



DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA MECCANICA ED AEROSPAZIALE  
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

TESI DI LAUREA MAGISTRALE

**Modelli esatti 3D shell avanzati per analisi  
elettro-magneto-elastiche di strutture multistrato**

Relatore  
**Prof. Salvatore Brischetto**  
Correlatore  
**Ing. Domenico Cesare**

Studente  
**Tommaso Mondino**  
Matricola s275586

Copyright © 2025 Tommaso Mondino

Quest'opera è soggetta alla Creative Commons Public License versione 4.0 o posteriore. L'enunciato integrale della Licenza in versione 4.0 è reperibile all'indirizzo internet <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>.

Ogni volta che si usa o si distribuisce quest'opera, lo si deve fare secondo i termini di questa licenza, che va comunicata con chiarezza.

In ogni caso si possono concordare con il titolare dei diritti d'autore utilizzi di quest'opera non consentiti da questa licenza.

I nomi commerciali, i loghi e i marchi registrati menzionati nell'elaborato appartengono ai rispettivi proprietari.

## Sommario

La presente tesi, di carattere numerico e sperimentale, riguarda lo sviluppo e l'implementazione di un modello esatto 3D layerwise per problemi elettro-magneto-elastici di piastre e gusci multistrato. Vengono valutate analisi alle vibrazioni libere e analisi statiche. Nel primo caso si considerano sia configurazioni closed circuit, in cui, sulle superfici esterne, si impongono nulli i potenziali elettrostatico  $\phi$  e magnetostatico  $\psi$ , sia open circuit, in cui, invece, sempre sulle superfici esterne, si impongono nulle le componenti nella direzione dello spessore  $z$  dello spostamento elettrico  $\mathbf{D}$  e dell'induzione magnetica  $\mathbf{B}$ . Nel caso delle analisi statiche, invece, si analizzano sia configurazioni sensore sia attuatore. Le strutture multistrato considerate appartengono alla categoria delle smart structures, contenendo materiali piezoelettrici e/o piezomagnetici omogenei. L'introduzione del sistema di riferimento misto curvilineo ortogonale  $(\alpha, \beta, z)$  permette di indagare piastre, pannelli di gusci cilindrici, gusci cilindrici, pannelli di gusci sferici e gusci sferici. Il modello sviluppato è basato su cinque equazioni differenziali di secondo ordine: le tre equazioni indefinite di equilibrio 3D, l'equazione 3D di divergenza dello spostamento elettrico e l'equazione 3D di divergenza dell'induzione magnetica. Le variabili fondamentali sono gli spostamenti,  $u$ ,  $v$  e  $w$ , il potenziale elettrostatico  $\phi$  e il potenziale magnetostatico  $\psi$ . Il metodo di soluzione esatto utilizzato per il presente problema si basa sull'imposizione delle forme armoniche nella direzione  $\alpha$  e  $\beta$  e, nel caso di vibrazioni libere, nel tempo  $t$  e sul metodo della matrice esponenziale per la risoluzione delle equazioni differenziali nella variabile  $z$ . Affinché la soluzione esista è richiesto considerare strutture i cui strati sono in materiale ortotropo con angoli di laminazione  $0^\circ$  e/o  $\pm 90^\circ$  e che le condizioni al contorno di vincolo siano di semplice appoggio. La sezione dei risultati è suddivisa in due parti. Nella prima si riportano una serie di assessment per validare il modello proposto e la sua implementazione. Nella seconda si propongono e discutono una serie di nuovi casi benchmark al variare di numeri di semionda, condizioni di carico sulle superfici esterne, geometrie e spessori. Questi nuovi risultati possono essere utilizzati come soluzione di riferimento per futuri modelli, numerici e analitici, che valutano l'uso di smart materials. In particolare, il presente modello con un'unica formulazione permette di valutare diverse configurazioni, fornendo una descrizione accurata degli accoppiamenti elettro-magneto-elastici e garantendo la continuità interlaminare e i tipici effetti zig-zag sulle variabili del problema.

## Abstract

The present thesis, of numerical and experimental nature, concerns the development and implementation of an exact 3D layerwise model for electro-magneto-elastic problems of multilayered plates and shells. Free vibration and static analyses are evaluated. In the former case, both closed-circuit configurations, in which the electrostatic potential  $\phi$  and the magnetostatic potential  $\psi$  are set to zero on the external surfaces, and open-circuit configurations, in which the components in the thickness direction  $z$  of the electric displacement  $\mathbf{D}$  and the magnetic induction  $\mathbf{B}$  are set to zero on the external surfaces, are considered. In the case of static analyses, both sensor and actuator configurations are examined. The considered multilayered structures belong to the category of smart structures, containing homogeneous piezoelectric and/or piezomagnetic materials. The introduction of the mixed curvilinear orthogonal reference system  $(\alpha, \beta, z)$  allows for the investigation of plates, cylindrical shell panels, cylindrical shells, spherical shell panels, and spherical shells. The developed model is based on five second-order differential equations: the three indefinite 3D equilibrium equations, the 3D divergence equation of the electric displacement, and the 3D divergence equation of the magnetic induction. The fundamental variables are the displacements  $u$ ,  $v$ , and  $w$ , the electrostatic potential  $\phi$ , and the magnetostatic potential  $\psi$ . The exact solution method used for the present problem is based on imposing harmonic forms in the  $\alpha$  and  $\beta$  directions and, in the case of free vibrations, in time  $t$ , as well as on the exponential matrix method for solving the differential equations in the  $z$  variable. For the solution to exist, it is required to consider structures whose layers are made of orthotropic materials with ply angles of  $0^\circ$  and/or  $\pm 90^\circ$  and that the boundary conditions are simply supported. The results section is divided into two parts. The first presents a series of assessments to validate the proposed model and its implementation. The second proposes and discusses a set of new benchmark cases by varying the number of half-waves, load conditions on external surfaces, geometries, and thicknesses. These new results can be used as reference solutions for future numerical and analytical models assessing the use of smart materials. In particular, the present model, with a single formulation, allows for the evaluation of different configurations, providing an accurate description of electro-magneto-elastic couplings while ensuring interlaminar continuity and capturing the typical zig-zag effects on the problem variables.

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
1.1	Obiettivi . . . . .	1
1.2	Struttura dell'elaborato . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Materiali piezoelettrici e materiali piezomagnetici</b>	<b>3</b>
2.1	Materiali piezoelettrici . . . . .	3
2.2	Materiali piezomagnetici . . . . .	4
2.3	Materiali piezoelettrici e piezomagnetici . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Modellazione 3D dei gusci sferici per problemi elettro-magno-elastici accoppiati</b>	<b>6</b>
3.1	Geometria . . . . .	6
3.2	Variabili fondamentali: spostamenti e potenziali . . . . .	8
3.3	Relazioni geometriche, gradienti dei potenziali e variabili primarie . . . . .	9
3.3.1	Relazioni geometriche . . . . .	9
3.3.2	Gradienti dei potenziali . . . . .	10
3.4	Equazioni costitutive e variabili secondarie . . . . .	11
3.4.1	Equazioni costitutive nel riferimento materiale . . . . .	12
3.4.2	Equazioni costitutive nel sistema struttura . . . . .	13
3.5	Equazioni di governo 3D . . . . .	17
3.5.1	Equazioni indefinite di equilibrio 3D . . . . .	17
3.5.2	Leggi di Gauss elettrica e magnetica 3D . . . . .	17
3.6	Metodologia di risoluzione . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Modello 3D esatto per analisi elettro-elastiche accoppiate di gusci sferici multistrato</b>	<b>23</b>
4.1	Equazioni di governo 3D del problema elettro-elastico accoppiato . . . . .	23
4.2	Risoluzione nelle direzioni in pianta e nel tempo t . . . . .	25
4.3	Risoluzione nella direzione z . . . . .	27
4.4	Analisi alle vibrazioni libere . . . . .	34
4.4.1	Closed circuit . . . . .	35
4.4.2	Open circuit . . . . .	36
4.4.3	Valutazione delle frequenze circolari proprie e modi di vibrare . . . . .	38
4.5	Analisi statica . . . . .	39
4.5.1	Sensore elettrico . . . . .	43
4.5.2	Attuatore elettrico . . . . .	44
4.6	Caso duale: analisi magneto-elastiche . . . . .	44
4.6.1	Analisi alle vibrazioni libere . . . . .	44
4.6.2	Analisi statica . . . . .	46

---

<b>5 Modello 3D esatto per analisi elettro-magneto-elastiche accoppiate di gusci sferici multistrato</b>	<b>49</b>
5.1 Risoluzione nelle direzioni in pianta e nel tempo t . . . . .	49
5.2 Risoluzione nella direzione z . . . . .	52
5.3 Analisi alle vibrazioni libere . . . . .	61
5.3.1 Closed circuit . . . . .	63
5.3.2 Open circuit . . . . .	64
5.3.3 Valutazione delle frequenze circolari proprie e modi di vibrare . . . . .	67
5.4 Analisi statica . . . . .	68
5.4.1 Sensore elettro-magnetico . . . . .	73
5.4.2 Attuatore elettro-magnetico . . . . .	73
<b>6 Validazione del modello 3D esatto per analisi elettro-magneto-elastiche accoppiate</b>	<b>74</b>
6.1 Analisi alle vibrazioni libere . . . . .	74
6.1.1 Assessment A1 <sub>din</sub> . . . . .	77
6.1.2 Assessment A2 <sub>din</sub> . . . . .	77
6.1.3 Assessment A3 <sub>din</sub> . . . . .	82
6.1.4 Assessment A4 <sub>din</sub> . . . . .	82
6.2 Analisi statica . . . . .	85
6.2.1 Assessment A1 <sub>stat</sub> . . . . .	85
6.2.2 Assessment A2 <sub>stat</sub> . . . . .	85
6.2.3 Assessment A3 <sub>stat</sub> . . . . .	88
6.2.4 Assessment A4 <sub>stat</sub> . . . . .	91
6.2.5 Assessment A5 <sub>stat</sub> . . . . .	91
6.2.6 Assessment A6 <sub>stat</sub> . . . . .	95
<b>7 Nuovi benchmark di analisi 3D esatte elettro-magneto-elastiche accoppiate</b>	<b>100</b>
7.1 Analisi alle vibrazioni libere . . . . .	100
7.1.1 Benchmark B1 <sub>din</sub> . . . . .	102
7.1.2 Benchmark B2 <sub>din</sub> . . . . .	103
7.1.3 Benchmark B3 <sub>din</sub> . . . . .	114
7.1.4 Benchmark B4 <sub>din</sub> . . . . .	114
7.2 Analisi statica . . . . .	150
7.2.1 Benchmark B1 <sub>stat</sub> . . . . .	150
7.2.2 Benchmark B2 <sub>stat</sub> . . . . .	151
7.2.3 Benchmark B3 <sub>stat</sub> . . . . .	151
7.2.4 Benchmark B4 <sub>stat</sub> . . . . .	164
<b>8 Conclusioni</b>	<b>178</b>
8.1 Sviluppi futuri . . . . .	178
<b>Bibliografia</b>	<b>180</b>

# Capitolo 1

## Introduzione

I principali progressi futuri nell’ambito dell’ingegneria aerospaziale saranno legati ad un incremento dell’utilizzo di strutture multistrato non convenzionali, dando origine a una nuova generazione di aeromobili e veicoli spaziali prodotti attraverso complesse *strutture multistrato innovative*.

In particolare, una grande innovazione è data dalla possibilità di usare *materiali piezoelettrici* e *piezomagnetici*, i quali, venendo utilizzati come sensori o attuatori, permettono di ottenere le cosiddette *strutture intelligenti* o, in inglese, *smart structures*. Con questi materiali si possono creare sistemi di automonitoraggio e autocontrollo attraverso una rete di sensori e attuatori integrati e distribuiti nella struttura, i quali permetterebbero di monitorare le deformazioni e applicare eventuali necessarie correzioni. Una struttura adattativa di questo genere, ponendo l’attenzione all’ambito aerospaziale, avrebbe una vasta gamma di applicazioni possibili: smorzamento e soppressione delle vibrazioni, adattamento della forma per le superfici aerodinamiche, controllo aeroelastico attivo, controllo della forma di strumenti ottici ed elettromagnetici, monitoraggio delle cricche e dei danni, e simili.

Questa tipologia di strutture innovative introduce una serie di nuove problematiche da considerare: forte anisotropia traversale nella direzione dello spessore del laminato (infatti le sue proprietà caratteristiche cambiano lungo questa direzione per via del succedersi degli strati di materiale diverso) e utilizzo di materiali non convenzionali (comporta la definizione di strutture su cui agiscono una combinazione di due o più campi fisici, e, dunque, di *problemi multicampo*, che possono anche interagire tra loro).

Le tradizionali teorie e i modelli classici 2D, sviluppati nel passato per descrivere il comportamento delle strutture a guscio convenzionali monostrato e, spesso, isotrope, non sono adatte per analizzare il comportamento di questa nuova tipologia di strutture e permetterne un’adeguata progettazione. Da qui nasce la necessità di sviluppare nuovi modelli strutturali 2D raffinati o anche 3D, come quelli oggetto di questa tesi. In particolare, è necessaria una più accurata modellazione nella direzione dello spessore, al fine di descrivere correttamente gli effetti legati all’anisotropia trasversale e i diversi campi fisici che agiscono sulla struttura. Strumenti di questo genere permetteranno una sempre più accurata progettazione e realizzazione di strutture multistrato avanzate utili per aeromobili e veicoli spaziali progressivamente più sicuri, leggeri ed efficienti.

### 1.1 Obiettivi

In base a quanto premesso, la presente tesi ha come oggetto lo sviluppo e l’implementazione di un *modello esatto 3D layerwise* per valutare gli *effetti elettro-magneto-elastici accoppiati* di *strutture a guscio multistrato innovative*, che impiegano sia materiali piezoelettrici sia

materiali piezomagnetici. Si affrontano, dunque, problemi multicampo in cui si considerano, oltre al semplice campo meccanico, nei limiti elastici, anche il campo elettrostatico e quello magnetostatico, in condizioni conservative, tenendo conto delle loro interazioni. In particolare, si vuole sviluppare il suddetto modello per valutare casi di *analisi alle vibrazioni libere* e *analisi statiche*.

Ad oggi, in letteratura non si trovano molti esempi di modelli 3D, sia esatti sia numerici approssimati, per trattare questa tipologia di problemi. In particolare, la novità che introduce questo modello, e di cui è tratto distintivo e punto di forza, è l'utilizzo del *metodo della matrice esponenziale* per risolvere in maniera esatta il problema nella direzione trasversale dello spessore.

## 1.2 Struttura dell'elaborato

L'elaborato si compone, oltre a questa introduzione, di altri 7 capitoli. Nel capitolo 2 si introducono i materiali piezoelettrici e i materiali piezomagnetici, presentando gli omonimi effetti. Si prosegue con il capitolo 3, in cui si fornisce la trattazione completa della *formulazione* per la *modellazione 3D elettro-magneto-elastica accoppiata* dei *gusci sferici*, comprese le *equazioni di governo 3D* per il problema. I capitoli 4 e 5 sono il cuore dell'elaborato. Nel primo si presenta la trattazione per ottenere il modello 3D esatto per il caso particolare di *problemi elettro-elastici* di gusci sferici multistrato; nel secondo si passa al caso di problemi elettro-magneto-elastici, generalizzando la precedente trattazione. I successivi due capitoli sono relativi ai risultati ottenuti con il modello 3D esatto per il caso elettro-magneto-elastico: nel capitolo 6 si riportano i risultati di validazione, ottenuti confrontando casi noti già risolti con altri modelli, mentre nel capitolo 7, invece, si propone una serie di nuovi casi benchmark, in cui si fanno variare diversi parametri per valutare la risposta della struttura al variare delle condizioni. Nel capitolo finale, il numero 8, si riportano alcune considerazioni di carattere generale e, inoltre, vengono proposti possibili sviluppi futuri a partire da questo lavoro.

## Capitolo 2

# Materiali piezoelettrici e materiali piezomagnetici

Il presente capitolo riporta una breve introduzione ai materiali piezoelettrici e piezomagnetici, i quali possono essere impiegati nelle strutture a guscio multistrato. Per approfondimenti su questo tema si veda Brischetto [1], Zhu [2], Jaffe et al. [3] e Maugin [4].

### 2.1 Materiali piezoelettrici

L'*effetto piezoelettrico* consiste nella conversione di energia tra il campo meccanico ed elettrico. La conversione di energia può avvenire tra i due campi in entrambe le direzioni; si definiscono, quindi, un effetto piezoelettrico *diretto*, sfruttato nelle applicazioni sensore, ed uno *inverso*, utilizzato per le applicazioni attuatore. Il primo comporta, applicando dei carichi meccanici che determinano delle deformazioni, la generazione di una polarizzazione elettrica del materiale e, dunque, nel caso statico, della generazione di una differenza di potenziale elettrico tra due punti della struttura, o, comunque, una sua variazione. Il secondo, invece, in presenza di un campo elettrico, ovvero una differenza di potenziale elettrico nel caso statico, determina l'insorgere di deformazioni e tensioni meccaniche nella struttura. Questi due effetti creano l'accoppiamento tra il campo meccanico ed il campo elettrico.

Tra i più comuni materiali con proprietà piezoelettriche si possono distinguere due famiglie: da un lato i materiali cristallini (il quarzo  $\text{SiO}_2$ ) e i materiali ceramici (il Titanato di Bario  $\text{BaTiO}_3$  e la famiglia dei Titanati Zirconati di Piombo PZT), dall'altro i polimeri piezoelettrici e i polimeri semi-cristallini, ad esempio il Fluoruro di Polivinilidene PVDF. Nel modello qui presentato, verranno utilizzati alcuni di questi materiali elencati; si vedano le Tabelle 6.1, 6.2 per le loro proprietà meccaniche ed elettriche. La scelta del materiale deve tenere conto dell'applicazione specifica per cui si vuole utilizzare, in quanto ogni applicazione richiede requisiti diversi e i materiali hanno proprietà diverse: frequenza di attivazione alta o bassa, elevata o scarsa deformabilità, quantità di potenza richiesta per un applicazione sensore sono alcune di esse.

Questi particolari materiali cristallini, oltre ad avere una struttura priva di centro di simmetria, affinché esprimano l'effetto piezoelettrico, devono presentare una polarizzazione permanente dal punto di vista macroscopico. In essi, infatti, esistono sempre dei domini polarizzati a livello microscopico, ma le loro direzioni, in generale, hanno un orientamento casuale e ciò comporta che si annullino a vicenda, determinando una polarizzazione globale nulla del materiale. Per renderlo attivo dal punto di vista piezoelettrico e avere una polarizzazione permanente, è necessario imporla forzatamente. Si utilizza, pertanto, un campo elettrico sufficientemente intenso, applicando una differenza di potenziale elettrico, per cui i

singoli domini si riordinano prevalentemente nella direzione in cui esso agisce, producendo la polarizzazione macroscopica per somma di quelle a livello microscopico. Una volta rimosso il campo esterno, viene mantenuta una polarizzazione permanente con la correlata deformazione; entrambe le caratteristiche seguono delle curve di isteresi. Da questo momento in poi qualunque campo elettrico esterno, con il correlato potenziale, di intensità inferiore a quello utilizzato in fase di polarizzazione, determina una deformazione temporanea e viceversa.

Si sottolinea, inoltre, che la direzione in cui si definisce la polarizzazione permanente è fondamentale; in base ad essa cambiano gli accoppiamenti tra campo elettrico e meccanico del materiale piezoelettrico. In base alle esigenze applicative si impone lungo la direzione più opportuna. In questa tesi, tutti i materiali piezoelettrici considerati presentano una polarizzazione permanente nella direzione dello spessore del guscio.

L'accoppiamento tra il campo elettrico e il campo meccanico, assunto lineare in entrambi i versi, si esprime per mezzo dei cosiddetti *coefficienti piezoelettrici*. Questi ultimi si possono definire in maniera diversa a seconda delle variabili caratteristiche dei due campi che si mettono in relazione diretta. In questo elaborato, si definiscono mettendo in correlazione le tensioni meccaniche con le componenti del vettore campo elettrico oppure le componenti del vettore spostamento elettrico con le componenti di deformazione, la cosiddetta *e-form*. I diversi coefficienti possono essere raggruppati in una matrice di dimensioni  $3 \times 6$  che assume la forma presentata in Eq. (3.22d).

## 2.2 Materiali piezomagnetici

Considerando il campo magnetico, l'*effetto piezomagnetico* è l'effetto duale di quello piezoelettrico. Consiste, infatti, nella conversione di energia tra il campo meccanico e magnetico. Anche in questo caso, essa può avvenire da un campo verso l'altro e viceversa. Si definiscono, in analogia al caso appena discusso, un effetto piezomagnetico *diretto*, sfruttato nei sensori, ed uno *inverso*, utilizzato negli attuatori. Nel primo caso, in risposta a delle deformazioni meccaniche, si ottiene una magnetizzazione del materiale, che nel caso statico equivale alla definizione di una differenza di potenziale magnetico o sua variazione. L'effetto piezomagnetico inverso, invece, comporta per via di un campo magnetico, ovvero una differenza di potenziale magnetico nel caso statico, il formarsi di deformazioni e tensioni meccaniche. Questi due effetti costituiscono l'accoppiamento tra il campo meccanico e il campo magnetico.

I materiali con proprietà piezomagnetiche sono piuttosto rari, in quanto si devono avere sia adeguate condizioni di simmetria della cristallografia sia di simmetria magnetica. Più comune è il caso di materiali che presentano l'*effetto magnetostrettivo*, per cui il materiale presenta deformazioni meccaniche sottoposto all'azione di un campo magnetico ma non viceversa. Tuttavia, i materiali piezomagnetici, in genere, sono materiali cristallini che appartengono alla famiglia dei ferromagnetici. In questo elaborato si considera, in particolare, la Ferrite di Cobalto  $\text{CoFe}_2\text{O}_4$ , di cui si riportano i coefficienti delle sue proprietà caratteristiche nella Tabella 6.2. Come per i materiali piezoelettrici, anche i materiali piezomagnetici si prestano a determinate applicazioni in base alle proprie caratteristiche.

Sempre in analogia a quanto accade per l'effetto piezoelettrico, affinché questi particolari materiali cristallini presentino l'effetto piezomagnetico, devono esibire una magnetizzazione permanente macroscopica. A livello microscopico i domini magnetizzati sono sempre presenti, ma le direzioni sono distribuite casualmente, comportando che le proprie magnetizzazioni locali si compensino e si annullino a livello globale. Per attivare le proprietà piezomagnetiche del materiale e avere una magnetizzazione permanente in una specifica direzione, essa si deve imporre forzatamente. A tal fine, si applica al materiale un campo magnetico sufficientemente intenso tale che i singoli domini, per la maggior parte, si orientino nella direzione in cui esso

agisce, producendo una magnetizzazione macroscopica. Una volta rimosso il campo esterno, viene mantenuta una magnetizzazione permanente con la correlata deformazione; entrambe le caratteristiche seguono le curve di isteresi. Da questo momento in poi qualunque campo magnetico esterno, con il correlato potenziale, di intensità inferiore a quello utilizzato per imporre la magnetizzazione permanente, determina una deformazione temporanea e viceversa.

Anche in questo caso, la direzione in cui si impone la magnetizzazione permanente influenza in modo distintivo gli accoppiamenti tra il campo meccanico e il campo magnetico che agiscono sul materiale piezomagnetico. In questo elaborato si considerano solo materiali con la magnetizzazione permanente definita nella direzione dello spessore del guscio.

Si assume che il campo magnetico e il campo meccanico abbiano un accoppiamento lineare in entrambe le direzioni, il quale si esprime attraverso i *coefficienti piezomagnetici*. Nella trattazione successiva, in analogia a come si sono definiti i coefficienti piezoelettrici, essi sono definiti mettendo in correlazione diretta le tensioni meccaniche con le componenti del vettore campo magnetico oppure le componenti del vettore induzione magnetica con le componenti di deformazione. La matrice di dimensioni  $3 \times 6$  in cui si raggruppano i suddetti coefficienti viene presentata nella Eq. (3.22e).

## 2.3 Materiali piezoelettrici e piezomagnetici

Poiché in questa tesi si trattano *problemI elettro-magneto-elastici accoppiati*, si è interessati anche a considerare eventuali materiali che presentano entrambe le proprietà piezoelettriche e piezomagnetiche. Di per sé, un materiale monofase non può presentare entrambe queste proprietà, richiedendo esse simmetrie cristalline differenti. Tuttavia, si possono creare dei materiali, composti da più fasi, che permettano di ottenere dal punto di vista macroscopico materiali con entrambe le proprietà; si tratta, dunque, di materiali compositi multiferroci. Per approfondire questa classe di materiali innovativi si veda Galizia et al. [5, 6] e Craciun et al. [7].

Presupponendo la creazione di materiali di questo genere, si definisce anche un accoppiamento diretto tra campo elettrico e campo magnetico a livello del materiale. In particolare, nella seguente formulazione, si correlano in modo diretto le componenti del vettore spostamento elettrico con quelle del vettore campo magnetico oppure le componenti del vettore induzione elettrica con quelle del vettore campo magnetico. Questi coefficienti, definiti *magneto-elettrici*, si raggruppano in una matrice  $3 \times 3$  come si definisce nella Eq. (3.22f).

Nell'ambito di questa tesi, per i nuovi casi benchmark proposti nel capitolo 7, si considera un materiale sia piezomagnetico sia piezoelettrico chiamato *adaptive wood*, i cui coefficienti delle proprietà caratteristiche sono riportati nella Tabella 7.1 e sono tratti da quanto riportato da Tornabene [8]. Il materiale in questione è un composito costituito da un laminato a tre strati: uno in legno, uno in Titanato di Bario  $\text{BaTiO}_3$ , materiale piezoelettrico, e uno in Ferrite di Cobalto  $\text{CoFe}_2\text{O}_4$ , materiale piezomagnetico. Un esempio simile di materiale composito che alterna strati in legno a strati di solo materiale piezoelettrico, è riportato da Smittakorn e Heyliger [9, 10]. In particolare, globalmente, il materiale presentato in [8], avendo uno strato in Ferrite di Cobalto  $\text{CoFe}_2\text{O}_4$  ed uno in Titanato di Bario  $\text{BaTiO}_3$ , presenta le proprietà magnetiche del primo e quelle elettriche del secondo. Le proprietà meccaniche globali sono assunte, invece, pari a quelle del  $\text{CoFe}_2\text{O}_4$ ; sono diversi da zero anche i coefficienti magneto-elettrici, benché molto piccoli.

## Capitolo 3

# Modellazione 3D dei gusci sferici per problemi elettro-magneto-elastici accoppiati

In questo capitolo viene presentata la *formulazione* per la *modellazione 3D elettro-magneto-elastica accoppiata* per *gusci sferici*. A partire dalle tre equazioni indefinite di equilibrio 3D insieme all'equazione della divergenza 3D dello spostamento elettrico e a quella della divergenza 3D dell'induzione magnetica, si intende valutare il comportamento di strutture a *guscio sferico multistrato avanzate*, su cui, oltre ai carichi meccanici in campo elastico, agiscono anche i campi elettrostatico e magnetostatico, entrambi considerati in condizioni conservative. La metodologia di risoluzione delle suddette equazioni, ovvero le *equazioni di governo 3D* del problema, viene presentata nel dettaglio.

### 3.1 Geometria

Per guscio (*shell*) si intende un corpo tridimensionale delimitato da due superfici curve abbastanza vicine tra loro, dove la distanza tra esse risulta piccola in confronto alle altre dimensioni [8]. La *superficie media del guscio*, da qui in poi indicata come  $\Omega_0$ , è il luogo di punti equidistanti tra le due superfici; invece, la distanza tra esse misurata lungo la normale a  $\Omega_0$  è lo *spessore*  $h$  del guscio in quel punto. Quindi, solitamente, le dimensioni in pianta del guscio sono prevalenti rispetto allo spessore.

In particolare, un guscio si definisce sottile (*thin shell*), quando il rapporto tra lo spessore  $h$  e il minimo raggio di curvatura  $R_{min}$  o la minima dimensione della superficie di riferimento  $L_{min}$  è trascurabile rispetto all'unità:

$$\max\left(\frac{h}{R_{min}}, \frac{h}{L_{min}}\right) \leq \frac{1}{20}. \quad (3.1)$$

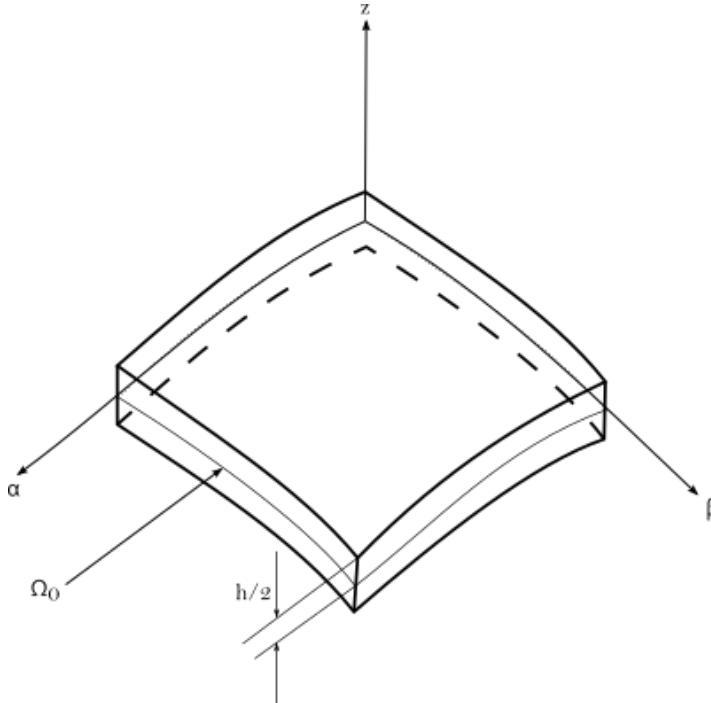
Si parla, invece, di guscio spesso (*thick shell*), quando viene rispettata questa condizione:

$$\max\left(\frac{h}{R_{min}}, \frac{h}{L_{min}}\right) > \frac{1}{10}. \quad (3.2)$$

Infine, per i casi in cui:

$$\frac{1}{20} < \max\left(\frac{h}{R_{min}}, \frac{h}{L_{min}}\right) \leq \frac{1}{10}, \quad (3.3)$$

si parla di guscio moderatamente spesso (*moderately thick shell*). Si sottolinea che, nella maggior parte delle applicazioni ingegneristiche di strutture a guscio, si ricade nel seguente



**Figura 3.1:** Esempio di guscio nel sistema di riferimento curvilineo misto ortogonale ( $\alpha, \beta, z$ ).

range di spessore:

$$\frac{1}{1000} \leq \max\left(\frac{h}{R_{min}}, \frac{h}{L_{min}}\right) \leq \frac{1}{10}. \quad (3.4)$$

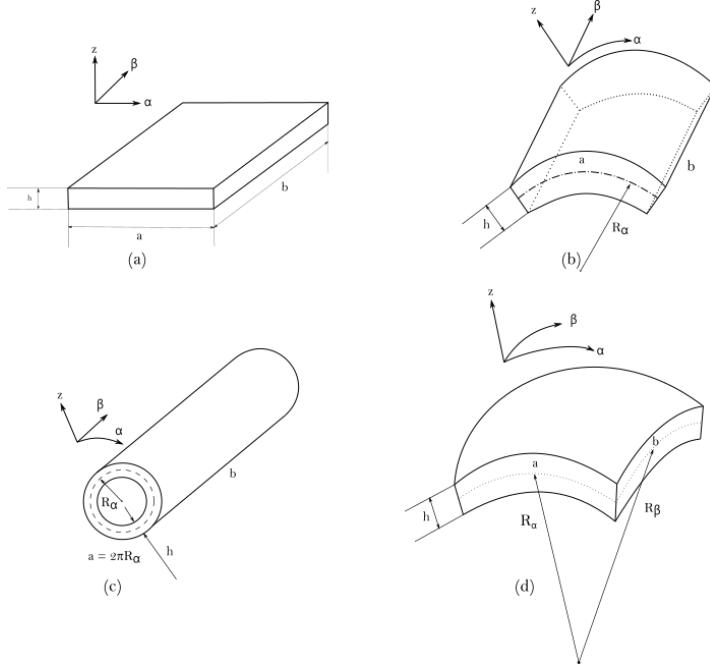
In generale, considerando gusci a doppia curvatura, le direzioni ortogonali in pianta della superficie media  $\Omega_0$  seguono la curvatura della geometria. Si definiscono due assi di riferimento curvilinei  $\alpha$  e  $\beta$  che seguono la curvatura di  $\Omega_0$  nelle due direzioni. In ogni punto di questi assi si definiscono a loro volta i *raggi di curvatura* di  $\Omega_0$  in quel punto, rispettivamente  $R_\alpha$  e  $R_\beta$ . Questi raggi, nel caso più generico di guscio a doppia curvatura, possono assumere valori diversi in ogni punto lungo le due direzioni. Le dimensioni in pianta di  $\Omega_0$  lungo  $\alpha$  e  $\beta$  vengono rispettivamente indicate come  $a$  e  $b$ .

Il sistema di riferimento utilizzato per la scrittura delle equazioni di governo 3D è il cosiddetto sistema *curvilineo misto ortogonale* ( $\alpha, \beta, z$ ); oltre ai due assi curvilinei  $\alpha$  e  $\beta$  già definiti, si considera un asse ortogonale a  $\Omega_0$  rettilineo lungo la direzione dello spessore  $h$ , l'asse  $z$ , mentre l'origine del sistema di riferimento è posta su  $\Omega_0$  (si veda la Figura 3.1).

Ai fini di questa tesi, per ottenere la soluzione esatta le geometrie che si possono considerare sono:

- Piastre ( $R_\alpha = R_\beta = \infty$ );
- Pannelli di guscio cilindrico ( $R_\alpha = \text{cost}, R_\beta = \infty, a \neq 2\pi R_\alpha$  o viceversa);
- Gusci cilindrici ( $R_\alpha = \text{cost}, R_\beta = \infty, a = 2\pi R_\alpha$  o viceversa);
- Pannelli di guscio sferico ( $R_\alpha = R_\beta = \text{cost}, a, b \neq 2\pi R_\alpha$ );
- Gusci sferici ( $R_\alpha = R_\beta = \text{cost}, a, b = 2\pi R_\alpha$ ).

In particolare, verranno trattati dei casi con le prime quattro geometrie elencate, di cui si riporta un'illustrazione nella Figura 3.2.



**Figura 3.2:** Geometrie dei gusci trattate: (a) piastra, (b) pannello guscio cilindrico, (c) guscio cilindrico, (d) pannello guscio sferico.

Nel seguito tutta la trattazione viene presentata per il caso di guscio sferico. Le restanti geometrie sono facilmente ottenibili come degenerazione di questo caso, imponendo i raggi di curvatura  $R_\alpha$  e/o  $R_\beta$  pari a  $\infty$  a seconda della geometria considerata.

### 3.2 Variabili fondamentali: spostamenti e potenziali

Il modello elettro-magneto-elastico presentato nel seguito è un *modello agli spostamenti*, per cui, le incognite delle equazioni di governo (le *variabili fondamentali*) sono le *componenti di spostamento* nelle tre direzioni,  $u$ ,  $v$  e  $w$ , misurate in m, insieme al *potenziale elettrostatico*,  $\phi$ , misurato in V e al *potenziale magnetostatico*,  $\psi$ , misurato in A.

Inoltre, essendo un modello 3D, le dimensioni lungo le tre direzioni del sistema di riferimento  $(\alpha, \beta, z)$  hanno tutte la stessa importanza e tutte le variabili dipendono dalle tre direzioni allo stesso modo; nessuna può essere trascurata. Quindi, le variabili fondamentali risultano funzione delle tre coordinate del sistema di riferimento e, eventualmente, anche del tempo  $t$  nel caso di analisi alle vibrazioni libere:

$$\begin{aligned} u &= f(\alpha, \beta, z, t), & v &= f(\alpha, \beta, z, t), & w &= f(\alpha, \beta, z, t), \\ \phi &= f(\alpha, \beta, z, t), & \psi &= f(\alpha, \beta, z, t). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Si osserva che, a rigore, si dovrebbe far riferimento alla differenza di potenziale elettrostatico  $\Delta\phi$  e alla differenza di potenziale magnetostatico  $\Delta\psi$  così definite:

$$\Delta\phi = \phi - \phi_0, \quad \Delta\psi = \psi - \psi_0, \quad (3.6)$$

dove  $\phi_0$  e  $\psi_0$  sono dei potenziali di riferimento. Nel seguito, per semplicità, si continua a riferirsi ad esse semplicemente come potenziali  $\phi$  e  $\psi$ .

### 3.3 Relazioni geometriche, gradienti dei potenziali e variabili primarie

Una volta definite le variabili fondamentali del problema, è necessario correlarle alle *deformazioni*  $\boldsymbol{\varepsilon}$  nel caso degli spostamenti, al *vettore campo elettrostatico*  $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ , misurato in V/m, e al *vettore campo magnetostatico*  $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ , misurato in A/m, nel caso dei rispettivi potenziali. Si definiscono  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $\boldsymbol{\mathcal{E}}$  e  $\boldsymbol{\mathcal{H}}$  come *variabili primarie* del problema.

#### 3.3.1 Relazioni geometriche

Si assume un sistema di riferimento curvilineo misto ortogonale generico di coordinate  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ , le cui variabili di spostamento prendono il nome di  $U_1$ ,  $U_2$  e  $U_3$ . Se si considera un generico guscio a doppia curvatura con raggi di curvatura non costanti le *relazioni geometriche* sono [11]:

$$e_i = \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left( \frac{U_i}{\sqrt{g_i}} \right) + \frac{1}{2g_i} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial g_i}{\partial \alpha_k} \frac{U_k}{\sqrt{g_k}} \quad \text{per } i = 1, 2, 3, \quad (3.7a)$$

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{\sqrt{g_i g_j}} \left[ g_i \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left( \frac{U_i}{\sqrt{g_i}} \right) + g_j \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left( \frac{U_j}{\sqrt{g_j}} \right) \right] \quad \text{per } i = 1, 2, 3 \wedge i \neq j, \quad (3.7b)$$

dove con  $e_i$  si indicano le *deformazioni normali*, mentre con  $\gamma_{ij}$  le *deformazioni o scorrimenti a taglio*. I termini  $g_i$  rappresentano dei parametri geometrici che permettono di tenere in considerazione la curvatura del guscio. Volendoli esplicitare risultano:

$$g_1 = \left[ A \left( 1 + \frac{\alpha_3}{R_{\alpha_1}} \right) \right]^2, \quad g_2 = \left[ B \left( 1 + \frac{\alpha_3}{R_{\alpha_2}} \right) \right]^2, \quad g_3 = 1. \quad (3.8)$$

Rispettivamente in  $g_1$  e in  $g_2$ , compaiono i parametri  $A$  e  $B$ , i quali indicano la lunghezza dei vettori tangenti alle curve parallele alle direzioni  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  del sistema di riferimento. Si può notare anche come  $g_3$  sia pari all'unità non considerando curvature nella direzione  $\alpha_3$ .

Dalle Eq. (3.7a) e Eq. (3.7b), passando al sistema di riferimento  $(\alpha, \beta, z)$  dove le variabili di spostamento sono  $u$ ,  $v$  e  $z$ , si ottengono:

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{1}{1 + \frac{z}{R_\alpha}} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{v}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{1}{A} \frac{w}{R_\alpha} \right), \quad (3.9a)$$

$$\varepsilon_{\beta\beta} = \frac{1}{1 + \frac{z}{R_\beta}} \left( \frac{u}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{A} \frac{w}{R_\beta} \right), \quad (3.9b)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (3.9c)$$

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{A \left( 1 + \frac{z}{R_\alpha} \right)}{B \left( 1 + \frac{z}{R_\beta} \right)} \frac{\partial}{\partial \beta} \left[ \frac{u}{A \left( 1 + \frac{z}{R_\alpha} \right)} \right] + \frac{B \left( 1 + \frac{z}{R_\beta} \right)}{A \left( 1 + \frac{z}{R_\alpha} \right)} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ \frac{v}{B \left( 1 + \frac{z}{R_\beta} \right)} \right], \quad (3.9d)$$

$$\gamma_{\alpha z} = \frac{1}{A \left( 1 + \frac{z}{R_\alpha} \right)} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + A \left( 1 + \frac{z}{R_\alpha} \right) \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{u}{A \left( 1 + \frac{z}{R_\alpha} \right)} \right], \quad (3.9e)$$

$$\gamma_{\beta z} = \frac{1}{B \left( 1 + \frac{z}{R_\beta} \right)} \frac{\partial w}{\partial \beta} + B \left( 1 + \frac{z}{R_\beta} \right) \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{v}{B \left( 1 + \frac{z}{R_\beta} \right)} \right]. \quad (3.9f)$$

In queste relazioni si mettono in evidenza alcuni parametri geometrici che dipendono dalla presenza della curvatura; si definiscono:

$$H_\alpha = 1 + \frac{z}{R_\alpha}, \quad H_\beta = 1 + \frac{z}{R_\beta}, \quad H_z = 1 \quad (3.10)$$

e si osserva che  $H_z$  è unitario non essendoci curvature lungo la direzione  $z$ .

Le diverse componenti di deformazione possono essere raccolte in un *vettore deformazione*  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , che può essere scritto come:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{\alpha\alpha} \\ \varepsilon_{\beta\beta} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{\beta z} \\ \gamma_{\alpha z} \\ \gamma_{\alpha\beta} \end{Bmatrix}. \quad (3.11)$$

Passando al caso dei gusci sferici, ovvero con  $R_\alpha = R_\beta = cost.$ , i parametri geometrici  $A$  e  $B$  diventano unitari; per cui le relazioni geometriche di Eq. (3.9) si semplificano e diventano:

$$\varepsilon_{\alpha\alpha}^k = \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial u^k}{\partial \alpha} + \frac{w^k}{H_\alpha R_\alpha}, \quad (3.12a)$$

$$\varepsilon_{\beta\beta}^k = \frac{1}{H_\beta} \frac{\partial v^k}{\partial \beta} + \frac{w^k}{H_\beta R_\beta}, \quad (3.12b)$$

$$\varepsilon_{zz}^k = \frac{\partial w^k}{\partial z}, \quad (3.12c)$$

$$\gamma_{\alpha\beta}^k = \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial v^k}{\partial \alpha} + \frac{1}{H_\beta} \frac{\partial u^k}{\partial \beta}, \quad (3.12d)$$

$$\gamma_{\alpha z}^k = \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial w^k}{\partial \alpha} + \frac{\partial u^k}{\partial z} - \frac{u^k}{H_\alpha R_\alpha}, \quad (3.12e)$$

$$\gamma_{\beta z}^k = \frac{1}{H_\beta} \frac{\partial w^k}{\partial \beta} + \frac{\partial v^k}{\partial z} - \frac{v^k}{H_\beta R_\beta}. \quad (3.12f)$$

In esse si è aggiunto il generico apice  $k$  alle componenti di deformazione e di spostamento, al fine di indicare il generico *strato fisico* del multistrato al quale si fa riferimento per il calcolo delle deformazioni. Le stesse relazioni geometriche qui illustrate per il guscio sferico coincidono con quelle riportate da Leissa [11] e Soedel [12].

### 3.3.2 Gradienti dei potenziali

Il vettore campo elettrostatico  $\boldsymbol{\mathcal{E}}$  e il vettore campo magnetostatico  $\boldsymbol{\mathcal{H}}$  sono definiti come il *gradiente negativo* di  $\phi$  e  $\psi$ , rispettivamente:

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \begin{Bmatrix} \mathcal{E}_\alpha \\ \mathcal{E}_\beta \\ \mathcal{E}_z \end{Bmatrix} = -\nabla \phi, \quad (3.13)$$

$$\boldsymbol{\mathcal{H}} = \begin{Bmatrix} \mathcal{H}_\alpha \\ \mathcal{H}_\beta \\ \mathcal{H}_z \end{Bmatrix} = -\nabla \psi. \quad (3.14)$$

Ciò è possibile, in quanto si stanno considerando un campo elettrostatico e magnetostatico in assenza di correnti libere, quindi entrambi conservativi, per cui la *legge di Faraday* e la *legge di Ampere-Maxwell*, ovvero la terza e la quarta delle *equazioni di Maxwell*, si riducono, rispettivamente a:

$$\nabla \times \mathcal{E} = 0 \quad e \quad \nabla \times \mathcal{H} = 0. \quad (3.15)$$

Entrambi i campi presentano, dunque, il rotore nullo ed è ben nota la proprietà per cui sono esprimibili come gradiente di una quantità scalare, ovvero il relativo potenziale.

Esplicitando il gradiente nel sistema di riferimento curvilineo misto ortogonale  $(\alpha, \beta, z)$ , si ottengono le componenti dei due campi lungo le tre direzioni. Nel caso del campo elettrostatico si ricava:

$$\mathcal{E}_\alpha^k = -\frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial \phi^k}{\partial \alpha}, \quad (3.16a)$$

$$\mathcal{E}_\beta^k = -\frac{1}{H_\beta} \frac{\partial \phi^k}{\partial \beta}, \quad (3.16b)$$

$$\mathcal{E}_z^k = -\frac{1}{H_z} \frac{\partial \phi^k}{\partial z}, \quad (3.16c)$$

mentre per il campo magnetostatico si ottiene:

$$\mathcal{H}_\alpha^k = -\frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial \psi^k}{\partial \alpha}, \quad (3.17a)$$

$$\mathcal{H}_\beta^k = -\frac{1}{H_\beta} \frac{\partial \psi^k}{\partial \beta}, \quad (3.17b)$$

$$\mathcal{H}_z^k = -\frac{1}{H_z} \frac{\partial \psi^k}{\partial z}. \quad (3.17c)$$

Queste relazioni sono state ottenute in analogia a quanto fatto da Povstenko [13], per il caso termico in un sistema di riferimento curvilineo misto ortogonale per un guscio sferico. Relazioni analoghe a quelle qui proposte vengono riportate anche da Tornabene [8].

### 3.4 Equazioni costitutive e variabili secondarie

Le *equazioni costitutive 3D* del guscio sferico sono le relazioni che permettono di collegare le variabili primarie con le *variabili secondarie* del problema, per mezzo di proprietà caratteristiche del materiale. Le variabili secondarie sono le componenti del *vettore tensione*, misurate in Pa:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{\alpha\alpha} \\ \sigma_{\beta\beta} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{\beta z} \\ \sigma_{\alpha z} \\ \sigma_{\alpha\beta} \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

le componenti del *vettore spostamento elettrico*, misurate in C/m<sup>2</sup>:

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} \mathcal{D}_\alpha \\ \mathcal{D}_\beta \\ \mathcal{D}_z \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

e le componenti del *vettore induzione magnetica*, misurate in T:

$$\mathbf{B} = \begin{Bmatrix} \mathcal{B}_\alpha \\ \mathcal{B}_\beta \\ \mathcal{B}_z \end{Bmatrix}. \quad (3.20)$$

Proprio a livello delle equazioni costitutive, e, quindi, del materiale, si esplicita l'accoppiamento tra i diversi campi che si considerano nel problema. Infatti, nel caso più generale di un materiale sia piezoelettrico sia piezomagnetico, le variabili secondarie dei singoli campi sono funzione di tutte le variabili primarie dei tre campi. Per una loro trattazione approfondita si veda Tornabene [8] e Carrera et al. [14].

### 3.4.1 Equazioni costitutive nel riferimento materiale

In forma implicita e nel *sistema di riferimento materiale* ( $\alpha_1, \beta_1, z_1$ ), indicato dal pedice  $m$ , le tre equazioni costitutive, che sono equazioni matriciali, risultano:

$$\boldsymbol{\sigma}_m = \mathbf{C}_m \boldsymbol{\varepsilon}_m - \mathbf{e}_m^T \boldsymbol{\mathcal{E}}_m - \mathbf{q}_m^T \boldsymbol{\mathcal{H}}_m, \quad (3.21a)$$

$$\boldsymbol{\mathcal{D}}_m = \mathbf{e}_m \boldsymbol{\varepsilon}_m + \boldsymbol{\epsilon}_m \boldsymbol{\mathcal{E}}_m + \mathbf{d}_m \boldsymbol{\mathcal{H}}_m, \quad (3.21b)$$

$$\boldsymbol{\mathcal{B}}_m = \mathbf{q}_m \boldsymbol{\varepsilon}_m + \mathbf{d}_m \boldsymbol{\mathcal{E}}_m + \boldsymbol{\mu}_m \boldsymbol{\mathcal{H}}_m. \quad (3.21c)$$

Le matrici  $\mathbf{C}_m$ ,  $\boldsymbol{\epsilon}_m$ ,  $\boldsymbol{\mu}_m$ ,  $\mathbf{e}_m$ ,  $\mathbf{q}_m$ ,  $\mathbf{d}_m$  contengono i coefficienti caratteristici del materiale considerato, i quali sono valutati nel sistema di riferimento materiale per mezzo di prove sperimentali. In particolare, si definiscono:

- $\mathbf{C}_m$  matrice simmetrica  $6 \times 6$  dei *coefficienti elastici*, misurati in Pa e valutati a  $\boldsymbol{\mathcal{E}}$  e  $\boldsymbol{\mathcal{H}}$  costanti;
- $\boldsymbol{\epsilon}_m$  matrice simmetrica  $3 \times 3$  dei *coefficienti di permittività elettrica*, misurati in F/m e valutati a  $\boldsymbol{\varepsilon}$  e  $\boldsymbol{\mathcal{H}}$  costanti;
- $\boldsymbol{\mu}_m$  matrice simmetrica  $3 \times 3$  dei *coefficienti di permeabilità magnetica*, misurati in H/m e valutati a  $\boldsymbol{\varepsilon}$  e  $\boldsymbol{\mathcal{E}}$  costanti;
- $\mathbf{e}_m$  matrice  $3 \times 6$  dei *coefficienti piezoelettrici*, misurati in C/m<sup>2</sup> e valutati a  $\boldsymbol{\mathcal{H}}$  costante;
- $\mathbf{q}_m$  matrice  $3 \times 6$  dei *coefficienti piezomagnetici*, misurati in T e valutati a  $\boldsymbol{\mathcal{E}}$  costante;
- $\mathbf{d}_m$  matrice simmetrica  $3 \times 3$  dei *coefficienti magneto-elettrici*, misurati in (Ns)/(VC) e valutati a  $\boldsymbol{\varepsilon}$  costante.

Tutte queste matrici per i singoli strati  $k$  sono a coefficienti costanti in  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $z$ ; ovvero si considerano solo *materiali omogenei*, cioè materiali per cui le proprietà fisiche non variano in base alla posizione considerata.

Al fine di avere delle soluzioni in forma chiusa, è richiesto l'uso di soli materiali *ortotropi polarizzati e/o magnetizzati nella direzione dello spessore  $h$* . Con queste premesse, le matrici di Eq. (3.21) diventano:

$$\mathbf{C}_m = \begin{bmatrix} C_{m11} & C_{m12} & C_{m13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{m12} & C_{m22} & C_{m23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{m13} & C_{m23} & C_{m33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{m44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{m55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{m66} \end{bmatrix}, \quad (3.22a)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_m = \begin{bmatrix} \epsilon_{m11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{m22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{m33} \end{bmatrix}, \quad (3.22b)$$

$$\boldsymbol{\mu}_m = \begin{bmatrix} \mu_{m11} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{m22} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{m33} \end{bmatrix}, \quad (3.22c)$$

$$\boldsymbol{e}_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{m15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{m24} & 0 & 0 \\ e_{m31} & e_{m32} & e_{m33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.22d)$$

$$\boldsymbol{q}_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & q_{m15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_{m24} & 0 & 0 \\ q_{m31} & q_{m32} & q_{m33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.22e)$$

$$\boldsymbol{d}_m = \begin{bmatrix} d_{m11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{m22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{m33} \end{bmatrix}. \quad (3.22f)$$

### 3.4.2 Equazioni costitutive nel sistema struttura

Per risolvere il problema, che è definito nel *sistema di riferimento struttura* ( $\alpha, \beta, z$ ), indicato dal pedice  $s$  da qui in poi, si devono avere le variabili primarie e secondarie espresse in funzione delle sue coordinate. Per far ciò è necessario riscrivere le equazioni costitutive di Eq. (3.21) nel sistema di riferimento struttura, eseguendo l'opportuna rotazione a partire dal sistema di riferimento materiale  $m$ . Questa rotazione deve tenere in conto dell'angolo  $\theta$ , positivo in senso antiorario, formato tra gli assi  $\alpha$  e  $\alpha_1$ , rappresentato in Figura 3.3. La relazione che esprime questa rotazione è la seguente:

$$\begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ z_1 \end{Bmatrix} = \boldsymbol{L}_\theta \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ z_1 \end{Bmatrix}, \quad (3.23)$$

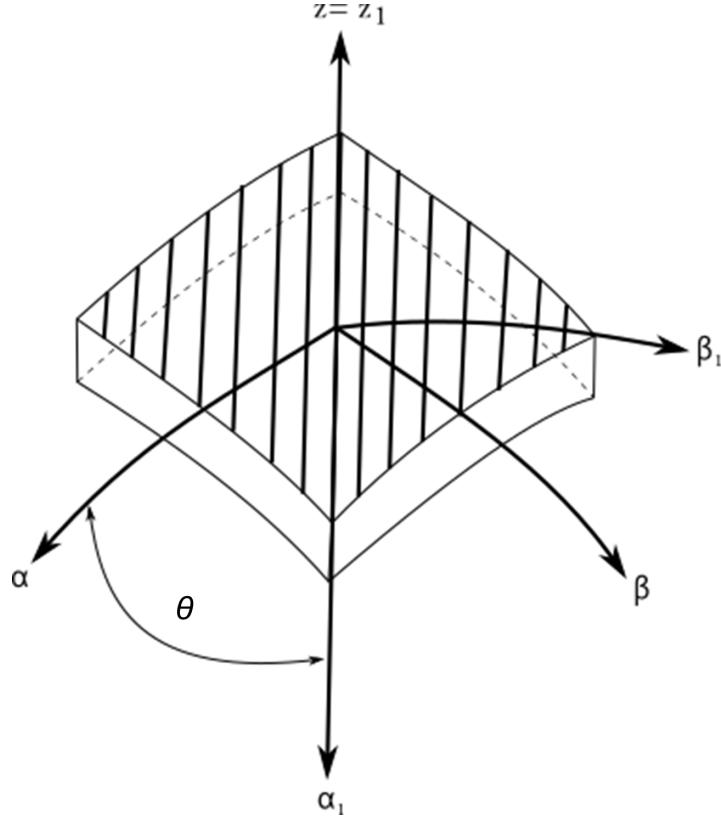
dove la matrice di rotazione viene chiamata  $\boldsymbol{L}_\theta$ . La relazione inversa, con cui si esegue la rotazione dal sistema struttura  $s$  a quello materiale  $m$ , è, invece:

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ z_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \\ z \end{Bmatrix} = \boldsymbol{L}_\theta^T \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \\ z \end{Bmatrix}, \quad (3.24)$$

in cui si osserva che l'inversa della matrice di rotazione  $\boldsymbol{L}_\theta$ , essendo ortogonale, è uguale alla sua trasposta:  $\boldsymbol{L}_\theta^{-1} = \boldsymbol{L}_\theta^T$ .

Utilizzando la notazione vettoriale, invece di quella tensoriale, per le tensioni  $\boldsymbol{\sigma}$  la rotazione dal sistema materiale  $m$  a quello struttura  $s$ , espressa nella Eq. (3.23), si esegue come segue:

$$\boldsymbol{\sigma}_s = \boldsymbol{T}_\theta \boldsymbol{\sigma}_m, \quad (3.25)$$



**Figura 3.3:** Sistema di riferimento materiale  $(\alpha_1, \beta_1, z_1)$  e struttura  $(\alpha, \beta, z)$  non coincidenti per la rotazione dell'angolo  $\theta$ .

dove  $\mathbf{T}_\theta$  è una matrice  $6 \times 6$  funzione di  $\theta$  con la seguente struttura:

$$\mathbf{T}_\theta = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -\sin 2\theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & \sin 2\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \sin \theta \cos \theta & -\sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix}. \quad (3.26)$$

In modo duale, per le deformazioni  $\boldsymbol{\varepsilon}$  la rotazione dal sistema struttura  $s$  a quello materiale  $m$ , espressa dall'Eq. (3.24), si esegue con la seguente relazione:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m = \mathbf{T}_\theta^T \boldsymbol{\varepsilon}_s, \quad (3.27)$$

dove la matrice  $\mathbf{T}_\theta$  è quella specificata in Eq. (3.26).

Per quanto riguarda la rotazione dei vettori  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{B}$  dal sistema materiale al sistema struttura si applica direttamente la Eq. (3.23), con la matrice  $\mathbf{L}_\theta$ ; invece, per la rotazione dei vettori  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  dal sistema struttura al sistema materiale si utilizza la Eq. (3.24), con la matrice  $\mathbf{L}_\theta^T$ .

Definite queste relazioni, si procede, infine, all'effettiva trasformazione delle equazioni costitutive di Eq. (3.21) in coordinate del sistema di riferimento struttura  $s$ :

$$\boldsymbol{\sigma}_s = \mathbf{T}_\theta \mathbf{C}_m \mathbf{T}_\theta^T \boldsymbol{\varepsilon}_s - \mathbf{T}_\theta \mathbf{e}_m^T \mathbf{L}_\theta^T \mathbf{E}_s - \mathbf{T}_\theta \mathbf{q}_m^T \mathbf{L}_\theta^T \mathbf{H}_s = \mathbf{C}_s \boldsymbol{\varepsilon}_s - \mathbf{e}_s^T \mathbf{E}_s - \mathbf{q}_s^T \mathbf{H}_s, \quad (3.28a)$$

$$\mathbf{D}_s = \mathbf{L}_\theta \mathbf{e}_m \mathbf{T}_\theta^T \boldsymbol{\varepsilon}_s + \mathbf{L}_\theta \mathbf{e}_m \mathbf{L}_\theta^T \mathbf{E}_s + \mathbf{L}_\theta \mathbf{d}_m \mathbf{L}_\theta^T \mathbf{H}_s = \mathbf{e}_s \boldsymbol{\varepsilon}_s + \mathbf{e}_s \mathbf{E}_s + \mathbf{d}_s \mathbf{H}_s, \quad (3.28b)$$

$$\mathbf{B}_s = \mathbf{L}_\theta \mathbf{q}_m \mathbf{T}_\theta^T \boldsymbol{\varepsilon}_s + \mathbf{L}_\theta \mathbf{d}_m \mathbf{L}_\theta^T \mathbf{E}_s + \mathbf{L}_\theta \boldsymbol{\mu}_m \mathbf{L}_\theta^T \mathbf{H}_s = \mathbf{q}_s \boldsymbol{\varepsilon}_s + \mathbf{d}_s \mathbf{E}_s + \boldsymbol{\mu}_s \mathbf{H}_s. \quad (3.28c)$$

Per cui le matrici delle proprietà dei materiali nel sistema di riferimento struttura  $s$  ( $\alpha, \beta, z$ ), risultano così definite:

$$\mathbf{C}_s = \mathbf{T}_\theta \mathbf{C}_m \mathbf{T}_\theta^T, \quad (3.29a)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_s = \mathbf{L}_\theta \boldsymbol{\epsilon}_m \mathbf{L}_\theta^T, \quad (3.29b)$$

$$\boldsymbol{\mu}_s = \mathbf{L}_\theta \boldsymbol{\mu}_m \mathbf{L}_\theta^T, \quad (3.29c)$$

$$\mathbf{e}_s = \mathbf{L}_\theta \mathbf{e}_m \mathbf{T}_\theta^T, \quad (3.29d)$$

$$\mathbf{q}_s = \mathbf{L}_\theta \mathbf{q}_m \mathbf{T}_\theta^T, \quad (3.29e)$$

$$\mathbf{d}_s = \mathbf{L}_\theta \mathbf{d}_m \mathbf{L}_\theta^T. \quad (3.29f)$$

In forma esplicita, considerando un generico angolo  $\theta$ , le matrici appena ottenute hanno la seguente forma:

$$\mathbf{C}_s = \begin{bmatrix} C_{s11} & C_{s12} & C_{s13} & 0 & 0 & C_{s16} \\ C_{s12} & C_{s22} & C_{s23} & 0 & 0 & C_{s26} \\ C_{s13} & C_{s23} & C_{s33} & 0 & 0 & C_{s36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{s44} & C_{s45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{s45} & C_{s55} & 0 \\ C_{s16} & C_{s26} & C_{s36} & 0 & 0 & C_{s66} \end{bmatrix}, \quad (3.30a)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_s = \begin{bmatrix} \epsilon_{s11} & \epsilon_{s12} & 0 \\ \epsilon_{s12} & \epsilon_{s22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{s33} \end{bmatrix}, \quad (3.30b)$$

$$\boldsymbol{\mu}_s = \begin{bmatrix} \mu_{s11} & \mu_{s12} & 0 \\ \mu_{s12} & \mu_{s22} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{s33} \end{bmatrix}, \quad (3.30c)$$

$$\mathbf{e}_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & e_{s14} & e_{s15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{s24} & e_{s25} & 0 \\ e_{s31} & e_{s32} & e_{s33} & 0 & 0 & e_{s36} \end{bmatrix}, \quad (3.30d)$$

$$\mathbf{q}_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & q_{s14} & q_{s15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_{s24} & q_{s25} & 0 \\ q_{s31} & q_{s32} & q_{s33} & 0 & 0 & q_{s36} \end{bmatrix}, \quad (3.30e)$$

$$\mathbf{d}_s = \begin{bmatrix} d_{s11} & d_{s12} & 0 \\ d_{s12} & d_{s22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{s33} \end{bmatrix}. \quad (3.30f)$$

Al fine di avere delle soluzioni in forma chiusa, tuttavia, oltre a considerare materiali ortotropi polarizzati e/o magnetizzati nella direzione dello spessore  $h$ , è necessario che i coefficienti  $C_{s45}$ ,  $C_{s16}$ ,  $C_{s26}$ ,  $C_{s36}$ ,  $\epsilon_{s12}$ ,  $\mu_{s12}$ ,  $e_{s14}$ ,  $e_{s25}$ ,  $e_{s36}$ ,  $q_{s14}$ ,  $q_{s25}$ ,  $q_{s36}$  e  $d_{s12}$  siano nulli. Ciò si traduce nel poter considerare solamente strati di materiale ortotropo con *angolo di laminazione*  $\theta$  pari a  $0^\circ$  e  $\pm 90^\circ$ . Le matrici di Eq. (3.30) diventano, dunque:

$$\mathbf{C}_s = \begin{bmatrix} C_{s11} & C_{s12} & C_{s13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{s12} & C_{s22} & C_{s23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{s13} & C_{s23} & C_{s33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{s44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{s55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{s66} \end{bmatrix}, \quad (3.31a)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_s = \begin{bmatrix} \epsilon_{s11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{s22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{s33} \end{bmatrix}, \quad (3.31b)$$

$$\boldsymbol{\mu}_s = \begin{bmatrix} \mu_{s11} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{s22} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{s33} \end{bmatrix}, \quad (3.31c)$$

$$\boldsymbol{e}_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{s15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{s24} & 0 & 0 \\ e_{s31} & e_{s32} & e_{s33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.31d)$$

$$\boldsymbol{q}_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & q_{s15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_{s24} & 0 & 0 \\ q_{s31} & q_{s32} & q_{s33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.31e)$$

$$\boldsymbol{d}_s = \begin{bmatrix} d_{s11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{s22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{s33} \end{bmatrix}. \quad (3.31f)$$

Le matrici così ottenute coincidono con quelle del riferimento materiale  $m$  per il caso di  $\theta = 0^\circ$ , mentre per il caso di  $\theta = \pm 90^\circ$  i coefficienti relativi alle direzioni  $\alpha$  e  $\beta$  sono rispettivamente uguali a quelli per la direzione  $\beta_1$  e  $\alpha_1$  del riferimento materiale  $m$ .

Da questo punto in poi, rendendo implicito che si scrivono le equazioni nel sistema di riferimento struttura, decade il pedice  $s$ , e si ottiene:

$$\boldsymbol{\sigma}^k = \boldsymbol{C}^k \boldsymbol{\varepsilon}^k - \boldsymbol{e}^{kT} \boldsymbol{\varepsilon}^k - \boldsymbol{q}^{kT} \boldsymbol{\mathcal{H}}^k, \quad (3.32a)$$

$$\boldsymbol{\mathcal{D}}^k = \boldsymbol{e}^k \boldsymbol{\varepsilon}^k + \boldsymbol{\epsilon}^k \boldsymbol{\varepsilon}^k + \boldsymbol{d}^k \boldsymbol{\mathcal{H}}^k, \quad (3.32b)$$

$$\boldsymbol{\mathcal{B}}^k = \boldsymbol{q}^k \boldsymbol{\varepsilon}^k + \boldsymbol{d}^k \boldsymbol{\varepsilon}^k + \boldsymbol{\mu}^k \boldsymbol{\mathcal{H}}^k. \quad (3.32c)$$

Le Eq. (3.32) si possono, infine, esplicitare componente per componente. Dalla Eq. (3.32a) si ricava:

$$\sigma_{\alpha\alpha}^k = C_{11}^k \varepsilon_{\alpha\alpha}^k + C_{12}^k \varepsilon_{\beta\beta}^k + C_{13}^k \varepsilon_{zz}^k - e_{31}^k \varepsilon_z^k - q_{31}^k \mathcal{H}_z^k, \quad (3.33a)$$

$$\sigma_{\beta\beta}^k = C_{12}^k \varepsilon_{\alpha\alpha}^k + C_{22}^k \varepsilon_{\beta\beta}^k + C_{23}^k \varepsilon_{zz}^k - e_{32}^k \varepsilon_z^k - q_{32}^k \mathcal{H}_z^k, \quad (3.33b)$$

$$\sigma_{zz}^k = C_{13}^k \varepsilon_{\alpha\alpha}^k + C_{23}^k \varepsilon_{\beta\beta}^k + C_{33}^k \varepsilon_{zz}^k - e_{33}^k \varepsilon_z^k - q_{33}^k \mathcal{H}_z^k, \quad (3.33c)$$

$$\sigma_{\beta z}^k = C_{44}^k \gamma_{\beta z}^k - e_{24}^k \varepsilon_{\beta}^k - q_{24}^k \mathcal{H}_{\beta}^k, \quad (3.33d)$$

$$\sigma_{\alpha z}^k = C_{55}^k \gamma_{\alpha z}^k - e_{15}^k \varepsilon_{\alpha}^k - q_{15}^k \mathcal{H}_{\alpha}^k, \quad (3.33e)$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^k = C_{66}^k \gamma_{\alpha\beta}^k; \quad (3.33f)$$

dalla Eq. (3.32b), invece:

$$\mathcal{D}_{\alpha}^k = e_{15}^k \gamma_{\alpha z}^k + e_{11}^k \varepsilon_{\alpha}^k + d_{11}^k \mathcal{H}_{\alpha}^k, \quad (3.34a)$$

$$\mathcal{D}_{\beta}^k = e_{24}^k \gamma_{\beta z}^k + e_{22}^k \varepsilon_{\beta}^k + d_{22}^k \mathcal{H}_{\beta}^k, \quad (3.34b)$$

$$\mathcal{D}_z^k = e_{31}^k \varepsilon_{\alpha\alpha}^k + e_{32}^k \varepsilon_{\beta\beta}^k + e_{33}^k \varepsilon_{zz}^k + e_{33}^k \varepsilon_z^k + d_{33}^k \mathcal{H}_z^k; \quad (3.34c)$$

infine, dalla Eq. (3.32c):

$$\mathcal{B}_{\alpha}^k = q_{15}^k \gamma_{\alpha z}^k + d_{11}^k \varepsilon_{\alpha}^k + \mu_{11}^k \mathcal{H}_{\alpha}^k, \quad (3.35a)$$

$$\mathcal{B}_{\beta}^k = q_{24}^k \gamma_{\beta z}^k + d_{22}^k \varepsilon_{\beta}^k + \mu_{22}^k \mathcal{H}_{\beta}^k, \quad (3.35b)$$

$$\mathcal{B}_z^k = q_{31}^k \varepsilon_{\alpha\alpha}^k + q_{32}^k \varepsilon_{\beta\beta}^k + q_{33}^k \varepsilon_{zz}^k + d_{33}^k \varepsilon_z^k + \mu_{33}^k \mathcal{H}_z^k. \quad (3.35c)$$

### 3.5 Equazioni di governo 3D

Ognuno dei campi fisici considerati è descritto e governato da equazioni caratteristiche, le quali si ricavano in termini delle loro variabili secondarie. Il campo meccanico elastico è governato da tre equazioni, mentre il campo elettrostatico e magnetostatico si descrivono per mezzo di una equazione ciascuno. L'insieme di queste equazioni costituisce il sistema di equazioni di governo 3D del problema elettro-magneto-elastico accoppiato.

#### 3.5.1 Equazioni indefinite di equilibrio 3D

Le tre *equazioni indefinite di equilibrio 3D* descrivono le condizioni di equilibrio alla traslazione nelle tre direzioni in termini delle tensioni  $\sigma$ . Nel caso del guscio sferico, tenendo conto anche degli eventuali carichi inerziali dove  $\rho$  è la densità del materiale considerato, esse sono:

$$H_\beta \frac{\partial \sigma_{\alpha\alpha}^k}{\partial \alpha} + H_\alpha \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}^k}{\partial \beta} + H_\alpha H_\beta \frac{\partial \sigma_{\alpha z}^k}{\partial z} + \left( \frac{2H_\beta}{R_\alpha} + \frac{H_\alpha}{R_\beta} \right) \sigma_{\alpha z}^k = \rho^k H_\alpha H_\beta \ddot{u}^k, \quad (3.36a)$$

$$H_\beta \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}^k}{\partial \alpha} + H_\alpha \frac{\partial \sigma_{\beta\beta}^k}{\partial \beta} + H_\alpha H_\beta \frac{\partial \sigma_{\beta z}^k}{\partial z} + \left( \frac{2H_\alpha}{R_\beta} + \frac{H_\beta}{R_\alpha} \right) \sigma_{\beta z}^k = \rho^k H_\alpha H_\beta \ddot{v}^k, \quad (3.36b)$$

$$\begin{aligned} H_\beta \frac{\partial \sigma_{\alpha z}^k}{\partial \alpha} + H_\alpha \frac{\partial \sigma_{\beta z}^k}{\partial \beta} + H_\alpha H_\beta \frac{\partial \sigma_{zz}^k}{\partial z} - \frac{H_\beta}{R_\alpha} \sigma_{\alpha\alpha}^k - \frac{H_\alpha}{R_\beta} \sigma_{\beta\beta}^k + \\ + \left( \frac{H_\beta}{R_\alpha} + \frac{H_\alpha}{R_\beta} \right) \sigma_{zz}^k = \rho^k H_\alpha H_\beta \ddot{w}^k. \end{aligned} \quad (3.36c)$$

Per la trattazione con cui si ricavano, considerando anche casistiche di geometrie diverse e più generali, si veda Brischetto [15], Tornabene [16] e Hildebrand et al. [17].

#### 3.5.2 Leggi di Gauss elettrica e magnetica 3D

L'equazione di bilancio caratteristica del campo elettrostatico è la *legge di Gauss elettrica 3D*, la prima delle *equazioni di Maxwell*; in assenza di cariche libere, essa risulta:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad (3.37)$$

la quale si riduce, dunque, alla divergenza del vettore  $\mathbf{D}$  posta uguale a 0. Nel caso di un generico *riferimento ortogonale curvilineo* ( $a, b, c$ ) la Eq. (3.37) diventa:

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(a, b, c) = \nabla \cdot \begin{Bmatrix} \mathcal{D}_a \\ \mathcal{D}_b \\ \mathcal{D}_c \end{Bmatrix}. \quad (3.38)$$

In forma esplicita risulta:

$$\frac{1}{s} \left[ \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{s}{s_1} \mathcal{D}_a \right) + \frac{\partial}{\partial b} \left( \frac{s}{s_2} \mathcal{D}_b \right) + \frac{\partial}{\partial c} \left( \frac{s}{s_3} \mathcal{D}_c \right) \right] = 0, \quad (3.39)$$

con  $\mathcal{D}_a$ ,  $\mathcal{D}_b$  e  $\mathcal{D}_c$  componenti dello spostamento elettrico, rispettivamente nelle direzioni  $a$ ,  $b$  e  $c$ . I coefficienti  $s_1$ ,  $s_2$  e  $s_3$ , con  $s$  definito come  $s = s_1 s_2 s_3$ , sono i *fattori di scala*. Per specializzare questa formulazione nel caso del riferimento  $(\alpha, \beta, z)$  per un guscio sferico, si

procede in analogia a quanto fatto da Povstenko [13], dove, per questo sistema di riferimento e geometria, si esplicita la divergenza del vettore flusso di calore. La Eq. (3.39) diventa:

$$\frac{1}{H_\alpha H_\beta H_z} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{H_\alpha H_\beta H_z}{H_\alpha} \mathcal{D}_\alpha \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{H_\alpha H_\beta H_z}{H_\beta} \mathcal{D}_\beta \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{H_\alpha H_\beta H_z}{H_z} \mathcal{D}_z \right) \right] = 0, \quad (3.40)$$

in cui si osserva che, come mostrato da Leissa [11], i fattori di scala coincidono con i coefficienti di curvatura messi in evidenza nella Eq. (3.10):

$$s_1 = H_\alpha = 1 + \frac{z}{R_\alpha}, \quad s_2 = H_\beta = 1 + \frac{z}{R_\beta}, \quad s_3 = H_z = 1. \quad (3.41)$$

Valutando nella Eq. (3.40) le derivate parziali e semplificando gli opportuni termini di curvatura, si ottiene:

$$\frac{1}{H_\alpha H_\beta H_z} \left[ H_\beta H_z \frac{\partial \mathcal{D}_\alpha}{\partial \alpha} + H_\alpha H_z \frac{\partial \mathcal{D}_\beta}{\partial \beta} + H_\alpha H_z \frac{\partial \mathcal{D}_z}{\partial z} \right] = 0, \quad (3.42)$$

la quale, ricordando che  $H_z = 1$  e semplificando ulteriormente i termini di curvatura, diventa:

$$\frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial \mathcal{D}_\alpha^k}{\partial \alpha} + \frac{1}{H_\beta} \frac{\partial \mathcal{D}_\beta^k}{\partial \beta} + \frac{\partial \mathcal{D}_z^k}{\partial z} = 0, \quad (3.43)$$

forma finale dell'*equazione di divergenza 3D dello spostamento elettrico* in assenza di cariche libere. Per la derivazione della Eq. (3.43) si fa riferimento a quanto riportato da Brischetto e Cesare [18].

L'equazione di bilancio caratteristica del campo magnetostatico, che lega tra loro le componenti del vettore induzione magnetica  $\mathbf{B}$ , è, invece, la *legge di Gauss magnetica 3D*, la seconda delle *equazioni di Maxwell*:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (3.44)$$

Esplicitando nuovamente la divergenza nel sistema di riferimento curvilineo misto ortogonale  $(\alpha, \beta, z)$ , seguendo un analogo approccio a quello usato per ricavare la Eq. (3.43), si ottiene la seguente *equazione di divergenza 3D dell'induzione magnetica*:

$$\frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial \mathcal{B}_\alpha^k}{\partial \alpha} + \frac{1}{H_\beta} \frac{\partial \mathcal{B}_\beta^k}{\partial \beta} + \frac{\partial \mathcal{B}_z^k}{\partial z} = 0. \quad (3.45)$$

La Eq. (3.45) in questa forma viene riportata anche da Brischetto e Cesare [19].

### 3.6 Metodologia di risoluzione

Nel precedente paragrafo si sono introdotte le equazioni di governo 3D, si veda le Eq. (3.36), la Eq. (3.43) e la Eq. (3.45); esse costituiscono il seguente sistema di cinque equazioni differenziali alle derivate parziali del secondo ordine di primo grado che descrive e governa il problema elettro-magneto-elastico 3D accoppiato per gusci sferici:

$$H_\beta \frac{\partial \sigma_{\alpha\alpha}^k}{\partial \alpha} + H_\alpha \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}^k}{\partial \beta} + H_\alpha H_\beta \frac{\partial \sigma_{\alpha z}^k}{\partial z} + \left( \frac{2H_\beta}{R_\alpha} + \frac{H_\alpha}{R_\beta} \right) \sigma_{\alpha z}^k = \rho^k H_\alpha H_\beta \ddot{u}^k, \quad (3.46a)$$

$$H_\beta \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}^k}{\partial \alpha} + H_\alpha \frac{\partial \sigma_{\beta\beta}^k}{\partial \beta} + H_\alpha H_\beta \frac{\partial \sigma_{\beta z}^k}{\partial z} + \left( \frac{2H_\alpha}{R_\beta} + \frac{H_\beta}{R_\alpha} \right) \sigma_{\beta z}^k = \rho^k H_\alpha H_\beta \ddot{v}^k, \quad (3.46b)$$

$$\begin{aligned} H_\beta \frac{\partial \sigma_{\alpha z}^k}{\partial \alpha} + H_\alpha \frac{\partial \sigma_{\beta z}^k}{\partial \beta} + H_\alpha H_\beta \frac{\partial \sigma_{zz}^k}{\partial z} - \frac{H_\beta}{R_\alpha} \sigma_{\alpha \alpha}^k - \frac{H_\alpha}{R_\beta} \sigma_{\beta \beta}^k + \\ + \left( \frac{H_\beta}{R_\alpha} + \frac{H_\alpha}{R_\beta} \right) \sigma_{zz}^k = \rho^k H_\alpha H_\beta \ddot{w}^k, \end{aligned} \quad (3.46c)$$

$$\frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial \mathcal{D}_\alpha^k}{\partial \alpha} + \frac{1}{H_\beta} \frac{\partial \mathcal{D}_\beta^k}{\partial \beta} + \frac{\partial \mathcal{D}_z^k}{\partial z} = 0, \quad (3.46d)$$

$$\frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial \mathcal{B}_\alpha^k}{\partial \alpha} + \frac{1}{H_\beta} \frac{\partial \mathcal{B}_\beta^k}{\partial \beta} + \frac{\partial \mathcal{B}_z^k}{\partial z} = 0. \quad (3.46e)$$

Dunque, risolvendo questa sistema di cinque equazioni si ottiene la soluzione del problema. Si osserva che si tratta di un sistema determinato, avendo tante equazioni quante incognite del problema, ovvero le cinque variabili fondamentali. Per esplicitare nelle Eq. (3.46) le variabili fondamentali  $u, v, w, \phi$  e  $\psi$ , si procede eseguendo alcuni passi in sequenza. Si inizia sostituendo le variabili primarie di Eq. (3.12), Eq. (3.16) e Eq. (3.17), che sono funzione di  $u, v, w, \phi$  e  $\psi$ , nelle variabili secondarie di Eq. (3.33), Eq. (3.34) e Eq. (3.35):

$$\sigma_{\alpha \alpha}^k = \frac{C_{11}^k}{H_\alpha} u_{,\alpha}^k + \frac{C_{11}^k}{H_\alpha R_\alpha} w^k + \frac{C_{12}^k}{H_\beta} v_{,\beta}^k + \frac{C_{12}^k}{H_\beta R_\beta} w^k + C_{13}^k w_{,z}^k + e_{31}^k \phi_{,z}^k + q_{31}^k \psi_{,z}^k, \quad (3.47a)$$

$$\sigma_{\beta \beta}^k = \frac{C_{12}^k}{H_\alpha} u_{,\alpha}^k + \frac{C_{12}^k}{H_\alpha R_\alpha} w^k + \frac{C_{22}^k}{H_\beta} v_{,\beta}^k + \frac{C_{22}^k}{H_\beta R_\beta} w^k + C_{23}^k w_{,z}^k + e_{32}^k \phi_{,z}^k + q_{32}^k \psi_{,z}^k, \quad (3.47b)$$

$$\sigma_{zz}^k = \frac{C_{13}^k}{H_\alpha} u_{,\alpha}^k + \frac{C_{13}^k}{H_\alpha R_\alpha} w^k + \frac{C_{23}^k}{H_\beta} v_{,\beta}^k + \frac{C_{23}^k}{H_\beta R_\beta} w^k + C_{13}^k w_{,z}^k + e_{33}^k \phi_{,z}^k + q_{33}^k \psi_{,z}^k, \quad (3.47c)$$

$$\sigma_{\beta z}^k = \frac{C_{44}^k}{H_\beta} w_{,\beta}^k + C_{44}^k v_{,z}^k - \frac{C_{44}^k}{H_\beta R_\beta} v^k + \frac{e_{24}^k}{H_\beta} \phi_{,\beta}^k + \frac{q_{24}^k}{H_\beta} \psi_{,\beta}^k, \quad (3.47d)$$

$$\sigma_{\alpha z}^k = \frac{C_{55}^k}{H_\alpha} w_{,\alpha}^k + C_{55}^k u_{,z}^k - \frac{C_{55}^k}{H_\alpha R_\alpha} u^k + \frac{e_{15}^k}{H_\alpha} \phi_{,\alpha}^k + \frac{q_{15}^k}{H_\alpha} \psi_{,\alpha}^k, \quad (3.47e)$$

$$\sigma_{\alpha \beta}^k = \frac{C_{66}^k}{H_\beta} u_{,\beta}^k + \frac{C_{66}^k}{H_\alpha} v_{,\alpha}^k, \quad (3.47f)$$

$$\mathcal{D}_\alpha^k = \frac{e_{15}^k}{H_\alpha} w_{,\alpha}^k + e_{15}^k u_{,z}^k - \frac{e_{15}^k}{H_\alpha R_\alpha} u^k - \frac{\epsilon_{11}^k}{H_\alpha} \phi_{,\alpha}^k - \frac{d_{11}^k}{H_\alpha} \psi_{,\alpha}^k, \quad (3.48a)$$

$$\mathcal{D}_\beta^k = \frac{e_{24}^k}{H_\beta} w_{,\beta}^k + e_{24}^k v_{,z}^k - \frac{e_{24}^k}{H_\beta R_\beta} v^k - \frac{\epsilon_{22}^k}{H_\beta} \phi_{,\beta}^k - \frac{d_{22}^k}{H_\beta} \psi_{,\beta}^k, \quad (3.48b)$$

$$\mathcal{D}_z^k = \frac{e_{31}^k}{H_\alpha} u_{,\alpha}^k + \frac{e_{31}^k}{H_\alpha R_\alpha} w^k + \frac{e_{32}^k}{H_\beta} v_{,\beta}^k + \frac{e_{32}^k}{H_\beta R_\beta} w^k + e_{33}^k w_{,z}^k - \epsilon_{33}^k \phi_{,z}^k - d_{33}^k \psi_{,z}^k, \quad (3.48c)$$

$$\mathcal{B}_\alpha^k = \frac{q_{15}^k}{H_\alpha} w_{,\alpha}^k + q_{15}^k u_{,z}^k - \frac{q_{15}^k}{H_\alpha R_\alpha} u^k - \frac{d_{11}^k}{H_\alpha} \phi_{,\alpha}^k - \frac{\mu_{11}^k}{H_\alpha} \psi_{,\alpha}^k, \quad (3.49a)$$

$$\mathcal{B}_\beta^k = \frac{q_{24}^k}{H_\beta} w_{,\beta}^k + q_{24}^k v_{,z}^k - \frac{q_{24}^k}{H_\beta R_\beta} v^k - \frac{d_{22}^k}{H_\beta} \phi_{,\beta}^k - \frac{\mu_{22}^k}{H_\beta} \psi_{,\beta}^k, \quad (3.49b)$$

$$\mathcal{B}_z^k = \frac{q_{31}^k}{H_\alpha} u_{,\alpha}^k + \frac{q_{31}^k}{H_\alpha R_\alpha} w^k + \frac{q_{32}^k}{H_\beta} v_{,\beta}^k + \frac{q_{32}^k}{H_\beta R_\beta} w^k + q_{33}^k w_{,z}^k - d_{33}^k \phi_{,z}^k - \mu_{33}^k \psi_{,z}^k. \quad (3.49c)$$

Dopodiché, le Eq. (3.47), Eq. (3.48) e Eq. (3.49) si sostituiscono nelle Eq. (3.46), ottenendo le equazioni di governo 3D nella forma in cui compaiono in maniera esplicita le variabili fondamentali  $u, v, w, \phi$  e  $\psi$ :

$$\begin{aligned} & \left( -\frac{H_\beta C_{55}^k}{H_\alpha R_\alpha^2} - \frac{C_{55}^k}{R_\alpha R_\beta} \right) u^k + \left( \frac{C_{55}^k H_\beta}{R_\alpha} + \frac{C_{55}^k H_\alpha}{R_\beta} \right) u_{,z}^k + \left( \frac{C_{11}^k H_\beta}{H_\alpha} \right) u_{,\alpha\alpha}^k + \\ & + \left( \frac{C_{66}^k H_\alpha}{H_\beta} \right) u_{,\beta\beta}^k + \left( C_{55}^k H_\alpha H_\beta \right) u_{,zz}^k + \left( C_{12}^k + C_{66}^k \right) v_{,\alpha\beta}^k + \\ & + \left( \frac{C_{11}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} + \frac{C_{12}^k}{R_\beta} + \frac{C_{55}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} + \frac{C_{55}^k}{R_\beta} \right) w_{,\alpha}^k + \left( C_{13}^k H_\beta + C_{55}^k H_\beta \right) w_{,\alpha z}^k + \\ & + \left( +2 \frac{e_{15}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} + \frac{e_{15}^k}{R_\beta} \right) \phi_{,\alpha}^k + \left( e_{31}^k H_\beta + e_{15}^k H_\beta \right) \phi_{,\alpha z}^k + \left( +2 \frac{q_{15}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} + \frac{q_{15}^k}{R_\beta} \right) \psi_{,\alpha}^k + \\ & + \left( q_{31}^k H_\beta + q_{15}^k H_\beta \right) \psi_{,\alpha z}^k = \rho^k H_\alpha H_\beta \ddot{u}^k, \end{aligned} \quad (3.50a)$$

$$\begin{aligned} & \left( -\frac{H_\alpha C_{44}^k}{H_\beta R_\beta^2} - \frac{C_{44}^k}{R_\alpha R_\beta} \right) v^k + \left( \frac{C_{44}^k H_\alpha}{R_\beta} + \frac{C_{44}^k H_\beta}{R_\alpha} \right) v_{,z}^k + \left( \frac{C_{66}^k H_\beta}{H_\alpha} \right) v_{,\alpha\alpha}^k + \\ & + \left( \frac{C_{22}^k H_\alpha}{H_\beta} \right) v_{,\beta\beta}^k + \left( C_{44}^k H_\alpha H_\beta \right) v_{,zz}^k + \left( C_{12}^k + C_{66}^k \right) u_{,\alpha\beta}^k + \\ & + \left( \frac{C_{44}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta} + \frac{C_{44}^k}{R_\alpha} + \frac{C_{22}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta} + \frac{C_{12}^k}{R_\alpha} \right) w_{,\beta}^k + \left( C_{44}^k H_\alpha + C_{23}^k H_\alpha \right) w_{,\beta z}^k + \\ & + \left( +2 \frac{e_{24}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta} + \frac{e_{24}^k}{R_\alpha} \right) \phi_{,\beta}^k + \left( e_{32}^k H_\alpha + e_{24}^k H_\alpha \right) \phi_{,\beta z}^k + \left( +2 \frac{q_{24}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta} + \frac{q_{24}^k}{R_\alpha} \right) \psi_{,\beta}^k + \\ & + \left( q_{32}^k H_\alpha + q_{24}^k H_\alpha \right) \psi_{,\beta z}^k = \rho^k H_\alpha H_\beta \ddot{v}^k, \end{aligned} \quad (3.50b)$$

$$\begin{aligned} & \left( \frac{C_{13}^k}{R_\alpha R_\beta} + \frac{C_{23}^k}{R_\alpha R_\beta} - \frac{C_{11}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha^2} - \frac{2C_{12}^k}{R_\alpha R_\beta} - \frac{C_{22}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta^2} \right) w^k + \\ & + \left( -\frac{C_{55}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} + \frac{C_{13}^k}{R_\beta} - \frac{C_{11}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} - \frac{C_{12}^k}{R_\beta} \right) u_{,\alpha}^k + \\ & + \left( -\frac{C_{44}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta} + \frac{C_{23}^k}{R_\alpha} - \frac{C_{22}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta} - \frac{C_{12}^k}{R_\alpha} \right) v_{,\beta}^k + \left( \frac{C_{33}^k H_\beta}{R_\alpha} + \frac{C_{33}^k H_\alpha}{R_\beta} \right) w_{,z}^k + \\ & + \left( C_{55}^k H_\beta + C_{13}^k H_\beta \right) u_{,\alpha z}^k + \left( C_{44}^k H_\alpha + C_{23}^k H_\alpha \right) v_{,\beta z}^k + \left( \frac{C_{55}^k H_\beta}{H_\alpha} \right) w_{,\alpha\alpha}^k + \\ & + \left( \frac{C_{44}^k H_\alpha}{H_\beta} \right) w_{,\beta\beta}^k + \left( C_{33}^k H_\alpha H_\beta \right) w_{,zz}^k + \\ & + \left( -\frac{e_{31}^k H_\beta}{R_\alpha} - \frac{e_{32}^k H_\alpha}{R_\beta} + \frac{e_{33}^k H_\beta}{R_\alpha} + \frac{e_{33}^k H_\alpha}{R_\beta} \right) \phi_{,z}^k + \frac{e_{15}^k H_\beta}{H_\alpha} \phi_{,\alpha\alpha}^k + \frac{e_{24}^k H_\alpha}{H_\beta} \phi_{,\beta\beta}^k + \\ & + e_{33}^k H_\alpha H_\beta \phi_{,zz}^k + \left( -\frac{q_{31}^k H_\beta}{R_\alpha} - \frac{q_{32}^k H_\alpha}{R_\beta} + \frac{q_{33}^k H_\beta}{R_\alpha} + \frac{q_{33}^k H_\alpha}{R_\beta} \right) \psi_{,z}^k + \frac{q_{15}^k H_\beta}{H_\alpha} \psi_{,\alpha\alpha}^k + \\ & + \frac{q_{24}^k H_\alpha}{H_\beta} \psi_{,\beta\beta}^k + q_{33}^k H_\alpha H_\beta \psi_{,zz}^k = \rho^k H_\alpha H_\beta \ddot{w}^k, \end{aligned} \quad (3.50c)$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{e_{15}^k}{H_\alpha^2 R_\alpha} u_{,\alpha}^k + \left( \frac{e_{15}^k}{H_\alpha} + \frac{e_{31}^k}{H_\alpha} \right) u_{,\alpha z}^k - \frac{e_{24}^k}{H_\beta^2 R_\beta} v_{,\beta}^k + \left( \frac{e_{24}^k}{H_\beta} + \frac{e_{32}^k}{H_\beta} \right) v_{,\beta z}^k + \\
 & + \left( \frac{e_{31}^k}{H_\alpha R_\alpha} + \frac{e_{32}^k}{H_\beta R_\beta} \right) w_{,z}^k + \frac{e_{15}^k}{H_\alpha^2} w_{,\alpha\alpha}^k + \frac{e_{24}^k}{H_\beta^2} w_{,\beta\beta}^k + e_{33}^k w_{zz}^k - \frac{e_{11}^k}{H_\alpha^2} \phi_{,\alpha\alpha}^k + \\
 & - \frac{e_{22}^k}{H_\beta^2} \phi_{,\beta\beta}^k - e_{33}^k \phi_{,zz}^k - \frac{d_{11}^k}{H_\alpha^2} \psi_{,\alpha\alpha}^k - \frac{d_{22}^k}{H_\beta^2} \psi_{,\beta\beta}^k - d_{33}^k \psi_{,zz}^k = 0,
 \end{aligned} \tag{3.50d}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{q_{15}^k}{H_\alpha^2 R_\alpha} u_{,\alpha}^k + \left( \frac{q_{15}^k}{H_\alpha} + \frac{q_{31}^k}{H_\alpha} \right) u_{,\alpha z}^k - \frac{q_{24}^k}{H_\beta^2 R_\beta} v_{,\beta}^k + \left( \frac{q_{24}^k}{H_\beta} + \frac{q_{32}^k}{H_\beta} \right) v_{,\beta z}^k + \\
 & + \left( \frac{q_{31}^k}{H_\alpha R_\alpha} + \frac{q_{32}^k}{H_\beta R_\beta} \right) w_{,z}^k + \frac{q_{15}^k}{H_\alpha^2} w_{,\alpha\alpha}^k + \frac{q_{24}^k}{H_\beta^2} w_{,\beta\beta}^k + q_{33}^k w_{zz}^k - \frac{d_{11}^k}{H_\alpha^2} \phi_{,\alpha\alpha}^k + \\
 & - \frac{d_{22}^k}{H_\beta^2} \phi_{,\beta\beta}^k - d_{33}^k \phi_{,zz}^k - \frac{\mu_{11}^k}{H_\alpha^2} \psi_{,\alpha\alpha}^k - \frac{\mu_{22}^k}{H_\beta^2} \psi_{,\beta\beta}^k - \mu_{33}^k \psi_{,zz}^k = 0.
 \end{aligned} \tag{3.50e}$$

Si osserva che le derivate prime vengono qui espresse attraverso la notazione a singolo pedice; si indica la direzione lungo cui viene valutata la derivata a pedice della grandezza che si vuole derivare, dopo la virgola. La notazione a doppio pedice indica, invece, una derivata seconda; l'operazione di derivazione viene effettuata, quindi, due volte: prima nella direzione indicata dal primo pedice e successivamente, con ciò che si è ottenuto, nella direzione indicata dal secondo pedice.

