

POLITECNICO DI TORINO

Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale



Politecnico di Torino

Tesi di Laurea Magistrale

Analisi termomeccanica di rotori mediante elementi finiti

Relatori

Prof. Matteo FILIPPI

Prof. Marco PETROLO

Ing. Rodolfo AZZARA

Candidato

Mauro CAPUTI - 310571

Anno Accademico 2024-2025

Sommario

Questo lavoro di tesi si concentra sull'analisi del comportamento dinamico e termico di strutture rotanti mediante il metodo numerico Carrera Unified Formulation (CUF), implementato nel codice MUL2. L'obiettivo principale è valutare la risposta vibratoria e gli effetti dei carichi termici su diverse configurazioni strutturali, confrontando i risultati con quelli ottenuti tramite ANSYS APDL, ANSYS Mechanical e soluzioni analitiche. Lo studio ha riguardato alberi rotanti modellati sia come travi che come cilindri cavi, nonché pale rotanti con diversi profili aerodinamici e sezioni trasversali. È stata analizzata l'influenza della forza centrifuga e delle sollecitazioni termiche sulle proprietà dinamiche del sistema, con particolare attenzione alla variazione delle frequenze naturali, ai diagrammi di Campbell e ai fenomeni di instabilità. Inoltre, sono state studiate diverse configurazioni di vincolo per valutarne l'impatto sulla risposta dinamica complessiva. L'analisi di strutture rotanti richiede modelli numerici avanzati in grado di garantire un buon compromesso tra accuratezza e costi computazionali. I metodi classici, come le formulazioni basate su travi o piastre, spesso risultano insufficienti per cogliere tutti gli effetti tridimensionali, mentre modelli completamente 3D possono essere computazionalmente onerosi. In questo contesto, la CUF si pone come una soluzione efficace, offrendo un approccio unificato che integra diverse teorie e modelli matematici in un unico framework. Questo metodo consente di ottenere risultati precisi con un costo computazionale ridotto, adattandosi sia ad analisi bidimensionali che tridimensionali. Un'attenzione particolare è stata dedicata alle strutture in materiale composito, ampiamente utilizzate nei settori aerospaziale e industriale per le loro elevate prestazioni meccaniche. In questa fase dello studio, è stata analizzata l'influenza di parametri come la sequenza di impilamento e il numero di strati sulla risposta dinamica e termica di travi e pale rotanti. I risultati ottenuti confermano l'efficacia del metodo CUF nell'analisi di sistemi rotanti complessi e dimostrano l'importanza di considerare congiuntamente gli effetti dinamici e termici nella progettazione di strutture ad alte prestazioni. Il confronto con i risultati ottenuti tramite ANSYS ha permesso di validare le simulazioni e di fornire strumenti utili per la modellazione e l'ottimizzazione di componenti rotanti in ambito industriale e aerospaziale.

Ringraziamenti

Alla mia famiglia.

Indice

Elenco delle tabelle	IX
Elenco delle figure	XIII
Acronimi	XX
1 Introduzione	1
1.1 Panoramica generale dei rotori	1
1.2 Evoluzione storica dei modelli matematici	3
1.2.1 Il modello di Rankine	3
1.2.2 Il modello di Jeffcott-Laval	4
1.2.3 Il modello di Lalanne-Ferraris	5
1.2.4 Modelli avanzati	6
1.3 Metodi numerici nel campo dei rotori	8
1.3.1 Sviluppo dei Metodi Computazionali	8
1.3.2 Applicazioni del FEM	9
1.3.3 Riduzione Computazionale	11
2 Dinamica dei Rotori	14
2.1 Introduzione alla dinamica dei rotori	14
2.1.1 Disco rigido	15
2.1.2 Albero Flessibile	15
2.1.3 Elementi di Smorzamento: Cuscinetti e Sigilli	15
2.2 Modello del Rotore di Jeffcott	16
2.2.1 Approccio dei coefficienti di influenza	20
2.2.2 Effetto dei supporti	22
2.2.3 Effetto del momento di inerzia	25
2.2.4 Effetto giroscopico	28
2.2.5 Diagrammi di Campbell	32

3	Modello CUF	34
3.1	Nozioni preliminari	34
3.2	Definizione modello CUF	37
3.2.1	Funzioni di espansione	38
3.2.2	TE	38
3.2.3	LE	41
3.3	FEM	44
3.3.1	1D CUF-FEM: Modello trave	44
3.3.2	2D CUF-FEM: Modello piastra	46
3.4	Modello CUF applicato ai rotori	47
3.4.1	Principio di Hamilton	47
3.4.2	Energia Potenziale e Matrice di Rigidezza	48
3.4.3	Energia Cinetica	50
3.4.4	Effetti Centrifughi	53
3.4.5	Rigidità e smorzamento dovuti ai supporti	53
3.4.6	Equazione del moto	54
4	Risultati Numerici per strutture isotrope	57
4.1	Analisi Strutture Non Rotanti	57
4.1.1	Analisi Statica	58
4.1.2	Analisi delle vibrazioni libere	61
4.1.3	Variazione della sezione trasversale	64
4.2	Analisi Strutture Rotanti: Diagrammi di Campbell	68
4.2.1	Trave con sezione quadrata	70
4.2.2	Trave con sezione rettangolare	73
4.2.3	Strutture con sezioni cave	75
4.2.4	Strutture a disco	82
4.2.5	Rotore con pale dritte	89
4.2.6	Rotore con pale curve	95
4.2.7	Pannello curvo	106
4.2.8	Pala con profilo a ellisse	112
4.2.9	Pala con profilo NACA2401	115
4.3	Carichi termici	117
4.3.1	Trave a sbalzo	117
4.3.2	Trave doppiamente incastrata	119
4.3.3	Cilindro doppiamente incastrato	123
4.3.4	Pannello Curvo	126
4.3.5	Disco con spessore variabile	128
4.3.6	Rotore con pale curve	131

5	Risultati numerici per strutture in composito	135
5.1	Trave a sbalzo in materiale composito	135
5.2	Cilindro in materiale composito	140
5.3	Analisi termica nei casi compositi	143
6	Conclusioni	146
	Bibliography	150

Elenco delle tabelle

4.1	Proprietà della trave.	58
4.2	Confronto tra i risultati analitici e quelli ottenuti con la CUF per la deflessione trasversale u_z all'estremo libero della trave incastrata sotto carico uniforme.	59
4.3	Confronto tra frequenze naturali analitiche e numeriche per una trave a sbalzo.	63
4.4	Prime tre frequenze naturali analitiche e numeriche, e la deviazione della deformazione $ U_z $, per ciascuna forma di sezione trasversale.	67
4.5	Prime tre frequenze naturali e la deviazione della deformazione u_z , per ciascuna forma di sezione trasversale.	68
4.6	Analisi di convergenza cross-section: frequenze flessionali normalizzate rispetto a ω_0 dei primi 3 modi di vibrare, a seconda dei modelli di discretizzazione con ordini di raffinatezza differenti, ad una velocità di rotazione pari a $\Omega^* = 1$ (1497 rad/s); trave a sezione quadrata con $L = 10$ cm e $b = h = 1$ cm, con elementi $10 \times B4$ lungo l'asse longitudinale.	70
4.7	Proprietà della trave a sezione quadratica posta in rotazione.	71
4.8	Confronto tra frequenze naturali nel riferimento letterario [89] e risultati numerici in CUF adimensionati per una trave a sbalzo a sezione quadrata $L 9 \times B4$	71
4.9	Confronto tra frequenze naturali adimensionate del riferimento letterario [89] e i risultati numerici in CUF adimensionati per una trave a sbalzo a sezione rettangolare con $h = 0.1 b$	73
4.10	Confronto delle frequenze naturali ottenute mediante il modello CUF e il software ANSYS APDL. I risultati sono riportati per configurazioni con cilindri a parete spessa e sottile e travi a sezioni rettangolari spesse e sottili modellati tramite elementi 100 BEAM188 in Ansys.	77

4.11	Frequenze naturali ottenute mediante il modello CUF e il software ANSYS APDL al variare della lunghezza del cilindro a parete spessa ($t = 3$ mm).	80
4.12	Confronto freq.naturali con i DOF per il disco a spessore variabile. Disco in Ansys formato da 35596 elementi SOLID185.	88
4.13	Confronto delle frequenze naturali e dei gradi di libertà tra il modello CUF e ANSYS APLD, riportando errore relativo percentuale.	91
4.14	Confronto delle frequenze naturali e riduzione dei gradi di libertà (DOF) tra il modello CUF e ANSYS APDL, riportando l'errore relativo percentuale per il rotore a pale curve con angolo di curvatura $\theta = 13.5^\circ$.	96
4.15	Confronto delle frequenze naturali tra il modello CUF e ANSYS APLD, riportando errore relativo percentuale per il rotore a pale curve con $\theta = 33^\circ$.	101
4.16	Analisi di convergenza delle frequenze naturali al variare del modello utilizzato per la struttura shell $R_x = 10$ cm e $R_x = 40$ cm.	107
4.17	Valori numerici delle frequenze naturali delle piastre curve isotrope con CUF e ANSYS APDL. Modello CUF modellizzato con 8L16 x 10B4 elementi. Modello ANSYS APDL modellizzato con 2550 elementi SHELL181.	108
4.18	Confronto delle frequenze naturali di una pala con profilo ellittico isotropo in alluminio tra CUF e ANSYS Mechanical. Struttura modellizzata in ANSYS con 26306 nodi e 15027 elementi SOLID187.	113
4.19	Confronto delle frequenze naturali di una pala cava con profilo NACA2401 e di una pala cava con profilo a ellisse.	117
4.20	Variazione delle frequenze naturali al variare di ΔT per la trave a sbalzo con sezione quadrata.	118
4.21	Variazione delle frequenze naturali della trave a sbalzo a sezione rettangolare 1 cm x 0.5 cm nel modello CUF (L9 x 10 B4) al variare di ΔT .	118
4.22	Variazione delle frequenze naturali del cilindro con spessore di 3 mm al variare di ΔT .	119
4.23	Variazione delle frequenze naturali per la trave a sezione rettangolare 1cm x 0.5cm sottoposta ai diversi carichi termici. Risultati ottenuti tramite codice CUF modellizzando la trave tramite elementi: L9 x 10 B4.	120
4.24	Frequenze naturali per la trave a sezione rettangolare 1cm x 0.5cm doppiamente incastrata sottoposta ai diversi carichi termici. Confronto delle frequenze naturali ottenute tramite modello CUF e software Ansys APDL per diversi valori di ΔT . Trave modellata in Ansys APDL con 606 elemeneti BEAM188	121

4.25	Frequenze naturali al variare di ΔT per due diversi spessori del cilindro vincolato in configurazione incastro-incastro ottenute nel modello CUF.	123
4.26	Confronto delle frequenze naturali tra modello CUF e Ansys Mechanical (832 elementi SOLID186) del cilindro cavo a parete sottile vincolato ad entrambe le estremità per diversi valori di ΔT	125
4.27	Variazione delle frequenze naturali al variare di ΔT per shell isotropa con $R_x=40\text{cm}$ vincolata su un estremo ottenuto nel modello CUF.	126
4.28	Frequenze naturali in funzione di ΔT per la piastra curva isotropa con raggio di curvatura $R_x = 40 \text{ cm}$, vincolata su entrambi gli estremi in CUF.	127
4.29	Frequenze naturali al variare di ΔT per due diversi spessori del disco a spessore variabile ottenute nel modello CUF. Rispettivamente disco spesso con spessore da 5 mm a 2.5 mm e disco sottile con spessore da 2.5 mm a 1.0 mm.	129
4.30	Frequenze naturali e deviazioni percentuali al variare del carico termico applicato per il disco a spessore variabile da 5 mm a 2.5 mm. Il confronto evidenzia l'errore percentuale dei valori ottenuti in ANSYS APDL, con 35596 elementi SOLID185, e quelli ottenuti tramite il modello CUF.	130
4.31	Frequenze naturali al variare di ΔT per rotore con 4 pale curve con angolo di curvatura di 13° . Valori ricavati utilizzando modello CUF con elementi: 28 L16 \times 10 B2.	132
4.32	Frequenze naturali al variare di ΔT per rotore con 4 pale curve con angolo di curvatura di 33° . Valori ricavati utilizzando modello CUF con elementi: 28 L16 \times 10 B2.	133
4.33	Frequenze naturali e deviazioni percentuali al variare del carico termico applicato per il rotore con 4 pale con curvature di 33° . Confronto tra ANSYS APDL e modello CUF.	134
5.1	Proprietà meccaniche del materiale composito considerato per l'analisi della trave a sbalzo.(fibra di carbonio con matrice epossidica).	136
5.2	Frequenze naturali della trave a sbalzo a sezione rettangolare (1cm x 0.5cm) in materiale composito con diverse sequenze di fibre: confronto tra CUF e Ansys. Modello della trave in CUF realizzato con elementi 2/3 L9 x 10 B4. Modello in Ansys realizzato con elementi SOLID186.	137
5.3	Frequenze naturali della trave rettangolare a sezione cava (3cm x 1cm) in materiale composito per diverse configurazioni di stratificazione.	139

5.4	Frequenze naturali cilindro cavo per diverse sequenze di laminazione. Confronto con frequenze ricavate in Ansys Mechanical utilizzando una mesh di 4000 elementi SOLID185 per 2 strati e 6000 elementi SOLID185 per 3 strati.	141
5.5	Variazione delle frequenze naturali del cilindro, vincolato ad entrambe le estremità, in composito con diverse sequenze di laminazione al variare del carico termico applicato nel modello CUF (2/3 x 8 L16 & 10 B4).	144
5.6	Validazione dei valori ottenuti all'applicazione di un carico termico crescente tramite confronto tra il modello CUF (2/3 x 8 L16 & 10 B4) e il software Ansys Mechanical utilizzando 4000/6000 elementi SOLID185.	145

Elenco delle figure

1.1	Motore turbofan GEnx, utilizzato nei Boeing 747-8 e Boeing 787 Dreamliner. Rif. [2].	2
1.2	Schema del rotore di Jeffcott-Laval. Rif.[11]	4
2.1	Rotore di Jeffcott con la posizione del baricentro G rispetto alla posizione del centro del disco.	17
2.2	Rappresentazione schematica del fenomeno di precessione sincrona.	19
2.3	Configurazione analizzata del sistema rotante.	22
2.4	Modellazione dell'albero come trave, soggetto a una forza F applicata in mezzzeria, per l'analisi delle deformazioni trasversali.	22
2.5	Configurazione del rotore di Jeffcott con supporti elastici, che include l'effetto della rigidità dei cuscinetti.	24
2.6	Configurazione schematica di un rotore con disco a sbalzo.	25
2.7	Schema di un rotore a sbalzo con forza centrifuga e momento flettente.	26
2.8	Effetto del momento d'inerzia su un disco sottile.	27
2.9	Schema di un rotore rigido su supporti flessibili con rigidità k_1 e k_2 . Rif.[64]	28
2.10	Esempio di diagramma di Campbell per il forward e backward whirl. Whirl frequency in funzione della velocità angolare.	33
3.1	Sistema di riferimento della struttura.	35
3.2	Sistema di riferimento fisico e del materiale per un composito.	36
3.3	Elemento di lagrange L4 rappresentato nel sistema di coordinate fisiche (a) e nel sistema di coordinate naturali naturali (b).	42
3.4	Rappresentazione di un elemento lagrangiano L9 quadrilatero nel sistema di coordinate naturali (s, r)	42
3.5	Campo di spostamento in una trave con le teorie ESL e LW.	43
3.6	Rappresentazione di un modello strutturale 2D di una trave mediante la CUF.	45
3.7	Rappresentazione di un modello strutturale piastra mediante la CUF.	46

3.8	Rappresentazione dell'assemblaggio della matrice di rigidezza partendo dai nuclei fondamentali fino alla struttura globale.	50
4.1	Deformazione trasversale u_z della trave incastrata con carico distribuito uniforme, visualizzata in Paraview.	59
4.2	Analisi di convergenza statica CUF: spostamento dell'estremo libero rispetto all'asse z	60
4.3	Analisi dinamica CUF (L4 $10 \times B4$): modi di vibrare	63
4.4	Analisi di convergenza della prima frequenza naturale flessionale con elementi L9 ai nodi, al variare degli elementi trave lungo l'asse z	64
4.5	Analisi di convergenza per le prime tre frequenze naturali con numero variabile di elementi trave B2 lungo l'asse al variare della cross-section	65
4.6	Rappresentazione della cross-section con sezione a I-shape in Matlab. Modellizzata con 7 L4 elementi	66
4.7	Deflessione per la trave a sbalzo con cross-section a forma di I.	66
4.8	Deflessione per la trave a sbalzo con cross-section a O-shape.	67
4.9	Deflessione per la trave a sbalzo a sezione rettangolare	67
4.10	Diagramma di Campbell della trave a sbalzo a sezione quadrata modellizzata con elementi L9 & $10 \times B4$; variazione delle frequenze naturali adimensionalizzate al variare della velocità di rotazione attorno all'asse y ; confronto con i risultati teorici di Banerjee e Su [89] tramite DSM.	72
4.11	Rappresentazione della sezione rettangolare della trave a sbalzo analizzata.	73
4.12	Diagramma di Campbell della trave a sbalzo a sezione rettangolare $EI_{zz} = 0.01EI_{xx}$ modellizzata con elementi L9 & $10 \times B4$; variazione delle frequenze naturali adimensionalizzate al variare della velocità di rotazione attorno all'asse y longitudinale: confronto con i risultati teorici di Banerjee e Suu [89] tramite Dynamic Stiffness Method.	74
4.13	Mesh della sezione trasversale del cilindro con $t = 3$ mm realizzata in Matlab; rappresentazione elementi 8×1 L16.	76
4.14	Mesh della sezione trasversale della trave rettangolare cava con $t = 2$ mm realizzata in Matlab; rappresentazione elementi 14×1 L4.	76
4.15	Diagramma di Campbell per le travi a sbalzo con sezione cilindrica cava, a parete spessa ($t=3$ mm) e sottile ($t=0.2$ mm), modellizzate con elementi $8 \times L16$ & $10 \times B4$; variazione delle frequenze naturali al variare della velocità di rotazione attorno all'asse y longitudinale.	78
4.16	Diagramma di Campbell per le travi a sbalzo con sezione rettangolare cava, a parete spessa ($t=2$ mm) e sottile ($t=0.2$ mm), modellizzate con elementi $20 \times L4$ & $10 \times B4$; variazione delle frequenze naturali al variare della velocità di rotazione attorno all'asse y longitudinale.	79

4.17	Diagramma di Campbell per le travi a sbalzo di lunghezza $L = 5$ cm con sezione cilindrica cava a parete spessa ($t = 3$ mm), modellizzate con elementi $8 \times L16$ & $10 \times B4$; variazione delle frequenze naturali al variare della velocità di rotazione attorno all'asse y longitudinale.	81
4.18	Mesh del disco a spessore costante : (a) elemento $1 \times B3$ lungo l'asse y ; (b) cross-section: 2×16 di elementi L16. [91]	82
4.19	Mesh del disco MUL2 con elementi 2×16 L16. : punti della struttura e numerazione per la costruzione della matrice di connettività.	83
4.20	1° modo in Ansys Mechanical e Paraview del disco a spessore costante.	83
4.21	Confronto del 2° modo tra Ansys Mechanical e Paraview del disco a spessore costante.	84
4.22	Diagramma di Campbell per il disco a spessore costante: andamento delle prime dieci frequenze naturali al variare della velocità di rotazione attorno l'asse Y.	85
4.23	Disco a spessore variabile: mesh cross-section suddivisa in 4 sezioni con 8 elementi L16 per sezione.	86
4.24	Confronto del primo modo tra Ansys e Paraview per il disco a spessore variabile.	87
4.25	Confronto del secondo modo tra Ansys e Paraview per il disco a spessore variabile.	87
4.26	Diagramma di Campbell per il disco a spessore variabile: andamento delle prime dieci frequenze naturali al variare della velocità di rotazione asse Y.	88
4.27	Struttura del rotore con pale dritte radiali analizzato modellizzato in Ansys.	89
4.28	Visualizzazione del primo modo di vibrazione del rotore con pale rettangolari dritte.	90
4.29	Visualizzazione del modo di vibrare torsionale del rotore con pale rettangolari dritte.	90
4.30	Diagramma di Campbell del rotore con 16 pale dritte modellizzato in CUF con $128L9 \times 10B4$ elementi ; andamenti numerici delle frequenze naturali al variare della velocità di rotazione attorno all'asse y longitudinale.	92
4.31	Distribuzione delle sollecitazioni principali sulla struttura con sedici pale alla velocità critica di 550 rad/s in Ansys Mechanical con 11768 elementi 186SOLID.	93
4.32	Diagramma di Campbell del rotore con 16 pale dritte modellizzato in CUF con $128L9 \times 10B4$ elementi ; variazione delle frequenze naturali al variare della velocità di rotazione attorno all'asse y longitudinale fino a 550 rad/s, valore oltre il quale si va incontro a rottura delle pale.	94

4.33	Rappresentazione della geometria del rotore a pale curve: (a) modello FEM in Ansys APDL, (b) ricostruzione della sezione trasversale in Matlab.	95
4.34	Rappresentazione dell'angolo di curvatura ($\theta = 13.5^\circ$) della singola pala del considerato in Matlab.	96
4.35	Visualizzazione della deformazione totale associata all'ottavo modo di vibrare del rotore a quattro pale curve (Umbrella mode).	97
4.36	Visualizzazione della deformazione totale associata al 9° modo di vibrare del rotore con pale curve	97
4.37	Visualizzazione della deformazione totale associata al 15° modo di vibrare del rotore con pale curve	98
4.38	Diagramma di Campbell del rotore con 4 pale curve con angolo di curvatura $\theta = 13^\circ$, modellizzato in CUF con 28 L16 \times 10 B2 elementi ; andamenti numerici delle frequenze naturali al variare della velocità di rotazione attorno all'asse y longitudinale.	99
4.39	Modello FEM del rotore con pale altamente curve ($\theta = 33^\circ$) sviluppato in Ansys APDL.	100
4.40	Visualizzazione della deformazione totale associata al quinto modo di vibrare del rotore a quattro pale curve con angolo della curvatura di $\theta = 33^\circ$	101
4.41	Visualizzazione della deformazione totale associata al nono modo di vibrare del rotore a quattro pale curve con angolo della curvatura di $\theta = 33^\circ$	102
4.42	Visualizzazione della deformazione totale associata al quindicesimo modo di vibrare del rotore a quattro pale curve con angolo della curvatura di $\theta = 33^\circ$	102
4.43	Diagramma di Campbell del rotore con 4 pale curve con angolo di curvatura $\theta = 33^\circ$, modellizzato in CUF con 28 L16 \times 10 B2 elementi ; andamenti numerici delle frequenze naturali al variare della velocità di rotazione attorno all'asse y	103
4.44	Diagramma di Campbell del rotore con 4 pale curve con angolo di curvatura di $\theta = 33^\circ$, modellizzato in CUF con 28 L16 \times 10 B2 elementi ; variazione delle prime quindici frequenze naturali al variare della velocità di rotazione attorno all'asse y nel range di funzionamento.	105
4.45	Geometrie strutture shell analizzate in Ansys APLD modellizzate con elementi finiti SHELL181.	106
4.46	Confronto dei modi di tra vibrare tra Ansys e il modello CUF (8 L16 & 10xB4) tramite Paraview per una shell con raggio di curvatura $R_x = 10$ cm.	109

4.47	Confronto dei modi di vibrare tra Ansys e il modello CUF con elementi 8 L16 & 10xB4 tramite Paraview per la shell con raggio di curvatura $R_x = 40$ cm.	110
4.48	Diagramma di Campbell per piastre curve rispettivamente con curvatura di $R_x = 40$ cm e $R_x = 10$ cm modellizzato in CUF con 8 L16 & 10 B4 elementi ; variazione delle frequenze naturali al variare della velocità di rotazione attorno all'asse y longitudinale.	111
4.49	Modellazione della pala cava con profilo ellittico in ANSYS.Mesh creata con elementi tetraedrici SOLID187.	112
4.50	Confronto della Total Deformation del 1° modo di vibrare tra ANSYS e Paraview della pala a sezione ellittica.	113
4.51	Confronto della Total Deformation del 1° modo di vibrare torsionale tra ANSYS e Paraview della pala a sezione ellittica.	113
4.52	Diagramma di Campbell della pala con profilo ellittico modellizzato in CUF con 8 L16 & 10 B4 elementi; variazione delle frequenze naturali al variare della velocità di rotazione attorno all'asse z	114
4.53	Vista isometrica della pala cava con profilo NACA2401 in Paraview. Sezione trasversale modelizzata in CUF tramite 24 elementi L4.	115
4.54	Diagramma di Campbell della pala con profilo NACA2401 modelizzata con elementi 24 x L4 & 10 x B4 ; variazione delle frequenze naturali al variare della velocità di rotazione attorno all'asse Z	116
4.55	Rappresentazione della trave in Ansys in elementi BEAM188.	120
4.56	Diagrammi di Cambell delle prime 4 frequenze naturali della trave a sezione rettangolare al variare del carico termico.	122
4.57	Diagrammi di Cambell delle prime 4 frequenze naturali del cilindro cavo a parete spessa vincolato ad entrambe le estremità al variare del carico termico uniforme applicato nel modello CUF.	124
4.58	Disco a spessore variabile (5 mm a 2.5 mm) modellato tramite elementi finiti in Ansys APDL	128
4.59	Disco a spessore variabile sottile (2.5 mm a 1.0 mm) modellato tramite 35596 elementi SOLID185 elementi in Ansys APDL.	131
5.1	Rappresentazione schematica della trave in materiale composito.	136
5.2	Confronto delle forme modali della trave composita a 3 strati con disposizione $90^\circ/0^\circ/90^\circ$, ottenute tramite ANSYS e ParaView.	138
5.3	Diagrammi di Campbell per la trave a sezione rettangolare per strutture composite con diverse configurazioni di strati e orientazioni delle fibre.	138
5.4	Rappresentazione delle forme modali corrispondenti alle frequenze F_{2z} e F_{2z} della trave rettangolare cava a 3 strati con disposizione $45^\circ/-45^\circ/45^\circ$ in ParaView.	140

5.5	Rappresentazione cilindro cavo in composito a tre strati in Ansys Mechanical con una mesh di 6000 elementi SOLID185.	140
5.6	Diagramma di Campbell di un cilindro ortotropo con spessore $t=3\text{mm}$ a due strati per diverse sequenze di laminazione.	142

Acronimi

CUF

Carrera Unified Formulation

DOF

Degrees of Freedom

EBBT

Euler–Bernoulli Beam Theory

EoM

Equations of Motion

ESL

Equivalent-Single Layer

FEM

Finite Element Method

HOM

High-Order Model

KPT

Kirchhoff Plate Theory

LDN

Lagrange Expansion Displacement-based theory

LE

Lagrange Expansion

L4

Elemento lagrangiano quadrilatero con 9 nodi

L9

Elemento lagrangiano quadrilatero con 9 nodi

L16

Elemento lagrangiano con 16 nodi

LOM

Low-Order Model

MDC

Method of Dynamic Compliance

MM

Modal Method

MTC

Method of Trigonometric Collocation

NACA

National Advisory Committee for Aeronautics

NDK

Node Dependent Kinematics

PDE

Partial Differential Equation

PLV

Principio dei Lavori Virtuali

PSBFEM

Polygonal Scaled Boundary Finite Element Method

QEP

Quadratic Eigenvalue Problem

SEREP

System Equivalent Reduction Expansion Process

TBT

Timoshenko Beam Theory

TE

Taylor Expansion

TMM

Transfer Matrix Method

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Panoramica generale dei rotori

Negli ultimi anni, lo studio dei rotori ha acquisito un'importanza crescente, spinta dalla necessità di sviluppare macchine rotanti sempre più efficienti e affidabili. Questi componenti rappresentano elementi fondamentali in settori come l'ingegneria aerospaziale, navale, energetica e automobilistica.

I sistemi meccanici basati sui rotori sono progettati per trasferire o trasformare energia, supportando operazioni critiche in macchine quali turbine, compressori, motori e generatori. La loro progettazione richiede un'attenzione meticolosa, poiché spesso operano in condizioni estreme caratterizzate da elevate velocità di rotazione e da intense forze termiche e meccaniche. Un esempio emblematico è rappresentato dalle turbomacchine, come il motore turbofan illustrato in Fig. 1.1, dove gli organi rotanti devono resistere a sollecitazioni termiche elevate, forti gradienti di temperatura e carichi aerodinamici variabili. Per garantire l'affidabilità e l'efficienza del sistema, sono necessarie analisi approfondite e multidisciplinari che combinano conoscenze di meccanica, dinamica strutturale e termodinamica.

Una delle principali sfide nello studio dei rotori riguarda la gestione delle vibrazioni, dell'instabilità e dei fenomeni di risonanza. I comportamenti dinamici complessi di questi componenti sono influenzati sia da fattori interni, come il bilanciamento e le tolleranze geometriche, sia da fattori esterni, come le forze aerodinamiche, termiche e di attrito. Fenomeni indesiderati, come vibrazioni eccessive, instabilità dinamica e risonanza, possono compromettere seriamente le prestazioni del sistema e, nei casi più gravi, causare guasti catastrofici [1].

Le vibrazioni, ad esempio, possono derivare da squilibri nei rotori, dall'interazione con cuscinetti o supporti, oppure da effetti giroscopici che emergono alle alte velocità di rotazione. In presenza di risonanza, quando la frequenza di eccitazione coincide con una delle frequenze naturali del sistema, le vibrazioni possono amplificarsi fino

a provocare deformazioni permanenti o danni irreversibili.

L'instabilità è un altro problema critico e si manifesta spesso attraverso moti autoeccitati, come il "whirl" (rotolamento) o il "whip" (oscillazione) del rotore. Questi fenomeni sono generalmente causati da interazioni fluido-struttura, effetti non lineari o condizioni operative sfavorevoli. Le forze instabili generate dall'interazione tra il fluido di lavoro e la struttura rotante possono aumentare nel tempo, mettendo a rischio la stabilità dell'intero sistema.

La complessità e il costo computazionale delle analisi aumentano considerevolmente quando si considerano fenomeni non lineari ed effetti giroscopici. Per affrontare queste sfide, è fondamentale ricorrere a soluzioni innovative che includano modellazione avanzata, simulazioni numeriche accurate e tecniche di diagnostica predittiva. Solo un approccio integrato può garantire la sicurezza, l'affidabilità e l'efficienza di queste macchine in un contesto industriale sempre più esigente.

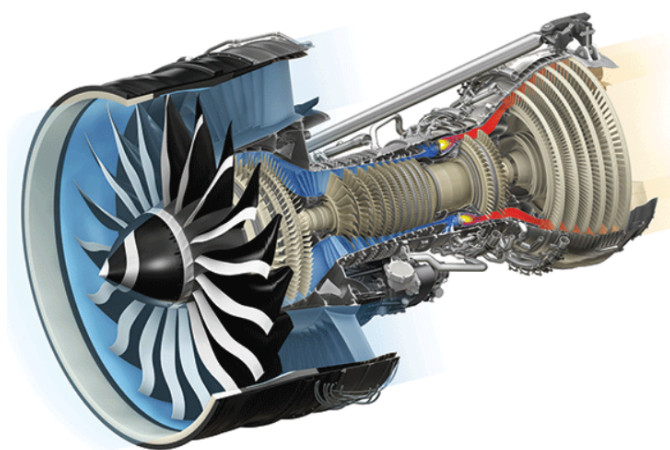


Figura 1.1: Motore turbofan GENx, utilizzato nei Boeing 747-8 e Boeing 787 Dreamliner. Rif. [2].

Sin dalla fine del XIX secolo, con l'espansione dell'industria e la crescente diffusione di macchine rotanti, è emersa la necessità di sviluppare modelli matematici sempre più sofisticati per descrivere il comportamento dinamico delle strutture rotanti [3]. Questi modelli permettono di prevedere caratteristiche fondamentali come le frequenze naturali e le velocità critiche, contribuendo a ridurre il rischio di instabilità e migliorare l'affidabilità operativa. Con l'avanzare delle tecnologie computazionali, l'attenzione si è spostata verso l'ottimizzazione delle geometrie e l'uso di materiali avanzati, come i compositi, noti per le eccellenti proprietà meccaniche e la possibilità di personalizzazione strutturale.

Tuttavia, l'analisi di questi sistemi rimane una sfida significativa. I metodi numerici tradizionali, come l'analisi agli elementi finiti (FEM), richiedono spesso

modelli tridimensionali dettagliati e costosi in termini di risorse computazionali. La necessità di bilanciare precisione e velocità di calcolo ha portato allo sviluppo di approcci più efficienti, come la Carrera Unified Formulation (CUF), che consente di integrare teorie di diversi ordini di complessità all'interno di un unico framework.

1.2 Evoluzione storica dei modelli matematici

L'evoluzione dello studio dei rotori non sarebbe stata possibile senza un costante perfezionamento dei modelli matematici. Per affrontare le problematiche precedentemente citate, sin dalla fine del XIX secolo sono stati sviluppati modelli sempre più raffinati per descrivere il comportamento dinamico delle strutture rotanti [3]. Questi modelli consentono di prevedere caratteristiche fondamentali come le frequenze naturali e le velocità critiche, riducendo il rischio di instabilità e migliorando l'affidabilità operativa.

Con il progresso delle tecnologie computazionali, l'attenzione si è gradualmente spostata verso la modellazione numerica avanzata. Tecniche come il FEM hanno permesso di analizzare geometrie e configurazioni complesse, sebbene a un elevato costo computazionale.

Lo studio delle strutture rotanti ha rappresentato una sfida continua nella letteratura scientifica, con l'obiettivo di comprendere e prevedere i complessi fenomeni dinamici che caratterizzano questi sistemi. L'evoluzione storica dei modelli matematici nella rotodinamica riflette una transizione da approcci teorici fondamentali a metodologie computazionali sempre più sofisticate. Tuttavia, nonostante i progressi delle tecniche numeriche, i metodi analitici continuano a svolgere un ruolo cruciale, fornendo intuizioni fondamentali e supportando la validazione dei modelli computazionali.

Tra i primi modelli sviluppati per lo studio delle strutture rotanti, il modello di Rankine rappresenta una pietra miliare nell'analisi dei rotori.

1.2.1 Il modello di Rankine

Un primo contributo allo studio dei rotori fu proposto nel 1869 da William John Macquorn Rankine. Egli sviluppò il modello di Rankine che rappresenta di fatto, uno dei primi tentativi di studiare e analizzare la dinamica dei rotori [4]. Questo approccio ipotizzava un albero rigido, trascurando effetti dinamici fondamentali quali le accelerazioni di Coriolis e gli effetti giroscopici. Rankine descriveva il comportamento di un albero rotante come un sistema rigido soggetto a forze centrifughe, senza considerare la flessibilità dell'albero [5].

Uno degli assunti principali di Rankine era che un rotore non potesse operare in sicurezza al di sopra della propria velocità critica, ipotizzando che il superamento di tale limite comportasse un inevitabile guasto. Sebbene questa idea si sia

dimostrata errata, il modello ha gettato le basi per studi successivi, ponendo l'accento sull'importanza delle velocità critiche nella progettazione dei rotor [6]. Fu solo grazie al lavoro di Gustaf de Laval, che introdusse il concetto di albero flessibile, che si dimostrò possibile operare in modo stabile anche a velocità superiori a quelle critiche, purché il sistema fosse adeguatamente bilanciato [7].

1.2.2 Il modello di Jeffcott-Laval

Nel 1883, Gustaf de Laval propose l'idea dell'albero flessibile, che superava le limitazioni del modello di Rankine e permetteva ai rotor di operare oltre le velocità critiche senza rischio di guasto [8]. Questo concetto fu ulteriormente sviluppato nel 1919 da Henry Jeffcott, che, utilizzando il modello di rotore di Jeffcott-Laval, introdusse un disco rigido montato su un albero elastico con supporti rigidi [9]. A differenza del modello di Rankine, l'approccio di Jeffcott introduce la flessibilità dell'albero e considera fenomeni dinamici fondamentali come il disequilibrio di massa e gli effetti giroscopici [10].

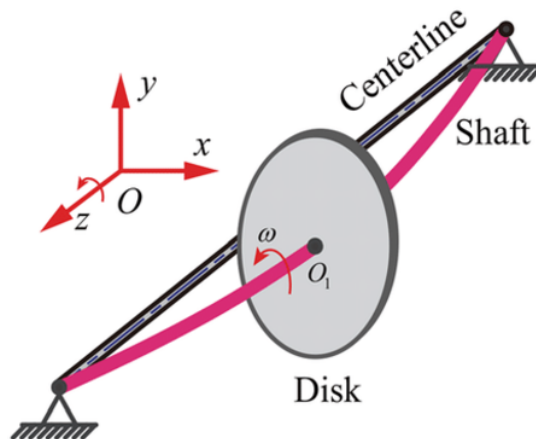


Figura 1.2: Schema del rotore di Jeffcott-Laval. Rif.[11]

Il modello di Jeffcott consente di analizzare le frequenze naturali del sistema, le condizioni di risonanza e i fenomeni di instabilità. La risonanza, in particolare, rappresenta un punto critico per i rotor, verificandosi quando la frequenza di eccitazione coincide con una delle frequenze naturali, causando amplificazioni significative delle vibrazioni. Sebbene sia un modello semplificato, la sua capacità di descrivere in modo efficace il comportamento dinamico lo rende ancora oggi un riferimento fondamentale nello studio delle macchine rotanti. Inoltre, è utilizzato per stimare i limiti di velocità critica e per analizzare il comportamento del rotore durante il superamento di tali velocità, fornendo una base teorica essenziale per l'ottimizzazione della progettazione.

Il modello di Jeffcott-Laval, sebbene semplificato, rimane un riferimento fondamentale nello studio delle frequenze naturali, delle condizioni di risonanza e dei fenomeni di instabilità nei sistemi rotanti. Tuttavia, la sua semplicità ha portato a significative critiche a causa delle discrepanze rispetto ai risultati sperimentali, come discusso da Kramer e Genta [12, 10].

Nel 1993, Giancarlo Genta contribuì nello sviluppo di modelli dinamici più avanzati, introducendo sistemi con quattro gradi di libertà che tengono conto di traslazioni e inclinazioni del disco rispetto agli assi principali [10], migliorando la correlazione con i risultati sperimentali. Questi modelli includono accoppiamenti tra gradi di libertà e fenomeni come la precessione giroscopica, che influiscono notevolmente sulle frequenze naturali del sistema e sulla stabilità durante il funzionamento a velocità elevate. Tale modello permette oltretutto di valutare l'impatto dei cuscinetti sulla risposta dinamica del sistema e di indagare quindi sui fenomeni di instabilità dovuta alle vibrazioni autoindotte [13].

Kramer ha contribuito analizzando il comportamento dinamico di sistemi rotore-supporto-cuscinetto [12], concentrandosi sull'instabilità causata dal film d'olio. Il suo studio ha utilizzato modelli avanzati per descrivere l'interazione tra i cuscinetti e il rotore, evidenziando come il sistema cuscinetto-agente fluido funzioni come un ammortizzatore-molla non lineare. Questi contributi hanno permesso una maggiore precisione nella previsione delle velocità critiche e delle soglie di stabilità.

Entrambi i ricercatori hanno inoltre utilizzato metodi numerici e analitici avanzati, come la riduzione modale e l'analisi multi-modale, per migliorare la correlazione tra i modelli teorici e i dati sperimentali [14].

1.2.3 Il modello di Lalanne-Ferraris

Verso la fine degli anni '90, il modello di Lalanne-Ferraris [15] fu introdotto come un'estensione del modello di Jeffcott, includendo la massa dell'albero, un aspetto precedentemente trascurato nei modelli semplificati. Questo miglioramento lo rese più realistico e adatto per l'analisi di rotori multi-disco e complessi, fornendo una maggiore precisione nella predizione delle frequenze critiche e del comportamento dinamico.

Il modello di Lalanne-Ferraris considera numerosi aspetti avanzati, tra cui:

- Effetti giroscopici: A velocità elevate, i dischi e l'albero manifestano effetti giroscopici significativi, che influenzano il comportamento dinamico del sistema. Questi effetti diventano particolarmente rilevanti in applicazioni industriali ad alta velocità, come turbine a gas e motori.
- Interazioni albero-cuscinetto: Il modello tiene conto delle interazioni dinamiche tra l'albero e i cuscinetti, includendo le proprietà di rigidità e smorzamento.

Queste interazioni sono fondamentali per determinare la stabilità del sistema e identificare le velocità critiche.

- **Contributi di smorzamento:** Viene incluso il ruolo dello smorzamento meccanico, essenziale per predire il comportamento del sistema in presenza di vibrazioni forzate o autoeccitate. Questo consente di migliorare significativamente l'accuratezza delle analisi.

Grazie alla combinazione di questi fattori, il modello di Lalanne-Ferraris si distingue come uno strumento versatile per l'analisi di configurazioni complesse, come quelle presenti in macchine rotanti ad alte prestazioni. Rispetto ai modelli precedenti, offre una rappresentazione più dettagliata e accurata del comportamento dinamico, integrando metodi modali, lagrangiani e numerici. Ad esempio, tecniche come il metodo di Rayleigh-Ritz sono utilizzate per derivare le equazioni del moto, determinare le frequenze naturali e valutare la risposta dinamica del sistema.

Uno studio condotto da Rezaiguia *et al.* [16] ha adottato il modello di Lalanne-Ferraris per analizzare l'effetto dello smorzamento e della rigidità dei cuscinetti idrodinamici sulla stabilità del sistema rotore, avvalendosi di un'analisi numerica approfondita. Successivamente, Duchemin *et al.* [17] hanno confermato la validità di tali metodologie, ampliandone l'applicazione all'analisi di supporti idrodinamici con l'inclusione di forze non lineari. Inoltre, Capone [18] ha evidenziato come le forze idrodinamiche, modellate attraverso l'equazione di Reynolds, influenzino le oscillazioni orbitali nei sistemi rotanti, dimostrando come queste influenzino direttamente le vibrazioni orbitali e le condizioni di risonanza.

1.2.4 Modelli avanzati

L'evoluzione della rotodinamica ha portato allo sviluppo di modelli analitici avanzati e metodologie matematiche per affrontare i comportamenti complessi dei sistemi rotanti. Questi modelli consentono di analizzare fenomeni non lineari, instabilità e interazioni fluido-strutturali che superano i limiti dei modelli semplificati [19].

Uno degli aspetti principali della dinamica dei rotori è l'analisi delle vibrazioni, con particolare attenzione alle frequenze proprie flessionali e torsionali. Tali studi sono fondamentali per prevenire fenomeni di instabilità e garantire la sicurezza operativa. Tra i contributi più significativi figura la regola di Dunkerley [20], utilizzata per approssimare i limiti inferiori delle frequenze proprie di un albero elastico multi-DOF. Per calcolare i limiti superiori, si utilizzano formulazioni basate su equazioni integrali, migliorando l'accuratezza delle previsioni.

Un ulteriore strumento avanzato è rappresentato dalla teoria di Floquet [19], applicata per analizzare l'effetto dell'elasticità variabile nei sistemi rotanti. Questa metodologia consente di studiare il comportamento dinamico di rotori soggetti a variazioni termiche o influenze fluido-strutturali, come il "steam whirl" e l'effetto

"Newkirk". Questi fenomeni, spesso causa di instabilità, possono essere modellati con maggiore precisione grazie alla teoria di Floquet [21].

Con il tempo, il modello Jeffcott-Laval, ampiamente utilizzato per l'analisi di rotori e cuscinetti, ha mostrato limitazioni significative dovute alle sue semplificazioni eccessive. Per superare questi limiti, sono stati introdotti modelli più sofisticati. Muszynska [22] ha sviluppato un modello isotropo a due modi laterali basato su parametri modali misurabili, che rappresenta un'importante evoluzione rispetto al modello di Jeffcott. Questo approccio considera la massa, la rigidità e lo smorzamento come grandezze generalizzate riferite al primo modo laterale, offrendo maggiore accuratezza nella rappresentazione fisica del sistema.

Il modello di Muszynska è ampiamente utilizzato per analizzare fenomeni complessi come il whirl (vortici fluidi) e il whip (instabilità rotazionale), che possono compromettere la stabilità del sistema. Inoltre, l'autrice ha contribuito con modelli non lineari avanzati per descrivere le forze fluide in sistemi rotore-cuscinetto-guarnizione. In collaborazione con Bently, ha introdotto un modello migliorato basato sulla velocità media circonferenziale del fluido come funzione dell'eccentricità dell'albero, superando le limitazioni dei modelli tradizionali [23].

Nel 2007, Cheng e colleghi [24] hanno condotto un'indagine approfondita sul comportamento dinamico non lineare dei sistemi rotore-cuscinetto-guarnizione, basandosi sul modello di Muszynska. Gli studi di Cheng hanno rivelato che le interazioni fluido-rotore possono generare fenomeni complessi, tra cui biforcazioni e caos dinamico. Le loro analisi numeriche ed esperimenti hanno dimostrato che variazioni minime nelle forze fluide possono portare il sistema da uno stato stabile a uno instabile, confermando l'importanza di considerare le non linearità fluido-dinamiche nella progettazione dei rotori.

Importanza dei modelli non lineari

I modelli non lineari, come quello proposto da Muszynska [22] e perfezionato da Cheng [25, 26], sono fondamentali per descrivere il comportamento reale dei rotori in presenza di forze fluide. Essi riescono a catturare la complessità delle interazioni fluido-strutturali, includendo:

- **Vibrazioni autoeccitate:** Oscillazioni che emergono dall'accoppiamento tra rotore e fluido, senza necessità di forze esterne.
- **Instabilità dinamica:** Fenomeni come il "whirl" (rotazione fluida instabile) e il "whip" (oscillazioni autoeccitate) che possono compromettere il funzionamento sicuro del sistema.
- **Biforcazioni e caos dinamico:** Il passaggio da uno stato stabile a uno instabile in risposta a variazioni delle forze fluide, con possibili comportamenti caotici.

Grazie a questi modelli avanzati, è possibile prevedere con maggiore precisione le condizioni di instabilità e progettare soluzioni efficaci per mitigare tali fenomeni. Questo ha portato a miglioramenti significativi nell'affidabilità e nella sicurezza delle macchine rotanti [27], con applicazioni nei settori aerospaziale, energetico e automotive .

1.3 Metodi numerici nel campo dei rotori

I modelli analitici sono strumenti preziosi per analizzare le proprietà dinamiche dei rotori, ma presentano limiti evidenti quando si affrontano configurazioni più complesse. L'assunzione di ipotesi semplificative, come la simmetria assiale o la linearità del materiale, può ridurre l'accuratezza delle previsioni, specialmente in sistemi che coinvolgono materiali non lineari (ad esempio, viscoelasticità o plasticità) o condizioni dinamiche complesse. In queste situazioni, i metodi numerici, in particolare il metodo degli elementi finiti (FEM) [28], diventano essenziali per descrivere in modo realistico il comportamento del sistema.

1.3.1 Sviluppo dei Metodi Computazionali

Prima dell'adozione su larga scala del FEM, i calcoli dinamici si basavano principalmente su metodi iterativi. Rao [3] traccia un quadro storico esaustivo, evidenziando come i primi approcci fossero fondati su principi energetici, quali le equazioni di Lagrange e il principio di Hamilton. Sebbene efficaci nel calcolo delle frequenze naturali e delle velocità critiche, tali metodi risultarono inadeguati per modellare fenomeni complessi. Tra questi, ricordiamo tra i primi contributi significativi, il metodo di Stodola-Vianello, che utilizza un'approssimazione basata sull'energia massima di Rayleigh, e il metodo di Dunkerley, che propose successivamente una formula semi-empirica, che aumentò la precisione delle stime delle frequenze naturali attraverso dati sperimentali [29, 30].

Tuttavia, queste tecniche risultavano inadeguate per descrivere sistemi complessi, portando a semplificazioni che talvolta trascuravano effetti significativi. Negli anni '60, Prohl [31] e Myklestad [32] introdussero il *Transfer Matrix Method* (TMM), un approccio efficiente in termini di memoria computazionale, particolarmente adatto a strutture scomponibili, che suddivide una struttura in sottosistemi adiacenti, risolvendo le interazioni tra essi. Questo metodo permette di calcolare le frequenze naturali e le modalità di vibrazione analizzando ogni sottosistema separatamente e combinandone gli effetti attraverso matrici di trasferimento.

Tuttavia, il metodo TMM fu progressivamente superato dall'introduzione del FEM negli anni '70 [33]. Il FEM divide una struttura complessa in sottoelementi più semplici, definendo equazioni locali per ogni elemento e combinandole per ottenere il comportamento globale del sistema. Questo approccio, più versatile e robusto,

consentì di includere nel modello dettagli geometrici e materiali, migliorando significativamente l'accuratezza delle previsioni.

L'analisi FEM rivoluzionò lo studio della dinamica rotorica, grazie al lavoro pionieristico di Ruhl e Booker [34], che lo applicarono a sistemi turborotore-cuscinetto. I primi modelli FEM si basavano sulle teorie classiche delle travi di Eulero-Bernoulli (EBBT) [35] e di Timoshenko (TBT) [36], rappresentando i dischi come masse rigide concentrate. Tuttavia, queste teorie mostravano limiti, soprattutto nell'analisi di travi corte e sottili, e trascuravano fenomeni complessi come le interazioni dinamiche disco-albero e gli effetti giroscopici.

Nel 1976, Nelson e McVaugh [37] migliorarono il FEM introducendo matrici di rigidità e massa giroscopica, mentre Nelson [38] integrò le deformazioni a taglio e torsione assiale, aumentando notevolmente la precisione delle analisi.

1.3.2 Applicazioni del FEM

Il FEM divide una struttura complessa in sottoelementi più semplici, definendo equazioni locali per ogni elemento e combinandole per ottenere il comportamento globale del sistema. I primi approcci basati sul FEM per i rotori utilizzavano formulazioni della teoria delle travi, come la teoria di Eulero-Bernoulli e quella di Timoshenko, per rappresentare i rotori come travi deformabili con dischi modellati come masse concentrate. Sebbene adeguati per analisi preliminari, questi modelli presentavano limitazioni nella gestione di geometrie non convenzionali e carichi irregolari.

Con lo sviluppo della capacità computazionali e per i grandi limiti intrinseci dei modelli basati su travi unidimensionali (1D) hanno spinto verso la modellazione più sofisticata con elementi assialsimmetrici bidimensionali (2D) e solidi tridimensionali (3D). I modelli 1D, che rappresentano il rotore come una combinazione di travi deformabili e masse concentrate per i dischi, soffrono di semplificazioni che riducono l'accuratezza delle analisi. Tra gli effetti principali trascurati si annoverano l'interazione complessa tra dischi e alberi, le influenze centrifughe e giroscopiche, oltre alle asimmetrie geometriche dei componenti. Inoltre, tali modelli non riescono a rappresentare in modo realistico le flessibilità estese dei dischi o le interazioni dinamiche complesse.

Un significativo passo avanti si è avuto con lo sviluppo del codice FEM DYNROT da parte di Genta negli anni '80 [10], che introduce l'uso di coordinate complesse per modellare l'albero come trave e i dischi come elementi circolari flessibili. Questo approccio, basato su serie di Fourier per approssimare gli spostamenti lungo la circonferenza, si è inizialmente concentrato su problemi lineari, estendendosi in seguito allo studio di sistemi non-lineari e alla dinamica torsionale dei rotori. Tuttavia, il modello risulta più adatto a configurazioni assialsimmetriche con dischi sottili, limitandone l'applicabilità nei casi di carichi asimmetrici, geometrie irregolari

o condizioni al contorno atipiche. Un significativo miglioramento si ebbe nel 1976 con il lavoro di Nelson e McVaugh [37] che migliorarono il FEM introducendo matrici di rigidezza e massa giroscopica, e successivamente Nelson [38] integrò le deformazioni a taglio e torsione assiale, aumentando notevolmente la precisione delle analisi. Inoltre, Zorzi e Nelson [39] hanno esteso l'approccio includendo matrici giroscopiche, consentendo un'analisi più dettagliata delle vibrazioni dei rotori ad alta velocità.

Con l'evoluzione delle tecnologie computazionali, sono stati sviluppati modelli tridimensionali (3D) per rappresentare simultaneamente alberi e dischi come elementi deformabili. L'approccio di Nandi e Neogy [40] dimostrò come il FEM 3D potesse migliorare la simulazione di effetti giroscopici, centrifughi e aerodinamici. Questi modelli tridimensionali permettevano di rappresentare geometrie irregolari, condizioni non lineari e interazioni fluido-struttura, ampliando significativamente le capacità predittive rispetto ai modelli tradizionali [41, 42].

Negli ultimi anni, l'integrazione dell'analisi termica nei modelli FEM ha rappresentato un notevole progresso nello studio della rotodinamica. Il FEM è stato utilizzato per modellare il trasferimento di calore nei rotori attraverso conduzione, convezione e radiazione, permettendo di comprendere con maggiore precisione gli effetti delle alte temperature sulle proprietà dinamiche del sistema. Friswell et al. [43] hanno dimostrato che i gradienti termici possono alterare significativamente le frequenze naturali e le modalità di vibrazione, rendendo essenziale includere effetti termici nei modelli per garantire previsioni affidabili.

Un ulteriore passo avanti è rappresentato dall'analisi degli stress termici e delle deformazioni indotte da gradienti di temperatura, fenomeni che possono compromettere la stabilità e la durata del rotore. He *et al.* [44] hanno integrato modelli CFD (Computational Fluid Dynamics) con analisi termiche e rotodinamiche per studiare le interazioni fluido-struttura nelle turbomacchine industriali. Le vibrazioni libere e le risposte forzate sono esaminate utilizzando approcci aeroelastici che includono modelli di riduzione d'ordine. Questo lavoro ha evidenziato come le deformazioni termiche influiscano sul comportamento vibrazionale, portando a instabilità in condizioni operative estreme. Inoltre, il modello consente di calcolare direttamente le forze aerodinamiche instazionarie e di valutare gli effetti chiave derivanti dai contributi aeroelastici

Modelli tridimensionali avanzati hanno ulteriormente migliorato la rappresentazione delle geometrie complesse e delle interazioni fluido-struttura. Zhou e Shi [41] hanno utilizzato simulazioni FEM 3D per analizzare il comportamento termico e vibrazionale in sistemi di turbomacchine, dimostrando che questi approcci possono prevedere con precisione le velocità critiche e ridurre al minimo gli errori dovuti a ipotesi semplificative.

Inoltre, studi recenti come quello di Miljavec *et al.* [45] hanno combinato analisi

termiche, magnetiche e vibrazionali per progettare motori sincroni a magneti permanenti, sottolineando la necessità di un approccio multi-fisico nella progettazione di sistemi rotanti. Questi modelli consentono di analizzare il comportamento dinamico considerando simultaneamente effetti termici, aerodinamici e strutturali, migliorando le prestazioni complessive delle macchine rotanti.

