



**Politecnico
di Torino**

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

Tesi di Laurea Magistrale

**Ottimizzazione multidisciplinare per il
design del motore e della traiettoria di un
terzo stadio a propellenti ibridi**

Relatore

Prof. Lorenzo Casalino

Candidato

Luca Borsi

Aprile 2025

Sommario

Il recente aumento dell'utilizzo di piccoli lanciatori per missioni dedicate a satelliti di piccole dimensioni ha condotto all'incremento dell'impiego di motori a propellenti ibridi. Questa tipologia di endoreattori, infatti, si dimostra estremamente adatta ad essere utilizzata negli stadi superiori. Il motivo risiede nella capacità di coniugare la compattezza strutturale tipica degli endoreattori a propellenti solidi, necessaria nei piccoli lanciatori, e la possibilità di regolazione della spinta tipica degli endoreattori a propellenti liquidi, caratteristica fondamentale per effettuare manovre di inserimento in orbita, che richiedono un elevato livello di accuratezza. In aggiunta a ciò, il basso costo, la sicurezza, l'affidabilità e l'uso di propellenti che riducono l'impatto ambientale incentivano il loro sviluppo.

Sulla base di questa premessa, lo scopo del lavoro di tesi è la massimizzazione del payload di un terzo e ultimo stadio a propellenti ibridi, che si propone di sostituire il terzo stadio a propellenti solidi e il quarto a propellenti liquidi di un piccolo lanciatore basato sul lanciatore europeo Vega. Il processo di ottimizzazione è svolto mediante un codice sviluppato dal Politecnico di Torino, che fornisce il design ottimizzato del motore (attraverso metodi diretti), massimizzandone le prestazioni, e della traiettoria (attraverso metodi indiretti), minimizzando le perdite di velocità.

L'approccio adottato prevede un'ottimizzazione iniziale condotta considerando singolarmente i parametri di progetto, per valutare la loro influenza sulle diverse grandezze, per poi aumentare il numero di parametri oggetto di ottimizzazione. Successivamente, al fine di ottenere una soluzione valida dal punto di vista pratico, è stato inserito un vincolo sull'accelerazione massima, dettato da esigenze strutturali. Infine, è stato aggiunto un secondo vincolo sul diametro massimo della sezione di uscita dell'ugello, al fine di sfruttare al meglio l'ingombro trasversale disponibile per il terzo stadio. I risultati mostrano che il limite imposto sull'accelerazione massima produce una riduzione della spinta media, determinando un aumento del ΔV propulsivo, con conseguente incremento del propellente necessario e un limitato guadagno in termini di carico utile. Per giunta, si dimostra il beneficio dell'aumento del rapporto di espansione dell'ugello, evidenziando delle criticità nella stima della massa dell'ugello da parte della relativa formula di interpolazione per alti valori del rapporto di espansione iniziale.

Indice

Indice	I
Elenco delle figure.....	III
Elenco delle tabelle.....	IV
1 Endoreattori.....	1
1.1 Introduzione: classificazione e confronto	1
1.2 Definizioni dei parametri di performance.....	4
1.3 Endoreattori a propellenti ibridi.....	6
1.3.1 Cenni storici e stato dell'arte	6
1.3.2 Applicazioni e configurazione tipica.....	8
1.3.3 Accensione e propellenti	9
1.3.4 Bassa efficienza di combustione.....	10
1.3.5 Basso rateo di regressione	11
1.3.6 Mixture ratio shifting.....	16
1.3.7 Sistema di alimentazione	18
2 Processo di ottimizzazione.....	20
2.1 Ottimizzazione accoppiata di motore e traiettoria	20
2.1.1 Ottimizzazione della traiettoria	21
2.2 Missione.....	22
2.3 Design del motore.....	23
2.3.1 Stima delle masse dello stadio.....	27
3 Risultati	29
3.1 Parametri di progetto e valori nominali	29
3.2 Ottimizzazione in assenza di vincoli applicati.....	31
3.2.1 Ottimizzazione di un singolo parametro di progetto	31
3.2.2 Ottimizzazione di due parametri di progetto	41
3.2.3 Ottimizzazione di tre parametri di progetto.....	45
3.3 Ottimizzazione con l'applicazione di vincoli	49
3.3.1 Ottimizzazione della coppia di parametri di progetto MR_i e F_i con vincolo applicato sull'accelerazione massima	50
3.3.2 Confronto tra soluzioni ottenute con accelerazione massima pari a 6 g per due diversi valori del rapporto di espansione iniziale dell'ugello.....	53
3.3.3 Ottimizzazione di tre parametri con vincolo sull'accelerazione massima pari a 6 g e vincolo sul diametro massimo della sezione d'uscita dell'ugello	62

4	Conclusioni	68
	Bibliografia.....	69

Elenco delle figure

Figura 1.1: valori tipici della velocità efficace di scarico in funzione dell'accelerazione prodotta (in g) per i vari tipi di sistema propulsivo [2]	2
Figura 1.2: SRM (a), LRE (b), HRE (c) [3]	3
Figura 1.3: configurazione tipica di un endoreattore a propellenti ibridi con sistema di alimentazione con regolazione di pressione [12]	8
Figura 1.4: schema semplificato del processo di combustione in un HRE [2].....	10
Figura 1.5: regimi del rateo di regressione in funzione di G [3]	11
Figura 1.6: I_{sp} in funzione del MR per diversi ossidanti in combinazione con HTPB come combustibile con $p_c=1000$ psia e $\varepsilon=10$ [2].....	14
Figura 1.7: geometrie con porte triangolari (a) e porte trapezoidali (b) [14]	14
Figura 1.8: schema del meccanismo di <i>entrainment</i> [15].....	15
Figura 2.1: polinomio interpolante c^* (a) e polinomio interpolante γ (b).....	24
Figura 3.1: andamenti della portata di ossidante, della portata di <i>fuel</i> e del <i>mixture ratio</i> (in ordine dall'alto).....	36
Figura 3.2: andamenti del flusso di massa di ossidante e del rateo di regressione (in ordine dall'alto)	37
Figura 3.3: andamenti della portata di propellente, della spinta e dell'accelerazione (in ordine dall'alto)	38
Figura 3.4: andamenti della pressione nel <i>tank</i> ossidante, della pressione in camera di combustione, dell'area di gola e del rapporto di espansione ugello (in ordine dall'alto).....	39
Figura 3.5: andamenti della velocità caratteristica, del coefficiente di spinta, della velocità efficace di scarico e dell'impulso specifico (in ordine dall'alto).....	40
Figura 3.6: andamenti di portata di ossidante, portata di <i>fuel</i> e <i>mixture ratio</i> (in ordine dall'alto) della soluzione con $\varepsilon_i=70$ e $a_{max}=6$ g.....	57
Figura 3.7: andamenti di flusso di massa di ossidante e rateo di regressione (in ordine dall'alto) della soluzione con $\varepsilon_i=70$ e $a_{max}=6$ g.....	58
Figura 3.8: andamenti di portata di propellente, spinta e accelerazione (in ordine dall'alto) della soluzione con $\varepsilon_i=70$ e $a_{max}=6$ g.....	59
Figura 3.9: andamenti di pressione <i>tank</i> ossidante, pressione camera di combustione, area di gola e rapporto di espansione ugello (in ordine dall'alto) della soluzione con $\varepsilon_i=70$ e $a_{max}=6$ g.....	60
Figura 3.10: andamenti di velocità caratteristica, coefficiente di spinta, velocità efficace di scarico e impulso specifico (in ordine dall'alto) della soluzione con $\varepsilon_i=70$ e $a_{max}=6$ g	61
Figura 3.11: andamento della massa dell'ugello M_{ug} in funzione di ε_i (in alto) e M_{ug} in funzione di ε_i e del diametro di gola $D_{gola,i}$ (in basso)	63

Elenco delle tabelle

Tabella 2.1: parametri orbitali dell'orbita finale.....	22
Tabella 3.1: valori nominali dei parametri di progetto	30
Tabella 3.2: parametri di progetto ottimizzati nei casi di ottimizzazione a un parametro	32
Tabella 3.3: masse nei casi di ottimizzazione a un parametro	33
Tabella 3.4: dimensioni geometriche nei casi di ottimizzazione a un parametro	34
Tabella 3.5: prestazioni e durata delle fasi di missione nei casi di ottimizzazione a un parametro	35
Tabella 3.6: parametri di progetto ottimizzati nei casi di ottimizzazione a due parametri	41
Tabella 3.7: masse nei casi di ottimizzazione a due parametri	42
Tabella 3.8: dimensioni geometriche nei casi di ottimizzazione a due parametri	43
Tabella 3.9: prestazioni e durata delle fasi nei casi di ottimizzazione a due parametri ..	44
Tabella 3.10: parametri di progetto ottimizzati nel caso di ottimizzazione a tre parametri	45
Tabella 3.11: masse nel caso di ottimizzazione a tre parametri	46
Tabella 3.12: dimensioni geometriche nel caso di ottimizzazione a tre parametri	47
Tabella 3.13: prestazioni e durata delle fasi nel caso di ottimizzazione a tre parametri.	48
Tabella 3.14: parametri di progetto ottimizzati al variare del vincolo sull'accelerazione massima	50
Tabella 3.15: masse al variare del vincolo sull'accelerazione massima	51
Tabella 3.16: dimensioni geometriche al variare del vincolo sull'accelerazione massima	52
Tabella 3.17: prestazioni e durata delle fasi al variare del vincolo sull'accelerazione massima	53
Tabella 3.18: parametri di progetto ottimizzati con $a_{\max} = 6 \text{ g}$	54
Tabella 3.19: masse nei casi di ottimizzazione con $a_{\max} = 6 \text{ g}$	54
Tabella 3.20: dimensioni geometriche nei casi di ottimizzazione con $a_{\max} = 6 \text{ g}$	55
Tabella 3.21: prestazioni e durata delle fasi nei casi di ottimizzazione con $a_{\max} = 6 \text{ g}$..	56
Tabella 3.22: parametri di progetto ottimizzati con $a_{\max} = 6 \text{ g}$ e $D_{\text{ug, exit}} = 1.15 \text{ m}$	64
Tabella 3.23: masse nel caso di ottimizzazione con $a_{\max} = 6 \text{ g}$ e $D_{\text{ug, exit}} = 1.15 \text{ m}$	65
Tabella 3.24: dimensione geometriche nel caso di ottimizzazione con $a_{\max} = 6 \text{ g}$ e $D_{\text{ug, exit}} = 1.15 \text{ m}$	66
Tabella 3.25: prestazioni e durata delle fasi nel caso di ottimizzazione con $a_{\max} = 6 \text{ g}$ e $D_{\text{ug, exit}} = 1.15 \text{ m}$	67

1 Endoreattori

In questo capitolo viene riportata una breve introduzione agli endoreattori, ponendo maggiore attenzione sugli endoreattori chimici, dei quali vengono descritte più dettagliatamente e confrontate le tre categorie principali. Successivamente si definiscono gli indici prestazionali di questi sistemi propulsivi. Infine, viene riservata una sezione in cui si approfondiscono gli endoreattori ibridi, analizzando le peculiarità di questa tipologia di motori.

1.1 Introduzione: classificazione e confronto

Gli endoreattori sono sistemi impiegati per fornire propulsione, ovvero la capacità di generare spinta, attraverso l'espulsione di una portata di fluido ad alta velocità nella direzione opposta (sfruttando il principio di azione e reazione). Il fluido utilizzato è il propellente immagazzinato a bordo e l'origine dell'energia fornita per la sua accelerazione può essere utilizzata per classificare [1] gli endoreattori in:

- Chimici: l'energia è interna al propellente, fornita attraverso la reazione chimica di dissociazione nel caso di razzi monopropellente, o di combustione nel caso di razzi bipropellente (un ossidante e un combustibile).
- Elettrici/Nucleari: l'energia, elettrica o nucleare, è esterna al propellente. Può essere fornita al propellente sotto forma di energia termica, prevedendo un'accelerazione termofluidodinamica attraverso un ugello (*arcjet*, *resistojet* e motori con reattore a fissione nucleare), o sotto forma di energia elettrostatica o elettromagnetica, che permette l'accelerazione di un fluido ionizzato o di un plasma (endoreattori elettrostatici ed elettromagnetici).

La presenza di un dispositivo esterno che fornisce energia al propellente permette di aumentare arbitrariamente (nel rispetto dei limiti tecnologici) l'accelerazione e la velocità dei gas espulsi, riducendo i consumi di propellente, come si vedrà nel sottocapitolo successivo. Allo stesso tempo, la presenza di un sorgente esterna di energia limita fortemente i valori del rapporto tra spinta e peso del motore. Volendo porre l'attenzione sui soli sistemi propulsivi che permettono l'ascesa in orbita, non si considerano gli endoreattori elettrici, gli endoreattori chimici monopropellente e *cold gas*, e gli endoreattori nucleari per cause di natura ambientale (Figura 1.1).

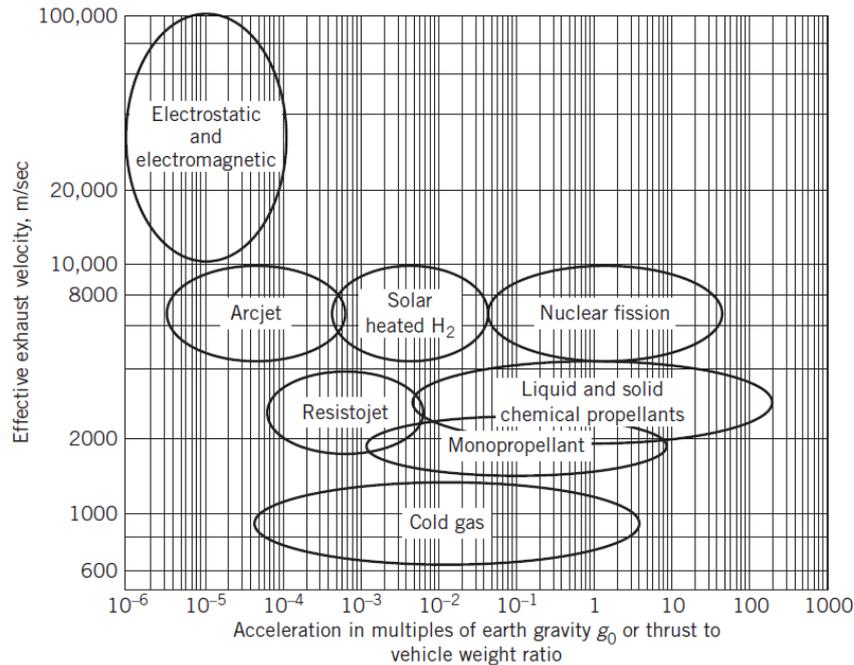


Figura 1.1: valori tipici della velocità efficace di scarico in funzione dell'accelerazione prodotta (in g) per i vari tipi di sistema propulsivo [2]

Approfondendo la categoria degli endoreattori chimici bipropellente, impiegati per l'ascesa in orbita, si distinguono tre tipologie sulla base dello stato del propellente immagazzinato:

- Endoreattori a propellenti liquidi (LRE): ossidante e combustibile sono immagazzinati allo stato liquido. Necessitano di un doppio sistema di alimentazione, tipicamente comprendente delle turbopompe, che porti ciascuno dei due propellenti dal rispettivo serbatoio alla camera di combustione. Sono caratterizzati da un'elevata complessità dovuta non solo al sistema di controllo per l'alimentazione dei propellenti, ma anche alla conservazione degli stessi, dato l'utilizzo generalmente di propellenti criogenici, e alla loro gestione in condizioni di microgravità (*settling* per esempio). I vantaggi consistono nella possibilità di regolazione della spinta mediante il controllo della portata dei due propellenti, proprietà che permette anche lo spegnimento e la riaccensione. Presentano un ampio intervallo di valori di spinta (spinta scalabile con le dimensioni) ed elevate prestazioni, specialmente nella combinazione LOX/LH₂ (ossigeno e idrogeno liquidi). Inoltre, il propellente liquido è utilizzabile come liquido refrigerante.
- Endoreattori a propellenti solidi (SRM): ossidante e combustibile sono immagazzinati allo stato solido mescolati, a livello meccanico o molecolare, all'interno di un grano contenuto in camera di combustione. Il vantaggio principale risiede nella semplicità del design, dovuta all'assenza di serbatoi e sistemi di alimentazione, garantendo un'alta efficienza strutturale del motore. Una maggiore semplicità equivale ad una maggior affidabilità rispetto ai LRE, anche se la presenza di un grano non inerte porta con sé rischi di accensione

accidentale e rottura/esplosione per sovrappressione in camera di combustione. Sono contraddistinti da un ampio range dei valori di spinta, la quale è scalabile con il rapporto tra lunghezza e diametro L/D . Lo svantaggio principale è l'impossibilità di regolare il modulo della spinta e di effettuare riaccensioni. Le prestazioni sono inferiori a quelle dei propellenti liquidi. L'assenza di liquidi da poter utilizzare come refrigerante impone una soluzione passiva per il controllo termico dell'ugello (isolamento con materiale refrattario e/o ablativo).

- Endoreattori a propellenti ibridi (HRE): nella configurazione classica, il combustibile è immagazzinato allo stato solido sotto forma di grano contenuto in camera di combustione. L'ossidante è allo stato liquido, contenuto in un serbatoio in comunicazione con la camera di combustione. La presenza di un sistema di alimentazione per l'ossidante pone questa tipologia di motori ad un livello intermedio tra LRE e SRM in termini di complessità. Rispetto ai propellenti solidi, la separazione tra ossidante e combustibile garantisce una maggior sicurezza, sia durante la fabbricazione, sia durante la vita operativa del motore. Quest'ultima caratteristica, unitamente alla ridotta complessità dell'architettura, determina un minor costo di produzione. Il controllo della portata di ossidante permette la regolazione della spinta, con possibilità di spegnimento e riaccensione. Le performance sono intermedie tra quelle dei solidi e dei liquidi, e, come questi ultimi, dispongono di un propellente liquido da impiegare come refrigerante per il controllo termico. Questa tipologia di motori è caratterizzata da tre peculiarità svantaggiose: la bassa efficienza di combustione, il basso rateo di regressione e il fenomeno del *Mixture ratio shifting*, ovvero la variazione del rapporto di miscela durante il funzionamento.

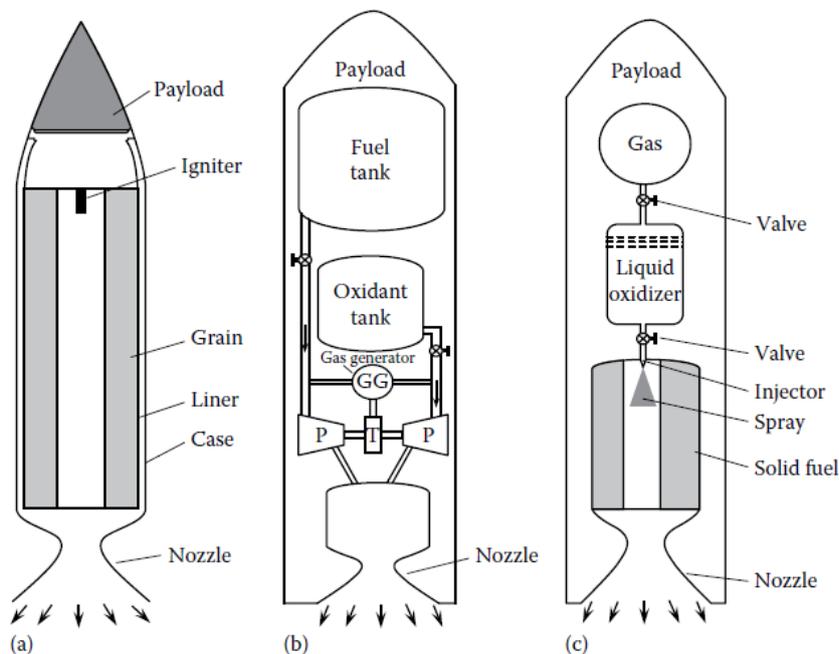


Figura 1.2: SRM (a), LRE (b), HRE (c) [3]

1.2 Definizioni dei parametri di performance

Un endoreattore è descritto da una serie di parametri di performance [4,5] elencati di seguito:

- La spinta F che, assumendo un modello 1D del flusso in uscita dei gas combusti, si ottiene attraverso la relazione:

$$F = \dot{m} w_e + A_e(p_e - p_0) \quad (1.1)$$

dove \dot{m} è la portata di gas espulsi, w_e è la velocità effettiva dei gas in corrispondenza della sezione di uscita dell'ugello A_e , p_e è la pressione statica sulla sezione di uscita dell'ugello e p_0 è la pressione ambiente.

- Il coefficiente di spinta C_F è un fattore di amplificazione che descrive la bontà dell'ugello nell'accelerare i gas combusti e generare un incremento della spinta prodotta dalla sola camera di combustione. È definito dall'equazione:

$$C_F = \frac{F}{p_c A_t} \quad (1.2)$$

in cui p_c è la pressione totale in camera di combustione e A_t è l'area di gola dell'ugello.

- La velocità caratteristica c^* è un indice di efficienza della camera di combustione e della reazione chimica che avviene al suo interno. È definita mediante la relazione:

$$c^* = \frac{p_c A_t}{\dot{m}} \quad (1.3)$$

con l'effetto utile al numeratore, ovvero la forza data dal prodotto $p_c A_t$, e il costo per poter generare tale forza, ovvero la portata \dot{m} da smaltire, al denominatore.

- La velocità efficace di scarico c , definita dall'espressione:

$$c = \frac{F}{\dot{m}} = c^* C_F \quad (1.4)$$

è un parametro che ingloba gli effetti della camera di combustione e dell'ugello. Assume un significato di efficienza, in quanto è definito come rapporto tra l'effetto utile della *thrust chamber*, corrispondente alla spinta generata F , e la spesa necessaria per ottenerlo, identificata con la portata di propellente espulsa. Un maggior valore di c , a parità di spinta, equivale a ridurre la quantità di propellente consumato.

- L'impulso totale I_t è una misura generica dell'effetto del propulsore, ovvero della generazione di spinta, ed è definito come:

$$I_t = \int_0^{t_b} F dt \quad (1.5)$$

dove t_b indica il tempo di combustione. Il vero risultato della produzione di spinta da parte del propulsore corrisponde al cambiamento di velocità ΔV del veicolo spaziale. L'impulso totale è una stima approssimata dell'effetto ottenuto dal sistema propulsivo; infatti, è corretto pensare che maggiore è il I_t , più grande sarà il ΔV .

- L'impulso specifico I_{sp} è un indice di efficienza nell'uso del propellente, in quanto rapporta I_t , l'effetto (generico) ottenuto, al costo, identificato con il peso del propellente immagazzinato. La relazione è la seguente:

$$I_{sp} = \frac{I_t}{M_p g_0} = \frac{c}{g_0} \quad (1.6)$$

con g_0 che rappresenta l'accelerazione di gravità sulla superficie terrestre e M_p la massa di propellente consumato. Ha le dimensioni di un tempo ed equivale alla durata per cui, assunto un valore di M_p , il propulsore può fornire una spinta costante e pari al peso del propellente.

- L'impulso specifico volumetrico è definito come:

$$I_\rho = I_{sp} \rho \quad (1.7)$$

dove $\rho = \frac{\rho_o \rho_f (1+MR)}{MR \rho_f + \rho_o}$ è una media delle densità di ossidante e combustibile pesata attraverso il rapporto di miscela MR (rapporto tra portata di ossidante e portata di combustibile). È un parametro che ingloba, attraverso la densità, l'efficienza strutturale del motore, oltre a quella nell'utilizzo del propellente data da I_{sp} . Infatti, a parità di consumo di propellente, una bassa densità media corrisponde ad un elevato volume del propellente e dei serbatoi, con un maggiore massa di questi ultimi. Spesso si predilige un I_ρ maggiore utilizzando un rapporto di miscela che penalizza il consumo di propellente ma permette un guadagno a livello strutturale.

1.3 Endoreattori a propellenti ibridi

In questo sottocapitolo si approfondiscono gli endoreattori ibridi, partendo da una breve descrizione dell'evoluzione storica. Si descrive l'architettura tradizionale e si analizzano i propellenti tipici e le modalità di accensione. Tre sezioni sono dedicate alle proprietà che caratterizzano i motori ibridi: la bassa efficienza di combustione, il basso rateo di regressione e la variazione del rapporto di miscela. Attraverso l'analisi di questi tre aspetti si esaminano il processo di combustione e i fenomeni che lo regolano. Inoltre, vengono presentate delle possibili soluzioni adottate per limitare gli effetti negativi ascrivibili alle suddette proprietà. Infine, una sezione è riservata ai sistemi di alimentazione.