Le Eq. (3.50) che governano il problema elettro-magneto-elastico accoppiato possono essere risolte in *forma esatta* o in *forma approssimata*.

Entrambi gli approcci presentano aspetti favorevoli e sfavorevoli. L'appuccio più ovvio è quello di ricercare una soluzione in forma chiusa del problema, ovvero del sistema delle equazioni che lo descrivono. Tuttavia, nei problemi complessi, come in questo caso, la soluzione in forma chiusa si può ottenere solo imponendo un certo numero di condizioni restrittive, che non rendono generale la trattazione. Queste limitazioni sono dovute alla necessità di calcolare in maniera esatta le derivate delle equazioni differenziali. La soluzione esatta difetta, dunque, di generalità e per questo risulta poco appetibile dal punto di vista delle applicazioni ingegneristiche a casi pratici.

La soluzione approssimata risolve questo problema; le limitazioni sui casi applicativi vengono superate dalla valutazione delle derivate per mezzo di metodi di approssimazione numerica. Questi modelli guadagnano in generalità, risultando applicabili ai più vari e complessi casi pratici e rendendoli molto appetibili nell'utilizzo per la progettazione ingegneristica. Questo vantaggio si paga, in alcuni casi, in termini di precisione della soluzione.

I modelli di soluzione analitica, ricoprono, in ogni caso un ruolo molto importante ai fini della ricerca nel campo delle strutture, fornendo dei solidi casi di benchmark che si possono utilizzare per validare eventuali modelli di soluzione approssimata.

Affinché la soluzione in forma chiusa esista, oltre alle restrizioni sulle geometrie del guscio, elencate nel paragrafo 3.1, devono essere rispettate una serie di condizioni: si possono considerare solamente materiali ortotropi con angoli di laminazione  $\theta = 0^\circ, \pm 90^\circ$ , l'unica *condizione di vincolo* possibile sui quattro lati è quella di *semplice appoggio*, gli eventuali *carichi esterni* sulla superficie superiore e inferiore, lungo le direzioni  $\alpha$  e  $\beta$  e nell'eventuale tempo  $t$ , possono essere unicamente *armonici*. In presenza di queste ipotesi le variabili fondamentali, ovvero le *incognite* del problema, assumono anch'esse *forma armonica* nelle direzioni in pianta e nell'eventuale tempo  $t$ . Sostituendole in questa forma nel sistema di equazioni differenziali è possibile, così, valutare facilmente le derivate in  $\alpha$ ,  $\beta$  ed eventualmente

in  $t$  e, successivamente, rimuovere la parte armonica che si raccoglie a fattor comune. In questo modo si risolve ed elimina la dipendenza delle incognite dalle direzioni  $\alpha$  e  $\beta$  e dall'eventuale tempo  $t$ , ottenendo un sistema di equazioni differenziali nella sola direzione  $z$ . Nei capitoli successivi, si spiega in modo approfondito, come il modello proposto risolve questo sistema ottenendo la soluzione esatta del problema.

Il modello che viene proposto, inoltre, utilizza l'approccio *layerwise*. Ciò significa considerare singolarmente ogni strato fisico  $k$  del multistrato. Si definiscono per ognuno di essi le equazioni di governo del problema e le si mettono in relazione, imponendo le opportune condizioni di continuità all'interfaccia per soddisfare le condizioni di equilibrio e congruenza. Questo approccio, rispetto al più comune metodo *equivalent single layer*, permette una molto più accurata rappresentazione dei campi lungo la direzione trasversale del multistrato, la quale è caratterizzata da forte *anisotropia*. In particolare, permette di soddisfare i cosiddetti  $C_z^0$  requirements, ovvero proprio la *continuità interlaminare* delle variabili, che garantiscono l'equilibrio e la congruenza della struttura, e di cogliere la tipica *forma a zig-zag* lungo lo spessore, con le variazioni repentine della pendenza dell'andamento in corrispondenza delle interfacce. A discapito di questo suo punto di forza, l'approccio layerwise risulta, però, molto più oneroso in termini computazionali rispetto al metodo equivalent single layer, che considera un unico strato equivalente.

## Capitolo 4

# Modello 3D esatto per analisi elettro-elastiche accoppiate di gusci sferici multistrato

In questo capitolo viene presentata la trattazione matematica per il *modello 3D esatto elettro-elastico accoppiato* per i gusci sferici. Si tratta, dunque, di un caso particolare dei più generici problemi elettro-magneto-elastici accoppiati. A partire da quanto si ottiene nel seguito per la geometria a guscio sferico, si può passare facilmente a casi di piastra e guscio cilindrico imponendo correttamente pari a  $\infty$  gli opportuni raggi di curvatura.

Per approfondimenti e, in particolare, per i risultati di validazione del modello e di nuovi benchmark ottenuti con esso, si rimanda a Brischetto e Cesare [18, 20].

La trattazione proposta di seguito, inizialmente, tiene conto anche della dipendenza in forma armonica dal tempo  $t$  delle variabili e della presenza dei carichi inerziali. In un secondo momento, si distinguono le trattazioni per ottenere il *modello 3D esatto per l'analisi alle vibrazioni libere*, indicato come 3D- $u$ - $\phi_{\text{din}}$ , e il *modello 3D esatto per l'analisi statica*, definito 3D- $u$ - $\phi_{\text{stat}}$ , dove la dipendenza delle variabili da  $t$  e i carichi inerziali vengono meno.

### 4.1 Equazioni di governo 3D del problema elettro-elastico accoppiato

Le Eq. (3.46), che descrivono i problemi elettro-magneto-elastici accoppiati, nel presente caso, si semplificano, in quanto l'assenza del campo magnetostatico fa sì che le variabili fondamentali si riducano da cinque a quattro, poiché viene meno il potenziale magnetostatico  $\psi$ . Per lo stesso motivo, il sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali perde la Eq. (3.46e), cioè l'equazione di divergenza 3D dell'induzione magnetica  $\mathbf{B}$ , e nelle altre quattro equazioni si annullano tutti i termini legati al campo magnetostatico. Le Eq. (3.50) si riducono,

quindi, alle seguenti:

$$\begin{aligned}
 & \left( -\frac{H_\alpha C_{55}^k}{H_\alpha R_\alpha^2} - \frac{C_{55}^k}{R_\alpha R_\beta} \right) u^k + \left( \frac{C_{55}^k H_\beta}{R_\alpha} + \frac{C_{55}^k H_\alpha}{R_\beta} \right) u_{,z}^k + \left( \frac{C_{11}^k H_\beta}{H_\alpha} \right) u_{,\alpha\alpha}^k + \\
 & + \left( \frac{C_{66}^k H_\alpha}{H_\beta} \right) u_{,\beta\beta}^k + (C_{55}^k H_\alpha H_\beta) u_{,zz}^k + (C_{12}^k + C_{66}^k) v_{,\alpha\beta}^k + \\
 & + \left( \frac{C_{11}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} + \frac{C_{12}^k}{R_\beta} + \frac{C_{55}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} + \frac{C_{55}^k}{R_\beta} \right) w_{,\alpha}^k + (C_{13}^k H_\beta + C_{55}^k H_\beta) w_{,\alpha z}^k + \\
 & + \left( +2 \frac{e_{15}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} + \frac{e_{15}^k}{R_\beta} \right) \phi_{,\alpha}^k + (e_{31}^k H_\beta + e_{15}^k H_\beta) \phi_{,\alpha z}^k = \rho^k H_\alpha H_\beta \ddot{u}^k,
 \end{aligned} \tag{4.1a}$$

$$\begin{aligned}
 & \left( -\frac{H_\beta C_{44}^k}{H_\beta R_\beta^2} - \frac{C_{44}^k}{R_\alpha R_\beta} \right) v^k + \left( \frac{C_{44}^k H_\alpha}{R_\beta} + \frac{C_{44}^k H_\beta}{R_\alpha} \right) v_{,z}^k + \left( \frac{C_{66}^k H_\beta}{H_\alpha} \right) v_{,\alpha\alpha}^k + \\
 & + \left( \frac{C_{22}^k H_\alpha}{H_\beta} \right) v_{,\beta\beta}^k + (C_{44}^k H_\alpha H_\beta) v_{,zz}^k + (C_{12}^k + C_{66}^k) u_{,\alpha\beta}^k + \\
 & + \left( \frac{C_{44}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta} + \frac{C_{44}^k}{R_\alpha} + \frac{C_{22}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta} + \frac{C_{12}^k}{R_\alpha} \right) w_{,\beta}^k + (C_{44}^k H_\alpha + C_{23}^k H_\alpha) w_{,\beta z}^k + \\
 & + \left( +2 \frac{e_{24}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta} + \frac{e_{24}^k}{R_\alpha} \right) \phi_{,\beta}^k + (e_{32}^k H_\alpha + e_{24}^k H_\alpha) \phi_{,\beta z}^k = \rho^k H_\alpha H_\beta \ddot{v}^k,
 \end{aligned} \tag{4.1b}$$

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{C_{13}^k}{R_\alpha R_\beta} + \frac{C_{23}^k}{R_\alpha R_\beta} - \frac{C_{11}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha^2} - \frac{2C_{12}^k}{R_\alpha R_\beta} - \frac{C_{22}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta^2} \right) w^k + \\
 & + \left( -\frac{C_{55}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} + \frac{C_{13}^k}{R_\beta} - \frac{C_{11}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} - \frac{C_{12}^k}{R_\beta} \right) u_{,\alpha}^k + \\
 & + \left( -\frac{C_{44}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta} + \frac{C_{23}^k}{R_\alpha} - \frac{C_{22}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta} - \frac{C_{12}^k}{R_\alpha} \right) v_{,\beta}^k + \left( \frac{C_{33}^k H_\beta}{R_\alpha} + \frac{C_{33}^k H_\alpha}{R_\beta} \right) w_{,z}^k + \\
 & + (C_{55}^k H_\beta + C_{13}^k H_\beta) u_{,\alpha z}^k + (C_{44}^k H_\alpha + C_{23}^k H_\alpha) v_{,\beta z}^k + \left( \frac{C_{55}^k H_\beta}{H_\alpha} \right) w_{,\alpha\alpha}^k + \\
 & + \left( \frac{C_{44}^k H_\alpha}{H_\beta} \right) w_{,\beta\beta}^k + (C_{33}^k H_\alpha H_\beta) w_{,zz}^k + \\
 & + \left( -\frac{e_{31}^k H_\beta}{R_\alpha} - \frac{e_{32}^k H_\alpha}{R_\beta} + \frac{e_{33}^k H_\beta}{R_\alpha} + \frac{e_{33}^k H_\alpha}{R_\beta} \right) \phi_{,z}^k + \frac{e_{15}^k H_\beta}{H_\alpha} \phi_{,\alpha\alpha}^k + \frac{e_{24}^k H_\alpha}{H_\beta} \phi_{,\beta\beta}^k + \\
 & + e_{33}^k H_\alpha H_\beta \phi_{,zz}^k = \rho^k H_\alpha H_\beta \ddot{w}^k,
 \end{aligned} \tag{4.1c}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{e_{15}^k}{H_\alpha^2 R_\alpha} u_{,\alpha}^k + \left( \frac{e_{15}^k}{H_\alpha} + \frac{e_{31}^k}{H_\alpha} \right) u_{,\alpha z}^k - \frac{e_{24}^k}{H_\beta^2 R_\beta} v_{,\beta}^k + \left( \frac{e_{24}^k}{H_\beta} + \frac{e_{32}^k}{H_\beta} \right) v_{,\beta z}^k + \\
 & + \left( \frac{e_{31}^k}{H_\alpha R_\alpha} + \frac{e_{32}^k}{H_\beta R_\beta} \right) w_{,z}^k + \frac{e_{15}^k}{H_\alpha^2} w_{,\alpha\alpha}^k + \frac{e_{24}^k}{H_\beta^2} w_{,\beta\beta}^k + e_{33}^k w_{,zz}^k - \frac{e_{11}^k}{H_\alpha^2} \phi_{,\alpha\alpha}^k + \\
 & - \frac{e_{22}^k}{H_\beta^2} \phi_{,\beta\beta}^k - e_{33}^k \phi_{,zz}^k = 0.
 \end{aligned} \tag{4.1d}$$

## 4.2 Risoluzione nelle direzioni in pianta e nel tempo t

Come anticipato nel capitolo precedente, il sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali di secondo ordine e primo grado, si veda le Eq. (4.1), permette di trovare una sua soluzione esatta solo nel caso in cui le sue incognite abbiano la seguente particolare dipendenza armonica dalle direzioni  $\alpha$  e  $\beta$  e dal tempo  $t$ :

$$u^k(\alpha, \beta, z, t) = U^k(z)e^{i\omega t} \cos(\bar{\alpha}\alpha) \sin(\bar{\beta}\beta), \quad (4.2a)$$

$$v^k(\alpha, \beta, z, t) = V^k(z)e^{i\omega t} \sin(\bar{\alpha}\alpha) \cos(\bar{\beta}\beta), \quad (4.2b)$$

$$w^k(\alpha, \beta, z, t) = W^k(z)e^{i\omega t} \sin(\bar{\alpha}\alpha) \sin(\bar{\beta}\beta), \quad (4.2c)$$

$$\phi^k(\alpha, \beta, z, t) = \Phi^k(z)e^{i\omega t} \sin(\bar{\alpha}\alpha) \sin(\bar{\beta}\beta). \quad (4.2d)$$

I coefficienti  $\bar{\alpha}$  e  $\bar{\beta}$  si definiscono come:

$$\bar{\alpha} = \frac{m\pi}{a}, \quad \bar{\beta} = \frac{n\pi}{b}, \quad (4.3)$$

in cui  $a$  e  $b$  sono le dimensioni della superficie media del guscio  $\Omega_0$ , mentre  $m$  e  $n$  sono numeri interi maggiori o uguali a 0 e fissati a priori, che indicano il *numero di semionda*, o *half-wave number*, lungo le rispettive direzioni  $\alpha$  e  $\beta$ . La dipendenza armonica dal tempo  $t$  viene espressa con il termine  $e^{i\omega t}$  in cui  $i$  è il coefficiente dell'unità immaginaria e  $\omega = 2\pi f$  è il valore della *frequenza circolare*, associato alla relativa *frequenza f*. Si nota, inoltre, che questa forma delle incognite permette di isolare la loro dipendenza dalla direzione trasversale  $z$  da quella nelle direzioni  $\alpha$  e  $\beta$  e dal tempo  $t$ . Infatti, le ampiezze,  $U^k(z)$ ,  $V^k(z)$ ,  $W^k(z)$  e  $\Phi^k(z)$ , dipendono dallo sola coordinata  $z$ , invece, la parte armonica è funzione delle sole coordinate  $\alpha$  e  $\beta$  e del tempo  $t$ .

Affinché queste formulazioni delle incognite soddisfino le Eq. (4.1), è necessario che, come si approfondisce nel seguito, eventuali carichi imposti dall'esterno abbiano forma armonica analoga e che siano verificate le condizioni al contorno di vincolo di semplice appoggio sui quattro lati del guscio, ovvero:

$$\begin{aligned} \phi^k &= 0, & w^k &= 0, & v^k &= 0, & \sigma_{\alpha\alpha}^k &= 0, & \sigma_{\alpha\alpha}^k &= 0 & \text{per } \alpha = 0, a, \\ \phi^k &= 0, & w^k &= 0, & u^k &= 0, & \sigma_{\alpha\alpha}^k &= 0, & \sigma_{\beta\beta}^k &= 0 & \text{per } \beta = 0, b. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Le Eq. (4.2) così definite, vengono inserite nelle Eq. (4.1); valutando le opportune derivate, si ottengono:

$$\begin{aligned} &\left( -\frac{H_\beta C_{55}^k}{H_\alpha R_\alpha^2} - \frac{C_{55}^k}{R_\alpha R_\beta} - \bar{\alpha}^2 \frac{C_{11}^k H_\beta}{H_\alpha} - \bar{\beta}^2 \frac{C_{66}^k H_\alpha}{H_\beta} + \rho^k H_\alpha H_\beta \omega^2 \right) U^k + \\ &+ \left( -\bar{\alpha}\bar{\beta} C_{12}^k - \bar{\alpha}\bar{\beta} C_{66}^k \right) V^k + \left( \bar{\alpha} \frac{C_{11}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} + \bar{\alpha} \frac{C_{12}^k}{R_\beta} + \bar{\alpha} \frac{C_{55}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} + \bar{\alpha} \frac{C_{55}^k}{R_\beta} \right) W^k + \\ &+ \left( \frac{C_{55}^k H_\beta}{R_\alpha} + \frac{C_{55}^k H_\alpha}{R_\beta} \right) U_{,z}^k + \left( \bar{\alpha} C_{13}^k H_\beta + \bar{\alpha} C_{55}^k H_\beta \right) W_{,z}^k + C_{55}^k H_\alpha H_\beta U_{,zz}^k + \\ &+ \left( +2\bar{\alpha} \frac{e_{15}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} + \bar{\alpha} \frac{e_{15}^k}{R_\beta} \right) \Phi^k + \left( \bar{\alpha} e_{31}^k H_\beta + \bar{\alpha} e_{15}^k H_\beta \right) \Phi_{,z}^k = 0, \end{aligned} \quad (4.5a)$$

$$\begin{aligned}
 & \left( -\frac{H_\alpha C_{44}^k}{H_\beta R_\beta^2} - \frac{C_{44}^k}{R_\alpha R_\beta} - \bar{\alpha}^2 \frac{C_{66}^k H_\beta}{H_\alpha} - \bar{\beta}^2 \frac{C_{22}^k H_\alpha}{H_\beta} + \rho^k H_\alpha H_\beta \omega^2 \right) V^k + \\
 & + \left( -\bar{\alpha} \bar{\beta} C_{12}^k - \bar{\alpha} \bar{\beta} C_{66}^k \right) U^k + \left( \bar{\beta} \frac{C_{44}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta} + \bar{\beta} \frac{C_{44}^k}{R_\alpha} + \bar{\beta} \frac{C_{22}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta} + \bar{\beta} \frac{C_{12}^k}{R_\alpha} \right) W^k + \\
 & + \left( \frac{C_{44}^k H_\alpha}{R_\beta} + \frac{C_{44}^k H_\beta}{R_\alpha} \right) V_{,z}^k + \left( \bar{\beta} C_{44}^k H_\alpha + \bar{\beta} C_{23}^k H_\alpha \right) W_z^k + C_{44}^k H_\alpha H_\beta V_{,zz}^k + \\
 & + \left( +2\bar{\beta} \frac{e_{24}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta} + \bar{\beta} \frac{e_{24}^k}{R_\alpha} \right) \Phi^k + \left( \bar{\beta} e_{32}^k H_\alpha + \bar{\beta} e_{24}^k H_\alpha \right) \Phi_{,z}^k = 0,
 \end{aligned} \tag{4.5b}$$

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{C_{13}^k}{R_\alpha R_\beta} + \frac{C_{23}^k}{R_\alpha R_\beta} - \frac{C_{11}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha^2} - \frac{2C_{12}^k}{R_\alpha R_\beta} - \frac{C_{22}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta^2} - \bar{\alpha}^2 \frac{C_{55}^k H_\beta}{H_\alpha} - \bar{\beta}^2 \frac{C_{44}^k H_\alpha}{H_\beta} + \rho^k H_\alpha H_\beta \omega^2 \right) W^k + \\
 & + \left( \bar{\alpha} \frac{C_{55}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} - \bar{\alpha} \frac{C_{13}^k}{R_\beta} + \bar{\alpha} \frac{C_{11}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} + \bar{\alpha} \frac{C_{12}^k}{R_\beta} \right) U^k + \\
 & + \left( \bar{\beta} \frac{C_{44}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta} - \bar{\beta} \frac{C_{23}^k}{R_\alpha} + \bar{\beta} \frac{C_{22}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta} + \bar{\beta} \frac{C_{12}^k}{R_\alpha} \right) V^k + \\
 & + \left( -\bar{\alpha} C_{55}^k H_\beta - \bar{\alpha} C_{13}^k H_\beta \right) U_{,z}^k + \left( -\bar{\beta} C_{44}^k H_\alpha - \bar{\beta} C_{23}^k H_\alpha \right) V_{,z}^k + \left( \frac{C_{33}^k H_\beta}{R_\alpha} + \frac{C_{33}^k H_\alpha}{R_\beta} \right) W_{,z}^k + \\
 & + C_{33}^k H_\alpha H_\beta W_{,zz}^k + \left( -\bar{\alpha}^2 \frac{e_{15}^k H_\beta}{H_\alpha} - \bar{\beta}^2 \frac{e_{24}^k H_\alpha}{H_\beta} \right) \Phi^k + \\
 & + \left( -\frac{e_{31}^k H_\beta}{R_\alpha} - \frac{e_{32}^k H_\alpha}{R_\beta} + \frac{e_{33}^k H_\beta}{R_\alpha} + \frac{e_{33}^k H_\alpha}{R_\beta} \right) \Phi_{,z}^k + e_{33}^k H_\alpha H_\beta \Phi_{,zz}^k = 0,
 \end{aligned} \tag{4.5c}$$

$$\begin{aligned}
 & \bar{\alpha} \frac{e_{15}^k}{H_\alpha^2 R_\alpha} U^k + \bar{\beta} \frac{e_{24}^k}{H_\beta^2 R_\beta} V^k + \left( -\bar{\alpha}^2 \frac{e_{15}^k}{H_\alpha^2} - \bar{\beta}^2 \frac{e_{24}^k}{H_\beta^2} \right) W^k + \left( -\bar{\alpha} \frac{e_{15}^k}{H_\alpha} - \bar{\alpha} \frac{e_{31}^k}{H_\alpha} \right) U_{,z}^k + \\
 & + \left( -\bar{\beta} \frac{e_{24}^k}{H_\beta} - \bar{\beta} \frac{e_{32}^k}{H_\beta} \right) V_{,z}^k + \left( \frac{e_{31}^k}{H_\alpha R_\alpha} + \frac{e_{32}^k}{H_\beta R_\beta} \right) W_{,z}^k + e_{33}^k W_{zz}^k + \\
 & + \left( \bar{\alpha}^2 \frac{e_{11}^k}{H_\alpha^2} + \bar{\beta}^2 \frac{e_{22}^k}{H_\beta^2} \right) \Phi^k - e_{33}^k \Phi_{,zz}^k = 0.
 \end{aligned} \tag{4.5d}$$

Si osserva che la forma armonica degli spostamenti in  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $t$  ha permesso di valutarne in maniera esatta le derivate in queste coordinate, avendo note le derivate delle funzioni armoniche. In un caso generico non si sarebbe potuto valutarle in modo esatto e ci si sarebbe dovuti servire di uno strumento numerico. Inoltre, una volta eseguite queste derivate, in ognuna delle equazioni, la parte armonica delle diverse variabili fondamentali, funzione di  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $t$  può essere raccolta a fattor comune e rimossa, essendo uguale per tutti i termini. Le equazioni, così facendo, restano dipendenti dalla sola coordinata  $z$ . Proprio per poter eseguire questa semplificazione, è richiesta la condizione di utilizzare dei multistrato con soli angoli di laminazione  $\theta = 0^\circ, \pm 90^\circ$ . Le Eq. (4.5) risultano, dunque, un sistema di quattro equazioni differenziali di secondo ordine e primo grado nella coordinata  $z$ , e, in forma compatta, si possono riscrivere come segue:

$$A_1^k U^k + A_2^k V^k + A_3^k W^k + A_4^k \Phi^k + A_5^k U_{,z}^k + A_6^k W_{,z}^k + A_7^k \Phi_{,z}^k + A_8^k U_{,zz}^k = 0, \tag{4.6a}$$

$$A_9^k U^k + A_{10}^k V^k + A_{11}^k W^k + A_{12}^k \Phi^k + A_{13}^k V_{,z}^k + A_{14}^k W_{,z}^k + A_{15}^k \Phi_{,z}^k + A_{16}^k V_{,zz}^k = 0, \quad (4.6b)$$

$$\begin{aligned} & A_{17}^k U^k + A_{18}^k V^k + A_{19}^k W^k + A_{20}^k \Phi^k + A_{21}^k U_{,z}^k + A_{22}^k V_{,z}^k + A_{23}^k W_{,z}^k + A_{24}^k \Phi_{,z}^k + \\ & + A_{25}^k W_{,zz}^k + A_{26}^k \Phi_{,zz}^k = 0, \end{aligned} \quad (4.6c)$$

$$\begin{aligned} & A_{27}^k U^k + A_{28}^k V^k + A_{29}^k W^k + A_{30}^k \Phi^k + A_{31}^k U_{,z}^k + A_{32}^k V_{,z}^k + A_{33}^k W_{,z}^k + A_{34}^k W_{,zz}^k + \\ & + A_{35}^k \Phi_{,zz}^k = 0. \end{aligned} \quad (4.6d)$$

Da sottolineare che gli unici coefficienti  $A_{ij}$  che hanno una dipendenza dai termini inerziali delle equazioni di governo, e, dunque, in particolare dalla frequenza circolare  $\omega^2$ , sono  $A_1$ ,  $A_{10}$  e  $A_{19}$  che moltiplicano, rispettivamente,  $U$ ,  $V$  e  $W$ .

### 4.3 Risoluzione nella direzione z

Le Eq. (4.5) sono definite per ogni singolo strato fisico, come indicato dall'apice  $k$ . Oltre alle incognite del problema, ovvero le ampiezze  $U^k(z)$ ,  $V^k(z)$ ,  $W^k(z)$  e  $\Phi^k(z)$ , anche alcuni dei coefficienti che le moltiplicano presentano dipendenza dalla coordinata  $z$ .  $R_\alpha$ ,  $R_\beta$ ,  $\bar{\alpha}$  e  $\bar{\beta}$  sono valutati in corrispondenza della superficie media di riferimento  $\Omega_0$ , per cui non variano lungo lo spessore e sono costanti. I coefficienti delle proprietà caratteristiche del materiale,  $\mathbf{C}^k$ ,  $\mathbf{e}^k$ ,  $\boldsymbol{\epsilon}^k$  e  $\rho^k$ , nel singolo strato fisico  $k$ , sono costanti in quanto si considerano solo materiali omogenei. Invece, i coefficienti  $H_\alpha$  e  $H_\beta$  sono, si veda la Eq. (3.10), funzione della sola  $z$ . Al fine di poter ottenere la soluzione esatta, però, il sistema di equazioni differenziali in  $z$  deve avere coefficienti costanti in  $z$ . Per ovviare a questo problema, come proposto da Brischetto e Carrera [21], si introducono i cosiddetti *strati matematici*  $j$ : ogni strato fisico  $k$  di spessore  $h_k$  viene suddiviso nell'opportuno numero di sottostrati fittizi  $j$ , di spessore sufficientemente piccolo  $h_j$  tale da poter valutare  $H_\alpha$  e  $H_\beta$  sulla loro superficie media e considerarli costanti lungo di esso. Il multistrato risulta così suddiviso in un numero complessivo  $M$  di strati matematici. Il singolo strato matematico è, invece, indicato con  $j$ .

Pertanto, da questo punto in poi, le Eq. (4.6) per il problema elettro-elastico accoppiato vengono considerate e scritte per il generico strato matematico, indicato con l'apice  $j$ , diventando:

$$A_1^j U^j + A_2^j V^j + A_3^j W^j + A_4^j \Phi^j + A_5^j U_{,z}^j + A_6^j W_{,z}^j + A_7^j \Phi_{,z}^j + A_8^j U_{,zz}^j = 0, \quad (4.7a)$$

$$A_9^j U^j + A_{10}^j V^j + A_{11}^j W^j + A_{12}^j \Phi^j + A_{13}^j V_{,z}^j + A_{14}^j W_{,z}^j + A_{15}^j \Phi_{,z}^j + A_{16}^j V_{,zz}^j = 0, \quad (4.7b)$$

$$\begin{aligned} & A_{17}^j U^j + A_{18}^j V^j + A_{19}^j W^j + A_{20}^j \Phi^j + A_{21}^j U_{,z}^j + A_{22}^j V_{,z}^j + A_{23}^j W_{,z}^j + A_{24}^j \Phi_{,z}^j + \\ & + A_{25}^j W_{,zz}^j + A_{26}^j \Phi_{,zz}^j = 0, \end{aligned} \quad (4.7c)$$

$$\begin{aligned} & A_{27}^j U^j + A_{28}^j V^j + A_{29}^j W^j + A_{30}^j \Phi^j + A_{31}^j U_{,z}^j + A_{32}^j V_{,z}^j + A_{33}^j W_{,z}^j + A_{34}^j W_{,zz}^j + \\ & + A_{35}^j \Phi_{,zz}^j = 0. \end{aligned} \quad (4.7d)$$

Per procedere con la soluzione del sistema appena definito, si vogliono disaccoppiare, in termini di derivate seconde, la Eq. (4.7c) e la Eq. (4.7d), in modo tale che compaia una sola

derivata seconda in ognuna di esse. Con alcuni passaggi diventano:

$$\begin{aligned} \left( A_{25}^j A_{35}^j - A_{26}^j A_{34}^j \right) W_{,zz}^j &= - \left( A_{17}^j A_{35}^j - A_{26}^j A_{27}^j \right) U^j - \left( A_{18}^j A_{35}^j - A_{26}^j A_{28}^j \right) V^j + \\ &\quad - \left( A_{19}^j A_{35}^j - A_{26}^j A_{29}^j \right) W^j - \left( A_{20}^j A_{35}^j - A_{26}^j A_{30}^j \right) \Phi^j + \\ &\quad - \left( A_{21}^j A_{35}^j - A_{26}^j A_{31}^j \right) U_{,z}^j - \left( A_{22}^j A_{35}^j - A_{26}^j A_{32}^j \right) V_{,z}^j + \\ &\quad - \left( A_{23}^j A_{35}^j - A_{26}^j A_{33}^j \right) W_{,z}^j - \left( A_{24}^j A_{35}^j \right) \Phi_{,z}^j, \end{aligned} \quad (4.8a)$$

$$\begin{aligned} \left( A_{25}^j A_{35}^j - A_{26}^j A_{34}^j \right) \Phi_{,zz}^j &= - \left( A_{27}^j A_{25}^j - A_{34}^j A_{17}^j \right) U^j - \left( A_{28}^j A_{25}^j - A_{34}^j A_{18}^j \right) V^j + \\ &\quad - \left( A_{29}^j A_{25}^j - A_{34}^j A_{19}^j \right) W^j - \left( A_{30}^j A_{25}^j - A_{34}^j A_{20}^j \right) \Phi^j + \\ &\quad - \left( A_{31}^j A_{25}^j - A_{34}^j A_{21}^j \right) U_{,z}^j - \left( A_{32}^j A_{25}^j - A_{34}^j A_{22}^j \right) V_{,z}^j + \\ &\quad - \left( A_{33}^j A_{25}^j - A_{34}^j A_{23}^j \right) W_{,z}^j - \left( -A_{34}^j A_{24}^j \right) \Phi_{,z}^j. \end{aligned} \quad (4.8b)$$

Dunque, in forma compatta e mettendo in evidenza le derivate seconde, le Eq. (4.7) diventano:

$$A_8^j U_{,zz}^j = -A_1^j U^j - A_2^j V^j - A_3^j W^j - A_4^j \Phi^j - A_5^j U_{,z}^j - A_6^j W_{,z}^j - A_7^j \Phi_{,z}^j, \quad (4.9a)$$

$$A_{16}^j V_{,zz}^j = -A_9^j U^j - A_{10}^j V^j - A_{11}^j W^j - A_{12}^j \Phi^j - A_{13}^j V_{,z}^j - A_{14}^j W_{,z}^j - A_{15}^j \Phi_{,z}^j, \quad (4.9b)$$

$$P_0^j W_{,zz}^j = -P_1^j U^j - P_2^j V^j - P_3^j W^j - P_4^j \Phi^j - P_5^j U_{,z}^j - P_6^j V_{,z}^j - P_7^j W_{,z}^j - P_8^j \Phi_{,z}^j, \quad (4.9c)$$

$$P_0^j \Phi_{,zz}^j = -P_9^j U^j - P_{10}^j V^j - P_{11}^j W^j - P_{12}^j \Phi^j - P_{13}^j U_{,z}^j - P_{14}^j V_{,z}^j - P_{15}^j W_{,z}^j - P_{16}^j \Phi_{,z}^j. \quad (4.9d)$$

Il sistema di equazioni differenziali del secondo ordine ottenuto può essere ridotto ad un sistema del primo ordine, ovvero in cui compaiono solo derivate prime, raddoppiando il numero di equazioni e incognite. Per far ciò si utilizza il metodo proposto e descritto in Boyce e DiPrima [22] e *Systems of Differential Equations* [23], il quale prevede di imporre le seguenti identità:

$$A_8^j U_{,z}^j = A_8^j U_{,z}^j, \quad (4.10a)$$

$$A_{16}^j V_{,z}^j = A_{16}^j V_{,z}^j, \quad (4.10b)$$

$$P_0^j W_{,z}^j = P_0^j W_{,z}^j, \quad (4.10c)$$

$$P_0^j \Phi_{,z}^j = P_0^j \Phi_{,z}^j. \quad (4.10d)$$

Considerando il sistema di equazioni differenziali così ottenuto costituito dalle Eq. (4.9) e dalle Eq. (4.10), esso si può scrivere, in forma matriciale, come segue:

$$\begin{bmatrix} A_8^j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{16}^j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_0^j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_0^j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_8^j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{16}^j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_0^j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_0^j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^j \\ V^j \\ W^j \\ \Phi^j \\ U_{,z}^j \\ V_{,z}^j \\ W_{,z}^j \\ \Phi_{,z}^j \end{Bmatrix}_{,z} = \quad (4.11)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & A_8^j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{16}^j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_0^j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_0^j \\ -A_1^j & -A_2^j & -A_3^j & -A_4^j & -A_5^j & 0 & -A_6^j & -A_7^j \\ -A_9^j & -A_{10}^j & -A_{11}^j & -A_{12}^j & 0 & -A_{13}^j & -A_{14}^j & -A_{15}^j \\ -P_1^j & -P_2^j & -P_3^j & -P_4^j & -P_5^j & -P_6^j & -P_7^j & -P_8^j \\ -P_9^j & -P_{10}^j & -P_{11}^j & -P_{12}^j & -P_{13}^j & -P_{14}^j & -P_{15}^j & -P_{16}^j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^j \\ V^j \\ W^j \\ \Phi^j \\ U_{,z}^j \\ V_{,z}^j \\ W_{,z}^j \\ \Phi_{,z}^j \end{Bmatrix}.$$

Si tratta, quindi, di un sistema di equazioni differenziali in  $z$  di otto equazioni in otto incognite. In particolare, si osserva che le derivate prime in  $z$ ,  $U_{,z}^j$ ,  $V_{,z}^j$ ,  $W_{,z}^j$  e  $\Phi_{,z}^j$ , diventano incognite del problema, proprio come  $U^j$ ,  $V^j$ ,  $W^j$  e  $\Phi^j$ , e saranno calcolate in maniera esatta anch'esse. La Eq. (4.11), in forma compatta, si può scrivere come:

$$\mathbf{D}^j \mathbf{X}_{,z}^j = \mathbf{A}^j \mathbf{X}^j, \quad (4.12)$$

dove  $\mathbf{X}^j$  è il vettore  $8 \times 1$  delle incognite che si vogliono ottenere e  $\mathbf{X}_{,z}^j$  è il vettore  $8 \times 1$  delle incognite derivate, per cui:

$$\mathbf{X}_{,z}^j = \mathbf{D}^{-1j} \mathbf{A}^j \mathbf{X}^j \quad \text{con} \quad \mathbf{A}^{*j} = \mathbf{D}^{-1j} \mathbf{A}^j, \quad (4.13)$$

in forma compatta:

$$\mathbf{X}_{,z}^j = \mathbf{A}^{*j} \mathbf{X}^j. \quad (4.14)$$

Si osserva che la matrice  $\mathbf{A}^{*j}$  di dimensioni  $8 \times 8$ , definita per il singolo strato matematico  $j$ , è una matrice a coefficienti costanti in  $z$ , essendo a loro volta costanti in  $z$  le matrici  $\mathbf{D}^j$  e  $\mathbf{A}^j$ , anch'esse di dimensione  $8 \times 8$ .

La soluzione in  $z$  dell'Eq. (4.14) viene calcolata utilizzando il *metodo della matrice esponenziale*, presentato da Moler e Van Loan [24], secondo il quale:

$$\mathbf{X}^j(\tilde{z}_j) = \exp(\mathbf{A}^{*j}\tilde{z}_j) \mathbf{X}^j(0) \quad \text{con} \quad 0 \leq \tilde{z}_j \leq h_j, \quad (4.15)$$

dove  $\tilde{z}_j = 0$  e  $\tilde{z}_j = h_j$  corrispondono, rispettivamente, al bottom  $b$  e al top  $t$  dello strato  $j$ -esimo. In particolare, si è interessati a valutare le incognite proprio per  $\tilde{z}_j = h_j$ ; la Eq. (4.15) diventa:

$$\mathbf{X}^j(h_j) = \exp(\mathbf{A}^{*j}h_j) \mathbf{X}^j(0), \quad (4.16)$$

in cui si definisce, come segue, la *matrice esponenziale* di dimensione  $8 \times 8$  valutata in  $\tilde{z}_j = h_j$  per lo strato  $j$ :

$$\mathbf{A}^{**j} = \exp(\mathbf{A}^{*j}h_j). \quad (4.17)$$

In forma esplicita la Eq. (4.17) risulta:

$$\mathbf{A}^{**j} = \mathbf{I} + \mathbf{A}^{*j} h_j + \frac{\mathbf{A}^{*j2}}{2!} h_j^2 + \cdots + \frac{\mathbf{A}^{*jN}}{N!} h_j^N, \quad (4.18)$$

dove  $\mathbf{I}$  è la matrice identità  $8 \times 8$ , mentre  $N$  indica l'ordine massimo di espansione con cui si vuole approssimare la matrice esponenziale secondo Taylor; in genere, per matrici di piccola dimensione si ha una rapida convergenza dei risultati con un limitato costo computazionale, e quindi di tempo, e un ordine massimo  $N = 3$  risulta sufficiente. Sostituendo la Eq. (4.18) nella Eq. (4.16) si ottiene:

$$\mathbf{X}^j(h_j) = \mathbf{A}^{**j} \mathbf{X}^j(0), \quad (4.19)$$

che si può riscrivere con i pedici  $b$  e  $t$  per riferirsi al top e al bottom dello strato  $j$  considerato:

$$\mathbf{X}_t^j = \mathbf{A}^{**j} \mathbf{X}_b^j. \quad (4.20)$$

Definita questa procedura, poiché si utilizza l'approccio layerwise, si risolve la Eq. (4.14) per ogni strato  $j$ . Si definisce, dunque, la Eq. (4.20) e, nello specifico, si valuta la Eq. (4.18) per il numero complessivo  $M$  di strati matematici  $j$ .

È importante sottolineare, come già osservato, che, per le variabili fondamentali, questo modello permette di valutare in modo esatto non solo le derivate nelle direzioni  $\alpha$  e  $\beta$  e nel tempo  $t$ , ma anche le derivate prime in  $z$  che sono definite come incognite del problema a seguito della riduzione dell'ordine differenziale. Ottenuta la soluzione in termini di variabili fondamentali e loro derivate prime in  $z$ , si ottiene, dunque, la soluzione esatta anche per le variabili primarie, definite dalle Eq. (3.12) e dalle Eq. (3.16), e le variabili secondarie, definite dalle Eq. (3.33) e dalle Eq. (3.34) oppure dalle Eq. (3.47) e dalle Eq. (3.48).

Giunti a questo punto, essendo il modello di tipo layerwise, è necessario collegare le soluzioni ottenute per il singolo strato  $j - 1$  allo strato  $j$  attraverso l'interfaccia. Si impongono, dunque, ad ogni interfaccia, le condizioni di continuità interlaminare, dettate dalle condizioni di equilibrio e congruenza della struttura complessiva:

$$u_b^j = u_t^{j-1}, \quad v_b^j = v_t^{j-1}, \quad w_b^j = w_t^{j-1}, \quad \phi_b^j = \phi_t^{j-1}, \quad (4.21a)$$

$$\sigma_{\alpha z_b}^j = \sigma_{\alpha z_t}^{j-1}, \quad \sigma_{\beta z_b}^j = \sigma_{\beta z_t}^{j-1}, \quad \sigma_{zz_b}^j = \sigma_{zz_t}^{j-1}, \quad D_{z_b}^j = D_{z_t}^{j-1}. \quad (4.21b)$$

Ad ogni interfaccia tra il bottom  $b$  dello strato  $j$  e il top  $t$  dello strato  $j - 1$ , si impone l'uguaglianza per congruenza delle variabili fondamentali, gli spostamenti  $u$ ,  $v$  e  $w$  e il potenziale elettrostatico  $\phi$ , e per equilibrio delle componenti trasversali, cioè in direzione  $z$ , delle variabili secondarie, la tensione normale  $\sigma_{zz}$ , quelle di taglio  $\sigma_{\alpha z}$  e  $\sigma_{\beta z}$  e la componente  $D_z$  dello spostamento elettrico. In questo modo, le variabili appena citate sono continue lungo tutto lo spessore  $h$  del multistrato e presentano la tipica forma a zig-zag dovuta all'anisotropia trasversale della struttura, rispettando i  $C_z^0$  requirements. Si osserva che le restanti variabili secondarie, quelle che non agiscono lungo la direzione  $z$ , non devono essere necessariamente continue alle interfacce per ragioni di equilibrio; per cui, cambiando materiale, possono presentare discontinuità all'interfaccia, mantenendo comunque una forma a zig-zag. Anche le variabili primarie avranno la forma a zig-zag, ma non saranno necessariamente continue in quanto sono definite come derivate delle variabili fondamentali, le cui derivate prime non sono sempre continue nelle interfacce tra gli strati.

Nelle Eq. (4.21a) si sostituiscono le forme armoniche delle variabili fondamentali di Eq. (4.2) e, semplificando la parte armonica, è immediato ottenere:

$$U_b^j = U_t^{j-1}, \quad (4.22a)$$

$$V_b^j = V_t^{j-1}, \quad (4.22b)$$

$$W_b^j = W_t^{j-1}, \quad (4.22c)$$

$$\Phi_b^j = \Phi_t^{j-1}. \quad (4.22d)$$

Nelle Eq. (4.21b), invece, si sostituiscono le Eq. (3.47c), Eq. (3.47d), Eq. (3.47e) e Eq. (3.48c); poi, anche in questo caso, si introducono le forme armoniche delle variabili fondamentali di Eq. (4.2). Si valutano le derivate in  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $t$  e si semplificano le rimanenti parti armoniche, ottenendo:

$$\begin{aligned} & \frac{C_{55}^j}{H_{\alpha_b}^j} \bar{\alpha} W_b^j + C_{55}^j U_{,z_b}^j - \frac{C_{55}^j}{H_{\alpha_b}^j R_\alpha} U_b^j + \frac{e_{15}^j}{H_{\alpha_b}^j} \bar{\alpha} \Phi_b^j = \\ & + \frac{C_{55}^{j-1}}{H_{\alpha_t}^{j-1}} \bar{\alpha} W_t^{j-1} + C_{55}^{j-1} U_{,z_t}^{j-1} - \frac{C_{55}^{j-1}}{H_{\alpha_t}^{j-1} R_\alpha} U_t^{j-1} + \frac{e_{15}^{j-1}}{H_{\alpha_t}^{j-1}} \bar{\alpha} \Phi_t^{j-1}, \end{aligned} \quad (4.23a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{C_{44}^j}{H_{\beta_b}^j} \bar{\beta} W_b^j + C_{44}^j V_{,z_b}^j - \frac{C_{44}^j}{H_{\beta_b}^j R_\beta} V_b^j + \frac{e_{24}^j}{H_{\beta_b}^j} \bar{\beta} \Phi_b^j = \\ & + \frac{C_{44}^{j-1}}{H_{\beta_t}^{j-1}} \bar{\beta} W_t^{j-1} + C_{44}^{j-1} V_{,z_t}^{j-1} - \frac{C_{44}^{j-1}}{H_{\beta_t}^{j-1} R_\beta} V_t^{j-1} + \frac{e_{24}^{j-1}}{H_{\beta_t}^{j-1}} \bar{\beta} \Phi_t^{j-1}, \end{aligned} \quad (4.23b)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{C_{13}^j}{H_{\alpha_b}^j} \bar{\alpha} U_b^j + \frac{C_{13}^j}{H_{\alpha_b}^j R_\alpha} W_b^j - \frac{C_{23}^j}{H_{\beta_b}^j} \bar{\beta} V_b^j + \frac{C_{23}^j}{H_{\beta_b}^j R_\beta} W_b^j + C_{33}^j W_{,z_b}^j + e_{33}^j \Phi_{,z_b}^j = \\ & - \frac{C_{13}^{j-1}}{H_{\alpha_t}^{j-1}} \bar{\alpha} U_t^{j-1} + \frac{C_{13}^{j-1}}{H_{\alpha_t}^{j-1} R_\alpha} W_t^{j-1} - \frac{C_{23}^{j-1}}{H_{\beta_t}^{j-1}} \bar{\beta} V_t^{j-1} + \frac{C_{23}^{j-1}}{H_{\beta_t}^{j-1} R_\beta} W_t^{j-1} + \\ & + C_{33}^{j-1} W_{,z_t}^{j-1} + e_{33}^{j-1} \Phi_{,z_t}^{j-1}, \end{aligned} \quad (4.23c)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{e_{31}^j}{H_{\alpha_b}^j} \bar{\alpha} U_b^j + \frac{e_{31}^j}{H_{\alpha_b}^j R_\alpha} W_b^j - \frac{e_{32}^j}{H_{\beta_b}^j} \bar{\beta} V_b^j + \frac{e_{32}^j}{H_{\beta_b}^j R_\beta} W_b^j + e_{33}^j W_{,z_b}^j - e_{33}^j \Phi_{,z_b}^j = \\ & - \frac{e_{31}^{j-1}}{H_{\alpha_t}^{j-1}} \bar{\alpha} U_t^{j-1} + \frac{e_{31}^{j-1}}{H_{\alpha_t}^{j-1} R_\alpha} W_t^{j-1} - \frac{e_{32}^{j-1}}{H_{\beta_t}^{j-1}} \bar{\beta} V_t^{j-1} + \frac{e_{32}^{j-1}}{H_{\beta_t}^{j-1} R_\beta} W_t^{j-1} + e_{33}^{j-1} W_{,z_t}^{j-1} - e_{33}^{j-1} \Phi_{,z_t}^{j-1}. \end{aligned} \quad (4.23d)$$

Sostituendo nelle Eq. (4.23) appena ottenute le Eq. (4.22), raggruppando i coefficienti che moltiplicano le stesse variabili e mettendo in evidenza le derivate prime calcolate al bottom  $b$ , si ottiene :

$$\begin{aligned} U_{,z_b}^j &= \frac{1}{C_{55}^j} \left( \frac{C_{55}^j}{H_{\alpha_b}^j R_\alpha} - \frac{C_{55}^{j-1}}{H_{\alpha_t}^{j-1} R_\alpha} \right) U_t^{j-1} + \frac{1}{C_{55}^j} \left( -\frac{C_{55}^j}{H_{\alpha_b}^j} \bar{\alpha} + \frac{C_{55}^{j-1}}{H_{\alpha_t}^{j-1}} \bar{\alpha} \right) W_t^{j-1} + \\ & + \frac{1}{C_{55}^j} \left( -\frac{e_{15}^j}{H_{\alpha_b}^j} \bar{\alpha} + \frac{e_{15}^{j-1}}{H_{\alpha_t}^{j-1}} \bar{\alpha} \right) \Phi_t^{j-1} + \frac{C_{55}^{j-1}}{C_{55}^j} U_{,z_t}^{j-1}, \end{aligned} \quad (4.24a)$$

$$\begin{aligned} V_{,z_b}^j &= \frac{1}{C_{44}^j} \left( \frac{C_{44}^j}{H_{\beta_b}^j R_\beta} - \frac{C_{44}^{j-1}}{H_{\beta_t}^{j-1} R_\beta} \right) V_t^{j-1} + \frac{1}{C_{44}^j} \left( -\frac{C_{44}^j}{H_{\beta_b}^j} \bar{\beta} + \frac{C_{44}^{j-1}}{H_{\beta_t}^{j-1}} \bar{\beta} \right) W_t^{j-1} + \\ & + \frac{1}{C_{44}^j} \left( -\frac{e_{24}^j}{H_{\beta_b}^j} \bar{\beta} + \frac{e_{24}^{j-1}}{H_{\beta_t}^{j-1}} \bar{\beta} \right) \Phi_t^{j-1} + \frac{C_{44}^{j-1}}{C_{44}^j} V_{,z_t}^{j-1}, \end{aligned} \quad (4.24b)$$

$$\begin{aligned} C_{33}^j W_{,z_b}^j + e_{33}^j \Phi_{,z_b}^j &= \left( \frac{C_{13}^j}{H_{\alpha_b}^j} \bar{\alpha} - \frac{C_{13}^{j-1}}{H_{\alpha_t}^{j-1}} \bar{\alpha} \right) U_t^{j-1} + \left( \frac{C_{23}^j}{H_{\beta_b}^j} \bar{\beta} - \frac{C_{23}^{j-1}}{H_{\beta_t}^{j-1}} \bar{\beta} \right) V_t^{j-1} + \\ &+ \left( -\frac{C_{13}^j}{H_{\alpha_b}^j R_\alpha} - \frac{C_{23}^j}{H_{\beta_b}^j R_\beta} + \frac{C_{13}^{j-1}}{H_{\alpha_t}^{j-1} R_\alpha} + \frac{C_{23}^{j-1}}{H_{\beta_t}^{j-1} R_\beta} \right) W_t^{j-1} + \\ &+ C_{33}^{j-1} W_{,z_t}^{j-1} + e_{33}^{j-1} \Phi_{,z_t}^{j-1}, \end{aligned} \quad (4.24c)$$

$$\begin{aligned} e_{33}^j W_{,z_b}^j - e_{33}^j \Phi_{,z_b}^j &= \left( \frac{e_{31}^j}{H_{\alpha_b}^j} \bar{\alpha} - \frac{e_{31}^{j-1}}{H_{\alpha_t}^{j-1}} \bar{\alpha} \right) U_t^{j-1} + \left( \frac{e_{32}^j}{H_{\beta_b}^j} \bar{\beta} - \frac{e_{32}^{j-1}}{H_{\beta_t}^{j-1}} \bar{\beta} \right) V_t^{j-1} + \\ &+ \left( -\frac{e_{31}^j}{H_{\alpha_b}^j R_\alpha} - \frac{e_{32}^j}{H_{\beta_b}^j R_\beta} + \frac{e_{31}^{j-1}}{H_{\alpha_t}^{j-1} R_\alpha} + \frac{e_{32}^{j-1}}{H_{\beta_t}^{j-1} R_\beta} \right) W_t^{j-1} + \\ &+ e_{33}^{j-1} W_{,z_t}^{j-1} - e_{33}^{j-1} \Phi_{,z_t}^{j-1}, \end{aligned} \quad (4.24d)$$

che in forma compatta possono essere scritte come:

$$U_{,z_b}^j = T_1 U_t^{j-1} + T_2 W_t^{j-1} + T_3 \Phi_t^{j-1} + T_4 U_{,z_t}^{j-1}, \quad (4.25a)$$

$$V_{,z_b}^j = T_5 V_t^{j-1} + T_6 W_t^{j-1} + T_7 \Phi_t^{j-1} + T_8 V_{,z_t}^{j-1}, \quad (4.25b)$$

$$R_1 W_{,z_b}^j + R_2 \Phi_{,z_b}^j = R_3 U_t^{j-1} + R_4 V_t^{j-1} + R_5 W_t^{j-1} + R_6 W_{,z_t}^{j-1} + R_7 \Phi_{,z_t}^{j-1}, \quad (4.25c)$$

$$R_8 W_{,z_b}^j + R_9 \Phi_{,z_b}^j = R_{10} U_t^{j-1} + R_{11} V_t^{j-1} + R_{12} W_t^{j-1} + R_{13} W_{,z_t}^{j-1} + R_{14} \Phi_{,z_t}^{j-1}. \quad (4.25d)$$

In analogia a quanto fatto per le Eq. (4.7), si vogliono disaccoppiare, in termini di derivate prime valutate al bottom  $b$ , la Eq. (4.25c) e la Eq. (4.25d), al fine di far comparire una sola derivata prima al bottom  $b$  in ognuna di esse. Con alcuni passaggi diventano:

$$\begin{aligned} W_{,z_b}^j &= \frac{R_9 R_3 - R_2 R_{10}}{R_1 R_9 - R_2 R_8} U_t^{j-1} + \frac{R_9 R_4 - R_2 R_{11}}{R_1 R_9 - R_2 R_8} V_t^{j-1} + \frac{R_9 R_5 - R_2 R_{12}}{R_1 R_9 - R_2 R_8} W_t^{j-1} + \\ &+ \frac{R_9 R_6 - R_2 R_{13}}{R_1 R_9 - R_2 R_8} W_{,z_t}^{j-1} + \frac{R_9 R_7 - R_2 R_{14}}{R_1 R_9 - R_2 R_8} \Phi_{,z_t}^{j-1}, \end{aligned} \quad (4.26a)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{,z_b}^j &= \frac{R_1 R_{10} - R_8 R_3}{R_1 R_9 - R_2 R_8} U_t^{j-1} + \frac{R_1 R_{11} - R_8 R_4}{R_1 R_9 - R_2 R_8} V_t^{j-1} + \frac{R_1 R_{12} - R_8 R_5}{R_1 R_9 - R_2 R_8} W_t^{j-1} + \\ &+ \frac{R_1 R_{13} - R_8 R_6}{R_1 R_9 - R_2 R_8} W_{,z_t}^{j-1} + \frac{R_1 R_{14} - R_8 R_7}{R_1 R_9 - R_2 R_8} \Phi_{,z_t}^{j-1}. \end{aligned} \quad (4.26b)$$

Dunque, in forma compatta, le Eq. (4.25) risultano:

$$U_{,z_b}^j = T_1 U_t^{j-1} + T_2 W_t^{j-1} + T_3 \Phi_t^{j-1} + T_4 U_{,z_t}^{j-1}, \quad (4.27a)$$

$$V_{,z_b}^j = T_5 V_t^{j-1} + T_6 W_t^{j-1} + T_7 \Phi_t^{j-1} + T_8 V_{,z_t}^{j-1}, \quad (4.27b)$$

$$W_{,zb}^j = T_9 U_t^{j-1} + T_{10} V_t^{j-1} + T_{11} W_t^{j-1} + T_{12} W_{,zt}^{j-1} + T_{13} \Phi_{,zt}^{j-1}, \quad (4.27c)$$

$$\Phi_{,zb}^j = T_{14} U_t^{j-1} + T_{15} V_t^{j-1} + T_{16} W_t^{j-1} + T_{17} W_{,zt}^{j-1} + T_{18} \Phi_{,zt}^{j-1}. \quad (4.27d)$$

Riscrivendo le Eq. (4.22) e le Eq. (4.27) in forma matriciale, si ottiene:

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \\ \Phi \\ U_{,z} \\ V_{,z} \\ W_{,z} \\ \Phi_{,z} \end{Bmatrix}_b^j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ T_1 & 0 & T_2 & T_3 & T_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_5 & T_6 & T_7 & 0 & T_8 & 0 & 0 \\ T_9 & T_{10} & T_{11} & 0 & 0 & 0 & T_{12} & T_{13} \\ T_{14} & T_{15} & T_{16} & 0 & 0 & 0 & T_{17} & T_{18} \end{bmatrix}^{j,j-1} \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \\ \Phi \\ U_{,z} \\ V_{,z} \\ W_{,z} \\ \Phi_{,z} \end{Bmatrix}_t^{j-1}, \quad (4.28)$$

che in forma compatta si scrive:

$$\mathbf{X}_b^j = \mathbf{T}^{j,j-1} \mathbf{X}_t^{j-1}, \quad (4.29)$$

dove la  $\mathbf{T}^{j,j-1}$  di dimensioni  $8 \times 8$  si definisce *matrice di trasferimento*. Con essa si passa dal top  $t$  dello strato  $j-1$  al bottom  $b$  dello strato  $j$ -esimo, imponendo le condizioni per ottenere la continuità interlaminare tra il vettore delle incognite del problema al bottom  $b$  dello strato  $j$ ,  $\mathbf{X}_b^j$ , e quello al top  $t$  dello strato  $j-1$ ,  $\mathbf{X}_t^{j-1}$ .

Per risolvere il problema si deve definire la Eq. (4.29) per tutte le interfacce del multistrato, ognuna definita dall'indice  $j, j-1$  con  $2 \leq j \leq M$ , dove  $M$  è il numero di strati matematici complessivo. Quindi, in particolare, si devono, calcolare  $M-1$  matrici di trasferimento  $\mathbf{T}^{j,j-1}$  con  $2 \leq j \leq M$ .

Giunti a questo punto della trattazione, si utilizzano ricorsivamente la Eq. (4.20) e la Eq. (4.29). Considerando i generici due strati  $j$  e  $j-1$ , si inserisce nell'Eq. (4.20), che risolve il problema nel singolo strato  $j$  dal bottom  $b$  al top  $t$ , la Eq. (4.29), che garantisce la continuità interlaminare tra il bottom  $b$  dello strato  $j$  e il top  $t$  dello strato  $j-1$ . Per cui, si ottiene:

$$\mathbf{X}_t^j = \mathbf{A}^{**j} \mathbf{T}^{j,j-1} \mathbf{X}_t^{j-1}. \quad (4.30)$$

Quindi, si sostituisce  $\mathbf{X}_t^{j-1}$  con la Eq. (4.29) specializzata per risolvere il problema nel singolo strato  $j-1$ :

$$\mathbf{X}_t^j = \mathbf{A}^{**j} \mathbf{T}^{j,j-1} \mathbf{A}^{**j-1} \mathbf{X}_b^{j-1}. \quad (4.31)$$

A questo punto si procede nello stesso modo considerando lo strato  $j-2$  e così via seguendo. Eseguendo questo processo da  $j=M$  fino a  $j=1$ , si ottiene la seguente relazione con cui, partendo dalla soluzione al bottom  $b$  del primo strato  $j=1$ , si arriva a quella al top dell'ultimo  $j=M$ :

$$\mathbf{X}_t^M = \mathbf{A}^{**M} \mathbf{T}^{M,M-1} \dots \mathbf{T}^{2,1} \mathbf{A}^{**1} \mathbf{X}_b^1 = \mathbf{H}_m \mathbf{X}_b^1, \quad (4.32)$$

in forma compatta:

$$\mathbf{X}_t^M = \mathbf{H}_m \mathbf{X}_b^1, \quad (4.33)$$

in cui si definisce:

$$\mathbf{H}_m = \mathbf{A}^{**M} \mathbf{T}^{M,M-1} \dots \mathbf{T}^{2,1} \mathbf{A}^{**1} \mathbf{X}_b^1. \quad (4.34)$$

La matrice  $\mathbf{H}_m$  é, dunque, il prodotto della successione di tutte le matrici esponenziali  $\mathbf{A}^{**j}$  e  $\mathbf{T}^{j,j-1}$ . Si osserva, che, essendo il problema definito in otto incognite, la sua dimensione è sempre  $8 \times 8$ , a prescindere dal numero  $M$  di strati matematici  $j$  considerati. Al crescere di  $M$ , tuttavia, aumenta il numero di matrici  $\mathbf{A}^{**j}$  e  $\mathbf{T}^{j,j-1}$  da valutare, così come le dimensioni del calcolo del loro prodotto matriciale per ottenere  $\mathbf{H}_m$ ; cresce, di conseguenza, il costo computazionale del modello.

#### 4.4 Analisi alle vibrazioni libere

L'analisi alle vibrazioni libere ha come obiettivo il calcolo delle *frequenze proprie* di una struttura e dei relativi *modi di vibrare*, fissati i numeri di semionda ( $m, n$ ). Nel caso del guscio sferico, oltre alle condizioni al contorno di vincolo di semplice appoggio, si veda la Eq. (4.4), si considerano due possibili configurazioni delle condizioni di carico sulle superfici esterne al top  $t$  e al bottom  $b$  del multistrato, di coordinate  $z = \pm h/2$ , ovvero il top  $t$  dello strato  $j = M$  e il bottom  $b$  dello strato  $j = 1$ . Si definiscono, rispettivamente, la configurazione *closed circuit* e *open circuit*, le quali differiscono per le condizioni di carico considerate per il campo eletrostatico.

In entrambi i casi, come nelle tradizionali analisi alle vibrazioni libere puramente elastiche, per quanto riguarda il campo meccanico elastico si impongono carichi esterni nulli, per cui:

$$\sigma_{zz} = 0, \quad \sigma_{\alpha z} = 0, \quad \sigma_{\beta z} = 0 \quad \text{per } z = \pm h/2. \quad (4.35)$$

Si sostituiscono in esse le Eq. (3.47c), Eq. (3.47d) e Eq. (3.47e) e si introducono le forme armoniche delle variabili fondamentali di Eq. (4.2). Dopodiché, si valutano le derivate in  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $t$  e si semplificano le rimanenti parti armoniche, ottenendo al bottom ( $z = -h/2$ ):

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} \left( -\frac{h}{2} \right) &= -\frac{C_{13}^1}{H_{\alpha_b}^1} \bar{\alpha} U_b^1 - \frac{C_{23}^1}{H_{\beta_b}^1} \bar{\beta} V_b^1 + \left( \frac{C_{23}^1}{H_{\beta_b}^1 R_\beta} + \frac{C_{13}^1}{H_{\alpha_b}^1 R_\alpha} \right) W_b^1 + C_{33}^1 W_{,z_b}^1 + \\ &+ e_{33}^1 \Phi_{,z_b}^1 = 0, \end{aligned} \quad (4.36a)$$

$$\sigma_{\beta z} \left( -\frac{h}{2} \right) = \frac{C_{44}^1}{H_{\beta_b}^1} \bar{\beta} W_b^1 + C_{44}^1 V_{,z_b}^1 - \frac{C_{44}^1}{H_{\beta_b}^1 R_\beta} V_b^1 + \frac{e_{24}^1}{H_{\beta_b}^1} \bar{\beta} \Phi_b^1 = 0, \quad (4.36b)$$

$$\sigma_{\alpha z} \left( -\frac{h}{2} \right) = \frac{C_{55}^1}{H_{\alpha_b}^1} \bar{\alpha} W_b^1 + C_{55}^1 U_{,z_b}^1 - \frac{C_{55}^1}{H_{\alpha_b}^1 R_\alpha} U_b^1 + \frac{e_{15}^1}{H_{\alpha_b}^1} \bar{\alpha} \Phi_b^1 = 0, \quad (4.36c)$$

mentre al top ( $z = +h/2$ ):

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} \left( +\frac{h}{2} \right) &= -\frac{C_{13}^M}{H_{\alpha_t}^M} \bar{\alpha} U_t^M - \frac{C_{23}^M}{H_{\beta_t}^M} \bar{\beta} V_t^M + \left( \frac{C_{23}^M}{H_{\beta_t}^M R_\beta} + \frac{C_{13}^M}{H_{\alpha_t}^M R_\alpha} \right) W_t^M + C_{33}^M W_{,z_t}^M + \\ &+ e_{33}^M \Phi_{,z_t}^M = 0, \end{aligned} \quad (4.37a)$$

$$\sigma_{\beta z} \left( +\frac{h}{2} \right) = \frac{C_{44}^M}{H_{\beta_t}^M} \bar{\beta} W_t^M + C_{44}^M V_{,z_t}^M - \frac{C_{44}^M}{H_{\beta_t}^M R_\beta} V_t^M + \frac{e_{24}^M}{H_{\beta_t}^M} \bar{\beta} \Phi_t^M = 0, \quad (4.37b)$$

$$\sigma_{\alpha z} \left( +\frac{h}{2} \right) = \frac{C_{55}^M}{H_{\alpha_t}^M} \bar{\alpha} W_t^M + C_{55}^M U_{,z_t}^M - \frac{C_{55}^M}{H_{\alpha_t}^M R_\alpha} U_t^M + \frac{e_{15}^M}{H_{\alpha_t}^M} \bar{\alpha} \Phi_t^M = 0. \quad (4.37c)$$

Nelle Eq. (4.36) e Eq. (4.37) i parametri  $\bar{\alpha}$ ,  $\bar{\beta}$ ,  $R_\alpha$  e  $R_\beta$  sono calcolati riferendosi, come sempre, alla superficie media di riferimento del guscio sferico  $\Omega_0$ , invece,  $H_{\alpha_b}^1$ ,  $H_{\beta_b}^1$ ,  $H_{\alpha_t}^M$  e  $H_{\beta_t}^M$  sono valutati, rispettivamente, al bottom  $b$  del guscio, per  $z = -h/2$ , e al top  $t$  del guscio, per  $z = +h/2$ . Le caratteristiche del materiale considerate sono, ovviamente, quelle del primo e ultimo strato. In forma compatta, è possibile riscrivere le Eq. (4.36) e Eq. (4.37), rispettivamente, come:

$$B_{1_b}^1 U_b^1 + B_{2_b}^1 V_b^1 + B_{3_b}^1 W_b^1 + B_{4_b}^1 W_{,z_b}^1 + B_{5_b}^1 \Phi_{,z_b}^1 = 0, \quad (4.38a)$$

$$B_{6_b}^1 V_b^1 + B_{7_b}^1 W_b^1 + B_{8_b}^1 \Phi_b^1 + B_{9_b}^1 V_{,z_b}^1 = 0, \quad (4.38b)$$

$$B_{10_b}^1 U_b^1 + B_{11_b}^1 W_b^1 + B_{12_b}^1 \Phi_b^1 + B_{13_b}^1 U_{,z_b}^1 = 0 \quad (4.38c)$$

e:

$$B_{1_t}^M U_t^1 + B_{2_t}^M V_t^1 + B_{3_t}^M W_t^1 + B_{4_t}^M W_{,z_t}^1 + B_{5_t}^M \Phi_{,z_t}^1 = 0, \quad (4.39a)$$

$$B_{6_t}^M V_t^1 + B_{7_t}^M W_t^1 + B_{8_t}^M \Phi_t^1 + B_{9_t}^M V_{,z_t}^1 = 0, \quad (4.39b)$$

$$B_{10_t}^M U_t^1 + B_{11_t}^M W_t^1 + B_{12_t}^M \Phi_t^1 + B_{13_t}^M U_{,z_t}^1 = 0. \quad (4.39c)$$

#### 4.4.1 Closed circuit

Per quanto riguarda il campo elettrostatico, la configurazione closed circuit prevede di imporre la seguente condizioni al top  $t$  e al bottom  $b$ :

$$\phi = 0 \quad \text{per } z = \pm h/2. \quad (4.40)$$

Si impone, quindi, il potenziale elettrostatico  $\phi$  nullo sulle superfici esterne del guscio sferico. Ciò comporta che queste ultime delimitino un circuito elettrico chiuso avendo lo stesso potenziale, da cui il nome della configurazione. Si sostituiscono nella Eq. (4.40) le forme armoniche delle variabili fondamentali di Eq. (4.2) e semplificando la parte armonica, si ricava al bottom ( $z = -h/2$ ):

$$\Phi_b^1 \left( -\frac{h}{2} \right) = 0 \quad (4.41)$$

e al top ( $z = +h/2$ ):

$$\Phi_t^M \left( +\frac{h}{2} \right) = 0. \quad (4.42)$$

Per la configurazione closed circuit, è possibile riformulare in forma matriciale le condizioni di carico complessive come segue; al bottom, per  $z = -h/2$ , le Eq. (4.36) e le Eq. (4.41) diventano:

$$\begin{bmatrix} B_{1_b}^1 & B_{2_b}^1 & B_{3_b}^1 & 0 & 0 & 0 & B_{4_b}^1 & B_{5_b}^1 \\ 0 & B_{6_b}^1 & B_{7_b}^1 & B_{8_b}^1 & 0 & B_{9_b}^1 & 0 & 0 \\ B_{10_b}^1 & 0 & B_{11_b}^1 & B_{12_b}^1 & B_{13_b}^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{b_{cc}}^1 \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \\ \Phi \\ U_{,z} \\ V_{,z} \\ W_{,z} \\ \Phi_{,z} \end{Bmatrix}_b^1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (4.43)$$

invece, al top, per  $z = +h/2$ , le Eq. (4.37) e le Eq. (4.42) assumono la seguente forma:

$$\begin{bmatrix} B_{1_t}^M & B_{2_t}^M & B_{3_t}^M & 0 & 0 & 0 & B_{4_t}^M & B_{5_t}^M \\ 0 & B_{6_t}^M & B_{7_t}^M & B_{8_t}^M & 0 & B_{9_t}^M & 0 & 0 \\ B_{10_t}^M & 0 & B_{11_t}^M & B_{12_t}^M & B_{13_t}^M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{t_{cc}}^M \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \\ \Phi \\ U_{,z} \\ V_{,z} \\ W_{,z} \\ \Phi_{,z} \end{Bmatrix}_t^M = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (4.44)$$

Nelle due equazioni matriciali il pedice  $cc$  alle matrici  $\mathbf{B}$ , di dimensione  $4 \times 8$ , indica che si tratta delle matrici per imporre le condizioni di carico esterno previste dalla configurazione closed circuit. La Eq. (4.43) e la Eq. (4.44), scritte in forma compatta, risultano:

$$\mathbf{B}_{b_{cc}}^1 \mathbf{X}_b^1 = \mathbf{0}, \quad (4.45a)$$

$$\mathbf{B}_{t_{cc}}^M \mathbf{X}_t^M = \mathbf{0}. \quad (4.45b)$$

Si procede sostituendo la Eq. (4.33), ovvero la soluzione del problema a meno delle condizioni di carico esterno, nella Eq. (4.45b) ottenendo:

$$\mathbf{B}_{t_{cc}}^M \mathbf{H}_m \mathbf{X}_b^1 = \mathbf{0}, \quad (4.46)$$

dove il prodotto  $\mathbf{B}_{t_{cc}}^M \mathbf{H}_m$  è sempre una matrice di dimensioni  $4 \times 8$ . Infine, raggruppando la Eq. (4.45a) con la appena ricavata Eq. (4.46), si ottiene il seguente sistema lineare omogeneo:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{t_{cc}}^M \mathbf{H}_m \\ \mathbf{B}_{b_{cc}}^1 \end{bmatrix} \mathbf{X}_b^1 = \mathbf{0}, \quad (4.47)$$

in formulazione compatta:

$$\mathbf{E}_{cc} \mathbf{X}_b^1 = \mathbf{0}, \quad (4.48)$$

dove si definisce la matrice di dimensioni  $8 \times 8$ :

$$\mathbf{E}_{cc} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{t_{cc}}^M \mathbf{H}_m \\ \mathbf{B}_{b_{cc}}^1 \end{bmatrix}. \quad (4.49)$$

#### 4.4.2 Open circuit

La configurazione open circuit prevede per il campo elettrostatico le seguenti condizioni di carico esterno:

$$\mathcal{D}_z = 0 \quad \text{per } z = \pm h/2. \quad (4.50)$$

Si impone, quindi, la componente in direzione  $z$  del vettore spostamento elettrico nulla sulle superfici esterne del guscio sferico. Il potenziale  $\phi$  non è necessariamente uguale sulle superfici esterne, comportando che queste ultime possano delimitare anche un circuito elettrico aperto. Da questa considerazione viene il nome della configurazione. Si prosegue sostituendo nella Eq. (4.50) la Eq. (3.48c), dove, a loro volta, si introducono le forme armoniche delle variabili fondamentali di Eq. (4.2). Dopodiché, si valutano le derivate in  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $t$  e si semplificano le rimanenti parti armoniche, ottenendo al bottom ( $z = -h/2$ ):

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_z \left( -\frac{h}{2} \right) = & \frac{e_{31}^1}{H_{\alpha_b}^1} \bar{\alpha} U_b^1 + \frac{e_{32}^1}{H_{\beta_b}^1} \bar{\beta} V_b^1 + \left( \frac{e_{32}^1}{H_{\beta_b}^1 R_\beta} + \frac{e_{31}^1}{H_{\alpha_b}^1 R_\alpha} \right) W_b^1 + e_{33}^1 W_{,z_b}^1 + \\ & - e_{33}^1 \Phi_{,z_b}^1 = 0 \end{aligned} \quad (4.51)$$

e al top ( $z = +h/2$ ):

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_z \left( +\frac{h}{2} \right) = & \frac{e_{31}^M}{H_{\alpha_t}^M} \bar{\alpha} U_t^M + \frac{e_{32}^M}{H_{\beta_t}^M} \bar{\beta} V_t^M + \left( \frac{e_{32}^M}{H_{\beta_t}^M R_\beta} + \frac{e_{31}^M}{H_{\alpha_t}^M R_\alpha} \right) W_t^M + e_{33}^1 W_{,z_t}^M + \\ & - e_{33}^1 \Phi_{,z_t}^M = 0. \end{aligned} \quad (4.52)$$

In forma compatta, è possibile riscrivere la Eq. (4.51) e la Eq. (4.52), rispettivamente, come:

$$B_{14_{b_{oc}}}^1 U_b^1 + B_{15_{b_{oc}}}^1 V_b^1 + B_{16_{b_{oc}}}^1 W_b^1 + B_{17_{b_{oc}}}^1 W_{,z_b}^1 + B_{18_{b_{oc}}}^1 \Phi_{,z_b}^1 = 0 \quad (4.53)$$

e:

$$B_{14_{t_{oc}}}^M U_t^1 + B_{15_{t_{oc}}}^M V_t^1 + B_{16_{t_{oc}}}^M W_t^1 + B_{17_{t_{oc}}}^M W_{,z_t}^1 + B_{18_{t_{oc}}}^M \Phi_{,z_t}^1 = 0. \quad (4.54)$$

In analogia a quanto fatto nel sottoparagrafo 4.4.1, anche per la configurazione open circuit, è possibile riformulare in forma matriciale le condizioni di carico esterno complessive. Al bottom, per  $z = -h/2$ , le Eq. (4.36) e la Eq. (4.51) diventano:

$$\begin{bmatrix} B_{1_b}^1 & B_{2_b}^1 & B_{3_b}^1 & 0 & 0 & 0 & B_{4_b}^1 & B_{5_b}^1 \\ 0 & B_{6_b}^1 & B_{7_b}^1 & B_{8_b}^1 & 0 & B_{9_b}^1 & 0 & 0 \\ B_{10_b}^1 & 0 & B_{11_b}^1 & B_{12_b}^1 & B_{13_b}^1 & 0 & 0 & 0 \\ B_{14_{b_{oc}}}^M & B_{15_{b_{oc}}}^M & B_{16_{b_{oc}}}^M & 0 & 0 & 0 & B_{17_{b_{oc}}}^M & B_{18_{b_{oc}}}^M \end{bmatrix}_{b_{oc}}^1 \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \\ \Phi \\ U,z \\ V,z \\ W,z \\ \Phi,z \end{Bmatrix}_b = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (4.55)$$

Al top, per  $z = +h/2$ , le Eq. (4.37) e la Eq. (4.52) assumono la seguente forma:

$$\begin{bmatrix} B_{1_t}^M & B_{2_t}^M & B_{3_t}^M & 0 & 0 & 0 & B_{4_t}^M & B_{5_t}^M \\ 0 & B_{6_t}^M & B_{7_t}^M & B_{8_t}^M & 0 & B_{9_t}^M & 0 & 0 \\ B_{10_t}^M & 0 & B_{11_t}^M & B_{12_t}^M & B_{13_t}^M & 0 & 0 & 0 \\ B_{14_{t_{oc}}}^M & B_{15_{t_{oc}}}^M & B_{16_{t_{oc}}}^M & 0 & 0 & 0 & B_{17_{t_{oc}}}^M & B_{18_{t_{oc}}}^M \end{bmatrix}_{t_{oc}}^M \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \\ \Phi \\ U,z \\ V,z \\ W,z \\ \Phi,z \end{Bmatrix}_t = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (4.56)$$

Nelle due equazioni matriciali il pedice  $oc$  alle matrici  $\mathbf{B}$ , di dimensione  $4 \times 8$ , indica che si tratta delle matrici per imporre le condizioni di carico esterno previste dalla configurazione open circuit. La Eq. (4.55) e la Eq. (4.56), scritte in forma compatta risultano:

$$\mathbf{B}_{b_{oc}}^1 \mathbf{X}_b^1 = \mathbf{0}, \quad (4.57a)$$

$$\mathbf{B}_{t_{oc}}^M \mathbf{X}_t^M = \mathbf{0}. \quad (4.57b)$$

Proseguendo, seguendo gli stessi passi visti in 4.4.1, si procede sostituendo la Eq. (4.33) nella Eq. (4.57b) e si ricava:

$$\mathbf{B}_{t_{oc}}^M \mathbf{H}_m \mathbf{X}_b^1 = \mathbf{0}. \quad (4.58)$$

Raggruppando la Eq. (4.57a) con la Eq. (4.58), si ottiene il seguente sistema lineare omogeneo:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{t_{oc}}^M \mathbf{H}_m \\ \mathbf{B}_{b_{oc}}^1 \end{bmatrix} \mathbf{X}_b^1 = \mathbf{0}, \quad (4.59)$$

in formulazione compatta:

$$\mathbf{E}_{oc} \mathbf{X}_b^1 = \mathbf{0}, \quad (4.60)$$

dove si definisce la matrice di dimensioni  $8 \times 8$ :

$$\mathbf{E}_{oc} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{t_{oc}}^M \mathbf{H}_m \\ \mathbf{B}_{b_{oc}}^1 \end{bmatrix}. \quad (4.61)$$

#### 4.4.3 Valutazione delle frequenze circolari proprie e modi di vibrare

I due sistemi omogenei di Eq. (4.48) e Eq. (4.60), se fossero determinati avrebbero la sola soluzione banale nulla, la quale non fornisce alcuna informazione. Per valutare le frequenze circolari proprie e i relativi modi di vibrare, fissati  $(m, n)$ , si pone la condizione affinché siano sistemi indeterminati. Essa consiste nell'avere un sistema riducibile e, dunque, una matrice quadrata dei coefficienti di rango inferiore alla sua dimensione, ovvero singolare. Questa condizione equivale ad imporre che il determinante di quest'ultima sia nullo. Per cui si impone, rispettivamente, per la configurazione closed circuit:

$$\det(\mathbf{E}_{cc}) = 0 \quad (4.62)$$

e per la configurazione open circuit:

$$\det(\mathbf{E}_{oc}) = 0. \quad (4.63)$$

La Eq. (4.62) e la Eq. (4.63) si traducono, entrambe, in una equazione polinomiale di alto grado nell'incognita  $\omega^2$ , dove  $\omega$  è la frequenza circolare. Infatti, le matrici  $\mathbf{E}_{cc}$  e  $\mathbf{E}_{oc}$ , sono funzione di  $\omega^2$  per via del contributo dei carichi inerziali contenuto nei coefficienti  $A_1$ ,  $A_{10}$  e  $A_{19}$  della matrice  $\mathbf{A}$  di ogni strato matematico  $j$ . Pertanto, risolvendo queste equazioni polinomiali si trova un certo numero di soluzioni  $\omega^2$ . Le soluzioni trovate sono proprio il quadrato delle frequenze circolari proprie  $\omega_s$  della struttura per la fissata coppia  $(m, n)$ . Quante se ne ottengono dipende dal numero  $M$  degli strati matematici  $j$  considerati e dall'ordine massimo  $N$  utilizzato per valutare le matrici esponenziali  $\mathbf{A}^{**}$  di ognuno di essi. Con  $M$  e  $N$  che tendono a  $+\infty$ , cosa impossibile per ovvie ragioni di calcolo, il numero delle  $\omega_s$  ottenuto per ogni coppia  $(m, n)$  tenderebbe anch'esso a  $+\infty$ . Tuttavia, essendo le coppie  $(m, n)$  potenzialmente infinite, si possono ottenere infinite frequenze circolari proprie  $\omega_s$ , coerentemente al fatto che la struttura così modellata ha infiniti gradi di libertà.

Per valutare il modo di vibrare lungo lo spessore relativo ad ogni frequenza circolare propria  $\omega_s$ , ovvero le sue *forme modali* per le diverse variabili, si sostituisce il suo valore a  $\omega$  nella corrispondente matrice  $\mathbf{E}_{cc}$  o  $\mathbf{E}_{oc}$ . Quest'ultima, ora puramente numerica e singolare, diventa  $\mathbf{E}_{s_{cc}}$  o  $\mathbf{E}_{s_{oc}}$  e si valutano i suoi otto autovalori, essendo la matrice di dimensioni  $8 \times 8$ , tra cui si ha l'autovalore nullo. L'autovettore a cui si è interessati è quello che costituisce lo spazio nullo della matrice  $\mathbf{E}_{s_{cc}}$  o  $\mathbf{E}_{s_{oc}}$ , cioè quello che è soluzione del sistema:

$$\mathbf{E}_{s_{cc}} \mathbf{X}_{b_{\omega_s}}^1 = \mathbf{0} \quad (4.64)$$

oppure:

$$\mathbf{E}_{s_{cc}} \mathbf{X}_{b_{\omega_s}}^1 = \mathbf{0}. \quad (4.65)$$

Dunque, l'autovalore  $\mathbf{X}_{b_{\omega_s}}^1$  che costituisce il suo spazio nullo è quello correlato all'autovalore nullo. Risolvendo questo problema agli autovalori con uno strumento numerico, quindi in matematica finita, si considera l'autovalore associato all'autovalore minimo. Osservando  $\mathbf{X}_{b_{\omega_s}}^1$ , esso rappresenta, per il considerato modo di vibrare associato a  $\omega_s$ , il vettore del valore che le ampiezze delle forme modali delle incognite del problema assumono in corrispondenza del bottom dell'intera struttura a guscio sferico:

$$\mathbf{X}_{b_{\omega_s}}^1 = \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \\ \Phi \\ U_{,z} \\ V_{,z} \\ W_{,z} \\ \Phi_{,z} \end{Bmatrix}_{b_{\omega_s}}^1. \quad (4.66)$$

A partire da esso, usando la procedura riassunta dall'equazione Eq. (4.33), si ottiene l'ampiezza della forma modale delle incognite del problema dal bottom al top della struttura in ogni interfaccia tra gli strati  $j$ . Successivamente, a livello del singolo strato  $j$ , si possono valutare in ogni punto del loro spessore utilizzando la Eq. (4.15). Così facendo, le ampiezze delle forme modali delle variabili fondamentali e loro derivate prime in  $z$ , sono definite in ogni punto dello spessore  $h$  del multistrato.

Utilizzando le opportune relazioni che legano le variabili fondamentali alle variabili primarie e secondarie (Eq. (3.12) e Eq. (3.16) per le prime, Eq. (3.47) e Eq. (3.48) per le seconde in cui si inseriscono le forme armoniche di Eq. (4.2)) si possono ottenere anche le loro ampiezze delle forme modali lungo  $z$  per il modo di vibrare considerato.

## 4.5 Analisi statica

Considerando l'analisi statica viene meno la dipendenza dal tempo  $t$  del problema; per cui le forme di Eq. (4.2) assunte dalle incognite, perdendo la sua dipendenza armonica, diventano:

$$u^k(\alpha, \beta, z) = U^k(z) \cos(\bar{\alpha}\alpha) \sin(\bar{\beta}\beta), \quad (4.67a)$$

$$v^k(\alpha, \beta, z) = V^k(z) \sin(\bar{\alpha}\alpha) \cos(\bar{\beta}\beta), \quad (4.67b)$$

$$w^k(\alpha, \beta, z) = W^k(z) \sin(\bar{\alpha}\alpha) \sin(\bar{\beta}\beta), \quad (4.67c)$$

$$\phi^k(\alpha, \beta, z) = \Phi^k(z) \sin(\bar{\alpha}\alpha) \sin(\bar{\beta}\beta) \quad (4.67d)$$

e le Eq. (4.1) si semplificano come segue:

$$\begin{aligned} & \left( -\frac{H_\beta C_{55}^k}{H_\alpha R_\alpha^2} - \frac{C_{55}^k}{R_\alpha R_\beta} \right) u^k + \left( \frac{C_{55}^k H_\beta}{R_\alpha} + \frac{C_{55}^k H_\alpha}{R_\beta} \right) u_{,z}^k + \left( \frac{C_{11}^k H_\beta}{H_\alpha} \right) u_{,\alpha\alpha}^k + \\ & + \left( \frac{C_{66}^k H_\alpha}{H_\beta} \right) u_{,\beta\beta}^k + \left( C_{55}^k H_\alpha H_\beta \right) u_{,zz}^k + \left( C_{12}^k + C_{66}^k \right) v_{,\alpha\beta}^k + \\ & + \left( \frac{C_{11}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} + \frac{C_{12}^k}{R_\beta} + \frac{C_{55}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} + \frac{C_{55}^k}{R_\beta} \right) w_{,\alpha}^k + \left( C_{13}^k H_\beta + C_{55}^k H_\beta \right) w_{,\alpha z}^k + \\ & + \left( +2 \frac{e_{15}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} + \frac{e_{15}^k}{R_\beta} \right) \phi_{,\alpha}^k + \left( e_{31}^k H_\beta + e_{15}^k H_\beta \right) \phi_{,\alpha z}^k = 0, \end{aligned} \quad (4.68a)$$

$$\begin{aligned} & \left( -\frac{H_\alpha C_{44}^k}{H_\beta R_\beta^2} - \frac{C_{44}^k}{R_\alpha R_\beta} \right) v^k + \left( \frac{C_{44}^k H_\alpha}{R_\beta} + \frac{C_{44}^k H_\beta}{R_\alpha} \right) v_{,z}^k + \left( \frac{C_{66}^k H_\beta}{H_\alpha} \right) v_{,\alpha\alpha}^k + \\ & + \left( \frac{C_{22}^k H_\alpha}{H_\beta} \right) v_{,\beta\beta}^k + \left( C_{44}^k H_\alpha H_\beta \right) v_{,zz}^k + \left( C_{12}^k + C_{66}^k \right) u_{,\alpha\beta}^k + \\ & + \left( \frac{C_{44}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta} + \frac{C_{44}^k}{R_\alpha} + \frac{C_{22}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta} + \frac{C_{12}^k}{R_\alpha} \right) w_{,\beta}^k + \left( C_{44}^k H_\alpha + C_{23}^k H_\alpha \right) w_{,\beta z}^k + \\ & + \left( +2 \frac{e_{24}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta} + \frac{e_{24}^k}{R_\alpha} \right) \phi_{,\beta}^k + \left( e_{32}^k H_\alpha + e_{24}^k H_\alpha \right) \phi_{,\beta z}^k = 0, \end{aligned} \quad (4.68b)$$

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{C_{13}^k}{R_\alpha R_\beta} + \frac{C_{23}^k}{R_\alpha R_\beta} - \frac{C_{11}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha^2} - \frac{2C_{12}^k}{R_\alpha R_\beta} - \frac{C_{22}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta^2} \right) w^k + \\
& + \left( -\frac{C_{55}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} + \frac{C_{13}^k}{R_\beta} - \frac{C_{11}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} - \frac{C_{12}^k}{R_\beta} \right) u_{,\alpha}^k + \\
& + \left( -\frac{C_{44}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta} + \frac{C_{23}^k}{R_\alpha} - \frac{C_{22}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta} - \frac{C_{12}^k}{R_\alpha} \right) v_{,\beta}^k + \left( \frac{C_{33}^k H_\beta}{R_\alpha} + \frac{C_{33}^k H_\alpha}{R_\beta} \right) w_{,z}^k + \\
& + \left( C_{55}^k H_\beta + C_{13}^k H_\beta \right) u_{,\alpha z}^k + \left( C_{44}^k H_\alpha + C_{23}^k H_\alpha \right) v_{,\beta z}^k + \left( \frac{C_{55}^k H_\beta}{H_\alpha} \right) w_{,\alpha\alpha}^k + \\
& + \left( \frac{C_{44}^k H_\alpha}{H_\beta} \right) w_{,\beta\beta}^k + \left( C_{33}^k H_\alpha H_\beta \right) w_{,zz}^k + \\
& + \left( -\frac{e_{31}^k H_\beta}{R_\alpha} - \frac{e_{32}^k H_\alpha}{R_\beta} + \frac{e_{33}^k H_\beta}{R_\alpha} + \frac{e_{33}^k H_\alpha}{R_\beta} \right) \phi_{,z}^k + \frac{e_{15}^k H_\beta}{H_\alpha} \phi_{,\alpha\alpha}^k + \frac{e_{24}^k H_\alpha}{H_\beta} \phi_{,\beta\beta}^k + \\
& + e_{33}^k H_\alpha H_\beta \phi_{,zz}^k = 0,
\end{aligned} \tag{4.68c}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{e_{15}^k}{H_\alpha^2 R_\alpha} u_{,\alpha}^k + \left( \frac{e_{15}^k}{H_\alpha} + \frac{e_{31}^k}{H_\alpha} \right) u_{,\alpha z}^k - \frac{e_{24}^k}{H_\beta^2 R_\beta} v_{,\beta}^k + \left( \frac{e_{24}^k}{H_\beta} + \frac{e_{32}^k}{H_\beta} \right) v_{,\beta z}^k + \\
& + \left( \frac{e_{31}^k}{H_\alpha R_\alpha} + \frac{e_{32}^k}{H_\beta R_\beta} \right) w_{,z}^k + \frac{e_{15}^k}{H_\alpha^2} w_{,\alpha\alpha}^k + \frac{e_{24}^k}{H_\beta^2} w_{,\beta\beta}^k + e_{33}^k w_{,zz}^k - \frac{\epsilon_{11}^k}{H_\alpha^2} \phi_{,\alpha\alpha}^k + \\
& - \frac{\epsilon_{22}^k}{H_\beta^2} \phi_{,\beta\beta}^k - \epsilon_{33}^k \phi_{,zz}^k = 0.
\end{aligned} \tag{4.68d}$$

In particolare, si perde il termine inerziale nelle prime tre equazioni, da cui consegue che i coefficienti  $A_1$ ,  $A_{10}$  e  $A_{19}$  della matrice  $\mathbf{A}$  di ogni strato matematico  $j$  non hanno alcuna dipendenza da  $\omega^2$ .

Fatte queste premesse, la trattazione per lo sviluppo del modello è la medesima fatta in precedenza fino ad ottenere la Eq. (4.34), con la differenza che la matrice  $\mathbf{H}_m$  è puramente numerica.

L'obiettivo dell'analisi statica è quello di valutare il comportamento della struttura in presenza di carichi esterni, in questo caso applicati sulla superficie al top  $t$  e al bottom  $b$  del multistrato. Si definiscono, dunque, le seguenti condizioni di carico esterno:

$$\sigma_{zz} = p_z, \quad \sigma_{\alpha z} = p_\alpha, \quad \sigma_{\beta z} = p_\beta, \quad \phi = \varphi_{ext} \quad \text{per } z = \pm h/2. \tag{4.69}$$

Affinché la soluzione esatta in forma armonica esista, oltre alle condizioni al contorno di vincolo di semplice appoggio, si veda la Eq. (4.4), i carichi esterni applicati sulle superfici esterne devono essere anch'essi in forma armonica nelle direzioni  $\alpha$  e  $\beta$ ; ciò è necessario perché, come si vede nel seguito, la loro parte armonica venga semplificata insieme a quella delle variabili che coinvolgono. Si definiscono dunque:

$$p_z = P_z(z) \sin(\bar{\alpha}\alpha) \sin(\bar{\beta}\beta), \tag{4.70a}$$

$$p_\alpha = P_\alpha(z) \cos(\bar{\alpha}\alpha) \sin(\bar{\beta}\beta), \tag{4.70b}$$

$$p_\beta = P_\beta(z) \sin(\bar{\alpha}\alpha) \cos(\bar{\beta}\beta), \tag{4.70c}$$

$$\varphi_{ext} = \Phi_{ext}(z) \sin(\bar{\alpha}\alpha) \sin(\bar{\beta}\beta), \tag{4.70d}$$

in cui  $P_z(z)$ ,  $P_\alpha(z)$ ,  $P_\beta(z)$  e  $\Phi_{ext}(z)$  sono le ampiezze dei carichi e, in analogia a quanto accade per le variabili fondamentali di Eq. (4.67), sono funzione della sola coordinata  $z$ .

