



**Politecnico
di Torino**

Politecnico di Torino

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

A.A. 2024/2025

Sessione di Laurea: aprile 2025

Ottimizzazione di traiettorie orbitali tramite metodi indiretti per il rendez-vous di satelliti in LEO

Relatore:
Prof. Lorenzo Casalino

Candidato:
Jacopo Grogardi

Sommario

La presente tesi affronta il problema dell'ottimizzazione delle traiettorie orbitali per il rendez-vous tra satelliti in orbita terrestre bassa (*Low Earth Orbit*, LEO) mediante metodi indiretti. L'obiettivo principale è minimizzare il consumo di propellente e l'incremento di velocità Δv necessari per la manovra, garantendo al contempo il rispetto delle condizioni imposte dallo scenario. L'approccio adottato si basa sulla definizione di un vettore di stato formato da elementi orbitali relativi (ROE), descrittivi il moto differenziale dei due satelliti, e sulla teoria del controllo ottimale, che attraverso l'Hamiltoniano del sistema e le equazioni di Eulero–Lagrange, permette di formulare il problema di ottimo come un sistema differenziale ai limiti (BVP). In seguito, lo strumento di ottimizzazione indiretta così ottenuto è confrontato con il metodo analitico semplificato realizzato da Costigliola e Casalino nel 2023¹ per l'ottimizzazione di riconfigurazioni orbitali in orbita bassa.

Abstract

The thesis focuses on the problem of optimizing orbital trajectories for the rendez-vous between satellites in low Earth orbit (LEO) using indirect methods. The primary objective is to minimize fuel consumption, and the velocity increment (Δv) required for the maneuver while ensuring compliance with the conditions imposed by the scenario. The adopted approach involves using relative orbital elements (ROE), which describe the differential motion between the two vehicles, and the mass of the deputy satellite to define the system's state vector. The optimal control theory allows the optimization problem to be formulated as a boundary value problem (BVP) using the system's Hamiltonian and the Euler–Lagrange equations. The resulting indirect optimization tool is subsequently compared to a simplified analytical method for optimizing orbital reconfiguration in low Earth orbit, developed by Costigliola and Casalino in 2023¹.

¹ COSTIGLIOLA D., CASALINO L.; «Simplified maneuvering strategies for rendezvous in near circular Earth orbits», *Aerospace*, vol. 10 n. 1027, 2023.

Indice generale

Simboli usati	III
Elenco delle figure	V
Elenco delle tabelle	VI
1. Introduzione.....	1
2. Richiami di meccanica del volo spaziale	3
2.1 Problema degli n corpi.....	3
2.1.1 Problema dei due corpi	5
2.2 Sistemi di riferimento ed elementi orbitali.....	6
2.2.1 Sistema di riferimento ECI.....	7
2.2.2 Sistema di riferimento RTN	8
2.2.3 Elementi orbitali classici	8
2.3 Equazione di Tsiolkovsky	10
3. Ottimizzazione di traiettorie spaziali.....	13
3.1 Teoria del controllo ottimale	13
3.1.1 Funzionale di costo.....	14
3.1.2 Equazioni per le variabili aggiunte e i controlli.....	15
3.1.3 Condizioni al contorno	17
3.2 Problema differenziale ai limiti	18
3.2.1 Definizione dei parametri	19
3.2.2 Processo iterativo.....	20
3.2.3 Approccio numerico	22
4. Definizione del problema	25
4.1 Elementi orbitali relativi.....	25
4.2 Derivate del vettore di stato	26
4.3 Leggi di controllo.....	30
4.4 Equazioni di Eulero-Lagrange per le variabili aggiunte	33

5. Metodi utilizzati	35
5.1 Ottimizzazione indiretta	35
5.1.1 Implementazione	35
5.1.2 Elementi di controllo, coordinate RTN e ΔV	36
5.2 Metodo analitico	37
5.2.1 Procedimento	37
5.2.2 Coordinate RTN, ROE e durata degli archi propulsi	38
6. Presentazione e commento dei risultati.....	39
6.1 Casi di studio.....	39
6.2 Fase di validazione	40
6.2.1 Consumo di propellente.....	40
6.2.2 Osservazioni sulle traiettorie spaziali.....	41
6.2.3 Osservazioni sul ΔV	41
6.2.4 Risultati per un numero crescente di orbite.....	42
6.3 Caratteristiche delle soluzioni analitiche	43
6.4 Confronto tra i risultati dei due metodi	45
6.4.1 Archi propulsi	45
6.4.2 Angolo di spinta.....	49
6.4.3 Traiettorie nel sistema di riferimento RTN.....	51
6.4.4 Andamento del ΔV in funzione dell'accelerazione	55
6.4.5 Traiettorie nello spazio degli elementi orbitali relativi	57
7. Conclusioni.....	61
7.1 Riassunto del lavoro svolto.....	61
7.2 Considerazioni finali.....	62
7.3 Sviluppi futuri	63
Riferimenti bibliografici	65

Simboli usati

A	matrice dei coefficienti del vettore di stato
<i>A</i>	accelerazione adimensionale
<i>a</i>	semiasse maggiore dell'orbita
B	matrice dei coefficienti del vettore dei controlli
c	vettore dei parametri costanti
<i>c</i>	velocità efficace di scarico
<i>E</i>	anomalia eccentrica
E_{max}	errore massimo
\mathcal{E}	energia meccanica specifica
<i>e</i>	eccentricità dell'orbita
e_x, e_y	componenti del vettore eccentricità
F	forza
<i>G</i>	costante di gravitazione universale
g_0	accelerazione di gravità terrestre standard
<i>H</i>	Hamiltoniano
<i>h</i>	momento angolare specifico
<i>i</i>	inclinazione dell'orbita
i_x, i_y	componenti del vettore inclinazione
<i>J</i>	funzionale
J^*	funzionale implementato
K_1, K_2	coefficienti correttivi
<i>L</i>	longitudine media
<i>M</i>	anomalia media
<i>m</i>	massa
m_0, m_f	massa iniziale e finale del veicolo
m_p	massa di propellente consumato
<i>n</i>	velocità angolare orbitale media
p	vettore dei valori di tentativo
<i>p</i>	pressione statica
r	vettore posizione
r_R, r_T, r_N	coordinate nel sistema di riferimento RTN
s	vettore dei valori ai contorni

\mathbf{T}	vettore spinta
t	tempo
$\tilde{\mathbf{u}}$	vettore dei controlli
u	argomento medio della latitudine
v	velocità
\mathbf{x}	vettore delle variabili di stato
\mathbf{y}	vettore delle variabili di stato e aggiunte
\mathbf{z}	vettore delle variabili e dei parametri costanti
α_{OE}	vettore degli elementi orbitali classici (OE)
α, β	angoli di controllo
$\Delta v, \Delta V$	incremento di velocità
$\delta\alpha$	vettore degli elementi orbitali relativi (ROE)
δa	semiasse maggiore relativa
δL	longitudine media relativa
$\delta e_x, \delta e_y$	eccentricità relative
$\delta i_x, \delta i_y$	inclinazioni relative
δV	perturbazioni nella velocità del <i>deputy</i>
δv	variazioni impulsive di velocità del <i>deputy</i>
ε	variabile adimensionale
λ	vettore delle variabili aggiunte
μ	vettore delle costanti aggiunte
μ	parametro gravitazionale
ν	anomalia vera
σ, χ, Ψ	condizioni al contorno
τ	durata di un generico sotto-intervallo d'arco
Ω	ascensione retta del nodo ascendente (RAAN)
ω	argomento del perigeo

Elenco delle figure

Figura 2.1: forze agenti sull' i -esimo degli n corpi costituenti il sistema [5].....	4
Figura 2.2 il sistema di riferimento Geocentrico-Equatoriale [6]	7
Figura 2.3: il sistema di riferimento RTN [7]	8
Figura 2.4: gli elementi orbitali classici [8]	8
Figura 6.1: l'andamento del consumo di propellente in funzione della velocità di scarico nel caso 1	41
Figura 6.2: andamento dei ΔV di ogni caso al variare del semiasse orbitale e accelerazione.....	42
Figura 6.3: andamento del ΔV all'aumentare della durata della manovra.....	43
Figura 6.4: traiettoria RTN compiuta dal deputy all'aumentare della durata della manovra.....	43
Figura 6.5: archi propulsi nel caso 1	46
Figura 6.6: archi propulsi nel caso 2	46
Figura 6.7: archi propulsi nel caso 3	46
Figura 6.8: archi propulsi nel caso 4	47
Figura 6.9: archi propulsi nel caso 5	47
Figura 6.10: archi propulsi nel caso 6	47
Figura 6.11: archi propulsi nel caso 7	48
Figura 6.12: archi propulsi nel caso 8	48
Figura 6.13: archi propulsi nel caso 9	48
Figura 6.14: archi propulsi nel caso 10	49
Figura 6.15: archi propulsi nel caso 11	49
Figura 6.16: funzione $\alpha(u)$ per il caso 1 , rappresentativo dei casi a predominanza di $\Delta\delta L$	50
Figura 6.17: funzione $\alpha(u)$ per il caso 8 , rappresentativo dei casi a predominanza di $\Delta\delta ex$	50
Figura 6.18: funzione $\alpha(u)$ per il caso 11 , rappresentativo dei casi a predominanza di $\Delta\delta ey$	50
Figura 6.19: traiettoria RTN del caso 1	51
Figura 6.20: traiettoria RTN del caso 2	51
Figura 6.21: traiettoria RTN del caso 3	52
Figura 6.22: traiettoria RTN del caso 4	52
Figura 6.23: traiettoria RTN del caso 5	52
Figura 6.24: traiettoria RTN del caso 6	53
Figura 6.25: traiettoria RTN del caso 7	53
Figura 6.26: traiettoria RTN del caso 8	53
Figura 6.27: traiettoria RTN del caso 9	54
Figura 6.28: traiettoria RTN del caso 10	54
Figura 6.29: traiettoria RTN del caso 11	54

Figura 6.30: andamento del ΔV per il caso 1	55
Figura 6.31: andamento del ΔV per il caso 2	55
Figura 6.32: andamento del ΔV per il caso 3	55
Figura 6.33: andamento del ΔV per il caso 4	55
Figura 6.34: andamento del ΔV per il caso 5	56
Figura 6.35: andamento del ΔV per il caso 6	56
Figura 6.36: andamento del ΔV per il caso 7	56
Figura 6.37: andamento del ΔV per il caso 8	56
Figura 6.38: andamento del ΔV per il caso 9	56
Figura 6.39: andamento del ΔV per il caso 10	56
Figura 6.40: andamento del ΔV per il caso 11	57
Figura 6.41: diagramma $ac\delta a - ac\delta L$ per il caso 4 , esempio di caso dove è predominante $\Delta\delta L$	58
Figura 6.42: diagramma $ac\delta a - ac\delta L$ per il caso 8 , esempio di caso dove è predominante $\Delta\delta ex$	58
Figura 6.43: diagramma $ac\delta a - ac\delta L$ per il caso 11 , esempio di caso dove è predominante $\Delta\delta ey$	58
Figura 6.44: diagramma $ac\delta ex - ac\delta ey$ per il caso 4 , esempio di caso dove è predominante $\Delta\delta L$	59
Figura 6.45: diagramma $ac\delta ex - ac\delta ey$ per il caso 8 , esempio di caso dove è predominante $\Delta\delta ex$	59
Figura 6.46: diagramma $ac\delta ex - ac\delta ey$ per il caso 11 , esempio di caso dove è predominante $\Delta\delta ey$	59

Elenco delle tabelle

Tabella 2.1: classificazione delle orbite coniche.....	9
Tabella 6.1: casi di riconfigurazioni orbitali piane studiati	40
Tabella 6.2: caratteristiche dei tre impulsi previsti dalla soluzione analitica	44
Tabella 6.3: il valore del ΔV totale della manovra previsto dalla soluzione analitica.....	44

1. Introduzione

L'attività spaziale ha registrato, negli ultimi decenni, una crescita esponenziale, non soltanto per numero di satelliti lanciati, ma anche per la complessità delle operazioni condotte nell'orbita terrestre bassa. In tale contesto, l'ottimizzazione delle manovre di riconfigurazione orbitale e di rendez-vous diventa di cruciale importanza sia dal punto di vista operativo che economico [1].

In molti casi, i costi di una manovra in orbita bassa possono essere ridotti dall'utilizzo di sistemi propulsivi a bassi livelli di spinta (*low-thrust propulsion*), come la propulsione elettrica, per un consumo più efficiente del carburante e un aumento della massa finale del carico utile. Nondimeno, il profilo di spinta continuo complica notevolmente la progettazione di una traiettoria ottimale, introducendo problemi quali l'ampia scala temporale della manovra e la struttura discreta, detta *bang-bang* o *on-off*, dell'attuazione [2].

Le condizioni di ottimalità per una data traiettoria possono essere derivate utilizzando il calcolo variazionale; sfortunatamente, la risoluzione del sistema di equazioni risultanti è spesso difficoltosa quando non impossibile. Mentre in alcuni casi particolari è possibile individuare soluzioni analitiche, per la maggior parte dei casi le equazioni sono risolte attraverso metodi numerici, generalmente divisi nelle due distinte famiglie: diretti e indiretti.

I *metodi diretti*, di cui esistono numerose varianti, trasformano il problema di controllo ottimale continuo in un problema di ottimizzazione parametrica. Le equazioni costituenti il sistema vengono integrate per passi, utilizzando procedimenti impliciti o espliciti (come i metodi di Runge-Kutta). Il risultato sono delle equazioni di vincolo non lineari che devono essere soddisfatte dai parametri, rappresentazioni discrete degli stati e degli elementi di controllo. In questo modo, il problema viene ricondotto ad un problema di programmazione non lineare (*Non Linear Programming*, NLP). I metodi diretti vantano una buona robustezza e una più semplice implementazione, a fronte però di soluzioni che in alcuni casi risultano poco precise o maggiormente onerose dal punto di vista computazionale [3].

Nei *metodi indiretti* le condizioni di ottimalità sono derivate analiticamente dalla teoria del controllo ottimale. Attraverso l'introduzione di *variabili aggiunte*, che raddoppiano il numero di equazioni differenziali da propagare lungo la traiettoria, si giunge ad un problema differenziale ai limiti (*Boundary Value Problem*, BVP), poi risolto numericamente. Questi tipi di procedimenti forniscono soluzioni estremamente accurate, con tempi di calcolo relativamente contenuti. Al contempo, però, richiedono la conoscenza analitica della dinamica del sistema e mostrano una forte sensibilità delle soluzioni ai valori di tentativo iniziali, cosa che può complicarne l'applicazione ad un dato problema.

Il presente lavoro si inserisce in questo ambito, avendo come obiettivo principale lo sviluppo di uno strumento per l'ottimizzazione indiretta delle traiettorie orbitali per la riconfigurazione orbitale di due satelliti in LEO. Le soluzioni ottenute grazie all'impiego dei metodi indiretti permettono di minimizzare, con elevata accuratezza, il consumo di propellente e l'incremento di velocità necessari alla manovra.

La tesi si articola in più capitoli, ciascuno dedicato a un aspetto specifico della problematica trattata. Inizialmente, si richiamano alcuni temi propri della meccanica del volo spaziale, illustrando i concetti fondamentali della dinamica orbitale, i sistemi di riferimento utilizzati e la rappresentazione degli elementi orbitali, contenuti teorici essenziali per comprendere la natura del problema di riconfigurazione.

Successivamente viene illustrata la teoria del controllo ottimale, la cui applicazione, come anticipato, consente di formulare il problema di ottimizzazione come un problema differenziale ai limiti. Dopo aver elencato le equazioni differenziali e le condizioni al contorno che lo costituiscono, particolare attenzione viene dedicata alle tecniche iterative normalmente adottate per risolverlo, garantendo al contempo la convergenza delle soluzioni individuate.

Il capitolo seguente si concentra sulla definizione del problema specifico di riconfigurazione orbitale tra satelliti, introducendo un vettore di stato composto da elementi orbitali relativi (*Relative Orbital Elements*, ROE), utilizzati per descrivere in modo semplice e non singolare il moto relativo tra il satellite passivo, denominato *chief*, e quello attimo, detto *deputy*. Vengono illustrate le equazioni utilizzate per rappresentare la dinamica del sistema e si espongono le leggi di controllo che regoleranno l'orientamento della spinta e l'ottimizzazione della traiettoria.

Un ulteriore capitolo è dedicato ai metodi utilizzati per risolvere il problema di ottimo. In primo luogo, si descrive la procedura di calcolo utilizzata per risolvere il problema differenziale ai limiti, implementata attraverso un codice FORTRAN denominato RV2. In seguito, è spiegato brevemente il funzionamento del metodo analitico semplificato sviluppato da Davide Costigliola e Lorenzo Casalino nel 2023, in grado di fornire traiettorie sub-ottimali per la riconfigurazione orbitale di due satelliti in orbite terrestri quasi-circolari con un ridotto costo computazionale e un'ampia versatilità di utilizzo, a fronte di alcune semplificazioni iniziali [4].

Infine, si presentano i risultati delle simulazioni effettuate con il codice RV2 e ottenute studiando 11 differenti scenari di riconfigurazione orbitale al variare della spinta applicata al satellite *deputy*. Lo strumento di ottimizzazione indiretta è così posto a confronto con il metodo analitico semplificato, analizzando i risultati ottenuti tramite l'adozione di due diversi modelli: quello *low-thrust* e quello *analitico-impulsivo*.

2. Richiami di meccanica del volo spaziale

Il capitolo intende offrire una sintesi chiara e accurata delle principali nozioni di meccanica celeste e propulsione spaziale richiamate nei capitoli successivi, al fine di supportare l'analisi del problema trattato e facilitare la valutazione dei risultati ottenuti.

2.1 Problema degli n corpi

Si intende studiare il moto relativo di un sistema composto da n corpi assimilabili a punti materiali. Introdotto un sistema di riferimento inerziale, inerziale con le stelle fisse, si considera il moto del punto materiale i -esimo soggetto all'azione gravitazionale degli altri $n - 1$ punti e ad altre azioni non gravitazionali (come ad esempio la forza aerodinamica, la pressione solare o la spinta propulsiva). Riferendosi alla Figura 2.1, si può esprimere la risultante delle forze agenti sul corpo i -esimo come:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^* + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mathbf{F}_{gj} \quad (2.1)$$

dove \mathbf{F}^* è la risultante delle forze non gravitazionali ed \mathbf{F}_{gj} la forza gravitazionale dovuta al corpo j -esimo. Indicando con \mathbf{r}_j il vettore che definisce la posizione del generico corpo j rispetto all'origine del sistema di riferimento, per la legge di gravitazione universale di Newton la forza di attrazione gravitazionale che il corpo i subisce per effetto del corpo j è pari a

$$\mathbf{F}_{gj} = -G \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} \mathbf{r}_{ij} \quad (2.2)$$

dove $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ è il vettore congiungente il corpo j a quello i , mentre G indica la costante di gravitazione universale che, nel Sistema Internazionale, assume il valore

$$G = 6.6726 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1}$$

In virtù della seconda legge di Newton, si può scrivere la risultante delle forze agenti sul corpo i come

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m_i \mathbf{v}_i) \quad (2.3)$$

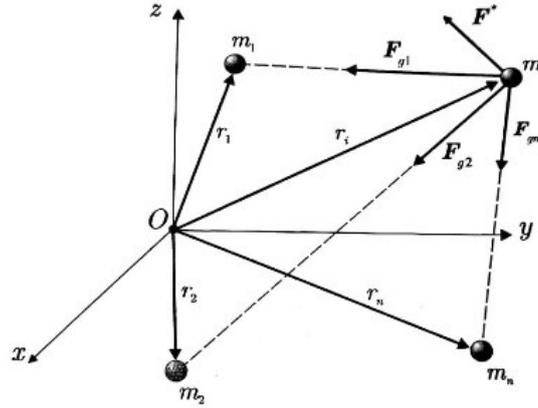


Figura 2.1: forze agenti sull' i -esimo degli n corpi costituenti il sistema [5]

dove \mathbf{v}_i è la velocità del corpo. Nel caso in cui m_i non vari o vari in modo trascurabile, si può scrivere:

$$\mathbf{F} = m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \quad (2.4)$$

È utile ora specializzare la trattazione allo studio del moto di uno *spacecraft* intorno alla Terra, indicando per chiarezza la Terra come corpo “1” e il satellite come corpo “2”. I restanti $n - 2$ corpi rappresentano invece i vari corpi celesti che popolano il Sistema Solare.

Ipotizzando nulla la risultante delle forze non gravitazionali ($\mathbf{F}^* = 0$), la (2.2) e la (2.4) permettono di scrivere le equazioni del moto per i due corpi:

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = -G \sum_{j=2}^n \frac{m_j}{r_{j1}^3} \mathbf{r}_{j1} \quad (2.5)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 = -G \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^n \frac{m_j}{r_{j2}^3} \mathbf{r}_{j2} \quad (2.6)$$

Poiché $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, si ha $\ddot{\mathbf{r}}_{12} = \ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1$ e quindi

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_{12} &= -G \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^n \frac{m_j}{r_{j2}^3} \mathbf{r}_{j2} + G \sum_{j=2}^n \frac{m_j}{r_{j1}^3} \mathbf{r}_{j1} \\ &= -G \frac{m_1}{r_{12}^2} \mathbf{r}_{12} - G \sum_{j=3}^n \frac{m_j}{r_{j2}^3} \mathbf{r}_{j2} + G \frac{m_2}{r_{21}^2} \mathbf{r}_{21} + G \sum_{j=3}^n \frac{m_j}{r_{j1}^3} \mathbf{r}_{j1} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Osservando che $\mathbf{r}_{21} = -\mathbf{r}_{12}$, si ottiene:

$$\ddot{\mathbf{r}}_{12} = -G \frac{m_1 + m_2}{r_{12}^2} \mathbf{r}_{12} - \sum_{j=3}^n G m_j \left(\frac{\mathbf{r}_{j2}}{r_{j2}^3} - \frac{\mathbf{r}_{j1}}{r_{j1}^3} \right) \quad (2.8)$$

Il primo termine a secondo membro della (2.8) rappresenta l'accelerazione applicata allo *spacecraft* da parte dell'attrazione gravitazionale della Terra. Il secondo termine, invece, comprende tutte quelle accelerazioni di disturbo dovute all'attrazione gravitazionale degli altri corpi celesti presenti nel Sistema Solare. Nell'orbita bassa terrestre tali effetti sono tuttavia di entità trascurabile, inferiori di vari ordini di grandezza al disturbo causato dalla non perfetta sfericità della Terra. Appare quindi lecito adottare un modello semplificato, detto *dei due corpi*, in cui studiare il moto dello *spacecraft* come soggetto alla sola forza di attrazione terrestre [5].

2.1.1 Problema dei due corpi

Il problema dei due corpi costituisce una versione semplificata del precedente, in cui il moto relativo di un corpo primario (ad esempio la Terra) e di un corpo secondario (un satellite artificiale) è studiato considerando la sola attrazione gravitazionale e quindi assumendo l'assenza di altri disturbi agenti sui corpi (come la non perfetta sfericità nella distribuzione delle masse, l'attrito o la presenza forze interne). Sotto tali ipotesi, l'equazione del moto è facilmente ricavabile dalla (2.8) rimuovendo l'ultimo termine a secondo membro. Detta M la massa del corpo primario ed m quella del corpo secondario e definita con \mathbf{r} la posizione del corpo secondario rispetto al corpo primario, l'equazione del moto relativo assume la forma:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{G(M+m)}{r^3} \mathbf{r} \quad (2.9)$$

Poiché nel caso dei satelliti artificiali si ha solitamente che la massa del corpo primario è molto maggiore di quella del secondario, e quindi che $M+m \approx M$, l'equazione (2.9) diventa

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} \quad (2.10)$$

dove $\mu \doteq GM$ prende il nome di parametro gravitazionale. Nel caso del pianeta Terra, il parametro gravitazionale assume il valore

$$\mu_{\oplus} = 3.986 \times 10^{14} \text{ m}^3\text{s}^{-2}$$

Si introducono ora due grandezze meccaniche di fondamentale importanza per lo studio del moto.

La prima è l'*energia meccanica specifica*, definita come la somma di energia cinetica ed energia gravitazionale potenziale per unità di massa:

$$\mathcal{E} = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} \quad (2.11)$$

dove v rappresenta il modulo della velocità del corpo secondario. Si può dimostrare [5] che tale grandezza si conserva in ogni punto della traiettoria, con valore costante pari a

$$\mathcal{E} = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a} \quad (2.12)$$

dove a indica il semiasse maggiore della conica.

La seconda grandezza d'interesse è il *momento angolare specifico*, espresso come il prodotto vettoriale tra il vettore posizione del satellite rispetto al corpo primario e della sua velocità:

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} \quad (2.13)$$

Come per l'energia specifica, anche il momento angolare specifico si conserva in ogni punto della traiettoria [5], in modulo, direzione e verso. Partendo da questa informazione è possibile concludere che ogni singola orbita si sviluppa sempre sullo stesso piano, detto *piano orbitale*. Ciò è vero però solamente nel caso in cui siano verificate le ipotesi di cui sopra. La disposizione del piano orbitale può infatti variare nel caso di disturbi o di specifiche manovre che mirino a mutare la traiettoria dello *spacecraft* al di fuori dell'iniziale piano del moto.

