



**Politecnico
di Torino**

Politecnico di Torino

Laurea Magistrale in Ingegneria Meccanica
A.a. 2024/2025

Analisi sperimentale e numerica della dinamica laterale di un monopattino elettrico

Relatore:
Vigliani Alessandro

Candidato:
Morandini Nicolò

Corelatore:
Vella Angelo Domenico

Abstract

Il seguente lavoro di tesi ha come obiettivo la comprensione del comportamento dinamico in laterale di un monopattino elettrico. Come prima cosa è stato effettuato uno studio completo delle equazioni di riferimento per una bicicletta e su di esse è stata svolta un'analisi modale a 2 gradi di libertà per comprenderne gli intervalli di stabilità e relativi modi di vibrare. Sono state studiate le morfologie dei modi e come esse variano all'aumentare della velocità del veicolo. Una volta validato il set di equazioni, è stato utilizzato per compiere gli stessi studi modali su un monopattino elettrico commerciale (Xiaomi Pro 2). È inoltre presente un confronto tra i due veicoli che mette in luce le principali differenze in termini di stabilità e forme modali. Le stesse equazioni sono state implementate per la creazione di due modelli dinamici in dominio tempo che simulassero i due veicoli e ne verificassero il comportamento a seguito di un disturbo al manubrio sempre per valutarne la stabilità. In aggiunta a ciò è stato sviluppato un ulteriore modello dinamico a 4 gradi di libertà in grado di compiere manovre precedentemente definite dall'utente. Per validarlo è stata compiuta una campagna sperimentale comprendente quattro manovre: corridoio, slalom, cerchio e otto. I dati comparati tra modello e dati sperimentali rientrano nel campo delle grandezze cinematiche come accelerazione laterale, angoli di sterzo e rollio e traiettoria. È inoltre presente un focus sul setup di misura utilizzato, comprensivo di IMU, sensori di prossimità, sensori piezometrici, supporti e meccanismi stampati in 3D.

Indice

Abstract	2
Elenco delle Figure	6
Elenco delle Tabelle	7
1 Introduzione	8
1.1 Differenze tra biciclette e monopattini	8
1.2 Modello benchmark di bicicletta	9
1.3 Modello benchmark di monopattino	19
2 Test sperimentali	21
2.1 Setup sperimentale	21
2.2 Svolgimento delle prove	27
3 Analisi modale	30
3.1 Validazione del modello	30
3.2 Analisi degli autovalori, frequenze e smorzamenti (bicicletta)	30
3.3 Morfologia dei modi (bicicletta)	32
3.4 Analisi degli autovalori, frequenze e smorzamenti (monopattino)	41
3.5 Morfologia dei modi (monopattino)	44
4 Modello dinamico in dominio tempo	52
4.1 Modello dinamico con spazio degli stati a 2 gdl	52
4.2 Modello in forma matriciale a 2 gdl	54
4.3 Modello esteso a 4 gdl	54
5 Confronto e validazione del modello	60
5.1 Corridoio stretto	60
5.2 Cerchio	63
5.3 Slalom	67
5.4 Otto	73
6 Conclusioni	75
Bibliografia	78

Elenco delle figure

1.1	Rappresentazione dei corpi rigidi della bicicletta	10
1.2	Rappresentazione dei gradi di libertà e dei giunti della bicicletta	11
1.3	Rappresentazione delle quote fondamentali della bicicletta	15
1.4	Diagramma di corpo libero equazione 1	15
1.5	Diagramma di corpo libero equazione 3	16
1.6	Diagramma di corpo libero equazione 5	16
1.7	Diagramma di corpo libero equazione 7	17
1.8	Autovalori al variare di v	19
1.9	Autovalori al variare di v di diversi veicoli	20
2.1	Sistema per la rilevazione della velocità angolare posteriore	23
2.2	Posizione della IMU con relativo sistema di riferimento	24
2.3	Sistema per la rilevazione dell'angolo di sterzo al manubrio	26
2.4	Schema quotato dello slalom	27
2.5	Schema quotato dell'otto	28
2.6	Schema quotato del corridoio	29
2.7	Schema quotato del cerchio	29
3.1	Autovalori del modello benchmark creato al variare di v (bicicletta)	30
3.2	Frequenze naturali al variare di v (bicicletta)	31
3.3	Relazione tra Re e Im degli autovalori weave (bicicletta)	32
3.4	Coefficienti di smorzamento al variare di v (bicicletta)	32
3.5	Screenshot capsizes a 3 m/s (bicicletta)	33
3.6	Screenshot capsizes a 6 m/s (bicicletta)	34
3.7	Screenshot capsizes a 9 m/s (bicicletta)	34
3.8	Modulo normalizzato di δ al variare di v (capsizes bicicletta)	35
3.9	Screenshot weave a 3 m/s (bicicletta)	36
3.10	Screenshot weave a 6 m/s (bicicletta)	37
3.11	Screenshot weave a 9 m/s (bicicletta)	37
3.12	Modulo normalizzato di δ al variare di v (weave bicicletta)	38
3.13	Fase normalizzata di δ al variare di v (bicicletta)	38
3.14	Screenshot castering a 3 m/s (bicicletta)	39
3.15	Screenshot castering a 6 m/s (bicicletta)	40
3.16	Screenshot castering a 9 m/s (bicicletta)	40
3.17	Modulo normalizzato di δ al variare di v (castering bicicletta)	41
3.18	Autovalori del monopattino al variare di v	42
3.19	Parte reale del castering del monopattino al variare di v	42
3.20	Relazione tra Re e Im degli autovalori weave (monopattino)	43
3.21	Frequenze naturali al variare di v (monopattino)	43

3.22	Coefficienti di smorzamento al variare di v (monopattino)	43
3.23	Screenshot capsize a 3 m/s (monopattino)	44
3.24	Screenshot capsize a 6 m/s (monopattino)	45
3.25	Screenshot capsize a 9 m/s (monopattino)	45
3.26	Modulo normalizzato di δ al variare di v (capsize monopattino)	46
3.27	Screenshot weave a 3 m/s (monopattino)	47
3.28	Screenshot weave a 6 m/s (monopattino)	47
3.29	Screenshot weave a 9 m/s (monopattino)	48
3.30	Modulo normalizzato di δ al variare di v (weave monopattino)	48
3.31	Fase normalizzata di δ al variare di v (monopattino)	49
3.32	Screenshot castering a 3 m/s (monopattino)	50
3.33	Screenshot castering a 6 m/s (monopattino)	50
3.34	Screenshor castering a 9 m/s (monopattino)	51
3.35	Modulo normalizzato di δ al variare di v (castering monopattino)	51
4.1	Gradi di libertà a seguito di un disturbo a 5.8 m/s	53
4.2	Gradi di libertà a seguito di un disturbo a 6.1 m/s	54
4.3	Modello 4 dof completo	55
4.4	Schema delle velocità del veicolo	56
4.5	Sistema di riferimento modello di Pacejka	57
5.1	Deviazione standard dello sterzo al variare della velocità	61
5.2	Deviazione standard media dello sterzo al variare della velocità	62
5.3	Deviazione standard del rollio al variare della velocità	62
5.4	Deviazione standard media del rollio al variare della velocità	63
5.5	Traiettoria del monopattino nella manovra del cerchio	64
5.6	a_{yIMU} del modello alle varie velocità	64
5.7	Errore percentuale su a_{yIMU} alle varie velocità	65
5.8	$\dot{\psi}$ del modello alle varie velocità	65
5.9	Errore percentuale su $\dot{\psi}$ alle varie velocità	66
5.10	Errore percentuale su ϕ alle varie velocità	66
5.11	ϕ del modello alle varie velocità	67
5.12	δ del modello e sperimentale alle varie velocità	67
5.13	Traiettoria dello slalom a 1,47 m/s	68
5.14	ϕ dello slalom a 1,47 m/s	69
5.15	δ dello slalom a 1,47 m/s	70
5.16	Traiettoria dello slalom a 2,41 m/s	70
5.17	ϕ dello slalom a 2,41 m/s	71
5.18	δ dello slalom a 2,41 m/s	71
5.19	Traiettoria dello slalom a 3,13 m/s	72
5.20	ϕ dello slalom a 3,13 m/s	72
5.21	δ dello slalom a 3,31 m/s	73

Elenco delle tabelle

1	Dati benchmark di bicicletta	11
2	Dati geometrici e inerziali Xiaomi Pro 2	22

1 Introduzione

Nel corso dei secoli le biciclette hanno subito varie modifiche in termini di design, materiali e tecnologie. La popolarità delle biciclette aumentò gradualmente dopo l'invenzione delle biciclette di sicurezza [16], veicoli molto più simili ai mezzi attualmente in commercio. Da lì in poi, le biciclette sono state sempre di più la scelta prediletta per gli spostamenti a breve distanza. Questi mezzi sono veicoli estremamente efficienti in termini di energia necessaria per percorrere una certa distanza [17] e negli ultimi anni risultano anche preferibili per il loro impatto ambientale nullo. L'aumento del costo del carburante, la maggior attenzione alle emissioni e la riduzione del costo delle batterie stanno rendendo i mezzi come biciclette elettriche e monopattini la miglior opzione per spostamenti low cost. Negli ultimi anni è diventato sempre più importante lo spostamento all'interno delle città. La possibilità di avere a disposizione un terreno spesso livellato ha permesso la diffusione di mezzi di spostamento personale con ruote con raggi sempre più piccoli. Questa caratteristica favorisce la compattezza dei veicoli, che ormai, non è raro poter portarsi in giro in mano senza particolari problemi. Ultimamente lo sviluppo dei monopattini elettrici è entrato nel vivo e sono ormai disponibili sul mercato una moltitudine di modelli con filosofie costruttive anche molto diverse tra di loro. Sono in vendita mezzi dotati di sospensioni sia all'anteriore che al posteriore, solo all'anteriore oppure totalmente privi di questa soluzione. Esiste anche molta varietà nel campo degli pneumatici, con alcuni monopattini con pneumatici tubeless, con camere d'aria o di pura gomma con struttura interna che dona rigidità. L'ascesa repentina di questi veicoli ha messo in luce la scarsa esperienza degli utenti con mezzi relativamente nuovi come i monopattini elettrici, che fino a pochi anni fa non erano strumenti di utilizzo comune. Questi ultimi hanno caratteristiche dinamiche profondamente differenti dalle biciclette e il loro range di stabilità viene fortemente influenzato [10], di conseguenza, è possibile trovarsi in difficoltà in caso di manovre di emergenza. Oltre alla poca dimestichezza nei confronti di un mezzo che non è ancora del tutto entrato a far parte dell'uso comune, è innegabile il fatto che il controllo dei monopattini sia molto più complicato anche per guidatori più esperti. Il tutto è avvalorato anche da alcuni studi sulle biciclette con ruote di raggio inferiore alla norma [3]. L'aumento del loro utilizzo è quindi accompagnato ad un incremento degli incidenti gravi e mortali nelle città [14], [11]. Attualmente le infrastrutture di molte zone urbane come ciclabili e marciapiedi non sono progettate per sostenere una tale mole di utenti, il che comporta un peggioramento delle problematiche. È importante analizzare il comportamento dei monopattini in caso di situazioni di emergenza, sia studiando la loro stabilità che la facilità di controllo in manovre a stretto raggio di curvatura o ad alte velocità. La maggior comprensione della dinamica laterale del mezzo può portare allo sviluppo di modifiche mirate al suo miglioramento, favorendo un progresso e una standardizzazione delle scelte progettuali volte all'ottenimento di veicoli sempre più sicuri ed efficaci.

1.1 Differenze tra biciclette e monopattini

La ricerca scientifica si è concentrata negli ultimi decenni solo su biciclette o derivati di esse. L'interesse sui monopattini, in particolare quelli a propulsione elettrica, è nato solamente in tempi recenti. È quindi utile capire le differenze in termini geometrici ed inerziali tra i due veicoli per poter riadattare i risultati ottenuti in passato e farne tesoro.

Seppur i pesi dei due veicoli possano essere approssimabili, non lo è la loro distribuzione. Partendo dalle ruote, i monopattini presentano raggi dei cerchi notevolmente inferiori così come inferiore è il passo. L'inclinazione della colonna di sterzo è notevolmente più evidente nel caso della bicicletta; questo è uno dei parametri che più influenza la stabilità del veicolo come meglio discusso in 1.2. Il manubrio nel monopattino ha una dimensione ridotta, il che riduce anche la capacità di imprimere momento di sterzo, mentre il canotto di sterzo raggiunge dimensioni ragguardevoli come verrà illustrato più nel dettaglio in Tabella 1 e 2.

Partendo dagli studi degli ultimi ottanta anni, molti ricercatori si sono cimentati nell'individuazione delle equazioni fondamentali per descrivere la dinamica delle biciclette e più in generale dei veicoli leggeri a due ruote. Sono stati individuati diversi set di relazioni, ognuno con il suo grado di complessità e accuratezza. Negli ultimi anni però è stata necessaria un'uniformazione delle equazioni per poter avere un solido punto di partenza per ricerche future, sia su biciclette che su mezzi di nuova generazione. A tal proposito, Meijaard[7] ha svolto tale compito e ha creato un modello benchmark piuttosto semplice, unendo ai vari modelli dinamici ideati da altri ricercatori ([1],[5],[15],[13],[2],[4],[6]) i suoi precedenti studi ([9],[8],[12]). Il risultato è un set di equazioni differenziali standardizzato, utile per qualsiasi disamina fisica di base su questi mezzi. Da questo punto di partenza è quindi possibile, applicando i giusti dati e accorgimenti, compiere analisi di carattere numerico su mezzi anche diversi dalla bicicletta, come il monopattino elettrico.

1.2 Modello benchmark di bicicletta

La presente sezione ha il compito di fornire un approfondimento sul modello standard di bicicletta utilizzato in ogni trattazione su questo tipo di veicolo dal 2007 in poi [7].

1.2.1 Gradi di libertà e parametri fondamentali

Il modello considerato è composto da quattro corpi rigidi come evidenziato in Figura 1.1:

- Ruota posteriore R
- Telaio posteriore B con pilota solidale ad esso
- Telaio anteriore H contenente manubrio e canotto di sterzo
- Ruota anteriore F

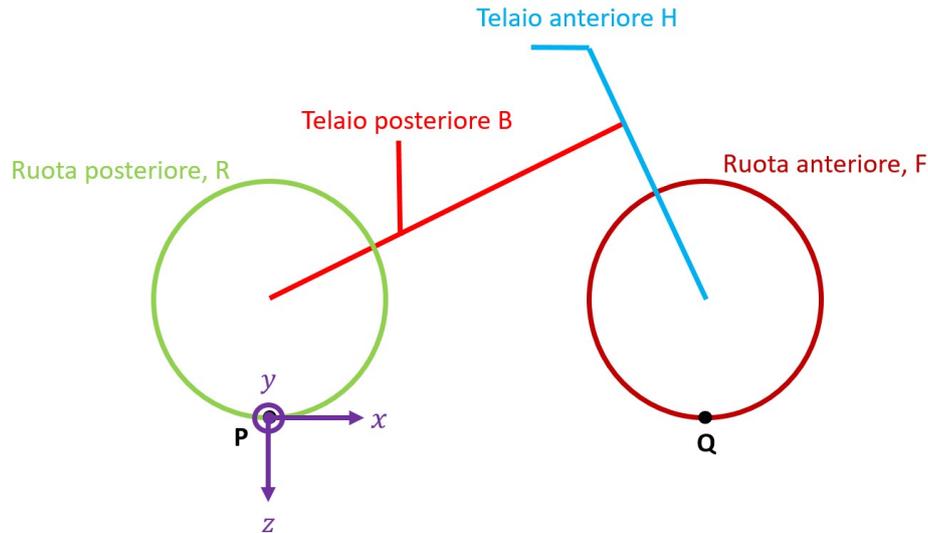


Figura 1.1: Rappresentazione dei corpi rigidi della bicicletta

Analizzando il sistema, il numero totale dei gradi di libertà dei quattro corpi è 24 (ogni corpo possiede tre gradi di libertà traslazionali e tre gradi di libertà rotazionali). Esaminando più a fondo i vincoli, vengono sottratti cinque gradi di libertà per i tre giunti (connessione dello sterzo, perni mozzo anteriore e posteriore) e uno ulteriore per ciascun punto di contatto con il suolo (P e Q). Il risultato è un sistema a **7 gradi di libertà** ($x_P, y_P, \phi, \psi, \delta, \theta_R, \theta_F$) come in Figura 1.2 dove:

- x_P e y_P rappresentano le coordinate del punto P rispetto ad un sistema di riferimento centrato in P
- ϕ è l'angolo di rollio del veicolo
- ψ è l'angolo di imbardata
- δ è l'angolo di sterzo al manubrio
- θ_R e θ_F sono le rotazioni delle due ruote rispetto all'asse dei mozzi

Le rotazioni effettive delle ruote producono effetti giroscopici che vengono considerati assumendo un momento angolare H_R "associato" al telaio posteriore e una quantità H_F "associata" al telaio anteriore. Questi momenti sono considerati positivi quando la bicicletta procede in avanti. L'intero modello è descritto da dei parametri raccolti in Tabella 1. Tutti i valori sono basati su biciclette reali, ad eccezione delle proprietà inerziali delle ruote, che sono state volutamente esagerate per evidenziare la loro influenza.

1.2.2 Disaccoppiamento tra dinamica laterale e velocità

La simmetria della bicicletta nel piano xz implica che i movimenti non sterzati e non inclinati ($\delta = 0$ e $\phi = 0$) siano necessariamente soluzioni per qualsiasi velocità in avanti o indietro v . Inoltre, il movimento longitudinale e quello laterale devono essere separati linearmente dal seguente argomento: a causa della simmetria laterale, una perturbazione verso destra dovrebbe produrre un cambiamento di velocità uguale a una perturbazione

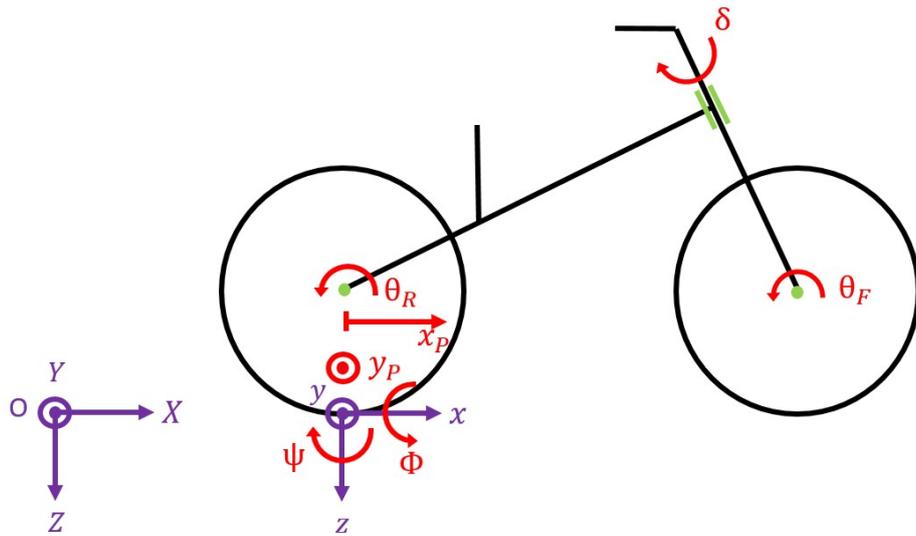


Figura 1.2: Rappresentazione dei gradi di libertà e dei giunti della bicicletta

Parametro	Simbolo	Valore benchmark
Passo	w	1.02 m
Avancorsa	c	0.08 m
Inclinazione canotto	λ	$\pi/10$ rad
Gravità	g	9.81 N/kg
Velocità longitudinale	v	Variabile (from 0 to 10 m/s)
Ruota posteriore R		
Raggio	r_R	0.3 m
Massa	m_R	2 kg
Momenti d'inerzia	(I_{Rxx}, I_{Ryy})	(0.0603, 0.12) kg m ²
Telaio posteriore B		
Posizione centro di massa	(x_B, z_B)	(0.3, -0.9) m
Massa	m_B	85 kg
Momenti d'inerzia	$\begin{bmatrix} I_{Bxx} & 0 & I_{Bxz} \\ 0 & I_{Byy} & 0 \\ I_{Bzx} & 0 & I_{Bzz} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9.2 & 0 & 2.4 \\ 0 & 11 & 0 \\ 2.4 & 0 & 2.8 \end{bmatrix}$ kg m ²
Telaio anteriore H		
Posizione centro di massa	(x_H, z_H)	(0.9, -0.7) m
Massa	m_H	4 kg
Momenti d'inerzia	$\begin{bmatrix} I_{Hxx} & 0 & I_{Hxz} \\ 0 & I_{Hyy} & 0 \\ I_{Hzx} & 0 & I_{Hzz} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.059 & 0 & -0.008 \\ 0 & 0.06 & 0 \\ -0.008 & 0 & 0.007 \end{bmatrix}$ kg m ²
Ruota anteriore F		
Raggio	r_F	0.35 m
Massa	m_F	3 kg
Momenti d'inerzia	(I_{Fxx}, I_{Fyy})	(0.1405, 0.28) kg m ²

Tabella 1: Dati benchmark di bicicletta

verso sinistra. Tuttavia, secondo il principio di linearità, questi effetti devono annullarsi a vicenda. Ciò significa che non può esserci un cambiamento di velocità di primo ordine dovuto all'inclinazione. Allo stesso modo, un cambiamento di velocità da solo non può portare a un'inclinazione. Di conseguenza, le equazioni del moto linearizzate in direzione longitudinale sono completamente indipendenti dalle equazioni di moto laterale. Dopo queste considerazioni, v , H_R e H_F sono presi come costanti e si indagano solo quei movimenti che coinvolgono spostamenti laterali dei punti di massa dal piano xz, portando il sistema ad uno a **4 gradi di libertà** (y_P, δ, ϕ, ψ).

1.2.3 Equazioni del moto

In base ai gradi di libertà così definiti in 1.2.2, vengono individuate quattro equazioni di partenza. Viene qui tralasciata la procedura dettagliata per l'individuazione delle leggi e della creazione dei vari coefficienti. Si introduce durante la creazione dei diagrammi di corpo rigido l'ipotesi di **piccoli angoli** per tutti i gradi di libertà angolari esaminati.

Bilancio delle forze lungo y La prima equazione esamina la traslazione del veicolo lungo la direzione laterale della bicicletta. La Figura 1.4 mostra il diagramma di corpo libero con le forze utili al calcolo:

$$m_T \ddot{y}_P - m_T z_T \ddot{\phi} + m_T x_T \ddot{\psi} + m_H d \ddot{\delta} = F_{yR} + F_{yF} \cos \theta \quad (1)$$

Dalla quale si ricava:

$$\ddot{y}_P = \frac{F_{yR} + F_{yF} \cos \theta + m_T z_T \ddot{\phi} - m_T x_T \ddot{\psi} - m_H d \ddot{\delta}}{m_T} \quad (2)$$

Dove:

- $m_T \ddot{y}_P$ è la forza di reazione di m_T dovuta all'accelerazione del punto P senza rollio o sterzo
- $m_T z_T \ddot{\phi}$ è la forza di reazione di m_T dovuta al solo rollio
- $m_T x_T \ddot{\psi}$ è la forza di reazione dovuta alla sola imbardata
- $m_H d \ddot{\delta}$ è la forza di reazione dovuta al solo sterzo
- $F_{yR} + F_{yF}$ è la somma delle forze nella direzione y dovute al contatto con il terreno nei punti P e Q con θ pari all'angolo di sterzo a terra

Bilancio del momento di rollio La seconda equazione racchiude tutti i momenti che influenzano la rotazione lungo l'asse x del veicolo. La Figura 1.5 mostra il diagramma di corpo libero:

$$-m_T \ddot{y}_P z_T + I_{Txx} \ddot{\phi} + I_{Txx} \ddot{\psi} + I_{A\lambda x} \ddot{\delta} + \dot{\psi} v S_T + \dot{\delta} v S_F \cos \lambda = T_{B\phi} - g m_T z_T \phi + g S_A \delta \quad (3)$$

Dalla quale si ottiene:

$$\ddot{\phi} = \frac{T_{B\phi} - g m_T z_T \phi + g S_A \delta + m_T \ddot{y}_P z_T - I_{Txx} \ddot{\psi} - I_{A\lambda x} \ddot{\delta} - \dot{\psi} v S_T - \dot{\delta} v S_F \cos \lambda}{I_{Txx}} \quad (4)$$

Dove:

- $m_T \ddot{y}_P z_T$ è il momento dato dalla traslazione laterale del centro di massa dell'intera bicicletta
- $I_{Txx} \ddot{\phi}$ è il momento dato dal rollio rispetto al punto P
- $I_{Tzz} \ddot{\psi}$ è il momento dato dall'imbardata rispetto al punto P
- $I_{A\lambda z} \ddot{\delta}$ è il momento dato dall'accelerazione angolare del telaio anteriore durante una sterzata
- $\dot{\psi} v S_T$ è il momento dovuto agli effetti giroscopici delle due ruote durante l'imbardata
- $\dot{\delta} v S_F \cos \lambda$ è il momento dovuto agli effetti giroscopici della sola ruota anteriore in caso di sterzata
- $T_{B\phi}$ è la coppia rollante esercitata dal pilota
- $g m_T z_T \phi$ è il momento dovuto al disallineamento del baricentro totale con l'asse verticale in caso di rollio della bicicletta
- $g S_A \delta$ è il momento dovuto al disallineamento del baricentro del telaio anteriore con l'asse verticale in caso di sterzata

Bilancio del momento di imbardata La terza equazione comprende tutti i momenti che producono una rotazione lungo l'asse verticale della bicicletta. In Figura 1.6 viene riportato il diagramma di corpo libero:

$$m_T \ddot{y}_P x_T + I_{Txx} \ddot{\phi} + I_{Tzz} \ddot{\psi} + I_{A\lambda z} \ddot{\delta} - \dot{\phi} v S_T - \dot{\delta} v S_F \sin \lambda = w F_{yF} \cos \theta \quad (5)$$

Dalla quale si ricava:

$$\ddot{\psi} = \frac{w F_{yF} \cos \theta - m_T \ddot{y}_P x_T - I_{Txx} \ddot{\phi} - I_{A\lambda z} \ddot{\delta} + \dot{\phi} v S_T + \dot{\delta} v S_F \sin \lambda}{I_{Tzz}} \quad (6)$$

Dove:

- $m_T \ddot{y}_P x_T$ è il momento dato dalla traslazione laterale dell'intero sistema
- $I_{Txx} \ddot{\phi}$ è il momento dato dal rollio rispetto al punto P
- $I_{Tzz} \ddot{\psi}$ è il momento dato dall'imbardata rispetto al punto P
- $I_{A\lambda z} \ddot{\delta}$ è il momento dato dall'accelerazione angolare del telaio anteriore durante la sterzata
- $\dot{\phi} v S_T$ è il momento dovuto agli effetti giroscopici delle due ruote durante il rollio
- $\dot{\delta} v S_F \sin \lambda$ è il momento dovuto agli effetti giroscopici della sola ruota anteriore in caso di sterzata
- $w F_{yF} \cos \theta$ è il momento imbardante dovuto alla forza di contatto della ruota anteriore nel SR ruota e θ l'angolo di sterzo a terra