1.3.1 Cenni storici e stato dell'arte

Il primo modello di endoreattore ibrido risale all'agosto del 1933, data del suo primo volo. Si tratta del razzo GIRD-09 degli ingegneri sovietici Korolev e Tikhonravov, che utilizzava benzina gelificata sostenuta da una maglia metallica come combustibile, e ossigeno liquido LOX autopressurizzato come ossidante [6]. Gli anni '30 vedono i primi esperimenti di propulsione ibrida in ambito missilistico. In Germania vengono testati motori con carbone e grafite come combustibile solido e protossido di azoto N_2O e ossigeno liquido come ossidanti, mentre, negli Stati Uniti, si utilizza la combinazione carbone/ossigeno gassoso GOX. Al giugno 1951 risale, invece, un volo di un razzo con combinazione di propellenti gomma/LOX (che raggiunse i 9 km di quota) della Pacific Rocket Society, società americana già attiva dalla metà degli anni '40 nella sperimentazione di motori ibridi. Nella prima metà degli anni '50 la General Electric conduce esperimenti con perossido di idrogeno H_2O_2 al 90% come ossidante e polietilene PE come combustibile, testando anche la regolazione della spinta [7]. Contemporaneamente nascono i primi modelli di endoreattore ibrido con configurazione inversa, ossia con combustibile liquido e ossidante solido, che però non ebbero successo. Il periodo che comprende gli anni '60 e '70 è dominato da sviluppi di motori ibridi applicati a razzi sonda e droni bersaglio. Negli Stati Uniti spicca il lavoro effettuato dalla Chemical Systems Division di UTC (United Technologies Corporation), che utilizza principalmente acido nitrico come ossidante e PMMA (Plexiglass) come combustibile solido (alla base dei motori dei droni Sandpiper, HAST, Firebolt). Tra i vari motori progettati, si ricorda quello con una miscela di ossigeno e fluoro FLOX come ossidante, e polibutadiene PBAN con particelle di litio Li e suoi idruri LiH come combustibile, il quale fece registrare un impulso specifico di 380 s [6]. In Europa, due realtà sono protagoniste dello sviluppo di endoreattori ibridi negli anni 60: ONERA, in Francia, e Volvo-Flygmotor in Svezia. Entrambe si occuparono, con risultati soddisfacenti, di razzi sonda con motori ibridi basati su acido nitrico come ossidante.[8]. Con l'inizio degli anni '80 nascono i primi progetti di propulsori ibridi per applicazioni spaziali, come i lanciatori. L'azienda americana Starstruck, poi AMROC (American Rocket Company) dal 1985, lavora al razzo sonda Dolphin come step intermedio per sviluppare la tecnologia dei motori ibridi da applicare ad un lanciatore a 4 stadi Constellation, senza successo. Fino al suo acquisto da parte di SpaceDev, avvenuto nel

1998, la società si occupò di sviluppare motori ibridi con combinazione di propellenti LOX/polibutadiene HTPB in un vasto range di livelli di spinta (da 20 a 1110 kN). Negli anni '90, dalla collaborazione di diverse società americane, nascono nuovi programmi dedicati allo sviluppo della propulsione ibrida, come HyTOP (Hybrid Technology Option Project) e HPDP (Hybrid Propulsion Demonstration Program). Questi ultimi, che si incentravano principalmente sulla realizzazione di motori con propellenti LOX/HTPB e grano con configurazione *wagon wheel*, evidenziarono la nascita di problematiche di instabilità di combustione al crescere delle dimensioni del motore. Nel 1999 viene creato il programma HYSR Project della Lockheed Martin, in collaborazione con la NASA, per lo sviluppo di un razzo sonda monostadio a propellenti ibridi in grado di sostituire razzi sonda a 2 e 3 stadi. Il razzo, che utilizzava LOX/HTPB e produceva una spinta di 267 kN nel vuoto, effettuò il suo primo volo con successo nel 2002 [6,8]. Nell'ottobre del 1998 viene lanciato per la prima volta un piccolo razzo sonda con combustibile solido a base di paraffina progettato alla Stanford University [9]. In tempi più recenti, nel giugno del 2004, lo spaziotreno SpaceShipOne di Scaled Composites ha portato a termine con successo una missione di volo suborbitale, superando i 100 km di quota con un carico pagante equivalente ad un equipaggio di 3 persone (un solo pilota era a bordo). Il velivolo utilizzava un endoreattore a propellenti ibridi sviluppato dalla SpaceDev (ora acquisita da Sierra Nevada Corporation), con polibutadiene HTPB come combustibile solido e ossido di diazoto N_2O come ossidante liquido, capace di generare una spinta di 89 kN. Il successo gli è valso il premio Ansari X [6,8]. Sulla base di SpaceShipOne è stato sviluppato SpaceShipTwo (SS2) della Virgin Galactic, con il motore ibrido RocketMotorTwo con propellenti N_2O /HTPB. I voli suborbitali dello spaziotreno VSS Unity con equipaggio sono stati condotti dal 2018 al 2024, anno del suo ritiro. Tra le realtà attuali dedicate allo sviluppo della propulsione ibrida si cita:

- l'azienda privata tedesca HyImpulse Technologies, che ha realizzato un razzo sonda in grado di portare un payload di 250 kg ad una quota di 200 km, e sta sviluppando un piccolo lanciatore SL1 a tre stadi con la capacità di inserire in LEO un carico di 600 kg. Entrambi i veicoli spaziali si basano sul propulsore ibrido HyPLOX75, che utilizza la combinazione di propellenti LOX/Paraffina e produce una spinta di 75 kN [10].
- l'azienda australiana Gilmour Space Technologies, che ha progettato un piccolo lanciatore a tre stadi, con i primi due propulsi dal motore ibrido Sirius, un endoreattore con grano a singola porta in grado di generare una spinta di 110 kN. Il lanciatore Eris ha la capacità di inserire ad una quota di 500 km, su un'orbita equatoriale, un carico pagante di 305 kg. Il suo primo lancio è previsto per il 2025 [11].

1.3.2 Applicazioni e configurazione tipica

Sulla base delle caratteristiche elencate nel sottocapitolo 1.1, gli endoreattori ibridi trovano impiego in missioni che richiedono la regolazione della spinta, lo spegnimento e la riaccensione. Applicazioni tipiche sono quelle inerenti alla propulsione primaria, come *booster* nei lanciatori di medie dimensioni, o come propulsori di stadi superiori per lanciatori di piccole dimensioni, nei quali, oltre a fornire ΔV significativi, sono utilizzati per manovre di inserimento in orbita. L'impiego di propellenti *storable* li rende adatti anche per missioni di lunga durata come propulsori per manovre orbitali dei satelliti. Sono stati utilizzati altresì come motori di veicoli spaziali alati che hanno compiuto voli suborbitali [2,3].

Una configurazione tipica di un endoreattore a propellenti ibridi è rappresentata in Figura 1.3.

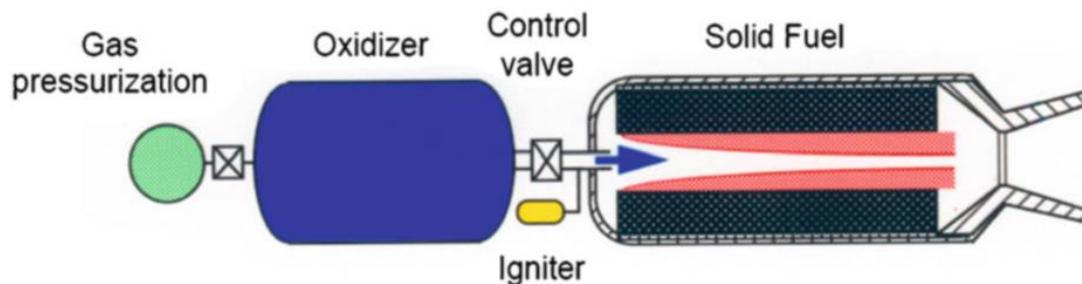


Figura 1.3: configurazione tipica di un endoreattore a propellenti ibridi con sistema di alimentazione con regolazione di pressione [12]

Gli elementi costituenti un HRE tradizionale sono:

- Il grano di combustibile solido, che presenta una o più cavità assiali (porte), all'interno delle quali fluisce l'ossidante e avviene la reazione di combustione.
- La camera di combustione contenente il grano solido, con una camera di miscelazione (*mixing chamber*) nella parte terminale, a valle del grano.
- L'ugello a valle del mixer, con funzione di accelerazione dei gas combusti.
- L'accenditore (*igniter*) nella testa della camera di combustione
- Il sistema di alimentazione che, indipendentemente dalla tipologia, presenta un serbatoio (*tank*) contenente l'ossidante liquido, la valvola di controllo della portata di ossidante e gli iniettori, responsabili dell'immissione dell'ossidante in camera di combustione. In base alla tipologia di sistema, può essere presente un serbatoio (*vessel*) contenente il gas pressurizzante, con regolatore di pressione, o una turbopompa.

1.3.3 Accensione e propellenti

L'accensione avviene mediante una fonte di calore che, introdotta nella camera di vaporizzazione, ovvero la regione della camera di combustione a monte del grano, innesca la gassificazione del combustibile solido. Immediatamente successiva è l'iniezione dell'ossidante, il quale, atomizzato dagli iniettori ed evaporato grazie ai gas caldi prodotti dall'accenditore, fluisce all'interno del grano, dove, per diffusione, genera la fiamma nella parte iniziale della cavità. Il flusso dell'ossidante verso l'uscita della porta determina la propagazione della fiamma lungo il grano, completando l'accensione del motore. Uno dei dispositivi più comunemente utilizzati per l'accensione è l'accenditore pirotecnico, una piccola carica esplosiva innescata elettricamente che produce gas caldi e particelle solide incandescenti. In alternativa possono essere adottate combinazioni ipergoliche di propellenti, che bruciano spontaneamente al solo contatto tra loro. Un'ulteriore soluzione è l'impiego di una miscela gassosa di ossidante e combustibile accesa mediante una candela. Il transitorio di accensione degli endoreattori ibridi risulta avere una durata maggiore rispetto a quello dei solidi a causa del tempo necessario all'instaurazione della fiamma su tutta la lunghezza del grano [2,3].

I combustibili utilizzati negli endoreattori ibridi sono polimeri, come il polibutadiene con radicali idrossilici terminali HTPB, il polietilene ad alta densità HDPE, il polimetilmetacrilato PMM (Plexiglass) e la cera (paraffina). Una variante prevede l'utilizzo di questi polimeri come matrice (*binder*) nella quale viene inserita una polvere di metalli leggeri e loro idruri, quali l'alluminio, il berillio o il litio. Per quanto riguarda gli ossidanti liquidi, i più comuni sono: l'ossigeno liquido LOX, il perossido di idrogeno H_2O_2 in soluzioni al 85-98% (*High-test peroxide* HTP), tetrossido di azoto N_2O_4 , ossido di diazoto N_2O (criogenico ma autopressurizzante per l'alta tensione di vapore) e soluzione acquose di nitrato di idrossilammonio HAN. Meno comuni sono gli ossidanti altamente energetici, come le miscele di LOX/fluoro (FLOX) e composti fluoro-cloro (ClF_3 , ClF_5), che producono gas combustibili altamente tossici. Il combustibile più impiegato è il polibutadiene HTPB, essendo caratterizzato da basso costo, facilità di lavorazione e assenza di rischio di autoaccensione. Viene utilizzato, per motori di *upper stage*, in combinazione con il perossido di idrogeno, il quale, essendo un propellente *storable* (temperatura di ebollizione pari a $145^\circ C$ a 1 atm), è adatto a missioni con durata maggiore come quelle degli stadi superiori. Nei grandi *booster*, invece, il polibutadiene viene generalmente combinato con l'ossigeno liquido che, anche se criogenico, fornisce delle prestazioni superiori a quelle del perossido di idrogeno (prestazioni HTBP-LOX simili a quelle di LOX-cherosene). Entrambe le combinazioni limitano l'impatto ambientale, dal momento che i prodotti della combustione non sono tossici e presentano una ridotta concentrazione di fumo. L'aggiunta di combustibile metallico all'interno del grano, generalmente alluminio per il suo elevato potere calorifico, permette di aumentare la temperatura di combustione, la densità del combustibile e l'impulso specifico volumetrico. Al contrario, la presenza di particelle solide all'interno dei gas di scarico riduce l'impulso specifico ed innalza il grado di impatto ambientale dell'emissione [2,3,5].

1.3.4 Bassa efficienza di combustione

La bassa efficienza di combustione è dovuta al fatto che la reazione chimica avviene in una porzione di spazio ristretta all'interno dello strato limite cinematico che nasce sulla superficie del grano solido, come mostrato in Figura 1.4. La fiamma si genera per diffusione in corrispondenza della zona in cui si raggiunge il rapporto stechiometrico adatto tra ossidante e combustibile che, vaporizzato, si muove dalla superficie del grano verso il centro del canale. Il suo spessore dipende principalmente dalla velocità delle reazioni di combustione, la quale è funzione della pressione in camera e, attraverso una legge esponenziale, della temperatura [2]. Lo spessore della zona della fiamma è generalmente circa il 10% dello spessore dello strato limite [3]. Nonostante i flussi diffusivi incentivati dal regime turbolento dello strato limite, è presente una frazione di combustibile nella zona sottostante alla fiamma (*fuel vapor zone*), soprattutto in prossimità della parte terminale del grano, che esce senza incontrare l'ossidante e, quindi, senza bruciare. La soluzione per migliorare l'efficienza di combustione è l'introduzione di una camera di miscelazione tra il grano e l'ugello. Un sufficiente ricircolo dei gas per una corretta miscelazione richiede anche un tempo di residenza adeguato nel mixer, ottenuto riducendo la velocità di uscita dei gas dalla porta del grano, condizione che impone un valore non elevato del rapporto tra area di gola iniziale dell'ugello e area di porta iniziale (A_t/A_p)_i. L'introduzione della camera di miscelazione determina un aumento del peso e dell'ingombro assiale della camera di combustione.

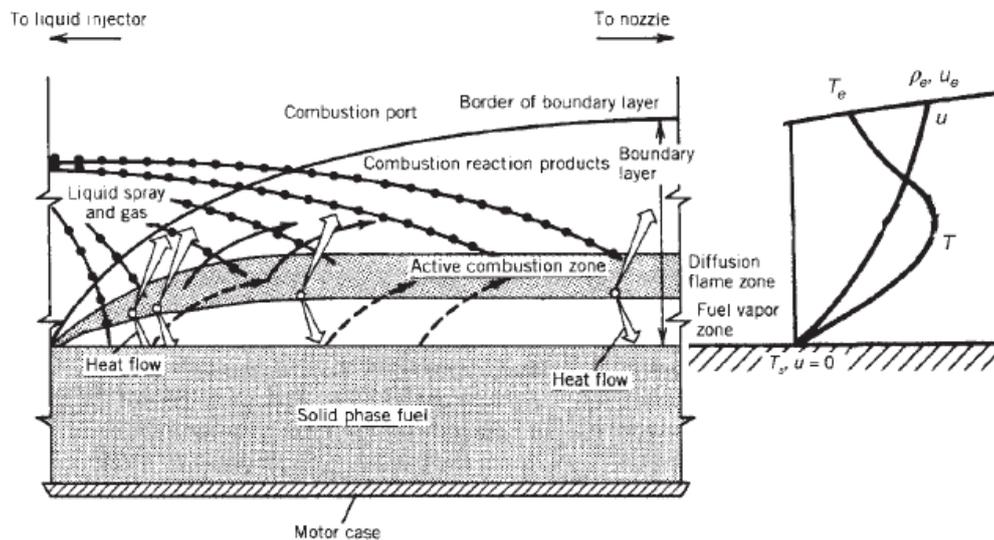


Figura 1.4: schema semplificato del processo di combustione in un HRE [2]

1.3.5 Basso rateo di regressione

Il rateo di regressione è la velocità con cui si consuma il grano solido durante il processo di combustione. Negli endoreattori a propellenti ibridi, il rateo di regressione, è dell'ordine dei mm/s, vale a dire un ordine di grandezza inferiore a quello dei propellenti solidi (cm/s). Il motivo è la modalità di scambio termico attraverso la quale viene fornita l'energia al combustibile per vaporizzare. Il calore viene fornito al solido da un flusso di gas caldi in moto all'interno dei fori del grano; perciò, gli scambi termici avvengono per convezione (forzata) e radiazione. Nel caso di un grano privo di combustibile metallico, prevale lo scambio termico convettivo, che risulta essere un fenomeno autolimitante. Infatti, l'aumento del rateo di regressione equivale all'aumento della portata di combustibile che vaporizza e che viene immessa nello strato limite, aumentando il suo spessore. Ne consegue una diminuzione dei gradienti termici a parete, che determina una diminuzione del flusso termico convettivo in corrispondenza della superficie del grano e, dunque, del rateo di regressione (*blocking effect*).

Si possono identificare tre regimi del rateo di regressione \dot{r} in funzione del flusso di massa G , definito come il rapporto tra portata di propellente all'interno del grano e l'area di porta. I tre regimi si differenziano per la tipologia di scambio termico dominante e i parametri che lo influenzano (Figura 1.5).

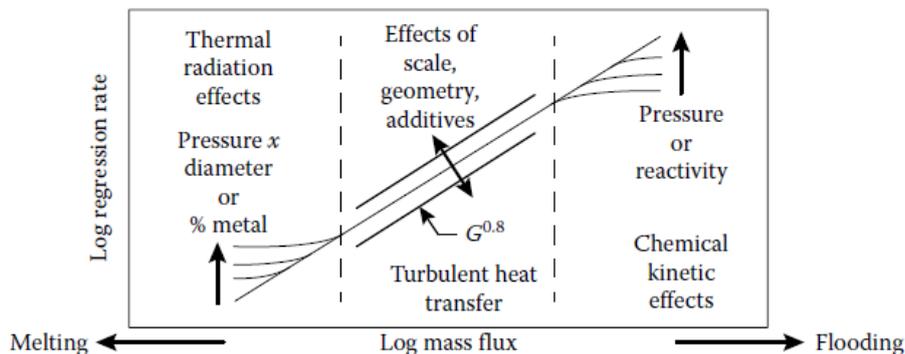


Figura 1.5: regimi del rateo di regressione in funzione di G [3]

Per valori bassi del flusso di massa G , la modalità di scambio termico che domina è l'irraggiamento. Infatti, bassi valori di G equivalgono a basse velocità del flusso di gas (dato che $G = \rho v$): ciò riduce l'effetto della convezione, che è tanto più forte quanto più è alta la velocità del flusso che lambisce la parete. Lo scambio termico radiativo aumenta con la densità dei gas caldi, e quindi con la pressione, e con la presenza di particelle metalliche incandescenti. Da qui la dipendenza del rateo di regressione dalla pressione in camera di combustione e dal contenuto di metallo all'interno del solido per bassi valori del flusso di massa. Valori troppo bassi del rateo di regressione, generalmente minori di 0.2 mm/s [13], porterebbero alla condizione di *melting* o *cooking*, nella quale gli strati del grano immediatamente sottostanti alla superficie, essendo esposti a flussi termici per un intervallo di tempo troppo elevato, si degradano, generando dei depositi carboniosi estremamente resistenti alle alte temperature. Ciò non

permette al combustibile di vaporizzare, determinando un inevitabile malfunzionamento del motore.

Ad alti valori del flusso di massa G , si manifestano gli effetti della cinetica chimica. Compare nuovamente la dipendenza dalla pressione in camera a causa della sua influenza sulla velocità delle reazioni. Una pressione maggiore equivale a una concentrazione dei reagenti maggiore; ne consegue una maggiore velocità delle reazioni chimiche e una crescita del rateo di regressione. L'incremento del flusso di massa è limitato dal raggiungimento della condizione di *flooding* (allagamento), in cui la velocità del flusso risulta talmente elevata da non permettere la corretta diffusione di ossidante e combustibile, impedendo a questi ultimi di reagire e determinando lo spegnimento della fiamma. Il limite di allagamento dipende dalla pressione in camera e dalla combinazione di propellenti.

Per valori intermedi del flusso di massa domina la convezione. L'irraggiamento fornisce un contributo trascurabile, sotto l'ipotesi di assenza di combustibile metallico, eliminando la dipendenza dalla pressione in camera (vantaggio rispetto ai SRM). In questo regime, l'aumento di G , e quindi della velocità dei gas, consente un'intensificazione dei gradienti termici a parete, con conseguente aumento del flusso termico e del rateo di regressione. Da un bilancio energetico in condizioni stazionarie sulla superficie del grano, considerando uno strato limite turbolento in presenza del *blowing* del combustibile vaporizzato, la dipendenza del rateo di regressione dal flusso di massa è espressa attraverso l'equazione [2]:

$$\dot{r} = 0.036 \frac{G^{0.8}}{\rho_f} \left(\frac{\mu}{x}\right)^{0.2} \beta^{0.23} \quad (1.8)$$

in cui ρ_f è la densità del combustibile solido, μ è la viscosità dinamica dei gas combusti, x è la coordinata assiale e β è il coefficiente di *blowing*, definito come il rapporto tra la differenza di entalpia tra la fiamma e la superficie del grano Δh e il calore necessario alla vaporizzazione del solido h_v (per unità di massa). Il parametro β , essendo una misura del flusso adimensionalizzato del combustibile vaporizzato in corrispondenza della superficie del grano, nasconde l'effetto del *blowing* sul rateo di regressione. Pertanto, l'esponente 0.23 giustifica l'effetto autolimitante dell'immissione di gas dalla superficie nello strato limite: un aumento del flusso di combustibile, che dovrebbe coincidere con un aumento di \dot{r} , comporta un incremento estremamente attenuato del rateo di regressione. Analizzando gli esponenti dei restanti parametri dell'equazione (1.8) che sono funzione di x , si nota come il flusso di massa G abbia un effetto maggiore sul rateo di regressione rispetto alla coordinata assiale. Il flusso di massa, che cresce con x a causa dell'aumento della portata di combustibile raccolta nel moto verso l'uscita, tende a far aumentare \dot{r} lungo l'asse del grano. Dall'altra parte, la dipendenza negativa da x mostra la diminuzione del rateo di regressione dovuta all'aumento dello spessore dello strato limite e alla riduzione dei gradienti termici a parete. Questi due effetti contrastati determinano un punto lungo l'asse del grano in cui \dot{r} è minimo [14]. Nonostante ciò, le differenze dei valori del rateo di regressione lungo il grano risultano limitate a causa della parziale compensazione reciproca tra gli effetti di

x e G . Ciò porta ad approssimare il rateo di regressione come costante lungo l'asse del grano, attraverso la relazione:

$$\dot{r} = aG_o^n \quad (1.9)$$

dove $G_o = \dot{m}_{ox}/A_p$ è il flusso di massa dell'ossidante, ovvero il rapporto tra portata di ossidante e area di porta. I parametri a e n sono costanti empiriche che dipendono da: dimensione del motore, geometria del grano, geometria degli iniettori e caratteristiche del flusso. L'equazione (1.9) approssima molto bene i dati sperimentali ottenuti per valori intermedi di G_o [14].

Il basso rateo di regressione limita le prestazioni degli endoreattori ibridi in termini di spinta. Dall'equazione (1.4) si può notare come la spinta sia pari al prodotto tra portata di propellente e velocità efficace di scarico. Quest'ultima non può essere variata eccessivamente, in quanto determina il consumo di propellente. Generalmente si tende a limitarla in un range ristretto attorno al suo valore massimo scegliendo un corretto rapporto di miscela

$$MR = \frac{\dot{m}_{ox}}{\dot{m}_f} \quad (1.10)$$

definito come il rapporto tra portata di ossidante e portata di combustibile. Dal *mixture ratio* MR dipende infatti c^* , la quale mostra anche una debole dipendenza dalla pressione in camera p_c , e C_F attraverso il rapporto tra i calori specifici γ . Il coefficiente di spinta è funzione altresì del rapporto di espansione dell'ugello ε e del rapporto tra pressione ambiente e pressione in camera p_0/p_c . Stabilita quindi c attraverso la combinazione di propellenti, l'architettura dell'ugello e la quota a cui si decide di valutare le prestazioni, ogni livello di spinta richiede una determinata portata di propellente, pari alla somma di portata di ossidante e combustibile, tra loro in un rapporto fissato da MR . La portata di propellente è calcolata attraverso la relazione:

$$\dot{m}_f = \rho_f \dot{r} A_b \quad (1.11)$$

con A_b superficie di combustione. Con un rateo di regressione limitato, e supponendo la geometria più semplice per un grano, ovvero quella con un unico foro cilindrico, l'aumento di portata di combustibile necessario per incrementare la spinta comporta un aumento di A_b e, quindi, della lunghezza del grano. Spinte elevate porterebbero a strutture lunghe e snelle, caratterizzate da alti valori del rapporto tra lunghezza e diametro L/D , che determinano l'insorgere di problematiche strutturali legate al *buckling* (instabilità). Metodi per mitigare gli effetti negativi del basso rateo di regressione [14] possono essere:

- la scelta di una combinazione di propellenti con un rapporto di miscela ottimale elevato, in modo tale da richiedere ridotte portate di combustibile per spinte crescenti. Una buona soluzione è l'utilizzo del perossido di idrogeno HP come ossidante, il quale, in combinazione con i combustibili solidi comunemente utilizzati negli ibridi, è caratterizzato da un MR stechiometrico intorno a 6, come mostrato in Figura 1.6.