1.3.3 Riduzione Computazionale

La riduzione computazionale è un elemento cruciale nell'analisi dei sistemi dinamici complessi, come quelli rotanti. Con l'evoluzione FEM, il crescente numero di gradi di libertà (DOF) e la complessità geometrica dei modelli hanno evidenziato la necessità di tecniche per ridurre il carico computazionale, mantenendo al contempo un'elevata accuratezza nei risultati.

Il primo approccio significativo in questo ambito è stato il *Method of Trigonometric Collocation* (MTC), introdotto da Jean e Nelson nel 1990 [46]. Questo metodo si basa sull'utilizzo di funzioni trigonometriche per rappresentare la risposta dinamica del sistema in punti specifici, detti *collocation points*. Nonostante l'innovatività dell'approccio, il MTC non si è dimostrato efficace per sistemi complessi, poiché l'aumento della dimensione delle matrici rende il metodo computazionalmente oneroso [47].

Per superare queste limitazioni, sono stati sviluppati approcci più avanzati come il *Method of Dynamic Compliances* (MDC) e il *Modal Method* (MM). L'MDC rappresenta il sistema attraverso matrici di risposta dinamica, che consentono di analizzare aspetti fondamentali come le frequenze naturali, la risposta stazionaria e il diagramma di Campbell [48].

Quest'ultimo è particolarmente utile per studiare la stabilità del sistema, mostrando l'interazione tra velocità di rotazione e frequenze naturali [37]. L'MDC si è rivelato un metodo robusto per sistemi complessi, mantenendo una buona precisione anche con un numero limitato di gradi di libertà.

Un ulteriore progresso è stato rappresentato dal MM ampiamente trattato in letteratura [44], che sfrutta i modi propri del sistema per ridurre la dimensionalità delle equazioni differenziali. In questo approccio, solo un sottoinsieme di modi dominanti viene utilizzato per rappresentare il comportamento dinamico, consentendo una significativa riduzione del carico computazionale senza compromettere la precisione. Come evidenziato da Malenovský nel 2003 [49], l'MM è particolarmente efficace per analisi nel dominio delle frequenze, poiché evita l'incremento delle dimensioni delle matrici anche con un elevato numero di modi considerati.

Con l'introduzione di modelli tridimensionali per la simulazione dei sistemi rotanti, è emersa la necessità di ridurre la complessità computazionale senza perdere accuratezza. Oltre al Modal Method, sono stati sviluppati diversi approcci che supportano l'applicazione di modelli 3D, come la Guyan Reduction, la Component

Mode Synthesis (CMS) e il System Equivalent Reduction Expansion Process (SEREP). Questi metodi offrono soluzioni efficaci per trattare grandi matrici di sistema, garantendo un compromesso ottimale tra accuratezza e costi computazionali.

La Guyan Reduction, introdotta da Guyan nel 1965 [50], è una tecnica di riduzione statica basata sull'eliminazione dei gradi di libertà non significativi del sistema. Il metodo assume che i gradi di libertà ridotti abbiano una risposta dinamica principalmente influenzata dai gradi di libertà principali, e sfrutta questa relazione per ridurre il sistema a un sottospazio. Ad esempio, questa tecnica è stata ampiamente utilizzata nell'analisi di rotori ad alta velocità per ridurre le dimensioni delle matrici di massa e rigidità, facilitando il calcolo delle frequenze naturali e delle risposte modali.

Un altro approccio largamente applicato è la CMS [51] sviluppata per combinare la flessibilità dei metodi agli elementi finiti con l'efficienza delle analisi modali. Il CMS suddivide la struttura complessa in sotto-componenti, calcolando i modi propri locali di ogni sottostruttura e utilizzandoli per costruire un modello globale ridotto. Questo metodo è particolarmente utile nei sistemi rotanti con geometrie irregolari e nelle turbine industriali, dove la scomposizione in sotto-componenti permette di rappresentare in dettaglio le interazioni dinamiche. Un esempio significativo dell'applicazione della CMS è rappresentato dai lavori di Craig e Bampton, che hanno dimostrato come questa tecnica possa migliorare l'accuratezza nelle simulazioni di vibrazioni torsionali.

Tra i metodi più recenti, il SEREP, proposto da Das e Dutt [52], ha rappresentato un passo avanti significativo. Questo metodo combina i vantaggi della riduzione modale con l'espansione delle matrici ridotte nel dominio originale, permettendo un'analisi accurata anche in presenza di fenomeni non lineari o interazioni complesse tra componenti. Questo metodo si distingue per la sua capacità di conservare l'informazione dinamica originale del sistema, consentendo una rapida ricostruzione delle risposte dinamiche complete. In ambito pratico, il SEREP è stato implementato nell'analisi di vibrazioni aeroelastiche, dimostrando la sua efficacia nel simulare interazioni fluido-struttura in turbomacchine.

Questi metodi, insieme a quelli già descritti, costituiscono strumenti essenziali per la simulazione e l'analisi dei sistemi rotanti complessi, permettendo di affrontare le sfide computazionali associate ai modelli tridimensionali e garantendo una rappresentazione accurata delle dinamiche strutturali e non lineari.

Un'altra strategia per la semplificazione dei modelli consiste nella combinazione di rappresentazioni $1D$ (monodimensionale), $2D$ (bidimensionale) o $3D$ (tridimensionale). Ad esempio, Jang *et al.* [53] hanno condotto un'analisi delle vibrazioni libere su un sistema composto da un disco flessibile e un mandrino, supportato da cuscinetti a sfera e un albero flessibile, utilizzando il FEM e la sintesi delle sottostrutture. In questo studio, il disco è modellato in $2D$ seguendo la teoria delle piastre di Kirchhoff (KPT) e le deformazioni non lineari di Von Karman, mentre il

mandrino rotante e l'albero stazionario sono descritti rispettivamente tramite il modello del raggio di Rayleigh e quello di Eulero.

Un altro utilizzo significativo della combinazione di modelli multidimensionali è rappresentato dalla *CUF*. In questa metodologia, il campo di spostamento tridimensionale è discretizzato in due domini: la sezione trasversale in $2D$ e l'asse longitudinale in $1D$. Carrera *et al.* [54] hanno presentato questo approccio, basato su un modello ad elementi finiti con cinematica dipendente dai nodi, applicandolo a strutture composite a travi. La *CUF* consente l'uso di cinematica nodale di tipo Taylor [55] o Lagrange [56] sugli elementi della sezione trasversale, migliorando l'accuratezza dei risultati soprattutto in presenza di effetti locali, grazie a un affinamento localizzato. Questo approccio sarà descritto dettagliatamente in questo lavoro di tesi, poiché il codice utilizzato per i risultati numerici si basa proprio sulla *CUF*.

Capitolo 2

Dinamica dei Rotori

2.1 Introduzione alla dinamica dei rotorii

La dinamica dei rotorii si occupa dello studio dei comportamenti vibrazionali e della stabilità di sistemi rotanti, come alberi, dischi e cuscinetti, che costituiscono parte integrante di macchine rotanti complesse, in particolare nei settori dell'aerospaziale, della produzione di energia e della meccanica avanzata [57]. Tali sistemi possono essere soggetti a fenomeni di instabilità dinamica, come vibrazioni eccessive, flutter e squilibrio [58]. Il comportamento di un rotore è influenzato da vari elementi che ne determinano la risposta dinamica complessiva. Prima di analizzare l'equazione del moto di un sistema rotore, è importante caratterizzare ogni singolo componente, ossia il disco rigido, l'albero flessibile e gli elementi di smorzamento come cuscinetti e sigilli [59]. Inoltre, l'analisi deve tenere conto dello squilibrio di massa, che influisce significativamente sul comportamento dinamico del sistema [7].

In generale, per ottenere l'equazione globale del moto, vengono calcolate l'energia cinetica (T) e l'energia di deformazione (U), insieme al lavoro virtuale delle forze esterne (δW) [60]. Successivamente, viene scelto un metodo numerico per risolvere le equazioni del moto. Per problemi con un numero ridotto di gradi di libertà, si può utilizzare il metodo di Rayleigh-Ritz [61], mentre per applicazioni più complesse, come quelle industriali, si ricorre al *FEM* [62]. L'equazione del moto è derivata usando le equazioni di Lagrange [56]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = F_{q_i} \quad (2.1)$$

dove q_i sono le coordinate generalizzate, F_{q_i} le forze generalizzate e $i \geq 1$ l'indice del grado di libertà. Le espressioni di T e U per ciascun componente del rotore sono state definite dal modello di Lalanne e Ferraris [59], utilizzando la teoria della trave di Bernoulli [63], che a differenza del modello di Jeffcott-Laval [9], tiene in considerazione anche la massa del disco.

2.1.1 Disco rigido

Per descrivere il comportamento dinamico di un rotore, un aspetto fondamentale è l'analisi del disco rigido, che viene generalmente trattato come un corpo rigido con un centro di massa G e un momento di inerzia rispetto agli assi principali. Il sistema di coordinate per il disco è composto da un sistema fisso (O, X, Y, Z) e un sistema rotante (G, x, y, z) , che ruota con il disco attorno al proprio asse con velocità angolare Ω . Le equazioni del moto per il disco rigido possono essere derivate applicando il principio di Lagrange, che richiede di calcolare l'energia cinetica, l'energia potenziale e le forze non conservative.

L'energia cinetica del disco nel suo centro di massa G si ottiene attraverso la velocità istantanea di R relativa a R_0 , espressa in R :

$$\omega_{R/R_0} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\Psi} \cos \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi \\ \dot{\phi} + \dot{\Psi} \sin \theta \\ \dot{\Psi} \cos \theta \cos \phi + \dot{\theta} \sin \phi \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Inserendo l'espressione di ω nell'energia cinetica T_D e considerando che il disco è simmetrico ($I_{Dx} = I_{Dz}$), si ottiene la seguente espressione per il disco:

$$T_D = \frac{1}{2} M_D (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} (I_{Dx} (\dot{\theta}^2 + \dot{\Psi}^2) + I_{Dy} (\dot{\phi}^2 + 2\dot{\phi} \dot{\Psi} \theta)) \quad (2.3)$$

2.1.2 Albero Flessibile

L'albero flessibile contribuisce in modo significativo al comportamento dinamico del rotore. L'energia cinetica (T_s) di un albero flessibile è espressa come:

$$T_s = \frac{\rho S}{2} \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{\rho I}{2} \int_0^L (\dot{\theta}^2 + \dot{\Psi}^2) dy + \rho I L \dot{\phi}^2 \quad (2.4)$$

dove ρ è la densità del materiale, S l'area della sezione trasversale, I il momento di inerzia della sezione, e L la lunghezza dell'albero. Il primo termine rappresenta l'energia cinetica dovuta alla flessione, mentre il secondo riguarda l'inerzia rotatoria.

L'energia elastica (U) dell'albero è data da:

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 dy \quad (2.5)$$

dove E è il modulo di Young e I il momento di inerzia della sezione.

2.1.3 Elementi di Smorzamento: Cuscinetti e Sigilli

I cuscinetti e i sigilli giocano un ruolo cruciale nel limitare l'attrito e le vibrazioni del rotore. Nella modellazione, i cuscinetti sono rappresentati come elementi molla-smorzatore, caratterizzati da rigidità e smorzamento viscoso. Il lavoro virtuale

(δW) per i cuscinetti è espresso come:

$$\delta W = -k_{xx}u\delta u - k_{zz}w\delta w - c_{xx}\dot{u}\delta u - c_{zz}\dot{w}\delta w \quad (2.6)$$

dove k_{xx} e k_{zz} rappresentano i coefficienti di rigidità, mentre c_{xx} e c_{zz} indicano i coefficienti di smorzamento viscoso.

Questi componenti possono introdurre fenomeni non lineari derivanti dall'interazione rotore-fluido, come il whirl e il whip dell'olio. A partire da qui, i coefficienti definiti (k_{xx} , k_{zz} , c_{xx} , c_{zz}) saranno utilizzati come acronimi per evitare ripetizioni, mantenendo chiarezza e sintesi.

2.2 Modello del Rotore di Jeffcott

Il modello del rotore di Jeffcott [9] rappresenta una delle più semplici e consolidate approssimazioni per l'analisi della dinamica dei rotor. Esso considera un sistema in cui l'albero è flessibile e privo di massa, mentre il disco è rigido e concentra l'intera massa del sistema. Tale formulazione consente di studiare i fenomeni dinamici fondamentali del rotore attraverso equazioni semplificate ma rappresentative.

Nel modello, il disco è posizionato al centro dell'albero e si assume che possa traslare nel piano trasversale senza ruotare in seguito alla flessione dell'albero stesso. I cuscinetti sono idealizzati come infinitamente rigidi, eliminando così il contributo dinamico dei supporti. Inoltre, si trascurano gli effetti della forza peso per concentrarsi esclusivamente sui fenomeni di natura dinamica.

Un aspetto rilevante del modello riguarda la possibilità che il baricentro G del disco non coincida con il centro geometrico C , ossia il punto di connessione tra albero e disco. In tal caso, si definisce un'eccentricità e , corrispondente alla distanza tra G e C , come illustrato in Fig. 2.1. L'eccentricità introduce una forza centrifuga dipendente dalla velocità di rotazione Ω , che può influenzare in modo significativo il comportamento dinamico del sistema, specialmente in prossimità delle frequenze di risonanza.

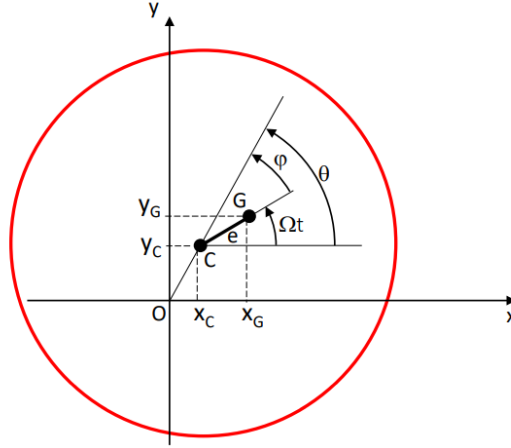


Figura 2.1: Rotore di Jeffcott con la posizione del baricentro G rispetto alla posizione del centro del disco.

Durante il moto, il sistema può essere descritto mediante le seguenti equazioni di equilibrio:

$$\begin{cases} -m\ddot{x}_G - c\dot{x}_c - kx_c = 0 \\ -m\ddot{y}_G - c\dot{y}_c - ky_c = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

dove si ha uno spostamento del baricentro dovuto alla deformazione dell'albero:

$$\begin{cases} x_G = x_C + e \cos(\Omega t) \\ y_G = y_C + e \sin(\Omega t) \end{cases}$$

Il baricentro G , ruotando attorno a C , genera una forza di inerzia, mentre C è responsabile delle forze elastiche di richiamo e delle azioni di smorzamento, le quali tendono a riportare il sistema nella configurazione indeformata.

Sostituendo le espressioni per x_G e y_G nelle equazioni del moto, si ottiene:

Sostituendo le espressioni per x_G e y_G , si ottiene:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_c + c\dot{x}_c + kx_c = me\Omega^2 \cos(\Omega t) \\ m\ddot{y}_c + c\dot{y}_c + ky_c = me\Omega^2 \sin(\Omega t) \end{cases} \quad (2.8)$$

In queste equazioni, m rappresenta la massa del disco e k la rigidezza dell'albero, calcolata come

$$k = \frac{48EI_x}{L^3} \quad (2.9)$$

dove I_x è il momento di inerzia della sezione circolare cava dell'albero, pari a

$$I_x = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64} \quad (2.10)$$

e E è il modulo elastico del materiale. Questo sistema di equazioni differenziali disaccoppiate e non omogenee è matematicamente analogo a quello di un sistema a un grado di libertà (1DOF) sottoposto a una forza armonica. Tuttavia, a differenza di un sistema forzato esternamente, qui la forzante è di natura interna, dipendendo direttamente dalle caratteristiche geometriche e dinamiche del sistema.

In particolare, l'eccitazione parametrica è influenzata dall'eccentricità e e dalla velocità di rotazione Ω . La soluzione stazionaria del sistema per un'eccentricità non nulla è espressa come:

$$\begin{cases} x_C(t) = A \cos(\Omega t + \phi_x) \\ y_C(t) = B \sin(\Omega t + \phi_y) \end{cases} \quad (2.11)$$

La simmetria del sistema consente di assumere $A = B = R$ e lo sfasamento delle due componenti di spostamento, x_C e y_C , rispetto alle due forzanti deve essere lo stesso:

$$\begin{cases} x_C(t) = R \cos(\Omega t + \phi) = R \cos(\theta) \\ y_C(t) = R \sin(\Omega t + \phi) = R \sin(\theta) \end{cases} \quad (2.12)$$

Si osserva che la traiettoria descritta dal centro C del rotore risulta essere di natura circolare, mentre l'angolo di fase ϕ rappresenta l'angolo compreso tra i segmenti \overline{OC} e \overline{CG} . Il moto risultante, illustrato in Fig. 2.2, viene definito come *precessione sincrona*. In questa configurazione, il baricentro G del rotore percorre una traiettoria circolare attorno al punto C , il quale, a sua volta, ruota con velocità angolare costante attorno all'origine O . Durante tale fenomeno dinamico, l'albero subisce deformazioni elastiche, con la deformata che ruota sincronamente rispetto al moto del centro C .

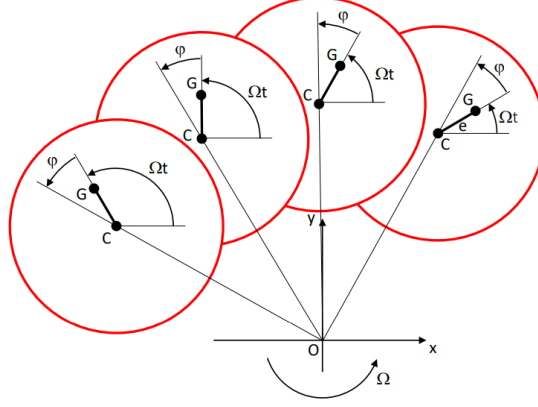


Figura 2.2: Rappresentazione schematica del fenomeno di precessione sincrona.

Questa configurazione implica che ogni punto situato internamente rispetto all'asse di rotazione dell'albero rimane compresso, mentre i punti esterni risultano tesi. Di conseguenza, le fibre dell'albero mantengono una distribuzione costante delle tensioni, evitando fluttuazioni cicliche che potrebbero indurre fenomeni di fatica strutturale. La simmetria del moto garantisce, quindi, che le sollecitazioni siano distribuite uniformemente, preservando l'integrità e la durabilità del sistema rotante.

Le equazioni del moto possono essere normalizzate rispetto alla massa m per ricavare i valori di R e ϕ :

$$\begin{cases} \ddot{x}_C + 2\zeta\omega_n\dot{x}_C + \omega_n^2 x_C = e\Omega^2 \cos(\Omega t) \\ \ddot{y}_C + 2\zeta\omega_n\dot{y}_C + \omega_n^2 y_C = e\Omega^2 \sin(\Omega t) \end{cases} \quad (2.13)$$

con la frequenza naturale $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ e lo smorzamento $\zeta = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2\sqrt{mk}} = \frac{c}{2m\omega_n}$. Dalla prima equazione vengono ricavate l'ampiezza R e la fase ϕ del sistema ad un grado di libertà, di cui sono presentate le rispettive Eq. (2.7) e (2.8), utilizzando la seguente notazione complessa:

$$\left(-\Omega^2 + i2\zeta\omega_n\Omega + \omega_n^2\right) \bar{x}_C e^{i\Omega t} = e\Omega^2 e^{i\Omega t} \quad (2.14)$$

$$R = \frac{e\Omega^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \Omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2\Omega^2}} \quad (2.7)$$

$$\tan(\phi) = \frac{\text{Im}(\bar{x}_C)}{\text{Re}(\bar{x}_C)} = -\frac{2\zeta\omega_n\Omega}{\omega_n^2 - \Omega^2} \quad (2.8)$$

Pertanto, se la velocità di rotazione Ω è pari alla pulsazione naturale ω_n del sistema, si verifica la condizione di risonanza e si ottiene l'espressione caratteristica del fenomeno:

$$R = \frac{e}{2\zeta} \quad (2.15)$$

L'ampiezza massima della risposta si ottiene a una velocità di rotazione Ω_{cr} , detta velocità critica, il cui valore si determina imponendo la condizione $\frac{dR}{d\Omega} = 0$.

In queste condizioni, la velocità critica Ω_c del sistema risulta:

$$\Omega_c = \sqrt{\frac{48EI_x}{mL^3}} \quad (2.16)$$

Questa relazione consente di effettuare un'analisi qualitativa dei parametri che influenzano la velocità critica del rotore, evidenziando come le variazioni di tali parametri incidano sulla velocità Ω_c . L'analisi sviluppata per questa configurazione può inoltre essere estesa a configurazioni diverse, in cui la posizione del rotore rispetto ai cuscinetti sia modificata.

Per velocità subcritiche ($\Omega < \Omega_c$), il sistema presenta una fase pressoché nulla, con il segmento di eccentricità \overline{CG} allineato a \overline{OC} e collocato esternamente rispetto a quest'ultimo. In condizioni di velocità supercritiche ($\Omega > \Omega_c$), l'allineamento persiste, ma la configurazione si inverte: il segmento \overline{OC} risulta ora contenuto all'interno di \overline{CG} . Per valori elevati di velocità angolare ($\Omega \rightarrow \infty$), il fenomeno noto come *autocentramento* porta il baricentro G a convergere progressivamente verso l'origine O , eliminando l'effetto dell'eccentricità.

In prossimità della velocità critica, il sistema raggiunge un massimo di ampiezza, descritto dalla traiettoria circolare percorsa dal centro C del rotore con velocità Ω . Durante questo moto, detto di *precessione sincrona*, il baricentro G ruota attorno a C alla stessa velocità con cui C ruota attorno all'origine. La configurazione deformata dell'albero ruota alla stessa velocità, mantenendo inalterata la distribuzione delle tensioni interne e prevenendo problematiche di fatica.

2.2.1 Approccio dei coefficienti di influenza

Per il calcolo delle velocità critiche del rotore, è possibile utilizzare un approccio alternativo rispetto alla scrittura diretta delle equazioni del moto. Tale metodo considera il rotore come una trave elastica sottoposta a carichi trasversali concentrati, applicati in corrispondenza dei dischi. Ciascun carico concentrato è dato da:

$$F_j = \omega^2 m_j y_j \quad (2.17)$$

e rappresenta la forza centrifuga agente sulla massa j -esima, posta a distanza y_j dall'asse di rotazione, con velocità angolare ω . Ogni carico concentrato n -esimo produce uno spostamento nel punto j -esimo pari a:

$$y_j = \alpha_{jn} F_n \quad (2.18)$$

dove α_{jn} è il *coefficiente di influenza*, il quale rappresenta lo spostamento nel punto j causato da un carico unitario applicato al punto n . La deformazione totale nel punto j , derivante dall'applicazione simultanea di tutti i carichi N , è ottenibile tramite sovrapposizione degli effetti:

$$y_j = \sum_{n=1}^N \alpha_{jn} \omega^2 m_n y_n \quad (2.19)$$

che si riscrive come:

$$\frac{1}{\omega^2} y_j - \sum_{n=1}^N \alpha_{jn} m_n y_n = 0 \quad (2.20)$$

Applicando tale equazione a ciascun punto j -esimo da 1 a N , si ottiene un sistema di N equazioni nelle incognite y_j :

$$\begin{cases} (\alpha_{11} m_1 - \frac{1}{\omega^2}) y_1 + \dots + \alpha_{1N} m_N y_N = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{N1} m_1 y_1 + \dots + (\alpha_{NN} m_N - \frac{1}{\omega^2}) y_N = 0 \end{cases} \quad (2.21)$$

Dal punto di vista fisico, la configurazione statica deformata dell'albero è in equilibrio indifferente sotto l'azione delle forze centrifughe critiche dei dischi. Di conseguenza, si impone che il determinante della matrice dei coefficienti del sistema sia nullo, condizione che permette di calcolare gli autovalori della matrice:

$$[A] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} m_1 & \dots & \alpha_{1N} m_N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{N1} m_1 & \dots & \alpha_{NN} m_N \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Gli autovalori di $[A]$ sono gli inversi dei quadrati delle velocità critiche del rotore $\frac{1}{\omega_n^2}$. Questo approccio risulta particolarmente vantaggioso, in quanto richiede la conoscenza dei coefficienti di influenza, spesso disponibili, senza necessità di calcolare le rigidità dei singoli tratti dell'albero.

2.2.2 Effetto dei supporti

Fino a questo punto, la rigidità dell'albero è stata rappresentata genericamente con la notazione k , senza approfondire la sua dipendenza dai parametri geometrici e materiali specifici dell'albero, come la sezione trasversale, il materiale costitutivo e la lunghezza complessiva.

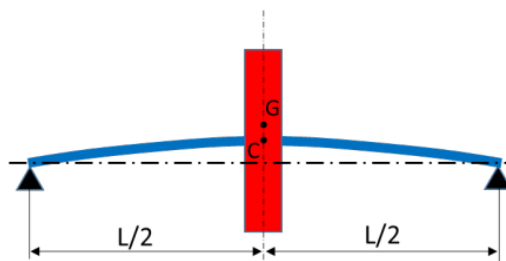


Figura 2.3: Configurazione analizzata del sistema rotante.

Considerando la configurazione mostrata in Fig. 2.3, la rigidità trasversale pertinente all'equazione di equilibrio può essere definita come il rapporto tra una forza trasversale applicata nel baricentro del disco e il conseguente spostamento trasversale indotto.

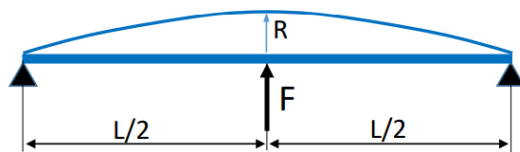


Figura 2.4: Modellazione dell'albero come trave, soggetto a una forza F applicata in mezziera, per l'analisi delle deformazioni trasversali.

L'analisi del comportamento del sistema può dunque essere ricondotta al calcolo della deformazione di una trave sottoposta a una forza concentrata F applicata nel punto medio come illustrato in Fig.2.4. Utilizzando la teoria delle travi e il modello di trave di Eulero-Bernoulli, lo spostamento trasversale R causato dalla deformazione si esprime come:

$$R = \frac{FL^3}{48EJ}, \quad (2.23)$$

dove E rappresenta il modulo di Young e J il momento d'inerzia della sezione. Da tale relazione si può ricavare l'espressione per la rigidità k :

$$k = \frac{F}{R} = \frac{48EJ}{L^3}. \quad (2.24)$$

Questa espressione, sostituita all'interno delle equazioni di equilibrio (Eq. 2.6), consente di ottenere la velocità critica del rotore, data da:

$$\Omega_C = \omega_n = \sqrt{\frac{48EJ}{mL^3}}. \quad (2.25)$$

Questa formulazione permette un'analisi parametrica qualitativa, evidenziando i parametri chiave che influenzano la velocità critica Ω_C del rotore e valutando come la loro variazione incida sul comportamento del sistema. Sebbene l'analisi si riferisca alla configurazione specifica considerata, essa può essere estesa a situazioni in cui la posizione del rotore rispetto ai cuscinetti differisca.

Nel modello classico di Jeffcott, si assume che l'albero sia vincolato tramite supporti infinitamente rigidi. Tuttavia, nella realtà, i cuscinetti possiedono una rigidità finita che incide sensibilmente sulla dinamica del sistema, come illustrato in Fig. 2.5.

Per incorporare tale rigidità, si ricorre a un'estensione del modello di Jeffcott che tiene conto dell'elasticità dei supporti dell'albero, assumendo che essi non siano infinitamente rigidi. Inizialmente, si ipotizza che i cuscinetti siano isotropi, ossia che la rigidità nel piano (x, y) sia indipendente dalla direzione considerata, con $k_x = k_y$.

In questa estensione, il sistema è modellato come il rotore originale, con l'aggiunta di molle (in direzione x e y) di rigidità pari a $\frac{k_x}{2}$ e $\frac{k_y}{2}$, posizionate tra i cuscinetti e gli estremi dell'albero. Il sistema si comporta, quindi, come un disco collegato all'albero (di massa trascurabile) tramite una molla di rigidità k , a sua volta connessa ai supporti tramite molle di rigidità $\frac{k_x}{2}$ e $\frac{k_y}{2}$. Le molle dei supporti sono disposte in parallelo, con rigidità che si sommano, mentre le rigidità dei cuscinetti e dell'albero sono in serie, portando a una rigidità equivalente, espressa dalla seguente relazione:

$$k_{eq} = \frac{k k_x}{k + k_x} \quad (2.26)$$

dove si è assunto che $k_x = k_y$. La presenza di cuscinetti non infinitamente rigidi comporta una riduzione della rigidità equivalente, abbassando di conseguenza la velocità critica del sistema. Nonostante ciò, il moto del sistema mantiene una traiettoria circolare di precessione sincrona dei punti G e C , come nel modello di Jeffcott "puro".

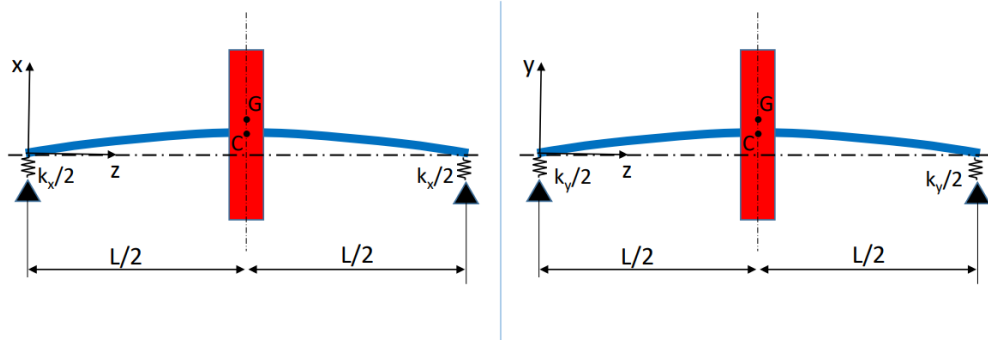


Figura 2.5: Configurazione del rotore di Jeffcott con supporti elastici, che include l'effetto della rigidità dei cuscinetti.

Nel caso in cui la rigidità dei supporti risulti anisotropa, ossia con $k_x \neq k_y$, si riflette la distribuzione radiale del carico sui cuscinetti, che tende ad essere maggiore lungo l'asse x . In tale configurazione, l'albero è considerato infinitamente rigido, e il disco è trattato come massa concentrata, senza considerare lo smorzamento. Con $k_x < k_y$, il centro C risulta collegato agli assi x e y tramite molle di rigidità differente, e le equazioni del moto assumono la forma:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_c + k_x x_c = m\epsilon\Omega^2 \cos(\Omega t) \\ m\ddot{y}_c + k_y y_c = m\epsilon\Omega^2 \sin(\Omega t) \end{cases} \quad (2.27)$$

In questa configurazione, le equazioni omogenee non risultano identiche, in quanto dipendono da rigidità diverse, portando a risposte di ampiezza diversa per ciascuna direzione. Con smorzamento nullo, la fase è anch'essa nulla, e la risposta si esprime come:

$$\begin{cases} x_c(t) = A \cos(\Omega t) \\ y_c(t) = B \sin(\Omega t) \end{cases} \quad (2.28)$$

con una traiettoria ellittica di semiassi A e B , descritta dall'equazione:

$$\frac{x_c^2}{A^2} + \frac{y_c^2}{B^2} = 1 \quad (2.29)$$

Sostituendo l'espressione nelle equazioni del moto, si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} -m\Omega^2 A \cos(\Omega t) + k_x A \cos(\Omega t) = m\epsilon\Omega^2 \cos(\Omega t) \\ -m\Omega^2 B \sin(\Omega t) + k_y B \sin(\Omega t) = m\epsilon\Omega^2 \sin(\Omega t) \end{cases} \quad (2.30)$$

Da cui le ampiezze (semiassi) risultano essere:

$$\begin{cases} A = \frac{e\Omega^2}{k_x - m\Omega^2} \\ B = \frac{e\Omega^2}{k_y - m\Omega^2} \end{cases} \quad (2.31)$$

Poiché $e > 0$, il segno delle ampiezze A e B dipende dalla velocità di rotazione Ω , portando ai seguenti regimi di risposta:

- Per $\Omega < \sqrt{\frac{k_x}{m}}$, si ha $A > 0$ e $B > 0$. In questo caso, il centro C descrive un'ellisse in senso antiorario, mentre il baricentro G ruota attorno a C nello stesso verso, rimanendo sempre esterno all'ellisse.
- Per $\sqrt{\frac{k_x}{m}} < \Omega < \sqrt{\frac{k_y}{m}}$, si ha $A < 0$ e $B > 0$. In questo intervallo, il centro C percorre l'ellisse in senso orario, mentre il baricentro G ruota attorno a C in senso opposto, attraversando sia l'interno che l'esterno dell'ellisse. Questo comporta la cessazione del moto di precessione sincrona, con potenziali problematiche legate alla fatica del materiale.
- Per $\Omega > \sqrt{\frac{k_y}{m}}$, si ha $A < 0$ e $B < 0$. In tale regime, il centro C percorre l'ellisse in senso orario, con il baricentro G che ruota attorno a C nello stesso verso, rimanendo sempre all'interno dell'ellisse.

2.2.3 Effetto del momento di inerzia

In questo studio, l'effetto del momento d'inerzia del disco rispetto all'asse di flessione è stato inizialmente trascurato, ipotizzando che il disco potesse essere rappresentato come una massa concentrata nel baricentro G , distante e dal centro C del rotore. Sebbene tale approssimazione risulti appropriata per configurazioni con supporto semplice, dove le rotazioni intorno all'asse x sono trascurabili, essa si dimostra inadeguata per configurazioni a sbalzo, dove il disco può essere soggetto a rotazioni significative, come illustrato in Fig. 2.6.

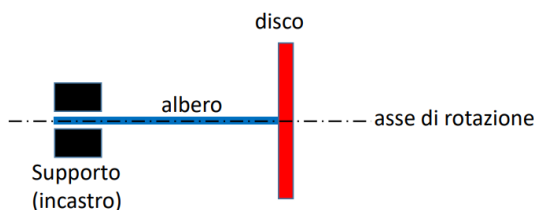


Figura 2.6: Configurazione schematica di un rotore con disco a sbalzo.

Per considerare l'effetto del momento d'inerzia, si impiega il metodo dei coefficienti di influenza, il quale permette di descrivere gli spostamenti y e le rotazioni ϕ

del disco in funzione delle forze F e dei momenti M come mostrato in Fig. 2.7. Le relazioni risultanti sono le seguenti:

$$y = \alpha_{yF}F + \alpha_{yM}M, \quad \phi = \alpha_{\phi F}F + \alpha_{\phi M}M,$$

dove la forza centrifuga F è funzione della massa m del disco e della distanza y dall'asse di rotazione:

$$F = m\Omega^2 y.$$

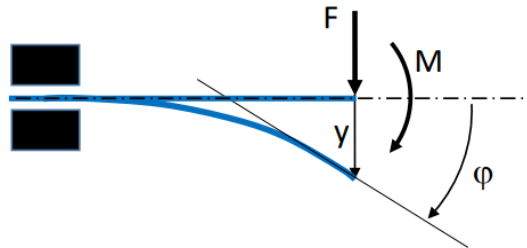


Figura 2.7: Schema di un rotore a sbalzo con forza centrifuga e momento flettente.

Il momento flettente M si calcola integrando il contributo della forza infinitesima $dF = dm\Omega^2 y$ per il proprio braccio rispetto all'asse di rotazione:

$$M = \int xy\Omega^2 dm.$$

Sotto l'ipotesi di piccole rotazioni ($\phi \approx x/y$), il momento flettente assume la forma:

$$M = \Omega^2 \phi \int y^2 dm = \Omega^2 \phi J_x,$$

dove J_x rappresenta il momento d'inerzia del disco rispetto all'asse x .

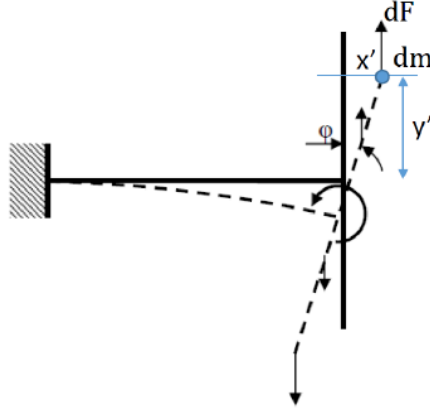


Figura 2.8: Effetto del momento d'inerzia su un disco sottile.

Sostituendo F e M nelle equazioni precedenti, si ottiene il seguente sistema omogeneo:

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{m\Omega^2 L^3}{3EI_x}\right) y + \frac{J_x \Omega^2 L^2}{2EI_x} \phi = 0, \\ \frac{m\Omega^2 L^2}{2EI_x} y - \left(1 + \frac{J_x \Omega^2 L}{EI_x}\right) \phi = 0. \end{cases}$$

La condizione di esistenza di una soluzione non banale impone che il determinante della matrice dei coefficienti sia nullo. Introducendo la velocità critica Ω_{c0} in assenza di momento d'inerzia, definita come:

$$\Omega_{c0} = \sqrt{\frac{3EI_x}{mL^3}},$$

si ottiene la relazione per la velocità critica Ω_c del sistema con inerzia:

$$\left(1 - \frac{\Omega^2}{\Omega_{c0}^2}\right) \left(1 + \frac{J_x \Omega^2 L}{EI_x}\right) + \frac{3J_x \Omega^4 L}{4EI_x \Omega_{c0}^2} = 0.$$

Risolvendo questa equazione, si può determinare la velocità critica normalizzata rispetto al sistema senza inerzia. L'analisi evidenzia due limiti significativi:

- Per $J_x = 0$, il sistema si riduce al modello di Jeffcott puro, dove $\Omega_c = \Omega_{c0}$.
- Per $J_x \rightarrow \infty$, la velocità critica raddoppia, raggiungendo il valore limite $2\Omega_{c0}$.

Questi risultati mostrano che il momento d'inerzia del disco esercita un effetto di irrigidimento, incrementando la velocità critica. Il modello di Jeffcott è quindi idoneo per rotori operanti in regime subcritico, dove fornisce stime conservative. Tuttavia, per rotori destinati a funzionare in regime supercritico, l'assenza di

considerazione dell'inerzia porta a sottostime della velocità critica, con implicazioni sul comportamento dinamico previsto.

2.2.4 Effetto giroscopico

Con l'aumento delle velocità di rotazione, gli effetti giroscopici assumono un ruolo preponderante nel comportamento dinamico dei sistemi rotanti. In questa sezione, si analizza l'influenza dell'effetto giroscopico sulle velocità critiche di un rotore, adottando un modello che considera un rotore rigido montato su supporti flessibili di rigidità diverse k_1 e k_2 , rispettivamente a sinistra e a destra.

Il rotore, di lunghezza complessiva $L_b = a + b$, è caratterizzato da un disco di lunghezza L con momento d'inerzia non trascurabile. Il baricentro del sistema si trova a una distanza a dal supporto sinistro e b da quello destro, come schematizzato in Fig. 2.9. Sebbene i supporti siano considerati isotropi, le rigidità elastiche k_1 e k_2 sono differenti ($k_1 \neq k_2$).

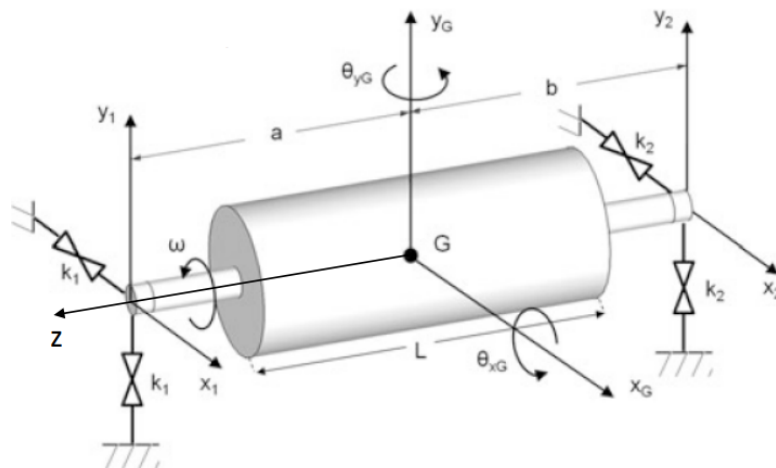


Figura 2.9: Schema di un rotore rigido su supporti flessibili con rigidità k_1 e k_2 . Rif.[64]

Durante la rotazione con velocità angolare Ω , il baricentro G del rotore si muove, generando spostamenti $x_1, x_2, y_1,$ e y_2 nei supporti. Questi spostamenti sono legati alle variabili geometriche e agli angoli di inclinazione θ_{xG} e θ_{yG} secondo le seguenti relazioni, dedotte approssimando la tangente all'angolo:

$$\begin{cases} x_1 = x_G + a\theta_{yG}, \\ x_2 = x_G - b\theta_{yG}, \\ y_1 = y_G - a\theta_{xG}, \\ y_2 = y_G + b\theta_{xG}. \end{cases} \quad (2.32)$$

A causa dell'eccentricità del disco e della rotazione del rotore, si genera un'accelerazione del baricentro G , che a sua volta determina una forza d'inerzia. Assumendo l'albero infinitamente rigido e i supporti elastici, le forze elastiche nei supporti risultano proporzionali agli spostamenti. Le equazioni di equilibrio dinamico lungo gli assi x e y si esprimono come:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_G + k_1x_1 + k_2x_2 = 0, \\ m\ddot{y}_G + k_1y_1 + k_2y_2 = 0. \end{cases} \quad (2.33)$$

Tali equazioni descrivono il comportamento dinamico del sistema, evidenziando l'interazione tra la massa del rotore, le forze elastiche nei supporti, e gli effetti giroscopici indotti dalla velocità angolare Ω . Questa formulazione consente di valutare il ruolo dei parametri geometrici e delle rigidità dei supporti sulla stabilità e sulle velocità critiche del sistema.

Sostituendo nelle equazioni le espressioni di x_1 , x_2 , y_1 , e y_2 , si ottiene:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_G + k_1(x_G + a\theta_{yG}) + k_2(x_G - b\theta_{yG}) = 0 \\ m\ddot{y}_G + k_1(y_G - a\theta_{xG}) + k_2(y_G + b\theta_{xG}) = 0 \end{cases} \quad (2.34)$$

Raccogliendo i termini, si ottiene:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_G + (k_1 + k_2)x_G - (k_2b - k_1a)\theta_{yG} = 0 \\ m\ddot{y}_G + (k_1 + k_2)y_G - (k_2b - k_1a)\theta_{xG} = 0 \end{cases} \quad (2.35)$$

Indicando per comodità $\beta = k_1 + k_2$ come rigidità traslazionale e $\gamma = k_2b - k_1a$ come rigidità alla rotazione, si ha:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_G + \beta x_G - \gamma\theta_{yG} = 0 \\ m\ddot{y}_G + \beta y_G - \gamma\theta_{xG} = 0 \end{cases} \quad (2.36)$$

Queste sono le prime due equazioni di equilibrio di un sistema con 4 gradi di libertà (traslazioni e rotazioni del baricentro G). Considerando ora l'equilibrio alla rotazione attorno agli assi x e y , occorre includere i termini di inerzia flessionale, i momenti generati dalle reazioni elastiche dei supporti e i momenti giroscopici, generati dalla rotazione perturbata del sistema:

$$\begin{cases} J_t \ddot{\theta}_{xG} - k_1 a y_1 + k_2 b y_2 + M_x = 0 \\ J_t \ddot{\theta}_{yG} - k_1 a x_1 - k_2 b x_2 + M_y = 0 \end{cases} \quad (2.37)$$

I momenti giroscopici si esprimono come:

$$M = J_p \Omega \times \dot{\theta} \quad (2.38)$$

dove J_p è il momento d'inerzia polare (inerzia rispetto all'asse di rotazione Ω) e il momento giroscopico risulta proporzionale alla velocità angolare Ω e alla velocità angolare perturbativa. Considerando il caso specifico, il momento attorno all'asse x è determinato dal prodotto vettoriale di Ω e $\dot{\theta}_{yG}$:

$$M_x = J_p \Omega \dot{\theta}_{yG} \quad (2.39)$$

analogamente, per l'asse y :

$$M_y = -J_p \Omega \dot{\theta}_{xG} \quad (2.40)$$

Sostituendo questi momenti nelle equazioni di equilibrio rotazionali e sostituendo le espressioni di x_1 , x_2 , y_1 , y_2 , si ottiene:

$$\begin{cases} J_t \ddot{\theta}_{xG} + J_p \Omega \dot{\theta}_{yG} + \gamma y_G + \epsilon \theta_{xG} = 0 \\ J_t \ddot{\theta}_{yG} - J_p \Omega \dot{\theta}_{xG} - \gamma x_G + \epsilon \theta_{yG} = 0 \end{cases} \quad (2.41)$$

dove si è posto $\epsilon = k_1 a^2 + k_2 b^2$. In forma matriciale, il sistema dinamico complessivo si scrive:

$$[m]\{\ddot{x}\} + \Omega[G]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{0\} \quad (2.42)$$

con $[m]$ e $[k]$ rispettivamente matrici di massa (diagonale) e rigidità (simmetrica), e $[G]$ matrice giroscopica, responsabile dell'accoppiamento rotazionale nelle equazioni di equilibrio. La matrice $[k]$, tramite i termini γ , accoppia tutte le equazioni di equilibrio, rendendo il sistema non disaccoppiabile.

Caso Simmetrico

Si consideri un sistema in cui $a = b = \frac{L_b}{2}$ e $k_1 = k_2 = k$, con il quale si ottiene:

$$\gamma = k_2 b - k_1 a = kb - kb = 0$$

In questa configurazione, la matrice di rigidità assume una struttura diagonale:

$$[k] = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{bmatrix}$$

In tal modo, le equazioni di equilibrio per le traslazioni risultano completamente disaccoppiate tra loro e rispetto alle equazioni di equilibrio per la rotazione. Queste ultime rimangono tuttavia accoppiate fintantoché $J_p \neq 0$.

Essendo le equazioni di equilibrio alla traslazione disaccoppiate, le pulsazioni naturali dei modi flessionali lungo gli assi x e y risultano calcolabili. Dato che $\gamma = 0$, le equazioni si presentano formalmente identiche e si ottiene quindi:

$$\omega_{nx} = \omega_{ny} = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

Poiché la pulsazione critica Ω_c è definita come:

$$\Omega_c^2 = \omega_n^2$$

si ottiene:

$$\Omega_{c1} = \sqrt{\frac{2k}{m}}, \quad \Omega_{c2} = -\sqrt{\frac{2k}{m}}$$

Osservando che la velocità critica può assumere segno sia positivo che negativo, si nota come tale velocità sia pari, in modulo, alla pulsazione naturale. Essendo presenti due equazioni formalmente identiche, le velocità critiche risultano due, corrispondenti ai valori sopra calcolati. Un valore positivo di velocità critica implica un moto di precessione concorde con la velocità di rotazione (forward whirl), mentre un valore negativo rappresenta un moto di precessione discorde (backward whirl). Tale comportamento si distingue da quello del rotore di Jeffcott, in cui l'eccentricità permette unicamente un moto forward whirl.

Le equazioni di equilibrio per la rotazione, essendo accoppiate, costituiscono un sistema a 2-DOF. Le equazioni sono espresse come segue:

$$\begin{cases} J_t \ddot{\theta}_{xG} + J_p \Omega \dot{\theta}_{yG} + \delta \theta_{xG} = 0 \\ J_t \ddot{\theta}_{yG} - J_p \Omega \dot{\theta}_{xG} + \delta \theta_{yG} = 0 \end{cases}$$

Si ipotizza una soluzione esponenziale nella forma:

$$\theta_{xG}, \theta_{yG} = \Theta_{xG}, \Theta_{yG} e^{st}$$

Sostituendo tale soluzione nelle equazioni e raccogliendo i termini comuni, si ottiene la struttura formale del sistema dinamico, risultando utile sia per l'analisi modale sia per l'identificazione delle frequenze naturali e dei modi di vibrazione.

Il polinomio caratteristico associato a questa configurazione ammette le seguenti radici:

$$\begin{cases} \omega_{nC1} = -\frac{P f_{c0}}{2} + \sqrt{\left(\frac{P f_{c0}}{2}\right)^2 + 1} > 0 \\ \omega_{nC4} = -\frac{P f_{c0}}{2} - \sqrt{\left(\frac{P f_{c0}}{2}\right)^2 + 1} < 0 \\ \omega_{nC2} = \frac{P f_{c0}}{2} - \sqrt{\left(\frac{P f_{c0}}{2}\right)^2 + 1} < 0 \\ \omega_{nC3} = \frac{P f_{c0}}{2} + \sqrt{\left(\frac{P f_{c0}}{2}\right)^2 + 1} > 0 \end{cases} \quad (3.86)$$

Queste radici rappresentano le quattro pulsazioni critiche del sistema in presenza di una velocità di rotazione non nulla e di un effetto giroscopico significativo (inerzia polare non trascurabile). La rilevanza di tali risultati risiede nella dipendenza delle velocità critiche dei modi conici dalla velocità di rotazione del rotore, a causa della presenza del momento giroscopico. Va ricordato che i modi conici implicano la rotazione del disco, ma non la sua traslazione.

2.2.5 Diagrammi di Campbell

Il diagramma di Campbell è uno strumento analitico fondamentale per lo studio delle dinamiche dei sistemi rotanti, in particolare per esaminare l'evoluzione delle frequenze naturali in funzione della velocità angolare di rotazione. Introdotto per la prima volta nel 1924 da W. Campbell [65], questo diagramma consente di analizzare le interazioni tra le frequenze naturali e la velocità angolare, rappresentando le frequenze naturali ω_{nC} (o la loro normalizzazione $\bar{\omega}_{nC}$) sull'asse delle ordinate e la velocità angolare Ω (o la sua normalizzazione f_{c0}) sull'asse delle ascisse. Tale rappresentazione grafica facilita la comprensione dei fenomeni di forward whirl e backward whirl, fenomeni cruciali per l'analisi del comportamento modale del rotore e per la previsione delle velocità critiche, in cui il sistema entra in risonanza.

Le Figure 2.10 e ?? mostrano rispettivamente i diagrammi relativi al forward whirl e al backward whirl, con le frequenze normalizzate in funzione del parametro P . Nel caso del forward whirl, la bisettrice rappresenta la condizione $\omega_{nC} = \Omega$. Le intersezioni tra questa bisettrice e le curve che descrivono le pulsazioni normalizzate, al variare del parametro P , individuano le velocità critiche Ω_c del sistema. Per il forward whirl, vengono considerate le pulsazioni positive (come 1 e 3), mentre nel caso del backward whirl, si analizzano quelle negative (come 2 e 4). Questi fenomeni sono stati ampiamente studiati in letteratura, come ad esempio nelle opere di Genta [64], che approfondisce la comprensione della dinamica dei rotori e dei fenomeni di precessione nelle macchine rotanti. Un fenomeno rilevante che emerge dall'analisi riguarda l'effetto alternante dei momenti giroscopici. In funzione del segno, questi momenti possono aumentare o ridurre la rigidità apparente del sistema, influenzando direttamente i valori delle pulsazioni naturali. Ad esempio, nel *forward whirl*, la pulsazione 1, se normalizzata, risulta inferiore a 1 a causa

del contributo negativo derivante dal momento giroscopico. Il parametro P gioca un ruolo cruciale nella caratterizzazione del sistema: un valore di $P = 2$ rappresenta un limite asintotico associato al caso di un disco sottile, nel quale il momento d'inerzia polare è il doppio di quello trasversale. Valori superiori a questo limite non possiedono significato pratico, mentre $P = 0$ rappresenta il valore minimo, poiché momenti d'inerzia negativi sono fisicamente impossibili. Inoltre, l'analisi delle velocità critiche del sistema, che dipendono sia dalla rigidità del sistema che dalla distribuzione del momento di inerzia, è essenziale per la progettazione di rotor ad alte prestazioni. L'effetto giroscopico, in particolare, è stato esaminato in numerosi studi, come quello di Genta [64], che mette in evidenza l'influenza delle caratteristiche geometriche e strutturali dei rotor sui fenomeni di risonanza.

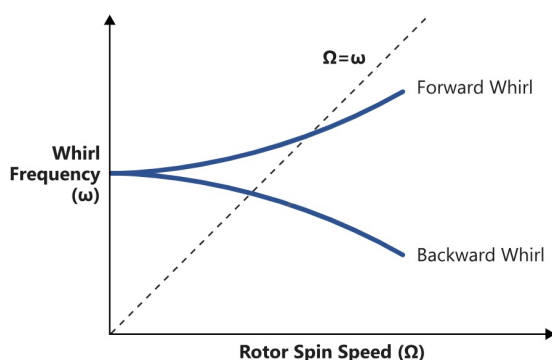


Figura 2.10: Esempio di diagramma di Campbell per il forward e backward whirl. Whirl frequency in funzione della velocità angolare.

La comprensione di tali diagrammi è essenziale per il design di rotor ad alte prestazioni, poiché essi consentono di prevedere con accuratezza le velocità critiche e i fenomeni associati al superamento delle stesse, garantendo così l'affidabilità operativa del sistema.

Capitolo 3

Modello CUF

La *Carrera Unified Formulation* (CUF) rappresenta una metodologia avanzata per l'analisi di strutture complesse, come i rotori, attraverso un approccio unificato alle teorie strutturali. Questa formulazione si basa sull'introduzione di funzioni di espansione capaci di descrivere i campi di spostamento in modo generale, consentendo di superare le limitazioni intrinseche dei modelli classici, quali il modello di trave di Euler-Bernoulli. Tali modelli, infatti, risultano spesso inadeguati per applicazioni industriali avanzate, a causa della loro semplicità teorica e dell'incapacità di rappresentare configurazioni con un elevato numero di variabili.

Nel presente lavoro, la CUF viene applicata per condurre un'analisi termomeccanica avanzata dei rotori, sfruttando il metodo degli elementi finiti. L'obiettivo principale è quello di valutare gli effetti combinati di carichi termici e meccanici sul comportamento dinamico della struttura, attraverso un modello flessibile e accurato, in grado di catturare le interazioni tra stress termici, deformazioni e dinamiche strutturali. La versatilità della CUF permette di adattare il livello di approssimazione in funzione delle esigenze specifiche del problema, rendendola particolarmente idonea a studiare fenomeni complessi che coinvolgono sia il comportamento isotropo che anisotropo delle strutture, costituendo pertanto un efficace strumento di analisi per affrontare le sfide poste dalle applicazioni industriali moderne.

3.1 Nozioni preliminari

Prima di andare ad esplicitare la formulazione CUF, si riprendono i concetti fondamentali tra cui la definizione della geometria dei componenti, delle proprietà del materiale e dei campi di spostamento, di deformazione e di sollecitazione in quanto questi rappresentano il fondamento per comprendere la sudetta metodologia avanzata per lo studio delle strutture. La CUF, infatti, consente di trattare diverse

teorie strutturali in modo integrato, garantendo flessibilità e accuratezza nelle analisi.

