

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale
in Ingegneria Aerospaziale



Tesi di Laurea Magistrale

Traiettorie verso i confini del Sistema Solare con propulsione nucleare elettrica a impulso specifico variabile

Relatore

Prof. Lorenzo CASALINO

Candidato

Antonio CAVALLARO

Aprile 2025

Abstract

In questa tesi si è deciso di trattare l'ottimizzazione della traiettoria di uno spacecraft che evade dalla Terra per arrivare ai confini del Sistema Solare, ad esempio un target come la Fascia di Kuiper e gli oggetti transnettuniani, spingendoci anche più lontano come le sonde Voyager, sfruttando la propulsione nucleare elettrica ad impulso specifico variabile.

Questa tesi mostra i principali risultati raggiunti per questa tipologia di applicazione: il fulcro centrale è rappresentato dall'utilizzo di un codice di calcolo risolutivo, il cui scopo è quello di trovare traiettorie che massimizzano l'energia finale E_f o la velocità di eccesso iperbolico finale V_{∞_f} dello spacecraft, in modo da raggiungere i confini del Sistema Solare in tempi adeguati. Un esempio può essere il raggiungimento della Fascia di Kuiper, a circa 30 unità astronomiche dalla Terra, in soli 3 anni se si arrivasse con una velocità finale di 10 AU/anno oppure in circa 12 anni se si raggiungessero le 120 AU delle sonde Voyager. La scelta della propulsione ricade su quella nucleare perchè è in grado di fornire le massime prestazioni in termini di potenza ma, allo stesso tempo, si necessita di un propulsore ad impulso specifico variabile per poter ottenere spinte molte elevate a raggi bassi (ad esempio in una fase eliocentrica della missione di avvicinamento verso il Sole), per cui si accettano I_{sp} minori ed elevati impulsi specifici a raggi alti, molto lontano dal nostro pianeta, in cui sono sufficienti spinte minori. Il codice utilizzato si basa su un metodo indiretto di ottimizzazione e sulla Teoria del controllo ottimale, sfruttando i principi di calcolo variazionale per un numero limitato di parametri.

Alla base di questo processo c'è una comprensione estesa e profonda della meccanica orbitale, a partire da ipotesi semplificative e approssimazioni che ci permettono di comprendere dettagliatamente il metodo più efficace da adottare per una modellizzazione della traiettoria ottimale. Si considera un semplice trasferimento orbitale di tipo iperbolico, con continuo allontanamento dal Sole e si identifica la traiettoria continua come un modello da suddividere in un insieme di archi multipli, sottointervalli caratterizzati da specifiche condizioni al contorno. Si potrebbe pensare di poter eseguire la manovra di Oberth, ma ciò richiederebbe un'elevatissima spinta

al perielio: avendo propulsione elettrica, per quanto si possa agire sulla spinta per farla salire al massimo, non si riesce a sfruttare l'effetto di tale trasferta.

In conclusione, si può affermare che la scelta di diversi target così ignoti, lontani e ricchi di misteri ancora irrisolti, deriva dalla curiosità innata intrinseca nell'uomo per la scoperta di nuovi orizzonti, ma soprattutto dal fatto di voler dare un input agli scienziati, astronomi ed importanti esponenti del settore aerospaziale di avere l'ambizione di voler risolvere ciò che al momento sembrano delle sfide insormontabili, ma il progresso scientifico è sempre più orientato verso l'innovazione e l'esplorazione delle zone più remote dello Spazio, con un occhio di riguardo sempre al rispetto dell'ambiente terrestre e spaziale e intraprendendo missioni spaziali in massima sicurezza: questa tesi non prevede di trarre conclusioni e soluzioni inconfutabili al problema, bensì una prima iterazione che permetta ai posteri di poter lavorare in maniera più dettagliata e approfondita su queste tematiche.

Ringraziamenti

“Un ringraziamento speciale alla mia famiglia, alla mia fidanzata, ai miei amici, al mio relatore e a tutti coloro che mi sono stati vicino durante il mio percorso, aiutandomi a crescere sia personalmente e sia a livello accademico”

con affetto, da Antonio

Indice

Elenco delle tabelle	VII
Elenco delle figure	VIII
Elenco delle abbreviazioni	X
1 Introduzione	1
1.1 Teoria del controllo ottimale	1
1.2 Metodi di ottimizzazione	3
1.3 Introduzione alla formulazione	8
1.4 Problema differenziale ai limiti	10
2 Esempi applicativi di propulsione	14
2.1 Propulsione elettrica avanzata	14
2.2 Scelta del propulsore	21
2.3 Confronto con le vele solari	30
2.4 Applicazione della teoria al moto eliocentrico	37
3 Elementi di meccanica del volo spaziale	41
3.1 Problema dei 2 corpi	41
3.2 Approssimazione Patched Conics	46
3.3 Manovra di Oberth	48
3.4 Modellizzazione della traiettoria	55
4 Esempi di applicazione: Fascia di Kuiper, sonde Voyager e Nube di Oort	56
4.1 Descrizione delle regioni più remote dello Spazio	56
4.2 Presentazione del codice	64
4.3 Parametri utilizzati e procedura matematica	66
4.4 Convalida e verifica	73
5 Conclusione e possibili miglioramenti	92

A Propulsore a ioni	95
B Propulsore ad impulso specifico variabile	96
C Ottimizzazione con le vele solari	99
D Equazioni in coordinate sferiche	101
Bibliografia	106

Elenco delle tabelle

2.1	Prestazioni dei propulsori a ioni e ad effetto Hall	19
2.2	Prestazioni dei VASIMR	29
4.1	Tentativo con $P = 0.2$ MW, durate di 20, 25 e 30 e $m_f = 0.5$	73
4.2	Tentativo con P e durate invariate, ma riduzione della massa finale al 45% di quella iniziale, $m_f = 0.45$	74
4.3	Tentativo con P e durate invariate, ma riduzione della massa finale al 40% di quella iniziale, $m_f = 0.4$	74
4.4	Tentativo con $P = 0.1$ MW, durate che variano da 20 a 62.8 e $m_f = 0.5$	80
4.5	Tentativo con $P = 0.08$ MW, durate che variano da 20 a 62.8 e $m_f = 0.5$	88
4.6	Tentativo con $P = 0.12$ MW, durate che variano da 20 a 62.8 e $m_f = 0.5$	88

Elenco delle figure

1.1	Rappresentazione geometrica del Metodo di Newton	5
2.1	Schema di un propulsore a ioni	15
2.2	Schema di un propulsore ad effetto Hall	17
2.3	Schema di un NTR	23
2.4	Schema di un propulsore ad impulso specifico variabile	24
2.5	Schema di un propulsore VASIMR VX-200	29
2.6	Schema di una vela solare	32
2.7	Minima traiettoria orbitale di una vela solare con target a 200 AU .	33
2.8	Immagine di una vela solare quadrata	35
2.9	Sistema di riferimento eliocentrico	38
3.1	Schema degli N-corpi rispetto ad un sistema di riferimento inerziale	42
3.2	Schema dei 2-corpi rispetto ad un sistema di riferimento inerziale .	43
3.3	Trasferta di Hohmann	48
3.4	Schema di un'escape iperbolico	51
3.5	Schema di una manovra di Oberth	53
4.1	Rappresentazione della Fascia di Kuiper	57
4.2	Schema delle due sonde gemelle Voyager 1 e 2	58
4.3	Immagine del disco placcato in oro delle sonde Voyager	59
4.4	Immagine della Nube di Oort rispetto al Sistema Solare	61
4.5	Rappresentazione della Nube di Oort a cura dell'ESO	62
4.6	Distribuzione delle comete nello Spazio dal Sistema Solare alla Nube di Oort	62
4.7	Grafico della traiettoria dello spacecraft per una potenza di 200 kW e una durata di circa 3 anni	76
4.8	Rappresenzazione dell'energia specifica in funzione della durata di spinta	77
4.9	Grafico della velocità efficace di scarico c in funzione del tempo di spinta	78

4.10	Rappresentazione della spinta in funzione della durata	79
4.11	Grafico della traiettoria dello spacecraft per una durata della spinta di 10 anni	81
4.12	Rappresentazione dell'energia specifica in funzione del tempo di spinta pari a 10 anni	82
4.13	Grafico di c per un tempo di 10 anni	83
4.14	Grafico di T in funzione di una durata di 10 anni	84
4.15	Rappresentazione dell'energia finale raggiunta dallo S/C al variare della durata di spinta per le masse finali di 4000, 5000 e 6000 kg . .	85
4.16	Traiettoria dello spacecraft per un tempo pari ad 8 anni per soluzione diretta e 1-giro	86
4.17	Traiettoria dello spacecraft per un tempo pari a quasi 9 anni per soluzione diretta e 1-giro	86
4.18	Confronto tra soluzione diretta e 1-giro per durate dai 7 ai 9 anni .	87
4.19	Confronto tra soluzione diretta e 1-giro per una durata di circa 6 anni e mezzo con $P = 0.08$ MW	89
4.20	Grafico della traiettoria di uno spacecraft alla potenza di 80 kW, massa finale di 5000 kg e tempo di spinta di 6 anni e 4 mesi	90
4.21	Rappresentazione dell'energia finale raggiunta dallo S/C al variare della durata di spinta per le potenze di 80, 100 e 120 kW	91
D.1	Sistema di riferimento terrestre locale	102

Elenco delle abbreviazioni

AU

Astronomical Units

DAE

Differential Algebraic Equations

NLP

Non Linear Programming

QP

Quadratic Programming

LP

Linear Programming

LS

Least Squares

BVP

Boundary Value Problem

IVP

Initial Value Problem

PPU

Power Processor Unit

S/C

Spacecraft

VASIMR

Variable Specific Impulse Magnetoplasma Rockets

RTG

Radioisotope Thermoelectric Generators

BOL

Beginning of Life

NTR

Neutral Thermal Rocket

LANTR

Lox Augmented Neutral Thermal Rocket

NPP

Nuclear Pulse Propulsion

FFT

Fission Fragment Thruster

ICRH

Ion Cyclotronic Resonance Heating

VSWR

Voltage Standing Wave Ratio

RF

Radio Frequency

ADCS

Attitude Determination Control System

ODE

Ordinary Differential Equations

RAAN

Right Ascension of the Ascending Node

LEO

Low Earth Orbit

MEO

Medium Earth Orbit

GEO

Geostationary Earth Orbit

SOI

Sphere Of Influence

KBO

Kuiper Belt Objects

NASA

National Aeronautics and Space Administration

ESO

European Southern Observatory

LPRE

Liquid Propellant Rocket Engine

HPRE

Hybrid Propellant Rocket Engine

MPD

Magneto Plasma Dynamic

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Teoria del controllo ottimale

Nella progettazione di una missione spaziale di qualsiasi genere risulta importante scegliere dei parametri fissi, intesi nello specifico come requisiti di missione, per inizializzare il problema e trovare la miglior soluzione possibile per una completa realizzazione del progetto. Si introduce così il concetto di ottimizzazione, facendo riferimento in particolare modo al *payload*, cioè il componente fondamentale di uno spacecraft che ci permette di portare a termine l'obiettivo finale, il cosiddetto carico pagante. L'ottimizzazione del payload prevede due diversi approcci:

- Ottimizzazione a impulso totale I_t costante: riguarda la propulsione ausiliaria, una tipologia di propulsione caratterizzata da consumi brevi (*station keeping*¹), per cui ha poco senso parlare di ottimizzazione (non trattata in questo documento);
- Ottimizzazione al costo di missione ΔV costante: riguarda la propulsione primaria, ovvero la definizione principale di accelerazione di un veicolo spaziale, con un conseguente cambiamento della traiettoria.

Il secondo approccio è quello adottato per la realizzazione di una missione di media o lunga durata, ma la soluzione finale è ottenuta attraverso metodi numerici, ad esempio il metodo di Newton e non è risolvibile analiticamente come il primo approccio; tale soluzione è la Teoria o Legge del controllo ottimale, la quale ci permette di ricavare il *payload fraction* ottimale $(\frac{m_u}{m_0})_{ott}$, ovvero il rapporto tra la massa del payload m_u e la massa iniziale m_0 , attraverso la velocità efficace di

¹Lo *station keeping* è una fase di missione che consiste nel mantenimento di uno spacecraft in un punto fisso dello Spazio

scarico ottimale c_{ott} (quindi l'impulso specifico ottimale $I_{sp_{ott}}$), i quali, insieme alla velocità di scarico o velocità all'uscita del propulsore u_e , rappresentano i principali requisiti di missione.

1.2 Metodi di ottimizzazione

I metodi di ottimizzazione si suddividono principalmente in due tipologie:

1. Metodi indiretti;
2. Metodi diretti.

Nel primo caso, trattato in questa tesi come metodo risolutivo, si vanno a considerare delle variabili di stato $x(t)$, delle variabili di controllo $u(t)$, le quali dipendono dalla variabile indipendente t , con la risoluzione di un sistema di equazioni differenziali e relative condizioni al contorno. Si procede iterativamente, inizializzando il problema ad una soluzione di tentativo e ottimizzando in maniera tale da ridurre il più possibile gli errori commessi ad ogni passo d'integrazione. Per questo metodo, in primo luogo, si sfruttano i principi del calcolo variazionale; in seconda istanza, i controlli sono determinati dalla soluzione di un problema differenziale ai limiti (di cui discuteremo alla fine di questo capitolo). Le caratteristiche principali dei metodi indiretti sono:

- un'elevata precisione numerica, grazie al tipo di metodo numerico utilizzato che è il metodo di Newton, con una conversione del problema in vari sotto-problemi ben definiti;
- un vasto contenuto teorico, con la presenza di formulazioni che verranno successivamente descritte, l'introduzione di variabili aggiunte alle variabili di stato o a quelle di controllo, la definizione dell'Hamiltoniano, l'esplicazione del funzionale e della sua derivata, con l'aggiunta delle relative condizioni al contorno;
- il vantaggio di avere un basso numero di parametri (nel nostro caso 5, meglio descritti nella sezione di parametri utilizzati del capitolo 4), rendendo meno complessa la risoluzione dell'ottimizzazione;
- una limitazione sui tempi di calcolo per non rendere il problema troppo oneroso dal punto di vista computazionale;
- lo svantaggio di avere un basso grado di convergenza, a causa della presenza di condizioni al contorno che in alcuni casi possono essere vincolate (cioè vincolo attivo) e in altri no (vincolo non attivato). Tutto ciò dipende dal rango della matrice dei vincoli rispetto alla variabile di controllo u , in particolare un rango che non sia massimo può portare alla presenza di più errori numerici, che intaccano la risoluzione del sistema DAE del problema ottimale;
- una scarsa robustezza del metodo.

Il calcolo variazionale, in definitiva, consiste nella determinazione di una curva, per la quale:

- vengono risolte delle equazioni differenziali;
- sono soddisfatte delle condizioni algebriche agli estremi;
- è massima una quantità J , cioè il funzionale già descritto nel corso di questo documento, caratterizzato da due formulazioni: la *Formulazione di Mayer* e quella di *Lagrange*. La prima prevede la dipendenza del funzionale dai valori delle variabili agli estremi della curva, mentre la seconda è scritta in forma integrale con estremi di integrazione quelli della curva stessa, cioè il tempo iniziale t_0 e il tempo finale t_f (in quella di Mayer ci sono anche le posizioni all'istante iniziale e finale, rispettivamente $x(t_0)$ e $x(t_f)$).

Per concludere su questo metodo, si può affermare che la risoluzione di un problema continuo avviene mediante un'approssimazione numerica che possa renderlo discretizzato: non avviene un calcolo diretto della funzione ottimale, bensì indirettamente si procede con la riduzione degli errori numerici al minimo per ottenere una soluzione più vicina possibile alla condizione di ottimo.

Per quanto riguarda la seconda tipologia dei metodi diretti, essi prevedono la risoluzione di un problema non continuo, bensì discreto: il sistema di equazioni differenziali algebriche presenta già un numero limitato di variabili (anche se in questo caso il numero di parametri risulta molto più elevato rispetto ai metodi indiretti), per cui è necessario adottare un metodo numerico per semplificare un grande problema finito in piccoli sotto-problemi, sempre di dimensione finita. L'ottimizzazione diretta avviene tramite delle tecniche NLP, le quali permettono di trovare la soluzione di una funzione da ottimizzare nel rispetto di alcuni vincoli, a partire da un numero finito di variabili. Fanno parte di queste tecniche anche la programmazione quadratica (QP), quella lineare (LP) e il metodo dei minimi quadrati (LS).

Anche in questo caso, il metodo utilizzato è quello di Newton, per il quale si calcolano le radici o gli zeri di una funzione. Inizialmente, si può considerare un vincolo scritto in forma non lineare:

$$c(x) = 0 \tag{1.1}$$

Si parte da una soluzione di tentativo x_k e si effettua un'approssimazione del vincolo non lineare rispetto a tale soluzione di tentativo, con un'espansione in serie di Taylor fino al I ordine, ottenendo la seguente approssimazione lineare:

$$c(x) = c(x_k) + c'(x_k)(x - x_k) \quad (1.2)$$

A livello geometrico, si rappresenta una retta passante per il punto $(x_k, c(x_k))$, come approssimazione locale della funzione e si trova la radice nel punto sull'asse x pari a x_{k+1} . Nella seconda iterazione, si parte da questa nuova soluzione e si ripete il procedimento, trovando la soluzione al passo successivo e così via, come è mostrato nella Figura 1.1:

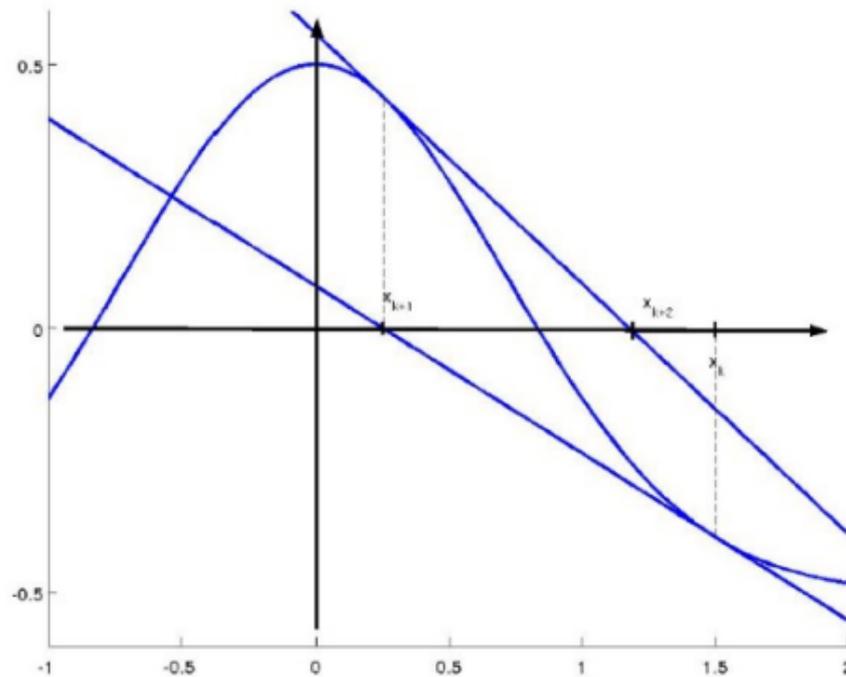


Figura 1.1: Rappresentazione geometrica del Metodo di Newton

Si procede con le iterazioni finchè non si trova la soluzione x^* e in questo metodo si utilizzano la funzione e la relativa derivata in ogni iterazione. Ciò viene semplificato attraverso il metodo delle differenze finite:

$$c'(x) = \frac{c(x_k) - c(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = \frac{\Delta c}{\Delta x} \quad (1.3)$$

Questo metodo prende il nome di *Metodo delle secanti* e tutto questo discorso viene applicato nella ricerca della soluzione J^* del funzionale J , già dimostrato nelle sezioni precedenti, partendo da un'espansione in serie di Taylor del funzionale, troncato al III ordine.

Date le premesse, si va a sviluppare il funzionale J^* :

$$J^* = \varphi + \mu^T \chi + \sum_j (\lambda_{j-1+}^T \cdot x_{j-1+} - \lambda_{j-}^T \cdot x_{j-}) + \sum_j \int_{t_{j-1+}}^{t_{j-}} (\Phi + \lambda^T f - \lambda^T x) dt \quad (1.4)$$

Derivando, ottengo:

$$\begin{aligned} dJ^* = & \left(-H_{j-1+} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{j-1+}} + \mu^T \frac{\partial \chi}{\partial t_{j-1+}} \right) \delta t_{j-1+} + \left(H_{j-} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{j-}} + \mu^T \frac{\partial \chi}{\partial t_{j-}} \right) \delta t_{j-} + \\ & + \left(\lambda_{j-1+}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{j-1+}} + \mu^T \frac{\partial \chi}{\partial x_{j-1+}} \right) \delta x_{j-1+} + \left(-\lambda_{j-}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{j-}} + \mu^T \frac{\partial \chi}{\partial x_{j-}} \right) \delta x_{j-} + \\ & + \sum_j \int_{t_{j-1+}}^{t_{j-}} \left[\left(\frac{\partial H}{\partial x} + \lambda^T \right) \delta x + \frac{\partial H}{\partial u} \delta u \right] dt \end{aligned} \quad (1.5)$$

In seguito a ciò, si può considerare un caso particolare, in cui l'Hamiltoniano H è lineare rispetto a un controllo vincolato:

- se consideriamo il coefficiente di controllo non nullo, l'Hamiltoniano risulta essere massimizzato per un valore massimo del controllo se esso è > 0 e minimizzato se < 0 , il cosiddetto *controllo bang-bang*;
- se, invece, si annulla il coefficiente di controllo in un intervallo di tempo definito, il cosiddetto *singular arc*, si annullano tutte le derivate in modo da non rendere esplicito il controllo.

Si riportano di seguito delle condizioni al contorno che annullano i coefficienti δx_{j-} , δx_{j+} , δt_{j-} e δt_{j+} dell'Hamiltoniano:

$$-\lambda_{j-}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{j-}} + \mu^T \left[\frac{\partial \chi}{\partial x_{j-}} \right] = 0 \quad (1.6)$$

con $j = 1, \dots, n$

$$\lambda_{j+}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{j+}} + \mu^T \left[\frac{\partial \chi}{\partial x_{j+}} \right] = 0 \quad (1.7)$$

con $j = 0, \dots, n-1$

$$H_{j-} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{j-}} + \mu^T \frac{\partial \chi}{\partial t_{j-}} = 0 \quad (1.8)$$

con $j = 1, \dots, n$

$$-H_{j+} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{j+}} + \mu^T \frac{\partial \chi}{\partial t_{j+}} = 0 \quad (1.9)$$

con $j = 0, \dots, n - 1$. Le equazioni 1.6 e 1.8 non hanno significato all'inizio della traiettoria (in $j = 0$), le relazioni 1.7 e 1.9 non hanno significato alla fine (in $j = n$). Si va ad annullare μ da queste quattro equazioni, ottenendo:

$$\sigma[(x_{j-1+}, x_{j-}, \lambda_{j-1+}, \lambda_{j-}, t_{j-1+}, t_{j-})] = 0 \quad (1.10)$$

che, insieme all'equazione 1.12, completano il sistema di equazioni differenziali dato dalla 1.11 e dalla 1.16 (presenti nella successiva sezione). Inoltre, bisogna tenere conto di alcune considerazioni e particolarità:

- se si assegna la variabile di stato x in maniera esplicita all'istante $j = 0$, non sono presenti condizioni sulla corrispondente variabile aggiunta (λ_{x_0} libera, analogamente avviene se la variabile è assegnata all'istante $j = n$);
- la variabile aggiunta all'istante iniziale si annullerebbe nel caso in cui non comparisse la variabile di stato x_0 nè in φ , nè nelle condizioni al contorno ($\lambda_{x_0} = 0$);
- una variabile di stato continua e non assegnata esplicitamente a un suo contorno interno, comporta anche la propria variabile aggiunta continua ($\lambda_{x_{j+}} = \lambda_{x_{j-}}$);
- se una variabile di stato, invece, risulta continua e assegnata ad un suo contorno interno i , la sua corrispondente variabile aggiunta possiede una certa discontinuità libera ($\lambda_{x_{j+}}$ indipendente da $\lambda_{x_{j-}}$);
- si annulla l'Hamiltoniano all'istante $j = 0$, nel momento in cui il tempo iniziale t_0 non compare nè in φ e neanche nelle condizioni al contorno ($H_0 = 0$);
- se, tuttavia, un tempo assegnato in un istante intermedio t_j non è presente in maniera esplicita nella funzione φ , diventa continuo l'Hamiltoniano in j ($H_{j+} = H_{j-}$);
- infine, assegnato, sempre in modo esplicito, un tempo nel suo contorno interno (t_j), H ha in quel contorno una discontinuità libera.

1.3 Introduzione alla formulazione

Si può introdurre il concetto di ottimizzazione considerando anche la minimizzazione di un indice di prestazione, come per esempio la quantità di propellente, perché meno propellente ci si porta a bordo dello spacecraft, minore sarà la quantità da espellere una volta completata la missione. La Legge di controllo ottimale si basa anche sui principi di calcolo variazionale, usufruendo del problema differenziale ai limiti (BVP), introdotto nella sezione successiva. Partendo da un sistema di un vettore di variabili di stato x , si può scrivere la seguente equazione differenziale:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t) \quad (1.11)$$

dove

- u rappresenta un vettore di controllo;
- t rappresenta il tempo come variabile indipendente.

La variabile t ha come estremi t_{j-1+} e t_{j-} , così come x (da x_{j-1+} a x_{j-}): bisogna tenere conto delle discontinuità, della velocità in seguito all'esecuzione di una manovra impulsiva, dei limiti di tempo e della massa. Le condizioni di bordo, sia per quello esterno, sia per quello interno, sono non lineari miste:

$$\chi(x_{j-1+}, x_{j-}, t_{j-1+}, t_{j-}) = 0 \quad (1.12)$$

con j che va da 1 a n sottointervalli della traiettoria.

Per risolvere il problema di ottimo bisogna ricercare i valori agli estremi attraverso il funzionale J :

$$J = \varphi(x_{j-1+}, x_{j-}, t_{j-1+}, t_{j-}) + \sum_j \int_{t_{j-1+}}^{t_{j-}} \Phi(x(t), u(t), t) dt \quad (1.13)$$

Esprimendo così il funzionale come somma di due contributi:

- φ dipende dalle variabili, dal tempo e dai contorni del bordo esterno e di quello interno;
- Φ dipende, invece, solo dalle variabili e dal controllo.

Si può riscrivere il funzionale attraverso i moltiplicatori di Lagrange, introducendo delle costanti μ per le condizioni al contorno e delle variabili aggiunte λ^2 :

$$J^* = \varphi + \mu^T \cdot \chi + \sum_j \int_{t_{j-1+}}^{t_{j-}} [\Phi + \lambda^T \cdot (f - \dot{x})] dt \quad (1.14)$$

soddisfando le condizioni al contorno imponendo $J = J^*$. Si definisce così il valore del cosiddetto *Hamiltoniano*:

$$H = \Phi + \lambda^T \cdot f \quad (1.15)$$

ottenuto imponendo nulla la variazione prima del funzionale J^* , con una serie di operazioni di integrazione per parti e differenziazione. L'introduzione di λ ha permesso la semplificazione di alcuni coefficienti, in modo da ricavare le equazioni di Eulero-Lagrange per le condizioni di ottimo (1.16) e quella per i controlli (1.17):

$$\frac{d\lambda}{dt} = - \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^T \quad (1.16)$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial u} \right)^T = 0 \quad (1.17)$$

Nel nostro caso di studio, il vincolo, cioè un valore soggetto a delle particolari condizioni, previste dal cosiddetto *dominio di ammissibilità*, è da considerare esplicito e costante. Secondo il *Principio del massimo di Pontryagin*, il valore ottimale si ottiene massimizzando o minimizzando l'Hamiltoniano, in tutti i punti della traiettoria, distinguendo principalmente tra due casi:

1. il valore ottimale risulta essere quello dell'equazione 1.17 se tale valore fa parte del dominio di ammissibilità e il vincolo non interviene in quel punto, parlando di *controllo localmente non vincolato*;
2. il valore ottimale si trova agli estremi se non fa parte del dominio di ammissibilità (*controllo vincolato*).

²Una variabile si dice aggiunta quando la si aggiunge ad un vettore specifico, come ad esempio λ_V , che rappresenta la variabile aggiunta al vettore velocità \vec{V} , il cosiddetto *primer vector* o *vettore d'innescio*, un parametro che esplicita l'accensione del propulsore

1.4 Problema differenziale ai limiti

Un aspetto fondamentale nella risoluzione dell'ottimizzazione di un problema riguarda la considerazione delle equazioni differenziali già introdotte, come la 1.11 e la 1.16, nelle quali i controlli vengono determinati dalle equazioni algebriche, come l'equazione 1.17, supportate dalle condizioni al contorno 1.12 e 1.10. Si utilizza un sistema di equazioni differenziali che si definisce ai limiti, nel quale solo alcune variabili iniziali risultano essere delle incognite del problema. Integrando numericamente il sistema differenziale, si vanno a ricercare dei valori iniziali, imponendo delle opportune condizioni al contorno o condizioni di ottimo. Bisogna tenere conto di alcuni aspetti particolari:

- si suddivide l'intervallo d'integrazione in sottointervalli dove le equazioni differenziali assumono espressioni diverse;
- un'incognita del problema è rappresentata dalla durata di ogni sottointervallo;
- possono esserci delle condizioni al contorno non lineari, con valori delle variabili coinvolte sia nei contorni esterni, sia in quelli interni;
- le variabili stesse possono risultare discontinue sui contorni interni ed essere delle incognite dopo la discontinuità.