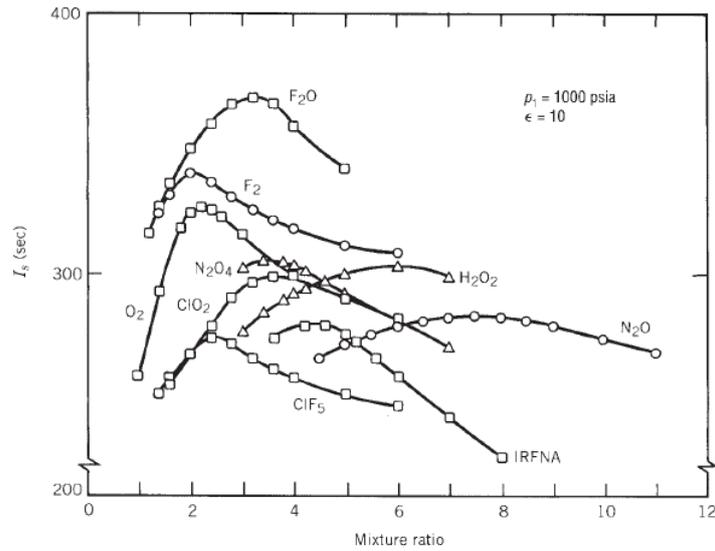


Figura 1.6: I_{sp} in funzione del MR per diversi ossidanti in combinazione con HTPB come combustibile con $p_c=1000$ psia e $\epsilon=10$ [2]

- l'utilizzo di un grano multiforo, che permette di incrementare A_b agendo sul perimetro dell'area di porta. È una strategia che consente di incrementare l'efficienza volumetrica della camera di combustione e la densità di spinta del motore, mantenendo valori ridotti del rapporto L/D . Per contro, questa soluzione aumenta la complessità di fabbricazione del grano, il quale viene indebolito a livello strutturale, con possibili rischi di malfunzionamento dovuti al distacco di residui che potrebbero impedire il corretto flusso dei gas combusti. Un ulteriore svantaggio è anche l'aumento della percentuale di residui (*sliver*) di combustibile. Due possibili geometrie di grano multiporta sono riportate in Figura 1.7. La configurazione detta *wagon-wheel* ("ruota del carro"), con un foro circolare centrale e una corona esterna di porte trapezoidali, permette di ridurre i residui rispetto alla configurazione con porte triangolari [14]. Il numero di fori necessari deve essere calcolato risolvendo un problema di ottimizzazione dell'endoreattore, nel quale è indispensabile considerare il livello di spinta desiderato, i valori limite che il rapporto di miscela può assumere durante il funzionamento, i vincoli di lunghezza e diametro del motore e i valori accettati del flusso di massa di ossidante [2].

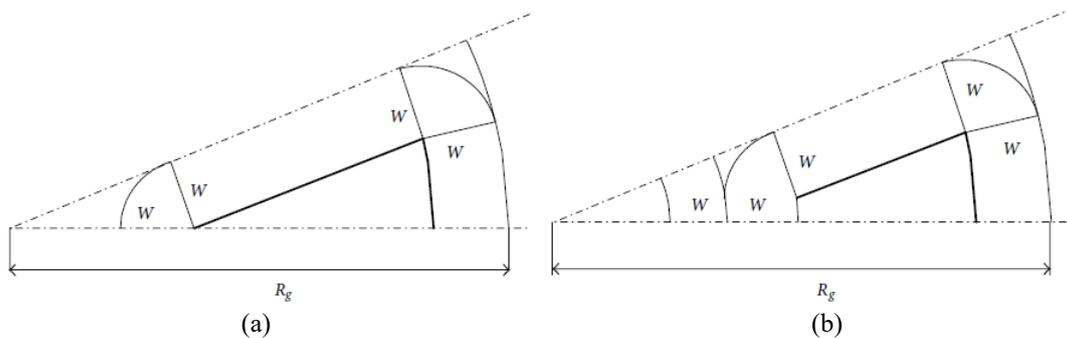


Figura 1.7: geometrie con porte triangolari (a) e porte trapezoidali (b) [14]

Soluzioni che mirano ad aumentare il rateo di regressione [14] sono ottenute con l'impiego di tipologie di combustibili diverse da quelle più comuni, o attraverso una modifica delle caratteristiche del flusso di ossidante all'interno del grano, agendo sulla geometria dello stesso e sul sistema di iniezione. Un'opzione è l'utilizzo di un grano di cera paraffinica, la quale, prima di vaporizzare, forma uno strato liquido caratterizzato da bassa viscosità sulla superficie del solido. L'interfaccia liquido/gas, perturbata dal flusso di gas, presenta delle instabilità (di Kelvin-Helmholtz) che portano a strappare delle goccioline di combustibile dallo strato liquido (Figura 1.8). Questo meccanismo, denominato *entrainment*, consente di trascinare del combustibile verso la zona di fiamma senza alterare lo strato limite e, quindi, i gradienti termici a parete. In altre parole, questo fenomeno permette al combustibile di fluire dalla superficie del grano alla zona di combustione senza l'effetto di *blocking*. Grazie alla significativa portata di combustibile trasportata mediante il meccanismo di *entrainment*, dovuta alla minor viscosità che caratterizza la fase liquida della cera paraffinica rispetto a quella dei polimeri tipicamente utilizzati, si ottengono ratei di regressione 3-4 volte superiori ai valori raggiunti con combustibili classici. Ulteriori vantaggi delle cere paraffiniche sono il basso costo, la semplicità di lavorazione e il ridotto impatto ambientale. L'aspetto negativo risiede nelle scarse proprietà meccaniche del materiale, che impongono l'aggiunta di additivi per poter resistere agli stress elevati a cui il solido è sottoposto in camera di combustione. Lo stesso fenomeno che permette un incremento del rateo di regressione è presente utilizzando grani di combustibili criogenici, come il metano. In questo caso, però, è presente lo svantaggio dovuto alle basse temperature necessarie e la complessità nel costruire grani di grandi dimensioni.

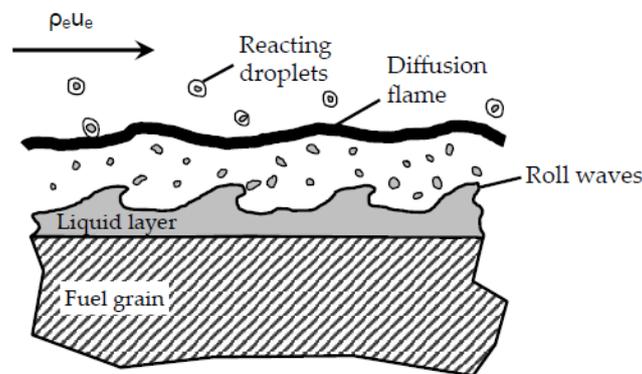


Figura 1.8: schema del meccanismo di *entrainment* [15]

Un'altra soluzione è l'aggiunta di particelle non volatili di combustibile metallico disperse all'interno del grano. La combustione altamente energetica del metallo provoca un aumento del flusso termico sulla superficie del solido, grazie al contributo dell'irraggiamento, che diventa la modalità di scambio termico dominante. Nonostante le particelle solide non alterino direttamente lo strato limite, il flusso termico a parete è attenuato, in parte, dalla diminuzione dello scambio termico convettivo, dovuta all'aumento del flusso di massa di combustibile in corrispondenza della superficie del grano (fenomeno di accoppiamento tra irraggiamento e convezione). L'effetto netto è l'aumento del rateo di regressione. In aggiunta, l'elevata densità del metallo comporta

un aumento dell'impulso specifico volumetrico e del flusso di massa. Ulteriori metodi per ottenere ratei di regressioni superiori consistono nel modificare l'architettura del grano, ad esempio trasformandolo in una serie di piastre attraverso le quali l'ossidante può fluire radialmente, o nel fornire una componente tangenziale al flusso di ossidante mediante iniettori a vortice (*swirl injector*), mantenendo inalterati la componente assiale e il flusso di massa di ossidante. La maggiore velocità del flusso riduce lo spessore dello strato limite, incrementando i gradienti termici a parete e il flusso termico convettivo [14,16].

1.3.6 Mixture ratio shifting

La variazione del rapporto di miscela, che si manifesta durante il funzionamento del motore, è una caratteristica unica degli endoreattori a propellenti ibridi. Le ragioni sono due: la dipendenza indiretta e non lineare della portata di combustibile dalla portata di ossidante, e la variazione dei parametri che determinano la portata di combustibile, come la superficie di combustione e il rateo di regressione. Le variazioni della portata di ossidante e combustibile determinano l'alterazione del *mixture ratio*. Ne consegue un cambiamento della velocità caratteristica e del rapporto dei calori specifici, essendo $c^* = c^*(MR)$ e $\gamma = \gamma(MR)$. Il parametro γ influenza il coefficiente di spinta, dal momento che $C_F = C_F\left(\gamma, \varepsilon, \frac{p_0}{p_c}\right)$. L'effetto finale è la variazione delle prestazioni del motore in termini di velocità efficace di scarico, impulso specifico e spinta. Gli endoreattori a propellenti liquidi e solidi non presentano questo fenomeno. Nei LRE, infatti, la spinta può essere regolata attraverso la portata agendo in maniera indipendente sulle portate di ossidante e di combustibile, mantenendo il loro rapporto costante. Nei SRM, invece, nonostante non si abbia la possibilità di regolare la spinta, il rapporto di miscela si mantiene pressoché costante, in quanto è un parametro stabilito in fase di fabbricazione del grano solido attraverso la sua composizione. Di seguito si descrive il fenomeno del *mixture ratio shifting* da un punto di vista analitico. Ricordando che il flusso di massa di ossidante è definito dall'espressione

$$G_o = \frac{\dot{m}_{ox}}{A_p} \quad (1.12)$$

la combinazione delle equazioni (1.9) e (1.11) permette di esprimere la portata di combustibile in funzione di quella di ossidante attraverso la relazione:

$$\dot{m}_f = \rho_f a \frac{A_b}{A_p^n} \dot{m}_{ox}^n \quad (1.13)$$

Raggruppando tutti i parametri costanti o non regolabili della (1.13) nel fattore k_b

$$k_b = \rho_f a \frac{A_b}{A_p^n} \quad (1.14)$$

si ottiene la seguente forma compatta:

$$\dot{m}_f = k_b \dot{m}_{ox}^n \quad (1.15)$$

Sostituendo la (1.15) nella relazione del rapporto di miscela (1.10) si ottiene l'equazione che descrive la variazione del MR in funzione della portata di ossidante:

$$MR = \frac{\dot{m}_{ox}^{1-n}}{k_b} \quad (1.16)$$

Regolare il modulo della spinta attraverso la portata di propellente \dot{m} , che a sua volta viene regolata tramite la portata di ossidante, dalla quale dipende mediante la relazione

$$\dot{m} = \dot{m}_{ox} + k_b \dot{m}_{ox}^n \quad (1.17)$$

equivale a modificare il rapporto di miscela MR .

Nel caso di grano con singola porta circolare, date le relazioni per l'area di porta A_p e per la superficie di combustione A_b

$$A_p = \pi R^2 \quad A_b = 2\pi R L_g \quad (1.18)$$

con R raggio del foro e L_g lunghezza del grano, l'espressione della portata di combustibile diventa la seguente:

$$\dot{m}_f = \rho_f 2\pi R L_g a \frac{\dot{m}_{ox}^n}{\pi^n R^{2n}} \quad (1.19)$$

Raggruppando tutti i parametri della (1.19) costanti durante il funzionamento del motore nel fattore \bar{K} , si ottiene la relazione:

$$\dot{m}_f = \bar{K} \frac{\dot{m}_{ox}^n}{R^{2n-1}} \quad (1.20)$$

che, inserita nella (1.10), fornisce l'equazione che descrive la variazione del MR in funzione della portata di ossidante e del raggio dell'area di porta:

$$MR = \frac{\dot{m}_{ox}^{1-n}}{\bar{K} R^{1-2n}} \quad (1.21)$$

Assumendo di mantenere costante la portata di ossidante \dot{m}_{ox} e sapendo che R aumenta con la regressione del grano, si possono verificare tre scenari diversi in base al valore dell'esponente n :

- $n < \frac{1}{2}$: \dot{m}_f cresce determinando una diminuzione di MR .
- $n = \frac{1}{2}$: \dot{m}_f si mantiene costante, così come MR . In questo caso la diminuzione del rateo di regressione \dot{r} , dovuta alla decrescita di G_o , è compensata perfettamente dall'aumento di A_b , generato dall'incremento di R .
- $n > \frac{1}{2}$: \dot{m}_f diminuisce con una conseguente crescita di MR .

Una possibile soluzione per mantenere MR costante durante il funzionamento del motore è quella di introdurre un secondo grado di libertà, ovvero un secondo parametro, in aggiunta alla portata di ossidante, da poter regolare. Si tratta della frazione della portata di ossidante che entra in camera e fluisce all'interno del grano, determinando \dot{m}_f

attraverso lo scambio termico convettivo. La dipendenza non lineare tra portata di combustibile e portata di ossidante, essendo $n < 1$, impone una ripartizione di quest'ultima (*splitting* di \dot{m}_{ox}). La frazione di ossidante che non entra direttamente in camera di combustione viene introdotta nel mixer, a valle del grano. Risulta necessario rapportare i benefici che derivano dal mantenere costante MR alla complessità introdotta con l'implementazione di questo sistema di controllo, tenendo in considerazione che la frazione di ossidante immessa a monte del grano deve variare in base alla regolazione della spinta voluta.

1.3.7 Sistema di alimentazione

I sistemi di alimentazione possono essere suddivisi in due grandi categorie:

- Sistemi con pressurizzazione dei serbatoi
- Sistemi con turbopompe

La scelta del sistema più adatto dipende dalla missione per cui è progettato l'endoreattore. Più dettagliatamente, il parametro che è necessario valutare è l'impulso totale I_t , definito dalla relazione (1.5). Esprimendo la spinta come il prodotto tra massa e accelerazione a , e assumendo un valore medio della massa del veicolo spaziale durante la missione m_{avg} (la massa varia durante la missione a causa del consumo di propellente), si ottiene l'espressione:

$$I_t = m_{avg} \int_0^{t_b} a dt = m_{avg} \Delta V \quad (1.22)$$

con ΔV che caratterizza la missione, e ingloba la variazione di velocità che deve subire il veicolo spaziale e le perdite di velocità che contraddistinguono la traiettoria (ΔV ideale o propulsivo). Valori alti di massa e ΔV propulsivo, come quelli tipici dei primi stadi dei lanciatori, determinano un elevato impulso totale. Quest'ultimo è a sua volta proporzionale alla massa di propellente e all'impulso specifico, come è possibile notare invertendo l'equazione (1.6):

$$I_t = M_p I_{sp} g_0 \quad (1.23)$$

A parità di impulso specifico, fissato con la scelta dei propellenti e dell'architettura dell'ugello, un impulso totale maggiore equivale ad un'elevata massa di propellente, a cui corrisponde un grande valore del volume dei serbatoi. In questi casi, è conveniente l'impiego di sistemi con turbopompe, in quanto la pressurizzazione, che richiede un rinforzo a livello strutturale dei serbatoi, determinerebbe un incremento eccessivo del peso degli stessi. Per missioni con impulso totale minore, come quelle degli stadi superiori di piccoli lanciatori, un sistema di alimentazione con pressurizzazione dei serbatoi è il più adatto. Nella categoria dei sistemi di alimentazione con pressurizzazione si distinguono:

- Sistema *blowdown*: necessita solamente del gas inerte pressurizzante all'interno del serbatoio di ossidante. Questa soluzione prevede il funzionamento con una pressione all'interno del *tank* sempre decrescente, a causa dell'espansione del

gas dovuta al consumo di propellente liquido. La diminuzione della pressione con cui viene fornito l'ossidante determina un profilo decrescente della pressione in camera di combustione e della spinta. Il sistema è caratterizzato dal parametro *blowdown ratio*, definito come il rapporto tra il volume del serbatoio e il volume occupato dal gas all'istante iniziale. Tale parametro assume tipicamente valori compresi tra 3 e 6, in modo tale da evitare valori troppo grandi, che comportano escursioni elevate tra la pressione iniziale e finale nel serbatoio di ossidante. I vantaggi di questo sistema sono la semplicità, il peso ridotto e l'affidabilità. Per contro, il sistema di controllo aumenta la sua complessità, in quanto deve calcolare la corretta durata di accensione del motore con un profilo di spinta decrescente per poter ottenere l'impulso totale richiesto dalla missione.

- Sistema con ripressurizzazione: presenta un serbatoio (*vessel*) che contiene il gas pressurizzante. Il gas viene immesso nel serbatoio di ossidante quando la pressione all'interno di quest'ultimo raggiunge un valore limite inferiore, mediante l'apertura di una valvola pirotecnica. Le fasi antecedente e successiva all'apertura della valvola sono fasi di funzionamento *blowdown*. Il sistema è caratterizzato da una maggiore complessità e maggior peso rispetto al sistema *blowdown*, ma consente di avere una pressione media in camera di combustione maggiore, limitando il deterioramento delle prestazioni del motore durante il funzionamento.
- Sistema con regolazione di pressione (*regulated pressure system*): presenta un serbatoio (*vessel*) contenente il gas pressurizzante e un regolatore di pressione. Questo dispositivo sente la differenza di pressione tra *vessel* e *tank* e, attraverso l'apertura della valvola, permette al gas di fluire all'interno del serbatoio di ossidante, per poter mantenere la pressione costante al suo interno. Il funzionamento a pressione costante termina quando la pressione nel *vessel*, al netto delle perdite di carico del gas, eguaglia quella all'interno del *tank*: da quel momento non è più possibile mantenere la pressione costante e inizia la fase di *blowdown*. È un sistema che risulta più complesso di quello con ripressurizzazione; inoltre, l'affidabilità si riduce a causa dell'elevato numero di cicli di apertura e chiusura della valvola di regolazione.

2 Processo di ottimizzazione

In questo capitolo viene introdotta brevemente la procedura di ottimizzazione della traiettoria e del motore del terzo stadio oggetto di questo studio. Successivamente è riportata una descrizione della missione. Infine, si analizza il modello matematico utilizzato per il design del motore e per la valutazione del funzionamento dello stesso. Una sottosezione è dedicata alla stima delle masse dei componenti dello stadio.

2.1 Ottimizzazione accoppiata di motore e traiettoria

L'ottimizzazione del terzo stadio avviene attraverso una procedura, sviluppata presso il Politecnico di Torino, che accoppia l'ottimizzazione del design del motore ibrido e l'ottimizzazione della traiettoria. Risulta necessario accoppiare le due ottimizzazioni in quanto la missione e il design del motore mostrano una dipendenza reciproca; infatti, i requisiti di missione influenzano le prestazioni ed i parametri di progetto del motore. L'ottimizzazione del design del motore avviene attraverso metodi diretti, in quanto i parametri di progetto del motore sono in numero ridotto. Inoltre, le equazioni che descrivono il funzionamento del motore non possono essere scritte in modo esplicito, impedendo l'utilizzo dei metodi indiretti, che invece sono impiegati per l'ottimizzazione della traiettoria di ascesa. Quest'ultima è caratterizzata da controlli continui (come la direzione della spinta), che richiederebbero una discretizzazione mediante un numero di parametri troppo elevato con l'utilizzo di metodi diretti [17].

Il metodo indiretto ottimizza la traiettoria di ascesa dello stadio per ogni set di parametri di progetto del motore, permettendo l'ottimizzazione della massa finale. Quest'ultima è funzione del ΔV propulsivo secondo l'equazione di Tsiolkovsky, che per un razzo monostadio assume la forma:

$$\frac{M_f}{M_i} = e^{-\frac{\Delta V}{c}} \quad (2.1)$$

con M_i massa iniziale e M_f massa finale dello stadio. La riduzione delle perdite di velocità, effettuata attraverso l'ottimizzazione della traiettoria, permette la massimizzazione della massa finale. Il metodo diretto interviene sull'ottimizzazione dei parametri di progetto, al fine di massimizzare il payload, data la massa finale. I parametri sono variati di piccole quantità per poter calcolare numericamente le derivate parziali del payload rispetto a ciascun parametro. Una procedura numerica che utilizza il metodo di Newton viene adottata per trovare i valori dei parametri di progetto che annullano simultaneamente le derivate parziali, e ai quali corrisponde il payload massimo. In questo modo, l'ottimizzazione accoppiata di motore e traiettoria permette di massimizzare il carico utile dello stadio data l'orbita finale.

2.1.1 Ottimizzazione della traiettoria

Il processo di ottimizzazione della traiettoria considera lo stadio come massa puntiforme. Le equazioni di stato in forma vettoriale sono le seguenti:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \\ \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} + \frac{\vec{F} - \vec{D}}{M} \\ \frac{dM}{dt} = -\frac{|\vec{F}|}{c^* C_F} \end{cases} \quad (2.2)$$

con M massa dello stadio, \vec{g} vettore dell'accelerazione di gravità, \vec{F} vettore spinta e \vec{D} vettore resistenza aerodinamica. Nella forma scalare, il vettore posizione \vec{r} è scomposto secondo le tre coordinate sferiche: raggio r , latitudine ϕ e longitudine θ rispetto al sistema di riferimento inerziale geocentrico-equatoriale. Il vettore velocità \vec{v} è scomposto nelle componenti: radiale u , in direzione est v e in direzione nord w in un sistema di riferimento locale. Le equazioni sono scritte in forma adimensionale per migliorare l'accuratezza dell'integrazione numerica [17]. Il campo gravitazionale, descritto dal vettore \vec{g} , è assunto inversamente proporzionale al quadrato della distanza. Il modulo del vettore della resistenza aerodinamica \vec{D} è calcolato attraverso l'espressione:

$$D = \frac{1}{2} \rho_{amb} C_D S v_{rel}^2 \quad (2.3)$$

con S superficie di riferimento e C_D coefficiente di resistenza aerodinamica funzione del numero di Mach. La velocità relativa v_{rel} è ottenuta sottraendo alla velocità assoluta la velocità di rotazione terrestre. Il modulo della spinta è espresso riformulando la (1.1), inglobando i termini non dipendenti dalla pressione ambiente in F_{vac} , ottenendo:

$$F = F_{vac} - \varepsilon A_t p_{amb} \quad (2.4)$$

Nel caso della traiettoria del terzo stadio, che non scende mai sotto i 200 km, p_{amb} è considerabile nulla, con conseguente $D = 0$ e $F = F_{vac}$, quest'ultima calcolata esplicitandola mediante la relazione (1.2).

Assegnati il design del motore e le caratteristiche dello stadio, l'ottimizzazione della traiettoria è effettuata attraverso l'applicazione della teoria del controllo ottimale. Una variabile aggiuntiva è associata ad ogni equazione di stato, e si definisce l'Hamiltoniana:

$$H = \lambda_r \vec{v} + \lambda_v \left(\frac{\vec{r}}{|r|^3} + \frac{\vec{F} - \vec{D}}{M} \right) - \lambda_m \frac{F}{c} \quad (2.5)$$

che assume un'espressione diversa in base alla fase della traiettoria considerata. La teoria del controllo ottimale fornisce le equazioni di Eulero-Lagrange [18] per le variabili aggiuntive:

$$\begin{cases} \frac{d\lambda_r}{dt} = -\frac{dH}{d\vec{r}} \\ \frac{d\lambda_v}{dt} = -\frac{dH}{d\vec{v}} \\ \frac{d\lambda_m}{dt} = -\frac{dH}{dm} \end{cases} \quad (2.6)$$

insieme alle equazioni algebriche che definiscono le variabili di controllo (come la direzione della spinta) e le condizioni al contorno ottimali che determinano la durata delle varie fasi della missione (durata accensioni e fase di *coasting*). Il problema delle condizioni al contorno multiple (MPBVP) che ne deriva, viene risolto da procedure numeriche basate sul metodo di Newton: si assegnano dei valori di tentativo alle incognite del problema, corrispondenti alle variabili aggiuntive e ai parametri liberi, e si modificano iterativamente fino al soddisfacimento delle condizioni al contorno [17].