Quindi, si sostituiscono nelle condizioni definite nelle Eq. (4.69) le forme armoniche dei carichi esterni di Eq. (4.70), la Eq. (4.67d) e le Eq. (3.47c), Eq. (3.47e), Eq. (3.47e); poi, nelle ultime tre, in analogia al caso di vibrazioni libere, si introducono le forme armoniche delle variabili fondamentali di Eq. (4.67). Dopodiché, si valutano le derivate in  $\alpha, \beta$  e si semplificano le rimanenti parti armoniche, ottenendo al bottom ( $z = -h/2$ ):

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} \left( -\frac{h}{2} \right) &= -\frac{C_{13}^1}{H_{\alpha_b}^1} \bar{\alpha} U_b^1 - \frac{C_{23}^1}{H_{\beta_b}^1} \bar{\beta} V_b^1 + \left( \frac{C_{23}^1}{H_{\beta_b}^1 R_\beta} + \frac{C_{13}^1}{H_{\alpha_b}^1 R_\alpha} \right) W_b^1 + C_{33}^1 W_{,z_b}^1 + \\ &+ e_{33}^1 \Phi_{,z_b}^1 = P_{z_b}, \end{aligned} \quad (4.71a)$$

$$\sigma_{\beta z} \left( -\frac{h}{2} \right) = \frac{C_{44}^1}{H_{\beta_b}^1} \bar{\beta} W_b^1 + C_{44}^1 V_{,z_b}^1 - \frac{C_{44}^1}{H_{\beta_b}^1 R_\beta} V_b^1 + \frac{e_{24}^1}{H_{\beta_b}^1} \bar{\beta} \Phi_b^1 = P_{\beta_b}, \quad (4.71b)$$

$$\sigma_{\alpha z} \left( -\frac{h}{2} \right) = \frac{C_{55}^1}{H_{\alpha_b}^1} \bar{\alpha} W_b^1 + C_{55}^1 U_{,z_b}^1 - \frac{C_{55}^1}{H_{\alpha_b}^1 R_\alpha} U_b^1 + \frac{e_{15}^1}{H_{\alpha_b}^1} \bar{\alpha} \Phi_b^1 = P_{\alpha_b}, \quad (4.71c)$$

$$\Phi_b^1 \left( -\frac{h}{2} \right) = \Phi_{ext_b}, \quad (4.71d)$$

mentre al top ( $z = +h/2$ ):

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} \left( +\frac{h}{2} \right) &= -\frac{C_{13}^M}{H_{\alpha_t}^M} \bar{\alpha} U_t^M - \frac{C_{23}^M}{H_{\beta_t}^M} \bar{\beta} V_t^M + \left( \frac{C_{23}^M}{H_{\beta_t}^M R_\beta} + \frac{C_{13}^M}{H_{\alpha_t}^M R_\alpha} \right) W_t^M + C_{33}^M W_{,z_t}^M + \\ &+ e_{33}^M \Phi_{,z_t}^M = P_{z_t}, \end{aligned} \quad (4.72a)$$

$$\sigma_{\beta z} \left( +\frac{h}{2} \right) = \frac{C_{44}^M}{H_{\beta_t}^M} \bar{\beta} W_t^M + C_{44}^M V_{,z_t}^M - \frac{C_{44}^M}{H_{\beta_t}^M R_\beta} V_t^M + \frac{e_{24}^M}{H_{\beta_t}^M} \bar{\beta} \Phi_t^M = P_{\beta_t}, \quad (4.72b)$$

$$\sigma_{\alpha z} \left( +\frac{h}{2} \right) = \frac{C_{55}^M}{H_{\alpha_t}^M} \bar{\alpha} W_t^M + C_{55}^M U_{,z_t}^M - \frac{C_{55}^M}{H_{\alpha_t}^M R_\alpha} U_t^M + \frac{e_{15}^M}{H_{\alpha_t}^M} \bar{\alpha} \Phi_t^M = P_{\alpha_t}, \quad (4.72c)$$

$$\Phi_t^M = \Phi_{ext_t}. \quad (4.72d)$$

I parametri  $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, R_\alpha, R_\beta, H_{\alpha_b}^1, H_{\beta_b}^1, H_{\alpha_t}^M$  e  $H_{\beta_t}^M$  si calcolano come indicato nel caso di analisi alle vibrazioni libere nel paragrafo 4.4. Le caratteristiche del materiale considerate sono, ovviamente, anche questa volta, quelle del primo e ultimo strato. In forma compatta le Eq. (4.71) e le Eq. (4.72) si riscrivono, rispettivamente, come:

$$B_{1_b}^1 U_b^1 + B_{2_b}^1 V_b^1 + B_{3_b}^1 W_b^1 + B_{4_b}^1 W_{,z_b}^1 + B_{5_b}^1 \Phi_{,z_b}^1 = P_{z_b}, \quad (4.73a)$$

$$B_{6_b}^1 V_b^1 + B_{7_b}^1 W_b^1 + B_{8_b}^1 \Phi_b^1 + B_{9_b}^1 V_{,z_b}^1 = P_{\beta_b}, \quad (4.73b)$$

$$B_{10_b}^1 U_b^1 + B_{11_b}^1 W_b^1 + B_{12_b}^1 \Phi_b^1 + B_{13_b}^1 U_{,z_b}^1 = P_{\alpha_b}, \quad (4.73c)$$

$$\Phi_b^1 \left( -\frac{h}{2} \right) = \Phi_{ext_b} \quad (4.73d)$$

e:

$$B_{1_t}^M U_t^1 + B_{2_t}^M V_t^1 + B_{3_t}^M W_t^1 + B_{4_t}^M W_{,z_t}^1 + B_{5_t}^M \Phi_{,z_t}^1 = P_{z_t}, \quad (4.74a)$$

$$B_{6t}^M V_t^1 + B_{7t}^M W_t^1 + B_{8t}^M \Phi_t^1 + B_{9t}^M V_{,zt}^1 = P_{\beta_t}, \quad (4.74b)$$

$$B_{10t}^M U_t^1 + B_{11t}^M W_t^1 + B_{12t}^M \Phi_t^1 + B_{13t}^M U_{,zt}^1 = P_{\alpha_t}, \quad (4.74c)$$

$$\Phi_t^M \left( +\frac{h}{2} \right) = \Phi_{ext_t}. \quad (4.74d)$$

Le Eq. (4.73) e le Eq. (4.74) possono essere riformulate in forma matriciale. Al bottom ( $z = -h/2$ ) le Eq. (4.73) diventano:

$$\begin{bmatrix} B_{1b}^1 & B_{2b}^1 & B_{3b}^1 & 0 & 0 & 0 & B_{4b}^1 & B_{5b}^1 \\ 0 & B_{6b}^1 & B_{7b}^1 & B_{8b}^1 & 0 & B_{9b}^1 & 0 & 0 \\ B_{10b}^1 & 0 & B_{11b}^1 & B_{12b}^1 & B_{13b}^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_b \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \\ \Phi \\ U_{,z} \\ V_{,z} \\ W_{,z} \\ \Phi_{,z} \end{Bmatrix}_b^1 = \begin{Bmatrix} P_{z_b} \\ P_{\beta_b} \\ P_{\alpha_b} \\ \Phi_{ext_b} \end{Bmatrix}. \quad (4.75)$$

Al top ( $z = +h/2$ ) le Eq. (4.74), invece, assumono la seguente forma:

$$\begin{bmatrix} B_{1t}^M & B_{2t}^M & B_{3t}^M & 0 & 0 & 0 & B_{4t}^M & B_{5t}^M \\ 0 & B_{6t}^M & B_{7t}^M & B_{8t}^M & 0 & B_{9t}^M & 0 & 0 \\ B_{10t}^M & 0 & B_{11t}^M & B_{12t}^M & B_{13t}^M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_t \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \\ \Phi \\ U_{,z} \\ V_{,z} \\ W_{,z} \\ \Phi_{,z} \end{Bmatrix}_t^M = \begin{Bmatrix} P_{z_t} \\ P_{\beta_t} \\ P_{\alpha_t} \\ \Phi_{ext_t} \end{Bmatrix}. \quad (4.76)$$

Nelle due equazioni matriciali si individuano le due matrici  $\mathbf{B}_b$  e  $\mathbf{B}_t$ , di dimensione  $4 \times 8$ , che contengono i coefficienti costanti per imporre le condizioni di carico esterno. Si osserva che  $\mathbf{B}_b$  e  $\mathbf{B}_t$  sono uguali a quelle ottenute nel sottoparagrafo 4.4.1 per le analisi alle vibrazioni libere in configurazione closed circuit. La Eq. (4.75) e la Eq. (4.76), scritte in forma compatta risultano:

$$\mathbf{B}_b^1 \mathbf{X}_b^1 = \mathbf{P}_{ext_b}, \quad (4.77a)$$

$$\mathbf{B}_t^M \mathbf{X}_t^M = \mathbf{P}_{ext_t}. \quad (4.77b)$$

Come per l'analisi alle vibrazioni libere, si procede sostituendo la Eq. (4.33), ovvero la soluzione del problema a meno delle condizioni di carico al contorno, nella Eq. (4.77b) ottenendo:

$$\mathbf{B}_t^M \mathbf{H}_m \mathbf{X}_b^1 = \mathbf{P}_{ext_t}, \quad (4.78)$$

dove il prodotto  $\mathbf{B}_t^M \mathbf{H}_m$  è sempre una matrice di dimensioni  $4 \times 8$ . Infine, raggruppando la Eq. (4.77a) con la appena ricavata Eq. (4.78), si ottiene il seguente sistema lineare:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_t^M \mathbf{H}_m \\ \mathbf{B}_b^1 \end{bmatrix} \mathbf{X}_b^1 = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_{ext_b} \\ \mathbf{P}_{ext_t} \end{Bmatrix}, \quad (4.79)$$

in formulazione compatta:

$$\mathbf{E} \mathbf{X}_b^1 = \mathbf{P}_{ext}, \quad (4.80)$$

dove si definisce la matrice di dimensioni  $8 \times 8$ :

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_t^M \mathbf{H}_m \\ \mathbf{B}_b^1 \end{bmatrix} \quad (4.81)$$

e il vettore dei carichi esterni di dimensioni  $8 \times 1$ :

$$\mathbf{P}_{ext} = \begin{Bmatrix} P_{z_t} \\ P_{\beta_t} \\ P_{\alpha_t} \\ \Phi_{extt} \\ P_{z_b} \\ P_{\beta_b} \\ P_{\alpha_b} \\ \Phi_{extb} \end{Bmatrix}. \quad (4.82)$$

Risolvendo il sistema di Eq. (4.79) si ottiene la soluzione al problema di analisi statica, in termini del vettore delle ampiezze delle variabili fondamentali di Eq. (4.67) e loro derivate prime in  $z$  al bottom  $b$  della struttura:

$$\mathbf{X}_b^1 = \mathbf{E}^{-1} \mathbf{P}_{ext}. \quad (4.83)$$

A partire da questa soluzione, in analogia a quanto descritto per le forme modali nel caso dell'analisi alle vibrazioni libere nel paragrafo 4.4.3, si ottiene la soluzione per l'ampiezza delle variabili fondamentali lungo tutto lo spessore  $h$  dal bottom  $b$  al top  $t$  del multistrato. A partire da esse, si valutano anche le soluzioni delle variabili primarie e secondarie per  $0 \leq z \leq h$  con le apposite relazioni (Eq. (3.12) e Eq. (3.16), per le prime, Eq. (3.47) e Eq. (3.48), per le seconde, in cui si inseriscono le forme armoniche di Eq. (4.67)).

In questa tesi si propongono, nello specifico, due possibili configurazioni statiche di carico da analizzare, definite configurazione *sensore* e *attuatore* elettrico.

#### 4.5.1 Sensore elettrico

Nel caso in cui l'analisi statica sia svolta su un sensore piezoelettrico per il monitoraggio dei carichi meccanici, il potenziale elettrostatico  $\varphi_{ext}$  sulle superfici esterne per  $z = \pm h/2$  è nullo, mentre risultano, eventualmente, diversi da zero i carichi meccanici  $p_z$ ,  $p_\alpha$  e  $p_\beta$  applicati ad esse. In questa condizione il vettore delle ampiezze dei carichi statici esterni di Eq. (4.82) diventa:

$$\mathbf{P}_{ext,sens} = \begin{Bmatrix} P_{z_t} \\ P_{\beta_t} \\ P_{\alpha_t} \\ 0 \\ P_{z_b} \\ P_{\beta_b} \\ P_{\alpha_b} \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (4.84)$$

Per cui il sistema di Eq. (4.80) risulta:

$$\mathbf{E} \mathbf{X}_b^1 = \mathbf{P}_{ext,sens}. \quad (4.85)$$

#### 4.5.2 Attuatore elettrico

Il caso duale è quello di un attuatore piezoelettrico per modificare la configurazione geometrica della struttura. In questo caso, il potenziale elettrostatico  $\varphi_{ext}$  sulle superfici esterne per  $z = \pm h/2$  è, eventualmente, diverso da zero, mentre risultano nulli i carichi meccanici  $p_z$ ,  $p_\alpha$  e  $p_\beta$  applicati ad esse. In questa condizione il vettore delle ampiezze dei carichi statici esterni di Eq. (4.82) diventa:

$$\mathbf{P}_{ext,att} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Phi_{ext_t} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Phi_{ext_b} \end{Bmatrix}. \quad (4.86)$$

Per cui il sistema di Eq. (4.80) risulta:

$$\mathbf{E}\mathbf{X}_b^1 = \mathbf{P}_{ext,att}. \quad (4.87)$$

### 4.6 Caso duale: analisi magneto-elastiche

La trattazione portata avanti per i problemi elettro-elastici accoppiati e il modello esatto 3D ottenuto per l'analisi alle vibrazioni libere e l'analisi statica ha il suo caso duale per i *problemi magneto-elasticci accoppiati*. Per approfondimenti e, in particolare, per i risultati di validazione del modello e di nuovi benchmark ottenuti con esso, si rimanda a Brischetto e Cesare [19]. Sia per quanto riguarda le analisi alle vibrazioni libere che per le analisi statiche, di seguito, si indicano solamente le differenze da apportare alla trattazione eseguita per il caso elettro-elastico per sviluppare il modello, a cui ci si riferisce rispettivamente come 3D- $u$ - $\psi_{\text{din}}$ , per le analisi alle vibrazioni libere, e 3D- $u$ - $\psi_{\text{stat}}$ , per le analisi statiche.

#### 4.6.1 Analisi alle vibrazioni libere

Rispetto ai problemi elettro-magneto-elasticci accoppiati, in assenza del campo magneto-statico le variabili fondamentali si riducono, come nel caso precedente, da cinque a quattro, poiché viene meno il potenziale elettrostatico  $\phi$ . Il sistema di Eq. (3.46) perde la Eq. (3.46d), cioè l'equazione di divergenza 3D dello spostamento elettrico  $\mathbf{D}$ , e nelle altre quattro equazioni si annullano tutti i termini legati al campo elettrostatico. Il sistema di Eq. (3.50) si riduce, quindi, al seguente:

$$\begin{aligned} & \left( -\frac{H_\beta C_{55}^k}{H_\alpha R_\alpha^2} - \frac{C_{55}^k}{R_\alpha R_\beta} \right) u^k + \left( \frac{C_{55}^k H_\beta}{R_\alpha} + \frac{C_{55}^k H_\alpha}{R_\beta} \right) u_{,z}^k + \left( \frac{C_{11}^k H_\beta}{H_\alpha} \right) u_{,\alpha\alpha}^k + \\ & + \left( \frac{C_{66}^k H_\alpha}{H_\beta} \right) u_{,\beta\beta}^k + (C_{55}^k H_\alpha H_\beta) u_{,zz}^k + (C_{12}^k + C_{66}^k) v_{,\alpha\beta}^k + \\ & + \left( \frac{C_{11}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} + \frac{C_{12}^k}{R_\beta} + \frac{C_{55}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} + \frac{C_{55}^k}{R_\beta} \right) w_{,\alpha}^k + (C_{13}^k H_\beta + C_{55}^k H_\beta) w_{,\alpha z}^k + \\ & + \left( +2 \frac{q_{15}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} + \frac{q_{15}^k}{R_\beta} \right) \psi_{,\alpha}^k + (q_{31}^k H_\beta + q_{15}^k H_\beta) \psi_{,\alpha z}^k = \rho^k H_\alpha H_\beta \ddot{u}^k, \end{aligned} \quad (4.88a)$$

$$\begin{aligned}
 & \left( -\frac{H_\alpha C_{44}^k}{H_\beta R_\beta^2} - \frac{C_{44}^k}{R_\alpha R_\beta} \right) v^k + \left( \frac{C_{44}^k H_\alpha}{R_\beta} + \frac{C_{44}^k H_\beta}{R_\alpha} \right) v_{,z}^k + \left( \frac{C_{66}^k H_\beta}{H_\alpha} \right) v_{,\alpha\alpha}^k + \\
 & + \left( \frac{C_{22}^k H_\alpha}{H_\beta} \right) v_{,\beta\beta}^k + \left( C_{44}^k H_\alpha H_\beta \right) v_{,zz}^k + \left( C_{12}^k + C_{66}^k \right) u_{,\alpha\beta}^k + \\
 & + \left( \frac{C_{44}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta} + \frac{C_{44}^k}{R_\alpha} + \frac{C_{22}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta} + \frac{C_{12}^k}{R_\alpha} \right) w_{,\beta}^k + \left( C_{44}^k H_\alpha + C_{23}^k H_\alpha \right) w_{,\beta z}^k + \\
 & + \left( +2 \frac{q_{24}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta} + \frac{q_{24}^k}{R_\alpha} \right) \psi_{,\beta}^k + \left( q_{32}^k H_\alpha + q_{24}^k H_\alpha \right) \psi_{,\beta z}^k = \rho^k H_\alpha H_\beta \ddot{v}^k,
 \end{aligned} \tag{4.88b}$$

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{C_{13}^k}{R_\alpha R_\beta} + \frac{C_{23}^k}{R_\alpha R_\beta} - \frac{C_{11}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha^2} - \frac{2C_{12}^k}{R_\alpha R_\beta} - \frac{C_{22}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta^2} \right) w^k + \\
 & + \left( -\frac{C_{55}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} + \frac{C_{13}^k}{R_\beta} - \frac{C_{11}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} - \frac{C_{12}^k}{R_\beta} \right) u_{,\alpha}^k + \\
 & + \left( -\frac{C_{44}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta} + \frac{C_{23}^k}{R_\alpha} - \frac{C_{22}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta} - \frac{C_{12}^k}{R_\alpha} \right) v_{,\beta}^k + \left( \frac{C_{33}^k H_\beta}{R_\alpha} + \frac{C_{33}^k H_\alpha}{R_\beta} \right) w_{,z}^k + \\
 & + \left( C_{55}^k H_\beta + C_{13}^k H_\beta \right) u_{,\alpha z}^k + \left( C_{44}^k H_\alpha + C_{23}^k H_\alpha \right) v_{,\beta z}^k + \left( \frac{C_{55}^k H_\beta}{H_\alpha} \right) w_{,\alpha\alpha}^k + \\
 & + \left( \frac{C_{44}^k H_\alpha}{H_\beta} \right) w_{,\beta\beta}^k + \left( C_{33}^k H_\alpha H_\beta \right) w_{,zz}^k + \\
 & + \left( -\frac{q_{31}^k H_\beta}{R_\alpha} - \frac{q_{32}^k H_\alpha}{R_\beta} + \frac{q_{33}^k H_\beta}{R_\alpha} + \frac{q_{33}^k H_\alpha}{R_\beta} \right) \psi_{,z}^k + \frac{q_{15}^k H_\beta}{H_\alpha} \psi_{,\alpha\alpha}^k + \frac{q_{24}^k H_\alpha}{H_\beta} \psi_{,\beta\beta}^k + \\
 & + q_{33}^k H_\alpha H_\beta \psi_{,zz}^k = \rho^k H_\alpha H_\beta \ddot{w}^k,
 \end{aligned} \tag{4.88c}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{q_{15}^k}{H_\alpha^2 R_\alpha} u_{,\alpha}^k + \left( \frac{q_{15}^k}{H_\alpha} + \frac{q_{31}^k}{H_\alpha} \right) u_{,\alpha z}^k - \frac{q_{24}^k}{H_\beta^2 R_\beta} v_{,\beta}^k + \left( \frac{q_{24}^k}{H_\beta} + \frac{q_{32}^k}{H_\beta} \right) v_{,\beta z}^k + \\
 & + \left( \frac{q_{31}^k}{H_\alpha R_\alpha} + \frac{q_{32}^k}{H_\beta R_\beta} \right) w_{,z}^k + \frac{q_{15}^k}{H_\alpha^2} w_{,\alpha\alpha}^k + \frac{q_{24}^k}{H_\beta^2} w_{,\beta\beta}^k + q_{33}^k w_{zz}^k - \frac{\mu_{11}^k}{H_\alpha^2} \psi_{,\alpha\alpha}^k + \\
 & - \frac{\mu_{22}^k}{H_\beta^2} \psi_{,\beta\beta}^k - \mu_{33}^k \psi_{,zz}^k = 0.
 \end{aligned} \tag{4.88d}$$

Le variabili fondamentali  $u$ ,  $v$ ,  $w$  e  $\psi$ , in analogia al caso elettro-elastico, assumono la seguente forma armonica:

$$u^k(\alpha, \beta, z, t) = U^k(z) e^{i\omega t} \cos(\bar{\alpha}\alpha) \sin(\bar{\beta}\beta), \tag{4.89a}$$

$$v^k(\alpha, \beta, z, t) = V^k(z) e^{i\omega t} \sin(\bar{\alpha}\alpha) \cos(\bar{\beta}\beta), \tag{4.89b}$$

$$w^k(\alpha, \beta, z, t) = W^k(z) e^{i\omega t} \sin(\bar{\alpha}\alpha) \sin(\bar{\beta}\beta), \tag{4.89c}$$

$$\psi^k(\alpha, \beta, z, t) = \Psi^k(z) e^{i\omega t} \sin(\bar{\alpha}\alpha) \sin(\bar{\beta}\beta). \tag{4.89d}$$

Le condizioni al contorno di vincolo di semplice appoggio da considerare sono:

$$\begin{aligned}
 \psi^k &= 0, & w^k &= 0, & v^k &= 0, & \sigma_{\alpha\alpha}^k &= 0, & \sigma_{\alpha\alpha}^k &= 0 & \text{per } \alpha = 0, a, \\
 \psi^k &= 0, & w^k &= 0, & u^k &= 0, & \sigma_{\alpha\alpha}^k &= 0, & \sigma_{\beta\beta}^k &= 0 & \text{per } \beta = 0, b.
 \end{aligned} \tag{4.90}$$

Infine, le condizioni di carico sulle superfici esterne che si trattano sono sempre la configurazione closed circuit e open circuit, le quali assumono la seguente forma:

$$\sigma_{zz} = 0, \quad \sigma_{\alpha z} = 0, \quad \sigma_{\beta z} = 0 \quad \psi = 0 \quad \text{per} \quad z = \pm h/2, \quad (4.91)$$

per la configurazione closed circuit, mentre:

$$\sigma_{zz} = 0, \quad \sigma_{\alpha z} = 0, \quad \sigma_{\beta z} = 0 \quad \mathcal{B}_z = 0 \quad \text{per} \quad z = \pm h/2, \quad (4.92)$$

per quella open circuit.

#### 4.6.2 Analisi statica

Considerando l'analisi statica viene meno, come nel caso elettro-elastico, la dipendenza dal tempo  $t$  del problema. Le Eq. (4.88) si semplificano come segue:

$$\begin{aligned} & \left( -\frac{H_\beta C_{55}^k}{H_\alpha R_\alpha^2} - \frac{C_{55}^k}{R_\alpha R_\beta} \right) u^k + \left( \frac{C_{55}^k H_\beta}{R_\alpha} + \frac{C_{55}^k H_\alpha}{R_\beta} \right) u_{,z}^k + \left( \frac{C_{11}^k H_\beta}{H_\alpha} \right) u_{,\alpha\alpha}^k + \\ & + \left( \frac{C_{66}^k H_\alpha}{H_\beta} \right) u_{,\beta\beta}^k + (C_{55}^k H_\alpha H_\beta) u_{,zz}^k + (C_{12}^k + C_{66}^k) v_{,\alpha\beta}^k + \\ & + \left( \frac{C_{11}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} + \frac{C_{12}^k}{R_\beta} + \frac{C_{55}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} + \frac{C_{55}^k}{R_\beta} \right) w_{,\alpha}^k + (C_{13}^k H_\beta + C_{55}^k H_\beta) w_{,\alpha z}^k + \\ & + \left( +2 \frac{q_{15}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} + \frac{q_{15}^k}{R_\beta} \right) \psi_{,\alpha}^k + (q_{31}^k H_\beta + q_{15}^k H_\beta) \psi_{,\alpha z}^k = 0, \end{aligned} \quad (4.93a)$$

$$\begin{aligned} & \left( -\frac{H_\alpha C_{44}^k}{H_\beta R_\beta^2} - \frac{C_{44}^k}{R_\alpha R_\beta} \right) v^k + \left( \frac{C_{44}^k H_\alpha}{R_\beta} + \frac{C_{44}^k H_\beta}{R_\alpha} \right) v_{,z}^k + \left( \frac{C_{66}^k H_\beta}{H_\alpha} \right) v_{,\alpha\alpha}^k + \\ & + \left( \frac{C_{22}^k H_\alpha}{H_\beta} \right) v_{,\beta\beta}^k + (C_{44}^k H_\alpha H_\beta) v_{,zz}^k + (C_{12}^k + C_{66}^k) u_{,\alpha\beta}^k + \\ & + \left( \frac{C_{44}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta} + \frac{C_{44}^k}{R_\alpha} + \frac{C_{22}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta} + \frac{C_{12}^k}{R_\alpha} \right) w_{,\beta}^k + (C_{44}^k H_\alpha + C_{23}^k H_\alpha) w_{,\beta z}^k + \\ & + \left( +2 \frac{q_{24}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta} + \frac{q_{24}^k}{R_\alpha} \right) \psi_{,\beta}^k + (q_{32}^k H_\alpha + q_{24}^k H_\alpha) \psi_{,\beta z}^k = 0, \end{aligned} \quad (4.93b)$$

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{C_{13}^k}{R_\alpha R_\beta} + \frac{C_{23}^k}{R_\alpha R_\beta} - \frac{C_{11}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha^2} - \frac{2C_{12}^k}{R_\alpha R_\beta} - \frac{C_{22}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta^2} \right) w^k + \\
& + \left( -\frac{C_{55}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} + \frac{C_{13}^k}{R_\beta} - \frac{C_{11}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} - \frac{C_{12}^k}{R_\beta} \right) u_{,\alpha}^k + \\
& + \left( -\frac{C_{44}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta} + \frac{C_{23}^k}{R_\alpha} - \frac{C_{22}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta} - \frac{C_{12}^k}{R_\alpha} \right) v_{,\beta}^k + \left( \frac{C_{33}^k H_\beta}{R_\alpha} + \frac{C_{33}^k H_\alpha}{R_\beta} \right) w_{,z}^k + \\
& + \left( C_{55}^k H_\beta + C_{13}^k H_\beta \right) u_{,\alpha z}^k + \left( C_{44}^k H_\alpha + C_{23}^k H_\alpha \right) v_{,\beta z}^k + \left( \frac{C_{55}^k H_\beta}{H_\alpha} \right) w_{,\alpha\alpha}^k + \\
& + \left( \frac{C_{44}^k H_\alpha}{H_\beta} \right) w_{,\beta\beta}^k + \left( C_{33}^k H_\alpha H_\beta \right) w_{,zz}^k + \\
& + \left( -\frac{q_{31}^k H_\beta}{R_\alpha} - \frac{q_{32}^k H_\alpha}{R_\beta} + \frac{q_{33}^k H_\beta}{R_\alpha} + \frac{q_{33}^k H_\alpha}{R_\beta} \right) \psi_{,z}^k + \frac{q_{15}^k H_\beta}{H_\alpha} \psi_{,\alpha\alpha}^k + \frac{q_{24}^k H_\alpha}{H_\beta} \psi_{,\beta\beta}^k + \\
& + q_{33}^k H_\alpha H_\beta \psi_{,zz}^k = 0 \ddot{w}^k,
\end{aligned} \tag{4.93c}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{q_{15}^k}{H_\alpha^2 R_\alpha} u_{,\alpha}^k + \left( \frac{q_{15}^k}{H_\alpha} + \frac{q_{31}^k}{H_\alpha} \right) u_{,\alpha z}^k - \frac{q_{24}^k}{H_\beta^2 R_\beta} v_{,\beta}^k + \left( \frac{q_{24}^k}{H_\beta} + \frac{q_{32}^k}{H_\beta} \right) v_{,\beta z}^k + \\
& + \left( \frac{q_{31}^k}{H_\alpha R_\alpha} + \frac{q_{32}^k}{H_\beta R_\beta} \right) w_{,z}^k + \frac{q_{15}^k}{H_\alpha^2} w_{,\alpha\alpha}^k + \frac{q_{24}^k}{H_\beta^2} w_{,\beta\beta}^k + q_{33}^k w_{,zz}^k - \frac{\mu_{11}^k}{H_\alpha^2} \psi_{,\alpha\alpha}^k + \\
& - \frac{\mu_{22}^k}{H_\beta^2} \psi_{,\beta\beta}^k - \mu_{33}^k \psi_{,zz}^k = 0.
\end{aligned} \tag{4.93d}$$

Anche in questo caso, si perde il termine inerziale nelle prime tre equazioni.

Le forme armoniche di Eq. (4.89) assunte dalle incognite, perdendo la dipendenza dal tempo, diventano:

$$u^k(\alpha, \beta, z) = U^k(z) \cos(\bar{\alpha}\alpha) \sin(\bar{\beta}\beta), \tag{4.94a}$$

$$v^k(\alpha, \beta, z) = V^k(z) \sin(\bar{\alpha}\alpha) \cos(\bar{\beta}\beta), \tag{4.94b}$$

$$w^k(\alpha, \beta, z) = W^k(z) \sin(\bar{\alpha}\alpha) \sin(\bar{\beta}\beta), \tag{4.94c}$$

$$\psi^k(\alpha, \beta, z) = \Psi^k(z) \sin(\bar{\alpha}\alpha) \sin(\bar{\beta}\beta). \tag{4.94d}$$

Le condizioni al contorno di vincolo di semplice appoggio da considerare sono sempre definite dalle Eq. (4.90), mentre le condizioni di carico sulle superfici esterne che si possono trattare, in generale, sono:

$$\sigma_{zz} = p_z, \quad \sigma_{\alpha z} = p_\alpha, \quad \sigma_{\beta z} = p_\beta, \quad \psi = \psi_{ext} \quad \text{per} \quad z = \pm h/2, \tag{4.95}$$

con i carichi esterni così definiti in forma armonica:

$$p_z = P_z(z) \sin(\bar{\alpha}\alpha) \sin(\bar{\beta}\beta), \tag{4.96a}$$

$$p_\alpha = P_\alpha(z) \cos(\bar{\alpha}\alpha) \sin(\bar{\beta}\beta), \tag{4.96b}$$

$$p_\beta = P_\beta(z) \sin(\bar{\alpha}\alpha) \cos(\bar{\beta}\beta), \tag{4.96c}$$

$$\psi_{ext} = \Psi_{ext}(z) \sin(\bar{\alpha}\alpha) \sin(\bar{\beta}\beta), \tag{4.96d}$$

in cui  $P_z(z)$ ,  $P_\alpha(z)$ ,  $P_\beta(z)$  e  $\Psi_{ext}(z)$  sono le ampiezze dei carichi. In particolare, si possono considerare le due specifiche configurazioni di sensore e attuatore magnetico. Per cui, nel primo caso si impone:

$$\sigma_{zz} = p_z, \quad \sigma_{\alpha z} = p_\alpha, \quad \sigma_{\beta z} = p_\beta, \quad \psi = 0 \quad \text{per } z = \pm h/2, \quad (4.97)$$

invece, nel secondo:

$$\sigma_{zz} = 0, \quad \sigma_{\alpha z} = 0, \quad \sigma_{\beta z} = 0, \quad \psi = \psi_{ext} \quad \text{per } z = \pm h/2. \quad (4.98)$$

## Capitolo 5

# Modello 3D esatto per analisi elettro-magneto-elastiche accoppiate di gusci sferici multistrato

Nel capitolo precedente, è stata presentata la formulazione del modello 3D per analisi elettro-elastiche accoppiate e si è accennato anche a quella per analisi 3D magneto-elastiche accoppiate. Ora, vengono considerati tutti e tre i campi insieme (meccanico elastico, elettrico e magnetico) e si riporta la trattazione matematica dei più generici problemi elettro-magneto-elastici accoppiati applicati a strutture a guscio sferico.

Nei capitoli 6 e 7 il presente modello viene validato e vengono presentati nuovi benchmark al variare di numeri di semionda, condizioni di carico sulle superfici esterne, geometrie e spessori.

La trattazione proposta ricalca quella seguita nel caso di problemi elettro-elastici accoppiati, ponendo in evidenza le necessarie differenze caratteristiche di questo caso. Nella parte iniziale della formulazione, si tiene conto, nuovamente, anche della dipendenza in forma armonica dal tempo  $t$  delle variabili e della presenza dei carichi inerziali. In un secondo momento, si distinguono le trattazioni per ottenere il modello 3D esatto per le analisi alle vibrazioni libere, indicato come 3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{din}}$ , e il modello 3D esatto per le analisi statiche, definito 3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$ , dove la dipendenza delle variabili da  $t$  e i carichi inerziali vengono meno.

### 5.1 Risoluzione nelle direzioni in pianta e nel tempo $t$

Il sistema di Eq. (3.50), ovvero il sistema di cinque equazioni differenziali alle derivate parziali di secondo ordine e primo grado nelle cinque variabili fondamentali, permette di trovare una sua soluzione esatta solo nel caso in cui queste ultime abbiano la seguente particolare dipendenza armonica dalle direzioni  $\alpha$  e  $\beta$  e dal tempo  $t$ :

$$u^k(\alpha, \beta, z, t) = U^k(z)e^{i\omega t} \cos(\bar{\alpha}\alpha) \sin(\bar{\beta}\beta), \quad (5.1a)$$

$$v^k(\alpha, \beta, z, t) = V^k(z)e^{i\omega t} \sin(\bar{\alpha}\alpha) \cos(\bar{\beta}\beta), \quad (5.1b)$$

$$w^k(\alpha, \beta, z, t) = W^k(z)e^{i\omega t} \sin(\bar{\alpha}\alpha) \sin(\bar{\beta}\beta), \quad (5.1c)$$

$$\phi^k(\alpha, \beta, z, t) = \Phi^k(z)e^{i\omega t} \sin(\bar{\alpha}\alpha) \sin(\bar{\beta}\beta), \quad (5.1d)$$

$$\psi^k(\alpha, \beta, z, t) = \Psi^k(z)e^{i\omega t} \sin(\bar{\alpha}\alpha) \sin(\bar{\beta}\beta). \quad (5.1e)$$

Anche in questo caso, le ampiezze,  $U^k(z)$ ,  $V^k(z)$ ,  $W^k(z)$ ,  $\Phi^k(z)$  e  $\Psi^k(z)$ , dipendono dalla sola coordinata  $z$ , invece, la parte armonica è funzione delle sole coordinate  $\alpha$  e  $\beta$  e del tempo  $t$ .

Le condizioni al contorno di vincolo di semplice appoggio sui quattro lati del guscio per il caso elettro-magneto-elastico sono:

$$\begin{aligned} \phi^k &= 0, & \psi^k &= 0, & w^k &= 0, & v^k &= 0, & \sigma_{\alpha\alpha}^k &= 0, & \sigma_{\alpha\alpha}^k &= 0 & \text{per } \alpha = 0, a, \\ \phi^k &= 0, & \psi^k &= 0, & w^k &= 0, & u^k &= 0, & \sigma_{\alpha\alpha}^k &= 0, & \sigma_{\beta\beta}^k &= 0 & \text{per } \beta = 0, b. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Le Eq. (5.1) così definite, vengono inserite nelle Eq. (3.50) e, valutando le opportune derivate, si ottiene:

$$\begin{aligned} & \left( -\frac{H_\beta C_{55}^k}{H_\alpha R_\alpha^2} - \frac{C_{55}^k}{R_\alpha R_\beta} - \bar{\alpha}^2 \frac{C_{11}^k H_\beta}{H_\alpha} - \bar{\beta}^2 \frac{C_{66}^k H_\alpha}{H_\beta} + \rho^k H_\alpha H_\beta \omega^2 \right) U^k + \\ & + \left( -\bar{\alpha} \bar{\beta} C_{12}^k - \bar{\alpha} \bar{\beta} C_{66}^k \right) V^k + \left( \bar{\alpha} \frac{C_{11}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} + \bar{\alpha} \frac{C_{12}^k}{R_\beta} + \bar{\alpha} \frac{C_{55}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} + \bar{\alpha} \frac{C_{55}^k}{R_\beta} \right) W^k + \\ & + \left( \frac{C_{55}^k H_\beta}{R_\alpha} + \frac{C_{55}^k H_\alpha}{R_\beta} \right) U_{,z}^k + \left( \bar{\alpha} C_{13}^k H_\beta + \bar{\alpha} C_{55}^k H_\beta \right) W_{,z}^k + C_{55}^k H_\alpha H_\beta U_{,zz}^k + \\ & + \left( +2\bar{\alpha} \frac{e_{15}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} + \bar{\alpha} \frac{e_{15}^k}{R_\beta} \right) \Phi^k + \left( \bar{\alpha} e_{31}^k H_\beta + \bar{\alpha} e_{15}^k H_\beta \right) \Phi_{,z}^k + \\ & + \left( +2\bar{\alpha} \frac{q_{15}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} + \bar{\alpha} \frac{q_{15}^k}{R_\beta} \right) \Psi^k + \left( \bar{\alpha} q_{31}^k H_\beta + \bar{\alpha} q_{15}^k H_\beta \right) \Psi_{,z}^k = 0, \end{aligned} \quad (5.3a)$$

$$\begin{aligned} & \left( -\frac{H_\alpha C_{44}^k}{H_\beta R_\beta^2} - \frac{C_{44}^k}{R_\alpha R_\beta} - \bar{\alpha}^2 \frac{C_{66}^k H_\beta}{H_\alpha} - \bar{\beta}^2 \frac{C_{22}^k H_\alpha}{H_\beta} + \rho^k H_\alpha H_\beta \omega^2 \right) V^k + \\ & + \left( -\bar{\alpha} \bar{\beta} C_{12}^k - \bar{\alpha} \bar{\beta} C_{66}^k \right) U^k + \left( \bar{\beta} \frac{C_{44}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta} + \bar{\beta} \frac{C_{44}^k}{R_\alpha} + \bar{\beta} \frac{C_{22}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta} + \bar{\beta} \frac{C_{12}^k}{R_\alpha} \right) W^k + \\ & + \left( \frac{C_{44}^k H_\alpha}{R_\beta} + \frac{C_{44}^k H_\beta}{R_\alpha} \right) V_{,z}^k + \left( \bar{\beta} C_{44}^k H_\alpha + \bar{\beta} C_{23}^k H_\alpha \right) W_z^k + C_{44}^k H_\alpha H_\beta V_{,zz}^k + \\ & + \left( +2\bar{\beta} \frac{e_{24}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta} + \bar{\beta} \frac{e_{24}^k}{R_\alpha} \right) \Phi^k + \left( \bar{\beta} e_{32}^k H_\alpha + \bar{\beta} e_{24}^k H_\alpha \right) \Phi_{,z}^k + \\ & + \left( +2\bar{\beta} \frac{q_{24}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta} + \bar{\beta} \frac{q_{24}^k}{R_\alpha} \right) \Psi^k + \left( \bar{\beta} q_{32}^k H_\alpha + \bar{\beta} q_{24}^k H_\alpha \right) \Psi_{,z}^k = 0, \end{aligned} \quad (5.3b)$$

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{C_{13}^k}{R_\alpha R_\beta} + \frac{C_{23}^k}{R_\alpha R_\beta} - \frac{C_{11}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha^2} - \frac{2C_{12}^k}{R_\alpha R_\beta} - \frac{C_{22}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta^2} - \bar{\alpha}^2 \frac{C_{55}^k H_\beta}{H_\alpha} - \bar{\beta}^2 \frac{C_{44}^k H_\alpha}{H_\beta} + \rho^k H_\alpha H_\beta \omega^2 \right) W^k + \\
& + \left( \bar{\alpha} \frac{C_{55}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} - \bar{\alpha} \frac{C_{13}^k}{R_\beta} + \bar{\alpha} \frac{C_{11}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} + \bar{\alpha} \frac{C_{12}^k}{R_\beta} \right) U^k + \\
& + \left( \bar{\beta} \frac{C_{44}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta} - \bar{\beta} \frac{C_{23}^k}{R_\alpha} + \bar{\beta} \frac{C_{22}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta} + \bar{\beta} \frac{C_{12}^k}{R_\alpha} \right) V^k + \\
& + \left( -\bar{\alpha} C_{55}^k H_\beta - \bar{\alpha} C_{13}^k H_\beta \right) U_{,z}^k + \left( -\bar{\beta} C_{44}^k H_\alpha - \bar{\beta} C_{23}^k H_\alpha \right) V_{,z}^k + \left( \frac{C_{33}^k H_\beta}{R_\alpha} + \frac{C_{33}^k H_\alpha}{R_\beta} \right) W_{,z}^k + \\
& + C_{33}^k H_\alpha H_\beta W_{,zz}^k + \left( -\bar{\alpha}^2 \frac{e_{15}^k H_\beta}{H_\alpha} - \bar{\beta}^2 \frac{e_{24}^k H_\alpha}{H_\beta} \right) \Phi^k + \left( -\bar{\alpha}^2 \frac{q_{15}^k H_\beta}{H_\alpha} - \bar{\beta}^2 \frac{q_{24}^k H_\alpha}{H_\beta} \right) \Psi^k + \\
& + \left( -\frac{e_{31}^k H_\beta}{R_\alpha} - \frac{e_{32}^k H_\alpha}{R_\beta} + \frac{e_{33}^k H_\beta}{R_\alpha} + \frac{e_{33}^k H_\alpha}{R_\beta} \right) \Phi_{,z}^k + e_{33}^k H_\alpha H_\beta \Phi_{,zz}^k + \\
& + \left( -\frac{q_{31}^k H_\beta}{R_\alpha} - \frac{q_{32}^k H_\alpha}{R_\beta} + \frac{q_{33}^k H_\beta}{R_\alpha} + \frac{q_{33}^k H_\alpha}{R_\beta} \right) \Psi_{,z}^k + q_{33}^k H_\alpha H_\beta \Psi_{,zz}^k = 0,
\end{aligned} \tag{5.3c}$$

$$\begin{aligned}
& \bar{\alpha} \frac{e_{15}^k}{H_\alpha^2 R_\alpha} U^k + \bar{\beta} \frac{e_{24}^k}{H_\beta^2 R_\beta} V^k + \left( -\bar{\alpha}^2 \frac{e_{15}^k}{H_\alpha^2} - \bar{\beta}^2 \frac{e_{24}^k}{H_\beta^2} \right) W^k + \left( -\bar{\alpha} \frac{e_{15}^k}{H_\alpha} - \bar{\alpha} \frac{e_{31}^k}{H_\alpha} \right) U_{,z}^k + \\
& + \left( -\bar{\beta} \frac{e_{24}^k}{H_\beta} - \bar{\beta} \frac{e_{32}^k}{H_\beta} \right) V_{,z}^k + \left( \frac{e_{31}^k}{H_\alpha R_\alpha} + \frac{e_{32}^k}{H_\beta R_\beta} \right) W_{,z}^k + e_{33}^k W_{zz}^k + \\
& + \left( \bar{\alpha}^2 \frac{e_{11}^k}{H_\alpha^2} + \bar{\beta}^2 \frac{e_{22}^k}{H_\beta^2} \right) \Phi^k - e_{33}^k \Phi_{,zz}^k + \left( \bar{\alpha}^2 \frac{d_{11}^k}{H_\alpha^2} + \bar{\beta}^2 \frac{d_{22}^k}{H_\beta^2} \right) \Psi^k - d_{33}^k \Psi_{,zz}^k = 0,
\end{aligned} \tag{5.3d}$$

$$\begin{aligned}
& \bar{\alpha} \frac{q_{15}^k}{H_\alpha^2 R_\alpha} U^k + \bar{\beta} \frac{q_{24}^k}{H_\beta^2 R_\beta} V^k + \left( -\bar{\alpha}^2 \frac{q_{15}^k}{H_\alpha^2} - \bar{\beta}^2 \frac{q_{24}^k}{H_\beta^2} \right) W^k + \left( -\bar{\alpha} \frac{q_{15}^k}{H_\alpha} - \bar{\alpha} \frac{q_{31}^k}{H_\alpha} \right) U_{,z}^k + \\
& + \left( -\bar{\beta} \frac{q_{24}^k}{H_\beta} - \bar{\beta} \frac{q_{32}^k}{H_\beta} \right) V_{,z}^k + \left( \frac{q_{31}^k}{H_\alpha R_\alpha} + \frac{q_{32}^k}{H_\beta R_\beta} \right) W_{,z}^k + q_{33}^k W_{zz}^k + \\
& + \left( \bar{\alpha}^2 \frac{d_{11}^k}{H_\alpha^2} + \bar{\beta}^2 \frac{d_{22}^k}{H_\beta^2} \right) \Phi^k - d_{33}^k \Phi_{,zz}^k + \left( \bar{\alpha}^2 \frac{\mu_{11}^k}{H_\alpha^2} + \bar{\beta}^2 \frac{\mu_{22}^k}{H_\beta^2} \right) \Psi^k - \mu_{33}^k \Psi_{,zz}^k = 0.
\end{aligned} \tag{5.3e}$$

La forma armonica degli spostamenti in  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $t$  ha permesso di valutarne in maniera esatta le derivate in queste coordinate, essendo note le derivate delle funzioni armoniche. Inoltre, una volta eseguite queste derivate, in ognuna delle equazioni, la parte armonica delle diverse variabili fondamentali, funzione di  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $t$  può essere raccolta a fattor comune e rimossa, essendo uguale per tutti i termini. Così facendo, le equazioni rimangono dipendenti dalla sola coordinata  $z$ . Le Eq. (5.3) risultano un sistema di cinque equazioni differenziali di secondo ordine nella coordinata  $z$ , che, in forma compatta si possono riscrivere come segue:

$$A_1^k U^k + A_2^k V^k + A_3^k W^k + A_4^k \Phi^k + A_5^k \Psi^k + A_6^k U_{,z}^k + A_7^k W_{,z}^k + A_8^k \Phi_{,z}^k + A_9^k \Psi_{,z}^k + A_{10}^k U_{,zz}^k = 0, \tag{5.4a}$$

$$A_{11}^k U^k + A_{12}^k V^k + A_{13}^k W^k + A_{14}^k \Phi^k + A_{15}^k \Psi^k + A_{16}^k V_{,z}^k + A_{17}^k W_{,z}^k + A_{18}^k \Phi_{,z}^k + A_{19}^k \Psi_{,z}^k + A_{20}^k V_{,zz}^k = 0, \tag{5.4b}$$

$$A_{21}^k U^k + A_{22}^k V^k + A_{23}^k W^k + A_{24}^k \Phi^k + A_{25}^k \Psi^k + A_{26}^k U_{,z}^k + A_{27}^k V_{,z}^k + A_{28}^k W_{,z}^k + A_{29}^k \Phi_{,z}^k + A_{30}^k \Psi_{,z}^k + A_{31}^k W_{,zz}^k + A_{32}^k \Phi_{,zz}^k + A_{33}^k \Psi_{,zz}^k = 0, \quad (5.4c)$$

$$A_{34}^k U^k + A_{35}^k V^k + A_{36}^k W^k + A_{37}^k \Phi^k + A_{38}^k \Psi^k + A_{39}^k U_{,z}^k + A_{40}^k V_{,z}^k + A_{41}^k W_{,z}^k + A_{42}^k W_{,zz}^k + A_{43}^k \Phi_{,zz}^k + A_{44}^k \Psi_{,zz}^k = 0, \quad (5.4d)$$

$$A_{45}^k U^k + A_{46}^k V^k + A_{47}^k W^k + A_{48}^k \Phi^k + A_{49}^k \Psi^k + A_{50}^k U_{,z}^k + A_{51}^k V_{,z}^k + A_{52}^k W_{,z}^k + A_{53}^k W_{,zz}^k + A_{54}^k \Phi_{,zz}^k + A_{55}^k \Psi_{,zz}^k = 0. \quad (5.4e)$$

In questo caso, gli unici coefficienti  $A_{ij}$  che hanno una dipendenza dai termini inerziali delle equazioni di governo, e, in particolare, dalla frequenza circolare  $\omega^2$ , sono  $A_1$ ,  $A_{12}$  e  $A_{23}$  che moltiplicano, rispettivamente,  $U$ ,  $V$  e  $W$ .

## 5.2 Risoluzione nella direzione z

Le Eq. (5.3) sono definite per ogni singolo strato fisico, come indicato dall'apice  $k$ . Si introducono gli strati matematici  $j$  [21]. Il multistrato risulta così suddiviso in un numero complessivo  $M$  di strati matematici  $j$ .

Pertanto, da questo punto in poi, le Eq. (5.4) per il modello 3D elettro-magneto-elastico accoppiato vengono considerate e scritte per il generico strato matematico, indicato con l'apice  $j$ , per cui diventano:

$$A_1^j U^j + A_2^j V^j + A_3^j W^j + A_4^j \Phi^j + A_5^j \Psi^j + A_6^j U_{,z}^j + A_7^j W_{,z}^j + A_8^j \Phi_{,z}^j + A_9^j \Psi_{,z}^j + A_{10}^j U_{,zz}^j = 0, \quad (5.5a)$$

$$A_{11}^j U^j + A_{12}^j V^j + A_{13}^j W^j + A_{14}^j \Phi^j + A_{15}^j \Psi^j + A_{16}^j V_{,z}^j + A_{17}^j W_{,z}^j + A_{18}^j \Phi_{,z}^j + A_{19}^j \Psi_{,z}^j + A_{20}^j V_{,zz}^j = 0, \quad (5.5b)$$

$$A_{21}^j U^j + A_{22}^j V^j + A_{23}^j W^j + A_{24}^j \Phi^j + A_{25}^j \Psi^j + A_{26}^j U_{,z}^j + A_{27}^j V_{,z}^j + A_{28}^j W_{,z}^j + A_{29}^j \Phi_{,z}^j + A_{30}^j \Psi_{,z}^j + A_{31}^j W_{,zz}^j + A_{32}^j \Phi_{,zz}^j + A_{33}^j \Psi_{,zz}^j = 0, \quad (5.5c)$$

$$A_{34}^j U^j + A_{35}^j V^j + A_{36}^j W^j + A_{37}^j \Phi^j + A_{38}^j \Psi^j + A_{39}^j U_{,z}^j + A_{40}^j V_{,z}^j + A_{41}^j W_{,z}^j + A_{42}^j W_{,zz}^j + A_{43}^j \Phi_{,zz}^j + A_{44}^j \Psi_{,zz}^j = 0, \quad (5.5d)$$

$$A_{45}^j U^j + A_{46}^j V^j + A_{47}^j W^j + A_{48}^j \Phi^j + A_{49}^j \Psi^j + A_{50}^j U_{,z}^j + A_{51}^j V_{,z}^j + A_{52}^j W_{,z}^j + A_{53}^j W_{,zz}^j + A_{54}^j \Phi_{,zz}^j + A_{55}^j \Psi_{,zz}^j = 0. \quad (5.5e)$$

Per procedere con la soluzione del sistema appena definito, si vogliono disaccoppiare le Eq. (5.5c), (5.5d) e (5.5e) in modo tale che compaia una sola derivata seconda in ognuna di esse. Con alcuni passaggi, in forma compatta e mettendo in evidenza le derivate seconde, diventano:

$$P_1^j W_{,zz}^j = -P_2^j U^j - P_3^j V^j - P_4^j W^j - P_5^j \Phi^j - P_6^j \Psi^j - P_7^j U_{,z}^j - P_8^j V_{,z}^j - P_9^j W_{,z}^j - P_{10}^j \Phi_{,z}^j - P_{11}^j \Psi_{,z}^j, \quad (5.6a)$$

$$P_1^j \Phi_{,zz}^j = -P_{12}^j U^j - P_{13}^j V^j - P_{14}^j W^j - P_{15}^j \Phi^j - P_{16}^j \Psi^j - P_{17}^j U_{,z}^j - P_{18}^j V_{,z}^j - P_{19}^j W_{,z}^j + \\ - P_{20}^j \Phi_{,z}^j - P_{21}^j \Psi_{,z}^j, \quad (5.6b)$$

$$P_1^j \Psi_{,zz}^j = -P_{22}^j U^j - P_{23}^j V^j - P_{24}^j W^j - P_{25}^j \Phi^j - P_{26}^j \Psi^j - P_{27}^j U_{,z}^j - P_{28}^j V_{,z}^j - P_{29}^j W_{,z}^j + \\ - P_{30}^j \Phi_{,z}^j - P_{31}^j \Psi_{,z}^j, \quad (5.6c)$$

in cui si sono definiti come segue i coefficienti  $P_i^j$ . Il coefficiente  $P_1^j$  risulta:

$$P_1^j = A_{31}^j (A_{43}^j A_{55}^j - A_{44}^j A_{54}^j) - A_{32}^j (A_{42}^j A_{55}^j - A_{44}^j A_{53}^j) + A_{33}^j (A_{42}^j A_{54}^j - A_{43}^j A_{53}^j). \quad (5.7)$$

I coefficienti specifici per la Eq. (5.6a) sono:

$$P_2^j = A_{43}^j A_{55}^j A_{21}^j - A_{44}^j A_{54}^j A_{21}^j - A_{32}^j A_{55}^j A_{34}^j + A_{32}^j A_{44}^j A_{45}^j + A_{33}^j A_{54}^j A_{34}^j - A_{33}^j A_{43}^j A_{45}^j, \quad (5.8a)$$

$$P_3^j = A_{43}^j A_{55}^j A_{22}^j - A_{44}^j A_{54}^j A_{22}^j - A_{32}^j A_{55}^j A_{35}^j + A_{32}^j A_{44}^j A_{46}^j + A_{33}^j A_{54}^j A_{35}^j - A_{33}^j A_{43}^j A_{46}^j, \quad (5.8b)$$

$$P_4^j = A_{43}^j A_{55}^j A_{23}^j - A_{44}^j A_{54}^j A_{23}^j - A_{32}^j A_{55}^j A_{36}^j + A_{32}^j A_{44}^j A_{47}^j + A_{33}^j A_{54}^j A_{36}^j - A_{33}^j A_{43}^j A_{47}^j, \quad (5.8c)$$

$$P_5^j = A_{43}^j A_{55}^j A_{24}^j - A_{44}^j A_{54}^j A_{24}^j - A_{32}^j A_{55}^j A_{37}^j + A_{32}^j A_{44}^j A_{48}^j + A_{33}^j A_{54}^j A_{37}^j - A_{33}^j A_{43}^j A_{48}^j, \quad (5.8d)$$

$$P_6^j = A_{43}^j A_{55}^j A_{25}^j - A_{44}^j A_{54}^j A_{25}^j - A_{32}^j A_{55}^j A_{38}^j + A_{32}^j A_{44}^j A_{49}^j + A_{33}^j A_{54}^j A_{38}^j - A_{33}^j A_{43}^j A_{49}^j, \quad (5.8e)$$

$$P_7^j = A_{43}^j A_{55}^j A_{26}^j - A_{44}^j A_{54}^j A_{26}^j - A_{32}^j A_{55}^j A_{39}^j + A_{32}^j A_{44}^j A_{50}^j + A_{33}^j A_{54}^j A_{39}^j - A_{33}^j A_{43}^j A_{50}^j, \quad (5.8f)$$

$$P_8^j = A_{43}^j A_{55}^j A_{27}^j - A_{44}^j A_{54}^j A_{27}^j - A_{32}^j A_{55}^j A_{40}^j + A_{32}^j A_{44}^j A_{51}^j + A_{33}^j A_{54}^j A_{40}^j - A_{33}^j A_{43}^j A_{51}^j, \quad (5.8g)$$

$$P_9^j = A_{43}^j A_{55}^j A_{28}^j - A_{44}^j A_{54}^j A_{28}^j - A_{32}^j A_{55}^j A_{41}^j + A_{32}^j A_{44}^j A_{52}^j + A_{33}^j A_{54}^j A_{41}^j - A_{33}^j A_{43}^j A_{52}^j, \quad (5.8h)$$

$$P_{10}^j = A_{43}^j A_{55}^j A_{29}^j - A_{44}^j A_{54}^j A_{29}^j, \quad (5.8i)$$

$$P_{11}^j = A_{43}^j A_{55}^j A_{30}^j - A_{44}^j A_{54}^j A_{30}^j; \quad (5.8j)$$

invece, per la Eq. (5.6b):

$$P_{12}^j = A_{31}^j A_{55}^j A_{34}^j - A_{31}^j A_{44}^j A_{45}^j - A_{42}^j A_{55}^j A_{21}^j + A_{44}^j A_{53}^j A_{21}^j + A_{33}^j A_{42}^j A_{45}^j - A_{33}^j A_{53}^j A_{34}^j, \quad (5.9a)$$

$$P_{13}^j = A_{31}^j A_{55}^j A_{35}^j - A_{31}^j A_{44}^j A_{46}^j - A_{42}^j A_{55}^j A_{22}^j + A_{44}^j A_{53}^j A_{22}^j + A_{33}^j A_{42}^j A_{46}^j - A_{33}^j A_{53}^j A_{35}^j, \quad (5.9b)$$

$$P_{14}^j = A_{31}^j A_{55}^j A_{36}^j - A_{31}^j A_{44}^j A_{47}^j - A_{42}^j A_{55}^j A_{23}^j + A_{44}^j A_{53}^j A_{22}^j + A_{33}^j A_{42}^j A_{47}^j - A_{33}^j A_{53}^j A_{36}^j, \quad (5.9c)$$

$$P_{15}^j = A_{31}^j A_{55}^j A_{37}^j - A_{31}^j A_{44}^j A_{48}^j - A_{42}^j A_{55}^j A_{24}^j + A_{44}^j A_{53}^j A_{22}^j + A_{33}^j A_{42}^j A_{48}^j - A_{33}^j A_{53}^j A_{37}^j, \quad (5.9d)$$

$$P_{16}^j = A_{31}^j A_{55}^j A_{38}^j - A_{31}^j A_{44}^j A_{49}^j - A_{42}^j A_{55}^j A_{25}^j + A_{44}^j A_{53}^j A_{22}^j + A_{33}^j A_{42}^j A_{49}^j - A_{33}^j A_{53}^j A_{38}^j, \quad (5.9e)$$

$$P_{17}^j = A_{31}^j A_{55}^j A_{39}^j - A_{31}^j A_{44}^j A_{50}^j - A_{42}^j A_{55}^j A_{26}^j + A_{44}^j A_{53}^j A_{22}^j + A_{33}^j A_{42}^j A_{50}^j - A_{33}^j A_{53}^j A_{39}^j, \quad (5.9f)$$

$$P_{18}^j = A_{31}^j A_{55}^j A_{40}^j - A_{31}^j A_{44}^j A_{51}^j - A_{42}^j A_{55}^j A_{27}^j + A_{44}^j A_{53}^j A_{22}^j + A_{33}^j A_{42}^j A_{51}^j - A_{33}^j A_{53}^j A_{40}^j, \quad (5.9g)$$

$$P_{19}^j = A_{31}^j A_{55}^j A_{41}^j - A_{31}^j A_{44}^j A_{52}^j - A_{42}^j A_{55}^j A_{28}^j + A_{44}^j A_{53}^j A_{22}^j + A_{33}^j A_{42}^j A_{52}^j - A_{33}^j A_{53}^j A_{41}^j, \quad (5.9h)$$

$$P_{20}^j = -A_{42}^j A_{55}^j A_{29}^j + A_{44}^j A_{53}^j A_{22}^j, \quad (5.9i)$$

$$P_{21}^j = -A_{42}^j A_{55}^j A_{30}^j + A_{44}^j A_{53}^j A_{22}^j; \quad (5.9j)$$

infine, per la Eq. (5.6c) si ha:

$$P_{22}^j = A_{31}^j A_{43}^j A_{45}^j - A_{31}^j A_{54}^j A_{34}^j - A_{32}^j A_{42}^j A_{45}^j + A_{32}^j A_{53}^j A_{34}^j + A_{42}^j A_{54}^j A_{21}^j - A_{43}^j A_{53}^j A_{21}^j, \quad (5.10a)$$

$$P_{23}^j = A_{31}^j A_{43}^j A_{46}^j - A_{31}^j A_{54}^j A_{35}^j - A_{32}^j A_{42}^j A_{46}^j + A_{32}^j A_{53}^j A_{35}^j + A_{42}^j A_{54}^j A_{22}^j - A_{43}^j A_{53}^j A_{22}^j, \quad (5.10b)$$

$$P_{24}^j = A_{31}^j A_{43}^j A_{47}^j - A_{31}^j A_{54}^j A_{36}^j - A_{32}^j A_{42}^j A_{47}^j + A_{32}^j A_{53}^j A_{36}^j + A_{42}^j A_{54}^j A_{23}^j - A_{43}^j A_{53}^j A_{23}^j, \quad (5.10c)$$

$$P_{25}^j = A_{31}^j A_{43}^j A_{48}^j - A_{31}^j A_{54}^j A_{37}^j - A_{32}^j A_{42}^j A_{48}^j + A_{32}^j A_{53}^j A_{37}^j + A_{42}^j A_{54}^j A_{24}^j - A_{43}^j A_{53}^j A_{24}^j, \quad (5.10d)$$

$$P_{26}^j = A_{31}^j A_{43}^j A_{49}^j - A_{31}^j A_{54}^j A_{38}^j - A_{32}^j A_{42}^j A_{49}^j + A_{32}^j A_{53}^j A_{38}^j + A_{42}^j A_{54}^j A_{25}^j - A_{43}^j A_{53}^j A_{25}^j, \quad (5.10e)$$

$$P_{27}^j = A_{31}^j A_{43}^j A_{50}^j - A_{31}^j A_{54}^j A_{39}^j - A_{32}^j A_{42}^j A_{50}^j + A_{32}^j A_{53}^j A_{39}^j + A_{42}^j A_{54}^j A_{26}^j - A_{43}^j A_{53}^j A_{26}^j, \quad (5.10f)$$

$$P_{28}^j = A_{31}^j A_{43}^j A_{51}^j - A_{31}^j A_{54}^j A_{40}^j - A_{32}^j A_{42}^j A_{51}^j + A_{32}^j A_{53}^j A_{40}^j + A_{42}^j A_{54}^j A_{27}^j - A_{43}^j A_{53}^j A_{27}^j, \quad (5.10g)$$

$$P_{29}^j = A_{31}^j A_{43}^j A_{52}^j - A_{31}^j A_{54}^j A_{41}^j - A_{32}^j A_{42}^j A_{52}^j + A_{32}^j A_{53}^j A_{41}^j + A_{42}^j A_{54}^j A_{28}^j - A_{43}^j A_{53}^j A_{28}^j, \quad (5.10h)$$

$$P_{30}^j = A_{42}^j A_{54}^j A_{29}^j - A_{43}^j A_{53}^j A_{29}^j, \quad (5.10i)$$

$$P_{31}^j = A_{42}^j A_{54}^j A_{30}^j - A_{43}^j A_{53}^j A_{30}^j. \quad (5.10j)$$

Dunque, in forma compatta e mettendo in evidenza le derivate seconde, il sistema di Eq. (5.5) diventa:

$$\begin{aligned} A_{10}^j U_{,zz}^j &= -A_1^j U^j - A_2^j V^j - A_3^j W^j - A_4^j \Phi^j - A_5^j \Psi^j - A_6^j U_{,z}^j - A_7^j W_{,z}^j + \\ &\quad - A_8^j \Phi_{,z}^j - A_9^j \Psi_{,z}^j, \end{aligned} \quad (5.11a)$$

$$\begin{aligned} A_{20}^j V_{,zz}^j &= -A_{11}^j U^j - A_{12}^j V^j - A_{13}^j W^j - A_{14}^j \Phi^j - A_{15}^j \Psi^j - A_{16}^j V_{,z}^j - A_{17}^j W_{,z}^j + \\ &\quad - A_{18}^j \Phi_{,z}^j - A_{19}^j \Psi_{,z}^j, \end{aligned} \quad (5.11b)$$

$$\begin{aligned} P_1^j W_{,zz}^j &= -P_2^j U^j - P_3^j V^j - P_4^j W^j - P_5^j \Phi^j - P_6^j \Psi^j - P_7^j U_{,z}^j - P_8^j V_{,z}^j - P_9^j W_{,z}^j + \\ &\quad - P_{10}^j \Phi_{,z}^j - P_{11}^j \Psi_{,z}^j, \end{aligned} \quad (5.11c)$$

$$\begin{aligned} P_1^j \Phi_{,zz}^j &= -P_{12}^j U^j - P_{13}^j V^j - P_{14}^j W^j - P_{15}^j \Phi^j - P_{16}^j \Psi^j - P_{17}^j U_{,z}^j - P_{18}^j V_{,z}^j - P_{19}^j W_{,z}^j + \\ &\quad - P_{20}^j \Phi_{,z}^j - P_{21}^j \Psi_{,z}^j, \end{aligned} \quad (5.11d)$$

$$\begin{aligned} P_1^j \Psi_{,zz}^j &= -P_{22}^j U^j - P_{23}^j V^j - P_{24}^j W^j - P_{25}^j \Phi^j - P_{26}^j \Psi^j - P_{27}^j U_{,z}^j - P_{28}^j V_{,z}^j - P_{29}^j W_{,z}^j + \\ &\quad - P_{30}^j \Phi_{,z}^j - P_{31}^j \Psi_{,z}^j. \end{aligned} \quad (5.11e)$$

Il sistema di equazioni differenziali del secondo ordine ottenuto si riduce ad un sistema del primo ordine raddoppiando il numero di equazioni e incognite [22, 23]. A tal fine si impongono le seguenti cinque identità:

$$A_{10}^j U_{,z}^j = A_{10}^j U_{,z}^j, \quad (5.12a)$$

$$A_{20}^j V_{,z}^j = A_{20}^j V_{,z}^j, \quad (5.12b)$$

$$P_1^j W_{,z}^j = P_1^j W_{,z}^j, \quad (5.12c)$$

$$P_1^j \Phi_{,z}^j = P_1^j \Phi_{,z}^j, \quad (5.12d)$$

$$P_1^j \Psi_{,z}^j = P_1^j \Psi_{,z}^j. \quad (5.12e)$$

Considerando il sistema di equazioni differenziali costituito dalle Eq. (5.11) e (5.12), esso si può scrivere, in forma matriciale, come segue:

$$\begin{bmatrix} A_{10}^j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{20}^j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_1^j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_1^j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_1^j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{10}^j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{20}^j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_1^j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_1^j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_1^j \end{bmatrix}_{,z} \begin{Bmatrix} U^j \\ V^j \\ W^j \\ \Phi^j \\ \Psi^j \\ U_{,z}^j \\ V_{,z}^j \\ W_{,z}^j \\ \Phi_{,z}^j \\ \Psi_{,z}^j \end{Bmatrix} = \quad (5.13)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{10}^j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{20}^j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_1^j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_1^j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_1^j \\ -A_1^j & -A_2^j & -A_3^j & -A_4^j & -A_5^j & -A_6^j & 0 & -A_7^j & -A_8^j & -A_9^j \\ -A_{11}^j & -A_{12}^j & -A_{13}^j & -A_{14}^j & -A_{15}^j & 0 & -A_{16}^j & -A_{17}^j & -A_{18}^j & -A_{19}^j \\ -P_2^j & -P_3^j & -P_4^j & -P_5^j & -P_6^j & -P_7^j & -P_8^j & -P_9^j & -P_{10}^j & -P_{11}^j \\ -P_{12}^j & -P_{13}^j & -P_{14}^j & -P_{15}^j & -P_{16}^j & -P_{17}^j & -P_{18}^j & -P_{19}^j & -P_{20}^j & -P_{21}^j \\ -P_{22}^j & -P_{23}^j & -P_{24}^j & -P_{25}^j & -P_{26}^j & -P_{27}^j & -P_{28}^j & -P_{29}^j & -P_{30}^j & -P_{31}^j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^j \\ V^j \\ W^j \\ \Phi^j \\ \Psi^j \\ U_{,z}^j \\ V_{,z}^j \\ W_{,z}^j \\ \Phi_{,z}^j \\ \Psi_{,z}^j \end{Bmatrix}.$$

Si tratta, quindi, di un sistema di equazioni differenziali del primo ordine in  $z$  di dieci equazioni in dieci incognite. In particolare, si osserva che le derivate prime in  $z$ ,  $U_{,z}^j$ ,  $V_{,z}^j$ ,  $W_{,z}^j$ ,  $\Phi_{,z}^j$  e  $\Psi_{,z}^j$ , diventano incognite del problema, proprio come  $U^j$ ,  $V^j$ ,  $W^j$ ,  $\Phi^j$  e  $\Psi^j$ , e saranno calcolate in maniera esatta anch'esse. Il sistema di Eq. (5.13), in forma compatta, si può scrivere come:

$$\mathbf{D}^j \mathbf{X}_{,z}^j = \mathbf{A}^j \mathbf{X}^j, \quad (5.14)$$

dove  $\mathbf{X}^j$  è il vettore  $10 \times 1$  delle incognite che si vogliono ottenere e  $\mathbf{X}_{,z}^j$  è il vettore  $10 \times 1$  delle incognite derivate in  $z$ , per cui:

$$\mathbf{X}_{,z}^j = \mathbf{D}^{-1j} \mathbf{A}^j \mathbf{X}^j \quad \text{con} \quad \mathbf{A}^{*j} = \mathbf{D}^{-1j} \mathbf{A}^j, \quad (5.15)$$

in forma compatta:

$$\mathbf{X}_{,z}^j = \mathbf{A}^{*j} \mathbf{X}^j. \quad (5.16)$$

La matrice  $\mathbf{A}^{*j}$  di dimensioni  $10 \times 10$ , definita per il singolo strato matematico  $j$ , è una matrice a coefficienti costanti in  $z$ , essendo a loro volta costanti in  $z$  le matrici  $\mathbf{D}^j$  e  $\mathbf{A}^j$ , anch'esse di dimensione  $10 \times 10$ , con cui si ottiene.

La soluzione dell'equazione matriciale differenziale in  $z$  di Eq. (5.16), calcolata, nuovamente, utilizzando il metodo della matrice esponenziale [24], risulta:

$$\mathbf{X}^j(\tilde{z}_j) = \exp(\mathbf{A}^{*j} \tilde{z}_j) \mathbf{X}^j(0) \quad \text{con} \quad 0 \leq \tilde{z}_j \leq h_j, \quad (5.17)$$

dove  $\tilde{z}_j = 0$  e  $\tilde{z}_j = h_j$  corrispondono, rispettivamente, al bottom  $b$  e al top  $t$  dello strato  $j$ -esimo. Si procede, quindi, valutando le incognite per  $\tilde{z}_j = h_j$ ; la Eq. (5.17) diventa:

$$\mathbf{X}^j(h_j) = \exp(\mathbf{A}^{*j} h_j) \mathbf{X}^j(0), \quad (5.18)$$

in cui si definisce la matrice esponenziale di dimensione  $10 \times 10$ :

$$\mathbf{A}^{**j} = \exp(\mathbf{A}^{*j} h_j). \quad (5.19)$$

In forma esplicita la Eq. (5.19) risulta:

$$\mathbf{A}^{**j} = \mathbf{I} + \mathbf{A}^{*j} h_j + \frac{\mathbf{A}^{*j2}}{2!} h_j^2 + \cdots + \frac{\mathbf{A}^{*jN}}{N!} h_j^N, \quad (5.20)$$

dove  $\mathbf{I}$  è la matrice identità  $10 \times 10$  e  $N$  l'ordine massimo di espansione con cui si approssima la matrice esponenziale secondo Taylor. Sostituendo la Eq. (5.20) nella Eq. (5.18) si ottiene:

$$\mathbf{X}^j(h_j) = \mathbf{A}^{**j} \mathbf{X}^j(0), \quad (5.21)$$

che si può riscrivere con i pedici  $b$  e  $t$  per riferirsi al top e al bottom dello strato  $j$  considerato:

$$\mathbf{X}_t^j = \mathbf{A}^{**j} \mathbf{X}_b^j. \quad (5.22)$$

Poiché si utilizza l'approccio layerwise, si risolve la Eq. (5.16) per ogni strato  $j$ . Si definisce, dunque, la Eq. (5.22) e, nello specifico, si valuta la Eq. (5.20) per il numero complessivo  $M$  di strati matematici  $j$ .

Ottenuta la soluzione in termini di variabili fondamentali e loro derivate prime in  $z$ , si è, dunque, in grado di ottenere la soluzione esatta anche per le variabili primarie, definite dalle Eq. (3.12), Eq. (3.16) e Eq. (3.17), e le variabili secondarie, definite dalle Eq. (3.33), Eq. (3.34) e Eq. (3.35) oppure dalle Eq. (3.47), Eq. (3.48) e Eq. (3.49).

A questo punto, è necessario imporre, ad ogni interfaccia, le condizioni di continuità interlaminare:

$$u_b^j = u_t^{j-1}, \quad v_b^j = v_t^{j-1}, \quad w_b^j = w_t^{j-1}, \quad \phi_b^j = \phi_t^{j-1}, \quad \psi_b^j = \psi_t^{j-1}, \quad (5.23a)$$

$$\sigma_{\alpha z_b}^j = \sigma_{\alpha z_t}^{j-1}, \quad \sigma_{\beta z_b}^j = \sigma_{\beta z_t}^{j-1}, \quad \sigma_{zz_b}^j = \sigma_{zz_t}^{j-1}, \quad D_{z_b}^j = D_{z_t}^{j-1}, \quad B_{z_b}^j = B_{z_t}^{j-1}. \quad (5.23b)$$

Ad ogni interfaccia tra il bottom  $b$  dello strato  $j$  e il top  $t$  dello strato  $j-1$ , si impone l'uguaglianza per congruenza delle variabili fondamentali, gli spostamenti  $u$ ,  $v$  e  $w$  e i potenziali elettrostatico  $\phi$  ed magnetostatico  $\psi$ , e per equilibrio delle componenti trasversali, cioè in direzione  $z$ , delle variabili secondarie, la tensione normale  $\sigma_{zz}$ , quelle di taglio  $\sigma_{\alpha z}$  e  $\sigma_{\beta z}$ , la componente  $D_z$  dello spostamento elettrico e la componente  $B_z$  dell'induzione magnetica. In questo modo, le variabili appena citate sono continue lungo tutto lo spessore  $h$  del multistrato e presentano la tipica forma a zig-zag dovuta all'anisotropia trasversale della struttura, rispettando i  $C_z^0$  requirements. Anche per i problemi elettro-magneto-elastici, le restanti variabili secondarie, quelle che non agiscono lungo la direzione  $z$ , non devono essere necessariamente continue alle interfacce per ragioni di equilibrio; per cui, cambiando materiale, possono presentare discontinuità all'interfaccia, mantenendo comunque una forma a zig-zag. Anche le variabili primarie avranno la forma a zig-zag, ma non saranno necessariamente continue, in quanto sono definite come derivate delle variabili fondamentali, le cui derivate prime non sono sempre continue nelle interfacce tra gli strati.

Nella Eq. (5.23a) si sostituiscono le forme armoniche delle variabili fondamentali di Eq. (5.1) ed è immediato ottenere:

$$U_b^j = U_t^{j-1}, \quad (5.24a)$$

$$V_b^j = V_t^{j-1}, \quad (5.24b)$$

$$W_b^j = W_t^{j-1}, \quad (5.24c)$$

$$\Phi_b^j = \Phi_t^{j-1}, \quad (5.24d)$$

$$\Psi_b^j = \Psi_t^{j-1}. \quad (5.24e)$$

Nella Eq. (5.23b) si sostituiscono le Eq. (3.47c), Eq. (3.47d), Eq. (3.47e), Eq. (3.48c) ed Eq. (3.49c); poi, a loro volta, si introducono le forme armoniche delle variabili fondamentali di Eq. (5.1). Si valutano le derivate in  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $t$  e si semplificano le rimanenti parti armoniche, ottenendo:

$$\begin{aligned} & \frac{C_{55}^j}{H_{\alpha_b}^j} \bar{\alpha} W_b^j + C_{55}^j U_{,z_b}^j - \frac{C_{55}^j}{H_{\alpha_b}^j R_\alpha} U_b^j + \frac{e_{15}^j}{H_{\alpha_b}^j} \bar{\alpha} \Phi_b^j + \frac{q_{15}^j}{H_{\alpha_b}^j} \bar{\alpha} \Psi_b^j = \\ & + \frac{C_{55}^{j-1}}{H_{\alpha_t}^{j-1}} \bar{\alpha} W_t^{j-1} + C_{55}^{j-1} U_{,z_t}^{j-1} - \frac{C_{55}^{j-1}}{H_{\alpha_t}^{j-1} R_\alpha} U_t^{j-1} + \frac{e_{15}^{j-1}}{H_{\alpha_t}^{j-1}} \bar{\alpha} \Phi_t^{j-1} + \frac{q_{15}^{j-1}}{H_{\alpha_t}^{j-1}} \bar{\alpha} \Psi_t^{j-1}, \end{aligned} \quad (5.25a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{C_{44}^j}{H_{\beta_b}^j} \bar{\beta} W_b^j + C_{44}^j V_{,z_b}^j - \frac{C_{44}^j}{H_{\beta_b}^j R_\beta} V_b^j + \frac{e_{24}^j}{H_{\beta_b}^j} \bar{\beta} \Phi_b^j + \frac{q_{24}^j}{H_{\beta_b}^j} \bar{\beta} \Psi_b^j = \\ & + \frac{C_{44}^{j-1}}{H_{\beta_t}^{j-1}} \bar{\beta} W_t^{j-1} + C_{44}^{j-1} V_{,z_t}^{j-1} - \frac{C_{44}^{j-1}}{H_{\beta_t}^{j-1} R_\beta} V_t^{j-1} + \frac{e_{24}^{j-1}}{H_{\beta_t}^{j-1}} \bar{\beta} \Phi_t^{j-1} + \frac{q_{24}^{j-1}}{H_{\beta_t}^{j-1}} \bar{\beta} \Psi_t^{j-1}, \end{aligned} \quad (5.25b)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{C_{13}^j}{H_{\alpha_b}^j} \bar{\alpha} U_b^j + \frac{C_{13}^j}{H_{\alpha_b}^j R_\alpha} W_b^j - \frac{C_{23}^j}{H_{\beta_b}^j} \bar{\beta} V_b^j + \frac{C_{23}^j}{H_{\beta_b}^j R_\beta} W_b^j + C_{33}^j W_{,z_b}^j + e_{33}^j \Phi_{,z_b}^j + q_{33}^j \Psi_{,z_b}^j = \\ & - \frac{C_{13}^{j-1}}{H_{\alpha_t}^{j-1}} \bar{\alpha} U_t^{j-1} + \frac{C_{13}^{j-1}}{H_{\alpha_t}^{j-1} R_\alpha} W_t^{j-1} - \frac{C_{23}^{j-1}}{H_{\beta_t}^{j-1}} \bar{\beta} V_t^{j-1} + \frac{C_{23}^{j-1}}{H_{\beta_t}^{j-1} R_\beta} W_t^{j-1} + \\ & + C_{33}^{j-1} W_{,z_t}^{j-1} + e_{33}^{j-1} \Phi_{,z_t}^{j-1} + q_{33}^{j-1} \Psi_{,z_t}^{j-1}, \end{aligned} \quad (5.25c)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{e_{31}^j}{H_{\alpha_b}^j} \bar{\alpha} U_b^j + \frac{e_{31}^j}{H_{\alpha_b}^j R_\alpha} W_b^j - \frac{e_{32}^j}{H_{\beta_b}^j} \bar{\beta} V_b^j + \frac{e_{32}^j}{H_{\beta_b}^j R_\beta} W_b^j + e_{33}^j W_{,z_b}^j - e_{33}^j \Phi_{,z_b}^j - d_{33}^j \Psi_{,z_b}^j = \\ & - \frac{e_{31}^{j-1}}{H_{\alpha_t}^{j-1}} \bar{\alpha} U_t^{j-1} + \frac{e_{31}^{j-1}}{H_{\alpha_t}^{j-1} R_\alpha} W_t^{j-1} - \frac{e_{32}^{j-1}}{H_{\beta_t}^{j-1}} \bar{\beta} V_t^{j-1} + \frac{e_{32}^{j-1}}{H_{\beta_t}^{j-1} R_\beta} W_t^{j-1} + \\ & + e_{33}^{j-1} W_{,z_t}^{j-1} - e_{33}^{j-1} \Phi_{,z_t}^{j-1} - d_{33}^{j-1} \Psi_{,z_t}^{j-1}, \end{aligned} \quad (5.25d)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{q_{31}^j}{H_{\alpha_b}^j} \bar{\alpha} U_b^j + \frac{q_{31}^j}{H_{\alpha_b}^j R_\alpha} W_b^j - \frac{q_{32}^j}{H_{\beta_b}^j} \bar{\beta} V_b^j + \frac{q_{32}^j}{H_{\beta_b}^j R_\beta} W_b^j + q_{33}^j W_{,z_b}^j - d_{33}^j \Phi_{,z_b}^j - \mu_{33}^j \Psi_{,z_b}^j = \\ & - \frac{q_{31}^{j-1}}{H_{\alpha_t}^{j-1}} \bar{\alpha} U_t^{j-1} + \frac{q_{31}^{j-1}}{H_{\alpha_t}^{j-1} R_\alpha} W_t^{j-1} - \frac{q_{32}^{j-1}}{H_{\beta_t}^{j-1}} \bar{\beta} V_t^{j-1} + \frac{q_{32}^{j-1}}{H_{\beta_t}^{j-1} R_\beta} W_t^{j-1} + \\ & + q_{33}^{j-1} W_{,z_t}^{j-1} - d_{33}^{j-1} \Phi_{,z_t}^{j-1} - \mu_{33}^{j-1} \Psi_{,z_t}^{j-1}. \end{aligned} \quad (5.25e)$$

Sostituendo nelle Eq. (5.25) appena ottenute le Eq. (5.24), raggruppando i coefficienti che moltiplicano le stesse variabili e mettendo in evidenza le derivate prime calcolate al bottom  $b$ ,

si ottiene:

$$\begin{aligned} U_{,z_b}^j &= \frac{1}{C_{55}^j} \left( \frac{C_{55}^j}{H_{\alpha_b}^j R_\alpha} - \frac{C_{55}^{j-1}}{H_{\alpha_t}^{j-1} R_\alpha} \right) U_t^{j-1} + \frac{1}{C_{55}^j} \left( -\frac{C_{55}^j}{H_{\alpha_b}^j} \bar{\alpha} + \frac{C_{55}^{j-1}}{H_{\alpha_t}^{j-1}} \bar{\alpha} \right) W_t^{j-1} + \\ &+ \frac{1}{C_{55}^j} \left( -\frac{e_{15}^j}{H_{\alpha_b}^j} \bar{\alpha} + \frac{e_{15}^{j-1}}{H_{\alpha_t}^{j-1}} \bar{\alpha} \right) \Phi_t^{j-1} + \\ &+ \frac{1}{C_{55}^j} \left( -\frac{q_{15}^j}{H_{\alpha_b}^j} \bar{\alpha} + \frac{q_{15}^{j-1}}{H_{\alpha_t}^{j-1}} \bar{\alpha} \right) \Psi_t^{j-1} + \frac{C_{55}^{j-1}}{C_{55}^j} U_{,z_t}^{j-1}, \end{aligned} \quad (5.26a)$$

$$\begin{aligned} V_{,z_b}^j &= \frac{1}{C_{44}^j} \left( \frac{C_{44}^j}{H_{\beta_b}^j R_\beta} - \frac{C_{44}^{j-1}}{H_{\beta_t}^{j-1} R_\beta} \right) V_t^{j-1} + \frac{1}{C_{44}^j} \left( -\frac{C_{44}^j}{H_{\beta_b}^j} \bar{\beta} + \frac{C_{44}^{j-1}}{H_{\beta_t}^{j-1}} \bar{\beta} \right) W_t^{j-1} + \\ &+ \frac{1}{C_{44}^j} \left( -\frac{e_{24}^j}{H_{\beta_b}^j} \bar{\beta} + \frac{e_{24}^{j-1}}{H_{\beta_t}^{j-1}} \bar{\beta} \right) \Phi_t^{j-1} + \\ &+ \frac{1}{C_{44}^j} \left( -\frac{q_{24}^j}{H_{\beta_b}^j} \bar{\beta} + \frac{q_{24}^{j-1}}{H_{\beta_t}^{j-1}} \bar{\beta} \right) \Psi_t^{j-1} + \frac{C_{44}^{j-1}}{C_{44}^j} V_{,z_t}^{j-1}, \end{aligned} \quad (5.26b)$$

$$\begin{aligned} C_{33}^j W_{,z_b}^j + e_{33}^j \Phi_{,z_b}^j + q_{33}^j \Psi_{,z_b}^j &= \left( \frac{C_{13}^j}{H_{\alpha_b}^j} \bar{\alpha} - \frac{C_{13}^{j-1}}{H_{\alpha_t}^{j-1}} \bar{\alpha} \right) U_t^{j-1} + \left( \frac{C_{23}^j}{H_{\beta_b}^j} \bar{\beta} - \frac{C_{23}^{j-1}}{H_{\beta_t}^{j-1}} \bar{\beta} \right) V_t^{j-1} + \\ &+ \left( -\frac{C_{13}^j}{H_{\alpha_b}^j R_\alpha} - \frac{C_{23}^j}{H_{\beta_b}^j R_\beta} + \frac{C_{13}^{j-1}}{H_{\alpha_t}^{j-1} R_\alpha} + \frac{C_{23}^{j-1}}{H_{\beta_t}^{j-1} R_\beta} \right) W_t^{j-1} + \\ &+ C_{33}^{j-1} W_{,z_t}^{j-1} + e_{33}^{j-1} \Phi_{,z_t}^{j-1} + q_{33}^{j-1} \Psi_{,z_t}^{j-1}, \end{aligned} \quad (5.26c)$$

$$\begin{aligned} e_{33}^j W_{,z_b}^j - e_{33}^j \Phi_{,z_b}^j - d_{33}^j \Psi_{,z_b}^j &= \left( \frac{e_{31}^j}{H_{\alpha_b}^j} \bar{\alpha} - \frac{e_{31}^{j-1}}{H_{\alpha_t}^{j-1}} \bar{\alpha} \right) U_t^{j-1} + \left( \frac{e_{32}^j}{H_{\beta_b}^j} \bar{\beta} - \frac{e_{32}^{j-1}}{H_{\beta_t}^{j-1}} \bar{\beta} \right) V_t^{j-1} + \\ &+ \left( -\frac{e_{31}^j}{H_{\alpha_b}^j R_\alpha} - \frac{e_{32}^j}{H_{\beta_b}^j R_\beta} + \frac{e_{31}^{j-1}}{H_{\alpha_t}^{j-1} R_\alpha} + \frac{e_{32}^{j-1}}{H_{\beta_t}^{j-1} R_\beta} \right) W_t^{j-1} + \\ &+ e_{33}^{j-1} W_{,z_t}^{j-1} - e_{33}^{j-1} \Phi_{,z_t}^{j-1} - d_{33}^{j-1} \Phi_{,z_t}^{j-1}, \end{aligned} \quad (5.26d)$$

$$\begin{aligned} q_{33}^j W_{,z_b}^j - d_{33}^j \Phi_{,z_b}^j - \mu_{33}^j \Psi_{,z_b}^j &= \left( \frac{q_{31}^j}{H_{\alpha_b}^j} \bar{\alpha} - \frac{q_{31}^{j-1}}{H_{\alpha_t}^{j-1}} \bar{\alpha} \right) U_t^{j-1} + \left( \frac{q_{32}^j}{H_{\beta_b}^j} \bar{\beta} - \frac{q_{32}^{j-1}}{H_{\beta_t}^{j-1}} \bar{\beta} \right) V_t^{j-1} + \\ &+ \left( -\frac{q_{31}^j}{H_{\alpha_b}^j R_\alpha} - \frac{q_{32}^j}{H_{\beta_b}^j R_\beta} + \frac{q_{31}^{j-1}}{H_{\alpha_t}^{j-1} R_\alpha} + \frac{q_{32}^{j-1}}{H_{\beta_t}^{j-1} R_\beta} \right) W_t^{j-1} + \\ &+ q_{33}^{j-1} W_{,z_t}^{j-1} - d_{33}^{j-1} \Phi_{,z_t}^{j-1} - \mu_{33}^{j-1} \Phi_{,z_t}^{j-1}, \end{aligned} \quad (5.26e)$$

che in forma compatta possono essere riscritte come:

$$U_{,z_b}^j = T_1 U_t^{j-1} + T_2 W_t^{j-1} + T_3 \Phi_t^{j-1} + T_4 \Psi_t^{j-1} + T_5 U_{,z_t}^{j-1}, \quad (5.27a)$$

$$V_{,z_b}^j = T_6 V_t^{j-1} + T_7 W_t^{j-1} + T_8 \Phi_t^{j-1} + T_9 \Psi_t^{j-1} + T_{10} V_{,z_t}^{j-1}, \quad (5.27b)$$

$$\begin{aligned} R_1 W_{,z_b}^j + R_2 \Phi_{,z_b}^j + R_3 \Psi_{,z_b}^j &= R_4 U_t^{j-1} + R_5 V_t^{j-1} + R_6 W_t^{j-1} + R_7 W_{,z_t}^{j-1} + \\ &+ R_8 \Phi_{,z_t}^{j-1} + R_9 \Psi_{,z_t}^{j-1}, \end{aligned} \quad (5.27c)$$

$$\begin{aligned} R_{10} W_{,z_b}^j + R_{11} \Phi_{,z_b}^j + R_{12} \Psi_{,z_b}^j &= R_{13} U_t^{j-1} + R_{14} V_t^{j-1} + R_{15} W_t^{j-1} + R_{16} W_{,z_t}^{j-1} + \\ &+ R_{17} \Phi_{,z_t}^{j-1} + R_{18} \Psi_{,z_t}^{j-1}, \end{aligned} \quad (5.27d)$$

$$\begin{aligned} R_{19} W_{,z_b}^j + R_{20} \Phi_{,z_b}^j + R_{21} \Psi_{,z_b}^j &= R_{22} U_t^{j-1} + R_{23} V_t^{j-1} + R_{24} W_t^{j-1} + R_{25} W_{,z_t}^{j-1} + \\ &+ R_{26} \Phi_{,z_t}^{j-1} + R_{27} \Psi_{,z_t}^{j-1}. \end{aligned} \quad (5.27e)$$

In analogia a quanto fatto per le equazioni del sistema di Eq. (5.5), si vogliono disaccoppiare, in termini di derivate prime valutate al bottom  $b$ , la Eq. (5.27c), la Eq. (5.27d) e la Eq. (5.27e) appena ottenute, al fine di far comparire una sola derivata prima al bottom  $b$  in ognuna di esse. Con alcuni passaggi esse diventano, in forma compatta:

$$W_{,z_b}^j = T_{11} U_t^{j-1} + T_{12} V_t^{j-1} + T_{13} W_t^{j-1} + T_{14} W_{,z_t}^{j-1} + T_{15} \Phi_{,z_t}^{j-1} + T_{16} \Psi_{,z_t}^{j-1}, \quad (5.28a)$$

$$\Phi_{,z_b}^j = T_{17} U_t^{j-1} + T_{18} V_t^{j-1} + T_{19} W_t^{j-1} + T_{20} W_{,z_t}^{j-1} + T_{21} \Phi_{,z_t}^{j-1} + T_{22} \Psi_{,z_t}^{j-1}, \quad (5.28b)$$

$$\Psi_{,z_b}^j = T_{23} U_t^{j-1} + T_{24} V_t^{j-1} + T_{25} W_t^{j-1} + T_{26} W_{,z_t}^{j-1} + T_{27} \Phi_{,z_t}^{j-1} + T_{28} \Psi_{,z_t}^{j-1}, \quad (5.28c)$$

in cui si sono definiti come segue i coefficienti  $T_i$ ; per la Eq. (5.28a) si ha:

$$T_{11}^j = \frac{R_{11}^j R_{21}^j R_4^j - R_{12}^j R_{20}^j R_4^j - R_2^j R_{21}^j R_{13}^j + R_2^j R_{12}^j R_{22}^j + R_3^j R_{20}^j R_{13}^j - R_3^j R_{11}^j R_{22}^j}{R_0^j}, \quad (5.29a)$$

$$T_{12}^j = \frac{R_{11}^j R_{21}^j R_5^j - R_{12}^j R_{20}^j R_5^j - R_2^j R_{21}^j R_{14}^j + R_2^j R_{12}^j R_{23}^j + R_3^j R_{20}^j R_{14}^j - R_3^j R_{11}^j R_{23}^j}{R_0^j}, \quad (5.29b)$$

$$T_{13}^j = \frac{R_{11}^j R_{21}^j R_6^j - R_{12}^j R_{20}^j R_6^j - R_2^j R_{21}^j R_{15}^j + R_2^j R_{12}^j R_{24}^j + R_3^j R_{20}^j R_{15}^j - R_3^j R_{11}^j R_{24}^j}{R_0^j}, \quad (5.29c)$$

$$T_{14}^j = \frac{R_{11}^j R_{21}^j R_7^j - R_{12}^j R_{20}^j R_7^j - R_2^j R_{21}^j R_{16}^j + R_2^j R_{12}^j R_{25}^j + R_3^j R_{20}^j R_{16}^j - R_3^j R_{11}^j R_{25}^j}{R_0^j}, \quad (5.29d)$$

$$T_{15}^j = \frac{R_{11}^j R_{21}^j R_8^j - R_{12}^j R_{20}^j R_8^j - R_2^j R_{21}^j R_{17}^j + R_2^j R_{12}^j R_{26}^j + R_3^j R_{20}^j R_{17}^j - R_3^j R_{11}^j R_{26}^j}{R_0^j}, \quad (5.29e)$$

$$T_{16}^j = \frac{R_{11}^j R_{21}^j R_9^j - R_{12}^j R_{20}^j R_9^j - R_2^j R_{21}^j R_{18}^j + R_2^j R_{12}^j R_{27}^j + R_3^j R_{20}^j R_{18}^j - R_3^j R_{11}^j R_{27}^j}{R_0^j}; \quad (5.29f)$$

per la Eq. (5.28b), invece:

$$T_{17}^j = \frac{R_1^j R_{21}^j R_{13}^j - R_1^j R_{12}^j R_{22}^j - R_{10}^j R_{21}^j R_4^j + R_{12}^j R_{19}^j R_4^j + R_3^j R_{10}^j R_{22}^j - R_3^j R_{19}^j R_{13}^j}{R_0^j}, \quad (5.30a)$$

$$T_{18}^j = \frac{R_1^j R_{21}^j R_{14}^j - R_1^j R_{12}^j R_{23}^j - R_{10}^j R_{21}^j R_5^j + R_{12}^j R_{19}^j R_5^j + R_3^j R_{10}^j R_{23}^j - R_3^j R_{19}^j R_{14}^j}{R_0^j}, \quad (5.30b)$$

$$T_{19}^j = \frac{R_1^j R_{21}^j R_{15}^j - R_1^j R_{12}^j R_{24}^j - R_{10}^j R_{21}^j R_6^j + R_{12}^j R_{19}^j R_6^j + R_3^j R_{10}^j R_{24}^j - R_3^j R_{19}^j R_{15}^j}{R_0^j}, \quad (5.30c)$$

$$T_{20}^j = \frac{R_1^j R_{21}^j R_{16}^j - R_1^j R_{12}^j R_{25}^j - R_{10}^j R_{21}^j R_7^j + R_{12}^j R_{19}^j R_7^j + R_3^j R_{10}^j R_{25}^j - R_3^j R_{19}^j R_{16}^j}{R_0^j}, \quad (5.30d)$$

$$T_{21}^j = \frac{R_1^j R_{21}^j R_{17}^j - R_1^j R_{12}^j R_{26}^j - R_{10}^j R_{21}^j R_8^j + R_{12}^j R_{19}^j R_8^j + R_3^j R_{10}^j R_{26}^j - R_3^j R_{19}^j R_{17}^j}{R_0^j}, \quad (5.30e)$$

$$T_{22}^j = \frac{R_1^j R_{21}^j R_{18}^j - R_1^j R_{12}^j R_{27}^j - R_{10}^j R_{21}^j R_9^j + R_{12}^j R_{19}^j R_9^j + R_3^j R_{10}^j R_{27}^j - R_3^j R_{19}^j R_{18}^j}{R_0^j}; \quad (5.30f)$$

infine, per la Eq. (5.28c):

$$T_{23}^j = \frac{R_1^j R_{11}^j R_{22}^j - R_1^j R_{20}^j R_{13}^j - R_2^j R_{10}^j R_{22}^j + R_2^j R_{19}^j R_{13}^j + R_{10}^j R_{20}^j R_4^j - R_{11}^j R_{19}^j R_4^j}{R_0^j}, \quad (5.31a)$$

$$T_{24}^j = \frac{R_1^j R_{11}^j R_{23}^j - R_1^j R_{20}^j R_{14}^j - R_2^j R_{10}^j R_{23}^j + R_2^j R_{19}^j R_{14}^j + R_{10}^j R_{20}^j R_5^j - R_{11}^j R_{19}^j R_5^j}{R_0^j}, \quad (5.31b)$$

$$T_{25}^j = \frac{R_1^j R_{11}^j R_{24}^j - R_1^j R_{20}^j R_{15}^j - R_2^j R_{10}^j R_{24}^j + R_2^j R_{19}^j R_{15}^j + R_{10}^j R_{20}^j R_6^j - R_{11}^j R_{19}^j R_6^j}{R_0^j}, \quad (5.31c)$$

$$T_{26}^j = \frac{R_1^j R_{11}^j R_{25}^j - R_1^j R_{20}^j R_{16}^j - R_2^j R_{10}^j R_{25}^j + R_2^j R_{19}^j R_{16}^j + R_{10}^j R_{20}^j R_7^j - R_{11}^j R_{19}^j R_7^j}{R_0^j}, \quad (5.31d)$$

$$T_{27}^j = \frac{R_1^j R_{11}^j R_{26}^j - R_1^j R_{20}^j R_{17}^j - R_2^j R_{10}^j R_{26}^j + R_2^j R_{19}^j R_{17}^j + R_{10}^j R_{20}^j R_8^j - R_{11}^j R_{19}^j R_8^j}{R_0^j}, \quad (5.31e)$$

$$T_{28}^j = \frac{R_1^j R_{11}^j R_{27}^j - R_1^j R_{20}^j R_{18}^j - R_2^j R_{10}^j R_{27}^j + R_2^j R_{19}^j R_{18}^j + R_{10}^j R_{20}^j R_9^j - R_{11}^j R_{19}^j R_9^j}{R_0^j}. \quad (5.31f)$$

In ognuno dei coefficienti  $T_i^j$  appena calcolati si definisce come segue il coefficiente  $R_0^j$ :

$$R_0^j = R_1^j (R_{11}^j R_{21}^j - R_{12}^j R_{20}^j) - R_2^j (R_{10}^j R_{21}^j - R_{12}^j R_{19}^j) + R_3^j (R_{10}^j R_{20}^j - R_{11}^j R_{19}^j). \quad (5.32)$$

Dunque, in forma compatta, le Eq. (5.27) diventano:

$$U_{,z_b}^j = T_1 U_t^{j-1} + T_2 W_t^{j-1} + T_3 \Phi_t^{j-1} + T_4 \Psi_t^{j-1} + T_5 U_{,z_t}^{j-1}, \quad (5.33a)$$

$$V_{,z_b}^j = T_6 V_t^{j-1} + T_7 W_t^{j-1} + T_8 \Phi_t^{j-1} + T_9 \Psi_t^{j-1} + T_{10} V_{,z_t}^{j-1}, \quad (5.33b)$$

$$W_{,z_b}^j = T_{11} U_t^{j-1} + T_{12} V_t^{j-1} + T_{13} W_t^{j-1} + T_{14} W_{,z_t}^{j-1} + T_{15} \Phi_{,z_t}^{j-1} + T_{16} \Psi_{,z_t}^{j-1}, \quad (5.33c)$$

$$\Phi_{,z_b}^j = T_{17} U_t^{j-1} + T_{18} V_t^{j-1} + T_{19} W_t^{j-1} + T_{20} W_{,z_t}^{j-1} + T_{21} \Phi_{,z_t}^{j-1} + T_{22} \Psi_{,z_t}^{j-1}, \quad (5.33d)$$

$$\Psi_{,z_b}^j = T_{23} U_t^{j-1} + T_{24} V_t^{j-1} + T_{25} W_t^{j-1} + T_{26} W_{,z_t}^{j-1} + T_{27} \Phi_{,z_t}^{j-1} + T_{28} \Psi_{,z_t}^{j-1}. \quad (5.33e)$$

Riscrivendo le Eq. (5.24) e le Eq. (5.33) in forma matriciale, si ottiene:

$$\left\{ \begin{array}{c} U \\ V \\ W \\ \Phi \\ \Psi \\ U_z \\ V_z \\ W_z \\ \Phi_z \\ \Psi_z \end{array} \right\}_b^j = \left[ \begin{array}{cccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ T_1 & 0 & T_2 & T_3 & T_4 & T_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_6 & T_7 & T_8 & T_9 & 0 & T_{10} & 0 & 0 & 0 \\ T_{11} & T_{12} & T_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{14} & T_{15} & T_{16} \\ T_{17} & T_{18} & T_{19} & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{20} & T_{21} & T_{22} \\ T_{23} & T_{24} & T_{25} & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{26} & T_{27} & T_{28} \end{array} \right]^{j,j-1} \left\{ \begin{array}{c} U \\ V \\ W \\ \Phi \\ \Psi \\ U_z \\ V_z \\ W_z \\ \Phi_z \\ \Psi_z \end{array} \right\}_t^{j-1}, \quad (5.34)$$

che in forma compatta si riscrive:

$$\mathbf{X}_b^j = \mathbf{T}^{j,j-1} \mathbf{X}_t^{j-1}, \quad (5.35)$$

dove la  $\mathbf{T}^{j,j-1}$  di dimensioni  $10 \times 10$  è la matrice di trasferimento. Con essa si passa dal top  $t$  dello strato  $j-1$  al bottom  $b$  dello strato  $j$ -esimo, imponendo le condizioni per ottenere la continuità interlaminare tra il vettore delle incognite del problema al bottom  $b$  dello strato  $j$ ,  $\mathbf{X}_b^j$ , e quello al top  $t$  dello strato  $j-1$ ,  $\mathbf{X}_t^{j-1}$ .