La soluzione del problema differenziale ai limiti può essere ottenuta andando a ridurre il problema in una serie di problemi ai valori iniziali (IVP), i quali convergono attraverso il metodo di Newton. Si procede sostituendo t alla nuova variabile indipendente ε , definita nel j -esimo sottointervallo, secondo l'equazione:

$$\varepsilon = j - 1 + \frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} = j - 1 + \frac{t - t_{j-1}}{\tau_j} \quad (1.18)$$

dove τ_j rappresenta la durata del sottointervallo, parametro costante di ε . Il problema differenziale è nella variabile $y = (x, \lambda)$:

$$\frac{dy}{dt} = f^*(y, t) \quad (1.19)$$

Viene introdotto un nuovo vettore $z = (y, c)$, in cui c è il vettore dei parametri costanti e viene applicato un cambio di variabile indipendente:

$$\frac{dz}{d\varepsilon} = f(z, \varepsilon) \quad (1.20)$$

Si esplicita il II membro:

$$\frac{dy}{d\varepsilon} = \tau_j \frac{dy}{dt} \quad (1.21)$$

Per il vettore c si ottiene:

$$\frac{dc}{d\varepsilon} = 0 \quad (1.22)$$

con condizioni al contorno:

$$\Phi(s) = 0 \quad (1.23)$$

in cui s è il vettore nel quale sono contenuti i valori che assumono le variabili ad ogni contorno:

$$s = (y_0, y_1, \dots, y_n, c) \quad (1.24)$$

In genere, i valori iniziali sono delle incognite e attraverso delle iterazioni si riesce a determinare quali valori essi debbano assumere per soddisfare l'equazione 1.23. La r -esima iterazione incomincia con l'integrazione dell'equazione 1.20, con i valori iniziali p^r ricavati alla fine della precedente iterazione. Si fissa:

$$z(0) = p^r \quad (1.25)$$

integrando le equazioni lungo tutta la traiettoria, considerando tutte le discontinuità ai contorni interni (al primo passo si sceglie il valore di tentativo p^1). Per ogni contorno si ricava il valore delle variabili di stato e alla fine di ogni integrazione viene calcolato l'errore ψ^T nelle condizioni al contorno, alla r -esima iterazione. Si pone Δp come variazione per poter indurre una variazione dell'errore sulle condizioni al contorno $\Delta\psi$ pari a:

$$\Delta\psi = \left[\frac{\partial\psi}{\partial p} \right] \Delta p \quad (1.26)$$

Si ricava così Δp , considerando, per ogni iterazione, $\Delta\psi = -\psi^r$:

$$\Delta p = p^{r+1} - p^r = - \left[\frac{\partial\psi}{\partial p} \right]^{-1} \psi^r \quad (1.27)$$

con $\left[\frac{\partial\psi}{\partial p} \right]^{-1}$ una matrice calcolata come prodotto di altre due matrici:

$$\left[\frac{\partial\psi}{\partial p} \right] = \left[\frac{\partial\psi}{\partial s} \right] \cdot \left[\frac{\partial s}{\partial p} \right] \quad (1.28)$$

in cui

- $\left[\frac{\partial \psi}{\partial s}\right]$ è ottenuta derivando le condizioni al contorno rispetto alle grandezze che si presentano;
- in $\left[\frac{\partial s}{\partial p}\right]$ sono presenti le derivate delle variabili sulle condizioni al contorno rispetto ai valori iniziali, ovvero i valori assunti dalla seguente matrice:

$$\left[\frac{\partial z}{\partial p}\right] = [g(\varepsilon)] \quad (1.29)$$

che si ottiene per integrazione del sistema di equazioni differenziali, andando a derivare l'equazione 1.20, rispetto ad ogni valore iniziale:

$$[\dot{g}] = \frac{d}{d\varepsilon} \left[\frac{\partial z}{\partial p}\right] = \left[\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{dz}{d\varepsilon}\right)\right] = \left[\frac{\partial f}{\partial p}\right] \quad (1.30)$$

Si esplicita lo *Jacobiano*:

$$[\dot{g}] = \left[\frac{\partial f}{\partial z}\right] \left[\frac{\partial z}{\partial p}\right] = \left[\frac{\partial f}{\partial z}\right] g \quad (1.31)$$

Derivando la 1.25, si ricavano i valori iniziali del sistema omogeneo 1.31:

$$[g(0)] = \left[\frac{\partial z(0)}{\partial p}\right] [I] \quad (1.32)$$

in cui $[I]$ è la matrice *identità*. Per tenere conto delle discontinuità nell' i -esimo punto, è necessario aggiornare sia il vettore z , sia la matrice $[g]$, attraverso la funzione h :

$$z_{i+} = h(z_{i-}) \quad (1.33)$$

$$[g_{i+}] = \left[\frac{\partial h}{\partial z}\right] [g_{i-}] \quad (1.34)$$

La matrice dell'equazione 1.27 può essere valutata numericamente: si ricava la i -esima riga dell' i -esimo componente p di Δp , poi si integra l'equazione 1.20. Si può calcolare $\Delta \psi$ (quindi Δp e con una linearizzazione ottenere $\frac{\Delta \psi^T}{\Delta p}$). Tipicamente abbiamo valori di Δp dell'ordine di 10^{-6} - 10^{-7} , però non è detto che si riesca in ogni caso ad andare a convergenza poichè sempre la matrice dell'equazione 1.27 risulta essere meno accurata della soluzione del sistema 1.31. Per il calcolo dello Jacobiano, si effettua un confronto tra la soluzione analitica e quella numerica e si integrano le equazioni differenziali attraverso un metodo che adotta passo e ordine

variabile, basato sulle *Formule di Adams*: si richiede una precisione dell'ordine di 10^{-7} (l'errore massimo $E_{max} = \max_i(\psi_i)$ non deve superare tale ordine di grandezza). Si possono effettuare dei miglioramenti alla procedura:

- si può correggere attraverso una frazione della soluzione già determinata

$$p^{r+1} = p^r + K_1 \Delta p \quad (1.35)$$

in cui K_1 è un coefficiente con valori compresi tra 0.1 e 1, da determinare in una prima prova di codice;

- riscontrando il caso in cui l'errore commesso nella nuova iterazione sia molto maggiore rispetto a quello dell'iterazione precedente, si applica il *Metodo di bisezione*, dimezzando la correzione Δp e integrando le equazioni del moto con il nuovo valore di tentativo:

$$p^{r+1} = p^r + K_1 \frac{\Delta p}{2} \quad (1.36)$$

andando sempre a confrontare il nuovo errore massimo ricavato con quello dell'iterazione precedente. Il numero massimo di bisezioni viene imposto pari a 5 e, superato tale valore, il procedimento è da arrestare perchè la soluzione non converge;

- come ultimo aspetto, per procedere con le iterazioni, bisogna paragonare l'errore massimo commesso nelle condizioni al contorno E_{max}^{r+1} con quello dell'iterazione precedente E_{max}^r : se si ricava $E_{max}^{r+1} < K_2 E_{max}^r$, si può procedere con la nuova iterazione, con K_2 che deve avere un valore opportuno compreso tra 2 e 3.

Si può notare come, in questo primo capitolo, si sono presentati, *step by step*, diversi aspetti trattati perlopiù con una generalizzazione ai metodi, agli aspetti e agli strumenti che tipicamente sono da adottare per l'ottimizzazione della traiettoria di uno spacecraft in una missione spaziale interplanetaria. L'obiettivo di questo documento consiste nel riportare quanto appena spiegato per diversi esempi di applicazione, come la Fascia di Kuiper, le sonde Voyager e la Nube di Oort, dei quali parleremo nel capitolo 4.

Capitolo 2

Esempi applicativi di propulsione

2.1 Propulsione elettrica avanzata

Negli sviluppi odierni, la tipologia di propulsione utilizzata per le missioni interplanetarie o interstellari è quella elettrica, facendo riferimento in particolar modo a quella elettrostatica, per la quale l'azione di spinta del propulsore è dettata dalla sola forza elettrostatica, con la presenza di un campo elettrico, applicata ad un gas ionizzato. Esistono, però, anche altre due principali categorie:

- Propulsori elettrotermici: la forza di spinta del propulsore è dovuta alla trasformazione di energia elettrica in calore per riscaldare un gas in un ugello. La loro principale applicazione è nelle missioni di breve durata e a basso consumo;
- Propulsori elettromagnetici: la forza di spinta si viene a generare grazie all'interazione tra un campo elettrico e un campo magnetico. Non sono ancora utilizzati per le troppo elevate potenze richieste, anche se in questi anni, per ovviare al problema, si sta studiando un'alternativa con i generatori a fissione nucleare, come tipologie di macchine adatte ad arrivare molto lontano nel più breve tempo possibile.

Tra i propulsori elettrostatici si distinguono i propulsori a *ioni*, il cui schema è qui sotto riportato:

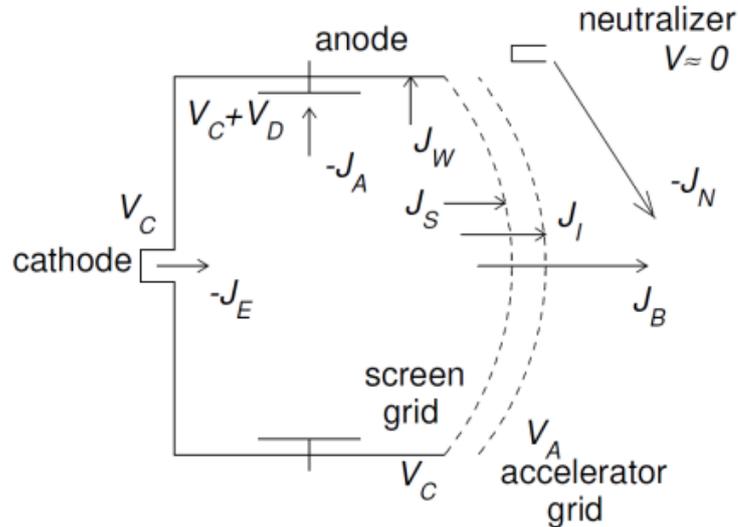


Figura 2.1: Schema di un propulsore a ioni

Dalla Figura 2.1 si può notare come questa macchina sia caratterizzata da una camera di ionizzazione o *discharge chamber*, nella quale avviene proprio il processo di ionizzazione del propellente (solitamente lo xeno Xe), il quale viene inserito attraverso opportuni fori, principalmente dal fondo della camera. Essa è costituita da un cilindro cavo, un *catodo*^{1,2} e un secondo cilindro interno alla camera che funge da *anodo*, cioè un elettrodo positivo. Tra i due elettrodi si genera una differenza di potenziale V_d , il *potenziale di scarica*, creandosi un campo elettrico E diretto da anodo a catodo (da potenziale più alto a più basso): gli elettroni sono attratti verso l'anodo, accelerati dal campo elettrico, ma non vogliamo un loro prematuro raggiungimento dell'elettrodo positivo perchè è importante che avvenga la ionizzazione del propellente. Per far accadere ciò, è necessario aumentare il confinamento degli elettroni, mettendo dei magneti per generare un campo magnetico B , in modo che avvengano quante più collisioni ionizzanti tra elettroni e atomi di propellente. A valle della camera abbiamo la *screen grid*, che ha la funzione di respingere gli elettroni ed estrarre gli ioni; a valle della griglia schermo

¹elettrodo negativo dal quale fuoriescono elettroni secondo il meccanismo *termoionico*

²L'effetto termoionico è quell'effetto per cui vengono emessi degli ioni se il catodo è sufficientemente scaldato e per mantenere la neutralità, per ogni ione che si emette, bisogna espellere anche un elettrone

c'è l'*accelerator grid*, la quale permette l'accelerazione degli ioni per la generazione di spinta del propulsore, con una differenza di potenziale V_g (*potenziale di griglia*) tra le due griglie, che deve essere molto elevata per contrastare la maggior criticità di questa tipologia di propulsori: il limite sulla massima densità di corrente j_{max} nella zona di accelerazione, dettato dalla *Legge di Child*, con la seguente espressione:

$$j_{max} = \frac{4 \cdot \varepsilon_0}{9} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot q}{m_+}} \cdot \frac{V_g^{\frac{3}{2}}}{x_a^2} \quad (2.1)$$

con

- ε_0 = costante dielettrica del vuoto pari a $8.85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2}$;
- q = generica carica della particella, in modulo sempre pari a $1.6 \cdot 10^{-19} C$;
- m_+ = massa di uno ione che è pari a $1.67 \cdot 10^{-27} kg$;
- x_a = distanza tra le griglie, solitamente dell'ordine di qualche *mm*.

Tale limite sulla densità di corrente si può tradurre in un limite sulla massima densità di spinta $\left(\frac{T}{A}\right)_{max}$:

$$\left(\frac{T}{A}\right)_{max} = j_{max} \cdot \frac{m_+}{q} \cdot u_+ \quad (2.2)$$

con u_+ che è la velocità di uscita degli ioni. Per completare la descrizione dello schema, esso si conclude con un *catodo neutralizzatore* che ha la funzionalità di neutralizzare il fascio di ioni in uscita, con un fascio di elettroni, in modo da rendere la macchina elettricamente neutra. A livello di prestazioni, l'impulso specifico di questi propulsori è superiore ai 2500 s, risultando in prima istanza adatto per le missioni a lungo termine e lontane.

Dalle considerazioni appena fatte, si deduce che il problema dei propulsori a ioni sia la limitazione della massima densità di corrente: per ovviare a questo problema si introducono i propulsori a *effetto Hall*³, un ibrido tra propulsori elettrostatici e propulsori elettromagnetici, il cui schema è qui sotto riportato:

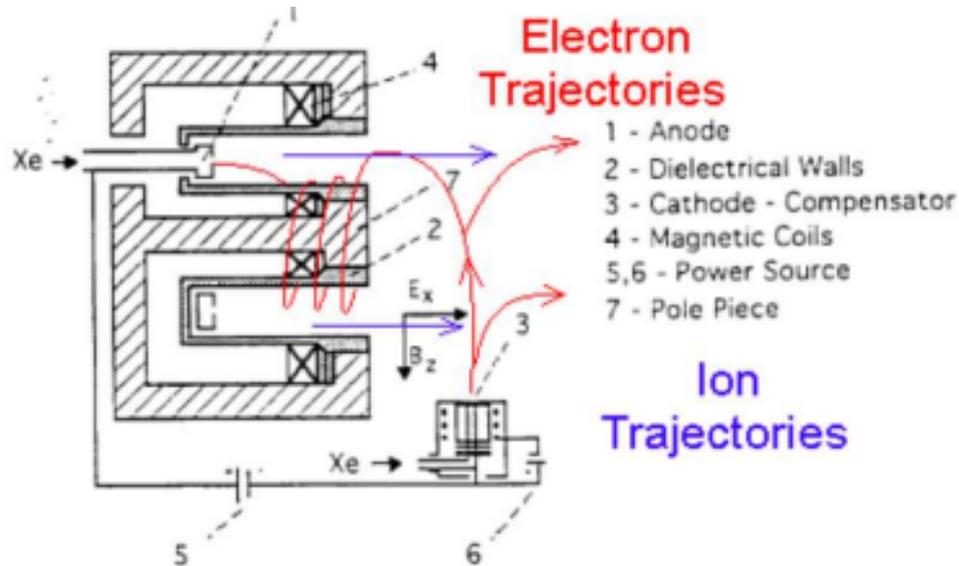


Figura 2.2: Schema di un propulsore ad effetto Hall

Tali propulsori basano il loro principio di funzionamento sull'accelerazione di un *working fluid*, cioè un fluido di lavoro costituito dal propellente che, così come per i propulsori a ioni, risulta essere sempre lo xeno, inserito sempre da appositi fori presenti sul fondo della camera e opportunamente ionizzato grazie alla mutua interazione tra un campo elettrico e un campo magnetico, ortogonali tra loro e diretti rispettivamente radialmente e lungo l'asse della macchina, realizzata con simmetria cilindrica. L'utilizzo dello *Xe* è dovuto alle sue caratteristiche di elevata massa atomica e basso potenziale di ionizzazione, talvolta è possibile utilizzare anche l'argon (*Ar*) e il kripton (*Kr*).

Anche in questo caso, è presente un catodo che emette elettroni, diretti verso l'anodo che si trova all'interno della macchina. Il campo *B* è generato da un circuito magnetico costituito da bobine percorse da corrente e da elementi ferromagnetici per indirizzare le linee di campo nella zona di introduzione del propellente; il campo

³L'effetto Hall è un fenomeno fisico per il quale si osserva una differenza di potenziale in senso trasversale in un conduttore attraversato da corrente elettrica in verso longitudinale quando questo è sottoposto ad un campo magnetico perpendicolare

elettrico è sempre generato dalla differenza di potenziale tra anodo e catodo. La densità di propellente è bassa e si ha un elevato *parametro di Hall* Ω ($\simeq 100$), che sta ad indicare una bassissima frequenza di collisioni ν_B . La corrente di elettroni emessa dal catodo si dirige assialmente verso l'anodo, seguendo ovviamente la direzione del campo elettrico; quando gli elettroni penetrano all'interno del motore e risentono del campo magnetico radiale, rimangono intrappolati nella zona di massima intensità del campo, il quale annulla il loro moto verso l'anodo a causa del piccolo raggio di *Larmoor o ciclotronico* degli elettroni r_{B_e} , impartendo loro una velocità tangenziale, ortogonale sia ad E , sia a B , creando per effetto Hall una corrente elettrica circonferenziale, la cosiddetta *corrente di Hall* J_θ .

Il campo magnetico viene così creato in una zona ristretta in modo che gli ioni non riescano a finire nemmeno una cicloide uscendo dalla zona presidiata dal campo B , date le limitate dimensioni della macchina. Dal punto di vista fisico, finché il parametro di Hall continua ad essere molto elevato, gli elettroni si limitano semplicemente a compiere delle cicloidi ruotando su se stessi. Man mano che però aumenta il flusso di elettroni all'interno della camera, essi tendono a respingersi tra loro, andando così ad incontrare gli atomi di propellente inseriti, generandosi così delle collisioni (riduzione di Ω) che portano alla ionizzazione. In questo modo gli elettroni avanzano, sempre con delle cicloidi, verso l'anodo (si genera una corrente molto piccola $-J_z = \frac{J_\theta}{\Omega}$, dove z indica la direzione assiale della macchina) e gli ioni sono accelerati verso l'esterno (corrente di ioni J_+), generando la spinta di questi propulsori, con la conseguente neutralizzazione ad opera del catodo neutralizzatore (corrente di neutralizzazione $-J_n$). Da evidenziare come, rispetto ai propulsori descritti in precedenza, bisogna distinguere tra le forze che agiscono sul *propellente* e quelle che agiscono sul *propulsore*:

- *propellente*: sugli elettroni, la forza complessiva, somma della forza magnetica e di quella elettrostatica, è nulla perchè i contributi sono uguali in modulo, ma di verso opposto

$$f_{TOT_e} = f_{E_e} + f_{B_e} = -n_e \cdot q \cdot E + n_e \cdot q \cdot E = 0 \quad (2.3)$$

dove il pedice "e" sta per elettroni, "E" sta per elettrostatica e "B" per magnetica, mentre sugli ioni agisce la sola forza elettrostatica

$$f_{TOT_+} = f_{E_+} + f_{B_+} = n_+ \cdot q \cdot E + 0 = n_+ \cdot q \cdot E \quad (2.4)$$

dove f_{B_+} lo si può considerare trascurabile perchè la velocità degli ioni è molto piccola e le dimensioni longitudinali d del propulsore sono limitate, come già detto in precedenza sul mancato compimento di un'intera cicloide ($r_{B_+} \gg d \gg r_{B_e}$), dove r_{B_+} è il raggio di Larmoor degli ioni. Dal punto di

vista del propellente, quindi, realizziamo un'accelerazione elettrostatica degli ioni senza limitazioni della Legge di Child perchè ci sono sia ioni, sia elettroni, accelerando quindi il plasma, ma per generare spinta bisogna aggiungere un campo magnetico;

- *propulsore*: il propulsore emette una forza elettrostatica, somma di quella dovuta agli ioni e agli elettroni, che risulta essere nulla perchè sono uguali e opposte tra loro, quindi è la forza magnetica sugli elettroni (considerando sempre trascurabile quella degli ioni, come già affermato in precedenza) a fornire la spinta del propulsore, grazie alla presenza dei solenoidi che forniscono il campo B

$$f_E = f_{E_e} + f_{E_+} = 0 \quad (2.5)$$

$$f_B = f_{B_e} + f_{B_+} = n \cdot q \cdot E \quad (2.6)$$

I propulsori a effetto Hall possono essere definiti anche come *motori a ioni senza griglia* per le analogie tra queste due tipologie, con la differenza che quelli appena descritti hanno I_{sp} più basso di quelli a ioni, compreso tra i 1500 e i 2500 s, dovuto al fatto che la velocità in uscita degli ioni è più bassa. Dal punto di vista applicativo, queste macchine vengono utilizzate per missioni di durata media e a medio raggio, non adatti per il nostro caso di studio, cioè una missione verso i confini del Sistema Solare.

Di seguito viene riportata una tabella riassuntiva delle prestazioni dei propulsori appena descritti:

Tipo di propulsore	Propulsore a ioni	Propulsore a effetto Hall
Potenza P [W]	2000 - 4000	300 - 6000
Impulso specifico I_{sp} [s]	2800	1600
Rendimento η	0.65	0.5
Voltaggio di picco V_{peak} [V]	900	300
Massa specifica del generatore β [$\frac{kg}{kW}$]	3 - 6	2 - 3
Storage del propellente	Xe supercritico	Xe supercritico
Massa specifica della PPU β_{PPU} [$\frac{kg}{kW}$]	6 - 10	6 - 10
Missione	Station keeping, trasferte a ΔV alto	Station keeping, trasferte a ΔV medio
Sistema di alimentazione	regolato	regolato

Tabella 2.1: Prestazioni dei propulsori a ioni e ad effetto Hall

Dalla Tabella 2.1, si può notare come, oltre all'impulso specifico, anche il rendimento è più basso nei propulsori ad effetto Hall. Queste macchine, però, forniscono impulsi specifici pressochè costanti, ma sarebbe più opportuno poter usufruire di un ampio range di valori di impulsi specifici per poter compiere delle traiettorie che permettano allo S/C di evadere dalla Terra con un'elevata velocità di fuga e arrivare anche oltre i confini del Sistema Solare. Inoltre, sarebbe opportuno aumentare gradualmente l'impulso specifico, all'aumentare del consumo di propellente, essendo l' I_{sp} inversamente proporzionale alla massa del veicolo spaziale, in assenza di perdite per gravità, dalla relazione:

$$I_t = T \cdot \Delta t = m_{avg} \cdot \Delta V \quad (2.7)$$

dove

- I_t è l'impulso totale, ovvero la variazione di quantità di moto dell'intero sistema (considerato costante nella propulsione ausiliaria);
- T è la spinta generata dal propulsore del satellite che accelera, cambiando la sua traiettoria. La propulsione elettrica è caratterizzata da bassa spinta per non avere troppa potenza elettrica e generatori troppo pesanti, perciò serve qualcosa di diverso dal "puramente elettrico" per ottenere T elevate e arrivare molto lontani;
- Δt è il tempo durante il quale per una certa quantità di propellente ho la stessa spinta e corrisponde proprio all'impulso specifico;
- m_{avg} è la massa media dello spacecraft, essendo variabile nel tempo e la si può approssimare alla massa iniziale di propellente m_p nella propulsione ausiliaria, essendo minimo il consumo.

Fatte queste premesse, per evitare di avere impulsi specifici troppo elevati ed un tempo di missione Δt infinito, è necessario imporre dei vincoli sul tempo e un'alternativa all'impulso specifico variabile potrebbe essere il *dual mode* I_{sp} , cioè un propulsore in grado di fornire solo due diversi valori di impulso specifico, con prestazioni molto simili a quello con I_{sp} variabile.

2.2 Scelta del propulsore

Date le premesse fatte nelle sezioni precedenti, per la nostra missione verso i confini del Sistema Solare, la migliore tipologia di propulsore da adottare è quella nucleare, in grado di fornire le migliori prestazioni per una missione a lungo termine, affiancata dall'utilizzo di un VASIMR, un propulsore elettrico ad impulso specifico variabile. Fondamentalmente, vi sono tre tipologie di macchine nucleari:

- gli RTG, i generatori a radioisotopi;
- i generatori a fissione nucleare;
- i generatori a fusione nucleare.

I primi forniscono calore per effetto dell'energia che deriva dal decadimento di un isotopo radioattivo, ad esempio il Plutonio 238 (Pu^{238}): per questo elemento, si stima una massa specifica β pari a $\simeq 2.56 \frac{kg}{kW}$ a "inizio vita" (BOL). L'emivita di questo radioisotopo risulta essere di circa 89 anni, ciò significa che dopo questo periodo avviene un dimezzamento della sua massa specifica, con un calo annuo dello 0.8%: per la distanza che intercorre tra il nostro pianeta e, ad esempio, la Nube di Oort, potrebbe non essere sufficiente avere a bordo tale elemento come fonte principale di propulsione, pensandolo in linea di massima come possibile sostituzione dei pannelli solari per una missione lontana, pertanto si fa riferimento ad altri isotopi radioattivi per le altre tipologie di macchine, come spiegato nei prossimi paragrafi. Gli RTG presentano un rendimento di appena il 10%, con potenze che non arrivano oltre 200 - 300 W e sfruttano *l'effetto Seebeck*: un effetto termoelettrico per cui ci sono alcuni elettroni, in un circuito costituito da semiconduttori o elementi metallici, che rimangono fermi (parete fredda) e altri elettroni che si muovono verso questa parete, per annullare la differenza di temperatura.

La seconda tipologia è caratterizzata da una particolare reazione, ovvero la fissione nucleare: essa consiste nel fissionare il nucleo di un isotopo radioattivo, generando in sequenza neutroni, i quali a loro volta vanno sempre a fissionare un altro atomo di quel radioisotopo, generando ancora altri neutroni e così via, come una reazione a catena. Per questi generatori si sfrutta l'Uranio 235 (U^{235}), per cui con pochi grammi è possibile andare ovunque, data un'emivita nell'ordine di centinaia di milioni di anni, anche se risulta difficile miniaturizzare il reattore per un satellite, visto che il reattore stesso può fornire diversi GW di potenza. Per il nostro caso in esame, sarebbe utile sfruttare la propulsione nucleare con l'Uranio, dovendo arrivare a decine, centinaia o addirittura migliaia di unità astronomiche dal nostro pianeta, adottando una fissione nucleare a *funzionamento critico*: per

ogni fissione si produce lo stesso numero di neutroni. Per queste macchine, si possono ottenere 400 kW termici, 100 kW elettrici e una massa specifica $\beta = 5 \frac{kg}{kW}$, con una massa del sistema attorno ai 500 kg.

Utilizzando l'energia termica prodotta dalla fissione nucleare per accelerare un gas che espande in un ugello otteniamo la cosiddetta *propulsione nucleare termica*. Tali propulsori sono definiti NTR, con i primi sviluppi avvenuti tra gli anni '60 e '70 con *Nerva*; tipicamente abbiamo energia specifica (parametro che verrà massimizzato per la ricerca della traiettoria ottimale) $E_f = \frac{E}{m_u} = 8 \cdot 10^7 \frac{MJ}{kg}$, con un nucleo solido di tricarbide (*UNbZr*)C che riscalda il propellente idrogeno H_2 , utilizzato come liquido di raffreddamento, prima di entrare in camera. L'impulso specifico è limitato nell'ordine delle migliaia di secondi a causa dei vincoli di temperatura, con spinte T dell'ordine di centinaia di kN e potenze tra le centinaia e migliaia di MW, per una massa del sistema compresa tra 2000 e 6000 kg. Si citano, in particolare, i LANTR, ovvero endoreattori a propulsione nucleare termica con ossigeno liquido (LO_x), aggiunto nell'ugello per incrementare la spinta (riducendo quindi I_{sp}) e la densità di propellente, riducendo così il volume dei serbatoi e il peso. Possiamo distinguere due tipologie di core:

- core liquido: combustibile nucleare miscelato nel working fluid, con temperatura e impulso specifico più elevati;
- core gassoso: combustibile nucleare separato dalle pareti da un gas, sempre con temperatura e impulso specifico aumentati.

In alternativa, si presenta anche la *propulsione a impulso nucleare* (NPP), facendo riferimento al progetto *Orion* tra gli anni '50 e '60. Si facevano esplodere da 0.1 a 20 kilotonnellate di bombe atomiche, a intervalli di 10 secondi, nei pressi di un *pushing plate*, posto sotto la base del lanciatore, con una spinta da parte di un materiale ablativo, cioè un materiale in grado di dissipare l'energia termica incidente grazie a cambiamenti di fase e reazioni endotermiche; l'impulso specifico di questi propulsori, si aggira attorno ai 1000 - 10000 s. Si possono, inoltre, individuare gli FFT come ulteriore prototipo per la fissione nucleare, orientati da campi magnetici e con frammenti della fissione utilizzati come propellente, superando i 100000 s di I_{sp} , come ad esempio missioni verso Alpha Centauri^{4,5}, sistema ancora più lontano

⁴Alpha Centauri è un sistema stellare triplo, contenente le tre stelle più vicine al Sole, con una coppia di stelle vicine ad una distanza di $\simeq 275000$ AU dalla Terra e la terza stella che orbita attorno alla coppia, distante da essa di circa 13000 AU

⁵1 AU corrisponde alla distanza tra la Terra e il Sole in unità astronomiche, unità di misura introdotta per semplificare con numeri molto più piccoli le grandi distanze tra i vari corpi celesti e corrisponde a $1.49 \cdot 10^8$ km

rispetto alla Nube di Oort. Sono caratterizzati da un ΔV di circa $\frac{1}{10}$ della velocità della luce, ma i rendimenti sono molto bassi ($\eta \simeq 0.01$). Le potenze in gioco sono molto elevate (1 GW termico) e le particelle di *fuel* (propellente) devono essere piccole come delle polveri micrometriche in modo che non si incontrino con uno ione, il quale poi esce liberamente ad alta energia. La propulsione nucleare termica risulta molto vantaggiosa perchè si consuma metà del propellente e gli impulsi specifici sono molto elevati, anche se per questa tesi si predilige una propulsione nucleare elettrica, la quale offre maggiori possibilità di variazione dell'impulso specifico e limitazione delle potenze nell'ordine delle centinaia di kW per non appesantire la sonda spaziale.

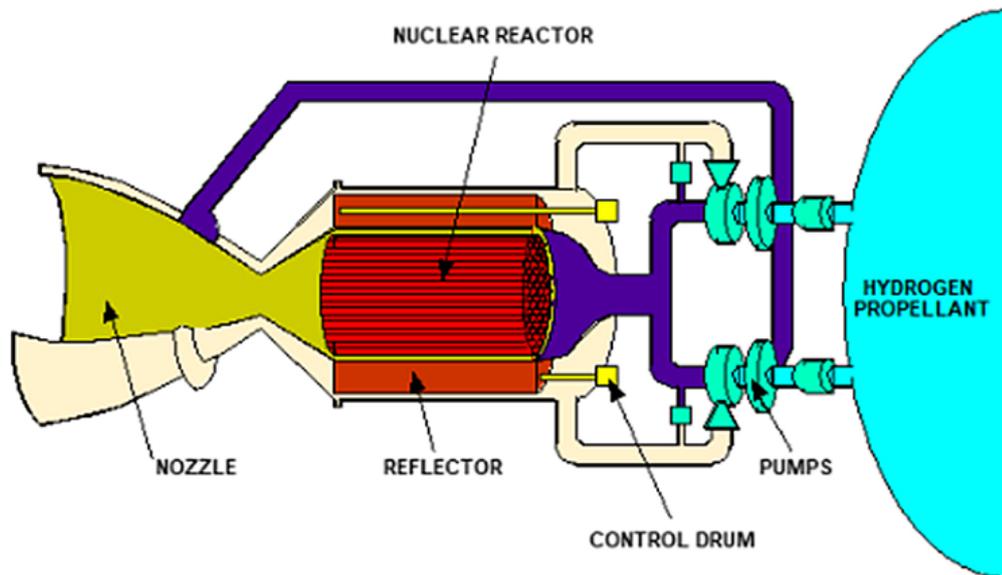


Figura 2.3: Schema di un NTR

Per concludere, si può introdurre l'ultima tipologia, caratterizzata dalla fusione nucleare: un processo di reazione nucleare per cui nuclei di due o più atomi sono talmente tanto compressi da far prevalere la loro forte interazione sulla repulsione elettromagnetica, in modo che la loro unione generi una massa minore della somma delle masse reagenti, con conseguente liberazione di neutroni. Tale reazione può essere sia endotermica, sia esotermica, con l'utilizzo del deuterio (D o H^2 , un isotopo stabile dell'idrogeno caratterizzato da un protone, un neutrone e un elettrone, che permette la produzione di energia) e di elio-3 (He^3), un isotopo stabile dell'elio, composto da due protoni e un neutrone. L'energia specifica è di un'ordine di grandezza superiore a quella della fissione nucleare, con impulsi specifici dai 10000 ai 100000 s.

Risulta di fondamentale importanza il confinamento del propellente:

- confinamento elettrostatico inerziale: *buca di potenziale*;
- confinamento magnetico: *reattori toroidali*.

Un'ulteriore tipologia di propulsori è quella ad impulso specifico variabile, i cosiddetti VASIMR, un ibrido tra la propulsione elettrotermica e quella elettromagnetica, per il nostro caso di studio da considerare ugualmente valida insieme alla propulsione nucleare, caratterizzati dal seguente schema:

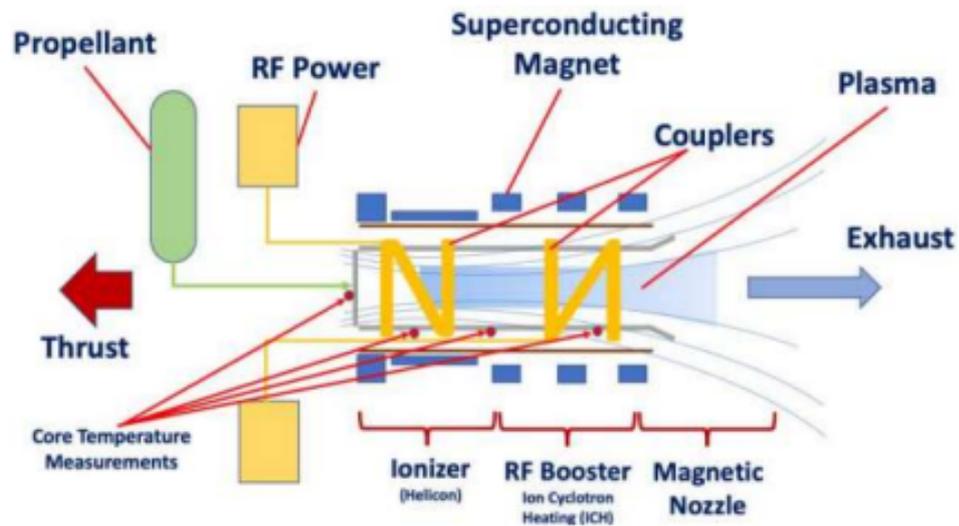


Figura 2.4: Schema di un propulsore ad impulso specifico variabile

Possiamo suddividere questa macchina in tre stadi:

1. ionizzazione per *radiofrequenza*⁶;
2. riscaldamento: si sfruttano onde elettromagnetiche;
3. espansione: trasformazione di energia termica disordinata in energia cinetica allineata che fornisce spinta, con l'utilizzo di un *ugello magnetico*.