2.2 Sistemi di riferimento ed elementi orbitali

I sistemi di riferimento utilizzati in meccanica celeste sono numerosi e differenti per origine, orientamento degli assi coordinati e impiego ideale. Di seguito, se ne illustrano due dei principali, il sistema di riferimento Geocentrico-Equatoriale e quello Radiale-Trasversale-Normale. Gli elementi orbitali rappresentano invece i parametri fondamentali per descrivere il moto di un corpo in orbita attorno ad un altro sotto l'effetto dell'attrazione gravitazionale e vengono definiti proprio a partire dai versori fondamentali del sistema Geocentrico-Equatoriale.

Mentre gli elementi orbitali classici verranno richiamati nel Capitolo 4 per la definizione degli elementi orbitali relativi, di fondamentale importanza nella descrizione del problema, il sistema Radiale-Trasversale-Normale sarà utilizzato per la rappresentazione dei risultati ottenuti.

2.2.1 Sistema di riferimento ECI

Il sistema di riferimento Geocentrico-Equatoriale $\mathcal{T}_G(O, x, y, z)$, noto anche come *Earth Centered Inertial* (ECI), ha origine nel centro della Terra, piano fondamentale (x, y) coincidente con il piano equatoriale, asse x orientata verso il punto d'Ariete e asse z verso il polo nord terrestre. L'asse y , infine, è tale da formare una terna destrorsa. Agli assi (x, y, z) sono associati i versori $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$.

Tale sistema non è, a rigore, un sistema inerziale, in quanto trascinato dalla Terra durante il suo moto di rivoluzione. Tuttavia, poiché il periodo di rivoluzione è almeno due ordini di grandezza maggiore dei periodi orbitali di satelliti posti in orbita terrestre bassa o geostazionaria, è possibile, in prima approssimazione e per intervalli di tempo relativamente brevi, considerare il sistema di riferimento Geocentrico-Equatoriale come inerziale nello studio del moto di satelliti artificiali orbitanti il nostro pianeta [6].

Una volta definito il sistema di riferimento ECI (Figura 2.2), è necessario scegliere in quale modo indicare la posizione di un corpo rispetto ad esso. Esistono tre set di coordinate possibili:

- Coordinate cartesiane (x, y, z)
- Ascensione retta, declinazione e distanza dal centro della Terra (α, δ, r)
- Longitudine, latitudine e altezza geodetica (λ, ϕ, h)

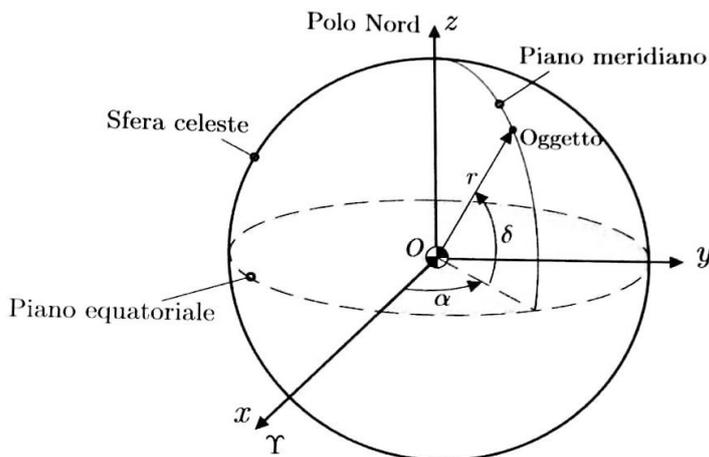


Figura 2.2 il sistema di riferimento Geocentrico-Equatoriale [6]

Il semiasse maggiore e l'eccentricità forniscono informazioni sulla forma e sull'energia dell'orbita, come indicato dalla Tabella 2.1.

Tipo di conica	Semiasse maggiore	Eccentricità	Energia
Ellisse (circonferenza)	$a > 0$	$0 \leq e < 1$	$\mathcal{E} < 0$
Parabola	$a \rightarrow \infty$	$e = 1$	$\mathcal{E} = 0$
Iperbole	$a > 0$	$e > 1$	$\mathcal{E} > 0$

Tabella 2.1: classificazione delle orbite coniche in base a semiasse maggiore, eccentricità ed energia meccanica specifica

Gli elementi ω , i e Ω descrivono la disposizione spaziale dell'orbita, con riferimento al sistema ECI. L'inclinazione è l'angolo tra il versore $\hat{\mathbf{k}}$ e il vettore momento angolare definito nella (2.13). L'ascensione retta del nodo ascendente è l'angolo che il versore $\hat{\mathbf{i}}$ forma con il nodo ascendente, cioè il punto in cui il satellite nella sua orbita interseca il piano equatoriale passando da sud a nord. Congiungente i nodi ascendente e discendente è la *linea dei nodi*, ottenuta dall'intersezione di piano orbitale ed equatoriale. A partire da questa è possibile definire il vettore $\hat{\mathbf{n}}$, che ha come direzione la linea dei nodi e punta verso il nodo ascendente. L'argomento del perigeo rappresenta l'angolo tra il versore $\hat{\mathbf{n}}$ e la direzione del perigeo dell'orbita. Infine, l'anomalia vera indica la posizione angolare del satellite a partire dalla direzione del perigeo.

Nel caso di orbite ellittiche, può essere utile ricorrere a una serie di elementi alternativi per la descrizione della posizione angolare del satellite. Il primo è l'*anomalia eccentrica*, definita come l'angolo E compreso tra la linea degli apsi e la linea congiungente il centro geometrico dell'orbita e la proiezione del corpo orbitante sul cosiddetto cerchio ausiliario, centrato nel centro geometrico dell'orbita e di raggio pari al semiasse maggiore dell'ellisse. L'anomalia eccentrica è calcolabile a partire da anomalia vera ν ed eccentricità e attraverso la relazione

$$E = \tan^{-1} \left(\frac{\sin \nu \sqrt{1 - e^2}}{e + \cos \nu} \right) \quad (2.14)$$

All'anomalia eccentrica è strettamente legata un'altra espressione alternativa della posizione del satellite, l'*anomalia media* M . Questa esprime, come angolo, la frazione di periodo orbitale trascorsa dall'ultimo passaggio del satellite al perigeo. In modo alternativo, la si può definire come la distanza angolare dal perigeo che il satellite avrebbe se si muovesse lungo un'orbita circolare, a velocità costante e con lo stesso periodo orbitale associato all'orbita ellittica (un'orbita circolare coincidente, quindi, con il cerchio ausiliario di cui sopra).

La relazione che lega M ad E è la seguente:

$$M = E - e \sin E \quad (2.15)$$

Definiamo quindi un ultimo elemento, detto *argomento medio della latitudine*:

$$u = M + \omega \quad (2.16)$$

dove ω è l'argomento del perigeo dell'orbita del satellite.

2.3 Equazione di Tsiolkovsky

L'*equazione di Tsiolkovsky*, o *equazione del razzo*, lega il consumo di propellente necessario per effettuare una data manovra orbitale alla corrispondente variazione di velocità del veicolo spaziale.

Il modulo della spinta generata da un propulsore a reazione è la somma di un contributo dinamico, dovuto all'espulsione del propellente, e di uno statico, dovuto alla differenza di pressioni a monte e a valle della sezione di uscita dell'ugello:

$$T = \dot{m}v_u + A_e(p_e - p_a) \quad (2.17)$$

dove \dot{m} indica la portata in massa del propellente che viene espulsa dal propulsore, v_u la velocità effettiva di scarico (cioè, la velocità media con la quale il flusso fuoriesce dall'ugello), A_e la sezione di uscita dell'ugello, p_e la pressione di uscita del propellente e p_a quella dell'ambiente esterno in cui avviene l'espulsione (nulla per propulsori operante nel vuoto dello spazio). Possiamo riscrivere la spinta come un unico termine dinamico, definendo la *velocità efficace di scarico*:

$$c = v_u + \frac{A_e(p_e - p_a)}{\dot{m}} \quad (2.18)$$

Sostituendo la (2.18) nella (2.17) si ottiene

$$T = \dot{m}c \quad (2.19)$$

Nel 1903, il professore russo Konstantin Tsiolkovsky pubblicò quello che è considerato il primo trattato accademico sulla missilistica, "L'esplorazione dello spazio cosmico per mezzo di motori a reazione", in cui descrisse il moto di un razzo servendosi della seguente equazione [9]:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dm}{dt} \mathbf{c} + \mathbf{F} \quad (2.20)$$

dove $d\mathbf{v}/dt$ è l'accelerazione del razzo, dm/dt la variazione della sua massa totale – che si ipotizza avvenga solamente attraverso il consumo di propellente – e \mathbf{F} la risultante delle forze esterne ad esso applicate. Ipotizzando che il razzo si trovi nel vuoto e che la risultante di tutte le forze esterne sia nulla, la (2.20) può essere integrata nell'intero tempo della missione, ottenendo il noto risultato:

$$\Delta\mathbf{v} = -\mathbf{c} \ln \left(\frac{m_f}{m_0} \right) \quad (2.21)$$

con m_0 massa iniziale del razzo, somma della massa di propellente m_p e di quella finale m_f , comprendente le masse di carico utile, strutture e sistemi. Tenendo a mente ciò, dalla (2.21) si può ricavare la relazione

$$\frac{m_p}{m_0} = 1 - \exp \left(-\frac{\Delta v}{c} \right) \quad (2.22)$$

che evidenzia la proporzionalità inversa che lega la percentuale di massa consumata in propellente alla velocità efficace di scarico. Un importante parametro collegato a quest'ultima è l'impulso specifico I_{sp} . Esso descrive quanto efficientemente il propellente è convertito in spinta ed è pari al rapporto tra spinta e portata in peso del propellente. Inoltre, per la (2.19), può essere scritto come

$$I_{sp} = \frac{T}{\dot{m}g_0} = \frac{c}{g_0} \quad (2.23)$$

dove $g_0 = 9.8066 \text{ ms}^{-2}$ è l'accelerazione di gravità terrestre standard. L'impulso specifico ha le dimensioni di un tempo e perciò si misura in secondi.

Sebbene l'impulso specifico sia uno dei principali parametri utilizzato nell'ingegneria aerospaziale per quantificare le prestazioni di un propulsore, va ricordato che la misura fondamentale dell'efficienza di un razzo risiede nel suo massimo incremento di velocità Δv . L'incremento di velocità del razzo, definito dall'equazione (2.21), deve essere adeguato a quello caratteristico della missione per cui il veicolo è progettato, calcolato sommando i vari incrementi di velocità necessari alle operazioni e agli spostamenti orbitali previsti. Il Δv di una data missione viene quindi usato come indicatore della difficoltà della stessa [9].

3. Ottimizzazione di traiettorie spaziali

Il fine ultimo di un problema di ottimizzazione è quello di trovare la legge di controllo in grado di rendere massimo o minimo un particolare *indice di prestazione*. Poiché i costi dei trasferimenti orbitali sono influenzati in primo luogo dai consumi di propellente, diventa importante minimizzare la quantità di propellente necessaria alla manovra o, allo stesso modo, massimizzare la massa finale del veicolo.

Nel caso di un trasferimento orbitale, le soluzioni analitiche a questo tipo di problemi sono disponibili solo per pochi semplici casi, di scarso interesse pratico per via delle semplificazioni da adottare [10]. Per ottenere soluzioni significative, il problema di ottimo dev'essere necessariamente risolto ricercando soluzioni approssimate oppure attraverso l'impiego di metodi numerici. Tra questi ultimi, le tecniche di ottimizzazione indiretta (o metodi indiretti, IM) offrono maggior accuratezza di ogni altro metodo di risoluzione, anche per problemi con un alto numero di comandi o stati continui, nonché ridotti tempi di elaborazione [11]. D'altra parte, la necessità di derivare analiticamente le condizioni necessarie e l'elevata dipendenza che la convergenza alla soluzione ha nei confronti dei valori di tentativo, utilizzati per inizializzare la procedura di calcolo iterativo, ne possono scoraggiare l'effettivo impiego, a favore di tecniche alternative utilizzabili in contesti di minore criticità [12].

Il capitolo illustra la *teoria del controllo ottimale* alla base dei metodi indiretti, nella forma più adatta per l'applicazione a traiettorie spaziali. In seguito, si espone il metodo di risoluzione del problema differenziale ai limiti che risulta dall'applicazione di tale teoria a un dato problema di ottimo.

3.1 Teoria del controllo ottimale

La teoria del controllo ottimale si basa sui principi del calcolo variazionale e deriva dal lavoro condotto dai matematici Lev Pontryagin e Richard Bellman durante gli anni Cinquanta del XX secolo [13].

Il sistema generico a cui si applica la teoria del controllo ottimale è descritto da un vettore di variabili di stato \mathbf{x} . L'evoluzione di tali stati tra gli istanti iniziale e finale è descritta da equazioni differenziali, funzioni dello stesso vettore \mathbf{x} , del vettore di controllo $\tilde{\mathbf{u}}$ e della variabile indipendente t :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{u}}, t) \quad (3.1)$$

Nell'applicare tale teoria alle traiettorie spaziali, è conveniente suddividere tale traiettoria in n sotto-intervalli o archi. L'intervallo j -esimo avrà inizio a $t = t_{(j-1)_+}$ con vettore degli stati $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{(j-1)_+}$ e finirà a $t = t_{j_-}$ con gli stati $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{j_-}$. I pedici $+$ e $-$ indicano i valori delle variabili immediatamente

prima e dopo al punto congiungente un arco con il successivo; ciò si rende necessario per tener conto delle eventuali discontinuità di alcune variabili tra i diversi archi (come, ad esempio, la discontinuità nella velocità del satellite causata da una manovra impulsiva). All'interno di ogni arco le variabili di stato e di controllo sono continue, mentre nei punti di congiunzione tra di essi (*contorni interni*) sono imposte delle condizioni al contorno.

Tali condizioni, imposte per ogni sotto-intervallo, sono generalmente di tipo misto, cioè coinvolgono i valori delle variabili di stato e della variabile indipendente sia ai contorni esterni che a quelli interni. Esse sono inoltre tipicamente non lineari e vengono espresse, per ogni j -esimo arco, come:

$$\chi(\mathbf{x}_{(j-1)_+}, \mathbf{x}_{j_-}, t_{(j-1)_+}, t_{j_-}) = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.2)$$

3.1.1 Funzionale di costo

Il problema di ottimo si pone come la ricerca dei punti estremali di un funzionale J , definito come:

$$J = \varphi(\mathbf{x}_{(j-1)_+}, \mathbf{x}_{j_-}, t_{(j-1)_+}, t_{j_-}) + \sum_{j=1}^n \int_{t_{(j-1)_+}}^{t_{j_-}} \Phi(\mathbf{x}(t), \tilde{\mathbf{u}}(t), t) dt \quad j = 1, \dots, n \quad (3.3)$$

Il funzionale è la somma di due termini: la funzione φ , che dipende dai valori che il vettore degli stati \mathbf{x} e la variabile indipendente t assumono nei contorni interni ed esterni, e l'integrale, esteso su tutta la traiettoria, della funzione Φ , la quale dipende dai valori che \mathbf{x} , t e il vettore di controllo $\tilde{\mathbf{u}}$ assumono all'interno di ogni sotto-intervallo. È sempre possibile ricondursi a due differenti casi:

- caso $\varphi = 0$ → formulazione di Lagrange
- caso $\Phi = 0$ → formulazione di Mayer

Di seguito, si preferirà la formulazione di Mayer.

È conveniente riscrivere J introducendo due moltiplicatori di Lagrange:

- $\boldsymbol{\mu}$, costanti aggiunte, associate alle condizioni al contorno
- $\boldsymbol{\lambda}$, variabili aggiunte, associate alle equazioni di stato

Il funzionale diventa allora

$$J^* = \varphi + \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\chi} + \sum_{j=1}^n \int_{t_{(j-1)_+}}^{t_{j_-}} (\Phi + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{f} - \dot{\mathbf{x}})) dt \quad (3.4)$$

I moltiplicatori di Lagrange fanno sì che i funzionali J e J^* coincidano se le condizioni al contorno e le equazioni di stato risultano soddisfatte. Integrando per parti il funzionale J^* è possibile svincolarsi dalla dipendenza dalla derivata $\dot{\mathbf{x}}$, ottenendo:

$$J^* = \varphi + \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\chi} + \sum_{j=1}^n (\boldsymbol{\lambda}_{(j-1)_+}^T \mathbf{x}_{(j-1)_+} - \boldsymbol{\lambda}_{j_-}^T \mathbf{x}_{j_-}) + \sum_{j=1}^n \int_{t_{(j-1)_+}}^{t_{j_-}} (\Phi + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{f} - \dot{\mathbf{x}})) dt \quad (3.5)$$

Differenziando la (3.5) si ottiene la *variazione prima* del funzionale, vale a dire il termine lineare della variazione del funzionale nella variazione dei suoi argomenti δt , $\delta \mathbf{x}$ e $\delta \tilde{\mathbf{u}}$:

$$\begin{aligned} \delta J^* = & \left(-H_{(j-1)_+} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{(j-1)_+}} + \boldsymbol{\mu}^T \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t_{(j-1)_+}} \right) \delta t_{(j-1)_+} + \\ & + \left(-H_{j_-} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{j_-}} + \boldsymbol{\mu}^T \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t_{j_-}} \right) \delta t_{j_-} + \\ & + \left(-\boldsymbol{\lambda}_{(j-1)_+}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}_{(j-1)_+}} + \boldsymbol{\mu}^T \left[\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{x}_{(j-1)_+}} \right] \right) \delta \mathbf{x}_{(j-1)_+} + \\ & + \left(-\boldsymbol{\lambda}_{j_-}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}_{j_-}} + \boldsymbol{\mu}^T \left[\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{x}_{j_-}} \right] \right) \delta \mathbf{x}_{j_-} + \\ & + \sum_{j=1}^n \int_{t_{(j-1)_+}}^{t_{j_-}} \left(\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\boldsymbol{\lambda}}^T \right) \delta \mathbf{x} + \frac{\partial H}{\partial \tilde{\mathbf{u}}} \delta \tilde{\mathbf{u}} \right) dt \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (3.6)$$

dove si sono utilizzate le parentesi quadre per indicare una matrice.

Il termine H che compare nella (3.6) rappresenta l'*Hamiltoniano* del sistema, definito, all'interno della teoria del controllo ottimale, come:

$$H = \Phi + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f} \quad (3.7)$$

3.1.2 Equazioni per le variabili aggiunte e i controlli

La condizione di ottimo prevede la stazionarietà del funzionale. Ne consegue che la sua variazione prima δJ^* debba essere nulla per qualunque valore delle variazioni $\delta \mathbf{x}$, $\delta \tilde{\mathbf{u}}$, $\delta \mathbf{x}_{(j-1)_+}$, $\delta \mathbf{x}_{j_-}$, $\delta t_{(j-1)_+}$ e δt_{j_-} che sia compatibile con le equazioni differenziali e le condizioni al contorno.

L'introduzione di variabili e costanti aggiunte permette di annullare i coefficienti di ognuna delle variazioni dell'equazione (3.6), garantendo quindi la stazionarietà del funzionale.

Annullando i coefficienti di $\delta \mathbf{x}$ all'interno dell'integrale per ogni punto della traiettoria si ottengono le *equazioni differenziali di Eulero-Lagrange* per le variabili aggiunte:

$$\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} = - \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \quad (3.8)$$

Annullando i coefficienti di $\delta \tilde{\mathbf{u}}$ si ottengono invece le equazioni algebriche per i controlli:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \tilde{\mathbf{u}}} \right)^T = 0 \quad (3.9)$$

Si noti come sia le leggi di controllo che le condizioni al contorno risultino formalmente indipendenti dal fatto di ricercare i punti di massimo oppure di minimo di J [14, 15].

Bisogna prestare particolare attenzione al caso in cui uno dei controlli sia soggetto a un vincolo, cioè qualora debba appartenere a un dato *dominio di ammissibilità*. Ne è esempio la spinta, compresa nell'intervallo $0 \leq T \leq T_{max}$, oppure, per applicazioni aeronautiche, il coefficiente di portanza $0 \leq C_L \leq C_{L,m}$. Non si prenderanno in esame casi in cui il vincolo dipende dal tempo o dalle variabili di stato, ma solamente quelli in cui esso è esplicito e costante.

In presenza di un vincolo su uno dei controlli, il valore ottimale di controllo è scelto in accordo con il *Principio di massimo di Pontryagin*, il quale afferma che in ogni punto della traiettoria il controllo ottimale dev'essere tale da minimizzare (o massimizzare, a seconda del tipo di problema affrontato) il valore dell'Hamiltoniano H in quel punto [15]. Si hanno, quindi, due possibilità:

- **Controllo localmente non vincolato:** il valore ottimale del controllo rientra nel dominio di ammissibilità e dunque il vincolo non interviene; il valore è pari a quello fornito dalla (3.9).
- **Controllo vincolato:** il valore ottimale fornito dalla (3.9) non rientra nel dominio di ammissibilità; il controllo assume il valore massimo o minimo concesso dal dominio.

Si ha un caso particolare se l'Hamiltoniano è lineare rispetto a uno dei controlli soggetti a vincoli. Ciò fa sì che tale controllo non compaia esplicitamente nell'equazione (3.9) e quindi non possa essere determinato univocamente. Si hanno, in tal caso, ancora due possibilità (nell'espone, ci si riferisce al caso in cui il funzionale J debba essere massimizzato):

- **Controllo bang-bang:** se nell'equazione (3.7) il coefficiente del controllo in questione è non nullo, allora H è massimizzato per il valore massimo del controllo se il coefficiente è positivo o per quello minimo se il coefficiente è negativo.

- **Arco singolare:** se nell'equazione (3.7) il coefficiente del controllo in questione è identicamente nullo durante un intervallo finito di tempo, allora è necessario imporre l'annullamento di tutte le derivate successive del coefficiente rispetto al tempo, fino a quando in una di esse non appaia esplicitamente il controllo; a quel punto, il controllo ottimale viene quindi determinato ponendo uguale a zero quest'ultima derivata [16].

3.1.3 Condizioni al contorno

Si provvede ora a determinare le generiche condizioni riferite al j -esimo contorno, considerabile come l'estremo finale del $(j-1)$ -esimo arco o come l'estremo iniziale del j -esimo [14].

Annullando nell'ordine i coefficienti di δx_{j-} , δx_{j+} , δt_{j-} e δt_{j+} nella (3.6), si ottiene:

$$-\lambda_{j-}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}_{j-}} + \boldsymbol{\mu}^T \left[\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{x}_{j-}} \right] = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.10)$$

$$-\lambda_{j+}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}_{j+}} + \boldsymbol{\mu}^T \left[\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{x}_{j+}} \right] = 0 \quad j = 1, \dots, n-1 \quad (3.11)$$

$$H_{j-} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{j-}} + \boldsymbol{\mu}^T \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t_{j-}} = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.12)$$

$$H_{j+} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{j+}} + \boldsymbol{\mu}^T \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t_{j+}} = 0 \quad j = 1, \dots, n-1 \quad (3.13)$$

Le equazioni (3.10) e (3.12) sono prive di significato all'inizio della traiettoria ($j=0$), mentre le equazioni (3.11) e (3.13) ne sono prive al suo termine ($j=n$). Eliminando dalle equazioni (3.10)÷(3.13) le costanti aggiunte $\boldsymbol{\mu}$, si ottengono le condizioni al contorno di ottimo del tipo:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}_{(j-1)+}, \mathbf{x}_{j-}, \boldsymbol{\lambda}_{(j-1)+}, \boldsymbol{\lambda}_{j-}, t_{(j-1)+}, t_{j-}) = 0 \quad (3.14)$$

Tali condizioni al contorno, insieme a quelle assegnate dall'equazione (3.2), completano il sistema differenziale fornito dalle derivate delle variabili di stato, equazioni (3.1), e dalle equazioni di Eulero-Lagrange per le variabili aggiunte, equazioni (3.8).

Si consideri ora una generica variabile di stato x sottoposta a particolari condizioni al contorno. Le equazioni (3.10) e (3.11) forniscono particolari condizioni di ottimo per la variabile aggiunta corrispondente λ_x :

- se la variabile di stato x è assegnata in modo esplicito all'istante iniziale (il vettore delle condizioni imposte χ contiene l'equazione $x_0 - a = 0$), non insistono condizioni sulla corrispondente variabile aggiunta (λ_{x_0} “libera”); analogamente per il tempo finale;
- se il valore iniziale della variabile di stato, x_0 , non compare né nella funzione φ né nelle condizioni al contorno, la corrispondente variabile aggiunta ha valore nullo all'istante iniziale ($\lambda_{x_0} = 0$); anche in questo caso la situazione è analoga per il tempo finale;
- se una variabile di stato è continua e non assegnata al punto interno i (χ contiene l'equazione $x_{j_+} = x_{j_-}$), la corrispondente variabile aggiunta è anch'essa continua ($\lambda_{x,j_+} = \lambda_{x,j_-}$);
- se una variabile di stato è continua e assegnata esplicitamente a un contorno interno (χ contiene le equazioni $x_{j_+} = x_{j_-} = a$), la corrispondente variabile aggiunta presenta una discontinuità “libera”, cioè il valore di λ_{x,j_+} è indipendente da quello di λ_{x,j_-} e dev'essere determinato dalla procedura di ottimizzazione.

In maniera analoga, se l'Hamiltoniano H non dovesse dipendere esplicitamente dal tempo, le equazioni (3.12) e (3.13) fornirebbero particolari condizioni al contorno:

- se il tempo iniziale t_0 non compare esplicitamente né nelle condizioni al contorno χ né nella funzione φ , allora l'Hamiltoniano assume valore iniziale nullo, $H_0 = 0$; la stessa situazione si ha nel caso in cui sia il tempo finale t_n a non comparire esplicitamente né in χ né in φ , con $H_n = 0$;
- se il tempo intermedio t_j non compare esplicitamente nella funzione φ , allora l'Hamiltoniano è continuo in quel punto, con $H_{j_+} = H_{j_-}$;
- se il tempo intermedio t_j è esplicitamente assegnato (vale a dire se in χ assume un valore preciso, $t_{j_+} = t_{j_-} = a$), H avrà in quel punto una discontinuità “libera”.

