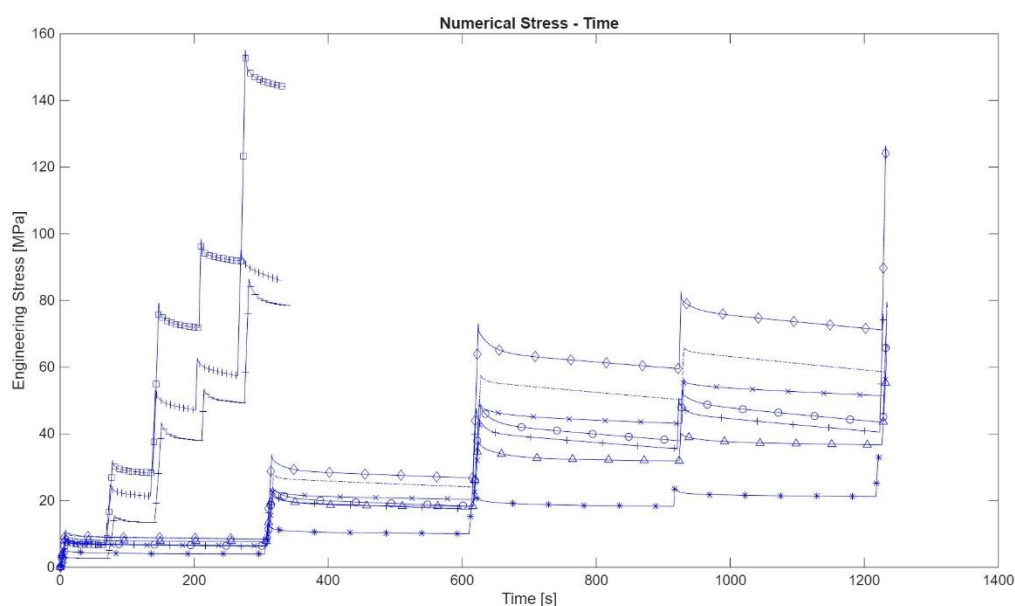


Figura 65: Andamento delle curve numeriche ottenute con il modello di Sopakayang-Holzapfel, per SDFT grandi con test di trazione uniassiale con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo.

	Sample 22	Sample 23	Sample 24	Sample 25	Sample 26
μ	4,09	4,60	1,04	6,84	3,31
k	39,02	40,11	44,31	34,80	42,76
α	24,28	37,28	0,19	32,28	0,21
β	22,51	19,52	18,95	28,28	27,70
γ^1_{matrix}	0,270	0,408	0,166	0,299	0,155
τ^1_{matrix}	0,044	0,094	0,027	0,092	0,039
γ^2_{matrix}	0,049	0,025	0,183	0,121	0,113
τ^2_{matrix}	0,151	1,057	4,627	5,895	1,511
γ^3_{matrix}	0,145	0,092	0,096	0,063	0,071
τ^3_{matrix}	10,12	17,29	10,79	625,76	46,95
γ^4_{matrix}	0,520	0,460	0,111	0,495	0,142
τ^4_{matrix}	4017,7	3308,6	1041,1	4633,9	3107,7
γ^1_{fiber}	0,214	0,178	0,059	0,255	0,292
τ^1_{fiber}	0,041	0,068	0,023	0,056	0,061
γ^2_{fiber}	0,240	0,174	0,033	0,173	0,109
τ^2_{fiber}	9,143	7,538	4,006	8,995	1,062
γ^3_{fiber}	0,170	0,206	0,128	0,257	0,084
τ^3_{fiber}	28,88	37,95	67,36	759,07	13,99
γ^4_{fiber}	0,200	0,317	0,047	0,201	0,128
τ^4_{fiber}	1206,1	3076,8	1132,8	2570,5	4755,0
$\gamma^1_{\text{fiber-matrix}}$	0,128	0,230	0,125	0,070	0,127
$\tau^1_{\text{fiber-matrix}}$	0,074	0,078	0,059	0,015	0,061
$\gamma^2_{\text{fiber-matrix}}$	0,293	0,169	0,330	0,040	0,161
$\tau^2_{\text{fiber-matrix}}$	0,369	0,583	3,941	3,834	1,083
$\gamma^3_{\text{fiber-matrix}}$	0,116	0,153	0,258	0,032	0,062
$\tau^3_{\text{fiber-matrix}}$	19,19	10,13	10,10	10,12	44,59
$\gamma^4_{\text{fiber-matrix}}$	0,363	0,329	0,143	0,645	0,546
$\tau^4_{\text{fiber-matrix}}$	1744,8	1630,4	1050,2	2310,4	3387,6

	Sample 27	Sample 28	Sample 29	Sample 30	Sample 31
μ	3,24	5,27	6,37	5,89	2,66
k	34,30	33,45	32,87	40,92	41,52
α	1,83	28,28	35,87	49,38	0,08
β	0,43	23,11	14,36	30,34	15,26
γ^1_{matrix}	0,072	0,658	0,278	0,110	0,185
τ^1_{matrix}	0,081	0,011	0,047	0,081	0,011
γ^2_{matrix}	0,102	0,192	0,138	0,303	0,071
τ^2_{matrix}	2,079	0,478	0,151	0,690	0,327
γ^3_{matrix}	0,039	0,032	0,240	0,100	0,456
τ^3_{matrix}	10,13	10,14	15,61	10,03	46,72
γ^4_{matrix}	0,633	0,113	0,222	0,467	0,047
τ^4_{matrix}	1810,5	3262,2	2460,4	3543,0	3701,6
γ^1_{fiber}	0,090	0,162	0,227	0,323	0,080
τ^1_{fiber}	0,035	0,064	0,048	0,056	0,024
γ^2_{fiber}	0,056	0,281	0,214	0,178	0,141
τ^2_{fiber}	1,511	8,570	6,783	8,590	4,997
γ^3_{fiber}	0,190	0,125	0,246	0,252	0,037
τ^3_{fiber}	10,03	29,91	36,06	99,29	36,70
γ^4_{fiber}	0,389	0,232	0,233	0,106	0,193
τ^4_{fiber}	2284,6	1932,8	5806,5	10647,6	3978,5
$\gamma^1_{\text{fiber-matrix}}$	0,151	0,346	0,047	0,148	0,054
$\tau^1_{\text{fiber-matrix}}$	0,080	0,063	0,035	0,061	0,032
$\gamma^2_{\text{fiber-matrix}}$	0,232	0,088	0,249	0,391	0,098
$\tau^2_{\text{fiber-matrix}}$	1,248	5,306	1,345	0,283	2,125
$\gamma^3_{\text{fiber-matrix}}$	0,012	0,145	0,053	0,075	0,426
$\tau^3_{\text{fiber-matrix}}$	90,59	335,01	14,23	19,59	37,08
$\gamma^4_{\text{fiber-matrix}}$	0,364	0,303	0,562	0,308	0,216
$\tau^4_{\text{fiber-matrix}}$	1091,2	2335,0	3939,1	3275,2	2498,6