Nel primo stadio di ionizzazione, si inserisce il propellente (solitamente idrogeno liquido LH_x) in un tubo di quarzo circondato da un *helicon antenna o antenna elicoidale*: gli ioni seguono il campo elettrico e collidono tra loro causando la

⁶Tipologia di ionizzazione per cui gli elettroni liberi nel gas vengono accelerati da un'onda elettromagnetica e vanno ad urtare gli atomi ionizzandoli, senza anodo e senza elettroni primari

ionizzazione del propellente, ottenendo una potenza persa e una potenza assorbita dagli elettroni liberi, entrambe ottenute per radiofrequenza. Per avviare il motore è necessario innescare una scintilla, ionizzando il propellente; l'antenna elicoidale genera campi elettrici polarizzati circolarmente a destra, con la direzione del campo che varia al variare della frequenza angolare ω . Si vengono a creare delle onde elicoidali nel propellente per l'interazione con il campo B , alla frequenza di 10 - 50 MHz. Le onde elettromagnetiche hanno un'energia così elevata in modo che gli elettroni liberi riescano a ionizzare le altre molecole, creando un plasma freddo, che fluisce così seguendo le linee di campo.

La seconda "zona" (ICRH) è quella di riscaldamento, dove un campo magnetico assiale abbastanza elevato ($\simeq 2 \text{ T}$)⁷ genera radiazioni elettromagnetiche alla frequenza di Larmor o ciclotronica $\omega_B = \frac{q \cdot B}{m_+}$, con gli ioni sincronizzati al campo elettrico E che accelerano sempre di più in direzione tangenziale, con bassa densità di particelle e nessuna collisione. È presente una seconda antenna che permette il riscaldamento del plasma freddo, attraverso una *risonanza ciclotronica* che deposita dell'energia all'interno degli ioni. Le onde radio emesse dall'antenna sono polarizzate circolarmente a sinistra e la risonanza permette agli ioni di aumentare la loro energia cinetica. La tecnica ICRH per il riscaldamento del plasma viene anche utilizzata nei reattori a fusione nucleare *tokamak*⁸, attraverso il confinamento magnetico del plasma. Si possono distinguere due parametri critici nella risonanza: la carica dell'antenna e il VSWR, il quale misura l'accoppiamento tra la potenza RF assorbita dagli ioni e il plasma come carico resistivo. Il core risulta essere poco denso, con il riscaldamento che quindi viene prodotto per radiazioni o bombardamento del gas neutro, processi che forniscono un rendimento peggiore rispetto alla convezione o al contatto diretto: un miglioramento delle prestazioni si ha con un plasma più denso.

Nel momento in cui si genera un campo magnetico non uniforme e non costante, si manifesta l'effetto dello *specchio magnetico*, duale all'ugello magnetico che costituisce il terzo stadio. Alla base degli effetti di specchio e ugello magnetico c'è il fatto che il campo magnetico sia conservativo e solenoidale, cioè l'intensità di B aumenta dove le linee di campo si avvicinano e diminuisce dove si allontanano, con il flusso attraverso una superficie chiusa che si annulla, secondo il *Teorema di Gauss*. Per far sì che il campo sia conservativo, il lavoro deve essere nullo e l'energia cinetica costante, ottenendo una forza magnetica perpendicolare alla velocità della particella.

⁷T in questo caso sta per Tesla, unità di misura del campo magnetico nel sistema internazionale

⁸Il tokamak è un reattore nucleare di forma toroidale, al cui interno è presente un plasma tenuto lontano dalle pareti interne grazie ad un campo magnetico

Considerando il campo magnetico uniforme e costante, si ottiene un moto elicoidale della particella con una percorrenza costante delle cicloidi; a campo magnetico variabile, anche il passo elicoidale varia, modificando le componenti perpendicolare e parallela della velocità ($v_{||}$ e v_{\perp}). Lo specchio magnetico si ottiene per un aumento in direzione assiale del campo B , con l'avvicinamento delle linee di campo e la diminuzione di r_B , provocando una crescita di v_{\perp} . Tale effetto si può esprimere come differenza di potenziale delle particelle che si muovono, ruotando sempre più velocemente e a raggi minori, diminuendo la $v_{||}$ per mantenere fissata l'energia. Solo particelle ad elevata energia riescono a "superare" lo specchio magnetico, proseguendo nel loro moto, mentre quelle a basso contenuto energetico prevedono una velocità parallela pari a 0: il loro movimento è bloccato dall'elevata intensità del campo e una piccola perturbazione le può spingere in direzione opposta.

Come già detto in precedenza, il terzo stadio è quello dell'ugello magnetico, effetto duale allo specchio magnetico: una volta che lo ione passa attraverso lo specchio magnetico, in cui si raggiunge l'intensità massima del campo (B_{max}), la particella finisce nell'ugello, dove l'intensità di B diminuisce in direzione assiale, con le linee di campo che si allontanano. L'obiettivo dell'ugello magnetico è quello di trasformare l'energia rotazionale caotica degli ioni in energia cinetica assiale: con un campo magnetico che diminuisce, aumenta il raggio di Larmor, decresce la v_{\perp} e cresce la velocità in direzione parallela, con la particella che esce rapidamente dall'ugello, generandosi la spinta del propulsore. Lo scopo dell'ugello è quello di accelerare il plasma caldo che arriva dal secondo stadio alla velocità di *Alfven* v_a :

$$v_a = \frac{B}{\sqrt{\mu_0 \cdot n_+ \cdot m_+}} \quad (2.8)$$

in cui

- μ_0 è la costante di permeabilità magnetica del vuoto pari a $4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m}$,⁹
- n_+ è la densità volumetrica (numero di particelle per unità di volume) degli ioni.

La velocità di Alfven si può considerare analoga alla velocità del suono a degli ugelli aerodinamici, ovvero un limite oltre il quale ciò che succede a valle non influenza quello che accade a monte. In presenza di una particolare gola negli ugelli magnetici, si ha un leggero distacco del plasma, che provoca anche un distacco di una piccola quantità del campo, portando dei peggioramenti nelle prestazioni del propulsore.

⁹ H sta per Henry, unità di misura dell'induttanza elettrica L nel sistema internazionale

Risulta, però, fondamentale la versatilità di questi ugelli, che permette di sfruttare al meglio la potenza disponibile per aumentare il rendimento di questi propulsori. La principale caratteristica dei VASIMR è quella di riuscire a regolare la spinta a potenza costante, gestita tra lo stadio di ionizzazione e quello di riscaldamento. Si possono generare elevate spinte o alti impulsi specifici, in base alla fase di missione: dov'è presente un'elevata interazione gravitazionale, è necessario spingere molto (a raggi bassi, dove le velocità sono elevate) per vincere anche le perdite per gravità e ridurre i tempi di permanenza; invece, dove le forze gravitazionali sono deboli, conviene mantenere bassi livelli di spinta (a raggi alti, dove le velocità sono piccole) e alti livelli di impulso specifico per ottimizzare il consumo di propellente, minimizzandolo. La regolazione avviene attraverso la ripartizione di energia tra l'antenna elicoidale del primo stadio e l'antenna ICRH del secondo. Se si fornisce più energia all'elicon antenna, si ottengono elevati livelli di spinta, in modo da ionizzare quantità più elevate di propellente e con poca potenza all'ICRH si limita il riscaldamento del plasma, ottenendo una velocità efficace di scarico minima c_{min} (quindi un impulso specifico minimo I_{spmin}). Se, al contrario, possiede più energia l'antenna del secondo stadio, si hanno elevati impulsi specifici, con poca potenza all'antenna elicoidale che deve essere sufficiente per poter scaldare il plasma, ma genera basse spinte. Il vantaggio di questi propulsori è che si possono usare in tutte le fasi di missione: spinta grande per evadere dalla Terra, spinta piccola in avvicinamento al Sole e ancora spinta elevatissima per allontanarsi dal Sole.

Per quanto riguarda il propellente utilizzato per queste macchine, bisogna considerare il fatto che si possa avere una certa libertà di scelta, a partire dall'idrogeno H_2 (*criogenico*, quindi facilmente *storable* in condizioni di bassissime temperature, nell'ordine delle decine di K), l'elio He , il deuterio, ma anche propellenti più pesanti come l'argon e lo xeno. Si preferisce l'utilizzo di propellenti leggeri per favorire il confinamento del campo magnetico, per ridurre la massa di propellente e aumentare quella del payload, anche se l'antenna elicoidale risulta più efficace per i propellenti più pesanti. Uno dei motivi principali per cui questi propulsori riescono ad adattarsi a qualsiasi gas è la continua variazione della forza magnetica e della frequenza di Larmor dell'antenna ICRH.

A livello innovativo, i VASIMR rappresentano una scelta valida per le missioni a lungo termine, anche se sorgono ancora oggi delle criticità che ne bloccano il pieno utilizzo. Tra queste criticità, non considerando la complessità di design e le dimensioni del propulsore, vi è soprattutto l'elevata intensità di B , necessaria al confinamento del plasma, e la presenza delle onde radio per la ionizzazione e il riscaldamento del propellente. A causa di ciò, si possono verificare delle complicazioni ai diversi sottosistemi, in particolare al *Communication System*, al

payload e all'ADCS: i primi due per le interferenze con le onde radio, risolvibile con delle schermature che però aumentano la complessità dell'hardware e il terzo perchè la forza di *Lorentz* si allinea al campo, comportando delle continue correzioni di puntamento. Una possibile architettura prevederebbe l'utilizzo di due propulsori uguali accoppiati con direzione di B opposta, ma si presentano ulteriori rischi da mitigare teoricamente e sperimentalmente. Un altro aspetto negativo, verificato sperimentalmente, è che anche gli ioni, oltre che gli elettroni, seguono le linee di campo, provocando delle perdite; si ha, inoltre, un limitato controllo termico e pompaggio a vuoto, per cui l'accensione dei motori è possibile solo per alcuni secondi, senza riuscire a verificare se, per funzionamenti più lunghi, le instabilità del plasma non vadano ad influenzarne il distacco. Si hanno perdite termiche a causa del bombardamento di gas neutro e dell'irraggiamento del plasma, sollecitando non in maniera trascurabile i materiali di questa macchina. Una soluzione attuata in questo momento è l'utilizzo di radiatori (tubi di calore) per condurre passivamente il calore, ma ciò comporta un aumento del peso, quindi, si è anche optato per l'utilizzo di materiali termici a cambiamento di fase. Il problema fondamentale per cui i VASIMR hanno uno sviluppo rallentato è per la grossa quantità di energia di cui necessitano per poter funzionare, un po' come i propulsori elettromagnetici: anche per i propulsori ad impulso specifico variabile si è pensato di usufruire dei generatori a fissione.

Ad oggi, sono diversi i prototipi di VASIMR sviluppati, tra cui:

- VX-10, dove 10 sta per 10 kW di potenza di alimentazione;
- VX-200;
- VX-200 SS, con 200 kW di potenza elettrica di alimentazione in *steady-state o stato stazionario*.

I nuovi prototipi sono stati sviluppati con lo scopo di effettuare test sperimentali in camere a vuoto per poter fornire pressioni molto basse (dell'ordine di $\simeq 0.05$ Pa). Alcuni risultati hanno portato all'utilizzo di argon con basso costo di produzione degli ioni ε_B , ottenendola massima operatività. I superconduttori utilizzati, come già accennato nei paragrafi precedenti, raggiungono un livello massimo di campo magnetico B_{max} pari a 2 T e un rendimento del VX-200 pari a 0.72. La versione successiva SS ha introdotto un'ulteriore unità di potenza da 120 kW per il potenziamento dello stadio di riscaldamento e ha permesso di poter realizzare uno dei pochissimi modelli tecnologici che permettono il funzionamento stazionario a 100 kW di potenza. Le maggiori criticità sono rappresentate dal costo e dalla gestione termica, con sviluppi volti sempre di più al miglioramento di tali aspetti, raggiungendo un massimo di funzionamento continuo a 80 kW di potenza dell'ultimo

prototipo per un tempo di 88 ore, portando i VASIMR ad una scala di potenza superiore alla propulsione elettrica standard, incentivando l'inizio di prove di volo.

Si riporta qui di seguito una tabella riassuntiva delle prestazioni di questo propulsore e uno schema del VX-200:

Tipo di propulsore	VASIMR
Potenza P [W]	$2 \cdot 10^5$
Impulso specifico I_{sp} [s]	1000 - 10000
Rendimento η	0.72
Storage del propellente	H_2

Tabella 2.2: Prestazioni dei VASIMR

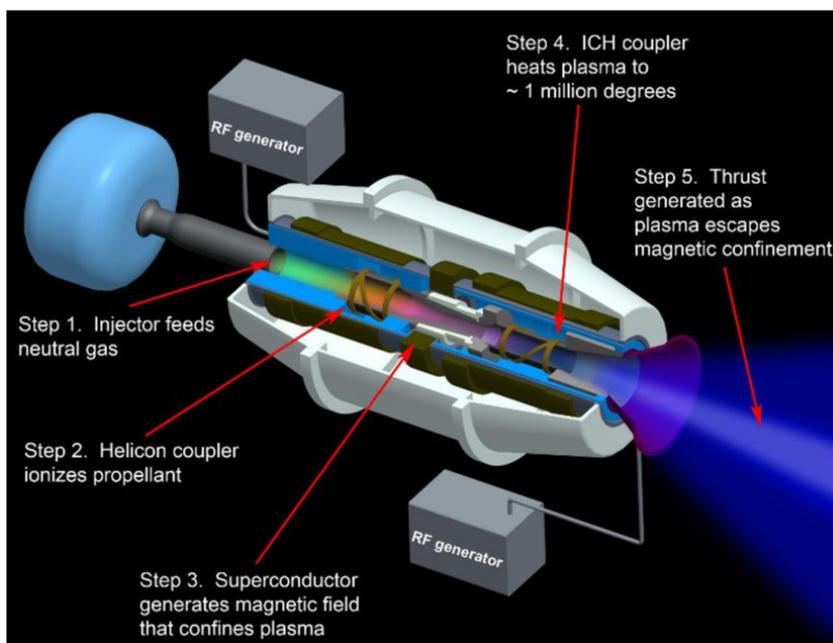


Figura 2.5: Schema di un propulsore VASIMR VX-200

2.3 Confronto con le vele solari

Una vela solare è costituita da un'ampia superficie di luce e un materiale riflettente, come un film di plastica metallizzata, sostenuta da una struttura. Per semplicità, si ipotizza che la vela solare sia piatta e che la riflessione di una radiazione solare sia speculare: per poter applicare la Legge di controllo ottimale su questi particolari propulsori, bisogna considerare un'orientazione ottimale della vela in ogni punto della traiettoria. Si riportano di seguito le principali grandezze caratteristiche di una vela solare:

- a_c = accelerazione caratteristica della vela, esprime l'accelerazione della vela quando essa è posizionata perpendicolarmente alla radiazione solare incidente (cioè $\alpha = 0^\circ$) a 1 AU, in cui la pressione p_1 è pari a $4.55682 \frac{N}{km^2}$. a_c si può scrivere come:

$$a_c = \frac{2 \cdot p_1 \cdot A}{m} \quad (2.9)$$

dove

- A è la superficie della vela;
- m la massa dello spacecraft, somma della massa della vela $m_s = \sigma \cdot A$ e della massa del payload m_u .

L'accelerazione caratteristica è l'unico parametro fondamentale quando la traiettoria è ottimale ed è inversamente proporzionale alla durata della missione Δt ;

- p_1 è la pressione di radiazione a 1 AU;
- α = angolo tra il piano della vela e l'orizzonte;
- H = Hamiltoniano, parametro da massimizzare per l'ottimizzazione;
- H' è la derivata dell'Hamiltoniano;
- $\frac{m_u}{m_0} = k_p$ = payload fraction, già definito nelle precedenti sezioni;
- λ_V è il già citato primer vector o vettore d'innescio;
- β = angolo di orientazione del primer vector, cioè l'angolo tra λ_V e la direzione radiale (varia da -180° a 180°), dello stesso segno di α ;
- θ è l'ascensione retta, uno dei classici parametri orbitali, fondamentali per la definizione di una traiettoria;

- η = riflessività della vela;
- λ_x è la variabile aggiunta corrispondente alla variabile di stato x ;
- σ = densità superficiale della vela, tipicamente in un range di valori da 1 a 10 $\frac{g}{mm^2}$ (le vele solari sono particolarmente leggere e sottili, caratterizzati da un polimero ricoperto di alluminio, il *mylar*);
- ϕ è il generico indice di prestazione, da massimizzare o minimizzare per ricavare la soluzione alla Legge di controllo ottimale.

La spinta di una vela solare deriva dalla variazione di quantità di moto dei fotoni incidenti e riflessi, quindi dalla pressione di radiazione solare: il sistema propulsivo non prevede nessun propellente e l'impulso specifico risulta essere infinito, si sfrutta il fattore esterno dei raggi solari. In un caso ideale, le radiazioni incidenti sono tutte riflesse specularmente e la spinta massima per unità di superficie è pari a 2 volte la pressione di radiazione p :

$$p = p_1 \cdot \left(\frac{r_1}{r}\right)^2 \quad (2.10)$$

con

- r_1 che è pari a 1 AU;
- r che è la distanza dal Sole con $r^2 \propto \frac{1}{p}$

È possibile ottenere analiticamente la soluzione a questo caso ideale, con una spinta massima se la vela è posta perpendicolarmente alla direzione radiale e una spinta che si riduce se η decresce, inclinando radialmente la direzione della spinta stessa e provocando una rotazione della vela in modo da generare una componente tangenziale. Le missioni per cui vengono utilizzate le vele possono essere di tipo interplanetarie, verso pianeti interni ed esterni, *rendezvous*^{10,11} di asteroidi e missioni interstellari (come per il nostro caso in esame, verso gli estremi del Sistema Solare, anche se in questa trattazione si è deciso di prediligere la propulsione nucleare elettrica con I_{sp} variabile).

¹⁰Il rendezvous è una tipologia di manovra per cui un satellite intercetta un corpo celeste in un determinato punto, perciò oltre ad essere importanti le velocità in gioco, lo è altrettanto il periodo di trasferimento orbitale τ_{TO} , il periodo sinodico τ_s e il tempo di attesa dello spacecraft τ_w

¹¹Il periodo sinodico è il tempo minimo per cui due corpi celesti (principalmente due pianeti) che partono con un certo angolo di fase, ritornano a quello stesso angolo di fase

Si ipotizza una vela piatta, con il moto del satellite su un piano ellittico, con orbite dei pianeti circolari e coplanari. L'angolo α risulta essere positivo quando la vela ruota in direzione concorde al moto della Terra (perciò varia da -90° a 90°): di conseguenza si ottiene 2α come angolo tra la radiazione solare incidente e quella riflessa. Il flusso di quantità di moto si può definire anche come momento del raggio incidente ed è il rapporto tra il flusso di potenza solare Φ (pari a $1.367 \frac{kW}{m^2}$ ad 1 AU) e la velocità della luce $c = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$ ed è la variazione di questo momento a produrre la spinta. Essa può avere una componente radiale $T_r = m \cdot a_r$, in cui:

- a_r è l'accelerazione radiale che si può scrivere come

$$a_r = p \cdot A \cdot \cos \alpha \cdot \frac{1 + \eta \cdot \cos 2\alpha}{m} \quad (2.11)$$

e una componente tangenziale $T_\theta = m \cdot a_\theta$, dove:

- a_θ = accelerazione in direzione tangenziale, che assume l'espressione

$$a_\theta = \frac{p \cdot A \cdot \cos \alpha \cdot \eta \cdot \sin 2\alpha}{m} \quad (2.12)$$

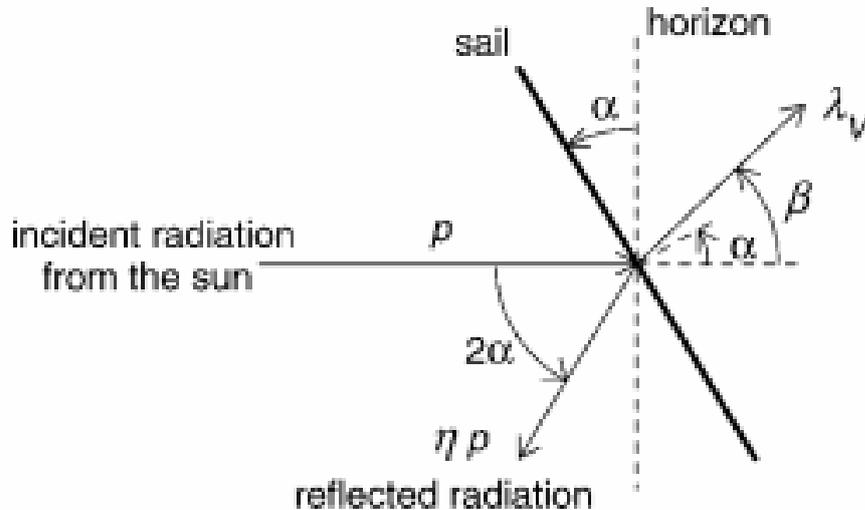


Figura 2.6: Schema di una vela solare

Dalla Figura 2.6 si può notare come la radiazione riflessa è diversa da quella incidente se la vela è inclinata e risulta più importante la componente tangenziale di accelerazione per ottenere spinte piccole, con una difficoltà nello scegliere il giusto orientamento della vela.

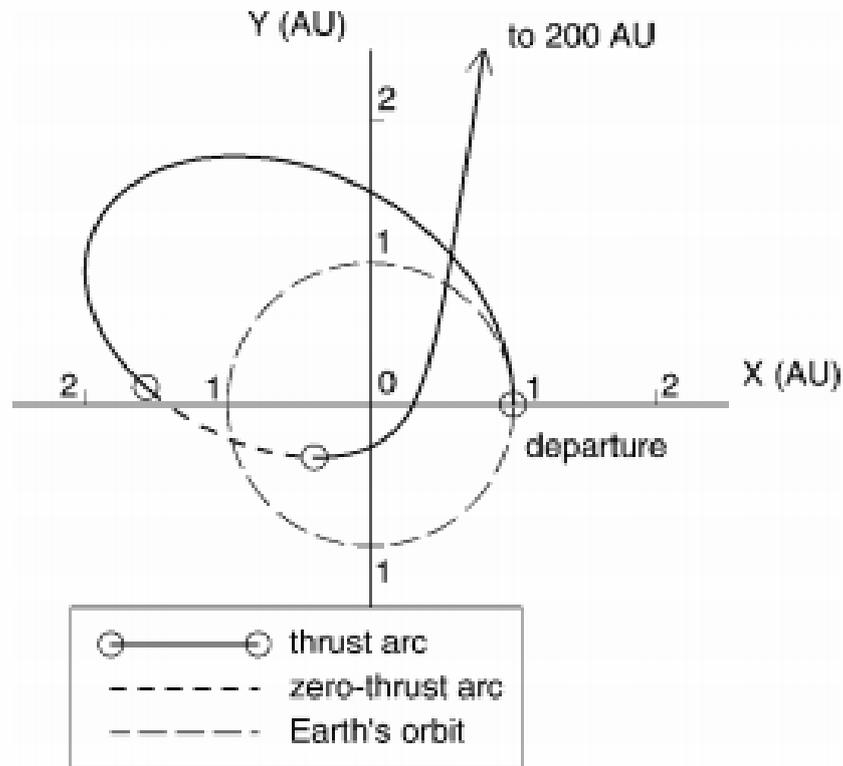


Figura 2.7: Minima traiettoria orbitale di una vela solare con target a 200 AU

Dalla Figura 2.7, invece, è evidente come per una traiettoria verso un punto molto lontano dalla Terra (in questo esempio a 200 AU, ma, ad esempio per la *Kuiper Belt*, sarebbe tra le 30 e le 50 AU, per le sonde Voyager tra le 120 e 170 AU e per la Nube di Oort tra le 2000 e le 100000 AU) si spinga subito tanto per evadere dal pianeta di partenza, sfruttando la pressione di radiazione solare per il raggiungimento di un'orbita eliocentrica eccentrica. Ci si avvicina al Sole con la vela solare che attira tutte le radiazioni: essa frena lo spacecraft e abbassa il perielio al limite minimo di 0.25 AU. La superficie della vela risulta non perfettamente riflettente e si orienta parallelamente alla radiazione solare per un arco di circonferenza piccolo (*zero-thrust arc*). A questo punto, la vela cambia il suo orientamento e lo spacecraft subisce una forte accelerazione che lo spinge fino ad un target molto lontano.

La Teoria del controllo ottimale per le vele solari viene utilizzata per la determinazione della Legge di controllo, in base al tipo di missione scelto. L'obiettivo dell'ottimizzazione è minimizzare il tempo di percorrenza della traiettoria dello

spacecraft, definito come *trip time* t_f , introducendo, però, l'indice prestazionale $\phi = -t_f$, da massimizzare. Si ricava l'equazione di Eulero-Lagrange:

$$\dot{\lambda}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad (2.13)$$

risolvendo, infine, attraverso il metodo di Newton, il problema differenziale ai limiti. Si impongono le seguenti condizioni iniziali della missione:

- $V_\infty = 0$, cioè velocità di eccesso iperbolico (velocità di *escape* dalla Terra) nulla;
- $t_0 = 0$, tempo iniziale nullo alla partenza;
- $r_0 = 1$, raggio iniziale unitario;
- $\theta_0 = 0$, ascensione retta iniziale nulla;
- $u_0 = 0$, cioè la velocità radiale iniziale nulla;
- $v_0 = 1$, ovvero la velocità tangenziale iniziale unitaria.

Si impone come condizione finale un r_f ad un certo valore di AU che dipende dal target della missione e le variabili aggiunte λ_{θ_f} , λ_{u_f} e λ_{v_f} poste pari a 0 (fuga dal pianeta di partenza). Altri vincoli da tenere in considerazione sono:

- $r_p = r_{min}$, dove r_p è il raggio del perielio;
- $u_p = 0$, velocità radiale del perielio nulla.

Applicando la Teoria del controllo ottimale, λ_r subisce il cosiddetto *free jump* al perielio e le altre variabili aggiunte, come $\Delta\lambda_r$ e t_p , devono essere continue. Per ricavare la traiettoria ottimale, perciò, bisogna determinare il payload fraction a partire dalla riflessività e dall'accelerazione caratteristica:

$$k_p = 1 - \frac{\sigma \cdot A}{m} = 1 - \frac{\sigma \cdot a_c}{2 \cdot p_1} \quad (2.14)$$

Date queste espressioni, c'è un massimo di a_c , oltre il quale la vela non può accelerare, pari a $\frac{2 \cdot p_1}{\sigma}$, che dipende dal livello tecnologico della vela, corrispondente ad un valore nullo del payload. Nell'immediato fuoro si punta a superare il valore massimo della densità superficiale di una vela, con α che aumenta al diminuire di η . Se ci riferissimo ad una missione con un target a 200 AU, si stima, come tempo accettabile di durata della missione, circa 20 anni (ottimizzabile anche a circa 9 anni se considerassimo di utilizzare un propulsore in grado di fornire una potenza di 0.2 MW, raggiungendo velocità finali dell'ordine di 14 AU/anno), con un'accelerazione caratteristica molto elevata, una crescita dell'attuale livello tecnologico e una densità superficiale pari a $\frac{3g}{m^2}$.

Fatte queste considerazioni, i problemi che possono sorgere su questa tipologia di sistema propulsivo possono essere il controllo termico, a causa delle radiazioni assorbite dalla vela, che possono riscaldarla oltre i valori di temperatura limite di sopravvivenza del materiale, l'orientamento e il controllo della vela, per cui servirebbe un ADCS ad elevate prestazioni, problematiche sulla costruzione e il dispiegamento della vela in orbita. Possibili design sono:

- vela quadrata, con il payload posto al centro e caratterizzata da 4 tralicci per avere un maggior controllo della vela;
- *heliogyro*, in cui una forza centrifuga va a dispiegare i nastri della vela automaticamente;
- vele gonfiabili, che sfruttano il fenomeno dello *specchio solare*.

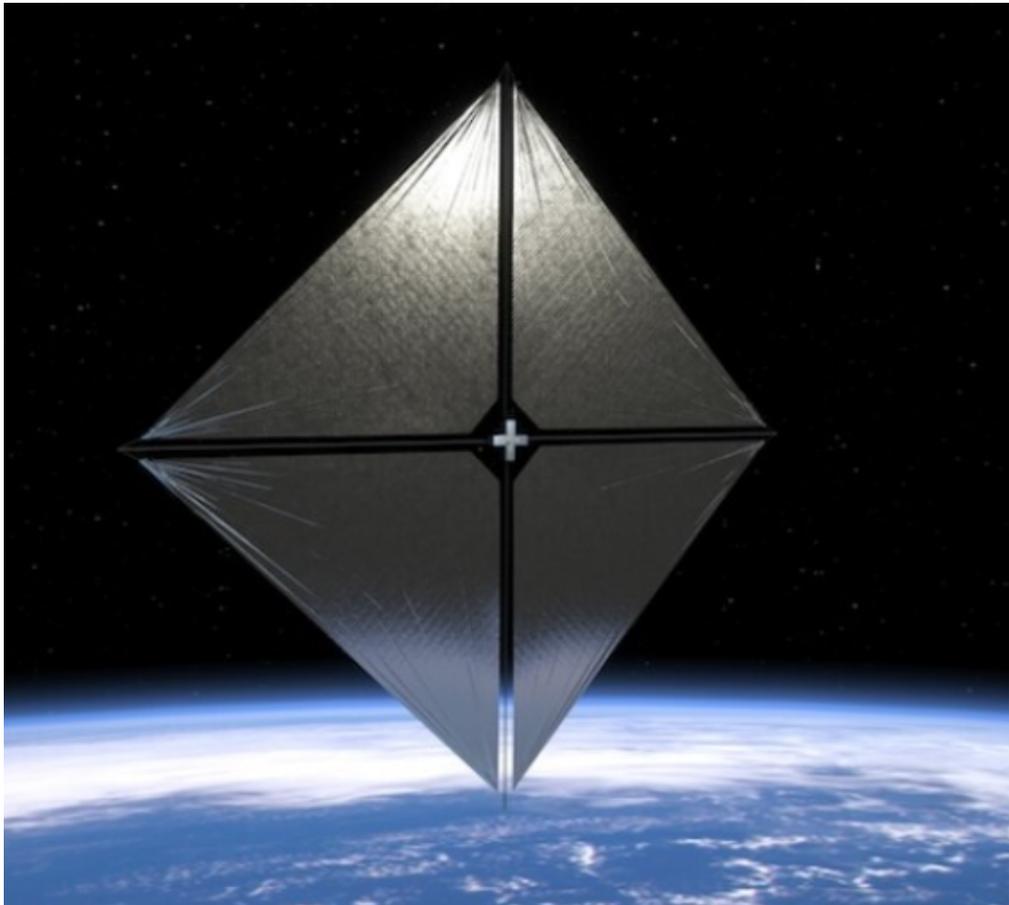


Figura 2.8: Immagine di una vela solare quadrata

Per concludere, si può affermare che le prestazioni tra caso ideale e caso reale di una vela sono simili, anche se per la seconda è necessario disporre di un più ampio range di angoli di orientazione, con una vela più ampia che penalizzerebbe il payload. Esiste una relazione di proporzionalità inversa tra la superficie e la riflessività della vela, con la prima che dipende anche dal trip time per l'influenza della geometria orbitale, con valori specifici di accelerazione caratteristica: le vele solari possono essere una buona soluzione per il nostro tipo di missione, ma la scelta ricade sulla propulsione nucleare elettrica ad impulso specifico variabile per una maggior consapevolezza delle prestazioni che essa può fornire, il punto di partenza per un futuro diretto verso il progresso tecnologico e il rispetto dell'ambiente spaziale.

