



**Politecnico  
di Torino**

## **Politecnico di Torino**

Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

### **Sviluppo di modelli FEM per l'analisi di danneggiamento di strutture ultrasottili per applicazioni spaziali**

**Candidato:**

Pierantonio Agnese S292017

**Supervisori:**

Prof. Marco Petrolo

Prof. Alfonso Pagani

Prof. Erasmo Carrera

Dott. Daniele Scano

Anno Accademico 2024/25

*A tutti quelli che mi hanno sempre sostenuto.*

## **Abstract**

Lo scopo della tesi è quello di sviluppare modelli FEM adeguati per lo studio della fenomenologia del danneggiamento e la previsione dell'evoluzione del danno di strutture ultrasottili realizzate in materiale composito attualmente in utilizzo per svariate applicazioni spaziali, principalmente come strutture dispiegabili. La necessità di questo studio è legata alla complessità dei fenomeni che caratterizzano i meccanismi di failure dei materiali compositi e alla difficoltà con cui si è in grado di predire la vita residua della struttura nel caso di progressione del danno. A causa dell'elevato costo di prove sperimentali, si è alla ricerca di modelli numerici in grado di simulare fedelmente e in breve tempo il comportamento di tali strutture in presenza di diverse sollecitazioni di carico. In questo contesto si inserisce la Carrera Unified Formulation (CUF), alla base di diversi modelli FEM e di programmi che ne fanno uso per la risoluzione di vari tipi di strutture, tra i quali saranno ad esempio utilizzati MUL2 e Abaqus. Le analisi svolte all'interno della tesi hanno lo scopo di mostrare la potenza di calcolo della CUF, confrontando i risultati con casi studio attualmente presenti in letteratura, affrontando gradualmente il complesso problema del danneggiamento e della progressione del danno di strutture ultrasottili in materiale composito. Scopo ultimo è quello di analizzare l'evoluzione del danno in strutture quali i TRAC boom utilizzando elementi FEM monodimensionali attraverso l'utilizzo della CUF.

# Contents

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>8</b>
1.1	Strutture dispiegabili . . . . .	10
1.2	Analisi strutturali . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Carrera Unified Formulation</b>	<b>19</b>
2.1	Il problema elastico lineare . . . . .	19
2.1.1	Equazioni di equilibrio . . . . .	21
2.1.2	Equazioni geometriche . . . . .	21
2.1.3	Equazioni costitutive . . . . .	22
2.1.4	Relazione costitutiva per laminati compositi . . . . .	23
2.1.5	Principio dei lavori virtuali: forma forte . . . . .	24
2.1.6	Principio dei lavori virtuali: forma debole . . . . .	27
2.1.7	Metodo agli Elementi Finiti . . . . .	28
2.2	CUF 1D . . . . .	29
2.2.1	Espansioni polinomiali e modelli strutturali . . . . .	33
2.2.2	Funzioni di forma . . . . .	37
<b>3</b>	<b>Teorie di danneggiamento</b>	<b>39</b>
3.1	Criteri di failure . . . . .	41
3.1.1	Criterio della massima tensione e della massima deformazione	41
3.1.2	Criteri di rottura polinomiale . . . . .	42
3.1.3	Hashin 3D . . . . .	42
3.2	Progressive damage . . . . .	43
3.2.1	Il metodo esplicito . . . . .	44
3.3	Il modello di danneggiamento . . . . .	46

<b>4</b>	<b>Analisi preliminari</b>	<b>49</b>
4.1	Trave a sezione quadrata . . . . .	49
4.2	Trave a sezione quadrata con taglio . . . . .	52
4.3	Trave con sezione a I . . . . .	56
<b>5</b>	<b>I laminati compositi</b>	<b>60</b>
5.1	Trave in composito . . . . .	60
5.2	Analisi di struttura 'thin walled' con sezione a C . . . . .	65
5.3	Problema Pipes-Pagano . . . . .	72
5.4	TRAC boom . . . . .	77
5.4.1	Analisi a trazione . . . . .	79
5.4.2	Analisi a flessione . . . . .	80
<b>6</b>	<b>Analisi di danneggiamento</b>	<b>87</b>
6.1	Analisi su singolo elemento . . . . .	87
6.2	Provino con intaglio orizzontale . . . . .	89
<b>7</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>92</b>
7.1	Sintesi del lavoro svolto . . . . .	92
7.2	Considerazioni finali e sviluppi futuri . . . . .	94

## Abbreviazioni

**CFRP** Carbon Fiber Reinforced Polymers

**CTM** Collapsible Tubular Mast

**CUF** Carrera Unified Formulation

**DOF** Degree Of Freedom

**E** Modulo di Young

**EBBM** Eulero Bernoulli Beam Theory

**ESL** Equivalent Single Layer

$\epsilon$  Deformazione

**FEM** Finite Element Method

**FI** Failure Index

**G** Modulo di taglio

**LE** Lagrange Expansion

**LW** Layer Wise

$\nu$  Coefficiente di Poisson

$\rho$  Densità

**STEM** Storable Tubular Extendible Mast

$\sigma$  Tensione

**TBT** Timoshenko Beam Theory

**TE** Taylor Expansion

**TRAC** Triangular Rollable And Collapsible

# List of Figures

1.1	Dimensioni dei principali lanciatori utilizzati per la missione Artemis con volumi e pesi disponibili annessi divisi in base alla quota operativa da raggiungere [1] . . . . .	8
1.2	Dispenser per cubesat realizzati dall'azienda Rocket Lab (credito immagine: Rocket Lab) . . . . .	9
1.3	Antenna a ombrello con meccanismo di dispiegamento [2] . . . . .	10
1.4	Immagine della vela solare Light-sail2 dispiegata (credito immagine: Josh Spradling / The Planetary Society) . . . . .	10
1.5	Struttura gonfiabile a bordo della stazione spaziale BEAM (credito immagine: NASA) . . . . .	12
1.6	Struttura CTM realizzata in materiale composito con sezione di diverse dimensioni [3] . . . . .	13
1.7	TRAC boom parzialmente avvolto attorno ad un mozzo cilindrico con parametri evidenziati . . . . .	13
1.8	Diverse tipologie di tape spring hinges [4] . . . . .	14
1.9	Diverse tipologie di danneggiamento di un materiale composito: failure delle fibre, della matrice e delaminazione [5] . . . . .	17
2.1	Geometria e notazione per un corpo 3D deformabile [6] . . . . .	20
2.2	Definizione dei sistemi di riferimento e orientazione delle fibre all'interno di una piastra in composito . . . . .	23
2.3	Elemento 1D generico con asse allineato nella direzione y . . . . .	30
2.4	Rappresentazione schematica del processo di assemblaggio della matrice di rigidità completa attraverso la CUF . . . . .	31
2.5	Rappresentazione degli elementi LE4, LE9, LE16 . . . . .	35

2.6	Schema di assemblaggio della matrice di rigidezza secondo metodo ESL o LW . . . . .	36
2.7	Confronto tra i modelli ESL e LW in termini di spostamenti e defor- mazioni [7] . . . . .	37
2.8	Modello 1D secondo la CUF descritto attraverso gli elementi finiti . .	37
3.1	Evoluzione del danno fino alla rottura per un materiale composito [8]	46
4.1	Dimensioni trave a sezione quadrata . . . . .	50
4.2	Analisi di convergenza di una trave a sezione quadrata caricata pu- ramente a flessione . . . . .	51
4.3	Sezione trave . . . . .	53
4.4	Analisi di convergenza trave a sezione quadrata . . . . .	55
4.5	Dimensioni sezione I . . . . .	56
4.6	Discretizzazione dei 7 elementi all'interno della sezione a I attraverso l'utilizzo di espansione LE9 . . . . .	58
4.7	Analisi di convergenza trave con sezione a I . . . . .	59
5.1	Sezione di una trave in composito simmetrica ad 8 strati di materiale ortotropo . . . . .	61
5.2	Analisi di convergenza di una trave in composito . . . . .	62
5.3	Andamento delle $\sigma_{yy}$ attraverso la sezione. Il riferimento "Surana" è preso da [9]. . . . .	64
5.4	Andamento delle $\sigma_{yz}$ attraverso la sezione. Il riferimento "Surana" è preso da [9]. . . . .	65
5.5	Proprietà geometriche della trave con sezione a C . . . . .	65
5.6	Sezione trave C: a) laminazione [0/90/45/-45] b) discretizzazione con espansione per lamina c) discretizzazione con 5 espansioni per lamina	66
5.7	Tensioni nel piano $xy$ nel punto A della sezione a metà della trave a C. Il riferimento Nastran-2D è preso da [10]. . . . .	68
5.8	Stress interlaminare nella flangia superiore valutato tra gli strati posti a 90° e 45° a partire dall'estremo libero. Il riferimento "Pagani" è preso da [10]. . . . .	69

5.9	Stress interlaminare nella flangia superiore valutato tra gli strati posti a $45^\circ$ e $-45^\circ$ a partire dall'estremo libero. Il riferimento "Pagani" è preso da [10]. . . . .	70
5.10	Tensioni di free-edge nel punto B nella sezione a metà della trave. Il riferimento Nastran 3D è preso da [10]. . . . .	71
5.11	Laminato in composito sottoposto a carico di trazione uniassiale [11].	72
5.12	Distribuzione degli elementi della mesh all'interno della sezione con identificazione delle diverse laminazioni. A partire dall'alto: $[90/0/45/-45]_s$ . . . . .	72
5.13	Andamento delle tensioni $\sigma_{zz}$ lungo lo spessore dell'estremo libero $(40,80,z)$ di una piastra a 4 strati simmetrica $[45/-45]_s^0$ . LM4 è presa da [11]. . . . .	74
5.14	Andamento delle tensioni $\sigma_{yz}$ lungo lo spessore dell'estremo libero $(40,80,z)$ di una piastra a 4 strati simmetrica $[45/-45]_s^0$ . LM4 è presa da [11]. . . . .	74
5.15	Andamento delle tensioni $\sigma_{zz}$ all'interfaccia tra due strati diversi lungo l'apertura $(x,80,-5)$ di una piastra a 4 strati simmetrica $[45/-45]_s^0$ . LM4 è presa da [11]. . . . .	75
5.16	Andamento delle tensioni $\sigma_{yz}$ all'interfaccia tra due strati diversi lungo l'apertura $(x,80,-5)$ di una piastra a 4 strati simmetrica $[45/-45]_s^0$ . LM4 è presa da [11]. . . . .	75
5.17	Andamento delle tensioni $\sigma_{zz}$ lungo lo spessore dell'estremo libero $(40,80,z)$ di una piastra a 8 strati simmetrica $[90/0/45/-45]_s^0$ . LM4 è presa da [11]. . . . .	76
5.18	Andamento delle tensioni $\sigma_{yz}$ lungo lo spessore dell'estremo libero $(40,80,z)$ di una piastra a 8 strati simmetrica $[90/0/45/-45]_s^0$ . LM4 è presa da [11]. . . . .	76
5.19	Dimensioni e laminazione utilizzate per il TRAC boom. GFPW in blu e CF in rosso . . . . .	78
5.20	Discretizzazione del TRAC boom attraverso elementi B4 e L9 [12] . . . . .	79
5.21	Tensioni nel piano $xy$ dell'estremità superiore della parete verticale a metà della lunghezza del TRAC . . . . .	81

5.22	Tensioni fuori dal piano $xy$ dell'estremità superiore della parete verticale a metà della lunghezza del TRAC . . . . .	82
5.23	Andamento dei Failure Index nel tratto considerato della sezione in seguito ad uno spostamento imposto lungo l'asse $y$ . . . . .	83
5.24	Tensioni nel piano $xy$ dell'estremità superiore della parete verticale a metà della lunghezza del TRAC per spostamento verticale imposto .	84
5.25	Tensioni fuori dal piano $xy$ dell'estremità superiore della parete verticale a metà della lunghezza del TRAC per spostamento verticale imposto . . . . .	85
5.26	Andamento del FI per rottura delle fibre a trazione . . . . .	86
6.1	Curva tensione-deformazione di un singolo elemento caricato a tensione sotto l'applicazione di un carico unidimensionale. (a) Elemento caricato in direzione longitudinale alle fibre e (b) Elemento caricato in direzione trasversale alle fibre con prevalenza di effetti di matrice. CUF-2D è preso da [13] . . . . .	89
6.2	Curva tensione-deformazione di un elemento quasi isotropo con laminazione $[90/45/0/-45]_s$ sotto l'applicazione di un carico di trazione uniassiale. CUF-2D è preso da [13], LS-DYNA è preso da [14]. . . . .	89
6.3	Rappresentazione del provino con apertura centrale con dimensioni e condizioni al contorno . . . . .	90
6.4	Rappresentazione della discretizzazione del provino con intaglio con dettaglio sulla sequenza di laminazione della sezione $[45/90/-45/0]_{4s}$	90
6.5	Confronto fra gli andamenti tensione-deformazione con i vari metodi. CUF-2D è preso da [13], LS-DYNA è preso da [14] . . . . .	91

# Chapter 1

## Introduzione

Il campo aerospaziale è costantemente interessato ad abbattere quanto più possibile il peso e il volume dei satelliti da installare a bordo dei lanciatori. Il peso, com'è noto, è il primo grande nemico nel settore spaziale: ogni kg che si deve trasportare in orbita può arrivare a costare decine di migliaia di euro, arrivando ad incidere in maniera importante sul costo dell'intera missione [1]. Gli spazi ristretti messi a disposizione dal *fairing* sono limitati e costituiscono un grande vincolo da rispettare in fase di progetto: satelliti di grandi dimensioni possono avere difficoltà a rispettare gli ingombri e l'unica alternativa risulterebbe l'assemblaggio in orbita, attualmente di difficile applicazione. La tendenza alla miniaturizzazione dei satelliti tipica degli

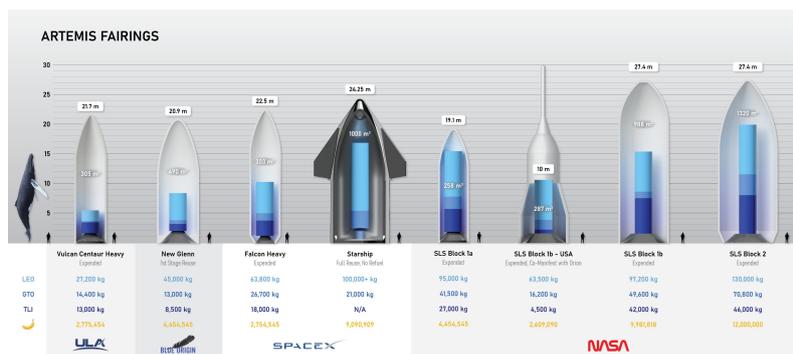


Figure 1.1: Dimensioni dei principali lanciatori utilizzati per la missione Artemis con volumi e pesi disponibili annessi divisi in base alla quota operativa da raggiungere [1]

ultimi anni ha portato alla realizzazione standardizzata di satelliti dal peso inferiore ai 500 kg, tra i quali i cubesat, che possono essere lanciati in grandi numeri per lancio, ma vanno installati all'interno di box metallici, chiamati *dispenser*, i quali vengono a loro volta installati a bordo del satellite permettendo di sfruttare in maniera efficace



Figure 1.2: Dispenser per cubesat realizzati dall'azienda Rocket Lab (credito immagine: Rocket Lab)

gli spazi. Sistemi di grosse dimensioni sono spesso imprescindibili per la buona riuscita della missione e il corretto dimensionamento dei sistemi di bordo. È il caso, ad esempio, dei pannelli solari, i quali necessitano di grandi superfici per fornire l'energia necessaria alle batterie e ai sistemi di bordo [15], dimensioni quasi mai disponibili in fase di lancio. Altro esempio ancora è rappresentato da antenne per le comunicazioni di grandi dimensioni [16] [2], sia di forma parabolica che tubulare, parte ottica di telescopi per osservazioni [17], strutture innovative come vele solari [18] [19] o scudi solari. La soluzione adottata attualmente ricade sulle strutture dispiegabili [20], strutture che possono variare in maniera più o meno autonoma la loro configurazione, passando da una configurazione che viene detta "impacchettata" durante la fase di lancio, rispettando i vincoli imposti da *fairing* e *dispenser*, ad una configurazione detta "dispiegata" in fase operativa quando il satellite si trova in orbita. Scegliendo in maniera accurata i materiali di cui sono composte tali strutture e le loro dimensioni, *in primis* lo spessore, in modo che questi siano sufficientemente resistenti e leggeri, è possibile apportare anche un contributo alla riduzione di peso generale del satellite.

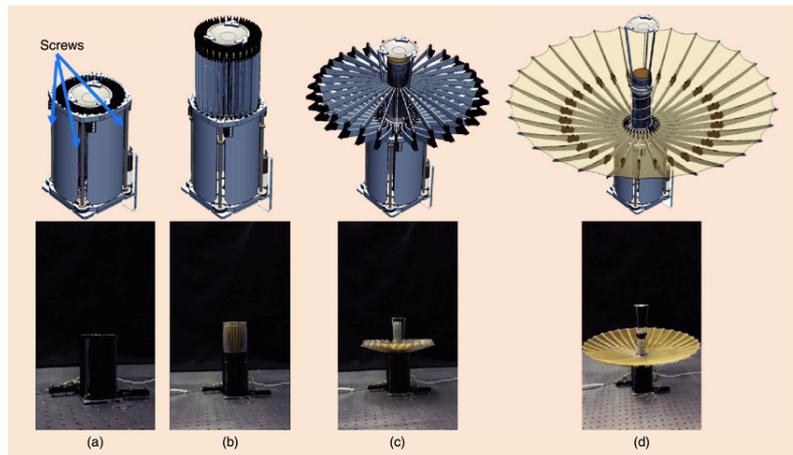


Figure 1.3: Antenna a ombrello con meccanismo di dispiegamento [2]

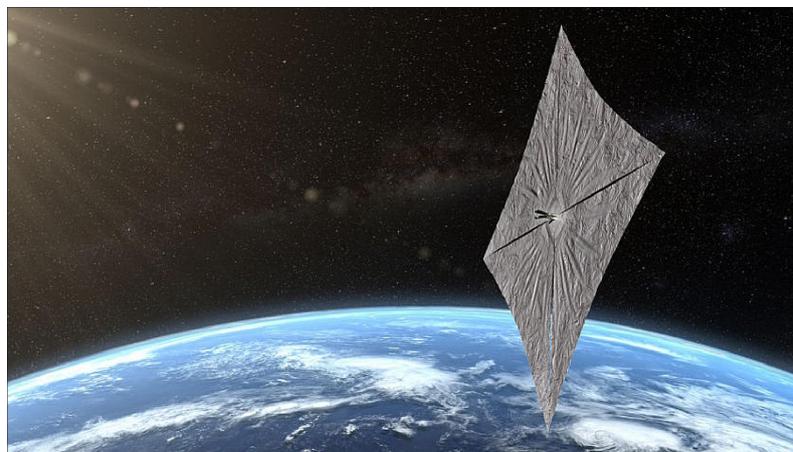


Figure 1.4: Immagine della vela solare Light-sail2 dispiegata (credito immagine: Josh Spradling / The Planetary Society)

## 1.1 Strutture dispiegabili

I vantaggi principali legati alla scelta di strutture dispiegabili rispetto a quelle classiche rigide risiede in [12]: riduzione del volume durante la fase di lancio e possibilità di design di sistemi di maggiori dimensioni; miglioramento della stabilità dimensionale durante il lancio; riduzione di massa e buona inerzia.

Le strutture dispiegabili possono essere classificate in 4 classi differenti: meccaniche, gonfiabili, realizzate attraverso materiali a memoria di forma e guidate da deformazione elastica [21].

Alla prima categoria appartengono i giunti meccanici [22]. Questi sono dei meccanismi molto semplici, costituiti da una cerniera unita ad una molla torsionale, che permettono di dispiegare delle appendici (come antenne o pannelli solari) dal corpo principale. Dopo l'innesco di un meccanismo di rilascio, la molla torsionale

forza la rotazione della cerniera, guidando il dispiegamento e assicurandosi che la struttura mantenga la sua configurazione dispiegata anche in seguito del rilascio e all'eventuale presenza di forza che inducano a ripristinare la configurazione originale non desiderata. Per questo motivo spesso sono accoppiati con dei meccanismi, come i diodi meccanici, che ne bloccano la rotazione una volta dispiegati.

Le strutture *inflatable*, appartenenti alla seconda classe, rappresentano un'interessante tecnologia in campo spaziale per la loro possibilità di adattarsi a sistemi abitativi per missioni lunari nei prossimi anni, oltre alla possibilità di essere utilizzati per sistemi di comunicazione e pannelli solari. In Fig. 1.5 è mostrato il modulo della ISS (International Space Station) BEAM realizzato proprio attraverso una struttura gonfiabile e utilizzato inizialmente a scopo dimostrativo e in seguito come deposito. Queste strutture sono costituite da una membrana, spesso a più strati, che viene gonfiata tramite un aumento della pressione interna dovuto all'iniezione di gas al suo interno. Offrono un elevato grado di impacchettamento e offrono grandi volumi interni una volta in funzione. La rigidità è garantita dal processo di pressurizzazione stesso per la pressione interna sulle pareti. L'eventuale impatto con micrometeoriti potrebbe causare perdite di pressione (da cui la necessità di più strati e uno spessore adeguato). Nel caso di missioni molto lunghe è possibile provvedere ad un ulteriore irrigidimento attraverso strutture in alluminio, laminati in composito, schiume espansive e gel [23].

Per la categoria di strutture dispiegabili a memoria di forma, troviamo quelle realizzate attraverso gli EMC (Elastic Memory Composite). Sono strutture realizzate con materiale composito rinforzato con fibre costituito da una matrice in resina polimerica avente proprietà di memoria di forma. Questo vuol dire che una volta raggiunta la temperatura di transizione vetrosa  $T_g$  la struttura è in grado di ritornare alla sua forma originaria in maniera autonoma. La precisione con cui avviene questo fenomeno è ragguardevole e permette anche di risparmiare peso in quanto utilizza materiali ultraleggeri, ma bisogna avere a disposizione un sistema in grado di riscaldare la struttura fino a  $T_g$  stesso in orbita. Senza contare che la tecnologia è abbastanza nuova, mancano modelli matematici e riferimenti sperimentali, quindi ancora poco utilizzabile [24].

Infine abbiamo le strutture che sfruttano il rilascio dell'energia elastica per dispie-

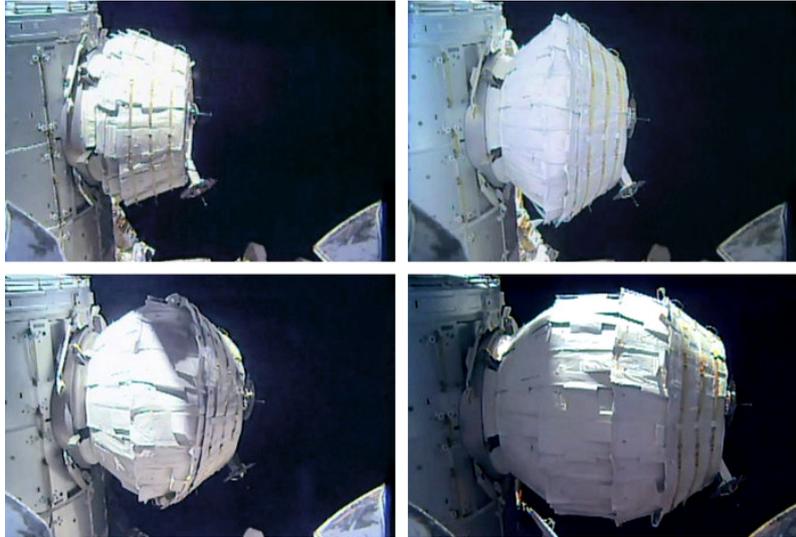


Figure 1.5: Struttura gonfiabile a bordo della stazione spaziale BEAM (credito immagine: NASA)

garsi [20], molto interessanti per via dei numerosi vantaggi che offrono: semplicità di realizzazione, molto utile per ridurre i rischi legati alla complessità di sistemi (più è complesso un sistema, maggiori sono le possibili cause di failure), autonomia, grande efficienza di stivaggio, grande precisione di fase di dispiegamento, leggerezza e ottime proprietà meccaniche. Il meccanismo alla base è molto semplice: sono in grado di appiattirsi e arrotolarsi attorno ad un cilindro accumulando energia elastica nella loro configurazione deformata, stessa energia che permette il dispiegamento una volta rilasciata.

I primi studi risalgono alla fine degli anni '60 e hanno portato allo sviluppo di diverse strutture di questo tipo. I primi ad essere realizzati sono stati gli Storable Tubular and Expandible Member (STEM) e i Collapsible Tubular Mast (CTM) [25], inizialmente realizzati in materiale metallico e già adottate durante le missioni Viking 1 e 2 [26] per l'esplorazione robotica. Solo dagli anni '70 in poi sono stati fatti degli studi circa l'utilizzo dei materiali compositi in questo tipo di applicazioni, ma la prima applicazione di CTM in materiale composito risale a 15 anni dopo grazie all'ESA [?].

Importante avanzamento di questo tipo di design si deve a Murphey e Banik [27], inventori dei Triangular Collapsible And Rollable boom (TRAC) svolgendo il loro lavoro presso l'Air Force Research Laboratory. Queste strutture rivoluzionarie sono dotate di rigidità flessionale tra le 10 e le 34 volte maggiore rispetto ai CTM e STEM

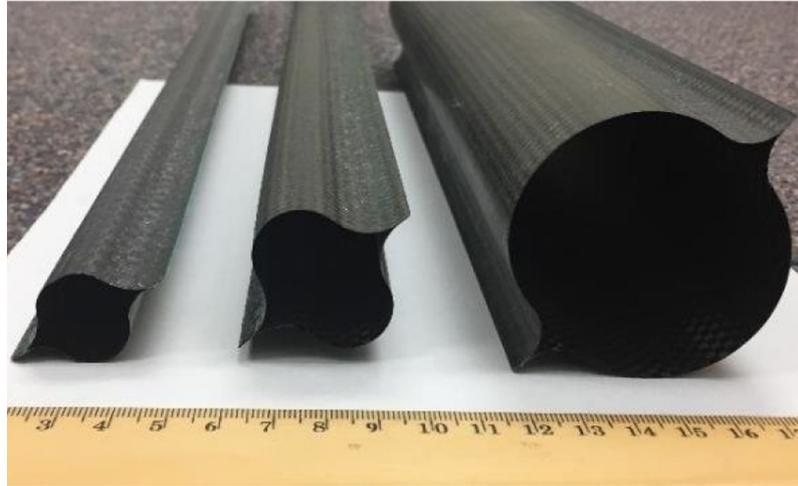


Figure 1.6: Struttura CTM realizzata in materiale composito con sezione di diverse dimensioni [3]

ed una migliore efficienza di impacchettamento per via della particolare sezione di cui sono costituiti. Inizialmente i TRAC boom erano realizzati in materiale metallico e sono stati utilizzati a bordo delle missioni LightSail-1 [28], LightSail-2 e NanaSail-D [29] [30] per il dispiegamento di vele solari. Tuttavia, i gradienti termici tipici degli ambienti spaziali (in orbita terrestre la temperatura oscilla tra i  $-120$  e i  $150$  °C) erano tali da generare grandi deformazioni su questo tipo di strutture [31]. Per questo motivo, sempre Murphey e Banis [27] hanno iniziato a valutare la possibilità di utilizzare materiali compositi, individuando nei CFRP (Carbon Fiber Reinforced Polimers) realizzati attraverso una *stacking sequence*  $[0^\circ, 45^\circ, 0^\circ]$  la miglior soluzione al problema sia dal punto di vista termico che meccanico. L'architettura principale

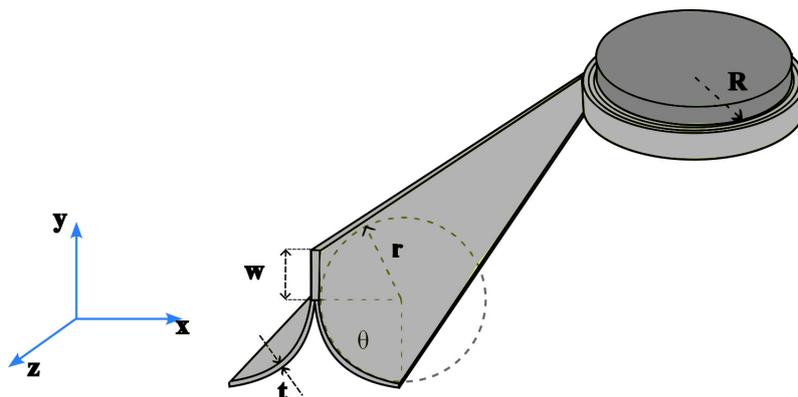


Figure 1.7: TRAC boom parzialmente avvolto attorno ad un mozzo cilindrico con parametri evidenziati

(1.7) vede un TRAC boom realizzato con due nastri (flange) unite tra di loro lungo un estremo. I parametri principali che ne determinano la geometria sono il raggio

della flangia  $r$ , l'angolo di apertura della stessa  $\theta$ , l'altezza della regione in cui sono unite  $w$  e lo spessore  $t$ . Nel momento in cui vengono arrotolate attorno al mozzo, le due flange si appiattiscono l'una contro l'altra generando delle deformazioni e quindi accumulando energia elastica di deformazione, riducendo inoltre l'ingombro in funzione anche dello spessore. A causa della sezione aperta presentano una bassa rigidezza torsionale che ne va in parte a limitare i possibili utilizzi, da cui l'eventuale scelta alternativa di altre tipologie di strutture.