3.2 Problema differenziale ai limiti

Il metodo indiretto impiegato per ottimizzare le trasferte orbitali prevede l'applicazione della teoria del controllo ottimale al sistema di equazioni (3.1), con condizioni al contorno che dipendono dalle orbite tra cui si svolge la trasferta. Ciò fa emergere un nuovo sistema di equazioni differenziali ai limiti (BVP, *Boundary Value Problem*), in cui i valori iniziali di alcune variabili sono incogniti.

Al fine di superare questa problematica, bisogna ricercare degli opportuni valori iniziali che consentano, attraverso l'integrazione numerica del sistema differenziale, di soddisfare tutte le condizioni al contorno, sia imposte che di ottimo. Di seguito si espone il metodo di risoluzione del BVP e la formulazione del problema di ottimo che meglio si adatta alle sue caratteristiche.

Il BVP è costituito dalle equazioni differenziali (3.1) e (3.8), con controlli determinati dalle equazioni algebriche (3.9), supportate dalle condizioni al contorno imposte (3.2) e di ottimo (3.14). Il problema presenta alcune peculiarità:

- l'intervallo di integrazione è suddiviso in sotto-intervalli in cui le equazioni differenziali possono avere differente espressione;
- la durata di ciascun sotto-intervallo è generalmente incognita;
- le condizioni al contorno possono essere non-lineari e coinvolgere i valori delle variabili, sia ai contorni esterni che a quelli interni;
- le variabili possono presentare discontinuità ai contorni interni, dopo le quali il loro valore potrebbe essere incognito.

La principale difficoltà che emerge nell'applicazione delle tecniche di ottimizzazione indiretta è la risoluzione del problema differenziale ai limiti; il metodo per affrontare questo problema è quindi uno strumento fondamentale. La soluzione del problema differenziale ai limiti viene ricercata riducendo quest'ultimo a una successione di problemi ai valori iniziali, alla cui convergenza si giunge attraverso l'applicazione del metodo di Newton.

3.2.1 Definizione dei parametri

Per prima cosa, è utile aggirare il problema rappresentato dall'indeterminatezza della durata di ciascun sotto-intervallo. Per fare ciò, si esegue un cambio di variabile sostituendo la variabile indipendente t con una nuova variabile ε , definita, per il generico j -esimo sotto-intervallo, come

$$\varepsilon = j - 1 + \frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} = j - 1 + \frac{t - t_{j-1}}{\tau_j} \quad (3.15)$$

dove τ_j indica la durata, generalmente incognita, del sotto-intervallo. In questo modo, i contorni interni ed esterni risultano fissati, grazie all'introduzione dei parametri incogniti τ_j , e corrispondono a valori interi consecutivi della nuova variabile indipendente ε .

Nel descrivere il metodo, si fa riferimento al generico sistema di equazioni che risulta dalle (3.1) e (3.8), in cui i controlli sono stati sostituiti dalle espressioni (3.9). Il problema che si ottiene è dunque differenziale nelle variabili, non più distinte, di stato e aggiunte $\mathbf{y} = (\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}^*(\mathbf{y}, t) \quad (3.16)$$

Poiché nel problema in esame compaiono parametri costanti (come la durata dei sotto-intervalli τ_j e i valori delle variabili dopo le discontinuità), è comodo introdurre un nuovo vettore $\mathbf{z} = (\mathbf{y}, \mathbf{c})$, contenente la variabili di stato e aggiunte e il nuovo vettore \mathbf{c} dei parametri costanti.

Attuando il cambio di variabile indipendente, il sistema di equazioni differenziali assume la forma:

$$\frac{d\mathbf{z}}{d\varepsilon} = \mathbf{f}(\mathbf{z}, \varepsilon) \quad (3.17)$$

Esplicitando il secondo membro, per le variabili di stato e aggiunte si ha:

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\varepsilon} = \tau_j \frac{d\mathbf{y}}{dt} \quad (3.18)$$

mentre per i parametri costanti si ha, ovviamente:

$$\frac{d\mathbf{c}}{d\varepsilon} = 0 \quad (3.19)$$

Senza distinguere tra condizioni imposte e di ottimo, le condizioni al contorno sono esprimibili come

$$\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{s}) = 0 \quad (3.20)$$

dove \mathbf{s} è un vettore contenente i valori che le variabili assumono a ogni contorno (interno o esterno) $\varepsilon = 0, 1, \dots, n$ e i parametri incogniti:

$$\mathbf{s} = (\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n, \mathbf{c}) \quad (3.21)$$

3.2.2 Processo iterativo

Generalmente, i valori di alcune variabili sono incogniti. Per questo la ricerca della soluzione consiste nel determinare, attraverso un processo iterativo, quali sono i valori che queste devono assumere al fine di soddisfare le equazioni (3.20). Si suppone che nessuno dei valori iniziali sia noto, per cui alla prima iterazione si devono scegliere dei valori di tentativo, contenuti nel vettore \mathbf{p}^1 . Alla r -esima

iterazione le equazioni (3.17) vengono integrate con i valori iniziali \mathbf{p}^r risultanti dall'iterazione precedente. Si fissa dunque:

$$\mathbf{z}(0) = \mathbf{p}^r \quad (3.22)$$

Fatto ciò, si integrano le equazioni lungo l'intera traiettoria, tenendo conto delle eventuali discontinuità delle variabili ai contorni interni. In ciascun contorno viene determinato il valore delle variabili di stato e, una volta conclusa l'integrazione, si calcola l'errore sulle condizioni al contorno Ψ^r alla r -esima iterazione.

Una piccola variazione Δp porta a variare l'errore sulle condizioni al contorno di una quantità, se si trascurano i termini superiori al primo ordine, pari a:

$$\Delta \Psi = \left[\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{p}} \right] \Delta \mathbf{p} \quad (3.23)$$

Si vuole annullare l'errore sulle condizioni al contorno, ottenendo quindi $\Delta \Psi = -\Psi^r$. Per fare ciò, a ogni iterazione, i valori iniziali vengono corretti di una quantità

$$\Delta \mathbf{p} = \mathbf{p}^{r+1} - \mathbf{p}^r = - \left[\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{p}} \right]^{-1} \Psi^r \quad (3.24)$$

La correzione viene effettuata fino a quando le condizioni al contorno (3.20) non risultano verificate con la precisione desiderata. La matrice che nell'espressione (3.23) moltiplica $\Delta \mathbf{p}$ viene calcolata come prodotto di due matrici:

$$\left[\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{p}} \right] = \left[\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{s}} \right] \left[\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{p}} \right] \quad (3.25)$$

La prima matrice si ottiene derivando le condizioni al contorno rispetto alle grandezze che vi compaiono. La seconda, che contiene le derivate dei valori delle variabili ai contorni rispetto ai valori iniziali, cioè i valori che vengono assunti ai contorni $\varepsilon = 0, 1, \dots, n$ dalla matrice

$$\left[\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{p}} \right] = [\mathbf{g}(\varepsilon)] \quad (3.26)$$

si ottiene integrando il sistema di equazioni differenziali che emerge dalla derivazione del sistema principale (3.17) rispetto a ciascuno dei valori iniziali:

$$[\dot{\mathbf{g}}] = \frac{d}{d\varepsilon} \begin{bmatrix} \partial \mathbf{z} \\ \partial \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial \\ \partial \mathbf{p} \end{bmatrix} \left(\frac{d\mathbf{z}}{d\varepsilon} \right) = \begin{bmatrix} \partial \mathbf{f} \\ \partial \mathbf{p} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

dove il punto $\dot{}$ indica ora la derivata rispetto alla nuova variabile indipendente ε .

EsPLICITANDO lo Jacobiano dell'espressione (3.17), l'equazione (3.27) diventa:

$$[\dot{\mathbf{g}}] = \begin{bmatrix} \partial \mathbf{f} \\ \partial \mathbf{z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial \mathbf{z} \\ \partial \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial \mathbf{f} \\ \partial \mathbf{z} \end{bmatrix} [\mathbf{g}] \quad (3.28)$$

I valori iniziali del sistema omogeneo (3.28) si ricavano derivando la relazione (3.22); così facendo si ottiene la matrice identica:

$$[\mathbf{g}(0)] = \begin{bmatrix} \partial \mathbf{z}(0) \\ \partial \mathbf{p} \end{bmatrix} = [\mathbf{I}] \quad (3.29)$$

Si noti che col metodo sopradescritto è possibile anche trattare le discontinuità delle variabili. Infatti, se si considera una discontinuità localizzata nel punto j , è sufficiente aggiornare il vettore delle variabili \mathbf{z} e la matrice \mathbf{g} attraverso una relazione \mathbf{h} , la quale lega i valori delle variabili prima e dopo la suddetta discontinuità:

$$\mathbf{z}_{j+} = \mathbf{h}(\mathbf{z}_{j-}) \quad (3.30)$$

$$[\mathbf{g}_{j+}] = \begin{bmatrix} \partial \mathbf{h} \\ \partial \mathbf{z} \end{bmatrix} [\mathbf{g}_{j-}] \quad (3.31)$$

Ciò permette, all'interno della definizione del vettore \mathbf{s} , di distinguere tra i vettori \mathbf{y}_{j+} e \mathbf{y}_{j-} , in quanto l'uno è funzione nota, attraverso \mathbf{h} , dell'altro e del vettore \mathbf{c} .

Il problema si semplifica notevolmente se, come nel caso qui esposto, alcuni dei valori iniziali delle variabili sono noti. Il vettore \mathbf{p} si riduce quindi essenzialmente alla stima delle sole componenti incognite di $\mathbf{z}(0)$, mentre il vettore Ψ alle sole condizioni al contorno non esplicitate al tempo iniziale.

3.2.3 Approccio numerico

La matrice dell'equazione (3.24) può essere valutata numericamente: la riga i -esima viene ottenuta variando la i -esima componente di \mathbf{p} di una piccola quantità $\Delta \mathbf{p}$ e successivamente integrando le equazioni (3.17). Diventa così possibile il calcolo della variazione delle condizioni al contorno $\Delta \Psi(\Delta \mathbf{p})$ e, linearizzando, ottenere la riga corrispondente come $\Delta \Psi^T / \Delta \mathbf{p}$. Empiricamente, si è trovato che valori adatti di $\Delta \mathbf{p}$ sono nell'ordine di $10^{-6} \div 10^{-7}$ [14].

Questa procedura permette, in alcuni casi, una soluzione più rapida e meno complessa del BVP, anche se non sempre è in grado di garantire la convergenza: la determinazione della matrice nell'equazione (3.24) è infatti meno accurata rispetto al suo calcolo attraverso la soluzione del sistema (3.28) e, stando la grande sensibilità del problema, le approssimazioni numeriche introdotte possono compromettere la convergenza.

Una procedura numerica simile può essere impiegata per il calcolo dello Jacobiano della matrice $[\partial\Psi/\partial\mathbf{s}]$. Tuttavia, si è preferito mantenere la valutazione analitica. Per l'impostazione dei codici, i valori ottenuti numericamente sono usati per verificare, tramite il confronto con quelli forniti dalle espressioni analitiche dello Jacobiano e della matrice $[\partial\Psi/\partial\mathbf{s}]$, l'esattezza di queste espressioni.

L'integrazione delle equazioni differenziali, sia per il sistema principale (3.17) che per quello omogeneo (3.28), viene svolta con un metodo a passo e ordine variabile basato sulle formule di Adams [17].

Negli esempi che seguono, la precisione richiesta è pari a 10^{-7} ; si richiede, quindi, che l'errore massimo $E_{max} = \max_i(\Psi_i)$ sulle condizioni al contorno sia inferiore a questo valore.

La linearizzazione introdotta per il calcolo della correzione $\Delta\mathbf{p}$ data dall'equazione (3.24), da apportare ai valori iniziali di tentativo, introduce errori che possono compromettere la convergenza, facendo aumentare anziché diminuire, l'errore sulle condizioni al contorno. Ecco alcuni accorgimenti che migliorano la procedura.

- Per evitare di allontanarsi eccessivamente dalla soluzione, la correzione apportata è una frazione di quella prevista, cioè:

$$\mathbf{p}^{r+1} = \mathbf{p}^r + K_1\Delta\mathbf{p} \quad (3.32)$$

con $K_1 = 0.1 \div 1$, valori determinati empiricamente durante le prime prove dei codici, a seconda che la soluzione di partenza sia relativamente lontana o vicina a quella cercata.

- Ad ogni iterazione, dopo aver determinato il nuovo vettore dei valori iniziali di tentativo \mathbf{p}^{r+1} attraverso la (3.32) e aver integrato le equazioni del moto, si confronta l'errore massimo sulle condizioni al contorno E_{max}^{r+1} con quello ottenuto all'iterazione precedente E_{max}^r . Se l'errore massimo è inferiore ad un multiplo di quello precedente, cioè se $E_{max}^{r+1} < K_2 E_{max}^r$, si procede con la nuova iterazione. Nelle prime iterazioni, al fine di convergere alla soluzione, l'errore può aumentare; per questo motivo, il valore di K_2 deve essere superiore all'unità: un valore $K_2 = 2 \div 3$ garantisce buoni risultati [14].
- Se l'errore alla nuova iterazione è troppo grande rispetto al precedente, si procede alla bisezione della correzione apportata, dimezzandola. Si integrano, quindi, le equazioni del moto con i valori di tentativo

$$\mathbf{p}^{r+1} = \mathbf{p}^r + K_1 \Delta \mathbf{p} / 2 \quad (3.33)$$

Si ripete poi il confronto tra il nuovo errore massimo ottenuto e quello dell'iterazione precedente, ripetendo, se necessario, la bisezione. Il codice assume un numero massimo di bisezioni pari a 5; dopo il superamento di questo numero il procedimento si arresta, poiché la soluzione di tentativo scelta non risulta in grado di condurre a convergenza.

4. Definizione del problema

Dopo aver affrontato, nel capitolo precedente, la teoria del controllo ottimale, si espone ora il problema di ottimo della riconfigurazione orbitale di un satellite *deputy*, attivo, rispetto a un satellite *chief*, passivo. Dopo aver introdotto gli elementi orbitali relativi, strumento essenziale per descrivere il moto relativo dei due satelliti, si illustra la forma che le equazioni e le espressioni della teoria del controllo ottimale assumono quando applicate a un problema di questo genere.

4.1 Elementi orbitali relativi

Come visto, si può descrivere il moto di un satellite nel sistema ECI con gli elementi orbitali classici:

$$\boldsymbol{\alpha}_{OE} = (a \ e \ i \ \Omega \ \omega \ M)^T \quad (4.1)$$

Tale descrizione è però vulnerabile a singolarità nel caso di orbite quasi-circolari. Per evitare ciò, si modifica l'insieme degli elementi classici adottando l'argomento medio della latitudine u , definito nella (2.16), e il vettore eccentricità e . Quest'ultimo, di modulo pari ad e , applicato nell'attrattore e orientato verso il perigeo, può essere scritto rispetto al sistema di riferimento ECI come:

$$\mathbf{e} = (e_x \ e_y)^T = e (\cos \omega \ \sin \omega)^T \quad (4.2)$$

Si avrà quindi il seguente insieme di elementi orbitali:

$$\boldsymbol{\alpha} = (a \ e \ i \ \Omega \ e_x \ e_y)^T \quad (4.3)$$

Il moto relativo del *deputy* rispetto al *chief* può essere parametrizzato usando gli *elementi orbitali relativi* (ROE, *Relative Orbital Elements*), combinazioni non lineari degli elementi della (4.3), attraverso il vettore quasi-non-singolare:

$$\delta\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \delta a \\ \delta L \\ \delta e_x \\ \delta e_y \\ \delta i_x \\ \delta i_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta a/a_c \\ \Delta u + \Delta\Omega \cos i_c \\ e_d \cos \omega_d - e_c \cos \omega_c \\ e_d \sin \omega_d - e_c \sin \omega_c \\ \Delta i \\ \Delta\Omega \sin i_c \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

dove i pedici d e c sono relativi rispettivamente a *deputy* e *chief* e dove con $\Delta \bullet$ si è indicato l'operatore differenza $(\bullet)_d - (\bullet)_c$. Si noti inoltre che la differenza di semiassi è stata normalizzata con il semiasse dell'orbita del *chief* al fine di adimensionalizzarla, e che con δL si è indicata la longitudine media relativa.

Il vettore (4.4), pur evitando singolarità per le orbite quasi-circolari, non risulta unicamente definito per orbite equatoriali. In tal caso è possibile utilizzare il vettore non-singolare, definito univocamente per ogni orbita dei satelliti in questione:

$$\delta \boldsymbol{\alpha}^* = \begin{bmatrix} \delta a \\ \delta L \\ \delta e_x^* \\ \delta e_y^* \\ \delta i_x^* \\ \delta i_y^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta a/a_c \\ (M_d + \omega_d + \Omega_d) - (M_c + \omega_c + \Omega_c) \\ e_d \cos(\omega_d + \Omega_d) - e_c \cos(\omega_c + \Omega_c) \\ e_d \sin(\omega_d + \Omega_d) - e_c \sin(\omega_c + \Omega_c) \\ \tan(i_d/2) \cos \Omega_d - \tan(i_c/2) \cos \Omega_c \\ \tan(i_d/2) \sin \Omega_d - \tan(i_c/2) \sin \Omega_c \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Per i propositi di questa tesi, visto il basso numero di satelliti aventi un'orbita equatoriale in LEO, il vettore quasi-non-singolare è considerata la scelta più adatta per la definizione del problema [18].

4.2 Derivate del vettore di stato

Si vogliono calcolare le variazioni degli elementi costituenti il vettore (4.4). In caso di orbita non perturbata, gli unici parametri a variare sono le anomalie medie dei due satelliti, causando a loro volta il variare della longitudine media relativa. Poiché la variazione dell'anomalia media corrisponde alla velocità angolare media del satellite lungo la sua orbita, $n = \sqrt{\mu/a^3}$, si ha:

$$\delta \dot{\boldsymbol{\alpha}}_{np} = \begin{bmatrix} 0 \\ \delta \dot{L} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{M}_d - \dot{M}_c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \sqrt{\mu} \begin{bmatrix} 0 \\ a_d^{-3/2} - a_c^{-3/2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Utilizzando lo sviluppo in serie di Taylor si ottiene

$$\delta \dot{\boldsymbol{\alpha}}_{np} = \mathbf{A} \delta \boldsymbol{\alpha} + \mathcal{O}(\delta \boldsymbol{\alpha}^2) \quad (4.7)$$

Dove la matrice \mathbf{A} è pari a:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2}n_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

con $n_c = \sqrt{\mu/a_c^3}$ velocità angolare media del *chief*.

Se si considera la presenza, a bordo del *deputy*, di un sistema di propulsione in grado di modificarne la velocità, la descrizione del sistema necessiterà di un appropriato termine di controllo, che legghi la variazione degli elementi orbitali relativi all'accelerazione applicata.

Per risolvere ciò, è possibile ricondursi alle *equazioni variazionali di Gauss* (GVE). Originariamente derivate per descrivere il moto assoluto di un singolo corpo in orbita perturbata, mettendo la variazione dei suoi elementi orbitali in relazione alle perturbazioni nella sua velocità, tali equazioni possono essere adattate a diversi scopi. Per operazioni di riconfigurazione, esse possono essere generalizzate per descrivere il moto relativo di due corpi [19]. Nel caso in esame, si ha che la variazione del vettore (4.4) dovuta ad una perturbazione dell'orbita è pari a [20]:

$$\delta\dot{\boldsymbol{\alpha}}_p = \mathbf{B}\tilde{\mathbf{u}} = \frac{1}{n_c a_c} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ \sin u & 2 \cos u & 0 \\ -\cos u & 2 \sin u & 0 \\ 0 & 0 & \cos u \\ 0 & 0 & \sin u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta V_R \\ \delta V_T \\ \delta V_N \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

dove $\tilde{\mathbf{u}}$ è il vettore di controllo, che comprende le componenti dell'accelerazione perturbativa scritte nel sistema di riferimento RTN.

È ora possibile scrivere il sistema completo di equazioni:

$$\delta\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{A}\delta\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{B}\tilde{\mathbf{u}} \quad (4.10)$$

che, scritto in forma espansa, sarà

$$\delta\dot{a} = \frac{2}{n_c a_c} \delta V_T \quad (4.11)$$

$$\delta \dot{L} = -\frac{3}{2} n_c \delta a - \frac{2 \delta V_R}{n_c a_c} \quad (4.12)$$

$$\delta \dot{e}_x = \frac{\delta V_R \sin u + 2 \delta V_T \cos u}{n_c a_c} \quad (4.13)$$

$$\delta \dot{e}_y = \frac{-\delta V_R \cos u + 2 \delta V_T \sin u}{n_c a_c} \quad (4.14)$$

$$\delta \dot{i}_x = \frac{\delta V_N \cos u}{n_c a_c} \quad (4.15)$$

$$\delta \dot{i}_y = \frac{\delta V_N \sin u}{n_c a_c} \quad (4.16)$$

Per descrivere al meglio il sistema dinamico rappresentato dai due satelliti in riconfigurazione, alle equazioni (4.11)÷(4.16) può essere aggiunta un'ulteriore equazione, ottenuta dalla (2.19), che governa la diminuzione della massa m a seguito del consumo di propellente:

$$\dot{m} = -\frac{T}{c} \quad (4.17)$$

Si intende ora operare una trasformazione per passare da un vettore di controllo formato dalle componenti dell'accelerazione ad uno costituito dal modulo del vettore spinta e dagli angoli che questo forma con il sistema di riferimento RTN. Inoltre, si vuole rendere l'argomento medio della latitudine u la nuova variabile indipendente, sostituendo il tempo.

Per fare ciò, si riscrivono le tre accelerazioni del vettore di controllo come:

$$\delta V_R = \frac{T}{m} \cos \beta \sin \alpha \quad (4.18)$$

$$\delta V_T = \frac{T}{m} \cos \beta \cos \alpha \quad (4.19)$$

$$\delta V_N = \frac{T}{m} \sin \beta \quad (4.20)$$

dove \mathbf{T} è la spinta del deputy, β è l'angolo tra il vettore \mathbf{T} e il piano orbitale e α è l'angolo tra il vettore \mathbf{T} e il versore $\hat{\mathbf{e}}_T$ del sistema di riferimento RTN.

Le espressioni (4.18)÷(4.20) possono essere sostituite nelle equazioni (4.11)÷(4.16) per ottenere la variazione del vettore degli elementi orbitali relativi in funzione del vettore spinta e degli angoli che ne esprimono l'orientamento rispetto al sistema RTN. Aggiungendo poi l'equazione (4.17) e scrivendo le derivate non più rispetto al tempo t ma rispetto all'argomento medio della latitudine u , si ottiene il sistema di equazioni differenziali:

$$\frac{d}{du}(\delta a) = 2 A \cos \beta \cos \alpha \quad (4.21)$$

$$\frac{d}{du}(\delta L) = -\frac{3}{2} \delta a - 2 A \cos \beta \sin \alpha \quad (4.22)$$

$$\frac{d}{du}(\delta e_x) = A \cos \beta \sin \alpha \sin u + 2 A \cos \beta \cos \alpha \cos u \quad (4.23)$$

$$\frac{d}{du}(\delta e_y) = -A \cos \beta \sin \alpha \cos u + 2 A \cos \beta \cos \alpha \sin u \quad (4.24)$$

$$\frac{d}{du}(\delta i_x) = A \sin \beta \cos u \quad (4.25)$$

$$\frac{d}{du}(\delta i_y) = A \sin \beta \sin u \quad (4.26)$$

$$\frac{d}{du}(m) = -\frac{T}{c} \sqrt{\frac{a_c^3}{\mu}} \quad (4.27)$$

dove si è definita l'accelerazione adimensionale

$$A = \frac{T a_c^2}{m \mu} \quad (4.28)$$

comprendendo quindi al suo interno sia una variabile, la massa, che un controllo, la spinta.

Si è assunto altresì che

$$\frac{dt}{du} = \frac{1}{n_c} = \sqrt{\frac{a_c^3}{\mu}} \quad (4.29)$$

in virtù della piccola, se confrontata con i semiassi orbitali, distanza che separa *chief* e *deputy*.

Si noti che il sistema di equazioni differenziali (4.21)÷(4.27) rappresenta il sistema (3.1) scritto per il vettore degli stati $\mathbf{x} = (\delta a, \delta L, \delta e_x, \delta e_y, \delta i_x, \delta i_y, m)^T$ e il vettore di controllo $\tilde{\mathbf{u}} = (T, \alpha, \beta)^T$ nella variabile indipendente u .

4.3 Leggi di controllo

Nel caso in esame, le leggi di controllo ottimali rappresentano gli andamenti che gli elementi di controllo T , α e β devono adottare in funzione della variabile indipendente u al fine di minimizzare l'indice di costo e, conseguentemente, la quantità di propellente consumata.