Per risolvere il problema si definisce la (5.35) per tutte le interfacce del multistrato, ognuna definita dall'indice  $j, j-1$  con  $2 \leq j \leq M$ , dove  $M$  è il numero di strati matematici complessivo. Quindi, in particolare, si devono, calcolare  $M-1$  matrici di trasferimento  $\mathbf{T}^{j,j-1}$  con  $2 \leq j \leq M$ .

In analogia al caso elettro-elastico, si utilizzano ricorsivamente le Eq. (5.22) e Eq. (5.35) e, considerando i generici due strati  $j$  e  $j-1$ , si è in grado di definire:

$$\mathbf{X}_t^j = \mathbf{A}^{**j} \mathbf{T}^{j,j-1} \mathbf{A}^{**j-1} \mathbf{X}_b^{j-1}. \quad (5.36)$$

Applicando iterativamente la Eq. (5.36) con  $j$  da  $j=M$  fino a  $j=1$ , si ottiene la seguente relazione con cui, partendo dalla soluzione al bottom  $b$  del primo strato  $j=1$ , si arriva a quella al top dell'ultimo  $j=M$ :

$$\mathbf{X}_t^M = \mathbf{A}^{**M} \mathbf{T}^{M,M-1} \dots \mathbf{T}^{2,1} \mathbf{A}^{**1} \mathbf{X}_b^1 = \mathbf{H}_m \mathbf{X}_b^1. \quad (5.37)$$

Si osserva, che, essendo il problema definito in dieci incognite, la dimensione della matrice  $\mathbf{H}_m$  è sempre  $10 \times 10$ , a prescindere dal numero  $M$  di strati matematici  $j$  considerati.

### 5.3 Analisi alle vibrazioni libere

Per eseguire l'analisi alle vibrazioni libere, fissata la coppia di numeri di semionda  $(m, n)$ , nel caso del modello qui trattato per il guscio sferico, oltre alle condizioni di vincolo al contorno, si veda l'Eq. (5.2), si considerano due possibili configurazioni delle condizioni di carico sulle superfici al top  $t$  e al bottom  $b$  del multistrato, di coordinate  $z = \pm h/2$ , ovvero il top  $t$  dello strato  $j=M$  e il bottom  $b$  dello strato  $j=1$ . Si definiscono, di nuovo, la configurazione closed circuit e open circuit che differiscono per le condizioni di carico esterno considerate per il campo elettrostatico e magnetostatico.

Per quanto riguarda il campo meccanico elastico i carichi sulle superfici esterne sono nulli, per cui:

$$\sigma_{zz} = 0, \quad \sigma_{\alpha z} = 0, \quad \sigma_{\beta z} = 0 \quad \text{per } z = \pm h/2. \quad (5.38)$$

Si sostituiscono in esse la Eq. (3.47c), Eq. (3.47d) e Eq. (3.47e); poi, anche in questo caso, si introducono le Eq. (5.1). Dopodiché, si valutano le derivate in  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $t$  e si semplificano le rimanenti parti armoniche, ottenendo per il bottom ( $z = -h/2$ ):

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} \left( -\frac{h}{2} \right) &= -\frac{C_{13}^1}{H_{\alpha_b}^1} \bar{\alpha} U_b^1 - \frac{C_{23}^1}{H_{\beta_b}^1} \bar{\beta} V_b^1 + \left( \frac{C_{23}^1}{H_{\beta_b}^1 R_\beta} + \frac{C_{13}^1}{H_{\alpha_b}^1 R_\alpha} \right) W_b^1 + C_{33}^1 W_{,z_b}^1 + \\ &+ e_{33}^1 \Phi_{,z_b}^1 + q_{33}^1 \Psi_{,z_b}^1 = 0, \end{aligned} \quad (5.39a)$$

$$\sigma_{\beta z} \left( -\frac{h}{2} \right) = \frac{C_{44}^1}{H_{\beta_b}^1} \bar{\beta} W_b^1 + C_{44}^1 V_{,z_b}^1 - \frac{C_{44}^1}{H_{\beta_b}^1 R_\beta} V_b^1 + \frac{e_{24}^1}{H_{\beta_b}^1} \bar{\beta} \Phi_b^1 + \frac{q_{24}^1}{H_{\beta_b}^1} \bar{\beta} \Psi_b^1 = 0, \quad (5.39b)$$

$$\sigma_{\alpha z} \left( -\frac{h}{2} \right) = \frac{C_{55}^1}{H_{\alpha_b}^1} \bar{\alpha} W_b^1 + C_{55}^1 U_{,z_b}^1 - \frac{C_{55}^1}{H_{\alpha_b}^1 R_\alpha} U_b^1 + \frac{e_{15}^1}{H_{\alpha_b}^1} \bar{\alpha} \Phi_b^1 + \frac{q_{15}^1}{H_{\alpha_b}^1} \bar{\alpha} \Psi_b^1 = 0, \quad (5.39c)$$

mentre per il top ( $z = +h/2$ ):

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} \left( +\frac{h}{2} \right) &= -\frac{C_{13}^M}{H_{\alpha_t}^M} \bar{\alpha} U_t^M - \frac{C_{23}^M}{H_{\beta_t}^M} \bar{\beta} V_t^M + \left( \frac{C_{23}^M}{H_{\beta_t}^M R_\beta} + \frac{C_{13}^M}{H_{\alpha_t}^M R_\alpha} \right) W_t^M + C_{33}^M W_{,z_t}^M + \\ &+ e_{33}^M \Phi_{,z_t}^M + q_{33}^M \Psi_{,z_t}^M = 0, \end{aligned} \quad (5.40a)$$

$$\sigma_{\beta z} \left( +\frac{h}{2} \right) = \frac{C_{44}^M}{H_{\beta_t}^M} \bar{\beta} W_t^M + C_{44}^M V_{,z_t}^M - \frac{C_{44}^M}{H_{\beta_t}^M R_\beta} V_t^M + \frac{e_{24}^M}{H_{\beta_t}^M} \bar{\beta} \Phi_t^M + \frac{q_{24}^M}{H_{\beta_t}^M} \bar{\beta} \Psi_t^M = 0, \quad (5.40b)$$

$$\sigma_{\alpha z} \left( +\frac{h}{2} \right) = \frac{C_{55}^M}{H_{\alpha_t}^M} \bar{\alpha} W_t^M + C_{55}^M U_{,z_t}^M - \frac{C_{55}^M}{H_{\alpha_t}^M R_\alpha} U_t^M + \frac{e_{15}^M}{H_{\alpha_t}^M} \bar{\alpha} \Phi_t^M + \frac{q_{15}^M}{H_{\alpha_t}^M} \bar{\alpha} \Psi_t^M = 0. \quad (5.40c)$$

In forma compatta, è possibile riscrivere le Eq. (5.39) e Eq. (5.40) come:

$$B_{1_b}^1 U_b^1 + B_{2_b}^1 V_b^1 + B_{3_b}^1 W_b^1 + B_{4_b}^1 W_{,z_b}^1 + B_{5_b}^1 \Phi_{,z_b}^1 + B_{6_b}^1 \Psi_{,z_b}^1 = 0, \quad (5.41a)$$

$$B_{7_b}^1 V_b^1 + B_{8_b}^1 W_b^1 + B_{9_b}^1 \Phi_b^1 + B_{10_b}^1 \Psi_b^1 + B_{11_b}^1 V_{,z_b}^1 = 0, \quad (5.41b)$$

$$B_{12_b}^1 U_b^1 + B_{13_b}^1 W_b^1 + B_{14_b}^1 \Phi_b^1 + B_{15_b}^1 \Psi_b^1 + B_{16_b}^1 U_{,z_b}^1 = 0 \quad (5.41c)$$

e:

$$B_{1_t}^M U_t^1 + B_{2_t}^M V_t^1 + B_{3_t}^M W_t^1 + B_{4_t}^M W_{,z_t}^1 + B_{5_t}^M \Phi_{,z_t}^1 + B_{6_t}^M \Psi_{,z_t}^1 = 0, \quad (5.42a)$$

$$B_{7_t}^M V_t^1 + B_{8_t}^M W_t^1 + B_{9_t}^M \Phi_t^1 + B_{10_t}^M \Psi_t^1 + B_{11_t}^M V_{,z_t}^1 = 0, \quad (5.42b)$$

$$B_{12_t}^M U_t^1 + B_{13_t}^M W_t^1 + B_{14_t}^M \Phi_t^1 + B_{15_t}^M \Psi_t^1 + B_{15_t}^M U_{,z_t}^1 = 0. \quad (5.42c)$$

### 5.3.1 Closed circuit

Per quanto riguarda il campo elettrostatico e il campo magnetostatico, la configurazione closed circuit prevede di imporre la seguente condizioni al top  $t$  e al bottom  $b$ :

$$\phi = 0 \quad \psi = 0 \quad \text{per} \quad z = \pm h/2. \quad (5.43)$$

Le Eq. (5.43) comportano che le superfici esterne del guscio sferico delimitino un circuito elettrico e magnetico chiuso, da cui il nome dato alla configurazione. Si sostituiscono nelle Eq. (5.43) le forme armoniche di Eq. (5.1) e, semplificando la parte armonica, si ricava, per  $z = -h/2$ :

$$\Phi_b^1 \left( -\frac{h}{2} \right) = 0, \quad (5.44a)$$

$$\Psi_b^1 \left( -\frac{h}{2} \right) = 0, \quad (5.44b)$$

per  $z = +h/2$ :

$$\Phi_t^M \left( +\frac{h}{2} \right) = 0, \quad (5.45a)$$

$$\Psi_t^M \left( +\frac{h}{2} \right) = 0. \quad (5.45b)$$

Per la configurazione closed circuit, è possibile riformulare in forma matriciale le condizioni al contorno di carico complessive come segue:

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccccccccc} B_{1b}^1 & B_{2b}^1 & B_{3b}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{4b}^1 & B_{5b}^1 & B_{6b}^1 \\ 0 & B_{7b}^1 & B_{8b}^1 & B_{9b}^1 & B_{10b}^1 & 0 & B_{11b}^1 & 0 & 0 & 0 \\ B_{12b}^1 & 0 & B_{13b}^1 & B_{14b}^1 & B_{15b}^1 & B_{16b}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]_{b_{cc}}^1 . \\ & \cdot \left\{ \begin{array}{c} U \\ V \\ W \\ \Phi \\ \Psi \\ U_{,z} \\ V_{,z} \\ W_{,z} \\ \Phi_{,z} \\ \Psi_{,z} \end{array} \right\}_b^1 = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \quad \text{per} \quad z = -\frac{h}{2} \end{aligned} \quad (5.46)$$

e:

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccccccc} B_{1t}^1 & B_{2t}^1 & B_{3t}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_{7t}^1 & B_{8t}^1 & B_{9t}^1 & B_{10t}^1 & 0 & B_{11t}^1 \\ B_{12t}^1 & 0 & B_{13t}^1 & B_{14t}^1 & B_{15t}^1 & B_{16t}^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right]_{t_{cc}}^M . \\ & \cdot \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \\ \Phi \\ \Psi \\ U_{,z} \\ V_{,z} \\ W_{,z} \\ \Phi_{,z} \\ \Psi_{,z} \end{Bmatrix}_t^M = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{per } z = +\frac{h}{2}. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Nelle due equazioni matriciali il pedice *cc* alle matrici  $\mathbf{B}$ , di dimensione  $5 \times 10$ , indica che si tratta delle matrici per imporre le condizioni di carico sulle superfici esterne previste dalla configurazione closed circuit. Le Eq. (5.46) e Eq. (5.47), scritte in forma compatta, risultano:

$$\mathbf{B}_{b_{cc}}^1 \mathbf{X}_b^1 = \mathbf{0}, \quad (5.48a)$$

$$\mathbf{B}_{t_{cc}}^M \mathbf{X}_t^M = \mathbf{0}. \quad (5.48b)$$

Si procede sostituendo la Eq. (5.37), ovvero la soluzione del problema a meno delle condizioni di carico esterno, nella Eq. (5.48b) ottenendo:

$$\mathbf{B}_{t_{cc}}^M \mathbf{H}_m \mathbf{X}_b^1 = \mathbf{0}, \quad (5.49)$$

dove il prodotto  $\mathbf{B}_{t_{cc}}^M \mathbf{H}_m$  è sempre una matrice di dimensioni  $5 \times 10$ . Infine, raggruppando la Eq. (5.48a) con la appena ricavata Eq. (5.49), si ottiene il seguente sistema lineare omogeneo:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{t_{cc}}^M \mathbf{H}_m \\ \mathbf{B}_{b_{cc}}^1 \end{bmatrix} \mathbf{X}_b^1 = \mathbf{0}, \quad (5.50)$$

in formulazione compatta:

$$\mathbf{E}_{cc} \mathbf{X}_b^1 = \mathbf{0}, \quad (5.51)$$

dove si definisce la matrice di dimensioni  $10 \times 10$ :

$$\mathbf{E}_{cc} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{t_{cc}}^M \mathbf{H}_m \\ \mathbf{B}_{b_{cc}}^1 \end{bmatrix}. \quad (5.52)$$

### 5.3.2 Open circuit

La configurazione open circuit prevede per il campo elettrostatico e magnetostatico le seguenti condizioni di carico sulle superfici esterne:

$$\mathcal{D}_z = 0 \quad \mathcal{B}_z = 0 \quad \text{per } z = \pm h/2. \quad (5.53)$$

Si impone che la componente in direzione *z* del vettore spostamento elettrico e del vettore induzione magnetica siano nulle sulle superfici esterne del guscio sferico. I potenziali  $\phi$  e  $\psi$  sono

liberi, possono assumere qualsiasi valore sulle superfici esterne. Da questa considerazione viene il nome assegnato alla configurazione. Si prosegue sostituendo nella Eq. (5.53) le Eq. (3.48c) e Eq. (3.49c), dove, a loro volta, si introducono le Eq. (5.1). Dopodiché, si valutano le derivate in  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $t$  e si semplificano le rimanenti parti armoniche, ottenendo, per  $z = -h/2$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_z \left( -\frac{h}{2} \right) &= \frac{e_{31}^1}{H_{\alpha_b}^1} \bar{\alpha} U_b^1 + \frac{e_{32}^1}{H_{\beta_b}^1} \bar{\beta} V_b^1 + \left( \frac{e_{32}^1}{H_{\beta_b}^1 R_\beta} + \frac{e_{31}^1}{H_{\alpha_b}^1 R_\alpha} \right) W_b^1 + e_{33}^1 W_{,z_b}^1 + \\ &- \epsilon_{33}^1 \Phi_{,z_b}^1 - d_{33}^1 \Psi_{,z_b}^1 = 0, \end{aligned} \quad (5.54a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_z \left( -\frac{h}{2} \right) &= \frac{q_{31}^1}{H_{\alpha_b}^1} \bar{\alpha} U_b^1 + \frac{q_{32}^1}{H_{\beta_b}^1} \bar{\beta} V_b^1 + \left( \frac{q_{32}^1}{H_{\beta_b}^1 R_\beta} + \frac{q_{31}^1}{H_{\alpha_b}^1 R_\alpha} \right) W_b^1 + q_{33}^1 W_{,z_b}^1 + \\ &- d_{33}^1 \Phi_{,z_b}^1 - \mu_{33}^1 \Psi_{,z_b}^1 = 0, \end{aligned} \quad (5.54b)$$

per  $z = +h/2$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_z \left( \frac{h}{2} \right) &= \frac{e_{31}^1}{H_{\alpha_t}^1} \bar{\alpha} U_t^1 + \frac{e_{32}^1}{H_{\beta_t}^1} \bar{\beta} V_t^1 + \left( \frac{e_{32}^1}{H_{\beta_t}^1 R_\beta} + \frac{e_{31}^1}{H_{\alpha_t}^1 R_\alpha} \right) W_t^1 + e_{33}^1 W_{,z_t}^1 + \\ &- \epsilon_{33}^1 \Phi_{,z_t}^1 - d_{33}^1 \Psi_{,z_t}^1 = 0, \end{aligned} \quad (5.55a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_z \left( \frac{h}{2} \right) &= \frac{q_{31}^1}{H_{\alpha_t}^1} \bar{\alpha} U_t^1 + \frac{q_{32}^1}{H_{\beta_t}^1} \bar{\beta} V_t^1 + \left( \frac{q_{32}^1}{H_{\beta_t}^1 R_\beta} + \frac{q_{31}^1}{H_{\alpha_t}^1 R_\alpha} \right) W_t^1 + q_{33}^1 W_{,z_t}^1 + \\ &- d_{33}^1 \Phi_{,z_t}^1 - \mu_{33}^1 \Psi_{,z_t}^1 = 0. \end{aligned} \quad (5.55b)$$

In forma compatta, è possibile riscrivere le Eq. (5.54) e Eq. (5.55) come:

$$B_{17_{b_{oc}}}^1 U_b^1 + B_{18_{b_{oc}}}^1 V_b^1 + B_{19_{b_{oc}}}^1 W_b^1 + B_{20_{b_{oc}}}^1 W_{,z_b}^1 + B_{21_{b_{oc}}}^1 \Phi_{,z_b}^1 + B_{22_{b_{oc}}}^1 \Psi_{,z_b}^1 = 0, \quad (5.56a)$$

$$B_{23_{b_{oc}}}^1 U_b^1 + B_{24_{b_{oc}}}^1 V_b^1 + B_{25_{b_{oc}}}^1 W_b^1 + B_{26_{b_{oc}}}^1 W_{,z_b}^1 + B_{27_{b_{oc}}}^1 \Phi_{,z_b}^1 + B_{28_{b_{oc}}}^1 \Psi_{,z_b}^1 = 0 \quad (5.56b)$$

e:

$$B_{17_{t_{oc}}}^M U_t^1 + B_{18_{t_{oc}}}^M V_t^1 + B_{19_{t_{oc}}}^M W_t^1 + B_{20_{t_{oc}}}^M W_{,z_t}^1 + B_{21_{t_{oc}}}^M \Phi_{,z_t}^1 + B_{22_{t_{oc}}}^M \Psi_{,z_t}^1 = 0, \quad (5.57a)$$

$$B_{23_{t_{oc}}}^M U_t^1 + B_{24_{t_{oc}}}^M V_t^1 + B_{25_{t_{oc}}}^M W_t^1 + B_{26_{t_{oc}}}^M W_{,z_t}^1 + B_{27_{t_{oc}}}^M \Phi_{,z_t}^1 + B_{28_{t_{oc}}}^M \Psi_{,z_t}^1 = 0. \quad (5.57b)$$

In analogia a quanto fatto nel sottoparagrafo 5.3.1, anche per la configurazione open circuit, è possibile riformulare in forma matriciale le condizioni di carico esterno complessive, che

diventano:

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccccccccc} B_{1_b}^1 & B_{2_b}^1 & B_{3_b}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{4_b}^1 & B_{5_b}^1 \\ 0 & B_{7_b}^1 & B_{8_b}^1 & B_{9_b}^1 & B_{10_b}^1 & 0 & B_{11_b}^1 & 0 & 0 \\ B_{12_b}^1 & 0 & B_{13_b}^1 & B_{14_b}^1 & B_{15_b}^1 & B_{16_b}^1 & 0 & 0 & 0 \\ B_{17_{boc}}^1 & B_{18_{boc}}^1 & B_{19_{boc}}^1 & 1 & 0 & 0 & 0 & B_{20_{boc}}^1 & B_{21_{boc}}^1 \\ B_{23_{boc}}^1 & B_{24_{boc}}^1 & B_{25_{boc}}^1 & 0 & 1 & 0 & 0 & B_{26_{boc}}^1 & B_{27_{boc}}^1 \\ B_{28_{boc}}^1 & & & & & & & B_{28_{boc}}^1 & \end{array} \right]_{boc}^1 \\ & \cdot \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \\ \Phi \\ \Psi \\ U_z \\ V_z \\ W_z \\ \Phi_z \\ \Psi_z \end{Bmatrix}_b^1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{per } z = -\frac{h}{2} \end{aligned} \quad (5.58)$$

e:

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccccccccc} B_{1_t}^M & B_{2_t}^M & B_{3_t}^M & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{4_t}^M & B_{5_t}^M \\ 0 & B_{7_t}^M & B_{8_t}^M & B_{9_t}^M & B_{10_t}^M & 0 & B_{11_t}^M & 0 & 0 \\ B_{12_t}^M & 0 & B_{13_t}^M & B_{14_t}^M & B_{15_t}^M & B_{16_t}^M & 0 & 0 & 0 \\ B_{17_{toc}}^M & B_{18_{toc}}^M & B_{19_{toc}}^M & 1 & 0 & 0 & 0 & B_{20_{toc}}^M & B_{21_{toc}}^M \\ B_{23_{toc}}^M & B_{24_{toc}}^M & B_{25_{toc}}^M & 0 & 1 & 0 & 0 & B_{26_{toc}}^M & B_{27_{toc}}^M \\ B_{28_{toc}}^M & & & & & & & B_{28_{toc}}^M & \end{array} \right]_{toc}^M \\ & \cdot \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \\ \Phi \\ \Psi \\ U_z \\ V_z \\ W_z \\ \Phi_z \\ \Psi_z \end{Bmatrix}_t^M = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{per } z = +\frac{h}{2}. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Le Eq. (5.58) e Eq. (5.59), scritte in forma compatta risultano:

$$\mathbf{B}_{boc}^1 \mathbf{X}_b^1 = \mathbf{0}, \quad (5.60a)$$

$$\mathbf{B}_{toc}^M \mathbf{X}_t^M = \mathbf{0}. \quad (5.60b)$$

Seguendo gli stessi passi visti in 5.3.1, si procede sostituendo la Eq. (5.37) nella Eq. (5.60b) e si ricava:

$$\mathbf{B}_{toc}^M \mathbf{H}_m \mathbf{X}_b^1 = \mathbf{0}. \quad (5.61)$$

Raggruppando la Eq. (5.60a) con la Eq. (5.61), si ottiene il seguente sistema lineare omogeneo:

$$\left[ \begin{array}{c} \mathbf{B}_{toc}^M \mathbf{H}_m \\ \mathbf{B}_{boc}^1 \end{array} \right] \mathbf{X}_b^1 = \mathbf{0}, \quad (5.62)$$

in formulazione compatta:

$$\mathbf{E}_{oc} \mathbf{X}_b^1 = \mathbf{0}, \quad (5.63)$$

dove si definisce la matrice di dimensioni  $10 \times 10$ :

$$\mathbf{E}_{oc} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{t_{oc}}^M \mathbf{H}_m \\ \mathbf{B}_{b_{oc}}^1 \end{bmatrix}. \quad (5.64)$$

### 5.3.3 Valutazione delle frequenze circolari proprie e modi di vibrare

Per valutare le frequenze circolari proprie e i relativi modi di vibrare, fissati  $(m, n)$ , si pone, come fatto per il caso elettro-elastico in 4.4.3, la condizione affinché i due sistemi omogenei di Eq. (5.51) e Eq. (5.63) siano indeterminati. Dunque, si impone per la configurazione closed circuit:

$$\det(\mathbf{E}_{cc}) = 0 \quad (5.65)$$

e per la configurazione open circuit:

$$\det(\mathbf{E}_{oc}) = 0. \quad (5.66)$$

Le Eq. (5.65) e Eq. (5.66) si traducono, entrambe, anche in questo caso, in una equazione polinomiale di alto grado nell'incognita  $\omega^2$ , essendo le matrici  $\mathbf{E}_{cc}$  e  $\mathbf{E}_{oc}$  sua funzione per via del contributo dei carichi inerziali contenuto nei coefficienti  $A_1$ ,  $A_{12}$  e  $A_{23}$  della matrice  $\mathbf{A}$  di ogni strato matematico  $j$ . Risolvendo queste equazioni polinomiali si trova un certo numero di soluzioni  $\omega^2$  che sono il quadrato delle frequenze circolari proprie  $\omega_s$  della struttura per la fissata coppia  $(m, n)$ .

Per valutare il modo di vibrare lungo lo spessore relativo ad ogni frequenza circolare propria  $\omega_s$ , si sostituisce il suo valore a  $\omega$  nella corrispondente matrice  $\mathbf{E}_{cc}$  o  $\mathbf{E}_{oc}$ . Quest'ultima, puramente numerica e singolare, diventa  $\mathbf{E}_{scc}$  o  $\mathbf{E}_{soc}$  e si valutano i suoi dieci autovalori, essendo la matrice di dimensioni  $10 \times 10$ , tra cui si ha l'autovalore nullo. L'autovettore a cui si è interessati è sempre quello che costituisce lo spazio nullo della matrice  $\mathbf{E}_{scc}$  o  $\mathbf{E}_{soc}$ , cioè quello che è soluzione del sistema:

$$\mathbf{E}_{scc} \mathbf{X}_{b_{\omega_s}}^1 = \mathbf{0} \quad (5.67)$$

oppure:

$$\mathbf{E}_{soc} \mathbf{X}_{b_{\omega_s}}^1 = \mathbf{0}. \quad (5.68)$$

Dunque, l'autovalore  $\mathbf{X}_{b_{\omega_s}}^1$  che costituisce il suo spazio nullo è quello correlato all'autovalore nullo. Risolvendo questo problema agli autovalori con uno strumento numerico, quindi in matematica finita, si considera l'autovalore associato all'autovalore minimo. Osservando  $\mathbf{X}_{b_{\omega_s}}^1$ , esso rappresenta, per il considerato modo di vibrare associato a  $\omega_s$ , il vettore del valore che le ampiezze delle forme modali delle incognite del problema assumono in corrispondenza del bottom dell'intera struttura a guscio sferico:

$$\mathbf{X}_{b_{\omega_s}}^1 = \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \\ \Phi \\ \Psi \\ U_{,z} \\ V_{,z} \\ W_{,z} \\ \Phi_{,z} \\ \Psi_{,z} \end{Bmatrix}_{b_{\omega_s}}^1. \quad (5.69)$$

A partire da esso, usando la procedura riassunta dall'equazione Eq. (5.37), si ottiene l'ampiezza della forma modale delle incognite del problema dal bottom al top della struttura in ogni interfaccia tra gli strati  $j$ . Successivamente, a livello del singolo strato  $j$ , si possono valutare in ogni punto del loro spessore utilizzando la Eq. (5.17).

Utilizzando le opportune relazioni che legano le variabili fondamentali alle variabili primarie e secondarie (Eq. (3.12), Eq. (3.16) e Eq. (3.17) per le prime, Eq. (3.47), Eq. (3.48) e Eq. (3.49) per le seconde in cui si inseriscono le Eq. (5.1)) si possono ottenere, infine, anche le loro ampiezze delle forme modali lungo  $z$  per il modo di vibrare considerato.

## 5.4 Analisi statica

Considerando l'analisi statica viene meno la dipendenza dal tempo  $t$ ; le forme armoniche delle incognite diventano:

$$u^k(\alpha, \beta, z) = U^k(z) \cos(\bar{\alpha}\alpha) \sin(\bar{\beta}\beta), \quad (5.70a)$$

$$v^k(\alpha, \beta, z) = V^k(z) \sin(\bar{\alpha}\alpha) \cos(\bar{\beta}\beta), \quad (5.70b)$$

$$w^k(\alpha, \beta, z) = W^k(z) \sin(\bar{\alpha}\alpha) \sin(\bar{\beta}\beta), \quad (5.70c)$$

$$\phi^k(\alpha, \beta, z) = \Phi^k(z) \sin(\bar{\alpha}\alpha) \sin(\bar{\beta}\beta), \quad (5.70d)$$

$$\psi^k(\alpha, \beta, z) = \Psi^k(z) \sin(\bar{\alpha}\alpha) \sin(\bar{\beta}\beta); \quad (5.70e)$$

le Eq. (3.50) si semplificano come segue:

$$\begin{aligned} & \left( -\frac{H_\beta C_{55}^k}{H_\alpha R_\alpha^2} - \frac{C_{55}^k}{R_\alpha R_\beta} \right) u^k + \left( \frac{C_{55}^k H_\beta}{R_\alpha} + \frac{C_{55}^k H_\alpha}{R_\beta} \right) u_{,z}^k + \left( \frac{C_{11}^k H_\beta}{H_\alpha} \right) u_{,\alpha\alpha}^k + \\ & + \left( \frac{C_{66}^k H_\alpha}{H_\beta} \right) u_{,\beta\beta}^k + (C_{55}^k H_\alpha H_\beta) u_{,zz}^k + (C_{12}^k + C_{66}^k) v_{,\alpha\beta}^k + \\ & + \left( \frac{C_{11}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} + \frac{C_{12}^k}{R_\beta} + \frac{C_{55}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} + \frac{C_{55}^k}{R_\beta} \right) w_{,\alpha}^k + (C_{13}^k H_\beta + C_{55}^k H_\beta) w_{,\alpha z}^k + \\ & + \left( +2 \frac{e_{15}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} + \frac{e_{15}^k}{R_\beta} \right) \phi_{,\alpha}^k + (e_{31}^k H_\beta + e_{15}^k H_\beta) \phi_{,\alpha z}^k + \left( +2 \frac{q_{15}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} + \frac{q_{15}^k}{R_\beta} \right) \psi_{,\alpha}^k + \\ & + (q_{31}^k H_\beta + q_{15}^k H_\beta) \psi_{,\alpha z}^k = 0, \end{aligned} \quad (5.71a)$$

$$\begin{aligned} & \left( -\frac{H_\alpha C_{44}^k}{H_\beta R_\beta^2} - \frac{C_{44}^k}{R_\alpha R_\beta} \right) v^k + \left( \frac{C_{44}^k H_\alpha}{R_\beta} + \frac{C_{44}^k H_\beta}{R_\alpha} \right) v_{,z}^k + \left( \frac{C_{66}^k H_\beta}{H_\alpha} \right) v_{,\alpha\alpha}^k + \\ & + \left( \frac{C_{22}^k H_\alpha}{H_\beta} \right) v_{,\beta\beta}^k + (C_{44}^k H_\alpha H_\beta) v_{,zz}^k + (C_{12}^k + C_{66}^k) u_{,\alpha\beta}^k + \\ & + \left( \frac{C_{44}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta} + \frac{C_{44}^k}{R_\alpha} + \frac{C_{22}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta} + \frac{C_{12}^k}{R_\alpha} \right) w_{,\beta}^k + (C_{44}^k H_\alpha + C_{23}^k H_\alpha) w_{,\beta z}^k + \\ & + \left( +2 \frac{e_{24}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta} + \frac{e_{24}^k}{R_\alpha} \right) \phi_{,\beta}^k + (e_{32}^k H_\alpha + e_{24}^k H_\alpha) \phi_{,\beta z}^k + \left( +2 \frac{q_{24}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta} + \frac{q_{24}^k}{R_\alpha} \right) \psi_{,\beta}^k + \\ & + (q_{32}^k H_\alpha + q_{24}^k H_\alpha) \psi_{,\beta z}^k = 0, \end{aligned} \quad (5.71b)$$

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{C_{13}^k}{R_\alpha R_\beta} + \frac{C_{23}^k}{R_\alpha R_\beta} - \frac{C_{11}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha^2} - \frac{2C_{12}^k}{R_\alpha R_\beta} - \frac{C_{22}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta^2} \right) w^k + \\
& + \left( -\frac{C_{55}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} + \frac{C_{13}^k}{R_\beta} - \frac{C_{11}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} - \frac{C_{12}^k}{R_\beta} \right) u_{,\alpha}^k + \\
& + \left( -\frac{C_{44}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta} + \frac{C_{23}^k}{R_\alpha} - \frac{C_{22}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta} - \frac{C_{12}^k}{R_\alpha} \right) v_{,\beta}^k + \left( \frac{C_{33}^k H_\beta}{R_\alpha} + \frac{C_{33}^k H_\alpha}{R_\beta} \right) w_{,z}^k + \\
& + \left( C_{55}^k H_\beta + C_{13}^k H_\beta \right) u_{,\alpha z}^k + \left( C_{44}^k H_\alpha + C_{23}^k H_\alpha \right) v_{,\beta z}^k + \left( \frac{C_{55}^k H_\beta}{H_\alpha} \right) w_{,\alpha\alpha}^k + \\
& + \left( \frac{C_{44}^k H_\alpha}{H_\beta} \right) w_{,\beta\beta}^k + \left( C_{33}^k H_\alpha H_\beta \right) w_{,zz}^k + \\
& + \left( -\frac{e_{31}^k H_\beta}{R_\alpha} - \frac{e_{32}^k H_\alpha}{R_\beta} + \frac{e_{33}^k H_\beta}{R_\alpha} + \frac{e_{33}^k H_\alpha}{R_\beta} \right) \phi_{,z}^k + \frac{e_{15}^k H_\beta}{H_\alpha} \phi_{,\alpha\alpha}^k + \frac{e_{24}^k H_\alpha}{H_\beta} \phi_{,\beta\beta}^k + \\
& + e_{33}^k H_\alpha H_\beta \phi_{,zz}^k + \left( -\frac{q_{31}^k H_\beta}{R_\alpha} - \frac{q_{32}^k H_\alpha}{R_\beta} + \frac{q_{33}^k H_\beta}{R_\alpha} + \frac{q_{33}^k H_\alpha}{R_\beta} \right) \psi_{,z}^k + \frac{q_{15}^k H_\beta}{H_\alpha} \psi_{,\alpha\alpha}^k + \\
& + \frac{q_{24}^k H_\alpha}{H_\beta} \psi_{,\beta\beta}^k + q_{33}^k H_\alpha H_\beta \psi_{,zz}^k = 0,
\end{aligned} \tag{5.71c}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{e_{15}^k}{H_\alpha^2 R_\alpha} u_{,\alpha}^k + \left( \frac{e_{15}^k}{H_\alpha} + \frac{e_{31}^k}{H_\alpha} \right) u_{,\alpha z}^k - \frac{e_{24}^k}{H_\beta^2 R_\beta} v_{,\beta}^k + \left( \frac{e_{24}^k}{H_\beta} + \frac{e_{32}^k}{H_\beta} \right) v_{,\beta z}^k + \\
& + \left( \frac{e_{31}^k}{H_\alpha R_\alpha} + \frac{e_{32}^k}{H_\beta R_\beta} \right) w_{,z}^k + \frac{e_{15}^k}{H_\alpha^2} w_{,\alpha\alpha}^k + \frac{e_{24}^k}{H_\beta^2} w_{,\beta\beta}^k + e_{33}^k w_{,zz}^k - \frac{\epsilon_{11}^k}{H_\alpha^2} \phi_{,\alpha\alpha}^k + \\
& - \frac{\epsilon_{22}^k}{H_\beta^2} \phi_{,\beta\beta}^k - \epsilon_{33}^k \phi_{,zz}^k - \frac{d_{11}^k}{H_\alpha^2} \psi_{,\alpha\alpha}^k - \frac{d_{22}^k}{H_\beta^2} \psi_{,\beta\beta}^k - d_{33}^k \psi_{,zz}^k = 0,
\end{aligned} \tag{5.71d}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{q_{15}^k}{H_\alpha^2 R_\alpha} u_{,\alpha}^k + \left( \frac{q_{15}^k}{H_\alpha} + \frac{q_{31}^k}{H_\alpha} \right) u_{,\alpha z}^k - \frac{q_{24}^k}{H_\beta^2 R_\beta} v_{,\beta}^k + \left( \frac{q_{24}^k}{H_\beta} + \frac{q_{32}^k}{H_\beta} \right) v_{,\beta z}^k + \\
& + \left( \frac{q_{31}^k}{H_\alpha R_\alpha} + \frac{q_{32}^k}{H_\beta R_\beta} \right) w_{,z}^k + \frac{q_{15}^k}{H_\alpha^2} w_{,\alpha\alpha}^k + \frac{q_{24}^k}{H_\beta^2} w_{,\beta\beta}^k + q_{33}^k w_{,zz}^k - \frac{d_{11}^k}{H_\alpha^2} \phi_{,\alpha\alpha}^k + \\
& - \frac{d_{22}^k}{H_\beta^2} \phi_{,\beta\beta}^k - d_{33}^k \phi_{,zz}^k - \frac{\mu_{11}^k}{H_\alpha^2} \psi_{,\alpha\alpha}^k - \frac{\mu_{22}^k}{H_\beta^2} \psi_{,\beta\beta}^k - \mu_{33}^k \psi_{,zz}^k = 0.
\end{aligned} \tag{5.71e}$$

Fatte queste premesse, la trattazione per lo sviluppo del modello è la medesima fatta in precedenza fino ad ottenere la Eq. (5.37), con la differenza che la matrice  $\mathbf{H}_m$  è puramente numerica, poiché i coefficienti  $A_1$ ,  $A_{12}$  e  $A_{23}$  non hanno alcuna dipendenza da  $\omega^2$ .

Si definiscono, dunque, le seguenti condizioni di carico sulle superfici esterne al top  $t$  e al bottom  $b$  del multistrato:

$$\sigma_{zz} = p_z, \quad \sigma_{\alpha z} = p_\alpha, \quad \sigma_{\beta z} = p_\beta, \quad \phi = \varphi_{ext} \quad \psi = \psi_{ext} \quad \text{per } z = \pm h/2. \tag{5.72}$$

Affinché la soluzione esatta in forma armonica esista, oltre alle condizioni al contorno di semplice appoggio, si veda l'Eq. (5.2), i carichi esterni applicati devono essere anch'essi in forma armonica nelle direzioni  $\alpha$  e  $\beta$ . Si definiscono dunque:

$$p_z = P_z(z) \sin(\bar{\alpha}\alpha) \sin(\bar{\beta}\beta), \tag{5.73a}$$

$$p_\alpha = P_\alpha(z) \cos(\bar{\alpha}\alpha) \sin(\bar{\beta}\beta), \quad (5.73b)$$

$$p_\beta = P_\beta(z) \sin(\bar{\alpha}\alpha) \cos(\bar{\beta}\beta), \quad (5.73c)$$

$$\varphi_{ext} = \Phi_{ext}(z) \sin(\bar{\alpha}\alpha) \sin(\bar{\beta}\beta), \quad (5.73d)$$

$$\psi_{ext} = \Psi_{ext}(z) \sin(\bar{\alpha}\alpha) \sin(\bar{\beta}\beta). \quad (5.73e)$$

Quindi, si sostituiscono nelle condizioni di Eq. (5.72) le forme armoniche dei carichi esterni viste nell'Eq. (5.73) insieme alle Eq. (5.70d), Eq. (5.70e), Eq. (3.47c), Eq. (3.47e) e Eq. (3.47e); nelle ultime tre, a loro volta, si introducono le forme armoniche delle variabili fondamentali riportate nell'Eq. (5.70). Dopodiché, si valutano le derivate in  $\alpha$ ,  $\beta$  e si semplificano le rimanenti parti armoniche, ottenendo al bottom, per  $z = -h/2$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} \left( -\frac{h}{2} \right) = & -\frac{C_{13}^1}{H_{\alpha_b}^1} \bar{\alpha} U_b^1 - \frac{C_{23}^1}{H_{\beta_b}^1} \bar{\beta} V_b^1 + \left( \frac{C_{23}^1}{H_{\beta_b}^1 R_\beta} + \frac{C_{13}^1}{H_{\alpha_b}^1 R_\alpha} \right) W_b^1 + C_{33}^1 W_{,z_b}^1 + \\ & + e_{33}^1 \Phi_{,z_b}^1 + q_{33}^1 \Psi_{,z_b}^1 = P_{z_b}, \end{aligned} \quad (5.74a)$$

$$\sigma_{\beta z} \left( -\frac{h}{2} \right) = \frac{C_{44}^1}{H_{\beta_b}^1} \bar{\beta} W_b^1 + C_{44}^1 V_{,z_b}^1 - \frac{C_{44}^1}{H_{\beta_b}^1 R_\beta} V_b^1 + \frac{e_{24}^1}{H_{\beta_b}^1} \bar{\beta} \Phi_b^1 + \frac{q_{24}^1}{H_{\beta_b}^1} \bar{\beta} \Psi_b^1 = P_{\beta_b}, \quad (5.74b)$$

$$\sigma_{\alpha z} \left( -\frac{h}{2} \right) = \frac{C_{55}^1}{H_{\alpha_b}^1} \bar{\alpha} W_b^1 + C_{55}^1 U_{,z_b}^1 - \frac{C_{55}^1}{H_{\alpha_b}^1 R_\alpha} U_b^1 + \frac{e_{15}^1}{H_{\alpha_b}^1} \bar{\alpha} \Phi_b^1 + \frac{q_{15}^1}{H_{\alpha_b}^1} \bar{\alpha} \Psi_b^1 = P_{\alpha_b}, \quad (5.74c)$$

$$\Phi_b^1 \left( -\frac{h}{2} \right) = \Phi_{ext_b}, \quad (5.74d)$$

$$\Psi_b^1 \left( -\frac{h}{2} \right) = \Psi_{ext_b}, \quad (5.74e)$$

mentre al top, per  $z = +h/2$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} \left( +\frac{h}{2} \right) = & -\frac{C_{13}^M}{H_{\alpha_t}^M} \bar{\alpha} U_t^M - \frac{C_{23}^M}{H_{\beta_t}^M} \bar{\beta} V_t^M + \left( \frac{C_{23}^M}{H_{\beta_t}^M R_\beta} + \frac{C_{13}^M}{H_{\alpha_t}^M R_\alpha} \right) W_t^M + C_{33}^M W_{,z_t}^M + \\ & + e_{33}^M \Phi_{,z_t}^M + q_{33}^M \Psi_{,z_t}^M = P_{z_t}, \end{aligned} \quad (5.75a)$$

$$\sigma_{\beta z} \left( +\frac{h}{2} \right) = \frac{C_{44}^M}{H_{\beta_t}^M} \bar{\beta} W_t^M + C_{44}^M V_{,z_t}^M - \frac{C_{44}^M}{H_{\beta_t}^M R_\beta} V_t^M + \frac{e_{24}^M}{H_{\beta_t}^M} \bar{\beta} \Phi_t^M + \frac{q_{24}^M}{H_{\beta_t}^M} \bar{\beta} \Psi_t^M = P_{\beta_t}, \quad (5.75b)$$

$$\sigma_{\alpha z} \left( +\frac{h}{2} \right) = \frac{C_{55}^M}{H_{\alpha_t}^M} \bar{\alpha} W_t^M + C_{55}^M U_{,z_t}^M - \frac{C_{55}^M}{H_{\alpha_t}^M R_\alpha} U_t^M + \frac{e_{15}^M}{H_{\alpha_t}^M} \bar{\alpha} \Phi_t^M + \frac{q_{15}^M}{H_{\alpha_t}^M} \bar{\alpha} \Psi_t^M = P_{\alpha_t}, \quad (5.75c)$$

$$\Phi_t^M = \Phi_{ext_t}, \quad (5.75d)$$

$$\Psi_t^M = \Psi_{ext_t}. \quad (5.75e)$$

In forma compatta le Eq. (5.74) e Eq. (5.75) si riscrivono, rispettivamente, come:

$$B_{1_b}^1 U_b^1 + B_{2_b}^1 V_b^1 + B_{3_b}^1 W_b^1 + B_{4_b}^1 W_{,z_b}^1 + B_{5_b}^1 \Phi_{,z_b}^1 + B_{6_b}^1 \Psi_{,z_b}^1 = P_{z_b}, \quad (5.76a)$$

$$B_{7_b}^1 V_b^1 + B_{8_b}^1 W_b^1 + B_{9_b}^1 \Phi_b^1 + B_{10_b}^1 \Psi_b^1 + B_{11_b}^1 V_{,z_b}^1 = P_{\beta_b}, \quad (5.76b)$$

$$B_{12_b}^1 U_b^1 + B_{13_b}^1 W_b^1 + B_{14_b}^1 \Phi_b^1 + B_{15_b}^1 \Psi_b^1 + B_{16_b}^1 U_{,z_b}^1 = P_{\alpha_b}, \quad (5.76c)$$

$$\Phi_b^1 \left( -\frac{h}{2} \right) = \Phi_{ext_b}, \quad (5.76d)$$

$$\Psi_b^1 \left( -\frac{h}{2} \right) = \Psi_{ext_b} \quad (5.76e)$$

e:

$$B_{1_t}^M U_t^1 + B_{2_t}^M V_t^1 + B_{3_t}^M W_t^1 + B_{4_t}^M W_{,z_t}^1 + B_{5_t}^M \Phi_{,z_t}^1 + B_{6_t}^M \Psi_{,z_t}^1 = P_{z_t}, \quad (5.77a)$$

$$B_{7_t}^M V_t^1 + B_{8_t}^M W_t^1 + B_{9_t}^M \Phi_t^1 + B_{10_t}^M \Psi_t^1 + B_{11_t}^M V_{,z_t}^1 = P_{\beta_t}, \quad (5.77b)$$

$$B_{12_t}^M U_t^1 + B_{13_t}^M W_t^1 + B_{14_t}^M \Phi_t^1 + B_{15_t}^M \Psi_t^1 + B_{16_t}^M U_{,z_t}^1 = P_{\alpha_t}, \quad (5.77c)$$

$$\Phi_t^M \left( +\frac{h}{2} \right) = \Phi_{ext_t}, \quad (5.77d)$$

$$\Psi_t^M \left( +\frac{h}{2} \right) = \Psi_{ext_t}, \quad (5.77e)$$

le quali possono essere riformulate in forma matriciale. Al bottom, per  $z = -h/2$ , le Eq. (5.76) diventano:

$$\begin{bmatrix} B_{1_b}^1 & B_{2_b}^1 & B_{3_b}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{4_b}^1 & B_{5_b}^1 & B_{6_b}^1 \\ 0 & B_{7_b}^1 & B_{8_b}^1 & B_{9_b}^1 & B_{10_b}^1 & 0 & B_{11_b}^1 & 0 & 0 & 0 \\ B_{12_b}^1 & 0 & B_{13_b}^1 & B_{14_b}^1 & B_{15_b}^1 & B_{16_b}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_b \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \\ \Phi \\ \Psi \\ U_{,z} \\ V_{,z} \\ W_{,z} \\ \Phi_{,z} \\ \Psi_{,z} \end{Bmatrix}_b^1 = \begin{Bmatrix} P_{z_b} \\ P_{\beta_b} \\ P_{\alpha_b} \\ \Phi_{ext_b} \\ \Psi_{ext_b} \end{Bmatrix}. \quad (5.78)$$

Al top, per  $z = +h/2$ , le Eq. (5.77) assumono la seguente forma:

$$\begin{bmatrix} B_{1_t}^M & B_{2_t}^M & B_{3_t}^M & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{4_t}^M & B_{5_t}^M & B_{6_t}^M \\ 0 & B_{7_t}^M & B_{8_t}^M & B_{9_t}^M & B_{10_t}^M & 0 & B_{11_t}^M & 0 & 0 & 0 \\ B_{12_t}^M & 0 & B_{13_t}^M & B_{14_t}^M & B_{15_t}^M & B_{16_t}^M & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_t \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \\ \Phi \\ \Psi \\ U_{,z} \\ V_{,z} \\ W_{,z} \\ \Phi_{,z} \\ \Psi_{,z} \end{Bmatrix}_t^M = \begin{Bmatrix} P_{z_t} \\ P_{\beta_t} \\ P_{\alpha_t} \\ \Phi_{ext_t} \\ \Psi_{ext_t} \end{Bmatrix}. \quad (5.79)$$

Le due matrici  $\mathbf{B}_b$  e  $\mathbf{B}_t$ , di dimensione  $10 \times 10$ , permettono di imporre le condizioni di carico esterno. Le Eq. (5.78) e Eq. (5.79), scritte in forma compatta risultano:

$$\mathbf{B}_b^1 \mathbf{X}_b^1 = \mathbf{P}_{ext_b}, \quad (5.80a)$$

$$\mathbf{B}_t^M \mathbf{X}_t^M = \mathbf{P}_{ext_t}. \quad (5.80b)$$

Come per l'analisi alle vibrazioni libere, si procede sostituendo la Eq. (5.37) nella Eq. (5.80b) ottenendo:

$$\mathbf{B}_t^M \mathbf{H}_m \mathbf{X}_b^1 = \mathbf{P}_{ext_t}. \quad (5.81)$$

Infine, raggruppando la Eq. (5.80a) con la appena ricavata Eq. (5.81), si ottiene il seguente sistema lineare:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_t^M \mathbf{H}_m \\ \mathbf{B}_b^1 \end{bmatrix} \mathbf{X}_b^1 = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_{ext_b} \\ \mathbf{P}_{ext_t} \end{Bmatrix}, \quad (5.82)$$

in formulazione compatta:

$$\mathbf{E} \mathbf{X}_b^1 = \mathbf{P}_{ext}, \quad (5.83)$$

dove si definisce la matrice di dimensioni  $10 \times 10$ :

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_t^M \mathbf{H}_m \\ \mathbf{B}_b^1 \end{bmatrix} \quad (5.84)$$

e il vettore dei carichi esterni di dimensioni  $10 \times 1$ :

$$\mathbf{P}_{ext} = \begin{Bmatrix} P_{z_t} \\ P_{\beta_t} \\ P_{\alpha_t} \\ \Phi_{ext_t} \\ \Psi_{ext_t} \\ P_{z_b} \\ P_{\beta_b} \\ P_{\alpha_b} \\ \Phi_{ext_b} \\ \Psi_{ext_b} \end{Bmatrix}. \quad (5.85)$$

Risolvendo il sistema di Eq. (5.82) si ottiene la soluzione al problema di analisi statica, in termini del vettore delle ampiezze delle variabili fondamentali di Eq. (5.70) e loro derivate prime in  $z$  al bottom  $b$  della struttura:

$$\mathbf{X}_b^1 = \mathbf{E}^{-1} \mathbf{P}_{ext}. \quad (5.86)$$

A partire da questa soluzione, in analogia a quanto descritto per le forme modali nel caso dell'analisi alle vibrazioni libere nel paragrafo 5.3.3, si ottiene la soluzione per l'ampiezza delle variabili fondamentali lungo tutto lo spessore  $h$  dal bottom  $b$  al top  $t$  del multistrato. A partire da esse, si valutano anche le soluzioni delle variabili primarie e secondarie per  $0 \leq z \leq h$  con le apposite relazioni (Eq. (3.12), Eq. (3.16) e Eq. (3.17), per le prime, Eq. (3.47), Eq. (3.48) e Eq. (3.49), per le seconde, in cui si inseriscono le Eq. (5.70)).

In questa tesi si propongono due possibili configurazioni statiche da analizzare: la configurazione sensore e attuatore elettro-magnetico, in analogia al caso elettro-elastico.

### 5.4.1 Sensore elettro-magnetico

Nel caso in cui l'analisi statica sia svolta su un sensore piezoelettrico e piezomagnetico per il monitoraggio dei carichi meccanici, il potenziale elettrostatico  $\varphi_{ext}$  e il potenziale magnetostatico  $\psi_{ext}$  sulle superfici esterne per  $z = \pm h/2$  sono nulli, mentre risultano, eventualmente, diversi da zero i carichi meccanici  $p_z$ ,  $p_\alpha$  e  $p_\beta$  applicati ad esse. In questa condizione il vettore delle ampiezze dei carichi statici esterni di Eq. (4.82) diventa:

$$\mathbf{P}_{ext,sens} = \begin{Bmatrix} P_{z_t} \\ P_{\beta_t} \\ P_{\alpha_t} \\ 0 \\ 0 \\ P_{z_b} \\ P_{\beta_b} \\ P_{\alpha_b} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (5.87)$$

Per cui il sistema di Eq. (5.83) risulta:

$$\mathbf{E}\mathbf{X}_b^1 = \mathbf{P}_{ext,sens}. \quad (5.88)$$

### 5.4.2 Attuatore elettro-magnetico

Il caso duale è quello di un attuatore piezoelettrico e piezomagnetico per modificare la configurazione geometrica della struttura. In questo caso, il potenziale elettrostatico  $\varphi_{ext}$  e il potenziale magnetostatico  $\psi_{ext}$  sulle superfici esterne per  $z = \pm h/2$  sono, eventualmente, diverso da zero, mentre risultano nulli i carichi meccanici  $p_z$ ,  $p_\alpha$  e  $p_\beta$  applicati ad esse. In questa condizione il vettore delle ampiezze dei carichi statici esterni di Eq. (5.85) diventa:

$$\mathbf{P}_{ext,att} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Phi_{ext_t} \\ \Psi_{ext_t} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Phi_{ext_b} \\ \Psi_{ext_b} \end{Bmatrix}. \quad (5.89)$$

Per cui il sistema di Eq. (5.83) risulta:

$$\mathbf{E}\mathbf{X}_b^1 = \mathbf{P}_{ext,att}. \quad (5.90)$$

## Capitolo 6

# Validazione del modello 3D esatto per analisi elettro-magneto-elastiche accoppiate

Nel presente capitolo si riportano gli assessment del modello 3D layerwise esatto per problemi elettro-magneto-elastici accoppiati.

In particolare, il suddetto codice è stato sviluppato internamente in ambiente MATLAB<sup>®</sup> e va a costituire uno dei casi di applicazione del codice 3DEMS, sigla per *3D exponential multifield solutions*. Quest'ultimo è un codice accademico, che permette di eseguire analisi 3D esatte per problemi multicampo, sia alle vibrazioni libere sia statiche, di strutture multistrato avanzate a guscio sferico. L'approccio utilizzato nei vari casi sviluppati ricalca sempre quello presentato nei capitoli precedenti. Inizialmente sviluppato per problemi solo elastici, il codice 3DEMS è stato ampliato progressivamente, aumentando le possibili combinazioni di campi valutabili. Il caso relativo ai problemi elettro-magneto-elastici accoppiati, che si è implementato nell'ambito di questa tesi, è l'ultimo aggiunto al momento in cui si scrive.

Si suddivide il capitolo in due parti: nella prima si riportano gli assessment per il modello 3D esatto per le analisi alle vibrazioni libere,  $3D-u-\phi-\psi_{\text{din}}$ , mentre nella seconda quelli relativi al modello 3D esatto per le analisi statiche,  $3D-u-\phi-\psi_{\text{stat}}$ . Tutti gli assessment considerati analizzano casi di strutture multistrato con proprietà costanti lungo lo spessore per ogni strato  $k$ . Inoltre, si impiegano sempre  $M = 300$  strati matematici con la matrice esponenziale troncata al terzo ordine ( $N = 3$ ). Questi valori sono una scelta molto conservativa, suggerita da Brischetto e Cesare [18, 19, 20], che garantisce la convergenza dei risultati e la corretta descrizione delle geometrie shell valutate, con tutti gli effetti dovuti alla loro curvatura lungo lo spessore.

### 6.1 Analisi alle vibrazioni libere

In questa sezione per validare il modello 3D esatto elettro-magneto-elastico accoppiato per l'analisi alle vibrazioni libere,  $3D-u-\phi-\psi_{\text{din}}$ , si considerano quattro assessment. I primi due sono eseguiti usando come riferimento [18] che presenta risultati ottenuti con il modello 3D esatto elettro-elastico accoppiato,  $3D-u-\phi_{\text{din}}$ ; il terzo e il quarto si basano sui casi proposti in [19] e validati con il modello 3D esatto magneto-elastico accoppiato,  $3D-u-\psi_{\text{din}}$ . I primi due casi trattati utilizzano un materiale di tipo solo piezoelettrico, mentre il terzo e il quarto solo piezomagnetico. Nei primi due casi si considerano sia configurazioni closed circuit sia open circuit. Per il terzo e quarto caso, invece, si considera solo la configurazione open circuit.

**Tabella 6.1:** Costanti ingegneristiche meccaniche, coefficienti piezoelettrici, piezomagnetici, di permittività elettrica, di permeabilità magnetica e magneto-elettrici dei materiali utilizzati negli assessment  $A1_{din}$ ,  $A2_{din}$ ,  $A4_{din}$ ,  $A1_{stat}$ ,  $A2_{stat}$  e  $A6_{stat}$ .

Caratteristiche materiali $A1_{din}$ , $A2_{din}$ , $A4_{din}$ , $A1_{stat}$ , $A2_{stat}$ , $A6_{stat}$					
	Al2024 [18, 20]	PZT-4 [18, 20]	Foam [20]	CFRP-A [18, 20]	PVDF [18]
$E_1$ [GPa]	73	81.3	0.180	132.38	237
$E_2$ [GPa]	73	81.3	0.180	10.756	23.2
$E_3$ [GPa]	73	64.5	0.180	10.756	10.5
$\nu_{12}$	0.3	0.329	0.37	0.24	0.154
$\nu_{13}$	0.3	0.432	0.37	0.24	0.178
$\nu_{23}$	0.3	0.432	0.37	0.49	0.177
$G_{12}$ [GPa]	28.077	30.6	0.65693	5.6537	6.43
$G_{13}$ [GPa]	28.077	25.6	0.65693	5.6537	4.40
$G_{23}$ [GPa]	28.077	25.6	0.65693	3.6060	2.15
$e_{15}$ [C/m <sup>2</sup> ]	0	12.72	0	0	-0.01
$e_{24}$ [C/m <sup>2</sup> ]	0	12.72	0	0	-0.01
$e_{31}$ [C/m <sup>2</sup> ]	0	-5.20	0	0	-0.13
$e_{32}$ [C/m <sup>2</sup> ]	0	-5.20	0	0	-0.14
$e_{33}$ [C/m <sup>2</sup> ]	0	15.08	0	0	-0.28
$\epsilon_1$ [nF/m]	0.008854	13.06	0.008854	0.030989	0.1107
$\epsilon_2$ [nF/m]	0.008854	13.06	0.008854	0.026563	0.1061
$\epsilon_3$ [nF/m]	0.008854	11.51	0.008854	0.026563	0.1061
$q_{15}$ [T]	0	0	0	0	0
$q_{24}$ [T]	0	0	0	0	0
$q_{31}$ [T]	0	0	0	0	0
$q_{32}$ [T]	0	0	0	0	0
$q_{33}$ [T]	0	0	0	0	0
$\mu_1$ [nH/m]	$4\pi \times 10^2$				
$\mu_2$ [nH/m]	$4\pi \times 10^2$				
$\mu_3$ [nH/m]	$4\pi \times 10^2$				
$d_1$ [(Ns)/(VC)]	0	0	0	0	0
$d_2$ [(Ns)/(VC)]	0	0	0	0	0
$d_3$ [(Ns)/(VC)]	0	0	0	0	0
$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	2800	7600	50	1578	1800

**Tabella 6.2:** Costanti ingegneristiche meccaniche, coefficienti piezoelettrici, piezomagnetici, di permittività elettrica, di permeabilità magnetica e magneto-elettrici dei materiali utilizzati negli assessment  $A3_{\text{din}}$ ,  $A4_{\text{din}}$ ,  $A3_{\text{stat}}$ ,  $A4_{\text{stat}}$ ,  $A5_{\text{stat}}$  e  $A6_{\text{stat}}$ .

Caratteristiche materiali $A3_{\text{din}}$ , $A4_{\text{din}}$ , $A3_{\text{stat}}$ , $A4_{\text{stat}}$ , $A5_{\text{stat}}$ , $A6_{\text{stat}}$					
	PZT-5 [25]	MSCP [25]	CoFe <sub>2</sub> O <sub>4</sub> [19, 25]	BaTiO <sub>3</sub> [25]	Composite [19]
$E_1$ [GPa]	61.006	26.027	154.32	116.33	172.37
$E_2$ [GPa]	61.006	26.027	154.32	116.33	6.895
$E_3$ [GPa]	53.202	22.004	142.83	111.93	6.895
$\nu_{12}$	0.34998	0.27585	0.36564	0.30709	0.25
$\nu_{13}$	0.37998	0.35392	0.40133	0.33362	0.25
$\nu_{23}$	0.37998	0.35392	0.40133	0.33362	0.25
$G_{12}$ [GPa]	22.59	10.2	56.5	44.5	3.447
$G_{13}$ [GPa]	21.1	15.7	45.3	43	3.447
$G_{23}$ [GPa]	21.1	15.7	45.3	43	1.379
$e_{15}$ [C/m <sup>2</sup> ]	12.32	0	0	11.6	0
$e_{24}$ [C/m <sup>2</sup> ]	12.32	0	0	11.6	0
$e_{31}$ [C/m <sup>2</sup> ]	-7.2	0	0	-4.4	0
$e_{32}$ [C/m <sup>2</sup> ]	-7.2	0	0	-4.4	0
$e_{33}$ [C/m <sup>2</sup> ]	15.11	0	0	18.6	0
$\epsilon_1$ [nF/m]	1.53	0.008854	0.08	11.2	0.008854
$\epsilon_2$ [nF/m]	1.53	0.008854	0.08	11.2	0.008854
$\epsilon_3$ [nF/m]	1.5	0.008854	0.093	12.6	0.008854
$q_{15}$ [T]	0	21.6	550	0	0
$q_{24}$ [T]	0	21.6	550	0	0
$q_{31}$ [T]	0	-12.2	580.3	0	0
$q_{32}$ [T]	0	-12.2	580.3	0	0
$q_{33}$ [T]	0	31.3	699.7	0	0
$\mu_1$ [nH/m]	$4\pi \times 10^2$	$5.4 \times 10^3$	$-590 \times 10^3$	$5 \times 10^3$	$4\pi \times 10^2$
$\mu_2$ [nH/m]	$4\pi \times 10^2$	$5.4 \times 10^3$	$-590 \times 10^3$	$5 \times 10^3$	$4\pi \times 10^2$
$\mu_3$ [nH/m]	$4\pi \times 10^2$	$5.4 \times 10^3$	$157 \times 10^3$	$10 \times 10^3$	$4\pi \times 10^2$
$d_1$ [(Ns)/(VC)]	0	0	0	0	0
$d_2$ [(Ns)/(VC)]	0	0	0	0	0
$d_3$ [(Ns)/(VC)]	0	0	0	0	0
$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	-	-	5300	-	1500

**Tabella 6.3:** Caratteristiche geometriche e numeri di semionda ( $m, n$ ) imposti per gli assessment  $A1_{din}$ ,  $A2_{din}$ ,  $A3_{din}$  e  $A4_{din}$

Caratteristiche geometriche				
	<b>A1<sub>din</sub></b>	<b>A2<sub>din</sub></b>	<b>A3<sub>din</sub></b>	<b>A4<sub>din</sub></b>
$a$ [m]	1	$\frac{\pi}{3}R_\alpha$	$\frac{\pi}{3}R_\alpha$	1
$b$ [m]	1	$\frac{\pi}{3}R_\beta$	1	1
$h$ [m]	Variabile	Variabile	Variabile	Variabile
$R_\alpha$ [m]	$\infty$	10	10	$\infty$
$R_\beta$ [m]	$\infty$	10	$\infty$	$\infty$
$m$	1;2	1;2	1;2;3	1;2;3
$n$	1;2	1;2	0	1;2;3

### 6.1.1 Assessment A1<sub>din</sub>

Si considera una piastra quadrata multistrato PZT-4/Al2024/PVDF/Al2024/PZT-4, in cui PZT-4 e PVDF sono materiali piezoelettrici. I singoli strati fisici hanno i seguenti spessori:  $h_{PZT-4} = h_{Al2024} = 0.1h$  e  $h_{PVDF} = 0.6h$  con  $h$  lo spessore totale del multistrato. Le proprietà dei materiali e le caratteristiche geometriche si trovano rispettivamente nelle Tabelle 6.1 e 6.3. Sia nel caso closed circuit che nel caso open circuit, si considerano diversi rapporti  $a/h$ , e, per ognuno di essi, diverse combinazioni di numeri di semionda ( $m, n$ ).

Nelle Tabelle 6.4 e 6.5 si presentano i valori delle frequenze circolari normalizzate ( $\bar{\omega} = \omega/100$  dove  $\omega$  è espressa in rad/s), per i primi tre modi di vibrare. Si osserva, per entrambe le configurazioni, che le soluzioni ottenute con 3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{din}$  coincidono con le soluzioni di riferimento del modello 3D- $u$ - $\phi_{din}$ , descritto in [18]. Dunque, per ogni rapporto di snellezza e coppia di numeri di semionda ( $m, n$ ) considerate, l'effetto dell'anisotropia trasversale, data dalla configurazione multistrato della piastra, e l'accoppiamento elettro-elastico sono correttamente valutati dal presente modello elettro-magneto-elastico, sia nel caso closed circuit sia open circuit.

### 6.1.2 Assessment A2<sub>din</sub>

Si esamina un pannello di guscio sferico PZT-4/0°/90°/0°/PZT-4, dove i tre strati centrali sono in CFRP-A e PZT-4 è un materiale piezoelettrico. Gli strati fisici sono di spessore  $h_{PZT-4} = 0.125h$  e  $h_{CFRP-A} = 0.25h$  con  $h$  lo spessore totale del multistrato. Le proprietà dei materiali e le caratteristiche geometriche si trovano rispettivamente nelle Tabelle 6.1 e 6.3. Sia nel caso closed circuit che nel caso open circuit si considerano differenti rapporti  $R_\alpha/h$ , e, per ognuno di essi, diverse combinazioni di numeri di semionda ( $m, n$ ).

Nelle Tabelle 6.6 e 6.7 si presentano i valori delle frequenze circolari normalizzate ( $\bar{\omega} = \omega/100$  dove  $\omega$  è espressa in rad/s) per i primi tre modi di vibrare. Si osserva, per entrambe le configurazioni, che le soluzioni ottenute con 3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{din}$  coincidono con le soluzioni di riferimento del modello 3D- $u$ - $\phi_{din}$ , descritto in [18]. Dunque, per ogni rapporto  $R_\alpha/h$  e coppia di numeri di semionda ( $m, n$ ) considerate, l'effetto dell'anisotropia trasversale, gli effetti di curvatura del guscio sferico e l'accoppiamento elettro-elastico sono correttamente valutati dal presente modello elettro-magneto-elastico, sia nel caso closed circuit sia open circuit.

**Tabella 6.4:** Assessment A1<sub>din</sub>, piastra quadrata PZT-4/Al2024/PVDF/Al2024/PZT-4 semplicemente appoggiata nella configurazione closed circuit. Frequenze circolari normalizzate  $\bar{\omega}$  per i primi tre modi di vibrare al variare del rapporto  $a/h$  e della coppia di numeri di semionda ( $m, n$ ).

Configurazione closed circuit A1 <sub>din</sub>						
	$a/h$	4	10	20	50	100
$\bar{\omega} = \omega/100 [\text{rad/s} \times 10^{-2}]$						
(1,1)-I	3D- $u\phi$ <sub>din</sub> [18]	39.165	25.172	14.499	6.0930	3.0695
	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	39.165	25.172	14.499	6.0930	3.0695
(1,1)-II	3D- $u\phi$ <sub>din</sub> [18]	131.62	135.66	136.30	136.49	136.52
	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	131.62	135.66	136.30	136.49	136.52
(1,1)-III	3D- $u\phi$ <sub>din</sub> [18]	163.96	247.27	250.72	251.72	251.86
	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	163.96	247.27	250.72	251.72	251.86
$\bar{\omega} = \omega/100 [\text{rad/s} \times 10^{-2}]$						
(1,2)-I	3D- $u\phi$ <sub>din</sub> [18]	64.895	48.306	31.569	14.197	7.2389
	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	64.895	48.306	31.569	14.197	7.2389
(1,2)-II	3D- $u\phi$ <sub>din</sub> [18]	204.89	225.81	228.02	228.65	228.75
	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	204.88	225.81	228.02	228.65	228.74
(1,2)-III	3D- $u\phi$ <sub>din</sub> [18]	224.53	301.55	303.75	304.32	304.40
	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	224.52	301.55	303.75	304.32	304.40
$\bar{\omega} = \omega/100 [\text{rad/s} \times 10^{-2}]$						
(2,2)-I	3D- $u\phi$ <sub>din</sub> [18]	93.894	72.517	50.344	23.679	12.186
	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	93.893	72.517	50.344	23.679	12.186
(2,2)-II	3D- $u\phi$ <sub>din</sub> [18]	215.21	266.56	271.31	272.77	272.98
	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	215.19	266.56	271.31	272.77	272.98
(2,2)-III	3D- $u\phi$ <sub>din</sub> [18]	263.76	362.11	494.54	502.30	503.44
	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	263.75	362.11	494.54	502.29	503.44

**Tabella 6.5:** Assessment A1<sub>din</sub>, piastra quadrata PZT-4/Al2024/PVDF/Al2024/PZT-4 semplicemente appoggiata nella configurazione open circuit. Frequenze circolari normalizzate  $\bar{\omega}$  per i primi tre modi di vibrare al variare del rapporto a/h e della coppia di numeri di semionda (m, n).

Configurazione open circuit A1 <sub>din</sub>						
	a/h	4	10	20	50	100
$\bar{\omega} = \omega/100 [\text{rad/s} \times 10^{-2}]$						
(1,1)-I	3D-u- $\phi$ <sub>din</sub> [18]	39.172	25.173	14.500	6.0930	3.0695
	3D-u- $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	39.172	25.173	14.500	6.0930	3.0695
(1,1)-II	3D-u- $\phi$ <sub>din</sub> [18]	131.62	135.66	136.31	136.49	136.52
	3D-u- $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	131.62	135.66	136.31	136.50	136.53
(1,1)-III	3D-u- $\phi$ <sub>din</sub> [18]	163.97	247.32	250.74	251.73	251.88
	3D-u- $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	163.97	247.32	250.74	251.73	251.88
$\bar{\omega} = \omega/100 [\text{rad/s} \times 10^{-2}]$						
(1,2)-I	3D-u- $\phi$ <sub>din</sub> [18]	64.922	48.310	31.570	14.197	7.2389
	3D-u- $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	64.922	48.310	31.570	14.197	7.2389
(1,2)-II	3D-u- $\phi$ <sub>din</sub> [18]	204.89	225.81	228.02	228.66	228.75
	3D-u- $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	204.88	225.81	228.02	228.66	228.75
(1,2)-III	3D-u- $\phi$ <sub>din</sub> [18]	224.54	301.60	303.78	304.35	304.43
	3D-u- $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	224.52	301.60	303.78	304.35	304.43
$\bar{\omega} = \omega/100 [\text{rad/s} \times 10^{-2}]$						
(2,2)-I	3D-u- $\phi$ <sub>din</sub> [18]	93.954	72.525	50.346	23.679	12.186
	3D-u- $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	93.954	72.525	50.346	23.679	12.186
(2,2)-II	3D-u- $\phi$ <sub>din</sub> [18]	215.21	266.56	271.32	272.78	273.00
	3D-u- $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	215.19	266.56	271.32	272.78	273.00
(2,2)-III	3D-u- $\phi$ <sub>din</sub> [18]	263.76	362.13	494.63	502.33	503.47
	3D-u- $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	263.75	362.13	494.63	502.33	503.47

**Tabella 6.6:** Assessment A2<sub>din</sub>, pannello di guscio sferico PZT-4/0°/90°/0°/PZT-4 semplicemente appoggiato nella configurazione closed circuit. Frequenze circolari normalizzate  $\bar{\omega}$  per i primi tre modi di vibrare al variare del rapporto  $R_\alpha/h$  e della coppia di numeri di semionda ( $m, n$ ).

Configurazione closed circuit A2 <sub>din</sub>						
	$R_\alpha/h$	10	20	50	100	
$\bar{\omega} = \omega/100 \text{ [rad/s} \times 10^{-2}\text{]}$						
(1,1)-I	3D- $u$ - $\phi$ <sub>din</sub> [18]	3.7882	3.4339	3.2971	3.2756	
	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	3.7882	3.4339	3.2971	3.2756	
(1,1)-II	3D- $u$ - $\phi$ <sub>din</sub> [18]	13.388	13.547	13.591	13.597	
	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	13.388	13.547	13.591	13.597	
(1,1)-III	3D- $u$ - $\phi$ <sub>din</sub> [18]	19.879	20.107	20.162	20.170	
	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	19.879	20.107	20.162	20.170	
$\bar{\omega} = \omega/100 \text{ [rad/s} \times 10^{-2}\text{]}$						
(1,2)-I	3D- $u$ - $\phi$ <sub>din</sub> [18]	5.9061	4.6934	4.0384	3.9198	
	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	5.9061	4.6934	4.0384	3.9198	
(1,2)-II	3D- $u$ - $\phi$ <sub>din</sub> [18]	18.982	19.268	19.349	19.361	
	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	18.982	19.268	19.349	19.361	
(1,2)-III	3D- $u$ - $\phi$ <sub>din</sub> [18]	28.513	29.523	29.794	29.832	
	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	28.513	29.523	29.794	29.832	
$\bar{\omega} = \omega/100 \text{ [rad/s} \times 10^{-2}\text{]}$						
(2,2)-I	3D- $u$ - $\phi$ <sub>din</sub> [18]	7.6476	5.5963	3.9621	3.5802	
	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	7.6476	5.5963	3.9621	3.5802	
(2,2)-II	3D- $u$ - $\phi$ <sub>din</sub> [18]	25.881	26.821	27.097	27.137	
	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	25.882	26.821	27.097	27.137	
(2,2)-III	3D- $u$ - $\phi$ <sub>din</sub> [18]	36.982	38.175	38.400	38.429	
	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	36.982	38.175	38.400	38.429	

**Tabella 6.7:** Assessment  $A2_{din}$ , pannello di guscio sferico multistrato PZT-4/0°/90°/0°/PZT-4 semplicemente appoggiato nella configurazione open circuit. Frequenze circolari normalizzate  $\bar{\omega}$  per i primi tre modi di vibrare al variare del rapporto  $R_\alpha/h$  e della coppia di numeri di semionda  $(m, n)$ .

Configurazione open circuit <b>A2<sub>din</sub></b>						
	$R_\alpha/h$	10	20	50	100	
$\bar{\omega} = \omega/100 \text{ [rad/s} \times 10^{-2}\text{]}$						
(1,1)-I	3D- $u$ - $\phi_{\text{din}}$ [18]	3.7864	3.4325	3.2958	3.2744	
	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{din}}$	3.7864	3.4325	3.2958	3.2744	
(1,1)-II	3D- $u$ - $\phi_{\text{din}}$ [18]	13.388	13.548	13.592	13.598	
	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{din}}$	13.388	13.548	13.592	13.598	
(1,1)-III	3D- $u$ - $\phi_{\text{din}}$ [18]	19.885	20.114	20.169	20.177	
	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{din}}$	19.885	20.114	20.169	20.177	
$\bar{\omega} = \omega/100 \text{ [rad/s} \times 10^{-2}\text{]}$						
(1,2)-I	3D- $u$ - $\phi_{\text{din}}$ [18]	5.9053	4.6926	4.0378	3.9193	
	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{din}}$	5.9053	4.6926	4.0378	3.9193	
(1,2)-II	3D- $u$ - $\phi_{\text{din}}$ [18]	18.982	19.268	19.349	19.361	
	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{din}}$	18.982	19.268	19.349	19.361	
(1,2)-III	3D- $u$ - $\phi_{\text{din}}$ [18]	28.519	29.529	29.799	29.838	
	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{din}}$	28.519	29.529	29.799	29.838	
$\bar{\omega} = \omega/100 \text{ [rad/s} \times 10^{-2}\text{]}$						
(2,2)-I	3D- $u$ - $\phi_{\text{din}}$ [18]	7.6477	5.5958	3.9616	3.5798	
	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{din}}$	7.6477	5.5958	3.9616	3.5798	
(2,2)-II	3D- $u$ - $\phi_{\text{din}}$ [18]	25.882	26.822	27.097	27.137	
	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{din}}$	25.882	26.822	27.097	27.137	
(2,2)-III	3D- $u$ - $\phi_{\text{din}}$ [18]	36.991	38.182	38.404	38.434	
	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{din}}$	36.991	38.182	38.404	38.434	

### 6.1.3 Assessment A3<sub>din</sub>

Si considera un pannello di guscio cilindrico monostrato di CoFe<sub>2</sub>O<sub>4</sub> di spessore  $h$ , dove il CoFe<sub>2</sub>O<sub>4</sub> è un materiale piezomagnetico. Le proprietà dei materiali e le caratteristiche geometriche si trovano rispettivamente nelle Tabelle 6.2 e 6.3. Si valuta la configurazione open circuit considerando differenti rapporti  $R_\alpha/h$ , e, per ognuno di essi, diverse combinazioni di numeri di semionda ( $m, n$ ).

Nella Tabella 6.8 si presentano i valori delle frequenze circolari normalizzate ( $\bar{\omega} = \omega/\sqrt{10^9}$  dove  $\omega$  è espressa in rad/s) per i primi tre modi di vibrare. Si osserva che le soluzioni ottenute con 3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub> coincidono con le soluzioni di riferimento del modello 3D- $u$ - $\psi$ <sub>din</sub>, descritto in [19]. Dunque, per ogni rapporto  $R_\alpha/h$  e coppia di numeri di semionda ( $m, n$ ) considerate, l'effetto dell'anisotropia trasversale, gli effetti di curvatura del guscio cilindrico e l'accoppiamento magneto-elastico sono correttamente valutati dal presente modello elettro-magneto-elastico.

### 6.1.4 Assessment A4<sub>din</sub>

Si considera una piastra quadrata multistrato CoFe<sub>2</sub>O<sub>4</sub>/Al2024/PVDF/Al2024/CoFe<sub>2</sub>O<sub>4</sub>, in cui CoFe<sub>2</sub>O<sub>4</sub> è un materiale piezomagnetico. I singoli strati fisici hanno i seguenti spessori:  $h_{\text{CoFe}_2\text{O}_4} = h_{\text{Al2024}} = 0.1h$  e  $h_{\text{PVDF}} = 0.6h$  con  $h$  lo spessore totale del multistrato. Le proprietà dei materiali e le caratteristiche geometriche si trovano rispettivamente nelle Tabelle 6.1 e 6.2 e nella Tabella 6.3. Si valuta la configurazione open circuit considerando differenti rapporti  $a/h$ , e, per ognuno di essi, diverse combinazioni di numeri di semionda ( $m, n$ ).

Nella Tabella 6.9 si presentano i valori delle frequenze circolari normalizzate ( $\bar{\omega} = \omega/\sqrt{10^9}$  dove  $\omega$  è espressa in rad/s) per i primi tre modi di vibrare. Si osserva che le soluzioni ottenute con 3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub> coincidono con le soluzioni di riferimento del modello 3D- $u$ - $\psi$ <sub>din</sub>, descritto in [19]. Dunque, per ogni rapporto  $a/h$  e coppia di numeri di semionda ( $m, n$ ) considerate, l'effetto dell'anisotropia trasversale e l'accoppiamento magneto-elastico sono correttamente valutati dal presente modello elettro-magneto-elastico.

**Tabella 6.8:** Assessment A3<sub>din</sub>, pannello di guscio cilindrico monostrato di CoFe<sub>2</sub>O<sub>4</sub> semplicemente appoggiato nella configurazione open circuit. Frequenze circolari normalizzate,  $\bar{\omega} = \omega/\sqrt{10^9}$ , per i primi tre modi di vibrare al variare del rapporto  $R_\alpha/h$  e della coppia di numeri di semionda ( $m, n$ ).

Configurazione open circuit A3 <sub>din</sub>						
	$R_\alpha/h$	4	10	20	50	100
$\bar{\omega} = \omega/\sqrt{10^9}$ [rad/s × $\sqrt{10^{-9}}$ ]						
(1,0)-I	3D- $u\cdot\psi_{\text{din}}$ [19]	0.00911	0.00395	0.00200	0.00080	0.00040
	3D- $u\cdot\phi\cdot\psi_{\text{din}}$	0.00911	0.00395	0.00200	0.00080	0.00040
(1,0)-II	3D- $u\cdot\psi_{\text{din}}$ [19]	0.03103	0.03099	0.03098	0.03098	0.03097
	3D- $u\cdot\phi\cdot\psi_{\text{din}}$	0.03103	0.03099	0.03098	0.03098	0.03097
(1,0)-III	3D- $u\cdot\psi_{\text{din}}$ [19]	0.05630	0.05776	0.05794	0.05799	0.05800
	3D- $u\cdot\phi\cdot\psi_{\text{din}}$	0.05630	0.05776	0.05794	0.05799	0.05800
$\bar{\omega} = \omega/\sqrt{10^9}$ [rad/s × $\sqrt{10^{-9}}$ ]						
(2,0)-I	3D- $u\cdot\psi_{\text{din}}$ [19]	0.03304	0.01700	0.00896	0.00364	0.00183
	3D- $u\cdot\phi\cdot\psi_{\text{din}}$	0.03304	0.01700	0.00896	0.00364	0.00183
(2,0)-II	3D- $u\cdot\psi_{\text{din}}$ [19]	0.06193	0.06197	0.06196	0.06195	0.06195
	3D- $u\cdot\phi\cdot\psi_{\text{din}}$	0.06193	0.06197	0.06196	0.06195	0.06195
(2,0)-III	3D- $u\cdot\psi_{\text{din}}$ [19]	0.10392	0.11052	0.11131	0.11152	0.11155
	3D- $u\cdot\phi\cdot\psi_{\text{din}}$	0.10392	0.11052	0.11131	0.11152	0.11155
$\bar{\omega} = \omega/\sqrt{10^9}$ [rad/s × $\sqrt{10^{-9}}$ ]						
(3,0)-I	3D- $u\cdot\psi_{\text{din}}$ [19]	0.06066	0.03622	0.02016	0.00836	0.00420
	3D- $u\cdot\phi\cdot\psi_{\text{din}}$	0.06066	0.03622	0.02016	0.00836	0.00420
(3,0)-II	3D- $u\cdot\psi_{\text{din}}$ [19]	0.09256	0.09295	0.09293	0.09293	0.09292
	3D- $u\cdot\phi\cdot\psi_{\text{din}}$	0.09256	0.09295	0.09293	0.09293	0.09292
(3,0)-III	3D- $u\cdot\psi_{\text{din}}$ [19]	0.14401	0.16312	0.16538	0.16596	0.16605
	3D- $u\cdot\phi\cdot\psi_{\text{din}}$	0.14401	0.16312	0.16538	0.16596	0.16605

**Tabella 6.9:** Assessment  $A4_{\text{din}}$ , piastra quadrata  $\text{CoFe}_2\text{O}_4/\text{Al}2024/\text{PVDF}/\text{Al}2024/\text{CoFe}_2\text{O}_4$  semplicemente appoggiato nella configurazione open circuit. Frequenze circolari normalizzate,  $\bar{\omega} = \omega/\sqrt{10^9}$ , per i primi tre modi di vibrare al variare del rapporto  $a/h$  e della coppia di numeri di semionda ( $m, n$ ).