2.4 Applicazione della teoria al moto eliocentrico

Per la determinazione sia della posizione, sia della velocità di uno spacecraft in un certo istante di tempo, è necessario adottare un sistema di riferimento (insieme di coordinate geografiche e modelli fisici, come un sistema di misurazione del tempo, per descrivere la Terra), rispetto al quale sono descritte posizione e velocità. Il sistema di riferimento è un'inequivocabile specificazione di convenzioni, algoritmi e costanti numeriche. Si richiede un adeguato sistema di riferimento per descrivere un'orbita, trovando un appropriato sistema di coordinate *inerziale*:

- si definisce un sistema di coordinate rettangolare, specificandone l'*origine*, che indica il centro di massa del sistema, cioè il suo baricentro, che è un punto dinamico, il *piano fondamentale* x-y, la *direzione preferita* e il *verso* delle direzioni del versore base (della direzione positiva, con l'asse z sempre perpendicolare al piano fondamentale);
- la maggior parte dei sistemi è *destrorsa*, ovvero segue le regole della *vite destrorsa* e della *mano destra*;
- i versori (vettori unitari) vengono utilizzati per rappresentare tre assi ortogonali ed esprimere qualsiasi altro vettore nel sistema di coordinate come combinazione lineare del vettore unitario di base.

Il sistema di riferimento adottato per questa tesi è l'*eliocentrico-eclittica*, solitamente impiegato per missioni interplanetarie ed interstellari, in cui l'eclittica è il piano o sistema di coordinate in cui si svolge il moto di rivoluzione della Terra attorno al Sole, caratterizzato da:

- origine: centro del Sole (nucleo solare);
- piano fondamentale: eclittica, un'ellisse con una linea degli *apsidi*¹² ruotata di un certo angolo rispetto all'asse Y_e , diretto verso destra, in corrispondenza del solstizio d'inverno (versore \hat{g}_2) e asse X_e (versore \hat{g}_1);
- direzioni principali: l'asse X_e è definito dall'intersezione dell'eclittica con il piano equatoriale durante l'equinozio Vernale (equinozio di Primavera). La direzione dell'asse è in modo che, durante questo equinozio, la Terra "vede" il Sole nella costellazione di Ariete. L'asse Z_e (versore \hat{g}_3) è perpendicolare all'eclittica con direzione verso l'emisfero che contiene la Stella Polare. L'asse Y_e completa la terna destrorsa.

¹²Gli apsi sono dei punti fondamentali di un'orbita, cioè il punto più vicino e il punto più lontano rispetto all'origine del sistema di riferimento: nel caso del sistema eliocentrico sono, rispettivamente, il perielio e l'afelio

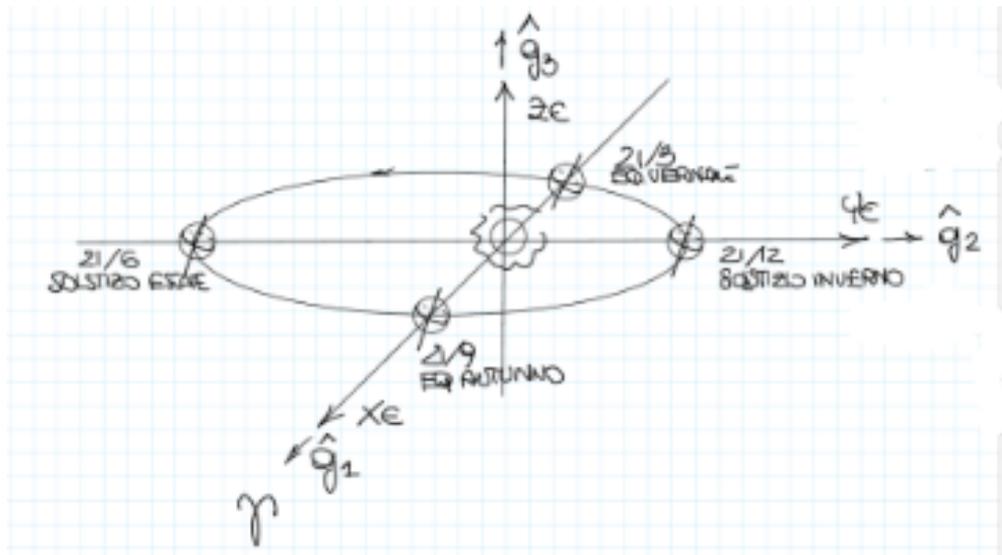


Figura 2.9: Sistema di riferimento eliocentrico

Questo sistema di riferimento si definisce *quasi inerziale* a causa di due fenomeni:

1. Precessione¹³ dell'asse degli equinozi: è un movimento basculante e di lungo periodo (~ 26000 anni) dell'asse terrestre che in questo lungo periodo di tempo descrive un cono. Attualmente l'asse terrestre punta verso la Stella Polare, con inclinazione dell'asse di $23^\circ 27'$ e fra 13000 anni punterà verso la Stella Vega, con inclinazione di $-23^\circ 27'$;
2. Nutazione: movimento di breve periodo (~ 18.6 anni).

Per poter implementare la Teoria del controllo ottimale al moto eliocentrico, si considera uno S/C di massa puntiforme variabile, adottando l'approssimazione *patched conics* (spiegata nel dettaglio nel prossimo capitolo), trascurando il tempo trascorso all'interno delle sfere d'influenza dei pianeti. Si integrano le equazioni del moto rispetto al sistema di riferimento eliocentrico, partendo dalle equazioni di stato:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \quad (2.15)$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} + \frac{\vec{T}}{m} \quad (2.16)$$

¹³Con il termine precessione si indica un movimento in direzione opposta al moto della Terra

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{T}{c} \quad (2.17)$$

con

- \vec{r} che è il vettore posizione del satellite;
- \vec{v} che è il vettore velocità;
- \vec{g} che è l'accelerazione di gravità del Sole;
- \vec{T} la spinta del propulsore dello spacecraft;
- $c = g_0 \cdot I_{sp}$, già definita in precedenza come la velocità efficace di scarico (g_0 è l'accelerazione gravitazionale terrestre, pari $9.81 \frac{m}{s^2}$).

Tutte queste grandezze sono normalizzate utilizzando il raggio dell'orbita terrestre, la sua velocità circolare e la massa iniziale del veicolo spaziale, con un periodo orbitale della Terra pari a 2π , con 58.133 giorni come unità di tempo di riferimento. Inoltre, la potenza disponibile P_a varia a seconda della missione.

Per poter ottimizzare la traiettoria, è necessario introdurre delle condizioni al contorno, sia iniziali e sia finali, della posizione, della velocità e della massa dello spacecraft, in base alle caratteristiche del propulsore scelto:

$$r_0 = r_E(t_0) \quad (2.18)$$

$$v_0 = v_E(t_0) \quad (2.19)$$

$$m_0 = 1 \quad (2.20)$$

dove

- il pedice "0" indica la condizione iniziale;
- il pedice "E" indica la Terra (*Earth*);
- l'equazione 2.20 è un'adimensionalizzazione della massa, legata a quella della potenza P , per cui ipotizzando un certo numero di kg per la massa iniziale dello spacecraft, di conseguenza si hanno un certo numero di W di potenza, con, ad esempio, relazione $1 \text{ kg} \rightarrow 180 - 200 \text{ W}$: infatti, per la nostra missione, si è ipotizzato di partire con una massa iniziale di 10000 kg, a cui corrisponderebbero 180 - 200 kW di potenza (riferendosi al VASIMR VX-200).

Al punto finale, si impone:

$$r_f = r_T(t_f) \quad (2.21)$$

$$v_f = v_T(t_f) \quad (2.22)$$

in cui

- il pedice "f" indica la condizione finale;
- il pedice "T" indica il target.

Infine, si impone costante il trip time $\tau = t_f - t_0$, ma al crescere di tale costante, si aumenta allo stesso modo l'impulso specifico, abbassando la spinta, per migliorare ulteriormente il payload.

Capitolo 3

Elementi di meccanica del volo spaziale

3.1 Problema dei 2 corpi

In questo capitolo, verranno trattati i principi fondamentali della meccanica orbitale, per andare a studiare nello specifico la traiettoria ottimale dello spacecraft in questa tipologia di missione. Per fare ciò, consideriamo un sistema di riferimento inerziale, cioè fisso o che si muove di moto rettilineo uniforme rispetto alle *stelle fisse*¹. In generale, si considerano N corpi di massa puntiforme, considerandone quindi solo il centro di massa e si effettuano le seguenti ipotesi:

- simmetria dei corpi non perfettamente sferica;
- spinta generata dal satellite;
- altre forze (resistenza atmosferica, pressione solare, forze elettromagnetiche) agiscono sul satellite.

Dalle leggi di Newton, si può scrivere il contributo totale delle forze \vec{F} come:

$$\vec{F} = \vec{F}^* + \sum_{\substack{J=1 \\ J \neq i}}^n \vec{F}_{g_J} \quad (3.1)$$

¹Le stelle fisse, nella realtà, non esistono, ma sono talmente lontane che possiamo accettare questa approssimazione

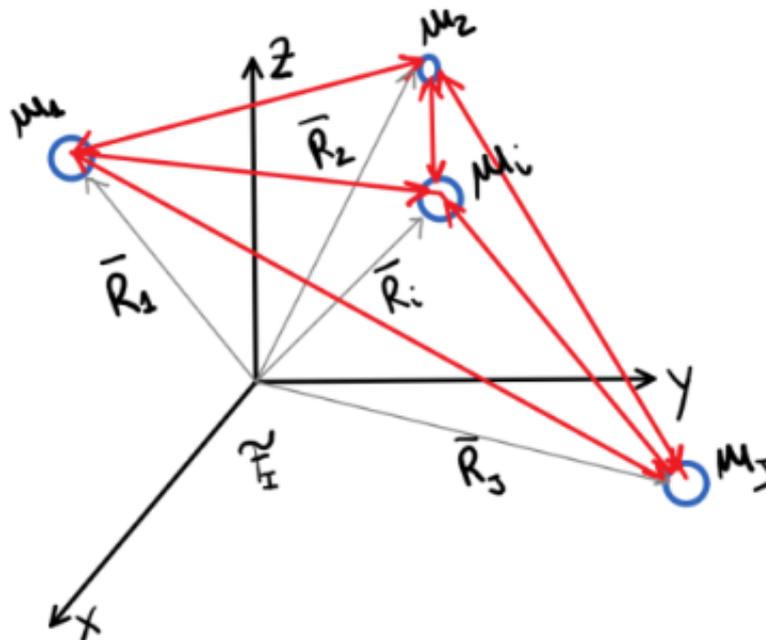


Figura 3.1: Schema degli N-corpi rispetto ad un sistema di riferimento inerziale

dove

- \vec{F}^* = forza risultante non gravitazionale;
- $\vec{F}_{gJ} = -G \cdot \frac{m_i \cdot m_J}{R_{iJ}^3} \cdot \vec{R}_{Ji}$, in cui:
 - il segno "-" è presente perchè la forza gravitazionale ha direzione opposta al vettore congiungente le due masse \vec{R}_{iJ} , essendo attrattiva;
 - $G = 6.67259 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$ è la costante di gravitazione universale;
 - m_i = massa dell'i-esimo corpo;
 - m_J = massa del J-esimo corpo;
 - $\vec{R}_{Ji} = \vec{R}_i - \vec{R}_J$, la differenza tra il vettore posizione dell'i-esimo corpo \vec{R}_i e quello del J-esimo \vec{R}_J

Sostituendo nell'equazione 3.1 ed esprimendo \vec{F} dalla *Seconda legge di Newton* come variazione nel tempo della quantità di moto \vec{p} , si ricava:

$$-G \cdot m_i \sum_{\substack{J=1 \\ J \neq i}}^n \frac{m_J}{R_{iJ}^3} \cdot \vec{R}_{Ji} = m_i \cdot \ddot{\vec{R}}_i \quad (3.2)$$

ottenendo così N ODE del II ordine in N incognite che sono le distanze degli N corpi rispetto al sistema di riferimento inerziale: *Problema degli N-corpi*. In generale, la forza non è costante, perciò le N equazioni non hanno soluzione analitica, bensì numerica; il problema degli N-corpi diventa *ristretto* se si considera la massa dello spacecraft trascurabile rispetto a quella di un pianeta o del Sole.

Per restringere il quadro al *Problema dei 2-corpi*, si fanno riferimento alle seguenti ipotesi e al seguente schema:

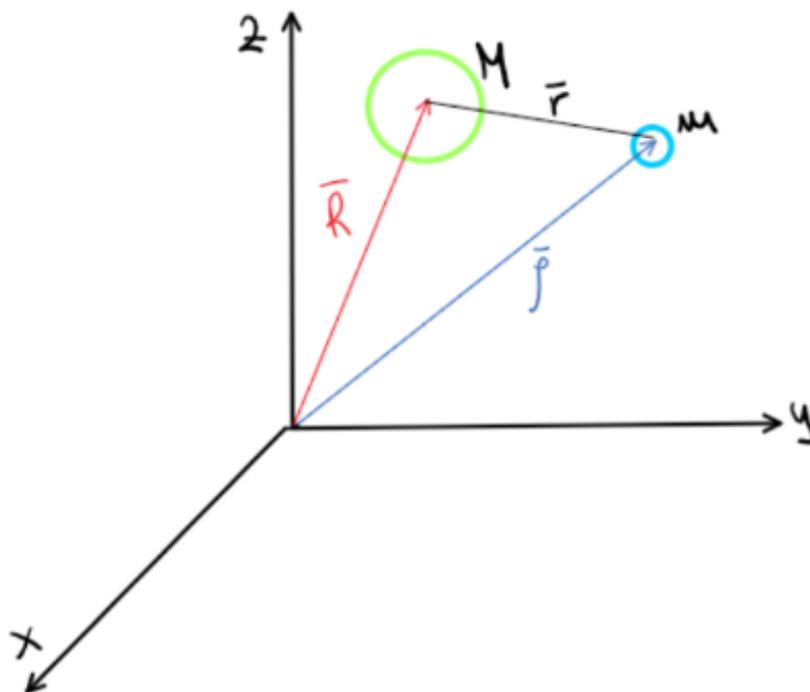


Figura 3.2: Schema dei 2-corpi rispetto ad un sistema di riferimento inerziale

- sistema composto da due masse, M e m , con $M \gg m$, dove con M si indica la massa del corpo principale (ad esempio un pianeta) e con m la massa del corpo secondario (ad esempio un satellite);
- agisce la sola forza gravitazionale sulle masse, trascurando le forze magnetiche, pressione di radiazione, vento solare, ecc... ($F^* = 0$);
- i due corpi hanno una simmetria sferica, ovvero tutta la loro massa è concentrata nel centro di massa;

- $\vec{r} = \vec{\rho} - \vec{R}$ è la posizione relativa, la congiungente tra il corpo principale e il corpo secondario, con direzione della congiungente e verso dal corpo principale a quello secondario;
- $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{\rho}} - \dot{\vec{R}}$ = velocità relativa;
- $\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{\rho}} - \ddot{\vec{R}}$ = accelerazione relativa.

La *Legge di Gravitazione Universale* viene utilizzata per esprimere le forze che agiscono su ogni massa, cosicchè la Seconda legge della dinamica può essere usata per descrivere separatamente il moto di ogni massa:

$$\begin{cases} m \cdot \ddot{\vec{\rho}} = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r^3} \cdot \vec{r} & \textcircled{1} \\ M \cdot \ddot{\vec{R}} = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^3} \cdot \vec{r} & \textcircled{2} \end{cases}$$

Trascurando la variazione della massa nel tempo e sottraendo la $\textcircled{2}$ dalla $\textcircled{1}$, si ricava:

$$\ddot{\vec{r}} = -G \cdot \frac{M + m}{r^3} \cdot \vec{r} \quad (3.3)$$

sapendo che $M + m \approx M$ per l'assunzione fatta in precedenza (quindi $G(M + m) \approx GM$). Si definisce così il *parametro gravitazionale* μ del corpo principale:

$$\mu = GM \quad (3.4)$$

per il quale, facendo riferimento in particolar modo alla Terra (\oplus)² e al Sole (\odot)³, otteniamo, rispettivamente:

$$\mu_{\oplus} = GM_{\oplus} = 398600 \frac{km^3}{s^2} \quad (3.5)$$

$$\mu_{\odot} = GM_{\odot} = 132712 \cdot 10^6 \frac{km^3}{s^2} \quad (3.6)$$

dove

- M_{\oplus} è la massa della Terra pari a $5.9742 \cdot 10^{24} \text{ kg}$;
- M_{\odot} la massa del Sole pari a $1.989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$.

²Il simbolo \oplus sta ad indicare che ci si riferisce alla Terra

³Il simbolo \odot sta ad indicare che ci si riferisce al Sole

Infine, andando ad attuare le approssimazioni e sostituendo, si ottiene l'*Equazione del moto relativo o del problema dei 2 corpi*:

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \cdot \vec{r} \quad (3.7)$$

Tale espressione sta ad indicare come l'accelerazione sia tutta radiale e da essa si può calcolare l'evoluzione nel tempo della traiettoria del corpo secondario rispetto al corpo principale.

3.2 Approssimazione Patched Conics

Per studiare una traiettoria interplanetaria o interstellare, assumiamo che un satellite segua un'orbita *kepleriana*^{4,5} non perturbata attorno al Sole (conica), quando il satellite è al di fuori della *sfera d'influenza*⁶ di un pianeta. Per la descrizione di tale approssimazione, si effettuano le seguenti ipotesi:

- orbite dei pianeti circolari e coplanari;
- partenza e arrivo all'interno della sfera d'influenza dei pianeti;
- dimensioni delle sfere d'influenza trascurabili rispetto alle distanze in gioco, cioè le *distanze eliocentriche*;
- modello semplificato, ovvero *manovre impulsive*, per cui si applica una spinta infinita per un tempo infinitesimo. Tale ipotesi è valida nel momento in cui il tempo della missione è molto maggiore del tempo di manovra. Si può quindi dedurre che tale modello semplificato non possa essere usato nella nostra trattazione, la quale prevede l'utilizzo di propulsione nucleare elettrica ad impulso specifico variabile, in cui la spinta da applicare deve essere piccola.

Il metodo *patched conics* consiste nell'unione di pezzi di coniche, il cui fuoco cambia a seconda di dove ci si trova; se considerassimo come esempio la missione interplanetaria Terra-Marte, si avrà una prima traiettoria studiata tenendo conto della sfera d'influenza terrestre (*fase planetocentrica* \rightarrow *escape*) in cui le velocità relative ai pianeti vengono calcolate per stabilire le velocità all'infinito, man mano che ci si allontanerà dalla Terra si risentirà della sfera d'influenza del Sole e a quel punto la traiettoria studiata sarà eliocentrica (*fase eliocentrica*), caratterizzata dall'ellisse della *trasferta di Hohmann* (di cui si discuterà nella successiva sezione), intersecando la posizione desiderata dei due pianeti sulla loro orbita; infine, avvicinandosi alla destinazione, si avrà la traiettoria con fuoco su Marte e quindi si terrà conto della sua sfera d'influenza (*fase planetocentrica* \rightarrow *cattura*): la missione finale sarà l'unione di queste coniche. Quando si passa da una sfera d'influenza ad un'altra,

⁴Un'orbita kepleriana rappresenta un'orbita ideale, priva di perturbazioni e assumendo i 6 parametri orbitali classici costanti nel tempo

⁵I 6 parametri orbitali classici sono il semiasse maggiore a , l'eccentricità e , l'inclinazione i , l'ascensione retta (longitudine) del nodo ascendente Ω o θ (RAAN), l'argomento del periastro ω e l'anomalia vera ν

⁶La sfera d'influenza è quella regione di spazio similmente sferica attorno a un pianeta all'interno della quale l'errore che commetto trascurando l'attrazione gravitazionale del Sole e considerando solo quella del pianeta è molto più piccolo se trascurassi la gravità del pianeta e considerassi solo quella del Sole

cambia sempre il parametro gravitazionale μ e quindi cambiano le energie in gioco. Il punto fondamentale è stabilire un criterio per determinare la distanza entro cui l'azione gravitazionale di un dato corpo celeste abbia effetto primario sul satellite: questo criterio è alla base della sfera d'influenza. Riferendoci alla Figura 3.2, è possibile determinare approssimativamente il raggio della sfera d'influenza r del corpo secondario di massa m , scrivendo:

$$r \sim \left(\frac{m}{M} \right)^{\frac{2}{5}} \cdot \vec{r} \quad (3.8)$$

dove \vec{r} è il vettore congiungente i due corpi.

3.3 Manovra di Oberth

Prima di poter approfondire il discorso su tale tipologia di traiettoria, si introducono delle manovre che poi scopriremo essere parte integrante della Oberth: la già citata trasferta di Hohmann e l'*escape iperbolico*.

La trasferta di Hohmann consiste in una traiettoria semiellittica, tra due orbite circolari, tangente ad entrambe nei loro apsi: l'orbita di trasferimento deve essere tale per cui il fuoco deve coincidere con il centro dell'astro in considerazione. Risulta essere la trasferta più economica in termini di costi di missione ΔV . Si definisce come manovra a 2 impulsi perchè si dà un impulso ad accelerare quando si parte dall'orbita di partenza (caratterizzata dal pedice 1) e un altro impulso ad accelerare all'arrivo sull'orbita target (caratterizzata dal pedice 2).

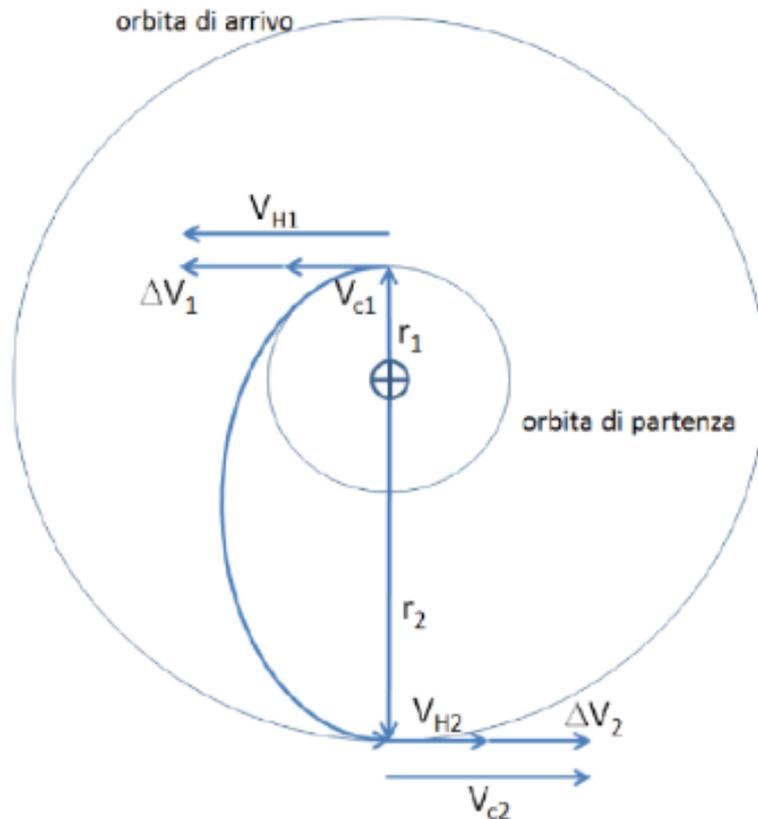


Figura 3.3: Trasferta di Hohmann

Per dimostrare quanto appena detto, è necessario effettuare i calcoli delle velocità in gioco, a partire dall'espressione dell'energia totale, somma di energia cinetica ed energia potenziale:

$$E_{gH} = \frac{V_{H_1}^2}{2} - \frac{\mu}{r_1} = \frac{V_{H_2}^2}{2} - \frac{\mu}{r_2} = -\frac{\mu}{r_1 + r_2} = -\frac{\mu}{2a_H} \quad (3.9)$$

in cui

- E_{gH} è l'energia totale della trasferta di Hohmann;
- V_{H_1} è la velocità di Hohmann con cui si passa dall'orbita 1 all'orbita di trasferimento;
- r_1 è il raggio dell'orbita di partenza (orbita 1);
- V_{H_2} è la velocità di Hohmann con cui si passa dall'orbita di trasferimento all'orbita 2;
- r_2 è il raggio dell'orbita di arrivo (orbita 2), con $r_2 > r_1$: questo spiega perchè bisogna accelerare in entrambi gli impulsi e, infatti, passando da raggi più piccoli (in cui le velocità sono più alte) a raggi più grandi (in cui le velocità sono più basse), conviene sempre spingere tanto e accelerare per vincere le perdite gravitazionali e salire più velocemente per cercare di vincere la forza di gravità, ottenendo sempre dei $\Delta V = V_{finale} - V_{iniziale} > 0$;
- a_H è il semiasse maggiore dell'ellisse che costituisce la trasferta di Hohmann, pari alla semisomma dei raggi delle due orbite circolari.

Dalla Figura 3.3 si può notare come la \vec{V}_{H_1} sia parallela alla \vec{V}_{c_1} e stessa cosa per \vec{V}_{H_2} e \vec{V}_{c_2} : questo per evitare le perdite per disallineamento.⁷ Vettorialmente si può scrivere:

$$\vec{V}_{H_1} = \vec{V}_{c_1} + \Delta\vec{V}_1 \quad (3.10)$$

$$\vec{V}_{c_2} = \vec{V}_{H_2} + \Delta\vec{V}_2 \quad (3.11)$$

⁷Con perdite per disallineamento si intendono le perdite che vengono a generarsi se c'è un certo *angolo di disallineamento* $\alpha \neq 0$, cioè l'angolo tra la direzione della spinta \vec{T} e quella della velocità dello spacecraft \vec{V} : se $\alpha = 0 \rightarrow \vec{T} \parallel \vec{V}$ e si ottiene il ΔV più piccolo possibile

dove

- $\vec{V}_{c_1} = \sqrt{\frac{\mu}{r_1}}$ è la velocità circolare con cui si parte dall'orbita 1;
- $\vec{V}_{c_2} = \sqrt{\frac{\mu}{r_2}}$ è la velocità circolare in cui si arriva all'orbita 2;
- $\Delta\vec{V}_1$ è la variazione di velocità, intesa come costo della partenza dall'orbita 1, tra la velocità di Hohmann e la velocità circolare dell'orbita di partenza;
- $\Delta\vec{V}_2$ è la variazione di velocità, intesa come costo dell'arrivo all'orbita 2, tra la velocità circolare e la velocità di Hohmann dell'orbita di arrivo.

Dall'equazione 3.9 si possono esplicitare le velocità di manovra:

$$V_{H_1}^2 = 2\mu \cdot \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1 + r_2} \right] = \frac{\mu}{r_1} \cdot \left[\frac{2r_2}{r_1 + r_2} \right] = V_{c_1}^2 \cdot \left[\frac{2r_2}{r_1 + r_2} \right] \quad (3.12)$$

$$V_{H_2}^2 = 2\mu \cdot \left[\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1 + r_2} \right] = \frac{\mu}{r_2} \cdot \left[\frac{2r_1}{r_1 + r_2} \right] = V_{c_2}^2 \cdot \left[\frac{2r_1}{r_1 + r_2} \right] \quad (3.13)$$

Quindi i ΔV saranno:

$$\Delta V_1 = V_{H_1} - V_{c_1} = V_{c_1} \cdot \left[\sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} - 1 \right] \quad (3.14)$$

$$\Delta V_2 = V_{c_2} - V_{H_2} = V_{c_2} \cdot \left[1 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_1 + r_2}} \right] \quad (3.15)$$

$$\Delta V_{tot} = \Delta V_1 + \Delta V_2 \quad (3.16)$$

che si dimostra essere il minimo possibile per una trasferta. Per questa condizione, si ottiene un massimo tempo di percorrenza della trasferta di Hohmann uguale a:

$$T_H = \pi \cdot \sqrt{\frac{a_H^3}{\mu}} \quad (3.17)$$

La trasferta di Hohmann risulta essere la più economica in termini di ΔV , ma la più onerosa in termini di durata. Per ottenere il maggior risparmio di tempo, bisognerebbe immettersi in una traiettoria iperbolica, con un risparmio del 60%, a discapito di un aumento di più del 100% del costo di missione: basterebbe un leggero aumento della spesa energetica (ad esempio il 10%) per realizzare già grandi diminuzioni (25%) della durata Δt . In generale, è più conveniente utilizzare la

trasferta di Hohmann per missioni brevi, come trasferimenti in orbita LEO⁸ o missioni Terra-Marte, anche se, a causa delle perdite per gravità, risulta più costoso arrivare ad un pianeta mediamente vicino piuttosto che un punto lontanissimo.

Dopo aver trattato la trasferta di Hohmann, si introduce il secondo tassello che porta al completamento della manovra di Oberth: l'escape iperbolico, detto anche *escape diretto*, essendo ad 1 solo impulso e che porta direttamente all'infinito.

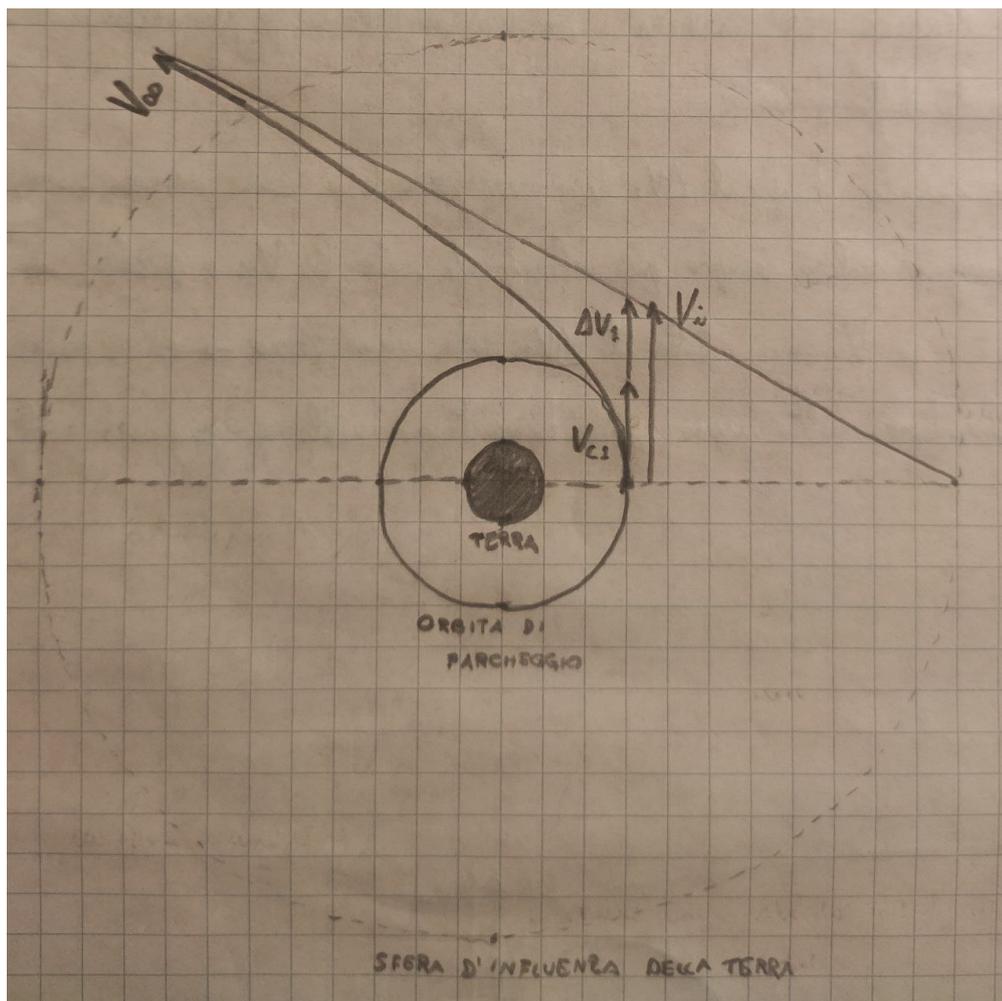


Figura 3.4: Schema di un'escape iperbolico

⁸L'orbita LEO coincide con l'orbita bassa terrestre, cioè l'orbita circolare più vicina rispetto alla Terra, ad una quota che parte da un range di 200 fino ai 2000 km, per poi passare ad orbite MEO fino ai 36000 km e GEO oltre i 36000

Per poter descrivere tale traiettoria consideriamo la Terra, un'orbita circolare di partenza o di parcheggio attorno ad essa e con un raggio molto grande indichiamo la sua SOI: partendo dall'orbita di parcheggio con una certa velocità circolare \vec{V}_{c1} , si dà un impulso ad accelerare ($\Delta\vec{V}_1$), raggiungendo la velocità dell'iperbole \vec{V}_i e ci mettiamo su un'iperbole che ci porta all'infinito con una velocità di escape o eccesso iperbolico $V_\infty > 0$. Ci sono due aspetti da considerare:

1. Si effettua un'unica manovra (escape diretto);
2. Si effettua un'evasione con $\Delta\vec{V}_1 \parallel \vec{V}_{c1}$: si passa da un'energia negativa dell'orbita circolare a un'energia positiva dell'iperbole, eliminando le perdite per disallineamento, ottenendo

$$\vec{V}_i = \vec{V}_{c1} + \Delta\vec{V}_1 \quad (3.18)$$

Sarebbe la stessa cosa anche la cattura iperbolica, soltanto cambiando i segni delle manovre e partendo dalla sfera d'influenza del pianeta target, si arriva con una traiettoria iperbolica all'orbita di parcheggio. Come prima, si procede con il calcolo del ΔV , partendo sempre dall'equazione dell'energia:

$$E_i = \frac{V_\infty^2}{2} - \frac{\mu}{r_\infty} = \frac{V_i^2}{2} - \frac{\mu}{r_1} \quad (3.19)$$

da cui

- E_i è l'energia totale dell'iperbole;
- r_∞ è il raggio a distanza infinita ed essendo a denominatore quel contributo va a 0.