Per ultimi ricordiamo i *tape springs*, dei gusci sottili curvati che offrono facilità di utilizzo e basso costo, molto utilizzati in vari tipi di applicazione. A seconda dell'entità dell'energia immagazzinata, si distinguono in instabili, bistabili e indifferentemente stabili. Dato che queste strutture sono conservate in fase ripiegata per molto tempo, è importante ricordare che possono andare incontro ad un processo di rilassamento viscoelastico che porta ad una riduzione dell'energia elastica immagazzinata andando incontro ad un aumento della stabilità del sistema. Sono caratterizzati da un comportamento altamente non lineare quando sollecitati con momento flettente e da un cambiamento della geometria superati valori critici. Possono essere uniti a formare altre strutture come i tape-spring hinges.

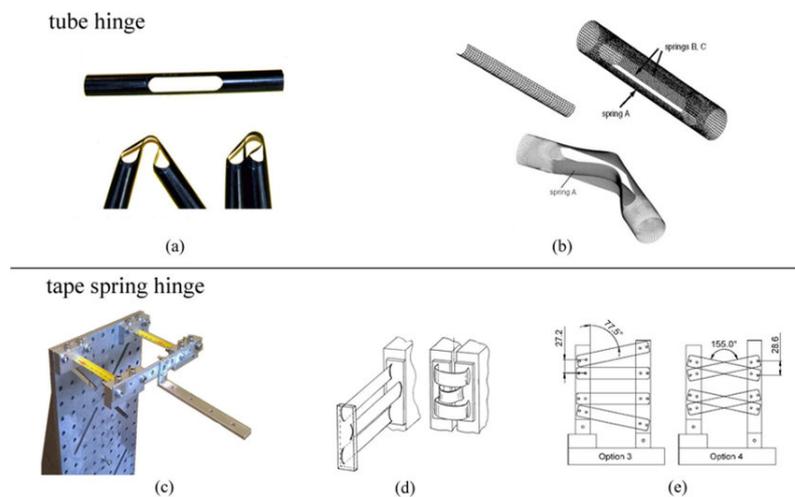


Figure 1.8: Diverse tipologie di tape spring hinges [4]

## 1.2 Analisi strutturali

Per analizzare le strutture in materiale composito tramite prove sperimentali, risulta essere molto costoso per via della complessità di realizzazione dei provini e della precisione con cui devono essere effettuati i test [32]. Per questo motivo sono necessarie delle teorie che permettano di replicare il comportamento meccanico di queste strutture sottili composite in maniera fedele alla realtà.

Si fa quindi utilizzo di teorie strutturali, la cui soluzione analitica spesso è manchevole. Per questo motivo, grazie all'utilizzo di potenti software di calcolo si fa utilizzo degli elementi finiti (FEM). Attraverso questo metodo, la struttura viene decomposta in tanti piccoli blocchetti nei cui nodi vengono calcolate le variabili di interesse del sistema e vengono collegati attraverso opportune leggi in modo da replicare fedelmente il comportamento del sistema. In base alla complessità del problema, per strutture in cui una sola dimensione prevale nettamente sulle altre due, si può fare in prima analisi utilizzo di teoria di tipo trave. Un primo e semplice modello è rappresentato dall' *elastica* [33], nella quale viene risolto un problema puramente flessionale attraverso la teoria di Eulero-Bernoulli. Questa teoria non considera però effetti di taglio, ai quali contribuisce Timoshenko attraverso una teoria che considera gli stress di taglio lineare attraverso una sezione trasversale della trave [34]. Un'estensione della teoria di Timoshenko è dato dalla First-order Shear Deformation Theory (FSDT), in cui anche le componenti del taglio non sono più costanti ma sono rappresentate da contributi del primo ordine nella teoria. L'utilizzo di formulazioni sempre più raffinate della cinematica dei compositi è necessario per andare a studiare fenomeni di ordine elevato, come gli accoppiamenti flessione-torsione, complesse deformazioni a taglio, analisi accurate dello stato tensione/deformazione nelle tre dimensioni. In questo contesto, si introduce la CUF (Carrera Unified Formulation) [6] che afferma che "ogni teoria strutturale può essere ricondotta ad una cinematica generalizzata utilizzando un'espansione appropriata arbitraria delle variabili generalizzate del problema, delle equazioni di governo non lineari e dell'elemento finito associato e che una formulazione gerarchica e geometricamente esatta dalla trave in composito può essere scritta in termini del *nucleo fondamentale*".

La CUF presenta numerosi vantaggi: offre la possibilità di trattare problemi di diversa complessità giocando su variabili come l'ordine dell'espansione utilizzata per

descrivere la sezione e il numero di elementi che si vuole utilizzare per discretizzare la struttura. In questo modo è possibile alleggerire i costi computazionali associati ad altri tipi di analisi FEM. Numerosi studi hanno già dimostrato l'affidabilità di questa formulazione nell'andare a valutare uno stato tensionale 3D nel caso di analisi lineari o non lineari di tipo geometrico [35], [36], o materiale [37], [13], [38].

Il tipo di analisi necessario sulle strutture ultrasottili in composito richiede la valutazione accurata dello stato tensionale 3D che compare a causa dell'anisotropia del materiale e dello spessore sottile della geometria utilizzata in fase ripiegate e in fase di dispiegamento [39] [35]. In queste condizioni, la struttura si ritrova in una configurazione caratterizzata da grandi spostamenti e/o deformazioni che possono indurre uno stato di *buckling* e potenzialmente la *failure* della struttura in alcune punti critici [40].

Purtroppo, la *failure* per i materiali compositi è un meccanismo molto complesso e difficile da studiare [41]. I laminati sono generalmente costituiti dalla sovrapposizione di strati realizzati dall'unione di fibre di materiale resistente disposte secondo una certa angolazione unite da una matrice di tipo plastico. Il modo e l'orientazione con cui gli strati vengono uniti (*stacking sequence*) influenza notevolmente il comportamento del materiale. Le tensioni all'interno della singola lamina, inoltre, si distribuiscono in maniera complessa essendoci una variazione di fase. Per avere quindi un reale comportamento del materiale, andrebbe considerata la micromechanica del sistema [36], ovvero studiare l'andamento delle tensioni che si generano all'interfaccia tra la matrice e la singola fibra. Questo è possibile andando a realizzare un modello FEM della in grado di riconoscere i due materiali diversi e il modo in cui si legano tra di loro.

I materiali compositi mostrano quindi diversi meccanismi di *failure* (Fig. 1.9) [5], tra i quali possiamo citare, oltre alla rottura delle fibre o della matrice, fenomeni quali il *debonding* tra la matrice e le fibre, la delaminazione dei vari strati. Quest'ultimo meccanismo di *failure* richiede delle analisi apposite dette di '*free-edge*', in cui si vanno ad analizzare le tensioni in una zona all'estremità libera della struttura in modo da assicurarsi che non si sviluppino tensioni tali da portare ad uno scollamento dei vari strati.

Per determinare la comparsa del danno vengono condotte analisi lineare si fa uso dei

*failure index*, indici che mettono in relazione lo stato tensionale del materiale con le sue caratteristiche di resistenza e determinano la probabilità di comparsa del danno in un punto. Esistono numerosi criteri di *failure* [42], i quali possono essere suddivise in diverse categorie a seconda che considerino o meno l'interazione tra diverse componenti tensionali. Le prime sono le più semplici mentre le seconde risultano essere più complesse ed essere descritte da una sola disuguaglianza come nelle teorie di Hoffmann [43], Tsai-Wu [44] e Tsai-Hill [45], [46] o da una combinazione di interazione come nelle teorie di Hashin [47], Puck e Schuermann [48] o LaRC03.

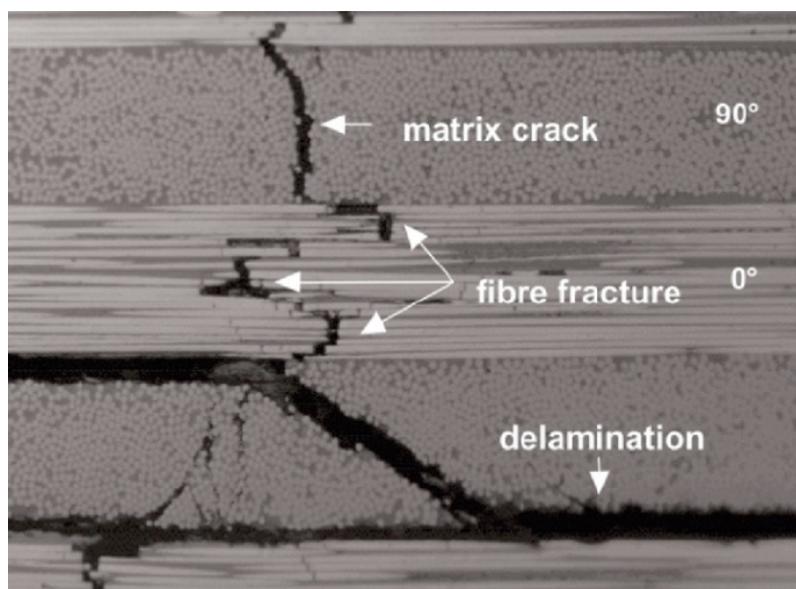


Figure 1.9: Diverse tipologie di danneggiamento di un materiale composito: failure delle fibre, della matrice e delaminazione [5]

Una volta stabilita la comparsa del danno, è necessario valutare la sua evoluzione e come questo impatta lo stato tensionale all'interno del materiale e le sue proprietà. Gli approcci sono fondamentalmente due: modellizzazione discreta, in cui viene descritta geometricamente la cricca utilizzando degli elementi basati sul *cohesive zone modeling* per simulare la cricca [49]; *continuum damage mechanics* (CDM) [13], in cui si mantiene la continuità degli spostamenti del modello e la cricca viene sostituita da un parametro di danneggiamento che modifica la relazione costitutiva del materiale.

La letteratura circa le teorie strutturali, i criteri di failure e di progressive damage è molto ampia e variegata e qui non viene che descritta una piccola parte di questi

argomenti, relativa principalmente alle teorie utilizzate all'interno della tesi. Scopo della tesi è quello di condurre analisi di danneggiamento delle strutture ultrasottili in composito facendo utilizzo della CUF 1D. Nel capitolo 2 si descrive quindi in maniera approfondita la teoria strutturale alla base del problema e l'utilizzo della CUF. Nel capitolo 3 vengono descritti i criteri di *failure* e il modello di *continuum damage* utilizzati nelle analisi. Nel capitolo 4 vengono mostrate i casi numerici utili ad introdurre il problema complesso finale di danneggiamento, i cui risultati vengono mostrati nel capitolo 5. A finire, le conclusioni nel capitolo 6.

# Chapter 2

## Carrera Unified Formulation

L'obiettivo dell'analisi strutturale è quello di valutare la risposta di una struttura in seguito all'applicazione di un determinato carico con determinate condizioni al contorno. Si è interessati in particolare a conoscere spostamenti, tensioni e deformazioni della struttura in modo tale da assicurarsi che sia in grado di funzionare correttamente durante la sua vita operativa. I carichi che vengono esercitati sulla struttura sono di due tipi: carichi statici (o quasi statici) e carichi dinamici. I carichi dinamici sono caratterizzati da un andamento che varia col tempo in maniera più o meno periodica e sono dovuti alla spinta dei propulsori del lanciatore, all'azione del campo vibroacustico, al gradiente termico che sperimenta in orbita etc. Questi carichi interessano particolarmente nella valutazione della vita a fatica di un componente. I carichi statici o quasi-statici sono costanti nel tempo e servono per valutare se venga superata o meno la tensione di rottura o di snervamento del materiale.

In queste equazioni vengono mostrate le equazioni che governano la meccanica strutturale e come queste vengono tradotte nelle analisi agli elementi finiti e nella CUF.

### 2.1 Il problema elastico lineare

La formulazione del problema elastico lineare in esame avviene facendo riferimento ai lavori di Carrera *et al.* [6], considerando un corpo solido, continuo e deformabile. Il sistema di riferimento è indicato dagli assi ortogonali  $x$ ,  $y$  e  $z$ , mentre le  $i$  carichi sono indicati con le lettere  $P$ ,  $q$ ,  $p$  e  $g$  a seconda che si tratti di carichi puntuali, di

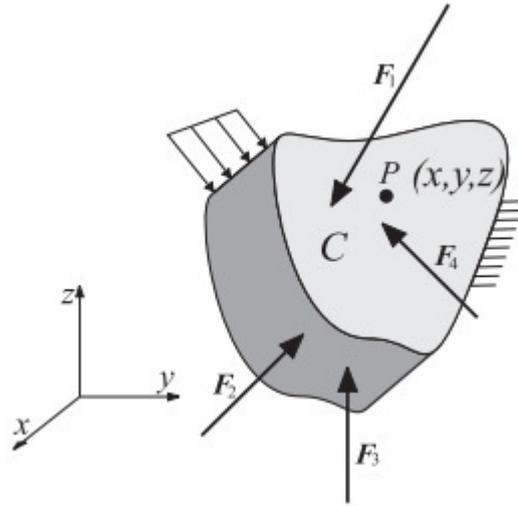


Figure 2.1: Geometria e notazione per un corpo 3D deformabile [6]

linea, di superficie o di volume rispettivamente (Fig. 2.1). Si introducono le variabili fondamentali del problema:

- vettore degli spostamenti di un punto P:

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \{u_x, u_y, u_z\}^T$$

Il calcolo dello stato deformato di un corpo elastico risultante dall'applicazione di determinate condizioni al contorno meccaniche o naturali rimane il problema fondamentale dell'elasticità 3D.

- tensore delle deformazioni:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \{\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \epsilon_{xy}, \epsilon_{xz}, \epsilon_{yz}\}^T,$$

i primi tre termini rappresentano le deformazioni assiali e le ultime tre le deformazioni di taglio; il tensore è in realtà composto da 9 componenti, ma le deformazioni di taglio sono simmetriche ( $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$ , con  $i, j = 1, 2, 3, i \neq j$ ).

- tensore delle tensioni:

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}\}^T,$$

con la stessa convenzione sugli indici utilizzata per il tensore delle defor-

mazioni.

### 2.1.1 Equazioni di equilibrio

In un generico punto C del corpo elastico, valgono le seguenti equazioni di equilibrio:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = g_x \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = g_y \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = g_z \end{cases} \quad (2.1)$$

Sulla superficie esterna del corpo C, le componenti del vettore degli stress devono soddisfare le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \sigma_{xx}n_x + \sigma_{xy}n_y + \sigma_{xz}n_z = p_x \\ \sigma_{xy}n_x + \sigma_{yy}n_y + \sigma_{yz}n_z = p_y \\ \sigma_{xz}n_x + \sigma_{yz}n_y + \sigma_{zz}n_z = p_z \end{cases} \quad (2.2)$$

dove  $n_x$ ,  $n_y$  e  $n_z$  sono i coseni direttori. Queste sono note come condizioni al contorno meccaniche.

Le condizioni al contorno di tipo geometrico possono essere imposte andando a definire gli spostamenti sulla superficie esterna del corpo come:

$$\begin{cases} u_x = U_x \\ u_y = U_y \\ u_z = U_z \end{cases} \quad (2.3)$$

### 2.1.2 Equazioni geometriche

Le deformazioni e gli spostamenti sono legati nel caso lineare dalla relazione:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (2.4)$$

dove  $\mathbf{D}$  è l'operatore differenziale:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 & 0 \\ 0 & \partial_y & 0 \\ 0 & 0 & \partial_z \\ \partial_x & \partial_y & 0 \\ \partial_x & 0 & \partial_z \\ 0 & \partial_y & \partial_z \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Nel caso non lineare, si vanno a considerare i contributi legati agli effetti di ordine superiore al primo.

### 2.1.3 Equazioni costitutive

Tensioni e deformazioni sono invece legate attraverso le caratteristiche del materiale da relazioni costitutive. In campo elastico lineare vale la legge di Hooke:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\epsilon} \quad (2.6)$$

dove  $\mathbf{C}$  è la matrice di rigidità, che nel caso di materiale ortotropo si definisce come [50]:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Le varie componenti sono descritte attraverso le relazioni:

$$C_{11} = \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_2 E_3} \quad (2.8)$$

$$C_{22} = C_{33} = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (2.9)$$

$$C_{12} = C_{13} = C_{23} = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (2.10)$$

$$C_{44} = G_{13} \quad C_{55} = G_{23} \quad C_{66} = G_{12} \quad (2.11)$$

## 2.1.4 Relazione costitutiva per laminati compositi

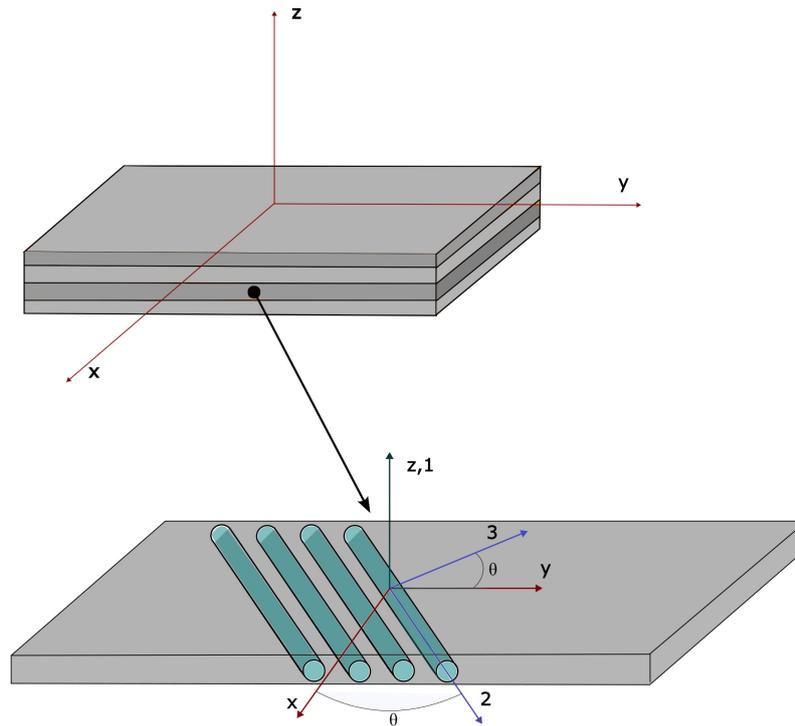


Figure 2.2

Il laminato è una struttura multistrato costituita dalla sovrapposizione di più strati di materiale composito, costituiti dall'unione di fibre parallele e matrice. Ogni lamina può essere di diverso materiale e avere le fibre orientate con diverse angolazione. Per ogni lamina si considera come direzione principale 1 quella verso cui sono orientate le fibre, la direzione 2 è quella perpendicolare ad essa e la direzione 3 fuoriesce dal piano, ortogonalmente alle altre due. A livello globale si definisce un sistema di riferimento  $x,y,z$  con direzione principale  $y$  nel caso di strutture 1D (Fig.2.2). L'ordine con cui vengono sovrapposte le diverse lamine definisce la *stacking sequence* e influisce sulle proprietà complessive del materiale.

L'equazione costitutiva scritta precedentemente si riferisce al caso in cui stiamo descrivendo la matrice di rigidità per un materiale ortotropo nel sistema di riferimento globale ed è valida per la singola lamina. Infatti per ogni singola lamina si possono definire tensioni e deformazioni attraverso i vettori

$$\boldsymbol{\epsilon} = \{\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}, \epsilon_{12}, \epsilon_{13}, \epsilon_{23}\}^T,$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}\}^T,$$

Per poter passare dal sistema di riferimento locale a quello globale è necessario ricorrere ad una matrice di rotazione  $\mathbf{T}$ : considerando l'asse 3 e l'asse z coincidenti, si ha una rotazione nel piano dell'asse 1 rispetto all'asse x di un angolo pari a  $\theta$ . La matrice di rotazione  $\mathbf{T}$  è:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 0 & 0 & 0 & \sin 2\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 0 & 0 & 0 & -\sin 2\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -\cos\theta\sin\theta & \sin\theta\cos\theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Da qui deriva la nuova espressione della legge costitutiva in coordinate globali

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{T}^T \mathbf{C} \mathbf{T} \boldsymbol{\epsilon} \quad (2.13)$$

con  $\mathbf{T}^T \mathbf{C} \mathbf{T} = \tilde{\mathbf{C}}$ .

A questo punto la matrice di rigidezza completa diventa:

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{12} & \tilde{C}_{13} & 0 & 0 & \tilde{C}_{16} \\ \tilde{C}_{12} & \tilde{C}_{22} & \tilde{C}_{23} & 0 & 0 & \tilde{C}_{26} \\ \tilde{C}_{13} & \tilde{C}_{23} & \tilde{C}_{33} & 0 & 0 & \tilde{C}_{36} \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{C}_{44} & \tilde{C}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{C}_{45} & \tilde{C}_{55} & 0 \\ \tilde{C}_{16} & \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{36} & 0 & 0 & \tilde{C}_{66} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

dove i coefficienti sono dipendenti dalle proprietà meccaniche del composito di riferimento e dall'angolo di disposizione delle fibre  $\theta$  in ciascuno strato della sequenza di laminazione adottata.

### 2.1.5 Principio dei lavori virtuali: forma forte

Le equazioni ricavate definiscono un totale di 15 incognite (6 componenti di sforzo  $\boldsymbol{\sigma}$ , 6 componenti di deformazione  $\boldsymbol{\epsilon}$  e 3 spostamenti  $\mathbf{u}$ ) e 15 equazioni (le equazioni di equilibrio, le condizioni al contorno, le relazioni geometriche e la legge di Hooke). At-

traverso opportune sostituzioni, tutte le equazioni di governo possono essere espresse in funzione delle incognite di spostamento, ottenendo così una formulazione del problema elastico per una strutture tridimensionale in termini di spostamento. Un risultato analogo è ottenibile attraverso il principio dei lavori virtuali [6], il quale afferma: "un sistema meccanico in equilibrio sotto l'azione di forze applicate e vincoli geometrici verifica che la somma dei lavori virtuali svolti dalle forze interne ed esterne al sistema per qualsiasi spostamento virtuale infinitesimo che soddisfi i vincoli geometrici è nullo". Scrivendo il principio utilizzando gli spostamenti come incognite, esso può essere chiamato "principio degli spostamenti virtuali" (PVD, *principle of virtual displacement*). Da un punto di vista matematico, il PVD è espresso dalla formula:

$$\delta L_{int} = \delta L_{ext} \quad (2.15)$$

dove  $L_{int}$  indica il lavoro delle forze elastiche interne,  $L_{ext}$  il lavoro delle forze esterne e  $\delta$  indica una variazione virtuale. Il lavoro interno può essere espresso in maniera compatta con la seguente formula:

$$\int_V \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \delta \mathbf{L}_{ext} + \delta \mathbf{L}_{ine} \quad (2.16)$$

Sfruttando l'equazione 2.4 è possibile esprimere il lavoro interno in termini di spostamento:

$$\delta L_{int} = \int_V \delta (\mathbf{b} \mathbf{u}^T) \boldsymbol{\sigma} dV = \int_V \delta (\mathbf{u}^T \mathbf{b}^t) \boldsymbol{\sigma} dV \quad (2.17)$$

Per ottenere le equazioni in forma forte è possibile procedere integrando per parti:

$$\int_V \delta (\mathbf{u}^T \mathbf{b}^t) \boldsymbol{\sigma} dV = - \int_V \delta \mathbf{u}^T (\mathbf{b}^T \boldsymbol{\sigma}) dV + \int_S \delta \mathbf{u}^T (\mathbf{I}_n^T \boldsymbol{\sigma}) dS \quad (2.18)$$

dove  $I_n$  è la matrice dei coseni direttori che contiene le componenti del versore normale alla superficie S in un generico punto P.

Per quanto riguarda il lavoro delle forze esterne, esso è espresso come la somma di 4 contributi derivanti dalle forze di volume  $\mathbf{g}$ , di superficie  $\mathbf{p}$  carichi lineari  $\mathbf{q}$  e carichi concentrati  $\mathbf{P}$ :

$$\delta L_{ext} = \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{g} dV + \int_S \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p} dS + \int_L \delta \mathbf{u}^T \mathbf{q} dy + \delta \mathbf{u}_Q^T \mathbf{P} \quad (2.19)$$

Uguagliando la 2.17 e la 2.19 si ottiene la formulazione completa del PVD:

$$-\int_V \delta \mathbf{u}^T (\mathbf{b}^T \boldsymbol{\sigma}) dV + \int_S \delta \mathbf{u}^T (\mathbf{I}_n^T \boldsymbol{\sigma}) dS = \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{g} dV + \int_S \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p} dS + \int_L \delta \mathbf{u}^T \mathbf{q} dy + \delta \mathbf{u}_Q^T \mathbf{P} \quad (2.20)$$

Uguagliando gli integrali calcolati sullo stesso dominio si ottengono le equazioni di equilibrio per un generico punto P all'interno del dominio V:

$$-\mathbf{b}^T \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{g} \quad (2.21)$$

e le condizioni al contorno meccaniche.

$$\mathbf{I}_n^T \boldsymbol{\sigma} = p \quad (2.22)$$

Attraverso la legge di Hooke 2.6 e le relazioni geometriche 2.4 è possibile esprimere le equazioni di equilibrio in termini degli spostamenti:

$$-\mathbf{b}^t \mathbf{C} \mathbf{b} \mathbf{u} = \mathbf{g} \quad (2.23)$$

Questo permette di scrivere le equazioni di equilibrio in forma forte, introducendo la matrice  $\mathbf{k}$ ,

$$\mathbf{k} \mathbf{u} = \mathbf{g} \quad (2.24)$$

dove

$$\mathbf{k} = -\mathbf{b}^T \mathbf{C} \mathbf{b} \quad (2.25)$$

Da notare come  $\mathbf{k}$  sia una matrice 3x3 dotata di 9 componenti:

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

In questo modo è stato possibile ottenere le equazioni del problema elastico in forma forte. Il termine "forte" si riferisce al fatto che la soluzione del problema deve soddisfare le equazioni in ogni punto del corpo continuo D. Una soluzione in forma chiusa esiste solo per condizioni al contorno e geometrie molto semplici. Per questo

motivo, attraverso il PVD è possibile ricavare un'equazione in forma debole che, seppur introducendo delle approssimazioni, è in grado di risolvere il problema nella maggior parte dei casi.

### 2.1.6 Principio dei lavori virtuali: forma debole

La forma debole del problema elastico tridimensionale si ottiene introducendo l'approssimazione descritta dalla seguente equazione:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{U} \quad (2.27)$$

Il campo degli spostamenti  $\mathbf{u}$  è descritto in funzione degli spostamenti nodali  $\mathbf{U}$  attraverso una matrice  $\mathbf{N}$  le cui componenti prendono il nome di "funzioni di forma". Per applicare questo tipo di formulazione è necessario considerare un numero finito di punti appartenenti al corpo  $D$ , chiamati "nodi", ed esprimere il campo degli spostamenti in funzione di questi nodi.

Il vettore degli spostamenti nodali  $\mathbf{U}$  è:

$$\mathbf{U}^T = \{u_{x1}, u_{y1}, u_{z1}, u_{x2}, u_{y2}, u_{z2}, \dots, u_{xNE}, u_{yNE}, u_{zNE}\}^T \quad (2.28)$$

Il vettore ha  $3 \times N_{NE}$  componenti, in cui per ogni nodo dell'elemento sono stati considerati 3 spostamenti, uno per ogni asse del sistema di riferimento.