Si considera un sistema di coordinate ortogonale (x, y, z) come in figura 3.1, dove x e z rappresentano le direzioni del piano della sezione trasversale, mentre y indica la direzione longitudinale. La superficie A rappresenta la sezione trasversale, mentre la lunghezza L si estende lungo y .

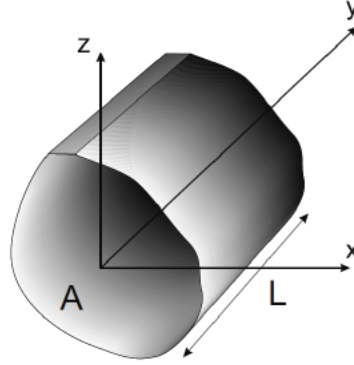


Figura 3.1: Sistema di riferimento della struttura.

Il vettore di spostamento è definito come:

$$u(x, y, z) = [u_x \quad u_y \quad u_z]^T \quad (3.1)$$

Le componenti di deformazione ϵ e sollecitazione σ vengono espresse in termini dei campi trasversale (n) e ortogonale (p) ad A :

$$\sigma_p = [\sigma_{zz} \quad \sigma_{xx} \quad \sigma_{zx}]^T, \quad \epsilon_p = [\epsilon_{zz} \quad \epsilon_{xx} \quad \epsilon_{zx}]^T \quad (3.2)$$

$$\sigma_n = [\sigma_{zy} \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{yy}]^T, \quad \epsilon_n = [\epsilon_{zy} \quad \epsilon_{xy} \quad \epsilon_{yy}]^T \quad (3.3)$$

Le deformazioni in funzione del vettore degli spostamenti sono quindi date da:

$$\epsilon_p = D_p u \quad (3.4)$$

$$\epsilon_n = D_n u = (D_{np} + D_{ny})u \quad (3.5)$$

dove D_p e D_n sono operatori differenziali, definiti come:

$$D_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}, \quad D_{np} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{ny} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Tramite l'utilizzo della legge generalizzata di Hooke, si possono legare le componenti di tensione σ a quelle di deformazione ϵ tramite la matrice di rigidezza elastica C :

$$\sigma = C\epsilon \quad (3.7)$$

Per un materiale generico k , le matrici dei coefficienti del materiale sono:

$$C_{pp}^k = \begin{bmatrix} C_{11}^k & C_{12}^k & C_{14}^k \\ C_{12}^k & C_{22}^k & C_{24}^k \\ C_{14}^k & C_{24}^k & C_{44}^k \end{bmatrix}, \quad C_{pn}^k = \begin{bmatrix} C_{15}^k & C_{16}^k & C_{13}^k \\ C_{25}^k & C_{26}^k & C_{23}^k \\ C_{45}^k & C_{46}^k & C_{43}^k \end{bmatrix}, \quad C_{nn}^k = \begin{bmatrix} C_{55}^k & C_{56}^k & C_{35}^k \\ C_{56}^k & C_{66}^k & C_{36}^k \\ C_{35}^k & C_{36}^k & C_{33}^k \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Nel caso di materiali ortotropi, la presenza di tre piani di simmetria ortogonali permette di ridurre il numero di coefficienti indipendenti delle matrici elastiche a nove, come spiegato in dettaglio da Reddy [66]. Assumendo un sistema di coordinate ortonormale in cui gli assi coincidono con i piani di simmetria del materiale, le matrici dei coefficienti elastici si semplificano nella seguente forma:

$$C_{pp}^k = \begin{bmatrix} C_{11}^k & C_{12}^k & 0 \\ C_{12}^k & C_{22}^k & 0 \\ 0 & 0 & C_{44}^k \end{bmatrix}, \quad C_{pn}^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & C_{13}^k \\ 0 & 0 & C_{23}^k \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_{nn}^k = \begin{bmatrix} C_{55}^k & 0 & 0 \\ 0 & C_{66}^k & 0 \\ 0 & 0 & C_{33}^k \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

I coefficienti delle matrici elastiche dipendono dal modulo di Young, dal rapporto di Poisson e, per materiali compositi, dall'orientamento delle fibre θ , definito dal sistema di coordinate del materiale (1, 2, 3) che può differire dal sistema fisico (x, y, z), come illustrato in Fig. 3.2.

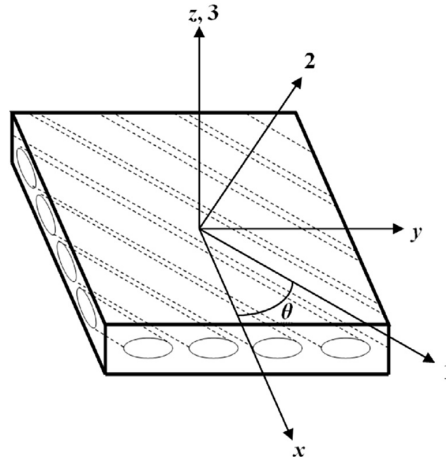


Figura 3.2: Sistema di riferimento fisico e del materiale per un composito.

Questa formulazione consente quindi di rappresentare materiali sia isotropi che compositi, adattando i livelli di dettaglio in base alle caratteristiche strutturali richieste dall'analisi.

L'espressioni dei coefficienti di C_k sono descritte dettagliatamente nella letteratura, ad esempio in [67] e [66]. In alcuni contesti, tuttavia, è necessario applicare una correzione a questi coefficienti per tener conto del fenomeno del "Poisson locking." Questo effetto, che si manifesta nelle approssimazioni numeriche di materiali incomprimibili o di strutture sottili, è stato approfonditamente analizzato da Babuska e Suri [68].

Una metodologia di correzione proposta da Carrera e Brischetto [69] impone che le componenti di tensione normali trasversali, σ_{xx} e σ_{zz} , siano nulle. Di conseguenza, le componenti di deformazione corrispondenti, ϵ_{xx} e ϵ_{zz} , vengono determinate e sostituite nelle espressioni per σ_{yy} e σ_{xy} . Questa tecnica è stata ulteriormente sviluppata da Carrera e collaboratori in vari studi [70, 71, 72].

Per materiali isotropi, dove le proprietà elastiche sono uniformi in tutte le direzioni, le matrici elastiche C_{pp} , C_{pn} e C_{nn} si semplificano ulteriormente:

$$C_{pp} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{11} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}, \quad C_{pn} = C_{np}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & C_{13} \\ 0 & 0 & C_{13} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_{nn} = \begin{bmatrix} C_{55} & 0 & 0 \\ 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix}$$

3.2 Definizione modello CUF

La CUF permette la creazione di modelli di varia complessità, applicabili sia a strutture semplici che a configurazioni composite e laminate, modulando l'accuratezza dell'analisi tramite l'utilizzo di funzioni di espansione gerarchiche. La CUF permette infatti di ottenere teorie strutturali classiche, come quelle di Timoshenko e di Euler-Bernoulli per travi, ma consente anche di estendere le capacità del modello includendo effetti non lineari e modalità di deformazione complesse. Ad esempio, può gestire il warping delle sezioni e deformazioni avanzate dovute a forze torsionali e tagli, rendendola adatta all'analisi di strutture composite.

Nella CUF, il campo di spostamento \mathbf{u} in una struttura viene descritto mediante una serie di espansioni adattando il livello di dettaglio in base alle necessità del problema e della struttura in esame. Il campo di spostamento, ad esempio per una piastra o un guscio, dove una dimensione è trascurabile rispetto alle altre, è definito come:

$$u(x, y, z) = u_\tau(x, y)F_\tau^{1D}(z), \quad \tau = 1, \dots, M \quad (3.10)$$

dove u_τ rappresenta il vettore di spostamento generalizzato, F_τ^{1D} è la funzione di espansione che approssima il campo di spostamento lungo lo spessore della struttura, M è il numero di termini nell'espansione, e il pedice τ ripetuto indica una sommatoria, secondo la notazione di Einstein.

Per un modello di trave, dove due dimensioni sono trascurabili rispetto alla lunghezza, l'equazione semplificata diventa:

$$u(x, y, z) = u_\tau(y)F_\tau^{2D}(x, z), \quad \tau = 1, \dots, M \quad (3.11)$$

In questo caso, $u_\tau(y)$ rappresenta le componenti di spostamento lungo la lunghezza della trave, mentre F_τ^{2D} è la funzione di espansione utilizzata per descrivere la sezione trasversale. Come per le piastre e i gusci, il numero di termini M e la scelta di F_τ nell'espansione è arbitraria e controlla la precisione del modello e può essere adattato per soddisfare i requisiti specifici dell'analisi.

3.2.1 Funzioni di espansione

Nel contesto della CUF, molteplici funzioni di espansione sono state sviluppate per modellare i campi di spostamento in strutture laminate e composite. Due di esse, l'espansione di Taylor (TE) e l'espansione di Lagrange (LE), sono particolarmente utilizzate nei modelli attuali per la loro capacità di gestire strutture multistrato. Le espansioni di Taylor sono ampiamente utilizzate per rappresentare il campo di spostamento con derivazioni rispetto alle coordinate trasversali. Tuttavia, per modelli che richiedono un maggior grado di precisione, le polinomiali di Lagrange possono essere applicate per fornire interpolazioni locali e adattabili alla configurazione strutturale.

3.2.2 TE

I modelli basati sulla TE utilizzano serie polinomiali $x^i z^j$ per il caso monodimensionale e z^j per il bidimensionale, dove i e j sono interi. Questi polinomi descrivono il campo di spostamento lungo la sezione trasversale nelle travi e lungo lo spessore nelle piastre e nei gusci. L'ordine dell'espansione, indicato come N , è un parametro definito dall'utente, ottimizzabile tramite studi di convergenza.

Un campo di spostamento generico per un'espansione di ordine N in TE 1D può essere espresso come segue:

$$\begin{aligned} u_x &= \sum_{N_i=0}^N \left(\sum_{M=0}^{N_i} x^{N_i-M} z^M u_{x \frac{N(N+1)+M+1}{2}} \right) \\ u_y &= \sum_{N_i=0}^N \left(\sum_{M=0}^{N_i} x^{N_i-M} z^M u_{y \frac{N(N+1)+M+1}{2}} \right) \\ u_z &= \sum_{N_i=0}^N \left(\sum_{M=0}^{N_i} x^{N_i-M} z^M u_{z \frac{N(N+1)+M+1}{2}} \right) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Di seguito vengono riportate le espansioni di Taylor 1D rispettivamente per modelli di primo (TE1) , secondo (TE2) e terzo ordine (TE3):

$$\begin{aligned} u_x &= u_{x1} + x u_{x2} + z u_{x3} \\ u_y &= u_{y1} + x u_{y2} + z u_{y3} \\ u_z &= u_{z1} + x u_{z2} + z u_{z3} \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} u_x &= u_{x1} + x u_{x2} + z u_{x3} + x^2 u_{x4} + xz u_{x5} + z^2 u_{x6} \\ u_y &= u_{y1} + x u_{y2} + z u_{y3} + x^2 u_{y4} + xz u_{y5} + z^2 u_{y6} \\ u_z &= u_{z1} + x u_{z2} + z u_{z3} + x^2 u_{z4} + xz u_{z5} + z^2 u_{z6} \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} u_x &= u_{x1} + x u_{x2} + z u_{x3} + x^2 u_{x4} + xz u_{x5} + z^2 u_{x6} + x^3 u_{x7} + x^2 z u_{x8} + xz^2 u_{x9} + z^3 u_{x10} \\ u_y &= u_{y1} + x u_{y2} + z u_{y3} + x^2 u_{y4} + xz u_{y5} + z^2 u_{y6} + x^3 u_{y7} + x^2 z u_{y8} + xz^2 u_{y9} + z^3 u_{y10} \\ u_z &= u_{z1} + x u_{z2} + z u_{z3} + x^2 u_{z4} + xz u_{z5} + z^2 u_{z6} + x^3 u_{z7} + x^2 z u_{z8} + xz^2 u_{z9} + z^3 u_{z10} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Riprendendo Eq. 3.11, le serie di espansione F_τ per $N = 1$, $N = 2$ e $N = 3$ risultano le seguenti:

$$\begin{aligned} N = 1 : \quad & F_1 = 1, \quad F_2 = x, \quad F_3 = z \\ N = 2 : \quad & F_1 = 1, \quad F_2 = x, \quad F_3 = z, \quad F_4 = x^2, \quad F_5 = xz, \quad F_6 = z^2 \\ N = 3 : \quad & F_1 = 1, \quad F_2 = x, \quad F_3 = z, \quad F_4 = x^2, \quad F_5 = xz, \quad F_6 = z^2, \\ & F_7 = x^3, \quad F_8 = x^2 z, \quad F_9 = xz^2, \quad F_{10} = z^3 \end{aligned}$$

Anche se il modello 1D sarà principalmente utilizzato in questa trattazione, l'espansione TE 2D è mostrata in Eq. 3.15 per completezza, poiché permette di descrivere il modello per piastre e gusci:

$$u_x = u_{x1} + z u_{x2} u_y = u_{y1} + z u_{y2} u_z = u_{z1} + z u_{z2} \quad (3.15)$$

Nel caso 1D, l'espansione TE consente di derivare i modelli classici di trave, come quelli di Timoshenko e di Eulero-Bernoulli. Per quanto riguarda il TBT, come riportato da Carrera *et al.* [71], è necessario adottare un campo cinematico di primo ordine (come mostrato nell' Eq. 3.13) e ipotizzare spostamenti costanti per u_x e u_y , il che implica distribuzioni costanti di sforzo e taglio. Questo comporta la nullità dei termini u_{x2} , u_{z2} , u_{x3} e u_{z3} , approssimando tali componenti a:

$$u_{x2} = u_{x3} = u_{z2} = u_{z3} = 0$$

Inoltre, i termini $\theta(y)$ e $\varphi(y)$ vengono assunti uguali a u_{y2} e u_{y3} , rispettivamente.

Al contrario, il modello EBBT non considera l'effetto del taglio trasversale, imponendo quindi che:

$$\gamma_{yx} = \gamma_{yz} = 0$$

e richiede una condizione aggiuntiva, che consiste nella penalizzazione delle componenti di deformazione ϵ_{xy} e ϵ_{zy} tramite equazioni costitutive. È importante ricordare che tali modelli necessitano di una correzione per il fenomeno del “Poisson locking”. Il *Poisson locking* rappresenta un problema significativo nei modelli strutturali classici, in particolare quando si utilizzano elementi finiti su strutture sottili caratterizzate da rapporti di forma elevati (ad esempio, lunghezza/spessore molto grandi). Questo fenomeno si manifesta quando le ipotesi di indeformabilità trasversale o le equazioni costitutive imposte limitano in modo eccessivo le libertà cinematiche della struttura, causando una sovrastima della rigidità globale.

In particolare, il locking si verifica a causa dell'interazione tra il coefficiente di Poisson, che descrive la relazione tra le deformazioni trasversali e assiali, e la formulazione degli elementi strutturali. Ad esempio, nei modelli basati sulla teoria di Eulero-Bernoulli, l'ipotesi di indeformabilità trasversale impone che le sezioni restino perpendicolari all'asse neutro, ignorando completamente le deformazioni trasversali. Questa assunzione porta a una penalizzazione implicita delle deformazioni di taglio e delle deformazioni trasversali, rendendo i risultati inaccurati, soprattutto per carichi tridimensionali e analisi di vibrazione [73, 28].

Nel contesto degli elementi finiti, il Poisson locking può emergere quando si utilizzano elementi a basso ordine polinomiale, come i classici elementi isoparametrici, che non riescono a rappresentare adeguatamente le deformazioni trasversali richieste dalle equazioni costitutive. Questo fenomeno è particolarmente evidente per strutture sottili o laminate, dove i rapporti elevati di rigidità trasversale aumentano la sensibilità agli errori numerici [74, 62]. Per affrontare il Poisson locking, sono state sviluppate numerose strategie, che includono:

- L'adozione di modelli con formulazioni di deformazione mista, come la *assumed strain formulation*, che consente di rappresentare con maggiore accuratezza gli stati di deformazione trasversale [75].
- L'uso di elementi gerarchici con funzioni di base di ordine superiore, come quelli introdotti nella CUF, che permettono di includere espansioni cinematiche avanzate [71].
- Tecniche di riduzione del locking attraverso la definizione di vincoli cinematici rilassati, come le formulazioni di *reduced integration*, che bilanciano accuratezza e stabilità [73].

Ad esempio, la CUF utilizza funzioni di espansione gerarchiche che permettono di rappresentare deformazioni trasversali realistiche senza introdurre rigidità spurie. In

questo modo, la CUF supera i limiti delle formulazioni classiche e riduce l'insorgere del fenomeno del Poisson locking nelle analisi strutturali avanzate [71].

Nel contesto delle strutture laminate composite, l'espansione di Taylor può essere impiegata per sviluppare il modello Equivalent-Single-Layer (ESL) [66], il quale considera la sezione trasversale come omogenea. Questo approccio somma il contributo di ciascuno strato laminato, producendo un unico insieme di variabili per l'intera struttura. Tale modello risulta particolarmente efficace per l'analisi di fenomeni globali, come la determinazione delle frequenze fondamentali di vibrazione o delle deflessioni trasversali, sebbene possa risultare limitato per valutazioni più dettagliate della distribuzione tridimensionale degli stress. Diversi altri approcci ESL sono stati sviluppati: tra i più noti vi sono il modello a zig-zag di Toledano e Murakami [76], che affronta l'anisotropia intrinseca delle strutture laminate, e le teorie di espansione trigonometriche ed esponenziali proposte da Loredo e Castel [77].

3.2.3 LE

I modelli basati sulla LE utilizzano polinomi di interpolazione di Lagrange come funzioni per rappresentare la sezione trasversale. Queste funzioni consentono la costruzione di teorie di ordine superiore sia 1D che 2D, applicabili a strutture complesse. Grazie alla formulazione isoparametrica, è possibile trattare geometrie arbitrarie di vario tipo, rendendo l'espansione di Lagrange un'opzione flessibile per una vasta gamma di applicazioni strutturali.

Come le espansioni di Taylor, le funzioni di Lagrange F_τ vengono utilizzate per descrivere il campo di spostamento lungo la sezione trasversale in modelli di trave e lungo lo spessore nel caso di piastre e gusci. Per modellare la sezione trasversale dei modelli trave, sono comunemente impiegati tre tipi di elementi di Lagrange: polinomi a quattro nodi (L4), a nove nodi (L9) e a sedici nodi (L16). La formulazione isoparametrica, descritta dettagliatamente da Onate [42], è stata utilizzata da Filippi *et al.* in [78] per un'applicazione termoelastica con la CUF. Gli elementi di Lagrange con polinomi L4 e L9, sono ampiamente impiegati per questa rappresentazione.

Le funzioni di interpolazione per un elemento L4, illustrato in Fig. 3.3, sono definite come:

$$F_\tau = \frac{1}{4}(1 + rr_\tau)(1 + ss_\tau), \quad \tau = 1, 2, 3, 4 \quad (3.16)$$

dove r e s variano da -1 a +1.

Nel caso di un elemento L9, mostrato nella Fig. 3.4 le funzioni di interpolazione sono espresse come:

$$F_\tau = \frac{1}{4}(r^2 + rr_\tau)(s^2 + ss_\tau), \quad \tau = 1, 3, 5, 7$$

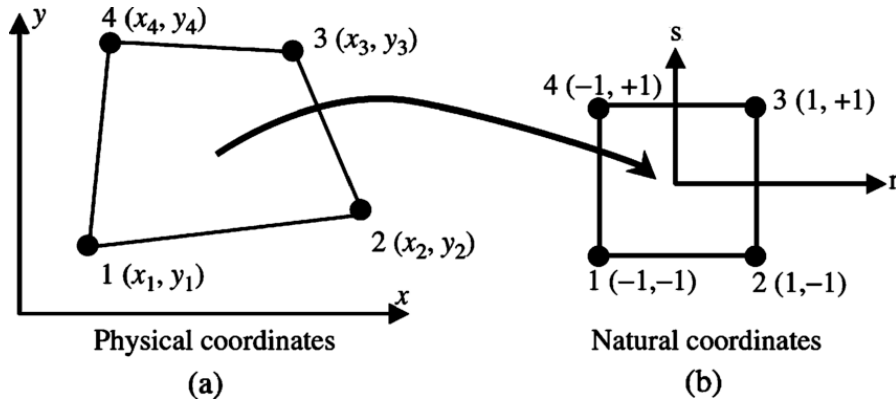


Figura 3.3: Elemento di lagrange L4 rappresentato nel sistema di coordinate fisiche (a) e nel sistema di coordinate naturali naturali (b).

$$F_\tau = \frac{1}{2}s_\tau(s^2 - ss_\tau)(1 - r^2) + \frac{1}{2}r_\tau(r^2 - rr_\tau)(1 - s^2), \quad \tau = 2, 4, 6, 8$$

$$F_\tau = (1 - r^2)(1 - s^2), \quad \tau = 9$$

dove anche in questo caso r e s variano da -1 a +1.

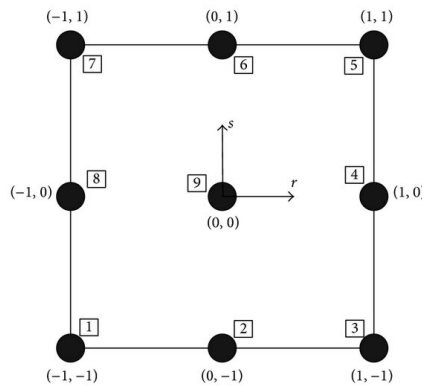


Figura 3.4: Rappresentazione di un elemento lagrangiano L9 quadrilatero nel sistema di coordinate naturali (s, r).

Il campo di spostamento generato da un elemento L4 è espresso come:

$$\begin{aligned} u_x &= F_1 u_{x1} + F_2 u_{x2} + F_3 u_{x3} + F_4 u_{x4} \\ u_y &= F_1 u_{y1} + F_2 u_{y2} + F_3 u_{y3} + F_4 u_{y4} \\ u_z &= F_1 u_{z1} + F_2 u_{z2} + F_3 u_{z3} + F_4 u_{z4} \end{aligned} \quad (3.17)$$

dove u_{x1}, \dots, u_{z4} sono le variabili di spostamento del problema e rappresentano le componenti di spostamento traslazionale di ciascuno dei quattro nodi dell'elemento

L4. Mentre, il campo di spostamento associato a un elemento L9 è espresso dal seguente sistema di equazioni:

$$\begin{aligned} u_x &= F_1 u_{x1} + F_2 u_{x2} + F_3 u_{x3} + F_4 u_{x4} + F_5 u_{x5} + F_6 u_{x6} + F_7 u_{x7} + F_8 u_{x8} + F_9 u_{x9} \\ u_y &= F_1 u_{y1} + F_2 u_{y2} + F_3 u_{y3} + F_4 u_{y4} + F_5 u_{y5} + F_6 u_{y6} + F_7 u_{y7} + F_8 u_{y8} + F_9 u_{y9} \\ u_z &= F_1 u_{z1} + F_2 u_{z2} + F_3 u_{z3} + F_4 u_{z4} + F_5 u_{z5} + F_6 u_{z6} + F_7 u_{z7} + F_8 u_{z8} + F_9 u_{z9} \end{aligned} \quad (3.18)$$

dove le variabili di spostamento u_{x1}, \dots, u_{z9} rappresentano le componenti di traslazione per ciascuno dei nove nodi dell'elemento L9.

Gli elementi LE possono essere assemblati per modellare sezioni trasversali di forme più complesse o per ottenere una mesh più dettagliata. Per ulteriori approfondimenti, si rimanda al lavoro di Carrera e Petrolo [70].

La LE è spesso utilizzata nei modelli compositi attraverso la teoria Layer-Wise (LW), anche se può essere utilizzata anche per quella ESL. L'approccio LW considera i compositi laminati come un assemblaggio di strati individuali permettendo di rappresentare il campo di spostamento separatamente per ogni strato, imponendo delle condizioni di compatibilità alle interfacce poiché deve essere garantita la continuità del campo di spostamento tra gli strati come descritto da Carrera [79].

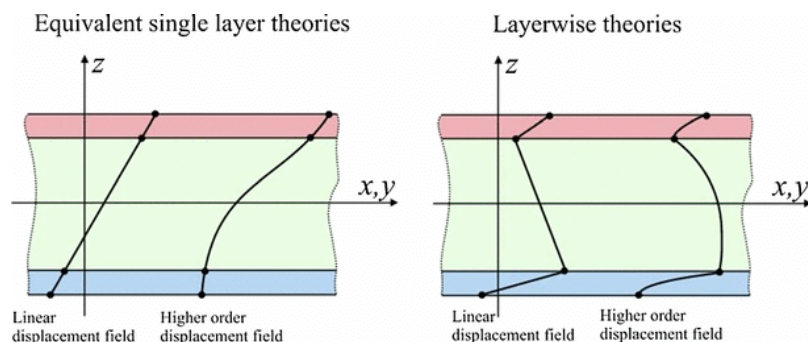


Figura 3.5: Campo di spostamento in una trave con le teorie ESL e LW.

Questa formulazione consente di adattare il livello di complessità del modello alla struttura analizzata e di risolvere accuratamente problemi di distribuzione dello spostamento in strutture laminate, come illustrato in Fig. 3.5, garantendo al contempo una rappresentazione fedele delle proprietà fisiche di ogni singolo strato. Una descrizione dettagliata delle teorie layer-wise è fornita da Liew et al. [80]. Gli approcci ESL e LW vengono identificati all'interno di un unico approccio denominato Component-Wise, come esposto da Carrera e al. [48]. Per comprendere meglio le differenze nel processo di l'assemblaggio delle matrici tra i modelli ESL e LW, si osserva la rappresentazione grafica di queste matrici nella Fig.

3.3 FEM

Il FEM rappresenta un approccio potente e versatile per l'analisi numerica di strutture complesse, particolarmente utile per strutture rotanti. FEM è applicabile a vari domini della meccanica, inclusi problemi statici, dinamici, termici, e fluidodinamici. Introdotto negli anni '60, questo metodo permette di risolvere problemi complessi suddividendo la struttura in piccoli elementi interconnessi, ciascuno dei quali è descritto da equazioni matematiche specifiche in termini di comportamento meccanico, condizioni al contorno e carichi applicati [81].

Associando il FEM alla CUF, è possibile utilizzare una gamma di elementi diversi per discretizzare il campo di spostamento lungo l'asse longitudinale (per travi) o sulla sezione trasversale (per piastre e gusci) [82].

3.3.1 1D CUF-FEM: Modello trave

Quando la struttura considerata ha due dimensioni, x e z , trascurabili rispetto alla dimensione lungo y , si parla di modello trave, e il campo degli spostamenti può essere semplificato come:

$$u = u_\tau(y)F_\tau^{2D}(x, z), \quad \tau = 1, \dots, M \quad (3.19)$$

dove F_τ^{2D} è la funzione di espansione che approssima il campo di spostamento lungo la sezione trasversale della trave, e M rappresenta il numero di termini dell'espansione. Le funzioni F_τ possono essere polinomi di Lagrange o di Taylor di vari ordini [83].

Nel caso di un modello trave, il FEM viene impiegato per discretizzare la struttura lungo l'asse y . In tal caso, lo spostamento generalizzato può essere approssimato come:

$$u_\tau(y) = N_j(y)q_{\tau j}, \quad j = 1, 2, \dots, p + 1 \quad (3.20)$$

dove N_j rappresenta le funzioni di forma 1D, j indica i termini della sommatoria, e p è l'ordine delle funzioni di forma. Il termine $q_{\tau j}$, a sua volta, rappresenta il vettore dei parametri nodali, definito come:

$$q_{\tau i} = \{q_{u_x \tau i}, q_{u_y \tau i}, q_{u_z \tau i}\}^T \quad (3.21)$$

Per una rappresentazione tridimensionale (3D), il campo di spostamento è dato da:

$$u(x, y, z) = F_\tau(x, z)N_j(y)q_{\tau j}, \quad \tau = 1, \dots, M \quad (3.22)$$

La scelta delle funzioni di espansione nella sezione trasversale è completamente indipendente dal tipo di elemento finito impiegato lungo la trave [71]. Come

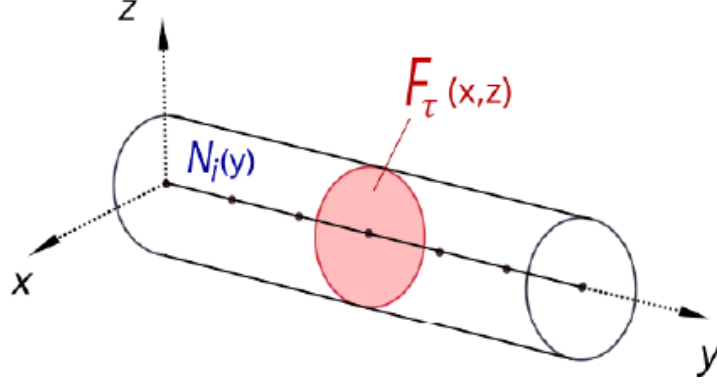


Figura 3.6: Rappresentazione di un modello strutturale 2D di una trave mediante la CUF.

illustrato nella Fig. 3.6, le funzioni di forma N_j determinano la discretizzazione lungo l'asse y , mentre le funzioni di espansione F_τ rappresentano il comportamento attraverso la sezione trasversale.

Considerando un materiale elastico con non linearità geometriche, le relazioni geometriche possono essere formulate come:

$$\epsilon = (b^l + b^{nl})u = (b^l + b^{nl})F_\tau(x, z)N_j(y)q_{\tau j} = (B_{\tau j}^l + B_{\tau j}^{nl})q_{\tau j} \quad (3.23)$$

dove $B_{\tau j}^l$ e $B_{\tau j}^{nl}$ sono gli operatori di derivata applicati alle funzioni di forma e alle funzioni di espansione lungo lo spessore. Nel caso 1D, $B_{\tau j}^l$ è definito come:

$$B_{\tau j}^l = \begin{bmatrix} F_{\tau,x}N_{j,x} & 0 & 0 \\ 0 & F_\tau N_{j,y} & 0 \\ 0 & 0 & F_{\tau,z}N_j \\ F_{\tau,z}N_j & 0 & F_\tau N_{j,x} \\ 0 & F_{\tau,z}N_j & F_\tau N_{j,y} \\ F_\tau N_{j,y} & F_\tau N_{j,x} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

e $B_{\tau j}^{nl}$ è definito come:

$$B_{\tau j}^{nl} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_{x,x}F_{\tau,x}N_j & u_{y,x}F_{\tau,x}N_j & u_{z,x}F_{\tau,x}N_j \\ u_{x,y}F_{\tau,x}N_j & u_{y,y}F_{\tau,x}N_j & u_{z,y}F_{\tau,x}N_j \\ u_{x,z}F_{\tau,x}N_j & u_{y,z}F_{\tau,x}N_j & u_{z,z}F_{\tau,x}N_j \\ u_{x,x}F_{\tau,z}N_j + u_{x,z}F_{\tau,x}N_j & u_{y,x}F_{\tau,z}N_j + u_{y,z}F_{\tau,x}N_j & u_{z,x}F_{\tau,z}N_j + u_{z,z}F_{\tau,x}N_j \\ u_{x,y}F_{\tau,z}N_j + u_{x,z}F_{\tau,x}N_j & u_{y,y}F_{\tau,z}N_j + u_{y,z}F_{\tau,x}N_j & u_{z,y}F_{\tau,z}N_j + u_{z,z}F_{\tau,x}N_j \\ u_{x,x}F_{\tau,z}N_j + u_{x,z}F_{\tau,x}N_j & u_{y,x}F_{\tau,z}N_j + u_{y,z}F_{\tau,x}N_j & u_{z,x}F_{\tau,z}N_j + u_{z,z}F_{\tau,x}N_j \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

3.3.2 2D CUF-FEM: Modello piastra

Quando la struttura in analisi presenta una dimensione z trascurabile rispetto alle altre due dimensioni x e y , si può considerare un modello di tipo piastra o guscio (shell). In questo caso, l'equazione assume la forma [71]:

$$u = u_\tau(x, y)F_\tau^{1D}(z), \quad \tau = 1, \dots, M \quad (3.26)$$

dove F_τ^{1D} rappresenta una funzione di espansione che approssima il campo di spostamento lungo lo spessore, e M indica il numero dei termini nell'espansione. La funzione F_τ viene scelta a priori e può essere definita in modo arbitrario, poiché la sua configurazione influisce direttamente sul modello utilizzato.

Utilizzando l'approssimazione classica del FEM e la CUF per strutture 2D, il campo di spostamento può essere espresso come segue [70]:

$$u(x, y, z) = F_\tau(z)N_j(x, y)q_{\tau j}, \quad \tau = 1, \dots, M \quad (3.27)$$

In questa espressione, $F_\tau(z)$ è la funzione di espansione lungo lo spessore, con M che rappresenta il numero di termini dell'espansione; $q_{\tau j}$ sono i parametri di spostamento nodali discreti, e $N_j(x, y)$ indica le funzioni di forma 2D utilizzate per discretizzare il piano xy della superficie media secondo il metodo degli elementi finiti.

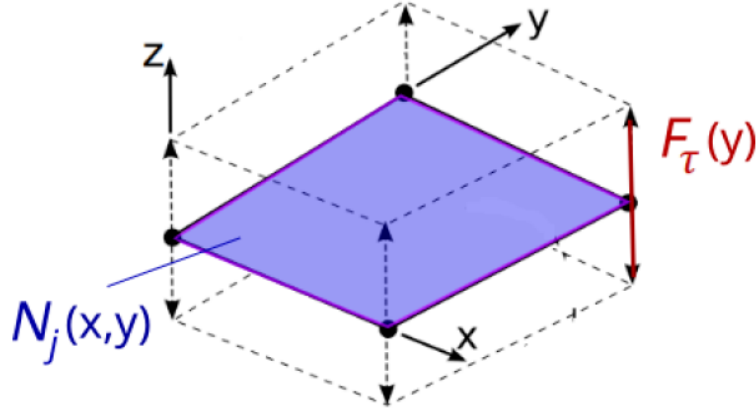


Figura 3.7: Rappresentazione di un modello strutturale piastra mediante la CUF.

Analogamente al modello trave, le deformazioni possono essere espresse come indicato nella letteratura [84]:

$$\epsilon = (b^l + b^{nl})u = (b^l + b^{nl})F_\tau(z)N_j(x, y)q_{\tau j} = (B_{\tau j}^l + B_{\tau j}^{nl})q_{\tau j} \quad (3.28)$$

Le matrici degli operatori derivati applicati alle funzioni di forma, nei casi lineare e non lineare, sono quindi rispettivamente:

$$B_{\tau j}^l = \begin{bmatrix} F_{\tau} N_{j,x} & 0 & 0 \\ 0 & F_{\tau} N_{j,y} & 0 \\ 0 & 0 & F_{\tau,z} N_j \\ F_{\tau,z} N_j & 0 & F_{\tau} N_{j,x} \\ 0 & F_{\tau,z} N_j & F_{\tau} N_{j,y} \\ F_{\tau} N_{j,y} & F_{\tau} N_{j,x} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

$$B_{\tau j}^{nl} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_{x,x} F_{\tau} N_{j,x} & u_{y,x} F_{\tau} N_{j,x} & u_{z,x} F_{\tau} N_{j,x} \\ u_{x,y} F_{\tau} N_{j,y} & u_{y,y} F_{\tau} N_{j,y} & u_{z,y} F_{\tau} N_{j,y} \\ u_{x,z} F_{\tau,z} N_j & u_{y,z} F_{\tau,z} N_j & u_{z,z} F_{\tau,z} N_j \\ u_{x,x} F_{\tau,z} N_j + u_{x,z} F_{\tau} N_{j,x} & u_{y,x} F_{\tau,z} N_j + u_{y,z} F_{\tau} N_{j,x} & u_{z,x} F_{\tau,z} N_j + u_{z,z} F_{\tau} N_{j,x} \\ u_{x,y} F_{\tau,z} N_j + u_{x,z} F_{\tau} N_{j,y} & u_{y,y} F_{\tau,z} N_j + u_{y,z} F_{\tau} N_{j,y} & u_{z,y} F_{\tau,z} N_j + u_{z,z} F_{\tau} N_{j,y} \\ u_{x,x} F_{\tau} N_{j,y} + u_{x,y} F_{\tau} N_{j,x} & u_{y,x} F_{\tau} N_{j,y} + u_{y,y} F_{\tau} N_{j,x} & u_{z,x} F_{\tau} N_{j,y} + u_{z,y} F_{\tau} N_{j,x} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Nella formulazione FEM, il sistema di equilibrio di una struttura è trasformato in una versione discreta applicando il Principio dei Lavori Virtuali o il Principio di Hamilton, utilizzando funzioni di forma per approssimare il campo di spostamento all'interno di ciascun elemento [78]. In rotodinamica, il FEM consente di modellare l'interazione tra dischi e alberi, simulando gli effetti giroscopici e centrifughi nei sistemi rotanti. Le strutture vengono discretizzate in una mesh di elementi, che può includere elementi 1D, 2D o 3D, a seconda del grado di precisione richiesto.

3.4 Modello CUF applicato ai rotori

3.4.1 Principio di Hamilton

L'analisi della dinamica dei rotori richiede un approccio specifico per ottenere equazioni del moto (EoM) ottimizzate secondo la CUF. La formulazione del problema si basa sull'applicazione del Principio di Hamilton, essenziale per derivare le EoM nei sistemi rotanti [85]. Questo principio si basa sull'idea che, per un sistema che evolve da uno stato iniziale al tempo t_1 a uno stato finale al tempo t_2 , il percorso effettivo rende stazionaria la variazione dell'azione lungo l'intervallo temporale considerato. In altre parole, l'equilibrio dinamico si raggiunge quando la somma delle variazioni dell'energia cinetica, dell'energia potenziale e del lavoro delle forze non conservative è pari a zero durante tale intervallo di tempo.

Il principio di Hamilton si traduce in un'equazione integrale che permette di modellare fenomeni complessi come gli effetti giroscopici, centrifughi e le interazioni tra componenti, quali alberi e dischi, tipici della rotodinamica [86]. La sua formulazione matematica prevede la stazionarietà dell'integrale dell'azione:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt + \delta \int_{t_1}^{t_2} W_{nc} dt = 0 \quad (3.31)$$

dove T è l'energia cinetica totale del sistema, U l'energia potenziale (includendo sia le deformazioni elastiche sia le forze conservative esterne), W_{nc} rappresenta il lavoro svolto dalle forze non conservative, e δ è la variazione virtuale del funzionale.

Introducendo le coordinate generalizzate q_i e le forze generalizzate Q_i , il principio di Hamilton può essere espanso in termini di variazioni di energia e lavoro come [86]:

$$\delta T = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right), \quad \delta U = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial U}{\partial q_i} \delta q_i \right), \quad \delta W_{nc} = \sum_{i=1}^n (Q_i \delta q_i) \quad (3.32)$$

Sostituendo queste espressioni e integrando per parti, si ottiene l'espressione integrale:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial U}{\partial q_i} + Q_i \right) \delta q_i \right] dt = 0 \quad (3.33)$$

Poiché la variazione δq_i è arbitraria e indipendente, si arriva direttamente alle equazioni di Lagrange [85]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i \quad (3.34)$$

In rotodinamica, il principio di Hamilton consente di descrivere il comportamento dinamico dei rotori, tenendo conto delle forze giroscopiche, delle vibrazioni indotte e delle frequenze critiche [87]. Strumenti di analisi avanzati, come i diagrammi di Campbell, permettono di valutare la stabilità del sistema in funzione della velocità di rotazione, rilevando punti di instabilità e frequenze naturali. Questo approccio consente di ottimizzare le prestazioni di componenti rotanti, come turbine e alberi in sistemi complessi, e di prevedere la risposta a forze non conservative come quelle dovute a disallineamenti e sbilanciamenti [22].

3.4.2 Energia Potenziale e Matrice di Rigidezza

Nella CUF, l'energia potenziale U è definita come:

$$U = \frac{1}{2} \int_V u^T D^T C D u dV \quad (3.35)$$

dove u è il vettore degli spostamenti, D è la matrice degli operatori differenziali lineari, e C è la matrice dei coefficienti dei materiali, entrambe già introdotte nella sezione preliminare dedicata alla CUF.

Partendo dall'espressione dell'energia potenziale U e applicando il principio di Hamilton, è possibile ottenere sia la matrice di rigidezza che il vettore dei carichi. In questo caso, si considera nulla l'energia cinetica e si applica un carico concentrato P in un punto arbitrario della struttura rotante con coordinate (x_p, y_p, z_p) . Questo conduce alla seguente espressione integrale:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\int_V \delta u^T D^T C D u dV - \delta u^T P \right) dt = 0 \quad (3.36)$$

Esprimendo questa relazione secondo la formulazione CUF e FEM, si ottengono la matrice di rigidezza $K^{ij\tau s}$ e il vettore dei carichi $\tilde{P}^{i\tau}$, con le seguenti espressioni:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\delta q_{\tau i}^T K^{ij\tau s} q_{s j} - \delta q_{\tau i}^T \tilde{P}^{i\tau} \right) dt = 0 \quad (3.37)$$

dove:

$$\begin{aligned} K^{ij\tau s} = & I_l^{ij} \left\langle D_{np}^T(F_\tau I) \left[C_{np}^k D_p(F_s I) + C_{nn}^k D_{np}(F_s I) \right] \right\rangle \\ & + D_p^T(F_\tau I) \left[C_{pp}^k D_p(F_s I) + C_{pn}^k D_{np}(F_s I) \right] \\ & + I_l^{ij,y} \left\langle D_{np}^T(F_\tau I) + D_p^T(F_\tau I) C_{pn}^k \right\rangle F_s + I_{Ay} \\ & + I_l^{i,yj} I_{Ay}^T \left\langle F_\tau \left[C_{np}^k D_p(F_s I) + C_{nn}^k D_{np}(F_s I) \right] \right\rangle \\ & + I_l^{i,yj,y} I_{Ay}^T I_{Ay} \left\langle F_\tau C_{nn}^k F_s \right\rangle \end{aligned} \quad (3.38)$$

e il vettore dei carichi è dato da:

$$\tilde{P}^{i\tau} = N_i(y^p) F_\tau(x^p, z^p) P \quad (3.39)$$

con $\langle(\cdot)\rangle = \int_A(\cdot) dA$. Le matrici identità utilizzate sono definite come:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_{Ay} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

e i coefficienti di influenza sono definiti come

$$(I_l^{ij}, I_l^{ij,y}, I_l^{i,yj}, I_l^{i,yj,y}) = \int_l \{N_i N_j, N_i N_{j,y}, N_{i,y} N_j, N_{i,y} N_{j,y}\} dy, \quad (3.41)$$

con N_i e N_j funzioni di forma appropriate. I nove componenti del nucleo fondamentale di $K_{ij\tau s}$ non sono riportati qui per brevità, ma sono disponibili in [8].

La matrice di rigidezza globale si basa sui nuclei fondamentali derivati per ciascun elemento. La matrice viene assemblata tenendo conto della connessione tra i nodi dell'analisi agli Elementi Finiti (FEM) e i nodi dell'espansione CUF. È

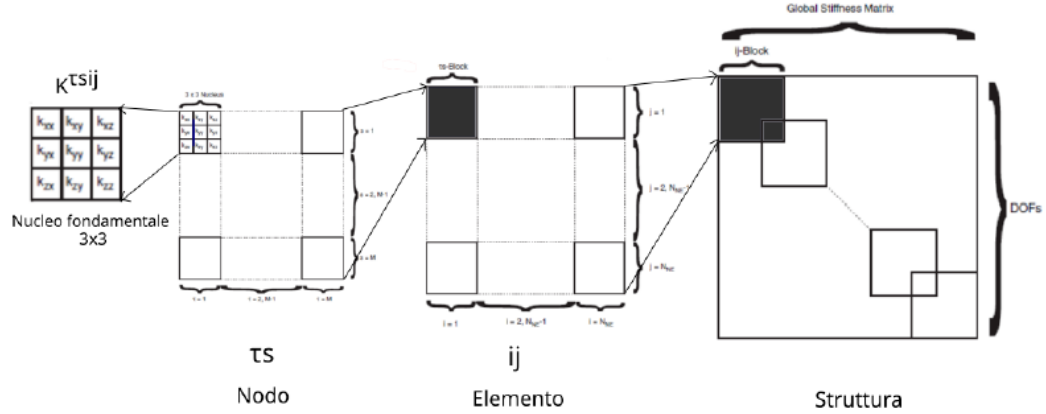


Figura 3.8: Rappresentazione dell’assemblaggio della matrice di rigidezza partendo dai nuclei fondamentali fino alla struttura globale.

essenziale osservare che gli indici τ e s rappresentano l’ordine dell’espansione CUF ($\tau, s = 1, 2, \dots, M$), determinando così la precisione del modello. Parallelamente, gli indici i e j si riferiscono ai nodi degli elementi finiti ($i, j = 1, 2, \dots, N_{ne}$).

Bisogna considerare che la struttura generale di ciascun nucleo fondamentale risulta essere indipendente dal modello d’espansione selezionato: questa proprietà permette di mantenere una formulazione coerente senza dipendere dal numero di nodi o dalla scelta delle funzioni di forma. A partire da ciò, possiamo definire il nucleo fondamentale della matrice di rigidezza come una matrice 3×3 , ottenuta dal prodotto tra la matrice dell’operatore differenziale e il tensore di elasticità.

La somma degli indici τ e s viene applicata per ciascun nodo individuale nell’espansione CUF, mentre la somma sugli indici i e j consente di ottenere la matrice per ogni singolo elemento. Attraverso questa matrice dell’elemento e grazie all’inclusione dei nodi condivisi, si costruisce la matrice di rigidezza globale utilizzando le procedure di assemblaggio standard del metodo FEM.

3.4.3 Energia Cinetica

In questo studio, la struttura ruota attorno al proprio asse longitudinale, supportata da N_b cuscinetti, rendendo necessaria un’analisi dettagliata delle forze e dei momenti inerziali legati alla rotazione. Si assume che la trave ruoti liberamente con una velocità angolare costante Ω .

Per calcolare l’energia cinetica, si considera la velocità assoluta di un punto P della trave come somma della velocità relativa e di quella di trascinamento, secondo quanto descritto da Carrera *et al.* [88].

La velocità assoluta v_{abs} è espressa da:

$$v_{\text{abs}} = v_{\text{rel}} + v_{\text{tr}} = \dot{u} + \Omega \times r_{\text{tot}} \quad (3.42)$$

In questa formula:

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Omega \\ 0 & 0 & 0 \\ -\Omega & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

rappresenta la matrice della velocità angolare, mentre $r_{\text{tot}} = r + u$ è il vettore che individua la posizione di P rispetto all'asse neutro (vedi figura 3.10).

L'energia cinetica totale T si calcola come:

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho v_{\text{abs}}^T v_{\text{abs}} dV \quad (3.43)$$

Sostituendo l'espressione di v_{abs} , si ottiene:

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \left(\dot{u}^T \dot{u} + 2u^T \Omega^T \dot{u} + u^T \Omega^T \Omega u + 2\dot{u}^T \Omega r + 2u^T \Omega^T \Omega r + r^T \Omega^T \Omega r \right) dV \quad (3.44)$$

Qui, u indica il vettore degli spostamenti, r la posizione del punto rispetto all'asse neutro, ρ la densità del materiale e Ω la matrice della velocità angolare.

Questa formulazione tiene conto dei contributi dinamici dovuti alla velocità relativa, al trascinamento e alle forze centrifughe, fornendo una descrizione completa della dinamica della struttura in rotazione.

Il termine $\dot{u}^T \dot{u}$ rappresenta l'energia cinetica associata al moto relativo del punto P ; $2u^T \Omega^T \dot{u}$ include l'effetto della rotazione sul moto relativo e sul trascinamento; infine, $u^T \Omega^T \Omega u$ descrive l'energia cinetica dovuta alla deformazione elastica, comprendendo gli effetti giroscopici.

Per modellare in modo accurato la dinamica rotazionale, si introducono la matrice di massa giroscopica G e la matrice di inerzia centrifuga C , che contribuiscono rispettivamente all'effetto giroscopico e alle forze centrifughe. Tali matrici, essenziali per valutare la stabilità dinamica, si calcolano come:

$$G = \int_V \rho r \times \Omega dV, \quad C = \int_V \rho (\Omega \times r)(\Omega \times r)^T dV \quad (3.45)$$

In particolare: - La matrice giroscopica G introduce un termine di velocità angolare incrociato nelle equazioni del moto, che può stabilizzare o destabilizzare la struttura rotante a seconda delle condizioni. Questo termine è fondamentale nell'analisi di stabilità rotazionale poiché descrive l'effetto giroscopico, che induce una precessione nella struttura. - La matrice centrifuga C rappresenta l'effetto delle forze centrifughe che tendono a espandere radialmente la struttura rotante. Questo contribuisce all'energia cinetica complessiva generando tensioni interne e aumentando la rigidità dinamica del sistema.

L'energia cinetica totale di una trave in rotazione può essere riformulata sfruttando le matrici introdotte, così da esplicitare i contributi giroscopici e centrifughi:

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho (\dot{u}^T \dot{u} + 2u^T G \dot{u} + u^T C u) dV \quad (3.46)$$

In questa espressione:

- *Il primo termine*, $\dot{u}^T \dot{u}$, descrive l'energia associata alla velocità relativa di ogni punto della trave rispetto a un sistema di riferimento rotante.
- *Il secondo termine*, $2u^T G \dot{u}$, rappresenta il contributo giroscopico, che introduce accoppiamenti tra le velocità trasversali e la velocità angolare, influenzando fenomeni di precessione.
- *Il terzo termine*, $u^T C u$, incorpora l'effetto centrifugo, responsabile di una rigidità radiale aggiuntiva e della generazione di forze interne radiali.

L'inclusione delle matrici giroscopica G e centrifuga C conduce alla formulazione delle equazioni del moto del sistema rotante:

$$M\ddot{u} + G\dot{u} + (K + C)u = F_{\text{est}} \quad (3.47)$$

In cui:

- M è la matrice di massa,
- K rappresenta la matrice di rigidità elastica,
- G è la matrice giroscopica,
- C descrive l'effetto centrifugo,
- F_{est} rappresenta le forze esterne applicate alla struttura.

Questa equazione del moto permette di analizzare il comportamento dinamico del sistema in rotazione, valutando l'influenza combinata della velocità angolare Ω e della configurazione strutturale.

L'effetto combinato delle matrici K e C altera le frequenze naturali della struttura, mentre G introduce termini di precessione che possono influire in modo significativo sulla stabilità e sulla risposta dinamica del sistema.

3.4.4 Effetti Centrifughi

Nella CUF, l'energia centrifuga è modellata attraverso la matrice di spin-softening e il vettore delle forze centrifughe. Questi termini sono fondamentali per descrivere il comportamento dinamico delle strutture rotanti e tengono conto degli effetti della velocità di rotazione Ω .

La matrice di spin-softening K_Ω per una struttura rotante è definita come:

$$K_\Omega^{ij\tau s} = -\rho \langle F_\tau F_s N_i N_j \rangle \quad (3.48)$$

Il vettore delle forze centrifughe è dato da:

$$F_\Omega^{i\tau} = \rho \Omega^2 \langle F_\tau r N_i \rangle \quad (3.49)$$

L'effetto della rigidità centrifuga è descritto dalla matrice di stress-stiffening:

$$K_\sigma^{ij\tau s} = \rho \langle F_{\tau,x} \sigma_{0xx} F_{s,x} + F_{\tau,z} \sigma_{0zz} F_{s,z} + F_{\tau,x} \sigma_{0xz} F_{s,z} + F_{\tau,z} \sigma_{0zx} F_{s,x} \rangle. \quad (3.50)$$

Queste matrici sono fondamentali per catturare correttamente gli effetti dinamici delle strutture rotanti, come dischi, piastre e gusci, nei sistemi di riferimento inerziali e co-rotanti.

3.4.5 Rigidità e smorzamento dovuti ai supporti

Nel modello, i supporti (*bearings*) sono rappresentati mediante molle e smorzatori viscosi. Di conseguenza, l'energia elastica associata ai supporti W_b può essere espressa come:

$$W_b = \sum_{p=1}^{N_b} u^T K_b^{(p)} u + \dot{u}^T C_b^{(p)} \dot{u} \quad (3.51)$$

dove N_b indica il numero di supporti. Considerando il supporto generico p con coordinate (x_b, y_b, z_b) , le matrici di rigidità e smorzamento si presentano nella forma:

$$K_b^{(p)} = \begin{bmatrix} k_{xx}^{(p)} & k_{xy}^{(p)} & k_{xz}^{(p)} \\ k_{yx}^{(p)} & k_{yy}^{(p)} & k_{yz}^{(p)} \\ k_{zx}^{(p)} & k_{zy}^{(p)} & k_{zz}^{(p)} \end{bmatrix}, \quad C_b^{(p)} = \begin{bmatrix} c_{xx}^{(p)} & c_{xy}^{(p)} & c_{xz}^{(p)} \\ c_{yx}^{(p)} & c_{yy}^{(p)} & c_{yz}^{(p)} \\ c_{zx}^{(p)} & c_{zy}^{(p)} & c_{zz}^{(p)} \end{bmatrix}$$

Le componenti delle matrici $K_b^{(p)}$ e $C_b^{(p)}$ rappresentano, rispettivamente, i coefficienti di rigidità e di smorzamento lungo le direzioni principali del supporto.

3.4.6 Equazione del moto

L'equazione del moto è ottenuta applicando la CUF e il FEM ai termini della formulazione del principio di Hamilton. Pertanto, abbiamo:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\delta q_{\tau i}^T M^{ij\tau s} \ddot{q}_{sj} + \delta q_{\tau i}^T G_{Tot}^{ij\tau s} \dot{q}_{sj} + \delta q_{\tau i}^T K_{Tot}^{ij\tau s} q_{sj} + \delta q_{\tau i}^T F_{\Omega r}^{ij\tau s} \right) dt = 0 \quad (3.52)$$

dove i termini sono definiti come segue:

- $M^{ij\tau s}$ rappresenta la matrice di massa,
- $G_{Tot}^{ij\tau s} = G^{ij\tau s} + G_b^{ij\tau s}$, dove $G^{ij\tau s}$ è la matrice di Coriolis e $G_b^{ij\tau s}$ rappresenta il contributo di smorzamento dei cuscinetti,
- $K_{Tot}^{ij\tau s} = K^{ij\tau s} + K_b^{ij\tau s} + K_{\Omega}^{ij\tau s} + K_{\sigma_0}^{ij\tau s}$, con $K^{ij\tau s}$ che rappresenta la matrice globale di rigidezza, $K_b^{ij\tau s}$ il contributo dei cuscinetti, $K_{\Omega}^{ij\tau s}$ il contributo dello spin-softening, e $K_{\sigma_0}^{ij\tau s}$ la rigidezza centrifuga,
- $F^{ij\tau s}$ rappresenta il vettore di carico.