Si ricava:

$$V_i = \sqrt{V_\infty^2 + \frac{2\mu}{r_1}} = \sqrt{V_\infty^2 + 2V_{c1}^2} = \sqrt{V_\infty^2 + V_{escape}^2} \quad (3.20)$$

con

$$V_{escape} = \sqrt{\frac{2\mu}{r_1}} = 2V_{c1} \quad (3.21)$$

In base a ciò che è stato appena descritto, risulta essere conveniente la trasferta iperbolica per il nostro caso in esame: è vero che la manovra di Oberth, di seguito descritta, è adatta per missioni a raggi elevati, ma l'utilizzo di propulsione elettrica ad impulso specifico variabile non permette di raggiungere livelli di spinta adatti all'utilizzo di questa manovra, se non approfondendo il discorso con delle ulteriori iterazioni, imponendo dei raggi di passaggio più bassi. Fatte queste premesse, si riporta di seguito una rappresentazione dettagliata della manovra di Oberth.

dove

- \vec{V}_{i_2} è la velocità dell'iperbole nel punto 2;
- $V_{escape_2} = \sqrt{\frac{2\mu}{r_2}} = 2V_{c_2}$ è la velocità di escape dall'orbita di parcheggio, sempre pari a 2 volte la velocità circolare.

Per spiegare la convenienza di tali manovre a distanze molto grandi, bisogna partire dalla seguente equazione:

$$dE = V \cdot dV \tag{3.24}$$

Andare molto lontano significa avere una grande variazione di energia dE , ma se ciò viene fatto a raggi molto piccoli (dove le velocità V sono molto grandi) rispetto al raggio dell'orbita di partenza, si ottiene un costo di missione dV inferiore rispetto a quello che si otterrebbe con un'escape diretto, il quale avverrebbe a un raggio molto più grande (dove le velocità sono più piccole), a parità di variazione di energia. Se invece ci fossero limitate variazioni di energia (dE piccole), non si ha un grande risparmio a compiere la manovra a raggi bassi e quindi la manovra di Oberth non è conveniente a distanze più limitate. La manovra di Oberth risulta tanto più conveniente quanto più piccolo è il raggio r_2 e se $V_\infty > \sqrt{2} \cdot V_{c_1}$: per i calcoli effettuati relativi al codice, imporre raggi r_2 più bassi portava ad un peggioramento delle soluzioni, per cui risulta conveniente scegliere una traiettoria di continuo allontanamento dal Sole. Risulta ovvio che per la Terra non è possibile eseguire tale manovra perchè se si parte da un'orbita vicino alla Terra e si devono raggiungere raggi più bassi, ci si schianterebbe contro di essa. Per il raggiungimento dei confini del Sistema Solare, si evade dalla Terra, con una trasferta di Hohmann ci si avvicina il più possibile al Sole e poi da esso si dà un forte impulso ad accelerare, con un'accelerazione sufficiente a raggiungere le regioni più remote dello Spazio.

3.4 Modellizzazione della traiettoria

Come già spiegato nel precedente capitolo, la propulsione elettrica è definita come propulsione di bassa spinta, nel senso che il modulo della spinta risulta essere piccolo rispetto all'attrazione gravitazionale dei corpi celesti. Le ipotesi assunte nel Problema dei 2 corpi risultano essere molto stringenti, indicando delle condizioni ideali non perturbate: nella realtà, la presenza delle perturbazioni porta alla variazione dei classici parametri orbitali, i quali non possono più essere considerati costanti nel tempo. La propulsione elettrica, infatti, può essere trattata come una sorta di accelerazione perturbativa, per il quale è possibile effettuare uno studio più approfondito delle traiettorie.

La modellizzazione della traiettoria consiste nell'introdurre anche gli effetti propulsivi nelle equazioni del moto (riferendoci alle equazioni 2.15, 2.16, 2.17 e 3.7), tenendo conto di un certo consumo di propellente e di riduzione della massa, da aggiornare numericamente ad ogni iterazione, come una sorta di *model updating*. Un altro aspetto da considerare è come la spinta possa essere variabile istante per istante: ciò viene assunto suddividendo la traiettoria in archi di circonferenza ed è l'ampiezza dell'arco a definire quanto possa essere accurata la modellizzazione, permettendo l'introduzione di variabili finite per discretizzare un modello continuo, il quale sarebbe impossibile da integrare numericamente. Nel prossimo capitolo saranno introdotti gli algoritmi utilizzati per l'ottimizzazione della traiettoria di uno spacecraft verso le regioni più lontane dal Sistema Solare.

Capitolo 4

Esempi di applicazione: Fascia di Kuiper, sonde Voyager e Nube di Oort

4.1 Descrizione delle regioni più remote dello Spazio

La cosiddetta Kuiper Belt è una zona dello Spazio caratterizzata da una forma toroidale, situata oltre l'orbita del pianeta Nettuno, ad una distanza dal Sole che può variare dalle 30 alle 50 AU. Tale fascia o cintura presenta al suo interno milioni di corpi ghiacciati, probabilmente derivanti dalla formazione primordiale del Sistema Solare: nonostante l'enorme quantità di corpi presenti e la vastità nella quale si estende, la Fascia di Kuiper presenta una massa di solamente $\frac{1}{10}$ della massa terrestre. È nota anche come Fascia di Kuiper-Edgeworth, dai nomi dei due principali astronomi scopritori di tale presenza che, però, paradossalmente ne negarono la possibile esistenza in un secondo momento; tale scoperta risale alla prima metà del '900, anche se Kuiper ipotizzò che la gravità del pianeta Plutone avesse attirato i corpi in quella zona direttamente verso la Nube di Oort, negando così l'effettiva esistenza di questa fascia toroidale oltre Nettuno. Soltanto nel 1992, dopo diversi anni di ricerca, i due astronomi David Jewitt e Jane Luu furono in grado di scoprire i primi oggetti appartenenti a questa zona dello Spazio, 1992 QB1 e 1993 FW.

Come già accennato prima, la formazione della Kuiper Belt risale a quella del Sistema Solare, a circa 4.6 miliardi di anni fa. A causa della presenza di Nettuno e della sua ingente gravità, i resti del Sistema Solare non si unirono tra loro per formare un nuovo pianeta, ma rimasero suddivisi sotto forma di nebulosa, generando questa cintura di corpi celesti. Tali corpi sono detti oggetti transnettuniani (KBO): sono formati principalmente da acqua ghiacciata H_2O , ammoniaca NH_3 e metano CH_4 , distinguendosi dagli asteroidi rocciosi della fascia principale. Si ipotizza, inoltre, la presenza di *comete periodiche*, ovvero quelle comete che impiegano meno di 200 anni per orbitare attorno al Sole.

L'unico veicolo spaziale in grado di raggiungere e studiare la Fascia di Kuiper è stata la sonda *New Horizons* della NASA, lanciata nel 2006, la quale impiegò circa 9 anni per raggiungere Plutone e altri 4 anni per osservare un KBO, diventando lo spacecraft più lontano dalla Terra mai inviato dall'uomo fino a quel momento, superato poi dalle sonde Voyager. Gli oggetti più grandi situati nella Kuiper Belt sono i cosiddetti *planeti nani*, come Plutone, ma vi sono anche degli oggetti *planetesimali*, ovvero oggetti molto più piccoli dei pianeti lì presenti.

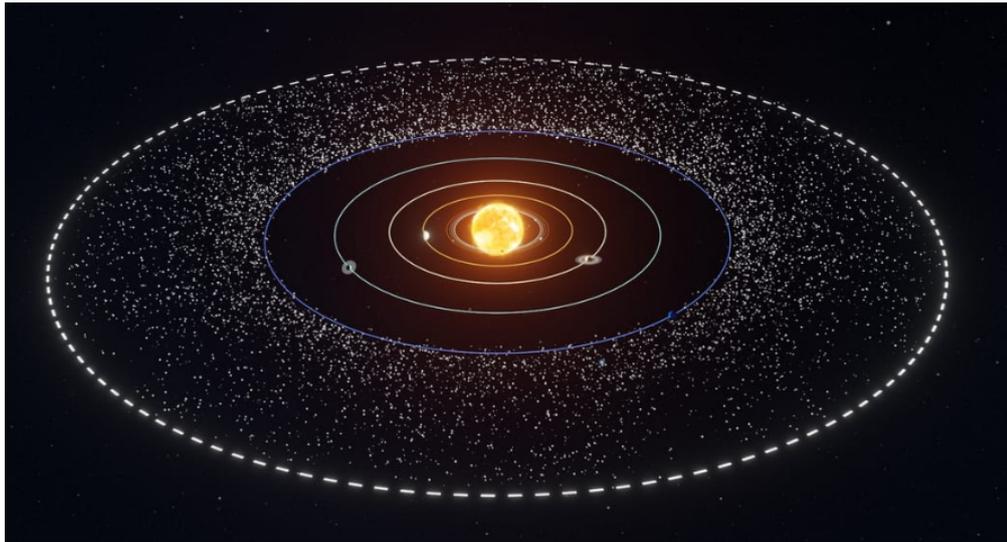


Figura 4.1: Rappresentazione della Fascia di Kuiper

Un altro esempio che si può riportare in questa tesi è quello delle sonde Voyager 1 e 2: esse rappresentano gli unici veicoli spaziali, lanciati nel 1977, ad aver oltrepassato l'*eliosfera*, raggiungendo così lo spazio interstellare, trovandosi attualmente tra le 120 e 170 AU di distanza dal Sole, con l'obiettivo di misurare i campi magnetici interstellari e le onde di plasma interstellare. Entrambe le sonde hanno la particolarità di trasportare dei dischi di rame placcati in oro, sui quali sono incisi immagini e suoni che spiegano, ad eventuali presenze extraterrestri che possano riceverli, la biodiversità e la presenza di differenti culture sul nostro pianeta.

Le due sonde sono perfettamente identiche: la loro particolarità consiste nell'utilizzare una propulsione nucleare elettrica caratterizzata da tre RTG, il cui combustibile radioisotopico è il Plutonio 238, sotto forma di ossido (PuO_2). Tutto ciò per confermare quanto detto nei capitoli precedenti, cioè che tale tipologia di propulsore ha permesso di raggiungere i punti più lontani dal Sistema Solare, con lo scopo di estrarre dati sulla composizione delle particelle e dei campi magnetici presenti attorno ai pianeti più lontani, come Giove, Saturno, Urano e Nettuno, spingendosi anche oltre il confine del nostro sistema.

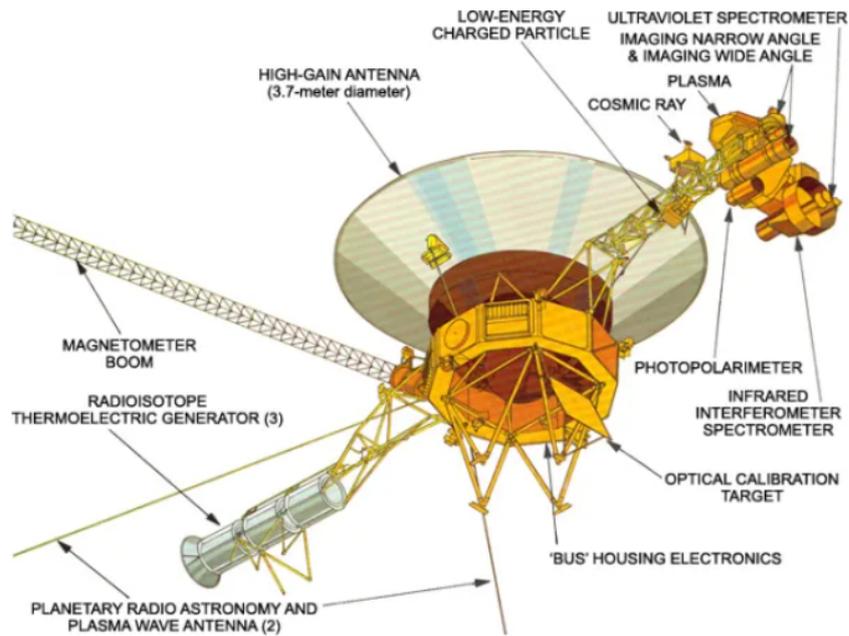


Figura 4.2: Schema delle due sonde gemelle Voyager 1 e 2

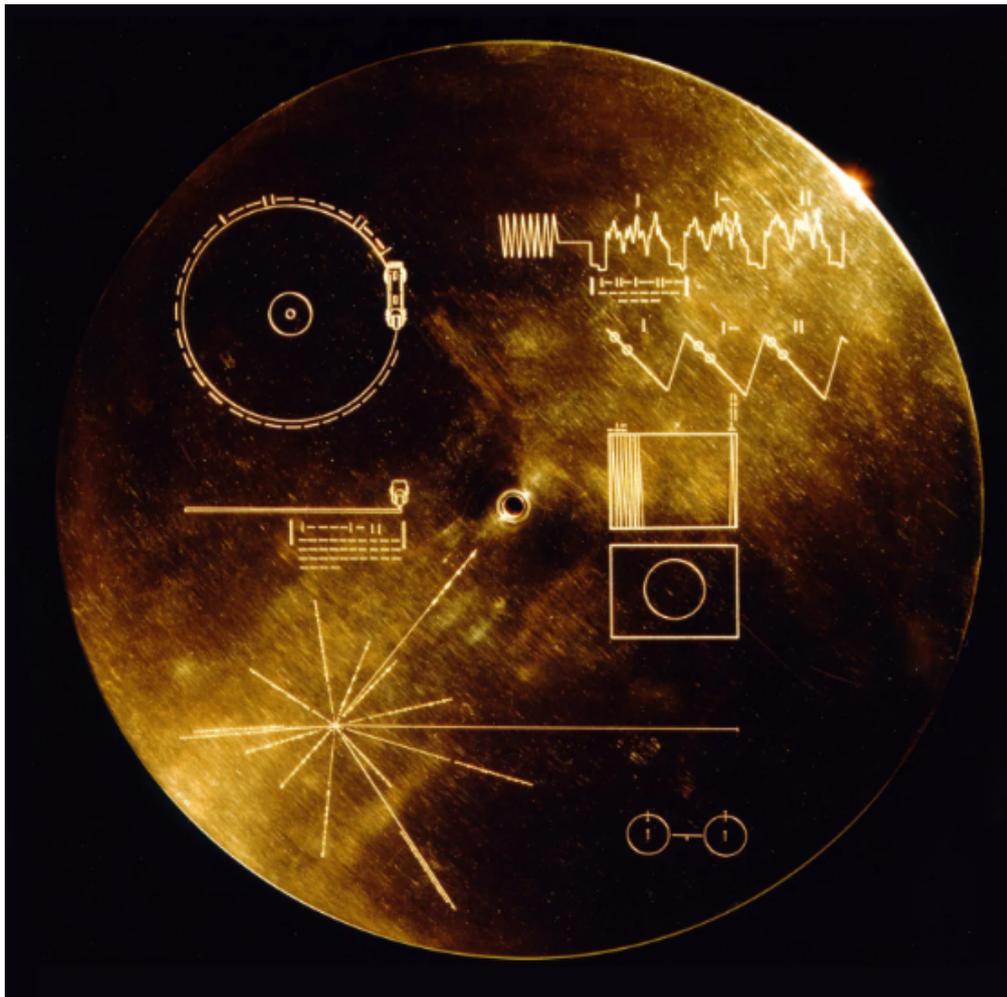


Figura 4.3: Immagine del disco placcato in oro delle sonde Voyager

L'ultimo esempio che si riporta è quello sulla Nube di Oort, un'ampia e misteriosa regione dello Spazio, costituita essenzialmente da un insieme di ghiaccio d'acqua e polveri rocciose, come ammoniaca, metano (come la Fascia di Kuiper), etano C_2H_6O , monossido di carbonio CO e cianuro di idrogeno HCN , in grado di ospitare miliardi di corpi celesti, tra cui principalmente comete, che presentano delle dimensioni, nella maggior parte dei casi, non superiori ai 100 km e con una massa che prevede un range di 10 - 100 volte la massa del nostro pianeta. Intorno agli anni '50 del '900, uno scienziato olandese di nome Jan Oort, ne teorizzò per la prima volta l'esistenza, partendo da una teoria ipotizzata dallo scienziato estone Ernst Julius Öpik nel 1932, cosa che fu confermata nei decenni successivi in

seguito a delle osservazioni astronomiche indirette¹. Tale nube si può considerare suddivisa in due regioni, situata ai margini del Sistema Solare: la Nube Interna (la cosiddetta Nube di Hils) e la Nube Esterna. La prima è situata a 2000 AU ed è di forma toroidale, come la Fascia di Kuiper. La Nube esterna, a guscio sferico, presenta un'estensione non ancora del tutto chiara e ben definita, ma risulta essere stimata tra le 10000 e le 100000 AU: con le tecnologie attualmente in uso, si è calcolato che uno spacecraft possa impiegare circa 150 anni per raggiungere la nube. Gli studiosi sono convinti del fatto che da questa fitta composizione di corpi celesti possano provenire gran parte degli elementi costituenti l'origine del Sistema Solare e uno studio approfondito delle comete provenienti dalla nube porterebbe a comprendere meglio la formazione primordiale del nostro sistema. In alcune particolari circostanze, è possibile, dal nostro pianeta, osservare delle comete di *lungo periodo o non periodiche*, cioè comete che impiegano dai 200 alle migliaia di anni ad orbitare attorno al Sole (a differenza di quelle presenti nella Fascia di Kuiper) e che si pensa possano provenire proprio dalla Nube di Oort: la loro osservazione può far capire meglio cosa si cela dietro i misteriosi aspetti della nube. Oort capì che tali comete non potevano orbitare vicino al Sole perchè la loro attrazione gravitazionale le avrebbe portate alla collisione con la nostra Stella e i pianeti vicini. Inoltre, è stato evidenziato come le comete passanti per il nostro sistema si "spengano" velocemente e si è dunque dedotta la presenza di una sfera che facesse da serbatoio alle comete provenienti dalle regioni più lontane. Nel corso degli anni, è allampante la scoperta di un presunto pianeta nano presente all'interno della Nube, chiamato Sedna, caratterizzato da un periodo orbitale di 11400 anni per arrivare al suo punto più prossimo al Sole, corrispondente a 76 AU. Inoltre, si è scoperto che alcuni corpi celesti del nostro Sistema Solare, come i satelliti Europa ed Encelado (rispettivamente satelliti di Giove e di Saturno), siano caratterizzati dagli stessi elementi che troviamo nella Nube di Oort. Infatti, nonostante al giorno d'oggi sia un argomento noto e riconosciuto dai maggiori esponenti dell'ambito spaziale, risultano ancora molteplici le perplessità e le incognite riguardo a queste tematiche, ipotizzando come una delle principali teorie di formazione della Nube sia a causa degli "scarti" provenienti dalla creazione del Sistema Solare, secondo lo stesso principio di formazione della Cintura di Kuiper. Si stima come contemporanea alla formazione del nostro sistema l'origine della nube, circa 4.6 miliardi di anni fa,

¹Per osservazione indiretta si intende quella tipologia di esplorazione per cui non è possibile, come nel caso di un oggetto troppo lontano e poco luminoso come la Nube di Oort, poter osservare direttamente, con sonde o telescopi, un oggetto dello Spazio, a causa sia della troppo elevata distanza, sia della lentezza del movimento dei corpi celesti, sia della loro scarsa riflessività della luce: nell'osservazione indiretta si sfrutta il passaggio di comete che provengono da molto lontano e finiscono all'interno del Sistema Solare, confermando la teoria dell'esistenza di una regione di Spazio molto lontana contenente tali corpi celesti

soprattutto con la generazione dei pianeti Giove e Saturno, per la formazione della Nube esterna, qualche milione di anni dopo invece, per lo stesso concetto che ha coinvolto Urano e Nettuno, la formazione di quella interna. Data la loro grandezza, la loro attrazione gravitazionale portava gli oggetti planetesimali a viaggiare molto lontano dal Sole in seguito a collisioni, andando a costituire la Nube di Oort. L'enorme gravità della galassia mantiene la gran parte dei corpi celesti racchiusi in questa enorme nuvola sferica, anche se non risulta essere propriamente stabile, per cui avremo diversi corpi che tenderanno verso altri sistemi stellari. Distinguiamo, quindi, tre cause principali per la fuga delle comete di lungo periodo:

- avvicinamento di una stella presso il Sistema Solare;
- passaggio di una intensa nube molecolare che genera delle perturbazioni gravitazionali tali da far evadere le comete dalla Nube di Oort;
- il disco galattico, le cui masse presenti al suo interno sono così ingenti da poter sbilanciare l'equilibrio che mantiene le comete all'interno della Nube, a causa anche della grande distanza, con la sfera d'influenza della Nube di Oort che è molto più grande rispetto a quella del Sole.

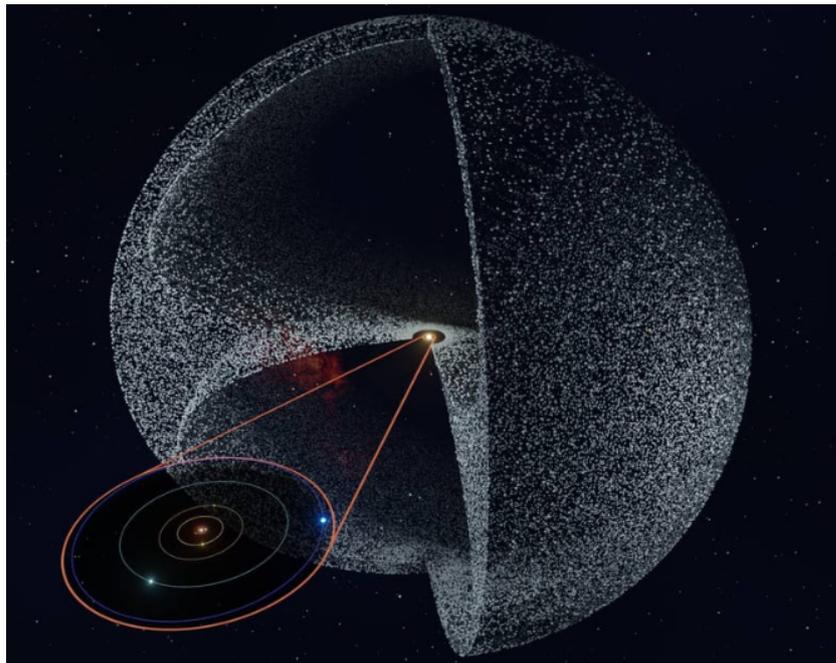


Figura 4.4: Immagine della Nube di Oort rispetto al Sistema Solare



Figura 4.5: Rappresentazione della Nube di Oort a cura dell'ESO

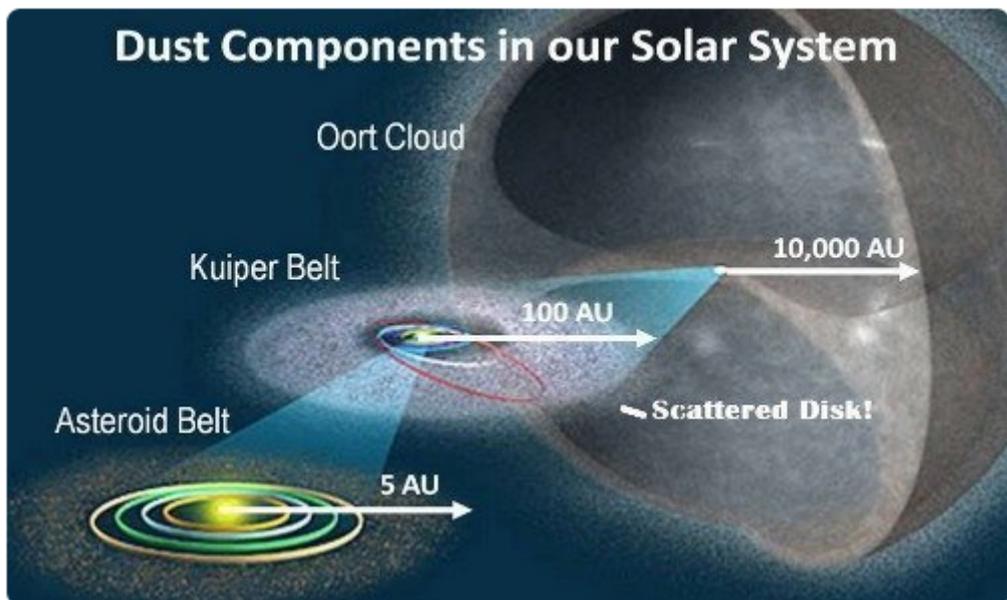


Figura 4.6: Distribuzione delle comete nello Spazio dal Sistema Solare alla Nube di Oort

Dalla Figura 4.6 si può evidenziare la distribuzione delle comete, all'aumentare del numero di unità astronomiche, a partire dal Sole fino alla Nube di Oort, dandoci un'idea delle distanze che si possono raggiungere. Si evidenzia come la fascia o cintura di Asteroidi (*Asteroid Belt*) si estende fino a 5 AU; dopodichè la Fascia di Kuiper arriva fino a 50 AU dal Sole e molto più lontana la Nube di Oort.

Un esempio pratico della maniera in cui le comete della Nube di Oort fuggono via, lo si può ricondurre alla *Cometa di Halley*, originatasi nella nube ma presente ora nella Fascia di Kuiper: le comete vengono attratte dalla forza gravitazionale delle stelle di passaggio, dalle nubi molecolari e dalla forza delle maree della *Via Lattea*, spostandosi verso il Sistema Solare.

Ad oggi sono ancora molteplici gli elementi nascosti, ma sono previste nel futuro numerose missioni spaziali per queste regioni di Spazio, viste le difficoltà nel raggiungerle con gli strumenti attuali; pertanto, l'obiettivo di questa tesi è quello di contribuire agli sviluppi futuri per queste tipologie di missione.

4.2 Presentazione del codice

Per poter effettuare i calcoli sulla base della Teoria del controllo ottimale, risolvendo il problema differenziale ai limiti, è stato utilizzato un codice di calcolo basato sul compilatore Fortran, avente origine dai professori Gasparo, Macconi e Pasquali dell'Università di Firenze e successivamente modificato dal professor Casalino del Politecnico di Torino e dal professor Colasurdo dell'Università Sapienza di Roma. Questo codice prevede l'utilizzo di un metodo indiretto per l'ottimizzazione della traiettoria applicata ad una missione spaziale, con la ricerca della soluzione mediante il metodo convergente di Newton, sfruttandone i vantaggi già esplicitati nel capitolo 1 e risultando più adatto per questa tipologia di missione scelta, rispetto ad un metodo diretto. In questo particolare algoritmo è previsto l'utilizzo di un integratore a passo e ordine variabili, derivato dalle *Formule di Adams-Moulton*; le modifiche apportate dai professori Casalino e Colasurdo hanno introdotto degli aspetti aggiuntivi:

- la presenza di archi multipli, come già spiegato nel capitolo 3 sulla modellizzazione della traiettoria;
- l'applicazione della discontinuità ai confini degli archi e la non approssimazione del modello continuo anche nei contorni interni;
- tenere conto del fatto che le condizioni al contorno siano non lineari e miste, riferendosi cioè a quelle iniziali, finali e intermedie.

Sono diversi i campi di applicazione per cui possa essere utilizzato tale codice e, facendo riferimento alle traiettorie aerospaziali, si possono considerare:

- la traiettoria di ascesa in orbita, applicabile quindi a qualsiasi tipologia di missione spaziale, che sia di corto o lungo raggio;
- utilizzo di manovre aeroassistite, in generale più efficienti delle manovre propulsive;
- trasferite orbitali del tipo Hohmann, escape iperbolico o Oberth, la cui esplicitazione è già stata affrontata sempre nel capitolo 3;
- come già esplicitato nel corso di questa intera trattazione, un altro campo applicativo per questo algoritmo sono le missioni interplanetarie, i cui fondamenti si basano sull'approssimazione patched conics, già affrontata in questa tesi insieme al Problema dei 2 corpi, che si può estendere al *Problema dei 3-corpi o 3-corpi ristretto* se il terzo corpo ha una massa inferiore a quella del corpo principale, ma molto maggiore rispetto a quella dello spacecraft (riguarda il caso di una missione che possa coinvolgere, ad esempio, la Terra e la Luna, oltre al satellite);

- l'utilizzo di sistemi propulsivi, tra i quali, per il nostro caso di studio, la propulsione nucleare elettrica ad impulso specifico variabile e l'adattamento anche a missioni che adottano le vele solari, con i calcoli riportati nella relativa sezione del capitolo 2.

Altre possibili applicazioni per questo codice riguardano anche altre tipologie di propulsori:

- la regolazione degli *endoreattori a propellente liquido* (LPRE), una tipologia di propulsore chimico caratterizzata da un propellente tipicamente in stato liquido, come idrogeno e ossigeno ad esempio, entrambi criogenici. A differenza di quelli a propellente solido, in cui il serbatoio coincide con la camera di combustione e non è presente un sistema di alimentazione, in quelli a propellente liquido si distinguono i serbatoi (*fuel tank e oxidizer tank*)², un sistema di alimentazione solitamente caratterizzato da turbopompe con i gas che raggiungono temperature di 1000 K, la camera di combustione, realizzata a *open loop* (ciclo aperto), con il gas che passa attraverso un *gas generator* alle temperature di circa 3000 K e, infine, un ugello convergente-divergente, per ottenere rapporti di espansione elevati: il sistema camera di combustione + ugello rappresenta la camera di spinta;
- la regolazione degli *endoreattori a propellente ibrido* (HPRE), ovvero una tipologia intermedia tra il solido e il liquido, con un grano³ in camera di combustione e l'ossidante (LO_2 , anche se si preferisce l'utilizzo di acqua ossigenata H_2O_2 perchè non criogenico e più facile da conservare) in un serbatoio separato dalla camera di combustione: il gas pressurizzante va a spingere l'ossidante fuori dal serbatoio facendolo entrare in camera di combustione;
- la geometria dei propulsori elettromagnetici MPD, di cui sono stati riportati accenni nella prima sezione del capitolo 2.

²Il fuel tank è il serbatoio che contiene il combustibile, l'oxidizer tank quello che contiene l'ossidante: insieme realizzano la reazione chimica, prima della quale avviene lo storage del propellente

³Per grano si intende un blocco di propellente solido con un mix di particelle ossidanti e di combustibile inerte

4.3 Parametri utilizzati e procedura matematica

In questa sezione, si vanno a definire i parametri e le variabili principalmente utilizzate nel codice, impostando le equazioni matematiche per poter estrarre i risultati di questa missione, per poi fornire un input per degli sviluppi in caso di future applicazioni. Pertanto, si riportano di seguito gli elementi fondamentali:

- le variabili più importanti utilizzate in questo problema di ottimizzazione sono:
 1. la durata t , cioè il tempo di spinta del propulsore;
 2. θ l'ascensione retta, ovvero la longitudine a cui si trova lo spacecraft;
 3. φ la latitudine.
- i parametri, che sono:
 1. t_0 il tempo di partenza, imposto uguale a 0;
 2. t_f il tempo all'arrivo dell'orbita target;
 3. r_0 la posizione di partenza, nell'ordine dell'unità;
 4. λ_θ la variabile aggiunta all'ascensione retta del nodo ascendente;
 5. V_{∞_0} la velocità di eccesso iperbolico iniziale rispetto alla Terra, pari a 0.
- l'indice di prestazione scelto per l'ottimizzazione, l'energia specifica finale E_f , data dall'espressione:

$$E_f = \frac{V_f^2}{2} - \frac{1}{r_f} \quad (4.1)$$

con V_f la velocità finale dello spacecraft ed r_f il suo raggio finale (da 30 a 50 AU per la Fascia di Kuiper, da 120 a 170 AU per le sonde Voyager e 2000 AU per il confine più interno della Nube di Oort).