Per determinarle è necessario, in primo luogo, disporre dell'Hamiltoniano del sistema. Quest'ultimo è definibile associando una variabile aggiunta a ciascuna delle equazioni differenziali (4.21)÷(4.27):

$$\begin{aligned}
H = & \lambda_a(2A \cos \beta \cos \alpha) + \lambda_L\left(-\frac{3}{2}\delta a - 2A \cos \beta \sin \alpha\right) + \\
& + \lambda_{ex}(A \cos \beta \sin \alpha \sin u + 2A \cos \beta \cos \alpha \cos u) + \\
& + \lambda_{ey}(-A \cos \beta \sin \alpha \cos u + 2A \cos \beta \cos \alpha \sin u) + \\
& + \lambda_{ix}(A \sin \beta \cos u) + \lambda_{iy}(A \sin \beta \sin u) + \lambda_m\left(-\frac{T}{c}\sqrt{\frac{a_c^2}{\mu}}\right)
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Si introducono le seguenti definizioni:

$$\begin{aligned}
\lambda_{ex} &= \lambda_e \cos \gamma_e & \lambda_{ey} &= \lambda_e \sin \gamma_e \\
\lambda_{ix} &= \lambda_i \cos \gamma_i & \lambda_{iy} &= \lambda_i \sin \gamma_i
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Alla luce di ciò, si può riscrivere l'equazione (4.30) come

$$\begin{aligned}
H = & \lambda_a\left(2\frac{T}{m}\frac{a_c^2}{\mu}\cos \beta \cos \alpha\right) + \lambda_L\left(-\frac{3}{2}\delta a - 2\frac{T}{m}\frac{a_c^2}{\mu}\cos \beta \sin \alpha\right) + \\
& + \lambda_e\frac{T}{m}\frac{a_c^2}{\mu}\cos \beta(\sin \alpha \sin(u - \gamma_e) + 2\cos \alpha \cos(u - \gamma_e)) + \\
& + \lambda_i\frac{T}{m}\frac{a_c^2}{\mu}\sin \beta \cos(u - \gamma_i) + \lambda_m\left(-\frac{T}{c}\sqrt{\frac{a_c^3}{\mu}}\right)
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Come visto nel capitolo precedente, una volta calcolato l'Hamiltoniano del sistema è possibile ricavare le leggi di controllo imponendo l'annullamento delle sue derivate parziali rispetto agli elementi del vettore di controllo. Iniziando dall'angolo α , imponendo $\partial H/\partial\alpha = 0$, si può trovare che

$$\tan \alpha = \frac{\lambda'_L}{\lambda'_a} \quad (4.33)$$

con

$$\lambda'_a = 2\frac{a_c^2}{\mu} [\lambda_a + \lambda_e \cos(u - \gamma_e)] \quad (4.34)$$

$$\lambda'_L = \frac{a_c^2}{\mu} [-2\lambda_L + \lambda_e \sin(u - \gamma_e)] \quad (4.35)$$

Attraverso elementari relazioni goniometriche, è possibile riscrivere l'equazione (4.34) come l'insieme di equazioni:

$$\sin \alpha = \frac{\lambda'_L}{\sqrt{\lambda_a'^2 + \lambda_L'^2}} \quad \cos \alpha = \frac{\lambda'_a}{\sqrt{\lambda_a'^2 + \lambda_L'^2}} \quad (4.36)$$

Così facendo, il quadrante corretto dell'angolo può essere determinato univocamente.

Per l'angolo β , l'annullamento della derivata parziale $\partial H/\partial\beta$ permette di ottenere:

$$\tan \beta = \frac{\lambda'_i}{\sqrt{\lambda_a'^2 + \lambda_L'^2}} \quad (4.37)$$

dove

$$\lambda'_i = \frac{a_c^2}{\mu} \lambda_i \cos(u - \gamma_i) \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda_a'^2 + \lambda_L'^2} &= \frac{a_c^2}{\mu} \sqrt{(4\lambda_a^2 + 8\lambda_a\lambda_e \cos(u - \gamma_e) + 3\lambda_e^2 \cos^2(u - \gamma_e) + \\ &+ \lambda_e^2 + 4\lambda_L^2 - 4\lambda_L\lambda_e \sin(u - \gamma_e))} \end{aligned} \quad (4.39)$$

Analogamente a quanto fatto per α , si può riscrivere l'equazione (4.37) come:

$$\sin \beta = \frac{\lambda'_i}{\sqrt{\lambda_a'^2 + \lambda_L'^2 + \lambda_i'^2}} \quad \cos \beta = \frac{\sqrt{\lambda_a'^2 + \lambda_L'^2}}{\sqrt{\lambda_a'^2 + \lambda_L'^2 + \lambda_i'^2}} \quad (4.40)$$

Le equazioni (4.36) e (4.40) rappresentano le leggi di controllo ottimali per gli angoli α e β . La derivata parziale dell'Hamiltoniano (4.32) rispetto alla spinta risulta essere:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial T} = & \frac{a_c^2}{\mu} \frac{1}{m} [2\lambda_a \cos \beta \cos \alpha - 2\lambda_L \cos \beta \sin \alpha \\ & + \lambda_e \cos \beta (\sin \alpha \sin(u - \gamma_e) + 2 \cos \alpha \cos(u - \gamma_e)) + \\ & + \lambda_i \sin \beta \cos(u - \gamma_i)] - \frac{\lambda_m}{c} \sqrt{\frac{a_c^3}{\mu}} \end{aligned} \quad (4.41)$$

Sostituendovi le equazioni (4.36) e (4.40), si può scrivere

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial T} = & \frac{a_c^2}{\mu} \frac{1}{m} \frac{1}{\sqrt{\lambda_a'^2 + \lambda_L'^2 + \lambda_i'^2}} [2 \lambda'_a (\lambda_a + \lambda_e \cos(u - \gamma_e)) + \\ & + \lambda'_L (-2\lambda_L + \lambda_e \sin(u - \gamma_e)) + \lambda'_i \lambda_i \cos(u - \gamma_i)] - \frac{\lambda_m}{c} \sqrt{\frac{a_c^3}{\mu}} \end{aligned} \quad (4.42)$$

da cui è possibile infine ottenere

$$\frac{\partial H}{\partial T} = \frac{\sqrt{\lambda_a'^2 + \lambda_L'^2 + \lambda_i'^2}}{m} - \frac{\lambda_m}{c} \sqrt{\frac{a_c^3}{\mu}} \quad (4.43)$$

È importante notare come nella derivata appena calcolata non compaia la spinta: H risulta lineare rispetto alla variabile di controllo T . In questo caso, non potendo determinare, come fatto con gli angoli α e β , un valore della variabile tale da massimizzare l'Hamiltoniano (in accordo con il Principio di massimo di Pontryagin), si dispone un *controllo bang-bang*. Questa modalità di controllo, già illustrata nel precedente capitolo, prevede che il valore della variabile di controllo in questione saturi al valore massimo possibile nei punti in cui la derivata (4.43) è positiva, e a quello minimo in quelli in cui essa è negativa. Poiché in ogni momento della manovra si ha $T \in [0, T_{max}]$, risulterà:

$$T = T_{max} \quad \text{quando} \quad \frac{\partial H}{\partial T} > 0 \quad \quad T = 0 \quad \text{quando} \quad \frac{\partial H}{\partial T} < 0 \quad (4.44)$$

dove il valore di T_{max} dipende dalle caratteristiche del sistema propulsivo.

Nel contesto del controllo bang-bang, la derivata parziale dell'Hamiltoniano rispetto alla spinta, espressa nella (4.43), prende il nome di *Switching Function* (SF).

4.4 Equazioni di Eulero-Lagrange per le variabili aggiunte

Si intende ora calcolare le variazioni temporali delle variabili aggiunte, partendo dalla formulazione generica delle equazioni differenziali di Eulero-Lagrange, qui richiamata:

$$\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} = - \left(\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}} \right)^T \quad (4.45)$$

Nel caso in esame, il sistema (4.45) può essere riscritto in forma espansa come:

$$\frac{d\lambda_a}{dt} = \frac{3}{2} \lambda_L \quad (4.46)$$

$$\frac{d\lambda_L}{dt} = \frac{d\lambda_{ex}}{dt} = \frac{d\lambda_{ey}}{dt} = \frac{d\lambda_{ix}}{dt} = \frac{d\lambda_{iy}}{dt} = 0 \quad (4.47)$$

$$\frac{d\lambda_m}{dt} = K_m \frac{Ta_c^2}{\mu m^2} \quad (4.48)$$

dove per semplicità si è posto

$$\begin{aligned} K_m = & 2\lambda_a \cos \beta \cos \alpha - 2\lambda_L \cos \beta \sin \alpha \\ & + \lambda_e \cos \beta (\sin \alpha \sin(u - \gamma_e) + 2 \cos \alpha \cos(u - \gamma_e)) + \\ & + \lambda_i \sin \beta \cos(u - \gamma_i) \end{aligned} \quad (4.49)$$

Le derivate (4.46)÷(4.48) sono espresse rispetto al tempo. Volendole esprimerle rispetto alla variabile u si ottiene:

$$\frac{d\lambda_a}{du} = \frac{3}{2} \lambda_L \sqrt{\frac{a_c^3}{\mu}} \quad (4.50)$$

$$\frac{d\lambda_L}{du} = \frac{d\lambda_{ex}}{du} = \frac{d\lambda_{ey}}{du} = \frac{d\lambda_{ix}}{du} = \frac{d\lambda_{iy}}{du} = 0 \quad (4.51)$$

$$\frac{d\lambda_m}{du} = K_m \frac{T}{m^2} \sqrt{\frac{a_c^7}{\mu^3}} \quad (4.52)$$

5. Metodi utilizzati

Si espongono ora le procedure e i metodi che hanno portato ai risultati finali, contenuti nel prossimo capitolo. Dopo aver spiegato l'implementazione, attraverso un codice FORTRAN, dell'ottimizzazione indiretta spiegata nel capitolo precedente, si riassume il funzionamento del metodo analitico elaborato da Costigliola e Casalino, con il quale lo strumento di ottimizzazione indiretta verrà confrontato successivamente.

5.1 Ottimizzazione indiretta

I risultati relativi ad un'ottimizzazione indiretta della traiettoria del *deputy* sono stati ottenuti attraverso un codice FORTRAN, che utilizza un processo iterativo per risolvere il problema differenziale costituito dalle equazioni (4.21)÷(4.27) e (4.50)÷(4.52). Tali equazioni sono state inserite direttamente nel codice come funzioni delle sole variabili aggiunte e di parametri quali:

- semiasse maggiore di riferimento a_c
- velocità efficace di scarico c
- accelerazione massima applicabile dai thruster T/m

Non vi compaiono quindi esplicitamente gli angoli di controllo, che saranno determinati in seguito.

5.1.1 Implementazione

Se si suddivide la traiettoria in esame in N intervalli, il codice FORTRAN permette di determinare il valore di ognuna delle variabili in ognuno degli $N + 1$ punti d'interesse equidistanti che si vengono a configurare durante la manovra. Il valore utilizzato per tutte le simulazioni è stato $N = 200$.

Le variabili del problema sono raccolte in un vettore Y di 15 elementi, comprendente, nell'ordine:

- elementi orbitali relativi del deputy $(\delta a, \delta L, \delta e_x, \delta e_y, \delta i_x, \delta i_y)$
- variabili aggiunte agli elementi orbitali relativi $(\lambda_a, \lambda_L, \lambda_{e_x}, \lambda_{e_y}, \lambda_{i_x}, \lambda_{i_y})$
- massa del deputy m
- variabile aggiunta alla massa λ_m

A queste si aggiunge un'ultima variabile "fittizia", ossia non impiegata dall'attuale versione del codice e utilizzata, grazie alla definizione di un'appropriata equazione differenziale, per spingere l'integratore a passo variabile a regolare il proprio passo di integrazione migliorando le caratteristiche di convergenza del codice.

Come già accennato, la convergenza di un metodo indiretto è influenzata dalla bontà dei valori di tentativo, con i quali iniziare il processo d'integrazione. Questi, raccolti in un vettore YP , sono:

- valori iniziale e finale dell'argomento medio della latitudine (u_0, u_f)
- valori iniziali delle variabili aggiunte agli elementi orbitali $(\lambda_a, \lambda_L, \lambda_{ex}, \lambda_{ey}, \lambda_{ix}, \lambda_{iy})_0$

I valori u_0 e u_f sono già presenti nelle condizioni note, contenute nel vettore rho . Vi figurano anche i valori iniziali e finali dei ROE (che discendono dalle specifiche del caso in analisi), il valore iniziale della variabile fittizia, quello di λ_m e quello della massa del *deputy*, considerata inizialmente di valore unitario, al fine di ottenere risultati più facilmente scalabili.

Il codice utilizza i valori di tentativo contenuti in YP e quelli noti al tempo iniziale per integrare e calcolare le variabili contenute in Y per ognuno degli $N + 1$ istanti d'interesse.

Dopo aver calcolato l'errore tra le condizioni note e le variabili ottenute, YP viene modificato per portare tale errore al di sotto di una soglia accettabile e viene ripetuta l'integrazione, ottenendo un nuovo set di variabili. Una volta che il maggiore tra gli errori ottenuti dal confronto tra il vettore Y e le condizioni note risulta sufficientemente piccolo, il metodo è giunto a convergenza.

5.1.2 Elementi di controllo, coordinate RTN e ΔV

Partendo dagli andamenti dei ROE e delle variabili aggiunte così ottenuti, è possibile calcolare gli andamenti degli elementi di controllo (spinta, angolo α e angolo β) come illustrato nel Capitolo 4, nonché risalire alla traiettoria del *deputy* nel sistema di riferimento RTN, grazie alle equazioni [21]:

$$\begin{bmatrix} r_R/a_c \\ r_T/a_c \\ \dot{r}_R/a_c \\ \dot{r}_T/a_c \\ r_N/a_c \\ \dot{r}_N/a_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\cos u & -\sin u & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \sin u & -2 \cos u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n \sin u & -n \cos u & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2}n & 0 & 2n \cos u & 2n \sin u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin u & -\cos u \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n \cos u & n \sin u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta a \\ \delta L \\ \delta e_x \\ \delta e_y \\ \delta i_x \\ \delta i_y \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Basandosi sul valore della massa m al tempo finale, si calcola il ΔV caratteristico della manovra utilizzando l'equazione del razzo (2.21).

5.2 Metodo analitico

Lo strumento di ottimizzazione indiretta è stato utilizzato per validare il metodo analitico sviluppato da Costigliola e Casalino nel 2023 [4]. Tale metodo propone una strategia semplificata per la riconfigurazione di due satelliti in orbite quasi circolari terrestri, ponendo particolare attenzione alla riduzione del consumo di propellente e usando i ROE come vettore di stato $\delta\alpha$.

5.2.1 Procedimento

Il problema è posto come una riconfigurazione a tempo fisso: dato lo stato iniziale $\delta\alpha_0$ al tempo t_0 (corrispondente all'angolo u_0) e lo stato obiettivo $\delta\alpha_f$ al tempo finale t_f (corrispondente all'angolo u_f), si cercano N impulsi in corrispondenza degli angoli u_j tali che

$$n_c a_c (\delta\alpha_f - \Phi(u_f, u_0) \delta\alpha_0) = \sum_{j=1}^N \Phi(u_f, u_j) \Psi_j(u_j) \delta v_j \quad (5.2)$$

dove $\Phi(u, u_0)$ è la matrice di transizione di stato che descrive l'evoluzione naturale dei ROE, Ψ_j è la matrice derivata dall'integrazione delle equazioni variazionali di Gauss, δv_j rappresenta l'impulso di durata infinitesima applicato al tempo u_j .

Nel caso piano, il metodo analitico impone, almeno in via iniziale, delle assunzioni che riducono il numero di parametri liberi. In particolare, vengono utilizzati tre impulsi: uno radiale-tangenziale all'inizio della manovra e due puramente tangenziali per correggerla e terminarla.

Fatte queste assunzioni, il problema di riconfigurazione piana, descritta dall'equazione

$$n_c a_c \begin{bmatrix} \Delta\delta a \\ \Delta\delta L \\ \Delta\delta e_x \\ \Delta\delta e_y \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^3 \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -3(u_f - u_j) \\ \sin(u_j) & 2 \cos(u_j) \\ -\cos(u_j) & 2 \sin(u_j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta v_{Rj} \\ \delta v_{Tj} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

si semplifica, divenendo un sistema lineare di quattro equazioni in quattro incognite (i componenti diversi da zero) perfettamente risolvibile. Per definire gli istanti in cui effettuare gli impulsi, il metodo fissa il primo impulso all'inizio della manovra, discretizzando poi l'intervallo rimanente al fine di selezionare una serie di possibili istanti per gli altri due impulsi. Si effettua poi una ricerca a griglia, per individuare la combinazione di istanti in grado di minimizzare l'indice di consumo, definito come:

$$J = \left(\sum_{j=1}^3 \sqrt{\delta v_{Rj}^2 + \delta v_{Tj}^2} \right)^2 \quad (5.4)$$

L'aver escluso a priori i componenti radiali del secondo e del terzo impulso fa sì che la soluzione così trovata sia subottimale, ossia con J non sufficientemente basso. Per ovviare a questo problema, il metodo di Costigliola e Casalino prevede una fase di affinamento della soluzione: basandosi sul soddisfacimento delle condizioni di ottimo e sulla risoluzione del sistema di equazioni di Karush-Kuhn-Tucker (KKT), si è in grado di calcolare le correzioni da apportare ai componenti radiali e tangenziali dei tre impulsi, al fine di abbassare ulteriormente l'indice di consumo J [4, 22].

5.2.2 Coordinate RTN, ROE e durata degli archi propulsi

I codici originali MATLAB che implementano il processo analitico sopra descritto forniscono gli istanti u_j e i componenti radiali δv_{Rj} e tangenziali δv_{Tj} dei tre impulsi applicati, nonché il costo J dell'intera manovra (pari al quadrato del relativo ΔV).

A partire da questi dati, si possono facilmente calcolare gli angoli di controllo e il modulo δv_j di ogni impulso. Attraverso un propagatore orbitale non-perturbato è inoltre possibile calcolare le coordinate nel sistema di riferimento RTN del satellite durante tutta la manovra. Una volta trovate le coordinate RTN, invertendo le equazioni (5.1) si risale ai valori dei ROE.

Infine, è possibile calcolare la durata, in termini di intervallo angolare Δu_j , che ogni impulso di durata infinitesimale avrebbe se trasportato nel caso reale di una propulsione continua:

$$\Delta u_j = n_c \frac{\delta v_j}{T/m} \quad (5.5)$$

dove n_c indica la velocità angolare orbitale del *chief*.

6. Presentazione e commento dei risultati

In questo capitolo si analizzano i risultati ottenuti nell'ambito dell'ottimizzazione indiretta delle traiettorie orbitali di satelliti in LEO e del confronto dei risultati così ottenuti con le soluzioni individuate tramite il metodo analitico elaborato da Costigliola e Casalino nel 2023.

I due metodi sono stati applicati a 11 differenti casi di riconfigurazione orbitale, conducendo a convergenza più di 800 simulazioni tramite il codice FORTRAN per l'ottimizzazione indiretta, denominato RV2.

Per ogni simulazione, si è variato sempre almeno uno tra i seguenti parametri: semiasse orbitale di riferimento a_c , velocità efficace di scarico c , durata della manovra (espressa come numero di orbite) e accelerazione T/m . Bisogna notare che quest'ultimo parametro è riferito al valore iniziale della massa, che, come spiegato nel capitolo precedente, è stato impostato pari all'unità per facilitare la scalabilità delle soluzioni. Con la graduale riduzione della massa del *deputy*, per via dell'espulsione del propellente, l'accelerazione effettiva aumenta, mantenendo costante il valore di spinta T . Nelle analisi condotte, però, il consumo di propellente risulta così esiguo da rendere il valore dell'accelerazione pressoché costante.

Dopo un'iniziale fase di validazione degli strumenti utilizzati, il lavoro si è concentrato sull'analisi dell'influenza del valore dell'accelerazione su ognuno degli 11 casi e sul confronto dei dati ottenuti a riguardo con le soluzioni analitiche impulsive.

6.1 Casi di studio

La Tabella 6.1 riporta gli 11 casi di riconfigurazione orbitale *in-plane* analizzati, differenti per ROE iniziali e finali e per la loro variazione. I ROE sono indicati come lunghezze, poiché sono stati dimensionalizzati moltiplicandoli per il semiasse maggiore di riferimento dell'orbita del *chief* a_c . Per una maggiore sintesi, non sono stati indicati nella tabella gli elementi riguardanti l'inclinazione relativa, sempre uguali a zero.

Si può osservare come nei casi da **1** a **5** la maggior variazione si riscontri per la longitudine media relativa δL . I casi da **6** a **11** mostrano invece una maggiore variazione dell'eccentricità, con predominanza della componente δe_x per i casi **6**, **7** e **8** e della componente δe_y per i casi **9**, **10** e **11**.

Caso	$a_c(\delta a, \delta L, \delta e_x, \delta e_y)_0$ [m]	$a_c(\delta a, \delta L, \delta e_x, \delta e_y)_f$ [m]	$a_c \Delta(\delta a, \delta L, \delta e_x, \delta e_y)$ [m]	Predominanza
1	-100, 1000, 500, -10	0, 9000, 500, -10	100, 8000, 0, 0	$\Delta\delta L$
2	-500, 1500, 20, 30	0, 100, 0, 0	500, -1400, -20, -30	$\Delta\delta L$
3	-50, -10000, 150, -50	0, -4000, 100, 0	50, 6000, -50, 50	$\Delta\delta L$
4	60, -10000, 230, -50	0, -3000, 150, 0	-60, 7000, -80, 50	$\Delta\delta L$
5	50, -10000, 230, -50	0, -5000, 150, 0	-50, 5000, -80, 50	$\Delta\delta L$
6	50, -10000, 230, -50	0, -10000, 150, 0	-50, 0, -80, 50	$\Delta\delta e_x$
7	0, 10000, 500, -10	0, 10000, 200, 100	0, 0, -300, 110	$\Delta\delta e_x$
8	0, 10000, 500, -100	0, 10000, 0, 0	0, 0, -500, 100	$\Delta\delta e_x$
9	0, 10000, 500, -100	0, 10000, 100, 200	0, 0, 110, -300	$\Delta\delta e_y$
10	50, -10000, -50, 230	0, -10000, 0, 150	-50, 0, 50, -80	$\Delta\delta e_y$
11	0, 10000, -100, 500	0, 10000, 0, 0	0, 0, 100, -500	$\Delta\delta e_y$

Tabella 6.1: casi di riconfigurazioni orbitali piane studiati

6.2 Fase di validazione

Si è voluto validare il codice RV2 studiando i casi **1**, **3**, **4**, **5** e **7**, osservando l'influenza dei diversi parametri sui dati raccolti e accertandosi del corretto funzionamento di tutti i codici utilizzati per la successiva elaborazione dei dati. Sono state utilizzate a questo scopo 54 diverse combinazioni di parametri, ottenute scegliendo ogni volta tra tre valori di a_c (6871, 7121 e 7371 km), tre valori di T/m ($1.0 \cdot 10^{-4}$, $1.5 \cdot 10^{-4}$ e $2.0 \cdot 10^{-4}$ m/s²) e sei valori di c (2.3, 4.5, 7.3, 10, 20 e 30 km/s). Inizialmente, le manovre sono state simulate con durata pari a 2 orbite. In seguito, si è approfondito lo studio del caso **4**, aumentando la durata della manovra fino a 6 orbite e tenendo fissa l'accelerazione a $1.0 \cdot 10^{-4}$ m/s². Tutti i dati osservati sono in accordo con la teoria, validando gli strumenti utilizzati.

6.2.1 Consumo di propellente

La Figura 6.1 illustra la massa di propellente consumato durante la manovra m_p , espressa come percentuale della massa iniziale del deputy, in funzione della velocità di scarico c per il caso **1**. L'abbassamento della massa di propellente al crescere di c corrisponde a quanto previsto dall'equazione del razzo (2.22). Il consumo di propellente diminuisce inoltre con l'aumentare

dell'accelerazione, poiché, come si osserverà in seguito, all'aumentare del rapporto T/m una stessa manovra è completabile con archi propulsi di durata via via minore.

Infine, a un maggior semiasse maggiore di riferimento a_c , e quindi a una maggiore distanza dalla Terra, corrisponde un consumo inferiore, a causa dell'abbassamento del ΔV necessario al crescere della distanza dall'attrattore.

