

# POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale



Tesi di Laurea Magistrale

## Sviluppo di modelli per l'interazione fluido-struttura di strutture aeronautiche mediante FEM e CFD

Relatori

Prof. Marco PETROLO

Prof. Matteo FILIPPI

Dott. Rodolfo AZZARA

Candidato

Nicolò MARINI

Aprile 2025



# Sommario

Lo studio dei fenomeni aeroelastici ricopre un ruolo fondamentale nella progettazione aeronautica. I velivoli moderni sono caratterizzati da superfici portanti con un elevato allungamento, che sono soggette più facilmente a fenomeni d'interazione tra fluido e struttura potenzialmente catastrofici. Nel settore dell'aviazione si evidenzia un uso sempre maggiore dei materiali compositi che permettono attraverso il tailoring aeroelastico di migliorare la risposta aeroelastica delle strutture, evitando o ritardando l'insorgenza di fenomeni d'instabilità. I costi delle campagne sperimentali sono elevati; per questo motivo sono necessari modelli accurati e poco onerosi dal punto di vista computazionale, che permettano di predire il comportamento aeroelastico delle strutture in fase di progettazione. Lo scopo di questa tesi è sviluppare una formulazione aeroelastica basata su modelli aerodinamici accurati tramite l'uso della Computational Fluid Dynamics (CFD), e su modelli strutturali di ordine elevato. I modelli strutturali utilizzati si basano sulla Carrera Unified Formulation (CUF) che permette di generare agevolmente modelli raffinati di ordine diverso. Nell'ambito di questo lavoro sono stati usati modelli unidimensionali (1D) e modelli bidimensionali (2D). Come funzioni di espansione per la sezione trasversale della trave o per lo spessore della piastra, sono stati adottati sia polinomi di Taylor che polinomi interpolanti di Lagrange. Le analisi CFD sono state condotte con SU2, una raccolta di software open-source per l'analisi di equazioni alle derivate parziali scritti in C++ e Python. Per legare il modello aerodinamico a quello strutturale è stato usato un algoritmo basato sul metodo Infinite Plate Spline (IPS). L'algoritmo d'interazione fluido-struttura permette di trasferire i carichi aerodinamici e gli spostamenti della struttura da una griglia computazionale all'altra. Il contenuto dell'elaborato relativo ai risultati numerici è composto da una prima parte di validazione strutturale. Sono stati presi in esame modelli raffinati 1D con diverse geometrie di sezione trasversale e condizioni di vincolo, e modelli raffinati 2D. Sono state condotte sia analisi statiche che analisi dinamiche di risposta libera, per materiale isotropo e composito. La seconda parte riguarda un esempio di calibrazione aerodinamica per un'ala con basso allungamento, e contiene considerazioni sulla dimensione del dominio di calcolo e sul raffinamento della griglia computazionale per le analisi CFD. La terza parte riguarda le analisi

aeroelastiche effettuate nell'ipotesi di piccole deformazioni della struttura. Viene studiata un'ala con sezione rettangolare facendo uso di modelli strutturali raffinati 1D e 2D. I risultati sono confrontati con quelli ottenuti con un metodo classico per il calcolo dei carichi aerodinamici, il Vortex Lattice Method (VLM). Sono stati effettuati degli studi sul tailoring aeroelastico per un materiale composito, ed è stato valutato l'effetto combinato della freccia alare e della laminazione. L'ultima parte riguarda gli effetti della non linearità geometrica sul comportamento aeroelastico delle strutture ad elevato allungamento. I risultati ottenuti hanno mostrato le capacità della presente formulazione aeroelastica di garantire un livello di accuratezza maggiore rispetto a modelli basati sul VLM. Questa differenza viene maggiormente accentuata quando si studiano gli effetti della laminazione, della freccia alare e quando sono presenti non linearità nel modello.

# Indice

<b>Elenco delle tabelle</b>	VI
<b>Elenco delle figure</b>	X
<b>1 Introduzione</b>	1
1.1 Aeroelasticità . . . . .	1
1.1.1 Cenni storici . . . . .	2
1.1.2 Progettazione di aeromobili moderni . . . . .	3
1.2 Modello aeroelastico . . . . .	5
<b>2 Modello strutturale</b>	7
2.1 Concetti generali . . . . .	7
2.2 Carrera Unified Formulation . . . . .	9
2.2.1 Espansione di Taylor (TE) - Modello 1D . . . . .	10
2.2.2 Espansione di Lagrange (LE) - Modello 1D . . . . .	11
2.3 Formulazione agli elementi finiti . . . . .	14
2.3.1 Matrice di rigidezza . . . . .	16
2.3.2 Matrice di massa . . . . .	17
2.3.3 Vettore dei carichi nodali . . . . .	18
2.3.4 Analisi statica . . . . .	19
2.3.5 Analisi delle vibrazioni libere . . . . .	20
2.4 Non linearità geometrica . . . . .	20
2.4.1 Richiami . . . . .	21
2.4.2 Equazioni di governo non lineari . . . . .	22
2.4.3 Metodo di Newton-Raphson . . . . .	22
2.4.4 Matrici di rigidezza . . . . .	24
<b>3 Modello aerodinamico</b>	27
3.1 Equazioni della Meccanica dei Fluidi . . . . .	27
3.1.1 Bilancio della massa . . . . .	29
3.1.2 Bilancio della quantità di moto . . . . .	29

3.1.3	Bilancio dell'energia . . . . .	31
3.2	Equazioni di Navier-Stokes . . . . .	31
3.3	Turbolenza ed equazioni RANS . . . . .	32
3.4	SU2 . . . . .	35
3.4.1	Griglia computazionale e requisiti di risoluzione . . . . .	37
<b>4</b>	<b>Interazione fluido-struttura</b>	<b>40</b>
4.1	Infinite Plate Spline . . . . .	40
4.2	Soluzione del problema aeroelastico . . . . .	46
<b>5</b>	<b>Risultati numerici</b>	<b>48</b>
5.1	Analisi strutturali . . . . .	48
5.1.1	Analisi statica e dinamica di una trave isotropa . . . . .	48
5.1.2	Analisi statica e dinamica di una piastra isotropa . . . . .	57
5.1.3	Analisi statica di una piastra in materiale composito . . . . .	63
5.1.4	Analisi statica non lineare di una trave isotropa . . . . .	66
5.2	Calibrazione aerodinamica . . . . .	67
5.3	Analisi aeroelastiche lineari . . . . .	70
5.3.1	Ala rettangolare isotropa - Modello trave . . . . .	70
5.3.2	Ala rettangolare in composito - Modello trave . . . . .	76
5.3.3	Ala rettangolare isotropa - Modello piastra . . . . .	80
5.3.4	Ala con angolo di freccia - Modello piastra . . . . .	82
5.4	Analisi aeroelastiche non lineari . . . . .	89
5.4.1	Ala rettangolare - Modello trave . . . . .	90
5.4.2	Effetto della deformabilità della struttura sui coefficienti aerodinamici - Modello trave . . . . .	99
<b>6</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>104</b>
<b>A</b>	<b>Componenti del nucleo fondamentale</b>	<b>106</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>108</b>

# Elenco delle tabelle

2.1	Coordinate naturali dei nodi dell'elemento della sezione trasversale L4.	12
2.2	Coordinate naturali dei nodi dell'elemento della sezione trasversale L9.	14
5.1	Proprietà del materiale - Trave isotropa.	49
5.2	Effetto del numero di elementi su $u_z$ per diverse teorie cinematiche. Elementi trave B4. Trave isotropa a sezione quadrata. $L/h = 100$ .	51
5.3	Effetto del numero di elementi su $u_z$ per diverse teorie cinematiche. Elementi trave B4. Trave isotropa a sezione quadrata. $L/h = 10$ .	51
5.4	$u_z$ nel punto di applicazione del carico per diverse teorie cinematiche. Trave isotropa a sezione quadrata cava. Mesh 20 B4.	53
5.5	Effetto della distribuzione di elementi sulla sezione trasversale sullo spostamento nei punti di applicazione dei carichi. Trave isotropa a sezione quadrata cava. Mesh 20 B4.	54
5.6	Effetto del numero di elementi su $f_1$ per diverse teorie cinematiche. Trave isotropa a sezione quadrata. $L/h = 100$ .	55
5.7	Effetto del numero di elementi su $f_1$ per diverse teorie cinematiche. Trave isotropa a sezione quadrata. $L/h = 10$ .	55
5.8	Effetto del numero di elementi su $f_2$ e $f_3$ per diverse teorie cinematiche. Trave isotropa a sezione quadrata. $L/h = 100$ .	56
5.9	Effetto del numero di elementi su $f_2$ e $f_3$ per diverse teorie cinematiche. Trave isotropa a sezione quadrata. $L/h = 10$ .	56
5.10	Proprietà del materiale - Piastra isotropa.	58
5.11	Piastra isotropa. Analisi di convergenza sul numero di elementi per i modelli TE4 e LE3. Spostamento trasversale $w = w(a, b/2, 0)$ , tensione assiale $\sigma_{xx} = \sigma_{xx}(0, b/2, h/2)$ .	59
5.12	Piastra isotropa. Spostamento trasversale $w$ , tensione assiale $\sigma_{xx}$ e numero di gradi di libertà per diversi modelli piastra. Confronto con modelli trave presenti in letteratura [51].	59
5.13	Piastra isotropa. Frequenze naturali [Hz] per diversi modelli piastra. Confronto con modelli trave presenti in letteratura [51].	61

5.14	Piastra isotropa. Modi propri e frequenze naturali [Hz] per modello LE3. Confronto con modello trave 2 L9 in letteratura [51]. . . . .	61
5.15	Proprietà dei materiali usati nella piastra multistrato. . . . .	63
5.16	Piastra multistrato. Analisi di convergenza sul numero di elementi per il modello TE4. Spostamento trasversale $w = -10^2 \cdot w(a, b/2, h/2)$ , tensione assiale $\sigma_{xx} = \sigma_{xx}(a/2, b/2, h/2)$ e tensione di taglio trasversale $\sigma_{xz} = \sigma_{xz}(a/2, b/2, 0)$ . Confronto con analisi di convergenza presente in letteratura. . . . .	64
5.17	Piastra multistrato. Spostamento trasversale $w = -10^2 \cdot w(a, b/2, h/2)$ , tensione assiale $\sigma_{xx} = \sigma_{xx}(a/2, b/2, h/2)$ , tensione di taglio trasversale $\sigma_{xz} = \sigma_{xz}(a/2, b/2, 0)$ e numero di gradi di libertà per diversi modelli piastra. Confronto con diversi modelli trave e piastra in letteratura. . . . .	65
5.18	Trave isotropa a sezione quadrata. Analisi di convergenza sul numero di elementi per i modelli TE4 e 1 L9. Spostamento verticale normalizzato $u_z/L$ . . . . .	66
5.19	Proprietà del materiale isotropo - Ala rettangolare. . . . .	70
5.20	Effetto della velocità della corrente a monte $V$ [m/s] sullo spostamento verticale al tip $u_{z-LE}$ [mm] per diverse teorie cinematiche. Confronto analisi SSA e SAA. $\alpha = 1^\circ$ . Ala rettangolare isotropa. Mesh strutturale 20 B4. . . . .	71
5.21	Confronto risultati modello TE4, Mesh 20 B4, con la letteratura. Effetto della velocità della corrente a monte $V$ [m/s] sullo spostamento verticale al tip $u_{z-LE}$ [mm]. $\alpha = 1^\circ$ . Ala rettangolare isotropa. (* indica una soluzione ottenuta con il VLM). . . . .	74
5.22	Differenze [%] risultati modello TE4, Mesh 20 B4, con la letteratura. Effetto della velocità della corrente a monte $V$ [m/s] sullo spostamento verticale al tip $u_{z-LE}$ [mm]. $\alpha = 1^\circ$ . Ala rettangolare isotropa. (* indica una soluzione ottenuta con il VLM). . . . .	74
5.23	Effetto della velocità della corrente a monte $V$ sulla rotazione della sezione al tip $\psi_{TIP}$ per diverse teorie cinematiche. $\alpha = 1^\circ$ . Ala rettangolare isotropa. Mesh strutturale 20 B4. (* indica una soluzione ottenuta con il VLM). . . . .	75
5.24	Proprietà del materiale ortotropo - Ala rettangolare. . . . .	77
5.25	Effetto dell'angolo di laminazione $\theta$ sulla rotazione della sezione al tip $\psi_{TIP}$ . SAA. $V = 10$ m/s. $\alpha = 1^\circ$ . Ala rettangolare in composito. Modello strutturale TE4. Mesh strutturale 20 B4. . . . .	77
5.26	Effetto della velocità della corrente a monte $V$ [m/s] sullo spostamento verticale al tip $u_{z-LE}$ [mm] per diverse teorie cinematiche. Confronto analisi SSA e SAA. $\alpha = 1^\circ$ . Ala rettangolare isotropa. Mesh strutturale 4x20 Q9. . . . .	80

5.27	Confronto risultati modello TE4, Mesh 20 B4, e modello TE4, Mesh 4x20 Q9, con la letteratura. Effetto della velocità della corrente a monte $V$ [m/s] sullo spostamento verticale al tip $u_{z-LE}$ [mm]. $\alpha = 1^\circ$ . Ala rettangolare isotropa. (* indica una soluzione ottenuta con il VLM). . . . .	80
5.28	Differenze [%] risultati modello TE4, Mesh 4x20 Q9, con il modello TE4, Mesh 20 B4, e con la letteratura. Effetto della velocità della corrente a monte $V$ [m/s] sullo spostamento verticale al tip $u_{z-LE}$ [mm]. $\alpha = 1^\circ$ . Ala rettangolare isotropa. (* indica una soluzione ottenuta con il VLM). . . . .	81
5.29	Effetto della velocità della corrente a monte $V$ sulla rotazione della sezione al tip $\psi_{TIP}$ per diverse teorie cinematiche. $\alpha = 1^\circ$ . Ala rettangolare isotropa. Mesh strutturale 4x20 Q9. (* indica una soluzione ottenuta con il VLM). . . . .	81
5.30	Effetto della velocità della corrente a monte $V$ [m/s] sullo spostamento verticale al tip $u_{z-LE}$ [mm] per diverse teorie cinematiche. Confronto tra diversi angoli di freccia $\Lambda$ . $\alpha = 1^\circ$ . Ala isotropa. Mesh strutturale 4x20 Q9. . . . .	83
5.31	Effetto della velocità della corrente a monte $V$ sulla rotazione della sezione al tip $\psi_{TIP}$ per diverse teorie cinematiche. Confronto tra diversi angoli di freccia $\Lambda$ . $\alpha = 1^\circ$ . Ala isotropa. Mesh strutturale 4x20 Q9. . . . .	84
5.32	Effetto della velocità della corrente a monte $V$ [m/s] sullo spostamento verticale al tip $u_{z-LE}$ [mm] per diverse teorie cinematiche. Confronto analisi Lineare e Non lineare. $\alpha = 1^\circ$ . Ala rettangolare isotropa. Mesh strutturale 20 B4. . . . .	90
5.33	Effetto della velocità della corrente a monte $V$ sulla rotazione della sezione al tip $\psi_{TIP}$ per diverse teorie cinematiche. Confronto analisi Lineare e Non lineare. $\alpha = 1^\circ$ . Ala rettangolare isotropa. Mesh strutturale 20 B4. . . . .	91
5.34	Effetto della velocità della corrente a monte $V$ [m/s] sullo spostamento verticale al Leading Edge del tip $u_{z-LE}$ [mm] per diversi modelli aerodinamici. Confronto tra analisi Lineare e Non lineare. $\alpha = 1^\circ$ . Ala rettangolare isotropa. Modello strutturale TE4. Mesh strutturale 20 B4. . . . .	94
5.35	Effetto della velocità della corrente a monte $V$ sulla rotazione della sezione al tip $\psi_{TIP}$ per diversi modelli aerodinamici. Confronto tra analisi Lineare e Non lineare. $\alpha = 1^\circ$ . Ala rettangolare isotropa. Modello strutturale TE4. Mesh strutturale 20 B4. . . . .	94

5.36	Effetto della velocità $V$ sul campo di spostamenti dell'ala rettangolare isotropa. $\alpha = 1^\circ$ . Analisi Non lineare. Punto $A(x, y, z) = (0.25, 3.333, 0)$ . . . . .	96
5.37	Effetto dell'angolo d'incidenza $\alpha$ sul $C_L$ di una struttura deformabile per diverse teorie cinematiche. Confronto analisi Lineare e Non lineare. $V = 50$ m/s. Ala rettangolare isotropa. Mesh strutturale 20 B4. . . . .	99
5.38	Effetto dell'angolo d'incidenza $\alpha$ sul $C_D$ di una struttura deformabile per diverse teorie cinematiche. Confronto analisi Lineare e Non lineare. $V = 50$ m/s. Ala rettangolare isotropa. Mesh strutturale 20 B4. . . . .	99
5.39	Effetto dell'angolo d'incidenza $\alpha$ sullo spostamento verticale al Leading Edge del tip $u_{z-LE}$ [mm] e sulla rotazione della sezione al tip $\psi_{TIP}$ per diverse teorie cinematiche. Confronto analisi Lineare e Non lineare. $V = 50$ m/s. Ala rettangolare isotropa. Mesh strutturale 20 B4. . . . .	102

# Elenco delle figure

1.1	Triangolo di Collar [2]. . . . .	1
1.2	Primo fallimento del Great Aerodrome nelle acque del fiume Potomac. . . . .	3
1.3	UAV PHASA-35, costruito da Prismatic per BAE Systems [10]. . . . .	4
2.1	Sistema di riferimento della struttura. . . . .	8
2.2	Elemento della sezione trasversale L4. . . . .	12
2.3	Elemento della sezione trasversale L9. . . . .	13
2.4	Discretizzazione FEM + CUF per modelli raffinati 1D e 2D [41]. . . . .	15
2.5	Assemblaggio della matrice di rigidezza globale [42]. . . . .	17
2.6	Rappresentazione grafica e significato delle diverse condizioni di vincolo. Metodo a controllo di carico (sinistra). Metodo a controllo di spostamento (centro). Metodo Path-following (destra).[43] . . . . .	23
3.1	Rappresentazione grafica dei diversi metodi e approcci per la derivazione dell'equazioni di governo. Caso <b>a</b> : volume di fluido finito. Caso <b>b</b> : volume di fluido infinitesimo. A sinistra: approccio Euleriano. A destra: approccio Lagrangiano. [44] . . . . .	28
3.2	Celle computazionali per i diversi schemi. Cell-centered (a sinistra) e Vertex-centered (a destra) [38]. . . . .	36
3.3	Caratteristiche del dominio computazionale. Ambiente Pointwise. . . . .	37
3.4	Ala incastrata nel piano di simmetria. Ambiente Pointwise. . . . .	38
3.5	Velocità nelle vicinanze della parete. Dati sperimentali da [47]. . . . .	39
4.1	Schema di soluzione del problema aeroelastico. . . . .	47
5.1	Sezione trasversale rettangolare. . . . .	49
5.2	$u_z$ in funzione del numero di elementi per diversi elementi trave. Trave isotropa a sezione quadrata. $L/h = 10$ . . . . .	50
5.3	$u_z$ in funzione del numero di elementi B3 per diverse teorie cinematiche. Trave isotropa a sezione quadrata. . . . .	50
5.4	Tensione assiale $\sigma_{yy}$ in funzione di $z$ in $(x = 0, y = 0)$ , per diverse teorie cinematiche. Trave isotropa a sezione quadrata. Mesh 40 B4. . . . .	52

5.5	Sezione trasversale quadrata cava in parete sottile. . . . .	53
5.6	Modi flessionali della trave isotropa a sezione quadrata. $L/h = 100$ . Mesh 20 B4. Modello 1 L9. . . . .	57
5.7	Caratteristiche geometriche della piastra. . . . .	58
5.8	Risultati numerici dell'analisi statica per la piastra isotropa. Mesh 20x4 Q9. Modello LE3. . . . .	60
5.9	Modi propri della piastra isotropa. Mesh 20x4 Q9. Modello LE3. . . . .	62
5.10	Caratteristiche geometriche della piastra multistrato. . . . .	63
5.11	Risultati numerici dell'analisi statica per la piastra in composito. Mesh 10x2 Q9. Confronto tra diverse teorie cinematiche. . . . .	65
5.12	Curve d'equilibrio per la trave a sezione quadrata soggetta ad un carico verticale. . . . .	66
5.13	Lamina piana con $AR = 3$ nell'ambiente Pointwise. . . . .	67
5.14	Dettagli della mesh aerodinamica nelle vicinanze della parete. Lamina piana $AR = 3$ . . . . .	68
5.15	Analisi di convergenza sui coefficienti aerodinamici in funzione dell'estensione del dominio computazionale. Lamina piana $AR = 3$ . . . . .	69
5.16	Lamina piana con $AR = 3$ . Confronto con i risultati sperimentali e numerici presenti in letteratura. . . . .	69
5.17	Ala rettangolare dritta negli ambienti Solidworks e Pointwise. . . . .	71
5.18	Configurazioni deformate per l'ala rettangolare isotropa. $V = 50$ m/s, $\alpha = 1^\circ$ . Confronto tra SSA (verde) e SAA (blu). Modello TE4. . . . .	72
5.19	Configurazioni deformate per l'ala rettangolare isotropa. $V = 50$ m/s, $\alpha = 1^\circ$ . Confronto tra le diverse teorie cinematiche. TE1(giallo), TE2(verde), TE3(arancione), TE4(rosso). . . . .	73
5.20	Convergenza per lo spostamento al tip LE e per l'errore con il metodo iterativo per diverse teorie cinematiche. $V = 50$ m/s, $\alpha = 1^\circ$ . Ala rettangolare isotropa. . . . .	73
5.21	Effetto della velocità della corrente a monte $V$ sulla rotazione della sezione al tip $\psi_{TIP}$ . Confronto tra modelli aerodinamici. $\alpha = 1^\circ$ . Ala rettangolare isotropa. Modello strutturale TE4. Mesh strutturale 20 B4. . . . .	76
5.22	Effetto dell'angolo di laminazione $\theta$ sulla rotazione della sezione al tip $\psi_{TIP}$ e sullo spostamento verticale al Leading Edge del tip $u_{z-LE}$ . Confronto tra analisi SSA e SAA. $V = 10$ m/s. $\alpha = 1^\circ$ . Ala rettangolare in composito. Modello strutturale TE4. Mesh strutturale 20 B4. . . . .	78

5.23	Effetto dell'angolo di laminazione $\theta$ sulla rotazione della sezione al tip $\psi_{TIP}$ e sullo spostamento verticale al Leading Edge del tip $u_{z-LE}$ . Confronto tra modelli aerodinamici. $V = 10$ m/s. $\alpha = 1^\circ$ . Ala rettangolare in composito. Modello strutturale TE4. Mesh strutturale 20 B4. . . . .	79
5.24	Ala con angolo di freccia $\Lambda = 20^\circ$ nell'ambiente Solidworks. . . . .	82
5.25	Effetto della velocità della corrente a monte $V$ sulla rotazione della sezione al tip $\psi_{TIP}$ e sullo spostamento verticale al Leading Edge del tip $u_{z-LE}$ per diverse teorie cinematiche. $\alpha = 1^\circ$ . Ala con angoli di Freccia $\Lambda = -10^\circ$ e $\Lambda = 20^\circ$ isotropa. Mesh strutturale 4x20 Q9. . . . .	85
5.26	Configurazioni deformate per l'ala con angolo di freccia $\Lambda = -10^\circ$ isotropa. $V = 50$ m/s, $\alpha = 1^\circ$ . Confronto tra le diverse teorie cinematiche. TE1(rosso), TE2(blu). Mesh strutturale 4x20 Q9. . . . .	86
5.27	Effetto della velocità della corrente a monte $V$ sulla rotazione della sezione al tip $\psi_{TIP}$ e sullo spostamento verticale al tip $u_{z-LE}$ . Confronto tra diversi angoli di freccia $\Lambda$ . $\alpha = 1^\circ$ . Ala isotropa. Modello TE4. Mesh strutturale 4x20 Q9. . . . .	87
5.28	Configurazioni deformate per l'ala isotropa con diversi angoli di freccia. Piano $xz$ . $V = 50$ m/s, $\alpha = 1^\circ$ . $\Lambda = -10^\circ$ (rosso scuro), $\Lambda = 0^\circ$ (rosso chiaro), $\Lambda = 10^\circ$ (verde), $\Lambda = 20^\circ$ (giallo). Modello strutturale TE4. Mesh strutturale 4x20 Q9. . . . .	88
5.29	Effetto dell'angolo di laminazione $\theta$ sulla rotazione della sezione al tip $\psi_{TIP}$ e sullo spostamento verticale al Leading Edge del tip $u_{z-LE}$ . Confronto tra modelli aerodinamici. $V = 10$ m/s. $\alpha = 1^\circ$ . Ala con angolo di freccia $\Lambda = 10^\circ$ in composito. Modello strutturale TE4. Mesh strutturale 4x20 Q9. . . . .	88
5.30	Effetto dell'angolo di laminazione $\theta$ sulla rotazione della sezione al tip $\psi_{TIP}$ e sullo spostamento verticale al Leading Edge del tip $u_{z-LE}$ . Confronto tra diversi angoli di freccia $\Lambda$ . $V = 10$ m/s. $\alpha = 1^\circ$ . Ala rettangolare con angolo di freccia in composito. Modello strutturale TE4. Mesh strutturale 4x20 Q9. . . . .	89
5.31	Effetto della velocità della corrente a monte $V$ sulla rotazione della sezione al tip $\psi_{TIP}$ e sullo spostamento verticale al Leading Edge del tip $u_{z-LE}$ per diverse teorie cinematiche. Confronto tra analisi Lineare e Non lineare. $\alpha = 1^\circ$ . Ala rettangolare isotropa. Mesh strutturale 20 B4. . . . .	92
5.32	Configurazioni deformate per l'ala rettangolare isotropa. $V = 90$ m/s, $\alpha = 1^\circ$ . Confronto tra analisi Lineare e Non lineare per le diverse teorie cinematiche. EBBM(rosso), TE2(verde), TE4(blu). Mesh strutturale 20 B4. . . . .	93

5.33	Effetto della velocità della corrente a monte $V$ sulla rotazione della sezione al tip $\psi_{TIP}$ e sullo spostamento verticale al Leading Edge del tip $u_{z-LE}$ per diversi modelli aerodinamici. Confronto tra analisi Lineare e Non lineare. $\alpha = 1^\circ$ . Ala rettangolare isotropa. Modello TE4. Mesh strutturale 20 B4. . . . .	95
5.34	Curve d'equilibrio dell'ala rettangolare isotropa. $V = 90$ m/s. $\alpha = 1^\circ$ . Punto $A(x, y, z) = (0.25, 3.333, 0)$ . . . . .	96
5.35	Configurazioni deformate per l'ala rettangolare isotropa. $V = 90$ m/s, $\alpha = 1^\circ$ . Confronto tra analisi Lineare e Non lineare. Lineare(blu), Non lineare(rosso). Modello TE4. Mesh strutturale 20 B4. . . . .	97
5.36	Effetto dell'angolo di laminazione $\theta$ sulla rotazione della sezione al tip $\psi_{TIP}$ e sullo spostamento verticale al Leading Edge del tip $u_{z-LE}$ . Confronto tra analisi Lineare e Non lineare. $V = 30$ m/s. $\alpha = 1^\circ$ . Ala rettangolare in composito. Modello strutturale TE4. Mesh strutturale 20 B4. . . . .	98
5.37	Effetto della deformabilità della struttura e della teoria cinematica sui coefficienti aerodinamici per diversi angoli d'incidenza $\alpha$ . Analisi Lineare. $V = 50$ m/s. Ala rettangolare isotropa. Mesh strutturale 20 B4. . . . .	100
5.38	Effetto della deformabilità della struttura e della teoria cinematica sull'efficienza aerodinamica $E$ per diversi angoli d'incidenza $\alpha$ . Analisi Lineare. $V = 50$ m/s. Ala rettangolare isotropa. Mesh strutturale 20 B4. . . . .	100
5.39	Effetto della deformabilità della struttura sui coefficienti aerodinamici per diversi angoli d'incidenza $\alpha$ . Confronto analisi Lineare e Non lineare. $V = 50$ m/s. Ala rettangolare isotropa. Modello strutturale TE4. Mesh strutturale 20 B4. . . . .	101
5.40	Effetto della deformabilità della struttura sull'efficienza aerodinamica $E$ per diversi angoli d'incidenza $\alpha$ . Confronto analisi Lineare e Non lineare. $V = 50$ m/s. Ala rettangolare isotropa. Mesh strutturale 20 B4. . . . .	101
5.41	Effetto dell'angolo d'incidenza $\alpha$ sulla rotazione della sezione al tip $\psi_{TIP}$ e sullo spostamento verticale al Leading Edge del tip $u_{z-LE}$ . Confronto tra analisi Lineare e Non lineare. $V = 50$ m/s. Ala rettangolare isotropa. Modello TE4. Mesh strutturale 20 B4. . . . .	103





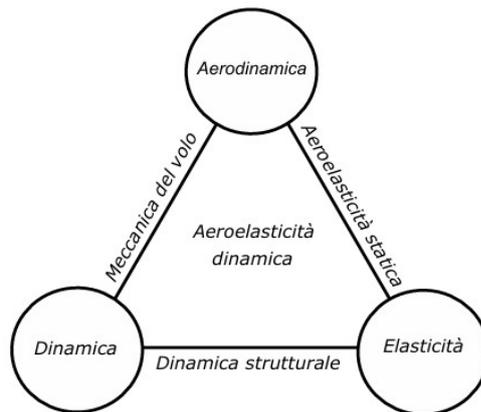
# Capitolo 1

## Introduzione

### 1.1 Aeroelasticità

L'aeroelasticità è un campo di studio multidisciplinare che si occupa dell'interazione tra la deformazione di una struttura elastica investita da una corrente fluida e le forze aerodinamiche risultanti. Questa natura multidisciplinare viene approfondita da Collar [1] e può essere schematizzata come in Fig.1.1. Come si può osservare, l'aeroelasticità coinvolge tre discipline principali che si trovano nei vertici del triangolo:

- **Aerodinamica:** prevede i carichi agenti su un corpo immerso in un fluido.
- **Elasticità:** prevede il campo di deformazioni e tensioni di una struttura soggetta a dei carichi esterni.
- **Dinamica:** introduce gli effetti delle forze inerziali e degli smorzamenti.



**Figura 1.1:** Triangolo di Collar [2].

Nell'ambito di questa tesi le seguenti aree di studio sono di maggiore interesse:

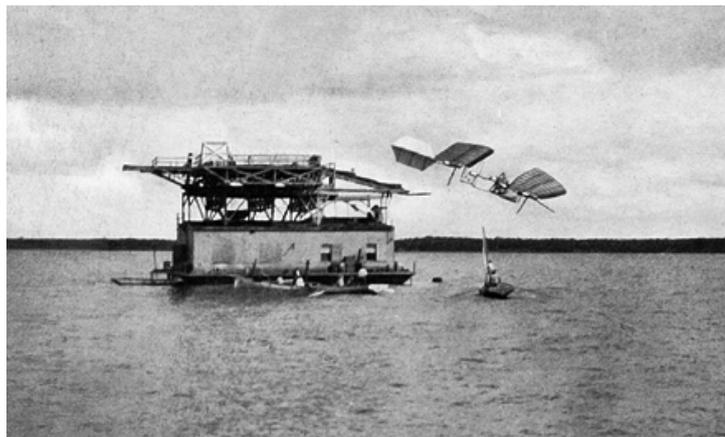
- Dinamica strutturale (interazione tra Dinamica ed Elasticità);
- Aeroelasticità statica (interazione tra Aerodinamica ed Elasticità in condizioni stazionarie);
- Aeroelasticità dinamica (interazione tra tutte le discipline principali in condizioni non stazionarie).

Il problema aeroelastico nasce a causa della deformabilità della struttura. Le forze aerodinamiche dipendono dalla forma della struttura e tendono a deformarla; la deformazione della struttura a sua volta influisce sui carichi aerodinamici. Si tratta pertanto di un problema accoppiato. In certe condizioni i carichi aerodinamici possono causare una deformazione che fa aumentare il carico aerodinamico. All'aumentare della velocità i carichi possono aumentare al punto tale da non essere più bilanciati dalle forze elastiche, in tal caso le deformazioni crescono indefinitamente portando la struttura al cedimento. Questo fenomeno d'instabilità aeroelastica statica prende il nome di divergenza torsionale. In campo aeroelastico l'instabilità dinamica più importante è il flutter, un fenomeno che consiste nell'amplificazione di vibrazioni forzate della struttura, causata dall'interazione di carichi aerodinamici, elastici e inerziali. Entrambe le tipologie d'instabilità discusse possono essere distruttive per il velivolo pertanto è di primaria importanza che in fase di progetto preliminare vengano identificate le condizioni per le quali si verificano. Queste condizioni devono trovarsi fuori dall'involucro di volo per garantire la sicurezza del velivolo.

### 1.1.1 Cenni storici

I fenomeni aeroelastici hanno avuto un'importante rilevanza storica. In Pierce e Hodges [3] vengono ripercorsi i primi anni della storia dell'aeroelasticità. Nel 1903 i fratelli Wright usarono il controllo della curvatura dell'ala per ottenere la stabilità laterale del velivolo che era intrinsecamente instabile. Nello stesso anno Samuel Langley tentò due volte di far volare un aereo con un motore dalla cima di una casa galleggiante sul fiume Potomac, come viene mostrato in Fig.1.2. Entrambi i tentativi furono un fallimento a causa della elevata flessibilità dell'ala e dell'eccessivo carico aerodinamico. Il velivolo sperimentò il fenomeno della divergenza torsionale che portò ad una rottura catastrofica. Nel campo dell'aviazione fino ai primi anni trenta, quando furono introdotti nuovi materiali e tecnologie, ci fu un predominio della configurazione biplano poichè garantivano una maggiore rigidità torsionale. Il primo caso documentato di flutter su un velivolo è avvenuto nel 1916. Il bombardiere Handley Page O/400 subì delle violente oscillazioni del piano di coda a causa della mancanza di un collegamento tramite barra di torsione tra l'equilibratore di

sinistra e quello di destra. L'oscillazione asimmetrica di queste due superfici mobili unita ad una torsione dinamica della fusoliera ha portato all'incidente catastrofico. Un altro evento che può essere classificato come fenomeno aeroelastico statico fu sperimentato nel 1927 dal Bristol Bagshot, un velivolo inglese bimotore con elevato allungamento alare. All'aumentare della velocità di volo l'efficacia degli alettoni diminuiva fino ad annullarsi. Oltre una certa velocità le superfici mobili iniziavano a funzionare in modo opposto a quello per il quale erano state progettate. Questo fenomeno di perdita di controllo e inversione del comando è noto come inversione degli alettoni. Questa serie di incidenti portarono le problematiche relative ai fenomeni aeroelastici a diventare un aspetto fondamentale nell'ambito della progettazione aeronautica. Nel 1928 fu pubblicato un documento di circa 200 pagine da R.A. Frazer e W.J. Duncan intitolato "The Flutter of Aeroplane Wings", che fornì le basi per le tecniche di analisi e prevenzione del flutter moderne. R. Cox e J.H. Pugsley presso il Royal Aircraft Establishment svilupparono dei criteri di progettazione per prevenire l'inversione degli alettoni, nei primi anni trenta. Nello stesso periodo i due ingegneri coniarono il termine "Aerolasticità" per descrivere questi fenomeni.



**Figura 1.2:** Primo fallimento del Great Aerodrome nelle acque del fiume Potomac.

### 1.1.2 Progettazione di aeromobili moderni

Lo studio dei fenomeni aeroelastici è di primaria importanza ancora oggi in fase di progetto [4]. Nella progettazione degli aeromobili moderni l'ottimizzazione delle prestazioni, la riduzione dei consumi e dei pesi sono fondamentali. Questi requisiti hanno portato allo studio di nuove configurazioni di velivolo e all'impiego di strutture ultraleggere e maggiormente deformabili. Una valutazione accurata della risposta aeroelastica di queste strutture diventa ancora più essenziale. Un

esempio di nuova configurazione di velivolo sotto sviluppo negli ultimi anni è l'High Altitude Long Endurance (HALE). Questa tipologia di aeromobile potrebbe svolgere funzioni tipiche dei satelliti di Intelligence, Sorveglianza e Ricognizione, in aggiunta a missioni di comunicazione e osservazione della Terra, con costi molto ridotti. I velivoli HALE devono avere un'alta efficienza aerodinamica ed essere ultraleggeri, pertanto sono caratterizzati da elevati allungamento alare e flessibilità strutturale. Questo porta il velivolo ad avere un comportamento aeroelastico non lineare che deve essere opportunamente analizzato [5, 6, 7]. In Figura 1.3 viene mostrato un velivolo HALE moderno sviluppato da BAE Systems. Nel panorama internazionale dell'aviazione c'è la tendenza ad un crescente utilizzo dei materiali compositi. Questi sono caratterizzati da elevate proprietà meccaniche specifiche, una buona resistenza a fatica e offrono maggiori gradi di libertà nella progettazione rispetto alle classiche leghe di alluminio. Infatti, è possibile realizzare un singolo strato di materiale con diversi angoli di orientamento delle fibre e di poter assemblare strati con diverse combinazioni di laminazione [8]. Tramite una disposizione ottimale delle fibre si può ottimizzare il comportamento aeroelastico di una struttura; questa tecnica prende il nome di "Tailoring Aeroelastico". Lo stato dell'arte nel campo del tailoring aeroelastico viene trattato in [9]. Per poter effettuare delle analisi predittive accurate dei fenomeni aeroelastici e limitare il bisogno e i costi di campagne di test sperimentali, si deve disporre di modelli analitici e numerici che abbiano un elevato livello di accuratezza e affidabilità.