Il lavoro esterno può essere scritto come:

$$\delta L_{ext} = \delta \mathbf{U}^T \mathbf{P} \quad (2.29)$$

dove  $\mathbf{P}$  è il vettore delle forze nodali

$$\mathbf{P}^T = \{P_{x1}, P_{y1}, P_{z1}, P_{x2}, P_{y2}, P_{z2}, \dots, P_{xNE}, P_{yNE}, P_{zNE}\}^T \quad (2.30)$$

con le stesse considerazioni effettuate per  $\mathbf{U}$ .

Sostituendo l'equazione 2.27 nelle relazioni geometriche 2.4 e nella legge di Hooke 2.6 si ottiene:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{b}\mathbf{u} = \mathbf{b}\mathbf{N}\mathbf{U} = \mathbf{B}\mathbf{U} \quad (2.31)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{U} \quad (2.32)$$

dove la matrice  $\mathbf{B}$  è ottenuta applicando l'operatore differenziale  $\mathbf{b}$  alle funzioni di forma  $\mathbf{N}$ . Considerando la variazione virtuale del vettore spostamento può essere scritta come

$$\delta\mathbf{u} = \mathbf{N}\delta\mathbf{U} \quad (2.33)$$

il lavoro interno è rappresentato dalla seguente equazione:

$$\delta L_{int} = \delta\mathbf{U}^T \left( \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{B} \mathbf{C} dV \right) \mathbf{U} = \delta\mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} \quad (2.34)$$

dove

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{B} \mathbf{C} dV \quad (2.35)$$

è la matrice di rigidità per un problema 3D in forma debole. L'equazione di equilibrio per un solido in forma debole è data da:

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{P} \quad (2.36)$$

con  $\mathbf{P}$  vettore delle forze nodali.

### 2.1.7 Metodo agli Elementi Finiti

Il PVD adesso descritto è il principale strumento con cui vengono ricavate le equazioni su cui si basa il metodo degli elementi finiti ("finite element method", FEM). Il FEM si basa sulla suddivisione del dominio di interesse nell'unione di più sottodomini più semplici, chiamati "elementi". Ogni elemento è delimitato da un numero finito di punti, chiamati "nodi". L'idea alla base del FEM è quella di esprimere le soluzioni del problema in ogni punto del dominio in funzione del valore ricavato in corrispondenza dei nodi degli elementi con cui questo viene discretizzato. Le funzioni che legano il campo degli spostamenti agli spostamenti nodali prendono il nome di "funzioni di forma" e sono spesso descritte da polinomi algebrici. Il processo secondo il quale lavora in FEM può essere suddiviso in 3 step:

- Discretizzazione del dominio in una serie finita di elementi.
- Calcolo della soluzione approssimata su ogni elemento, ricavata come combi-

nazione lineare dei valori nodali tramite le funzioni di forma

- Assemblaggi dei vari elementi tramite relazioni algebriche e scrittura della soluzione complessiva del problema.

Bisogna tenere in considerazione il fatto che attraverso il FEM vengono introdotte due tipologie di approssimazioni: una matematica e una geometrica. L'approssimazione matematica deriva dall'utilizzo di equazioni in forma debole, mentre quella di tipo geometrico deriva dalla discretizzazione del dominio in una serie di elementi di forma più semplice, i quali non sempre sono in grado di approssimare correttamente figure curve.

L'errore matematico può essere ridotto aumentando l'ordine delle funzioni di forma, mentre quello geometrico aumentando il numero di elementi.

## 2.2 CUF 1D

Nei casi più complessi, il processo di assemblaggio delle matrici di rigidezza dei singoli elementi risulta essere un passaggio critico per l'utilizzo del FEM. In questo campo si inserisce la CUF, attraverso la quale le matrici di rigidezza vengono scritte in funzione dei nuclei fondamentali.

Secondo la CUF, il campo degli spostamenti può essere descritto in maniera del tutto generica attraverso la formula:

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \sum_{\tau} F_{\tau} \mathbf{u}_{\tau} = F_{\tau} \mathbf{u}_{\tau} \quad \tau = 1, 2, \dots, M \quad (2.37)$$

dove  $F_{\tau}$  è una generica funzione della sezione in esame,  $\mathbf{u}_{\tau}$  è il vettore degli spostamenti e  $M$  è il numero dei termini dell'espansione. È utilizzata la formulazione di Einstein per la sommatoria sugli indici ripetuti in modo da alleggerire la scrittura. La scelta di  $F_{\tau}$  e  $M$  è arbitraria, ovvero è possibile scegliere diverse funzioni base di vario ordine per modellare il campo della cinematica di una struttura nella sua sezione. Per una struttura in cui una dimensione risulta prevalere sulle altre (1D,

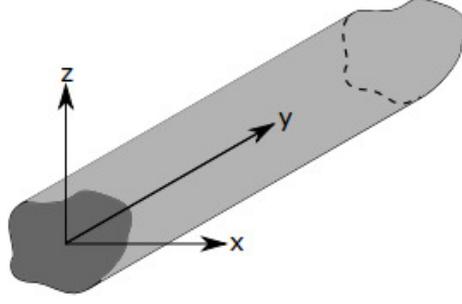


Figure 2.3: Elemento 1D generico con asse allineato nella direzione  $y$

ad esempio la trave) con asse allineato lungo la direzione  $y$  si ottiene 2.3:

$$\mathbf{u}(x, y, z) = F_\tau(x, z)\mathbf{u}(y) \quad (2.38)$$

in cui la sezione è descritta dalle coordinate  $x$  e  $z$ .

È possibile pensare di utilizzare le funzioni di forma  $N_i(y)$  per approssimare lo spostamento lungo la direzione dell'asse della trave, e le funzioni di espansione  $F_\tau$  per approssimare lo spostamento lungo le altre direzioni. In questo modo sarà possibile scrivere:

$$\mathbf{u} = N_i(y)F_\tau(x, z)\mathbf{u}_{\tau i} \quad (2.39)$$

Riprendendo la formulazione del lavoro virtuale interno al fine di ricavare l'espressione del nucleo fondamentale secondo la CUF, si esplicitano le grandezze:

$$\delta\mathbf{u} = N_j(y)F_s(x, z)\delta\mathbf{u}_{sj} \quad (2.40)$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{b}N_i(y)F_\tau(x, z)\mathbf{u}_{\tau i} \quad (2.41)$$

$$\delta\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{b}N_j(y)F_s(x, z)\delta\mathbf{u}_{sj} \quad (2.42)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{b}N_i(y)F_s(x, z)\delta\mathbf{u}_{\tau i} \quad (2.43)$$

dove sono stati introdotto gli indici  $s, j$  per le variazioni virtuali. Con questa nuova formulazione delle grandezza, il lavoro interno si scrive:

$$\delta L_{int} = \int_V \delta\boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \delta\mathbf{u}_{sj} \int_V [F_s(x, z) N_j(y) \mathbf{b}^T \mathbf{C} \mathbf{b} N_i(y) F_\tau(x, z)] dV \mathbf{u}_{\tau i} = \delta\mathbf{u}_{sj} \mathbf{k}^{\tau sij} \mathbf{u}_{\tau i} \quad (2.44)$$

Dato che la matrice  $\mathbf{b}^T$  è una matrice  $3 \times 6$ , la matrice  $\mathbf{C}$  è una  $6 \times 6$  e la matrice  $\mathbf{b}$  una  $6 \times 3$ , la matrice  $\mathbf{k}^{\tau sij}$  deve essere una matrice di dimensioni  $3 \times 3$ . Quindi  $\mathbf{k}^{\tau sij}$

è il nucleo fondamentale della matrice di rigidezza della struttura complessiva, la quale è ottenibile attraverso una permutazione degli indici  $\tau$ ,  $s$ ,  $i$ ,  $j$ .

La CUF permette quindi di assemblare la matrice di rigidezza in maniera più semplice attraverso diversi cicli sugli indici: ciclando  $\tau$  e  $s$  mantenendo fissi gli indici  $i$ ,  $j$  si ottiene la matrice di rigidezza del nodo; ciclando gli indici  $i$ ,  $j$  si ottiene la matrice di rigidezza del singolo elemento; ciclando sul numero di elementi  $N_{ne}$  si ottiene la matrice di rigidezza dell'intera struttura 2.4.

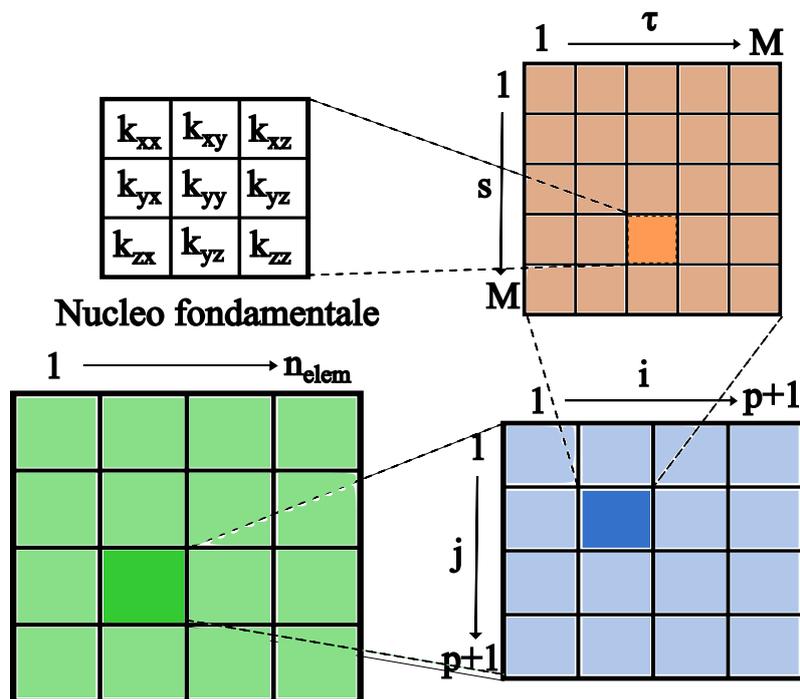


Figure 2.4: Rappresentazione schematica del processo di assemblaggio della matrice di rigidezza completa attraverso la CUF

Nel dettaglio vengono riportati le 9 componenti del nucleo fondamentale:

$$\begin{aligned}
K_{xx}^{ij\tau s} &= \int_S F_{\tau,z} \tilde{C}_{55} F_{s_z} dx dz \int_l N_i N_j dy + \int_S F_{\tau} \tilde{C}_{66} F_s dx dz \int_l N_{i,y} N_{j,y} dy \\
&\quad + \int_S F_{\tau} \tilde{C}_{16} F_s dx dz \int_l N_{i,x} N_{j,y} dy + \int_S F_{\tau} \tilde{C}_{16} F_s dx dz \int_l N_{i,y} N_{j,x} dy \\
&\quad + \int_S F_{\tau} \tilde{C}_{11} F_s dx dz \int_l N_{i,x} N_{j,x} dy \\
K_{xy}^{ij\tau s} &= \int_S F_{\tau,z} \tilde{C}_{45} F_{s_z} dx dz \int_l N_i N_j dy + \int_S F_{\tau} \tilde{C}_{26} F_s dx dz \int_l N_{i,y} N_{j,y} dy \\
&\quad + \int_S F_{\tau} \tilde{C}_{12} F_s dx dz \int_l N_{i,x} N_{j,y} dy + \int_S F_{\tau} \tilde{C}_{66} F_s dx dz \int_l N_{i,y} N_{j,x} dy \\
&\quad + \int_S F_{\tau} \tilde{C}_{16} F_s dx dz \int_l N_{i,x} N_{j,x} dy \\
K_{xz}^{ij\tau s} &= \int_S F_{\tau,z} \tilde{C}_{45} F_s dx dz \int_l N_i N_{j,y} dy + \int_S F_{\tau,z} \tilde{C}_{55} F_s dx dz \int_l N_i N_{j,x} dy \\
&\quad + \int_S F_{\tau} \tilde{C}_{36} F_{s,z} dx dz \int_l N_{i,y} N_j dy + \int_S F_{\tau} \tilde{C}_{13} F_{s,z} dx dz \int_l N_{i,x} N_{j,x} dy \\
K_{yx}^{ij\tau s} &= \int_S F_{\tau,z} \tilde{C}_{45} F_{s_z} dx dz \int_l N_i N_j dy + \int_S F_{\tau} \tilde{C}_{26} F_s dx dz \int_l N_{i,y} N_{j,y} dy \\
&\quad + \int_S F_{\tau} \tilde{C}_{66} F_s dx dz \int_l N_{i,x} N_{j,y} dy + \int_S F_{\tau} \tilde{C}_{12} F_s dx dz \int_l N_{i,y} N_{j,x} dy \\
&\quad + \int_S F_{\tau} \tilde{C}_{16} F_s dx dz \int_l N_{i,x} N_{j,x} dy \\
K_{yy}^{ij\tau s} &= \int_S F_{\tau,z} \tilde{C}_{44} F_{s_z} dx dz \int_l N_i N_j dy + \int_S F_{\tau} \tilde{C}_{22} F_s dx dz \int_l N_{i,y} N_{j,y} dy \\
&\quad + \int_S F_{\tau} \tilde{C}_{26} F_s dx dz \int_l N_{i,x} N_{j,y} dy + \int_S F_{\tau} \tilde{C}_{26} F_s dx dz \int_l N_{i,y} N_{j,x} dy \\
&\quad + \int_S F_{\tau} \tilde{C}_{66} F_s dx dz \int_l N_{i,x} N_{j,x} dy \\
K_{yz}^{ij\tau s} &= \int_S F_{\tau,z} \tilde{C}_{44} F_s dx dz \int_l N_i N_{j,y} dy + \int_S F_{\tau,z} \tilde{C}_{45} F_s dx dz \int_l N_i N_{j,x} dy \\
&\quad + \int_S F_{\tau} \tilde{C}_{23} F_{s,z} dx dz \int_l N_{i,y} N_j dy + \int_S F_{\tau} \tilde{C}_{36} F_{s,z} dx dz \int_l N_{i,x} N_j dy \\
K_{zx}^{ij\tau s} &= \int_S F_{\tau,z} \tilde{C}_{36} F_s dx dz \int_l N_i N_{j,y} dy + \int_S F_{\tau,z} \tilde{C}_{13} F_s dx dz \int_l N_i N_{j,x} dy \\
&\quad + \int_S F_{\tau} \tilde{C}_{45} F_{s,z} dx dz \int_l N_{i,y} N_j dy + \int_S F_{\tau} \tilde{C}_{55} F_{s,z} dx dz \int_l N_{i,x} N_j dy \\
K_{zy}^{ij\tau s} &= \int_S F_{\tau,z} \tilde{C}_{23} F_s dx dz \int_l N_i N_{j,y} dy + \int_S F_{\tau,z} \tilde{C}_{36} F_s dx dz \int_l N_i N_{j,x} dy \\
&\quad + \int_S F_{\tau} \tilde{C}_{44} F_{s,z} dx dz \int_l N_{i,y} N_j dy + \int_S F_{\tau} \tilde{C}_{45} F_{s,z} dx dz \int_l N_{i,x} N_j dy
\end{aligned} \tag{2.45}$$

$$\begin{aligned}
K_{zz}^{ij\tau s} = & \int_S F_{\tau,z} \tilde{C}_{33} F_{s,z} dx dz \int_l N_i N_j dy + \int_S F_{\tau} \tilde{C}_{44} F_s dx dz \int_l N_{i,y} N_{j,y} dy \\
& + \int_S F_{\tau} \tilde{C}_{45} F_s dx dz \int_l N_{i,x} N_{j,y} dy + \int_S F_{\tau} \tilde{C}_{45} F_s dx dz \int_l N_{i,y} N_{j,x} dy + \\
& \int_S F_{\tau} \tilde{C}_{55} F_s dx dz \int_l N_{i,x} N_{j,x} dy
\end{aligned} \tag{2.46}$$

### 2.2.1 Espansioni polinomiali e modelli strutturali

Le espansioni utilizzate per descrivere il comportamento del materiale all'interno della sezione possono essere scelte a piacimento, purchè consistenti con la realtà. Tra le varie espansioni, due rivestono particolare interesse per via delle loro implicazioni: l'espansione di Taylor e l'espansione di Lagrange. Quest'ultima si rivela particolarmente utile per la descrizione di materiali compositi, andando a definire il metodo Layer Wise (LW) per l'analisi FEM.

Si vanno ora ad analizzare le due espansioni per modello monodimensionali nel dettaglio.

**Espansioni di Taylor** La classe di Espansioni di Taylor (TE) fa utilizzo dell'espansione polinomiale di Taylor,  $x^i z^j$ , del campo degli spostamenti attraverso la sezione trasversale della struttura. La scelta dell'ordine  $N$  è del tutto arbitraria e viene fissata come input dell'analisi. Un'analisi di convergenza è poi necessaria per definire con maggiore precisione il valore di  $N$  per l'analisi. Se ad esempio si vuole costruire un modello tramite una TE avente come ordine  $N = 2$ , gli spostamenti saranno del tipo:

$$u_x = u_{x1} + x u_{x2} + z u_{x3} + x^2 u_{x4} + x z u_{x5} + z^2 u_{x6} \tag{2.47}$$

$$u_y = u_{y1} + x u_{y2} + z u_{y3} + x^2 u_{y4} + x z u_{y5} + z^2 u_{y6} \tag{2.48}$$

$$u_z = u_{z1} + x u_{z2} + z u_{z3} + x^2 u_{z4} + x z u_{z5} + z^2 u_{z6} \tag{2.49}$$

Il modello così realizzato è composto da 18 variabili generalizzate, di cui 3 costanti, 6 lineari e 9 paraboliche. È anche possibile scegliere di trascurare degli elementi dell'espansione in modo tale da ridurre il numero delle variabili e semplificare il

modello. Le teorie di Eulero-Bernoulli e Timoshenko sono casi particolari di TE con  $N = -1$  e  $N = 1$ .

I polinomi di Taylor descrivono un tipo di cinematica gerarchico, in cui l'ordine dei polinomi può essere incrementato andando a sommare termini di ordine superiore a quelli già presenti. Aumentando gradualmente l'ordine dei polinomi, è possibile effettuare uno studio di convergenza della soluzione. Particolarità dei polinomi è che utilizzano delle funzioni descritte apriori senza andare a considerare la geometria effettiva della sezione e l'eventuale suddivisione del materiale composito in lamine di materiale o orientazione differente.

Questi polinomi utilizzati nel metodo Equivalent Single Layer, metodo che considera il corpo formato da un unico strato di materiale la cui rigidità deriva da una media pesata delle rigidità dei vari strati. Questi modelli sono ottimi per ricavare la risposta globale del sistema, ma non descrive accuratamente quanto avviene all'interno dei vari strati in termini di tensioni tridimensionali. In particolare non è in grado di rispettare requisiti del tipo  $C_z^0$  secondo i quali le tensioni trasversali e gli spostamenti devono essere continui lungo la  $z$  nelle strutture multistrato.

Si riportano in tabella 2.1 i valori di  $F_\tau$  e  $M$  in funzione dell'ordine del modello trave.

N	M	$F_\tau$
0	1	$F_1 = 1$
1	3	$F_2 = x \quad F_3 = z$
2	6	$F_4 = x^2 \quad F_5 = xz \quad F_6 = z^2$
...	...	...
N	$(N+1)(N+2)/2$	$F_{N^2+N+2/2} = x^N \quad \dots \quad F_{(N+1)(N+2)/2} = z^N$

Table 2.1: Presentazione in forma compatta delle espansioni polinomiali di Taylor

**Espansione di Lagrange** L'espansione polinomiale di Lagrange (LE) opera su delle coordinate normalizzate dei nodi della sezione. Le equazioni contengono come variabili solo gli spostamenti fisici della sezione a differenza della TE. Vengono illustrate solo le LE 2D, in quanto le uniche che vengono adottate nel caso di teorie strutturali monodimensionali. Gli elementi principali che vengono utilizzati sono a 4, 9 o 16 punti, hanno forma quadrata e sono indicati con la sigla L4, L9, L16 (2.5),

e sono funzioni lineari, paraboliche o cubiche. Il primo caso si basa su 4 nodi e

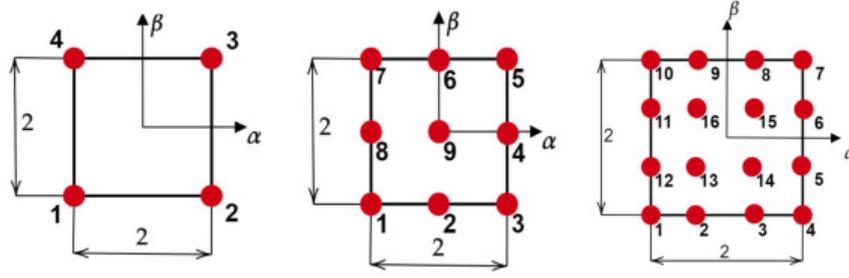


Figure 2.5: Rappresentazione degli elementi LE4, LE9, LE16

su ciascun nodi l'equazione ha la stessa espressione che consiste in un prodotto di funzioni lineari rispetto  $\alpha$  e  $\beta$ , coordinate normalizzate dell'elemento:

$$F_\tau = \frac{1}{4}(1 + \alpha\alpha_\tau)(1 + \beta\beta_\tau), \quad \tau = 1, 2, 3, 4 \quad (2.50)$$

Il secondo caso si basa su 9 nodi e su equazioni di secondo grado paraboliche in  $\alpha$  e  $\beta$ . Questa volta si differenziano in base alla posizione dei nodi nell'elemento, definendo il set di equazioni:

$$F_\tau = \frac{1}{4}(\alpha^2 + \alpha\alpha_\tau)(\beta^2 + \beta\beta_\tau), \quad \tau = 1, 3, 5, 7 \quad (2.51)$$

$$F_\tau = \frac{1}{2}\beta_\tau^2(\beta^2 + \beta\beta_\tau)(1 - \alpha^2) + \frac{1}{2}\alpha_\tau^2(\alpha^2 + \alpha\alpha_\tau)(1 - \beta^2), \quad \tau = 2, 4, 6, 8 \quad (2.52)$$

$$F_\tau = (1 - \alpha^2)(1 - \beta^2), \quad \tau = 9 \quad (2.53)$$

In particolare si nota come si differenziano in base alla posizione del nodo al vertice, sul lato o al centro. Per ultime le funzioni cubiche in  $\alpha$  e  $\beta$  utilizzate dall'espansione LE16 sono:

$$F_\tau = \frac{81}{256}(1 + \alpha\alpha_\tau)\left(\frac{1}{9} - \alpha^2\right)(1 + \beta\beta_\tau)\left(\frac{1}{9} - \beta^2\right), \quad \tau = 1, 4, 7, 10 \quad (2.54)$$

$$F_\tau = \frac{243}{256}(1 - \alpha^2)\left(\beta^2 - \frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{3} + 3\alpha\alpha_\tau\right)(1 + \beta\beta_\tau), \quad \tau = 2, 3, 8, 9 \quad (2.55)$$

$$F_\tau = \frac{243}{256}(1 - \beta^2)\left(\alpha^2 - \frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{3} + 3\beta\beta_\tau\right)(1 + \alpha\alpha_\tau), \quad \tau = 5, 6, 11, 12 \quad (2.56)$$

$$F_\tau = \frac{729}{256}(1 - \alpha^2)(1 - \beta^2)\left(\frac{1}{3} + 3\alpha\alpha_\tau\right)\left(\frac{1}{3} + 3\beta\beta_\tau\right), \quad \tau = 13, 14, 15, 16 \quad (2.57)$$

$$(2.58)$$

L'unione di più elementi definiti con la LE permette di definire un modo di discretizzare la struttura detta Component Wise, che nel caso dei laminati si particolarizza in Layer Wise scomponendo l'analisi FEM nelle varie lamine che lo compongono. Con l'approccio LW ogni lamina può essere considerata in maniera indipendente dalle altre imponendo comunque il rispetto dei requisiti di continuità sugli spostamenti. Risultano essere molto più versatili ed essendo direttamente legati alla geometria permettono la descrizione di strutture dalle sezioni complesse. Inoltre è possibile giocare con la discretizzazione delle stesse, andando ad aumentare il numero di elementi nel caso in cui si svolgano analisi del tipo "free-edge". Possono anche essere utilizzate per lo studio della micromeccanica, separando le due fasi materiale nel caso di compositi. La differenza nello schema di assemblaggio delle matrici di rigidezza rispetto ai 2 metodi è riportata in figura 2.6

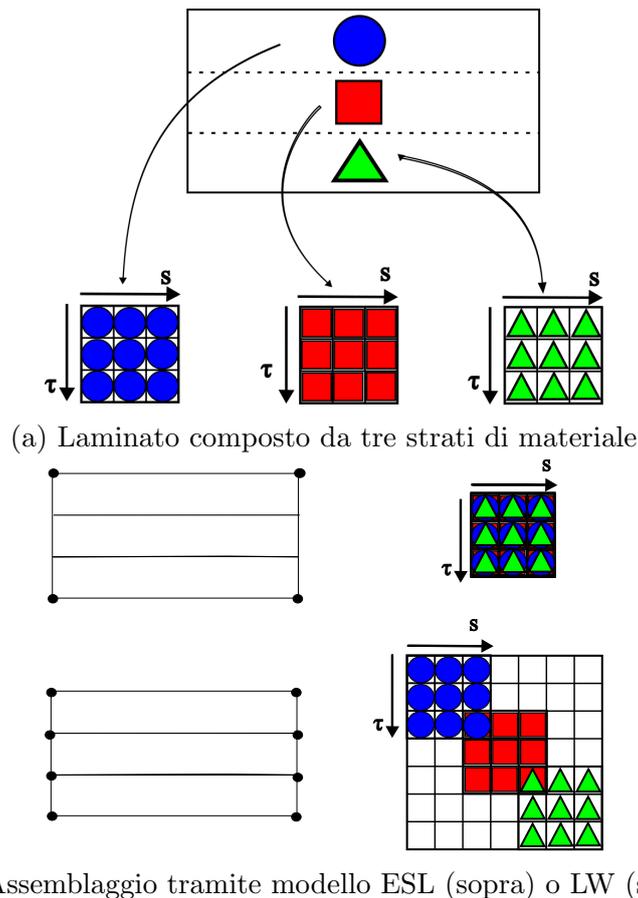


Figure 2.6: Schema di assemblaggio della matrice di rigidezza secondo metodo ESL o LW

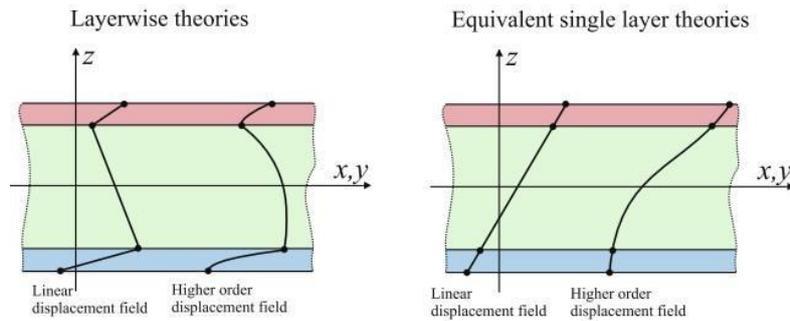


Figure 2.7: Confronto tra i modelli ESL e LW in termini di spostamenti e deformazioni [7]

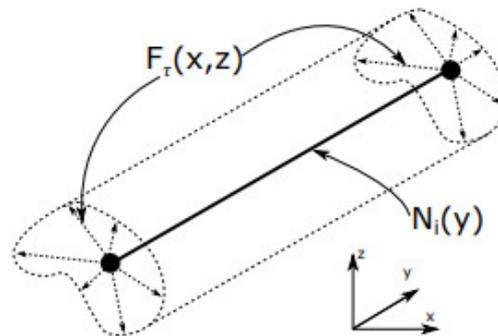


Figure 2.8: Modello 1D secondo la CUF descritto attraverso gli elementi finiti

## 2.2.2 Funzioni di forma

Dopo aver descritto la sezione attraverso le funzioni  $F_\tau$ , l'utilizzo del FEM richiede delle funzioni di forma  $N_i$  per approssimare il campo degli spostamenti tra due punti consecutivi. Nel caso di elementi 1D si utilizza una funzione di forma del tipo  $N_i(y)$ , con  $i = 1, 2, \dots, N_{el}$  numero di elementi della trave, variabile solo lungo la direzione prevalente.