2.2 Missione

La missione del terzo stadio consiste nell'inserimento del payload in un'orbita descritta dai parametri orbitali riportati in Tabella 2.1.

a [km]	e	i [deg]	Ω [deg]	ω [deg]
6878	0	97.50	149.57	0

Tabella 2.1: parametri orbitali dell'orbita finale

L'orbita finale è circolare e retrograda, con una quota di 500 km che richiede una velocità di 7.61 km/s per rimanere in orbita. La missione del terzo stadio inizia ad una quota di 245.75 km, ad una velocità di 4.57 km/s. Nonostante lo studio e l'ottimizzazione riguardino solamente la traiettoria di ascesa del terzo stadio, per completezza si elencano di seguito tutte le varie fasi della missione dell'intero lanciatore composto da tre stadi, il cui profilo di ascesa è basato su quello del Vega:

1. Ascesa verticale
2. Rotazione della velocità attraverso la manovra di *kick* (*kick phase*)
3. Ascesa con portanza nulla e spinta allineata alla velocità (*zero-lift gravity turn*)
4. Fase di *coasting* tra lo spegnimento e separazione del primo stadio e l'accensione del secondo
5. Ascesa con portanza nulla e spinta allineata alla velocità (*zero-lift gravity turn*)
6. Fase di *coasting* tra lo spegnimento e separazione del secondo stadio e l'accensione del terzo; include l'espulsione del *fairing*
7. Fase con spinta libera (direzione ottimale) e p_t costante
8. Fase di *blowdown* con spinta libera (direzione ottimale)
9. Fase di *coasting* tra la prima e la seconda accensione del terzo stadio
10. Seconda accensione per l'inserimento in orbita con funzionamento in *blowdown*

Le fasi 1-6, riguardanti il primo e secondo stadio, non vengono prese in considerazione in questo studio. Sono fornite le condizioni in termini di posizione e velocità del terzo

stadio, con massa iniziale pari a 3443.37 kg, all'inizio della fase 7, che corrisponde all'inizio della missione del terzo stadio. La durata delle fasi dalla 7 alla 10 sono parametri liberi che vengono calcolate attraverso il processo di ottimizzazione della traiettoria.

2.3 Design del motore

L'endoreattore ibrido considerato nel processo di ottimizzazione presenta un grano di combustibile solido in paraffina con una singola porta circolare, come quello rappresentato in Figura 1.3. Come ossidante utilizza una soluzione acquosa di perossido di idrogeno al 90% (HTP). Il rateo di regressione è assunto costante lungo l'asse del grano e funzione del solo flusso di massa di ossidante $G_o = \dot{m}_{ox}/A_p$, attraverso la relazione (1.9), con coefficiente $a = 1.5 \times 10^{-4}$ ed esponente $n = 0.5$. Si considerano le perdite di carico lungo l'asse del grano (all'interno della camera di combustione) legando la pressione p_1 , presente a monte del grano, con la pressione totale p_c , a monte dell'ugello, mediante l'equazione:

$$p_1 = \left[1 + 0.2 \left(\frac{A_t}{A_p} \right)^2 \right] p_c \quad (2.7)$$

dove $A_p = \pi(R_i + y)^2$, con y spessore del grano consumato all'istante t . La pressione totale p_c viene calcolata in ogni istante temporale attraverso la relazione:

$$p_c = \frac{\dot{m}c^*}{A_t} = \frac{(\dot{m}_{ox} + \dot{m}_f)c^*}{A_t} \quad (2.8)$$

che corrisponde alla (1.3) invertita. La portata di ossidante è ottenuta, sotto l'ipotesi di flusso turbolento incomprimibile, dalla relazione:

$$\dot{m}_{ox} = \sqrt{\frac{(p_t - p_1)}{Z}} \quad (2.9)$$

dove Z indica la resistenza idraulica, costante durante il funzionamento. Z ingloba le perdite di carico del flusso di ossidante nel suo percorso dal *tank* al collettore del sistema di iniezione, e quelle generate dagli iniettori necessarie per garantire l'immissione del getto in camera con una corretta atomizzazione. La portata di combustibile, invece, si calcola con la relazione già riportata nel capitolo precedente:

$$\dot{m}_f = \rho_f \dot{r} A_b = \rho_f \dot{r} L_g P \quad (2.10)$$

con $P = 2\pi(R_i + y)$ perimetro della porta circolare. La grandezza y , presente nel perimetro di porta P e nell'area di porta A_p , è ottenuta dall'integrazione nel tempo del rateo di regressione \dot{r} . Il rapporto tra portata di ossidante e combustibile dato dalla relazione (1.10) fornisce il *mixture ratio* ad ogni istante temporale.

Per quanto riguarda i parametri di performance, il coefficiente di spinta è calcolato mediante l'equazione:

$$C_F = \eta_F \left\{ \sqrt{\frac{2\gamma^2}{\gamma-1} \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \left[1 - \left(\frac{p_e}{p_c}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right] + \varepsilon \frac{p_e}{p_c}} \right\} - \varepsilon \frac{p_0}{p_c} \quad (2.11)$$

con $\eta_F = 0.98$ fattore di correzione del valore ottenuto considerando un'espansione isoentropica unidimensionale di un fluido omogeneo con composizione costante (*frozen equilibrium*). Il fattore η_F ingloba gli effetti delle perdite dovute alla composizione costante (cinetica chimica), al flusso multifase (fluido non omogeneo), allo scambio termico con le pareti dell'ugello (flusso diabatico), all'attrito (presenza di strato limite) e alla divergenza del flusso in uscita (flusso non assiale e non unidimensionale). La variabile p_0 indica la pressione ambiente, calcolata in funzione della quota attraverso l'interpolazione dei valori del modello dell'Atmosfera Standard USA, mentre $\frac{p_e}{p_c} = \frac{p_e}{p_c}(\varepsilon, \gamma)$. I valori della velocità caratteristica c^* e del rapporto dei calori specifici γ sono calcolati attraverso dei polinomi di quarto grado del *mixture ratio* interpolanti i valori ottenuti considerando un modello *frozen equilibrium* in camera di combustione, con $p_c = 30 \text{ bar}$. I due polinomi interpolanti sono riportati in Figura 2.1.

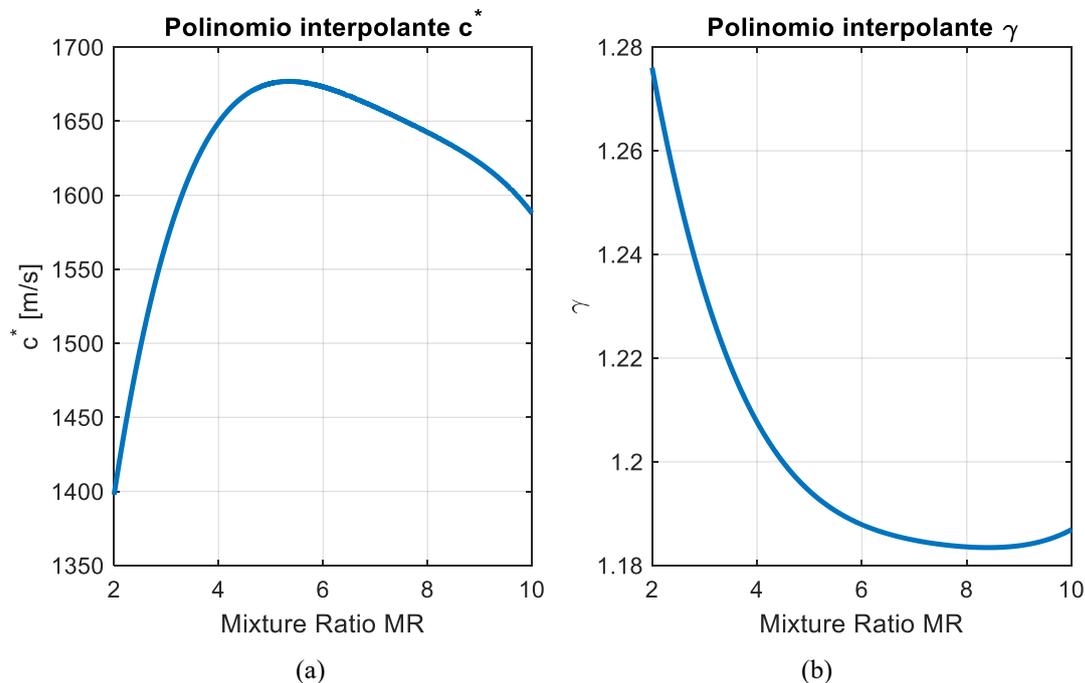


Figura 2.1: polinomio interpolante c^* (a) e polinomio interpolante γ (b)

Il valore di c^* ottenuto dal polinomio interpolante viene corretto con un'efficienza di combustione $\eta^* = 0.96$, che tiene conto delle perdite dovute al mixing imperfetto e alla combustione incompleta. La spinta è fornita dall'inversione della (1.2), ovvero:

$$F = p_c A_t C_F \quad (2.12)$$

Le equazioni (2.7-2.10), insieme all'equazione del *mixture ratio* (1.10) e al polinomio interpolante di c^* , formano un sistema di equazioni non lineari risolto numericamente per ogni istante temporale t , note le grandezze geometriche e la pressione nel *tank* p_t [13].

Per il calcolo delle diverse grandezze all'istante iniziale, si sfruttano i valori dei sei parametri di progetto del motore forniti in input: *mixture ratio* iniziale MR_i , spinta iniziale F_i , rapporto tra area di gola e area di porta iniziale $(A_t/A_p)_i$, pressione iniziale nel *tank* dell'ossidante $p_{t,i}$, rapporto di espansione iniziale dell'ugello ε_i e frazione della massa di ossidante amo_1 consumata a p_t costante rispetto alla massa iniziale dello stadio. Dal MR_i si ottengono c_i^* e γ_i attraverso i polinomi interpolanti. Noti γ_i , ε_i e la quota iniziale, si ha $C_{F,i}$ dalla (2.11). Ciò permette di calcolare la portata di propellente iniziale:

$$\dot{m}_i = \frac{F_i}{c_i^* C_{F,i}} \quad (2.13)$$

La portata di propellente totale iniziale consente di calcolare la portata di combustibile iniziale:

$$\dot{m}_{f,i} = \frac{\dot{m}_i}{(1 + MR_i)} \quad (2.14)$$

e, di conseguenza, la portata di ossidante iniziale:

$$\dot{m}_{ox,i} = \dot{m}_i - \dot{m}_{f,i} \quad (2.15)$$

La pressione iniziale in camera di combustione $p_{c,i}$ è determinata dalla pressione iniziale nel *tank* dell'ossidante $p_{t,i}$, uno dei parametri di progetto forniti in input, con l'espressione:

$$p_{c,i} = p_{t,i} - \Delta p_i \quad (2.16)$$

dove Δp_i , assunta pari a 15 *bar*, indica la caduta di pressione iniziale tra il *tank* dell'ossidante e la parte terminale della camera di combustione. Questa assunzione permette di mantenere il rapporto p_t/p_c , che varia durante il funzionamento del motore, maggiore di 1.5, condizione che consente di evitare l'accoppiamento tra la camera di combustione e il sistema di alimentazione dell'ossidante [17]. La portata di propellente iniziale permette di calcolare anche l'area di gola iniziale $A_{t,i}$:

$$A_{t,i} = \frac{\dot{m}_i c_i^*}{p_{c,i}} = \pi R_{th,i}^2 \quad (2.17)$$

attraverso la quale si ricava l'area di porta iniziale $A_{p,i}$:

$$A_{p,i} = \frac{A_{t,i}}{(A_t/A_p)_i} = \pi R_i^2 \quad (2.18)$$

Con $A_{p,i}$ e $\dot{m}_{ox,i}$ si ha il flusso di massa di ossidante iniziale $G_{o,i}$ e, quindi, il rateo di regressione iniziale \dot{r}_i . Invertendo la (2.10), con il perimetro di porta iniziale $P_i = 2\pi R_i$, si ottiene la lunghezza del grano L_g . Le equazioni (2.13-2.18) permettono di definire completamente la geometria del grano e dell'ugello.

Per il calcolo della resistenza idraulica Z è necessario invertire l'equazione (2.9), con $p_{1,i}$ calcolata con la (2.7):

$$Z = \frac{p_{t,i} - p_{1,i}}{\dot{m}_{ox,i}^2} \quad (2.19)$$

La resistenza è mantenuta costante durante la prima accensione. Per la seconda accensione, in cui è richiesto un livello di spinta inferiore per effettuare la manovra di inserimento in orbita, Z è moltiplicata per un fattore pari a 20, per poter simulare la chiusura di tre dei quattro condotti che portano l'ossidante dal *tank* al collettore del sistema di iniezione. In questo modo viene ridotta la portata di ossidante e del propellente complessivo, con conseguente decremento della spinta.

Nel modello di endoreattore adottato, è presente il fenomeno di erosione della gola dell'ugello, il quale utilizza un sistema di controllo termico passivo, corrispondente ad un rivestimento di materiale ablativo. In questo caso, non si considera l'influenza, sul rateo di erosione, delle proprietà termofluidodinamiche del gas, che nascondono la dipendenza dalla composizione chimica, ovvero dal *mixture ratio* MR . Si adotta un rateo di erosione dipendente solamente dalla pressione in camera p_c e dal diametro della gola dell'ugello D_{th} , attraverso la relazione:

$$\dot{s} = \dot{s}_{ref} \frac{p_c^{0.8}}{D_{th}^{0.2}} \quad (2.20)$$

con $\dot{s}_{ref} = 0.055 \text{ mm/s}$, p_c in bar e D_{th} in mm. Il raggio di gola R_{th} dell'ugello all'istante t è dato da:

$$R_{th} = R_{th,i} + \int_0^t \frac{\dot{s}}{2} dt \quad (2.21)$$

Il sistema di alimentazione dell'ossidante scelto è di tipo *partially regulated*, con una prima fase della prima accensione con pressione nel *tank* dell'ossidante costante, e una successiva fase di funzionamento *blowdown*. La seconda accensione viene eseguita completamente in *blowdown*. La fase a pressione costante, in cui $p_t = p_{t,i}$, è ottenuta attraverso l'immissione del gas pressurizzante, contenuto in un *vessel*, nel serbatoio di ossidante. La pressione iniziale $p_{s,i}$ dell'elio nel *vessel* è assunta pari a 310 bar, mentre la pressione finale $p_{s,f}$ è data dalla relazione:

$$p_{s,f} = p_{t,i} + \Delta p_s \quad (2.22)$$

dove $\Delta p_s = 20$ bar indica la caduta di pressione del gas tra *vessel* e *tank*. Considerando un'espansione isoterma del gas all'interno del *vessel* durante la fase con pressione nel *tank* p_t costante, si calcola il volume del serbatoio del *vessel* e la massa di gas al suo

interno. Nel serbatoio di ossidante si considera un *ullage volume* iniziale $(V_g)_i$ pari a 5.25% del volume dell'ossidante totale $(m_{ox})_f/\rho_{ox}$, per rendere più stabile la risposta alla regolazione. Risulta necessario fornire un valore di tentativo per $(m_{ox})_f$ in quanto il valore finale corretto è ottenuto solamente al termine della missione del motore, attraverso l'integrazione della (2.9). La fase di *blowdown* inizia nell'istante in cui l'integrazione dell'equazione della portata di ossidate (2.9) fornisce una massa di ossidante consumata pari a $(m_{ox})_{bd} = am_{o1} \cdot M_{tot,i}$, con $M_{tot,i}$ massa iniziale dello stadio. In questa fase, la pressione nel *tank* è data dall'equazione dell'espansione adiabatica del gas al suo interno:

$$p_t = p_{t,i} \left[\frac{(V_g)_{bd}}{V_g} \right]^{\gamma_g} \quad (2.23)$$

dove $V_g = (V_g)_i + m_{ox}/\rho_{ox}$ è il volume del gas nel *tank* all'istante generico t e $(V_g)_{bd} = (V_g)_i + (m_{ox})_{bd}/\rho_{ox}$ è il volume del gas nel *tank* all'inizio della fase di *blowdown*.

2.3.1 Stima delle masse dello stadio

Attraverso l'integrazione dell'equazioni (2.9) e (2.10) si ottengono rispettivamente la massa di ossidante consumato e la *web thickness* consumata. Ciascuna di queste grandezze viene incrementata del 7%, in modo tale da considerare i residui di ossidante e combustibile. Le masse e le dimensioni di vari componenti vengono calcolate mediante formule interpolatorie ottenute come funzioni di secondo grado di due o più parametri [19], ad eccezione della massa del *case*, che è assunta costante e pari a 325 kg. Più precisamente:

- La massa e l'altezza del *tank* dell'ossidante sono funzioni del suo diametro e del suo volume
- La massa e l'altezza del *vessel* del gas pressurizzante sono funzioni del suo diametro e del suo volume
- Le masse della camera di combustione e dell'ugello, la lunghezza e il raggio della camera di combustione e la lunghezza totale dello stadio sono funzioni di: rapporto di espansione iniziale dell'ugello, diametro esterno del grano, diametro di gola iniziale e lunghezza del grano.

I valori delle masse calcolate con le formule interpolatorie vengono corretti attraverso delle funzioni lineari:

- della pressione iniziale in camera di combustione $p_{c,i}$ nel caso delle masse dell'ugello e della camera di combustione
- della pressione iniziale nel *tank* $p_{t,i}$ nel caso della massa del *tank*
- della pressione iniziale nel *vessel* $p_{s,i}$ nel caso della massa del *vessel*.

In questo modo si considera il rinforzo strutturale necessario nei vari elementi all'aumentare della pressione al loro interno.

Le masse ottenute dalle formule di interpolazione, in aggiunta a quelle del gas pressurizzante, del *case* e dei residui di ossidante e combustibile, vengono sottratte alla massa finale (la massa iniziale da cui è stata detratta la massa del propellente consumato) per ottenere il payload.

Per quanto riguarda il calcolo dell'altezza dei due serbatoi, si considera un diametro del *tank* pari a 0.55 m e un diametro del *vessel* pari a 0.36 m.

3 Risultati

In questo capitolo si riportano e si commentano i risultati ottenuti mediante l'ottimizzazione accoppiata della traiettoria e del motore del terzo stadio a propellenti ibridi. Dopo aver introdotto i parametri di progetto e i loro valori nominali, si mostrano i risultati ottenuti con l'ottimizzazione di uno o più parametri in assenza di vincoli. Questo primo step permette di valutare gli effetti dei singoli parametri sulle performance del motore e sulle restanti grandezze dello stadio. Le considerazioni effettuate sui risultati dell'ottimizzazione libera determinano la scelta dei parametri da ottimizzare in presenza di vincoli relativi all'accelerazione massima e all'ingombro trasversale dello stadio. I risultati dell'ottimizzazione vincolata sono riportati nella sezione 3.3. Per ciascuna delle analisi eseguite, gli indici di prestazione e gli andamenti delle grandezze sono riferiti solamente alla prima accensione. Quest'ultima, infatti, fornendo la maggior parte dell'impulso totale richiesto dalla missione, è quella che determina le prestazioni e che impatta maggiormente sul payload.

3.1 Parametri di progetto e valori nominali

Il processo di ottimizzazione, che ha come fine ultimo la massimizzazione del payload di un terzo stadio, prende in considerazione i seguenti parametri di progetto:

- Il rapporto di miscela iniziale (*mixture ratio*) MR_i
- La spinta iniziale F_i
- Il rapporto tra area di gola iniziale e area di porta iniziale $(A_t/A_p)_i$
- Il rapporto amo_1 tra la massa di ossidante consumata a pressione del *tank* costante $p_{t,i}$ e la massa iniziale dello stadio
- La pressione iniziale nel *tank* dell'ossidante $p_{t,i}$, pari alla pressione alla quale verrà fornito l'ossidante nella fase iniziale della prima accensione del motore (sistema *partially regulated*)
- Il rapporto di espansione iniziale dell'ugello ε_i

Il codice, che è in grado di ottimizzare uno o più parametri contemporaneamente, riceve in ingresso i valori dei suddetti parametri, i quali identificano il punto di progetto iniziale del processo di ottimizzazione. Qualora si riesca a convergere ad una soluzione, i valori dei parametri oggetto di ottimizzazione vengono aggiornati con quelli ottimizzati. Questi ultimi, insieme ai valori iniziali dei parametri non coinvolti nel processo, costituiscono il punto di progetto ottimizzato. Nella Tabella 3.1 sono riportati i valori nominali dei parametri di progetto, forniti in input al codice per ogni caso di ottimizzazione descritto nei paragrafi seguenti.

MR_i	6
F_i [kN]	55
$(A_t/A_p)_i$	0.2
amo_1	0.53
$p_{t,i}$ [bar]	45
ε_i	65

Tabella 3.1: valori nominali dei parametri di progetto

3.2 Ottimizzazione in assenza di vincoli applicati

Come anticipato nel sottocapitolo precedente, il codice di ottimizzazione riesce a gestire più parametri contemporaneamente, la scelta dei quali può essere effettuata arbitrariamente. L'approccio adottato per l'ottimizzazione prevede inizialmente analisi effettuate considerando ogni parametro singolarmente. In questo modo è possibile individuare quali parametri presentano un punto stazionario (punto di massimo) per il payload in dei range di valori che permettono al codice di convergere ad una soluzione in assenza di vincoli applicati. Per giunta, questa impostazione consente di valutare gli effetti dei singoli parametri sulle varie grandezze, specialmente quelle caratterizzate da valori limite che, se non rispettati, renderebbero inaccettabile la soluzione ottenuta. Successivamente sono state condotte ottimizzazioni con un numero crescente di parametri, fino ad un massimo di quattro, numero per il quale non è si è giunti a convergenza con nessuna delle combinazioni di parametri considerate.

3.2.1 Ottimizzazione di un singolo parametro di progetto

Tra le sei analisi condotte considerando un solo parametro, il codice è riuscito a convergere solamente nei casi in cui il parametro di progetto ottimizzato era: il *mixture ratio* MR_i , la spinta F_i e la frazione amo_1 di massa di ossidante consumata a pressione costante. Nei restanti tre casi, il codice non è stato in grado di convergere a causa dei valori assunti dai parametri oggetto di ottimizzazione. Nello specifico:

- Il rapporto di espansione iniziale dell'ugello ε_i mostra la tendenza a crescere senza mai raggiungere un punto stazionario.
- Il rapporto tra area di gola iniziale e area di porta iniziale $(A_t/A_p)_i$ tende ad un punto di massimo sempre crescente. Ciò determina il raggiungimento della condizione $(A_t/A_p)_i \geq 1$, corrispondente al caso limite $G > G_{max}$, in cui il flusso di massa di ossidante supera il valore massimo consentito. Tale condizione non risulta ammissibile durante il funzionamento dell'endoreattore, in quanto comporterebbe velocità eccessive dell'ossidante all'interno del grano, con conseguenti eccessive perdite di pressione, regressione non uniforme del grano e, soprattutto, la possibilità che la fiamma si estingua (fenomeno di *flooding*).
- La pressione iniziale nel *tank* dell'ossidante $p_{t,i}$ decresce repentinamente fino al raggiungimento della condizione di funzionamento in cui $G > G_{max}$, non tollerabile per quanto detto nel punto precedente.

In questo sottocapitolo verranno quindi confrontati ed analizzati i risultati ottenuti nei casi a un parametro in cui si è raggiunta la convergenza.

Analizzando i parametri di progetto iniziali ottimizzati riportati in Tabella 3.2, si nota come la massimizzazione del payload si ottenga con una diminuzione della *mixture ratio* iniziale MR_i del 0.19%, un aumento della spinta iniziale F_i del 52.33% ed una diminuzione del parametro amo_1 del 28.83% rispetto ai valori nominali forniti in input.