**Figura 1.3:** UAV PHASA-35, costruito da Prismatic per BAE Systems [10].

## 1.2 Modello aeroelastico

Negli ultimi decenni sono stati sviluppati numerosi modelli per predire il comportamento aeroelastico di strutture con diverse caratteristiche geometriche, in vari regimi di flusso. Dal punto di vista aerodinamico, in letteratura si riscontra un uso maggiore di modelli basati sulla teoria del flusso potenziale linearizzato. Questi modelli sono ottimi per analisi preliminari, sono di facile implementazione e hanno un basso costo computazionale. I metodi numerici più usati sono il Vortex Lattice Method (VLM) e il Doublet Lattice Method (DLM), rispettivamente per analisi di problemi stazionari e instazionari. Si può trovare una descrizione approfondita di questi metodi in Demasi [11]. Il modello aerodinamico fornisce una distribuzione di pressione attorno al corpo che deve essere trasferita alla struttura tramite metodi spline [12] o un altro modello di interazione fluido-struttura (FSI) [13]. Per quanto riguarda l'analisi strutturale, in letteratura si trovano applicazioni di modelli trave [14] e di modelli piastra [15]. Per discretizzare la struttura viene usato tipicamente il metodo degli elementi finiti (FEM) [16], che permette di derivare le equazioni di governo in forma debole e risolvere problemi scritti in forma algebrica. Per effettuare delle analisi aeroelastiche accurate si deve prima di tutto disporre di un modello strutturale avanzato in quanto le teorie classiche di Eulero-Bernoulli [17] e di Timoshenko [18] non riescono a descrivere fenomeni strutturali complessi, come l'accoppiamento flesso-torsionale, la deformazione della sezione trasversale nel piano e fuori piano o condizioni al contorno applicate localmente. Negli ultimi anni, la Carrera Unified Formulation (CUF) [19] è stata ampiamente utilizzata per effettuare analisi aeroelastiche. Questa teoria offre il vantaggio di poter scegliere l'ordine del modello strutturale come parametro di input e garantisce la possibilità di implementarlo senza dover cambiare formalmente le equazioni e le matrici del problema. La formulazione CUF è stata sviluppata inizialmente per modelli 2D [20, 21] e in seguito applicata anche ai modelli 1D [22]. Negli anni sono state condotte diverse analisi statiche [23, 24, 25] e dinamiche [26, 27] che hanno mostrato le capacità dei modelli trave raffinati di descrivere con accuratezza strutture in parete sottile, con sezioni aperte, con materiali anisotropi e condizioni al contorno localizzate. Varello [14] è stato il primo ad avere usato la formulazione unificata per analizzare la risposta aeroelastica statica di configurazioni alari classiche e non convenzionali (con angoli di freccia, diedro e rastremazione). Il modello trave di ordine elevato implementato insieme al VLM ha mostrato la capacità di predire comportamenti non rilevabili dalle teorie classiche, e di garantire un'accuratezza confrontabile con quella del software NASTRAN facente uso di elementi 2D, ad un costo computazionale inferiore. Un altro esempio di come i modelli 1D raffinati risultino meno costosi, seppur meno accurati, rispetto ai modelli piastra/guscio nella descrizione del comportamento aeroelastico di strutture in materiale composito viene fatto da Carrera [28]. In letteratura sono presenti numerosi casi di

studio di modelli trave di ordine elevato con calcolo dei carichi aerodinamici tramite VLM [29, 30] per la risposta aeroelastica statica, e con il metodo DLM per analisi dinamiche [31, 32]. I modelli aerodinamici classici derivano dalle ipotesi di fluido ideale e di piccole perturbazioni. Per questi motivi, hanno una minore accuratezza in regimi di alta velocità e soprattutto di bassa velocità, dove l'effetto dell'attrito non può essere trascurato [33]. Le previsioni di questi modelli non sono affidabili anche nel caso di elevate incidenze di volo e profili alari con maggiore spessore e/o inarcamento. Nel 2023 è stato proposto un metodo innovativo da Grifò [34] basato su un modello strutturale di ordine elevato 2D con formulazione CUF accoppiato, tramite un modello FSI di tipo Moving-Least Square (MLS) [13], con un modello aerodinamico accurato basato sulla Computational Fluid Dynamics (CFD) implementato dal software Open-Source SU2 [35]. Dopo aver effettuato una calibrazione aerodinamica e validato il software, Grifò ha analizzato la risposta aeroelastica di strutture alari geometricamente complesse per diversi regimi di volo. Un'ala rettangolare e un'ala con profilo NACA 2415 con rinforzi longitudinali in materiale isotropo per regimi di volo a bassa velocità vengono analizzate in [36]. Una geometria alare più complessa (AGARD 445.6) in regime transonico è stata studiata in [37]. In entrambi gli articoli di Grifò [36, 37] vengono effettuati test di tailoring aeroelastico con un materiale composito. L'uso di un modello aerodinamico ad alta fedeltà per effettuare analisi aeroelastiche richiede l'implementazione di un metodo iterativo, i carichi aerodinamici devono essere trasferiti alla struttura che dopo essersi deformata deve trasmettere l'informazione della nuova geometria al solutore aerodinamico. La soluzione aeroelastica viene ottenuta quando il metodo arriva a convergenza, cioè quando viene raggiunto un'equilibrio tra i carichi aerodinamici e le reazioni elastiche della struttura. Per questi motivi, i metodi ad alta fedeltà risultano essere più onerosi dal punto di vista computazionale. Recentemente, Ricci [38] ha sviluppato un framework computazionale aeroelastico basato su modelli strutturali 1D raffinati con formulazione FEM+CUF accoppiati, tramite la tecnica FSI dell'Infinite Plate Spline (IPS), con il software di analisi CFD SU2. Nel lavoro di Ricci è presente lo studio di un'ala dritta con sezione rettangolare in regimi di volo a bassa velocità. I risultati ottenuti hanno dimostrato la capacità del framework di predire la risposta aeroelastica statica con un'accuratezza confrontabile con quella di modelli strutturali 1D e 2D accoppiati con il VLM, e di modelli strutturali 2D accoppiati con modelli aerodinamici basati sulla CFD.

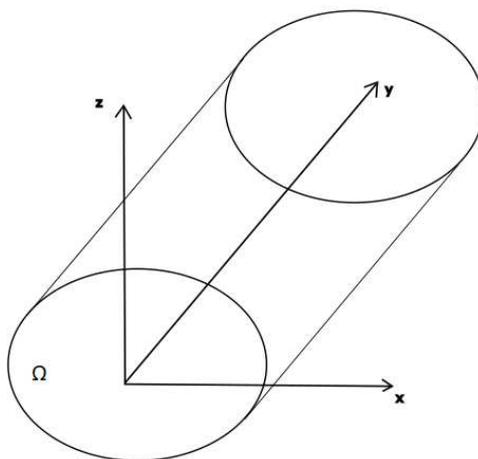
## Capitolo 2

# Modello strutturale

La componente strutturale del framework aeroelastico implementato nell'ambito di questa tesi si basa su modelli strutturali di ordine elevato. Le teorie classiche si basano su un numero fisso e limitato di variabili che non sono sufficienti a descrivere fenomeni strutturali complessi, come l'accoppiamento flessio-torsionale o la deformazione della sezione trasversale nel piano e fuori piano. Per effettuare un'analisi aeroelastica accurata occorre un modello strutturale capace di rilevare questi effetti non previsti dalle teorie classiche. In questo capitolo viene presentata la Carrera Unified Formulation, una teoria innovativa che permette di descrivere il campo di spostamenti in modo unificato, indipendente dall'ordine del modello. Quest'ultimo diventa un parametro libero e può essere scelto opportunamente in base al livello di accuratezza che si vuole ottenere per un certo tipo di analisi. In questo modo le limitazioni delle teorie classiche vengono superate. La formulazione unificata viene poi accoppiata con la formulazione agli elementi finiti e usata per derivare le equazioni di governo in forma debole. Nell'ultima parte viene descritto il caso di strutture che presentano non linearità geometrica e le differenze nel metodo di risoluzione del problema strutturale rispetto al caso lineare.

### 2.1 Concetti generali

Una trave è una struttura con una dimensione, l'estensione assiale  $L$ , predominante rispetto alle altre due dimensioni ortogonali. La sezione trasversale  $\Omega$  è identificata dall'intersezione di un piano ortogonale all'asse della trave e la trave stessa. Si può definire un sistema di coordinate cartesiane, con gli assi  $x$  e  $z$  paralleli al piano della sezione trasversale e l'asse  $y$  in direzione longitudinale, come mostrato in Fig.2.1.



**Figura 2.1:** Sistema di riferimento della struttura.

Si introduce il vettore degli spostamenti trasposto:

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \left\{ u_x \quad u_y \quad u_z \right\}^T \quad (2.1)$$

Le tensioni  $\boldsymbol{\sigma}$  e le deformazioni  $\boldsymbol{\epsilon}$  sono definite come segue:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_p &= \left\{ \sigma_{zz} \quad \sigma_{xx} \quad \sigma_{zx} \right\}^T, & \boldsymbol{\epsilon}_p &= \left\{ \epsilon_{zz} \quad \epsilon_{xx} \quad \epsilon_{zx} \right\}^T \\ \boldsymbol{\sigma}_n &= \left\{ \sigma_{zy} \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{yy} \right\}^T, & \boldsymbol{\epsilon}_n &= \left\{ \epsilon_{zy} \quad \epsilon_{xy} \quad \epsilon_{yy} \right\}^T \end{aligned} \quad (2.2)$$

dove i pedici  $p$  ed  $n$  si riferiscono rispettivamente a grandezze relative al piano della sezione trasversale e alla direzione normale al piano. Nel caso di piccoli spostamenti rispetto alla lunghezza della trave  $L$ , il legame tra le deformazioni e gli spostamenti è lineare e può essere scritto in forma compatta:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon}_p &= \mathbf{D}_p \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\epsilon}_n &= \mathbf{D}_n \mathbf{u} = (\mathbf{D}_{np} + \mathbf{D}_{ny}) \mathbf{u} \end{aligned} \quad (2.3)$$

dove  $\mathbf{D}_p$  e  $\mathbf{D}_n$  sono operatori differenziali:

$$\mathbf{D}_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{np} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{ny} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Nel caso la trave sia costituita da un materiale ortotropo con comportamento elastico lineare la relazione costitutiva può essere espressa dalla legge di Hooke generalizzata:

$$\boldsymbol{\sigma} = \tilde{\mathbf{C}}\boldsymbol{\epsilon} \quad (2.5)$$

Sulla base delle Eq. 2.2, la precedente relazione può essere scritta come segue:

$$\begin{aligned} \sigma_p &= \tilde{\mathbf{C}}_{pp}\epsilon_p + \tilde{\mathbf{C}}_{pn}\epsilon_n \\ \sigma_n &= \tilde{\mathbf{C}}_{np}\epsilon_p + \tilde{\mathbf{C}}_{nn}\epsilon_n \end{aligned} \quad (2.6)$$

dove le matrici  $\tilde{\mathbf{C}}_{pp}$ ,  $\tilde{\mathbf{C}}_{pn}$ ,  $\tilde{\mathbf{C}}_{np}$  e  $\tilde{\mathbf{C}}_{nn}$  scritte in forma espansa:

$$\tilde{\mathbf{C}}_{pp} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{12} & \tilde{C}_{16} \\ \tilde{C}_{12} & \tilde{C}_{22} & \tilde{C}_{26} \\ \tilde{C}_{16} & \tilde{C}_{26} & \tilde{C}_{66} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{C}}_{pn} = \tilde{\mathbf{C}}_{np}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tilde{C}_{13} \\ 0 & 0 & \tilde{C}_{23} \\ 0 & 0 & \tilde{C}_{36} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{C}}_{nn} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{55} & \tilde{C}_{45} & 0 \\ \tilde{C}_{45} & \tilde{C}_{44} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{C}_{33} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

I coefficienti  $\tilde{C}_{ij}$  dipendono dai moduli di Young, dai coefficienti di Poisson, dai moduli di taglio e dall'angolo di orientamento delle fibre  $\theta$ . Queste relazioni vengono approfondite da Jones [8].

## 2.2 Carrera Unified Formulation

Secondo la Carrera Unified Formulation (CUF) [19], il campo di spostamenti è descritto come un'espansione di generiche funzioni  $F_\tau$ . Per un modello trave, dove una dimensione è predominante rispetto alle altre, il campo di spostamenti assume la seguente forma:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_\tau(y)F_\tau^{2D}(x, z), \quad \tau = 1, 2, \dots, M \quad (2.8)$$

dove  $F_\tau^{2D}$  sono funzioni d'espansione che approssimano il campo di spostamenti sulla sezione trasversale,  $\mathbf{u}_\tau$  è il vettore degli spostamenti generalizzati. L'indice ripetuto  $\tau$  indica la somma, secondo la notazione di Einstein.  $M$  è il numero di termini dell'espansione e dipende dall'ordine di espansione della teoria  $N$  che è un parametro libero della formulazione. Anche la scelta delle funzioni  $F_\tau$  è arbitraria. Nel caso di un modello piastra, dove una dimensione è trascurabile rispetto alle altre, il campo di spostamenti assume la seguente forma:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_\tau(x, y) F_\tau^{1D}(z), \quad \tau = 1 \dots M, \quad (2.9)$$

dove  $F_\tau^{1D}$  sono funzioni d'espansione che approssimano il campo di spostamenti lungo lo spessore.

In questa tesi si utilizzano espansioni basate sui polinomi di Taylor e sui polinomi di Lagrange, per modelli trave e piastra. Per semplicità di trattazione vengono presentate le espansioni nell'ambito delle teorie unidimensionali.

### 2.2.1 Espansione di Taylor (TE) - Modello 1D

I modelli TE 1D si basano su espansioni polinomiali del campo di spostamenti sulla sezione trasversale della trave,  $x^i z^j$ , con  $i$  e  $j$  numeri interi positivi. L'ordine  $N$  è un parametro libero e di input dell'analisi. Generalmente la scelta di  $N$  per un modello strutturale viene fatta sulla base di uno studio di convergenza. Come esempio, viene riportato il modello cinematico relativo ad un'espansione di Taylor del secondo ordine ( $N = 2$ ):

$$\begin{aligned} u_x &= u_{x1} + u_{x2} x + u_{x3} z + u_{x4} x^2 + u_{x5} xz + u_{x6} z^2 \\ u_y &= u_{y1} + u_{y2} x + u_{y3} z + u_{y4} x^2 + u_{y5} xz + u_{y6} z^2 \\ u_z &= u_{z1} + u_{z2} x + u_{z3} z + u_{z4} x^2 + u_{z5} xz + u_{z6} z^2 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Il modello trave 1D descritto dalle Eq.2.10 presenta 18 variabili di spostamento generalizzato. Si possono ottenere modelli con un numero inferiore di termini come mostrato da Carrera e Petrolo [39]. Facendo riferimento all'Eq.2.8, i termini dell'espansione  $F_\tau^{2D}$  per TE con  $N = 2$  sono i seguenti:

$$F_1 = 1, \quad F_2 = x, \quad F_3 = z, \quad F_4 = x^2, \quad F_5 = xz, \quad F_6 = z^2 \quad (2.11)$$

Gli spostamenti generalizzati nell'ambito dell'espansione di Taylor hanno un significato matematico, rappresentano le derivate degli spostamenti rispetto agli assi della trave. I termini di ordine superiore non possono avere un significato locale, ma descrivono globalmente le proprietà della sezione trasversale. I limiti dell'uso dei polinomi di Taylor vengono discussi da Carrera e Petrolo [25].

**Modelli trave classici come casi particolari: Eulero-Bernouilli (EBBM) e Timoshenko (TBM)** I modelli trave classici, EBBM e TBM, possono essere ottenuti introducendo opportune ipotesi a partire dall'espansione di Taylor del primo ordine  $N = 1$ :

$$\begin{aligned} u_x &= u_{x1} + u_{x2} x + u_{x3} z \\ u_y &= u_{y1} + u_{y2} x + u_{y3} z \\ u_z &= u_{z1} + u_{z2} x + u_{z3} z \end{aligned} \quad (2.12)$$

Il modello TBM si ottiene facendo l'ipotesi che le componenti di spostamento  $u_x$  e  $u_z$  siano costanti sulla sezione trasversale:

$$u_{x2} = u_{z2} = u_{x3} = u_{z3} = 0 \quad (2.13)$$

Il modello cinematico della teoria di Timoshenko può essere scritto come segue:

$$\begin{aligned} u_x &= u_{x1} \\ u_y &= u_{y1} + u_{y2} x + u_{y3} z \\ u_z &= u_{z1} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Il modello EBBM prevede, come ipotesi aggiuntiva, rigidità infinita a taglio sulla sezione trasversale. Questo si può ottenere con una penalizzazione sugli scorrimenti a taglio  $\epsilon_{xy}$  e  $\epsilon_{zy}$  nelle equazioni costitutive, come viene approfondito da Carrera [23]. I modelli di ordine superiore descrivono accuratamente il comportamento della struttura a taglio, a torsione e la deformazione della sezione trasversale. Le teorie classiche e quella del primo ordine necessitano di una correzione per il fenomeno del Poisson Locking [40].

## 2.2.2 Espansione di Lagrange (LE) - Modello 1D

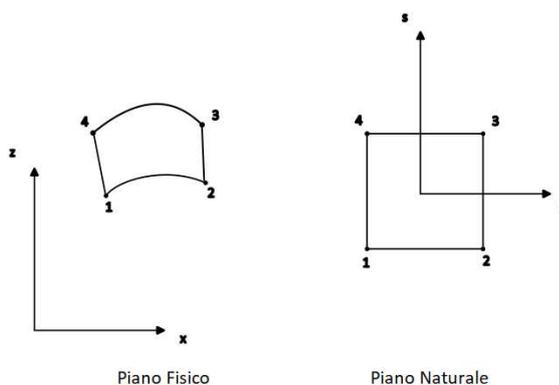
I modelli LE 1D usano i polinomi di Lagrange come funzioni d'espansione  $F_\tau$  per costruire modelli trave di ordine superiore. In questa tesi vengono presentate due tipologie di elementi usati per discretizzare la sezione trasversale: l'elemento L4 e l'elemento L9, costituiti rispettivamente da quattro e nove nodi. Viene usata la formulazione isoparametrica valida per una generica geometria. Le funzioni d'interpolazione per gli elementi L4 e L9 sono fornite da Onate [16]. In Figura 2.2 viene rappresentato l'elemento L4, le cui funzioni di interpolazione sono:

$$F_\tau = \frac{1}{4}(1 + r r_\tau)(1 + s s_\tau) \quad \tau = 1,2,3,4 \quad (2.15)$$

dove  $r$  e  $s$  sono le coordinate naturali e possono variare tra  $-1$  e  $1$ . In Tabella 2.1 vengono riportate le coordinate dei nodi dell'elemento L4 nel piano naturale. Il campo di spostamenti dato da questo elemento è bilineare:

$$\begin{aligned}
 u_x &= F_1 u_{x_1} + F_2 u_{x_2} + F_3 u_{x_3} + F_4 u_{x_4} \\
 u_y &= F_1 u_{y_1} + F_2 u_{y_2} + F_3 u_{y_3} + F_4 u_{y_4} \\
 u_z &= F_1 u_{z_1} + F_2 u_{z_2} + F_3 u_{z_3} + F_4 u_{z_4}
 \end{aligned}
 \tag{2.16}$$

dove  $u_{x_1}, \dots, u_{z_4}$  sono gli spostamenti generalizzati, che nel caso di espansione di Lagrange rappresentano le componenti di spostamento di ciascuno dei quattro nodi dell'elemento L4.



**Figura 2.2:** Elemento della sezione trasversale L4.

Nodo	$r_t$	$s_t$
1	-1	-1
2	1	-1
3	1	1
4	-1	1

**Tabella 2.1:** Coordinate naturali dei nodi dell'elemento della sezione trasversale L4.

In Figura 2.3 viene rappresentato l'elemento L9, le cui funzioni di interpolazione sono:

$$F_\tau = \frac{1}{4}(r^2 + r r_\tau)(s^2 + s s_\tau) \quad \tau = 1,3,5,7$$

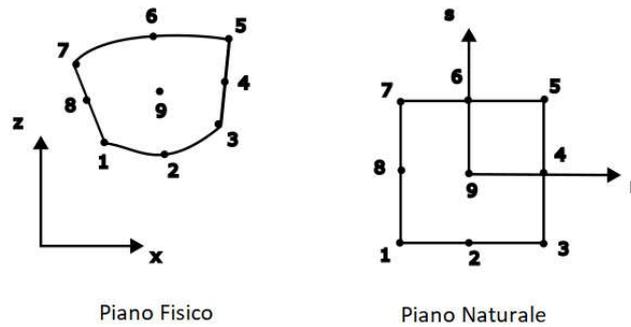
$$F_\tau = \frac{1}{2}s_\tau^2(s^2 - s s_\tau)(1 - r^2) + \frac{1}{2}r_\tau^2(r^2 - r r_\tau)(1 - s^2) \quad \tau = 2,4,6,8 \quad (2.17)$$

$$F_\tau = (1 - r^2)(1 - s^2) \quad \tau = 9$$

dove  $r$  e  $s$  sono le coordinate naturali e possono variare tra  $-1$  e  $1$ . In Tabella 2.2 vengono riportate le coordinate dei nodi dell'elemento L4 nel piano naturale. Il campo di spostamenti dato da questo elemento è quadratico:

$$\begin{aligned} u_x &= F_1 u_{x1} + F_2 u_{x2} + F_3 u_{x3} + F_4 u_{x4} + F_5 u_{x5} + F_6 u_{x6} + F_7 u_{x7} + F_8 u_{x8} + F_9 u_{x9} \\ u_y &= F_1 u_{y1} + F_2 u_{y2} + F_3 u_{y3} + F_4 u_{y4} + F_5 u_{y5} + F_6 u_{y6} + F_7 u_{y7} + F_8 u_{y8} + F_9 u_{y9} \\ u_z &= F_1 u_{z1} + F_2 u_{z2} + F_3 u_{z3} + F_4 u_{z4} + F_5 u_{z5} + F_6 u_{z6} + F_7 u_{z7} + F_8 u_{z8} + F_9 u_{z9} \end{aligned} \quad (2.18)$$

dove  $u_{x1}, \dots, u_{z9}$  sono gli spostamenti generalizzati, che nel caso di espansione di Lagrange rappresentano le componenti di spostamento di ciascuno dei nove nodi dell'elemento L9. Nei modelli LE le incognite hanno un significato fisico e corrispondono agli spostamenti dei punti della sezione trasversale. Da questo punto di vista, i modelli LE presentano un notevole vantaggio ai modelli TE in quanto permettono di raffinare la griglia localmente in zone di maggiore interesse, come punti di applicazione di carichi e/o vincoli. Inoltre, garantiscono maggiore flessibilità e precisione nella discretizzazione di sezioni trasversali che presentano non linearità geometriche.



**Figura 2.3:** Elemento della sezione trasversale L9.

Nodo	$r_t$	$s_t$
1	-1	-1
2	0	-1
3	1	-1
4	1	0
5	1	1
6	0	1
7	-1	1
8	-1	0
9	0	0

**Tabella 2.2:** Coordinate naturali dei nodi dell'elemento della sezione trasversale L9.

## 2.3 Formulazione agli elementi finiti

Le equazioni di governo vengono scritte usando il Principio degli Spostamenti Virtuali (PSV). L'uso del metodo agli elementi finiti (FEM) permette di derivare le equazioni in forma debole, garantendo così la possibilità di risolvere problemi con geometrie, condizioni di carico e condizioni al contorno che non hanno una soluzione in forma chiusa. La formulazione CUF consente di ottenere le matrici di massa e di rigidità, e il vettore dei carichi nodali in funzione di nuclei fondamentali, la cui forma è indipendente dall'ordine del modello.

Si definisce il vettore degli spostamenti nodali:

$$\mathbf{q}_{\tau i} = \left\{ q_{u_{x\tau i}} \quad q_{u_{y\tau i}} \quad q_{u_{z\tau i}} \right\}^T, \quad \tau = 1, 2, \dots, M, \quad i = 1, 2, \dots, N_n \quad (2.19)$$

dove il pedice  $i$  indica il nodo dell'elemento e  $N_n$  indica il numero di nodi del singolo elemento. Si ricorda che  $M$  rappresenta il numero di termini dell'espansione sulla sezione trasversale. A partire dal campo di spostamenti della formulazione CUF (Eq. 2.8), si introducono le funzioni di forma  $N_i$  che interpolano gli spostamenti nodali lungo l'asse della trave:

$$\mathbf{u} = N_i F_\tau \mathbf{q}_{\tau i} \quad (2.20)$$

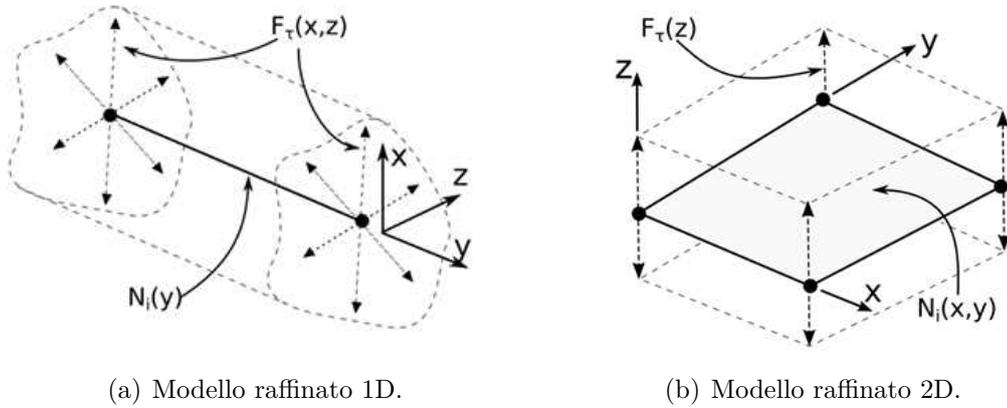
Tre tipi di elementi sono usati in questo lavoro per definire l'interpolazione delle variabili di spostamento lungo l'asse della trave: lineare con due nodi (B2), quadratico con tre nodi (B3) e cubico con quattro nodi (B4). Le funzioni di forma per i tre diversi elementi sono:

$$N_1 = \frac{1}{2}(1 - r), N_2 = \frac{1}{2}(1 + r) \begin{cases} r_1 = -1 \\ r_2 = +1 \end{cases} \quad (2.21)$$

$$N_1 = \frac{1}{2}r(r - 1), N_2 = \frac{1}{2}r(r + 1), N_3 = -(1 + r)(1 - r) \begin{cases} r_1 = -1 \\ r_2 = +1 \\ r_3 = 0 \end{cases} \quad (2.22)$$

$$N_1 = -\frac{9}{16}(r + \frac{1}{3})(r - \frac{1}{3})(r - 1), N_2 = \frac{9}{16}(r + \frac{1}{3})(r - \frac{1}{3})(r + 1), \begin{cases} r_1 = -1 \\ r_2 = +1 \\ r_3 = -\frac{1}{3} \\ r_4 = +\frac{1}{3} \end{cases} \\ N_3 = +\frac{27}{16}(r + 1)(r - \frac{1}{3})(r - 1), N_4 = -\frac{27}{16}(r + 1)(r + \frac{1}{3})(r - 1), \quad (2.23)$$

dove la coordinata naturale  $r$  lungo l'elemento, può variare tra  $-1$  e  $1$ .  $r_i$  sono le posizioni dei nodi dell'elemento nel piano naturale. In Figura 2.4 è riportata una rappresentazione visiva della discretizzazione di modelli trave e modelli piastra con elementi FEM e funzioni d'espansione CUF.



**Figura 2.4:** Discretizzazione FEM + CUF per modelli raffinati 1D e 2D [41].

L'ordine del modello trave dipende unicamente dall'espansione usata sulla sezione trasversale, non dipende dalla discretizzazione lungo l'asse longitudinale della trave. Il numero di gradi di libertà (GDL) della struttura dipende dalla scelta del modello di espansione, degli elementi trave e della mesh utilizzati e può essere calcolato con la seguente relazione:

$$GDL = \underbrace{3 \times M}_{\text{num. di GDL per nodo}} \times \left[ \left( \underbrace{N_n}_{\text{num. di nodi per elemento}} - 1 \right) \times \underbrace{N_e}_{\text{num. di elementi trave}} + 1 \right] \quad (2.24)$$

dove  $N_e$  indica il numero totale di elementi trave usati per discretizzare la struttura lungo l'asse longitudinale.

### 2.3.1 Matrice di rigidezza

Il primo passo per la determinazione delle matrici del metodo FEM è la scrittura del princio degli spostamenti virtuali (PSV):

$$\delta L_{\text{int}} = \delta L_{\text{est}} - \delta L_{\text{ine}} \quad (2.25)$$

dove  $L_{\text{int}}$  è il lavoro interno delle forze elastiche,  $L_{\text{ext}}$  rappresenta il lavoro dei carichi esterni e  $L_{\text{ine}}$  è il lavoro delle forze inerziali.  $\delta$  indica la variazione virtuale. Il termine relativo al lavoro interno può essere scritto come segue:

$$\delta L_{\text{int}} = \int_V (\delta \boldsymbol{\varepsilon}_p^T \boldsymbol{\sigma}_p + \delta \boldsymbol{\varepsilon}_n^T \boldsymbol{\sigma}_n) dV \quad (2.26)$$

Usando le Eq. 2.3, 2.6 e 2.20 si può riscrivere il lavoro delle forze interne in forma compatta:

$$\delta L_{\text{int}} = \delta \mathbf{q}_{\tau i}^T \mathbf{K}^{ij\tau s} \mathbf{q}_{s j} \quad (2.27)$$

dove  $\mathbf{K}^{ij\tau s}$  è la matrice di rigidezza scritta come nucleo fondamentale. I quattro apici indicano gli indici usati per l'assemblaggio della matrice:  $\tau$  e  $s$  sono relativi alle funzioni di espansione,  $i$  e  $j$  sono relativi alle funzioni di forma. La matrice ha dimensioni  $3 \times 3$  è formalmente indipendente dall'ordine del modello e dal tipo di funzioni d'espansione  $F_\tau$  usate. Per un materiale generico, la matrice di rigidezza può essere scritta in forma compatta:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{ij\tau s} = & I_l^{ij} \triangleleft (\mathbf{D}_{np}^T F_\tau \mathbf{I}) \left[ \tilde{\mathbf{C}}_{np} (\mathbf{D}_p F_s \mathbf{I}) + \tilde{\mathbf{C}}_{nn} (\mathbf{D}_{np} F_s \mathbf{I}) \right] + \\ & (\mathbf{D}_p^T F_\tau \mathbf{I}) \left[ \tilde{\mathbf{C}}_{pp} (\mathbf{D}_p F_s \mathbf{I}) + \tilde{\mathbf{C}}_{pn} (\mathbf{D}_{np} F_s \mathbf{I}) \right] \triangleright_\Omega + \\ & I_l^{ij,y} \triangleleft \left[ (\mathbf{D}_{np}^T F_\tau \mathbf{I}) \tilde{\mathbf{C}}_{nn} + (\mathbf{D}_p^T F_\tau \mathbf{I}) \tilde{\mathbf{C}}_{pn} \right] F_s \triangleright_\Omega \mathbf{I}_{\Omega y} + \\ & I_l^{i,yj} \mathbf{I}_{\Omega y} \triangleleft F_\tau \left[ \tilde{\mathbf{C}}_{np} (\mathbf{D}_p F_s \mathbf{I}) + \tilde{\mathbf{C}}_{nn} (\mathbf{D}_{np} F_s \mathbf{I}) \right] \triangleright_\Omega + \\ & I_l^{i,yj,y} \mathbf{I}_{\Omega y} \triangleleft F_\tau \tilde{\mathbf{C}}_{nn} F_s \triangleright_\Omega \mathbf{I}_{\Omega y} \end{aligned} \quad (2.28)$$

dove:

$$\mathbf{I}_{\Omega y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \langle \cdots \rangle_{\Omega} = \int_{\Omega} \cdots d\Omega \quad (2.29)$$

$$\left( I_l^{ij}, I_l^{ij,y}, I_l^{i,yj}, I_l^{i,yj,y} \right) = \int_l \left( N_i N_j, N_i N_{j,y}, N_{i,y} N_j, N_{i,y} N_{j,y} \right) dy \quad (2.30)$$

$\mathbf{K}^{ij\tau s}$  è la matrice di rigidezza scritta come nucleo fondamentale, le sue componenti sono riportate in Appendice A. La procedura di assemblaggio della matrice di rigidezza della struttura completa viene mostrata in Fig. 2.5. Il primo passo consiste nella costruzione del blocco  $\tau s$ , matrice di rigidezza del singolo nodo FEM, variando gli indici  $\tau$  e  $s$ . Ogni blocco  $\tau s$  viene poi inserito nella matrice di rigidezza del singolo elemento variando gli indici  $i$  e  $j$ . Infine viene assemblata la matrice di rigidezza globale.

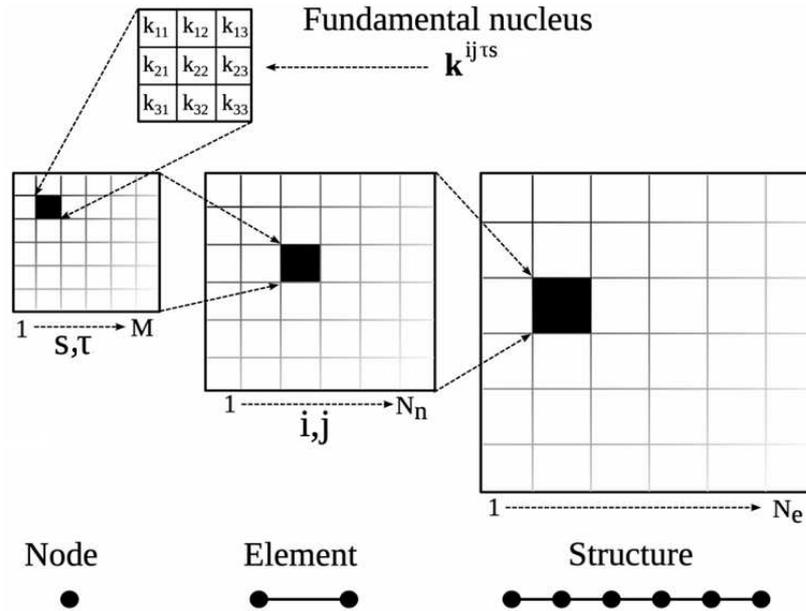


Figura 2.5: Assemblaggio della matrice di rigidezza globale [42].

### 2.3.2 Matrice di massa

La variazione del lavoro virtuale delle forze inerziali può essere scritta come:

$$\delta L_{ine} = \int_V \rho \ddot{\mathbf{u}} \delta \mathbf{u}^T dV \quad (2.31)$$

dove  $\rho$  è la densità del materiale e  $\ddot{\mathbf{u}}$  è il vettore delle accelerazioni. Usando le Eq. 2.3 e 2.20, il lavoro delle forze interne può essere riscritto:

$$\delta L_{ine} = \int_l \delta \mathbf{q}_{\tau i}^T N_i \left[ \int_{\Omega} \rho (F_{\tau} \mathbf{I})(F_s \mathbf{I}) d\Omega \right] N_j \ddot{\mathbf{q}}_{s j} dy \quad (2.32)$$

dove  $\ddot{\mathbf{q}}$  è il vettore delle accelerazioni nodali. Riscrivendo l'ultima equazione in forma compatta si ottiene:

$$\delta L_{ine} = \delta \mathbf{q}_{\tau i}^T \mathbf{M}^{ij\tau s} \ddot{\mathbf{q}}_{s j} \quad (2.33)$$

$\mathbf{M}^{ij\tau s}$  è la matrice di massa scritta come nucleo fondamentale, le cui componenti sono:

$$\begin{aligned} M_{xx}^{ij\tau s} &= M_{yy}^{ij\tau s} = M_{zz}^{ij\tau s} = \rho \int_{\Omega} F_{\tau} F_s d\Omega \int_l N_i N_j dy \\ M_{xy}^{ij\tau s} &= M_{xz}^{ij\tau s} = M_{yx}^{ij\tau s} = M_{yz}^{ij\tau s} = M_{zx}^{ij\tau s} = M_{zy}^{ij\tau s} = 0 \end{aligned} \quad (2.34)$$

Anche questa matrice è formalmente indipendente dall'ordine del modello e dal tipo di funzioni di espansione  $F_{\tau}$  usate.

### 2.3.3 Vettore dei carichi nodali

La variazione del lavoro virtuale delle forze esterne, nel caso di un carico di superficie, può essere scritta come segue:

$$\delta L_{est}^{p\alpha\beta} = \int_{S_{\alpha}} \delta u_{\beta\tau} p_{\alpha\beta} d\alpha dy \quad (2.35)$$

dove  $p_{\alpha\beta}(y)$  è un generico carico superficiale che agisce sulla superficie laterale della trave.  $\alpha$  indica l'asse perpendicolare alla superficie  $S_{\alpha}$  dove viene applicato il carico.  $\beta$  indica la direzione di applicazione del carico. Usando l'Eq. 2.20 si ottiene:

$$\delta L_{est}^{p\alpha\beta} = \int_{S_{\alpha}} F_{\tau}(\alpha_p) N_i \delta q_{\beta\tau i} p_{\alpha\beta} d\alpha dy \quad (2.36)$$

dove  $\alpha_p$  indica le coordinate dei punti di applicazione del carico.

La variazione del lavoro virtuale delle forze esterne, nel caso di un carico di linea  $l_{\alpha\beta}(y)$ , può essere scritta come segue:

$$\delta L_{est}^{l\alpha\beta} = \int_l \delta u_{\beta\tau} l_{\alpha\beta} dy \quad (2.37)$$

Introducendo le funzioni d'espansione  $F_{\tau}$  e gli spostamenti nodali si ottiene:

$$\delta L_{\text{est}}^{l_{\alpha\beta}} = \int_l F_\tau(\alpha_p, \beta_p) N_i \delta q_{\beta\tau_i} l_{\alpha\beta} dy \quad (2.38)$$

dove  $\alpha_p$  e  $\beta_p$  sono le coordinate dei punti di applicazione del carico sulla sezione trasversale. Nel caso di un generico carico concentrato  $P$ , le cui componenti sono:

$$\mathbf{P} = \{P_{u_x} \quad P_{u_y} \quad P_{u_z}\}^T \quad (2.39)$$

il lavoro virtuale delle forze esterne può essere scritto come:

$$\delta L_{\text{est}} = \mathbf{P} \delta \mathbf{u}^T \quad (2.40)$$

Introducendo la formulazione CUF+FEM si ottiene:

$$\delta L_{\text{est}} = F_\tau N_i \mathbf{P} \delta \mathbf{q}_{\tau_i}^T \quad (2.41)$$

Quest'ultima equazione permette, tramite il principio di equivalenza dei lavori virtuali delle forze esterne, di discretizzare i carichi di superficie e di linea. Pertanto, è possibile assemblare il vettore dei carichi nodali, valutando l'entità dei carichi nodali e i gradi di libertà nodali ai quali devono essere applicati.

### 2.3.4 Analisi statica

Il principio degli spostamenti virtuali (PSV) che permette di descrivere un problema strutturale in termini di lavoro, può essere usato per risolvere diverse tipologie di analisi strutturale. Per la derivazione delle espressioni dei lavori si rimanda ai paragrafi 2.3.1, 2.3.2 e 2.3.3. Nel caso di un'analisi di risposta statica si devono considerare gli effetti delle forze elastiche e dei carichi esterni, trascurando i carichi inerziali. Il PSV può essere scritto come segue:

$$\delta L_{\text{int}} = \delta L_{\text{est}} \quad (2.42)$$

La variazione virtuale del lavoro interno può essere espressa come:

$$\delta L_{\text{int}} = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} \quad (2.43)$$

dove  $K$  è la matrice di rigidezza globale della struttura,  $q$  è il vettore degli spostamenti nodali. La variazione virtuale del lavoro dei carichi esterni si scrive come:

$$\delta L_{\text{est}} = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{P} \quad (2.44)$$

dove  $P$  è il vettore dei carichi nodali. Sostituendo nell' Eq. 2.42 si ottiene la formulazione di un problema lineare algebrico:

$$\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{P} \quad (2.45)$$

La soluzione dell'equazione è la seguente:

$$\mathbf{q} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{P} \quad (2.46)$$

L'unico vincolo per la risoluzione di questo problema è che la matrice  $K$  sia invertibile. In generale, la matrice viene fattorizzata e non invertita. Uno dei metodi più usati è la fattorizzazione di Cholesky.

### 2.3.5 Analisi delle vibrazioni libere

Per un'analisi dinamica delle vibrazioni libere si tiene conto dei contributi delle forze elastiche e delle forze inerziali. Il PSV può essere scritto come segue:

$$\delta L_{\text{int}} + \delta L_{\text{ine}} = 0 \quad (2.47)$$

La variazione virtuale del lavoro delle forze inerziali si scrive:

$$\delta L_{\text{ine}} = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} \quad (2.48)$$

dove  $M$  è la matrice di massa globale della struttura. Sostituendo nell'Eq. 2.47 si ottiene la seguente equazione matriciale:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = 0 \quad (2.49)$$

Imponendo una soluzione puramente armonica si riconduce l'analisi a un problema agli autovalori. Gli autovalori rappresentano le frequenze naturali della struttura, gli autovettori rappresentano i modi di vibrare.

## 2.4 Non linearità geometrica

In questa sezione viene presentata la formulazione CUF+FEM nel caso di modelli strutturali non lineari. In particolare, vengono introdotte le componenti di deformazione tridimensionali di Green-Lagrange. Successivamente, viene presentato il metodo Full Newton-Raphson per la risoluzione di sistemi di equazioni non lineari. Nell'ultimo paragrafo vengono descritte brevemente le matrici di rigidità secante e tangente. In particolare, sono analizzati i diversi termini delle matrici, scritte come nuclei fondamentali, e la loro origine.