Partendo da tutto ciò, si mostrano la procedura matematica e i calcoli di ottimizzazione effettuati, riportando i risultati più significativi ottenuti attraverso tabelle e grafici. In primo luogo, si è cercato di adattare il codice al tipo di propulsione scelto per questa missione, ovvero quella nucleare elettrica ad impulso specifico variabile. Per fare ciò, si sono cercate le parti di codice in cui era presente l'accelerazione $\frac{T}{m}$, eliminando la proporzionalità con $\frac{1}{r^2}$.

Il secondo step è stato quello di effettuare dei calcoli con l'obiettivo di massimizzare l'energia specifica finale, assegnati un certo tempo operativo τ e la massa del payload m_u .

Si riportano così le equazioni del moto:

$$\dot{r} = v \quad (4.2)$$

$$\dot{v} = g + \frac{T}{m} \quad (4.3)$$

$$\dot{m} = -\frac{T}{c} \quad (4.4)$$

A questo punto, come nei casi precedentemente trattati, si ridefiniscono l'Hamiltoniano e la potenza richiesta:

$$H = \lambda_r^T v + \lambda_v^T \left(g + \frac{T}{m} \right) - \lambda_m \frac{T}{c} \quad (4.5)$$

$$P = \frac{Tc}{2} \quad (4.6)$$

con quest'ultimo valore di P che ci permette di distinguere tra due diversi tipi di controllo su c :

1. controllo con propulsore acceso e spento in funzione della fase di traiettoria in cui lo spacecraft si trova;
2. controllo con propulsore a *funzionamento continuo*.

Per proseguire con il processo di massimizzazione, è necessario imporre delle condizioni di Eulero-Lagrange

$$\dot{\lambda}_r^T = -\lambda_v^T G \quad (4.7)$$

in cui $G(r)$ è la matrice del gradiente gravitazionale $\frac{\partial g}{\partial r}$

$$\dot{\lambda}_v^T = -\lambda_r^T \quad (4.8)$$

$$\dot{\lambda}_m = \frac{\lambda_v^T \cdot T}{m^2} \quad (4.9)$$

e delle condizioni al contorno, con la traiettoria sempre suddivisa per archi:

$$\left(H_{j_-} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{j_-}} + \mu^T \frac{\partial \chi}{\partial t_{j_-}} \right) \delta t_{j_-} = 0 \quad (4.10)$$

$$\left(H_{j_+} - \frac{\partial \varphi}{\partial t_{j_+}} - \mu^T \frac{\partial \chi}{\partial t_{j_+}} \right) \delta t_{j_+} = 0 \quad (4.11)$$

$$\left(\lambda_{j_-}^T - \frac{\partial \varphi}{\partial x_{j_-}} - \mu^T \frac{\partial \chi}{\partial x_{j_-}} \right) \delta x_{j_-} = 0 \quad (4.12)$$

$$\left(\lambda_{j_+}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{j_+}} + \mu^T \frac{\partial \chi}{\partial x_{j_+}} \right) \delta x_{j_+} = 0 \quad (4.13)$$

dove χ è il vettore delle equazioni di vincolo e φ è la funzione da massimizzare. Nel nostro caso:

$$\varphi = CE_f \quad (4.14)$$

Al punto iniziale, sono assegnati il raggio iniziale $r_0 = r_{\oplus}$, il quadrato della velocità di eccesso iperbolico $V_{\infty_0}^2 = (V_0 - V_{\oplus})^2$ e la massa iniziale adimensionale $m_0 = 1$. Condizioni necessarie:

- λ_{V_0} parallelo alla velocità di eccesso iperbolico;
- λ_{m_f} e H_f liberi;
- $m_f = k$, dove k nel nostro caso è stato imposto pari a 0.4, 0.45, 0.5 e 0.6;
- $t_f = k'$, dove k' nel nostro caso è stato imposto pari a diversi valori, da 20 a 60 con intervallo 5 e il valore finale di 62.8;
- la costante C permette di scalare le variabili aggiunte e porre $\lambda_{m_0} = 1$.

Le equazioni 4.10 e 4.11 determinano implicitamente le lunghezze degli archi di tempo:

- λ_{V_f} parallela alla velocità di eccesso iperbolico;
- λ_{r_f} parallela al raggio;
- $\lambda_{r_f}^T V_f + \lambda_{V_f}^T g = 0$.

Per il Principio del massimo di Pontryagin, i controlli devono massimizzare l'Hamiltoniano, come già affermato nei precedenti capitoli, pertanto la direzione ottimale di spinta deve essere parallela alla variabile aggiunta λ_V , il primer vector. Ricavando T dall'equazione 4.6, si può riscrivere l'espressione 4.5:

$$H = \lambda_r^T v + \lambda_v^T g + \left(\frac{2P}{c} \right) \left(\frac{\lambda_v}{m} - \frac{\lambda_m}{c} \right) \quad (4.15)$$

Si ottiene una prestazione ottimale con il solito bang-bang control, con il propulsore o alla massima potenza P o spento. Si assume il rendimento η costante e la massa

del generatore proporzionale a P , attraverso la massa specifica β , già definita nel capitolo 1. La massa del payload si può esprimere come:

$$m_u = m_f - \beta \cdot P = 1 - m_p - \beta \cdot P \quad (4.16)$$

dove

- m_f è la massa finale dello spacecraft;
- m_p è la massa di propellente.

Per proseguire con il discorso, bisogna distinguere tra due casi:

1. velocità efficace di scarico costante ($c = cost$);
2. velocità efficace di scarico variabile ($c \neq cost$).

Per i motivi già esplicitati nei capitoli precedenti sull'utilizzo di un propulsore ad impulso specifico variabile, si è considerato il secondo caso, in cui il propulsore è a funzionamento continuo e il valore ottimale di c si ottiene annullando la sua derivata parziale rispetto all'Hamiltoniano:

$$c = \frac{2m\lambda_m}{\lambda_v} \quad (4.17)$$

che massimizza l'Hamiltoniano come la derivata seconda parziale di H rispetto a c , facilmente trovata per essere imprescindibilmente continua. Si può riscrivere l'equazione 4.15:

$$H = \lambda_r^T v + \lambda_v^T g + P \cdot S_P \quad (4.18)$$

in cui

$$S_P = \frac{\lambda_v^2}{2m^2 \cdot \lambda_m} \quad (4.19)$$

La switching function S_P è sempre maggiore di 0:

$$m_f = m_u + \beta \cdot P \quad (4.20)$$

ma l'equazione 4.20 non è sufficiente a vincolare il tempo operativo del propulsore e bisogna imporre esplicitamente un vincolo sul tempo ($t_f = \tau$, se il propulsore non può essere spento, altrimenti $t_f - t_{2+} + t_{1-} = \tau$ se è presente un *coast arc*, tra i punti 1 e 2).

Sia λ_{m_f} , sia H_f sono liberi, con $S_{P_f} \neq 0$. Le equazioni 4.10 e 4.11 ci dicono che l'Hamiltoniano è discontinuo, con $S_P = S_{P_f}$ e dove il propulsore è acceso o spento si ottiene:

$$\dot{\lambda}_P = -\frac{\partial H}{\partial P} = -S_P \quad (4.21)$$

Le condizioni al contorno sono $\lambda_{P_0} = 0$ e le equazioni 4.20 e 4.22:

$$\lambda_{P_f} + \beta \cdot \lambda_{m_f} = 0 \quad (4.22)$$

La potenza ottimale dipende solo da m_u e da β : le espressioni $P\lambda_P + m\lambda_m$ e $m^2\lambda_m$ sono i primi integrali del moto, costanti durante l'intera traiettoria. Si ricava:

$$P\lambda_{P_f} + m_f\lambda_{m_f} = \lambda_{m_0} \quad (4.23)$$

$$m^2\lambda_{m_f} = \lambda_{m_0} \quad (4.24)$$

Considerando le equazioni 4.20 e 4.22, da una si ricava $m_f^2 = m_u$ e di conseguenza la potenza ottimale è:

$$P = \frac{\sqrt{m_u} - m_u}{\beta} \quad (4.25)$$

Questo valore si conosce a priori e l'equazione 4.21 non è integrata. L'accelerazione è proporzionale al primer vector (con il denominatore $m^2\lambda_m = cost$):

$$\frac{T}{m} = P \frac{\lambda_v}{m^2\lambda_m} \quad (4.26)$$

Si riporta di seguito un primo esempio numerico, seguito poi da altri riportati nella successiva sezione, attraverso il quale sono state effettuate delle prime iterazioni di massimizzazione dell'energia, sotto le seguenti opportune ipotesi:

- tempo operativo del propulsore $\tau = 10\pi$ (corrispondente a 5 anni)⁴;
- massa del payload $m_u = 0.5$, cioè il 50% della massa iniziale;
- velocità di eccesso iperbolico iniziale $V_{\infty_0} = 0.1$ (corrispondente a 2.9785 km/s)⁵;
- massa specifica del generatore $\beta = 10$, ovvero $56.6 \frac{kg}{kW}$ ⁶.

Si considera un impulso specifico costante, un funzionamento continuo del propulsore e si minimizzano le perdite per disallineamento applicando una spinta parallela alla velocità dello spacecraft ($\vec{T} \parallel \vec{V}$). Per ottenere risultati migliori di P bisogna introdurre i coast arc e spegnere il propulsore in prossimità dell'afelio, riducendo le perdite per gravità. Se il propulsore è a funzionamento continuo con una velocità efficace di scarico variabile, una bassa spinta (alto I_{sp}) è sfruttata al raggio massimo; una spinta elevata è più conveniente quando lo spacecraft è vicino al Sole per ridurre le perdite gravitazionali. L'uso ottimale della potenza disponibile aumenta il guadagno di energia e bisogna considerare che la vita operativa di un propulsore elettrico, attualmente, non supera i 5 anni, ma questo tempo può aumentare per un propulsore nucleare. In questo esempio, si è considerato un rapporto peso/potenza pari a $56.6 \frac{kg}{kW}$: ciò significa avere un reattore nucleare di 2000 kg su una massa iniziale di 10000, ma nelle successive considerazioni, impostando una potenza a 100 kW, lasciando invariata la massa iniziale, cambia il valore di β , raddoppiando al dimezzare della potenza (prima a 200 kW), per cui si avranno 4 tonnellate di reattore nucleare per 10 tonnellate di massa iniziale, viceversa in caso di raddoppio della potenza da 200 a 400 kW e dimezzamento di β , sempre a parità di massa iniziale di 10000 kg: 1000 saranno di generatore nucleare.

⁴Da qui si intuisce che 1 anno corrisponde a 2π perchè, secondo il sistema di riferimento eliocentrico-eclittica, la Terra compie un giro attorno al Sole (quindi 2π) in 1 anno e il rapporto tra 1 anno (trasformato in 365.25 giorni) e 2π restituisce proprio l'unità di tempo di riferimento pari a 58.133 giorni

⁵L'adimensionalizzazione tiene conto della velocità di riferimento pari a 29.785 km/s, ovvero la velocità media di rotazione della Terra attorno al Sole

⁶Tale conversione deriva dal rapporto $\frac{r_{rif}}{V_{rif}^3}$ (definiti nella successiva sezione) che porta al risultato di $5.66 \frac{kg}{kW}$ per un $\beta = 1$

Per concludere, un sistema propulsivo a potenza limitata richiede un bang-bang control se il vincolo del tempo riguarda la vita operativa del propulsore, anzichè la durata della missione. Il livello di potenza ottimale che massimizza l'energia specifica dello spacecraft, assegnati il payload ratio e il tempo operativo, si esprime con una relazione algebrica tra il payload e la massa del generatore, nel caso di propulsore a funzionamento continuo. Si aumentano il controllo sul vettore spinta e le variabili di controllo, in modo da ottimizzare la velocità efficace di scarico e contemporaneamente spegnere il propulsore.

4.4 Convalida e verifica

Viene riportata la successione dei passaggi effettuati per il raggiungimento degli obiettivi prefissati in questa trattazione. Partendo da una prima soluzione di tentativo in cui si è imposta una durata adimensionale pari a 20 (da 0 a 20, poco più di 3 anni), una massa iniziale di 10000 kg (1 in forma adimensionale), una massa finale al 50% di quella iniziale, una velocità iniziale rispetto alla Terra e il λ_θ nulli, una potenza di 200 kW (riferimento al VASIMR VX-200), si sono effettuate diverse iterazioni, aggiornando ogni volta la soluzione di tentativo con delle nuove variabili quando la soluzione giungeva a convergenza.

Si sono svolte altre iterazioni, considerando anche durate adimensionali pari a 25 e 30 (rispettivamente 1453.31 e 1743.97 giorni, cioè circa 4 e 5 anni), variando anche la massa finale al 45 e al 40% di quella iniziale, con lo scopo di massimizzare la $V_{\infty f}$ e l'energia specifica finale E_f . In aggiunta, risulta fondamentale inizializzare altri due parametri caratteristici di questo codice:

- $RMIN = 0.1$, che rappresenta la frazione di correzione dei parametri e se imposto pari a 1 significa che la soluzione ottimale è vicina a quella di tentativo, ma per ottimizzare serve partire da una soluzione più lontana, scegliendo così un $RMIN$ più vicino allo 0;
- $PBIS = 2$, cioè l'aumento di errore tollerato.

A questo punto, si riportano le tabelle riassuntive dei risultati ottenuti, in base alle diverse condizioni imposte:

P [MW]	durata	m_f [kg]	D_t [giorni]	$V_{\infty f}$ [AU/anno]	E_f
0.2	20	5000	1162.65	14.005	2.484
0.2	25	5000	1453.31	15.418	3.011
0.2	30	5000	1743.97	16.704	3.534

Tabella 4.1: Tentativo con $P = 0.2$ MW, durate di 20, 25 e 30 e $m_f = 0.5$

P [MW]	durata	m_f [kg]	D_t [giorni]	V_{∞_f} [AU/anno]	E_f
0.2	20	4500	1162.65	15.596	3.081
0.2	25	4500	1453.31	17.178	3.737
0.2	30	4500	1743.97	18.616	4.389

Tabella 4.2: Tentativo con P e durate invariate, ma riduzione della massa finale al 45% di quella iniziale, $m_f = 0.45$

P [MW]	durata	m_f [kg]	D_t [giorni]	V_{∞_f} [AU/anno]	E_f
0.2	20	4000	1162.65	17.366	3.82
0.2	25	4000	1453.31	19.138	4.639
0.2	30	4000	1743.97	20.749	5.453

Tabella 4.3: Tentativo con P e durate invariate, ma riduzione della massa finale al 40% di quella iniziale, $m_f = 0.4$

Come si può facilmente notare, all'aumentare della durata e al diminuire della massa finale della sonda spaziale, si ottengono prestazioni ottimizzate in termini di energia e velocità finale: spingere per più tempo significa raggiungere potenze più elevate (quindi energie più grandi) e un aumento della velocità finale che ci permette di arrivare prima al target finale, arrivando con uno spacecraft più leggero. D'altra parte, però, ridurre la massa finale significa aumentare i consumi di propellente, facendo aumentare le perdite (termiche, elettriche e dovute al propellente utilizzato) rispetto all'effetto utile. Si può dire che la missione verso i confini del Sistema Solare, dal punto di vista teorico e delle ipotesi effettuate, ha raggiunto buoni livelli di soddisfazione, ottenendo sempre energia finale positiva, garantendo così un guadagno di energia che ci permette di raggiungere il target fissato. Se considerassimo il risultato migliore (ultima riga della Tabella 4.3), partendo dal presupposto che una massa iniziale di 10 ton non sarebbe di poco conto per uno spacecraft, con annessi generatori nucleari e propellente, per una durata della spinta di quasi 5 anni, si riuscirebbe a sfiorare la soglia di 21 AU/anno (corrispondenti a circa 356942 km/h o 99 km/s), al momento impensabile da raggiungere se pensiamo che la sonda più veloce al mondo, la *Parker Solar Probe*, abbia raggiunto i 532000 km/h ma in avvicinamento al Sole e non allontanandosi da esso: ripensando agli esempi di applicazione riportati, si raggiungerebbe la Fascia di Kuiper in solamente 1 anno e mezzo circa, le sonde Voyager in meno di 6 anni e il confine più interno della Nube di Oort in soli 95 anni.

Una volta eseguito il codice, vengono estratti dei file di output, con una serie di dati specifici, che ci permette di ottenere alcuni grafici. Si sceglie, come soluzione più plausibile, la prima riga della Tabella 4.1, con la potenza fissata a 0.2 MW, una massa iniziale di 10000 kg e finale di 5000, per una durata pari a 20 e una velocità finale di 14 AU/anno (poco più di 2 anni per raggiungere la Fascia di Kuiper, circa 8 anni e mezzo per arrivare dove sono adesso le sonde Voyager e quasi 143 anni per raggiungere lo strato più interno della Nube di Oort).

Con questi risultati, il primo grafico che è possibile riportare è quello della traiettoria $x - y$ (corrispondente alle coordinate cartesiane, per cui $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, con r e θ coordinate polari) che segue lo spacecraft al variare del tempo, per cui sono necessari i dati di tempo, raggio r e longitudine θ . Come già accennato nelle sezioni precedenti, il codice di calcolo utilizzato è adimensionale, fornendo così risultati altrettanto adimensionali: per queste ragioni, è necessario effettuare delle conversioni rispetto a dei valori di riferimento, in modo da riportare dei grafici che esprimano le variazioni delle grandezze dimensionali. Di seguito, vengono riportate delle grandezze fondamentali di riferimento:

- $m_{rif} = 10000$ kg, la massa di riferimento imposta a priori;
- $\mu_{\odot} = 1.32712440018 \cdot 10^{11} \frac{km^3}{s^2}$, che rappresenta il parametro gravitazionale del Sole (equazione 3.6);
- $r_{rif} = 1.49597870691 \cdot 10^8$ km = 1 AU, la distanza media tra la Terra e il Sole;
- $V_{rif} = \sqrt{\frac{\mu_{\odot}}{r_{rif}}} = 29.78469183 \frac{km}{s}$, la velocità media con cui la Terra ruota attorno al Sole;
- $a_{rif} = \frac{\mu_{\odot}}{r_{rif}^2} = 5.93 \cdot 10^{-6} \frac{km}{s^2}$, l'accelerazione di riferimento;
- $t_{rif} = \frac{v_{rif}}{a_{rif} \cdot 86400} = \frac{365.25}{2 \cdot \pi} = 58.133$ giorni, unità di tempo di riferimento già presentata in questa tesi, corrispondente a $5.022713631 \cdot 10^6$ s, moltiplicando il valore in giorni per 86400 (numero di secondi in un giorno), ma anche corrispondente a 0.16 anni, dividendo il valore in giorni per 365.25 (numero di giorni in un anno);
- $T_{rif} = m_{rif} \cdot a_{rif} \cdot 10^3 = 59.3$ N, il valore di spinta di riferimento;
- $E_{f_{rif}} = \frac{V_{rif}^2}{2} = 443.5639337 \frac{MJ}{kg}$, l'energia specifica di riferimento.

In questo modo, per dimensionalizzare i risultati, si sfruttano le seguenti relazioni:

$$r = \hat{r} \cdot r_{rif} \quad (4.27)$$

dove il simbolo $\hat{}$ indica che la grandezza sia adimensionale.

$$c = \hat{c} \cdot V_{rif} \quad (4.28)$$

$$t = \hat{t} \cdot t_{rif} \quad (4.29)$$

$$T = \hat{T} \cdot T_{rif} \quad (4.30)$$

$$E_f = \hat{E}_f \cdot E_{f,rif} \quad (4.31)$$

Una volta dimensionalizzati i risultati, è possibile riportare il grafico x - y della traiettoria dello spacecraft, al variare del tempo t :

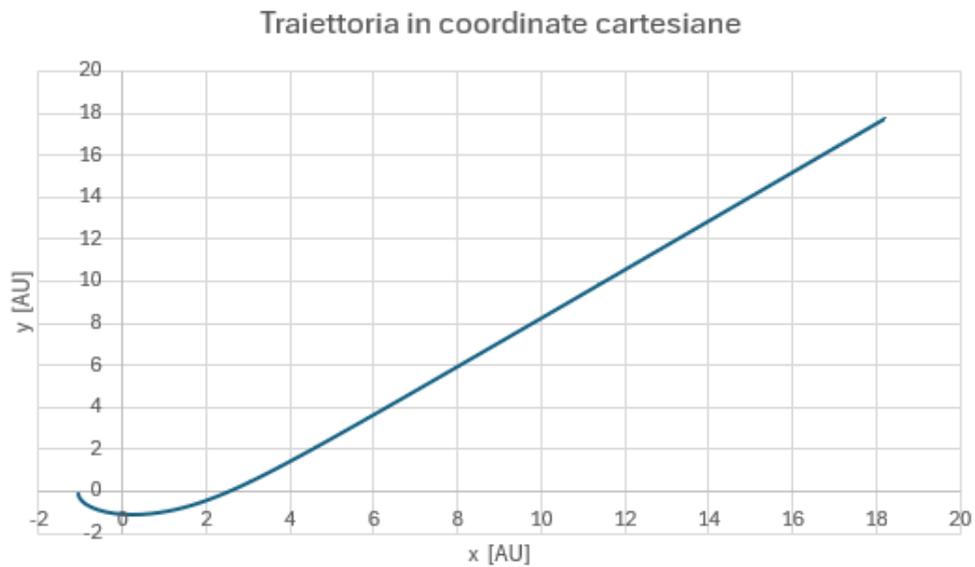


Figura 4.7: Grafico della traiettoria dello spacecraft per una potenza di 200 kW e una durata di circa 3 anni

Dalla Figura 4.7, si può notare come venga confermato ciò che è stato spiegato nella teoria, ovvero l'esecuzione di un semplice escape iperbolico, che per una durata della spinta di poco più di 3 anni ci permette di raggiungere all'incirca le 18 AU, con il veicolo spaziale che poi prosegue senza più dover spingere con il propulsore.

Viene mostrato anche un grafico di come varia l'energia specifica E_f in funzione della durata della spinta:

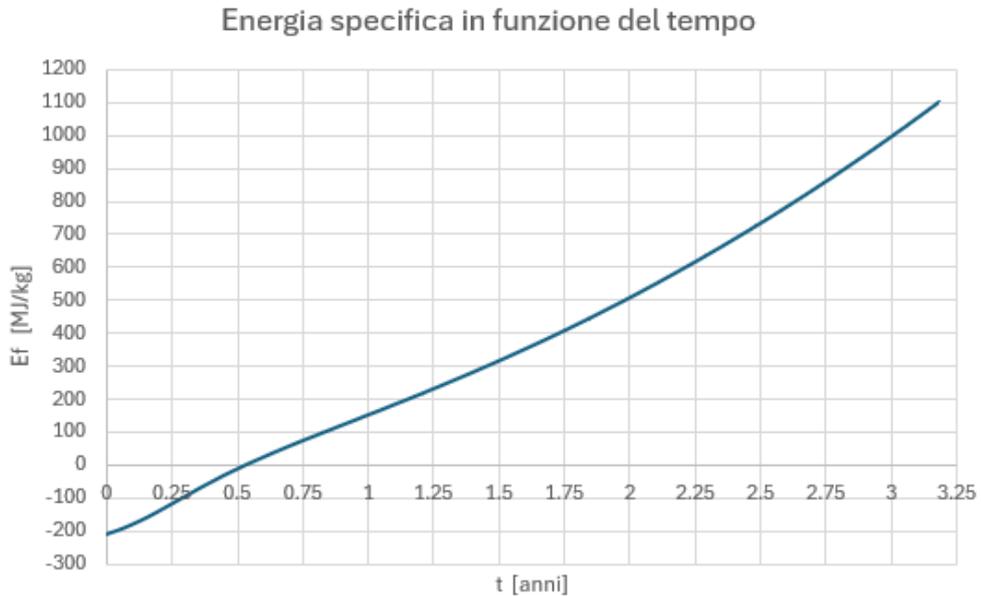


Figura 4.8: Rappresenzazione dell'energia specifica in funzione della durata di spinta

Il grafico mostra come si inizi ad avere un guadagno di energia dopo circa 3 mesi di spinta, fino a raggiungere, superati i 3 anni, un picco di $1100 \frac{MJ}{kg}$. L'andamento è parabolico, come ci si aspettava, che diventa lineare per durate della spinta più brevi.

Un' ultima rappresentazione significativa per questo caso di studio è la regolazione del propulsore, attraverso la variazione della velocità efficace di scarico c e della spinta T in funzione del tempo:

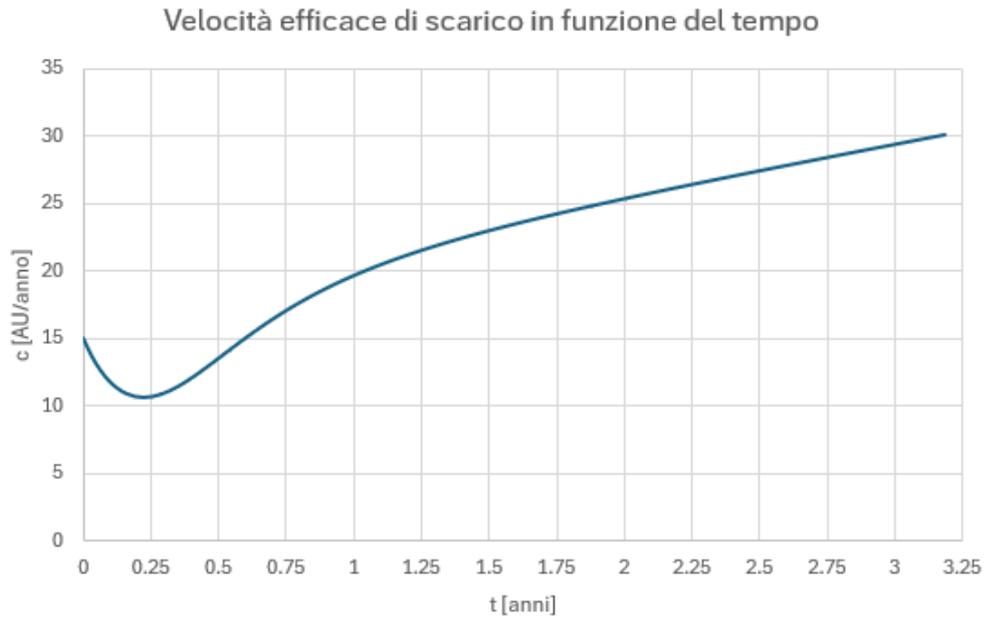


Figura 4.9: Grafico della velocità efficace di scarico c in funzione del tempo di spinta

In questo grafico, è evidente come, partendo con una velocità di circa 15 AU/anno, si raggiunga il minimo di c nel momento in cui da un valore negativo di energia specifica si arrivi ad un valore nullo (sempre intorno ai 3 mesi), per poi avere un rapido aumento che si linearizza con il passare degli anni e, passati i 3 anni, si raggiunge un massimo di circa 30 AU/anno.

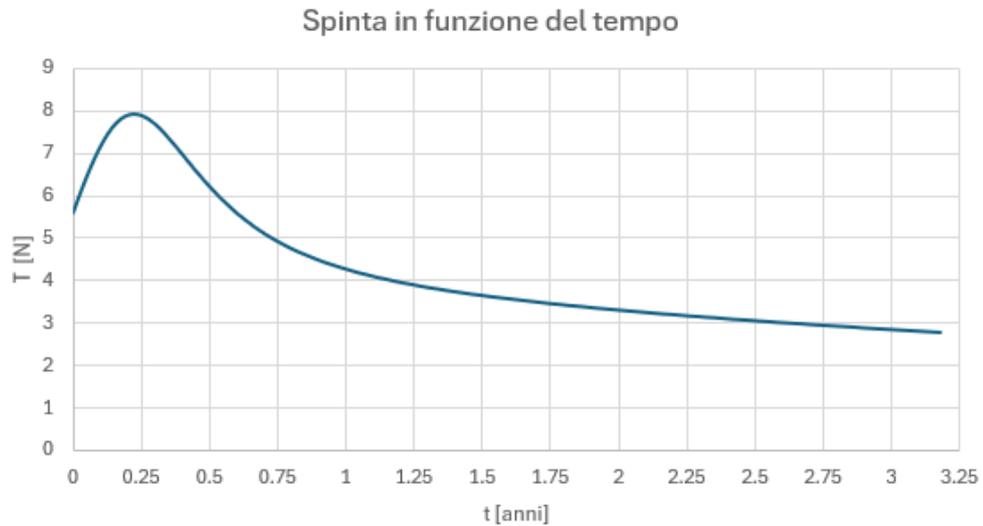


Figura 4.10: Rappresentazione della spinta in funzione della durata

Stesso discorso per la spinta T , speculare rispetto alla velocità efficace di scarico: il massimo di spinta (poco inferiore agli 8 N) si ottiene nel punto più vicino al Sole raggiunto dallo spacecraft, dopodichè si dà una forte accelerata per cui la sonda arriva molto lontana e la necessità di spingere diventa sempre meno rilevante, arrivando al di sotto dei 3 N in poco più di 3 anni.

Un altro esempio che viene qui presentato, consiste nel considerare un propulsore alla potenza di 100 kW, sempre di massa iniziale di 10000 kg e massa finale di 5000 kg, per una durata della spinta pari a 10 anni (62.8 come durata adimensionale):

P [MW]	durata	m_f [kg]	D_t [giorni]	V_{∞_f} [AU/anno]	E_f
0.1	20	5000	1162.65	9.396	1.118
0.1	25	5000	1453.31	10.349	1.356
0.1	30	5000	1743.97	11.215	1.593
0.1	35	5000	2034.64	12.017	1.829
0.1	40	5000	2325.3	12.768	2.065
0.1	45	5000	2615.96	13.479	2.301
0.1	50	5000	2906.62	14.156	2.538
0.1	55	5000	3197.28	14.806	2.777
0.1	60	5000	3487.95	15.502	3.044
0.1	62.8	5000	3650.72	15.864	3.187

Tabella 4.4: Tentativo con $P = 0.1$ MW, durate che variano da 20 a 62.8 e $m_f = 0.5$

Rispetto all'esempio precedente, avendo dimezzato la potenza, è normale aspettarsi delle velocità e delle energie specifiche finali più basse alle stesse durate di prima, ma per questo caso si è scelto di allungare molto il tempo di spinta per ottenere prestazioni migliori: dall'ultima riga della Tabella 4.4, la velocità finale raggiunta è di circa 16 AU/anno. Ciò significa raggiungere la Fascia di Kuiper in poco meno di 2 anni, le sonde Voyager in 7 anni e mezzo e il confine più interno della Nube di Oort in circa 125 anni.