Parametro ottimizzato	MR_i	F_i	amo_1
MR_i	5.9889	6	6
F_i [kN]	55	83.78	55
$(A_t/A_p)_i$	0.2	0.2	0.2
amo_1	0.53	0.53	0.3772
$p_{t,i}$ [bar]	45	45	45
ε_i	65	65	65

Tabella 3.2: parametri di progetto ottimizzati nei casi di ottimizzazione a un parametro

Per poter spiegare i valori assunti dai parametri di progetto ottimizzati, è necessario analizzare i valori delle masse dei vari componenti del terzo stadio, riportati in Tabella 3.3. Il caso di ottimizzazione del *mixture ratio* MR_i , ai risultati del quale verranno confrontate le rispettive grandezze dei restanti due casi nel seguito del paragrafo, presenta un payload pari a 173.42 kg. Ottimizzando la spinta iniziale, invece, il payload mostra un incremento del 5.8%, corrispondente a circa 9.5 kg. Il motivo principale risiede nella massa di propellente immagazzinato $M_{prop,tot}$, la quale diminuisce del 0.53%, pari a 13.4 kg. Ciò comporta, a parità di massa iniziale, un aumento della massa finale a secco della stessa quantità. Tra i componenti della massa finale a secco, la massa dell'ugello M_{ug} si riduce di 5.2 kg, pari al 3.5%, e la massa della camera di combustione M_{cc} aumenta di 10 kg, ovvero del 8.7%.

Nel caso di ottimizzazione di amo_1 il payload presenta un aumento del 2.9%, pari a 5.5 kg circa. La ragione principale è la riduzione del 14.7%, pari a 5.5 kg, della massa del serbatoio di gas M_s . La diminuzione di amo_1 , ovvero della massa di ossidante consumato a pressione costante, determina la riduzione della massa di gas pressurizzante necessaria M_{gas} , la quale diminuisce di 3.5 kg. A parità di pressione iniziale del serbatoio $p_{s,i}$ e temperatura iniziale $T_{s,i}$, la riduzione della massa comporta la riduzione del volume del serbatoio, con conseguente diminuzione della massa dello stesso.

Per quanto appena analizzato, si può affermare che l'aumento della spinta iniziale permette una riduzione della quantità di propellente necessaria per compiere la missione, mentre il decremento di amo_1 riduce la quantità di gas pressurizzante e la massa del suo serbatoio. In entrambi i casi, l'effetto utile è l'incremento del payload.

Parametro ottimizzato	MR_i	F_i	amo_1
Payload [kg]	173.42	182.85	178.82
M_t [kg]	130.62	129.94	130.09
M_s [kg]	38.44	38.44	32.78
M_{cc} [kg]	113.98	123.84	116.44
M_{ug} [kg]	149.05	143.81	150.42
$M_{prop,tot}$ [kg]	2500.28	2486.91	2500.72
$M_{prop,consumato}$ [kg]	2327.09	2316.82	2327
$M_{ox,tot}$ [kg]	2149.41	2133.22	2136.63
$M_{grano,tot}$ [kg]	350.86	353.69	364.09
M_{gas} [kg]	12.57	12.56	9.1
M_{case} [kg]	325	325	325
$M_{tot,iniziale}$ [kg]	3443.37	3443.37	3443.37
M_{finale} [kg]	1116.28	1126.55	1116.37

Tabella 3.3: masse nei casi di ottimizzazione a un parametro

Relativamente alle dimensioni geometriche, riportate in Tabella 3.4, si evidenzia come l'aumento di F_i determini un aumento degli ingombri assiali dello stadio. A parità di pressione in camera, l'aumento della spinta iniziale è permesso grazie all'aumento dell'area di gola e della portata di propellente. L'aumento del primo parametro comporta, avendo mantenuto ε_i e $(A_t/A_p)_i$ costanti, un incremento del diametro della sezione di uscita dell'ugello e del diametro dell'area di porta iniziale. L'incremento della portata di propellente, invece, richiede un aumento della portata di ossidante e di combustibile; quest'ultima è proporzionale alla lunghezza del grano L_{grano} , il cui aumento comporta un incremento anche della lunghezza della camera di combustione L_{cc} e della lunghezza totale dello stadio L_{tot} . In particolare, la lunghezza totale mostra un aumento del 19%, corrispondente a 53 cm.

Il caso di ottimizzazione di amo_1 presenta le stesse dimensioni geometriche del caso di ottimizzazione di MR_i , ad eccezione della lunghezza del serbatoio L_s , la quale si riduce insieme al volume del serbatoio, avendo mantenuto il diametro D_s costante.

Parametro ottimizzato	MR_i	F_i	amo_1
L_t [mm]	1855.02	1841.09	1844.01
L_s [mm]	1330.64	1330.64	1044.09
L_{grano} [mm]	1327.35	1635.45	1325.09
L_{cc} [mm]	2014.45	2316.34	2014.65
L_{ug} [mm]	803.70	1037.79	803.70
L_{case} [mm]	2200	2200	2200
L_{tot} [mm]	2818.16	3354.13	2818.34
$D_{grano,interno,iniz}$ [mm]	247.94	306.01	247.94
$D_{grano,interno,fin}$ [mm]	624.32	603.46	634.49
web thick. iniziale [mm]	201.36	159.14	206.81
web thick. consumata [mm]	188.19	148.73	193.28
$D_{grano,esterno}$ [mm]	650.67	624.28	661.55
D_{cc} [mm]	683.24	656.22	694.29
D_t [mm]	550	550	550
D_s [mm]	360	360	360
$D_{gola,iniz}$ [mm]	110.88	136.85	110.88
$D_{gola,fin}$ [mm]	142.99	159.39	143.43
$D_{uscita,ugello}$ [mm]	893.96	1103.32	893.95

Tabella 3.4: dimensioni geometriche nei casi di ottimizzazione a un parametro

Le prestazioni del motore sono espresse attraverso i parametri di performance, calcolati come media integrale sull'intervallo di tempo di durata della prima accensione Δt_{burn1} e riportati in Tabella 3.5. Il caso di ottimizzazione della spinta iniziale è caratterizzato da una spinta media maggiore e, di conseguenza, da intervalli di accensione minori. Infatti, a parità di ΔV necessario per effettuare il trasferimento orbitale richiesto dalla missione, l'aumento della spinta media determina una riduzione della durata della prima accensione Δt_1 di oltre il 30%. Inoltre, un MR_{medio} inferiore determina una velocità caratteristica media superiore, e il minor tempo di accensione comporta una minor erosione della gola, con conseguente ε_{fin} maggiore e $C_{F,medio}$ maggiore. Da qui, prestazioni migliori in termini di velocità efficace di scarico ed impulso specifico. L'aumento della spinta, subordinato all'aumento della portata di ossidante, comporta anche un aumento del flusso di massa di ossidante medio e del rateo di regressione medio.

Nel caso di ottimizzazione di amo_1 , la riduzione della durata di funzionamento a pressione costante e l'aumento della durata della fase di *blowdown* comportano una F_{media} inferiore e intervalli di accensione maggiori. Il prolungamento della prima accensione è causa della maggior erosione della gola, riducendo il $C_{F,medio}$. Ciò compensa la maggior c_{media}^* e determina prestazioni in termini di c e I_{sp} molto simili a quelle del caso di ottimizzazione di MR_i .

Prendendo in considerazione l'accelerazione massima registrata (Tabella 3.5), la soluzione ottenuta attraverso l'ottimizzazione di F_i non risulta accettabile, in quanto a_{max} eccede il limite massimo di 6 g, valore limite ritenuto tollerabile dalla struttura dello spacecraft. Anche la soluzione figlia dell'ottimizzazione di amo_1 non può essere valutata accettabile. Infatti, la temperatura finale raggiunta nel *tank* dell'ossidante $T_{tank,f}$ è significativamente inferiore al punto di congelamento della soluzione di perossido di idrogeno H_2O_2 pari a 261.65 K, equivalenti a -11.5°C [20]. La riduzione di amo_1 determina un incremento della durata della fase di *blowdown*, e, di conseguenza, una maggiore espansione adiabatica del gas pressurizzante nel *tank*.

Parametro ottimizzato	MR_i	F_i	amo_1
a_{max} [g]	5.363	7.657	3.792
F_{media} [kN]	61.02	89.33	56.41
MR_{medio}	6.38	6.24	6.12
c_{media}^* [m/s]	1601.85	1603.67	1604.49
$C_{F,medio}$	1.878	1.887	1.876
c_{media} [m/s]	3009.01	3026.74	3010.08
$I_{sp,medio}$ [s]	306.83	308.64	306.94
$G_{ox,medio}$ [kg/(sm ²)]	125.41	163.24	115.32
\dot{r}_{medio} [mm/s]	1.637	1.89	1.55
Δt_{burn1} [s]	113	77.31	122.27
$\Delta t_{coasting}$ [s]	3438.09	3488.44	3441.77
Δt_{burn2} [s]	5.25	3.49	7.04
ϵ_{fin}	39.35	48.14	39.12
$p_{t,f}$ [bar]	38.67	39.13	22.95
$T_{tank,i}$ [K]	297	297	297
$T_{tank,f}$ [K]	279.51	280.85	226.86
$p_{s,i}$ [bar]	310	310	310
$p_{s,f}$ [bar]	65	65	65

Tabella 3.5: prestazioni e durata delle fasi di missione nei casi di ottimizzazione a un parametro

Per completare l'analisi dei risultati, si riportano anche gli andamenti delle grandezze principali durante la prima accensione. In Figura 3.1 è possibile notare come, nella prima fase con regolazione di pressione, le portate di ossidante e combustibile aumentino, senza mantenere il loro rapporto costante. Ciò comporta l'aumento del *mixture ratio*. Nella fase di *blowdown*, entrambe le portate diminuiscono, ma \dot{m}_{ox} diminuisce più repentinamente, determinando una decrescita di MR . Risulta evidente come, nel caso di amo_1 ottimizzato, la fase a pressione costante occupi una frazione minore dell'intera durata della prima accensione, la quale aumenta a causa della riduzione della spinta media. Le portate iniziali e massime aumentano all'aumentare della spinta iniziale.

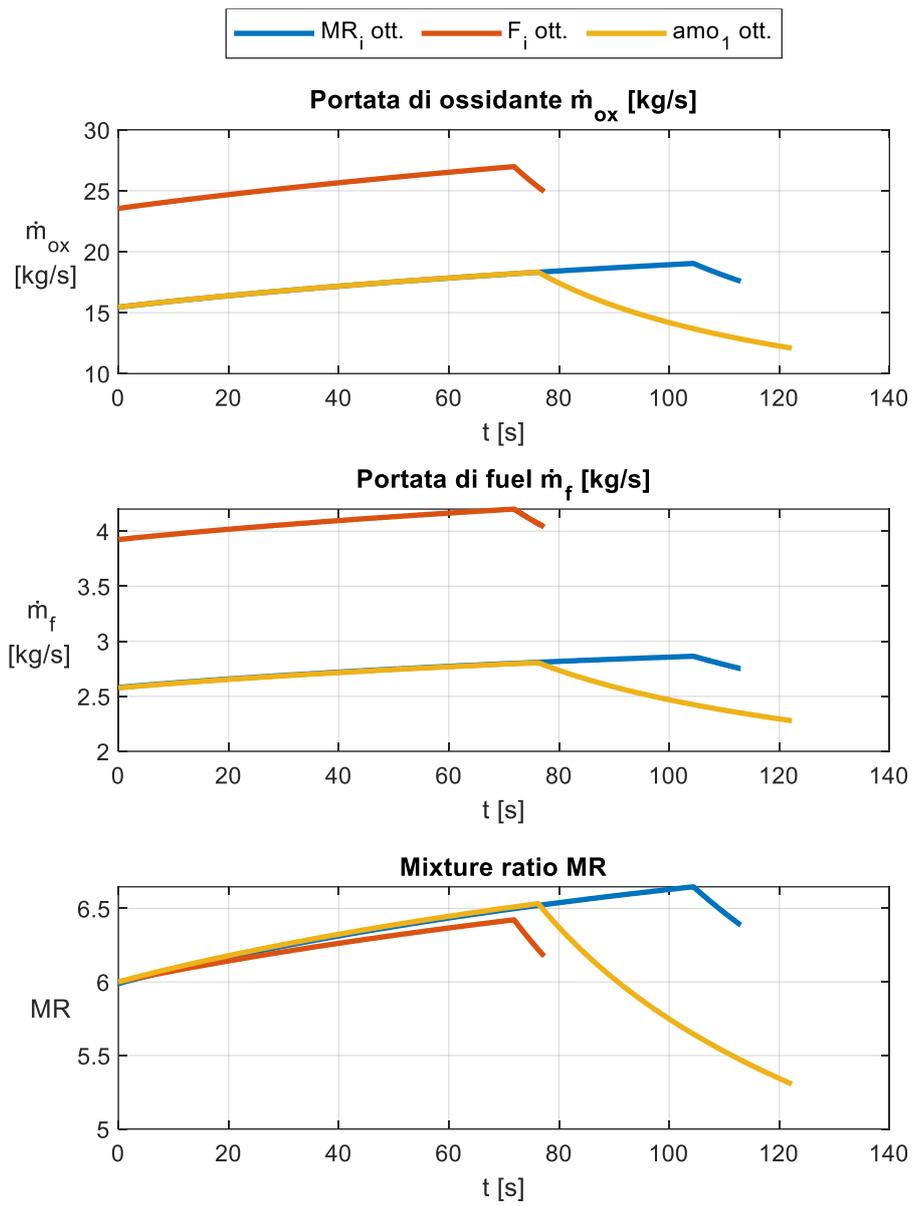


Figura 3.1: andamenti della portata di ossidante, della portata di *fuel* e del *mixture ratio* (in ordine dall'alto)

L'aumento del *mixture ratio*, durante la prima fase, è giustificato dalla diminuzione del rateo di regressione causato, a sua volta, dalla diminuzione del flusso di massa di ossidante. La regressione del grano e l'aumento dell'area di porta determinano gli andamenti mostrati in Figura 3.2. Nella fase di *blowdown*, a causa della diminuzione della portata di ossidante, la decrescita dei due parametri è caratterizzata da una pendenza maggiore.

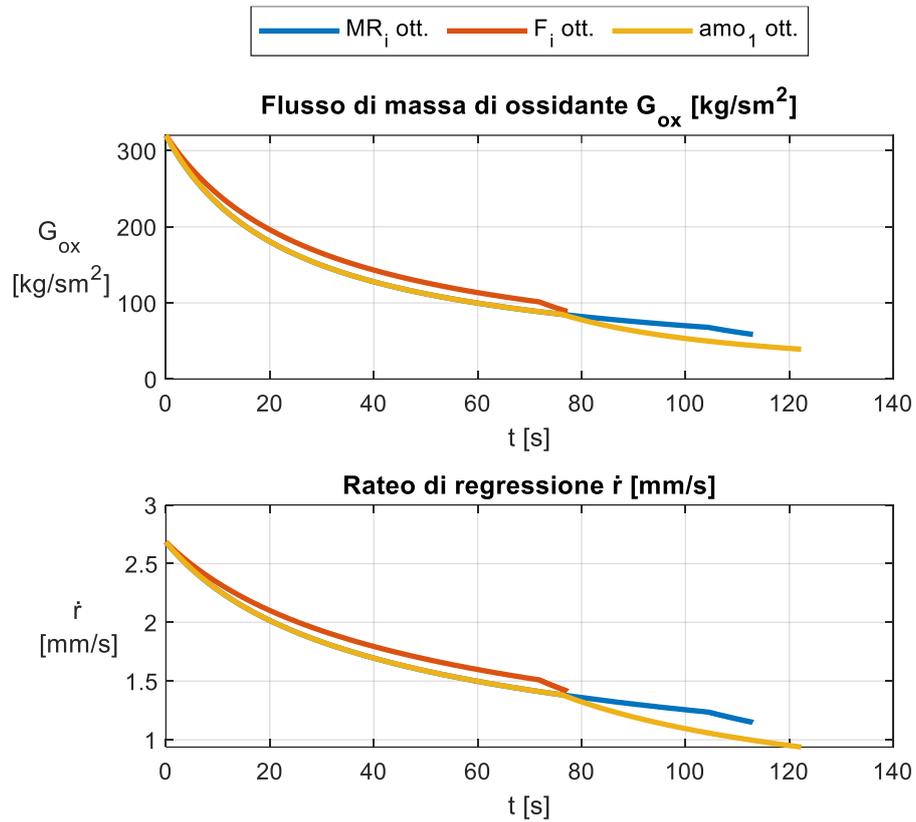


Figura 3.2: andamenti del flusso di massa di ossidante e del rateo di regressione (in ordine dall'alto)

Come già intuibile dagli andamenti delle portate di ossidante e *fuel*, la fase a pressione costante presenta un andamento crescente della portata di propellente e della spinta. Una spinta iniziale maggiore comporta una portata di propellente iniziale maggiore. In Figura 3.3 è riportato anche l'andamento dell'accelerazione, continuamente crescente, con una pendenza inferiore nella fase di *blowdown* a causa della riduzione della spinta.

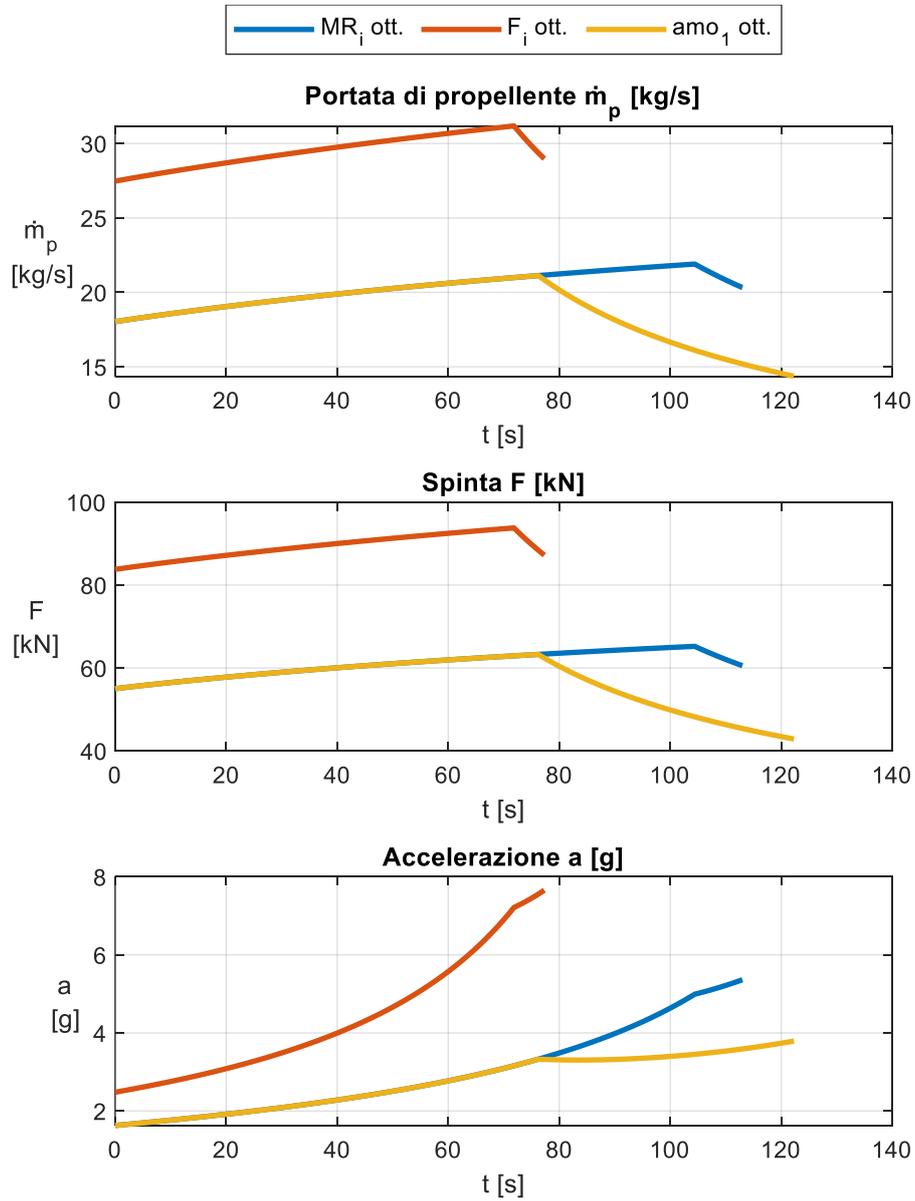


Figura 3.3: andamenti della portata di propellente, della spinta e dell'accelerazione (in ordine dall'alto)

L'incremento della portata di propellente nella fase con regolazione di pressione è giustificato dall'aumento dell'area di gola, causato dall'erosione. In questa fase, l'aumento dei gas espulsi porta alla diminuzione della pressione in camera di combustione; ciò determina, a parità di pressione nel *tank*, un aumento della portata di ossidante. Nella fase di *blowdown*, le portate decrescono, generando una riduzione più repentina della pressione in camera. Una spinta iniziale maggiore, a parità di $p_{c,i}$, necessita di un'area di gola iniziale maggiore. L'erosione della gola riduce anche il rapporto di espansione. Gli andamenti di queste grandezze sono riportati in Figura 3.4.

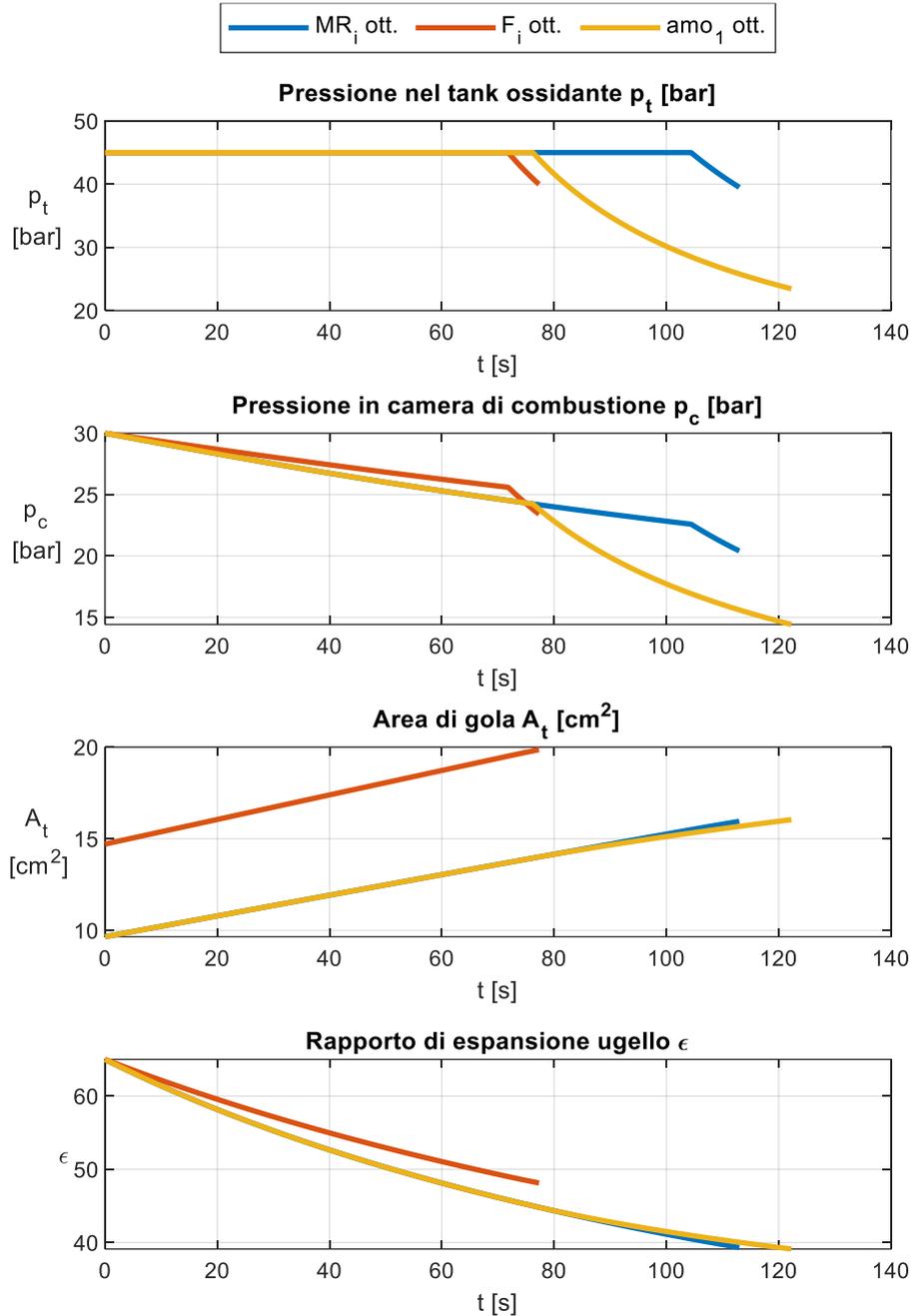


Figura 3.4: andamenti della pressione nel *tank* ossidante, della pressione in camera di combustione, dell'area di gola e del rapporto di espansione ugello (in ordine dall'alto)

Per quanto riguarda i parametri di performance, la fase con regolazione di pressione è caratterizzata da una diminuzione della c^* , dovuta ad un aumento del *mixture ratio*. Nella fase di *blowdown*, il MR diminuisce, con conseguente aumento di c^* . Il coefficiente di spinta mostra sempre un andamento decrescente, con una riduzione più repentina nella fase di *blowdown* a causa della riduzione di MR , la quale determina un aumento di γ (rapporto tra i calori specifici). La velocità efficace di scarico e l'impulso specifico seguono gli andamenti della c^* , con una crescita più attenuata nella fase di *blowdown* proprio a causa della riduzione del C_f . Dagli andamenti presenti in Figura 3.5, l'ottimizzazione della spinta risulta il caso migliore in termini di performance del motore.