### 2.4.1 Richiami

Si richiama la definizione del vettore degli spostamenti:

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \left\{ \begin{matrix} u_x & u_y & u_z \end{matrix} \right\}^T \quad (2.50)$$

Per la seguente trattazione le tensioni  $\boldsymbol{\sigma}$  e le deformazioni  $\boldsymbol{\epsilon}$  sono definite come segue:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \left\{ \begin{matrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yy} & \sigma_{zz} & \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{xy} \end{matrix} \right\}^T \\ \boldsymbol{\epsilon} &= \left\{ \begin{matrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{zz} & \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_{xy} \end{matrix} \right\}^T \end{aligned} \quad (2.51)$$

Per quanto riguarda le relazioni geometriche, si considerano le componenti di deformazione non lineare di Green-Lagrange. Il legame tra le deformazioni e gli spostamenti può essere scritto in forma compatta:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}_l + \boldsymbol{\epsilon}_{nl} = (\mathbf{b}_l + \mathbf{b}_{nl})\mathbf{u} \quad (2.52)$$

$\mathbf{b}_l$  e  $\mathbf{b}_{nl}$  sono rispettivamente l'operatore differenziale lineare e non lineare:

$$\mathbf{b}_l = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 & 0 \\ 0 & \partial_y & 0 \\ 0 & 0 & \partial_z \\ \partial_z & 0 & \partial_x \\ 0 & \partial_z & \partial_y \\ \partial_y & \partial_x & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_{nl} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\partial_x)^2 & \frac{1}{2}(\partial_x)^2 & \frac{1}{2}(\partial_x)^2 \\ \frac{1}{2}(\partial_y)^2 & \frac{1}{2}(\partial_y)^2 & \frac{1}{2}(\partial_y)^2 \\ \frac{1}{2}(\partial_z)^2 & \frac{1}{2}(\partial_z)^2 & \frac{1}{2}(\partial_z)^2 \\ \partial_x\partial_z & \partial_x\partial_z & \partial_x\partial_z \\ \partial_y\partial_z & \partial_y\partial_z & \partial_y\partial_z \\ \partial_x\partial_y & \partial_x\partial_y & \partial_x\partial_y \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

dove  $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$ ,  $\partial_y = \frac{\partial}{\partial y}$  e  $\partial_z = \frac{\partial}{\partial z}$ .

Si richiama l'espressione del campo di spostamenti per un modello trave, nell'ambito della teoria CUF:

$$\mathbf{u}(x, y, z) = F_s(x, z)\mathbf{u}_s(y), \quad s = 1, 2, \dots, M \quad (2.54)$$

Si richiama l'espressione del vettore degli spostamenti generalizzati  $\mathbf{u}_\tau$ , nell'ambito della discretizzazione con il metodo FEM:

$$\mathbf{u}_s(y) = N_j(y)\mathbf{q}_{sj}, \quad j = 1, 2, \dots, p + 1 \quad (2.55)$$

### 2.4.2 Equazioni di governo non lineari

Per la scrittura delle equazioni di equilibrio, anche per il caso non lineare, si usa il principio degli spostamenti virtuali:

$$\delta L_{\text{int}} - \delta L_{\text{est}} = 0 \quad (2.56)$$

Se si sostituiscono all'interno di questa equazione le relazioni della teoria CUF (Eq.2.54) e della discretizzazione FEM (Eq.2.55) le condizioni di equilibrio e le relative matrici agli elementi finiti possono essere scritte per una generica teoria strutturale in modo unificato come segue:

$$\mathbf{K}_S^{ij\tau s} \mathbf{q}_{sj} - \mathbf{p}_{sj} = 0 \quad (2.57)$$

dove  $\mathbf{K}_S^{ij\tau s}$  e  $\mathbf{p}_{sj}$  sono rispettivamente i nuclei fondamentali della matrice di rigidità secante e del vettore dei carichi nodali. Dopo aver eseguito la procedura di assemblaggio descritta nel paragrafo 2.3.1 si ottiene la seguente equazione d'equilibrio:

$$\mathbf{K}_S \mathbf{q} - \mathbf{p} = 0 \quad (2.58)$$

dove  $\mathbf{K}_S$ ,  $\mathbf{q}$  e  $\mathbf{p}$  sono matrici e vettori globali della struttura.

### 2.4.3 Metodo di Newton-Raphson

Le equazioni d'equilibrio di una struttura che presenta non linearità geometriche vengono generalmente risolte con un metodo iterativo. Il metodo di Newton-Raphson (o metodo della tangente) è tra i più utilizzati. L'equazione 2.58 viene riscritta come segue:

$$\varphi_{\text{res}} \equiv \mathbf{K}_S \mathbf{q} - \mathbf{p} = 0 \quad (2.59)$$

dove  $\varphi_{\text{res}}$  rappresenta il vettore dei residui dell'equazione. Successivamente l'equazione viene linearizzata tramite un'espansione in serie di Taylor troncata al primo ordine nell'intorno di una soluzione nota  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ :

$$\varphi_{\text{res}}(\mathbf{q} + \delta\mathbf{q}, \mathbf{p} + \delta\mathbf{p}) = \varphi_{\text{res}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \frac{\partial\varphi_{\text{res}}}{\partial\mathbf{q}}\delta\mathbf{q} + \frac{\partial\varphi_{\text{res}}}{\partial\mathbf{p}}\delta\mathbf{p} = 0 \quad (2.60)$$

dove  $\frac{\partial \varphi_{\text{res}}}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{K}_T$  è la matrice di rigidezza tangente e  $-\frac{\partial \varphi_{\text{res}}}{\partial \mathbf{p}}$  è uguale alla matrice identità  $\mathbf{I}$ . I carichi variano proporzionalmente al vettore dei carichi di riferimento  $\mathbf{p}_{\text{ref}}$ , con il parametro di carico  $\lambda$  che ne regola l'intensità:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \lambda \mathbf{p}_{\text{ref}} \\ \delta \mathbf{p} &= \delta \lambda \mathbf{p}_{\text{ref}} \end{aligned} \quad (2.61)$$

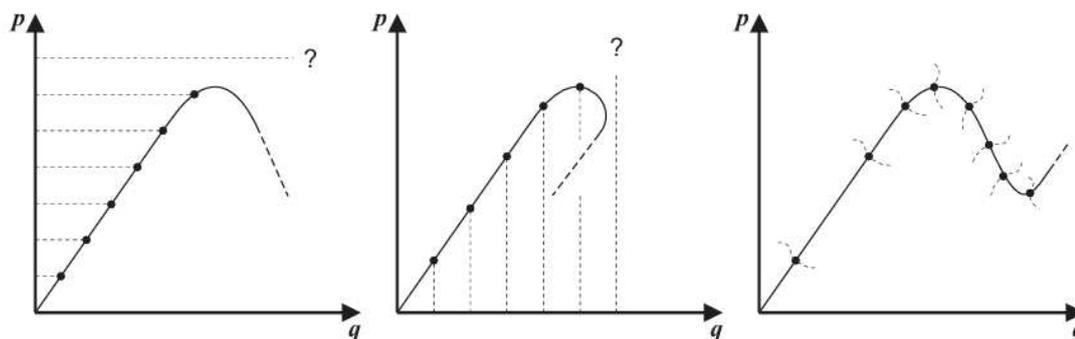
L'equazione linearizzata può essere riscritta come:

$$\mathbf{K}_T \delta \mathbf{q} = \delta \lambda \mathbf{p}_{\text{ref}} - \varphi_{\text{res}} \quad (2.62)$$

Il parametro di carico  $\lambda$  è una variabile del problema, quindi è necessario introdurre una equazione aggiuntiva che rappresenta una condizione di vincolo  $c(\delta \mathbf{q}, \delta \lambda)$ . Il sistema completo è così definito:

$$\begin{cases} \mathbf{K}_T \delta \mathbf{q} = \delta \lambda \mathbf{p}_{\text{ref}} - \varphi_{\text{res}} \\ c(\delta \mathbf{q}, \delta \lambda) = 0 \end{cases} \quad (2.63)$$

In base alla condizione di vincolo, che determina la tipologia di step che si applica ad ogni passo, si possono applicare diversi metodi iterativi, come mostrato in Fig.2.6. In questo lavoro è stato usato il metodo a controllo di carico, che corrisponde alla condizione di vincolo  $\delta \lambda = 0$ . Nel framework computazionale aeroelastico, descritto nel capitolo 4, i carichi aerodinamici sono un input dell'analisi strutturale non lineare. Il metodo a controllo di carico che monitora il carico nella procedura iterativa risulta essere il più adatto per questa applicazione. Il metodo implementato è noto come Full Newton-Raphson e ad ogni iterazione utilizza la matrice di rigidezza tangente  $\mathbf{K}_T$  aggiornata per risolvere l'equazione d'equilibrio linearizzata. La matrice di rigidezza secante  $\mathbf{K}_S$  viene usata solo per la valutazione del residuo  $\varphi_{\text{res}}$ .



**Figura 2.6:** Rappresentazione grafica e significato delle diverse condizioni di vincolo. Metodo a controllo di carico (sinistra). Metodo a controllo di spostamento (centro). Metodo Path-following (destra).[43]

### 2.4.4 Matrici di rigidezza

La matrice di rigidezza secante  $\mathbf{K}_S$  può essere calcolata a partire dall'espressione della variazione virtuale del lavoro delle forze interne:

$$\delta L_{\text{int}} = \langle \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \rangle \quad (2.64)$$

dove  $\langle \rangle = \int_V dV$  e  $V = \Omega \times L$  è il volume iniziale della trave. Le deformazioni possono essere espresse in funzione degli spostamenti generalizzati  $\mathbf{q}_{sj}$ :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \left( \mathbf{B}_l^{sj} + \mathbf{B}_{nl}^{sj} \right) \mathbf{q}_{sj} \quad (2.65)$$

dove  $\mathbf{B}_l^{sj}$  e  $\mathbf{B}_{nl}^{sj}$  in forma espansa si scrivono come:

$$\mathbf{B}_l^{sj} = \mathbf{b}_l(F_s N_j) = \begin{bmatrix} F_{s,x} N_j & 0 & 0 \\ 0 & F_s N_{j,y} & 0 \\ 0 & 0 & F_{s,z} N_j \\ F_{s,z} N_j & 0 & F_{s,x} N_j \\ 0 & F_{s,z} N_j & F_s N_{j,y} \\ F_s N_{j,y} & F_{s,x} N_j & 0 \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

$$\mathbf{B}_{nl}^{sj} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_{x,x} F_{s,x} N_j & u_{y,x} F_{s,x} N_j & u_{z,x} F_{s,x} N_j \\ u_{x,y} F_s N_{j,y} & u_{y,y} F_s N_{j,y} & u_{z,y} F_s N_{j,y} \\ u_{x,z} F_{s,z} N_j & u_{y,z} F_{s,z} N_j & u_{z,z} F_{s,z} N_j \\ u_{x,x} F_{s,z} N_j + u_{x,z} F_{s,x} N_j & u_{y,x} F_{s,z} N_j + u_{y,z} F_{s,x} N_j & u_{z,x} F_{s,z} N_j + u_{z,z} F_{s,x} N_j \\ u_{x,y} F_{s,z} N_j + u_{x,z} F_s N_{j,y} & u_{y,y} F_{s,z} N_j + u_{y,z} F_s N_{j,y} & u_{z,y} F_{s,z} N_j + u_{z,z} F_s N_{j,y} \\ u_{x,x} F_s N_{j,y} + u_{x,y} F_{s,x} N_j & u_{y,x} F_s N_{j,y} + u_{y,y} F_{s,x} N_j & u_{z,x} F_s N_{j,y} + u_{z,y} F_{s,x} N_j \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

dove le virgole rappresentano le derivate parziali delle grandezze. La variazione virtuale del vettore delle deformazioni si può scrivere come:

$$\delta \boldsymbol{\epsilon}^T = \delta \mathbf{q}_{\tau_i}^T \left( \mathbf{B}_l^{\tau_i} + 2\mathbf{B}_{nl}^{\tau_i} \right)^T \quad (2.68)$$

Sostituendo la relazione costitutiva e le equazioni 2.65,2.68 all'interno dell'espressione per il lavoro virtuale delle forze interne si ottiene:

$$\begin{aligned}
 \delta L_{int} &= \delta \mathbf{q}_{\tau_i}^T \langle (\mathbf{B}_l^{\tau i} + 2\mathbf{B}_{nl}^{\tau i})^T \mathbf{C} (\mathbf{B}_l^{sj} + \mathbf{B}_{nl}^{sj}) \rangle \mathbf{q}_{sj} \\
 &= \delta \mathbf{q}_{\tau_i}^T (\mathbf{K}_0^{ij\tau s} + \mathbf{K}_{lnl}^{ij\tau s} + \mathbf{K}_{nll}^{ij\tau s} + \mathbf{K}_{nlnl}^{ij\tau s}) \mathbf{q}_{sj} \\
 &= \delta \mathbf{q}_{\tau_i}^T \mathbf{K}_S^{ij\tau s} \mathbf{q}_{sj}
 \end{aligned} \tag{2.69}$$

La matrice di rigidezza secante  $\mathbf{K}_S$  scritta come nucleo fondamentale è costituita da diversi termini:

$$\mathbf{K}_S^{ij\tau s} = \mathbf{K}_0^{ij\tau s} + \mathbf{K}_{lnl}^{ij\tau s} + \mathbf{K}_{nll}^{ij\tau s} + \mathbf{K}_{nlnl}^{ij\tau s} \tag{2.70}$$

dove  $\mathbf{K}_0^{ij\tau s}$  rappresenta la matrice di rigidezza lineare,  $\mathbf{K}_{lnl}^{ij\tau s}$  e  $\mathbf{K}_{nll}^{ij\tau s}$  sono i contributi non lineari del primo ordine,  $\mathbf{K}_{nlnl}^{ij\tau s}$  rappresenta il contributo non lineare del secondo ordine. Si riportano i diversi termini in forma esplicita:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_0^{ij\tau s} &= \langle (\mathbf{B}_l^{\tau i})^T \mathbf{C} \mathbf{B}_l^{sj} \rangle & \mathbf{K}_{lnl}^{ij\tau s} &= \langle (\mathbf{B}_l^{\tau i})^T \mathbf{C} \mathbf{B}_{nl}^{sj} \rangle \\
 \mathbf{K}_{nll}^{ij\tau s} &= 2 \langle (\mathbf{B}_{nl}^{\tau i})^T \mathbf{C} \mathbf{B}_l^{sj} \rangle & \mathbf{K}_{nlnl}^{ij\tau s} &= 2 \langle (\mathbf{B}_{nl}^{\tau i})^T \mathbf{C} \mathbf{B}_{nl}^{sj} \rangle
 \end{aligned} \tag{2.71}$$

La matrice di rigidezza  $\mathbf{K}_T$  può essere ottenuta linearizzando la variazione virtuale del lavoro delle forze interne:

$$\begin{aligned}
 \delta(\delta L_{int}) &= \langle \delta(\delta \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma}) \rangle \\
 &= \langle \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \delta \boldsymbol{\sigma} \rangle + \langle \delta(\delta \boldsymbol{\epsilon}^T) \boldsymbol{\sigma} \rangle \\
 &= \delta \mathbf{q}_{\tau_i}^T (\mathbf{K}_0^{ij\tau s} + \mathbf{K}_{T_1}^{ij\tau s} + \mathbf{K}_{\sigma}^{ij\tau s}) \delta \mathbf{q}_{sj} \\
 &= \delta \mathbf{q}_{\tau_i}^T \mathbf{K}_T^{ij\tau s} \delta \mathbf{q}_{sj}
 \end{aligned} \tag{2.72}$$

La matrice di rigidezza tangente  $\mathbf{K}_T$  scritta come nucleo fondamentale è costituita da diversi termini:

$$\mathbf{K}_T^{ij\tau s} = \mathbf{K}_0^{ij\tau s} + \mathbf{K}_{T_1}^{ij\tau s} + \mathbf{K}_{\sigma}^{ij\tau s} \tag{2.73}$$

dove  $\mathbf{K}_0^{ij\tau s}$  rappresenta la matrice di rigidezza lineare.  $\mathbf{K}_{\sigma}^{ij\tau s}$  rappresenta la rigidezza geometrica, un termine che deriva dalla linearizzazione della relazione deformazioni-spostamenti. Il termine  $\mathbf{K}_{T_1}^{ij\tau s} = 2\mathbf{K}_{lnl}^{ij\tau s} + \mathbf{K}_{nll}^{ij\tau s} + 2\mathbf{K}_{nlnl}^{ij\tau s}$  è il contributo

non lineare derivante dalla linearizzazione dell'equazione costitutiva, nell'ipotesi di coefficienti del materiale costanti ( $\delta\mathbf{C} = 0$ ). La derivazione completa dei nuclei fondamentali della matrice di rigidezza tangente e le componenti dei nuclei nel caso di struttura che presenta non linearità geometrica sono riportate in [43].

# Capitolo 3

## Modello aerodinamico

In questo capitolo viene presentato il modello aerodinamico accurato basato sulla risoluzione numerica diretta delle equazioni di governo del fluido con l'uso della CFD. In particolare, vengono presentate le equazioni fondamentali della meccanica dei fluidi e la loro derivazione. Successivamente, viene descritto come il software SU2 risolve queste equazioni con il Metodo dei Volumi Finiti. Nell'ultima parte sono illustrati alcuni requisiti della griglia computazionale, tra cui la risoluzione nelle vicinanze della parete.

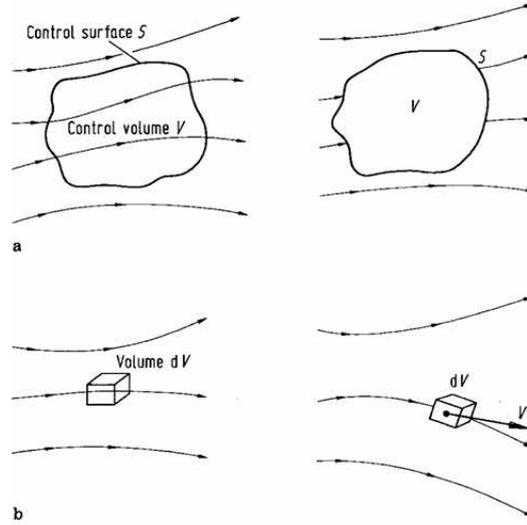
### 3.1 Equazioni della Meccanica dei Fluidi

Le equazioni del moto per un fluido viscoso si ottengono attraverso la traduzione matematica dei seguenti principi fisici:

- Conservazione della massa;
- Conservazione della quantità di moto;
- Conservazione dell'energia.

Il principio di conservazione della quantità di moto è una forma generalizzata della legge di Newton ( $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ ), e il principio di conservazione dell'energia è una formulazione del primo principio della Termodinamica. Tali equazioni possono essere scritte in forma integrale o differenziale a seconda che si consideri un volume di fluido finito o infinitesimo. Il volume considerato deve essere comunque abbastanza grande da far valere l'ipotesi di mezzo continuo, con le proprietà del fluido esprimibili come funzioni continue nello spazio e nel tempo. Per esprimere le equazioni di bilancio si può usare un approccio Euleriano, con un sistema di riferimento fisso nello spazio, o un approccio Lagrangiano il cui sistema di riferimento è in movimento

con il fluido. I diversi metodi e approcci che si possono usare per la scrittura delle equazioni di moto del fluido sono riportati graficamente in Fig.3.1.



**Figura 3.1:** Rappresentazione grafica dei diversi metodi e approcci per la derivazione dell'equazioni di governo. Caso **a**: volume di fluido finito. Caso **b**: volume di fluido infinitesimo. A sinistra: approccio Euleriano. A destra: approccio Lagrangiano. [44]

Nell'ambito di questa tesi le equazioni di governo vengono inizialmente presentate in forma integrale. In seguito vengono derivate le equazioni in forma differenziale conservativa e in forma Lagrangiana. Si consideri un volume di fluido infinitesimo in movimento lungo una linea di corrente con velocità  $\mathbf{V} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$ , si definisce l'operatore derivata materiale (o Lagrangiana):

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \quad (3.1)$$

che rappresenta la velocità di variazione di una grandezza scalare o vettoriale seguendo l'elemento fluido nel suo moto.  $\partial/\partial t$  è la derivata locale (o Euleriana), cioè la variazione nell'unità di tempo di una grandezza in un punto fisso. Questo termine è nullo se si considera un flusso stazionario. Il termine  $\mathbf{V} \cdot \nabla$  è la derivata convettiva e rappresenta la velocità di variazione di una grandezza causata dal movimento della particella fluida da un punto all'altro nel campo di moto. Se una certa proprietà ha una distribuzione spaziale omogenea la sua derivata convettiva è nulla.

### 3.1.1 Bilancio della massa

Considerato un volume di controllo  $V$  arbitrario nello spazio, delimitato da una superficie  $S$ , il flusso netto di massa attraverso la superficie  $S$  è pari alla variazione temporale della massa contenuta all'interno del volume di controllo. La legge di conservazione della massa in forma integrale può essere espressa tramite la seguente equazione:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \, d\Omega = - \int_S \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (3.2)$$

dove  $\rho$  è la massa per unità di volume e  $\mathbf{n}$  è il versore normale alla superficie, assunto positivo se uscente. Se si considera il volume  $V$  fisso nel tempo si possono commutare le operazioni di derivazione nel tempo ed integrazione di volume. Inoltre, applicando il teorema di Gauss al secondo membro si ottiene:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV = - \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) \, dV \quad (3.3)$$

Essendo il volume di controllo arbitrario deve essere soddisfatta in ogni punto la seguente relazione:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (3.4)$$

Questa relazione rappresenta l'equazione della conservazione della massa in forma differenziale conservativa o equazione di continuità. Usando la definizione di derivata Lagrangiana (Eq.3.1) l'equazione di continuità può essere scritta in forma Lagrangiana:

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{V} \quad (3.5)$$

che descrive le variazioni di densità di una particella fluida in funzione delle sue variazioni di volume. La condizione  $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$  indica che il fluido è incompressibile.

### 3.1.2 Bilancio della quantità di moto

L'equazione di conservazione della quantità di moto è una generalizzazione della seconda legge della dinamica. La sua formulazione integrale è la seguente:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{V} \, dV = - \int_S \rho \mathbf{V} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) \, dS + \int_S \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{n} \, dS + \int_V \rho \mathbf{f} \, dV \quad (3.6)$$

dove  $\rho \mathbf{V}$  è la quantità di moto per unità di volume e il vettore  $\rho \mathbf{f}$  rappresenta le forze di campo per unità di volume. Le forze superficiali sono rappresentate

dal tensore degli sforzi  $\mathbf{\Pi}$ . Il tensore  $\mathbf{\Pi}$  è costituito da una parte isotropa che comprende gli sforzi normali di pressione  $p$  e una parte non isotropa che rappresenta il contributo degli sforzi viscosi, che agiscono tangenzialmente alla superficie e sono presenti solo in caso di fluido in movimento. Vale la seguente relazione:

$$\mathbf{\Pi} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \quad (3.7)$$

Il tensore degli sforzi viscosi  $\boldsymbol{\tau}$ , nell'ipotesi di fluido Newtoniano e considerando valida l'ipotesi di Stokes, può essere espresso attraverso la seguente legge costitutiva:

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu\mathbf{D} - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{I} \quad (3.8)$$

dove  $\mu$  è la viscosità dinamica,  $\mathbf{D}$  è il tensore velocità di deformazione, rappresenta la parte simmetrica del tensore del gradiente di velocità e può essere scritto come segue:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{V} + \nabla\mathbf{V}^T) \quad (3.9)$$

Applicando il teorema di Gauss l'Eq.3.1.2 può essere riscritta nella seguente forma:

$$\int_V \frac{\partial(\rho\mathbf{V})}{\partial t} dV = - \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}\mathbf{V}) dV + \int_V \nabla \cdot \mathbf{\Pi} dV + \int_V \rho\mathbf{f} dV \quad (3.10)$$

Considerando il volume di controllo  $V$  arbitrario si ottiene l'equazione della quantità di moto in forma differenziale conservativa:

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{V})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}\mathbf{V}) = \nabla \cdot \mathbf{\Pi} + \rho\mathbf{f} \quad (3.11)$$

Introducendo la scomposizione del tensore degli sforzi si ottiene:

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{V})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}\mathbf{V}) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho\mathbf{f} \quad (3.12)$$

L'equazione della quantità di moto contiene al suo interno l'equazione di continuità, pertanto facendo le opportune semplificazioni e ricordando la definizione di derivata materiale si può scrivere:

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho\mathbf{f} \quad (3.13)$$

che è l'equazione della quantità di moto scritta in forma Lagrangiana.

### 3.1.3 Bilancio dell'energia

La terza equazione di conservazione riguarda l'energia totale per unità di massa  $E$  che può essere espressa come somma di due termini:

$$E = \epsilon + \frac{V^2}{2} \quad (3.14)$$

dove  $\epsilon$  rappresenta l'energia interna e  $V^2/2$  l'energia cinetica del fluido. L'equazione di conservazione dell'energia in forma integrale può essere scritta come:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho E \, dV = & - \int_S \rho E \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, dS + \int_S (\mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n} \, dS \\ & + \int_V \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{V} \, dV - \int_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, dS + \int_V Q \, dV \end{aligned} \quad (3.15)$$

Il bilancio dell'energia è regolato dal lavoro delle forze esterne superficiali e volumiche, dal flusso di calore  $\mathbf{q}$  e da eventuali sorgenti di calore volumiche  $Q$ . La corrispondente equazione dell'energia in forma differenziale conservativa si può scrivere come:

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho E \mathbf{V}) = \nabla \cdot (\mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{V}) + \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{V} - \nabla \cdot \mathbf{q} + Q \quad (3.16)$$

Facendo delle opportune semplificazioni e introducendo la scomposizione del tensore degli sforzi si può ottenere l'equazione dell'energia in forma Lagrangiana:

$$\rho \frac{DE}{Dt} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{V}) + \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{V} - \nabla \cdot \mathbf{q} + Q \quad (3.17)$$

## 3.2 Equazioni di Navier-Stokes

Il sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali in forma conservativa descritto (3.4,3.12,3.16) contiene come incognite oltre alle variabili  $p$ ,  $\rho$ ,  $E$  e  $\mathbf{V}$  anche gli sforzi viscosi  $\boldsymbol{\tau}$  e il flusso di calore  $\mathbf{q}$ . Per chiudere il sistema si introducono la legge costitutiva per il tensore degli sforzi 3.8 e la legge di Fourier:

$$\mathbf{q} = -\kappa \nabla T \quad (3.18)$$

dove  $\kappa$  rappresenta la conducibilità termica e  $T$  la temperatura. In questo modo si possono scrivere le equazioni di Navier-Stokes:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) &= 0, \\
 \frac{\partial(\rho \mathbf{V})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \mathbf{V}) &= -\nabla p + \nabla \cdot \left[ \mu (\nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^T) - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \mathbf{V}) \mathbf{I} \right] + \rho \mathbf{f}, \\
 \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho E \mathbf{V}) &= -\nabla \cdot (p \mathbf{V}) + \nabla \cdot \left\{ \left[ \mu (\nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^T) - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \mathbf{V}) \mathbf{I} \right] \mathbf{V} \right\} \\
 &\quad + \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{V} + \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + Q.
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Le equazioni di Navier-Stokes sono un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali non lineari, pertanto non esiste una soluzione al problema in forma chiusa se non per casi estremamente semplificati. Il sistema è costituito da cinque equazioni ma presenta sette incognite. Sono necessarie altre due equazioni che legano le variabili termodinamiche del fluido. Per un gas perfetto, l'equazione di stato si può scrivere come:

$$p = \rho R T \tag{3.20}$$

dove  $R$  è la costante specifica del gas (per l'aria  $R = 287.05 \text{ J}/(\text{kgK})$ ). Per un gas caloricamente perfetto vale la seguente relazione:

$$\epsilon = c_v T \tag{3.21}$$

dove  $c_v$  è il calore specifico del gas a volume costante. Se si considera il fluido come inviscido, trascurando i fenomeni diffusivi legati all'agitazione termica, gli effetti viscosi e di conducibilità termica risultano nulli ( $\mu = 0, \kappa = 0$ ). In assenza di sorgenti di calore, le equazioni di Navier-Stokes si semplificano e si ottengono le equazioni di Eulero:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) &= 0, \\
 \frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{V}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \mathbf{V} + p \mathbf{I}) &= \rho \mathbf{f}, \\
 \frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \nabla \cdot [(\rho E + p) \mathbf{V}] &= \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{V}.
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

### 3.3 Turbolenza ed equazioni RANS

Le soluzioni delle equazioni di Navier-Stokes rappresentano delle correnti laminari che esistono solo per una minoranza di casi nelle applicazioni pratiche. Per numeri di Reynolds superiori ad un valore critico, che dipende dal problema considerato, l'azione della viscosità del fluido non è più in grado di smorzare le perturbazioni che

si instaurano nel campo di moto e il flusso, dopo una transizione, diventa turbolento. In un regime di moto turbolento le grandezze cinematiche e termodinamiche sono soggette a fluttuazioni nello spazio e nel tempo. Queste fluttuazioni turbolente caotiche rendono il moto turbolento instazionario, tridimensionale e fortemente non lineare. Esistono diversi approcci per risolvere un campo di moto turbolento numericamente. La Direct Numerical Simulation (DNS) è la tecnica più costosa che consiste nella risoluzione diretta delle equazioni di Navier-Stokes. Tuttavia esiste un limite nell'applicazione della DNS legato al numero di Reynolds:

$$Re = \frac{\rho V L}{\mu} \quad (3.23)$$

dove  $L$  rappresenta una lunghezza caratteristica del problema preso in esame. Il numero di Reynolds rappresenta il rapporto tra le forze inerziali e le forze viscosi in un fluido. Nell'ambito della fluidodinamica computazionale risolvere direttamente un flusso ad alto numero di Reynolds richiede una discretizzazione molto fitta del dominio di calcolo con un conseguente aumento del costo computazionale. In particolare, il costo risulta essere proporzionale a  $Re^3$ . Nell'ambito di questa tesi viene descritto l'approccio che fa uso delle equazioni Reynolds-Averaged Navier-Stokes (RANS). La decomposizione proposta da Reynolds [45] permette di descrivere solo il campo di moto medio e si basa sulla teoria statistica della turbolenza. Una generica variabile  $q$  viene scomposta come segue:

$$q = \bar{q} + q' \quad (3.24)$$

dove  $\bar{q}$  è il valore medio della grandezza e  $q'$  è la sua fluttuazione. La scelta di un operatore di media opportuno a seconda del caso preso in esame è fondamentale. Nel caso di problemi statisticamente stazionari si può usare una media temporale:

$$\bar{q}(\bar{x}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} q(\bar{x}, t) dt \quad (3.25)$$

Esistono altri tipi di media che per brevità non vengono qui presentati. L'operatore di media è lineare e valgono le seguenti proprietà, per una generica coppia  $u$  e  $v$  di variabili aleatorie:

$$\begin{aligned} \overline{u + v} &= \bar{u} + \bar{v}, \\ \overline{ku} &= k\bar{u} \quad (k = \text{costante}), \\ \bar{\bar{u}} &= \bar{u}, \\ \overline{u'} &= \bar{v'} = 0. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Per ottenere le equazioni RANS si deve applicare la scomposizione alle variabili fisiche e sostituirle all'interno delle equazioni di Navier-Stokes. Si definisce  $u_i$

l' $i$ -esima componente del vettore velocità  $\mathbf{V}$ . Nel caso di fluido incomprimibile si ottiene il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} &= 0, \\ \rho \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \rho \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \bar{\tau}_{ij} - \rho \overline{u'_i u'_j} \right). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Le equazioni sono formalmente identiche alle equazioni di Navier-Stokes. Compare un termine aggiuntivo che rappresenta l'effetto delle fluttuazioni non risolte sul campo medio, il tensore degli sforzi di Reynolds:

$$\boldsymbol{\tau}_{ij}^R = -\rho \overline{u'_i u'_j} \quad (3.28)$$

Il tensore degli sforzi di Reynolds è costituito da nove termini, di cui sei sono linearmente indipendenti. Per la chiusura del sistema di equazioni RANS bisogna introdurre ulteriori relazioni. Nella maggioranza delle applicazioni viene adottato il modello lineare di Boussinesq, che si basa sull'ipotesi di dipendenza lineare delle componenti del tensore degli sforzi di Reynolds dai gradienti di velocità. Nel caso di fluido incomprimibile si può scrivere:

$$\boldsymbol{\tau}_{ij}^R = 2\mu_t \overline{\mathbf{S}_{ij}} - \frac{2}{3}\rho\kappa\mathbf{I} \quad (3.29)$$

dove  $\mathbf{S}$  è il tensore della velocità di deformazione mediato alla Reynolds,  $\kappa$  rappresenta l'energia cinetica turbolenta e  $\mu_t$  la viscosità dinamica turbolenta. Valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{S}_{ij}} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \\ \kappa &= \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} \end{aligned} \quad (3.30)$$

dove secondo la notazione di Einstein l'indice ripetuto indica una sommatoria. La viscosità dinamica turbolenta  $\mu_t$  rappresenta l'effetto delle fluttuazioni turbolente sul campo medio, pertanto dipende dalle condizioni locali del flusso. Per chiudere il sistema e stimare il valore di  $\mu_t$  si usano dei modelli di turbolenza. I modelli di chiusura più usati prevedono la risoluzione di una o due equazioni di trasporto aggiuntive. Tra i modelli che fanno uso di due equazioni di trasporto più diffusi ci sono il  $\kappa-\epsilon$ , il  $\kappa-\omega$  e il metodo Shear Stress Transport (SST). Nell'ambito di questa tesi è stato usato il modello di Spalart-Allmaras che prevede la risoluzione di una equazione di trasporto per la viscosità turbolenta. Questo modello è caratterizzato da una buona accuratezza e un'ottima stabilità, oltre a ciò ha un costo computazionale ridotto rispetto agli altri metodi citati. Per ulteriori dettagli riguardo al metodo di Spalart-Allmaras si rimanda alla documentazione in [46].

### 3.4 SU2

SU2 è un ambiente open-source sviluppato presso la Stanford University per l'analisi computazionale e la progettazione, capace di risolvere in modo efficiente equazioni alle derivate parziali. L'architettura modulare di SU2 è composta da file eseguibili in linguaggio C++ e script di gestione in linguaggio Python. Questo rende il software flessibile e agevolmente integrabile con altri strumenti. Grazie a queste caratteristiche, con SU2 è possibile risolvere una vasta gamma di problemi ingegneristici: analisi aeroelastiche, analisi di flussi reagenti e analisi strutturali. Nell'ambito di questa tesi SU2 è stato utilizzato in due modi: per il calcolo dei carichi aerodinamici sulla superficie (modulo SU2\_CFD) e per la deformazione della griglia aerodinamica tramite l'applicazione di spostamenti in dei punti di controllo della mesh (modulo SU2\_DEF). SU2\_CFD risolve le equazioni di Navier-Stokes compressibili in forma differenziale:

$$R(U) = \frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}^c(U) - \nabla \cdot \mathbf{F}^v(U, \nabla U) - Q = 0 \quad (3.31)$$

dove  $U$  è il vettore delle variabili di stato che corrispondono con le variabili conservative:

$$U = \{\rho, \rho \mathbf{V}, \rho E\}^T \quad (3.32)$$

$Q$  è un generico termine sorgente,  $\mathbf{F}^c$  e  $\mathbf{F}^v$  rappresentano rispettivamente i flussi convettivi e viscosi:

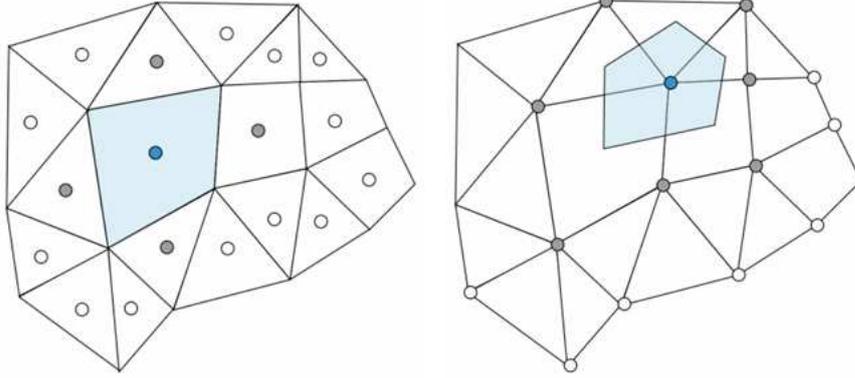
$$\mathbf{F}^c = \left\{ \begin{array}{c} \rho \mathbf{V} \\ \rho \mathbf{V} \mathbf{V} + p \mathbf{I} \\ \rho E \mathbf{V} + p \mathbf{V} \end{array} \right\} \quad \mathbf{F}^v = \left\{ \begin{array}{c} \cdot \\ \boldsymbol{\tau} \\ \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{V} + \kappa \nabla T \end{array} \right\} \quad (3.33)$$

La stessa struttura delle equazioni viene mantenuta nel caso di equazioni RANS compressibili, infatti la viscosità  $\mu$  e la conducibilità termica  $\kappa$  vengono calcolate come somma di un termine dinamico (laminare) e un termine turbolento:

$$\begin{aligned} \mu &= \mu_d + \mu_t \\ \kappa &= \kappa_d + \kappa_t = \frac{\mu_d c_p}{Pr_d} + \frac{\mu_t c_p}{Pr_t} \end{aligned} \quad (3.34)$$

dove  $c_p$  è il calore specifico a pressione costante e  $Pr$  è il numero di Prandtl. In particolare, se il flusso è laminare per applicare le equazioni di Navier-Stokes vengono posti  $\mu_t = 0$  e  $\kappa_t = 0$ . Le equazioni differenziali alle derivate parziali su SU2 vengono discretizzate mediante il Finite Volume Method (FVM) [44]. Il dominio viene discretizzato in una griglia composta da celle o volumi elementari e alle variabili incognite viene assegnato il significato fisico di valor medio delle celle.

Il valor medio della singola cella in uno schema Cell-centered viene assegnato al baricentro della cella stessa. SU2 utilizza uno schema Vertex-centered nel quale viene costruita una griglia duale e il valor medio viene associato ai nodi della griglia originale. La differenza tra questi due approcci viene mostrata in Fig. 3.2. I flussi vengono calcolati alle interfacce delle celle e i valori delle grandezze all'interno di una cella e al bordo possono essere ricostruiti con diversi metodi, opportunamente scelti in base all'ordine di accuratezza e al costo computazionale desiderati.



**Figura 3.2:** Celle computazionali per i diversi schemi. Cell-centered (a sinistra) e Vertex-centered (a destra) [38].

Dopo aver integrato le equazioni di governo sul volume di controllo delle singole celle ed aver applicato il teorema della divergenza, si ottiene la seguente forma integrale semidiscretizzata delle equazioni:

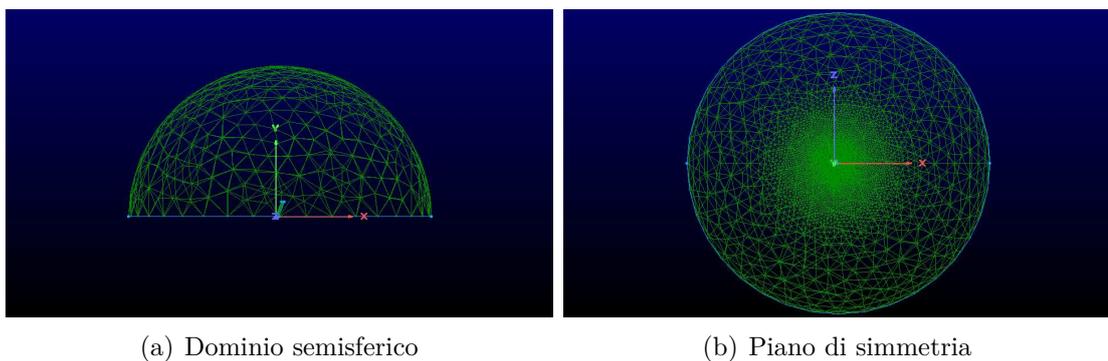
$$\int_{\Omega_i} \frac{\partial U}{\partial t} d\Omega + \sum_{j \in N(i)} (\tilde{F}_{ij}^c + \tilde{F}_{ij}^v) \Delta S_{ij} - Q|\Omega_i| = \int_{\Omega_i} \frac{\partial U}{\partial t} d\Omega + R_i(U) = 0 \quad (3.35)$$

dove  $\tilde{F}_{ij}^c$  e  $\tilde{F}_{ij}^v$  rappresentano i flussi numerici convettivi e diffusivi calcolati sul  $j$ -esimo bordo della cella  $i$ -esima.  $R_i(U)$  è il residuo numerico,  $\Delta S_{ij}$  è l'area associata all'interfaccia  $ij$ ,  $|\Omega_i|$  è il volume della celle elementare  $i$ -esima e  $N(i)$  rappresenta il numero dei nodi adiacenti alla cella  $i$ -esima. Su SU2 si possono implementare numerosi metodi upwind e centrati per il calcolo dei flussi convettivi, tra cui il metodo di Roe e il metodo JST. Per calcolare i flussi diffusivi all'interfaccia viene eseguita una media tra i gradienti calcolati nei nodi delle celle che condividono l'interfaccia. Per il calcolo dei gradienti nei nodi sono disponibili il metodo di Green-Gauss e il metodo Weighted Least-Squares. Esistono diversi metodi espliciti e impliciti per l'integrazione temporale, tra cui i metodi di Eulero e Runge-Kutta. Nel caso dei metodi impliciti la procedura implementata su SU2 consiste nella

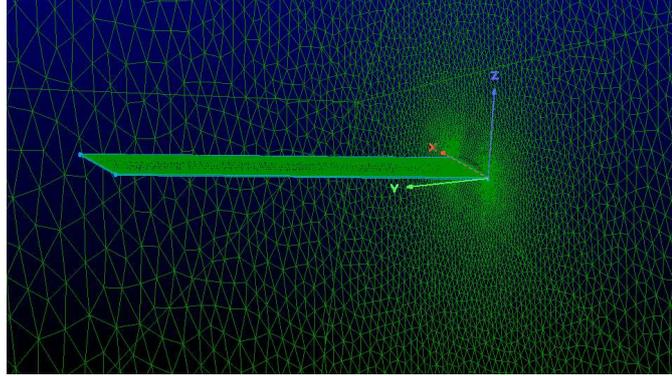
linearizzazione delle equazioni e nella risoluzione del sistema lineare derivante con metodi iterativi basati sul sottospazio di Krylov, come il metodo Generalized Minimal Residual (GMRES).