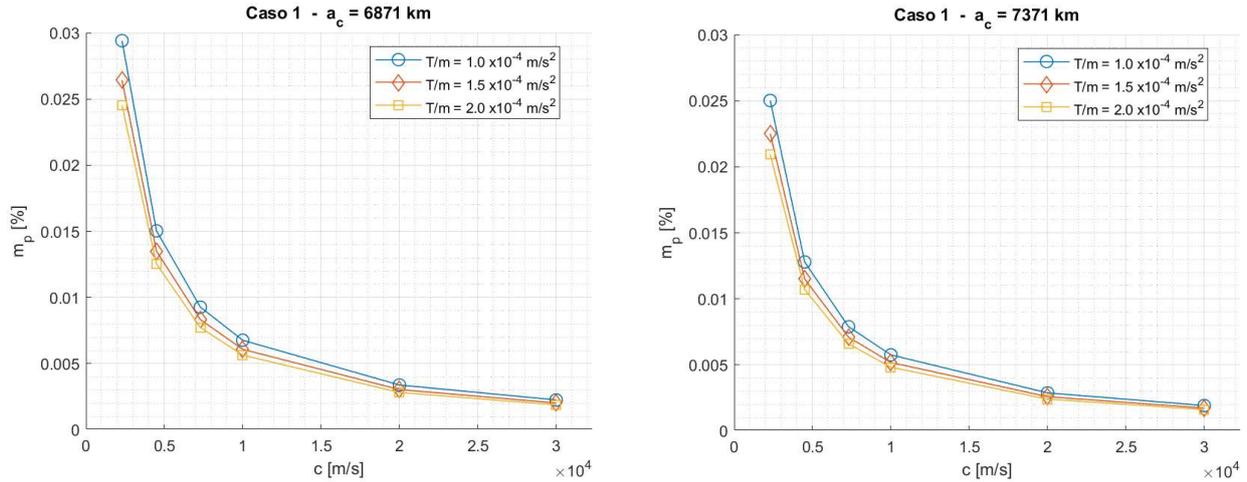


Figura 6.1: l'andamento del consumo di propellente in funzione della velocità di scarico nel caso 1; la tendenza è rappresentativa degli altri casi studiati

6.2.2 Osservazioni sulle traiettorie spaziali

Uno studio preliminare delle traiettorie del *deputy* nel sistema di riferimento RTN centrato nel *chief* ha permesso di verificare che la loro forma non dipende dalla velocità di scarico c impostata per completare la manovra, nonché di confermare la validità delle equazioni (5.1) per la conversione tra ROE e coordinate spaziali locali. Si è osservato inoltre come, a parità di altri parametri, la variazione del semiasse maggiore a_c condizioni solo marginalmente la forma delle traiettorie, senza influenzarne la precisione. L'influenza dell'accelerazione sulla forma delle traiettorie e sulla durata degli archi propulsi verrà trattata più dettagliatamente nei successivi paragrafi.

6.2.3 Osservazioni sul ΔV

L'andamento del ΔV relativo alle diverse manovre di riconfigurazione è illustrato nella Figura 6.2. Si osserva una diminuzione dei valori all'aumentare del semiasse e dell'accelerazione applicata; in linea con le previsioni teoriche, questo risultato valida ulteriormente il funzionamento del codice. Degno di nota è il fatto che i valori raccolti appaiano indipendenti dalla velocità di scarico utilizzata.

Ciò è giustificato dalla bassa onerosità delle manovre, caratterizzate da distanze molto inferiori al semiasse orbitale. Per manovre più onerose in termini di consumi, si osserverebbe un abbassamento del ΔV al decrescere di c ; questo perché un consumo di carburante maggiore (causato da una minore velocità di scarico) alleggerirebbe maggiormente il veicolo, risultando contro-intuitivamente in un aumento dell'efficienza della spinta.

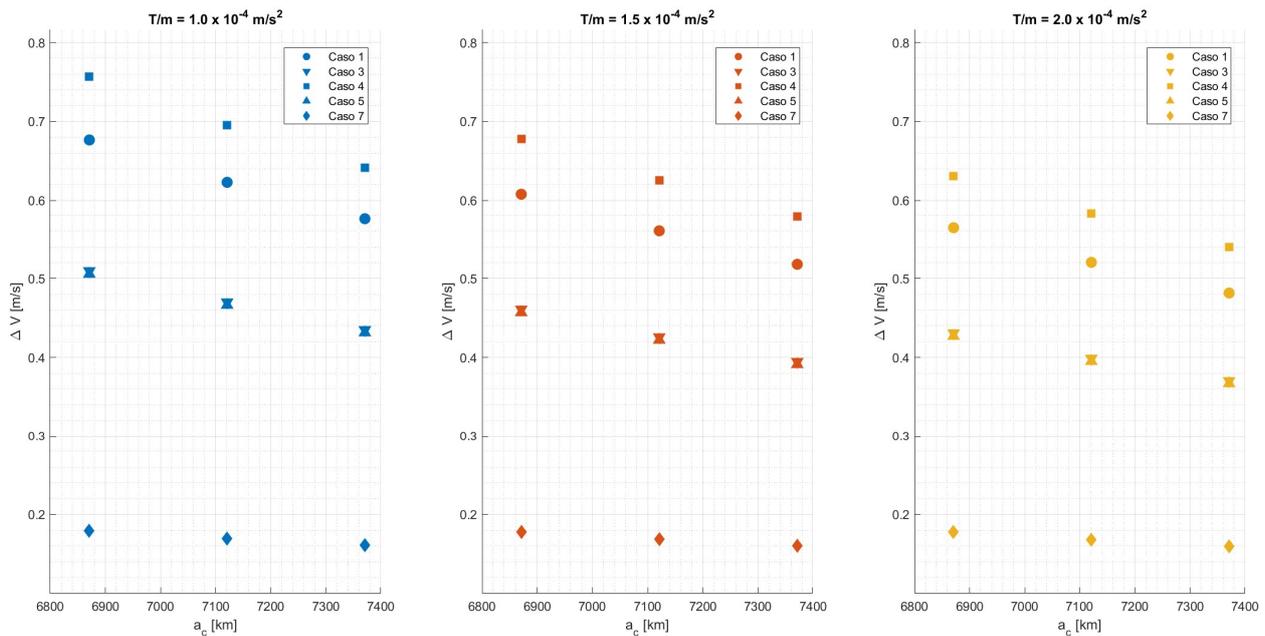


Figura 6.2: andamento dei ΔV di ogni caso al variare del semiasse orbitale e accelerazione;

6.2.4 Risultati per un numero crescente di orbite

Il caso 4 presenta il maggiore ΔV tra tutti i casi simulati. Si è scelto di utilizzare questo caso per studiare il mutare della manovra all'aumentare della sua durata. La Figura 6.3 illustra come il ΔV diminuisca all'aumentare della durata (oraria) della manovra. Tale riduzione è più pronunciata per raggi orbitali minori. Infine, la Figura 6.5 mette a confronto le traiettorie ottenute all'aumentare del numero di orbite completate dal satellite.

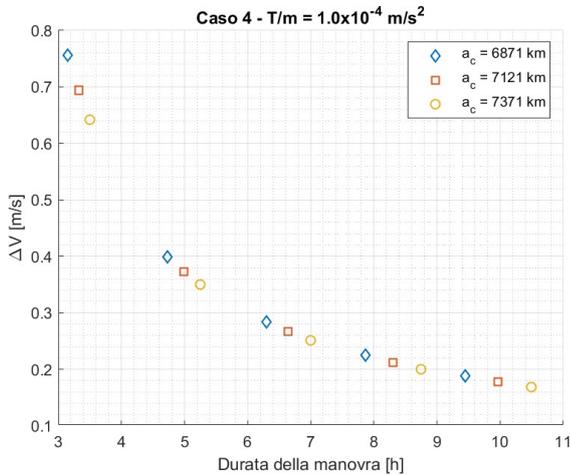


Figura 6.3: andamento del ΔV all'aumentare della durata della manovra

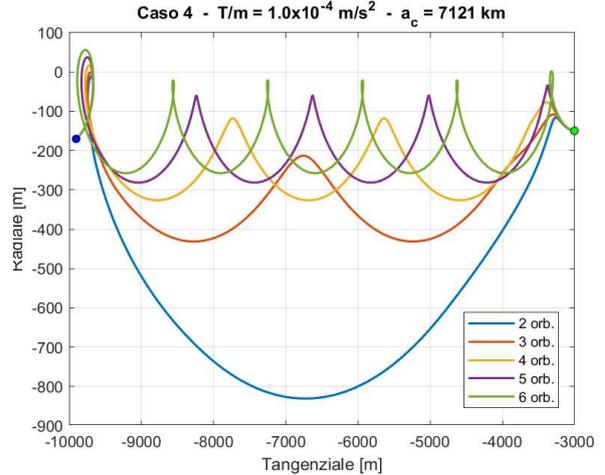


Figura 6.4: traiettoria RTN compiuta dal deputy all'aumentare della durata della manovra

6.3 Caratteristiche delle soluzioni analitiche

Nella pagina che segue sono indicate le caratteristiche principali delle soluzioni analitiche ottenute utilizzando il metodo sviluppato da Costigliola e Casalino. Il semiasse maggiore dell'orbita di riferimento è stato impostato ad $a_c = 7121$ km (corrispondente a circa 500 km dalla superficie terrestre), mentre la durata della manovra è stata mantenuta a 2 orbite ($0 \text{ rad} \leq u \leq 12.57 \text{ rad}$).

Nella Tabella 6.2 sono riassunte, per ognuno degli 11 casi analizzati, le principali caratteristiche dei tre impulsi. La Tabella 6.3 indica invece, sempre per ognuno degli 11 casi, il valore ΔV totale della manovra, pari alla radice quadrata dell'indice di costo definito nella (5.3). Si può notare come i casi in cui predomina la variazione dell'eccentricità relativa $\Delta \delta e$ risultino notevolmente meno impegnativi, in termini energetici, dei casi dove a dominare è la variazione della longitudine media relativa $\Delta \delta L$, con valori di ΔV inferiori dall'88% (caso 10) al 30% (caso 11) rispetto alla manovra più dispendiosa dal punto di vista energetico (caso 4).

Questi dati sono stati utilizzati per elaborare i grafici di confronto tra le soluzioni suggerite dal procedimento analitico e quelle ottenute attraverso l'ottimizzazione indiretta.

Caso	Impulso 1			Impulso 2			Impulso 3		
	u_1 [rad]	δv_1 [m/s]	α_1 [°]	u_2 [rad]	δv_2 [m/s]	α_2 [°]	u_3 [rad]	δv_3 [m/s]	α_3 [°]
1	0	0.1753	-175.9	9.87	0.0280	-5.15	12.57	0.2000	-4.1
2	0	0.1990	9.0	3.13	0.1368	3.01	12.56	0.0714	171.0
3	0	0.1477	-172.4	9.05	0.0272	-7.44	12.56	0.1469	-7.5
4	0	0.2270	-172.6	9.43	0.0053	-4.52	12.57	0.1899	-7.4
5	0	0.1677	-170.9	8.86	0.0085	-7.83	12.56	0.1325	-8.9
6	0	0.0323	-153.1	8.49	0.0128	-0.07	11.58	0.0103	-179.3
7	0	0.0220	-168.7	9.03	0.0843	-0.24	12.19	0.0627	-179.4
8	0	0.0341	-173.8	9.21	0.1341	-0.21	12.35	0.1002	-180.1
9	0	0.0281	35.0	8.12	0.0884	179.28	11.17	0.0653	1.2
10	0	0.0061	34.8	2.07	0.0384	179.78	11.44	0.0072	1.3
11	0	0.0469	37.5	7.98	0.1435	179.35	10.96	0.1063	0.2

Tabella 6.2: le caratteristiche dei tre impulsi previsti dalla soluzione analitica, per ognuno degli 11 casi studiati

Caso	ΔV_{tot} [m/s]
1	0.4034
2	0.4072
3	0.3218
4	0.4221
5	0.3088

Caso	ΔV_{tot} [m/s]
6	0.0554
7	0.1690
8	0.2684
9	0.1819
10	0.0517
11	0.2966

Tabella 6.3: il valore del ΔV totale della manovra previsto dalla soluzione analitica; a sinistra i casi in cui $\Delta\delta L$ è predominante, a destra quelli in cui lo è $\Delta\delta e$

6.4 Confronto tra i risultati dei due metodi

Le simulazioni della fase principale hanno coinvolto tutti gli 11 casi di studio, fissando i seguenti parametri: semiasse maggiore dell'orbita di riferimento $a_c = 7121$ km, velocità efficace di scarico $c = 20$ km/s, durata della manovra pari a 2 orbite. L'accelerazione è stata fatta variare da $0.7 \cdot 10^{-4}$ m/s² a $5.0 \cdot 10^{-4}$ m/s², con passo pari a $0.1 \cdot 10^{-4}$ m/s².

I dati ottenuti dall'ottimizzazione indiretta sono poi stati messi a confronto con quelli ricavati con le soluzioni analitiche.

6.4.1 Archi propulsi

Le Figure da 6.6 a 6.16 mostrano gli archi propulsi delle diverse manovre. Per ogni diverso valore di accelerazione T/m , indicato nell'asse delle ordinate, è stato indicato con una banda continua di colore blu lo stato attivo dei thruster del *deputy*. Sull'asse delle ascisse è indicato l'argomento medio della latitudine. I *marker* circolari di colore arancione indicano invece lo stato attivo dei thruster nel caso in cui il *deputy* dovesse eseguire la manovra adattando la strategia a tre impulsi emersa dal processo analitico al caso di una propulsione reale e continua. L'estensione angolare di ogni banda di marker arancioni è stata calcolata secondo la (5.4) e collocata all'interno della manovra in modo tale da non oltrepassarne i vincoli di durata.

Relativamente ai risultati dell'ottimizzazione indiretta, si può notare come la durata della fase di spinta attiva dei casi da **1** a **5** (quelli, cioè, a predominanza di $\Delta\delta L$) vada a ridursi all'aumentare dell'accelerazione, fino ad evidenziare quattro archi propulsi ben distinti. A partire da un certo livello di accelerazione in poi, diverso per ogni caso e tanto più alto quanto più energeticamente onerosa appare la manovra, uno dei due archi intermedi si accorcia fino a scomparire, facendo emergere una configurazione a tre archi la cui collocazione, all'interno del tempo della manovra, si avvicina notevolmente a quanto previsto dalla soluzione analitica.

Per i casi a predominanza di $\Delta\delta e$ invece, i risultati dei due metodi si discostano maggiormente. La soluzione dell'ottimizzazione indiretta tende a fare il contrario di quanto osservato con i casi precedenti e, invece di consolidare gli archi iniziali e finali a scapito di quelli intermedi, riduce gli archi verso le zone più esterne dell'intervallo $[u_0, u_f]$ per conservare l'erogazione dell'impulso nelle fasi centrali della manovra.

I casi **6** e **10** mostrano diagrammi dalle forme singolari, diverse da tutti gli altri, con ogni probabilità a causa della bassissima quantità di impulso necessaria al completamento delle manovre, le più basse in termini di ΔV (cfr. Tabella 6.3).

È infine interessante notare come gli archi propulsi dei casi a predominanza di $\Delta\delta e_x$ cadano in corrispondenza degli archi di *coasting* dei casi dominati da $\Delta\delta e_y$ e viceversa.