Il tipo di elementi indica il numero di nodi utilizzato per elemento ed è associato all'ordine della funzione di forma. Per elementi trave si usano gli elementi B2, B3 o B4 che forniscono rispettivamente una funzione di forma lineare, parabolica o cubica. Le funzioni di forma degli elementi trave sono le seguenti:

$$N_1 = \frac{1}{2}(1 - r), \quad N_2 = \frac{1}{2}(1 + r), \quad \begin{cases} r_1 = -1 \\ r_2 = +1 \end{cases} \quad (2.59)$$

$$N_1 = \frac{1}{2}r(1-r), \quad N_2 = \frac{1}{2}r(1+r), \quad N_3 = -(1+r)(1-r), \quad \begin{cases} r_1 = -1 \\ r_2 = +1 \\ r_3 = 0 \end{cases} \quad (2.60)$$

$$\begin{aligned} N_1 &= -\frac{9}{16}\left(r + \frac{1}{3}\right)\left(r - \frac{1}{3}\right)(r-1), & N_2 &= \frac{9}{16}\left(r + \frac{1}{3}\right)\left(r - \frac{1}{3}\right)(r+1), \\ N_3 &= \frac{27}{16}(r+1)\left(r - \frac{1}{3}\right)(r-1), & N_4 &= -\frac{27}{16}(r+1)\left(r + \frac{1}{3}\right)(r-1), \end{aligned}$$

$$\begin{cases} r_1 = -1 \\ r_2 = +1 \\ r_3 = -\frac{1}{3} \\ r_4 = +\frac{1}{3} \end{cases} \quad (2.61)$$

(2.62)

Il valore di  $r$  può variare da -1 a +1 e indica la posizione del nodo all'interno dell'elemento trave

## Chapter 3

# Teorie di danneggiamento

I criteri di failure hanno come obiettivo quello di stabilire se il materiale di cui è composto una determinata struttura presenti o meno la comparsa del danno a seconda dello stato di tensione interno che si genera in seguito all'applicazione di un determinato carico [41]. Il tutto confluisce nella determinazione di un *failure index* (FI), un coefficiente che mette in relazione lo stato di tensione con la proprietà di resistenza del materiale: una volta raggiunto il valore unitario, si ha l'inizio della failure del materiale.

Un materiale omogeneo vede un'alterazione delle sue proprietà meccaniche una volta raggiunta la  $\sigma$  di snervamento, al di sopra della quale presenta un comportamento altamente non lineare.

Un materiale composito nasce dall'unione di due materiali dalle caratteristiche e proprietà diverse, combinati a formare lamine sottili di fibre annegate in una matrice, tendenzialmente di natura plastica, le quali possono essere impilate tra di loro secondo un'opportuna scelta di angolazione delle fibre tra i diversi strati. Per questo motivo è difficile individuare univocamente una tensione dalla quale far partire la *failure*, anche perché esibisce diverse tipologie di possibile danneggiamento:

- failure della matrice in seguito a compressione
- failure della matrice in seguito a trazione
- failure delle fibre a compressione
- failure delle fibre a trazione

- delaminazione degli strati

Il tipo di analisi condotto sugli elementi finiti per determinare i FI è lineare, in quanto veloce e semplice da utilizzare per ricavare lo stato tensionale interno alla matrice. In base al criterio di failure utilizzato verrà individuato un valore delle tensioni per cui si raggiunge FI pari a 1 al di sopra del quale il comportamento del materiale non sarà più lineare. In caso contrario è necessario modificare la geometria o il materiale della struttura, per fare in modo che essa sia in grado di sopportare le tensioni a cui sarà sottoposta durante la sua vita operativa.

Uno dei fattori che maggiormente influenzano l'accuratezza con cui i criteri sono in grado di prevedere possibili condizioni di failure, è rappresentato dalla qualità del campo di tensioni/deformazioni utilizzato per effettuare l'analisi. Per questo motivo è necessario utilizzare una teoria adeguata: ad esempio, le teorie classiche (classical laminate theories, CLTs) si basano su delle assunzioni che portano ad ottenere uno stato di tensione 2D [33] [34]. Tuttavia, l'utilizzo di uno stato di tensione bidimensionale, assieme ad una teoria di failure 2D, potrebbe portare a dei risultati che non sono soddisfacenti per la struttura ed il caso di carico considerati. Per questo motivo è necessario condurre un'analisi in grado di fornire lo stato tridimensionale di tensione all'interno del materiale in modo da poter valutare correttamente la comparsa di danneggiamento o meno. Spesso le componenti di tensioni al di fuori dal piano sono fondamentali per determinare la comparsa di fenomeni di danneggiamento come la delaminazione. Attraverso uno stato di tensione tridimensionale, inoltre, è possibile mettere in evidenza degli aspetti che tipicamente caratterizzano le strutture composite (che generalmente non sono catturati dalle CLTs): tra questi è possibile ricordare gli effetti di free-edge, l'effetto zig-zag degli spostamenti ed il soddisfacimento dei requisiti di tipo  $C_z^0$ . Le varie formulazioni dei criteri di failure fanno tutte riferimento a dei valori di tensione massimi a cui i diversi materiali sono in grado di resistere. Nello specifico li troviamo elencati in tabella 3.1:

$X_T$	Resistenza a trazione in direzione delle fibre
$X_C$	Resistenza a compressione in direzione delle fibre
$Y_T$	Resistenza a trazione in direzione perpendicolare alla fibre
$T_C$	Resistenza a compressione in direzione perpendicolare alle fibre
$S_{12}$	Resistenza a taglio longitudinale alle fibre
$S_{13}$	Resistenza a taglio longitudinale alle fibre
$S_{23}$	Resistenza a taglio trasversale alle fibre

Table 3.1: Indici di resistenza dei materiali compositi

## 3.1 Criteri di failure

In letteratura sono presenti diversi criteri di failure [42] che permettono di predire rotture macroscopiche nel laminato basandosi su analisi delle singole lamine presenti. Una distinzione può essere fatta distinguendo tra criteri interattivi e non interattivi e tra criteri intra e inter-laminari. La prima distinzione riguarda la capacità di considerare la reciproca interazione della presenza di diverse sollecitazioni; la seconda è la capacità di studiare i criteri di rottura individualmente all'interno di ogni lamina o considerarne l'interazione all'interfaccia tra esse.

### 3.1.1 Criterio della massima tensione e della massima deformazione

Questi criteri sono i più semplici e sono di tipo non interattivo. Si limitano a comparare la tensione o la deformazione presenti nel materiale con i relativi ammissibili. La rottura, banalmente, avviene quando una qualsiasi di esse supera il limite corrispondente. Le condizioni che portano al cedimento nel caso di massimo stress sono:

$$\sigma_{11} \geq X_T \quad \text{oppure} \quad \sigma_{11} \leq -X_C \quad (3.1)$$

$$\sigma_{22} \geq Y_T \quad \text{oppure} \quad \sigma_{22} \leq -Y_C \quad (3.2)$$

$$\tau_{12} \geq S_L \quad (3.3)$$

Analogamente, nel criterio di massimo strain si ha:

$$\epsilon_{11} \geq \epsilon_T \quad \text{oppure} \quad \epsilon_{11} \leq -\epsilon_C \quad (3.4)$$

$$\epsilon_{22} \geq \epsilon_T \quad \text{oppure} \quad \epsilon_{22} \leq -\epsilon_C \quad (3.5)$$

$$\gamma_{12} \geq \gamma_L \quad (3.6)$$

Dove  $\epsilon_T$  e  $\epsilon_C$  sono rispettivamente i limiti a tensione e compressione del materiale e  $\gamma_L$  è il limite di scorrimento a taglio.

### 3.1.2 Criteri di rottura polinomiale

I criteri di rottura polinomiale sono criteri intra-laminari di tipo interattivo che ricorrono ad equazioni polinomiali di secondo ordine o superiore per la definizione del limite di rotture. Tra i vari criteri che appartengono a questa famiglia si citano quello di Tsai-Wu [44] e Tsai-Hill[45]. La formulazione generale di questi criteri si basa sulla disequazione:

$$\begin{aligned} F_1\sigma_{11} + F_2\sigma_{22} + F_{11}\sigma_{11}^2 + F_{22}\sigma_{22}^2 + F_{33}\sigma_{33}^2 \\ + 2F_{12}\sigma_{11}\sigma_{22} + 2F_{23}\sigma_{33}\sigma_{22} + 2F_{13}\sigma_{11}\sigma_{33} \\ + F_{44}\tau_{13}^2 + F_{55}\tau_{23}^2 + F_{66}\tau_{12}^2 \geq 1 \end{aligned} \quad (3.7)$$

I coefficienti di ciascun termini sono distinguibili in termini lineari  $F_i$  e quadratici  $F_{ij}$ . I primi sono relativi alla direzione dello stress, i secondi si riferiscono alla forma ellissoidale della curva rappresentativa dello stato tensionale nella lamina analizzata. Questi indici sono ottenuti attraverso prove di natura sperimentale, anche di difficile implementazione e interpretazione.

### 3.1.3 Hashin 3D

Il criterio di failure Hashin 3D [47] è un criterio interattivo che considera un indice per ogni modo di failure del materiale, utilizzando tutte le componenti dello stato tensionale per ricavarli. Nel dettaglio, i 4 indici sono ricavati secondo le seguenti formule:

- Failure delle fibre a tensione:

$$FI_{FT,Hashin3D} = \left( \frac{\sigma_{11}}{X_T} \right)^2 + \frac{\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2}{S_{12}^2} \geq 1 \quad (3.8)$$

- Failure delle fibre a compressione:

$$FI_{FC,Hashin3D} = \left( \frac{\sigma_{11}}{X_C} \right) \geq 1 \quad (3.9)$$

- Failure della matrice a tensione:

$$FI_{MT,Hashin3D} = \frac{(\sigma_{22} + \sigma_{33})^2}{Y_T^2} + \frac{\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{33}}{S_{23}^2} + \frac{\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2}{S_{12}^2} \geq 1 \quad (3.10)$$

- Failure della matrice a compressione:

$$FI_{MC,Hashin3D} = \left[ \left( \frac{Y_C}{2S_{23}} \right)^2 - 1 \right] \left( \frac{\sigma_{22} + \sigma_{33}}{Y_C} \right) + \quad (3.11)$$

$$+ \frac{(\sigma_{22} + \sigma_{33})^2}{4S_{23}^2} + \frac{\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{33}}{S_{23}^2} + \frac{\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2}{S_{12}^2} \geq 1 \quad (3.12)$$

Il valore di resistenza a taglio trasversale è difficilmente ricavabile sperimentalmente. Per questo motivo si fa riferimento alla formula

$$S_T = Y_C \cos(\alpha) \left( \sin(\alpha) + \frac{\cos(\alpha)}{\tan(2\alpha)} \right) \quad (3.13)$$

dove  $\alpha$  è l'angolo del piano di frattura introdotto da Puck e Schuermann [48]

## 3.2 Progressive damage

Una volta raggiunto il valore unitario del failure index, il componente è ancora in grado di lavorare sotto determinati carichi in quanto la cricca si apre solo in alcune zone del materiale, ma subisce un deterioramento delle sue proprietà meccaniche. Questo fenomeno può essere affrontato seguendo due criteri diversi. Il primo metodo consiste nel rappresentare la cricca geometricamente, fornendo una descrizione fisicamente realistica del meccanismo di danneggiamento e delle varie interazioni, ma richiede elevati costi computazionali e la capacità di descrivere comportamento tra

le interfacce del materiale. Fa tipicamente utilizzo di elementi appositi secondo la *cohesive zone modelling* [51] [52]

Un secondo metodo è quello che va sotto il nome di Continuum Damage Mechanics (CDM) [53] [38], il quale mantiene la continuità del campo degli spostamenti all'interno del mesh. In pratica si sceglie di non rappresentare fisicamente la cricca ma di riprodurne gli effetti considerando un parametro di danno che va a influenzare il comportamento globale strutturale della struttura. Il vantaggio derivante da questo tipo di approccio consiste nella semplicità di implementazione ed un costo computazionale relativamente ridotto.

Un ulteriore metodo consiste in una combinazione tra CDM per danno intralaminare e un approccio discreto per delaminazione attraverso l'utilizzo del Cohesive Zone Model.

In queste analisi per semplificazione le relazioni geometriche sono di tipo lineare, mentre le relazioni costitutive sono di tipo non lineare e descritte dalla relazione:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^{sec} \boldsymbol{\epsilon} \quad (3.14)$$

### 3.2.1 Il metodo esplicito

Per risolvere questo tipo di problemi non lineari attraverso l'utilizzo della CUF, si possono utilizzare metodi numerici del tipo esplicito come il "semi-discrete balance of momentum" [13]:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} = \mathbf{f}_{ext}^{t+\Delta t} - \mathbf{f}_{int}^{t+\Delta t} \quad (3.15)$$

dove  $\mathbf{M}$  è la matrice delle masse,  $\mathbf{f}_{ext}$  e  $\mathbf{f}_{int}$  sono i vettori delle forze esterne ed interne. Il vettore delle forze interne è calcolabile tramite integrazione degli stress [53], mentre il problema non lineare dinamico si risolve esplicitamente utilizzando lo schema delle differenze centrali consultabile in [54].

$$\dot{\mathbf{u}}^{t+\frac{1}{2}\Delta t} = \frac{\mathbf{u}^{t+\Delta t} - \mathbf{u}^t}{\Delta t} \quad (3.16)$$

dove  $\mathbf{u}$  e  $\dot{\mathbf{u}}$  sono i vettori spostamento e velocità rispettivamente. L'equazione (3.16) viene riscritta per ottenere un'espressione dello spostamento aggiornato:

$$\mathbf{u}^{t+\Delta t} = \mathbf{u}^t + \Delta t \dot{\mathbf{u}}^{t+\frac{1}{2}\Delta t} \quad (3.17)$$

Questi nuovi spostamenti sono utilizzati per ricavare i nuovi stati di tensione e deformazione, grazie ai quali è possibile calcolare  $\mathbf{f}_{int}^{t+\Delta t}$ . L'accelerazione aggiornata si ricava direttamente dall'eq. (3.15) come

$$\ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} = \mathbf{M}^{-1} \{ \mathbf{f}_{ext}^{t+\Delta t} - \mathbf{f}_{int}^{t+\Delta t} \} \quad (3.18)$$

La velocità nell'intervallo intermedio necessaria per il ciclo seguente viene calcolata a partire dall'accelerazione come:

$$\dot{\mathbf{u}}^{t+\frac{3}{2}\Delta t} = \dot{\mathbf{u}}^{t+\frac{1}{2}\Delta t} + \Delta t \ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} \quad (3.19)$$

La velocità dell'intervallo intermedio dell'istante iniziale  $\dot{\mathbf{u}}^{\frac{1}{2}\Delta t}$  è determinata a partire dalla seguente assunzione:

$$\dot{\mathbf{u}}^{\frac{1}{2}\Delta t} = \dot{\mathbf{u}}^0 + \frac{1}{2} \Delta t \ddot{\mathbf{u}}^0 \quad (3.20)$$

dove la velocità e l'accelerazione iniziali  $\dot{\mathbf{u}}^0$  e  $\ddot{\mathbf{u}}^0$  sono valutate in base alle condizioni iniziali del sistema. Per ultimo, è possibile calcolare la matrice delle masse "lumped"  $\mathbf{M}$ , la quale permette di semplificare notevolmente il costo computazionale disaccoppiando il sistema:  $\mathbf{M}_{lumped}$  è infatti una matrice diagonale, in cui gli elementi sono sulla diagonale principale e tutti gli altri sono nulli.

Il time step critico che si utilizza per effettuare il ciclo è determinato a partire dalla massima frequenza del sistema attraverso la formula:

$$\Delta t_{critical} = \frac{2}{\omega_{max}} \quad (3.21)$$

Gli elementi finiti FE e il nucleo fondamentale  $\mathbf{K}$  necessari per risolvere il sistema sono assemblati come nel caso lineare.

Gli step necessari per applicare il metodo esplicito sono brevemente riportati:

- Inizializzare  $\mathbf{u}^0$  e  $\dot{\mathbf{u}}^0$ .
- Calcolare la matrice della masse "lumped"  $\mathbf{M}_{lumped}$  e calcolare la velocità iniziale nell'intervallo intermedio:  $\dot{\mathbf{u}}^{\frac{1}{2}\Delta t} = \dot{\mathbf{u}}^0 + \frac{1}{2} \Delta t \ddot{\mathbf{u}}^0$ .

### Ciclare sugli incrementi di tempo

Per ogni  $i$ -esimo step temporale  $t_i = t_{i-1} + \Delta t$

1. Calcolare i nuovi spostamenti  $\mathbf{u}^{t+\Delta t} = \mathbf{u}^t + \Delta t \dot{\mathbf{u}}^{t+\frac{1}{2}\Delta t}$
2. Calcolare l'incremento di spostamenti :  $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}^{t+\Delta t} - \mathbf{u}^t$
3. Per ciascuno degli step di integrazione valutare:
  - Deformazioni aggiornate:  $\boldsymbol{\epsilon}^{t+\Delta t} = \boldsymbol{\epsilon}^t + \mathbf{B}\Delta \mathbf{u}$ ;
  - Tensioni aggiornate:  $\boldsymbol{\sigma}^{t+\Delta t} = \mathbf{C}^{sec} \boldsymbol{\epsilon}^{t+1}$
4. Calcolare il vettore delle forze interne:  $\mathbf{f}_{int}^{t+\Delta t} = \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^{t+\Delta t} dV$
5. Calcolare le nuove accelerazioni:  $\ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} = \mathbf{M}^{-1} \{ \mathbf{M}^{-1} \{ \mathbf{f}_{ext}^{t+\Delta t} - \mathbf{f}_{int}^{t+\Delta t} \} \}$
6. Calcolare le velocità dell'intervallo intermedio:  $\dot{\mathbf{u}}^{t+\frac{3}{2}\Delta t} = \dot{\mathbf{u}}^{t+\frac{1}{2}\Delta t} + \Delta t \ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t}$

### 3.3 Il modello di danneggiamento

Una volta iniziato il danno, il criterio della progressione del danno richiede la misura della deformazioni equivalenti nelle direzioni longitudinale e trasversa alle fibre  $\epsilon_1^{eq}$  e  $\epsilon_1^{eq}$ :

$$\epsilon_1^{eq} = |\epsilon_{11}| \quad (3.22)$$

$$\epsilon_2^{eq} = \sqrt{(\gamma_{12})^2 + (\epsilon_{22})^2} \quad (3.23)$$

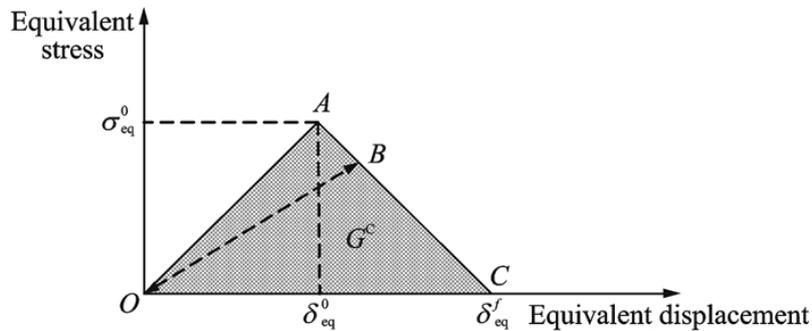


Figure 3.1: Evoluzione del danno fino alla rottura per un materiale composito [8]

dove  $\gamma_{12}$  si riferisce alla deformazione a taglio. Allo stesso modo le misure delle tensioni equivalenti sono:

$$\sigma_1^{eq} = \sigma_{11} \quad (3.24)$$

$$\sigma_2^{eq} = \frac{\tau_{12}\gamma_{12} + \sigma_{22}\epsilon_{22}}{\sqrt{(\gamma_{12})^2 + (\epsilon_{22})^2}} \quad (3.25)$$

Le deformazioni nel punto in cui si verifica l'inizializzazione del danno sono date da

$$\epsilon_\alpha^i = \epsilon_{\alpha|F_\alpha=1}^{eq}, \quad \alpha = 1, 2 \quad (3.26)$$

mentre le deformazione che si hanno alla saturazione del danno sono definite come:

$$\epsilon_1^s = \frac{2g_1^f}{X_T} \quad \text{and} \quad \epsilon_2^s = \frac{2g_2^f}{T} \quad (3.27)$$

dove  $g_\alpha^f$  è la densità di energia della frattura e  $T = \sigma_2^{eq}|_{F_2=1}$  è il valore massimo dello stress equivalente trasverso  $\sigma_2^{eq}$ .

A questo punto è possibile calcolare il parametro di danneggiamento  $\omega_\alpha$ , parametro che permette di calcolare la progressione del danno

$$\omega_\alpha = \left( \frac{\langle \epsilon_\alpha^{eq} - \epsilon_\alpha^i \rangle}{\epsilon_\alpha^s - \epsilon_\alpha^i} \right) \left( \frac{\epsilon_\alpha^s}{\epsilon_\alpha^{eq}} \right), \quad \alpha = 1, 2 \quad (3.28)$$

Da qui valutiamo il fattore di riduzione di rigidezza del materiale  $R_\alpha$  in seguito al danneggiamento attraverso

$$R_\alpha = (1 - \omega_\alpha), \quad \alpha = 1, 2 \quad (3.29)$$

A questo punto valutiamo la matrice di rigidezza secante nello stato danneggiato come

$$\mathbf{C}^{dam} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} (1 - R_2\nu_{23}\nu_{32}) R_1 E_1 & (\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{31}) R_1 R_2 E_1 & (\nu_{31} + R_2\nu_{21}\nu_{32}) R_1 E_1 & 0 & 0 & 0 \\ & (1 - R_1\nu_{31}\nu_{13}) R_2 E_2 & (\nu_{32} + R_1\nu_{31}\nu_{12}) R_2 E_2 & 0 & 0 & 0 \\ & & (1 - R_1 R_2 \nu_{21}\nu_{12}) E_3 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \Delta R_1 R_2 G_{12} & 0 & 0 \\ & & & & \Delta G_{23} & 0 \\ & & & & & \Delta G_{13} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

dove  $\Delta = 1 - R_2\nu_{23}\nu_{32} - R_1 R_2 \nu_{12}\nu_{21} - 2R_1 R_2 \nu_{31}\nu_{12}\nu_{23} - R_1\nu_{31}\nu_{13}$ .

Infine, lo stato tensionale viene valutato come:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^{dam} \boldsymbol{\epsilon} \quad (3.31)$$

# Chapter 4

## Analisi preliminari

Iniziamo la trattazione attraverso delle analisi preliminari in campo lineare utili a validare l'utilizzo della CUF per analisi strutturali. In particolare vengono affrontati problemi di complessità sempre crescente, comparando i risultati con quelli ottenuti da altri studi svolti in precedenza. Il primo caso è costituito da una trave a sezione quadrata incastrata a cui viene applicato un carico tale da produrre una pura flessione, la cui risoluzione è molto semplice e valutabile già attraverso l'*elastica* di Eulero-Bernoulli. Il secondo caso prevede l'aggiunta di una componente torsionale, ottenuta applicando il carico lungo una direzione non passante per il centro di taglio, la cui soluzione è meglio approssimata dalla teoria di Timoshenko. Infine si studia una trave la cui sezione è descritta da una geometria più complessa, in particolare una sezione a 'I', in cui sono presenti accoppiamenti flesso-torsionali e la soluzione è tanto più precisa quanto più alto è l'ordine della teoria utilizzata. Questo ultimo modello è utile anche a dimostrare la versatilità della CUF.

### 4.1 Trave a sezione quadrata

Iniziamo ad analizzare il problema di una trave a sezione quadrata incastrata all'origine e caricata da una forza  $F_z = -50N$  passante per il centro di taglio della sezione, diretta lungo il verso negativo delle  $z$ . La trave è costituita da una lega di alluminio caratterizzata da modulo di Young  $E = 75GPa$  e coefficiente di Poisson  $\nu = 0.33$ . La struttura ha una lunghezza  $L = 10m$  e il lato della sezione ha dimensione  $b = 0.2m$ .4.1

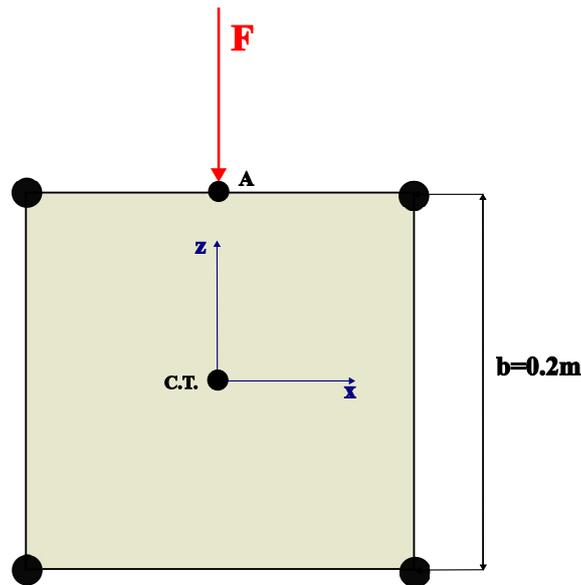


Figure 4.1: Dimensioni trave a sezione quadrata

La soluzione di tale problema viene confrontata con quella ricavata in [6]. Siamo interessati a valutare lo spostamento nel punto di coordinate  $(0.0, 10, 0.1)m$  posto all'estremo libero della trave, punto in cui viene applicato il carico. Si effettua una prima analisi di convergenza sul numero di elementi e il tipo in cui viene discretizzata la trave mantenendo fissa un'espansione di Lagrange di tipo L9 per la descrizione della sezione della trave Fig. 2.5. In particolare si utilizzano 3 diversi tipi di elementi trave B2, B3 e B4 e un numero di elementi variabile da 1 a 20. In tabella 4.1 sono riportati i risultati dell'analisi e il grafico in figura 4.2 mostra visivamente l'andamento a convergenza all'aumentare del numero di elementi. Dall'osservazione di questi primi semplici risultati si può dire che:

- Per un numero di elementi B3 e B4 pari a 20 la soluzione risulta aver raggiunto la convergenza ad un valore di spostamento verticale pari a  $u_z = -1.660e - 3mm$  nel punto A.
- Gli elementi B4 forniscono dei risultati accettabili già a partire da un numero di elementi molto minore grazie all'utilizzo di interpolazioni cubiche.
- Gli elementi B2, elementi lineari e molto semplici, necessitano di un numero di elementi di gran lunga maggiore per giungere a convergenza, motivo per il quale le analisi sono state concluse senza che per essi si giunga a convergenza.

N° elementi	Tipologia elementi	$-u_z * 10^{-3}$ punto A [mm]
1	B2	1.775e-3
	B3	1.189
	B4	1.533
2	B2	7.59e-3
	B3	1.489
	B4	1.598
3	B2	1.579e-2
	B3	1.558
	B4	1.598
5	B2	4.311e-2
	B3	1.607
	B4	1.640
10	B2	0.1597
	B3	1.640
	B4	1.654
20	B2	0.4948
	B3	1.654
	B4	1.660
40	B2	1.044
	B3	1.660
	B4	1.662

Table 4.1: Calcolo degli spostamenti di una trave a sezione quadrata

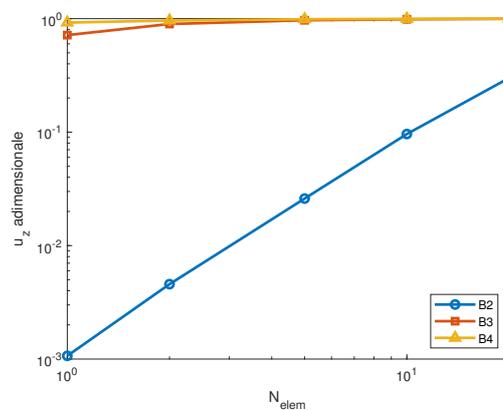


Figure 4.2: Analisi di convergenza di una trave a sezione quadrata caricata puramente a flessione

Si effettua quindi un'analisi attraverso 20 elementi B4 facendo variare la teoria utilizzata per risolvere la struttura. In questa prima fase infatti è stata utilizzata un'espansione di Lagrange L9 per descrivere la sezione, ma attraverso la CUF è facile ricavare le diverse teorie, classiche o di ordine elevato, semplicemente modificando l'ordine della teoria dell'espansione scelta. Si confrontano quindi i risultati ottenuti variando l'ordine dell'espansione di Taylor con quelli contenuti all'interno di [6], in cui la trave è stata risolta in maniera analitica (4.2).