Tabella 36: Parametri costitutivi del modello implementato da Sopakayang e Holzapfel, utilizzato sui test di trazione uniassiale con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo, effettuati su SDFT grandi.

	Sample 22	Sample 23	Sample 24	Sample 25	Sample 26
$R^2_{3\% \text{ deformation}}$	0,9990	0,9983	0,9994	0,9982	0,9999
$R^2_{\text{total deformation}}$	-2,1701	-0,3730	0,9368	-0,2726	-0,1222
$R^2_{6\% \text{ deformation}}$	-1,0096	-0,3910	0,3777	0,3520	0,6039
$R^2_{9\% \text{ deformation}}$	-20,1679	-12,1294	0,5834	-15,7748	-11,4280
$R^2_{10\% \text{ deformation}}$	-11,0581	-13,2719	-0,5502	-29,5437	-16,4837
$R^2_{12\% \text{ deformation}}$	-8,0984	-11,6878	0,9255	-7,4307	-2,8689
	Sample 27	Sample 28	Sample 29	Sample 30	Sample 31
$R^2_{3\% \text{ deformation}}$	0,9998	0,9990	0,9998	0,9987	0,9994
$R^2_{\text{total deformation}}$	-1,8264	-4,3795	-12,2911	-3,8457	0,9887
$R^2_{6\% \text{ deformation}}$	0,9793	-2,2881	-2,8211	-3,5661	0,7530
$R^2_{9\% \text{ deformation}}$	-7,8018	-33,5341	-62,5865	-49,5226	0,8525
$R^2_{10\% \text{ deformation}}$	-27,1712	-34,7669	-105,8415	-90,0585	0,7815
$R^2_{12\% \text{ deformation}}$	-43,0199	-87,0668	-168,3809	-24,4854	0,6979

Tabella 37: Goodness of fit delle curve di carico ottenute utilizzando il modello implementato da Sopakayang e Holzapfel, utilizzato sui test di trazione uniassiale con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo, effettuati su SDFT grandi.

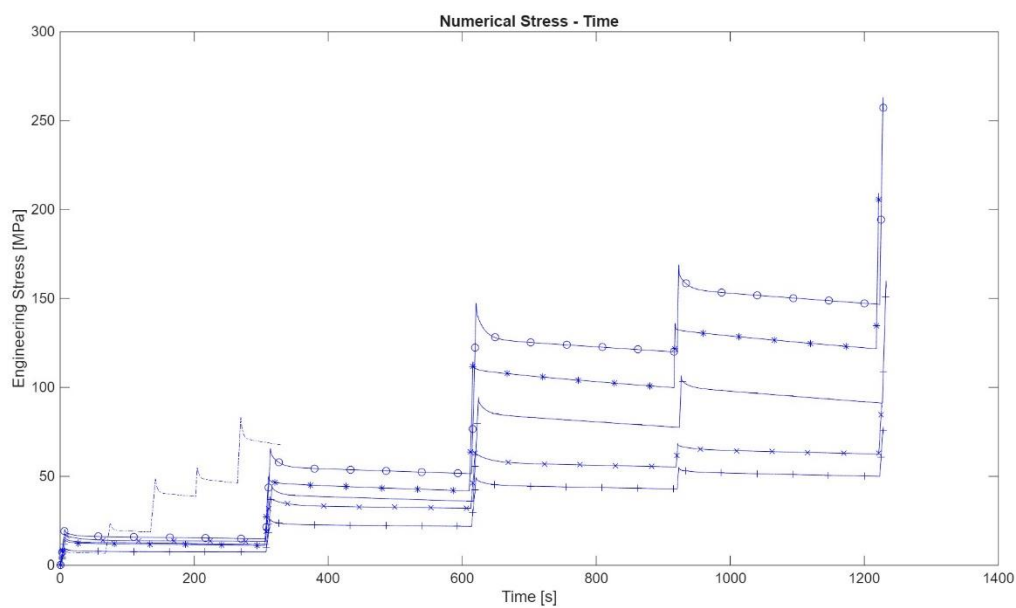


Figura 66: Andamento delle curve numeriche ottenute con il modello di Sopakayang-Holzapfel, per SDFT piccoli con test di trazione uniassiale con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo.