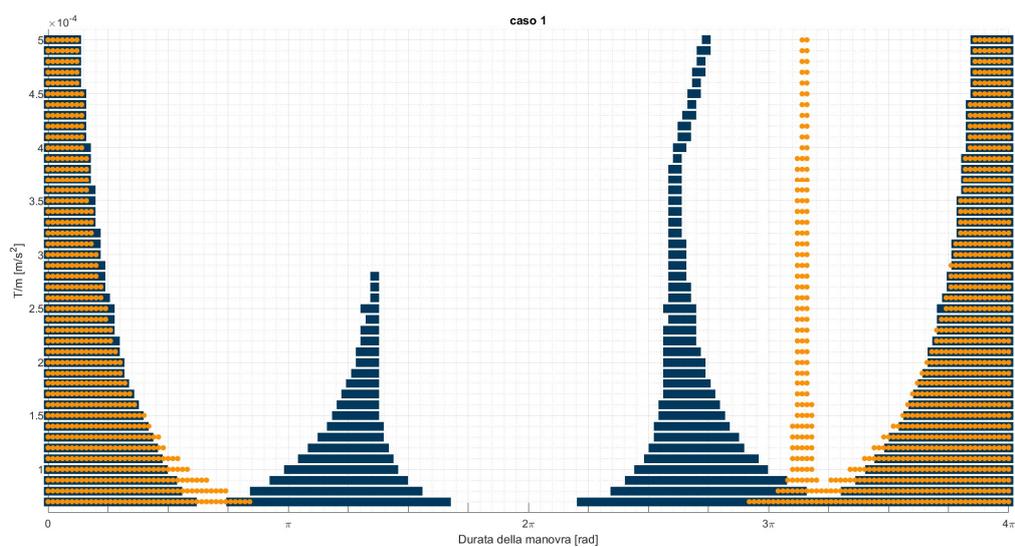


Figura 6.5:
archi propulsi
nel caso 1

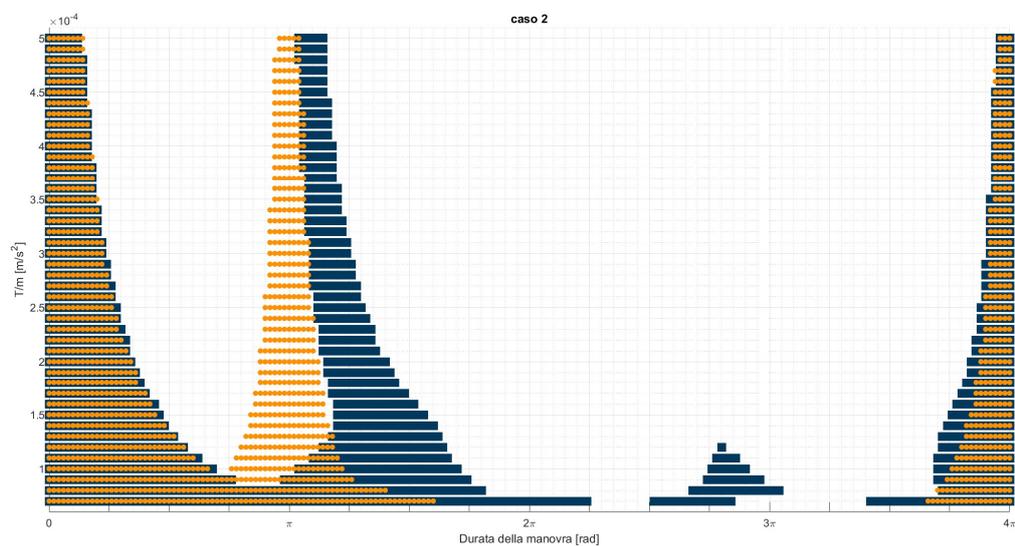


Figura 6.6:
archi propulsi
nel caso 2

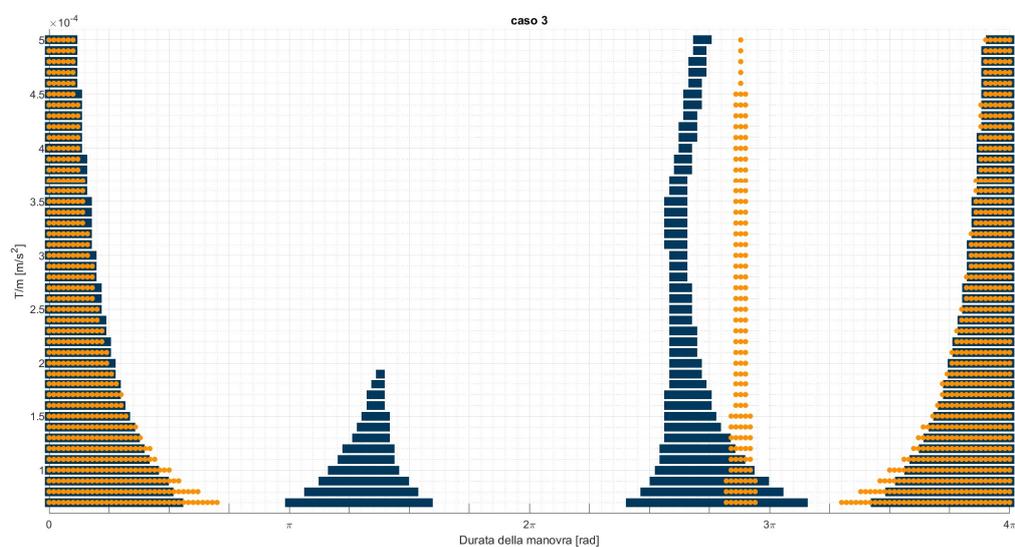


Figura 6.7:
archi propulsi
nel caso 3

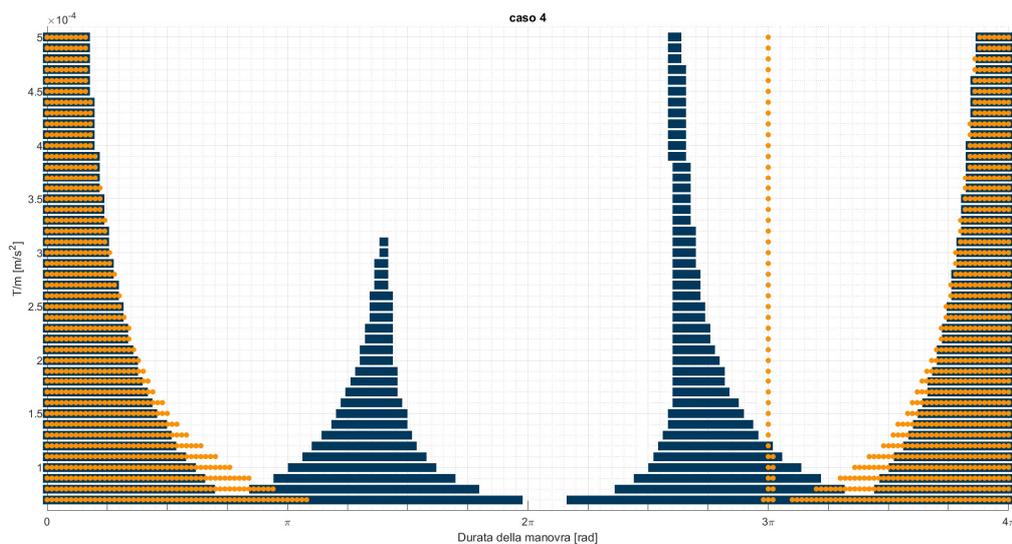


Figura 6.8:
archi propulsi
nel caso 4

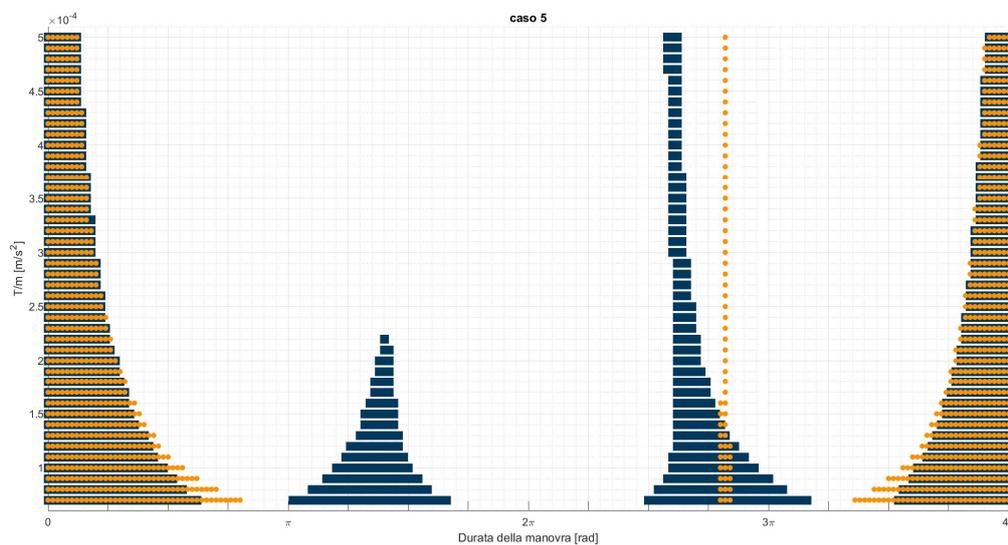


Figura 6.9:
archi propulsi
nel caso 5

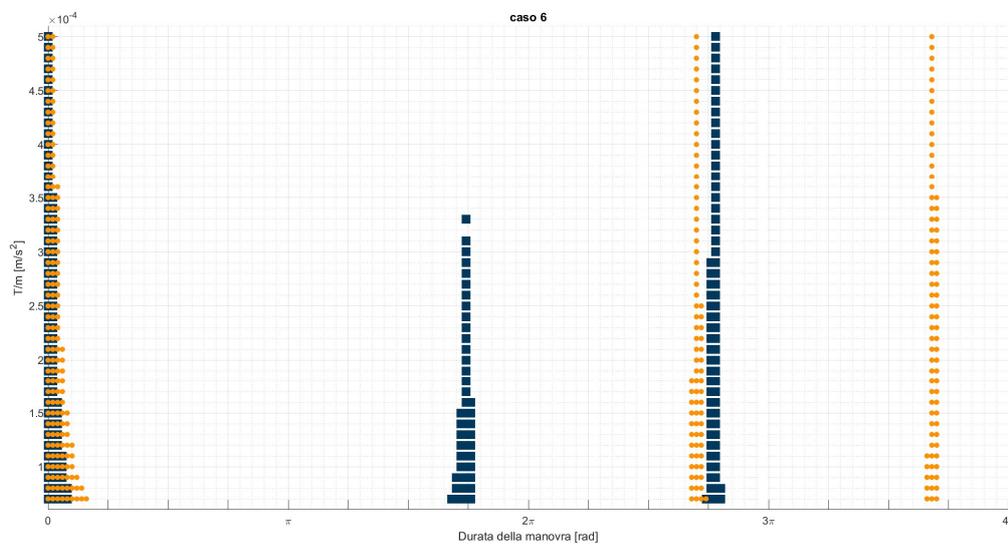


Figura 6.10:
archi propulsi
nel caso 6

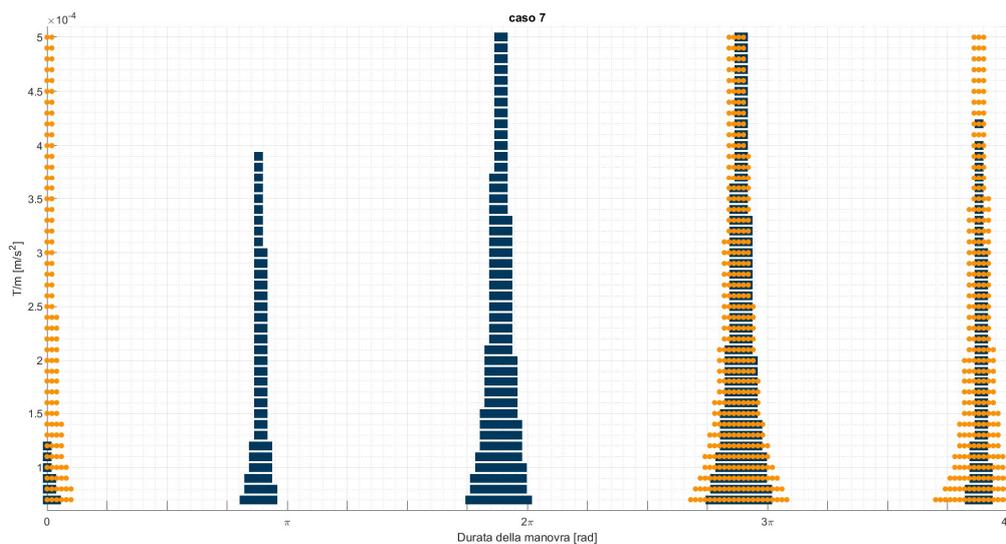


Figura 6.11:
archi propulsi
nel caso 7

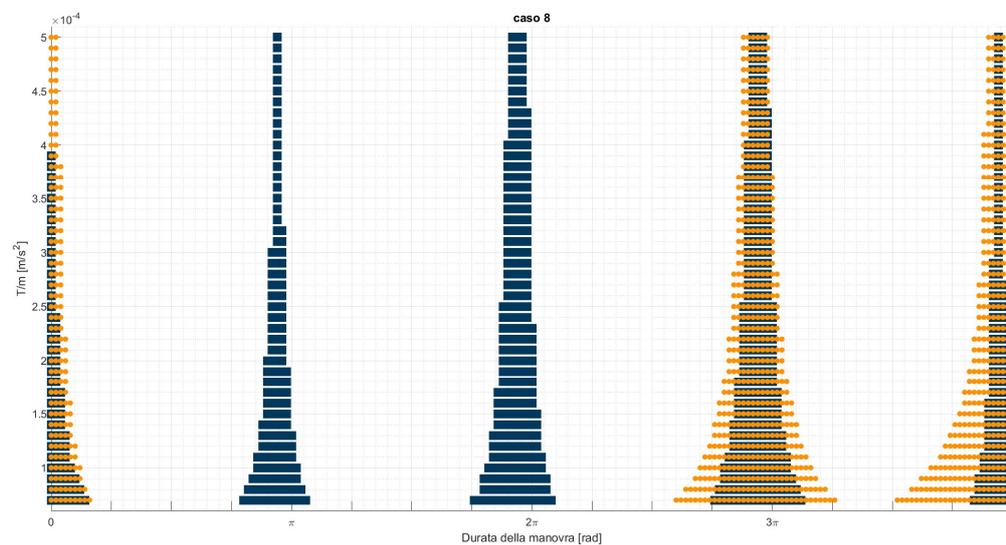


Figura 6.12:
archi propulsi
nel caso 8

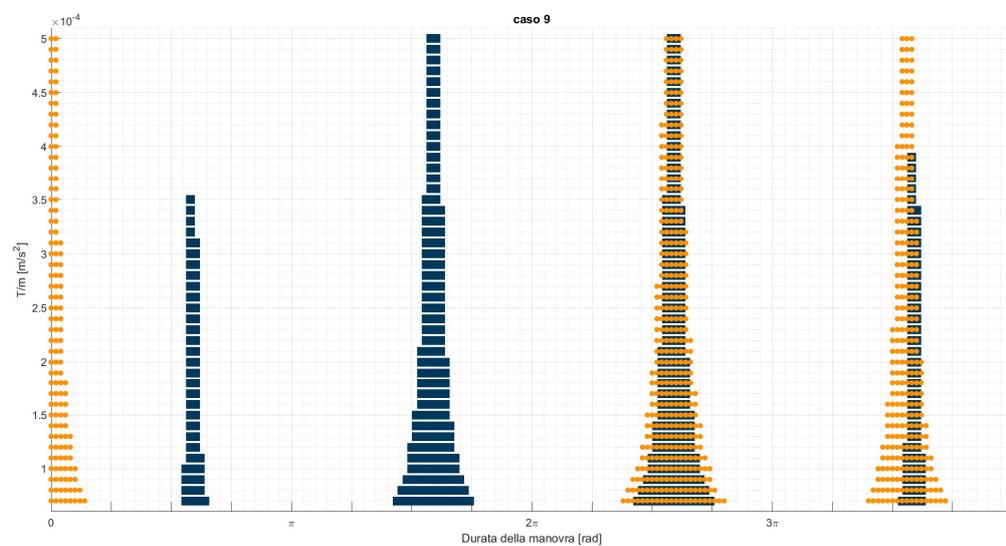


Figura 6.13:
archi propulsi
nel caso 9

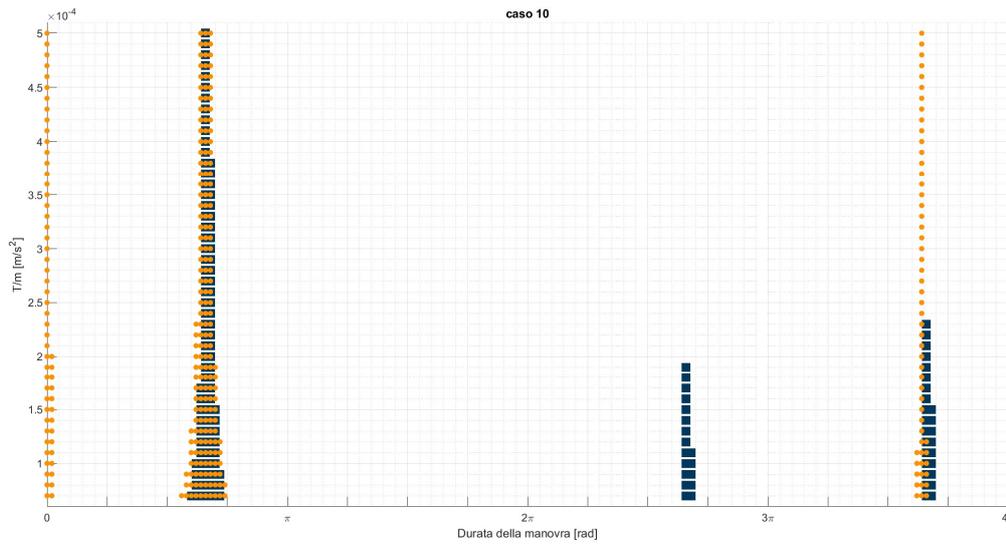


Figura 6.14:
archi propulsi
nel caso 10

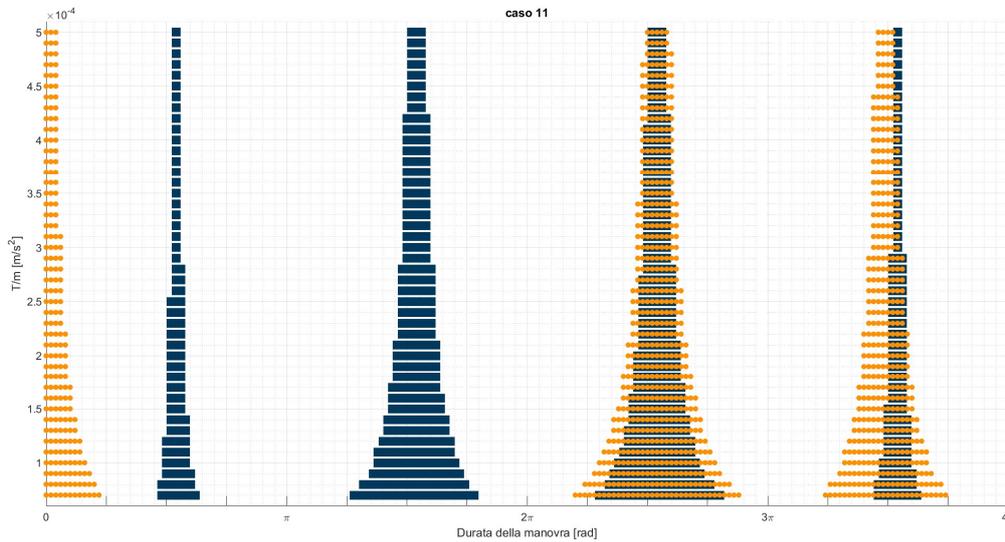


Figura 6.15:
archi propulsi
nel caso 11

6.4.2 Angolo di spinta

Le Figure 6.17, 6.18 e 6.19 mostrano la funzione $\alpha(u)$, così come ottenuta dalle (4.36), per i valori di accelerazione di $0.7 \cdot 10^{-4}$ e $5.0 \cdot 10^{-4}$ m/s². I tratti in grassetto indicano lo stato propulso, mentre i marker richiamano i valori trovati per via analitica, già indicati nella Tabella 6.1. Per sintesi, sono mostrati solamente i casi 4, 8 e 11, maggiormente dispendiosi in termini di ΔV e rappresentativi degli altri casi analizzati. Si può osservare come ognuna tra le tre diverse tipologie di riconfigurazione (a predominanza di $\Delta\delta L$, $\Delta\delta e_x$ o $\Delta\delta e_y$) sia contraddistinta da una particolare forma della funzione $\alpha(u)$ e come le manovre dove è maggiore la variazione di eccentricità relativa si discostino maggiormente dagli angoli trovati per via analitica.

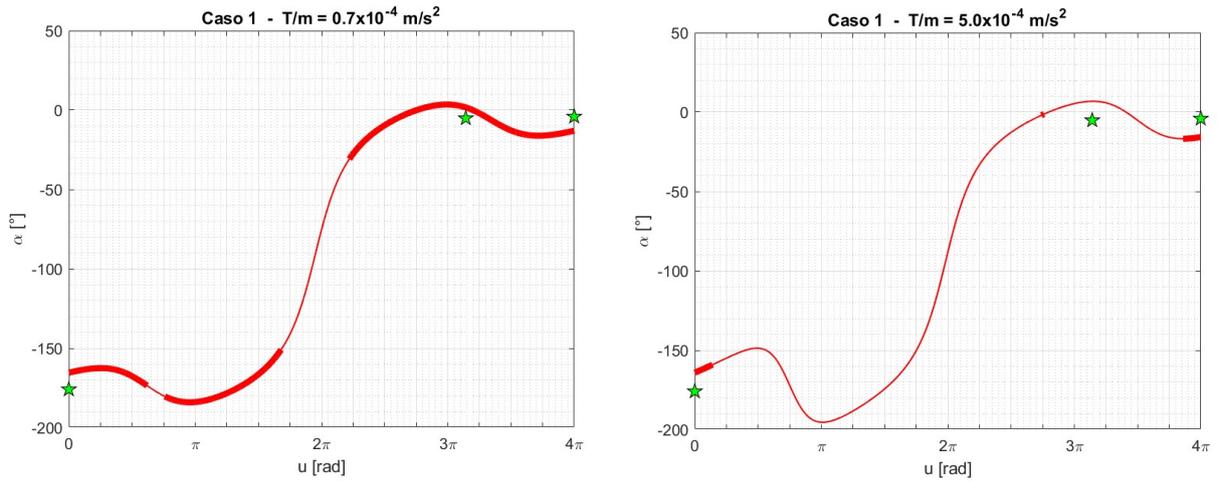


Figura 6.16: funzione $\alpha(u)$ per il caso 1, rappresentativo dei casi a predominanza di $\Delta\delta L$

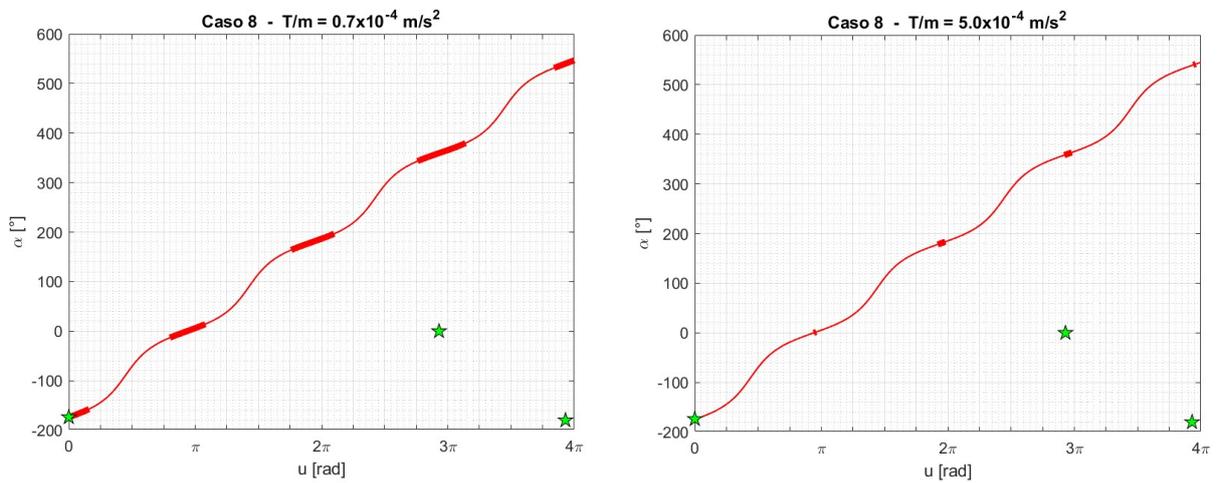


Figura 6.17: funzione $\alpha(u)$ per il caso 8, rappresentativo dei casi a predominanza di $\Delta\delta e_x$

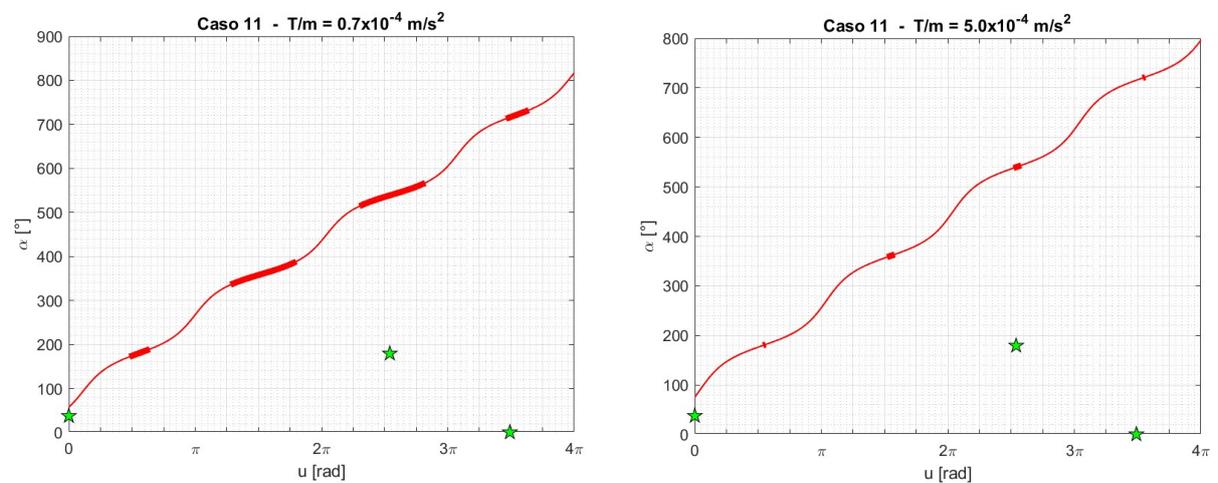


Figura 6.18: funzione $\alpha(u)$ per il caso 11, rappresentativo dei casi a predominanza di $\Delta\delta e_y$

6.4.3 Traiettorie nel sistema di riferimento RTN

Le seguenti figure illustrano le traiettorie che il *deputy* percorre nel sistema di riferimento RTN centrato nel *chief*. Per ogni caso, sono mostrate le traiettorie ottenute tramite ottimizzazione indiretta per cinque diversi valori di accelerazione, nonché la traiettoria ottenuta dal metodo analitico. Mentre per i casi da **1** a **5** le traiettorie si avvicinano a quelle della soluzione analitica all'aumentare dell'accelerazione, per i casi da **6** a **11**, a predominanza di variazione di eccentricità relativa, le traiettorie ottimizzate si discostano notevolmente, a causa delle già affrontate discrepanze in fatto di posizione degli archi propulsi e angoli di spinta. Si può notare infine come per gli stessi casi le traiettorie ottimizzate siano molto simili tra di loro, sovrapponendosi anche per lunghi tratti.

I marker blu e verde segnano rispettivamente i punti iniziali e finali della manovra.