I nuclei fondamentali delle diverse matrici sono descritti come segue:

$$\begin{aligned} M^{ij\tau s} &= I_l^{ij} \langle F_{\tau\rho} k_i F_s \rangle \\ G_{\Omega}^{ij\tau s} &= I_l^{ij} \langle F_{\tau\rho} k_i F_s \rangle \cdot 2\Omega \\ G_{\Omega}^{ij\tau s} &= \sum_{p=1}^{N_b} N_i(y_b^p) F_{\tau}(x_b^p, z_b^p) C_b^p F_s(x_b^p, z_b^p) N_j(y_b^p) \\ K_{\Omega}^{ij\tau s} &= \sum_{p=1}^{N_b} N_i(y_b^p) F_{\tau}(x_b^p, z_b^p) K_b^p F_s(x_b^p, z_b^p) N_j(y_b^p) \\ K_{\Omega}^{ij\tau s} &= -I_l^{ij} \langle F_{\tau\rho} k_i F_s \rangle \Omega^T \Omega \\ K_{\sigma_0}^{ij\tau s} &= I_l^{ij} \langle F_{\tau,x} \sigma_{0xx} I F_{s,x} + F_{\tau,z} \sigma_{0zz} I F_{s,z} \\ &\quad + F_{\tau,x} \sigma_{0xz} I F_{s,z} + F_{\tau,z} \sigma_{0zx} I F_{s,x} \rangle \\ F_{\Omega}^{i\tau} &= I_l^i \Omega^T \Omega \langle F_{\tau} I \rho r \rangle \end{aligned} \quad (3.53)$$

In forma matriciale, si ottiene:

$$G_{\Omega}^{ij\tau s} = \Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2I_l^{ij} \langle F_{\tau\rho} I F_s \rangle \\ 0 & 0 & 0 \\ 2I_l^{ij} \langle F_{\tau\rho} I F_s \rangle & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

$$K_{\Omega}^{ij\tau s} = \Omega^2 \begin{bmatrix} -I_l^{ij} \langle F_{\tau\rho} I F_s \rangle & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -I_l^{ij} \langle F_{\tau\rho} I F_s \rangle & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

$$K_{\sigma_0}^{ij\tau s} = \Omega^2 \begin{bmatrix} I_l^{ij} K_{\sigma_0} & 0 & 0 \\ 0 & I_l^{ij} K_{\sigma_0} & 0 \\ 0 & 0 & I_l^{ij} K_{\sigma_0} \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

$$F_{\Omega}^{i\tau} = \Omega^2 \begin{bmatrix} I_l^i \langle F_{\tau\rho} x_p \rangle \\ 0 \\ I_l^i \langle F_{\tau\rho} z_p \rangle \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

dove $I, (I_l^{ij}, I_l^{ij,y}, I_l^{i,yj}, I_l^{i,yj,y})$ e $\langle \dots \rangle$ sono stati definiti precedentemente nell'Eq. 3.34, e $r = (x_p, 0, z_p)^T$ rappresenta la distanza del punto P dall'asse neutro.

Per risolvere le frequenze naturali e i modi di vibrazione della struttura rotante, si assume l'ipotesi che la soluzione sia esprimibile tramite una funzione periodica $q = \bar{q}e^{i\omega t}$; di conseguenza, la risoluzione del problema si ha da un'un'equazione omogenea:

$$M\ddot{q} + G_{Tot}\dot{q} + K_{Tot}q = 0 \quad (3.58)$$

$$\Rightarrow qe^{i\omega t} (-M\omega^2 + G_{Tot}i\omega + K_{Tot}) = 0 \quad (3.59)$$

Supponendo una soluzione esponenziale e derivando l'Equazione (3.61), si ottiene il polinomio caratteristico dell'Equazione 3.62. Questa è un'equazione agli autovalori quadratica (QEP), dove ω è legata alle frequenze naturali e allo smorzamento del sistema. Questo problema agli autovalori quadratico può essere trasformato in un problema agli autovalori lineare di ordine $2 \times R$, dove R è il numero dei gradi di libertà del sistema:

$$\begin{cases} M\ddot{q} + G_{Tot}\dot{q} + K_{Tot}q = 0 \\ -\dot{q} + \dot{q} = 0 \end{cases} \quad (3.60)$$

Introducendo un nuovo vettore a definito da:

$$a = \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix}, \quad \dot{a} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

l'equazione del moto assume la forma:

$$R\dot{a} + Ta = 0 \quad (3.62)$$

Espressa in forma complessa, si ottiene un'equazione matriciale sottostante:

$$\frac{R}{T^{-1}} - \frac{1}{i\omega}I = 0 \quad (3.63)$$

dove

$$T^{-1}R = \begin{bmatrix} K_{Tot}^{-1}G_{Tot} & K_{Tot}^{-1}M \\ -I & 0 \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

Il problema è stato quindi ridotto a un'equazione matriciale risolvibile con i metodi standard per problemi agli autovalori. Innovazioni computazionali ulteriori sono applicate per ottimizzare i calcoli numerici, migliorando la simulazione delle dinamiche rotazionali, come la rotazione attorno all'asse z .

Capitolo 4

Risultati Numerici per strutture isotrope

In questo capitolo vengono presentati i risultati ottenuti mediante l'approccio CUF per strutture isotrope. L'analisi numerica è stata condotta per valutare le proprietà strutturali e vibrazionali dei modelli considerati, attraverso simulazioni in condizioni statiche e dinamiche. Il codice utilizzato, scritto in Fortran, si fonda sulla CUF associata a modelli cinematici dipendenti dai nodi (node-dependent kinematics), che consentono l'analisi di modelli avanzati. In questo approccio, il campo di spostamento tridimensionale viene suddiviso in due domini: la sezione trasversale e l'asse longitudinale. Le funzioni dipendenti dai nodi nella sezione trasversale sono interpolate lungo il dominio assiale tramite funzioni di forma nodali lagrangiane, costruendo così un elemento trave completo.

4.1 Analisi Strutture Non Rotanti

Come primo passo, è stata effettuata un'analisi di convergenza su una trave a sbalzo con sezione quadrata, composta da materiale isotropo. Le proprietà del materiale sono riportate in Tab. 4.1. Poiché il modello considera elementi quadrilateri, i polinomi di interpolazione di Lagrange sono stati utilizzati per rappresentare il campo di spostamento nella sezione trasversale. Nella formulazione CUF, l'ordine di espansione del modello strutturale, che determina il livello di accuratezza, rappresenta uno degli input principali dell'analisi.

Nel codice sono stati analizzati tre tipi di elementi lagrangiani: L4, L9 e L16. Lo studio di convergenza è stato condotto in due modalità:

1. Variazione progressiva del numero di elementi nella sezione trasversale, mantenendo fisso il numero di elementi lungo l'asse principale.

2. Incremento del numero di elementi assiali, mantenendo costante il numero di nodi nella sezione trasversale.

Quantità fisiche	Valori
Lunghezza della trave [m]	0.1
Lunghezza lato della sezione [m]	0.01
Carico applicato [N/cm^2]	1
Modulo di Young [GPa]	70
Coefficiente di Poisson	0.3
Densità [kg/m^3]	2700
Coefficiente di dilatazione termica [K^{-1}]	$16.3 \cdot 10^{-6}$

Tabella 4.1: Proprietà della trave.

4.1.1 Analisi Statica

Per l'analisi statica, è stata applicata una pressione $p = 1 \text{ N/cm}^2$. Moltiplicando tale pressione per la larghezza della sezione ($a = 0.01 \text{ m}$), si ottiene un carico distribuito uniforme $q = 1000 \text{ N/m}$ applicato sulla superficie superiore della trave. La deflessione della trave, corrispondente allo spostamento U_z all'estremo libero, è stata calcolata e confrontata con i risultati analitici. Questo confronto ha consentito di validare l'accuratezza del modello FEM implementato nel codice MUL². L'espressione della deflessione massima per una trave a sbalzo soggetta a un carico uniformemente distribuito è la seguente:

$$|u_{z_{analitico}}| = \frac{qL^4}{8EI} \quad (4.1)$$

dove:

- q è il carico distribuito ,
- L è la lunghezza della trave,
- E è il modulo di Young del materiale,
- I è il momento d'inerzia della sezione trasversale.

Le proprietà della struttura sono elencate nella Tab. 4.1. I risultati, mostrati nella Fig. 4.1, evidenziano che gli elementi L9 e L16 presentano una velocità di

convergenza molto simile. Inoltre, l'utilizzo di elementi B4 consente una deviazione relativa ridotta rispetto al valore analitico $u_{z_{\text{analitico}}} = -2.14 \text{ mm} = -2.14 \times 10^{-5} \text{ m}$, anche con una discretizzazione minima: la deviazione è inferiore all'1% con soli 10 elementi.

Il valore della deflessione ottenuto dal codice, per la configurazione con elemento L9 per la sezione e 10 elementi B4 lungo l'asse, è pari a $0.00214 \text{ cm} = 2.137 \times 10^{-5} \text{ m}$, molto vicino al valore analitico $u_{z_{\text{analitico}}} = -2.14 \times 10^{-5} \text{ m}$. Questa discrepanza, pari a circa l'1%, conferma che la discretizzazione scelta, combinando gli elementi L9 e B4, offre un'ottima accuratezza con un numero contenuto di elementi. L'analisi dimostra come questa configurazione consenta una rappresentazione precisa del comportamento della trave, mantenendo il costo computazionale ridotto.

	Analitici	CUF (1 L9&10 × B4)
u_z estremo libero [m]	$-2.14 \cdot 10^{-5}$	$-2.136 \cdot 10^{-5}$

Tabella 4.2: Confronto tra i risultati analitici e quelli ottenuti con la CUF per la deflessione trasversale u_z all'estremo libero della trave incastrata sotto carico uniforme.

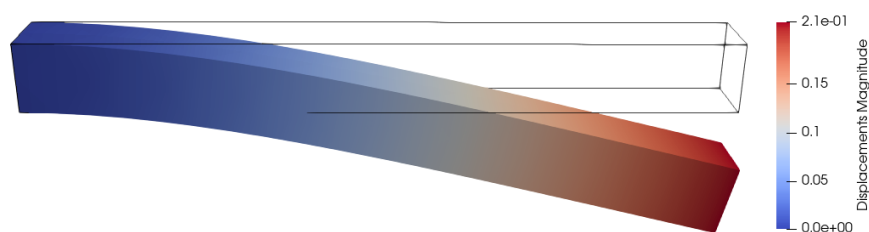
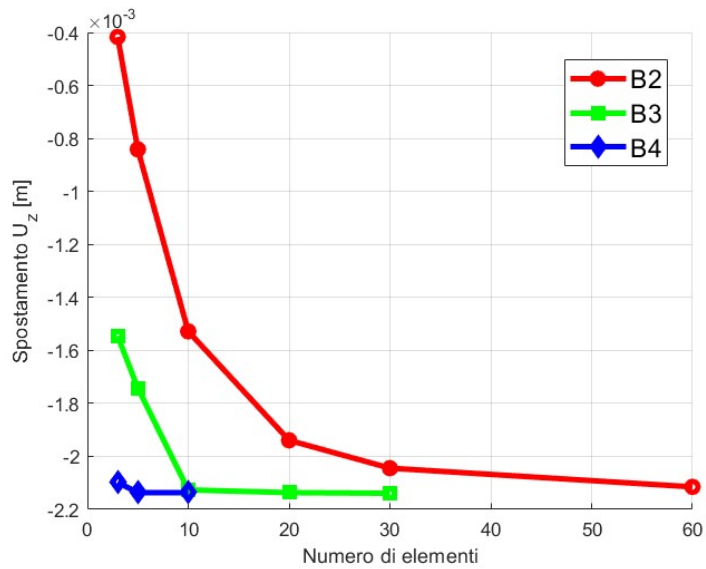
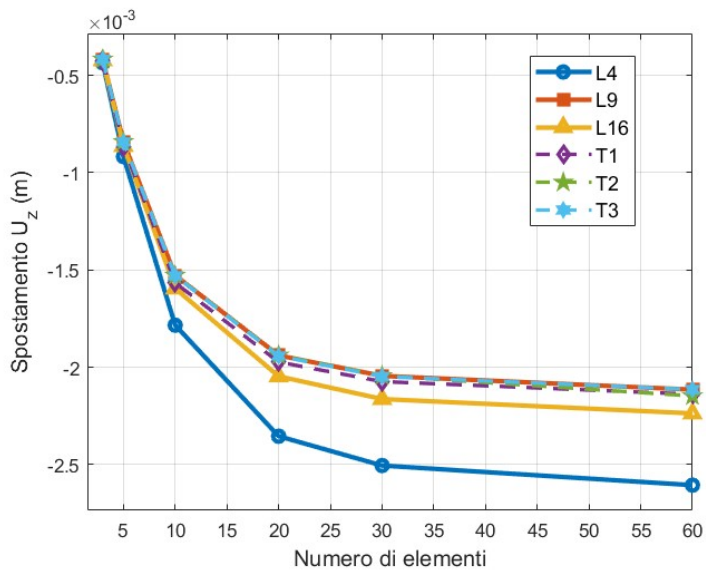


Figura 4.1: Deformazione trasversale u_z della trave incastrata con carico distribuito uniforme, visualizzata in Paraview.



(a) Analisi di convergenza statica FEM: spostamento u_z con elementi L9 ai nodi, al variare degli elementi trave lungo l'asse.



(b) Analisi di convergenza statica cross-section: spostamento U_z con numero variabile di elementi trave B2 lungo l'asse, al variare del modello di espansione ai nodi.

Figura 4.2: Analisi di convergenza statica CUF: spostamento dell'estremo libero rispetto all'asse z.

4.1.2 Analisi delle vibrazioni libere

L'analisi delle vibrazioni libere rappresenta un aspetto fondamentale nello studio della rotordinamica. I sistemi rotanti possono manifestare fenomeni di vibrazione complessi, i quali, se non adeguatamente compresi e gestiti, possono portare al guasto catastrofico della macchina. Sebbene il comportamento dinamico di un sistema rotante sia il risultato delle interazioni tra i suoi componenti, è cruciale analizzare le caratteristiche vibrazionali di ciascun elemento in modo indipendente prima di procedere a uno studio globale del sistema.

In questa sezione, il codice *MUL*² è stato utilizzato per calcolare le prime frequenze naturali di una trave, le cui caratteristiche strutturali sono state precedentemente descritte. I risultati analitici disponibili in letteratura sono ottenuti risolvendo l'equazione differenziale parziale (PDE) che governa il comportamento dinamico della trave, utilizzando il metodo di separazione delle variabili. In tale approccio, lo spostamento $u(x, t)$ viene espresso come il prodotto di una funzione spaziale $\phi(x)$ e una funzione temporale $f(t)$, conducendo alla seguente equazione:

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (4.2)$$

dove:

- EI è la rigidità flessionale della trave,
- ρ è la densità del materiale,
- S è l'area della sezione trasversale della trave,
- $u(x, t)$ rappresenta lo spostamento trasversale della trave in funzione dello spazio e del tempo.

Separando le variabili otteniamo:

$$EI \frac{d^4 \phi(x)}{dx^4} f(t) + \rho S \frac{d^2 f(t)}{dt^2} \phi(x) = 0 \quad (4.3)$$

che può essere ulteriormente ridotta a:

$$\frac{EI}{\rho S} \frac{1}{\phi(x)} \frac{d^4 \phi(x)}{dx^4} = - \frac{1}{f(t)} \frac{d^2 f(t)}{dt^2} = \omega^2 \quad (4.4)$$

Considerando le condizioni al contorno di una trave a sbalzo, senza spostamento né rotazione al lato bloccato e senza forze di taglio o momento flettente al lato libero, si ottengono le pulsazioni naturali, descritte dall'equazione:

$$\omega_i = \frac{X_i^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \quad (4.5)$$

e corrispondenti frequenze:

$$f_i = \frac{1}{2\pi} \frac{X_i^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \quad (4.6)$$

dove E rappresenta il modulo di Young, I il momento d'inerzia della sezione trasversale, S l'area della sezione, ρ la densità, L la lunghezza della trave, e X_i un coefficiente determinato dalle condizioni al contorno. I coefficienti X_i che determinano le pulsazioni e le frequenze naturali di una trave a sbalzo (incastata a un'estremità e libera all'altra) sono soluzioni dell'equazione trascendente:

$$\cos(X_i) \cosh(X_i) = -1 \quad (4.7)$$

Le prime due soluzioni positive, corrispondenti rispettivamente al primo e al secondo modo flessionale, sono:

$$X_1 = 1.875104, \quad X_2 = 4.694091$$

Per quanto riguarda il modo torsionale, esso si ottiene in modo analogo, risolvendo l'equazione differenziale rispetto alle condizioni al contorno. Per una trave a sbalzo con sezione trasversale omogenea, dove $I_\theta = J\rho$, le frequenze naturali di torsione sono date dalla relazione:

$$I_\theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = GJ \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (4.8)$$

dove θ è lo spostamento angolare, I_θ il momento d'inerzia della massa, J il momento polare della sezione trasversale, e $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ il modulo di taglio. La pulsazione e la frequenza naturale associata al modo torsionale sono dunque:

$$\omega = \sqrt{\frac{GJ}{I_\theta L}}, \quad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{GJ}{I_\theta L}} \quad (4.9)$$

I risultati numerici dei modi flessionali sono mostrati in Fig. 4.3, mentre il confronto con i valori analitici è presentato nella Tab. 4.3.

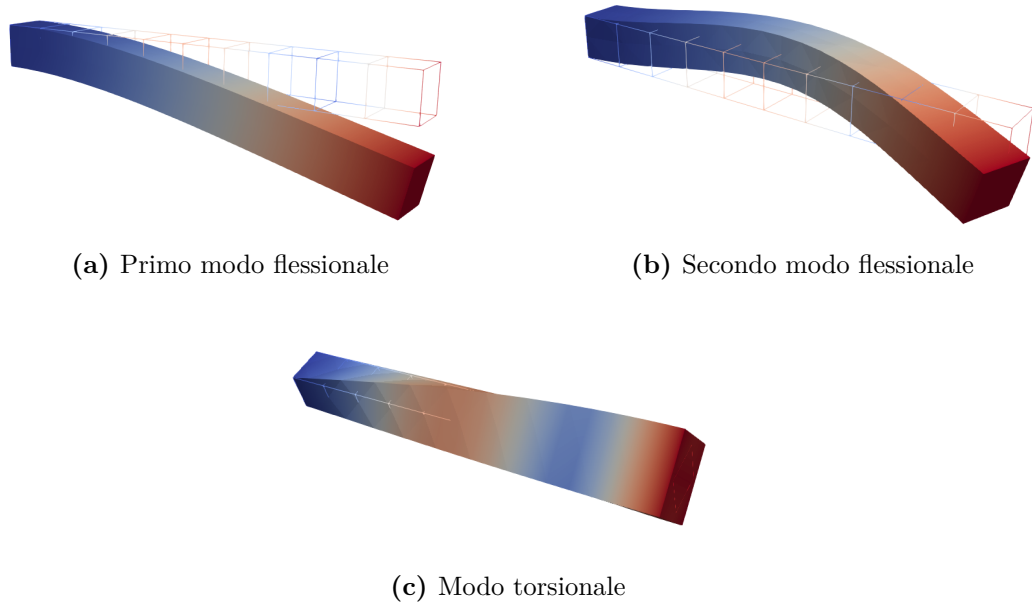


Figura 4.3: Analisi dinamica CUF (L4 10 × B4): modi di vibrare

	Analitica	CUF (L4 & 10 × B4)
1a frequenza flessionale [Hz]	822.52	821.99
2a frequenza flessionale [Hz]	5154.65	4950.22
Frequenza torsionale [Hz]	7115.10	7894.42

Tabella 4.3: Confronto tra frequenze naturali analitiche e numeriche per una trave a sbalzo.

I risultati ottenuti confermano la lieve discrepanza tra le soluzioni analitiche e quelle numeriche. È quindi fondamentale verificare che l'analisi numerica sia convergente, al fine di applicare correttamente il modello proposto. L'analisi di convergenza permette di identificare la combinazione ottimale degli elementi utilizzati, garantendo soluzioni numeriche accurate. Come illustrato nella Fig. 4.4, l'impiego degli elementi assiali B3 e B4, rispetto ai B2, favorisce una maggiore velocità di convergenza anche con un numero ridotto di elementi. La procedura evidenzia un'efficienza superiore degli elementi trave B3 e B4, permettendo di identificare in dettaglio quale modello sia più adeguato. Le curve relative a B3 e B4 risultano in gran parte sovrapponibili se si utilizza lo stesso numero di elementi; in

particolare, con almeno cinque elementi trave, le differenze diventano trascurabili. Le frequenze naturali, infatti, presentano variazioni minime, dell'ordine di pochi centesimi, a seconda del metodo numerico scelto. Per individuare un modello ottimale, è necessario condurre ulteriori analisi che considerino anche il costo computazionale, al fine di semplificare la selezione del metodo più efficiente.

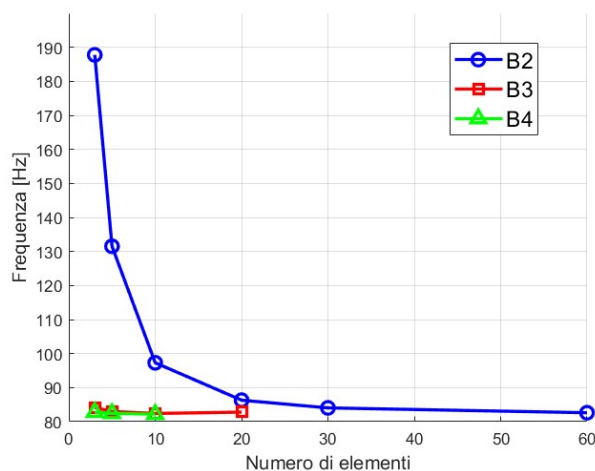


Figura 4.4: Analisi di convergenza della prima frequenza naturale flessionale con elementi L9 ai nodi, al variare degli elementi trave lungo l'asse z .

4.1.3 Variazione della sezione trasversale

Nelle applicazioni ingegneristiche reali, le travi difficilmente presentano una sezione quadratica semplice, in quanto tale configurazione spesso risulta subottimale per soddisfare le esigenze di rigidità, peso e capacità portante. Al contrario, si utilizzano frequentemente sezioni trasversali più articolate, progettate per ottimizzare le prestazioni strutturali.

In questa sottosezione, si avvia l'esplorazione di geometrie più complesse utilizzando il codice MUL². Per iniziare lo studio, si confrontano le prestazioni della trave precedentemente analizzata, con sezione quadrata di lato 1 m, con quelle di una trave caratterizzata da una sezione trasversale a forma di I . Quest'ultima rappresenta una configurazione ampiamente adottata in ingegneria strutturale, grazie alla sua efficienza meccanica nel combinare elevata rigidità flessionale e riduzione del peso.

L'analisi viene condotta sia in regime statico sia in regime dinamico, modellando la sezione a I in MUL come un assemblaggio di elementi di tipo Q4, come illustrato nella Fig. 4.6. La geometria della sezione è così definita:

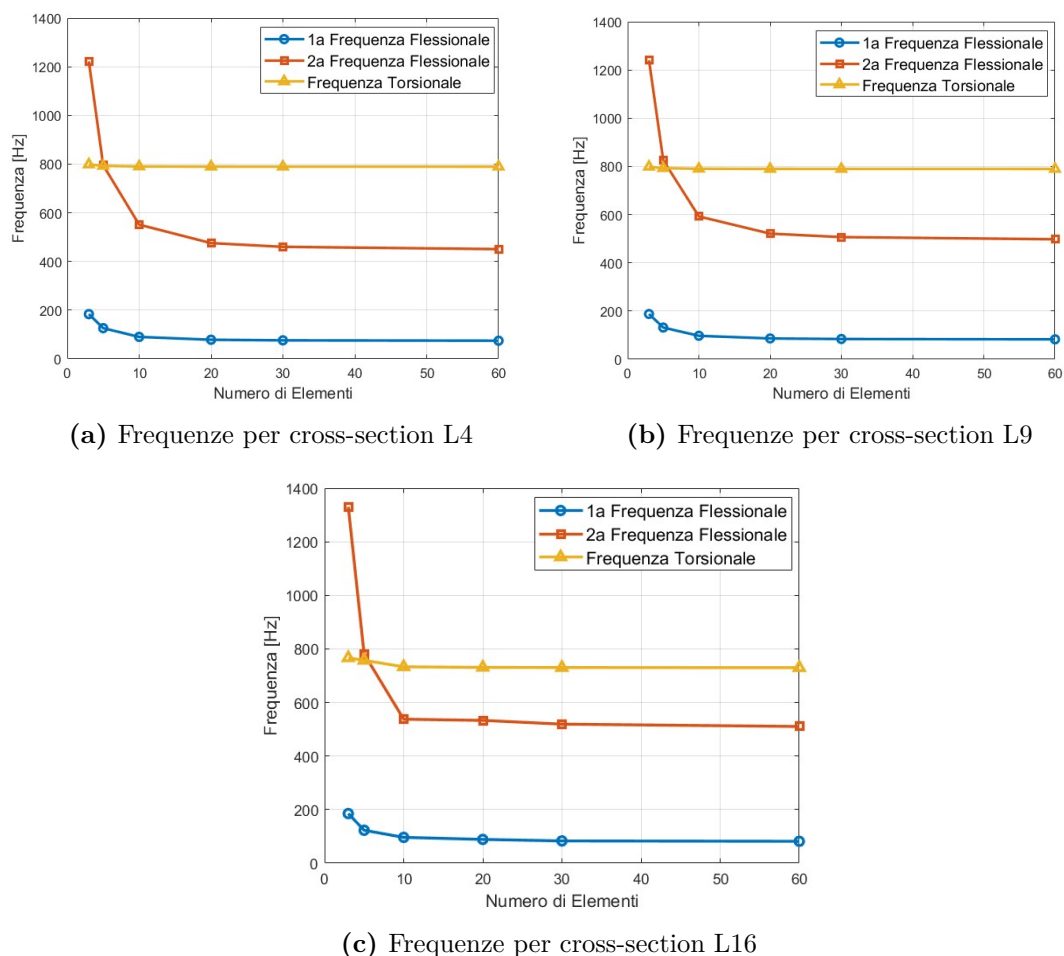


Figura 4.5: Analisi di convergenza per le prime tre frequenze naturali con numero variabile di elementi trave B2 lungo l’asse al variare della cross-section

- Flangia superiore: larghezza $b = 1.0$ cm e altezza $h = 0.25$ cm;
- Anima: larghezza $b = 0.3$ cm e altezza $h = 0.5$ m;
- Flangia inferiore: larghezza $b = 1.0$ cm e altezza $h = 0.25$ cm.

Di seguito, riportiamo i risultati ottenuti per l’analisi statica e dinamica della trave a sezione I , con un confronto qualitativo rispetto alla sezione quadrata.

Il momento di inerzia totale I_z per una sezione a I è determinato come somma dei contributi delle flangie superiore e inferiore e dell’anima, applicando il teorema degli assi paralleli:

$$I_z = \sum_{i=1}^3 (I_{z,i} + A_i d_i^2),$$

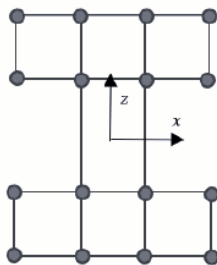


Figura 4.6: Rappresentazione della cross-section con sezione a I-shape in Matlab. Modellizzata con 7 L4 elementi

dove A_i è l'area, d_i la distanza tra il baricentro della componente e l'asse neutro globale, e $I_{z,i}$ il momento di inerzia locale di ciascuna parte della sezione.

I risultati analitici del calcolo sono riportati nella Tab. 4.5.

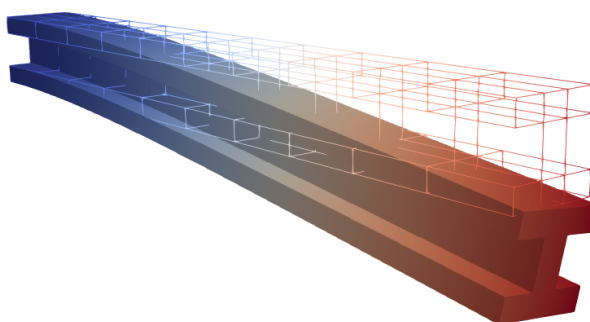


Figura 4.7: Deflessione per la trave a sbalzo con cross-section a forma di I.

Come indicato nella Tabella 4.4, la sezioni a scatola a I mostrano un comportamento simile sia in condizioni dinamiche che statiche, con la differenza che la sezione a I è più sensibile alla torsione e presenta una deformazione massima maggiore. I risultati ottenuti sono stati confrontati con le espressioni analitiche già presentate per la trave con sezione quadrata. Mentre le proprietà del materiale sono rimaste invariate, i valori geometrici legati alla sezione trasversale, come il momento d'inerzia, sono cambiati. La maggiore deviazione può essere attribuita all'uso di elementi Q4 per costruire la sezione trasversale, il che ha reso il modello più rigido in torsione. Utilizzare elementi L9 per la sezioni a I-shape permetterebbe di ridurre tale deviazione, ma richiederebbe più tempo per definire la mesh manualmente.

Sezione	$f_1 [Hz]$	$f_2 [Hz]$	$f_t [Hz]$	$u_z (m)$
Quadrata				
Analitico	822.52	5154.65	7894.42	2.14×10^{-5}
CUF (L9 & 10 × B4)	821.99	4950.22	7894.10	2.137×10^{-5}
Deviazione	-0.06%	-3.97%	-0.004%	-0.14%
I - shape				
Analitico	773.25	4845.86	3615.91	8.13×10^{-5}
CUF (7 L4 & 10 x B4)	737.65	4468.73	3439.51	8.265×10^{-5}
Deviazione	-4.60%	-7.79%	-4.88%	+1.66%

Tabella 4.4: Prime tre frequenze naturali analitiche e numeriche, e la deviazione della deformazione $|U_z|$, per ciascuna forma di sezione trasversale.

Si esegue analisi di seguito analisi statica e dinamica su diverse sezioni rispettivamente a scatola (O-shape) e rettangolare (1.2 cm x 0.8 cm).

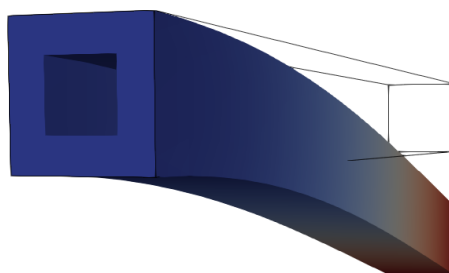


Figura 4.8: Deflessione per la trave a sbalzo con cross-section a O-shape.

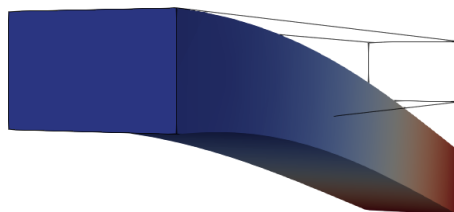


Figura 4.9: Deflessione per la trave a sbalzo a sezione rettangolare

Sezione	$f_1 [Hz]$	$f_2 [Hz]$	$f_t [Hz]$	$u_z [m]$
Quadrata				
Analitico	822.52	5154.65	7894.42	2.14×10^{-5}
CUF (L9 & 10 × B4)	821.99	4950.22	7894.10	2.137×10^{-5}
Deviazione	-0.06%	-3.97%	-0.004%	-0.14%
Rettangolare				
Analitico	658.02	4123.72	6441.11	4.13×10^{-5}
CUF (L9 & 10 × B4)	659.79	4028.69	7323.60	4.15×10^{-5}
Deviazione	+0.27%	-2.31%	+13.71%	+0.48%
O-shape (Box)				
Analitico	919.61	5763.08	7107.48	5.62×10^{-5}
CUF (8 x L4 & 10 × B4)	920.69	5406.73	7420.69	5.66×10^{-5}
Deviazione	+0.12%	-6.18%	+4.41%	+0.71%

Tabella 4.5: Prime tre frequenze naturali e la deviazione della deformazione u_z , per ciascuna forma di sezione trasversale.

4.2 Analisi Strutture Rotanti: Diagrammi di Campbell

In questa sezione si analizza il comportamento dinamico di una trave soggetta a una velocità di rotazione Ω . Come discusso nel Capitolo 2, relativo agli aspetti teorici della dinamica dei rotori, le frequenze proprie del sistema risultano strettamente dipendenti dalla velocità di rotazione a causa di diversi effetti fisici, tra cui l'interazione giroscopica e i fenomeni idrodinamici associati a cuscinetti e tenute.

Per descrivere in modo efficace la risposta vibratoria di un sistema in rotazione, si utilizza comunemente il diagramma di Campbell. Questa rappresentazione grafica, come già spiegato nel dettaglio nella sezione 2.4, consente di visualizzare l'evoluzione delle frequenze naturali al variare della velocità di rotazione e di identificare le cosiddette velocità critiche. Tali velocità critiche corrispondono a condizioni operative in cui il sistema diviene instabile, fenomeno che si verifica quando una frequenza naturale coincide con la velocità di rotazione, portando potenzialmente a vibrazioni incontrollate.

Per garantire una maggiore generalità e facilità di confronto tra studi differenti, le frequenze e la velocità di rotazione vengono rappresentate in forma adimensionale. Le espressioni che definiscono la frequenza adimensionale e il parametro adimensionale di velocità di rotazione sono espresse come segue:

$$\omega^* = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \Omega^* = \frac{\Omega}{\omega_0}, \quad \text{con } \omega_0 = \sqrt{\frac{\sqrt{E J_{xx} E J_{zz}}}{\rho A L^4}}, \quad (4.10)$$

dove i parametri sono definiti come segue:

- E : modulo di Young del materiale;
- ρ : densità del materiale;
- A : area della sezione trasversale;
- L : lunghezza dell'albero;
- J_{xx} e J_{zz} : momenti di inerzia rispetto ai piani principali.

Per sezioni trasversali simmetriche, come quelle circolari o quadrate, si ha che $J_{xx} = J_{zz}$, semplificando ulteriormente i calcoli.

In questa sezione verranno analizzate diverse geometrie di sezione trasversale, esaminandone l'influenza sul comportamento dinamico del sistema. I risultati numerici ottenuti saranno confrontati con i dati presenti in letteratura per configurazioni equivalenti, al fine di verificarne l'accuratezza e di fornire un'analisi comparativa dettagliata.

Le sezioni trasversali prese in considerazione comprendono, inizialmente, una sezione quadrata e una rettangolare. La sezione quadrata è caratterizzata dall'uguaglianza dei momenti di inerzia principali ($E J_{xx} = E J_{zz}$), mentre nella sezione rettangolare tali valori differiscono significativamente, con $E J_{xx} = 0.01 E J_{zz}$, riflettendo una marcata anisotropia flessionale. Entrambe le geometrie sono modellate con le stesse proprietà del materiale: un modulo di Young $E = 210 \text{ GPa}$, un coefficiente di Poisson $\nu = 0.3$, una densità $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$, e una lunghezza della trave pari a $L = 10 \text{ cm}$.

Per iniziare, è stata condotta un'analisi di convergenza sulla struttura rotante, concentrandosi sulla discretizzazione bidimensionale della sezione trasversale. L'obiettivo è valutare le espansioni offerte dal codice CUF, che includono sia i modelli di Taylor, definiti come low-order models, sia i modelli di Lagrange, noti come high-order models. I modelli di Taylor, pur garantendo un costo computazionale ridotto, mostrano una minore accuratezza, specialmente con l'aumentare della complessità del sistema. Al contrario, i modelli di Lagrange offrono una maggiore precisione al prezzo di un maggiore impegno computazionale.

L'analisi è stata eseguita su una trave messa in rotazione lungo il suo asse Y, con sezione quadrata, discretizzata con 10 elementi B4 lungo l'asse longitudinale. Sono state considerate le frequenze naturali dei primi modi, privilegiando quelle più sensibili alle variazioni di accuratezza. Dai risultati emergono differenze significative nella convergenza, in particolare per i modelli di Taylor a basso ordine.

Tra le espansioni esaminate, il modello Lagrangiano bi-quadratico (LE9) si è rivelato il più efficace, rappresentando un compromesso ideale tra accuratezza e costo computazionale. La Tabella 4.6 riporta le frequenze normalizzate relative ai diversi modelli di espansione.

Modello	f_{1b} [Hz]	f_{1f} [Hz]	f_{2b} [Hz]	f_{2f} [Hz]	f_{3b} [Hz]	f_{3f} [Hz]
EBBT	2.4457	4.4385	20.3604	22.3146	53.4022	57.7530
TBT	2.4284	4.4241	19.6626	21.6296	53.7315	55.6096
TE1	2.4289	4.4247	19.6631	21.6301	53.7357	55.6136
TE2	2.4514	4.4450	19.7993	21.7503	54.0166	55.9375
TE3	2.4485	4.4418	19.6773	21.6442	53.4428	55.3700
LE4	2.1026	4.0992	17.8007	19.7488	49.1045	50.9782
LE9	2.4511	4.4446	19.7989	21.7497	54.0148	55.9358
LE16	2.5674	4.5642	20.3868	22.3434	53.5784	57.1063

Tabella 4.6: Analisi di convergenza cross-section: frequenze flessionali normalizzate rispetto a ω_0 dei primi 3 modi di vibrare, a seconda dei modelli di discretizzazione con ordini di raffinatezza differenti, ad una velocità di rotazione pari a $\Omega^* = 1$ (1497 rad/s); trave a sezione quadrata con $L = 10$ cm e $b = h = 1$ cm, con elementi $10 \times B4$ lungo l'asse longitudinale.

4.2.1 Trave con sezione quadrata

Si analizza, il Diagramma di Campbell, riportato in Fig.4.10 che illustra l'evoluzione delle frequenze naturali al variare della velocità di rotazione adimensionalizzata (Ω^*) per una trave a sbalzo a sezione quadrata con $l = 1$ cm caratterizzata da una geometria simmetrica ($I_{xx} = I_{zz}$).

Tali diagrammi permettono di identificare le due principali tendenze associate ai modi di vibrare: backward e forward. Le frequenze backward mostrano un comportamento decrescente con l'aumentare di Ω^* , mentre le frequenze forward

Proprietà	Valore
Lunghezza longitudinale L [cm]	10
Lato sezione l [cm]	1
Modulo di elasticità E [GPa]	210
Coefficiente di Poisson ν	0.3
Densità ρ [kg/m ³]	7800
α (K ⁻¹)	$21.1 \cdot 10^{-6}$

Tabella 4.7: Proprietà della trave a sezione quadratica posta in rotazione.

tendono a crescere. Questa dualità, osservabile per ciascun modo, è conforme alle previsioni teoriche e riflette l'influenza della velocità di rotazione sul comportamento dinamico del sistema [89, 90]. I dati numerici sono stati confrontati con i risultati analitici calcolati per una velocità di rotazione nulla ($\Omega^* = 0$) e sono riassunti nella Tab. 4.8.

Per i primi modi, i risultati numerici e analitici risultano in buona concordanza, nonostante alcune discrepanze per i modi superiori. Le differenze osservate sono attribuibili alle ipotesi del modello analitico, che non tengono conto degli effetti del taglio e delle deformazioni fuori piano della sezione trasversale.

	ω_1^*	ω_2^*	ω_3^*
Riferimento letteratura	3.516	22.034	61.697
CUF (L9 & 10 × B4)	3.448	20.766	54.958
Deviazione (%)	-1.93	-5.75	-10.92

Tabella 4.8: Confronto tra frequenze naturali nel riferimento letterario [89] e risultati numerici in CUF adimensionati per una trave a sbalzo a sezione quadrata $L9 \& 10 \times B4$.

Come mostrato nelle Fig. 4.10, le soluzioni numeriche riproducono con accuratezza l'andamento atteso sia per le frequenze backward che per quelle forward. In particolare, per i primi modi le curve risultano sovrapponibili mentre vi è una maggiore discrepanza nei modi superiori che è dovuta all'influenza delle deformazioni a taglio, che non possono essere trascurate nel caso di una sezione quadrata compatta. Tali effetti alterano le frequenze naturali, determinando scostamenti rispetto alle soluzioni teoriche basate sulla teoria di Eulero-Bernoulli.

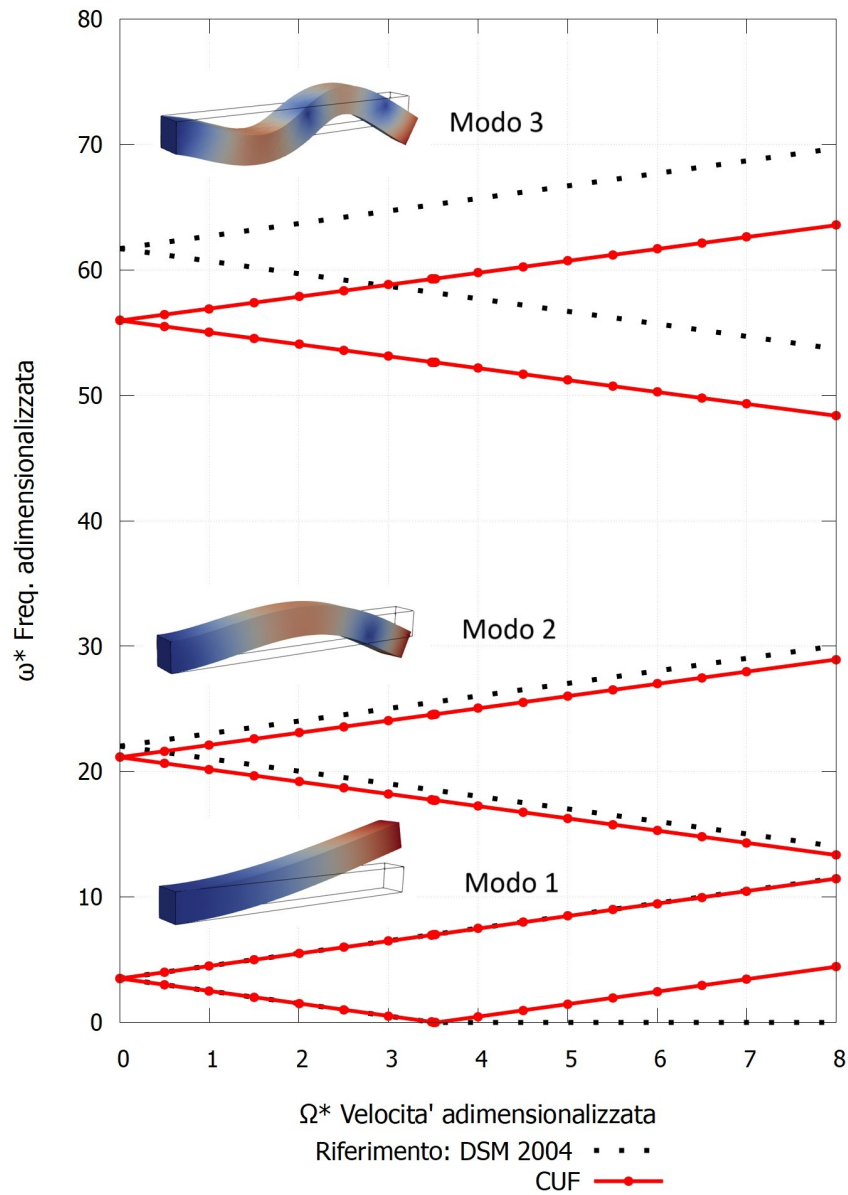


Figura 4.10: Diagramma di Campbell della trave a sbalzo a sezione quadrata modellizzata con elementi L9 & 10 x B4 ; variazione delle frequenze naturali adimensionalizzate al variare della velocità di rotazione attorno all'asse y ; confronto con i risultati teorici di Banerjee e Su [89] tramite DSM.

Nonostante queste differenze, le pendenze delle curve numeriche sono in accordo con quelle riportate in studi precedenti, come quelli di Hodges e Rutkowski [90].

Tali risultati confermano la validità del modello numerico utilizzato e la sua capacità di rappresentare il comportamento dinamico di una trave rotante con geometria non ideale.

4.2.2 Trave con sezione rettangolare

La sezione rettangolare presenta un comportamento dinamico più complesso rispetto a quella quadrata, poiché i momenti d'inerzia principali non sono equivalenti ($I_{xx} \neq I_{zz}$). Per garantire un confronto significativo con la letteratura [89], le dimensioni della sezione sono state scelte in modo da soddisfare la condizione $EI_{zz} = 0.01EI_{xx}$, fissando l'altezza $h = 0.1$ cm e la base $b = 1$ cm. Lo studio è stato condotto utilizzando lo stesso materiale impiegato per la sezione quadrata, le cui proprietà sono riportate nella Tabella 4.7.

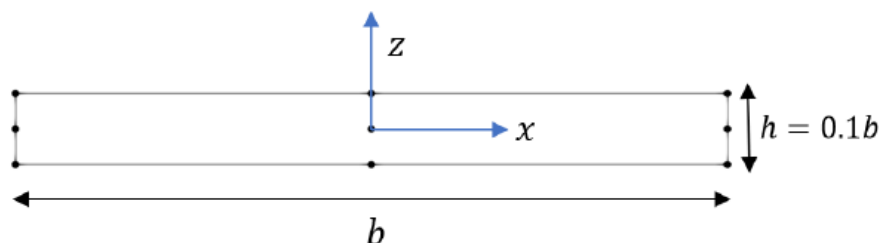


Figura 4.11: Rappresentazione della sezione rettangolare della trave a sbalzo analizzata.

Dal diagramma di Campbell relativo a questa geometria (Fig. 4.12), che descrive l'andamento dei primi modi di vibrare in funzione della velocità di rotazione Ω , emerge che, a differenza della sezione quadrata, la sezione rettangolare presenta due velocità critiche di rotazione, riportate in Tabella 4.9. I risultati numerici mostrano una buona corrispondenza con la teoria formulata da Banerjee e Su, confermando la validità del modello.

	ω_1^*	ω_2^*	ω_3^*	ω_4^*	Ω_{cr1}^*	Ω_{cr2}^*
Riferimento	1.112	6.968	11.119	19.511	1.1	7.1
CUF (L9 & 10 × B4)	1.120	7.014	11.057	19.645	1.12	7.03
Deviazione (%)	+0.72	+0.66	-0.56	+0.69	+1.82	-1.04

Tabella 4.9: Confronto tra frequenze naturali adimensionate del riferimento letterario [89] e i risultati numerici in CUF adimensionati per una trave a sbalzo a sezione rettangolare con $h = 0.1$ b.

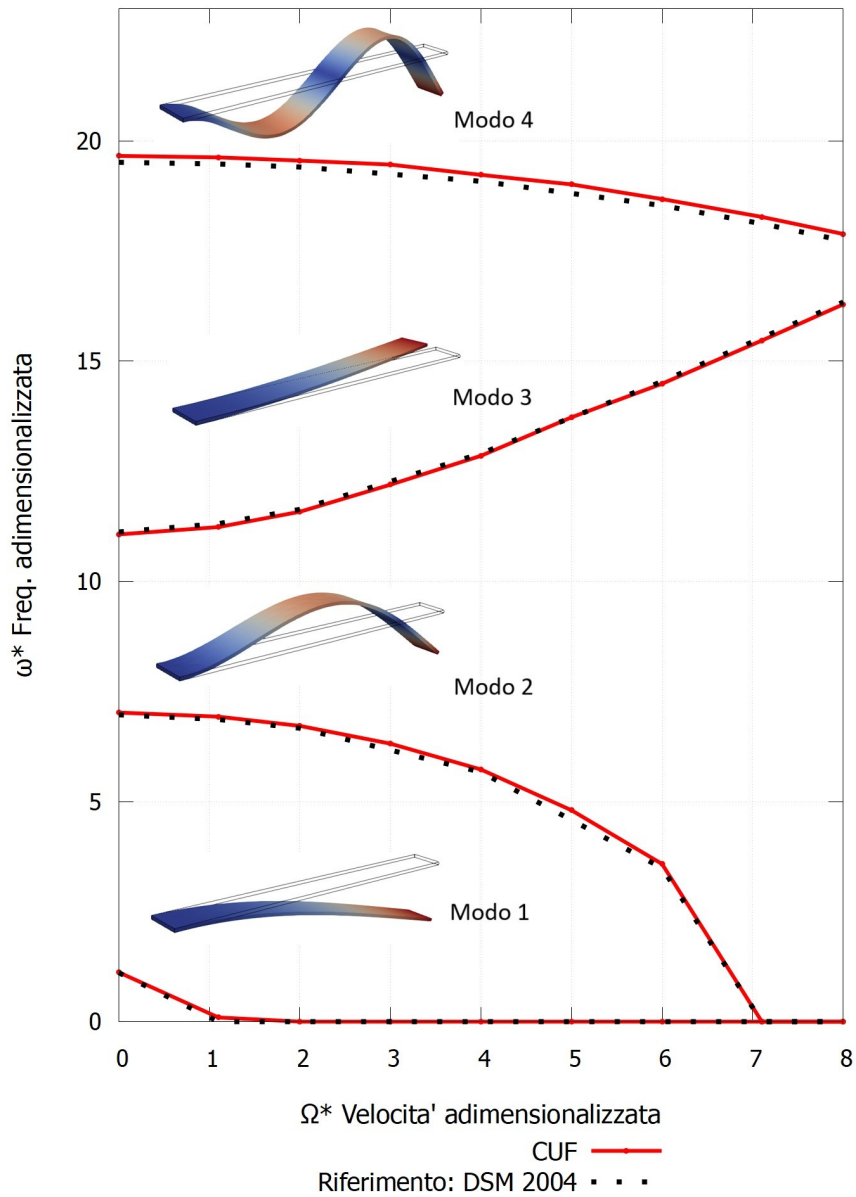


Figura 4.12: Diagramma di Campbell della trave a sbalzo a sezione rettangolare $EI_{zz} = 0.01EI_{xx}$ modellizzata con elementi L9 & 10 x B4 ; variazione delle frequenze naturali adimensionalizzate al variare della velocità di rotazione attorno all'asse y longitudinale: confronto con i risultati teorici di Banerjee e Suu [89] tramite Dynamic Stiffness Method.

Un aspetto interessante è che le frequenze naturali dei primi due modi flessionali

diminuiscono all'aumentare della velocità di rotazione, un fenomeno che potrebbe portare a instabilità nella trave. Tra il secondo e il terzo modo flessionale si osserva una frequenza naturale aggiuntiva, caratterizzata dallo stesso modo di vibrazione del primo (con un singolo nodo localizzato all'estremità incastrata), ma associata alla direzione trasversale opposta. Contrariamente al primo modo, questa frequenza naturale tende ad aumentare con la velocità di rotazione.

Osservando il diagramma di Campbell (Fig. 4.12), si nota che le curve numeriche e teoriche mantengono una forma generale simile. Tuttavia, si riscontrano alcune deviazioni, in particolare per il primo parametro critico, che si discosta maggiormente rispetto al secondo. Nonostante queste discrepanze, le differenze rimangono sufficientemente ridotte da validare il modello numerico.

I risultati numerici mostrano un buon accordo con quelli teorici, con deviazioni trascurabili nelle frequenze naturali. Sebbene la sezione rettangolare introduca una maggiore complessità nel comportamento dinamico, i diagrammi di Campbell si dimostrano strumenti efficaci per individuare con precisione le velocità critiche e i fenomeni di instabilità associati ai primi modi flessionali.

4.2.3 Strutture con sezioni cave

Le sezioni analizzate in questa sezione sono caratterizzate da una geometria cava, con lo scopo di valutare il comportamento dinamico in funzione della variazione dello spessore e della forma della sezione trasversale. Nello specifico, sono state testate quattro configurazioni geometriche: un cilindro con spessore $t_{c1} = 0.30$ cm e raggio esterno $R = 0.5$ cm, un cilindro più sottile con spessore $t_{c2} = 0.02$ cm, una trave a sezione rettangolare spessa con spessore $t_r = 0.20$ cm e una versione sottile con $t_r = 0.02$ cm. Entrambe le travi rettangolari presentano altezza $H = 0.6$ cm e larghezza $B = 1.2$ cm. Come nelle analisi precedenti, le condizioni al contorno e le proprietà del materiale restano invariate, con una lunghezza totale pari a $L = 10$ cm per tutte le configurazioni. Per la discretizzazione lungo l'asse y è stata adottata una mesh $10B4$ con 31 nodi, scelta in quanto garantisce risultati convergenti in termini di frequenze naturali nell'analisi delle vibrazioni libere. Dato il tipo di geometria, a ciascun nodo sono state assegnate coordinate x e z nulle, lasciando variare esclusivamente la coordinata longitudinale. Per la sezione trasversale del cilindro sono stati utilizzati elementi 8×1 $L16$ nelle direzioni circonferenziale e radiale, rispettivamente, ciascuno composto da 16 nodi, definiti da un corrispondente numero di terne di coordinate (Fig. 4.13). Per la sezione rettangolare della trave cava, invece, sono stati impiegati elementi 10×1 $B4$.

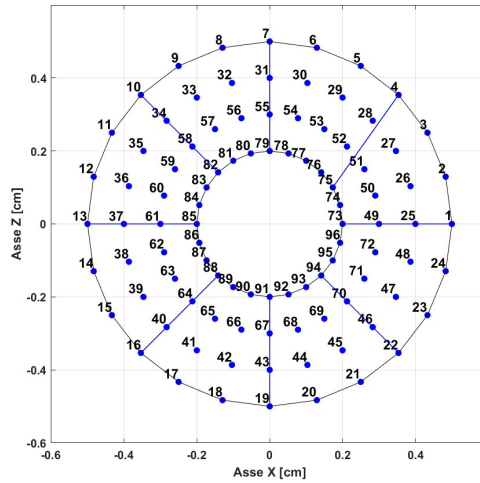


Figura 4.13: Mesh della sezione trasversale del cilindro con $t = 3$ mm realizzata in Matlab; rappresentazione elementi 8×1 $L16$.

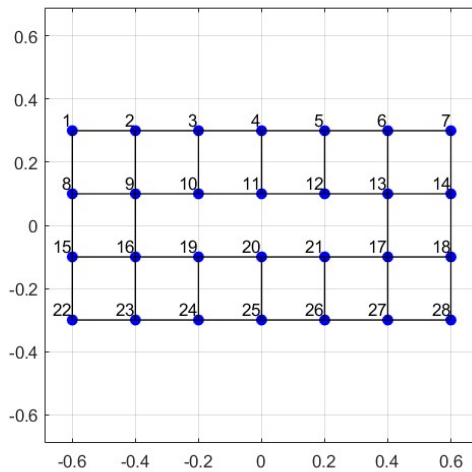


Figura 4.14: Mesh della sezione trasversale della trave rettangolare cava con $t = 2$ mm realizzata in Matlab; rappresentazione elementi 14×1 $L4$.

I risultati delle frequenze naturali ottenute con il metodo CUF e il software ANSYS APDL sono riassunti nella Tab. 4.18, che presenta un confronto per le configurazioni di cilindri a parete spessa e sottile, nonché per travi con sezioni rettangolari spesse e sottili.