Da questi risultati si riportano gli stessi tre grafici del caso precedentemente illustrato:

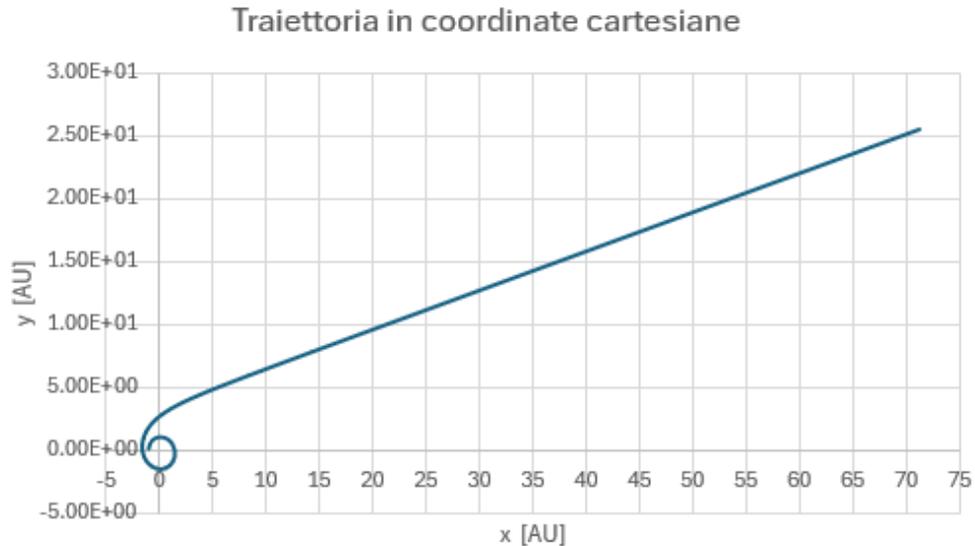


Figura 4.11: Grafico della traiettoria dello spacecraft per una durata della spinta di 10 anni

A differenza della Figura 4.7, in cui la traiettoria risultava essere un escape diretto iperbolico per una durata di circa 3 anni, nella Figura 4.11 lo spacecraft effettua un giro prima di evadere con una trasferta iperbolica, per una durata di circa 10 anni. Questo ci ha permesso di poter distinguere tra due diverse tipologie di soluzioni:

1. la soluzione *diretta*⁷ per durate della spinta dai 3 ai 7 anni;
2. la soluzione *1-giro*⁸ per tempi superiori ai 7 anni.

⁷La soluzione diretta è stata ottenuta effettuando iterazioni in ordine crescente di durata

⁸La soluzione 1-giro risulta particolarmente evidente se le iterazioni vengono effettuate in ordine decrescente di durata della spinta

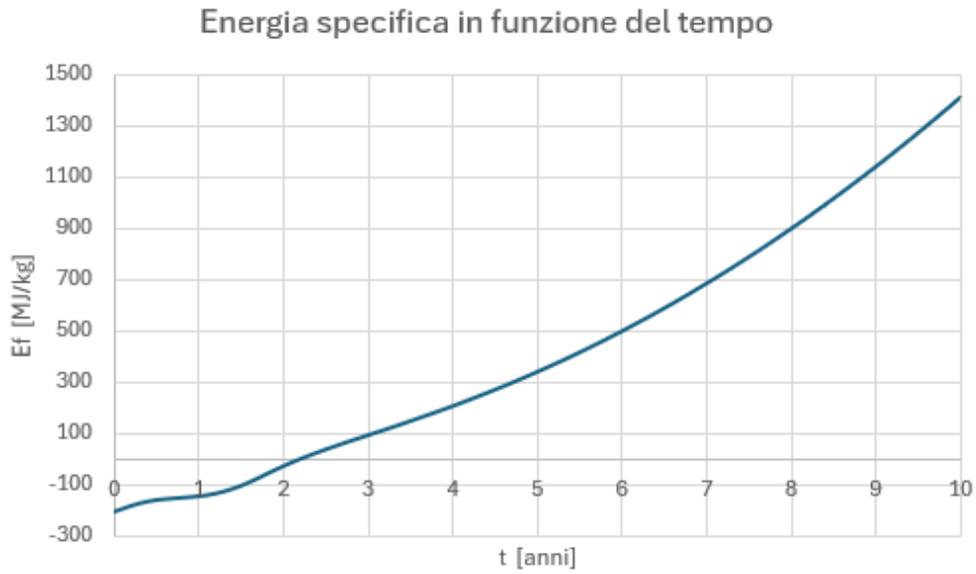


Figura 4.12: Rappresentazione dell'energia specifica in funzione del tempo di spinta pari a 10 anni

Da questa rappresentazione, si può verificare come ci sia un guadagno consistente di energia all'aumentare della durata di spinta, raggiungendo circa $1400 \frac{MJ}{kg}$: questo risultato ci porta alla conclusione di preferire una soluzione 1-giro per l'ingente guadagno di energia da parte della sonda spaziale, in modo da poter raggiungere e anche oltrepassare i confini del Sistema Solare.

Risulta altrettanto interessante mostrare come cambiano le rappresentazioni della velocità efficace di scarico e della spinta all'aumentare del tempo:

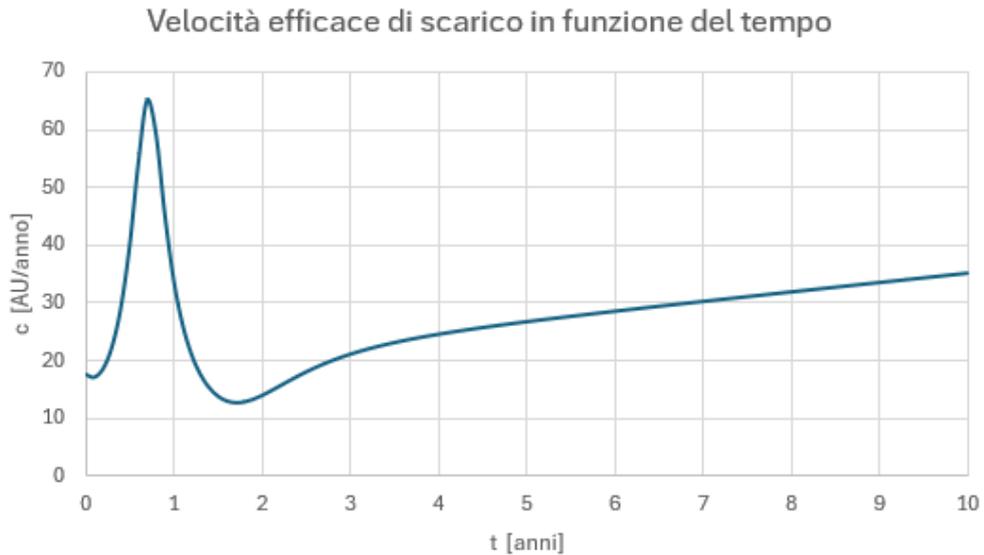


Figura 4.13: Grafico di c per un tempo di 10 anni

Si evidenzia la presenza di un picco aggiuntivo rispetto al precedente caso, esattamente in corrispondenza del momento in cui si verifica il giro aggiuntivo del veicolo spaziale: esso, compiendo un giro completo attorno al Sole prima di evadere da esso, subisce un forte incremento della velocità, trovandoci a raggi bassi, prima di subire una brusca frenata in fase di evasione e una continua crescita in fase di continuo allontanamento.

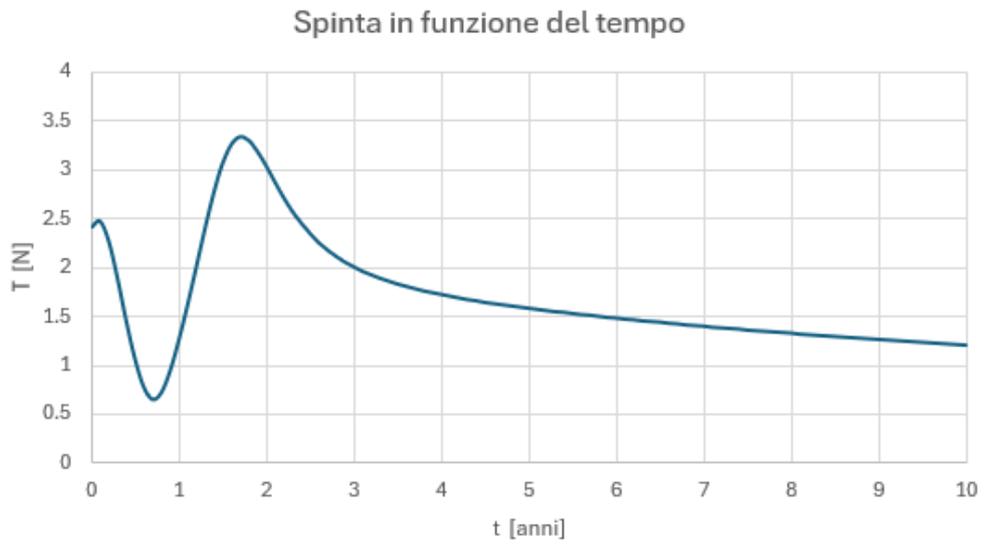


Figura 4.14: Grafico di T in funzione di una durata di 10 anni

Stesso discorso appena citato è valido anche per la spinta: la presenza di un giro aggiuntivo necessita di avere spinte più piccole per poi avere un massimo di spinta in seguito all'escape, tendendo a diminuire sempre di più man mano che si raggiungono raggi sempre più alti.

Un ulteriore confronto può essere presentato se si aumentasse a 6000 kg o si diminuisse a 4000 kg la massa finale dello spacecraft, concentrandoci su come possa variare l'energia finale in funzione della durata:

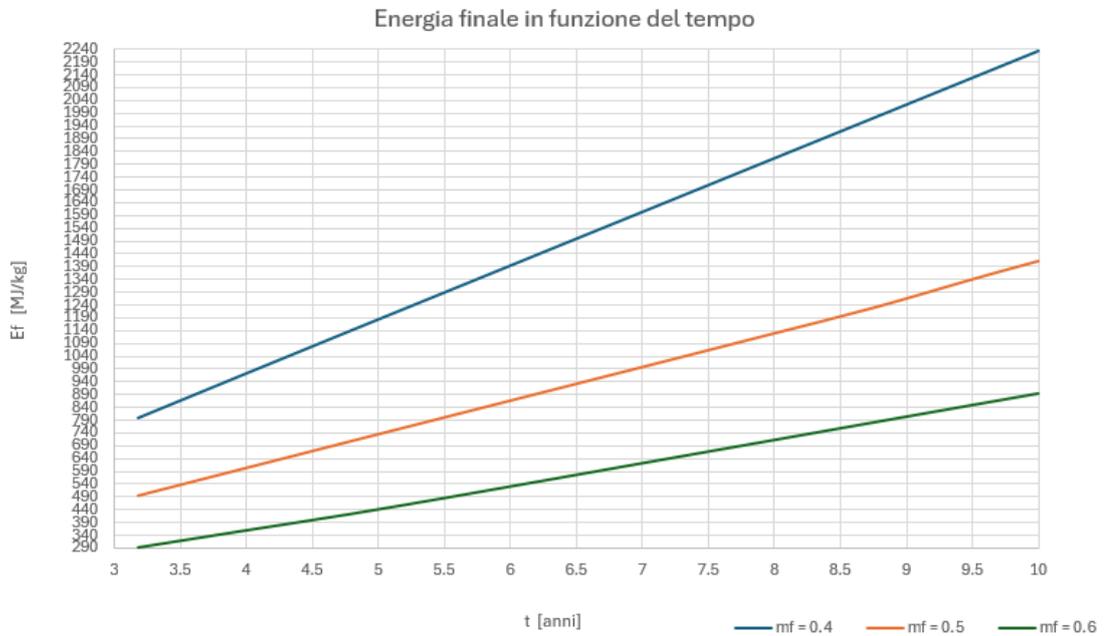


Figura 4.15: Rappresentazione dell'energia finale raggiunta dallo S/C al variare della durata di spinta per le masse finali di 4000, 5000 e 6000 kg

Come ci si aspettava, aumentando la massa finale si ha un calo di energia perchè si è consumato meno propellente e quindi sfruttato meno potenza del propulsore, che può essere positivo per una riduzione dei consumi e dei costi, ma potrebbe non portare al raggiungimento dello scopo finale della missione, ovvero raggiungere regioni molto lontane dal nostro pianeta attraverso la massimizzazione dell'energia; al contrario, abbassare ulteriormente la massa finale rispetto alla scelta standard di 5000 kg, fa guadagnare in maniera molto consistente l'energia finale, superando i $2200 \frac{MJ}{kg}$, anche se ciò aumenta enormemente i consumi e i costi.

Una nota aggiuntiva per la presentazione di questi risultati può permettere di mostrare nel dettaglio la scelta di una soluzione 1-giro: intanto, di seguito, prendendo ad esempio durate adimensionali pari a 50 e 55, si mostrano le schematizzazioni della traiettoria confrontate con una soluzione diretta.

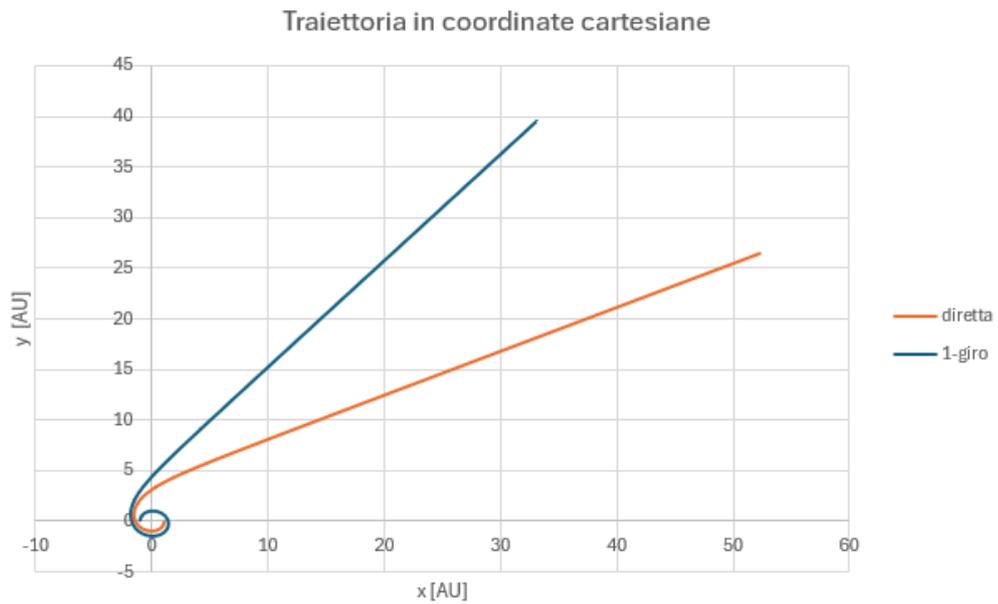


Figura 4.16: Traiettoria dello spacecraft per un tempo pari ad 8 anni per soluzione diretta e 1-giro

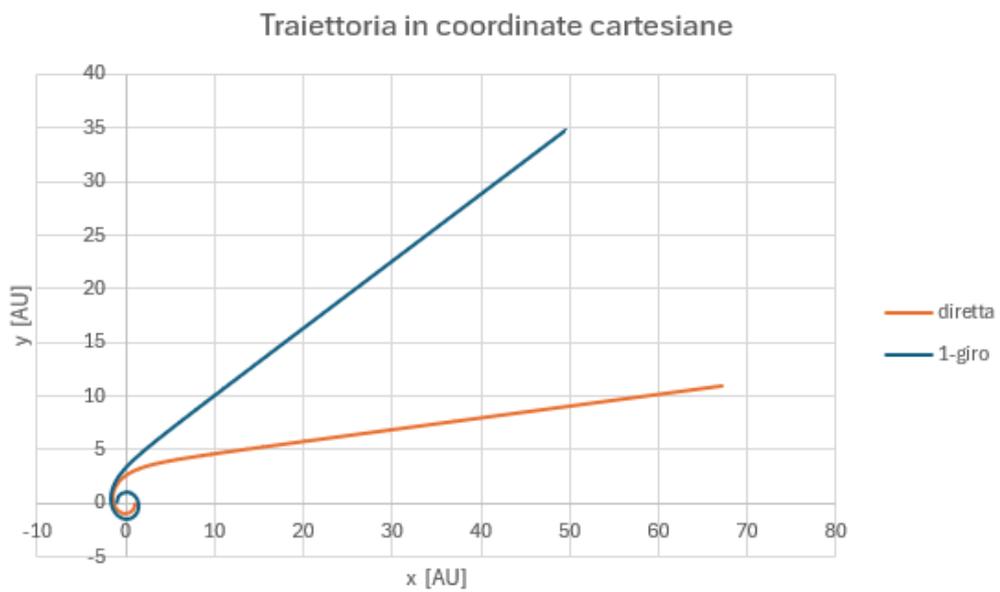


Figura 4.17: Traiettoria dello spacecraft per un tempo pari a quasi 9 anni per soluzione diretta e 1-giro

Dalle Figure 4.16 e 4.17, se è vero che la soluzione diretta permetterebbe di arrivare a raggi molto più lontani a parità di durata, la soluzione 1-giro, come viene mostrato nella Figura 4.18, ha un guadagno di energia superiore (di circa $5 \frac{MJ}{kg}$) che ci permette di recuperare in seguito le distanze che inizialmente non vengono raggiunte, dando importanza, come sempre in questa trattazione, alla massimizzazione di E_f , ottenuta con l'escape 1-giro.

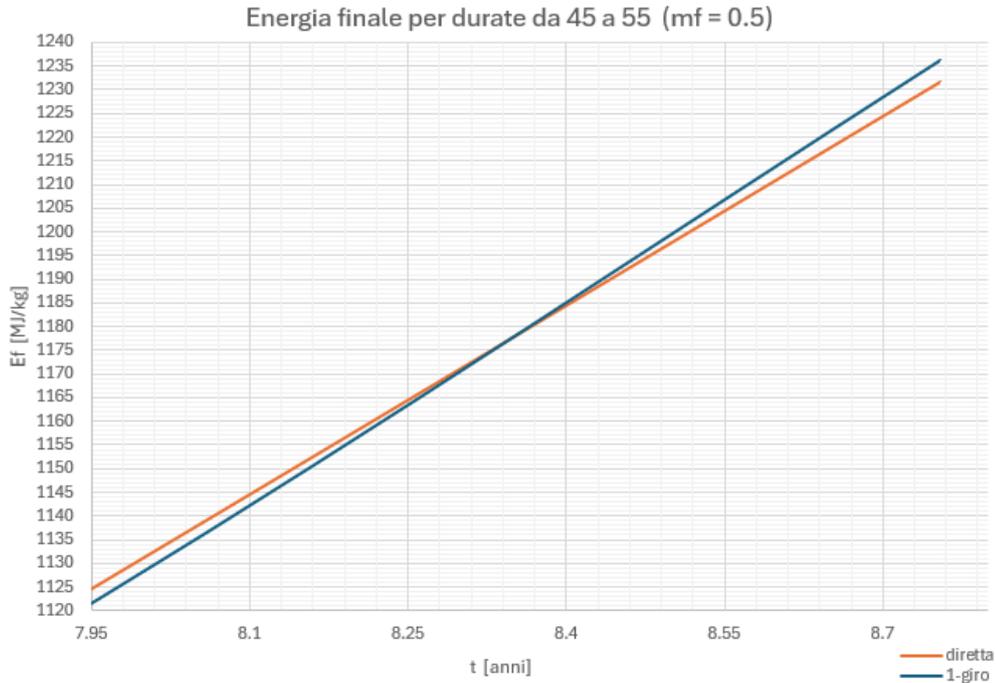


Figura 4.18: Confronto tra soluzione diretta e 1-giro per durate dai 7 ai 9 anni

Analogamente a quanto fatto per la variazione di massa finale, si può considerare il caso in cui sia la potenza il parametro che varia, visualizzando cosa succede all'energia specifica finale: come già affermato in precedenza, un aumento della potenza standard di 100 kW, ad esempio 120, porta all'aumento di energia finale, raggiungendo ancora più facilmente i confini del Sistema Solare; al contrario, un abbassamento, per esempio 80 kW, riduce la massimizzazione di energia, cosa che non vogliamo, anche se dall'altra parte si ridurrebbero costi e consumi. Si distingue sempre tra soluzione diretta e soluzione 1-giro, con la seconda che risulta essere sempre quella ad energia finale maggiore, con l'eccezione del caso a 120 kW (sempre con massa finale fissata a 5000 kg), per cui non si registrano differenze nè in termini di energia specifica finale, nè in termini di traiettoria.

Si riportano due tabelle riassuntive dei casi 80 e 120 kW, rivolgendo particolare attenzione ai risultati di velocità finale ed energia specifica finale:

P [MW]	durata	m_f [kg]	D_t [giorni]	V_{∞_f} [AU/anno]	E_f
0.08	20	5000	1162.65	8.145	0.84
0.08	25	5000	1453.31	8.985	1.023
0.08	30	5000	1743.97	9.749	1.204
0.08	35	5000	2034.64	10.457	1.385
0.08	40	5000	2325.3	11.123	1.568
0.08	45	5000	2615.96	11.815	1.768
0.08	50	5000	2906.62	12.467	1.969
0.08	55	5000	3197.28	13.087	2.169
0.08	60	5000	3487.95	13.678	2.37
0.08	62.8	5000	3650.72	13.998	2.482

Tabella 4.5: Tentativo con $P = 0.08$ MW, durate che variano da 20 a 62.8 e $m_f = 0.5$

P [MW]	durata	m_f [kg]	D_t [giorni]	V_{∞_f} [AU/anno]	E_f
0.12	20	5000	1162.65	10.493	1.394
0.12	25	5000	1453.31	11.55	1.69
0.12	30	5000	1743.97	12.512	1.983
0.12	35	5000	2034.64	13.402	2.275
0.12	40	5000	2325.3	14.235	2.566
0.12	45	5000	2615.96	15.022	2.858
0.12	50	5000	2906.62	15.77	3.15
0.12	55	5000	3197.28	16.486	3.442
0.12	60	5000	3487.95	17.173	3.735
0.12	62.8	5000	3650.72	17.547	3.9

Tabella 4.6: Tentativo con $P = 0.12$ MW, durate che variano da 20 a 62.8 e $m_f = 0.5$

Risulta evidente che, considerando un tempo di spinta pari a 10 anni, fissata una potenza di 80 kW e una massa finale dello spacecraft a 5000 kg, si potrebbe raggiungere la Fascia di Kuiper in poco più di 2 anni, le sonde Voyager in 8 anni e mezzo e la Nube di Oort interna in quasi 143 anni. Discorso diverso se si aumenta la potenza a 120 kW, mantenendo invariata la massa finale: aumentano sia l'energia specifica finale (da $1100.93 \frac{MJ}{kg}$ a $1729.9 \frac{MJ}{kg}$), sia la velocità finale: sonda spaziale

che arriva alla Fascia di Kuiper in 1 anno e 9 mesi circa, in meno di 7 anni alle sonde Voyager e in 114 anni alla Nube interna.

Il seguente grafico evidenzia come, per una potenza di 80 kW, la soluzione 1-giro permette di raggiungere un'energia specifica finale maggiore della soluzione diretta, per un tempo di spinta pari a poco meno di 6 anni e mezzo:

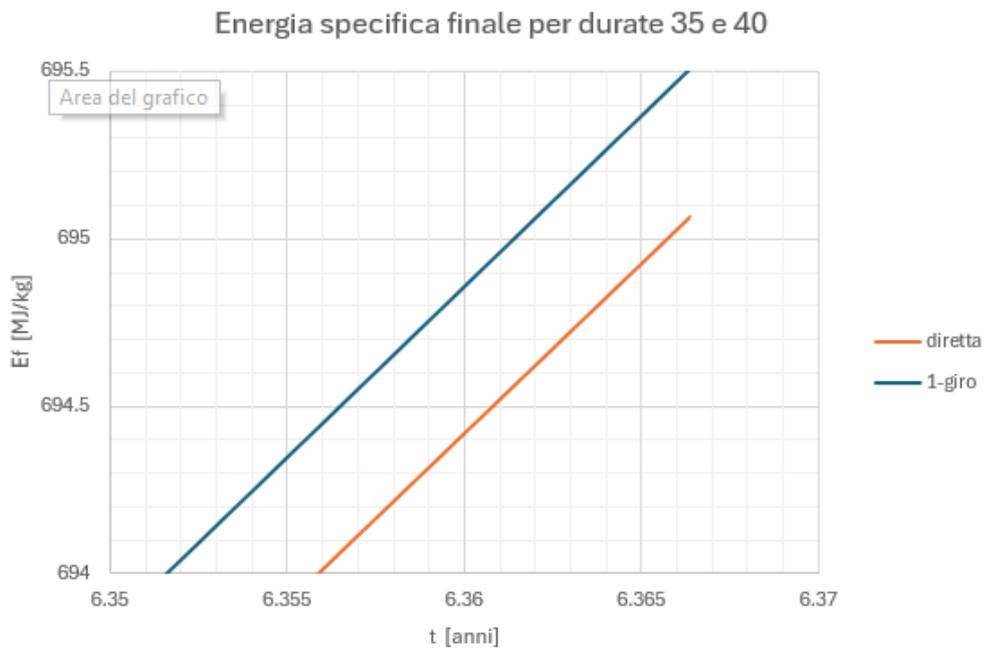


Figura 4.19: Confronto tra soluzione diretta e 1-giro per una durata di circa 6 anni e mezzo con $P = 0.08$ MW

L'unico caso in cui si distingue una differenza tra traiettoria diretta e traiettoria 1-giro con 80 kW (per 120 kW non se ne registra nessuna) è per un tempo di spinta di 6 anni e 4 mesi circa, come si evince dalla Figura 4.20:

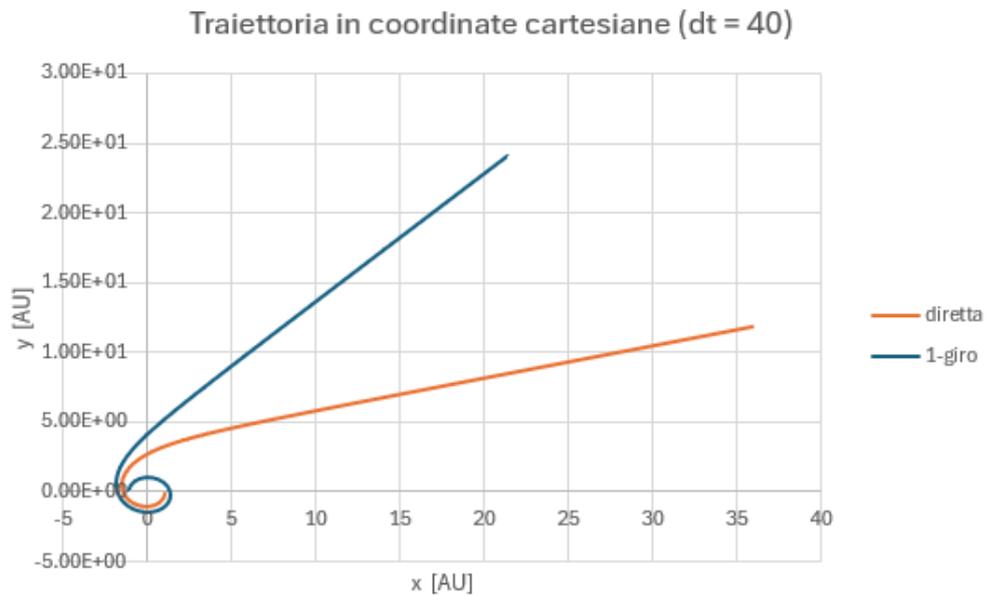


Figura 4.20: Grafico della traiettoria di uno spacecraft alla potenza di 80 kW, massa finale di 5000 kg e tempo di spinta di 6 anni e 4 mesi

Si mostra, infine, un confronto tra energie specifiche finali alle diverse potenze: la massimizzazione di energia finale avviene, come già detto, per potenze maggiori, quindi prevale quella a 120 kW.

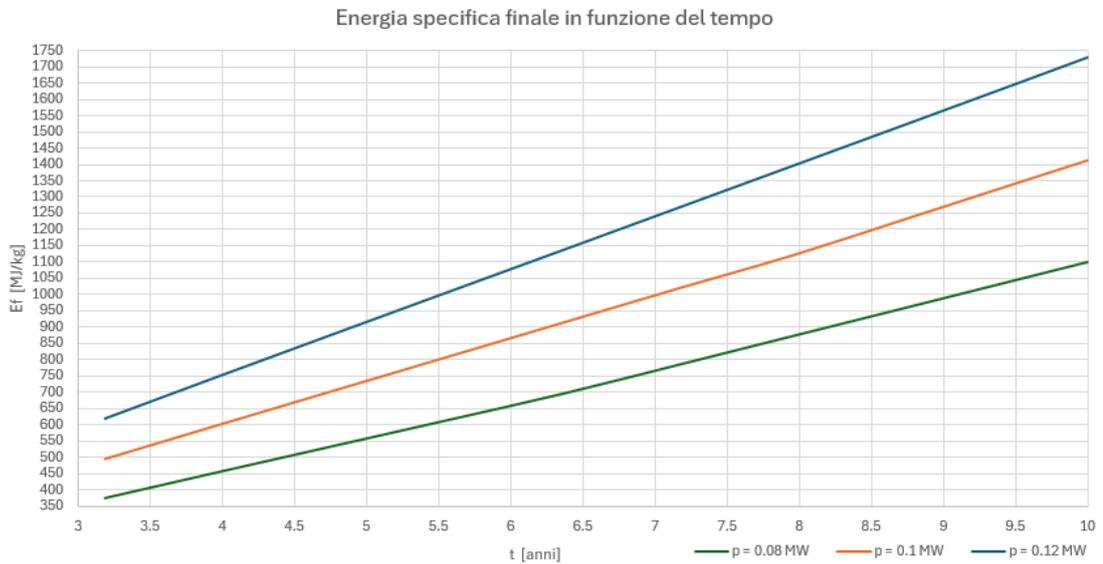


Figura 4.21: Rappresentazione dell'energia finale raggiunta dallo S/C al variare della durata di spinta per le potenze di 80, 100 e 120 kW

Capitolo 5

Conclusione e possibili miglioramenti

A seguito dei risultati ottenuti nell'ultima sezione del capitolo 4, si può discutere e commentare su che cosa si è voluto ottenere con questa trattazione. Il punto chiave era quello di sfruttare la Legge del controllo ottimale per poter ottimizzare un indice prestazionale scelto a priori: nel nostro caso l'energia specifica finale E_f . La procedura adottata ha previsto l'utilizzo di un metodo indiretto per l'ottimizzazione, in modo da limitare il numero di parametri e di variabili da cui partire e anche per ridurre i tempi di calcolo, risolvendo il problema come BVP, in cui è fondamentale la definizione delle condizioni al contorno iniziali, finali e intermedie.

Parallelamente a tutto ciò ci si è focalizzati sulla ricerca del propulsore ideale per questa missione: dopo un'attenta analisi in cui si dava per assodato che la propulsione elettrica primaria fosse la più conveniente per le applicazioni di questo genere, appurando che la propulsione chimica sia utilizzabile per missioni a limitato impulso specifico, si è giunti alla conclusione che la soluzione migliore fosse l'inserimento a bordo di un VASIMR, un propulsore ad impulso specifico variabile, considerando in maniera più restrittiva anche il caso di propulsori ad impulso specifico duale. Ciò significa poter variare l'impulso specifico solamente tra due diversi valori, in base alla fase di missione in cui ci si trova, alternando tra un valore molto alto in cui si necessita un basso livello di spinta (in fase di avvicinamento a corpi celesti, la cui attrazione gravitazionale influenza decisamente il moto dello spacecraft) e un valore molto basso per cui è necessario ottenere una spinta molto grande (evasione dal pianeta di partenza ed evasione dal Sole). Si è poi proseguito il discorso analizzando alcuni prototipi di questi propulsori e optando per quello realizzato in tempi più recenti, il VX-200 SS, in grado di

riuscire a fornire un funzionamento continuo di 88 ore alla potenza di 80 kW, non dimenticando però un affiancamento di propulsione nucleare.

Una volta descritte le decisioni prese dal punto di vista teorico, si è riportato tutto sul codice di calcolo in linguaggio Fortran, imponendo le scelte anche sul passo d'iterazione da adottare, secondo le considerazioni fatte nell'ultima sezione del capitolo 1, facendo riferimento alle equazioni 1.35 e 1.36 e sulla scelta dei range di K_1 e K_2 , per la ricerca dell'errore massimo E_{max} . I risultati raggiunti da quest'analisi si possono considerare accettabili se consideriamo di fermarci alle prime iterazioni preliminari, senza scendere nel dettaglio di uno studio più approfondito che richiederebbe tempi, mezzi e un coinvolgimento di industrie e compagnie internazionali, sotto l'attenta supervisione della maggioranza di esperti in questo settore.