### 3.4.1 Griglia computazionale e requisiti di risoluzione

SU2 utilizza principalmente un formato di mesh nativo (.su2) come input per i vari componenti del pacchetto. Tuttavia, supporta anche il formato CGNS per l'importazione delle mesh generate da software di terze parti. Il file .su2 è un documento di testo in formato ASCII che descrive la griglia geometrica utilizzata per la discretizzazione del dominio computazionale. Nel file di input sono contenute le coordinate dei nodi, la matrice di connectivity e informazioni sulla tipologia degli elementi usati per discretizzare le superfici e i volumi, come triangoli, quadrilateri e tetraedri. Attraverso specifici marker, il file permette di identificare le diverse parti della mesh, come le superfici del corpo, il campo lontano e le zone di simmetria. Nell'ambito di questo lavoro, sono stati creati modelli CAD per le diverse geometrie di ala prese in considerazione, mediante il software SolidWorks. Le parti sono state successivamente importate sul software Pointwise, che è stato utilizzato per la generazione delle mesh. Come si può vedere in Fig. 3.3 le diverse geometrie sono state studiate in un dominio computazionale semisferico, utilizzando un piano di simmetria per ridurre il costo computazionale delle simulazioni. In Figura 3.4 viene mostrato un ingradimento della semiala incastrata nel piano di simmetria, all'interno dell'ambiente di lavoro Pointwise.



**Figura 3.3:** Caratteristiche del dominio computazionale. Ambiente Pointwise.



**Figura 3.4:** Ala incastrata nel piano di simmetria. Ambiente Pointwise.

La qualità della mesh è un fattore cruciale per ottenere risultati accurati nelle analisi CFD. In questo lavoro sono state seguite le linee guida per la generazione e la validazione della griglia computazionale riportate in letteratura [47]. In particolare, sono state eseguite analisi di convergenza sui coefficienti aerodinamici  $C_L$  e  $C_D$  al variare della dimensione del dominio di calcolo. Inoltre, sono stati verificati i requisiti di risoluzione nelle vicinanze della parete, influenzate dalla presenza dello strato limite. Lo strato limite è la zona in cui si concentrano gli effetti della viscosità, ed è definito come la regione di fluido compresa tra la superficie del corpo e il punto in cui la velocità del fluido raggiunge il 99% della velocità del flusso indisturbato. In Figura 3.5 viene mostrato il profilo tipico della velocità adimensionale  $u^+$ , in funzione della distanza da parete adimensionale  $y^+$ , per uno strato limite turbolento. Le grandezze adimensionali sono così definite:

$$u^+ = \frac{U}{u_\tau} = f(y^+), \quad y^+ = \frac{yu_\tau}{\nu} \quad (3.36)$$

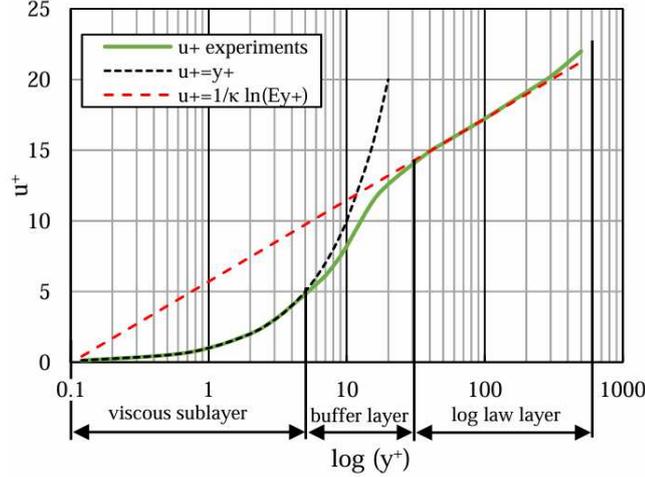
dove  $y$  è la distanza da parete e  $u_\tau$  rappresenta la velocità d'attrito. Dal profilo di velocità adimensionale si può evincere che l'inner layer (la porzione dello strato limite più vicina a parete) è suddivisa in tre regioni distinte:

- **Sottostrato viscoso** ( $y^+ \leq 5$ ): zona più vicina a parete, nella quale gli sforzi viscosi sono dominanti. In questa zona vale la seguente relazione lineare tra la velocità e la distanza da parete:

$$u^+ = y^+ \quad (3.37)$$

- **Buffer layer** ( $5 < y^+ \leq 30$ ): zona di raccordo, nella quale gli effetti viscosi e turbolenti hanno pari importanza. Non esiste una legge analitica ben definita per questa zona.

- **Sottostrato logaritmico** ( $y^+ > 30$ ): zona in cui prevalgono gli effetti della turbolenza, nella quale  $u^+$  ha una dipendenza logaritmica da  $y^+$ .



**Figura 3.5:** Velocità nelle vicinanze della parete. Dati sperimentali da [47].

Nel caso di simulazioni RANS, per risolvere accuratamente il sottostrato viscoso è necessario raffinare la griglia nelle vicinanze della parete in modo opportuno. In particolare, è fondamentale che un numero sufficiente di celle siano contenute nel sottostrato viscoso. In letteratura viene consigliato di scegliere l'altezza della prima cella  $\Delta s$  tale da garantire un valore di  $y^+$  minore dell'unità. Il valore esatto di  $y^+$  non è noto a priori, quindi per stimare il  $\Delta s$  necessario si può seguire la seguente procedura basata sulla teoria dello strato limite di una lamina piana. Attraverso le seguenti formule analitiche è possibile determinare il numero di Reynolds, il coefficiente d'attrito a parete  $c_f$ , lo sforzo di taglio a parete  $\tau_w$  e la dimensione della prima cella:

$$Re_x = \frac{\rho V L}{\mu}, \quad c_f = 0.026 Re_x^{-1/7}, \quad \tau_w = \frac{c_f \rho V_\infty^2}{2}, \quad \Delta s = \frac{y^+ \mu}{\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}} \quad (3.38)$$

dove  $L$  è una lunghezza caratteristica in direzione  $x$ . Nelle equazioni precedenti va inserito il valore di  $y^+$  desiderato. Al termine della simulazione è necessario verificare che il campo di moto ottenuto sia plausibile e che il valore calcolato di  $y^+$  sia quello atteso. Nel caso questi controlli abbiano esito negativo è necessario raffinare ulteriormente la griglia computazionale in prossimità della parete.

# Capitolo 4

## Interazione fluido-struttura

L'analisi di fenomeni aeroelastici richiede un accoppiamento tra il codice aerodinamico e quello strutturale. In questo capitolo viene descritto l'algoritmo d'interazione fluido-struttura usato per garantire lo scambio d'informazioni tra i due domini computazionali. La griglia aerodinamica è definita sulla superficie esterna, mentre la mesh strutturale si sviluppa anche all'interno del corpo. In generale, anche considerando le relative mesh superficiali, le coordinate dei nodi delle rispettive griglie nella maggior parte dei casi differiscono. L'algoritmo di interazione fluido-struttura esegue due funzioni principali:

- il trasferimento delle forze aerodinamiche dalla griglia aerodinamica a quella strutturale;
- il trasferimento degli spostamenti strutturali dalla mesh strutturale a quella aerodinamica.

Entrambe le trasformazioni devono essere eseguite in modo conservativo. Per l'interpolazione delle grandezze tra le griglie aerodinamica e strutturale è stata adottata la tecnica Infinite Plate Spline (IPS).

### 4.1 Infinite Plate Spline

Il metodo IPS, noto anche come spline di superficie, è stato introdotto da Harder e Desmarais [12]. Questa tecnica matematica viene impiegata per interpolare una funzione  $w$  su una superficie  $(x, y)$  a partire dai valori noti della funzione in un insieme discreto di punti. Questa teoria considera una piastra infinita a spessore costante e ne risolve le equazioni differenziali di equilibrio, ottenendo una soluzione in forma chiusa che soddisfa le deflessioni nei punti strutturali. Dopo aver risolto il sistema di equazioni lineari, è possibile determinare la deflessione nei

punti aerodinamici. Si definisce una griglia di  $N_{PS}$  punti pseudo-strutturali, nei quali devono essere trasferiti i carichi aerodinamici. Nell'ambito di questo lavoro, questi punti corrispondono ad una parte dei punti della griglia strutturale.  $N_{AP}$  è il numero di punti della griglia aerodinamica sulla superficie del corpo, nei quali sono applicati i carichi. L'equazione d'equilibrio per una piastra di rigidezza flessionale  $D$  sottoposta ad un carico distribuito  $q$  si può scrivere come:

$$D \nabla^4 w = q \quad (4.1)$$

dove  $w$  rappresenta la deflessione della piastra. L'operatore  $\nabla^4$  può essere scritto in coordinate polari:

$$\nabla^4 = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} \right) \right] \right\} \quad (4.2)$$

Per la trasformazione di coordinate da un sistema di riferimento cartesiano ad uno polare valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} x = r \cos\vartheta \\ y = r \sin\vartheta \end{cases} \quad (4.3)$$

L'equazione 4.1 riscritta in coordinate polari ha la seguente espressione:

$$D \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dw}{dr} \right) \right] \right\} = q \quad (4.4)$$

La soluzione dell'equazione differenziale omogenea ha la seguente forma:

$$w(r) = C_0 + C_1 r^2 + C_2 \ln r + C_3 r^2 \ln r \quad (4.5)$$

dove  $C_i$  sono le costanti d'integrazione, con  $i = 0, \dots, 3$ . Lo spostamento trasversale in  $r = 0$  deve assumere un valore finito, pertanto la costante  $C_2$  deve essere nulla. Moltiplicando il carico distribuito  $q$  per  $2\pi r$  e integrando da 0 a  $r$ , con  $r \rightarrow 0$ , si ottiene l'espressione per un carico concentrato  $P$  applicato nell'origine del sistema di riferimento:

$$\begin{aligned} P &= \lim_{r \rightarrow 0} \left[ \int_0^r 2\pi r q dr \right] = \lim_{r \rightarrow 0} \left[ \int_0^r 2\pi r D \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dw}{dr} \right) \right] \right\} dr \right] \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ 2\pi r D r \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dw}{dr} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Sostituendo nell'equazione l'espressione della soluzione omogenea (Eq. 4.5), si può determinare l'espressione di  $C_3$  in funzione dell'intensità del carico applicato e

della rigidità flessionale. In particolare, si ottiene  $C_3 = P/8\pi D$ . La soluzione del campo di deflessioni può essere riscritta nella seguente forma:

$$w(r) = A + B r^2 + F r^2 \ln r^2 \quad (4.7)$$

con

$$F = \frac{P}{16\pi D} \quad (4.8)$$

Nel caso in cui il carico concentrato non sia applicato nell'origine, ma in un generico punto  $(x_i, y_i)$ , si considera  $r_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$  come la distanza tra il punto in cui si valuta la deflessione  $(x, y)$  e il punto in cui viene applicato il carico  $(x_i, y_i)$ . Se la piastra è caricata con  $N$  forze concentrate in diversi punti  $(x_i, y_i)$ , con  $i = 1, \dots, N$ , la deflessione viene calcolata con il principio di sovrapposizione degli effetti:

$$w(x, y) = \sum_{i=0}^N (A_i + B_i r^2 + F_i r^2 \ln r^2) \quad (4.9)$$

dove  $A_i$ ,  $B_i$  e  $F_i$  sono dei coefficienti incogniti. Per la determinazione di questi coefficienti si esprime la soluzione in funzione di  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $r$  e  $\vartheta$ :

$$\begin{aligned} w(r, \vartheta) = & \sum_{i=1}^N A_i + r^2 \sum_{i=1}^N B_i + \sum_{i=1}^N B_i x_i^2 + \sum_{i=1}^N B_i y_i^2 \\ & - 2r \sum_{i=1}^N (B_i + F_i)(x_i \cos \vartheta + y_i \sin \vartheta) + r^2 \ln r^2 \sum_{i=1}^N F_i + \sum_{i=1}^N F_i (x_i^2 + y_i^2) \\ & - 2 \sum_{i=1}^N F_i (x_i \cos \vartheta + y_i \sin \vartheta)^2 + \ln r^2 \sum_{i=1}^N F_i (x_i^2 + y_i^2) \\ & - 2r \ln r^2 \sum_{i=1}^N F_i (x_i \cos \vartheta + y_i \sin \vartheta) + 4 \sum_{i=1}^N F_i (x_i \cos \vartheta + y_i \sin \vartheta)^2 + O(\ln r^2) \end{aligned} \quad (4.10)$$

In una piastra infinita soggetta a carichi concentrati il campo di deflessioni presenta una grande curvatura in prossimità dei punti di carico. Ad una distanza infinita l'influenza dei carichi diventa trascurabile e la deflessione assume un'andamento quasi-lineare in  $x$  e  $y$ . Per applicare questa condizione si devono annullare i termini che non hanno un andamento monotono e limitato per  $r \rightarrow \infty$ . Le condizioni al contorno si possono scrivere come:

$$\sum_{i=1}^N F_i = 0 \quad (4.11)$$

$$\sum_{i=1}^N B_i = 0 \quad (4.12)$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N F_i x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^N F_i y_i = 0 \end{cases} \quad (4.13)$$

dove le equazioni 4.11, 4.13 hanno rispettivamente il significato fisico di equilibrio delle forze e dei momenti. Trascurando i termini di ordine superiore e applicando queste condizioni al contorno il campo di deflessioni assume la seguente forma:

$$\begin{aligned} w(r, \vartheta) = & \sum_{i=1}^N A_i + \sum_{i=1}^N B_i x_i^2 + \sum_{i=1}^N B_i y_i^2 - 2r \cos \vartheta \sum_{i=1}^N B_i x_i \\ & - 2r \sin \vartheta \sum_{i=1}^N B_i y_i + \sum_{i=1}^N F_i r_i^2 \ln r_i^2. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Si introducono i coefficienti  $a_0$ ,  $a_1$  e  $a_2$  per semplificare la notazione:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N (A_i + B_i x_i^2 + B_i y_i^2) &= a_0 \\ -2r \cos \vartheta \sum_{i=1}^N B_i x_i &= x \left[ -2 \sum_{i=1}^N B_i x_i \right] = a_1 x \\ -2r \sin \vartheta \sum_{i=1}^N B_i y_i &= y \left[ -2 \sum_{i=1}^N B_i y_i \right] = a_1 y \end{aligned} \quad (4.15)$$

Per una piastra soggetta a  $N$  carichi concentrati applicati nei punti  $(x_i, y_i)$ , con  $i = 1, \dots, N$ , l'espressione finale che permette di determinare la deflessione in un generico punto si può scrivere come:

$$w(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y + \sum_{i=1}^N F_i K_i(x, y) \quad (4.16)$$

con

$$K_i(x, y) = r_i^2 \ln r_i^2 \quad (4.17)$$

In questa equazione ci sono  $N + 3$  incognite, cioè gli  $N$  valori  $F_i$  e i coefficienti  $a_0$ ,  $a_1$  e  $a_2$ . Per trovare il campo di deflessione si devono impostare un numero equivalente di equazioni. Le condizioni al contorno di equilibrio forniscono tre equazioni. Considerando i carichi applicati nei punti pseudo-strutturali  $N = N_{PS}$ , e assumendo noti gli spostamenti trasversali in questi punti, si possono scrivere  $N_{PS}$  equazioni per il calcolo di  $w_j$ , con  $j = 1, \dots, N_{PS}$ :

$$w_j = w(x_j, y_j) = a_0 + a_1 x_j + a_2 y_j + \sum_{i=1}^N F_i K_{ij} \quad (4.18)$$

con

$$\begin{aligned} r_{ij}^2 &= (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \\ K_{ij} &= r_{ij}^2 \ln r_{ij}^2 \quad \begin{cases} K_{ij} = K_{ji} \\ K_{ij} = 0 \end{cases} \quad \text{se } i = j. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Il sistema di equazioni può essere scritto come:

$$\begin{cases} [0] = [0]\{a\} + [R]^T\{F\} \\ [w] = [R]\{a\} + [K]\{F\} \end{cases} \quad (4.20)$$

Si definiscono i seguenti vettori e matrici:

$$\{w\} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_N \end{Bmatrix} \quad \{a\} = \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_N \end{Bmatrix} \quad (4.21)$$

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_N & y_N \end{bmatrix} \quad [K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1N} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{N1} & K_{N2} & \cdots & K_{NN} \end{bmatrix}.$$

Il sistema può essere riscritto in forma compatta:

$$\begin{bmatrix} \{0\} \\ \{w\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0] & [R]^T \\ [R] & [K] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{a\} \\ \{F\} \end{bmatrix} = [G] \begin{bmatrix} \{a\} \\ \{F\} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

dove  $[G]$  è una matrice quadrata di dimensioni  $(N_{PS} + 3) \times (N_{PS} + 3)$  che può essere calcolata agevolmente usando le coordinate dei punti pseudo-strutturali definiti a priori. Dall'equazione 4.22 si possono ottenere i valori delle incognite  $\{a\}$  e  $\{F\}$ . Noti i coefficienti della spline è possibile determinare la deflessione in ogni punto della piastra. Considerando gli  $N_{AP}$  punti della griglia aerodinamica, si possono scrivere  $N_{AP}$  equazioni per il calcolo di  $w_k^*$ , con  $k = 1, \dots, N_{AP}$ :

$$w_k^* = w(x_k, y_k) = a_0 + a_1 x_k + a_2 y_k + \sum_{i=1}^N F_i K_{ki} \quad (4.23)$$

con

$$\begin{aligned} r_{ki}^2 &= (x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 \\ K_{ki} &= r_{ki}^2 \ln r_{ki}^2 \end{aligned} \quad (4.24)$$

Scrivendo l'equazione per il calcolo dello spostamento trasversale per tutti gli  $N_{AP}$  punti aerodinamici si ottiene il seguente sistema:

$$\{w^*\} = \begin{bmatrix} 1 & x_{1AP} & y_{1AP} & K_{1AP,1} & K_{1AP,2} & \cdots & K_{1AP,NPS} \\ 1 & x_{2AP} & y_{2AP} & K_{2AP,1} & K_{2AP,2} & \cdots & K_{2AP,NPS} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{NAP} & y_{NAP} & K_{NAP,1} & K_{NAP,2} & \cdots & K_{NAP,NPS} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{a\} \\ \{F\} \end{Bmatrix} \quad (4.25)$$

dove  $\{w^*\}$  è il vettore delle deflessioni nei punti aerodinamici:

$$\{w^*\} = \begin{Bmatrix} w_{1AP}^* \\ w_{2AP}^* \\ \vdots \\ w_{NAP}^* \end{Bmatrix} \quad (4.26)$$

Si definisce la matrice  $[D]$  di dimensioni  $N_{AP} \times (N_{PS} + 3)$ :

$$[D] = \begin{bmatrix} 1 & x_{1AP} & y_{1AP} & K_{1AP,1} & K_{1AP,2} & \cdots & K_{1AP,NPS} \\ 1 & x_{2AP} & y_{2AP} & K_{2AP,1} & K_{2AP,2} & \cdots & K_{2AP,NPS} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{NAP} & y_{NAP} & K_{NAP,1} & K_{NAP,2} & \cdots & K_{NAP,NPS} \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Usando l'equazione 4.22 e la definizione di  $[D]$ , il sistema 4.25 può essere scritto come:

$$\{w^*\} = [D][G]^{-1} \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{w\} \end{Bmatrix} \quad (4.28)$$

Considerando che le prime tre righe del vettore nel termine a destra sono nulle, si possono eliminare le prime tre colonne della matrice  $[G]^{-1}$  e scrivere una relazione che lega direttamente gli spostamenti  $\{w^*\}$  e  $\{w\}$ :

$$\{w^*\} = [D][G']^{-1}\{w\} = [T]\{w\} \quad (4.29)$$

dove la matrice  $[T]$  rappresenta la matrice d'interpolazione,  $[G']^{-1}$  è la matrice  $[G]^{-1}$  privata delle prime tre colonne. Noto il legame tra le deflessioni nella griglia aerodinamica  $\{w_k\}$  e le deflessioni nella mesh strutturale  $\{w_s\}$ :

$$\{w_k\} = [T]\{w_s\} \quad (4.30)$$

si può ricavare il legame tra i carichi applicati nelle due griglie computazionali. Il principio di equivalenza dei lavori virtuali delle forze esterne si scrive come:

$$\{\delta w_k\}^T \{F_k\} = \{\delta w_s\}^T \{F_s\} \quad (4.31)$$

dove  $\{F_k\}$  e  $\{F_s\}$  rappresentano rispettivamente il vettore delle forze aerodinamiche e il vettore dei carichi applicati nei punti pseudo-strutturali. Sostituendo l'equazione 4.30 nel termine a sinistra si può scrivere:

$$\{\delta w_s\}^T \left( [T]^T \{F_k\} - \{F_s\} \right) = 0 \quad (4.32)$$

dalla quale si ottiene la relazione che è stata usata per trasferire i carichi dalla griglia aerodinamica a quella strutturale:

$$\{F_s\} = [T]^T \{F_k\} \quad (4.33)$$

## 4.2 Soluzione del problema aeroelastico

L'elemento centrale del metodo aeroelastico è rappresentato dal codice scritto in linguaggio Python sviluppato da Ricci [38], che contiene l'implementazione del metodo IPS, chiama e permette lo scambio d'informazioni tra il software CFD (SU2) e il programma di simulazione FEM+CUF (MUL2). Il problema aeroelastico viene risolto mediante una procedura iterativa, fino al raggiungimento di una condizione d'equilibrio tra il flusso esterno e la struttura deformata. Il metodo iterativo è costituito da più fasi:

1. **Soluzione aerodinamica (corpo indeformato):** Il software aerodinamico calcola il campo di moto attorno al corpo. Il tool SU2\_CFD ha come input dell'analisi un file di configurazione che contiene le seguenti informazioni: mesh aerodinamica, condizione del flusso a monte, condizioni al contorno e metodi numerici da implementare. Le iterazioni proseguono fino al raggiungimento della condizione di convergenza impostata.
2. **Metodo IPS:** Il codice Python elabora gli output dell'analisi aerodinamica (coefficienti di pressione  $C_p$ ) e ricostruisce i carichi aerodinamici che agiscono sulla struttura. Tramite l'algoritmo d'interazione fluido struttura i carichi vengono trasferiti dalla griglia aerodinamica ai punti pseudo-strutturali della mesh strutturale. Il codice scrive il file di input BC per l'analisi strutturale.
3. **Soluzione strutturale (FEM+CUF):** Il software di analisi strutturale calcola le deformazioni della struttura soggetta ai carichi aerodinamici. MUL2 ha come input una cartella di file, che contengono le seguenti informazioni:

mesh strutturale, teoria e ordine dell'espansione CUF, caratteristiche del materiale, carichi e vincoli, tipologia di analisi (statica lineare/non lineare).

4. **Deformazione della mesh aerodinamica:** Il codice Python legge gli output dell'analisi strutturale (campo di spostamenti) e modifica il file di input del tool SU2\_DEF. Nel file di configurazione vengono scritti gli spostamenti da applicare nei punti di controllo dei box che rivestono il corpo. A ciascun nodo della griglia aerodinamica viene assegnata una rigidezza e le deformazioni vengono calcolate attraverso le equazioni lineari dell'elasticità [48].
5. **Soluzione aerodinamica (corpo deformato):** Il software aerodinamico calcola il campo di moto attorno al corpo. Il tool SU2\_CFD prende come input la mesh aerodinamica deformata e genera come output una nuova distribuzione di pressione. La procedura continua dal punto 2.

La procedura viene ripetuta fino a quando non si raggiunge la convergenza in termini di spostamento al bordo d'attacco della sezione d'estremità alare (Leading Edge del tip). In Figura 4.1 viene mostrata una rappresentazione schematica del metodo iterativo implementato per la soluzione del problema aeroelastico.

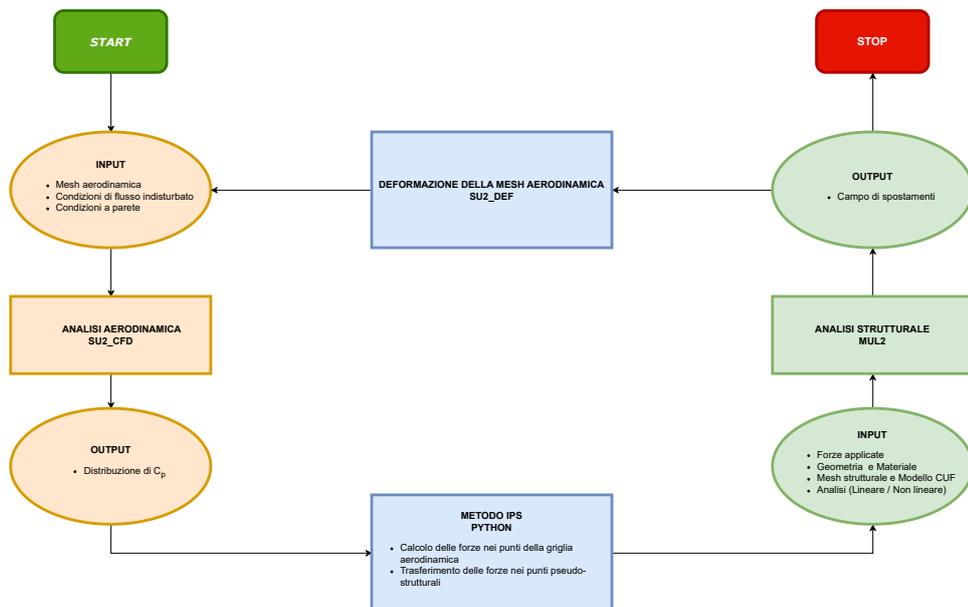


Figura 4.1: Schema di soluzione del problema aeroelastico.

# Capitolo 5

## Risultati numerici

In questo capitolo vengono presentati i risultati numerici ottenuti per diversi problemi strutturali, aerodinamici e aeroelastici. La prima parte riguarda la validazione strutturale con modelli raffinati 1D e 2D effettuata tramite analisi statiche e dinamiche. In particolare, sono state messe in evidenza le potenzialità della formulazione CUF. Nella seconda sezione viene riportato un esempio di calibrazione aerodinamica per un'ala con basso allungamento. La terza parte riguarda le analisi aeroelastiche effettuate tramite analisi strutturali lineari. In particolare, sono stati valutati l'effetto della freccia alare e dell'angolo di laminazione. I risultati ottenuti con l'uso della CFD sono stati confrontati con quelli ottenuti con il VLM. L'ultima sezione riguarda gli effetti della non linearità geometrica sul comportamento aeroelastico delle strutture aeronautiche.

### 5.1 Analisi strutturali

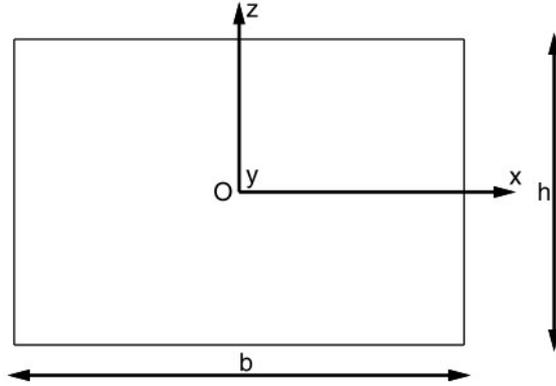
#### 5.1.1 Analisi statica e dinamica di una trave isotropa

Questo paragrafo riguarda l'analisi strutturale di una trave in materiale isotropo. Vengono considerate diverse geometrie di sezione trasversale, con diverse condizioni di vincolo e di carico.

##### Analisi statica

Si considera una trave incastrata ad un estremo. La sezione trasversale e il sistema di riferimento usato sono schematizzati in Fig.5.1. Le proprietà del materiale isotropo che costituisce la trave sono riportate in Tab.5.1. La sezione trasversale ha le seguenti dimensioni,  $b = h = 0.2$  m. Si considerano due rapporti di snellezza per la trave,  $L/h$ : 100 e 10. Sono state analizzate una trave snella e una moderatamente tozza per evidenziare la maggiore accuratezza delle teorie di ordine elevato nel

caso di travi tozze. Un carico concentrato  $F_z$  d'intensità  $-50$  [N] è stato applicato all'estremo libero della trave nel centro della sezione trasversale, in  $(0, L, h/2)$ .



**Figura 5.1:** Sezione trasversale rettangolare.

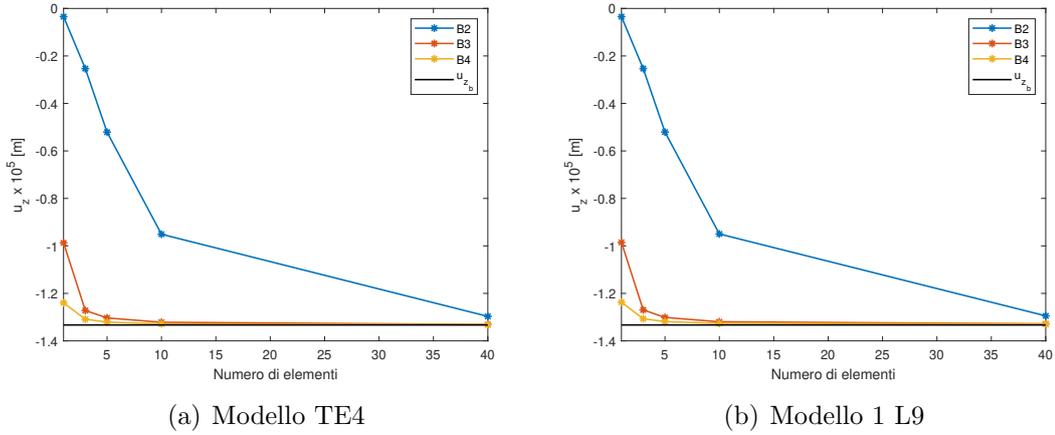
$E$ [GPa]	$\nu$	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]
75	0.33	2700

**Tabella 5.1:** Proprietà del materiale - Trave isotropa.

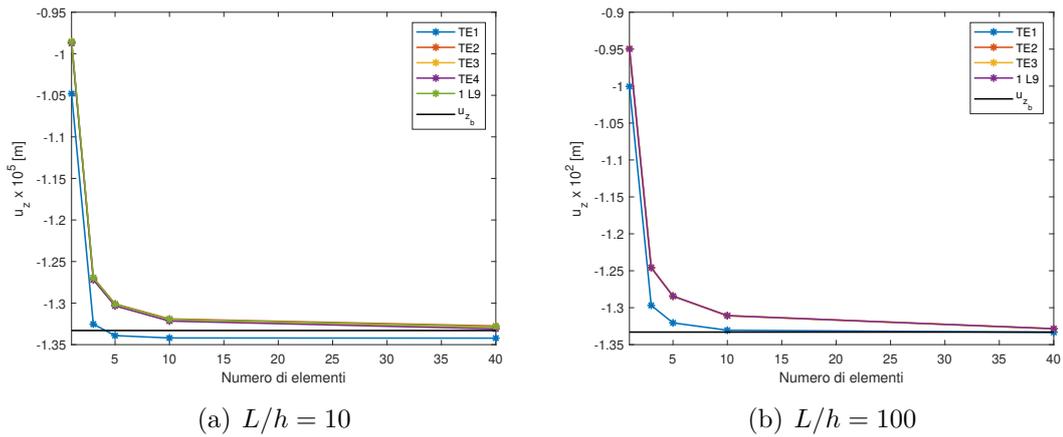
Sono state condotte delle analisi di convergenza su  $u_z$ , lo spostamento trasversale del punto caricato. Il risultato analitico fornito dalla teoria di Eulero-Bernoulli [25]  $u_{z_b}$  è stato preso come riferimento:

$$u_{z_b} = \frac{F_z L^3}{3EI_x} \quad (5.1)$$

I risultati ottenuti sono stati validati tramite un confronto con i valori presenti in letteratura [25, 23]. In Figura 5.2 si può osservare l'effetto del raffinamento della mesh su  $u_z$  per diversi tipi di elementi trave (B2, B3, B4). In particolare vengono mostrati i risultati ottenuti per la trave tozza,  $L/h = 10$ , con i modelli TE4 e 1 L9. Si può evincere che con l'uso di elementi B4 si ottiene una velocità di convergenza maggiore. All'aumentare del numero di gradi di libertà la struttura diventa meno rigida. Questo effetto è accentuato nel caso di elementi B2. In Figura 5.3 si può osservare che la velocità di convergenza dipende anche dall'ordine e dal tipo di teoria cinematica. Per una trave snella non si evidenziano differenze usando modelli di Taylor con ordine superiore a 2. Nel caso di trave tozza un modello di Taylor lineare o parabolico non è sufficiente a descrivere accuratamente il comportamento della struttura.



**Figura 5.2:**  $u_z$  in funzione del numero di elementi per diversi elementi trave. Trave isotropa a sezione quadrata.  $L/h = 10$ .



**Figura 5.3:**  $u_z$  in funzione del numero di elementi B3 per diverse teorie cinematiche. Trave isotropa a sezione quadrata.

Nelle Tabelle 5.2 e 5.3 si può osservare numericamente quanto detto in precedenza. Inoltre, è importante evidenziare il fatto che per i modelli classici EBBM, TBM e per il modello lineare TE1 è stata attivata la correzione per il fenomeno del Poisson Locking. Questo ha reso lo spostamento trasversale  $u_z$  dei sopracitati modelli maggiore rispetto a quello dei modelli di ordine superiore. La correzione ha comportato anche una maggiore velocità di convergenza, come viene suggerito in [49]. Un comportamento analogo si ottiene per il modello 1 L4, contenente un termine bilineare. L'effetto di questo termine viene ampiamente discusso in [25]. Il

modello con espansione di Lagrange 1 L9 fornisce risultati simili a quello parabolico di Taylor, TE2, e garantisce una buona accuratezza.

Mesh	5	10	40
$u_z \cdot 10^2$ [m], $u_{z_b} \cdot 10^2 = -1.333$ [m]			
EBBM	-1.333	-1.333	-1.333
TBM	-1.333	-1.333	-1.333
TE1	-1.333	-1.333	-1.333
TE2	-1.311	-1.323	-1.331
TE3	-1.311	-1.323	-1.331
1 L4	-1.843	-1.856	-1.866
1 L9	-1.311	-1.323	-1.331

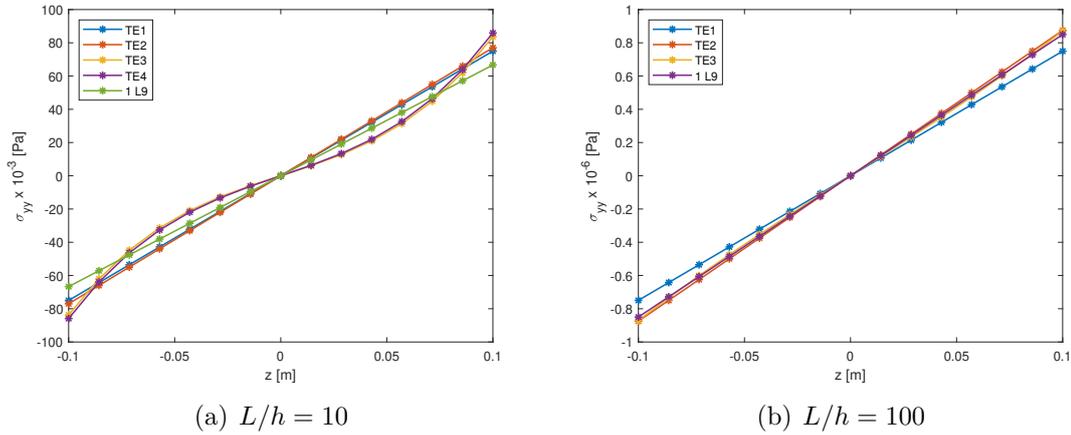
**Tabella 5.2:** Effetto del numero di elementi su  $u_z$  per diverse teorie cinematiche. Elementi trave B4. Trave isotropa a sezione quadrata.  $L/h = 100$ .

Mesh	5	10	40
$u_z \cdot 10^5$ [m], $u_{z_b} \cdot 10^5 = -1.333$ [m]			
EBBM	-1.333	-1.333	-1.333
TBM	-1.342	-1.342	-1.342
TE1	-1.342	-1.342	-1.342
TE2	-1.318	-1.325	-1.328
TE3	-1.321	-1.328	-1.330
TE4	-1.321	-1.328	-1.332
1 L4	-1.846	-1.853	-1.854
1 L9	-1.319	-1.326	-1.329

**Tabella 5.3:** Effetto del numero di elementi su  $u_z$  per diverse teorie cinematiche. Elementi trave B4. Trave isotropa a sezione quadrata.  $L/h = 10$ .

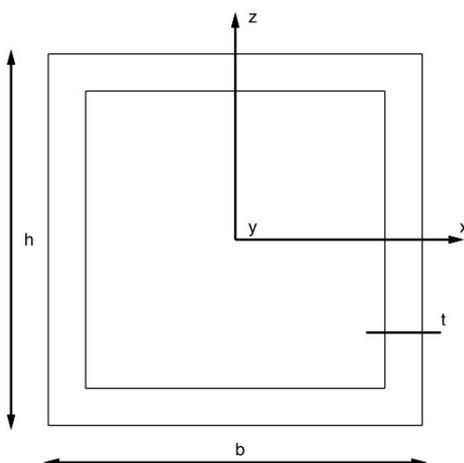
In Figura 5.4 si può osservare la distribuzione di tensione  $\sigma_{yy}$  nella sezione d'incastro ( $x = 0, z = 0$ ) per entrambi i rapporti di snellezza della struttura. Si può evincere che nel caso di trave snella la distribuzione di tensione è lineare indipendentemente dall'ordine della teoria. Nel caso di trave tozza si riscontra nuovamente il limite delle teorie del primo ordine. I modelli raffinati con ordine superiore a 2 sono più accurati e presentano un andamento delle tensioni non lineari

lungo  $y$ . Questa è un'ulteriore conferma del fatto che in caso di bassi rapporti di snellezza sono necessarie teorie di ordine elevato per descrivere accuratamente il campo di spostamenti e di tensioni della struttura.