Il comportamento dinamico del cilindro cavo sia a parete sottile che spessa, in funzione della velocità di rotazione rispetto asse y , è riportato nel diagramma di Campbell in Fig. 4.15. L'analisi del comportamento dinamico delle travi cave a sbalzo, sia spesse che sottili, è illustrata nel diagramma di Campbell in Fig. 4.16.

	f_1 [Hz]	f_2 [Hz]	f_t [Hz]	DOF
Cilindro a parete spessa				
CUF (8 L16 & 10 ×B4)	782.61	4685.71	8044.81	8928
ANSYS (100 BEAM188)	774.78	4631.92	8044.89	606
Deviazione (%)	+1.01	+1.16	-0.001	
Cilindro a parete sottile				
CUF (8 L16 & 10 ×B4)	995.69	5716.75	8044.79	8928
ANSYS (100 BEAM188)	988.71	5660.54	8044.89	606
Deviazione (%)	+0.70	+0.99	-0.001	
Sezione rettangolare spessa				
CUF (20 L4 & 10 ×B4)	566.10	3410.69	6258.85	2976
ANSYS (100 BEAM188)	558.23	3329.63	6190.43	606
Deviazione (%)	+1.41	+2.43	+1.11	
Sezione rettangolare sottile				
CUF (20 L4 & 10 ×B4)	738.32	4212.77	6115.77	2976
ANSYS (100 BEAM188)	730.32	4144.82	6115.77	606
Deviazione (%)	+1.10	+1.64	0.00	

Tabella 4.10: Confronto delle frequenze naturali ottenute mediante il modello CUF e il software ANSYS APDL. I risultati sono riportati per configurazioni con cilindri a parete spessa e sottile e travi a sezioni rettangolari spesse e sottili modellati tramite elementi 100 BEAM188 in Ansys.

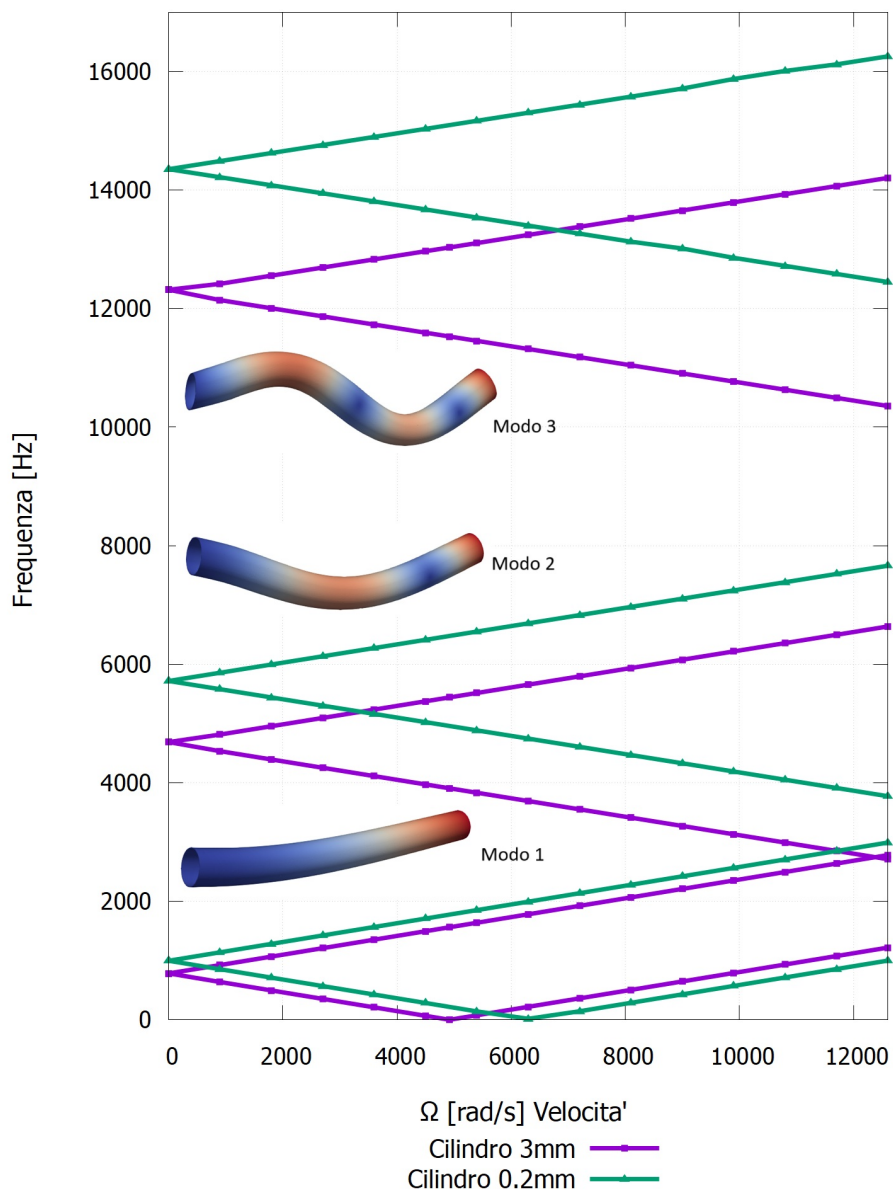


Figura 4.15: Diagramma di Campbell per le travi a sbalzo con sezione cilindrica cava, a parete spessa ($t=3\text{mm}$) e sottile ($t=0.2\text{mm}$), modellizzate con elementi $8 \times \text{L16}$ & $10 \times \text{B4}$; variazione delle frequenze naturali al variare della velocità di rotazione attorno all'asse y e longitudinale.

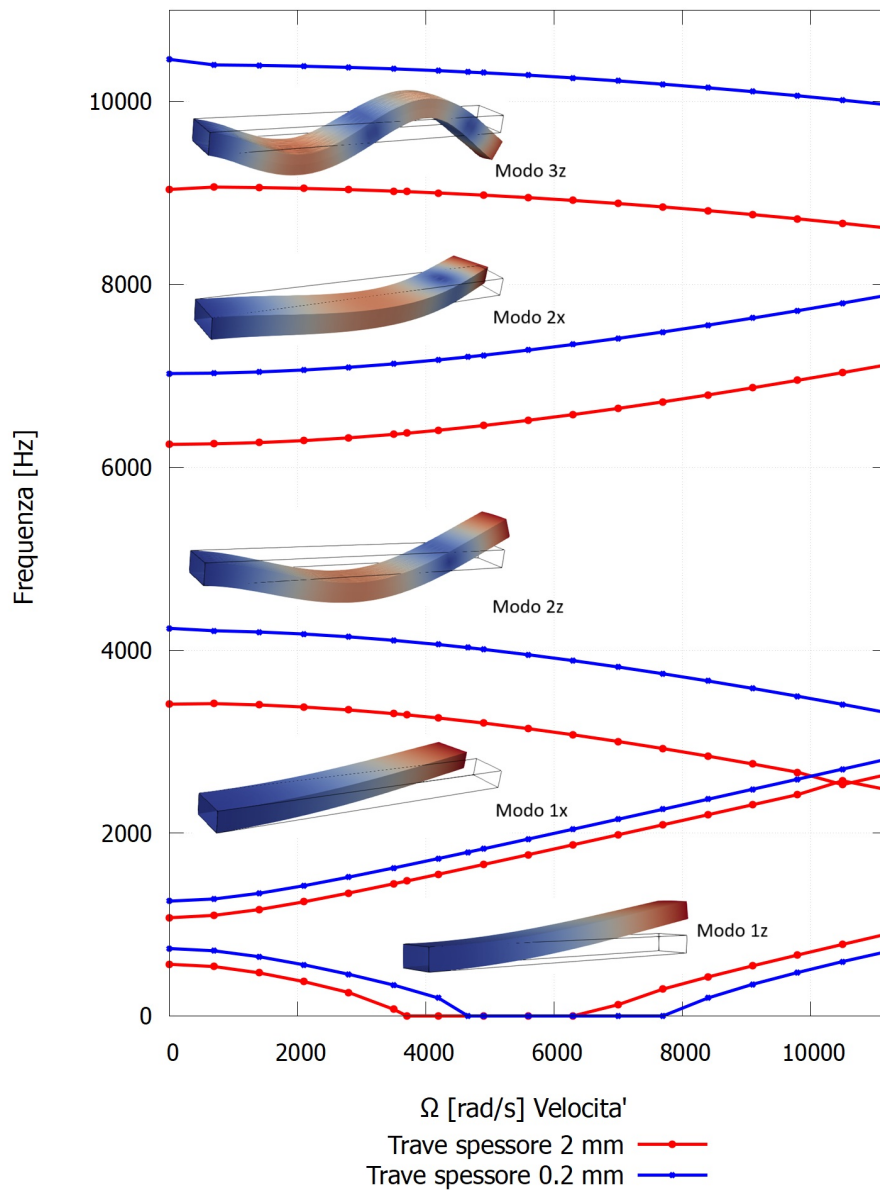


Figura 4.16: Diagramma di Campbell per le travi a sbalzo con sezione rettangolare cava, a parete spessa ($t=2\text{mm}$) e sottile ($t=0.2\text{mm}$), modellizzate con elementi $20 \times L4$ & $10 \times B4$; variazione delle frequenze naturali al variare della velocità di rotazione attorno all'asse y longitudinale.

Variazione della lunghezza

Successivamente, si è analizzato l'effetto della variazione della lunghezza del cilindro cavo a parete spessa ($t = 3$ mm) sulle frequenze naturali. Sono state condotte analisi modali per strutture vincolate ad un'estremità, considerando lunghezze pari a $L = 10$ cm, $L = 5$ cm e $L = 2$ cm. I risultati ottenuti sono riportati nella Tabella 4.11.

	f_1 [Hz]	f_2 [Hz]	f_3 [Hz]
Cilindro a parete spessa $L = 10$ cm			
CUF (8 L16 & 10 × B4)	782.61	4685.71	12280.73
ANSYS (100 BEAM188)	774.78	4631.92	12144.35
Deviazione (%)	+1.01%	+1.16%	+1.12%
Cilindro a parete spessa $L = 5$ cm			
CUF (8 L16 & 10 × B4)	3059.13	16425.50	39099.00
ANSYS (100 BEAM188)	3025.01	16164.56	38237.05
Deviazione (%)	+1.13%	+1.61%	+2.26%
Cilindro a parete spessa $L = 2$ cm			
CUF (8 L16 & 10 × B4)	16829.72	64048.88	168038.85
ANSYS (100 BEAM188)	16452.28	61644.63	169066.56
Deviazione (%)	+2.29%	+3.89%	-0.61%

Tabella 4.11: Frequenze naturali ottenute mediante il modello CUF e il software ANSYS APDL al variare della lunghezza del cilindro a parete spessa ($t = 3$ mm).

Di seguito, in Fig. 4.17 è riportato il diagramma di Campbell relativo al cilindro cavo di lunghezza $L = 5$ cm, che mostra il comportamento dinamico della struttura in funzione della velocità di rotazione attorno al suo asse longitudinale y . Come si può osservare, le frequenze naturali mantengono gli stessi andamenti riscontrati per strutture di lunghezza maggiore, mentre i valori assoluti delle frequenze risultano più elevati.

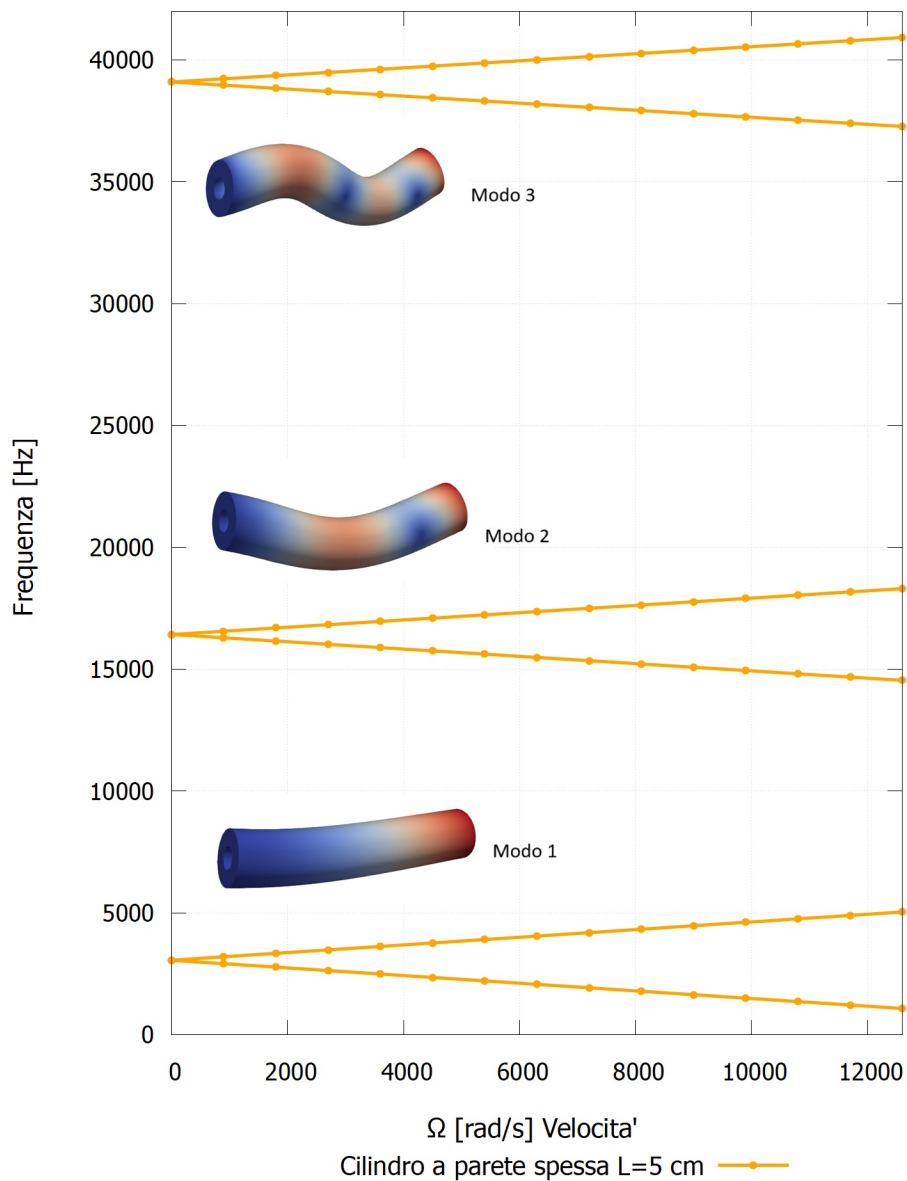


Figura 4.17: Diagramma di Campbell per le travi a sbalzo di lunghezza $L = 5$ cm con sezione cilindrica cava a parete spessa ($t = 3$ mm), modellizzate con elementi $8 \times L16$ & $10 \times B4$; variazione delle frequenze naturali al variare della velocità di rotazione attorno all'asse y longitudinale.

4.2.4 Strutture a disco

Disco sottile a spessore costante

In questa sottosezione si analizza un disco a spessore costante, confrontando i risultati con quelli presentati nel lavoro di Entezari, Filippi e Carrera [91]. L'obiettivo è validare il modello utilizzando l'approccio basato sulla teoria 1D-CUF e confermare la coerenza dei risultati sia nell'analisi modale sia nell'analisi dinamica tramite diagrammi di Campbell.

Il disco è realizzato in acciaio, un materiale isotropo con le seguenti proprietà:

$$E = 210 \text{ GPa}, \quad \nu = 0.3, \quad \rho = 7800 \text{ kg/m}^3$$

Le dimensioni geometriche del disco sono:

$$r_i = 0.1016 \text{ m}, \quad r_o = 0.2032 \text{ m}, \quad h = 1.016 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Il disco è montato su un albero rigido, con il bordo interno completamente vincolato al mozzo, mentre il bordo esterno è libero da trazioni. La modellazione viene effettuata utilizzando elementi di tipo Lagrangiano L16 lungo lo spessore. La Figura 4.18 mostra la mesh del disco, composta da un singolo elemento trave a tre nodi lungo l'asse y e una mesh trasversale di 2×16 elementi L16, come descritto in [91].

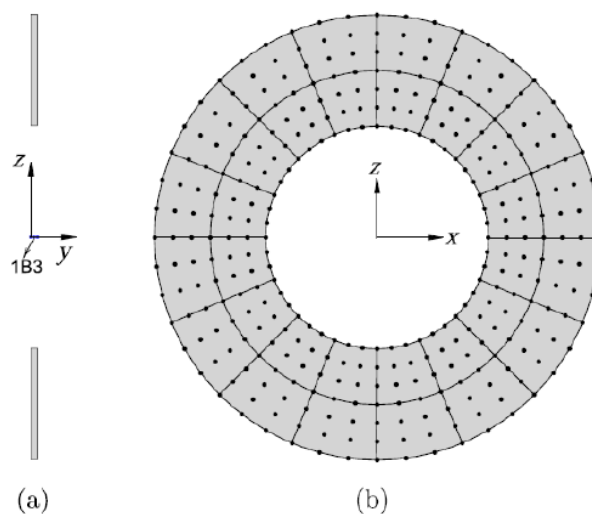


Figura 4.18: Mesh del disco a spessore costante : (a) elemento $1 \times B3$ lungo l'asse y ; (b) cross-section: 2×16 di elementi L16. [91]

Per facilitare la costruzione della matrice di connettività, si è utilizzato un codice MATLAB per visualizzare i nodi della mesh sul piano cartesiano. La Figura 4.19

mostra la numerazione dei punti della struttura, utile per definire correttamente le connessioni tra gli elementi.

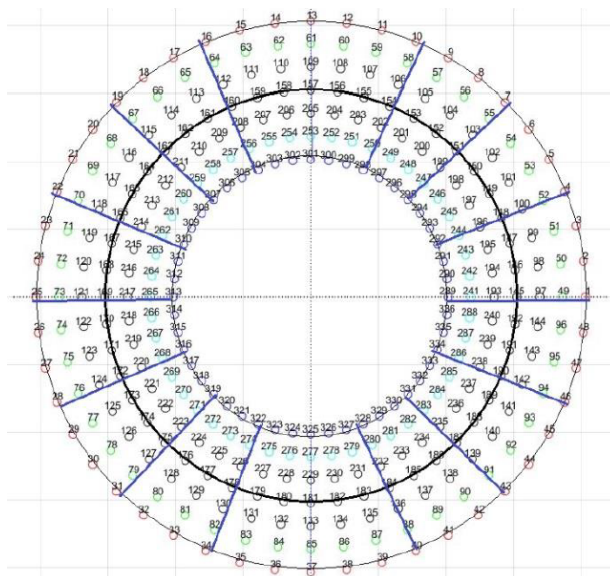
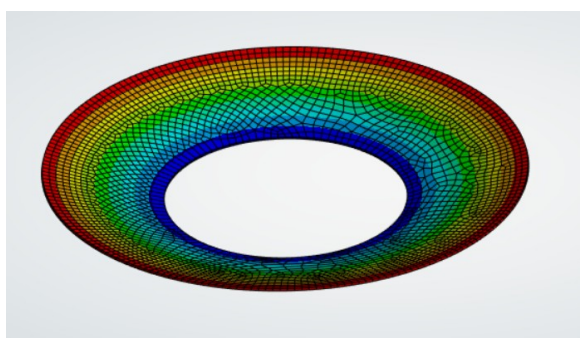
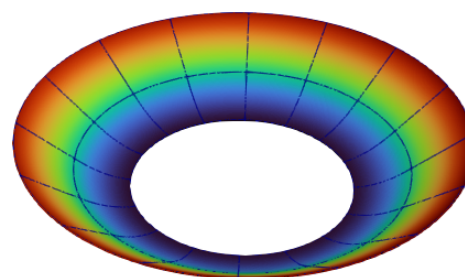


Figura 4.19: Mesh del disco MUL2 con elementi 2 x 16 L16. : punti della struttura e numerazione per la costruzione della matrice di connettività.

I risultati della simulazione mostrano una perfetta coincidenza con i dati presenti nel lavoro di riferimento [91]. Il confronto delle frequenze naturali evidenzia una notevole corrispondenza, sia nell'analisi modale sia nei diagrammi di Campbell, confermando l'accuratezza della modellazione basata sulla teoria 1D-CUF.

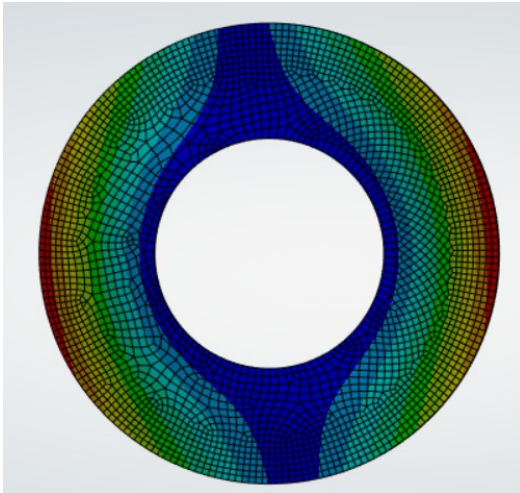


(a) Modo 1 in Ansys con elementi SOLID186.

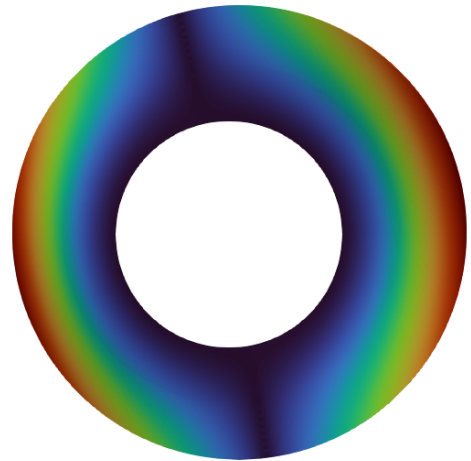


(b) Modo 1 in Paraview.

Figura 4.20: 1° modo in Ansys Mechanical e Paraview del disco a spessore costante.



(a) Modo 2 in Ansys con elementi SODIL186.



(b) Modo 2 in Paraview.

Figura 4.21: Confronto del 2° modo tra Ansys Mechanical e Paraview del disco a spessore costante.

L'analisi dinamica evidenzia l'evoluzione delle frequenze naturali al variare della velocità di rotazione, tramite il diagramma di Campbell. Nel diagramma mostrato in Fig. 4.22 si può visualizzare chiaramente il fenomeno dello *stress stiffening*, causato dalla deformazione dovuta alle forze centrifughe, che comporta un progressivo aumento delle frequenze naturali all'aumentare della velocità di rotazione. Le famiglie di modi naturali risultano ben delineate e divergono procedendo verso destra nel diagramma, come previsto teoricamente. I risultati ottenuti nel diagramma di Campbell rispecchiano pienamente i dati riportati da Entezari, Filippi e Carrera [91].

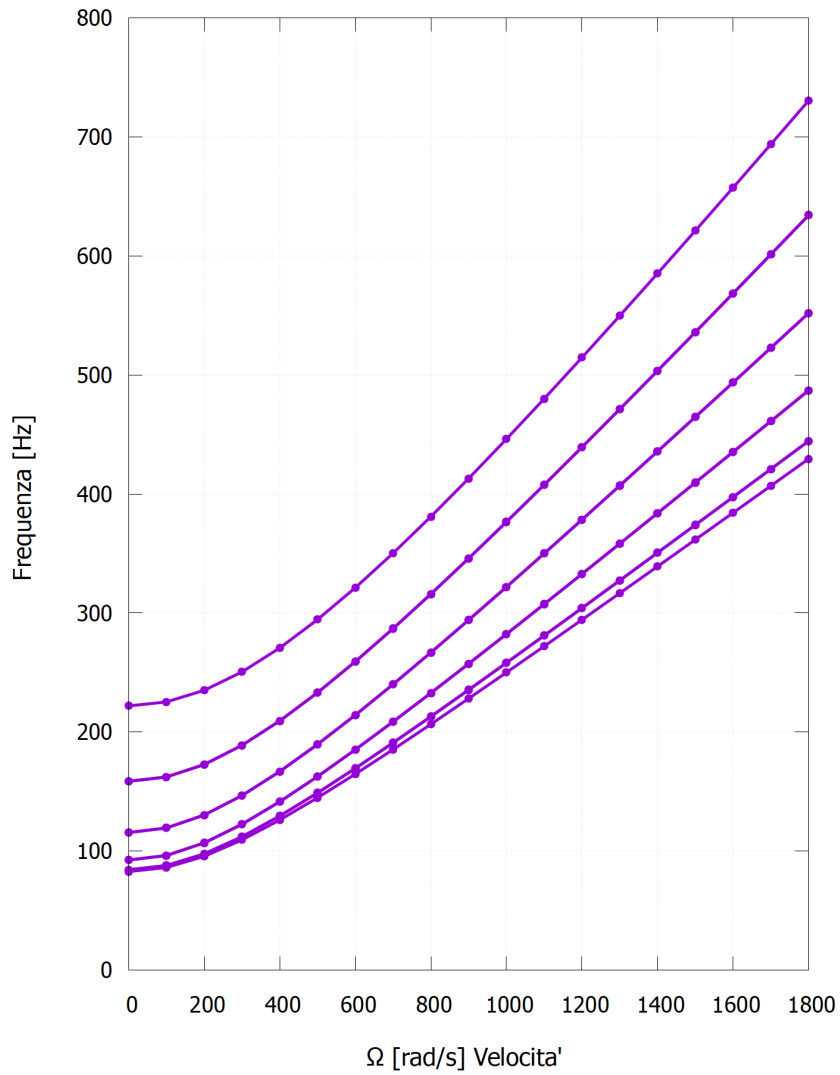


Figura 4.22: Diagramma di Campbell per il disco a spessore costante: andamento delle prime dieci frequenze naturali al variare della velocità di rotazione attorno l'asse Y.

Disco a spessore variabile

Nelle applicazioni aeronautiche reali, i rotori raramente presentano una geometria regolare come quella analizzata nella sezione precedente. Solitamente, questi componenti vengono ricavati da un unico blocco di materiale e sono progettati per ottimizzare le prestazioni riducendo il peso complessivo. La rastrematura verso il bordo esterno consente di diminuire le vibrazioni, ridurre la massa da trasportare in volo e migliorare l'efficienza nei consumi di carburante. In quest'ottica, è stato analizzato un disco a spessore variabile, descritto nell'articolo di riferimento [91], per approfondire l'effetto di tali geometrie sulle proprietà dinamiche.

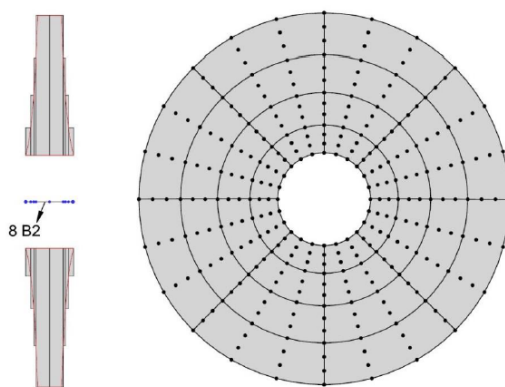
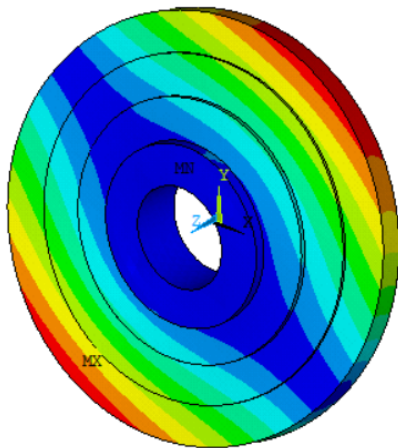


Figura 4.23: Disco a spessore variabile: mesh cross-section suddivisa in 4 sezioni con 8 elementi L16 per sezione.

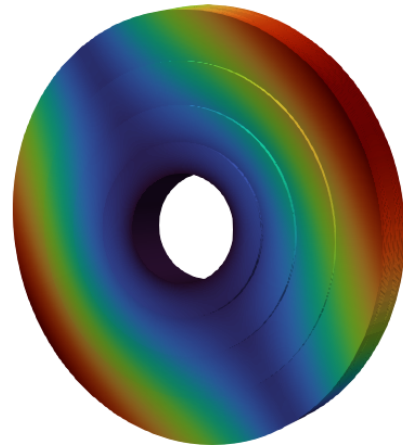
Il profilo dello spessore, sebbene iperbolico, è stato modellato tramite una discretizzazione in quattro sezioni, permettendo l'analisi con il codice MUL². Tra le diverse opzioni di discretizzazione della sezione trasversale, è stata scelta una mesh composta da 4×8 elementi di tipo L16, come illustrato in Figura 4.23. Questa configurazione ha consentito una rappresentazione fedele della variazione di spessore e ha garantito un'elevata precisione nei risultati.

I risultati delle analisi modali evidenziano una buona concordanza tra le frequenze naturali ottenute e i dati presenti nella letteratura di riferimento. I valori calcolati sono stati validati riproducendo la stessa geometria e i medesimi vincoli in Ansys Mechanical APDL, ottenendo risultati coerenti, come mostrato nelle Fig. 4.24, 4.25.

Per completare l'analisi, è stata condotta una simulazione rotodinamica per valutare l'influenza della velocità di rotazione sulle frequenze naturali del sistema. I risultati dimostrano che l'effetto della velocità di rotazione è piuttosto limitato. Esaminando la geometria del disco (Fig. 4.23), progettato per simulare uno stadio di turbina assiale, si osserva una maggiore rigidità rispetto al caso di un disco a spessore

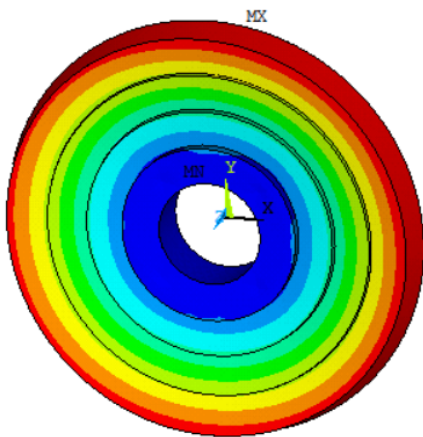


(a) Modo 1 in Ansys APDL.

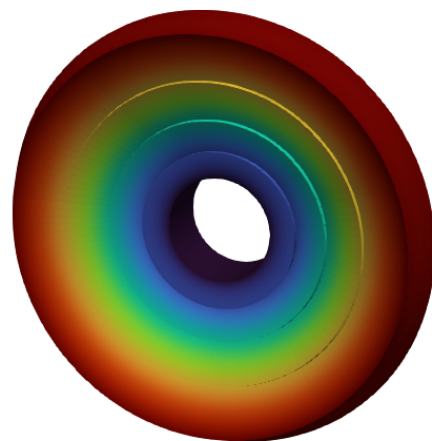


(b) Modo 1 in Paraview.

Figura 4.24: Confronto del primo modo tra Ansys e Paraview per il disco a spessore variabile.



(a) Modo 2 in Ansys Apdl.



(b) Modo 2 in Paraview.

Figura 4.25: Confronto del secondo modo tra Ansys e Paraview per il disco a spessore variabile.

costante. Questo comportamento è attribuibile a un rapporto spessore/diametro più elevato, che garantisce una maggiore resistenza alle deformazioni. Tale caratteristica è confermata anche dai valori significativamente più alti delle frequenze calcolate a rotore fermo.

	f_1 [Hz]	f_2 [Hz]	f_3 [Hz]	f_4 [Hz]	f_5 [Hz]
CUF (1/2/3/4)×8 L16	1656.42	1656.42	1750.56	1822.95	1822.95
ANSYS (SOLID185)	1640.16	1642.19	1707.82	1811.49	1885.69
Deviazione (%)	+0.98	+0.86	+2.44	+0.63	-3.44
DOF (CUF)	5832				
DOF (ANSYS)	23331				

Tabella 4.12: Confronto freq.naturali con i DOF per il disco a spessore variabile. Disco in Ansys formato da 35596 elementi SOLID185.

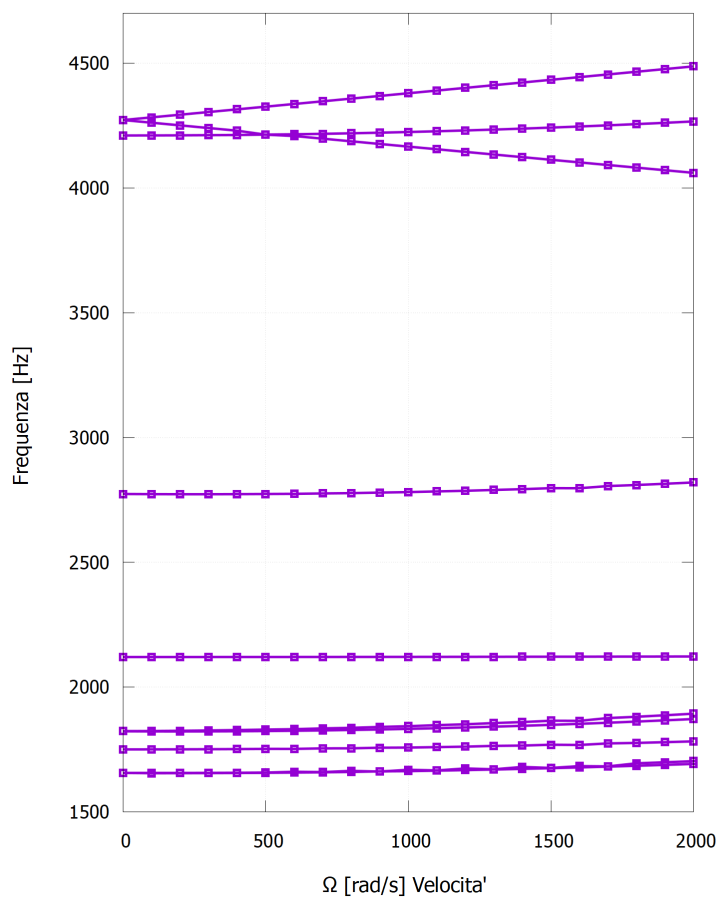


Figura 4.26: Diagramma di Campbell per il disco a spessore variabile: andamento delle prime dieci frequenze naturali al variare della velocità di rotazione asse Y.

4.2.5 Rotore con pale dritte

Dopo aver analizzato dischi a spessore fisso e variabile, lo studio è stato esteso a una configurazione più complessa, rappresentativa di un sistema rotante di tipo turbina, caratterizzato dalla presenza di un mozzo centrale e di pale radiali. In particolare, è stato considerato un rotore con disco centrale di raggio massimo pari a 20 cm, da cui si dipartono sedici pale dritte, ciascuna della lunghezza di 50 cm. Sia il disco che le pale presentano uno spessore costante lungo la direzione y , pari a 10 cm. La struttura del rotore analizzata è mostrata in Fig. 4.27.

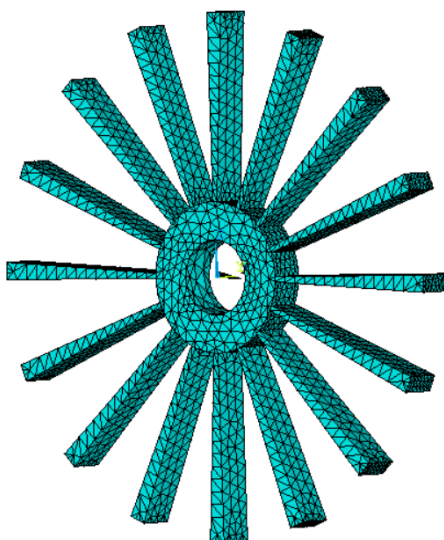
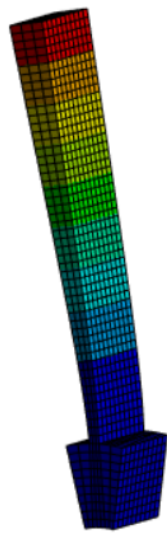


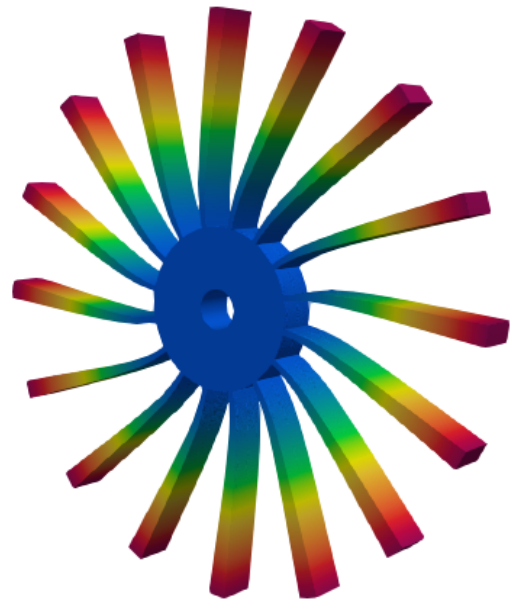
Figura 4.27: Struttura del rotore con pale dritte radiali analizzato modellizzato in Ansys.

Per la modellazione delle pale, ciascuna è stata discretizzata utilizzando quattro elementi finiti lagrangiani di tipo L16, una scelta che ha permesso di descrivere adeguatamente la deformabilità locale lungo tutta la loro lunghezza. L'intera struttura è stata realizzata ipotizzando l'uso dell'acciaio, con le seguenti proprietà meccaniche: modulo di Young $E = 210$ GPa, coefficiente di Poisson $\nu = 0.3$ e densità $\rho = 7800$ kg/m³. L'analisi modale è stata eseguita per identificare le prime venti frequenze naturali e distinguere le diverse famiglie di modi associati sia al comportamento flessionale delle pale che alla risposta globale della struttura. I risultati ottenuti sono stati confrontati con quelli derivati dalle simulazioni numeriche in Ansys, confermando la validità del modello implementato. In Figura 4.28 sono riportati il primo modo di vibrazione di una singola pala e quello globale del rotore mentre in Fig. 4.29 è invece rappresentato il modo torsionale del rotore.

Figura 4.29 è invece rappresentato il modo torsionale del rotore.

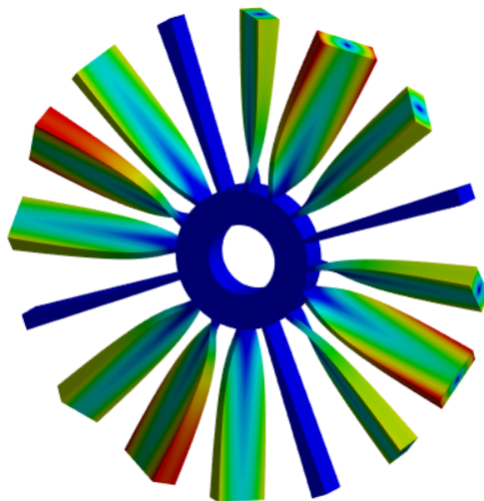


(a) Primo modo di vibrare di una singola pala in Ansys.



(b) Primo modo di vibrare globale del rotore in Paraview.

Figura 4.28: Visualizzazione del primo modo di vibrazione del rotore con pale rettangolari dritte.



(a) 49°modo di vibrare (modo torsionale) in Ansys.



(b) 49°modo di vibrare (modo torsionale) in Paraview.

Figura 4.29: Visualizzazione del modo di vibrare torsionale del rotore con pale rettangolari dritte.

Come prevedibile, la dinamica complessiva è dominata dal comportamento delle pale, che risultano essere gli elementi più snelli e flessibili, mentre il mozzo centrale, significativamente più rigido, è stato considerato come un corpo quasi-rigido, con deformazioni trascurabili. L'interazione elastica tra le pale e il mozzo rappresenta uno degli aspetti più rilevanti della configurazione.

Un risultato interessante emerso dall'analisi modale è la presenza di gruppi di 16 frequenze proprie molto vicine tra loro. Questo comportamento è dovuto alla simmetria ciclica della struttura: la disposizione equidistante delle pale lungo la circonferenza porta alla formazione di modi in cui ogni pala oscilla con una fase diversa rispetto alle altre, generando onde stazionarie lungo la direzione circonferenziale. L'accoppiamento elastico tra le pale, mediato dal mozzo centrale, introduce piccole variazioni di frequenza tra i modi della stessa famiglia, creando gruppi di frequenze ravvicinate, tipici dei sistemi con simmetria periodica.

I risultati delle frequenze naturali sono riportati in Tabella 4.13.

	CUF (128L9 x 10B4)	ANSYS (11768 SOLID186)	Deviazione (%)
f_1 [Hz]	41.87	39.062	+6.71
f_{16} [Hz]	42.11	39.27	+6.74
f_{17} [Hz]	182.77	188.85	-3.33
f_{32} [Hz]	203.54	204.51	-0.48
f_{33} [Hz]	477.88	442.95	+7.31
f_{48} [Hz]	492.81	445.91	+9.51
f_{50} [Hz]	502.02	484.04	+3.58
DOF	23695	71085	-66.67

Tabella 4.13: Confronto delle frequenze naturali e dei gradi di libertà tra il modello CUF e ANSYS APLD, riportando errore relativo percentuale.

In Figura 4.32 è rappresentato il diagramma di Campbell del rotore, che mostra l'andamento delle frequenze naturali al variare della velocità di rotazione. Dal diagramma si osserva l'aumento delle frequenze naturali con l'incremento della velocità di rotazione, effetto riconducibile allo stress stiffening indotto dalla forza centrifuga.

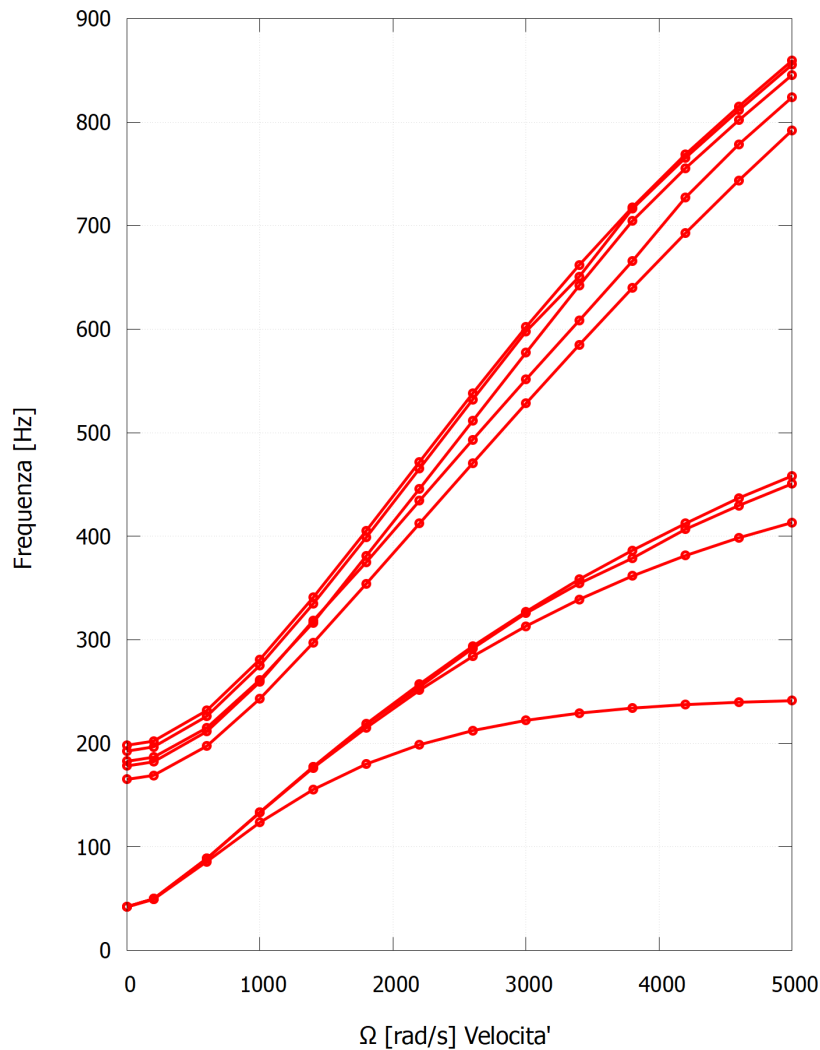


Figura 4.30: Diagramma di Campbell del rotore con 16 pale dritte modellizzato in CUF con 128L9 x 10B4 elementi ; andamenti numerici delle frequenze naturali al variare della velocità di rotazione attorno all'asse y e longitudinale.

Dal diagramma si osserva l'aumento delle frequenze naturali con l'incremento della velocità di rotazione, effetto riconducibile allo stress stiffening indotto dalla forza centrifuga. Dall'andamento delle prime frequenze naturali si analizza un incremento nelle fasi iniziali all'aumentare della velocità di rotazione a causa dell'effetto di stress stiffening, che comporta un incremento della rigidità delle pale; tuttavia, all'aumentare ulteriormente della velocità, la crescita della frequenza

rallenta e tende a convergere verso un valore limite, determinato dall'equilibrio tra l'irrigidimento centrifugo e la distribuzione delle sollecitazioni interne nel sistema.

Dall'analisi numerica condotta in Ansys Mechanical, si è evidenziato che a partire da una velocità angolare di 550 rad/s le sollecitazioni agenti sulle pale superano il limite di resistenza del materiale, calcolato come il rapporto tra la resistenza a rottura (1700 MPa) e il fattore di sicurezza adottato (1.5), risultando in un valore ammissibile di 1133 MPa. A 550 rad/s, questa soglia viene superata, con una sollecitazione massima che raggiunge i 1200 MPa in corrispondenza dell'interfaccia della pala con il mozzo, determinando un potenziale cedimento strutturale. Il cedimento è dovuto alla combinazione degli effetti della forza centrifuga, che induce uno stato di trazione lungo l'asse longitudinale delle pale, e delle deformazioni flessionali, amplificate dalla lunghezza significativa degli elementi radiali. La Fig. 4.31 riporta la distribuzione delle sollecitazioni principali ottenuta tramite analisi agli elementi finiti, evidenziando le aree critiche soggette a stress eccessivo.

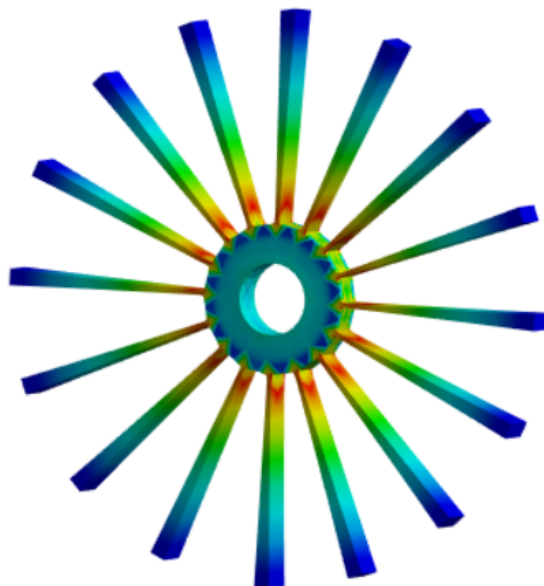


Figura 4.31: Distribuzione delle sollecitazioni principali sulla struttura con sedici pale alla velocità critica di 550 rad/s in Ansys Mechanical con 11768 elementi 186SOLID.

Questi risultati indicano che per garantire l'integrità strutturale del rotore, la velocità operativa deve rimanere inferiore a 550 rad/s. Per velocità superiori, sarebbe necessario intervenire sulla geometria delle pale o sul materiale costruttivo, incrementando la resistenza a trazione e la rigidità del sistema. Ulteriori studi potrebbero valutare l'introduzione di profili rinforzati o l'impiego di materiali

compositi ad alte prestazioni per migliorare la resistenza a fatica e il comportamento sotto carichi dinamici elevati. Di seguito viene riportato il diagramma di Campbell facendo maggiore attenzione nei range di frequenze sicure per il rotore.

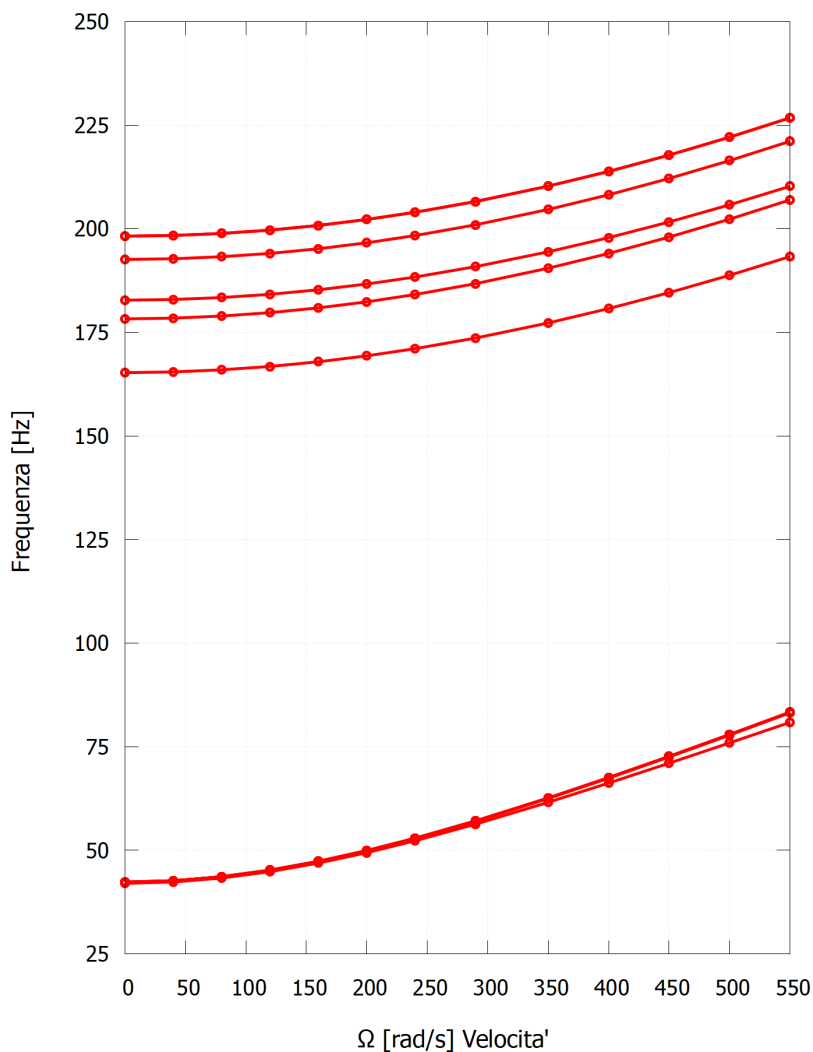
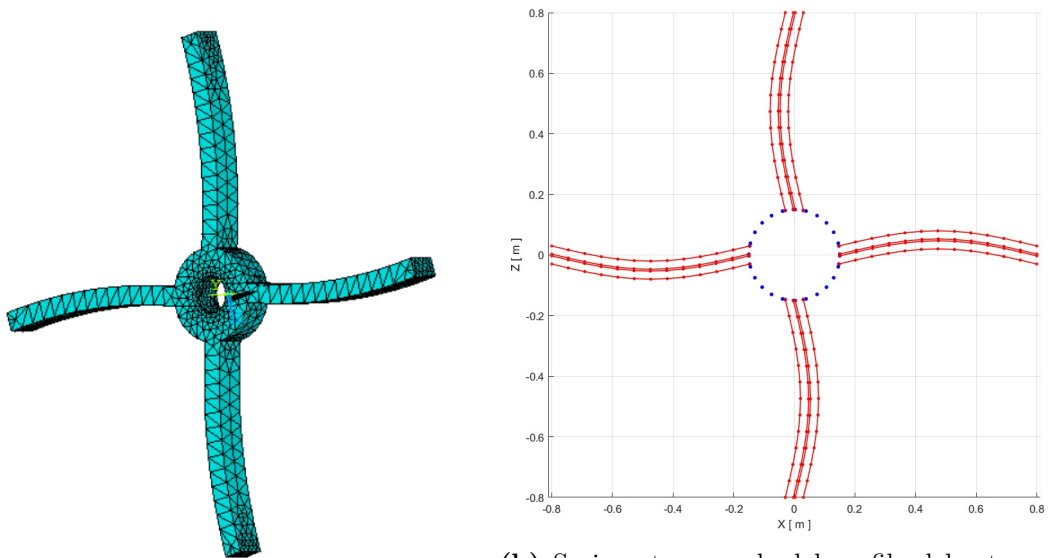


Figura 4.32: Diagramma di Campbell del rotore con 16 pale dritte modellizzato in CUF con 128L9 x 10B4 elementi ; variazione delle frequenze naturali al variare della velocità di rotazione attorno all'asse y longitudinale fino a 550 rad/s, valore oltre il quale si va incontro a rottura delle pale.

4.2.6 Rotore con pale curve

Proseguendo con le analisi, si è deciso di modificare la geometria delle pale, passando da una configurazione con pale dritte a una con pale curve, caratterizzate da una leggera convessità rispetto all'asse radiale (angolo applicato visibile in figura Fig. 4.34). Inoltre, per valutare l'influenza della riduzione del numero di pale sulla risposta strutturale, il modello considerato è stato realizzato con quattro pale anziché sedici.

Il materiale utilizzato rimane lo stesso della configurazione precedente, adottando le medesime proprietà meccaniche dell'acciaio: modulo di Young $E = 210$ GPa, coefficiente di Poisson $\nu = 0.3$ e densità $\rho = 7800$ kg/m³. La struttura del rotore con le 4 pale curve è mostrata in Fig. 4.27.



(a) Modello del rotore con pale curve sviluppato in Ansys APDL.

(b) Sezione trasversale del profilo del rotore a pale curve ricostruita in Matlab tramite discretizzazione puntuale.

Figura 4.33: Rappresentazione della geometria del rotore a pale curve: (a) modello FEM in Ansys APDL, (b) ricostruzione della sezione trasversale in Matlab.

L'analisi modale è stata condotta seguendo lo stesso approccio utilizzato in precedenza, consentendo di individuare le prime sedici frequenze naturali e di osservare le modalità di vibrazione caratteristiche. I risultati ottenuti sono stati messi a confronto con quelli delle simulazioni numeriche realizzate in Ansys e con il modello sviluppato in MUL2, permettendo di comprendere come la nuova geometria e la riduzione del numero di pale influenzino il comportamento dinamico del rotore.