Configurazione open circuit $A4_{\text{din}}$						
	$a/h$	4	10	20	50	100
$\bar{\omega} = \omega/\sqrt{10^9}$ [rad/s $\times \sqrt{10^{-9}}$ ]						
(1,1)-I	3D- $u$ - $\psi_{\text{din}}$ [19]	0.0558	0.0352	0.0296	0.0214	0.0133
	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{din}}$	0.0558	0.0352	0.0296	0.0214	0.0133
(1,1)-II	3D- $u$ - $\psi_{\text{din}}$ [19]	0.1420	0.3559	0.4503	0.4504	0.4504
	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{din}}$	0.1420	0.3559	0.4503	0.4504	0.4504
(1,1)-III	3D- $u$ - $\psi_{\text{din}}$ [19]	0.4491	0.4502	0.5589	0.7871	0.7873
	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{din}}$	0.4491	0.4502	0.5589	0.7871	0.7873
$\bar{\omega} = \omega/\sqrt{10^9}$ [rad/s $\times \sqrt{10^{-9}}$ ]						
(2,2)-I	3D- $u$ - $\psi_{\text{din}}$ [19]	0.1928	0.0965	0.0704	0.0559	0.0428
	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{din}}$	0.1928	0.0965	0.0704	0.0559	0.0428
(2,2)-II	3D- $u$ - $\psi_{\text{din}}$ [19]	0.2190	0.3510	0.7117	0.9007	0.9007
	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{din}}$	0.2190	0.3510	0.7117	0.9007	0.9007
(2,2)-III	3D- $u$ - $\psi_{\text{din}}$ [19]	0.8072	0.8993	0.9004	1.2212	1.5742
	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{din}}$	0.8072	0.8993	0.9004	1.2212	1.5742
$\bar{\omega} = \omega/\sqrt{10^9}$ [rad/s $\times \sqrt{10^{-9}}$ ]						
(3,3)-I	3D- $u$ - $\psi_{\text{din}}$ [19]	0.4062	0.1913	0.1239	0.0925	0.0768
	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{din}}$	0.4062	0.1913	0.1239	0.0925	0.0768
(3,3)-II	3D- $u$ - $\psi_{\text{din}}$ [19]	0.4137	0.3676	0.7049	1.3510	1.3511
	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{din}}$	0.4137	0.3676	0.7049	1.3510	1.3511
(3,3)-III	3D- $u$ - $\psi_{\text{din}}$ [19]	0.8968	1.3443	1.3500	1.5863	2.1284
	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{din}}$	0.8968	1.3443	1.3500	1.5863	2.1284

## 6.2 Analisi statica

In questa sezione si considerano sei assessment per validare il modello 3D esatto per le analisi statiche elettro-magneto-elastico,  $3D-u-\phi-\psi_{\text{stat}}$ . I primi due casi, i quali presentano materiali solo piezoelettrici, sono validati in [20], in cui sono risolti con il modello 3D esatto elettro-elastico accoppiato,  $3D-u-\phi_{\text{stat}}$ . Il terzo e quarto caso, invece, sono stati validati da Monge e Mantari [25] con un modello 3D semianalitico elettro-magneto-elastico accoppiato, nel seguito indicato come  $3D-u-\phi-\psi\text{-MM}$ . Infine, il quinto e il sesto caso, che considerano materiali solo piezomagnetici, vengono presentati in [19] e sono risolti con il modello 3D esatto magneto-elastico accoppiato,  $3D-u-\psi_{\text{stat}}$ . In tutti i casi si considerano sia configurazioni sensore che attuatore.

### 6.2.1 Assessment $A1_{\text{stat}}$

Si esamina una piastra quadrata sandwich PZT-4/Al2024/Foam/Al2024/PZT-4, in cui PZT-4 è un materiale piezoelettrico. I singoli strati fisici hanno i seguenti spessori:  $h_{\text{PZT-4}} = h_{\text{Al2024}} = 0.1h$  e  $h_{\text{Foam}} = 0.6h$  con  $h$  lo spessore totale del multistrato. Le proprietà dei materiali e le caratteristiche geometriche si trovano rispettivamente nelle Tabelle 6.1 e 6.10. Per la configurazione sensore, si impone al top un carico di pressione di ampiezza  $P_{zt} = 10000 \text{ Pa}$  con configurazione a cortocircuito ( $\Phi_{ext_t} = \Phi_{ext_b} = 0 \text{ V}$  e  $\Psi_{ext_t} = \Psi_{ext_b} = 0 \text{ A}$ ). Invece, per il caso attuatore elettrico, si considera al top un potenziale di ampiezza  $\Phi_{ext_t} = 100 \text{ V}$  e al bottom  $\Phi_{ext_b} = 0 \text{ V}$  senza nessun carico di pressione e potenziale magnetico. Per entrambe le condizioni di carico si considerano differenti rapporti  $a/h$ .

Nelle Tabelle 6.11 e 6.12 si presentano, in diversi punti lungo lo spessore, i valori di sei variabili nel punto di massima ampiezza in  $\alpha$  e  $\beta$  ( $u, w, \sigma_{\alpha\alpha}, \sigma_{zz}, \phi$  e  $\mathcal{D}_z$ ). Si osserva, per entrambe le configurazioni, che le soluzioni ottenute con  $3D-u-\phi-\psi_{\text{stat}}$  coincidono con le soluzioni di riferimento del modello  $3D-u-\phi_{\text{stat}}$ , descritto in [20]. Dunque, per ogni rapporto di snellezza considerato, l'effetto dell'anisotropia trasversale, data dalla configurazione multistrato della piastra, e l'accoppiamento elettro-elastico sono correttamente valutati dal presente modello elettro-magneto-elastico, sia nel caso sensore sia attuatore elettrico.

### 6.2.2 Assessment $A2_{\text{stat}}$

Si esamina un pannello di guscio sferico PZT-4/0°/90°/0°/PZT-4, dove i tre strati centrali sono in CFRP-A e PZT-4 è un materiale piezoelettrico. Gli strati fisici sono di spessore  $h_{\text{PZT-4}} = 0.05h$  e  $h_{\text{CFRP-A}} = 0.3h$  con  $h$  lo spessore totale del multistrato. Le proprietà dei

**Tabella 6.10:** Caratteristiche geometriche e numeri di semionda ( $m, n$ ) imposti per gli assessment  $A1_{\text{stat}}, A2_{\text{stat}}, A3_{\text{stat}}, A4_{\text{stat}}, A5_{\text{stat}}$  e  $A6_{\text{stat}}$

Caratteristiche geometriche						
	<b>A1<sub>stat</sub></b>	<b>A2<sub>stat</sub></b>	<b>A3<sub>stat</sub></b>	<b>A4<sub>stat</sub></b>	<b>A5<sub>stat</sub></b>	<b>A6<sub>stat</sub></b>
$a$ [m]	1	$\frac{\pi}{3}R_\alpha$	1	$\frac{\pi}{3}R_\alpha$	$\frac{\pi}{3}R_\alpha$	1
$b$ [m]	1	$\frac{\pi}{3}R_\beta$	1	1	$\frac{\pi}{3}R_\beta$	1
$h$ [m]	Variabile	Variabile	0.1	0.1	Variabile	Variabile
$R_\alpha$ [m]	$\infty$	10	10	Variabile	10	$\infty$
$R_\beta$ [m]	$\infty$	10	10	$\infty$	10	$\infty$
$m$	1	1	1	1	1	1
$n$	1	1	1	1	1	1

**Tabella 6.11:** Assessment  $A1_{stat}$ , piastra quadrata PZT-4/Al2024/Foam/Al2024/PZT-4 semplicemente appoggiata nella configurazione sensore: potenziale elettrico nullo sulle superfici esterne e carico normale trasversale applicato al top della struttura, di ampiezza  $P_{zt} = 10000 \text{ Pa}$  e  $P_{zb} = 0 \text{ Pa}$ , con numeri di semionda  $(m, n) = (1, 1)$  e al variare di  $a/h$ . Variabili riportate nei punti di massima ampiezza nelle direzioni  $\alpha$  e  $\beta$  e in coordinata  $z$  variabile.

Configurazione sensore $A1_{stat}$					
$a/h$	4	10	20	50	100
$u [10^{-7} \text{ m}]$ a $\tilde{z} = 0.75h$					
3D- $u$ - $\phi_{\text{stat}}$ [20]	8.6313	12.619	6.2546	-59.111	-296.59
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	8.6313	12.619	6.2547	-59.111	-296.59
$w [10^{-6} \text{ m}]$ a $\tilde{z} = 0.5h$					
3D- $u$ - $\phi_{\text{stat}}$ [20]	8.9184	54.445	156.24	835.45	4703.4
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	8.9184	54.445	156.24	835.45	4703.4
$\sigma_{\alpha\alpha} [10^3 \text{ Pa}]$ a $\tilde{z} = 0.75h$					
3D- $u$ - $\phi_{\text{stat}}$ [20]	2.5461	3.1429	4.0125	9.9881	31.321
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	2.5460	3.1429	4.0124	9.9881	31.321
$\sigma_{zz} [10^3 \text{ Pa}]$ a $\tilde{z} = 0.95h$					
3D- $u$ - $\phi_{\text{stat}}$ [20]	9.3376	9.7171	9.8427	9.8884	9.8954
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	9.3376	9.7171	9.8427	9.8884	9.8954
$\phi [\text{V}]$ a $\tilde{z} = 0.15h$					
3D- $u$ - $\phi_{\text{stat}}$ [20]	51.426	77.653	102.79	208.25	401.46
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	51.426	77.653	102.79	208.25	401.46
$\mathcal{D}_z [10^{-9} \text{ C/m}^2]$ a $\tilde{z} = 0.85h$					
3D- $u$ - $\phi_{\text{stat}}$ [20]	-1.1991	-0.2870	-0.0552	0.0235	0.0354
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	-1.1991	-0.2870	-0.0552	0.0235	0.0354

**Tabella 6.12:** Assessment  $A1_{stat}$ , piastra quadrata PZT-4/Al2024/Foam/Al2024/PZT-4 semplicemente appoggiata nella configurazione attuatore elettrico: potenziale elettrico applicato al top della struttura, di ampiezza  $\Phi_{ext_t} = 100\text{ V}$  e  $\Phi_{ext_b} = 0\text{ V}$ , e carico normale trasversale nullo sulle facce esterne con numeri di semionda  $(m, n) = (1, 1)$  e al variare di  $a/h$ . Variabili riportate nei punti di massima ampiezza nelle direzioni  $\alpha$  e  $\beta$  e in coordinata  $z$  variabile.

Configurazione attuatore elettrico $A1_{stat}$					
$a/h$	4	10	20	50	100
$u [10^{-11}\text{ m}]$ a $\tilde{z} = 0.75h$					
3D- $u$ - $\phi_{stat}$ [20]	6.8261	16.335	8.4438	-0.70485	-8.0823
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{stat}$	6.8259	16.335	8.4438	-0.70485	-8.0823
$w [10^{-9}\text{ m}]$ a $\tilde{z} = 0.5h$					
3D- $u$ - $\phi_{stat}$ [20]	-5.4491	-2.7851	-1.6696	-1.2583	-1.1948
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{stat}$	-5.4491	-2.7851	-1.6696	-1.2583	-1.1948
$\sigma_{\alpha\alpha} [\text{Pa}]$ a $\tilde{z} = 0.75h$					
3D- $u$ - $\phi_{stat}$ [20]	-1.9234	-0.29305	-0.09300	0.00623	0.07299
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{stat}$	-1.9234	-0.29305	-0.09300	0.00623	0.07299
$\sigma_{zz} [10^{-5}\text{ Pa}]$ a $\tilde{z} = 0.95h$					
3D- $u$ - $\phi_{stat}$ [20]	-92196	-7080.2	-887.69	-36.241	5.1601
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{stat}$	-92196	-7080.2	-887.69	-36.241	5.1601
$\phi [\text{V}]$ a $\tilde{z} = 0.15h$					
3D- $u$ - $\phi_{stat}$ [20]	5.4381	6.1172	6.2215	6.2509	6.2552
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{stat}$	5.4381	6.1172	6.2215	6.2509	6.2552
$\mathcal{D}_z [10^{-9}\text{ C/m}^2]$ a $\tilde{z} = 0.85h$					
3D- $u$ - $\phi_{stat}$ [20]	-5.2884	-11.431	-22.316	-55.403	-110.70
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{stat}$	-5.2884	-11.431	-22.316	-55.403	-110.70

materiali e le caratteristiche geometriche si trovano rispettivamente nelle Tabelle 6.1 e 6.10. Per la configurazione sensore, si impone al top un carico di pressione di ampiezza  $P_{zt} = 10000 \text{ Pa}$  con configurazione a cortocircuito ( $\Phi_{ext_t} = \Phi_{ext_b} = 0 \text{ V}$  e  $\Psi_{ext_t} = \Psi_{ext_b} = 0 \text{ A}$ ). Invece, per il caso attuatore elettrico, si considera al top un potenziale di ampiezza  $\Phi_{ext_t} = 100 \text{ V}$  e al bottom  $\Phi_{ext_b} = 0 \text{ V}$  senza nessun carico di pressione e potenziale magnetico. Per entrambe le condizioni di carico si considerano differenti rapporti  $R_\alpha/h$ .

Nelle Tabelle 6.13 e 6.14 si presentano, in diversi punti lungo lo spessore, i valori di sei variabili nel punto di massima ampiezza in  $\alpha$  e  $\beta$  ( $u, w, \sigma_{\alpha\alpha}, \sigma_{zz}, \phi$  e  $\mathcal{D}_z$ ). Si osserva, per entrambe le configurazioni, che le soluzioni ottenute con 3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$  coincidono con le soluzioni di riferimento del modello 3D- $u$ - $\phi_{\text{stat}}$ , descritto in [20]. Dunque, per ogni rapporto  $R_\alpha/h$  considerato, l'effetto dell'anisotropia trasversale, gli effetti di curvatura del guscio sferico e l'accoppiamento elettro-elastico sono correttamente valutati dal presente modello elettro-magneto-elastico, sia nel caso sensore sia attuatore elettrico.

### 6.2.3 Assessment A3<sub>stat</sub>

Si esamina un pannello di guscio sferico bistrato CoFe<sub>2</sub>O<sub>4</sub>/BaTiO<sub>3</sub>, dove CoFe<sub>2</sub>O<sub>4</sub> è un materiale piezomagnetico, mentre BaTiO<sub>3</sub> è un materiale piezoelettrico. I due strati fisici hanno lo stesso spessore:  $h_{\text{CoFe}_2\text{O}_4} = h_{\text{BaTiO}_3} = 0.5h$  con  $h$  lo spessore totale del multistrato. Le proprietà dei materiali e le caratteristiche geometriche si trovano rispettivamente nelle Tabelle 6.2 e 6.10. Per la configurazione sensore, si impone al top un carico di pressione di ampiezza  $P_{zt} = 1 \text{ Pa}$ , con  $\Phi_{ext_t} = \Phi_{ext_b} = 0 \text{ V}$  e  $\Psi_{ext_t} = \Psi_{ext_b} = 0 \text{ A}$ . Invece, per il caso attuatore, si considerano due sottocasi; nel primo, al top si ha un potenziale elettrico di ampiezza  $\Phi_{ext_t} = 1 \text{ V}$  e al bottom  $\Phi_{ext_b} = 0 \text{ V}$ , senza nessun carico di pressione e potenziale magnetico applicato (configurazione attuatore elettrico); nel secondo, si considera il caso duale (configurazione attuatore magnetico) con un potenziale magnetico di ampiezza al top  $\Psi_{ext_t} = 1 \text{ A}$  e al bottom  $\Psi_{ext_b} = 0 \text{ A}$ , senza nessun carico di pressione e potenziale elettrico applicato.

Nelle Tabelle 6.15, 6.16 e 6.17 si presentano, in diversi punti lungo spessore, i valori delle seguenti variabili adimensionate, nel punto di massima ampiezza in  $\alpha$  e  $\beta$ :

- configurazione sensore:

$$(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = \frac{10^{10}(u, v, w)}{P_{zt}h} \quad \bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{P_{zt}} \quad (6.1)$$

$$\bar{\phi} = \frac{10\phi}{h} \quad \bar{D}_z = 10^9 \mathcal{D}_z \quad (6.2)$$

$$\bar{\psi} = \frac{10\psi}{h} \quad \bar{B}_z = 10^9 \mathcal{B}_z \quad (6.3)$$

- configurazione attuatore elettrico:

$$(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = \frac{10^9(u, v, w)}{\Phi_{ext_t}} \quad \bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}h}{10} \quad (6.4)$$

$$\bar{\phi} = \frac{\phi}{\Phi_{ext_t}} \quad \bar{D}_z = \frac{10^8 \mathcal{D}_z h}{\Phi_{ext_t}} \quad (6.5)$$

$$\bar{\psi} = \frac{\psi}{\Phi_{ext_t}} \quad \bar{B}_z = 10^8 \mathcal{B}_z h \quad (6.6)$$

**Tabella 6.13:** Assessment  $A2_{\text{stat}}$ , pannello di guscio sferico PZT-4/0°/90°/0°/PZT-4, dove i tre strati centrali sono in CFRP-A, semplicemente appoggiato nella configurazione sensore: potenziale elettrico nullo sulle superfici esterne e carico normale trasversale applicato al top della struttura, di ampiezza  $P_{z_t} = 10000 \text{ Pa}$  e  $P_{z_b} = 0 \text{ Pa}$ , con numeri di semionda  $(m, n) = (1, 1)$  e al variare di  $R_\alpha/h$ . Variabili riportate nei punti di massima ampiezza nelle direzioni  $\alpha$  e  $\beta$  e in coordinata  $z$  variabile.

Configurazione sensore $A2_{\text{stat}}$					
$R_\alpha/h$	4	10	20	50	100
$u [10^{-6} \text{ m}]$ a $\tilde{z} = 0.75h$					
3D- $u$ - $\phi_{\text{stat}}$ [20]	2.2747	7.2142	18.227	51.566	106.04
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	2.2747	7.2142	18.227	51.566	106.04
$w [10^{-6} \text{ m}]$ a $\tilde{z} = 0.5h$					
3D- $u$ - $\phi_{\text{stat}}$ [20]	8.1441	29.243	69.761	185.52	372.91
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	8.1441	29.243	69.761	185.52	372.91
$\sigma_{\alpha\alpha} [10^4 \text{ Pa}]$ a $\tilde{z} = 0.75h$					
3D- $u$ - $\phi_{\text{stat}}$ [20]	2.1226	10.213	20.405	42.092	75.084
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	2.1226	10.213	20.405	42.092	75.084
$\sigma_{zz} [10^3 \text{ Pa}]$ a $\tilde{z} = 0.95h$					
3D- $u$ - $\phi_{\text{stat}}$ [20]	8.4501	8.0275	8.2123	8.6185	8.8043
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	8.4501	8.0275	8.2123	8.6185	8.8043
$\phi [\text{V}]$ a $\tilde{z} = 0.15h$					
3D- $u$ - $\phi_{\text{stat}}$ [20]	73.405	61.114	18.425	-24.442	-40.096
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	73.405	61.114	18.425	-24.442	-40.096
$\mathcal{D}_z [10^{-9} \text{ C/m}^2]$ a $\tilde{z} = 0.85h$					
3D- $u$ - $\phi_{\text{stat}}$ [20]	-0.90406	-2.9563	-7.4954	-20.662	-41.931
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	-0.90406	-2.9563	-7.4954	-20.662	-41.931

**Tabella 6.14:** Assessment  $A2_{\text{stat}}$ , pannello di guscio sferico PZT-4/0°/90°/0°/PZT-4, dove i tre strati centrali sono in CFRP-A, semplicemente appoggiato nella configurazione attuatore elettrico: potenziale elettrico applicato al top della struttura, di ampiezza  $\Phi_{ext_t} = 100 \text{ V}$  e  $\Phi_{ext_b} = 0 \text{ V}$ , e carico normale trasversale nullo sulle facce esterne con numeri di semionda  $(m, n) = (1, 1)$  e al variare di  $R_\alpha/h$ . Variabili riportate nei punti di massima ampiezza nelle direzioni  $\alpha$  e  $\beta$  e in coordinata  $z$  variabile.

Configurazione attuatore elettrico $A2_{\text{stat}}$					
$R_\alpha/h$	4	10	20	50	100
$u [10^{-10} \text{ m}]$ a $\tilde{z} = 0.75h$					
3D- $u$ - $\phi_{\text{stat}}$ [20]	4.5586	6.4563	9.1110	11.592	12.591
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	4.5586	6.4563	9.1110	11.592	12.591
$w [10^{-10} \text{ m}]$ a $\tilde{z} = 0.5h$					
3D- $u$ - $\phi_{\text{stat}}$ [20]	6.1164	17.331	28.274	37.035	41.351
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	6.1164	17.331	28.274	37.035	41.351
$\sigma_{\alpha\alpha} [\text{Pa}]$ a $\tilde{z} = 0.75h$					
3D- $u$ - $\phi_{\text{stat}}$ [20]	-9.3659	-2.7655	1.2040	3.0518	4.8817
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	-9.3659	-2.7655	1.2040	3.0518	4.8817
$\sigma_{zz} [\text{Pa}]$ a $\tilde{z} = 0.95h$					
3D- $u$ - $\phi_{\text{stat}}$ [20]	0.16537	-0.02447	-0.00976	0.01703	0.02348
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	0.16537	-0.02447	-0.00976	0.01703	0.02348
$\phi [\text{V}]$ a $\tilde{z} = 0.15h$					
3D- $u$ - $\phi_{\text{stat}}$ [20]	9.4888	10.841	11.050	11.108	11.117
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	9.4888	10.841	11.050	11.108	11.117
$\mathcal{D}_z [10^{-9} \text{ C/m}^2]$ a $\tilde{z} = 0.85h$					
3D- $u$ - $\phi_{\text{stat}}$ [20]	-1.4074	-3.0520	-5.9535	-14.775	-29.519
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	-1.4074	-3.0520	-5.9535	-14.775	-29.519

- configurazione attuatore magnetico:

$$(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = \frac{10^9(u, v, w)}{\Psi_{ext_t}} \quad \bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}h}{10} \quad (6.7)$$

$$\bar{\phi} = \frac{\phi}{\Psi_{ext_t}} \quad \bar{D}_z = 10^8 \mathcal{D}_z h \quad (6.8)$$

$$\bar{\psi} = \frac{\psi}{\Psi_{ext_t}} \quad \bar{B}_z = \frac{10^8 \mathcal{B}_z h}{\Psi_{ext_t}} \quad (6.9)$$

Si osservano, per le tre configurazioni, le soluzioni di riferimento del modello 3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ -MM, descritto in Monge e Mantari [25], e le soluzioni ottenute con 3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>stat</sub> riportando l'errore relativo percentuale commesso. Si nota come ci sia una generale coincidenza nel caso sensore, mentre l'errore aumenta nel caso di attuatore elettrico e soprattutto di attuatore magnetico. Queste differenze possono essere legate al modello di riferimento usato in [25], il quale, essendo semianalitico, potrebbe peccare di precisione con carichi elettrici e magnetici di piccola ampiezza. Un'ulteriore fattore che influenza la precisione di questo modello potrebbe essere il modulo e il segno delle caratteristiche elettriche e magnetiche dei materiali impiegati.

#### 6.2.4 Assessment A4<sub>stat</sub>

Si esamina un pannello di guscio cilindrico sandwich MSCP/PZT-5/MSCP, in cui MSCP è un materiale piezomagnetico mentre PZT-5 è un materiale piezoelettrico. Le proprietà dei materiali e le caratteristiche geometriche si trovano rispettivamente nelle Tabelle 6.2 e 6.10. Lo spessore delle due pelli è  $h_{MSCP} = 0.02$  m, mentre per il core si ha  $h_{PZT-5} = 0.06$  m. Per la configurazione sensore, si impone al top un carico di pressione di ampiezza  $P_{zt} = 1$  Pa, con  $\Phi_{ext_t} = \Phi_{ext_b} = 0$  V e  $\Psi_{ext_t} = \Psi_{ext_b} = 0$  A. Per la configurazione attuatore magnetico, si considera al top un potenziale magnetico di ampiezza pari a  $\Psi_{ext_t} = 1$  A e al bottom  $\Psi_{ext_b} = 0$  A, senza nessun carico di pressione e potenziale elettrico applicato. Per entrambe le condizioni di carico si considerano differenti raggi di curvatura  $R_\alpha$ .

Nelle Tabelle 6.18 e 6.19 si presentano, in diversi punti lungo lo spessore, per diversi raggi di curvatura  $R_\alpha$ , i valori delle variabili  $u$ ,  $w$ ,  $\sigma_{\alpha\alpha}$ ,  $\tau_{\alpha z}$  e  $\tau_{\beta z}$ , nel punto di massima ampiezza in  $\alpha$  e  $\beta$ . Si osservano per le due configurazioni le soluzioni di riferimento del modello 3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ -MM, descritto in [25], e le soluzioni ottenute con 3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>stat</sub> riportando l'errore relativo percentuale commesso. Si nota come ci sia una generale coincidenza nel caso sensore, mentre l'errore è macroscopico nel caso di attuatore magnetico. In questo caso, oltre alle osservazioni già riportate nell'assessment A4<sub>stat</sub>, si attribuiscono le grandissime differenze dei risultati ottenuti per il caso di attuatore magnetico alle caratteristiche dei materiali considerate in [25].

#### 6.2.5 Assessment A5<sub>stat</sub>

Si esamina un pannello di guscio sferico CoFe<sub>2</sub>O<sub>4</sub>/0°/90°/0°/CoFe<sub>2</sub>O<sub>4</sub>, dove i tre strati centrali sono in composito e le pelli esterne in CoFe<sub>2</sub>O<sub>4</sub>, materiale piezomagnetico. I singoli strati fisici sono di spessore  $h_{CoFe_2O_4} = 0.05h$  e  $h_{Composite} = 0.3h$  con  $h$  lo spessore totale del multistrato. Le proprietà dei materiali e le caratteristiche geometriche si trovano rispettivamente nelle Tabelle 6.2 e 6.10. Per la configurazione sensore, si impone al top un carico di pressione di ampiezza  $P_{zt} = 10000$  Pa, con potenziale magnetico ed elettrico nullo. Invece, per il caso di attuatore magnetico, si considera al top un potenziale di ampiezza  $\Psi_{ext_t} = 10$  A e al bottom  $\Psi_{ext_b} = 0$  A, senza nessun carico di pressione e di potenziale elettrico. Per entrambe le condizioni si considerano differenti rapporti  $R_\alpha/h$ .

Nelle Tabelle 6.20 e 6.21 si presentano, in diversi punti lungo spessore, i valori di sei variabili nel punto di massima ampiezza in  $\alpha$  e  $\beta$  ( $v$ ,  $w$ ,  $\sigma_{\alpha\beta}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\psi$  e  $\mathcal{B}_z$ ). Si osserva,

**Tabella 6.15:** Assessment  $A3_{stat}$ , pannello di guscio sferico bistrato  $CoFe_2O_4/BaTiO_3$  semplicemente appoggiato nella configurazione sensore: potenziale elettrico e magnetico nullo sulle superfici esterne e carico normale trasversale applicato al top della struttura, di ampiezza  $P_{z_t} = 1 \text{ Pa}$  e  $P_{z_b} = 0 \text{ Pa}$ , con numeri di semionda  $(m, n) = (1, 1)$  e rapporto  $R_\alpha/h$  fissato. Variabili riportate nei punti di massima ampiezza nelle direzioni  $\alpha$  e  $\beta$  e in coordinata  $z$  variabile.

Configurazione sensore $A3_{stat}$				
		3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ -MM [25]	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{stat}$	Err. rel. [%]
$\bar{u}$	a $\tilde{z} = h$	-2.3538	-2.3540	0.008
$\bar{w}$	a $\tilde{z} = 0.5h$	20.2981	20.3007	0.013
$\bar{\sigma}_{\alpha\alpha}$	a $\tilde{z} = h$	23.3973	23.3990	0.007
$\bar{\tau}_{\alpha z}$	a $\tilde{z} = 0.5h$	2.3310	2.3310	0.000
$\bar{\sigma}_{zz}$	a $\tilde{z} = h$	1.0000	1.0000	0.000
$\bar{\phi}$	a $\tilde{z} = 0.5h$	0.4439	0.4437	0.045
$\bar{D}_z \times 10^{-3}$	a $\tilde{z} = 0.5h$	8.4726	8.3698	1.213
$\bar{\psi} \times 10^{-4}$	a $\tilde{z} = 0.5h$	-3.4800	-3.5026	0.649
$\bar{B}_z$	a $\tilde{z} = 0.5h$	0.6983	0.7063	1.146

**Tabella 6.16:** Assessment  $A3_{stat}$ , pannello di guscio sferico bistrato  $CoFe_2O_4/BaTiO_3$  semplicemente appoggiato nella configurazione attuatore elettrico: carico normale trasversale e magnetico nullo sulle superfici esterne e potenziale elettrico applicato al top della struttura, di ampiezza  $\Phi_{ext_t} = 1 \text{ V}$  e  $\Psi_{ext_b} = 0 \text{ V}$ , con numeri di semionda  $(m, n) = (1, 1)$  e rapporto  $R_\alpha/h$  fissato. Variabili riportate nei punti di massima ampiezza nelle direzioni  $\alpha$  e  $\beta$  e in coordinata  $z$  variabile.

Configurazione attuatore elettrico $A3_{stat}$				
		3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ -MM [25]	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{stat}$	Err. rel. [%]
$\bar{u} \times 10^{-4}$	a $\tilde{z} = h$	1.6402	1.6056	2.109
$\bar{w} \times 10^{-3}$	a $\tilde{z} = 0.5h$	-8.1141	-8.0063	1.329
$\bar{\sigma}_{\alpha\alpha} \times 10^{-3}$	a $\tilde{z} = h$	-3.2252	-3.1726	1.631
$\bar{\tau}_{\alpha z} \times 10^{-4}$	a $\tilde{z} = 0.5h$	5.2177	5.1717	0.882
$\bar{\sigma}_{zz} \times 10^{-5}$	a $\tilde{z} = 0.5h$	-3.9335	-3.9282	0.135
$\bar{\phi}$	a $\tilde{z} = h$	1.0000	1.0000	0.000
$\bar{D}_z \times 10^{-2}$	a $\tilde{z} = 0.5h$	-1.8452	-1.8361	0.493
$\bar{\psi} \times 10^{-8}$	a $\tilde{z} = 0.5h$	-4.5973	-4.6892	1.999
$\bar{B}_z \times 10^{-5}$	a $\tilde{z} = 0.5h$	9.2243	9.4558	2.510

**Tabella 6.17:** Assessment  $A3_{stat}$ , pannello di guscio sferico bistrato  $CoFe_2O_4/BaTiO_3$  semplicemente appoggiato nella configurazione attuatore magnetico: carico normale trasversale ed elettrico nullo sulle superfici esterne e potenziale magnetico applicato al top della struttura, di ampiezza  $\Psi_{ext_t} = 1 \text{ A}$  e  $\Psi_{ext_b} = 0 \text{ A}$ , con numeri di semionda  $(m, n) = (1, 1)$  e rapporto  $R_\alpha/h$  fissato. Variabili riportate nei punti di massima ampiezza nelle direzioni  $\alpha$  e  $\beta$  e in coordinata  $z$  variabile.

Configurazione attuatore magnetico $A3_{stat}$					
		3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ -MM [25]	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{stat}$	Err. rel. [%]	
$\bar{u}$	a $\tilde{z} = h$	-0.7533	-0.7042	6.518	
$\bar{w}$	a $\tilde{z} = 0.5h$	-5.4881	-5.6456	2.870	
$\bar{\sigma}_{\alpha\alpha}$	a $\tilde{z} = h$	1.1042	0.6948	37.077	
$\bar{\tau}_{\alpha z} \times 10^{-2}$	a $\tilde{z} = 0.5h$	3.8349	5.8149	51.631	
$\bar{\sigma}_{zz} \times 10^{-2}$	a $\tilde{z} = 0.5h$	-3.0164	-2.8938	4.064	
$\bar{\phi} \times 10^{-2}$	a $\tilde{z} = 0.5h$	2.1955	2.6502	20.711	
$\bar{D}_z \times 10^{-4}$	a $\tilde{z} = 0.5h$	4.0661	4.9988	22.938	
$\bar{\psi}$	a $\tilde{z} = h$	1.0000	1.0000	0.000	
$\bar{B}_z \times 10^3$	a $\tilde{z} = 0.5h$	-2.0636	-2.0733	0.470	

**Tabella 6.18:** Assessment  $A4_{stat}$ , pannello di guscio cilindrico sandwich  $MSCP/PZT-5/MSCP$  semplicemente appoggiato nella configurazione sensore: potenziale elettrico e magnetico nullo sulle superfici esterne e carico normale trasversale applicato al top della struttura, di ampiezza  $P_{z_t} = 1 \text{ Pa}$  e  $P_{z_b} = 0 \text{ Pa}$ , con numeri di semionda  $(m, n) = (1, 1)$  e al variare di  $R_\alpha$ . Variabili riportate nei punti di massima ampiezza nelle direzioni  $\alpha$  e  $\beta$  e in coordinata  $z$  variabile.

Configurazione sensore $A4_{stat}$					
$R_\alpha$ [m]	5	10	20	50	100
$u [10^{-12} \text{ m}]$ a $\tilde{z} = h$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ -MM [25]	0.93	-14.21	-12.87	-6.47	-3.44
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{stat}$	1.26	-14.75	-12.81	-6.45	-3.43
Errore relativo [%]	35.484	3.800	0.466	0.309	0.291
$w [10^{-9} \text{ m}]$ a $\tilde{z} = h$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ -MM [25]	1.55	2.12	2.35	2.42	2.43
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{stat}$	1.55	2.12	2.35	2.42	2.43
Errore relativo [%]	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$\sigma_{\alpha\alpha} [\text{Pa}]$ a $\tilde{z} = h$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ -MM [25]	13.75	13.71	12.30	10.92	10.39
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{stat}$	13.83	13.81	12.41	11.03	10.50
Errore relativo [%]	0.582	0.729	0.894	1.007	1.059
$\tau_{\alpha z} [\text{Pa}]$ a $\tilde{z} = 0.8h$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ -MM [25]	0.18	0.13	0.08	0.03	0.02
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{stat}$	0.18	0.13	0.08	0.03	0.02
Errore relativo [%]	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$\tau_{\beta z} [\text{Pa}]$ a $\tilde{z} = 0.8h$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ -MM [25]	0.97	1.39	1.60	1.69	1.71
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{stat}$	0.97	1.40	1.60	1.69	1.71
Errore relativo [%]	0.000	0.719	0.000	0.000	0.000

**Tabella 6.19:** Assessment  $A4_{stat}$ , pannello di guscio cilindrico sandwich MSCP/PZT-5/MSCP semi-plicemente appoggiato nella configurazione attuatore magnetico: carico normale trasversale e potenziale elettrico nullo sulle superfici esterne e potenziale magnetico applicato al top della struttura, di ampiezza  $\Psi_{ext_t} = 1 \text{ A}$  e  $\Psi_{ext_b} = 0 \text{ A}$ , con numeri di semionda  $(m, n) = (1, 1)$  e al variare di  $R_\alpha$ . Variabili riportate nei punti di massima ampiezza nelle direzioni  $\alpha$  e  $\beta$  e in coordinata  $z$  variabile.

Configurazione attuatore magnetico $A4_{stat}$					
$R_\alpha$ [m]	5	10	20	50	100
$u$ [ $10^{-10} \text{ m}$ ] a $\tilde{z} = h$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ -MM [25]	-1.86	-2.79	-1.97	-0.91	-0.48
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	-0.37	-0.21	-0.11	-0.04	-0.02
Errore relativo [%]	80.108	92.473	87.912	95.604	95.833
$w$ [ $10^{-8} \text{ m}$ ] a $\tilde{z} = h$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ -MM [25]	1.94	2.43	2.57	2.57	2.56
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	0.04	0.03	0.01	0.00	0.00
Errore relativo [%]	97.938	98.766	99.610	100.000	100.000
$\sigma_{\alpha\alpha}$ [kPa] a $\tilde{z} = h$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ -MM [25]	-1.18	-1.19	-1.22	-1.24	-1.24
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	-0.09	-0.09	-0.09	-0.09	-0.09
Errore relativo [%]	92.373	92.437	92.623	92.742	92.742
$\tau_{\alpha z}$ [Pa] a $\tilde{z} = 0.8h$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ -MM [25]	-13.02	-6.14	-3.00	-1.19	-0.59
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	-0.86	-0.45	-0.23	-0.09	-0.05
Errore relativo [%]	93.395	92.671	92.333	92.437	91.525
$\tau_{\alpha z}$ [Pa] a $\tilde{z} = 0.8h$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ -MM [25]	-68.35	-64.39	-62.83	-62.37	-62.31
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	-4.76	-4.82	-4.91	-4.98	-4.99
Errore relativo [%]	93.036	92.514	92.185	92.015	91.992

per entrambe le configurazioni, che le soluzioni ottenute con 3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$  coincidono con le soluzioni di riferimento del modello 3D- $u$ - $\psi_{\text{stat}}$ , descritto in [19]. Dunque, per ogni rapporto  $R_\alpha/h$  considerato, l'effetto dell'anisotropia trasversale, gli effetti di curvatura del guscio sferico e l'accoppiamento magneto-elastico sono correttamente valutati dal presente modello elettro-magneto-elastico.

### 6.2.6 Assessment A6<sub>stat</sub>

Si esamina una piastra quadrata CoFe<sub>2</sub>O<sub>4</sub>/Al2024/Foam/Al2024/CoFe<sub>2</sub>O<sub>4</sub>, in cui CoFe<sub>2</sub>O<sub>4</sub> è un materiale piezomagnetico. I singoli strati fisici hanno i seguenti spessori:  $h_{\text{CoFe}_2\text{O}_4} = h_{\text{Al2024}} = 0.1h$  e  $h_{\text{Foam}} = 0.6h$  con  $h$  lo spessore totale del multistrato. Le proprietà dei materiali e le caratteristiche geometriche si trovano rispettivamente nelle Tabelle 6.1 e 6.2 e nella Tabella 6.10. Per la configurazione sensore, si impone al top un carico di pressione di ampiezza  $P_{zt} = 10000 \text{ Pa}$  con configurazione a cortocircuito ( $\Psi_{ext_t} = \Psi_{ext_b} = 0 \text{ A}$ ). Invece, per il caso attuatore magnetico, si considera al top un potenziale di ampiezza  $\Psi_{ext_t} = 10 \text{ A}$  e al bottom  $\Psi_{ext_b} = 0 \text{ A}$  senza nessun carico di pressione. Per entrambe le condizioni di carico si considerano differenti rapporti  $a/h$ .

Nelle Tabelle 6.22 e 6.23 si presentano, in diversi punti lungo lo spessore, i valori di sei variabili nel punto di massima ampiezza in  $\alpha$  e  $\beta$  ( $v$ ,  $w$ ,  $\sigma_{\alpha\alpha}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\psi$  e  $\mathcal{B}_z$ ). Si osserva, per entrambe le configurazioni, che le soluzioni ottenute con 3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$  coincidono con le soluzioni di riferimento del modello 3D- $u$ - $\psi_{\text{stat}}$ , descritto in [19]. Dunque, per ogni rapporto di snellezza considerato, l'effetto dell'anisotropia trasversale, data dalla configurazione multistrato della piastra, e l'accoppiamento magneto-elastico sono correttamente valutati dal presente modello elettro-magneto-elastico, sia nel caso sensore che nel caso attuatore magnetico.

**Tabella 6.20:** Assessment  $A5_{\text{stat}}$ , guscio sferico  $\text{CoFe}_2\text{O}_4/0^\circ/90^\circ/0^\circ/\text{CoFe}_2\text{O}_4$ , dove i tre strati centrali sono in composito e le pelli esterne in materiale piezomagnetico, semplicemente appoggiato nella configurazione sensore: potenziale magnetico ed elettrico nullo sulle superfici esterne e carico normale trasversale applicato al top della struttura, di ampiezza  $P_{zt} = 10000 \text{ Pa}$  e  $P_{zb} = 0 \text{ Pa}$ , con numeri di semionda fissati pari a  $m = n = 1$  e al variare di  $R_\alpha/h$ . Variabili riportate nei punti di massima ampiezza nelle direzioni  $\alpha$  e  $\beta$  e in coordinata  $z$  variabile.

Configurazione sensore $A5_{\text{stat}}$					
$R_\alpha/h$	4	10	20	50	100
$v [10^{-5} \text{ m}] \text{ a } \tilde{z} = 0$					
3D- $u$ - $\psi_{\text{stat}}$ [19]	0.3044	0.9694	2.0531	4.9566	9.5538
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	0.3044	0.9694	2.0531	4.9566	9.5538
$w [10^{-5} \text{ m}] \text{ a } \tilde{z} = h$					
3D- $u$ - $\psi_{\text{stat}}$ [19]	1.0395	2.7460	6.2414	16.702	33.673
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	1.0395	2.7460	6.2414	16.702	33.673
$\sigma_{\alpha\beta} [10^4 \text{ Pa}] \text{ a } \tilde{z} = 0.75h$					
3D- $u$ - $\psi_{\text{stat}}$ [19]	0.5305	1.3825	3.2764	9.3166	19.255
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	0.5305	1.3825	3.2764	9.3166	19.255
$\sigma_{zz} [10^3 \text{ Pa}] \text{ a } \tilde{z} = 0.50h$					
3D- $u$ - $\psi_{\text{stat}}$ [19]	4.0292	2.1904	2.3206	3.6204	4.2857
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	4.0292	2.1904	2.3206	3.6204	4.2857
$\psi [\text{A}] \text{ a } \tilde{z} = 0.75h$					
3D- $u$ - $\psi_{\text{stat}}$ [19]	-0.0822	-0.0818	-0.0693	-0.0464	-0.0356
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	-0.0822	-0.0818	-0.0693	-0.0464	-0.0356
$\mathcal{B}_z [10^{-7} \text{ T}] \text{ a } \tilde{z} = 0.50h$					
3D- $u$ - $\psi_{\text{stat}}$ [19]	0.5704	1.1208	2.3452	6.1057	12.221
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	0.5704	1.1208	2.3452	6.1057	12.221

**Tabella 6.21:** Assessment A5<sub>stat</sub>, guscio sferico CoFe<sub>2</sub>O<sub>4</sub>/0°/90°/0°/CoFe<sub>2</sub>O<sub>4</sub>, dove i tre strati centrali sono in composito e le pelli esterne in materiale piezomagnetico, semplicemente appoggiato nella configurazione attuatore magnetico: potenziale magnetico applicato al top della struttura, di ampiezza  $\Psi_{ext_t} = 10$  A e  $\Psi_{ext_b} = 0$  A, e carico normale trasversale e potenziale elettrico nullo sulle facce esterne con numeri di semionda fissati pari a  $m = n = 1$  e al variare di  $R_\alpha/h$ . Variabili riportate nei punti di massima ampiezza nelle direzioni  $\alpha$  e  $\beta$  e in coordinata  $z$  variabile.

Configurazione attuatore magnetico A5 <sub>stat</sub>					
$R_\alpha/h$	4	10	20	50	100
$v [10^{-9} \text{ m}] \text{ a } \tilde{z} = 0$					
3D- $u$ - $\psi$ <sub>stat</sub> [19]	1.8657	3.5065	4.6059	5.2052	5.3381
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>stat</sub>	1.8657	3.5065	4.6059	5.2052	5.3381
$w [10^{-8} \text{ m}] \text{ a } \tilde{z} = h$					
3D- $u$ - $\psi$ <sub>stat</sub> [19]	0.6067	0.8023	1.1006	1.3465	1.3751
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>stat</sub>	0.6067	0.8023	1.1006	1.3465	1.3751
$\sigma_{\alpha\beta} [\text{Pa}] \text{ a } \tilde{z} = 0.75h$					
3D- $u$ - $\psi$ <sub>stat</sub> [19]	6.2314	6.5530	7.8759	9.5701	10.224
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>stat</sub>	6.2314	6.5530	7.8759	9.5701	10.224
$\sigma_{zz} [\text{Pa}] \text{ a } \tilde{z} = 0.50h$					
3D- $u$ - $\psi$ <sub>stat</sub> [19]	1.5245	-0.4844	-0.4839	-0.1347	-0.0380
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>stat</sub>	1.5245	-0.4844	-0.4839	-0.1347	-0.0380
$\psi [\text{A}] \text{ a } \tilde{z} = 0.75h$					
3D- $u$ - $\psi$ <sub>stat</sub> [19]	7.4013	7.7094	7.7585	7.7726	7.7747
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>stat</sub>	7.4013	7.7094	7.7585	7.7726	7.7747
$\mathcal{B}_z [10^{-5} \text{ T}] \text{ a } \tilde{z} = 0.50h$					
3D- $u$ - $\psi$ <sub>stat</sub> [19]	-0.5437	-1.3884	-2.7866	-6.9737	-13.950
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>stat</sub>	-0.5437	-1.3884	-2.7866	-6.9737	-13.950

**Tabella 6.22:** Assessment  $A6_{\text{stat}}$ , piastra quadrata  $\text{CoFe}_2\text{O}_4/\text{Al}2024/\text{Foam}/\text{Al}2024/\text{CoFe}_2\text{O}_4$  semplicemente appoggiata nella configurazione sensore: potenziale magnetico nullo sulle superfici esterne e carico normale trasversale applicato al top della struttura, di ampiezza  $P_{z_t} = 10000 \text{ Pa}$  e  $P_{z_b} = 0 \text{ Pa}$ , con numeri di semionda  $(m, n) = (1, 1)$  e al variare di  $a/h$ . Variabili riportate nei punti di massima ampiezza nelle direzioni  $\alpha$  e  $\beta$  e in coordinata  $z$  variabile.

Configurazione sensore $A6_{\text{stat}}$					
$a/h$	4	10	20	50	100
$v [10^{-6} \text{ m}]$ a $\tilde{z} = 0.75h$					
3D- $u$ - $\phi_{\text{stat}}$ [20]	0.4325	1.4974	3.0988	12.380	45.150
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	0.4325	1.4974	3.0988	12.380	45.150
$w [10^{-4} \text{ m}]$ a $\tilde{z} = 0.5h$					
3D- $u$ - $\phi_{\text{stat}}$ [20]	0.0893	0.4930	1.3875	6.6144	34.151
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	0.0893	0.4930	1.3875	6.6144	34.151
$\sigma_{\alpha\alpha} [10^3 \text{ Pa}]$ a $\tilde{z} = 0.75h$					
3D- $u$ - $\phi_{\text{stat}}$ [20]	2.4439	2.9747	3.5577	7.6673	22.366
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	2.4439	2.9747	3.5577	7.6673	22.366
$\sigma_{zz} [10^3 \text{ Pa}]$ a $\tilde{z} = 0.95h$					
3D- $u$ - $\phi_{\text{stat}}$ [20]	4.6605	5.0316	5.0109	5.0019	5.0005
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	4.6605	5.0316	5.0109	5.0019	5.0005
$\psi [\text{A}]$ a $\tilde{z} = 0.15h$					
3D- $u$ - $\phi_{\text{stat}}$ [20]	-0.0285	-0.0404	-0.0549	-0.1122	-0.2167
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	-0.0285	-0.0404	-0.0549	-0.1122	-0.2167
$\mathcal{B}_z [10^{-8} \text{ T}]$ a $\tilde{z} = 0.85h$					
3D- $u$ - $\phi_{\text{stat}}$ [20]	5.7606	1.9062	1.2871	1.1143	1.0905
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	5.7606	1.9062	1.2871	1.1143	1.0905

**Tabella 6.23:** Assessment  $A6_{\text{stat}}$ , piastra quadrata  $\text{CoFe}_2\text{O}_4/\text{Al}2024/\text{Foam}/\text{Al}2024/\text{CoFe}_2\text{O}_4$  semplicemente appoggiata nella configurazione attuatore magnetico: potenziale magnetico applicato al top della struttura, di ampiezza  $\Psi_{ext_t} = 10 \text{ A}$  e  $\Psi_{ext_b} = 0 \text{ A}$ , e carico normale trasversale nullo sulle facce esterne con numeri di semionda  $(m, n) = (1, 1)$  e al variare di  $a/h$ . Variabili riportate nei punti di massima ampiezza nelle direzioni  $\alpha$  e  $\beta$  e in coordinata  $z$  variabile.

Configurazione attuatore elettrico $A6_{\text{stat}}$					
$a/h$	4	10	20	50	100
$v [10^{-10} \text{ m}]$ a $\tilde{z} = 0.75h$					
3D- $u$ - $\phi_{\text{stat}}$ [20]	-11.020	-2.1426	0.6612	3.8437	8.1866
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	-11.020	-2.1426	0.6612	3.8437	8.1866
$w [10^{-9} \text{ m}]$ a $\tilde{z} = 0.5h$					
3D- $u$ - $\phi_{\text{stat}}$ [20]	-22.134	-10.247	-6.1126	-4.5503	-4.3069
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	-22.134	-10.247	-6.1126	-4.5503	-4.3069
$\sigma_{\alpha\alpha} [\text{Pa}]$ a $\tilde{z} = 0.75h$					
3D- $u$ - $\phi_{\text{stat}}$ [20]	-7.9920	-1.3076	-0.6029	-0.5376	-0.8293
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	-7.9920	-1.3076	-0.6029	-0.5376	-0.8293
$\sigma_{zz} [\text{Pa}]$ a $\tilde{z} = 0.95h$					
3D- $u$ - $\phi_{\text{stat}}$ [20]	-11.809	-0.8745	-0.1406	-0.0233	-0.0093
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	-11.809	-0.8745	-0.1406	-0.0233	-0.0093
$\psi [\text{A}]$ a $\tilde{z} = 0.15h$					
3D- $u$ - $\phi_{\text{stat}}$ [20]	7.9550	8.0902	8.1116	8.1177	8.1185
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	7.9550	8.0902	8.1116	8.1177	8.1185
$\mathcal{B}_z [10^{-4} \text{ T}]$ a $\tilde{z} = 0.85h$					
3D- $u$ - $\phi_{\text{stat}}$ [20]	-0.6208	-1.5651	-3.1341	-7.8380	-15.677
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	-0.6208	-1.5651	-3.1341	-7.8380	-15.677

# Capitolo 7

## Nuovi benchmark di analisi 3D esatte elettro-magneto-elastiche accoppiate

In questo capitolo vengono proposti nuovi benchmark per quanto riguarda le analisi statiche e le analisi alle vibrazioni libere elettro-magneto-elastiche. Essi sono risolti con il presente modello 3D elettro-magneto-elastico esatto accoppiato per gusci sferici multistrato, descritto nel capitolo 5. I risultati ottenuti per gli assessment trattati nel capitolo 6, sia per l'analisi alle vibrazioni libere, sia per l'analisi statica confermano la bontà dei modelli 3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{din}}$  e 3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$  e li validano. Il comportamento dei campi elettrostatico e magnetostatico viene correttamente modellato, così come l'accoppiamento elettro-magneto-elastico, gli effetti dei materiali degli strati e dei loro spessori e quelli dovuti alla curvatura delle geometrie shell considerate. I risultati dei nuovi benchmark vengono ottenuti sempre utilizzando il relativo codice MATLAB® con cui si è implementato il suddetto modello, parte del più ampio codice accademico 3DEMS; si veda l'introduzione al capitolo 6 in merito. Questi nuovi risultati potranno essere utilizzati come riferimento da altri ricercatori per la validazione dei propri modelli 2D e 3D analitici e/o numerici.

Questo capitolo è suddiviso in due parti: nel paragrafo 7.1, si riportano i risultati dei nuovi benchmark risolti con il modello 3D esatto per le analisi alle vibrazioni libere, 3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{din}}$ , mentre, nel paragrafo 7.2, quelli relativi al modello 3D esatto per le analisi statiche, 3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$ . Tutti i benchmark proposti considerano dei multistrato costituiti da materiali omogenei. Inoltre, come fatto per la validazione del modello, si usa sempre un numero di strati matematici totali pari a  $M = 300$  con la matrice esponenziale troncata al terzo ordine ( $N = 3$ ). Come già osservato nel capitolo 6, questi valori sono una scelta molto conservativa, suggerita da Brischetto e Cesare [18, 19, 20], che garantisce la convergenza dei risultati e la corretta descrizione delle curvature delle geometrie a guscio considerate.

### 7.1 Analisi alle vibrazioni libere

In questa sezione si riportano quattro nuovi benchmark. Nel primo si considera una piastra, nel secondo un guscio cilindrico, nel terzo un pannello di guscio cilindrico e, infine, nel quarto un pannello di guscio sferico. Per tutti e quattro i casi si considerano diversi rapporti di spessore e coppie di numeri di semionda ( $m, n$ ), sia per configurazioni closed circuit sia open circuit. In tutti i benchmark, il guscio multistrato considerato presenta la sequenza adaptive wood/0°/90°/0°/adaptive wood, dove i tre strati centrali sono in materiale composito, mentre le pelli esterne in adaptive wood, materiale sia piezoelettrico sia piezomagnetico. I

**Tabella 7.1:** Costanti ingegneristiche meccaniche, coefficienti piezoelettrici, piezomagnetici, di permittività elettrica, di permeabilità magnetica e magneto-elettrici dei materiali utilizzati nei benchmark.

Caratteristiche materiali		
	adaptive wood [8]	composite [19]
$E_1$ [GPa]	154.32	172.37
$E_2$ [GPa]	154.32	6.895
$E_3$ [GPa]	142.83	6.895
$\nu_{12}$	0.36564	0.25
$\nu_{13}$	0.40133	0.25
$\nu_{23}$	0.40133	0.25
$G_{12}$ [GPa]	56.5	3.447
$G_{13}$ [GPa]	45.3	3.447
$G_{23}$ [GPa]	45.3	1.379
$e_{15}$ [C/m <sup>2</sup> ]	11.6	0
$e_{24}$ [C/m <sup>2</sup> ]	11.6	0
$e_{31}$ [C/m <sup>2</sup> ]	-4.4	0
$e_{32}$ [C/m <sup>2</sup> ]	-4.4	0
$e_{33}$ [C/m <sup>2</sup> ]	18.6	0
$\epsilon_1$ [nF/m]	0.08	0.008854
$\epsilon_2$ [nF/m]	0.08	0.008854
$\epsilon_3$ [nF/m]	0.093	0.008854
$q_{15}$ [T]	560	0
$q_{24}$ [T]	560	0
$q_{31}$ [T]	580	0
$q_{32}$ [T]	580	0
$q_{33}$ [T]	700	0
$\mu_1$ [nH/m]	$-590 \times 10^3$	$4\pi \times 10^2$
$\mu_2$ [nH/m]	$-590 \times 10^3$	$4\pi \times 10^2$
$\mu_3$ [nH/m]	$157 \times 10^3$	$4\pi \times 10^2$
$d_1$ [(Ns)/(VC)]	$3 \times 10^{-12}$	0
$d_2$ [(Ns)/(VC)]	$3 \times 10^{-12}$	0
$d_3$ [(Ns)/(VC)]	$3 \times 10^{-12}$	0
$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	5300	1500

**Tavella 7.2:** Caratteristiche geometriche e numeri di semionda ( $m, n$ ) imposti per i quattro nuovi benchmark riferiti all'analisi alle vibrazioni libere.

Caratteristiche geometriche				
	B1 <sub>din</sub>	B2 <sub>din</sub>	B3 <sub>din</sub>	B4 <sub>din</sub>
$a$ [m]	1	$2\pi R_\alpha$	$\frac{\pi}{3}R_\alpha$	$\frac{\pi}{3}R_\alpha$
$b$ [m]	1	10	10	$\frac{\pi}{3}R_\beta$
$h$ [m]	Variabile	Variabile	Variabile	Variabile
$R_\alpha$ [m]	$\infty$	10	10	10
$R_\beta$ [m]	$\infty$	$\infty$	$\infty$	10
$m$	1;2;3	0;2;4;6;8;10	0;2;4;6;8;10	1;2;3;4;5
$n$	1;2	1;2	1;2	1;2

singoli strati fisici hanno i seguenti spessori riferiti allo spessore totale  $h$  del multistrato:  $h_{\text{adaptive wood}} = 0.05h$  e  $h_{\text{composite}} = 0.3h$ . Le proprietà dei materiali e le caratteristiche geometriche dei quattro benchmark si trovano, rispettivamente, nelle Tabelle 7.1 e 7.2.

### 7.1.1 Benchmark B1<sub>din</sub>

Si considera una piastra multistrato quadrata semplicemente appoggiata sui quattro lati. Sia nel caso closed circuit sia nel caso open circuit, si valutano differenti rapporti  $a/h$  (4, 10, 20, 50, 100). Per ognuno di essi, si prendono in esame le seguenti combinazioni di numeri di semionda ( $m, n$ ): (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2).

Nelle Tabelle 7.3 e 7.4 si presentano i valori delle prime cinque frequenze circolari proprie normalizzate,  $\bar{\omega} = \omega/100$ , dove  $\omega$  è espressa in rad/s.

Nelle Figure 7.1, 7.2, 7.5 e 7.6 si riportano gli andamenti lungo lo spessore delle forme modali di alcune variabili per i primi tre modi di vibrare. Nei quattro casi si analizzano combinazioni diverse di rapporto  $a/h$  e coppia di numeri di semionda ( $m, n$ ), nei primi due per configurazioni closed circuit, mentre nel terzo e nel quarto per configurazioni open circuit. Nello specifico, si propone l'andamento dell'ampiezza delle forme modali delle variabili  $u, v, w, \phi, \psi, \sigma_{zz}, D_z$  e  $B_z$ . Tutte queste variabili, rispettano le condizioni di equilibrio e congruenza, infatti, lungo lo spessore sono continue e presentano la tipica forma a zig-zag. La loro continuità interlaminare viene garantita grazie all'approccio layerwise di questo modello, che impone l'uguaglianza di queste variabili all'interfaccia tra gli strati.

Osservando i valori delle frequenze circolari proprie, si nota che questi ultimi, fissato un rapporto di spessore e il modo di vibrare considerato, al crescere di  $m$  e a parità di  $n$ , aumentano. Analogi comportamenti si ha al crescere di  $n$  e a parità di  $m$ . Nella Figure 7.3, per la configurazione closed circuit, e 7.7, per la configurazione open circuit, vengono presentati, per i primi tre modi di vibrare, due esempi di questo comportamento, che è tipico di una piastra dove non sono presenti curvature. Invece, nelle Figure 7.4 e 7.8, si osserva che al variare del rapporto  $a/h$ , fissati i numeri di semionda ( $m, n$ ), il comportamento delle frequenze circolari proprie cambia in base al modo di vibrare considerato. Per il modo I il loro valore aumenta al crescere dello spessore, mentre per il modo II e III decresce con esso. Per spiegare questo comportamento si definisce la generica frequenza circolare come:

$$\omega \propto \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (7.1)$$

dove  $k$  e  $m$  sono, rispettivamente, la rigidezza efficace e la massa efficace per il modo di vibrare considerato, ovvero i contributi effettivi della struttura alla risposta dinamica in quel

particolare modo di vibrazione in termini di rigidezza e massa. Non si tratta della rigidezza o della massa totale della struttura, ma solo della parte che effettivamente partecipa al movimento modale. Si osserva, dunque, come per il modo I la rigidezza efficace aumenta più rapidamente della massa efficace al crescere dello spessore, da cui un aumento delle frequenze circolari proprie. Il comportamento opposto si ha per i modi II e III. Nel caso del modo I, la rigidezza e massa efficaci dipendono fortemente dalla rigidezza e massa globali. Quindi la sua rigidezza efficacie, avendo il modo un comportamento dominante flessionale, in prima approssimazione è proporzionale a  $h^3$ , mentre la sua massa efficace è proporzionale a  $h$ ; da ciò consegue che la  $\omega$  del modo I, in prima approssimazione, è proporzionale ad  $h$ .

### 7.1.2 Benchmark B2<sub>din</sub>

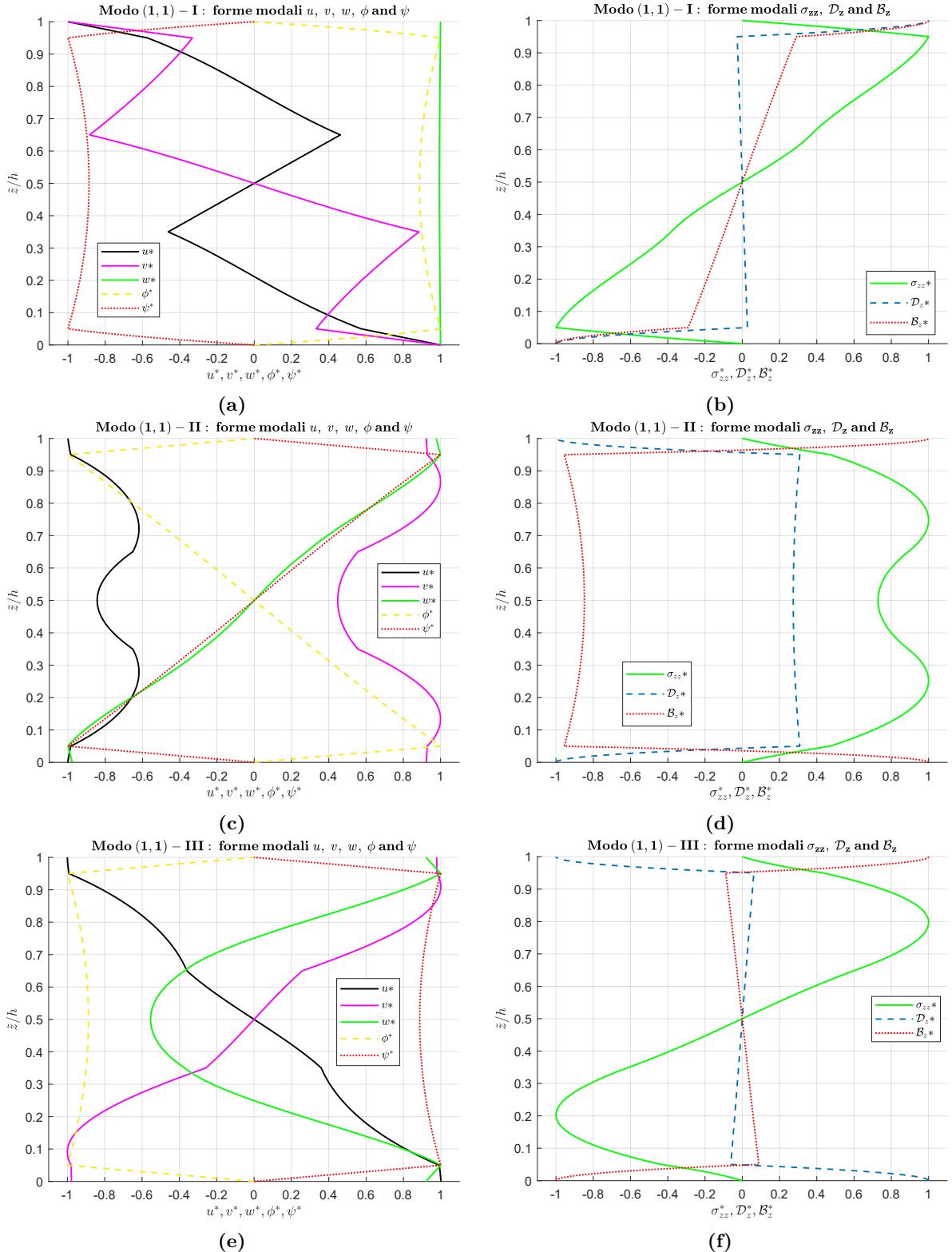
Per il secondo benchmark si analizza un guscio cilindrico multistrato semplicemente appoggiato. Si considerano differenti rapporti  $R_\alpha/h$ ; in particolare, si valutano i casi  $R_\alpha/h = 4, 10, 20, 50, 100$ . Per ognuno di essi, si prendono in esame le seguenti combinazioni di numeri di semionda  $(m, n)$ :  $(0, 1), (0, 2), (2, 1), (2, 2), (4, 1), (4, 2), (6, 1), (6, 2), (8, 1), (8, 2), (10, 1), (10, 2)$ . Si sottolinea che si utilizzano solo  $m$  pari per avere un andamento chiuso delle variabili lungo la direzione  $\alpha$ , essendo  $a = 2\pi R_\alpha$ . Tutti questi casi si sono svolti sia in configurazione closed circuit sia in configurazione open circuit. Nelle Tabelle 7.5 e 7.6 si presentano i valori delle frequenze circolari proprie normalizzate,  $\bar{\omega} = \omega/100$ , per i primi tre modi di vibrare, dove  $\omega$  è espressa in rad/s.

Per i primi tre modi di vibrare, nelle Figure 7.9, 7.10, 7.14 e 7.15 si rappresentano gli andamenti lungo lo spessore delle forme modali di alcune variabili. In modo analogo al precedente benchmark, nei quattro casi si analizzano combinazioni diverse di rapporto  $R_\alpha/h$  e coppia di numeri di semionda  $(m, n)$ , nei primi due per configurazioni closed circuit, mentre nel terzo e nel quarto per configurazioni open circuit. Si propone nuovamente l'andamento dell'ampiezza delle forme modali delle variabili  $u, v, w, \phi, \psi, \sigma_{zz}, D_z$  e  $B_z$ . Anche in questo caso sono rispettati i  $C_z^0$  requirements, con il loro andamento continuo e la tipica forma a zig-zag. Il modello è, quindi, in grado di valutare correttamente le variabili lungo la direzione trasversale anche in presenza di curvatura.

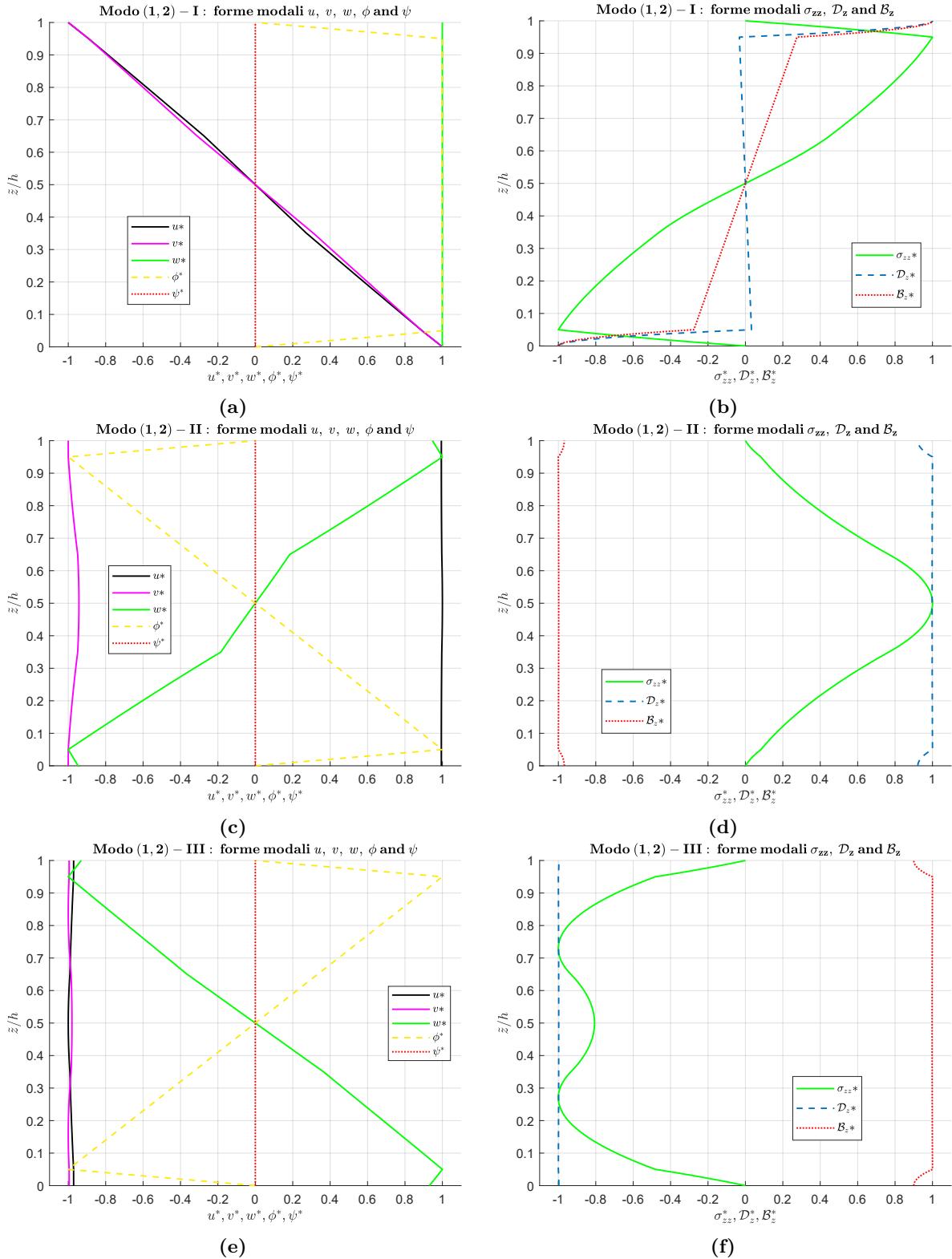
Osservando i valori delle frequenze circolari proprie per i modi II e III, si nota che questi ultimi, fissato uno spessore, al crescere di  $m$  e a parità di  $n$ , crescono, con un comportamento analogo a quello osservato per il caso piastra. Sempre per i modi II e III, lo stesso si può dire al crescere di  $n$  e a parità di  $m$ . Diverso, invece, è il caso del modo I. A spessore fissato e a parità di  $n$ , facendo crescere  $m$  non si ha un andamento crescente delle frequenze circolari proprie, come per il caso piastra. Si osserva, infatti, un valore minimo per  $m$  intermedi. Inoltre, al crescere di  $n$ , la frequenza circolare minima si sposta verso  $m$  maggiori. Questo comportamento è da attribuirsi agli effetti dovuti alla curvatura presente lungo la direzione  $\alpha$ , di cui  $m$  è il numero di semionda relativo. A spessore fissato e a parità di  $m$ , facendo crescere  $n$  si ha nuovamente un andamento crescente delle frequenze circolari proprie, come per il caso piastra; infatti, non si ha curvatura lungo la direzione  $\beta$ , di cui  $n$  è il numero di semionda relativo. Nella Figura 7.11, per la configurazione closed circuit, e 7.16, per la configurazione open circuit, vengono presentati, per i primi tre modi di vibrare, due esempi di questo comportamento appena descritto. Invece, dalle Figure 7.12 e 7.17, si osserva che al variare del rapporto  $R_\alpha/h$ , fissati i numeri di semionda  $(m, n)$ , il comportamento delle frequenze circolari proprie cambia in base al modo di vibrare considerato. Se si esclude la coppia  $(m, n) = (0, 1)$ , il comportamento è lo stesso osservato nel benchmark precedente. Per il modo I il loro valore aumenta al crescere dello spessore, mentre per il modo II e III decresce con esso. La spiegazione è la stessa già data in precedenza. Un comportamento inaspettato si ha con la coppia  $(m, n) = (0, 1)$ ; infatti, per il modo I le frequenze circolari proprie diminuiscono leggermente al crescere dello spessore,

**Tabella 7.3:** Benchmark  $B1_{din}$ , piastra quadrata multistrato adaptive wood/ $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ /adaptive wood semplicemente appoggiata nella configurazione closed circuit. Frequenze circolari normalizzate  $\bar{\omega}$  per i primi cinque modi di vibrare al variare del rapporto  $a/h$  e di  $(m, n)$ .

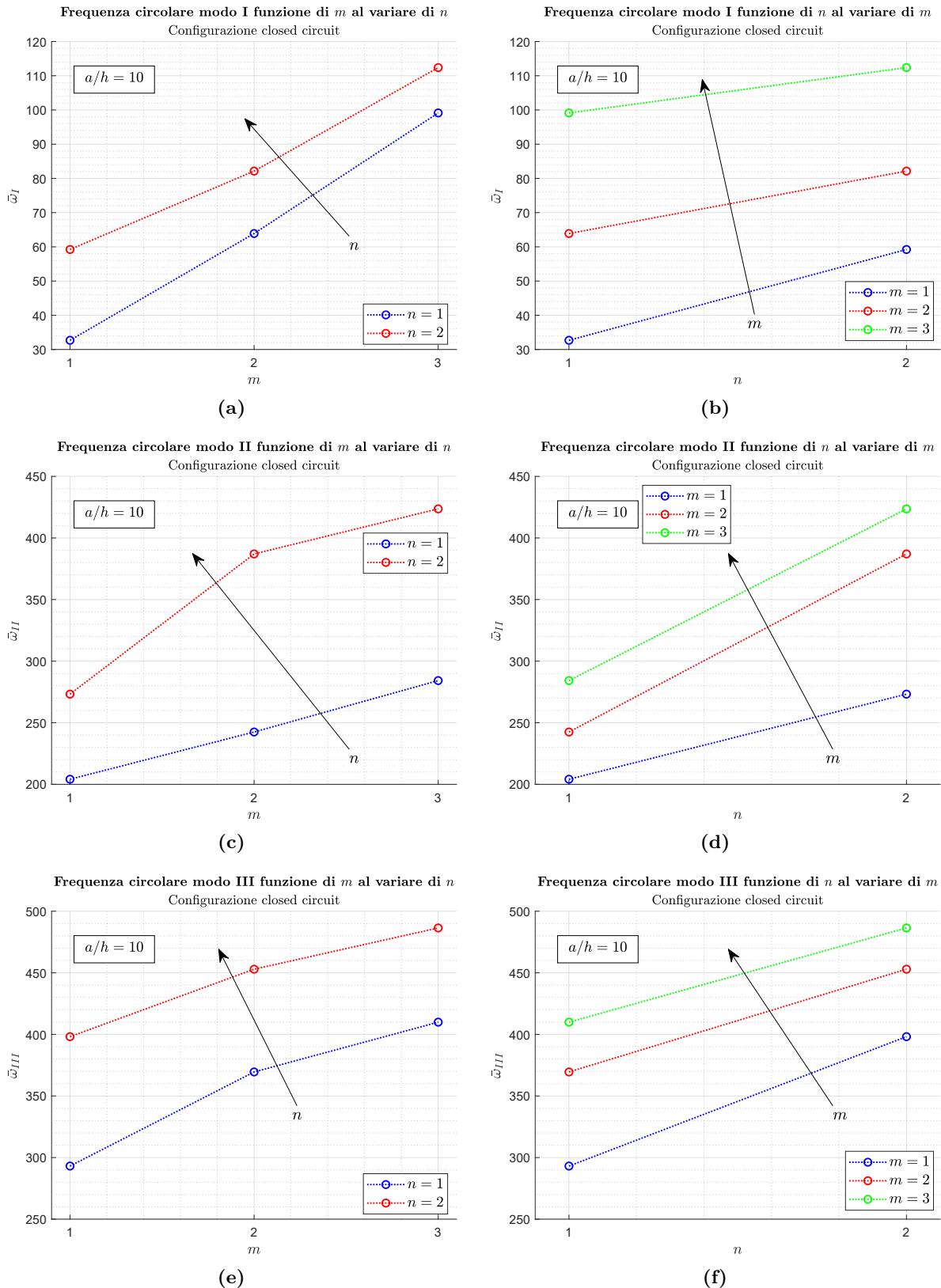
Configurazione closed circuit $B1_{din}$						
$\bar{\omega} = \omega/100$ [rad/s $\times 10^{-2}$ ]						
	$a/h$	4	10	20	50	100
(1,1)-I	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	42.848	32.684	21.212	9.4756	4.8249
(1,1)-II	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	187.20	204.12	207.41	208.39	208.53
(1,1)-III	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	206.16	293.11	297.81	299.02	299.19
(1,1)-IV	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	218.63	340.28	605.11	1452.6	2884.6
(1,1)-V	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	267.69	440.25	671.57	1498.8	2945.0
(1,2)-I	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	69.491	59.218	43.290	21.086	10.931
(1,2)-II	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	223.74	273.22	281.01	284.35	284.90
(1,2)-III	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	252.38	398.15	453.92	459.55	460.35
(1,2)-IV	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	284.60	432.65	643.25	1479.0	2904.1
(1,2)-V	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	325.07	526.81	735.53	1520.0	2950.0
(2,1)-I	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	75.469	63.888	49.204	25.850	13.682
(2,1)-II	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	214.92	242.47	246.31	247.45	247.61
(2,1)-III	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	237.29	369.51	548.39	555.92	556.90
(2,1)-IV	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	242.24	502.69	622.29	1458.7	2887.5
(2,1)-V	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	344.16	577.67	846.44	1586.8	2991.0
(2,2)-I	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	93.456	82.138	65.369	35.470	18.951
(2,2)-II	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	229.65	387.03	408.24	415.65	416.78
(2,2)-III	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	317.22	452.92	586.22	596.67	598.04
(2,2)-IV	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	318.09	520.16	680.56	1487.8	2905.1
(2,2)-V	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	363.53	594.20	880.50	1604.0	2997.7
(3,1)-I	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	112.98	99.131	82.652	50.304	28.128
(3,1)-II	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	236.14	284.21	289.14	290.83	291.10
(3,1)-III	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	270.92	409.94	648.49	823.64	826.67
(3,1)-IV	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	288.89	551.59	796.61	1470.0	2893.1
(3,1)-V	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	379.73	619.34	1075.9	1722.1	3065.4
(3,2)-I	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	125.74	112.38	94.969	58.440	32.847
(3,2)-II	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	242.23	423.62	448.81	456.76	457.93
(3,2)-III	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	342.49	486.40	707.58	843.57	847.37
(3,2)-IV	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	347.83	553.21	810.27	1499.5	2909.8
(3,2)-V	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	409.70	714.49	1098.8	1737.1	3072.7



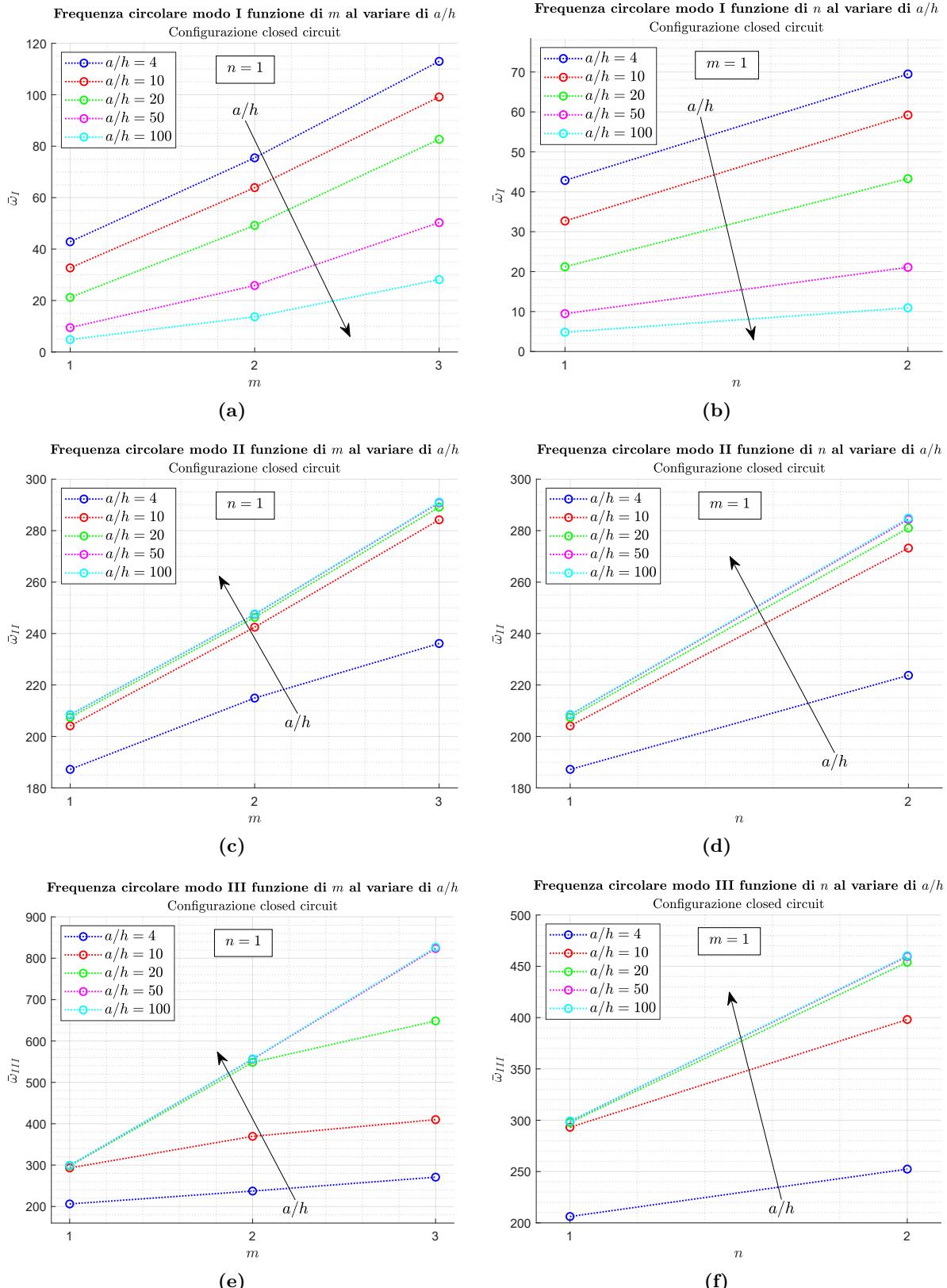
**Figura 7.1:** Benchmark  $B1_{din}$ , piastra quadrata multistrato adaptive wood/0°/90°/0°/adaptive wood semplicemente appoggiata nella configurazione closed circuit. Forme modali di  $u, v, w, \phi, \psi, \sigma_{zz}, D_z$  e  $B_z$  dei primi tre modi di vibrare nel caso di  $a/h = 4$  e  $(m, n) = (1, 1)$ . Le singole forme modali rappresentano la massima ampiezza lungo la direzione dello spessore e sono normalizzate rispetto al loro massimo.



**Figura 7.2:** Benchmark  $B1_{din}$ , piastra quadrata multistrato adaptive wood/ $0^\circ/90^\circ/0^\circ/\text{adaptive wood}$  semplicemente appoggiata nella configurazione closed circuit. Forme modali di  $u, v, w, \phi, \psi, \sigma_{zz}, D_z$  e  $B_z$  dei primi tre modi di vibrare nel caso di  $a/h = 50$  e  $(m, n) = (1, 2)$ . Le singole forme modali rappresentano la massima ampiezza lungo la direzione dello spessore e sono normalizzate rispetto al loro massimo.



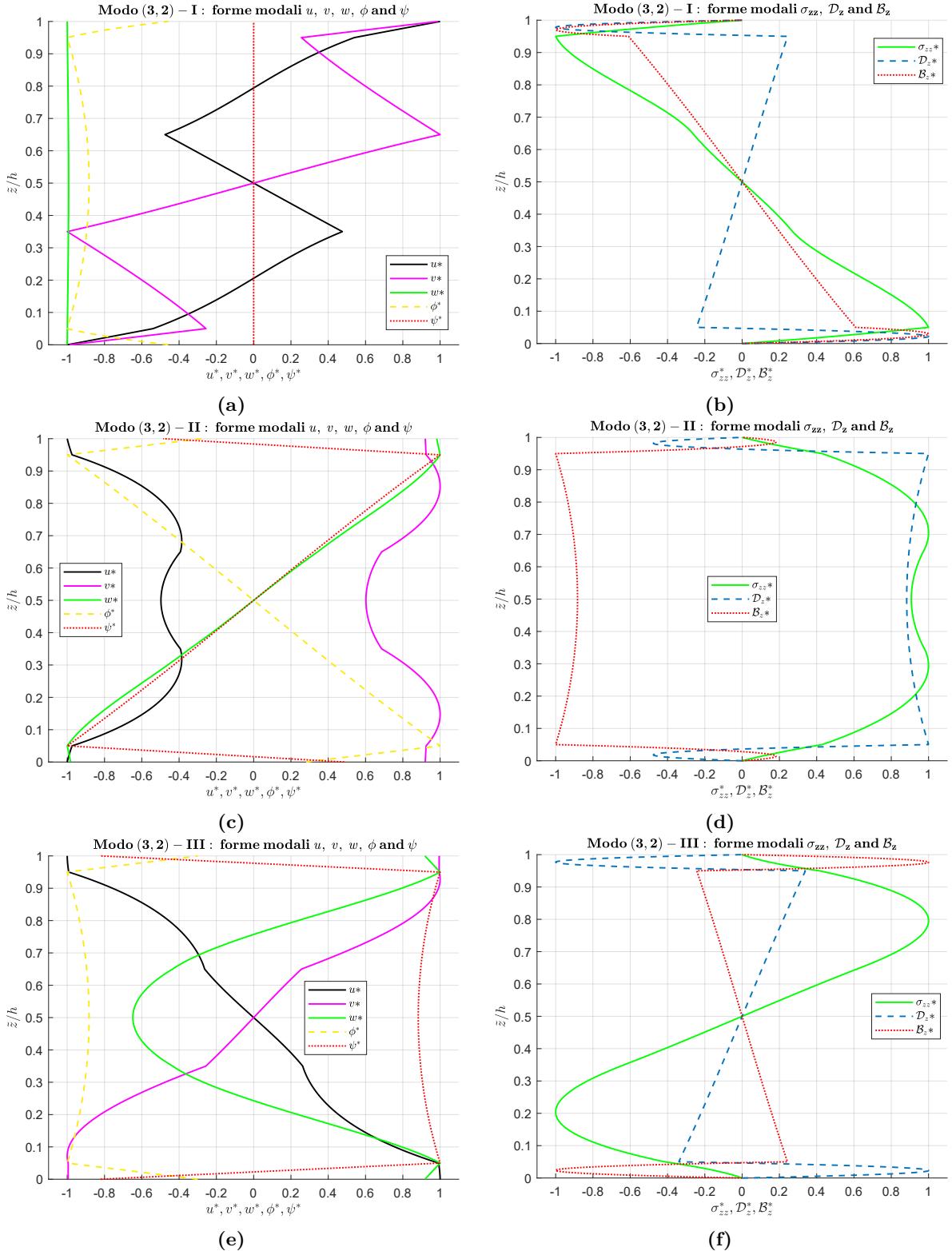
**Figura 7.3:** Benchmark  $B1_{din}$ , piastra quadrata multistrato adaptive wood/ $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ /adaptive wood semplicemente appoggiata nella configurazione closed circuit. Con  $a/h = 10$  fissato, andamento di  $\bar{\omega}(m)$  per differenti  $n$  e di  $\bar{\omega}(n)$  per differenti  $m$  per i primi tre modi di vibrare.



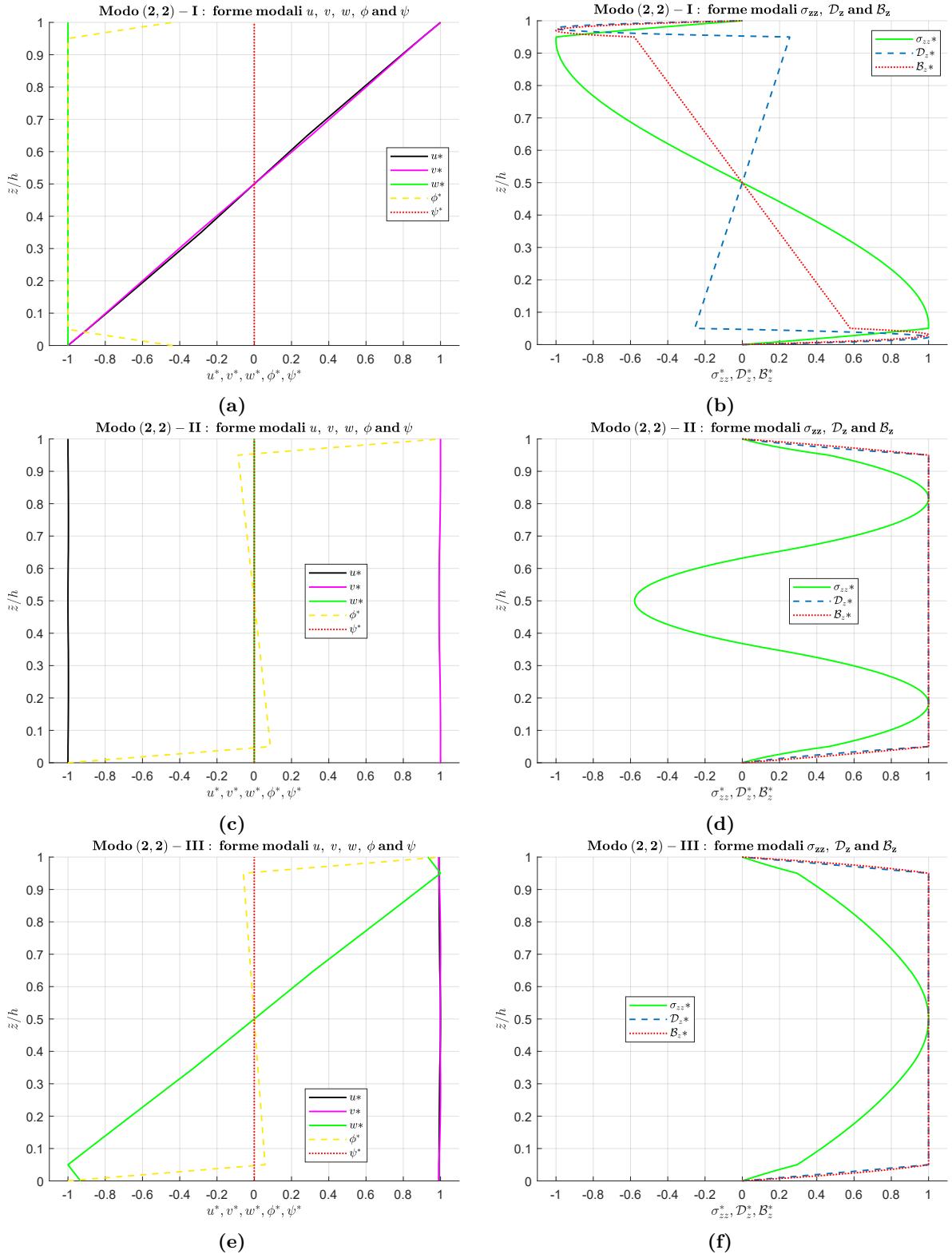
**Figura 7.4:** Benchmark  $B1_{din}$ , piastra quadrata multistrato adaptive wood/ $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ /adaptive wood semplicemente appoggiata nella configurazione closed circuit. Con  $a/h$  variabile, andamento delle frequenze circolari proprie adimensionali  $\bar{\omega}(m)$  per  $n = 1$  e  $\bar{\omega}(n)$  per  $m = 1$  dei primi tre modi di vibrare.

**Tabella 7.4:** Benchmark  $B1_{din}$ , piastra quadrata multistrato adaptive wood/ $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ /adaptive wood semplicemente appoggiata nella configurazione open circuit. Frequenze circolari normalizzate  $\bar{\omega}$  per i primi cinque modi di vibrare al variare del rapporto  $a/h$  e di  $(m, n)$ .