**Figura 5.4:** Tensione assiale  $\sigma_{yy}$  in funzione di  $z$  in  $(x = 0, y = 0)$ , per diverse teorie cinematiche. Trave isotropa a sezione quadrata. Mesh 40 B4.

Successivamente, si è considerata una trave quadrata cava in parete sottile la cui sezione trasversale è schematizzata in Fig.5.5. La trave è incastrata ad entrambi gli estremi. La sezione trasversale ha dimensione  $b = 1$  m e valgono i seguenti rapporti geometrici  $L/h = 20$ ,  $h/t = 10$ . Dove  $L$  rappresenta la lunghezza della trave e  $t$  lo spessore della parete. Le proprietà del materiale sono riportate in Tab.5.1. Sono state usate diverse discretizzazioni della sezione trasversale. Vengono considerate due diverse condizioni di carico. La prima condizione prevede l'applicazione di un carico concentrato  $F_z$  d'intensità 1 [N] nel punto  $(0, L/2, -h/2)$ . Dopo aver condotto un'analisi di convergenza sullo spostamento trasversale  $u_z$  del punto caricato, i risultati sono stati confrontati e validati con i valori presenti in letteratura [25]. In Tabella 5.4 vengono mostrati i valori di spostamento  $u_z$  ottenuti con una mesh di 20 elementi B4 per diverse teorie cinematiche. Inoltre, i risultati vengono confrontati con quelli ottenuti con un modello 3D sul software MSC Nastran. Si può osservare che con un modello trave raffinato si possono ottenere gli stessi risultati ottenuti con un modello 3D. Il costo computazionale è notevolmente ridotto. Inoltre, per sezioni trasversali più complesse diventa evidente il vantaggio dell'uso di modelli di Lagrange. Con un raffinamento locale degli elementi di Lagrange sulla sezione trasversale si può ottenere una soluzione più accurata e con un minore costo computazionale, rispetto alle espansioni di Taylor.



**Figura 5.5:** Sezione trasversale quadrata cava in parete sottile.

	GDL	$u_z \cdot 10^8$ [m]	Differenza [%] - SOLID
SOLID [25]	128952	1.374	
EBBM	549	1.129	-17.8
TBM	549	1.180	-14.1
TE3	1830	1.207	-12.1
TE4	2745	1.215	-11.6
TE8	8235	1.288	-6.3
TE11	14274	1.310	-4.6
8 L4	2928	1.180	-14.1
8 L9	8784	1.279	-6.9
11 L9	12078	1.330	-3.2

**Tabella 5.4:**  $u_z$  nel punto di applicazione del carico per diverse teorie cinematiche. Trave isotropa a sezione quadrata cava. Mesh 20 B4.

La seconda condizione di carico consiste nell'applicazione di due carichi concentrati  $F_z = \pm 1$  [N] nei punti  $(0, L/2, \mp h/2)$ . In Tabella 5.5 vengono confrontati i risultati ottenuti con modelli raffinati 1D con quelli ottenuti con il modello 3D.

	GDL	$u_z(0, L/2, +h/2) \cdot 10^9[m]$	$u_z(0, L/2, -h/2) \cdot 10^9[m]$
SOLID [25]	128952	-1.716	1.716
EBBM	549	0.000	0.000
TBM	549	-0.031	0.031
TE3	1830	-0.162	0.162
TE4	2745	-0.180	0.180
TE8	8235	-1.011	1.011
TE11	14274	-1.222	1.222
8 L4	2928	-0.068	0.068
8 L9	8784	-0.939	0.939
11 L9	12078	-0.927	1.436

**Tabella 5.5:** Effetto della distribuzione di elementi sulla sezione trasversale sullo spostamento nei punti di applicazione dei carichi. Trave isotropa a sezione quadrata cava. Mesh 20 B4.

Data la simmetria della geometria e dei carichi, i due punti dovrebbero avere lo stesso spostamento in valore assoluto. Questo non si verifica solo per la discretizzazione 11 L9, a causa del raffinamento locale presente in prossimità dei punti di carico sulla parete inferiore. La zona della sezione più raffinata presenta un valore di spostamento maggiore e più vicino alla soluzione del modello 3D. Le analisi dimostrano che i modelli di Lagrange possono essere più accurati con un minor costo computazionale rispetto ai modelli di Taylor. Inoltre, in questo caso di condizioni al contorno localizzate i modelli classici non riescono a rilevare gli spostamenti dei punti soggetti a carico esterno.

### Analisi dinamica

Si considera una trave a sezione quadrata con le stesse caratteristiche geometriche e costituita dallo stesso materiale di quella usata per l'analisi statica, con condizioni al contorno di semplice appoggio. Vengono analizzate una trave snella  $L/h = 100$  e una trave tozza  $L/h = 10$  per indagare gli effetti della teoria cinematica utilizzata e del numero di elementi sulle prime tre frequenze naturali della struttura. I risultati ottenuti sono stati confrontati con i valori presenti in letteratura [26]. Viene presa come riferimento la soluzione analitica fornita dalla teoria di Eulero-Bernoulli [3]. L' $n$ -esima frequenza naturale può essere valutata come segue:

$$f_{n_b} = \frac{\pi n^2}{2 L^2} \sqrt{\frac{EI_x}{\rho A}} \quad (5.2)$$

I risultati ottenuti per la trave snella sono riportati nelle Tabelle 5.6 e 5.8. In questo caso la soluzione analitica prevede le frequenze naturali della struttura in modo accurato. Per quanto riguarda la prima frequenza naturale, 20 elementi B3 sono sufficienti a garantire la convergenza e la soluzione dei modelli di ordine superiore non differisce da quella del modello TE1. Per le frequenze maggiori sono necessari almeno 10 elementi B4 e una teoria strutturale del terzo ordine.

Mesh	10 B3	20 B3	40 B3	10 B4
$f_1$ [Hz], $f_{1b} = 1.195$ [Hz]				
EBBM	1.200	1.196	1.195	1.195
TBM	1.199	1.196	1.195	1.195
TE1	1.199	1.196	1.195	1.195
TE2	1.201	1.196	1.195	1.195
TE3	1.201	1.196	1.195	1.195
1 L9	1.201	1.196	1.195	1.195

**Tabella 5.6:** Effetto del numero di elementi su  $f_1$  per diverse teorie cinematiche. Trave isotropa a sezione quadrata.  $L/h = 100$ .

Nelle Tabelle 5.7 e 5.9 sono riportati i risultati per la trave tozza. In questo caso le soluzioni delle diverse teorie si discostano dalla soluzione analitica. Si può notare come per la trave tozza siano necessari un maggior numero di elementi ed una teoria del quarto ordine per la convergenza.

Mesh	10 B3	20 B3	40 B3	10 B4
$f_1$ [Hz], $f_{1b} = 119.495$ [Hz]				
EBBM	119.489	119.121	119.030	119.005
TBM	117.781	117.748	117.746	117.746
TE1	117.781	117.748	117.746	117.746
TE2	117.808	117.774	117.772	117.772
TE3	117.607	117.575	117.573	117.573
TE4	117.606	117.575	117.572	117.572
1 L9	117.798	117.764	117.762	117.762

**Tabella 5.7:** Effetto del numero di elementi su  $f_1$  per diverse teorie cinematiche. Trave isotropa a sezione quadrata.  $L/h = 10$ .

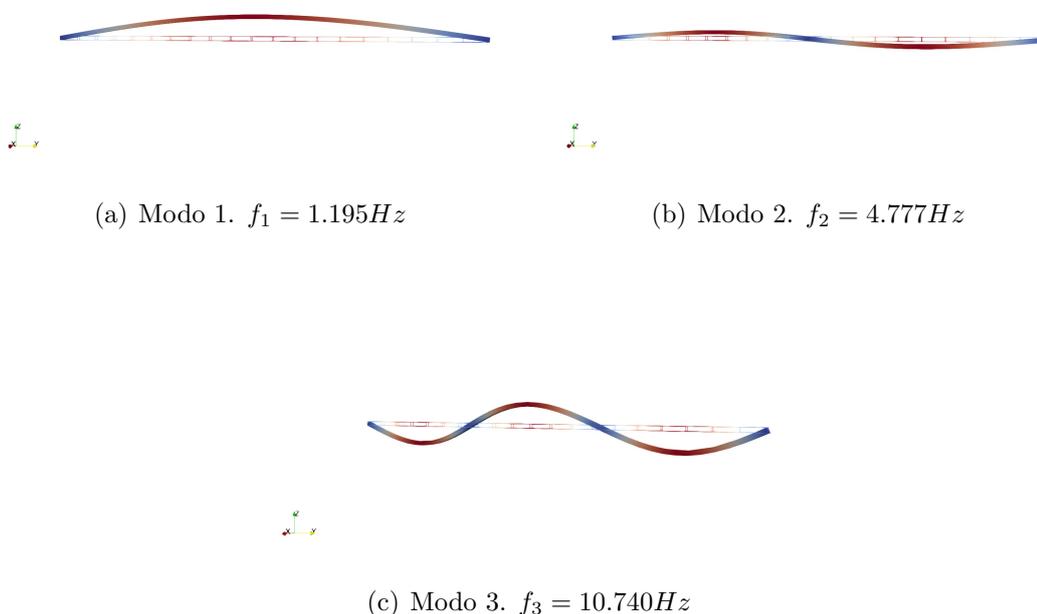
Mesh	10 B3	20 B3	40 B3	10 B4	20 B4
$f_2$ [Hz], $f_{2_b} = 4.780$ [Hz]					
EBBM	4.859	4.799	4.784	4.779	4.779
TBM	4.847	4.790	4.778	4.777	4.777
TE1	4.847	4.790	4.778	4.777	4.777
TE2	4.872	4.793	4.779	4.777	4.777
TE3	4.869	4.792	4.778	4.777	4.777
1 L9	4.872	4.793	4.779	4.777	4.777
$f_3$ [Hz], $f_{3_b} = 10.755$ [Hz]					
EBBM	11.159	10.851	10.775	10.756	10.751
TBM	11.099	10.805	10.748	10.744	10.740
TE1	11.099	10.805	10.748	10.744	10.740
TE2	11.213	10.822	10.749	10.745	10.740
TE3	11.202	10.815	10.746	10.743	10.739
1 L9	11.213	10.822	10.749	10.745	10.740

**Tabella 5.8:** Effetto del numero di elementi su  $f_2$  e  $f_3$  per diverse teorie cinematiche. Trave isotropa a sezione quadrata.  $L/h = 100$ .

Mesh	10 B3	20 B3	40 B3	10 B4
$f_2$ [Hz], $f_{2_b} = 477.978$ [Hz]				
EBBM	478.005	472.126	470.684	470.331
TBM	452.684	452.124	452.087	452.086
TE1	452.684	452.124	452.087	452.086
TE2	453.067	452.484	452.446	452.445
TE3	450.308	449.759	449.722	449.721
TE4	450.288	449.741	449.703	449.703
1 L9	452.921	452.339	452.301	452.300
$f_3$ [Hz], $f_{3_b} = 1075.451$ [Hz]				
EBBM	1076.466	1046.810	1039.622	1038.165
TBM	961.623	958.557	958.350	958.357
TE1	961.623	958.557	958.350	948.409
TE2	963.224	959.995	959.780	959.787
TE3	952.041	948.977	948.765	948.772
TE4	951.868	948.812	948.601	948.608
1 L9	962.607	959.376	959.161	959.168

**Tabella 5.9:** Effetto del numero di elementi su  $f_2$  e  $f_3$  per diverse teorie cinematiche. Trave isotropa a sezione quadrata.  $L/h = 10$ .

In generale, all'aumentare dell'ordine della teoria e dei gradi di libertà della struttura la struttura diventa meno rigida, e le frequenze naturali si abbassano. Lo stesso effetto si ottiene all'aumentare del numero di elementi FEM. Questo comportamento non si riscontra per le teorie TBM e TE1. Ciò è dovuto al fattore di correzione per il Poisson locking. In letteratura [50] si possono trovare maggiori dettagli sull'analisi dinamica di questa trave con espansioni di Lagrange. In Figura 5.6 si possono osservare i modi flessionali della trave snella associati alle prime tre frequenze naturali.



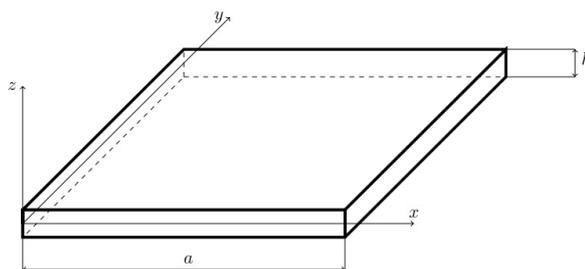
**Figura 5.6:** Modi flessionali della trave isotropa a sezione quadrata.  $L/h = 100$ . Mesh 20 B4. Modello 1 L9.

### 5.1.2 Analisi statica e dinamica di una piastra isotropa

Questo paragrafo riguarda l'analisi strutturale di una piastra in materiale isotropo. La seguente trattazione vuole mostrare le potenzialità dei modelli raffinati 2D ed eseguire un confronto con i modelli strutturali 1D di ordine elevato in termini di accuratezza e costo computazionale.

## Analisi statica

Si considera una piastra incastrata ad un estremo. La piastra ha lunghezza  $a = 1$  m, larghezza  $b = 0.2$  m e uno spessore  $h = 0.001$  m. Le sue caratteristiche geometriche e il sistema di riferimento adottato vengono mostrati in Fig.5.7. Il sistema di riferimento ha origine nella sezione d'incastro. Le proprietà del materiale isotropo che costituisce la piastra sono riportate in Tab.5.10. Un carico concentrato  $F_z$  d'intensità  $-100$  [N] è stato applicato all'estremo libero nel punto  $(a, b/2, 0)$ .



**Figura 5.7:** Caratteristiche geometriche della piastra.

$E$ [GPa]	$\nu$	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]
73	0.3	2700

**Tabella 5.10:** Proprietà del materiale - Piastra isotropa.

Sono state condotte delle analisi di convergenza su  $w$ , lo spostamento trasversale del punto caricato, e sulla tensione  $\sigma_{xx}$  alla radice nel punto  $(0, b/2, h/2)$  per diverse mesh. Sono stati considerati elementi FEM di tipo piastra con 4 e 9 nodi (Q4, Q9). In Tabella 5.11 sono riportati i risultati ottenuti per due teorie di ordine elevato. Si può evincere che per quanto riguarda questi modelli una mesh di 20x4 elementi Q9 è sufficiente a garantire la convergenza. In Tabella 5.12 sono riportati i risultati ottenuti con il modello 2D per diverse teorie cinematiche. In tabella sono presenti anche i valori ottenuti con il modello 1D presenti in letteratura [38, 51]. Si può osservare come lo spostamento e la tensione normale alla sezione d'incastro aumentano al crescere dell'ordine della teoria utilizzata. L'unica eccezione si verifica per il modello trave TE1 a causa della presenza del fattore di correzione per il Poisson locking.

	Mesh	40x8 Q4	5x1 Q9	10x2 Q9	20x4 Q9
TE4	$w \cdot 10^2$ [m]	-0.79	-2.60	-2.65	-2.68
	$\sigma_{xx}$ [MPa]	11.60	34.43	37.24	38.72
LE3	$w \cdot 10^2$ [m]	-0.79	-2.60	-2.65	-2.68
	$\sigma_{xx}$ [MPa]	11.60	34.43	37.24	38.72

**Tabella 5.11:** Piastra isotropa. Analisi di convergenza sul numero di elementi per i modelli TE4 e LE3. Spostamento trasversale  $w = w(a, b/2, 0)$ , tensione assiale  $\sigma_{xx} = \sigma_{xx}(0, b/2, h/2)$ .

Mesh	Modello	$u_z \cdot 10^{-2}$ [m]	$\sigma_{xx}$ [MPa]	GDL
		$A(a, b/2, 0)$	$B(0, b/2, h/2)$	
10 B4	TE1	-2.739	29.99	279
	TE2	-2.582	34.21	558
	TE3	-2.668	40.38	930
	TE4	-2.675	40.02	1395
	1 LE4	-2.038	22.30	372
	2 LE4	-2.047	31.28	558
	1 L9	-2.669	40.45	837
	2 L9	-2.670	40.07	1395
20x4 Q9	TE1	-2.392	35.95	2214
	TE2	-2.675	38.67	3321
	TE3	-2.675	38.72	4428
	TE4	-2.675	38.72	5535
	LE1	-2.392	35.96	2214
	LE2	-2.675	38.67	3321
	LE3	-2.675	38.72	4428

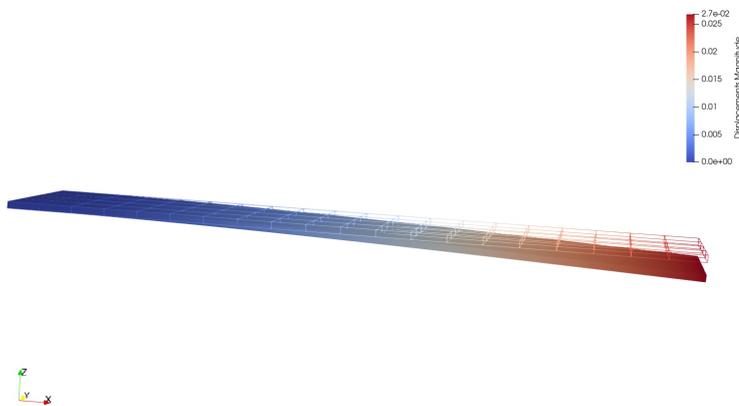
**Tabella 5.12:** Piastra isotropa. Spostamento trasversale  $w$ , tensione assiale  $\sigma_{xx}$  e numero di gradi di libertà per diversi modelli piastra. Confronto con modelli trave presenti in letteratura [51].

Si può notare un'equivalenza nei risultati per i modelli piastra con espansione di Taylor e di Lagrange che hanno lo stesso ordine. Dunque, per una piastra isotropa sottile non si evidenziano differenze tra le due tipologie di espansione lungo lo

spessore. Confrontando i modelli di Lagrange per le strutture 1D e 2D si osserva che le soluzioni sono molto simili in termini di spostamento  $w$ . I valori di tensione  $\sigma_{xx}$  si discostano leggermente. Tuttavia, il numero di gradi di libertà per il modello trave è notevolmente inferiore. Pertanto, nel caso di piastra isotropa sottile risulta conveniente modellare la struttura con elementi 1D e usare teorie di ordine elevato. In questo modo è possibile avere una ottima accuratezza con un ridotto costo computazionale. In Figura 5.8 vengono mostrate la distribuzione di tensione  $\sigma_{xx}$  e il campo di spostamenti della piastra, per mettere in risalto le potenzialità 3D delle formulazioni FEM+CUF adottate.



(a) Distribuzione delle tensioni  $\sigma_{xx}$



(b) Campo di spostamenti

**Figura 5.8:** Risultati numerici dell'analisi statica per la piastra isotropa. Mesh 20x4 Q9. Modello LE3.

### Analisi dinamica

In Tabella 5.14 sono riportate le prime dieci frequenze naturali della piastra incastrata, ottenute con il modello 2D per diverse teorie cinematiche. In tabella sono presenti anche i valori ottenuti con il modello 1D presenti in letteratura [38, 51].

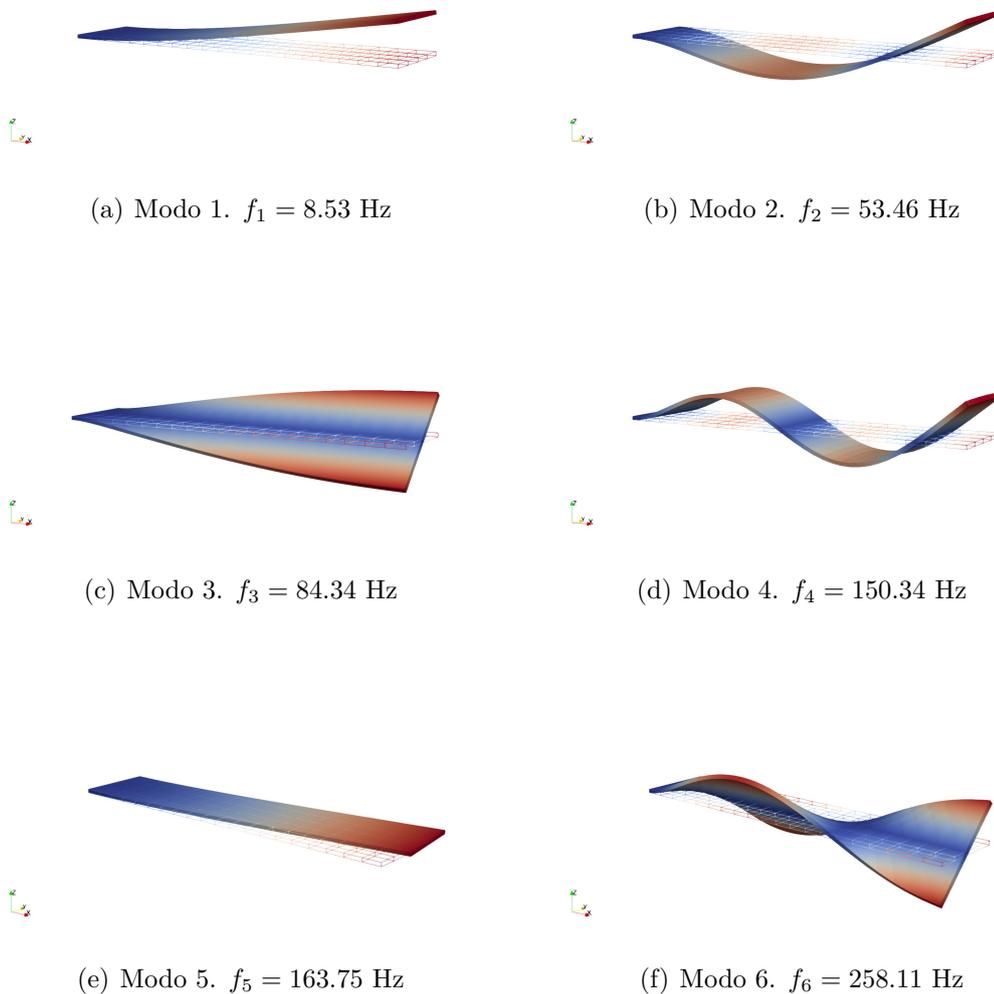
Mesh	10 B4			20x4 Q9		
Modello	TE4	1 L9	2 L9	TE4	LE2	LE3
Modo 1	8.53	8.54	8.54	8.53	8.53	8.53
Modo 2	53.36	53.43	53.42	53.46	53.48	53.46
Modo 3	84.81	84.82	84.65	84.34	84.45	84.34
Modo 4	149.61	149.84	149.79	150.34	150.42	150.34
Modo 5	163.78	164.37	163.85	163.75	163.75	163.75
Modo 6	258.76	259.62	259.01	258.11	258.43	258.11
Modo 7	293.85	294.47	294.36	296.61	296.88	296.62
Modo 8	447.54	449.24	447.91	446.61	447.22	446.61
Modo 9	486.75	488.14	487.92	494.22	494.87	494.22
Modo 10	658.96	661.88	659.43	658.43	659.45	658.43

**Tabella 5.13:** Piastra isotropa. Frequenze naturali [Hz] per diversi modelli piastra. Confronto con modelli trave presenti in letteratura [51].

Mesh-Modello	10 B4 - 2 L9	20x4 Q9 - LE3	
Modo 1	8.54	8.53	I Flessionale attorno a y
Modo 2	53.42	53.46	II Flessionale attorno a y
Modo 3	84.65	84.34	I Torsionale
Modo 4	149.79	150.34	III Flessionale attorno a y
Modo 5	163.85	163.75	I Flessionale attorno a z
Modo 6	259.01	258.11	II Torsionale
Modo 7	294.36	296.62	IV Flessionale attorno a y
Modo 8	447.91	446.61	III Torsionale
Modo 9	487.92	494.22	V Flessionale attorno a y
Modo 10	659.43	658.43	IV Torsionale

**Tabella 5.14:** Piastra isotropa. Modi propri e frequenze naturali [Hz] per modello LE3. Confronto con modello trave 2 L9 in letteratura [51].

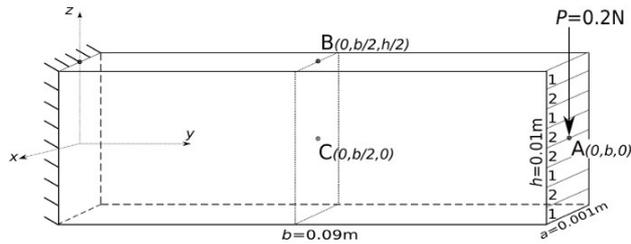
Per l'analisi modale si possono fare considerazioni analoghe a quelle fatte per l'analisi statica. Vengono presentati i risultati per teorie di ordine elevato. Non si riscontrano differenze tra teorie che fanno uso di espansioni di Lagrange e di Taylor. Inoltre il modello 1D ha la stessa accuratezza di quello 2D, con un costo computazionale inferiore. Ulteriore conferma di questa equivalenza tra modelli si può trovare in Tab.5.14, dove viene fornita una più dettagliata descrizione dei modi propri associati alle frequenze naturali. I primi sei modi propri della struttura sono rappresentati in Fig.5.9.



**Figura 5.9:** Modi propri della piastra isotropa. Mesh 20x4 Q9. Modello LE3.

### 5.1.3 Analisi statica di una piastra in materiale composito

Lo scopo delle analisi che seguono è valutare l'accuratezza e il costo computazionale dei modelli raffinati 2D per strutture moderatamente spesse in materiale composito. Si considera una piastra multistrato formata da otto strati, incastrata ad un estremo come mostrato in Fig.5.10. Il sistema di riferimento è lo stesso adottato in Fig.5.7. Le proprietà meccaniche dei materiali che costituiscono la piastra sono riportate in Tab.5.15. La piastra ha dimensioni:  $a = 90$  mm,  $b = 1$  mm,  $h = 10$  mm. Un carico concentrato  $F_z$  d'intensità  $-0.2$  [N] è stato applicato all'estremo libero in  $(a, b/2, 0)$ .



**Figura 5.10:** Caratteristiche geometriche della piastra multistrato.

	$E_L$ [GPa]	$E_T$ [GPa]	$\nu_{LT}$	$G_{LT}$ [GPa]
Materiale 1	30	1	0.25	0.5
Materiale 2	5	1	0.25	0.5

**Tabella 5.15:** Proprietà dei materiali usati nella piastra multistrato.

Questo caso di studio è molto ricorrente in letteratura ed è stato studiato con diversi modelli 1D e 2D raffinati. In [52] la struttura è stata studiata con modelli 1D di ordine elevato ottenuti espandendo la variabile incognita spostamento sulla sezione trasversale tramite espansioni polinomiali di Taylor, serie trigonometriche ed esponenziali. In [53] è stato fatto uso di modelli trave con teoria cinematica dipendente dal nodo FEM preso in considerazione. La formulazione CUF fornisce la possibilità di adottare diverse funzioni d'espansione sulla sezione trasversale di ogni nodo FEM in modo semplice. In particolare, sono state usate espansioni polinomiali di Lagrange e di Taylor. In [54, 55] si possono trovare invece delle soluzioni al problema ottenute con modelli 2D. Anche in questo caso la formulazione CUF ha permesso agevolmente di definire in modo indipendente su ogni nodo la teoria cinematica desiderata. Questo ha permesso agli autori di realizzare un modello globale-locale con elevata accuratezza e basso costo computazionale. Nell'ambito di questo lavoro sono state effettuate delle analisi di convergenza con elementi

piastra Q4 e Q9 per diversi modelli di Taylor e di Lagrange lungo lo spessore della piastra. In Tabella 5.16 sono riportati i risultati per il modello TE4 ed un confronto con un modello analogo presente in letteratura [55]. Si può osservare che per quanto riguarda questo modello una mesh di 12x2 Q9 è sufficiente a garantire la convergenza sia per lo spostamento trasversale  $w$  che per le tensioni  $\sigma_{xx}$  e  $\sigma_{xz}$ .

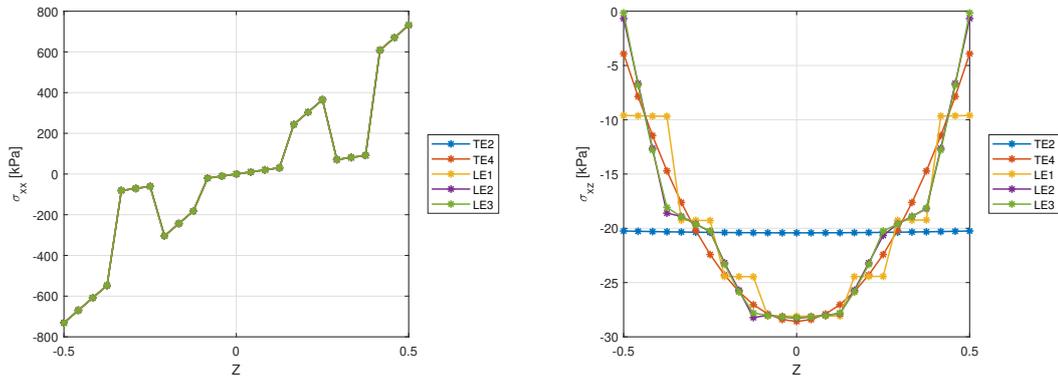
TE4	Mesh	10x2 Q4	2x1 Q9	5x1 Q9	10x2 Q9	
	$w$ [mm]	2.979	3.016	3.034	3.038	
	$\sigma_{xx}$ [kPa]	789	759	730	731	
	$\sigma_{xz}$ [kPa]	-16.23	-38.28	-27.48	-28.58	
TE4 [55]	Mesh	2x2 Q9	4x2 Q9	8x2 Q9	10x2 Q9	12x2 Q9
	$w$ [mm]	3.029	3.029	3.028	3.028	3.028
	$\sigma_{xx}$ [kPa]	684	723	730	731	731
	$\sigma_{xz}$ [kPa]	30.54	28.29	28.21	28.22	28.22

**Tabella 5.16:** Piastra multistrato. Analisi di convergenza sul numero di elementi per il modello TE4. Spostamento trasversale  $w = -10^2 \cdot w(a, b/2, h/2)$ , tensione assiale  $\sigma_{xx} = \sigma_{xx}(a/2, b/2, h/2)$  e tensione di taglio trasversale  $\sigma_{xz} = \sigma_{xz}(a/2, b/2, 0)$ . Confronto con analisi di convergenza presente in letteratura.

In Tabella 5.17 sono riportati i risultati ottenuti con il modello 2D per diverse teorie cinematiche. In tabella sono presenti anche i valori ottenuti con il modello 1D presenti in letteratura [53], e quelli relativi ad un modello 2D [54]. Per quanto riguarda i modelli 2D si può osservare come i modelli con ordine inferiore TE1 e TE2 sottostimino sia lo spostamento trasversale che le tensioni; l'errore è particolarmente elevato per la tensione di taglio trasversale  $\sigma_{xz}$ . I modelli di Lagrange presentano un maggiore numero di gradi di libertà rispetto a quelli di Taylor, ma forniscono una maggiore accuratezza. In Figura 5.11 si possono osservare le distribuzioni di tensione lungo lo spessore per diverse teorie cinematiche. Risulta evidente che i modelli di Taylor descrivono in modo meno accurato il comportamento delle tensioni di taglio  $\sigma_{xz}$  rispetto ai modelli di Lagrange. Dunque per una piastra moderatamente spessa in materiale composito si evidenziano differenze tra le due tipologie di espansione lungo lo spessore. Confrontando i modelli di Lagrange per le strutture 1D e 2D si osserva che le soluzioni sono molto simili sia in termini di spostamento  $w$  che di tensioni  $\sigma_{xx}$  e  $\sigma_{xz}$ . Una considerazione analoga può essere fatta in termini di numero di gradi di libertà.

Mesh	Modello	$w \cdot 10^2$ [mm]	$\sigma_{xx}$ [kPa]	$\sigma_{xz}$ [kPa]	GDL
10 B4 [53]	8 L9	-3.049	729.6	-27.94	4743
	TE2	-2.985	729.6	-19.99	588
	TE3	-3.029	729.6	-28.22	930
	TE4	-3.033	729.6	-28.22	1395
10x2 Q9 [54]	LE4	-3.033	729.3	-27.77	7875
	LE5	-3.033	727.8	-27.41	10395
	TE1	-2.981	729.4	-20	945
	TE3	-3.027	730	-28.21	1575
	TE7	-3.029	729.9	-28.62	2835
10x2 Q9	TE1	-2.981	729.9	-20.36	630
	TE2	-2.991	730.4	-20.42	945
	TE3	-3.035	730.8	-28.58	1260
	TE4	-3.038	730.8	-28.58	1575
	LE1	-3.042	731.3	-28.10	2835
	LE2	-3.053	731.8	-28.30	5355
	LE3	-3.055	732.2	-28.23	7875

**Tabella 5.17:** Piastra multistrato. Spostamento trasversale  $w = -10^2 \cdot w(a, b/2, h/2)$ , tensione assiale  $\sigma_{xx} = \sigma_{xx}(a/2, b/2, h/2)$ , tensione di taglio trasversale  $\sigma_{xz} = \sigma_{xz}(a/2, b/2, 0)$  e numero di gradi di libertà per diversi modelli piastra. Confronto con diversi modelli trave e piastra in letteratura.



(a) Tensione  $\sigma_{xx}(x, y) = \sigma_{xx}(a/2, b/2)$  lungo lo spessore. (b) Tensione  $\sigma_{xz}(x, y) = \sigma_{xz}(a/2, b/2)$  lungo lo spessore.

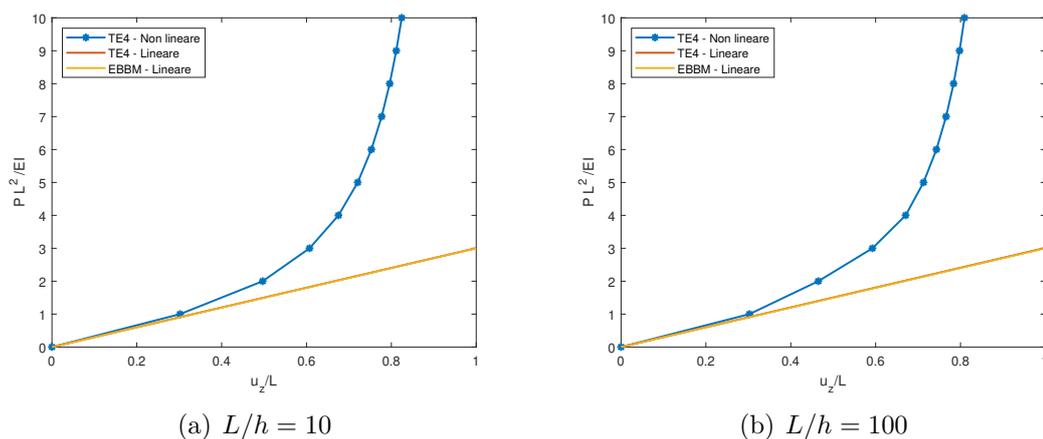
**Figura 5.11:** Risultati numerici dell'analisi statica per la piastra in composito. Mesh 10x2 Q9. Confronto tra diverse teorie cinematiche.

### 5.1.4 Analisi statica non lineare di una trave isotropa

In questo paragrafo viene riportato il caso di una trave incastrata ad un estremo che subisce grandi deflessioni a causa di un carico applicato nella sezione d'estremità. Il problema è stato risolto eseguendo delle analisi non lineari con modelli 1D di ordine elevato. La trave presa in esame ha una lunghezza  $L$  e una sezione quadrata di lato  $h$ . Sono stati considerati due rapporti di snellezza  $L/h$ : 10, 100. La trave è costituita da una lega di Alluminio con un modulo elastico  $E = 75$  GPa e un coefficiente di Poisson  $\nu = 0.33$ .

	N. Elementi B4	TE4	1 L9
$L/h = 10$	5	0.604	0.603
	10	0.606	0.605
	20	0.607	0.606
	40	0.607	0.606
$L/h = 100$	5	0.596	0.596
	10	0.600	0.600
	20	0.602	0.602
	40	0.603	0.603

**Tabella 5.18:** Trave isotropa a sezione quadrata. Analisi di convergenza sul numero di elementi per i modelli TE4 e 1 L9. Spostamento verticale normalizzato  $u_z/L$ .

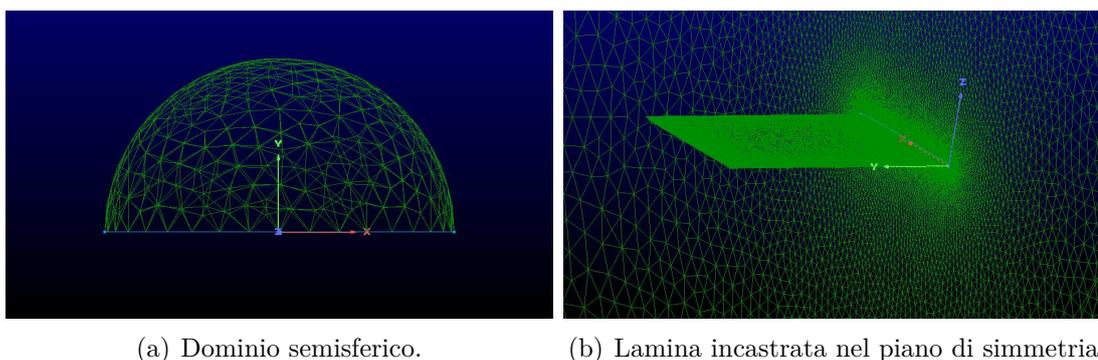


**Figura 5.12:** Curve d'equilibrio per la trave a sezione quadrata soggetta ad un carico verticale.

In Tabella 5.18 viene mostrato l'effetto della discretizzazione della mesh strutturale sullo spostamento verticale normalizzato  $u_z/L$  nel punto di applicazione del carico  $PL^2/EI = 3$ . I risultati sono stati confrontati con i valori presenti in letteratura [43]. Successivamente, sono stati usati il modello strutturale TE4 con una mesh strutturale di 20 elementi B4 per tracciare le curve d'equilibrio per il caso di trave snella e di trave tozza, riportate in Fig.5.12. Viene riportato anche un confronto con il modello classico EBBM lineare.

## 5.2 Calibrazione aerodinamica

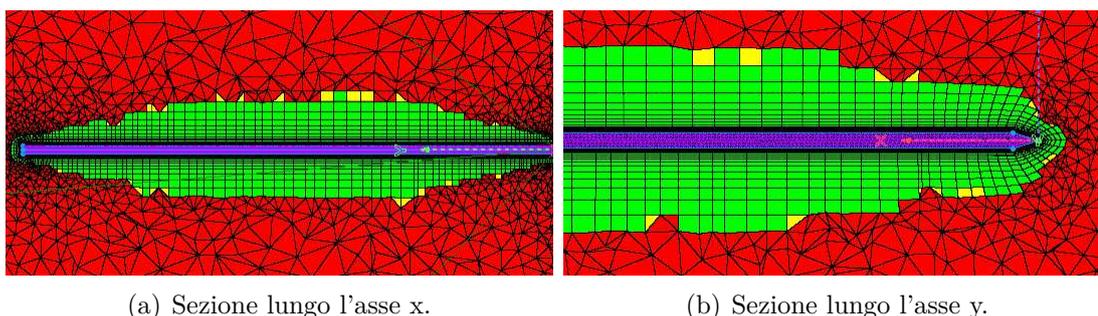
In questa sezione viene riportata una descrizione accurata delle analisi preliminari che vengono effettuate per la determinazione dei parametri di input della simulazione CFD. Come è stato anticipato nel paragrafo 3.4.1, la qualità e la risoluzione della griglia computazionale sono elementi essenziali per assicurare l'accuratezza dei risultati delle simulazioni. Il caso analizzato riguarda la simulazione di una lamina tridimensionale immersa in un flusso a basso numero di Reynolds. La lamina piana ha un Aspect Ratio  $AR = 3$  e le seguenti caratteristiche geometriche: apertura alare  $b = 0.804$  m, corda  $c = 0.264$  m. L'ala ha un profilo rettangolare a sezione costante, con bordo d'attacco e bordo di fuga smussati. Il flusso che la investe è in condizioni di aria standard ed è caratterizzato da un numero di Reynolds  $Re = 8 \times 10^4$ . Il fatto che l'ala abbia un allungamento alare contenuto rende il campo di moto fortemenete tridimensionale. Inoltre, per elevati angoli d'incidenza si verifica una separazione del flusso e una transizione al regime turbolento. Proprio per queste caratteristiche del campo di moto, si è ritenuto questo caso di studio un candidato ideale per effettuare una validazione del software SU2.