Bilancio del momento di sterzo La quarta e ultima equazione ha il compito di esaminare tutte le componenti che creano momento di sterzo. Si noti che il momento di sterzo viene definito lungo l'asse λ del cannotto di sterzo. La Figura 1.7 mostra il diagramma di corpo libero con le forze utili al calcolo:

$$m_A \ddot{y}_P d + I_{A\lambda x} \ddot{\phi} + I_{A\lambda z} \ddot{\psi} + I_{A\lambda\lambda} \ddot{\delta} + v S_F (-\dot{\phi} \cos \lambda + \dot{\psi} \sin \lambda) = T_{H\delta} - c F_{yF} \cos \lambda + g(\phi + \delta \sin \lambda) S_A \quad (7)$$

Per poi ricavare:

$$\ddot{\delta} = \frac{T_{H\delta} - c F_{yF} \cos \lambda + g(\phi + \delta \sin \lambda) S_A - m_A \ddot{y}_P d - I_{A\lambda x} \ddot{\phi} - I_{A\lambda z} \ddot{\psi} - v S_F (-\dot{\phi} \cos \lambda + \dot{\psi} \sin \lambda)}{I_{A\lambda\lambda}} \quad (8)$$

Dove:

- $m_A \ddot{y}_P d$ è il momento dato dalla rotazione del telaio anteriore, d è la distanza tra il centro di massa del telaio anteriore e l'asse λ come evidenziato in Figura 1.3
- $I_{A\lambda x} \ddot{\phi}$ è il momento dovuto al rollio rispetto al punto P
- $I_{A\lambda z} \ddot{\psi}$ è il momento dovuto all'imbardata rispetto al punto P
- $I_{A\lambda\lambda} \ddot{\delta}$ è il momento dovuto alla sterzata dell'intero sistema
- $v S_F (-\dot{\phi} \cos \lambda + \dot{\psi} \sin \lambda)$ è il momento lungo λ causato dagli effetti giroscopici della sola ruota anteriore in caso di rollio e imbardata
- $T_{H\delta}$ è il momento di sterzo applicato dal pilota
- $c F_{yF} \cos \lambda$ è il momento dato dalla forza di contatto della ruota anteriore nel SR ruota
- $g(\phi + \delta \sin \lambda) S_A$ è il momento dato dalla forza gravitazionale in caso di disallineamento con l'asse λ durante rollio e sterzata

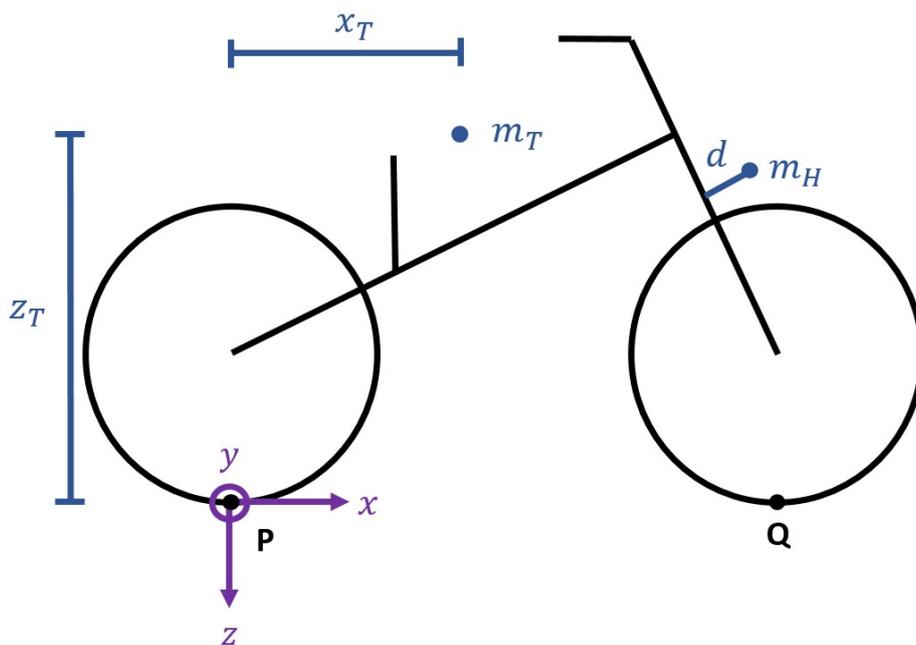


Figura 1.3: Rappresentazione delle quote fondamentali della bicicletta

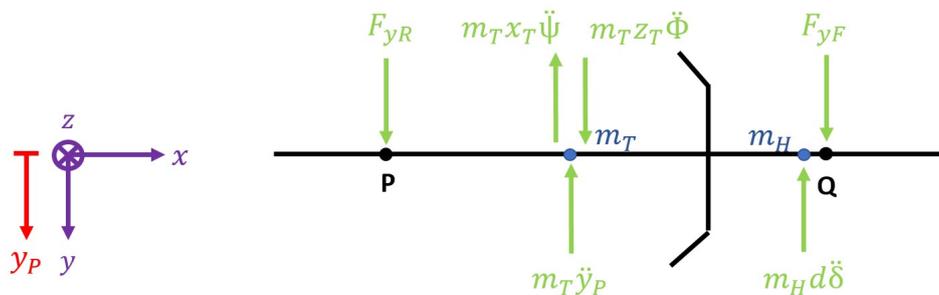


Figura 1.4: Diagramma di corpo libero equazione 1

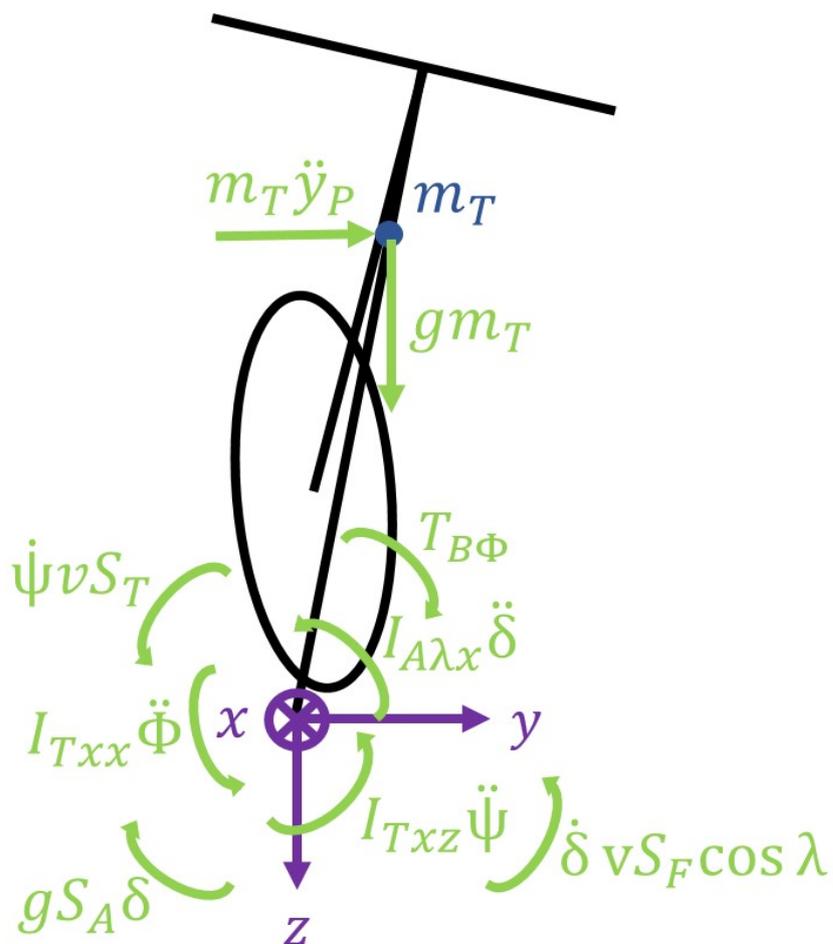


Figura 1.5: Diagramma di corpo libero equazione 3

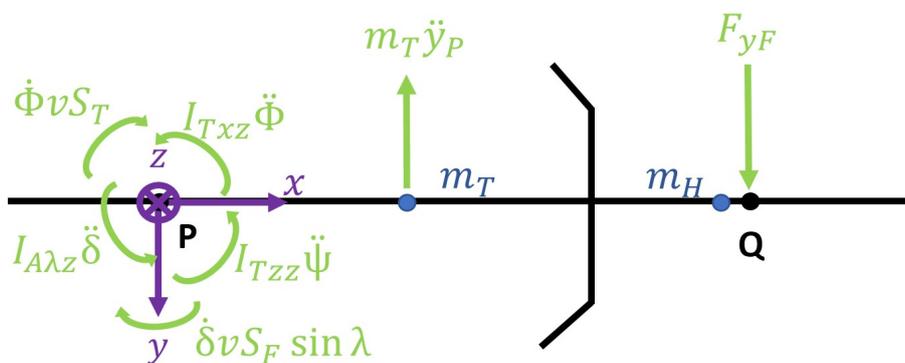


Figura 1.6: Diagramma di corpo libero equazione 5

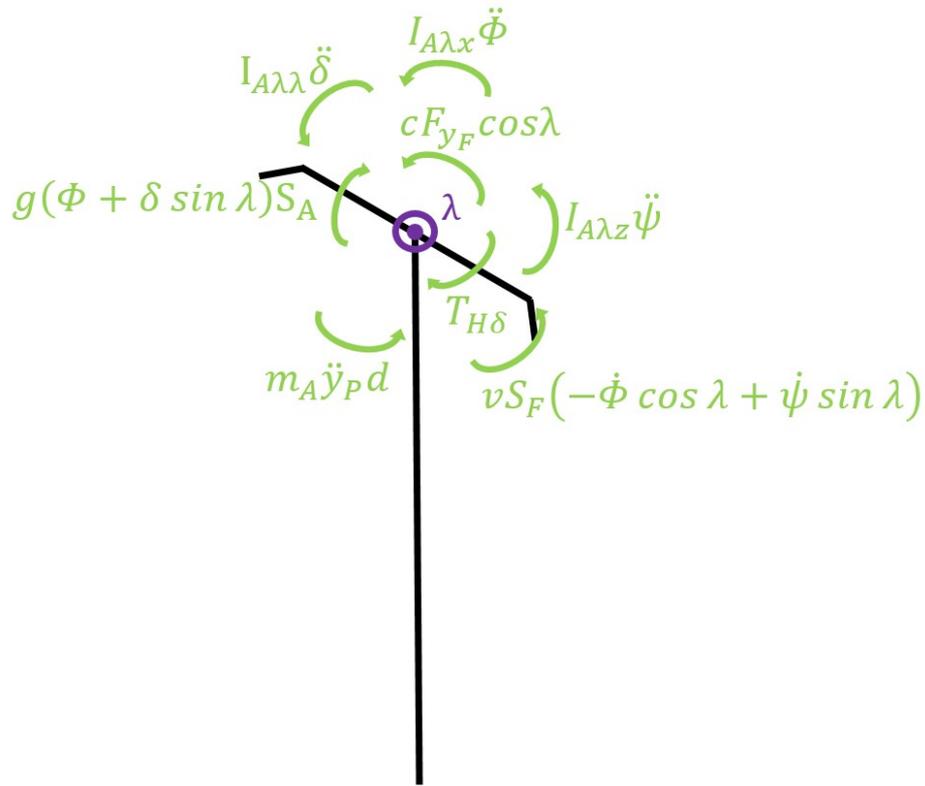


Figura 1.7: Diagramma di corpo libero equazione 7

1.2.4 Equazioni del moto ridotte

Date le quattro equazioni appena descritte, introducendo l'ipotesi di **non strisciamento delle ruote**, è possibile ridurre ulteriormente il numero di gradi di libertà del sistema.

Le equazioni 1, 3, 5 e 7 sono valide qualunque sia la forza orizzontale F_{yF} e F_{yR} che agisce nei punti di contatto delle ruote. In particolare, esse rimangono ovviamente valide se le forze sono esattamente quelle necessarie a impedire lo slittamento laterale delle ruote rispetto alla loro direzione istantanea. Per la ruota posteriore, la condizione di slittamento pari a zero è definita con:

$$\dot{y}_P = v\psi \quad (9)$$

Per la ruota anteriore, è necessaria una relazione analoga in termini della coordinata y :

$$y_Q = y_P + w\psi - c\delta \cos \lambda \quad (10)$$

Differenziando 10 e sostituendo 9, si ottiene:

$$\dot{y}_Q = v\psi + w\dot{\psi} - c\dot{\delta} \cos \lambda \quad (11)$$

È altresì noto che la velocità del punto Q risulta:

$$\dot{y}_Q = v(\psi + \delta \cos \lambda) \quad (12)$$

Unendo 11 e 12 e isolando $\dot{\psi}$ si ottiene:

$$\dot{\psi} = \frac{v\delta + c\dot{\delta}}{w} \cos \lambda \quad (13)$$

E quindi differenziando 13:

$$\ddot{\psi} = \frac{v\dot{\delta} + c\ddot{\delta}}{w} \cos \lambda \quad (14)$$

Sostituendo 9 in 13 si ottiene:

$$\ddot{y}_P = \frac{v^2\delta + cv\dot{\delta}}{w} \cos \lambda \quad (15)$$

A questo punto si sono ottenute delle dipendenze da δ e $\dot{\delta}$ sia per \ddot{y}_P che per $\ddot{\psi}$. Si crea la variabile intermedia μ :

$$\mu = \frac{c}{w} \cos \lambda \quad (16)$$

Sostituendo 13, 6 e 15 in 3 si ottiene un'equazione con solamente la dipendenza da ϕ , δ e le loro derivate e il momento di rollio $T_{B\phi}$:

$$I_{Txx}\ddot{\phi} + (I_{A\lambda x} + \mu I_{Txx})\ddot{\delta} + v(\mu S_T + S_F \cos \lambda + \frac{I_{Txx}}{w} \cos \lambda - \mu m_T z_T)\dot{\delta} + \\ + g m_T z_T \phi + (-g S_A + v^2 \frac{S_T - m_T z_T}{w} \cos \lambda)\delta = T_{B\phi} \quad (17)$$

Eliminando poi F_{yF} da 5 e 7 e risostituendo 13, 6 e 15, si ottiene una seconda equazione con le stesse dipendenze di 17 ma come momento quello di sterzo $T_{B\delta}$:

$$(I_{A\lambda x} + \mu I_{Txx})\ddot{\phi} + (I_{A\lambda\lambda} + 2\mu I_{A\lambda z} + \mu^2 I_{Tzz})\ddot{\delta} - v(\mu S_T + S_F \cos \lambda)\dot{\phi} + \\ + v[\frac{I_{A\lambda z}}{w} \cos \lambda + \mu(S_A + \frac{I_{Tzz}}{w} \cos \lambda)]\dot{\delta} - g S_A \phi + \\ + (-g S_A \sin \lambda + v^2 \frac{S_A + S_F \sin \lambda}{w} \cos \lambda)\delta = T_{B\delta} \quad (18)$$

Il sistema così formato si riduce ad uno a **due gradi di libertà**, in particolare ϕ e δ . Questo set di equazioni verrà largamente utilizzato nella Sezione 3.

1.2.5 Analisi modale

Il presente sistema a 2 gdl si presta anche all'analisi modale e quindi alla ricerca e definizione di autovalori e autovettori. L'equazione di riferimento è 19, dove M , C e K sono rispettivamente le matrici di massa, smorzamento e rigidità, mentre q e f vengono definiti in 20 e in 21 e costituiscono i vettori dei gradi di libertà e delle forzanti. Ovviamente, per svolgere un'analisi modale, il sistema deve possedere vettore delle forzanti f pari a zero.

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = f \quad (19)$$

$$q = \begin{bmatrix} \phi \\ \delta \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$f = \begin{bmatrix} T_{B\phi} \\ T_{B\delta} \end{bmatrix} \quad (21)$$

Per il modello benchmark si è esaminato il sistema in un intervallo di velocità tra 0 e 10 m/s e si è seguita l'evoluzione degli autovalori. Il risultato dell'analisi è un gruppo di quattro autovalori distinti e quindi di altrettanti modi di vibrare: il weave (doppio), il castering e il capsizing come descritto in Figura 1.8. Le caratteristiche principali dei vari modi verranno analizzate nel dettaglio nella Sezione 3. È immediato notare come esista un range di stabilità del veicolo tra i 4.5 m/s e i 6 m/s; in questo intervallo, la bicicletta se perturbata torna nella posizione di riposo con $\phi = 0$ e $\delta = 0$.

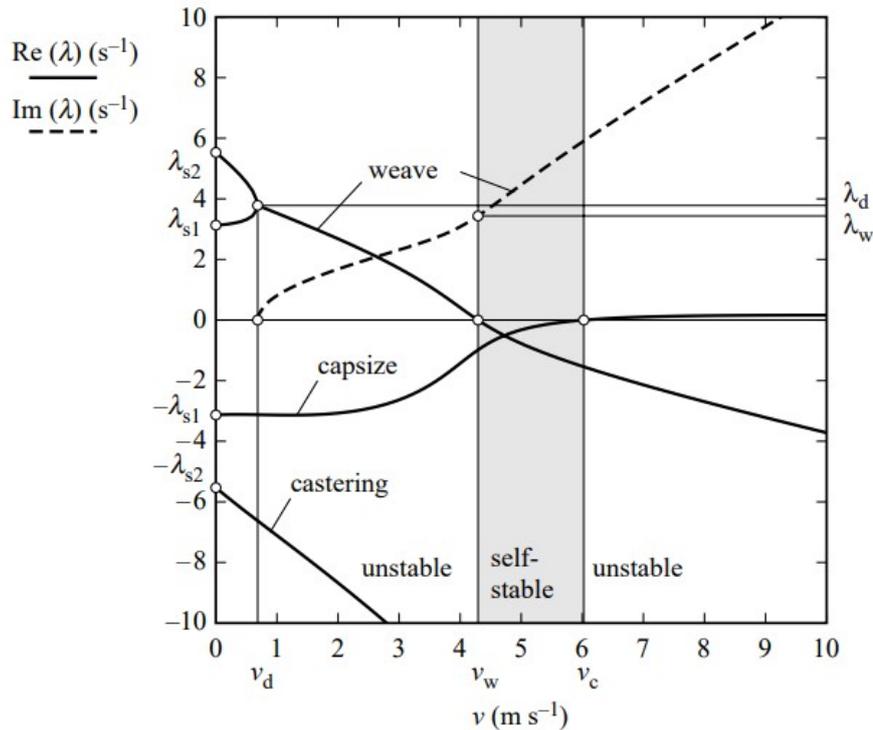


Figura 1.8: Autovalori al variare di v

1.3 Modello benchmark di monopattino

Se per la bicicletta esiste un modello largamente utilizzato e validato che funge da riferimento per tutti gli studi, non si può dire la stessa cosa per quanto riguarda il monopattino. I modelli attuali di monopattino si rifanno infatti a quanto discusso nella Sezione 1.3 con semplicemente i dati inerziali e geometrici cambiati. Una buona analisi delle differenze nella stabilità tra i vari veicoli la compie Paudel[10] come mostrato in Figura 1.9. Per la sua creazione sono stati raccolti i dati geometrici ed inerziali dei principali produttori di monopattini e biciclette e sono stati mediati per ottenere dei valori tipici da poter usare nell'analisi modale. Al diminuire della dimensione delle ruote la zona stabile tende ad aumentare ma al contempo si sposta a velocità sempre più alte, di conseguenza, nel caso di un monopattino, la soglia è al limite del range di utilizzo abituale del mezzo.

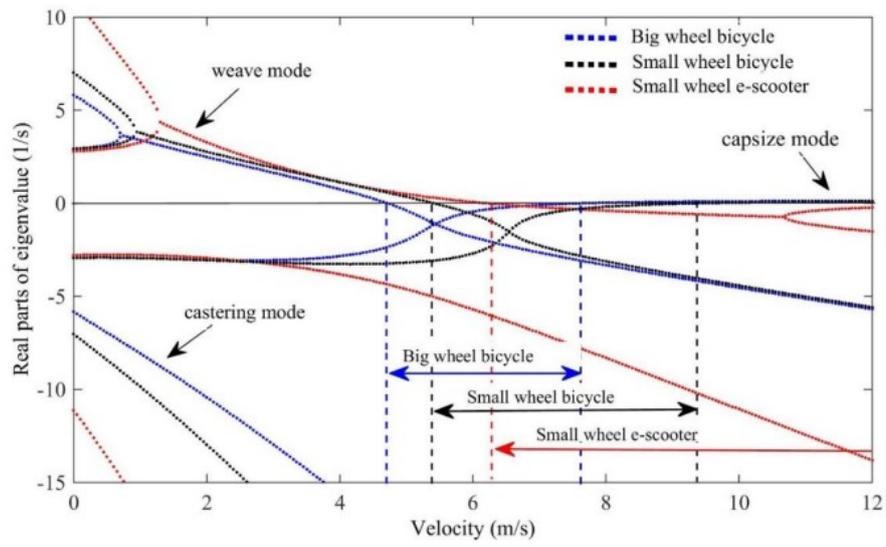


Figura 1.9: Autovalori al variare di v di diversi veicoli

2 Test sperimentali

In aggiunta all'analisi numerica, è stata svolta una campagna sperimentale con l'obiettivo di comparare i dati ottenuti dal veicolo reale con quelli di un modello dinamico in dominio tempo. Il monopattino utilizzato è stato lo Xiaomi Pro 2. Il veicolo è in grado di erogare 600 W di potenza da un motore situato nella ruota anteriore mentre al posteriore è presente un freno a disco. La velocità massima raggiungibile è di 25 km/h (7 m/s). In Tabella 2 vengono riassunti tutti i parametri geometrici ed inerziali.

2.1 Setup sperimentale

Data la necessità di comparare alcune grandezze sperimentali con le relative numeriche, le variabili utili allo scopo risultano: accelerazione laterale del veicolo, velocità angolari delle due ruote, angolo di sterzo (al manubrio), angolo di rollio, velocità di imbardata e traiettoria. Per la misurazione della velocità complessiva del monopattino è possibile estrapolarla dalle velocità angolari delle due ruote (ipotizzando scorrimento longitudinale nullo) che vengono calcolate tramite i dati derivanti da dei sensori di prossimità installati sul telaio. Sui due cerchioni sono state montate su ogni razza delle viti che quando si trovano in prossimità del sensore lo attivano facendogli restituire in output un segnale. Siccome le razze sono equidistanti, tramite un semplice rimaneggiamento dei picchi è possibile ricavare le velocità angolari. In Figura 2.1 viene rappresentata la soluzione adottata.

L'acquisizione dell'angoli di rollio, velocità di imbardata e accelerazione laterale è affidata ad una IMU posta alla base del monopattino. Il sistema di riferimento del sensore e l'esatta posizione vengono riportati in Figura 2.2.

Parametro	Simbolo	Valore benchmark
Passo	w	0.884 m
Avancorsa	c	0.029 m
Inclinazione canotto	λ	0.2618 rad
Gravità	g	9.81 N/kg
Velocità longitudinale	v	Variabile (from 0 to 10 m/s)
Ruota posteriore R		
Raggio	r_R	0.108 m
Massa	m_R	1.258 kg
Momenti d'inerzia	(I_{Rxx}, I_{Ryy})	(0.004, 0.007) kg m ²
Telaio posteriore B (pilota 1)		
Posizione centro di massa	(x_B, z_B)	(0.3684, -1.143) m
Massa	m_B	87.369 kg
Momenti d'inerzia	$\begin{bmatrix} I_{Bxx} & 0 & I_{Bxz} \\ 0 & I_{Byy} & 0 \\ I_{Bzx} & 0 & I_{Bzz} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 21.288 & 0 & 0.359 \\ 0 & 20.559 & 0 \\ 0.359 & 0 & 2.287 \end{bmatrix}$ kg m ²
Telaio posteriore B (pilota 2)		
Posizione centro di massa	(x_B, z_B)	(0.3700, -0.995) m
Massa	m_B	63.869 kg
Momenti d'inerzia	$\begin{bmatrix} I_{Bxx} & 0 & I_{Bxz} \\ 0 & I_{Byy} & 0 \\ I_{Bzx} & 0 & I_{Bzz} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 19.3914 & 0 & 0.3027 \\ 0 & 18.6685 & 0 \\ 0.3027 & 0 & 2.2931 \end{bmatrix}$ kg m ²
Telaio anteriore H		
Posizione centro di massa	(x_H, z_H)	(0.758, -0.650) m
Massa	m_H	2.6755 kg
Momenti d'inerzia	$\begin{bmatrix} I_{Hxx} & 0 & I_{Hxz} \\ 0 & I_{Hyy} & 0 \\ I_{Hzx} & 0 & I_{Hzz} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.389 & 0 & -0.077 \\ 0 & 0.398 & 0 \\ -0.077 & 0 & 0.027 \end{bmatrix}$ kg m ²
Ruota anteriore F		
Raggio	r_F	0.108 m
Massa	m_F	1.328 kg
Momenti d'inerzia	(I_{Fxx}, I_{Fyy})	(0.00387, 0.00726) kg m ²

Tabella 2: Dati geometrici e inerziali Xiaomi Pro 2



Figura 2.1: Sistema per la rilevazione della velocità angolare posteriore



Figura 2.2: Posizione della IMU con relativo sistema di riferimento

Il calcolo dell'angolo di sterzo risulta più macchinoso in quanto è necessario usare un dispositivo in grado di fornire un segnale analogico. La scelta è ricaduta su un potenziometro angolare collegato ad un meccanismo creato ad hoc. L'assieme fotografato in Figura 2.3 comprende:

1. Fascette metalliche
2. Supporto anteriore
3. Supporto posteriore
4. Staffa mobile
5. Supporto della staffa mobile
6. Barra filettata
7. Trave intermedia
8. Potenziometro
9. Staffa fissa
10. Spessore per staffa fissa
11. Minuteria varia

Il potenziometro per funzionare correttamente ha bisogno di essere fissato ad una base solidale al telaio e connesso nella parte rotante ad un dispositivo in grado di ruotare in qualche misura insieme all'asse di sterzo. La staffa fissa è collegata ad un supporto per un catadiottro precedentemente rimosso dal monopattino e ha il compito di alloggiare in maniera stabile il sensore tramite dei dadi. Per evitare che durante la marcia la staffa fletta troppo è stato montato, in una seconda versione, uno spessore stampato in 3D.

Per mettere in rotazione il potenziometro è stato creato un meccanismo a glifo contenente due parti principali: la staffa mobile e la trave intermedia. Quest'ultima è solidale alla parte rotante del sensore e possiede un'asola nella quale può scorrere una barra filettata tenuta ferma da dadi e controdadi rispetto alla staffa mobile. Il punto di fissaggio della trave intermedia è il più possibile in basso rispetto all'asta del potenziometro per evitare flessioni e quindi letture imprecise. La staffa mobile è invece solidale alla colonna dello sterzo ed è collegata alla barra filettata in corrispondenza di un'asola creata ad hoc.

Per mantenere la staffa mobile salda alla colonna di sterzo sono stati stampati in 3D due supporti, uno anteriore e uno posteriore, collegati insieme tramite bulloni. Il supporto della staffa mobile ha invece la funzione di portarla a battuta e mantenere tutto l'assieme compatto. In una versione aggiornata del meccanismo, i due supporti hanno ricevuto l'aggiunta di due flange, raggi di raccordo maggiorati, infill della stampa aumentato e un'asola aggiuntiva nel supporto della staffa mobile per permettere una maggior rigidità del sistema. Infine, sono state aggiunte due fascette metalliche per evitare la traslazione dei due supporti stampati lungo l'asse del canotto di sterzo. Per un grip maggiore si è deciso di applicare del nastro adesivo gommato tra il canotto e i supporti per evitare la rotazione lungo l'asse.