	Sample 32	Sample 33	Sample 34	Sample 35	Sample 36	Sample 37
μ	8,54	2,88	7,38	7,68	0,38	9,39
k	45,48	33,72	45,83	32,41	87,36	27,42
α	36,62	0,34	51,46	27,03	0,15	45,35
β	31,99	0,36	40,15	37,11	7,46	42,18
γ^1_{matrix}	0,108	0,042	0,219	0,076	0,181	0,097
τ^1_{matrix}	0,095	0,070	0,085	0,036	0,022	0,047
γ^2_{matrix}	0,319	0,127	0,352	0,095	0,338	0,082
τ^2_{matrix}	1,312	1,448	4,032	0,193	1,375	0,482
γ^3_{matrix}	0,089	0,225	0,074	0,050	0,069	0,129
τ^3_{matrix}	437,55	17,73	29,83	15,96	10,56	10,26
γ^4_{matrix}	0,463	0,077	0,332	0,737	0,215	0,663
τ^4_{matrix}	3316,3	1713,4	4027,3	3143,1	1776,6	3243,8
γ^1_{fiber}	0,208	0,060	0,157	0,117	0,032	0,208
τ^1_{fiber}	0,057	0,085	0,052	0,036	0,028	0,074
γ^2_{fiber}	0,232	0,301	0,232	0,144	0,428	0,243
τ^2_{fiber}	9,114	1,075	8,460	9,050	0,286	7,346
γ^3_{fiber}	0,179	0,106	0,306	0,337	0,104	0,264
τ^3_{fiber}	53,41	13,39	64,43	78,23	21,23	67,97
γ^4_{fiber}	0,270	0,099	0,200	0,217	0,143	0,210
τ^4_{fiber}	5003,0	1632,3	2591,9	4167,4	2029,9	4346,4
$\gamma^1_{\text{fiber-matrix}}$	0,070	0,023	0,301	0,109	0,578	0,162
$\tau^1_{\text{fiber-matrix}}$	0,089	0,048	0,016	0,017	0,027	0,044
$\gamma^2_{\text{fiber-matrix}}$	0,303	0,049	0,313	0,433	0,073	0,350
$\tau^2_{\text{fiber-matrix}}$	0,445	0,721	0,161	2,700	1,351	0,316
$\gamma^3_{\text{fiber-matrix}}$	0,133	0,092	0,047	0,170	0,017	0,076
$\tau^3_{\text{fiber-matrix}}$	11,75	18,30	512,00	384,41	10,32	10,62
$\gamma^4_{\text{fiber-matrix}}$	0,415	0,756	0,282	0,123	0,191	0,342
$\tau^4_{\text{fiber-matrix}}$	5521,7	3628,5	5567,1	2696,1	2373,5	2717,5

Tabella 38: Parametri costitutivi del modello implementato da Sopakayang e Holzapfel, utilizzato sui test di trazione uniassiale con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo, effettuati su SDFT piccoli.

	Sample 32	Sample 33	Sample 34	Sample 35	Sample 36	Sample 37
$R^2_{3\% \text{ deformation}}$	0,9947	0,9991	0,9978	0,9993	0,9995	0,9992
$R^2_{\text{total deformation}}$	-12,4271	0,1570	-9,3421	0,7963	0,4508	-4,5754
$R^2_{6\% \text{ deformation}}$	-15,2016	0,5419	-13,6174	0,7246	0,5273	-3,8891
$R^2_{9\% \text{ deformation}}$	-110,4020	-10,6049	-118,1146	-0,8258	-2,8065	-44,1143
$R^2_{10\% \text{ deformation}}$	-165,1917	-2,8778	-146,2883	-0,4714	-0,6927	-42,2347
$R^2_{12\% \text{ deformation}}$	-71,5421	-0,1756	-57,6035	-15,4085	0,7545	-23,9797

Tabella 39: Goodness of fit delle curve di carico ottenute utilizzando il modello implementato da Sopakayang e Holzapfel, utilizzato sui test di trazione uniassiale con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo, effettuati su SDFT piccoli.

Per la seconda tipologia di test si osservano generalmente previsioni che si discostano maggiormente dalla curva reale, rispetto a quanto ottenuto dal primo modello, con valori di R^2 generalmente peggiori per i singoli livelli successivi al primo e per la deformazione totale

applicata nel test; si noti che i valori di R^2 del primo livello risultano invece particolarmente ottimali, con uno scostamento dal valore ideale spesso inferiore di 1%, quindi il riuscire a emulare in maniera perfetta la risposta dei carichi sotto una deformazione più bassa non si traduce nel prevedere al meglio la risposta a maggiori deformazioni. La ricerca del miglior modello di previsione dei risultati deve partire da una formulazione che comprenda quanto più i fenomeni cui è sottoposto il tessuto biologico per generici stati di deformazione; soltanto così, la ricerca dei parametri ottimali potrà rappresentare uno strumento di previsione della risposta di tale tessuto.

5.3.6 Curve di carico raggruppate e valori dei parametri costitutivi e di R^2 per prove di trazione uniassiale con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo

In Figura 72,73 sono riportati gli andamenti, raggruppati per SDFT grande e SDFT piccolo, delle curve di carico ottenute dalla formulazione numerica di Sopakayang-Holzapfel per i test di shear semplice con livelli di deformazione raggiunti in un'unica prova; per tali curve si fa riferimento alla simbologia in Tabella 15,17.

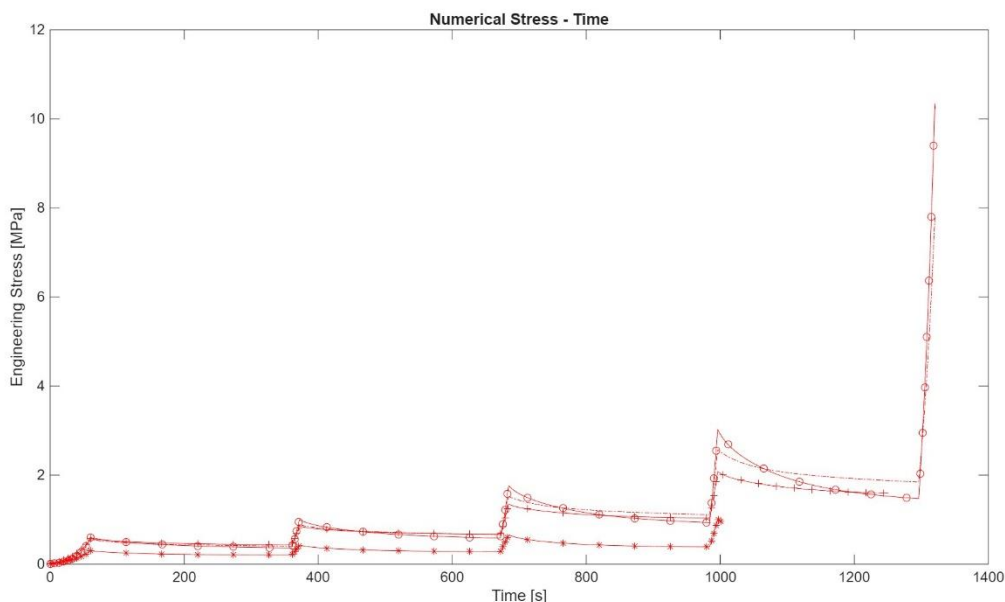


Figura 67: Andamento delle curve numeriche ottenute con il modello di Sopakayang-Holzapfel, per SDFT grandi con test di shear semplice con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo.