**Figura 5.13:** Lamina piana con  $AR = 3$  nell'ambiente Pointwise.

Per il calcolo della soluzione aerodinamica sono state risolte le equazioni RANS compressibili con il modello di turbolenza di Spalart-Allmaras. La validazione è

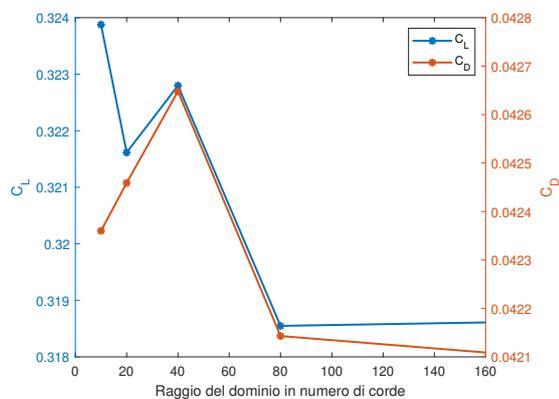
stata effettuata tramite un confronto con i risultati sperimentali [56, 57] e numerici [58] presenti in letteratura. Per ridurre il costo computazionale della simulazione è stata analizzata solo una semiala in un dominio emisferico, imponendo un'opportuna condizione di simmetria, come si può vedere in Fig.5.13. Inizialmente, è stato preso come riferimento un angolo d'incidenza  $\alpha = 5^\circ$  ed è stata effettuata un'analisi di convergenza della griglia al variare della dimensione della prima cella a parete  $\Delta s$  e della dimensione del dominio di calcolo. Seguendo la procedura descritta dalle equazioni 3.38 a partire da una stima di  $y^+$  è stata calcolata la dimensione  $\Delta s$ . Per ottenere valori attendibili dei coefficienti aerodinamici  $C_L$  e  $C_D$  è stato necessario usare un valore di  $y^+ = 0.1$ , a cui corrisponde un'altezza della prima cella a parete  $\Delta s = 6.48 \times 10^{-3}$  mm. Per lo strato limite sono stati usati 33 strati con rateo di accrescimento medio pari a 1.4. In questo modo, la griglia computazionale è risultata essere sufficientemente raffinata nelle vicinanze del corpo. In Figura 5.14 vengono mostrate delle sezioni della mesh vicino a parete. Si può osservare che la zona più prossima al corpo è costituita da celle anisotrope prismatiche (colore verde). La zona lontana da parete è formata da celle isotrope tetraedriche (colore rosso). Nella zona di transizione sono presenti alcune celle di tipo piramidale (colore giallo).



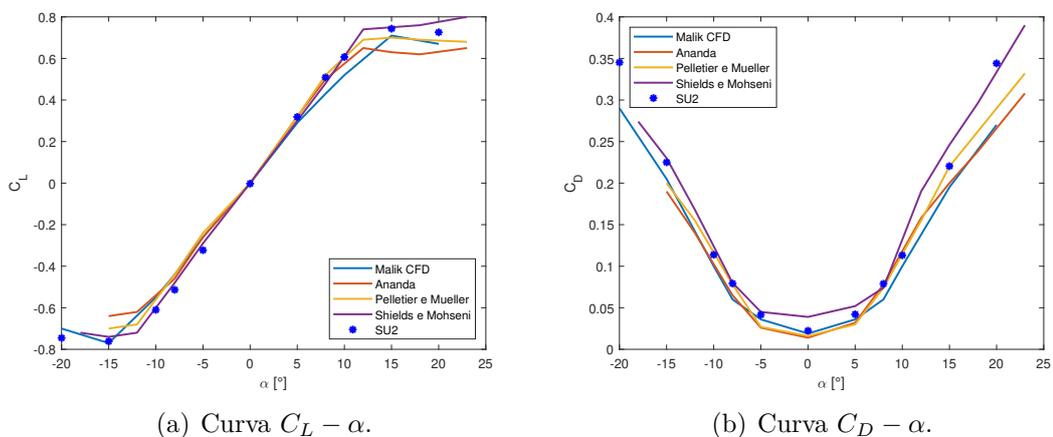
**Figura 5.14:** Dettagli della mesh aerodinamica nelle vicinanze della parete. Lamina piana  $AR = 3$ .

In Figura 5.15 viene mostrata l'analisi di convergenza effettuata al variare della dimensione del campo lontano, espressa in numero di corde aerodinamiche. Le simulazioni effettuate hanno necessitato di un tempo compreso tra le 12 e le 16 ore. Per le analisi successive è stato usato un dominio con estensione pari a 80 corde (21.12 m) come compromesso tra costo computazionale e accuratezza della simulazione. La mesh aerodinamica scelta è costituita da circa  $2.5 \times 10^6$  celle. Dopo aver definito l'altezza della prima cella a parete  $\Delta s$  e la dimensione del dominio, si è analizzato l'effetto dell'angolo d'incidenza  $\alpha$  sui coefficienti aerodinamici. Come si può osservare in Fig. 5.16, i risultati ottenuti per il coefficiente di portanza  $C_L$

con il software SU2 sono concordi con quelli presenti in letteratura. Ci sono alcune piccole differenze per regimi di volo ad alta incidenza, nella zona dello stallo. Anche i risultati per il coefficiente di resistenza  $C_D$  sono abbastanza accurati.



**Figura 5.15:** Analisi di convergenza sui coefficienti aerodinamici in funzione dell'estensione del dominio computazionale. Lamina piana  $AR = 3$ .



(a) Curva  $C_L - \alpha$ .

(b) Curva  $C_D - \alpha$ .

**Figura 5.16:** Lamina piana con  $AR = 3$ . Confronto con i risultati sperimentali e numerici presenti in letteratura.

## 5.3 Analisi aeroelastiche lineari

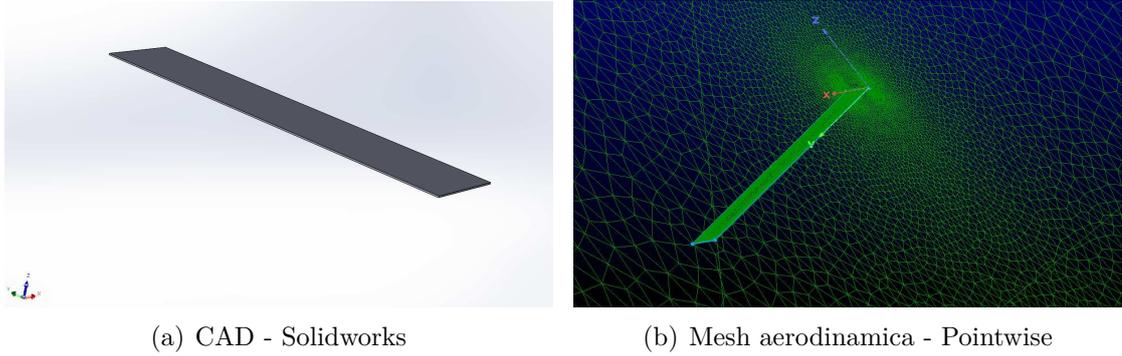
Questa sezione riguarda la validazione del framework computazionale aeroelastico descritto nel capitolo precedente. Particolare attenzione è posta sulla differenza tra l'analisi statica strutturale (SSA), dove i carichi aerodinamici vengono calcolati sulla superficie alare indeformata, e l'analisi statica aeroelastica (SAA), che tiene conto della mutua interazione tra fluido e struttura. In particolare, la SSA corrisponde al primo passo del metodo iterativo e la soluzione SAA viene trovata quando il metodo arriva a convergenza. Un simile approccio iterativo è stato usato da Grifò [36]. I risultati ottenuti sono confrontati con i valori presenti in letteratura. Dopo aver validato il metodo per un ala rettangolare con un modello raffinato 1D, sono state effettuate delle analisi sulla stessa ala con uso di un modello 2D di ordine elevato. Successivamente, si è effettuato uno studio sull'effetto della freccia alare sul comportamento aeroelastico di una struttura. Tutte le geometrie alari sono state studiate sia per materiale isotropo che composito, per valutare l'effetto della laminazione. Inoltre, i risultati ottenuti con la CFD vengono confrontati con quelli ricavati tramite l'implementazione di un metodo aerodinamico classico, il VLM.

### 5.3.1 Ala rettangolare isotropa - Modello trave

Il primo caso di studio è una lamina piana in lega di Alluminio, le cui proprietà sono riportate in Tab. 5.19. La lamina ha una lunghezza  $b = 5$  m, che corrisponde alla semi apertura dell'ala, ed è incastrata ad un'estremità. La sezione dell'ala è rettangolare, con una corda  $c = 1$  m ed uno spessore  $h = 0.02$  m. In Figura 5.17 viene mostrata la semiala sviluppata su Solidworks e inserita nel dominio computazionale fluidodinamico su Pointwise. La corrente a monte ha un angolo d'incidenza  $\alpha = 1^\circ$  e sono state considerate tre diverse velocità del flusso  $V = 10, 30$  e  $50$  m/s. Le mesh aerodinamiche utilizzate sono diverse per le tre velocità, sia in termini di estensione del dominio sferico che di altezza della prima cella  $\Delta s$ . Il procedimento per la stima di queste grandezze è stato discusso nella sezione 5.2. Tutte e tre le mesh usate sono costituite da tre diversi tipi di elementi tridimensionali: tetraedri, piramidi e prismi. La mesh per  $V = 10$  m/s è costituita da 440878 elementi 3D, quella per  $V = 30$  m/s da 423764 e la griglia per  $V = 50$  m/s è formata da 445017 elementi.

E [GPa]	$\nu$	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]
69	0.33	2700

**Tabella 5.19:** Proprietà del materiale isotropo - Ala rettangolare.



**Figura 5.17:** Ala rettangolare dritta negli ambienti Solidworks e Pointwise.

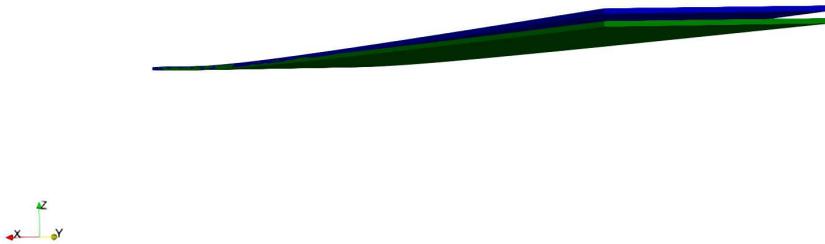
Sul software SU2 sono state risolte le equazioni di Navier-Stokes con l'ipotesi di flusso laminare, giustificata dalle basse velocità della corrente a monte e dal piccolo angolo d'incidenza. Per il calcolo dei flussi convettivi è stato usato lo schema di Jameson–Schmidt–Turkel (JST), con coefficienti dissipativi del secondo e quarto ordine 0.2 e 0.05. Come solutore lineare è stato utilizzato il metodo FGMRES, con un numero  $CFL = 10$ . Per il calcolo strutturale si è usato un modello trave 1D con 20 elementi B4 per il metodo degli elementi finiti. Sono state studiate diverse teorie cinematiche nell'ambito della formulazione CUF. Per validare i risultati aeroelastici è stata analizzata la convergenza per lo spostamento verticale al bordo d'attacco del tip alare  $u_{z-LE}$ .

Modello	$V = 10$		$V = 30$		$V = 50$	
	SSA	SAA	SSA	SAA	SSA	SAA
EBBM	8.301	8.320	71.674	67.310	197.908	186.308
TE1	8.301	8.320	71.676	67.327	197.913	186.322
TE2	7.571	7.510	65.413	67.655	180.588	223.457
TE3	8.077	8.010	69.767	72.387	192.610	240.559
2 L9	8.083	8.016	69.820	72.442	192.756	240.739
TE4	8.056	8.028	70.153	72.682	194.096	241.005

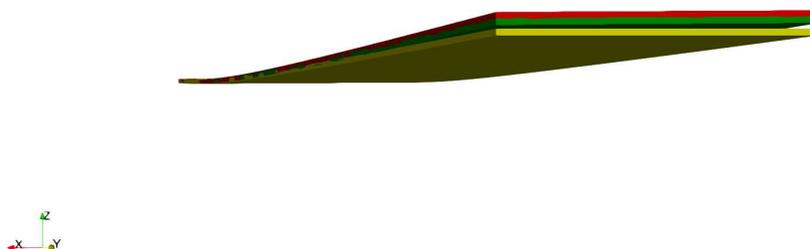
**Tabella 5.20:** Effetto della velocità della corrente a monte  $V$  [m/s] sullo spostamento verticale al tip  $u_{z-LE}$  [mm] per diverse teorie cinematiche. Confronto analisi SSA e SAA.  $\alpha = 1^\circ$ . Ala rettangolare isotropa. Mesh strutturale 20 B4.

Lo stesso problema è stato studiato con diversi metodi in letteratura [28],[36]. I risultati di queste analisi sono stati presi come riferimento. In [28] la struttura è

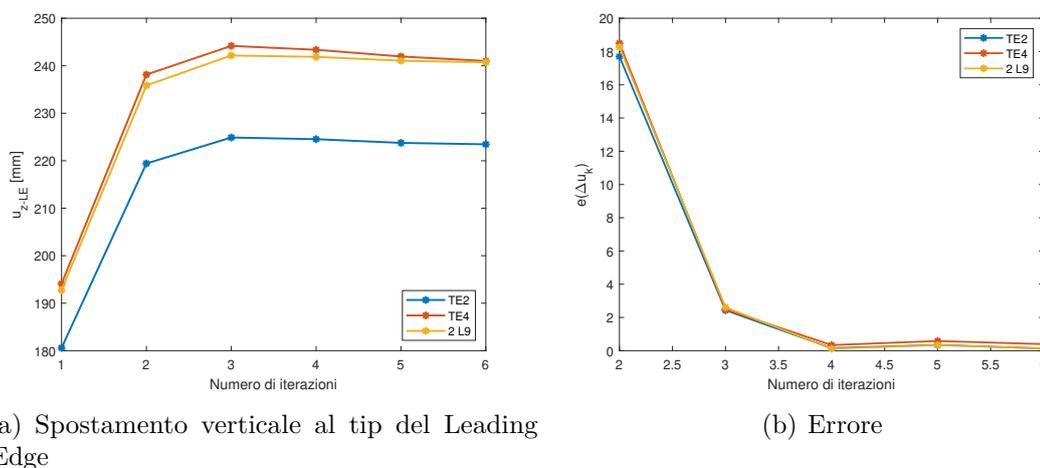
stata schematizzata con un modello trave 1D e studiata con l'uso di CUF+FEM. Per l'interazione fluido-struttura è stato usato il metodo IPS e per la determinazione dei carichi aerodinamici il metodo VLM. Nel secondo studio [36] è stato usato un modello piastra 2D con la formulazione CUF+FEM per il calcolo strutturale. I carichi aerodinamici sono stati determinati con la CFD. Come interfaccia tra i due modelli è stato usato il metodo Moving Least Square (MLS). In Tabella 5.20 vengono mostrati i risultati ottenuti alla prima iterazione (SSA) e all'ultima iterazione del ciclo iterativo (SAA-convergenza). Si può notare come per basse velocità non vengano evidenziate differenze rilevanti tra l'analisi strutturale e quella aeroelastica. Queste differenze diventano notevoli a velocità maggiori, quando aumentano le deformazioni della struttura. In Figura 5.18 si può osservare la differenza nelle configurazioni deformate tra i risultati delle due analisi per il modello TE4 a  $V = 50$  m/s. In Tabella 5.20 viene anche fatto un confronto tra le diverse teorie di espansione sulla sezione trasversale della struttura. Le soluzioni sono più accurate per teorie di ordine elevato (TE3, TE4, 2 L9). Si può notare che i risultati ottenuti con le espansioni di Lagrange sono molto simili a quelli ottenuti con l'espansione di Taylor. A pari gradi di libertà (2745), non si evidenziano differenze rilevanti tra il modello strutturale 2 L9 e il modello TE4. In Figura 5.19 si possono osservare le configurazioni deformate della struttura per modelli di Taylor di diverso ordine a  $V = 50$  m/s. Le deformate del modello TE3 e TE4 risultano praticamente sovrapposte. In Figura 5.20 vengono mostrati la convergenza dello spostamento verticale al Leading Edge del tip  $u_{z-LE}$  e l'andamento dell'errore relativo  $e(\Delta u_k)$  tra lo spostamento al passo  $k$  e quello calcolato al passo precedente  $k-1$  del metodo iterativo.



**Figura 5.18:** Configurazioni deformate per l'ala rettangolare isotropa.  $V = 50$  m/s,  $\alpha = 1^\circ$ . Confronto tra SSA (verde) e SAA (blu). Modello TE4.



**Figura 5.19:** Configurazioni deformate per l'ala rettangolare isotropa.  $V = 50$  m/s,  $\alpha = 1^\circ$ . Confronto tra le diverse teorie cinematiche. TE1(giallo), TE2(verde), TE3(arancione), TE4(rosso).



**Figura 5.20:** Convergenza per lo spostamento al tip LE e per l'errore con il metodo iterativo per diverse teorie cinematiche.  $V = 50$  m/s,  $\alpha = 1^\circ$ . Ala rettangolare isotropa.

Il metodo ha raggiunto la convergenza con 6 iterazione per  $V = 50$  m/s, mentre per velocità più basse in 9 iterazioni. Questo probabilmente è dovuto al maggiore ruolo della viscosità per bassi numeri di Reynolds. In Tabella 5.21 vengono confrontati i risultati ottenuti per le analisi SAA con le soluzioni presenti

in letteratura. In Tabella 5.22 sono mostrate le differenze percentuali tra il modello di ordine più elevato usato nell'ambito di questa tesi (TE4) e i valori di riferimento degli altri studi. La soluzione su NASTRAN è stata calcolata usando un modello strutturale FSDT e il VLM per l'analisi aerodinamica.

Modello	$V = 10$	$V = 30$	$V = 50$
Trave - N=4* [28]	7.513	73.397	244.460
NASTRAN* [28]	7.545	73.731	245.490
Piastra - N=3 [36]	5.811	73.268	241.900
TE4	8.028	72.682	241.005

**Tabella 5.21:** Confronto risultati modello TE4, Mesh 20 B4, con la letteratura. Effetto della velocità della corrente a monte  $V$  [m/s] sullo spostamento verticale al tip  $u_{z-LE}$  [mm].  $\alpha = 1^\circ$ . Ala rettangolare isotropa. (\* indica una soluzione ottenuta con il VLM).

Modello	$V = 10$	$V = 30$	$V = 50$
Trave - N=4* [28]	6.86	-0.97	-1.41
NASTRAN* [28]	6.40	-1.42	-1.83
Piastra - N=3 [36]	38.14	-0.80	-0.37

**Tabella 5.22:** Differenze [%] risultati modello TE4, Mesh 20 B4, con la letteratura. Effetto della velocità della corrente a monte  $V$  [m/s] sullo spostamento verticale al tip  $u_{z-LE}$  [mm].  $\alpha = 1^\circ$ . Ala rettangolare isotropa. (\* indica una soluzione ottenuta con il VLM).

Come si può notare, la soluzione trovata con il metodo iterativo si discosta poco dalle soluzioni di riferimento per  $V = 30,50$  m/s. I risultati trovati con i metodi aerodinamici accurati del lavoro presente e di Grifò [36] sono molto simili a quelli trovati con il metodo VLM. Le carenze del metodo VLM sono evidenziate a basse velocità  $V = 10$  m/s quando i fenomeni legati all'attrito non possono essere trascurati, data la possibile insorgenza di fenomeni aerodinamici non lineari. Tuttavia, anche i metodi CFD hanno difficoltà a descrivere fenomeni come la transizione del flusso da laminare a turbolento. Ci sono poi possibili implicazioni dell'uso di un solutore di flussi compressibili quando il flusso è caratterizzato da un numero di Mach molto basso, come nel caso presente. La grande differenza

per  $V = 10$  m/s tra la soluzione presente e quella ad alta fedeltà di Grifò resta da indagare. In Tabella 5.23 sono mostrati i risultati dell'indagine condotta sulla rotazione della sezione al tip. I risultati per i modelli trave EBBM e TBM non vengono riportati, in quanto le teorie classiche non rilevano alcun comportamento torsionale della struttura. Il modello TE1 ne tiene conto ma dalle analisi risulta inefficace. La rotazione della sezione al tip  $\psi_{TIP}$  è così definita:

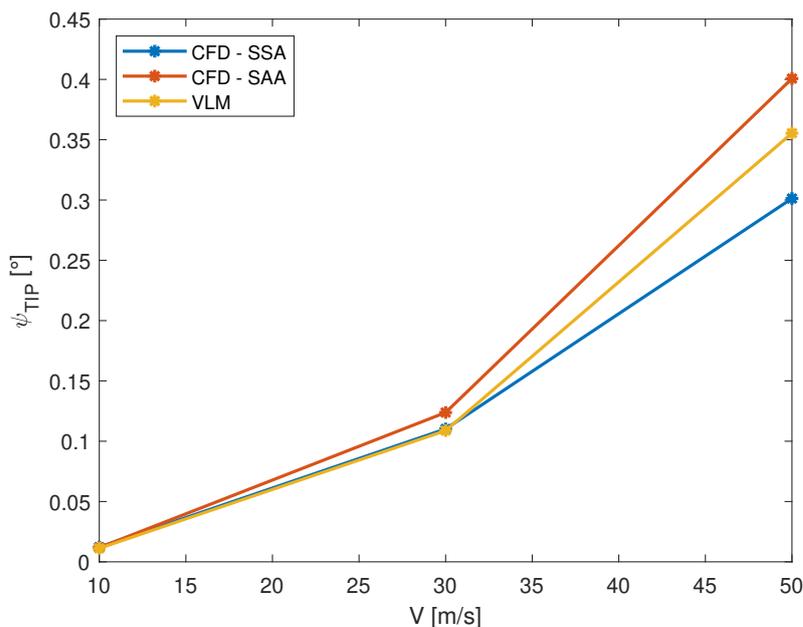
$$\psi_{TIP} = \arctan\left(\frac{u_{z-LE} - u_{z-TE}}{c}\right) \quad (5.3)$$

Velocità [m/s]	Modello	$u_{z-LE}$ [mm]	$u_{z-TE}$ [mm]	$\psi_{TIP}$ [°]
10	TE2	7.510	7.308	0.0116
	TE3	8.010	7.805	0.0117
	TE4	8.028	7.822	0.0118
	2 L9	8.016	7.811	0.0117
	TE4*	7.327	7.132	0.0112
30	TE2	67.655	65.515	0.1226
	TE3	72.387	70.214	0.1245
	TE4	72.682	70.522	0.1238
	2 L9	72.442	70.267	0.1246
	TE4*	71.674	69.775	0.1088
50	TE2	223.457	216.511	0.3979
	TE3	240.559	233.485	0.4053
	TE4	241.005	234.011	0.4007
	2 L9	240.739	233.661	0.4005
	TE4*	237.544	231.341	0.3554

**Tabella 5.23:** Effetto della velocità della corrente a monte  $V$  sulla rotazione della sezione al tip  $\psi_{TIP}$  per diverse teorie cinematiche.  $\alpha = 1^\circ$ . Ala rettangolare isotropa. Mesh strutturale 20 B4. (\* indica una soluzione ottenuta con il VLM).

Si può notare come anche la rotazione della sezione cresce all'aumentare dell'ordine della teoria. Inoltre, la rotazione della sezione aumenta all'aumentare della velocità di monte. In tabella viene anche riportata la soluzione TE4\* calcolata con il metodo VLM. Si può osservare che per ogni regime di velocità il modello aerodinamico classico sottostima la torsione della struttura rispetto al metodo CFD.

In Figura 5.21 si può osservare la differenza di rotazione della sezione per diverse analisi condotte sul modello strutturale trave TE4. Si può evidenziare che l'analisi statica strutturale, che non tiene conto dell'interazione fluido-struttura, sottostima la rotazione della sezione. Studiare la struttura con un modello aeroelastico è strettamente necessario per conoscerne il campo di deformazioni effettivo. La differenza tra analisi SAA e SSA cresce notevolmente all'aumentare della velocità.



**Figura 5.21:** Effetto della velocità della corrente a monte  $V$  sulla rotazione della sezione al tip  $\psi_{TIP}$ . Confronto tra modelli aerodinamici.  $\alpha = 1^\circ$ . Ala rettangolare isotropa. Modello strutturale TE4. Mesh strutturale 20 B4.

### 5.3.2 Ala rettangolare in composito - Modello trave

Nelle successive analisi viene introdotto un materiale composito per indagare l'effetto dell'angolo di laminazione  $\theta$  sul comportamento aeroelastico di una struttura. Si considera un'ala monostrato in composito con le stesse caratteristiche geometriche dell'ala rettangolare studiata in 5.3.1. Le proprietà del materiale ortotropo considerato sono riportate in Tab. 5.24. I risultati delle analisi aeroelastiche (SAA) sono stati ottenuti con un modello strutturale di ordine elevato TE4, l'uso della CFD per il calcolo dei carichi aerodinamici e il metodo IPS per l'interazione fluido-struttura. In Tabella 5.25 sono riportati gli spostamenti verticali al tip e la rotazione della sezione. Risulta evidente che ci sono dei valori di  $\theta$  per i quali gli spostamenti verticali e la rotazione al tip sono più contenuti. Tuttavia il valore di  $\theta$  per cui si

ha un minimo di  $u_{z-LE}$  è diverso da quello per il quale la rotazione della sezione è minima, come si può osservare in Figura 5.22. Una possibile zona di progetto potrebbe essere quella con  $\theta = [15 : 30]$ , con spostamenti verticali contenuti e angoli di rotazione negativi. Per questi angoli di laminazione si ottiene un allontanamento della condizione di divergenza.

$E_L$ [GPa]	20.5
$E_T = E_Z$ [GPa]	10
$\nu_{TL} = \nu_{LZ} = \nu_{TZ}$	0.25
$G_{TL} = G_{LZ} = G_{TZ}$ [GPa]	5

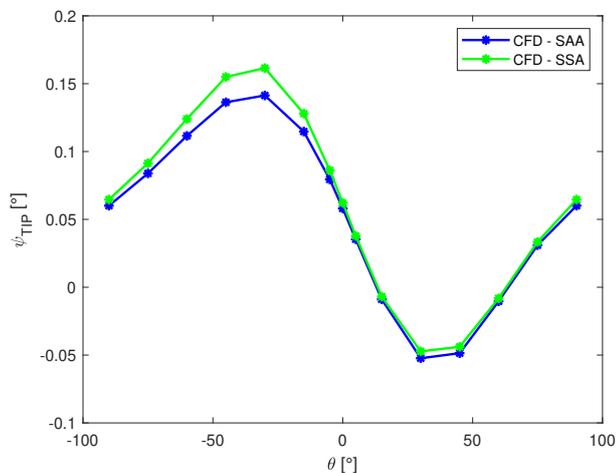
**Tabella 5.24:** Proprietà del materiale ortotropo - Ala rettangolare.

$\theta$ [°]	$u_{z-LE}$ [mm]	$u_{z-TE}$ [mm]	$\psi_{TIP}$ [°]
-90	54.806	53.757	0.060
-75	52.936	51.472	0.084
-60	48.515	46.568	0.112
-45	41.826	39.447	0.136
-30	34.550	32.083	0.141
-15	28.883	26.880	0.115
-5	27.032	25.645	0.079
0	26.882	25.868	0.058
5	27.307	26.690	0.035
15	29.908	30.064	-0.009
30	37.328	38.241	-0.052
45	45.853	46.702	-0.049
60	51.929	52.110	-0.010
75	54.606	54.065	0.031
90	54.806	53.757	0.060

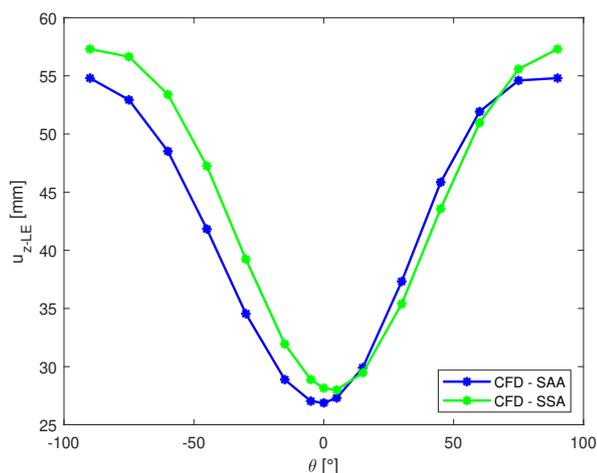
**Tabella 5.25:** Effetto dell'angolo di laminazione  $\theta$  sulla rotazione della sezione al tip  $\psi_{TIP}$ . SAA.  $V = 10$  m/s.  $\alpha = 1^\circ$ . Ala rettangolare in composito. Modello strutturale TE4. Mesh strutturale 20 B4.

Si può notare come anche a basse velocità  $V = 10$  m/s gli spostamenti verticali della struttura sono notevolmente maggiori al caso di ala isotropa. Quando si usano materiali ortotropi con caratteristiche meccaniche inferiori occorre ispessire

la struttura. In Figura 5.22 si può anche notare la differenza tra i risultati delle analisi SSA e SAA.



(a) Spostamento verticale al tip del Leading Edge

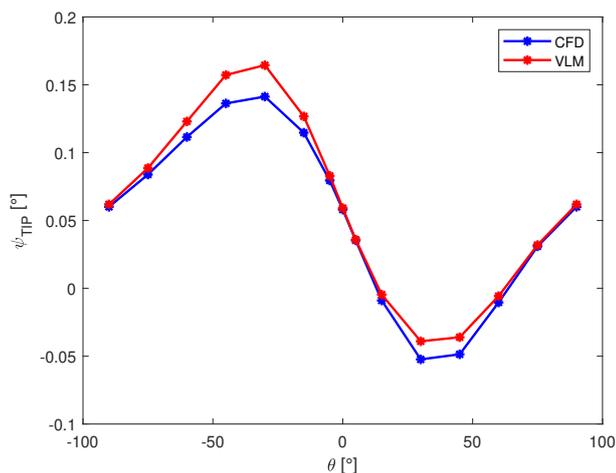


(b) Rotazione della sezione al tip

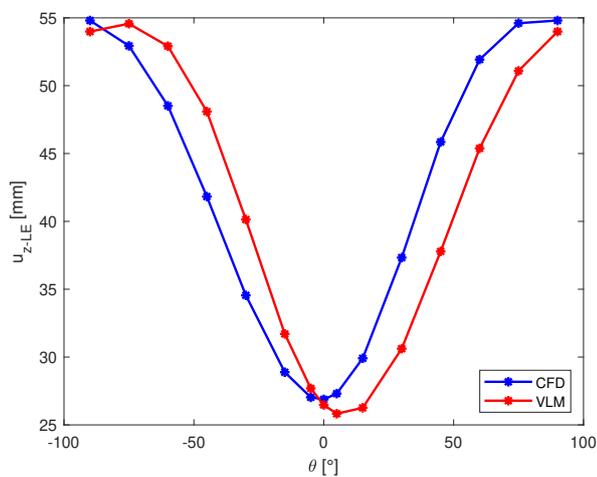
**Figura 5.22:** Effetto dell'angolo di laminazione  $\theta$  sulla rotazione della sezione al tip  $\psi_{TIP}$  e sullo spostamento verticale al Leading Edge del tip  $u_{z-LE}$ . Confronto tra analisi SSA e SAA.  $V = 10$  m/s.  $\alpha = 1^\circ$ . Ala rettangolare in composito. Modello strutturale TE4. Mesh strutturale 20 B4.

Per validare i risultati ottenuti si è effettuato un confronto con le soluzioni calcolate con il metodo VLM per il modello aerodinamico. Il confronto viene mostrato in Fig. 5.23. Anche in questo caso il VLM mostra i suoi limiti per flussi

con forte presenza dell'attrito. In particolare, sovrastima la rotazione al tip per tutti gli angoli di laminazione. Inoltre, per valori di  $\theta > 0$  il metodo ad alta fedeltà prevede spostamenti verticali maggiori al tip rispetto al VLM.



(a) Spostamento verticale al tip del Leading Edge



(b) Rotazione della sezione al tip

**Figura 5.23:** Effetto dell'angolo di laminazione  $\theta$  sulla rotazione della sezione al tip  $\psi_{TIP}$  e sullo spostamento verticale al Leading Edge del tip  $u_{z-LE}$ . Confronto tra modelli aerodinamici.  $V = 10$  m/s.  $\alpha = 1^\circ$ . Ala rettangolare in composito. Modello strutturale TE4. Mesh strutturale 20 B4.

### 5.3.3 Ala rettangolare isotropa - Modello piastra

Le stesse analisi sono state condotte con l'uso di modelli strutturali 2D di ordine elevato. In Tabella 5.26 viene effettuato un confronto tra analisi statica strutturale (SSA) e analisi aeroelastica (SAA) per diverse teorie cinematiche.

Modello	$V = 10$		$V = 30$		$V = 50$	
	SSA	SAA	SSA	SAA	SSA	SAA
FSDT	5.599	5.610	48.345	45.476	133.490	123.736
TE1	6.938	6.879	59.922	62.205	165.423	209.099
TE2	8.058	7.992	69.606	72.200	192.164	242.897
TE3	8.059	7.992	69.611	72.208	192.177	242.953
TE4	8.059	7.992	69.611	72.208	192.177	242.953
LE1	6.937	6.879	62.562	64.566	165.421	209.095
LE2	8.058	7.992	69.606	72.650	192.164	242.897
LE3	8.059	7.992	69.612	72.210	192.181	242.957

**Tabella 5.26:** Effetto della velocità della corrente a monte  $V$  [m/s] sullo spostamento verticale al tip  $u_{z-LE}$  [mm] per diverse teorie cinematiche. Confronto analisi SSA e SAA.  $\alpha = 1^\circ$ . Ala rettangolare isotropa. Mesh strutturale 4x20 Q9.

Modello	$V = 10$	$V = 30$	$V = 50$
Trave - N=4* [28]	7.513	73.397	244.460
NASTRAN* [28]	7.545	73.731	245.490
Piastra - N=3 [36]	5.811	73.268	241.900
Trave - TE4	8.028	72.682	240.828
Piastra - TE4	7.992	72.208	242.953

**Tabella 5.27:** Confronto risultati modello TE4, Mesh 20 B4, e modello TE4, Mesh 4x20 Q9, con la letteratura. Effetto della velocità della corrente a monte  $V$  [m/s] sullo spostamento verticale al tip  $u_{z-LE}$  [mm].  $\alpha = 1^\circ$ . Ala rettangolare isotropa. (\* indica una soluzione ottenuta con il VLM).

Si può osservare che i modelli di Taylor TE2, TE3, TE4 e i modelli con espansione di Lagrange lungo lo spessore LE2, LE3 forniscono risultati molto vicini in termini di accuratezza. I modelli FSDT e di ordine 1 non sono adatti a descrivere in modo affidabile il comportamento aeroelastico della struttura.

Modello	$V = 10$	$V = 30$	$V = 50$
Trave - N=4* [28]	6.86	-0.97	-1.49
NASTRAN* [28]	6.40	-1.42	-1.90
Piastra - N=3 [36]	38.14	-0.80	-0.44
Trave TE4	-0.45	-0.66	0.87

**Tabella 5.28:** Differenze [%] risultati modello TE4, Mesh 4x20 Q9, con il modello TE4, Mesh 20 B4, e con la letteratura. Effetto della velocità della corrente a monte  $V$  [m/s] sullo spostamento verticale al tip  $u_{z-LE}$  [mm].  $\alpha = 1^\circ$ . Ala rettangolare isotropa. (\* indica una soluzione ottenuta con il VLM).

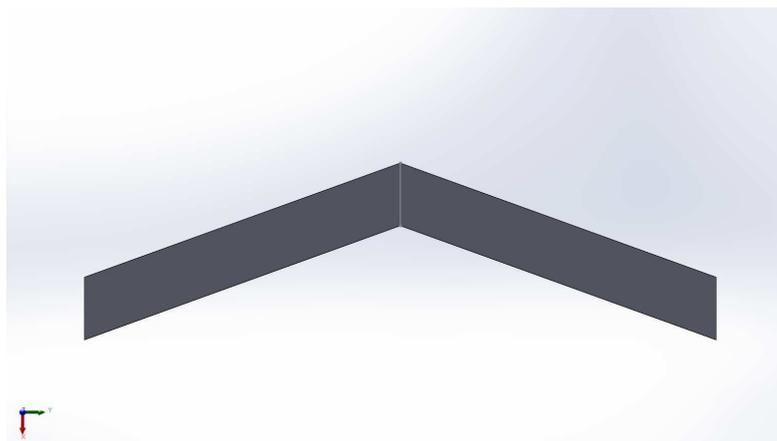
Velocità [m/s]	Modello	$u_{z-LE}$ [mm]	$u_{z-TE}$ [mm]	$\psi_{TIP}$ [°]
10	TE2	7.992	7.787	0.0117
	TE3	7.992	7.788	0.0117
	TE4	7.992	7.788	0.0117
	LE2	7.992	7.787	0.0117
	LE3	7.992	7.788	0.0117
	TE4*	7.296	7.100	0.0112
30	TE2	72.200	70.031	0.1243
	TE3	72.208	70.038	0.1243
	TE4	72.208	70.038	0.1243
	LE2	72.650	70.512	0.1225
	LE3	72.210	70.040	0.1243
	TE4*	71.369	69.467	0.1090
50	TE2	242.897	235.428	0.4279
	TE3	242.953	235.479	0.4282
	TE4	242.953	235.479	0.4282
	LE2	242.897	235.428	0.4279
	LE3	242.957	235.483	0.4282
	TE4*	236.543	230.330	0.3560

**Tabella 5.29:** Effetto della velocità della corrente a monte  $V$  sulla rotazione della sezione al tip  $\psi_{TIP}$  per diverse teorie cinematiche.  $\alpha = 1^\circ$ . Ala rettangolare isotropa. Mesh strutturale 4x20 Q9. (\* indica una soluzione ottenuta con il VLM).

In Tabella 5.27 viene riportato un confronto tra il modello 2D raffinato TE4, il modello raffinato 1D TE4 e i valori presenti in letteratura. Per la descrizione dei modelli usati in letteratura si rimanda al paragrafo 5.3.1. Lo stesso confronto in termini di differenze percentuali tra i risultati viene mostrato in Tab.5.28. Si può evincere che i modelli piastra e trave di ordine elevato descrivono con uguale accuratezza il comportamento strutturale, nel caso di ala sottile isotropa. Il modello 2D utilizza un maggior numero di gradi di libertà che quando si effettuano analisi aeroelastiche lineari non influiscono in modo rilevante sul costo computazionale complessivo. Infatti, le analisi CFD rappresentano quasi la totalità del costo. In Tabella 5.29 viene valutato l'effetto del modello strutturale sulla rotazione della sezione d'estremità alare. I modelli di ordine elevato con espansioni di Taylor e di Lagrange garantiscono la stessa accuratezza nella descrizione del fenomeno della torsione. Si può notare come il modello aerodinamico classico differisca dalle soluzioni ottenute con la CFD.

#### 5.3.4 Ala con angolo di freccia - Modello piastra

Nelle successive analisi si è studiato l'effetto della freccia alare  $\Lambda$  sul comportamento aeroelastico. Sono state analizzate geometrie alari con sezione trasversale rettangolare costante lungo l'apertura e con angolo di freccia  $\Lambda = [-10^\circ, 0^\circ, 10^\circ, 20^\circ]$ . Le caratteristiche geometriche di apertura alare, corda e spessore sono le stesse dell'ala descritta nel paragrafo 5.3.1. Per ciascuna geometria sono state create delle mesh aerodinamiche seguendo il procedimento già descritto nella sezione 5.2. In Figura 5.24 viene mostrato l'ala con  $\Lambda = 20^\circ$  creata con il software Solidworks. Inizialmente, è stata considerata un'ala in materiale isotropo le cui proprietà sono riportate in Tab.5.19.