Il funzionamento del meccanismo è il seguente: quando il manubrio viene girato, la staffa mobile ruota, e grazie alla barra filettata mette in rotazione la trave intermedia. A questo punto, tramite una formula trigonometrica ricavata dalla geometria del sistema, è possibile calcolare l'angolo di sterzo in base a quello del potenziometro.

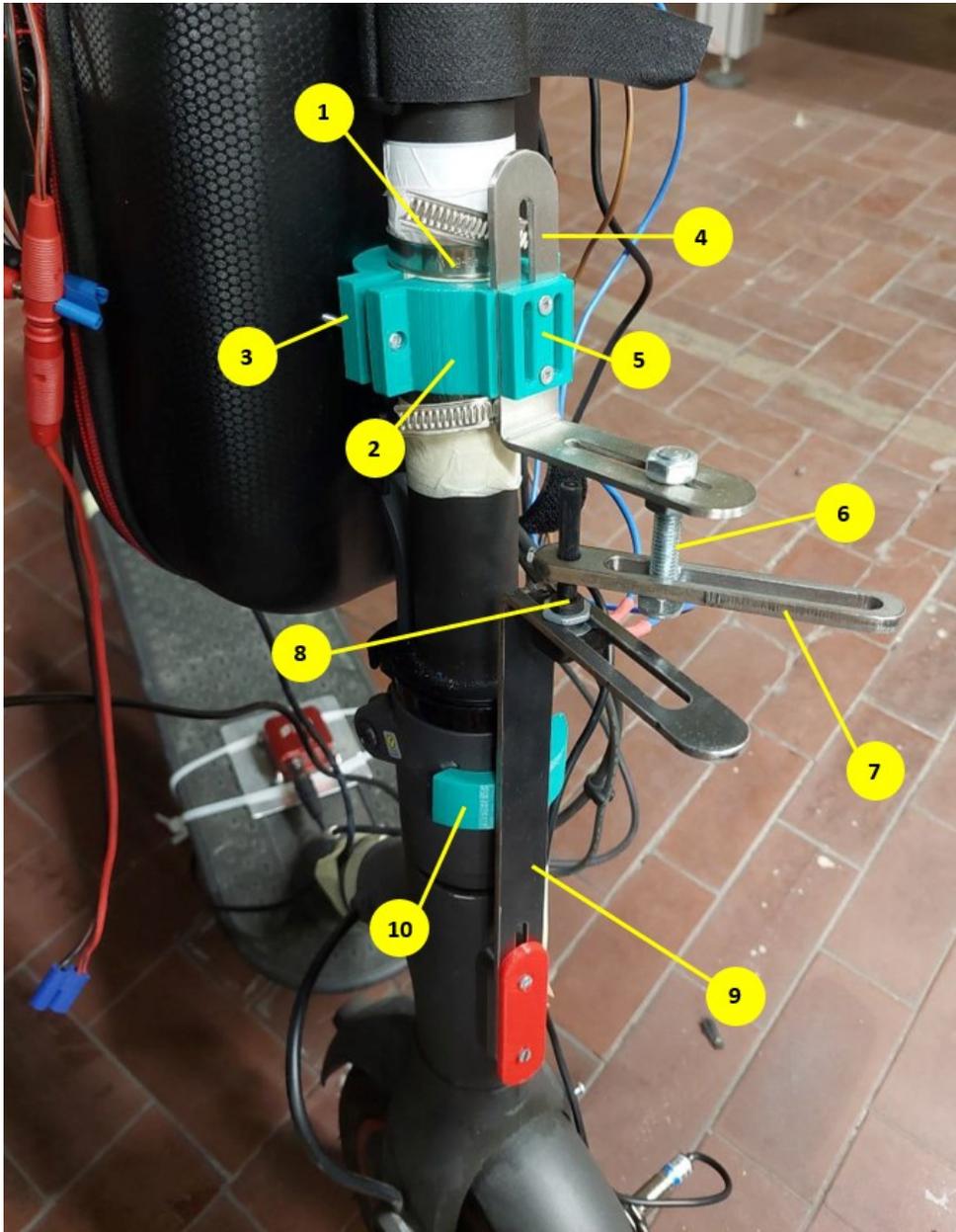


Figura 2.3: Sistema per la rilevazione dell'angolo di sterzo al manubrio

I due sensori di prossimità, il potenziometro e la IMU sono tutti collegati ad una batteria da 5 V per l'alimentazione. Per evitare derive negli output del potenziometro è stato aggiunto un cavo per monitorare la tensione della batteria, così facendo, il valore di tensione del potenziometro può essere normalizzato rispetto alla tensione di alimentazione. L'intera sensoristica è infine collegata ad uno Scadas XS per l'acquisizione dei dati. Lo

strumento è stato posizionato insieme al circuito elettrico all'interno di due borse legate alla colonna di sterzo per una maggiore praticità.

2.2 Svolgimento delle prove

Consci del fatto che l'obiettivo delle prove sperimentali sia quello di confrontare i dati cinematici e dinamici con quelli restituiti dal modello per validarlo, è necessario effettuare manovre che coinvolgano in modo massiccio la dinamica laterale. Le manovre scelte sono quattro:

- slalom
- otto
- corridoio
- cerchio

Per quanto riguarda le prime tre prove sono state seguite le linee guida per l'esame pratico per la patente AM. Si sottolinea che queste prove sperimentali sono state compiute da due piloti differenti i cui dati inerziali sono inclusi in quelli del telaio posteriore del monopattino e specificati in Tabella 2.

Lo slalom necessita di cinque coni a 4 m di distanza tra di loro; dopo una breve rincorsa, il pilota dovrà effettuare la manovra a velocità costante lasciando il primo cono alla propria destra come chiarito in Figura 2.4. La certezza del mantenimento di una velocità pressoché costante è garantita dall'attivazione del cruise control del monopattino precedente alla manovra. Le misurazioni sono state effettuate a tre velocità obiettivo: 5 km/h, 8 km/h e 15 km/h (1.39 m/s, 2.22 m/s e 4.17 m/s). Si specifica che le velocità appena nominate sono puramente indicative poiché il cruise control ha una soglia di attivazione arbitraria che non permette la regolazione fine della velocità. A questo proposito, l'identificazione dell'effettiva velocità della manovra viene compiuta a posteriori tramite l'analisi dei dati sulla velocità angolare delle ruote. Si noti che tutte le prove svolte sono largamente al di sotto del range stabile; un aumento ulteriore della velocità non è stato possibile data la difficoltà sempre crescente da parte del pilota a compiere la manovra correttamente.

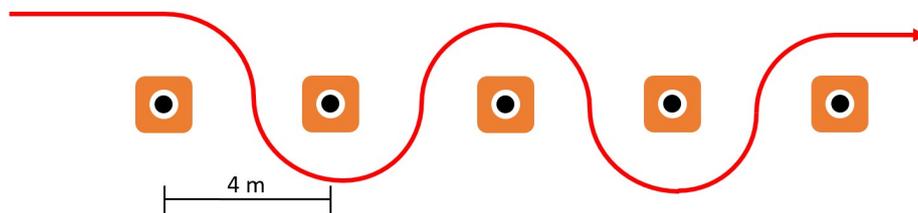


Figura 2.4: Schema quotato dello slalom

Le successive misurazioni sono state svolte nel circuito denominato "otto". Come suggerisce il nome, la traiettoria da seguire è quella di un otto tra due coni distanti 8 m e con delle delimitazioni esterne create con altri coni distanti 3.5 m dai primi due. Figura

2.5 rappresenta lo schema quotato. Data la grande variabilità nella traiettoria ad ogni passaggio, durante le misurazioni la manovra è stata ripetuta 3 volte per avere più dati da mediare. Ogni pilota ha effettuato 4 prove, la prima a velocità variabile, la seconda a 5 km/h (1.39 m/s), la terza a 9 km/h (2.5 m/s) e l'ultima a 11 km/h (3 m/s).

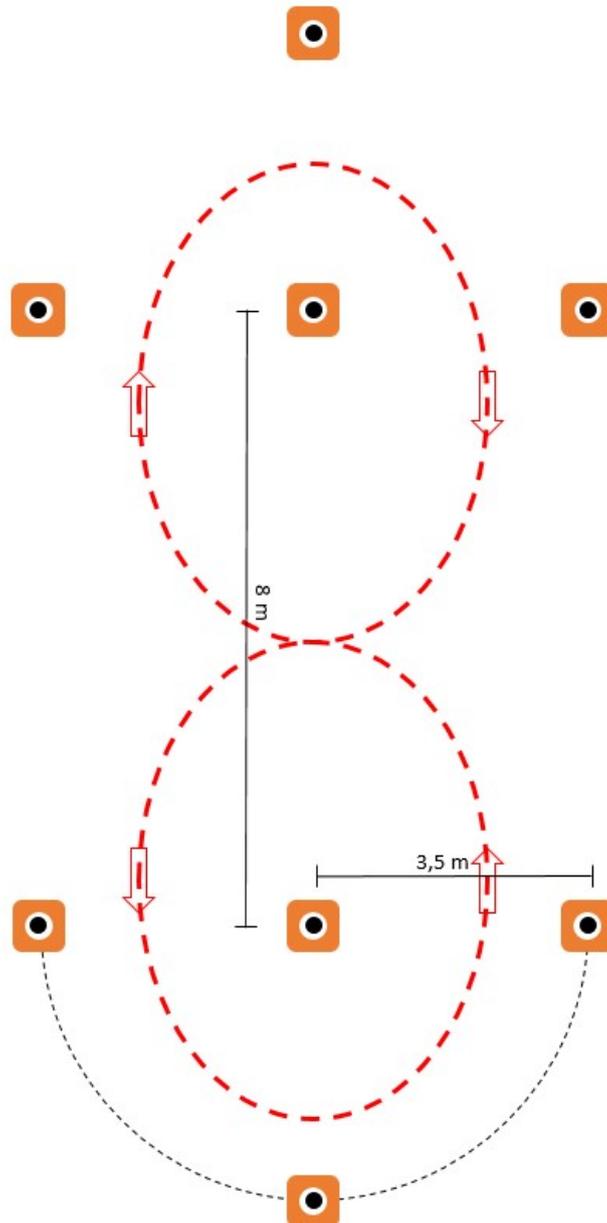


Figura 2.5: Schema quotato dell'otto

La cosiddetta manovra del corridoio è l'ultima delle prove con geometria normata e consiste in un passaggio con il veicolo ad una data velocità all'interno di due file di coni distanti 0.6 m tra loro e lunghe 6 m (Figura 2.6) Sebbene quest'ultima non presenti propriamente un coinvolgimento della dinamica laterale, è comunque utile per valutare se in range stabile vi sia un'effettiva diminuzione delle microcorrezioni imposte dal pilota per mantenere una traiettoria rettilinea. Ciascun pilota ha effettuato 3 misurazioni per le seguenti velocità obiettivo: 5 km/h, 10 km/h, 15 km/h, 20 km/h e 25 km/h (1.39 m/s, 2.78

m/s, 4.17 m/s, 5.56 m/s e 6.94 m/s). In questo caso, l'unica prova all'interno del range di stabilità risulta quella a 25 km/h, tuttavia, non è logico aspettarsi un cambiamento di comportamento troppo marcato dato che comunque il pilota, durante tutta la misurazione, applica input al veicolo che quindi non permettono di visualizzare una risposta libera.

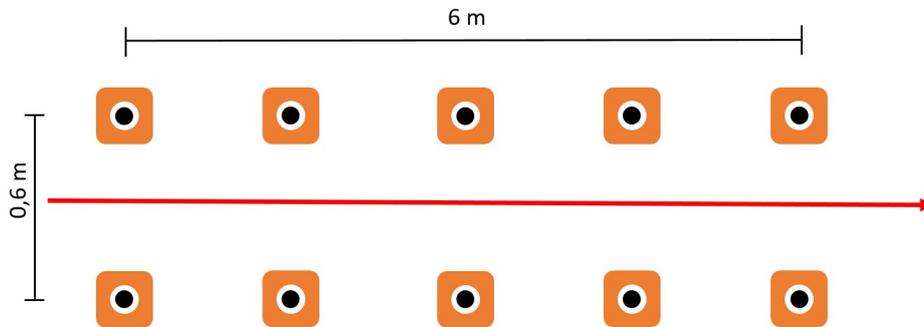


Figura 2.6: Schema quotato del corridoio

L'ultima manovra è quella del cerchio. La geometria consiste in un cono che funge da centro di una circonferenza di raggio 6 m tracciata sul pavimento con del gesso che il pilota deve cercare di seguire con la ruota anteriore. Questa linea è delimitata ad una distanza di un metro da conetti sia a destra che a sinistra, risultante quindi in altri due cerchi di raggio 5 m e 7 m come schematizzato in Figura 2.7. Ogni pilota ha effettuato due prove in senso orario e due in senso antiorario. La prima consisteva nell'attivare il cruise control a diverse velocità per poi mantenerle per almeno un giro, mentre la seconda partiva da velocità molto basse per poi accelerare gradualmente fino a raggiungere il massimo possibile dal pilota (solitamente da 7 km/h a 15 km/h).

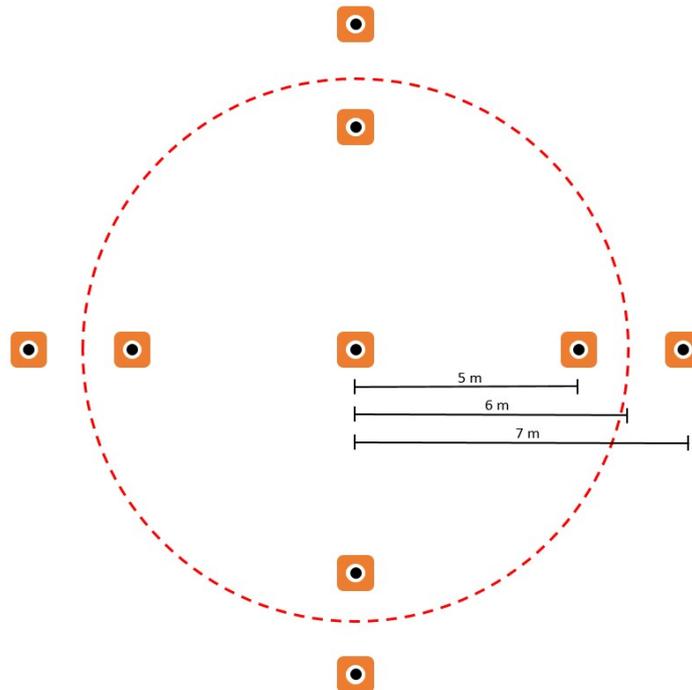


Figura 2.7: Schema quotato del cerchio

3 Analisi modale

L'analisi modale rappresenta un passaggio cruciale per comprendere il comportamento dinamico di un sistema meccanico. Nella presente sezione, l'analisi è stata inizialmente condotta sul modello benchmark di 1.2 per poi essere adattata al monopattino, al fine di esplorare e confrontare le caratteristiche modali dei due mezzi. A partire dai dati del modello benchmark (Tabella 1) è stato creato uno script Matlab in grado di compiere l'analisi modale e le successive indagini. Si sottolinea che le equazioni utilizzate sono 17 e 18. A partire dal sistema matriciale, con il metodo dello spazio degli stati è stato possibile individuare quattro modi di vibrare con autovalori complessi: weave (doppio), castering e capsize. Il primo obiettivo del modello è stato quello di ottenere, con i dati benchmark, gli stessi risultati di Figura 1.8 per poter validare lo script.

3.1 Validazione del modello

A seguito del calcolo degli autovalori, è stato rappresentato l'andamento di questi ultimi al variare della velocità v in Figura 3.1. Come è immediato notare, l'andamento di tutte

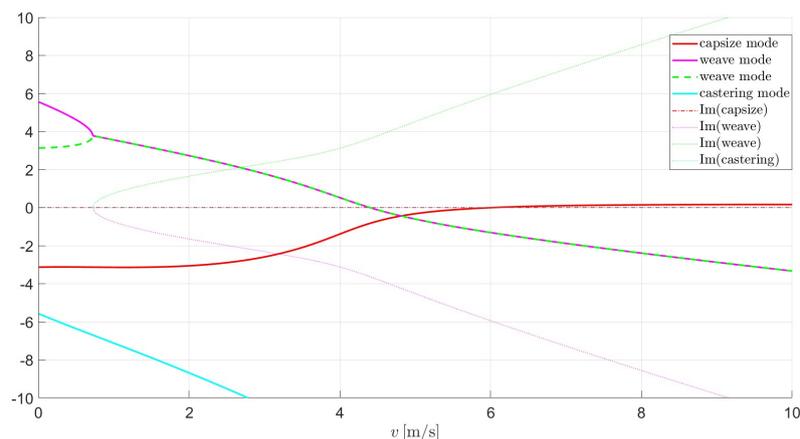
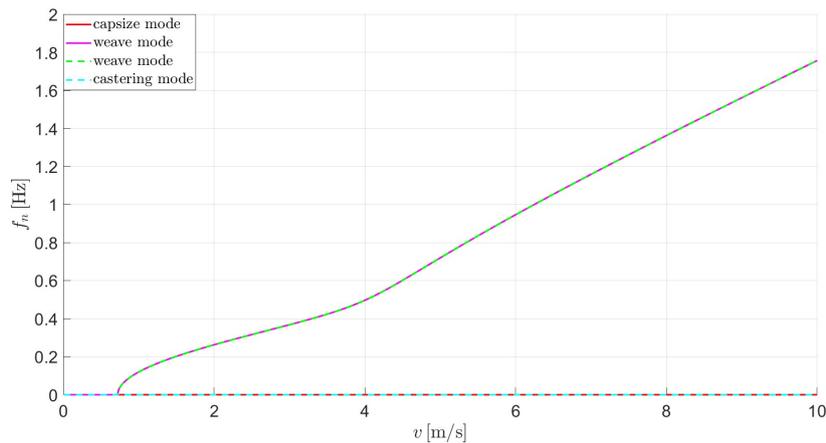


Figura 3.1: Autovalori del modello benchmark creato al variare di v (bicicletta)

le grandezze è perfettamente sovrapponibile a quello di Figura 1.8, di conseguenza, le analisi successive sono da considerarsi in linea con quelle benchmark, sia per la bicicletta che per il monopattino. Oltre alla comparazione visiva dei grafici dei modi, è stato anche effettuato un confronto numerico con le varie componenti matriciali del sistema, il quale ha avuto esito positivo.

3.2 Analisi degli autovalori, frequenze e smorzamenti (bicicletta)

Come è noto, la parte reale di un autovalore denota la sua stabilità. Se quest'ultima è maggiore di zero si identifica un modo instabile con ampiezza che tende ad infinito, se viceversa è negativa, le oscillazioni andranno a perdere di ampiezza nel tempo. A questo proposito, è importante capire che in caso di tutti i modi con parte reale negativa, sarà presente una stabilità generale del sistema, che, in qualsiasi modo venga perturbato, tenderà sempre a tornare ad una configurazione stabile, questo poichè non esiste nessun


 Figura 3.2: Frequenze naturali al variare di v (bicicletta)

modo che possa prendere il sopravvento e far aumentare in modo incontrollato le proprie oscillazioni. Per quanto riguarda la parte immaginaria, essa è legata alla frequenza di oscillazione del modo. Se essa è pari a zero si è in presenza di un sistema a smorzamento critico, ovvero senza frequenza di oscillazione, dato che il ritorno alla configurazione stabile viene effettuato senza vibrazioni. Quando invece la parte immaginaria è positiva, il modo possiede una sua frequenza naturale pari alla parte immaginaria divisa per 2π .

Analizzando il modello in questione, a v prossime allo zero si identificano i quattro modi già nominati in 1.2.5. I due modi di weave hanno entrambi parte reale positiva, questo implica una loro instabilità, mentre sia il capsize che il castering sono stabili. Per tutti e quattro i modi la parte immaginaria è pari a zero, questo comporta avere un sistema completamente privo di oscillazioni proprie. A $v = 0.73$ m/s si ha il primo cambio di comportamento del sistema, infatti, i due modi weave convergono in uno solo, diventando complessi coniugati. In corrispondenza dell'unione delle due parti reali nasce quella immaginaria, che essendo di due autovalori complessi coniugati sarà uguale e opposta. Con la comparsa della parte complessa, il weave ottiene la sua parte oscillatoria, quindi la bicicletta, almeno per quanto riguarda questo modo, inizierà ad oscillare in modo instabile. Per quanto riguarda i rimanenti, non si verificano particolari differenze se non che il capsize inizi ad avere una leggera derivata positiva e che il castering sia sempre più stabile. Intorno a $v = 4.4$ m/s anche il weave entra in campo stabile, rendendo tale l'intera bicicletta. Si noti che la frequenza del weave aumenta all'aumentare di v , con un aumento di derivata intorno ai 4 m/s, mentre non si notano differenze nella parte immaginaria degli altri autovalori. Fino ai 6 m/s l'andamento è costante, superati questi ultimi il capsize ottiene parte reale positiva seppur piccola, rendendo di nuovo il sistema instabile. Oltre questa soglia il sistema rimane immutato fino alla fine del range analizzato di 10 m/s. Un dettaglio delle frequenze naturali è presente in Figura 3.2. Come è prevedibile, l'andamento segue quello delle parti immaginarie dei modi, in particolare si può notare come la frequenza del modo weave sia al massimo 1.8 Hz, ovvero pienamente in linea con le frequenze sperimentate nella vita di tutti i giorni guidando una bicicletta.

È anche stata analizzata la relazione tra parte reale e immaginaria degli autovalori dei modi weave in Figura 3.3. Le parti orizzontali rappresentano le basse velocità dove i due modi vanno a convergere. Da lì in poi gli autovalori avranno una parte speculare rispetto

all'asse x, cosa in linea con la definizione di complessi coniugati.

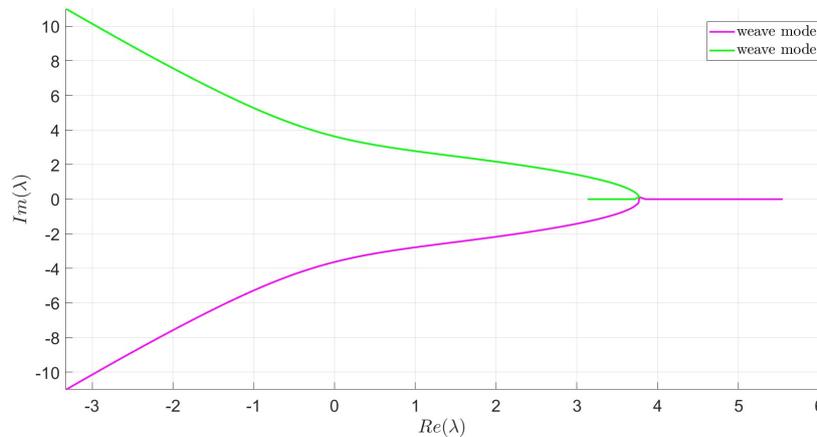


Figura 3.3: Relazione tra Re e Im degli autovalori weave (bicicletta)

Ricordando che la parte reale degli autovalori è legata allo smorzamento del sistema, è stata rappresentata anche la variazione dei coefficienti di smorzamento ζ al variare di v in Figura 3.4. Si noti come un coefficiente negativo identifichi un modo instabile e non un reale valore di smorzamento. Come da aspettativa, ζ diventa positivo solo quando il modo guadagna parte reale negativa ed è diverso da 1 solo se è presente la parte immaginaria.

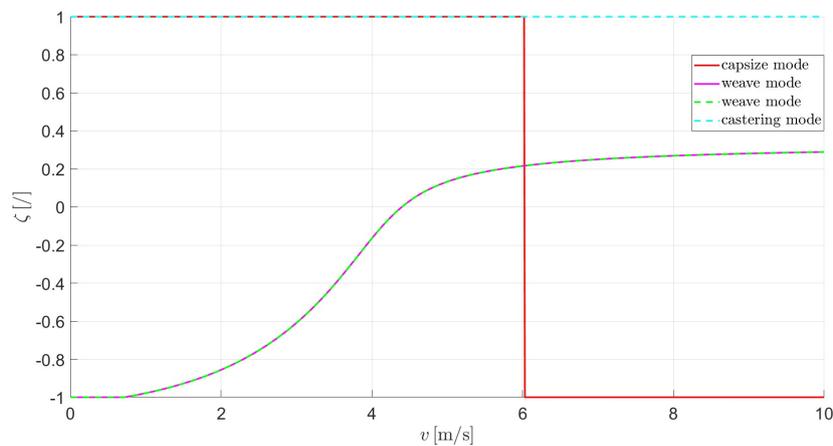


Figura 3.4: Coefficienti di smorzamento al variare di v (bicicletta)

3.3 Morfologia dei modi (bicicletta)

La presente sezione si occupa di analizzare la forma dei modi di vibrare analizzando sia ϕ che δ e la loro variabilità all'aumentare di v . Tutte le considerazioni sono fatte con gli autovettori normalizzati su ϕ e con quest'ultimo uguale in modulo tra i modi tranne che nel caso del castering per motivi che verranno discussi. I modi verranno esaminati a tre velocità obiettivo: 3 m/s, 6 m/s e 9 m/s.

3.3.1 Capsize

Come discusso nella Sezione 3.2, il capsise è un modo critico, di conseguenza non possiede oscillazioni. Dal calcolo degli autovalori si ottengono dei ϕ e δ che tendono a far girare il veicolo nello stesso verso in tutto lo spettro di analisi. Questo identifica una tendenza della bicicletta a percorrere una spirale nella quale l'angolo di rollio e di sterzo aumentano in maniera esponenziale fino alla sua caduta.

A 3 m/s, lo sfasamento degli angoli è zero e il modulo dello sterzo è poco più della metà di quello di rollio. Da questi dati si evince che la variazione dei due gradi di libertà sarà in fase e cambierà solo di ampiezza. Per una migliore comprensione della morfologia del modo, in Figura 3.5 viene rappresentata la bicicletta ad angolo di rollio massimo e relativo angolo di sterzo.

A 6 m/s, sebbene i due movimenti siano sempre in fase, a cambiare è l'ampiezza dell'angolo di sterzo, infatti, quest'ultimo risulta dimezzato come si evince da Figura 3.6. Si ricordi che come visto in Figura 3.1, a questa velocità vi è il passaggio nel campo instabile del modo. Infine, all'ultima velocità presa in esame, il comportamento risulta il medesimo dei casi precedenti con un modulo di δ ancora minore (Figura 3.7).

A prima vista, guardando solo queste tre misurazioni, si può immaginare un andamento monotono decrescente del modulo dell'angolo di sterzo rispetto a quello di rollio. In verità, diagrammando il solo modulo normalizzato di δ al variare della velocità, si ottiene il grafico in Figura 3.8. Dopo un repentino cambio di derivata intorno a 0.83 m/s, è presente un massimo a 3.6 m/s per poi avere una dolce decrescita. L'analisi alle tre velocità rischia di non mettere in mostra questo complesso andamento, perciò anche in seguito verrà diagrammato il modulo di δ . Questa rappresentazione può anche aiutare in questo caso a comprendere la morfologia del modo; visionando solo i fermi immagine è molto difficile apprezzare la differenza di angolo di sterzo alle diverse velocità.