Per concludere, si può quindi affermare che i risultati estratti non sono un punto di arrivo, bensì un punto di partenza per analizzare, a posteriori, quali miglie si possono applicare, nel caso si volesse approfondire tale discorso:

- si potrebbe incominciare variando la massa dello spacecraft, aumentando soprattutto quella di combustibile per essere più certi di arrivare a target così lontani;
- allo stesso modo ottimizzare il tempo impiegato per la missione, raggiungendo i confini del Sistema Solare in tempi minori, ottimizzando ulteriormente l'energia finale;
- progettare un nuovo modello di VASIMR, ponendosi come obiettivo, ad esempio, quello di raggiungere un funzionamento continuo di 100 ore a 100 kW di potenza massima, inventando nuove tecnologie in grado di migliorare le prestazioni dell'ultimo prototipo;
- migliorare la modellizzazione della traiettoria, rendendo più infinitesimale la suddivisione degli archi multipli, soprattutto cambiando da metodo indiretto a metodo diretto per avere una maggiore discretizzazione del problema e partire da un numero molto più elevato di parametri, aggiungendo anche una variazione nella definizione dei vincoli, modificando ad esempio l'orbita di partenza del veicolo spaziale;
- in riferimento al miglioramento precedente, aumentare di conseguenza i tempi di calcolo, per ottenere dei risultati molto più accurati ed effettuare un numero elevato di iterazioni, riducendo al minimo gli errori sulle condizioni al contorno miste, lavorando sul passo d'integrazione e sulla modifica dei parametri K_1 e K_2 ;

- in ultima istanza, estendere il progetto a livello multidisciplinare, concentrandosi non solo dal punto di vista propulsivo e della meccanica del volo spaziale, ma anche confrontandosi con tutti i componenti di un team di progetto per una missione spaziale, per una visione globale e completa e realizzare la missione senza tralasciare alcun aspetto.

Appendice A

Propulsore a ioni

Dalla Figura 2.1 si può notare come:

- V_c = potenziale del catodo, della camera di scarica e della screen grid;
- $V_c + V_d$ = potenziale dell'anodo;
- V_a = potenziale della griglia acceleratrice, molto basso e negativo;
- $-J_e$ = corrente di elettroni, con il segno negativo per esprimere che la corrente ha verso opposto al movimento degli elettroni;
- $-J_a$ = corrente all'anodo;
- J_w = corrente di elettroni che sbattono contro le pareti della camera (w sta per *wall*), pericolosa per il funzionamento del propulsore;
- J_s = corrente alla screen grid;
- J_i = corrente di *impingement*¹;
- J_b = corrente degli ioni in uscita, indotta dal campo magnetico;
- $-J_n$ = corrente di neutralizzazione.

¹L'impingement è quel fenomeno secondo cui, come dice la parola stessa, si verifica un urto intenso dovuto all'accelerazione degli ioni verso l'accelerator grid

Appendice B

Propulsore ad impulso specifico variabile

Considerando non costante la velocità efficace di scarico c , essa può essere valutata, insieme a P , come variabile di controllo. Se spegnessimo il motore, si otterrebbe $H' = 0$, ma se esiste almeno un valore di c che renda positiva la switching function S_F , allora il propulsore rimarrebbe sempre acceso e avremmo $H' > 0$. Si utilizza per intero tutta la potenza disponibile P_a nel momento in cui viene soddisfatta la seguente condizione:

$$S_P = \frac{\lambda_v}{m} - \frac{\lambda_m}{c_{max}} > 0 \quad (\text{B.1})$$

nella quale:

- S_P è la power switching function;
- nell'equazione è contenuto il massimo valore ammissibile di c .

Il valore ottimale di velocità efficace di scarico c_{ott} si ottiene derivando parzialmente da c a 0 l'equazione:

$$H' = \left(\frac{\lambda_v}{m} - \frac{\lambda_m}{c} \right) \cdot 2 \cdot \eta \cdot \frac{P}{c} \quad (\text{B.2})$$

ottenendo

$$c_{ott} = 2 \cdot \left(\frac{m \cdot \lambda_m}{\lambda_v} \right) \quad (\text{B.3})$$

corrispondente al massimo di H e utilizzato solo se appartenente al range ammissibile del controllo, altrimenti si usa $c_{ott} \leq c_{min}$ e si usa c_{max} se $c_{ott} \geq c_{max}$.

Facendo riferimento alle equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\frac{d\lambda_r^T}{dt} = -\lambda_v^T \cdot \frac{\partial g}{\partial r} \cdot \left(\frac{\lambda_v}{m} - \frac{\lambda_m}{c} \right) \cdot \frac{2 \cdot \eta}{c} \cdot \frac{\partial P}{\partial r} \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{d\lambda_m}{dt} = \frac{\lambda_v}{m^2} \cdot 2 \cdot \eta \cdot \frac{P}{c} = \frac{\lambda_v}{m^2} \cdot T \quad (\text{B.5})$$

si ottiene

$$\frac{d(m^2 \cdot \lambda_m)}{dt} = \lambda_v \cdot T - 2 \cdot m \cdot \lambda_m \cdot \frac{T}{c} \quad (\text{B.6})$$

che si annulla quando la velocità efficace di scarico è ottimale, inversamente proporzionale alla massa dello spacecraft e al vettore d'innescò, in presenza di perdite (in assenza di esse, inversamente proporzionale solo alla massa).

Il propulsore ad impulso specifico duale rappresenta l'alternativa più concreta, in cui la velocità efficace di scarico può assumere i due valori c_{min} e c_{max} . Si massimizza H per passare da un alto a un basso I_{sp} , ottenendo $c = c_{min}$ se

$$\left(\frac{\lambda_v}{m} - \frac{\lambda_m}{c_{min}} \right) \cdot \left(\frac{1}{c_{min}} \right) > \left(\frac{\lambda_v}{m} - \frac{\lambda_m}{c_{max}} \right) \cdot \left(\frac{1}{c_{max}} \right) \quad (\text{B.7})$$

$$\frac{\lambda_v}{m} > \lambda_m \cdot \left(\frac{1}{c_{min}} + \frac{1}{c_{max}} \right) \quad (\text{B.8})$$

Viene introdotta la switching function anche per la velocità efficace di scarico:

$$S_c = \frac{\lambda_v}{m} - \lambda_m \cdot \left(\frac{1}{c_{min}} + \frac{1}{c_{max}} \right) \quad (\text{B.9})$$

ricavando che quando $S_c > 0$, l'impulso specifico è minimo ($c = c_{min}$) e la spinta è massima. Un'altra metodologia può essere quella di moltiplicare l'equazione B.9 per $\frac{\eta \cdot P}{\lambda_m}$, in modo da ottenere:

$$S_c \cdot \left(\frac{\eta \cdot P}{\lambda_m} \right) = \left(\frac{\lambda_v}{m} \right) \cdot \left(\frac{\eta \cdot P}{\lambda_m} \right) - \eta \cdot P \cdot \left(\frac{1}{c_{min}} + \frac{1}{c_{max}} \right) \quad (\text{B.10})$$

e, sapendo dalla relazione B.5 che $T = 2 \cdot \eta \cdot \frac{P}{c}$, sostituendo anche l'espressione B.3, si trova:

$$S_c \cdot \left(\frac{\eta \cdot P}{\lambda_m} \right) = T_{ott} - \frac{T_{max} + T_{min}}{2} \quad (\text{B.11})$$

in cui $T_{ott} = \frac{2\eta P}{c_{ott}}$ rappresenta il valore di spinta ottimale per un propulsore ad impulso specifico variabile senza vincoli. L'analisi appena descritta può essere applicata ad un propulsore in grado di variare, all'interno di un range di valori discreti, una generica velocità efficace di scarico c_j , ricavando una generica spinta $T_j = \frac{2\eta P}{c_j}$.

Si può concludere affermando che un propulsore VASIMR può portare ingenti miglioramenti alle prestazioni di un satellite con un motore elettrico, spingendosi verso lo Spazio più profondo. Il vantaggio di poter usufruire dell'impulso specifico variabile sta nella riduzione del consumo di propellente, grazie alla presenza del controllo su una traiettoria interplanetaria o interstellare. I VASIMR permettono una migliore gestione della potenza elettrica disponibile, consentendo al *mission designer* la scelta di un più basso livello di potenza nominale, minimizzando la massa del generatore m_s per massimizzare quella del payload m_u ; ancora meglio sarebbe utilizzare propulsori che fanno variare l'impulso specifico solo tra due differenti valori, come dimostrato da alcuni risultati ottenuti in diversi modelli numerici. Tuttavia, ancora oggi questi propulsori presentano ancora diverse criticità, che possono essere compensate dall'utilizzo di una propulsione nucleare elettrica ad impulso specifico variabile.

Appendice C

Ottimizzazione con le vele solari

Per comprendere l'ottimizzazione della traiettoria anche con questo particolare sistema propulsivo, si introduce l'Hamiltoniano:

$$H = \lambda_r u + \frac{\lambda_\theta v}{r} + \lambda_u \left(\frac{v^2}{r} - \frac{1}{r^2} \right) - \lambda_v u \frac{v}{r} + \frac{a_c}{2r^2} \cos \alpha [\lambda_u (1 + \eta \cos 2\alpha) + \lambda_v \eta \sin 2\alpha] \quad (\text{C.1})$$

dove λ_u e λ_v sono, rispettivamente, la componente radiale e tangenziale del primer vector λ_V , ottenendo infatti $\lambda_u = \lambda_V \cos \beta$ e $\lambda_v = \lambda_V \sin \beta$ (con β già definito nell'introduzione alle vele solari), sostituendo il tutto in H e massimizzando rispetto ad α , ricavando:

$$H'(\alpha) = \cos \alpha [\cos \beta (1 + \eta \cos 2\alpha) + \eta \sin \beta \sin 2\alpha] \quad (\text{C.2})$$

che si può riscrivere come

$$H' = \cos \alpha [\cos \beta + \eta \cos \beta - 2\alpha] \quad (\text{C.3})$$

Sviluppando, otteniamo:

$$-\sin \alpha [\cos \beta + \eta \cos(\beta - 2\alpha)] + 2\eta \cos \alpha \sin(\beta - 2\alpha) = 0 \quad (\text{C.4})$$

$$\sin(\beta - \alpha) = \sin[\alpha + (\beta - 2\alpha)] = \cos \alpha \sin(\beta - 2\alpha) + \sin \alpha \cos(\beta - 2\alpha) \quad (\text{C.5})$$

$$-\sin \alpha \cos(\beta - 2\alpha) = \cos \alpha \sin(\beta - 2\alpha) - \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta \quad (\text{C.6})$$

ricavando, infine, come soluzione numerica del controllo ottimale

$$\sin(\beta - 2\alpha) = \frac{\left[\sin \beta + \frac{1-\eta}{\eta} \cos \beta \tan \alpha\right]}{3} \quad (\text{C.7})$$

H' risulta essere massimo per $\alpha = 90^\circ$ se $\cos \beta < -\eta$, quindi la vela è posta in direzione radiale e non c'è alcun contributo di spinta, ottenendo degli archi di circonferenza nella traiettoria ottimale di una vela solare in un caso non ideale.

Appendice D

Equazioni in coordinate sferiche

Per un sistema di riferimento inerziale, cioè fisso nello spazio per cui non sono previste variazioni di velocità, si utilizzano delle coordinate sferiche, riferite al sistema geocentrico-equatoriale: r , raggio tra la posizione dello spacecraft e il centro della Terra, θ la longitudine e φ la latitudine, u la velocità radiale (direzione Zenit), v la velocità tangenziale in direzione Est e, infine, w come componente di velocità in direzione Nord, per un sistema di riferimento locale denominato SEZ (Sud-Est-Zenit)¹, proiettando così le relative equazioni differenziali:

$$\frac{dr}{dt} = u \quad (\text{D.1})$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{r \cos \varphi} \quad (\text{D.2})$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{w}{r} \quad (\text{D.3})$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{r^2} + \frac{v^2}{r} + \frac{w^2}{r} + \frac{T}{m} \sin \gamma_T + \frac{qS}{m} [-C_D \sin \gamma + C_L \cos \sigma \cos \gamma] \quad (\text{D.4})$$

¹Da notare che la componente w ha verso opposto della direzione Sud e, in Figura D.1, α corrisponde alla longitudine θ e δ alla latitudine φ

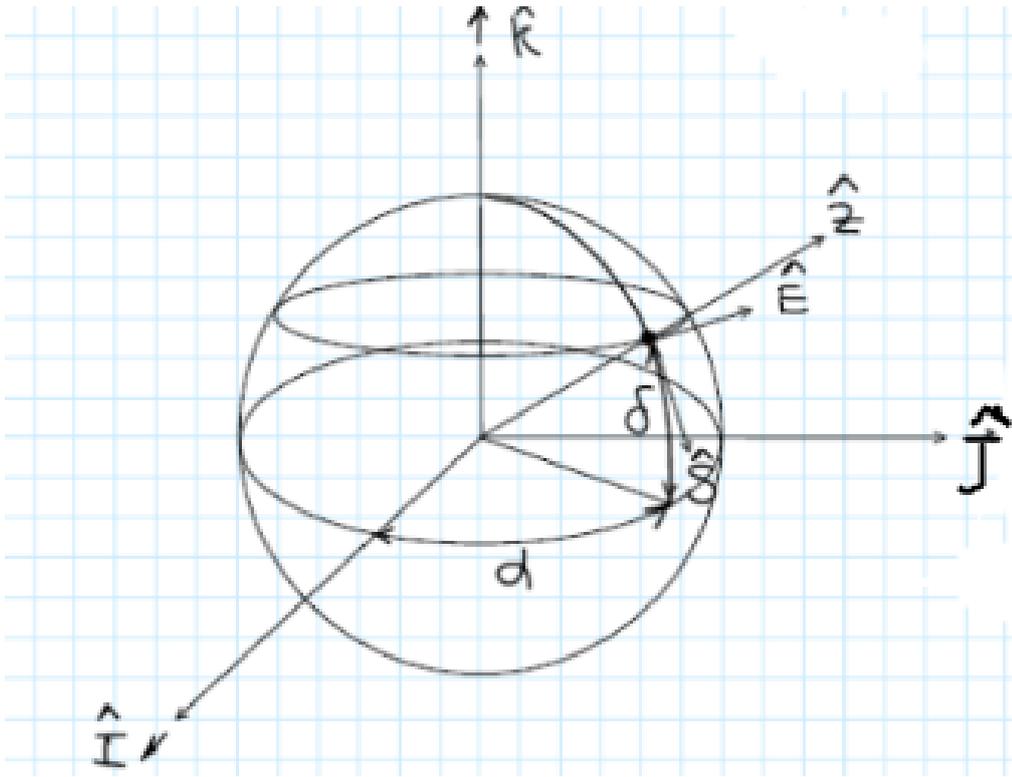


Figura D.1: Sistema di riferimento terrestre locale

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{uv}{r} + \frac{vw}{r} \tan \varphi + \frac{T}{m} \cos \gamma_T \cos \psi_T + \frac{qS}{m} [-C_D \cos \gamma \cos \psi + C_L \cdot (-\cos \sigma \sin \gamma \cos \psi + \sin \sigma \sin \psi)] \quad (\text{D.5})$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{uw}{r} + \frac{v^2}{r} \tan \varphi + \frac{T}{m} \cos \gamma_T \sin \psi_T + \frac{qS}{m} [-C_D \cos \gamma \sin \psi + C_L \cdot (-\cos \sigma \sin \gamma \sin \psi - \sin \sigma \cos \psi)] \quad (\text{D.6})$$

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{T}{c} \quad (\text{D.7})$$

in cui

- γ è il *flight path angle*, l'angolo tra il vettore velocità e il piano di orizzonte locale;
- ψ = angolo di *heading*, ovvero l'angolo tra la direzione Est e la direzione Nord, positivo in senso antiorario: γ e ψ sono rispetto alla velocità relativa \vec{V}_r ;
- γ_T è il flight path angle per la spinta \vec{T} ;
- ψ_T = angolo di heading per la spinta \vec{T} ;
- σ è l'angolo di *rollio o bank angle*, angolo di orientamento della portanza rispetto al piano di \vec{r} e \vec{V}_r , in senso orario.

L'ultimo angolo appena descritto permette la scomposizione della portanza sul piano della traiettoria per controllare l'orbita ($L \cos \sigma$) e sul piano perpendicolare per l'inclinazione dell'orbita i ($L \sin \sigma$). Procedendo da Nord a Sud, per $\cos \psi > 0$, si ha una crescita di i :

$$\sin \gamma = \frac{u}{V_r} \quad (\text{D.8})$$

$$\cos \gamma \cos \psi = \frac{v - \omega \cdot r \cos \varphi}{V_r} \quad (\text{D.9})$$

$$\cos \gamma \sin \psi = \frac{w}{V_r} \quad (\text{D.10})$$

in cui

$$V_r = \sqrt{u^2 + (v - \omega \cdot r \cos \varphi)^2 + w^2} \quad (\text{D.11})$$

Per ottenere i valori ottimali degli angoli di spinta, si esprime l'Hamiltoniano, annullandone le derivate parziali rispetto a γ_T e ψ_T :

$$\sin \gamma_T = \frac{\lambda_u}{\lambda_V} \quad (\text{D.12})$$

$$\cos \gamma_T \cos \psi_T = \frac{\lambda_v}{\lambda_V} \quad (\text{D.13})$$

$$\cos \gamma_T \sin \psi_T = \frac{\lambda_w}{\lambda_V} \quad (\text{D.14})$$

dove

$$\lambda_V = \sqrt{\lambda_u^2 + \lambda_v^2 + \lambda_w^2} \quad (\text{D.15})$$

è il modulo del vettore d'innescio, nella direzione ottimale della spinta. Analogamente, è possibile derivare H rispetto all'angolo di rollio:

$$\cos \sigma = \frac{\lambda_u \cos \gamma - \lambda_v \sin \gamma \cos \psi - \lambda_w \sin \gamma \sin \psi}{\lambda_V \sin \delta} \quad (\text{D.16})$$

$$\sin \sigma = \frac{\lambda_v \sin \psi - \lambda_w \cos \psi}{\lambda_V \sin \delta} \quad (\text{D.17})$$

Esplicitando, successivamente, le equazioni di Eulero-Lagrange per le variabili aggiunte:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_r = & \frac{1}{r^2} \left[\lambda_\theta \frac{v}{\cos \varphi} + \lambda_\varphi w + \lambda_u \left(-\frac{2}{r} + v^2 + w^2 \right) + \lambda_v (-uv + vw \tan \varphi) + \right. \\ & \left. + \lambda_w - (uw - v^2 \cdot \tan \varphi) \right] + \frac{2qS}{mV_r} \lambda_V \omega \cdot \cos \varphi [V_E - (C_D \cos \delta + C_L \sin \delta) + \\ & + L_E(-C_D \sin \delta - C_L \cos \delta)] - \frac{qS}{m} \lambda_V \frac{\partial \rho}{\partial r} \frac{1}{\rho} \cdot (C_D \cos \delta + C_L \sin \delta) \end{aligned} \quad (\text{D.18})$$

$$\dot{\lambda}_\theta = 0 \quad (\text{D.19})$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_\varphi = & \frac{1}{r \cos^2 \varphi} (-\lambda_\theta v \sin \varphi - \lambda_v v w + \lambda_w v^2) + \frac{2qS}{mV_r} \lambda_V \omega \cdot r \sin \varphi [V_E(-C_D \cos \delta + C_L \sin \delta) + \\ & + L_E(-C_D \sin \delta - C_L \cos \delta)] \end{aligned} \quad (\text{D.20}) \quad |$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_u = & \frac{1}{r} (-\lambda_r r + \lambda_v v + \lambda_w w) - \frac{2qS}{mV_r} \lambda_V [V_Z(-C_D \cos \delta + C_L \sin \delta) + L_Z(-C_D \sin \delta - C_L \cos \delta)] \end{aligned} \quad (\text{D.21}) \quad |$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_v = & \frac{1}{r} \left[-\lambda_\theta \frac{1}{\cos \varphi} 2\lambda_u v + \lambda_v (u - w \tan \varphi) + 2\lambda_w v \tan \varphi \right] - \frac{2qS}{mV_r} \lambda_V [V_E(C_D \cos \delta + C_L \sin \delta) + \\ & + L_E(-C_D \sin \delta - C_L \cos \delta)] \end{aligned} \quad (\text{D.22}) \quad |$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_w = & \frac{1}{r} (-\lambda_\varphi - 2\lambda_u w - \lambda_\theta v \tan \varphi + \lambda_w u) - \frac{2qS}{mV_r} \lambda_V [V_N(-C_D \cos \delta + C_L \sin \delta) + L_N \cdot \\ & \cdot (-C_D \sin \delta - C_L \cos \delta)] \end{aligned} \quad (\text{D.23}) \quad |$$

$$\dot{\lambda}_m = \frac{T}{m^2} \lambda_V + \frac{qS}{m^2} \lambda_V (-C_D \cos \delta + C_L \sin \delta) \quad (\text{D.24})$$

in cui

- C_D è il coefficiente di resistenza dello spacecraft;
- C_L è il coefficiente di portanza;
- δ non è la latitudine (nel nostro caso definita φ), bensì l'angolo tra il vettore d'innescò e la velocità relativa, introducendo le componenti nel sistema locale Nord-Est-Zenit dei versori paralleli alla \vec{V}_r e alla portanza L :

$$V_N = \frac{w}{V_r} = \cos \gamma \sin \psi \quad (\text{D.25})$$

$$V_E = \frac{v\omega \cdot r \cos \varphi}{V_r} = \cos \gamma \cos \psi \quad (\text{D.26})$$

$$V_Z = \frac{u}{V_r} = \sin \gamma \quad (\text{D.27})$$

$$L_N = \frac{-\lambda_u \sin \gamma \cos \gamma \sin \psi - \lambda_v \cos^2 \gamma \sin \psi \cos \psi + \lambda_w (1 - \cos^2 \gamma \sin^2 \psi)}{\lambda_V \sin \delta} \quad (\text{D.28})$$

$$L_E = \frac{-\lambda_u \sin \gamma \cos \gamma \cos \psi + \lambda_v (1 - \cos^2 \gamma \cos^2 \psi) - \lambda_w \cos^2 \gamma \sin \psi \cos \psi}{\lambda_V \sin \delta} \quad (\text{D.29})$$

$$L_Z = \frac{\lambda_u (1 - \sin^2 \gamma) - \lambda_v \sin \gamma \cos \gamma \cos \psi - \lambda_w \sin \gamma \cos \gamma \sin \psi}{\lambda_V \sin \delta} \quad (\text{D.30})$$

Bibliografia

- [1] Forward R.L. «Grey Solar Sails». In: *Journal of the Astronautical Sciences* 38.2 (1990), pp. 161–185.
- [2] Sauer C.G. Jr. «Optimum Solar-Sail Interplanetary Trajectories». In: *AIAA Paper 76-0792*. Aug. 1976.
- [3] Wood L.J., Bauer T.P. e Zondervan K.P. «Comment on ‘Time Optimal Orbit Transfer Trajectory for Solar Sail Spacecraft’». In: *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 5.2 (1982), pp. 221–224.
- [4] Subba Rao P.V. e Ramanan R.V. «Optimum Rendezvous Transfer Between Coplanar Heliocentric Elliptic Orbits Using Solar Sail». In: *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 25.6 (1992), pp. 1507–1509.
- [5] Sauer C.G. Jr. *Solar Sail Trajectories for Solar Polar and Interstellar Probe Missions*. Vol. 103.1. Advances in Astronautical Sciences. San Diego, CA: Univelt, Inc, 1999, pp. 547–562.
- [6] McInnes C.R. «Payload Mass Fractions for Minimum-Time Trajectories of Flat and Compound Solar Sails». In: *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 23.6 (2000), pp. 1076–1078.
- [7] Sauer C.G. Jr. «A Comparison of Solar Sail and Ion Drive Trajectories for a Halley’s Comet Rendezvous Mission». In: *AAS Paper 77-104*. American Astronautical Society, Sept. 1977.
- [8] Cichan T. e Melton R.G. «Optimal Trajectories for Non-Ideal Solar Sails». In: *AAS Paper 01-471*. American Astronautical Society, July-Aug. 2001.
- [9] Colasurdo G. e Pastrone D. «Indirect Optimization Method for Impulsive Transfer». In: *AIAA Paper 94-3762*. Aug. 1994.
- [10] Lawden D.F. *Optimal Trajectories for Space Navigation*. London: Butterworths, 1963, pp. 54–68.
- [11] Colasurdo G. e Casalino L. *Trajectories Towards Near-Earth Objects Using Solar Electric Propulsion*. Vol. 103.1. Advances in Astronautical Sciences. San Diego, CA: Univelt, Inc, 1999, pp. 593–607.

-
- [12] Wallace R.A., Ayon J.A. e Sprague G.A. «Interstellar Probe Mission/System Concept». In: *Journal of Space Mission Architecture* No. 2 (2000), pp. 15–34.
- [13] Bryson A.E. e Ho Y.C. *Applied Optimal Control*. Washington, DC: rev. Hemisphere, 1975, pp. 106–108.
- [14] Casalino L., Colasurdo G. e Pastrone D. «Optimization Procedure for Preliminary Design of Opposition-Class Mars Missions». In: *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 21.1 (1998), pp. 134–140.
- [15] Kirk D.E. *Optimal Control Theory: an Introduction*. First ed. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1970.
- [16] Burghes D.N. e Graham A. *Introduction to Control Theory, Including Optimal Control*. First ed. Chichester: Ellis Horwood Ltd., 1980.
- [17] McDanell J.P. e Powers W.F. «Necessary Conditions for Joining Optimal Singular and Nonsingular Subarcs». In: *SIAM Journal of Control* 9.2 (1971), pp. 161–173.
- [18] Champine D.F. e Gordon M.K. *Computer Solution of Ordinary Differential Equation: the Initial Value Problem*. First ed. San Francisco, CA: W.H. Freeman, 1975.
- [19] Ho D.Y. «The Year in Review: Electric Propulsion». In: *Aerospace America* 39.12 (2001), p. 58.
- [20] Patterson M.J., Haag T.W., Foster J.E., Rawlin V.K., Roman R.F. e Soulas G.C. «Development Status of a 5/10-kW Class Ion Engine». In: *AIAA Paper 2001-3489*. July 2001.
- [21] Killinger R., Bassner H., Mueller J., Kukies R. e Leiter H.J. «High Performance RF-Ion Thruster Development (RIT XT)-Performance and Durability Test Results». In: *AIAA Paper 2001-3488*. July 2001.
- [22] King D.Q., de Grys K.H. e Jankovsky R. «Multi-Mode Hall Thruster Development». In: *AIAA Paper 2001-3778*. July 2001.
- [23] Chand Diaz F.R., Squire J.P., Bengston R.D., Breizman B.N., Baity F.W. e Carter M.D. «The Physics and Engineering of the Vasimr Engine». In: *AIAA Paper 2000-3756*. July 2000.
- [24] Bishop R.H. e Azimov D.M. «Analytical Space Trajectories for External Motion with Low-Thrust Exhaust-Modulated Propulsion». In: *Journal of Spacecraft and Rockets* 38.6 (2001), pp. 897–903.
- [25] Colasurdo G. e Casalino L. «Energy Management in Rocket Propulsion». In: *Journal of Propulsion and Power* 16.4 (2000), pp. 705–708.
- [26] Prussing J.E. «Equation for Optimal Power-Limited Spacecraft Trajectories». In: *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 16.2 (1993), pp. 391–393.

-
- [27] Kechichian J.A. «Optimal Low-Thrust Transfer Using Variable Bounded Thrust». In: *Acta Astronautica* 36.7 (1995), pp. 357–365.
- [28] Casalino L., Colasurdo G. e Pastrone D. «Optimal Low-Thrust Escape Trajectories Using Gravity Assist». In: *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 22.5 (1999), pp. 637–642.
- [29] Colasurdo G. e Casalino L. «Trajectories Towards Near-Earth Objects Using Solar Electric Propulsion». In: *Paper 99-339*. American Astronautical Society, Aug. 1999.
- [30] Colasurdo G. e Casalino L. «Optimal Time-Constrained Missions to Near-Earth Asteroids». In: *Paper 01-A-5.04*. International Astronautical Federation, Oct. 2001.
- [31] Hechler M. *Mercury Orbiter Mission Analysis: On Mission Opportunities with Chemical and Solar Electric Propulsion*. MAS WP 389. Darmstadt, Germany: ESOC, Oct. 1996.
- [32] Casalino L. «Singular Arcs During Aerocruise». In: *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 23.1 (2000), pp. 118–123.
- [33] Colasurdo G. e Pastrone D. «Indirect Optimization Method for Impulsive Transfer». In: *AIAA/AAS Astrodynamics Conference: A Collection of Technical Papers*. Washington DC: AIAA, 1994, pp. 441–448.
- [34] Casalino L., Colasurdo G. e Faga M. «Indirect Optimization of Multi-Flyby Mercury Rendezvous Missions». In: *Paper 00-A-4.02*. International Astronautical Federation, Oct. 2000.
- [35] Passaro A. *Propulsione spaziale elettrica: il punto di vista industriale*. Apr. 2009. URL: <https://slideplayer.it/slide/577876/>.
- [36] Restagno M. «Ottimizzazione della traiettoria di fuga dal punto lagrangiano L2 del sistema Terra-Sole con propulsore ad impulso specifico variabile». Politecnico di Torino, apr. 2023. URL: <https://webthesis.biblio.polito.it/26964/1/tesi.pdf>.
- [37] Savaglia N. «Design and Optimization of Low Thrust Maneuvers in Interplanetary Missions». Politecnico di Torino, mar. 2018. URL: <https://webthesis.biblio.polito.it/secure/6902/1/tesi.pdf>.
- [38] Novara V. *La Nube di Oort: cos'è, origini, come è fatta e da cosa è formata*. 2024. URL: <https://www.passioneastronomia.it/la-nube-di-oort/>.
- [39] *Esplora la Nube di Oort, Casa delle Comete a Lungo Periodo*. Star Walk. Vito Technology, Inc, Giugno 2023. URL: <https://starwalk.space/it/news/what-is-oort-cloud>.

- [40] Malaspina M. *La Nube di Oort - Astronomia e astrofisica*. Magnitudine Assoluta Astronomia differente. Lunar e Planetary Institute, mar. 2023. URL: <https://www.magnitudine-assoluta.it/2021/07/cose-la-nube-oort.html>.
- [41] Castellana D. «Ottimizzazione di Traiettorie di Atterraggio Lunare con Dinamica Rotazionale». Politecnico di Torino, 2021/2022. URL: <https://webthesis.biblio.polito.it/24123/1/tesi.pdf>.
- [42] Pastrone D. «Traiettorie Ottimali con Flyby». In: *Atti del XIII Congresso Nazionale*. Rome: Associazione Italiana di Aeronautica e Astronautica, 1995, pp. 1115–1124.
- [43] Kluever C. A. «Heliospheric Boundary Exploration Using Ion Propulsion Spacecraft». In: *Journal of Spacecraft and Rockets* 34.3 (1997), pp. 365–371.
- [44] Kluever C. A. e Abu-Saymeh M. «Mercury Mission Design Using Solar Electric Propulsion Spacecraft». In: *Journal of Spacecraft and Rockets* 35.3 (1998), pp. 411–413.
- [45] Casalino L., Colasurdo G. e Pastrone D. «Optimization of ΔV -Earth-Gravity-Assist Trajectories». In: *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 21.6 (1998), pp. 991–995.
- [46] Colasurdo G., Pastrone D. e Casalino L. «Optimization of Rocket Ascent Trajectories Using an Indirect Procedure». In: *Paper 95-3323*. AIAA, Aug. 1995.
- [47] Bryson A.E. e Ho Y.C. *Applied Optimal Control*. Washington, DC: rev. Hemisphere, 1975, pp. 90–91.
- [48] *La Fascia di Kuiper: La Frontiera del Sistema Solare*. Star Walk. Vito Technology, Inc, Agosto 2022. URL: <https://starwalk.space/it/news/kuiper-belt>.
- [49] Hartono N. *NASA JPL Unveils the Dr. Edward Stone Exploration Trail*. Jet Propulsion Laboratory. NASA, Dicembre 2024. URL: <https://www.nasa.gov/missions/voyager-program/nasa-jpl-unveils-the-dr-edward-stone-exploration-trail/>.
- [50] Davies P. *Interstellar Mission*. NASA, feb. 2025. URL: <https://science.nasa.gov/mission/voyager/interstellar-mission/>.
- [51] Davies P. *Voyager 1 and 2 spacecraft*. NASA, nov. 2024. URL: <https://science.nasa.gov/mission/voyager/spacecraft/>.