**Figura 5.24:** Ala con angolo di freccia  $\Lambda = 20^\circ$  nell'ambiente Solidworks.

In Tabella 5.30 viene mostrato l'effetto della freccia sullo spostamento verticale al Leading Edge del tip. Si può osservare che al crescere dell'angolo di freccia positivo le deflessioni della struttura diminuiscono. Si può notare anche il marcato effetto negativo di un angolo di freccia negativo sul comportamento aeroelastico, in quanto comporta spostamenti al tip maggiori rispetto al caso di ala dritta. In generale, gli spostamenti crescono all'aumentare della velocità. Per quanto riguarda i diversi modelli strutturali adottati, si può notare che i risultati ottenuti con il modello del primo ordine TE1 si discostano da quelli ottenuti con teorie di ordine superiore (TE2, TE4).

Modello	$\Lambda$ [°]	$V = 10$	$V = 30$	$V = 50$
TE1	-10	7.767	74.860	373.367
	0	6.895	62.205	209.099
	10	7.201	55.104	146.629
	20	7.772	54.824	124.407
TE2	-10	9.020	88.331	478.296
	0	8.010	72.200	242.897
	10	8.348	63.087	164.573
	20	8.971	61.900	137.537
TE4	-10	8.984	88.302	475.115
	0	7.992	72.208	242.953
	10	8.299	63.272	164.271
	20	8.915	62.039	137.257

**Tabella 5.30:** Effetto della velocità della corrente a monte  $V$  [m/s] sullo spostamento verticale al tip  $u_{z-LE}$  [mm] per diverse teorie cinematiche. Confronto tra diversi angoli di freccia  $\Lambda$ .  $\alpha = 1^\circ$ . Ala isotropa. Mesh strutturale 4x20 Q9.

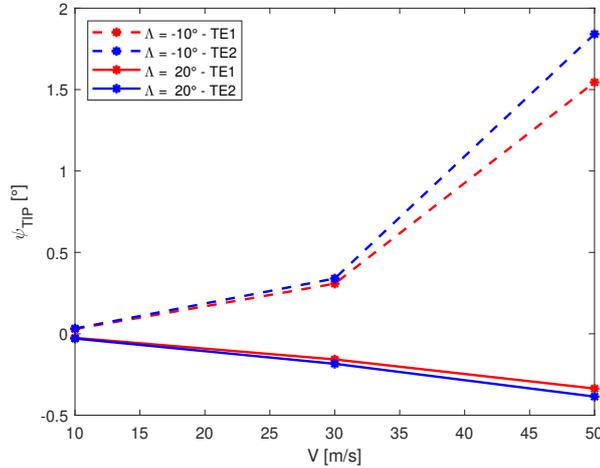
Le stesse considerazioni sugli angoli di freccia e sui modelli strutturali possono essere fatte per l'angolo di rotazione della sezione al tip  $\psi_{TIP}$ . In Tabella 5.31 sono riportati gli spostamenti al leading Edge del tip  $u_{z-LE}$  e le rotazioni della sezione  $\psi_{TIP}$  per diversi angoli di freccia  $\Lambda$ . I risultati confermano l'effetto benefico della freccia positiva sul comportamento aeroelastico previsto dalla teoria. Infatti, per  $\Lambda = [10^\circ, 20^\circ]$  gli angoli di rotazione al tip sono negativi anche per velocità abbastanza elevate. Questo si traduce in una riduzione dell'incidenza del flusso aerodinamico rispetto al caso di ala dritta e in un effetto stabilizzante che fa aumentare la velocità di divergenza della superficie portante. In Figura 5.25 si

possono osservare gli andamenti della rotazione  $\psi_{TIP}$  e dello spostamento verticale al Leading Edge del tip  $u_{z-LE}$  al variare della velocità, per angoli di freccia  $\Lambda = [-10^\circ, 20^\circ]$ . In particolare, viene effettuato un confronto tra diverse teorie cinematiche.

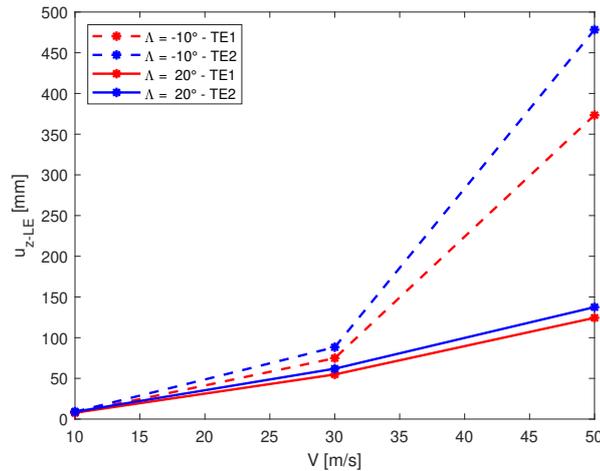
Velocità [m/s]	Modello	$\Lambda$ [°]	$u_{z-LE}$ [mm]	$u_{z-TE}$ [mm]	$\psi_{TIP}$ [°]
30	TE1	-10	74.860	69.485	0.3080
		0	62.205	60.066	0.1225
		10	55.104	55.500	-0.0227
		20	54.824	57.570	-0.1573
	TE2	-10	88.331	82.401	0.3398
		0	72.200	70.031	0.1243
		10	63.087	63.756	-0.0383
		20	61.900	65.113	-0.1841
	TE4	-10	88.302	82.383	0.3391
		0	72.208	70.038	0.1243
		10	63.272	63.960	-0.0394
		20	62.039	65.271	-0.1852
50	TE1	-10	373.367	346.398	1.5449
		0	209.099	201.762	0.4204
		10	146.629	147.368	-0.0423
		20	124.407	130.274	-0.3362
	TE2	-10	478.296	446.155	1.8409
		0	242.897	235.428	0.4279
		10	164.573	165.985	-0.0809
		20	137.537	144.266	-0.3855
	TE4	-10	475.115	443.122	1.8324
		0	242.953	235.479	0.4282
		10	164.271	165.747	-0.0845
		20	137.257	144.021	-0.3876

**Tabella 5.31:** Effetto della velocità della corrente a monte  $V$  sulla rotazione della sezione al tip  $\psi_{TIP}$  per diverse teorie cinematiche. Confronto tra diversi angoli di freccia  $\Lambda$ .  $\alpha = 1^\circ$ . Ala isotropa. Mesh strutturale 4x20 Q9.

Si può notare come il modello TE1 non descriva in modo affidabile il comportamento aeroelastico della struttura. I grafici evidenziano l'importanza di usare un modello che preveda in modo accurato il fenomeno della torsione.



(a) Rotazione della sezione al tip

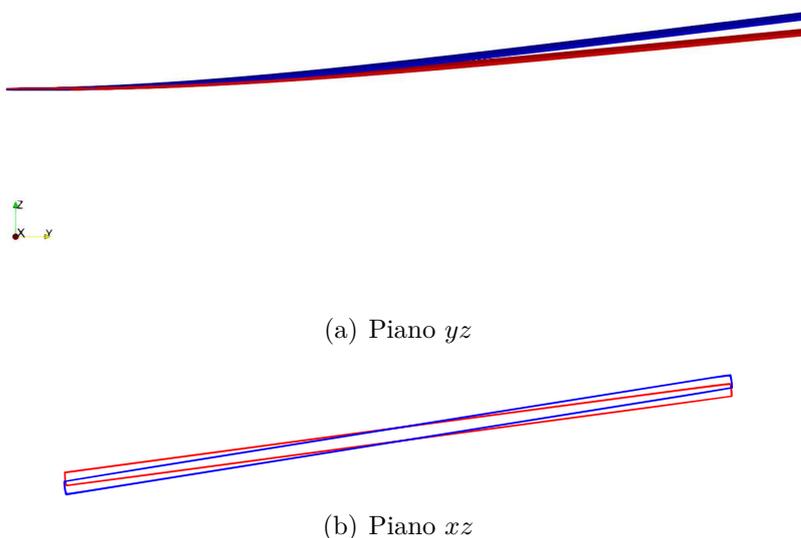


(b) Spostamento verticale al tip del Leading Edge

**Figura 5.25:** Effetto della velocità della corrente a monte  $V$  sulla rotazione della sezione al tip  $\psi_{TIP}$  e sullo spostamento verticale al Leading Edge del tip  $u_{z-LE}$  per diverse teorie cinematiche.  $\alpha = 1^\circ$ . Ala con angoli di Freccia  $\Lambda = -10^\circ$  e  $\Lambda = 20^\circ$  isotropa. Mesh strutturale 4x20 Q9.

Per l'ala con angolo di freccia  $\Lambda = 10^\circ$  le rotazioni della sezione d'estremità per i due modelli differiscono maggiormente e questo si riflette su una maggiore

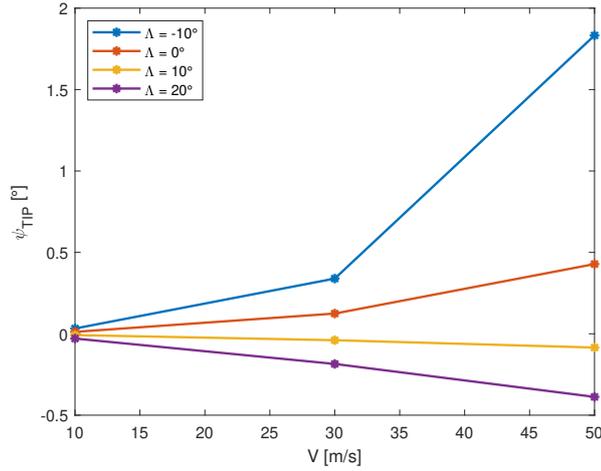
differenza nella previsione del comportamento a flessione della struttura, rispetto al caso con  $\Lambda = 20^\circ$ . Infatti, gli spostamenti verticali dipendono dall'entità dei carichi aerodinamici agenti sulla struttura e un'ala che presenta una rotazione della sezione che amplifica l'angolo d'incidenza del flusso genera carichi maggiori, a parità delle altre grandezze. In Figura 5.26 viene mostrato un confronto tra i modelli TE1 e TE2 in termini di configurazioni deformate dell'ala con angolo di freccia  $\Lambda = 10^\circ$  per velocità  $V = 50$  m/s. Si può osservare come il modello TE2 preveda spostamenti verticali e rotazioni della sezione maggiori al tip. Nell'immagine relativa al piano  $xz$  gli spostamenti sono moltiplicati per un fattore 5.



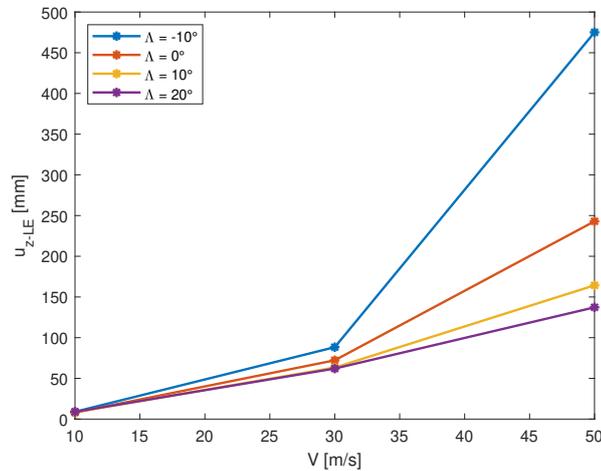
**Figura 5.26:** Configurazioni deformate per l'ala con angolo di freccia  $\Lambda = -10^\circ$  isotropa.  $V = 50$  m/s,  $\alpha = 1^\circ$ . Confronto tra le diverse teorie cinematiche. TE1(rosso), TE2(blu). Mesh strutturale  $4 \times 20$  Q9.

In Figura 5.27 viene riassunto l'effetto dell'angolo di freccia sullo spostamento verticale al Leading Edge e sulla rotazione della sezione al tip, per il modello strutturale più accurato TE4. In Figura 5.28 viene mostrato un confronto tra i diversi angoli di freccia in termini di configurazioni deformate dell'ala per il modello strutturale TE4 a velocità  $V = 50$  m/s. Successivamente, è stato analizzato l'effetto combinato della freccia alare e dell'angolo di laminazione  $\theta$  per un'ala in

composito composta da un singolo strato. Le caratteristiche del materiale ortotropo considerato sono riportate in Tab.5.24. Le configurazioni alari oggetto di studio sono le stesse analizzate nel caso di materiale isotropo. In Figura 5.29 vengono confrontati i risultati ottenuti con la CFD e quelli ottenuti mediante il VLM per un'ala con angolo di freccia  $\Lambda = 10^\circ$  a velocità  $V = 10$  m/s. Si può notare come per configurazioni alari che presentano un angolo di freccia il modello classico commetta errori maggiori rispetto al caso di ala dritta.

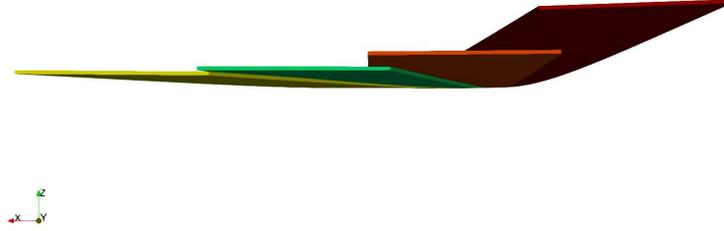


(a) Rotazione della sezione al tip



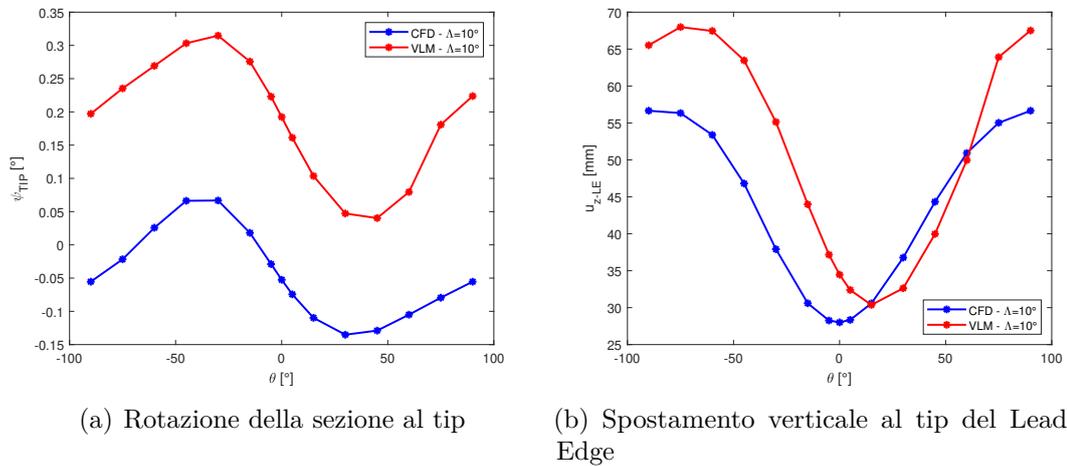
(b) Spostamento verticale al tip del Leading Edge

**Figura 5.27:** Effetto della velocità della corrente a monte  $V$  sulla rotazione della sezione al tip  $\psi_{TIP}$  e sullo spostamento verticale al tip  $u_{z-LE}$ . Confronto tra diversi angoli di freccia  $\Lambda$ .  $\alpha = 1^\circ$ . Ala isotropa. Modello TE4. Mesh strutturale 4x20 Q9.



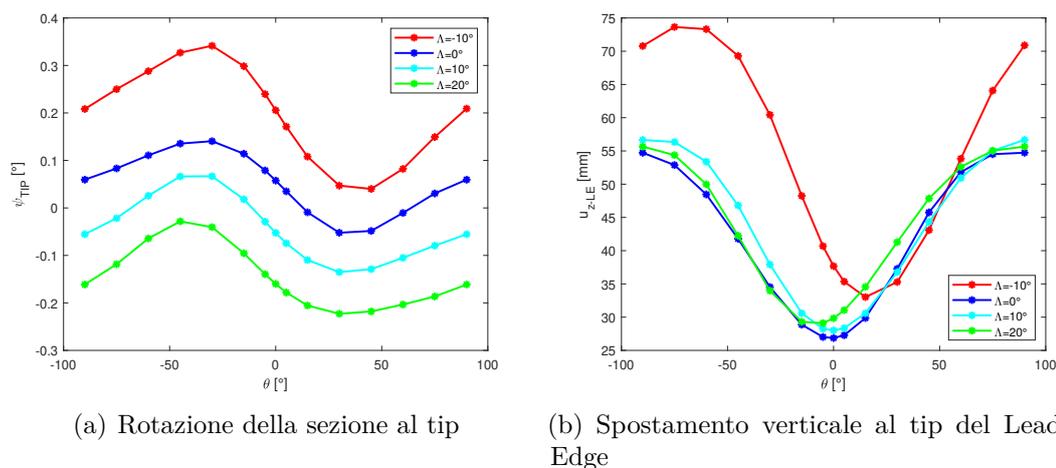
**Figura 5.28:** Configurazioni deformate per l'ala isotropa con diversi angoli di freccia. Piano  $xz$ .  $V = 50$  m/s,  $\alpha = 1^\circ$ .  $\Lambda = -10^\circ$ (rosso scuro),  $\Lambda = 0^\circ$ (rosso chiaro),  $\Lambda = 10^\circ$ (verde),  $\Lambda = 20^\circ$ (giallo). Modello strutturale TE4. Mesh strutturale 4x20 Q9.

I modelli aerodinamici classici presentano forti limitazioni nel descrivere geometrie alare più complesse. In particolare, risulta evidente la differenza nella previsione della rotazione della sezione al tip. Il VLM sovrastima  $\psi_{TIP}$  e non rileva in modo affidabile l'effetto benefico di un angolo di freccia positivo.



**Figura 5.29:** Effetto dell'angolo di laminazione  $\theta$  sulla rotazione della sezione al tip  $\psi_{TIP}$  e sullo spostamento verticale al Leading Edge del tip  $u_{z-LE}$ . Confronto tra modelli aerodinamici.  $V = 10$  m/s.  $\alpha = 1^\circ$ . Ala con angolo di freccia  $\Lambda = 10^\circ$  in composito. Modello strutturale TE4. Mesh strutturale 4x20 Q9.

In Figura 5.30 si può notare che angoli di freccia positivi riducono la rotazione della sezione al tip per ogni angolo di laminazione. L'effetto di  $\theta$  su  $\psi_{TIP}$  è simile per tutti gli angoli di freccia. Osservando il grafico che riporta gli spostamenti verticali  $u_{z-LE}$  si nota che il comportamento dell'ala con  $\Lambda = -10^\circ$  si discosta da quello delle altre configurazioni. Riassumendo, da questi grafici si può notare come la selezione di un opportuno angolo di freccia e di un opportuno angolo di laminazione possa migliorare notevolmente il comportamento aeroelastico della struttura.



**Figura 5.30:** Effetto dell'angolo di laminazione  $\theta$  sulla rotazione della sezione al tip  $\psi_{TIP}$  e sullo spostamento verticale al Leading Edge del tip  $u_{z-LE}$ . Confronto tra diversi angoli di freccia  $\Lambda$ .  $V = 10$  m/s.  $\alpha = 1^\circ$ . Ala rettangolare con angolo di freccia in composito. Modello strutturale TE4. Mesh strutturale 4x20 Q9.

## 5.4 Analisi aeroelastiche non lineari

In questa sezione vengono analizzati gli effetti della presenza di non linearità geometrica sul comportamento aeroelastico delle strutture alari. In particolare, vengono evidenziate le differenze riscontrate effettuando un'analisi strutturale non lineare rispetto al caso lineare. Sono presi in considerazione diversi modelli strutturali, diverse condizioni di volo, nel caso di materiale isotropo e composito. Successivamente, i risultati ottenuti con la CFD vengono confrontati con quelli ottenuti con il VLM. Nell'ultimo paragrafo vengono analizzati gli effetti della deformabilità della struttura sui coefficienti aerodinamici.

### 5.4.1 Ala rettangolare - Modello trave

Nelle analisi seguenti è stata studiata un'ala rettangolare con le stesse caratteristiche geometriche descritte nel paragrafo 5.3.1. L'ala è costituita da un materiale isotropo, le cui proprietà sono riportate in Tab.5.19. In Tabella 5.32 vengono confrontati gli spostamenti verticali al Leading Edge del tip  $u_{z-LE}$  ottenuti con un'analisi lineare e un'analisi non lineare per diverse velocità. Si può osservare che per velocità maggiori di  $V = 50$  m/s la differenza tra il caso lineare e quello non lineare aumentano notevolmente. In particolare, l'analisi lineare sovrastima la deflessione dell'ala. Questo effetto è più marcato per i modelli strutturali di ordine elevato TE2 e TE4.

Modello	Analisi	V = 10	V = 30	V = 50	V = 70	V = 90
EBBM	Lineare	8.338	67.309	182.904	347.575	578.825
	Non lineare	8.338	67.276	182.305	343.528	560.689
TE2	Lineare	7.528	67.655	226.320	629.336	1732.558
	Non lineare	7.528	67.621	224.765	589.417	1231.537
TE4	Lineare	8.045	72.546	244.302	685.469	1887.160
	Non lineare	8.045	72.488	241.582	623.242	1248.488

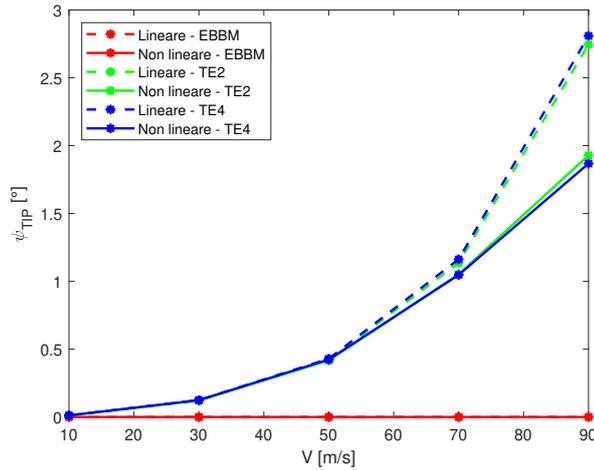
**Tabella 5.32:** Effetto della velocità della corrente a monte  $V$  [m/s] sullo spostamento verticale al tip  $u_{z-LE}$  [mm] per diverse teorie cinematiche. Confronto analisi Lineare e Non lineare.  $\alpha = 1^\circ$ . Ala rettangolare isotropa. Mesh strutturale 20 B4.

Come si può vedere in Tab.5.33, per i modelli strutturali di ordine superiore l'analisi lineare sovrastima la rotazione della sezione al tip  $\psi_{TIP}$  e anche in questo caso l'effetto è maggiormente accentuato per alte velocità di volo. Il modello della trave EBBM non riesce a rilevare la rotazione della sezione d'estremità. Questi risultati mettono in risalto le limitazioni delle teorie strutturali classiche, che non sono adeguate per la descrizione di fenomeni aeroelastici nei quali la torsione ricopre un ruolo fondamentale. L'importanza del modello adottato e dell'analisi strutturale che si effettua viene evidenziata in Fig.5.31. Si può notare che per il modello EBBM, che non prevede alcuna rotazione della sezione al tip, non si riscontrano differenze rilevanti tra caso lineare e non lineare nella previsione degli spostamenti  $u_{z-LE}$ . Per i modelli TE2 e TE4, all'aumentare della velocità, si osserva un notevole incremento dell'angolo  $\psi_{TIP}$ . Questo si traduce in aumento marcato della deflessione nella sezione d'estremità. Inoltre, da questi grafici si può dedurre che nel caso in cui non valga l'ipotesi di piccoli spostamenti e piccole rotazioni l'analisi lineare non fornisce risultati affidabili.

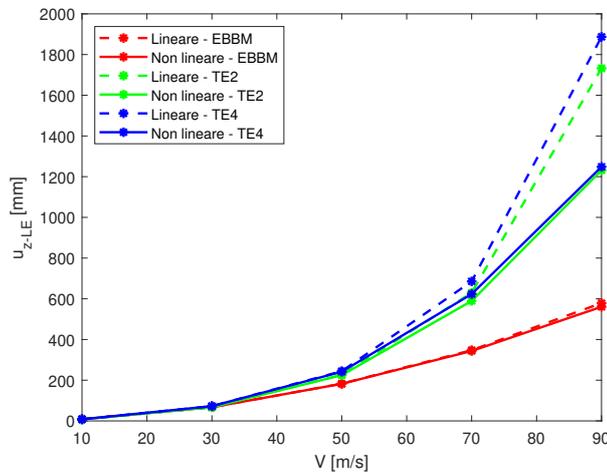
Velocità [m/s]	Modello	Analisi	$u_{z-LE}$ [mm]	$u_{z-TE}$ [mm]	$\psi_{TIP}$ [°]
10	EBBM	Lineare	8.338	8.338	0.0000
		Non Lineare	8.338	8.338	0.0000
	TE2	Lineare	7.528	7.322	0.0118
		Non Lineare	7.528	7.322	0.0118
	TE4	Lineare	8.045	7.836	0.0120
		Non Lineare	8.045	7.836	0.0120
30	EBBM	Lineare	67.309	67.309	0.0000
		Non Lineare	67.276	67.276	0.0000
	TE2	Lineare	67.655	65.515	0.1226
		Non Lineare	67.621	65.483	0.1225
	TE4	Lineare	72.546	70.371	0.1246
		Non Lineare	72.488	70.314	0.1245
50	EBBM	Lineare	182.904	182.904	0.0000
		Non Lineare	182.305	182.305	0.0000
	TE2	Lineare	226.320	218.967	0.4213
		Non Lineare	224.765	217.481	0.4174
	TE4	Lineare	244.302	236.802	0.4297
		Non Lineare	241.582	234.185	0.4238
70	EBBM	Lineare	347.575	347.575	0.0000
		Non Lineare	343.528	343.528	0.0000
	TE2	Lineare	629.336	609.495	1.1366
		Non Lineare	589.417	571.040	1.0528
	TE4	Lineare	685.469	665.171	1.1628
		Non Lineare	623.242	604.957	1.0475
90	EBBM	Lineare	578.825	578.825	0.0000
		Non Lineare	560.689	560.689	0.0000
	TE2	Lineare	1732.558	1684.607	2.7453
		Non Lineare	1231.537	1197.863	1.9287
	TE4	Lineare	1887.160	1838.087	2.8094
		Non Lineare	1248.488	1215.865	1.8685

**Tabella 5.33:** Effetto della velocità della corrente a monte  $V$  sulla rotazione della sezione al tip  $\psi_{TIP}$  per diverse teorie cinematiche. Confronto analisi Lineare e Non lineare.  $\alpha = 1^\circ$ . Ala rettangolare isotropa. Mesh strutturale 20 B4.

I risultati ottenuti dimostrano che per una descrizione accurata dei fenomeni aeroelastici, in presenza di non linearità geometrica, è necessario effettuare delle analisi strutturali non lineari e usare modelli raffinati di ordine elevato. In Figura 5.32 vengono confrontate le configurazioni deformate per le diverse teorie cinematiche adottate, nel caso di analisi lineare e non lineare.

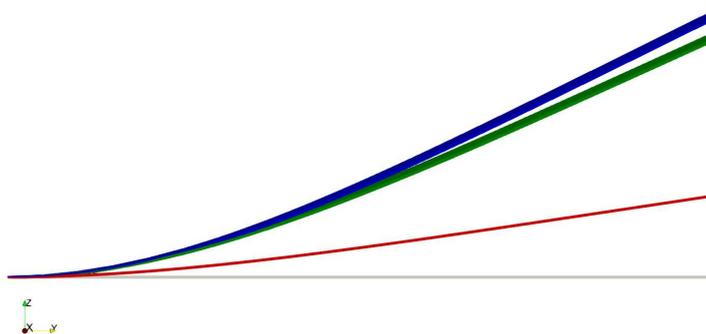
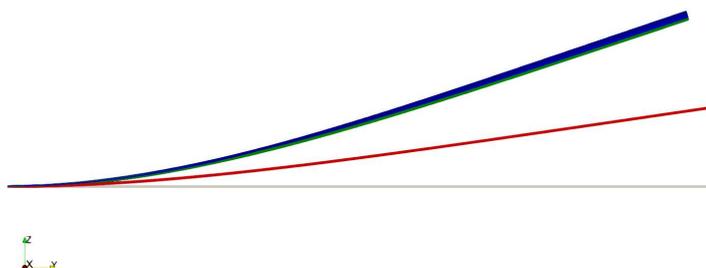


(a) Rotazione della sezione al tip



(b) Spostamento verticale al tip del Leading Edge

**Figura 5.31:** Effetto della velocità della corrente a monte  $V$  sulla rotazione della sezione al tip  $\psi_{TIP}$  e sullo spostamento verticale al Leading Edge del tip  $u_{z-LE}$  per diverse teorie cinematiche. Confronto tra analisi Lineare e Non lineare.  $\alpha = 1^\circ$ . Ala rettangolare isotropa. Mesh strutturale 20 B4.

(a) Lineare - Piano  $yz$ (b) Non lineare - Piano  $yz$ 

**Figura 5.32:** Configurazioni deformate per l'ala rettangolare isotropa.  $V = 90$  m/s,  $\alpha = 1^\circ$ . Confronto tra analisi Lineare e Non lineare per le diverse teorie cinematiche. EBBM(rosso), TE2(verde), TE4(blu). Mesh strutturale 20 B4.

Per le successive analisi è stato utilizzato il modello strutturale TE4, il più accurato tra quelli presi in esame. In Tabella 5.34 sono riportati i risultati ottenuti per gli spostamenti verticali al Leading Edge del tip con la CFD e con il VLM. Le soluzioni del metodo classico si discostano da quelle del modello accurato per ogni regime di volo. Il VLM commette maggiori errori per alte velocità, che comportano elevati spostamenti e rotazioni. Le stesse considerazioni possono essere fatte riguardo alla rotazione della sezione d'estremità, come si può vedere in Tab.5.35. Osservando la Fig.5.33 si può evincere che per prevedere in modo affidabile il comportamento aeroelastico di strutture che subiscono elevate deformazioni è

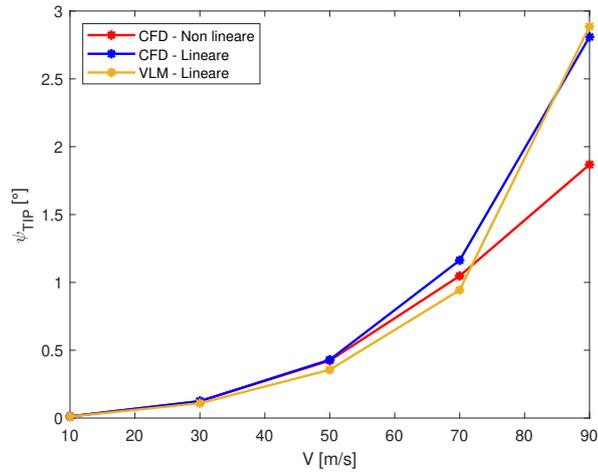
necessario usare modelli aerodinamici accurati (CFD) e un modello strutturale non lineare.

Analisi	V = 10	V = 30	V = 50	V = 70	V = 90
CFD - Lineare	8.045	72.546	244.302	685.469	1887.160
CFD - Non Lineare	8.045	72.488	241.582	623.242	1248.488
VLM - Lineare	7.296	71.369	236.543	640.982	2025.701

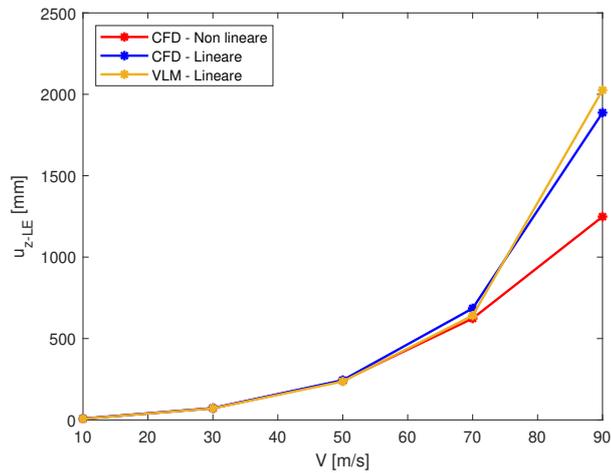
**Tabella 5.34:** Effetto della velocità della corrente a monte  $V$  [m/s] sullo spostamento verticale al Leading Edge del tip  $u_{z-LE}$  [mm] per diversi modelli aerodinamici. Confronto tra analisi Lineare e Non lineare.  $\alpha = 1^\circ$ . Ala rettangolare isotropa. Modello strutturale TE4. Mesh strutturale 20 B4.

Velocità [m/s]	Analisi	$u_{z-LE}$ [mm]	$u_{z-TE}$ [mm]	$\psi_{TIP}$ [°]
10	CFD - Lineare	8.045	7.836	0.0120
	CFD - Non Lineare	8.045	7.836	0.0120
	VLM - Lineare	7.296	7.100	0.0112
30	CFD - Lineare	72.546	70.371	0.1246
	CFD - Non Lineare	72.488	70.314	0.1245
	VLM - Lineare	71.369	69.467	0.1090
50	CFD - Lineare	244.302	236.802	0.4297
	CFD - Non Lineare	241.582	234.185	0.4238
	VLM - Lineare	236.543	230.330	0.3560
70	CFD - Lineare	685.469	665.171	1.1628
	CFD - Non Lineare	623.242	604.957	1.0475
	VLM - Lineare	640.982	624.521	0.9431
90	CFD - Lineare	1887.160	1838.087	2.8094
	CFD - Non Lineare	1248.488	1215.865	1.8685
	VLM - Lineare	2025.701	1975.284	2.8862

**Tabella 5.35:** Effetto della velocità della corrente a monte  $V$  sulla rotazione della sezione al tip  $\psi_{TIP}$  per diversi modelli aerodinamici. Confronto tra analisi Lineare e Non lineare.  $\alpha = 1^\circ$ . Ala rettangolare isotropa. Modello strutturale TE4. Mesh strutturale 20 B4.



(a) Rotazione della sezione al tip



(b) Spostamento verticale al tip del Leading Edge

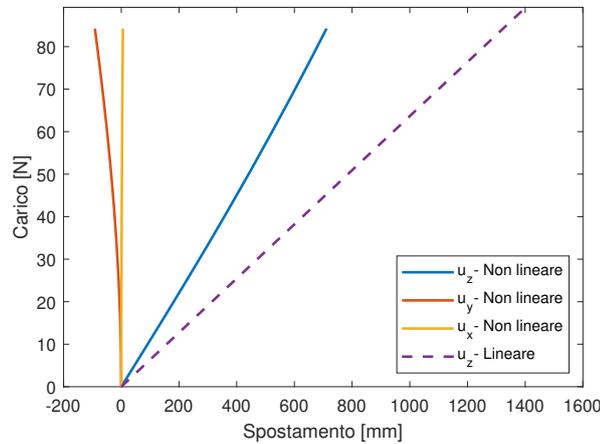
**Figura 5.33:** Effetto della velocità della corrente a monte  $V$  sulla rotazione della sezione al tip  $\psi_{TIP}$  e sullo spostamento verticale al Leading Edge del tip  $u_{z-LE}$  per diversi modelli aerodinamici. Confronto tra analisi Lineare e Non lineare.  $\alpha = 1^\circ$ . Ala rettangolare isotropa. Modello TE4. Mesh strutturale 20 B4.

Il costo computazionale di un'analisi statica non lineare effettuata con il metodo Full Newton-Raphson è notevolmente maggiore rispetto a quello di un'analisi statica lineare. Infatti, ad ogni iterazione la matrice di rigidità tangente  $\mathbf{K}_T$  deve essere ricalcolata ed assemblata. Successivamente, si deve risolvere il sistema lineare. Il costo computazionale complessivo cresce più che linearmente con il

numero di gradi di libertà della struttura e può diventare paragonabile a quello delle analisi CFD. Per questi motivi, l'uso di modelli raffinati CUF 1D presenta notevoli vantaggi in termini di costo rispetto a modelli 2D e 3D, e con un'opportuna scelta dell'ordine della teoria garantisce la stessa accuratezza. In Tabella 5.36 viene presentato un ulteriore aspetto che differenzia i risultati dell'analisi non lineare. Si può osservare come il campo di spostamenti della struttura nel caso non lineare sia tridimensionale. In particolare, vengono riportati gli spostamenti verticali  $u_{zA}$  e le deflessioni laterali  $u_{yA}$  nel punto  $A(x, y, z) = (0.25, 3.333, 0)$ , situato al quarto anteriore della corda oltre la metà della semiapertura alare. I risultati ottenuti dalle analisi lineari non prevedono spostamenti rilevanti lungo l'asse  $y$  e l'asse  $x$ .

$V$ [m/s]	$u_{yA}$ [mm]	$u_{zA}$ [mm]
10	-0.004	4.525
30	-0.296	40.768
50	-3.290	135.745
70	-22.004	350.319
90	-90.443	706.949

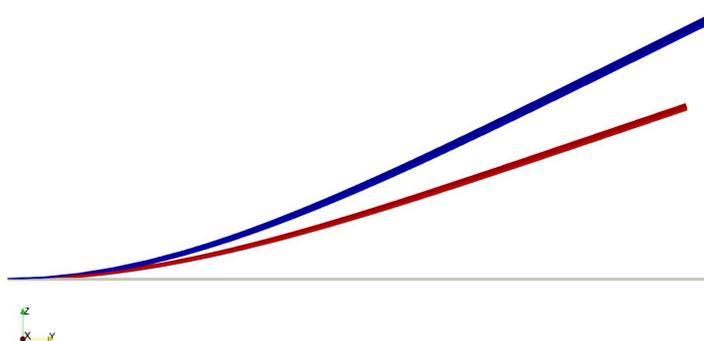
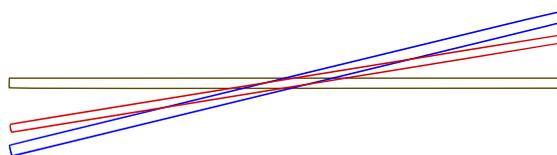
**Tabella 5.36:** Effetto della velocità  $V$  sul campo di spostamenti dell'ala rettangolare isotropa.  $\alpha = 1^\circ$ . Analisi Non lineare. Punto  $A(x, y, z) = (0.25, 3.333, 0)$ .



**Figura 5.34:** Curve d'equilibrio dell'ala rettangolare isotropa.  $V = 90$  m/s.  $\alpha = 1^\circ$ . Punto  $A(x, y, z) = (0.25, 3.333, 0)$ .

In Figura 5.34 vengono mostrate le curve d'equilibrio dell'ala rettangolare isotropa per la velocità  $V = 90$  m/s. Si osserva che la struttura non lineare risulta

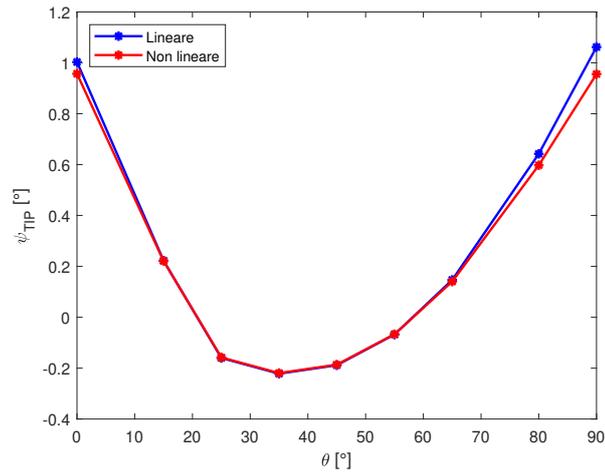
più rigida nella direzione  $z$  rispetto alla previsione lineare. All'aumentare del carico aerodinamico la struttura non lineare subisce una deflessione rilevante che non viene prevista dal modello lineare. In Figura 5.35 viene mostrato un confronto tra il modello lineare e quello non lineare in termini di configurazioni deformate dell'ala per velocità  $V = 90$  m/s. Si può osservare come il modello lineare preveda spostamenti verticali e rotazioni della sezione maggiori al tip. Nell'immagine relativa al piano  $xz$  gli spostamenti sono moltiplicati per un fattore 5.