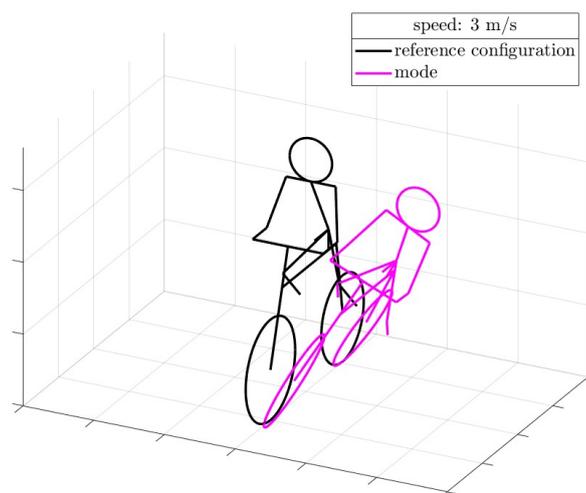


Figura 3.5: Screenshot capsise a 3 m/s (bicicletta)

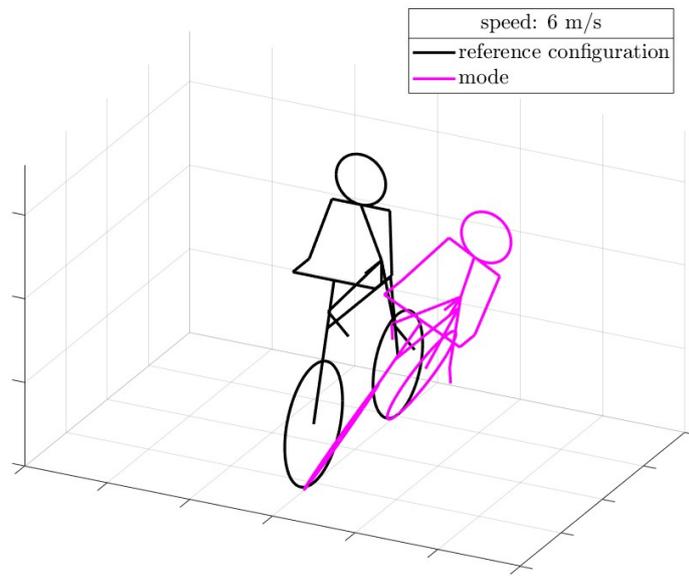


Figura 3.6: Screenshot capsiza a 6 m/s (bicicletta)

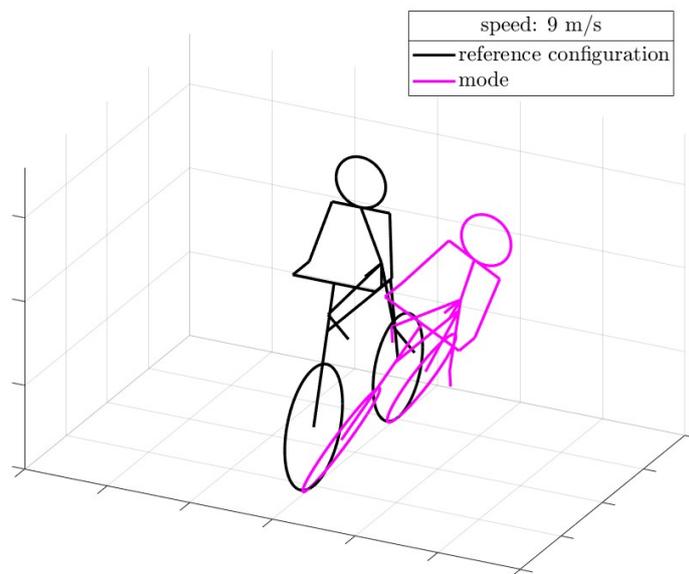


Figura 3.7: Screenshot capsiza a 9 m/s (bicicletta)

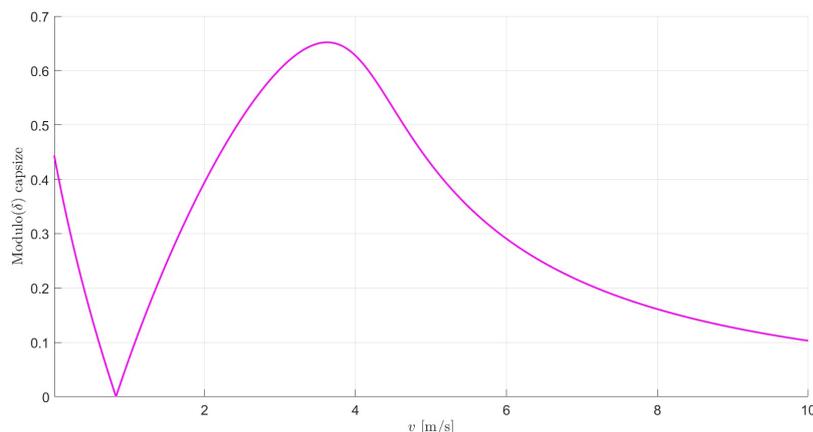


Figura 3.8: Modulo normalizzato di δ al variare di v (capsize bicicletta)

3.3.2 Weave

Il secondo e più peculiare modo di vibrare è il weave. Oltre ad essere il prodotto di due modi uniti, è anche l'unico ad avere parte immaginaria diversa da zero, generando quindi delle oscillazioni sottosmorzate e un ritardo di fase tra i due gradi di libertà. A differenza del capsizing, qui il movimento è di tipo oscillatorio proprio perchè come visto in Figura 3.4, non essendo un modo a smorzamento critico, le vibrazioni sono presenti. Il movimento che si genera è un andamento ondulatorio della bicicletta (da qui il termine weave) nel quale ad un'inclinazione verso destra si accompagna una sterzata verso sinistra e viceversa. Il moto risultante è esattamente quello che si sperimenta pedalando senza mani cercando di mantenere una traiettoria il più possibile rettilinea.

In quest'analisi la fase gioca un ruolo fondamentale, poichè al suo variare, la morfologia dell'oscillazione viene grandemente influenzata. La Figura 3.9 a 3 m/s non ha purtroppo una grande funzione chiarificatrice, poichè nel momento di massimo angolo di rollio lo sterzo è posizionato come nel capsizing, ovvero con stesso segno di ϕ . La differenza sostanziale con il primo modo è che con il ritardo di δ di circa $\pi/2$, in fase di raddrizzamento della bicicletta, la ruota anteriore tende a girare rapidamente verso la direzione di marcia, creando il movimento sopra descritto. In definitiva, a questa velocità il modo è molto vicino al capsizing alla stessa velocità per quanto riguarda i moduli mentre lo sfasamento rende i due gdl pressochè in quadratura.

A 6 m/s lo sfasamento tra gli angoli è notevolmente ridotto, comportando un'evoluzione dei due angoli contemporanea. Da Figura 3.10 si nota come il modo sia molto simile al caso del capsizing ma con modulo di δ molto più elevato. È interessante analizzare come la fase cambi anch'essa al variare di v . A differenza degli altri modi, quindi, il mutare della fase permette all'oscillazione di assumere forme molto diverse in tutto il range preso in esame.

Come appena descritto, a 9 m/s non è una sorpresa ottenere un modo di vibrare ancora diverso. Lo sfasamento prossimo a π porta al comportamento di Figura 3.11 nel quale lo sterzo tende a riallineare il telaio posteriore alla direzione di marcia. In definitiva, si ritorna ad un comportamento simile a Figura 3.9 ma senza uno sfasamento apprezzabile.

Lungo tutto il campo di analisi è importante notare come non sia il modulo di δ a variare in modo sostanziale quanto la fase, ottenendo un comportamento molto diverso

da Figura 3.8. In Figura 3.12, si può osservare come dopo il primo periodo di convergenza dei due modi in cui uno dei due moduli ha valori importanti, il tutto si assesti poco sopra l'uno. Per quanto riguarda invece la fase in Figura 3.13, dopo una prima parte in cui non si ha sfasamento, appena i due modi convergono si ha la nascita di quest'ultimo e una graduale decrescita. Il salto a 8.5 m/s è solamente dovuto alla definizione di fase in $[0, 2\pi]$. Non potendo avere valori negativi, la fase prende valori a partire da π per poi continuare a scendere. Si può anche notare l'assoluta continuità nella variazione della derivata prima e dopo il salto che infatti non viene intaccata.

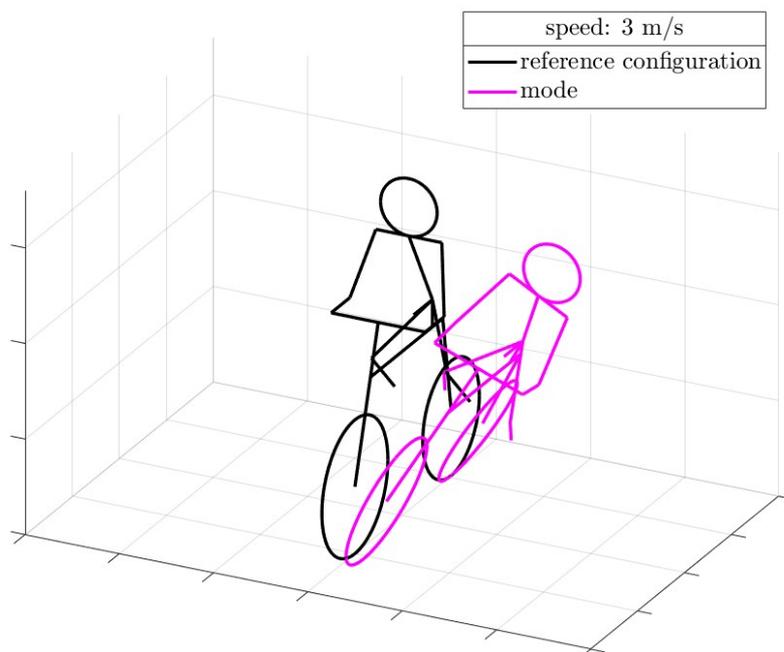


Figura 3.9: Screenshot weave a 3 m/s (bicicletta)

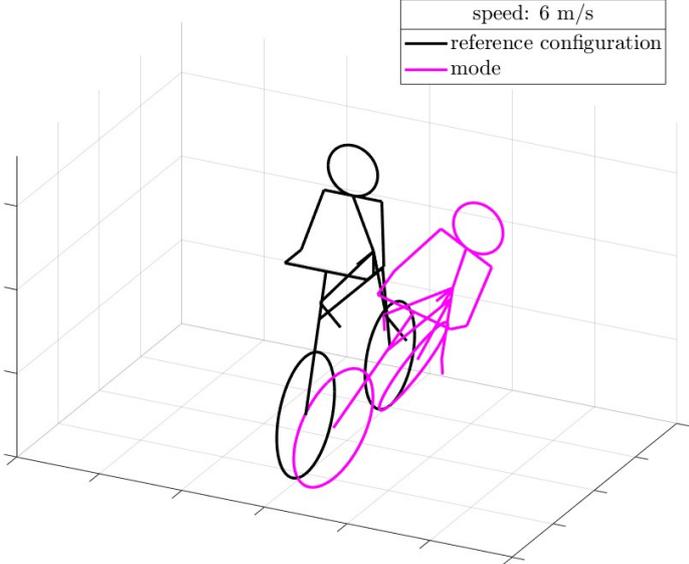


Figura 3.10: Screenshot weave a 6 m/s (bicicletta)

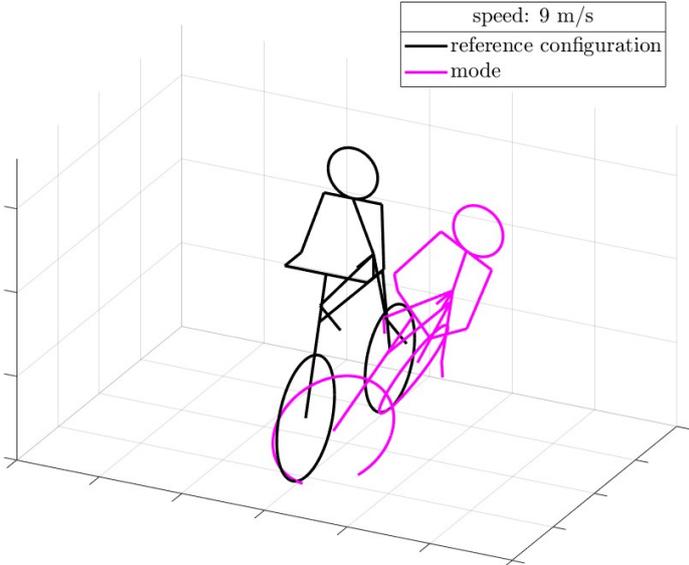


Figura 3.11: Screenshot weave a 9 m/s (bicicletta)

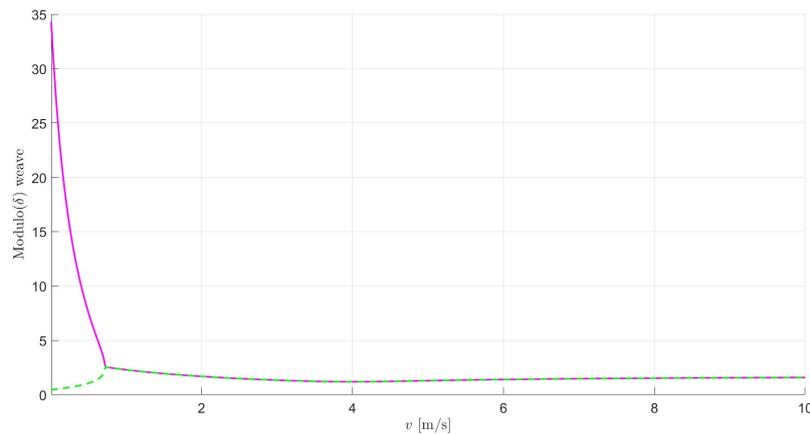


Figura 3.12: Modulo normalizzato di δ al variare di v (weave bicicletta)

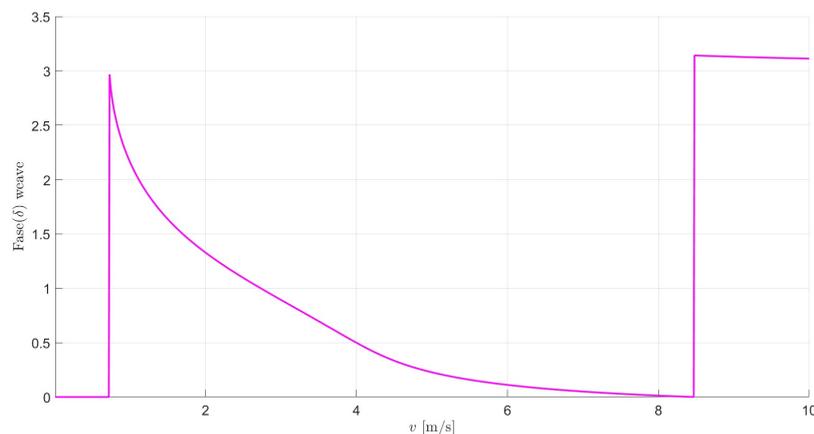


Figura 3.13: Fase normalizzata di δ al variare di v (bicicletta)

3.3.3 Castering

Il castering è l'ultimo modo ottenuto dall'analisi modale. In Figura 3.1 si evince che in tutto il campo preso in esame il modo sia stabile e per di più con $\zeta = 1$. Il risultato dell'analisi del movimento è un modo fortemente dominato dallo sterzo in cui ad un grande δ si associa un leggero ϕ di stesso segno.

Iniziando lo studio a 3 m/s si nota subito come il modulo di δ sia di gran lunga più grande del rollio. In Figura 3.14 il tutto è ancora più chiaro; se l'intero telaio del veicolo si discosta impercettibilmente da quello di riferimento, non si può dire la stessa cosa della ruota anteriore. La fase è la stessa tra i gradi di libertà e lo sarà per tutte le velocità, di conseguenza, non ci si aspetta una variazione sostanziale nella forma del modo.

A 6 m/s la situazione generale rimane invariata se non per il fatto che il modulo di δ sia aumentato di quasi sei volte, rendendo il movimento ancora più accentuato. Figura 3.15 riassume quanto detto.

L'ultima velocità analizzata, ovvero 9 m/s presenta un modulo di angolo di sterzo nuovamente decrescente, assestandosi intorno agli 84 rad. Figura 3.16 rappresenta il modo.

A prima vista si potrebbe immaginare un andamento del modulo lungo v con un un picco intorno a 6 m/s per poi avere una decrescita. La realtà è invece rappresentata da Figura 3.17. Lungo il campo di analisi si possono notare due picchi importanti intorno a 0.4 m/s e 5.5 m/s. Tralasciando questi due massimi il resto del campo è abbastanza costante in un range inferiore ai 100 rad.

Come anticipato in 3.3, gli screenshots non presentano lo stesso valore di ϕ degli altri due modi, questo perchè ovviamente con una visualizzazione di rollio così importante sarebbe stato associato un angolo δ più volte superiore all'angolo giro. Ciò in prima istanza non sarebbe stato realistico dato che difficilmente un canotto di sterzo reale potrebbe girare più volte su se stesso e inoltre la visualizzazione sarebbe stata inefficace, soprattutto in caso di un'immagine e non di una gif animata che avrebbe catturato a rollio massimo un angolo di sterzo in un punto casuale.

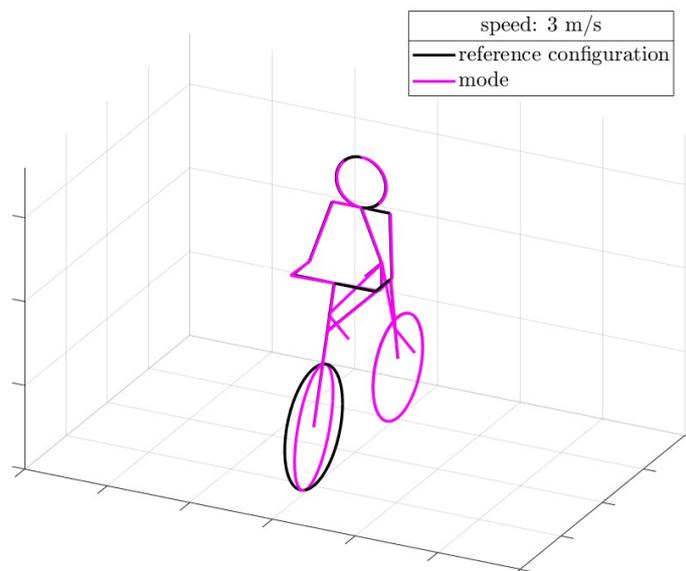


Figura 3.14: Screenshot castering a 3 m/s (bicicletta)

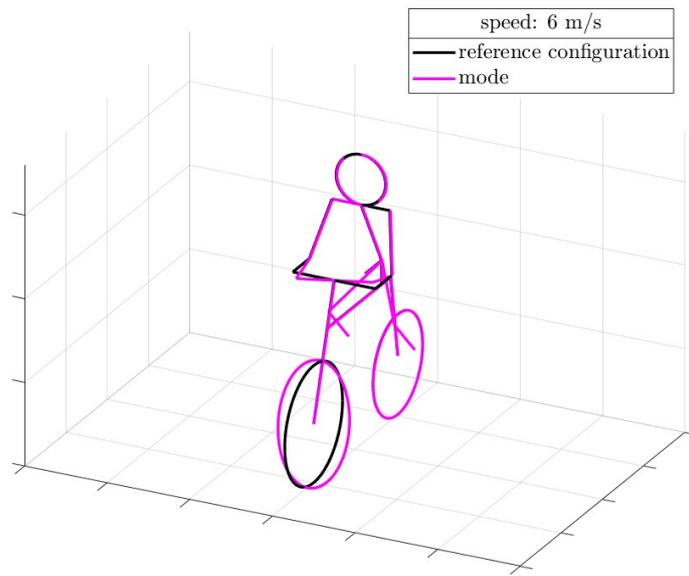


Figura 3.15: Screenshot castering a 6 m/s (bicicletta)

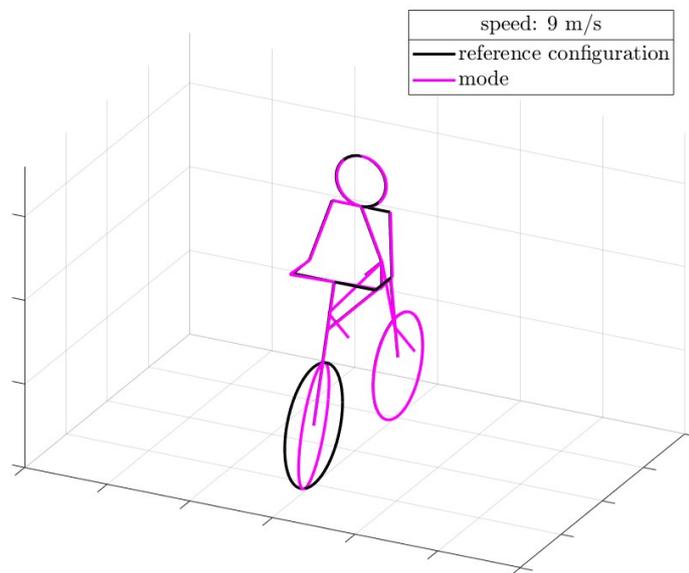


Figura 3.16: Screenshot castering a 9 m/s (bicicletta)

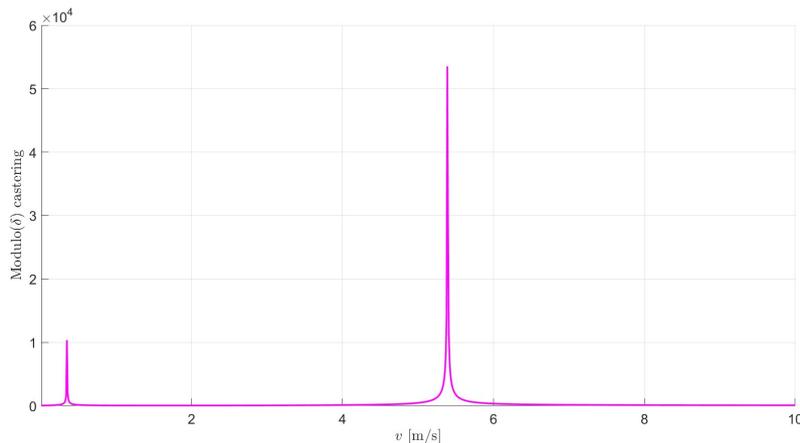


Figura 3.17: Modulo normalizzato di δ al variare di v (castering bicicletta)

3.4 Analisi degli autovalori, frequenze e smorzamenti (monopattino)

Successivamente all'analisi modale del modello benchmark è possibile compierla anche per lo Xiaomi semplicemente sostituendo i dati geometrici inerziali con quelli di Tabella 2 (Pilota 1). Partendo dall'andamento degli autovalori in Figura 3.18 si nota che nonostante presi singolarmente tutti i modi conservino il loro andamento qualitativo, il risultato finale è decisamente diverso da quello di Figura 3.1. Partendo dal capsizer, esso rimane stabile in tutto l'intervallo di analisi, cosa in precedenza vera solo fino a 6 m/s. I due weave si uniscono a velocità più alte rispetto alla bicicletta, infatti ora il tutto avviene a 1.5 m/s, quasi il doppio del modello benchmark di bicicletta. La stabilità per questo modo viene raggiunta a 6 m/s, quindi spostata anch'essa verso destra. Il risultato di questa variazione è lo spostamento dell'area di stabilità, che se prima era tra 4.4 m/s e 6 m/s, ora è tra 6 m/s fino a oltre il campo preso in esame. Se a prima vista questa può sembrare una buona notizia in termini di dinamica del veicolo, non lo è necessariamente, poichè 6 m/s sono al limite del normale utilizzo del monopattino. In sostanza, secondo questi calcoli, **il veicolo non possiede stabilità intrinseca a nessuna velocità nel range di normale utilizzo**. Il castering viene rappresentato da solo in Figura 3.19 per motivi di miglior visualizzazione; come per il modello benchmark, l'andamento è monotono decrescente lungo tutto il campo.

Per quanto riguarda invece le parti immaginarie, gli unici modi ad avere parte complessa non nulla sono sempre i due weave. Quest'ultima nasce nuovamente in corrispondenza dell'unione delle due parti reali ma a differenza del modello benchmark dove l'andamento era monotono, qui intorno a 7.8 m/s si ha una cuspide. Questo valore di velocità è di particolare interesse dato l'elevato numero di cambi di comportamento dei modi, infatti, oltre alle cuspidi dei due modi complessi coniugati, si osserva lo scambio in termini di parte reale tra il weave e il capsizer. Entrambi presentano un flesso a tangente obliqua e il punto del cambio di concavità è in comune tra essi.

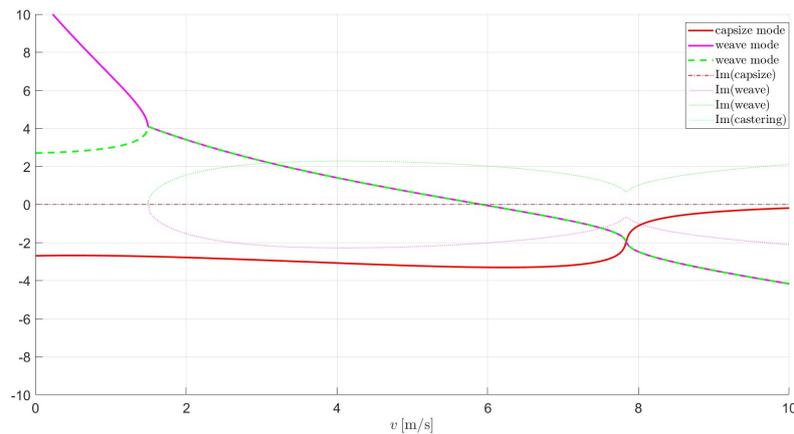


Figura 3.18: Autovalori del monopattino al variare di v

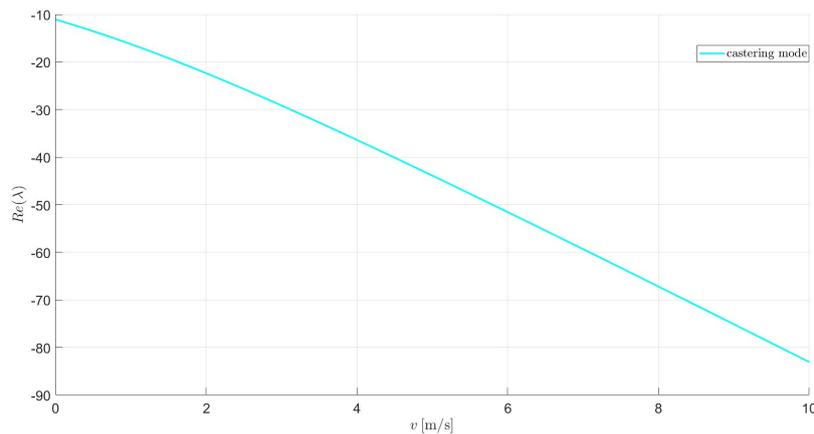


Figura 3.19: Parte reale del castering del monopattino al variare di v

La relazione tra parte reale e immaginaria dei modi weave è rappresentata in Figura 3.20. Come previsto, dopo una fase di ricongiungimento, i due andamenti sono speculari e si può osservare ancora meglio la cuspidè smussata. Le frequenze naturali del sistema sono rappresentate in Figura 3.21. Prevedibilmente sono tutte zero tranne i due weave che presentano sempre il loro peculiare andamento. È interessante notare come le frequenze massime siano al più 0.35 Hz e quindi parecchio più basse del benchmark.