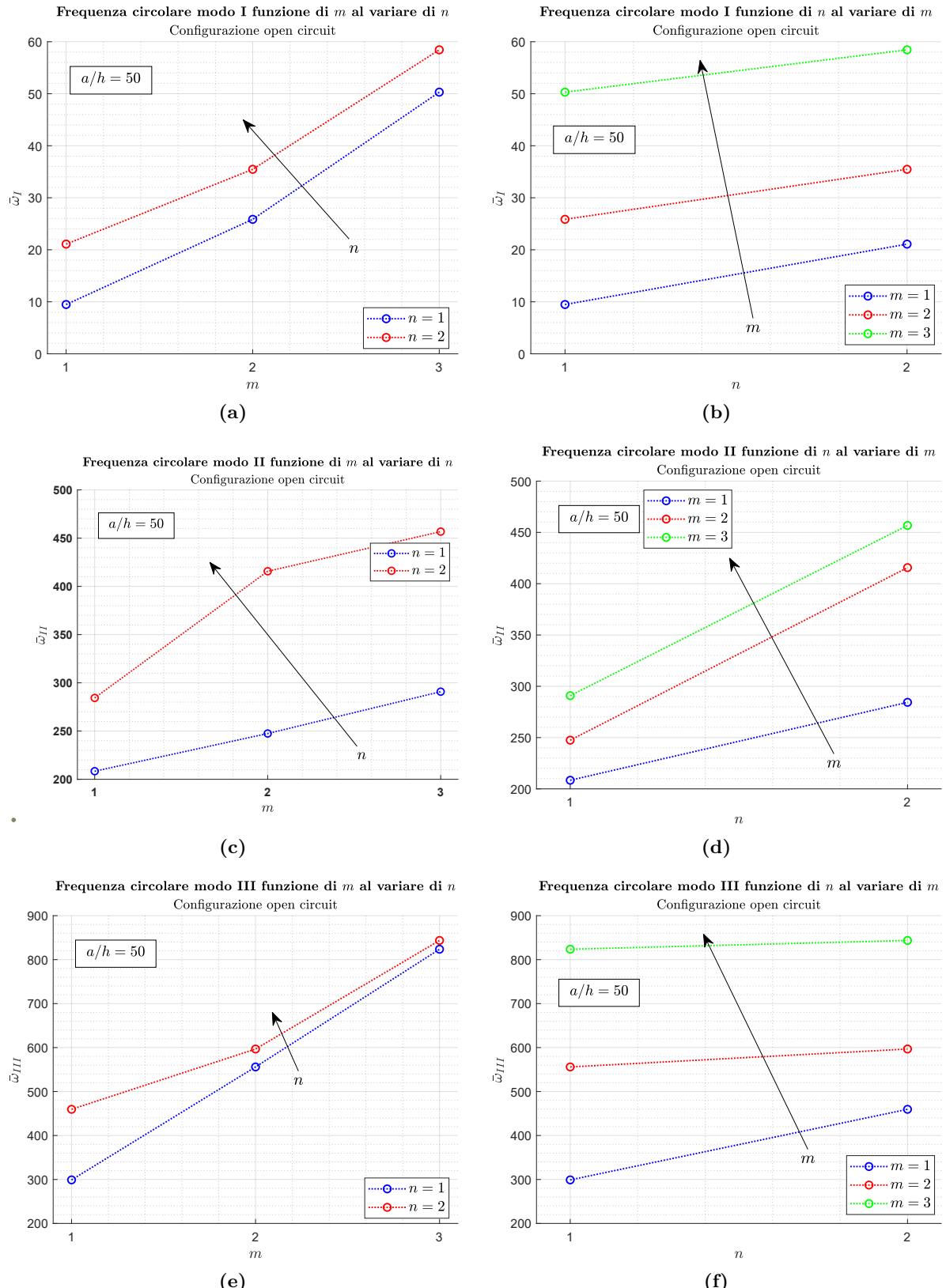
Configurazione open circuit $B1_{din}$						
		$\bar{\omega} = \omega/100$ [rad/s $\times 10^{-2}$ ]				
		$a/h$	4	10	20	50
(1,1)-I	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	42.855	32.687	21.212	9.4757	4.8249
(1,1)-II	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	187.21	204.12	207.41	208.39	208.54
(1,1)-III	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	206.17	293.12	297.83	299.04	299.21
(1,1)-IV	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	218.63	340.28	605.12	1452.6	2884.8
(1,1)-V	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	267.69	440.29	671.63	1499.0	2945.2
(1,2)-I	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	69.507	59.225	43.292	21.087	10.931
(1,2)-II	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	223.74	273.22	281.01	284.36	284.90
(1,2)-III	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	252.38	398.15	453.94	459.58	460.39
(1,2)-IV	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	284.61	432.65	643.25	1479.0	2904.3
(1,2)-V	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	325.09	526.82	735.59	1520.2	2950.1
(2,1)-I	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	75.493	63.895	49.206	25.850	13.682
(2,1)-II	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	214.93	242.47	246.31	247.45	247.62
(2,1)-III	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	237.32	369.51	548.41	555.95	556.93
(2,1)-IV	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	242.28	502.69	622.29	1458.7	2887.6
(2,1)-V	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	344.17	577.68	846.55	1587.0	2991.3
(2,2)-I	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	93.490	82.149	65.373	35.470	18.951
(2,2)-II	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	229.65	387.04	408.24	415.66	416.79
(2,2)-III	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	317.29	452.93	586.23	596.70	598.09
(2,2)-IV	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	318.15	520.16	680.56	1487.8	2905.2
(2,2)-V	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	363.55	594.20	880.57	1604.1	2997.9
(3,1)-I	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	113.05	99.146	82.657	50.305	28.128
(3,1)-II	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	236.16	284.21	289.14	290.84	291.10
(3,1)-III	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	270.97	409.95	648.49	823.68	826.71
(3,1)-IV	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	288.93	551.59	796.65	1470.0	2893.1
(3,1)-V	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	379.75	619.34	1076.1	1722.3	3065.7
(3,2)-I	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	125.81	112.40	94.977	58.442	32.847
(3,2)-II	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	242.26	423.64	448.81	456.77	457.95
(3,2)-III	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	342.56	486.43	707.58	843.62	847.42
(3,2)-IV	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	347.93	553.21	810.29	1499.5	2909.8
(3,2)-V	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	409.71	714.49	1099.0	1737.3	3073.0



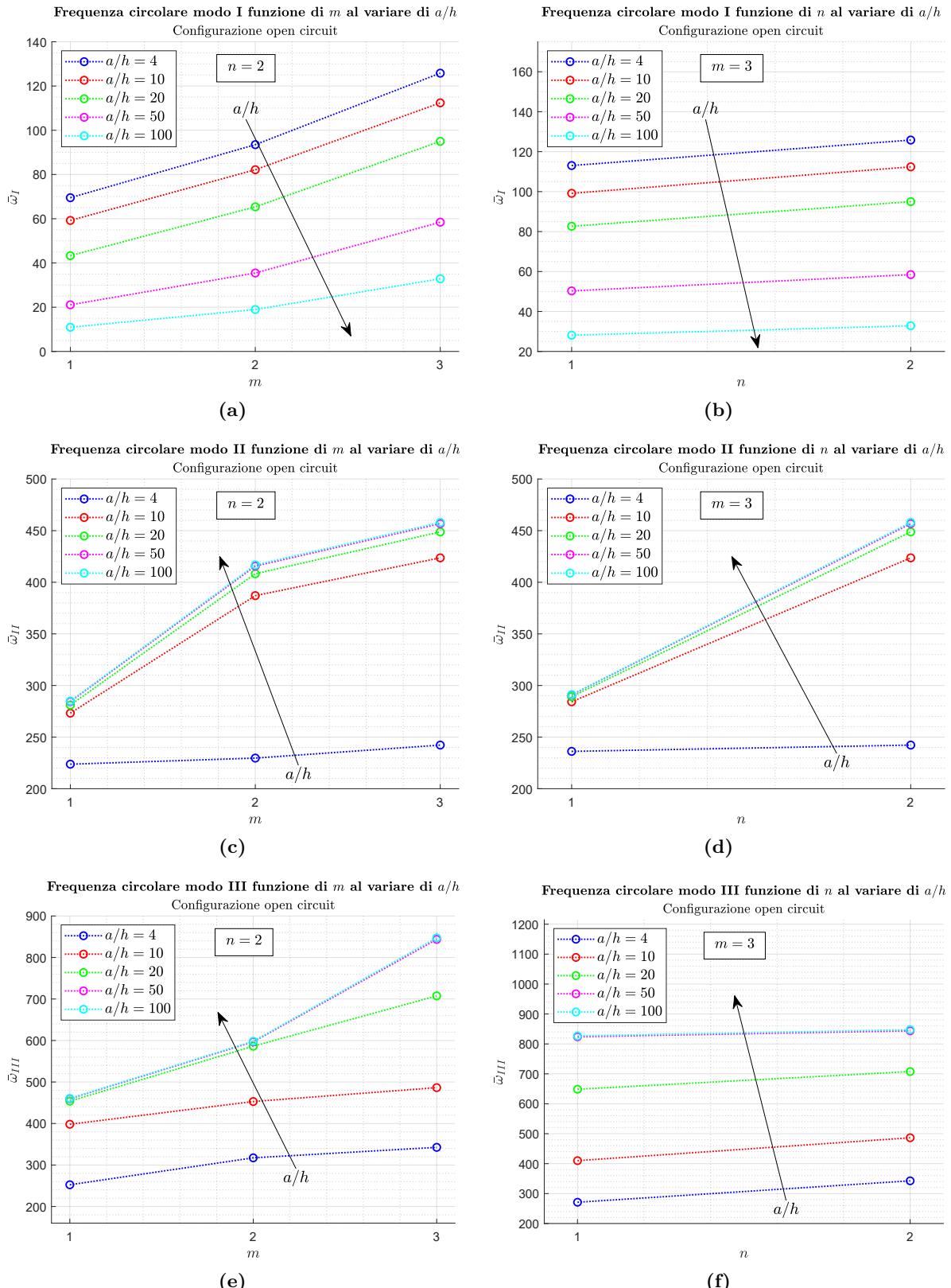
**Figura 7.5:** Benchmark  $B1_{din}$ , piastra quadrata multistrato adaptive wood/0°/90°/0°/adaptive wood semplicemente appoggiata nella configurazione open circuit. Forme modali di  $u, v, w, \phi, \psi, \sigma_{zz}, D_z$  e  $B_z$  dei primi tre modi di vibrare nel caso di  $a/h = 10$  e  $(m, n) = (3, 2)$ . Le singole forme modali rappresentano la massima ampiezza lungo la direzione dello spessore e sono normalizzate rispetto al loro massimo.



**Figura 7.6:** Benchmark  $B1_{din}$ , piastra quadrata multistrato adaptive wood/0°/90°/0°/adaptive wood semplicemente appoggiata nella configurazione open circuit. Forme modali di  $u, v, w, \phi, \psi, \sigma_{zz}, D_z$  e  $B_z$  dei primi tre modi di vibrare nel caso di  $a/h = 100$  e  $(m, n) = (2, 2)$ . Le singole forme modali rappresentano la massima ampiezza lungo la direzione dello spessore e sono normalizzate rispetto al loro massimo.



**Figura 7.7:** Benchmark  $B1_{din}$ , piastra multistrato adaptive wood/ $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ /adaptive wood quadrata semplicemente appoggiata nella configurazione open circuit. Con  $a/h = 50$  fissato, andamento di  $\bar{\omega}(m)$  per differenti  $n$  e di  $\bar{\omega}(n)$  per differenti  $m$  per i primi tre modi di vibrare.



**Figura 7.8:** Benchmark  $B1_{din}$ , piastra quadrata multistrato adaptive wood/ $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ /adaptive wood semplicemente appoggiata nella configurazione open circuit. Con  $a/h$  variabile, andamento delle frequenze circolari proprie adimensionali  $\bar{\omega}(m)$  per  $n = 2$  e  $\bar{\omega}(n)$  per  $m = 3$  dei primi tre modi di vibrare.

mentre per il modo II crescono leggermente. Il modo III si comporta, invece, in linea con gli altri casi  $(m, n)$ . Andando ad osservare le forme modali ottenute con  $(m, n) = (0, 1)$ , si nota che il modo I è un modo puramente membranale, mentre il modo II è il primo che presenta anche caratteristiche flessionali. Grazie all'Eq. (7.1) e assumendo la rigidezza efficace del modo I proporzionale ad  $h$ , essendo essa fortemente correlata alla rigidezza membranale globale, si ottiene che  $\omega$  non dipende da  $h$ , giustificando l'andamento ottenuto. L'andamento del modo II si spiega, invece, come quello ottenuto per il modo I negli altri casi di  $(m, n)$  e nel benchmark precedente, essendo il primo modo che presenta caratteristiche flessionali per la coppia  $(m, n) = (0, 1)$ . In Figura 7.13 e 7.18, si riporta il dettaglio dell'andamento delle frequenze circolari proprie dei modi I e II in funzione di  $R_\alpha/h$  per  $(m, n) = (0, 1)$  e per una seconda coppia  $(m, n)$ .

### 7.1.3 Benchmark B3<sub>din</sub>

Si considera un pannello di guscio cilindrico multistrato semplicemente appoggiato sui quattro lati. Questa benchmark varia rispetto al precedente per la sola dimensione  $a$ . Sia nel caso closed circuit che nel caso open circuit, si considerano gli stessi rapporti  $R_\alpha/h$ , con le stesse combinazioni di numeri di semionda  $(m, n)$  valutate nel caso trattato sopra. Nelle Tabelle 7.7 e 7.8 si presentano i valori delle frequenze circolari proprie normalizzate,  $\bar{\omega} = \omega/100$ , per i primi tre modi di vibrare, dove  $\omega$  è espressa in rad/s.

Anche per questo benchmark, per i primi tre modi di vibrare, nelle Figure 7.19 e 7.20, per il caso closed circuit, e nelle Figure 7.24 e 7.25, per il caso open circuit, si possono vedere gli andamenti lungo lo spessore della massima ampiezza delle forme modali delle variabili  $u, v, w, \phi, \psi, \sigma_{zz}, \mathcal{D}_z$  e  $\mathcal{B}_z$ . Nei quattro casi si analizzano combinazioni diverse di rapporto  $R_\alpha/h$  e coppia di numeri di semionda  $(m, n)$  e in essi si nota il rispetto dei  $C_z^0$  requirements, dovuti alle condizioni di equilibrio e congruenza con l'andamento continuo e la forma a zig-zag tipica delle strutture multistrato.

Nelle Figure 7.21 e 7.26 si riportano l'andamento delle frequenze circolari proprie per i primi tre modi, fissato uno spessore, al crescere di  $m$  e a parità di  $n$  e al crescere di  $n$  e a parità di  $m$ . Le conclusioni che si possono trarre sono le stesse date nel caso precedente, osservando, però, una crescita meno rapida delle frequenze circolari proprie  $\omega$  per effetto dell'aumento di  $n$ . Anche per l'effetto dello spessore, si ripropongono in buona parte le osservazioni fatte per il benchmark B2<sub>din</sub>. Si riportano due esempi nelle Figure 7.22 e 7.27; l'unica differenza degna di nota riguarda il comportamento della frequenza circolare di modo I per  $(m, n) = (10, 1)$ , la quale risulta maggiore per  $R_\alpha/h = 10$  rispetto a quella per  $R_\alpha/h = 4$ . Inoltre, in Figura 7.23 e 7.28, si riporta il dettaglio dell'andamento delle frequenze circolari proprie dei modi I e II in funzione di  $R_\alpha/h$  per  $(m, n) = (0, 1)$  e per una seconda coppia  $(m, n)$ .

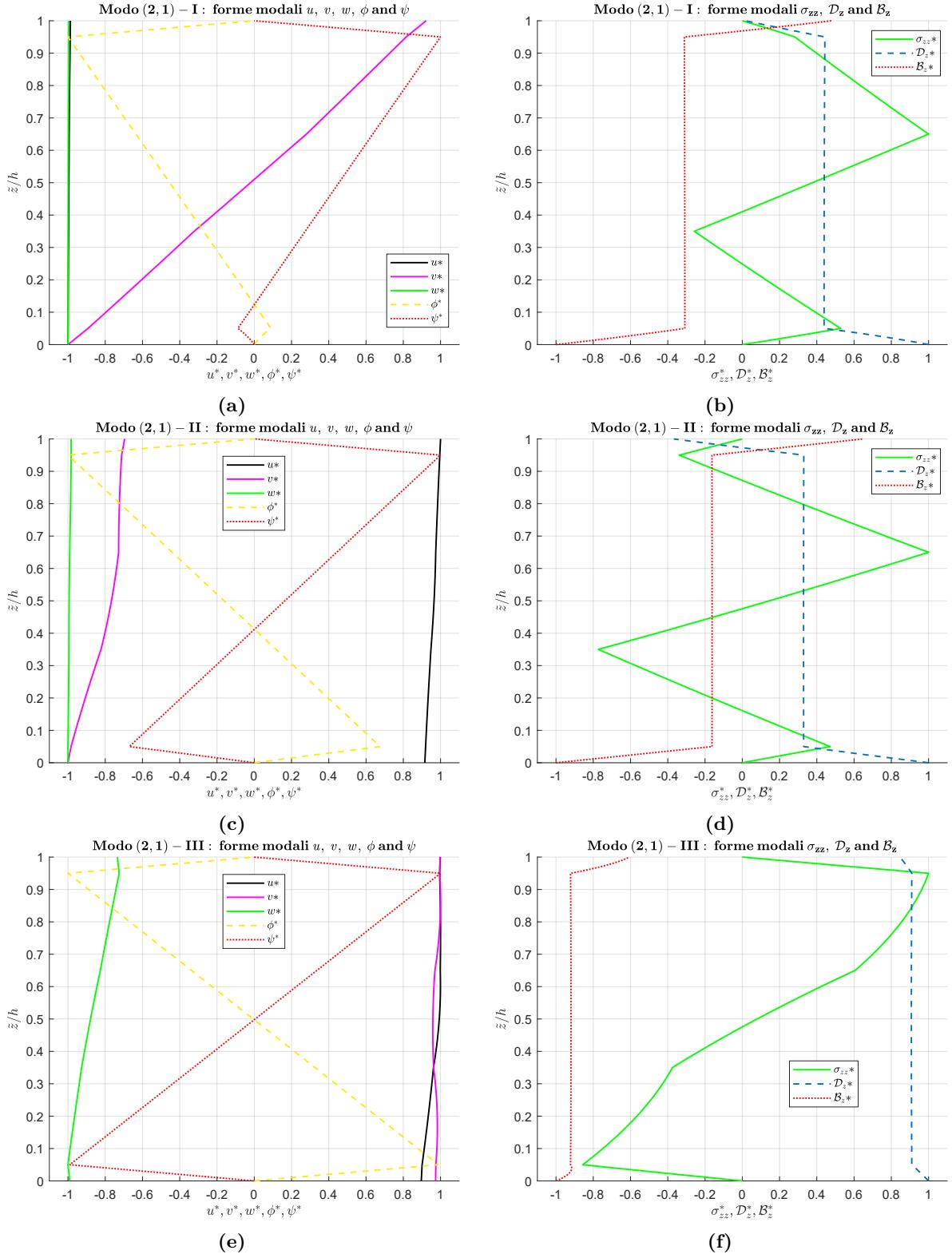
### 7.1.4 Benchmark B4<sub>din</sub>

Il quarto benchmark è relativo ad un pannello di guscio sferico multistrato semplicemente appoggiato sui quattro lati. Sia nel caso closed circuit che nel caso open circuit, si considerano gli stessi rapporti  $R_\alpha/h$  dei benchmark precedenti. Per ognuno di essi, si prendono in esame le seguenti combinazioni di numeri di semionda  $(m, n)$ : (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (5, 1), (5, 2). Nelle Tabelle 7.9 e 7.10 si presentano i valori delle frequenze circolari proprie normalizzate,  $\bar{\omega} = \omega/100$ , per i primi tre modi di vibrare, dove  $\omega$  è espressa in rad/s.

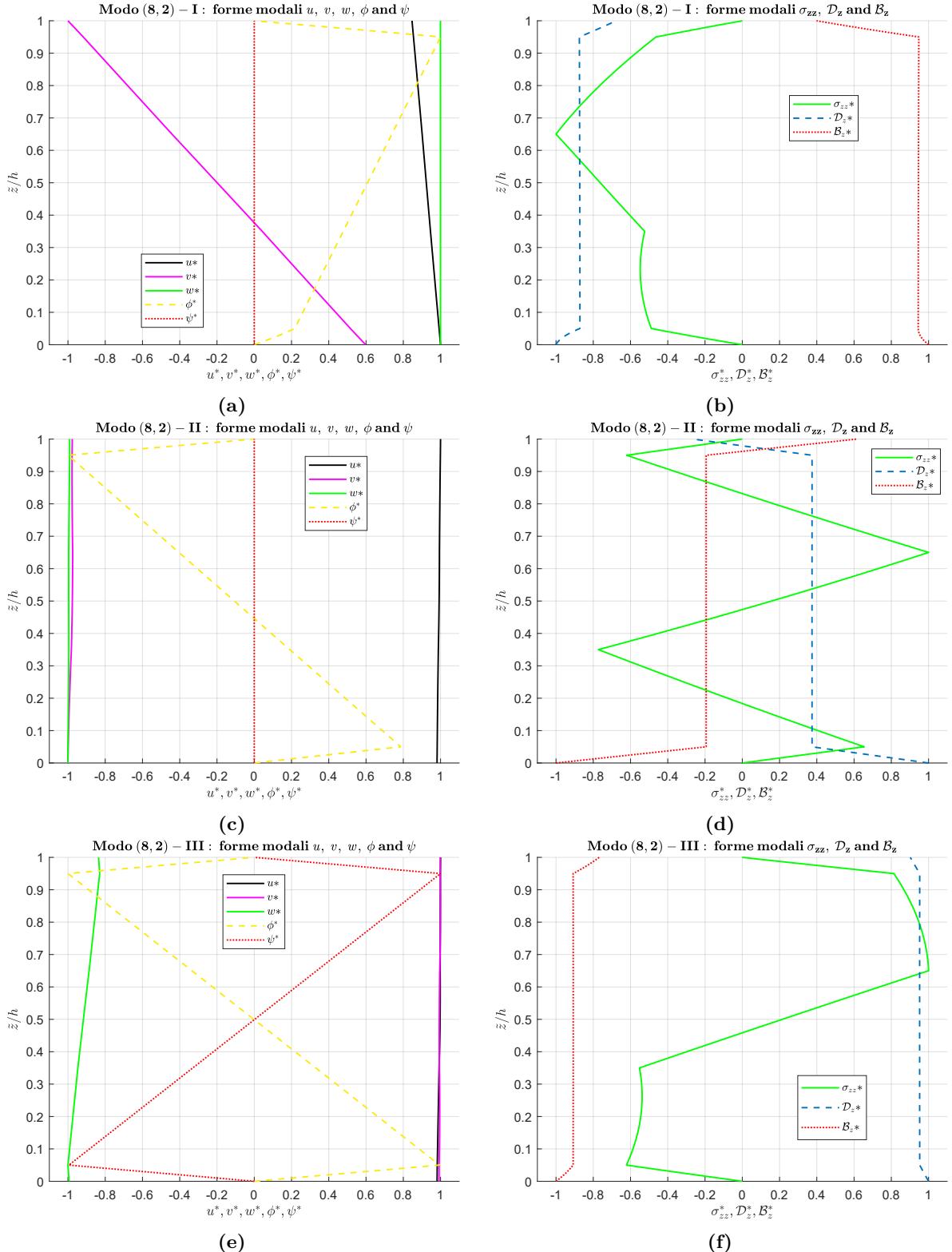
Nelle Figure 7.29 e 7.30, per la configurazione closed circuit, e nelle Figure 7.33 e 7.34, per la configurazione open circuit, sono riportati, per i primi tre modi di vibrare, gli andamenti lungo lo spessore per le forme modali delle variabili  $u, v, w, \phi, \psi, \sigma_{zz}, \mathcal{D}_z$  e  $\mathcal{B}_z$ . Come fatto in precedenza, nei quattro casi si analizzano combinazioni diverse di rapporto  $R_\alpha/h$  e coppia di

**Tabella 7.5:** Benchmark  $B2_{\text{din}}$ , guscio multistrato cilindrico adaptive wood/ $0^\circ/90^\circ/0^\circ/\text{adaptive wood}$  semplicemente appoggiato nella configurazione closed circuit. Frequenze circolari normalizzate  $\bar{\omega}$  per i primi tre modi di vibrare al variare del rapporto  $R_\alpha/h$  e di  $(m, n)$ .

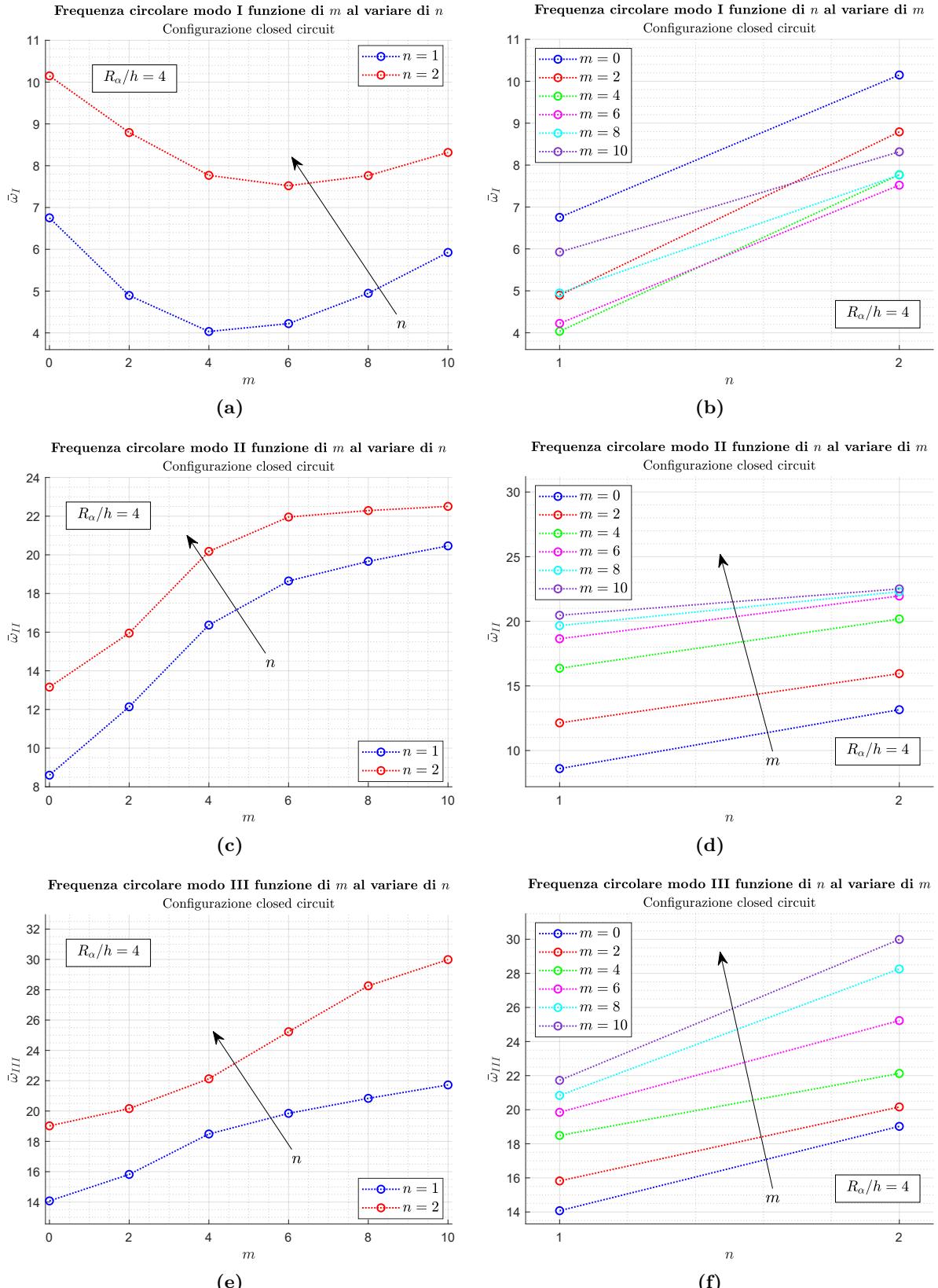
Configurazione closed circuit $B2_{\text{din}}$						
$\bar{\omega} = \omega/100 [\text{rad/s} \times 10^{-2}]$						
	$R_\alpha/h$	4	10	20	50	100
(0,1)-I	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	6.7531	6.7752	6.7777	6.7784	6.7784
(0,1)-II	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	8.6009	8.5080	8.4537	8.4303	8.4265
(0,1)-III	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	14.073	21.879	22.132	22.205	22.216
(0,2)-I	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	10.149	9.6534	9.0774	8.6008	8.4966
(0,2)-II	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	13.158	13.496	13.542	13.555	13.556
(0,2)-III	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	19.022	33.025	43.570	44.148	44.234
(2,1)-I	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	4.8958	4.6414	4.4990	4.4378	4.4278
(2,1)-II	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	12.138	12.572	12.660	12.687	12.691
(2,1)-III	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	15.820	22.260	22.512	22.583	22.593
(2,2)-I	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	8.7928	8.3014	7.6348	7.0667	6.9400
(2,2)-II	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	15.950	16.395	16.521	16.568	16.575
(2,2)-III	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	20.162	33.944	43.726	44.303	44.389
(4,1)-I	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	4.0333	3.4993	3.1150	2.9179	2.8835
(4,1)-II	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	16.366	17.703	17.961	18.041	18.053
(4,1)-III	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	18.487	24.110	24.388	24.460	24.470
(4,2)-I	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	7.7696	7.1194	6.2119	5.3658	5.1642
(4,2)-II	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	20.177	21.615	21.999	22.164	22.191
(4,2)-III	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	22.127	36.349	44.243	44.815	44.898
(6,1)-I	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	4.2222	3.4544	2.7096	2.1808	2.0701
(6,1)-II	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	18.648	20.430	20.760	20.858	20.872
(6,1)-III	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	19.847	29.230	29.782	29.916	29.935
(6,2)-I	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	7.5204	6.7275	5.5741	4.3365	4.0049
(6,2)-II	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	21.955	27.299	28.083	28.408	28.461
(6,2)-III	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	25.230	39.301	45.310	45.874	45.954
(8,1)-I	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	4.9481	4.0395	2.9860	1.9374	1.6440
(8,1)-II	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	19.664	21.726	22.066	22.164	22.178
(8,1)-III	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	20.837	34.724	37.195	37.456	37.492
(8,2)-I	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	7.7636	6.8686	5.5223	3.8278	3.2930
(8,2)-II	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	22.289	32.436	33.746	34.263	34.346
(8,2)-III	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	28.258	41.789	47.425	47.998	48.076
(10,1)-I	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	5.9252	4.9157	3.6676	2.0785	1.4856
(10,1)-II	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	20.463	22.811	23.170	23.272	23.287
(10,1)-III	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	21.723	35.661	45.105	45.558	45.618
(10,2)-I	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	8.3166	7.3398	5.8649	3.7104	2.8928
(10,2)-II	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	22.506	36.130	37.926	38.600	38.705
(10,2)-III	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	29.988	43.564	51.378	52.065	52.157



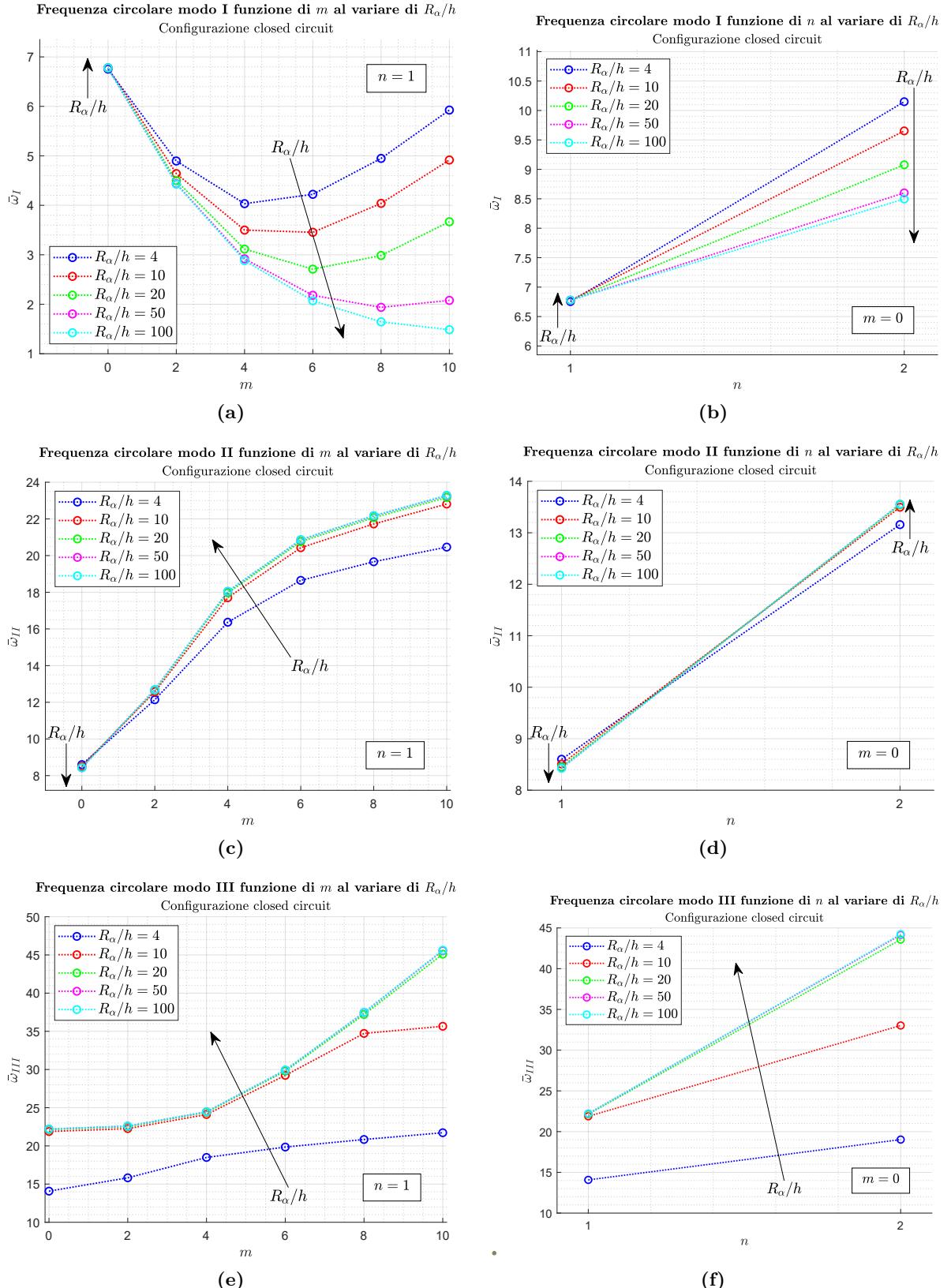
**Figura 7.9:** Benchmark  $B2_{din}$ , guscio cilindrico multistrato adaptive wood/ $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ /adaptive wood semplicemente appoggiato nella configurazione closed circuit. Forme modali di  $u, v, w, \phi, \psi, \sigma_{zz}, \mathcal{D}_z$  e  $\mathcal{B}_z$  dei primi tre modi di vibrare nel caso di  $R_\alpha/h = 20$  e  $(m, n) = (2, 1)$ . Le singole forme modali rappresentano la massima ampiezza lungo la direzione dello spessore e sono normalizzate rispetto al loro massimo.



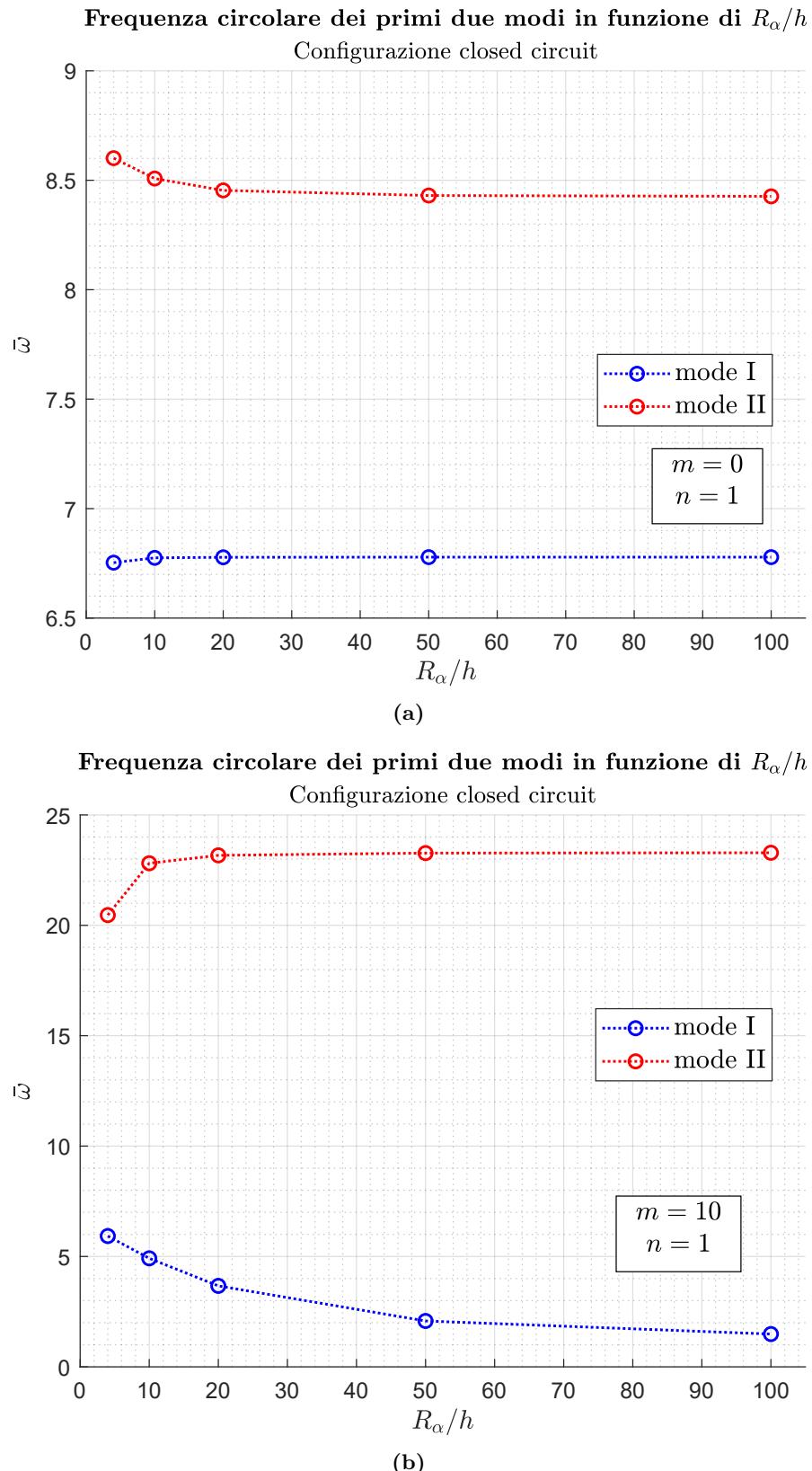
**Figura 7.10:** Benchmark  $B2_{din}$ , guscio cilindrico multistrato adaptive wood/ $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ /adaptive wood semplicemente appoggiato nella configurazione closed circuit. Forme modali di  $u, v, w, \phi, \psi, \sigma_{zz}, D_z$  e  $B_z$  dei primi tre modi di vibrare nel caso di  $R_\alpha/h = 100$  e  $(m, n) = (8, 2)$ . Le singole forme modali rappresentano la massima ampiezza lungo la direzione dello spessore e sono normalizzate rispetto al loro massimo.



**Figura 7.11:** Benchmark  $B2_{din}$ , guscio multistrato adaptive wood/ $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ /adaptive wood cilindrico semplicemente appoggiato nella configurazione closed circuit. Con  $R_\alpha/h = 4$  fissato, andamento di  $\bar{\omega}(m)$  per differenti  $n$  e di  $\bar{\omega}(n)$  per differenti  $m$  per i primi tre modi di vibrare.



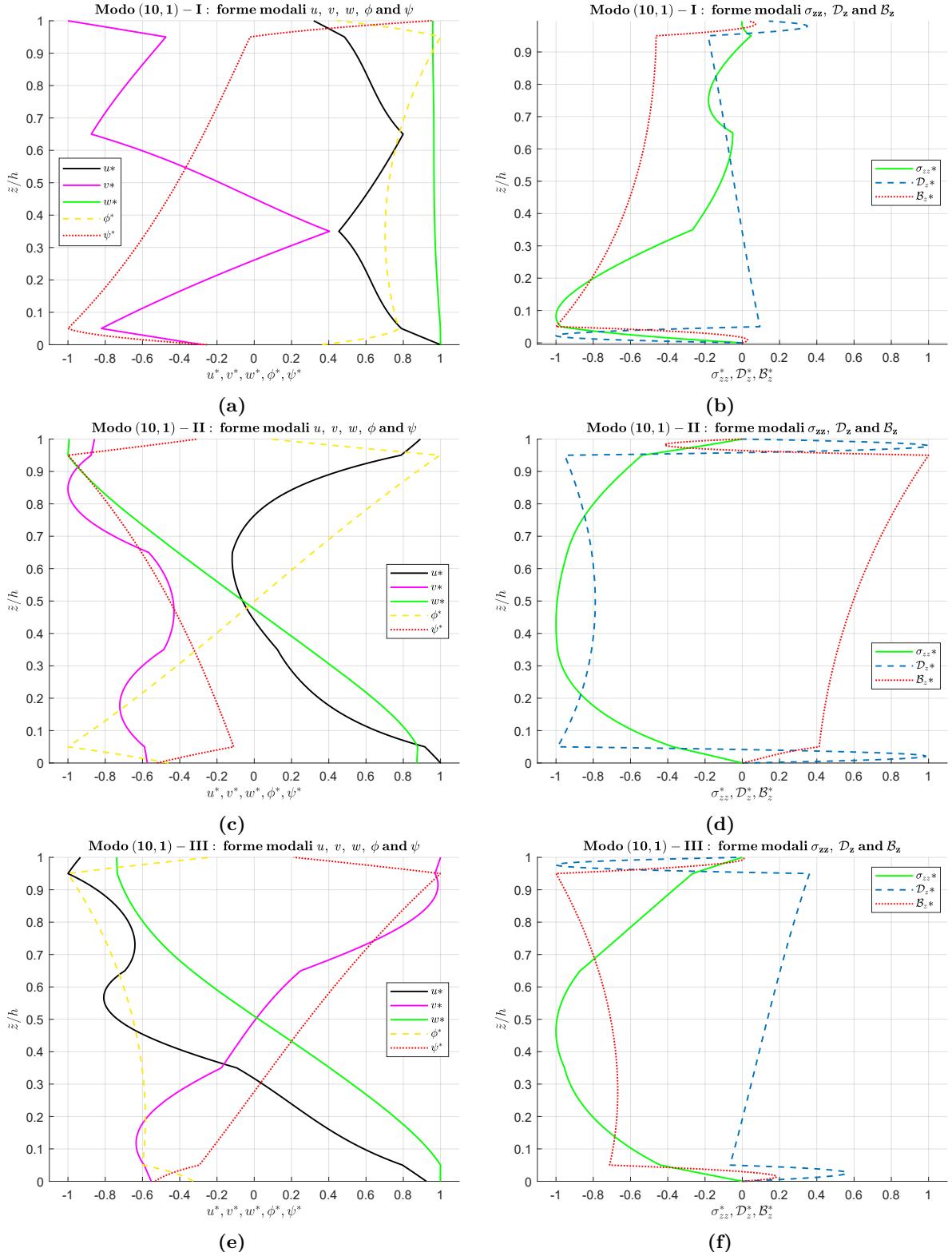
**Figura 7.12:** Benchmark  $B_2^2_{din}$ , guscio multistrato adaptive wood/ $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ /adaptive wood cilindrico semplicemente appoggiato nella configurazione closed circuit. Con  $R_\alpha/h$  variabile, andamento delle frequenze circolari proprie adimensionali  $\bar{\omega}(m)$  per  $n = 1$  e  $\bar{\omega}(n)$  per  $m = 0$  dei primi tre modi di vibrare.



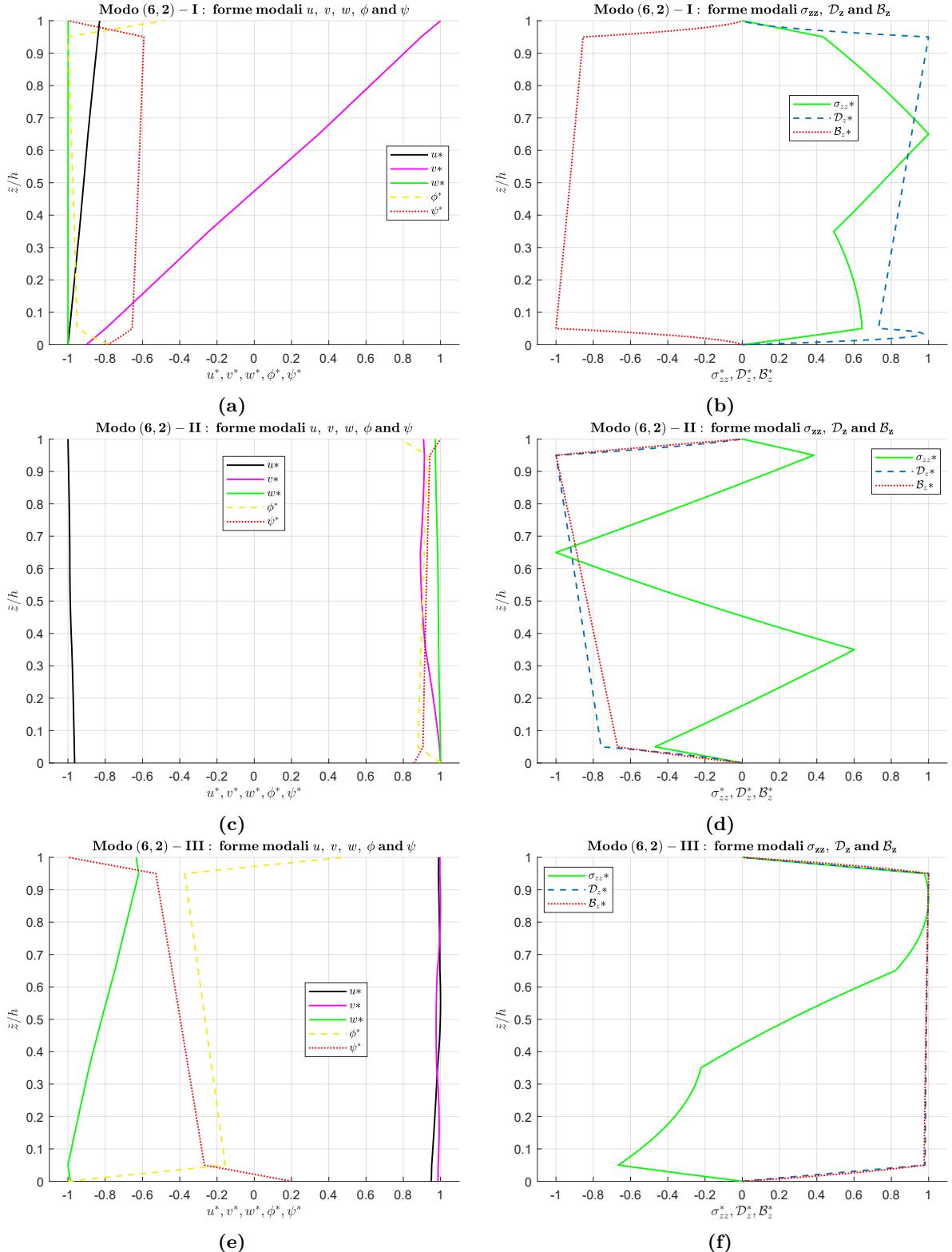
**Figura 7.13:** Benchmark  $B2_{din}$ , guscio cilindrico multistrato adaptive wood/ $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ /adaptive wood semplicemente appoggiato nella configurazione closed circuit. Andamento delle frequenze circolari proprie adimensionali  $\bar{\omega}$  dei primi due modi di vibrare in funzione di  $R_\alpha/h$ , fissati  $(m, n)$ .

**Tabella 7.6:** Benchmark  $B2_{\text{din}}$ , guscio cilindrico multistrato adaptive wood/ $0^\circ/90^\circ/0^\circ/\text{adaptive wood}$  semplicemente appoggiato nella configurazione open circuit. Frequenze circolari normalizzate  $\bar{\omega}$  per i primi tre modi di vibrare al variare del rapporto  $R_\alpha/h$  e di  $(m, n)$ .

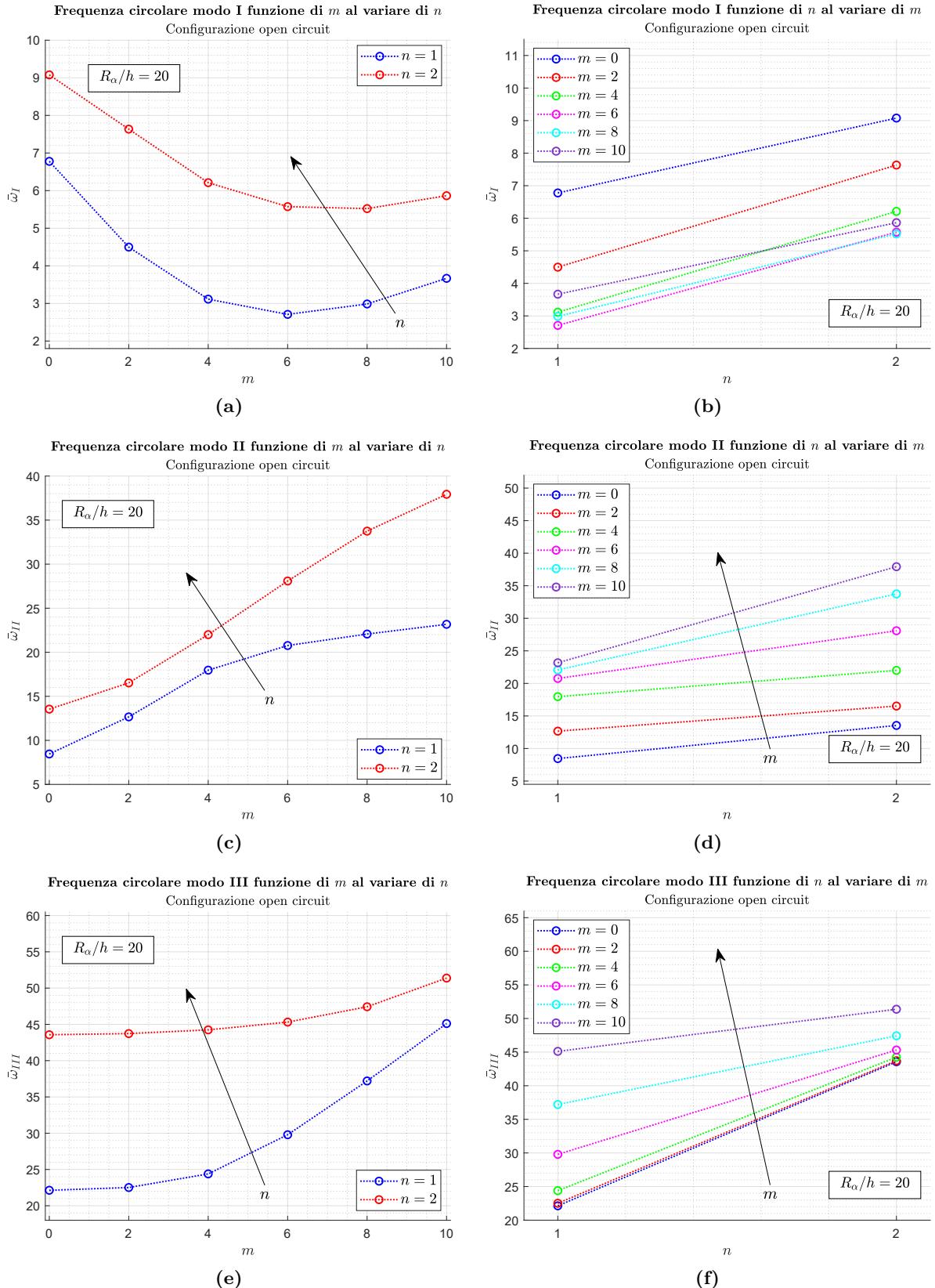
Configurazione open circuit $B2_{\text{din}}$						
$\bar{\omega} = \omega/100 [\text{rad/s} \times 10^{-2}]$						
	$R_\alpha/h$	4	10	20	50	100
(0,1)-I	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	6.7531	6.7752	6.7777	6.7784	6.7784
(0,1)-II	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	8.6015	8.5081	8.4539	8.4305	8.4267
(0,1)-III	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	14.073	21.880	22.134	22.207	22.218
(0,2)-I	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	10.150	9.6541	9.0776	8.6010	8.4968
(0,2)-II	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	13.158	13.496	13.542	13.555	13.556
(0,2)-III	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	19.022	33.025	43.571	44.152	44.238
(2,1)-I	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	4.8940	4.6401	4.4978	4.4367	4.4267
(2,1)-II	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	12.141	12.575	12.664	12.691	12.695
(2,1)-III	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	15.823	22.261	22.513	22.585	22.595
(2,2)-I	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	8.7931	8.3013	7.6345	7.0665	6.9398
(2,2)-II	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	15.951	16.396	16.522	16.569	16.576
(2,2)-III	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	20.162	33.945	43.728	44.307	44.392
(4,1)-I	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	4.0309	3.4977	3.1139	2.9171	2.8827
(4,1)-II	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	16.370	17.707	17.966	18.046	18.057
(4,1)-III	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	18.493	24.112	24.391	24.463	24.474
(4,2)-I	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	7.7694	7.1189	6.2114	5.3654	5.1639
(4,2)-II	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	20.178	21.616	22.001	22.166	22.193
(4,2)-III	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	22.127	36.350	44.244	44.818	44.902
(6,1)-I	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	4.2200	3.4529	2.7086	2.1803	2.0697
(6,1)-II	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	18.650	20.433	20.763	20.860	20.874
(6,1)-III	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	19.853	29.234	29.789	29.924	29.943
(6,2)-I	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	7.5200	6.7269	5.5734	4.3361	4.0045
(6,2)-II	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	21.955	27.302	28.086	28.411	28.464
(6,2)-III	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	25.232	39.303	45.312	45.878	45.958
(8,1)-I	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	4.9462	4.0382	2.9851	1.9370	1.6437
(8,1)-II	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	19.666	21.724	22.067	22.166	22.180
(8,1)-III	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	20.842	34.725	37.203	37.465	37.501
(8,2)-I	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	7.7632	6.8679	5.5216	3.8274	3.2927
(8,2)-II	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	22.289	32.439	33.748	34.266	34.349
(8,2)-III	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	28.259	41.791	47.427	48.002	48.081
(10,1)-I	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	5.9238	4.9147	3.6668	2.0781	1.4854
(10,1)-II	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	20.466	22.812	23.171	23.273	23.288
(10,1)-III	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	21.724	35.662	45.113	45.567	45.627
(10,2)-I	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	8.3165	7.3392	5.8642	3.7099	2.8925
(10,2)-II	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	22.506	36.132	37.929	38.602	38.707
(10,2)-III	3D- $u$ - $\phi$ - $\psi$ <sub>din</sub>	29.988	43.566	51.378	52.071	52.163



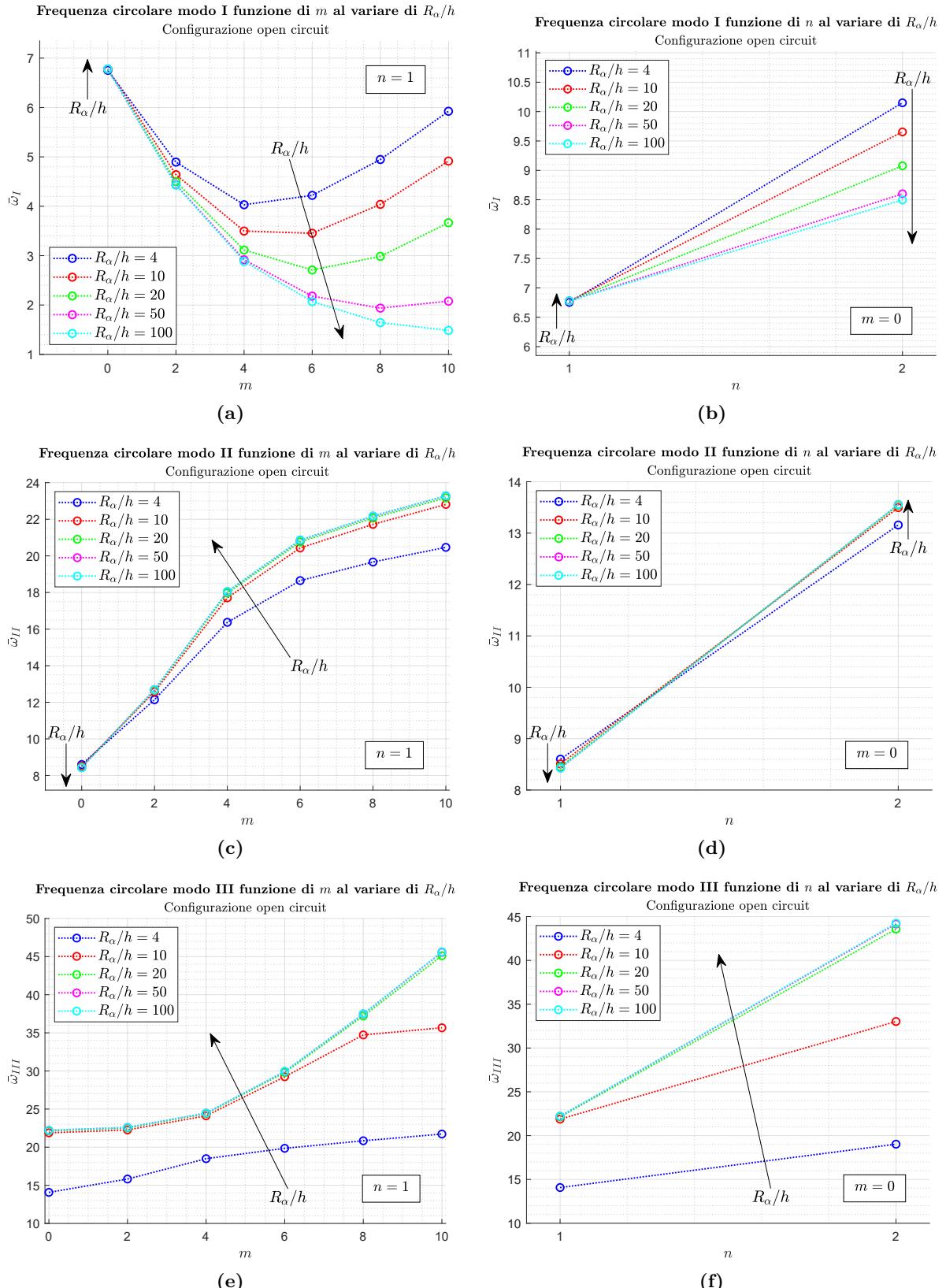
**Figura 7.14:** Benchmark  $B2_{din}$ , guscio cilindrico multistrato adaptive wood/ $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ /adaptive wood semplicemente appoggiato nella configurazione open circuit. Forme modali di  $u, v, w, \phi, \psi, \sigma_{zz}, D_z$  e  $B_z$  dei primi tre modi di vibrare nel caso di  $R_\alpha/h = 4$  e  $(m, n) = (10, 1)$ . Le singole forme modali rappresentano la massima ampiezza lungo la direzione dello spessore e sono normalizzate rispetto al loro massimo.



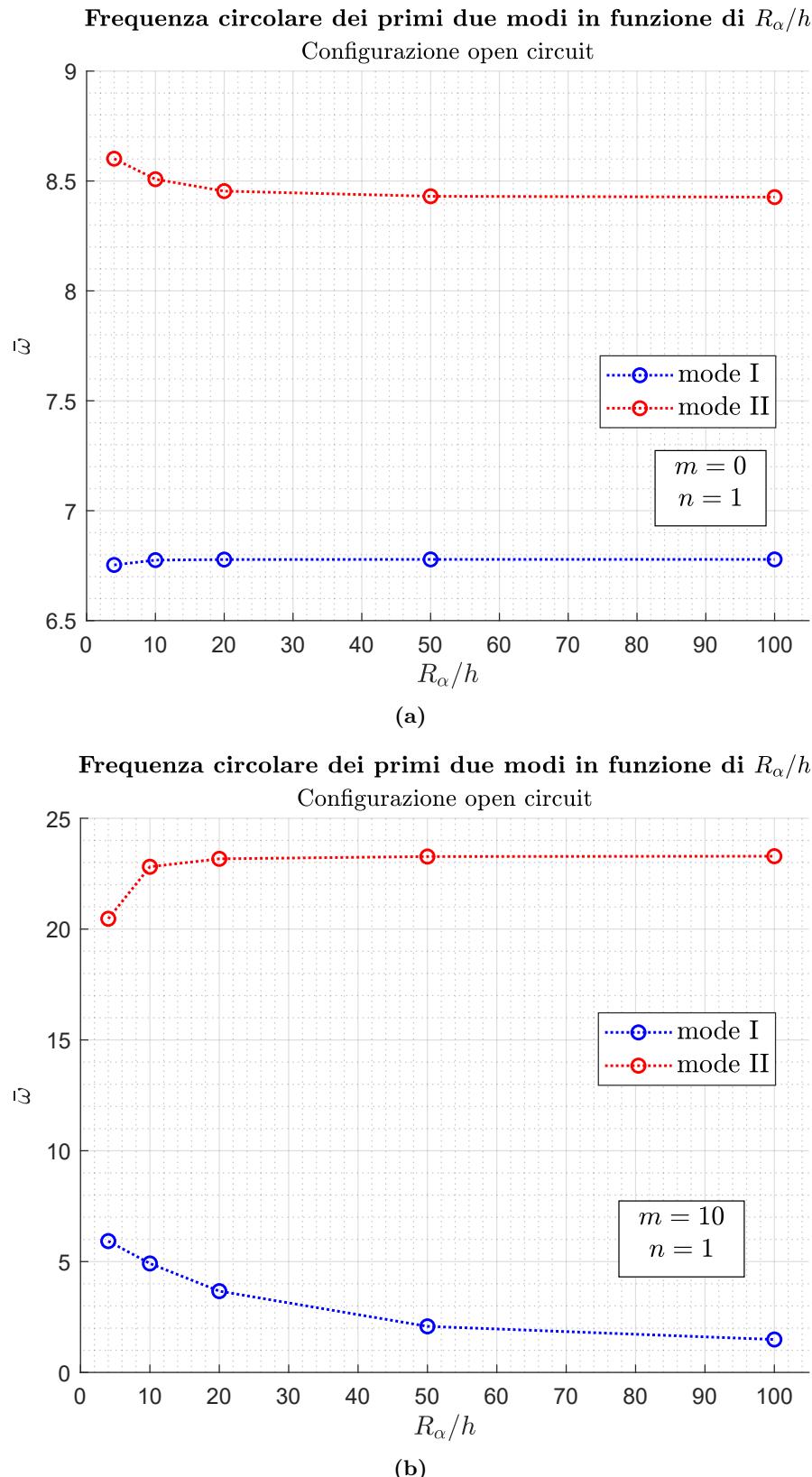
**Figura 7.15:** Benchmark  $B2_{din}$ , guscio cilindrico multistrato adaptive wood/ $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ /adaptive wood semplicemente appoggiato nella configurazione open circuit. Forme modali di  $u, v, w, \phi, \psi, \sigma_{zz}, \mathcal{D}_z$  e  $\mathcal{B}_z$  dei primi tre modi di vibrare nel caso di  $R_\alpha/h = 50$  e  $(m, n) = (6, 2)$ . Le singole forme modali rappresentano la massima ampiezza lungo la direzione dello spessore e sono normalizzate rispetto al loro massimo.



**Figura 7.16:** Benchmark  $B2_{din}$ , guscio cilindrico multistrato adaptive wood/ $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ /adaptive wood semplicemente appoggiato nella configurazione open circuit. Con  $R_\alpha/h = 20$  fissato, andamento di  $\bar{\omega}(m)$  per differenti  $n$  e di  $\bar{\omega}(n)$  per differenti  $m$  per i primi tre modi di vibrare.



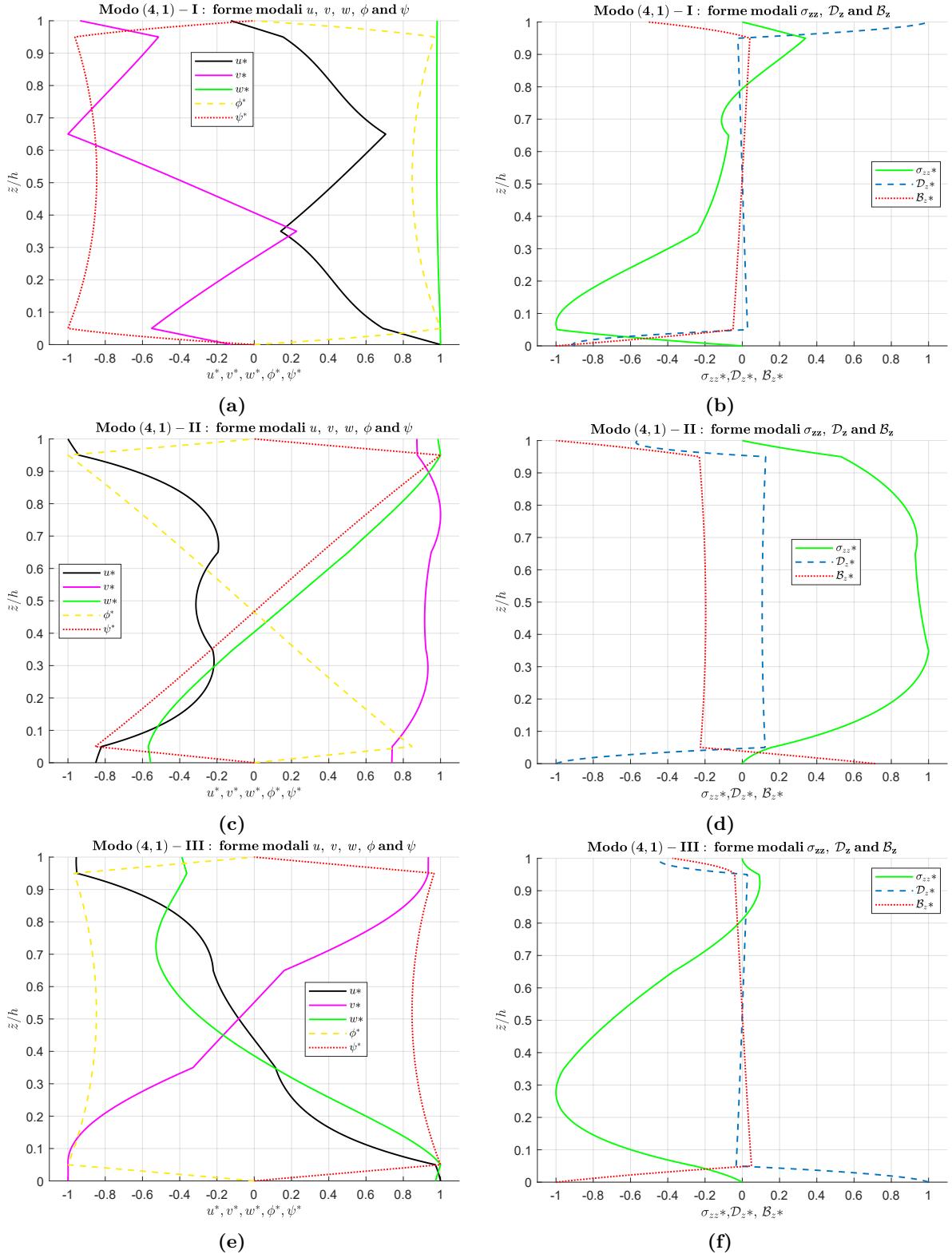
**Figura 7.17:** Benchmark  $B2_{din}$ , guscio cilindrico multistrato adaptive wood/ $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ /adaptive wood semplicemente appoggiato nella configurazione open circuit. Con  $R_\alpha/h$  variabile, andamento delle frequenze circolari proprie adimensionali  $\bar{\omega}(m)$  per  $n = 1$  e  $\bar{\omega}(n)$  per  $m = 0$  dei primi tre modi di vibrare.



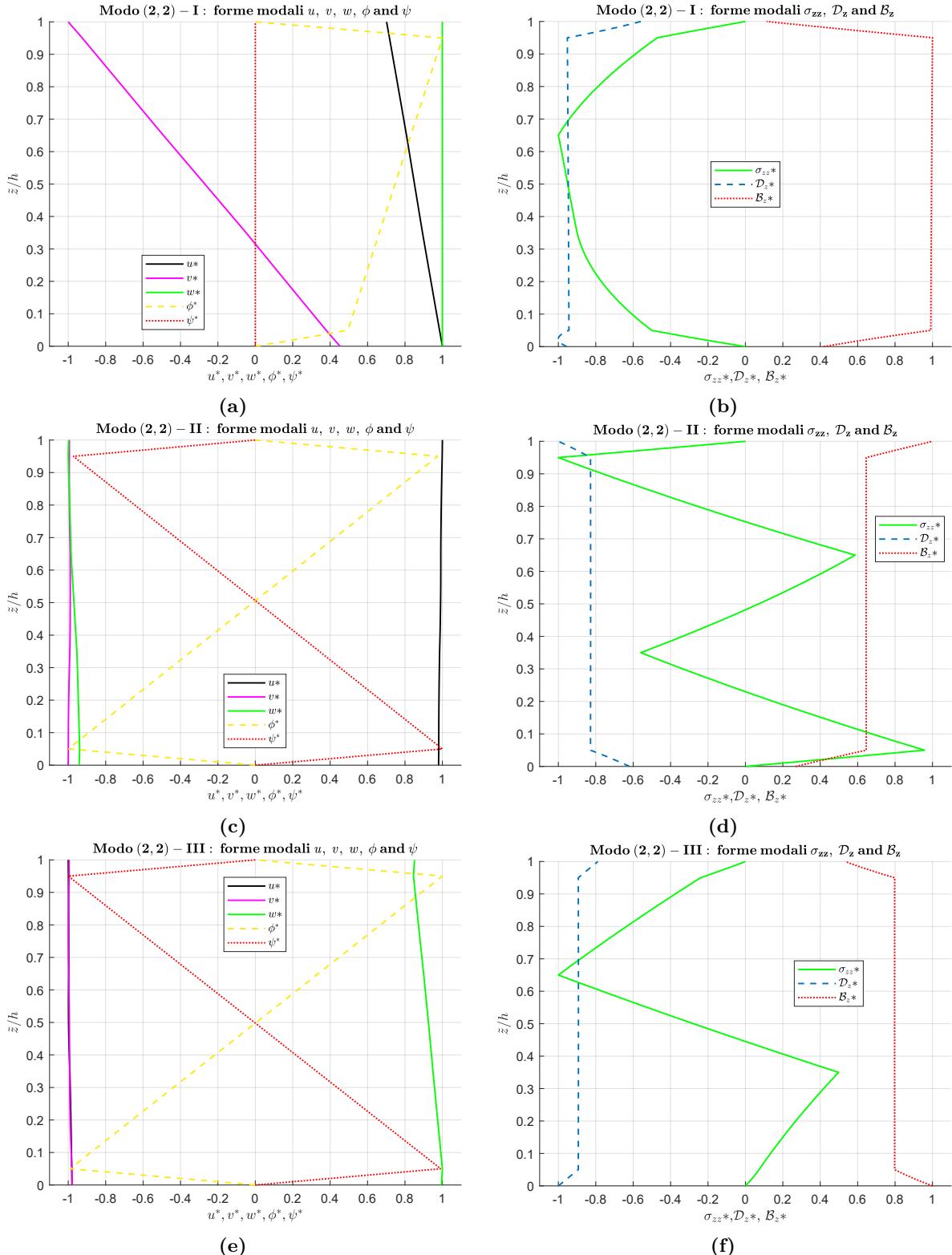
**Figura 7.18:** Benchmark  $B2_{din}$ , guscio cilindrico multistrato adaptive wood/ $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ /adaptive wood semplicemente appoggiato nella configurazione open circuit. Andamento delle frequenze circolari proprie adimensionali  $\bar{\omega}$  dei primi due modi di vibrare in funzione di  $R_\alpha/h$ , fissati  $(m, n)$ .

**Tabella 7.7:** Benchmark  $B3_{din}$ , pannello di guscio cilindrico semplicemente appoggiato multistrato adaptive wood/ $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ /adaptive wood nella configurazione closed circuit. Frequenze circolari normalizzate  $\bar{\omega}$  per i primi tre modi di vibrare al variare del rapporto  $R_\alpha/h$  e di ( $m, n$ ).

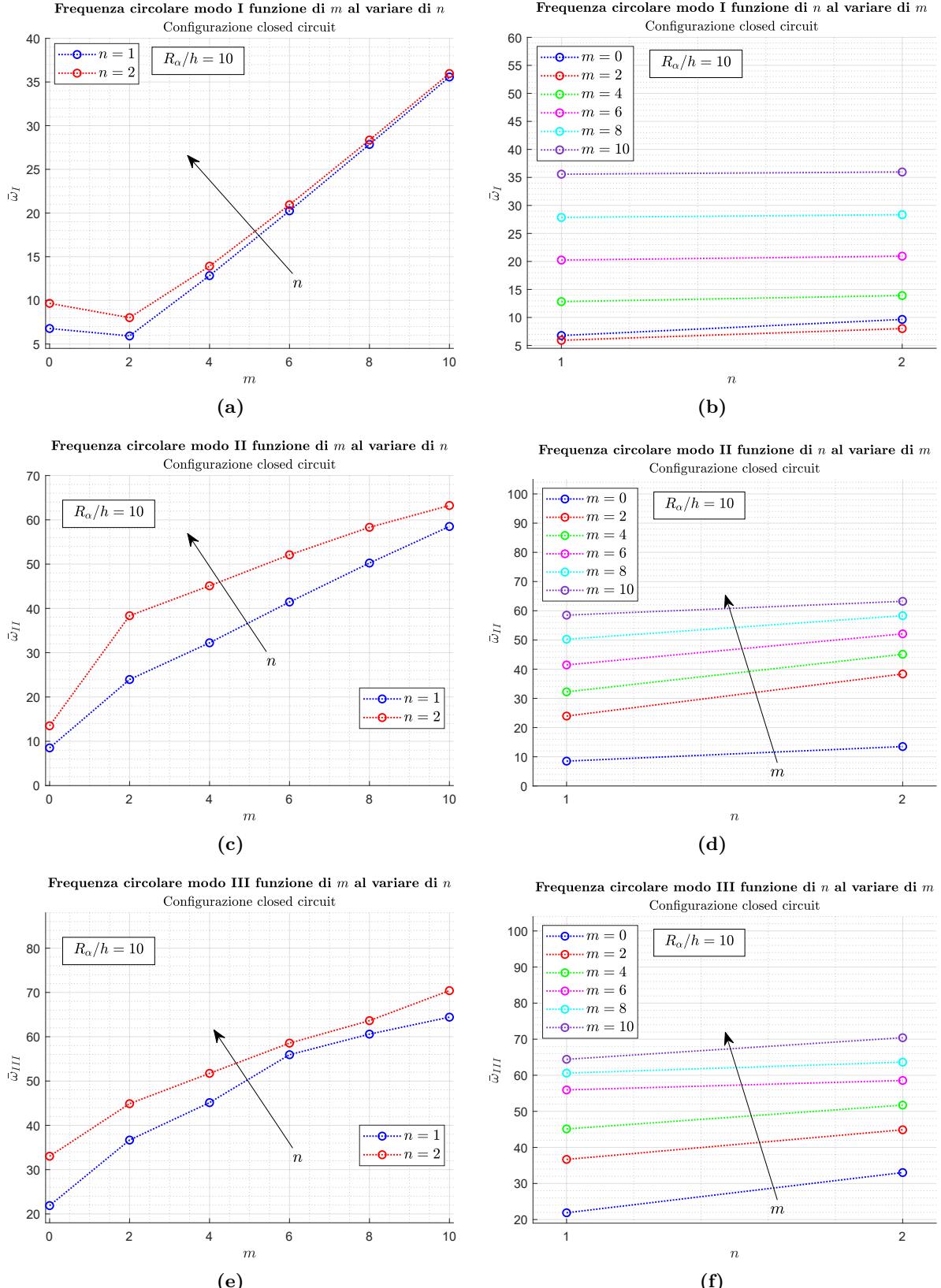
Configurazione closed circuit $B3_{din}$						
$\bar{\omega} = \omega/100$ [rad/s $\times 10^{-2}$ ]						
	$R_\alpha/h$	4	10	20	50	100
(0,1)-I	3D- $u\phi\psi_{din}$	6.7531	6.7752	6.7777	6.7784	6.7784
(0,1)-II	3D- $u\phi\psi_{din}$	8.6009	8.5080	8.4537	8.4303	8.4265
(0,1)-III	3D- $u\phi\psi_{din}$	14.073	21.879	22.132	22.205	22.216
(0,2)-I	3D- $u\phi\psi_{din}$	10.149	9.6534	9.0774	8.6008	8.4966
(0,2)-II	3D- $u\phi\psi_{din}$	13.158	13.496	13.542	13.555	13.556
(0,2)-III	3D- $u\phi\psi_{din}$	19.022	33.025	43.570	44.148	44.234
(2,1)-I	3D- $u\phi\psi_{din}$	7.0259	5.9239	4.5542	2.4975	1.5493
(2,1)-II	3D- $u\phi\psi_{din}$	21.237	23.939	24.318	24.427	24.443
(2,1)-III	3D- $u\phi\psi_{din}$	22.599	36.672	53.133	53.867	53.961
(2,2)-I	3D- $u\phi\psi_{din}$	9.0723	8.0181	6.4631	3.8943	2.7334
(2,2)-II	3D- $u\phi\psi_{din}$	22.759	38.346	40.440	41.176	41.288
(2,2)-III	3D- $u\phi\psi_{din}$	30.954	44.883	57.184	58.183	58.314
(4,1)-I	3D- $u\phi\psi_{din}$	14.400	12.829	11.029	7.3454	4.3258
(4,1)-II	3D- $u\phi\psi_{din}$	25.494	32.230	32.950	33.209	33.249
(4,1)-III	3D- $u\phi\psi_{din}$	29.610	45.122	67.659	104.60	105.23
(4,2)-I	3D- $u\phi\psi_{din}$	15.436	13.912	12.088	8.1165	4.8485
(4,2)-II	3D- $u\phi\psi_{din}$	25.887	45.097	47.834	48.684	48.811
(4,2)-III	3D- $u\phi\psi_{din}$	35.911	51.731	73.304	105.97	106.72
(6,1)-I	3D- $u\phi\psi_{din}$	22.093	20.247	18.032	13.586	8.9003
(6,1)-II	3D- $u\phi\psi_{din}$	31.292	41.446	43.250	43.951	44.066
(6,1)-III	3D- $u\phi\psi_{din}$	36.951	55.938	76.012	152.37	156.80
(6,2)-I	3D- $u\phi\psi_{din}$	22.804	20.940	18.767	14.172	9.3032
(6,2)-II	3D- $u\phi\psi_{din}$	31.579	52.092	55.632	56.716	56.900
(6,2)-III	3D- $u\phi\psi_{din}$	41.896	58.555	80.793	155.16	157.71
(8,1)-I	3D- $u\phi\psi_{din}$	29.876	27.852	25.298	20.246	14.445
(8,1)-II	3D- $u\phi\psi_{din}$	38.999	50.238	53.908	55.490	55.755
(8,1)-III	3D- $u\phi\psi_{din}$	44.209	60.590	86.208	157.92	208.06
(8,2)-I	3D- $u\phi\psi_{din}$	30.439	28.351	25.846	20.729	14.796
(8,2)-II	3D- $u\phi\psi_{din}$	39.305	58.305	64.500	66.100	66.407
(8,2)-III	3D- $u\phi\psi_{din}$	48.222	63.630	90.132	160.60	208.69
(10,1)-I	3D- $u\phi\psi_{din}$	34.903	35.575	32.733	27.091	20.555
(10,1)-II	3D- $u\phi\psi_{din}$	51.633	58.495	64.346	67.336	67.847
(10,1)-III	3D- $u\phi\psi_{din}$	58.105	64.419	97.490	164.77	258.72
(10,2)-I	3D- $u\phi\psi_{din}$	55.203	35.966	33.160	27.503	20.869
(10,2)-II	3D- $u\phi\psi_{din}$	59.118	63.232	73.767	76.337	76.853
(10,2)-III	3D- $u\phi\psi_{din}$	60.806	70.405	100.69	167.27	259.18



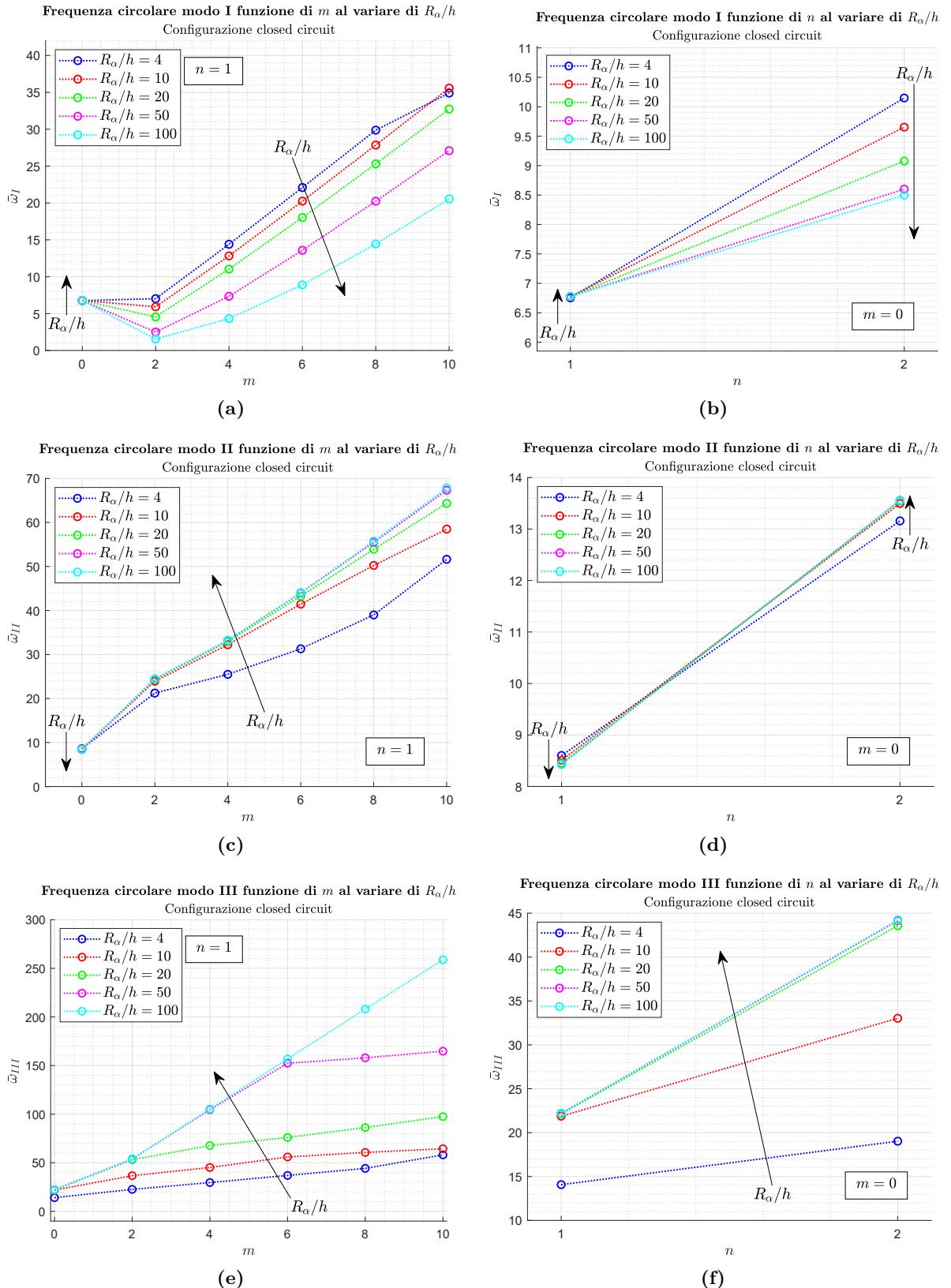
**Figura 7.19:** Benchmark  $B3_{din}$ , pannello di guscio cilindrico semplicemente appoggiato multistrato adaptive wood/0°/90°/0°/adaptive wood nella configurazione closed circuit. Forme modali di  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $\phi$ ,  $\psi$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\mathcal{D}_z$  e  $\mathcal{B}_z$  dei primi tre modi di vibrare nel caso di  $R_\alpha/h = 10$  e  $(m,n) = (4,1)$ . Le singole forme modali rappresentano la massima ampiezza lungo la direzione dello spessore e sono normalizzate rispetto al loro massimo.



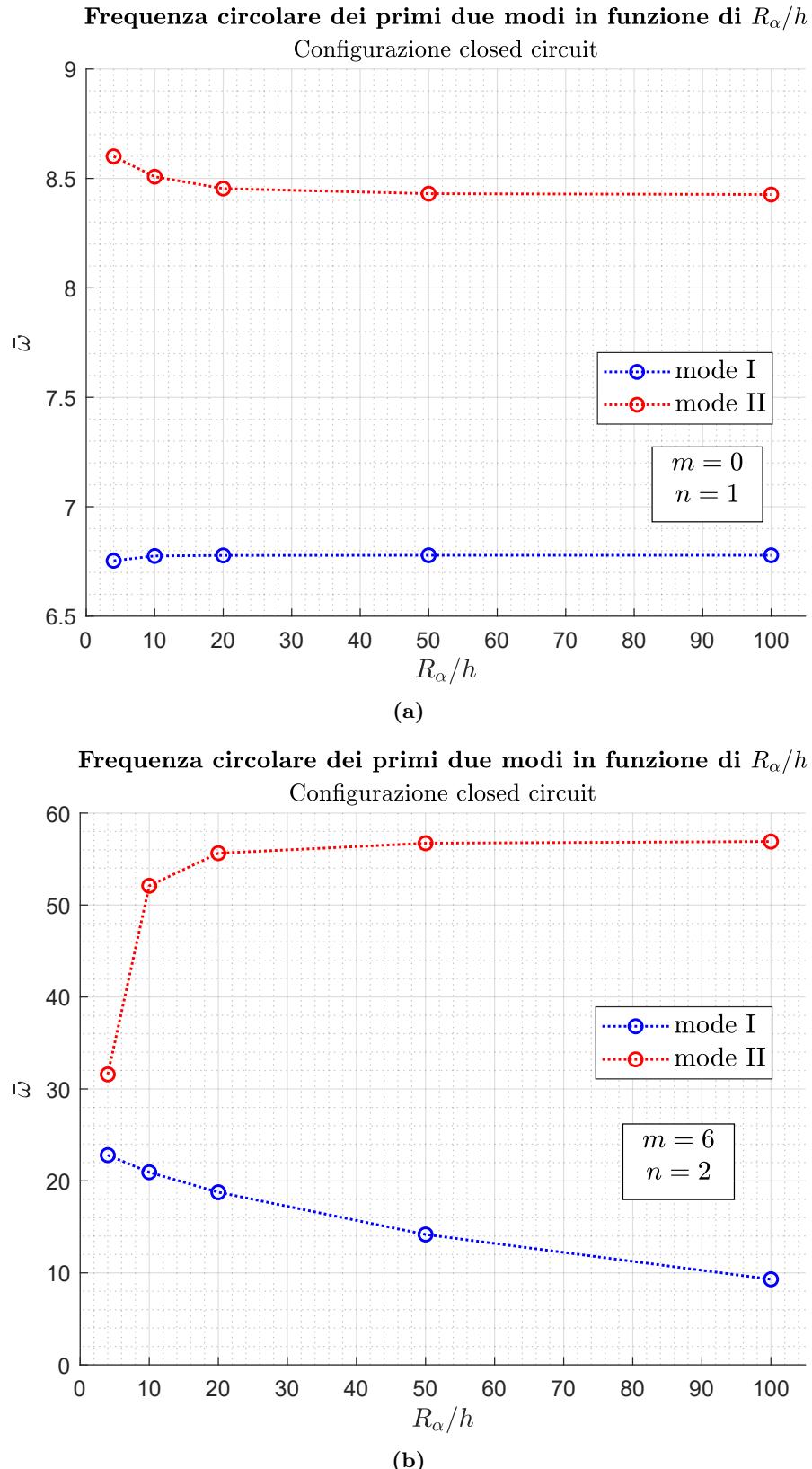
**Figura 7.20:** Benchmark  $B3_{din}$ , pannello di guscio cilindrico semplicemente appoggiato multistrato adaptive wood/ $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ /adaptive wood nella configurazione closed circuit. Forme modali di  $u, v, w, \phi, \psi, \sigma_{zz}, \mathcal{D}_z$  e  $\mathcal{B}_z$  dei primi tre modi di vibrare nel caso di  $R_\alpha/h = 100$  e  $(m, n) = (2, 2)$ . Le singole forme modali rappresentano la massima ampiezza lungo la direzione dello spessore e sono normalizzate rispetto al loro massimo.



**Figura 7.21:** Benchmark  $B3_{din}$ , pannello di guscio cilindrico semplicemente appoggiato multistrato adaptive wood/ $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ /adaptive wood nella configurazione closed circuit. Con  $R_\alpha/h = 10$  fissato, andamento di  $\bar{\omega}(m)$  per differenti  $n$  e di  $\bar{\omega}(n)$  per differenti  $m$  per i primi tre modi di vibrare.



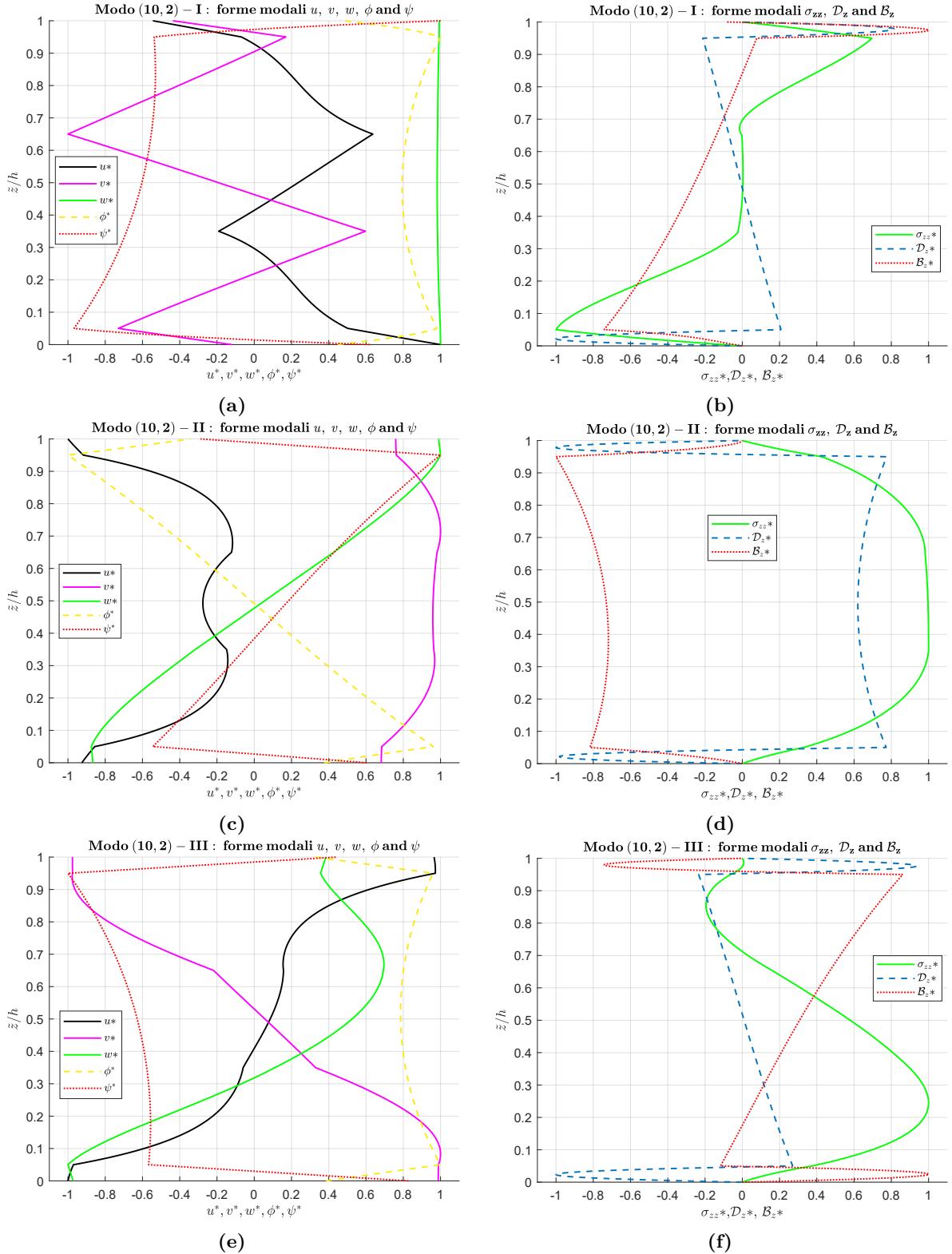
**Figura 7.22:** Benchmark  $B3_{din}$ , pannello di guscio cilindrico semplicemente appoggiato multistrato adaptive wood/0°/90°/0°/adaptive wood nella configurazione closed circuit. Con  $R_\alpha/h$  variabile, andamento delle frequenze circolari proprie adimensionali  $\bar{\omega}(m)$  per  $n = 1$  e  $\bar{\omega}(n)$  per  $m = 0$  dei primi tre modi di vibrare.