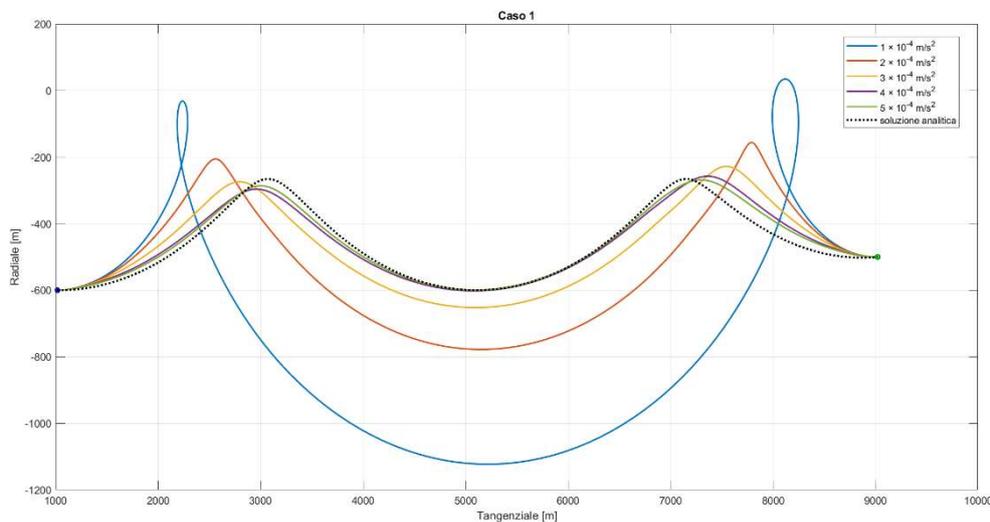


Figura 6.19:
traiettoria RTN
del caso 1

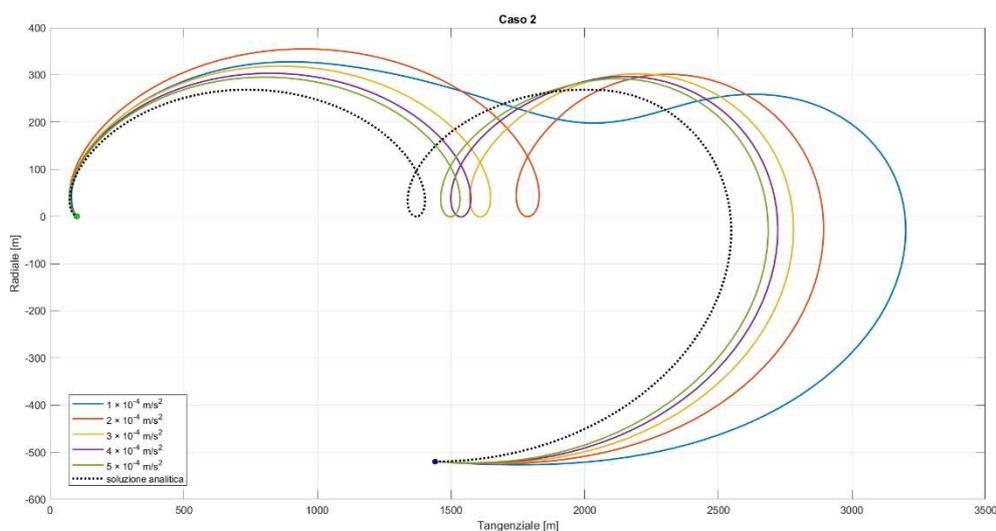


Figura 6.20:
traiettoria RTN
del caso 2

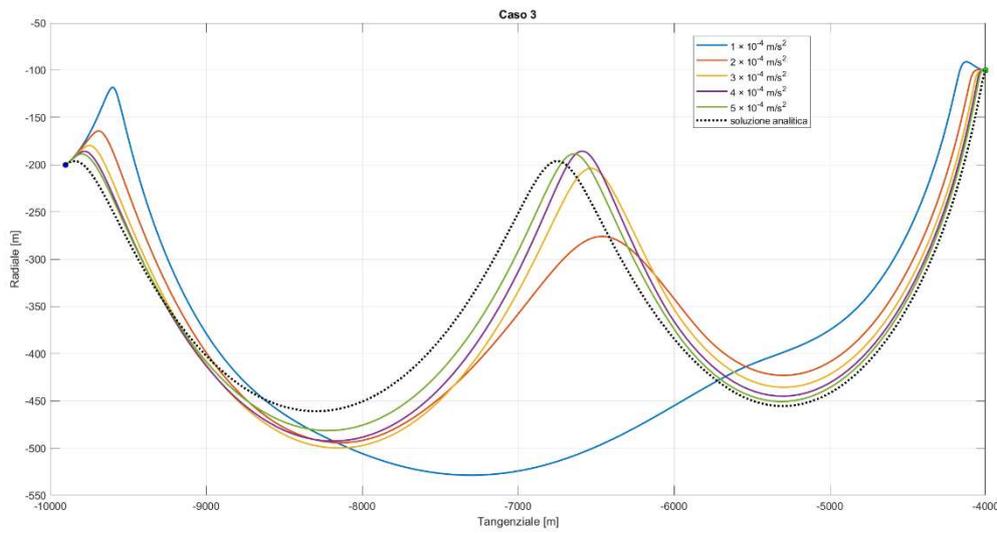


Figura 6.21:
traiettoria RTN
del caso 3

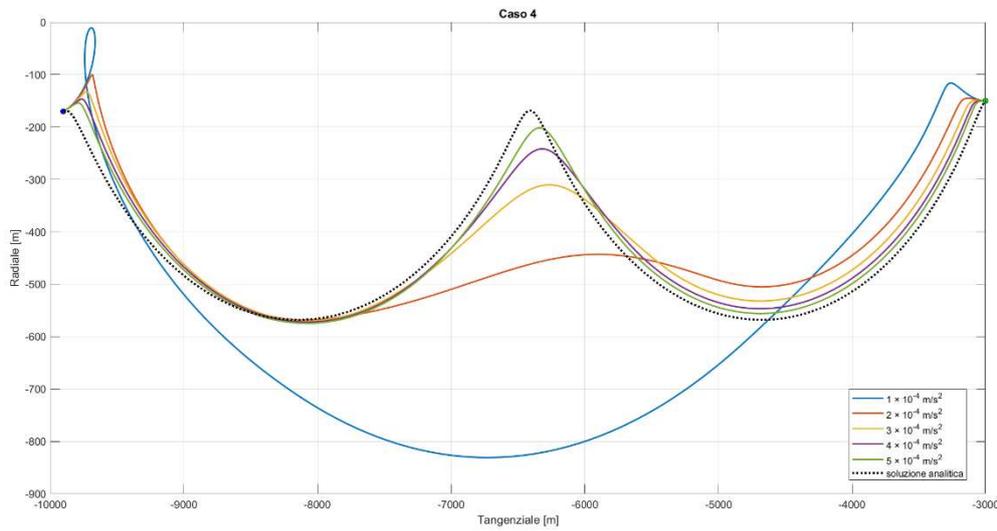


Figura 6.22:
traiettoria RTN
del caso 4

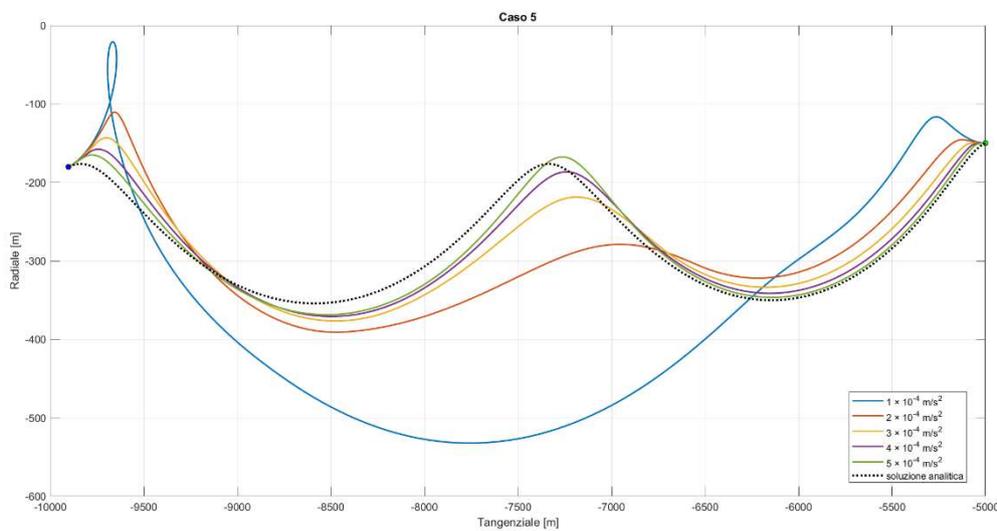


Figura 6.23:
traiettoria RTN
del caso 5

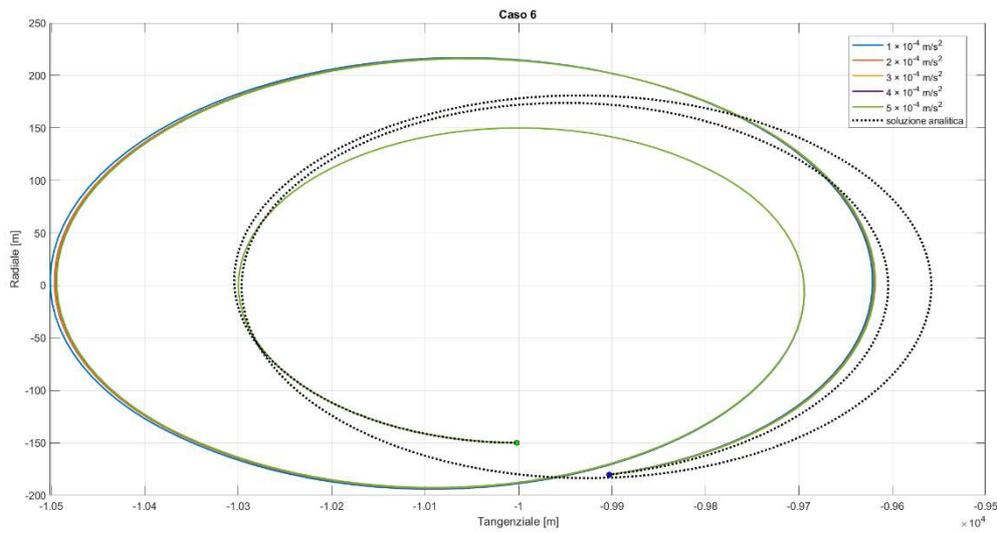


Figura 6.24:
traiettoria RTN
del caso 6

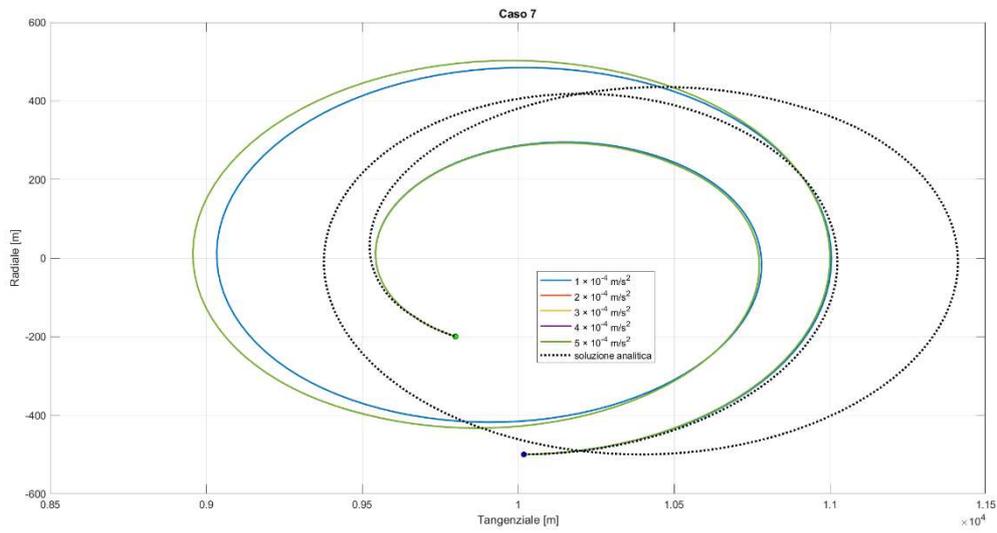


Figura 6.25:
traiettoria RTN
del caso 7

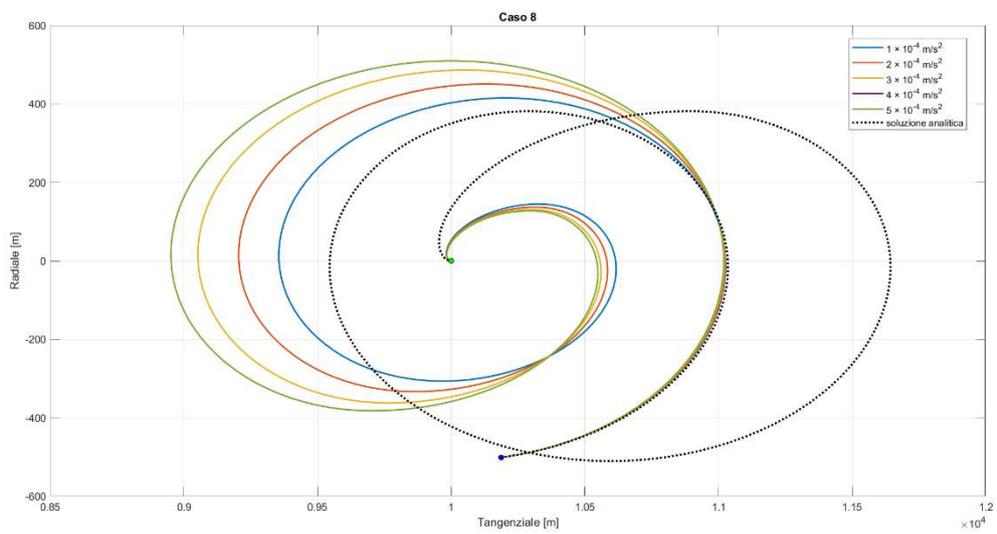


Figura 6.26:
traiettoria RTN
del caso 8

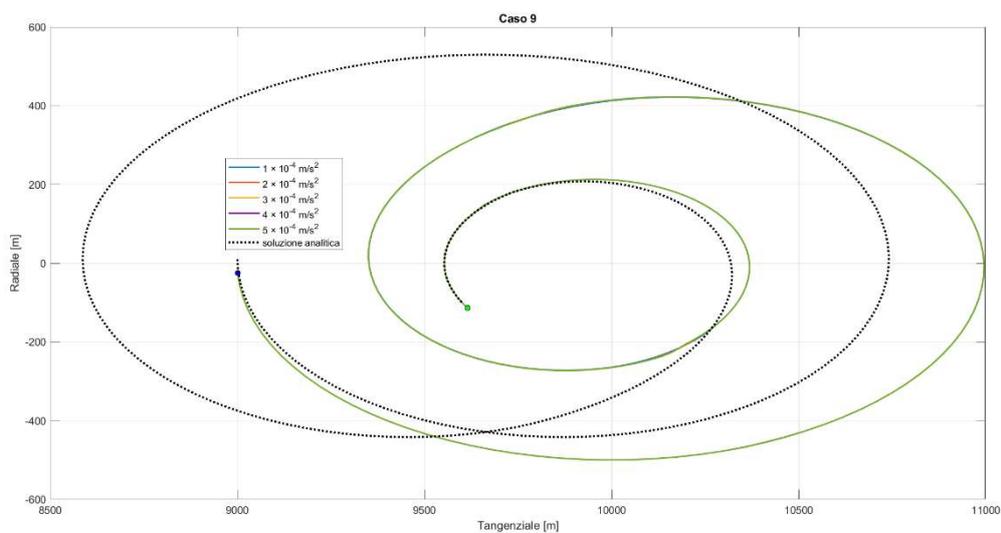


Figura 6.27: traiettoria RTN del caso 9

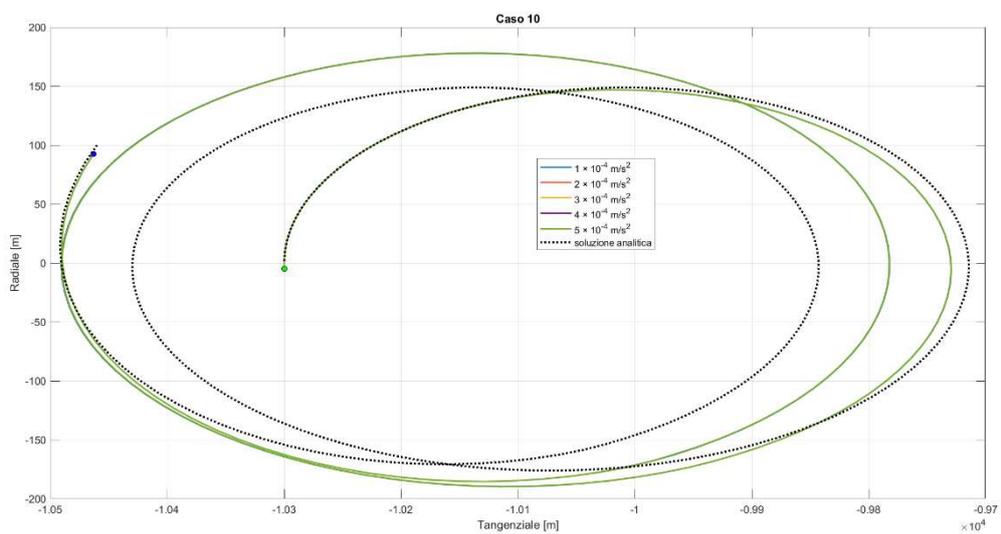


Figura 6.28: traiettoria RTN del caso 10

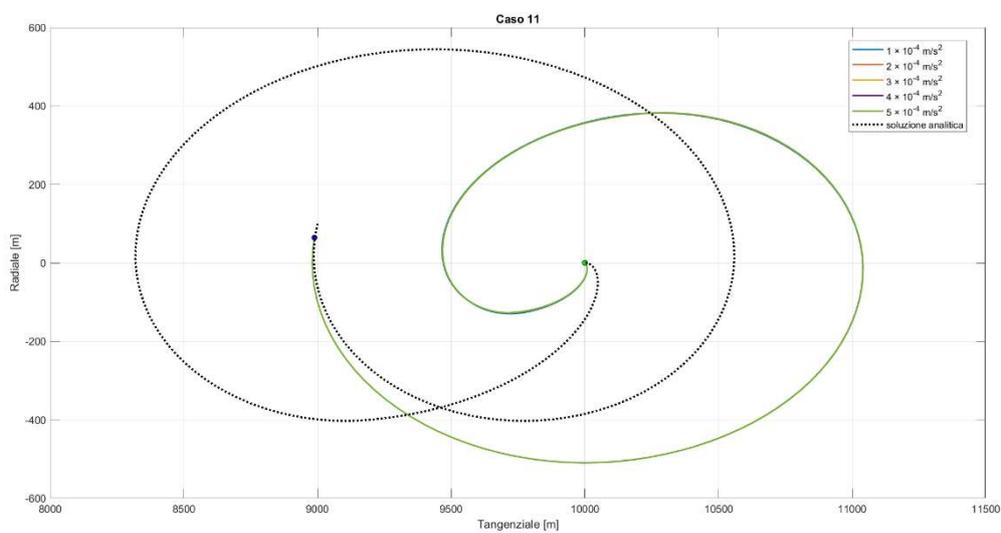


Figura 6.29: traiettoria RTN del caso 11

6.4.4 Andamento del ΔV in funzione dell'accelerazione

Il metodo analitico di Costigliola e Casalino è stato originariamente pensato per essere applicato a riconfigurazioni orbitali dominati da $\Delta\delta L$. Non deve sorprendere quindi il fatto che le riconfigurazioni a predominanza di $\Delta\delta e$ si discostino maggiormente dalla soluzione analitica relativamente agli archi propulsi e all'angolo di spinta. Questa differenza si ripercuote non solo sulla forma delle traiettorie ma anche sul costo energetico stimato della manovra. Nelle seguenti figure è illustrato l'andamento del ΔV della manovra ottimizzata al variare dell'accelerazione, con il valore stimato attraverso il metodo analitico segnato da una linea tratteggiata di colore rosso. Per i casi da **1** a **5** il ΔV ottenuto tramite il metodo di Costigliola e Casalino, già indicato nella Tabella 6.2, rappresenta un limite inferiore che, per l'intervallo di accelerazioni simulato, non viene mai migliorato dall'ottimizzazione indiretta. Per gli altri casi, invece, il valore ottenuto tramite la risoluzione analitica viene superato a livelli di accelerazioni tanto più bassi quanto più basso è il costo energetico stimato.

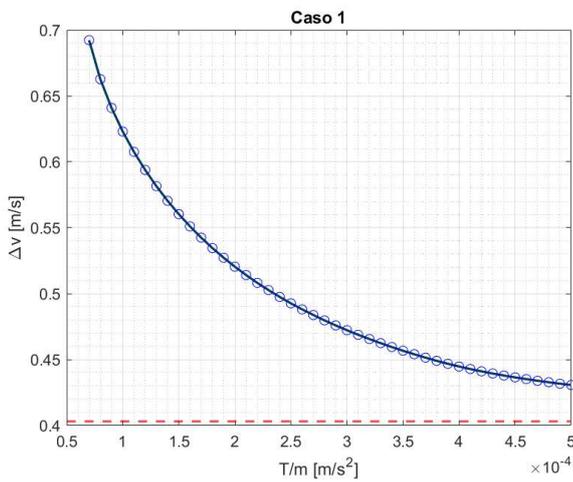


Figura 6.30: andamento del ΔV per il caso 1

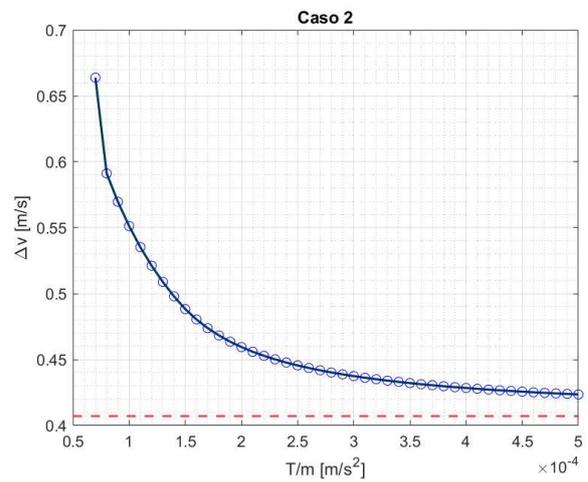


Figura 6.31: andamento del ΔV per il caso 2

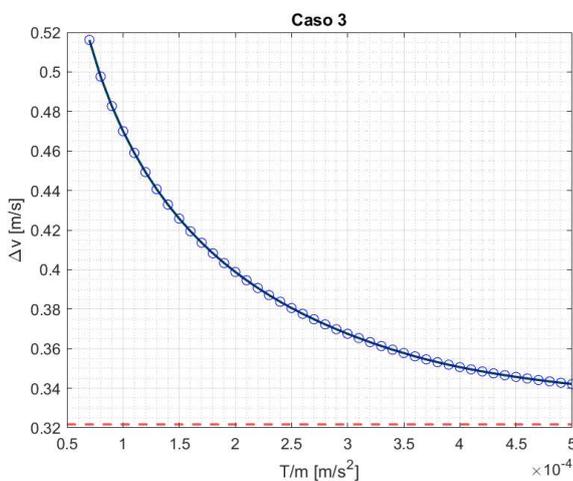


Figura 6.32: andamento del ΔV per il caso 3

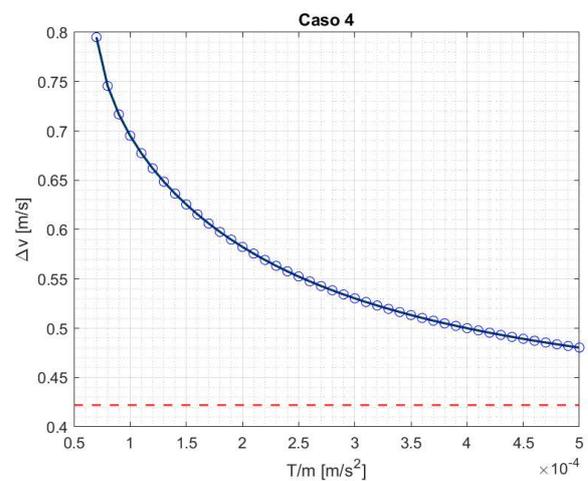
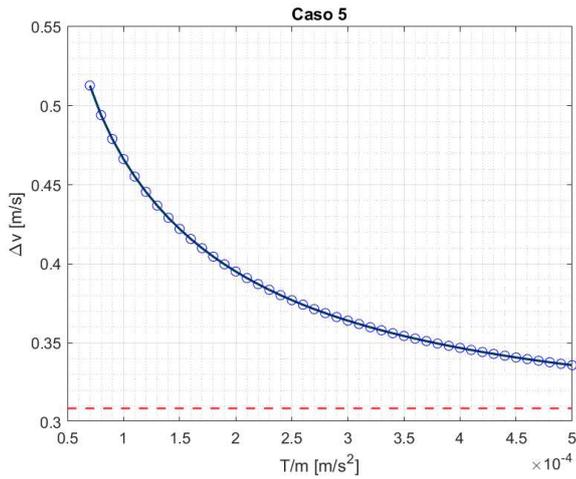
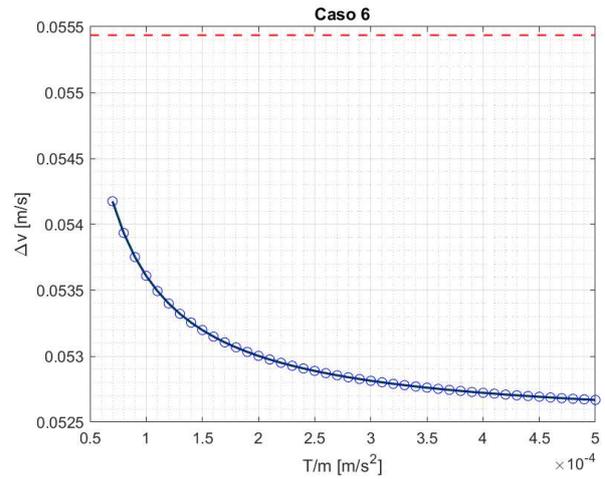
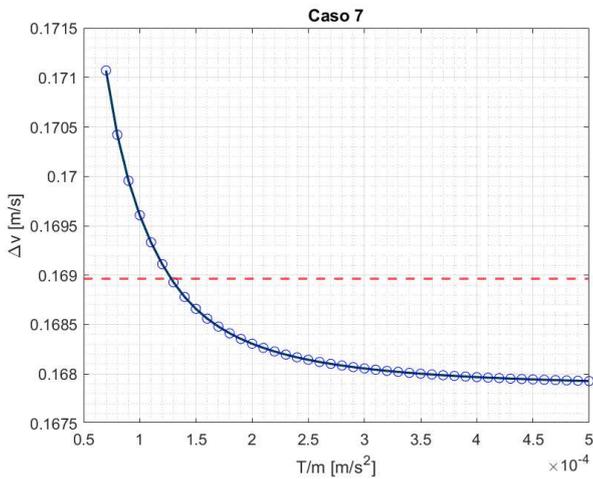
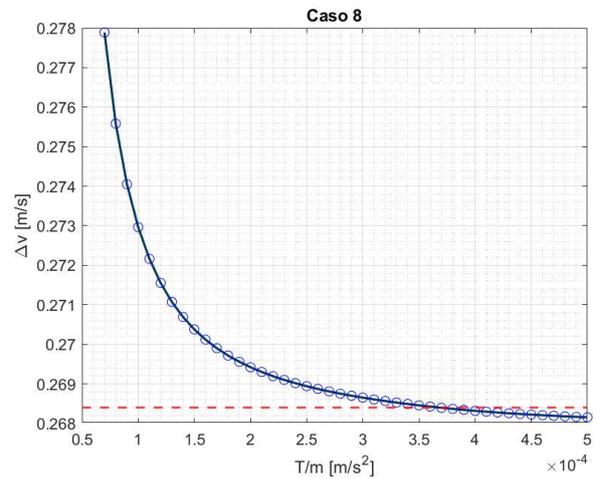
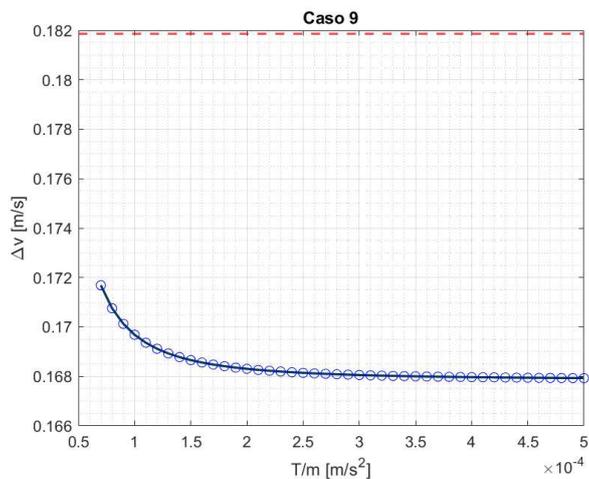
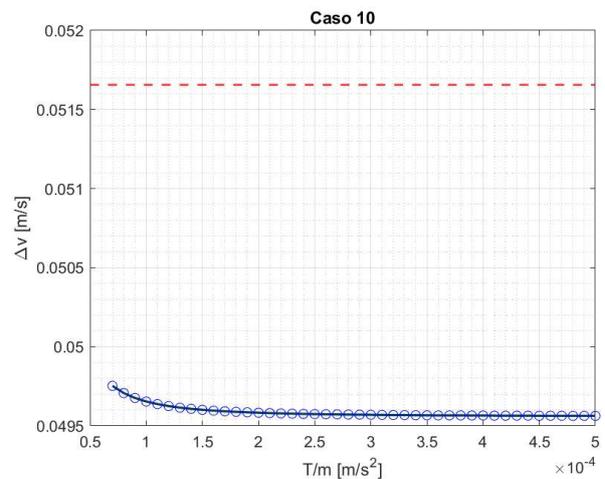


Figura 6.33: andamento del ΔV per il caso 4

Figura 6.34: andamento del ΔV per il caso 5Figura 6.35: andamento del ΔV per il caso 6Figura 6.36: andamento del ΔV per il caso 7Figura 6.37: andamento del ΔV per il caso 8Figura 6.38: andamento del ΔV per il caso 9Figura 6.39: andamento del ΔV per il caso 10

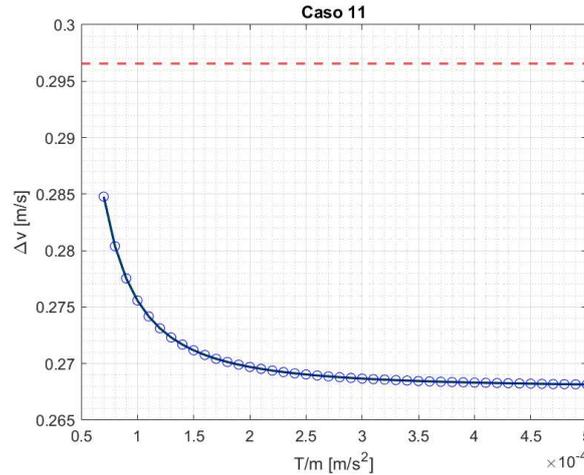


Figura 6.40: andamento del ΔV per il caso 11

6.4.5 Traiettorie nello spazio degli elementi orbitali relativi

Di seguito sono mostrate le traiettorie nello spazio $a_c \delta a - a_c \delta L$ e in quello $a_c \delta e_x - a_c \delta e_y$ ottenute per cinque diversi valori di accelerazione e quella ottenuta attraverso il metodo analitico. Come fatto in precedenza, per motivi di sintesi si riportano solamente i grafici dei casi **4**, **8** e **11**, rappresentativi delle altre riconfigurazioni studiate. I marker blu e verdi rappresentano rispettivamente gli stati di inizio e di fine manovra.

Nei grafici, le variazioni istantanee dei ROE sono tanto maggiori quanto maggiore è il valore dell'accelerazione. Per questo motivo, la soluzione impulsiva, che attua una variazione di velocità in un tempo infinitesimo e quindi dall'accelerazione teoricamente infinita, mostra le curve più ripide.

Per quanto riguarda lo spazio $a_c \delta a - a_c \delta L$ (Figure 6.42, 6.43 e 6.44) si osserva che i casi dove la variazione maggiore è quella della longitudine media, come il caso **4**, sono contraddistinti da un andamento concavo, mentre quelli a maggior variazione di eccentricità, come i casi **8** e **11**, mostrano curve chiuse e squadrate. Analoghe differenze tra le forme caratteristiche dei vari casi possono essere osservate analizzando le traiettorie nello spazio $a_c \delta e_x - a_c \delta e_y$ (Figure 6.45, 6.46 e 6.47).

In generale, nei casi dominati da $\Delta \delta L$, le curve si avvicinano alla soluzione analitica all'aumentare del livello di accelerazione. Al contrario, nei casi dominati da $\Delta \delta e$ la curva della soluzione analitica compie un percorso decisamente diverso dalle curve ottenute tramite ottimizzazione indiretta.

Queste osservazioni confermano quelle fatte in precedenza circa archi propulsi e angolo di spinta, confermando una miglior aderenza del metodo analitico alle riconfigurazioni dove è predominante la variazione di longitudine media relativa rispetto a quelle dove la variazione maggiore è quella dell'eccentricità relativa.