I coefficienti di smorzamento in Figura 3.22 rispettano gli andamenti previsti. Sia il capsize che il castering rimangono smorzati criticamente (e quindi stabili), lungo tutto il range mentre l'evoluzione presente è solo per quanto riguarda i weave. Quando questi ultimi sono disaccoppiati e più in generale quando sono in range instabile, si ha smorzamento inferiore a zero, portando il sistema a divergere. In corrispondenza del passaggio ad un comportamento stabile, lo smorzamento inizia ad avere valori positivi. Sempre intorno ai 7.8 m/s si ha una discontinuità di derivata che porta ζ a diminuire leggermente e ad assestarsi su 0.9.

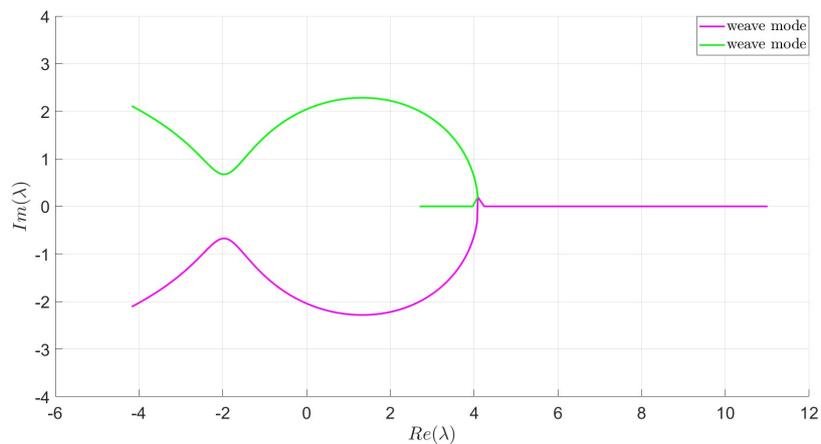


Figura 3.20: Relazione tra Re e Im degli autovalori weave (monopattino)

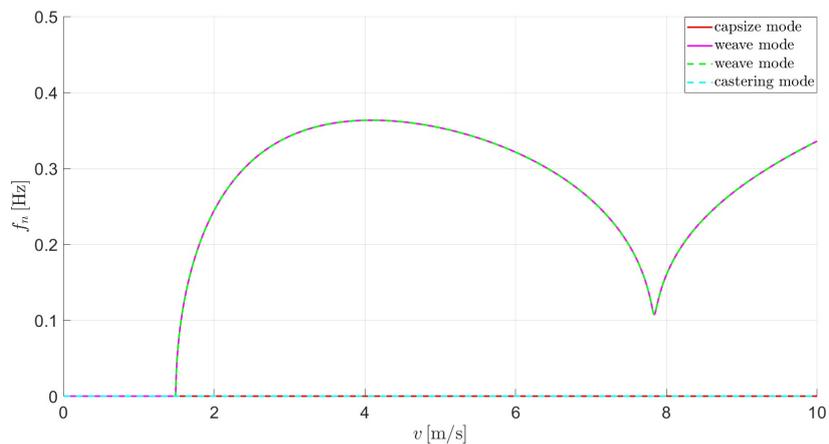


Figura 3.21: Frequenze naturali al variare di v (monopattino)

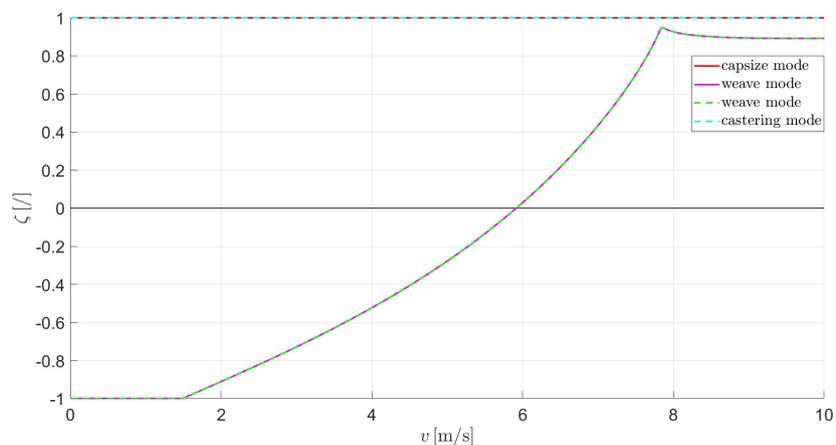


Figura 3.22: Coefficienti di smorzamento al variare di v (monopattino)

3.5 Morfologia dei modi (monopattino)

Lo stesso processo attuato in 3.3 verrà applicato nella seguente sezione per analizzare le differenze tra i due veicoli.

3.5.1 Capsize

A differenza del caso del modello benchmark, qui il capsizing risulta sempre stabile e privo di oscillazioni. Con questo andamento il monopattino tende a manifestare il comportamento raccontato in 3.3.1 su tutto il campo preso in esame. Analizzando gli autovettori si nota come la differenza sostanziale sia nel caso di 6 m/s dove il modulo di δ non cresce come nel caso della bicicletta. Lo sfasamento tra i due gradi di libertà è zero come nel primo caso, quindi le Figure 3.23, 3.24 e 3.25 sono di grande utilità per la comprensione del modo nonostante siano screenshots.

Risulta molto più interessante analizzare l'andamento dell'angolo di sterzo al variare della velocità. In Figura 3.26 si evince la decrescita del modulo all'aumentare della velocità fino addirittura ad arrivare a zero sempre alla caratteristica velocità di 7.8 m/s. A questo punto l'andamento si inverte con una repentina risalita seguita da un massimo e poi una leggera decrescita.

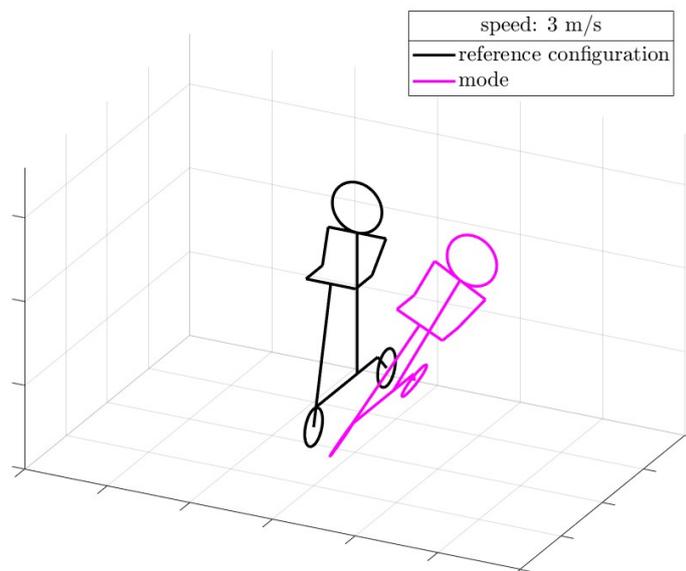


Figura 3.23: Screenshot capsizing a 3 m/s (monopattino)

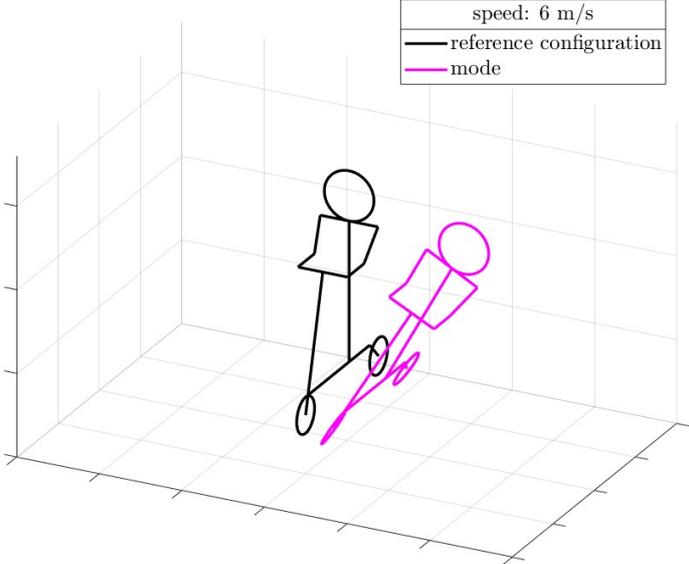


Figura 3.24: Screenshot capsized a 6 m/s (monopattino)

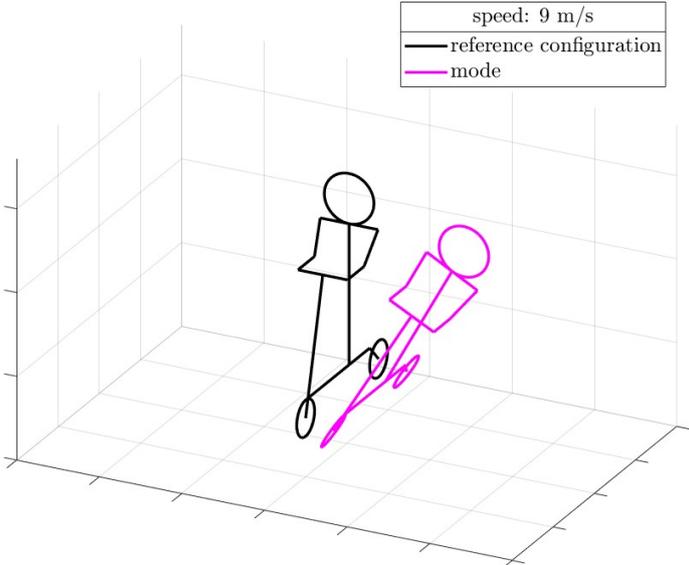


Figura 3.25: Screenshot capsized a 9 m/s (monopattino)

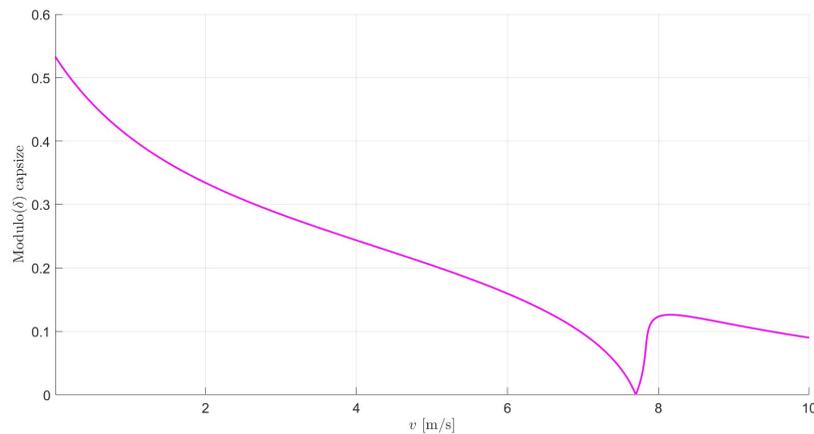


Figura 3.26: Modulo normalizzato di δ al variare di v (capsize monopattino)

3.5.2 Weave

A questo punto è necessario analizzare il secondo modo di vibrare. Come per la bicicletta, anche in questo caso questo è l'unico modo a presentare effettive oscillazioni come si evince dalla frequenza naturale diversa da zero in Figura 3.21. Anche qui la parte immaginaria è non nulla quindi seguirà un'analisi anche degli sfasamenti tra i due gdl.

Partendo da 3 m/s, il comportamento è rappresentato in Figura 3.27. Si ha andamento oscillatorio con ϕ e δ coerenti tra di loro con una tendenza dello sterzo a riallinearsi con il telaio posteriore quando il veicolo tende a ritornare in posizione verticale. Lo sfasamento si manifesta come un leggero ritardo dello sterzo nel compiere il suddetto riallineamento rispetto alla quadratura che si avrebbe con fase pari a $\pi/2$.

A 6 m/s lo sfasamento risulta quasi impercettibile come si può notare in Figura 3.28, ottenendo un comportamento analogo a Figura 3.10 dove l'evoluzione tra i due gradi di libertà è pressochè sincrona. Per quanto riguarda invece il modulo, rispetto ai 3 m/s risulta ridotto fino a circa un terzo.

Infine, visualizzando i 9 m/s, il comportamento continua a rispecchiare quello del modello benchmark, presentando una quadratura quasi perfetta che produce all'occhio le stesse oscillazioni del caso a 3 m/s. La Figura 3.29 riassume quanto detto.

Il grafico del modulo analizzato al variare di v in Figura 3.30 racconta come dopo una prima fase di convergenza (dove uno dei due weave possiede valori molto elevati), si ha un assestamento della grandezza δ . In definitiva, per quanto riguarda i moduli e i loro andamenti, il comportamento generale risulta praticamente invariato.

Cosa diversa è invece l'andamento della fase raffigurato in Figura 3.31; in questo caso, a seguito della comparsa della fase in corrispondenza dell'unione dei due modi, invece che raggiungere un flesso a tangente orizzontale, si ha una decrescita monotona fino a raggiungere i 7.8 m/s. Superato questo valore (che si ricorda essere oggetto di grandi variazioni nell'andamento degli autovalori come visto in Figura 3.18, la fase tende a crollare in maniera repentina per poi riacquistare una pendenza più dolce. Ovviamente, come già chiarito in precedenza, le discontinuità presenti sono sempre dovute all'intervallo di definizione della fase.

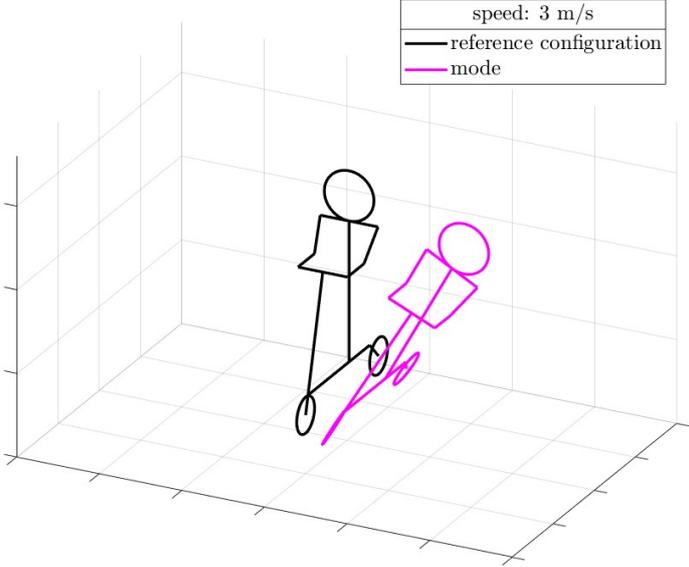


Figura 3.27: Screenshot weave a 3 m/s (monopattino)

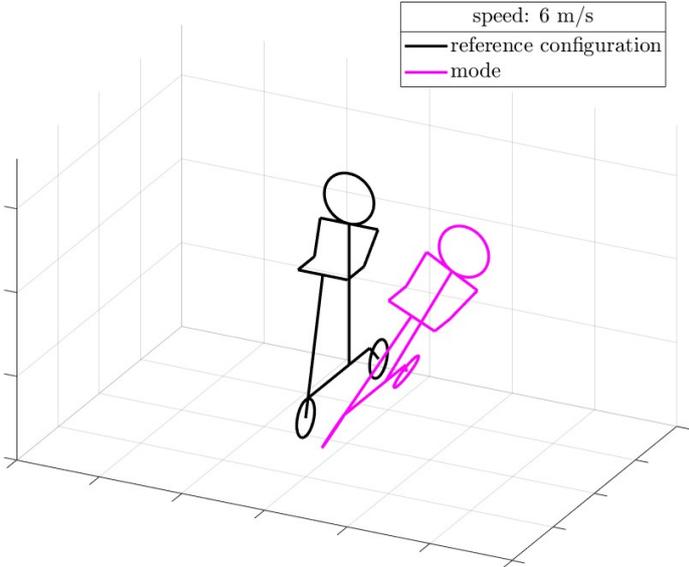


Figura 3.28: Screenshot weave a 6 m/s (monopattino)

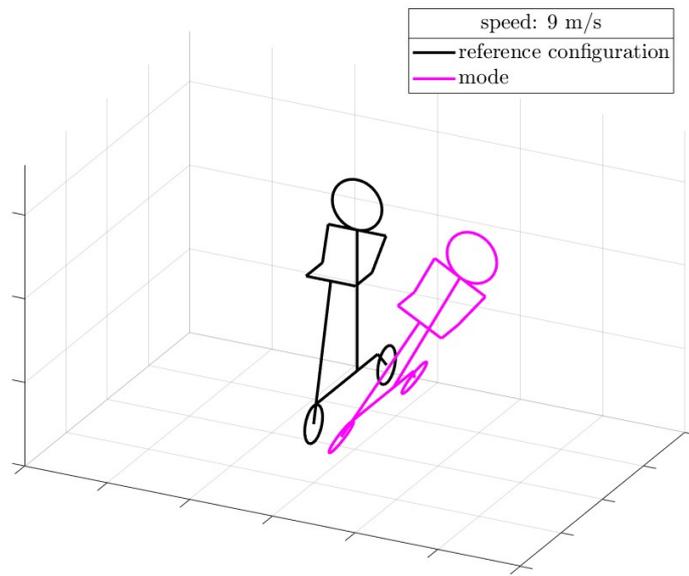


Figura 3.29: Screenshot weave a 9 m/s (monopattino)

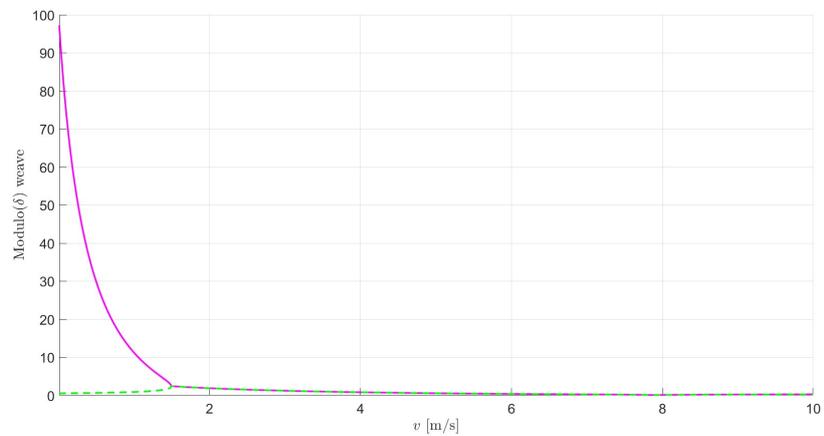
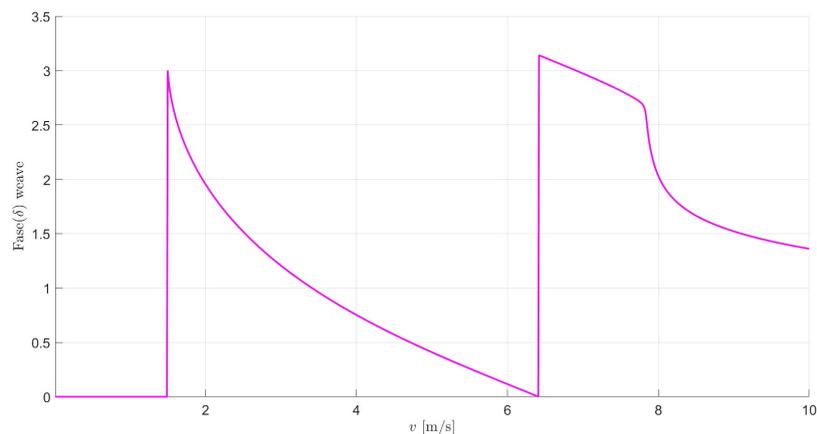


Figura 3.30: Modulo normalizzato di δ al variare di v (weave monopattino)

Figura 3.31: Fase normalizzata di δ al variare di v (monopattino)

3.5.3 Castering

In ultimo viene analizzato il castering. Anche qui la morfologia rimane la stessa, con rollio e sterzo coerenti fra di loro e quest'ultimo dominante in quanto a definizione dell'oscillazione.

Partendo da 3 m/s, in Figura 3.32 si evince come il modo sia pressochè invariato rispetto al modello benchmark. Anche il modulo non varia molto rispetto al caso precedente. A 6 m/s e 9 m/s, come visualizzato rispettivamente in Figura 3.33 e 3.34, il modulo ha prima un aumento fino a 338 per poi riscendere a valori inferiori ai 100. Questo comportamento presuppone che tra 3 m/s e 9 m/s vi sia almeno un massimo locale e che l'andamento non sia monotono. Come si può infatti vedere in Figura 3.35, è presente un picco nella stessa posizione del modello benchmark. Nel primo caso in Figura 3.17 però, il valore si assestava a circa la metà di quello attuale. Il secondo picco presente nella bicicletta è invece totalmente assente, portando il modulo ad avere una decrescita lenta e costante lungo tutto il resto del range di analisi.

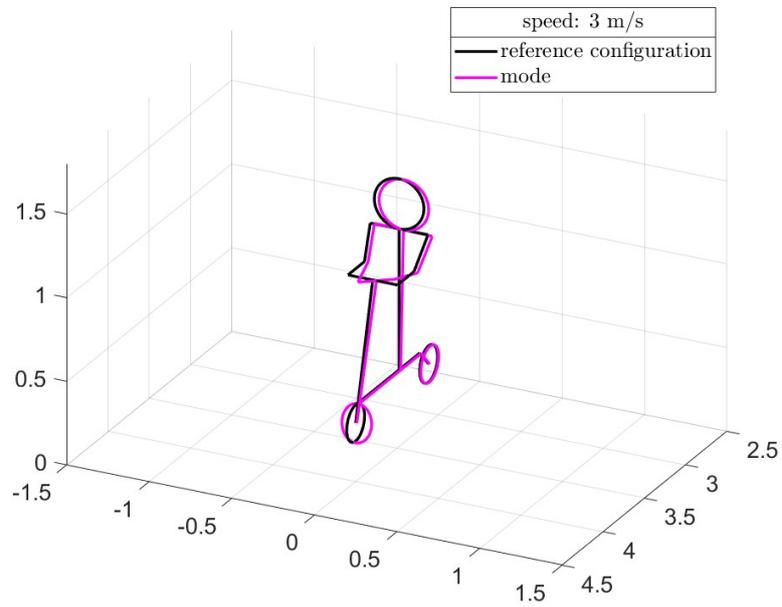


Figura 3.32: Screenshot castering a 3 m/s (monopattino)

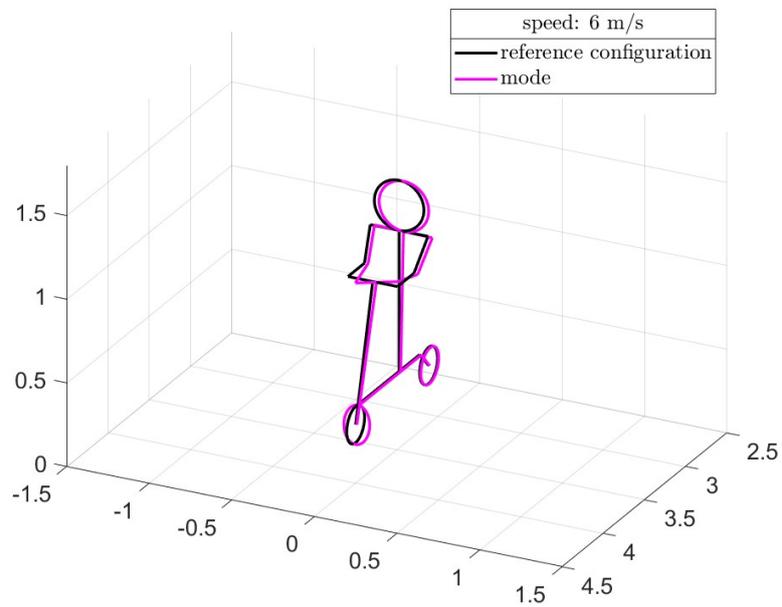


Figura 3.33: Screenshot castering a 6 m/s (monopattino)

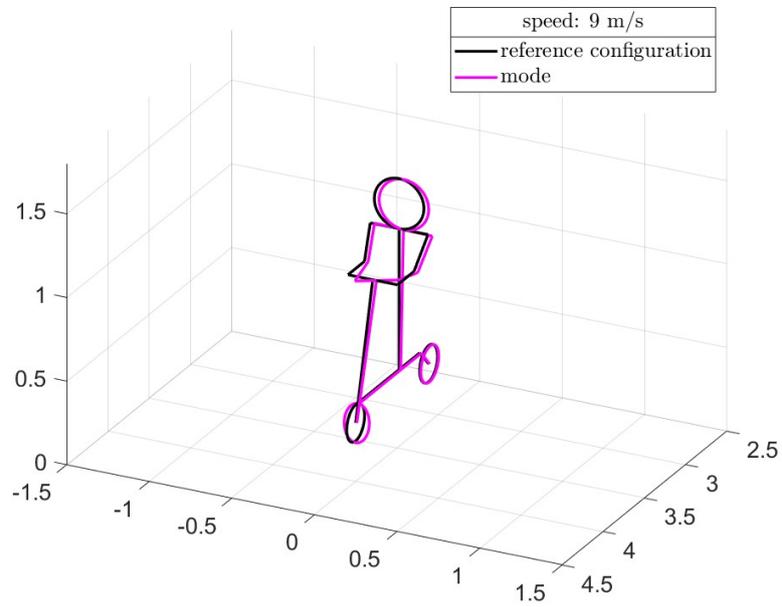


Figura 3.34: Screenshot castering a 9 m/s (monopattino)

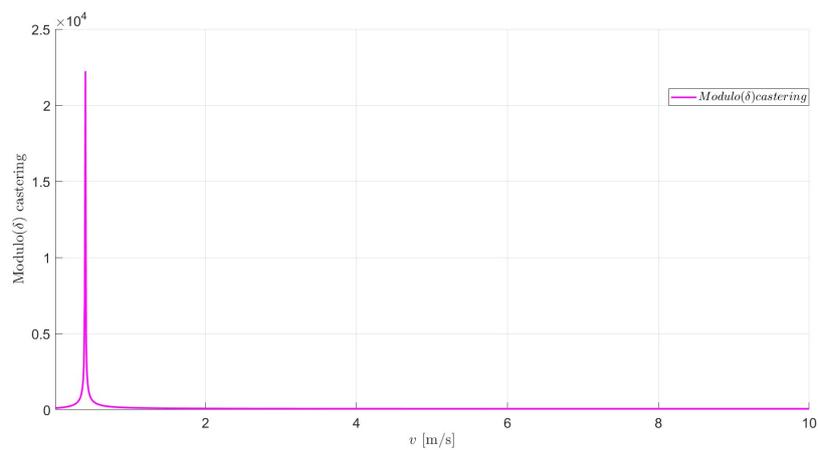


Figura 3.35: Modulo normalizzato di δ al variare di v (castering monopattino)

4 Modello dinamico in dominio tempo

Per poter confrontare i dati ottenuti dalle sperimentazioni con quelli delle equazioni del modello benchmark è necessario creare un modello dinamico in dominio tempo con il software Simulink in grado di simulare le stesse manovre compiute nella realtà. Di seguito verranno analizzati i tre approcci utilizzati e i relativi risultati ottenuti.