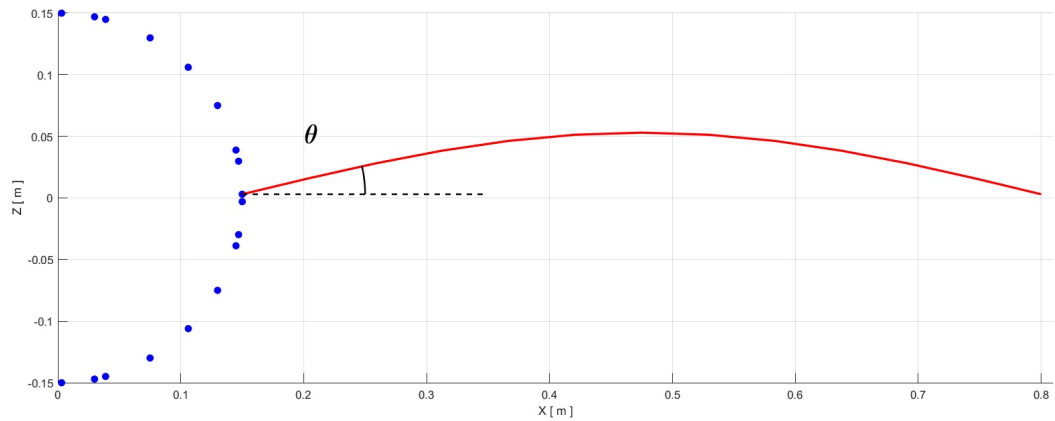
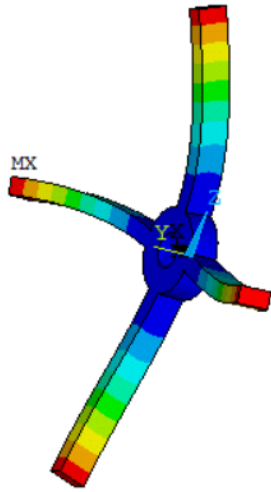


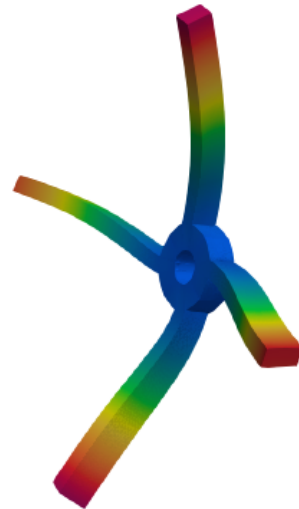
Figura 4.34: Rappresentazione dell'angolo di curvatura ($\theta = 13.5^\circ$) della singola pala del considerato in Matlab.

	CUF (28 L16 \times 10 B2)	ANSYS (6946 SOLID186)	Errore relativo (%)
f_1 [Hz]	108.09	102.57	+5.38
f_4 [Hz]	110.29	104.08	+5.97
f_5 [Hz]	167.75	152.71	+9.85
f_8 [Hz]	168.21	157.00	+7.14
f_9 [Hz]	612.02	602.78	+1.53
f_{12} [Hz]	624.80	620.11	+0.76
f_{13} [Hz]	755.09	797.73	-5.35
f_{15} [Hz]	762.74	805.70	-5.33
DOF	9072	37446	-75.77

Tabella 4.14: Confronto delle frequenze naturali e riduzione dei gradi di libertà (DOF) tra il modello CUF e ANSYS APDL, riportando l'errore relativo percentuale per il rotore a pale curve con angolo di curvatura $\theta = 13.5^\circ$.

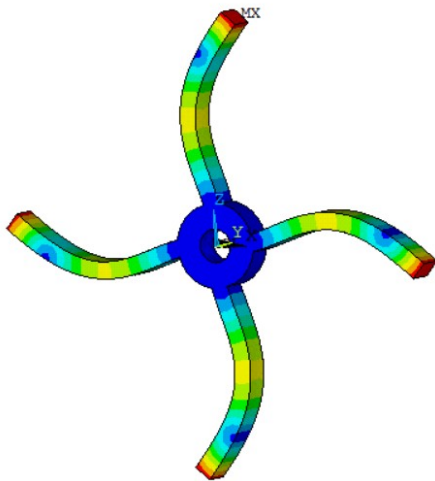


(a) 8° modo di vibrare in Ansys APDL.

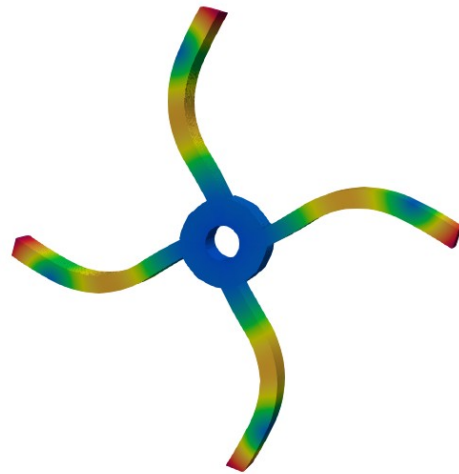


(b) 8° modo di vibrare in Paraview.

Figura 4.35: Visualizzazione della deformazione totale associata all'ottavo modo di vibrare del rotore a quattro pale curve (Umbrella mode).

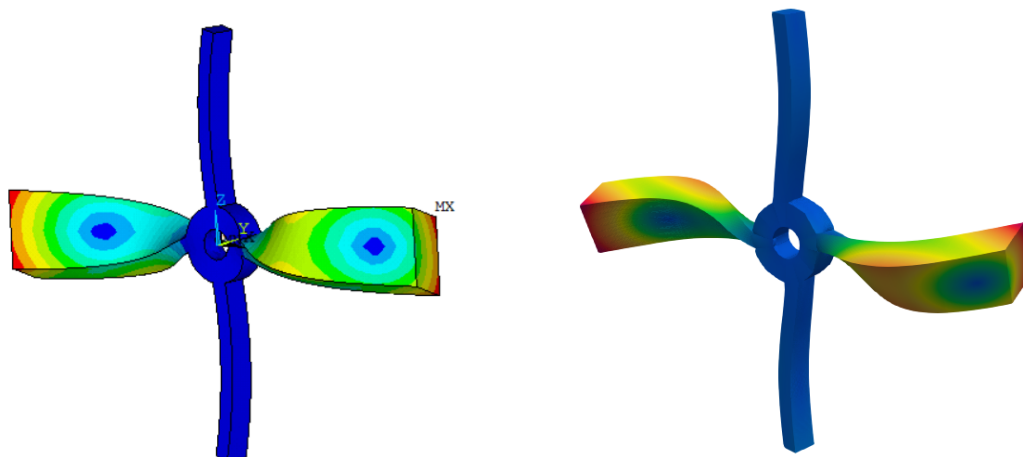


(a) 9° modo di vibrare del rotore a 4 pale curve in Ansys APDL.



(b) 9° modo di vibrare del rotore a 4 pale curve in Paraview.

Figura 4.36: Visualizzazione della deformazione totale associata al 9° modo di vibrare del rotore con pale curve .



(a) 15° modo di vibrare del rotore a 4 pale curve in Ansys APDL. (b) 15° modo di vibrare del rotore a 4 pale curve in Paraview.

Figura 4.37: Visualizzazione della deformazione totale associata al 15° modo di vibrare del rotore con pale curve .

I modi di vibrare ottenuti dall'analisi modale sono riportati nelle successive figure: in Figura 4.35 è illustrata la deformazione totale associata all'ottavo modo di vibrare (Umbrella mode). Analogamente, nelle Fig. 4.41 4.42 è mostrato il nono e il quindicesimo modo di vibrare del rotore a quattro pale curve, evidenziando le differenze tra le soluzioni numeriche. In Figura 4.38 è rappresentato il diagramma di Campbell del rotore con quattro pale curve, in cui è possibile visualizzare l'andamento delle frequenze naturali al variare della velocità di rotazione intorno all'asse y . Dal diagramma si osserva l'aumento delle frequenze naturali con l'incremento della velocità di rotazione, effetto riconducibile allo stress stiffening indotto dalla forza centrifuga.

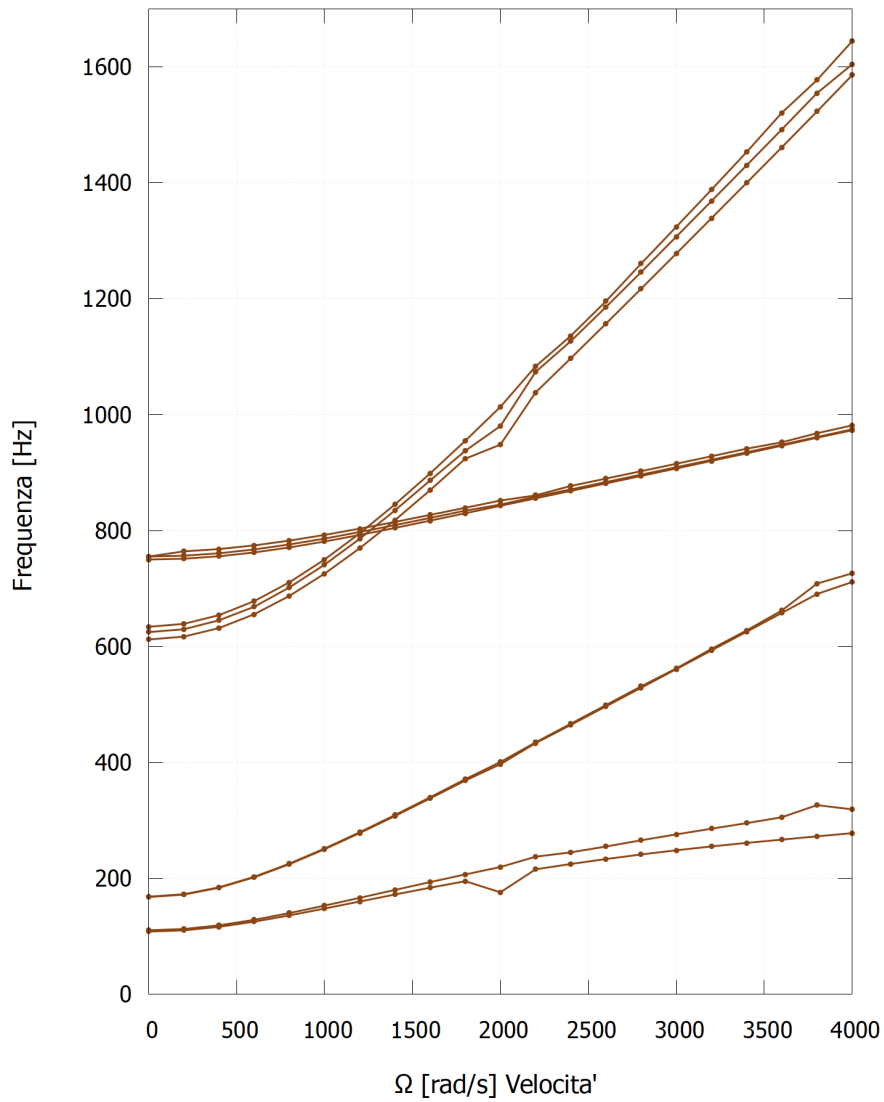


Figura 4.38: Diagramma di Campbell del rotore con 4 pale curve con angolo di curvatura $\theta = 13^\circ$, modellizzato in CUF con $28 L16 \times 10 B2$ elementi ; andamenti numerici delle frequenze naturali al variare della velocità di rotazione attorno all'asse y longitudinale.

Incremento dell'angolo di curvatura delle pale

Per approfondire l'influenza della curvatura delle pale sul comportamento dinamico del rotore, si è analizzato un nuovo modello caratterizzato da un angolo di curvatura incrementato, passando da $\theta = 13^\circ$ a 33° . L'obiettivo di questa analisi è comprendere come la maggiore convessità delle pale influenzi la distribuzione delle frequenze naturali e le modalità di vibrazione della struttura.

Analogamente alla configurazione precedente, il modello è stato sviluppato utilizzando le stesse proprietà meccaniche utilizzate in precedenza, tipiche dell'acciaio. La nuova geometria del rotore con pale fortemente curve è rappresentata in Fig. 4.39, in cui si può osservare l'incremento della convessità rispetto alla configurazione precedente.

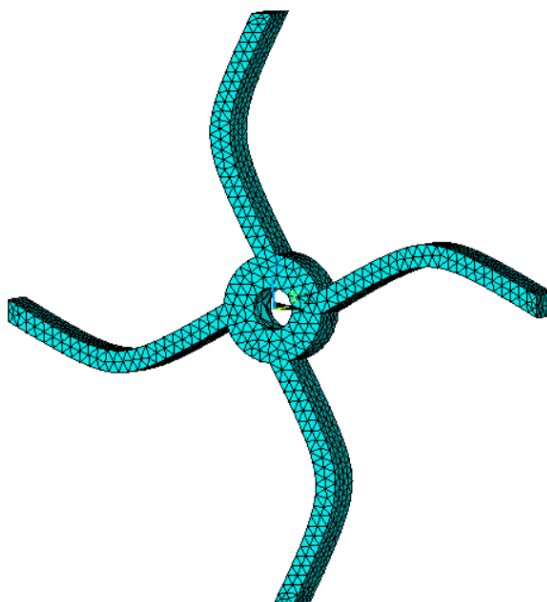


Figura 4.39: Modello FEM del rotore con pale altamente curve ($\theta = 33^\circ$) sviluppato in Ansys APDL.

L'analisi modale è stata condotta seguendo lo stesso approccio della configurazione con pale curve a , determinando le prime venti frequenze naturali e confrontando i risultati ottenuti tra Ansys APDL e il modello CUF. I valori calcolati sono riportati in Tab. 4.15. Successivamente, sono state analizzate le modalità di vibrazione della struttura con pale fortemente curve, confrontando i risultati ottenuti in Ansys APDL e in Paraview per il modello CUF. In Figura 4.40 si può osservare la deformazione totale associata al quinto modo di vibrare (Umbrella mode), mentre nelle Fig. 4.41, 4.42 sono mostrati il 9° e 15° modo di vibrare del rotore.

	CUF (28 L16 × 10 B2)	ANSYS (6946 SOLID186)	Deviazione (%)
f_1 [Hz]	100.3346	95.9462	+4.58
f_4 [Hz]	101.4051	97.2918	+4.23
f_5 [Hz]	146.6710	140.7683	+4.20
f_8 [Hz]	148.9577	143.7767	+3.60
f_9 [Hz]	464.1447	435.8423	+6.49
f_{12} [Hz]	472.7099	443.2837	+6.64
f_{13} [Hz]	518.1057	519.6018	-0.29
f_{15} [Hz]	521.6457	532.2085	-1.98
DOF	9072	37446	-75.77

Tabella 4.15: Confronto delle frequenze naturali tra il modello CUF e ANSYS APLD, riportando errore relativo percentuale per il rotore a pale curve con $\theta = 33^\circ$.

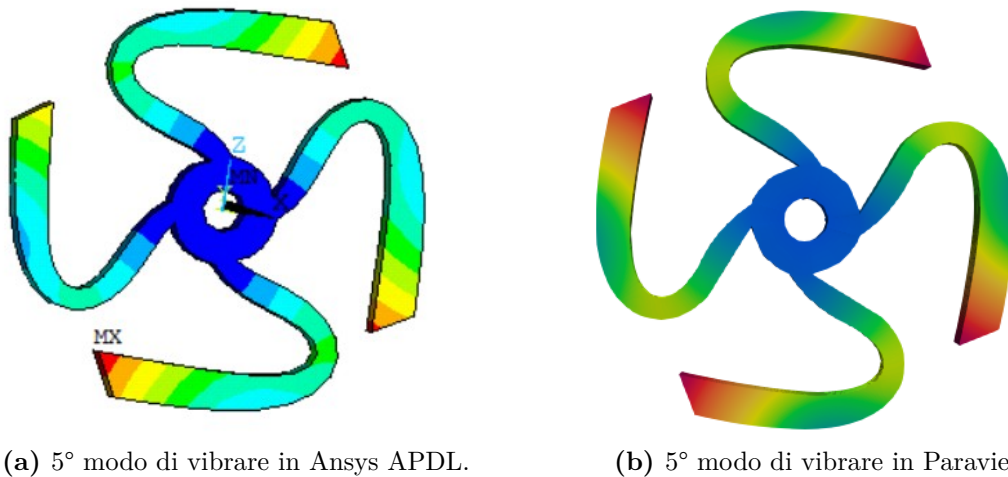
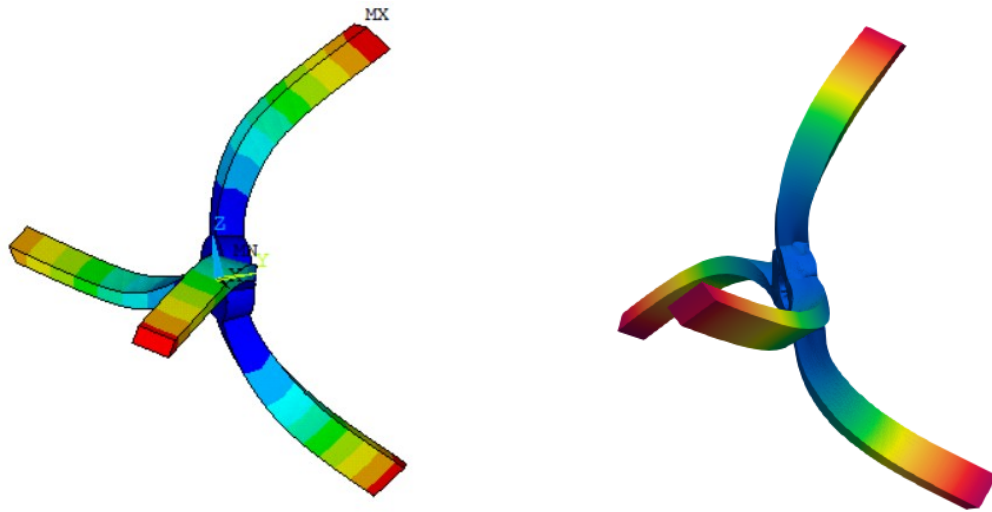


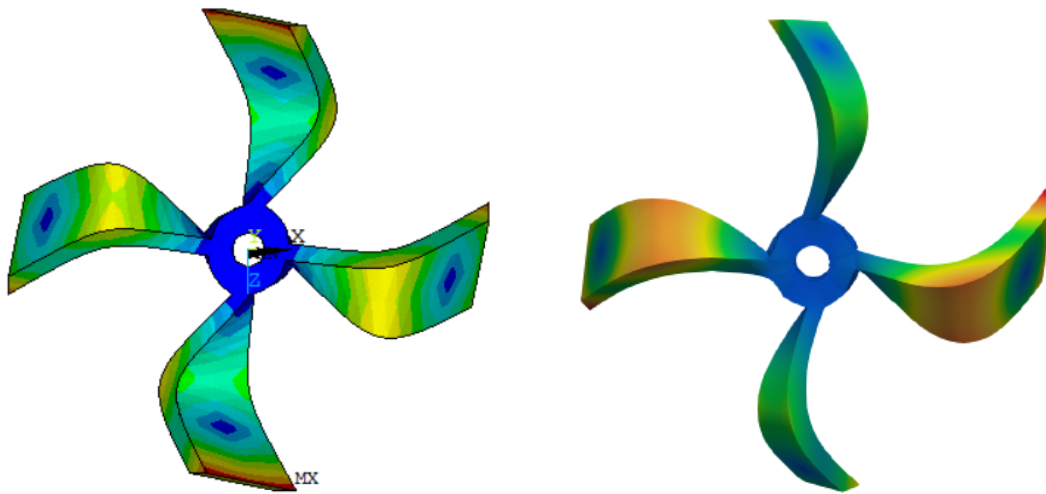
Figura 4.40: Visualizzazione della deformazione totale associata al quinto modo di vibrare del rotore a quattro pale curve con angolo della curvatura di $\theta = 33^\circ$.



(a) 9° modo di vibrare in Ansys APDL.

(b) 9° modo di vibrare in Paraview.

Figura 4.41: Visualizzazione della deformazione totale associata al nono modo di vibrare del rotore a quattro pale curve con angolo della curvatura di $\theta = 33^\circ$.



(a) 15° modo di vibrare in Ansys APDL.

(b) 15° modo di vibrare del rotore in Paraview.

Figura 4.42: Visualizzazione della deformazione totale associata al quindicesimo modo di vibrare del rotore a quattro pale curve con angolo della curvatura di $\theta = 33^\circ$.

Infine, è stato analizzato il diagramma di Campbell per valutare la variazione delle frequenze naturali al crescere della velocità di rotazione. Il risultato è riportato

in Fig. 4.44, in cui si evidenzia un incremento generale delle frequenze come nella configurazione con $\theta = 13^\circ$.

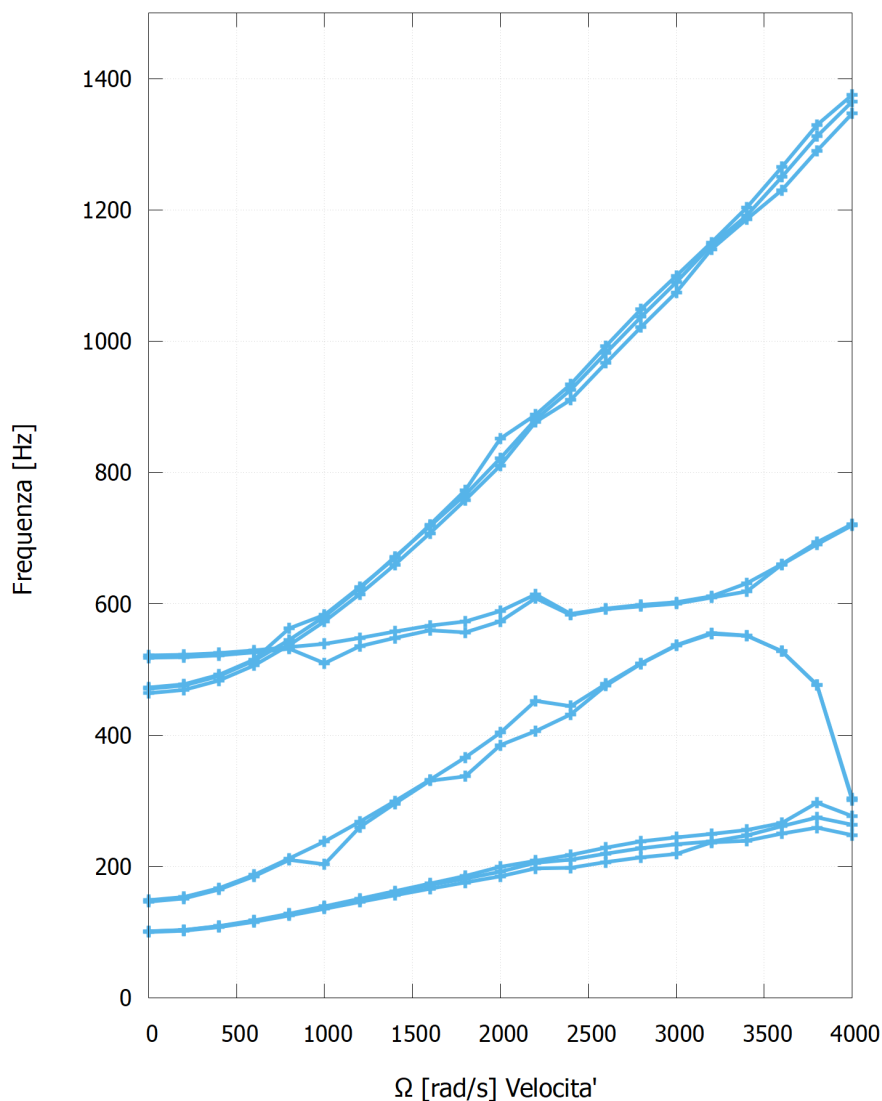


Figura 4.43: Diagramma di Campbell del rotore con 4 pale curve con angolo di curvatura $\theta = 33^\circ$, modellizzato in CUF con 28 L16 \times 10 B2 elementi ; andamenti numerici delle frequenze naturali al variare della velocità di rotazione attorno all'asse y .

Tuttavia, l'andamento delle curve appare leggermente più irregolare rispetto al caso precedente, suggerendo una maggiore sensibilità della struttura alla variazione di velocità e mostrando come l'aumento della curvatura delle pale renda la risposta dinamica del sistema più complessa. Un aspetto significativo riguarda il comportamento delle frequenze corrispondenti ai modi 5, 6, 7 e 8, che, dopo aver inizialmente seguito la tendenza di crescita osservata nelle altre frequenze, tendono invece a diminuire oltre i 3200 rad/s. Questo fenomeno indica una possibile interazione tra le forze centrifughe e gli effetti inerziali dovuti alla maggiore curvatura, che potrebbe comportare una redistribuzione degli sforzi nel sistema, influenzando la rigidità dinamica in modo non lineare. Pertanto, l'andamento visibile nel diagramma suggerisce che, per elevate velocità di rotazione, la flessibilità introdotta dalla curvatura accentuata inizi a prevalere sull'effetto di irrigidimento iniziale, determinando un calo localizzato di alcune frequenze naturali.

In generale, l'accuratezza del modello CUF rispetto ai risultati ottenuti in Ansys (Tab.4.15), si riconferma elevata anche per il rotore con pale aventi una maggiore curvatura, con una discrepanza che rimane contenuta entro margini accettabili, senza mai superare il 6,64%. In particolare, l'errore massimo si osserva nella dodicesima frequenza modale per la configurazione con $\theta = 33^\circ$, dove la deviazione tra i due metodi raggiunge il 6,64%, mentre per le altre frequenze analizzate l'errore relativo si mantiene generalmente al di sotto del 5%. Questi risultati dimostrano come il metodo CUF sia in grado di fornire una stima affidabile delle frequenze naturali, anche in presenza di geometrie con elevata curvatura.

L'effetto della variazione dell'angolo di curvatura delle pale si manifesta in una riduzione generalizzata delle frequenze naturali. Con l'incremento della curvatura da $\theta = 13^\circ$ a $\theta = 33^\circ$, la prima frequenza modale subisce una diminuzione del 7,2%, passando da 108,09 Hz a 100,33 Hz. Analogamente, la quarta frequenza si riduce dell'8,1%, mentre la quinta cala del 12,6%. Tuttavia, la riduzione più marcata si registra nella nona frequenza, che passa da 612,02 Hz a 464,14 Hz, con una variazione del 24,1%. Queste riduzioni sono coerenti con l'aspettativa che una maggiore curvatura possa comportare una maggiore deformabilità della struttura e quindi una diminuzione della rigidità globale del sistema. L'aumento della convessità delle pale modifica la distribuzione delle tensioni e delle deformazioni, rendendo il rotore più flessibile e abbassando le frequenze di vibrazione. Questo evidenzia come l'aumento della curvatura influenzi in modo significativo la risposta dinamica del sistema, comportando una riduzione della rigidità strutturale e una conseguente diminuzione delle frequenze modali.

Un ulteriore elemento importante per entrambi i modelli, con curvatura minore e maggiore delle pale, è sulla riduzione dei gradi di libertà. Infatti, il modello CUF consente di ottenere una significativa ottimizzazione computazionale, riducendo il numero di DOF del 75.77% rispetto al modello SOLID186 di ANSYS. Questo

consente di preservare un'elevata accuratezza nei risultati con un costo computazionale drasticamente inferiore. La capacità del metodo CUF di mantenere un buon equilibrio tra precisione ed efficienza lo rende dunque una valida alternativa per l'analisi modale di strutture con geometrie complesse, garantendo una modellazione accurata con un risparmio significativo in termini di risorse computazionali.

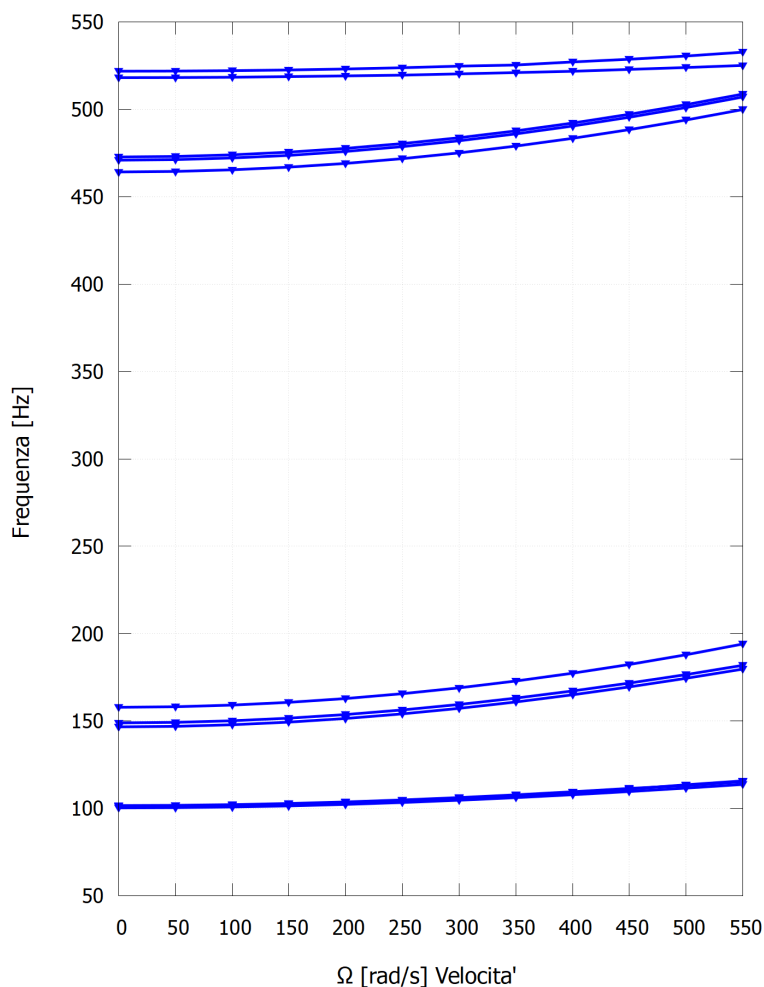
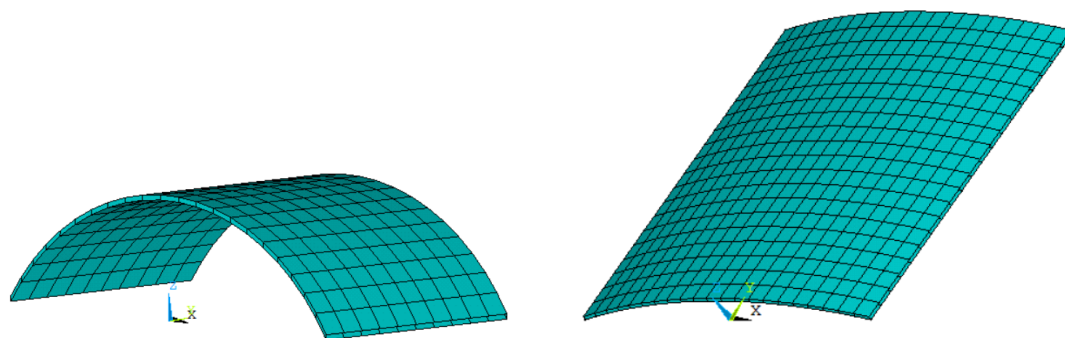


Figura 4.44: Diagramma di Campbell del rotore con 4 pale curve con angolo di curvatura di $\theta = 33^\circ$, modellizzato in CUF con $28 L16 \times 10 B2$ elementi ; variazione delle prime quindici frequenze naturali al variare della velocità di rotazione attorno all'asse y nel range di funzionamento.

4.2.7 Pannello curvo

In questa sottosezione si analizza il comportamento dinamico di una piastra curva, la cui geometria è rappresentata in Fig.4.45. La struttura è realizzata in materiale isotropo con proprietà tipiche dell'acciaio, caratterizzato da una lunghezza e una larghezza di $L = b = 20$ cm, uno spessore $t \approx \frac{L}{100}$, un modulo di Young $E = 210$ GPa, un coefficiente di Poisson $\nu = 0.3$ e una densità $\rho = 7800$ kg/m³.

La modellizzazione nel modello CUF prevede l'uso di dieci elementi a quattro nodi (L4) lungo l'asse longitudinale, mentre la sezione è stata discretizzata con 8 elementi bidimensionali di tipo L16. La mesh è stata organizzata in due strati, permettendo così di confrontare i risultati con il caso composito, trattato nella sezione successiva, mantenendo gli stessi gradi di libertà per il modello. L'analisi è stata condotta considerando due diversi valori del raggio di curvatura R_x . Si procederà con l'analisi della piastra, inizialmente adottando un raggio di curvatura $R_x = 40$ cm, seguito da un secondo caso in cui il raggio viene ridotto a $R_x = 10$ cm, rappresentando così una piastra con curvatura più accentuata. Per valutare la convergenza dei risultati, sono state adottate diverse teorie di modellazione, ordinate dalla meno complessa alla più raffinata. La Tab.4.16 riporta le prime cinque frequenze naturali ottenute per ciascun modello.



(a) Geometria della piastra curva con $R_x=10$ cm. (b) Geometria della piastra curva con $R_x=40$ cm.

Figura 4.45: Geometrie strutture shell analizzate in Ansys APLD modellizzate con elementi finiti SHELL181.

Dall'analisi condotta, si nota che per alcuni modelli semplificati non è stato possibile individuare determinate forme modali. Questo perché, si è andati a visualizzare le deformazioni associate alle prime 50 frequenze tramite il software Paraview, non è stato trovato un modo di vibrare corrispondente. Ciò indica che il modello adottato non è sufficientemente complesso per rappresentare quella specifica modalità di vibrazione della piastra curva. I valori mancanti nella Tab.4.16

evidenziano proprio questi casi, in cui il modello non riesce a catturare correttamente la dinamica della struttura a causa della sua formulazione semplificata.

Teoria	f_1 [Hz]	f_2 [Hz]	f_3 [Hz]	f_4 [Hz]	f_5 [Hz]	DOF
Shell $R_x = 10$ cm						
EBBT	-	-	-	-	-	93
TBT	-	-	-	-	-	93
TE1	3976.78	-	-	-	41948.37	279
TE2	2221.33	-	-	-	6994.18	558
TE3	343.21	2418.31	-	-	1531.42	930
TE4	313.79	910.49	-	854.32	1022.23	1395
TE5	309.05	328.51	-	811.55	902.83	1953
TE6	306.11	328.00	762.96	826.68	854.71	2604
L16	306.12	328.07	763.89	824.73	854.29	9300
Shell $R_x = 40$ cm						
EBBT	-	-	-	-	-	93
TBT	-	-	-	-	-	93
TE1	3976.78	-	-	11930.34	-	279
TE2	703.29	-	-	3455.27	-	558
TE3	138.43	974.15	575.03	799.66	575.02	930
TE4	135.95	230.50	421.11	542.47	630.70	1395
TE5	133.96	221.19	387.94	537.95	603.40	1953
TE6	133.77	220.40	386.22	535.48	597.31	2604
L16	133.69	220.06	385.52	534.12	595.28	9300

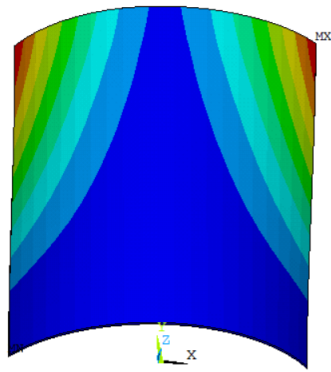
Tabella 4.16: Analisi di convergenza delle frequenze naturali al variare del modello utilizzato per la struttura shell $R_x = 10$ cm e $R_x = 40$ cm.

	f_1 [Hz]	f_2 [Hz]	f_3 [Hz]	f_4 [Hz]	f_5 [Hz]	DOF
Shell $R_x = 40$ cm						
CUF (8 L16 & 10xB4)	133.69	220.06	385.52	534.12	595.28	9300
ANSYS (SHELL181)	134.19	219.14	386.58	536.87	599.78	15912
Deviazione (%)	-0.37	+0.42	-0.27	-0.51	-0.75	-41.54
Shell $R_x = 10$ cm						
CUF (8 L16 & 10xB4)	306.12	328.07	763.89	824.73	854.29	9300
ANSYS (SHELL181)	304.13	315.40	757.93	781.78	845.22	15912
Deviazione (%)	+0.65	+4.02	+0.79	+5.49	1.07	-41.54

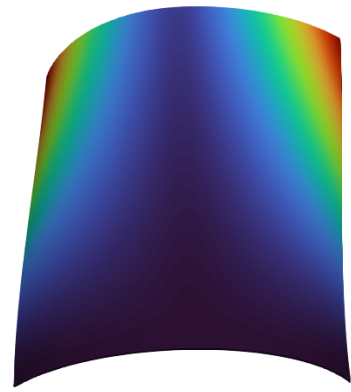
Tabella 4.17: Valori numerici delle frequenze naturali delle piastre curve isotrope con CUF e ANSYS APDL. Modello CUF modellizzato con 8L16 x 10B4 elementi. Modello ANSYS APDL modellizzato con 2550 elementi SHELL181.

La piastra curva studiata presenta dinamiche di deformazione che richiedono un livello di dettaglio superiore per essere catturate. Di conseguenza, i modelli meno raffinati non riescono a prevedere queste frequenze, poiché la loro formulazione teorica è troppo semplificata per descrivere accuratamente il comportamento strutturale della piastra curva. In Figura 4.45 è possibile visualizzare le geometrie delle piastre curve analizzate, discretizzate in elementi finiti di tipo SHELL181 nel software Ansys APDL. L'accuratezza della modellizzazione è stata valutata quantitativamente confrontando le frequenze naturali ottenute con il metodo CUF e con Ansys APDL, come riportato in Tab. 4.17. I risultati evidenziano una deviazione massima inferiore a 5.5%, a conferma della validità del metodo CUF. Inoltre, il numero di gradi di libertà richiesto dal modello CUF è significativamente inferiore rispetto a quello necessario per la discretizzazione con elementi *SHELL181*, con una riduzione pari a circa il 41.54%. Questo si traduce in un notevole abbattimento del costo computazionale, rendendo il metodo CUF particolarmente vantaggioso per l'analisi di strutture complesse.

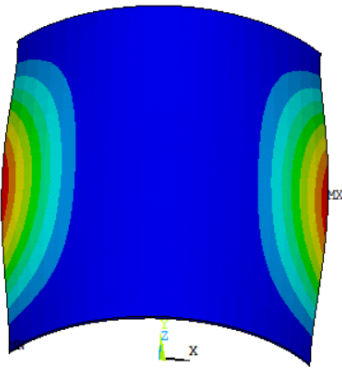
Per la validazione dei risultati, si confrontano i modi di vibrare ottenuti tramite Ansys APDL con quelli derivanti dal modello CUF, visualizzati mediante il software Paraview. L'analisi è stata condotta considerando una discretizzazione basata su 8 elementi di tipo *L16* e 10 elementi *B4*. Le Figure 4.46 e 4.47 illustrano il confronto tra il primo, terzo e quinto modo per le due configurazioni analizzate. Infine, in Figura 4.48 è riportato il diagramma di Campbell, che illustra l'andamento delle frequenze naturali delle piastre curve in funzione della velocità di rotazione attorno all'asse y longitudinale.



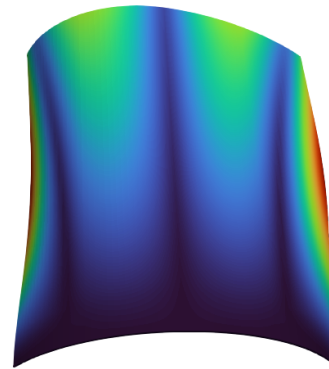
(a) Modo 1 - Ansys.



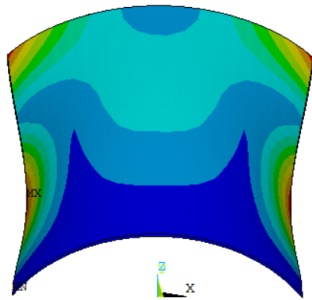
(b) Modo 1 - Paraview.



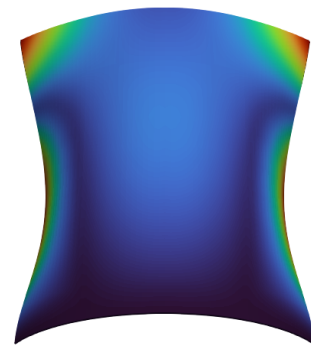
(c) Modo 3 - Ansys.



(d) Modo 3 - Paraview.

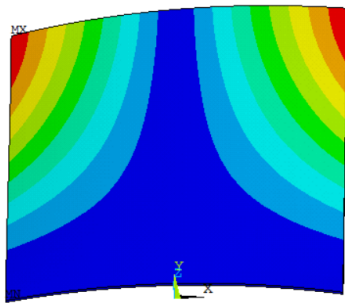


(e) Modo 5 - Ansys.

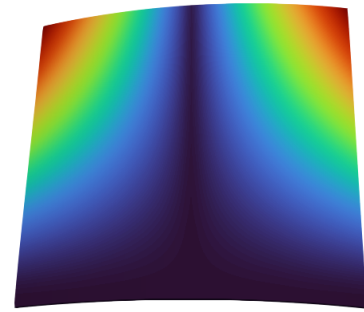


(f) Modo 5 - Paraview.

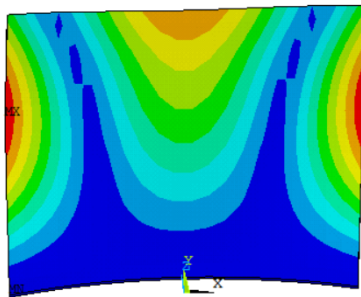
Figura 4.46: Confronto dei modi di tra vibrare tra Ansys e il modello CUF (8 L16 & 10xB4) tramite Paraview per una shell con raggio di curvatura $R_x = 10$ cm.



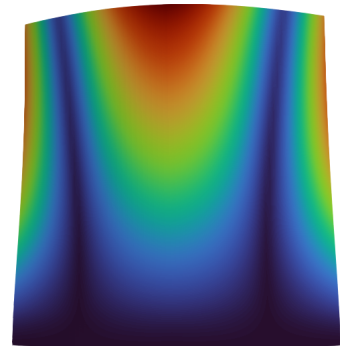
(a) Modo 1 - Ansys.



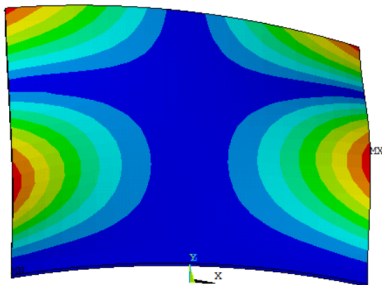
(b) Modo 1 - Paraview.



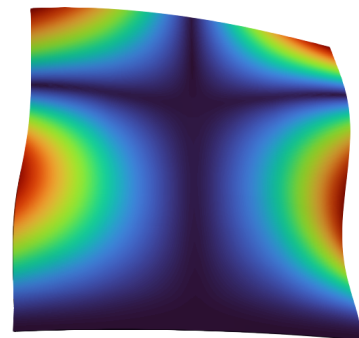
(c) Modo 3 - Ansys.



(d) Modo 3 - Paraview.



(e) Modo 5 - Ansys.



(f) Modo 5 - Paraview.

Figura 4.47: Confronto dei modi di vibrare tra Ansys e il modello CUF con elementi 8 L16 & 10xB4 tramite Paraview per la shell con raggio di curvatura $R_x = 40$ cm.

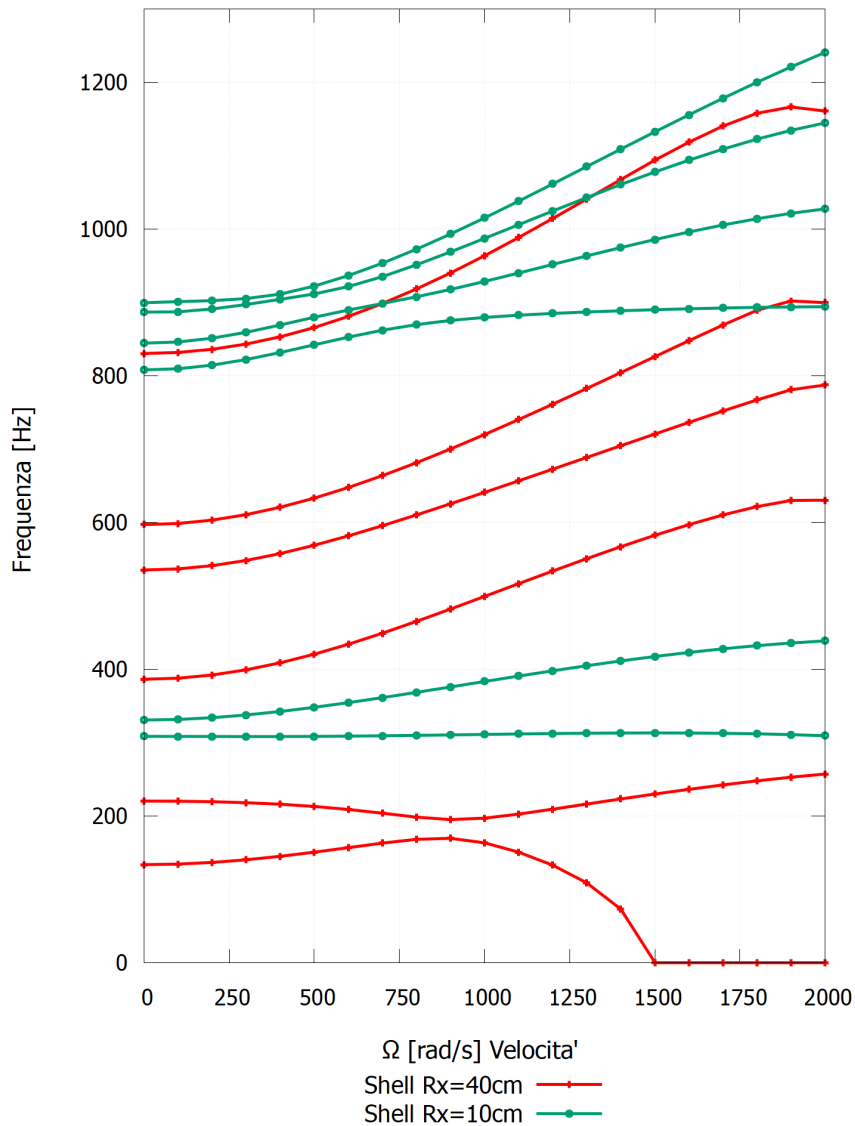


Figura 4.48: Diagramma di Campbell per piastre curve rispettivamente con curvatura di $R_x = 40$ cm e $R_x = 10$ cm modellizzato in CUF con 8 L16 & 10 B4 elementi ; variazione delle frequenze naturali al variare della velocità di rotazione attorno all'asse y longitudinale.

4.2.8 Pala con profilo a ellisse

Dopo aver introdotto la curvatura mediante una piastra curva, l'accuratezza del software è stata verificata con esito positivo. Ciò ha permesso di modellare con precisione la geometria della cross-section, rispettando i requisiti aerodinamici di una pala rotante. Tra le configurazioni analizzate, quella più affine a un profilo NACA simmetrico è risultata essere un'ellisse. Per la geometria della sezione trasversale, sono stati adottati i seguenti parametri: semiassi $a = 1.5$ cm e $b = 0.5$ cm, spessore $t = 0.3$ cm e lunghezza $L = 10$ cm. Il materiale utilizzato è l'alluminio, con modulo di Young $E = 70$ GPa e densità $\rho = 2700$ g/m³. Nelle analisi modali, la sezione corrispondente a $Y = 0$ è stata vincolata. La modellazione della pala con profilo ellittico è illustrata in Figura 4.49, dove sono riportate la vista frontale del profilo (Figura 4.49a) e la vista isometrica della pala (Figura 4.49b). I risultati delle prime frequenze naturali, ottenuti con il software ANSYS e confrontati con i valori calcolati tramite CUF, sono riportati in Tab. 4.18. L'errore relativo tra le due metodologie risulta essere sempre inferiore all'1%, confermando la validità del modello numerico utilizzato.

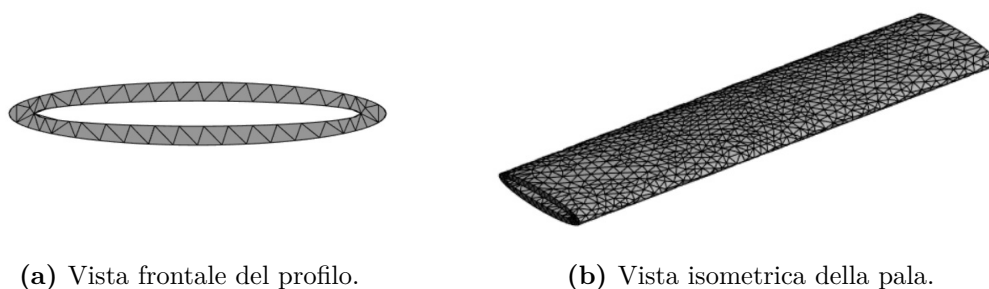


Figura 4.49: Modellazione della pala cava con profilo ellittico in ANSYS. Mesh creata con elementi tetraedrici SOLID187.

L'andamento delle frequenze naturali in funzione della velocità di rotazione è riportato nel diagramma di Campbell in Fig. 4.52. I risultati ottenuti evidenziano un comportamento coerente con le aspettative teoriche per una pala con sezione ellittica. In particolare, le curve rappresentative delle frequenze modali mostrano un andamento tipico di una sezione aerodinamica con simmetria assiale, confermando la validità del modello e l'accuratezza delle simulazioni numeriche.

	f_{1z} [Hz]	f_{1x} [Hz]	f_{2z} [Hz]	f_t [Hz]	f_{3z} [Hz]	DOF
Profilo a ellisse						
CUF (8 L16 & 10 B4)	815.17	2197.00	4236.57	4854.56	9795.40	8928
ANSYS (SOLID 187)	809.84	2183.10	4226.10	4830.10	9797.60	78918
Deviazione (%)	0.66	0.64	0.25	0.51	-0.02	88.7

Tabella 4.18: Confronto delle frequenze naturali di una pala con profilo ellittico isotropo in alluminio tra CUF e ANSYS Mechanical. Struttura modellizzata in ANSYS con 26306 nodi e 15027 elementi SOLID187.

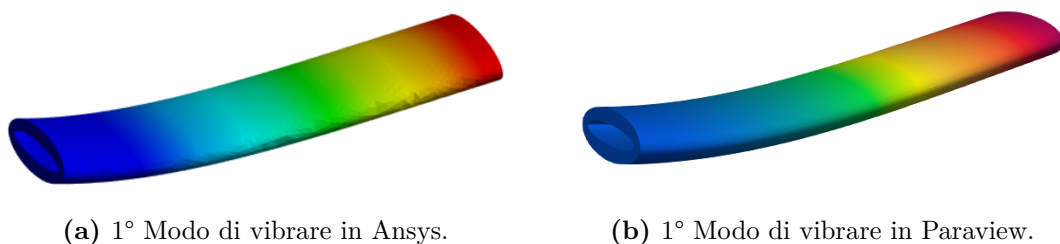


Figura 4.50: Confronto della Total Deformation del 1° modo di vibrare tra ANSYS e Paraview della pala a sezione ellittica.

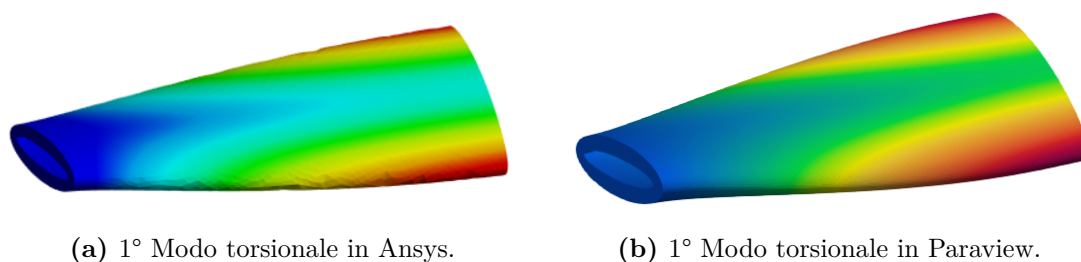


Figura 4.51: Confronto della Total Deformation del 1° modo di vibrare torsionale tra ANSYS e Paraview della pala a sezione ellittica.

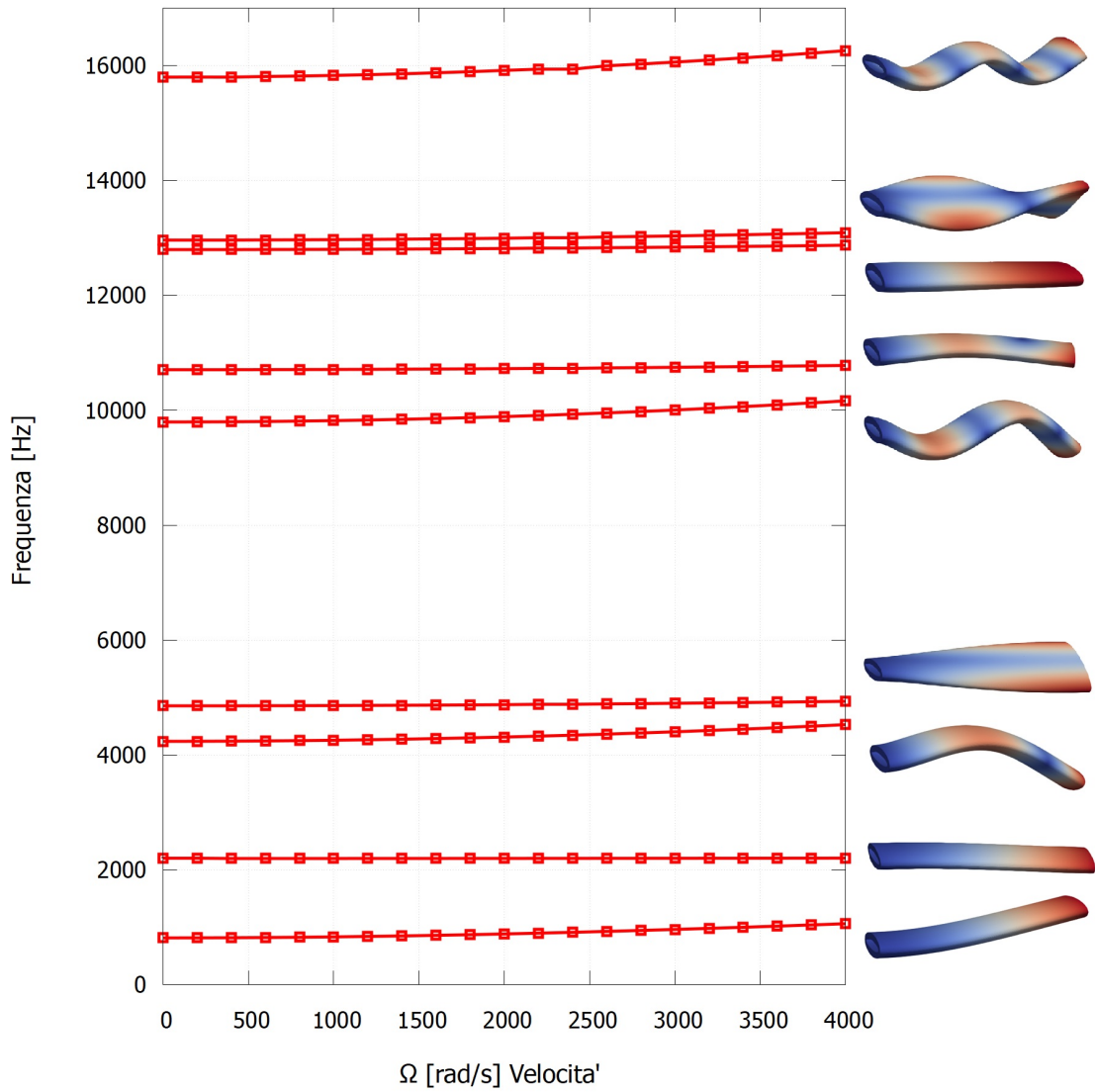


Figura 4.52: Diagramma di Campbell della pala con profilo ellittico modellizzato in CUF con 8 L16 & 10 B4 elementi; variazione delle frequenze naturali al variare della velocità di rotazione attorno all'asse z .