Modello	$u_z[mm]$ punto A
Carrera [6]	1.667
EBBT	1.667
TBT	1.667
TE2	1.660
TE5	1.660
TE8	1.660
TE15	1.660
LE9	1.660

Table 4.2: Calcolo degli spostamenti di una trave a sezione quadrata con formulazione CUF 1D

Dall'analisi dei risultati si può dire che:

- Tutte le analisi forniscono lo stesso risultato a causa dell'estrema semplicità dell'esercizio legato all'assenza di effetti di ordine secondario. Già la teoria di Eulero-Bernoulli, in cui vengono trascurati gli effetti di taglio, è in grado di risolvere correttamente la struttura.
- Aumentare l'ordine dell'espansione allunga solamente i tempi di calcolo in quanto aumentano i DOF legati al problema senza migliorare in maniera consistente la soluzione.

## 4.2 Trave a sezione quadrata con taglio

Introduciamo un po' di complessità analizzando una trave simile alla precedente in cui la forza stavolta non passa per il centro di taglio della sezione. Per confrontare i risultati con [55], le dimensioni della trave in questo caso sono lunghezza  $L = 2m$  e lato della sezione di forma quadrata pari a  $b = 0.2m$  come nel caso precedente, la forza ha un'intensità  $F = (0, 0 - 50)N$  ed è applicata nel punto di

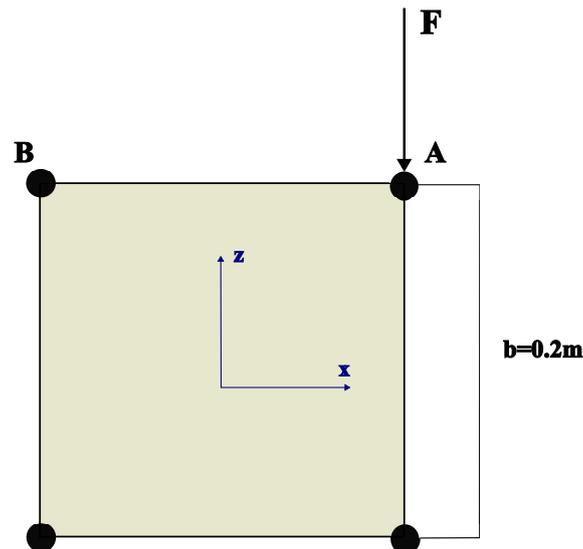


Figure 4.3: Sezione trave

coordinate  $(0.1, 2, 0.1)$ , vertice del estremo libero 4.2 . Gli spostamenti vengono valutati nei punto  $A = (0.1, 2, 0.1)$ , stesso punto in cui viene applicata la forza, e  $B = (-0.1, 2, 0.1)$ : in questo modo è possibile valutare un'eventuale torsione della sezione. La struttura è realizzata con materiale monolitico isotropo in lega di alluminio con modulo di Young  $E = 75GPa$ , coefficiente di Poisson  $\nu = 0.33$ . come nell'analisi precedente, si è scelto di utilizzare in prima battuta delle espansioni di Lagrange di tipo L9 per la discretizzazione della struttura. L'analisi di convergenza è stata condotta nuovamente variando il numero e il tipo di elementi 1D utilizzati per la discretizzazione: elementi a due nodi B2, a 3 nodi B3 o a 4 nodi B4 con numero variabile da 1 a 20 di dimensione uguale. I risultati sono riportati nella tabella 4.3:

In figura 4.4 vengono mostrati gli andamenti a convergenza che si ottengono aumentando il numero di elementi per i differenti tipi di elementi utilizzati. I valori sono normalizzati rispetto al miglior risultato, ottenuto con 20 elementi B4. Dalla tabella 4.3 e dai grafici 4.4 è osservabile che:

- Lo spostamento converge ad un valore di  $1.345mm$  e  $1.315mm$  nei punti A e B rispettivamente, valore ottenibile con 20 elementi B4 e praticamente costante all'aumentare di questi, come osservabile dall'andamento delle curve dei grafici 4.4.
- I due punti presentano spostamenti diversi dati dalla comparsa di un momento

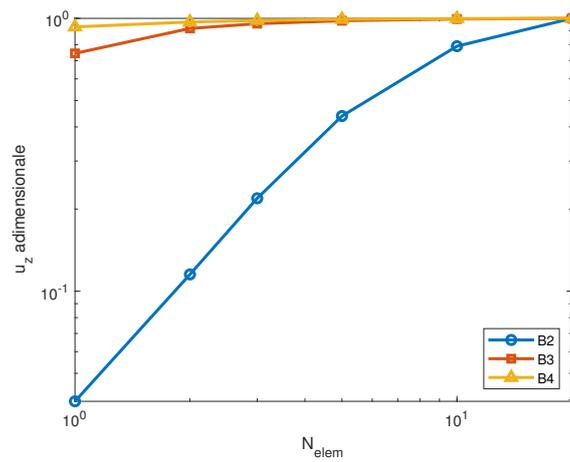
N° elementi	Tipologia elementi	$-u_z * 10^{-3}$ punto A [mm]	$-u_z * 10^{-3}$ punto B [mm]
1	B2	0.4814	0.2138
	B3	9.9917	9.7212
	B4	12.513	12.239
2	B2	1.4055	1.1357
	B3	12.331	12.056
	B4	13.042	12.760
3	B2	2.6720	2.4003
	B3	12.840	12.560
	B4	13.218	12.930
5	B2	5.3485	5.0731
	B3	13.163	12.877
	B4	13.347	13.052
10	B2	9.6460	9.3629
	B3	13.354	13.059
	B4	13.425	13.125
20	B2	12.198	11.907
	B3	13.426	13.126
	B4	13.448	13.147

Table 4.3: Calcolo degli spostamenti di una trave a sezione quadrata nel punto A e B

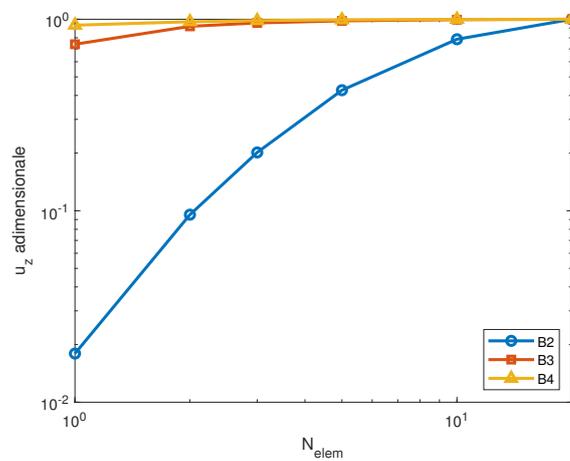
torsionale in seguito all'applicazione della forza secondo una direzione non passante per il centro di taglio della sezione.

A questo punto viene condotta un'analisi sul tipo e sull'ordine dell'espansione utilizzata. In tabella 4.4 sono riportati i risultati, da cui si può osservare:

- La teoria classica di Eulero-Bernoulli non è in grado di cogliere il diverso spostamento tra i due punti della sezione della trave in quanto non considera componenti di stress di taglio fuori dal piano  $xy$ , quindi bisogna aumentare l'ordine della teoria per avere soluzioni più precise.
- Con la soluzione data dalla teoria di Timoshenko, che va a considerare componenti di sforzi di taglio costanti fuori dal piano si ottiene un valore molto prossimo a quello di riferimento [55].
- Un confronto tra le due espansioni di Lagrange L4 e L9 mostra come la seconda sia più adatta a valutare fenomeni di ordine maggiore.



(a) Analisi di convergenza punto A



(b) Analisi di convergenza punto B

Figure 4.4: Analisi di convergenza trave a sezione quadrata

Modello	$-u_z[mm]$ punto A	$-u_z[mm]$ punto B
Pagani [55]	13.26	13.58
EBBT	13.333	13.333
TBT	13.29	13.563
LE4	11.01	11.30
LE9	13.167	13.498
TE2	13.147	13.448
TE5	13.155	13.642
TE8	13.157	13.78
TE15	13.158	14.001

Table 4.4: Calcolo degli spostamenti di una trave a sezione quadrata con forza applicata fuori dal centro di taglio con formulazione CUF 1D nei punti A(-0.1,2,0.1) e B(0.1,2,0.1)

### 4.3 Trave con sezione a I

Passiamo all'analisi degli spostamenti di una trave incastrata a  $y = 0$  con sezione a I, a cui viene applicata una forza concentrata  $F = (0, 0, -2000)N$  nell'estremo libero di coordinate  $(0.048, 1, 0.05)m$ . La trave è lunga  $L = 1m$  e alta  $h = 100mm$ , mentre la sezione è costituita da due solette lunghe  $w = 96mm$  e spesse  $t_1 = 8mm$  e da un'anima spessa  $t_2 = 5mm$  (figura 4.5). Il materiale di cui è costituita la trave è isotropo con modulo di young  $E = 200GPa$ , coefficiente di Poisson  $\nu = 0.29$ , valori tipici degli acciai.

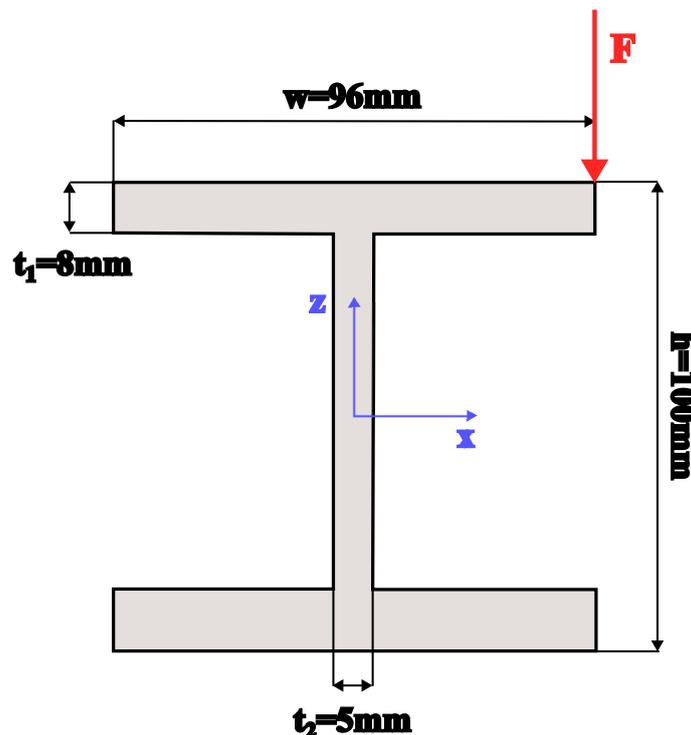


Figure 4.5: Dimensioni sezione I

Al fine di cogliere in maniera più efficace gli spostamenti della sezione viene utilizzata l'unione di 7 elementi L9 come in figura 4.6

In maniera del tutto simile all'analisi svolta nel caso precedente, si vanno a valutare gli spostamenti al centro della sezione all'estremità libera (punto A) e nel punto di applicazione del carico (punto B) adottando un numero crescente di elementi 1D variandone il tipo tra B2, B3 e B4. La sezione della trave è discretizzata sempre attraverso l'unione dei 7 elementi L9. I risultati dell'analisi sono riportati nella tabella 4.5:

Ancora una volta, risulta evidente come la miglior soluzione si ottiene con 20 ele-

N°elementi	Tipologia elementi	$-u_z$ punto A [mm]	$-u_z$ punto B [mm]
1	B2	0.0497	0.1867
	B3	0.7932	9.7212
	B4	0.9573	2.1850
2	B2	0.1715	0.5014
	B3	0.9480	2.1639
	B4	0.9822	2.2658
3	B2	0.3160	0.8225
	B3	0.9729	2.2344
	B4	0.9903	2.2927
5	B2	0.5581	1.3386
	B3	0.9877	2.2822
	B4	0.9965	2.3106
10	B2	0.8302	1.9164
	B3	0.9969	2.3117
	B4	1.0007	2.3212
20	B2	0.9501	2.1854
	B3	1.0009	2.3220
	B4	1.0025	2.3293

Table 4.5: Calcolo degli spostamenti di una trave a sezione I nel punto A e B

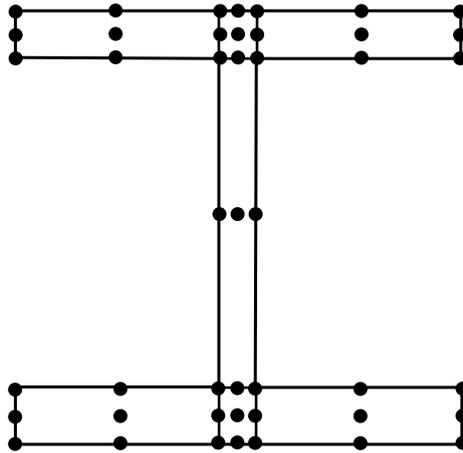


Figure 4.6: Discretizzazione dei 7 elementi all'interno della sezione a I attraverso l'utilizzo di espansione LE9

menti B4, valore rispetto al quale vengono normalizzati i risultati riportati all'interno delle figure 4.7. Nello specifico, nella figura 4.7a si mostra la convergenza nel punto A ottenibile già con 10 elementi B3, mentre nella figura 4.7b si vede come la convergenza nel punto B sia raggiunta per 20 elementi B4.

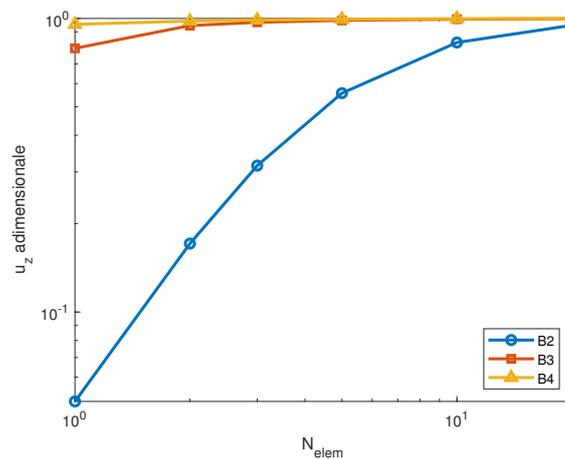
Partendo adesso da questo risultato, si procede a effettuare un'analisi sulla teoria utilizzata mantenendo 20 elementi B4 per la discretizzazione unidimensionale e cambiando di volta in volta la teoria e l'espansione CUF. In tabella 4.6 sono riportati i risultati per le diverse teorie, risultati confrontati con i valori ottenuti dalla reference [55] in cui la trave è stata modellizzata e analizzata tramite un modello 3D risolto con il software Nastran. Da questi risultati si può notare che:

Modello	$u_z[mm]$ punto A	$u_z[mm]$ punto B
Nastran 3D [55]	0.956	2.316
7LE9	1.003	2.329
EBBT	0.9509	0.9510
TBT	0.9641	0.9781
TE2	0.9575	0.9790
TE5	0.9937	1.320
TE8	0.9986	1.841
TE12	1.000	2.200

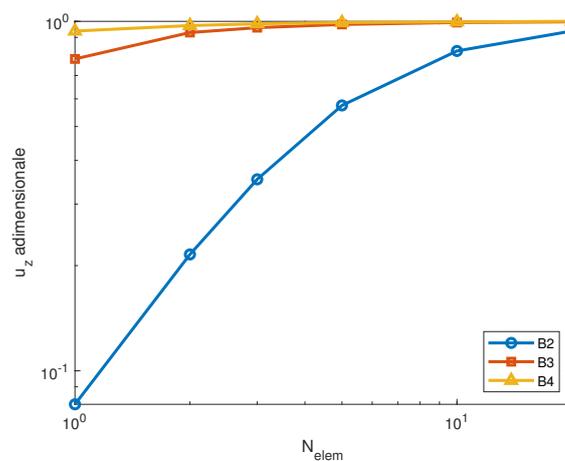
Table 4.6: Calcolo degli spostamenti di una trave a sezione a I

- Per il punto A, valutato nel centro della sezione, quasi tutte le teorie adottate forniscono un risultato in linea con la reference [55], in quanto il principale contributo a cui è sottoposto è quello flessionale.

- Per il punto B il risultato migliore si ottiene con 7 elementi LE9, in quanto il modello di Lagrange è quello che riesce a descrivere meglio sezioni complesse geometricamente; solo con ordini molto elevati di TE si riesce ad ottenere dei risultati soddisfacenti riguardo il punto B, ma i tempi di calcolo risultano essere notevolmente aumentati e non è conveniente.



(a) Analisi di convergenza punto A



(b) Analisi di convergenza punto B

Figure 4.7: Analisi di convergenza trave con sezione a I

Un'ulteriore analisi è stata condotta andando ad infittire la mesh di punti nell'estremità della sezione che presenta maggiori spostamenti in modo da analizzare meglio questa porzione di trave. In particolare, l'elemento su cui risulta applicata la forza è stato scomposto in ulteriori 3 elementi L9, arrivando a calcolare uno spostamento finale pari a  $2.334mm$ , molto prossimo a quello valutato utilizzando solamente 7 elementi L9.

La potenza degli elementi LE tornerà utile nelle analisi su laminati compositi.

# Chapter 5

## I laminati compositi

In questo capitolo vengono studiate diverse travi in materiale composito, caratterizzate da una sovrapposizione di strati realizzati principalmente in CFRP. Viene applicato principalmente un metodo LW per l'analisi delle strutture attraverso l'utilizzo di LE di vario ordine all'interno della CUF. Le analisi sono volte a mostrare il complesso andamento delle tensioni all'interno delle strutture laminate, con particolare attenzione a quelle regioni in prossimità dell'estremo libero (*free edge*), spesso determinanti per la comparsa di fenomeni di danneggiamento quali la delaminazione. Inoltre, si intende validare l'applicazione della CUF 1D allo studio di laminati, mostrandone la sua versatilità e compatibilità con metodi LW, preferibili nello studio di queste strutture. L'analisi parte dallo studio di una trave in composito dalla sezione rettangolare semplice, a seguire uno studio su una trave a sezione sottile *thin walled* con sezione a 'C'. Nello studio del problema di "Pipes-Pagano" viene mostrato come diversi tipi di laminazione influenzano l'andamento delle tensioni. In ultima analisi ci si avvicina allo studio di un TRAC boom, struttura ultrasottile in composito di nostro interesse, su cui viene effettuato anche uno studio di danneggiamento attraverso la determinazione dei *failure index*.

### 5.1 Trave in composito

Passiamo adesso allo studio dello spostamento di una trave in composito composta da 8 strati di due tipi di materiale ortotropo disposti in maniera simmetrica rispetto alla mezzeria 5.1, stesso problema presentato in [9] con cui verranno confrontate

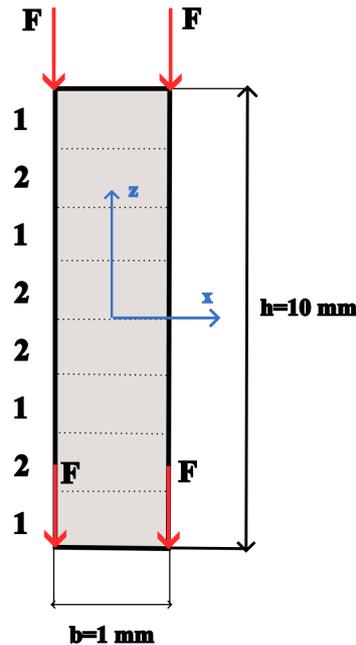


Figure 5.1: Sezione di una trave in composito simmetrica ad 8 strati di materiale ortotropo

le soluzioni. Le caratteristiche geometriche della trave sono: altezza  $h = 10\text{mm}$ , larghezza  $b = 1\text{mm}$  e lunghezza  $L = 90\text{mm}$ . La trave risulta incastrata all'origine  $L = 0\text{mm}$  ed è caricata all'estremità libera con 4 forze concentrate nei vertici della sezione di intensità  $F = 0.05\text{N}$  diretti lungo l'asse negativo delle  $z$ . Ogni lamina ha uguale spessore, pari a  $1.25\text{mm}$ . Il materiale è dotato delle seguenti proprietà:  $E_T = E_z = 1\text{GPa}$ ,  $\nu_{LT} = \nu_{Lz} = \nu_{zT} = 0.25$ ,  $GLT = G_{Lz} = G_{zT} = 0.5\text{GPa}$ , l'unica differenza risiede nei moduli di Young nella direzione delle fibre  $E_{L1} = 30\text{GPa}$ ,  $E_{L2} = 5\text{GPa}$ . I diversi strati di materiale sono alternati in modo da avere una distribuzione simmetrica e l'orientazione delle fibre è sempre con un angolo di  $0$  rispetto all'asse longitudinale della trave. Si procede con l'effettuare un'analisi di convergenza per gli spostamenti in direzione  $z$  del punto di coordinate  $(0, L, h/2)$ . In questa fase, si considera la sezione della trave descritta sempre da 8 espansioni di tipo L16 (una per ogni strato di materiale), mentre la trave viene discretizzata con 4, 6, 8 e 10 elementi FEM di tipo B2, B3, B4. In tabella 5.1 sono riportati i valori delle analisi svolte. Come si può notare anche dal grafico 5.2 in cui i valori degli spostamenti sono adimensionalizzati rispetto al massimo spostamento calcolato, l'analisi raggiunge la convergenza a  $u_z = 3.050e^{-2}\text{mm}$  per 10 elementi B4, discretizzazione che verrà utilizzata nelle analisi successive per confrontare i risultati provenienti da diverse teorie.

N°elementi	Tipologia elementi	$-u_z * 10^{-2}$ [mm]
4	B2	2.7183
	B3	3.0382
	B4	3.0440
6	B2	2.8874
	B3	3.0423
	B4	3.0476
8	B2	2.9525
	B3	3.0448
	B4	3.0500
10	B2	2.9843
	B3	3.0460
	B4	3.0500

Table 5.1: Calcolo degli spostamenti di una trave in composito a 8 strati simmetrica

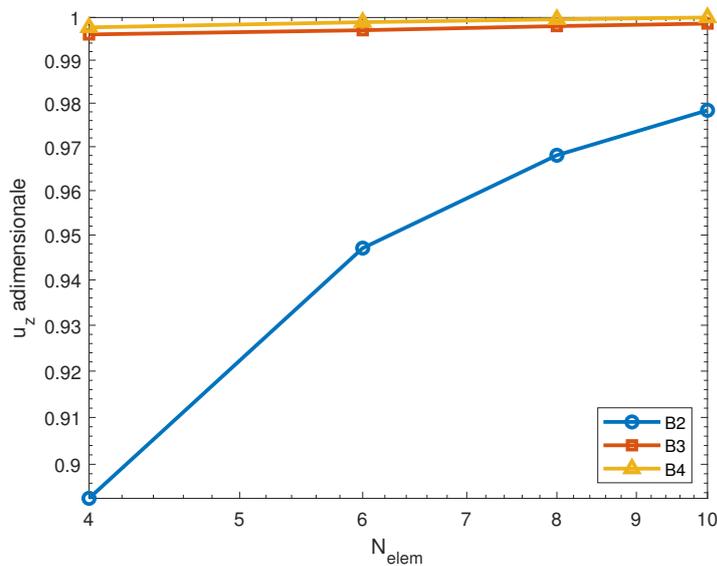


Figure 5.2: Analisi di convergenza di una trave in composito

Si procede, quindi, ad analizzare la stessa trave con 10 elementi B4 modificando di volta in volta la teoria utilizzata. I risultati sono mostrati in tabella 5.2 e vengono inoltre anche confrontati con la soluzione analitica di Surana & Nguyen ([9]) In tabella 5.2 oltre agli spostamenti vengono riportati nella terza colonna i gradi di libertà del modello, indice del costo computazionale, e l'errore percentuale rispetto

Modello	$u_z * 10^{-2}mm$	DOF	err %
Surana& Nguyen [9]	3.031		0
8LE4	3.053	1674	0.72
8LE9	3.054	4743	0.75
8LE16	3.050	9300	0.62
EBBT	2.629	279	15.29
TBT	2.989	279	1.41
TE2	3.004	558	0.9
TE5	3.059	1953	0.92
TE8	3.054	4185	0.75
TE15	3.052	12648	0.69

Table 5.2: Calcolo degli spostamenti di una trave a 8 strati con formulazione CUF 1D.

alla soluzione nell'ultima. I risultati ottenuti con le diverse teorie ci permettono no di affermare che:

- La EBBT, trascurando le tensioni di taglio, è quella che approssima in maniera peggiore la soluzione della trave, con il più alto errore percentuale rispetto alla soluzione analitica pari a 15.29 %, risultano non accettabile nella maggior parte dei casi; già con TBT i risultati risultano essere molto prossimi alla soluzione, con un errore che si aggira attorno all' 1%.
- Aumentare di troppo l'ordine della teoria non serve a fornire grossi miglioramenti della soluzione trovata, aumentando inutilmente il numero di DOF e i tempi di calcolo della soluzione; la miglior soluzione in termini di errore/costo si ottiene con 8LE4.
- Lo stesso può dirsi per le LE, in cui la variazione della tipologia tra LE4, LE9 e LE16 mantenendo costante il numero di espansioni non fornisce miglioramenti alla soluzioni.

Interessante nel caso dei laminati compositi studiare come si comporta l'andamento delle tensioni all'interno della sezione del materiale. Nell'immagine 5.3 è possibile osservare l'andamento delle tensioni in direzione parallela all'asse della trave attraverso lo spessore della sezione. La coordinata  $z$  è stata normalizzata rispetto allo spessore della trave complessivo. I confronti avvengono tra le espansioni TE8 e TE15, espansioni di ordine maggiore con cui sono state effettuate le analisi, l'espansione LE9 e i risultati ottenuti tramite il lavoro di "Surana" [9]. I risultati risultano essere

completamente sovrapponibili, sia come andamento che come intensità. Le tensioni maggiori si sviluppano nel materiale 1, il quale ha maggiore modulo E. Nel caso in esame di trave inflessa, la sezione inferiore della trave è sollecitata a compressione mentre quella superiore a trazione, con tensioni di pari intensità in modulo. Per quanto riguarda le tensioni fuori dal piano si fa riferimento all'immagine 5.4. Anche questa volta il confronto con la reference porta buoni risultati, con andamento migliore fornito dalle espansioni TE, mentre quelle LE risultano fornire una variazione più "smooth" dei valori delle tensioni.

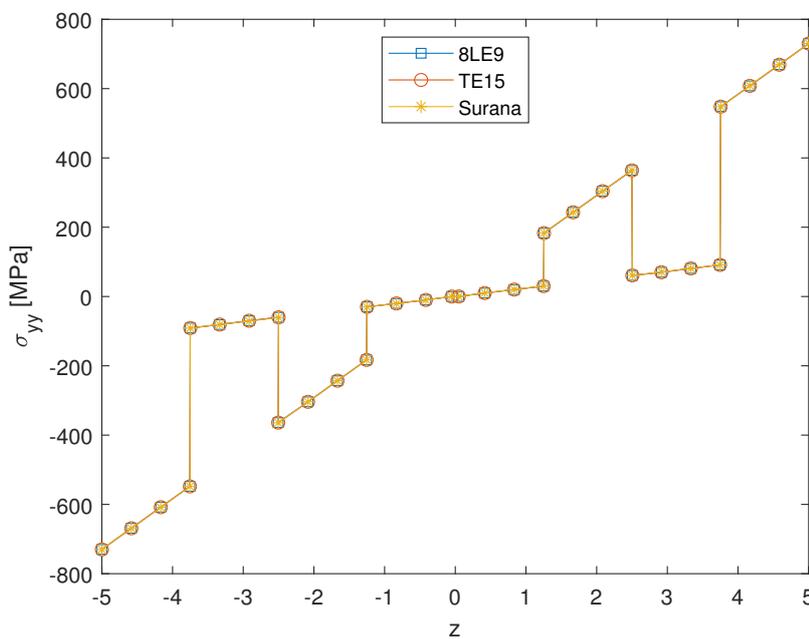


Figure 5.3: Andamento delle  $\sigma_{yy}$  attraverso la sezione. Il riferimento "Surana" è preso da [9].