4.1 Modello dinamico con spazio degli stati a 2 gdl

Successivamente all'analisi modale, è stato ritenuto conveniente riutilizzare parte dello script Matlab per la creazione del primo modello Simulink, perciò, è stato prima seguito l'approccio dello spazio degli stati.

4.1.1 Definizione delle grandezze

Le equazioni utilizzate sono sempre 17 e 18, quindi il modello possiederà 2 gradi di libertà. Il vettore degli stati x è definito come:

$$x = \begin{bmatrix} \phi \\ \dot{\phi} \\ \delta \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} \quad (22)$$

E il vettore degli ingressi è definito come:

$$u = \begin{bmatrix} T_{B\phi} \\ T_{B\delta} \end{bmatrix} \quad (23)$$

Dalla soluzione dello spazio è possibile solamente ottenere le quattro componenti del vettore x , tuttavia, dalle equazioni del modello benchmark è possibile ricavare le altre grandezze utili alle analisi, infatti, tramite doppia integrazione di 14 e 15 si ottengono ψ e y_P . Per la coordinata x_P è necessario utilizzare l'angolo di imbardata ψ e ipotizzare che la velocità del veicolo sia sempre costante e pari a v ; tramite teorema di Pitagora si otterrà quindi la velocità lungo x che una volta integrata permette il calcolo di x_P . Non resta altro che unire le due coordinate cartesiane per ottenere la traiettoria del punto di contatto posteriore nel piano xy .

4.1.2 Struttura del modello

Il presente modello è in grado di svolgere manovre in controllo di traiettoria, quindi, ricevendo in input delle coordinate spaziali, una velocità e i dati inerziali del pilota, verranno restituiti in output gli stati e le grandezze derivate appena discusse. L'architettura di controllo consiste in tre PID, ognuno agente su un parametro del sistema. Il primo controllore, ovvero quello più esterno, è quello che ha l'obiettivo di mantenere la traiettoria preimpostata. In input al blocco si ha la differenza tra la traiettoria di riferimento e quella reale del veicolo, mentre in output un angolo di sterzo ideale a terra θ da avere per raggiungere o mantenere la direzione desiderata. Questo angolo funge da riferimento per il secondo PID, che facendo la differenza con il θ reale produce un momento di sterzo $T_{B\delta}$ che va a posizionarsi nel vettore degli input u . L'ultimo controllore ha il compito di

regolare l'angolo di rollio ϕ imponendo un $T_{B\phi}$ sempre in u . L'ingresso del blocco è la differenza tra l'angolo di rollio reale e il riferimento (0) e in uscita si avrà il momento di rollio applicato al veicolo. Quest'ultimo può essere inteso come uno spostamento virtuale del pilota dall'asse di simmetria del veicolo seppur per ipotesi le masse del telaio posteriore e del pilota siano unite tra loro.

4.1.3 Verifiche numeriche del modello

Il primo modo per assicurarsi che il modello di Simulink sia stato implementato correttamente è testarne la stabilità facendo riferimento a ciò che si è appreso dalle analisi modali. Per poter effettuare la verifica è necessario azzerare l'effetto di tutti i controllori in modo tale che non influenzino il comportamento in risposta libera ad una forzante impulsiva. Come seconda azione si richiede di applicare un disturbo di qualche sorta al sistema, in questo caso si è scelto un segnale impulsivo del momento di sterzo di durata inferiore al secondo. È importante sottolineare come il modulo e la durata del disturbo non influenzino il comportamento successivo del veicolo, infatti, a prescindere da esso, se si è in range stabile si raggiungerà nuovamente la configurazione di ϕ e δ pari a zero e viceversa.

Si noti che le seguenti prove sono state effettuate direttamente per il monopattino ma hanno avuto esiti analoghi anche per il modello della bicicletta. Dalla Figura 3.18 si può immediatamente notare come il range di stabilità asintotica cominci intorno ai 6 m/s, di conseguenza, applicando un disturbo al sistema vicino a questa velocità si possono apprezzare entrambi i comportamenti. Come da aspettative, a velocità minori di 6 m/s, il sistema tende a divergere molto velocemente come rappresentato in Figura 4.1, mentre in Figura 4.2 si osserva la tendenza del sistema a tornare nella configurazione iniziale senza ulteriori forzanti esterne. Questo comportamento del modello permette di garantire la corretta implementazione delle equazioni e quindi la possibilità di avere risultati in accordo con tutto quello che è stato discusso in 3.

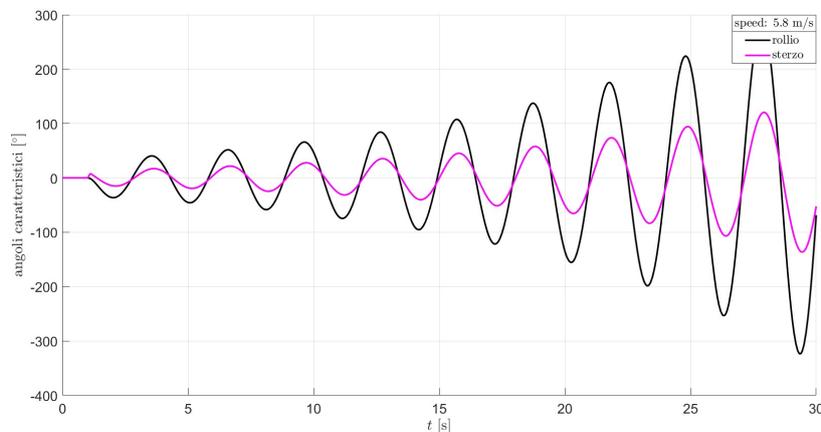


Figura 4.1: Gradi di libertà a seguito di un disturbo a 5.8 m/s

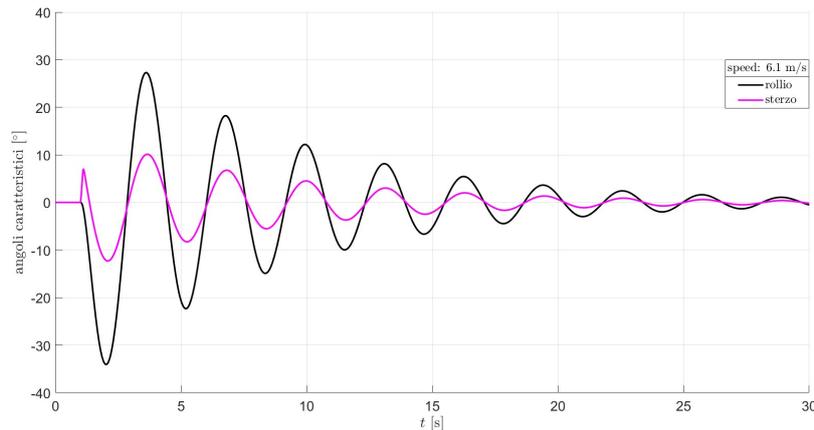


Figura 4.2: Gradi di libertà a seguito di un disturbo a 6.1 m/s

4.2 Modello in forma matriciale a 2 gdl

Il secondo approccio utilizzato non si discosta all'atto pratico dall'utilizzo dello spazio degli stati: il modello rimane a 2 gradi di libertà e tutto il resto del sistema rimane invariato. Come in precedenza, il sistema rimane 19, con gradi di libertà e forzanti descritti in 20 e 21. Per poter risolvere le equazioni differenziali, è necessario ottenere la formula inversa del sistema per ottenere \ddot{q} da integrare successivamente due volte per calcolare il resto degli stati. L'equazione 19 si trasforma in:

$$\ddot{q} = M^{-1}[f - C\dot{q} - Kq] \quad (24)$$

L'implementazione di 24 risulta molto semplice, così come l'ottenimento di \dot{q} e q . Il controllo del sistema viene sempre affidato a tre PID con il medesimo schema di 4.1.2, dunque, anche da questo punto di vista non si notano differenze sostanziali. La risposta ai disturbi esterni e il relativo range di stabilità è nuovamente identico; ciò risulta in linea con le aspettative dato che il set di equazioni risulta invariato. In definitiva, questo approccio non determina vantaggi durante la sua implementazione, quindi anche solo la creazione di uno dei due modelli è più che sufficiente per una valutazione preliminare del mezzo con soli due gradi di libertà. Sebbene anche con questo schema il veicolo sia in grado di compiere manovre anche complesse, in questo studio non sono state compiute data la presenza di un modello più avanzato a 4 gradi di libertà descritto in 4.3. I modelli a 2 gdl sono stati utilizzati solamente per la verifica numerica della stabilità del veicolo.

4.3 Modello esteso a 4 gdl

Dal modello benchmark [7] è possibile ricavare le quattro equazioni necessarie a creare il modello benchmark per il monopattino. In questo caso l'ipotesi di puro rotolamento degli pneumatici viene meno, mantenendo questa condizione solo in longitudinale e ammettendo quindi **scorrimento laterale**. Il veicolo continua ad avere **velocità costante**, quindi il grado di libertà longitudinale è vincolato a priori. I 4 gradi di libertà a disposizione sono nuovamente y_P , ϕ , ψ e δ . Si ricordi che un'altra variabile importante dipendente dall'angolo δ è θ , ovvero l'angolo di sterzo a terra. In Figura 4.3 si può osservare una vista totale del modello.

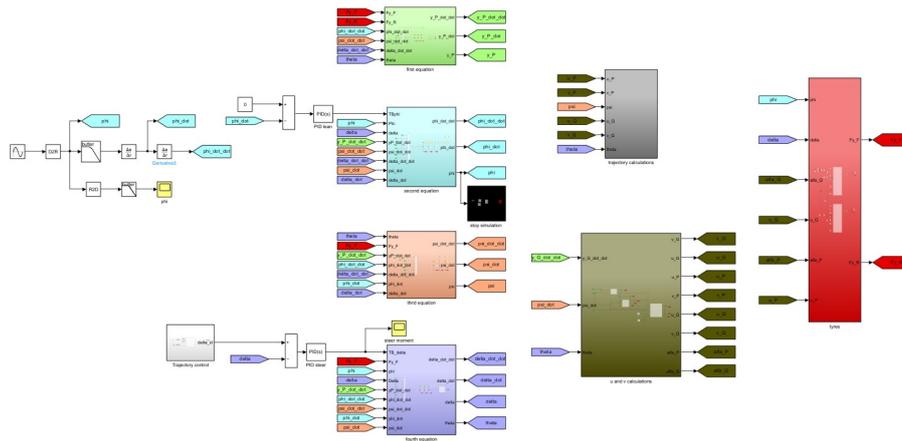


Figura 4.3: Modello 4 dof completo

4.3.1 Struttura del modello

Equazioni principali Per la creazione dell'architettura Simulink la strategia più efficace è la creazione di quattro subsystems con le relative equazioni differenziali all'interno. Le relazioni utilizzate sono 4, 6 e 8 e una rivisitazione di di 2. Il nuovo equilibrio alla traslazione non viene più centrato nel punto di contatto posteriore bensì nel baricentro del veicolo, ottenendo:

$$\ddot{y}_G = \frac{F_{yR} + F_{yF} \cos \theta + m_T z_T \ddot{\phi} - m_H d \ddot{\delta}}{m_T} \quad (25)$$

Le relazioni appena descritte sono già ordinate in modo tale da avere come risultato l'accelerazione del grado di libertà desiderato; non resta quindi che effettuare una doppia integrazione per individuare anche le altre grandezze derivate. I risultati delle equazioni differenziali rientrano nelle stesse tramite dei blocchi "go to" per mantenere una pulizia generale dello schema.

Calcolo di u e v Per la corretta analisi del moto del veicolo è fondamentale identificare le velocità longitudinali e laterali dei due centri ruota. Per quanto riguarda lo pneumatico posteriore si utilizza il pedice P mentre per quello anteriore e per il baricentro si utilizzano Q e G . È importante specificare che la velocità costante del modello è intesa come la velocità longitudinale del baricentro e che quindi:

$$u_G = speed \quad (26)$$

Grazie al risultato dell'equazione 25 è possibile trovare la velocità laterale del baricentro tramite:

$$v_G = \int (\ddot{y}_G - \dot{\psi} u_G) dt \quad (27)$$

Come rappresentato in Figura 4.4 e per le ipotesi di corpo rigido:

$$u_P = u_G \quad (28)$$

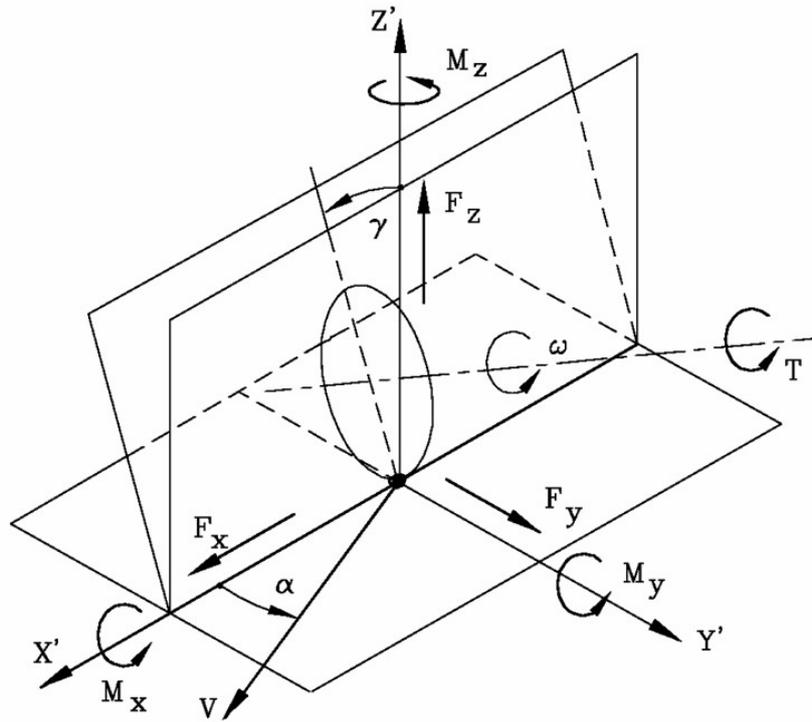


Figura 4.5: Sistema di riferimento modello di Pacejka

deriva del modello Simulink sono opposte a quelle del sistema di riferimento veicolo. Per ovviare al problema, la forza laterale viene cambiata di segno in uscita dal blocco prima di rientrare nelle equazioni differenziali, mentre gli angoli di deriva presentano un cambio di segno prima di partecipare al calcolo delle forze.

Calcolo della traiettoria Il presente subsystem permette il calcolo della traiettoria dei centri ruota anteriore e posteriore. Come verrà specificato in seguito, è fondamentale la corretta individuazione della posizione della ruota anteriore per il controllo in traiettoria, mentre per quanto riguarda la ruota posteriore non è fondamentale il suo calcolo. Per le coordinate anteriori si calcolano:

$$\dot{x}_Q = u_Q \cos(\psi + \theta) - v_Q \sin(\psi + \theta) \quad (36)$$

$$\dot{y}_Q = -u_Q \sin(\psi + \theta) - v_Q \cos(\psi + \theta) \quad (37)$$

La presenza dei meno in 37 è dovuta alla differente convenzione tra centri ruota e piano cartesiano. Tramite integrazione si ottengono quindi le coordinate spaziali, utili al monitoraggio del veicolo durante la manovra. Per la ruota posteriore invece:

$$\dot{x}_P = u_P \cos \psi - v_P \sin \psi \quad (38)$$

$$\dot{y}_P = -u_P \sin \psi - v_P \cos \psi \quad (39)$$

Anche qui, la presenza dei meno in 39 è dato dalla differenza dei sistemi di riferimento.

4.3.2 Controlli del modello

La struttura del Simulink per poter far compiere correttamente le manovre ha necessità di numerosi controlli e accorgimenti fisici che verranno discussi in questa sezione.

Controllo in traiettoria e manubrio: La presente strategia di controllo è la più importante dell'intero modello. Essa permette di far seguire in modo accurato una traiettoria impostata dall'utente dalla ruota anteriore. Il primo step necessario è quello dell'individuazione del percorso ideale da far percorrere al veicolo, in questo caso le manovre illustrate in 2.2. Tramite una parametrizzazione Matlab, le coordinate xy vengono salvate nel modello Simulink, a questo punto, viene calcolata la distanza tra il punto Q e il punto più vicino della traiettoria. Trovato questo elemento, vengono salvati anche i due punti più vicini a quest'ultimo e calcolate anche le loro distanze da Q ; i tre risultati vengono mediati per ottenere un valore con un'evoluzione più morbida durante la manovra. Con la corrente configurazione l'algoritmo non riesce a riconoscere se la ruota anteriore si trovi da una parte o dall'altra della traiettoria poichè restituirà sempre un valore positivo di distanza. Per poter ovviare al problema si calcola il vettore tangente alla traiettoria nel punto più vicino alla ruota anteriore e si calcola il prodotto vettoriale con il vettore congiungente il suddetto punto e la ruota anteriore. Il risultato darà un valore positivo o negativo a seconda dell'angolo formato dai due vettori, di conseguenza, il codice è stato scritto in modo tale da assegnare un segno meno se il veicolo si trova a destra della traiettoria e viceversa.

Il segnale in uscita da questa funzione viene ulteriormente filtrato per una maggiore pulizia dei segnali per poi entrare nel primo PID controller del sistema. Esso ha il compito di restituire un δ_{id} ovvero un angolo di sterzo ideale da applicare al manubrio per poter seguire la traiettoria desiderata. Vista la convenzione dell'angolo di sterzo è immediato capire che ad una distanza positiva in ingresso al PID si associ un angolo di sterzo anch'esso positivo. Il δ_{id} in uscita dal controllore non può direttamente entrare nel subsystem dell'equazione di sterzo, quindi deve essere convertito in un altro tipo di input. La soluzione è aggiungere un secondo PID che ricevendo in ingresso la differenza tra δ e δ_{id} restituisce in output il momento di sterzo $T_{B\delta}$. Questa architettura permette al monopattino di seguire fedelmente la traiettoria tramite un momento di sterzo applicato al manubrio.

Controllo del rollio: Oltre alla traiettoria e angolo di sterzo è necessario agire in modo tale da mantenere il monopattino in equilibrio in tutta la manovra. In questo caso si va ad agire sul grado di libertà ϕ , quindi sull'equazione 4. L'obiettivo finale è quello di stabilizzare il monopattino in una qualsiasi posizione che possa controbilanciare tutti i momenti attorno a x , sia quelli statici che quelli dinamici. Il modo più semplice per ottenere il risultato desiderato è applicare un PID che abbia come obiettivo quello di azzerare la velocità di rollio $\dot{\phi}$. Semplicemente ponendo all'ingresso del controllore la grandezza, in uscita viene restituito un momento di rollio $T_{B\phi}$ che entra nel subsystem relativo al rollio. Con questa logica, il controllo del rollio ha la possibilità di stabilizzare il mezzo a qualsiasi angolo ϕ dato che gli sarà necessario semplicemente alzare o abbassare il momento rollante. Per far sì che l'angolo di rollio sia quello sperimentale (e quindi quello scelto dal pilota nella sua manovra), per ogni manovra i valori del PID vengono

aggiustati per ottenere a regime il valore desiderato. Se per la manovra del cerchio questa logica di controllo del rollio funziona alla perfezione, non si può dire la stessa cosa per le altre due manovre di otto e slalom. Il sistema in questi casi risulta molto più reattivo e un semplice PID non riesce a stabilizzare con abbastanza robustezza tutte le dinamiche. Per quanto riguarda lo slalom si è quindi optato per l'eliminazione del secondo grado di libertà ϕ optando per una definizione a priori dello stesso. Tramite derivata del segnale si ottengono quindi $\dot{\phi}$ e $\ddot{\phi}$ che poi entreranno nelle altre equazioni. Per la creazione del segnale di angolo di rollio si è utilizzato un segnale sinusoidale opportunamente traslato e variato in ampiezza e fase per renderlo coerente con il movimento impresso dal pilota durante la manovra sperimentale.

Sebbene possa sembrare una grande semplificazione, all'atto pratico non lo è, infatti, durante la guida il pilota tende sempre a imporre un certo angolo di rollio e quindi adattare il suo angolo di sterzo di conseguenza per poter seguire la traiettoria ideale. Questo significa che esistono infinite coppie di ϕ e δ che permettono la riuscita della manovra, in questo caso viene bloccato solamente il rollio per poter analizzare la fedeltà tra l'angolo di sterzo reale e quello del modello. Nel caso del cerchio il ragionamento è il medesimo; durante il tuning del PID infatti si regolano i parametri in modo tale da ottenere in uscita l'angolo di rollio ottenuto dai dati sperimentali.

5 Confronto e validazione del modello

Di seguito verranno confrontati i risultati del modello a 4 gradi di libertà con i dati della campagna sperimentale e dell'analisi modale. In particolare verranno analizzati:

- Angolo di sterzo δ
- Angolo di rollio ϕ
- Velocità di imbardata $\dot{\psi}$
- Accelerazione laterale a_{yIMU}

È necessario fare delle precisazioni su alcune grandezze appena elencate. L'accelerazione laterale misurata dalla IMU a_{yIMU} è diversa da quella calcolata dal modello nel baricentro a_{yG} . Per poter visualizzare l'accelerazione nel punto desiderato è necessario utilizzare il teorema di Rivals come segue:

$$a_{yIMU} = a_{yG} + \ddot{\psi}(r - x_T) \quad (40)$$

Dove r è il segmento congiungente il punto P e il punto dove è situata la IMU. Dai dati acquisiti il valore del segmento risulta:

$$r = 0.596 \text{ m} \quad (41)$$

Gli altri termini del teorema di Rivals in 40 sono pari a zero poichè si sta analizzando solo l'accelerazione in direzione y .

5.1 Corridoio stretto

La manovra del corridoio sebbene non comprenda grandi angoli di sterzo e di rollio, permette di analizzare la difficoltà da parte del pilota di mantenere il veicolo lungo una traiettoria rettilinea. Questa analisi può essere direttamente ricondotta all'analisi di stabilità svolta nella sezione 3. Come già anticipato, le manovre effettuate sono state 30, di cui 15 per ogni pilota e 3 per ogni velocità a partire da 5 km/h fino a 25 km/h. Le grandezze utili all'analisi sono in questo caso δ e ϕ sperimentali. La traiettoria in linea retta comporta una media dei due angoli prossima allo zero; attorno a questo valore però, per mantenere l'andatura, vi è sicuramente una forte oscillazione. Più queste oscillazioni sono grandi e più è un sintomo che il veicolo non abbia una sua tendenza all'andatura in linea retta, richiedendo quindi un intervento da parte del pilota. La grandezza migliore per esaminare questo comportamento è il calcolo della deviazione standard sui due segnali σ_δ e σ_ϕ . Un alto valore di questa variabile indica una forte oscillazione dell'angolo durante il passaggio fra i coni e viceversa. I risultati verranno quindi confrontati con l'analisi modale del Capitolo 3 per trarre conclusioni sulla correlazione tra dati matematici e fisici e correlarli alle sensazioni da parte dei piloti. Verranno di seguito rappresentate le medie delle deviazioni standard calcolate per ogni velocità e per ogni pilota. A seguito di questa analisi saranno presentati i valori ulteriormente mediati tra i due piloti.

Il primo risultato analizzato è la deviazione standard dello sterzo alle varie velocità. Come si può vedere in Figura 5.1, dopo un grande picco ai 5 km/h, i valori crollano di

quasi un ordine di grandezza e dopo i 15 km/h si ha invece per entrambi i piloti una lieve ascesa della deviazione standard. Il fatto che a basse velocità sia necessario un grande lavoro da parte del pilota sul manubrio è ben spiegabile dall'assoluta instabilità del mezzo in quel range. Come evidente in Figura 3.18, il mezzo possiede a 5 km/h (1,39 m/s) ben due modi distinti dal carattere instabile, il che porta il veicolo ad una maggiore difficoltà di controllo. È stata anche riportata da entrambi i piloti la poca facilità nel mantenere l'equilibrio e la traiettoria in linea retta durante la manovra, quindi, i risultati sperimentali sono pienamente coerenti con le sensazioni dei guidatori. A 10 km/h, la σ_δ suggerisce un cambio repentino del comportamento del monopattino, cosa confermata anche dai tester. Il mezzo risulta molto più facile da manovrare e con un bisogno di input al manubrio molto più leggeri e meno repentini. Il tutto si traduce in un'esperienza di guida più confortevole e una maggior padronanza del mezzo in generale. All'aumentare ulteriore della velocità non sono state riscontrate particolari differenze in merito al comportamento del veicolo sia per quanto riguarda le sensazioni dei piloti che lato numerico-sperimentale. L'unica particolarità rilevata, anche dopo aver mediato i dati, è che dopo la soglia dei 15 km/h si continua ad avere un leggero innalzamento di σ_δ , come mostrato in Figura 5.2. Le motivazioni potrebbero essere molteplici e collegate tra di loro. La prima è che con velocità così alte, le piccole asperità del terreno possono aver influito sullo sterzo, creando dei micromovimenti che vengono amplificati dal comportamento in laterale molto reattivo che si ha all'aumentare dell'andatura. Legato a questo potrebbe inoltre esserci una difficoltà leggermente maggiore per il guidatore a contrastare questi movimenti, dato che oscillazioni così brusche tendono più facilmente a mettere alla prova i riflessi umani. Un'ultima ipotesi è quella che con sollecitazioni più alte, il sistema di misura sviluppato abbia ricevuto sollecitazioni tali da registrare dei movimenti aggiuntivi che in realtà non sono stati compiuti.