	Sample 30	Sample 25	Sample 26	Sample 31
μ	0,26	1,34	0,85	0,31
k	0,26	13,38	6,27	0,31
α	0,09	0,44	0,51	0,26
β	246,56	1,20	3,30	30,72
γ^1_{matrix}	0,018	0,019	0,045	0,071
τ^1_{matrix}	0,058	0,076	0,030	0,003
γ^2_{matrix}	0,044	0,037	0,025	0,052
τ^2_{matrix}	0,158	0,229	0,178	0,150
γ^3_{matrix}	0,011	0,020	0,018	0,019
τ^3_{matrix}	114,41	10,07	10,15	10,12
γ^4_{matrix}	0,024	0,026	0,017	0,106
τ^4_{matrix}	1011,8	3646,8	1132,3	1171,1
γ^1_{fiber}	0,033	0,065	0,183	0,154
τ^1_{fiber}	0,011	0,072	0,013	0,020
γ^2_{fiber}	0,033	0,084	0,133	0,111
τ^2_{fiber}	0,175	9,913	0,118	0,168
γ^3_{fiber}	0,017	0,391	0,342	0,223
τ^3_{fiber}	13,87	93,48	82,77	93,99
γ^4_{fiber}	0,606	0,067	0,050	0,271
τ^4_{fiber}	1076,9	3800,5	3712,7	1108,4
$\gamma^1_{\text{fiber-matrix}}$	0,140	0,204	0,203	0,103
$\tau^1_{\text{fiber-matrix}}$	0,057	0,019	0,063	0,027
$\gamma^2_{\text{fiber-matrix}}$	0,138	0,099	0,191	0,158
$\tau^2_{\text{fiber-matrix}}$	9,986	9,803	9,791	0,171
$\gamma^3_{\text{fiber-matrix}}$	0,680	0,307	0,537	0,371
$\tau^3_{\text{fiber-matrix}}$	89,54	96,34	83,20	36,19
$\gamma^4_{\text{fiber-matrix}}$	0,022	0,295	0,035	0,266
$\tau^4_{\text{fiber-matrix}}$	5365,7	2917,0	1045,1	1591,8

Tabella 40: Parametri costitutivi del modello implementato da Sopakayang e Holzapfel, utilizzato sui test di shear semplice con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo, effettuati su SDFT grandi.

	Sample 30	Sample 25	Sample 26	Sample 31
$R^2_{10 \text{ mm}}$	0,9695	0,9469	0,9204	0,9266
$R^2_{\text{total deformation}}$	-15,5133	0,6131	0,8188	-7,8118
$R^2_{12 \text{ mm}}$	0,6245	0,4351	0,3097	0,4932
$R^2_{14 \text{ mm}}$	-1,9513	0,4417	0,7563	-0,8533
$R^2_{16 \text{ mm}}$	-10,8382	-3,3419	-1,2611	-6,8608
$R^2_{20 \text{ mm}}$	-134,1639	-	-	-245,9890

Tabella 41: Goodness of fit delle curve di carico ottenute utilizzando il modello implementato da Sopakayang e Holzapfel, utilizzato sui test di shear semplice con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo, effettuati su SDFT grandi.

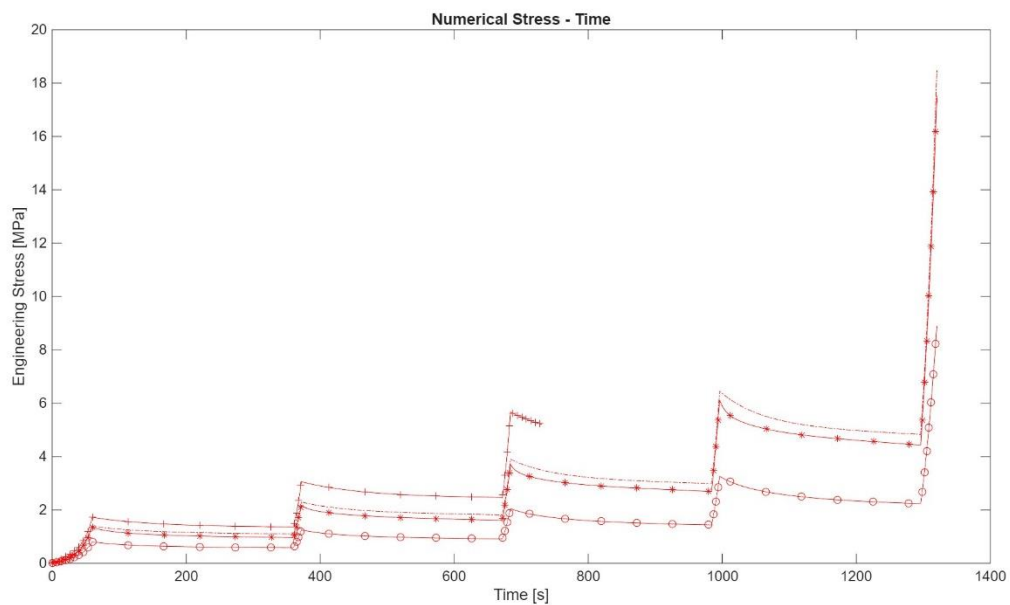


Figura 68: Andamento delle curve numeriche ottenute con il modello di Sopakayang-Holzapfel, per SDFT piccoli con test di shear semplice con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo.