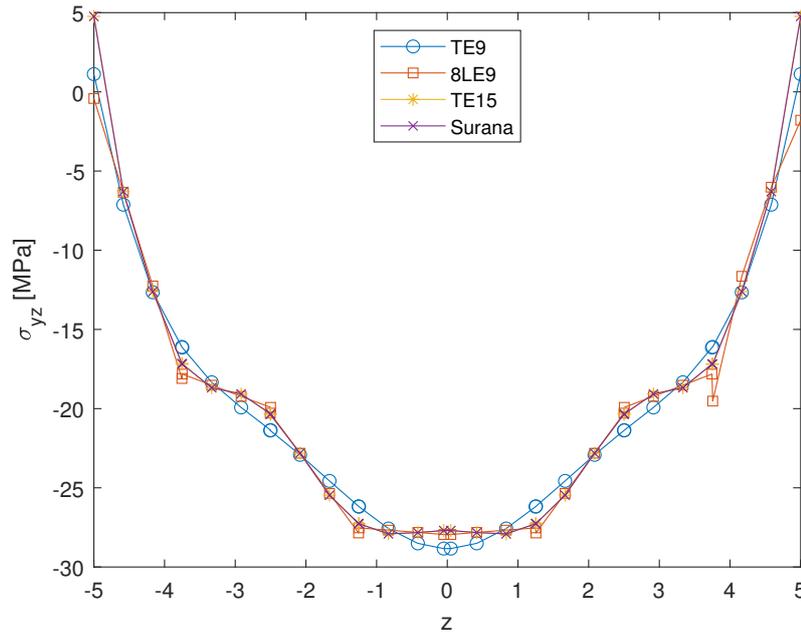


Figure 5.4: Andamento delle  $\sigma_{yz}$  attraverso la sezione. Il riferimento "Surana" è preso da [9].

## 5.2 Analisi di struttura 'thin walled' con sezione a C

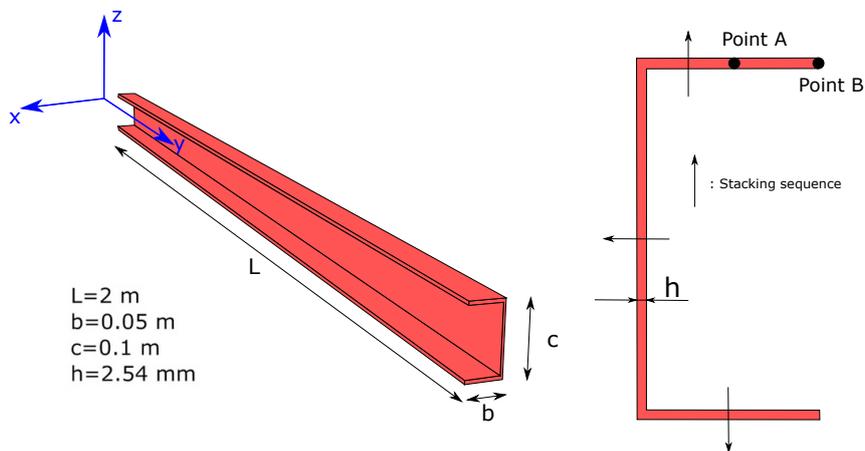


Figure 5.5: Proprietà geometriche della trave con sezione a C

Viene analizzato il comportamento di una piastra con sezione a C realizzata con 4 layer di materiale composito IM7/8552 con orientazione  $[0^\circ/90^\circ/45^\circ/-45^\circ]$ . I risultati di confronto sono presi da [10]. La geometria della trave è mostrata in figura 5.5 e vede la trave con una lunghezza  $L = 2m$ , larghezza  $b = 0.05m$ , altezza  $c = 0.1m$  e spessore  $h = 2.54mm$ . Le proprietà del materiale sono  $E_1 = 165GPa$ ,  $E_2 = 2GPa$ ,

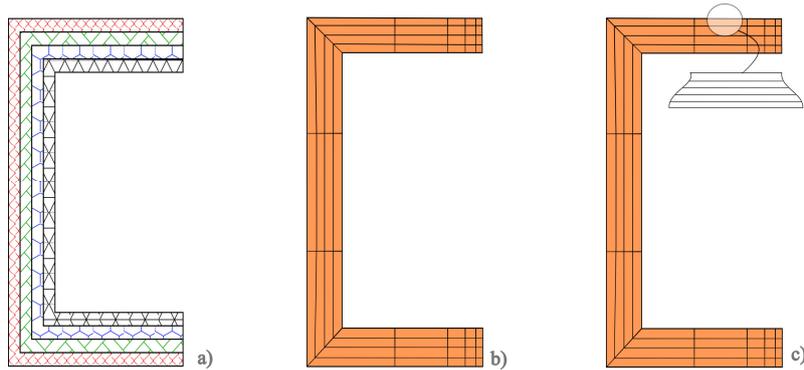


Figure 5.6: Sezione trave C: a) laminazione  $[0/90/45/-45]$  b) discretizzazione con espansione per lamina c) discretizzazione con 5 espansioni per lamina

$E_3 = 9GPa$ ,  $\nu_{12} = \nu_{13} = 0.34$ ,  $\nu_{23} = 0.5$ ,  $G_{12} = G_{13} = 5.6GPa$ ,  $G_{23} = 2.8GPa$ , dove 2 indica la direzione longitudinale mentre 3 quella trasversale. Tutti gli strati hanno lo stesso spessore pari a  $t = 0.635mm$  e sono impilate dall'interno verso l'esterno. Le condizioni al contorno vedono un incastro ad  $y = 0$  e l'imposizione di uno spostamento pari a  $0.02m$  ad  $y = L$ .

Le analisi svolte vengono confrontati con i risultati ottenuti da [10]. In particolare sono svolte 3 analisi differenti:

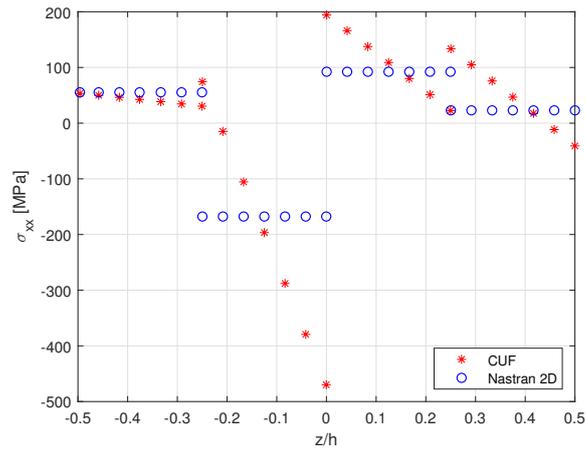
- $\sigma_{xx}$  e  $\sigma_{xy}$  vengono valutate lungo lo spessore della flangia superiore della trave nel punto  $A(0, L/2)$
- $\sigma_{zz}$  e  $\sigma_{yz}$  vengono valutati tra le lamine poste a  $90/45$  e a  $45/-45$  nella flangia superiore della sezione a metà della lunghezza della trave lungo la direzione  $x$  per un tratto di struttura pari a 3 volte lo spessore della flangia
- $\sigma_{zz}$  e  $\sigma_{yz}$  vengono calcolati all'estremo libero  $B(b/2, L/2)$  lungo lo spessore della flangia

Le analisi vengono condotte utilizzando 8 elementi B4 per discretizzare la trave mentre si utilizzano 3 diversi tipi di espansioni di Lagrange per la definizione della sezione 5.6:

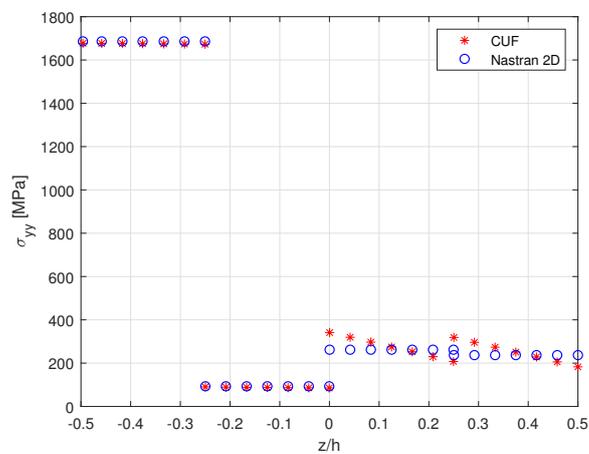
- 1 elemento LE9 per ogni lamina
- 5 elementi LE9 per ogni lamina
- 5 elementi LE16 per ogni lamina

. La prima analisi è condotta lungo lo spessore al centro della flangia superiore e non mostra particolari fenomeni, in quanto le tensioni nel piano mostrano andamenti lineari o addirittura costanti nei singoli strati. Il confronto con la soluzione ottenuta in Nastran 2D mostra un miglioramento della soluzione ottenuta, valutando andamenti delle tensioni che non sono costanti nei diversi strati ma variano linearmente, come mostrato in Fig. 5.7. Il valore medio di queste tensioni risulta comunque coincidere con quello ottenuto dal riferimento Nastran 2D. La seconda analisi studia gli effetti del free-edge. Per ottenere risultati migliori, si è scelto di infittire la mesh della sezione spostandosi verso l'estremità della flangia, zona in cui si valutano questi effetti. La scelta di una dimensione pari a 3 volte lo spessore serve per isolare ed evidenziare la zona interessata in cui si manifesta tale fenomeno: le tensioni trasversali e di taglio si mantengono pressochè nulle fino ad una zona molto prossima all'estremità della flangia per poi mostrare un'improvvisa intensificazione delle tensioni fuori dal piano  $xy$  (Figg. 5.8, 5.9) (teoricamente tendono ad infinito). Per questo motivo è inutile riportare l'andamento di queste tensioni lungo tutta la larghezza della sezione. È molto importante avere un modello FEM che sia in grado di calcolare le tensioni fuori dal piano in maniera precisa in queste zone. Si ha infatti un aumento esponenziale delle tensioni e dalle analisi si osserva come aumentare il numero degli elementi e l'ordine dell'espansione scelta permetta di valutare meglio le tensioni al *free edge*, ricavando valori più elevati delle tensioni. Una loro valutazione più raffinata permette di avere una maggiore precisione nella valutazione del FI dovuto alla delaminazione. Un confronto fra gli stress valutati all'interfaccia tra due laminazioni diverse mostra come al variare degli strati le tensioni  $\sigma_{zz}$  e  $\sigma_{yz}$  possano essere sia di compressione che di tensione.

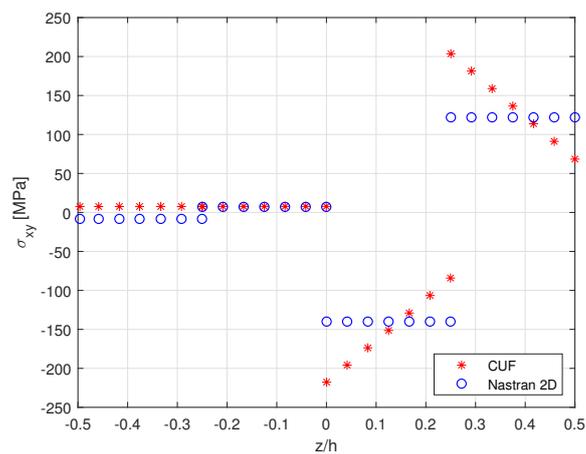
La terza analisi serve a validare l'utilizzo della CUF per analisi di *free edge* andando a confrontare i risultati delle diverse analisi con quelli forniti dall'analisi della stessa trave risolta attraverso il software commerciale Nastran 3D. È un'analisi complementare alla precedente in quanto ci permette di vedere l'andamento delle tensioni fuori dal piano lungo lo spessore del *free edge* anzicchè tra due lamine. I valori massimi che vengono raggiunti dalle tensioni sono infatti gli stessi di quelli mostrati in precedenza. Dalla figura 5.10, è ancora più evidente come la CUF



(a)  $\sigma_{xx}$

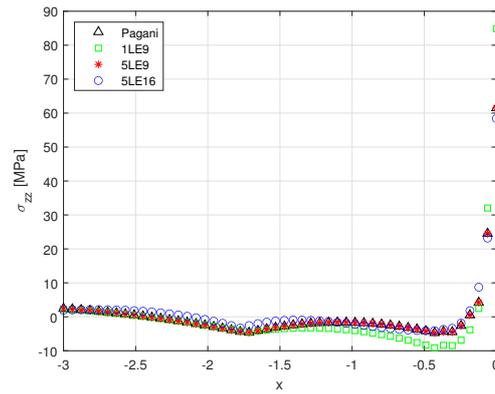


(b)  $\sigma_{yy}$

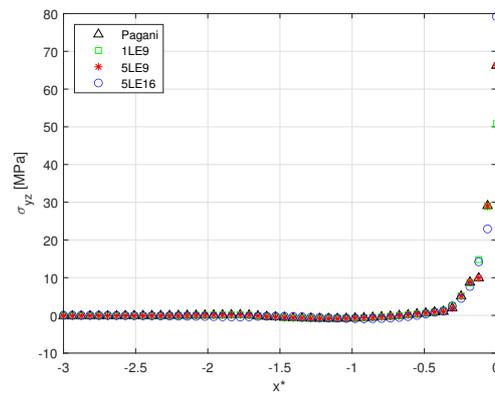


(c)  $\sigma_{xy}$

Figure 5.7: Tensioni nel piano  $xy$  nel punto A della sezione a metà della trave a C. Il riferimento Nastran-2D è preso da [10].



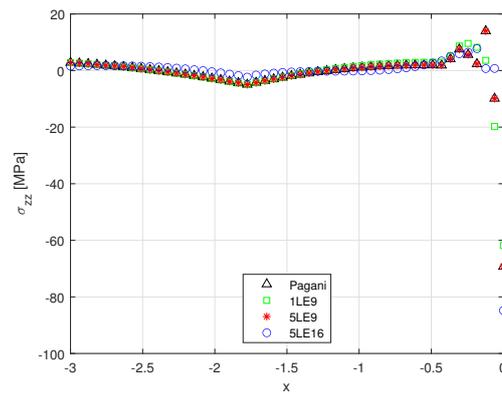
(a) Stress normale



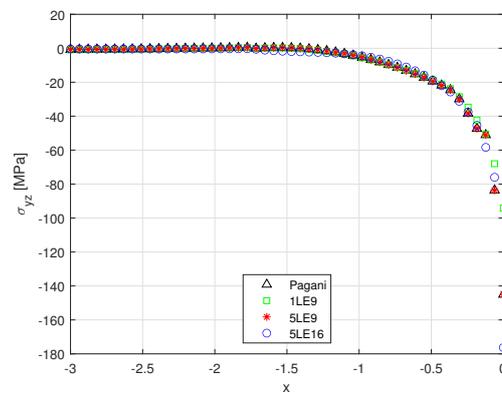
(b) Stress di taglio

Figure 5.8: Stress interlaminare nella flangia superiore valutato tra gli strati posti a  $90^\circ$  e  $45^\circ$  a partire dall'estremo libero. Il riferimento "Pagani" è preso da [10].

tenda ad enfatizzare le tensioni fuori dal piano all'interfaccia tra due lamine diverse mantenendo valori e andamenti comunque congruenti con quelli forniti da Nastran [10].

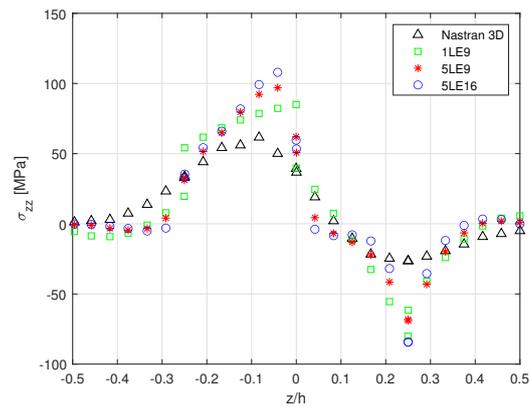


(a) Stress normale

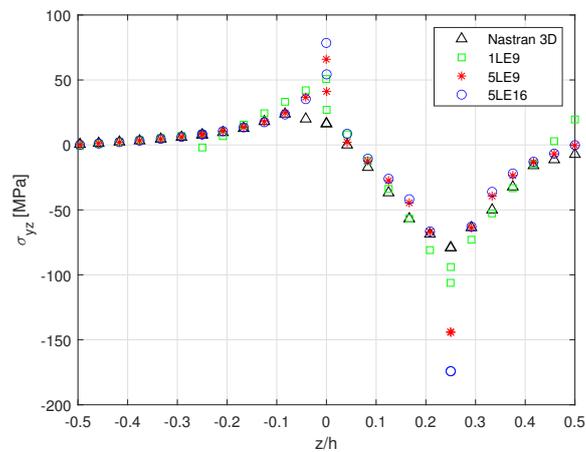


(b) Stress di taglio

Figure 5.9: Stress interlaminare nella flangia superiore valutato tra gli strati posti a  $45^\circ$  e  $-45^\circ$  a partire dall'estremo libero. Il riferimento "Pagani" è preso da [10].



(a) Stress normale



(b) Stress di taglio

Figure 5.10: Tensioni di free-edge nel punto B nella sezione a metà della trave. Il riferimento Nastran 3D è preso da [10].

### 5.3 Problema Pipes-Pagano

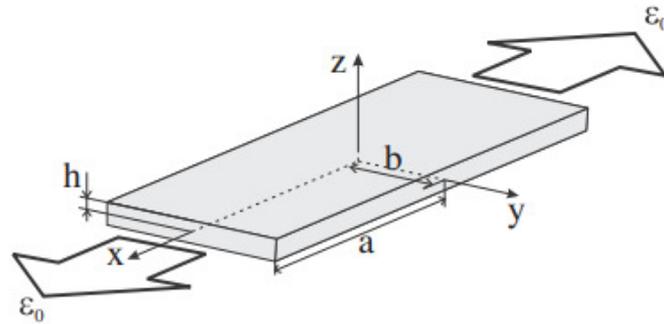


Figure 5.11: Laminato in composito sottoposto a carico di trazione uniassiale [11]

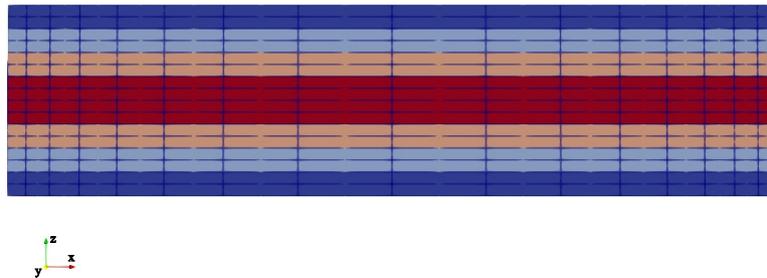


Figure 5.12: Distribuzione degli elementi della mesh all'interno della sezione con identificazione delle diverse laminazioni. A partire dall'alto:  $[90/0/45/ - 45]_s$

Nella prossima sezione introduciamo il problema noto come "problema di Pipes-Pagano". Lo scopo è quello di andare a valutare le tensioni che si generano all'interno di una piastra in composito simmetrica alla quale vengono imposti degli spostamenti a due estremi opposti della stessa.

I dati del problema, come anche i risultati con cui verranno confrontati, sono presi dall'articolo di M. D'Ottavio [11].

Prendiamo come riferimento una piastra el cui dimensioni caratteristiche sono  $a = 80mm$ ,  $b = 40mm$  e  $h = 10mm$  (5.11) sottoposta ad un carico di trazione uniassiale lungo la direzione  $x$  tale da provocare uno spostamento di entrambe le estremità pari a  $u = (10mm, 0, 0)$ . Vengono prese in considerazione due diverse sequenze di laminazione, entrambe simmetriche e realizzate con strati di uguale spessore: la prima con 4 strati  $[+45/ - 45]_s^0$ , la seconda 8 strati  $[+90/0/ + 45/ - 45]_s^0$ . Il materiale, uguale per tutte le laminazioni, è caratterizzato dalle seguenti proprietà:

$E_L = 137900MPa, E_T = E_z = 14480MPa, \nu_{LT} = \nu_{zT} = \nu_{Lz} = 0.21, G_{LT} = G_{Tz} = G_{Lz} = 5680MPa.$

Sono state condotte due analisi distinte su entrambe le laminazioni al fine di valutare l'andamento delle tensioni  $\sigma_{zz}$  e  $\sigma_{xz}$

- lungo lo spessore del free-edge della sezione centrale
- lungo la semiapertura della trave all'interfaccia tra due laminazioni diverse ad un quarto dello spessore della trave

Il laminato è stato discretizzato utilizzando un'espansione cubica attraverso 8 elementi B4 1D lungo la direzione longitudinale, mentre per la sezione trasversale sono stati utilizzati 256 elementi quadratici L9 o cubici L16 in modo tale da avere almeno due elementi per ogni strato lungo  $z$  e 16 elementi trasversali distribuiti in modo da andare ad infittire la mesh spostandoci verso il free-edge (5.12).

Si analizzano adesso nel dettaglio le tensioni che si sviluppano nella sezione. La figura 5.13 mostra la distribuzione delle tensioni normali  $\sigma_{zz}$  lungo lo spessore della piastra. Il confronto fra le diverse curve evidenzia l'effetto del raffinamento della mesh sulla risoluzione del gradiente di tensione. In particolare, si osserva che l'incremento del numero di elementi consente una migliore approssimazione dei picchi di tensione nei pressi delle interfacce tra i diversi strati della laminazione.

In figura 5.14 viene analizzata la componente tangenziale  $\sigma_{yz}$  lungo lo spessore della piastra. Si nota che le tensioni rimangono quasi nulle al centro dello spessore e subiscono un incremento significativo vicino alle interfacce.

In figura 5.15 il grafico mostra la variazione delle tensioni normali  $\sigma_{zz}$  lungo la sezione orizzontale all'interfaccia dei due strati con orientazione diversa. L'andamento delle tensioni ci permette di apprezzare fenomeni di *free edge* in cui si ha l'incremento delle tensioni fuori dal piano in prossimità dell'estremo libero. L'andamento delle tensioni mostra come il crescere del numero di elementi utilizzato per discretizzare la struttura fornisca risultati più appropriati. Stesso dicasi per le tensioni tangenziali  $\sigma_{yz}$  mostrate in figura 5.16.

In figura 5.17 mostra l'andamento delle tensioni  $\sigma_{zz}$  per una piastra quasi isotropa ottenuta con una laminazione a 8 strati. Il comportamento è simile a quello mostrato

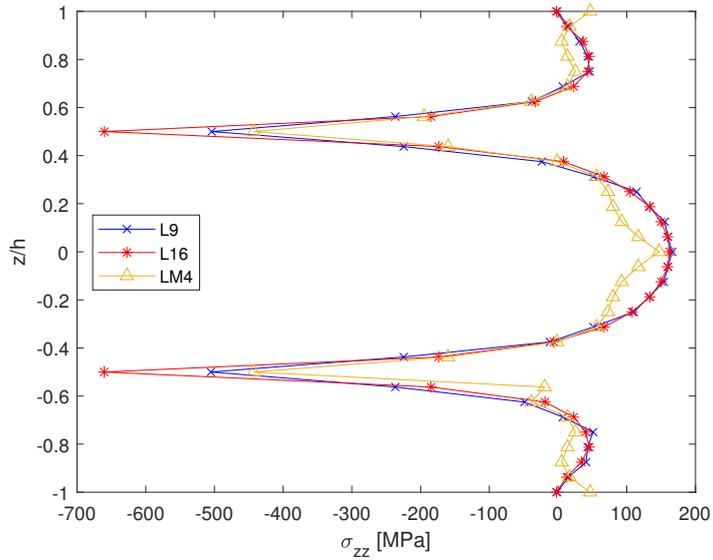


Figure 5.13: Andamento delle tensioni  $\sigma_{zz}$  lungo lo spessore dell'estremo libero  $(40,80,z)$  di una piastra a 4 strati simmetrica  $[45/-45]_s^0$ . LM4 è presa da [11].

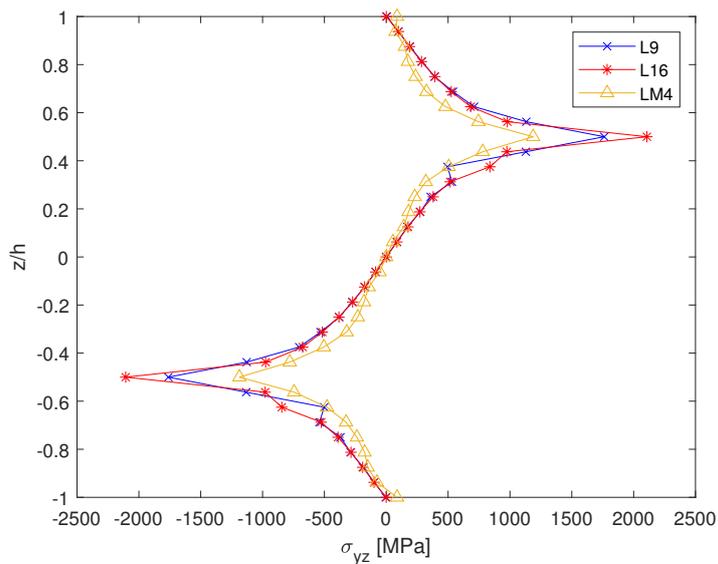


Figure 5.14: Andamento delle tensioni  $\sigma_{yz}$  lungo lo spessore dell'estremo libero  $(40,80,z)$  di una piastra a 4 strati simmetrica  $[45/-45]_s^0$ . LM4 è presa da [11].

in figura 5.13 con un maggior numero di discontinuità dovute alla presenza di più interfacce tra le lamine.

Stessa situazione di aumentata complessità si verifica per le  $\sigma_{yz}$  al *free edge*.

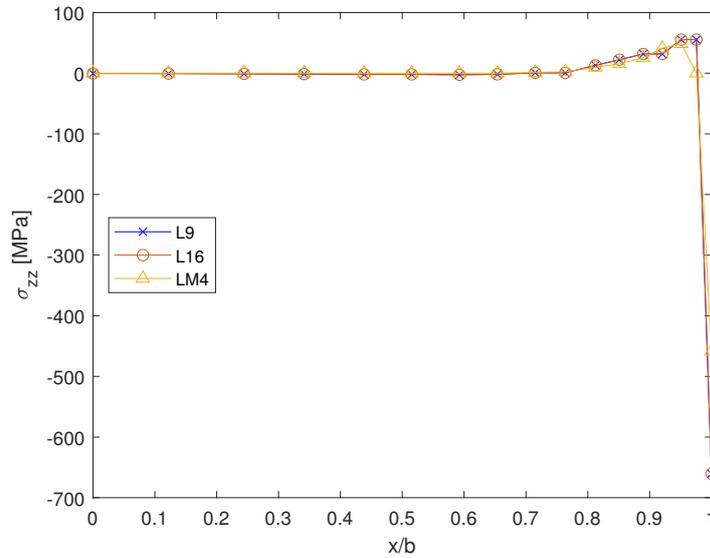


Figure 5.15: Andamento delle tensioni  $\sigma_{zz}$  all'interfaccia tra due strati diversi lungo l'apertura  $(x,80,-5)$  di una piastra a 4 strati simmetrica  $[45/-45]_s^0$ . LM4 è presa da [11].

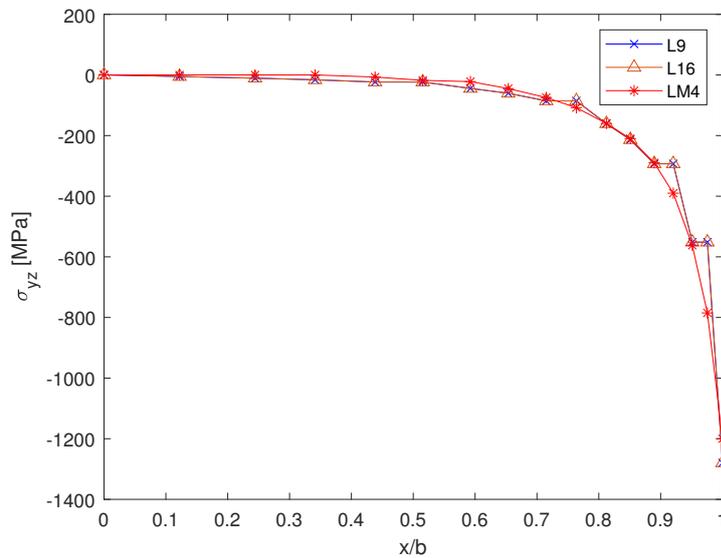


Figure 5.16: Andamento delle tensioni  $\sigma_{yz}$  all'interfaccia tra due strati diversi lungo l'apertura  $(x,80,-5)$  di una piastra a 4 strati simmetrica  $[45/-45]_s^0$ . LM4 è presa da [11].