4.2.9 Pala con profilo NACA2401

Dopo aver analizzato una geometria con profilo ellittico, si considera ora una sezione trasversale più complessa dal punto di vista aerodinamico, utilizzata tipicamente nei rotori di coda degli elicotteri. In particolare, si prende in esame un profilo NACA2401, caratterizzato da una curvatura del dorso che migliora l'efficienza aerodinamica e la portanza rispetto a un profilo ellittico simmetrico.

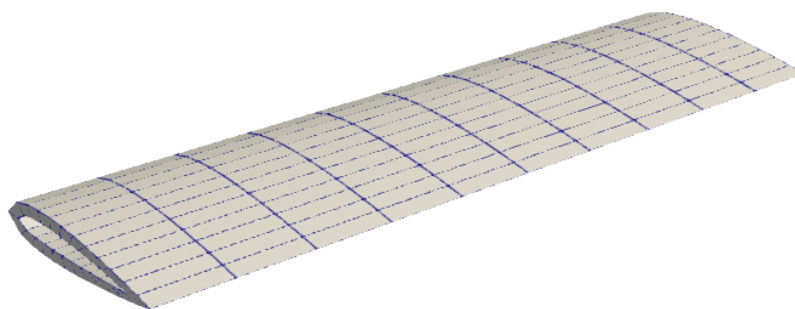


Figura 4.53: Vista isometrica della pala cava con profilo NACA2401 in Paraview. Sezione trasversale modellata in CUF tramite 24 elementi L4.

Per la modellazione della pala con profilo NACA2401, sono stati adottati i seguenti parametri: corda $c = 2.5$ cm, spessore massimo pari al 1 della corda, lunghezza della pala $L = 12$ cm e uno spessore di parete pari a 0.25 cm, rendendo la pala cava. L'adozione di una struttura cava consente di ridurre il peso complessivo della pala senza compromettere significativamente la rigidità e le prestazioni strutturali. Inoltre, questa configurazione è frequentemente impiegata nei rotori di coda per migliorare la risposta dinamica e ridurre gli effetti inerziali. Un esempio pratico di tale soluzione si trova nei rotori di coda di elicotteri leggeri, dove la riduzione della massa contribuisce a diminuire il consumo energetico e le sollecitazioni sui supporti di montaggio. Il materiale impiegato è lo stesso della precedente analisi, ovvero alluminio con modulo di Young $E = 70$ GPa e densità $\rho = 2700$ g/m³. Anche in questo caso, nelle analisi modali, la sezione corrispondente a $Y = 0$ è stata vincolata. La modellazione del profilo NACA2401 è illustrata in Fig. 4.53. I risultati delle prime frequenze naturali, ottenuti mediante modello CUF tramite elementi 24 L4 & 10 B4 e confrontati con i precedenti valori ottenuti per una pala con profilo a ellisse, sono riportati in Tab. 4.19. Le frequenze naturali ottenute mostrano che la pala con profilo NACA2401 presenta valori leggermente superiori rispetto alla pala con profilo ellittico, con differenze comprese tra circa il 2% e il 3% probabilmente dovuta alla sua distribuzione della massa.

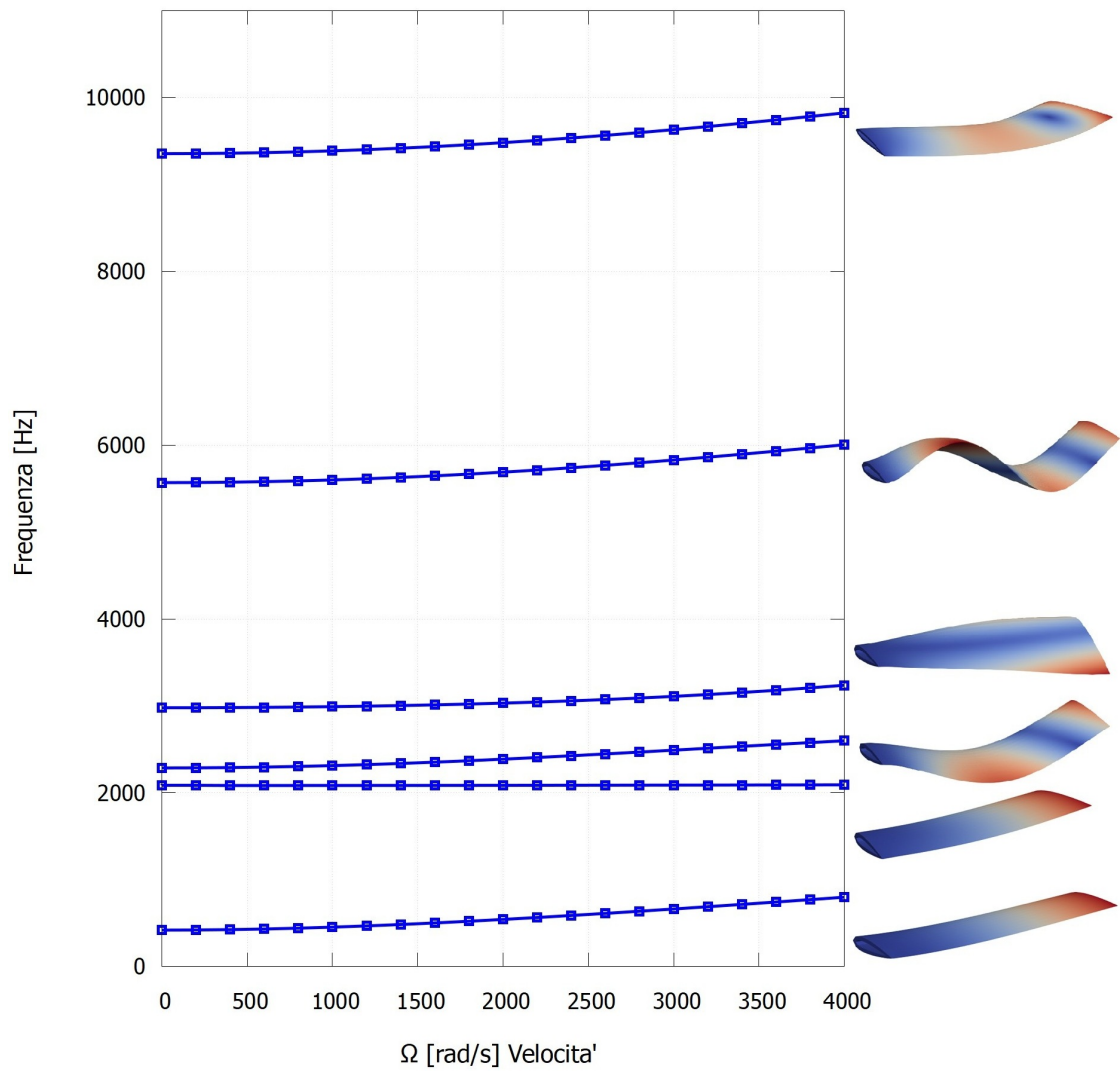


Figura 4.54: Diagramma di Campbell della pala con profilo NACA2401 modellizzata con elementi 24 x L4 & 10 x B4 ; variazione delle frequenze naturali al variare della velocità di rotazione attorno all'asse Z .

	f_{1z} [Hz]	f_{1x} [Hz]	f_{2z} [Hz]	f_t [Hz]	f_{3z} [Hz]
NACA CUF (24 L4 & 10 B4)	832.45	2254.30	4378.20	4978.50	10023.00
Ellisse CUF (8 L16 & 10 B4)	815.17	2197.00	4236.57	4854.56	9795.40
Deviazione (%)	+2.12	+2.61	+3.34	+2.56	+2.32

Tabella 4.19: Confronto delle frequenze naturali di una pala cava con profilo NACA2401 e di una pala cava con profilo a ellisse.

L'andamento delle frequenze naturali in funzione della velocità di rotazione è mostrato nel diagramma di Campbell in Fig. 4.54. I risultati ottenuti evidenziano un comportamento coerente con le aspettative teoriche per un profilo aerodinamico con curvatura, mostrando una leggera variazione delle frequenze rispetto al caso ellittico.

4.3 Carichi termici

Il carico termico può manifestarsi durante la rotazione della struttura, aggiungendo ulteriori termini all'espressione dell'energia di deformazione, come già stato mostrato nel capitolo 2.1.2. Questo fenomeno sarà analizzato in questa sezione, esaminando l'evoluzione delle frequenze naturali di una struttura rotante al variare della temperatura ΔT .

4.3.1 Trave a sbalzo

In questa sezione, si analizzano le frequenze naturali di diverse travi a sbalzo realizzate in materiale isotropo, considerando l'effetto di variazioni termiche. Le strutture analizzate includono travi con sezione quadrata e rettangolare, nonché cilindri a sezione circolare cava.

La trave a sezione quadrata ha un lato di 1 cm e una lunghezza di $L = 10$ cm. Le proprietà del materiale sono riportate nella Tabella 4.7. Le frequenze naturali per diverse variazioni di temperatura (ΔT) sono presentate nella Tabella 4.20.

Frequenza	$\Delta T = 0^\circ\text{C}$	$\Delta T = 100^\circ\text{C}$	$\Delta T = 200^\circ\text{C}$
f_1 [Hz]	838.8676	838.8647	838.8619
	-	-0.0003%	-0.0007%
f_2 [Hz]	5048.0641	5048.0226	5047.9810
	-	-0.0008%	-0.0016%
f_3 [Hz]	13029.4494	13029.4218	13029.3942
	-	-0.0002%	-0.0004%

Tabella 4.20: Variazione delle frequenze naturali al variare di ΔT per la trave a sbalzo con sezione quadrata.

La trave a sezione rettangolare ha dimensioni di 1 cm per 0.5 cm e una lunghezza di $L = 10$ cm. Le frequenze naturali per diverse variazioni di temperatura sono riportate nella Tab. 4.21.

Frequenza	$\Delta T = 0^\circ\text{C}$	$\Delta T = 100^\circ\text{C}$	$\Delta T = 200^\circ\text{C}$
f_1 [Hz]	421.172820	421.171860	421.170794
	-	-0.00023%	-0.00048%
f_2 [Hz]	2612.33095	2612.29388	2612.25638
	-	-0.00142%	-0.00285%
f_3 [Hz]	7200.60465	7200.47318	7200.34096
	-	-0.00183%	-0.00366%

Tabella 4.21: Variazione delle frequenze naturali della trave a sbalzo a sezione rettangolare 1 cm x 0.5 cm nel modello CUF (L9 x 10 B4) al variare di ΔT .

Si considera il cilindro a sbalzo con sezione circolare cava a parete sottile (0.2 mm) , realizzati in materiale isotropo con le proprietà elencate nella Tabella 4.7 già considerato nella scorsa sezione. Si ripete analisi modale al variare del carico termico applicato e le frequenze naturali ottenute per le diverse variazioni di temperatura sono riportate nella Tab. 4.22.

Frequenza	$\Delta T = 0\text{ }^\circ\text{C}$	$\Delta T = 50\text{ }^\circ\text{C}$	$\Delta T = 100\text{ }^\circ\text{C}$	$\Delta T = 200\text{ }^\circ\text{C}$
f_1 [Hz]	995.690195	995.694379	995.698522	995.706690
	-	+0.000420%	+0.000836%	+0.001656%
f_2 [Hz]	5716.75359	5716.78748	5716.82117	5716.88791
	-	+0.000593%	+0.001182%	+0.002350%
f_3 [Hz]	12318.2845	12318.2824	12318.2802	12318.2752
	-	-0.000017%	-0.000035%	-0.000075%

Tabella 4.22: Variazione delle frequenze naturali del cilindro con spessore di 3 mm al variare di ΔT .

I risultati evidenziano variazioni minime e trascurabili delle frequenze naturali con l'aumento della temperatura. Questo comportamento può essere spiegato dalla configurazione a sbalzo delle strutture, in cui un'estremità è vincolata mentre l'altra è libera. Questa configurazione permette alla struttura di espandersi liberamente in risposta alle variazioni termiche, riducendo al minimo la formazione di tensioni interne significative.

In particolare, le travi con sezioni quadrate e rettangolari mostrano una lieve diminuzione delle frequenze naturali, mentre nei cilindri a sezione cava le variazioni sono più complesse, ma comunque di entità trascurabile. Questi risultati suggeriscono che, in condizioni di vincolo a sbalzo, l'effetto della temperatura sulle frequenze naturali non è rilevante dal punto di vista pratico.

4.3.2 Trave doppiamente incastrata

Le analisi condotte sulle strutture a sbalzo hanno mostrato che le variazioni di temperatura non influenzano in modo significativo le frequenze proprie dei modi di vibrare. Questo suggerisce che il vincolo a un'estremità non genera effetti apprezzabili sulla risposta modale. Per verificare questa ipotesi, è stata quindi adottata una configurazione con entrambe le estremità bloccate, nota come clamped beam. L'attenzione si è focalizzata su una trave a sezione rettangolare con base $b = 1$ cm e altezza $h = 0.5$ cm, mantenendo invariate le proprietà del materiale. Per il codice MUL², la discretizzazione è stata realizzata utilizzando un elemento L9 per la sezione trasversale e 10 elementi L4 lungo la lunghezza. Le stesse condizioni sono state replicate in ANSYS con una mesh ad alta risoluzione, come illustrato in Fig. 4.55.

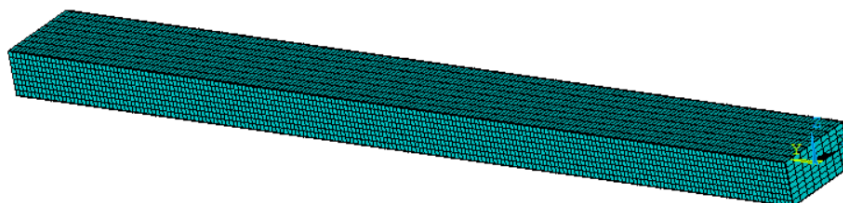


Figura 4.55: Rappresentazione della trave in Ansys in elementi BEAM188.

Modo	$\Delta T = 0\text{ }^{\circ}\text{C}$	$\Delta T = 50\text{ }^{\circ}\text{C}$	$\Delta T = 100\text{ }^{\circ}\text{C}$	$\Delta T = 200\text{ }^{\circ}\text{C}$
f_{1z} [Hz]	2662.6	2484.3	2290.5	1836.2
	-	-6.7%	-14.0%	-31.0%
f_{1x} [Hz]	5091.1	5001.5	4910.1	4721.2
	-	-1.76%	-3.55%	-7.25%
f_{2z} [Hz]	7203.0	6962.3	6712.3	6179.2
	-	-3.34%	-6.81%	-14.2%
f_{2x} [Hz]	13145.0	13018.0	12889.0	12627.0
	-	-0.97%	-1.95%	-3.94%
f_{3z} [Hz]	13788.0	13522.0	13250.0	12688.0
	-	-1.93%	-3.91%	-7.98%

Tabella 4.23: Variazione delle frequenze naturali per la trave a sezione rettangolare $1\text{cm} \times 0.5\text{cm}$ sottoposta ai diversi carichi termici. Risultati ottenuti tramite codice CUF modellizzando la trave tramite elementi: L9 x 10 B4

I risultati riportati nella Tab. 4.23 mostrano una riduzione significativa delle frequenze naturali con l'aumentare della temperatura. In particolare, la prima frequenza flessionale nella direzione z (F_{1z}) subisce una riduzione significativa, passando da 2.6626×10^3 Hz a temperatura ambiente a 1.8362×10^3 Hz per un incremento termico di 200 K, con una variazione del -31.0% . Anche la prima frequenza flessionale nella direzione x (F_{1x}) diminuisce, seppur in misura minore, registrando una riduzione del -7.25% per lo stesso intervallo di temperatura.

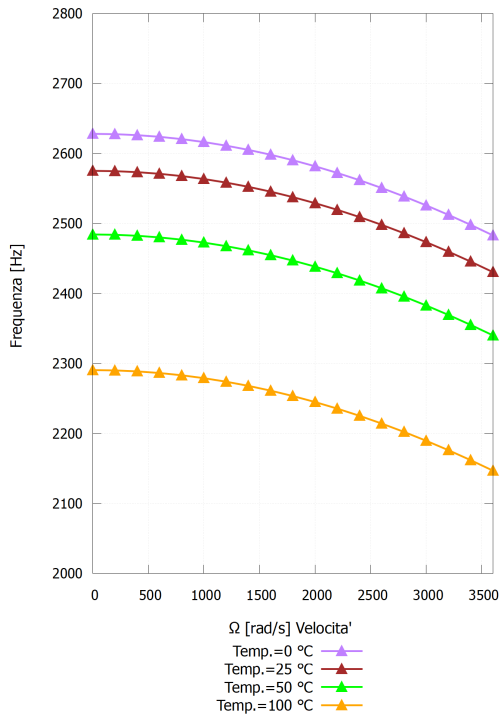
Il confronto dei risultati ottenuti con quelli ricavati nel software ANSYS ,riportati

nella Tab.4.26, evidenzia una buona corrispondenza, con deviazioni generalmente inferiori al 2.5%. Questa concordanza conferma l'affidabilità del modello numerico CUF. Dal punto di vista strutturale, la riduzione delle frequenze naturali implica una diminuzione della rigidezza dinamica della trave all'aumentare della temperatura, fenomeno critico in applicazioni ingegneristiche dove la stabilità modale è un parametro essenziale.

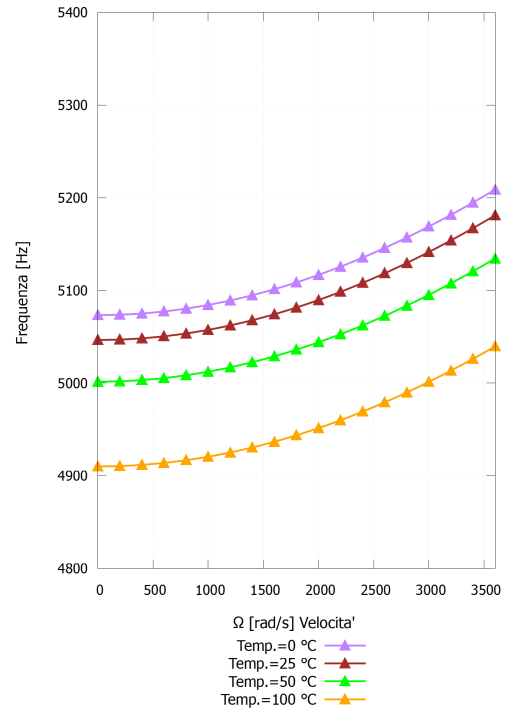
		$\Delta T = 0^\circ\text{C}$	$\Delta T = 50^\circ\text{C}$	$\Delta T = 100^\circ\text{C}$	$\Delta T = 200^\circ\text{C}$
f_{1z} [Hz]	CUF L9 x 10 B4	2662.6	2484.3	2290.5	1836.2
	Ansys BEAM188	2622.9	2519.6	2338.9	1919.3
	Dev. (%)	-1.49%	+1.42%	+2.11%	+4.53%
f_{1x} [Hz]	CUF L9 x 10 B4	5091.1	5001.5	4910.1	4721.2
	Ansys BEAM188	5003.8	4948.7	4865.7	4684.5
	Dev. (%)	-1.71%	-1.06%	-0.90%	-0.78%
f_{2z} [Hz]	CUF L9 x 10 B4	7203.0	6962.3	6712.3	6179.2
	Ansys BEAM188	7081.0	6935.2	6701.4	6192.8
	Dev. (%)	-1.69%	-0.39%	-0.16%	+0.22%
f_{2x} [Hz]	CUF L9 x 10 B4	13145.0	13018.0	12889.0	12627.0
	Ansys BEAM188	12835.0	12741.0	12637.0	12375.0
	Dev. (%)	-2.36%	-2.13%	-1.96%	-2.00%
f_{3z} [Hz]	CUF L9 x 10 B4	13788.0	13522.0	13250.0	12688.0
	Ansys BEAM188	13520.0	13342.0	13095.0	12549.0
	Dev. (%)	-1.94%	-1.33%	-1.17%	-1.09%

Tabella 4.24: Frequenze naturali per la trave a sezione rettangolare $1\text{cm} \times 0.5\text{cm}$ doppiamente incastrata sottoposta ai diversi carichi termici. Confronto delle frequenze naturali ottenute tramite modello CUF e software Ansys APDL per diversi valori di ΔT . Trave modellata in Ansys APDL con 606 elementi BEAM188

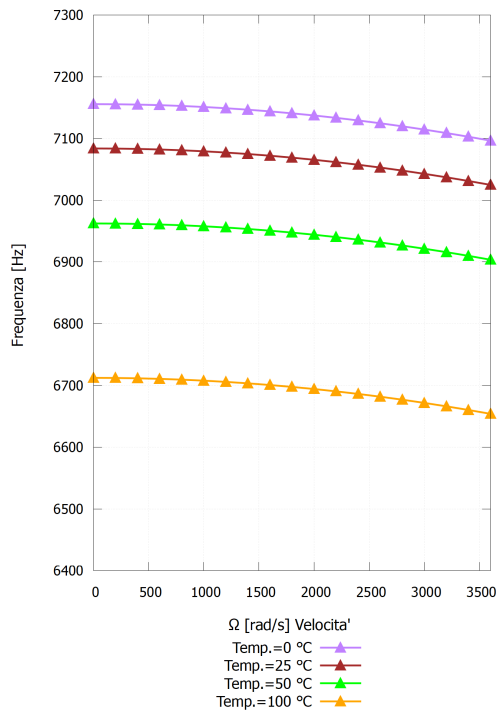
Nei diagrammi di Campbell in Fig.4.56 si può osservare l'andamento decrescente delle prime quattro frequenze naturali in funzione al carico termico, evidenziando quindi una maggiore sensibilità nei modi flessionali di ordine inferiore. Mentre l'andamento delle frequenze all'aumentare della velocità di rotazione intorno alla asse principale della struttura con lo stress termico applicato, rimane invariato.



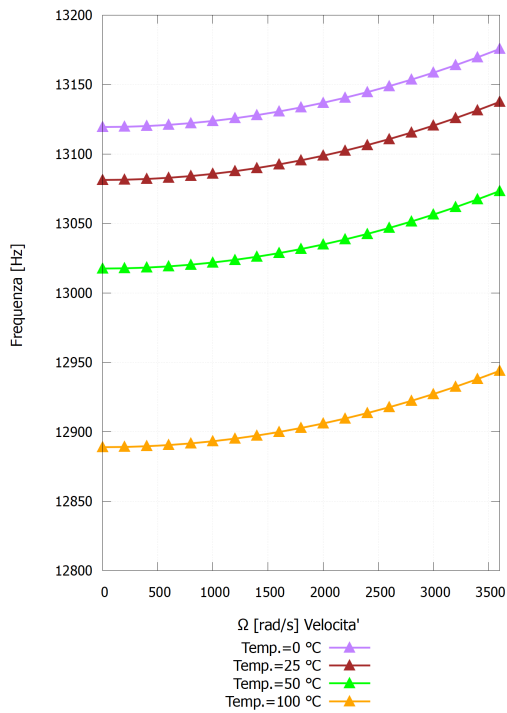
(a) Modo 1.



(b) Modo 2.



(c) Modo 3.



(d) Modo 4.

Figura 4.56: Diagrammi di Campbell delle prime 4 frequenze naturali della trave a sezione rettangolare al variare del carico termico.

4.3.3 Cilindro doppiamente incastrato

Proseguendo con le analisi modali con l'applicazione di un gradiente termico crescente (ΔT), è stato esaminato un cilindro cavo con due diversi spessori ($t = 0.2$, mm e $t = 3$, mm), mantenendo le stesse proprietà geometriche e materiali della sezione precedente vincolato su entrambi gli esgtrmi , analogamente a quanto già fatto per la trave rettangolare .

Freq.	$\Delta T = 0$	$\Delta T = 50$	$\Delta T = 100$	$\Delta T = 200$
Cilindro a parete sottile t=0.2 mm				
f_1 [Hz]	5622.2	5546.6	5469.8	5312.2
	-	-1.4%	-2.7%	-5.5%
f_2 [Hz]	6914.5	6850.2	6784.2	6645.8
	-	-0.9%	-1.9%	-3.9%
f_3 [Hz]	8501.2	8307.2	8107.2	7686.3
	-	-2.3%	-4.6%	-9.6%
f_4 [Hz]	11944.0	11650.0	11348.0	10717.0
	-	-2.5%	-5.0%	-10.3%
f_5 [Hz]	13598.0	13485.0	13369.0	13137.0
	-	-0.8%	-1.7%	-3.4%
Cilindro a parete spessa t=3 mm				
f_1 [Hz]	4702.1	4605.7	4506.9	4301.6
	-	-2.0%	-4.2%	-8.5%
f_2 [Hz]	15907.0	15884.0	15861.0	15814.0
	-	-0.1%	-0.3%	-0.6%
f_3 [Hz]	12019.0	11881.0	11742.0	11457.0
	-	-1.2%	-2.3%	-4.7%
f_4 [Hz]	26117.0	26102.0	26089.0	26060.0
	-	-0.1%	-0.1%	-0.2%
f_5 [Hz]	21693.0	21532.0	21369.0	21039.0
	-	-0.8%	-1.5%	-3.0%

Tabella 4.25: Frequenze naturali al variare di ΔT per due diversi spessori del cilindro vincolato in configurazione incastro-incastro ottenute nel modello CUF.

La Tabella 4.25 mostra i valori delle frequenze naturali per i primi cinque modi, insieme alle variazioni percentuali rispetto alla condizione iniziale ($\Delta T = 0$). I risultati evidenziano una chiara tendenza alla riduzione delle frequenze con l'aumento della temperatura. In particolare, per il cilindro più sottile ($t = 0.2$ mm), la riduzione risulta più marcata, con un calo massimo del -10.26% per il quarto modo a $\Delta T = 200$ °C. Al contrario, nel cilindro più spesso ($t = 3$ mm), l'effetto termico è meno pronunciato, con variazioni generalmente inferiori al 5%. Come nella sezione precedente, si è validato il modello, confrontato i risultati con quelli ottenuti tramite il software ANSYS. La Tabella 4.26 mostra le frequenze calcolate con entrambi i metodi e le relative deviazioni percentuali. Le deviazioni tra i modelli risultano generalmente contenute, confermando la validità dei calcoli effettuati.

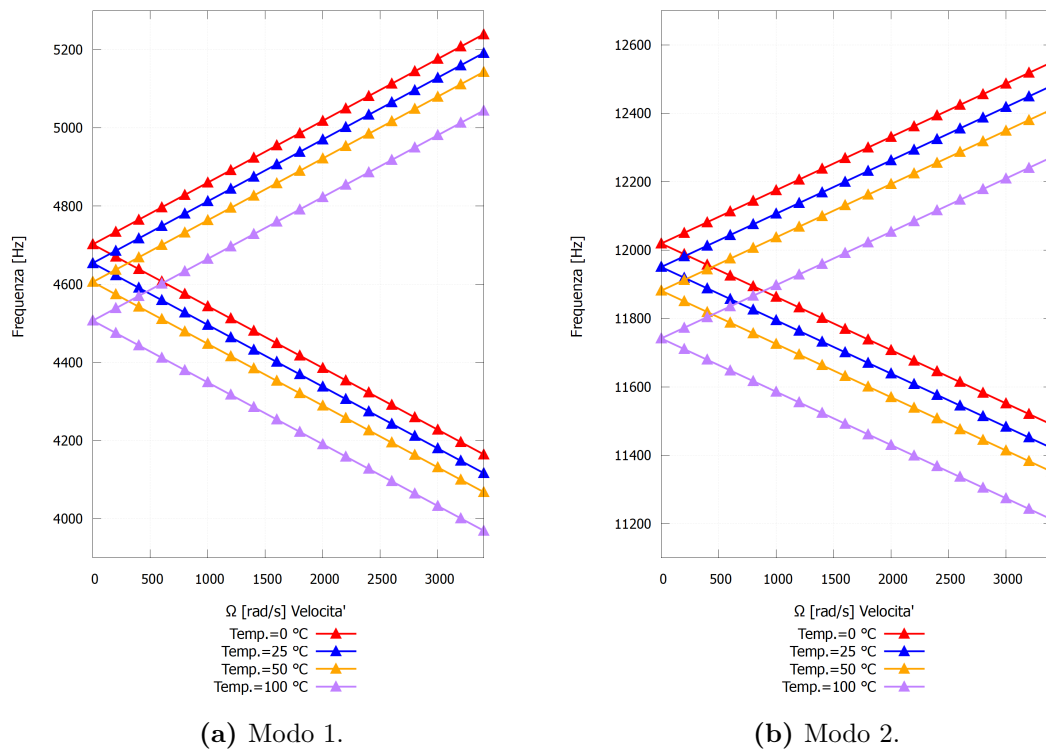


Figura 4.57: Diagrammi di Campbell delle prime 4 frequenze naturali del cilindro cavo a parete spessa vincolato ad entrambe le estremità al variare del carico termico uniforme applicato nel modello CUF.

Nei diagrammi di Campbell riportati in Fig.4.57 è possibile osservare l'andamento delle prime quattro frequenze naturali al variare della velocità di rotazione intorno all'asse y , considerando diverse condizioni di carico termico applicate nel modello CUF.

		$\Delta T = 0^\circ\text{C}$	$\Delta T = 50^\circ\text{C}$	$\Delta T = 100^\circ\text{C}$	$\Delta T = 200^\circ\text{C}$
Cilindro a parete sottile t=0.2 mm					
f_1 [Hz]	CUF	5622.2	5546.6	5469.8	5312.2
	Ansys	5449.8	5411.7	5372.8	5294.5
	Dev. (%)	+3.1	+2.4	+1.8	+0.3%
f_2 [Hz]	CUF	6914.5	6850.2	6784.2	6645.8
	Ansys	6525.8	6485.2	6445.1	6362.2
	Dev. (%)	+5.6	+5.3	+5.0	+4.3
f_3 [Hz]	CUF	8501.2	8307.2	8107.2	7686.3
	Ansys	7952.3	7839.2	7698.3	7486.5
	Dev.(%)	+6.5	+5.6	+5.0	+2.6%
f_4 [Hz]	CUF	11944.0	11650.0	11348.0	10717.0
	Ansys	11099.0	10937.4	10772.7	10435.2
	Dev. (%)	+7.0	+6.1	+5.1	+2.7%
f_5 [Hz]	CUF	13598.0	13164.90	13369.3	13137.2
	Ansys	13220.3	13164	13108.6	12996.5
	Dev. (%)	+2.8	+0.0	+1.9	+1.1%
DOF (CUF 8 L16 & 10 B4): 5832					
DOF (ANSYS 832 SOLID186): 17712					

Tabella 4.26: Confronto delle frequenze naturali tra modello CUF e Ansys Mechanical (832 elementi SOLID186) del cilindro cavo a parete sottile vincolato ad entrambe le estremità per diversi valori di ΔT .

4.3.4 Pannello Curvo

In questa sottosezione si analizzano le strutture shell isotrope descritte precedentemente, considerando due configurazioni di vincolo: una con un solo estremo bloccato ($Y = 0$ cm) e l'altra con entrambi gli estremi vincolati ($Y = 0$ cm e $Y = 20$ cm). L'analisi prevede l'applicazione di uno stress termico crescente, seguita da un'analisi modale per determinare le frequenze naturali della struttura. I risultati ottenuti sono riportati nelle tabelle seguenti. Si analizza inizialmente la configurazione con vincolo su un solo bordo. I risultati sono riportati nella Tabella 4.27. Successivamente, si considera la piastra curva vincolandola su entrambi gli estremi ed andando a ripetere l'analisi modale (Tab.4.28).

Modo	$\Delta T = 0^\circ\text{C}$	$\Delta T = 100^\circ\text{C}$	$\Delta T = 200^\circ\text{C}$	$\Delta T = 300^\circ\text{C}$
f_1 [Hz]	133.82	135.01	136.15	137.19
	-	+0.89%	+1.75%	+2.47%
f_2 [Hz]	220.47	220.71	220.92	221.13
	-	+0.11%	+0.20%	+0.30%
f_3 [Hz]	386.47	388.39	390.14	391.68
	-	+0.50%	+0.95%	+1.34%
f_4 [Hz]	535.39	538.12	540.69	542.19
	-	+0.51%	+0.99%	+1.28%
f_5 [Hz]	597.22	600.17	602.89	604.94
	-	+0.49%	+0.95%	+1.29%
f_6 [Hz]	830.41	831.32	832.04	832.63
	-	+0.11%	+0.20%	+0.27%

Tabella 4.27: Variazione delle frequenze naturali al variare di ΔT per shell isotropa con $R_x=40$ cm vincolata su un estremo ottenuto nel modello CUF.

Modo	$\Delta T = 0^\circ\text{C}$	$\Delta T = 50^\circ\text{C}$	$\Delta T = 100^\circ\text{C}$	$\Delta T = 200^\circ\text{C}$
f_1 [Hz]	471.16	115.89	206.21	545.78
	-	-75.40%	-56.20%	+15.80%
f_2 [Hz]	500.37	133.91	284.49	554.01
	-	-73.20%	-43.10%	+10.70%
f_3 [Hz]	1076.90	499.58	816.47	695.67
	-	-53.60%	-24.20%	-35.40%
f_4 [Hz]	1066.10	506.61	861.44	730.79
	-	-52.50%	-19.10%	-31.40%
f_5 [Hz]	1061.90	948.64	800.83	771.09
	-	-10.80%	-24.60%	-27.40%
f_6 [Hz]	1063.30	973.79	815.24	851.17
	-	-9.00%	-23.30%	-19.90%

Tabella 4.28: Frequenze naturali in funzione di ΔT per la piastra curva isotropa con raggio di curvatura $R_x = 40$ cm, vincolata su entrambi gli estremi in CUF.

L'analisi mostra come le frequenze naturali della shell varino in modo significativo con l'aumento della temperatura. Nei primi intervalli termici (0 - 100°C), si nota un marcato calo delle frequenze, dovuto alla diminuzione del modulo di Young. Tuttavia, quando la temperatura supera i 200°C , alcune frequenze, in particolare le prime due, iniziano a risalire. Questo comportamento è legato alla dilatazione termica che, in presenza di vincoli strutturali, genera sforzi di compressione all'interno della struttura. Questi effetti di precompressione possono aumentare la rigidezza apparente, contrastando in parte la naturale riduzione dell'elasticità del materiale. Nei gusci curvi, l'interazione tra deformazioni geometriche e sforzi interni modifica la distribuzione della rigidezza modale. In alcune modalità di vibrazione, la combinazione tra vincoli e precompressione termica porta a un incremento delle frequenze naturali, come confermato da studi recenti [92, 93]. Questi fenomeni dimostrano quanto sia determinante l'effetto della precompressione termica e delle interazioni geometriche nel modificare le proprietà dinamiche delle shell. Inoltre, mettono in evidenza la complessità della risposta di queste strutture isotrope vincolate, in cui la competizione tra la perdita di elasticità e gli sforzi di precompressione termica genera un comportamento non lineare nelle frequenze naturali.

4.3.5 Disco con spessore variabile

Si analizza di seguito, una struttura più complessa, un disco a spessore variabile, caratterizzato dalla stessa geometria già utilizzata in precedenza (Fig.4.58). Il disco, realizzato in acciaio, presenta un raggio interno di 0.5 cm e un raggio esterno di 2.5 cm. Il materiale è caratterizzato da un modulo di Young pari a $E = 210$ GPa, un coefficiente di Poisson $\nu = 0.3$, una densità $\rho = 7800$ kg/m³ e un coefficiente di dilatazione termica $\alpha = 21.1 \times 10^{-6}$ K⁻¹.

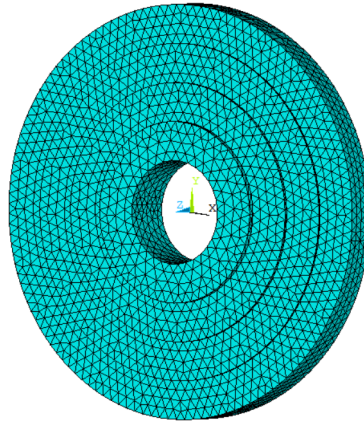


Figura 4.58: Disco a spessore variabile (5 mm a 2.5 mm) modellato tramite elementi finiti in Ansys APDL .

Il disco è stato vincolato lungo la superficie interna (raggio 0.5 cm), dove sono stati impediti sia gli spostamenti sia le rotazioni, lasciando però libera la rotazione attorno all'asse di simmetria (asse y). L'obiettivo dell'analisi è valutare l'evoluzione delle frequenze naturali al variare del carico termico, ipotizzando condizioni operative con temperature fino a 400°C. Le prime analisi condotte con incrementi termici più contenuti (inferiori a 200°C) hanno mostrato variazioni trascurabili, motivo per cui si è scelto di focalizzare l'attenzione direttamente su carichi termici pari a 200°C e 400°C.

Nella Tabella 4.33 sono riportate le frequenze naturali ottenute per un disco con spessore variabile, passando da 5 mm presso il raggio interno a 2.5 mm sul bordo esterno. I risultati evidenziano che, al crescere della temperatura, le prime frequenze subiscono variazioni molto contenute, nell'ordine di pochi decimi di punto percentuale. Si nota una leggera tendenza all'aumento per i primi modi, mentre per i modi di ordine superiore l'effetto termico porta a una lieve riduzione delle frequenze. Questo comportamento è attribuibile all'equilibrio tra la riduzione della rigidità elastica indotta dalla temperatura e l'effetto di precompressione termica che si sviluppa nella struttura vincolata, soprattutto nei modi a prevalente deformazione assiale.

Freq.	$\Delta T = 0^\circ\text{C}$	$\Delta T = 200^\circ\text{C}$	$\Delta T = 400^\circ\text{C}$
Disco a spessore variabile spesso (5 - 2.5 mm)			
f_1 [Hz]	165.55	165.76	165.97
	-	+0.13%	+0.25%
f_2 [Hz]	176.96	175.36	175.77
	-	+0.23%	+0.46%
f_3 [Hz]	182.29	181.88	181.46
	-	-0.23%	-0.46%
f_4 [Hz]	212.06	212.32	212.57
	-	+0.12%	+0.24%
f_5 [Hz]	277.35	276.50	275.64
	-	-0.31%	-0.62%
Disco a a spessore variabile sottile (2.5 - 1 mm)			
f_1 [Hz]	85.75	86.01	86.26
	-	+0.30%	+0.59%
f_2 [Hz]	88.61	89.13	89.64
	-	+0.59%	+1.16%
f_3 [Hz]	96.12	95.63	95.12
	-	-0.52%	-1.05%
f_4 [Hz]	148.04	147.03	146.00
	-	-0.68%	-1.38%
f_5 [Hz]	148.04	159.85	160.25
	-	+7.96%	+8.24%

Tabella 4.29: Frequenze naturali al variare di ΔT per due diversi spessori del disco a spessore variabile ottenute nel modello CUF. Rispettivamente disco spesso con spessore da 5 mm a 2.5 mm e disco sottile con spessore da 2.5 mm a 1.0 mm.

		$\Delta T = 0^{\circ}\text{C}$	$\Delta T = 200^{\circ}\text{C}$	$\Delta T = 400^{\circ}\text{C}$
f_1 [Hz]	CUF (1/2/3/4)×8 L16	165.55	165.76	165.97
	ANSYS SOLID186	155.07	155.26	155.47
	Deviazione (%)	-6.33%	-6.33%	-6.33%
f_2 [Hz]	CUF (1/2/3/4)×8 L16	174.96	175.36	175.77
	ANSYS SOLID186	162.73	163.11	163.54
	Deviazione (%)	-6.99%	-7.00%	-6.99%
f_3 [Hz]	CUF (1/2/3/4)×8 L16	182.29	181.88	181.46
	ANSYS SOLID186	176.28	175.88	175.44
	Deviazione (%)	-3.29%	-3.30%	-3.32%
f_4 [Hz]	CUF (1/2/3/4)×8 L16	212.06	212.32	212.57
	ANSYS SOLID186	210.16	210.49	210.86
	Errore (%)	-0.89%	-0.86%	-0.81
f_5 [Hz]	CUF (1/2/3/4)×8 L16	277.35	276.50	275.64
	ANSYS SOLID186	276.40	275.76	274.92
	Deviazione (%)	-0.34%	-0.27%	-0.26%

Tabella 4.30: Frequenze naturali e deviazioni percentuali al variare del carico termico applicato per il disco a spessore variabile da 5 mm a 2.5 mm. Il confronto evidenzia l'errore percentuale dei valori ottenuti in ANSYS APDL, con 35596 elementi SOLID185, e quelli ottenuti tramite il modello CUF.

Per indagare ulteriormente la geometria sotto studio e valutare l'effetto dello spessore, la stessa analisi è stata ripetuta su un disco più sottile, con spessore variabile da 2.5 mm presso il raggio interno fino a 1 mm sul bordo esterno mostrato in Fig.4.59. Anche in questo caso, la geometria radiale e i vincoli sono rimasti invariati. I risultati sono riportati nella Tab. 4.29 e mostrano una maggiore sensibilità delle frequenze naturali rispetto alla temperatura. Questa maggiore sensibilità è coerente con l'aumento della flessibilità globale del disco, che rende più marcato l'effetto di riduzione del modulo elastico. Tuttavia, anche per questa configurazione, i modi di vibrare più bassi restano relativamente stabili, grazie alla precompressione termica che tende a irrigidire le configurazioni a deformazione prevalentemente assiale.

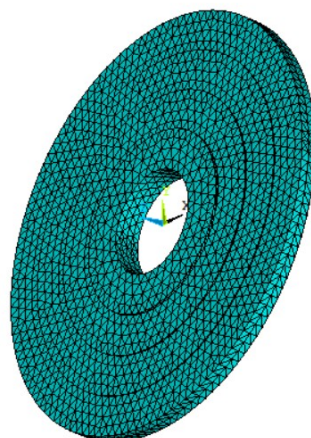


Figura 4.59: Disco a spessore variabile sottile (2.5 mm a 1.0 mm) modellato tramite 35596 elementi SOLID185 elementi in Ansys APDL.

In conclusione, l'analisi ha mostrato come le frequenze naturali di un disco vincolato sul raggio interno siano influenzate sia dallo spessore che dalla temperatura. Nei dischi più spessi, l'aumento termico provoca variazioni minime, soprattutto nei modi più bassi. Nei dischi più sottili, invece, la combinazione tra minore rigidità e effetto termico porta a uno scostamento più marcato delle frequenze, pur senza alterare significativamente l'ordine dei modi. Complessivamente, l'interazione tra effetto termico e geometria resta contenuta, ma diventa più evidente nei componenti più snelli e flessibili.

4.3.6 Rotore con pale curve

Infine, si va ad applicare il carico termico sul rotore con quattro pale curve analizzato nella sezione precedentemente per le due diverse angolazioni delle pale considerate precedentemente. Il materiale è caratterizzato da un modulo di Young pari a $E = 210$ GPa, un coefficiente di Poisson $\nu = 0.3$, una densità $\rho = 7800$ kg/m³ e un coefficiente di dilatazione termica $\alpha = 21.1 \times 10^{-6}$ K⁻¹. Dall'analisi dei risultati riportati nelle Tabelle 4.31 e 4.32, si può osservare come il carico termico abbia un impatto piuttosto contenuto sulle frequenze naturali del sistema. In generale, all'aumentare della temperatura, le variazioni delle frequenze risultano minime, con incrementi che nella maggior parte dei casi non superano l'1%.

I modi più bassi presentano variazioni massime dell'ordine dello 0.95% (nel caso del modo f_8 con $\Delta T = 400^\circ C$), mentre per le frequenze più elevate l'incremento è ancora più contenuto, rimanendo al di sotto dello 0.25% in molti casi. Questi risultati suggeriscono che il rotore con pale curve mantiene una buona stabilità dinamica anche in condizioni di forte variazione termica.

Infine, per validare ulteriormente i risultati ottenuti, è stato effettuato un confronto con un'analisi FEM condotta tramite ANSYS APDL. Anche in questo caso, le variazioni delle frequenze naturali dovute al carico termico si sono rivelate estremamente contenute, in alcuni casi addirittura inferiori a quelle calcolate con il modello CUF. Questo conferma l'affidabilità delle simulazioni svolte e la scarsa influenza della variazione termica sulla risposta dinamica del rotore.

Modo	$\Delta T = 0\text{ }^{\circ}\text{C}$	$\Delta T = 200\text{ }^{\circ}\text{C}$	$\Delta T = 400\text{ }^{\circ}\text{C}$
Rotore con pale con $\theta = 13^{\circ}$			
f_1 [Hz]	108.093	108.120	108.146
	-	+0.0249%	+0.0492%
f_4 [Hz]	110.294	110.645	112.087
	-	+0.3182%	+1.6262%
f_5 [Hz]	167.748	168.173	168.637
	-	+0.2537%	+0.5302%
f_8 [Hz]	168.386	168.997	169.994
	-	+0.3624%	+0.9549%
f_9 [Hz]	612.022	612.199	612.373
	-	+0.0289%	+0.0573%
f_{12} [Hz]	624.796	625.271	625.624
	-	+0.0760%	+0.1324%
f_{13} [Hz]	750.018	750.776	751.697
	-	+0.1010%	+0.2238%
f_{15} [Hz]	762.736	763.065	763.415
	-	+0.0430%	+0.0890%

Tabella 4.31: Frequenze naturali al variare di ΔT per rotore con 4 pale curve con angolo di curvatura di 13° . Valori ricavati utilizzando modello CUF con elementi: 28 L16 \times 10 B2.

Modo	$\Delta T = 0^\circ\text{C}$	$\Delta T = 200^\circ\text{C}$	$\Delta T = 400^\circ\text{C}$
Rotore con pale con $\theta = 33^\circ$			
f_1 [Hz]	100.3346	100.3690	100.4046
	-	+0.0344%	+0.0698%
f_4 [Hz]	101.4051	101.4414	101.7571
	-	+0.0358%	+0.3475%
f_5 [Hz]	146.6710	147.2366	147.8808
	-	+0.3860%	+0.8256%
f_8 [Hz]	148.9577	150.1779	151.7009
	-	+0.8194%	+1.8401%
f_9 [Hz]	464.1447	464.3268	464.5145
	-	+0.0392%	+0.0797%
f_{12} [Hz]	472.7099	472.9964	473.2953
	-	+0.0607%	+0.1239%
f_{13} [Hz]	518.1057	519.3186	520.8620
	-	+0.2340%	+0.5319%
f_{15} [Hz]	521.6457	522.2228	522.8792
	-	+0.1105%	+0.2363%

Tabella 4.32: Frequenze naturali al variare di ΔT per rotore con 4 pale curve con angolo di curvatura di 33° . Valori ricavati utilizzando modello CUF con elementi: 28 L16 \times 10 B2.

		$\Delta T = 0^\circ\text{C}$	$\Delta T = 200^\circ\text{C}$	$\Delta T = 400^\circ\text{C}$
f_1 [Hz]	CUF	100.3346	100.3690	100.4046
	ANSYS SOLID186	95.9462	95.9479	95.9498
	Deviazione (%)	+4.57%	+4.61%	+4.64%
f_4 [Hz]	CUF	101.4051	101.4414	101.7571
	ANSYS SOLID186	97.2918	97.2901	97.2883
	Deviazione (%)	+4.23%	+4.27%	+4.59%
f_5 [Hz]	CUF	146.6710	147.2366	147.8808
	ANSYS SOLID186	140.7683	140.7663	140.7639
	Deviazione (%)	+4.19%	+4.60%	+5.06%
f_8 [Hz]	CUF	148.9577	150.1779	151.7009
	ANSYS SOLID186	143.7767	143.7742	143.7713
	Deviazione (%)	+3.60%	+4.45%	+5.52%
f_9 [Hz]	CUF	464.1447	464.3268	464.5145
	ANSYS SOLID186	435.8423	435.8657	435.8912
	Deviazione (%)	+6.49%	+6.53%	+6.57%
f_{12} [Hz]	CUF	472.7099	472.9964	473.2953
	ANSYS SOLID186	443.2837	443.2780	443.2717
	Deviazione (%)	+6.64%	+6.70%	+6.77%
f_{13} [Hz]	CUF	518.1057	519.3186	520.8620
	ANSYS SOLID186	519.6018	519.6168	519.6331
	Deviazione (%)	-0.29%	-0.06%	+0.24%
f_{15} [Hz]	CUF	521.6457	522.2228	522.8792
	ANSYS SOLID186	532.2085	532.2248	532.2424
	Deviazione (%)	-1.98%	-1.88%	-1.76%

Tabella 4.33: Frequenze naturali e deviazioni percentuali al variare del carico termico applicato per il rotore con 4 pale con curvature di 33° . Confronto tra ANSYS APDL e modello CUF.

Capitolo 5

Risultati numerici per strutture in composito

Negli ultimi decenni, l'uso dei materiali compositi ha rivoluzionato numerosi settori dell'ingegneria, tra cui quello della rotodinamica. Grazie alle loro eccellenti proprietà meccaniche, come l'elevato rapporto resistenza/peso, lo smorzamento intrinseco e la notevole resistenza alla fatica, i compositi stanno diventando sempre più la scelta preferita per la progettazione di componenti rotanti ad alte prestazioni, come alberi, dischi e pale di turbine.

Uno degli aspetti fondamentali che influenzano il comportamento delle strutture in composito è la configurazione degli strati che le compongono. In particolare, il numero di strati e il loro orientamento possono modificare significativamente le proprietà dinamiche e le frequenze naturali della struttura. Pertanto, in questa analisi, verranno effettuate simulazioni modali per valutare come il numero di strati e l'orientamento delle fibre influenzino le caratteristiche vibrazionali delle strutture in composito.

5.1 Trave a sbalzo in materiale composito

Per iniziare, analizzeremo una trave a sbalzo con sezione rettangolare, già trattata nella sezione precedente. Lo studio verrà condotto su diverse configurazioni: prima con un singolo strato, poi con due e infine con tre strati. In ciascun caso, verrà variato l'orientamento delle fibre per osservare come questa scelta influenzi le frequenze naturali della trave.

Le simulazioni saranno realizzate utilizzando elementi lagrangiani e applicando la teoria *layerwise*, che permette di considerare gli effetti locali tra gli strati. Il materiale utilizzato per la trave composita è caratterizzato dalle proprietà riportate nella Tab. 5.1.

Proprietà	Valore
Modulo di elasticità E_{11} [GPa]	209
Modulo di elasticità $E_{22} = E_{33}$ [GPa]	9.45
Modulo di taglio $G_{12} = G_{13}$ [GPa]	5.5
Modulo di taglio G_{23} [GPa]	3.9
Coefficiente di Poisson $\nu_{12} = \nu_{13}$	0.27
Coefficiente di Poisson ν_{23}	0.4
Densità ρ [kg/m ³]	1600

Tabella 5.1: Proprietà meccaniche del materiale composito considerato per l'analisi della trave a sbalzo.(fibra di carbonio con matrice epossidica).

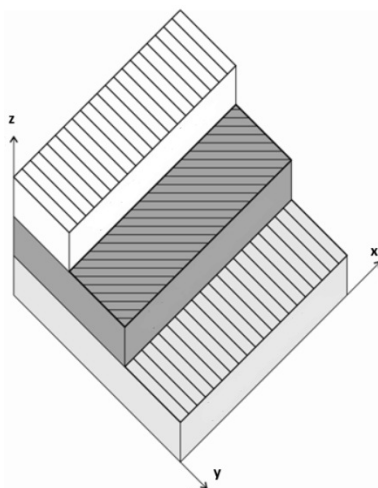


Figura 5.1: Rappresentazione schematica della trave in materiale composito.

L'obiettivo di questa analisi è comprendere meglio l'impatto della combinazione tra numero di strati e orientazione delle fibre sulle caratteristiche dinamiche delle strutture in composito. Le informazioni ottenute saranno utili per ottimizzare la progettazione di componenti rotanti, migliorandone le prestazioni strutturali e vibrazionali. In questa primo studio, l'analisi verrà condotta su una trave a sbalzo con sezione rettangolare, avente una base di 1 cm, un'altezza di 0.5 cm e una lunghezza di 10 cm. Per questa configurazione, si considerano le proprietà del materiale ortotropo indicate nella Tabella 5.1. La frequenza naturale fondamentale per questa trave è di $\omega_0 = 923$ rad/s. Inizialmente, sono stati studiati due strati e successivamente tre, mantenendo invariato lo spessore totale. La sezione trasversale

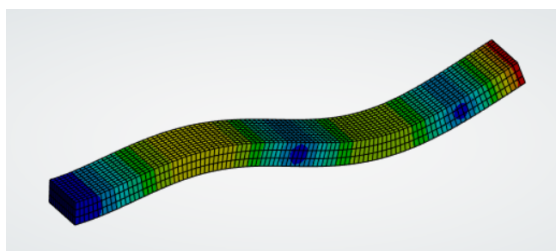
è stata modellata rispettivamente tramite 2 elementi Lagrangiani L9 e 3 elementi L9 per trave a due e a tre strati.

		f_{1z} [Hz]	f_{1x} [Hz]	f_{2z} [Hz]	f_{2x} [Hz]	f_{3z} [Hz]	f_{3x} [Hz]
0°	CUF	883.77	1632.78	4613.35	6890.32	10681.39	14498.44
	Ansys	878.22	1632.78	4491.15	6890.32	10517.90	13686.90
	Dev. %	+0.63	0.00	+2.72	0.00	+1.55	+5.93
90°/0°	CUF	406.14	1265.25	3431.46	6295.21	6521.52	11950.47
	Ansys	414.30	1291.00	2514.20	6449.70	6716.60	12384.00
	Dev. %	-1.97	-1.99	36.48	-2.40	-2.90	-3.50
45°/-45°	CUF	259.44	520.27	1601.18	3204.40	4388.31	4764.22
	Ansys	265.48	533.99	1641.50	3288.80	4511.40	4984.30
	Dev. %	-2.28	-2.57	-2.46	-2.57	-2.73	-4.42
0/45/0	CUF	889.48	1498.27	4948.63	7916.46	12037.49	18519.55
	Ansys	906.08	1517.70	5080.70	8103.60	12443.00	19105.00
	Dev. %	-1.83	-1.28	-2.60	-2.31	-3.26	-3.06
90/0/90	CUF	254.94	1058.18	1570.39	4283.19	5627.33	13227.84
	Ansys	266.61	1098.50	1643.40	4487.00	5844.80	13746.00
	Dev. %	-4.38	-3.67	-4.44	-4.54	-3.72	-3.77

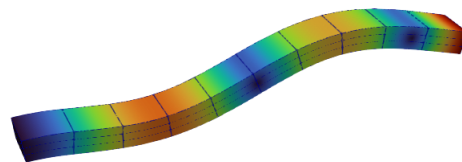
Tabella 5.2: Frequenze naturali della trave a sbalzo a sezione rettangolare (1cm x 0.5cm) in materiale composito con diverse sequenze di fibre: confronto tra CUF e Ansys. Modello della trave in CUF realizzato con elementi 2/3 L9 x 10 B4. Modello in Ansys realizzato con elementi SOLID186.