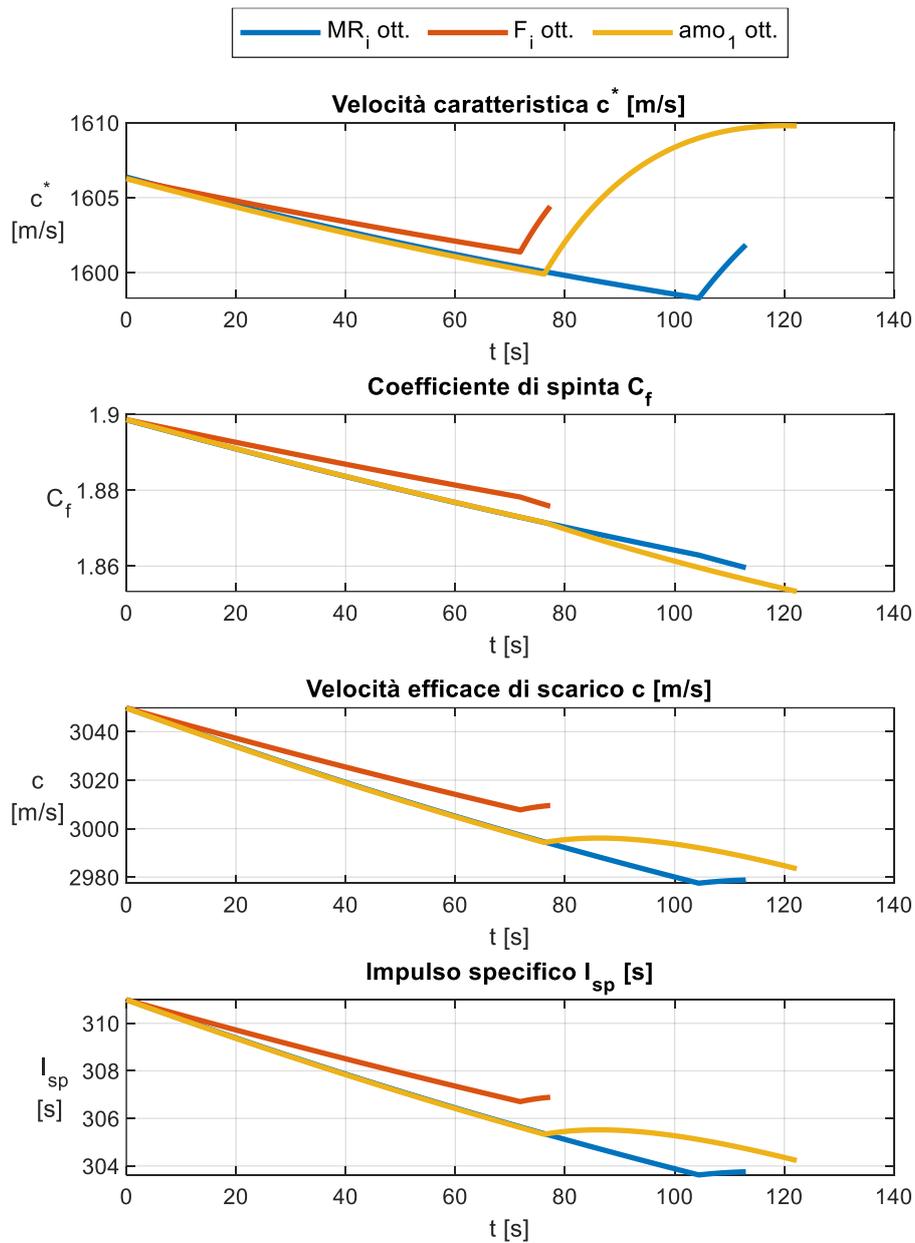


Figura 3.5: andamenti della velocità caratteristica, del coefficiente di spinta, della velocità efficace di scarico e dell'impulso specifico (in ordine dall'alto)

3.2.2 Ottimizzazione di due parametri di progetto

L'ottimizzazione a due parametri è stata effettuata per qualunque combinazione possibile dei sei parametri. Con i set di parametri che comprendevano almeno uno dei tre parametri ε_i , $(A_t/A_p)_i$ e $p_{t,i}$ il codice non è riuscito a convergere. Gli unici due per i quali è stato possibile trovare una soluzione sono i casi $MR_i - F_i$ e $MR_i - amo_1$. Di seguito non verranno riportati gli andamenti grafici, in quanto risultano analoghi a quelli già analizzati nel sottocapitolo precedente, a meno dei valori numerici assunti dalle grandezze. Si riportano solamente i valori dei vari parametri presentati in tabella, discutendo le principali differenze con i casi precedenti. Più precisamente, i risultati del caso $MR_i - F_i$ verranno confrontati con quelli ottenuti dall'ottimizzazione della sola F_i , mentre i risultati del caso $MR_i - amo_1$ con quelli dell'ottimizzazione di amo_1 .

Dai parametri di progetto ottimizzati riportati in Tabella 3.6, si nota:

- Nel caso di ottimizzazione di MR_i e F_i , un aumento della spinta iniziale del 13% e un aumento del *mixture ratio* iniziale del 12%.
- Nel caso di ottimizzazione di MR_i e amo_1 , un aumento del *mixture ratio* iniziale del 7% e una riduzione di amo_1 del 6.5%.

Parametri ottimizzati	MR_i e F_i	MR_i e amo_1
MR_i	6.7054	6.4214
F_i [kN]	94.78	55
$(A_t/A_p)_i$	0.2	0.2
amo_1	0.53	0.3528
$p_{t,i}$ [bar]	45	45
ε_i	65	65

Tabella 3.6: parametri di progetto ottimizzati nei casi di ottimizzazione a due parametri

L'ottimizzazione accoppiata di MR_i e F_i permette un incremento del payload di 2.2 kg, pari al 1.2%, rispetto al caso di ottimizzazione della sola spinta iniziale. Analizzando i valori delle masse, riportati in Tabella 3.7, si nota come il propellente immagazzinato $M_{prop,tot}$ sia aumentato di 2 kg. Il guadagno di payload, in questo caso, non è dovuto all'aumento della massa finale a secco, bensì alla diminuzione della massa della camera di combustione M_{cc} , la quale si riduce del 2.2%, ovvero 4 kg. L'aumento del *mixture ratio*, che si sposta a favore dell'ossidante, determina una diminuzione della massa del grano, ottenuta attraverso la riduzione della sua lunghezza L_{grano} (in Tabella 3.8) del 4%, circa 6.5 cm. Ciò comporta la riduzione dell'ingombro assiale della camera L_{cc} e della sua massa. Si evidenzia anche un aumento della massa del *tank* M_t , generato dall'aumento della massa di ossidante $M_{ox,tot}$, compensato dalla diminuzione della massa dell'ugello M_{ug} .

L'ottimizzazione accoppiata di MR_i e amo_1 consente un incremento del payload dello 0.43%, corrispondente a 0.77 kg, rispetto al caso di ottimizzazione del solo amo_1 . Anche in questo caso si ha un aumento della quantità di propellente immagazzinato $M_{prop,tot}$ dello 0.06%, pari a 1.52 kg, ed una diminuzione della massa della camera di combustione M_{cc} del 2%, ovvero di 2.2 kg. Il motivo risiede sempre nell'aumento del *mixture ratio*, che determina una diminuzione della massa di *fuel*, ottenuta attraverso un decremento della lunghezza del grano del 6%. La riduzione di amo_1 porta con sé un calo della massa del gas pressurizzante M_{gas} e, di conseguenza, della massa del serbatoio M_s .

Parametri ottimizzati	MR_i e F_i	MR_i e amo_1
<i>Payload</i> [kg]	185.05	179.59
M_t [kg]	131.33	130.8
M_s [kg]	38.44	31.86
M_{cc} [kg]	119.83	114.23
M_{ug} [kg]	142.22	151.1
$M_{prop,tot}$ [kg]	2488.93	2502.24
$M_{prop,consumato}$ [kg]	2319.91	2328.78
$M_{ox,tot}$ [kg]	2166.15	2153.51
$M_{grano,tot}$ [kg]	322.77	348.73
M_{gas} [kg]	12.57	8.55
M_{case} [kg]	325	325
$M_{tot,iniziale}$ [kg]	3443.37	3443.37
M_{finale} [kg]	1123.46	1114.60

Tabella 3.7: masse nei casi di ottimizzazione a due parametri

Analizzando le dimensioni (Tabella 3.8), oltre alle già citate differenze relative alla lunghezza del grano e della camera di combustione, si sottolinea:

- Nel caso di ottimizzazione di MR_i e F_i , un incremento del diametro della sezione di gola, necessario per l'aumento della spinta iniziale. Ciò comporta, a parità di $(A_t/A_p)_i$ e ε_i , un aumento del diametro dell'area di porta iniziale e del diametro della sezione d'uscita dell'ugello, il quale aumenta di 7 cm, mantenendo comunque un valore largamente inferiore al limite massimo di 1.9 m. Inoltre, si registra un aumento della lunghezza dell'ugello L_{ug} di 8 cm.
- Nel caso di ottimizzazione di MR_i e amo_1 , un decremento dell'altezza del serbatoio di gas pressurizzante L_s di 4.5 cm, indotto dalla riduzione della massa di gas e, quindi, del volume del serbatoio.

Parametri ottimizzati	MR_i e F_i	MR_i e amo_1
L_t [mm]	1869.44	1858.54
L_s [mm]	1330.64	998.35
L_{grano} [mm]	1571.44	1245.24
L_{cc} [mm]	2251.8	1935.99
L_{ug} [mm]	1114.93	803.18
L_{case} [mm]	2200	2200
L_{tot} [mm]	3366.73	2739.17
$D_{grano,interno,iniz}$ [mm]	325.22	247.81
$D_{grano,interno,fin}$ [mm]	602.65	639.53
web thick. iniziale [mm]	148.43	209.57
web thick. consumata [mm]	138.72	195.86
$D_{grano,esterno}$ [mm]	622.07	666.95
D_{cc} [mm]	653.95	699.75
D_t [mm]	550	550
D_s [mm]	360	360
$D_{gola,iniz}$ [mm]	145.44	110.82
$D_{gola,fin}$ [mm]	165.56	143.51
$D_{uscita,ugello}$ [mm]	1172.6	893.49

Tabella 3.8: dimensioni geometriche nei casi di ottimizzazione a due parametri

In termini di prestazioni (Tabella 3.9), il caso di ottimizzazione di MR_i e F_i , essendo caratterizzato da una spinta iniziale maggiore rispetto all'ottimizzazione della sola F_i , presenta una spinta media superiore ed una durata di accensione minore. Il MR_{medio} maggiore comporta una riduzione della velocità caratteristica media ma, allo stesso tempo, un maggior $C_{F,medio}$ grazie alla diminuzione di γ . Anche il decremento della durata di accensione consente un ε_{fin} maggiore, limitando il degrado delle performance dell'ugello. La riduzione della c_{media}^* ha un impatto maggiore dell'aumento di $C_{F,medio}$, determinando c_{media} e $I_{sp,medio}$ inferiori.

Anche il caso di ottimizzazione di MR_i e amo_1 presenta delle prestazioni inferiori dovute ad un MR_{medio} maggiore. Inoltre, la diminuzione della massa di ossidante consumata a pressione costante aumenta l'incidenza della fase di *blowdown*, determinando un F_{media} minore e, di conseguenza, una maggior durata delle accensioni.

Parametri ottimizzati	MR_i e F_i	MR_i e amo_1
a_{max} [g]	8.408	3.511
F_{media} [kN]	99.92	54.61
MR_{medio}	6.92	6.43
c_{media}^* [m/s]	1594.2	1600.58
$C_{F,medio}$	1.892	1.877
c_{media} [m/s]	3015.75	3003.91
$I_{sp,medio}$ [s]	307.52	306.31
$G_{ox,medio}$ [kg/(sm ²)]	177.55	112.42
\dot{r}_{medio} [mm/s]	1.974	1.52
Δt_{burn1} [s]	69.99	126.15
$\Delta t_{coasting}$ [s]	3467.22	3431.09
Δt_{burn2} [s]	3.05	7.41
\mathcal{E}_{fin}	50.36	39.04
$p_{t,f}$ [bar]	38.2	20.45
$T_{tank,i}$ [K]	297	297
$T_{tank,f}$ [K]	278.15	216.66
$p_{s,i}$ [bar]	310	310
$p_{s,f}$ [bar]	65	65

Tabella 3.9: prestazioni e durata delle fasi nei casi di ottimizzazione a due parametri

Come per l'ottimizzazione dei singoli parametri F_i e amo_1 , le soluzioni ottenute non risultano accettabili, data l'accelerazione massima a_{max} superiore a 6 g e la temperatura finale del tank $T_{tank,f}$ inferiore a 261.65 K, rispettivamente per i casi di ottimizzazione di MR_i - F_i e MR_i - amo_1 .

3.2.3 Ottimizzazione di tre parametri di progetto

L'ottimizzazione a tre parametri è stata effettuata considerando le quattro combinazioni elencate di seguito:

- ε_i , $(A_t/A_p)_i$ e F_i
- MR_i , amo_1 e $p_{t,i}$
- MR_i , ε_i e amo_1
- MR_i , F_i e ε_i

Solamente l'ultimo set di parametri ha permesso la convergenza ad una soluzione. Come per il sottocapitolo 3.2.2, non si riportano i grafici degli andamenti delle grandezze in quanto analoghi, a meno dei valori numerici, a quelli relativi ai casi di ottimizzazione dei singoli parametri MR_i e F_i presenti nel sottocapitolo 3.2.1. Si riporteranno di seguito i risultati in più tabelle, commentando le principali differenze con i valori ottenuti dal caso di ottimizzazione di due parametri $MR_i - F_i$.

Dai parametri di progetto ottimizzati riportati in Tabella 3.10, si nota un aumento di MR_i e di F_i , rispettivamente del 0.3% e del 0.9% (corrispondente 0.86 kN), mentre il rapporto di espansione iniziale dell'ugello diminuisce del 22%.

Parametri ottimizzati	MR_i , F_i e ε_i
MR_i	6.7247
F_i [kN]	95.64
$(A_t/A_p)_i$	0.2
amo_1	0.53
$p_{t,i}$ [bar]	45
ε_i	50.59

Tabella 3.10: parametri di progetto ottimizzati nel caso di ottimizzazione a tre parametri

Il payload mostra un incremento esiguo del 0.05%, pari a 0.09 kg, rispetto a quello ottenuto dall'ottimizzazione della coppia $MR_i - F_i$. Le principali differenze in termini di masse (Tabella 3.11) sono relative alla massa dell'ugello M_{ug} , la quale si riduce di 16 kg, e alla massa di propellente $M_{prop,tot}$ che, al contrario, aumenta di 14.63 kg. La spiegazione risiede nella riduzione del rapporto di espansione dell'ugello, la quale determina un decremento del coefficiente di spinta C_F . Ne consegue una minore velocità efficace di scarico. Pertanto, si rende necessario un aumento della portata di propellente per poter mantenere una spinta iniziale elevata. Un valore maggiore della portata comporta un maggior consumo di propellente, generando un incremento delle masse di ossidante e combustibile immagazzinati. Essendo il *mixture ratio* in favore dell'ossidante, il grano contribuisce all'aumento del propellente totale solo con 1.3 kg.

Parametri ottimizzati	MR_i, F_i e ε_i
<i>Payload</i> [kg]	185.14
<i>M_t</i> [kg]	131.89
<i>M_s</i> [kg]	38.44
<i>M_{cc}</i> [kg]	120.65
<i>M_{ug}</i> [kg]	126.11
<i>M_{prop,tot}</i> [kg]	2503.56
<i>M_{prop,consumato}</i> [kg]	2333.64
<i>M_{ox,tot}</i> [kg]	2179.50
<i>M_{grano,tot}</i> [kg]	324.06
<i>M_{gas}</i> [kg]	12.58
<i>M_{case}</i> [kg]	325
<i>M_{tot,iniziale}</i> [kg]	3443.37
<i>M_{finale}</i> [kg]	1109.73

Tabella 3.11: masse nel caso di ottimizzazione a tre parametri

Analizzando le grandezze geometriche riportate in Tabella 3.12, si evidenzia la differenza nella lunghezza dell'ugello L_{ug} , che diminuisce del 9%, corrispondente a 10 cm circa. Ne consegue una riduzione della lunghezza totale dello stadio di 9 cm. Inoltre, il decremento di ε_i determina anche il restringimento della sezione di uscita dell'ugello, il cui diametro si riduce dell'11%, pari a 12.8 cm.

Parametri ottimizzati	MR_i, F_i e ε_i
L_t [mm]	1880.93
L_s [mm]	1330.64
L_{grano} [mm]	1582.68
L_{cc} [mm]	2263.28
L_{ug} [mm]	1013.65
L_{case} [mm]	2200
L_{tot} [mm]	3276.93
$D_{grano,interno,iniz}$ [mm]	328.4
$D_{grano,interno,fin}$ [mm]	603.76
web thick. iniziale [mm]	147.32
web thick. consumata [mm]	137.68
$D_{grano,esterno}$ [mm]	623.04
D_{cc} [mm]	654.94
D_t [mm]	550
D_s [mm]	360
$D_{gola,iniz}$ [mm]	146.87
$D_{gola,fin}$ [mm]	166.73
$D_{uscita,ugello}$ [mm]	1044.56

Tabella 3.12: dimensioni geometriche nel caso di ottimizzazione a tre parametri

Le differenze principali relative ai parametri di prestazione, presentati in Tabella 3.13, riguardano il coefficiente di spinta, la velocità efficace di scarico e l'impulso specifico. La riduzione del rapporto di espansione determina un $C_{F,medio}$ inferiore, ridotto dell'1%. Ciò comporta un decremento della c_{media} di 32.7 m/s, mentre $I_{sp,medio}$ si riduce di 3.34 s. Pertanto, non risulta conveniente, in termini di performance, diminuire il rapporto di espansione iniziale dell'ugello.

Parametri ottimizzati	MR_i, F_i e ε_i
a_{max} [g]	8.506
F_{media} [kN]	100.61
MR_{medio}	6.94
c_{media}^* [m/s]	1594.01
$C_{F,medio}$	1.871
c_{media} [m/s]	2983.06
$I_{sp,medio}$ [s]	304.18
$G_{ox,medio}$ [kg/(sm ²)]	179.01
\dot{r}_{medio} [mm/s]	1.982
Δt_{burn1} [s]	68.19
$\Delta t_{coasting}$ [s]	3467.03
Δt_{burn2} [s]	3.00
ε_{fin}	39.40
$p_{t,f}$ [bar]	37.83
$T_{tank,i}$ [K]	297
$T_{tank,f}$ [K]	277.08
$p_{s,i}$ [bar]	310
$p_{s,f}$ [bar]	65

Tabella 3.13: prestazioni e durata delle fasi nel caso di ottimizzazione a tre parametri

Anche la soluzione ottenuta con questa combinazione di parametri non può essere ritenuta accettabile, in quanto l'accelerazione massima a_{max} (in Tabella 3.13), registrata in corrispondenza della fine della prima accensione, supera il limite massimo di 6 g.

3.3 Ottimizzazione con l'applicazione di vincoli

L'ottimizzazione in assenza di vincoli suggerisce di escludere amo_1 dai parametri di ottimizzazione, data la sua tendenza a raggiungere punti stazionari che comporterebbero una temperatura finale del tank $T_{tank,f}$ inferiore a quella di congelamento dell'ossidante. Mantenere amo_1 costante e pari al valore nominale garantisce un margine di sicurezza tra la temperatura di esercizio dell'ossidante liquido e il punto di congelamento tale da consentire il corretto funzionamento del motore per l'intera durata della missione. Tra i casi che non considerano amo_1 , quello che ha restituito il payload massimo presenta il set di parametri ottimizzati composto da: *mixture ratio* iniziale MR_i , spinta iniziale F_i e rapporto di espansione iniziale dell'ugello ε_i . Come già anticipato nel sottocapitolo 3.2.3, tale soluzione non può essere considerata accettabile in quanto il terzo stadio, in corrispondenza della fine della prima accensione del motore, è sottoposto ad un'accelerazione massima a_{max} pari a 8.506 g, maggiore del limite tollerabile dalla struttura dello spacecraft di 6 g. Per poter ottenere una soluzione che possa essere considerata valida dal punto di vista pratico, è necessario imporre un vincolo sull'accelerazione massima raggiungibile dal terzo stadio durante la sua traiettoria di ascesa e inserimento in orbita.

L'applicazione del vincolo sull'accelerazione massima, indipendentemente dal valore imposto, non ha permesso al codice di arrivare a convergenza. La ragione è identificabile nel valore del rapporto di espansione iniziale dell'ugello ε_i , il quale tende a crescere senza raggiungere mai un punto stazionario. Per tale motivo, una prima analisi è stata effettuata mantenendo costante $\varepsilon_i = 65$ (valore nominale) ed ottimizzando solamente la coppia $MR_i - F_i$. Ciò ha consentito la convergenza ad una soluzione. Per poter analizzare l'andamento delle grandezze al variare del vincolo imposto, sono state eseguite tre analisi con tre valori decrescenti dell'accelerazione massima a_{max} , pari rispettivamente a 7 g, 6 g e 5 g.

In seguito, per poter valutare l'effetto del rapporto di espansione ε_i in presenza del vincolo sull'accelerazione massima, si è scelto di effettuare un'ottimizzazione a tre parametri imponendo un secondo vincolo sul valore massimo di ε_i , scelto arbitrariamente pari a 70. Ottimizzare ε_i vincolandolo ad un valore massimo equivale a mantenerlo costante e pari al valore del vincolo. La soluzione ottenuta con $a_{max} = 6 g$ è stata confrontata con quella relativa al rapporto di espansione pari a 65, a parità di valore del vincolo sull'accelerazione.

Infine, avendo a disposizione un diametro massimo per il terzo stadio pari a 1.9 m, l'ottimizzazione dei tre parametri è stata effettuata con il secondo vincolo applicato al diametro della sezione di uscita dell'ugello $D_{uscita,ugello}$, mantenendo libero ε_i .

3.3.1 Ottimizzazione della coppia di parametri di progetto MR_i e F_i con vincolo applicato sull'accelerazione massima

I valori di progetto ottimizzati sono riportati in Tabella 3.14. Si nota come un vincolo più restrittivo determini una diminuzione del *mixture ratio* iniziale MR_i e della spinta iniziale F_i . L'andamento di quest'ultimo parametro è facilmente spiegabile con il fatto che la spinta aumenta durante la fase della prima accensione con regolazione di pressione, a causa dell'aumento della portata di propellente. La riduzione della spinta iniziale permette di raggiungere valori massimi minori, consentendo il rispetto del vincolo sull'accelerazione massima.