	Sample 38	Sample 39	Sample 36	Sample 37
μ	1,71	3,60	0,52	0,81
k	25,26	178,43	0,52	0,99
α	0,53	19,60	0,10	0,24
β	1,66	23,60	44,22	2,01
γ^1_{matrix}	0,030	0,055	0,048	0,042
τ^1_{matrix}	0,047	0,040	0,035	0,030
γ^2_{matrix}	0,053	0,034	0,079	0,092
τ^2_{matrix}	0,257	0,179	0,313	0,124
γ^3_{matrix}	0,020	0,017	0,017	0,021
τ^3_{matrix}	10,21	10,17	10,21	10,17
γ^4_{matrix}	0,012	0,016	0,072	0,070
τ^4_{matrix}	2185,0	3825,1	1010,0	1140,8
γ^1_{fiber}	0,231	0,148	0,159	0,018
τ^1_{fiber}	0,039	0,074	0,018	0,023
γ^2_{fiber}	0,166	0,237	0,015	0,121
τ^2_{fiber}	0,159	7,498	4,702	0,127
γ^3_{fiber}	0,209	0,195	0,255	0,076
τ^3_{fiber}	29,45	24,74	51,51	591,98
γ^4_{fiber}	0,138	0,202	0,323	0,310
τ^4_{fiber}	1373,1	2014,4	1000,4	1174,3
$\gamma^1_{\text{fiber-matrix}}$	0,063	0,315	0,387	0,030
$\tau^1_{\text{fiber-matrix}}$	0,035	0,016	0,094	0,058
$\gamma^2_{\text{fiber-matrix}}$	0,046	0,182	0,172	0,196
$\tau^2_{\text{fiber-matrix}}$	0,252	0,132	6,166	0,183
$\gamma^3_{\text{fiber-matrix}}$	0,650	0,193	0,176	0,598
$\tau^3_{\text{fiber-matrix}}$	111,90	94,25	10,11	60,94
$\gamma^4_{\text{fiber-matrix}}$	0,103	0,032	0,141	0,039
$\tau^4_{\text{fiber-matrix}}$	1457,4	1878,3	1000,2	2267,5

Tabella 42: Parametri costitutivi del modello implementato da Sopakayang e Holzapfel, utilizzato sui test di shear semplice con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo, effettuati su SDFT piccoli.

	Sample 30	Sample 25	Sample 26	Sample 31
$R^2_{10 \text{ mm}}$	0,9375	0,9308	0,9900	0,9614
$R^2_{\text{total deformation}}$	0,0539	0,5413	-2,5178	-0,6516
$R^2_{12 \text{ mm}}$	0,3766	0,4253	0,5489	0,6035
$R^2_{14 \text{ mm}}$	0,3161	-15,4710	-1,4123	-0,5787
$R^2_{16 \text{ mm}}$	-0,4208	-	-6,9470	-2,7245
$R^2_{20 \text{ mm}}$	-8,9474	-	-24,3823	-15,0630

Tabella 43: Goodness of fit delle curve di carico ottenute utilizzando il modello implementato da Sopakayang e Holzapfel, utilizzato sui test di shear semplice con livelli di deformazione raggiunti in un unico ciclo, effettuati su SDFT piccoli.

Anche con questo secondo modello utilizzato si sono ottenuti dei parametri iperelastici inferiori rispetto ai test con deformazione uniassiale, poiché nonostante i valori di deformazione cui sono sottoposti i parametri siano comparabili, i valori di carico sperimentale risultano essere notevolmente inferiori. I risultati ottenuti mostrano come prima valori più bassi di R^2 rispetto ai test con deformazione uniassiale. Le motivazioni risiedono probabilmente su quanto già detto

in precedenza riguardo una formulazione viscoelastica non esaustiva di tutti i processi interni del materiale; sebbene questo secondo modello cerchi di catturare le interazioni delle fibre con la matrice quando presentano un pattern crimpato, probabilmente è necessario migliorare la formulazione sia iperelastica, ad esempio includendo il termine dipendente dall'invariante I_5 , sia quella viscoelastica, andando a studiare la dipendenza effettiva che i fenomeni viscosi mostrano nei confronti dei carichi e delle deformazioni cui il tendine è soggetto.

6 Conclusioni e sviluppi futuri

Questo lavoro di tesi vuole proporre un metodo di valutazione analitica della risposta sperimentale di tendini in vitro sottoposti a generici stati di deformazione. Dopo aver fatto una panoramica generale sulla struttura anatomica tendinea, con particolare attenzione prestata alla complessa composizione interna, è stato affrontato lo sviluppo delle formulazioni teoriche più generali della meccanica del continuo a grandi deformazioni, strumento potente per la modellizzazione del comportamento dei materiali; si è focalizzata l'applicazione sui tendini, mediante delle formulazioni che presentino caratteristiche attribuibili al comportamento di tessuti biologici, come il comportamento incompressibile, tipico di tessuti con un'importante percentuale acquosa, o l'azione combinata di una componente isotropa e di una direzionale, come quella di tessuti con un'alta composizione fibrosa immersa nella IFM.

È stata fatta la valutazione di due modelli iperelastici, il primo dei quali presenta anche una formulazione viscosa che introduce la dipendenza dal tempo. Questo primo modello è stato implementato e generalizzato per l'applicazione a generici stati di deformazione; si è dunque applicato con una deformazione diversa da quella per cui è stato implementato, mostrando i punti di forza e i limiti di tale approccio. In particolare, lo sviluppo numerico della teoria di viscoelasticità permette di riprodurre il comportamento di tessuti biologici, i quali sono caratterizzati da fenomeni non ideali come dissipazione viscosa e isteresi; tuttavia, la formulazione lineare utilizzata non consente di prevedere alla perfezione la risposta di tensione che lo stesso campione presenta per valori di deformazione maggiori, mostrando come i fenomeni interni che dissipano energia abbiano una dipendenza più complessa dallo stato di deformazione cui sono sottoposti.