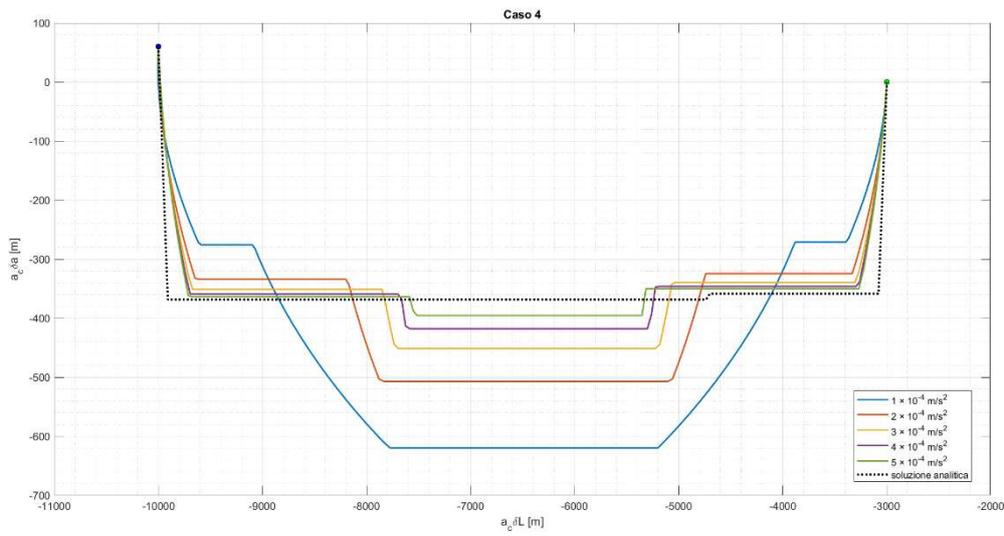


Figura 6.41: diagramma $a_c \delta a - a_c \delta L$ per il caso 4, esempio di caso dove è predominante $\Delta \delta L$

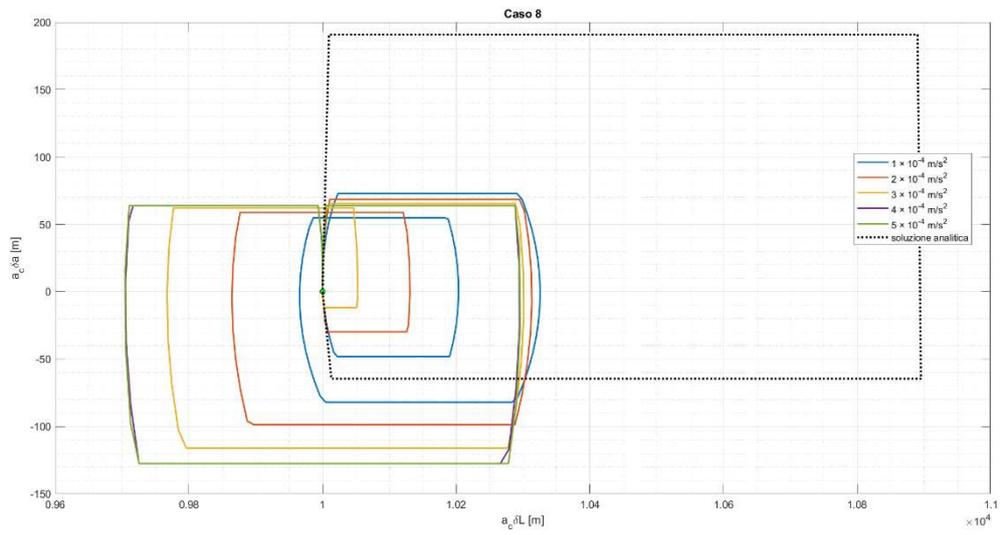


Figura 6.42: diagramma $a_c \delta a - a_c \delta L$ per il caso 8, esempio di caso dove è predominante $\Delta \delta e_x$

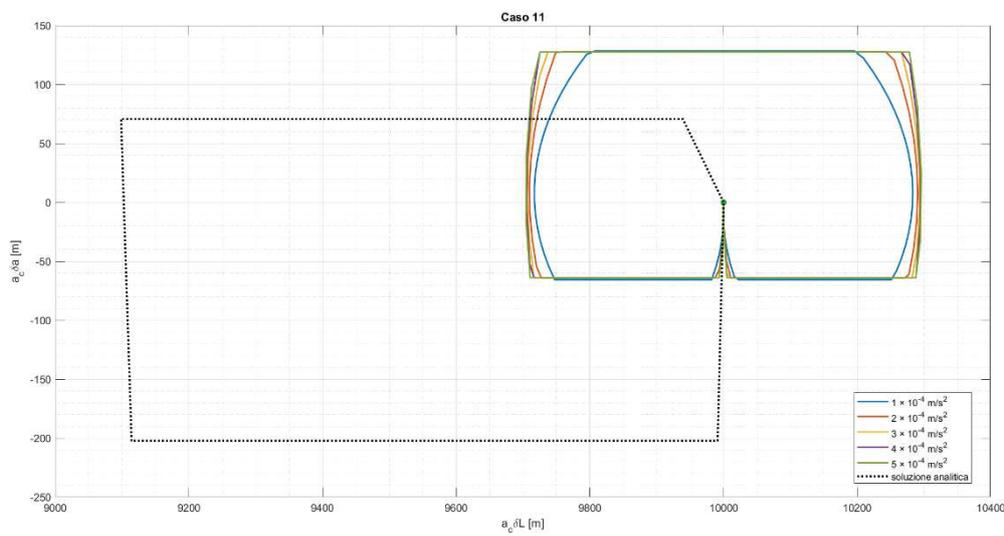


Figura 6.43: diagramma $a_c \delta a - a_c \delta L$ per il caso 11, esempio di caso dove è predominante $\Delta \delta e_y$

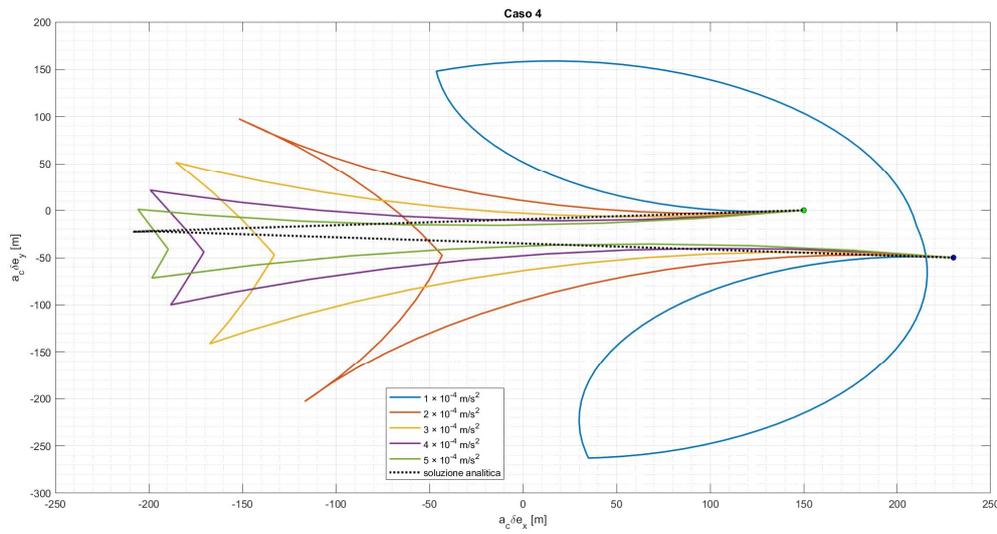


Figura 6.44: diagramma $a_c \delta e_x - a_c \delta e_y$ per il caso 4, esempio di caso dove è predominante $\Delta \delta L$

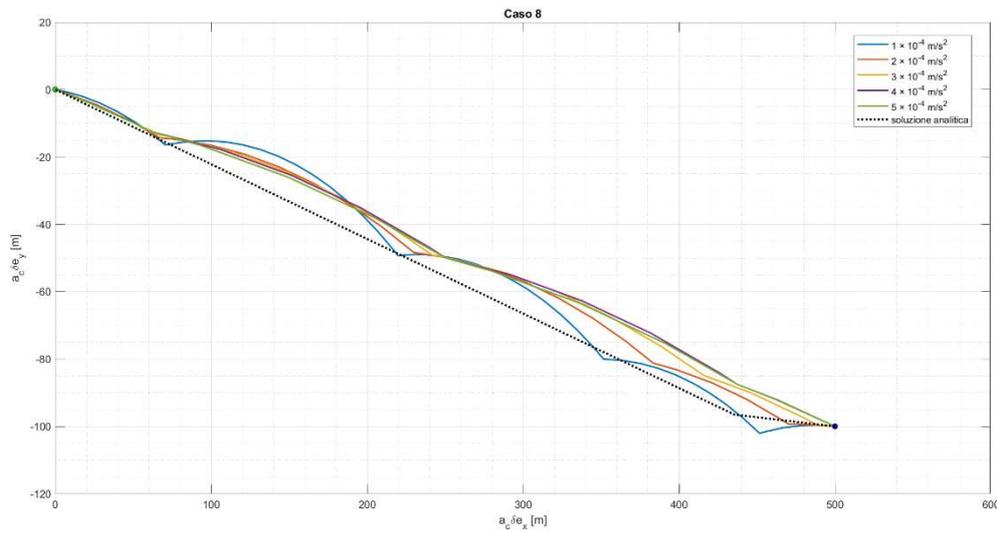


Figura 6.45: diagramma $a_c \delta e_x - a_c \delta e_y$ per il caso 8, esempio di caso dove è predominante $\Delta \delta a_x$

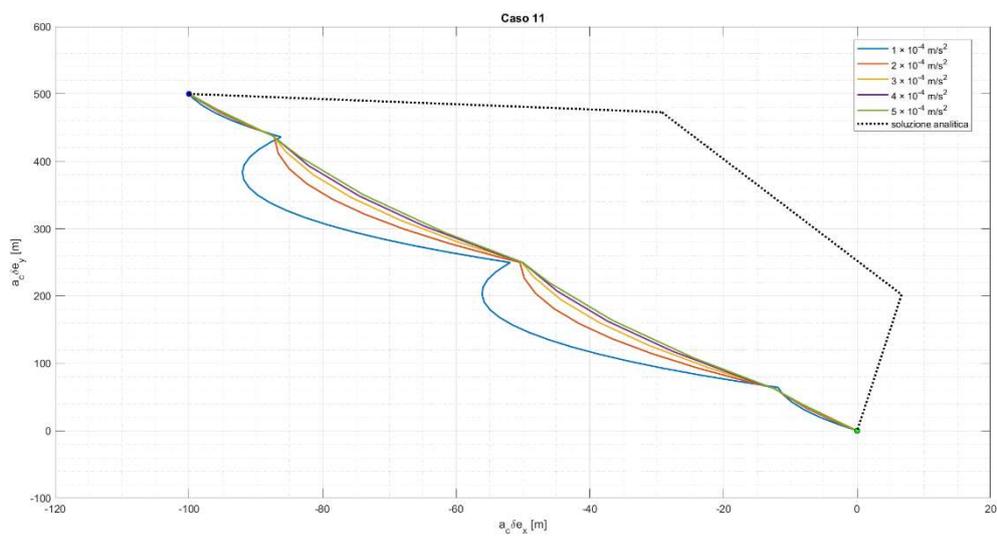


Figura 6.46: diagramma $a_c \delta e_x - a_c \delta e_y$ per il caso 11, esempio di caso dove è predominante $\Delta \delta a_y$

7. Conclusioni

In questa tesi è stato sviluppato uno strumento di ottimizzazione per la riconfigurazione orbitale di due satelliti posti in orbita terrestre bassa, mediante l'impiego dei metodi indiretti. Il Capitolo conclusivo intende riassumere le principali fasi di evoluzione del lavoro di tesi ed evidenziare alcuni possibili sviluppi futuri per lo stesso.

7.1 Riassunto del lavoro svolto

Al fine di linearizzare il problema, sono state adottate le equazioni variazionali di Gauss, che legano la variazione del vettore di stato agli elementi del vettore di controllo. Questi, inizialmente definiti come i componenti nel sistema di riferimento radiale-trasversale-normale (RTN) della variazione istantanea di velocità, sono stati successivamente riscritti come funzione della spinta T e degli angoli di orientamento del vettore spinta α e β .

L'aggiunta dell'equazione differenziale per l'andamento della massa, unitamente al cambio di variabile indipendente dal tempo t all'argomento medio della latitudine u , ha portato alla formulazione di un sistema di sette equazioni differenziali per le variabili di stato (ved. eq. 4.21 – 4.27).

Attraverso la teoria del controllo ottimale, è stato possibile definire l'Hamiltoniano H del sistema e, a partire da esso, derivare le equazioni di Eulero-Lagrange per le variabili aggiunte nonché le leggi di controllo. Risultando H lineare rispetto alla spinta, si è disposto un controllo di tipo *bang-bang*, in cui la spinta può assumere soltanto due valori: zero o il valore massimo permesso dal sistema propulsivo. Il problema differenziale ai limiti (BVP), ottenuto dalla concatenazione delle equazioni differenziali per le variabili di stato ed aggiunte, è stato risolto attraverso l'utilizzo di un apposito codice FORTRAN. Questo codice utilizza un processo iterativo per integrare le variabili in ognuno dei punti in cui è discretizzata la manovra, riducendo l'errore tra i valori calcolati e le condizioni al contorno note al di sotto di una soglia accettabile. Pur essendo molto sensibile ai valori di tentativo con cui si inizializza l'integrazione, il metodo permette di individuare la traiettoria che minimizza il consumo di propellente rispettando al contempo i vincoli imposti (durata della manovra, posizione iniziale e finale). Dall'analisi dell'andamento delle quattordici variabili (di stato e aggiunte) lungo l'intera manovra, è possibile determinare l'evoluzione degli elementi di controllo che ottimizzano la traiettoria. Il metodo ha permesso di condurre a convergenza più di 800 simulazioni. Dopo una prima fase dedicata alla validazione dello stesso codice FORTRAN, i cui risultati sono da subito apparsi in linea con le previsioni teoriche, ci si è concentrati sullo studio di 11 scenari operativi, caratterizzati da differenti ROE di partenza e arrivo.

Per ciascun scenario sono stati fissati parametri quali il semiasse maggiore di riferimento, la velocità efficace di scarico e la durata della manovra. Si è studiata l'influenza dell'accelerazione sulle caratteristiche delle traiettorie ottimali variando il rapporto spinta-massa da $0.7 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}^2$ a $5.0 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}^2$, con passo pari a $0.1 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}^2$. I risultati raccolti sono stati poi messi a confronto con le soluzioni sub-ottimali fornite dal metodo analitico semplificato elaborato da Costigliola e Casalino, di cui una sommaria descrizione è stata fornita nel Capitolo 5.

7.2 Considerazioni finali

Il confronto tra i risultati dei due metodi evidenzia in prima istanza una sostanziale aderenza delle soluzioni analitiche con quelle fornite mediante ottimizzazione indiretta negli scenari dominati dalla variazione della longitudine media relativa $\Delta\delta L$, mentre per i casi caratterizzati da una maggiore variazione di eccentricità relativa $\Delta\delta e_x$ e $\Delta\delta e_y$ i risultati dei due approcci divergono significativamente. Bisogna sottolineare che tale divergenza era già prevista dagli autori del metodo, pensato infatti per essere applicato a casi di riconfigurazione dominati da $\Delta\delta L$ [23], e che la sua spiegazione può essere ricercata nelle ipotesi semplificative alla base del metodo stesso. Come visto, esse impongono un primo impulso all'inizio esatto della manovra ed escludono la componente radiale per il secondo e terzo impulso. La soluzione iniziale viene successivamente raffinata attraverso l'applicazione delle condizioni di Karush-Kuhn-Tucker (KKT), che reintroduce una componente radiale negli ultimi due impulsi. Stando alle osservazioni fatte pocanzi, si può ipotizzare che tale correzione non raggiunga valori sufficientemente elevati da ottimizzare una manovra che trovi nella variazione di una delle componenti dell'eccentricità relativa la principale fonte di costo energetico. Si analizzino ora i costi energetici in termini di ΔV di ciascuna manovra, ottenuti attraverso i diversi metodi e precedentemente illustrati nel sottoparagrafo 6.4.4.

Relativamente ai casi di riconfigurazione dominati dalla quantità $\Delta\delta L$, non è stato possibile, all'interno del range di spinte studiato, trovare un solo caso in cui la soluzione ottenuta tramite ottimizzazione indiretta mostri un costo in termini di incremento di velocità minore di quella ottenuta tramite il metodo analitico semplificato di Costigliola e Casalino. Al contrario, per i casi di riconfigurazione dove ad essere preponderante è la variazione di una delle due componenti dell'eccentricità relativa, l'ottimizzazione indiretta permette di individuare traiettorie con un costo energetico minore di quello previsto analiticamente.

Si prendano in considerazione i casi di riconfigurazione dominati dalla quantità $\Delta\delta e_x$. Nel caso **7**, il valore di ΔV previsto dal metodo analitico di 0.1690 m/s viene migliorato dall'ottimizzazione indiretta per spinte superiori a $1.3 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}^2$. Nel caso **8**, il valore di 0.2684 m/s viene migliorato a partire da una spinta di $3.7 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}^2$. Per il caso **6** il valore ottenuto analiticamente è molto basso, pari a 0.0554 m/s , e l'ottimizzazione indiretta fornisce una traiettoria più economica per ogni livello di spinta nel range analizzato.

Considerando invece i casi dominati da $\Delta\delta e_y$ si osserva che, anche quando l'incremento di velocità è paragonabile a quello dei casi in cui ad essere preponderante è $\Delta\delta e_x$, il valore ottenuto tramite l'uso dei metodi indiretti è da subito (vale a dire fin dai più bassi livelli di spinta simulati) inferiore a quello trovato per via analitica.

Si osservi altresì, nella Tabella 6.1, che gli scenari di riconfigurazione **9**, **10** e **11** sono ottenuti a partire dagli scenari **6**, **7** e **8** semplicemente scambiando tra loro i valori degli elementi orbitali relativi δe_x e δe_y . Per quanto detto sopra, si può quindi concludere che i casi di riconfigurazione ai quali il metodo di Costigliola e Casalino è più difficilmente applicabile sono quelli a preponderanza di $\Delta\delta e_y$, mentre che lo stesso si rivela decisamente utile e aderente alla soluzione ottimizzata indirettamente per i casi a dominati da $\Delta\delta L$. Infine, bisogna sottolineare che il metodo analitico individua una soluzione prettamente impulsiva e che ogni attuazione reale comporterebbe un leggero incremento nel costo energetico previsto per la manovra.

Alla luce delle considerazioni esposte, si può concludere che le manovre continue low-thrust risultano particolarmente adatte ai casi di riconfigurazione orbitale in cui la variazione predominante tra gli elementi orbitali relativi sia rappresentata da $\Delta\delta e_y$. In tali scenari, i metodi indiretti si dimostrano strumenti efficaci per ottenere soluzioni più raffinate ed energeticamente efficienti rispetto a quelle previste dai modelli analitici semplificati. Al contrario, per le riconfigurazioni dominate dalla variazione della longitudine media relativa $\Delta\delta L$, il metodo analitico di Costigliola e Casalino offre una buona approssimazione della soluzione ottimizzata, suggerendo che manovre quasi-impulsive a maggiori livelli di spinta rappresentino un'opzione pratica e affidabile.

7.3 Sviluppi futuri

Si suggeriscono ora alcuni possibili sviluppi futuri per il lavoro svolto.

Un primo miglioramento potrebbe consistere nell'inclusione, all'interno del meccanismo di ottimizzazione, di effetti perturbativi reali quali l'effetto J_2 o la resistenza atmosferica. Migliorate le caratteristiche di convergenza del codice FORTRAN, su cui è per esempio possibile andare ad intervenire modificando l'equazione differenziale regolante l'andamento della variabile fittizia (ved. Paragrafo 5.1), sarebbe appropriato studiare scenari di riconfigurazione aggiuntivi (eventualmente anche tratti da operazioni reali), caratterizzati per esempio da più ampie variazioni degli elementi orbitali relativi. Inoltre, sarebbe possibile aumentare il range di valori T/m studiati, aumentando il numero di dati da poter confrontare con le soluzioni analitiche di riferimento.

L'ottimizzazione indiretta è un processo senz'altro complesso, la cui applicazione si presta sia a diversi tipi di vincoli. Se nell'elaborato si è trattato prettamente di casi *fixed-time*, in cui il vincolo principale è rappresentato dalla durata della manovra, risulterebbe altrettanto interessante lo studio di casi

fixed-mass, in cui viene dichiarato a priori il massimo consumo di propellente ammesso fissando il valore di massa finale del satellite.

Un ultimo possibile sviluppo potrebbe consistere dell'integrazione dei dati di controllo ottenuti dall'ottimizzazione indiretta all'interno di un simulatore orbitale a sei gradi di libertà. Ciò permetterebbe l'implementazione di un sistema *open-loop* per il controllo di assetto e posizione.

Appare infine opportuno menzionare gli studi attualmente in corso per rendere praticabile l'adozione dei metodi indiretti e della teoria del controllo ottimale direttamente a bordo dei satelliti. Questa prospettiva mira a superare uno dei principali limiti di queste strategie di ottimizzazione, ovvero la forte dipendenza dai valori di tentativo iniziali.

Le soluzioni più promettenti esplorate finora includono la suddivisione della missione in segmenti indipendenti e ottimizzabili separatamente, la generazione di un ampio set di valori di tentativo selezionati tramite criteri specifici e l'analisi della regione di convergenza del processo di ottimizzazione indiretta attraverso simulazioni Monte Carlo [24, 25, 26].

Sebbene lo sviluppo di controlli *closed-loop* basati su metodi indiretti sia ancora in una fase iniziale, la loro futura implementazione potrebbe rappresentare una svolta nelle operazioni spaziali di satelliti e sonde autonome.

Riferimenti bibliografici

- [1] EUROPEAN SPACE AGENCY; *ESA's Annual Space Environment Report 2023*, European Space Operations Centre (ESOC), Darmstadt, Germania, 2024, pp. 3-23.
- [2] LEOMANNI M., BIANCHINI G., GARULLI A., QUARTULLO R.; «Optimal Low-Thrust Orbit Transfers Made Easy: A Direct Approach», *Journal of Spacecraft and Rockets*, vol. 58, n. 6, 2021, pp. 1904-1914.
- [3] CONWAY B.; *Space Trajectory Optimization*, Cambridge University Press, 2010, p. 3.
- [4] COSTIGLIOLA D., CASALINO L.; «Simplified maneuvering strategies for rendezvous in near circular Earth orbits», *Aerospace*, vol. 10 n. 1027, 2023.
- [5] MENGALI G., QUARTA A.; *Fondamenti di Meccanica del Volo Spaziale*, Pisa University Press, 2013, pp. 4-16.
- [6] MENGALI G., QUARTA A.; *ibidem*, pp. 43-45.
- [7] D'AMICO S., MONTENBRUCK O.; «Proximity Operations of Formation-flying Spacecraft Using an Eccentricity/Inclination Vector Separation», *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 29, n. 3, 2006, pp. 554-563.
- [8] ALHILAL A., BRAUD T., HUI P.; «A Roadmap Toward a Unified Space Communication Architecture», *IEEE Access*, vol. 9, 2021, pp. 99633-99650.
- [9] MENGALI G., QUARTA A.; *ibidem*, pp. 217-222.
- [10] CONWAY B.; *ibidem*, p. 6.
- [11] BÖHME T., FRANK B.; *Hybrid Systems, Optimal Control and Hybrid Vehicles*, Springer, 2017, p. 215.
- [12] TAHERI E., KOLMANOVSKY I., ATKINS E.; «Enhanced Smoothing Technique for Indirect Optimization of Minimum-Fuel Low-Thrust Trajectories», *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 39, n. 11, 2016, pp. 2500-2511.
- [13] BÖHME T., FRANK B.; *ibidem*, pp. 159-160.
- [14] CASALINO L.; *Ottimizzazione indiretta di traiettorie spaziali*, Politecnico di Torino, 2024.

- [15] CONWAY B.; *ibidem*, p. 5.
- [16] MAURER H.; «On Optimal Control Problems With Bounded State Variables and Control Appearing Linearly», *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 15, n. 3, 1977, pp. 345-362.
- [17] BUTCHER J.; *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*, 3^a ed., John Wiley & Sons, 2016, pp. 111-120.
- [18] D'AMICO S.; *Autonomous Formation Flying in Low Earth Orbit*, tesi di dottorato, Technische Universiteit Delft, Delft, Paesi Bassi, 2010, pp. 21-22.
- [19] BEN-LARBI M., STOLL E.; «Spacecraft Formation Control using Analytical Integration of Gauss' Variational Equations», *6th International Conference on Astrodynamics Tools and Techniques*, Darmstadt, Germania, 14-17 marzo 2016, p. 1.
- [20] D'AMICO S.; *Relative Orbital Elements as Integration Constants of Hill's Equations*, Deutsches Zentrum für Luft und Raumfahrt, Oberpfaffenhofen, Germania, 2005, p. 7.
- [21] GAIAS G., ARDAENS J., MONTENBRUCK O.; «Model of J2 perturbed satellite relative motion with time-varying differential drag», *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, vol. 123 n. 4, 2015, pp. 411-433.
- [22] VANDERBEI R.; *Linear programming, foundations and extensions*, 5^a ed., Springer, 2020, pp. 325-328.
- [23] COSTIGLIOLA D., CASALINO L.; *ibidem*, p. 6.
- [24] WANG K., FANGMIN L., ZHENG C., JUN L.; «A Physics-Informed Indirect Method for Trajectory Optimization», *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 60, n. 6, pp. 9179-9192.
- [25] GATH P., WELL K., MEHLEM K.; «Initial Guess Generation for Rocket Ascent Trajectory Optimization Using Indirect Methods», *Journal of Spacecraft and Rockets*, vol. 39, n. 4, p. 515.
- [26] MANNOCCHI A., GIORDANO C., TOPPUTO F.; «Closed-loop guidance for interplanetary CubeSats with indirect methods», *74th International Astronautical Congress*, Baku, Azerbaigian, 2-6 settembre 2023, p. 1.