Vincolo	$a_{max} = 7 g$	$a_{max} = 6 g$	$a_{max} = 5 g$
MR_i	6.422	6.216	6.002
F_i [kN]	76.22	63.24	50.57
$(A_t/A_p)_i$	0.2	0.2	0.2
amo_1	0.53	0.53	0.53
$p_{t,i}$ [bar]	45	45	45
ε_i	65	65	65

Tabella 3.14: parametri di progetto ottimizzati al variare del vincolo sull'accelerazione massima

Dai valori delle masse presenti in Tabella 3.15, risulta evidente come la diminuzione dell'accelerazione massima determini un decremento del payload. La ragione principale risiede nella massa di propellente imbarcato $M_{prop,tot}$, il quale, in prima approssimazione, aumenta della quantità di cui diminuisce il payload al diminuire dell'accelerazione massima. Passando da $a_{max} = 7g$ a $a_{max} = 5g$, il payload diminuisce del 7.60%, pari a 13.95 kg, mentre il propellente totale cresce di 12.12 kg (0.49%). Pertanto, si può concludere che limitare il modulo della spinta negli istanti iniziali dello sparo, obbligando il motore a fornire una spinta minore per un tempo di accensione maggiore, non permette la minimizzazione della massa di propellente immagazzinata. Una maggiore quantità di propellente, a parità di massa iniziale $M_{tot,iniziale}$, comporta una minore massa finale e, dunque, un minore payload. L'incremento del propellente è ascrivibile all'aumento del ΔV propulsivo dovuto alle perdite per gravità, le quali crescono con la riduzione della velocità media dello stadio durante la missione e, dunque, con l'aumento del tempo di esposizione all'azione frenante della gravità. L'andamento decrescente di MR_i al diminuire di a_{max} può essere giustificato dal fatto che valori inferiori del *mixture ratio* comportano una velocità caratteristica maggiore e, a parità di coefficiente di spinta, una maggiore velocità efficace di scarico. Incrementare c permette di minimizzare l'aumento della massa di propellente totale dovuto alla limitazione della spinta iniziale.

Vincolo	$a_{max} = 7 g$	$a_{max} = 6 g$	$a_{max} = 5 g$
<i>Payload [kg]</i>	183.32	178.81	169.16
<i>M_t [kg]</i>	131.01	130.86	130.85
<i>M_s [kg]</i>	38.44	38.44	38.44
<i>M_{cc} [kg]</i>	115.92	113.91	113.19
<i>M_{ug} [kg]</i>	145.26	147.52	150.01
<i>M_{prop,tot} [kg]</i>	2491.85	2496.25	2504.16
<i>M_{prop,consumato} [kg]</i>	2321.36	2324.32	2330.31
<i>M_{ox,tot} [kg]</i>	2158.46	2154.99	2154.73
<i>M_{grano,tot} [kg]</i>	333.40	341.27	349.43
<i>M_{gas} [kg]</i>	12.57	12.57	12.57
<i>M_{case} [kg]</i>	325	325	325
<i>M_{tot,iniziale} [kg]</i>	3443.37	3443.37	3443.37
<i>M_{finale} [kg]</i>	1122.01	1119.05	1113.06

Tabella 3.15: masse al variare del vincolo sull'accelerazione massima

Per quanto riguarda le dimensioni geometriche (in Tabella 3.16), la diminuzione della spinta iniziale, dovuta ad un'accelerazione massima inferiore, comporta un decremento della sezione di gola, con conseguente diminuzione dell'area di porta e della sezione di uscita dell'ugello, avendo mantenuto costanti $(A_t/A_p)_i$ e ε_i . Inoltre, la riduzione della portata di propellente iniziale trova riscontro nella diminuzione della lunghezza del grano L_{grano} , a cui segue una riduzione della lunghezza della camera di combustione L_{cc} e della lunghezza totale dello stadio L_{tot} .

Vincolo	$a_{max} = 7 g$	$a_{max} = 6 g$	$a_{max} = 5 g$
L_t [mm]	1862.81	1859.82	1859.59
L_s [mm]	1330.64	1330.64	1330.64
L_{grano} [mm]	1456.70	1375.61	1270.20
L_{cc} [mm]	2147.90	2060.38	1958.99
L_{ug} [mm]	980.31	857.79	762.42
L_{case} [mm]	2200	2200	2200
L_{tot} [mm]	3128.21	2936.17	2721.42
$D_{grano,interno,iniz}$ [mm]	291.71	265.78	237.74
$D_{grano,interno,fin}$ [mm]	607.58	616.02	630.64
web thick. iniziale [mm]	168.99	187.38	210.20
web thick. consumata [mm]	157.93	175.12	196.45
$D_{grano,esterno}$ [mm]	629.69	640.54	658.14
D_{cc} [mm]	661.79	672.90	690.83
D_t [mm]	550	550	550
D_s [mm]	360	360	360
$D_{gola,iniz}$ [mm]	130.46	118.86	106.32
$D_{gola,fin}$ [mm]	154.93	147.54	140.58
$D_{uscita,ugello}$ [mm]	1051.79	958.30	857.17

Tabella 3.16: dimensioni geometriche al variare del vincolo sull'accelerazione massima

Analizzando i parametri di performance presenti in Tabella 3.17, un limite più restrittivo sull'accelerazione massima comporta un degrado delle prestazioni del motore in termini di c e I_{sp} . La riduzione della spinta media determina un aumento della durata di accensione, con conseguente decrescita di ε_{fin} e diminuzione di $C_{F,medio}$.

Vincolo	$a_{max} = 7 g$	$a_{max} = 6 g$	$a_{max} = 5 g$
$F_{media} [kN]$	81.80	69.10	56.62
MR_{medio}	6.70	6.56	6.43
$c_{media}^* [m/s]$	1597.46	1599.47	1601.18
$C_{F,medio}$	1.887	1.883	1.876
$c_{media} [m/s]$	3014.92	3011.45	3004.04
$I_{sp,medio} [s]$	307.44	307.08	306.32
$G_{ox,medio} [kg/(sm^2)]$	155.80	138.13	118.44
$\dot{r}_{medio} [mm/s]$	1.840	1.725	1.586
$\Delta t_{burn1} [s]$	84.29	99.77	121.73
$\Delta t_{coasting} [s]$	3456.64	3445.95	3427.82
$\Delta t_{burn2} [s]$	3.78	4.55	5.70
ε_{fin}	46.31	42.43	37.44
$p_{t,f} [bar]$	38.41	38.51	38.52
$T_{tank,i} [K]$	297	297	297
$T_{tank,f} [K]$	278.78	279.06	279.08
$p_{s,i} [bar]$	310	310	310
$p_{s,f} [bar]$	65	65	65

Tabella 3.17: prestazioni e durata delle fasi al variare del vincolo sull'accelerazione massima

3.3.2 Confronto tra soluzioni ottenute con accelerazione massima pari a 6 g per due diversi valori del rapporto di espansione iniziale dell'ugello

Per poter valutare l'effetto di ε_i sull'ottimizzazione in presenza del vincolo sull'accelerazione massima, è stata eseguita un'analisi lasciando il rapporto di espansione iniziale tra i parametri oggetto di ottimizzazione, ed imponendo un valore massimo pari a 70.

I parametri di progetto riportati in Tabella 3.18 mostrano valori estremamente simili, con una spinta iniziale incrementata di 0.08 kN nel caso di $\varepsilon = 70$.

ε_i	65	70
MR_i	6.216	6.217
F_i [kN]	63.24	63.32
$(A_t/A_p)_i$	0.2	0.2
amo_1	0.53	0.53
$p_{t,i}$ [bar]	45	45
ε_i	65	70

Tabella 3.18: parametri di progetto ottimizzati con $a_{\max} = 6$ g

Il payload presenta un incremento di 0.37 kg con l'aumento del rapporto di espansione iniziale dell'ugello. Le principali differenze relative alle masse dello stadio (Tabella 3.19) riguardano la massa dell'ugello M_{ug} e la massa di propellente totale $M_{prop,tot}$. Più dettagliatamente, l'aumento di ε_i determina un aumento della massa dell'ugello di 4.23 kg e il decremento della massa di propellente di 4.29 kg. Un maggior rapporto di espansione accelera maggiormente i gas in uscita, fornendo una velocità efficace di scarico più elevata. Ciò comporta, a parità di spinta, una minor portata di propellente necessaria; di conseguenza, si riduce la massa di propellente da imbarcare. Accelerare maggiormente una portata minore risulta conveniente, fino a quando l'aumento di ε_i non induce un aumento della massa dell'ugello superiore al guadagno ottenuto dalla diminuzione della massa di propellente.

ε_i	65	70
Payload [kg]	178.81	179.18
M_t [kg]	130.86	130.71
M_s [kg]	38.44	38.44
M_{cc} [kg]	113.91	113.76
M_{ug} [kg]	147.52	151.75
$M_{prop,tot}$ [kg]	2496.25	2491.96
$M_{prop,consumato}$ [kg]	2324.32	2320.32
$M_{ox,tot}$ [kg]	2154.99	2151.36
$M_{grano,tot}$ [kg]	341.27	340.60
M_{gas} [kg]	12.57	12.57
M_{case} [kg]	325	325
$M_{tot,iniziale}$ [kg]	3443.37	3443.37
M_{finale} [kg]	1119.05	1123.05

Tabella 3.19: masse nei casi di ottimizzazione con $a_{\max} = 6$ g

Le grandezze geometriche in Tabella 3.20 evidenziano solamente tre differenze significative: la lunghezza dell'ugello L_{ug} , che aumenta di 5.4 cm incrementando ε_i , e la lunghezza totale L_{tot} e il diametro della sezione di uscita dell'ugello, che crescono entrambi di 3.5 cm.

ε_i	65	70
L_t [mm]	1859.82	1856.70
L_s [mm]	1330.64	1330.64
L_{grano} [mm]	1375.61	1374.20
L_{cc} [mm]	2060.38	2058.89
L_{ug} [mm]	857.79	911.90
L_{case} [mm]	2200	2200
L_{tot} [mm]	2936.17	2970.79
$D_{grano,interno,iniz}$ [mm]	265.78	265.55
$D_{grano,interno,fin}$ [mm]	616.02	615.68
<i>web thick. iniziale</i> [mm]	187.38	187.32
<i>web thick. consumata</i> [mm]	175.12	175.06
$D_{grano,esterno}$ [mm]	640.54	640.19
D_{cc} [mm]	672.90	672.55
D_t [mm]	550	550
D_s [mm]	360	360
$D_{gola,iniz}$ [mm]	118.86	118.76
$D_{gola,fin}$ [mm]	147.54	147.44
$D_{uscita,ugello}$ [mm]	958.30	993.62

Tabella 3.20: dimensioni geometriche nei casi di ottimizzazione con $a_{max}=6$ g

Valutando i parametri di performance presenti in Tabella 3.21, la soluzione con rapporto di espansione maggiore è caratterizzata da un $C_{F,medio}$ incrementato del 0.32%. Questa è la ragione, come anticipato in precedenza, di un miglioramento delle prestazioni del motore, riscontrabile nell'aumento di 9.5 m/s della velocità efficace di scarico media e nell'aumento di 1 s dell'impulso specifico medio.

ε_i	65	70
$F_{media} [kN]$	69.10	69.22
MR_{medio}	6.56	6.56
$c_{media}^* [m/s]$	1599.47	1599.45
$C_{F,medio}$	1.883	1.889
$c_{media} [m/s]$	3011.45	3020.91
$I_{sp,medio} [s]$	307.08	308.05
$G_{ox,medio} [kg/(sm^2)]$	138.13	138.11
$\dot{r}_{medio} [mm/s]$	1.725	1.725
$\Delta t_{burn1} [s]$	99.77	99.74
$\Delta t_{coasting} [s]$	3445.95	3445.12
$\Delta t_{burn2} [s]$	4.55	4.56
ε_{fin}	42.43	45.68
$p_{t,f} [bar]$	38.51	38.61
$T_{tank,i} [K]$	297	297
$T_{tank,f} [K]$	279.06	279.35
$p_{s,i} [bar]$	310	310
$p_{s,f} [bar]$	65	65

Tabella 3.21: prestazioni e durata delle fasi nei casi di ottimizzazione con $a_{max} = 6 g$

Essendo la soluzione ottenuta con $\varepsilon_i = 70$ la migliore in termini di payload e prestazioni, oltre ad essere accettabile grazie all'imposizione del vincolo sull'accelerazione massima, si è deciso di riportare, per completezza, gli andamenti delle grandezze principali durante la prima accensione. Gli andamenti sono qualitativamente uguali a quelli relativi ai casi di ottimizzazione dei singoli parametri MR_i e F_i .

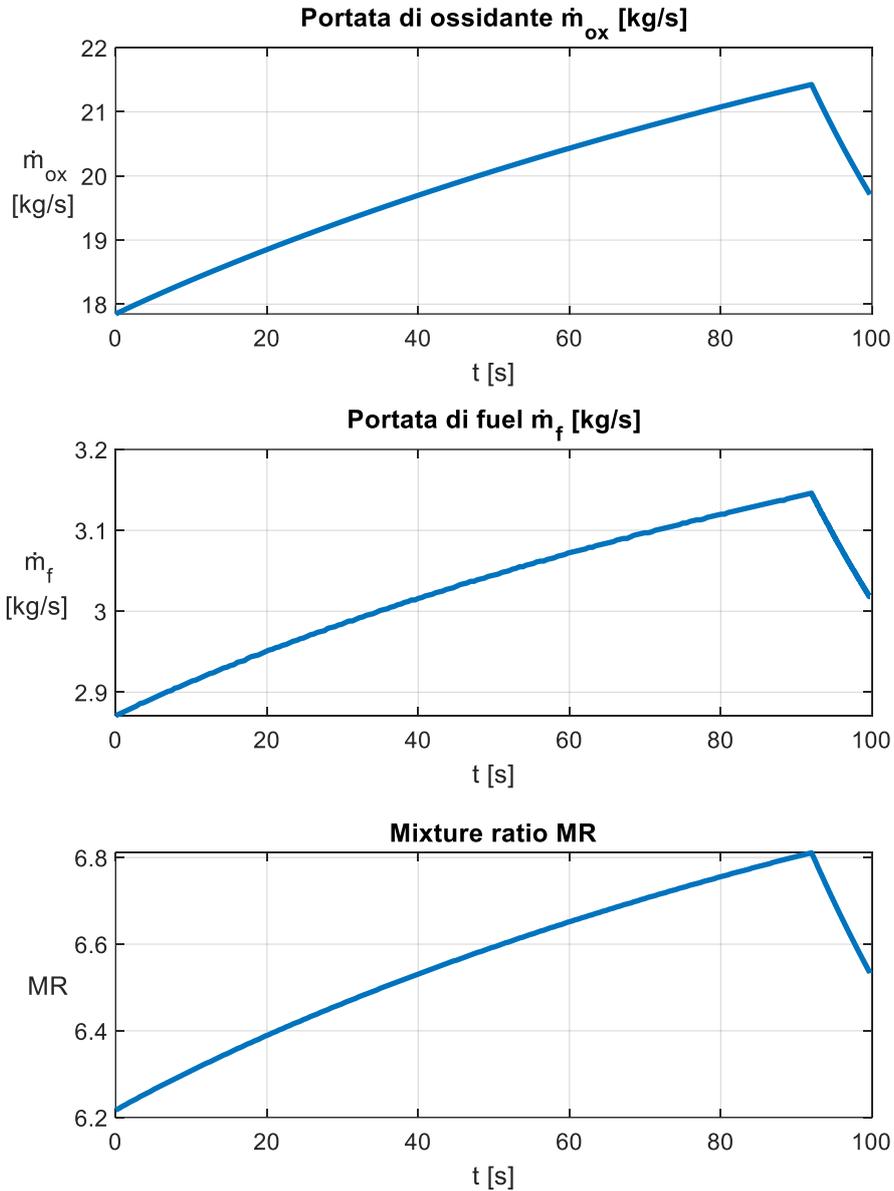


Figura 3.6: andamenti di portata di ossidante, portata di *fuel* e *mixture ratio* (in ordine dall'alto) della soluzione con $\varepsilon_i = 70$ e $a_{max} = 6$ g

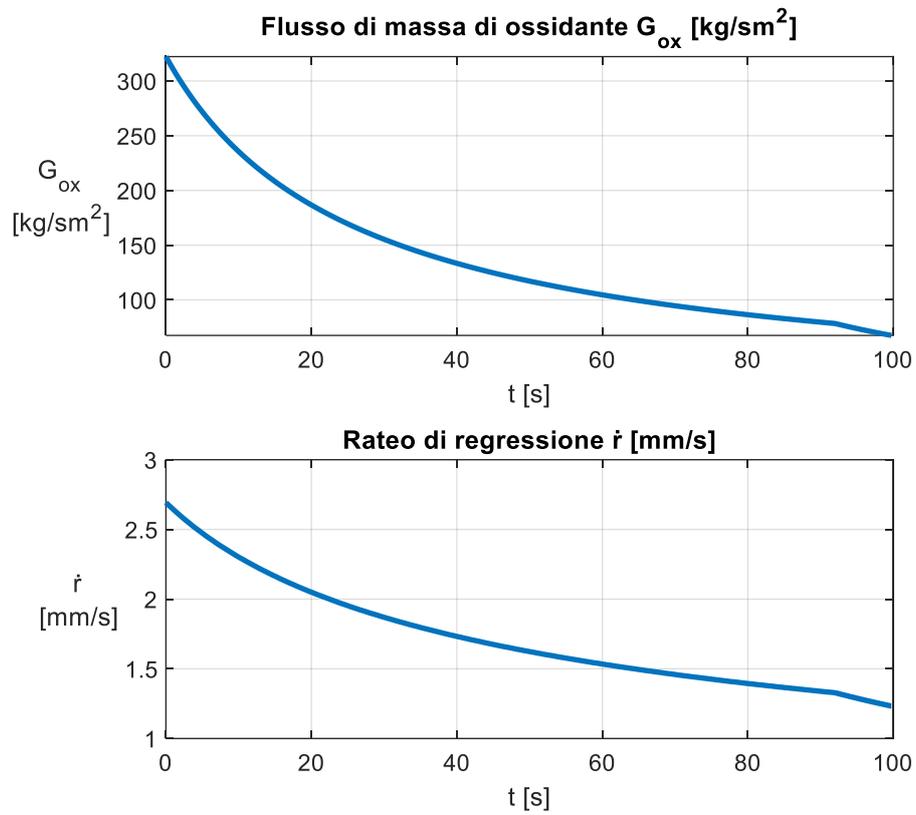


Figura 3.7: andamenti di flusso di massa di ossidante e rateo di regressione (in ordine dell'alto) della soluzione con $\varepsilon_i=70$ e $a_{max}=6$ g

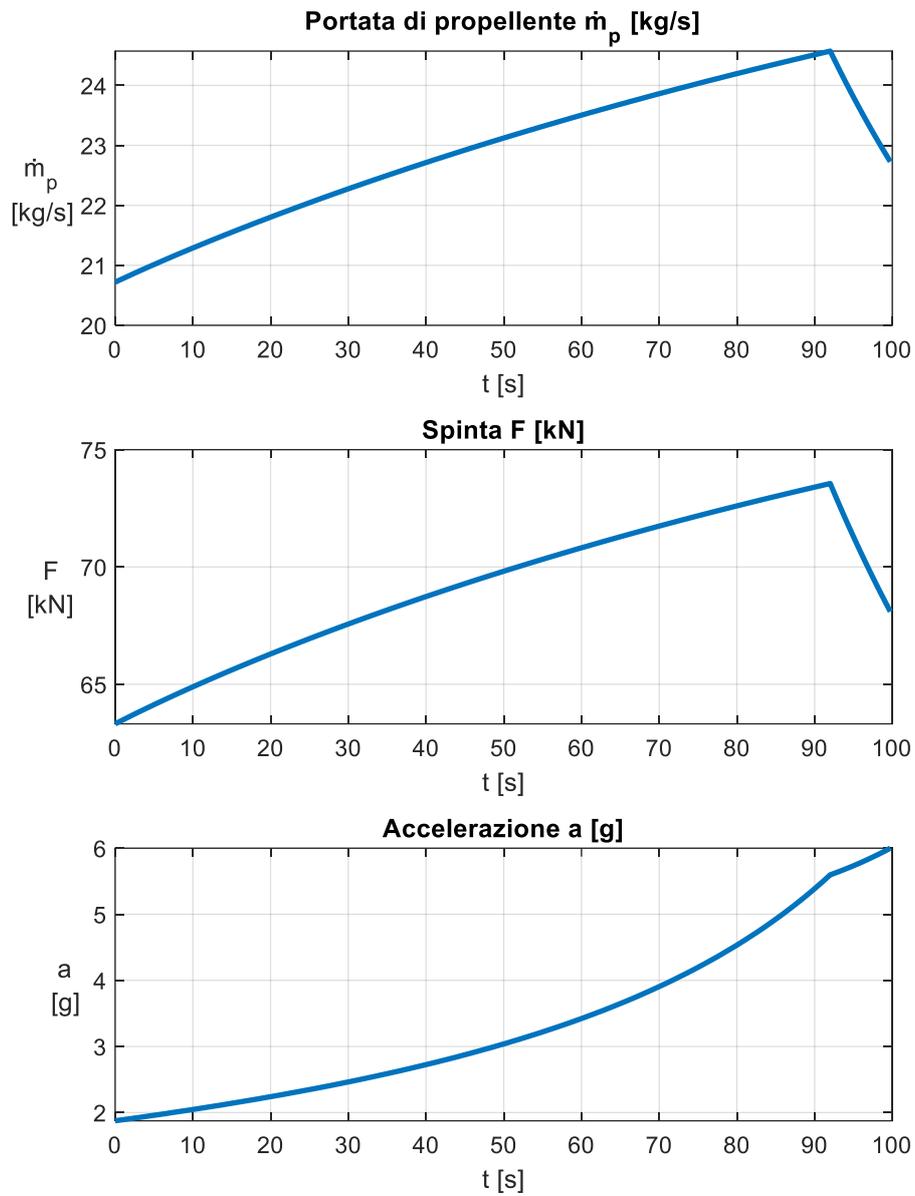


Figura 3.8: andamenti di portata di propellente, spinta e accelerazione (in ordine dall'alto) della soluzione con $\varepsilon_i = 70$ e $a_{\max} = 6$ g

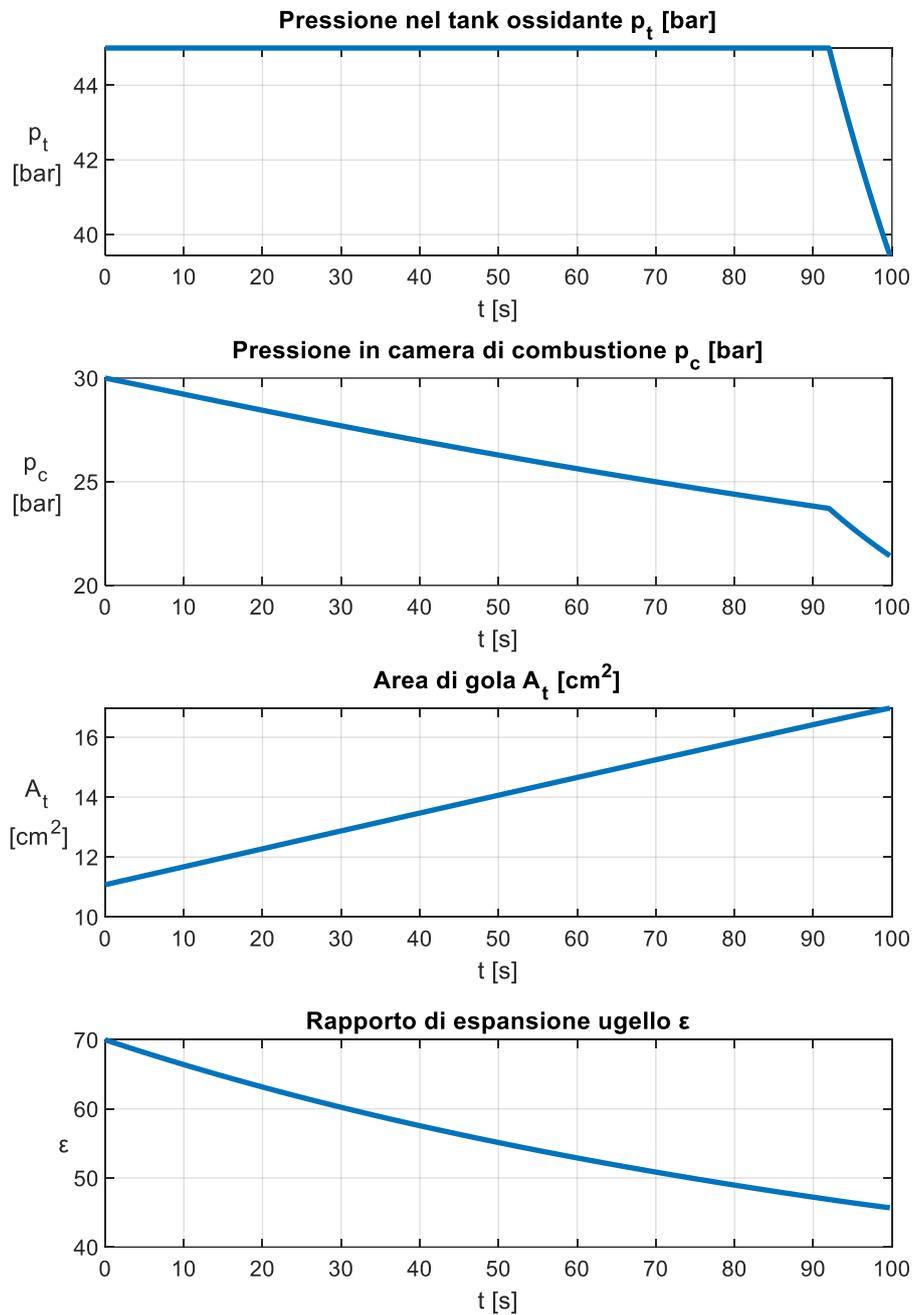


Figura 3.9: andamenti di pressione *tank* ossidante, pressione camera di combustione, area di gola e rapporto di espansione ugello (in ordine dall'alto) della soluzione con $\epsilon_i = 70$ e $a_{\max} = 6$ g