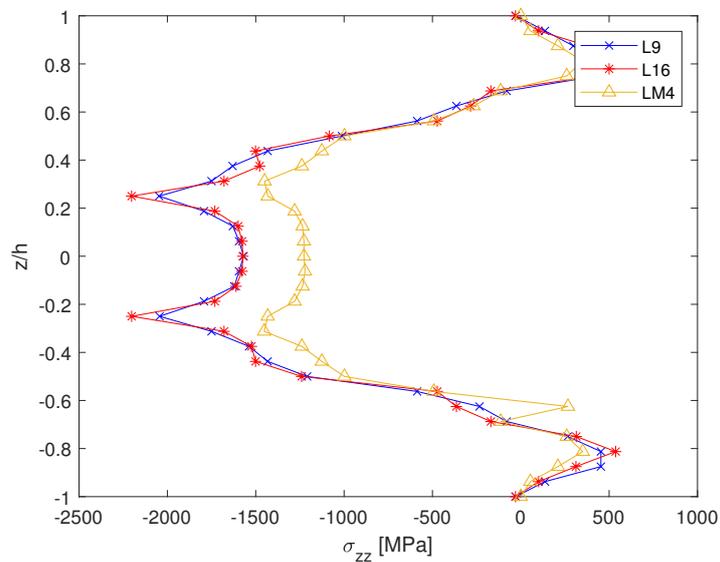


Figure 5.17: Andamento delle tensioni  $\sigma_{zz}$  lungo lo spessore dell'estremo libero  $(40,80,z)$  di una piastra a 8 strati simmetrica  $[90/0/45/-45]_s^0$ . LM4 è presa da [11].

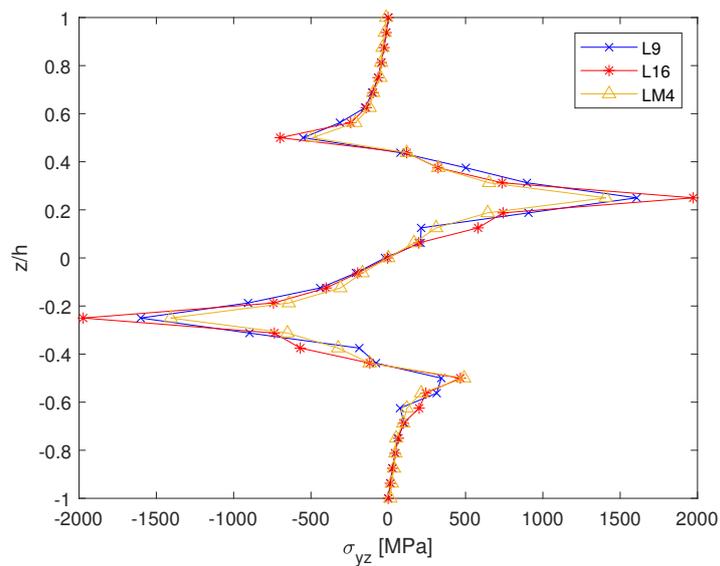


Figure 5.18: Andamento delle tensioni  $\sigma_{yz}$  lungo lo spessore dell'estremo libero  $(40,80,z)$  di una piastra a 8 strati simmetrica  $[90/0/45/-45]_s^0$ . LM4 è presa da [11].

## 5.4 TRAC boom

Analizziamo adesso la struttura dispiegabile in composito TRAC boom. Questa struttura, come anticipato nell'introduzione, ha una geometria costituita da due flange curve la cui sezione è un arco di circonferenza con un angolo di  $90^\circ$  e raggio  $12.7mm$  che si uniscono in un setto verticale alto  $8mm$ . Ciascuna delle flange curve è formata dall'unione di 3 strati di due materiali compositi: uno strato in fibra di carbonio, indicato con CF racchiuso da due strati di GFPW (Glass Fiber Plain Weave). Il secondo materiale è un composito costituito da uno strato di fibre di vetro intrecciate con angoli di  $\pm 45$  in modo da formare un tessuto. Gli spessori dei diversi strati sono di  $25 \mu m$  per i GFPW e di  $30 \mu m$  per lo strato di CF. Lo spessore complessivo delle flange curve ammonta a  $80 \mu m$  ciascuna e la laminazione è del tipo  $[\pm 45_{GFPW}/0/\pm 45_{GFPW}]$ . Il setto verticale è formato dai prolungamenti delle flange i quali vengono uniti attraverso un processo in autoclave attraverso un ulteriore strato di GFPW dallo spessore di  $25 \mu m$ , portando lo spessore totale della parete verticale a  $185 \mu m$ . La laminazione complessiva della struttura è di 7 strati secondo  $[\pm 45_{GFPW}/0/\pm 45_{GFPW}/\pm 45_{GFPW}/\pm 45_{GFPW}/0/\pm 45_{GFPW}]$ . La lunghezza complessiva del componente è  $L = 500mm$ .

In tabella 5.3 riportate le proprietà dei due materiale GFPW e CF: Per le proprietà

	$E_1[GPa]$	$E_2[GPa]$	$G_{12}[GPa]$	$\nu_{12}$
CF	128	6.5	7.6	0.35
GFPW	23.8	23.8	3.3	0.17

Table 5.3: Proprietà dei materiale GFPW e CF

dei materiali di resistenza a rottura, necessarie per svolgere analisi preliminari di danneggiamento, sono stati utilizzati i valori riportati in tabella 5.4 e 5.5.

Una struttura ultrasottile come questa cade rapidamente in un comportamento non lineare degli spostamenti, presentando fenomeni di buckling locale a partire da bassi carichi è in grado di lavorare in questo regime sopportando carichi bene più elevati prima di rompersi completamente. In questa trattazione vengono applicati carichi contenuti, prima che la struttura vada in instabilità, in quanto vengono svolte unicamente analisi lineari per la determinazione dei *failure index*. Verifichiamo il

$X_T$	Resistenza a trazione in direzione delle fibre	$2700N/mm^2$
$X_C$	Resistenza a compressione in direzione delle fibre	$1650N/mm^2$
$Y_T$	Resistenza a trazione in direzione perpendicolare alla fibre	$55N/mm^2$
$T_C$	Resistenza a compressione in direzione perpendicolare alle fibre	$225N/mm^2$
$S_{12}$	Resistenza a taglio longitudinale alle fibre	$100N/mm^2$
$S_{13}$	Resistenza a taglio longitudinale alle fibre	$100N/mm^2$
$S_{23}$	Resistenza a taglio trasversale alle fibre	$32.26N/mm^2$

Table 5.4: Indici di resistenza del CF [56]

$X_T$	Resistenza a trazione in direzione delle fibre	$452.37N/mm^2$
$X_C$	Resistenza a compressione in direzione delle fibre	$312.69N/mm^2$
$Y_T$	Resistenza a trazione in direzione perpendicolare alla fibre	$452.37N/mm^2$
$T_C$	Resistenza a compressione in direzione perpendicolare alle fibre	$312.69N/mm^2$
$S_{12}$	Resistenza a taglio longitudinale alle fibre	$69.76N/mm^2$
$S_{13}$	Resistenza a taglio longitudinale alle fibre	$69.76N/mm^2$
$S_{23}$	Resistenza a taglio trasversale alle fibre	$44.83N/mm^2$

Table 5.5: Indici di resistenza dei materiali compositi

comportamento della struttura applicando la CUF 1D. Per discretizzare la struttura sono stati utilizzati 10 elementi B4 per avere un'interpolazione cubica lungo l'asse  $y$  e elementi quadratici L9 su ogni singola lamina della sezione (figura 5.20). In particolare nelle flange si sono utilizzati 10 elementi per ogni lamina mentre nella parete verticale il numero di elementi è stato ridotto a 5.

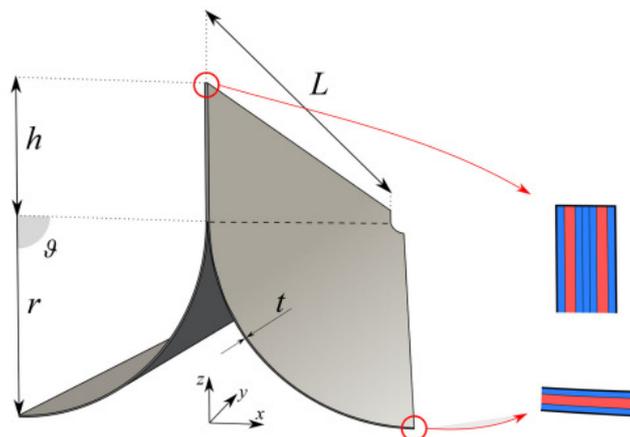


Figure 5.19: Dimensioni e laminazione utilizzate per il TRAC boom. GFPW in blu e CF in rosso

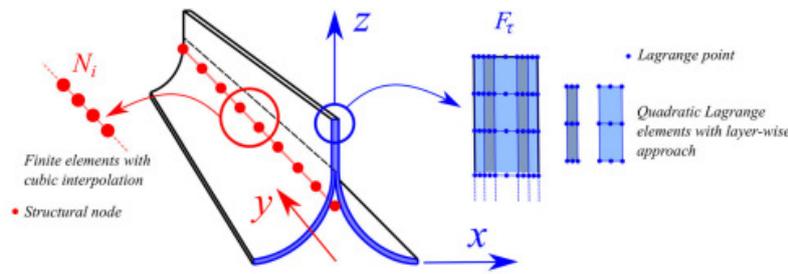


Figure 5.20: Discretizzazione del TRAC boom attraverso elementi B4 e L9 [12]

### 5.4.1 Analisi a trazione

La prima analisi condotta sulla struttura prevede la veda incastrata all'estremità posta in  $y=0$  e imposto uno spostamento pari a  $2mm$  in direzione  $y$  all'estremo libero. Le analisi sono state condotte confrontando tra di loro le soluzioni ottenute utilizzando un elemento L9 per ogni singola lamina della sezione o due elementi L9 o L16 per lamina. In questo modo si vanno ad aumentare i punti in cui viene discretizzata la sezione aumentando la precisione della soluzione. Si è studiato l'andamento delle tensioni lungo lo spessore della parete verticale, valutando le tensioni e i *failure index* (tramite il criterio di Hashin 3D) al variare della coordinata  $x$  tra  $-0.0925mm$  e  $+0.0925mm$ .

Dato lo spostamento imposto molto piccolo, le tensioni risultanti al free edge risultano essere di grandezza molto piccola. Permettono però di fare delle osservazioni sugli andamenti e sull'importanza di un termine rispetto ad un'altro. Dalla figura 5.21, la tensione con l'ordine di grandezza più importante rispetto alle altre è di certo la  $\sigma_{yy}$ , risultato atteso data la condizione al contorno. Trascurabile è invece la tensione  $\sigma_{xy}$ . Per quanto riguarda le tensioni fuori dal piano riportate in figura 5.22, sono degne di nota solo le  $\sigma_{zz}$  e le  $\sigma_{xz}$ , seppur due ordini di grandezza inferiori a  $\sigma_{yy}$ . Tutte le tensioni mostrano un comportamento abbastanza lineare all'interno dei diversi strati, fatta eccezione per le tensioni dirette lungo la  $x$ , il cui comportamento è molto più variabile.

Per quanto riguarda i *failure index*, l'unico degno di nota è quello relativo alla rottura delle fibre a trazione (figura 5.23a). Date le condizioni al contorno, i FI relativi alla compressione delle fibre e della matrice sono pressochè nulli e per questo motivo non sono stati riportati.

L'incremento del numero di punti per l'analisi non ha prodotto importanti modi-

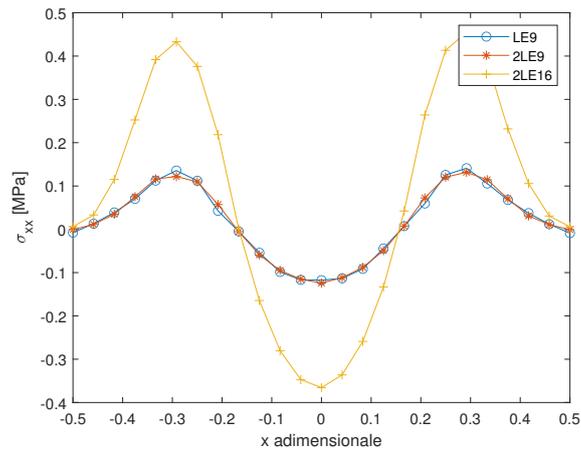
fiche nel passaggio da un elemento L9 per lamina a 2 elementi L9 per lamina. Utilizzando due elementi L16 per lamina si notano dei miglioramenti nell'andamento della soluzione, con il raggiungimento di picchi più alti di tensione e soprattutto di FI relativi alla delaminazione.

Dalla figura 5.23c si può notare come l'aver ottenuto un campo delle tensioni più preciso attraverso l'utilizzo di due espansioni LE16 per lamina, soprattutto per quanto riguarda le tensioni fuori dal piano  $\sigma_{xz}$  5.22b, aumenti significativamente i picchi di FI per la delaminazione.

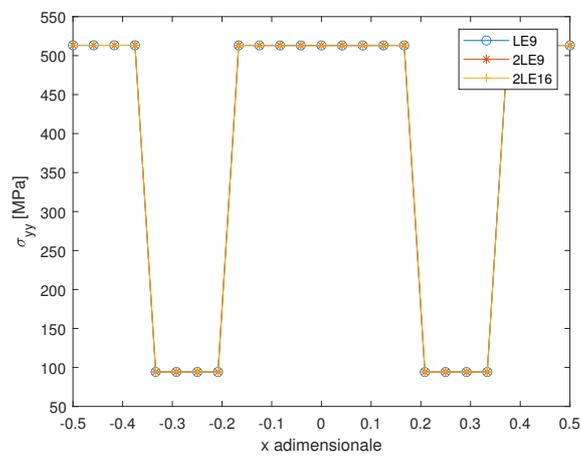
### 5.4.2 Analisi a flessione

In questa seconda analisi la struttura è sempre incastrata all'origine in  $y=0$  ma questa volta viene imposto uno spostamento verticale pari a  $v = 50mm$ . L'elemento analizzato è lo stesso dell'analisi precedente.

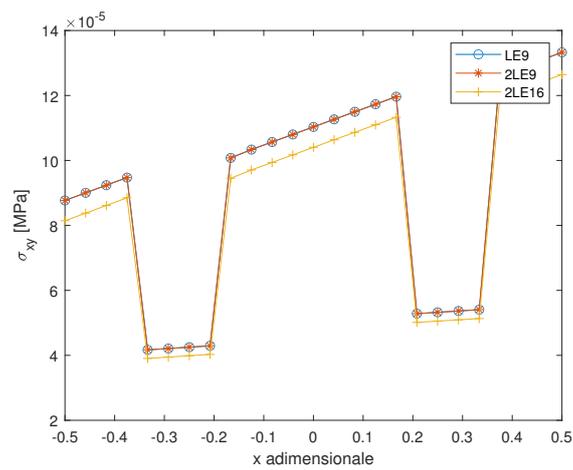
Dall'analisi delle immagini, è immediato osservare come l'utilizzo di espansioni con più nodi e una modellazione più raffinata permetta di valutare in maniera più accurata la distribuzione delle tensioni normali e di taglio nella struttura per quanto riguarda un comportamento flessionale imposto. Le tensioni di maggiore intensità sono date dalla  $\sigma_{zz}$ , mentre le tensioni nel piano sono di gran lunga inferiori. Particolare l'andamento del FI, che suggerisce come le zone maggiormente soggette a frattura siano quelle dove sono presenti grandi gradienti di tensione.



(a)  $\sigma_{xx}$

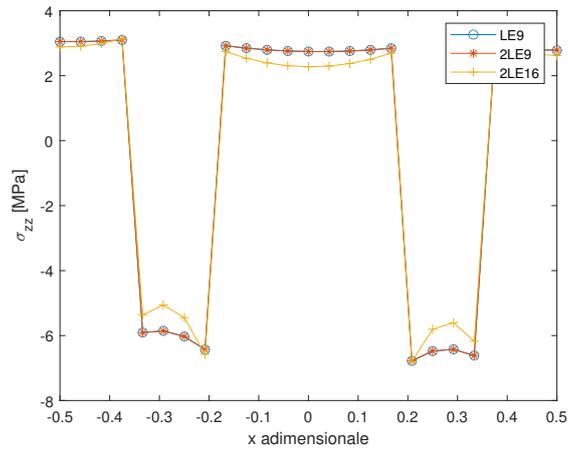


(b)  $\sigma_{yy}$

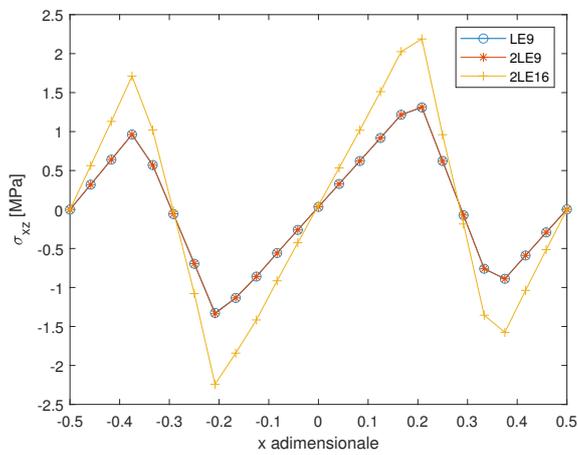


(c)  $\sigma_{xy}$

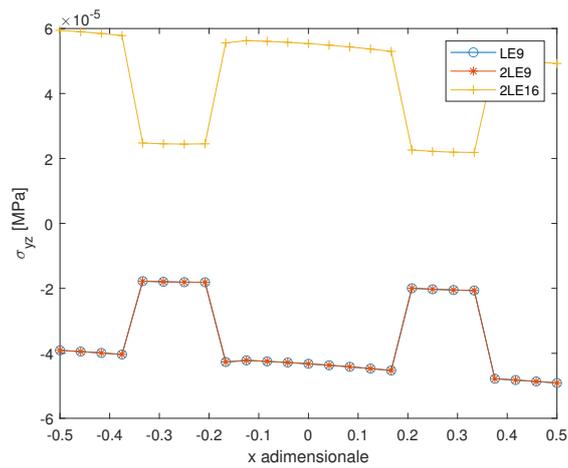
Figure 5.21: Tensioni nel piano  $xy$  dell'estremità superiore della parete verticale a metà della lunghezza del TRAC



(a)  $\sigma_{zz}$

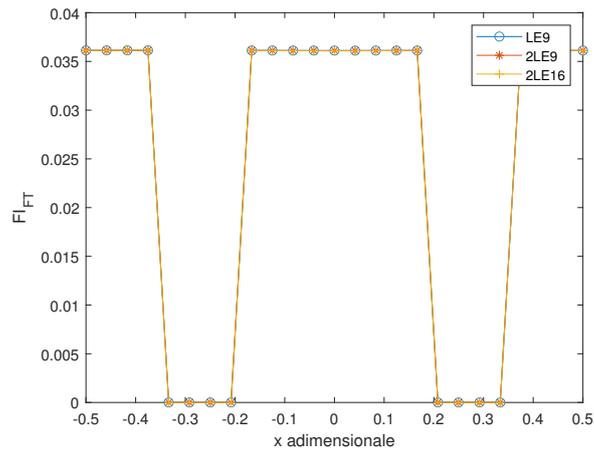


(b)  $\sigma_{xz}$

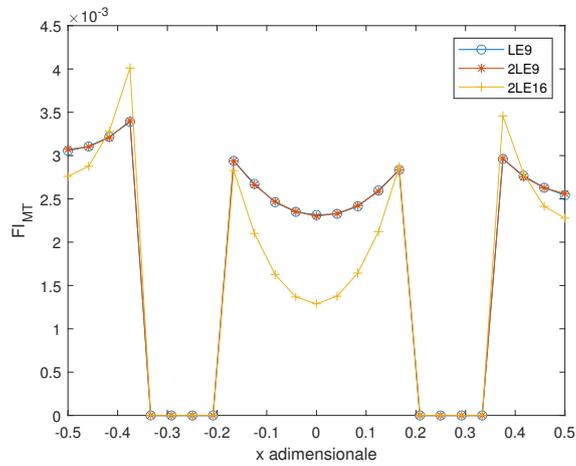


(c)  $\sigma_{yz}$

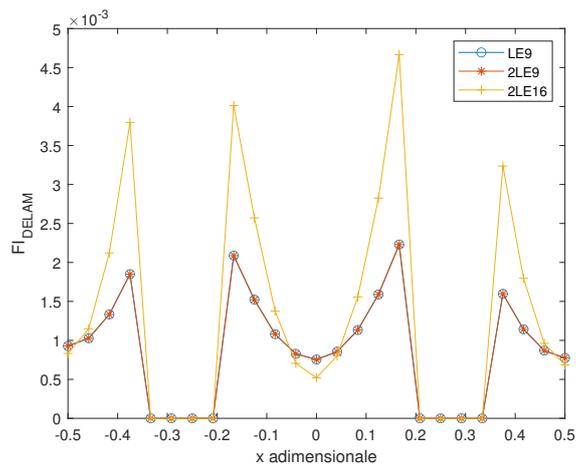
Figure 5.22: Tensioni fuori dal piano  $xy$  dell'estremità superiore della parete verticale a metà della lunghezza del TRAC



(a) Andamento del Failure Index relativo alla rottura delle fibre a trazione

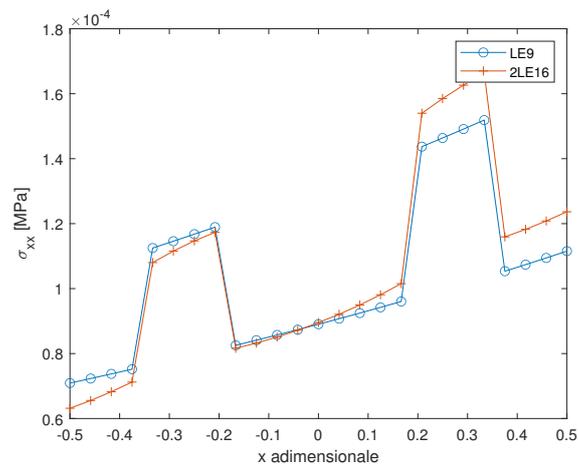


(b) Andamento del Failure Index relativo alla rottura della matrice a trazione

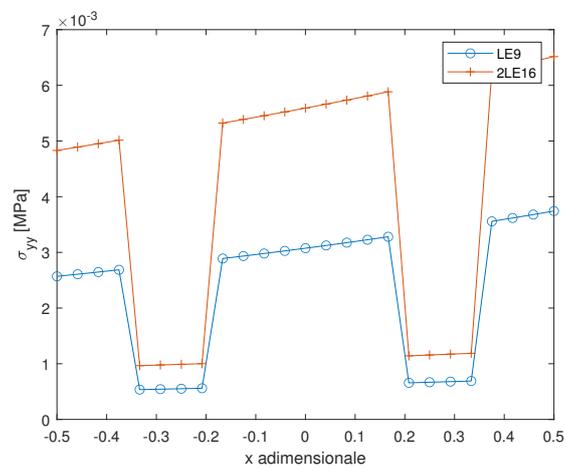


(c) Andamento del Failure Index relativo alla delaminazione

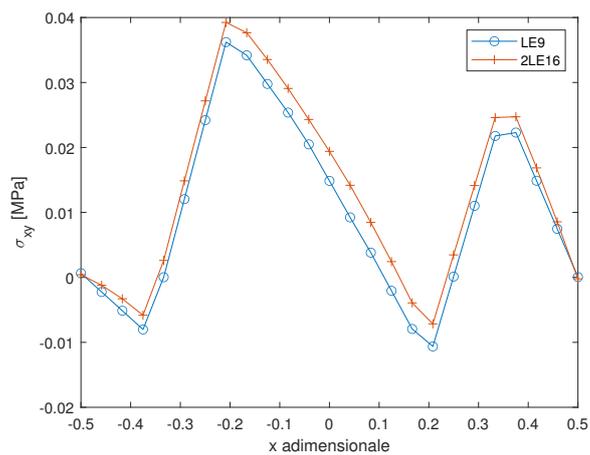
Figure 5.23: Andamento dei Failure Index nel tratto considerato della sezione in seguito ad uno spostamento imposto lungo l'asse  $y$



(a)  $\sigma_{xx}$

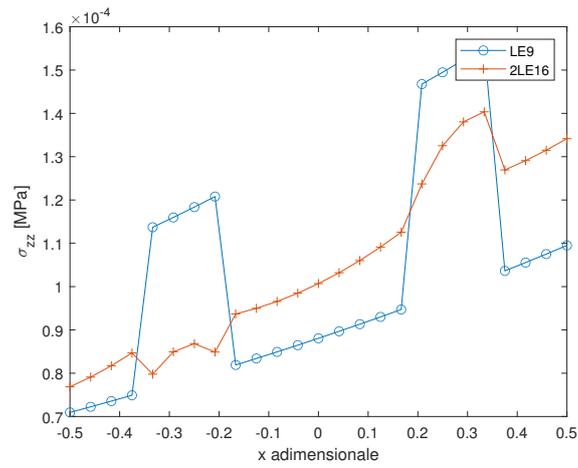


(b)  $\sigma_{yy}$

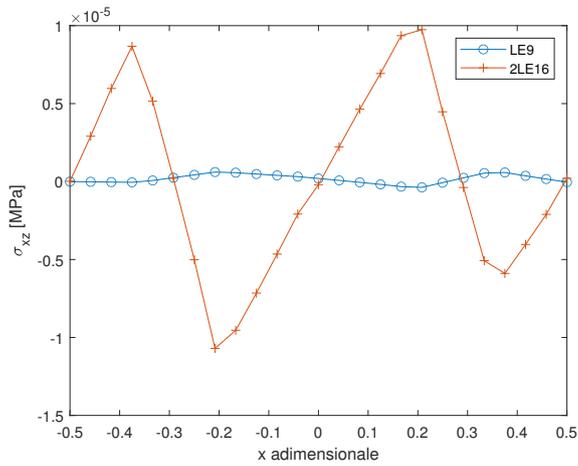


(c)  $\sigma_{xy}$

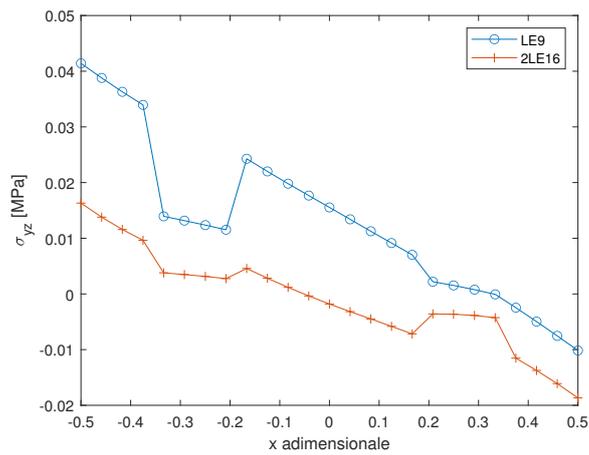
Figure 5.24: Tensioni nel piano  $xy$  dell'estremità superiore della parete verticale a metà della lunghezza del TRAC per spostamento verticale imposto



(a)  $\sigma_{zz}$



(b)  $\sigma_{xz}$



(c)  $\sigma_{yz}$

Figure 5.25: Tensioni fuori dal piano  $xy$  dell'estremità superiore della parete verticale a metà della lunghezza del TRAC per spostamento verticale imposto

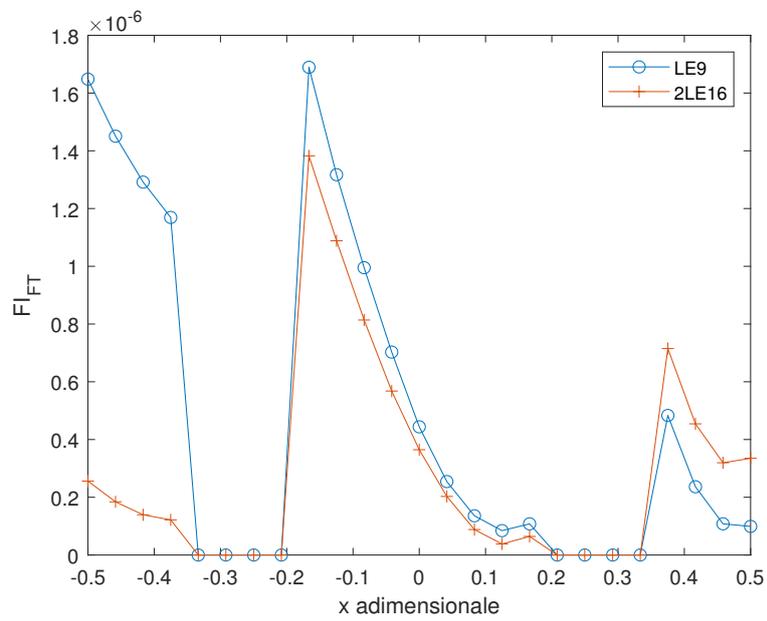


Figure 5.26: Andamento del FI per rottura delle fibre a trazione

# Chapter 6

## Analisi di danneggiamento

Nell'ultimo capitolo viene testato l'utilizzo della CUF-1D con la teoria del *continuum damage mechanics* per la valutazione del danneggiamento progressivo dei materiali compositi. Analisi di questo tipo rientrano all'interno delle analisi non lineari, la cui non linearità è dipendente dalle proprietà del materiale che si degradano in seguito al danneggiamento. I casi proposti prevedono valutazione della tensione di rottura e del comportamento dei provini dopo il suo superamento. Le analisi vengono svolte prima su un elemento semplice per validare l'uso della CUF-1D e poi su un provino con intaglio. Le soluzioni ottenute vengono confrontate con quelle ricavate da analisi svolte attraverso la CUF-2D o tramite il solutore LS-DYNA.