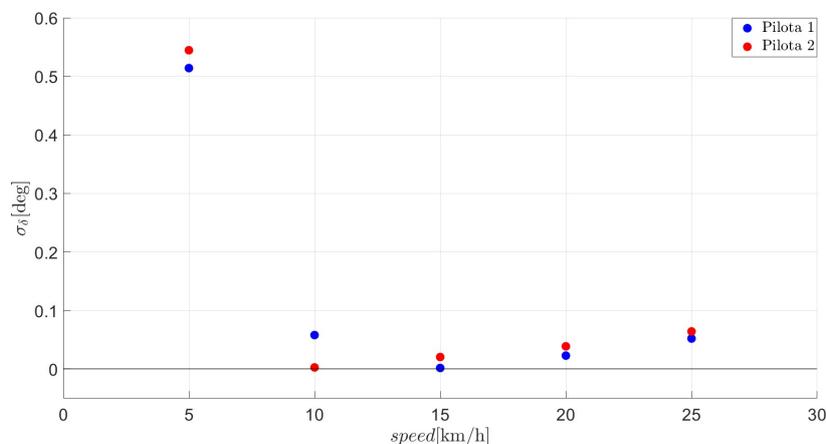


Figura 5.1: Deviazione standard dello sterzo al variare della velocità

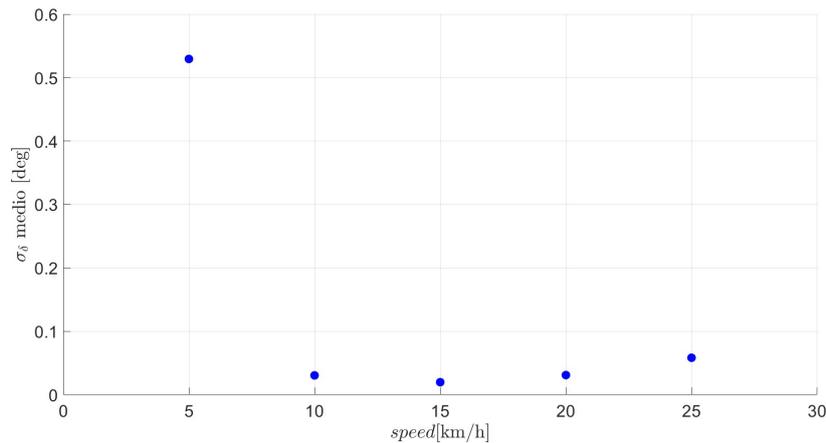


Figura 5.2: Deviazione standard media dello sterzo al variare della velocità

Per quanto riguarda invece l'angolo di rollio e la sua deviazione standard σ_ϕ , la situazione è molto meno definita. Come mostrato in Figura 5.3, i valori non tendono a cambiare al variare della velocità, bensì si oscillano attorno ad un valore medio. Questo suggerisce il fatto che per il controllo in linea retta del veicolo, il grado di libertà del rollio sia un fattore accessorio, e che la maggior parte degli input utili derivino dal manubrio. Si può inoltre ipotizzare che le variazioni di ϕ siano diretta conseguenza della dinamica innescata dalla variazione di angolo di sterzo e che quindi non siano volutamente imposte dai piloti ma che siano semplicemente delle manovre di reazione al cambiamento di assetto del veicolo. È inoltre interessante notare come per ogni velocità, il Pilota 1, che si ricorda essere più pesante di circa 25 kg, abbia bisogno di variazioni di rollio sensibilmente più piccole. La discrepanza è dovuta con tutta probabilità al fatto che a parità di ϕ , la forza creata dal disassamento del baricentro del Pilota 1 dall'asse verticale crea un momento rollante molto maggiore. Il Pilota numero 2, possedendo meno massa e ad un baricentro più basso, ha più difficoltà a controbilanciare i momenti sostenuti dal monopattino ed è costretto ad inclinare molto di più il mezzo per ottenere lo stesso risultato. Per avere una panoramica omogenea, viene anche riportato il valore mediato di σ_ϕ in Figura 5.4.

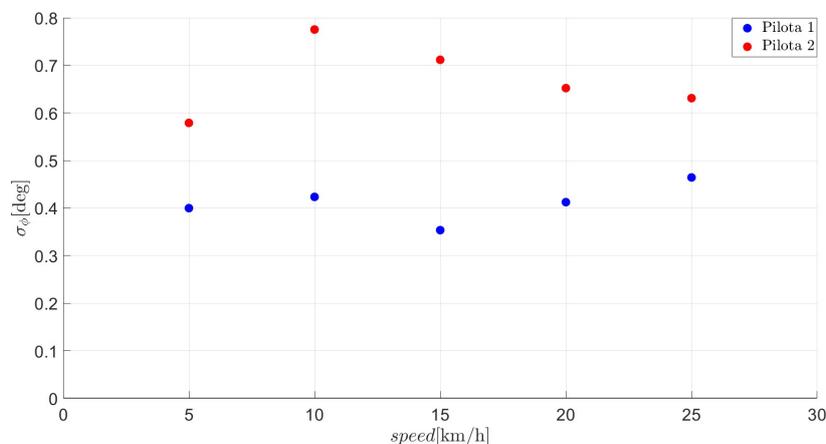


Figura 5.3: Deviazione standard del rollio al variare della velocità

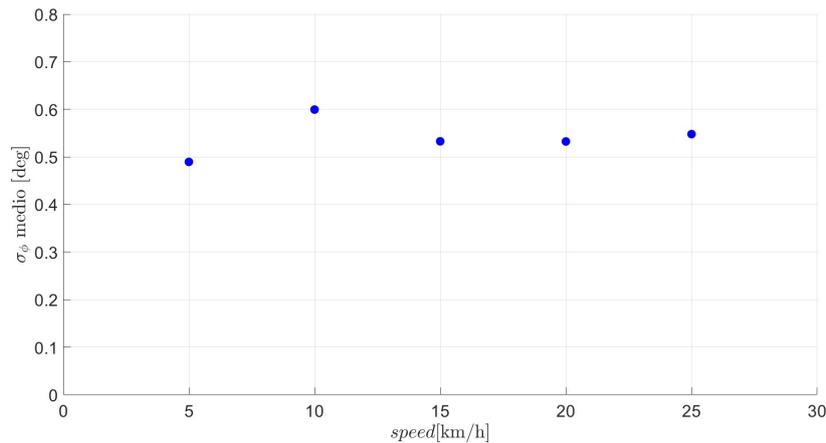


Figura 5.4: Deviazione standard media del rollio al variare della velocità

5.2 Cerchio

La presente manovra è la prima che coinvolge la dinamica laterale. In questo caso però si tratta di una manovra statica poichè i dati presi in esame si basano sulla media di numerosi giri effettuati ad una stessa velocità. La forma circolare della traiettoria inoltre non permette la visualizzazione di dinamiche transitorie del mezzo poichè dopo la partenza ci si assesta su determinati valori delle grandezze prese in esame e li si mantiene per tutto il resto della misurazione. Le manovre prese in considerazione saranno quelle compiute in senso orario, le stesse conclusioni sono applicabili anche per le manovre in antiorario data la perfetta simmetria del sistema. Come descritto nella sezione 4.3.2, il modello ha l'obiettivo di seguire una certa traiettoria ideale imposta dall'utente, in questo caso una circonferenza con raggio 6 m. La manovra nel modello possiede un breve transitorio iniziale, poichè il monopattino inizia la sua marcia con un angolo δ pari a 0 e la ruota anteriore in corrispondenza della traiettoria ideale. Dopo un primo istante di tempo, il controllo entrerà in funzione stabilizzando il mezzo sulla linea ideale e assestando tutte le grandezze a quelle di regime. Per aiutare la buona riuscita dell'analisi, viene applicato al modello un leggero rollio iniziale verso l'interno della curva. Questa scelta si rivela fondamentale; se infatti il monopattino partisse perfettamente verticale, ad un primo input di angolo di sterzo il mezzo tenderebbe a rollare verso l'esterno curva per effetto della forza centrifuga. Applicando questo rollio iniziale, anche dopo un angolo di sterzo, il mezzo compensa questi momenti centrifughi con la componente di forza gravitazionale che crea momento rollante verso l'interno della curva. Dopo il primo transitorio, il controllo dell'angolo di rollio stabilizzerà il monopattino ad un ϕ tale da mantenere il sistema stabile. Questo comportamento dinamico è ben noto; l'entrata in curva di un mezzo a due ruote è sempre composta da tre momenti principali: il primo è un leggero colpo di sterzo che punta verso la parte opposta della curva da affrontare. Questo comporta uno sbilanciamento del veicolo, che tende a rollare verso l'interno curva sempre per effetto della coppia rollante centrifuga. A questo punto, raggiunto il ϕ desiderato dal pilota, si controsterza, portando quindi anche l'angolo δ nella direzione della curva. Se non esistesse questo controsterzo finale, il mezzo cadrebbe, poichè non esisterebbero momenti in grado di bilanciare quelli prodotti dal rollio e dall'accelerazione di gravità.

Di seguito verranno analizzate sette manovre a diverse velocità e con i due piloti. A seguito delle misurazioni sperimentali sono state effettuate le opportune simulazioni alle medesime velocità per poter compiere i confronti. La prima cosa da analizzare per comprendere l'efficacia del modello è ovviamente la traiettoria rispetto a quella ideale. In Figura 5.5 viene mostrato un esempio del percorso effettuato dalla ruota anteriore. Come si può notare, le due curve sono perfettamente sovrapponibili se non per un quasi impercettibile transitorio iniziale. In questo caso viene riportata solo una delle varie traiettorie ma per tutte le simulazioni il riscontro è il medesimo. Questo risultato implica che sicuramente anche altre grandezze da esaminare come $\dot{\psi}$ e a_{yIMU} saranno ben descritte, poichè conoscendo la velocità del mezzo e avendola fissata a priori, queste due variabili dipendono solamente dalla geometria della traiettoria effettuata.

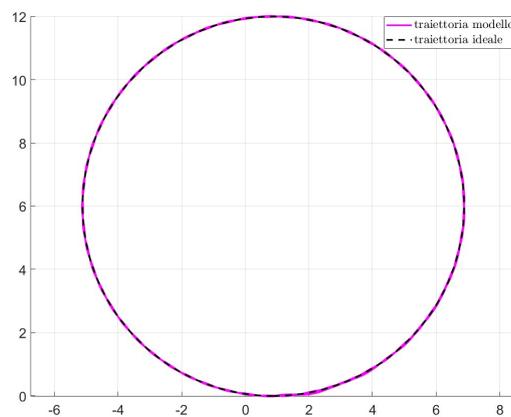


Figura 5.5: Traiettoria del monopattino nella manovra del cerchio

Partendo da a_{yIMU} , vengono riportati in Figura 5.6 i vari risultati del modello al variare della velocità $speed$. Si può subito notare una certa linea di tendenza. Come è immediato intuire, l'accelerazione centripeta (ovvero quella rilevata dalla IMU) è proporzionale al quadrato della velocità tangenziale del veicolo, quindi è corretto attendersi una qualche relazione di tipo parabolico nella rappresentazione dei dati.

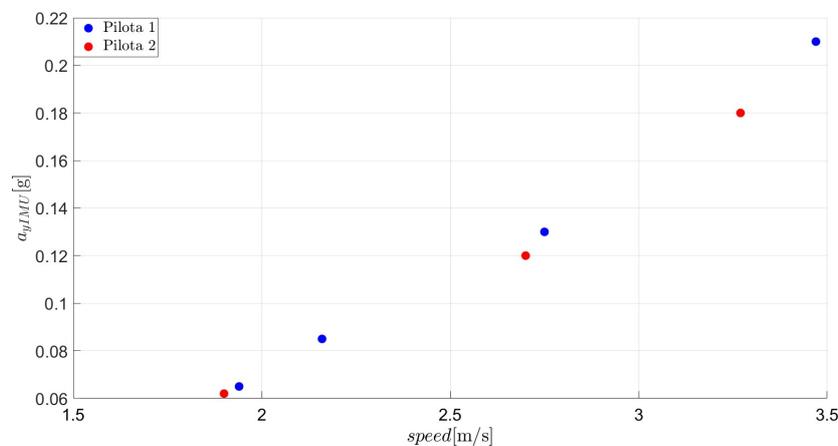


Figura 5.6: a_{yIMU} del modello alle varie velocità

In Figura 5.7 vengono invece riportati gli errori percentuali rispetto ai dati sperimentali. Come si può notare tutti i punti rientrano nel 10% di tolleranza, con in particolare i dati del pilota 1 che rimangono abbondantemente sotto il 5%. Per quanto riguarda il pilota 2, la discrepanza è probabilmente dovuta alla difficoltà riscontrata nel mantenere la traiettoria ideale durante le misurazioni; percorrendo una traiettoria leggermente oscillatoria e imprecisa è inevitabile che la media dei valori venga intaccata.

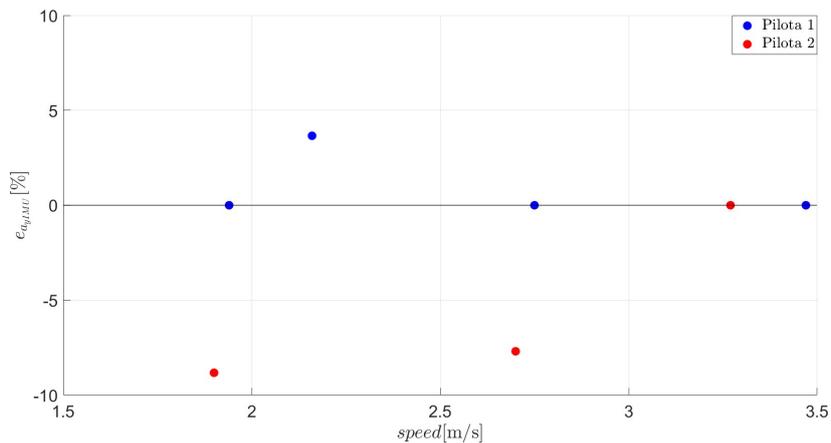


Figura 5.7: Errore percentuale su a_{yIMU} alle varie velocità

Analizzando $\dot{\psi}$, i risultati non differiscono molto dai precedenti. In Figura 5.8 si nota una tendenza che in questo caso si rivela lineare per via della relazione:

$$\dot{\psi} = \frac{speed}{R} \quad (42)$$

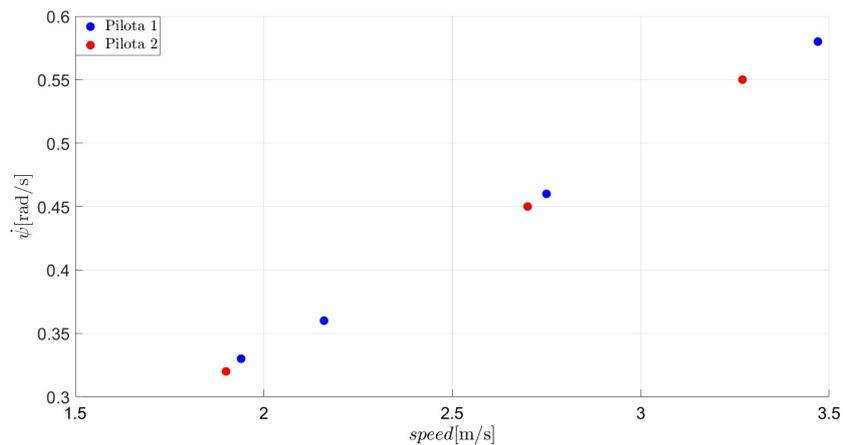


Figura 5.8: $\dot{\psi}$ del modello alle varie velocità

Gli errori percentuali in Figura 5.9 sono anche qui abbastanza soddisfacenti, rimanendo sempre intorno al 3% se non addirittura di meno. Come prima, vi è l'outlier del Pilota 2 a bassa velocità che è direttamente collegato a quanto raccontato in precedenza.

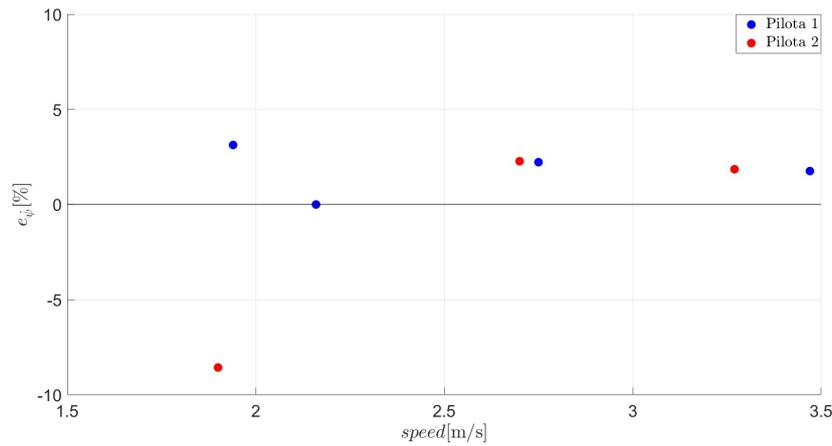


Figura 5.9: Errore percentuale su $\dot{\psi}$ alle varie velocità

L'angolo di rollio ha un comportamento interessante, come spiegato nella sezione 4.3.2, l'angolo ϕ viene ottenuto tramite un rimaneggiamento del controllore ad ogni manovra. Questo non deve stupire poichè esistono infiniti angoli di rollio per un singolo raggio di curvatura e velocità di percorrenza. A seconda degli stili di guida dei piloti, il rollio può variare anche di svariati gradi. Siccome non è possibile conoscere a priori quanto un guidatore sia disposto a sporgersi con il corpo verso l'interno curva o viceversa, l'angolo ϕ deve necessariamente essere imposto in una qualche modalità. Questo ragionamento implica che le discrepanze tra angolo di rollio sperimentale e ideale saranno molto piccole tra di loro, come dimostrato da Figura 5.10.

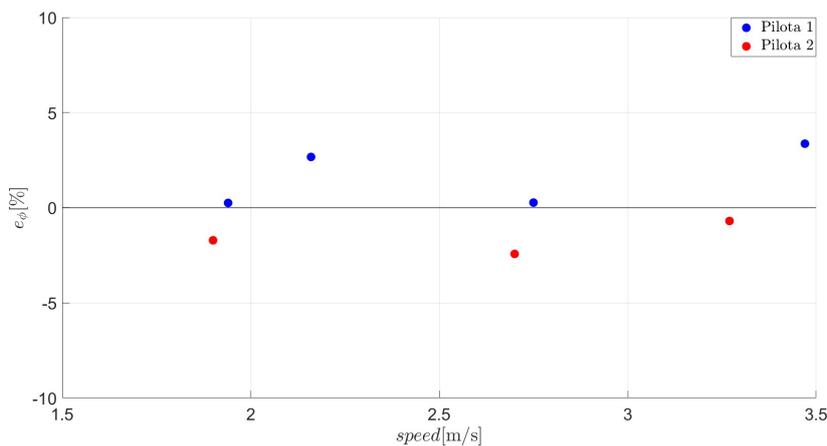


Figura 5.10: Errore percentuale su ϕ alle varie velocità

A prima vista potrebbero non discostarsi molto da quanto visto fino ad ora, ma dando uno sguardo ai valori assoluti di Figura 5.11, è immediato capire come una differenza del 2% su un angolo di rollio di massimo 11 gradi sia pressochè impercettibile guidando un mezzo del genere.

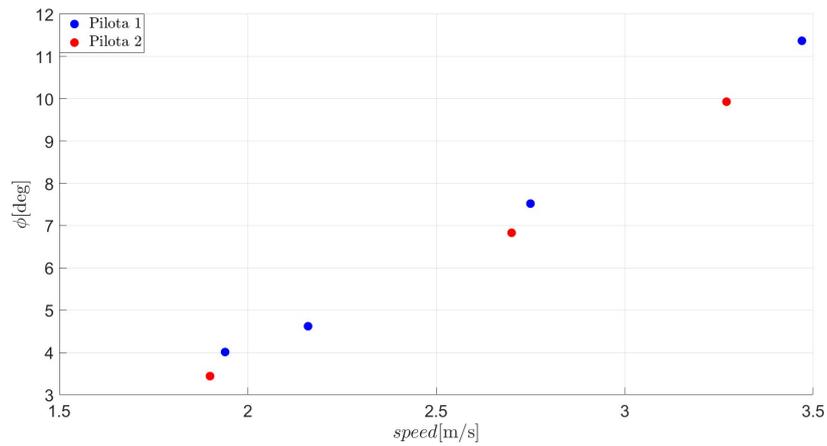


Figura 5.11: ϕ del modello alle varie velocità

I difetti del modello si notano solamente analizzando l'angolo di sterzo δ , infatti, in Figura 5.12 sono rappresentati gli angoli sperimentali e quelli prodotti dal modello. Come si può notare, i valori del modello sono decisamente più alti di quelli restituiti dalle misurazioni sperimentali. Questo fenomeno è dato sicuramente dal modello di pneumatico, che, come spiegato in 4.3.1 non possiede esattamente i parametri corretti per uno pneumatico di monopattino elettrico. Il controllo in traiettoria sopperisce a questa mancanza, semplicemente adattando i valori di δ per far sì che la manovra venga comunque svolta correttamente e tutti gli altri dati siano conformi.

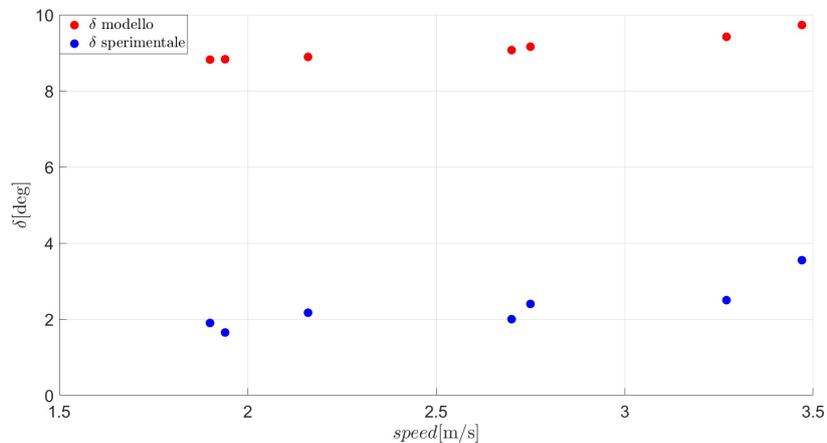


Figura 5.12: δ del modello e sperimentale alle varie velocità

5.3 Slalom

Terminata l'analisi del cerchio, si può procedere con la prima manovra in cui viene coinvolta la dinamica laterale transitoria. Il forte gradiente di imbardata tra i coni durante la manovra è in grado di generare dinamiche accessorie che sicuramente influenzano il veicolo in modo differente e più completo. Il modello, a differenza del caso del cerchio, presenta nel grado di libertà ϕ una netta differenza: in sostituzione all'equazione differenziale regolata da un PID, viene direttamente imposto l'angolo di rollio tramite una

sinusoide opportunamente tarata. La soluzione è stata obbligata dal comportamento del PID, che soprattutto ad alte velocità non è in grado di seguire efficacemente il mezzo, portando a forte instabilità. L'angolo di sterzo è invece sempre governato dal controllo in traiettoria. Per questioni di semplicità verranno analizzate tre manovre a tre velocità obiettivo (1,47 m/s, 2,41 m/s e 3.13 m/s) del Pilota 1. Le medesime conclusioni possono essere estese anche per il Pilota 2. Le grandezze confrontate saranno solamente δ e ϕ e la traiettoria per i motivi spiegati in 5.3.1.

5.3.1 Slalom a bassa velocità

La prima misurazione presa in esame è stata svolta a 1,47 m/s, che se messa in rapporto con quanto spiegato in 5.1, suggerisce il fatto che durante la prova saranno presenti numerose oscillazioni date dall'instabilità del veicolo. In questo caso, invece della traiettoria in linea retta è necessario anche un consistente cambio di direzione ripetuto svariate volte. Quest'azione non può che innescare ulteriore instabilità sia nel grado di libertà dello sterzo che in quello del rollio. Anche in questo caso, il controllo in traiettoria è basato su una linea ideale ipotizzata e il risultato è rappresentato in Figura 5.13. Si nota immediatamente come i due percorsi siano quasi perfettamente sovrapponibili; a questo proposito, risulta quasi inutile analizzare le grandezze come a_{yIMU} e $\dot{\psi}$, data la loro stretta correlazione con la traiettoria.

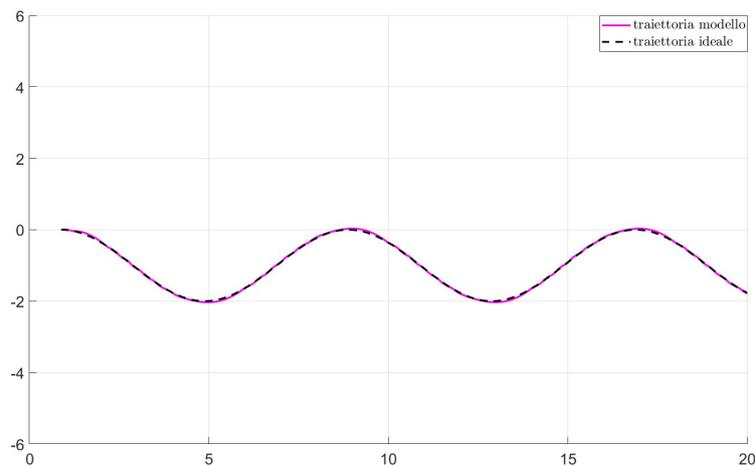


Figura 5.13: Traiettoria dello slalom a 1,47 m/s

Confrontando invece l'angolo di rollio ϕ , è immediato notare come la frequenza dei due segnali non sia identica (Figura 5.14). Questo è causato da molteplici fattori. Il primo motivo è che il modello si basa su una traiettoria ideale ipotizzata e che soprattutto non è stata tracciata sul terreno, quindi già con il controllo in traiettoria si sta compiendo un primo passo di approssimazione. Il secondo motivo è che soprattutto a bassa velocità è stato rilevato un notevole cambio di frequenza nel passaggio tra un cono ed un altro. Durante le misurazioni è capitato che circa a metà percorso, rendendosi conto il pilota della difficoltà della manovra, vi fosse un cambio netto di stile di guida per poter completare il percorso. Questa variazione, pressochè impossibile da replicare tramite questo modello, comporta una certa discrepanza tra dati sperimentali e di modello. Come era

prevedibile, il segnale di rollio sperimentale presenta numerose irregolarità date proprio dalla difficoltà di mantenere in equilibrio il veicolo a così basse velocità. L'ultima parte di misura sperimentale, dove l'angolo di rollio tende ad azzerarsi, differisce molto da quello del modello, questo solamente poichè il modello è architettato in modo tale da imporre una sinusoide continua mentre nella realtà, sorpassato l'ultimo cono, il pilota prosegue dritto, come descritto nella Figura 2.4. La scelta di comprendere anche quest'ultima parte di simulazione è data dal desiderio di voler includere tutto l'arco di misura, compreso il raddrizzamento del pilota a fine manovra. Per il confronto tra le grandezze è quindi più interessante concentrarsi sui primi due picchi dei segnali.

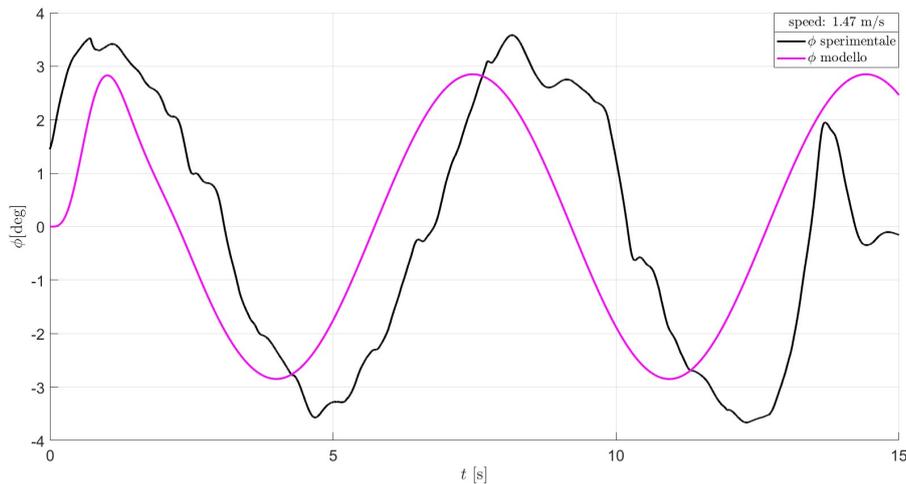


Figura 5.14: ϕ dello slalom a 1,47 m/s

Analizzando invece l'angolo δ in Figura 5.15 spicca subito la netta differenza tra segnale sperimentale e quello di modello, sia per quanto riguarda la frequenza, sia per la sua ampiezza. Se per il primo problema le cause sono le stesse appena discusse, per l'ampiezza errata le cause sono tutte da ricondurre al modello di Pacejka come discusso anche in sezione 5.12. Anche qui la parte finale di manovra presenta lo stesso azzeramento nella misura sperimentale dato dalla differenza tra traiettoria del modello e quella reale.