I risultati ottenuti, illustrati nel diagramma di Campbell in Fig. 5.3, evidenziano l'influenza della stratificazione sulla distribuzione delle frequenze naturali e sulle velocità critiche. Dai dati emersi, si osserva che le curve modali presentano un andamento simile indipendentemente dal numero di strati impiegati. Tuttavia, la differenza principale risiede nel valore assoluto delle frequenze naturali. Per la prima forma modale, le discrepanze tra le diverse configurazioni risultano contenute,

con variazioni di poche unità. Tale scostamento diventa però più significativo con il progredire degli ordini modali.

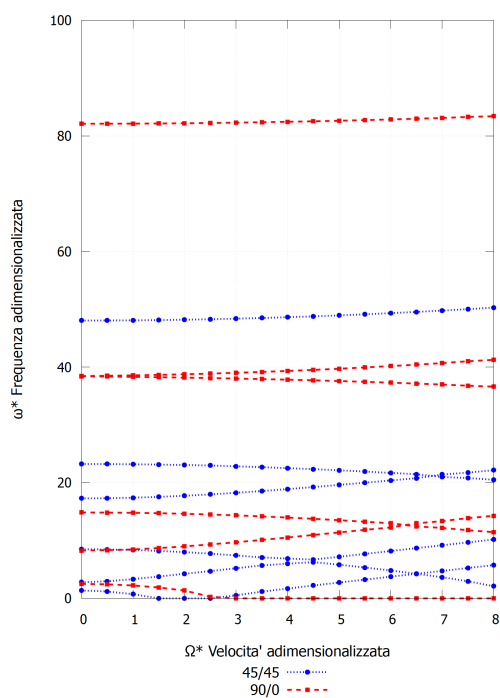


(a) Forma modale corrispondente alla frequenza naturale $F2_z$ ottenuta tramite ANSYS.

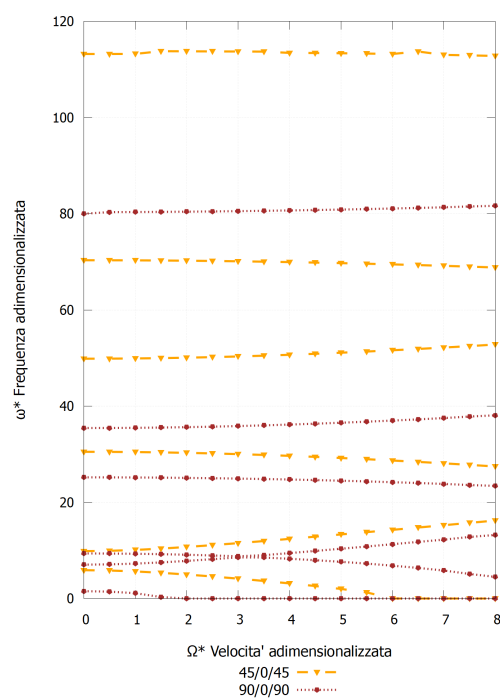


(b) Forma modale corrispondente alla frequenza naturale $F2_z$ ottenuta tramite ParaView.

Figura 5.2: Confronto delle forme modali della trave composita a 3 strati con disposizione $90^\circ/0^\circ/90^\circ$, ottenute tramite ANSYS e ParaView.



(a) 2 LAYERS.



(b) 3 LAYERS.

Figura 5.3: Diagrammi di Campbell per la trave a sezione rettangolare per strutture composite con diverse configurazioni di strati e orientazioni delle fibre.

Dopo aver studiato la trave a sbalzo con sezione rettangolare piena, l'analisi si

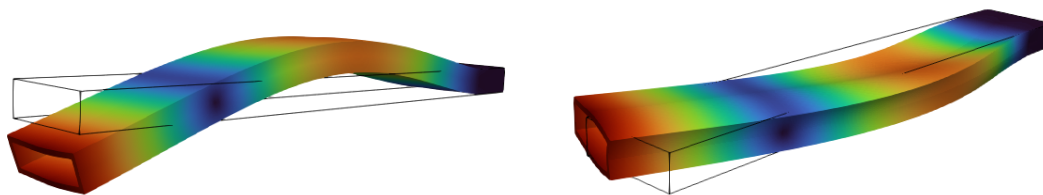
concentra ora su una trave cava a sezione rettangolare (box beam) con spessore di 2 mm. La struttura in esame presenta una geometria con una base di 3 cm, un'altezza di 1 cm e una lunghezza di 20 cm. Il materiale utilizzato è lo stesso della trave analizzata precedentemente, le cui proprietà sono riportate nella Tabella 5.1.

Lo studio prevede la valutazione delle frequenze naturali al variare dell'orientazione delle fibre e del numero di strati, mantenendo costante lo spessore complessivo. La modellazione della box beam è stata realizzata in *CUF*, utilizzando 16 elementi L9 per la sezione trasversale per la trave con due strati e 24 elementi L9 per la configurazione con tre strati mentre per la longitudinale sono stati impiegati 10 elementi B4. I risultati delle frequenze naturali ottenute per diverse configurazioni di stratificazione sono riportati nella Tabella 5.3.

Sequenza	f_{1z} [Hz]	f_{1x} [Hz]	F_{tors_1} [Hz]	f_{2z} [Hz]	f_{3z} [Hz]	f_{2x} [Hz]
0°	503.52	1239.37	1467.71	2046.05	4086.81	4541.44
90°/0°	434.28	1040.27	1464.26	1890.64	3944.25	4203.58
45°/-45°	186.36	450.33	2322.03	1088.68	2765.84	2706.96
60°/30°	212.41	507.71	2081.08	1179.77	2836.80	2826.25
90°/0°/90°	383.45	983.45	1592.38	1780.87	3815.97	4283.66
45°/-45°/45°	233.31	553.51	2568.90	1343.58	3327.03	3287.83
45°/90°/-45°	270.79	607.12	2355.55	1463.44	3377.75	3556.59
60°/-45°/30°	290.10	649.23	2476.39	1530.07	3505.62	3775.89

Tabella 5.3: Frequenze naturali della trave rettangolare a sezione cava (3cm x 1cm) in materiale composito per diverse configurazioni di stratificazione.

Dai risultati esposti si evince che le configurazioni con fibre orientate a 0° presentano le frequenze più alte nelle prime due modalità flessionali ($F1_z$ e $F1_x$) confermando una maggiore rigidità in queste direzioni, mentre l'inclinazione delle fibre tende a ridurre questi valori, a vantaggio di una maggiore rigidità torsionale. Le sequenze 45°/-45°/45° e 45°/90°/-45° rappresentate in Fig.5.5 mostrano un comportamento più bilanciato, con una distribuzione più uniforme delle frequenze tra le diverse modalità. Dai risultati si intuisce come le configurazioni con fibre inclinate riducano le frequenze associate ai modi di flessione e torsione rispetto a quelle con orientazioni longitudinali e trasversali. Tuttavia, l'incremento del numero di strati tende a compensare questa riduzione, portando a un generale aumento delle frequenze naturali.

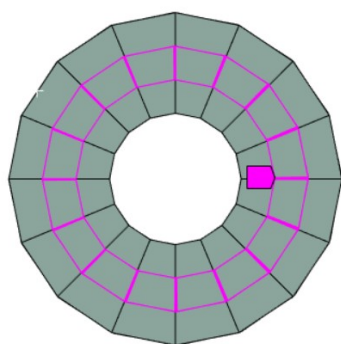


(a) Forma modale corrispondente alla frequenza naturale F_{2z} . (b) Forma modale corrispondente alla frequenza naturale F_{2x} .

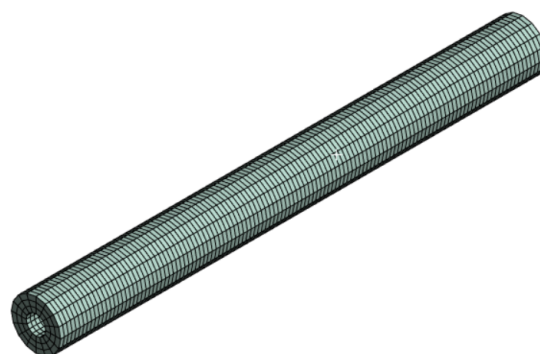
Figura 5.4: Rappresentazione delle forme modali corrispondenti alle frequenze F_{2z} e F_{2x} della trave rettangolare cava a 3 strati con disposizione $45^\circ/-45^\circ/45^\circ$ in ParaView.

5.2 Cilindro in materiale composito

Come seconda fase dello studio, è stata analizzata la risposta dinamica di un cilindro cavo con spessore di 3 mm e lunghezza di 10cm, precedentemente trattato nelle sezioni precedenti. Il materiale considerato è per il cilindro è Epoxy Carbon le cui proprietà sono ripostate nella Tab.5.1. La struttura è stata considerata vincolata rigidamente a entrambe le estremità, una condizione che influenza significativamente le modalità di vibrazione e le frequenze naturali del sistema.



(a) Sezione trasversale cilindro cavo a 3 layers.



(b) Vista isometrica cilindro cavo a 3 layers.

Figura 5.5: Rappresentazione cilindro cavo in composito a tre strati in Ansys Mechanical con una mesh di 6000 elementi SOLID185.

Risultati numerici per strutture in composito

Laminazione	Modello	f_1 [Hz]	f_t [Hz]	f_2 [Hz]	f_3 [Hz]	DOF
0°	CUF 2 x 8 L16	2272.66	9449.11	5923.84	10886.13	15624
	ANSYS SOLID185	2305.60	9431.51	5994.62	10989.41	18444
	Dev. %	-1.43%	+0.19%	-1.18%	-0.94%	
90°/0°	CUF 2 x 8 L16	6186.42	8827.29	13092.48	21061.29	15624
	Ansysis SOLID185	6346.30	9445.51	13522.82	21831.21	18444
	Dev. %	-2.52%	-6.54%	-3.18%	-3.53%	
45°/-45°	CUF 2 x 8 L16	2997.38	11616.11	7796.70	14302.12	15624
	Ansysis SOLID185	2996.39	12219.32	7970.88	14941.80	18444
	Dev. %	+0.03%	-4.94%	-2.19%	-4.29%	
60°/30°	CUF 2 x 8 L16	2867.40	12964.60	7422.00	13531.90	15624
	Ansysis SOLID185	3057.90	13535.00	8005.10	14987.10	18444
	Dev. %	-6.23%	-4.21%	-7.28%	-9.70%	
30°/-30°	CUF 2 x 8 L16	2499.90	13511.60	6551.60	12108.00	15624
	Ansysis SOLID185	2605.10	13713.70	7030.70	13415.70	18444
	Dev. %	-4.04%	-1.47%	-6.81%	-9.76%	-
45°/60°/90°	CUF 3 x 8 L16	6653.50	10220.90	14815.50	24379.20	22320
	Ansysis SOLID185	7229.40	11165.00	16249.00	27936.00	24192
	Dev. %	-7.97%	-8.46%	-8.83%	-12.72%	
30°/90°/30°	CUF 3 x 8 L16	6176.30	9332.50	13354.10	21772.60	22320
	Ansysis SOLID185	6713.70	10541.30	14786.70	24253.60	24192
	Dev. %	-8.01%	-11.46%	-9.70%	-10.23%	
0°/45°/0°	CUF 3 x 8 L16	2515.10	10337.20	6548.20	12019.30	22320
	Ansysis SOLID185	2793.30	11037.50	7424.90	13496.00	24192
	Dev. %	-9.95%	-6.34%	-11.80%	-10.95%	

Tabella 5.4: Frequenze naturali cilindro cavo per diverse sequenze di laminazione. Confronto con frequenze ricavate in Ansys Mechanical utilizzando una mesh di 4000 elementi SOLID185 per 2 strati e 6000 elementi SOLID185 per 3 strati.

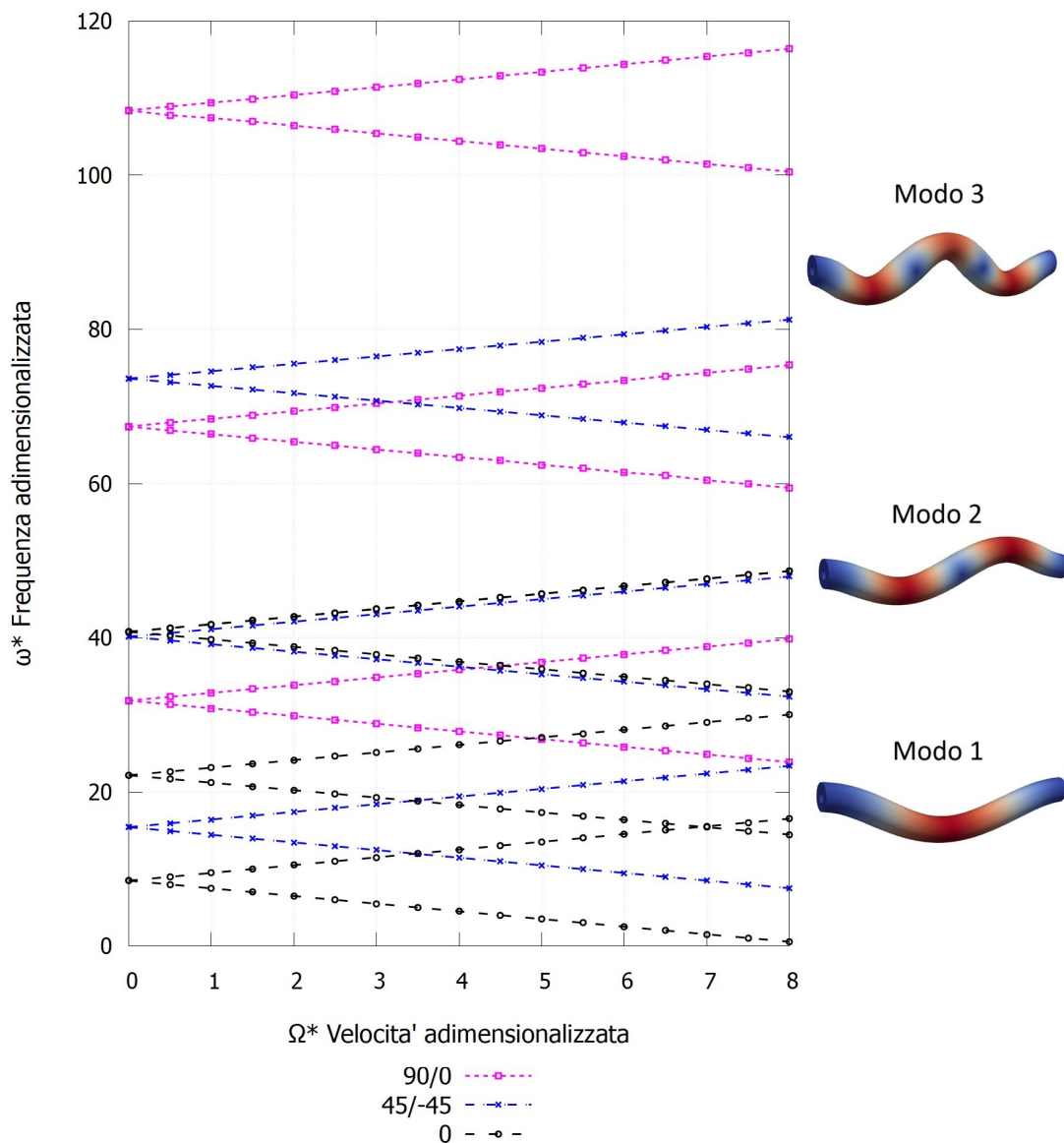


Figura 5.6: Diagramma di Campbell di un cilindro ortotropo con spessore $t=3\text{mm}$ a due strati per diverse sequenze di laminazione.

Dall'analisi condotta, si osserva che, come illustrato nella Fig. 5.6, gli andamenti delle frequenze risultano simili per i diversi casi studiati. Tuttavia, nei modi superiori, l'influenza della sequenza di laminazione diventa più marcata. Questo aspetto è di particolare rilevanza per il controllo delle vibrazioni nei sistemi rotanti, poiché permette di modulare opportunamente le frequenze naturali della struttura,

riducendo il rischio di fenomeni di risonanza. In presenza di sorgenti esterne che inducono eccitazioni a frequenze specifiche, la possibilità di adattare la stratificazione rappresenta un efficace strumento di ottimizzazione strutturale. Tale strategia consente di migliorare le prestazioni del sistema, mitigando gli effetti negativi delle vibrazioni indesiderate e garantendo una maggiore stabilità operativa.

5.3 Analisi termica nei casi compositi

L'analisi termica è stata condotta per valutare l'influenza di un carico termico costante applicato a una struttura in materiale composito, studiando le variazioni delle frequenze proprie. Il comportamento dinamico del cilindro cavo, descritto nella sezione precedente, è stato esaminato sottoponendolo a un incremento uniforme della temperatura su tutta la struttura. Il coefficiente di espansione termica adottato per il materiale composito Epoxy Carbon assume i valori di $\alpha_x = -4 \times 10^{-7} 1/^\circ\text{C}$ lungo l'asse x e $\alpha_y = \alpha_z = 3 \times 10^{-5} 1/^\circ\text{C}$ lungo le direzioni trasversali. L'obiettivo dell'analisi è stato quello di valutare gli effetti della variazione termica sulla rigidità della struttura e sulla sua risposta modale, al fine di comprendere le implicazioni dell'espansione termica sulle caratteristiche dinamiche del sistema. I risultati, riportati nella Tab. 5.5, mostrano una chiara dipendenza delle frequenze naturali dall'incremento di temperatura. In particolare, la laminazione $0^\circ/0^\circ$ subisce una riduzione significativa delle frequenze modali all'aumentare del carico termico, con una diminuzione massima del 13.03% per il primo modo a $\Delta T = 200^\circ\text{C}$. Anche la configurazione $0^\circ/45^\circ/0^\circ$ evidenzia una sensibile riduzione, con una variazione massima del 9.93% nel primo modo. D'altro canto, le configurazioni con angoli più variabili, come $45^\circ/-45^\circ$ e $45^\circ/60^\circ/90^\circ$, dimostrano una maggiore stabilità termica, con decrementi molto più contenuti. In particolare, la laminazione $45^\circ/60^\circ/90^\circ$ presenta variazioni quasi trascurabili, inferiori allo 0.2% anche per il massimo incremento termico considerato. Questo comportamento è attribuibile alla distribuzione più equilibrata delle proprietà anisotrope del materiale composito, che consente una migliore compensazione delle deformazioni termiche. Tra i modi analizzati, il primo modo della laminazione $0^\circ/0^\circ$ risulta il più sensibile alle variazioni termiche, suggerendo che le strutture con questa configurazione potrebbero essere maggiormente vulnerabili agli effetti dell'espansione termica. Infine, i risultati ottenuti con il modello CUF sono stati verificati confrontandoli con i dati ottenuti attraverso simulazioni nel software ANSYS, riportati nella Tab. 5.6. La buona corrispondenza tra i due insiemi di risultati conferma la validità del codice CUF nell'analisi termomeccanica delle strutture in materiale composito.

Laminazione	Modo	Frequenza [Hz]			
		$\Delta T = 0^{\circ}C$	$\Delta T = 50^{\circ}C$	$\Delta T = 100^{\circ}C$	$\Delta T = 200^{\circ}C$
0°/0°	1	2272.66	2202.88	2130.48	1976.60
		Dev.% : -	-3.07	-6.26	-13.03
	2	5923.84	5825.90	5726.07	5503.19
		Dev.% : -	-1.65	-3.34	-7.10
	3	10886.13	10773.44	10659.45	10427.45
		Dev.% : -	-1.04	-2.08	-4.21
45°/-45°	1	2997.38	2969.45	2941.19	2883.68
		Dev.% : -	-0.93	-1.87	-3.79
	2	7796.70	7757.56	7718.17	7624.74
		Dev.% : -	-0.50	-1.01	-2.20
	3	14302.10	14257.39	14212.51	14122.23
		Dev.% : -	-0.31	-0.63	-1.26
90°/0°	1	6186.42	6181.09	6175.76	6165.08
		Dev.% : -	-0.09	-0.17	-0.34
	2	13092.48	13082.94	13073.38	13054.25
		Dev.% : -	-0.07	-0.15	-0.29
	3	21061.29	21048.13	21034.96	21008.57
		Dev.% : -	-0.06	-0.13	-0.25
45°/60°/90°	1	6653.50	6650.92	6648.33	6643.13
		Dev.% : -	-0.04	-0.08	-0.16
	2	14815.54	14811.64	14807.73	14799.90
		Dev.% : -	-0.03	-0.05	-0.11
	3	24379.22	24374.86	24370.05	24361.06
		Dev.% : -	-0.02	-0.04	-0.07
0°/45°/0°	1	2515.10	2455.41	2394.01	2265.47
		Dev.% : -	-2.37	-4.81	-9.93
	2	6548.24	6467.25	6385.13	6217.22
		Dev.% : -	-1.24	-2.49	-5.06
	3	12019.29	11926.23	11832.35	11642.14
		Dev.% : -	-0.77	-1.56	-3.14

Tabella 5.5: Variazione delle frequenze naturali del cilindro, vincolato ad entrambe le estremità, in composito con diverse sequenze di laminazione al variare del carico termico applicato nel modello CUF (2/3 x 8 L16 & 10 B4).

Risultati numerici per strutture in composito

Laminazione	Modo	Modello	Frequenza [Hz]			
			$\Delta T = 0^\circ C$	$\Delta T = 50^\circ C$	$\Delta T = 100^\circ C$	$\Delta T = 200^\circ C$
$0^\circ/0^\circ$	Modo 1	CUF	2272.66	2202.88	2130.48	1976.60
		Ansys	2305.6	2154.52	2073.58	1899.92
		Dev. %	-1.43%	+2.24%	+2.74%	+4.04%
	Modo 2	CUF	5923.84	5825.89	5726.07	5503.19
		Ansys	5994.6	5751.08	5644.71	5424.87
		Dev. %	-1.18%	+1.30%	+1.44%	+1.44%
	Modo 3	CUF	10886.13	10773.43	10659.44	10427.45
		Ansys	10989.4	10681.48	10566.45	10332.18
		Dev. %	-0.94%	+0.86%	+0.88%	+0.92%
$90^\circ/0^\circ$	Modo 1	CUF	6186.42	6181.09	6175.75	6165.07
		Ansys	6346.30	6340.82	6335.35	6324.39
		Dev. %	-2.52%	-2.52%	-2.52%	-2.52%
	Modo 2	CUF	13092.48	13082.93	13073.37	13054.24
		Ansys	13522.82	13514.16	13505.52	13488.21
		Dev. %	-3.18%	-3.19%	-3.20%	-3.22%
	Modo 3	CUF	21061.29	21048.13	21034.96	21008.56
		Ansys	21831.21	21820.65	21810.05	21788.80
		Dev. %	-3.53%	-3.54%	-3.55%	-3.58%
$0^\circ/45^\circ/0^\circ$	Modo 1	CUF	2515.11	2455.42	2394.01	2265.47
		Ansys	2793.38	2741.19	2687.81	2577.14
		Dev. %	-9.96%	-10.43%	-10.93%	-12.09%
	Modo 2	CUF	6548.24	6467.26	6385.13	6217.22
		Ansys	7424.92	7355.51	7285.34	7142.66
		Dev. %	-11.81%	-12.08%	-12.36%	-12.96%
	Modo 3	CUF	12019.29	11926.23	11832.35	11642.16
		Ansys	13896.00	13821.12	13745.78	13593.70
		Dev. %	-13.51%	-13.71%	-13.92%	-14.36%

Tabella 5.6: Validazione dei valori ottenuti all'applicazione di un carico termico crescente tramite confronto tra il modello CUF (2/3 x 8 L16 & 10 B4) e il software Ansys Mechanical utilizzando 4000/6000 elementi SOLID185.

Capitolo 6

Conclusioni

L'obiettivo principale del lavoro concluso è stato l'analisi del comportamento dinamico e termomeccanico di strutture rotanti mediante la CUF. Le simulazioni numeriche hanno consentito di investigare diverse configurazioni di travi e dischi rotanti, sia isotropi che ortotropi, valutandone la risposta in condizioni statiche, dinamiche e sotto effetto di carichi termici. I dati ottenuti risultano essenziali in fase di progettazione.

In questo capitolo conclusivo vengono discussi i risultati principali relativi alle analisi condotte su strutture modellate mediante modello CUF e presentate nel lavoro. Sono state impiegate sia l'espansione di Lagrange che quella di Taylor, con l'obiettivo di valutarne le prestazioni e individuare il metodo più adatto in base alla configurazione strutturale analizzata. Le prime analisi effettuate nel lavoro sono state di tipo statico, permettendo di confrontare i risultati numerici con le teorie analitiche di riferimento. Sono state accompagnate da studi di convergenza, fondamentale, per definire i parametri di discretizzazione utilizzati nell'elaborato. I risultati ottenuti per una sezione trasversale quadrata sono stati successivamente confrontati con quelli presenti in letteratura, consentendo una valutazione critica della metodologia adottata. L'affidabilità delle soluzioni numeriche ha permesso di estendere l'analisi a scenari più complessi di natura dinamica. Particolare attenzione è stata dedicata allo studio delle vibrazioni libere, cruciale per comprendere il comportamento strutturale in condizioni operative variabili. I risultati preliminari ottenuti per la trave a sbalzo con sezione quadrata mediante modello CUF evidenziano:

- Deviazione ridotta ($< 1\%$) rispetto ai valori analitici della deformazione nell'analisi statica, utilizzando elementi assiali B4 e una discretizzazione trasversale con $1 \times L9$;
- Deviazione contenuta ($< 4\%$) per le frequenze flessionali in vibrazione libera con modellazione $1 \times L4$ & $10 \times B4$.

Successivamente, è stata condotta un'analisi rotodinamica sulla medesima trave al fine di investigare l'influenza della velocità sulle frequenze naturali e di individuare le velocità critiche, impiegando un diagramma di Campbell con valori adimensionali. Poiché l'inerzia della sezione trasversale esercita un'influenza preponderante sul comportamento dinamico di una trave in rotazione, sono state analizzate differenti sezioni trasversali: simmetriche e asimmetriche, piene e cave. Anche in questo caso, i risultati sono stati confrontati con quelli reperiti in letteratura, assunti come riferimento teorico, e con i valori ottenuti attraverso il software ANSYS, garantendo così una validazione più robusta dell'approccio adottato.

Le conclusioni delle analisi possono essere sintetizzate come segue:

- Ottima concordanza complessiva con i risultati teorici;
- Una velocità critica individuata in regime di rotazione medio-basso per sezioni trasversali simmetriche (quadrata, circolare), mentre per sezioni asimmetriche (rettangolare) sono state identificate due velocità critiche;
- Influenza marcata dello spessore nelle strutture cave, con una riduzione progressiva dei valori delle frequenze naturali all'aumentare dello spessore. Per strutture cave adimensionalizzate, il primo modo vibrazionale tende a coincidere con la stessa velocità critica, mentre nei modi superiori emergono discrepanze di entità limitata. La morfologia della curva nel diagramma di Campbell si mantiene inalterata indipendentemente dallo spessore della struttura, confermando un comportamento dinamico coerente;
- La riduzione della lunghezza della struttura determina un incremento delle frequenze naturali, mentre l'andamento globale delle curve nei diagrammi di Campbell resta invariato, attestando la robustezza del modello impiegato nella caratterizzazione della dinamica rotazionale;
- Perfetta concordanza nei risultati ottenuti per le due strutture a disco analizzate, con una significativa riduzione del costo computazionale;
- Deviazione inferiore al 10% per il rotore con 16 pale, con una riduzione del costo computazionale pari al 67%. Per il rotore a 4 pale curve, le deviazioni risultano inferiori al 7%, con una riduzione dei gradi di libertà (DOF) pari al 76%;
- Un aumento dell'angolo di curvatura delle pale comporta una riduzione generalizzata delle frequenze naturali. Inoltre, l'andamento delle curve nel diagramma di Campbell per pale con maggiore curvatura risulta più irregolare, suggerendo un'accentuata sensibilità della struttura alle variazioni di velocità;

- Perfetta corrispondenza nelle piastre curve modellate con la discretizzazione $8 \times L16$ e $10 \times B4$. Le analisi di convergenza condotte con diverse formulazioni teoriche hanno evidenziato l'incapacità dei modelli meno raffinati di riprodurre accuratamente i modi di vibrazione, compromettendo così la capacità di catturare correttamente la dinamica della struttura;
- Perfetta corrispondenza per la pala cava con profilo ellittico e differenze trascurabili nelle frequenze trascurabili per la sezione più complessa analizzata, corrispondente al profilo NACA2401.

Al termine dell'analisi delle strutture isotrope, è stato applicato un carico termico uniformemente distribuito, crescente, al fine di valutarne l'influenza sulle frequenze naturali. I risultati ottenuti sono stati confrontati con le simulazioni condotte mediante il software ANSYS APDL, considerando una velocità di rotazione $\Omega = 0$ rad/s. L'analisi ha evidenziato i seguenti aspetti:

- L'effetto del carico termico risulta trascurabile per travi a sbalzo e cilindri cavi vincolati a un'estremità, indipendentemente dalla variazione dello spessore.
- La presenza di un carico termico induce una riduzione significativa delle frequenze naturali per una trave rettangolare doppiamente incastrata, con decrementi fino al 30% per la prima frequenza naturale in corrispondenza di un carico termico di 200°C.
- Le deviazioni tra le frequenze naturali ottenute considerando il carico termico e i risultati forniti da ANSYS APDL per la trave rettangolare doppiamente incastrata risultano inferiori al 4%, confermando l'affidabilità del modello numerico adottato.
- Per un cilindro cavo doppiamente incastrato, il carico termico determina una riduzione significativa delle frequenze naturali. L'effetto dello spessore risulta particolarmente rilevante nella variazione delle frequenze, con un'ottima corrispondenza rispetto ai valori forniti dal software ANSYS.
- Per strutture shell vincolate su entrambe le estremità, si osserva una riduzione significativa delle frequenze naturali nei primi intervalli termici (0-100°C). Per temperature superiori a 200°C, alcune frequenze mostrano un'inversione di tendenza attribuibile alla precompressione termica generata dai vincoli strutturali.
- Per il disco a spessore variabile, l'applicazione del carico termico determina un lieve incremento delle frequenze naturali. Tuttavia, tale effetto risulta amplificato con la riduzione dello spessore del disco.

- Per il rotore con pale curve, l'incremento delle frequenze naturali dovuto all'applicazione del carico termico risulta poco significativo.

Nella fase conclusiva di questo studio, sono state condotte analisi rotordinamiche su un materiale ortotropo con le proprietà del composito Grafite-Epossidico. I risultati ottenuti sono stati confrontati con quelli relativi a un materiale isotropo, al fine di evidenziarne le differenze di comportamento. Inoltre, è stata esaminata l'influenza del numero di strati, mantenendo costante lo spessore complessivo, nonché l'effetto della sequenza di stratificazione sulle proprietà meccaniche del sistema. Infine, è stata replicata l'analisi termica precedentemente condotta per il cilindro cavo isotropo, con l'obiettivo di valutare le prestazioni del composito in condizioni termiche analoghe. Le principali conclusioni emerse dallo studio sono le seguenti:

- L'andamento delle frequenze naturali in funzione della velocità di rotazione risulta globalmente simile per entrambi i materiali, sebbene si osservino differenze nelle velocità critiche.
- La modellazione $2/3 \times L \times B$ mostra una deviazione contenuta ($< 15\%$) rispetto ai valori ottenuti in ANSYS per le frequenze flessionali.
- La sequenza di impilamento non altera la forma della curva nel diagramma di Campbell, ma incide sui valori delle frequenze naturali iniziali. Lo scostamento iniziale diventa più marcato con l'aumento dell'ordine modale.
- L'incremento della temperatura riduce significativamente le frequenze proprie delle strutture in composito, con variazioni dipendenti dalla sequenza di laminazione. La configurazione $0^\circ/0^\circ$ subisce la maggiore perdita di rigidità, mentre la configurazione $90^\circ/0^\circ$ risulta la più stabile.

Bibliografia

- [1] G. T. Flowers e A. R. Archibald. *Dynamics of Rotating Machines*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2020, cit. pp. 1–20. (Cit. a p. 1).
- [2] Machine Design. *What's the Difference Between Turbine Engines?* Immagine del motore turbofan GENx utilizzata nella tesi. s.d. URL: <https://www.machinedesign.com/motors-drives/article/21832035/whats-the-difference-between-turbine-engines> (cit. a p. 2).
- [3] J. S. Rao. *History of Rotating Machinery Dynamics*. Covers the evolution of rotordynamics from the 19th century to modern developments. Dordrecht, Netherlands: Springer Dordrecht, 2011, cit. pp. 1–30. (Cit. alle pp. 2, 3, 8).
- [4] W. J. M. Rankine. «On the Centrifugal Force of Rotating Shafts». In: *Philosophical Transactions of the Royal Society* 160 (1869). First analytical approach to rotor dynamics with a rigid shaft model., pp. 277–312 (cit. a p. 3).
- [5] D. W. Childs. *Turbomachinery Rotordynamics: Phenomena, Modeling, and Analysis*. Comprehensive study on rotordynamics, including historical models like Rankine's. John Wiley & Sons, 2013 (cit. a p. 3).
- [6] D. J. Ewins. *Modal Testing: Theory, Practice and Application*. Discusses modal analysis and the impact of critical speeds in rotor design. Research Studies Press, 2000 (cit. a p. 4).
- [7] A. Muszynska. «Rotordynamics». In: *Mechanical Systems and Signal Processing* 19.3 (2005). Explores the effects of mass imbalance on rotor behavior and dynamic stability., pp. 741–765 (cit. alle pp. 4, 14).
- [8] G. de Laval. «The Flexible Shaft and Its Impact on Rotating Machinery». In: *Transactions of the Royal Swedish Academy of Engineering* 24 (1883). Introduced the concept of flexible shafts, a breakthrough in rotor dynamics., pp. 145–160 (cit. a p. 4).
- [9] H. H. Jeffcott. «The Lateral Vibration of Loaded Shafts in the Neighbourhood of a Whirling Speed: The Effect of Want of Balance». In: *Philosophical Magazine* 37 (1919). Foundation of the Jeffcott-Laval rotor model, considering flexible shafts., pp. 304–314 (cit. alle pp. 4, 14, 16).

-
- [10] G. Genta. *Vibration of Structures and Machines: Practical Aspects*. Comprehensive analysis of Jeffcott's model and its applications in rotor dynamics. Introduced FEM DYNROT. Springer, 1988 (cit. alle pp. 4, 5, 9).
- [11] S. Wang L. Yang X. Chen. «Mechanism of Fast Time-Varying Vibration for Rotor–Stator Contact System: With Application to Fault Diagnosis». In: *Journal of Vibration and Acoustics* 140.1 (2018). Analysis of time-varying vibration mechanisms in rotor-stator contact systems., p. 014501. DOI: 10.1115/1.4037654. URL: <https://asmedigitalcollection.asme.org/vibrationacoustics/article/140/1/014501/473440> (cit. a p. 4).
- [12] E. Krämer. *Dynamics of Rotors and Foundations*. Analysis of gyroscopic effects and fluid-induced instability. Berlin, Germany: Springer, 1993 (cit. a p. 5).
- [13] Chong-Won Lee. *Vibration Analysis of Rotors*. Vol. 21. cit. a p. 2. Springer Science & Business Media, 1993 (cit. a p. 5).
- [14] L. Wang W. Cheng e Z. Lin. «Nonlinear dynamic behaviors of a rotor-bearing-seal system using advanced fluid force models». In: *Journal of Sound and Vibration* 329 (2010). Experimental and theoretical correlation for nonlinear dynamics., pp. 5071–5088 (cit. a p. 5).
- [15] M. Lalanne e G. Ferraris. *Rotordynamics Prediction in Engineering*. Systematic approach to modal and numerical methods for rotor analysis. New York, USA: John Wiley & Sons, 1990 (cit. a p. 5).
- [16] Abdelkader Rezaiguia, Belkheir Sid Ahmed e Samir Remili. «Dynamic Analysis of Rotor Systems with Hydrodynamic Journal Bearings». In: *Journal of Mechanical Engineering Science* 219.8 (2005). Studio sugli effetti dello smorzamento nei cuscinetti idrodinamici., pp. 917–928 (cit. a p. 6).
- [17] Pierre Duchemin e Michel Lalanne. «Analysis of rotor-bearing systems with hydrodynamic journal bearings». In: *Journal of Sound and Vibration* 230 (2000). Discussione su supporti idrodinamici non lineari e stabilità dinamica., pp. 343–358 (cit. a p. 6).
- [18] Giovanni Capone. «Orbital motions of rigid symmetric rotor supported on Journal Bearings». In: *La Meccanica Italiana* 199 (1986). Analisi delle forze idrodinamiche basate sull'equazione di Reynolds., pp. 37–46 (cit. a p. 6).
- [19] Ali H. Nayfeh e Dean T. Mook. *Nonlinear Oscillations*. Comprehensive analysis of nonlinear dynamics including Floquet theory. Weinheim, Germany: Wiley-VCH, 2004, cit. pp. 90–105 (cit. a p. 6).

- [20] S. Dunkerley. «On the whirling and vibration of shafts». In: *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 38.233 (1894). Foundation for estimating natural frequencies of vibrating shafts., pp. 365–378 (cit. a p. 6).
- [21] M. F. Dimentberg. «Floquet Analysis of Parametric Vibrations in Rotating Systems». In: *Journal of Applied Mechanics* 62.4 (1995). Application of Floquet theory to parametric instability in rotors., pp. 921–927 (cit. a p. 7).
- [22] A. Muszynska. *Rotordynamics*. Covers advanced topics in rotordynamics, including non-linear effects. CRC Press, 2005 (cit. alle pp. 7, 48).
- [23] Donald E. Bently e Agnes Muszynska. «Fluid-generated instabilities of rotors: Whirl and whip». In: *Proceedings of the 17th Turbomachinery Symposium*. Landmark symposium discussing rotor dynamics and instability mechanisms. Houston, TX, USA, 1988 (cit. a p. 7).
- [24] J. Cheng, W. Zhu e C. Wang. «Nonlinear dynamic characteristics of rotor-bearing-seal system». In: *Journal of Vibration and Acoustics* 129 (2007). Analysis of bifurcations and chaos in rotor-bearing-seal systems., pp. 103–111 (cit. a p. 7).
- [25] W. Cheng, M. Tanaka e S. Saito. «Nonlinear Dynamics of Rotor-Bearing-Seal Systems Using Muszynska’s Model». In: *Journal of Tribology* 129.1 (2007). Detailed investigation of nonlinear phenomena in rotor dynamics., pp. 203–212. DOI: 10.1115/1.2423036 (cit. a p. 7).
- [26] W. Cheng e M. Tanaka. «Chaotic Behavior in Rotor-Seal Systems with Fluid Forces: Numerical and Experimental Studies». In: *Journal of Vibration and Acoustics* 131 (2009). Experimental validation of nonlinear dynamics in rotor-seal systems., p. 041008. DOI: 10.1115/1.3169506 (cit. a p. 7).
- [27] S. Yang e X. Guo. «Nonlinear Analysis of Rotor-Bearing-Seal System with Varying Parameters Muszynska Model Based on CFD and RBF». In: *Machines* 10.12 (2022). Recent computational advancements in rotordynamic modeling., p. 1238 (cit. a p. 8).
- [28] Klaus-Jürgen Bathe. *Finite Element Procedures*. Comprehensive resource on finite element methods. Upper Saddle River, New Jersey, USA: Prentice Hall, 1996 (cit. alle pp. 8, 40).
- [29] Aurel Stodola. *Steam and Gas Turbines*. Includes foundational principles of rotor dynamics and turbine behavior. New York, USA: McGraw-Hill Book Company, 1924 (cit. a p. 8).
- [30] Paolo Vianello. «Contributi sulla dinamica delle vibrazioni». In: *Rivista Italiana di Meccanica* (1930). Presents contributions to iterative methods in vibration analysis. (cit. a p. 8).

- [31] M. A. Prohl. «A general method of calculating critical speeds of flexible rotors». In: *Journal of Applied Mechanics* 67 (1945). Foundation of transfer matrix methods in rotordynamics., pp. 142–148 (cit. a p. 8).
- [32] O. Myklestad. «A new method of calculating bending frequencies of beams and shafts». In: *Journal of Applied Mechanics* 11 (1944). Pioneer work on transfer matrix analysis in structural dynamics., pp. 3–8 (cit. a p. 8).
- [33] R. D. Cook. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. Seminal text on the FEM, detailing its theoretical foundation and applications. John Wiley & Sons, 1974 (cit. a p. 8).
- [34] R. Ruhl e J. F. Booker. «Application of Finite Element Dynamics to Rotor-Bearing Systems». In: *Journal of Engineering for Industry* 94.1 (1972), pp. 126–132 (cit. a p. 9).
- [35] L. Euler. «Methodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minive Proprietate Gaudentes». In: *Academia Scientiarum Imperialis Petropolitanae* (1750). Foundation of beam theory and principles of structural analysis. (cit. a p. 9).
- [36] Stephen P. Timoshenko. «On the correction of shear of the differential equation for transverse vibrations of bars of uniform cross-section». In: *Philosophical Magazine* 41 (1921). Introduced shear deformation effects in beam theory., pp. 744–746 (cit. a p. 9).
- [37] H. D. Nelson e J. M. McVaugh. *Dynamics of Rotor-Bearing Systems Using Finite Elements*. Vol. 98. Introduzione delle matrici giroscopiche nel FEM. 1976, pp. 593–600 (cit. alle pp. 9–11).
- [38] H. D. Nelson. «A Finite Rotating Shaft Element Using Timoshenko Beam Theory». In: *Journal of Mechanical Design* 102 (1980). Estensione del FEM per includere torsione e taglio., pp. 793–803 (cit. alle pp. 9, 10).
- [39] E. Zorzi e H. D. Nelson. «Finite Element Simulation of Rotor Dynamics». In: *ASME Journal of Engineering for Power* 99 (1977), pp. 71–76 (cit. a p. 10).
- [40] A. Nandi e S. Neogy. «Three-dimensional finite element modeling for rotor dynamic analyses». In: *Journal of Sound and Vibration* 304 (2007). Explores the advantages of 3D FEM in gyroscopic and aerodynamic effects modeling., pp. 1–20 (cit. a p. 10).
- [41] D. Zhou e G. Shi. «3D finite element analysis of rotor-stator interactions in turbomachinery». In: *Computers and Structures* 81 (2003). Study on fluid-structure interactions using advanced FEM techniques., pp. 1461–1474 (cit. a p. 10).

-
- [42] S. Rajiv e R. Tiwari. «Dynamic analysis of rotors using advanced 3D finite element models». In: *Journal of Vibration and Acoustics* 132 (2010). Comprehensive exploration of nonlinear rotor dynamics through 3D FEM., p. 041002 (cit. a p. 10).
- [43] M. I. Friswell, J. E. T. Penny e S. D. Garvey. «Thermal Effects on Rotor Dynamics: An Integrated Finite Element Approach». In: *Journal of Sound and Vibration* 329 (2010). Investigates the impact of thermal gradients on natural frequencies and vibration modes of rotors., pp. 3425–3441 (cit. a p. 10).
- [44] Q. He e W. Ren. «Fluid-Structure Interaction in Turbomachinery Rotors». In: *Journal of Sound and Vibration* 299 (2007). Studio dell'accoppiamento fluido-struttura nei rotori industriali., pp. 156–173 (cit. alle pp. 10, 11).
- [45] D. Miljavec e M. Hrovatin. «Modal Analysis and Rotor-Dynamics of an Interior Permanent Magnet Synchronous Motor: An Experimental and Theoretical Study». In: *Applied Sciences* 10.17 (2020). Esamina la dinamica dei rotori considerando effetti termici e magnetici., p. 5881 (cit. a p. 10).
- [46] X. Jean e H. D. Nelson. «Trigonometric Collocation Methods for Rotor Dynamic Analysis». In: *Journal of Sound and Vibration* 140.2 (1990). Introduced MTC for dynamic systems analysis., pp. 297–315 (cit. a p. 11).
- [47] C. Brown. «Limitations of the Matrix Transformation Method». In: *International Journal of Structural Analysis* 15.2 (1998). Analyzes the computational challenges of the Matrix Transformation Method (MTC) for complex systems., pp. 101–115 (cit. a p. 11).
- [48] A. Smith e B. Johnson. «Dynamic Compliance Method for Complex Systems». In: *Journal of Mechanical Systems* 42.3 (2005). Introduces the Method of Dynamic Compliances (MDC) and its applications., pp. 345–360 (cit. a p. 11).
- [49] J. Malenovský. «Reduction of Finite Element Models Using Modal Analysis». In: *International Journal of Mechanical Sciences* 45 (2003). Discusses the effectiveness of modal methods for frequency domain analysis., pp. 1245–1258 (cit. a p. 11).
- [50] R. J. Guyan. «Reduction of Stiffness and Mass Matrices». In: *AIAA Journal* 3.2 (1965). Introduced static reduction methods for dynamic systems., pp. 380–387 (cit. a p. 12).
- [51] R. R. Craig e M. C. C. Bampton. «Coupling of Substructures for Dynamic Analyses». In: *AIAA Journal* 6.7 (1968). Pioneered the Component Mode Synthesis (CMS) approach., pp. 1313–1319 (cit. a p. 12).

-
- [52] S. Das e N. K. Dutt. «System Equivalent Reduction Expansion Process (SEREP) for Structural Dynamics». In: *Mechanical Systems and Signal Processing* 6.2 (1992). Introduced SEREP for accurate dynamic reduction in rotors., pp. 113–124 (cit. a p. 12).
- [53] S. H. Jang e H. J. Kim. «Vibration Analysis of Flexible Disk-Spindle Systems». In: *Journal of Mechanical Science and Technology* 21.4 (2007). Studied interactions in disk-spindle systems., pp. 677–687 (cit. a p. 12).
- [54] E. Carrera. «Unified Formulation for Composite Beam Analysis». In: *Journal of Applied Mechanics* 67.3 (2000). Introduced CUF for high-fidelity FEM models., pp. 458–465 (cit. a p. 13).
- [55] B. Taylor. *Methodus Incrementorum Directa et Inversa*. Introduces the Taylor series, a fundamental tool for approximating functions in mathematical modeling. London, 1715 (cit. a p. 13).
- [56] J. Lagrange. *Analytique des fonctions analytiques*. Develops the Lagrangian interpolation and finite differences, foundational for finite element methods. Paris, 1788 (cit. alle pp. 13, 14).
- [57] D. W. Childs. *Turbomachinery Rotordynamics: Phenomena, Modeling, and Analysis*. Comprehensive reference on rotordynamics, covering vibration phenomena and system modeling. Wiley-Interscience, 1993 (cit. a p. 14).
- [58] F. F. Ehrich. *Handbook of Rotordynamics*. Discusses dynamic instability phenomena in rotors, including flutter and imbalance. McGraw-Hill, 2004 (cit. a p. 14).
- [59] M. Lalanne e G. Ferraris. *Rotordynamics Prediction in Engineering*. Analyzes the role of key components, such as flexible shafts and damping elements, in rotor systems. John Wiley Sons, 1998 (cit. a p. 14).
- [60] C. Poole H. Goldstein e J. Safko. *Classical Mechanics*. Foundational text for concepts of kinetic and potential energy in dynamic systems. Addison-Wesley, 1980 (cit. a p. 14).
- [61] W. Ritz. «Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik». In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 135 (1909). Introduces the Rayleigh-Ritz method for solving variational problems., pp. 1–61 (cit. a p. 14).
- [62] O. C. Zienkiewicz e R. L. Taylor. *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*. Presenta metodi FEM applicati alla rotodinamica e all’analisi termica. Oxford, UK: Butterworth-Heinemann, 2005, pp. 57–60 (cit. alle pp. 14, 40).

-
- [63] L. Euler. *Theoria motus et equilibrii solidorum et fluidorum*. Describes the Bernoulli-Euler beam theory for structural dynamics. Acad. Sci. Imp. Petropoli, 1765 (cit. a p. 14).
- [64] G. Genta. *Dynamics of Rotating Systems*. (cit. alle pp. 2, 3, 13, 18, 23). Springer Science & Business Media, 2005 (cit. alle pp. 28, 32, 33).
- [65] W. Campbell. «The Protection of Steam-Turbine Disk Wheels from Axial Vibration». In: *Transactions of the ASME* 46 (1924), pp. 31–46 (cit. a p. 32).
- [66] J. N. Reddy. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*. 2nd. Comprehensive reference on composite materials and structural analysis. CRC Press, 2004 (cit. alle pp. 36, 37, 41).
- [67] Stephen W. Tsai e Hua T. Hahn. *Introduction to Composite Materials*. Detailed discussion on the properties and behavior of composite materials. Technomic Publishing, 1988 (cit. a p. 37).
- [68] I. Babuska e M. Suri. «Locking Effects in the Finite Element Approximation of Elasticity Problems». In: *Numerical Mathematics* 62 (1992). In-depth analysis of Poisson locking effects in numerical simulations., pp. 439–463 (cit. a p. 37).
- [69] E. Carrera e S. Brischetto. «Rationale of the Reissner’s Mixed Variational Theorem in the Unified Formulation». In: *Composite Structures* 92 (2010). Introduces corrections for transverse normal stresses in the CUF framework., pp. 2067–2074 (cit. a p. 37).
- [70] E. Carrera. «Theories and Finite Elements for Multilayered, Anisotropic, Composite Plates and Shells». In: *Archives of Computational Methods in Engineering* 10 (2004). Comprehensive review of CUF applications for composite structures., pp. 215–296 (cit. alle pp. 37, 43, 46).
- [71] Erasmo Carrera, Salvatore Brischetto e Michela Cinefra. *Plates and Shells for Smart Structures: Classical and Advanced Theories for Modeling and Analysis*. Wiley, 2011 (cit. alle pp. 37, 39–41, 44, 46).
- [72] G. Petrolo e E. Carrera. «Refined Beam Theories Based on the Carrera Unified Formulation». In: *International Journal of Mechanical Sciences* 81 (2014). Extends CUF to advanced beam models with complex deformation modes., pp. 16–24 (cit. a p. 37).
- [73] B. Moran T. Belytschko W.K. Liu. *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. New York, USA: John Wiley & Sons, 2000, pp. 230–235 (cit. a p. 40).
- [74] D. S. Malkus R. D. Cook. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. New York, USA: John Wiley & Sons, 1981, pp. 142–146 (cit. a p. 40).

- [75] T. J. R. Hughes. *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Mineola, NY, USA: Dover Publications, 2000, pp. 110–120 (cit. a p. 40).
- [76] J. Toledano e H. Murakami. «A Zig-Zag Model for Laminated Composite Beams and Plates». In: *Composite Structures* 12 (1989). Introduces a zig-zag approach to improve accuracy in analyzing anisotropic laminated composites., pp. 59–71 (cit. a p. 41).
- [77] A. Loredo e A. Castel. «Trigonometric and Exponential Functions for Higher-Order Laminated Plate Models». In: *Journal of Applied Mechanics* 73 (2006). Proposes advanced expansions for more accurate laminated composite modeling., pp. 815–823 (cit. a p. 41).
- [78] A. Entezari M. Filippi e E. Carrera. «Unified Finite Element Approach for Generalized Coupled Thermoelastic Analysis of 3D Beam-Type Structures, Part 2: Numerical Evaluations». In: *Finite Elements in Analysis and Design* 141 (2018). Applies Lagrange elements in thermoelastic analysis using CUF., pp. 123–140 (cit. alle pp. 41, 47).
- [79] E. Carrera. «Layer-Wise Mixed Models for the Analysis of Laminated Composite Plates». In: *Composite Structures* 50 (2000). Introduces layer-wise mixed models for composite laminates analysis., pp. 389–398 (cit. a p. 43).
- [80] X. Q. He K. M. Liew e C. W. Lim. «A Layer-Wise Theory for Composite Laminates: Model Formulation and Analysis». In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 55 (2002). Detailed description of layer-wise theories for laminated composites., pp. 1175–1190 (cit. a p. 43).
- [81] Olek C Zienkiewicz, Robert L Taylor e Jian Z Zhu. *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. Butterworth-Heinemann, 2013 (cit. a p. 44).
- [82] E Carrera. *Refined Beam Theories*. Springer, 2009 (cit. a p. 44).
- [83] E Carrera. «A simple and efficient formulation for multilayered anisotropic plates». In: *Composite Structures* 37.2 (1996), pp. 173–179 (cit. a p. 44).
- [84] E. Carrera e G. Petrolo. *Refined Beam Theories Based on the Carrera Unified Formulation*. Explores the use of Lagrange expansions for beam and composite models. Springer, 2015 (cit. a p. 46).
- [85] C. Poole H. Goldstein e J. Safko. *Classical Mechanics*. 3rd. Foundational text on Hamilton’s principle and Lagrangian mechanics. Addison-Wesley, 2002 (cit. alle pp. 47, 48).
- [86] L. Meirovitch. *Principles and Techniques of Vibrations*. Comprehensive introduction to vibrational analysis and dynamics. Prentice Hall, 1996 (cit. alle pp. 47, 48).

- [87] D. J. Ewins. *Modal Testing: Theory, Practice and Application*. Discusses modal analysis and its application to rotordynamic systems. Research Studies Press, 2000 (cit. a p. 48).
- [88] Erasmo Carrera, E. M. Filippi e Enrico Zappino. «Analysis of rotor dynamic by one-dimensional variable kinematic theories». In: *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 135.9 (2013). cit. pp. 8, 38, 44, 61–63., p. 092501 (cit. a p. 50).
- [89] J. R. Banerjee e H. Su. «Development of a dynamic stiffness matrix for free vibration analysis of spinning beams». In: *Computers & Structures* 82.23–26 (2004). cit. pp. 62–68., pp. 2189–2197 (cit. alle pp. 71–74).
- [90] D. H. Hodges e M. J. Rutkowski. «Free-vibration analysis of rotating beams by a variable-order finite-element method». In: *AIAA Journal* 19.11 (1981). Cited on p. 63., pp. 1459–1466 (cit. alle pp. 71, 72).
- [91] A. Entezari, M. Filippi e E. Carrera. «On dynamic analysis of variable thickness disks and complex rotors subjected to thermal and mechanical prestresses». In: *Journal of Sound and Vibration* 405 (2017), pp. 68–85. ISSN: 0022-460X (cit. alle pp. 82–84, 86).
- [92] V. Cammalleri, F. Brischetto e M. Carrera. «Thermo-mechanical effects on the vibration behavior of composite shells». In: *Composite Structures* 168 (2017), pp. 338–352. ISSN: 0263-8223 (cit. a p. 127).
- [93] G. Costanza, A. Greco e L. Russo. «Thermal effects on the dynamic response of curved shell structures». In: *Journal of Thermal Stresses* 41 (2018), pp. 1245–1263. ISSN: 0149-5739 (cit. a p. 127).