### 6.1 Analisi su singolo elemento

Iniziamo ad implementare il modello di danneggiamento attraverso una semplice analisi svolta su un elemento singolo di una piastra in composito. Questo modello ci permette di isolare e studiare l'effetto dell'orientazione delle fibre sul valore di carico massimo raggiungibile prima della failure e gli andamenti del carico nella regione di degradazione delle proprietà materiali.

Anzitutto consideriamo un elemento composto da una singola lamina sottoposta un carico di trazione uniassiale. Il carico viene prima applicato in direzione longitudinale alle fibre e successivamente in direzione trasversale ad essa. Nel primo caso si riproduce quindi quanto accade in una situazione in cui si portano a rottura le fibre mentre nel secondo viene messo in risalto il comportamento del materiale quando va

in crisi la matrice. In ultima analisi, viene preso in considerazione un elemento con caratteristiche quasi-isotrope, ottenuto sovrapponendo 8 lamine in maniera simmetrica rispetto alla mezzeria con orientazione  $[90/45/0/-45]_s$ .

Le dimensioni dell'elemento sono tali da poter essere discretizzato attraverso un unico elemento monodimensionale B2, mentre ogni lamina in sezione viene descritta attraverso un'espansione L4. Il materiale di cui è composto l'elemento è un polimero rinforzato con fibre di carbonio (CFRP), l' IM7/8552, le cui proprietà sono riportate in tabella 6.1. Ogni lamina ha uno spessore di  $0.125mm$ . Il confronto dei risultati avviene rispetto all'andamento tensione-deformazione ottenuto con l'analisi CUF-2D [13] e con l'analisi svolta implementando il modello CODAM-2 implementato in LS-DYNA [14].

$E_1[GPa]$	$E_2[GPa]$	$E_3[GPa]$
165.0	9.0	9.0
$G_{12}[GPa]$	$G_{13}[GPa]$	$G_{23}[GPa]$
5.6	5.6	2.8
$\nu_{12}$	$\nu_{13}$	$\nu_{23}$
0.34	0.34	0.5
$X_T[MPa]$	$Y_T[MPa]$	$S_L[MPa]$
2560.0	73.0	90.0
$G_1^f[kJ/m^2]$	$G_2^f[kJ/m^2]$	$\rho[Kg/m^3]$
120.0	2.6	1700.0

Table 6.1: Proprietà del materiale IM7/8552 CFRP

I risultati riportati nei grafici permettono di effettuare le seguenti osservazioni:

- L'analisi ha dimostrato come la CUF 1D è in grado di fornire gli stessi risultati della CUF 2D e di LS-DYNA, dimostrandone la possibilità di utilizzo.
- Quando il carico di trazione è applicato nella stessa direzione delle fibre, il materiale è in grado di raggiungere delle tensioni molto più elevate rispetto a quelle ottenute con lo stesso carico applicato in direzione trasversale ad esse.
- L'andamento mostrato dalle singole lamine è di tipo bilineare, in cui i due tratti sono separati dal punto di rottura e di inizio deterioramento delle proprietà

del materiale.

- Nel caso di un laminato quasi-isotropo, l'andamento della curva è ancora meno lineare, aumentando la complessità del materiale.

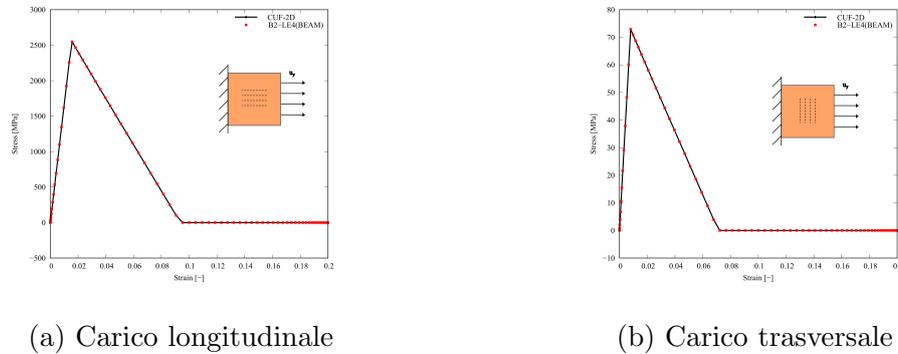


Figure 6.1: Curva tensione-deformazione di un singolo elemento caricato a tensione sotto l'applicazione di un carico unidimensionale. (a) Elemento caricato in direzione longitudinale alle fibre e (b) Elemento caricato in direzione trasversale alle fibre con prevalenza di effetti di matrice. CUF-2D è preso da [13]

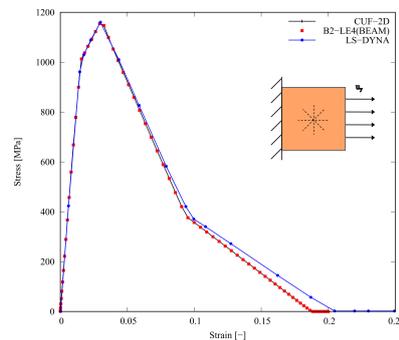


Figure 6.2: Curva tensione-deformazione di un elemento quasi isotropo con laminazione  $[90/45/0/-45]_s$  sotto l'applicazione di un carico di trazione uniassiale. CUF-2D è preso da [13], LS-DYNA è preso da [14].

## 6.2 Provino con intaglio orizzontale

Il prossimo esempio consiste nell'analisi di un provino con un intaglio orizzontale nella sezione centrale. Le condizioni al contorno consistono in vincolo ad un'estremità ed uno spostamento  $u_y$  all'estremità opposta. La struttura è realizzata tramite 16 lamine di materiale composito IM7/8552 (tabella 6.1) di spessore  $0.125\text{mm}$  e impilate secondo una sequenza di laminazione  $[45/90/-45/0]_{4s}$ .

Le dimensioni utilizzate per il provino sono: lunghezza  $L = 508mm$ , spessore  $w = 127mm$ , l'apertura larga  $c = 25.4mm$  e alta  $t = 0.5mm$  (figura 6.3). Il suddetto caso è stato già in precedenza analizzato attraverso una teoria CUF 2D nel lavoro di Nagaraj [13], in cui sono stati utilizzati 132 elementi Q9 per discretizzare gli elementi nel piano  $xy$  e tramite analisi sperimentali [57]. In questa analisi si è scelto di utilizzare una discretizzazione di tipo 1D per verificare che anche la formulazione 1D della CUF fornisce in linea con quelli verificati. Sono stati utilizzati 13 elementi B4 lungo la  $y$  con distribuzione simmetrica rispetto all'intaglio, nei pressi del quale è stata infittita la mesh in modo da fornire al solutore una migliore distribuzione delle tensioni in quella zona. Ogni lamina è stata suddivisa lungo l'asse  $x$  in 5 elementi L9 la cui larghezza è pari a quella dell'intaglio. In figura 6.4 è raffigurata la mesh utilizzata per l'elemento con un focus sulla sua laminazione.

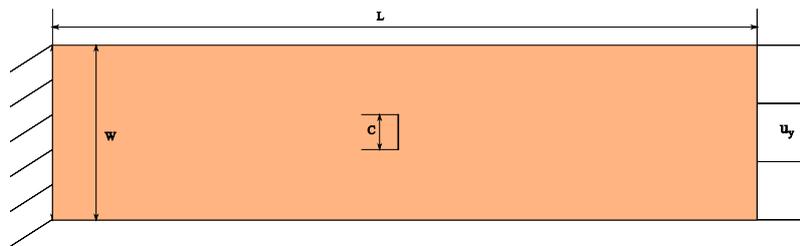


Figure 6.3: Rappresentazione del provino con apertura centrale con dimensioni e condizioni al contorno

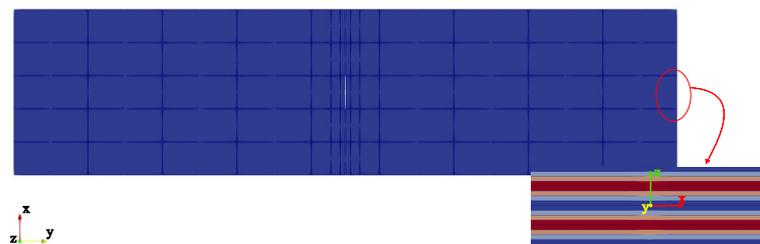


Figure 6.4: Rappresentazione della discretizzazione del provino con intaglio con dettaglio sulla sequenza di laminazione della sezione  $[45/90/-45/0]_{4s}$

Nel diagramma in figura 6.5 sono riportati gli andamenti delle tensioni all'interno della struttura secondo i diversi strumenti utilizzati.

- Il materiale mostra un comportamento fragile, in cui una volta raggiunta la tensione di rottura si rompe in maniera improvvisa.

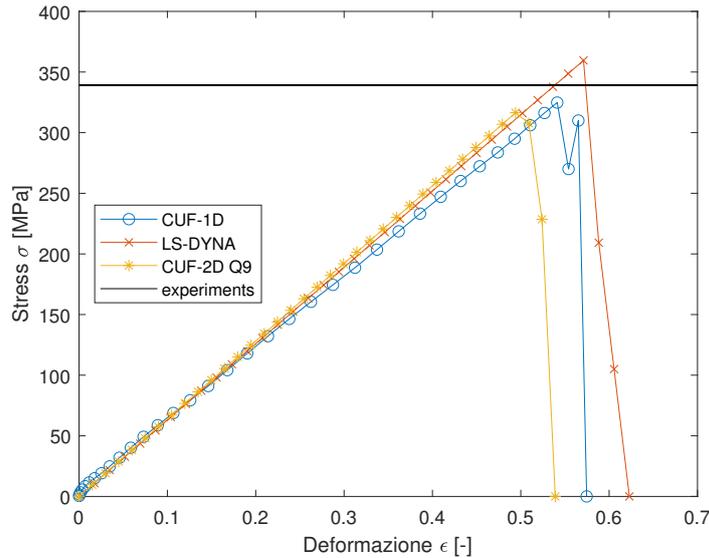


Figure 6.5: Confronto fra gli andamenti tensione-deformazione con i vari metodi. CUF-2D è preso da [13], LS-DYNA è preso da [14]

Modello	Tensione massima [MPa]	DOF
CUF-1D	324	49896
CUF-2D	316	120120
LS-DYNA	358	> 1000000

Table 6.2: Confronto tra picchi di tensione e numero DOF dei modelli a confronto

- La linea tracciata dagli esperimenti si riferisce al valore massimo di resistenza ottenuto sperimentalmente, valore in linea con il massimo della tensione a cui è in grado di resistere il provino secondo le analisi.
- Il caso 1D ripercorre in maniera analoga il comportamento ottenuto tramite CUF 2D con un valore di picco della tensione leggermente superiore, pari a 324 MPa contro i 316 Mpa del 2D.

I risultati dimostrano il corretto adattamento dell'espansione CUF 1D per l'analisi strutturale. In tabella 6.2 si mettono a confronto i picchi di tensione massimo con il numero di DOF dei diversi modelli.

# Chapter 7

## Conclusioni

Il lavoro svolto in questa tesi ha permesso di sviluppare e validare modelli FEM basati sulla Carrera Unified Formulation (CUF) 1D per l'analisi del danneggiamento di strutture ultrasottili in materiali compositi, con particolare attenzione alla loro applicazione in ambito spaziale. L'adozione della CUF ha consentito di ottenere una maggiore efficienza computazionale, mantenendo un alto grado di precisione nella previsione del comportamento strutturale e dell'evoluzione del danno.

### 7.1 Sintesi del lavoro svolto

Nel **Capitolo 1** è stato introdotto il contesto delle strutture dispiegabili, descrivendo le loro principali applicazioni in ambito spaziale, come vele solari, antenne, pannelli fotovoltaici e strutture telescopiche. Si è evidenziata la necessità di utilizzare materiali compositi per migliorare leggerezza, rigidità e stabilità dimensionale in ambienti con elevati gradienti termici e sollecitazioni meccaniche. A seguire è stata mostrata le difficoltà di calcolo numerico nell'analizzare il comportamento di queste strutture, soprattutto dal punto di vista del danneggiamento, motivo per il quale è stato proposto di affrontare tale problematica attraverso l'utilizzo della CUF per la modellazione FEM.

Il **Capitolo 2** ha presentato nel dettaglio la Carrera Unified Formulation (CUF), un approccio gerarchico e flessibile per la modellazione FEM. Questa metodologia consente di descrivere in modo raffinato la cinematica delle strutture, riducendo al minimo il costo computazionale rispetto ai classici modelli FEM 3D. La formulazione

CUF permette di ottenere un elevato grado di accuratezza nella previsione degli stati tensionali, adattandosi in modo versatile a materiali e geometrie complesse.

Nel **Capitolo 3** sono stati illustrati i principali criteri di *failure* per i materiali compositi, tra cui Hashin 3D, Tsai-Wu e Puck-Schuermann, nonché i modelli di danneggiamento progressivo. Si è discusso il ruolo della delaminazione, della rottura delle fibre e della matrice, e di come questi fenomeni possano compromettere la resistenza strutturale. È stata inoltre approfondita la Continuum Damage Mechanics (CDM), un approccio che permette di modellare la propagazione del danno senza necessità di una rappresentazione discreta delle cricche utilizzato nelle analisi di questa tesi.

Il **Capitolo 4** ha presentato un insieme di casi studio numerici preliminari finalizzati a validare il modello sviluppato. Sono state analizzate diverse configurazioni strutturali per valutare le prestazioni della CUF rispetto a modelli classici:

- **Trave a sezione quadrata:** è stata condotta un'analisi di convergenza per verificare l'efficacia della CUF rispetto ai metodi FEM standard. I risultati hanno mostrato che la CUF garantisce un'accuratezza comparabile con modelli 3D, ma con un minore dispendio computazionale.
- **Trave a sezione quadrata con taglio:** l'introduzione di una discontinuità geometrica ha permesso di studiare la capacità del modello di individuare zone di concentrazione degli sforzi, confermando la validità dell'approccio utilizzato.
- **Trave a sezione a I:** è stata analizzata la risposta della struttura in presenza di sollecitazioni combinate (flessione e taglio). I risultati hanno evidenziato la capacità della CUF di catturare correttamente le distribuzioni tensionali, con un'ottima corrispondenza rispetto a soluzioni ottenute tramite modelli di riferimento in letteratura.

Complessivamente, i risultati delle analisi condotte nel **Capitolo 4** hanno confermato che la CUF 1D rappresenta un metodo affidabile per la modellazione di strutture composite, fornendo risultati in accordo con la letteratura esistente e consentendo una significativa riduzione del tempo di calcolo rispetto ai modelli tradizionali.

Il **Capitolo 5** ha approfondito il comportamento dei laminati compositi, con particolare attenzione all'analisi degli effetti di bordo (free-edge effects):

- **Problema Pipes-Pagano:** un classico test per validare modelli di laminati compositi sottoposti a carichi multiassiali. L'analisi ha mostrato un'ottima capacità predittiva della CUF, che è riuscita a catturare correttamente le distribuzioni delle tensioni interlaminari.
- **Trave 'thin walled' con sezione a 'C':** struttura a parete sottili di cui sono stati analizzati gli stati tensionali in prossimità del *free edge*, confermando la validità della CUF-1D a questo tipo di studio
- **Analisi del TRAC boom:** una struttura flessibile e leggera ampiamente utilizzata nelle applicazioni spaziali. Le simulazioni hanno permesso di determinare il comportamento a trazione e flessione con valutazione dei *failure index* associata.

Il **Capitolo 6** ha affrontato in ultima analisi il comportamento di un laminato composito dal punto di vista del danneggiamento, valutando la comparsa del danno e come la sua evoluzione influenzasse le caratteristiche del materiale studiandone la non-linearità:

- **Analisi di danneggiamento di un laminato composito:** sono stati applicati i criteri di *failure* per valutare la progressione del danno. Le simulazioni hanno dimostrato che l'accuratezza nella previsione della *failure* è fortemente influenzata dalla sequenza di laminazione, confermando il ruolo critico della disposizione delle fibre nella resistenza globale della struttura.
- **Provino con intaglio orizzontale:** è stato verificato il comportamento della struttura in presenza di un difetto geometrico. I risultati hanno evidenziato la capacità del modello di prevedere l'innescò del danno e la sua propagazione, aspetto cruciale nella progettazione di componenti aerospaziali.

## 7.2 Considerazioni finali e sviluppi futuri

L'applicazione della Carrera Unified Formulation (CUF) 1D alle strutture composite ultrasottili si è rivelata un metodo efficace e versatile, capace di ridurre i costi computazionali senza compromettere la precisione delle analisi. I risultati ottenuti

confermano che la CUF può essere un valido strumento per prevedere la risposta strutturale e la progressione del danno in scenari complessi, con applicazioni dirette nel settore aerospaziale.

Per sviluppi futuri, si potrebbero considerare le seguenti direzioni di ricerca:

- Estensione delle analisi di danneggiamento progressivo svolte direttamente sulle strutture ultrasottili indicate, quali TRAC boom o *tape spring*
- Ottimizzazione della sequenza di laminazione, al fine di migliorare le proprietà meccaniche dei compositi riducendo il rischio di delaminazione.

In conclusione, il lavoro svolto rappresenta un contributo utile nel campo della modellazione FEM di strutture composite, dimostrando che l'utilizzo della CUF può portare a importanti progressi nella progettazione e ottimizzazione di componenti ad alte prestazioni per il settore aerospaziale.

# Bibliography

- [1] S. Di Pippo. *Space economy. Una nuova frontiera dello sviluppo*. 2022.
- [2] N. Chahat, R. Hodges, J. Sauder, M. Thomson, E. Peral, and Y. Rahmat-Samii. Cubesat deployable ka-band mesh reflector antenna development for earth science missions. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 64:1–1, 06 2016.
- [3] M. A. Aguirre-Martinez, R. Bureo-Dacal, F. Del Campo, , and M. Fuentes. The ctm family of masts and the ctm engineering model. *3rd European Space Mechanisms & Tribology Symposium, Madrid, Spain*, 1987.
- [4] H.L. Ye, Y. Zhang, Q. Yang, and B. Zhang. Quasi-static analysis and multi-objective optimization for tape spring hinge. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 60, 12 2019.
- [5] Syed Abdullah. *Damage and Failure in Composite Structures*. Springer Singapore, 2021.
- [6] E. Carrera, G. Giunta, and M. Petrolo. *Beam structures: classical and advanced theories*. John Wiley & Sons, 2011.
- [7] S. Vilar, M. Sartorato, and M. Ribeiro. Layerwise numerical solution for deep beams. 09 2017.
- [8] I. Lapczyk and J.A. Hurtado. Progressive damage modeling in fiber-reinforced materials. 38:2333–2341, 2007.
- [9] K. S. Surana and S. H. Nguyen. Two-dimensional curved beam element with higher-order hierarchical transverse approximation for laminated composites. *Computers & structures*, 36(3):499–511, 1990.

- [10] A. G. de Miguel, A. Pagani, and E. Carrera. Free-edge stress fields in generic laminated composites via higher-order kinematics. *Composites Part B: Engineering*, 168:375–386, 2019.
- [11] M. d’Ottavio, P. Vidal, E. Valot, and O. Polit. Assessment of plate theories for free-edge effects. *Composites Part B: Engineering*, 2013, 48, pp.111-121, 48:111–121, 2013.
- [12] A. Pagani, R. Augello, and E. Carrera. Numerical simulation of deployable ultra-thin composite shell structures for space applications and comparison with experiments. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 30:8:1591–1603, 2022.
- [13] M. H. Nagaraj, J. Reiner, R. Vaziri, E. Carrera, and M. Petrolo. Progressive damage analysis of composite structures using higher-order layer-wise elements. *COMPOSITES. PART B, ENGINEERING*, 2020.
- [14] J. Reiner, T. Feser, D. Schueler, M. Waimer, and R. Vaziri. Comparison of two progressive damage models for studying the notched behavior of composite laminates under tension. 207:385–396, 2019.
- [15] D. Campbell, R. Barrett, M. S. Lake, L. Adams, E. Abramson, M. R. Scherbarthn, J. S. Welsh, G. Freebury, N. Beidleman, and J. Abbot. Development of a novel, passively deployed roll-out solar array. *2006 IEEE Aerospace Conference, Big Sky, MT, USA,*, page 1–9, 2006.
- [16] M. Leipold, H. Runge, and C. Sickinger. Large sar membrane antennas with lightweight deployable booms. *28th ESA Antenna Workshop on Space Antenna Systems and Technologies, ESA/ESTEC, Noordwijk, Netherlands*, pages 1–8, 2005.
- [17] L. Blanchard. A tape-spring hexapod for deployable telescopes: Dynamics. *ESA Special Publication, The Netherlands*, pages 1–5, 2006.
- [18] B. Betts, D. A. Spencer, B. Nye, R. Munakata, J. M. Bellardo, S. D. Wong, A. Diaz, R. W. Ridenoure, B. A. Plantea, J. D. Foley, and J. Vaughn. 2:

- Controlled solar sailing using a cubesat. *4th International Symposium on Solar Sailing, Kyoto, Japan*, pages 1–7, 2017.
- [19] M. Leipold, M. Eiden, C.E. Garner, L. Herbeck, D. Kassing, T. Niederstadt, T. Kruger, G. Pagel, M. Rezazad, H. Rozemeijer, and W. Seboldt. Solar sail technology development and demonstration. *Acta Astronaut. (UK)*, 52:317–326, 2003.
- [20] S. Pellegrino. Deployable structures. *Springer Science & Business Media*, 2002.
- [21] T. W. Liu, J-B. Bai, N. Fantuzzi, and X. Zhang. Thin-walled deployable composite structures: A review. *Progress in aerospace structures 146*, 2024.
- [22] P. Fortescue, G. Swinerd, and J. Stark. *Spacecraft System Engineering*. 2011.
- [23] C. H. M. Jenkins. *Gossamer Spacecraft: Membrane And Inflatable Structures Technology For Space Applications*. 2001.
- [24] M. Tupper, N. Munshi, F. Beavers, and K. Gall. Developments in elastic memory composite materials for spacecraft deployable structures. 2001.
- [25] F. P. J. Rimrott. Storable tubular extendible member: a unique machine element. *Mach Des.*, 37 no.28:156–165, 1965.
- [26] D.S. Crouch. Mars viking surface sampler subsystem. *25th Conference on Remote Systems Technology*, pages 142–151, 1977.
- [27] T. W. Murphey and J. Banik. Triangular rollable and collapsible boom. *US Patent 7,895,795*, 2011.
- [28] C. Bidy and T. Svitek. Lightsail-1 solar sail design and qualification. *41st Aerospace Mechanisms Symposium, Pasadena, California, USA*, pages 451–463, 2012.
- [29] M. Whorton, A. Heaton, R. Pinson, G. Laue, and C. Adams. Nanosail-d: the first flight demonstration of solar sails for nanosatellites. *22nd Annual AIAA/USU Conference on Small Satellites, Logan, Utah, USA*, pp. 1–6, pages 1–6, 2008.

- [30] L. Johnson, M. Whorton, A. Heaton, R. Pinson, G. Laue, and C. Adams. Nanosail-d: A solar sail demonstration mission. *Acta Astronaut. (UK)*, 68:571–575, 2011.
- [31] O. R. Stohlman and E. Loper. Thermal deformation of very slender trac booms. *3rd AIAA Spacecraft Structures Conference, San Diego, California, USA*, pages 1–15, 2016.
- [32] C. Leclerc, A. Pedivellano, and S. Pellegrino. Stress concentration and material failure during coiling of ultra-thin trac booms. 2018.
- [33] L. Euler. *De curvis elasticis*.
- [34] S. P. Timoshenko and J. M. Gere. *Theory of elastic stability*. Courier Corporation, 2012.
- [35] A. Pagani and E. Carrera. Unified formulation of geometrically nonlinear refined beam theories. *Mechanics of advanced materials and structures*, pages 15–31, 2018.
- [36] R. Augello, E. Carrera, and A. Pagani. Unified theory of structures based on micropolar elasticity meccanica, 2019. *Meccanica*, 52, 2019.
- [37] I. Kaleel, M. Petrolo, E. Carrera, and A. Waas. Computationally efficient concurrent multiscale framework for the linear analysis of composite structures. *AIAA Journal*, 57:1–10, 2019.
- [38] A. Forghani, N. Zobeiry, A. Poursartip, and R. Vaziri. A structural modelling framework for prediction of damage development and failure of composite laminates. *Journal of composite materials*, 47.
- [39] T. W. Murphey, D. Turs, and L. Adams. Trac boom structural mechanics. *4th AIAA Spacecraft Structures Conference, Grapevine, Texas, USA*, pages 1–13, 2017.
- [40] C. Leclerc, A. Pedivellano, and S. Pellegrino. Stress concentration and material failure during coiling of ultra-thin trac booms. *2018 AIAA Spacecraft Structures Conference, Kissimmee, Florida, USA*, pages 1–16, 2018.

- [41] A. G. de Miguel, I. Kaleel, M. H. Nagaraj, A. Pagani, M. Petrolo, and E. Carrera. Accurate evaluation of failure indices of composite layered structures via various fe models. *Composites Science and Technology*, 167:174–189, 2018.
- [42] P. Nali and E. Carrera. A numerical assessment on two-dimensional failure criteria for composite layered structures. *Composites Part B: Engineering*, 43:280–289, 2012.
- [43] O. Hoffman. The brittle strength of orthotropic materials. *J Compos Mater*, 1:200–6, 1967.
- [44] S. W. Tsai and E. M. Wu. A general theory of strength for anisotropic materials. *Compos Mater*, 5:58–80, 1971.
- [45] R. Hill. Theory of mechanical properties of fiber-strengthened materials. *Self-consistent model. J Mech Phys Solids* 13:189–9, 1965.
- [46] S. W. Tsai. Strength theories of filamentary structures fundamental aspects of fibre reinforced plastic composites. *New York: WileyInterscience*, 1968.
- [47] Z. Hashin and A. Rotem. A fatigue criterion for fiber-reinforced materials. *J Compos Mater*, 7:448–64, 1973.
- [48] A. Puck and H. Schuermann. Failure analysis of frp laminates by means of physically based phenomenological models. *Compos Sci Technol*, 58:1045–67, 1998.
- [49] S. R. Hallett, W.G. Jiang, B. Khan, and M. R. Wisnom. Modelling the interaction between matrix cracks and delamination damage in scaled quasi-isotropic specimens. *Composites Science and Technology*, 68(1):80–89, 2008.
- [50] O. O. Ochoa and J. N. Reddy. *Finite Element Analysis of Composite Laminates*. Springer Netherlands, 1992.
- [51] S. R. Hallett, W. Jiang, B. Khan, , and M. R. Wisnom. Modelling the interaction between matrix cracks and delamination damage in scaled quasi-isotropic specimens. 68, 2008.

- [52] J. Reiner, M. Veidt, M. Dargusch, and L. Gross. A progressive analysis of matrix cracking-induced delamination in composite laminates using an advanced phantom node method. 51, 2017.
- [53] A. Matzenmiller, J. Lubliner, and R.L. Taylor. A constitutive model for anisotropic damage in fiber-composites. *Mechanics of Materials*, 20:125–152, 1995.
- [54] R. de Borst, M. A. Crisfield, J. J. C. Remmers, and C. V. Verhoosel. Nonlinear finite element analysis of solids and structures. *John Wiley & Sons*, 2012.
- [55] E. Carrera and A. Pagani. Evaluation of the accuracy of classical beam fe models via locking-free hierarchically refined elements. *International Journal of Mechanical Sciences*, 100:169–179, 2015.
- [56] Libin Zhao et al. A post-buckling compressive failure analysis framework for composite stiffened panels considering intra-, inter-laminar damage and stiffener debonding. 13, 2019.
- [57] X. Xu, M. R. Wisnom, X. Li, and S. R. Hallett. A numerical investigation into size effects in centre-notched quasi-isotropic carbon/epoxy laminates. *Composites Science and Technology*, 111:32–39, 2015.