L'approccio viscoelastico è stato applicato anche a un secondo modello che presenta una formulazione iperelastica più elaborata, che cerca di includere il contributo delle fibre quando presentano un pattern ondulado, prima di raggiungere un valore di allungamento che le stiri completamente. Questo comportamento iniziale è stato modellizzato come un comportamento di interazione mista tra fibre e matrice, che con l'aumentare dell'allungamento passa a un comportamento puramente fibroso mediante una legge probabilistica. L'applicazione della formulazione viscosa a tale modello iperelastico ha mostrato ulteriormente la generalità del metodo viscoelastico, mostrando come la ricerca di una formulazione ottimale, che includa il più possibile i fenomeni cui è sottoposto il tendine nelle condizioni omeostatiche, possa essere potenziata dall'inclusione di processi dissipativi e utilizzata per cercare di prevedere la risposta tendinea.

I modelli viscoelastici utilizzati presentano un numero di 20 e di 28 parametri costitutivi, rispettivamente. Sebbene la combinazione di parametri ottenuti ricostruisca un andamento verosimile, soprattutto per quanto riguarda i valori di deformazione utilizzati per la ricerca di tali parametri, è altamente probabile ricadere in punti di minimo locale che non costituiscano il vero ottimo che la formulazione matematica prevede. L'utilizzo di un semplice algoritmo di ricerca, basato sulla funzione R^2 , non rappresenta uno strumento abbastanza potente per ottenere la migliore combinazione di un numero così alto di incognite. Al fine di effettuare una ricerca più approfondita dei parametri costitutivi di un modello viscoelastico come quelli proposti, si suggerisce di implementare delle funzioni di ricerca in grado di esplorare maggiormente lo spazio di ricerca e convergere verso il minimo globale della funzione di carico, possibilmente con una maggiore concentrazione sulla ricerca ottimale dei parametri iperelastici,

i quali sono quelli che impattano maggiormente nella previsione a diversi valori di allungamento.

Un aspetto che può essere certamente migliorato riguarda l'acquisizione dei dati utilizzati sui campioni. Il fine di questo lavoro di tesi sulla valutazione dei modelli matematici è prevalentemente qualitativo, ma per ottenere dei risultati che diano delle stime concrete sui valori fisici che questi modelli cercano di riprodurre, è fondamentale ottimizzare i processi di misurazione dei campioni e di svolgimento dei test, a partire dal trattamento dei tendini sin dal momento di estrazione. Inoltre, una possibile ricostruzione della composizione interna del campione e una analisi dello storico del campione (età del cadavere e possibili danni per esempio) potrebbe aiutare allo sviluppo di modelli che includano ulteriori fenomeni di danneggiamento delle strutture interne. In particolare, si sa che la struttura interna del tendine è generalmente più ordinata nella regione mediale, mentre presenta una disposizione di fibre più disordinata nelle regioni di attacco al muscolo e alle ossa. Si potrebbe dunque pensare di discretizzare le tre regioni del tessuto in maniera combinata a una ricostruzione più accurata della geometria del campione, separando e facendo una ricerca parallela dei parametri costitutivi di ognuna delle tre regioni, poiché potrebbero contribuire in maniera diversa alla risposta cui è soggetto il tendine; la caratterizzazione di un sistema tra le varie porzioni, con carichi scambiati incogniti, potrebbe permettere la separazione della risposta nelle tre regioni differenti, al fine di cercare di identificare le zone maggiormente soggette alle sollecitazioni per diverse modalità di deformazioni.

Lo sguardo verso il futuro di questo lavoro mira a ottenere una coerenza di risultati, sia relativamente ad una formulazione matematica quanto più dettagliata nel caratterizzare tutti i fenomeni interni al tessuto tendineo, sia relativamente ad una maggiore meticolosità nelle metodologie di test e di ottenimento dei risultati. La possibilità di ottenere dei risultati altamente accurati su generici stati deformativi potrebbe permettere l'implementazione di sistemi di previsione, sulla base di informazioni generali come geometria e microcomposizione (possibilmente ottenibili in vivo con applicazioni non invasive), che potrebbero assistere l'analisi dei danni o la replicazione del funzionamento di tendini in pazienti infortunati che necessitano di terapia riabilitativa o di riparazioni/sostituzioni protesiche del componente biologico.