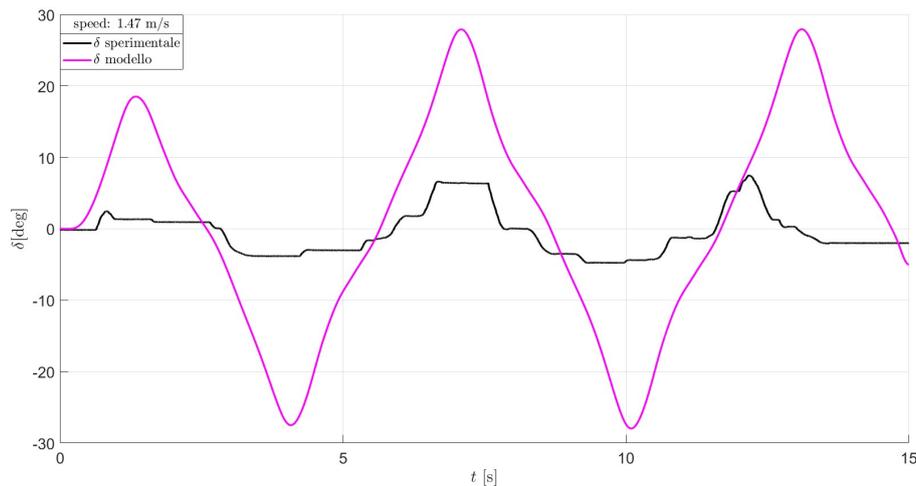


Figura 5.15: δ dello slalom a 1,47 m/s

5.3.2 Slalom a media velocità

La seconda velocità obiettivo è 2.41 m/s. A quest'andatura il monopattino risulta già molto più stabile e facile da manovrare e a detta di entrambi i piloti lo slalom tra i coni risulta molto più agevole.

Partendo dalla traiettoria, qui si può notare come vi sia maggiore difficoltà da parte del controllore a seguire la linea ideale (Figura 5.16). Nonostante ciò, la traiettoria viene comunque seguita seppur con ondulazioni. Questo andamento oscillatorio è principalmente dovuto alla logica del controllore che ad alte velocità favorisce un andamento sinusoidale dei vari segnali.

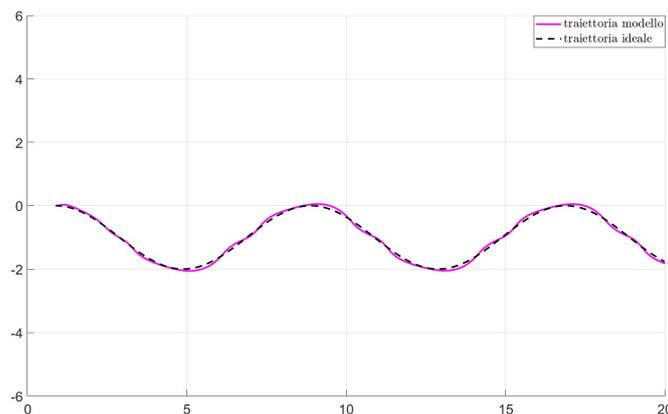


Figura 5.16: Traiettoria dello slalom a 2,41 m/s

Per quanto riguarda l'angolo di rollio, rispetto alle più basse velocità, si ha una migliore coerenza tra dati sperimentali e reali, sia in termini di frequenza che di ampiezza. La questione non stupisce, poichè come anticipato, a questa velocità la manovra risulta facilmente completabile, quindi anche il movimento dei piloti tende ad essere molto più sinuoso e regolare e quindi più facilmente approssimabile.

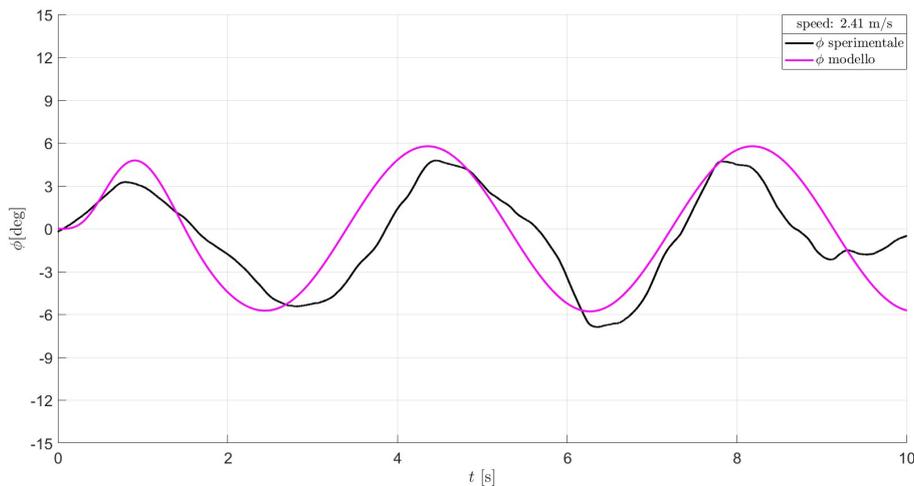


Figura 5.17: ϕ dello slalom a 2,41 m/s

Per l'angolo di sterzo valgono le stesse considerazioni fatte per ϕ . Anche qui l'andamento viene meglio approssimato in tutto il suo range. Resta sempre la discrepanza dovuta ai valori del modello di pneumatico.

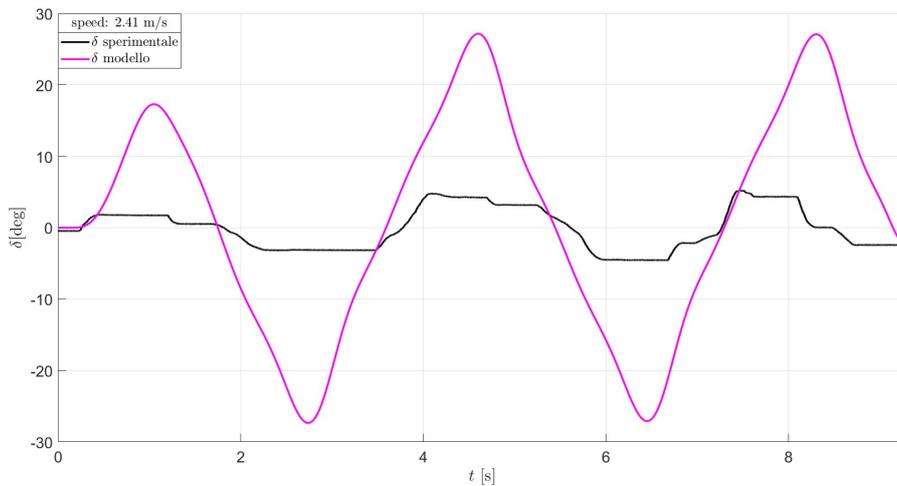


Figura 5.18: δ dello slalom a 2,41 m/s

In entrambi i segnali sperimentali, sia di ϕ che di δ , è immediato notare come le oscillazioni siano minori, segno ulteriore nella maggior regolarità del moto del monopattino lungo la manovra.

5.3.3 Slalom ad alta velocità

Quando la manovra viene effettuata intorno ai 3.13 m/s, entrambi i piloti iniziano ad avere difficoltà nel suo compimento ed è necessaria una grande abilità e padronanza dei movimenti. Non è sbagliato sostenere che a questa velocità si raggiungano i limiti dell'utilizzo in sicurezza del monopattino in questo percorso. Anche qui, come per il caso a bassa

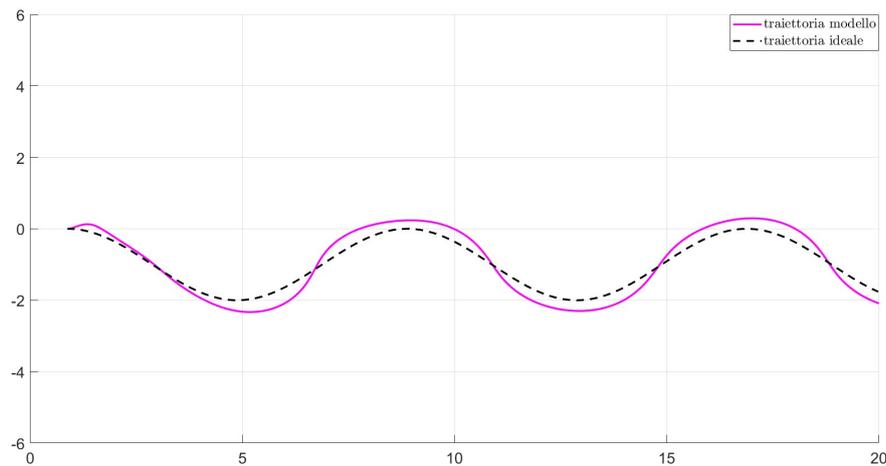


Figura 5.19: Traiettoria dello slalom a 3,13 m/s

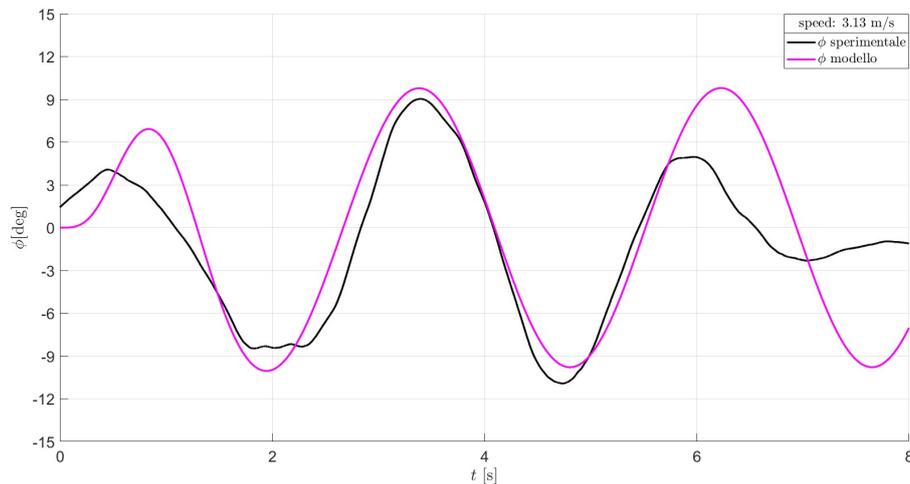


Figura 5.20: ϕ dello slalom a 3,13 m/s

velocità, si riscontrano problemi nel compiere al meglio la manovra, portando quindi un cambio repentino nella frequenza delle oscillazioni e quindi una minore attinenza tra i dati. Già a partire dalla traiettoria, in Figura 5.19 si nota come il controllore non riesca più a seguire al meglio la linea ideale. Sebbene in generale vi sia un'attinenza al percorso desiderato, le curve vengono affrontate con raggi di curvatura maggiori, portando quindi il monopattino e l'intera simulazione in un range di scarsa accuratezza con la realtà.

Nonostante la traiettoria non venga seguita al meglio, l'angolo di rollio viene approssimato in maniera soddisfacente. In Figura 5.20 si può apprezzare come soprattutto i primi due picchi del modello corrispondano a quelli sperimentali mentre il terzo picco tende ad essere più basso e anticipato. Questo è sempre dovuto al fatto che dopo l'ultimo birillo il pilota tende a raddrizzarsi.

In ultimo, l'angolo δ presenta, come nelle altre manovre, il corretto andamento ma con ampiezza amplificata. In Figura 5.21 rispetto alla manovra a media velocità è evidente

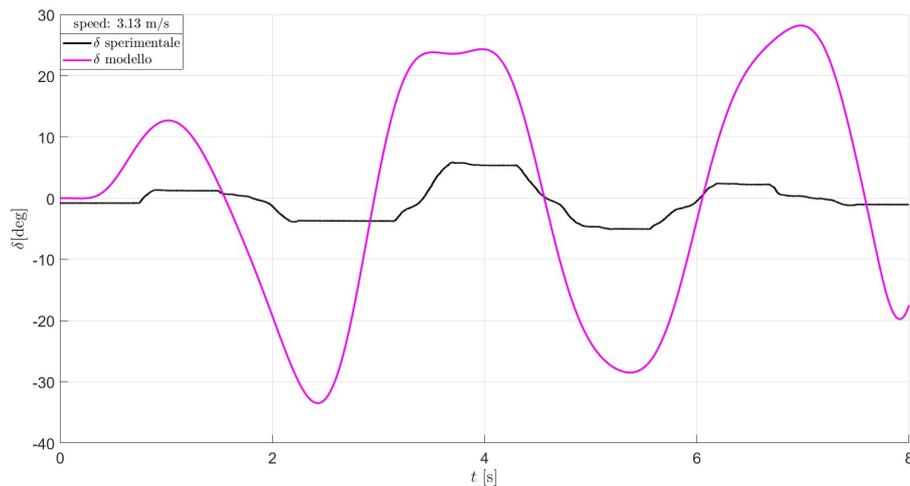


Figura 5.21: δ dello slalom a 3,31 m/s

una maggiore discrepanza dai dati sperimentali. La prima motivazione è sicuramente il funzionamento non eccellente del controllo in traiettoria. Discostandosi dalla linea ideale, l'angolo di sterzo tende ad avere una sua frequenza che è diversa da quella che il monopattino avrebbe sulla traiettoria ideale.

In definitiva, il modello tende a comportarsi al meglio nelle manovre a bassa e media velocità mentre perde di accuratezza quando si va al limite della dinamica del mezzo. Sebbene il modello riesca a comportarsi in maniera ottima anche a basse velocità, la difficoltà da parte dei piloti nel compiere la manovra in modo consono rende il confronto dei dati più complesso. Il range più adatto per la comparazione dei dati e quindi la validazione del modello risulta in definitiva quello a media velocità.

5.4 Otto

La presente sezione ha il compito di analizzare i risultati e le problematiche incontrate nella modellazione della manovra dell'otto. Come spiegato in 5.2, per effettuare una curva da un lato, è necessario effettuare prima una sterzata dal lato opposto per poi controsterzare una volta ottenuto il rollio desiderato. Per effettuare la manovra a modello sarebbe necessario, oltre che definire una traiettoria ideale, anche definire un profilo di ϕ adatto. La difficoltà sorge quando si analizza il comportamento dinamico del monopattino: in questo caso il rollio è causa diretta del l'angolo di sterzo, quindi non sarebbe possibile definire a priori un profilo di rollio senza tenere in considerazione le variazioni introdotte dall'angolo di sterzo. Per lo slalom non si è presentato questo problema dato che l'andamento sinusoidale dello sterzo era legato a doppio filo all'andamento sinusoidale del rollio e l'angolo di rollio è stato costruito in modo tale da essere in perfetta quadratura con lo sterzo, rispettando la dinamica appena descritta. Nel caso della manovra dell'otto, non si ha più un profilo di rollio e sterzo con un andamento costante e ripetuto nel tempo, bensì si hanno dei tratti di picco che corrispondono alle curve e dei tratti di rettilineo. Per poter definire un profilo di rollio sarebbe necessario un controllo interno al modello che identifichi la posizione del monopattino e che in corrispondenza di una curva faccia iniziare la piega del mezzo. Oltre però a questo controllo, sarebbe necessario un ulteriore accorgimento sulla traiettoria,

poichè per evitare che il monopattino rolli dalla parte sbagliata, il modello dovrebbe far compiere al mezzo una breve controsterzata prima dell'ingresso in curva, andando quindi a complicare di molto il sistema. Un'ulteriore problematica che sorgerebbe sarebbe quella di una mancata comunicazione tra il grado di libertà dello sterzo e del rollio, infatti, con la configurazione attuale, i due subsystems hanno una mutua influenza tangibile ma non regolata, portando quindi ad una grande difficoltà di taratura dei PID. Per un controllo così avanzato è fondamentale una logica più sofisticata di un semplice PID, che per natura non è in grado di sopportare sistemi fortemente non lineari o di gestire più input diversi.

6 Conclusioni

Il presente studio si è incentrato sull'analisi della dinamica laterale e della stabilità di un monopattino elettrico sia a livello numerico che sperimentale. Con l'applicazione delle equazioni del modello benchmark di bicicletta [7] ai dati geometrici e inerziali del monopattino, è stato creato uno script in grado di calcolare gli autovalori caratteristici del sistema e seguire il loro andamento in un range di velocità tra 0 m/s e 10 m/s. I modi di vibrare individuati sono stati tre: capsizing, weave e castering. Essi, sia nella bicicletta che nel monopattino cambiano la loro morfologia al variare della velocità sia in termini di modulo che di fase. È stato inoltre creato uno script in grado di generare una gif che rappresentasse il modo di vibrare a seguito di un input di velocità da parte dell'utente per entrambi i veicoli. È stato anche analizzato il range di stabilità sia della bicicletta che del monopattino. Se per il primo si ha un intervallo tra 4.5 m/s e 6 m/s, per il secondo si inizia ad avere comportamento stabile oltre i 6 m/s, ovvero al limite del campo di velocità di normale utilizzo.

Per testare ulteriormente il comportamento stabile dei due veicoli è stato creato un modello dinamico in dominio tempo a partire dalle equazioni dell'analisi modale. Questo strumento è in grado di simulare un andamento del veicolo in linea retta che riceve un leggero disturbo al manubrio; a seconda della velocità impostata è possibile osservare il veicolo divergere o tornare nella configurazione di riposo.

Per l'acquisizione dei dati è stata svolta una campagna sperimentale con 4 manovre: corridoio stretto, cerchio, slalom e otto ed è inoltre stato modificato e migliorato il sistema di misura dell'angolo di sterzo tramite delle modifiche con componenti stampati in 3D.

Per simulare le manovre è stato creato un modello dinamico in dominio tempo a 4 gdl in grado di svolgere tutti i percorsi compiuti nella campagna sperimentale. I valori estrapolati dalle simulazioni sono stati confrontati con quelli acquisiti sperimentalmente. Nella manovra del corridoio si è notato come oltre i 5 km/h vi sia un notevole incremento della stabilità, direttamente collegata alla drastica riduzione di microcorrezioni di sterzo e rollio. Nella manovra del cerchio si sono ottenuti risultati perfettamente calzanti se non per l'angolo di sterzo; il problema è dovuto ad un modello di pneumatico non perfettamente in linea con i dati del monopattino. Per quanto riguarda lo slalom sono state analizzate tre manovre a tre velocità diverse. I risultati approssimano bene la realtà in particolare nella manovra a media velocità (2.41 m/s). In questo caso si osserva una buona coerenza con i dati sperimentali e un generale ottimo comportamento del modello. Per la manovra dell'otto, l'architettura del sistema non è abbastanza sofisticata per poter simulare in modo efficace e per ottenere dei dati soddisfacenti.

Appendice

La presente sezione intende elencare tutte le migliorie apportabili al presente progetto di tesi. Le modifiche intendono sviluppare e rendere più completo e preciso un eventuale ulteriore studio sulla dinamica laterale, in modo da fornire sempre maggiori informazioni sul comportamento di questo mezzo.

Modifica del modello di pneumatico Il modello di pneumatico utilizzato è ovviamente carente, l'unico modo in cui il modello riesce a compensare a questa problematica è aumentando il valore di δ necessario per il completamento della manovra. Per una miglior simulazione del sistema sarebbe necessario un rimaneggiamento dei dati del blocco Pacejka con valori specifici se non per lo Xiaomi quantomeno per un qualsiasi monopattino elettrico. Un'altra soluzione sarebbe quella di evitare di passare per un blocco Simulink ma utilizzare direttamente dei dati sperimentali (sempre per il monopattino) implementando delle lookup table. In questo caso sarebbe però necessaria una mole importante di dati, soprattutto relativi alla risposta al camber, critica per queste simulazioni.

Aggiunta del grado di libertà longitudinale L'attuale modello dinamico ha diverse limitazioni che non gli permettono di simulare al meglio il comportamento reale del veicolo. Per prima cosa, le misurazioni sono state effettuate a velocità costante proprio per la mancanza del grado di libertà longitudinale. A tal proposito, sarebbe utile l'aggiunta di quest'ultimo tramite un nuovo subsystem. Invece della definizione da parte dell'utente della velocità del veicolo, si applicherebbe un profilo di coppia al motore (posizionato nella ruota anteriore) che passando per il modello di pneumatico si trasformerebbe in forza longitudinale scaricata a terra. Ovviamente tutte le altre quattro equazioni differenziali andrebbero riadattate per comprendere le forze o le coppie d'inerzia prodotte dal cambiamento di velocità longitudinale.

Cambio nella logica dei controllori Una delle grandi criticità del modello è il fatto di possedere diversi PID che funzionano in parallelo. Se per quanto riguarda il controllo in traiettoria non si presenta questa problematica, per il PID su ϕ e quello su δ si hanno due controllori che lavorano senza comunicare tra di loro su due equazioni differenziali che però sono dinamicamente collegate. Il risultato di ciò è che un tuning preciso dei blocchi è pressochè impossibile, infatti, per lo slalom è stato necessario eliminare il PID del rollio, definendo direttamente gli angoli con un profilo. Con una logica diversa di controllo in grado di poter gestire più output allo stesso tempo (in questo caso M_ϕ e M_δ) si potrebbe risolvere la problematica, permettendo una taratura più fine in grado anche di poter differenziare tra i diversi stili di guida dei piloti. Attualmente il PID relativo alla traiettoria ideale riceve in input un segnale di distanza dal percorso desiderato mediato su un certo numero di punti. Questa logica, sebbene sia mitigato dalla media, produce un segnale fortemente oscillatorio e un suo filtraggio troppo estremo porta alla non efficacia del controllo. A questo proposito sarebbe utile uno sviluppo ulteriore del controllo, che sia tramite un affinamento della logica o con una riprogettazione completa del tutto, avendo però sempre come output un angolo di sterzo desiderato δ_{id} .

Modifiche al modello 2 gdl Il modello Simulink a 2 gdl è stato utilizzato in questo lavoro di tesi per la sola verifica della stabilità del monopattino. Una volta creata l'architettura, è possibile tramite le equazioni descritte nel Capitolo 1.2 ottenere i due rimanenti gradi di libertà \ddot{y}_P e $\ddot{\psi}$. Da qui è possibile calcolare la traiettoria e tutte le altre grandezze utilizzate per la comparazione sperimentale. Risulterebbe conveniente un successivo confronto tra i dati ottenuti con il modello 4 gdl e 2 gdl. A tal proposito, se i risultati non dovessero differire di una grande quantità, sarebbe possibile utilizzare direttamente il modello semplificato, eliminando quindi l'aleatorietà dei dati dello pneumatico, ad oggi non pienamente noti. Si perderebbe l'ipotesi di strisciamento degli pneumatici ma è possibile che si guadagni in accuratezza per quanto riguarda l'angolo di sterzo necessario al compimento della manovra.

Modifiche al sistema di misura dell'angolo di sterzo Il sistema di acquisizione dell'angolo di sterzo così concepito possiede già una buona ripetibilità e precisione. Per poter perfezionare ancora di più il tutto sarebbe possibile implementare un sistema di bloccaggio della rotazione assiale per i supporti anteriore e posteriore. Attualmente il tutto viene bloccato a pressione con l'ausilio della viteria che preme sul nastro gommato attorno al canotto di sterzo, un sistema meccanico eviterebbe spostamenti dati dalle vibrazioni.

Anche il bloccaggio tra la staffa mobile e il suo supporto è tenuto insieme a pressione; la creazione di un riscontro che vada ad alloggiarsi nell'asola verticale della staffa mobile permetterebbe una tenuta perfetta.

La barra filettata e la viteria per renderla un perno potrebbe essere sostituita da un perno liscio, in modo tale da avere una maggior precisione e un attrito con le asole ridotto e più omogeneo lungo tutto il campo di utilizzo.

La staffa fissa potrebbe essere bloccata in maniera migliore dallo spessore. In questo caso lo spessore funge da riscontro solo in una direzione; con un cambio di design sarebbe possibile far funzionare lo spessore come riscontro in entrambe le direzioni, aggiungendo rigidità al sistema ed evitando le forti oscillazioni a cui la staffa fissa è sottoposta durante le manovre più brusche.

In ultimo, potrebbe essere valutabile la sostituzione di tutti i componenti metallici con dei gemelli stampati in 3D in PLA o ABS. Questa soluzione permetterebbe un abbattimento considerevole del peso del sistema, andando quindi anche a ridurre le differenze di momento di inerzia del canotto di sterzo con quello stock.

Bibliografia

- [1] E Döhning. “Die Stabilität von Einspurfahrzeugen”. In: *Forschung auf dem Gebiet des Ingenieurwesens A* 21 (1955), pp. 50–62.
- [2] David Jeffrey Eaton. *Man-machine Dynamics In The Stabilization Of Single-track Vehicles*. University of Michigan, 1973.
- [3] John Forester. “Report on Stability of the Da Hon Bicycle”. In: *Dated: Nov 19* (1989).
- [4] Richard Scott Hand. *Comparisons and stability analysis of linearized equations of motion for a basic bicycle model*. Cornell University, 1988.
- [5] Felix Klein e Arnold Sommerfeld. *Über die Theorie Des Kreisels*. Ripol Klassik, 1965.
- [6] Barry Craig Mears. *Open loop aspects of two-wheeled vehicle stability characteristics*. University of Illinois at Urbana-Champaign, 1989.
- [7] Jaap P Meijaard et al. “Linearized dynamics equations for the balance and steer of a bicycle: a benchmark and review”. In: *Proceedings of the Royal society A: mathematical, physical and engineering sciences* 463.2084 (2007), pp. 1955–1982.
- [8] JP Meijaard. *Derivation of the linearized equations for an uncontrolled bicycle*. Rapp. tecn. Internal report, University of Nottingham, UK, 2004.
- [9] Jim M Papadopoulos. “Bicycle steering dynamics and self-stability: a summary report on work in progress”. In: *Cornell Bicycle Research Project, Cornell University, Ithaca, NY* (1987).
- [10] Milan Paudel. *An investigation into the design for rideability of small wheel single-track bicycles and e-scooters*. 2019.
- [11] Annemieke C Scholten et al. “Incidence and costs of bicycle-related traumatic brain injuries in the Netherlands”. In: *Accident Analysis & Prevention* 81 (2015), pp. 51–60.
- [12] Arend L Schwab, Jaap P Meijaard e Jim M Papadopoulos. “Benchmark results on the linearized equations of motion of an uncontrolled bicycle”. In: *Journal of mechanical science and technology* 19 (2005), pp. 292–304.
- [13] Robin S Sharp. “The stability and control of motorcycles”. In: *Journal of mechanical engineering science* 13.5 (1971), pp. 316–329.
- [14] Matthew J Thompson e Frederick P Rivara. “Bicycle-related injuries”. In: *American family physician* 63.10 (2001), pp. 2007–2015.
- [15] David H Weir. “Motorcycle Handling Dynamics and Rider Control and the Effect of Design Configuration on Response and Performance, UCLA”. Tesi di dott. Ph. D. Thesis, 1972.
- [16] David Gordon Wilson. “A short history of bicycling”. In: *Bicycling Science* (2004).
- [17] Stuart S Wilson. “Bicycle technology”. In: *Scientific American* 228.3 (1973), pp. 81–91.