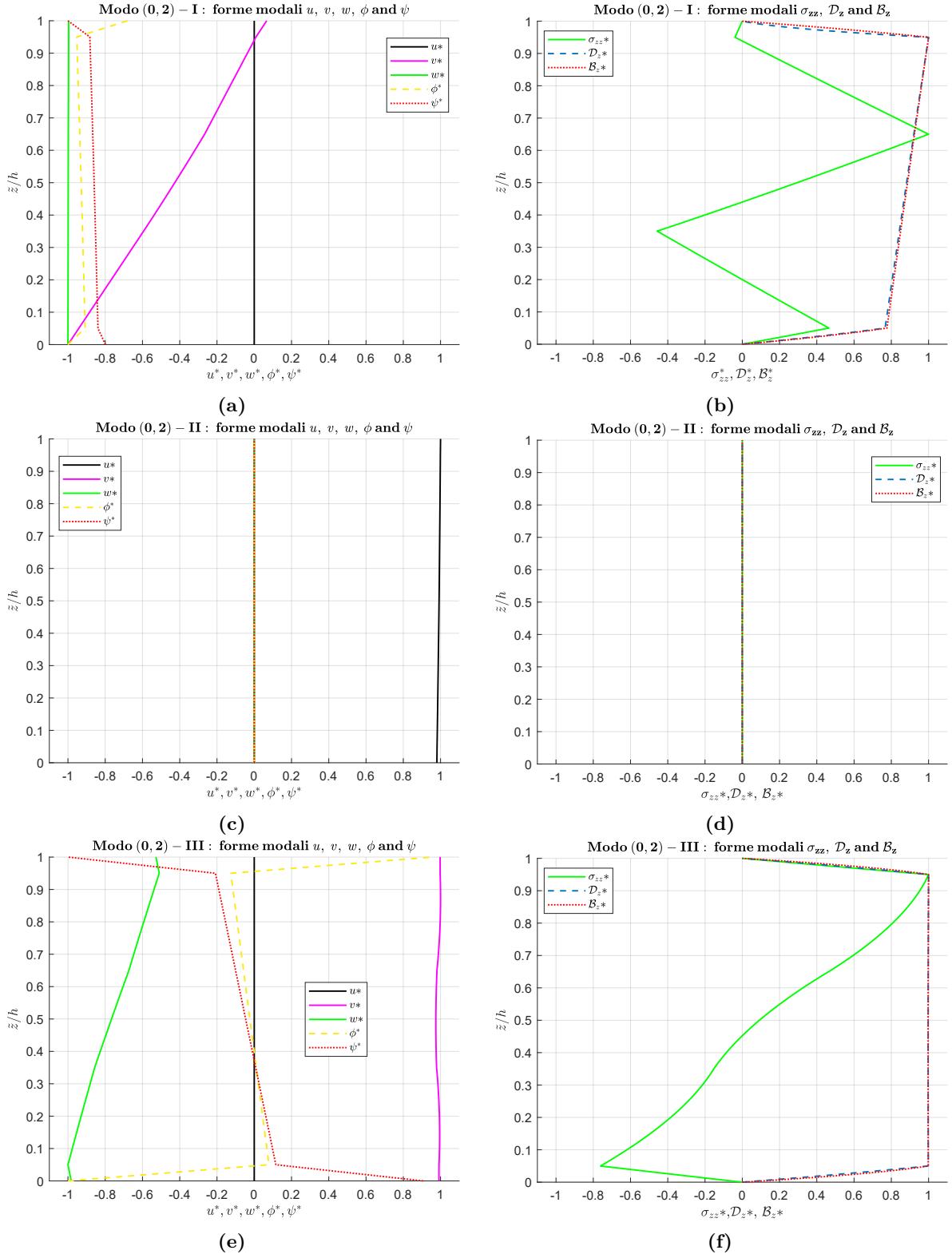
**Figura 7.23:** Benchmark  $B3_{din}$ , pannello di guscio cilindrico semplicemente appoggiato multistrato adaptive wood/ $0^\circ/90^\circ/0^\circ/\text{adaptive wood}$  nella configurazione closed circuit. Andamento delle frequenze circolari proprie adimensionali  $\bar{\omega}$  dei primi due modi di vibrare in funzione di  $R_\alpha/h$ , fissati ( $m, n$ ).

**Tabella 7.8:** Benchmark  $B3_{din}$ , pannello di guscio cilindrico semplicemente appoggiato multi-strato adaptive wood/ $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ /adaptive wood nella configurazione open circuit. Frequenze circolari normalizzate  $\bar{\omega}$  per i primi tre modi di vibrare al variare del rapporto  $R_\alpha/h$  e di ( $m, n$ ).

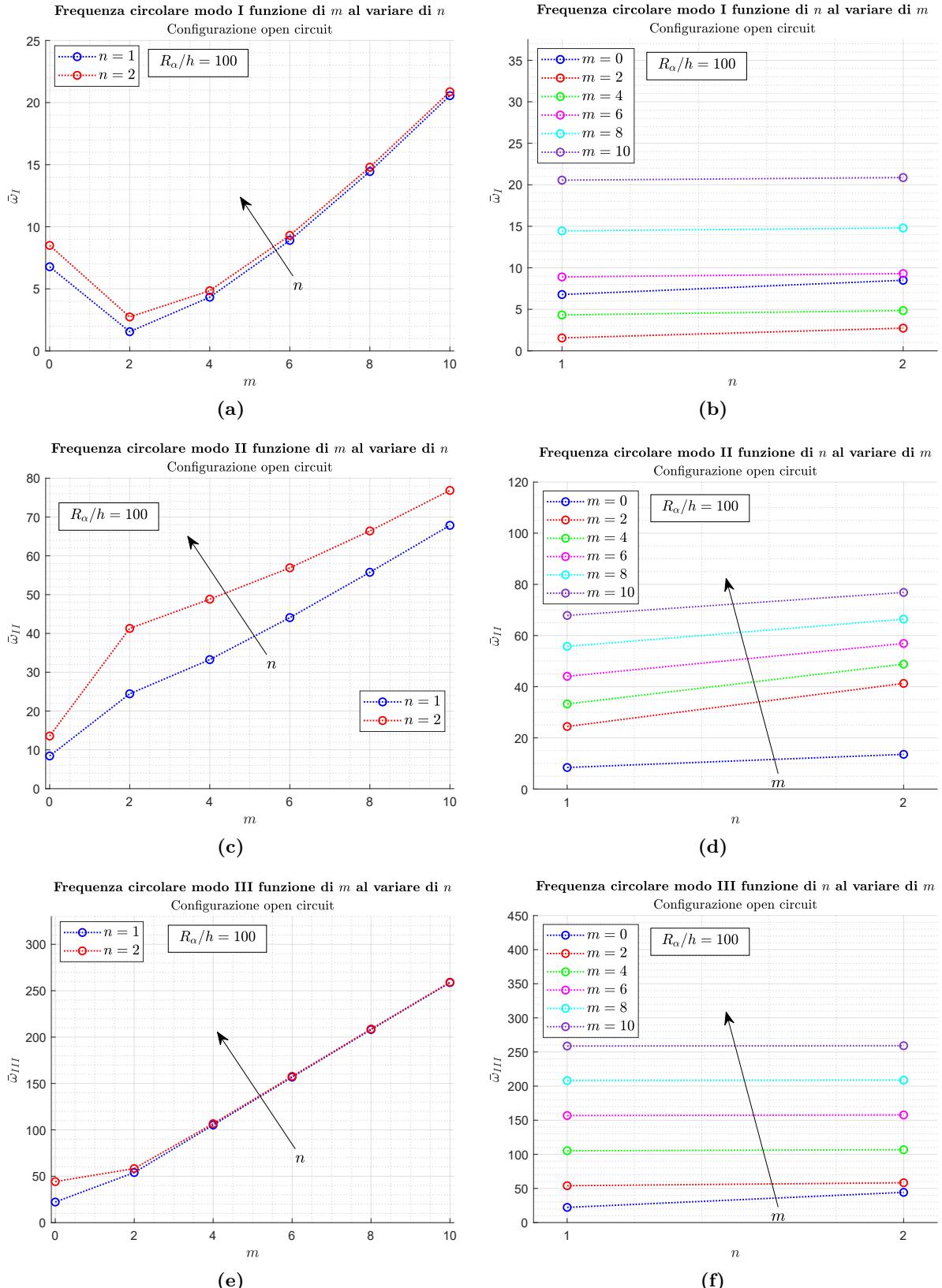
Configurazione open circuit $B3_{din}$						
$\bar{\omega} = \omega/100$ [rad/s $\times 10^{-2}$ ]						
	$R_\alpha/h$	4	10	20	50	100
(0,1)-I	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	6.7531	6.7752	6.7777	6.7784	6.7784
(0,1)-II	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	8.6015	8.5081	8.4539	8.4305	8.4267
(0,1)-III	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	14.073	21.880	22.134	22.207	22.218
(0,2)-I	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	10.150	9.6541	9.0776	8.6010	8.4968
(0,2)-II	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	13.158	13.496	13.542	13.555	13.556
(0,2)-III	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	19.022	33.025	43.571	44.152	44.238
(2,1)-I	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	7.0252	5.9231	4.5537	2.4971	1.5491
(2,1)-II	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	21.239	23.940	24.318	24.428	24.444
(2,1)-III	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	22.599	36.673	53.140	53.876	53.970
(2,2)-I	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	9.0728	8.0177	6.4626	3.8939	2.7332
(2,2)-II	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	22.758	38.348	40.442	41.177	41.290
(2,2)-III	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	30.954	44.885	57.188	58.189	58.320
(4,1)-I	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	14.410	12.830	11.030	7.3452	4.3257
(4,1)-II	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	25.500	32.232	32.951	33.209	33.250
(4,1)-III	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	29.613	45.124	67.659	104.60	105.24
(4,2)-I	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	15.447	13.914	12.089	8.1164	4.8483
(4,2)-II	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	25.895	45.100	47.835	48.685	48.812
(4,2)-III	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	35.914	51.736	73.305	105.98	106.73
(6,1)-I	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	22.134	20.254	18.034	13.586	8.9003
(6,1)-II	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	31.348	41.447	43.250	43.951	44.067
(6,1)-III	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	36.954	55.940	76.012	152.37	156.81
(6,2)-I	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	22.847	20.946	18.769	14.172	9.3031
(6,2)-II	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	31.638	52.093	55.634	56.716	56.901
(6,2)-III	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	41.900	58.558	80.795	155.16	157.72
(8,1)-I	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	29.972	27.868	25.303	20.247	14.446
(8,1)-II	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	39.177	50.238	53.908	55.490	55.755
(8,1)-III	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	44.215	60.599	86.209	157.92	208.07
(8,2)-I	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	30.537	28.367	25.851	20.730	14.796
(8,2)-II	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	39.490	58.307	64.501	66.100	66.407
(8,2)-III	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	48.239	63.640	90.135	160.60	208.70
(10,1)-I	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	34.977	35.607	32.742	27.092	20.555
(10,1)-II	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	51.628	58.495	64.347	67.336	67.847
(10,1)-III	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	58.655	64.443	97.491	164.77	258.73
(10,2)-I	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	55.239	35.998	33.169	27.504	20.869
(10,2)-II	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	58.944	63.249	73.769	76.337	76.855
(10,2)-III	3D- $u\phi\psi$ <sub>din</sub>	60.949	70.415	100.69	167.27	259.20



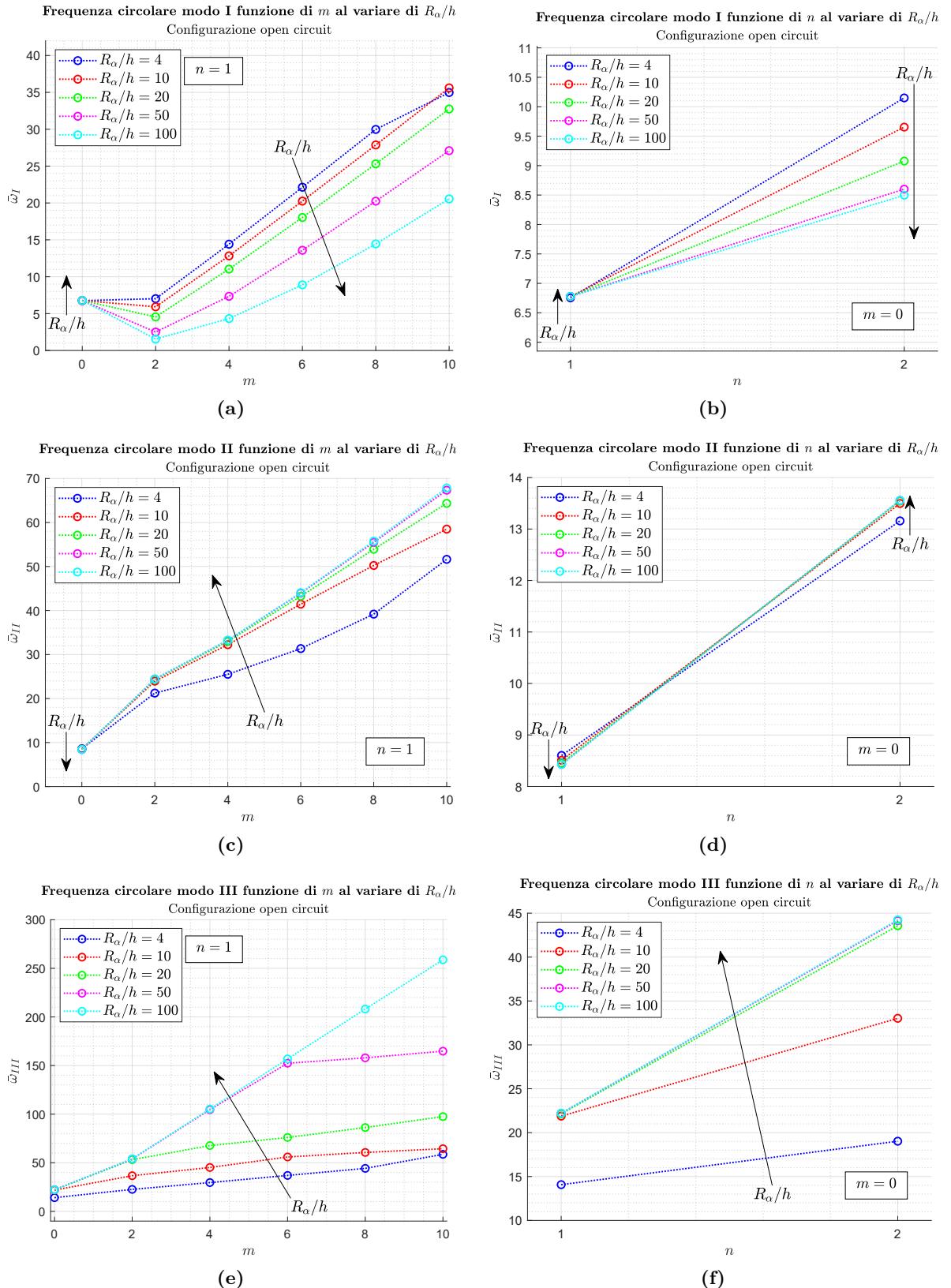
**Figura 7.24:** Benchmark  $B3_{din}$ , pannello di guscio cilindrico semplicemente appoggiato multistrato adaptive wood/0°/90°/0°/adaptive wood nella configurazione open circuit. Forme modali di  $u, v, w, \phi, \psi, \sigma_{zz}, D_z$  e  $B_z$  dei primi tre modi di vibrare nel caso di  $R_\alpha/h = 20$  e  $(m, n) = (10, 2)$ . Le singole forme modali rappresentano la massima ampiezza lungo la direzione dello spessore e sono normalizzate rispetto al loro massimo.



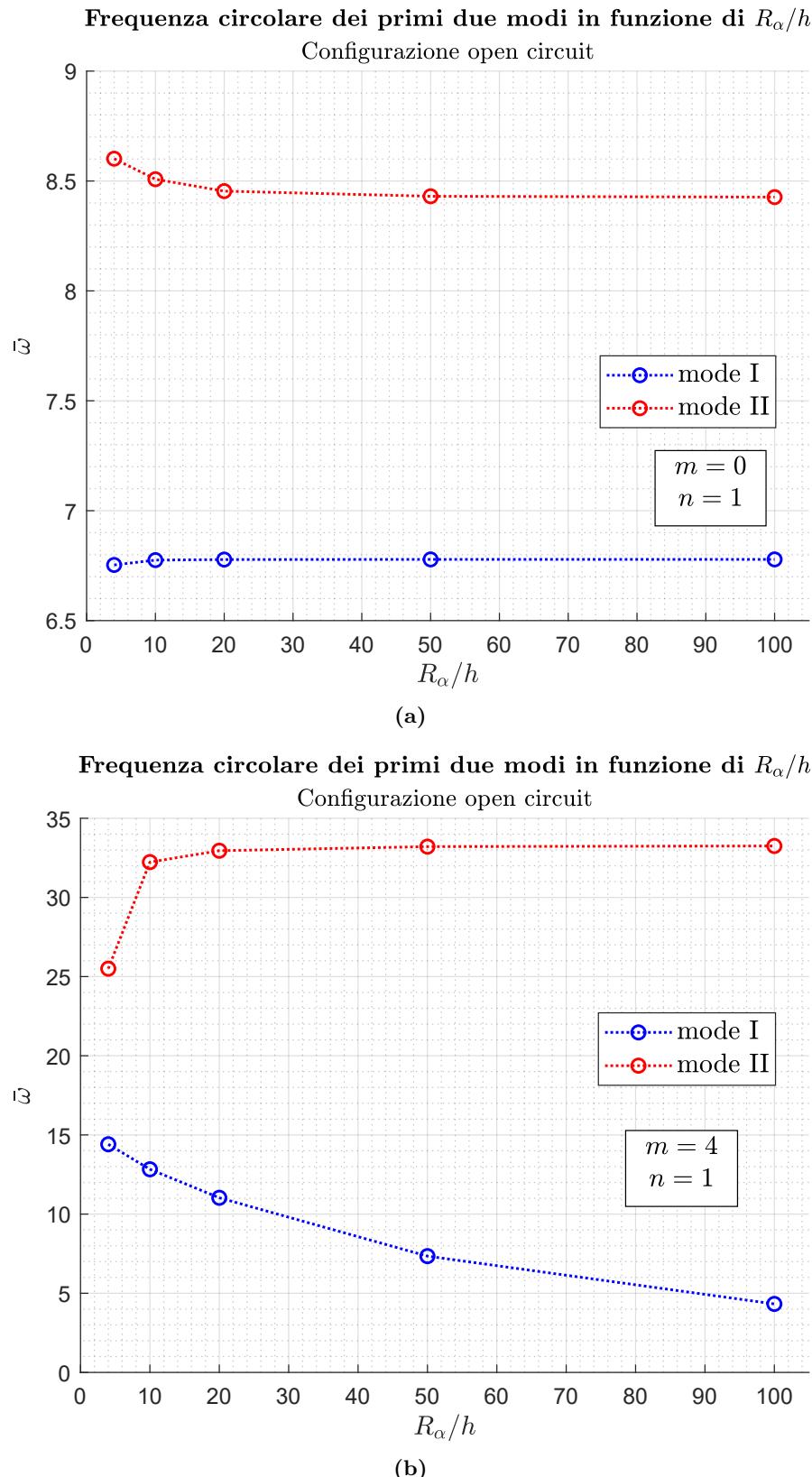
**Figura 7.25:** Benchmark  $B3_{din}$ , pannello di guscio cilindrico semplicemente appoggiato multistrato adaptive wood/0°/90°/0°/adaptive wood nella configurazione open circuit. Forme modali di  $u, v, w, \phi, \psi, \sigma_{zz}, \mathcal{D}_z$  e  $\mathcal{B}_z$  dei primi tre modi di vibrare nel caso di  $R_\alpha/h = 50$  e  $(m, n) = (0, 2)$ . Le singole forme modali rappresentano la massima ampiezza lungo la direzione dello spessore e sono normalizzate rispetto al loro massimo.



**Figura 7.26:** Benchmark  $B3_{din}$ , pannello di guscio cilindrico semplicemente appoggiato multistrato adaptive wood/ $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ /adaptive wood nella configurazione open circuit. Con  $R_\alpha/h = 100$  fissato, andamento di  $\bar{\omega}(m)$  per differenti  $n$  e di  $\bar{\omega}(n)$  per differenti  $m$  per i primi tre modi di vibrare.



**Figura 7.27:** Benchmark  $B3_{din}$ , pannello di guscio cilindrico semplicemente appoggiato multistrato adaptive wood/0°/90°/0°/adaptive wood nella configurazione open circuit. Con  $R_\alpha/h$  variabile, andamento delle frequenze circolari proprie adimensionali  $\bar{\omega}(m)$  per  $n = 1$  e  $\bar{\omega}(n)$  per  $m = 0$  dei primi tre modi di vibrare.



**Figura 7.28:** Benchmark  $B3_{din}$ , pannello di guscio cilindrico semplicemente appoggiato multistrato adaptive wood/ $0^\circ/90^\circ/0^\circ/\text{adaptive wood}$  nella configurazione open circuit. Andamento delle frequenze circolari proprie adimensionali  $\bar{\omega}$  dei primi due modi di vibrare in funzione di  $R_\alpha/h$ , fissati  $(m, n)$ .

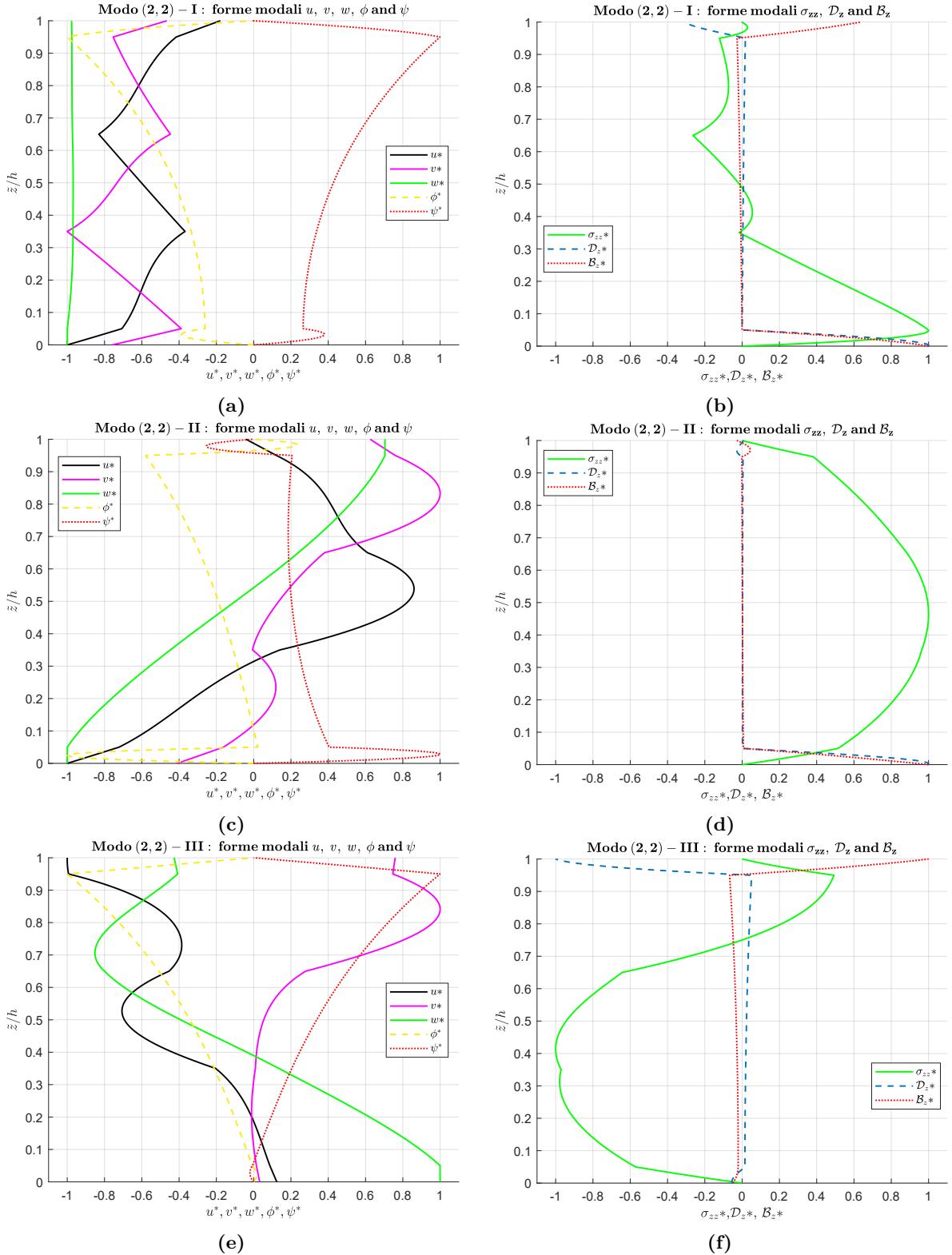
numeri di semionda  $(m, n)$ . Anche con la doppia curvatura continuano ad essere rispettate le condizioni di congruenza e di equilibrio della struttura. Il modello è, quindi, in grado di valutare correttamente le variabili lungo la direzione trasversale anche in presenza di curvatura in entrambe le direzioni  $\alpha$  e  $\beta$ .

Osservando i valori delle frequenze circolari proprie per i modi II e III, si nota che questi ultimi, fissato uno spessore, al crescere di  $m$  e a parità di  $n$ , crescono, con un comportamento analogo a quello osservato per i casi piastra, guscio cilindrico e pannello di guscio cilindrico. Sempre per i modi II e III, lo stesso si può dire al crescere di  $n$  e a parità di  $m$ . Per quanto riguarda il modo I, a spessore fissato e a parità di  $n$ , facendo crescere  $m$  si ha comportamento analogo a quanto notato con il guscio cilindrico e con il pannello di guscio cilindrico. Ovvero, non si ha un andamento crescente delle frequenze circolari proprie, come per il caso piastra, ma si osserva un valore minimo per  $m$  intermedi che, al crescere di  $n$ , si sposta verso  $m$  maggiori. A differenza dei due casi precedenti, per il modo I, lo stesso si può dire al crescere di  $n$  e a parità di  $m$ . Infatti, in quest'ultimo caso gli effetti dovuti alla curvatura sono presenti sia lungo la direzione  $\alpha$  sia lungo la direzione  $\beta$ , di cui  $(m, n)$  sono i numeri di semionda relativi. Nella Figura 7.31, per la configurazione closed circuit, e 7.35, per la configurazione open circuit, vengono presentati, per i primi tre modi di vibrare, due esempi di questo comportamento.

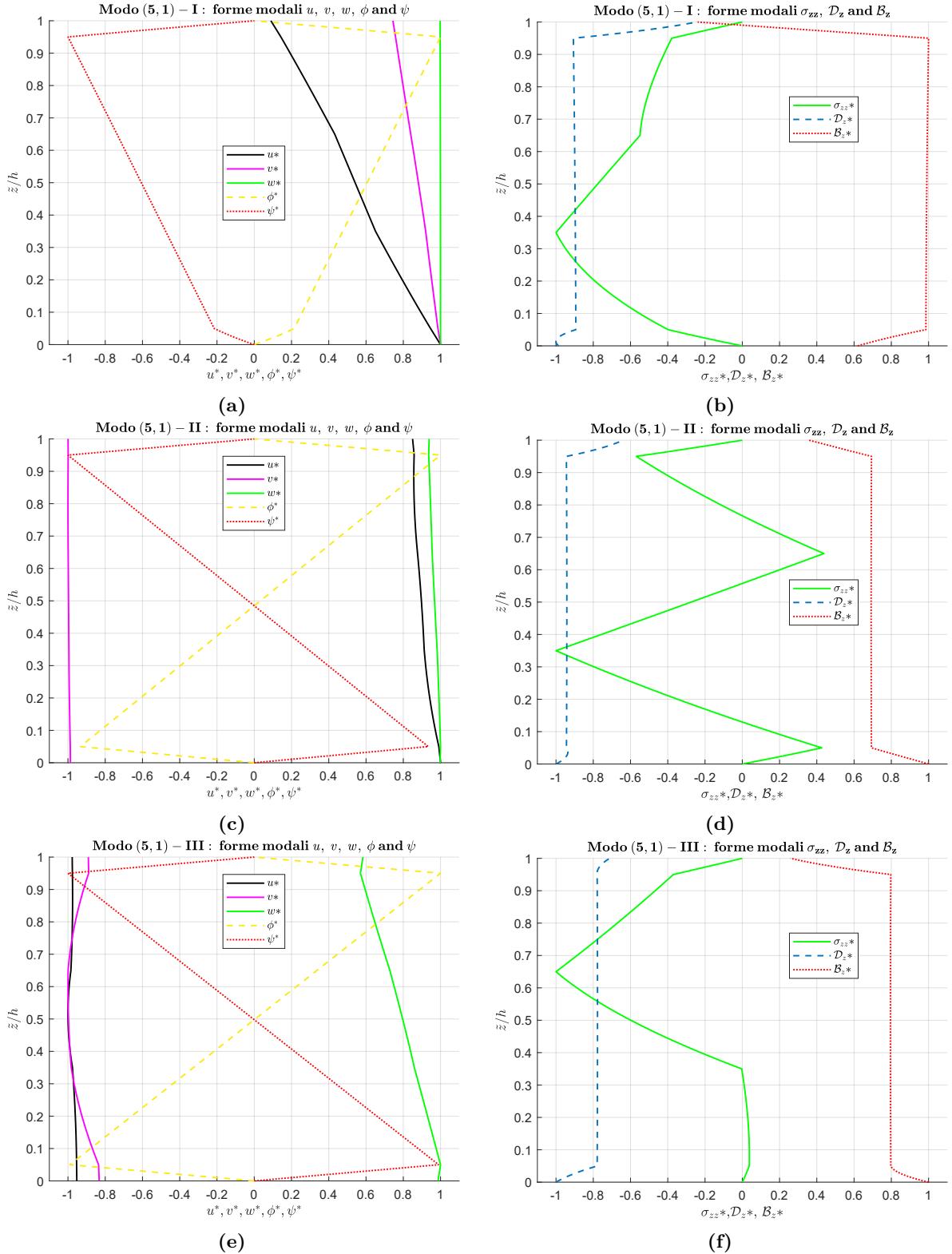
Come nei casi precedenti, dalle Figure 7.32 e 7.36, si osserva che al variare dello spessore, fissati i numeri di semionda  $(m, n)$ , il comportamento delle frequenze circolari proprie cambia in base al modo di vibrare considerato. Il comportamento è lo stesso osservato nel benchmark B1<sub>din</sub> in cui si è studiato un caso piastra. Per il modo I il loro valore aumenta al crescere dello spessore, mentre per il modo II e III decresce con esso.

**Tabella 7.9:** Benchmark  $B4_{\text{din}}$ , pannello di guscio sferico semplicemente appoggiato multistrato adaptive wood/ $0^\circ/90^\circ/0^\circ/\text{adaptive wood}$  nella configurazione closed circuit. Frequenze circolari normalizzate  $\bar{\omega}$  per i primi tre modi di vibrare al variare del rapporto  $R_\alpha/h$  e di  $(m, n)$ .

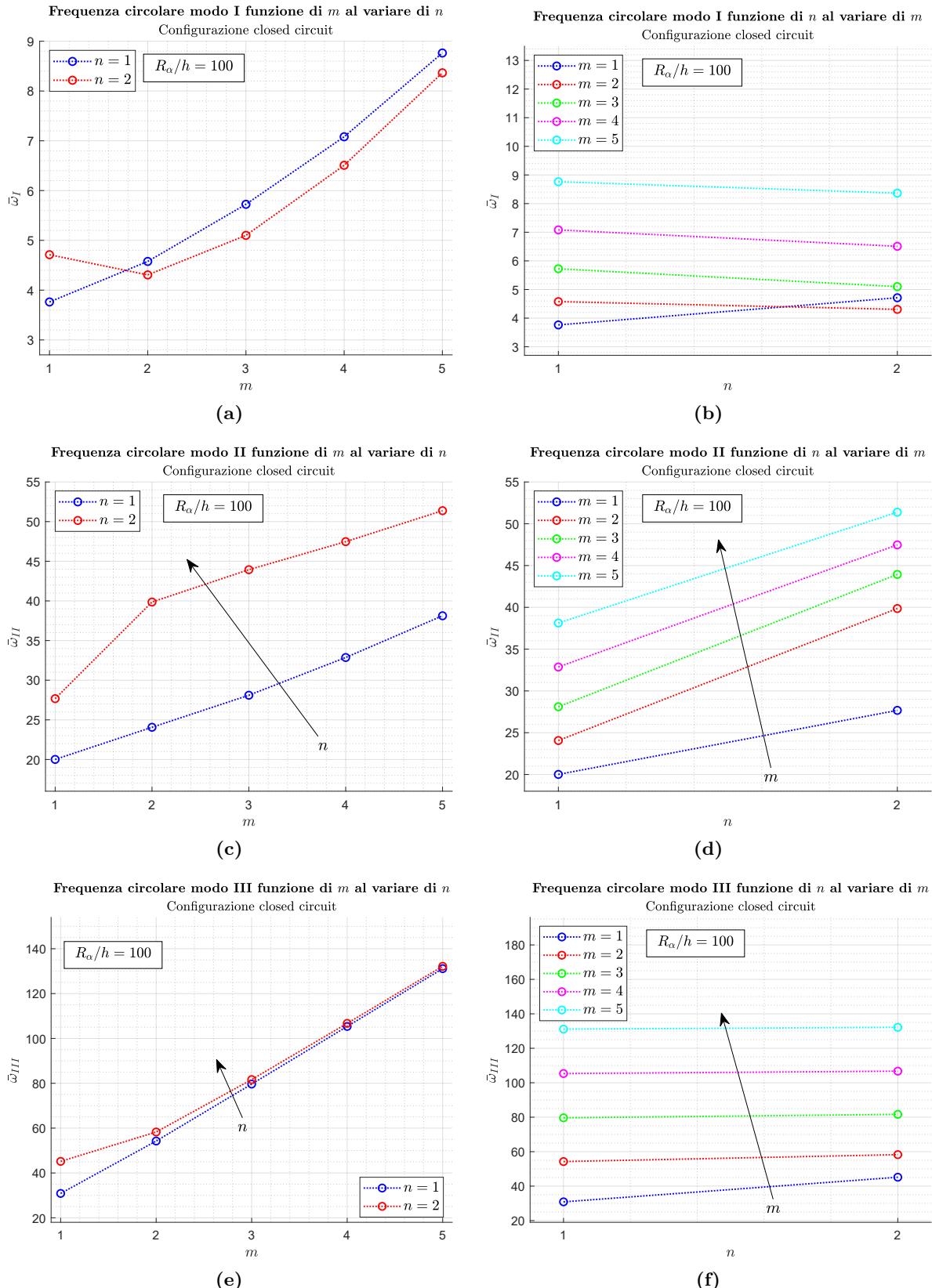
Configurazione closed circuit $B4_{\text{din}}$						
$\bar{\omega} = \omega/100 [\text{rad/s} \times 10^{-2}]$						
	$R_\alpha/h$	4	10	20	50	100
(1,1)-I	3D- $u-\phi-\psi_{\text{din}}$	4.9572	4.4839	4.0677	3.8110	3.7623
(1,1)-II	3D- $u-\phi-\psi_{\text{din}}$	17.043	19.514	19.888	19.993	20.008
(1,1)-III	3D- $u-\phi-\psi_{\text{din}}$	20.611	30.011	30.689	30.848	30.870
(1,2)-I	3D- $u-\phi-\psi_{\text{din}}$	7.5540	6.8532	5.8896	4.9453	4.7115
(1,2)-II	3D- $u-\phi-\psi_{\text{din}}$	22.076	26.453	27.293	27.621	27.673
(1,2)-III	3D- $u-\phi-\psi_{\text{din}}$	23.759	39.143	44.514	45.088	45.166
(2,1)-I	3D- $u-\phi-\psi_{\text{din}}$	7.8061	7.0518	6.1108	4.9390	4.5763
(2,1)-II	3D- $u-\phi-\psi_{\text{din}}$	20.236	23.484	23.929	24.047	24.063
(2,1)-III	3D- $u-\phi-\psi_{\text{din}}$	23.304	36.522	53.397	54.152	54.249
(2,2)-I	3D- $u-\phi-\psi_{\text{din}}$	9.2979	8.3574	7.0250	5.0406	4.3059
(2,2)-II	3D- $u-\phi-\psi_{\text{din}}$	22.997	36.851	39.056	39.754	39.858
(2,2)-III	3D- $u-\phi-\psi_{\text{din}}$	28.927	44.582	57.109	58.137	58.271
(3,1)-I	3D- $u-\phi-\psi_{\text{din}}$	11.286	10.280	9.0338	6.8168	5.7238
(3,1)-II	3D- $u-\phi-\psi_{\text{din}}$	23.300	27.379	27.921	28.082	28.103
(3,1)-III	3D- $u-\phi-\psi_{\text{din}}$	25.694	40.308	64.319	79.360	79.643
(3,2)-I	3D- $u-\phi-\psi_{\text{din}}$	12.242	11.091	9.5916	6.6963	5.0997
(3,2)-II	3D- $u-\phi-\psi_{\text{din}}$	24.270	40.467	43.076	43.829	43.937
(3,2)-III	3D- $u-\phi-\psi_{\text{din}}$	31.786	47.840	69.826	81.305	81.654
(4,1)-I	3D- $u-\phi-\psi_{\text{din}}$	14.961	13.709	12.201	9.1769	7.0808
(4,1)-II	3D- $u-\phi-\psi_{\text{din}}$	25.778	31.795	32.561	32.825	32.862
(4,1)-III	3D- $u-\phi-\psi_{\text{din}}$	29.232	45.011	67.534	104.71	105.35
(4,2)-I	3D- $u-\phi-\psi_{\text{din}}$	15.635	14.281	12.625	9.1065	6.5079
(4,2)-II	3D- $u-\phi-\psi_{\text{din}}$	26.201	43.767	46.541	47.356	47.474
(4,2)-III	3D- $u-\phi-\psi_{\text{din}}$	34.911	51.524	72.761	105.98	106.72
(5,1)-I	3D- $u-\phi-\psi_{\text{din}}$	18.743	17.265	15.499	11.894	8.7636
(5,1)-II	3D- $u-\phi-\psi_{\text{din}}$	28.418	36.426	37.614	38.058	38.125
(5,1)-III	3D- $u-\phi-\psi_{\text{din}}$	32.921	50.297	71.437	129.86	131.13
(5,2)-I	3D- $u-\phi-\psi_{\text{din}}$	19.250	17.704	15.867	11.918	8.3651
(5,2)-II	3D- $u-\phi-\psi_{\text{din}}$	28.728	47.378	50.333	51.241	51.381
(5,2)-III	3D- $u-\phi-\psi_{\text{din}}$	38.226	55.816	76.272	130.76	132.17



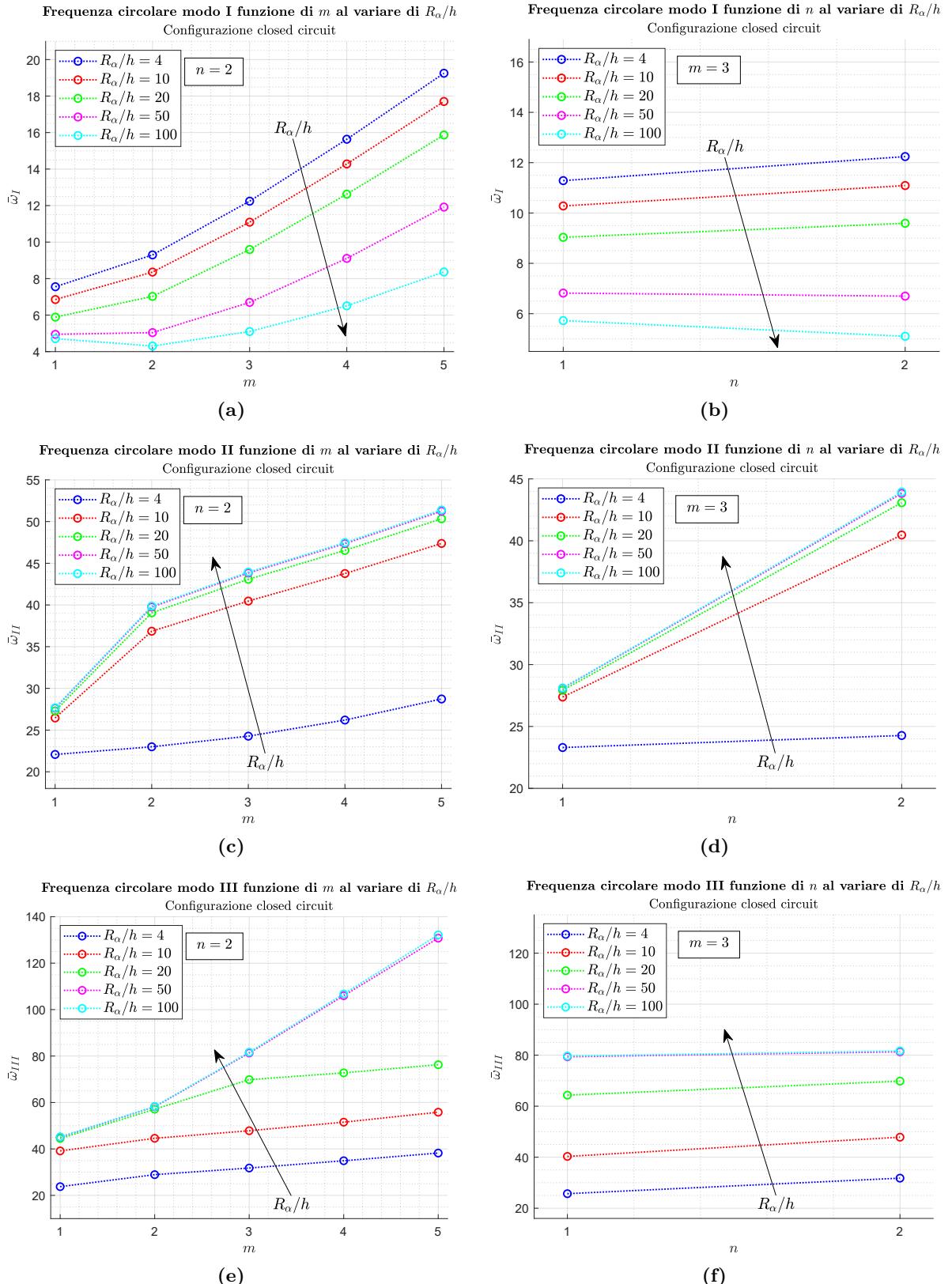
**Figura 7.29:** Benchmark  $B4_{din}$ , pannello di guscio sferico semplicemente appoggiato multistrato adaptive wood/ $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ /adaptive wood nella configurazione closed circuit. Forme modali di  $u, v, w, \phi, \psi, \sigma_{zz}, D_z$  e  $B_z$  dei primi tre modi di vibrare nel caso di  $R_\alpha/h = 4$  e  $(m, n) = (2, 2)$ . Le singole forme modali rappresentano la massima ampiezza lungo la direzione dello spessore e sono normalizzate rispetto al loro massimo.



**Figura 7.30:** Benchmark  $B4_{din}$ , pannello di guscio sferico semplicemente appoggiato multistrato adaptive wood/ $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ /adaptive wood nella configurazione closed circuit. Forme modali di  $u, v, w, \phi, \psi, \sigma_{zz}, \mathcal{D}_z$  e  $\mathcal{B}_z$  dei primi tre modi di vibrare nel caso di  $R_\alpha/h = 100$  e  $(m, n) = (5, 1)$ . Le singole forme modali rappresentano la massima ampiezza lungo la direzione dello spessore e sono normalizzate rispetto al loro massimo.



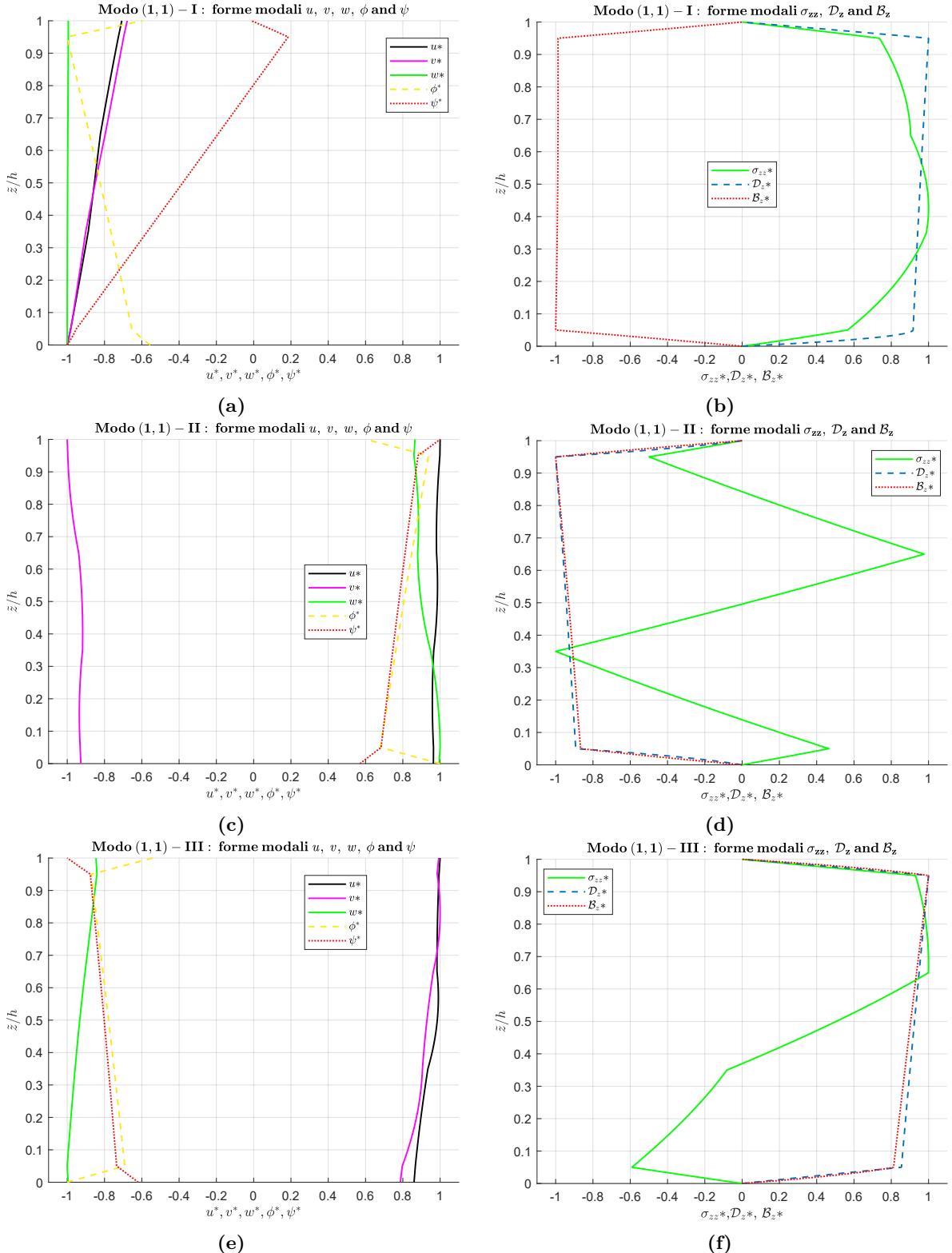
**Figura 7.31:** Benchmark  $B4_{din}$ , pannello di guscio sferico semplicemente appoggiato multistrato adaptive wood/0°/90°/0°/adaptive wood nella configurazione closed circuit. Con  $R_\alpha/h = 100$  fissato, andamento di  $\bar{\omega}(m)$  per differenti  $n$  e di  $\bar{\omega}(n)$  per differenti  $m$  per i primi tre modi di vibrare.



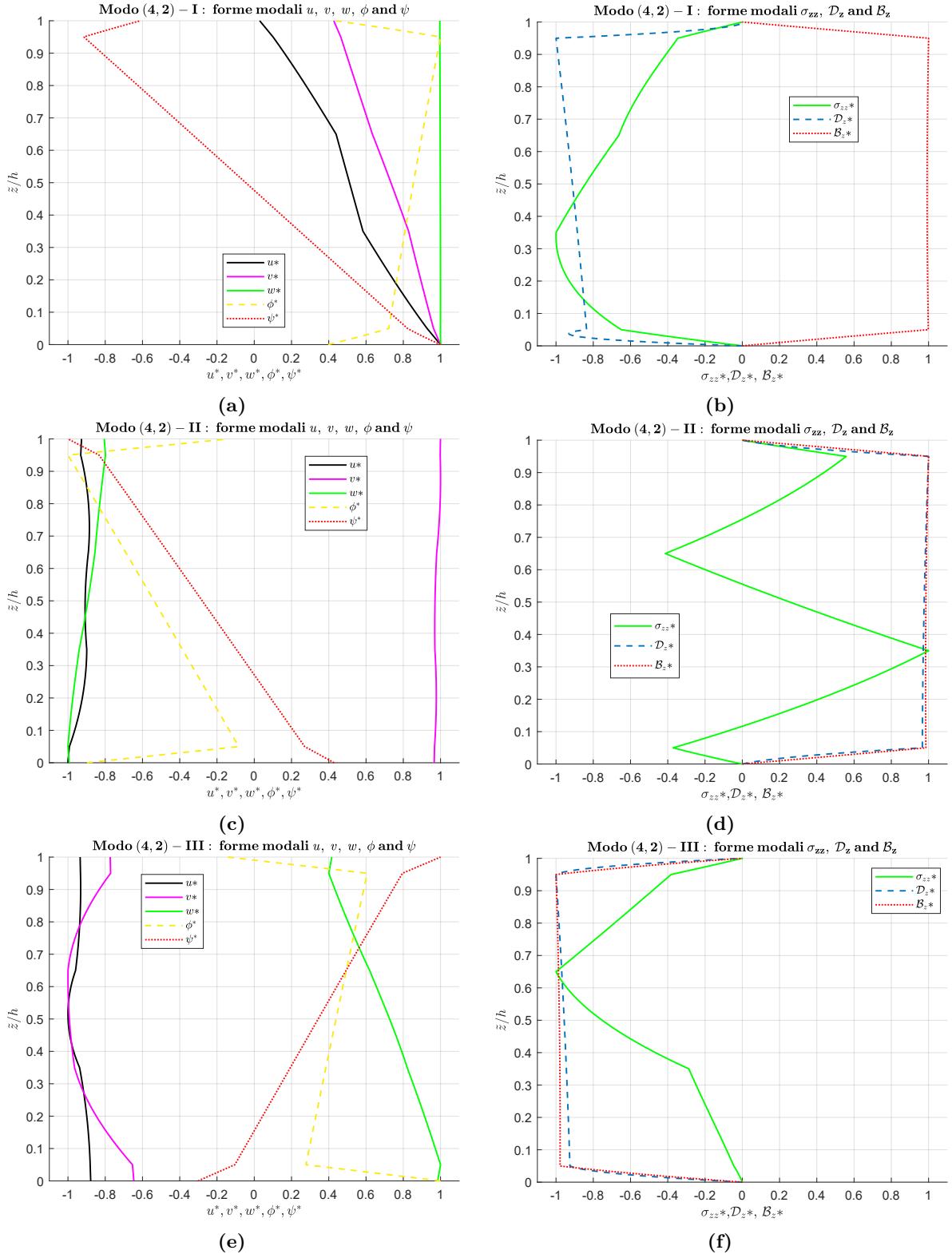
**Figura 7.32:** Benchmark  $B4_{din}$ , pannello di guscio cilindrico semplicemente appoggiato multistrato adaptive wood/ $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ /adaptive wood nella configurazione closed circuit. Con  $R_\alpha/h$  variabile, andamento delle frequenze circolari proprie adimensionali  $\bar{\omega}(m)$  per  $n = 2$  e  $\bar{\omega}(n)$  per  $m = 3$  dei primi tre modi di vibrare.

**Tabella 7.10:** Benchmark  $B4_{\text{din}}$ , pannello di guscio sferico semplicemente appoggiato multistrato adaptive wood/ $0^\circ/90^\circ/0^\circ/\text{adaptive wood}$  nella configurazione open circuit. Frequenze circolari normalizzate  $\bar{\omega}$  per i primi tre modi di vibrare al variare del rapporto  $R_\alpha/h$  e di  $(m, n)$ .

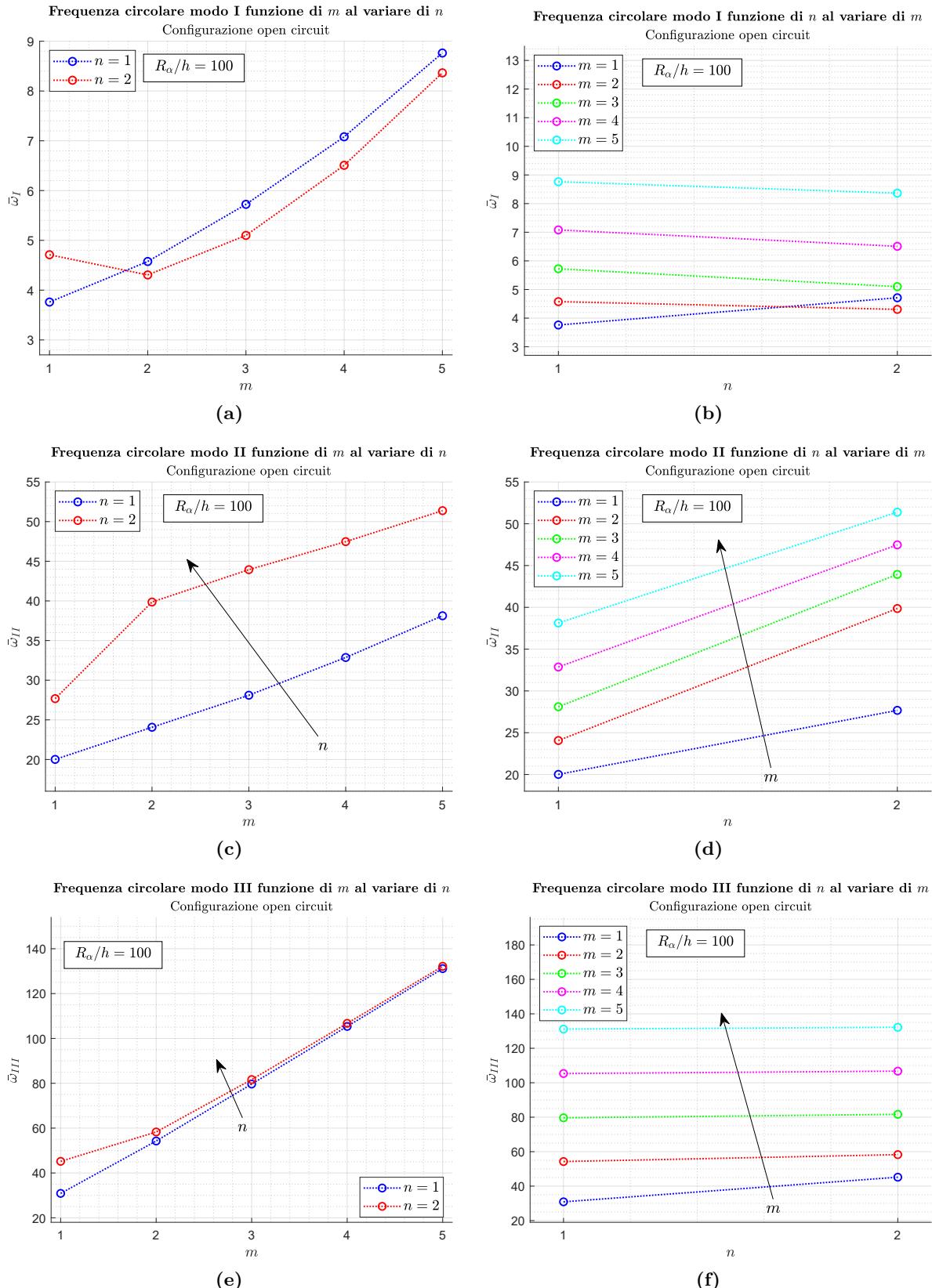
Configurazione open circuit $B4_{\text{din}}$						
$\bar{\omega} = \omega/100 [\text{rad/s} \times 10^{-2}]$						
	$R_\alpha/h$	4	10	20	50	100
(1,1)-I	3D- $u-\phi-\psi_{\text{din}}$	4.9523	4.4808	4.0653	3.8090	3.7604
(1,1)-II	3D- $u-\phi-\psi_{\text{din}}$	17.048	19.516	19.889	19.994	20.010
(1,1)-III	3D- $u-\phi-\psi_{\text{din}}$	20.612	30.020	30.703	30.864	30.886
(1,2)-I	3D- $u-\phi-\psi_{\text{din}}$	7.5515	6.8511	5.8881	4.9443	4.7106
(1,2)-II	3D- $u-\phi-\psi_{\text{din}}$	22.076	26.453	27.293	27.621	27.674
(1,2)-III	3D- $u-\phi-\psi_{\text{din}}$	23.761	39.144	44.524	45.101	45.180
(2,1)-I	3D- $u-\phi-\psi_{\text{din}}$	7.8035	7.0498	6.1093	4.9378	4.5752
(2,1)-II	3D- $u-\phi-\psi_{\text{din}}$	20.241	23.486	23.930	24.048	24.065
(2,1)-III	3D- $u-\phi-\psi_{\text{din}}$	23.304	36.523	53.404	54.162	54.260
(2,2)-I	3D- $u-\phi-\psi_{\text{din}}$	9.2970	8.3559	7.0237	5.0397	4.3053
(2,2)-II	3D- $u-\phi-\psi_{\text{din}}$	22.996	36.854	39.057	39.755	39.859
(2,2)-III	3D- $u-\phi-\psi_{\text{din}}$	28.937	44.583	57.115	58.147	58.282
(3,1)-I	3D- $u-\phi-\psi_{\text{din}}$	11.288	10.279	9.0329	6.8160	5.7231
(3,1)-II	3D- $u-\phi-\psi_{\text{din}}$	23.298	27.380	27.922	28.083	28.104
(3,1)-III	3D- $u-\phi-\psi_{\text{din}}$	25.700	40.309	64.319	79.370	79.652
(3,2)-I	3D- $u-\phi-\psi_{\text{din}}$	12.245	11.090	9.5909	6.6956	5.0991
(3,2)-II	3D- $u-\phi-\psi_{\text{din}}$	24.271	40.471	43.077	43.831	43.939
(3,2)-III	3D- $u-\phi-\psi_{\text{din}}$	31.799	47.841	69.827	81.313	81.663
(4,1)-I	3D- $u-\phi-\psi_{\text{din}}$	14.970	13.710	12.201	9.1764	7.0804
(4,1)-II	3D- $u-\phi-\psi_{\text{din}}$	25.784	31.797	32.562	32.825	32.863
(4,1)-III	3D- $u-\phi-\psi_{\text{din}}$	29.237	45.012	67.534	104.72	105.36
(4,2)-I	3D- $u-\phi-\psi_{\text{din}}$	15.646	14.282	12.624	9.1060	6.5075
(4,2)-II	3D- $u-\phi-\psi_{\text{din}}$	26.209	43.772	46.542	47.357	47.476
(4,2)-III	3D- $u-\phi-\psi_{\text{din}}$	34.923	51.527	72.762	105.98	106.73
(5,1)-I	3D- $u-\phi-\psi_{\text{din}}$	18.764	17.268	15.500	11.894	8.7633
(5,1)-II	3D- $u-\phi-\psi_{\text{din}}$	28.442	36.427	37.615	38.058	38.126
(5,1)-III	3D- $u-\phi-\psi_{\text{din}}$	32.926	50.298	71.437	129.88	131.14
(5,2)-I	3D- $u-\phi-\psi_{\text{din}}$	19.272	17.708	15.868	11.918	8.3648
(5,2)-II	3D- $u-\phi-\psi_{\text{din}}$	28.755	47.382	50.334	51.242	51.383
(5,2)-III	3D- $u-\phi-\psi_{\text{din}}$	38.234	55.820	76.272	130.77	132.18



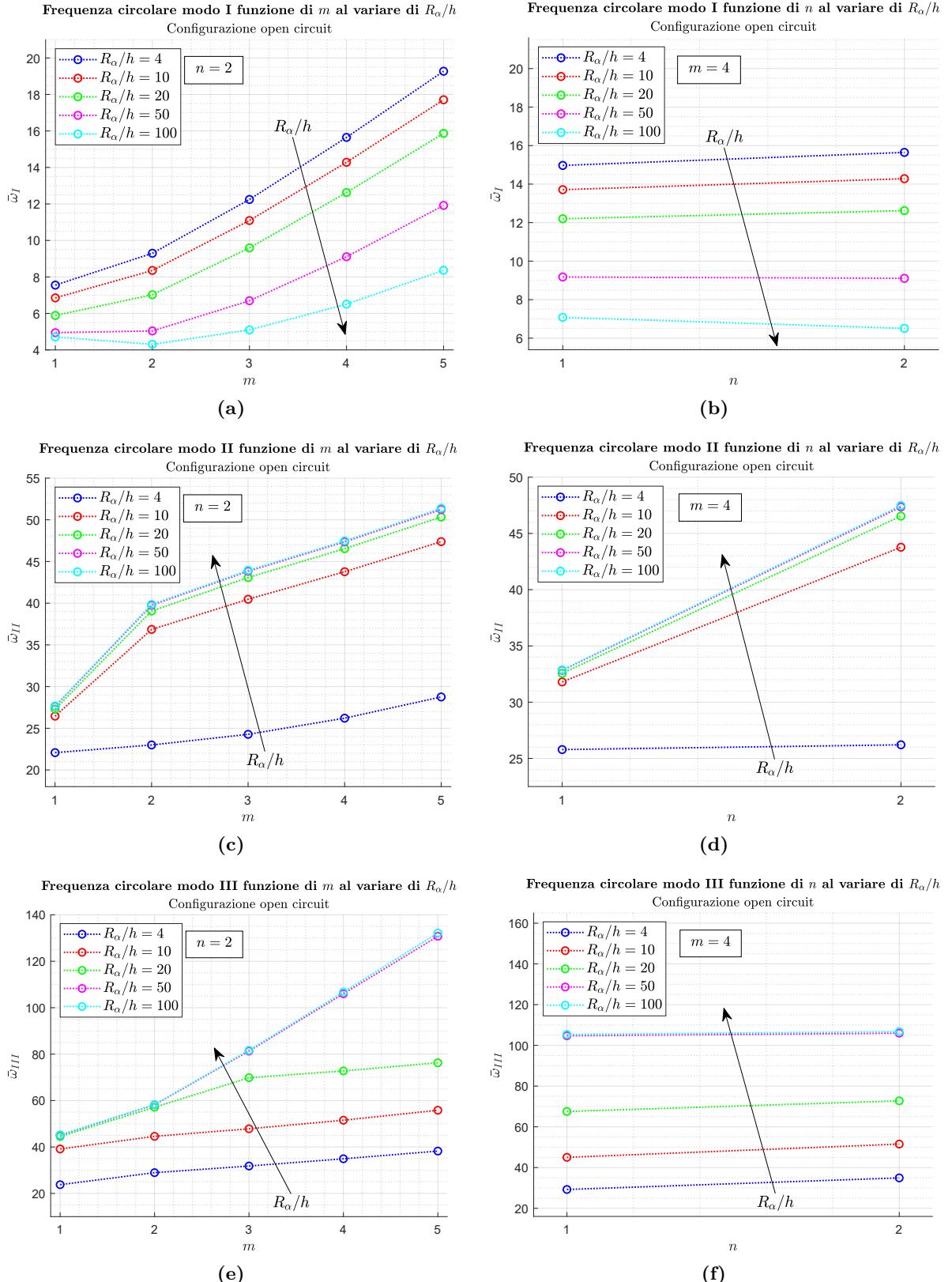
**Figura 7.33:** Benchmark  $B4_{din}$ , pannello di guscio sferico semplicemente appoggiato multistrato adaptive wood/ $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ /adaptive wood nella configurazione open circuit. Forme modali di  $u, v, w, \phi, \psi, \sigma_{zz}, \mathcal{D}_z$  e  $\mathcal{B}_z$  dei primi tre modi di vibrare nel caso di  $R_\alpha/h = 20$  e  $(m, n) = (1, 1)$ . Le singole forme modali rappresentano la massima ampiezza lungo la direzione dello spessore e sono normalizzate rispetto al loro massimo.



**Figura 7.34:** Benchmark  $B_{4\text{din}}$ , pannello di guscio sferico semplicemente appoggiato multistrato adaptive wood/ $0^\circ/90^\circ/0^\circ/\text{adaptive wood}$  nella configurazione open circuit. Forme modali di  $u, v, w, \phi, \psi, \sigma_{zz}, D_z$  e  $B_z$  dei primi tre modi di vibrare nel caso di  $R_\alpha/h = 50$  e  $(m, n) = (4, 2)$ . Le singole forme modali rappresentano la massima ampiezza lungo la direzione dello spessore e sono normalizzate rispetto al loro massimo.



**Figura 7.35:** Benchmark  $B4_{din}$ , pannello di guscio sferico semplicemente appoggiato multistrato adaptive wood/0°/90°/0°/adaptive wood nella configurazione open circuit. Con  $R_\alpha/h = 100$  fissato, andamento di  $\bar{\omega}(m)$  per differenti  $n$  e di  $\bar{\omega}(n)$  per differenti  $m$  per i primi tre modi di vibrare.



**Figura 7.36:** Benchmark  $B4_{din}$ , pannello di guscio cilindrico semplicemente appoggiato multistrato adaptive wood/ $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ /adaptive wood nella configurazione open circuit. Con  $R_\alpha/h$  variabile, andamento delle frequenze circolari proprie adimensionali  $\bar{\omega}(m)$  per  $n = 2$  e  $\bar{\omega}(n)$  per  $m = 4$  dei primi tre modi di vibrare.

## 7.2 Analisi statica

In questa sezione si riportano quattro nuovi benchmark per il caso di analisi statica elettro-magneto-elasticia. Le configurazioni multistrato e le geometrie sono le stesse considerate in precedenza per l'analisi alle vibrazioni libere. Per tutti e quattro i casi si valutano, per diversi rapporti di spessore e numeri di semionda  $(m, n)$  fissati, configurazioni sia sensore sia attuatore. In tutti i benchmark proposti il laminato del guscio multistrato presenta sempre la sequenza adaptive wood/ $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ /adaptive wood, dove i tre strati centrali sono in materiale composito, mentre le pelli esterne in adaptive wood, materiale sia piezoelettrico sia piezomagnetico. I singoli strati fisici hanno i seguenti spessori riferiti allo spessore totale  $h$  del multistrato:  $h_{\text{adaptive wood}} = 0.05h$  e  $h_{\text{composite}} = 0.3h$ . Le proprietà dei materiali e le caratteristiche geometriche dei quattro benchmark si trovano, rispettivamente, nelle Tabelle 7.1 e 7.11.

### 7.2.1 Benchmark B1<sub>stat</sub>

Si considera una piastra quadrata multistrato semplicemente appoggiata sui quattro lati. Sia nel caso sensore sia nel caso attuatore, si valutano differenti rapporti  $a/h$ , da spesso ( $a/h = 4$ ) a sottile ( $a/h = 100$ ). Per ogni rapporto di spessore si mantengono fissi i numeri di semionda  $(m, n) = (1, 1)$ . Per la configurazione sensore si impongono potenziale elettrico e magnetico nulli sulle superfici esterne, con ampiezze  $\Phi_{ext_t} = \Phi_{ext_b} = 0$  V e  $\Psi_{ext_t} = \Psi_{ext_b} = 0$  A, e carico normale trasversale applicato al top della struttura, con ampiezza  $P_{zt} = 10000$  Pa e  $P_{zb} = 0$  Pa. Invece, per la configurazione attuatore si applicano potenziale elettrico e magnetico al top della struttura, con ampiezze  $\Phi_{ext_t} = 10$  V,  $\Phi_{ext_b} = 0$  V e  $\Psi_{ext_t} = 15$  A,  $\Psi_{ext_b} = 0$  A, e carico normale trasversale nullo sulle superfici esterne,  $P_{zt} = P_{zb} = 0$  Pa.

Nelle Tabelle 7.12 e 7.13 si presentano i valori assunti, nelle due configurazioni, dalle variabili  $w$ ,  $\phi$ ,  $\psi$ ,  $\sigma_{\alpha\alpha}$ ,  $\sigma_{\beta\beta}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $D_z$  e  $B_z$  nei punti di massima ampiezza nelle direzioni  $\alpha$  e  $\beta$  e per una specifica coordinata  $z$ . A parità di carichi applicati, nel caso sensore, si osserva come, per un valore fisso di  $\tilde{z}/h$ , al crescere di  $a/h$  aumenti lo spostamento  $w$ ; si riduce, cioè, la rigidezza della struttura. Questo aumento si osserva anche per le grandezze legate al campo elettrico (per via dell'effetto piezoelettrico). Opposto, invece, il comportamento delle grandezze legate al campo magnetico che si riducono al crescere di  $a/h$ . Diverso è il caso di attuatore, dove a parità di ampiezza dei potenziali imposti al contorno, all'aumentare del rapporto di spessore  $a/h$ , per il fissato valore di  $\tilde{z}/h$ , si ha una diminuzione dello spostamento  $w$ .

Nelle Figure 7.37 e 7.38, per la configurazione sensore, 7.39 e 7.40, per la configurazione attuatore, si riportano, fissato il rapporto  $a/h$ , gli andamenti lungo la direzione dello spessore  $z$ , nei punti di massima ampiezza nelle direzioni  $\alpha$  e  $\beta$ , delle variabili considerate. Nello

**Tabella 7.11:** Caratteristiche geometriche e numeri di semionda  $(m, n)$  per i quattro nuovi benchmark riferiti all'analisi statica.

Caratteristiche geometriche				
	B1 <sub>stat</sub>	B2 <sub>stat</sub>	B3 <sub>stat</sub>	B4 <sub>stat</sub>
$a$ [m]	1	$2\pi R_\alpha$	$\frac{\pi}{3}R_\alpha$	$\frac{\pi}{3}R_\alpha$
$b$ [m]	1	10	10	$\frac{\pi}{3}R_\beta$
$h$ [m]	Variabile	Variabile	Variabile	Variabile
$R_\alpha$ [m]	$\infty$	10	10	10
$R_\beta$ [m]	$\infty$	$\infty$	$\infty$	10
$m$	1	2	2	1
$n$	1	1	1	1

specifico, si propone l'andamento lungo  $z$  delle variabili  $w$ ,  $\phi$ ,  $\psi$ ,  $\sigma_{\alpha\alpha}$ ,  $\sigma_{\beta\beta}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\mathcal{D}_z$  e  $\mathcal{B}_z$ . Le variabili fondamentali  $w$ ,  $\phi$  e  $\psi$  rispettano le condizioni di congruenza, invece, le variabili secondarie  $\sigma_{zz}$ ,  $\mathcal{D}_z$  e  $\mathcal{B}_z$  rispettano le condizioni di equilibrio. La loro continuità interlaminare viene garantita grazie all'approccio layerwise, che permette l'imposizione della condizione di uguaglianza di queste variabili all'interfaccia tra gli strati. Nella rappresentazione delle variabili secondarie  $\sigma_{\alpha\alpha}$  e  $\sigma_{\beta\beta}$ , si apprezza l'andamento discontinuo alle interfacce tra gli strati; non è, infatti, necessaria la loro continuità per ragioni di equilibrio della struttura. Tuttavia è sempre presente la forma a zig-zag per via dell'anisotropia trasversale del multistrato. Inoltre, in entrambe le configurazioni, si nota la corretta imposizione delle condizioni al contorno di carico sulle grandezze  $\phi$ ,  $\psi$  e  $\sigma_{zz}$ .

### 7.2.2 Benchmark B2<sub>stat</sub>

Per il secondo benchmark si analizza un guscio cilindrico multistrato semplicemente appoggiato sui lati. Si considerano differenti rapporti  $R_\alpha/h$ ; in particolare, si valutano i casi  $R_\alpha/h = 4, 10, 20, 50, 100$ . Per ogni spessore si mantengono fissi i numeri di semionda  $(m, n) = (2, 1)$ . Si sottolinea che si utilizza un valore di  $m$  pari per avere un andamento chiuso delle variabili lungo la direzione  $\alpha$ , essendo  $a = 2\pi R_\alpha$ . Tutti questi casi si sono valutati sia in configurazione sensore sia in configurazione attuatore. I carichi esterni considerati sono gli stessi utilizzati nel precedente benchmark. Per il caso sensore si impongono potenziale elettrico e magnetico nulli sulle superfici esterne, con ampiezze  $\Phi_{ext_t} = \Phi_{ext_b} = 0$  V e  $\Psi_{ext_t} = \Psi_{ext_b} = 0$  A, e carico normale trasversale applicato al top della struttura, con ampiezza  $P_{zt} = 10000$  Pa e  $P_{zb} = 0$  Pa. Invece, per il caso attuatore si applicano potenziale elettrico e magnetico al top della struttura, con ampiezze  $\Phi_{ext_t} = 10$  V,  $\Phi_{ext_b} = 0$  V e  $\Psi_{ext_t} = 15$  A,  $\Psi_{ext_b} = 0$  A, e carico normale trasversale nullo sulle superfici esterne,  $P_{zt} = P_{zb} = 0$  Pa.

Nelle Tabelle 7.14 e 7.15 si presentano i valori assunti, in entrambe le configurazioni, delle variabili  $w$ ,  $\phi$ ,  $\psi$ ,  $\sigma_{\alpha\alpha}$ ,  $\sigma_{\beta\beta}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\mathcal{D}_z$  e  $\mathcal{B}_z$  nei punti di massima ampiezza nelle direzioni  $\alpha$  e  $\beta$  e in diversi punti lungo lo spessore. A parità di carichi applicati, nel caso sensore, si osserva come, per il fissato valore di  $\tilde{z}/h$ , al crescere di  $R_\alpha/h$  aumenti lo spostamento  $w$ , anche con la presenza della curvatura lungo  $\alpha$ . Questo aumento si osserva anche per le grandezze legate al campo magnetico per via dell'effetto piezomagnetico, mentre quelle legate al campo elettrico hanno comportamento opposto, riducendosi al crescere di  $R_\alpha/h$ . Diverso è il caso di attuatore, dove a parità di ampiezza dei potenziali imposti al contorno, al crescere di  $R_\alpha/h$  e fissato il valore di  $\tilde{z}/h$ , si ha una diminuzione dello spostamento  $w$ .

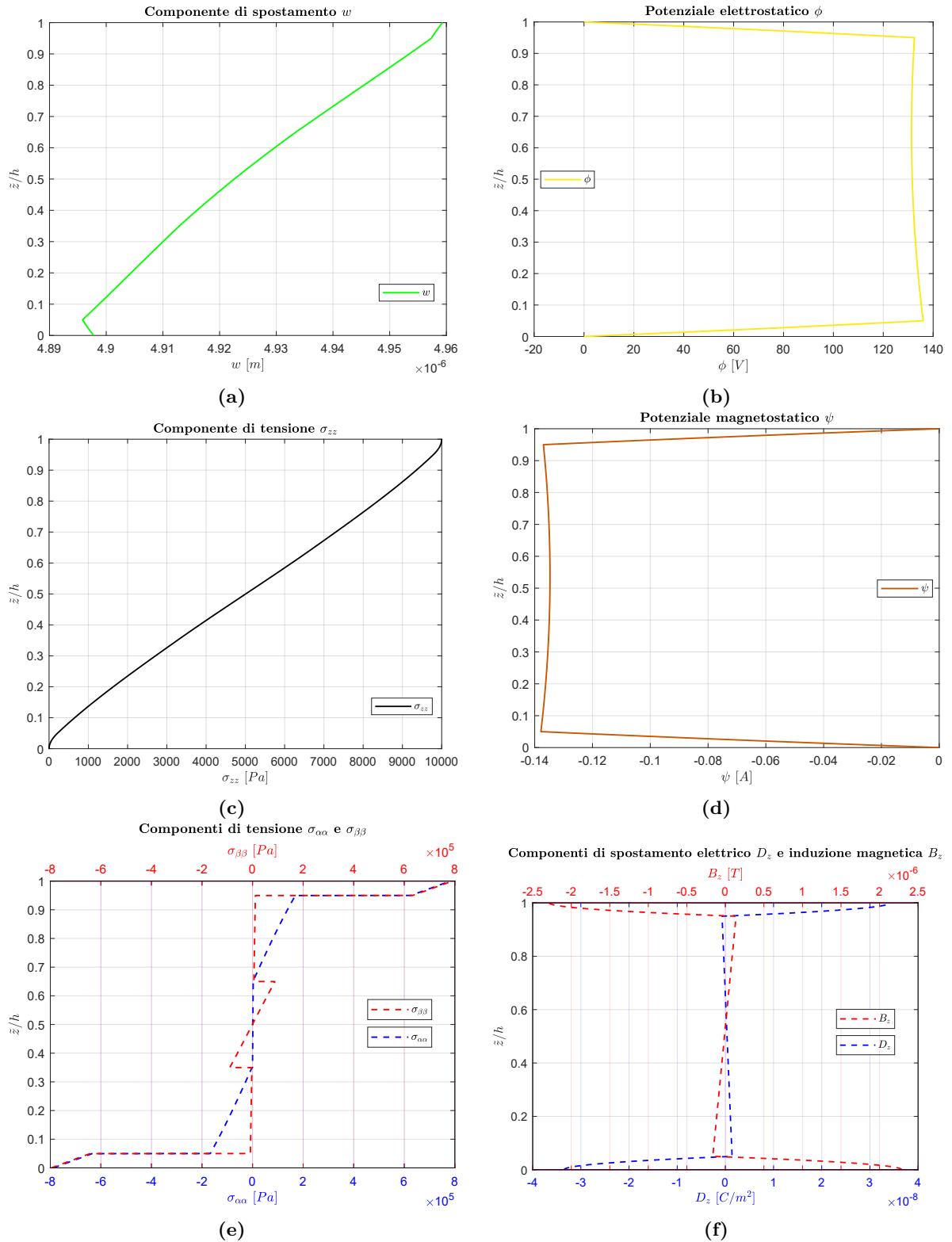
Fissato uno specifico rapporto  $R_\alpha/h$ , nelle Figure 7.41, 7.42, 7.43 e 7.44 si rappresentano gli andamenti lungo la direzione dello spessore  $z$ , nei punti di massima ampiezza nelle direzioni  $\alpha$  e  $\beta$ , delle variabili considerate. Nelle prime due si riportano casi di configurazione sensore, mentre nella terza e nella quarta di configurazioni attuatore. Viene proposto l'andamento di  $w$ ,  $\phi$ ,  $\psi$ ,  $\sigma_{\alpha\alpha}$ ,  $\sigma_{\beta\beta}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\mathcal{D}_z$  e  $\mathcal{B}_z$ . Anche in questo caso sono rispettati i  $C_z^0$  requirements, con il loro andamento continuo e la tipica forma a zig-zag, per le variabili  $w$ ,  $\phi$ ,  $\psi$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\mathcal{D}_z$  e  $\mathcal{B}_z$ , mentre la  $\sigma_{\alpha\alpha}$  e  $\sigma_{\beta\beta}$  hanno forma a zig-zag, ma sono discontinue. Inoltre, in entrambe le configurazioni, si nota la corretta imposizione delle condizioni al contorno di carico sulle grandezze  $\phi$ ,  $\psi$  e  $\sigma_{zz}$ . Il modello è, quindi, in grado di valutare correttamente l'effetto elettro-magneto-elastico nella direzione trasversale, anche in presenza di curvatura.

### 7.2.3 Benchmark B3<sub>stat</sub>

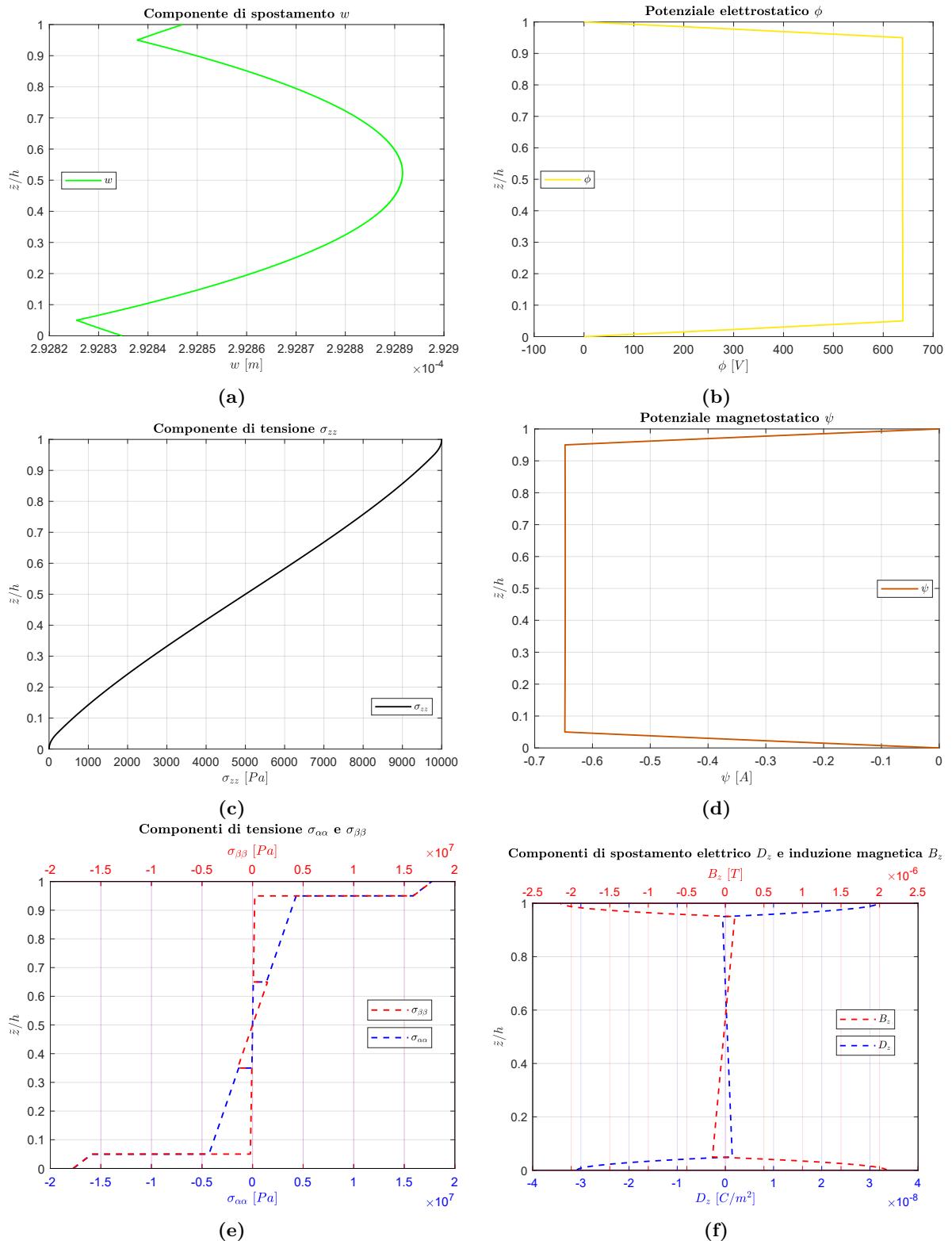
Si considera un pannello di guscio cilindrico multistrato semplicemente appoggiato sui quattro lati. Questa geometria varia rispetto al benchmark precedente per la sola dimensione  $a$  lunga la direzione  $\alpha$ . Sia nel caso sensore che nel caso attuatore, si considerano gli stessi

**Tabella 7.12:** Benchmark  $B1_{stat}$ , piastra quadrata multistrato adaptive wood/ $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ /adaptive wood semplicemente appoggiata nella configurazione sensore:  $\Phi_{ext_t} = \Phi_{ext_b} = 0\text{ V}$ ,  $\Psi_{ext_t} = \Psi_{ext_b} = 0\text{ A}$ ,  $P_{z_t} = 10000\text{ Pa}$  e  $P_{z_b} = 0\text{ Pa}$ , con numeri di semionda  $(m, n) = (1, 1)$  al variare di  $a/h$ .

Configurazione sensore $B1_{stat}$					
$a/h$	4	10	20	50	100
$w [10^{-6}\text{ m}]$ a $\tilde{z} = 0.5h$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{stat}$	1.1385	4.9226	23.362	292.89	2259.9
$\phi [10^1\text{ V}]$ a $\tilde{z} = 0.75h$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{stat}$	5.0686	13.146	25.798	63.852	127.49
$\psi [10^{-2}\text{ A}]$ a $\tilde{z} = 0.25h$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{stat}$	-5.5229	-13.579	-26.280	-64.739	-129.17
$\sigma_{\alpha\alpha} [10^5\text{ Pa}]$ a $\tilde{z} = h$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{stat}$	1.8191	7.8217	29.030	177.18	706.20
$\sigma_{\beta\beta} [10^5\text{ Pa}]$ a $\tilde{z} = 0$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{stat}$	-1.5938	-7.9647	-29.344	-177.56	-706.60
$\sigma_{zz} [10^3\text{ Pa}]$ a $\tilde{z} = 0.5h$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{stat}$	4.9269	5.0065	5.0031	5.0006	5.0001
$\mathcal{D}_z [10^{-10}\text{ C/m}^2]$ a $\tilde{z} = 0.5h$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{stat}$	1.6356	3.4367	4.0113	4.2086	4.2384
$\mathcal{B}_z [10^{-8}\text{ T}]$ a $\tilde{z} = 0.5h$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{stat}$	1.2469	-1.2133	-2.0179	-2.2952	-2.3372



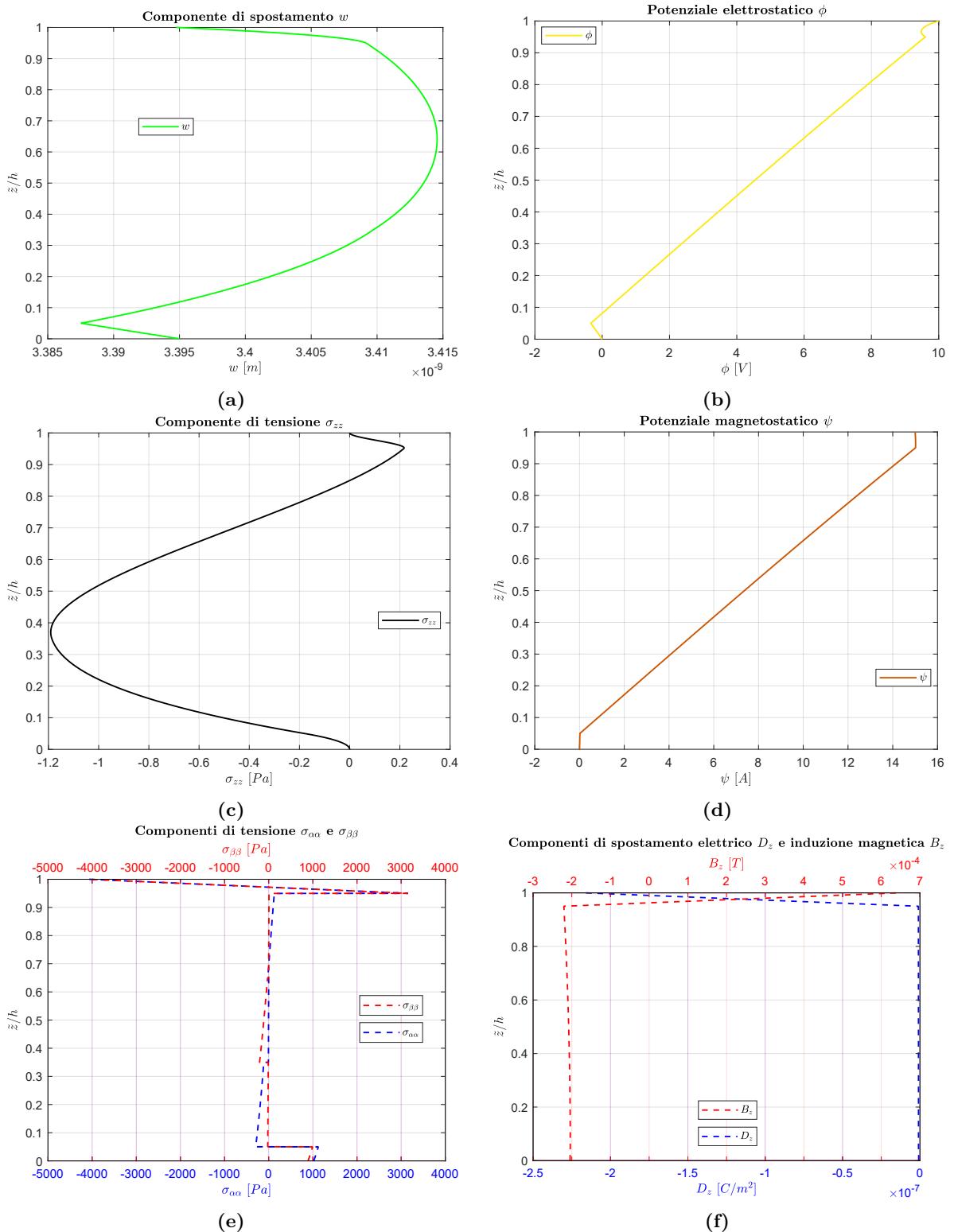
**Figura 7.37:** Benchmark  $B1_{stat}$ , piastra quadrata multistrato adaptive wood/ $0^\circ/90^\circ/0^\circ/adaptive$  wood semplicemente appoggiata nella configurazione sensore:  $\Phi_{ext_t} = \Phi_{ext_b} = 0$  V,  $\Psi_{ext_t} = \Psi_{ext_b} = 0$  A,  $P_{z_t} = 10000$  Pa e  $P_{z_b} = 0$  Pa, con numeri di semionda ( $m, n$ ) = (1, 1) e  $a/h = 10$  fissato. Andamento lungo lo spessore delle variabili  $w$ ,  $\phi$ ,  $\psi$ ,  $\sigma_{\alpha\alpha}$ ,  $\sigma_{\beta\beta}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $D_z$  e  $B_z$  nei punti di massima ampiezza nelle direzioni  $\alpha$  e  $\beta$ .