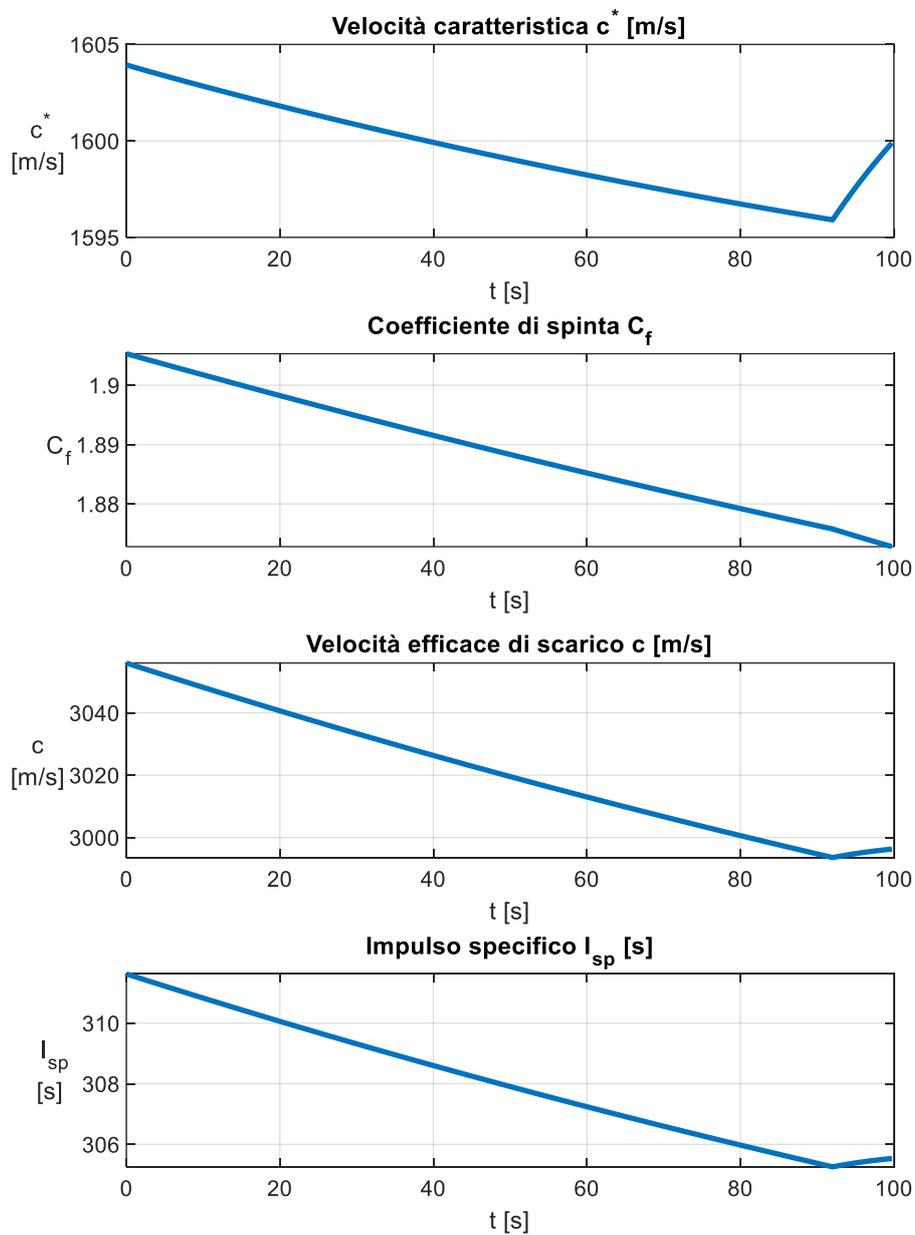


Figura 3.10: andamenti di velocità caratteristica, coefficiente di spinta, velocità efficace di scarico e impulso specifico (in ordine dall'alto) della soluzione con $\varepsilon_i=70$ e $a_{max}=6$ g

3.3.3 Ottimizzazione di tre parametri con vincolo sull'accelerazione massima pari a 6 g e vincolo sul diametro massimo della sezione d'uscita dell'ugello

La possibilità di avere un diametro massimo dello stadio pari a 1.9 m [21] ha portato a sfruttare questo valore come vincolo ed imporlo al diametro della sezione di uscita dell'ugello $D_{uscita,ugello}$. Ciò permette al rapporto di espansione iniziale dell'ugello ε_i di essere ottimizzato senza un limite massimo specifico, lasciando al vincolo il compito di determinare il suo valore ottimizzato. Il valore di 1.9 m non ha permesso la convergenza ad una soluzione. In conseguenza di ciò, sono state eseguite analisi con valori del vincolo progressivamente inferiori, decrementati di un passo costante pari a 0.1 m. La convergenza è stata raggiunta per il valore del diametro massimo della sezione di uscita pari a 1.6 m. La soluzione ottenuta presenta un payload di 321.70 kg e un ε_i pari a 189.74. Da un'analisi delle masse dei componenti dello stadio emerge un dato anomalo: la massa dell'ugello risulta essere pari a 56.02 kg, inferiore di 95.73 kg rispetto alla massa dell'ugello M_{ug} del caso con $\varepsilon_i = 70$, discusso nel sottocapitolo precedente. A parità di sezione di gola (il diametro di gola mostra una differenza di soli 2.6 mm tra i due casi), l'aumento del rapporto di espansione e della sezione di uscita dovrebbe comportare un incremento della massa dell'ugello. Quest'ultima è ottenuta con una funzione di secondo grado di quattro parametri:

- Diametro esterno del grano $D_{grano,esterno}$
- Lunghezza del grano L_{grano}
- Diametro di gola iniziale $D_{gola,i}$
- Rapporto di espansione iniziale ε_i

Significative variazioni rispetto al caso con $\varepsilon_i = 70$ si riscontrano solamante in L_{grano} e ε_i , i quali aumentano entrambi. Essendo però la massa dell'ugello crescente con L_{grano} , la causa della riduzione di M_{ug} deve essere il rapporto di espansione iniziale. Graficando l'andamento della massa dell'ugello in funzione di ε_i (Figura 3.11), si nota come la formula di interpolazione con cui viene calcolata la massa dell'ugello approssima quest'ultima in modo accettabile fino a un ε_i approssimativamente pari a 95. Fino a tale valore, la curva mostra un andamento crescente, con una pendenza positiva ancora lontana dal valore nullo. Si può affermare che le soluzioni ottenute con rapporti di espansione dell'ugello ε_i superiori a 95 non possono essere ritenute valide, a causa dell'andamento decrescente della formula di interpolazione di M_{ug} in funzione di ε_i e, quindi, della non corretta stima della massa dell'ugello.

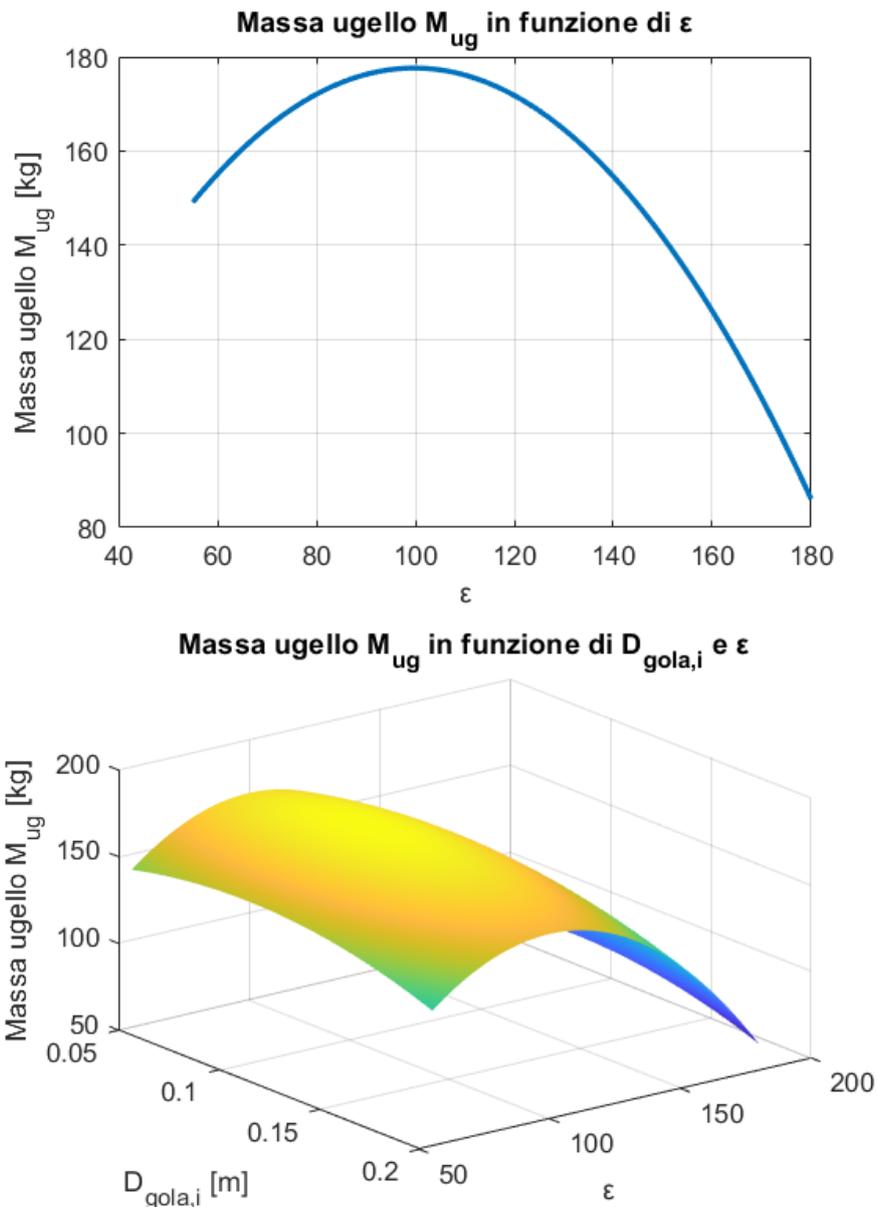


Figura 3.11: andamento della massa dell'ugello M_{ug} in funzione di ϵ_i (in alto) e M_{ug} in funzione di ϵ_i e del diametro di gola $D_{gola,i}$ (in basso)

Appurata tuttavia la tendenza del payload a crescere insieme al rapporto di espansione iniziale dell'ugello, sono state eseguite delle analisi con vincolo sul diametro di uscita decrescente, fino ad ottenere un valore per il quale ε_i ottimizzato fosse inferiore a 95, in modo tale da considerare valida la stima della massa dell'ugello, del payload e della soluzione nella sua totalità. Il valore massimo di $D_{ugello,uscita}$ che rende accettabile la soluzione è pari a 1.15 m. Le grandezze ottenute da questa ottimizzazione verranno confrontate con quelle del caso con $\varepsilon_i = 70$. I parametri di progetto ottimizzati sono riportati in Tabella 3.22. Si registra un aumento di F_i di 0.17 kN ed una diminuzione del *mixture ratio* iniziale del 1.22%. Il valore del rapporto di espansione iniziale dell'ugello cresce fino a 94.56.

Vincoli	$a_{max} = 6 g$ $D_{ug,exit} = 1.15 m$
MR_i	6.1411
$F_i [kN]$	63.49
$(A_t/A_p)_i$	0.2
amo_1	0.53
$p_{t,i} [bar]$	45
ε_i	94.56

Tabella 3.22: parametri di progetto ottimizzati con $a_{max} = 6 g$ e $D_{ug, exit} = 1.15 m$

Il payload mostra un aumento di 6.42 kg (3.6%). Un'ulteriore differenza significativa tra le masse (Tabella 3.23), oltre alla massa dell'ugello M_{ug} che aumenta di circa 11 kg, è riscontrabile nel propellente immagazzinato $M_{prop,tot}$, il quale presenta un decremento del 0.68%, corrispondente a 16.97 kg. Un maggiore rapporto di espansione dell'ugello determina un aumento delle prestazioni e dell'efficienza del motore, riducendo la portata a parità di spinta. Ne consegue minor propellente imbarcato e un guadagno sul payload.

Vincoli	$a_{max} = 6 \text{ g}$ $D_{ug,exit} = 1.15 \text{ m}$
<i>Payload</i> [kg]	185.60
<i>M_t</i> [kg]	129.95
<i>M_s</i> [kg]	38.44
<i>M_{cc}</i> [kg]	113.90
<i>M_{ug}</i> [kg]	162.93
<i>M_{prop,tot}</i> [kg]	2474.99
<i>M_{prop,consumato}</i> [kg]	2304.41
<i>M_{ox,tot}</i> [kg]	2133.27
<i>M_{grano,tot}</i> [kg]	341.72
<i>M_{gas}</i> [kg]	12.56
<i>M_{case}</i> [kg]	325
<i>M_{tot,iniziale}</i> [kg]	3443.37
<i>M_{finale}</i> [kg]	1138.96

Tabella 3.23: masse nel caso di ottimizzazione con $a_{max} = 6 \text{ g}$ e $D_{ug, exit} = 1.15 \text{ m}$

Analizzando le dimensioni geometriche riportate in Tabella 3.24, le differenze sostanziali sono relative alla lunghezza dell'ugello, che aumenta di 15.9 cm, e alla lunghezza totale del motore L_{tot} , che cresce di 16.8 cm. Il diametro della sezione di uscita dell'ugello presenta un aumento di 15.64 cm.

Vincoli	$a_{max} = 6 \text{ g}$ $D_{ug,exit} = 1.15 \text{ m}$
L_t [mm]	1841.13
L_s [mm]	1330.64
L_{grano} [mm]	1383.74
L_{cc} [mm]	2068.10
L_{ug} [mm]	1070.44
L_{case} [mm]	2200
L_{tot} [mm]	3138.54
$D_{grano,interno,iniz}$ [mm]	264.44
$D_{grano,interno,fin}$ [mm]	614.28
web thick. iniziale [mm]	187.16
web thick. consumata [mm]	174.92
$D_{grano,esterno}$ [mm]	638.77
D_{cc} [mm]	671.09
D_t [mm]	550
D_s [mm]	360
$D_{gola,iniz}$ [mm]	118.26
$D_{gola,fin}$ [mm]	146.99
$D_{uscita,ugello}$ [mm]	1150.00

Tabella 3.24: dimensione geometriche nel caso di ottimizzazione con $a_{max} = 6 \text{ g}$ e $D_{ug,exit} = 1.15 \text{ m}$

Per quanto riguarda i parametri di performance presenti in Tabella 3.25, un ε_i maggiore comporta un $C_{F,medio}$ incrementato del 1.16%. Le prestazioni del motore in termini di velocità efficace di scarico media e impulso specifico medio migliorano, con i due parametri che aumentano rispettivamente di 38.24 m/s e di 3.9 s.

Vincoli	$a_{max} = 6 g$ $D_{ug,exit} = 1.15 m$
$F_{media} [kN]$	69.54
MR_{medio}	6.48
$c_{media}^* [m/s]$	1600.47
$C_{F,medio}$	1.911
$c_{media} [m/s]$	3059.15
$I_{sp,medio} [s]$	311.95
$G_{ox,medio} [kg/(sm^2)]$	137.62
$\dot{r}_{medio} [mm/s]$	1.721
$\Delta t_{burn1} [s]$	99.82
$\Delta t_{coasting} [s]$	3448.82
$\Delta t_{burn2} [s]$	4.59
ε_{fin}	61.58
$p_{t,f} [bar]$	39.13
$T_{tank,i} [K]$	297
$T_{tank,f} [K]$	280.85
$p_{s,i} [bar]$	310
$p_{s,f} [bar]$	65

Tabella 3.25: prestazioni e durata delle fasi nel caso di ottimizzazione con $a_{max} = 6 g$ e $D_{ug,exit} = 1.15 m$

4 Conclusioni

Dai risultati riportati e commentati nel capitolo precedente, emerge con chiarezza come il guadagno in termini di payload sia strettamente correlato alla riduzione della massa di propellente necessaria per compiere la missione. Il vincolo sull'accelerazione massima, dettato dalla sopravvivenza della struttura, limita la spinta media e la velocità media dello stadio durante la trasferta orbitale, determinando un aumento delle perdite per gravità, con un inevitabile incremento del ΔV propulsivo e della quantità di propellente immagazzinato. Nonostante ciò, il processo di ottimizzazione vincolata ha permesso di ottenere un payload di 185.6 kg, ottenuto con i vincoli $a_{max} = 6 g$ e $D_{ug,exit} = 1.15 m$, che presenta un incremento del 7%, pari a 12.18 kg, rispetto al payload di 173.42 kg relativo al caso nominale (coincidente con quello del caso di ottimizzazione libera del solo MR_i).

Un aumento del carico utile, mantenendo un valore di accelerazione massima a_{max} pari a 6 g, può essere ottenuto attraverso l'incremento del rapporto di espansione dell'ugello, inserendo come vincolo un valore crescente del diametro massimo della sezione di uscita dell'ugello. Soluzioni valide, associate a rapporti di espansione più alti, possono essere ottenute mediante una correzione della formula di interpolazione per il calcolo della massa dell'ugello, al fine di definire un andamento sempre crescente in funzione di ε . Quest'ultima operazione viene proposta come primo compito per un lavoro futuro sull'ottimizzazione del terzo stadio a propellenti ibridi.

Sulla base del comportamento dei parametri di progetto $p_{t,i}$ e $(A_t/A_p)_i$, durante l'ottimizzazione libera, descritto in 3.2.1, si propone di incrementare il parametro $(A_t/A_p)_i$ e di ridurre $p_{t,i}$ al fine di ottenere un aumento del carico utile. Un maggiore rapporto tra area di gola iniziale e area di porta iniziale porterebbe ad attenuare la variazione del rapporto di miscela, limitando il peggioramento delle prestazioni del motore durante il funzionamento. Un minore valore della pressione iniziale nel *tank*, invece, determinerebbe una riduzione della massa del serbatoio di ossidante. Risulta necessario considerare variazioni limitate di tali parametri, in quanto valori elevati di $(A_t/A_p)_i$ comportano eccessive perdite di pressione in camera di combustione e rischio di regressione non uniforme del grano, mentre valori bassi di $p_{t,i}$ determinano ratei di regressione ridotti, con conseguente rischio del fenomeno di *cooking* del grano.

Infine, un miglioramento della stima delle masse, attraverso la modifica delle formule di interpolazione, può consentire un ulteriore incremento del payload, insieme ad una maggiore accuratezza della soluzione.

Bibliografia

- [1] Casalino, L., Pastrone, D., “Dispense del corso di Endoreattori avanzati e accesso allo spazio,” tenuto al Politecnico di Torino, a.a. 2022/2023.
- [2] Sutton, G. P., and Biblarz, O., “Rocket Propulsion Elements,” Wiley, Hoboken, New Jersey, 2017.
- [3] Mishra, D. P., “Fundamentals of Rocket Propulsion,” CRC Press, Boca Raton, FL, 2017.
- [4] Hill, P. G., and Peterson, C. R., “Mechanics and Thermodynamics of Propulsion,” Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, 1992.
- [5] Pastrone, D., Ferrero, A., “Dispense del corso di Endoreattori,” tenuto al Politecnico di Torino, a.a. 2021/2022.
- [6] Calabro, M., “Overview on Hybrid Propulsion,” *Progress in Propulsion Physics*, Vol. 2, EDP Sciences, 2011, pp. 353–374, <https://doi.org/10.1051/eucass/201102353>.
- [7] Okninski, A., Kopacz, W., Kaniewski, D., and Sobczak, K., “Hybrid Rocket Propulsion Technology for Space Transportation Revisited - Propellant Solutions and Challenges,” *FirePhysChem*, Vol. 1, No. 4, 2021, pp. 260–271. <https://doi.org/10.1016/j.fpc.2021.11.015>
- [8] Story, G., and Arves, J., “Flight Testing of Hybrid Powered Vehicles,” *Fundamentals of Hybrid Rocket Combustion and Propulsion*, Chiaverini M. J. and Kenneth K. K., 2006, pp. 553–592.
- [9] Karabeyoglu, A., Zilliac, G., Castellucci, P., Urbanczyk, P., Inalhan, G., and Cantwell, B., “Flight Demonstration of the High Burning Rate Hydrocarbon-Based Hybrid Rocket Fuels,” *39th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit*, July 2003, AIAA 2003-5196. <https://doi.org/10.2514/6.2003-5196>
- [10] “HyImpulse Technologies,” HyImpulse. <https://hyimpulse.de/en/>
- [11] “Gilmour Space Technologies | Launching Rockets and Satellites to Orbit from Australia,” Gilmour Space. <https://www.gspace.com>
- [12] El-Sayed, A. F., “Fundamentals of Aircraft and Rocket Propulsion,” Springer, London, 2016.
- [13] Casalino, L., Letizia, F., and Pastrone, D., “Optimization of Hybrid Upper-Stage Motor with Coupled Evolutionary/Indirect Procedure,” *Journal of Propulsion and Power*, Vol. 30, No. 5, 2014, pp. 1390–1398. <https://doi.org/10.2514/1.B35111>
- [14] Pastrone, D., “Approaches to Low Fuel Regression Rate in Hybrid Rocket Engines,” *International Journal of Aerospace Engineering*, Vol. 2012, No. 1, 2012, pp. 1–12. <https://doi.org/10.1155/2012/649753>
- [15] Karabeyoglu, M. A., Cantwell, B. J., and Altman, D., “Development and Testing of Paraffin-Based Hybrid Rocket Fuels,” *37th Joint Propulsion Conference and Exhibit*, July 2001, AIAA 2001-4503. <https://doi.org/10.2514/6.2001-4503>
- [16] Wei, S.-S., Li, M.-C., Lai, A., Chou, T.-H., and Wu, J.-S., “A Review of Recent Developments in Hybrid Rocket Propulsion and Its Applications,” *Aerospace*, Vol. 11, No. 9, 2024, p. 739. <https://doi.org/10.3390/aerospace11090739>
- [17] Casalino, L., and Pastrone, D., “Optimal Design of Hybrid Rocket Motors for Launchers Upper Stages,” *Journal of Propulsion and Power*, Vol. 26, No. 3, 2010, pp. 421–427. <https://doi.org/10.2514/1.41856>
- [18] Bryson, A. E., and Ho, Y. C., “Applied Optimal Control: Optimization, Estimation, and Control,” Taylor & Francis Group, New York, NY, 1975.

- [19] D'Ippolito, E., "Ottimizzazione Di Un Motore a Propellenti Ibridi per Un Terzo Stadio Di Un Piccolo Lanciatore," Tesi di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale. Politecnico di Torino, a.a. 2023/2024, Relatore Casalino L.
- [20] Schumb, W. C., Satterfield, C. N., and Wentworth, R. L., "Hydrogen Peroxide," Reinhold Publishing Corporation, New York, 1955.
- [21] "Vega C User's Manual," Issue 0, Revision 0, Arianespace, Evry, France, May 2018, p. 22.