7 Bibliografia

- [1] Valeria Ida Valentini, “Adattamento del sistema T_REM3DIE al tendine flessore profondo dell’indice,” Politecnico di Torino, 2020.
- [2] Paola Scarlino, “Dispositivo medico per la riparazione tendinea: Analisi agli elementi finiti (FEA) del complesso Tendine d’Achille - Dispositivo,” Politecnico di Torino, 2020.
- [3] Eliana Piccarreta, “Dispositivo Medico per la riparazione tendinea: Prototipazione, Analisi agli Elementi Finiti (FEA) e fabbricazione del sistema di applicazione chirurgico,” Politecnico di Torino, 2020.
- [4] N. Andarawis-Puri, E. L. Flatow, and L. J. Soslowsky, “Tendon basic science: Development, repair, regeneration, and healing,” in *Journal of Orthopaedic Research*, John Wiley and Sons Inc., Jun. 2015, pp. 780–784. doi: 10.1002/jor.22869.
- [5] A. Gigante *et al.*, “Collagen I membranes for tendon repair: Effect of collagen fiber orientation on cell behavior,” *Journal of Orthopaedic Research*, vol. 27, no. 6, pp. 826–832, Jun. 2009, doi: 10.1002/jor.20812.
- [6] L. E. Eisner, R. Rosario, N. Andarawis-Puri, and E. M. Arruda, “The Role of the Non-Collagenous Extracellular Matrix in Tendon and Ligament Mechanical Behavior: A Review,” May 01, 2022, *NLM (Medline)*. doi: 10.1115/1.4053086.
- [7] M. Kjær, “Role of Extracellular Matrix in Adaptation of Tendon and Skeletal Muscle to Mechanical Loading,” Apr. 2004. doi: 10.1152/physrev.00031.2003.
- [8] D. F. Holmes, Y. Lu, T. Starborg, and K. E. Kadler, “Collagen Fibril Assembly and Function,” in *Current Topics in Developmental Biology*, vol. 130, Academic Press Inc., 2018, pp. 107–142. doi: 10.1016/bs.ctdb.2018.02.004.
- [9] H. R. C. Screen, D. A. Lee, D. L. Bader, and J. C. Shelton, “An investigation into the effects of the hierarchical structure of tendon fascicles on micromechanical properties,” 2004.
- [10] M. Franchi, A. Trirè, M. Quaranta, E. Orsini, and V. Ottani, “Collagen structure of tendon relates to function,” Mar. 30, 2007. doi: 10.1100/tsw.2007.92.
- [11] J. Schatzker and P. I. Brånemark, “Intravital observations on the microvascular anatomy and microcirculation of the tendon.,” 1969. doi: 10.3109/ort.1969.40.suppl-126.01.
- [12] T. A. H. Järvinen, T. L. N. Järvinen, P. Kannus, L. Józsa, and M. Järvinen, “Collagen fibres of the spontaneously ruptured human tendons display decreased thickness and crimp angle,” *Journal of Orthopaedic Research*, vol. 22, no. 6, pp. 1303–1309, Nov. 2004, doi: 10.1016/j.orthres.2004.04.003.
- [13] J. Kastelic, A. Galeski, and E. Baer Ohio, “THE MULTICOMPOSITE STRUCTURE OF TENDON,” Gordon and Breach Science Publishers Ltd, 1978.

- [14] L. Josza, P. Kannus, J. B. Balint, and A. Reffy, "Three-Dimensional Ultrastructure of Human Tendons," 1991.
- [15] T. Ishigaki and K. Kubo, "Mechanical properties and collagen fiber orientation of tendon in young and elderly," *Clinical Biomechanics*, vol. 71, pp. 5–10, Jan. 2020, doi: 10.1016/j.clinbiomech.2019.10.003.
- [16] M. Chatterjee, P. M. Muljadi, and N. Andarawis-Puri, "The role of the tendon ECM in mechanotransduction: disruption and repair following overuse," *Connect Tissue Res*, vol. 63, no. 1, pp. 28–42, 2022, doi: 10.1080/03008207.2021.1925663.
- [17] N. Maffulli, F. Cuozzo, F. Migliorini, and F. Oliva, "The tendon unit: biochemical, biomechanical, hormonal influences," Dec. 01, 2023, *BioMed Central Ltd*. doi: 10.1186/s13018-023-03796-4.
- [18] P. Kannus, "Structure of the tendon connective tissue," *J Med Sci Sports*, vol. 10, pp. 312–320, 2000.
- [19] H. B. Henninger, B. J. Ellis, S. A. Scott, and J. A. Weiss, "Contributions of elastic fibers, collagen, and extracellular matrix to the multiaxial mechanics of ligament," *J Mech Behav Biomed Mater*, vol. 99, pp. 118–126, Nov. 2019, doi: 10.1016/j.jmbbm.2019.07.018.
- [20] J. Halper and M. Kjaer, "Basic Components of Connective Tissues and Extracellular Matrix: Elastin, Fibrillin, Fibulins, Fibrinogen, Fibronectin, Laminin, Tenascins and Thrombospondins," 2014, pp. 31–47. doi: 10.1007/978-94-007-7893-1_3.
- [21] H. B. Henninger, C. J. Underwood, S. J. Romney, G. L. Davis, and J. A. Weiss, "Effect of elastin digestion on the quasi-static tensile response of medial collateral ligament," *Journal of Orthopaedic Research*, vol. 31, no. 8, pp. 1226–1233, Aug. 2013, doi: 10.1002/jor.22352.
- [22] T. M. Grant, C. Yapp, Q. Chen, J. T. Czernuska, and M. S. Thompson, "The Mechanical, Structural, and Compositional Changes of Tendon Exposed to Elastase," *Ann Biomed Eng*, vol. 43, no. 10, pp. 2477–2486, Oct. 2015, doi: 10.1007/s10439-015-1308-5.
- [23] M. Yanagishita, "Function of proteoglycans in the extracellular matrix," 1993.
- [24] R. K. W. Smith, L. Zunino, P. M. Webbon, and D. Heinegard, "The Distribution of Cartilage Oligomeric Matrix Protein (COMP) in Tendon and Its Variation with Tendon Site, Age and Load," 1997.
- [25] S. G. Rees *et al.*, "Immunolocalisation and expression of keratocan in tendon," *Osteoarthritis Cartilage*, vol. 17, no. 2, pp. 276–279, Feb. 2009, doi: 10.1016/j.joca.2008.07.007.
- [26] J. Melrose *et al.*, "Altered stress induced by partial transection of the infraspinatus tendon leads to perlecan (HSPG2) accumulation in an ovine model