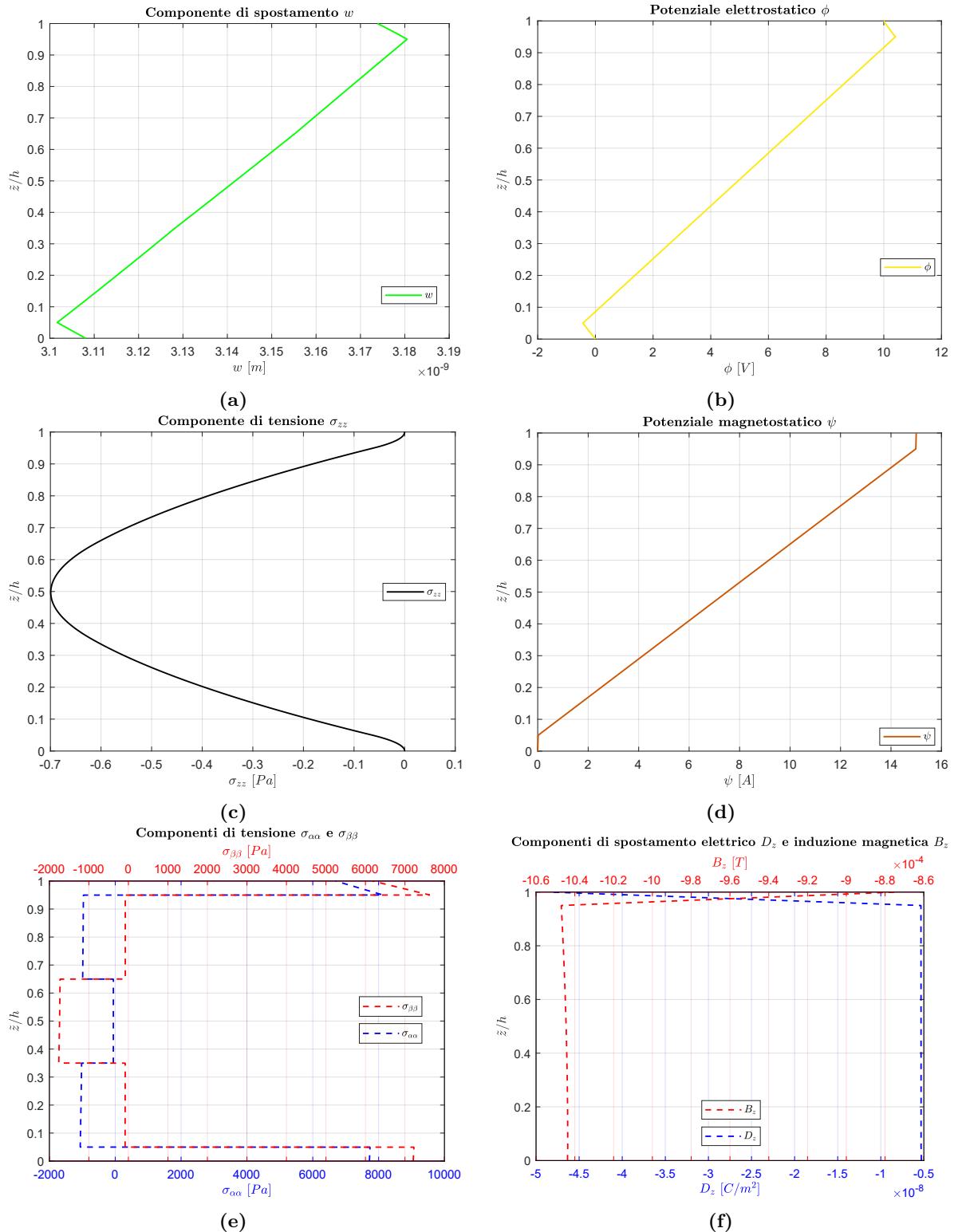
**Figura 7.38:** Benchmark  $B1_{stat}$ , piastra quadrata multistrato adaptive wood/ $0^\circ/90^\circ/0^\circ/adaptive$  wood semplicemente appoggiata nella configurazione sensore:  $\Phi_{ext_t} = \Phi_{ext_b} = 0$  V,  $\Psi_{ext_t} = \Psi_{ext_b} = 0$  A,  $P_{z_t} = 10000$  Pa e  $P_{z_b} = 0$  Pa, con numeri di semionda ( $m, n$ ) = (1, 1) e  $a/h = 50$  fissato. Andamento lungo lo spessore delle variabili  $w$ ,  $\phi$ ,  $\psi$ ,  $\sigma_{\alpha\alpha}$ ,  $\sigma_{\beta\beta}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $D_z$  e  $B_z$  nei punti di massima ampiezza nelle direzioni  $\alpha$  e  $\beta$ .

**Tabella 7.13:** Benchmark  $B1_{stat}$ , piastra quadrata multistrato adaptive wood/0°/90°/0°/adaptive wood semplicemente appoggiata nella configurazione attuatore:  $\Phi_{ext_t} = 10 \text{ V}$ ,  $\Phi_{ext_b} = 0 \text{ V}$ ,  $\Psi_{ext_t} = 15 \text{ A}$ ,  $\Psi_{ext_b} = 0 \text{ A}$  e  $P_{z_t} = P_{z_b} = 0 \text{ Pa}$ , con numeri di semionda  $(m, n) = (1, 1)$  al variare di  $a/h$ . Variabili riportate nei punti di massima ampiezza nelle direzioni  $\alpha$  e  $\beta$  e in coordinata  $z$  variabile.

Configurazione attuatore $B1_{stat}$					
$a/h$	4	10	20	50	100
$w [10^{-9} \text{ m}]$ a $\tilde{z} = 0.5h$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	4.1464	3.4135	3.2136	3.1418	3.1307
$\phi [\text{V}]$ a $\tilde{z} = 0.75h$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	4.1122	7.3189	7.8401	7.9923	8.0144
$\psi [\text{A}]$ a $\tilde{z} = 0.25h$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	2.9116	3.2679	3.3243	3.3403	3.3426
$\sigma_{\alpha\alpha} [10^2 \text{ Pa}]$ a $\tilde{z} = h$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	-127.45	-40.676	2.6744	66.919	151.18
$\sigma_{\beta\beta} [10^2 \text{ Pa}]$ a $\tilde{z} = 0$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	-2.4779	8.9159	26.135	72.084	146.17
$\sigma_{zz} [10^{-1} \text{ Pa}]$ a $\tilde{z} = 0.5h$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	119.25	-10.400	-14.344	-6.9929	-3.5913
$\mathcal{D}_z [10^{-10} \text{ C/m}^2]$ a $\tilde{z} = 0.5h$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	-2.1709	-9.7171	-20.888	-53.300	-106.91
$\mathcal{B}_z [10^{-5} \text{ T}]$ a $\tilde{z} = 0.5h$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	-8.1433	-20.806	-41.743	-104.45	-208.93



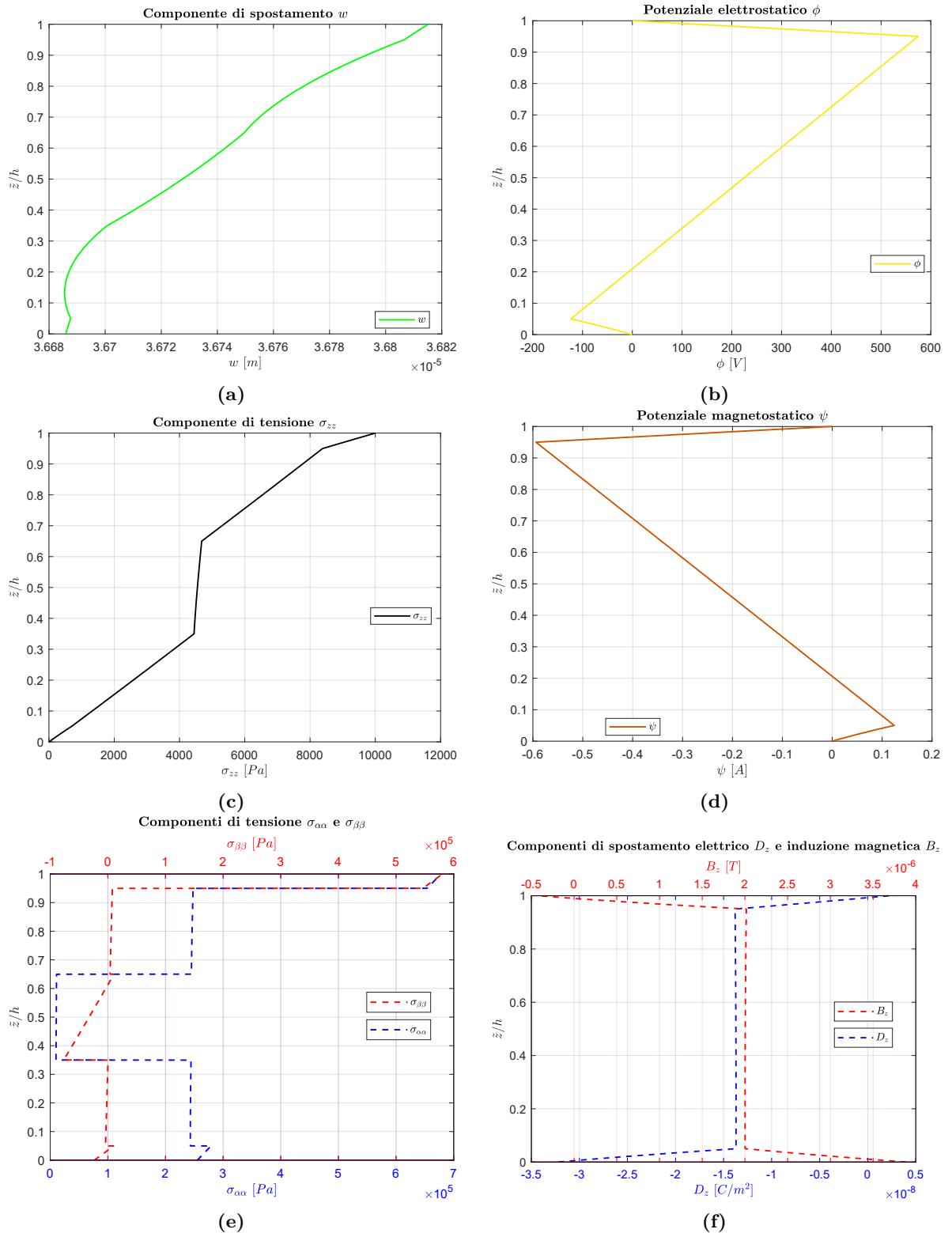
**Figura 7.39:** Benchmark  $B1_{stat}$ , piastra quadrata multistrato adaptive wood/ $0^\circ/90^\circ/0^\circ/adaptive$  wood semplicemente appoggiata nella configurazione attuatore:  $\Phi_{ext_t} = 10 V$ ,  $\Phi_{ext_b} = 0 V$ ,  $\Psi_{ext_t} = 15 A$ ,  $\Psi_{ext_b} = 0 A$  e  $P_{z_t} = P_{z_b} = 0 Pa$ , con numeri di semionda  $(m, n) = (1, 1)$  e  $a/h = 10$  fissato. Andamento lungo lo spessore delle variabili  $w$ ,  $\phi$ ,  $\psi$ ,  $\sigma_{\alpha\alpha}$ ,  $\sigma_{\beta\beta}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $D_z$  e  $B_z$  nei punti di massima ampiezza nelle direzioni  $\alpha$  e  $\beta$ .



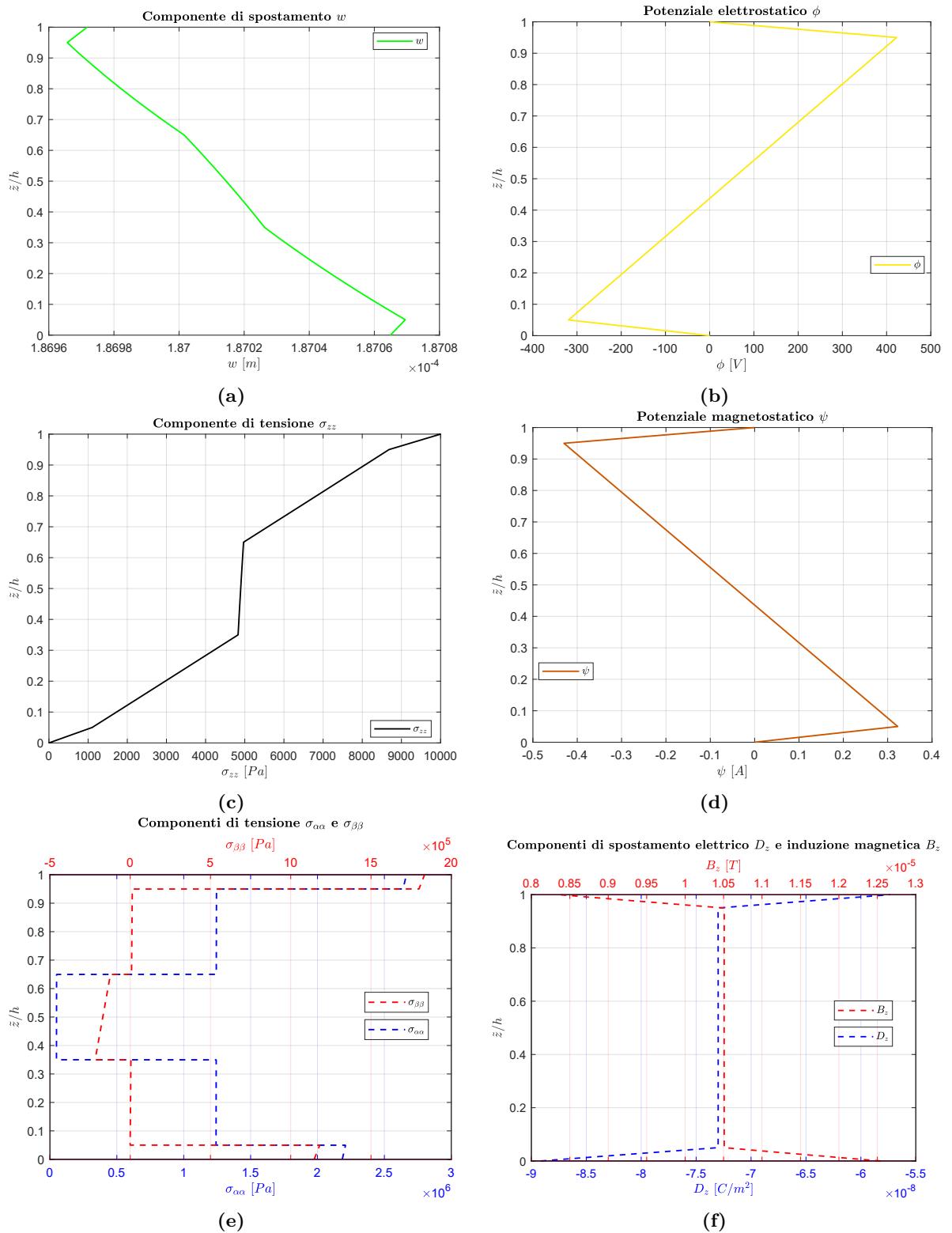
**Figura 7.40:** Benchmark  $B1_{stat}$ , piastra quadrata multistrato adaptive wood/ $0^\circ/90^\circ/0^\circ/\text{adaptive wood}$  semplicemente appoggiata nella configurazione attuatore:  $\Phi_{ext_t} = 10 \text{ V}$ ,  $\Phi_{ext_b} = 0 \text{ V}$ ,  $\Psi_{ext_t} = 15 \text{ A}$ ,  $\Psi_{ext_b} = 0 \text{ A}$  e  $P_{z_t} = P_{z_b} = 0 \text{ Pa}$ , con numeri di semionda  $(m, n) = (1, 1)$  e  $a/h = 50$  fissato. Andamento lungo lo spessore delle variabili  $w$ ,  $\phi$ ,  $\psi$ ,  $\sigma_{\alpha\alpha}$ ,  $\sigma_{\beta\beta}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $D_z$  e  $B_z$  nei punti di massima ampiezza nelle direzioni  $\alpha$  e  $\beta$ .

**Tabella 7.14:** Benchmark  $B2_{\text{stat}}$ , guscio cilindrico multistrato adaptive wood/0°/90°/0°/adaptive wood semplicemente appoggiato nella configurazione sensore:  $\Phi_{ext_t} = \Phi_{ext_b} = 0 \text{ V}$ ,  $\Psi_{ext_t} = \Psi_{ext_b} = 0 \text{ A}$ ,  $P_{z_t} = 10000 \text{ Pa}$  e  $P_{z_b} = 0 \text{ Pa}$ , con numeri di semionda  $(m, n) = (2, 1)$  al variare di  $R_\alpha/h$ . Variabili riportate nei punti di massima ampiezza nelle direzioni  $\alpha$  e  $\beta$  e in coordinata  $z$  variabile.

Configurazione sensore $B2_{\text{stat}}$					
$R_\alpha/h$	4	10	20	50	100
$w [10^{-6} \text{ m}]$ a $\tilde{z} = 0.5h$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	6.5257	17.477	36.728	93.457	187.01
$\phi [10^{-2} \text{ V}]$ a $\tilde{z} = 0.75h$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	3.6906	4.8153	4.1880	3.0616	2.5780
$\psi [10^2 \text{ A}]$ a $\tilde{z} = 0.25h$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	-12.262	-14.876	-3.4959	10.216	15.540
$\sigma_{\alpha\alpha} [10^5 \text{ Pa}]$ a $\tilde{z} = h$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	1.3942	3.6615	6.7801	14.438	26.644
$\sigma_{\beta\beta} [10^4 \text{ Pa}]$ a $\tilde{z} = 0$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	-4.3496	-9.5846	-2.3547	39.923	114.59
$\sigma_{zz} [10^3 \text{ Pa}]$ a $\tilde{z} = 0.5h$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	4.5046	4.4089	4.5489	4.7944	4.8962
$\mathcal{D}_z [10^{-9} \text{ C/m}^2]$ a $\tilde{z} = 0.5h$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	-1.8396	-6.0267	-13.718	-36.168	-72.991
$\mathcal{B}_z [10^{-7} \text{ T}]$ a $\tilde{z} = 0.5h$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	3.0068	9.0022	20.039	52.249	105.07



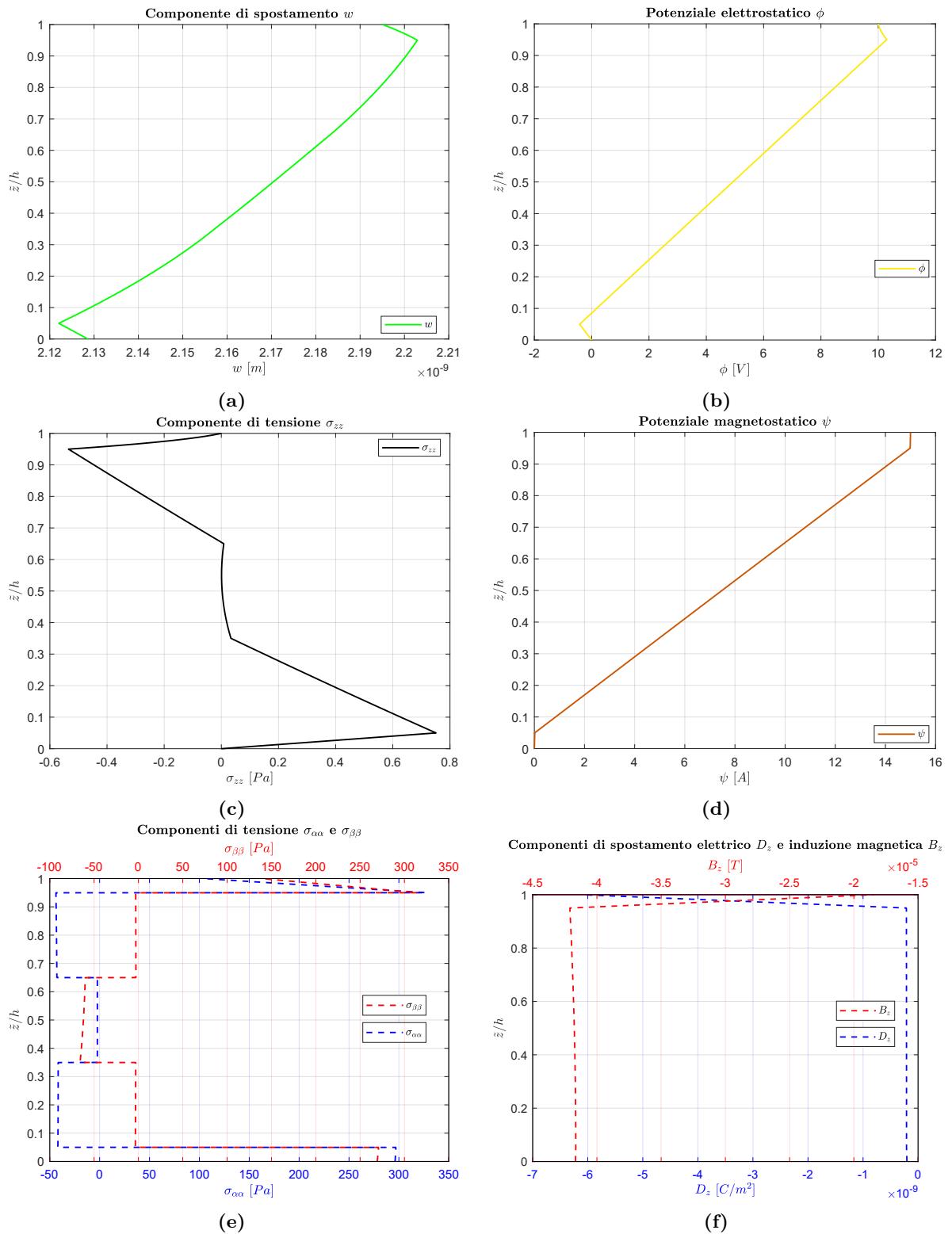
**Figura 7.41:** Benchmark  $B2_{stat}$ , guscio cilindrico multistrato adaptive wood/ $0^\circ/90^\circ/0^\circ/adaptive$  wood semplicemente appoggiato nella configurazione sensore:  $\Phi_{ext_t} = \Phi_{ext_b} = 0$  V,  $\Psi_{ext_t} = \Psi_{ext_b} = 0$  A,  $P_{z_t} = 10000$  Pa e  $P_{z_b} = 0$  Pa, con numeri di semionda ( $m, n$ ) = (2, 1) e  $R_\alpha/h = 20$  fissato. Andamento lungo lo spessore delle variabili  $w$ ,  $\phi$ ,  $\psi$ ,  $\sigma_{\alpha\alpha}$ ,  $\sigma_{\beta\beta}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $D_z$  e  $B_z$  nei punti di massima ampiezza nelle direzioni  $\alpha$  e  $\beta$ .



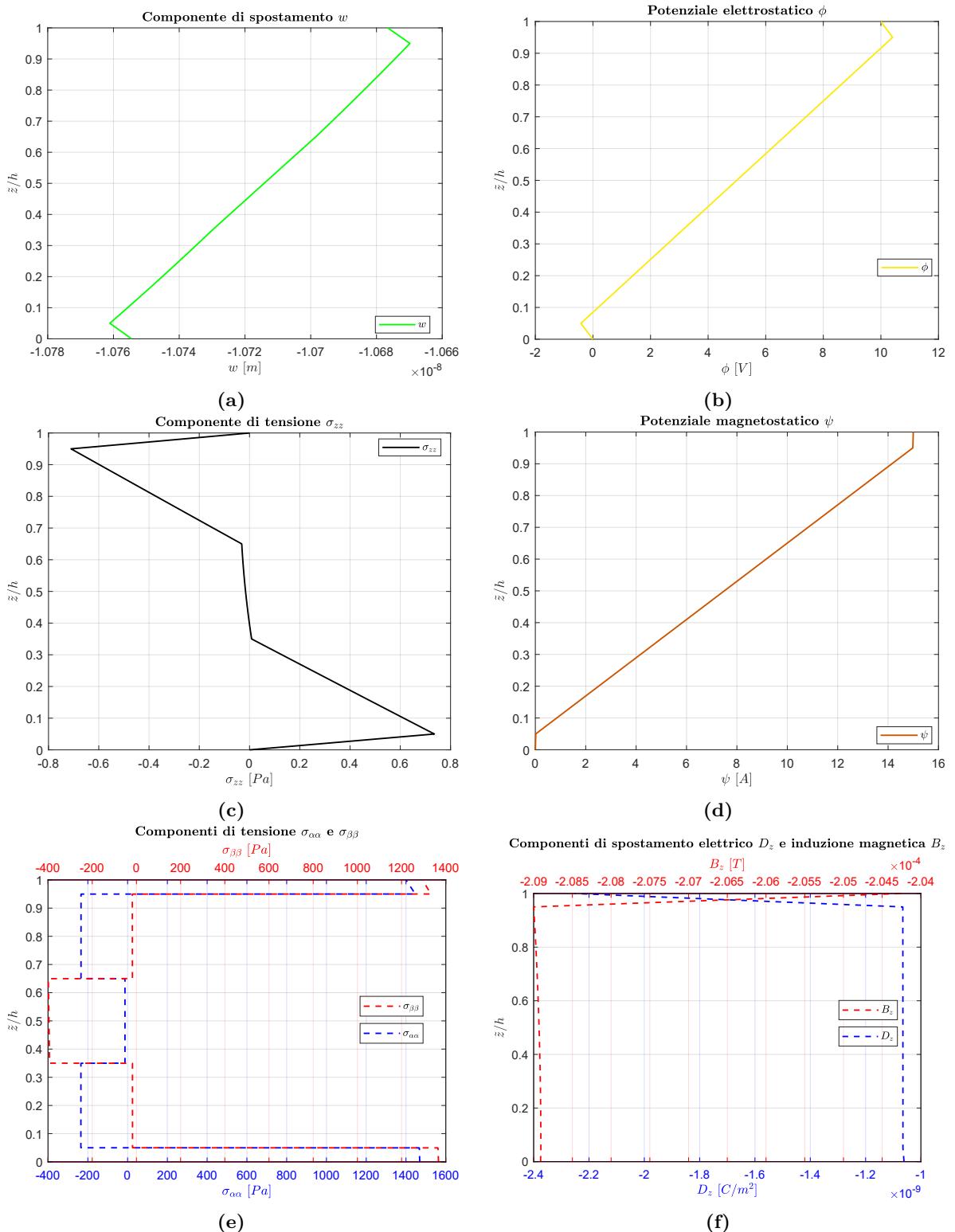
**Figura 7.42:** Benchmark  $B2_{stat}$ , guscio cilindrico multistrato adaptive wood/ $0^\circ/90^\circ/0^\circ/adaptive$  wood semplicemente appoggiato nella configurazione sensore:  $\Phi_{ext_t} = \Phi_{ext_b} = 0$  V,  $\Psi_{ext_t} = \Psi_{ext_b} = 0$  A,  $P_{z_t} = 10000$  Pa e  $P_{z_b} = 0$  Pa, con numeri di semionda  $(m, n) = (2, 1)$  e  $R_\alpha/h = 100$  fissato. Andamento lungo lo spessore delle variabili  $w$ ,  $\phi$ ,  $\psi$ ,  $\sigma_{\alpha\alpha}$ ,  $\sigma_{\beta\beta}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $D_z$  e  $B_z$  nei punti di massima ampiezza nelle direzioni  $\alpha$  e  $\beta$ .

**Tabella 7.15:** Benchmark  $B2_{\text{stat}}$ , guscio cilindrico multistrato adaptive wood/0°/90°/0°/adaptive wood semplicemente appoggiato nella configurazione attuatore:  $\Phi_{ext_t} = 10 \text{ V}$ ,  $\Phi_{ext_b} = 0 \text{ V}$ ,  $\Psi_{ext_t} = 15 \text{ A}$ ,  $\Psi_{ext_b} = 0 \text{ A}$  e  $P_{z_t} = P_{z_b} = 0 \text{ Pa}$ , con numeri di semionda  $(m, n) = (2, 1)$  e al variare di  $R_\alpha/h$ . Variabili riportate nei punti di massima ampiezza nelle direzioni  $\alpha$  e  $\beta$  e in coordinata  $z$  variabile.

Configurazione attuatore $B2_{\text{stat}}$					
$a/h$	4	10	20	50	100
$w [10^{-9} \text{ m}]$ a $\tilde{z} = 0.5h$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	5.5536	4.0441	2.1705	-2.7784	-10.714
$\phi [\text{V}]$ a $\tilde{z} = 0.75h$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	5.9505	7.6351	7.9053	7.9878	8.0015
$\psi [\text{A}]$ a $\tilde{z} = 0.25h$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	3.0939	3.3015	3.3328	3.3417	3.3429
$\sigma_{\alpha\alpha} [10^2 \text{ Pa}]$ a $\tilde{z} = h$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	-7.7962	-2.1135	1.0393	6.4217	14.000
$\sigma_{\beta\beta} [\text{Pa}]$ a $\tilde{z} = 0$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	-5.7504	103.51	269.34	693.24	1367.1
$\sigma_{zz} [10^{-3} \text{ Pa}]$ a $\tilde{z} = 0.5h$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	2829.9	302.80	2.8439	-25.035	-15.792
$\mathcal{D}_z [10^{-11} \text{ C/m}^2]$ a $\tilde{z} = 0.5h$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	-3.1879	-10.159	-21.067	-53.195	-106.52
$\mathcal{B}_z [10^{-6} \text{ T}]$ a $\tilde{z} = 0.5h$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	-8.2402	-20.846	-41.763	-104.46	-208.93



**Figura 7.43:** Benchmark  $B2_{stat}$ , guscio cilindrico multistrato adaptive wood/ $0^\circ/90^\circ/0^\circ/adaptive$  wood semplicemente appoggiato nella configurazione attuatore:  $\Phi_{ext_t} = 10$  V,  $\Phi_{ext_b} = 0$  V,  $\Psi_{ext_t} = 15$  A,  $\Psi_{ext_b} = 0$  A e  $P_{zt} = P_{zb} = 0$  Pa, con numeri di semionda  $(m, n) = (2, 1)$  e  $R_\alpha/h = 20$  fissato. Andamento lungo lo spessore delle variabili  $w$ ,  $\phi$ ,  $\psi$ ,  $\sigma_{\alpha\alpha}$ ,  $\sigma_{\beta\beta}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $D_z$  e  $B_z$  nei punti di massima ampiezza nelle direzioni  $\alpha$  e  $\beta$ .



**Figura 7.44:** Benchmark  $B2_{stat}$ , guscio cilindrico multistrato adaptive wood/ $0^\circ/90^\circ/0^\circ/adaptive$  wood semplicemente appoggiato nella configurazione attuatore:  $\Phi_{ext_t} = 10 V$ ,  $\Phi_{ext_b} = 0 V$ ,  $\Psi_{ext_t} = 15 A$ ,  $\Psi_{ext_b} = 0 A$  e  $P_{z_t} = P_{z_b} = 0 Pa$ , con numeri di semionda  $(m, n) = (2, 1)$  e  $R_\alpha/h = 100$  fissato. Andamento lungo lo spessore delle variabili  $w$ ,  $\phi$ ,  $\psi$ ,  $\sigma_{\alpha\alpha}$ ,  $\sigma_{\beta\beta}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $D_z$  e  $B_z$  nei punti di massima ampiezza nelle direzioni  $\alpha$  e  $\beta$ .

rapporti  $R_\alpha/h$ , con gli stessi numeri di semionda  $(m, n) = (2, 1)$  usati in B2<sub>stat</sub>. I carichi esterni considerati sono gli stessi utilizzati nel B2<sub>stat</sub>. Per il caso sensore si impongono potenziale elettrico e magnetico nulli sulle superfici esterne, con ampiezze  $\Phi_{ext_t} = \Phi_{ext_b} = 0$  V e  $\Psi_{ext_t} = \Psi_{ext_b} = 0$  A, e carico normale trasversale applicato al top della struttura, con ampiezza  $P_{zt} = 10000$  Pa e  $P_{zb} = 0$  Pa. Invece, per il caso attuatore si applicano potenziale elettrico e magnetico al top della struttura, con ampiezze  $\Phi_{ext_t} = 10$  V,  $\Phi_{ext_b} = 0$  V e  $\Psi_{ext_t} = 15$  A,  $\Psi_{ext_b} = 0$  A, e carico normale trasversale nullo sulle superfici esterne,  $P_{zt} = P_{zb} = 0$  Pa.

Nelle Tabelle 7.16 e 7.17 si presentano, anche in questo caso, i valori assunti, nelle due configurazioni, dalle variabili  $w$ ,  $\phi$ ,  $\psi$ ,  $\sigma_{\alpha\alpha}$ ,  $\sigma_{\beta\beta}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\mathcal{D}_z$  e  $\mathcal{B}_z$  nei punti di massima ampiezza nelle direzioni  $\alpha$  e  $\beta$  e in coordinata  $z$  variabile. A parità dei carichi applicati, nel caso sensore, si osserva come, per il fissato valore di  $\tilde{z}/h$ , al crescere di  $R_\alpha/h$  aumenti lo spostamento  $w$ , anche con la presenza della curvatura lungo  $\alpha$ . Per la specifica  $\tilde{z}/h$  considerata, questo aumento si osserva anche per le grandezze legate al campo elettrico per via dell'effetto piezoelettrico, mentre quelle legate al campo magnetico hanno comportamento opposto. Anche nel caso attuatore, a parità di ampiezza dei potenziali imposti al contorno, al crescere di  $R_\alpha/h$  e fissato  $\tilde{z}/h$ , si ha un aumento dello spostamento  $w$ .

Anche per questo benchmark, fissato uno specifico rapporto  $R_\alpha/h$ , nelle Figure 7.45 e 7.46, per il caso sensore, e nelle Figure 7.47 e 7.48, per il caso attuatore, si possono vedere gli andamenti lungo la direzione dello spessore  $z$ , nei punti di massima ampiezza nelle direzioni  $\alpha$  e  $\beta$ , delle variabili  $w$ ,  $\phi$ ,  $\psi$ ,  $\sigma_{\alpha\alpha}$ ,  $\sigma_{\beta\beta}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\mathcal{D}_z$  e  $\mathcal{B}_z$ . In modo analogo al precedente benchmark, in essi si nota il rispetto dei  $C_z^0$  requirements, dovuti alle condizioni di equilibrio e congruenza con l'andamento continuo e la forma a zig-zag tipica delle strutture multistrato. In ogni caso anche le variabili che sono discontinue alle interfacce ( $\sigma_{\alpha\alpha}$  e  $\sigma_{\beta\beta}$ ), non essendo soggette a condizioni di equilibrio presentano l'andamento a zig-zag. In più, in entrambe le configurazioni, si nota la corretta imposizione delle condizioni al contorno di carico sulle grandezze  $\phi$ ,  $\psi$  e  $\sigma_{zz}$ .

#### 7.2.4 Benchmark B4<sub>stat</sub>

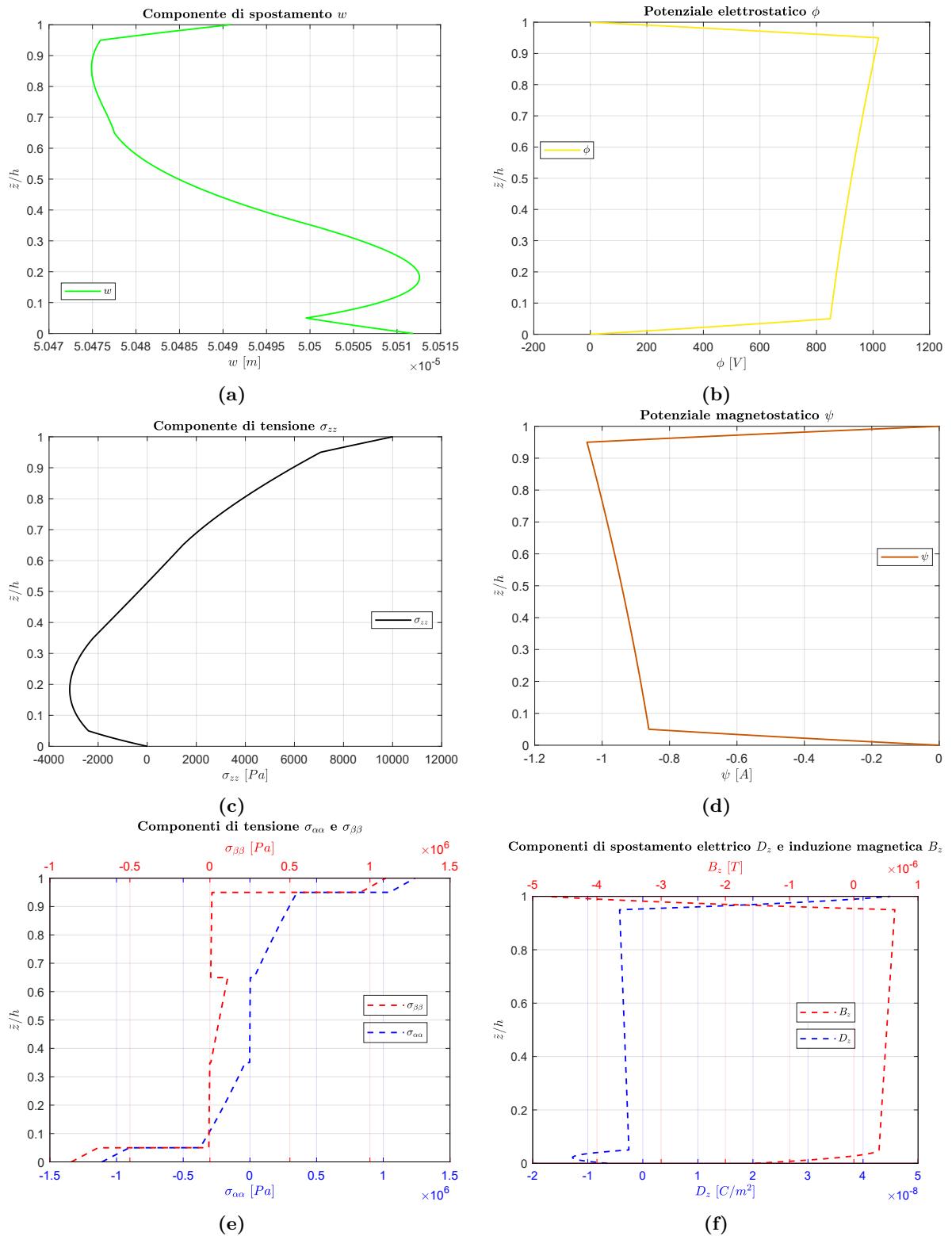
Il quarto e ultimo benchmark proposto, riguarda un pannello di guscio sferico multistrato semplicemente appoggiato sui quattro lati. Sia nel caso sensore che nel caso attuatore, si considerano gli stessi rapporti  $R_\alpha/h$  dei benchmark precedenti. Per ognuno di essi, si mantengono fissi i numeri di semionda  $(m, n) = (1, 1)$ . I carichi esterni considerati sono gli stessi utilizzati nei precedenti benchmark. Per il caso sensore si impongono potenziale elettrico e magnetico nulli sulle superfici esterne, con ampiezze  $\Phi_{ext_t} = \Phi_{ext_b} = 0$  V e  $\Psi_{ext_t} = \Psi_{ext_b} = 0$  A, e carico normale trasversale applicato al top della struttura, con ampiezza  $P_{zt} = 10000$  Pa e  $P_{zb} = 0$  Pa. Invece, per il caso attuatore si applicano potenziale elettrico e magnetico al top della struttura, con ampiezze  $\Phi_{ext_t} = 10$  V,  $\Phi_{ext_b} = 0$  V e  $\Psi_{ext_t} = 15$  A,  $\Psi_{ext_b} = 0$  A, e carico normale trasversale nullo sulle superfici esterne,  $P_{zt} = P_{zb} = 0$  Pa.

Nelle Tabelle 7.18 e 7.19 si presentano, ancora una volta, i valori assunti, nelle due configurazioni, dalle variabili  $w$ ,  $\phi$ ,  $\psi$ ,  $\sigma_{\alpha\alpha}$ ,  $\sigma_{\beta\beta}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\mathcal{D}_z$  e  $\mathcal{B}_z$  nei punti di massima ampiezza nelle direzioni  $\alpha$  e  $\beta$  e in coordinata  $z$  variabile. A parità dei carichi applicati, nel caso sensore, si osserva come, per il fissato valore di  $\tilde{z}/h$ , al crescere di  $R_\alpha/h$  aumenti lo spostamento  $w$ , anche in presenza della doppia curvatura lungo  $\alpha$  e  $\beta$ . Per la specifica  $\tilde{z}/h$  considerata, questo aumento si osserva anche per le grandezze legate al campo magnetico per via dell'effetto piezomagnetico, mentre quelle legate al campo elettrico hanno comportamento opposto, riducendosi al crescere di  $R_\alpha/h$ . Nel caso attuatore, a parità di ampiezza dei potenziali imposti al contorno, all'aumentare di  $R_\alpha/h$  e per il fissato valore di  $\tilde{z}/h$ , si ha una riduzione dello spostamento  $w$ .

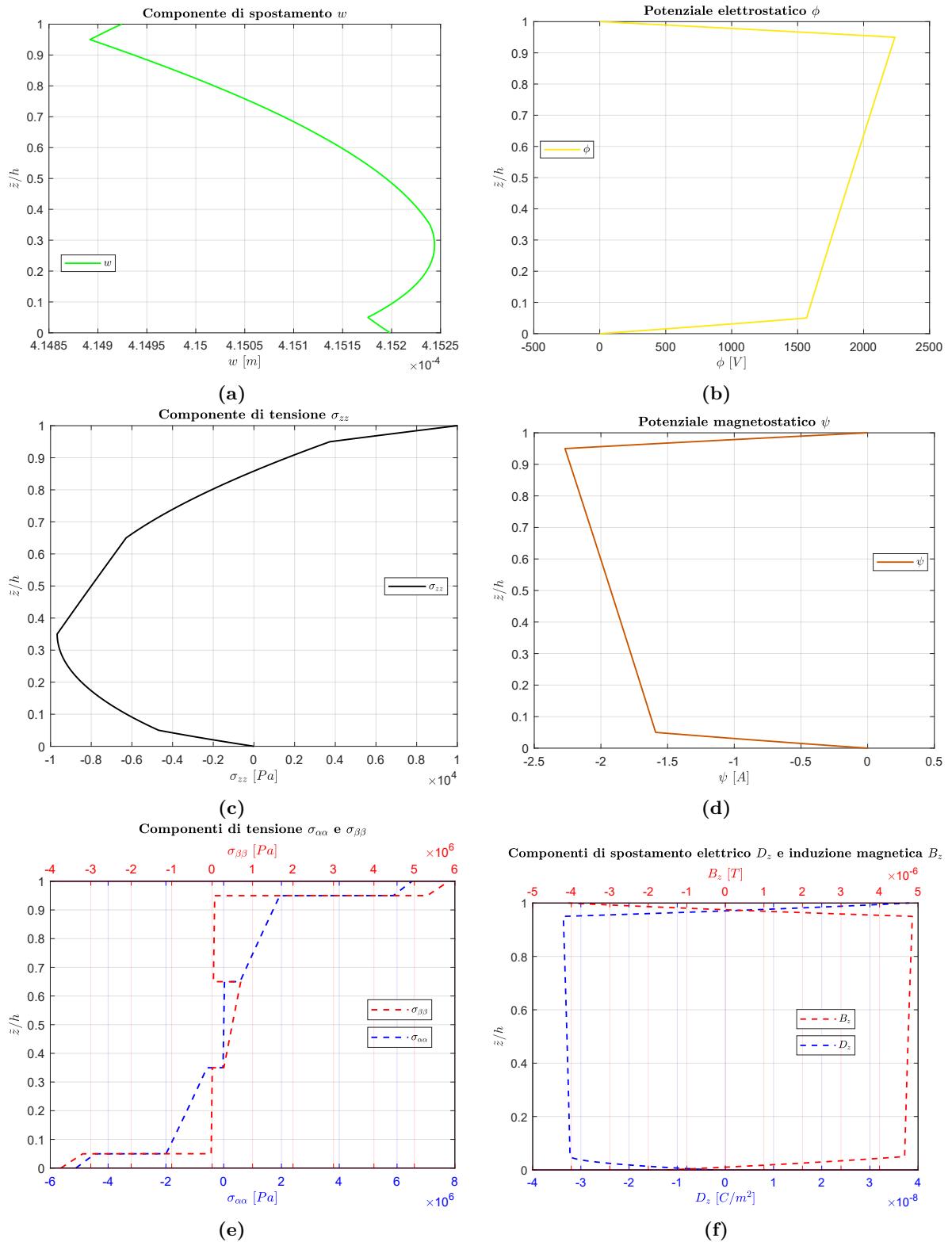
Nelle Figure 7.49 e 7.50, per la configurazione sensore, e 7.51 e 7.52, per la configurazione attuatore, sono riportati gli andamenti lungo la direzione dello spessore  $z$ , nei punti di massima

**Tabella 7.16:** Benchmark  $B3_{stat}$ , pannello di guscio cilindrico semplicemente appoggiato multistrato adaptive wood/ $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ /adaptive wood nella configurazione sensore:  $\Phi_{ext_t} = \Phi_{ext_b} = 0$  V,  $\Psi_{ext_t} = \Psi_{ext_b} = 0$  A,  $P_{z_t} = 10000$  Pa e  $P_{z_b} = 0$  Pa, con numeri di semionda  $(m, n) = (2, 1)$  al variare di  $R_\alpha/h$ . Variabili riportate nei punti di massima ampiezza nelle direzioni  $\alpha$  e  $\beta$  e in coordinata  $z$  variabile.

Configurazione sensore $B3_{stat}$					
$R_\alpha/h$	4	10	20	50	100
$w [10^{-6} \text{ m}]$ a $\tilde{z} = 0.5h$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	4.4442	15.162	50.485	415.19	2152.5
$\phi [10^2 \text{ V}]$ a $\tilde{z} = 0.75h$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	2.6988	5.6548	9.7397	20.857	31.962
$\psi [10^{-1} \text{ A}]$ a $\tilde{z} = 0.25h$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	-2.4956	-5.3758	-8.9466	-17.383	-22.341
$\sigma_{\alpha\alpha} [10^5 \text{ Pa}]$ a $\tilde{z} = h$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	1.3579	4.0054	12.390	65.165	202.66
$\sigma_{\beta\beta} [10^4 \text{ Pa}]$ a $\tilde{z} = 0$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	-8.0512	-29.086	-86.620	-374.02	-793.75
$\sigma_{zz} [10^2 \text{ Pa}]$ a $\tilde{z} = 0.5h$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	48.814	29.381	-3.4965	-79.956	-139.91
$\mathcal{D}_z [10^{-10} \text{ C/m}^2]$ a $\tilde{z} = 0.5h$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	-2.7147	-7.4205	-33.472	-328.90	-1757.3
$\mathcal{B}_z [10^{-8} \text{ T}]$ a $\tilde{z} = 0.5h$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	7.1739	13.966	51.128	474.28	2522.7



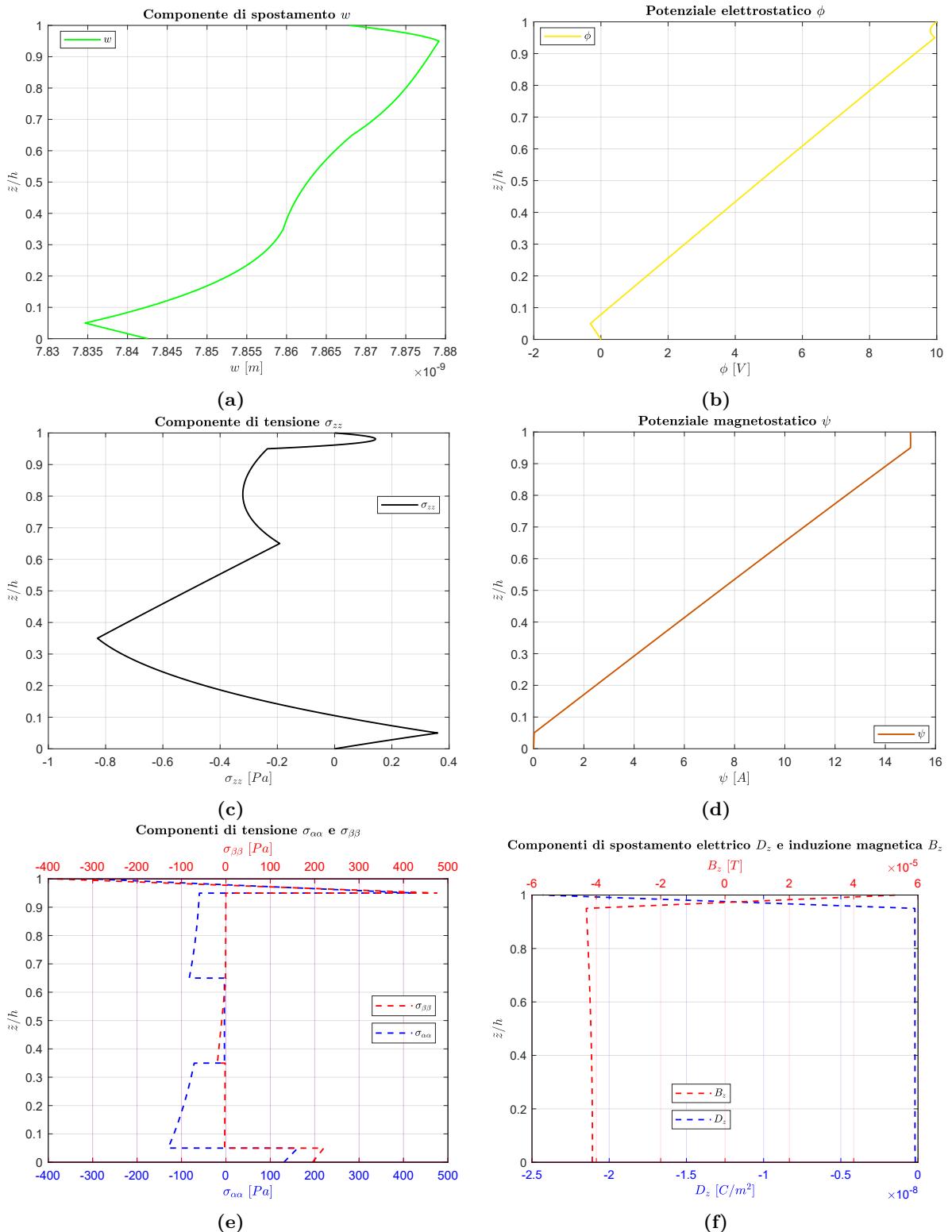
**Figura 7.45:** Benchmark  $B3_{stat}$ , pannello di guscio cilindrico semplicemente appoggiato multistrato adaptive wood/ $0^\circ/90^\circ/0^\circ/adaptive$  wood nella configurazione sensore:  $\Phi_{ext_t} = \Phi_{ext_b} = 0$  V,  $\Psi_{ext_t} = \Psi_{ext_b} = 0$  A,  $P_{z_t} = 10000$  Pa e  $P_{z_b} = 0$  Pa, con numeri di semionda  $(m, n) = (2, 1)$  e  $R_\alpha/h = 20$  fissato. Andamento lungo lo spessore delle variabili  $w$ ,  $\phi$ ,  $\psi$ ,  $\sigma_{\alpha\alpha}$ ,  $\sigma_{\beta\beta}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $D_z$  e  $B_z$  nei punti di massima ampiezza nelle direzioni  $\alpha$  e  $\beta$ .



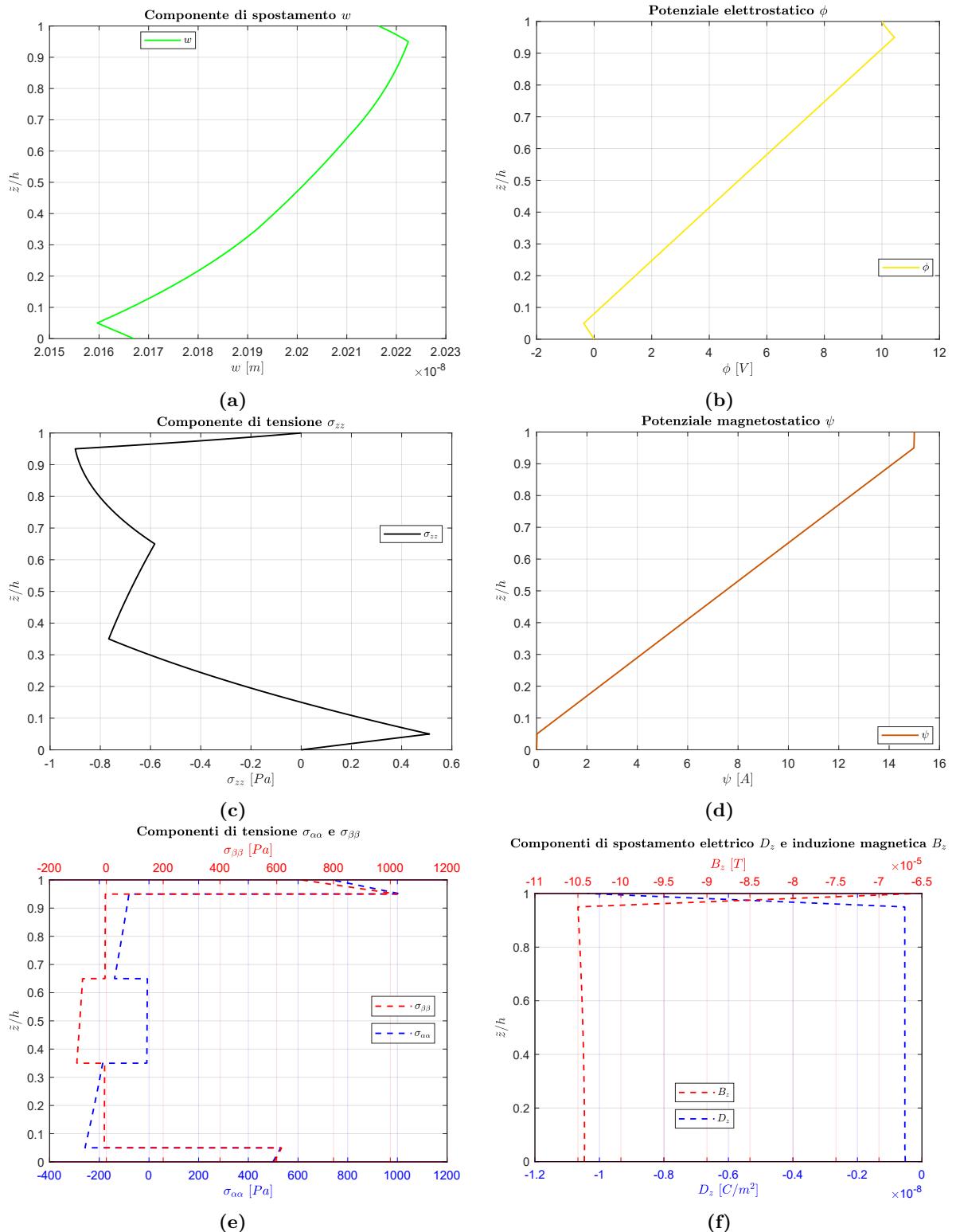
**Figura 7.46:** Benchmark  $B3_{stat}$ , pannello di guscio cilindrico semplicemente appoggiato multistrato adaptive wood/ $0^\circ/90^\circ/0^\circ/\text{adaptive wood}$  nella configurazione sensore:  $\Phi_{ext_t} = \Phi_{ext_b} = 0 \text{ V}$ ,  $\Psi_{ext_t} = \Psi_{ext_b} = 0 \text{ A}$ ,  $P_{zt} = 10000 \text{ Pa}$  e  $P_{zb} = 0 \text{ Pa}$ , con numeri di semionda  $(m, n) = (2, 1)$  e  $R_\alpha/h = 50$  fissato. Andamento lungo lo spessore delle variabili  $w$ ,  $\phi$ ,  $\psi$ ,  $\sigma_{\alpha\alpha}$ ,  $\sigma_{\beta\beta}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $D_z$  e  $B_z$  nei punti di massima ampiezza nelle direzioni  $\alpha$  e  $\beta$ .

**Tabella 7.17:** Benchmark  $B3_{stat}$ , pannello di guscio cilindrico semplicemente appoggiato multistrato adaptive wood/ $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ /adaptive wood nella configurazione attuatore:  $\Phi_{ext_t} = 10\text{ V}$ ,  $\Phi_{ext_b} = 0\text{ V}$ ,  $\Psi_{ext_t} = 15\text{ A}$ ,  $\Psi_{ext_b} = 0\text{ A}$  e  $P_{z_t} = P_{z_b} = 0\text{ Pa}$ , con numeri di semionda  $(m, n) = (2, 1)$  al variare di  $R_\alpha/h$ . Variabili riportate nei punti di massima ampiezza nelle direzioni  $\alpha$  e  $\beta$  e in coordinata  $z$  variabile.

Configurazione attuatore $B3_{stat}$					
$a/h$	4	10	20	50	100
$w [10^{-9}\text{ m}]$ a $\tilde{z} = 0.5h$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{stat}$	7.6147	6.7198	7.8626	20.202	40.900
$\phi [10^{-2}\text{ V}]$ a $\tilde{z} = 0.75h$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{stat}$	9.6196	636.88	761.82	802.98	806.26
$\psi [\text{A}]$ a $\tilde{z} = 0.25h$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{stat}$	2.4483	3.1711	3.2990	3.3362	3.3416
$\sigma_{\alpha\alpha} [10^2\text{ Pa}]$ a $\tilde{z} = h$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{stat}$	-24.894	-10.699	-3.0179	7.3701	17.677
$\sigma_{\beta\beta} [10^1\text{ Pa}]$ a $\tilde{z} = 0$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{stat}$	-10.127	3.7478	19.519	59.144	140.08
$\sigma_{zz} [10^{-1}\text{ Pa}]$ a $\tilde{z} = 0.5h$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{stat}$	76.848	5.9391	-5.1360	-6.8259	-4.1558
$\mathcal{D}_z [10^{-13}\text{ C/m}^2]$ a $\tilde{z} = 0.5h$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{stat}$	3.0697	-838.43	-2011.2	-5309.3	-10717
$\mathcal{B}_z [10^{-6}\text{ T}]$ a $\tilde{z} = 0.5h$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{stat}$	-7.9444	-20.705	-41.689	-104.43	-208.91



**Figura 7.47:** Benchmark  $B3_{stat}$ , pannello di guscio cilindrico semplicemente appoggiato multistrato adaptive wood/ $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ /adaptive wood nella configurazione attuatore:  $\Phi_{ext_t} = 10$  V,  $\Phi_{ext_b} = 0$  V,  $\Psi_{ext_t} = 15$  A,  $\Psi_{ext_b} = 0$  A e  $P_{z_t} = P_{z_b} = 0$  Pa, con numeri di semionda  $(m, n) = (2, 1)$  e  $R_\alpha/h = 20$  fissato. Andamento lungo lo spessore delle variabili  $w$ ,  $\phi$ ,  $\psi$ ,  $\sigma_{\alpha\alpha}$ ,  $\sigma_{\beta\beta}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $D_z$  e  $B_z$  nei punti di massima ampiezza nelle direzioni  $\alpha$  e  $\beta$ .

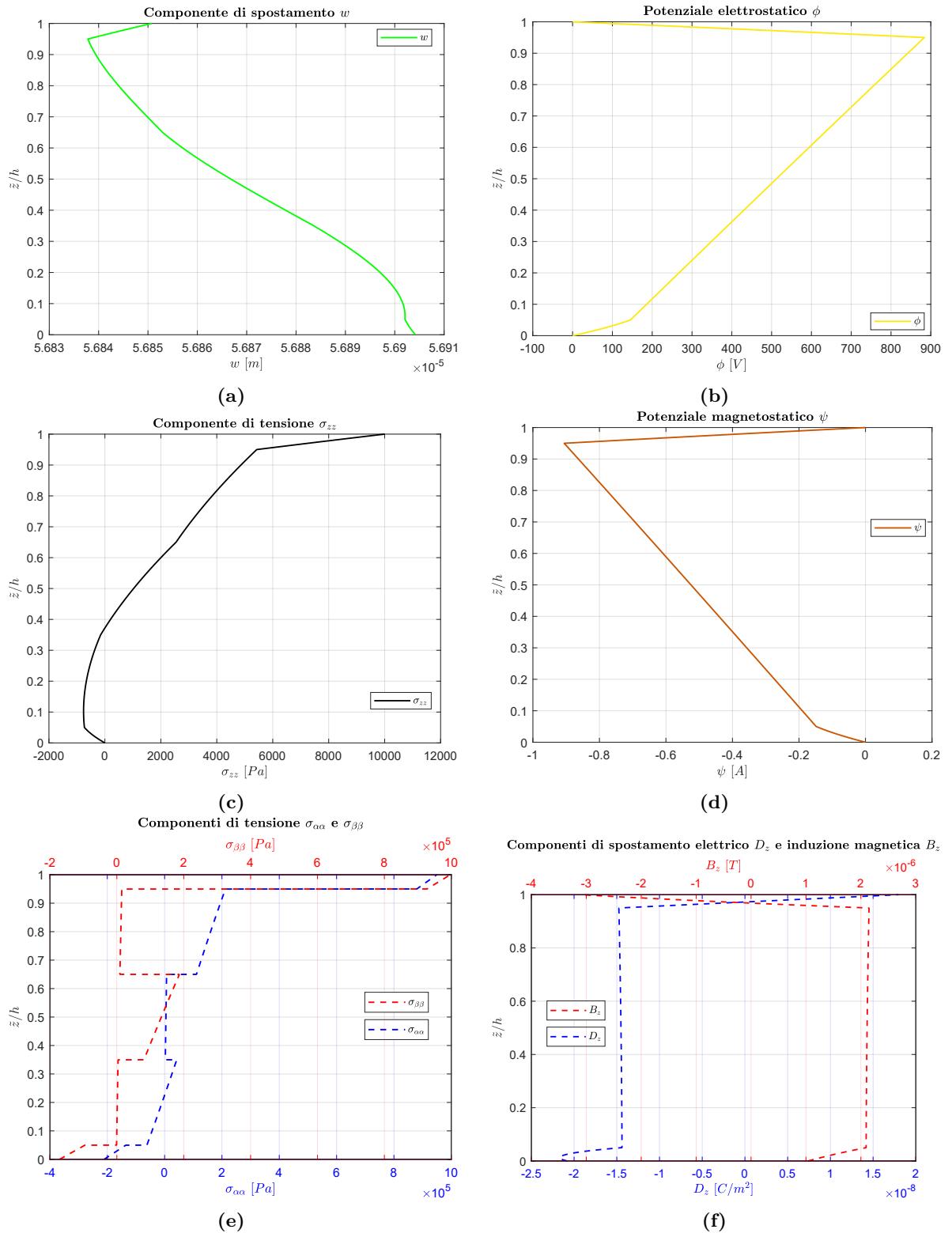


**Figura 7.48:** Benchmark  $B3_{stat}$ , pannello di guscio cilindrico semplicemente appoggiato multistrato adaptive wood/0°/90°/0°/adaptive wood nella configurazione attuatore:  $\Phi_{ext_t} = 10$  V,  $\Phi_{ext_b} = 0$  V,  $\Psi_{ext_t} = 15$  A,  $\Psi_{ext_b} = 0$  A e  $P_{z_t} = P_{z_b} = 0$  Pa, con numeri di semionda  $(m, n) = (2, 1)$  e  $R_\alpha/h = 50$  fissato. Andamento lungo lo spessore delle variabili  $w$ ,  $\phi$ ,  $\psi$ ,  $\sigma_{\alpha\alpha}$ ,  $\sigma_{\beta\beta}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $D_z$  e  $B_z$  nei punti di massima ampiezza nelle direzioni  $\alpha$  e  $\beta$ .

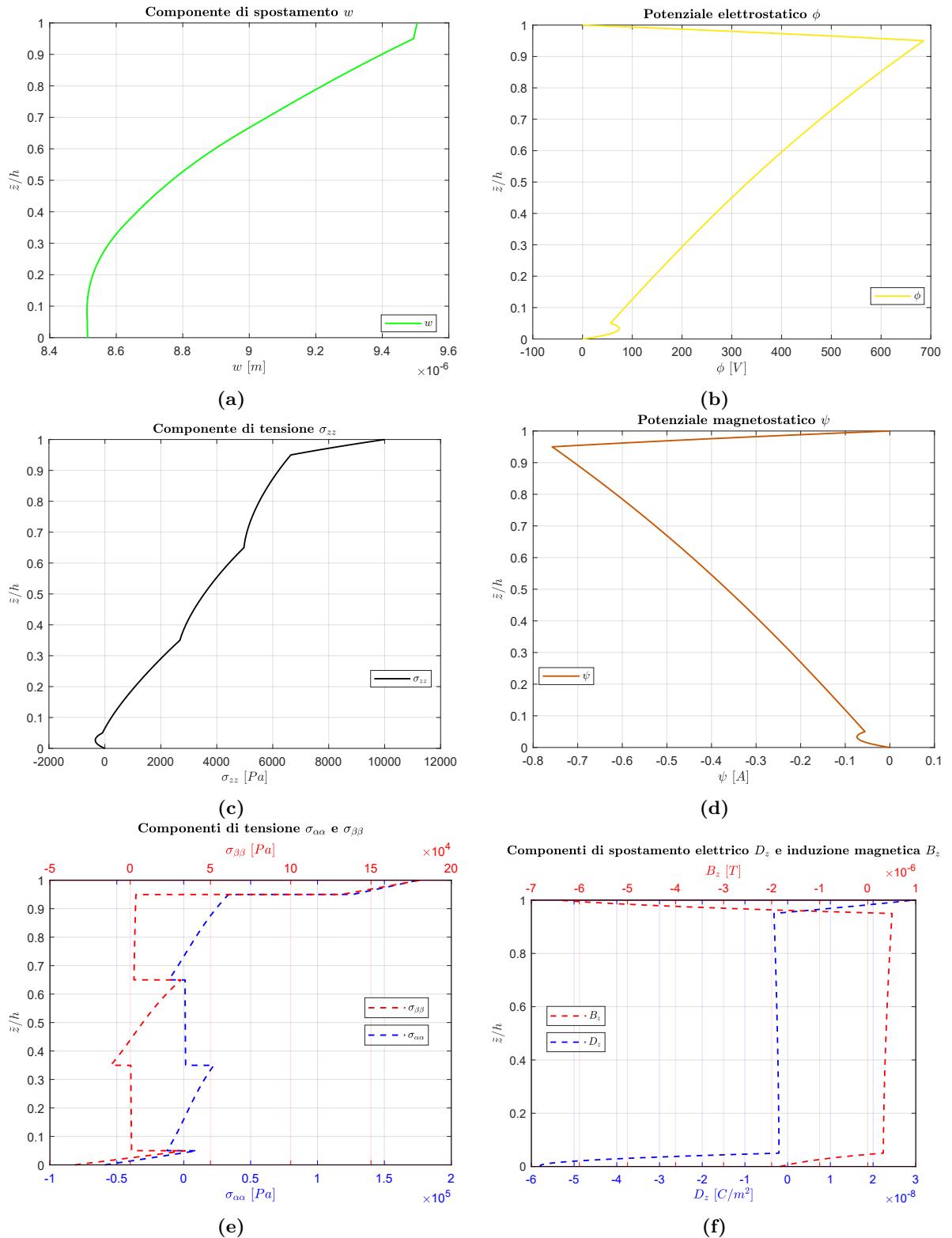
ampiezza nelle direzioni  $\alpha$  e  $\beta$ , delle variabili  $w$ ,  $\phi$ ,  $\psi$ ,  $\sigma_{\alpha\alpha}$ ,  $\sigma_{\beta\beta}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\mathcal{D}_z$  e  $\mathcal{B}_z$ . Anche con la doppia curvatura continuano ad essere rispettati i  $C_z^0$  requirements. Tutte le variabili hanno, comunque, la forma a zig-zag tipica delle strutture multistrato sia essa continua o discontinua. Inoltre, in entrambe le configurazioni, si nota la corretta imposizione delle condizioni al contorno di carico sulle grandezze  $\phi$ ,  $\psi$  e  $\sigma_{zz}$ . Il modello è, quindi, in grado di valutare correttamente le variabili lungo la direzione trasversale anche in presenza di curvatura in entrambe le direzioni  $\alpha$  e  $\beta$ .

**Tabella 7.18:** Benchmark  $B4_{\text{stat}}$ , pannello di guscio sferico semplicemente appoggiato multistrato adaptive wood/0°/90°/0°/adaptive wood nella configurazione sensore:  $\Phi_{ext_t} = \Phi_{ext_b} = 0 \text{ V}$ ,  $\Psi_{ext_t} = \Psi_{ext_b} = 0 \text{ A}$ ,  $P_{z_t} = 10000 \text{ Pa}$  e  $P_{z_b} = 0 \text{ Pa}$ , con numeri di semionda  $(m, n) = (1, 1)$  al variare di  $R_\alpha/h$ . Variabili riportate nei punti di massima ampiezza nelle direzioni  $\alpha$  e  $\beta$  e in coordinata  $z$  variabile.

Configurazione sensore $B4_{\text{stat}}$					
$R_\alpha/h$	4	10	20	50	100
$w [10^{-6} \text{ m}] \text{ a } \tilde{z} = 0.5h$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	8.7674	24.278	56.867	158.10	321.56
$\phi [10^2 \text{ V}] \text{ a } \tilde{z} = 0.75h$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	5.1648	7.1364	7.1799	5.1231	3.8623
$\psi [10^{-2} \text{ A}] \text{ a } \tilde{z} = 0.25h$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	-18.708	-38.307	-31.526	-4.4679	9.5492
$\sigma_{\alpha\alpha} [10^5 \text{ Pa}] \text{ a } \tilde{z} = h$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	1.7525	4.7537	9.4961	18.350	29.837
$\sigma_{\beta\beta} [10^4 \text{ Pa}] \text{ a } \tilde{z} = 0$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	-3.4409	-15.110	-17.136	39.607	158.49
$\sigma_{zz} [10^3 \text{ Pa}] \text{ a } \tilde{z} = 0.5h$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	3.5495	1.2531	1.0254	2.7637	3.8205
$\mathcal{D}_z [10^{-9} \text{ C/m}^2] \text{ a } \tilde{z} = 0.5h$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	-2.4077	-6.0405	-14.511	-41.577	-85.252
$\mathcal{B}_z [10^{-7} \text{ T}] \text{ a } \tilde{z} = 0.5h$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$	3.8066	8.9758	21.126	59.979	122.64



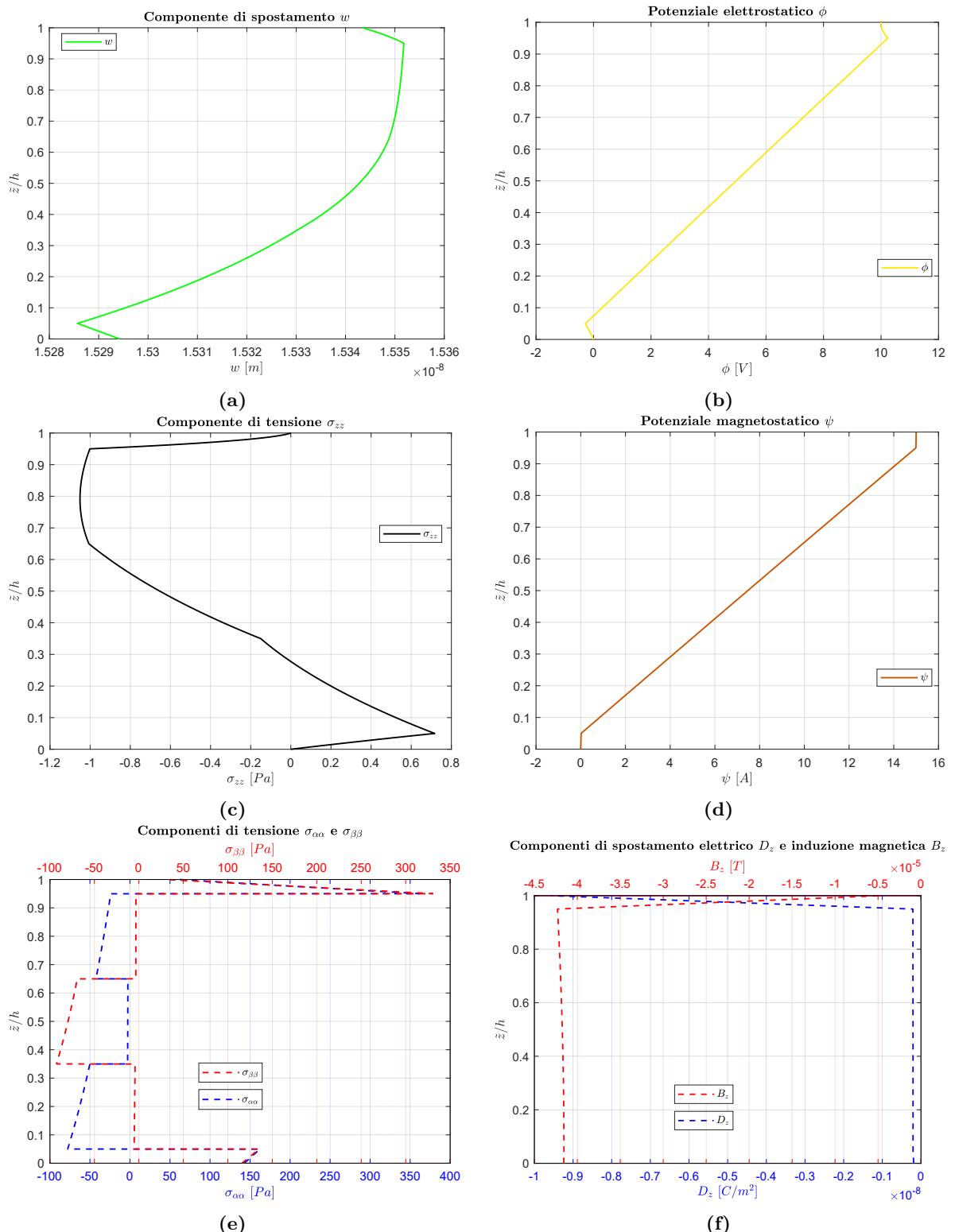
**Figura 7.49:** Benchmark  $B_{4stat}$ , pannello di guscio sferico semplicemente appoggiato multistrato adaptive wood/ $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ /adaptive wood nella configurazione sensore:  $\Phi_{ext_t} = \Phi_{ext_b} = 0 V$ ,  $\Psi_{ext_t} = \Psi_{ext_b} = 0 A$ ,  $P_{zt} = 10000 Pa$  e  $P_{zb} = 0 Pa$ , con numeri di semionda  $(m, n) = (1, 1)$  e  $R_\alpha/h = 20$  fissato. Andamento lungo lo spessore delle variabili  $w$ ,  $\phi$ ,  $\psi$ ,  $\sigma_{\alpha\alpha}$ ,  $\sigma_{\beta\beta}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $D_z$  e  $B_z$  nei punti di massima ampiezza nelle direzioni  $\alpha$  e  $\beta$ .



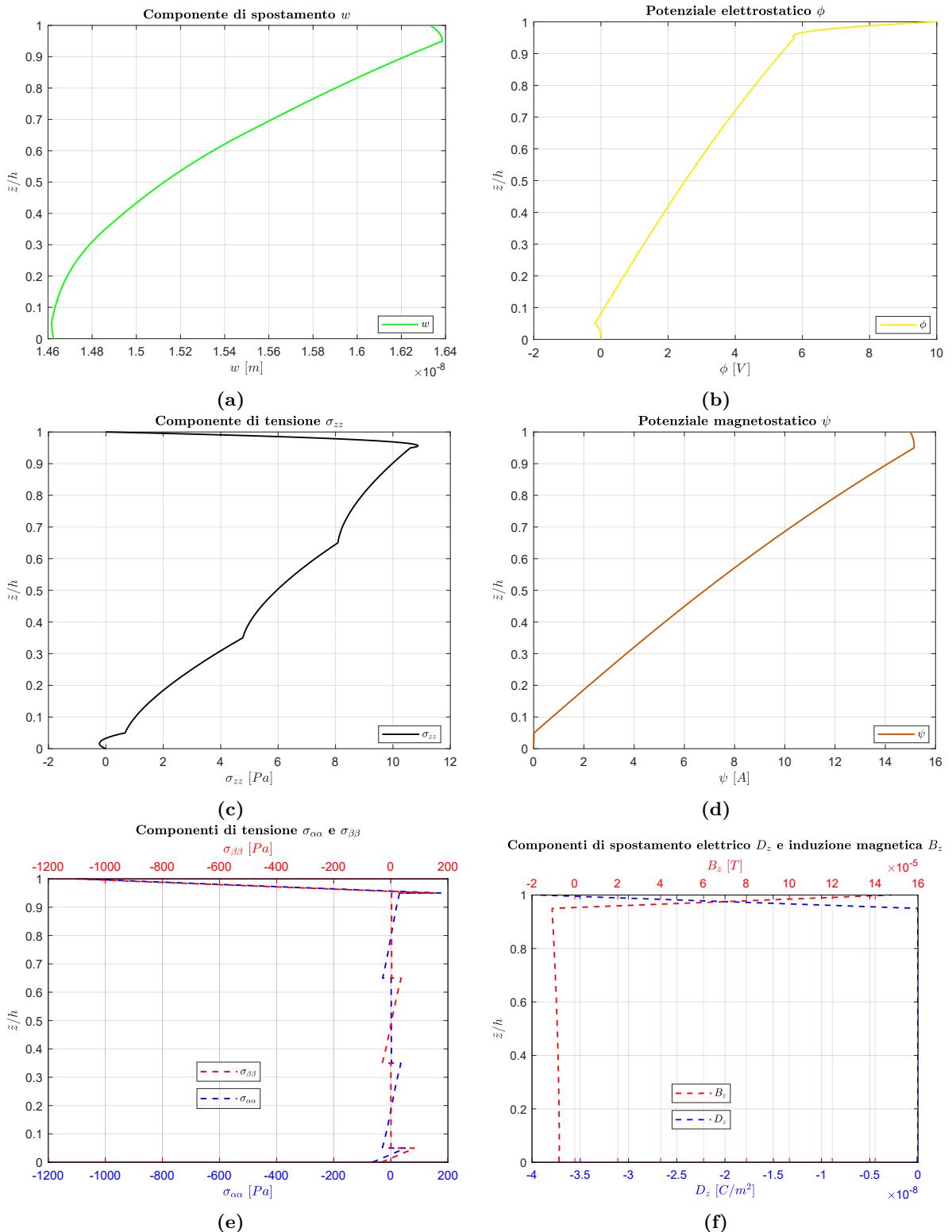
**Figura 7.50:** Benchmark  $B4_{stat}$ , pannello di guscio sferico semplicemente appoggiato multistrato adaptive wood/ $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ /adaptive wood nella configurazione sensore:  $\Phi_{ext_t} = \Phi_{ext_b} = 0$  V,  $\Psi_{ext_t} = \Psi_{ext_b} = 0$  A,  $P_{z_t} = 10000$  Pa e  $P_{z_b} = 0$  Pa, con numeri di semionda  $(m, n) = (1, 1)$  e  $R_\alpha/h = 4$  fissato. Andamento lungo lo spessore delle variabili  $w$ ,  $\phi$ ,  $\psi$ ,  $\sigma_{\alpha\alpha}$ ,  $\sigma_{\beta\beta}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $D_z$  e  $B_z$  nei punti di massima ampiezza nelle direzioni  $\alpha$  e  $\beta$ .

**Tabella 7.19:** Benchmark  $B4_{stat}$ , pannello di guscio sferico semplicemente appoggiato multistrato adaptive wood/ $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ /adaptive wood nella configurazione attuatore:  $\Phi_{ext_t} = 10\text{ V}$ ,  $\Phi_{ext_b} = 0\text{ V}$ ,  $\Psi_{ext_t} = 15\text{ A}$ ,  $\Psi_{ext_b} = 0\text{ A}$  e  $P_{z_t} = P_{z_b} = 0\text{ Pa}$ , con numeri di semionda  $(m, n) = (1, 1)$  al variare di  $R_\alpha/h$ . Variabili riportate nei punti di massima ampiezza nelle direzioni  $\alpha$  e  $\beta$  e in coordinata  $z$  variabile.

Configurazione attuatore $B4_{stat}$					
$a/h$	4	10	20	50	100
$w [10^{-9}\text{ m}]$ a $\tilde{z} = 0.5h$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{stat}$	15.126	14.374	15.343	13.203	5.1233
$\phi [\text{V}]$ a $\tilde{z} = 0.75h$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{stat}$	4.2150	7.3224	7.8812	7.9924	8.0014
$\psi [\text{A}]$ a $\tilde{z} = 0.25h$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{stat}$	2.9393	3.2739	3.3258	3.3405	3.3427
$\sigma_{\alpha\alpha} [10^1 \text{ Pa}]$ a $\tilde{z} = h$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{stat}$	-108.69	-38.863	6.1009	64.222	138.97
$\sigma_{\beta\beta} [10^1 \text{ Pa}]$ a $\tilde{z} = 0$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{stat}$	-3.2875	-1.7382	11.584	59.588	131.36
$\sigma_{zz} [10^{-2} \text{ Pa}]$ a $\tilde{z} = 0.5h$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{stat}$	595.08	-10.978	-65.288	-19.586	-4.4116
$\mathcal{D}_z [10^{-11} \text{ C/m}^2]$ a $\tilde{z} = 0.5h$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{stat}$	-2.2687	-9.5011	-20.666	-53.012	-106.41
$\mathcal{B}_z [10^{-6} \text{ T}]$ a $\tilde{z} = 0.5h$					
3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{stat}$	-8.2021	-20.821	-41.749	-104.45	-208.93



**Figura 7.51:** Benchmark  $B4_{stat}$ , pannello di guscio sferico semplicemente appoggiato multistrato adaptive wood/0°/90°/0°/adaptive wood nella configurazione attuatore:  $\Phi_{ext_t} = 10$  V,  $\Phi_{ext_b} = 0$  V,  $\Psi_{ext_t} = 15$  A,  $\Psi_{ext_b} = 0$  A e  $P_{z_t} = P_{z_b} = 0$  Pa, con numeri di semionda  $(m, n) = (1, 1)$  e  $R_\alpha/h = 20$  fissato. Andamento lungo lo spessore delle variabili  $w$ ,  $\phi$ ,  $\psi$ ,  $\sigma_{\alpha\alpha}$ ,  $\sigma_{\beta\beta}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $D_z$  e  $B_z$  nei punti di massima ampiezza nelle direzioni  $\alpha$  e  $\beta$ .



**Figura 7.52:** Benchmark  $B_{4stat}$ , pannello di guscio sferico semplicemente appoggiato multistrato adaptive wood/0°/90°/0°/adaptive wood nella configurazione attuatore:  $\Phi_{ext_t} = 10 \text{ V}$ ,  $\Phi_{ext_b} = 0 \text{ V}$ ,  $\Psi_{ext_t} = 15 \text{ A}$ ,  $\Psi_{ext_b} = 0 \text{ A}$  e  $P_{z_t} = P_{z_b} = 0 \text{ Pa}$ , con numeri di semionda  $(m, n) = (1, 1)$  e  $R_\alpha/h = 4$  fissato. Andamento lungo lo spessore delle variabili  $w$ ,  $\phi$ ,  $\psi$ ,  $\sigma_{\alpha\alpha}$ ,  $\sigma_{\beta\beta}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $D_z$  e  $B_z$  nei punti di massima ampiezza nelle direzioni  $\alpha$  e  $\beta$ .

# Capitolo 8

## Conclusioni

Alla luce dei risultati ottenuti nei capitoli 6 e 7, si può affermare che i modelli esatti 3D layerwise 3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{din}}$  e 3D- $u$ - $\phi$ - $\psi_{\text{stat}}$  permettono un'accurata descrizione dei campi fisici considerati lungo la direzione trasversale dello spessore, permettendo di cogliere anche gli effetti dovuti all'accoppiamento tra di essi e la corretta imposizione delle condizioni di carico al contorno. In particolare, sono garantite le condizioni di equilibrio e congruenza della struttura; infatti, tutte le variabili interessate da esse soddisfano i  $C_z^0$  requirements lungo la direzione  $z$ , ovvero presentano la continuità interlaminare, essendo continue dal bottom al top della struttura, con andamento dalla tipica forma a zig-zag dovuto all'anisotropia trasversale del multistrato. Le variabili secondarie non trasversali, che quindi agiscono nelle direzioni  $\alpha$  e  $\beta$ , benché non necessariamente continue per ragioni di equilibrio, presentano anch'esse un andamento a zig-zag lungo lo spessore per via delle differenti proprietà dei materiali degli strati. Anche le variabili primarie risultano con la forma a zig-zag, ma non sono necessariamente continue in quanto sono definite come derivate delle variabili fondamentali, le cui derivate prime non sono sempre continue nelle interfacce tra gli strati.

Il modello presenta una soluzione in forma chiusa; dunque, i suoi possibili impieghi per applicazioni ingegneristiche sono limitati per via delle restrizioni sulle configurazioni considerabili necessarie affinché la soluzione esatta esista. L'importanza di questi modelli non è minore, in quanto costituiscono uno strumento fondamentale per ottenere dei risultati, come quelli dei nuovi benchmark proposti nel capitolo 7, con cui si potranno validare, per la stessa tipologia di problemi, nuovi modelli 3D o 2D numerici e/o analitici. Lo sviluppo di un modello numerico approssimato permetterebbe di superare le restrizioni del modello esatto ed essere, dunque, applicato in attività di progettazione.

### 8.1 Sviluppi futuri

Per quanto riguarda i modelli qui sviluppati, in futuro, si potranno approfondire alcune casistiche e valutare meglio determinate dipendenze, che in questa tesi non si sono analizzate. Per prima cosa si potrebbero variare i materiali considerati che costituiscono il multistrato e la loro sequenza di laminazione. Nel presente elaborato, infatti, i nuovi benchmark proposti usano sempre gli stessi materiali e laminazione. In riferimento alla configurazione sensore nelle analisi statiche, rimangono da indagare configurazioni più complesse di carico del multistrato, in cui sulle superfici esterne superiore e inferiore, oltre a carichi nella direzione trasversale  $z$ , si hanno anche carichi di taglio agenti nelle direzioni  $\alpha$  e  $\beta$ . Un ulteriore sviluppo molto interessante, riguarda la valutazione di strutture in materiali piezomagnetici e piezoelettrici FGM, ovvero *Functionally Graded Material*, materiali in cui le proprietà caratteristiche variano in modo continuo, nello specifico lungo la direzione  $z$  dello spessore seguendo una legge che

dipende da essa. Questi materiali permetterebbero, così, di rimuovere tutte le discontinuità interlaminari che si hanno in alcune variabili secondarie dei multistrato, rimuovendo il rischio di delaminazione, e, più in generale, di rendere meno repentine le variazioni di pendenza degli andamenti delle variabili, rendendo le forme a zig-zag meno spigolose.

Un’ulteriore novità, per avere analisi sempre più esaurienti, sarebbe quella di ampliare i suddetti modelli, considerando anche il campo termico e i suoi accoppiamenti. Si otterrebbero, dunque, strumenti per analizzare problemi multicampo in cui si considerano il campo meccanico elastico, il campo termico, il campo elettrostatico e quello magnetostatico con le loro interazioni.

Infine, l’aspetto, forse, più interessante, riguarda l’eventuale sviluppo e implementazione di modelli 3D layerwise di soluzione semi-approssimata numerica che condividano in parte il metodo di soluzione esatta dei modelli qui proposti. Visti i buoni riscontri dati dall’utilizzo del metodo della matrice esponenziale, si potrebbe pensare a dei modelli in cui quest’ultimo viene mantenuto per risolvere il problema nella direzione  $z$ , quindi in modo esatto, mentre per risolverlo nella direzione  $\alpha$  e  $\beta$  si potrebbe usare un metodo di soluzione approssimata, come ad esempio il FEM, ovvero il *Finite Element Method*. Ciò permetterebbe di rimuovere le restrizioni sulle configurazioni delle strutture guscio analizzabili ed ottenere uno strumento valido per applicazioni di progettazione.

# Bibliografia

- [1] Salvatore Brischetto. «Classical and mixed multilayered plate/shell models for multifield problems analysis». Tesi di dottorato. Politecnico di Torino, 2009. Rel. Erasmo Carrera, Olivier Polit.
- [2] Xinhua Zhu. *Piezoelectric ceramic materials processing, properties, characterization and applications*. 1st ed. Materials science and technologies. Hauppauge, N.Y.: Nova Science Publishers, 2010. ISBN: 1-61668-814-9.
- [3] Bernard Jaffe et al. *Piezoelectric ceramics*. Non-metallic solid: a series of monographs; v. 3. London, UK: Academic Press, 1971. ISBN: 9780323155687.
- [4] G. A. Maugin. *Continuum mechanics of electromagnetic solids*. North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics; Volume 33. Amsterdam, Netherlands: Elsevier Science Publishers B. V., 1988. ISBN: 1-4832-9010-7.
- [5] Pietro Galizia et al. «Novel magnetodielectric cobalt ferrite-titania-silica ceramic composites with tunable dielectric properties». In: *Ceramics international* 42.15 (2016), pp. 16650–16654.
- [6] Pietro Galizia et al. «PZT-cobalt ferrite particulate composites: Densification and lead loss controlled by quite-fast sintering». In: *Journal of the European Ceramic Society* 37.1 (2017), pp. 161–168.
- [7] F. Craciun et al. «Novel multiferroic  $(\text{Pb}_{1-3x}/2\text{Nd}_x)(\text{Ti}_{0.98-y}\text{Fe}_y\text{Mn}_{0.02})\text{O}_3$  ceramics with coexisting ferroelectricity and ferromagnetism at ambient temperature». In: *Materials & design* 110 (2016), pp. 693–704.
- [8] Francesco Tornabene. *Hygro-Thermo-Magneto-Electro-Elastic Theory of Anisotropic Doubly-Curved Shells. Higher-Order Strong and Weak Formulations for Arbitrarily Shaped Shell Structures*. Bologna, Italia: Società Editrice Esculapio, 2023. Cap. 2, 5. ISBN: 978-8-893-85406-1.
- [9] Watanachai Smittakorn e Paul R. Heyliger. «An Adaptive Wood Composite: Theory». In: *Wood and Fiber Science* 33 (2001), pp. 595–608.
- [10] Watanachai Smittakorn e Paul R. Heyliger. «Adaptive Wood Composite: Experiment». In: *Journal of structural engineering* 129.5 (2003), pp. 699–702.
- [11] A. W. Leissa. *Vibration of Shells*. NASA SP-288. Washington, USA, 1973.
- [12] W. Soedel. *Vibration of Shells and Plates*. New York, USA: Marcel Dekker Inc., 2005.
- [13] Yuriy Povstenko. *Fractional Thermoelasticity*. 278 voll. Solid Mechanics and Its Applications. Cham, Switzerland: Springer International Publishing Switzerland, 2015. ISBN: 978-3-031-64586-0.
- [14] E. Carrera et al. «Refined Multilayered Plate Elements for Coupled Magneto-Electro-Elastic Analysis». In: *Multidiscipline Modeling in Materials and Structures* 5 (2009), pp. 119–138.

- 
- [15] Salvatore Brischetto. «An exact 3D solution for free vibrations of multilayered cross-ply composite and sandwich plates and shells». In: *International Journal of Applied Mechanics* 6.1450076 (6 2014).
  - [16] Francesco Tornabene. *Meccanica delle Strutture a Guscio in Materiale Composito*. Bologna, Italia: Società Editrice Esculapio, 2012.
  - [17] F. B. Hildebrand et al. *Notes on the Foundations of the Theory of Small Displacements of Orthotropic Shells*. NACA Technical Note No. 1833. Washington, USA, 1949.
  - [18] Salvatore Brischetto e Domenico Cesare. «Three-dimensional vibration analysis of multi-layered composite and functionally graded piezoelectric plates and shells». In: *Composite Structures* 346.118413 (2024).
  - [19] Salvatore Brischetto e Domenico Cesare. «A 3D shell model for static and free vibration analysis of multilayered magneto-elastic structures». In: *Thin-Walled Structures* 206.112620 (2025).
  - [20] Salvatore Brischetto e Domenico Cesare. «3D electro-elastic static analysis of advanced plates and shells». In: *International Journal of Mechanical Sciences* 280.109620 (2024).
  - [21] S. Brischetto e E. Carrera. «Advanced mixed theories for bending analysis of functionally graded plates». In: *Computers and Structures* 88 (2010), pp. 1474–1483.
  - [22] W. E. Boyce e R. C. DiPrima. *Elementary differential equations and boundary value problems*. New York, USA: John Wiley & Sons, Inc., 2001.
  - [23] *Systems of Differential Equations*. Risorsa di libero accesso. URL: <https://www.math.utah.edu/~gustafso/2250systems-de.pdf> (visitato il giorno 11/02/2025).
  - [24] C. Moler e C Van Loan. «Nineteen Dubious Ways to Compute the Exponential of a Matrix, Twenty-Five Years Later». In: *SIAM Review* 45.1 (2003), pp. 3–49.
  - [25] J.C. Monge e J.L. Mantari. «Three dimensional numerical solution for the bending study of magneto-piezo-elastic spherical and cylindrical shells». In: *Engineering Structures* 238.112158 (2021).