(a) Piano  $yz$ (b) Piano  $xz$ 

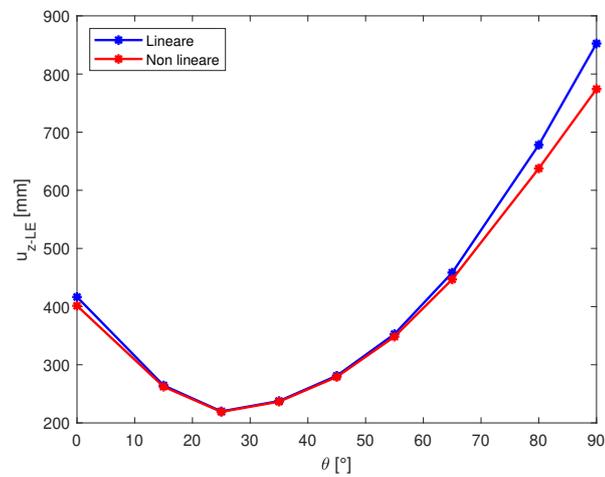
**Figura 5.35:** Configurazioni deformate per l'ala rettangolare isotropa.  $V = 90$  m/s,  $\alpha = 1^\circ$ . Confronto tra analisi Lineare e Non lineare. Lineare(blu), Non lineare(rosso). Modello TE4. Mesh strutturale 20 B4.

Le analisi seguenti riguardano la stessa geometria alare costituita da un materiale composito, le cui proprietà sono riportate in Tab.5.24. In Figura 5.36 viene mostrato l'effetto dell'angolo di laminazione  $\theta$  sullo spostamento verticale  $u_{z-LE}$  e la rotazione della sezione  $\psi_{TIP}$ , per  $V = 30$  m/s, nel caso di analisi lineare e non lineare. Si può osservare che gli andamenti delle grandezze previsti dai due modelli sono in accordo. Si può notare che le maggiori differenze si presentano per i valori di  $\theta$  che comportano elevati spostamenti e rotazioni. Anche per il caso di materiale ortotropo, l'analisi lineare sovrastima lo spostamento verticale al Leading Edge del tip e la rotazione della sezione d'estremità. Questi grafici confermano che

la scelta di un angolo di laminazione opportuno può migliorare notevolmente il comportamento aeroelastico della struttura.



(a) Rotazione della sezione al tip



(b) Spostamento verticale al Leading Edge del tip

**Figura 5.36:** Effetto dell'angolo di laminazione  $\theta$  sulla rotazione della sezione al tip  $\psi_{TIP}$  e sullo spostamento verticale al Leading Edge del tip  $u_{z-LE}$ . Confronto tra analisi Lineare e Non lineare.  $V = 30$  m/s.  $\alpha = 1^\circ$ . Ala rettangolare in composito. Modello strutturale TE4. Mesh strutturale 20 B4.

## 5.4.2 Effetto della deformabilità della struttura sui coefficienti aerodinamici - Modello trave

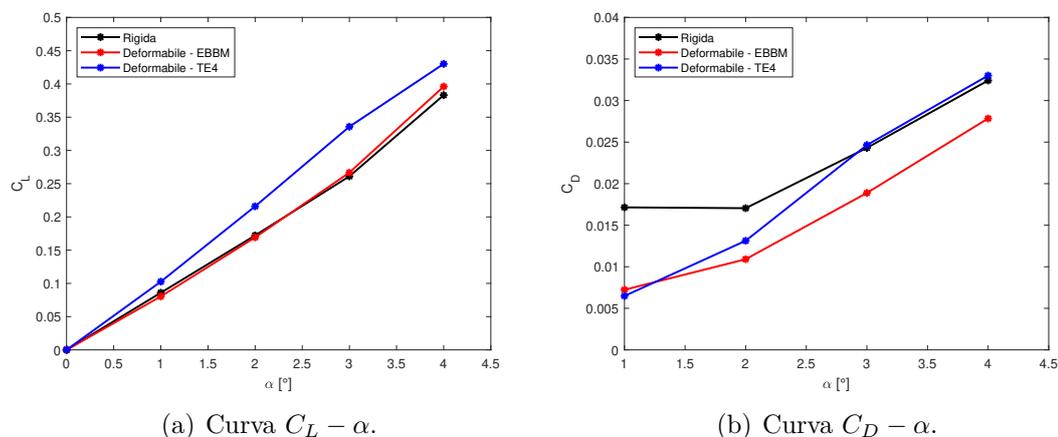
Le analisi seguenti riguardano l'effetto della deformabilità della struttura sui coefficienti aerodinamici per diversi modelli strutturali. In particolare, è stato valutato l'andamento dei coefficienti al variare dell'angolo d'incidenza  $\alpha$  ad una velocità di monte  $V = 50$  m/s. Si è considerata la stessa ala rettangolare isotropa studiata nel paragrafo 5.4.1. Nelle Tabelle 5.37 e 5.38 vengono conforntati i risultati ottenuti per il  $C_L$  e il  $C_D$  per i modelli EBBM e TE4. In generale, si può osservare che una struttura deformabile presenta valori maggiori del coefficiente di portanza e una diminuzione del coefficiente di resistenza, rispetto al caso di ala rigida. In Figura 5.37 sono mostrate le curve  $C_L - \alpha$  e  $C_D - \alpha$  per le due teorie cinematiche nel caso di analisi lineare. Il modello TE4 che riesce a descrivere accuratamente il fenomeno della torsione prevede dei notevoli aumenti del  $C_L$  rispetto alla struttura rigida. Per piccoli angoli d'incidenza, l'ala deformabile descritta dal modello TE4 prevede anche una diminuzione del coefficiente di resistenza.

Struttura	Modello	Analisi	$\alpha = 1^\circ$	$\alpha = 2^\circ$	$\alpha = 3^\circ$	$\alpha = 4^\circ$
Rigida			0.0860	0.1721	0.2611	0.3831
Deformabile	EBBM	Lineare	0.0804	0.1692	0.2666	0.3960
		Non lineare	0.0804	0.1691	0.2662	0.3939
	TE4	Lineare	0.1026	0.2159	0.3333	0.4302
		Non lineare	0.1023	0.2135	0.3298	0.4295

**Tabella 5.37:** Effetto dell'angolo d'incidenza  $\alpha$  sul  $C_L$  di una struttura deformabile per diverse teorie cinematiche. Confronto analisi Lineare e Non lineare.  $V = 50$  m/s. Ala rettangolare isotropa. Mesh strutturale 20 B4.

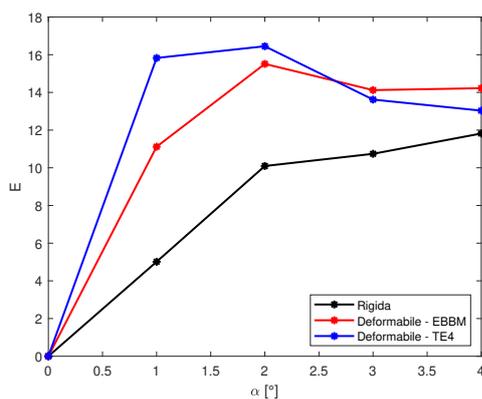
Struttura	Modello	Analisi	$\alpha = 1^\circ$	$\alpha = 2^\circ$	$\alpha = 3^\circ$	$\alpha = 4^\circ$
Rigida			0.0171	0.0170	0.0243	0.0324
Deformabile	EBBM	Lineare	0.0072	0.0109	0.0189	0.0278
		Non lineare	0.0072	0.0109	0.0188	0.0277
	TE4	Lineare	0.0065	0.0131	0.0246	0.0330
		Non lineare	0.0065	0.0130	0.0241	0.0331

**Tabella 5.38:** Effetto dell'angolo d'incidenza  $\alpha$  sul  $C_D$  di una struttura deformabile per diverse teorie cinematiche. Confronto analisi Lineare e Non lineare.  $V = 50$  m/s. Ala rettangolare isotropa. Mesh strutturale 20 B4.



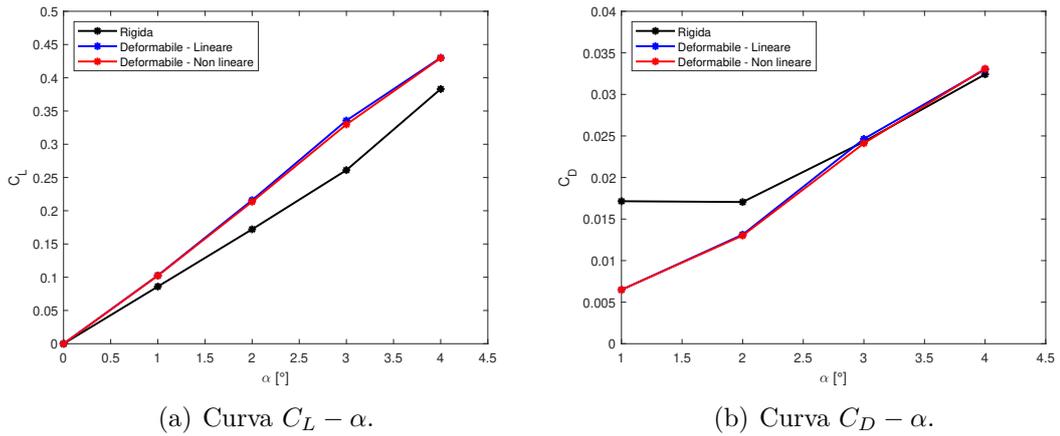
**Figura 5.37:** Effetto della deformabilità della struttura e della teoria cinematica sui coefficienti aerodinamici per diversi angoli d'incidenza  $\alpha$ . Analisi Lineare.  $V = 50$  m/s. Ala rettangolare isotropa. Mesh strutturale 20 B4.

Il modello EBBM che non prevede rotazioni della sezione fornisce valori di  $C_L$  molto simili a quelli della struttura indeformata. In Figura 5.38 viene mostrato l'effetto della deformabilità della struttura sull'efficienza aerodinamica,  $E = C_L/C_D$ . Si può notare che una struttura deformata sotto l'effetto dei carichi aerodinamici può presentare dei benefici in termini di efficienza.  $E$  è un importante parametro di progetto per l'ala e il velivolo completo, e ha una notevole influenza sulle prestazioni, tra cui l'autonomia.

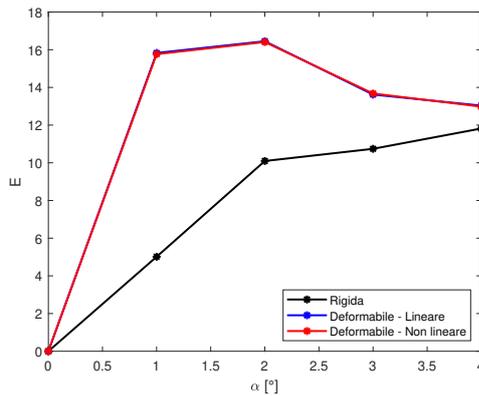


**Figura 5.38:** Effetto della deformabilità della struttura e della teoria cinematica sull'efficienza aerodinamica  $E$  per diversi angoli d'incidenza  $\alpha$ . Analisi Lineare.  $V = 50$  m/s. Ala rettangolare isotropa. Mesh strutturale 20 B4.

Questi risultati confermano l'interconnessione tra le diverse discipline del settore aeronautico e la necessità di studiare i fenomeni d'interazione fluido-struttura in ambito progettuale. In Figura 5.39 sono mostrate le curve  $C_L - \alpha$  e  $C_D - \alpha$  ottenute con il modello TE4 per il caso lineare e quello non lineare. Nel caso di piccoli angoli d'incidenza  $\alpha$  e velocità  $V = 50$  m/s, non state evidenziate differenze rilevanti per i due modelli nei coefficienti aerodinamici. La stessa conclusione è valida per l'efficienza aerodinamica, mostrata in Fig.5.40.



**Figura 5.39:** Effetto della deformabilità della struttura sui coefficienti aerodinamici per diversi angoli d'incidenza  $\alpha$ . Confronto analisi Lineare e Non lineare.  $V = 50$  m/s. Ala rettangolare isotropa. Modello strutturale TE4. Mesh strutturale 20 B4.

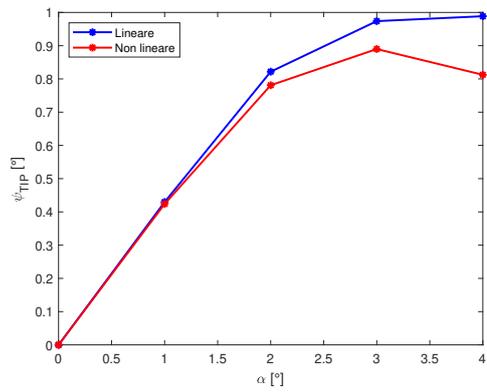


**Figura 5.40:** Effetto della deformabilità della struttura sull'efficienza aerodinamica  $E$  per diversi angoli d'incidenza  $\alpha$ . Confronto analisi Lineare e Non lineare.  $V = 50$  m/s. Ala rettangolare isotropa. Mesh strutturale 20 B4.

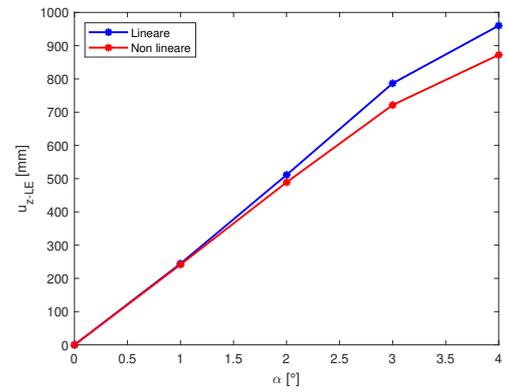
In Tabella 5.39 vengono confrontati gli spostamenti verticali al Leading Edge del tip  $u_{z-LE}$  e le rotazioni della sezione al tip  $\psi_{TIP}$  per i diversi modelli strutturali. Si può osservare che il modello trave classico di Eulero-Bernoulli non rileva alcuna rotazione della sezione. In generale, al crescere dell'angolo d'incidenza aumentano gli spostamenti verticali al tip. In Figura 5.41 viene mostrato come per il modello TE4 il campo di spostamenti della struttura presenta notevoli differenze tra modello lineare e non lineare. In particolare, il modello lineare sovrastima sia gli spostamenti che la rotazione della sezione. Da queste analisi si evince che nel caso di grandi spostamenti e rotazioni è necessario considerare un modello non lineare per descrivere accuratamente il campo di spostamenti della struttura. Nelle analisi future, potrà essere interessante indagare le diverse previsioni dei modelli nella sezione d'estremità alare.

$\alpha$ [°]	Modello	Analisi	$u_{z-LE}$ [mm]	$u_{z-TE}$ [mm]	$\psi_{TIP}$ [°]
1	EBBM	Lineare	182.904	182.904	0.0000
		Non lineare	182.305	182.305	0.0000
	TE4	Lineare	244.302	236.802	0.4297
		Non lineare	241.582	234.185	0.4238
2	EBBM	Lineare	381.020	381.020	0.0000
		Non lineare	375.699	375.698	0.0000
	TE4	Lineare	511.404	497.060	0.8218
		Non lineare	489.138	475.506	0.7810
3	EBBM	Lineare	598.103	598.103	0.0000
		Non lineare	578.154	578.154	0.0000
	TE4	Lineare	786.761	769.761	0.9739
		Non lineare	721.498	705.965	0.8899
4	EBBM	Lineare	875.410	875.410	0.0000
		Non lineare	826.168	826.168	0.0000
	TE4	Lineare	960.338	943.081	0.9886
		Non lineare	872.354	858.175	0.8124

**Tabella 5.39:** Effetto dell'angolo d'incidenza  $\alpha$  sullo spostamento verticale al Leading Edge del tip  $u_{z-LE}$  [mm] e sulla rotazione della sezione al tip  $\psi_{TIP}$  per diverse teorie cinematiche. Confronto analisi Lineare e Non lineare.  $V = 50$  m/s. Ala rettangolare isotropa. Mesh strutturale 20 B4.



(a) Rotazione della sezione del tip



(b) Spostamento verticale al Leading Edge del tip

**Figura 5.41:** Effetto dell'angolo d'incidenza  $\alpha$  sulla rotazione della sezione al tip  $\psi_{TIP}$  e sullo spostamento verticale al Leading Edge del tip  $u_{z-LE}$ . Confronto tra analisi Lineare e Non lineare.  $V = 50$  m/s. Ala rettangolare isotropa. Modello TE4. Mesh strutturale 20 B4.

## Capitolo 6

# Conclusioni

Lo scopo di questa tesi è dimostrare la versatilità e l'affidabilità del framework computazionale impiegato per la previsione del comportamento aeroelastico di strutture aeronautiche. La formulazione aeroelastica si basa su modelli aerodinamici accurati, ottenuti tramite la Computational Fluid Dynamics (CFD), e su modelli strutturali di ordine elevato. Le analisi strutturali sono state condotte mediante un codice che implementa la Carrera Unified Formulation (CUF), combinata con il Finite Element Method (FEM). L'algoritmo d'interazione fluido-struttura che consente il trasferimento dei carichi aerodinamici e degli spostamenti strutturali tra diverse griglie computazionali è sviluppato in linguaggio Python e si basa sul metodo Infinite Plate Spline (IPS). La CUF ha permesso di generare agevolmente modelli strutturali raffinati 1D e 2D di ordine diverso. Come funzioni di espansione per la sezione trasversale della trave o per lo spessore della piastra, sono stati adottati sia polinomi di Taylor che polinomi interpolanti di Lagrange. La prima parte di questo lavoro di tesi è dedicata alla validazione dei modelli strutturali di ordine elevato mediante analisi statiche, sia lineari che non lineari, e analisi dinamiche. I risultati ottenuti in questa fase hanno evidenziato la capacità dei modelli raffinati 1D e 2D di raggiungere livelli di accuratezza comparabili a quelli dei modelli 3D, con una significativa riduzione del costo computazionale. La seconda parte del lavoro si concentra sulla validazione del software open-source SU2, impiegato per le analisi CFD. Dopo aver condotto analisi di convergenza sui coefficienti aerodinamici, variando le dimensioni del dominio di calcolo e il raffinamento della griglia computazionale nelle vicinanze della parete, sono state costruite le curve  $C_L - \alpha$  e  $C_D - \alpha$  per una lamina piana a basso allungamento immersa in un flusso a basso numero di Reynolds. I risultati ottenuti sono stati confrontati con quelli presenti in letteratura e hanno evidenziato la capacità del software SU2 di descrivere con accuratezza campi di moto caratterizzati da una forte tridimensionalità del flusso e dalla presenza di fenomeni non lineari, come l'attrito viscoso e la turbolenza. Il lavoro prosegue con le analisi aeroelastiche di strutture aeronautiche, effettuate nell'ipotesi di piccole

deformazioni della struttura. Sono state studiate configurazioni di superfici alari dritte e con angoli di freccia, sia nel caso di materiale isotropo che composito. I risultati ottenuti tramite modelli strutturali 1D e 2D raffinati sono stati validati confrontandoli con quelli presenti in letteratura o con i risultati ottenuti mediante l'uso del Vortex Lattice Method (VLM). Le analisi condotte hanno confermato la necessità di adottare un modello strutturale di ordine elevato per descrivere accuratamente il comportamento torsionale della struttura. Inoltre, la risoluzione diretta delle equazioni di Navier-Stokes mediante un codice CFD garantisce una maggiore accuratezza rispetto all'uso di un metodo classico basato sulla teoria del fluido potenziale, come il VLM. Le valutazioni effettuate sull'effetto combinato della freccia alare e dell'angolo di laminazione sul comportamento aeroelastico della struttura, hanno evidenziato la versatilità, l'affidabilità e il basso costo computazionale del modello aeroelastico proposto. Questi aspetti rendono il framework uno strumento efficace per la progettazione preliminare di strutture portanti aeronautiche. La parte conclusiva del lavoro riguarda le analisi aeroelastiche effettuate per regimi di velocità che comportano grandi deformazioni della struttura alare. Sono state eseguite analisi strutturali non lineari utilizzando il metodo Full Newton-Raphson a controllo di carico. I risultati ottenuti hanno evidenziato la necessità di utilizzare un modello non lineare per descrivere accuratamente il campo di spostamenti in presenza di non linearità geometrica. Sebbene il costo computazionale delle analisi non lineari sia maggiore rispetto a quello delle analisi lineari, questo rimane contenuto rispetto a quello delle simulazioni CFD, grazie all'uso di modelli strutturali raffinati che garantiscono una buona accuratezza con un numero limitato di gradi di libertà. Le ultime analisi condotte sono state dedicate allo studio dell'effetto della deformabilità della struttura sui coefficienti aerodinamici  $C_L$  e  $C_D$ . I risultati ottenuti hanno evidenziato la forte interconnessione tra le diverse discipline del settore aeronautico e hanno sottolineato l'importanza di studiare i fenomeni aeroelastici, non solo per garantire il rispetto dei requisiti strutturali, ma anche per valutare più accuratamente le prestazioni del velivolo. Questa tesi ha dimostrato che la formulazione aeroelastica proposta fornisce risultati accurati per strutture alari con geometrie diverse, sia in materiale isotropo che composito, anche in presenza di non linearità geometrica, mantenendo un costo computazionale contenuto. Tutte le analisi sono state condotte in regime subsonico stazionario. Tra i possibili sviluppi futuri, vi è la validazione del framework computazionale in regime transonico, dove emergono fenomeni aerodinamici non lineari legati alla compressibilità del fluido. Un ulteriore sviluppo potrebbe riguardare l'estensione del modello all'analisi di fenomeni dinamici, come il flutter e il buffeting.

# Appendice A

## Componenti del nucleo fondamentale

Le nove componenti del nucleo fondamentale della matrice di rigidità sono definite come segue:

$$\begin{aligned} K_{xx}^{ij\tau s} &= \tilde{C}_{22} \int_{\Omega} F_{\tau,x} F_{s,x} d\Omega \int_l N_i N_j dy + \tilde{C}_{66} \int_{\Omega} F_{\tau} F_s d\Omega \int_l N_{i,y} N_{j,y} dy + \\ &\tilde{C}_{44} \int_{\Omega} F_{\tau,z} F_{s,z} d\Omega \int_l N_i N_j dy + \tilde{C}_{26} \int_{\Omega} F_{\tau,x} F_s d\Omega \int_l N_i N_{j,y} dy + \\ &\tilde{C}_{26} \int_{\Omega} F_{\tau} F_{s,x} d\Omega \int_l N_{i,y} N_j dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{xy}^{ij\tau s} &= \tilde{C}_{66} \int_{\Omega} F_{\tau} F_{s,x} d\Omega \int_l N_{i,y} N_j dy + \tilde{C}_{45} \int_{\Omega} F_{\tau,z} F_{s,z} d\Omega \int_l N_i N_j dy + \\ &\tilde{C}_{23} \int_{\Omega} F_{\tau,x} F_s d\Omega \int_l N_i N_{j,y} dy + \tilde{C}_{36} \int_{\Omega} F_{\tau} F_s d\Omega \int_l N_{i,y} N_{j,y} dy + \\ &\tilde{C}_{26} \int_{\Omega} F_{\tau,x} F_{s,x} d\Omega \int_l N_i N_j dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{xz}^{ij\tau s} &= \tilde{C}_{45} \int_{\Omega} F_{\tau,z} F_s d\Omega \int_l N_i N_{j,y} dy + \tilde{C}_{12} \int_{\Omega} F_{\tau,x} F_{s,z} d\Omega \int_l N_i N_j dy + \\ &\tilde{C}_{16} \int_{\Omega} F_{\tau} F_{s,z} d\Omega \int_l N_{i,y} N_j dy + \tilde{C}_{44} \int_{\Omega} F_{\tau,z} F_{s,z} d\Omega \int_l N_i N_j dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{yx}^{ij\tau s} &= \tilde{C}_{66} \int_{\Omega} F_{\tau,x} F_s d\Omega \int_l N_i N_{j,y} dy + \tilde{C}_{45} \int_{\Omega} F_{\tau,z} F_{s,z} d\Omega \int_l N_i N_j dy + \\ &\tilde{C}_{23} \int_{\Omega} F_{\tau} F_{s,x} d\Omega \int_l N_{i,y} N_j dy + \tilde{C}_{36} \int_{\Omega} F_{\tau} F_s d\Omega \int_l N_{i,y} N_{j,y} dy + \\ &\tilde{C}_{26} \int_{\Omega} F_{\tau,x} F_{s,x} d\Omega \int_l N_i N_j dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{yy}^{ij\tau s} &= \tilde{C}_{66} \int_{\Omega} F_{\tau,x} F_{s,x} d\Omega \int_l N_i N_j dy + \tilde{C}_{36} \int_{\Omega} F_{\tau,x} F_s d\Omega \int_l N_i N_{j,y} dy + \\
 &\quad \tilde{C}_{36} \int_{\Omega} F_{\tau} F_{s,x} d\Omega \int_l N_{i,y} N_j dy + \tilde{C}_{55} \int_{\Omega} F_{\tau,z} F_{s,z} d\Omega \int_l N_i N_j dy + \\
 &\quad \tilde{C}_{33} \int_{\Omega} F_{\tau} F_s d\Omega \int_l N_{i,y} N_{j,y} dy
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{yz}^{ij\tau s} &= \tilde{C}_{45} \int_{\Omega} F_{\tau,z} F_{s,x} d\Omega \int_l N_i N_j dy + \tilde{C}_{55} \int_{\Omega} F_{\tau,z} F_s d\Omega \int_l N_i N_{j,y} dy + \\
 &\quad \tilde{C}_{13} \int_{\Omega} F_{\tau} F_{s,z} d\Omega \int_l N_{i,y} N_j dy + \tilde{C}_{16} \int_{\Omega} F_{\tau,x} F_{s,z} d\Omega \int_l N_i N_j dy
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{zx}^{ij\tau s} &= \tilde{C}_{45} \int_{\Omega} F_{\tau} F_{s,z} d\Omega \int_l N_{i,y} N_j dy + \tilde{C}_{12} \int_{\Omega} F_{\tau,z} F_{s,x} d\Omega \int_l N_i N_j dy + \\
 &\quad \tilde{C}_{16} \int_{\Omega} F_{\tau,z} F_s d\Omega \int_l N_i N_{j,y} dy + \tilde{C}_{44} \int_{\Omega} F_{\tau,x} F_{s,z} d\Omega \int_l N_i N_j dy
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{zy}^{ij\tau s} &= \tilde{C}_{45} \int_{\Omega} F_{\tau,x} F_{s,z} d\Omega \int_l N_i N_j dy + \tilde{C}_{55} \int_{\Omega} F_{\tau} F_{s,z} d\Omega \int_l N_{i,y} N_j dy + \\
 &\quad \tilde{C}_{13} \int_{\Omega} F_{\tau,z} F_s d\Omega \int_l N_i N_{j,y} dy + \tilde{C}_{16} \int_{\Omega} F_{\tau,z} F_{s,x} d\Omega \int_l N_i N_j dy
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{zz}^{ij\tau s} &= \tilde{C}_{55} \int_{\Omega} F_{\tau} F_s d\Omega \int_l N_{i,y} N_{j,y} dy + \tilde{C}_{11} \int_{\Omega} F_{\tau,z} F_{s,z} d\Omega \int_l N_i N_j dy + \\
 &\quad \tilde{C}_{45} \int_{\Omega} F_{\tau} F_{s,x} d\Omega \int_l N_{i,y} N_j dy + \tilde{C}_{45} \int_{\Omega} F_{\tau,x} F_s d\Omega \int_l N_i N_{j,y} dy + \\
 &\quad \tilde{C}_{44} \int_{\Omega} F_{\tau,x} F_{s,x} d\Omega \int_l N_i N_j dy
 \end{aligned}$$

# Bibliografia

- [1] A. R. Collar. «The expanding domain of aeroelasticity». In: *The Aeronautical Journal* 50 (1946), pp. 613–636 (cit. a p. 1).
- [2] M. Santori. «Analisi aeroelastiche di strutture di velivoli utilizzando teorie strutturali avanzate e DLM». Tesi di Laurea Magistrale. Politecnico di Torino, 2023 (cit. a p. 1).
- [3] G. A. Pierce D. H. Hodges. *Introduction to Structural Dynamics and Aeroelasticity*. 32 Avenue of the Americas, New York, NY: Cambridge University Press, 2011 (cit. alle pp. 2, 54).
- [4] Y.C. Fung. *An Introduction to the Theory of Aeroelasticity*. Dover Publications Inc., 2008 (cit. a p. 3).
- [5] M. J. Patil D. H. Hodges C. E. S. Cesnik. «Limit-Cycle oscillations in high-aspect ratio wings». In: *Journal of Fluids and Structures* 15 (2001), pp. 107–132 (cit. a p. 4).
- [6] L. Liu T. Kim K. L. Lai. «Efficient Analysis of HALE Aircraft Structure for Static Aeroelastic Behavior». In: *Journal of Aerospace Engineering* 30 (2016) (cit. a p. 4).
- [7] S. Shafaghat M. A. Noorian S. Irani. «Nonlinear aeroelastic analysis of a HALE aircraft with flexible components». In: *Aerospace Science and Technology* 127 (2022) (cit. a p. 4).
- [8] R. Jones. *Mechanics Of Composite Materials*. Taylor & Francis, 1998 (cit. alle pp. 4, 9).
- [9] M. T. Bordogna P. Lancelot D. Bettebghor R. De Breuker. «Static and dynamic aeroelastic tailoring with composite blending and manoeuvre load alleviation». In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 61 (2020), pp. 2193–2216 (cit. a p. 4).
- [10] N. Papez R. Dallaev S. Talu J. Kastyl. «Overview of the Current State of Gallium Arsenide-Based Solar Cells». In: *Materials* 14 (2021) (cit. a p. 4).
- [11] L. Demasi. *Introduction to Unsteady Aerodynamics and Dynamic Aeroelasticity*. Springer, 2024 (cit. a p. 5).

- 
- [12] R. L. Harder R. N. Desmarais. «Interpolation using surface splines». In: *Journal of Aircraft* 9 (1972), pp. 189–191 (cit. alle pp. 5, 40).
- [13] G. Quaranta P. Masarati P. Mantegazza. «A conservative mesh-free approach for fluid-structure interface problems». In: *Int. Conf. on Computational Methods for Coupled Problems in Science and Engineering. COUPLED PROBLEMS* (2005) (cit. alle pp. 5, 6).
- [14] A. Varello L. Demasi E. Carrera G. Giunta. «An Improved Beam Formulation for Aeroelastic Applications». In: *51st AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference* 18th (2010) (cit. a p. 5).
- [15] B. Zhang K. Chen L. Zu. «Aeroelastic Analysis of Wing Structures Using Equivalent Plate Models». In: *AIAA Journal* 46 (2008), pp. 1216–1223 (cit. a p. 5).
- [16] E. Onate. *Structural Analysis with the Finite Element Method: Linear Statics, Volume 1*. Springer, 2009 (cit. alle pp. 5, 11).
- [17] L. Euler. *De Curvis Elasticis*. Bousquet, 1744 (cit. a p. 5).
- [18] S.P. Timoshenko. «On the corrections for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars». In: *Philosophical Magazine* 41 (1921), pp. 744–746 (cit. a p. 5).
- [19] E. Carrera M. Cinefra M. Petrolo E. Zappino. *Finite Element Analysis of Structures through Unified Formulation*. John Wiley & Sons Ltd, 2014 (cit. alle pp. 5, 9).
- [20] E. Carrera. «Theories and Finite Elements for Multilayered, Anisotropic, Composite Plates and Shells». In: *Archives of Computational Methods in Engineering* 9 (2002), pp. 87–140 (cit. a p. 5).
- [21] E. Carrera. «Theories and Finite Elements for Multilayered Plates and Shells: A Unified Compact Formulation with Numerical Assessment and Benchmarking». In: *Archives of Computational Methods in Engineering* 10 (2003), pp. 215–296 (cit. a p. 5).
- [22] E. Carrera G. Giunta. «Refined Beam Theories based on a Unified Formulation». In: *International Journal of Applied Mechanics* 2 (2010), pp. 117–143 (cit. a p. 5).
- [23] E. Carrera G. Giunta P. Nali M. Petrolo. «Refined beam elements with arbitrary cross-section geometries». In: *Computer and Structures* 88 (2010), pp. 283–293 (cit. alle pp. 5, 11, 49).
- [24] E. Carrera M. Petrolo E. Zappino. «Performance of CUF Approach to Analyze the Structural Behavior of Slender Bodies». In: *Journal Of Structural Engineering* 138 (2012), pp. 285–297 (cit. a p. 5).

- 
- [25] E. Carrera e M. Petrolo. «Refined beam elements with only displacement variables and plate/shell capabilities». In: 47 (1999), pp. 537–556 (cit. alle pp. 5, 10, 49, 50, 52–54).
- [26] P. Nali E. Carrera M. Petrolo. «Unified formulation applied to free vibrations finite element analysis of beams with arbitrary section». In: *Shock and Vibration* 18 (2011), pp. 485–502 (cit. alle pp. 5, 54).
- [27] E. Carrera M. Petrolo A. Varello. «Advanced Beam Formulations for Free-Vibration Analysis of Conventional and Joined Wings». In: *Journal Of Aerospace Engineering* 25 (2012), pp. 282–293 (cit. a p. 5).
- [28] E. Carrera A. Varello L. Demasi. «A refined structural model for static aeroelastic response and divergence of metallic and composite wings». In: *CEAS Aeronaut J* 4 (2013), pp. 175–189 (cit. alle pp. 5, 71, 74, 80, 81).
- [29] A. Varello E. Carrera L. Demasi. «Vortex Lattice Method Coupled with Advanced One-Dimensional Structural Models». In: *ASD Journal* 2 (2011), pp. 53–78 (cit. a p. 6).
- [30] A. Varello A. Lamberti E. Carrera. «Static Aeroelastic Response of Wing-Structures Accounting for In-Plane Cross-Section Deformation». In: *International Journal of Aeronautical & Space Science* 14 (2013), pp. 310–323 (cit. a p. 6).
- [31] M. Petrolo E. Carrera L. Demasi. «An advanced unified aeroelastic formulation based on 1d higher-order finite elements». In: *The International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics* (2011) (cit. a p. 6).
- [32] M. Petrolo. «Flutter analysis of composite lifting surfaces by the 1D Carrera Unified Formulation and the doublet lattice method». In: *Composite Structures* 95 (2013), pp. 539–546 (cit. a p. 6).
- [33] J. Katz A. Plotkin. *Low-Speed Aerodynamics, 2nd edition*. Cambridge University Press, 2001 (cit. a p. 6).
- [34] M. Grifò. «A computational framework for aeroelastic tailoring based on the use of CUF and high-fidelity CFD». Tesi di Dottorato. Università degli Studi di Palermo, 2023 (cit. a p. 6).
- [35] T. D. Economon F. Palacios S. R. Copeland T. W. Lukaczyk J.J. Alonso. «SU2: An Open-Source Suite for Multiphysics Simulation and Design». In: *AIAA Journal* 54 (2016) (cit. a p. 6).
- [36] M. Grifò A. Da Ronch I. Benedetti. «A computational aeroelastic framework based on high-order structural models and high-fidelity aerodynamics». In: *Aerospace Science and Technology* 132 (2023) (cit. alle pp. 6, 70–72, 74, 80, 81).

- 
- [37] M. Grifò V. Gulizzi A. Milazzo A. Da Ronch I. Benedetti. «High-fidelity aeroelastic transonic analysis using higher-order structural models». In: *Composites Structures* 321 (2023) (cit. a p. 6).
- [38] R. Ricci. «Analisi aeroelastica mediante teorie strutturali avanzate e CFD». Tesi di Laurea Magistrale. Politecnico di Torino, 2024 (cit. alle pp. 6, 36, 46, 58, 61).
- [39] E. Carrera M. Petrolo. «On the Effectiveness of Higher-Order Terms in Refined Beam Theories». In: *Journal of Applied Mechanics* 78 (2011) (cit. a p. 10).
- [40] E. Carrera S. Brischetto. «Analysis of thickness locking in classical, refined and mixed multilayered plate theories». In: *Composite Structures* 82 (2008) (cit. a p. 11).
- [41] A. Sarobidy. «Dynamics of Rotors for isotropic and orthotropic structures». Tesi di Laurea Magistrale. Politecnico di Torino & INSA Lyon (cit. a p. 15).
- [42] M. Petrolo. «Notes on FEM for Aeroelasticity». In: *Slides del corso di Aeroelasticità* (2022) (cit. a p. 17).
- [43] A. Pagani E. Carrera. «Unified formulation of geometrically nonlinear refined beam theories». In: *Mechanics of Advanced Materials and Structures* 25 (2018), pp. 15–31 (cit. alle pp. 23, 26, 67).
- [44] J.F. Wendt. *Computational Fluid Dynamics An Introduction*. Springer, 2009 (cit. alle pp. 28, 35).
- [45] O. Reynolds. «IV. On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion». In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 186 (1895), pp. 124–164 (cit. a p. 33).
- [46] P.R Spalart S.R. Allmaras. «A one-equation turbulence model for aerodynamic flows». In: *30th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit* (1992) (cit. a p. 34).
- [47] F. Goetten D.F. Finger M. Marino C. Bill. «A review of guidelines and best practices for subsonic aerodynamic simulations using RANS CFD». In: *Asia-Pacific International Symposium on Aerospace Technology* (2019) (cit. alle pp. 38, 39).
- [48] R.P. Dwight. «Robust Mesh Deformation using the Linear Elasticity Equations». In: *Computational Fluid Dynamics 2006* (2009), pp. 401–406 (cit. a p. 47).
- [49] M. Petrolo. «Advanced aeroelastic models for the analysis of lifting surfaces made of composite materials». Tesi di Dottorato. Politecnico di Torino, 2011 (cit. a p. 50).

- [50] E. Carrera M. Dan A. Pagani. «Free vibration analysis of simply supported beams with solid and thin-walled cross-sections using higher-order theories based on displacement variables». In: *Thin-Walled Structures* 98 (2016), pp. 478–495 (cit. a p. 57).
- [51] M. Orlandi. «Tailoring aeroelastico di strutture composite con angolo di laminazione variabile». Tesi di Laurea Magistrale. Politecnico di Torino, 2022 (cit. alle pp. 58, 59, 61).
- [52] E. Zappino E. Carrera M. Filippi. «Laminated beam analysis by polynomial, trigonometric, exponential and zig-zag theories». In: *European Journal of Mechanics A/Solids* 41 (2013), pp. 58–69 (cit. a p. 63).
- [53] E. Carrera e E. Zappino G. Li. «Finite element models with node-dependent kinematics for the analysis of composite beam structures». In: *Composites. Part B, Engineering* 132 (2018), pp. 35–48 (cit. alle pp. 63–65).
- [54] E. Zappino G. Li A. Pagani E. Carrera. «Global-local analysis of laminated plates by node-dependent kinematic finite elements with variable ESL/LW capabilities». In: *Composites Structures* 172 (2017), pp. 1–14 (cit. alle pp. 63–65).
- [55] E. Carrera A. Pagani S. Valvano. «Multilayered plate elements accounting for refined theories and node-dependent kinematics». In: *Composites Part B* 114 (2017), pp. 189–210 (cit. alle pp. 63, 64).
- [56] M. Shields K. Mohseni. «Effects of Sideslip on the Aerodynamics of Low-Aspect-Ratio Low-Reynolds-Number Wings». In: *AIAA Journal* 50 (2012) (cit. a p. 68).
- [57] A. Pelletier T. Mueller. «Low Reynolds Number Aerodynamics of Low-Aspect-Ratio, Thin/Flat/Cambered-Plate Wings». In: *Journal of Aircraft* 37 (2000) (cit. a p. 68).
- [58] K. Malik W. Asrar E. Sulaeman. «Low Reynolds Number Numerical Simulation of the Aerodynamic Coefficients of a 3D Wing». In: *International Journal of Aviation, Aeronautics and Aerospace* 5 (2018) (cit. a p. 68).