- of tendinopathy,” *Tissue Cell*, vol. 45, no. 1, pp. 77–82, 2013, doi: 10.1016/j.tice.2012.10.001.
- [27] M. Egerbacher *et al.*, “Stress-deprivation induces an up-regulation of versican and connexin-43 mRNA and protein synthesis and increased ADAMTS-1 production in tendon cells in situ,” *Connect Tissue Res*, vol. 63, no. 1, pp. 43–52, 2022, doi: 10.1080/03008207.2021.1873302.
 - [28] L. Jozsa’ *et al.*, “Fibronectin and laminin in Achilles tendon,” 1989.
 - [29] W. Opsahl, H. Zeronian, M. Ellison, D. Lewis, R. B. Rucker, and R. S. Riggins, “Role of Copper in Collagen Cross-linking and Its Influence on Selected Mechanical Properties of Chick Bone and Tendon,” 1982. [Online]. Available: <https://academic.oup.com/jn/article-abstract/112/4/708/4755267>
 - [30] J. Yue *et al.*, “Magnesium inhibits the calcification of the extracellular matrix in tendon-derived stem cells via the ATP-P2R and mitochondrial pathways,” *Biochem Biophys Res Commun*, vol. 478, no. 1, pp. 314–322, Sep. 2016, doi: 10.1016/j.bbrc.2016.06.108.
 - [31] X. Tao, J. Liu, L. Chen, Y. Zhou, and K. Tang, “EGR1 induces tenogenic differentiation of tendon stem cells and promotes rabbit rotator cuff repair,” *Cellular Physiology and Biochemistry*, vol. 35, no. 2, pp. 699–709, Feb. 2015, doi: 10.1159/000369730.
 - [32] G. A. Holzapfel, *Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering*. 2000.
 - [33] Jörgen Bergström, *Mechanics of Solid Polymers: Theory and Computational Modeling*. William Andrew, imprint of Elsevier, 2015.
 - [34] Maria Castro Paupério Vila Pouca, “Application of anisotropic visco-hyperelastic constitutive models for the simulation of biological tissues,” 2017.
 - [35] M. W. Lay, D. Rubin, and E. Krempl, *Introduction to Continuum Mechanics - Chapter 2: Tensors*, Fourth edition. 2010. doi: <https://doi.org/10.1016/B978-0-7506-8560-3.X0001-1>.
 - [36] R. N. Konno, N. Nigam, and J. M. Wakeling, “Modelling extracellular matrix and cellular contributions to whole muscle mechanics,” *PLoS One*, vol. 16, no. 4 April 2021, Apr. 2021, doi: 10.1371/journal.pone.0249601.
 - [37] J. Bonet and R. D. Wood, *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis*. [Online]. Available: www.flagshyp.com.
 - [38] M. W. Lay, D. Rubin, and E. Krempl, *Introduction to Continuum Mechanics - Chapter 3: Kinematics of a Continuum*, Fourth edition. 2010.
 - [39] R. D. Mindlin and H. F. Tiersten, “Effects of Couple-stresses in Linear Elasticity.”
 - [40] L. E. Malvern, *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*.

- [41] C. Castillo-Méndez and A. Ortiz, “Role of anisotropic invariants in numerically modeling soft biological tissues as transversely isotropic hyperelastic materials: A comparative study,” *Int J Non Linear Mech*, vol. 138, Jan. 2022, doi: 10.1016/j.ijnonlinmec.2021.103833.
- [42] E. Peña, B. Calvo, M. A. Martínez, and M. Doblaré, “An anisotropic visco-hyperelastic model for ligaments at finite strains. Formulation and computational aspects,” *Int J Solids Struct*, vol. 44, no. 3–4, pp. 760–778, Feb. 2007, doi: 10.1016/j.ijsolstr.2006.05.018.
- [43] W. Kang, P. Xu, Y. Yue, L. Wang, and Y. Fan, “Difference analysis of phenomenological models with two variable forms for soft tissue quasi-static mechanical characterization,” *Comput Biol Med*, vol. 150, Nov. 2022, doi: 10.1016/j.compbimed.2022.106150.
- [44] G. A. Holzapfel and R. W. Ogden, “Constitutive modelling of passive myocardium: A structurally based framework for material characterization,” *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 367, no. 1902, pp. 3445–3475, Sep. 2009, doi: 10.1098/rsta.2009.0091.
- [45] C. O. Horgan and J. G. Murphy, “Simple shearing of soft biological tissues,” *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 467, no. 2127, pp. 760–777, Mar. 2011, doi: 10.1098/rspa.2010.0288.
- [46] J. Fischer, M. Turčanová, V. Man, M. Hermanová, Z. Bednařík, and J. Burša, “Importance of experimental evaluation of structural parameters for constitutive modelling of aorta,” *J Mech Behav Biomed Mater*, vol. 138, Feb. 2023, doi: 10.1016/j.jmbbm.2022.105615.
- [47] J.C. Simo and T.J.R. Hughes, *Computational Inelasticity*. 1998.
- [48] E. L. Carniel, C. G. Fontanella, C. Stefanini, and A. N. Natali, “A procedure for the computational investigation of stress-relaxation phenomena,” *Mech Time Depend Mater*, vol. 17, no. 1, pp. 25–38, Feb. 2013, doi: 10.1007/s11043-013-9209-1.
- [49] A. N. Natali, E. L. Carniel, P. G. Pavan, F. G. Sander, C. Dorow, and M. Geiger, “A visco-hyperelastic-damage constitutive model for the analysis of the biomechanical response of the periodontal ligament,” *J Biomech Eng*, vol. 130, no. 3, Jun. 2008, doi: 10.1115/1.2900415.
- [50] A. N. Natali, C. G. Fontanella, and E. L. Carniel, “Constitutive formulation and analysis of heel pad tissues mechanics,” *Med Eng Phys*, vol. 32, no. 5, pp. 516–522, Jun. 2010, doi: 10.1016/j.medengphy.2010.02.018.
- [51] R. Sopakayang and G. A. Holzapfel, “A Constitutive Model of Ligaments and Tendons Accounting for Fiber-Matrix Interaction.”

- [52] N. Takahashi *et al.*, “Morphometric analysis of growing tenocytes in the superficial digital flexor tendon of piglets,” *Journal of Veterinary Medical Science*, vol. 79, no. 12, pp. 1960–1967, 2017, doi: 10.1292/jvms.17-0436.
- [53] V. L. C. Feitosa, F. P. Reis, M. A. M. Esquisatto, P. P. Joazeiro, B. C. Vidal, and E. R. Pimentel, “Comparative ultrastructural analysis of different regions of two digital flexor tendons of pigs,” *Micron*, vol. 37, no. 6, pp. 518–525, Aug. 2006, doi: 10.1016/j.micron.2006.01.010.